ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Μοντέλα κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα, εξαρτήσεις και στρατηγικές μερίσματος

Κωνσταντίνα Χατζή

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

ΠΕΙΡΑΙΑΣ

Σεπτέμβρης 2020

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμόν …….. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Ευστάθιος Χατζηκωνσταντινίδης, Αναπληρωτής Καθηγητής (Επιβλέπων)
- Μιλτιάδης Νεκτάριος, Καθηγητής
- Πλάτων Τήνιος, Αναπληρωτής Καθηγητής

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUADE PROGRAM IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

Risk models with stochastic premiums, dependencies and dividents strategies

By

Konstantina Chatzi

MSc Dissertation

Submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master in Actuarial Science and Risk Management

Piraeus Greece

September 2020

Στην οικογένειά μου

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Φτάνοντας στο τέλος αυτής της όμορφης διαδρομής, θέλω να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Ευστάθιο Χατζηκωνσταντινίδη, Αναπληρωτή Καθηγητή στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς, για την πολύτιμη καθοδήγηση, υπομονή και συνεισφορά του στην ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας καθ’ όλη τη διάρκεια της συνεργασίας μας.

Έπειτα, ιδιαίτερα μεγάλο ευχαριστώ στους γονείς μου, Αλίκη και Βασίλειο, για τη στήριξη, την κατανόηση και την αγάπη που μου δείχνουν σε κάθε νέα αρχή και στόχο.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η διπλωματική εργασία γενικεύει το κλασικό πρότυπο της θεωρίας κινδύνων στο οποίο το συνολικό εισόδημα από ασφάλιστρα, που καταβάλλεται από τους πελάτες, ακολουθεί μια προσδιοριστική γραμμική συνάρτηση του χρόνου με σταθερό θετικό ρυθμό είσπραξης ασφαλίστρου. Μια πιο ρεαλιστική θεώρηση η οποία λαμβάνει υπ' όψιν την αβεβαιότητα στις αφίξεις των πελατών είναι αυτή των στοχαστικών ασφαλίστρων. Στην εργασία μελετώνται διάφορα μοντέλα της διαδικασίας πλεονάσματος με τα μεγέθη των ατομικών ασφαλίστρων να είναι τυχαία, καθώς επίσης και κάποιες μορφές εξάρτησης μεταξύ του ύψους ατομικής απαίτησης, του ύψους ατομικών ασφαλίστρων και των ενδιάμεσων χρόνων εμφάνισης των κινδύνων και είσπραξης των ασφαλίστρων. Αναλύονται διάφορα μέτρα κινδύνου, όπως για παράδειγμα η πιθανότητα χρεοκοπίας ή ο χρόνος μέχρι τη χρεοκοπία, μέσω της ανάλυσης της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής των Gerber-Shiu. Για ορισμένα από τα υπό θεώρηση μοντέλα μελετάται επιπλέον και η κατανομή των μερισμάτων θεωρώντας για τις αντίστοιχες στοχαστικές διαδικασίες πλεονάσματος διάφορες στρατηγικές καταβολής μερίσματος.

Το Κεφάλαιο 1 αποτελεί ένα εισαγωγικό μέρος στο οποίο δίνονται βασικές έννοιες από τη θεωρία χρεοκοπίας, μια σύντομη περιγραφή του κλασικού μοντέλου της θεωρίας κινδύνων, η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu και γίνεται αναφορά στη επίλυση της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης που ικανοποιεί αυτή η συνάρτηση.

Στο Κεφάλαιο 2 εξετάζονται δύο μοντέλα κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα χωρίς εξαρτήσεις. Στο πρώτο μοντέλο το ύψος των ασφαλίστρων είναι ίσο με τον αριθμό των ασφαλισμένων ατόμων που περιγράφεται από μια διαδικασία Poisson, ενώ στο δεύτερο μοντέλο οι διαδικασίες εμφάνισης των κινδύνων και των ασφαλίστρων ακολουθούν σύνθετες διαδικασίες Poisson.

Το Κεφάλαιο 3 θεωρεί δύο μοντέλα κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα και εξαρτήσεις. Αρχικά εξετάζεται η περίπτωση όπου το μέγεθος μιας απαίτησης επηρεάζει τις κατανομές του χρόνου εμφάνισης της επόμενης απαίτησης και του μεγέθους του ατομικού ασφαλίστρου και στη συνέχεια εξετάζεται το μοντέλο στο οποίο ο ενδιάμεσος χρόνος μεταξύ διαδοχικών απαιτήσεων προσδιορίζει τις κατανομές για τα μεγέθη της επόμενης απαίτησης και του ατομικού ασφαλίστρου.

Στο Κεφάλαιο 4 μελετώνται δύο μοντέλα με στοχαστικά ασφάλιστρα, εξαρτήσεις καθώς και στρατηγικές μερισμάτων. Στο μεν πρώτο, κάτω από τη στρατηγική σταθερού μερίσματος, υπάρχει εξάρτηση ανάμεσα στα μεγέθη των απαιτήσεων και τους χρόνους εμφάνισης αυτών και στο δεύτερο, υπό τη στρατηγική μερίσματος κατωφλίου, εξετάζονται εξαρτήσεις ανάμεσα στις απαιτήσεις και στους χρόνους εμφάνισης αυτών και συνάμα εξαρτήσεις ανάμεσα στα μεγέθη των ασφαλίστρων και τους χρόνους που αυτά εμφανίζονται.

Στο Παράρτημα δίνονται τα σχετικά μαθηματικά εργαλεία (μετασχηματισμός Laplace, τελεστής Dickson-Hipp κ.ά.) που χρησιμοποιούνται στην εργασία.

Το πρόγραμμα Mathematica χρησιμοποιήθηκε για την εκτέλεση συμβολικού λογισμού, αριθμητικών πράξεων και δημιουργία γραφημάτων.

ABSTRACT

This thesis generalizes the classical risk model in which the total premium income paid by customers follows a linear function of time with a constant positive premium rate. A more realistic model taking into account the uncertainty of customer arrivals is the one with stochastic premiums. The current work studies various models for the surplus process with the amounts of individual premiums being random, as well as some dependence structures between individual claim size amounts, individual premium size amounts, inter-claim times and inter-premium times. Various risk measures are considered, such as the ruin probability or the ruin time, through the analysis of the expected discounted penalty function, also known as Gerber-Shiu function. For some of the models under consideration, the distribution of dividend payments to shareholders is additionally studied, considering for the respective stochastic surplus process of the portfolio various dividend payment strategies.

Chapter 1 is an introductory section which gives basic concepts from ruin theory, a brief description of the classical compound Poisson model, known as the Cramér-Lundberg model, the expected discounted penalty function, and gives the solution of the defective renewal equation for the Gerber-Shiu function.

In Chapter 2 two risk models with stochastic premiums without dependencies are examined. In the first model the aggregate premium amount is equal to the number of insured persons which is described by a Poisson process, while in the second model premiums and claims occur in the time according to compound Poisson processes.

Chapter 3 considers two risk models with stochastic premiums and dependencies. The case in which the size of a claim controls the distributions of the time until the arrival of the next claim and individual premium sizes is first examined, while in the second case under consideration the time between successive claims determines the distributions of the next claim size and individual premium size.

Chapter 4 examines two models with stochastic premiums, dependencies and dividend strategies. Namely, in the first model, under a constant dividend barrier, there is dependence between the claim sizes and their interarrival times, while in the second model, under a threshold dividend strategy, dependencies between premiums and inter-premium times as well as dependencies between claim sizes and their inter-claim times are considered.

The Appendix provides the relevant mathematical tools (Laplace transform, Dickson-Hipp operator, etc.) used in this study.

Mathematica was used to perform symbolic calculations, arithmetic operations, and graphs.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Η διαδικασία πλεονάσματος στο κλασικό μοντέλο κινδύνου

Η εύρεση της πιθανότητας χρεοκοπίας, δηλαδή της πιθανότητας μη επάρκειας των αποθεματικών για την κάλυψη των συνολικών αποζημιώσεων έναντι των ασφαλισμένων, αποτελεί ένα από τα βασικότερα προβλήματα της κλασικής θεωρίας κινδύνου. Τα θεμέλια της ανάπτυξης της μαθηματικής θεωρίας κινδύνου έθεσε ο Σουηδός μαθηματικός Filip Lundberg το 1903 μετά τη δημοσίευση της διδακτορικής διατριβής του με τίτλο "Approximerad fremställning au sannolikheets funktionen". Αργότερα, το 1930, ο Harald Cramér βασιζόμενος στη διδακτορική διατριβή του Lundberg, δημοσίευσε μία σειρά από εργασίες που αναφέρονταν στη θεωρία κινδύνου και στις οποίες ενσωμάτωσε τη θεωρία των στοχαστικών διαδικασιών ή στοχαστικών ανελίξεων. Έτσι, δημιουργήθηκε το μοντέλο που περιγράφει τη δυναμική εξέλιξη του πλεονάσματος στο χρόνο και ονομάσθηκε κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου ή μοντέλο των Cramér –Lundberg. Αυτό το μοντέλο αποτέλεσε τη βάση για την ανάπτυξη της κλασικής θεωρίας κινδύνου. Βασική παραδοχή αυτού του μοντέλου αποτελεί ότι το πλήθος των κινδύνων του ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου προσδιορίζεται σύμφωνα με τη στοχαστική διαδικασία Poisson. Με άλλα λόγια, το κύριο χαρακτηριστικό του κλασικού μοντέλου της θεωρίας κινδύνου είναι ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των κινδύνων του ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την εκθετική κατανομή.

Η γενίκευση του κλασικού μοντέλου της θεωρίας κινδύνου για το πλεόνασμα ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου ή και ολόκληρης της ασφαλιστικής επιχείρησης έγινε το 1957 όταν ο Νορβηγός Sparre Andersen παρουσίαζε στο 15^{o} Αναλογιστικό Συνέδριο στη Νέα Υόρκη, την εργασία με τίτλο "On the collective theory of risk in case of contagion between the claims". Σε αυτήν την εργασία ο Sparre Andersen υπέθεσε ότι ο αριθμός των κινδύνων σε ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο περιγράφεται από μία ανανεωτική στοχαστική διαδικασία.

Δηλαδή, το κύριο χαρακτηριστικό του μοντέλου Sparre Andersen είναι ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των κινδύνων του ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές (που δεν ακολουθούν κατ’ ανάγκη την εκθετική κατανομή). Έτσι, είναι προφανές ότι αυτό το μοντέλο αποτελεί μία γενίκευση του κλασσικού μοντέλου και ονομάσθηκε μοντέλο Sparre Andersen ή ανανεωτικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου.

Το πιο σημαντικό βήμα για τη μοντελοποίηση της στοχαστικής διαδικασίας πλεονάσματος μιας ασφαλιστικής επιχείρησης αποτελεί ο προσδιορισμός του πλήθους των κινδύνων που εμφανίζονται. Έστω $\{N(t), t \geq 0\}$ μια στοχαστική διαδικασία η οποία παριστάνει τον αριθμό των κινδύνων που εμφανίστηκαν στο χρονικό διάστημα $[0,t]$. Η $\{N(t), t \geq 0\}$ ονομάζεται απαριθμήτρια και ορίζεται ως ακολούθως.

Ορισμός 1.1

Μια στοχαστική διαδικασία $\{N(t), t \geq 0\}$ *ονομάζεται απαριθμήτρια διαδικασία αν και μόνο αν*

i. $N(t) > 0$, *με* $N(0) = 0$,

ii. $N(t)$ *είναι διακριτή,*

iii. αν $s \leq t$ *τότε* $N(s) \leq N(t)$.

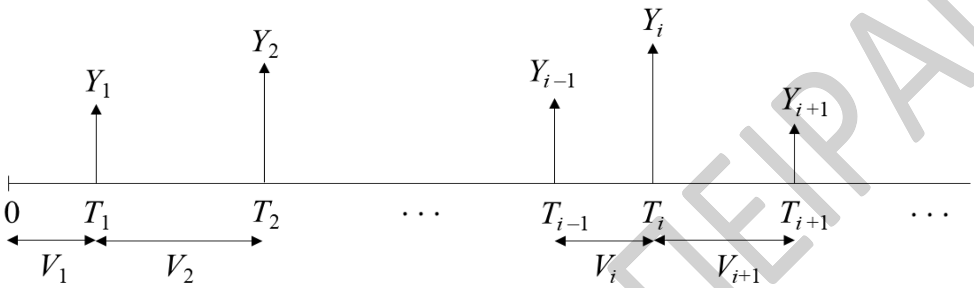
Μία από τις πλέον ευρέως χρησιμοποιούμενες απαριθμήτριες στοχαστικές διαδικασίες, τόσο στη θεωρία κινδύνου όσο και σε άλλα ερευνητικά πεδία της θεωρίας πιθανοτήτων (π.χ. θεωρία ουρών), είναι οι ανανεωτικές στοχαστικές διαδικασίες. Ένας τρόπος ορισμού τους, βασίζεται στους ενδιάμεσους χρόνους των ενδεχομένων (κινδύνων) που απαριθμεί η απαριθμήτρια στοχαστική διαδικασία $\{N(t), t \geq 0\}$.

Έστω $\{T_i, i = 0,1,2...\}$ μία ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με $T_0 = 0$, όπου T_i, $i \geq 1$, συμβολίζει τη χρονική στιγμή εμφάνισης του i-οστού ενδεχομένου (κινδύνου). Έστω, τώρα οι τυχαίες μεταβλητές $V_i = T_i - T_{i-1}$, $i \geq 1$. Τότε η V_1 εκφράζει το χρόνο που απαιτείται για την εμφάνιση του πρώτου ενδεχομένου και η V_i, $i \geq 2$, εκφράζει το χρόνο από την εμφάνιση του $i-1$ ενδεχομένου μέχρι και την εμφάνιση του i ενδεχομένου, δηλαδή, $\{V_i, i = 1,2,...\}$ είναι μία ακολουθία μη-αρνητικών και ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών και αναφέρεται στους ενδιάμεσους χρόνους εμφάνισης των ενδεχομένων. Αν $V_0 = 0$, τότε $T_n = V_1 + V_2 + ... + V_n$, $n \geq 0$ και η ακολουθία των τυχαίων μεταβλητών $\{T_n, n = 0,1,...\}$ ονομάζεται ακολουθία ανανεώσεων. Έστω, $\{Y_i, i = 1,2,...\}$ μία ακολουθία μη-αρνητικών τυχαίων μεταβλητών όπου η Y_i συμβολίζει το μέγεθος της ζημιάς από την εμφάνιση του i-οστού κινδύνου. Τότε, η ανανεωτική στοχαστική διαδικασία $\{N(t), t \geq 0\}$ ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 1.2

Έστω $\{V_i,\ i=1,2,...\}$ *μία ακολουθία μη-αρνητικών ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών, και* $\{T_i, i=1,2...\}$ *μία ακολουθία ανανεώσεων με* $T_i = V_1 + V_2 + ... + V_i,\ i \geq 1$ *και* $T_0 = V_0 = 0$. *Τότε, η απαριθμήτρια διαδικασία* $\{N(t), t \geq 0\}$ *με* $N(0)=0$, *που ορίζεται από τη σχέση* $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} I\left(T_n \leq t\right)$ *ονομάζεται ανανεωτική στοχαστική διαδικασία και παριστάνει τον αριθμό των ανανεώσεων στο* $[0,t]$.

Σχηματικά έχουμε,



Σχήμα 1.1: Χρόνοι άφιξης απαιτήσεων, μεγέθη απαιτήσεων, ενδιάμεσοι χρόνοι αφίξεων

Από τον Ορισμό 1.2 είναι προφανές ότι για κάθε ανανεωτική στοχαστική διαδικασία $\{N(t),\ t \geq 0\}$ ισχύει ότι:

$$\{N(t)=n\} \text{ αν και μόνο αν } \{T_n \leq t < T_{n+1}\}.$$

Επίσης, είναι φανερό ότι $N(t) = \max\{n : T_n \leq t\}$ και $P[N(t) \geq n] = P(T_n \leq t)$. Μία σημαντική ιδιότητα των ανανεωτικών στοχαστικών διαδικασιών αποτελεί και η παρακάτω γνωστή πρόταση.

Πρόταση 1.1

Έστω $\{N(t), t \geq 0\}$ *μία ανανεωτική στοχαστική διαδικασία. Τότε:*

i. *με πιθανότητα* 1 *ισχύει ότι:*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{E(W_1)}.$$

ii. $$\lim_{t\to\infty} \frac{E[N(t)]}{t} = \frac{1}{E(W_1)}.$$

Το αποτέλεσμα (*ii*) στο παραπάνω θεώρημα είναι γνωστό ως το στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα (elementary renewal theorem) και η απόδειξη του ενδεικτικά μπορεί να βρεθεί στους Rolski et al. (1996, σελ. 211).

Από τον Ορισμό 1.2 έπεται ότι η στοχαστική διαδικασία Poisson αποτελεί μία ειδική περίπτωση μίας ανανεωτικής στοχαστικής διαδικασίας, αν θεωρήσουμε ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των ενδεχομένων (κινδύνων) $\{V_i, i=1,2,\ldots\}$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την εκθετική κατανομή.

Αφού έχουμε μοντελοποιήσει τον αριθμό των κινδύνων, στη συνέχεια για τον καθορισμό του πλεονάσματος, θα πρέπει να μοντελοποιήσουμε τις συνολικές απαιτήσεις (ζημιές, αποζημιώσεις) του χαρτοφυλακίου. Έστω $S(t)$, $t \geq 0$, παριστάνει τις συνολικές απαιτήσεις του χαρτοφυλακίου στο χρονικό διάστημα $[0,t]$.

Ορισμός 1.3

Έστω $N(t)$, $t \geq 0$, ο αριθμός των κινδύνων στο $[0,t]$, και Y_i, $i \geq 1$ το μέγεθος της i-οστής ζημιάς. Τότε, οι συνολικές απαιτήσεις στο $[0,t]$ παριστάνονται από τη σύνθετη στοχαστική διαδικασία $\{S(t), t \geq 0\}$, όπου

$$S(t) = \begin{cases} 0, & \text{αν } N(t) = 0 \\ \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, & \text{αν } N(t) \geq 1. \end{cases}.$$

Στην κλασική θεωρία κινδύνου οι τυχαίες μεταβλητές Y_i, $i \geq 1$, θεωρούνται ανεξάρτητες και ισόνομες, καθώς επίσης ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές θεωρούνται οι Y_i, και η ανανεωτική στοχαστική διαδικασία $N(t)$, $t \geq 0$, που παριστάνει τον αριθμό των κινδύνων μέχρι τη χρονική στιγμή *t*.

Έστω $P(t)$ μία συνάρτηση που εκφράζει τα συνολικά έσοδα της ασφαλιστικής επιχείρησης από την είσπραξη των ασφαλίστρων στο χρονικό διάστημα $[0,t]$. Η $P(t)$ είναι μία αύξουσα συνάρτηση του χρόνου *t*. Στην κλασική θεωρία κινδύνου θεωρούμε σταθερό ρυθμό είσπραξης ασφαλίστρων, οπότε η $P(t)$ είναι μία γραμμική συνάρτηση της μορφής $P(t) = ct$, όπου $c > 0$ είναι ο σταθερός ρυθμός είσπραξης ασφαλίστρου ανά μονάδα χρόνου (ένταση ασφαλίστρου).

Έστω τώρα $U(t)$, $t \geq 0$, παριστάνει το πλεόνασμα της ασφαλιστικής επιχείρησης μέχρι τη χρονική στιγμή *t* που ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 1.4

Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος $\{U(t), t \geq 0\}$ ορίζεται ως

$$U(t) = u + P(t) - S(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i,$$

όπου $U(0)=u\geq 0$ *είναι το αρχικό απόθεμα,* $c\geq 0$ *ο ρυθμός είσπραξης ασφαλίστρου ανά μονάδα χρόνου,* $S(t)$ *οι συνολικές αποζημιώσεις στο χρονικό διάστημα* $[0,t]$ *όπως δίνονται στον Ορισμό* 1.3.

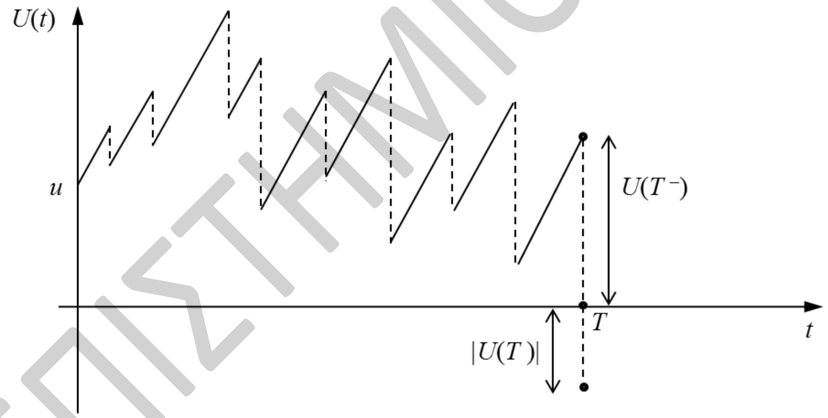
Από τον Ορισμό 1.4 είναι προφανές ότι η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος $\{U(t), t\geq 0\}$, μπορεί να πάρει και αρνητικές τιμές κατά τις χρονικές στιγμές T_i εμφάνισης των κινδύνων. Όταν η διαδικασία πλεονάσματος γίνεται για πρώτη φορά αρνητική, τότε έχουμε χρεοκοπία και προκειμένου να ορίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας, θα δώσουμε αρχικά τον ορισμό του χρόνου χρεοκοπίας.

Ορισμός 1.5

Η χρονική στιγμή T κατά την οποία για πρώτη φορά η διαδικασία πλεονάσματος γίνεται αρνητική, καλείται χρόνος χρεοκοπίας και ορίζεται από τη σχέση

$$T=\begin{cases}\inf\{t\geq 0:\ U(t)<0\}\\ \infty, \qquad \text{αν } U(t)\geq 0, \forall t\geq 0.\end{cases}$$

Η διαδικασία πλεονάσματος μπορεί να παρασταθεί και με το επόμενο σχήμα.



Σχήμα 1.2 Ο χρόνος χρεοκοπίας, το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας

όπου T είναι χρόνος τη στιγμή της χρεοκοπίας, η τυχαία μεταβλητή $U(T^-)$ δηλώνει το μέγεθος του πλεονάσματος αμέσως πριν πληρωθεί από την ασφαλιστική εταιρεία η αποζημίωση η οποία προκαλεί χρεοκοπία, $U(T)$ είναι το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το μηδέν. Η ποσότητα $U(T^-)$ παίρνει θετικές τιμές, ενώ η ποσότητα $U(T)$ αρνητικές τιμές, οπότε ορίζεται η τυχαία μεταβλητή $|U(T)|$ που δηλώνει τη σφοδρότητα ή δριμύτητα της χρεοκοπίας δηλαδή το μέγεθος του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας.

Με βάση τον παραπάνω ορισμό, η πιθανότητα χρεοκοπίας ορίζεται ως εξής.

Ορισμός 1.6

Για αρχικό απόθεμα $u \geq 0$ *η πιθανότητα χρεοκοπίας ορίζεται από τη σχέση*

$$\psi(u) = P(T < \infty \mid U(0) = u).$$

Η πιθανότητα να μην εμφανίζεται χρεοκοπία, ονομάζεται πιθανότητα μη-χρεοκοπίας ή πιθανότητα επιβίωσης, συμβολίζεται με $\phi(u)$ *και δίνεται από τη σχέση*

$$\phi(u) = 1 - \psi(u).$$

1.2 Η συνάρτηση των Gerber-Shiu

Ο χρόνος χρεοκοπίας *T*, το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία $U(T^-)$ και η σφοδρότητα της χρεοκοπίας $|U(T)|$ δίνουν πλήρη εικόνα των οικονομικών συνθηκών κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας. Οι Gerber and Shiu, (1998), μοντελοποίησαν τις τρεις αυτές τυχαίες μεταβλητές σε μία συνάρτηση, την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής (expected discounted penalty function) ή συνάρτηση των Gerber – Shiu, η οποία ορίζεται ως εξής.

Ορισμός 1.7

Για $u \geq 0$, $\delta \geq 0$, *ορίζουμε την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής*

$$m_\delta(u) := E[e^{-\delta T}\omega(U(T^-), |U(T)|) I(T < \infty \mid U(0) = u)], \tag{1.1}$$

όπου δ είναι η ένταση ανατοκισμού ή η παράμετρος s του μετασχηματισμού Laplace, $\omega(x_1, x_2)$ *είναι μια μη-αρνητική συνάρτηση, που καλείται συνάρτηση ποινής (penalty function), με* $0 \leq \omega(x_1, x_2) < \infty$, $0 \leq x_1, x_2 < \infty$, *T είναι ο χρόνος τη στιγμή της χρεοκοπίας όταν το αρχικό κεφάλαιο είναι u,* $U(T^-)$ *είναι το πλεόνασμα πριν τη στιγμή της χρεοκοπίας,* $|U(T)|$ *είναι η σφοδρότητα (δριμύτητα) χρεοκοπίας που ισούται με το έλλειμμα στο ταμείο κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας και* $I(\cdot)$ *είναι δείκτρια συνάρτηση η οποία τονίζει ότι η ποινή ασκείται εάν και εφόσον τελικά συμβεί χρεοκοπία όταν το αρχικό κεφάλαιο είναι μεγέθους u. Η ποσότητα* $e^{-\delta T}$ *μπορεί να ερμηνευθεί ως παράγοντας προεξόφλησης (discount factor).*

Συμβολίζοντας με $f(x_1, x_2, t \mid u)$ την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία, $U(T^-)$, του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, $|U(T)|$, και του χρόνου χρεοκοπίας *T*, η συνάρτηση Gerber-Shiu γράφεται ως

$$m_\delta(u) = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\delta t}\omega(x_1, x_2) f(x_1, x_2, t \mid u) dx_1 dx_2 dt.$$

Επίσης παρατηρούμε ότι

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty f(x_1,x_2,t\,|\,u)dx_1dx_2dt = P(T<\infty\,|\,U(0)=u)=\psi(u)<1,$$

δηλαδή η $f(x_1,x_2,t\,|\,u)$ είναι ελλειμματική (defective).

Η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής μπορεί να ερμηνευτεί ως η προεξοφλημένη ποινή που επιβάλλεται όταν συμβεί η χρεοκοπία. Η συνάρτηση Gerber-Shiu βρίσκει εφαρμογές πέρα από το Αναλογιστικό πεδίο, όπως για παράδειγμα στη θεωρία των Χρηματοοικονομικών μαθηματικών (Gerber and Shiu, (1998)). Από τον ορισμό της $m_\delta(u)$ και για συγκεκριμένες μορφές της συνάρτησης ποινής $\omega(x_1,x_2)$ προκύπτουν διάφορα μέτρα κινδύνου. Ενδεικτικά αναφέρονται τα παρακάτω:

i. Για $\omega(x_1,x_2)=1$ και $\delta>0$, προκύπτει ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας όταν εμφανίζεται χρεοκοπία,
$$m_\delta(u)=E[e^{-\delta T}\,I(T<\infty\,|\,U(0)=u)].$$

ii. Για $\omega(x_1,x_2)=1$ και $\delta=0$, προκύπτει η πιθανότητα χρεοκοπίας,
$$m_0(u)=E[\mathrm{I}(T<\infty\,|\,U(0)=u)]=P(T<\infty\,|\,U(0)=u)=\psi(u).$$

iii. Για $\omega(x_1,x_2)=I(x_1\le y_1)I(x_2\le y_2)$ και $\delta>0$, προκύπτει η από κοινού προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής των $U(T^-)$ και $|U(T)|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας,
$$m_\delta(u)=E[e^{-\delta T}I(U(T^-)\le y_1)I(|U(T)|\le y_2)I(T<\infty\,|\,U(0)=u)]=F_\delta(y_1,y_2\,|\,u).$$

iv. Για $\omega(x_1,x_2)=I(x_1\le y_1)I(x_2\le y_2)$ και $\delta=0$, προκύπτει η από κοινού συνάρτηση κατανομής των $U(T^-)$ και $|U(T)|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας,
$$m_0(u)=E[I(U(T^-)\le y_1)I(|U(T)|\le y_2)I(T<\infty\,|\,U(0)=u)]$$
$$=P(U(T^-)\le y_1,|U(T)|\le y_2,T<\infty\,|\,U(0)=u)=F_0(y_1,y_2\,|\,u).$$

Η $F_0(y_1,y_2\,|\,u)$ εκφράζει την πιθανότητα να επέλθει χρεοκοπία, με αρχικό κεφάλαιο u και το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία να είναι το πολύ y_1, ενώ το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας να είναι το πολύ y_2.

v. Για $\omega(x_1,x_2)=I(x_1=y_1)I(x_2=y_2)$ και $\delta>0$, προκύπτει η από κοινού προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των $U(T^-)$ και $|U(T)|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας,
$$m_\delta(u)=E[e^{-\delta T}I(U(T^-)=y_1)I(|U(T)|=y_2)I(T<\infty\,|\,U(0)=u)]=f_\delta(y_1,y_2\,|\,u).$$

vi. Για $\omega(x_1,x_2)=I(x_1=y_1)I(x_2=y_2)$ και $\delta=0$, προκύπτει η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των $U(T^-)$ και $|U(T)|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας,
$$m_0(u)=E[I(U(T^-)=y_1)I(|U(T)|=y_2)I(T<\infty\,|\,U(0)=u)]=f_0(y_1,y_2\,|\,u).$$

vii. Για $\omega(x_1, x_2) = I(x_1 \le y_1)$ και $\delta > 0$, προκύπτει η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής της $U(T^-)$ αμέσως πριν τη στιγμή της χρεοκοπίας,

$$m_\delta(x) = E[e^{-\delta T} I(U(T^-) \le y_1) I(T < \infty | U(0) = u)] = F_\delta(y_1 | u).$$

viii. Για $\omega(x_1, x_2) = I(x_1 \le y_1)$ και $\delta = 0$, προκύπτει η περιθώρια συνάρτηση κατανομής της $U(T^-)$ αμέσως πριν τη στιγμή της χρεοκοπίας,

$$m_0(u) = E[I(U(T^-) \le y_1) I(T < \infty | U(0) = u)]$$
$$= P(U(T^-) \le y_1, T < \infty | U(0) = u) = F_0(y_1 | u).$$

Η $F_0(y_1 | u)$ εκφράζει την πιθανότητα να επέλθει χρεοκοπία, με αρχικό κεφάλαιο u και το μέγεθος του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία να είναι το πολύ y_1.

ix. Για $\omega(x_1, x_2) = I(x_1 = y_1)$ και $\delta > 0$, προκύπτει η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας της $U(T^-)$ τη στιγμή της χρεοκοπίας,

$$m_\delta(u) = E[e^{-\delta T} I(U(T^-) = y_1) I(T < \infty | U(0) = u)] = f_\delta(y_1 | u).$$

x. Για $\omega(x_1, x_2) = I(x_1 = y_1)$ και $\delta = 0$, προκύπτει η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας της $U(T^-)$ τη στιγμή της χρεοκοπίας,

$$m_0(u) = E[I(U(T^-) = y_1) I(T < \infty | U(0) = u)] = f_0(y_1 | u).$$

xi. Για $\omega(x_1, x_2) = I(x_2 \le y_2)$ και $\delta > 0$, προκύπτει η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής της $|U(T)|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας,

$$m_\delta(u) = E[e^{-\delta T} I(|U(T)| \le y_2) I(T < \infty | U(0) = u)] = F_\delta(y_2 | u).$$

xii. Για $\omega(x_1, x_2) = I(x_2 \le y_2)$ και $\delta = 0$, προκύπτει η περιθώρια συνάρτηση κατανομής της $|U(T)|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας,

$$m_0(u) = E[I(|U(T)| \le y_2) I(T < \infty | U(0) = u)]$$
$$= P(|U(T)| \le y_2, T < \infty | U(0) = u) = F_0(y_2 | u).$$

Η $F_0(y_2 | u)$ εκφράζει την πιθανότητα να επέλθει χρεοκοπία, με αρχικό κεφάλαιο u και το ύψος ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας να είναι το πολύ y_2.

xiii. Για $\omega(x_1, x_2) = I(x_2 = y_2)$ και $\delta > 0$, προκύπτει η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας της $|U(T)|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας,

$$m_\delta(u) = E[e^{-\delta T} I(|U(T)| = y_2) I(T < \infty | U(0) = u)] = f_\delta(y_2 | u).$$

xiv. Για $\omega(x_1, x_2) = I(x_2 = y_2)$ και $\delta = 0$, προκύπτει η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας της $|U(T)|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας,

$$m_0(u) = E[I(|U(T)| = y_2) I(T < \infty | U(0) = u)] = f_0(y_2 | u).$$

xv. Για $\omega(x_1, x_2) = e^{-s_1 x_1 - s_2 x_2}$ και $\delta = 0$, προκύπτει ο μετασχηματισμός Laplace του ζεύγους $(U(T^-), |U(T)|)$, δηλαδή

$$m_0(u) = E[e^{-s_1 U(T^-) - s_2|U(T)|} I(T < \infty \mid U(0) = u)].$$

i. Για $\omega(x_1, x_2) = x_1^k$ ή $\omega(x_1, x_2) = x_2^k$ και $\delta = 0$, προκύπτει η ροπή k-τάξης του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία ή του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία αντίστοιχα, δηλαδή

$$m_0(u) = E[U(T^-)^k I(T < \infty \mid U(0) = u)]$$

ή

$$m_0(u) = E[|U(T)|^k \; I(T < \infty \mid U(0) = u)]$$

αντίστοιχα.

1.3 Ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

Ορισμός 1.8

Μια εξίσωση που έχει τη μορφή

$$m(u) = \kappa \int_0^u m(u-y) dZ(y) + \vartheta(u), \qquad u \geq 0 \tag{1.2}$$

ονομάζεται *ανανεωτική εξίσωση* ή *εξίσωση ανανεωτικού τύπου*, όπου $m(\cdot)$ είναι η άγνωστη συνάρτηση, κ είναι μια σταθερά με $0 < \kappa \leq 1$, $\vartheta(\cdot)$ είναι μια φραγμένη συνάρτηση, $Z(\cdot)$ είναι μια αθροιστική συνάρτηση κατανομής με $Z(u) = \int_{-\infty}^{u} \zeta(y) dy$ για μια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $\zeta(\cdot)$. Οι ανανεωτικές εξισώσεις διακρίνονται σε *ελλειμματικές* (defective) όταν $0 < \kappa < 1$, και *κανονικές* (proper) ή *μη-ελλειμματικές* (no defective) όταν $\kappa = 1$.

Η συνάρτηση Gerber-Shiu $m(\cdot)$ που μελετάται στη Θεωρία Κινδύνου εμφανίζεται συχνά να ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση της μορφής (1), δηλαδή με $0 < \kappa < 1$, όπου $Z(0) = 0$ και $\vartheta(u)$ συνεχής συνάρτηση για $u \geq 0$. Αναλυτικές λύσεις της ελλειμματικής αυτής εξίσωσης μπορούν να βρεθούν με απευθείας εφαρμογή του Θεωρήματος 2.1 των Lin & Willmot, (1999), το οποίο δίνεται χωρίς απόδειξη στην Πρόταση 1.2 μέσω της δεξιάς ουράς μιας κατάλληλης σύνθετης γεωμετρικής κατανομής που ορίζεται στη συνέχεια.

Ορίζουμε μια σύνθετη γεωμετρική κατανομή με συνάρτηση κατανομής

$$K(u) = 1 - \bar{K}(u)$$

όπου

$$\bar{K}(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi}{1+\xi} \left(\frac{1}{1+\xi} \right)^n \bar{Z}^{*n}(u), \qquad u \geq 0 \tag{1.3}$$

με $\xi = \dfrac{1-\kappa}{\kappa} > 0$, και $\overline{Z^{*n}}(u)$ η δεξιά ουρά της *n*-οστής συνέλιξης της $Z(u) = 1 - \bar{Z}(u) = \int_0^u \zeta(y)dy$.

Πρόταση 1.2

Η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής $m(u)$ *που ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση όπως περιγράφηκε παραπάνω, μπορεί να εκφραστεί ως*

$$m(u) = \frac{1}{\xi}\int_0^u H(u-y)dK(y) + \vartheta(u), \tag{1.4}$$

ή

$$m(u) = -\frac{1}{\xi}\int_0^u \bar{K}(u-y)dH(y) - \frac{H(0)}{\xi}\bar{K}(u) + \frac{1}{\xi}H(u), \tag{1.5}$$

όπου $H(u) = \dfrac{\vartheta(u)}{\kappa}$.

Η (1.5) *εναλλακτικά δίνεται και ως*

$$m(u) = \frac{1}{\xi}\int_0^u [1-\bar{K}(u-y)]dH(y) + \frac{H(0)}{\xi}[1-\bar{K}(u)], \tag{1.6}$$

Εάν η $H(u)$ *είναι παραγωγίσιμη, τότε στις εκφράσεις* (1.5) *και* (1.6) *της* $m(u)$, *το* $dH(y)$ *μπορεί να δοθεί ως* $H'(y)dy$.

Μια ειδική περίπτωση ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης (Teugels & Sundt (2004)) δίνεται στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 1.3

Στην περίπτωση που η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση έχει τη μορφή

$$m(u) = \kappa\int_0^u m(u-y)dZ(y) + \kappa\bar{Z}(u), \quad u \geq 0,\ 0 < \kappa < 1 \tag{1.7}$$

η λύση της μπορεί να εκφραστεί ως η δεξιά ουρά μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής (γνωστή ως Beekman's convolution series) και συγκεκριμένα,

$$m(u) = \sum_{n=1}^{\infty}(1-\kappa)\kappa^n\,\overline{Z^{*n}}(u), \quad u \geq 0 \tag{1.8}$$

όπου $\overline{Z^{*n}}(u)$ *η δεξιά ουρά της n-οστής συνέλιξης της* $Z(u) = 1 - \bar{Z}(u) = \int_0^u \zeta(y)dy$.

1.4 Η διαδικασία του πλεονάσματος στην εργασία

Στην εργασία αυτή γενικεύεται το κλασικό μοντέλο χρεοκοπίας θεωρώντας στοχαστικά ασφάλιστρα. Η στοχαστική διαδικασία του πλεονάσματος έχει τώρα τη μορφή

$$U(t) = u + \sum_{i=1}^{M(t)} X_i - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \tag{1.8}$$

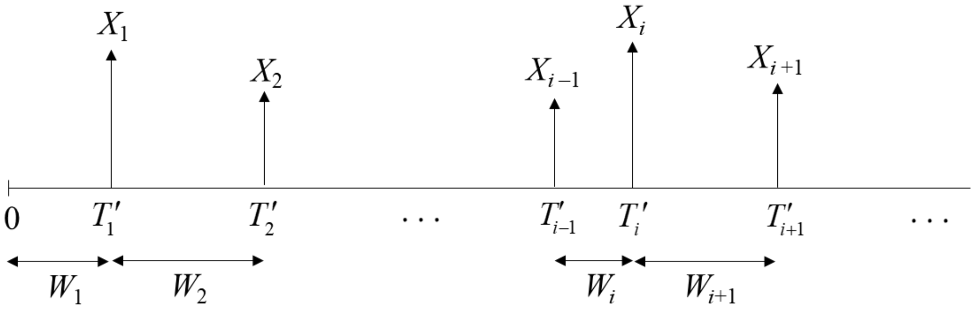
Με τον ίδιο τρόπο που ορίστηκε η διαδικασία άφιξης των απαιτήσεων (κινδύνων), ορίζουμε την απαριθμήτρια στοχαστική διαδικασία $\{M(t), t \geq 0\}$ που αναφέρεται στο πλήθος των ασφαλίστρων.

Έστω $\{ T_i', i = 0,1,2...\}$ μία ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με $T_0' = 0$, όπου T_i', $i \geq 1$, συμβολίζει τη χρονική στιγμή εμφάνισης του i-οστού ενδεχομένου (ασφαλίστρου). Έστω, τώρα οι τυχαίες μεταβλητές $W_i = T_i' - T_{i-1}'$, $i \geq 1$. Τότε η W_1 εκφράζει το χρόνο που απαιτείται για την εμφάνιση του πρώτου ενδεχομένου και η W_i, $i \geq 2$, εκφράζει το χρόνο από την εμφάνιση του $i-1$ ενδεχομένου μέχρι και την εμφάνιση του i ενδεχομένου, δηλαδή, $\{W_i, i = 1,2,...\}$ είναι μία ακολουθία μη-αρνητικών και ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών και αναφέρεται στους ενδιάμεσους χρόνους εμφάνισης των ενδεχομένων. Αν $W_0 = 0$, τότε $T_n' = W_1 + W_2 + ... + W_n$, $n \geq 0$ και η ακολουθία των τυχαίων μεταβλητών $\{T_n', n = 0,1,...\}$ ονομάζεται ακολουθία ανανεώσεων. Έστω, $\{X_i, i = 1,2,...\}$ μία ακολουθία μη-αρνητικών τυχαίων μεταβλητών όπου η X_i συμβολίζει το μέγεθος του ατομικού ασφαλίστρου από την εμφάνιση του i -οστού ασφαλισμένου. Τότε, η ανανεωτική στοχαστική διαδικασία $\{M(t), t \geq 0\}$ ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 1.9

Έστω $\{W_i,\ i = 1,2,...\}$ *μία ακολουθία μη-αρνητικών ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών, και* $\{T_i', i = 1,2...\}$ *μία ακολουθία ανανεώσεων με* $T_i' = W_1 + W_2 + ... + W_i$, $i \geq 1$ *και* $T_0' = W_0 = 0$. *Τότε, η απαριθμήτρια διαδικασία* $\{M(t), t \geq 0\}$ *με* $M(0) = 0$, *που ορίζεται από τη σχέση* $M(t) = \sum_{n=1}^{\infty} I\left(T_n' \leq t\right)$ *ονομάζεται ανανεωτική στοχαστική διαδικασία και παριστάνει τον αριθμό των ανανεώσεων στο* $[0, t]$.

Σχηματικά έχουμε,



Σχήμα 1.3: Χρόνοι άφιξης ασφαλίστρων, μεγέθη ασφαλίστρων, ενδιάμεσοι χρόνοι αφίξεων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΜΕ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΑΣΦΑΛΙΣΤΡΑ ΧΩΡΙΣ ΕΞΑΡΤΗΣΕΙΣ

2.1 Εισαγωγή

Το κεφάλαιο γενικεύει το κλασικό μοντέλο κινδύνου, γνωστό ως Cramer-Lundberg μοντέλο, και άρει την υπόθεση ότι τα ασφάλιστρα εισπράττονται από τον ασφαλιστικό οργανισμό με σταθερό ρυθμό στο χρόνο.

Στην Ενότητα 2.2 εξετάζεται ένα μοντέλο κινδύνου για το οποίο στη διαδικασία αφίξεων των αποζημιώσεων οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν τη γενικευμένη $Erlang(n)$ κατανομή, ενώ τα συνολικά ασφάλιστρα είναι ίσα με τον αριθμό των ασφαλισμένων, που θεωρείται διαδικασία Poisson, κάθε ένας από τους οποίους φέρει έσοδα στην εταιρεία με μοναδιαίο ρυθμό.

Στην Ενότητα 2.3, θεωρούμε ότι και οι απαιτήσεις και τα ασφάλιστρα περιγράφονται από σύνθετες διαδικασίες Poisson. Μια τέτοια υπόθεση για τα ασφάλιστρα μπορεί να βρει εφαρμογή σε ασφαλίσεις που αφορούν μεταφορές συλλογών έργων τέχνης, ή ασφαλίσεις πλοίων και αεροπλάνων στις οποίες τα έσοδα μεταβάλλονται σημαντικά καθώς εισέρχονται σε εφάπαξ μορφή.

2.2 Μοντέλο κινδύνου με συνολικά ασφάλιστρα ίσα με το πλήθος των πελατών που εμφανίζονται σύμφωνα με μια ανέλιξη Poisson

Το κεφάλαιο θεωρεί το ανανεωτικό μοντέλο Sparre-Andersen με τους ενδιάμεσους χρόνους μεταξύ των αποζημιώσεων να ακολουθούν τη γενικευμένη $Erlang(n)$ κατανομή και επιπλέον τα έσοδα της ασφαλιστικής εταιρείας από τα ασφάλιστρα δεν είναι πλέον μια γραμμμική συνάρτηση του χρόνου, αλλά είναι διαδικασία Poisson $M(t)$. Υπό την υπόθεση επίσης ότι τα μεγέθη των απαιτήσεων ακολουθούν μια διακριτή θετική κατανομή, δίνονται οι εξισώσεις που ικανοποιεί η συνάρτηση Gerber-Shiu $m_\delta(u)$ και αναλύεται η γενικευμένη εξίσωση Lundberg. Θεωρώντας την περίπτωση όπου το αρχικό πλεόνασμα είναι μηδέν, δίνεται η αναλυτική έκφραση της ποσότητας $m_\delta(0)$. Στη συνέχεια, αποδεικνύεται η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση για την $m_\delta(u)$ από την οποία προκύπτουν η γεννήτρια συνάρτηση και η αναλυτική έκφραση της $m_\delta(u)$. Τέλος, εξετάζεται ο μετασχηματισμός

Laplace του χρόνου χρεοκοπίας και μελετάται η ειδική περίπτωση όπου η διακριτή κατανομή του μεγέθους των απαιτήσεων ανήκει στην οικογένεια κατανομών K_m.

Μοντέλα κινδύνου με μη ντετερμινιστικά ασφάλιστρα έχουν μελετηθεί μεταξύ άλλων από τους Temnov (2004), Bao (2006), Bao & Ye (2007).

2.2.1 Περιγραφή του μοντέλου

Στο μοντέλο κινδύνου που εξετάζουμε, η διαδικασία πλεονάσματος εκφράζεται ως

$$U(t) = u + M(t) - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \tag{2.2.1}$$

όπου, $(N(t))_{t\geq 0}$ είναι μια ανανεωτική διαδικασία που μοντελοποιεί τη διαδικασία του αριθμού των απαιτήσεων, με $N(t) = \max\{n, V_1 + V_2 + ... + V_n\}$ και V_i $(i \geq 2)$ το χρόνο που μεσολαβεί μεταξύ της άφιξης της απαίτησης $i-1$ και της άφιξης της απαίτησης i και V_1 είναι ο χρόνος μέχρι την εμφάνιση της πρώτης απαίτησης, $\{Y_i\}$, $i \in \mathbf{N}^+$, είναι ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων αυστηρά θετικών ακέραιων τιμών τυχαίων μεταβλητών που εκφράζουν τα μεγέθη των ατομικών απαιτήσεων και είναι ανεξάρτητες από τη $N(t)$, με συνάρτηση κατανομής $F(y) = P(Y \leq y)$, συνάρτηση πιθανότητας $f(y)$, $y \in \mathbf{N}^+$ και $f(0) = 0$ για να αποφύγουμε κινδύνους χωρίς απαίτηση, και πεπερασμένη μέση τιμή $\mu_F > 0$, $(M(t))_{t\geq 0}$ είναι μια διαδικασία Poisson με ένταση $\mu > 0$ που εκφράζει τον αριθμό των πελατών μέχρι τη στιγμή t για καθέναν από τους οποίους, για λόγους απλότητας, ο ρυθμός ασφαλίστρου θεωρείται ότι είναι ίσος με 1 (νομισματική μονάδα / πελάτη), και $U(0) = u \geq 0$ είναι το αρχικό πλεόνασμα. Επίσης θεωρούμε ότι οι $\{M(t)\}$, $\{N(t)\}$ και $\{Y_i\}$ είναι αμοιβαία ανεξάρτητα μεταξύ τους.

Για τους ενδιάμεσους χρόνους μεταξύ διαδοχικών αφίξεων απαιτήσεων $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ θεωρούμε ότι αποτελούν ακολουθία ανεξάρτητων ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με κατανομή $V(x) = P(V_1 \leq x)$, οι οποίες ακολουθούν τη γενικευμένη *Erlang*(n) κατανομή. Συγκεκριμένα, είναι

$$V = \overline{V}_1 + \overline{V}_2 + ... + \overline{V}_n$$

όπου $\{\overline{V}_i\}_{i=1}^{n}$ είναι n ανεξάρτητες εκθετικά κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές με μέσο $E(\overline{V}_i) = \dfrac{1}{\lambda_i}$. Η κατανομή Erlang είναι από τις πιο δημοφιλείς κατανομές στη θεωρία ουρών αναμονής και στη θεωρία κινδύνου και έχει χρησιμοποιηθεί από πολλούς ερευνητές στην αναλογιστική επιστήμη (για παράδειγμα Gerber & Shiu (2005), Li & Garrido (2004), Li & Garrido (2005)).

Για να εξασφαλίζεται θετική πιθανότητα επιβίωσης υποθέτουμε ότι ισχύει η επόμενη συνθήκη καθαρού κέρδους

$$\mu > \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k}} \mu_F . \qquad (2.2.2)$$

Το αριστερό μέλος της προηγούμενης σχέσης είναι τα αναμενόμενα έσοδα στη μονάδα του χρόνου για την ασφαλιστική εταιρία. Στο δεξιό μέλος έχουμε το μέσο ρυθμό αποζημιώσεων στη μονάδα του χρόνου πολλαπλασιασμένη επί τη μέση αποζημίωση, δηλαδή το δεξιό μέλος δηλώνει τα αναμενόμενα έξοδα της ασφαλιστικής εταιρίας στη μονάδα του χρόνου. Η συνθήκη (2.2.2) απαιτεί τα έσοδα να υπερβαίνουν κατά μέσο όρο τα έξοδα σε κάθε χρονική μονάδα.

Στο μοντέλου κινδύνου που εξετάζουμε, η συνάρτηση Gerber-Shiu ορίζεται για μια μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση $\omega(x_1, x_2)$ ορισμένη στο $\mathbf{N} \times \mathbf{N}^+$, και έχει τη μορφή της (1.1) που δόθηκε στον Ορισμό 1.7.

Το μοντέλου κινδύνου (2.2.1) αν και φαινομενικά δείχνει να είναι ένα συνεχές μοντέλο κινδύνου, εν τούτοις, στην πραγματικότητα είναι ένα διακριτό μοντέλο κινδύνου, καθώς και τα ασφάλιστρα και οι ατομικές απαιτήσεις είναι διακριτά μεγέθη. Στο εν λόγω μοντέλο, υπό τη θεώρηση της γενικευμένης Erlang(n) κατανομής για τους ενδοαφιξιακούς χρόνους των απαιτήσεων, η μελέτη της συνάρτησης Gerber-Shiu αποτελεί μια επέκταση των αποτελεσμάτων της εργασίας του Bao (2006). Στην εργασία του Bao μελετήθηκε λεπτομερώς το μοντέλο της Εξίσωσης (2.2.1) όταν η $N(t)$ είναι μια διαδικασία Poisson.

2.2.2 Εξισώσεις για την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής

Για την ανάπτυξη των σχετικών μεγεθών, αρχικά ορίζουμε κάποιες βοηθητικές συναρτήσεις όπως στους Gerber & Shiu (2005).

Για $j = 0,1,...,n$, έστω $S_j = \bar{V}_1 + \bar{V}_2 + ... + \bar{V}_j$ με $S_0 = 0$ και ορίζουμε τη συνάρτηση Gerber-Shiu

$$m_{\delta,j}(u) = E[e^{-\delta(T-t)} \omega(U(T^-), |U(T)|) I(T < \infty) \,|\, S_j = t, U(t) = u]$$

με την ιδιότητα

$$m_\delta(u) = m_{\delta,0}(u) = m_{\delta,n}(u) .$$

Πρόταση 2.2.1

Οι συναρτήσεις Gerber-Shiu $m_{\delta,j}(u)$ δίνονται από τις αναδρομικές σχέσεις

$$m_{\delta,j}(u) = p_{j+1}\, m_{\delta,j+1}(u) + q_{j+1}\, m_{\delta,j}(u+1), \qquad j = 0,1,...,n-2 \qquad (2.2.3)$$

και

$$m_{\delta,n-1}(u) = p_n\, \gamma(u) + q_n\, m_{\delta,n-1}(u+1), \qquad j = n-1 \qquad (2.2.4)$$

όπου,

$$p_j=\frac{\lambda_j}{\mu+\lambda_j+\delta},\qquad q_j=\frac{\mu}{\mu+\lambda_j+\delta},\qquad j=1,2,\ldots,n,$$

$$\gamma(u)=\sum_{i=1}^{u}m_\delta(u-i)f(i)+w(u),\quad w(u)=\sum_{i=u+1}^{\infty}\omega(u,i-u)f(i).$$

Απόδειξη

Για $j=0,1,\ldots,n-2$ δεσμεύοντας ως προς το χρόνο $\bar{V}_{j+1}$, που έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{\bar{V}_{j+1}}(t)=\lambda_{j+1}e^{-\lambda_{j+1}t}$, παίρνουμε

$$m_{\delta,j}(u)=\int_0^\infty m_{\delta,j}(u\,|\,\bar{V}_{j+1}=t)\,f_{\bar{V}_{j+1}}(t)dt=\int_0^\infty m_{\delta,j}(u\,|\,\bar{V}_{j+1}=t)\lambda_{j+1}e^{-\lambda_{j+1}t}dt$$

και χρησιμοποιώντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας

$$m_{\delta,j}(u)=\int_0^\infty\sum_{k=0}^{\infty}m_{\delta,j}(\bar{V}_{j+1}=t,M(t)=k)P(M(t)=k)\lambda_{j+1}e^{-\lambda_{j+1}t}dt$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^\infty e^{-\delta t}m_{\delta,j+1}(u+k)P(M(t)=k)\lambda_{j+1}e^{-\lambda_{j+1}t}dt$$

αλλά αφού η $M(t)$ είναι διαδικασία Poisson με ένταση μ, στη χρονική στιγμή t η τυχαία μεταβλητή $M(t)\sim Poisson(\mu t)$ με συνάρτηση πιθανότητας $P(M(t)=k)=\frac{(\mu t)^k e^{-\mu t}}{k!}$, $k=0,1,2,\ldots$, οπότε

$$m_{\delta,j}(u)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_{j+1}m_{\delta,j+1}(u+k)\int_0^\infty e^{-(\lambda_{j+1}+\delta)t}\frac{(\mu t)^k e^{-\mu t}}{k!}dt$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_{j+1}\mu^k}{k!}m_{\delta,j+1}(u+k)\int_0^\infty e^{-(\mu+\lambda_{j+1}+\delta)t}t^k dt$$

για το ολοκλήρωμα εφαρμόζουμε τον τύπο $\int_0^\infty x^{A-1}e^{-Bx}dx=\frac{\Gamma(A)}{B^A}$ με $A>0$, $B>0$ και $\Gamma(x)$ η συνάρτηση γάμμα, οπότε

$$m_{\delta,j}(u)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_{j+1}\mu^k}{k!}m_{\delta,j+1}(u+k)\frac{\Gamma(k+1)}{(\mu+\lambda_{j+1}+\delta)^{k+1}}$$

και αφού k είναι ακέραιος, $\Gamma(k+1)=k!$, οπότε

$$m_{\delta,j}(u)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_{j+1}}{\mu+\lambda_{j+1}+\delta}\left(\frac{\mu}{\mu+\lambda_{j+1}+\delta}\right)^k m_{\delta,j+1}(u+k)$$

επιπλέον θέτοντας

$$p_j=\frac{\lambda_j}{\mu+\lambda_j+\delta},\qquad q_j=\frac{\mu}{\mu+\lambda_j+\delta},\qquad j=1,2,\ldots,n \tag{2.2.5}$$

προκύπτει

$$m_{\delta,j}(u)=\sum_{k=0}^{\infty}p_{j+1}\,q_{j+1}^{k}\,m_{\delta,j+1}(u+k)\,. \qquad (2.2.6)$$

Από τη σχέση αυτή έχουμε

$$m_{\delta,j}(u+1)=\sum_{k=0}^{\infty}p_{j+1}\,q_{j+1}^{k}\,m_{\delta,j+1}(u+1+k)$$

θέτοντας $l = k + 1$ παίρνουμε

$$m_{\delta,j}(u+1)=\sum_{l=1}^{\infty}p_{j+1}\,q_{j+1}^{l-1}\,m_{\delta,j+1}(u+l)=q_{j+1}^{-1}\sum_{l=1}^{\infty}p_{j+1}\,q_{j+1}^{l}\,m_{\delta,j+1}(u+l)$$

και αλλάζοντας το l σε k

$$q_{j+1}\,m_{\delta,j}(u+1)=\sum_{k=1}^{\infty}p_{j+1}\,q_{j+1}^{k}\,m_{\delta,j+1}(u+k)\,. \qquad (2.2.7)$$

Συνδυάζοντας την (2.2.6) με την (2.2.7) προκύπτει

$$\begin{aligned} m_{\delta,j}(u) &= p_{j+1}\,m_{\delta,j+1}(u)+\sum_{k=1}^{\infty}p_{j+1}\,q_{j+1}^{k}\,m_{\delta,j+1}(u+k) \\ &= p_{j+1}\,m_{\delta,j+1}(u)+q_{j+1}\,m_{\delta,j+1}(u+1) \end{aligned}$$

δηλαδή, η ζητούμενη σχέση (2.2.3).

Στην περίπτωση που $j=n-1$, όμοια έχουμε

$$m_{\delta,n-1}(u)=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\infty}\lambda_n e^{-(\lambda_n+\delta)t}P(M(t)=k)dt\times\left(\sum_{i=1}^{u+k}m_{\delta,n}(u+k-i)+\sum_{i=u+k+1}^{\infty}\omega(u+k,i-u-k)\,f(i)\right)$$

αντικαθιστώντας την πιθανότητα $P(M(t)=k)=\dfrac{(\mu t)^k e^{-\mu t}}{k!}$ βρίσκουμε διαδοχικά

$$m_{\delta,n-1}(u)=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\infty}\lambda_n\,e^{-(\lambda_n+\delta)t}\,\frac{(\mu t)^k e^{-\mu t}}{k!}\,dt\times\left(\sum_{i=1}^{u+k}m_{\delta,n}(u+k-i)+\sum_{i=u+k+1}^{\infty}\omega(u+k,i-u-k)\,f(i)\right)$$

όπου για το πρώτο άθροισμα, υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα όπως πριν, έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty}\lambda_n e^{-(\lambda_n+\delta)t}\,\frac{(\mu t)^k e^{-\mu t}}{k!}\,dt &= \lambda_n\,\frac{\mu^k}{k!}\int_0^{\infty}t^k e^{-(\mu+\lambda_n+\delta)t}dt \\ &= \lambda_n\,\frac{\mu^k}{k!}\,\frac{\Gamma(k+1)}{(\mu+\lambda_n+\delta)^{k+1}}=\frac{\lambda_n}{\mu+\lambda_n+\delta}\left(\frac{\mu}{\mu+\lambda_n+\delta}\right)^k. \end{aligned}$$

Οπότε

$$m_{\delta,n-1}(u)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_n}{\mu+\lambda_n+\delta}\left(\frac{\mu}{\mu+\lambda_n+\delta}\right)^k\times\left(\sum_{i=1}^{u+k}m_{\delta,n}(u+k-i)+\sum_{i=u+k+1}^{\infty}\omega(u+k,i-u-k)\,f(i)\right)$$

Θέτοντας

$$w(u)=\sum_{i=u+1}^{\infty}\omega(u,i-u)\,f(i)\ \text{ και }\ \gamma(u)=\sum_{i=1}^{u}m_{\delta}(u-i)\,f(i)+w(u)$$

το δεύτερο άθροισμα στην παρένθεση είναι $w(u+k)$ και συνεπώς όλη η παρένθεση ισούται με $\gamma(u+k)$. Για $j=n$ στην (2.2.5), προκύπτει τελικά

$$m_{\delta,n-1}(u)=\sum_{k=0}^{\infty} p_n\, q_n^k\, \gamma(u+k)\,. \tag{2.2.8}$$

Από τη σχέση αυτή έχουμε

$$m_{\delta,n-1}(u+1)=\sum_{k=0}^{\infty} p_n\, q_n^k\, \gamma(u+1+k)$$

Θέτοντας $l=k+1$ παίρνουμε

$$m_{\delta,n-1}(u+1)=\sum_{l=1}^{\infty} p_n\, q_n^{l-1}\, \gamma(u+l)=q_n^{-1}\sum_{l=1}^{\infty} p_n\, q_n^{l}\, \gamma(u+l)$$

όπου με την αλλαγή της μεταβλητής l σε k και αναδιάταξη των όρων της προκύπτει

$$q_n\, m_{\delta,n-1}(u+1)=\sum_{k=1}^{\infty} p_n\, q_n^k\, \gamma(u+k)\,. \tag{2.2.9}$$

Συνδυάζοντας την (2.2.8) με την (2.2.9) προκύπτει

$$\begin{aligned} m_{\delta,n-1}(u) &= p_n\,\gamma(u)+\sum_{k=1}^{\infty} p_n\, q_n^k\, \gamma(u+k) \\ &= p_n\,\gamma(u)+q_n\, m_{\delta,n-1}(u+1)\,. \end{aligned}$$

δηλαδή, η ζητούμενη σχέση (2.2.4).

□

Η γεννήτρια συνάρτηση της $m_{\delta,j}(u)$ ορίζεται ως

$$\hat{m}_{\delta,j}(s)=\sum_{\kappa=0}^{\infty} s^u m_{\delta,j}(u)\,. \tag{2.2.10}$$

Από την (2.2.3) πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με s^u και αθροίζοντας ως προς u από το 0 στο ∞ παίρνουμε διαδοχικά

$$\sum_{u=0}^{\infty} s^u m_{\delta,j}(u)=\sum_{u=0}^{\infty} s^u [\, p_{j+1} m_{\delta,j+1}(u)+q_{j+1} m_{\delta,j+1}(u+1)]$$

$$\sum_{u=0}^{\infty} s^u m_{\delta,j}(u)=p_{j+1}\sum_{u=0}^{\infty} s^u m_{\delta,j+1}(u)+q_{j+1}\sum_{u=0}^{\infty} s^u m_{\delta,j+1}(u+1)$$

με αλλαγή μεταβλητής στο τελευταίο άθροισμα $u_1=u+1$ παίρνουμε

$$\sum_{u=0}^{\infty} s^u m_{\delta,j}(u)=p_{j+1}\sum_{u=0}^{\infty} s^u m_{\delta,j+1}(u)+q_{j+1}\sum_{u_1=1}^{\infty} s^{u_1-1} m_{\delta,j+1}(u_1)$$

$$\sum_{u=0}^{\infty} s^u m_{\delta,j}(u)=p_{j+1}\sum_{u=0}^{\infty} s^u m_{\delta,j+1}(u)+q_{j+1}s^{-1}\left(\sum_{u_1=0}^{\infty} s^{u_1} m_{\delta,j+1}(u_1)-m_{\delta,j+1}(0)\right)$$

η οποία με βάση την (2.2.10) γίνεται

$$\hat{m}_{\delta,j}(s) = p_{j+1}\hat{m}_{\delta,j+1}(s) + q_{j+1}s^{-1}(\hat{m}_{\delta,j+1}(s) - m_{\delta,j+1}(0))$$

και με αναδιάταξη των όρων προκύπτει

$$(q_{j+1} - s)\hat{m}_{\delta,j}(s) + p_{j+1}\, s\, \hat{m}_{\delta,j+1}(s) = q_{j+1}\, m_{\delta,j+1}(0), \qquad j = 0,1,\ldots,n-2. \tag{2.2.11}$$

Με όμοια διαδικασία από την (2.2.4) προκύπτει ότι

$$(q_n - s)\hat{m}_{\delta,n-1}(s) + p_n\, s\, \hat{f}(s)\hat{m}_{\delta,n}(s) = q_n\, m_{\delta,j}(0) - p_n\, s\hat{w}(s), \qquad j = n-1. \tag{2.2.12}$$

Οι σχέσεις (2.2.11) και (2.2.12) σε διανυσματική μορφή γράφονται

$$\mathbf{A}(s)\hat{\mathbf{m}}_\delta(s) = \mathbf{d}(s) \tag{2.2.13}$$

όπου τα σχετικά διανύσματα-πίνακες, αναφορικά με τις n καταστάσεις που εξετάζουμε είναι

$$\underset{(n\times n)}{\mathbf{A}(s)} = \begin{pmatrix} q_1 - s & p_1 s & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & q_2 - s & p_2 s & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ p_n s\, \hat{f}(s) & 0 & 0 & \cdots & q_n - s \end{pmatrix}, \quad \underset{(n\times 1)}{\hat{\mathbf{m}}_\delta(s)} = \begin{pmatrix} \hat{m}_{\delta,0}(s) \\ \hat{m}_{\delta,1}(s) \\ \vdots \\ \hat{m}_{\delta,n-1}(s) \end{pmatrix}, \quad \underset{(n\times 1)}{\mathbf{d}(s)} = \begin{pmatrix} q_1 m_{\delta,0}(0) \\ \vdots \\ q_{n-1} m_{\delta,n-2}(0) \\ q_n m_{\delta,n-1}(0) - p_n s\hat{w}(s) \end{pmatrix}.$$

Στη συνέχεια ενδιαφερόμαστε για τις ποσότητες $\hat{m}_\delta(s)$. Η Εξίσωση (2.2.13) είναι μια βοηθητική εξίσωση από την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε τη γεννήτρια συνάρτηση $\hat{m}_\delta(s)$. Αρχικά, υπολογίζουμε την ορίζουσα του πίνακα $\mathbf{A}(s)$, αναπτύσσοντας ως προς την πρώτη στήλη και έχουμε

$$|\mathbf{A}(s)| = \begin{vmatrix} q_1 - s & p_1 s & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & q_2 - s & p_2 s & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ p_n s\, \hat{f}(s) & 0 & 0 & \cdots & q_n - s \end{vmatrix}$$

$$= (q_1 - s)\begin{vmatrix} q_2 - s & p_2 s & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_3 - s & p_1 s & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & q_{n-1} - s & p_{n-1} s \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & q_n - s \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{1+n} p_n s\, \hat{f}(s) \begin{vmatrix} p_1 s & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ q_2 - s & p_2 s & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_3 - s & p_3 s & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{n-1} - s & p_{n-1} s \end{vmatrix}$$

Η πρώτη ορίζουσα αντιστοιχεί σε άνω τριγωνικό πίνακα, ενώ η δεύτερη ορίζουσα σε κάτω τριγωνικό πίνακα, συνεπώς οι ορίζουσες είναι ίσες με το γινόμενο των στοιχείων της αντίστοιχης κύριας διαγωνίου. Οπότε,

$$\left|\mathbf{A}(s)\right| = \prod_{i=1}^{n}(q_i - s) + (-1)^{1+n}\hat{f}(s)s^n\prod_{i=1}^{n}p_i \, .$$

Ορίζουμε ως γενικευμένη εξίσωση Lundberg την

$$\left|\mathbf{A}(s)\right| = 0$$

και αντικαθιστώντας το ανάπτυγμα της ορίζουσας, παίρνουμε

$$(-1)^n\prod_{i=1}^{n}(s - q_i) = (-1)^n\hat{f}(s)s^n\prod_{i=1}^{n}p_i$$

ή ισοδύναμα η γενικευμένη εξίσωση Lundberg έχει τη μορφή

$$\prod_{i=1}^{n}(s - q_i) = \hat{f}(s)s^n\prod_{i=1}^{n}p_i \, . \tag{2.2.14}$$

Η Πρόταση 2.2.2 μελετά τις ρίζες της (2.2.14).

Πρόταση 2.2.2

Για $\delta > 0$, η γενικευμένη εξίσωση Lundberg (2.2.14) *έχει ακριβώς n ρίζες, έστω $\rho_i(\delta)$, $i = 1, 2, ..., n$, εντός του μοναδιαίου κύκλου.*

Απόδειξη

Έστω C κύκλος με κέντρο $(\min\limits_{1\le i\le n} q_i, 0)$ και ακτίνα $1 - \min\limits_{1\le i\le n} q_i$. Για $s \in C$, έχουμε

$$\left|\prod_{i=1}^{n}(s - q_i)\right| \ge \left|\prod_{i=1}^{n}(1 - q_i)\right| = \left|\prod_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{\mu}{\mu + \lambda_i + \delta}\right)\right|$$

$$= \prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i + \delta}{1 + \lambda_i + \delta} > \prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{1 + \lambda_i + \delta} = \prod_{i=1}^{n}p_i \ge \left|\hat{f}(s)s^n\prod_{i=1}^{n}p_i\right| .$$

Από το θεώρημα Rouche (Παράρτημα Π7), οι εξισώσεις

$$\prod_{i=1}^{n}(s - q_i) = 0 \qquad \text{και} \qquad \prod_{i=1}^{n}(s - q_i) = \hat{f}(s)s^n\prod_{i=1}^{n}p_i$$

έχουν τον ίδιο αριθμό ριζών εντός του κύκλου C. Αφού η $\prod_{i=1}^{n}(s - q_i) = 0$ έχει n ρίζες, τότε η γενικευμένη εξίσωση Lundberg (2.2.14) έχει n ρίζες εντός του κύκλου C. Επιπλέον, οι n ρίζες είναι όλες εντός του μοναδιαίου κύκλου επειδή ο κύκλος C βρίσκεται εντός του μοναδιαίου κύκλου.

□

Παρατήρηση 2.2.1. Από την Πρόταση 2.2.2 προκύπτει ότι η Εξίσωση (2.2.14) έχει n ρίζες εντός του μοναδιαίου κύκλου, καθώς και ότι ο κύκλος έχει κέντρο στο $(\min\limits_{1\le i\le n} q_i, 0)$ και ακτίνα $1 - \min\limits_{1\le i\le n} q_i$.

Παρατήρηση 2.2.2. Οι $s=0$ και $s=1$ δεν είναι ρίζες της (2.2.14). Πράγματι, αν θέσουμε στη (2.2.14) $s=0$ προκύπτει $\prod_{i=1}^{n}(-q_i)=0$ που είναι άτοπο και αν θέσουμε $s=1$ βρίσκουμε διαδοχικά:

$$\prod_{i=1}^{n}(1-q_i)=\hat{f}(1)\prod_{i=1}^{n}p_i$$

αλλά $\hat{f}(1)=1$ και αντικαθιστώντας τα p_i, q_i, η παραπάνω ισότητα γίνεται

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{\mu}{\mu+\lambda_i+\delta}\right)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\mu+\lambda_i+\delta}$$

ισοδύναμα

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i+\delta}{\mu+\lambda_i+\delta}=\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\mu+\lambda_i+\delta}$$

ισοδύναμα

$$\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i+\delta)=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$$

που είναι επίσης άτοπο. Συνεπώς, είναι $0<|\rho_i(\delta)|<1$ για $i=1,2,...,n.$ Έστω συμβολίζουμε με $\rho_n(\delta)$ τη ρίζα με το μεγαλύτερο μέτρο. Τότε, $\lim_{\delta\to 0^+}\rho_n(\delta)=1$.

Στη συνέχεια, για λόγους απλότητας, θα συμβολίζουμε τις ρίζες ως $\rho_1,\rho_2,...,\rho_n$.

2.2.3 Ανάλυση της συνάρτησης Gerber-Shiu για μηδενικό αρχικό πλεόνασμα

Στην ενότητα αυτή αναλύεται το μέγεθος $m_\delta(0)$. Από την Πρόταση 2.2.2, γνωρίζουμε ότι η $|\mathbf{A}(s)|=0$ έχει n ρίζες εντός του μοναδιαίου κύκλου. Τότε για κάθε ρίζα ρ_i, υπάρχει διάνυσμα $\mathbf{k}(\rho_i)$ τέτοιο ώστε

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\rho_i)\mathbf{k}(\rho_i)=0. \tag{2.2.15}$$

Παίρνοντας τον ανάστροφο και στα δύο μέλη της (2.2.13), έχουμε

$$\mathbf{A}(s)\hat{\mathbf{m}}_\delta(s)=\mathbf{d}(s)$$

$$[\mathbf{A}(s)\hat{\mathbf{m}}_\delta(s)]^{\mathrm{T}}=[\mathbf{d}(s)]^{\mathrm{T}}$$

η οποία σύμφωνα με την ιδιότητα των ανάστροφων πινάκων, $(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}}=\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, γίνεται

$$\mathbf{m}_\delta^{\mathrm{T}}(s)\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(s)=\mathbf{d}^{\mathrm{T}}(s).$$

Θέτοντας $s=\rho_i$ στην τελευταία σχέση και πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της με ένα διάνυσμα-στήλη $\mathbf{k}(\rho_i)$ προκύπτει κάνοντας χρήση και της (2.2.15)

$$\mathbf{m}_\delta^{\mathrm{T}}(\rho_i)\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\rho_i)\mathbf{k}(\rho_i)=\mathbf{d}^{\mathrm{T}}(\rho_i)\mathbf{k}(\rho_i)=0, \qquad j=1,2,...,n. \tag{2.2.16}$$

Από τη γενικευμένη εξίσωση Lundberg (2.2.14) το διάνυσμα $\mathbf{k}(\rho_i)$

$$\mathbf{k}(\rho_i)=\begin{pmatrix} \prod_{j=2}^{n}\dfrac{\rho_i-q_j}{p_{j-1}\,\rho_i} \\ \prod_{j=3}^{n}\dfrac{\rho_i-q_j}{p_{j-1}\,\rho_i} \\ \vdots \\ \dfrac{\rho_i-q_n}{p_{n-1}\,\rho_i} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.2.17}$$

ικανοποιεί την (2.2.16) για $i=1,2,...,n$.

Έστω ο πίνακας

$$\mathbf{K}=\begin{pmatrix} \mathbf{k}^{\mathrm{T}}(\rho_1) \\ \vdots \\ \mathbf{k}^{\mathrm{T}}(\rho_n) \end{pmatrix}$$

όπου για το διάνυσμα της (2.2.17) γίνεται

$$\mathbf{K}=\begin{pmatrix} \mathbf{k}^{\mathrm{T}}(\rho_1) \\ \vdots \\ \mathbf{k}^{\mathrm{T}}(\rho_n) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \prod_{j=2}^{n}\dfrac{\rho_1-q_j}{p_{j-1}\,\rho_1} & \prod_{j=3}^{n}\dfrac{\rho_1-q_j}{p_{j-1}\,\rho_1} & \cdots & \dfrac{\rho_1-q_n}{p_{n-1}\,\rho_1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \prod_{j=2}^{n}\dfrac{\rho_n-q_j}{p_{j-1}\,\rho_n} & \prod_{j=3}^{n}\dfrac{\rho_n-q_j}{p_{j-1}\,\rho_n} & & \dfrac{\rho_n-q_n}{p_{n-1}\,\rho_n} & 1 \end{pmatrix}.$$

Τότε από την (2.2.16) έχουμε

$$\mathbf{K}\begin{pmatrix} q_1 m_{\delta,0}(0) \\ \vdots \\ q_n m_{\delta,n-1}(0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p_n\,\rho_1\,\hat{w}(\rho_1) \\ \vdots \\ p_n\,\rho_n\,\hat{w}(\rho_n) \end{pmatrix} \tag{2.2.18}$$

από την οποία μπορούμε να βρούμε αναλυτικά τα $m_{\delta,0}(0),...,m_{\delta,\mathrm{n}-1}(0)$.

Στην συνέχεια θα κάνουμε χρήση του τελεστή T_r στη διακριτή περίπτωση που για μία πραγματική συνάρτηση $f(x)$, $x\in\mathbf{N}$, ορίζεται ως

$$T_r f(x)=\sum_{y=x}^{\infty} r^{y-x} f(y)=\sum_{y=0}^{\infty} r^{y} f(y+x), \qquad r\in\mathbf{C},\ y\in\mathbf{N}.$$

Στο Παράρτημα Π3 δίνονται, σύμφωνα με τον Li (2005), κάποιες ιδιότητες του εν λόγω τελεστή στην περίπτωση που το στήριγμα της f είναι $\mathbf{N}^+$. Παρ' όλα αυτά, οι ιδιότητες αυτές μπορεί να δειχθεί ότι ισχύουν και στην περίπτωση που το στήριγμα είναι $\mathbf{N}$.

Πρόταση 2.2.3

Έστω $\lambda^{[n]} = \lambda_1\lambda_2...\lambda_n$ *και* $\rho^{[n]} = \rho_1\rho_2...\rho_n$. *Τότε η* $m_\delta(0)$ *μπορεί να εκφραστεί ως*

$$m_\delta(0) = \frac{\lambda^{[n]}\rho^{[n]}}{\mu^n} T_{\rho_1}T_{\rho_2}...T_{\rho_n}w(0) \tag{2.2.19}$$

ή

$$m_\delta(0) = \frac{\lambda^{[n]}\rho^{[n]}}{\mu^n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\rho_i^{n-1}}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(\rho_j-\rho_k)}\sum_{u=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}s^u\omega(u,j)\,f(u+j)\,. \tag{2.2.20}$$

Απόδειξη

Εφαρμόζοντας τον κανόνα Cramer στη (2.2.18) βρίσκουμε

$$q_1 m_\delta(0) = \frac{1}{|\mathbf{K}|}\begin{vmatrix} p_n\rho_1\hat{w}(\rho_1) & \prod\limits_{j=3}^{n}\dfrac{\rho_i-q_j}{p_{j-1}\rho_i} & \cdots & \dfrac{\rho_1-q_n}{p_{n-1}\rho_1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_n\rho_n\hat{w}(\rho_n) & \prod\limits_{j=3}^{n}\dfrac{\rho_n-q_j}{p_{j-1}\rho_n} & \cdots & \dfrac{\rho_n-q_n}{p_{n-1}\rho_n} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{|\mathbf{K}|}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}p_n\rho_j\hat{w}(\rho_j)\left|\mathbf{K}_{j,1}\right| \tag{2.2.21}$$

όπου $\mathbf{K}_{j,1}$ δηλώνει την ελάσσονα του $\mathbf{K}$ ως προς τη γραμμή j και τη στήλη 1.

Η ορίζουσα του πίνακα $\mathbf{K}$ είναι

$$|\mathbf{K}| = \begin{vmatrix} \prod\limits_{j=2}^{n}\dfrac{\rho_1-q_j}{p_{j-1}\rho_1} & \prod\limits_{j=3}^{n}\dfrac{\rho_1-q_j}{p_{j-1}\rho_1} & \cdots & \dfrac{\rho_1-q_n}{p_{n-1}\rho_1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \prod\limits_{j=2}^{n}\dfrac{\rho_n-q_j}{p_{j-1}\rho_n} & \prod\limits_{j=3}^{n}\dfrac{\rho_n-q_j}{p_{j-1}\rho_n} & \cdots & \dfrac{\rho_n-q_n}{p_{n-1}\rho_n} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \prod\limits_{j=2}^{n}\dfrac{q_j}{p_{j-1}}\left(\dfrac{1}{q_j}-\dfrac{1}{\rho_1}\right) & \prod\limits_{j=3}^{n}\dfrac{q_j}{p_{j-1}}\left(\dfrac{1}{q_j}-\dfrac{1}{\rho_1}\right) & \cdots & \dfrac{q_n}{p_{n-1}}\left(\dfrac{1}{q_n}-\dfrac{1}{\rho_1}\right) & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \prod\limits_{j=2}^{n}\dfrac{q_j}{p_{j-1}}\left(\dfrac{1}{q_j}-\dfrac{1}{\rho_n}\right) & \prod\limits_{j=3}^{n}\dfrac{q_j}{p_{j-1}}\left(\dfrac{1}{q_j}-\dfrac{1}{\rho_n}\right) & \cdots & \dfrac{q_n}{p_{n-1}}\left(\dfrac{1}{q_n}-\dfrac{1}{\rho_n}\right) & 1 \end{vmatrix}$$

και εφαρμόζοντας την ιδιότητα σύμφωνα με την οποία μία ορίζουσα πολλαπλασιάζεται με έναν αριθμό διάφορο του μηδενός, αν πολλαπλασιάσουμε όλα τα στοιχεία μιας γραμμής ή μιας στήλης με τον αριθμό

$$|\mathbf{K}| = \frac{\prod\limits_{j=2}^{n}q_j\prod\limits_{j=3}^{n}q_j\cdot\ldots\cdot q_n}{\prod\limits_{j=2}^{n}p_{j-1}\prod\limits_{j=3}^{n}p_{j-1}\cdot\ldots\cdot p_{n-1}}\begin{vmatrix} \prod\limits_{j=2}^{n}\left(\dfrac{1}{q_j}-\dfrac{1}{\rho_1}\right) & \prod\limits_{j=3}^{n}\left(\dfrac{1}{q_j}-\dfrac{1}{\rho_1}\right) & \cdots & \left(\dfrac{1}{q_n}-\dfrac{1}{\rho_1}\right) & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \prod\limits_{j=2}^{n}\left(\dfrac{1}{q_j}-\dfrac{1}{\rho_n}\right) & \prod\limits_{j=3}^{n}\left(\dfrac{1}{q_j}-\dfrac{1}{\rho_n}\right) & \cdots & \left(\dfrac{1}{q_n}-\dfrac{1}{\rho_n}\right) & 1 \end{vmatrix}$$

αλλά

$$\prod_{j=2}^{n} q_j \prod_{j=3}^{n} q_j \cdot \ldots \cdot q_n = (q_2 \ldots q_n)(q_3 \ldots q_n)\ldots q_n = q_2 q_3^2 \ldots q_n^{n-1}$$

$$\prod_{j=2}^{n} p_{j-1} \prod_{j=3}^{n} p_{j-1} \cdot \ldots \cdot p_{n-1} = (p_1 p_2 \ldots p_{n-1})(p_2 \ldots p_{n-1})\ldots p_{n-1} = p_1 p_2^2 \ldots p_{n-1}^{n-1}$$

οπότε

$$|\mathbf{K}| = \frac{q_2 q_3^2 \ldots q_n^{n-1}}{p_1 p_2^2 \ldots p_{n-1}^{n-1}} \begin{vmatrix} \prod_{j=2}^{n}\left(\frac{1}{q_j} - \frac{1}{\rho_1}\right) & \prod_{j=3}^{n}\left(\frac{1}{q_j} - \frac{1}{\rho_1}\right) & \cdots & \left(\frac{1}{q_n} - \frac{1}{\rho_1}\right) & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \prod_{j=2}^{n}\left(\frac{1}{q_j} - \frac{1}{\rho_n}\right) & \prod_{j=3}^{n}\left(\frac{1}{q_j} - \frac{1}{\rho_n}\right) & \cdots & \left(\frac{1}{q_n} - \frac{1}{\rho_n}\right) & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{q_2 q_3^2 \ldots q_n^{n-1}}{p_1 p_2^2 \ldots p_{n-1}^{n-1}} \prod_{\substack{k_1,k_2=1 \\ k_1>k_2}}^{n} \frac{\rho_{k_2} - \rho_{k_1}}{\rho_{k_1}\rho_{k_2}}$$

και παρόμοια, η ελάσσονα είναι

$$|\mathbf{K}_{j,1}| = \frac{q_3 q_4^2 \ldots q_n^{n-2}}{p_2 p_3^2 \ldots p_{n-1}^{n-2}} \prod_{\substack{k_1,k_2=1 \\ k_1>k_2 \\ k_1,k_2\neq j}}^{n} \frac{\rho_{k_2} - \rho_{k_1}}{\rho_{k_1}\rho_{k_2}}.$$

Αντικαθιστώντας στην (2.2.21) προκύπτει

$$m_\delta(0) = \frac{\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} p_n \rho_j \hat{w}(\rho_j) \frac{q_3 q_4^2 \ldots q_n^{n-2}}{p_2 p_3^2 \ldots p_{n-1}^{n-2}} \prod_{\substack{k_1,k_2=1 \\ k_1>k_2 \\ k_1,k_2\neq j}}^{n} \frac{\rho_{k_2} - \rho_{k_1}}{\rho_{k_1}\rho_{k_2}}}{q_1 \frac{q_2 q_3^2 \ldots q_n^{n-1}}{p_1 p_2^2 \ldots p_{n-1}^{n-1}} \prod_{\substack{k_1,k_2=1 \\ k_1>k_2}}^{n} \frac{\rho_{k_2} - \rho_{k_1}}{\rho_{k_1}\rho_{k_2}}}$$

$$= \frac{p_1 p_2 \ldots p_n}{q_1 q_2 \ldots q_n} \frac{\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \rho_j \hat{w}(\rho_j) \prod_{\substack{k_1,k_2=1 \\ k_1>k_2 \\ k_1,k_2\neq j}}^{n} \frac{\rho_{k_2} - \rho_{k_1}}{\rho_{k_1}\rho_{k_2}}}{\prod_{\substack{k_1,k_2=1 \\ k_1>k_2}}^{n} \frac{\rho_{k_2} - \rho_{k_1}}{\rho_{k_1}\rho_{k_2}}}$$

$$m_\delta(0) = \frac{\lambda^{[n]}\rho^{[n]}}{\mu^n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\rho_j^{n-1}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} (\rho_j - \rho_k)} \hat{w}(\rho_j) \qquad (2.2.22)$$

$$m_\delta(0) = \frac{\lambda^{[n]}\rho^{[n]}}{\mu^n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\rho_j^{n-1}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} (\rho_j - \rho_k)} T_{\rho_j} w(0) \qquad (2.2.23)$$

και με βάση την Ιδιότητα Β7 του Παραρτήματος Π3, προκύπτει η (2.2.20).

□

Η γεννήτρια συνάρτηση του $w(u) = \sum_{i=u+1}^{\infty} \omega(u, i-u) f(i)$ είναι

$$\hat{w}(s) = \sum_{u=0}^{\infty} s^u w(u) = \sum_{u=0}^{\infty} s^u \sum_{i=u+1}^{\infty} \omega(u, i-u) f(i).$$

Στο εσωτερικό άθροισμα θέτοντας $j = i - u$ είναι $i = j + u$ και $1 \leq j < \infty$, οπότε

$$\hat{w}(s) = \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} s^u \omega(u, j) f(u+j)$$

και αλλάζοντας το j με i γίνεται

$$\hat{w}(s) = \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} s^u \omega(u, i) f(u+i)$$

Αντικαθιστώντας στην (2.2.22) προκύπτει η

$$m_\delta(0) = \frac{\lambda^{[n]}\rho^{[n]}}{\mu^n} \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{\rho_j^{u+n-1} \omega(u, i)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} (\rho_j - \rho_k)} f(u+i) \qquad (2.2.23).$$

□

Για $\delta \geq 0$, έστω $f_\delta(x, y, t \mid u)$ η ελλειμματική από κοινού συνάρτηση πυκνότητας του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία, $U(T^-)$, του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, $|U(T)|$ και του χρόνου χρεοκοπίας, T. Ενδιαφερόμαστε για την ελλειμματική προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των $U(T^-)$ και $|U(T)|$, που συμβολίζουμε με $f_\delta(x, y \mid u)$, για την ελλειμματική προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας της $U(T^-)$, που συμβολίζουμε με $f_\delta(x \mid u)$, και την ελλειμματική προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας της $|U(T)|$, που συμβολίζουμε με $g_\delta(y \mid u)$. Αντίστοιχα, είναι

$$f_\delta(x, y \mid u) = \int_0^\infty f_\delta(x, y, t \mid u) e^{-\delta t} dt,$$

$$f_\delta(x \mid u) = \sum_{y=1}^{\infty} f_\delta(x, y \mid u),$$

$$g_\delta(y|u)=\sum_{x=0}^{\infty} f_\delta(x,y|u).$$

Στην περίπτωση $u=0$, το Πόρισμα 2.2.1 δίνει εκφράσεις των εν λόγω συναρτήσεων. Επίσης, για λόγους απλότητας συμβολίζουμε με $g_\delta(y)$ την $g_\delta(y|0)$.

Πόρισμα 2.2.1

Για $x\in \mathbf{N}, y\in \mathbf{N}^+$ *έχουμε*

$$f_\delta(x,y|0)=\frac{\lambda^{[n]}\rho^{[n]}}{\mu^n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\rho_j^{x+n-1}}{\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(\rho_j-\rho_k)} f(x+y), \tag{2.2.25}$$

$$f_\delta(x|0)=\frac{\lambda^{[n]}\rho^{[n]}}{\mu^n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\rho_j^{x+n-1}}{\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(\rho_j-\rho_k)} \bar{F}(x), \tag{2.2.26}$$

$$g_\delta(y|0)=\frac{\lambda^{[n]}\rho^{[n]}}{\mu^n}T_{\rho_1}T_{\rho_2}...T_{\rho_n}f(y). \tag{2.2.27}$$

Απόδειξη

Για την απόδειξη της (2.2.25), θέτοντας στη (2.2.23)

$$\omega(x_1,x_2)=I(x_1=x)I(x_2=y)=\begin{cases}1, & (x_1,x_2)=(x,y)\\ 0, & \text{διαφορετικά}\end{cases}$$

παίρνουμε

$$m_\delta(0)=f_\delta(x,y|0)=\frac{\lambda^{[n]}\rho^{[n]}}{\mu^n}\sum_{u=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{\rho_j^{u+n-1}I(u=x,i=y)}{\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(\rho_j-\rho_k)} f(u+i)$$

$$=\frac{\lambda^{[n]}\rho^{[n]}}{\mu^n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\rho_j^{x+n-1}}{\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(\rho_j-\rho_k)} f(x+y)$$

Στη συνέχεια θεωρώντας το άθροισμα της (2.2.25) ως προς y από το 1 στο ∞, προκύπτει

$$f_\delta(x|0)=\sum_{y=1}^{\infty} f_\delta(x,y|0)=\sum_{y=1}^{\infty}\frac{\lambda^{[n]}\rho^{[n]}}{\mu^n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\rho_j^{u+n-1}}{\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(\rho_j-\rho_k)} f(x+y)$$

$$=\frac{\lambda^{[n]}\rho^{[n]}}{\mu^n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\rho_j^{x+n-1}}{\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(\rho_j-\rho_k)}\sum_{y=1}^{\infty} f(x+y)$$

με αλλαγή μεταβλητής $z=x+y$ το τελευταίο άθροισμα γίνεται

$$\sum_{y=1}^{\infty} f(x+y) = \sum_{z=x+1}^{\infty} f(z) = \bar{F}(x)$$

οπότε η $f_\delta(x|0)$ έχει τη μορφή της (2.2.26).

Για την απόδειξη της (2.2.27) θεωρώντας το άθροισμα της (2.2.25) ως προς x από το 0 στο ∞, προκύπτει

$$g_\delta(y|0) = \sum_{x=0}^{\infty} f_\delta(x,y|0) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^{[n]}\rho^{[n]}}{\mu^n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\rho_j^{x+n-1}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} (\rho_j - \rho_k)} f(x+y)$$

$$= \frac{\lambda^{[n]}\rho^{[n]}}{\mu^n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\rho_j^{n-1}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} (\rho_j - \rho_k)} \sum_{x=0}^{\infty} \rho_j^x f(x+y)$$

και από τον ορισμό του τελεστή T_r (Παράρτημα Π3)

$$= \frac{\lambda^{[n]}\rho^{[n]}}{\mu^n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\rho_j^{n-1}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} (\rho_j - \rho_k)} T_{\rho_j} f(y)$$

και εφαρμόζοντας την Ιδιότητα Β7 του Παραρτήματος Π3 προκύπτει άμεσα η (2.2.27).

□

Λήμμα 2.2.1

Η g_δ είναι μια ελλειμματική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας με γεννήτρια συνάρτηση

$$\hat{g}_\delta(s) = 1 + \frac{\lambda^{[n]}\rho^{[n]}}{\mu^n}\left(\hat{f}(s)\prod_{i=1}^{n} \frac{s}{s-\rho_i} - \prod_{i=1}^{n} \frac{s-q_i}{p_i(s-\rho_i)} \right). \quad (2.2.28)$$

Απόδειξη

Αρχικά βρίσκουμε τη γεννήτρια συνάρτηση της $g_\delta(y)$, $y \in \mathbf{N}^+$,

$$\hat{g}_\delta(s) = \sum_{y=1}^{\infty} s^y g_\delta(y).$$

Από τη σχέση (ιδιότητα Β2, Παράρτημα Π3)

$$T_s g_\delta(1) = \frac{\hat{g}_\delta(s)}{s}$$

είναι

$$\hat{g}_\delta(s) = sT_s g_\delta(1)$$

και από την (2.2.27)

$$\hat{g}_\delta(s) = sT_{\rho_1}T_{\rho_2}...T_{\rho_n} \frac{\lambda^{[n]}\rho^{[n]}}{\mu^n} f(1)$$

$$= \frac{\lambda^{[n]}\rho^{[n]}}{\mu^n} sT_{\rho_1}T_{\rho_2}...T_{\rho_n} f(1)$$

όπου από την ιδιότητα B7 του Παραρτήματος Π3 είναι

$$\hat{g}_\delta(s) = \frac{\lambda^{[n]}\rho^{[n]}}{\mu^n}\left(\hat{f}(s)\prod_{i=1}^{n}\frac{s}{s-\rho_i} - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{s}{s-\rho_i}\right)\frac{\rho_i^{n-1}\hat{f}(\rho_i)}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(\rho_i-\rho_j)}\right).$$

Από τη (2.2.14) για $s = \rho_i$ έχουμε

$$\prod_{k=1}^{n}(\rho_i - q_k) = \hat{f}(\rho_i)\rho_i^n\prod_{k=1}^{n}p_k$$

ή

$$\rho_i^{n-1}\hat{f}(\rho_i) = \frac{\prod_{k=1}^{n}(\rho_i-q_k)}{\rho_i\prod_{k=1}^{n}p_k}.$$

Έτσι,

$$\hat{g}_\delta(s) = \frac{\lambda^{[n]}\rho^{[n]}}{\mu^n}\left(\hat{f}(s)\prod_{i=1}^{n}\frac{s}{s-\rho_i} - \sum_{i=1}^{n}\frac{s\prod_{k=1}^{n}(\rho_i-q_k)}{(s-\rho_i)\rho_i\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(\rho_i-\rho_j)\prod_{k=1}^{n}p_k}\right). \qquad (2.2.29)$$

Σύμφωνα με το Lin (2004) ισχύει

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{s\prod_{k=1}^{n}(\rho_i-q_k)}{(s-\rho_i)\rho_i\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(\rho_i-\rho_j)} = \frac{\prod_{i=1}^{n}(s-q_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-\rho_i)} - \frac{\prod_{i=1}^{n}q_i}{\rho^{[n]}}.$$

Συνεπώς η (2.2.29) γίνεται διαδοχικά

$$\hat{g}_\delta(s) = \frac{\lambda^{[n]}\rho^{[n]}}{\mu^n}\left(\hat{f}(s)\prod_{i=1}^{n}\frac{s}{s-\rho_i} - \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}p_k}\left(\frac{\prod_{i=1}^{n}(s-q_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-\rho_i)} - \frac{\prod_{i=1}^{n}q_i}{\rho^{[n]}}\right)\right)$$

$$= \frac{\lambda^{[n]}\rho^{[n]}}{\mu^n}\left(\hat{f}(s)\prod_{i=1}^{n}\frac{s}{s-\rho_i} - \prod_{i=1}^{n}\frac{s-q_i}{p_i(s-\rho_i)} + \frac{1}{\rho^{[n]}}\prod_{i=1}^{n}\frac{q_i}{p_i}\right)$$

$$=\frac{\lambda^{[n]}\rho^{[n]}}{\mu^n}\left(\hat{f}(s)\prod_{i=1}^{n}\frac{s}{s-\rho_i}-\prod_{i=1}^{n}\frac{s-q_i}{p_i(s-\rho_i)}+\frac{1}{\rho^{[n]}}\prod_{i=1}^{n}\frac{\frac{\mu}{\mu+\lambda_i+\delta}}{\frac{\lambda_i}{\mu+\lambda_i+\delta}}\right)$$

$$=\frac{\lambda^{[n]}\rho^{[n]}}{\mu^n}\left(\hat{f}(s)\prod_{i=1}^{n}\frac{s}{s-\rho_i}-\prod_{i=1}^{n}\frac{s-q_i}{p_i(s-\rho_i)}+\frac{1}{\rho^{[n]}}\frac{\mu^n}{\lambda^{[n]}}\right)$$

από την οποία προκύπτει η (2.2.28).

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι η g_δ είναι μια ελλειμματική σ.π.π. Αρκεί να δείξουμε ότι $\sum_{y=1}^{\infty} g_\delta(y)<1$ για $\delta\geq 0$.

Αρχικά θεωρούμε $\delta>0$. Είναι

$$\sum_{y=1}^{\infty} g_\delta(y)=\lim_{s\to 1}\hat{g}_\delta(s)$$

και από (2.2.28)

$$\sum_{y=1}^{\infty} g_\delta(y)=\lim_{s\to 1}\left(1+\frac{\lambda^{[n]}\rho^{[n]}}{\mu^n}\left(\hat{f}(s)\prod_{i=1}^{n}\frac{s}{s-\rho_i}-\prod_{i=1}^{n}\frac{s-q_i}{p_i(s-\rho_i)}\right)\right)$$

$$=1+\frac{\lambda^{[n]}\rho^{[n]}}{\mu^n}\left(\hat{f}(1)\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1-\rho_i}-\prod_{i=1}^{n}\frac{1-q_i}{p_i(1-\rho_i)}\right).$$

Αλλά

$$\frac{1-q_i}{p_i}=\frac{1-\frac{\mu}{\mu+\lambda_i+\delta}}{\frac{\lambda_i}{\mu+\lambda_i+\delta}}=\frac{\lambda_i+\delta}{\lambda_i}\text{ και }\hat{f}(1)=1 \tag{2.2.30}$$

οπότε

$$\sum_{y=1}^{\infty} g_\delta(y)=1+\frac{\lambda^{[n]}\rho^{[n]}}{\mu^n}\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1-\rho_i}\right)\left(1-\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i+\delta}{\lambda_i}\right)$$

$$=1+\frac{\lambda^{[n]}\rho^{[n]}}{\mu^n}\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(1-\rho_i)}\frac{\prod_{i=1}^{n}\lambda_i-\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i+\delta)}{\prod_{i=1}^{n}\lambda_i}$$

$$=1+\frac{\rho^{[n]}}{\mu^n}\frac{\prod_{i=1}^{n}\lambda_i-\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i+\delta)}{\prod_{i=1}^{n}(1-\rho_i)}<1$$

όπου η ανισότητα προέκυψε λόγω ότι $\prod_{i=1}^{n}\lambda_i<\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i+\delta)$.

Εξετάζουμε τώρα την περίπτωση $\delta = 0$.

Αρχικά θεωρούμε τη γενικευμένη εξίσωση Lundberg της σχέσης (2.2.14),

$$\prod_{i=1}^{n}(s-q_i) = \hat{f}(s)s^n \prod_{i=1}^{n} p_i$$

παίρνοντας λογαρίθμους και στα δύο μέλη έχουμε

$$\ln \prod_{i=1}^{n}(s-q_i) = \ln\left(\hat{f}(s)s^n \prod_{i=1}^{n} p_i \right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \ln(s-q_i) = \ln \hat{f}(s) + n\ln s + \sum_{i=1}^{n} \ln p_i \,.$$

Για $s = \rho_n(\delta)$ η τελευταία σχέση γίνεται

$$\sum_{i=1}^{n} \ln(\rho_n(\delta)-q_i) = \ln \hat{f}(\rho_n(\delta)) + n\ln \rho_n(\delta) + \sum_{i=1}^{n} \ln p_i \,.$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι τα p_i και q_i είναι συναρτήσεις του δ, παραγωγίζουμε ως προς δ και τα δύο μέλη βρίσκουμε

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\rho_n'(\delta) - q_i'}{\rho_n(\delta) - q_i} = \frac{\hat{f}'(\rho_n(\delta))}{\hat{f}(\rho_n(\delta))}\rho_n'(\delta) + n\frac{\rho_n'(\delta)}{\rho_n(\delta)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i'}{p_i} \,.$$

Αλλά

$$p_i' = \frac{d}{d\delta}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda + \lambda_i + \delta} \right) = -\frac{\lambda_i}{(\lambda + \lambda_i + \delta)^2} \text{ και } q_i' = \frac{d}{d\delta}\left(\frac{\lambda}{\lambda + \lambda_i + \delta} \right) = -\frac{\lambda}{(\lambda + \lambda_i + \delta)^2}$$

οπότε αντικαθιστώντας στην παραπάνω ισότητα είναι

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\rho_n'(\delta) + \dfrac{\mu}{(\mu + \lambda_i + \delta)^2}}{\rho_n(\delta) - \dfrac{\mu}{\mu + \lambda_i + \delta}} = \frac{\hat{f}'(\rho_n(\delta))}{\hat{f}(\rho_n(\delta))}\rho_n'(\delta) + n\frac{\rho_n'(\delta)}{\rho_n(\delta)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{-\dfrac{\lambda_i}{(\mu + \lambda_i + \delta)^2}}{\dfrac{\lambda_i}{\mu + \lambda_i + \delta}} \,.$$

Θέτουμε $\delta = 0$ και αφού είναι $\rho_n(0) = 1$, προκύπτει

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\rho_n'(0) + \dfrac{\mu}{(\lambda + \lambda_i)^2}}{1 - \dfrac{\mu}{\mu + \lambda_i}} = \frac{\hat{f}'(1)}{\hat{f}(1)}\rho_n'(0) + n\rho_n'(0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{-\dfrac{\lambda_i}{(\mu + \lambda_i)^2}}{\dfrac{\lambda_i}{\mu + \lambda_i}} \,. \qquad (2.2.31)$$

Για τη διακριτή συνάρτηση πιθανότητας $f(y)$, $y \in \mathbf{N}^+$, που εξετάζουμε, η γεννήτρια συνάρτηση είναι

$$\hat{f}(s) = \sum_{y=1}^{\infty} s^y f(\mathrm{y})$$

από την οποία βρίσκουμε

$$\hat{f}(1) = \sum_{y=1}^{\infty} f(y) = 1$$

και

$$\hat{f}'(1) = \frac{d}{ds}\hat{f}(s)\Big|_{s=1} = \frac{d}{ds}\sum_{y=1}^{\infty} s^y f(y)\Big|_{s=1} = \sum_{y=1}^{\infty}\frac{d}{ds} s^y f(y)\Big|_{s=1} = \sum_{y=1}^{\infty} y s^{y-1} f(y)\Big|_{s=1} = \sum_{y=1}^{\infty} y\, f(y) = E(Y) = \mu_F\,.$$

Οπότε η (2.2.31) γίνεται διαδοχικά

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\rho_n'(0)(\mu+\lambda_i)^2+\mu}{\lambda_i(\mu+\lambda_i)} = \mu_F\rho_n'(0) + n\rho_n'(0) - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\mu+\lambda_i}$$

$$\rho_n'(0)\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu+\lambda_i}{\lambda_i} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\mu}{\lambda_i(\mu+\lambda_i)} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\mu+\lambda_i} = \mu_F\rho_n'(0) + n\rho_n'(0)$$

$$\rho_n'(0)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu}{\lambda_i} + n\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\mu}{\lambda_i(\mu+\lambda_i)} + \frac{1}{\mu+\lambda_i}\right) = \mu_F\rho_n'(0) + n\rho_n'(0)$$

$$\rho_n'(0)\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu}{\lambda_i} + n\rho_n'(0) + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i} = \mu_F\rho_n'(0) + n\rho_n'(0)$$

$$\rho_n'(0)\left(\mu_F - \sum_{i=1}^{n}\frac{\mu}{\lambda_i}\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}$$

$$\rho_n'(0) = \frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda_k}}{\mu_F - \sum_{k=1}^{n}\frac{\mu}{\lambda_k}} \tag{2.2.32}$$

Συνεπώς,

$$\sum_{y=1}^{\infty} g_0(y) = \lim_{\delta\to 0^+}\lim_{s\to 1}\hat{g}_\delta(s)$$

και από (2.2.28)

$$\sum_{y=1}^{\infty} g_0(y) = \lim_{\delta\to 0^+}\lim_{s\to 1}\left(1 + \frac{\lambda^{[n]}\rho^{[n]}}{\mu^n}\left(\hat{f}(s)\prod_{i=1}^{n}\frac{s}{s-\rho_i} - \prod_{i=1}^{n}\frac{s-q_i}{p_i(s-\rho_i)}\right)\right)$$

$$= \lim_{\delta\to 0^+}\left(1 + \frac{\lambda^{[n]}\rho^{[n]}}{\mu^n}\left(\hat{f}(1)\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(1-\rho_i)} - \prod_{i=1}^{n}\frac{1-q_i}{p_i}\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(1-\rho_i)}\right)\right)$$

αλλά από (2.2.30) καθώς και ότι $\lambda^{[n]} = \prod_{i=1}^{n}\lambda_i$, $\rho^{[n]} = \prod_{i=1}^{n}\rho_i$, έχουμε

$$\sum_{y=1}^{\infty} g_0(y) = \lim_{\delta \to 0^+} \left(1 + \frac{\prod_{i=1}^{n} \rho_i}{\mu^n} \frac{\prod_{i=1}^{n} \lambda_i - \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i + \delta)}{\prod_{i=1}^{n} (1 - \rho_i)} \right)$$

$$= 1 + \lim_{\delta \to 0^+} \frac{\rho_n \prod_{i=1}^{n-1} \rho_i}{\lambda^n} \frac{\prod_{i=1}^{n} \lambda_i - \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i + \delta)}{(1 - \rho_n) \prod_{i=1}^{n-1} (1 - \rho_i)}$$

$$= 1 + \frac{\prod_{i=1}^{n-1} \rho_i}{\lambda^n \prod_{i=1}^{n-1} (1 - \rho_i)} \lim_{\delta \to 0^+} \frac{\rho_n \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i - \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i + \delta) \right)}{1 - \rho_n} .$$

αλλά σύμφωνα με την Παρατήρηση 2.2.2 είναι $\lim_{\delta \to 0^+} \rho_n(\delta) = 1$, οπότε το όριο του κλάσματος καθώς $\delta \to 0^+$ είναι $\frac{0}{0}$, δηλαδή έχουμε απροσδιοριστία, και εφαρμόζουμε τον κανόνα L'Hospital, δηλαδή,

$$\lim_{\delta \to 0^+} \frac{\rho_n(\delta) \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i - \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i + \delta) \right)}{1 - \rho_n(\delta)} = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{\rho_n'(\delta) \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i - \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i + \delta) \right) - \rho_n(\delta) \frac{d}{d\delta} \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i + \delta)}{-\rho_n'(\delta)}$$

αλλά για την παραγώγιση γινομένου συναρτήσεων ισχύει $\frac{d}{dx} \prod_{i=1}^{n} h_i(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d}{dx} h_i(x) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} h_j(x) \right)$

οπότε

$$\lim_{\delta \to 0^+} \frac{\rho_n(\delta) \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i - \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i + \delta) \right)}{1 - \rho_n(\delta)} = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{\rho_n'(\delta) \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i - \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i + \delta) \right) - \rho_n(\delta) \sum_{k=1}^{n} \left(1 \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} (\lambda_i + \delta) \right)}{-\rho_n'(\delta)}$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{n} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \lambda_i}{\rho_n'(0)}$$

και τελικά

$$\sum_{y=1}^{\infty} g_0(y) = 1 + \frac{\prod_{i=1}^{n-1} \rho_i}{\mu^n \prod_{i=1}^{n-1} (1 - \rho_i)} \frac{\sum_{k=1}^{n} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \lambda_i}{\rho_n'(0)}$$

όπου αντικαθιστώντας το $\rho_n'(0)$ από (2.2.32)

$$\sum_{y=1}^{\infty} g_0(y) = 1 + \left(\prod_{i=1}^{n-1} \frac{\rho_i}{1-\rho_i} \right) \frac{1}{\mu^n} \left(\mu_F - \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu}{\lambda_k} \right) \frac{\sum_{k=1}^{n} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \lambda_i}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k}}$$

και με χρήση του τύπου $\frac{\sum_{k=1}^{n} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \lambda_i}{\prod_{i=1}^{n} \lambda_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k}$

$$\sum_{y=1}^{\infty} g_0(y) = 1 + \left(\prod_{i=1}^{n-1} \frac{\rho_i}{1-\rho_i} \right) \frac{1}{\mu^n} \left(\mu_F - \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu}{\lambda_k} \right) \lambda^{[n]} < 1$$

όπου η ανισότητα προέκυψε λόγω της συνθήκης (2.2.2), από την οποία είναι $\mu_F - \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu}{\lambda_k} < 0$.

□

Από το Λήμμα 2.2.1 συμπεραίνουμε ότι οι $f_\delta(x, y \,|\, 0)$ και $f_\delta(x \,|\, 0)$ είναι ελλειμματικές συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας αφού

$$\sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=1}^{\infty} f_\delta(x, y \,|\, 0) = \sum_{y=1}^{\infty} g_\delta(y) < 1 .$$

Από την απόδειξη του Λήμματος 2.2.1 έχουμε επίσης ότι ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας είναι

$$\phi_T(0) := E[e^{-\delta t} I(T < \infty) \,|\, U(0) = 0] = \sum_{y=1}^{\infty} g_\delta(y)$$

$$= 1 + \frac{\rho^{[n]}}{\mu^n} \frac{\prod_{i=1}^{n} \lambda_i - \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i + \delta)}{\prod_{i=1}^{n} (1-\rho_i)} ,$$

καθώς και ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι

$$\psi(0) = \sum_{y=1}^{\infty} g_0(y) = 1 + \left(\prod_{i=1}^{n-1} \frac{\rho_i}{1-\rho_i} \right) \frac{\lambda^{[n]}}{\mu^n} \left(\mu_F - \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu}{\lambda_k} \right).$$

2.2.4 Ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση για τη συνάρτηση Gerber-Shiu

Οι Gerber and Shiu (1998), πρότειναν τη μελέτη της προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής μέσω μιας ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης και έκτοτε πολλοί ερευνητές (για παράδειγμα, Gerber & Shiu (2005), Willmott (2007), Li (2005)) ακολουθούν αυτή την τεχνική. Στο μοντέλο κινδύνου που εξετάζουμε, η προσέγγιση αυτή είναι εφαρμόσιμη καθώς η διαδικασία άφιξης των ασφαλίστρων έχει την ιδιότητα των στάσιμων και ανεξάρτητων προσαυξήσεων.

Η Πρόταση 2.2.4 δίνει μια αναδρομική εξίσωση που ικανοποιεί η συνάρτηση Gerber-Shiu $m_\delta(u)$.

Πρόταση 2.2.4

Η Gerber-Shiu συνάρτηση $m_\delta(u)$ ικανοποιεί την επόμενη ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

$$m_\delta(u) = \sum_{y=1}^{u} m_\delta(u-y) g_\delta(y) + H_\delta(u) \tag{2.2.33}$$

όπου

$$H_\delta(u) = \frac{\lambda^{[n]}\rho^{[n]}}{\mu^n} T_{\rho_1} T_{\rho_2} \dots T_{\rho_n} w(u). \tag{2.2.34}$$

Απόδειξη

Δεσμεύοντας ως προς το χρόνο που το πλεόνασμα πέφτει κάτω από το αρχικό αποθεματικό u για πρώτη φορά, έχουμε (για $y \le u$ η διαδικασία συνεχίζει με αποθεματικό $u-y$ και έχουμε τη συνάρτηση $m_\delta(u-y)$, ενώ για $y \ge u+1$ εφαρμόζεται η συνάρτηση ποινής)

$$m_\delta(u) = \sum_{y=1}^{u}\sum_{x=0}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\delta t} m_\delta(u-y) f_\delta(x,y,t\,|\,0)dt + \sum_{y=u+1}^{\infty}\sum_{x=0}^{\infty}\int_0^{\infty} \omega(x+u,y-u) e^{-\delta t} f_\delta(x,y,t\,|\,0)dt$$

$$= \sum_{y=1}^{u} m_\delta(u-y) \sum_{x=0}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\delta t} f_\delta(x,y,t\,|\,0)dt + \sum_{y=u+1}^{\infty}\sum_{x=0}^{\infty} \omega(x+u,y-u)\int_0^{\infty} e^{-\delta t} f_\delta(x,y,t\,|\,0)dt$$

αλλά

$$\int_0^{\infty} f_\delta(x,y,t\,|\,u) e^{-\delta t} dt = f_\delta(x,y\,|\,u) \text{ και για } u=0,\ \int_0^{\infty} f_\delta(x,y,t\,|\,0) e^{-\delta t} dt = f_\delta(x,y\,|\,0)$$

και

$$\sum_{x=0}^{\infty} f_\delta(x,y\,|\,u) = g_\delta(y\,|\,u) \text{ και για } u=0,\ \sum_{x=0}^{\infty} f_\delta(x,y\,|\,0) = g_\delta(y\,|\,0) \equiv g_\delta(y)$$

οπότε

$$m_\delta(u) = \sum_{y=1}^{u} m_\delta(u-y) g_\delta(y) + \sum_{y=u+1}^{\infty}\sum_{x=0}^{\infty} \omega(x+u,y-u) f_\delta(x,y\,|\,0)$$

$$= \sum_{y=1}^{u} m_\delta(u-y) g_\delta(y) + H_\delta(u) \tag{2.2.35}$$

όπου

$$H_\delta(u)=\sum_{y=u+1}^{\infty}\sum_{x=0}^{\infty}\omega(x+u,y-u)\int_0^\infty e^{-\delta t}f(x,y,t\,|\,0)dt$$

$$=\sum_{y=u+1}^{\infty}\sum_{x=0}^{\infty}\omega(x+u,y-u)\,f_\delta(x,y\,|\,0)$$

κάνοντας αλλαγή μεταβλητών στη συνάρτηση $\omega(\cdot,\cdot)$ παίρνουμε

$$H_\delta(u)=\sum_{y=1}^{\infty}\sum_{x=u}^{\infty}\omega(x,y)\,f_\delta(x-u,y+u\,|\,0)$$

αντικαθιστώντας την (2.2.25) έχουμε

$$H_\delta(u)=\frac{\lambda^{[n]}\rho^{[n]}}{\mu^n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(\rho_j-\rho_k)}\sum_{y=1}^{\infty}\sum_{x=u}^{\infty}\omega(x,y)\rho_j^{x-u+n-1}f(x+y)\,. \tag{2.2.36}$$

Για το διπλό άθροισμα έχουμε διαδοχικά: με την αλλαγή μεταβλητής $y=i-u$ γίνεται

$$\sum_{x=u}^{\infty}\rho_j^{x-u+n-1}\sum_{y=1}^{\infty}\omega(x,y)\,f(x+y)=\sum_{x=u}^{\infty}\rho_j^{x-u+n-1}\sum_{i=u+1}^{\infty}\omega(x,i-u)\,f(x+i-u)$$

και κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $z=x-u$

$$=\sum_{z=0}^{\infty}\rho_j^{z+n-1}\sum_{i=u+1}^{\infty}\omega(z+u,i-u)\,f(z+i)$$

$$=\sum_{z=0}^{\infty}\rho_j^{z+n-1}w(z+u)$$

$$=\rho_j^{n-1}\sum_{z=0}^{\infty}\rho_j^{z}w(z+u)$$

και από τον ορισμό του τελεστή T_r

$$=\rho_j^{n-1}T_{\rho_j}w(u)\,.$$

Οπότε η (2.2.36) γίνεται

$$H_\delta(u)=\frac{\lambda^{[n]}\rho^{[n]}}{\mu^n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(\rho_j-\rho_k)}\rho_j^{n-1}T_{\rho_j}w(u)$$

και από την ιδιότητα B7 του Παραρτήματος Π3 η προηγούμενη σχέση γράφεται

$$H_\delta(u)=\frac{\lambda^{[n]}\rho^{[n]}}{\mu^n}T_{\rho_1}T_{\rho_2}...T_{\rho_n}w(u)$$

που είναι η ζητούμενη σχέση (2.2.34).

Αφού η g_δ είναι μια ελλειμματική σ.π.π., η Εξίσωση (2.2.35) είναι μία ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση.

□

Για να κανονικοποιήσουμε την g_δ, θέτουμε

$$\beta = \frac{1}{\sum_{y=1}^{\infty} g_\delta(y)} - 1 > 0 \quad \text{και} \quad \alpha_\delta(y) = (1+\beta) g_\delta(y)\,.$$

Τότε η $\alpha_\delta(y)$ είναι μια κανονική (proper) ή μη-ελλειμματική (non-defective) σ.π.π. αφού

$$\sum_{y=1}^{\infty} \alpha_\delta(y) = \sum_{y=1}^{\infty} (1+\beta) g_\delta(y) = (1+\beta) \sum_{y=1}^{\infty} g_\delta(y) = \frac{1}{\sum_{y=1}^{\infty} g_\delta(y)} \sum_{y=1}^{\infty} g_\delta(y) = 1\,,$$

με αθροιστική συνάρτηση κατανομής $A_\delta(y) = \sum_{x=1}^{y} \alpha_\delta(x)$.

Ορίζουμε τη δεξιά ουρά της σύνθετης γεωμετρικής

$$\bar{K}(y) = 1 - K(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta}{1+\beta} \left(\frac{1}{1+\beta} \right)^n \overline{A}_\delta^{n}(y)$$

όπου $\overline{A}_\delta^{*n}(y)$ είναι η δυναμοσυνέλιξη n-τάξης της δεξιάς ουράς $\overline{A}_\delta(y)$. Η συνάρτηση πιθανότητας της K συμβολίζεται με k με $k(0) = \dfrac{\beta}{1+\beta}$.

Η (2.2.35) γράφεται

$$\begin{aligned} m_\delta(u) &= \sum_{y=1}^{u} m_\delta(u-y) \frac{\alpha_\delta(y)}{1+\beta} + H_\delta(u) \\ &= \frac{1}{1+\beta} \sum_{y=1}^{u} m_\delta(u-y) \alpha_\delta(y) + H_\delta(u)\,. \end{aligned} \tag{2.2.37}$$

Η τελευταία είναι ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση και έχει την ίδια μορφή με την σχέση (24) στο Bao (2006) και η λύση της εκφράζεται ως (Θεώρημα 2.2 στο Bao (2006) ή Θεώρημα 1 στο Li (2005b))

$$m_\delta(u) = \frac{1+\beta}{\beta} \sum_{y=1}^{u} H_\delta(u-y) k(y) + H_\delta(u)\,. \tag{2.2.38}$$

Με βάση την σχέση (2.2.38) μπορούμε να δώσουμε εκφράσεις για διάφορα μέτρα κινδύνου (για παράδειγμα Li (2005b)). Στο Πόρισμα 2.2.2 δίνονται η προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των $U(T^-)$ και $|U(T)|$, και η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας της $U(T^-)$, που συμβολίζονται αντίστοιχα $f_\delta(x, y \mid u)$ και $f_\delta(x \mid u)$.

Πόρισμα 2.2.2

Για $x \in \mathbf{N}$ και $y \in \mathbf{N}^+$ έχουμε

$$f_\delta(x,y|u)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^{[n]}\rho^{[n]}}{\mu^n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{\rho_j^{x-u+n-1}f(x+y)}{\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(\rho_j-\rho_k)}\left(1+\frac{1+\beta}{\beta}\sum_{z=1}^{n}\rho_j^z k(z)\right), & u\le x\\[2ex] \dfrac{1+\beta}{\beta}\dfrac{\lambda^{[n]}\rho^{[n]}}{\mu^n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{\rho_j^{x-u+n-1}f(x+y)}{\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(\rho_j-\rho_k)}\sum_{z=u-x}^{n}\rho_j^z k(z), & u>x\end{cases} \tag{2.2.39}$$

$$f_\delta(x|u)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^{[n]}\rho^{[n]}}{\mu^n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{\rho_j^{x-u+n-1}\bar{F}(x)}{\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(\rho_j-\rho_k)}\left(1+\frac{1+\beta}{\beta}\sum_{z=1}^{n}\rho_j^z k(z)\right), & u\le x\\[2ex] \dfrac{1+\beta}{\beta}\dfrac{\lambda^{[n]}\rho^{[n]}}{\mu^n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{\rho_j^{x-u+n-1}\bar{F}(x)}{\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(\rho_j-\rho_k)}\sum_{z=u-x}^{n}\rho_j^z k(z), & u>x\end{cases} \tag{2.2.40}$$

Απόδειξη

Εάν θέσουμε

$$\omega(x_1,x_2)=I(x_1=x)I(x_2=y)=\begin{cases}1, & (x_1,x_2)=(x,y)\\ 0, & \text{διαφορετικά}\end{cases}$$

τότε $m_\delta(u)=f_\delta(x,y|u)$.

Όταν $u\le x$ από την (2.2.36) παίρνουμε

$$\begin{aligned}H_\delta(u)&=\frac{\lambda^{[n]}\rho^{[n]}}{\mu^n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(\rho_j-\rho_k)}\sum_{i=u}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\omega(i,l)\rho_j^{i-u+n-1}f(i+l)\\ &=\frac{\lambda^{[n]}\rho^{[n]}}{\mu^n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(\rho_j-\rho_k)}\sum_{i=u}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}I(i=x)I(l=y)\rho_j^{i-u+n-1}f(i+l)\\ &=\frac{\lambda^{[n]}\rho^{[n]}}{\mu^n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\rho_j^{x-u+n-1}}{\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(\rho_j-\rho_k)}f(x+y)\end{aligned}$$

η οποία σε συνδυασμό με την (2.2.38) δίνει

$$f_\delta(x,y|u)=\frac{1+\beta}{\beta}\sum_{z=1}^{u}H_\delta(u-z)k(\mathrm{z})+H_\delta(u)$$

$$= \frac{1+\beta}{\beta}\sum_{z=1}^{u}\left(\frac{\lambda^{[n]}\rho^{[n]}}{\mu^{n}}\sum_{j=1}^{n}\frac{\rho_j^{x-(u-z)+n-1}}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(\rho_j-\rho_k)} f(x+y)\right)k(\mathrm{z})+\frac{\lambda^{[n]}\rho^{[n]}}{\mu^{n}}\sum_{j=1}^{n}\frac{\rho_j^{x-u+n-1}}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(\rho_j-\rho_k)} f(x+y)$$

$$= \frac{\lambda^{[n]}\rho^{[n]}}{\mu^{n}}\sum_{j=1}^{n}\frac{\rho_j^{x-(u-z)+n-1}}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(\rho_j-\rho_k)} f(x+y)\frac{1+\beta}{\beta}\sum_{z=1}^{u}\rho_j^{z}k(\mathrm{z})+\frac{\lambda^{[n]}\rho^{[n]}}{\mu^{n}}\sum_{j=1}^{n}\frac{\rho_j^{x-u+n-1}}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(\rho_j-\rho_k)} f(x+y)$$

και βγάζοντας κοινό παράγοντα το δεύτερο όρο του αθροίσματος προκύπτει η (2.2.39) για $u \le x$.

Όταν $u > x$, είναι $H_\delta(u) = 0$. Όταν $u - z > x$ είναι $H_\delta(u-z) = 0$ και όταν $u - z \le x$ είναι

$$H_\delta(u-z) = \frac{\lambda^{[n]}\rho^{[n]}}{\mu^{n}}\sum_{j=1}^{n}\frac{\rho_j^{x-u+z+n-1}}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(\rho_j-\rho_k)} f(x+y).$$

Από την (2.2.38) προκύπτει η (2.2.39) στην περίπτωση $u > x$.

Η (2.2.40) προκύπτει άμεσα από την (2.2.39) αθροίζοντας ως προς y από το 1 έως το ∞.

□

Παρατήρηση 2.2.3. Θέτοντας στις Εξισώσεις (2.2.39) και (2.2.40) $n = 1$ προκύπτουν σαν ειδική περίπτωση τα αποτελέσματα της εργασίας του Bao (2006). Επιπλέον, από το Πόρισμα 2.2.2, ισχύει

$$f_\delta(x, y \mid u) = f_\delta(x \mid u)\frac{f(x+y)}{\bar{F}(x)}$$

η οποία είναι η Εξίσωση (36) στον Bao (2006).

Λήμμα 2.2.2

Η γεννήτρια συνάρτηση της $H_\delta(u)$ εκφράζεται ως

$$\hat{H}_\delta(s) = \frac{\lambda^{[n]}\rho^{[n]}}{\mu^{n}}\sum_{j=1}^{n}\frac{s^{n}\hat{w}(s)-\rho_j^{n}\hat{w}(\rho_j)}{(s-\rho_j)\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(\rho_j-\rho_k)}. \qquad (2.2.41)$$

Απόδειξη

Από την (2.2.34), η

$$H_\delta(u) = \frac{\lambda^{[n]}\rho^{[n]}}{\mu^{n}}T_{\rho_1}T_{\rho_2}\ldots T_{\rho_n}w(u)$$

με βάση την ιδιότητα Β7 του Παραρτήματος Π3 γράφεται ως

$$H_\delta(u) = \frac{\lambda^{[n]}\rho^{[n]}}{\mu^n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\rho_j^{n-1}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} (\rho_j - \rho_k)} T_{\rho_j} w(u).$$

Τότε η γεννήτρια συνάρτηση της $H_\delta(u)$ είναι

$$\hat{H}_\delta(s) = T_s H(0) = T_s \frac{\lambda^{[n]}\rho^{[n]}}{\mu^n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\rho_j^{n-1}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} (\rho_j - \rho_k)} T_{\rho_j} w(0)$$

$$= \frac{\lambda^{[n]}\rho^{[n]}}{\mu^n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\rho_j^{n-1}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} (\rho_j - \rho_k)} T_s T_{\rho_j} w(0)$$

και από την ιδιότητα Β5 του Παραρτήματος Π3

$$= \frac{\lambda^{[n]}\rho^{[n]}}{\mu^n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\rho_j^{n-1}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} (\rho_j - \rho_k)} \frac{s\hat{w}(s) - \rho_j \hat{w}(\rho_j)}{s - \rho_j}$$

$$= \frac{\lambda^{[n]}\rho^{[n]}}{\mu^n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} (\rho_j - \rho_k)} \frac{s\hat{w}(s)\rho_j^{n-1} - \rho_j^n \hat{w}(\rho_j)}{s - \rho_j}$$

$$= \frac{\lambda^{[n]}\rho^{[n]}}{\mu^n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} (\rho_j - \rho_k)} \frac{s^n\hat{w}(s) - s^n\hat{w}(s) + s\hat{w}(s)\rho_j^{n-1} - \rho_j^n \hat{w}(\rho_j)}{s - \rho_j}$$

$$= \frac{\lambda^{[n]}\rho^{[n]}}{\mu^n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} (\rho_j - \rho_k)} \left(\frac{s^n\hat{w}(s) - \rho_j^n \hat{w}(\rho_j)}{s - \rho_j} - \frac{s\hat{w}(s)(\rho_j^{n-1} - s^{n-1})}{\rho_j - s} \right)$$

$$= \frac{\lambda^{[n]}\rho^{[n]}}{\mu^n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{s^n\hat{w}(s) - \rho_j^n \hat{w}(\rho_j)}{(s - \rho_j)\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} (\rho_j - \rho_k)} - \sum_{j=1}^{n} \frac{s\hat{w}(s)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} (\rho_j - \rho_k)} \frac{\rho_j^{n-1} - s^{n-1}}{\rho_j - s} \right).$$

Συνεπώς, για να δείξουμε την (2.2.41), αρκεί να δείξουμε ότι

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{s\hat{w}(s)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} (\rho_j - \rho_k)} \frac{\rho_j^{n-1} - s^{n-1}}{\rho_j - s} = 0. \qquad (2.2.42)$$

Από την ταυτότητα

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}),\ n \in \mathbf{N}^*$$

η (2.2.42) γίνεται

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{s\hat{w}(s)}{\prod\limits_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n}(\rho_j - \rho_k)} \frac{\rho_j^{n-1} - s^{n-1}}{\rho_j - s} = \sum_{j=1}^{n} \frac{s\hat{w}(s)}{\prod\limits_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n}(\rho_j - \rho_k)} (\rho_j^{n-2} + \rho_j^{n-3}s + \ldots + s^{n-2})$$

$$= s\hat{w}(s)\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\prod\limits_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n}(\rho_j - \rho_k)} \rho_j^{n-2} + s\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\prod\limits_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n}(\rho_j - \rho_k)} \rho_j^{n-3} + \ldots + s^{n-2} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\prod\limits_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n}(\rho_j - \rho_k)} \right) = 0$$

με χρήση της επόμενης σχέσης από τη θεωρία παρεμβολής

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{(\rho_j - s)^m}{\prod\limits_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n}(\rho_j - \rho_k)} = 0,\quad m = 0, 1, 2, \ldots, n-2.$$

Συνεπώς, η (2.2.42) ισχύει και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

□

Πρόταση 2.2.5

Η γεννήτρια συνάρτηση της $m_\delta(u)$ δίνεται από τη σχέση

$$\hat{m}_\delta(s) = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{s^n \hat{w}(s) - \rho_j^n \hat{w}(\rho_j)}{(s-\rho_j)\prod\limits_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n}(\rho_j - \rho_k)}}{\prod\limits_{i=1}^{n} \dfrac{s - q_i}{p_i(s-\rho_i)} - \hat{f}(s)\prod\limits_{i=1}^{n} \dfrac{s}{s-\rho_i}}\ . \qquad (2.2.43)$$

Απόδειξη

Από την (2.2.33) πολλαπλασιάζοντας με s^u και αθροίζοντας ως προς u από το 0 στο ∞ έχουμε

$$m_\delta(u) = \sum_{y=1}^{u} m_\delta(u-y) g_\delta(y) + H_\delta(u)$$

$$\sum_{u=0}^{\infty} s^u m_\delta(u) = \sum_{u=0}^{\infty} s^u \sum_{y=1}^{u} m_\delta(u-y) g_\delta(y) + \sum_{u=0}^{\infty} s^u H_\delta(u)$$

Το άθροισμα στο αριστερό μέλος και το άθροισμα στο δεξιό μέλος της παραπάνω ισότητας είναι αντίστοιχα η γεννήτρια συνάρτηση του $m_\delta(u)$ και $H_\delta(u)$, ενώ το διπλό άθροισμα αφορά στη συνέλιξη των $m_\delta(u)$ και $g_\delta(y)$, οπότε

$$\hat{m}_\delta(s) = \hat{m}_\delta(s)\hat{g}_\delta(s) + \hat{H}_\delta(s)$$

$$\hat{m}_\delta(s)(1-\hat{g}_\delta(s)) = \hat{H}_\delta(s)$$

$$\hat{m}_\delta(s) = \frac{\hat{H}_\delta(s)}{1-\hat{g}_\delta(s)}.$$

Με αντικατάσταση των (2.2.28) και (2.2.41) στην προηγούμενη σχέση προκύπτει η (2.2.43).

□

Παίρνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό της $\hat{m}_\delta(s)$ μπορούμε να βρούμε κλειστές εκφράσεις για τη συνάρτηση Gerber-Shiu $m_\delta(u)$ για διάφορες ειδικές περιπτώσεις. Μια τέτοια περίπτωση θα αναπτυχθεί για την εκτίμηση του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας που είναι το αντικείμενο της επόμενης ενότητας.

2.2.5 Μετασχηματισμός Laplace του χρόνου μέχρι τη χρεοκοπία

Στην ενότητα αυτή μελετάται η συνάρτηση Gerber-Shiu όταν $\delta > 0$ και $\omega(x_1, x_2) = 1$ για $x_1 \in \mathbf{N}$, $x_2 \in \mathbf{N}^+$. Στην περίπτωση αυτή, έχουμε

$$\phi_T(u) = E[e^{\delta\tau} I(T < \infty) \,|\, U(0) = u]$$

που είναι ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου μέχρι τη χρεοκοπία.
Σκοπός μας είναι να αναπτύξουμε κλειστές εκφράσεις για την $\phi_T(u)$. Προς τούτο, θεωρούμε την ειδική περίπτωση όπου η διακριτή κατανομή των μεγεθών των απαιτήσεων ανήκει στην οικογένεια κατανομών K_m, δηλαδή, η γεννήτρια συνάρτηση της *f* είναι της μορφής

$$\hat{f}(s) = \frac{E_m(s)}{\prod_{i=1}^{m}(1-s\alpha_i)}, \qquad \mathrm{Re}(s) < \min\left\{\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \ldots, \frac{1}{\alpha_m}\right\} \tag{2.2.44}$$

όπου $E_m(s)$ είναι πολυώνυμο βαθμού m με $E_m(0) = 0$ και $E_m(1) = \prod_{i=1}^{m}(1-\alpha_i)$ με $0 < \alpha_i < 1$ για $i = 1, 2, \ldots, m$. Για λόγους ευκολίας, συμβολίζουμε το συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου του $E_m(s)$ με η.
Για $\omega(\cdot,\cdot) \equiv 1$ είναι

$$w(u) = \sum_{i=u+1}^{\infty} 1 \cdot f(i) = P(X \geq u+1) = P(X > u) = \bar{F}(u)$$

με γεννήτρια συνάρτηση

$$\hat{w}(s) = \sum_{u=0}^{\infty} s^u \bar{F}(u) = \sum_{u=0}^{\infty} s^u (1-F(u)) = \sum_{u=0}^{\infty} s^u - \sum_{u=0}^{\infty} s^u F(u) = \frac{1}{1-s} - \frac{\hat{f}(s)}{1-s} = \frac{1-\hat{f}(s)}{1-s}.$$

Από την (2.2.41) έχουμε

$$\hat{H}_\delta(s)=\frac{\lambda^{[n]}\rho^{[n]}}{\mu^n}\sum_{j=1}^{n}\frac{s^n\frac{1-\hat{f}(s)}{1-s}-\rho_j^n\frac{1-\hat{f}(\rho_j)}{1-\rho_j}}{(s-\rho_j)\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(\rho_j-\rho_k)}$$

και αντικαθιστώντας την (2.2.44) παίρνουμε

$$\hat{H}_\delta(s)=\frac{\lambda^{[n]}\rho^{[n]}}{\mu^n}\sum_{j=1}^{n}\frac{s^n\frac{1-\frac{E_m(s)}{\prod_{i=1}^{m}(1-s\alpha_i)}}{1-s}-\rho_j^n\frac{1-\frac{E_m(\rho_j)}{\prod_{i=1}^{m}(1-\rho_j\alpha_i)}}{1-\rho_j}}{(s-\rho_j)\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(\rho_j-\rho_k)}$$

$$=\frac{\lambda^{[n]}\rho^{[n]}}{\mu^n}\sum_{j=1}^{n}\frac{s^n\frac{\prod_{i=1}^{m}(1-s\alpha_i)-E_m(s)}{(1-s)\prod_{i=1}^{m}(1-s\alpha_i)}-\rho_j^n\frac{\prod_{i=1}^{m}(1-\rho_j\alpha_i)-E_m(\rho_j)}{(1-\rho_j)\prod_{i=1}^{m}(1-\rho_j\alpha_i)}}{(s-\rho_j)\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(\rho_j-\rho_k)}$$

Έστω,

$$l_1(s)=s^n\left(\prod_{i=1}^{m}(1-s\alpha_i)-E_m(s)\right)\text{ και }l_2(s)=(1-s)\prod_{i=1}^{m}(1-s\alpha_i)$$

οπότε η $\hat{H}_\delta(s)$ γράφεται ως

$$\hat{H}_\delta(s)=\frac{\lambda^{[n]}\rho^{[n]}}{\mu^n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\frac{l_1(s)}{l_2(s)}-\frac{l_1(\rho_j)}{l_2(\rho_j)}}{(s-\rho_j)\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(\rho_j-\rho_k)}$$

$$=\frac{\lambda^{[n]}\rho^{[n]}}{\mu^n l_2(s)}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{l_1[s,\rho_j]}{\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(\rho_j-\rho_k)}-\sum_{j=1}^{n}\frac{l_1(\rho_j)l_2[s,\rho_j]}{l_2(\rho_j)\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(\rho_j-\rho_k)}\right)\tag{2.2.45}$$

όπου

$$l_i[s,\rho_j]=\frac{l_i(s)-l_i(\rho_j)}{s-\rho_j}$$

είναι η πρώτη διηρημένη διαφορά του $l_i(s)$ ως προς ρ_j. Είναι προφανές ότι το $l_1[s,\rho_j]$ είναι πολυώνυμο βαθμού $m+n-1$ και το $l_2[s,\rho_j]$ είναι πολυώνυμο βαθμού m. Από τη θεωρία των διηρημένων διαφορών, η n-οστή διηρημένη διαφορά του $l_1(s)$ ως προς $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n$ δίνεται από τον τύπο

$$l_1[s, \rho_1, ..., \rho_n] = \sum_{j=1}^{n} \frac{l_1[s, \rho_j]}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} (\rho_j - \rho_k)}.$$

Το $l_1[s, \rho_1, ..., \rho_n]$ είναι πολυώνυμο βαθμού m.

Συνεπώς, ο όρος στην παρένθεση της (2.2.45)

$$l(s) = \sum_{j=1}^{n} \frac{l_1[s, \rho_j]}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} (\rho_j - \rho_k)} - \sum_{j=1}^{n} \frac{l_1(\rho_j) l_2[s, \rho_j]}{l_2(\rho_j) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} (\rho_j - \rho_k)} \tag{2.2.45α}$$

είναι πολυώνυμο m βαθμού.

Από την (2.2.43) η γεννήτρια συνάρτηση $\hat{\phi}_T(s)$ μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση

$$\hat{\phi}_T(s) = \frac{l(s) \prod_{i=1}^{n} [p_i(s - \rho_i)]}{(1-s)\left(\prod_{i=1}^{n} (s - q_i) \prod_{j=1}^{m} (1 - s\alpha_j) - E_m(s) s^n \prod_{i=1}^{n} p_i \right)} \tag{2.2.46}$$

όπου ο παρονομαστής του κλάσματος, που τον συμβολίζουμε $D_{m+n+1}(s)$, είναι πολυώνυμο βαθμού $m+n-1$ με συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου

$$D = \eta \prod_{i=1}^{n} p_i - \prod_{i=1}^{m} (-\alpha_j). \tag{2.2.46α}$$

Η εξίσωση $D_{m+n+1}(s) = 0$ έχει $m+n-1$ ρίζες στο μιγαδικό επίπεδο με όλες τις μιγαδικές ρίζες να απαντώνται σε συζυγή ζεύγη. Παρατηρούμε ότι οι $s=1$ και $s = \rho_i$, $i = 1, 2, ..., n$ είναι οι $n+1$ ρίζες και τότε

$$D_{m+n+1}(s) = D(s-1) \prod_{i=1}^{n} (s - \rho_i) \prod_{j=1}^{m} (s - R_j), \quad s \in \mathbf{C}.$$

Σημειώνουμε εδώ ότι όλα τα R_j έχουν μέτρο μεγαλύτερο από 1, γιατί αλλιώς το R_j θα ήταν ρίζα της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg (2.2.14) κάτι το οποίο θα ήταν σε αντίθεση με την Πρόταση 2.2.2, δηλαδή ότι έχει μόνο n ρίζες εντός του μοναδιαίου κύκλου.

Αφού $s=1$ είναι ρίζα της εξίσωσης $l_i(s) = 0$ για $i = 1, 2$, τότε $l_i[1, \rho_j] = \frac{l_i(\rho_j) - l_i(1)}{\rho_j - 1} = \frac{l_i(\rho_j)}{\rho_j - 1}$.

Συνεπώς, από την (2.2.45) συμπεραίνουμε ότι $s=1$ είναι επίσης ρίζα της $l(s) = 0$. Τέλος η (2.2.46) μπορεί να απλοποιηθεί περαιτέρω στην

$$\hat{\phi}_T(s) = \frac{h(s)\prod_{i=1}^{n}[p_i(s-\rho_i)]}{D\prod_{j=1}^{m}(s-R_j)} \tag{2.2.47}$$

όπου,

$$h(s) = \frac{l(s)\prod_{i=1}^{n} p_i}{s-1} \tag{2.2.47α}$$

είναι πολυώνυμο βαθμού $m-1$.

Εάν επιπλέον τα R_j , $i=1,2,...,m$ είναι διακεκριμένα, με ανάλυση σε απλά κλάσματα παίρνουμε

$$\hat{\phi}_T(s) = \frac{1}{D}\sum_{j=1}^{m}\frac{h_j(s)R_j}{R_j - s} \tag{2.2.48}$$

όπου

$$h_j = -\frac{h(R_j)}{R_j\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m}(R_j - R_i)}. \tag{2.2.48α}$$

Παίρνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό της (2.2.48) προκύπτει

$$\phi_T(u) = \frac{1}{D}\sum_{j=1}^{m} h_j R_j^{-u} \tag{2.2.49}$$

που είναι ένας γενικός τύπος για τη $\phi_T(u)$.

2.2.6 Αριθμητική εφαρμογή

Θεωρούμε την περίπτωση όπου οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των απαιτήσεων ακολουθούν τη γενικευμένη κατανομή *Erlang*(2) με παραμέτρους λ_1 και λ_2, ενώ τα μεγέθη των απαιτήσεων ακολουθούν τη γεωμετρική κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας

$$f(y) = (1-\alpha)\alpha^{y-1},\ y \in \mathbf{N}^+,\ 0 < \alpha < 1.$$

με αντίστοιχη γεννήτρια συνάρτηση

$$\hat{f}(s) = \frac{(1-\alpha)s}{1-s\alpha}.$$

Σύμφωνα με την ανάλυση της προηγούμενης παραγράφου, έχουμε τα μεγέθη

$$n=2,\ m=1,\ E_1 = (1-\alpha)s,\ \eta = 1-\alpha.$$

Η γενικευμένη εξίσωση Lundberg (2.2.14) διαμορφώνεται ως

$$\prod_{i=1}^{2}(s-q_i) = \hat{f}(s)s^2\prod_{i=1}^{2}p_i$$

$$\left(s-\frac{\mu}{\mu+\lambda_1+\delta}\right)\left(s-\frac{\mu}{\mu+\lambda_2+\delta}\right)=\frac{(1-\alpha)s}{1-s\alpha}s^2\frac{\lambda_1}{\mu+\lambda_1+\delta}\frac{\lambda_2}{\mu+\lambda_2+\delta}$$

$$(1-s\alpha)[s(\mu+\lambda_1+\delta)-\mu][s(\mu+\lambda_2+\delta)-\mu]=\lambda_1\lambda_2(1-\alpha)s^3 \qquad (2.2.50)$$

η οποία έχει τρεις ρίζες, έστω ρ_1, ρ_2 και R με $0<|\rho_i|<1,\ i=1,2$ και $|R|>1$.

Υπολογίζουμε τις ποσότητες

$$l_1(s)=s^2[(1-s\alpha)-E_1(s)]=s^2[1-s\alpha-s(1-\alpha)]=s^2(1-s)$$

$$l_2(s)=(1-s)(1-s\alpha)$$

και από τις (2.2.45α), (2.2.46α), (2.2.47α), (2.2.48α) αντίστοιχα βρίσκουμε

$$l(s)=\frac{1-s}{(1-\rho_1\alpha)(1-\rho_2\alpha)}$$

$$D=\eta\prod_{i=1}^{2}p_i-(-\alpha)=(1-\alpha)p_1p_2+\alpha=p_1p_2+\alpha(1-p_1p_2)$$

$$h(s)=\frac{l(s)\prod_{i=1}^{2}p_i}{s-1}=\frac{\dfrac{1-s}{(1-\rho_1\alpha)(1-\rho_2\alpha)}p_1p_2}{s-1}=\frac{-p_1p_2}{(1-\rho_1\alpha)(1-\rho_2\alpha)}$$

$$h_1=\frac{-h(R)}{R}=\frac{p_1p_2}{R(1-\rho_1\alpha)(1-\rho_2\alpha)}$$

Από την (2.2.49) παίρνουμε

$$\phi_T(u)=\frac{1}{D}h_1R^{-u}=\frac{p_1p_2R^{-u-1}}{[p_1p_2+\alpha(1-p_1p_2)](1-\rho_1\alpha)(1-\rho_2\alpha)}. \qquad (2.2.51)$$

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε την επίδραση της παραμέτρου α και της παραμέτρου μ στη ρίζα R

α) *επίδραση της παραμέτρου* α

Έστω οι παρακάτω τιμές των παραμέτρων:

λ_1 = 1, λ_2 = 2.5, μ = 5, δ = 0.3 και α = 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8.

Για τις εν λόγω τιμές και τη μέση τιμή της απαίτησης, $\mu_F=\dfrac{1}{1-\alpha}$, βλέπουμε ότι η συνθήκη καθαρού κέρδους (2.1.2) ισχύει. Πράγματι,

$$\mu>\frac{\mu_F}{\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{\lambda_k}} \quad \text{ή} \quad 5>\frac{\frac{1}{1-\alpha}}{\frac{1}{1}+\frac{1}{2.5}} \quad \text{ή} \quad \alpha<\frac{6}{7}\cong 0.857.$$

Η γενικευμένη εξίσωση Lundberg (2.2.50) παίρνει τη μορφή

$$(1-s\alpha)(6.3s-5)(7.8s-5)=(1-\alpha)2.5s^3$$

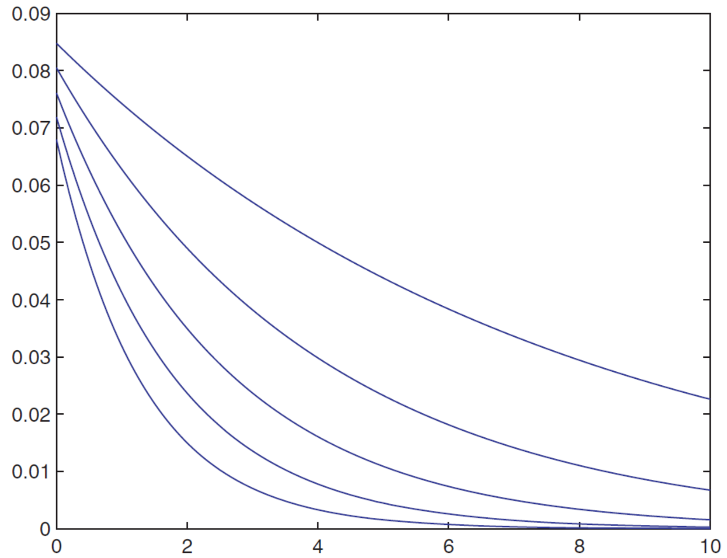
Λύνοντας την παραπάνω εξίσωση για τις διάφορες τιμές του α, η τιμή της ρίζας R που προκύπτει δίνεται στον Πίνακα 2.2.1. Στον ίδιο πίνακα δίνεται και η αντίστοιχη μέση τιμή μ_F.

α	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
R	2.129378	1.742453	1.475140	1.281763	1.141278
μ_F	1.667	2	2.5	3.333	5

Πίνακας 2.2.1: Επίδραση της παραμέτρου α στη ρίζα R και στη μ_F

Από τις τιμές του πίνακα, βλέπουμε ότι καθώς το α αυξάνει, η τιμή R μειώνεται, ενώ αυξάνει η μέση απαίτηση μ_F.

Από την (2.2.51) υπολογίζουμε το μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας $\phi_T(u)$ για κάθε τιμή του α και έχουμε το Σχήμα 2.2.1.



Σχήμα 2.2.1: Επίδραση της παραμέτρου α στη συνάρτηση $\varphi_T(u)$. Ο οριζόντιος άξονας απεικονίζει το αρχικό πλεόνασμα u. Οι καμπύλες της $\varphi_T(u)$ που δίνονται από πάνω προς τα κάτω, αναφέρονται στις τιμές του α = 0.8, 0.7, 0.6, 0.5 και 0.4 αντίστοιχα.

Από το Σχήμα 2.2.1 βλέπουμε ότι η τιμή του $\varphi_T(u)$ σε κάθε καμπύλη μειώνεται καθώς το αρχικό απόθεμα u αυξάνεται. Επίσης, η τιμή $\varphi_T(u)$ αυξάνει καθώς αυξάνεται το α, το οποίο οφείλεται στο γεγονός ότι η μέση απαίτηση μ_F αυξάνεται ως προς α.

β) *επίδραση της έντασης άφιξης ατομικών ασφαλίστρων, μ*

Έστω οι παρακάτω τιμές των παραμέτρων:

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2.5,\ \alpha = 0.4,\ \delta = 0.3 \text{ και } \mu = 2, 3, 4, 5, 6.$$

Για τις εν λόγω τιμές και τη μέση τιμή της απαίτησης μ_F , βλέπουμε ότι η συνθήκη καθαρού κέρδους (2.1.2) ισχύει. Πράγματι,

$$\mu > \frac{\mu_F}{\sum_{k=1}^{2} \frac{1}{\lambda_k}} \qquad \text{ή} \qquad \mu > \frac{\frac{1}{1-0.4}}{\frac{1}{1}+\frac{1}{2.5}} \qquad \text{ή} \qquad \mu > 1.19 .$$

Η γενικευμένη εξίσωση Lundberg (2.2.50) παίρνει τη μορφή

$$(1-0.4s)[(1.3+\mu)s-\mu][(2.8+\mu)s-\mu]=1.5s^3$$

Λύνοντας την παραπάνω εξίσωση για τις διάφορες τιμές του μ , η τιμή της ρίζας R που προκύπτει δίνεται στον Πίνακα 2.2.2.

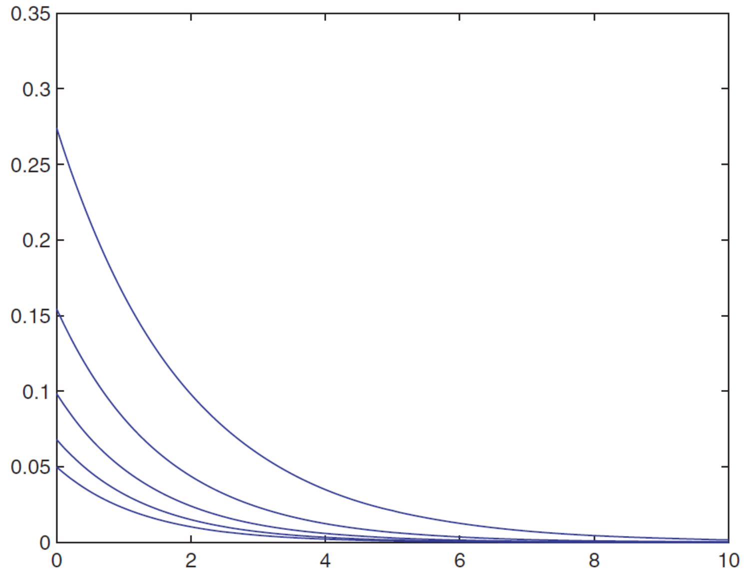
μ	2	3	4	5	6
R	1.672975	1.879914	2.0265933	2.129378	2.202923

Πίνακας 2.2.2: Επίδραση της παραμέτρου μ στη ρίζα R

Από τις τιμές του πίνακα, βλέπουμε ότι καθώς αυξάνεται το μ , αυξάνεται και η τιμή της ρίζας R .

Από την (2.2.51) υπολογίζουμε το μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας $\phi_T(u)$ για κάθε τιμή του μ και έχουμε το Σχήμα 2.2.2.

Από το εν λόγω σχήμα βλέπουμε ότι η τιμή του $\phi_T(u)$ σε κάθε καμπύλη μειώνεται καθώς το αρχικό απόθεμα u αυξάνεται. Επίσης, η τιμή $\phi_T(u)$ μειώνεται καθώς αυξάνεται το μ , το οποίο οφείλεται στο γεγονός ότι κατά μέσο όρο τα ασφάλιστρα $\mu \cdot 1$ αυξάνονται καθώς αυξάνεται το μ .



Σχήμα 2.2.2: Επίδραση της παραμέτρου μ στη συνάρτηση $\phi_T(u)$. Ο οριζόντιος άξονας απεικονίζει το αρχικό πλεόνασμα u. Οι καμπύλες της $\phi_T(u)$ που δίνονται από πάνω προς τα κάτω, αναφέρονται στις τιμές του $\mu = 2, 3, 4, 5$ και 6 αντίστοιχα.

2.3 Μοντέλο κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα ανεξάρτητα των απαιτήσεων

Στην ενότητα αυτή μελετάται η γενίκευση του κλασικού μοντέλου Cramer-Lundberg θεωρώντας ότι τα ασφάλιστρα περιγράφονται από μία στοχαστική διαδικασία Poisson και ότι αυτή είναι ανεξάρτητη της διαδικασίας άφιξης των απαιτήσεων που θεωρείται επίσης διαδικασία Poisson. Η ιδέα είχε αρχικά προταθεί από τους Boucherie et al. (1997) και στη συνέχεια το μοντέλο μελετήθηκε από τους Boikov (2003), Temnov (2004), Melnikov (2003). Το μοντέλο που προτάθηκε από τον Boikov (2003) είναι σημαντικό στη θεωρία κινδύνου κατά πρώτον γιατί λόγω των υποθέσεων του απλοποιείται αρκετά με αποτέλεσμα να μπορούν να υπολογιστούν διάφορα μέτρα κινδύνου και να γίνουν προβλέψεις πιο εύκολα σε μικρούς ασφαλιστικούς οργανισμούς στους οποίους τα ασφαλιστικά έσοδα έχουν μεγαλύτερη μεταβλητότητα από τα αντίστοιχα σε μεγάλους και καλά εδραιωμένους ασφαλιστικούς οργανισμούς. Η μεταβλητότητα αυτή είναι τυπική περίπτωση σε αναπτυσσόμενες χώρες όπου ο αριθμός των ασφαλισμένων είναι μικρός και οι διακυμάνσεις έχουν σημαντικό αντίκτυπο. Κατά δεύτερον, με τη μελέτη στοχαστικών ασφαλίστρων δίνεται η δυνατότητα επέκτασης της έρευνας σε μοντέλα πιο σύνθετα, όπως για παράδειγμα στους Boucherie et al. (1997), που είναι πιο ρεαλιστικά και ενσωματώνουν και ενδεχόμενες μορφές εξάρτησης ανάμεσα στα ασφάλιστρα και στις ακολουθούμενες απαιτήσεις.

Στην ανάλυση που ακολουθεί, αρχικά δίνεται η περιγραφή του υπό μελέτη μοντέλου κινδύνου. Στη συνέχεια αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση Gerber-Shiu ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση και αναπτύσσεται επίσης μια ολοκληρωτική εξίσωση που ικανοποιείται από την προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής. Περαιτέρω, δίνεται μια αναλυτική έκφραση για τη συνάρτηση Gerber-Shiu στην περίπτωση που η συνάρτηση ποινής παίρνει μια ειδική μορφή και η κατανομή των απαιτήσεων είναι η εκθετική. Τέλος, η μελέτη εστιάζεται όταν τα ασφάλιστρα ακολουθούν συγκεκριμένα την κατανομή $Erlang(n,\beta)$ και αναπτύσσεται η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση για τη συνάρτηση Gerber-Shiu. Σε πολλά σημεία της μελέτης δίνονται διάφορα παραδείγματα που δείχνουν πως τα θεωρητικά αποτελέσματα που προκύπτουν βρίσκουν εφαρμογή σε μεγέθη που μας ενδιαφέρουν στη θεωρία κινδύνου. Η εν λόγω μελέτη δίνει αρκετές λεπτομέρειες σε βάθος του κατά πόσο η τυχαιότητα στη διαδικασία άφιξης των ασφαλίστρων επηρεάζει την όλη ανάλυση εν γένει.

2.3.1 Περιγραφή του μοντέλου

Στην ενότητα αυτή, μέσω κατάλληλων συνθηκών, δίνεται η τυπική περιγραφή του μοντέλου που θα αναλυθεί στη συνέχεια, και κάποιες απαιτούμενες τεχνικές διευκρινίσεις.

Συνθήκη 2.3.1

Το μοντέλο κινδύνου που εξετάζουμε στο οποίο υπάρχουν στοχαστικά ασφάλιστρα, η διαδικασία πλεονάσματος έχει τη μορφή

$$U(t) = u + \sum_{i=1}^{M(t)} X_i - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \tag{2.3.1}$$

όπου, $U(0) = u \geq 0$ είναι το αρχικό πλεόνασμα της ασφαλιστικής εταιρίας. Οι απαιτήσεις και τα ασφάλιστρα εμφανίζονται στη διάρκεια του χρόνου σύμφωνα με ομογενείς διαδικασίες Poisson, $N(t)$ με ένταση $\lambda > 0$ και $M(t)$ με ένταση $\mu > 0$ αντίστοιχα. Τα μεγέθη των απαιτήσεων δίνονται από την ακολουθία των ανεξάρτητων και ισόνομα κατανεμημένων θετικών τυχαίων μεταβλητών $Y_1, Y_2, \ldots$ με αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F(y) = P(Y \leq y)$, $y > 0$, ενώ τα ατομικά ασφάλιστρα δίνονται από την ακολουθία των ανεξάρτητων και ισόνομα κατανεμημένων θετικών τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, \ldots$ με αθροιστική συνάρτηση κατανομής $G(x) = P(X \leq x)$, $x > 0$.

Εάν δεν υπάρχουν αφίξεις ασφαλίστρων και απαιτήσεων μέχρι τη στιγμή t, είναι $M(t) = 0$ ή $N(t) = 0$, όπου στην περίπτωση αυτή, τα συνολικά ασφάλιστρα $\sum_{i=1}^{M(t)} X_i$ και οι συνολικές απαιτήσεις $\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$ είναι επίσης ίσες με μηδέν. Για το εν λόγω μοντέλο θεωρούμε ότι $\{N(t)\}$, $\{M(t)\}$, $\{Y_1, Y_2, \ldots\}$ και $\{X_1, X_2, \ldots\}$ είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα. Επίσης, υποθέτουμε ότι οι κατανομές των απαιτήσεων και των ασφαλίστρων έχουν πεπερασμένες μέσες τιμές, $E(X_1)$ και $E(Y_1)$, αντίστοιχα απαιτούμε τα αναμενόμενα συνολικά έσοδα στη μονάδα του χρόνου να είναι μεγαλύτερα από τα αναμενόμενα συνολικά έξοδα, δηλαδή

$$E\left(\sum_{i=1}^{M(t)} X_i\right) > E\left(\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i\right)$$

όπου ισοδύναμα για τις σύνθετες κατανομές είναι

$$E(M(t))E(X_1) > E(N(t))E(Y_1)$$

και τελικά παίρνουμε

$$\mu E(X_1) > \lambda E(Y_1). \tag{2.3.2}$$

Η παράμετρος $\theta > 0$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση $\mu E(X_1) = \lambda(1+\theta)E(Y_1)$ μπορεί να ερμηνευθεί ως ένας θετικός σχετικός συντελεστής ασφαλείας που εφαρμόζεται από την ασφαλιστική εταιρία έτσι ώστε τα συνολικά αναμενόμενα έσοδα (ασφάλιστρα) να είναι μεγαλύτερα από τα συνολικά αναμενόμενα έξοδα (απαιτήσεις) σε κάθε χρονική στιγμή $t > 0$.

Παρατήρηση 2.3.1. Η διαδικασία πλεονάσματος μπορεί να εκφραστεί διαφορετικά με τον εξής τρόπο. Θεωρώντας ως απαριθμήτρια συνάρτηση των ατομικών ασφαλίστρων και απαιτήσεων μέχρι τη στιγμή t την

$$J(t) = M(t) + N(t)$$

αυτή είναι μια διαδικασία Poisson με ένταση $\lambda + \mu$, αφού το άθροισμα ανεξάρτητων διαδικασιών Poisson είναι επίσης διαδικασία Poisson με ένταση το άθροισμα των επιμέρους εντάσεων. Έστω B_i, $i = 1, 2, ...$, ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών Bernoulli με παράμετρο την πιθανότητα επιτυχίας να συμβεί πρώτα είσπραξη ασφαλίστρου, δηλαδή,

$$P(B_i = 1) = P(W_1 < V_1) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}.$$

Προφανώς, $P(B_i = 0) = 1 - P(B_i = 1) = P(W_1 > V_1) = \dfrac{\lambda}{\lambda + \mu}$.

Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή Z_i ως

$$Z_i = I(B_i = 1)X_i - I(B_i = 0)Y_i, \quad i = 1, 2, ...$$

όπου $I(\cdot)$ συμβολίζει τη δείκτρια συνάρτηση, $I(A) = \begin{cases} 1, & \text{εάν συμβεί το } A \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$. Θεωρούμε επίσης ότι η ακολουθία των τυχαίων μεταβλητών $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι ανεξάρτητη από τις $\{J_t\}$, $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ και $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$. Σύμφωνα με τα παραπάνω, η διαδικασία πλεονάσματος γράφεται

$$U(t) \overset{D}{=} \bar{U}(t) := u + \sum_{i=1}^{J(t)} Z_i \tag{2.3.3}$$

όπου $\overset{D}{=}$ σημαίνει ισότητα κατά κατανομή. Να σημειώσουμε εδώ ότι για την αναμενόμενη τιμή της Z_i είναι,

$$E(Z_i) = E[I(B_i = 1)X_i - I(B_i = 0)Y_i]$$

και λόγω ανεξαρτησίας των B_i, X_i, Y_i

$$E(Z_i) = E[I(B_i = 1)]E(X_i) - E[I(B_i = 0)]E(Y_i)$$
$$= \frac{\mu}{\lambda+\mu}E(X_i) - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}E(Y_i)$$
$$= \frac{\mu E(X_i) - \lambda E(Y_i)}{\lambda+\mu} > 0, \; i = 1, 2, ... \qquad (2.3.4)$$

όπου το θετικό πρόσημο προκύπτει λόγω της (2.3.2).

Για να εισάγουμε τη συνάρτηση Gerber-Shiu που δόθηκε στο Κεφάλαιο 1 απαιτείται η επόμενη συνθήκη.

Συνθήκη 2.3.2

Έστω $\delta \geq 0$ σταθερά και $\omega : [0,\infty) \times (0,\infty) \to [0,\infty)$ μία φραγμένη συνάρτηση.

Η παραπάνω απαίτηση ώστε η συνάρτηση ω να είναι φραγμένη επιβάλλεται ώστε να υπάρχει η συνάρτηση Gerber-Shiu m, καθώς επίσης είναι αρκετά γενική ώστε να ικανοποιείται από πληθώρα χρήσιμων περιπτώσεων της συνάρτησης m. Τέλος, θεωρούμε τη επόμενη συνθήκη ύπαρξης συναρτήσεων πυκνοτήτων πιθανοτήτων για τα ασφάλιστρα και τις απαιτήσεις.

Συνθήκη 2.3.3

Τα ανεξάρτητα και ισόνομα κατανεμημένα μεγέθη των απαιτήσεων $Y_1, Y_2, ...$ είναι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με (μετρήσιμη) συνάρτηση πυκνότητας $f(y)$, $y > 0$ και τα ανεξάρτητα και ισόνομα κατανεμημένα ατομικά ασφάλιστρα $X_1, X_2, ...$ είναι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με (μετρήσιμη) συνάρτηση πυκνότητας $g(x)$, $x > 0$.

2.3.2 Ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση για τη συνάρτηση Gerber-Shiu

Στην ενότητα αυτή θα δοθεί μία ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση που ικανοποιεί η συνάρτηση Gerber-Shiu. Εξισώσεις αυτού του τύπου εμφανίζονται συχνά στη Θεωρία Κινδύνου και έχουν μελετηθεί εκτενώς στη σχετική βιβλιογραφία. Συγκεκριμένα, για τη λύση τέτοιων εξισώσεων, οι Lin and Willmot (1999) έχουν δώσει άμεσες εκφράσεις μέσω μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής, ενώ οι Willmot et al. (2001) μελέτησαν σημαντικά θεωρήματα που παρέχουν άνω και κάτω φράγματα των εν λόγω λύσεων.

Στην ειδική περίπτωση της συνάρτησης ποινής με μορφή $\omega(x, y) = 1$ για όλα τα $x \geq 0$ και $y \geq 0$, προκύπτει ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου μέχρι τη χρεοκοπία,

$$\psi_\delta(u) = E\{e^{-\delta T} I(T < \infty) | U(0) = u\}, \qquad u \geq 0, \qquad (2.3.5)$$

και επιπλέον για $\delta = 0$ είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi_0(u)$, με αρχικό αποθεματικό u.

Η Πρόταση 2.3.1 που ακολουθεί είναι σημαντική για την κατασκευή της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης και αναφέρεται στις τιμές της πιθανότητας χρεοκοπίας.

Πρόταση 2.3.1

Έστω η Συνθήκη 2.3.1. *Τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας ικανοποιεί τη σχέση*

$$0 < \psi_0(u) < 1 \text{ για όλα τα } u \in [0,\infty).$$

Απόδειξη

Έστω αρχικό αποθεματικό $u \in [0,\infty)$. Θεωρούμε το χρόνο μέχρι την εμφάνιση του πρώτου ασφαλίστρου W_1. Αφού η διαδικασία αφίξεων των ασφαλίστρων είναι Poisson με ένταση μ, η τυχαία μεταβλητή είναι εκθετικά κατανεμημένη με μέσο $1/\mu$ και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{W_1}(t) = \mu e^{-\mu t},\ t \ge 0.$$

Υποθέτουμε ότι μέχρι να συμβεί η άφιξη του πρώτου ασφαλίστρου, έχουν συμβεί $k \in \mathbf{N}$ το πλήθος απαιτήσεων μεγέθους η κάθε μια μεγαλύτερη από $\xi > 0$, δηλαδή, $\bar{F}(\xi) = P(Y > \xi) > 0$, ώστε $k\xi > u$. Με την τελευταία σχέση θεωρούμε ότι επέρχεται χρεοκοπία πριν την έλευση του πρώτου ασφαλίστρου. Για την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi_0(u)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\psi_0(u) &\ge P[N(W_1) \ge k \text{ και } Y_1, Y_2, \ldots, Y_k > \xi] \\
&= P[N(W_1) \ge k] P[Y_1, Y_2, \ldots, Y_k > \xi] && \text{(λόγω ανεξαρτησίας μεταξύ } N(t), \{Y_i\}) \\
&= P[N(W_1) \ge k] \prod_{i=1}^{k} P(Y_i > \xi) && \text{(λόγω ανεξαρτησίας των } \{Y_i\}) \\
&= P[N(W_1) \ge k] \bar{F}^k(\xi) \\
&\ge \bar{F}^k(\xi) \int_0^\infty P[N(t) = k] f_{W_1}(t) dt \\
&= \bar{F}^k(\xi) \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} \mu e^{-\mu t} dt \\
&= \bar{F}^k(\xi) \frac{\mu \lambda^k}{k!} \int_0^\infty t^k e^{-(\lambda+\mu)t} dt \\
&= \bar{F}^k(\xi) \frac{\mu \lambda^k}{k!} \frac{\Gamma(k+1)}{(\lambda+\mu)^{k+1}} > 0,
\end{aligned}$$

δηλαδή δείχθηκε ότι $\psi_0(u) > 0$ για κάθε $u \in [0,\infty)$.

Για την πιθανότητα μη χρεοκοπίας (ή επιβίωσης) με αρχικό αποθεματικό $u = 0$ είναι

$$\begin{aligned}
\delta_0(0) &= 1 - \psi_0(0) \\
&= P(T = \infty \mid U(0) = 0)
\end{aligned}$$

$$= P\left(\sum_{i=1}^{J(t)} Z_i \geq 0, \forall t \geq 0\right)$$

$$= P\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i \geq 0, n = 1,2,3,\ldots\right) > 0$$

Η τελευταία ανισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι $E(Z_1) > 0$ λόγω της (2.3.4). Συνεπώς, $1-\psi_0(0) > 0$ από το οποίο παίρνουμε $\psi_0(0) < 1$. Όμως, η $\psi_0(u)$ είναι μη αύξουσα συνάρτηση του u. Οπότε $\psi_0(u) < 1$ για όλα τα $u \geq 0$ και αποδείχθηκε η ζητούμενη σχέση, $0 < \psi_0(u) < 1$ για κάθε $u \in [0,\infty)$.

□

Παρατήρηση 2.3.2. Από την Πρόταση 2.3.1 προκύπτει ότι η χρεοκοπία δεν είναι βέβαιη ($\psi_0(u) < 1$) και δεν είναι επίσης αναπόφευκτη ($\psi_0(u) > 0$). Επίσης το αποτέλεσμα είναι ουσιώδες για να δειχθεί (Πρόταση 2.3.2) ότι η συνάρτηση Gerber-Shiu, m, ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση.

Στη συνέχεια για να προχωρήσουμε τη μελέτη, είναι απαραίτητο το εξής πλαίσιο εργασίας. Έστω $\mathbf{R}_+^2 = \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ = [0,\infty)\times[0,\infty) = [0,\infty)^2$ και $B(\mathbf{R}_+^2)$ η Borel σ-άλγεβρα στο $\mathbf{R}_+^2$. Συμβολίζουμε με v το μέτρο πιθανότητας στο $(\mathbf{R}_+^2, B(\mathbf{R}_+^2))$ των τυχαίων μεταβλητών $U(T^-)$ και T (δηλαδή του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του χρόνου χρεοκοπίας αντίστοιχα) δοθέντος ότι $U(0) = 0$. Δηλαδή, η από κοινού συνάρτηση κατανομής των $U(T^-)$ και T δίνεται από την

$$v([0,x]\times[0,t]) = P[U(T^-) \leq x, T \leq t \,|\, U(0) = 0] \text{ για κάθε } x \geq 0,\ t > 0. \tag{2.3.6}$$

Θεωρώντας τις Συνθήκες (2.3.1) και (2.3.3), έστω $p_x(y)$, $y > 0$, η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, $|U(T)|$, δοθέντος ότι $U(T^-) = x$ και $T = t$ για κάποια $x \geq 0$, $t > 0$, δηλαδή

$$|U(T)| \,|\, U(T^-) = x, T = t \sim p_x(y), \qquad x \geq 0,\ t > 0.$$

Η $p_x(y)$ συμπίπτει με τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $Y_1 - x$ δοθέντος ότι $Y_1 > x$ η οποία δίνεται από τη σχέση

$$p_x(y) = \frac{f(x+y)}{\bar{F}(x)},\ y > 0. \tag{2.3.7}$$

Για να δείξουμε την (2.3.7), έστω η τυχαία μεταβλητή $\bar{Y} = Y_1 - x \,|\, Y_1 > x$. Η συνάρτηση κατανομής της $\bar{Y}$ είναι

$$F_{\bar{Y}}(y) = P(\bar{Y} \leq y) = P(Y_1 - x \leq y \,|\, Y_1 > x) = P(Y_1 \leq y + x \,|\, Y_1 > x) = \frac{P(x < Y_1 \leq y + x)}{P(Y_1 > x)} = \frac{F(y+x) - F(x)}{\bar{F}(x)}$$

και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $\bar{Y}$ είναι

$$f_{\bar{Y}}(y) = \frac{d}{dy} F_{\bar{Y}}(y) = \frac{f(x+y)}{\bar{F}(x)}, \ y > 0 .$$

Η Πρόταση 2.3.2 που ακολουθεί δηλώνει ότι η συνάρτηση Gerber-Shiu ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση.

Πρόταση 2.3.2

Έστω οι Συνθήκες 2.3.1, 2.3.2 *και* 2.3.3 *καθώς και ότι οι* v *και* $p_x(y)$ *δίνονται αντίστοιχα από τις* (2.3.6) *και* (2.3.7). *Θέτοντας*

$$\phi_\delta = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\delta t} v(dx \times dt) , \tag{2.3.8}$$

$$f_\delta(y) = \frac{1}{\phi_\delta} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\delta t} p_x(y) v(dx \times dt), \ y > 0 , \tag{2.3.9}$$

$$H_{\delta,\omega}(u) = \int_u^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\delta t} \omega(u+x, y-u) p_x(y) v(dx \times dt)\, dy , \qquad u \geq 0 , \tag{2.3.10}$$

είναι

$$0 < \phi_\delta < 1 , \tag{2.3.11}$$

$$f_\delta(y) \text{ είναι μια συνάρτηση πυκνότητας,} \tag{2.3.12}$$

και η συνάρτηση Gerber-Shiu m *ικανοποιεί την εξίσωση*

$$m(u) = \phi_\delta \int_0^u m(u-y) f_\delta(y) dy + H_{\delta,\omega}(u) . \tag{2.3.13}$$

Απόδειξη

Έχουμε $\phi_\delta \leq \phi_0 = \int_0^\infty \int_0^\infty v(dx \times dt) = v(\mathbf{R}_+^2) = \psi_0(0)$ αφού $e^{-\delta t} \leq 1$ για $\delta \geq 0, t > 0$. Και άρα από την Πρόταση 2.3.1 είναι $\phi_\delta < 1$ αφού $\phi_\delta \leq \psi_0(0) < 1$. Επίσης είναι $\phi_\delta > 0$ και επομένως ισχύει η (2.3.11). Από την (2.3.9) με χρήση του θεωρήματος Fubini, είναι $\int_0^\infty f_\delta(y) dy = \int_0^\infty \frac{1}{\phi_\delta} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\delta t} p_x(y) v(dx \times dt) dy = 1$, δηλαδή, η f_δ είναι μια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

Η ελλειμματική από κοινού συνάρτηση κατανομής των τυχαίων μεταβλητών $U(T^-)$, $|U(T)|$ και T δοθέντος ότι $U(0) = 0$ μπορεί να εκφραστεί μέσω των v και $p_x(y)$, για $x, y, t \geq 0$, ως

$$P[U(T^-) \leq x, |U(T)| \leq y, T \leq t \,|\, U(0) = 0] = \int_0^y \int_0^x \int_0^t p_{x^*}(y^*) v(dx^* \times dt^*)\, dy^* .$$

Δεσμεύοντας ως προς την πρώτη πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό u, και διακρίνοντας τις περιπτώσεις: το μέγεθος της απαίτησης y να είναι μικρότερο από το

u οπότε έχουμε τη συνάρτηση Gerber-Shiu με αποθεματικό $u-y$, και το μέγεθος της απαίτησης y να είναι μεγαλύτερο από το u οπότε εφαρμόζεται η συνάρτηση ποινής, έχουμε

$$m(u)=\int_0^u m(u-y)\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\delta t}p_x(y)v(dx\times dt)dy+\int_u^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\delta t}\omega(u+x,y-u)p_x(y)v(dx\times dt)dy\,,\ u\geq 0\,.$$

Από την τελευταία σχέση, με χρήση των (2.3.9) και (2.3.10) προκύπτει η (2.3.13).

□

Παρατήρηση 2.3.3. Η ιδέα του να θεωρήσουμε τη δέσμευση ως προς την πρώτη πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό u, ώστε να προκύψει η Εξίσωση 2.3.13, έχει χρησιμοποιηθεί από τους Gerber and Shiu (1998) στο κλασικό μοντέλο χρεοκοπίας, και από τον Willmot (2007) στο μοντέλο Sparre Andersen. Ουσιαστικά, υπάρχουν δύο προϋποθέσεις για να ισχύει η ανανεωτική Εξίσωση (2.3.13): η πρώτη είναι ότι η τυχαία μεταβλητή της $|U(T)|$ δοθέντος ότι $U(T^-)=x$ και $T=t$ πρέπει να έχει πυκνότητα πιθανότητας p_x, και η δεύτερη είναι ότι η διαδικασία πλεονάσματος πρέπει να ανανεώνεται τη στιγμή της πρώτης πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό επίπεδο αποθεματικού. Η δεύτερη προϋπόθεση είναι αναγκαίως αληθής εάν η διαδικασία πλεονάσματος έχει την ισχυρή ιδιότητα Markov και η πρώτη πτώση κάτω από το αρχικό επίπεδο αποθεματικού είναι χρόνος διακοπής (stopping time). Αυτή η απαίτηση ικανοποιείται για κάθε διαδικασία Lévy και ειδικά για τη διαδικασία της Συνθήκης 2.3.1. Για να δειχθεί ότι η Εξίσωση (2.3.13) είναι ελλειμματική, θα πρέπει να διασφαλιστεί ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας παίρνει τιμές αυστηρά μεταξύ 0 και 1, που στην περίπτωση που εξετάζουμε είναι η Πρόταση 2.3.1 για τη διαδικασία πλεονάσματος που ικανοποιεί τη Συνθήκη 2.3.1. Από τον παραπάνω σχολιασμό, είναι φανερό ότι η συνάρτηση Gerber-Shiu ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση της μορφής (2.3.13) κάτω από αρκετά γενικές υποθέσεις. Εν τούτοις, δεν φαίνεται να υπάρχει γενικός τρόπος με τον οποίο να μπορούν να προσδιοριστούν με σαφήνεια οι ϕ_δ, f_δ και $H_{\delta,\omega}$. Στην πραγματικότητα, πέρα από την ύπαρξη μιας ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης, κάποιος μπορεί να εκμεταλλευτεί τη δομή της Εξίσωσης (2.3.13) και να εξάγει ποιο ακριβείς εκφράσεις για τις εν λόγω ποσότητες, για κάποιες συγκεκριμένες περιπτώσεις, όπως για παράδειγμα είναι η διαδικασία πλεονάσματος που περιγράφεται στη Συνθήκη 2.3.1. Πράγματι, από την Εξίσωση (2.3.7) η οποία είναι άμεση συνέπεια των Συνθηκών 2.3.1 και 2.3.3, η f_δ που δίνεται στην (2.3.9) ενσωματώνει κάποιες ιδιότητες από την κατανομή των απαιτήσεων (λόγω της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας f) διατυπώνοντας και κάποιες επιπλέον υποθέσεις. Αυτό θα φανεί στο Πόρισμα 2.3.2 στη συνέχεια, όπου εκθετικά κατανεμημένες απαιτήσεις έχουν σαν αποτέλεσμα η f_δ να είναι και αυτή εκθετική ίδιας μορφής. Επίσης οι υπολογισμοί της Παραγράφου 3 της εργασίας του Willmot (2007) μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να παραχθούν και άλλα τέτοια παραδείγματα.

Το παρακάτω αποτέλεσμα είναι συνέπεια της Πρότασης 2.3.2 και απλοποιεί τη δομή της ελλειμματικής ανανεωτικής Εξίσωσης (2.3.13) για μια συγκεκριμένη μορφή της συνάρτησης ποινής.

Πόρισμα 2.3.1

Υποθέτουμε τις Συνθήκες 2.3.1, 2.3.2 *και* 2.3.3. *Εάν η συνάρτηση ποινής είναι της μορφής* $\omega(x,y)=\omega_1(y)$ *για κάποια φραγμένη συνάρτηση* $\omega_1:(0,\infty)\to[0,\infty)$ *, τότε το αναμενόμενο προεξοφλημένο έλλειμμα ικανοποιεί τη σχέση*

$$m(u)=\phi_\delta\int_0^u m(u-y)\,f_\delta(y)dy+\phi_\delta\int_u^\infty \omega_1(y-u)\,f_\delta(y)dy\,. \tag{2.3.14}$$

Απόδειξη

Στην περίπτωση όπου $\omega(x,y)=\omega_1(y)$ είναι $\omega(u+x,y-u)=\omega_1(y-u)$ και από την (2.3.10) προκύπτει

$$\begin{aligned} H_{\delta,\omega}(u) &= \int_u^\infty \int_{R_+^2} e^{-\delta t}\omega_1(y-u)\,p_x(y)v(dx\times dt)dy \\ &= \int_u^\infty \omega_1(y-u)\left(\int_{R_+^2} e^{-\delta t}p_x(y)v(dx\times dt)\right)dy \\ &= \phi_\delta\int_u^\infty \omega_1(y-u)\,f_\delta(y)dy \qquad \text{(λόγω της (2.3.9)).} \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας την προηγούμενη σχέση στην (2.3.13) προκύπτει η (2.3.14).

□

Παρατήρηση 2.3.4. Αξίζει να σημειωθεί ότι το Πόρισμα 2.3.1 έχει το πλεονέκτημα ότι η συνάρτηση $H_{\delta,\omega}$ της Εξίσωσης (2.3.10) λαμβάνει μια συγκεκριμένη μορφή. Επιπλέον, στην περίπτωση όπου $\omega_1(y)=1$ για όλα τα $y>0$, δηλαδή, η συνάρτηση ποινής έχει τιμή $\omega(x,y)=1$, τότε η συνάρτηση Gerber-Shiu είναι, για $\delta>0$, ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας, συμβολικά ψ_δ, οπότε η (2.3.14) παίρνει τη μορφή της Πρότασης 1.3, συγκεκριμένα,

$$\psi_\delta(u)=\phi_\delta\int_0^u \psi_\delta(u-y)\, f_\delta(y)dy+\phi_\delta\int_u^\infty f_\delta(y)dy$$

$$=\phi_\delta\int_0^u \psi_\delta(u-y)dF_\delta(y)+\phi_\delta\,\bar{F}_\delta(u)\,, \qquad u\geq 0\,. \tag{2.3.15}$$

Όπως αναφέρθηκε στην Παρατήρηση 2.3.3, η Πρόταση 2.3.2 έχει το πλεονέκτημα να είναι αρκετά γενική, αλλά δεν μας παρέχει τον τρόπο να υπολογίσουμε με σαφή τρόπο τα μεγέθη ϕ_δ, f_δ και $H_{\delta,\omega}$. Στη συνέχεια η ανάλυση επικεντρώνεται στο να παρέχει ακριβείς εκφράσεις για τη συνάρτηση m, επιβάλλοντας όμως κάποιες επιπλέον υποθέσεις. Η στρατηγική που θα επιτευχθεί κάτι τέτοιο είναι να δοθεί ο μετασχηματισμός Laplace $\hat{m}$ της συνάρτησης Gerber-Shiu και στη συνέχεια παίρνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace να προκύψει η συνάρτηση m. Για να γίνει όμως κάτι τέτοιο, θα πρέπει να διασφαλιστεί η ύπαρξη του μετασχηματισμού Laplace της m και η μοναδικότητα του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace. Ειδικότερα, για να είναι ο μετασχηματισμός Laplace καλά ορισμένος για όλα τα $s\geq 0$, αρκεί η m να είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση, κάτι που είναι συνήθως αληθές σύμφωνα με το επόμενο Λήμμα, του οποίου η απόδειξη δίνεται στους Labbe and Sendova (2009).

Λήμμα 2.3.1

Έστω οι Συνθήκες 2.3.1 *και* 2.3.2. *Επιπλέον υποθέτουμε ότι υπάρχει η ροπή δεύτερης τάξης της κατανομής του μεγέθους των απαιτήσεων, δηλαδή* $E(Y_1^2)<\infty$. *Τότε* $\int_0^\infty m(u)du<\infty$.

Η μοναδικότητα του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace εξασφαλίζεται εάν θεωρήσουμε συνεχείς ολοκληρώσιμες συναρτήσεις (Spiegel (1965)). Στην περίπτωση λοιπόν που υπολογιστεί ο μετασχηματισμός $\hat{m}$ και η συνάρτηση m είναι συνεχής, τότε ο μοναδικός συνεχής μετασχηματισμός Laplace της m συμπίπτει με το $\hat{m}$. Το γεγονός αυτό μας επιβάλλει να θεωρήσουμε την επόμενη συνθήκη.

Συνθήκη 2.3.4

Η συνάρτηση $m:[0,\infty)\to[0,\infty)$ *είναι συνεχής.*

Η Συνθήκη 2.3.4 ισχύει κάτω από αρκετά γενικές υποθέσεις τις οποίες ικανοποιούν σχεδόν όλες οι περιπτώσεις που μας ενδιαφέρουν στη θεωρία χρεοκοπίας. Αυτό φαίνεται στο επόμενο λήμμα η απόδειξη του οποίου υπάρχει στους Labbe and Sendova (2009).

Λήμμα 2.3.2

Έστω οι Συνθήκες 2.3.1, 2.3.2 *και* 2.3.3. *Επιπλέον υποθέτουμε ότι* $\omega:[0,\infty)\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ *είναι τέτοια ώστε, για όλα σχεδόν τα* $y<0$,

$$\lim_{\Delta\to 0}\omega(x+\Delta,|y+\Delta|)=\omega(x,|y|)\,,\quad \text{για όλα τα } x\geq 0\,. \tag{2.3.16}$$

Τότε $m:[0,\infty)\to[0,\infty)$ *είναι μια συνεχής συνάρτηση.*

Ως παράδειγμα, αν θεωρήσουμε ότι $\omega(x,y)=\omega_1(y)\omega_2(x)$ με ω_1 σχεδόν βέβαια συνεχή και ω_2 συνεχή, τότε ικανοποιείται το κριτήριο (2.3.16).

Στη συνέχεια, εστιάζουμε την προσοχή μας στην περίπτωση όπου οι απαιτήσεις είναι εκθετικά κατανεμημένες και η συνάρτηση ποινής έχει μια συγκεκριμένη μορφή, τέτοια ώστε να μπορεί να βρεθεί μέσω της Πρότασης 2.3.2 μια έκφραση κλειστής μορφής για τη συνάρτηση m. Η διαδικασία είναι αρχικά να υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Laplace $\hat{m}$ και στη συνέχεια να βρούμε τον αντίστροφό του. Σημειώνουμε εδώ, ότι λόγω του ότι υπάρχει η δεύτερη ροπή για την εκθετική κατανομή, σύμφωνα με το Λήμμα 2.3.1 ο μετασχηματισμός $\hat{m}$ είναι καλά ορισμένος για όλα τα $s\geq 0$.

Πόρισμα 2.3.2

Έστω οι Συνθήκες 2.3.1, 2.3.2, 2.3.3 *και* 2.3.4. *Θεωρούμε ότι η συνάρτηση ποινής έχει τη μορφή* $\omega(x,y)=e^{-zx}\omega_1(y)$ *για δοσμένο* $z\geq 0$ *και μια φραγμένη συνάρτηση* $\omega_1:(0,\infty)\to[0,\infty)$. *Εάν οι απαιτήσεις είναι εκθετικά κατανεμημένες με μέσο* $1/\alpha$, $\alpha>0$, *τότε*

$$m(u)=b_{\delta,z}[\alpha\phi_\delta e^{-\alpha(1-\phi_\delta)u}+ze^{-(\alpha+z)u}], \tag{2.3.17}$$

όπου

$$b_{\delta,z}=\frac{E[\omega_1(Y_1)]\int_{R_+^2}e^{-zx-\delta t}v(dx\times dt)}{z+\alpha\phi_\delta}. \tag{2.3.18}$$

Απόδειξη

Η συνάρτηση πυκνότητας και κατανομής των απαιτήσεων είναι αντίστοιχα

$$f(y)=\alpha e^{-\alpha y} \qquad \text{και} \qquad F(y)=1-e^{-\alpha y}.$$

Τότε από την (2.3.7) είναι

$$p_x(y)=\frac{f(x+y)}{\bar{F}(x)}=\frac{\alpha e^{-\alpha(x+y)}}{e^{-\alpha x}}=\alpha e^{-\alpha y}=f(y)\,.$$

Επίσης έχουμε

$$\omega(u+x,y-u)=e^{-z(u+x)}\omega_1(y-u)\,.$$

Με βάση τα παραπάνω, η (2.3.10) γίνεται

$$H_{\delta,\omega}(u)=\int_u^\infty\int_{R_+^2} e^{-\delta t}e^{-z(u+x)}\omega_1(y-u)\alpha e^{-\alpha y}v(dx\times dt)dy$$

$$=\int_u^\infty \omega_1(y-u)\alpha e^{-\alpha y}dy\times\int_{R_+^2} e^{-\delta t}e^{-z(u+x)}v(dx\times dt)$$

$$=e^{-\alpha u}\int_u^\infty \omega_1(y-u)\alpha e^{-\alpha(y-u)}dy\times e^{-zu}\int_{R_+^2} e^{-zx-\delta t}v(dx\times dt)$$

με την αλλαγή μεταβλητής $y_1=y-u$ στο πρώτο ολοκλήρωμα, έχουμε $dy_1=dy$ και $u\le y<\infty\Rightarrow 0\le y_1<\infty$, οπότε

$$H_{\delta,\omega}(u)=e^{-\alpha u}\int_0^\infty \omega_1(y_1)\alpha e^{-\alpha y_1}dy_1\times e^{-zu}\int_{R_+^2} e^{-zx-\delta t}v(dx\times dt)$$

$$=e^{-(\alpha+z)u}E[\omega_1(Y_1)]\int_{R_+^2} e^{-zx-\delta t}v(dx\times dt)$$

$$=a_{\delta,z}e^{-(\alpha+z)u}$$

όπου

$$a_{\delta,z}=E[\omega_1(Y_1)]\int_{R_+^2} e^{-zx-\delta t}v(dx\times dt)\,.$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της $H_{\delta,\omega}(u)$ είναι

$$H_{\delta,\omega}(s)=\int_0^\infty e^{-su}H_{\delta,\omega}(u)du=\int_0^\infty e^{-su}a_{\delta,z}e^{-(\alpha+z)u}du=a_{\delta,z}\int_0^\infty e^{-(s+\alpha+z)u}du=a_{\delta,z}\frac{1}{s+\alpha+z}\,. \tag{2.3.19}$$

Από την (3.6) είναι

$$f_\delta(y)=\frac{1}{\phi_\delta}\int_{R_+^2} e^{-\delta t}\alpha e^{-\alpha y}v(dx\times dt)$$

$$=\frac{1}{\phi_\delta}\alpha e^{-\alpha y}\int_{R_+^2} e^{-\delta t}v(dx\times dt)$$

$$=\alpha e^{-\alpha y}=f(y) \qquad \text{(λόγω της (2.3.8)).}$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της $f_\delta(y)$ είναι

$$f_\delta(s)=\int_0^\infty e^{-sy}f_\delta(y)dy=\int_0^\infty e^{-sy}\alpha e^{-\alpha y}dy=\alpha\int_0^\infty e^{-(s+\alpha)y}du=\frac{\alpha}{s+\alpha}\,. \tag{2.3.20}$$

Παίρνοντας μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη της (2.3.13) έχουμε

$$L\{m(u)\}=L\left\{\phi_\delta\int_0^u m(u-y)f_\delta(y)dy+H_{\delta,\omega}(u)\right\}$$

$$L\{m(u)\} = \phi_\delta\, L\left\{\int_0^u m(u-y)\, f_\delta(y)dy\right\} + L\{H_{\delta,\omega}(u)\}$$

αλλά το ολοκλήρωμα αφορά σε συνέλιξη των $m(u)$ και $f_\delta(y)$ οπότε η παραπάνω γίνεται

$$\hat{m}(s) = \phi_\delta \hat{m}(s)\, \hat{f}_\delta(s) + \hat{H}_{\delta,\omega}(s)$$

$$\hat{m}(s) = \frac{\hat{H}_{\delta,\omega}(s)}{1-\phi_\delta \hat{f}_\delta(s)}$$

και από τις (2.3.19) και (2.3.20)

$$\hat{m}(s) = \frac{a_{\delta,z}\dfrac{1}{s+\alpha+z}}{1-\phi_\delta \dfrac{\alpha}{s+\alpha}} = \frac{a_{\delta,z}(s+\alpha)}{(s+\alpha+z)[s+\alpha(1-\phi_\delta)]}.$$

Με ανάλυση σε απλά κλάσματα προκύπτει

$$\hat{m}(s) = a_{\delta,z}\left(\frac{z}{z+\alpha\phi_\delta}\frac{1}{s+\alpha+z} + \frac{\alpha\phi_\delta}{z+\alpha\phi_\delta}\frac{1}{s+\alpha(1-\phi_\delta)}\right)$$

και παίρνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, έχουμε διαδοχικά

$$L^{-1}\{\hat{m}(s)\} = a_{\delta,z}\frac{z}{z+\alpha\phi_\delta}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+\alpha+z}\right\} + a_{\delta,z}\frac{\alpha\phi_\delta}{z+\alpha\phi_\delta}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+\alpha(1-\phi_\delta)}\right\}$$

$$\begin{aligned} m(u) &= a_{\delta,z}\frac{z}{z+\alpha\phi_\delta}e^{-(\alpha+z)u} + a_{\delta,z}\frac{\alpha\phi_\delta}{z+\alpha\phi_\delta}e^{-\alpha(1-\phi_\delta)u} \\ &= \frac{a_{\delta,z}}{z+\alpha\phi_\delta}(ze^{-(\alpha+z)u} + \alpha\phi_\delta e^{-\alpha(1-\phi_\delta)u}) \\ &= b_{\delta,z}(ze^{-(\alpha+z)u} + \alpha\phi_\delta e^{-\alpha(1-\phi_\delta)u}) \end{aligned}$$

όπου, $b_{\delta,z} = \dfrac{a_{\delta,z}}{z+\alpha\phi_\delta}$.

□

Δουλεύοντας με το Πόρισμα 2.3.2, η εύρεση της $m(u)$ ανάγεται εύκολα στον υπολογισμό των ϕ_δ και $b_{\delta,z}$ τα οποία είναι σταθερές ποσότητες δεδομένου ότι τα δ και z είναι σταθερές. Έναν τέτοιο υπολογισμό θα εξετάσουμε στην Ενότητα 2.3.4 στην συνέχεια.

2.3.3 Ολοκληρωτική εξίσωση για τη συνάρτηση Gerber-Shiu

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με την εύρεση μιας ολοκληρωτικής εξίσωσης που ικανοποιεί η συνάρτηση Gerber-Shiu. Αν και από τη θεωρητική σκοπιά, το αποτέλεσμα είναι ασθενέστερο από την ελλειμματική ανανεωτική Εξίσωση (2.3.13), έχει αποδειχθεί ότι είναι σημαντικό καθώς έχει αρκετές πρακτικές εφαρμογές. Για παράδειγμα, έχουμε τη δυνατότητα να υπολογίσουμε τα ϕ_δ και $b_{\delta,z}$ με τη βοήθεια του Πορίσματος 2.3.2, όπως θα παρουσιαστεί στο Πόρισμα 2.3.3 παρακάτω. Επίσης, μια άλλη χρήσιμη εφαρμογή παρουσιάζεται στην Ενότητα 2.3.4, όπου εξετάζεται η κατανομή $Erlang\,(n,b)$ για τα μεγέθη των ατομικών ασφαλίστρων.

Πρόταση 2.3.3

Η συνάρτηση Gerber-Shiu, υπό τις Συνθήκες (2.3.1) *και* (2.3.2)*, ικανοποιεί την εξίσωση*

$$m(u) = \frac{\mu}{\lambda+\mu+\delta}\int_0^\infty m(u+x)g(x)dx + \frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta}\left(\int_0^u m(u-y)f(y)dy + w(u)\right), \qquad u \ge 0 \qquad (2.3.21)$$

όπου

$$w(u) = \int_u^\infty \omega(u, y-u) f(y)dy\,, \qquad u \ge 0\,. \qquad (2.3.22)$$

Απόδειξη

Θεωρούμε τις τυχαίες μεταβλητές V_1 και W_1 που συμβολίζουν αντίστοιχα το χρόνο μέχρι την εμφάνιση της πρώτης απαίτησης, και το χρόνο μέχρι την εμφάνιση του πρώτου ατομικού ασφαλίστρου. Έστω η τυχαία μεταβλητή του νωρίτερου γεγονότος $L = \min(W_1, V_1)$. Από το Παράρτημα Π5, η L είναι εκθετικά κατανεμημένη με συνάρτηση πυκνότητας

$$f_L(t) = (\lambda+\mu)e^{-(\lambda+\mu)t},\ t > 0\,.$$

Έστω η δεσμευμένη συνάρτηση Gerber-Shiu

$$m(u \mid L = t) = E[e^{-\delta t}\omega(U(T-), |U(T)|)I(T<\infty) \mid U(0) = u, L = t]\,.$$

Δεσμεύοντας ως προς το χρόνο του νωρίτερου γεγονότος (άφιξη απαίτησης ή ασφαλίστρου) έχουμε

$$\begin{aligned} m(u) &= \int_0^\infty m(u \mid L=t)\, f_L(t)dt \\ &= \int_0^\infty m(u \mid L=t)(\lambda+\mu)e^{-(\lambda+\mu)t}dt \end{aligned}$$

από το θεώρημα ολικής πιθανότητας είναι

$$m(u) = \int_0^\infty [m(u \mid L=t, W_1 \le V_1)\,P(W_1 \le V_1) + m(u \mid L=t, V_1 < W_1)\,P(V_1 < W_1)](\lambda+\mu)e^{-(\lambda+\mu)t}dt$$

αλλά (Παράρτημα Π5)

$$P(W_1 \le V_1) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} \qquad \text{και} \qquad P(V_1 < W_1) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

οπότε

$$m(u) = \int_0^\infty \left[m(u \mid L=t, W_1 \le V_1)\frac{\mu}{\lambda+\mu} + m(u \mid L=t, V_1 < W_1)\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right](\lambda+\mu)e^{-(\lambda+\mu)t}dt$$

$$= \int_0^\infty [\mu\, m(u \mid L=t, W_1 \le V_1) + \lambda\, m(u \mid L=t, V_1 < W_1)] e^{-(\lambda+\mu)t} dt$$

διακρίνουμε τις περιπτώσεις

α) Να συμβεί πρώτα άφιξη ασφαλίστρου, έστω ύψους *x*. Τότε η διαδικασία συνεχίζεται με αποθεματικό $u+x$.

β) Συμβαίνει πρώτα άφιξη απαίτησης, έστω ύψους *y*,

β1) αν $y<u$, δηλαδή η απαίτηση είναι μικρότερη από το αρχικό αποθεματικό, τότε η διαδικασία συνεχίζεται με αποθεματικό $u-y$

β2) αν $y>u$, δηλαδή η απαίτηση είναι μεγαλύτερη από το αρχικό αποθεματικό, τότε εφαρμόζεται η συνάρτηση ποινής.

Έτσι η παραπάνω συνάρτηση Gerber-Shiu γίνεται

$$m(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t}\left[\mu\int_0^\infty m(u+x)g(x)dx + \lambda\left(\int_0^u m(u-y)f(y)dy + \int_u^\infty \omega(u,y-u)f(y)dy\right)\right]e^{-(\lambda+\mu)t}dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-(\lambda+\mu+\delta)t}dt\left[\mu\int_0^\infty m(u+x)g(x)dx + \lambda\left(\int_0^u m(u-y)f(y)dy + \int_u^\infty \omega(u,y-u)f(y)dy\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\lambda+\mu+\delta}\left[\mu\int_0^\infty m(u+x)g(x)dx + \lambda\left(\int_0^u m(u-y)f(y)dy + \int_u^\infty \omega(u,y-u)f(y)dy\right)\right].$$

Θέτοντας

$$w(u) = \int_u^\infty \omega(u,y-u)f(y)dy$$

έχουμε τη ζητούμενη σχέση (4.2).

□

Παρατήρηση 2.3.5. Από την Πρόταση 2.3.3., προκύπτει το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 1 στον Boikov (2002). Συγκεκριμένα, για $\delta=0$ και $\omega(x_2,x_2)=1$ προκύπτει η πιθανότητα χρεοκοπίας $m(u)=\psi_0(u)$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$(\lambda+\mu)\psi_0(u) = \mu\int_0^\infty \psi_0(u+x)g(x)dx + \lambda\left(\int_0^u \psi_0(u-y)f(y)dy + \bar{F}(u)\right), \qquad u\ge 0$$

αφού $w(u) = \int_u^\infty \omega(u,y-u)f(y)dy = \int_u^\infty f(y)dy = \bar{F}(u)$.

Το επόμενο πόρισμα αποτελεί μία εφαρμογή της Πρότασης 2.3.3 η οποία προσδιορίζει τα ϕ_δ και $b_{\delta,z}$ του Πορίσματος 2.3.2.

Πόρισμα 2.3.3

Έστω ότι ισχύουν οι συνθήκες του Πορίσματος 2.3.2. *Τότε, η* ϕ_δ *είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης*

$$\phi_\delta(\lambda+\mu+\delta)=\mu\phi_\delta\hat{g}((1-\phi_\delta)\alpha)+\lambda \tag{2.3.23}$$

στο διάστημα $(0,1)$ *και*

$$b_{\delta,z}=\frac{\lambda E[\omega_1(Y_1)]}{\alpha\lambda+z[\lambda+\delta+\mu(1-\hat{g}(\alpha+z))]}. \tag{2.3.24}$$

Απόδειξη

Η συνάρτηση πυκνότητας του μεγέθους των απαιτήσεων είναι

$$f(y)=\alpha e^{-\alpha y}$$

και η συνάρτηση ποινής έχει τη μορφή

$$\omega(u+x,y-u)=e^{-z(u+x)}\omega_1(y-u).$$

Οπότε από την (2.3.22) είναι

$$w(u)=\int_u^\infty \omega(u,y-u)f(y)dy=\int_u^\infty e^{-zu}\omega_1(y-u)\alpha e^{-\alpha y}dy$$

και με αλλαγή μεταβλητής $y_1=y-u \Rightarrow dy_1=dy$ και $u\le y<\infty \Rightarrow 0\le y_1<\infty$, οπότε το ολοκλήρωμα γίνεται

$$w(u)=\int_0^\infty e^{-zu}\omega_1(y_1)\alpha e^{-\alpha(y_1+u)}dy_1=e^{-(z+\alpha)u}\int_0^\infty \omega_1(y_1)\alpha e^{-\alpha y_1}dy=e^{-(z+\alpha)u}E(\omega_1(Y_1)). \tag{2.3.25}$$

Αντικαθιστώντας τις (2.3.17), (2.3.25) στην Εξίσωση (2.3.21), προκύπτει

$$\begin{aligned} b_{\delta,z}[\alpha\phi_\delta e^{-\alpha(1-\phi_\delta)u}+ze^{-(\alpha+z)u}] &= \frac{\mu}{\lambda+\mu+\delta}\int_0^\infty b_{\delta,z}[\alpha\phi_\delta e^{-\alpha(1-\phi_\delta)(u+x)}+ze^{-(\alpha+z)(u+x)}]g(x)dx \\ &+\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta}\left(\int_0^u b_{\delta,z}[\alpha\phi_\delta e^{-\alpha(1-\phi_\delta)(u-y)}+ze^{-(\alpha+z)(u-y)}]f(y)dy+e^{-(z+\alpha)u}E(\omega_1(Y_1))\right)\end{aligned}$$

και ισοδύναμα αφού αντικατασταθεί και η $f(y)$ είναι

$$\begin{aligned} &(\lambda+\mu+\delta)b_{\delta,z}\alpha\phi_\delta e^{-\alpha(1-\phi_\delta)u}+(\lambda+\mu+\delta)b_{\delta,z}ze^{-(\alpha+z)u}] \\ &=\mu b_{\delta,z}\left(\alpha\phi_\delta e^{-\alpha(1-\phi_\delta)u}\int_0^\infty e^{-\alpha(1-\phi_\delta)x}g(x)dx+ze^{-(\alpha+z)u}\int_0^\infty e^{-(\alpha+z)x}g(x)dx\right) \\ &+\lambda b_{\delta,z}\left(\alpha\phi_\delta e^{-\alpha(1-\phi_\delta)u}\int_0^u e^{\alpha(1-\phi_\delta)y}\alpha e^{-\alpha y}dy+ze^{-(\alpha+z)u}\int_0^u e^{(\alpha+z)y}\alpha e^{-\alpha y}dy\right) \\ &+\lambda e^{-(z+\alpha)u}E(\omega_1(Y_1)). \end{aligned} \tag{2.3.26}$$

Όμως τα δύο πρώτα ολοκληρώματα στο δεξιό μέλος της προηγούμενης σχέσης είναι αντίστοιχα οι μετασχηματισμοί Laplace

$$\hat{g}(\alpha(1-\phi_\delta))=\int_0^\infty e^{-\alpha(1-\phi_\delta)x}g(x)dx \qquad \text{και} \qquad \hat{g}(\alpha+z)=\int_0^\infty e^{-(\alpha+z)x}g(x)dx .$$

Επίσης, υπολογίζοντας το τρίτο και τέταρτο ολοκλήρωμα, προκύπτει αντίστοιχα

$$\int_0^u e^{\alpha(1-\phi_\delta)y}\alpha e^{-\alpha y}dy=\alpha\int_0^u e^{-\alpha\phi_\delta y}dy=\alpha\left[\frac{e^{-\alpha\phi_\delta y}}{-\alpha\phi_\delta}\right]_0^u=\frac{1-e^{-\alpha\phi_\delta u}}{\phi_\delta}$$

και

$$\int_0^u e^{(\alpha+z)y}\alpha e^{-\alpha y}dy=\alpha\int_0^u e^{zy}dy=\alpha\frac{e^{zu}-1}{z} .$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στην (2.3.26) έχουμε

$$\begin{aligned}(\lambda+\mu+\delta)b_{\delta,z}\alpha\phi_\delta e^{-\alpha(1-\phi_\delta)u}+(\lambda+\mu+\delta)b_{\delta,z}ze^{-(\alpha+z)u}]\\ =\mu b_{\delta,z}[\alpha\phi_\delta e^{-\alpha(1-\phi_\delta)u}\hat{g}(\alpha(1-\phi_\delta))+ze^{-(\alpha+z)u}\hat{g}(\alpha+z))]\\ +\lambda b_{\delta,z}[\alpha e^{-\alpha(1-\phi_\delta)u}(1-e^{-\alpha\phi_\delta u})+e^{-(\alpha+z)u}\alpha(e^{zu}-1)]\\ +\lambda e^{-(z+\alpha)u}E(\omega_1(Y_1))\end{aligned}$$

όπου απλοποιώντας και αναδιατάσσοντας τους όρους προκύπτει

$$\begin{aligned}0=\lambda e^{-(z+\alpha)u}E(\omega_1(Y_1))+b_{\delta,z}\left\{\alpha\phi_\delta e^{-\alpha(1-\phi_\delta)u}[\mu\hat{g}(\alpha(1-\phi_\delta))-\lambda-\mu-\delta]\right.\\ \left.+ze^{-(\alpha+z)u}[\mu\hat{g}(\alpha+z)-\lambda-\mu-\delta]+\alpha\lambda[e^{-\alpha(1-\phi_\delta)u}-e^{-(\alpha+z)u}]\right\} .\end{aligned} \qquad (2.3.27)$$

Σύμφωνα με την (2.3.8) η ϕ_δ δεν εξαρτάται από το z και το w_1. Μπορούμε έτσι, να βρούμε την τιμή της (2.3.27) στην ειδική περίπτωση όπου $z=0$ και $\omega_1=1$ για κάθε $y>0$. Τότε, η (2.3.18) γίνεται $b_{\delta,0}=\dfrac{\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\delta t}v(dx\times dt)}{\alpha\phi_\delta}\overset{(3.5)}{=}\dfrac{\phi_\delta}{\alpha\phi_\delta}=\dfrac{1}{\alpha}$ και, αφού $E(\omega_1(Y_1))=E(1)=1$, από την (2.3.27) παίρνουμε

$$0=\phi_\delta e^{-\alpha(1-\phi_\delta)u}[\mu\hat{g}(\alpha(1-\phi_\delta))-\lambda-\mu-\delta]+\lambda e^{-\alpha(1-\phi_\delta)u}$$

και πολλαπλασιάζοντας με $e^{\alpha(1-\phi_\delta)u}$ ισοδύναμα βρίσκουμε

$$0=\phi_\delta[\mu\hat{g}(\alpha(1-\phi_\delta))-\lambda-\mu-\delta]+\lambda$$

όπου αναδιατάσσοντας τους όρους προκύπτει

$$\phi_\delta(\lambda+\mu+\delta)=\mu\phi_\delta\hat{g}(\alpha(1-\phi_\delta))+\lambda$$

δηλαδή η ζητούμενη Εξίσωση (2.3.23).

Από την Πρόταση 2.3.2 έχουμε ότι $\phi_\delta\in(0,1)$. Στην πραγματικότητα, το $\phi=\phi_\delta$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης

$$\phi(\lambda+\mu+\delta)=\mu\phi\,\hat{g}(\alpha(1-\phi))+\lambda$$

ή

$$\lambda+\mu+\delta=\mu\hat{g}(\alpha(1-\phi))+\frac{\lambda}{\phi} \tag{2.3.28}$$

στο $(0,1)$. Για να το δούμε αυτό, θέτουμε $v=\alpha(1-\phi)$ από το οποίο προκύπτει $\phi=1-\frac{v}{\alpha}$, οπότε η (2.3.28) γράφεται

$$\lambda+\mu+\delta=\mu\hat{g}(v)+\frac{\alpha\lambda}{\alpha-v}$$

ή

$$\lambda+\mu+\delta-\frac{\alpha\lambda}{\alpha-v}=\mu\hat{g}(v)$$

ή

$$h(v)=\mu\hat{g}(v) \tag{2.3.29}$$

με

$$h(v)=\lambda+\mu+\delta-\frac{\alpha\lambda}{\alpha-v}.$$

Αλλά $h'(v)=-\frac{\alpha\lambda}{(\alpha-v)^2}$ και $h''(v)=-\frac{2\alpha\lambda}{(\alpha-v)^3}<0$ στο $[0,\alpha)$ συνεπώς η h είναι αυστηρά κοίλη στο $[0,\alpha)$. Επίσης, αφού $\mu>0$ και για το μετασχηματισμό Laplace είναι $\hat{g}(v)>0$, είναι $\mu\hat{g}>0$. Αλλά, $\frac{d}{dv}[\mu\hat{g}(v)]=\frac{d}{dv}\left(\mu\int_0^\infty e^{-vx}g(x)dx\right)=\mu\int_0^\infty -xe^{-vx}g(x)dx$ και $\frac{d^2}{dv^2}[\mu\hat{g}(v)]=\frac{d}{dv}\left(\mu\int_0^\infty -xe^{-vx}g(x)dx\right)=\mu\int_0^\infty x^2e^{-vx}g(x)dx>0$, συνεπώς η $\mu\hat{g}$ είναι αυστηρά κυρτή στο $[0,\alpha)$. Τέλος, για $v=0$ είναι $h(0)=\mu+\delta\geq\mu$ (με τη ισότητα να ισχύει για $\delta=0$), και αφού $\hat{g}(0)=1$ (ιδιότητα μετασχηματισμού Laplace), $\mu\hat{g}(0)=\mu$, οπότε, $h(0)\geq\mu\hat{g}(0)$. Από την προηγούμενη ανάλυση, συμπεραίνουμε ότι δεν μπορεί να υπάρχουν δύο διακεκριμένες ρίζες της (79) στο $[0,\alpha)$.

Από την (2.3.23) βρίσκουμε $\mu\hat{g}(\alpha(1-\phi_\delta))=\frac{\phi_\delta(\lambda+\mu+\delta)-\lambda}{\phi_\delta}$ και αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα αυτό στην (2.3.27) βρίσκουμε διαδοχικά

$$0=\lambda e^{-(z+\alpha)u}E(\omega_1(Y_1))+b_{\delta,z}\left\{\alpha\phi_\delta e^{-\alpha(1-\phi_\delta)u}\left[\frac{\phi_\delta(\lambda+\mu+\delta)-\lambda}{\phi_\delta}-(\lambda+\mu+\delta)\right]\right.$$
$$\left.+ze^{-(\alpha+z)u}[\mu\hat{g}(\alpha+z)-\lambda-\mu-\delta]+\alpha\lambda e^{-\alpha(1-\phi_\delta)u}-\alpha\lambda e^{-(\alpha+z)u}\right\}$$

ή

$$0=\lambda e^{-(z+\alpha)u}E(\omega_1(Y_1))+b_{\delta,z}\left\{-\lambda\alpha e^{-\alpha(1-\phi_\delta)u}+ze^{-(\alpha+z)u}[\mu\hat{g}(\alpha+z)-\lambda-\mu-\delta]+\alpha\lambda e^{-\alpha(1-\phi_\delta)u}-\alpha\lambda e^{-(\alpha+z)u}\right\}$$

ή

$$0=\lambda e^{-(z+\alpha)u}E(\omega_1(Y_1))+b_{\delta,z}\left\{ze^{-(\alpha+z)u}[\mu\hat{g}(\alpha+z)-\lambda-\mu-\delta]-\alpha\lambda e^{-(\alpha+z)u}\right\}$$

ή

$$b_{\delta,z}\left\{z[\mu\hat{g}(\alpha+z)-z(\lambda+\mu+\delta)]-\alpha\lambda\right\}=-\lambda E(\omega_1(Y_1))$$

ή

$$b_{\delta,z}=\frac{\lambda E(\omega_1(Y_1))}{\alpha\lambda+z[(\lambda+\mu+\delta)-\mu\hat{g}(\alpha+z)]}$$

δηλαδή η (2.3.24). Παρατηρούμε ότι ο παρονομαστής της (2.3.24) είναι μη μηδενικός αφού για το μετασχηματισμό Laplace είναι $\hat{g}(\alpha+z)\le 1$.

□

Στο παράδειγμα που ακολουθεί, οι απαιτήσεις είναι εκθετικά κατανεμημένες και τα ατομικά ασφάλιστρα ακολουθούν την κατανομή *Erlang*.

Παράδειγμα 2.3.1

Θεωρούμε ότι οι απαιτήσεις είναι εκθετικά κατανεμημένες με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(y)=\alpha e^{-\alpha y},\quad y\ge 0,\ \alpha>0$$

και ότι τα ασφάλιστρα ακολουθούν την κατανομή $Erlang(n,\beta)$ με συνάρτηση πυκνότητας

$$g(x)=\frac{\beta^n x^{n-1}e^{-\beta x}}{(n-1)!},\qquad x\ge 0,\ \beta>0,\ n=1,2,...$$

και μετασχηματισμό Laplace

$$\hat{g}(s)=\left(\frac{\beta}{\beta+s}\right)^n.$$

Στην περίπτωση αυτή, η Εξίσωση (2.3.23) γράφεται

$$\phi_\delta(\lambda+\mu+\delta)=\mu\phi_\delta\left(\frac{\beta}{\beta+(1-\phi_\delta)\alpha}\right)^n+\lambda. \tag{2.3.30}$$

Θέτοντας $v=\dfrac{\beta+(1-\phi_\delta)\alpha}{\beta}$, έχουμε $\phi_\delta=1-\dfrac{\beta v-\beta}{\alpha}$ και αντικαθιστώντας στην (2.3.30) προκύπτει

$$p(v):=\beta(\lambda+\mu+\delta)v^{n+1}-[\beta(\lambda+\mu+\delta)+\alpha(\mu+\delta)]v^n-\beta\mu v+\mu(\alpha+\beta)=0$$

Επίσης, $\phi_\delta\in(0,1)$ εάν και μόνο εάν $0<1-\dfrac{\beta v-\beta}{\alpha}<1\Leftrightarrow 1<v<1+\dfrac{\alpha}{\beta}$.

Για παράδειγμα, εάν τα ασφάλιστρα είναι εκθετικά κατανεμημένα, δηλαδή είναι $n=1$, και εάν $\delta=0$, τότε από την (2.3.30) προκύπτει

$$\varphi_0(\lambda+\mu)=\mu\varphi_0\frac{\beta}{\beta+(1-\varphi_0)\alpha}+\lambda$$

και λύνοντας ως προς φ_0 βρίσκουμε

$$\varphi_0=\frac{\lambda(\alpha+\beta)}{\alpha(\lambda+\mu)}.$$

Στην ειδική περίπτωση που $z=0$ και $\omega_1(y)=1$ για όλα τα $y>0$, είναι $\omega(x,y)=e^{-zx}\omega_1(y)=1$, $E(\omega_1(Y_1))=1$, οπότε το Πόρισμα 2.3.2 δίνει

$$b_{\delta,z}=\frac{1\cdot\int_0^\infty\int_0^\infty v(dx\times dt)}{0+\alpha\phi_0}=\frac{\phi_0}{\alpha\phi_0}=\frac{1}{\alpha}$$

και πιθανότητα χρεοκοπίας

$$\psi_0(u)=P[T<\infty\,|\,U(0)=u]=\frac{1}{\alpha}\left(\alpha\varphi_0e^{-\alpha(1-\varphi_0)u}+0\right)=\varphi_0e^{-\alpha(1-\varphi_0)u}=\frac{\lambda(\alpha+\beta)}{\alpha(\lambda+\mu)}e^{-\frac{\alpha\mu+\beta\lambda}{\lambda+\mu}u},\ u\geq 0.$$

Το προηγούμενο αποτέλεσμα ανακτά τη δεύτερη δήλωση του Θεωρήματος 2 στο Boikov (2002).

2.3.4 Ατομικά ασφάλιστρα με κατανομή Erlang

Στην ενότητα αυτή, εξετάζουμε την περίπτωση όπου τα ατομικά ασφάλιστρα είναι κατανεμημένα σύμφωνα με την κατανομή $Erlang(n,\beta)$ για κάποιο $\beta>0$ και $n\in\mathbf{N}^+$ και οι απαιτήσεις να ακολουθούν μία οποιαδήποτε κατανομή. Με αυτό τον τρόπο, γενικεύεται η θεώρηση των εκθετικά κατανεμημένων απαιτήσεων που εξετάστηκε στα Πορίσματα 2.3.2 και 2.3.3.

Το κεντρικό αποτέλεσμα της ενότητας είναι η Πρόταση 5.3.5, η οποία σε σύγκριση με τη γενική διατύπωση της Πρότασης 2.3.2, παρέχει μια συγκεκριμένη ανανεωτική εξίσωση που ικανοποιεί η συνάρτηση Gerber-Shiu m (βλ. επίσης Παρατήρηση 2.3.4).

Αρχικά με το επόμενο λήμμα δίνονται κάποιες ιδιότητες της $Erlang(n,\beta)$ οι οποίες θα χρειαστούν στην περαιτέρω ανάλυση.

Λήμμα 2.3.3

Για $n\geq 1$ και $\beta>0$, η κατανομή $Erlang(n,\beta)$ με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $g(x)=\frac{\beta^n}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-\beta x}$, $x\geq 0$ ικανοποιεί τις ιδιότητες

(i) $g^{(k)}(0)=0$, $k=0,1,\ldots,n-2$ *και* $g^{(n-1)}(0)=\beta^n$,

(ii) $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\beta^{n-i}g^{(i)}(x)=0$ *για όλα τα* $x\geq 0$,

(iii) $\int_0^{\infty}\left|g^{(k)}(u)\right|du<\infty,\ k=0,1,\ldots,n$.

Απόδειξη

Με επαγωγή μπορεί να δειχθεί ότι η παράγωγος k τάξης της g δίνεται από τη σχέση

$$g^{(k)}(x)=-\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}\beta^{k-i}g^{(i)}(x)+\frac{\beta^n}{(n-1-k)!}x^{n-1-k}e^{-\beta x},\quad k=0,1,\ldots,n-1. \tag{2.3.31α}$$

Από την προηγούμενη σχέση για $k=n-1$ προκύπτει

$$g^{(n-1)}(x)=-\sum_{i=0}^{n-2}\binom{n-1}{i}\beta^{n-1-i}g^{(i)}(x)+\beta^n e^{-\beta x}. \tag{2.3.31β}$$

Από τις (2.3.31α) και (2.3.31β) για $x=0$ έχουμε την περίπτωση (i).

Παραγωγίζοντας την (2.3.31β) έχουμε

$$g^{(n)}(x)=-\sum_{i=0}^{n-2}\binom{n-1}{i}\beta^{n-1-i}g^{(i+1)}(x)-\beta\beta^n e^{-\beta x}$$

Για το άθροισμα κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $j=i+1$. Επίσης αντικαθιστούμε τον όρο $\beta^n e^{-\beta x}$ με χρήση της (2.3.31β) και προκύπτει

$$\begin{aligned}
g^{(n)}(x)&=-\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{j-1}\beta^{n-j}g^{(j)}(x)-\beta\left(g^{(n-1)}(x)+\sum_{i=0}^{n-2}\binom{n-1}{i}\beta^{n-1-i}g^{(i)}(x)\right)\\
&=-\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i-1}\beta^{n-i}g^{(i)}(x)-\beta\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}\beta^{n-1-i}g^{(i)}(x)\\
&=-\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i-1}\beta^{n-i}g^{(i)}(x)-\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i}\beta^{n-i}g^{(i)}(x)-\beta^n g(x)\\
&=-\sum_{i=1}^{n-1}\left[\binom{n-1}{i-1}+\binom{n-1}{i}\right]\beta^{n-i}g^{(i)}(x)-\beta^n g(x)
\end{aligned}$$

όπου κάνοντας χρήση της ταυτότητας $\binom{n}{i}=\binom{n-1}{i-1}+\binom{n-1}{i}$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}
g^{(n)}(x)&=-\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i}\beta^{n-i}g^{(i)}(x)-\beta^n g(x)\\
&=-\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}\beta^{n-i}g^{(i)}(x)
\end{aligned} \tag{2.3.31γ}$$

η οποία είναι ισοδύναμη με την περίπτωση (ii).

Τέλος, με επαγωγή από τις (2.3.31α) και (2.3.31γ) προκύπτει η περίπτωση (iii).

□

Το πρώτο βήμα που θα μας οδηγήσει στη διατύπωση της ανανεωτικής εξίσωσης για τη συνάρτηση m, είναι να δοθεί η μορφή του μετασχηματισμού Laplace της συνάρτησης Gerber-Shiu m. Ο μετασχηματισμός Laplace $\hat{m}(s)$ έχει δειχθεί στο Λήμμα 2.3.1 ότι υπάρχει για όλα τα $s \geq 0$. Πρέπει επίσης όμως να διασφαλίσουμε την ολοκληρωσιμότητα και κατ' επέκταση την ύπαρξη του μετασχηματισμού Laplace των βοηθητικών συναρτήσεων w (που δόθηκε στην (2.3.22)) και

$$\gamma(u) = \int_0^u m(u-y)dF(y) + w(u), \qquad u \geq 0. \tag{2.3.32}$$

Η w είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση ως συνέπεια του ότι $E(Y_1) < \infty$ καθώς και του ότι η ω είναι φραγμένη συνάρτηση (Συνθήκη 2.3.2). Εάν $E(Y_1^2) < \infty$, τότε από το Λήμμα 2.3.1 η συνάρτηση m είναι ολοκληρώσιμη και καθώς και η w είναι ολοκληρώσιμη, είναι ολοκληρώσιμη και η γ λόγω του θεωρήματος Fubini και της (2.3.32).

Η πρόταση που ακολουθεί είναι συνέπεια της Πρότασης 2.3.3 και χαρακτηρίζει το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης Gerber-Shiu m.

Πρόταση 2.3.4

Έστω ισχύουν οι Συνθήκες 2.3.1, 2.3.2, 2.3.3 *και* 2.3.4. *Θεωρούμε ότι τα ατομικά ασφάλιστρα ακολουθούν την κατανομή Erlang*(n,β) *και ότι για την κατανομή των απαιτήσεων ισχύει* $E(Y_1^2) < \infty$. *Τότε ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης Gerber-Shiu είναι*

$$\hat{m}(s) = \frac{\lambda(\beta-s)^n \hat{w}(s) - p_{n-1}(s)}{[\lambda+\mu+\delta-\lambda \hat{f}(s)](\beta-s)^n - \mu\beta^n}, \quad s \geq 0, \tag{2.3.33}$$

όπου p_{n-1} *είναι ένα πολυώνυμο το πολύ* $m-1$ *βαθμού. Επιπλέον, εάν η εξίσωση*

$$L(s) := [\lambda+\mu+\delta-\lambda \hat{f}(s)](\beta-s)^n - \mu\beta^n = 0, \tag{2.3.34}$$

γνωστή ως θεμελιώδης εξίσωση Lundberg, έχει n *διακεκριμένες ρίζες, έστω* $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n \in \mathbf{C}$, *με μη αρνητικά πραγματικά μέρη, τότε το πολυώνυμο* p_{n-1} *μπορεί να εκφραστεί ως*

$$p_{n-1}(s) = \lambda \sum_{j=1}^{n} \frac{(\beta-\rho_j)^n \hat{w}(\rho_j)}{\pi_{n,j}(\rho_j)} \pi_{n,j}(s), \tag{2.3.35}$$

όπου

$$\pi_{n,j}(s) = \begin{cases} 1, & \text{εάν } n = j = 1, \\ \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{n} (\beta - \rho_j), & \text{εάν } n = 2,3,4,..., j = 1,2,...,n. \end{cases} \tag{2.3.36}$$

Απόδειξη

Έστω

$$l(u) = \int_0^\infty m(u+x)g(x)dx = \int_u^\infty m(x)g(x-u)dx \tag{2.3.37}$$

Από τη συνέχεια της συνάρτησης m, το Λήμμα 2.3.3 (i) και (iii), και τον κανόνα του Leibniz (Παράρτημα Π8) έχουμε

$$l^{(k)}(u) = (-1)^k \int_u^\infty m(x)g^{(k)}(x-u)dx, \quad u \geq 0,\ k = 0,1,\ldots,n-1, \tag{2.3.38}$$

και

$$l^{(n)}(u) = (-1)^n \int_u^\infty m(x)g^{(n)}(x-u)dx + (-1)^n \beta^n m(u), \quad u \geq 0. \tag{2.3.39}$$

Αφού η m είναι ολοκληρώσιμη λόγω του Λήμματος 2.3.1, τότε από το Λήμμα 2.3.3 (iii) συνεπάγεται ότι ο μετασχηματισμός Laplace $l^{(k)}(s)$ είναι καλά ορισμένος για όλα τα $s \geq 0$, $k = 0,1,\ldots,n$. Ορίζουμε ως

$$S_l(u) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \beta^{n-k} l^{(k)}(u),\ u \geq 0. \tag{2.3.40}$$

Από το Λήμμα 2.3.3 (ii) και τις Εξισώσεις (2.3.38) και (2.3.39)

$$S_l(u) = \beta^n m(u),\ u \geq 0$$

όπου, παίρνοντας μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη της τελευταίας, έχουμε

$$\hat{S}_l(s) = \beta^n \hat{m}(s). \tag{2.3.41}$$

Επίσης ο μετασχηματισμός Laplace της $l^{(n)}(u)$ είναι (Spiegel (1965))

$$\widehat{l^{(k)}}(\mathrm{s}) = s^k \hat{l}(\mathrm{s}) - \sum_{j=0}^{k-1} s^j l^{(k-1-n)}(0),\ s \geq 0,\ k = 0,1,\ldots,n,$$

η οποία σε συνδυασμό με την (2.3.40) δίνει

$$\hat{S}_l(s) = (\beta - s)^n \hat{l}(s) + \frac{1}{\mu} p_{n-1}(s),\ s > 0$$

όπου $p_{n-1}(s)$ είναι ένα πολυώνυμο το πολύ $n-1$ βαθμού. Σε συνδυασμό με την (2.3.41) παίρνουμε

$$\beta^n \hat{m}(s) = (\beta - s)^n \hat{l}(s) + \frac{1}{\mu} p_{n-1}(s)$$

και ισοδύναμα

$$\mu(\beta - s)^n \hat{l}(s) = \mu\beta^n \hat{m}(s) - p_{n-1}(s),\ s \geq 0 \tag{2.3.42}$$

Στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη της (2.3.21), η οποία με βάση την (2.3.32) γράφεται ως

$$m(u)=\frac{\mu}{\lambda+\mu+\delta}\int_0^\infty m(u+x)g(x)dx+\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta}\gamma(u)\,.$$

Από την ιδιότητα της γραμμικότητας του μετασχηματισμού Laplace (Παράρτημα Π1) έχουμε

$$L\{m(u)\}=\frac{\mu}{\lambda+\mu+\delta}L\left\{\int_0^\infty m(u+x)g(x)dx\right\}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta}L\{\gamma(u)\}\,. \tag{2.3.43}$$

Αλλά για τους μετασχηματισμούς στο δεξιό μέλος καθώς αυτοί αναφέρονται σε συνέλιξη είναι

$$L\left\{\int_0^\infty m(u+x)g(x)dx\right\}=\hat{m}(s)\hat{g}(s)$$

και από την (2.3.32)

$$L\{\gamma(u)\}=L\left\{\int_0^u m(u-y)f(y)dy+w(u)\right\}=L\left\{\int_0^u m(u-y)f(y)dy\right\}+L\{w(u)\}=\hat{m}(s)\hat{f}(s)+\hat{w}(s)$$

οπότε η (2.3.43) γίνεται

$$\hat{m}(s)=\frac{\mu}{\lambda+\mu+\delta}\hat{m}(s)\hat{g}(s)+\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta}[\hat{m}(s)\hat{f}(s)+\hat{w}(s)]$$

και ισοδύναμα

$$[\lambda+\mu+\delta-\lambda\hat{f}(s)]\hat{m}(s)=\mu\hat{m}(s)\hat{g}(s)+\lambda\hat{w}(s)\,. \tag{2.3.44}$$

Επίσης από την (2.3.37) είναι

$$\hat{l}(s)=L\{l(u)\}=L\left\{\int_u^\infty m(x)g(x-u)dx\right\}=\hat{m}(s)\hat{g}(s)\,,$$

οπότε η (2.3.44) γίνεται

$$[\lambda+\mu+\delta-\lambda\hat{f}(s)]\hat{m}(s)=\mu\hat{l}(s)+\lambda\hat{w}(s)$$

όπου πολλαπλασιάζοντας με $(\beta-s)^n$ παίρνουμε

$$[\lambda+\mu+\delta-\lambda\hat{f}(s)](\beta-s)^n\hat{m}(s)=\mu(\beta-s)^n\hat{l}(s)+\lambda(\beta-s)^n\hat{w}(s)$$

και κάνοντας χρήση της (2.3.42) καταλήγουμε στην

$$[\lambda+\mu+\delta-\lambda\hat{f}(s)](\beta-s)^n\hat{m}(s)=\mu\beta^n\hat{m}(s)-p_{n-1}(s)+\lambda(\beta-s)^n\hat{w}(s)\,.$$

Με αναδιάταξη των όρων στην προηγούμενη εξίσωση προκύπτει η (2.3.33),

$$\left\{[\lambda+\mu+\delta-\lambda\hat{f}(s)](\beta-s)^n-\mu\beta^n\right\}\hat{m}(s)=\lambda(\beta-s)^n\hat{w}(s)-p_{n-1}(s)\,.$$

Αφού οι $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n$ είναι οι ρίζες της Εξίσωσης (2.3.34), δηλαδή $L(\rho_j) = 0$, $j = 1,...,n$, τότε από την (2.3.33) έχουμε

$$0 = \lambda(\beta - s)^n \hat{w}(s) - p_{n-1}(s)$$

ή

$$p_{n-1}(\rho_j) = \lambda(\beta - \rho_j)^n \hat{w}(\rho_j), \; j = 1,...,n.$$

Αφού το $p_{n-1}(s)$ είναι ένα πολυώνυμο το πολύ $n-1$ βαθμού και υπό την υπόθεση ότι οι ρίζες $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n$ είναι διακεκριμένες, τότε με παρεμβολή Lagrange προκύπτει η (2.3.35).

□

Για να χρησιμοποιηθεί η (2.3.35) για το πολυώνυμο $p_{n-1}(s)$ το οποίο εμπλέκεται στο μετασχηματισμό Laplace της Πρότασης 2.3.4, πρέπει η θεμελιώδης εξίσωση Lundberg που δίνεται στην (2.3.34) να έχει n διακεκριμένες μιγαδικές ρίζες με μη αρνητικά πραγματικά μέρη. Το επόμενο λήμμα μας εξασφαλίζει ότι υπάρχουν πάντα n ρίζες με μη αρνητικά πραγματικά μέρη, οπότε θα πρέπει να διαπιστωθεί ότι οι ρίζες είναι διακεκριμένες. Μια τέτοια διαδικασία δίνεται στο Παράδειγμα το 2.3.2.

Λήμμα 2.3.4

Η Εξίσωση Lundberg (2.3.34) *έχει τουλάχιστον* n *ρίζες στο δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο. Επιπλέον, όταν* $\delta = 0$, *μία από αυτές τις ρίζες είναι ίση με μηδέν.*

Απόδειξη

Έστω $z = \dfrac{\beta - s}{\beta}$. Τότε η Εξίσωση (2.3.34) ισοδύναμα γράφεται

$$[\lambda + \mu + \delta - \lambda \hat{f}[\beta(1-z)](z\beta)^n - \mu\beta^n = 0$$

ή

$$(\lambda + \mu + \delta)z^n - \mu = \lambda z^n \hat{f}[\beta(1-z)]. \tag{2.3.45}$$

Έστω $\delta > 0$. Θεωρούμε $r \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $(\mu + \delta)r^n > \mu$, και έστω $C_z = \{z \in C : |z| = r\}$. Οι συναρτήσεις $(\lambda + \mu + \delta)z^n$ και $\lambda z^n \hat{f}[\beta(1-z)]$ είναι αναλυτικές πάνω στην καμπύλη C_z καθώς και στο εσωτερικό της. Για κάθε $z \in C_z$ ισχύει,

$$\left|(\lambda + \mu + \delta)z^n - \mu\right| \geq (\lambda + \mu + \delta)|z|^n - \mu = \lambda r^n + (\mu + \delta)r^n - \mu > \lambda r^n = \lambda |z|^n \geq \left|\lambda z^n \hat{f}[\beta(1-z)]\right|,$$

δηλαδή,

$$\left|(\lambda + \mu + \delta)z^n - \mu\right| > \left|\lambda z^n \hat{f}[\beta(1-z)]\right|.$$

Από το θεώρημα Rouché (Παράρτημα Π7) έχουμε ότι οι $(\lambda+\mu+\delta)z^n-\mu$ και $\lambda z^n \hat{f}[\beta(1-z)]$ έχουν τον ίδιο αριθμό ριζών εντός της C_z. Επίσης, όλες οι ρίζες βρίσκονται πάνω στον κύκλο $\left\{ z\in C: |z| = \dfrac{\mu}{\{\mu+\lambda+\delta)^{1/n}} \right\}$ που βρίσκεται στο εσωτερικό της C_z. Έτσι η Εξίσωση (Α.7) έχει ακριβώς n ρίζες εντός της C_z. Η Εξίσωση Lundberg (2.3.34) έχει τον ίδιο αριθμό ριζών στο $C_s = \{s\in C: |\beta - s| = r\beta\}$. Το εσωτερικό του C_s είναι εξ' ολοκλήρου στο θετικό μιγαδικό ημιεπίπεδο, συνεπώς έχουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Για την περίπτωση $\delta=0$, το θεώρημα Rouché δεν εφαρμόζεται οπότε θεωρούμε την τροποποίησή του (Παράρτημα Π7). Θεωρούμε το τροποποιημένο πεδίο $\hat{C}_z = \{z\in C: |z|=1, z\neq 1\}$. Είναι

$$\left|(\lambda+\mu)z^n-\mu\right| \geq (\lambda+\mu)|z|^n - \mu = \lambda .$$

Επίσης,

$$\left|\lambda z^n \hat{f}[\beta(1-z)]\right| = \lambda |z|^n \left|\hat{f}[\beta(1-z)]\right| \leq \lambda \int_0^\infty \left|e^{-\beta(1-z)y}\right| f(y)dy = \lambda \int_0^\infty e^{-\beta y} \left|e^z\right|^{\beta y} f(y)dy < \lambda ,$$

αφού $e^z < e$ για $z \in \hat{C}_z$. Έτσι από τα προηγούμενα αποτελέσματα είναι,

$$\left|(\lambda+\mu)z^n-\mu\right| > \left|\lambda z^n \hat{f}[\beta(1-z)]\right| .$$

Επιπλέον,

$$(\lambda+\mu)z^n-\mu\Big|_{z=1} = \lambda = \lambda z^n \hat{f}[\beta(1-z)]\Big|_{z=1}$$

και

$$\left.\frac{\frac{d}{dz}[(\lambda+\mu)z^n-\mu] - \frac{d}{dz}\{\lambda z^n \hat{f}[\beta(1-z)]\}}{(\lambda+\mu)z^n-\mu}\right|_{z=1} = \frac{n\mu - \lambda\beta E(Y_1)}{\lambda} > 0 ,$$

όπου η ανισότητα στο τέλος ισχύει λόγω της (2.3.2).

Έτσι αφού όλες οι αναγκαίες συνθήκες έχουν επαληθευτεί, συμπεραίνουμε ότι η Εξίσωση (2.3.34) έχει τουλάχιστον n ρίζες στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο και μία από αυτές τις ρίζες είναι ίση με μηδέν.

□

Στο Παράδειγμα 2.3.2 που ακολουθεί, επιβεβαιώνεται η ύπαρξη των διακεκριμένων ριζών.

Παράδειγμα 2.3.2

Από την (2.3.34) η συνεχής συνάρτηση L είναι τέτοια ώστε $L(0)=\delta\beta^n$ και $L(\beta)=-\mu\beta^n<0$. Έτσι, αν $\delta>0$ τότε $L(0)>0$ και από το θεώρημα Bolzano η L έχει μία ρίζα $\rho_1\in(0,\beta)$, ενώ για $\delta=0$ είναι $\rho_1=0$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(i) Εάν $n=1$, τότε από την (2.3.35) με χρήση της (2.3.36) το πολυώνυμο $p_0(s)$ γίνεται

$$p_0(s)=\lambda\frac{(\beta-\rho_1)\hat{w}(\rho_1)}{\pi_{1,1}(\rho_1)}\pi_{1,1}(s)=\lambda(\beta-\rho_1)\hat{w}(\rho_1).$$

δηλαδή είναι μία σταθερά. Στην περίπτωση που $\omega(x,y)=1,\ \forall x\geq 0, y>0$, τότε $\hat{\zeta}(0)=E(Y_1)$. Εάν $\delta=0$, τότε $p_0(s)=\lambda\beta\,E(Y_1)$.

(ii) Για $n=2$ από την (2.3.34) προκύπτει

$$L(s)=(\lambda+\mu+\delta-\lambda\hat{f}(s))(\beta-s)^2-\mu\beta^2$$

και για $s=2\beta$,

$$L(2\beta)=(\lambda+\mu+\delta-\lambda\hat{f}(2\beta))(\beta-2\beta)^2-\mu\beta^2=\lambda\beta^2(1-\hat{f}(2\beta))+\delta\beta^2>0$$

όπου το θετικό πρόσημο προκύπτει αφού για το μετασχηματισμό Laplace είναι $\hat{f}(s)\leq 1$. Αφού είναι και $L(\beta)<0$, τότε αναγκαστικά υπάρχει μία ρίζα ρ_2 στο διάστημα $(\beta,2\beta)$. Έτσι, επιβεβαιώθηκε η ύπαρξη δύο διακεκριμένων ριζών με $0\leq\rho_1<\beta<\rho_2<2\beta$.

Στο παράδειγμα που ακολουθεί δίνεται μια έκφραση του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας ψ_δ που ορίστηκε στην (2.3.5), στην περίπτωση όπου οι απαιτήσεις ακολουθούν την κατανομή $Erlang(k,\alpha)$.

Παράδειγμα 2.3.3

Θεωρούμε την περίπτωση όπου $\omega(x,y)=1$ για $x\geq 0$, $y>0$. Τότε η συνάρτηση Gerber-Shiu είναι

$$m(u)=\psi_\delta(u)$$

με μετασχηματισμό Laplace

$$\hat{m}(s)=\hat{\psi}_\delta(s).$$

Από την (2.3.22) είναι

$$w(u)=\int_u^\infty f(y)dy=\bar{F}(u)$$

με μετασχηματισμό Laplace, σύμφωνα με την Ιδιότητα 5 του Παραρτήματος Π.2

$$\hat{w}(s)=L\{w(u)\}=L\{\bar{F}(u)\}=\frac{1-\hat{f}(s)}{s}.$$

Από την (2.3.33) προκύπτει διαδοχικά

$$\hat{\psi}_\delta(s) = \frac{\lambda(\beta-s)^n \dfrac{1-\hat{f}(s)}{s} - p_{n-1}(s)}{[\lambda+\mu+\delta-\lambda\hat{f}(s)](\beta-s)^n - \mu\beta^n}$$
$$= \frac{\lambda(\beta-s)^n(1-\hat{f}(s)) - sp_{n-1}(s)}{s\{[\lambda(1-\hat{f}(s))+\mu+\delta](\beta-s)^n - \mu\beta^n\}}$$
$$= \frac{\lambda(1-\hat{f}(s))(\beta-s)^n + (\mu+\delta)(\beta-s)^n - \mu\beta^n - (\mu+\delta)(\beta-s)^n + \mu\beta^n - sp_{n-1}(s)}{s[\lambda(1-\hat{f}(s))(\beta-s)^n + (\mu+\delta)(\beta-s)^n - \mu\beta^n]}$$
$$= \frac{1}{s} - \frac{(\mu+\delta)(\beta-s)^n - \mu\beta^n + sp_{n-1}(s)}{s[\lambda(1-\hat{f}(s))(\beta-s)^n + (\mu+\delta)(\beta-s)^n - \mu\beta^n]}.$$

Υπό την υπόθεση ότι οι απαιτήσεις ακολουθούν την κατανομή $Erlang(k,\alpha)$, με μετασχηματισμό Laplace

$$\hat{f}(s) = \left(\frac{\alpha}{\alpha+s}\right)^k,$$

τότε

$$\hat{\psi}_\delta(s) = \frac{1}{s} - \frac{(\mu+\delta)(\beta-s)^n - \mu\beta^n + sp_{n-1}(s)}{s\left[\lambda\left(1-\left(\dfrac{\alpha}{\alpha+s}\right)^k\right)(\beta-s)^n + (\mu+\delta)(\beta-s)^n - \mu\beta^n\right]}$$
$$= \frac{1}{s} - \frac{(\alpha+s)^k[(\mu+\delta)(\beta-s)^n - \mu\beta^n + sp_{n-1}(s)]}{s\left\{\lambda[(\alpha+s)^k - \alpha^k](\beta-s)^n + (\alpha+s)^k(\mu+\delta)(\beta-s)^n - \mu\beta^n\right\}}. \quad (2.3.46)$$

Ο δεύτερος όρος στο δεξί μέλος της (2.3.46) είναι ρητή συνάρτηση ως προς s, όπου ο αριθμητής είναι πολυώνυμο βαθμού $k+n$ και ο παρονομαστής είναι πολυώνυμο βαθμού $k+n+1$. Ακολουθώντας την τυπική διαδικασία εύρεσης του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace ρητών συναρτήσεων με ανάλυση σε απλά κλάσματα, και με την προϋπόθεση ότι μπορεί να προσδιοριστεί το πολυώνυμο $p_{n-1}(s)$, μπορεί να δοθεί αναλυτική έκφραση της $\psi_\delta(u)$.

Με το επόμενο λήμμα δίνεται μια διαφορετική έκφραση της συνάρτησης $L(s)$.

Λήμμα 2.3.5

Εάν οι ρίζες $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n$ της θεμελιώδους εξίσωσης Lundberg, που βρίσκονται στο δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο είναι διακεκριμένες, τότε η συνάρτηση $L(s)$ μπορεί να γραφεί ως

$$L(s) = \left\{(-1)^n[\lambda+\mu+\delta-\lambda\hat{f}(s)] + \lambda T_s\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{(\beta-\rho_j)^n}{\pi_{n,j}(\rho_j)}T_{\rho_j} f\right](0)\right\}\prod_{j=1}^{n}(s-\rho_j).$$

Απόδειξη

Ορίζουμε αναδρομικά τις συναρτήσεις $h_0, h_1, ..., h_n$ με

$$h_k(s)=\begin{cases}(\beta-s)^n, & \text{εάν } k=0,\\ \dfrac{h_{k-1}(s)-h_{k-1}(\rho_k)}{s-\rho_k}, & \text{εάν } k=1,2,...,n,\end{cases} \tag{2.3.47α}$$

για $s\geq 0$. Με χρήση του ορισμού (2.3.36) για το $\pi_{k,j}$ και επαγωγή έχουμε τη σχέση

$$h_k(s)=\sum_{j=1}^{k}\frac{(\beta-\rho_j)^n}{\pi_{k,j}(\rho_j)(\rho_j-s)}+\frac{(\beta-s)^n}{(s-\rho_1)(s-\rho_2)...(s-\rho_k)}. \tag{2.3.47β}$$

Για $k=1,2,...,n$, έστω

$$\Lambda_k(s)=[\lambda+\mu+\delta-\lambda\hat{f}(s)]h_k(s)+\lambda T_s\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{(\beta-\rho_j)^n}{\pi_{k,j}(\rho_j)}T_{\rho_j}f\right)(0), \qquad s\geq 0. \tag{2.3.47γ}$$

Με επαγωγή θα δείξουμε ότι

$$L(s)=\prod_{j=1}^{k}(s-\rho_j)\times\Lambda_k(s), \quad s\geq 0,\ k=1,2,...,n. \tag{2.3.47δ}$$

Για $k=1$, από (2.3.47δ) με χρήση των (2.3.47γ), (2.3.47α) και (2.3.36) θα πρέπει να ισχύει ότι

$$\begin{aligned}L(s)&=(s-\rho_1)\times\Lambda_1(s)\\ &=(s-\rho_1)\left\{[\lambda+\mu+\delta-\lambda\hat{f}(s)]h_1(s)+\lambda T_s\frac{(\beta-\rho_1)^n}{\pi_{1,1}(\rho_1)}T_{\rho_1}f(0)\right\}\\ &=(s-\rho_1)\left\{[\lambda+\mu+\delta-\lambda\hat{f}(s)]\frac{(\beta-s)^n-(\beta-\rho_1)^n}{s-\rho_1}+\lambda T_s(\beta-\rho_1)^n T_{\rho_1}f(0)\right\}\\ &=[\lambda+\mu+\delta-\lambda\hat{f}(s)][(\beta-s)^n-(\beta-\rho_1)^n]-(\rho_1-s)\lambda(\beta-\rho_1)^n T_sT_{\rho_1}f(0)\end{aligned}$$

Πράγματι, από την (2.3.34) και από το γεγονός ότι η ρ_1 είναι ρίζα, δηλαδή $L(\rho_1)=0$, είναι

$$\begin{aligned}L(s)&=L(s)-L(\rho_1)\\ &=\{[\lambda+\mu+\delta-\lambda\hat{f}(s)](\beta-s)^n-\mu\beta^n\}-\{[\lambda+\mu+\delta-\lambda\hat{f}(\rho_1)](\beta-\rho_1)^n-\mu\beta^n\}\\ &=[\lambda+\mu+\delta-\lambda\hat{f}(s)][(\beta-s)^n-(\beta-\rho_1)^n]-\lambda(\beta-\rho_1)^n[\hat{f}(s)-\hat{f}(\rho_1)]\\ &=[\lambda+\mu+\delta-\lambda\hat{f}(s)][(\beta-s)^n-(\beta-\rho_1)^n]-\lambda(\beta-\rho_1)^n(\rho_1-s)\frac{\hat{f}(s)-\hat{f}(\rho_1)}{\rho_1-s}\end{aligned}$$

από την Ιδιότητα Α7, Παράρτημα Π3, έχουμε το ζητούμενο.

Έστω ότι η (2.3.47δ) ισχύει για $k=l-1\in\{1,2,...,n-1\}$. Θα δείξουμε ότι ισχύει για $k=l$. Αφού οι $\rho_1,\rho_2,...,\rho_n$ είναι διακεκριμένες ρίζες της L, τότε από την (2.3.47δ) για $k=l-1$ είναι

$L(\rho_l)=\prod_{j=1}^{l-1}(\rho_l-\rho_j)\times\Lambda_{l-1}(\rho_l)=0$ και ισοδύναμα $\Lambda_{l-1}(\rho_l)=0$. Από την (Α.10) για $k=l-1$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
\Lambda_{l-1}(s) &= \Lambda_{l-1}(s) - \Lambda_{l-1}(\rho_l) \\
&= [\lambda + \mu + \delta - \lambda \hat{f}(s)][h_{l-1}(s) - h_{l-1}(\rho_l)] - \lambda h_{l-1}(\rho_l)[\hat{f}(s) - \hat{f}(\rho_l)] \\
&\quad + \lambda (T_s - T_{\rho_l}) \sum_{j=1}^{l-1} \frac{(\beta - \rho_j)^n}{\pi_{l-1,j}(\rho_j)} T_{\rho_j} f(0)
\end{aligned}
$$

και από την (2.3.47α) και τις Ιδιότητες Α6, Α7, Παράρτημα Π3,

$$
= (s - \rho_l) \left\{ [\lambda + \mu + \delta - \lambda \hat{f}(s)] h_l(s) + \lambda T_s \left(h_{l-1}(\rho_l) T_{\rho_l} f - \sum_{j=1}^{l-1} \frac{(\beta - \rho_j)^n}{\pi_{l-1,j}(\rho_j)} T_{\rho_l} T_{\rho_j} f \right)(0) \right\}
$$

Από την (2.3.47β) για $k = l - 1$ και την Ιδιότητα Α6, Παράρτημα Π3, παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
\Lambda_{l-1}(s) = (s - \rho_l) \Bigg\{ & [\lambda + \mu + \delta - \lambda \hat{f}(s)] h_l(s) + \lambda T_s \Bigg(\sum_{j=1}^{l-1} \frac{(\beta - \rho_j)^n}{\pi_{l-1,j}(\rho_j)(\rho_j - \rho_l)} T_{\rho_l} f \\
& + \frac{(\beta - \rho_l)^n}{(\rho_l - \rho_1)(\rho_1 - \rho_2)...(\rho_l - \rho_{l-1})} T_{\rho_l} f + \sum_{j=1}^{l-1} \frac{(\beta - \rho_j)^n}{\pi_{l-1,j}(\rho_j)} \frac{(T_{\rho_j} - T_{\rho_l}) f}{\rho_j - \rho_l} \Bigg)(0) \Bigg\}.
\end{aligned}
$$

Με απλοποίηση, κάνοντας χρήση της (2.3.36) καταλήγουμε στην (2.3.47δ) για $k = l$. Το αποτέλεσμα έπεται από τις (2.3.47γ) και (2.3.47δ) με $k = n$, δείχνοντας ότι $h_n(s) = (-1)^n$. Αυτό ισχύει γιατί θέτοντας

$$
q(s) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{(\beta - \rho_j)^n}{\pi_{n,j}(\rho_j)} \pi_{n,j}(s) + (\beta - s)^n
$$

παρατηρούμε από την (2.3.47β) ότι

$$
h_n(s) = \frac{q(s)}{(s - \rho_1)(s - \rho_2)...(s - \rho_n)}.
$$

Δηλαδή, η h_n είναι ο λόγος δύο πολυωνύμων βαθμού n, με τις ίδιες ρίζες, συγκεκριμένα τις $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n$. Επιπλέον, αφού στο $q(s)$ ο συντελεστής του s^n είναι $(-1)^n$, συμπεραίνουμε ότι $h_n(s) = (-1)^n$, εκτός από $s = \rho_1, \rho_2, ..., \rho_n$.

□

Το λήμμα που ακολουθεί , αν και τεχνικό, θα χρησιμοποιηθεί στη απόδειξη της Πρότασης 2.3.5.

Λήμμα 2.3.6

Για $n \geq 1$ *και διακεκριμένους μιγαδικούς αριθμούς* $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n \in \mathbf{C}$ *έχουμε*

$$
\sum_{k=1}^{n} \frac{\rho_k^j}{\pi_{n,k}(\rho_k)} = \begin{cases} 0, & \text{εάν } j = 0, 1, ..., n-2 \\ 1, & \text{εάν } j = n-1 \end{cases} \tag{2.3.48}
$$

όπου $\pi_{n,k}$ *ορίστηκε στην Εξίσωση* (2.3.36).

Απόδειξη

Αρχικά δείχνουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi_{n,k}(\rho_k)}=\begin{cases}1, & \text{εάν } n=1\\ 0, & \text{εάν } n=2,3,\ldots\end{cases} \tag{2.3.48α}$$

Ορίζουμε επαναληπτικά μια ακολουθία συναρτήσεων με

$$h_0(s)=s\,,\ h_n(s)=\frac{h_{n-1}(s)-h_{n-1}(\rho_n)}{s-\rho_n}\,,\ n=1,2,3,\ldots$$

Είναι $h_1(s)=\dfrac{h_0(s)-h_0(\rho_1)}{s-\rho_1}=\dfrac{s-\rho_1}{s-\rho_1}=1$ και $h_n(s)=0$, $n\geq 2$.

Με επαγωγή έχουμε ότι

$$h_n(s)=\sum_{l=1}^{n}\frac{\rho_l}{\pi_{n,1}(\rho_l)(\rho_l-s)}+\frac{s}{(s-\rho_1)(s-\rho_2)\ldots(s-\rho_n)}\,,\ s\neq\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_n. \tag{2.3.48β}$$

Εάν κανένας από τους αριθμούς $\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_n$ δεν είναι μηδέν, τότε θέτοντας $s=0$ στην (2.3.48β) προκύπτει η (2.3.48α). Χωρίς βλάβη της γενικότητας, στην περίπτωση που $\rho_1=0$, η (2.3.48β) απλοποιείται σε

$$h_n(s)=\sum_{l=2}^{n}\frac{\rho_l}{\pi_{n,1}(\rho_l)(\rho_l-s)}+\frac{1}{(s-\rho_2)\ldots(s-\rho_n)}\,,\ s\neq\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_n.$$

Με επέκταση της h_n λόγω συνέχειας στο 0, και εκτιμώντας στο $s=0$ προκύπτει η (2.3.48α). Επομένως η (2.3.48) ισχύει για $j=0$ και για κάθε $n\geq 1$. Όμως ισχύει

$$\sum_{l=1}^{n}\frac{\rho_l^{j}}{\pi_{n,l}(\rho_l)}=\sum_{l=1}^{n}\frac{\rho_l^{j-1}}{\pi_{n-1,l}(\rho_l)}+\rho_n\sum_{l=1}^{n}\frac{\rho_l^{j-1}}{\pi_{n,l}(\rho_l)}\,,\ \text{για όλα τα } j\geq 1 \text{ και } n\geq 2.$$

Η (2.3.48) προκύπτει με επαγωγή ως προς j και n.

□

Με βάση τα όσα προηγήθηκαν, είμαστε σε θέση τώρα να δώσουμε το κεντρικό αποτέλεσμα αυτής της ενότητας. Συγκεκριμένα, εάν η συνάρτηση ζ είναι αρκετά ομαλή (smooth), δίνονται αναλυτικές εκφράσεις για τις ϕ_δ, f_δ και $H_{\delta,\omega}$ της Πρότασης 2.3.2, εκφρασμένες ως προς την κατανομή των απαιτήσεων, τη συνάρτηση ποινής ω και τις ρίζες $\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_n$ της θεμελιώδους εξίσωσης Lundberg υπό την προϋπόθεση ότι αυτές είναι διακεκριμένες. Για να επιτευχθούν τα εν λόγω αποτελέσματα θα πρέπει να αντιστρέψουμε την Εξίσωση (2.3.33) στην Πρόταση 2.3.4.

Πρόταση 2.3.5

Έστω οι Συνθήκες 2.3.1, 2.3.2, 2.3.3 *και* 2.3.4. *Θεωρούμε ότι τα ασφάλιστρα ακολουθούν την κατανομή* $Erlang(n,\beta)$, *τα μεγέθη των απαιτήσεων ικανοποιούν τη σχέση* $E[Y_1^2]<\infty$ *και η συνάρτηση ποινής είναι τέτοια ώστε η* w *είναι μία συνάρτηση της κλάσης* $\mathbf{C}^n[0,\infty)$. *Επίσης* *υποθέτουμε ότι οι ρίζες $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n$ της εξίσωσης Lundberg που βρίσκονται στο δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο είναι διακεκριμένες. Τότε*

$$m(u) = \phi_\delta \int_0^u m(u-y) f_\delta(y)dy + H_{\delta,\omega}(u),$$

όπου

$$\phi_\delta = \frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta}\left(1+(-1)^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\frac{(\beta-\rho_j)^n}{\pi_{n,j}(\rho_j)}T_{\rho_j}\bar{F}(0)\right), \tag{2.3.49}$$

$$f_\delta(y) = \frac{\lambda}{\phi_\delta(\lambda+\mu+\delta)}\left(f(y)+(-1)^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\frac{(\beta-\rho_j)^n}{\pi_{n,j}(\rho_j)}T_{\rho_j} f(y)\right),\ y \ge 0, \tag{2.3.50}$$

$$H_{\delta,\omega}(u) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta}\left(\zeta(u)+(-1)^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\frac{(\beta-\rho_j)^n}{\pi_{n,j}(\rho_j)}T_{\rho_j}\zeta(u)\right),\ u \ge 0. \tag{2.3.51}$$

Απόδειξη

Έστω

$$S_\zeta(u) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k \beta^{n-k}\zeta^{(k)}(u), \qquad u \ge 0. \tag{2.3.52}$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της προηγούμενης συνάρτησης με βάση την ιδιότητα της γραμμικότητας είναι

$$\hat{S}_w(s) = L\{S_w(u)\} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k \beta^{n-k} L\{w^{(k)}(u)\}. \tag{2.3.53}$$

Αλλά από Ιδιότητα 6, Παράρτημα Π1, είναι

$$L\{w^{(k)}(u)\} = \widehat{w^{(k)}}(u) = s^k\,\hat{w}(s) - \sum_{j=0}^{k-1} s^j w^{(k-1-j)}(0)$$

οπότε η (2.3.53) γίνεται

$$\begin{aligned}\hat{S}_w(s) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k \beta^{n-k}\left(s^k\,\hat{w}(s) - \sum_{j=0}^{k-1} s^j w^{(k-1-j)}(0)\right)\\ &= \hat{w}(s)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k \beta^{n-k}s^k - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k \beta^{n-k}\sum_{j=0}^{k-1} s^j w^{(k-1-j)}(0).\end{aligned}$$

Το πρώτο άθροισμα στο δεξιό μέλος της τελευταίας σχέσης κάνοντας χρήση του τύπου του Newton $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$, για a,b πραγματικούς αριθμούς και n θετικό ακέραιο, γίνεται

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\beta^{n-k}s^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\beta^{n-k}(-s)^k=(\beta-s)^n$$

οπότε ο μετασχηματισμός Laplace $\hat{S}_w(s)$ γράφεται

$$\hat{S}_w(s)=\hat{w}(s)(\beta-s)^n-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\beta^{n-k}\sum_{j=0}^{k-1}s^j w^{(k-1-j)}(0)$$

και ισοδύναμα

$$\hat{S}_w(s)-\hat{w}(s)(\beta-s)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\beta^{n-k}\sum_{j=0}^{k-1}s^j w^{(k-1-j)}(0)$$

από την οποία βλέπουμε ότι η $\hat{S}_w(s)-\hat{w}(s)(\beta-s)^n$, $s\geq 0$, είναι πολυώνυμο ως προς s το πολύ $n-1$ βαθμού.

Με βάση το προηγούμενο αποτέλεσμα και τις (2.3.33) και (2.3.34) έχουμε

$$L(s)\hat{m}(s)=\lambda(\beta-s)^n\hat{w}(s)-p_{n-1}(s)$$

ή

$$L(s)\hat{m}(s)=\lambda\hat{S}_w(s)+\overline{p}_{n-1}(s),\ s\geq 0,$$

όπου $\overline{p}_{n-1}$ είναι πολυώνυμο το πολύ $n-1$ βαθμού το οποίο μπορεί να προσδιοριστεί με παρόμοια λογική με αυτή της Πρότασης 2.3.4. Συγκεκριμένα, αφού οι $\rho_1,\rho_2,...,\rho_n$ είναι ρίζες της θεμελιώδους εξίσωσης Lundberg, δηλαδή,

$$L(\rho_j)=0,\qquad j=1,2,...,n,$$

το $\overline{p}_{n-1}$ μπορεί να εκφραστεί σε σχέση με αυτές τις ρίζες εφαρμόζοντας παρεμβολή Lagrange. Δηλαδή,

$$L(s)\hat{m}(s)=\lambda\left(\hat{S}_w(s)-\sum_{j=1}^{n}\frac{\hat{S}_w(\rho_j)}{\pi_{n,j}(\rho_j)}\pi_{n,j}(s)\right),\quad s\geq 0.$$

Με βάση το Λήμμα 2.3.5, η προηγούμενη εξίσωση γράφεται

$$\left\{\lambda+\mu+\delta-\lambda\hat{f}(s)+(-1)^n\lambda T_s\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{(\beta-\rho_j)^n}{\pi_{n,j}(\rho_j)}T_{\rho_j}f\right)(0)\right\}\hat{m}(\mathrm{s})$$

$$=\lambda(-1)^n\left(\frac{\hat{S}_w(s)}{(s-\rho_1)(s-\rho_2)...(s-\rho_n)}-\sum_{j=1}^{n}\frac{\hat{S}_w(\rho_j)}{\pi_{n,j}(\rho_j)(s-\rho_j)}\right)$$

$$=\lambda T_s T_{\rho_1}...T_{\rho_n}S_w(0),\qquad s\neq\rho_1,\rho_2,...,\rho_n,$$

όπου η τελευταία ισότητα προέκυψε με βάση την Ιδιότητα Α14 του Παραρτήματος Π3.
Παίρνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, και λαμβάνοντας υπ’ όψιν την (2.3.52) προκύπτει

$$m(u)=\int_0^u m(u-y)h_\delta(y)dy+\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\beta^{n-k}T_{\rho_1}T_{\rho_2}...T_{\rho_n}w^{(k)}(u),\qquad u\geq 0,$$

(2.3.54)

όπου

$$h_\delta(y)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta}\left(f(y)+(-1)^n\sum_{j=1}^{n}\frac{(\beta-\rho_j)^n}{\pi_{n,j}(\rho_j)}T_{\rho_j}f(y)\right),\qquad y\ge 0. \tag{2.3.55}$$

Το άθροισμα στο δεξιό μέλος της (2.3.54) κάνοντας χρήση των Ιδιοτήτων Α14 και Α16 του Παραρτήματος Π2, και του Λήμματος 2.3.6 μπορεί να απλοποιηθεί στη μορφή

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\beta^{n-k}T_{\rho_1}T_{\rho_2}\ldots T_{\rho_n}w^{(k)}(u)\\
&\qquad=(-1)^{n-1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\beta^{n-k}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{\pi_{n,l}(\rho_l)}\left(\rho_l^kT_{\rho_l}w(u)-\sum_{j=0}^{k-1}\rho_l^jw^{(k-1-j)}(u)\right)\\
&\qquad=(-1)^{n-1}\sum_{l=1}^{n}\frac{(\beta-\rho_l)^n}{\pi_{n,l}(\rho_l)}T_{\rho_l}w(u)+(-1)^n\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\beta^{n-k}\sum_{j=0}^{k-1}w^{(k-1-j)}(u)\sum_{l=1}^{n}\frac{\rho_l^j}{\pi_{n,l}(\rho_l)}\\
&\quad=(-1)^{n-1}\sum_{l=1}^{n}\frac{(\beta-\rho_l)^n}{\pi_{n,l}(\rho_l)}T_{\rho_l}w(u)+w(u),\qquad u\ge 0.
\end{aligned} \tag{2.3.56}$$

Στη συνέχεια θέλουμε να υπολογίσουμε τα ϕ_δ, f_δ και $H_{\delta,\omega}$ στην ελλειμματική ανανεωτική Εξίσωση (2.3.13) της Πρότασης 2.3.2 κάνοντας χρήση των (2.3.54) και (2.3.56). Αφού τα ϕ_δ και f_δ είναι ανεξάρτητα της συνάρτησης ποινής ω, μπορούμε να θεωρήσουμε την περίπτωση $\omega(x,y)=1$ για όλα τα $x\ge 0$, $y\ge 0$. Τότε είναι

$$w(u)=\int_u^\infty\omega(u,y-u)f(y)dy=\int_u^\infty f(y)dy=\bar{F}(u).$$

Επίσης από την Ιδιότητα Α12, Παράρτημα Π3, είναι

$$T_0T_{\rho_l}f(u)=\int_u^\infty T_{\rho_l}f(y)dy=T_{\rho_l}\bar{F}(u),\quad u\ge 0,\ l=1,2,\ldots,n.$$

Με βάση τα δύο προηγούμενα αποτελέσματα, τις (2.3.54), (2.3.55) και (2.3.56), για το μετασχηματισμό Laplace ψ_δ της πιθανότητας χρεοκοπίας, που ορίζεται στην (2.3.5), έχουμε ότι

$$\psi_\delta(u)=\int_0^u\psi_\delta(u-y)h_\delta(y)+\int_u^\infty h_\delta(y)dy,\qquad u\ge 0. \tag{2.3.57}$$

Από τις (2.3.57) και (2.3.15) είναι

$$\phi_\delta=\psi_\delta(0)=\int_0^\infty h_\delta(y)dy. \tag{2.3.58}$$

Τότε από την (2.3.55) βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
\phi_\delta=\int_0^\infty h_\delta(y)dy&=\int_0^\infty\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta}\left(f(y)+(-1)^n\sum_{j=1}^{n}\frac{(\beta-\rho_j)^n}{\pi_{n,j}(\rho_j)}T_{\rho_j}f(y)\right)dy\\
&=\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta}\left(\int_0^\infty f(y)dy+(-1)^n\sum_{j=1}^{n}\frac{(\beta-\rho_j)^n}{\pi_{n,j}(\rho_j)}\int_0^\infty T_{\rho_j}f(y)dy\right)
\end{aligned} \tag{2.3.59}$$

Αλλά για τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(y)$ είναι $\int_0^\infty f(y)dy = 1$, και από Ιδιότητα A12, Παράρτημα Π3, είναι $\int_0^\infty T_{\rho_j} f(y)dy = T_{\rho_j} \bar{F}(0)$. Συνεπώς, από την (2.3.57) προκύπτει η (2.3.49).

Στη συνέχεια ορίζουμε ως

$$f_\delta^*(y) = \frac{h_\delta(y)}{\phi_\delta}, \qquad y \ge 0 \tag{2.3.60}$$

από την οποία ισοδύναμα είναι

$$h_\delta(y) = \phi_\delta f_\delta^*(y)$$

και παίρνοντας μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη της έχουμε

$$\hat{h}_\delta(s) = \phi_\delta \hat{f}_\delta^*(s). \tag{2.3.61}$$

Παίρνοντας μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη της (2.3.57), έχουμε

$$L\{\psi_\delta(u)\} = L\left\{\int_0^u \psi_\delta(u-y)h_\delta(y) + \int_u^\infty h_\delta(y)dy\right\}$$

και ισοδύναμα, εφαρμόζοντας την ιδιότητα της γραμμικότητας,

$$L\{\psi_\delta(u)\} = L\left\{\int_0^u \psi_\delta(u-y)h_\delta(y)\right\} + L\left\{\int_u^\infty h_\delta(y)dy\right\}. \tag{2.3.62}$$

Αλλά ο πρώτος μετασχηματισμός Laplace στο δεύτερο μέλος της προηγούμενης σχέσης αφορά σε συνέλιξη, ενώ για το δεύτερο μετασχηματισμό Laplace έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}
L\left\{\int_u^\infty h_\delta(y)dy\right\} &= L\left\{\int_0^\infty h_\delta(y)dy - \int_0^u h_\delta(y)dy\right\} \\
&= L\left\{\phi_\delta - \int_0^u h_\delta(y)dy\right\} \qquad \text{(λόγω της (2.3.58))} \\
&= L\{\phi_\delta\} - L\left\{\int_0^u h_\delta(y)dy\right\} \\
&= \frac{\phi_\delta}{s} - \frac{\hat{h}_\delta(\mathrm{s})}{s} \qquad \text{(Ιδιότητα 7, Παράρτημα Π1).}
\end{aligned}$$

Οπότε η (2.3.62) γίνεται

$$\hat{\psi}_\delta(s) = \hat{\psi}_\delta(s)\hat{h}_\delta(s) + \frac{\phi_\delta}{s} - \frac{\hat{h}_\delta(\mathrm{s})}{s}$$

και ισοδύναμα

$$[1-\hat{h}_\delta(s)]\hat{\psi}_\delta(s) = \frac{\phi_\delta}{s} - \frac{\hat{h}_\delta(\mathrm{s})}{s}$$

και με βάση την (2.3.61) έχουμε

$$[1-\phi_\delta \hat{f}_\delta^*(s)]\hat{\psi}_\delta(s) = \phi_\delta \frac{1-\hat{f}_\delta^*(s)}{s}. \tag{2.3.63}$$

Παίρνοντας μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη της (2.3.15) είναι

$$L\{\psi_\delta(u)\} = \phi_\delta L\left\{\int_0^u \psi_\delta(u-y) f_\delta(y)dy\right\} + \phi_\delta L\{\bar{F}_\delta(u)\}$$

Ο πρώτος μετασχηματισμός Laplace στο δεύτερο μέλος της τελευταίας σχέσης αφορά σε συνέλιξη, ενώ για το δεύτερο μετασχηματισμό Laplace εφαρμόζουμε την Ιδιότητα 5, Παράρτημα Π2, οπότε

$$\hat{\psi}_\delta(s) = \phi_\delta \hat{\psi}_\delta(s) \hat{f}_\delta(s) + \phi_\delta \frac{1-\hat{f}_\delta(s)}{s}$$

και ισοδύναμα

$$[1-\phi_\delta \hat{f}_\delta(s)]\hat{\psi}_\delta(s) = \phi_\delta \frac{1-\hat{f}_\delta(s)}{s}. \tag{2.3.64}$$

Λόγω της (2.3.61), τα αριστερά μέλη των (2.3.63) και (2.3.64) είναι ίσα, όποτε εξισώνοντας τα δεξιά μέλη, προκύπτει

$$\hat{f}_\delta^*(s) = \hat{f}_\delta(s),\ s>0.$$

Εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace στην τελευταία σχέση, έχουμε

$$f_\delta^*(y) = f_\delta(y),\ y \ge 0$$

και από (2.3.60) και (2.3.55) προκύπτει η (2.3.50).
Επίσης, από (2.3.60) είναι

$$h_\delta(y) = \phi_\delta f_\delta^*(y) = \phi_\delta f_\delta(y)$$

οπότε συγκρίνοντας την (2.3.13) με τις (2.3.54) και (2.3.56) προκύπτει η (2.3.51) στη γενική περίπτωση για κάποιο ω.

□

Παρατήρηση 2.3.6. Για τον αποτελεσματικό υπολογισμό του ϕ_δ που δίνεται στην (2.3.49) μπορεί να ληφθούν υπ' όψιν τα εξής:

α) εάν $\rho_j = 0$, τότε (Ιδιότητα Α2, Παράρτημα Π3 και Ιδιότητα 5, Παράρτημα Π2)

$$T_{\rho_j}\bar{F}(0) = T_0\bar{F}(0) = \int_0^\infty \bar{F}(y)dy = E(Y_1). \tag{2.3.65}$$

β) Εάν $\rho_j \ne 0$, τότε (Ιδιότητες Α3, Α7, Α2 του Παραρτήματος Π3)

$$T_{\rho_j}\bar{F}(0) = T_{\rho_j}T_0 f(0) = \frac{T_{\rho_j}f(0) - T_0 f(0)}{0-\rho_j} = \frac{\hat{f}(\rho_j) - \bar{F}(0)}{-\rho_j} = \frac{\hat{f}(\rho_j)-1}{-\rho_j} = \frac{1-\hat{f}(\rho_j)}{\rho_j}. \tag{2.3.66}$$

Αφού ρ_j είναι μία ρίζα της θεμελιώδους εξίσωσης Lundberg, δηλαδή, $L(\rho_j) = 0$, τότε από την (2.3.34) είναι

$$\{\mu+\delta+\lambda[1-\hat{f}(\rho_j)]\}(\beta-\rho_j)^n-\mu\beta^n=0$$

και λύνοντας ως προς $1-\hat{f}(\rho_j)$ βρίσκουμε

$$\lambda[1-\hat{f}(\rho_j)]=\frac{\mu\beta^n}{(\beta-\rho_j)^n}-(\mu+\delta) \text{ ή } 1-\hat{f}(\rho_j)=\frac{\mu\beta^n-(\mu+\delta)(\beta-\rho_j)^n}{\lambda(\beta-\rho_j)^n}.$$

Οπότε από την (2.3.66) προκύπτει

$$(\beta-\rho_j)^n T_{\rho_j}\bar{F}(0)=\frac{\mu\beta^n-(\mu+\delta)(\beta-\rho_j)^n}{\lambda\rho_j} \quad (2.3.67).$$

Στο επόμενο παράδειγμα εξετάζουμε τις περιπτώσεις όπου τα μεγέθη των ατομικών ασφαλίστρων ακολουθούν την κατανομή $Erlang(n,\beta)$ για $n=1$ και $n=2$.

Παράδειγμα 2.3.4

α) Υποθέτουμε ότι τα ασφάλιστρα είναι εκθετικά κατανεμημένα με μέσο $1/\beta$, δηλαδή $X_i \sim Erlang(1,\beta)$. Θεωρούμε ότι ισχύουν οι υποθέσεις της Πρότασης 2.3.5. Έστω $\rho_1\in[0,\beta)$ είναι η ρίζα της εξίσωσης Lundberg που μελετήθηκε στο Παράδειγμα 2.3.2. Θυμίζουμε ότι είναι $\rho_1=0$ εάν $\delta=0$ και $\rho_1\in[0,\beta)$ αν $\delta>0$. Η έκφραση για το ϕ_δ από την (2.3.49) για $n=1$, γίνεται

$$\phi_\delta=\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta}\left(1+\frac{\beta-\rho_1}{\pi_{1,1}(\rho_1)}T_{\rho_1}\bar{F}(0)\right).$$

Για $\delta=0$, από τις (2.3.65) και (2.3.36) διαδοχικά βρίσκουμε

$$\phi_0=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}[1+\beta E(Y_1)] \quad (2.3.68)$$

$$=\frac{\lambda+\beta\lambda E(Y_1)}{\lambda+\mu}=\frac{\lambda+\mu-\mu+\beta\lambda E(Y_1)}{\lambda+\mu}=1-\frac{\mu-\beta\lambda E(Y_1)}{\lambda+\mu}=1-\frac{\beta\mu\frac{1}{\beta}-\beta\lambda E(Y_1)}{\lambda+\mu}$$

$$=1-\frac{\beta[\mu E(X_1)-\lambda E(Y_1)]}{\lambda+\mu}.$$

Ο αριθμητής του κλάσματος είναι θετικός λόγω της (2.3.2), άρα $\phi_0<1$.

Για $\delta>0$, από τις (2.3.67) και (2.3.36) προκύπτει διαδοχικά

$$\phi_\delta=\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta}\left(1+\frac{\mu\beta-(\mu+\delta)(\beta-\rho_1)}{\lambda\rho_1}\right)$$

$$=\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta}\left(1+\frac{\mu\beta-\mu\beta+\mu\rho_1-\delta\beta+\delta\rho_1}{\lambda\rho_1}\right)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta}\frac{\lambda\rho_1+\mu\rho_1-\delta\beta+\delta\rho_1}{\lambda\rho_1}$$

$$=\frac{\rho_1(\lambda+\mu+\delta)-\delta\beta}{\rho_1(\lambda+\mu+\delta)}=1-\frac{\delta\beta}{\rho_1(\lambda+\mu+\delta)}.$$

Δηλαδή, από τα παραπάνω, συγκεντρωτικά είναι

$$\phi_\delta = \begin{cases} 1 - \dfrac{\beta\delta}{\rho_1(\lambda+\mu+\delta)}, & \text{εάν } \delta > 0, \\ 1 - \dfrac{\beta[\mu E(P_1) - \lambda E(Y_1)]}{\lambda+\mu}, & \text{εάν } \delta = 0. \end{cases} \tag{2.3.69}$$

Στην περίπτωση τώρα που θεωρήσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας, δηλαδή για $\delta = \rho_1 = 0$ και $\omega(x,y) = 1$, τότε από (2.3.50) έχουμε

$$f_0(y) = \frac{\lambda}{\phi_0(\lambda+\mu)}\left(f(y) + \frac{\beta}{\pi_{1,1}(0)} T_0 f(y) \right)$$

η οποία λόγω της (2.3.36) και ότι $T_0 f(y) = \bar{F}(y)$ (Ιδιότητα Α3, Παράρτημα Π3), γίνεται

$$f_0(y) = \frac{\lambda}{\phi_0(\lambda+\mu)}[f(y) + \beta\bar{F}(y)]. \tag{2.3.70}$$

Από την Παρατήρηση 2.3.4 η Εξίσωση (2.3.15) παίρνει τη μορφή,

$$\psi_0(u) = \phi_0 \int_0^u \psi_0(u-y)dF_0(y) + \phi_0 \bar{F}_0(u), \quad u \ge 0$$

η λύση $\psi_0(u)$ της οποίας προκύπτει από την Πρόταση 1.3 με

$$\begin{aligned} \bar{F}_0(y) &= \int_y^\infty f_0(t)dt \\ &= \int_y^\infty \frac{\lambda[f(t)+\beta\bar{F}(t)]}{\phi_0(\lambda+\mu)}dt \qquad \text{(λόγω της (2.3.70))} \\ &= \frac{\lambda\int_y^\infty [f(t)+\beta\bar{F}(t)]dt}{\lambda[1+\beta E(Y_1)]} \qquad \text{(λόγω της 2.3.68))} \\ &= \frac{\int_y^\infty [f(t)+\beta\bar{F}(t)]dt}{\int_0^\infty f(t)dt + \beta\int_0^\infty \bar{F}(t)dt} \\ &= \frac{\int_y^\infty [f(t)+\beta\bar{F}(t)]dt}{\int_0^\infty [f(t)+\beta\bar{F}(t)]dt}, \ y \ge 0. \end{aligned} \tag{2.3.71}$$

Στην περίπτωση όπου η κατανομή των απαιτήσεων έχει κάποια συγκεκριμένη μορφή, μπορούν να βρεθούν αναλυτικές εκφράσεις για τις $\bar{F}_0(y)$ και $\psi_0(u)$. Σχετικά είναι τα Παραδείγματα 2.3.5 και 2.3.6.

β) Θεωρούμε την περίπτωση στην οποία τα ασφάλιστρα ακολουθούν την κατανομή $Erlang(2,\beta)$. Έστω ότι ισχύουν οι υποθέσεις της Πρότασης 2.3.5, και ρ_1, ρ_2 είναι οι δύο πραγματικές ρίζες της εξίσωσης Lundberg που μελετήθηκε στο Παράδειγμα 2.3.2 με $0 \le \rho_1 < \beta < \rho_2$. Η έκφραση για το ϕ_δ από την (2.3.49) για $n=2$, γίνεται

$$\phi_\delta = \frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta}\left[1-\left(\frac{(\beta-\rho_1)^2}{\pi_{2,1}(\rho_1)}T_{\rho_1}\bar{F}(0)+\frac{(\beta-\rho_2)^2}{\pi_{2,2}(\rho_2)}T_{\rho_2}\bar{F}(0)\right)\right].$$

Από την (2.3.36) είναι $\pi_{2,1}(s)=s-\rho_2$ και $\pi_{2,2}(s)=s-\rho_1$ από τις οποίες προκύπτει $\pi_{2,1}(\rho_1)=\rho_1-\rho_2$ και $\pi_{2,2}(\rho_2)=\rho_2-\rho_1$. Οπότε

$$\phi_\delta = \frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta}\left[1-\left(\frac{(\beta-\rho_1)^2}{\rho_1-\rho_2}T_{\rho_1}\bar{F}(0)+\frac{(\beta-\rho_2)^2}{\rho_2-\rho_1}T_{\rho_2}\bar{F}(0)\right)\right]. \tag{2.3.72}$$

Για $\delta=0$, είναι $\rho_1=0$, οπότε,

$$\phi_0 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left[1-\left(\frac{\beta^2}{-\rho_2}T_0\bar{F}(0)+\frac{(\beta-\rho_2)^2}{\rho_2}T_{\rho_2}\bar{F}(0)\right)\right].$$

Από την (2.3.67) για $n=2$, $j=2$ έχουμε

$$(\beta-\rho_2)^2 T_{\rho_2}\bar{F}(0)=\frac{\mu\beta^2-\mu(\beta-\rho_2)^2}{\lambda\rho_2}$$

και με βάση την (2.3.65), για το ϕ_0 βρίσκουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}
\phi_0 &= \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left(1+\frac{\beta^2}{\rho_2}E(Y_1)-\frac{1}{\rho_2}\frac{\mu\beta^2-\mu(\beta-\rho_2)^2}{\lambda\rho_2}\right)\\
&= \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left(1+\frac{\beta^2 E(Y_1)}{\rho_2}-\frac{\mu\beta^2-\mu\beta^2-\mu\rho_2^2+2\mu\beta\rho_2}{\lambda\rho_2^2}\right)\\
&= \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left(1+\frac{\beta^2 E(Y_1)}{\rho_2}+\frac{\mu\rho_2-2\mu\beta}{\lambda\rho_2}\right)\\
&= \frac{\lambda}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda\beta^2 E(Y_1)}{\rho_2(\lambda+\mu)}+\frac{\mu\rho_2-2\mu\beta}{\rho_2(\lambda+\mu)}\\
&= \frac{\rho_2\lambda+\rho_2\mu-\rho_2\mu}{\rho_2(\lambda+\mu)}+\frac{\lambda\beta^2 E(Y_1)}{\rho_2(\lambda+\mu)}+\frac{\mu\rho_2-2\mu\beta}{\rho_2(\lambda+\mu)}\\
&= 1+\frac{\lambda\beta^2 E(Y_1)-2\mu\beta}{\rho_2(\lambda+\mu)}\\
&= 1-\frac{\beta^2\mu\dfrac{2}{\beta}-\lambda\beta^2 E(Y_1)}{\rho_2(\lambda+\mu)}
\end{aligned}$$

$$=1-\frac{\beta^2[\mu E(X_1)-\lambda E(Y_1)]}{\rho_2(\lambda+\mu)}.$$

Στην περίπτωση όπου $\delta>0$, από (2.3.67) είναι

$$(\beta-\rho_j)^2 T_{\rho_j}\bar{F}(0)=\frac{\mu\beta^2-(\mu+\delta)(\beta-\rho_j)^2}{\lambda\rho_j},\ \ j=1,2$$

οπότε από την (2.3.72) διαδοχικά έχουμε

$$\phi_\delta=\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta}\left[1-\left(\frac{1}{\rho_1-\rho_2}\frac{\mu\beta^2-(\mu+\delta)(\beta-\rho_1)^2}{\lambda\rho_1}+\frac{1}{\rho_2-\rho_1}\frac{\mu\beta^2-(\mu+\delta)(\beta-\rho_2)^2}{\lambda\rho_2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\lambda+\mu+\delta}\left[\lambda-\frac{1}{\rho_1-\rho_2}\left(\frac{\mu\beta^2-(\mu+\delta)(\beta-\rho_1)^2}{\rho_1}-\frac{\mu\beta^2-(\mu+\delta)(\beta-\rho_2)^2}{\rho_2}\right)\right]$$

και κάνοντας την αφαίρεση των δύο κλασμάτων στην παρένθεση προκύπτει

$$\phi_\delta=\frac{1}{\lambda+\mu+\delta}\left(\lambda-\frac{1}{\rho_1-\rho_2}\frac{(\rho_1-\rho_2)[\mu\beta^2-(\mu+\delta)\rho_1\rho_2]}{\rho_1\rho_2}\right)$$

$$=\frac{(\lambda+\mu+\delta)\rho_1\rho_2-\beta^2\delta}{\rho_1\rho_2(\lambda+\mu+\delta)}$$

$$=1-\frac{\beta^2\delta}{\rho_1\rho_2(\lambda+\mu+\delta)}.$$

Δηλαδή, από τα παραπάνω, συγκεντρωτικά είναι

$$\phi_\delta=\begin{cases}1-\dfrac{\beta^2\delta}{\rho_1\rho_2(\lambda+\mu+\delta)}, & \text{εάν } \delta>0,\\[2ex] 1-\dfrac{\beta^2[\mu E(P_1)-\lambda E(Y_1)]}{\rho_2(\lambda+\mu)}, & \text{εάν } \delta=0.\end{cases}$$

Στη συνέχεια δίνονται δύο παραδείγματα στα οποία υπολογίζεται η πιθανότητα χρεοκοπίας όταν οι απαιτήσεις ακολουθούν μια συγκεκριμένη κατανομή.

Παράδειγμα 2.3.5

Θεωρούμε ότι τα μεγέθη των ατομικών ασφαλίστρων ακολουθούν την εκθετική κατανομή με μέση τιμή $1/\beta$ και ότι τα μεγέθη των απαιτήσεων ακολουθούν την κατανομή $Erlang(k,\alpha)$, $k\in\mathbf{N}^+$, $\alpha>0$. Γράφουμε

$$f(y)=f(y;k),\ y\geq 0$$

όπου

$$f(y;j)=\frac{\alpha^j y^{j-1}e^{-\alpha y}}{(j-1)!},\ y\geq 0, \tag{2.3.73}$$

συμβολίζουμε τη συνάρτηση πυκνότητας της $Erlang(j,\alpha)$ για $j \in \mathbf{N}^+$. Η αναμενόμενη τιμή των απαιτήσεων είναι $E(Y_1) = \dfrac{k}{\alpha}$. Για τη συνάρτηση κατανομής των απαιτήσεων ισχύει

$$\bar{F}(u;k) = \frac{1}{\alpha}\sum_{j=1}^{k} f(u;j). \tag{2.3.74}$$

Η τελευταία σχέση αποδεικνύεται επαγωγικά ως εξής.

Για $k=1$, η (2.3.74) ισχύει ως $\bar{F}(u;1) = \dfrac{1}{\alpha} f(u;1)$ αφού

η συνάρτηση κατανομής των απαιτήσεων είναι

$$\bar{F}(u;1) = \bar{F}(u) = \int_u^\infty f(y;1)dy \overset{(2.3.73)}{=} \int_u^\infty \alpha e^{-\alpha y}dy = e^{-\alpha u}$$

και

$$\frac{1}{\alpha} f(u;1) \overset{(2.3.73)}{=} \frac{1}{\alpha}\frac{\alpha e^{-\alpha u}}{(1-1)!} = e^{-\alpha u}.$$

Για την επαγωγική υπόθεση (ΕΥ), έστω ότι η (2.3.74) ισχύει για k, δηλαδή

$$\bar{F}(u;k) = \frac{1}{\alpha}\sum_{j=1}^{k} f(u;j)$$

$$\bar{F}(u;k) = \int_u^\infty f(y;k)dy = \int_u^\infty \frac{\alpha^k y^{k-1} e^{-\alpha y}}{(k-1)!}dy = \frac{1}{\alpha}\sum_{j=1}^{k} f(u;j).$$

Για το επαγωγικό βήμα, $k+1$ είναι

$$\bar{F}(u;k+1) = \int_u^\infty f(y;k+1)dy = \int_u^\infty \frac{\alpha^{k+1} y^{k+1-1} e^{-\alpha y}}{(k+1-1)!}dy = \int_u^\infty \frac{\alpha^{k+1} y^k e^{-\alpha y}}{k!}dy = \frac{\alpha^k}{k!}\int_u^\infty y^k \alpha e^{-\alpha y}dy$$

εφαρμόζουμε παραγοντική ολοκλήρωση

$$\begin{aligned}
\bar{F}(u;k+1) &= \frac{\alpha^k}{k!}\int_u^\infty y^k (-e^{-\alpha y})' dy = \frac{\alpha^k}{(k-1)!k}\left([-y^k e^{-\alpha y}]_u^\infty + \int_u^\infty k y^{k-1} e^{-\alpha y}dy \right) \\
&= \frac{\alpha^k}{k!}u^k e^{-\alpha u} + \int_u^\infty \frac{\alpha^k}{(k-1)!} y^{k-1} e^{-\alpha y}dy \\
&= \frac{1}{\alpha} f(u;k+1) + \frac{1}{\alpha}\sum_{j=1}^{k} f(u;j) \qquad \text{(λόγω ΕΥ)} \\
&= \frac{1}{\alpha}\sum_{j=1}^{k+1} f(u;j).
\end{aligned}$$

Με βάση τα παραπάνω, η (2.3.71) μπορεί να εκφραστεί ως

$$\bar{F}_0(u)=\frac{\int_u^{\infty}[f(y;k)+\beta\bar{F}(y;k)]dy}{\int_0^{\infty}f(y)dy+\beta\int_0^{\infty}\bar{F}(y)dy}$$

$$=\frac{\int_u^{\infty}\left[f(y;k)+\beta\frac{1}{\alpha}\sum_{j=1}^{k}f(y;j)\right]dy}{1+\beta E(Y_1)}$$

$$=\frac{\int_u^{\infty}\left[f(y;k)+\frac{\beta}{\alpha}\sum_{j=1}^{k-1}f(y;j)+\frac{\beta}{\alpha}f(y;k)\right]dy}{1+\beta\frac{k}{\alpha}}$$

$$=\int_u^{\infty}\sum_{j=1}^{k}q_j f(y;j)dy\,,\ y\geq 0 \qquad (2.3.75)$$

όπου

$$q_1=q_2=...=q_{k-1}=\frac{\beta/\alpha}{1+k\beta/\alpha}=\frac{\beta}{\alpha+k\beta} \qquad \text{και} \qquad q_k=\frac{1+\beta/\alpha}{1+k\beta/\alpha}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha+k\beta}.$$

Δηλαδή, από την (2.3.75) βλέπουμε ότι η $\bar{F}_0(u)$ είναι η συνάρτηση δεξιάς ουράς μιας κατανομής που προκύπτει από μείξη k κατανομών Erlang με βάρη $q_1=q_2=...=q_k$.

Για την κατανομή αυτής της μορφής, η λύση της ελλειμματικής ανανεωτικής Εξίσωσης (3.9) μπορεί να δοθεί από τη σχέση (Παράδειγμα 4.2 στους Lin and Willmot (1999))

$$\psi_0(u)=e^{-\alpha u}\sum_{j=0}^{\infty}C_j\frac{(\alpha u)^j}{j!}, \qquad u\geq 0, \qquad (2.3.76)$$

όπου οι σταθερές C_j, $j=0,1,...$, ικανοποιούν τη σχέση

$$\sum_{j=0}^{\infty}C_j z^j=\frac{1-\dfrac{1-\phi_0}{1-\phi_0\sum_{i=1}^{k}q_i z^i}}{1-z}. \qquad (2.3.77)$$

Στην περίπτωση που $\delta=0$, από την (2.3.69) προκύπτει ότι

$$\phi_0=\psi_0(0)=1-\frac{\beta\left(\mu\frac{1}{\beta}-\lambda\frac{k}{\alpha}\right)}{\lambda+\mu}=\frac{\lambda(\alpha+k\beta)}{\alpha(\lambda+\mu)}.$$

Από τα παραπάνω, μπορεί να προκύψει το δεύτερο αποτέλεσμα του Θεωρήματος 2 της εργασίας του Boikov (2002), σχετικά με την πιθανότητα χρεοκοπίας όταν οι απαιτήσεις είναι εκθετικά κατανεμημένες. (Υπενθυμίζουμε ότι στο Παράδειγμα 2.3.1 δόθηκε επίσης και ένας άλλος τρόπος.) Για παράδειγμα, στην περίπτωση στην οποία τα μεγέθη των απαιτήσεων είναι εκθετικά κατανεμημένα, δηλαδή $k=1$, τότε, η (2.3.77) γίνεται

$$\sum_{j=0}^{\infty} C_j z^j = \frac{\phi_0}{1-\phi_0 z}$$

και ισοδύναμα

$$\sum_{j=0}^{\infty} C_j z^j = \phi_0 \frac{1}{1-\phi_0 z}$$

και από το άθροισμα απείρων όρων γεωμετρικής σειράς είναι

$$\sum_{j=0}^{\infty} C_j z^j = \phi_0 \sum_{j=0}^{\infty} (\phi_0 z)^j$$

οπότε έχουμε

$$C_j = \phi_0^{j+1}, \ j = 0,1,...,$$

και από την (2.3.76) προκύπτει

$$\psi_0(u) = e^{-\alpha u} \phi_0 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\alpha\phi_0 u)^j}{j!} = e^{-\alpha u} \phi_0 e^{\alpha\phi_0 u} = \phi_0 e^{-\alpha(1-\phi_0)u} = \frac{\lambda(\alpha+\beta)}{\alpha(\lambda+\mu)} e^{-\left(\frac{\alpha\mu-\beta\lambda}{\lambda+\mu}\right)u}, \quad u \geq 0$$

δηλαδή έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα με αυτό του Παραδείγματος 2.3.1.

Παράδειγμα 2.3.6

Έστω ότι η κατανομή των ατομικών ασφαλίστρων είναι η εκθετική με μέσο $1/\beta$ και η κατανομή των απαιτήσεων είναι μία μείξη $k \in \mathbf{N}^+$ εκθετικών κατανομών, δηλαδή, η συνάρτηση πυκνότητας και συνάρτηση κατανομής της Y_i είναι αντίστοιχα

$$f(y) = \sum_{i=1}^{k} q_i \alpha_i e^{-\alpha_i y} \quad \text{και} \quad \bar{F}(y) = \sum_{i=1}^{k} q_i e^{-\alpha_i y}, \quad y > 0 \quad \alpha_i > 0, \ i = 1,...,k,$$

όπου τα βάρη $q_i > 0$ ικανοποιούν τη σχέση $\sum_{i=1}^{k} q_i = 1$. Η μέση τιμή της Y είναι $E(Y_1) = \sum_{i=1}^{k} q_i \frac{1}{\alpha_i}$.

Από την (2.3.71) είναι διαδοχικά

$$\bar{F}_0(u) = \frac{\int_u^{\infty} [f(y) + \beta \bar{F}(y)] dy}{\int_0^{\infty} f(y) dy + \beta \int_0^{\infty} \bar{F}(y) dy}$$

$$= \frac{\int_u^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} q_i \alpha_i e^{-\alpha_i y} + \beta \sum_{i=1}^{k} q_i e^{-\alpha_i y} \right) dy}{1 + \beta E(Y_1)}$$

$$= \frac{\int_u^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} q_i (\alpha_i + \beta) e^{-\alpha_i y} \right) dy}{1 + \beta \sum_{i=1}^{k} q_i \frac{1}{\alpha_i}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{k} \int_u^{\infty} q_i (\alpha_i + \beta) e^{-\alpha_i y} dy}{\sum_{i=1}^{k} q_i + \beta \sum_{i=1}^{k} q_i \frac{1}{\alpha_i}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{k} q_i (\alpha_i + \beta) \left[\frac{e^{-\alpha_i y}}{-\alpha_i} \right]_u^{\infty}}{\sum_{i=1}^{k} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha_i} \right) q_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(1 + \frac{\beta}{\alpha_i} \right) q_i}{\sum_{i=1}^{k} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha_i} \right) q_i} e^{-\alpha_i u}$$

δηλαδή, η $\bar{F}_0(u)$ έχει τη μορφή

$$\bar{F}_0(u) = \sum_{i=1}^{k} q_i^* e^{-\alpha_i u}$$

όπου

$$q_i^* = \frac{\left(1 + \frac{\beta}{\alpha_i} \right) q_i}{\sum_{l=1}^{k} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha_l} \right) q_l},$$

δηλαδή, η $\bar{F}_0(u)$ είναι η δεξιά ουρά μιας κατανομής που προκύπτει από τη μείξη των ίδιων k εκθετικών κατανομών που σχηματίζουν την κατανομή των απαιτήσεων αλλά με νέα βάρη q_i^*, $i = 1,...,k$. Τότε η λύση της ελλειμματικής ανανεωτικής Εξίσωσης (2.3.15) έχει τη μορφή (Παράδειγμα 4.1 στους Lin and Willmot (1999))

$$\psi_0(u) = \sum_{i=1}^{k} C_i e^{-r_i u}, \qquad u \geq 0, \tag{2.3.78}$$

όπου

$$C_j = \frac{\sum_{l=1}^{k} \frac{q_l^*}{\alpha_l - r_j}}{\sum_{l=1}^{k} \frac{q_l^* \alpha_l}{(\alpha_l - r_j)^2}}, \qquad j = 1, 2, ..., k$$

και $r_1, r_2, ..., r_k$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{q_i^*\alpha_i}{\alpha_i-r}=\frac{1}{\phi_0}=\frac{\lambda+\mu}{\lambda\sum_{i=1}^{k}\left(1+\frac{\beta}{\alpha_i}\right)q_i}. \tag{2.3.79}$$

Στην περίπτωση που $\delta=0$, από την (2.3.69) προκύπτει ότι

$$\phi_0=1-\frac{\beta\left(\mu\frac{1}{\beta}-\lambda\sum_{i=1}^{k}\frac{q_i}{\alpha_i}\right)}{\lambda+\mu}=\frac{\lambda+\lambda\beta\sum_{i=1}^{k}\frac{q_i}{\alpha_i}}{\lambda+\mu}=\frac{\lambda\sum_{i=1}^{k}q_i+\lambda\sum_{i=1}^{k}\frac{\beta}{\alpha_i}q_i}{\lambda+\mu}=\frac{\lambda\sum_{i=1}^{k}\left(1+\frac{\beta}{\alpha_i}\right)q_i}{\lambda+\mu},$$

οπότε η (2.3.79) γίνεται

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{q_i^*\alpha_i}{\alpha_i-r}=\frac{\lambda+\mu}{\lambda\sum_{i=1}^{k}\left(1+\frac{\beta}{\alpha_i}\right)q_i}.$$

Παρατήρηση 2.3.7. Θέτοντας $k=1$ στην (2.3.78) προκύπτει επίσης το δεύτερο αποτέλεσμα του Θεωρήματος 2 της εργασίας του Boikov (2002), που αφορά στην πιθανότητα χρεοκοπίας όταν οι απαιτήσεις είναι εκθετικά κατανεμημένες.

2.4 Σύνοψη κεφαλαίου

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήθηκαν δύο μοντέλα κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα χωρίς να θεωρηθεί κάποιου είδους εξάρτηση μεταξύ των απαιτήσεων και των ασφαλίστρων.

Στην Ενότητα 2.2 αναλύθηκε ένα μοντέλο κινδύνου με τους χρόνους μεταξύ διαδοχικών αφίξεων απαιτήσεων να ακολουθούν τη γενικευμένη *Erlang*(*n*) κατανομή και ο αριθμός των ατομικών ασφαλίστρων να ακολουθεί τη διαδικασία Poisson και μελετήθηκε η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu $m_\delta(u)$. Δόθηκαν αναλυτικές εκφράσεις της $m_\delta(0)$ και της γεννήτριας συνάρτησης $\hat{m}_\delta(s)$. Επίσης, στην ειδική περίπτωση όπου η κατανομή του μεγέθους των απαιτήσεων ανήκει στην οικογένεια διακριτών κατανομών K_m, αναπτύχθηκαν σχέσεις κλειστής μορφής για το μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας και δόθηκε ένα αριθμητικό παράδειγμα. Μια πιθανή γενίκευση των αποτελεσμάτων που παρουσιάστηκαν, θα μπορούσε να είναι η περίπτωση όπου η κατανομή των χρόνων μεταξύ διαδοχικών αφίξεων απαιτήσεων να ανήκει στη γενικότερη οικογένεια των ρητών συναρτήσεων (Li and Carrido (2005b)), καθώς και η περίπτωση όπου ο ρυθμός ασφαλίστρου αντί να είναι μοναδιαίος να είναι ένας αυθαίρετος σταθερός αριθμός.

Στην Ενότητα 2.3 αναλύθηκε ένα μοντέλο κινδύνου όπου η διαδικασία των ασφαλίστρων και των απαιτήσεων είναι σύνθετες Poisson. Αποδείχθηκε ότι η συνάρτηση Gerber-Shiu ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση και αναπτύχθηκε μια ολοκληρωτική εξίσωση που ικανοποιείται από την προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής. Δόθηκε μια αναλυτική έκφραση για τη συνάρτηση Gerber-Shiu στην περίπτωση που η συνάρτηση ποινής παίρνει μια ειδική μορφή και η κατανομή των απαιτήσεων είναι η εκθετική. Ιδιαίτερη έμφαση δόθηκε όταν τα ασφάλιστρα ακολουθούν την κατανομή *Erlang* (n,β) και αναπτύχθηκε η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση για τη συνάρτηση Gerber-Shiu. Επίσης δόθηκαν αρκετά θεωρητικά παραδείγματα με εφαρμογές σε μεγέθη που μας ενδιαφέρουν από τη θεωρία κινδύνου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΜΕ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΑΣΦΑΛΙΣΤΡΑ ΚΑΙ ΕΞΑΡΤΗΣΕΙΣ

3.1 Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μελετήθηκαν μοντέλα κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα θεωρώντας ότι η διαδικασία άφιξης αυτών είναι ανεξάρτητη της διαδικασίας άφιξης των απαιτήσεων. Η θεώρηση αυτή είναι αρκετά περιοριστική και δεν αποτυπώνει την πραγματικότητα, αφού οι ασφαλιστικοί οργανισμοί προσαρμόζουν το ύψος των ασφαλίστρων τους με βάση τον δείκτη ζημιών του χαρτοφυλακίου τους. Έτσι αρκετοί ερευνητές έχουν προτείνει μοντέλα κινδύνου στα οποία ενσωματώνονται κάποιες μορφές εξάρτησης ώστε να γίνουν πιο ρεαλιστικά. Για παράδειγμα οι Albrecher and Boxma (2004) πρότειναν μια επέκταση του κλασικού μοντέλου κινδύνου σύνθετης Poisson στην οποία η κατανομή του ενδιάμεσου χρόνου μεταξύ των απαιτήσεων ελέγχεται από το μέγεθος της προηγούμενης απαίτησης. Οι Boudreault et al. (2006) πρότειναν ένα μοντέλο με την αντίθετη δομή εξάρτησης, δηλαδή η κατανομή της επόμενης απαίτησης εξαρτάται από το τελευταίο ενδοαφιξιακό χρόνο. Ο Landriault (2008) μελέτησε ένα μοντέλο κινδύνου που προτάθηκε από τους Boudreault et al. (2006) υπό την παρουσία στρατηγικής σταθερού μερίσματος. Άλλες ερευνητικές εργασίες που θεωρούν μοντέλα κινδύνου με εξάρτηση είναι των Meng et al. (2008), Zhou and Cai (2009), Zhang and Yang (2010 και 2011).

Στο παρόν κεφάλαιο εξετάζονται δύο μοντέλα με στοχαστικά ασφάλιστρα, το καθένα με επιμέρους θεώρηση εξάρτησης. Συγκεκριμένα, στην Ενότητα 3.2, οι κατανομές του χρόνου εμφάνισης της επόμενης απαίτησης και του μεγέθους του ατομικού ασφαλίστρου επηρεάζονται από το μέγεθος της απαίτησης, και στην Ενότητα 3.3 οι κατανομές των μεγεθών της επόμενης απαίτησης και του ατομικού ασφαλίστρου προσδιορίζονται από το χρόνο μεταξύ δύο διαδοχικών απαιτήσεων.

Η διαδικασία πλεονάσματος $U(t)$ έχει τη μορφή

$$U(t) = u + \sum_{i=1}^{M(t)} X_i - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \tag{3.1.1}$$

όπου $U(0) = u \geq 0$ είναι το αρχικό πλεόνασμα. Οι διαδικασίες των ασφαλίστρων και των απαιτήσεων, με τα σχετικά εμπλεκόμενα μεγέθη, θα διευκρινιστούν κατωτέρω στις επιμέρους ενότητες των υπό θεώρηση μοντέλων.

3.2 Μοντέλο κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα στο οποίο το μέγεθος μιας απαίτησης προσδιορίζει τις κατανομές του χρόνου εμφάνισης της επόμενης απαίτησης και του μεγέθους του ατομικού ασφαλίστρου

Στην ενότητα αυτή επεκτείνουμε το μοντέλο κινδύνου που μελετήθηκε στην Ενότητα 2.3, προσθέτοντας μια εξάρτηση ειδικής μορφής μεταξύ των μεγεθών των απαιτήσεων, των ενδιάμεσων χρόνων μεταξύ αφίξεων διαδοχικών απαιτήσεων και του ύψους των ατομικών ασφαλίστρων. Αρχικά δίνεται η περιγραφή του μοντέλου με την λόγω δομή εξάρτησης. Στη συνέχεια η μελέτη εστιάζεται στην περίπτωση όπου τα ατομικά ασφάλιστρα είναι εκθετικά κατανεμημένα και αναπτύσσονται οι μετασχηματισμοί Laplace και οι ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις για τις συναρτήσεις Gerber-Shiu. Τέλος, εξετάζεται η περίπτωση όπου τα μεγέθη των ασφαλίστρων έχουν μετασχηματισμό Laplace που ανήκει στην ρητή οικογένεια κατανομών και δείχνεται ότι και στην περίπτωση αυτή μπορούν να επιτευχθούν οι μετασχηματισμοί Laplace για τις προεξοφλημές συναρτήσεις ποινής.

3.2.1 Περιγραφή του μοντέλου

Θεωρούμε το μοντέλο κινδύνου της Εξίσωσης (3.1.1), στο οποίο η απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη $M(t)$ του αριθμού των ατομικών ασφαλίστρων μέχρι τη στιγμή t, είναι μια διαδικασία Poisson με ένταση $\mu > 0$, $\{X_i\}$ είναι ακολουθία αυστηρά θετικών τυχαίων μεταβλητών που συμβολίζουν τα ύψη των ατομικών ασφαλίστρων, $N(t)$ είναι μια απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη του αριθμού των απαιτήσεων μέχρι τη στιγμή t, $\{V_i\}$ είναι οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αφίξεων απαιτήσεων και $\{Y_i\}$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και ισόνομα κατανεμημένες με την Y που έχουν συνάρτηση κατανομής $F(y) = P(Y \le y)$, συνάρτηση πυκνότητας f, πεπερασμένη μέση τιμή μ_F και πεπερασμένο μετασχηματισμό Laplace $\hat{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sy} f(y)dy$. Θεωρούμε ότι οι $\{X_i\}$ και $N(t)$ εξαρτώνται από το μέγεθος της απαίτησης Y_i ως εξής:

- Εάν η απαίτηση Y_i είναι μεγαλύτερη ή ίση από ένα κατώφλι B_i, τότε ο χρόνος μέχρι την άφιξη του $i+1$ ασφαλίστρου, V_{i+1}, είναι εκθετικά κατανεμημένος με μέσο $1/\lambda_1$ και τα μεγέθη των ασφαλίστρων έχουν συνάρτηση κατανομής και πυκνότητας G_1 και g_1 αντίστοιχα με μέσο μ_{G_1} και μετασχηματισμό Laplace $\hat{g}_1(\cdot)$.
- Εάν η απαίτηση Y_i είναι μικρότερη από το κατώφλι B_i, τότε ο χρόνος V_{i+1}, είναι εκθετικά κατανεμημένος με μέσο $1/\lambda_2$ και τα μεγέθη των ασφαλίστρων έχουν συνάρτηση

κατανομής και πυκνότητας G_2 και g_2 αντίστοιχα με μέσο μ_{G_2} και μετασχηματισμό Laplace $\hat{g}_2(\cdot)$.

Επίσης θεωρούμε ότι $\{B_i\}$ είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομα κατανεμημένων με μία μεταβλητή B με συνάρτηση κατανομής $B(\cdot)$, και ότι είναι ανεξάρτητες από τις $\{Y_i\}$. Τέλος, υποθέτουμε ότι ο χρόνος μέχρι την άφιξη του πρώτου ασφαλίστρου, V_1, είναι εκθετικά κατανεμημένος με μέσο $1/\lambda_1$ ή $1/\lambda_2$, καθώς και ότι η συνάρτηση κατανομής του ύψους ασφαλίστρου είναι G_i στη διάρκεια του χρόνου μέχρι την πρώτη άφιξη απαίτησης εάν V_1 είναι εκθετικά κατανεμημένη με μέσο $1/\lambda_i$, $i=1,2$.

Στη συνέχεια το πλεόνασμα αναλύεται με τη χρήση της έννοιας των εποχών (epochs), που είναι οι χρονικές στιγμές άφιξης των απαιτήσεων. Για $n \in \mathbf{N}^+$ έστω $T_n = \sum_{i=1}^{n} V_i$ ο χρόνος εμφάνισης της n-οστής απαίτησης. Το πλεόνασμα αμέσως μετά την εποχή της n-οστής απαίτησης μπορεί να εκφραστεί ως

$$
\begin{aligned}
U_n &:= u + \sum_{i=1}^{M(T_n)} X_i - \sum_{i=1}^{n} Y_i \\
&= u + \sum_{i=1}^{M(T_1)} X_i + \sum_{i=M(T_1)+1}^{M(T_2)} X_i + \ldots + \sum_{i=M(T_{n-1})+1}^{M(T_n)} X_i - \sum_{i=1}^{n} Y_i \\
&= u + \sum_{i=1}^{M(T_1)} X_i - \sum_{k=1}^{n-1} \left(Y_k - \sum_{i=M(T_k)+1}^{M(T_{k+1})} X_i \right) - Y_n .
\end{aligned}
$$

Αφού ο ενδιάμεσος χρόνος άφιξης της $(k+1)$ απαίτησης, V_{k+1}, και τα μεγέθη των ασφαλίστρων μεταξύ των εποχών k και $k+1$ ελέγχονται μόνο από το μέγεθος ασφαλίστρου Y_k και το κατώφλι B_k, τότε οι

$$
Y_k - \sum_{i=M(T_k)+1}^{M(T_{k+1})} X_i , \qquad k = 1, 2, \ldots,
$$

είναι ανεξάρτητες και ισόνομα κατανεμημένες με την

$$
\left\{ Y_1 + \sum_{i=1}^{M(V_2)} X_i \right\}.
$$

Έστω

$$
Y_k - \sum_{i=1}^{M(V_{k+1})} X_i \quad k = 1, 2, \ldots,
$$

είναι οι ανεξάρτητες και ισόνομα κατανεμημένες με την

$$
\left\{ Y_1 - \sum_{i=1}^{M(V_2)} X_i \right\}
$$

τυχαίες μεταβλητές. Τότε

$$U_n \overset{D}{=} u + \sum_{i=1}^{M(V_1)} X_i - \sum_{k=1}^{n-1}\left(Y_k - \sum_{i=1}^{M(V_{k+1})} X_i \right) - Y_n . \tag{3.2.1}$$

όπου $\overset{D}{=}$ σημαίνει ισότητα κατά κατανομή. Από το νόμο των μεγάλων αριθμών, έχουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{U_n}{n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{u + \sum_{i=1}^{M(V_1)} X_i - Y_n}{n} - \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n-1}\left(Y_k - \sum_{i=1}^{M(V_{k+1})} X_i \right)}{n} \\
&= -\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n-1}\left(Y_k - \sum_{i=1}^{M(V_{k+1})} X_i \right)}{n} \\
&= -E\left(Y_1 - \sum_{i=1}^{M(V_2)} X_i \right) \\
&= E\left(\sum_{i=1}^{M(V_2)} X_i \right) - E(Y_1)
\end{aligned}$$

Για τον πρώτο όρο, δηλαδή τη μέση τιμή των ασφαλίστρων που έχουν εισπραχθεί μέχρι τη στιγμή $M(V_2)$, εφαρμόζουμε το θεώρημα ολικής πιθανότητας σε σχέση με το αν η απαίτηση ξεπερνά ή όχι το κατώφλι B. Στην περίπτωση που $Y \geq B$, ο μέσος αριθμός ασφαλίστρων στον εξεταζόμενο χρόνο είναι $\lambda \cdot \frac{1}{\lambda_1}$ και αφού το αναμενόμενο ατομικό ασφάλιστρο είναι μ_{G_1}, τα αναμενόμενα συνολικά ασφάλιστρα είναι $\frac{\lambda}{\lambda_1}\mu_{G_1}$. Όμοια, στην περίπτωση που $Y < B$, ο μέσος αριθμός ασφαλίστρων στον εξεταζόμενο χρόνο είναι $\lambda \cdot \frac{1}{\lambda_2}$ και αφού το αναμενόμενο ατομικό ασφάλιστρο είναι μ_{G_2}, τα αναμενόμενα συνολικά ασφάλιστρα είναι $\frac{\lambda}{\lambda_2}\mu_{G_2}$. Οπότε

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_n}{n} = P(Y \geq B)\lambda\frac{1}{\lambda_1}\mu_{G_1} + P(Y < B)\lambda\frac{1}{\lambda_2}\mu_{G_2} - \mu_F .$$

Έτσι, σε άπειρο χρονικό ορίζοντα, για να διασφαλιστεί ότι η U_n έχει θετική τάση και να αποφευχθεί η βέβαιη χρεοκοπία, θεωρούμε ότι ισχύει η επόμενη συνθήκη καθαρού κέρδους

$$P(Y \geq B)\frac{\mu\mu_{G_1}}{\lambda_1} + P(Y < B)\frac{\mu\mu_{G_2}}{\lambda_2} - \mu_F > 0 . \tag{3.2.2}$$

Σχετικά με συνάρτηση Gerber-Shiu, στο πρόβλημα που εξετάζουμε, θα ισχύουν τα εξής: Εάν ο χρόνος μέχρι την εμφάνιση της πρώτης απαίτησης είναι εκθετικά κατανεμημένος με μέσο $\frac{1}{\lambda_i}$, $i = 1,2$, η συνάρτηση Gerber-Shiu συμβολίζεται αντίστοιχα με $m_i(u)$, $i = 1,2$.

Υποθέτουμε επίσης ότι ισχύει η συνθήκη (regularity condition) $\lim_{u\to\infty} m_i(u) = 0$, η οποία δεν είναι ιδιαίτερα δεσμευτική, καθώς ικανοποιείται από αρκετά μέτρα της θεωρίας κινδύνου όπως για παράδειγμα η πιθανότητα χρεοκοπίας, η κατανομή του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και η κατανομή του ελλείματος τη στιγμή της χρεοκοπίας.

3.2.2 Ανάλυση των συναρτήσεων Gerber-Shiu για εκθετικά κατανεμημένα ασφάλιστρα

Αρχικά θα δώσουμε εκφράσεις των συναρτήσεων Gerber-Shiu σύμφωνα με την Πρόταση 3.2.1, καθώς και τους αντίστοιχους μετασχηματισμούς Laplace αυτών όταν τα μεγέθη των ατομικών ασφαλίστρων ακολουθούν μια οποιαδήποτε κατανομή σύμφωνα με την Πρόταση 3.2.2. Στην συνέχεια θα εξειδικεύσουμε τα αποτελέσματα της μελέτης, στην περίπτωση όπου τα μεγέθη των ατομικών ασφαλίστρων ακολουθούν την εκθετική κατανομή.

Πρόταση 3.2.1

Οι συναρτήσεις Gerber-Shiu $m_1(u)$ και $m_2(u)$ *εκφράζονται ως ακολούθως*

$$m_1(u) = \frac{\mu}{\mu+\lambda_1+\delta} A_1(u) + \frac{\lambda_1}{\mu+\lambda_1+\delta}\left(\int_0^u m_1(u-y)\xi_1(y)dy + \int_0^u m_2(u-y)\xi_2(y)dy + w(u)\right) \tag{3.2.3}$$

$$m_2(u) = \frac{\mu}{\mu+\lambda_2+\delta} A_2(u) + \frac{\lambda_2}{\mu+\lambda_2+\delta}\left(\int_0^u m_1(u-y)\xi_1(y)dy + \int_0^u m_2(u-y)\xi_2(y)dy + w(u)\right) \tag{3.2.4}$$

όπου,

$$A_i(u) = \int_0^\infty m_i(u+x)g_i(x)dx,\ i = 1,2,$$

$$\xi_1(y) = B(y)f(y),\quad \xi_2(y) = \overline{B}(y)f(y),\quad w(u) = \int_u^\infty \omega(u, y-u)f(y)dy.$$

Απόδειξη

Αρχικά δείχνουμε την εξίσωση που ικανοποιεί η $m_1(u)$. Στην περίπτωση αυτή, ο χρόνος μέχρι την εμφάνιση της πρώτης απαίτησης, V_1, είναι εκθετικά κατανεμημένος με μέσο $1/\lambda_1$. Η πρώτη απαίτηση μπορεί να συμβεί πριν ή μετά την άφιξη του πρώτου ασφαλίστρου. Έστω η τυχαία μεταβλητή L που εκφράζει το χρόνο να συμβεί το νωρίτερο γεγονός, δηλαδή

$$L = \min\{V_1, W_1\}.$$

Αφού και η τυχαία μεταβλητή W_1, δηλαδή ο χρόνος μέχρι την εμφάνιση του πρώτου ασφαλίστρου, ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέσο $1/\mu$, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της L είναι (Παράρτημα Π5)

$$f_L(t) = (\mu+\lambda_1)e^{-(\mu+\lambda_1)t}, \ t>0.$$

Δεσμεύοντας ως προς το χρόνο του πρώτου γεγονότος (άφιξη ασφαλίστρου ή απαίτησης) έχουμε για $u \geq 0$,

$$m_1(u) = \int_0^\infty m_1(u \mid L=t)\, f_L(t)dt.$$

Από το θεώρημα ολικής πιθανότητας είναι

$$m_1(u) = \int_0^\infty [m_1(u \mid L=t, W_1 \leq V_1)P(W_1 < V_1) + m_1(u \mid L=t, W_1 > V_1)P(V_1 > W_1)](\mu+\lambda_1)e^{-(\mu+\lambda_1)t}dt$$

αλλά για τις εκθετικά κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές W_1 και V_1 ισχύει (Παράρτημα Π5)

$$P(W_1 \leq V_1) = \frac{\mu}{\mu+\lambda_1}, \quad P(V_1 < W_1) = \frac{\lambda_1}{\mu+\lambda_1}.$$

Οπότε,

$$m_1(u) = \int_0^\infty \left(m_1(u \mid L=t, W_1 \leq V_1)\frac{\mu}{\mu+\lambda_1} + m_1(u \mid L=t, V_1 < W_1)\frac{\lambda_1}{\mu+\lambda_1} \right)(\mu+\lambda_1)e^{-(\mu+\lambda_1)t}dt$$

$$= \int_0^\infty [\mu\, m_1(u \mid L=t, W_1 \leq V_1) + \lambda_1 m_1(u \mid L=t, V_1 < W_1)]e^{-(\mu+\lambda_1)t}dt.$$

Εφαρμόζοντας πάλι το θεώρημα ολικής πιθανότητας στην περίπτωση που $V_1 < W_1$ (δηλαδή στην περίπτωση να συμβεί πρώτα ο κίνδυνος) παίρνουμε

$$m_1(u) = \int_0^\infty \{\mu\, m_1(u \mid L=t, W_1 \leq V_1) + \lambda_1[m_1(u \mid L=t, V_1 < W_1, B \leq y)P(B \leq y)$$
$$+ m_1(u \mid L=t, V_1 < W_1, B > y)P(B > y)]\}e^{-(\mu+\lambda_1)t}dt$$

Στο σημείο αυτό διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

α) Συμβαίνει πρώτα άφιξη ασφαλίστρου, έστω ύψους x. Τότε η διαδικασία συνεχίζεται με αποθεματικό $u+x$.

β) Συμβαίνει πρώτα άφιξη απαίτησης, έστω ύψους y,

β1) αν $y<u$, δηλαδή η απαίτηση είναι μικρότερη από το αρχικό αποθεματικό, τότε η διαδικασία συνεχίζεται με αποθεματικό $u-y$ και αν το ύψος της απαίτησης είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το κατώφλι B έχουμε τη συνάρτηση $m_1(u)$, ενώ αν είναι μικρότερο από το B έχουμε τη συνάρτηση $m_2(u)$,

β2) αν $y>u$, δηλαδή η απαίτηση είναι μεγαλύτερη από το αρχικό αποθεματικό, τότε εφαρμόζεται η συνάρτηση ποινής.

Έτσι η παραπάνω συνάρτηση Gerber-Shiu γίνεται

$$m_1(u)=\int_0^\infty e^{-\delta t}\left\{\mu\int_0^\infty m_1(u+x)g_1(x)dx\right.$$
$$+\lambda_1\left(\int_0^u m_1(u-y)B(y)f(y)dy+\int_0^u m_2(u-y)\bar{B}(y)f(y)dy\right.$$
$$\left.\left.+\int_u^\infty \omega(u,y-u)f(y)dy\right)\right\}e^{-(\mu+\lambda_1)t}dt$$
$$=\int_0^\infty e^{-(\mu+\lambda_1+\delta)t}dt\left\{\mu\int_0^\infty m_1(u+x)g_1(x)dx\right.$$
$$\left.+\lambda_1\left(\int_0^u m_1(u-y)B(y)f(y)dy+\int_0^u m_2(u-y)\bar{B}(y)f(y)dy+\int_u^\infty \omega(u,y-u)f(y)dy\right)\right\}$$

Υπολογίζοντας το πρώτο ολοκλήρωμα παίρνουμε

$$m_1(u)=\frac{\mu}{\mu+\lambda_1+\delta}\int_0^\infty m_1(u+x)g_1(x)dx$$
$$+\frac{\lambda_1}{\mu+\lambda_1+\delta}\left(\int_0^u m_1(u-y)B(y)f(y)dy\right.$$
$$\left.+\int_0^u m_2(u-y)\bar{B}(y)f(y)dy+\int_u^\infty \omega(u,y-u)f(y)dy\right)$$

θέτοντας

$$A_1(u)=\int_0^\infty m_1(u+x)g_1(x)dx\,,$$

$$\xi_1(y)=B(y)f(y)\,,\ \xi_2(y)=\bar{B}(y)f(y),\ \text{και}\ w(u)=\int_u^\infty \omega(u,y-u)f(y)dy$$

με αντικατάσταση στην παραπάνω σχέση για το $m_1(u)$ προκύπτει άμεσα (3.2.3.).
Με όμοιο συλλογισμό αποδεικνύεται η σχέση (3.2.4).

□

3.2.2.1 Μετασχηματισμοί Laplace των συναρτήσεων Gerber-Shiu

Στην υποενότητα αυτή θα δοθούν εκφράσεις των μετασχηματισμών Laplace για τις συναρτήσεις Gerber-Shiu στη περίπτωση που τα ασφάλιστρα ακολουθούν μια γενική κατανομή καθώς και στην ειδική περίπτωση που είναι εκθετικά κατανεμημένα.

Πρόταση 3.2.2

Οι μετασχηματισμοί Laplace των συναρτήσεων $m_i(u)$, $i=1,2$, *που δόθηκαν στις* (3.2.3) *και* (3.2.4) *είναι αντίστοιχα*

$$\hat{m}_1(s) = \frac{\mu}{\mu+\lambda_1+\delta}\hat{A}_1(s) + \frac{\lambda_1}{\mu+\lambda_1+\delta}[\hat{m}_1(s)\hat{\xi}_1(s) + \hat{m}_2(s)\hat{\xi}_2(s) + \hat{w}(s)], \tag{3.2.5}$$

$$\hat{m}_2(s) = \frac{\mu}{\mu+\lambda_2+\delta}\hat{A}_2(s) + \frac{\lambda_2}{\mu+\lambda_2+\delta}[\hat{m}_1(s)\hat{\xi}_1(s) + \hat{m}_2(s)\hat{\xi}_2(s) + \hat{w}(s)]. \tag{3.2.6}$$

Απόδειξη

Ορίζοντας τους μετασχηματισμούς Laplace των εμπλεκόμενων ποσοτήτων στις εξισώσεις της Πρότασης 3.2.1, έχουμε

$$\hat{m}_i(s) = L\{m_i(u)\} = \int_0^\infty e^{-su} m_i(u)du, \qquad i=1,2,$$

$$\hat{A}_i(s) = L\{A_1(u)\} = \int_0^\infty e^{-su} A_i(u)du, \qquad i=1,2,$$

$$\hat{\xi}_i(s) = L\{\xi_i(u)\} = \int_0^\infty e^{-su} \xi_i(u)du, \qquad i=1,2,$$

$$\hat{w}(s) = L\{w(u)\} = \int_0^\infty e^{-su} w(u)du.$$

Παίρνοντας μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη της (3.2.3) έχουμε

$$L\{m_1(u)\} = L\left\{\frac{\mu}{\mu+\lambda_1+\delta}A_1(u) + \frac{\lambda_1}{\mu+\lambda_1+\delta}\left(\int_0^u m_1(u-y)\xi_1(y)dy + \int_0^u m_2(u-y)\xi_2(y)dy + w(u)\right)\right\}$$

και από την ιδιότητα της γραμμικότητας του μετασχηματισμού (Παράρτημα Π1) είναι

$$\begin{aligned} L\{m_1(u)\} = \frac{\mu}{\mu+\lambda_1+\delta}L\{A_1(u)\} + \frac{\lambda_1}{\mu+\lambda_1+\delta}\Bigg(& L\left\{\int_0^u m_1(u-y)\xi_1(y)dy\right\} \\ & + L\left\{\int_0^u m_2(u-y)\xi_2(y)dy\right\} + L\{w(u)\}\Bigg) \end{aligned}$$

αλλά οι δύο πρώτοι μετασχηματισμοί στην παρένθεση αφορούν σε συνέλιξη, οπότε

$$\hat{m}_1(s) = \frac{\mu}{\mu+\lambda_1+\delta}\hat{A}_1(s) + \frac{\lambda_1}{\mu+\lambda_1+\delta}[\hat{m}_1(s)\hat{\xi}_1(s) + \hat{m}_2(s)\hat{\xi}_2(s) + \hat{w}(s)]$$

που είναι η ζητούμενη Εξίσωση (3.2.5).
Όμοια από την (3.2.4) προκύπτει η (3.2.6).

□

Στη συνέχεια θεωρούμε ότι η κατανομή του μεγέθους των ατομικών ασφαλίστρων είναι εκθετικά κατανεμημένη με μέση τιμή $\mu_{G_i} > 0$, $i=1,2$. Συγκεκριμένα η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και η συνάρτηση κατανομής του είναι αντίστοιχα,

$$g_i(x) = \frac{1}{\mu_{G_i}} e^{-\frac{x}{\mu_{G_i}}}, \qquad G_i(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\mu_{G_i}}}, \qquad x > 0. \tag{3.2.7}$$

Η επόμενη πρόταση εξειδικεύει τους μετασχηματισμούς Laplace των συναρτήσεων Gerber-Shiu που δόθηκαν στην Πρόταση 3.2.2 για εκθετικά κατανεμημένα μεγέθη ατομικών ασφαλίστρων.

Πρόταση 3.2.3

Οι μετασχηματισμοί Laplace των συναρτήσεων Gerber-Shiu, $m_i(u)$, $i = 1, 2$, *στην περίπτωση που τα μεγέθη των ατομικών ασφαλίστρων ακολουθούν την εκθετική κατανομή της* (3.2.7), *είναι*

$$\hat{m}_1(s) = \frac{h_1(s)\hat{w}(s) - \dfrac{\mu\chi_2(s)\hat{m}_1\left(\frac{1}{\mu_{G_1}}\right)}{(\mu+\lambda_1+\delta)(1-\mu_{G_1}s)} - \dfrac{\mu\lambda_1(s)\hat{\xi}_2(s)\hat{m}_2\left(\frac{1}{\mu_{G_2}}\right)}{(\mu+\lambda_1+\delta)(\mu+\lambda_2+\delta)(1-\mu_{G_2}s)}}{\chi_1(s)\chi_2(s) - \dfrac{\lambda_1\lambda_2\hat{\xi}_1(s)}{(\mu+\lambda_1+\delta)(\mu+\lambda_2+\delta)}}, \tag{3.2.8}$$

$$\hat{m}_2(s) = \frac{h_2(s)\hat{w}(s) - \dfrac{\mu\,\chi_1(s)\hat{m}_2\left(\frac{1}{\mu_{G_2}}\right)}{(\mu+\lambda_2+\delta)(1-\mu_{G_2}s)} - \dfrac{\mu\,\lambda_2(s)\hat{\xi}_1(s)\hat{m}_1\left(\frac{1}{\mu_{G_1}}\right)}{(\mu+\lambda_1+\delta)(\mu+\lambda_2+\delta)(1-\mu_{G_1}s)}}{\chi_1(s)\chi_2(s) - \dfrac{\lambda_1\lambda_2\hat{\xi}_1(s)}{(\mu+\lambda_1+\delta)(\mu+\lambda_2+\delta)}}, \tag{3.2.9}$$

όπου,

$$\chi_i(s) = 1 - \frac{\mu}{(\mu+\lambda_i+\delta)(1-\mu_{G_i}s)} - \frac{\lambda_i\hat{\xi}_i(s)}{\mu+\lambda_i+\delta}, \qquad i = 1, 2,$$

$$h_1(s) = \frac{\lambda_1}{\mu+\lambda_1+\delta} - \frac{\mu\lambda_1}{(\mu+\lambda_1+\delta)(\mu+\lambda_2+\delta)(1-\mu_{G_2}s)},$$

$$h_2(s) = \frac{\lambda_2}{\mu+\lambda_2+\delta} - \frac{\mu\lambda_2}{(\mu+\lambda_1+\delta)(\mu+\lambda_2+\delta)(1-\mu_{G_1}s)}.$$

Απόδειξη

Αρχικά υπολογίζουμε το μετασχηματισμό Laplace της $A_i(u)$, $i = 1, 2$, που ορίστηκε στην Πρόταση 3.2.1. Για $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{\mu_{G_i}}$ έχουμε διαδοχικά,

$$\hat{A}_i(s) = L\{A_i(u)\} = \int_0^\infty e^{-su} A_i(u)\,du$$

$$=\int_0^\infty e^{-su}\int_0^\infty m_i(u+x)g_i(x)dxdu$$

$$=\int_0^\infty e^{-su}\int_0^\infty m_i(u+x)\frac{1}{\mu_{G_i}}e^{-\frac{x}{\mu_{G_i}}}dxdu$$

αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-su}m_i(u+x)\frac{1}{\mu_{G_i}}e^{-\frac{x}{\mu_{G_i}}}dudx$$

κάνοντας αλλαγή μεταβλητής $y=u+x\Rightarrow u=y-x\Rightarrow du=dy$ και $0\le u<\infty\Rightarrow x\le y<\infty$

$$=\frac{1}{\mu_{G_i}}\int_0^\infty e^{-\frac{x}{\mu_{G_i}}}\int_x^\infty e^{-s(y-x)}m_i(y)dydx$$

και από τον ορισμό και τις ιδιότητες του τελεστή Dickson-Hipp (Παράρτημα Π3)

$$=\frac{1}{\mu_{G_i}}\int_0^\infty e^{-\frac{x}{\mu_{G_i}}}T_s m_i(x)dx \qquad \text{(ορισμός)}$$

$$=\frac{1}{\mu_{G_i}}T_{\frac{1}{\mu_{G_i}}}T_s m_i(0) \qquad \text{(Ιδιότητα A2)}$$

$$=\frac{1}{\mu_{G_i}}T_s T_{\frac{1}{\mu_{G_i}}}m_i(0) \qquad \text{(Ιδιότητα A6)}$$

$$=\frac{1}{\mu_{G_i}}\frac{T_s m_i(0)-T_{\frac{1}{\mu_{G_i}}}m_i(0)}{\frac{1}{\mu_{G_i}}-s}$$

και τέλος, από την Ιδιότητα A2,

$$\hat{A}_i(s)=\frac{\hat{m}_i(s)-\hat{m}_i\left(\frac{1}{\mu_{G_i}}\right)}{1-s\mu_{G_i}}, \qquad i=1,2. \tag{3.2.10}$$

Αντικαθιστώντας στις (3.2.5) και (3.2.6) παίρνουμε αντίστοιχα

$$\hat{m}_1(s)=\frac{\mu}{\mu+\lambda_1+\delta}\frac{\hat{m}_1(s)-\hat{m}_1\left(\frac{1}{\mu_{G_1}}\right)}{1-s\mu_{G_1}}+\frac{\lambda_1}{\mu+\lambda_1+\delta}[\hat{m}_1(s)\hat{\xi}_1(s)+\hat{m}_2(s)\hat{\xi}_2(s)+\hat{w}(s)]$$

και

$$\hat{m}_2(s)=\frac{\mu}{\mu+\lambda_2+\delta}\frac{\hat{m}_2(s)-\hat{m}_2\left(\frac{1}{\mu_{G_2}}\right)}{1-s\mu_{G_2}}+\frac{\lambda_2}{\mu+\lambda_2+\delta}[\hat{m}_1(s)\hat{\xi}_1(s)+\hat{m}_2(s)\hat{\xi}_2(s)+\hat{w}(s)].$$

Με αναδιάταξη των όρων, οι προηγούμενες εξισώσεις γράφονται ως

$$\left(1-\frac{\mu}{(\mu+\lambda_1+\delta)(1-\mu_{G_1}s)}-\frac{\lambda_1\hat{\xi}_1(s)}{\mu+\lambda_1+\delta}\right)\hat{m}_1(s)-\frac{\lambda_1\hat{\xi}_2(s)}{\mu+\lambda_1+\delta}\hat{m}_2(s)$$

$$=\frac{\lambda_1\hat{w}(s)}{\mu+\lambda_1+\delta}-\frac{\mu\hat{m}_1\left(\frac{1}{\mu_{G_1}}\right)}{(\mu+\lambda_1+\delta)(1-\mu_{G_1}s)}, \tag{3.2.11}$$

$$\left(1-\frac{\mu}{(\mu+\lambda_2+\delta)(1-\mu_{G_2}s)}-\frac{\lambda_2\hat{\xi}_2(s)}{\mu+\lambda_2+\delta}\right)\hat{m}_2(s)-\frac{\lambda_2\hat{\xi}_1(s)}{\mu+\lambda_2+\delta}\hat{m}_1(s)$$

$$=\frac{\lambda_2\hat{w}(s)}{\mu+\lambda_2+\delta}-\frac{\mu\hat{m}_2\left(\frac{1}{\mu_2}\right)}{(\mu+\lambda_2+\delta)(1-\mu_{G_2}s)}. \tag{3.2.12}$$

Λύνοντας το γραμμικό σύστημα των (3.2.11) και (3.2.11) ως προς $\hat{m}_i(s)$, $i=1,2$, με κάποια μέθοδο (έστω των οριζουσών Cramer) προκύπτουν οι (3.2.8) και (3.2.9).

□

Με αναλυτική επέκταση, οι (3.2.11) και (3.2.12) ισχύουν για όλα τα s στο δεξί μιγαδικό επίπεδο εκτός από τα σημεία $1/\mu_{G_1}$ και $1/\mu_{G_2}$. Για να προσδιοριστούν πλήρως οι μετασχηματισμοί $\hat{m}_i(s)$, $i=1,2$, χρειαζόμαστε τις ποσότητες $\hat{m}_1\left(\frac{1}{\mu_{G_1}}\right)$, $\hat{m}_2\left(\frac{1}{\mu_{\mu_{G_2}}}\right)$. Προς τούτο, θα μελετήσουμε τις ρίζες του κοινού παρονομαστή των (3.2.8) και (3.2.9) σύμφωνα με το επόμενο λήμμα.

Λήμμα 3.2.1

Για $\delta>0$ η εξίσωση

$$\chi_1(s)\chi_2(s)-\frac{\lambda_1\lambda_2\hat{\xi}_1(s)\hat{\xi}_2(s)}{(\mu+\lambda_1+\delta)(\mu+\lambda_2+\delta)}=0 \tag{3.2.13}$$

έχει ακριβώς δύο ρίζες, έστω $\rho_1(\delta)$, $\rho_2(\delta)$, στο δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο, δηλαδή, $\mathrm{Re}(\rho_i(\delta))>0$ $i=1,2$.

Απόδειξη

Πολλαπλασιάζοντας την (3.2.13) με $(1-\mu_{G_1}s)(1-\mu_{G_2}s)$ παίρνουμε

$$\chi_1(s)\chi_2(s)(1-\mu_{G_1}s)(1-\mu_{G_2}s)=\frac{\lambda_1\lambda_2\hat{\xi}_1(s)\hat{\xi}_2(s)(1-\mu_{G_1}s)(1-\mu_{G_2}s)}{(\mu+\lambda_1+\delta)(\mu+\lambda_2+\delta)}$$

και αντικαθιστώντας τα $\chi_1(s)$, $\chi_2(s)$ έχουμε διαδοχικά

$$\left(1-\frac{\mu}{(\mu+\lambda_1+\delta)(1-\mu_{G_1}s)}-\frac{\lambda_1\hat{\xi}_1(s)}{\mu+\lambda_1+\delta}\right)(1-\mu_{G_1}s)$$

$$\times\left(1-\frac{\mu}{(\mu+\lambda_2+\delta)(1-\mu_{G_2}s)}-\frac{\lambda_2\hat{\xi}_2(s)}{\mu+\lambda_2+\delta}\right)(1-\mu_{G_2}s)=\frac{\lambda_1\lambda_2\hat{\xi}_1(s)\hat{\xi}_2(s)(1-\mu_{G_1}s)(1-\mu_{G_2}s)}{(\mu+\lambda_1+\delta)(\mu+\lambda_2+\delta)}$$

κάνοντας τους πολλαπλασιασμούς στις παρενθέσεις έχουμε διαδοχικά

$$\left(1-\mu_{G_1}s-\frac{\mu}{\mu+\lambda_1+\delta}-\frac{\lambda_1\hat{\xi}_1(s)(1-\mu_{G_1}s)}{\mu+\lambda_1+\delta}\right)$$

$$\times\left(1-\mu_{G_2}s-\frac{\mu}{\mu+\lambda_2+\delta}-\frac{\lambda_2\hat{\xi}_2(s)(1-\mu_{G_2}s)}{\mu+\lambda_2+\delta}\right)=\frac{\lambda_1\lambda_2\hat{\xi}_1(s)\hat{\xi}_2(s)(1-\mu_{G_1}s)(1-\mu_{G_2}s)}{(\mu+\lambda_1+\delta)(\mu+\lambda_2+\delta)}$$

και

$$\left(1-\mu_{G_1}s-\frac{\mu}{\mu+\lambda_1+\delta}\right)\left(1-\mu_{G_2}s-\frac{\mu}{\mu+\lambda_2+\delta}\right)-\left(1-\mu_{G_1}s-\frac{\mu}{\mu+\lambda_1+\delta}\right)\frac{\lambda_2\hat{\xi}_2(s)(1-\mu_{G_2}s)}{\mu+\lambda_2+\delta}$$

$$-\frac{\lambda_1\hat{\xi}_1(s)(1-\mu_{G_1}s)}{\mu+\lambda_1+\delta}\left(1-\mu_{G_2}s-\frac{\mu}{\mu+\lambda_2+\delta}\right)+\frac{\lambda_1\hat{\xi}_1(s)(1-\mu_{G_1}s)}{\mu+\lambda_1+\delta}\frac{\lambda_2\hat{\xi}_2(s)(1-\mu_{G_2}s)}{\mu+\lambda_2+\delta}$$

$$=\frac{\lambda_1\lambda_2\hat{\xi}_1(s)\hat{\xi}_2(s)(1-\mu_{G_1}s)(1-\mu_{G_2}s)}{(\mu+\lambda_1+\delta)(\mu+\lambda_2+\delta)}$$

απλοποιώντας και αναδιατάσσοντας τους όρους, παίρνουμε

$$\left(1-\mu_{G_1}s-\frac{\mu}{\mu+\lambda_1+\delta}\right)\left(1-\mu_{G_2}s-\frac{\mu}{\mu+\lambda_2+\delta}\right)$$

$$=\left(1-\mu_{G_1}s-\frac{\mu}{\mu+\lambda_1+\delta}\right)\frac{\lambda_2\hat{\xi}_2(s)(1-\mu_{G_2}s)}{\mu+\lambda_2+\delta}+\left(1-\mu_{G_2}s-\frac{\mu}{\mu+\lambda_2+\delta}\right)\frac{\lambda_1\hat{\xi}_1(s)(1-\mu_{G_1}s)}{\mu+\lambda_1+\delta} \tag{3.2.14}$$

Στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε το θεώρημα Rouché (Παράρτημα Π7). Έστω $r>0$ ένας αρκετά μεγάλος αριθμός και έστω C_r καμπύλη που περιέχει το φανταστικό άξονα με φορά από το $-ir$ στο ir και ημικύκλιο με ακτίνα r που διαγράφεται δεξιόστροφα από το ir στο $-ir$. Θα δείξουμε ότι για $s\in C_r$, το μέτρο του αριστερού μέλους της (3.2.14) είναι αυστηρά μεγαλύτερο από το μέτρο του δεξιού μέλους της (3.2.14).

Για r αρκετά μεγάλο έχουμε

$$Z:=\left|\left(1-\mu_{G_1}s-\frac{\mu}{\mu+\lambda_1+\delta}\right)\frac{\lambda_2\hat{\xi}_2(s)(1-\mu_{G_2}s)}{\mu+\lambda_2+\delta}+\left(1-\mu_{G_2}s-\frac{\mu}{\mu+\lambda_2+\delta}\right)\frac{\lambda_1\hat{\xi}_1(s)(1-\mu_{G_1}s)}{\mu+\lambda_1+\delta}\right|$$

$$=\left|\left(1-\mu_{G_1}s-\frac{\mu}{\mu+\lambda_1+\delta}\right)\left(1-\mu_{G_2}s-\frac{\mu}{\mu+\lambda_2+\delta}\right)\left(\frac{\frac{\lambda_2\hat{\xi}_2(s)(1-\mu_{G_2}s)}{\mu+\lambda_2+\delta}}{1-\mu_{G_2}s-\frac{\mu}{\mu+\lambda_2+\delta}}+\frac{\frac{\lambda_1\hat{\xi}_1(s)(1-\mu_{G_1}s)}{\mu+\lambda_1+\delta}}{1-\mu_{G_1}s-\frac{\mu}{\mu+\lambda_1+\delta}}\right)\right|$$

απλοποιώντας τα δύο σύνθετα κλάσματα και εφαρμόζοντας την ιδιότητα $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$ παίρνουμε

$$Z=\left|\left(1-\mu_{G_1}s-\frac{\mu}{\mu+\lambda_1+\delta}\right)\left(1-\mu_{G_2}s-\frac{\mu}{\mu+\lambda_2+\delta}\right)\right|$$
$$\times\left|\frac{\lambda_2\hat{\xi}_2(s)(1-\mu_{G_2}s)}{\lambda_2+\delta-(\mu+\lambda_2+\delta)\mu_{G_2}s}+\frac{\lambda_1\hat{\xi}_1(s)(1-\mu_{G_1}s)}{\lambda_1+\delta-(\mu+\lambda_1+\delta)\mu_{G_1}s}\right|$$

εφαρμόζοντας την ιδιότητα $|a+b|\le|a|+|b|$ προκύπτει

$$Z\le\left|\left(1-\mu_{G_1}s-\frac{\mu}{\mu+\lambda_1+\delta}\right)\left(1-\mu_{G_2}s-\frac{\mu}{\mu+\lambda_2+\delta}\right)\right|$$
$$\times\left(\frac{\left|\hat{\xi}_2(s)\right|\cdot\left|\lambda_2(1-\mu_{G_2}s)\right|}{\left|\lambda_2+\delta-(\mu+\lambda_2+\delta)\mu_{G_2}s\right|}+\frac{\left|\hat{\xi}_1(s)\right|\cdot\left|\lambda_1(1-\mu_{G_1}s)\right|}{\left|\lambda_1+\delta-(\mu+\lambda_1+\delta)\mu_{G_1}s\right|}\right)\qquad(3.2.14α)$$

Στο σημείο αυτό για να συνεχίσουμε θα χρειαστούμε κάποιες βοηθητικές σχέσεις.
Για s στο μιγαδικό άξονα, έχουμε για $i=1,2$,

$$\frac{\left|\frac{\lambda_i\hat{\xi}_i(s)(1-\mu_{G_i}s)}{\mu+\lambda_i+\delta}\right|}{\left|1-\mu_{G_i}s-\frac{\mu}{\mu+\lambda_i+\delta}\right|}=\frac{\left|\frac{\lambda_i(1-\mu_{G_i}s)}{\mu+\lambda_i+\delta}\right|\left|\hat{\xi}_i(s)\right|}{\left|\frac{\lambda_i+\delta}{\mu+\lambda_i+\delta}-\mu_{G_i}s\right|}\overset{(*)}{\le}\frac{\left|\frac{\lambda_i(1-\mu_{G_i}s)}{\mu+\lambda_i+\delta}\right|}{\left|\frac{\lambda_i+\delta}{\mu+\lambda_i+\delta}-\mu_{G_i}s\right|}$$

(*) από Παράρτημα Π2, Ιδιότητα 3

$$=\frac{\left|\frac{\lambda_i(1-\mu_{G_i}s)}{\mu+\lambda_i+\delta}\right|}{\left|\frac{\lambda_i+\delta}{\mu+\lambda_i+\delta}\left(1-\mu_{G_i}s\frac{\mu+\lambda_i+\delta}{\lambda_i+\delta}\right)\right|}=\frac{\lambda_i}{\lambda_i+\delta}\frac{\left|1-\mu_{G_i}s\right|}{\left|1-\mu_{G_i}s\frac{\mu+\lambda_i+\delta}{\lambda_i+\delta}\right|}\le 1.\qquad(3.2.14β)$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει αφού είναι $\frac{\lambda_i}{\lambda_i+\delta}<1$ και λόγω ότι $\frac{\mu+\lambda_i+\delta}{\lambda_i+\delta}>1$ είναι και

$$\frac{\left|1-\mu_{G_i}s\right|}{\left|1-\mu_{G_i}s\frac{\mu+\lambda_i+\delta}{\lambda_i+\delta}\right|}<1.$$

Για s στο ημικύκλιο, έχουμε για $\forall\ \varepsilon > 0$,

$$\frac{\left|\frac{1}{\mu_{G_i}} - s\right|}{\left|\frac{\lambda_i+\delta}{(\mu+\lambda_i+\delta)\mu_{G_i}} - s\right|} < 1+\varepsilon\,, \tag{3.2.14γ}$$

όταν r αρκετά μεγάλο. Συγκεκριμένα, για $\varepsilon = \min\left\{\frac{\mu+\delta}{\lambda_1}, \frac{\mu+\delta}{\lambda_2}\right\}$, υπάρχει $r_0 > 0$ τέτοιο ώστε όταν $r > r_0$, έχουμε για $i = 1,2$,

$$\frac{\left|\frac{\lambda_i \hat{\xi}_i(s)(1-\mu_{G_i}s)}{\mu+\lambda_i+\delta}\right|}{\left|1-\mu_{G_i}s - \frac{\mu}{\mu+\lambda_i+\delta}\right|} = \frac{\frac{\lambda_i}{\mu+\lambda_i+\delta}\left|1-\mu_{G_i}s\right|\left|\hat{\xi}_i(s)\right|}{\left|\frac{\lambda_i+\delta}{\mu+\lambda_i+\delta} - \mu_{G_i}s\right|} \le \frac{\lambda_i}{\mu+\lambda_i+\delta}\frac{\left|1-\mu_{G_i}s\right|}{\left|\frac{\lambda_i+\delta}{\mu+\lambda_i+\delta} - \mu_{G_i}s\right|}$$

$$= \frac{\lambda_i}{\mu+\lambda_i+\delta}\frac{\left|\mu_{G_i}\left(\frac{1}{\mu_{G_i}} - s\right)\right|}{\left|\mu_{G_i}\left(\frac{\lambda_i+\delta}{(\lambda+\lambda_i+\delta)\mu_{G_i}} - s\right)\right|} = \frac{\lambda_i}{\mu+\lambda_i+\delta}\frac{\left|\frac{1}{\mu_{G_i}} - s\right|}{\left|\frac{\lambda_i+\delta}{(\mu+\lambda_i+\delta)\mu_{G_i}} - s\right|}$$

$$\overset{(3.2.14\gamma)}{<} \frac{\lambda_i}{\mu+\lambda_i+\delta}(1+\varepsilon) \le 1\,. \tag{3.2.14δ}$$

Οπότε η (3.2.14α) με βάση τις (3.2.14β) και (3.2.14δ) γίνεται

$$Z < \left|\left(1-\mu_{G_1}s - \frac{\mu}{\mu+\lambda_1+\delta}\right)\left(1-\mu_{G_2}s - \frac{\mu}{\mu+\lambda_2+\delta}\right)\right|\left(|\hat{\xi}_2(s)| + |\hat{\xi}_1(s)|\right) \tag{3.2.14ε}$$

Από το Παράρτημα Π2, ιδιότητες 2 και 3, έχουμε για τους μετασχηματισμούς Laplace ότι $0 \le \hat{\xi}_i(s) \le 1$ και $\hat{\xi}_i(0) = 1$, συνεπώς $|\hat{\xi}_1(s)| + |\hat{\xi}_2(s)| \le 1+1 = \hat{\xi}_1(0) + \hat{\xi}_2(s)$. Οι συναρτήσεις $\xi_i(s)$, $i = 1,2$, που ορίστηκαν στην Πρόταση 3.2.1,

$$\xi_1(y) = B(y)\,f(y)\,, \quad \xi_2(y) = \overline{B}(y)\,f(y),$$

έχουν αντίστοιχα μετασχηματισμούς Laplace

$$\hat{\xi}_1(s) = \int_0^\infty e^{-sy}\xi_1(y)dy = \int_0^\infty e^{-sy}B(y)\,f(y)dy \qquad \text{και} \qquad \hat{\xi}_2(s) = \int_0^\infty e^{-sy}\xi_2(y)dy = \int_0^\infty e^{-sy}\overline{B}(y)\,f(y)dy$$

από τους οποίους προκύπτει

$$\hat{\xi}_1(0) + \hat{\xi}_2(0) = \int_0^\infty B(y)\,f(y)dy + \int_0^\infty \overline{B}(y)\,f(y)dy = \int_0^\infty [B(y)+\overline{B}(y)]\,f(y)dy = \int_0^\infty f(y)dy = 1$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα ισούται με τη μονάδα, αφού η $f(y)$ είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας με στήριγμα $(0,\infty)$.

Με βάση τα παραπάνω, η (4.2.14δ) γίνεται

$$Z \le \left| \left(1-\mu_{G_1}s-\frac{\mu}{\mu+\lambda_1+\delta}\right)\left(1-\mu_{G_2}s-\frac{\mu}{\mu+\lambda_2+\delta}\right) \right| \left(\hat{\xi}_1(0)+\hat{\xi}_2(0)\right)$$

$$= \left| \left(1-\mu_{G_1}s-\frac{\mu}{\mu+\lambda_1+\delta}\right)\left(1-\mu_{G_2}s-\frac{\mu}{\mu+\lambda_2+\delta}\right) \right|.$$

Και τα δύο μέλη της (3.2.14) είναι αναλυτικές συναρτήσεις για s εντός της C_r. Τότε από το θεώρημα Rouché, η Εξίσωση (3.2.14) έχει τον ίδιο αριθμό ριζών εντός της C_r με την εξίσωση

$$\left(1-\mu_{G_1}s-\frac{\mu}{\mu+\lambda_1+\delta}\right)\left(1-\mu_{G_2}s-\frac{\mu}{\mu+\lambda_2+\delta}\right)=0.$$

Η τελευταία εξίσωση έχει δύο ρίζες, $s_i=\dfrac{\lambda_i+\delta}{(\mu+\lambda_i+\delta)\mu_{G_i}}$, $i=1,2$, εντός της C_r. Επομένως, η Εξίσωση (3.2.14) έχει επίσης δύο ρίζες εντός της C_r. Τέλος, για $r\to\infty$ ολοκληρώνεται η απόδειξη.

□

Παρατήρηση 3.2.1. Έστω $\rho_1(\delta)$ η ρίζα με το μικρότερο μέτρο. Είναι $\lim_{\delta\to 0^+}\rho_1(\delta)=0$.

Αυτό ισχύει γιατί αν θέσουμε $s=0$ στην (3.2.13) έχουμε

$$\chi_1(0)\chi_2(0)=\frac{\lambda_1\lambda_2\hat{\xi}_1(0)\hat{\xi}_2(0)}{(\mu+\lambda_1+\delta)(\mu+\lambda_2+\delta)} \qquad (**)$$

αλλά

$$\chi_i(0)=1-\frac{\mu}{\mu+\lambda_i+\delta}-\frac{\lambda_i\hat{\xi}_i(0)}{\mu+\lambda_i+\delta}=\frac{\lambda_i+\delta}{\mu+\lambda_i+\delta}-\frac{\lambda_i\hat{\xi}_i(0)}{\mu+\lambda_i+\delta}=\frac{\lambda_i+\delta-\lambda_i\hat{\xi}_i(0)}{\mu+\lambda_i+\delta}$$

οπότε η (**) γίνεται

$$\frac{\lambda_1+\delta-\lambda_1\hat{\xi}_1(0)}{\mu+\lambda_1+\delta}\,\frac{\lambda_2+\delta-\lambda_2\hat{\xi}_2(0)}{\mu+\lambda_2+\delta}=\frac{\lambda_1\lambda_2\hat{\xi}_1(0)\hat{\xi}_2(0)}{(\mu+\lambda_1+\delta)(\mu+\lambda_2+\delta)}$$

και ισοδύναμα

$$[\lambda_1+\delta-\lambda_1\hat{\xi}_1(0)][\lambda_2+\delta-\lambda_2\hat{\xi}_2(0)]=\lambda_1\lambda_2\hat{\xi}_1(0)\hat{\xi}_2(0)$$

ή

$$(\lambda_1+\delta)(\lambda_2+\delta)-(\lambda_1+\delta)\lambda_2\hat{\xi}_2(0)-\lambda_1(\lambda_2+\delta)\hat{\xi}_1(0)+\lambda_1\lambda_2\hat{\xi}_1(0)\hat{\xi}_2(0)=\lambda_1\lambda_2\hat{\xi}_1(0)\hat{\xi}_2(0)$$

ή

$$(\lambda_1+\delta)(\lambda_2+\delta)=(\lambda_1+\delta)\lambda_2\hat{\xi}_2(0)+\lambda_1(\lambda_2+\delta)\hat{\xi}_1(0)$$

για $\delta \to 0^+$ από την τελευταία παίρνουμε

$$\lambda_1\lambda_2=\lambda_1\lambda_2\hat{\xi}_2(0)+\lambda_1\lambda_2\hat{\xi}_1(0)$$

$$\lambda_1\lambda_2=\lambda_1\lambda_2[\hat{\xi}_1(0)+\hat{\xi}_2(0)]$$

και η ισότητα ισχύει αφού $\hat{\xi}_1(0)+\hat{\xi}_2(0)=1$. Συνεπώς, $\lim_{\delta\to 0^+}\rho_1(\delta)=0$.

Στη συνέχεια για λόγους απλότητας οι ρίζες θα συμβολίζονται με ρ_i, $i=1,2$.

Αφού οι $\hat{m}_i(s)$, $i=1,2$, είναι αναλυτικές για $\mathrm{Re}(s)\geq 0$, οι ρ_1 και ρ_2 πρέπει να είναι επίσης ρίζες των αριθμητών των (3.2.11) και (3.2.11). Και οι δύο αυτές εξισώσεις δίνουν το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων για τα $\hat{m}_1\left(\frac{1}{\mu_{G_1}}\right)$ και $\hat{m}_2\left(\frac{1}{\mu_{G_2}}\right)$,

$$\frac{\mu\chi_2(\rho_i)\hat{m}_1\left(\frac{1}{\mu_{G_1}}\right)}{(\mu+\lambda_1+\delta)(1-\mu_{G_1}\rho_i)}-\frac{\mu\lambda_1\hat{\xi}_2(\rho_i)\hat{m}_2\left(\frac{1}{\mu_{G_2}}\right)}{(\mu+\lambda_1+\delta)(\mu+\lambda_2+\delta)(1-\mu_{G_2}\rho_i)}=h_1(\rho_i)\hat{w}(\rho_i),\quad i=1,2. \tag{3.2.15}$$

Από τη λύση του συστήματος (3.2.15) προκύπτουν τα $\hat{m}_1\left(\frac{1}{\mu_{G_1}}\right)$ και $\hat{m}_2\left(\frac{1}{\mu_{G_2}}\right)$ έτσι ώστε στη συνέχεια μπορούν να προσδιοριστούν οι μετασχηματισμοί Laplace $\hat{m}_1(s)$ και $\hat{m}_2(s)$.

Στην Ενότητα 3.2.4 δίνεται ως εφαρμογή της παραπάνω διαδικασίας, ένα αριθμητικό παράδειγμα στο οποίο υπολογίζονται οι πιθανότητες χρεοκοπίας στην περίπτωση που τα μεγέθη των απαιτήσεων και τα κατώφλια είναι εκθετικά κατανεμημένα.

3.2.2.2 Ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις

Οι συναρτήσεις $m_1(u)$ και $m_2(u)$ ικανοποιούν κάποιες ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις για τις οποίες σχετική είναι η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 3.2.4

Οι συναρτήσεις Gerber-Shiu $m_i(u)$, $i=1,2$, ικανοποιούν τις ακόλουθες ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις

$$m_1(u)=\frac{1}{\mu_{G_1}\mu_{G_2}}\int_0^u m_1(u-x)\zeta(x)dx+\vartheta_1(u), \tag{3.2.16}$$

$$m_2(u)=\frac{1}{\mu_{G_1}\mu_{G_2}}\int_0^u m_2(u-x)\zeta(x)dx+\vartheta_2(u), \tag{3.2.17}$$

όπου,

$$\zeta(x)=\sum_{k=1}^{2}[h_{k1}T_{\rho_1}T_{\rho_2}\xi_k(x)+h_{k2}[\rho_1T_{\rho_1}T_{\rho_2}\xi_k(x)-T_{\rho_2}\xi_k(x)]+h_{k3}[\xi_k(x)-(\rho_1+\rho_2)T_{\rho_2}\xi_k(x)+\rho_1^2T_{\rho_1}T_{\rho_2}\xi_k(x)]],$$

$$\vartheta_1(u)=\frac{\lambda_1w(u)}{\mu+\lambda_1+\delta}-\frac{1}{\mu_{G_1}\mu_{G_2}}\left[\frac{\tau_{11}(\rho_1)}{\rho_1-\rho_2}T_{\rho_1}w(u)+\frac{\tau_{11}(\rho_2)}{\rho_2-\rho_1}T_{\rho_2}w(u)+\frac{\tau_{12}(\rho_1)}{\rho_1-\rho_2}T_{\rho_1}\xi_2(u)+\frac{\tau_{12}(\rho_2)}{\rho_2-\rho_1}T_{\rho_2}\xi_2(u)\right],$$

$$\vartheta_2(u)=\frac{\lambda_2w(u)}{\mu+\lambda_2+\delta}-\frac{1}{\mu_{G_1}\mu_{G_2}}\left[\frac{\tau_{21}(\rho_1)}{\rho_1-\rho_2}T_{\rho_1}w(u)+\frac{\tau_{21}(\rho_2)}{\rho_2-\rho_1}T_{\rho_2}w(u)+\frac{\tau_{22}(\rho_1)}{\rho_1-\rho_2}T_{\rho_1}\xi_1(u)+\frac{\tau_{22}(\rho_2)}{\rho_2-\rho_1}T_{\rho_2}\xi_1(u)\right].$$

Απόδειξη

Αρχικά θα δώσουμε μια διαφορετική μορφή στις (3.2.8) και (3.2.9) που θα βοηθήσουν στην περαιτέρω ανάλυση. Συγκεκριμένα θα πολλαπλασιάσουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή σε κάθε κλάσμα των (3.2.8) και (3.2.9) με $(1-\mu_{G_1}s)(1-\mu_{G_2}s)$ και θα εκφράσουμε την κάθε παράσταση που θα προκύψει με εναλλακτική μορφή κάνοντας χρήση του τελεστή Dickson-Hipp.

Ξεκινώντας με τον κοινό παρονομαστή των (3.2.8) και (3.2.9) και πολλαπλασιάζοντάς τον με $(1-\mu_{G_1}s)(1-\mu_{G_2}s)$ γίνεται

$$(1-\mu_{G_1}s)(1-\mu_{G_2}s)\left(\chi_1(s)\chi_2(s)-\frac{\lambda_1\lambda_2\hat{\xi}_1(s)\hat{\xi}_2(s)}{(\mu+\lambda_1+\delta)(\mu+\lambda_2+\delta)}\right) \tag{3.2.18α}$$

αντικαθιστώντας τα $\chi_i(s)$, $i=1,2$, προκύπτει

$$(1-\mu_{G_1}s)(1-\mu_{G_2}s)\left[\left(1-\frac{\mu}{(\mu+\lambda_1+\delta)(1-\mu_{G_1}s)}-\frac{\lambda_1\hat{\xi}_1(s)}{\mu+\lambda_1+\delta}\right)\right.$$
$$\left.\times\left(1-\frac{\mu}{(\mu+\lambda_2+\delta)(1-\mu_{G_2}s)}-\frac{\lambda_2\hat{\xi}_2(s)}{\lambda+\lambda_2+\delta}\right)-\frac{\lambda_1\lambda_2\hat{\xi}_1(s)\hat{\xi}_2(s)}{(\mu+\lambda_1+\delta)(\mu+\lambda_2+\delta)}\right]$$

κάνοντας τον πολλαπλασιασμό μεταξύ των δύο παρενθέσεων βρίσκουμε

$$(1-\mu_{G_1}s)(1-\mu_{G_2}s)\left[1-\frac{\mu}{(\mu+\lambda_2+\delta)(1-\mu_{G_2}s)}-\frac{\lambda_2\hat{\xi}_2(s)}{\mu+\lambda_2+\delta}\right.$$
$$-\frac{\mu}{(\mu+\lambda_1+\delta)(1-\mu_{G_1}s)}+\frac{\mu}{(\mu+\lambda_1+\delta)(1-\mu_{G_1}s)}\frac{\mu}{(\mu+\lambda_2+\delta)(1-\mu_{G_2}s)}$$
$$+\frac{\mu}{(\mu+\lambda_1+\delta)(1-\mu_{G_1}s)}\frac{\lambda_2\hat{\xi}_2(s)}{\mu+\lambda_2+\delta}-\frac{\lambda_1\hat{\xi}_1(s)}{\mu+\lambda_1+\delta}+\frac{\mu}{(\mu+\lambda_2+\delta)(1-\mu_{G_2}s)}\frac{\lambda_1\hat{\xi}_1(s)}{\mu+\lambda_1+\delta}$$
$$\left.+\frac{\lambda_1\lambda_2\hat{\xi}_1(s)\hat{\xi}_2(s)}{(\mu+\lambda_1+\delta)(\mu+\lambda_2+\delta)}-\frac{\lambda_1\lambda_2\hat{\xi}_1(s)\hat{\xi}_2(s)}{(\mu+\lambda_1+\delta)(\mu+\lambda_2+\delta)}\right]$$

απλοποιώντας και παραγοντοποιώντας κατάλληλα παίρνουμε

$$(1-\mu_{G_1}s)(1-\mu_{G_2}s)\left[\left(1-\frac{\mu}{(\mu+\lambda_2+\delta)(1-\mu_{G_2}s)}\right)-\left(1-\frac{\mu}{(\mu+\lambda_1+\delta)(1-\mu_{G_1}s)}\right)\frac{\lambda_2\hat{\xi}_2(s)}{\mu+\lambda_2+\delta}\right.$$
$$\left.-\left(1-\frac{\mu}{(\mu+\lambda_2+\delta)(1-\mu_{G_2}s)}\right)\frac{\mu}{(\mu+\lambda_1+\delta)(1-\mu_{G_1}s)}-\left(1-\frac{\mu}{(\mu+\lambda_2+\delta)(1-\mu_{G_2}s)}\right)\frac{\lambda_1\hat{\xi}_1(s)}{\mu+\lambda_1+\delta}\right]$$

για τους όρους μέσα στις αγκύλες, βγάζοντας κοινό παράγοντα στον πρώτο και τρίτο όρο του αθροίσματος και κάνοντας τις πράξεις στην δεύτερη και τέταρτη παρένθεση, προκύπτει

$$(1-\mu_{G_1}s)(1-\mu_{G_2}s)\left[\left(1-\frac{\mu}{(\mu+\lambda_2+\delta)(1-\mu_{G_2}s)}\right)\left(1-\frac{\mu}{(\mu+\lambda_1+\delta)(1-\mu_{G_1}s)}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{\mu-\mu\mu_{G_1}s+(\lambda_1+\delta)(1-\mu_{G_1}s)-\mu}{(\mu+\lambda_1+\delta)(1-\mu_{G_1}s)}\frac{\lambda_2\hat{\xi}_2(s)}{\mu+\lambda_2+\delta}-\frac{\mu-\lambda\mu_{G_2}s+(\lambda_2+\delta)(1-\mu_{G_2}s)-\mu}{(\mu+\lambda_2+\delta)(1-\mu_{G_2}s)}\frac{\lambda_1\hat{\xi}_1(s)}{\mu+\lambda_1+\delta}\right]$$

κάνοντας πράξεις μέσα στις παρενθέσεις είναι

$$(1-\mu_{G_1}s)(1-\mu_{G_2}s)\left(\frac{\mu-\mu\mu_{G_2}s+(\lambda_2+\delta)(1-\mu_{G_2}s)-\mu}{(\mu+\lambda_2+\delta)(1-\mu_{G_2}s)}\frac{\mu-\mu\mu_{G_1}s+(\lambda_1+\delta)(1-\mu_{G_1}s)-\mu}{(\mu+\lambda_1+\delta)(1-\mu_{G_1}s)}\right.$$
$$\left.-\frac{(\lambda_1+\delta)-(\mu+\lambda_1+\delta)\mu_{G_1}s}{(\mu+\lambda_1+\delta)(1-\mu_{G_1}s)}\frac{\lambda_2\hat{\xi}_2(s)}{\mu+\lambda_2+\delta}-\frac{(\lambda_2+\delta)-(\mu+\lambda_2+\delta)\mu_{G_2}s}{(\mu+\lambda_2+\delta)(1-\mu_{G_2}s)}\frac{\lambda_1\hat{\xi}_1(s)}{\mu+\lambda_1+\delta}\right)$$

κάνοντας την επιμεριστική ιδιότητα και απλοποιώντας βρίσκουμε

$$\left(\frac{\lambda_2+\delta}{\mu+\lambda_2+\delta}-\mu_{G_2}s\right)\left(\frac{\lambda_1+\delta}{\mu+\lambda_1+\delta}-\mu_{G_1}s\right)-(1-\mu_{G_2}s)\left(\frac{\lambda_1+\delta}{\mu+\lambda_1+\delta}-\mu_{G_1}s\right)\frac{\lambda_2\hat{\xi}_2(s)}{\mu+\lambda_2+\delta}$$
$$-(1-\mu_{G_1}s)\left(\frac{\lambda_2+\delta}{\mu+\lambda_2+\delta}-\mu_{G_2}s\right)\frac{\lambda_1\hat{\xi}_1(s)}{\mu+\lambda_1+\delta}$$

(3.2.18β)

Έστω

$$H(s)=(1-\mu_{G_1}s)\left(\frac{\lambda_2+\delta}{\mu+\lambda_2+\delta}-\mu_{G_2}s\right)\frac{\lambda_1\hat{\xi}_1(s)}{\mu+\lambda_1+\delta}+(1-\mu_{G_2}s)\left(\frac{\lambda_1+\delta}{\mu+\lambda_1+\delta}-\mu_{G_1}s\right)\frac{\lambda_2\hat{\xi}_2(s)}{\mu+\lambda_2+\delta}$$

(3.2.19)

κάνοντας τους πολλαπλασιασμούς των παρενθέσεων βρίσκουμε

$$H(s)=\left(\frac{\lambda_2+\delta}{\mu+\lambda_2+\delta}-\mu_{G_2}s-\frac{(\lambda_2+\delta)\mu_{G_1}s}{\mu+\lambda_2+\delta}+\mu_{G_1}\mu_{G_2}s^2\right)\frac{\lambda_1\hat{\xi}_1(s)}{\mu+\lambda_1+\delta}$$
$$+\left(\frac{\lambda_1+\delta}{\mu+\lambda_1+\delta}-\mu_{G_1}s-\frac{(\lambda_1+\delta)\mu_{G_2}s}{\mu+\lambda_1+\delta}+\mu_{G_1}\mu_{G_2}s^2\right)\frac{\lambda_2\hat{\xi}_2(s)}{\mu+\lambda_2+\delta}$$

και ισοδύναμα από την επιμεριστική ιδιότητα παίρνουμε

$$H(s)=\frac{\lambda_1(\lambda_2+\delta)\hat{\xi}_1(s)}{(\mu+\lambda_1+\delta)(\mu+\lambda_2+\delta)}-\left(\frac{(\lambda_2+\delta)\mu_{G_1}s}{\mu+\lambda_2+\delta}+\mu_{G_2}\right)\frac{\lambda_1 s\hat{\xi}_1(s)}{\mu+\lambda_1+\delta}+\frac{\lambda_1\mu_{G_1}\mu_{G_2}s^2\hat{\xi}_1(s)}{\mu+\lambda_1+\delta}$$
$$+\frac{\lambda_1(\lambda_1+\delta)\hat{\xi}_2(s)}{(\mu+\lambda_1+\delta)(\mu+\lambda_2+\delta)}-\left(\frac{(\lambda_1+\delta)\mu_{G_2}s}{\mu+\lambda_1+\delta}+\mu_{G_1}\right)\frac{\lambda_2\hat{\xi}_2(s)}{\mu+\lambda_2+\delta}+\frac{\lambda_2\mu_{G_1}\mu_{G_2}s^2\hat{\xi}_2(s)}{\mu+\lambda_2+\delta}.$$

Η παραπάνω έκφραση συνοπτικά μπορεί να γραφεί ως

$$H(s)=h_{11}\hat{\xi}_1(s)+h_{12}s\hat{\xi}_1(s)+h_{13}s^2\hat{\xi}_1(s)+h_{21}\hat{\xi}_2(s)+h_{22}s\hat{\xi}_2(s)+h_{23}s^2\hat{\xi}_2(s) \qquad (3.2.20)$$

όπου,

$$h_{11}=\frac{\lambda_1(\lambda_2+\delta)}{(\mu+\lambda_1+\delta)(\mu+\lambda_2+\delta)},\quad h_{12}=-\left(\frac{(\lambda_2+\delta)\mu_{G_1}}{\mu+\lambda_2+\delta}+\mu_{G_2}\right)\frac{\lambda_1}{\mu+\lambda_1+\delta},\quad h_{13}=\frac{\lambda_1\mu_{G_1}\mu_{G_2}}{\mu+\lambda_1+\delta},$$

$$h_{21}=\frac{\lambda_2(\lambda_1+\delta)}{(\mu+\lambda_1+\delta)(\mu+\lambda_2+\delta)},\quad h_{21}=-\left(\frac{(\lambda_1+\delta)\mu_{G_2}}{\mu+\lambda_1+\delta}+\mu_{G_1}\right)\frac{\lambda_2}{\mu+\lambda_2+\delta},\quad h_{23}=\frac{\lambda_2\mu_{G_1}\mu_{G_2}}{\mu+\lambda_2+\delta}.$$

Έτσι η (3.2.18α) μέσω των (3.2.18β) και (3.2.19) γράφεται

$$(1-\mu_{G_1}s)(1-\mu_{G_2}s)\left(\chi_1(s)\chi_2(s)-\frac{\lambda_1\lambda_2\hat{\xi}_1(s)\hat{\xi}_2(s)}{(\mu+\lambda_1+\delta)(\mu+\lambda_2+\delta)}\right)$$
$$=\left(\frac{\lambda_1+\delta}{\mu+\lambda_1+\delta}-\mu_{G_1}s\right)\left(\frac{\lambda_2+\delta}{\mu+\lambda_2+\delta}-\mu_{G_2}s\right)-H(s). \qquad (3.2.21α)$$

Θέτοντας στην (3.2.21α) $s=\rho_i$, $i=1,2$, και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι η εξίσωση (3.2.13) του Λήμματος 3.2.1 επαληθεύεται για $s=\rho_i$, παίρνουμε

$$\left(\frac{\lambda_1+\delta}{\mu+\lambda_1+\delta}-\mu_{G_1}\rho_i\right)\left(\frac{\lambda_2+\delta}{\mu+\lambda_2+\delta}-\mu_{G_2}\rho_i\right)-H(\rho_i)$$
$$=(1-\mu_{G_1}\rho_i)(1-\mu_{G_2}\rho_i)\left(\chi_1(\rho_i)\chi_2(\rho_i)-\frac{\lambda_1\lambda_2\hat{\xi}_1(\rho_i)\hat{\xi}_2(\rho_i)}{(\mu+\lambda_1+\delta)(\mu+\lambda_2+\delta)}\right)=0$$

και ισοδύναμα

$$H(\rho_i)=\left(\frac{\lambda_1+\delta}{\mu+\lambda_1+\delta}-\mu_{G_1}\rho_i\right)\left(\frac{\lambda_2+\delta}{\mu+\lambda_2+\delta}-\mu_{G_2}\rho_i\right),\ i=1,2. \qquad (3.2.21β)$$

Ορίζουμε το πολυώνυμο

$$l(s):=\left(\frac{\lambda_1+\delta}{\mu+\lambda_1+\delta}-\mu_{G_1}s\right)\left(\frac{\lambda_2+\delta}{\mu+\lambda_2+\delta}-\mu_{G_2}s\right)-\mu_{G_1}\mu_{G_2}(s-\rho_1)(s-\rho_2) \qquad (3.2.22)$$

το οποίο, κάνοντας τις πράξεις, γίνεται

$$l(s)=\frac{\lambda_1+\delta}{\mu+\lambda_1+\delta}\frac{\lambda_2+\delta}{\mu+\lambda_2+\delta}-\frac{\lambda_1+\delta}{\mu+\lambda_1+\delta}\mu_{G_2}s-\frac{\lambda_2+\delta}{\mu+\lambda_2+\delta}\mu_{G_1}s+\mu_{G_1}\mu_{G_2}s^2$$
$$-\mu_{G_1}\mu_{G_2}s^2+\mu_{G_1}\mu_{G_2}s\rho_1+\mu_{G_1}\mu_{G_2}s\rho_2-\mu_{G_1}\mu_{G_2}\rho_1\rho_2$$

δηλαδή είναι πολυώνυμο πρώτου βαθμού ως προς s, το οποίο με βάση την (3.2.21β) ικανοποιεί τη σχέση

$$l(\rho_i)=H(\rho_i)\,,\ i=1,2\,. \tag{3.2.22α}$$

Από τον τύπο παρεμβολής Lagrange έχουμε

$$l(s)=\frac{s-\rho_2}{\rho_1-\rho_2}l(\rho_1)+\frac{s-\rho_1}{\rho_2-\rho_1}l(\rho_2)$$

και από την (3.2.22α)

$$l(s)=\frac{s-\rho_1}{\rho_2-\rho_1}H(\rho_1)+\frac{s-\rho_2}{\rho_1-\rho_2}H(\rho_2)\,. \tag{3.2.22β}$$

Με βάση τις (3.2.21α), (3.2.22) και (3.2.22β), παίρνουμε

$$(1-\mu_{G_1}s)(1-\mu_{G_2}s)\left(\chi_1(s)\chi_2(s)-\frac{\lambda_1\lambda_2\hat{\xi}_1(s)\hat{\xi}_2(s)}{(\mu+\lambda_1+\delta)(\mu+\lambda_2+\delta)}\right)$$
$$=\mu_{G_1}\mu_{G_2}(s-\rho_1)(s-\rho_2)+l(s)-H(s)$$
$$=\mu_{G_1}\mu_{G_2}(s-\rho_1)(s-\rho_2)+\frac{s-\rho_2}{\rho_1-\rho_2}H(\rho_1)+\frac{s-\rho_1}{\rho_2-\rho_1}H(\rho_2)-H(s)$$
$$=(s-\rho_1)(s-\rho_2)\left(\mu_1\mu_2+\frac{1}{\rho_1-\rho_2}\frac{H(\rho_1)}{s-\rho_1}+\frac{1}{\rho_2-\rho_1}\frac{H(\rho_2)}{s-\rho_2}-\frac{H(s)}{(s-\rho_1)(s-\rho_2)}\right)$$
$$=(s-\rho_1)(s-\rho_2)\left(\mu_{G_1}\mu_{G_2}+\frac{(s-\rho_2)H(\rho_1)}{(\rho_1-\rho_2)(s-\rho_1)(s-\rho_2)}+\frac{(s-\rho_1)H(\rho_2)}{(\rho_2-\rho_1)(s-\rho_1)(s-\rho_2)}\right.$$
$$\left.-\frac{(\rho_2-\rho_1)H(s)}{(\rho_2-\rho_1)(s-\rho_1)(s-\rho_2)}\right)$$
$$=(s-\rho_1)(s-\rho_2)\left(\mu_{G_1}\mu_{G_2}-\frac{\dfrac{H(s)-H(\rho_2)}{s-\rho_2}-\dfrac{H(s)-H(\rho_1)}{s-\rho_1}}{\rho_2-\rho_1}\right)$$
$$=(s-\rho_1)(s-\rho_2)(\mu_{G_1}\mu_{G_2}-\hat{\zeta}(s)) \tag{3.2.23}$$

όπου,

$$\hat{\zeta}(s):=\frac{\dfrac{H(s)-H(\rho_2)}{s-\rho_2}+\dfrac{H(s)-H(\rho_1)}{s-\rho_1}}{\rho_2-\rho_1}\,. \tag{3.2.24}$$

Στη συνέχεια θα εκφράσουμε την $\hat{\zeta}(s)$ με τη βοήθεια του τελεστή Dickson-Hipp, T_r. Εφαρμόζοντας κατάλληλα τις ιδιότητες του T_r από το Παράρτημα Π3, παίρνουμε για $k=1,2$ και, $i=1,2$,

$$\frac{\hat{\xi}_k(s)-\hat{\xi}_k(\rho_i)}{s-\rho_i}=-T_sT_{\rho_i}\xi_k(0),$$

$$\frac{s\hat{\xi}_k(s)-\rho_i\hat{\xi}_k(\rho_i)}{s-\rho_i}=\frac{s\hat{\xi}_k(s)-\rho_i\hat{\xi}_k(s)+\rho_i\hat{\xi}_k(s)-\rho_i\hat{\xi}_k(\rho_i)}{s-\rho_i}=\hat{\xi}_k(s)-\rho_iT_sT_{\rho_i}\xi_k(0),$$

$$\frac{s^2\hat{\xi}_k(s)-\rho_i^2\hat{\xi}_k(\rho_i)}{s-\rho_i}=\frac{s^2\hat{\xi}_k(s)-\rho_i^2\hat{\xi}_k(s)+\rho_i^2\hat{\xi}_k(s)-\rho_i^2\hat{\xi}_k(\rho_i)}{s-\rho_i}=(s+\rho_i)\hat{\xi}_k(s)-\rho_i^2T_sT_{\rho_i}\xi_k(0).$$

και επίσης για $k=1,2$

$$\frac{\dfrac{\hat{\xi}_k(s)-\hat{\xi}_k(\rho_2)}{s-\rho_2}-\dfrac{\hat{\xi}_k(s)-\hat{\xi}_k(\rho_1)}{s-\rho_1}}{\rho_2-\rho_1}=\frac{T_sT_{\rho_1}\xi_k(0)-T_sT_{\rho_2}\xi_k(0)}{\rho_2-\rho_1}=T_sT_{\rho_1}T_{\rho_2}\xi_k(0),$$

$$\frac{\dfrac{s\hat{\xi}_k(s)-\rho_2\hat{\xi}_k(\rho_2)}{s-\rho_2}-\dfrac{s\hat{\xi}_k(s)-\rho_1\hat{\xi}_k(\rho_1)}{s-\rho_1}}{\rho_2-\rho_1}=\frac{\rho_1T_sT_{\rho_1}\xi_k(0)-\rho_2T_sT_{\rho_2}\xi_k(0)}{\rho_2-\rho_1}$$

$$=\frac{\rho_1T_sT_{\rho_1}\xi_k(0)-\rho_1T_sT_{\rho_2}\xi_k(0)+\rho_1T_sT_{\rho_2}\xi_k(0)-\rho_2T_sT_{\rho_2}\xi_k(0)}{\rho_2-\rho_1}$$

$$=\rho_1T_sT_{\rho_1}T_{\rho_2}\xi_k(0)-T_sT_{\rho_2}\xi_k(0),$$

$$\frac{\dfrac{s^2\hat{\xi}_k(s)-\rho_2^2\hat{\xi}_k(\rho_2)}{s-\rho_2}-\dfrac{s^2\hat{\xi}_k(s)-\rho_1^2\hat{\xi}_k(\rho_1)}{s-\rho_1}}{\rho_2-\rho_1}=\frac{\rho_2\hat{\xi}_k(\mathrm{s})-\rho_1\hat{\xi}_k(\mathrm{s})}{\rho_2-\rho_1}-\frac{\rho_2^2T_sT_{\rho_2}\xi_k(0)-\rho_1^2T_sT_{\rho_1}\xi_k(0)}{\rho_2-\rho_1}$$

$$=\hat{\xi}_k(\mathrm{s})-\frac{\rho_2^2T_sT_{\rho_2}\xi_k(0)-\rho_1^2T_sT_{\rho_2}\xi_k(0)+\rho_1^2T_sT_{\rho_2}\xi_k(0)-\rho_1^2T_sT_{\rho_1}\xi_k(0)}{\rho_2-\rho_1}$$

$$=\hat{\xi}_k(\mathrm{s})-(\rho_1+\rho_2)T_sT_{\rho_2}\xi_k(0)+\rho_1^2T_sT_{\rho_1}T_{\rho_2}\xi_k(0).$$

Από τη (3.2.20) για $i=1,2$ έχουμε διαδοχικά,

$$\begin{aligned}
&H(s)-H(\rho_i)\\
&=h_{11}\hat{\xi}_1(s)+h_{12}s\hat{\xi}_1(s)+h_{13}s^2\hat{\xi}_1(s)+h_{21}\hat{\xi}_2(s)+h_{22}s\hat{\xi}_2(s)+h_{23}s^2\hat{\xi}_2(s)\\
&\quad-[h_{11}\hat{\xi}_1(\rho_i)+h_{12}\rho_i\hat{\xi}_1(\rho_i)+h_{13}\rho_i^2\hat{\xi}_1(\rho_i)+h_{21}\hat{\xi}_2(\rho_i)+h_{22}\rho_2\hat{\xi}_2(\rho_i)+h_{23}\rho_i^2\hat{\xi}_2(\rho_i)]\\
&=h_{11}[\hat{\xi}_1(s)-\hat{\xi}_1(\rho_i)]+h_{12}[s\hat{\xi}_1(s)-\rho_i\hat{\xi}_1(\rho_i)]+h_{13}[s^2\hat{\xi}_1(s)-\rho_i^2\hat{\xi}_1(\rho_i)]\\
&\quad+h_{21}[\hat{\xi}_2(s)-\hat{\xi}_1(\rho_i)]+h_{22}[s\hat{\xi}_2(s)-\rho_i\hat{\xi}_1(\rho_i)]+h_{23}[s^2\hat{\xi}_2(s)-\rho_i^2\hat{\xi}_1(\rho_i)]
\end{aligned}$$

και διαιρώντας με $s-\rho_i$ παίρνουμε

$$\frac{H(s)-H(\rho_i)}{s-\rho_i}=(s-\rho_i)h_{11}\frac{\hat{\xi}_1(s)-\hat{\xi}_1(\rho_i)}{s-\rho_i}+(s-\rho_i)h_{12}\frac{s\hat{\xi}_1(s)-\rho_i\hat{\xi}_1(\rho_i)}{s-\rho_i}+(s-\rho_i)h_{13}\frac{s^2\hat{\xi}_1(s)-\rho_i^2\hat{\xi}_1(\rho_i)}{s-\rho_i}$$
$$+(s-\rho_2)h_{21}\frac{\hat{\xi}_2(s)-\hat{\xi}_1(\rho_i)}{s-\rho_i}+(s-\rho_i)h_{22}\frac{s\hat{\xi}_2(s)-\rho_i\hat{\xi}_1(\rho_i)}{s-\rho_i}+(s-\rho_i)h_{23}\frac{s^2\hat{\xi}_2(s)-\rho_i^2\hat{\xi}_1(\rho_i)}{s-\rho_i}$$

Συνεπώς με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα, από (3.2.24) η $\hat{\zeta}(s)$ γίνεται

$$\hat{\zeta}(\mathrm{s})=\sum_{k=1}^{2}\left(h_{k1}\frac{\dfrac{\hat{\xi}_k(s)-\hat{\xi}_k(\rho_2)}{s-\rho_2}-\dfrac{\hat{\xi}_k(s)-\hat{\xi}_k(\rho_1)}{s-\rho_1}}{\rho_2-\rho_1}+h_{k2}\frac{\dfrac{s\hat{\xi}_k(s)-\rho_2\hat{\xi}_k(\rho_2)}{s-\rho_2}-\dfrac{s\hat{\xi}_k(s)-\rho_1\hat{\xi}_k(\rho_1)}{s-\rho_1}}{\rho_2-\rho_1}\right.$$
$$\left.+h_{k3}\frac{\dfrac{s^2\hat{\xi}_k(s)-\rho_2^2\hat{\xi}_k(\rho_2)}{s-\rho_2}-\dfrac{s^2\hat{\xi}_k(s)-\rho_1^2\hat{\xi}_k(\rho_1)}{s-\rho_1}}{\rho_2-\rho_1}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{2}\Big[h_{k1}T_sT_{\rho_1}T_{\rho_2}\xi_k(0)+h_{k2}[\rho_1T_sT_{\rho_1}T_{\rho_2}\xi_k(0)-T_sT_{\rho_2}\xi_k(0)]$$
$$+h_{k3}[\hat{\xi}_k(s)-(\rho_1+\rho_2)T_sT_{\rho_2}\xi_k(0)+\rho_1^2T_sT_{\rho_1}T_{\rho_2}\xi_k(0)]\Big]. \qquad (3.2.25)$$

Πολλαπλασιάζοντας τον αριθμητή του κλάσματος στην (3.2.8) με $(1-\mu_{G_1}s)(1-\mu_{G_2}s)$ παίρνουμε

$$M_1(s):=(1-\mu_{G_1}s)(1-\mu_{G_2}s)\left(h_1(s)\hat{w}(s)-\frac{\mu\chi_2(s)\hat{\phi}_1\left(\dfrac{1}{\mu_{G_1}}\right)}{(\mu+\lambda_1+\delta)(1-\mu_{G_1}s)}-\frac{\mu\lambda_1\hat{\xi}_2(s)\hat{\phi}_2\left(\dfrac{1}{\mu_{G_2}}\right)}{(\mu+\lambda_1+\delta)(\mu+\lambda_2+\delta)(1-\mu_{G_2}s)}\right)$$

Αντικαθιστώντας τα $h_1(s)$, $\chi_2(s)$ με τις εκφράσεις τους που δόθηκαν στην Πρόταση 3.2.3 και κάνοντας πράξεις, καταλήγουμε σε

$$M_1(s)=\tau_{11}(s)\hat{w}(s)+\tau_{12}(s)\,\hat{\xi}_2(s)-\frac{\mu\hat{\phi}_1\left(\dfrac{1}{\mu_{G_1}}\right)}{\mu+\lambda_1+\delta}\left(\frac{\lambda_2+\delta}{\mu+\lambda_2+\delta}-\mu_{G_2}s\right), \qquad (3.2.26)$$

όπου

$$\tau_{11}(s)=\frac{\lambda_1(1-\mu_{G_1}s)(1-\mu_{G_2}s)}{\mu+\lambda_1+\delta}-\frac{\mu\lambda_1(1-\mu_{G_1}s)}{(\mu+\lambda_1+\delta)(\mu+\lambda_2+\delta)},$$

$$\tau_{12}(s) = \frac{\mu\lambda_2\hat{\phi}_1\left(\dfrac{1}{\mu_{G_1}}\right)(1-\mu_{G_2}s) - \mu\lambda_1\hat{\phi}_2\left(\dfrac{1}{\mu_{G_2}}\right)(1-\mu_{G_1}s)}{(\mu+\lambda_1+\delta)(\mu+\lambda_2+\delta)}.$$

Επειδή τα ρ_1, ρ_2 είναι ρίζες του αριθμητή της (3.2.8), τότε από (3.2.26) είναι

$$M_1(\rho_i) = \tau_{11}(\rho_i)\hat{w}(\rho_i) + \tau_{12}(\rho_i)\hat{\xi}_2(\rho_i) - \frac{\mu\hat{\varphi}_1\left(\dfrac{1}{\mu_{G_1}}\right)}{\mu+\lambda_1+\delta}\left(\frac{\lambda_2+\delta}{\mu+\lambda_2+\delta} - \mu_{G_2}\rho_i\right) = 0, \qquad i = 1,2$$

και ισοδύναμα

$$\frac{\mu\hat{\varphi}_1\left(\dfrac{1}{\mu_{G_1}}\right)}{\mu+\lambda_1+\delta}\left(\frac{\lambda_2+\delta}{\mu+\lambda_2+\delta} - \mu_{G_2}\rho_i\right) = \tau_{11}(\rho_i)\hat{w}(\rho_i) + \tau_{12}(\rho_i)\hat{\xi}_2(\rho_i), \qquad i = 1,2. \tag{3.2.26α}$$

Παρατηρούμε ότι ο τρίτος όρος στο δεξιό μέλος της (3.2.26)

$$\frac{\mu\hat{\varphi}_1\left(\dfrac{1}{\mu_{G_1}}\right)}{\mu+\lambda_1+\delta}\left(\frac{\lambda_2+\delta}{\mu+\lambda_2+\delta} - \mu_{G_2}s\right)$$

είναι πολυώνυμο πρώτου βαθμού ως προς s. Για το εν λόγω πολυώνυμο, με παρεμβολή Lagrange από την (3.2.26α) βρίσκουμε

$$\begin{aligned}\frac{\mu\hat{\phi}_1\left(\dfrac{1}{\mu_{G_1}}\right)}{\mu+\lambda_1+\delta}\left(\frac{\lambda_2+\delta}{\mu+\lambda_2+\delta} - \mu_{G_2}s\right) &= \frac{s-\rho_2}{\rho_1-\rho_2}[\tau_{11}(\rho_1)\hat{w}(\rho_1) + \tau_{12}(\rho_1)\hat{\xi}_2(\rho_1)] \\ &\quad + \frac{s-\rho_1}{\rho_2-\rho_1}[\tau_{11}(\rho_2)\hat{w}(\rho_2) + \tau_{12}(\rho_2)\hat{\xi}_2(\rho_2)]\end{aligned}$$

Με βάση την προηγούμενη σχέση, η (3.2.26) γράφεται

$$\begin{aligned}M_1(s) &= \frac{s-\rho_2}{\rho_1-\rho_2}[\tau_{11}(s)\hat{w}(s) - \tau_{11}(\rho_1)\hat{w}(\rho_1)] + \frac{s-\rho_1}{\rho_2-\rho_1}[\tau_{11}(s)\hat{w}(s) - \tau_{11}(\rho_2)\hat{w}(\rho_2)] \\ &\quad + \frac{s-\rho_2}{\rho_1-\rho_2}[\tau_{11}(s)\,\hat{\xi}_2(s) - \tau_{12}(\rho_1)\,\hat{\xi}_2(\rho_1)] + \frac{s-\rho_1}{\rho_2-\rho_1}[\tau_{12}(s)\,\hat{\xi}_2(s) - \tau_{12}(\rho_2)\,\hat{\xi}_2(\rho_2)] \\ &= \frac{(s-\rho_1)(s-\rho_2)}{\rho_1-\rho_2}\left(\frac{\tau_{11}(s)-\tau_{11}(\rho_1)}{s-\rho_1}\hat{w}(s) - \tau_{11}(\rho_1)T_sT_{\rho_1}w(0)\right) \\ &\quad + \frac{(s-\rho_1)(s-\rho_2)}{\rho_2-\rho_1}\left(\frac{\tau_{11}(s)-\tau_{11}(\rho_2)}{s-\rho_2}\hat{w}(s) - \tau_{11}(\rho_2)T_sT_{\rho_2}w(0)\right) \\ &\quad \times \frac{(s-\rho_1)(s-\rho_2)}{\rho_1-\rho_2}\left(\frac{\tau_{12}(s)-\tau_{12}(\rho_1)}{s-\rho_1}\hat{\xi}_2(s) - \tau_{12}(\rho_1)T_sT_{\rho_1}\xi_2(0)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+\frac{(s-\rho_1)(s-\rho_2)}{\rho_2-\rho_1}\left(\frac{\tau_{12}(s)-\tau_{12}(\rho_2)}{s-\rho_2}\hat{\xi}_2(s)-\tau_{12}(\rho_2)T_sT_{\rho_2}\xi_2(0)\right) \\
&=(s-\rho_1)(s-\rho_2)\Bigg(\frac{\dfrac{\tau_{11}(s)-\tau_{11}(\rho_1)}{s-\rho_1}-\dfrac{\tau_{11}(s)-\tau_{11}(\rho_2)}{s-\rho_2}}{\rho_1-\rho_2}\hat{w}(s)-\frac{\tau_{11}(\rho_1)}{\rho_1-\rho_2}T_sT_{\rho_1}w(0) \\
&\quad-\frac{\tau_{11}(\rho_2)}{\rho_2-\rho_1}T_sT_{\rho_2}w(0)+\frac{\dfrac{\tau_{12}(s)-\tau_{12}(\rho_1)}{s-\rho_1}-\dfrac{\tau_{12}(s)-\tau_{12}(\rho_2)}{s-\rho_2}}{\rho_1-\rho_2}\hat{\xi}_2(s) \\
&\quad-\frac{\tau_{12}(\rho_1)}{\rho_1-\rho_2}T_sT_{\rho_1}\xi_2(0)-\frac{\tau_{12}(\rho_2)}{\rho_2-\rho_1}T_sT_{\rho_2}\xi_2(0)\Bigg) \\
&=(s-\rho_1)(s-\rho_2)\Bigg(\frac{\lambda_1\mu_{G_1}\mu_{G_2}}{\mu+\lambda_1+\delta}\hat{w}(s)-\frac{\tau_{11}(\rho_1)}{\rho_1-\rho_2}T_sT_{\rho_1}w(0)-\frac{\tau_{11}(\rho_2)}{\rho_2-\rho_1}T_sT_{\rho_2}w(0) \\
&\quad-\frac{\tau_{12}(\rho_1)}{\rho_1-\rho_2}T_sT_{\rho_1}\xi_2(0)-\frac{\tau_{12}(\rho_2)}{\rho_2-\rho_1}T_sT_{\rho_2}\xi_2(0)\Bigg). \qquad (3.2.27)
\end{aligned}$$

Με παρόμοια διαδικασία, πολλαπλασιάζοντας τον αριθμητή του κλάσματος στην (3.2.9) με $(1-\mu_{G_1}s)(1-\mu_{G_2}s)$ και κάνοντας τις απαιτούμενες πράξεις, παίρνουμε το παρακάτω αποτέλεσμα

$$\begin{aligned}
M_2(s)&:=(s-\rho_1)(s-\rho_2)\Bigg(\frac{\lambda_2\mu_{G_1}\mu_{G_2}}{\mu+\lambda_2+\delta}\hat{w}(s)-\frac{\tau_{21}(\rho_1)}{\rho_1-\rho_2}T_sT_{\rho_1}w(0)-\frac{\tau_{21}(\rho_2)}{\rho_2-\rho_1}T_sT_{\rho_2}w(0) \\
&\quad-\frac{\tau_{22}(\rho_1)}{\rho_1-\rho_2}T_sT_{\rho_1}\xi_1(0)-\frac{\tau_{22}(\rho_2)}{\rho_2-\rho_1}T_sT_{\rho_2}\xi_1(0)\Bigg), \qquad (3.2.28)
\end{aligned}$$

όπου

$$\tau_{21}(s)=\frac{\lambda_2(1-\mu_{G_1}s)(1-\mu_{G_2}s)}{\mu+\lambda_2+\delta}-\frac{\mu\lambda_2(1-\mu_{G_2}s)}{(\mu+\lambda_1+\delta)(\mu+\lambda_2+\delta)},$$

$$\tau_{22}(s)=\frac{\mu\lambda_1\hat{\phi}_2\left(\dfrac{1}{\mu_{G_2}}\right)(1-\mu_{G_1}s)-\mu\lambda_2\hat{\phi}_1\left(\dfrac{1}{\mu_{G_1}}\right)(1-\mu_{G_2}s)}{(\mu+\lambda_1+\delta)(\mu+\lambda_2+\delta)}.$$

Σύμφωνα με την παραπάνω ανάλυση, έχουμε καταλήξει ότι οι μετασχηματισμοί Laplace των συναρτήσεων Gerber-Shiu των (3.2.8) και (3.2.9), με βάση και τη σχέση (3.13), εκφράζονται με τη μορφή

$$\hat{\phi}_i(s) = \frac{M_i(s)}{(s-\rho_1)(s-\rho_2)[\mu_{G_1}\mu_{G_2} - \hat{\zeta}(s)]} = \frac{\dfrac{M_i(s)}{\mu_{G_1}\mu_{G_2}(s-\rho_1)(s-\rho_2)}}{1 - \dfrac{\hat{\zeta}(s)}{\mu_{G_1}\mu_{G_2}}}, \qquad i = 1,2.$$

και ισοδύναμα αναδιατάσσοντας τους όρους

$$\hat{\phi}_i(s) = \frac{1}{\mu_1\mu_2}\hat{\phi}_i(s)\hat{G}(s) + \frac{M_i(s)}{\mu_1\mu_2(s-\rho_1)(s-\rho_2)}. \qquad i = 1,2 \qquad (3.2.29)$$

Παίρνοντας τους αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace και στα δύο μέλη της (3.2.29) προκύπτουν οι (3.2.16) και (3.2.17).

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι οι (3.2.16) και (3.2.17) είναι ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις. Θα πρέπει να δείξουμε ότι

$$\frac{1}{\mu_{G_1}\mu_{G_2}}\int_0^\infty \zeta(x)dx < 1. \qquad (3.2.30\alpha)$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της $\zeta(x)$ είναι $\hat{\zeta}(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\zeta(x)dx$ και για $s = 0$ παίρνουμε

$\hat{\zeta}(0) = \int_0^\infty \zeta(x)dx$. Συνεπώς, η (3.2.30α) είναι ισοδύναμη με την

$$\frac{1}{\mu_{G_1}\mu_{G_2}}\hat{\zeta}(0) < 1. \qquad (3.2.30\beta)$$

Έστω $\delta > 0$. Από την (3.2.23) έχουμε

$$(1-\mu_{G_1}s)(1-\mu_{G_2}s)\left(\chi_1(s)\chi_2(s) - \frac{\lambda_1\lambda_2\hat{\xi}_1(s)\hat{\xi}_2(s)}{(\mu+\lambda_1+\delta)(\mu+\lambda_2+\delta)}\right) = (s-\rho_1)(s-\rho_2)(\mu_{G_1}\mu_{G_2} - \hat{\zeta}(s))$$

ισοδύναμα είναι

$$\mu_{G_1}\mu_{G_2} - \hat{\zeta}(s) = \frac{(1-\mu_{G_1}s)(1-\mu_{G_2}s)\left(\chi_1(s)\chi_2(s) - \dfrac{\lambda_1\lambda_2\hat{\xi}_1(s)\hat{\xi}_2(s)}{(\mu+\lambda_1+\delta)(\mu+\lambda_2+\delta)}\right)}{(s-\rho_1)(s-\rho_2)}$$

και

$$\frac{\hat{\zeta}(s)}{\mu_{G_1}\mu_{G_2}} = 1 - \frac{(1-\mu_{G_1}s)(1-\mu_{G_2}s)\left(\chi_1(s)\chi_2(s) - \dfrac{\lambda_1\lambda_2\hat{\xi}_1(s)\hat{\xi}_2(s)}{(\mu+\lambda_1+\delta)(\mu+\lambda_2+\delta)}\right)}{(s-\rho_1)(s-\rho_2)\mu_{G_1}\mu_{G_2}}.$$

Η τελευταία σχέση για $s = 0$ γίνεται

$$\frac{\hat{\zeta}(0)}{\mu_{G_1}\mu_{G_2}} = 1 - \frac{\chi_1(0)\chi_2(0) - \dfrac{\lambda_1\lambda_2\hat{\xi}_1(0)\hat{\xi}_2(0)}{(\mu+\lambda_1+\delta)(\mu+\lambda_2+\delta)}}{\rho_1\rho_2\mu_{G_1}\mu_{G_2}}$$

για να υπολογίσουμε τον αριθμητή, θέτουμε $s = 0$ στην (3.2.18β)

$$\frac{\lambda_2+\delta}{\mu+\lambda_2+\delta}\frac{\lambda_1+\delta}{\mu+\lambda_1+\delta}-\frac{\lambda_1+\delta}{\mu+\lambda_1+\delta}\frac{\lambda_2\hat{\xi}_2(0)}{\mu+\lambda_2+\delta}-\frac{\lambda_2+\delta}{\mu+\lambda_2+\delta}\frac{\lambda_1\hat{\xi}_1(0)}{\mu+\lambda_1+\delta}$$

ισοδύναμα είναι

$$\frac{(\lambda_1+\delta)(\lambda_2+\delta)-(\lambda_1+\delta)\lambda_2\hat{\xi}_2(0)-(\lambda_2+\delta)\lambda_1\hat{\xi}_1(0)}{(\mu+\lambda_1+\delta)(\mu+\lambda_2+\delta)}$$

συνεπώς

$$\frac{\hat{\zeta}(0)}{\mu_{G_1}\mu_{G_2}}=1-\frac{(\lambda_1+\delta)(\lambda_2+\delta)-(\lambda_1+\delta)\lambda_2\hat{\xi}_2(0)-(\lambda_2+\delta)\lambda_1\hat{\xi}_1(0)}{\rho_1\rho_2\mu_{G_1}\mu_{G_2}(\mu+\lambda_1+\delta)(\mu+\lambda_2+\delta)} \qquad (3.2.31)$$

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε το λ_2 μπροστά από το $\hat{\xi}_2(0)$ με $\lambda_2+\delta>\lambda_2$ και το λ_1 μπροστά από το $\hat{\xi}_1(0)$ με $\lambda_1+\delta>\lambda_1$. Έτσι οι αφαιρετέοι όροι που προκύπτουν στον αριθμητή της προηγούμενης σχέσης μεγαλώνουν με συνέπεια να μικραίνει ο αριθμητής του κλάσματος στο δεξί μέλος, με συνέπεια να μεγαλώνει το κλάσμα που αφαιρείται από το 1. Συνεπώς, από την προηγούμενη σχέση έχουμε την ανισότητα

$$\frac{\hat{\zeta}(0)}{\mu_{G_1}\mu_{G_2}}<1-\frac{(\lambda_1+\delta)(\lambda_2+\delta)-(\lambda_1+\delta)(\lambda_2+\delta)\hat{\xi}_2(0)-(\lambda_2+\delta)(\lambda_1+\delta)\hat{\xi}_1(0)}{\rho_1\rho_2\mu_{G_1}\mu_{G_2}(\mu+\lambda_1+\delta)(\mu+\lambda_2+\delta)}$$

$$=1-\frac{(\lambda_1+\delta)(\lambda_2+\delta)-(\lambda_1+\delta)(\lambda_2+\delta)[\hat{\xi}_1(0)+\hat{\xi}_2(0)]}{\rho_1\rho_2\mu_{G_1}\mu_{G_2}(\mu+\lambda_1+\delta)(\mu+\lambda_2+\delta)}$$

αλλά στην απόδειξη του Λήμματος 3.2.1 δείξαμε ότι $\hat{\xi}_1(0)+\hat{\xi}_2(0)=1$, οπότε

$$\frac{\hat{\zeta}(0)}{\mu_{G_1}\mu_{G_2}}<1-\frac{(\lambda_1+\delta)(\lambda_2+\delta)-(\lambda_1+\delta)(\lambda_2+\delta)}{\rho_1\rho_2\mu_{G_1}\mu_{G_2}(\mu+\lambda_1+\delta)(\mu+\lambda_2+\delta)}=1-0=1$$

δηλαδή, αποδείχτηκε η (3.2.30β).

Εξετάζουμε τώρα την περίπτωση όπου $\delta\to 0^+$. Από την (3.2.31) είναι

$$\lim_{\delta\to 0^+}\frac{\hat{\zeta}(0)}{\mu_{G_1}\mu_{G_2}}=1-\frac{1}{\mu_{G_1}\mu_{G_2}}\lim_{\delta\to 0^+}\frac{(\lambda_1+\delta)(\lambda_2+\delta)-(\lambda_1+\delta)\lambda_2\hat{\xi}_2(0)-(\lambda_2+\delta)\lambda_1\hat{\xi}_1(0)}{\rho_1\rho_2(\mu+\lambda_1+\delta)(\mu+\lambda_2+\delta)}$$

$$=1-\frac{1}{\mu_{G_1}\mu_{G_2}}\lim_{\delta\to 0^+}\frac{\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\lambda_2[\hat{\xi}_1(0)+\hat{\xi}_2(0)]}{(\mu+\lambda_1)(\mu+\lambda_2)\lim\limits_{\delta\to 0^+}(\rho_1(\delta)\rho_2(\delta))}. \qquad (3.2.31\alpha)$$

Αλλά ο αριθμητής είναι ίσος με μηδέν, αφού $\hat{\xi}_1(0)+\hat{\xi}_2(0)=1$, και επίσης είναι $\lim\limits_{\delta\to 0^+}\rho_1(\delta)=0$ από την Παρατήρηση 3.2.1. Συνεπώς το όριο του κλάσματος στην (3.2.31α) καθώς δ τείνει στο μηδέν είναι $\frac{0}{0}$, οπότε κάνουμε χρήση του κανόνα L' Hospital και βρίσκουμε

$$\lim_{\delta\to 0^+}\frac{\hat{\zeta}(0)}{\mu_{G_1}\mu_{G_2}}=1-\frac{1}{\rho_2(0)\mu_{G_1}\mu_{G_2}\,(\mu+\lambda_1)(\mu+\lambda_2)}\times\lim_{\delta\to 0^+}\frac{\delta^2+[\lambda_1(1-\hat{\xi}_1(0)]+\lambda_2[1-\hat{\xi}_2(0)]\delta}{\rho_1(\delta)}$$

$$=1-\frac{1}{\rho_2(0)\mu_{G_1}\mu_{G_2}\,(\mu+\lambda_1)(\mu+\lambda_2)}\times\lim_{\delta\to 0^+}\frac{\delta+[\lambda_1(1-\hat{\xi}_1(0)]+\lambda_2[1-\hat{\xi}_2(0)]}{\frac{\rho_1(\delta)}{\delta}}$$

$$=1-\frac{\lambda_1[1-\hat{\xi}_1(0)]+\lambda_2[1-\hat{\xi}_2(0)]}{\rho_2(0)\mu_{G_1}\mu_{G_2}\,(\mu+\lambda_1)(\mu+\lambda_2)\rho_1'(0)} \qquad (3.2.31β)$$

αφού $\rho_1'(0)=\lim_{\delta\to 0^+}\frac{\rho_1(\delta)-\rho_1(0^+)}{\delta-0}=\lim_{\delta\to 0^+}\frac{\rho_1(\delta)}{\delta}$.

Αλλά $\rho_2(0)>0$ από Λήμμα 3.2.1. Στη συνέχεια θα εξετάζουμε τα πρόσημα του $\rho_1'(0)$ και του αριθμητή του παραπάνω κλάσματος.

Θέτοντας $s=\rho_1(\delta)$ στην (3.2.13) προκύπτει διαδοχικά

$$\chi_1(\rho_1(\delta))\chi_2(\rho_1(\delta))-\frac{\lambda_1\lambda_2\hat{\xi}_1(\rho_1(\delta))\hat{\xi}_2(\rho_1(\delta))}{(\mu+\lambda_1+\delta)(\mu+\lambda_2+\delta)}=0$$

$$\prod_{i=1}^{2}\left(1-\frac{\mu}{(\mu+\lambda_i+\delta)(1-\mu_{G_i}\rho_1(\delta))}-\frac{\lambda_i\hat{\xi}_i(\rho_1(\delta))}{\mu+\lambda_i+\delta}\right)=\frac{\lambda_1\lambda_2\hat{\xi}_1(\rho_1(\delta))\hat{\xi}_2(\rho_1(\delta))}{(\mu+\lambda_1+\delta)(\mu+\lambda_2+\delta)}$$

$$\prod_{i=1}^{2}\frac{1}{\mu+\lambda_i+\delta}\left((\mu+\lambda_i+\delta)-\frac{\mu}{1-\mu_{G_i}\rho_1(\delta)}-\lambda_i\hat{\xi}_i(\rho_1(\delta))\right)=\frac{\lambda_1\lambda_2\hat{\xi}_1(\rho_1(\delta))\hat{\xi}_2(\rho_1(\delta))}{(\mu+\lambda_1+\delta)(\mu+\lambda_2+\delta)}$$

$$\prod_{i=1}^{2}\left((\mu+\lambda_i+\delta)-\frac{\mu}{1-\mu_{G_i}\rho_1(\delta)}-\lambda_i\hat{\xi}_i(\rho_1(\delta))\right)=\lambda_1\lambda_2\hat{\xi}_1(\rho_1(\delta))\hat{\xi}_2(\rho_1(\delta)).$$

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της τελευταίας σχέσης ως προς δ βρίσκουμε

$$\left(1-\frac{\mu\mu_{G_1}\rho_1'(\delta)}{[1-\mu_{G_1}\rho_1(\delta)]^2}-\lambda_1\hat{\xi}_1'(\rho_1(\delta))\rho_1'(\delta)\right)\left((\mu+\lambda_2+\delta)-\frac{\mu}{1-\mu_{G_2}\rho_1(\delta)}-\lambda_2\hat{\xi}_2(\rho_1(\delta))\right)$$
$$+\left((\mu+\lambda_1+\delta)-\frac{\mu}{1-\mu_{G_1}\rho_1(\delta)}-\lambda_1\hat{\xi}_1(\rho_1(\delta))\right)\left(1-\frac{\mu\mu_{G_2}\rho_1'(\delta)}{[1-\mu_{G_2}\rho_1(\delta)]^2}-\lambda_2\hat{\xi}_2'(\rho_1(\delta))\rho_1'(\delta)\right)$$
$$=\lambda_1\lambda_2[\hat{\xi}_1'(\rho_1(\delta))\rho_1'(\delta)\hat{\xi}_2(\rho_1(\delta))+\hat{\xi}_1(\rho_1(\delta))\hat{\xi}_2'(\rho_1(\delta))\rho_1'(\delta)]$$

θέτοντας $\delta=0$ και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $\lim_{\delta\to 0^+}\rho_1(\delta)=0$, παίρνουμε το παρακάτω αποτέλεσμα

$$[1-\mu\mu_{G_1}\rho_1'(0)-\lambda_1\hat{\xi}_1'(0)\rho_1'(0)]\lambda_2(1-\hat{\xi}_2(0))+\lambda_1(1-\hat{\xi}_1(0))[1-\mu\mu_{G_2}\rho_1'(0)-\lambda_2\hat{\xi}_2'(0)\rho_1'(0)]$$
$$=\lambda_1\lambda_2[\hat{\xi}_1'(0)\rho_1'(0)\hat{\xi}_2(0)+\hat{\xi}_1(0)\hat{\xi}_2'(0)\rho_1'(0)]$$

Αναδιατάσσοντας τους όρους και βγάζοντας κοινό παράγοντα το $\rho_1'(0)$, προκύπτει

$$\lambda_1(1-\hat{\xi}_1(0))+\lambda_2(1-\hat{\xi}_2(0)) =$$
$$\{\mu\lambda_2\mu_{G_1}(1-\hat{\xi}_2(0))+\lambda_1\lambda_2\hat{\xi}_1'(0)(1-\hat{\xi}_2(0))+\mu\lambda_1\mu_{G_2}(1-\hat{\xi}_1(0))$$
$$+\lambda_1\lambda_2(1-\hat{\xi}_1(0))\hat{\xi}_2'(0)+\lambda_1\lambda_2[\hat{\xi}_1'(0)\hat{\xi}_2(0)+\hat{\xi}_1(0)\hat{\xi}_2'(0)]\}\rho_1'(0)$$

λύνοντας ως προς $\rho_1'(0)$ προκύπτει

$$\rho_1'(0)=\frac{\lambda_1(1-\hat{\xi}_1(0))+\lambda_2(1-\hat{\xi}_2(0))}{\lambda_1\lambda_2(\hat{\xi}_1'(0)+\hat{\xi}_2'(0))+\mu\lambda_2\mu_{G_1}(1-\hat{\xi}_2(0))+\mu\lambda_1\mu_{G_2}(1-\hat{\xi}_1(0))}. \quad (3.2.31γ)$$

Αλλά για τους μετασχηματισμούς Laplace των

$$\xi_1(y)=B(y)f(y) \text{ και } \xi_2(y)=\overline{B}(y)f(y)$$

είναι αντίστοιχα

$$\hat{\xi}_1(s)=\int_0^\infty e^{-sy}\xi_1(y)dy=\int_0^\infty e^{-sy}B(y)f(y)dy=\int_0^\infty e^{-sy}P(B\le y)f(y)dy,$$

$$\hat{\xi}_2(s)=\int_0^\infty e^{-sy}\xi_2(y)dy=\int_0^\infty e^{-sy}\overline{B}(y)f(y)dy=\int_0^\infty e^{-sy}P(B>y)f(y)dy.$$

Αθροίζοντας τους δύο προηγούμενους μετασχηματισμούς προκύπτει

$$\begin{aligned}\hat{\xi}_1(s)+\hat{\xi}_2(s)&=\int_0^\infty e^{-sy}B(y)f(y)dy+\int_0^\infty e^{-sy}\overline{B}(y)f(y)dy\\&=\int_0^\infty e^{-sy}[B(y)+\overline{B}(y)]f(y)dy\\&=\int_0^\infty e^{-sy}f(y)dy\\&=\hat{f}(s)\end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας την προηγούμενη σχέση ως προς s και τα δύο μέλη, είναι

$$\hat{\xi}_1'(s)+\hat{\xi}_2'(s)=\hat{f}'(s)$$

Θέτοντας $s=0$ στους παραπάνω μετασχηματισμούς Laplace βρίσκουμε αντίστοιχα

$$\hat{\xi}_1(0)=\int_0^\infty P(B\le y)f(y)dy=P(B\le Y) \text{ και ισοδύναμα } 1-\hat{\xi}_1(0)=1-P(B\le Y)=P(B>Y),$$

$$\hat{\xi}_2(0)=\int_0^\infty P(B>y)f(y)dy=P(B>Y) \text{ και ισοδύναμα } 1-\hat{\xi}_2(0)=1-P(B>Y)=P(B\le Y).$$

και

$$\hat{\xi}_1'(0)+\hat{\xi}_2'(0)=\hat{f}'(0)=-\mu_F$$

όπου η τελευταία ισότητα είναι από την Ιδιότητα 7 του Παραρτήματος Π2.

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα, αντικαθιστώντας στην (3.2.31γ) και διαιρώντας αριθμητή και παρονομαστή με $\lambda_1\lambda_2$ βρίσκουμε

$$\rho_1'(0) = \frac{\dfrac{1}{\lambda_2} P(B > y) + \dfrac{1}{\lambda_1} P(B \le Y)}{\dfrac{\mu\mu_{G_1}}{\lambda_1} P(B \le Y) + \dfrac{\mu\mu_{G_2}}{\lambda_2} P(B > Y) - \mu_F}$$

Ο αριθμητής του κλάσματος είναι θετικός. Καθώς επίσης και ο παρονομαστής του κλάσματος είναι θετικός λόγω της συνθήκης (3.2.2), έχουμε ότι

$$\rho_1'(0) > 0.$$

Επίσης η (3.2.31β) γράφεται

$$\lim_{\delta \to 0^+} \frac{\hat{\zeta}(0)}{\mu_{G_1}\mu_{G_2}} = 1 - \frac{\lambda_1 P(B > Y) + \lambda_2 P(B \le Y)}{\rho_2(0)\mu_{G_1}\mu_{G_2}\,(\mu + \lambda_1)(\mu + \lambda_2)\rho_1'(0)}$$

αλλά το κλάσμα στο δεξιό μέλος της ισότητας είναι θετικό, οπότε

$$\lim_{\delta \to 0^+} \frac{\hat{\zeta}(0)}{\mu_{G_1}\mu_{G_2}} < 1,$$

δηλαδή, ισχύει η (3.2.30β) για $\delta = 0$.

Συνεπώς, οι Εξισώσεις (3.2.16) και (3.2.17) είναι ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις και η απόδειξη της πρότασης ολοκληρώθηκε.

□

Για την αναλυτική λύση των Εξισώσεων (3.2.16) και (3.2.17) μπορεί να εφαρμοστεί απευθείας η Πρόταση 1.2

3.2.3 Ασφάλιστρα με μετασχηματισμό Laplace που ανήκει στη ρητή οικογένεια κατανομών

Η *κλασματική* ή *ρητή οικογένεια* κατανομών είναι μια ευρεία κλάση κατανομών που μεταξύ άλλων περιλαμβάνει τις παρακάτω κατανομές, οι οποίες χρησιμοποιούνται συχνά στην Αναλογιστική Επιστήμη για τη μοντελοποίηση των μεγεθών ατομικών ζημιών σε χαρτοφυλάκια κινδύνων:

- τις Εκθετικές κατανομές,
- τις κατανομές Erlang,
- τις Coxian κατανομές,
- τις phase-type κατανομές

καθώς επίσης και τις μίξεις μεταξύ όλων των παραπάνω κατανομών.

Στην ενότητα αυτή μελετάται η ειδική περίπτωση όπου τα μεγέθη των ασφαλίστρων έχουν μετασχηματισμούς Laplace που ανήκουν στη ρητή οικογένεια κατανομών, δηλαδή είναι της μορφής

$$\hat{g}_i(s) = \frac{q_i(s)}{\prod_{j=1}^{m_i} (s+\lambda_{ij})^{n_{ij}}}, \qquad i=1,2, \tag{3.2.32}$$

όπου m_i, $n_{ij} \in \mathbf{N}^+$ με $n_{i1}+n_{i2}+\ldots+n_{im_i}=k_i$, $\lambda_{i1},\lambda_{i2},\ldots,\lambda_{ij}$ με $\lambda_{ij_1} \neq \lambda_{ij_2}$ για $j_1 \neq j_2$ είναι στη γενική περίπτωση μιγαδικοί αριθμοί με θετικά πραγματικά μέρη, $q_i(s)$ είναι πολυώνυμο βαθμού μικρότερου ή ίσου με $k_i - 1$ που ικανοποιεί την $q_i(0) = \prod_{j=1}^{m_i} \lambda_{ij}^{n_{ij}}$.

Με ανάλυση σε απλά κλάσματα, η (3.2.32) μπορεί να γραφεί ως

$$\hat{g}_i(s) = \sum_{j_1=1}^{m_i} \sum_{j_2=1}^{n_{ij_1}} q_{ij_1j_2} \left(\frac{\lambda_{ij_1}}{s+\lambda_{ij_1}} \right)^{j_2}, \qquad i=1,2, \tag{3.2.33}$$

όπου

$$q_{ij_1j_2} = \frac{1}{\lambda_{ij_1}^{j_2}(n_{ij_1}-j_2)!} \frac{d^{n_{ij_1}-j_2}}{ds^{n_{ij_1}-j_2}} \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j_1}}^{m_i} \frac{q_i(s)}{(s+\lambda_{ik})^{n_{ik}}} \Bigg|_{s=-\lambda_{ij_1}} .$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι τα λ_{ij} στην (3.2.32) είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Με αναλυτική επέκταση, η (3.2.32) μπορεί να επεκταθεί σε όλο το μιγαδικό επίπεδο εκτός από τα σημεία $-\lambda_{ij}$. Στη συνέχεια θα θεωρούμε επίσης το συμβολισμό $\hat{f}_i(s)$ μετά την αναλυτική αυτή επέκταση.

Παίρνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της (3.2.33), έχουμε

$$g_i(x) = \sum_{j_1=1}^{m_i} \sum_{j_2=1}^{n_{ij_1}} q_{ij_1j_2} g_{ij_1j_2}(x), \quad i=1,2, \tag{3.2.34}$$

όπου

$$g_{ij_1j_2}(x) = \frac{\lambda_{ij_1}^{j_2} x^{j_2-1} e^{-\lambda_{ij_1}x}}{(j_2-1)!}, \qquad x>0,\ j_2 \in \mathbf{N}^+,$$

είναι η συνάρτηση πυκνότητας μιας Erlang(j_2, λ_{ij_1}). Βλέπουμε δηλαδή ότι η (3.2.34) είναι μείξη Erlang κατανομών. Έστω $X_{ij_1j_2}^{(1)},\ldots,X_{ij_1j_2}^{(j_2)}$ είναι j_2 ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές εκθετικά κατανεμημένες με μέσο $1/\lambda_{ij_1}$. Τότε το άθροισμα

$$X_{ij_1j_2} := X_{ij_1j_2}^{(1)} + \ldots + X_{ij_1j_2}^{(j_2)} \tag{3.2.35}$$

ακολουθεί Erlang(j_2, λ_{ij_1}) κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας $g_{ij_1j_2}$.

Πρόταση 3.2.5

Για $\mathrm{Re}(s) > \max_j \lambda_{ij}$*, ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης* $A_i(u)$*,* $i = 1, 2$*, που ορίστηκε στην Πρόταση* 3.2.1*, είναι*

$$\hat{A}_i(s) = \hat{g}_i(-s)\hat{m}_i(s) - L_i(s), \tag{3.2.36}$$

όπου

$$L_i(s) = \sum_{j_1=1}^{m_i}\sum_{j_2=1}^{n_{ij_1}}\sum_{j=1}^{j_2} q_{ij_1j_2}\lambda_{ij_1}^{j_2}\frac{T_{\lambda_{ij_1}}^{j} m_i(0)}{(\lambda_{ij_1}-s)^{j_2+1-j}}.$$

Απόδειξη

$$\hat{A}_i(s) = \int_0^\infty e^{-su}A_i(u)du$$

$$= \int_0^\infty e^{-su}\int_0^\infty m_i(u+x)g_i(x)dxdu$$

και από (3.2.34)

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-su}m_i(u+x)\sum_{j_1=1}^{m_i}\sum_{j_2=1}^{n_{ij_1}} q_{ij_1j_2}g_{ij_1j_2}(x)dxdu$$

$$= \sum_{j_1=1}^{m_i}\sum_{j_2=1}^{n_{ij_1}} q_{ij_1j_2}\int_0^\infty g_{ij_1j_2}(x)\int_0^\infty e^{-su}m_i(u+x)dudx$$

όπου με βάση τον ορισμό του τελεστή Dickson-Hipp

$$= \sum_{j_1=1}^{m_i}\sum_{j_2=1}^{n_{ij_1}} q_{ij_1j_2}\int_0^\infty T_s m_i(x)g_{ij_1j_2}(x)dx$$

αφού $X_{ij_1j_2} \sim g_{ij_1j_2}(x)$

$$= \sum_{j_1=1}^{m_i}\sum_{j_2=1}^{n_{ij_1}} q_{ij_1j_2}E[T_s m_i(X_{ij_1j_2})]$$

και από (3.2.35)

$$= \sum_{j_1=1}^{m_i}\sum_{j_2=1}^{n_{ij_1}} q_{ij_1j_2}E[T_s m_i(X_{ij_1j_2}^{(1)} + \ldots + X_{ij_1j_2}^{(j_2)})]$$

$$= \sum_{j_1=1}^{m_i}\sum_{j_2=1}^{n_{ij_1}} q_{ij_1j_2}\int_0^\infty E[T_s m_i(x + X_{ij_1j_2}^{(2)} + \ldots + X_{ij_1j_2}^{(j_2)})]\lambda_{ij_1}e^{-\lambda_{ij_1}x}dx$$

$$= \sum_{j_1=1}^{m_i}\sum_{j_2=1}^{n_{ij_1}} q_{ij_1j_2}\lambda_{ij_1}E\int_0^\infty T_s m_i(x + X_{ij_1j_2}^{(2)} + \ldots + X_{ij_1j_2}^{(j_2)})e^{-\lambda_{ij_1}x}dx$$

$$= \sum_{j_1=1}^{m_i}\sum_{j_2=1}^{n_{ij_1}} q_{ij_1j_2}\lambda_{ij_1}E[T_s T_{\lambda_{ij_1}} m_i(X_{ij_1j_2}^{(2)} + \ldots + X_{ij_1j_2}^{(j_2)})]$$

επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία των τελευταίων τριών βημάτων

$$\cdots$$

$$= \sum_{j_1=1}^{m_i} \sum_{j_2=1}^{n_{i j_1}} q_{i j_1 j_2} \lambda_{i j_1}^{j_2} T_s T_{\lambda_{i j_1}}^{j_2} m_i(0)$$

όπου $T_{\lambda_{i j_1}}^{j_2} = \underbrace{T_{\lambda_{i j_1}} \dots T_{\lambda_{i j_1}}}_{j_2}$. Εφαρμόζοντας την Ιδιότητα Α15 του Παραρτήματος Π3, έχουμε

$$\hat{A}_i(s) = \sum_{j_1=1}^{m_i} \sum_{j_2=1}^{n_{i j_1}} q_{i j_1 j_2} \lambda_{i j_1}^{j_2} \left(\frac{\hat{m}_i(s)}{(\lambda_{i j_1} - s)^{j_2}} - \sum_{j=1}^{j_2} \frac{T_{\lambda_{i j_1}}^{j} m_i(0)}{(\lambda_{i j_1} - s)^{j_2+1-j}} \right)$$

$$= \hat{m}_i(s) \sum_{j_1=1}^{m_i} \sum_{j_2=1}^{n_{i j_1}} q_{i j_1 j_2} \lambda_{i j_1}^{j_2} \frac{1}{(\lambda_{i j_1} - s)^{j_2}} - \sum_{j_1=1}^{m_i} \sum_{j_2=1}^{n_{i j_1}} \sum_{j=1}^{j_2} q_{i j_1 j_2} \lambda_{i j_1}^{j_2} \frac{T_{\lambda_{i j_1}}^{j} m_i(0)}{(\lambda_{i j_1} - s)^{j_2+1-j}}$$

και από (3.2.33) είναι

$$\hat{A}_i(s) = \hat{g}_i(-s)\hat{m}_i(s) - L_i(s)$$

όπου $L_i(s) = \sum_{j_1=1}^{m_i} \sum_{j_2=1}^{n_{i j_1}} \sum_{j=1}^{j_2} q_{i j_1 j_2} \lambda_{i j_1}^{j_2} \frac{T_{\lambda_{i j_1}}^{j} m_i(0)}{(\lambda_{i j_1} - s)^{j_2+1-j}}$.

□

Αντικαθιστώντας την (3.2.36) στις (3.2.5) και (3.2.6) έχουμε αντίστοιχα

$$\hat{m}_1(s) = \frac{\mu}{\mu + \lambda_1 + \delta} [\hat{g}_1(-s)\hat{m}_1(s) - L_1(s)] + \frac{\lambda_1}{\mu + \lambda_1 + \delta} [\hat{m}_1(s)\hat{\xi}_1(s) + \hat{m}_2(s)\hat{\xi}_2(s) + \hat{w}(s)],$$

$$\hat{m}_2(s) = \frac{\mu}{\mu + \lambda_2 + \delta} [\hat{g}_2(-s)\hat{m}_2(s) - L_2(s)] + \frac{\lambda_2}{\mu + \lambda_2 + \delta} [\hat{m}_1(s)\hat{\xi}_1(s) + \hat{m}_2(s)\hat{\xi}_2(s) + \hat{w}(s)],$$

από τις οποίες αναδιατάσσοντας τους όρους ισοδύναμα προκύπτει το σύστημα

$$\left(1 - \frac{\mu\, \hat{g}_1(-s)}{\mu + \lambda_1 + \delta} - \frac{\lambda_1 \hat{\xi}_1(s)}{\mu + \lambda_1 + \delta}\right) \hat{m}_1(s) - \frac{\lambda_1 \hat{\xi}_2(s)}{\mu + \lambda_1 + \delta} \hat{m}_2(s) = \frac{\lambda_1 \hat{w}(s) - \mu L_1(s)}{\mu + \lambda_1 + \delta}, \tag{3.2.37}$$

$$-\frac{\lambda_2 \hat{\xi}_1(s)}{\mu + \lambda_2 + \delta} \hat{m}_1(s) + \left(1 - \frac{\mu\, \hat{g}_2(-s)}{\mu + \lambda_2 + \delta} - \frac{\lambda_2\, \hat{\xi}_2(s)}{\mu + \lambda_2 + \delta}\right) \hat{m}_2(s) = \frac{\lambda_2 \hat{w}(s) - \mu L_2(s)}{\mu + \lambda_2 + \delta}. \tag{3.2.38}$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (3.2.37) και (3.2.28) προκύπτει

$$\hat{m}_1(s) = \frac{[\lambda_1(\mu + \lambda_2 + \delta) - \mu\lambda_1 \hat{g}_2(-s)]\hat{w}(s) - \mu\, v_2(s) L_1(s) - \mu\lambda_1 \hat{\xi}_2(s) L_2(s)}{v_1(s) v_2(s) - \lambda_1 \lambda_2 \hat{\xi}_1(s) \hat{\xi}_2(s)}, \tag{3.2.39}$$

$$\hat{m}_2(s) = \frac{[\lambda_2(\mu + \lambda_1 + \delta) - \mu\lambda_2 \hat{g}_1(-s)]\hat{w}(s) - \mu\, v_1(s) L_2(s) - \mu\lambda_2 \hat{\xi}_1(s) L_1(s)}{v_1(s) v_2(s) - \lambda_1 \lambda_2 \hat{\xi}_1(s) \hat{\xi}_2(s)}, \tag{3.2.40}$$

όπου

$$v_i(s) = \mu + \lambda_i + \delta - \mu\,\hat{g}_i(-s) - \lambda_i \hat{\xi}_i(s)\,, \qquad i = 1,2\,.$$

Ο κοινός παρονομαστής των (3.2.39) και (3.2.40) είναι αναλυτική συνάρτηση για s στο δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο εκτός από τους πόλους λ_{ij}. Για να γίνει αναλυτική για όλα τα $\mathrm{Re}(s) \geq 0$, θέτουμε

$$\Lambda_i(s) = \prod_{j=1}^{m_i} (s - \lambda_{ij_1})^{n_{ij}} \tag{3.2.41}$$

και πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή των (3.2.39) και (3.2.40) με $\Lambda_1(s)\Lambda_2(s)$, οπότε προκύπτει αντίστοιχα

$$\hat{m}_1(s) = \frac{Q_1(s)\hat{w}(s) - \mu v_2(s)\Lambda_1(s)\Lambda_2(s)L_1(s) - \mu\lambda_1\hat{\xi}_2(s)\Lambda_1(s)\Lambda_2(s)L_2(s)}{v_1(s)v_2(s)\Lambda_1(s)\Lambda_2(s) - \lambda_1\lambda_2\hat{\xi}_1(s)\hat{\xi}_2(s)\Lambda_1(s)\Lambda_2(s)}, \tag{3.2.42}$$

$$\hat{m}_2(s) = \frac{Q_2(s)\hat{w}(s) - \mu v_1(s)\Lambda_1(s)\Lambda_2(s)L_2(s) - \mu\lambda_2\hat{\xi}_1(s)\Lambda_1(s)\Lambda_2(s)L_1(s)}{v_1(s)v_2(s)\Lambda_1(s)\Lambda_2(s) - \lambda_1\lambda_2\hat{\xi}_1(s)\hat{\xi}_2(s)\Lambda_1(s)\Lambda_2(s)}, \tag{3.2.43}$$

όπου

$$Q_1(s) = \Lambda_1(s)\Lambda_2(s)[\lambda_1(\mu + \lambda_2 + \delta) - \mu\lambda_1\hat{g}_2(s)],$$
$$Q_2(s) = \Lambda_1(s)\Lambda_2(s)[\lambda_2(\mu + \lambda_1 + \delta) - \mu\lambda_2\hat{g}_1(s)].$$

Από τις (3.2.42) και (3.2.43) μπορούμε να βρούμε τα $\hat{m}_1(s)$ και $\hat{m}_2(s)$ αρκεί να είναι εφικτός ο προσδιορισμός των γινομένων $\Lambda_1(s)L_1(s)$ και $\Lambda_2(s)L_2(s)$ τα οποία είναι πολυώνυμα $k_i - 1$ βαθμού και εκφράζονται ως

$$\Lambda_i(s)L_i(s) = \sum_{n=1}^{k_i} L_{in} s^{n-1}\,, \qquad i = 1,2\,. \tag{3.2.44}$$

Συνεπώς, έχουμε να προσδιορίσουμε τους $k_1 + k_2$ άγνωστους συντελεστές L_{in}. Το Λήμμα 3.2.2, του οποίου η απόδειξη είναι ίδια με αυτή του Λήμματος 3.2.1 και παραλείπεται, μας πληροφορεί για τις ρίζες του κοινού παρονομαστή των (3.2.42) και (3.2.43).

Λήμμα 3.2.2

Ο κοινός παρονομαστής των (3.2.42) *και* (3.2.43) *έχει ακριβώς* $k_1 + k_2$ *ρίζες, έστω* $\rho_1(\delta),\ldots,\rho_{k_1+k_2}(\delta)$, *στο δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο.*

Υποθέτοντας ότι οι ρίζες $\rho_1,\ldots,\rho_{k_1+k_2}$ είναι διακεκριμένες και δεδομένου ότι οι $\hat{m}_1(s)$ και $\hat{m}_2(s)$ είναι αναλυτικές για $\mathrm{Re}(s) \geq 0$, τότε οι $\rho_1,\ldots,\rho_{k_1+k_2}$ είναι επίσης ρίζες των αριθμητών των (3.2.42) και (3.2.43). Και στις δύο περιπτώσεις, οι $k_1 + k_2$ γραμμικές εξισώσεις για τους άγνωστους συντελεστές L_{in} είναι

$$\mu v_2(\rho_i)\Lambda_2(\rho_i)\sum_{n=1}^{k_1} L_{1n}\rho_i^{n-1} + \mu\lambda_1\hat{\xi}_2(\rho_i)\Lambda_1(\rho_i)\sum_{n=1}^{k_2} L_{2n}\rho_i^{n-1} = Q_1(\rho_i)\hat{w}(\rho_i), \qquad i = 1, 2, ..., k_1 + k_2 .$$

(3.2.45)

Μετά τη λύση του συστήματος των (3.2.45) και την εύρεση των L_{in}, οι μετασχηματισμοί Laplace των (3.2.42) και (3.2.43) μπορούν να προσδιοριστούν πλήρως.

3.2.4 Αριθμητική εφαρμογή

Θεωρούμε την περίπτωση εκθετικά κατανεμημένων απαιτήσεων και κατωφλίων με μέσους αντίστοιχα $\mu_F = 1$ και $\mu_B = 2$. Οι συναρτήσεις κατανομής τους είναι αντίστοιχα

$$F(y) = 1 - e^{-y}, \qquad B(x) = 1 - e^{-\frac{x}{2}} .$$

Έστω οι τιμές των παραμέτρων στο μοντέλο:

$$\mu = 1, \lambda_1 = 0.4, \lambda_2 = 0.5, \ \mu_{G_1} = 0.5, \ \mu_{G_2} = 1.$$

Για τις εν λόγω τιμές, βλέπουμε ότι ικανοποιείται η συνθήκη καθαρού κέρδους (3.2.2), αφού

$$P(Y \geq B)\frac{\mu\mu_{G_1}}{\lambda_1} + P(Y < B)\frac{\mu\mu_{G_2}}{\lambda_2} - \mu_F$$

$$= \frac{\frac{1}{\mu_B}}{\frac{1}{\mu_B}+\frac{1}{\mu_F}}\frac{\mu\mu_{G_1}}{\lambda_1} + \frac{\frac{1}{\mu_F}}{\frac{1}{\mu_B}+\frac{1}{\mu_F}}\frac{\mu\mu_{G_2}}{\lambda_2} - \mu_F$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1}\frac{1\cdot 0.5}{0.4} + \frac{1}{\frac{1}{2}+1}\frac{1\cdot 1}{0.5} - 1 = \frac{3}{4} > 0 .$$

Για να υπολογίσουμε τις πιθανότητες χρεοκοπίας, θέτουμε $\delta = 0$ και τιμή της συνάρτησης ποινής $\omega(x_1, x_2) = 1$, οπότε από τη συνάρτηση Gerber-Shiu είναι $m_i(u) = \psi_i(u)$, $i = 1, 2$.

Για να διαμορφώσουμε την Εξίσωση (3.2.13) , υπολογίζουμε τις απαραίτητες ποσότητες,

$$\xi_1(y) = B(y) f(y) \ = \left(1 - e^{-\frac{1}{2}y}\right)e^{-y} = e^{-y} - e^{-\frac{3}{2}y} ,$$

$$\hat{\xi}_1(s) = \int_0^\infty e^{-sy}\xi_1(y)dy = \int_0^\infty e^{-sy}\left(e^{-y} - e^{-\frac{3}{2}y}\right)dy = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+\frac{3}{2}} ,$$

$$\xi_2(y) = \overline{B}(y) f(y) \ = e^{-\frac{1}{2}y}e^{-y} = e^{-\frac{3}{2}y} ,$$

$$\hat{\xi}_2(s) = \int_0^\infty e^{-sy}\xi_2(y)dy = \int_0^\infty e^{-sy}e^{-\frac{3}{2}y}dy = \int_0^\infty e^{-\left(s+\frac{3}{2}\right)y}dy = \frac{1}{s+\frac{3}{2}} .$$

Οπότε οι συναρτήσεις $\chi_1(s)$ και $\chi_2(s)$ γίνονται αντίστοιχα

$$\chi_1(s) = 1 - \frac{\mu}{(\mu+\lambda_1+\delta)(1-\mu_{G_1}s)} - \frac{\lambda_1\hat{\xi}_1(s)}{\mu+\lambda_1+\delta}$$

$$= 1 - \frac{1}{(1+0.4+0)(1-0.5s)} - \frac{0.4}{1+0.4+0}\left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+1.5}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{1.4(1-0.5s)} - \frac{0.4}{1.4}\left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+1.5}\right)$$

και

$$\chi_2(s) = 1 - \frac{\mu}{(\mu+\lambda_2+\delta)(1-\mu_{G_2}s)} - \frac{\lambda_2\hat{\xi}_2(s)}{\mu+\lambda_2+\delta}$$

$$= 1 - \frac{1}{(1+0.5+0)(1-s)} - \frac{0.5}{1+0.5+0}\frac{1}{s+1.5}$$

$$= 1 - \frac{1}{1.5(1-s)} - \frac{0.5}{1.5(s+1.5)}$$

Τέλος, με βάση τα προηγούμενα μεγέθη, η (3.1.12) που προκύπτει είναι

$$\chi_1(s)\chi_2(s) - \frac{\lambda_1\lambda_2\hat{\xi}_1(s)\hat{\xi}_2(s)}{(\mu+\lambda_1+\delta)(\mu+\lambda_2+\delta)} = 0$$

$$\left[1 - \frac{1}{1.4(1-0.5s)} - \frac{0.4}{1.4}\left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+1.5}\right)\right]\left[1 - \frac{1}{1.5(1-s)} - \frac{0.5}{1.5(s+1.5)}\right]$$
$$- \frac{0.2}{1.4\cdot 1.5}\left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+1.5}\right)\frac{0.5}{s+1.5} = 0$$

Λύνοντας την παραπάνω εξίσωση βρίσκουμε τις ρίζες

0, 0.523009204, –0.270554613, –1.514359353

από τις οποίες είναι $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = 0.523009204$.

Στη συνέχεια από το σύστημα των (3.2.15), προκύπτουν οι τιμές

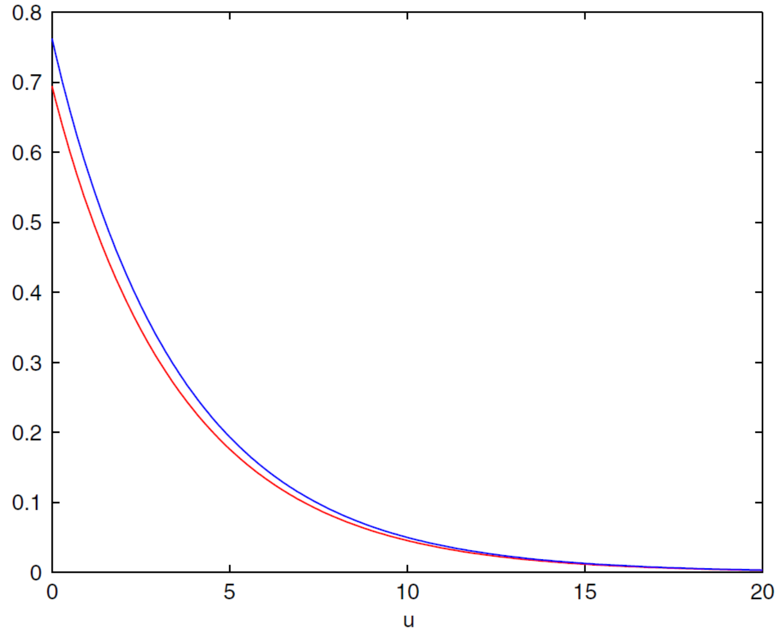
$$\hat{m}_1\left(\frac{1}{\mu_{G_1}}\right) = \hat{m}_1(2) = 0.333621 \text{ και } \hat{m}_2\left(\frac{1}{\mu_{G_2}}\right) = \hat{m}_2(1) = 0.541487.$$

Από τις Εξισώσεις (3.2.8) και (3.2.9) παίρνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, βρίσκουμε τις εξισώσεις για τις πιθανότητες χρεοκοπίας

$$\psi_1(u) = 0.7487227223e^{-0.270554613u} + 0.01359317324e^{-1.514359353u}$$

$$\psi_2(u) = 0.6815162964e^{-0.270554613u} + 0.01280823418^{-1.514359353u}$$

Η γραφική παράσταση των δύο αυτών συναρτήσεων δίνεται στο Σχήμα 3.2.1.



Σχήμα 3.2.1: Οι πιθανότητες χρεοκοπίας $\psi_1(u)$ (μπλε γραμμή) και $\psi_2(u)$ (κόκκινη γραμμή)

Από το σχήμα βλέπουμε ότι και οι δύο πιθανότητες μειώνονται καθώς αυξάνεται το αρχικό πλεόνασμα u με την $\psi_2(u)$ να έχει χαμηλότερες τιμές από την $\psi_1(u)$.

3.3 Μοντέλο κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα στο οποίο ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών απαιτήσεων προσδιορίζει τις κατανομές των μεγεθών της επόμενης απαίτησης και του ατομικού ασφαλίστρου

Η ενότητα αυτή, όπως και η 3.2, θεωρεί επίσης ένα μοντέλο κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα και συγκεκριμένης μορφής εξάρτηση ανάμεσα στα μεγέθη των απαιτήσεων και τους ενδιάμεσους χρόνους που αυτές εμφανίζονται, όπου η κατανομή της απαίτησης και του ατομικού ασφαλίστρου ελέγχονται από το χρόνο που μεσολάβησε από την άφιξη της προηγούμενης απαίτησης. Στις υποενότητες που ακολουθούν αρχικά περιγράφεται το μοντέλο κινδύνου που μελετάται. Εν συνεχεία δίνονται εκφράσεις για τους μετασχηματισμούς Laplace της προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής στην περίπτωση που τα ασφάλιστρα ακολοθούν την εκθετική κατανομή. Με βάση το θεώρημα παρεμβολής Lagrange αναπτύσσονται οι ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις για τις συναρτήσεις Gerber-Shiu και δίνονται ακριβείς εκφράσεις για τις λύσεις αυτών των εξισώσεων μέσω μιας σχετικής σύνθετης γεωμετρικής κατανομής. Επίσης, εξετάζεται η περίπτωση όπου ο μετασχηματισμός Laplace του μεγέθους των ασφαλίστρων είναι ρητή συνάρτηση.

3.3.1 Περιγραφή του μοντέλου

Στο μοντέλο κινδύνου που εξετάζουμε, η διαδικασία πλεονάσματος έχει τη μορφή της εξίσωσης 3.1.1, στο οποίο η απαριθμήτρια $N(t)$ είναι μια διαδικασία Poisson με ένταση $\lambda > 0$ η οποία καταγράφει τον αριθμό των απαιτήσεων μέχρι τη στιγμή t, Y_i είναι η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το μέγεθος της i-οστής απαίτησης, $M(t)$ είναι μια διαδικασία Poisson με ένταση μ οποία απαριθμεί τον αριθμό των ατομικών ασφαλίστρων μέχρι το χρόνο t και $\{X_i\}_{i \geq 1}$ είναι μια ακολουθία θετικών τυχαίων μεταβλητών που εκφράζουν τα μεγέθη των ατομικών ασφαλίστρων. Έστω $\{V_i\}_{i \geq 1}$ η ακολουθία των ενδιάμεσων χρόνων εμφάνισης διαδοχικών κινδύνων και $\{W_i\}_{i \geq 1}$ η ακολουθία των ενδιάμεσων χρόνων εμφάνισης διαδοχικών ασφαλίστρων. Σύμφωνα με τη διαδικασία Poisson, οι τυχαίες μεταβλητές $\{V_i\}_{i \geq 1}$ και $\{W_i\}_{i \geq 1}$ είναι εκθετικά κατανεμημένες με μέσους αντίστοιχα $1/\lambda$ και $1/\mu$.

Θεωρούμε επίσης μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομα κατανεμημένων τυχαίων μεταβλητών $\{B_i\}_{i\geq 1}$ που λειτουργούν ως κατώφλια συλλεκτικής μνήμης. Στο μοντέλο που εξετάζουμε, εάν ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών αφίξεων απαιτήσεων ξεπεράσει ένα συγκεκριμένο τυχαίο κατώφλι, τότε η κατανομή της απαίτησης θα αλλάξει. Μια ερμηνεία της θεώρησης αυτής είναι ότι εάν ο ενδιάμεσος χρόνος μεταξύ δύο απαιτήσεων υπερβεί τη συλλεκτική μνήμη, τότε έχουμε χαμηλότερο επίπεδο ετοιμότητας και το μέγεθος της ζημιάς θα είναι υψηλότερο. Έτσι, η εξέλιξη του κινδύνου προσδιορίζεται ως ακολούθως:

- Εάν $V_i < B_i$ τότε η απαίτηση Y_i που εμφανίζεται έχει συνάρτηση κατανομής $F_1(\cdot)$, το μέγεθος του ατομικού ασφαλίστρου X_i έχει συνάρτηση κατανομής $G_1(\cdot)$ και η συνάρτηση Gerber-Shiu είναι $m_1(u)$.
- Εάν $V_i \geq B_i$ τότε η απαίτηση Y_i έχει συνάρτηση κατανομής $F_2(\cdot)$, το ατομικό ασφάλιστρο X_i έχει συνάρτηση κατανομής $G_2(\cdot)$ και η συνάρτηση Gerber-Shiu είναι $m_2(u)$.

Οι συναρτήσεις πυκνότητας των Y_i και X_i, για $i = 1,2$, είναι αντίστοιχα $f_i(\cdot)$ και $g_i(\cdot)$, οι μέσες τιμές συμβολίζονται με μ_{F_i} και μ_{G_i} και οι μετασχηματισμοί Laplace των εν λόγω συναρτήσεων πυκνοτήτων είναι αντίστοιχα $\hat{f}(s)$, $\hat{g}(s)$. Επίσης θεωρούμε ότι τα κατώφλια B_i είναι εκθετικά κατανεμημένα με παράμετρο λ_1.

Τέλος, για να εξασφαλίζεται θετική πιθανότητα επιβίωσης, θεωρούμε ότι ισχύει η συνθήκη καθαρού κέρδους (δηλαδή στη μονάδα του χρόνου, τα αναμενόμενα έσοδα είναι μεγαλύτερα από τα αναμενόμενα έξοδα),

$$\mu[\lambda_1 \mu_{G_1} + (\mu+\lambda)\mu_{G_2}] > \lambda[\lambda_1 \mu_{F_1} + (\mu+\lambda)\mu_{F_2}]. \tag{3.3.1}$$

3.3.2 Μετασχηματισμοί Laplace των συναρτήσεων Gerber-Shiu για εκθετικά κατανεμημένα ατομικά ασφάλιστρα

Στόχος μας είναι να εστιάσουμε τη ανάλυση στην περίπτωση όπου η κατανομή των ατομικών ασφαλίστρων ακολουθούν την εκθετική κατανομή. Αρχικά στην Πρόταση 3.3.1 δίνεται ένα σύστημα ολοκληρωτικών εξισώσεων που ικανοποιούν οι συναρτήσεις Gerber-Shiu για μια αυθαίρετη κατανομή των ασφαλίστρων.

Πρόταση 3.3.1

Οι συναρτήσεις Gerber-Shiu $m_i(u)$, $i=1,2$, *δίνονται από τις σχέσεις*

$$m_1(u) = \frac{\mu}{\mu+\lambda+\delta}A_1(u) + \frac{\lambda\lambda_1}{(\mu+\lambda+\delta)(\lambda^*+\delta)}\left(\int_0^u m_1(u-y)f_1(y)dy + w_1(u)\right)$$
$$+\frac{\lambda}{\lambda^*+\delta}\left(\int_0^u m_2(u-y)f_2(y)dy + w_2(u)\right), \tag{3.3.2}$$

$$m_2(u) = \frac{\mu}{\mu+\lambda+\delta}A_2(u) + \frac{\lambda\lambda_1}{(\mu+\lambda+\delta)(\lambda^*+\delta)}\left(\int_0^u m_1(u-y)f_1(y)dy + w_1(u)\right)$$
$$+\frac{\lambda}{\lambda^*+\delta}\left(\int_0^u m_2(u-y)f_2(y)dy + w_2(u)\right), \tag{3.3.3}$$

όπου

$$A_i(u) = \int_0^\infty m_i(u+x)g_i(x)dx, \quad w_i(u) = \int_u^\infty \omega(u, y-u)f_i(y)dy, \quad i = 1, 2, \quad \lambda^* = \mu+\lambda+\lambda_1.$$

Απόδειξη

Η πρώτη απαίτηση μπορεί να συμβεί πριν ή μετά την άφιξη του πρώτου ασφαλίστρου. Έστω η τυχαία μεταβλητή L που εκφράζει το χρόνο να συμβεί το νωρίτερο γεγονός, δηλαδή

$$L = \min\{V_1, W_1\}.$$

Αφού οι τυχαίες μεταβλητές V_1 και W_1 είναι εκθετικά κατανεμημένες με μέσους αντίστοιχα $1/\lambda$ και $1/\mu$, η συνάρτηση πυκνότητας της L είναι (Παράρτημα Π5)

$$f_L(t) = (\mu+\lambda)e^{-(\mu+\lambda)t}, \; t>0.$$

Έστω η συνάρτηση $m_1(u)$. Δεσμεύοντας ως προς το χρόνο του πρώτου γεγονότος (άφιξη ατομικού ασφαλίστρου ή απαίτησης) έχουμε για $u \geq 0$

$$m_1(u) = \int_0^\infty m_1(u \mid L=t) f_L(t)dt$$

και από το θεώρημα ολικής πιθανότητας

$$m_1(u) = \int_0^\infty [m_1(u \mid L=t, W_1 \leq V_1)P(W_1 \leq V_1) + m_1(u \mid L=t, V_1 \leq W_1)P(V_1 < W_1)](\mu+\lambda)e^{-(\mu+\lambda)t}dt$$

αλλά για τις εκθετικά κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές W_1 και V_1 είναι (Παράρτημα Π5)

$$P(W_1 \le V_1) = \frac{\mu}{\mu+\lambda} \qquad \text{και} \qquad P(V_1 < W_1) = \frac{\lambda}{\mu+\lambda},$$

οπότε

$$m_1(u) = \int_0^\infty \left(m_1(u \mid L=t, W_1 \le V_1) \frac{\mu}{\mu+\lambda} + m_1(u \mid L=t, V_1 \le W_1) \frac{\lambda}{\mu+\lambda} \right) (\mu+\lambda) e^{-(\mu+\lambda)t} dt$$

$$= \int_0^\infty [\mu\, m_1(u \mid L=t, W_1 \le V_1) + \lambda\, m_1(u \mid L=t, V_1 \le W_1)] e^{-(\mu+\lambda)t} dt .$$

Από το θεώρημα ολικής πιθανότητας στην περίπτωση που συμβεί πρώτα η απαίτηση, έχουμε

$$m_1(u) = \int_0^\infty \{\mu\, m_1(u \mid L=t, W_1 \le V_1) + \lambda [m_1(u \mid L=t, V_1 < W_1, B_1 > t) P(B_1 > t)$$
$$+ m_1(u \mid L=t, V_1 < W_1, B_1 \le t) P(B_1 \le t)]\} e^{-(\mu+\lambda)t} dt$$

Στο σημείο αυτό διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

α) Συμβαίνει πρώτα άφιξη ασφαλίστρου, έστω ύψους *x*. Τότε η διαδικασία συνεχίζεται με αποθεματικό $u+x$.

β) Συμβαίνει πρώτα άφιξη απαίτησης, έστω ύψους *y*,

β1) αν $y<u$, δηλαδή η απαίτηση είναι μικρότερη από το αρχικό αποθεματικό, τότε η διαδικασία συνεχίζεται με αποθεματικό $u-y$ και αν ο χρόνος μέχρι την άφιξη της απαίτησης είναι μικρότερος από το κατώφλι B_1 έχουμε τη συνάρτηση $m_1(u)$, ενώ αν είναι μεγαλύτερος ή ίσος από το κατώφλι έχουμε τη συνάρτηση $m_2(u)$,

β2) αν $y>u$, δηλαδή η απαίτηση είναι μεγαλύτερη από το αρχικό αποθεματικό, τότε εφαρμόζεται η συνάρτηση ποινής.

Έτσι η παραπάνω συνάρτηση Gerber-Shiu γίνεται

$$m_1(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t} \left\{ \mu \int_0^\infty m_1(u+x) g_1(x) dx + \lambda \left[P(B_1 \le t) \left(\int_0^u m_1(u-y) f_1(y) dy + \int_u^\infty \omega(u, y-u) f_1(y) dy \right) \right.\right.$$
$$\left.\left. + P(B_1 > t) \left(\int_0^u m_2(u-y) f_2(y) dy + \int_u^\infty \omega(u, y-u) f_2(y) dy \right) \right] \right\} e^{-(\mu+\lambda)t} dt$$

αλλά αφού το κατώφλι B είναι εκθετικά κατανεμημένο, είναι

$$P(B<t) = 1 - e^{-\lambda_1 t} \quad \text{και} \quad P(B>t) = e^{-\lambda_1 t}$$

και θέτοντας

$$A_1(u) = \int_0^\infty m_1(u+x) g_1(x) dx, \qquad w_i(u) = \int_u^\infty \omega(u, y-u) f_i(y) dy, \; i=1,2$$

έχουμε

$$m_1(u) = \mu\int_0^\infty e^{-(\mu+\lambda+\delta)t}dtA_1(u) + \lambda\int_0^\infty (1-e^{-\lambda_1 t})e^{-(\mu+\lambda+\delta)t}dt\left(\int_0^u m_1(u-y)f_1(y)dy + w_1(u)\right)$$
$$+\lambda\int_0^\infty e^{-(\mu+\lambda+\lambda_1+\delta)t}dt\left(\int_0^u m_2(u-y)f_2(y)dy + w_2(u)\right)$$

Υπολογίζοντας τα ολοκληρώματα ως προς t προκύπτει

$$m_1(u) = \frac{\mu}{\mu+\lambda+\delta}A_1(u) + \lambda\left(\frac{1}{\mu+\lambda+\delta} - \frac{1}{\mu+\lambda+\lambda_1+\delta}\right)\left(\int_0^u m_1(u-y)f_1(y)dy + w_1(u)\right)$$
$$+\frac{\lambda}{\mu+\lambda+\lambda_1+\delta}\left(\int_0^u m_2(u-y)f_2(y)dy + w_2(u)\right)$$

κάνοντας τις πράξεις στην πρώτη παρένθεση και θέτοντας $\lambda^* = \mu+\lambda+\lambda_1$ προκύπτει η (3.3.2). Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται και η (3.3.3).

□

Στη συνέχεια θεωρούμε ότι τα μεγέθη των ατομικών ασφαλίστρων είναι εκθετικά κατανεμημένα με συναρτήσεις πυκνότητας

$$g_i(x) = \frac{1}{\mu_{G_i}}e^{-\frac{x}{\mu_{G_i}}}, \text{ για } \mu_{G_i} > 0,\ i = 1, 2.$$

Η επόμενη πρόταση δίνει εκφράσεις για το μετασχηματισμό Laplace των συναρτήσεων Gerber-Shiu.

Πρόταση 3.3.2

Οι μετασχηματισμοί Laplace συναρτήσεων $m_i(u)$, $i=1,2$, δίνονται από τις σχέσεις

$$\hat{m}_1(s) = \frac{C_2(s)B_1(s) + \dfrac{\lambda\,\hat{f}_2(s)}{\lambda^*+\delta}B_2(s)}{\dfrac{\lambda^2\,\lambda_1\hat{f}_1(s)\,\hat{f}_2(s)}{(\mu+\lambda+\delta)(\lambda^*+\delta)^2} - C_1(s)C_2(s)}, \tag{3.3.4}$$

$$\hat{m}_2(s) = \frac{C_1(s)B_2(s) + \dfrac{\lambda\lambda_1\hat{f}_1(s)}{(\mu+\lambda+\delta)(\lambda^*+\delta)}B_1(s)}{\dfrac{\lambda^2\lambda_1\hat{f}_1(s)\,\hat{f}_2(s)}{(\mu+\lambda+\delta)(\lambda^*+\delta)^2} - C_1(s)C_2(s)}, \tag{3.3.5}$$

όπου,

$$C_1(s) = 1 - \frac{\mu}{(\mu+\lambda+\delta)(1-s\mu_{G_1})} - \frac{\lambda\,\lambda_1\hat{f}_1(s)}{(\mu+\lambda+\delta)(\lambda^*+\delta)},$$

$$C_2(s) = 1 - \frac{\mu}{(\mu+\lambda+\delta)(1-s\mu_{G_2})} - \frac{\lambda\,\hat{f}_2(s)}{\lambda^*+\delta},$$

$$B_1(s) = \frac{\mu\,\hat{m}_1\left(\dfrac{1}{\mu_{G_1}}\right)}{(\mu+\lambda+\delta)(1-s\mu_{G_1})} - \frac{\lambda\,\hat{w}_2(s)}{\lambda^*+\delta} - \frac{\lambda\,\lambda_1\,\hat{w}_1(s)}{(\mu+\lambda+\delta)(\lambda^*+\delta)},$$

$$B_2(s) = \frac{\mu\,\hat{m}_2\left(\dfrac{1}{\mu_{G_2}}\right)}{(\mu+\lambda+\delta)(1-s\mu_{G_2})} - \frac{\lambda\,\hat{w}_2(s)}{\lambda^*+\delta} - \frac{\lambda\,\lambda_1\,\hat{w}_1(s)}{(\mu+\lambda+\delta)(\lambda^*+\delta)}.$$

Απόδειξη

Οι μετασχηματισμοί Laplace των εμπλεκόμενων ποσοτήτων ορίζονται ως

$$\hat{m}_i(s) = L\{m_i(u)\} := \int_0^\infty e^{-su} m_i(u)du, \qquad i = 1, 2,$$

$$\hat{A}_i(s) = L\{A_i(u)\} := \int_0^\infty e^{-su} A_i(u)du, \qquad i = 1, 2,$$

$$\hat{w}_i(s) = L\{w_i(u)\} := \int_0^\infty e^{-su} w_i(u)du, \qquad i = 1, 2,$$

$$\hat{f}_i(s) = L\{f_i(y)\} := \int_0^\infty e^{-sy} f_i(y)dy, \qquad i = 1, 2.$$

Παίρνοντας μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη της (3.3.2) και εφαρμόζοντας την ιδιότητα της γραμμικότητας έχουμε

$$L\{m_1(u)\} = \frac{\mu}{\mu+\lambda+\delta} L\{A_1(u)\} + \frac{\lambda\lambda_1}{(\mu+\lambda+\delta)(\lambda^*+\delta)}\left(L\left\{\int_0^u m_1(u-y)\,f_1(y)dy\right\} + L\{w_1(u)\}\right)$$
$$+ \frac{\lambda}{\lambda^*+\delta}\left(L\left\{\int_0^u m_2(u-y)\,f_2(y)dy\right\} + L\{w_2(u)\}\right)$$

ο πρώτος μετασχηματισμός και στις δύο παρενθέσεις αφορά σε συνέλιξη, οπότε έχουμε

$$\hat{m}_1(s) = \frac{\mu}{\mu+\lambda+\delta}\hat{A}_1(s) + \frac{\lambda\,\lambda_1}{(\mu+\lambda+\delta)(\lambda^*+\delta)}[\hat{m}_1(s)\,\hat{f}_1(s) + \hat{w}_1(s)] + \frac{\lambda}{\lambda^*+\delta}[\hat{m}_2(s)\,\hat{f}_2(s) + \hat{w}_2(s)]. \tag{3.3.6}$$

Όμοια από την (3.3.3) αποδεικνύεται ότι ο μετασχηματισμός Laplace της $m_2(u)$ είναι

$$\hat{m}_2(s) = \frac{\mu}{\mu+\lambda+\delta}\hat{A}_2(s) + \frac{\lambda\lambda_1}{(\mu+\lambda+\delta)(\lambda^*+\delta)}[\hat{m}_1(s)\,\hat{f}_1(s) + \hat{w}_1(s)] + \frac{\lambda}{\lambda^*+\delta}[\hat{m}_2(s)\,\hat{f}_2(s) + \hat{w}_2(s)]. \tag{3.3.7}$$

Στην περίπτωση της εκθετικής κατανομής για τα ατομικά ασφάλιστρα που εξετάζουμε, ο μετασχηματισμός Laplace $\hat{A}_i(s)$, όπως έχει αποδειχθεί στη Σχέση (3.2.10) είναι

$$\hat{A}_i(s)=\frac{\hat{m}_i(s)-\hat{m}_i\left(\frac{1}{\mu_{G_i}}\right)}{1-s\mu_{G_i}}\ ,\ i=1,2 \qquad \text{με } \operatorname{Re}(s)\geq\frac{1}{\mu_{G_i}}. \tag{3.3.8}$$

Αντικαθιστώντας την (3.3.8) στις (3.3.6) και (3.3.7) και κάνοντας τις πράξεις, προκύπτουν οι (3.3.4) και (3.3.5).

□

Για να υπολογιστούν οι μετασχηματισμοί Laplace $\hat{m}_1(s)$ και $\hat{m}_2(s)$, ώστε στη συνέχεια να μπορούν να βρεθούν οι συναρτήσεις $m_1(u)$ και $m_2(u)$, χρειάζεται να προσδιοριστούν οι ποσότητες $\hat{m}_1\left(\frac{1}{\mu_{G_1}}\right)$ και $\hat{m}_2\left(\frac{1}{\mu_{G_2}}\right)$. Προς τούτο, θα μελετήσουμε τις ρίζες του κοινού παρονομαστή των (3.3.4) και (3.3.5), σύμφωνα με το επόμενο λήμμα.

Λήμμα 3.3.1

Για $\delta>0$, η εξίσωση

$$\frac{\lambda^2\lambda_1\hat{f}_1(s)\hat{f}_2(s)}{(\mu+\lambda+\delta)(\lambda^*+\delta)^2}-C_1(s)C_2(s)=0 \tag{3.3.9}$$

έχει ακριβώς δύο ρίζες, έστω $\rho_1(\delta)$ και $\rho_2(\delta)$, στο δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο, δηλαδή $\operatorname{Re}\rho_i(\delta)>0$ για $i=1,2$.

Απόδειξη

Η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτή του Λήμματος 3.2.1 και παραλείπεται.

□

Στην περίπτωση που $\delta\to 0^+$ η ρίζα $\rho_1(\delta)\to 0^+$. Στη συνέχεια για λόγους απλοποίησης του συμβολισμού, θα γράφουμε τις ρίζες $\rho_i(\delta)$, $\delta>0$, ως ρ_i, i = 1, 2.

Αφού η $\hat{m}_i(s)$ είναι πεπερασμένη συνάρτηση για $\operatorname{Re}(s)\geq 0$, και ο παρονομαστής της μηδενίζεται για $s=\rho_i$, i = 1, 2, θα πρέπει και ο αριθμητής στις (3.3.4) και (3.3.5) να μηδενίζεται στις ίδιες τιμές. Σε αντίθετη περίπτωση, δηλαδή αν οι αριθμητές για $s=\rho_i$ είναι διάφοροι του μηδενός θα έπρεπε να ισχύει $\hat{m}_i(s)=\infty$ το οποίο είναι άτοπο. Και οι δύο αριθμητές δίνουν το ίδιο σύστημα για τα $\hat{m}_1\left(\frac{1}{\mu_{G_1}}\right)$ και $\hat{m}_2\left(\frac{1}{\mu_{G_2}}\right)$. Έτσι για παράδειγμα από την (3.3.4) προκύπτουν οι εξισώσεις

$$\left(1-\frac{\mu}{(\mu+\lambda+\delta)(1-\rho_i\mu_{G_2})}-\frac{\lambda\,\hat{f}_2(\rho_i)}{\lambda^*+\delta}\right)$$

$$\times\left(\frac{\mu\,\hat{m}_1\left(\dfrac{1}{\mu_{G_1}}\right)}{(\mu+\lambda+\delta)(1-\rho_i\mu_{G_1})}-\frac{\lambda\,\hat{w}_2(\rho_i)}{\lambda^*+\delta}-\frac{\lambda\,\lambda_1\,\hat{w}_1(\rho_i)}{(\mu+\lambda+\delta)(\lambda^*+\delta)}\right)$$

$$+\frac{\lambda\,\hat{f}_2(\rho_i)}{\lambda^*+\delta}\left(\frac{\mu\,\hat{m}_2\left(\dfrac{1}{\mu_{G_2}}\right)}{(\mu+\lambda+\delta)(1-\rho_i\mu_{G_2})}-\frac{\lambda\,\hat{w}_2(\rho_i)}{\lambda^*+\delta}-\frac{\lambda\,\lambda_1\,\hat{w}_1(\rho_i)}{(\mu+\lambda+\delta)(\lambda^*+\delta)}\right)=0, \quad i=1,2.$$

(3.3.10)

Από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων (3.3.10) θα προκύψουν τα $\hat{m}_1\left(\frac{1}{\mu_{G_1}}\right)$ και $\hat{m}_2\left(\frac{1}{\mu_{G_2}}\right)$ και στη συνέχεια από τις (3.3.4) και (3.3.5) οι μετασχηματισμοί $\hat{m}_1(s)$ και $\hat{m}_2(s)$. Στην Ενότητα 3.3.5 παρουσιάζονται αριθμητικά παραδείγματα στα οποία υλοποιείται η εν λόγω διαδικασία.

3.3.3 Ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις για τις συναρτήσεις Gerber-Shiu

Στόχος μας τώρα είναι να δείξουμε ότι οι συναρτήσεις Gerber-Shiu $m_1(u)$ και $m_2(u)$ ικανοποιούν ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις. Αρχικά αναλύουμε το μετασχηματισμό Laplace των $m_1(u)$ και $m_2(u)$ σύμφωνα με την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 3.3.3

Για $\mathrm{Re}(s)>0$*, ο μετασχηματισμός Laplace* $\hat{m}_i(s)$ *ικανοποιεί τη σχέση*

$$\hat{m}_i(s)=\frac{T_sT_{\rho_2}T_{\rho_1}h_1(0)}{\mu_{G_1}\mu_{G_2}}\hat{m}_i(s)-\frac{T_sT_{\rho_2}T_{\rho_1}f_{i,2}(0)}{\mu_{G_1}\mu_{G_2}},\ i=1,2. \quad (3.3.11)$$

Απόδειξη

Οι (3.3.4) και (3.3.5) μπορούν να γραφούν εναλλακτικά ως

$$\hat{m}_1(s)=\frac{\hat{f}_{1,1}(s)+\hat{f}_{1,2}(s)}{\hat{h}_1(s)-\hat{h}_2(s)} \quad (3.3.12)$$

$$\hat{m}_2(s)=\frac{\hat{f}_{2,1}(s)+\hat{f}_{2,2}(s)}{\hat{h}_1(s)-\hat{h}_2(s)} \tag{3.3.13}$$

όπου

$$\hat{h}_1(s)=\frac{\mu\lambda(\lambda+\delta)\hat{f}_2(s)+\lambda(\lambda+\delta)[(\lambda+\delta)\hat{f}_2(s)+\lambda_1\hat{f}_1(s)]}{(\lambda^*+\delta)(\mu+\lambda+\delta)^2}$$

$$+\frac{s^2\lambda\mu_{G_1}\mu_{G_2}[(\mu+\lambda+\delta)\hat{f}_2(s)+\lambda_1\hat{f}_1(s)]}{(\lambda^*+\delta)(\mu+\lambda+\delta)}$$

$$-\frac{s\lambda}{(\lambda^*+\delta)(\mu+\lambda+\delta)^2}\Big\{(\mu+\lambda+\delta)[\mu\mu_{G_1}+(\lambda+\delta)(\mu_{G_1}+\mu_{G_2})]\hat{f}_2(s),$$

$$+\lambda_1[\mu\mu_{G_2}+(\lambda+\delta)(\mu_{G_1}+\mu_{G_2})]\hat{f}_1(s)\Big\} \tag{3.3.13α}$$

$$\hat{h}_2(s)=(1-s\mu_{G_1})(1-s\mu_{G_2})-\frac{2\mu}{\mu+\lambda+\delta}+\frac{s\mu(\mu_{G_1}+\mu_{G_2})}{\mu+\lambda+\delta}+\frac{\mu^2}{(\mu+\lambda+\delta)^2}, \tag{3.3.13β}$$

$$\hat{f}_{1,1}(s)=\left(1-s\mu_{G_2}-\frac{\mu}{\mu+\lambda+\delta}\right)\frac{\mu\hat{m}_1\left(\frac{1}{\mu_{G_1}}\right)}{\mu+\lambda+\delta},$$

$$\hat{f}_{1,2}(s)=-\frac{\lambda\left[(\mu+\lambda+\delta)\mu\hat{f}_2(s)\left(\hat{m}_1\left(\frac{1}{\mu_{G_1}}\right)-\hat{m}_2\left(\frac{1}{\mu_{G_2}}\right)\right)+(\lambda+\delta)[(\mu+\lambda+\delta)\hat{w}_2(s)+\lambda_1\hat{w}_1(s)]\right]}{(\mu+\lambda+\delta)^2(\lambda^*+\delta)}$$

$$+\frac{s\lambda}{(\mu+\lambda+\delta)^2(\lambda^*+\delta)}\Bigg[(\mu+\lambda+\delta)\mu\hat{f}_2(s)\left(\hat{m}_1\left(\frac{1}{\mu_{G_1}}\right)\mu_{G_2}-\hat{m}_2\left(\frac{1}{\mu_{G_2}}\right)\mu_{G_1}\right)$$

$$+[\mu\mu_{G_2}+(\lambda+\delta)(\mu_{G_1}+\mu_{G_2})][(\mu+\lambda+\delta)\hat{w}_2(s)+\lambda_1\hat{w}_1(s)]\Bigg]$$

$$-\frac{s^2\lambda\mu_{G_1}\mu_{G_2}[(\mu+\lambda+\delta)\hat{w}_2(s)+\lambda_1\hat{w}_1(s)]}{(\mu+\lambda+\delta)(\lambda^*+\delta)},$$

$$\hat{f}_{2,1}(s)=\left(1-s\mu_{G_1}-\frac{\mu}{\mu+\lambda+\delta}\right)\frac{\mu\hat{m}_2\left(\frac{1}{\mu_{G_2}}\right)}{\mu+\lambda+\delta},$$

$$\hat{f}_{2,2}(s)=-\frac{\lambda\left[\mu\lambda_1\hat{f}_1(s)\left(\hat{m}_2\left(\frac{1}{\mu_{G_2}}\right)-\hat{m}_1\left(\frac{1}{\mu_{G_1}}\right)\right)+(\lambda+\delta)[(\mu+\lambda+\delta)\hat{w}_2(s)+\lambda_1\hat{w}_1(s)]\right]}{(\mu+\lambda+\delta)^2(\lambda^*+\delta)}$$

$$+\frac{s\lambda}{(\mu+\lambda+\delta)^2(\lambda^*+\delta)}\left[\mu\lambda_1\,\hat{f}_1(s)\left(\hat{m}_2\left(\frac{1}{\mu_{G_2}}\right)\mu_{G_1}-\hat{m}_1\left(\frac{1}{\mu_{G_1}}\right)\mu_{G_2}\right)\right.$$

$$\left.+[\mu\,\mu_{G_1}+(\lambda+\delta)(\mu_{G_1}+\mu_{G_2})][(\mu+\lambda+\delta)\hat{w}_2(s)+\lambda_1\hat{w}_1(s)]\right]$$

$$-\frac{s^2\lambda\mu_{G_1}\mu_{G_2}[(\mu+\lambda+\delta)\,\hat{w}_2(s)+\lambda_1\,\hat{w}_1(s)]}{(\mu+\lambda+\delta)(\lambda^*+\delta)}.$$

Έστω ότι οι αντίστροφοι μετασχηματισμοί Laplace των $\hat{f}_{1,1}(s)$, $\hat{f}_{1,2}(s)$, $\hat{f}_{2,1}(s)$, $\hat{f}_{2,2}(s)$, $\hat{h}_1(s)$ και $\hat{h}_2(s)$ συμβολίζονται αντίστοιχα με $f_{1,1}(u)$, $f_{1,2}(u)$, $f_{2,1}(u)$, $f_{2,2}(u)$, $h_1(u)$ και $h_2(u)$. Δηλαδή, κάνοντας χρήση του τελεστή Dickson-Hipp (Παράρτημα Π3) είναι $T_s f_{i,j}(0)=\hat{f}_{i,j}(s)$ και $T_s h_i(0)=\hat{h}_i(s)$, $i=1,2$, $j=1,2$.

Αφού η $\hat{m}_i(s)$, $i=1,2$, είναι αναλυτική συνάρτηση για $\mathrm{Re}(s)\geq 0$, οι αριθμητές των (3.3.12) και (3.3.13) μηδενίζονται για $s=\rho_i$, $i=1,2$. Συνεπώς,

$$\hat{f}_{i,1}(\rho_j)=-\hat{f}_{i,2}(\rho_j) \text{ για } i=1,2,\ j=1,2. \tag{3.3.14}$$

Παρατηρούμε ότι η $\hat{f}_{i,1}(s)$ είναι πολυώνυμο ως προς s πρώτου βαθμού. Από τον τύπο παρεμβολής Lagrange, είναι

$$\hat{f}_{i,1}(s)=\hat{f}_{i,1}(\rho_1)\frac{s-\rho_2}{\rho_1-\rho_2}+\hat{f}_{i,1}(\rho_2)\frac{s-\rho_1}{\rho_2-\rho_1}$$

και λόγω της (3.3.14)

$$=-\frac{\hat{f}_{i,2}(\rho_1)(s-\rho_2)-\hat{f}_{i,2}(\rho_2)(s-\rho_1)}{\rho_1-\rho_2}.$$

Για το άθροισμα $\hat{f}_{i,1}(s)+\hat{f}_{i,2}(s)$ έχουμε διαδοχικά

$$\hat{f}_{i,1}(s)+\hat{f}_{i,2}(s)=-\frac{\hat{f}_{i,2}(\rho_1)(s-\rho_2)-\hat{f}_{i,2}(\rho_2)(s-\rho_1)}{\rho_1-\rho_2}+\hat{f}_{i,2}(s)$$

$$=\frac{-\hat{f}_{i,2}(\rho_1)(s-\rho_2)+\hat{f}_{i,2}(\rho_2)(s-\rho_1)+\rho_1\hat{f}_{i,2}(s)-\rho_2\hat{f}_{i,2}(s)}{\rho_1-\rho_2}$$

$$=\frac{-\hat{f}_{i,2}(\rho_1)(s-\rho_2)+\hat{f}_{i,2}(\rho_2)(s-\rho_1)+\rho_1\hat{f}_{i,2}(s)-\rho_2\hat{f}_{i,2}(s)+s\,\hat{f}_{i,2}(s)-s\,\hat{f}_{i,2}(s)}{\rho_1-\rho_2}$$

$$=\frac{-\hat{f}_{i,2}(\rho_1)(s-\rho_2)+\hat{f}_{i,2}(\rho_2)(s-\rho_1)-(s-\rho_1)\,\hat{f}_{i,2}(s)+(s-\rho_2)\,\hat{f}_{i,2}(s)}{\rho_1-\rho_2}$$

$$= \frac{(s-\rho_2)[\hat{f}_{i,2}(s)-\hat{f}_{i,2}(\rho_1)]-(s-\rho_1)[\hat{f}_{i,2}(s)-\hat{f}_{i,2}(\rho_2)]}{\rho_1-\rho_2}$$

$$= (s-\rho_2)(s-\rho_1)\frac{\dfrac{\hat{f}_{i,2}(s)-\hat{f}_{i,2}(\rho_1)}{s-\rho_1}-\dfrac{\hat{f}_{i,2}(s)-\hat{f}_{i,2}(\rho_2)}{s-\rho_2}}{\rho_1-\rho_2}$$

$$= (s-\rho_1)(s-\rho_2)\frac{-T_s\,T_{\rho_1}\,f_{i,2}(0)+T_s\,T_{\rho_2}\,f_{i,2}(0)}{\rho_1-\rho_2}$$

$$= (s-\rho_1)(s-\rho_2)T_sT_{\rho_2}T_{\rho_1}\,f_{i,2}(0)\,. \tag{3.3.15}$$

Με παρόμοια διαδικασία βρίσκουμε μια εναλλακτική έκφραση για τον παρονομαστή των (3.3.12) και (3.3.13), $\hat{h}_1(s)-\hat{h}_2(s)$. Από το Λήμμα 3.3.1, έχουμε ότι ρ_i, $i=1,2$, είναι ρίζες του κοινού παρονομαστή στις (3.3.12) και (3.3.13), συνεπώς $\hat{h}_1(\rho_i)-\hat{h}_2(\rho_i)=0$ και ισοδύναμα

$$\hat{h}_1(\rho_i)=\hat{h}_2(\rho_i)\,,\; i=1,2\,. \tag{3.3.16}$$

Επίσης, βλέπουμε ότι η $\hat{h}_2(s)$ είναι πολυώνυμο ως προς s δευτέρου βαθμού. Με χρήση του τύπου παρεμβολής Lagrange στα σημεία $(0,\hat{h}_2(0))$, $(\rho_1,\hat{h}_2(\rho_1))$, $(\rho_2,\hat{h}_2(\rho_2))$, βρίσκουμε

$$\hat{h}_2(s)=\hat{h}_2(0)\frac{(s-\rho_1)(s-\rho_2)}{(0-\rho_1)(0-\rho_2)}+\hat{h}_2(\rho_1)\frac{(s-0)(s-\rho_2)}{(\rho_1-0)(\rho_1-\rho_2)}+\hat{h}_2(\rho_2)\frac{(s-0)(s-\rho_1)}{(\rho_2-0)(\rho_2-\rho_1)}$$

$$=\hat{h}_2(0)\frac{(s-\rho_1)(s-\rho_2)}{\rho_1\rho_2}+s\frac{\hat{h}_2(\rho_1)}{\rho_1}\frac{s-\rho_2}{\rho_1-\rho_2}+s\frac{\hat{h}_2(\rho_2)}{\rho_2}\frac{s-\rho_1}{\rho_2-\rho_1}$$

και λόγω της (3.3.16)

$$=\hat{h}_2(0)\frac{(s-\rho_1)(s-\rho_2)}{\rho_1\rho_2}+s\frac{\hat{h}_1(\rho_1)}{\rho_1}\frac{s-\rho_2}{\rho_1-\rho_2}+s\frac{\hat{h}_1(\rho_2)}{\rho_2}\frac{s-\rho_1}{\rho_2-\rho_1}$$

$$=\hat{h}_2(0)\frac{(s-\rho_1)(s-\rho_2)}{\rho_1\rho_2}+s\frac{\hat{h}_1(\rho_1)}{\rho_1}\frac{s-\rho_2}{\rho_1-\rho_2}-\rho_1\frac{\hat{h}_1(\rho_1)}{\rho_1}\frac{s-\rho_2}{\rho_1-\rho_2}+\hat{h}_1(\rho_1)\frac{s-\rho_2}{\rho_1-\rho_2}$$
$$+s\frac{\hat{h}_1(\rho_2)}{\rho_2}\frac{s-\rho_1}{\rho_2-\rho_1}-\rho_2\frac{\hat{h}_1(\rho_2)}{\rho_2}\frac{s-\rho_1}{\rho_2-\rho_1}+\hat{h}_1(\rho_2)\frac{s-\rho_1}{\rho_2-\rho_1}$$

$$=\hat{h}_2(0)\frac{(s-\rho_1)(s-\rho_2)}{\rho_1\rho_2}+(s-\rho_1)\frac{\hat{h}_1(\rho_1)}{\rho_1}\frac{s-\rho_2}{\rho_1-\rho_2}+\hat{h}_1(\rho_1)\frac{s-\rho_2}{\rho_1-\rho_2}$$
$$+(s-\rho_2)\frac{\hat{h}_1(\rho_2)}{\rho_2}\frac{s-\rho_1}{\rho_2-\rho_1}+\hat{h}_1(\rho_2)\frac{s-\rho_1}{\rho_2-\rho_1}$$

$$= \hat{h}_2(0)\frac{(s-\rho_1)(s-\rho_2)}{\rho_1\rho_2} + (s-\rho_1)(s-\rho_2)\left(\frac{\hat{h}_1(\rho_1)}{\rho_1(\rho_1-\rho_2)} + \frac{\hat{h}_1(\rho_2)}{\rho_2(\rho_2-\rho_1)}\right)$$

$$+ \hat{h}_1(\rho_1)\frac{s-\rho_2}{\rho_1-\rho_2} + \hat{h}_1(\rho_2)\frac{s-\rho_1}{\rho_2-\rho_1}.$$

Για τη διαφορά $\hat{h}_1(s) - \hat{h}_2(s)$ έχουμε διαδοχικά

$$\hat{h}_1(s) - \hat{h}_2(s) = -\hat{h}_2(0)\frac{(s-\rho_1)(s-\rho_2)}{\rho_1\rho_2} - (s-\rho_1)(s-\rho_2)\left(\frac{\hat{h}_1(\rho_1)}{\rho_1(\rho_1-\rho_2)} + \frac{\hat{h}_1\rho_2)}{\rho_2(\rho_2-\rho_1)}\right)$$

$$+ \hat{h}_1(s) - \hat{h}_1(\rho_1)\frac{s-\rho_2}{\rho_1-\rho_2} - \hat{h}_1(\rho_2)\frac{s-\rho_1}{\rho_2-\rho_1}$$

$$= (s-\rho_1)(s-\rho_2)\left[-\left(\frac{\hat{h}_2(0)}{\rho_1\rho_2} + \frac{\hat{h}_1(\rho_1)}{\rho_1(\rho_1-\rho_2)} + \frac{\hat{h}_1\rho_2)}{\rho_2(\rho_2-\rho_1)}\right)\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\hat{h}_1(s)}{(s-\rho_1)(s-\rho_2)} - \frac{\hat{h}_1(\rho_1)}{(s-\rho_1)(\rho_1-\rho_2)} - \frac{\hat{h}_1(\rho_2)}{(s-\rho_2)(\rho_2-\rho_1)}\right)\right]$$

$$= (s-\rho_1)(s-\rho_2)\left[-\left(\frac{\hat{h}_2(0)}{(0-\rho_1)(0-\rho_2)} + \frac{\hat{h}_1(\rho_1)}{(\rho_1-0)(\rho_1-\rho_2)} + \frac{\hat{h}_1\rho_2)}{(\rho_2-0)(\rho_2-\rho_1)}\right)\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\hat{h}_1(s)}{(s-\rho_1)(s-\rho_2)} + \frac{\hat{h}_1(\rho_1)}{(\rho_1-s)(\rho_1-\rho_2)} + \frac{\hat{h}_1(\rho_2)}{(\rho_2-s)(\rho_2-\rho_1)}\right)\right]$$

Αλλά, από την Ιδιότητα Α10 του Παραρτήματος Π3, η πρώτη παρένθεση είναι ίση με $T_0T_{\rho_2}T_{\rho_1}h_2(0)$ και η δεύτερη παρένθεση είναι ίση με $T_sT_{\rho_2}T_{\rho_1}h_2(0)$, οπότε

$$\hat{h}_1(s) - \hat{h}_2(s) = (s-\rho_1)(s-\rho_2)[T_sT_{\rho_2}T_{\rho_1}h_1(0) - T_0T_{\rho_2}T_{\rho_1}h_2(0)]. \qquad (3.3.17)$$

Επίσης ισχύει $T_0T_{\rho_2}T_{\rho_1}h_2(0) = \mu_{G_1}\mu_{G_2}$. Πράγματι, είναι

$$T_0T_{\rho_2}T_{\rho_1}h_2(0) = \frac{\hat{h}_2(0)}{(0-\rho_1)(0-\rho_2)} + \frac{\hat{h}_2(\rho_2)}{(\rho_2-0)(\rho_2-\rho_1)} + \frac{\hat{h}_2(\rho_1)}{(\rho_1-0)(\rho_1-\rho_2)}.$$

Από τη συνάρτηση $\hat{h}_2(s)$ βρίσκουμε τις τιμές της για $s=0$, $s=\rho_1$ και $s=\rho_2$. Στη συνέχεια αντικαθιστώντας στην παραπάνω έκφραση του $T_0T_{\rho_2}T_{\rho_1}h_2(0)$ και κάνοντας τις πράξεις, προκύπτει το ζητούμενο.

Συνεπώς, η (3.3.17) γίνεται

$$\hat{h}_1(s) - \hat{h}_2(s) = (s-\rho_1)(s-\rho_2)[T_sT_{\rho_2}T_{\rho_1}h_1(0) - \mu_{G_1}\mu_{G_2}]. \qquad (3.3.18)$$

Αντικαθιστώντας τις (3.3.15) και (3.3.18) στις (3.3.12) και (3.3.13) βρίσκουμε

$$\hat{m}_i(s) = \frac{T_s T_{\rho_2} T_{\rho_1} f_{i,2}(0)}{T_s T_{\rho_2} T_{\rho_1} h_1(0) - \mu_{G_1}\mu_{G_2}}, \qquad i = 1,2$$

από την οποία έχουμε

$$\hat{m}_i(s) T_s T_{\rho_2} T_{\rho_1} h_1(0) - \hat{m}_i(s)\mu_{G_1}\mu_{G_2} = T_s T_{\rho_2} T_{\rho_1} f_{i,2}(0)$$

ή

$$\hat{m}_i(s) = \frac{T_s T_{\rho_2} T_{\rho_1} h_1(0)}{\mu_{G_1}\mu_{G_2}} \hat{m}_i(s) - \frac{T_s T_{\rho_2} T_{\rho_1} f_{i,2}(0)}{\mu_{G_1}\mu_{G_2}}, \ i = 1,2$$

που είναι η ζητούμενη Εξίσωση (3.3.11).

□

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 3.3.3, μπορούμε τώρα να παράγουμε τις ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις που ικανοποιούν οι συναρτήσεις $m_i(u)$, $i = 1,2$.

Πρόταση 3.3.4

Η συνάρτηση Gerber-Shiu $m_i(u)$ *ικανοποιεί την παρακάτω ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση*

$$m_i(u) = \kappa_\delta \int_0^u m_i(u-y)\zeta(y)dy + \xi_i(u), \qquad i = 1,2, \qquad (3.3.19)$$

όπου,

$$\kappa_\delta = \frac{\mu\lambda(\lambda+\delta)T_0 T_{\rho_2} T_{\rho_1} f_2(0) + \lambda(\lambda+\delta)[(\lambda+\delta)T_0 T_{\rho_2} T_{\rho_1} f_2(0) + \lambda_1 T_0 T_{\rho_2} T_{\rho_1} f_1(0)]}{\mu_{G_1}\mu_{G_2}(\lambda^* + \delta)(\mu+\lambda+\delta)^2}$$

$$+\frac{\lambda}{(\lambda^*+\delta)(\mu+\lambda+\delta)}[(\mu+\lambda+\delta)[1-(\rho_2+\rho_1)T_0 T_{\rho_2} f_2(0) + \rho_1^2 T_0 T_{\rho_2} T_{\rho_1} f_2(0)]$$

$$+\lambda_1[1-(\rho_2+\rho_1)T_0 T_{\rho_2} f_1(0) + \rho_1^2 T_0 T_{\rho_2} T_{\rho_1} f_1(0)]]$$

$$-\frac{\lambda}{\mu_{G_1}\mu_{G_2}(\lambda^*+\delta)(\mu+\lambda+\delta)^2}[(\mu+\lambda+\delta)(\lambda\mu_{G_1} + (\lambda+\delta)(\mu_{G_1}+\mu_{G_2}))$$

$$\times(\rho_1 T_0 T_{\rho_2} T_{\rho_1} f_2(0) - T_0 T_{\rho_2} f_2(0)) + \lambda_1[\mu\,\mu_{G_1} + (\lambda+\delta)(\mu_{G_1}+\mu_{G_2})]$$

$$\times(\rho_1 T_0 T_{\rho_2} T_{\rho_1} f_1(0) - T_0 T_{\rho_2} f_1(0)]],$$

$$\zeta(y) = \frac{1}{\kappa_\delta}\left\{\frac{\mu\lambda(\lambda+\delta)T_{\rho_2} T_{\rho_1} f_2(y) + \lambda(\lambda+\delta)[(\lambda+\delta)T_{\rho_2} T_{\rho_1} f_2(y) + \lambda_1 T_{\rho_2} T_{\rho_1} f_1(y)]}{\mu_{G_1}\mu_{G_2}(\lambda^*+\delta)(\mu+\lambda+\delta)^2}\right.$$

$$+\frac{\lambda}{(\lambda^*+\delta)(\mu+\lambda+\delta)}[(\mu+\lambda+\delta)[f_2(y) - (\rho_1+\rho_2)T_{\rho_2} f_2(y) + \rho_1^2 T_{\rho_2} T_{\rho_1} f_2(y)]$$

$$
+\lambda_1[f_1(y)-(\rho_1+\rho_2)T_{\rho_2}f_1(y)+\rho_1^2T_{\rho_2}T_{\rho_1}f_1(y)]]-\frac{\lambda}{(\lambda^*+\delta)(\mu+\lambda+\delta)^2\mu_{G_1}\mu_{G_2}}
$$

$$
\times[(\mu+\lambda+\delta)[\mu\mu_{G_1}+(\lambda+\delta)(\mu_{G_1}+\mu_{G_2})](\rho_1T_{\rho_2}T_{\rho_1}f_2(y)-T_{\rho_2}f_2(y))
$$

$$
\left.+\lambda(\mu\mu_{G_2}+(\lambda+\delta)(\mu_{G_1}+\mu_{G_2}))(\rho_1T_{\rho_2}T_{\rho_1}f_1(y)-T_{\rho_2}f_1(y))]\right\},
$$

$$
\xi_1(u)=\frac{\lambda}{(\lambda^*+\delta)(\mu+\lambda+\delta)^2\mu_{G_1}\mu_{G_2}}\left[(\mu+\lambda+\delta)\mu T_{\rho_2}T_{\rho_1}f_2(u)\left(\hat{m}_1\left(\frac{1}{\mu_{G_1}}\right)-\hat{m}_2\left(\frac{1}{\mu_{G_2}}\right)\right)\right.
$$

$$
\left.+(\lambda+\delta)[(\mu+\lambda+\delta)T_{\rho_2}T_{\rho_1}w_2(u)+\lambda_1T_{\rho_2}T_{\rho_1}w_1(u)]\right]
$$

$$
-\frac{\lambda}{(\lambda^*+\delta)(\mu+\lambda+\delta)^2\mu_{G_1}\mu_{G_2}}\Big[(\mu+\lambda+\delta)\mu[\rho_1T_{\rho_2}T_{\rho_1}f_2(u)-T_{\rho_2}f_2(u)]
$$

$$
\times\left(\hat{m}_1\left(\frac{1}{\mu_{G_1}}\right)\mu_{G_2}-\hat{m}_2\left(\frac{1}{\mu_{G_2}}\right)\mu_{G_1}\right)+[\mu\mu_{G_2}+(\lambda+\delta)(\mu_{G_1}+\mu_{G_2})]
$$

$$
\times((\mu+\lambda+\delta)(\rho_1T_{\rho_2}T_{\rho_1}w_2(u)-T_{\rho_2}w_2(u))+\lambda_1(\rho_1T_{\rho_2}T_{\rho_1}w_1(u)-T_{\rho_2}w_1(u)))\Big]
$$

$$
+\frac{\lambda}{(\lambda^*+\delta)(\mu+\lambda+\delta)}((\mu+\lambda+\delta)(w_2(u)-(\rho_1+\rho_2)T_{\rho_2}w_2(u)+\rho_1^2T_{\rho_2}T_{\rho_1}w_2(u))
$$

$$
+\lambda_1(w_1(u)-(\rho_1+\rho_2)T_{\rho_2}w_1(u)+\rho_1^2T_{\rho_2}T_{\rho_1}w_2(u))),
$$

$$
\xi_2(u)=\frac{\lambda}{(\lambda^*+\delta)(\mu+\lambda+\delta)^2\mu_{G_1}\mu_{G_2}}\left[\lambda_1\mu T_{\rho_2}T_{\rho_1}f_1(u)\left(\hat{m}_2\left(\frac{1}{\mu_{G_2}}\right)-\hat{m}_1\left(\frac{1}{\mu_{G_1}}\right)\right)\right.
$$

$$
\left.+(\lambda+\delta)((\mu+\lambda+\delta)T_{\rho_2}T_{\rho_1}w_2(u)+\lambda_1T_{\rho_2}T_{\rho_1}w_1(u))\right]
$$

$$
-\frac{\lambda}{(\lambda^*+\delta)(\mu+\lambda+\delta)^2\mu_{G_1}\mu_{G_2}}\Big[\lambda_1\mu(\rho_1T_{\rho_2}T_{\rho_1}f_1(y)-T_{\rho_2}f_1(u))
$$

$$
\times\left(\hat{m}_2\left(\frac{1}{\mu_{G_2}}\right)\mu_{G_1}-\hat{m}_1\left(\frac{1}{\mu_{G_1}}\right)\mu_{G_2}\right)+[\mu\mu_{G_1}+(\lambda+\delta)(\mu_{G_1}+\mu_{G_2})]
$$

$$
\times((\mu+\lambda+\delta)(\rho_1T_{\rho_2}T_{\rho_1}w_2(u)-T_{\rho_2}w_2(u))+\lambda_1(\rho_1T_{\rho_2}T_{\rho_1}w_1(u)-T_{\rho_2}w_1(u)))\Big]
$$

$$
+\frac{\lambda}{(\lambda^*+\delta)(\mu+\lambda+\delta)}((\mu+\lambda+\delta)(w_2(u)-(\rho_1+\rho_2)T_{\rho_2}w_2(u)+\rho_1^2T_{\rho_2}T_{\rho_1}w_2(u))
$$

$$
+\lambda_1(w_1(u)-(\rho_1+\rho_2)T_{\rho_2}w_1(u)+\rho_1^2T_{\rho_2}T_{\rho_1}w_1(u))).
$$

Απόδειξη

Από τις ιδιότητες του τελεστή Dickson-Hipp (Παράρτημα Π3), έχουμε

$$\frac{\dfrac{\hat{f}(s)-\hat{f}(\rho_2)}{s-\rho_2}-\dfrac{\hat{f}(s)-\hat{f}(\rho_1)}{s-\rho_1}}{\rho_2-\rho_1}=\frac{T_sT_{\rho_1}f(0)-T_sT_{\rho_2}f(0)}{\rho_2-\rho_1}=T_sT_{\rho_2}T_{\rho_1}f(0)\,, \tag{3.3.20}$$

$$\begin{aligned}\frac{\dfrac{s\,\hat{f}(s)-\rho_2\hat{f}(\rho_2)}{s-\rho_2}-\dfrac{s\,\hat{f}(s)-\rho_1\hat{f}(\rho_1)}{s-\rho_1}}{\rho_2-\rho_1}&=\frac{\rho_1T_sT_{\rho_1}f(0)-\rho_2T_sT_{\rho_2}f(0)}{\rho_2-\rho_1}\\&=\rho_1T_sT_{\rho_2}T_{\rho_1}f(0)-T_sT_{\rho_2}f(0)\,,\end{aligned} \tag{3.3.21}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\dfrac{s^2\hat{f}(s)-\rho_2^2\hat{f}(\rho_2)}{s-\rho_2}-\dfrac{s^2\hat{f}(s)-\rho_1^2\hat{f}(\rho_1)}{s-\rho_1}}{\rho_2-\rho_1}\\&\qquad=\frac{\rho_2\hat{f}(s)-\rho_1\hat{f}(s)}{\rho_2-\rho_1}-\frac{\rho_2^2T_sT_{\rho_2}f(0)-\rho_1^2T_sT_{\rho_1}f(0)}{\rho_2-\rho_1}\\&\qquad=\hat{f}(s)-(\rho_2+\rho_1)T_sT_{\rho_2}f(0)-\rho_1^2T_sT_{\rho_2}T_{\rho_1}f(0)\,.\end{aligned} \tag{3.3.22}$$

Από τον ορισμό του τελεστή T_r και τις (3.3.20)–(3.3.22), έχουμε

$$\begin{aligned}T_sT_{\rho_2}T_{\rho_1}h_1(0)&=\frac{\mu\lambda(\lambda+\delta)T_sT_{\rho_2}T_{\rho_1}f_2(0)+\lambda(\lambda+\delta)[(\lambda+\delta)T_sT_{\rho_2}T_{\rho_1}f_2(0)+\lambda_1T_sT_{\rho_2}T_{\rho_1}f_1(0)]}{(\lambda^*+\delta)(\mu+\lambda+\delta)^2}\\&+\frac{\lambda\mu_{G_1}\mu_{G_2}}{(\lambda^*+\delta)(\mu+\lambda+\delta)}[(\mu+\lambda+\delta)(\hat{f}_2(s)-(\rho_2+\rho_1)T_sT_{\rho_2}f_2(0)+\rho_1^2T_sT_{\rho_2}T_{\rho_1}f_2(0))\\&+\lambda_1\hat{f}_1(s)-(\rho_2+\rho_1)T_sT_{\rho_2}f_1(0)+\rho_1^2T_sT_{\rho_2}T_{\rho_1}f_1(0))]\\&-\frac{\lambda}{(\lambda^*+\delta)(\mu+\lambda+\delta)^2}[(\mu+\lambda+\delta)[\mu\,\mu_{G_1}+(\lambda+\delta)(\mu_{G_1}+\mu_{G_2})]\\&\times[\rho_1T_sT_{\rho_2}T_{\rho_1}f_2(0)-T_sT_{\rho_2}f_2(0)]+\lambda_1[\mu\,\mu_{G_2}+(\lambda+\delta)(\mu_{G_1}+\mu_{G_2})]\\&\times(\rho_1T_sT_{\rho_2}T_{\rho_1}f_1(0)-T_{\rho_2}T_{\rho_2}f_1(0))]\,,\end{aligned} \tag{3.3.23}$$

καθώς και

$$\begin{aligned}T_sT_{\rho_2}T_{\rho_1}f_{1,2}(0)&=-\frac{\lambda}{(\lambda^*+\delta)(\mu+\lambda+\delta)^2}\left[(\mu+\lambda+\delta)\mu T_sT_{\rho_2}T_{\rho_1}f_2(0)\left(\hat{m}_1\left(\frac{1}{\mu_{G_1}}\right)-\hat{m}_2\left(\frac{1}{\mu_{G_2}}\right)\right)\right.\\&\left.+(\lambda+\delta)[(\mu+\lambda+\delta)T_sT_{\rho_2}T_{\rho_1}w_2(0)+\lambda_1T_sT_{\rho_2}T_{\rho_1}w_1(0)]\right]\\&+\frac{\lambda}{(\lambda^*+\delta)(\mu+\lambda+\delta)^2}\Big[\ (\mu+\lambda+\delta)\mu(\rho_1T_sT_{\rho_2}T_{\rho_1}f_2(0)-T_sT_{\rho_2}f_2(0))\end{aligned}$$

$$\times\left(\hat{m}_1\left(\frac{1}{\mu_{G_1}}\right)\mu_{G_2}-\hat{m}_2\left(\frac{1}{\mu_{G_2}}\right)\mu_{G_1}\right)+[\mu\,\mu_{G_2}+(\lambda+\delta)(\mu_{G_1}+\mu_{G_2})]$$

$$\times[(\mu+\lambda+\delta)(\rho_1 T_s T_{\rho_2}T_{\rho_1}w_2(0)-T_sT_{\rho_2}w_2(0))+\lambda_1(\rho_1 T_s T_{\rho_2}T_{\rho_1}w_1(0)-T_sT_{\rho_2}w_1(0))]\Bigg]$$

$$-\frac{\lambda\mu_{G_1}\mu_{G_2}}{(\lambda^*+\delta)(\mu+\lambda+\delta)}[(\mu+\lambda+\delta)(\hat{w}_2(s)-(\rho_1+\rho_2)T_sT_{\rho_2}w_2(0)+\rho_1^2T_sT_{\rho_2}T_{\rho_1}w_2(0))$$

$$+\lambda_1(\hat{w}_1(s)-(\rho_1+\rho_2)T_sT_{\rho_2}w_1(0)+\rho_1^2T_sT_{\rho_2}T_{\rho_1}w_1(0))]$$

$$=-\mu_{G_1}\mu_{G_2}T_s\,\xi_1(0)\,, \qquad (3.3.24)$$

και επίσης

$$T_sT_{\rho_2}T_{\rho_1}f_{2,2}(0)=-\frac{\lambda}{(\lambda^*+\delta)(\mu+\lambda+\delta)^2}\Bigg[\lambda_1\mu T_sT_{\rho_2}T_{\rho_1}f_1(u)\left(\hat{m}_2\left(\frac{1}{\mu_{G_2}}\right)-\hat{m}_1\left(\frac{1}{\mu_{G_1}}\right)\right)$$

$$+(\lambda+\delta)[(\mu+\lambda+\delta)T_sT_{\rho_2}T_{\rho_1}w_2(0)+\lambda_1T_sT_{\rho_2}T_{\rho_1}w_1(0)]\Bigg]$$

$$+\frac{\lambda}{(\lambda^*+\delta)(\mu+\lambda+\delta)^2}\Big[\lambda_1\mu(\rho_1T_sT_{\rho_2}T_{\rho_1}f_1(0)-T_sT_{\rho_2}f_1(0))$$

$$\times\left(\hat{m}_2\left(\frac{1}{\mu_{G_2}}\right)\mu_{G_1}-\hat{m}_1\left(\frac{1}{\mu_{G_1}}\right)\mu_{G_2}\right)+[\mu\,\mu_{G_1}+(\lambda+\delta)(\mu_{G_1}+\mu_{G_2})]$$

$$\times[(\mu+\lambda+\delta)(\rho_1 T_s T_{\rho_2}T_{\rho_1}w_2(0)-T_sT_{\rho_2}w_2(0))+\lambda_1(\rho_1 T_s T_{\rho_2}T_{\rho_1}w_1(0)-T_sT_{\rho_2}w_1(0))]\Bigg]$$

$$-\frac{\lambda\mu_{G_1}\mu_{G_2}}{(\lambda^*+\delta)(\mu+\lambda+\delta)}[(\mu+\lambda+\delta)(\hat{w}_2(s)-(\rho_1+\rho_2)T_sT_{\rho_2}w_2(0)+\rho_1^2T_sT_{\rho_2}T_{\rho_1}w_2(0))$$

$$+\lambda_1(\hat{w}_1(s)-(\rho_1+\rho_2)T_sT_{\rho_2}w_1(0)+\rho_1^2T_sT_{\rho_2}T_{\rho_1}w_1(0))]$$

$$=-\mu_{G_1}\mu_{G_2}T_s\xi_2(0)\,. \qquad (3.3.25)$$

Αντικαθιστώντας τις (3.3.23)-(3.3.25) στην 3.3.11, βρίσκουμε

$$\hat{m}_i(s)=\frac{T_s\,T_{\rho_2}T_{\rho_1}h_1(0)}{\mu_{G_1}\mu_{G_2}}\hat{m}_i(s)+T_s\,\hat{\xi}_i(0)\,, \qquad i=1,2\,. \qquad (3.3.26)$$

Παίρνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace στην (3.3.26), παίρνουμε

$$m_i(u)=\frac{T_0\,T_{\rho_2}T_{\rho_1}h_1(0)}{\mu_{G_1}\mu_{G_2}}\int_0^u m_i(u-y)\frac{T_{\rho_2}T_{\rho_1}h_1(y)}{T_0T_{\rho_2}T_{\rho_1}h_1(0)}dy+\hat{\xi}_i(u)\,, \qquad (3.3.27)$$

που αντιστοιχεί στην (3.3.19).

Για να είναι η (3.3.19) μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση, αρκεί να δείξουμε ότι $\kappa_\delta < 1$.

Αρχικά θεωρούμε $\delta > 0$. Συγκρίνοντας την (3.3.27) με την (3.3.19) είναι

$$\kappa_\delta = \frac{T_0 T_{\rho_2} T_{\rho_1} h_1(0)}{\mu_{G_1}\mu_{G_2}}.$$

Αλλά θέτοντας $s = 0$ στην (3.3.18), έχουμε

$$T_0 T_{\rho_2} T_{\rho_1} h_1(0) = \frac{\hat{h}_1(0) - \hat{h}_2(0)}{\rho_1\rho_2} + \mu_{G_1}\mu_{G_2}$$

οπότε

$$\kappa_\delta = \frac{\hat{h}_1(0) - \hat{h}_2(0)}{\mu_{G_1}\mu_{G_2}\rho_1\rho_2} + 1. \qquad (3.3.28)$$

Από τις (3.3.13α) και (3.3.13β) βρίσκουμε

$$\hat{h}_1(0) = \frac{\mu\lambda(\lambda+\delta)\hat{f}_2(0) + \lambda(\lambda+\delta)[(\lambda+\delta)\hat{f}_2(0) + \lambda_1\hat{f}_1(0)]}{(\lambda^*+\delta)(\mu+\lambda+\delta)^2}$$

$$= \frac{\mu\lambda(\lambda+\delta) + \lambda(\lambda+\delta)(\lambda+\delta+\lambda_1)}{(\lambda^*+\delta)(\mu+\lambda+\delta)^2} = \frac{\lambda(\lambda+\delta)(\mu+\lambda+\delta+\lambda_1)}{(\lambda^*+\delta)(\mu+\lambda+\delta)^2} = \frac{\lambda(\lambda+\delta)(\lambda^*+\delta)}{(\lambda^*+\delta)(\mu+\lambda+\delta)^2}$$

$$= \frac{\lambda(\lambda+\delta)}{(\mu+\lambda+\delta)^2}$$

και

$$\hat{h}_2(0) = 1 - \frac{2\mu}{\mu+\lambda+\delta} + \frac{\mu^2}{(\mu+\lambda+\delta)^2} = \frac{\lambda+\delta-\mu}{\mu+\lambda+\delta} + \frac{\mu^2}{(\mu+\lambda+\delta)^2} = \frac{(\lambda+\delta-\mu)(\mu+\lambda+\delta)+\mu^2}{(\mu+\lambda+\delta)^2}$$

$$= \frac{(\lambda+\delta-\mu)(\mu+\lambda+\delta)+\mu^2}{(\mu+\lambda+\delta)^2} = \frac{(\lambda+\delta)(\mu+\lambda+\delta) - \mu^2 - \mu(\lambda+\delta) + \mu^2}{(\mu+\lambda+\delta)^2} = \frac{(\lambda+\delta)(\lambda+\delta)}{(\mu+\lambda+\delta)^2}$$

οπότε

$$\hat{h}_1(0) - \hat{h}_2(0) = \frac{\lambda(\lambda+\delta)}{(\mu+\lambda+\delta)^2} - \frac{(\lambda+\delta)(\lambda+\delta)}{(\mu+\lambda+\delta)^2} = \frac{-(\lambda+\delta)\delta}{(\mu+\lambda+\delta)^2}$$

Συνεπώς, η (3.3.28) γίνεται

$$\kappa_\delta = 1 - \frac{(\lambda+\delta)\delta}{\mu_{G_1}\mu_{G_2}\rho_1\rho_2(\mu+\lambda+\delta)^2} \qquad (3.3.29)$$

και εφ' όσον $\rho_1(\delta) > 0$ και $\rho_2(\delta) > 0$ προκύπτει ότι $\kappa_\delta < 1$.

Εξετάζουμε τώρα την περίπτωση $\delta = 0$. Αρχικά από την (3.3.9) πολλαπλασιάζοντάς την με $(1-\mu_{G_1}s)(1-\mu_{G_2}s)$ παίρνουμε

$$\frac{\lambda^2 \lambda_1 \hat{f}_1(s) \hat{f}_2(s)(1-\mu_{G_1}s)(1-\mu_{G_2}s)}{(\mu+\lambda+\delta)(\lambda^*+\delta)^2} - C_1(s)C_2(s)(1-\mu_{G_1}s)(1-\mu_{G_2}s) = 0$$

και αντικαθιστώντας τα $C_1(s)$, $C_2(s)$ βρίσκουμε

$$\frac{\lambda^2 \lambda_1 \hat{f}_1(s) \hat{f}_2(s)(1-\mu_{G_1}s)(1-\mu_{G_2}s)}{(\mu+\lambda+\delta)(\lambda^*+\delta)^2} - \left(1-\mu_{G_1}s - \frac{\mu}{\mu+\lambda+\delta} - \frac{\lambda\lambda_1(1-\mu_{G_1}s)\hat{f}_1(s)}{(\mu+\lambda+\delta)(\lambda^*+\delta)}\right)$$

$$\times\left(1-\mu_{G_2}s - \frac{\mu}{\mu+\lambda+\delta} - \frac{\lambda(1-\mu_{G_2}s)\hat{f}_2(s)}{\lambda^*+\delta}\right) = 0$$

όπου μετά από πράξεις ισοδύναμα προκύπτει

$$\left(1-\mu_{G_1}s - \frac{\mu}{\mu+\lambda+\delta}\right)\left(1-\mu_{G_2}s - \frac{\mu}{\mu+\lambda+\delta}\right)$$

$$= \left(1-\mu_{G_1}s - \frac{\mu}{\mu+\lambda+\delta}\right)\frac{\lambda(1-\mu_{G_2}s)\hat{f}_2(s)}{\lambda^*+\delta}$$

$$+ \left(1-\mu_{G_2}s - \frac{\mu}{\mu+\lambda+\delta}\right)\frac{\lambda\lambda_1(1-\mu_{G_1}s)\hat{f}_1(s)}{(\mu+\lambda+\delta)(\lambda^*+\delta)}.$$

Αντικαθιστώντας στην τελευταία σχέση $s=\rho_1(\delta)$ παίρνουμε

$$\left(1-\rho_1(\delta)\mu_{G_1} - \frac{\mu}{\mu+\lambda+\delta}\right)\left(1-\rho_1(\delta)\mu_{G_2} - \frac{\mu}{\mu+\lambda+\delta}\right)$$

$$= \left(1-\rho_1(\delta)\mu_{G_1} - \frac{\mu}{\mu+\lambda+\delta}\right)\frac{\lambda(1-\rho_1(\delta)\mu_{G_2})\hat{f}_2(\rho_1(\delta))}{\lambda^*+\delta}$$

$$+ \left(1-\rho_1(\delta)\mu_{G_2} - \frac{\mu}{\mu+\lambda+\delta}\right)\frac{\lambda\lambda_1(1-\rho_1(\delta)\mu_{G_1})\hat{f}_1(\rho_1(\delta))}{(\mu+\lambda+\delta)(\lambda^*+\delta)}.$$

Παραγωγίζοντας την τελευταία ως προς δ και μετά θέτοντας $\delta=0$, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $\rho_1(0)=0$, προκύπτει

$$\rho_1'(0) = \frac{\mu+\lambda+\lambda_1}{\mu\lambda_1\mu_{G_1} + \mu(\mu+\lambda)\mu_{G_2} - \lambda\lambda_1\mu_{F_1} - \lambda(\mu+\lambda)\mu_{F_2}} > 0$$

όπου η ανισότητα δικαιολογείται από τη συνθήκη (3.3.1).

Από την (3.3.29) είναι

$$\kappa_0 = \lim_{\delta\to 0^+}\kappa_\delta = 1 - \lim_{\delta\to 0^+}\frac{(\lambda+\delta)\delta}{\mu_{G_1}\mu_{G_2}\rho_1\rho_2(\mu+\lambda+\delta)^2}$$

αλλά το όριο του πηλίκου είναι απροσδιοριστία $\left(\frac{0}{0}\right)$, οπότε εφαρμόζοντας τον κανόνα L'Hospital βρίσκουμε

$$\kappa_0 = 1 - \frac{1}{\mu_{G_1}\mu_{G_2}(\mu+\lambda)^2\rho_2}\lim_{\delta\to 0^+}\frac{\delta^2+\lambda\delta}{\rho_1(\delta)} = 1 - \frac{1}{\mu_{G_1}\mu_{G_2}(\mu+\lambda)^2\rho_2}\lim_{\delta\to 0^+}\frac{\delta+\lambda}{\frac{\rho_1(\delta)}{\delta}}$$

$$= 1 - \frac{1}{\mu_{G_1}\mu_{G_2}(\mu+\lambda)^2\rho_2}\frac{\lambda}{\lim\limits_{\delta\to 0^+}\frac{\rho_1(\delta)}{\delta}} = 1 - \frac{\lambda}{\mu_{G_1}\mu_{G_2}(\mu+\lambda)^2\rho_2\rho_1'(0)}$$

και αφού $\rho_1'(0) > 0$, τελικά είναι $\kappa_0 < 1$.

Έτσι η Εξίσωση (3.3.19) είναι μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

□

Αναλυτικές λύσεις της ελλειμματικής ανανεωτικής Εξίσωσης (3.3.19) μπορούν να δοθούν με άμεση εφαρμογή της Πρότασης 1.2.

3.3.4 Ασφάλιστρα με μετασχηματισμό Laplace που ανήκει στη ρητή οικογένεια κατανομών

Στην ενότητα αυτή εξετάζουμε, όπως και στην Ενότητα 3.2.3, την περίπτωση στην οποία τα μεγέθη των ατομικών ασφαλίστρων έχουν μετασχηματισμό Laplace που ανήκει στη ρητή οικογένεια κατανομών, δηλαδή είναι της μορφής (3.2.32). Λαμβάνοντας υπ' όψιν την Πρόταση 3.2.5, αντικαθιστούμε την (3.2.36) στις (3.3.6) και (3.3.7) και βρίσκουμε αντίστοιχα

$$\hat{m}_1(s) = \frac{\mu}{\mu+\lambda+\delta}[\hat{g}_1(-s)\hat{m}_1(s) - L_1(s)] + \frac{\lambda\lambda_1}{(\mu+\lambda+\delta)(\lambda^*+\delta)}[\hat{m}_1(s)\hat{f}_1(s) + \hat{w}_1(s)]$$
$$+\frac{\lambda}{\lambda^*+\delta}[\hat{m}_2(s)\hat{f}_2(s) + \hat{w}_2(s)]$$

και

$$\hat{m}_2(s) = \frac{\mu}{\mu+\lambda+\delta}[\hat{g}_2(-s)\hat{m}_2(s) - L_2(s)] + \frac{\lambda\lambda_1}{(\mu+\lambda+\delta)(\lambda^*+\delta)}[\hat{m}_1(s)\hat{f}_1(s) + \hat{w}_1(s)]$$
$$+\frac{\lambda}{\lambda^*+\delta}[\hat{m}_2(s)\hat{f}_2(s) + \hat{w}_2(s)].$$

Λύνοντας το σύστημα των δύο προηγούμενων εξισώσεων ως προς $\hat{m}_1(s)$ και $\hat{m}_2(s)$ προκύπτει

$$\hat{m}_1(s) = \frac{\mu(\lambda^*+\delta)v_2(s)L_1(s) + \mu\lambda(\lambda^*+\delta)(\mu+\lambda+\delta)\hat{f}_2(s)L_2(s) - \mu[v_2(s) + (\mu+\lambda+\delta)\lambda\hat{f}_2(s)]D(s)}{(\mu+\lambda+\delta)\lambda^2\lambda_1\hat{f}_1(s)\hat{f}_2(s) - v_1(s)v_2(s)} \tag{3.3.30}$$

και

$$\hat{m}_2(s) = \frac{\mu(\lambda^* + \delta)v_1(s)L_2(s) + \mu\lambda\lambda_1(\lambda^* + \delta)\hat{f}_1(s)L_1(s) - \lambda[v_1(s) + \lambda\lambda_1\hat{f}_1(s)]D(s)}{(\mu + \lambda + \delta)\lambda^2\lambda_1\hat{f}_1(s)\hat{f}_2(s) - v_1(s)v_2(s)}, \qquad (3.3.31)$$

όπου

$$v_1(s) = (\lambda^* + \delta)(\mu + \lambda + \delta) - (\lambda^* + \delta)\mu\hat{g}_2(-s) - (\mu + \lambda + \delta)\lambda\hat{f}_2(s),$$

$$v_2(s) = (\lambda^* + \delta)(\mu + \lambda + \delta) - (\lambda^* + \delta)\mu\hat{g}_1(-s) - \lambda\lambda_1\hat{f}_1(s),$$

$$D(s) = (\mu + \lambda + \delta)\hat{w}_2(s) + \lambda_1\hat{w}_2(s).$$

Για να γίνουν οι Εξισώσεις (3.3.30) και (3.3.31) αναλυτικές για όλα τα s στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο, κάνουμε χρήση της συνάρτησης $\Lambda_i(s)$ που ορίστηκε στην (3.2.41) και πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή των (3.3.30) και (3.3.31) με $\Lambda_1(s)\Lambda_2(s)$, οπότε προκύπτει αντίστοιχα

$$\hat{m}_1(s) = \frac{\mu(\lambda^* + \delta)v_2(s)L_1(s)\Lambda_1(s)\Lambda_2(s) + \mu\lambda(\lambda^* + \delta)(\mu + \lambda + \delta)\hat{f}_2(s)L_2(s)\Lambda_1(s)\Lambda_2(s) - Q_1(s)}{(\mu + \lambda + \delta)\lambda^2\lambda_1\hat{f}_1(s)\hat{f}_2(s)\Lambda_1(s)\Lambda_2(s) - v_1(s)v_2(s)\Lambda_1(s)\Lambda_2(s)}$$

(3.3.32)

και

$$\hat{m}_2(s) = \frac{\mu(\lambda^* + \delta)v_1(s)L_2(s)\Lambda_1(s)\Lambda_2(s) + \mu\lambda\lambda_1(\lambda^* + \delta)\hat{f}_1(s)L_1(s)\Lambda_1(s)\Lambda_2(s) - Q_2(s)}{(\mu + \lambda + \delta)\lambda^2\lambda_1\hat{f}_1(s)\hat{f}_2(s)\Lambda_1(s)\Lambda_2(s) - v_1(s)v_2(s)\Lambda_1(s)\Lambda_2(s)},$$

(3.3.33)

όπου

$$Q_1(s) = \mu[v_2(s) + (\mu + \lambda + \delta)\lambda\hat{f}_2(s)]D(s)\Lambda_1(s)\Lambda_2(s),$$

$$Q_2(s) = \mu[v_1(s) + \mu\lambda_1\hat{f}_1(s)]D(s)\Lambda_1(s)\Lambda_2(s).$$

Από τις (3.3.32) και (3.3.33) μπορούμε να βρούμε τα $\hat{m}_1(s)$ και $\hat{m}_2(s)$ αρκεί να μπορούμε να προσδιορίσουμε τα γινόμενα $\Lambda_1(s)L_1(s)$ και $\Lambda_2(s)L_2(s)$ τα οποία είναι πολυώνυμα $k_i - 1$ βαθμού και εκφράζονται με την Εξίσωση (3.2.44). Έτσι, θα πρέπει να προσδιοριστούν οι $k_1 + k_2$ άγνωστοι συντελεστές L_{in}. Το Λήμμα 3.2.2, έχει εφαρμογή στην περίπτωση που εξετάζουμε, οπότε οι ρίζες του κοινού παρονομαστή των (3.3.32) και (3.3.33) είναι ακριβώς $k_1 + k_2$, έστω $\rho_1(\delta),..., \rho_{k_1+k_2}(\delta)$, στο δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο.

Υποθέτοντας ότι οι ρίζες $\rho_1,..., \rho_{k_1+k_2}$ είναι διακεκριμένες και δεδομένου ότι οι $\hat{m}_1(s)$ και $\hat{m}_2(s)$ είναι αναλυτικές για $\mathrm{Re}(s) \geq 0$, τότε οι $\rho_1,..., \rho_{k_1+k_2}$ είναι επίσης ρίζες των αριθμητών των (3.3.32) και (3.3.33). Και στις δύο περιπτώσεις, προκύπτουν $k_1 + k_2$ γραμμικές εξισώσεις για τους άγνωστους συντελεστές L_{in}, οι οποίες είναι

$$\mu(\lambda^* + \delta)v_2(\rho_i)\Lambda_2(\rho_i)\sum_{n=1}^{k_1} L_{1n}\rho_i^{n-1}$$

$$+\mu\lambda(\lambda^* + \delta)(\mu + \lambda + \delta)\hat{f}_2(\rho_i)\Lambda_1(\rho_i)\sum_{n=1}^{k_2} L_{2n}\rho_i^{n-1} = Q_1(\rho_i), \quad i = 1, 2, ..., k_1 + k_2. \tag{3.3.34}$$

Μετά τη λύση του συστήματος (3.3.34) και την εύρεση των L_{in}, οι μετασχηματισμοί Laplace των (3.3.32) και (3.3.33) μπορούν να προσδιοριστούν πλήρως.

3.3.5 Αριθμητική εφαρμογή

Στην ενότητα αυτή θα δοθούν δύο παραδείγματα της εύρεσης των πιθανοτήτων χρεοκοπίας.

Παράδειγμα 3.3.1

Θεωρούμε ότι τα μεγέθη των ατομικών ασφαλίστρων και των απαιτήσεων είναι εκθετικά κατανεμημένα με τις παρακάτω μέσες τιμές:

$$\mu_{G_1} = 1.5, \ \mu_{G_2} = 1, \ \mu_{F_1} = 1, \ \mu_{F_2} = 0.5.$$

Έστω επίσης οι τιμές των παραμέτρων

$$\mu = 2, \ \lambda = 1.5, \ \lambda_1 = 2.5.$$

Για τις εν λόγω τιμές βλέπουμε ότι η συνθήκη (3.3.1) ισχύει, αφού

$$\mu[\lambda_1\mu_{G_1} + (\mu + \lambda)\mu_{G_2}] = 2[1.5 \cdot 1.5 + (2 + 1.5) \cdot 1] = 11.5$$

$$> \lambda[\lambda_1\mu_{F_1} + (\mu + \lambda)\mu_{F_2}] = 1.5[2.5 \cdot 1 + (2 + 1.5) \cdot 1] = 9.$$

Για να προκύψει η πιθανότητα χρεοκοπίας, θέτουμε $\delta = 0$ και $\omega(x_1, x_2) = 1$. Τότε, η συνάρτηση Gerber-Shiu $m_i(u)$, $i = 1, 2$, γίνεται $\phi_i(u)$, $i = 1, 2$.

Οι μετασχηματισμοί Laplace των κατανομών των απαιτήσεων είναι

$$\hat{f}_1(s) = \frac{1}{1 + \mu_{F_1}s} = \frac{1}{1+s} \qquad \text{και} \qquad \hat{f}_2(s) = \frac{1}{1 + \mu_{F_2}s} = \frac{1}{1 + 0.5s}.$$

Από την (3.3.9) βρίσκουμε

$$\frac{0.625}{14(1+s)(1+0.5s)} - \left(1 - \frac{2}{3.5(1-s)} - \frac{2.5}{14(1+s)}\right) \times \left(1 - \frac{2}{3.5(1-s)} - \frac{1.5}{6(1+0.5s)}\right) = 0.$$

Λύνοντας την προηγούμενη εξίσωση προκύπτουν οι ρίζες

0, 0.346558, –1.539240, –0.414461.

Στη συνέχεια, λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (3.3.10) προκύπτει

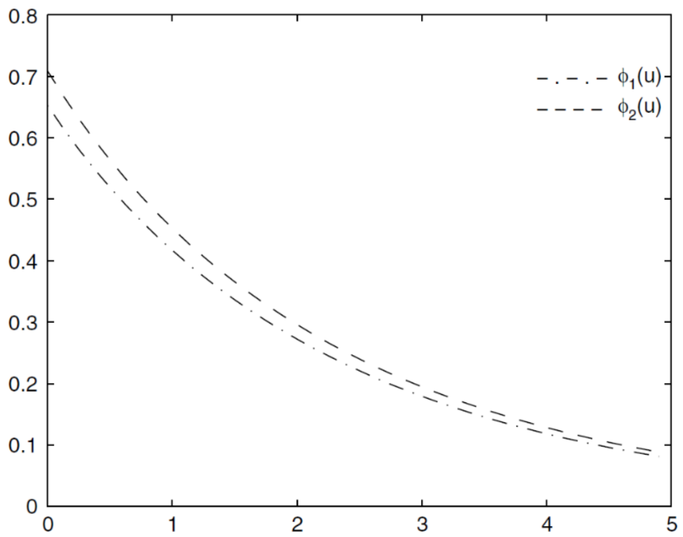
$$\hat{m}_1\left(\frac{1}{\mu_{G_1}}\right) = \hat{m}_1\left(\frac{1}{1.5}\right) = 0.588608 \qquad \text{και} \qquad \hat{m}_2\left(\frac{1}{\mu_{G_2}}\right) = \hat{m}_2(1) = 0.490280.$$

Παίρνοντας τους αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace των (3.3.4) και (3.3.5), έχουμε τις πιθανότητες χρεοκοπίας

$$\phi_1(u) = 0.032248e^{-1.539240u} + 0.620555e^{-0.414461u},$$

$$\phi_2(u) = 0.034426e^{-1.539240u} + 0.674306e^{-0.414461u}.$$

Στο Σχήμα 3.3.1 απεικονίζονται οι εν λόγω πιθανότητες χρεοκοπίας για τιμές του αρχικού πλεονάσματος $u \in [0,5]$.



Σχήμα 3.3.1: Πιθανότητες χρεοκοπίας $\phi_1(u)$ και $\phi_2(u)$ συναρτήσει του u

Από το σχήμα βλέπουμε ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας $\phi_1(u)$ έχει μικρότερες τιμές από την $\phi_2(u)$ σε όλο το εύρος του u.

Παράδειγμα 3.3.2

Θεωρούμε τώρα την περίπτωση όπου οι απαιτήσεις της μίας κλάσης κατανέμονται σύμφωνα με την *Erlang*(2, 2) και οι απαιτήσεις της άλλης κλάσης κατανέμονται σύμφωνα με μία μίξη δύο εκθετικών $\varepsilon(1)$ και $\varepsilon(2)$ με αντίστοιχα βάρη 1/10 και 9/10. Συγκεκριμένα, οι συναρτήσεις πυκνότητας είναι αντίστοιχα

$$f_1(x) = 4xe^{-2x},\ x \geq 0 \qquad \text{και} \qquad f_2(x) = \frac{1}{10}e^{-x} + \frac{9}{10}\cdot 2e^{-2x},\ x \geq 0.$$

Έστω επίσης ότι τα μεγέθη των ατομικών ασφαλίστρων είναι εκθετικά κατανεμημένα με

$$\mu_{G_1} = 1.5,\ \mu_{G_2} = 1,$$

καθώς και οι τιμές των παραμέτρων

$$\mu = 2,\ \lambda = 1.5,\ \lambda_1 = 2.5.$$

Όπως και στο Παράδειγμα 3.3.1, για να βρούμε τις πιθανότητες χρεοκοπίας, θέτουμε $\delta = 0$ και $\omega(x_1, x_2) = 1$.

$$\mu_{F_1} = 1,\ \mu_{F_2} = 0.5.$$

Οι μετασχηματισμοί Laplace των κατανομών των απαιτήσεων είναι

$$\hat{f}_1(s) = \left(\frac{2}{2+s}\right)^2 \qquad \text{και} \qquad \hat{f}_2(s) = \frac{1}{10}\frac{1}{1+s} + \frac{9}{10}\frac{2}{2+s}.$$

Από την (3.3.9) βρίσκουμε

$$\frac{2.5}{14(2+s)^2}\left(\frac{0.1}{1+s} + \frac{1.8}{2+s}\right) - \left(1 - \frac{2}{3.5(1-s)} - \frac{5}{7(2+s)^2}\right) \times \left(1 - \frac{2}{3.5(1-s)} - \frac{1}{4}\left(\frac{0.1}{1+s} + \frac{1.8}{2+s}\right)\right) = 0.$$

Λύνοντας την προηγούμενη εξίσωση προκύπτουν οι ρίζες

0, 0.346772, –0.440300, –1.051190, –2.665994.

Από το σύστημα των εξισώσεων (3.3.10) προκύπτει

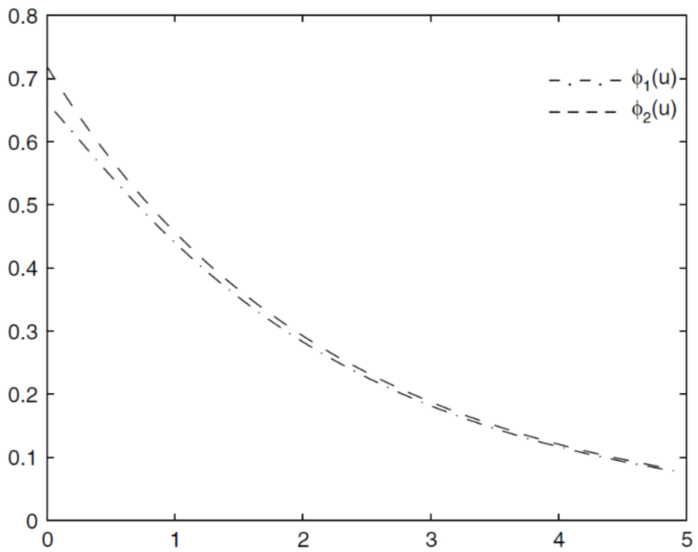
$$\hat{m}_1\left(\frac{1}{\mu_{G_1}}\right) = \hat{m}_1\left(\frac{1}{1.5}\right) = 0.612133 \qquad \text{και} \qquad \hat{m}_2\left(\frac{1}{\mu_{G_2}}\right) = \hat{m}_2(1) = 0.510976.$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace των (3.3.4) και (3.3.5) δίνει

$$\phi_1(u) = -0.032251e^{-2.665994u} + 0.016007e^{-1.051190u} + 0.678009e^{-0.440300u},$$

$$\phi_2(u) = 0.004511e^{-2.665994u} + 0.012644e^{-1.051190u} + 0.701456e^{-0.440300u}.$$

Στο Σχήμα 3.3.2 απεικονίζονται οι εν λόγω πιθανότητες χρεοκοπίας για τιμές του αρχικού πλεονάσματος $u \in [0,5]$.



Σχήμα 3.3.2: Πιθανότητες χρεοκοπίας $\phi_1(u)$ και $\phi_2(u)$ συναρτήσει του u

Όπως και στο Παράδειγμα 3.3.1, από το σχήμα βλέπουμε ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας $\phi_1(u)$ έχει μικρότερες τιμές από την $\phi_2(u)$ σε όλο το εύρος του u.

3.4 Σύνοψη Κεφαλαίου

Σε αυτό το κεφάλαιο μελετήθηκαν δύο μοντέλα κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα και συγκεκριμένες μορφές εξάρτησης. Ειδικότερα:

Στην Ενότητα 3.2 θεωρήθηκε ότι οι κατανομή του μεγέθους των ασφαλίστρων και η κατανομή του χρόνου μεταξύ των αφίξεων δύο διαδοχικών απαιτήσεων ελέγχεται από τα μεγέθη των απαιτήσεων. Όταν τα ατομικά ασφάλιστρα ακολουθούν την εκθετική κατανομή, αποδείχθηκε ότι μπορεί να επιτευχθούν οι μετασχηματισμοί Laplace και οι ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις για τις συναρτήσεις Gerber-Shiu.

Στην Ενότητα 3.3 ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών εμφανίσεων απαιτήσεων προσδιορίζει την κατανομή της επόμενης απαίτησης και του μεγέθους του ατομικού ασφαλίστρου. Δόθηκαν οι ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις για τις συναρτήσεις Gerber-Shiu και οι ακριβείς λύσεις αυτών μέσω, κατάλληλα ορισμένης σύνθετης γεωμετρικής κατανομής, στην περίπτωση που τα ατομικά ασφάλιστρα είναι εκθετικά κατανεμημένα.

Και στα δύο μοντέλα κινδύνου εξετάστηκε η περίπτωση όπου ο μετασχηματισμός Laplace είναι ρητή συνάρτηση στην οποία μπορούν να προσδιοριστούν οι μετασχηματισμοί Laplace των προεξοφλημένων συναρτήσεων ποινής. Επίσης, μέσω αριθμητικών παραδειγμάτων αναπτύχθηκε η μεθοδολογία εύρεσης της πιθανότητας χρεοκοπίας, ως ειδική περίπτωση της συνάρτησης Gerber-Shiu.

Πιθανές επεκτάσεις των εξεταζόμενων μοντέλων είναι η εισαγωγή μιας διαδικασίας Markov που να ρυθμίζει τα μεγέθη των απαιτήσεων, τους ενδιάμεσους χρόνους εμφάνισης των απαιτήσεων και τα μεγέθη των ασφαλίστρων. Επίσης θα μπορούσε να εισαχθεί μια διαδικασία διάχυσης (για παράδειγμα η τυπική κίνηση Brown) για να περιγράψει τη στοχαστική μεταβλητότητα του εισοδήματος από τα ασφάλιστρα και της ζημιάς λόγω των απαιτήσεων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΜΕ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΑΣΦΑΛΙΣΤΡΑ, ΕΞΑΡΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΜΕΡΙΣΜΑΤΩΝ

4.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό μελετάται η διαδικασία πλεονάσματος της μορφής

$$U(t) = u + \sum_{i=1}^{M(t)} X_i - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \tag{4.1.1}$$

με στοχαστικά ασφάλιστρα και θεωρώντας διάφορες στρατηγικές μερισμάτων, συγκεκριμένα αυτής του σταθερού μερίσματος που αναπτύσσεται στην Ενότητα 4.1 και αυτής του μερίσματος κατωφλίου που αναπτύσσεται στην Ενότητα 4.2.

Για τη διαδικασία πλεονάσματος της Εξίσωσης (4.1.1) θεωρούμε ότι $U(0) = u \geq 0$ είναι το αρχικό απόθεμα, $M(t)$ είναι μια απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη του αριθμού των ατομικών ασφαλίστρων μέχρι τη στιγμή t, για την οποία θεωρούμε ότι είναι διαδικασία Poisson με ένταση $\mu > 0$, $\{X_i\}$ είναι ακολουθία αυστηρά θετικών τυχαίων μεταβλητών που συμβολίζουν τα ύψη των ατομικών ασφαλίστρων, με κοινή συνάρτηση κατανομής $G(x) = P(X \leq x)$, συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $g(x)$ και πεπερασμένη μέση τιμή μ_G, $N(t)$ είναι μια απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη του αριθμού των απαιτήσεων μέχρι τη στιγμή t, για την οποία θεωρούμε ότι είναι διαδικασία Poisson με ένταση $\lambda > 0$, $\{Y_i\}$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που συμβολίζουν τα ύψη των ατομικών απαιτήσεων οι οποίες είναι ισόνομα κατανεμημένες με την Y με συνάρτηση κατανομής $F(y) = P(Y \leq y)$, συνάρτηση πυκνότητας $f(y)$ και πεπερασμένη μέση τιμή μ_F. Για τους ενδιάμεσους χρόνους μεταξύ διαδοχικών αφίξεων ασφαλίστρων και μεταξύ διαδοχικών αφίξεων απαιτήσεων ισχύουν οι συμβολισμοί που δόθηκαν στο Κεφάλαιο 1, δηλαδή V_i και W_i αντίστοιχα.

Η ανάλυση που θα αναπτυχθεί στο παρόν κεφάλαιο, θα θεωρήσει επίσης συγκεκριμένου τύπου εξαρτήσεις ανάμεσα στα μεγέθη των ασφαλίστρων και τους αντίστοιχους χρόνους εμφάνισης αυτών καθώς και στα ύψη των απαιτήσεων και τους αντίστοιχους χρόνους εμφάνισης αυτών.

Έστω $U_b(t)$ συμβολίζει την τροποποιημένη διαδικασία πλεονάσματος με αρχικό αποθεματικό $U_b(0) = u$ κάτω από την ύπαρξη των δύο στρατηγικών μερίσματος που θα αναπτυχθούν. Σε αντιστοιχία με τη διαδικασία πλεονάσματος χωρίς την ύπαρξη μερίσματος, ορίζουμε

$$T_b(u) = \inf\{t \geq 0 : U_b(t) < 0\} \tag{4.1.2}$$

το χρόνο χρεοκοπίας για τη διαδικασία κινδύνου $(U_b(t))_{t\geq 0}$. Στη συνέχεια της ανάλυσης θα συμβολίζουμε απλά με T_b τον εν λόγω χρόνο οποτεδήποτε δεν δημιουργείται αμφιβολία. Έστω επίσης $U_b(T_b^-)$ το πλεόνασμα ακριβώς πριν τη χρεοκοπία και $|U_b(T_b)|$ το έλλειμα τη στιγμή της χρεοκοπίας.

Η συνάρτηση Gerber-Shiu για κάποιο $\delta \geq 0$, ορίζεται ως

$$m_b(u) \text{ ή } m(u,b) = E[e^{-\delta T_b}\omega(U_b(T_b^-),|U_b(T_b)|)I(T_b < \infty \,|\, U_b(0) = u], \quad u \geq 0. \tag{4.1.3}$$

Στην ειδική περίπτωση που $\omega(\cdot,\cdot) = 1$ και $\delta_0 = 0$, η $m(u,b)$ γίνεται η πιθανότητα χρεοκοπίας σε άπειρο χρόνο,

$$\psi(u) = E[I(T_b < \infty \,|\, U_b(0) = u], \qquad u \leq b. \tag{4.1.4}$$

Έστω $D(t)$ συμβολίζει τα μερίσματα που έχουν καταβληθεί μέχρι το χρόνο t, τότε για $\delta \geq 0$ τον παράγοντα προεξόφλησης, ορίζουμε με

$$D_{u,b} = \int_0^{T_b} e^{-\delta t} dD(t), \; 0 \leq u \leq b, \tag{4.1.5}$$

την παρούσα αξία όλων των μερισμάτων μέχρι τη στιγμή της χρεοκοπίας T_b, και με

$$\upsilon(u,b) = E[D_{u,b} \,|\, U_b(0) = u] = E\left(\int_0^{T_b} e^{-\delta t} dD(t) \,|\, U_b(0) = u\right). \quad u \geq 0 \tag{4.1.6}$$

τις αναμενόμενες προεξοφλημένες πληρωμές μερισμάτων μέχρι τη χρεοκοπία.

Μοντέλα κινδύνου τα οποία ενσωματώνουν στρατηγικές μερισμάτων, με τις οποίες η ασφαλιστική εταιρία καταβάλλει πληρωμές στους μετόχους της, βρίσκουν μεγάλο ενδιαφέρον στη θεωρία κινδύνου. Ο De Finetti (1957) ασχολήθηκε πρώτος και μελέτησε το διωνυμικό μοντέλο. Στη συνέχεια πληθώρα ερευνητικών εργασιών έχει εμφανιστεί στη βιβλιογραφία, μεταξύ άλλων ενδεικτικά αναφέρουμε αυτές των Lin et al. (2003), Li and Garrido (2004b), Lin and Pavlova (2006), Yang and Zhang (2008), Schmidli (2008), Landriault (2008), Li et al. (2009), Chi and Lin (2011), Cossette et al. (2011), Shi et al. (2013), Cossette et al. (2014), Liu et al. (2014), Wang (2015).

4.2 Μοντέλο κινδύνου με στρατηγική σταθερού μερίσματος, στοχαστικά ασφάλιστρα και εξάρτηση ανάμεσα στα μεγέθη των απαιτήσεων και τους χρόνους εμφάνισης αυτών

Το μοντέλο που εξετάζεται στην ενότητα αυτή, εισάγοντας στοχαστικά ασφάλιστρα επεκτείνει την εργασία του Landriault (2008). Θεωρώντας ότι η διαδικασία των συνολικών ασφαλίστρων μοντελοποιείται από μια σύνθετη διαδικασία Poisson, μελετάται η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής και οι αναμενόμενες προεξοφλημένες καταβολές μερισμάτων μέχρι τη χρεοκοπία. Όταν τα ατομικά ασφάλιστρα είναι εκθετικά κατανεμημένα, αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση Gerber-Shiu και οι αναμενόμενες προεξοφλημένες καταβολές μερισμάτων μέχρι τη χρεοκοπία ικανοποιούν τις ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra και επιπλέον αναπτύσσεται η μορφή των λύσεων. Στην περίπτωση όπου τα ατομικά ασφάλιστρα και οι απαιτήσεις ακολουθούν την εκθετική κατανομή, προκύπτουν αναλυτικές εκφράσεις για το μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας και των αναμενόμενων προεξοφλημένων καταβολών μερισμάτων μέχρι τη χρεοκοπία. Τέλος, αναπτύσσεται το βέλτιστο όριο που μεγιστοποιεί την αναμενόμενη διαφορά ανάμεσα στα προεξοφλημένα μερίσματα μέχρι τη χρεοκοπία και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται το μοντέλο κινδύνου με τα στοχαστικά ασφάλιστρα και την σχέση εξάρτησης ανάμεσα στις απαιτήσεις και στους χρόνους μεταξύ των αφίξεων αυτών.

4.2.1 Περιγραφή του μοντέλου

Σύμφωνα με τη στρατηγική σταθερού ορίου μερίσματος (constant dividend barriers strategy) όταν η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος ξεπεράσει ένα σταθερό όριο τότε επιστρέφεται μέρισμα στους δικαιούχους, ενώ δεν καταβάλλονται μερίσματα όταν το πλεόνασμα είναι μικρότερο από το εν λόγω όριο. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα σταθερό όριο που συμβολίζουμε με b και είναι μεγαλύτερο από το αρχικό αποθεματικό u, δηλαδή $b > u$. Όταν η διαδικασία πλεονάσματος φτάνει στο όριο b τα ασφάλιστρα επιστρέφονται στους δικαιούχους με τη μορφή μερίσματος.

Για την τροποποιημένη διαδικασία πλεονάσματος $U_b(t)$, με αρχικό αποθεματικό $U_b(0) = u$ κάτω από την ύπαρξη στρατηγική μερίσματος, το πλεόνασμα δεν ξεπερνάει το όριο b και μπορεί να εκφραστεί ως

$$U_b(t) = \begin{cases} u + \sum_{i=1}^{M(t)} X_i - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, & U_b(t) < b \\ u - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, & U_b(t) \geq b \end{cases} \tag{4.2.1}$$

ή ισοδύναμα παραγωγίζοντας την προηγούμενη σχέση έχουμε τη δυναμική της στοχαστικής ανέλιξης πλεονάσματος

$$dU_b(t) = \begin{cases} d\sum_{i=1}^{M(t)} X_i - d\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, & U_b(t) < b \\ -d\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, & U_b(t) \geq b \end{cases}. \tag{4.2.2}$$

Από τον παραπάνω ορισμό βλέπουμε ότι η διαδικασία πλεονάσματος χωρίς μερίσματα $\{U(t), t \geq 0\}$, είναι μια ειδική περίπτωση της $\{U_b(t), t \geq 0\}$, καθώς το b τείνει στο άπειρο. Έτσι, $\lim_{b\to\infty} U_b(t) = U(t)$ και κατά συνέπεια $\lim_{b\to\infty} m_\delta(u,b) = m_b(u)$.

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τα συνολικά μερίσματα που έχουν καταβληθεί μέχρι τη στιγμή t, $D(t)$, η διαδικασία πλεονάσματος $U_b(t)$ εκφράζεται ως

$$U_b(t) = u + \sum_{i=1}^{M(t)} X_i - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i - D(t)\,. \tag{4.2.3}$$

Στο μοντέλο κινδύνου της Εξίσωσης (4.1.1) που εξετάζουμε, θεωρούμε ότι υπάρχει εξάρτηση ανάμεσα στην *i*-οστή απαίτηση, Y_i, και το χρόνο V_i που έχει παρέλθει από την άφιξη της προηγούμενης απαίτησης. Θεωρούμε ότι τα τυχαία διανύσματα (V_i, Y_i), $i \in \mathbf{N}^+$, είναι αμοιβαία ανεξάρτητα ενώ η τυχαία μεταβλητή Y_i ορίζεται υπό τη δέσμευση της τυχαίας μεταβλητής V_i, θεωρώντας ότι η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Y_i δοθέντος $V_i = v$, την οποία συμβολίζουμε ως $f_{Y_j|V_j}(y\,|\,v)$, δίνεται σαν μια ειδική μορφή μείξης δύο αυθαίρετων σ.π.π. έστω f_1 και f_2, σύμφωνα με τη σχέση

$$f_{Y_i|V_i}(y\,|\,v) = e^{-\beta v} f_1(y) + (1 - e^{-\beta v}) f_2(y)\,, \qquad y \ge 0\,,\ i = 1, 2, \ldots \tag{4.2.4}$$

Στην εργασία των Boudreault et al. (2006) δίνεται μια πρακτική ερμηνεία για τη μορφή της εξάρτησης της προηγούμενης σχέσης. Για παράδειγμα, εάν θεωρήσουμε μια ασφάλιση σε περίπτωση σεισμού, και V_j είναι ο χρόνος ανάμεσα στον $(j-1)$-οστό και στον j-οστό σεισμό, το ενδεχόμενο αυτό έχει δύο πιθανές πυκνότητες, έστω $I_j = 1$ για σεισμούς συνήθους έντασης και $I_j = 2$ για σεισμούς ισχυρής έντασης. Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να εκφραστεί ως

$$\Pr(I_j = 1\,|\,V_j = v) = e^{-\beta v} = 1 - \Pr(I_j = 2\,|\,V_j = v),$$

από το οποίο προκύπτει ότι η πιθανότητα ενός συνήθους σεισμού φθίνει εκθετικά ως προς τον ενδιάμεσο χρόνο ανάμεσα στα δύο διαδοχικά σεισμικά συμβάντα. Επιλέγοντας τη συνάρτηση πυκνότητας f_2, για τον ισχυρό σεισμό, να είναι βαρύτερης ουράς σε σχέση με τη συνάρτηση πυκνότητας f_1, ενός συνήθους έντασης σεισμού, έχουμε προφανώς ένα ρεαλιστικό, δηλαδή πιο κατάλληλο, μοντέλο από ένα αντίστοιχο χωρίς εξάρτηση, για να περιγράψουμε τη συμπεριφορά της αθροιστικής διαδικασίας των απαιτήσεων στις ασφαλίσεις κατά σεισμών.

4.2.2 Ολοκληρωτικές εξισώσεις και ακριβείς εκφράσεις

Στην ενότητα αυτή υποθέτουμε ότι $U_b(0) = u \le b$. Στόχος μας είναι να δώσουμε ακριβείς εκφράσεις για τις ποσότητες $\upsilon(u,b)$ και $m_b(u)$. Αρχικά, δείχνουμε ότι οι συναρτήσεις αυτές ικανοποιούν κάποιες ολοκληρωτικές εξισώσεις.

4.2.2.1 Ολοκληρωτικές εξισώσεις

Η Πρόταση 4.2.1 δίνει την ολοκληρωτική εξίσωση που ικανοποιεί η $\upsilon(u,b)$.

Πρόταση 4.2.1

Για $0 \le u \le b$, *η αναμενόμενη προεξοφλημένη καταβολή μερισμάτων μέχρι τη χρεοκοπία,* $\upsilon(u,b)$, *ικανοποιεί την ακόλουθη ολοκληρωτική εξίσωση*

$$\upsilon(u,b) = \frac{\mu}{\lambda+\mu+\delta}\left(\int_0^{b-u} \upsilon(u+x,b)g(x)dx + \int_{b-u}^{\infty}(x+u-b+\upsilon(b,b))g(x)dx\right)$$
$$+\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta+\beta}\left(\int_0^{u}\upsilon(u-y,b)f_1(y)dy - \int_0^{u}\upsilon(u-y,b)f_2(y)dy\right)$$
$$+\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta}\int_0^{u}\upsilon(u-y,b)f_2(y)dy\,. \tag{4.2.5}$$

Απόδειξη

Αρχικά θεωρούμε ότι $0 \le u < b$. Η πρώτη απαίτηση μπορεί να συμβεί πριν ή μετά την άφιξη του πρώτου ασφαλίστρου. Έστω η τυχαία μεταβλητή του νωρίτερου γεγονότος, $L = \min\{V_1, W_1\}$. Αφού οι V_1 και W_1 είναι εκθετικά κατανεμημένες με μέσους $1/\lambda$ και $1/\mu$ αντίστοιχα, σύμφωνα με το Παράρτημα Π5, η L είναι εκθετικά κατανεμημένη με συνάρτηση πυκνότητας

$$f_L(t) = (\lambda+\mu)e^{-(\lambda+\mu)t},\ t>0. \tag{4.2.5α}$$

Για $u \ge 0$, δεσμεύοντας ως προς το χρόνο του νωρίτερου γεγονότος (άφιξη απαίτησης ή ασφαλίστρου), έχουμε

$$\upsilon(u,b) = \int_0^{\infty}\upsilon(u,b\,|\,L=t)\,f_L(t)dt$$

Από το θεώρημα ολικής πιθανότητας είναι

$$\upsilon(u,b) = \int_0^{\infty}[\upsilon(u,b\,|\,L=t,W_1\le V_1)P(W_1\le V_1) + V(u,b\,|\,L=t,V_1\le W_1)P(V_1<W_1)](\lambda+\mu)e^{-(\lambda+\mu)t}dt$$

Αλλά για τις εκθετικά κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές V_1 και W_1 ισχύει (Παράρτημα Π5)

$$P(W_1\le V_1) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} \text{ και } P(V_1<W_1) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \tag{4.2.5β}$$

οπότε

$$\upsilon(u,b) = \int_0^{\infty}\left[\upsilon(u,b\,|\,L=t,W_1\le V_1)\frac{\mu}{\lambda+\mu} + \upsilon(u,b\,|\,L=t,V_1\le W_1)\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right](\lambda+\mu)e^{-(\lambda+\mu)t}dt$$
$$= \int_0^{\infty}[\mu\upsilon(u,b\,|\,L=t,W_1\le V_1) + \lambda\upsilon(u,b\,|\,L=t,V_1\le W_1)]e^{-(\lambda+\mu)t}dt$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

α) Να συμβεί πρώτα άφιξη ασφαλίστρου, έστω ύψους *x*,

α1) αν $u+x \le b$, τότε η διαδικασία συνεχίζεται με αποθεματικό $u+x$ και δεν καταβάλλεται μέρισμα

α2) αν $u+x > b$, τότε καταβάλλονται μερίσματα

β) Συμβαίνει πρώτα άφιξη απαίτησης, έστω ύψους *y*,

β1) αν $y < u$, τότε η διαδικασία συνεχίζεται με αποθεματικό $u-y$

β2) αν $y > u$, τότε $\upsilon(u,b)=0$.

Έτσι η παραπάνω συνάρτηση $\upsilon(u,b)$ γίνεται

$$\upsilon(u,b)=\int_0^\infty e^{-\delta t}\left[\mu\left(\int_0^{b-u}\upsilon(u+x,b)g(x)dx+\int_{b-u}^\infty(u+x-b+\upsilon(b,b))g(x)dx\right)\right.$$
$$\left.+\lambda\int_0^u \upsilon(u-y,b)\,f_{Y|V_1}(y\,|\,t)dy\right]e^{-(\lambda+\mu)t}dt$$

με αντικατάσταση της (4.2.4) προκύπτει

$$\upsilon(u,b)=\int_0^\infty \mu e^{-(\lambda+\mu+\delta)t}dt\left(\int_0^{b-u}\upsilon(u+x,b)g(x)dx+\int_{b-u}^\infty(u+x-b+\upsilon(b,b))g(x)dx\right)$$
$$+\lambda\int_0^u e^{-\delta t}\upsilon(u-y,b)[e^{-\beta t}f_1(y)+(1-e^{-\beta t})f_2(y)dy]e^{-(\lambda+\mu)t}dt$$
$$=\int_0^\infty e^{-(\lambda+\mu+\delta)t}dt\cdot\mu\left(\int_0^{b-u}\upsilon(u+x,b)g(x)dx+\int_{b-u}^\infty(u+x-b+\upsilon(b,b))g(x)dx\right)$$
$$+\int_0^\infty e^{-(\lambda+\mu+\delta)t}dt\cdot\lambda\int_0^u\upsilon(u-y,b)\,f_2(y)dy$$
$$+\int_0^\infty e^{-(\lambda+\mu+\delta+\beta)t}dt\cdot\lambda\left(\int_0^u\upsilon(u-y,b)\,f_1(y)dy-\int_0^u\upsilon(u-y,b)\,f_2(y)dy\right)$$

Υπολογίζοντας τα ολοκληρώματα ως προς *t*, προκύπτει η (4.2.5).

Θεωρούμε τώρα την περίπτωση $\upsilon(b,b)$. Με όμοιο συλλογισμό, έχουμε διαδοχικά

$$\upsilon(b,b)=\int_0^\infty \upsilon(b,b\,|\,L=t)\,f_L(t)dt$$
$$=\int_0^\infty[\upsilon(b,b\,|\,L=t,W_1\le V_1)P(W_1\le V_1)+\upsilon(b,b\,|\,L=t,V_1\le W_1)P(V_1<W_1)](\lambda+\mu)e^{-(\lambda+\mu)t}dt$$
$$=\int_0^\infty\left[\upsilon(b,b\,|\,L=t,W_1\le V_1)\frac{\mu}{\lambda+\mu}+\upsilon(b,b\,|\,L=t,V_1\le W_1)\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right](\lambda+\mu)e^{-(\lambda+\mu)t}dt$$
$$=\int_0^\infty[\mu\upsilon(b,b\,|\,L=t,W_1\le V_1)+\lambda\upsilon(b,b\,|\,L=t,V_1\le W_1)]e^{-(\lambda+\mu)t}dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-\delta t} \left[\mu \int_0^\infty (x + \upsilon(b,b)) g(x) dx + \lambda \int_0^b \upsilon(b-y,b)[e^{-\beta t} f_1(y) + (1-e^{-\beta t}) f_2(y)] dy \right] e^{-(\lambda+\mu)t} dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-(\delta+\lambda+\mu)t} dt \left(\mu \int_0^\infty (x + \upsilon(b,b)) g(x) dx + \lambda \int_0^b \upsilon(b-y,b) f_2(y)] dy \right)$$

$$+ \int_0^\infty e^{-(\delta+\lambda+\mu+\beta)t} dt \cdot \lambda \left(\int_0^b \upsilon(b-y,b) f_1(y) dy - \int_0^b \upsilon(b-y,b) f_2(y) dy \right)$$

και υπολογίζοντας τα ολοκληρώματα ως προς t προκύπτει

$$\upsilon(b,b) = \frac{\mu}{\lambda+\mu+\delta} \int_0^\infty (x + \upsilon(b,b) g(x) dx + \frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta} \int_0^b \upsilon(b-y,b) f_2(y) dy$$

$$+ \frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta+\beta} \left(\int_0^b \upsilon(b-y,b) f_1(y) dy - \int_0^b \upsilon(b-y,b) f_2(y) dy \right),$$

δηλαδή, η (4.2.5.) ισχύει και για $u = b$ και η απόδειξη της πρότασης ολοκληρώθηκε.

□

Η επόμενη πρόταση δίνει την ολοκληρωτική εξίσωση για την $m_b(u)$.

Πρόταση 4.2.2

Για $0 \le u \le b$, η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής Gerber-Shiu $m_b(u)$ ικανοποιεί την ακόλουθη ολοκληρωτική εξίσωση

$$m_b(u) = \frac{\mu}{\lambda+\mu+\delta} \left(\int_0^{b-u} m_b(u+x) g(x) dx + m_b(b) \bar{G}(b-u) \right)$$

$$+ \frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta+\beta} \left(\int_0^u m_b(u-y)[f_1(y) - f_2(y)] dy + w_1(u) - w_2(u) \right)$$

$$+ \frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta} \left(\int_0^u m_b(u-y) f_2(y) dy + w_2(u) \right) \qquad (4.2.6)$$

όπου,

$$w_i(u) = \int_u^\infty \omega(u, y-u) f_i(y) dy, \; i = 1,2.$$

Απόδειξη

Προχωράμε παρόμοια με την απόδειξη της Πρότασης 4.2.1. Αρχικά για $0 \le u < b$ έχουμε. Για $u \ge 0$, δεσμεύοντας ως προς το χρόνο του νωρίτερου γεγονότος (άφιξη απαίτησης ή ασφαλίστρου), έχουμε

$$m_b(u) = \int_0^\infty m_b(u \mid L = t) f_L(t) dt$$

και από θεώρημα ολικής πιθανότητας

$$m_b(u)=\int_0^\infty [m_b(u\,|\,L=t,W_1\le V_1)P(W_1\le V_1)+m_b(u\,|\,L=t,V_1\le W_1)P(V_1<W_1)]\,f_L(t)dt$$

αντικαθιστώντας τις (4.2.5α) και (4.2.5β) έχουμε

$$m_b(u)=\int_0^\infty \left[m_b(u\,|\,L=t,W_1\le V_1)\frac{\mu}{\lambda+\mu}+m_b(u\,|\,L=t,V_1\le W_1)\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right](\lambda+\mu)e^{-(\lambda+\mu)t}dt$$

$$=\int_0^\infty [\mu\, m_b(u\,|\,L=t,W_1\le V_1)+\lambda m_b(u\,|\,L=t,V_1\le W_1)]e^{-(\lambda+\mu)t}dt$$

διακρίνουμε τις περιπτώσεις

α) Να συμβεί πρώτα άφιξη ασφαλίστρου, έστω ύψους *x*,

α1) αν $u+x\le b$, τότε η διαδικασία συνεχίζεται με αποθεματικό $u+x$ και δεν καταβάλλεται μέρισμα

α2) αν $u+x>b$, τότε καταβάλλονται μερίσματα

β) Συμβαίνει πρώτα άφιξη απαίτησης, έστω ύψους *y*,

β1) αν $y<u$, τότε η διαδικασία συνεχίζεται με αποθεματικό $u-y$

β2) αν $y>u$, τότε εφαρμόζεται η συνάρτηση ποινής.

Έτσι η παραπάνω συνάρτηση $m_b(u)$ γίνεται

$$m_b(u)=\int_0^\infty e^{-\delta t}\left[\mu\left(\int_0^{b-u} m_b(u+x)g(x)dx+\int_{b-u}^\infty m_b(b)g(x)dx\right)\right.$$
$$\left.+\lambda\left(\int_0^u m_b(u-y)\,f_{Y|V_1}(y\,|\,t)dy+\int_u^\infty \omega(u,y-u)\,f_{Y|V_1}(y\,|\,t)dy\right)\right]e^{-(\lambda+\mu)t}dt$$

με αντικατάσταση της (4.2.4) προκύπτει

$$m_b(u)=\int_0^\infty e^{-\delta t}\left[\mu\left(\int_0^{b-u} m_b(u+x)g(x)dx+\int_{b-u}^\infty m_b(b)g(x)dx\right)\right.$$
$$+\lambda\left(\int_0^u m_b(u-y)[e^{-\beta t}f_1(y)+(1-e^{-\beta t})\,f_2(y)]dy\right.$$
$$\left.\left.+\int_u^\infty \omega(u,y-u)[e^{-\beta t}f_1(y)+(1-e^{-\beta t})\,f_2(y)]dy\right)\right]e^{-(\lambda+\mu)t}dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-(\delta+\lambda+\mu)t} dt \cdot \mu \left(\int_0^{b-u} m_b(u+x) g(x) dx + \int_{b-u}^\infty m_b(b) g(x) dx \right)$$
$$+ \int_0^\infty e^{-(\delta+\lambda+\mu)t} dt \cdot \lambda \int_0^u m_b(u-y) f_2(y) dy$$
$$+ \int_0^\infty e^{-(\delta+\lambda+\mu+\beta)t} dt \cdot \lambda \int_0^u m_b(u-y)[f_1(y) - f_2(y)] dy$$
$$+ \int_0^\infty e^{-(\delta+\lambda+\mu+\beta)t} dt \cdot \lambda \left(\int_u^\infty \omega(u, y-u) f_1(y) dy - \int_u^\infty \omega(u, y-u) f_2(y)] dy \right)$$

και υπολογίζοντας τα ολοκληρώματα ως προς t προκύπτει

$$m_b(u) = \frac{\mu}{\lambda+\mu+\delta} \left(\int_0^{b-u} m_b(u+x) g(x) dx + m_b(b) \int_{b-u}^\infty g(x) dx \right)$$
$$+ \frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta} \int_0^u m_b(u-y) f_2(y) dy$$
$$+ \frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta+\beta} \int_0^u m_b(u-y)[f_1(y) - f_2(y)] dy$$
$$+ \frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta+\beta} \left(\int_u^\infty \omega(u, y-u) f_1(y) dy - \int_u^\infty \omega(u, y-u) f_2(y)] dy \right)$$

Αλλά $\int_{b-u}^\infty g(x) dx = \bar{G}(b-u)$. Θέτοντας $w_i(u) = \int_u^\infty \omega(u, y-u) f_i(y) dy$, $i = 1,2$, προκύπτει η (4.2.6)

Παρόμοια αποδεικνύεται για $u = b$ και έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη της πρότασης.

□

Στη συνέχεια, ως εφαρμογή της Εξίσωσης (4.2.7), δίνουμε την ολοκληρωτική εξίσωση για το προεξοφλημένο έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας το οποίο συμβολίζουμε με $\Psi_b(u)$.

Πόρισμα 4.2.1

Για $0 \le u \le b$, το προεξοφλημένο έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας, $\Psi_b(u)$, ικανοποιεί την ακόλουθη ολοκληρωτική εξίσωση

$$\Psi_b(u) = \frac{\mu}{\lambda+\mu+\delta} \left(\int_0^{b-u} \Psi_b(u+x) g(x) dx + \Psi_b(b) \bar{G}(b-u) \right)$$
$$+ \frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta+\beta} \left(\int_0^u \psi_b(u-y)[f_1(y) - f_2(y)] dy + \int_u^\infty (y-u)(f_1(y) - f_2(y)) dy \right)$$
$$+ \frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta} \left(\int_0^u \Psi_b(u-y) f_2(y) dy + \int_u^\infty (y-u) f_2(y) dy \right). \tag{4.2.7}$$

Απόδειξη

Θεωρούμε την περίπτωση όπου $\omega(x_1, x_2) = x_2$. Τότε η $m_b(u)$ είναι το προεξοφλημένο έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας, T_b,

$$\Psi_b(u) = E[e^{-\delta T_b} \,|U(T_b)|\, I(T_b < \infty \,|\, U_b(0) = u].$$

Στην περίπτωση αυτή, η συνάρτηση $w_i(u)$ απλοποιείται ως

$$w_i(u) = \int_u^\infty (y-u) f_i(y)dy, \; i = 1,2.$$

Αντικαθιστώντας την τελευταία στην (4.2.6) έχουμε

$$\begin{aligned} m_b(u) &= \frac{\mu}{\lambda+\mu+\delta}\left(\int_0^{b-u} m_b(u+x)g(x)dx + m_b(b)\bar{G}(b-u) \right) \\ &+ \frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta+\beta}\left(\int_0^u m_b(u-y)[f_1(y) - f_2(y)]dy + \int_u^\infty (y-u) f_1(y)dy - \int_u^\infty (y-u) f_2(y)dy \right) \\ &+ \frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta}\left(\int_0^u m_b(u-y) f_2(y)dy + \int_u^\infty (y-u) f_2(y)dy \right) \end{aligned}$$

που είναι η ζητούμενη εξίσωση (4.2.7) για το $\Psi_b(u)$.

□

4.2.2.2 Αναλυτικές εκφράσεις για $u = b$

Με χρήση της Πρότασης 4.2.2, μπορούμε να γράψουμε την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση για το $m_b(u)$ και να δώσουμε αναλυτική έκφραση για τη λύση της μέσω μιας κατάλληλα ορισμένης σύνθετης γεωμετρικής κατανομής. Όμοια, από την Πρόταση 4.2.1 θα δώσουμε μια ελλειμματική εξίσωση που ικανοποιεί η $\upsilon(b,b)$ καθώς και τη λύση της. Τα αποτελέσματα αυτά δίνονται αντίστοιχα στις Προτάσεις 4.2.3 κα 4.2.4.

Πρόταση 4.2.3

Για $u = b$ *και* $\delta > 0$, *η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής* $m_b(b)$ *ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση*

$$m_b(b) = \frac{\lambda}{\lambda+\delta}\int_0^b m_b(b-y) f^*(y)dy + w^*(b), \tag{4.2.8}$$

με

$$f^*(y) = \frac{\lambda+\mu+\delta}{\lambda+\mu+\delta+\beta}\left(f_1(y) + \frac{\beta\, f_2(y)}{\lambda+\mu+\delta} \right),$$

$$w^*(b)=\frac{\lambda(\lambda+\mu+\delta)}{(\lambda+\mu+\delta+\beta)(\lambda+\delta)}\left(w_1(b)+\frac{\beta\,w_2(b)}{\lambda+\mu+\delta}\right),$$

και η λύση της μπορεί να εκφραστεί ως

$$m_b(b)=\frac{1}{\xi}\int_0^b[1-\bar{K}(b-y)]dH(y)+\frac{H(0)}{\xi}[1-\bar{K}(b)] \tag{4.2.9}$$

όπου, $H(b)=\dfrac{w^*(b)(\lambda+\delta)}{\lambda}$.

Απόδειξη

Υποθέτουμε $u=b$. Τότε η Εξίσωση (4.2.6) απλοποιείται σε

$$\begin{aligned}m_b(b)&=\frac{\mu}{\lambda+\mu+\delta}m_b(b)\bar{G}(0)\\&+\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta+\beta}\left(\int_0^b m_b(b-y)[f_1(y)-f_2(y)]dy+w_1(b)-w_2(b)\right)\\&+\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta}\left(\int_0^b m_b(b-y)f_2(y)dy+w_2(b)\right)\end{aligned}$$

αλλά $\overline{G}(0)=1$, οπότε από την παραπάνω ισότητα έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}&\left(1-\frac{\mu}{\lambda+\mu+\delta}\right)m_b(b)=\\&\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta+\beta}\int_0^b m_b(b-y)f_1(y)dy-\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta+\beta}\int_0^b m_b(b-y)f_2(y)dy\\&+\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta+\beta}w_1(b)-\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta+\beta}w_2(b)\\&+\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta}\int_0^b m_b(b-y)f_2(y)dy+\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta}w_2(b)\end{aligned}$$

ή

$$\begin{aligned}\frac{\mu+\delta}{\lambda+\mu+\delta}m_b(b)&=\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta+\beta}\int_0^b m_b(b-y)f_1(y)dy\\&+\frac{\lambda\beta}{(\lambda+\mu+\delta+\beta)(\lambda+\mu+\delta)}\int_0^b m_b(b-y)f_2(y)dy\\&+\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta+\beta}w_1(b)+\frac{\lambda\beta}{(\lambda+\mu+\delta+\beta)(\lambda+\mu+\delta)}w_2(b)\end{aligned}$$

ή

$$\frac{\mu+\delta}{\lambda+\mu+\delta} m_b(b) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta+\beta}\left(\int_0^b m_b(b-y)\left(f_1(y)+\frac{\beta\, f_2(y)}{\lambda+\mu+\delta}\right)dy\right)$$
$$+\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta+\beta}\left(w_1(b)+\frac{\beta\, w_2(b)}{\lambda+\mu+\delta}\right)$$

ή

$$m_b(b) = \frac{\lambda(\lambda+\mu+\delta)}{(\lambda+\mu+\delta+\beta)(\mu+\delta)}\left(\int_0^b m_b(b-y)\left(f_1(y)+\frac{\beta\, f_2(y)}{\lambda+\mu+\delta}\right)dy\right)$$
$$+\frac{\lambda(\lambda+\mu+\delta)}{(\lambda+\mu+\delta+\beta)(\mu+\delta)}\left(w_1(b)+\frac{\beta\, w_2(b)}{\lambda+\mu+\delta}\right)$$

όπου η τελευταία γράφεται στη μορφή

$$m_b(b) = \frac{\lambda}{\lambda+\delta}\int_0^b m_b(b-y)\, f^*(y)dy + w^*(b)$$

με

$$f^*(y) = \frac{\lambda+\mu+\delta}{\lambda+\mu+\delta+\beta}\left(f_1(y)+\frac{\beta\, f_2(y)}{\lambda+\mu+\delta}\right)$$

και

$$w^*(b) = \frac{\lambda(\lambda+\mu+\delta)}{(\lambda+\mu+\delta+\beta)(\lambda+\delta)}\left(w_1(b)+\frac{\beta\, w_2(b)}{\lambda+\mu+\delta}\right).$$

Αφού $\frac{\lambda}{\lambda+\delta}<1$, τότε η Εξίσωση (4.2.8) είναι μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση. Αναλυτική λύση της εξίσωσης αυτής μπορεί να βρεθεί με απευθείας εφαρμογή της Πρότασης 1.2. Συγκεκριμένα, έχουμε,

$\frac{1}{1+\xi} = \frac{\lambda}{\lambda+\delta}$ από όπου ισοδύναμα βρίσκουμε $\xi = \frac{\delta}{\lambda}$, και

$\vartheta(b) = w^*(b) = \frac{1}{1+\xi}H(b)$ από το οποίο είναι $H(b) = w^*(b)(1+\xi) = w^*(b)\frac{\lambda+\delta}{\lambda}$.

Για τη σύνθετη γεωμετρική κατανομή, η συνάρτηση δεξιάς ουράς της είναι

$$\bar{K}(u) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi}{1+\xi}\left(\frac{1}{1+\xi}\right)^n \bar{Z}^{*n}(u), \qquad u \ge 0,\ i=1,2,$$

με $\bar{Z}^{*n}(u)$ η δεξιά ουρά της n-οστής συνέλιξης της $Z(u) = 1-\bar{Z}(u) = \int_0^u f^*(y)dy$.

Από την Εξίσωση (1.6) προκύπτει άμεσα η λύση (4.2.9).

□

Πρόταση 4.2.4

Για $u=b$ η αναμενόμενη προεξοφλημένη καταβολή μερισμάτων μέχρι τη χρεοκοπία, $\upsilon(b,b)$, ικανοποιεί την ακόλουθη ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

$$\upsilon(b,b)=\frac{\lambda}{\lambda+\delta}\int_0^b V(b-y,b)\,f^*(y)dy+\frac{\mu\mu_G}{\lambda+\delta}. \qquad (4.2.10)$$

και η λύση της είναι

$$\upsilon(b,b)=\frac{\mu\mu_G}{\delta}[K(b)-K(0)]+\frac{\mu\mu_G}{\lambda+\delta}. \qquad (4.2.11)$$

Απόδειξη

Για $u=b$, η Εξίσωση (4.2.5) απλοποιείται στην ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση της μορφής

$$\begin{aligned}\upsilon(b,b)&=\frac{\mu}{\lambda+\mu+\delta}\left(\int_0^\infty xg(x)dx+\upsilon(b,b)\int_0^\infty g(x)dx\right)\\&+\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta+\beta}\left(\int_0^b \upsilon(b-y,b)\,f_1(y)dy-\int_0^b \upsilon(b-y,b)\,f_2(y)dy\right)\\&+\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta}\int_0^b \upsilon(b-y,b)\,f_2(y)dy\end{aligned}$$

αλλά $\int_0^\infty g(x)dx=1$ και $\int_0^\infty xg(x)dx=E(X_1)=\mu_G$, οπότε

$$\begin{aligned}\upsilon(b,b)-\frac{\mu}{\lambda+\mu+\delta}\upsilon(b,b)&=\frac{\mu}{\lambda+\mu+\delta}\mu_G\\&+\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta+\beta}\left(\int_0^b \upsilon(b-y,b)\,f_1(y)dy+\left(\frac{\lambda+\mu+\delta+\beta}{\lambda+\mu+\delta}-1\right)\int_0^b \upsilon(b-y,b)\,f_2(y)dy\right)\end{aligned}$$

ή

$$\frac{\lambda+\delta}{\lambda+\mu+\delta}\upsilon(b,b)=\frac{\mu}{\lambda+\mu+\delta}\mu_G+\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta+\beta}\int_0^b \upsilon(b-y,b)\left(f_1(y)+\frac{\beta\, f_2(y)}{\lambda+\mu+\delta}\right)dy$$

ή

$$\upsilon(b,b)=\frac{\mu}{\lambda+\delta}\mu_G+\frac{\lambda(\lambda+\mu+\delta)}{(\lambda+\mu+\delta+\beta)(\lambda+\delta)}\int_0^b \upsilon(b-y,b)\left(f_1(y)+\frac{\beta\, f_2(y)}{\lambda+\mu+\delta}\right)dy$$

και τελικά

$$\upsilon(b,b)=\frac{\lambda}{\lambda+\delta}\int_0^b \upsilon(b-y,b)\,f^*(y)dy+\frac{\mu\mu_G}{\lambda+\delta}$$

δηλαδή προέκυψε η ζητούμενη εξίσωση (4.2.10). Η τελευταία ανανεωτική εξίσωση είναι ελλειμματική καθώς $\frac{\lambda}{\lambda+\delta}<1$, και για την αναλυτική της λύση εφαρμόζουμε την Πρόταση

1.2. Συγκεκριμένα, είναι $\xi = \frac{\delta}{\lambda}$ όπως στην Πρόταση 4.2.3, και $\vartheta(b) = \frac{\mu\mu_G}{\lambda+\delta} = \frac{1}{1+\xi}H(b)$ από το οποίο προκύπτει $H(b) = (1+\xi)\frac{\mu\mu_G}{\lambda+\delta} = \left(1+\frac{\delta}{\lambda}\right)\frac{\mu\mu_G}{\lambda+\delta} = \frac{\mu\mu_G}{\lambda}$.

Από την Εξίσωση (1.5) προκύπτει

$$\begin{aligned}
\upsilon(b,b) &= \frac{1}{\xi}\int_0^b H(b-y)dK(y) + \vartheta(u) \\
&= \frac{1}{\xi}\int_0^b \frac{\mu\mu_G}{\lambda}dK(y) + \frac{\mu\mu_G}{\lambda+\delta} \\
&= \frac{1}{\xi}\frac{\mu\mu_G}{\lambda}\int_0^b dK(y) + \frac{\mu\mu_G}{\lambda+\delta} \\
&= \frac{1}{\xi}\frac{\mu\mu_G}{\lambda}[K(y)]_0^b + \frac{\mu\mu_G}{\lambda+\delta} \\
&= \frac{\mu\mu_G}{\delta}[K(b)-K(0)] + \frac{\mu\mu_G}{\lambda+\delta}.
\end{aligned}$$

□

4.2.2.3 Ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra και ακριβείς εκφράσεις για εκθετικά ασφάλιστρα

Στη συνέχεια θα βρούμε τις ακριβείς εκφράσεις των λύσεων για τις ολοκληρωτικές εξισώσεις (4.2.5) και (4.2.6) στην περίπτωση όπου τα ασφάλιστρα είναι εκθετικά κατανεμημένα.

Πρόταση 4.2.5

Έστω ότι η κατανομή του μεγέθους των ασφαλίστρων είναι η εκθετική με μέσο $1/\alpha$, $\alpha > 0$. *Τότε η ολοκληρωτική εξίσωση* (4.2.6) *μπορεί να εκφραστεί ως εξίσωση Volterra της μορφής*

$$m_b(u) = \int_0^u m_b(x)p(u,x)dx + l(u), \qquad 0 \le x \le u \le b, \qquad (4.2.12)$$

όπου

$$p(u,x) = \frac{(\lambda+\delta)\alpha}{\lambda+\mu+\delta} - \frac{\lambda[\alpha Z(u-x) - f(u-x)]}{\lambda+\mu+\delta+\beta},$$

$$Z(u) = \int_0^u f(y)dy,$$

$$f(y) = f_1(y) + \frac{\beta f_2(y)}{\lambda+\mu+\delta},$$

$$w(u) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta+\beta}\left(w_1(u) + \frac{\beta w_2(u)}{\lambda+\mu+\delta}\right),$$

$$l(u)=m_b(0)+\int_0^u (w'(x)-\alpha\, w(x))dx\,.$$

Απόδειξη

Θεωρούμε την περίπτωση όπου τα ασφάλιστρα είναι εκθετικά κατανεμημένα με συνάρτηση πυκνότητας και συνάρτηση κατανομής αντίστοιχα

$$g(x)=\alpha e^{-\alpha x}\,,\qquad G(x)=1-e^{-\alpha x}\,,\qquad \alpha\geq 0\,,\ x\geq 0\,.$$

Στην περίπτωση αυτή η Εξίσωση (4.2.6) γράφεται

$$\begin{aligned}m_b(u)&=\frac{\mu}{\lambda+\mu+\delta}\left(\int_0^{b-u} m_b(u+x)\alpha e^{-\alpha x}dx+m_b(b)e^{-\alpha(b-u)}\right)\\&+\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta+\beta}\int_0^u m_b(u-y)\,f_1(y)dy-\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta+\beta}\int_0^u m_b(u-y)\,f_2(y)dy\\&+\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta+\beta}\,w_1(u)-\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta+\beta}\,w_2(u)\\&+\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta}\int_0^u m_b(u-y)\,f_2(y)dy+\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta}\,w_2(u)\,.\end{aligned}$$

Για το ολοκλήρωμα της παρένθεσης θέτουμε $z=u+x$ και είναι $dz=dx$ και $0\leq x\leq b-u \Rightarrow u\leq z\leq b$, οπότε βρίσκουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}m_b(u)&=\frac{\mu}{\lambda+\mu+\delta}\left(\int_u^{b} m_b(z)\alpha e^{-\alpha(z-u)}dz+m_b(b)e^{-\alpha(b-u)}\right)\\&+\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta+\beta}\int_0^u m_b(u-y)\,f_1(y)dy+\frac{\lambda\,\beta}{(\lambda+\mu+\delta+\beta)(\lambda+\mu+\delta)}\int_0^u m_b(u-y)\,f_2(y)dy\\&+\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta+\beta}\,w_1(u)+\frac{\lambda\beta}{(\lambda+\mu+\delta+\beta)(\lambda+\mu+\delta)}\,w_2(u)\end{aligned}$$

ή

$$\begin{aligned}m_b(u)&=\frac{\mu}{\lambda+\mu+\delta}\left(\alpha e^{\alpha u}\int_u^{b} m_b(z)e^{-\alpha z}dz+m_b(b)e^{-\alpha(b-u)}\right)\\&+\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta+\beta}\int_0^u m_b(u-y)\left(f_1(y)+\frac{\beta\,f_2(y)}{\lambda+\mu+\delta}\right)dy\\&+\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta+\beta}\left(w_1(u)+\frac{\beta\,w_2(u)}{\lambda+\mu+\delta}\right)\end{aligned}$$

η οποία γράφεται ως

$$\begin{aligned}m_b(u)&=\frac{\mu}{\lambda+\mu+\delta}\left(\alpha e^{\alpha u}\int_u^{b} m_b(x)e^{-\alpha x}dx+m_b(b)e^{-\alpha(b-u)}\right)\\&+\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta+\beta}\int_0^u m_b(u-y)\,f(y)dy+w(u)\,,\end{aligned}\qquad (4.2.12\alpha)$$

όπου

$$f(y)=f_1(y)+\frac{\beta f_2(y)}{\lambda+\mu+\delta},$$

$$w(u)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta+\beta}\left(w_1(u)+\frac{\beta w_2(u)}{\lambda+\mu+\delta}\right).$$

Παραγωγίζοντας την (4.2.12α) ως προς u, εφαρμόζοντας τον κανόνα L3 του Leibniz (Παράρτημα Π8), έχουμε για $0\le u\le b$,

$$m_b'(u)=\frac{\mu}{\lambda+\mu+\delta}\left(\alpha^2 e^{\alpha u}\int_u^b m_b(x)e^{-\alpha x}dx+\alpha e^{\alpha u}\left(-m_b(u)e^{-\alpha u}\right)+m_b(b)\alpha e^{-\alpha(b-u)}\right)$$
$$+\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta+\beta}\frac{d}{du}\left(\int_0^u m_b(u-y)f(y)dy\right)+w'(u)$$

ή

$$m_b'(u)=\alpha\frac{\mu}{\lambda+\mu+\delta}\left(\alpha e^{\alpha u}\int_u^b m_b(x)e^{-\alpha x}dx+m_b(b)e^{-\alpha(b-u)}\right)-\frac{\alpha\mu}{\lambda+\mu+\delta}m_b(u)$$
$$+\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta+\beta}\frac{d}{du}\left(\int_0^u m_b(u-y)f(y)dy\right)+w'(u)$$

και αντικαθιστώντας τον πρώτο όρο στο δεξί σκέλος της προηγούμενης σχέσης με βάση την (4.2.12α) βρίσκουμε

$$m_b'(u)=\alpha\left(m_b(u)-\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta+\beta}\int_0^u m_b(u-y)f(y)dy-w(u)\right)-\frac{\alpha\mu}{\lambda+\mu+\delta}m_b(u)$$
$$+\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta+\beta}\frac{d}{du}\left(\int_0^u m_b(u-y)f(y)dy\right)+w'(u),$$

ή

$$m_b'(u)=\frac{\alpha(\lambda+\delta)}{\lambda+\mu+\delta}m_b(u)-\alpha\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta+\beta}\int_0^u m_b(u-y)f(y)dy$$
$$+\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta+\beta}\frac{d}{du}\left(\int_0^u m_b(u-y)f(y)dy\right)+(w'(u)-\alpha w(u)). \qquad (4.2.12\beta)$$

Αντικαθιστώντας το u με x στην (4.2.12β) και στη συνέχεια ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης ως προς x από το 0 στο u, προκύπτει για $0\le u\le b$,

$$m_b'(x)=\frac{\alpha(\lambda+\delta)}{\lambda+\mu+\delta}m_b(x)-\alpha\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta+\beta}\int_0^x m_b(x-y)f(y)dy$$
$$+\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta+\beta}\frac{d}{dx}\left(\int_0^x m_b(x-y)f(y)dy\right)+(w'(x)-\alpha w(x))$$

και

$$\int_0^u m_b'(x)dx = \int_0^u \left[\frac{\alpha(\lambda+\delta)}{\lambda+\mu+\delta} m_b(x) - \alpha \frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta+\beta} \int_0^x m_b(x-y) f(y)dy \right.$$
$$\left. + \frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta+\beta} \frac{d}{dx}\left(\int_0^x m_b(x-y) f(y)dy \right) + (w'(x) - \alpha\, w(x)) \right] dx$$

ή

$$m_b(u) - m_b(0) = \frac{\alpha(\lambda+\delta)}{\lambda+\mu+\delta} \int_0^u m_b(x)dx$$
$$- \frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta+\beta} \left[\int_0^u \left(\alpha \int_0^x m_b(x-y) f(y)dy \right) dx - \int_0^u \left(\frac{d}{dx} \int_0^x m_b(x-y) f(y)dy \right) dx \right]$$
$$+ \int_0^u (w'(x) - \alpha\, w(x))dx.$$

Σχετικά με το εσωτερικό ολοκλήρωμα του πρώτου όρου στις αγκύλες, θέτοντας $z = x - y$ έχουμε $dz = -dy$ και $x \le z \le 0$, οπότε αυτό γίνεται

$$\int_0^x m_b(x-y) f(y)dy = -\int_x^0 m_b(z) f(x-z)dz = \int_0^x m_b(z) f(x-z)dz \,.$$

Για το ολοκλήρωμα ως προς x του δεύτερου όρου στις αγκύλες είναι

$$\int_0^u \left(\frac{d}{dx} \int_0^x m_b(x-y) f(y)dy \right) dx = \int_0^u m_b(u-y) f(y)dy - 0 = \int_0^u m_b(u-y) f(y)dy$$

και θέτοντας $x = u - y$ έχουμε $dx = -dy$ και $u \le x \le 0$, οπότε

$$\int_0^u m_b(u-y) f(y)dy = -\int_u^0 m_b(x) f(u-x)dx = \int_0^u m_b(x) f(u-x)dx \,.$$

Οπότε

$$m_b(u) - m_b(0) = \frac{\alpha(\lambda+\delta)}{\lambda+\mu+\delta} \int_0^u m_b(x)dx$$
$$- \frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta+\beta} \left[\int_0^u \left(\alpha \int_0^x m_b(z) f(x-z)dz \right) dx - \int_0^u m_b(x) f(u-x)dx \right]$$
$$+ \int_0^u (w'(x) - \alpha\, w(x))dx$$

ή

$$m_b(u) - m_b(0) = \frac{\alpha(\lambda+\delta)}{\lambda+\mu+\delta}\int_0^u m_b(x)dx$$
$$-\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta+\beta}\int_0^u\left(\alpha\int_0^x m_b(z)f(x-z)dz - m_b(x)f(u-x)\right)dx$$
$$+\int_0^u (w'(x) - \alpha\, w(x))dx$$

Θέτοντας

$$Z(u) = \int_0^u f(y)dy$$

έχουμε ότι

$$m_b(x)\alpha Z(u-x) = m_b(x)\alpha\int_0^{u-x} f(y)dy$$

Οπότε

$$m_b(u) - m_b(0) = \frac{(\lambda+\delta)\alpha}{\lambda+\mu+\delta}\int_0^u m_b(x)dx - \frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta+\beta}\int_0^u m_b(x[\alpha Z(u-x) - f(u-x)]dx$$
$$+\int_0^u (w'(x) - \alpha w(x))dx$$

η οποία είναι ισοδύναμη με

$$m_b(u) = \int_0^u m_b(x)\left(\frac{(\lambda+\delta)\alpha}{\lambda+\mu+\delta} - \frac{\lambda[\alpha\, Z(u-x) - f(u-x)]}{\lambda+\mu+\delta+\beta}\right)dx + m_b(0) + \int_0^u (w'(x) - \alpha w(x))dx$$

και θέτοντας

$$p(u,x) = \frac{(\lambda+\delta)\alpha}{\lambda+\mu+\delta} - \frac{\lambda[\alpha\, Z(u-x) - f(u-x)]}{\lambda+\mu+\delta+\beta}, \text{ και}$$

$$l(u) = m_b(0) + \int_0^u (w'(x) - \alpha\, w(x))dx$$

προκύπτει η (4.2.12).

□

Για να μπορέσουμε να έχουμε τη λύση της $m_b(u)$ απαιτείται το $m_b(0)$, το οποίο πρέπει να προσδιορίσουμε. Η $l(u)$ είναι συνεχής στο $0 \le u \le b$ αφού η συνάρτηση $\omega(x_1, x_2)$ είναι φραγμένη και η $w(u)$ είναι συνεχής. Επίσης, η $p(u,x)$ είναι συνεχής στο $0 \le x \le u$ αφού οι $Z(x)$ και $f(x)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις. Σύμφωνα με τους Cai & Dickson (2002), η μοναδική λύση της $m_b(u)$ έχει την ακόλουθη έκφραση για $0 \le u \le b$,

$$m_b(u) = l(u) + \sum_{m=1}^{\infty}\int_0^u p_m(u,x)l(x)dx, \qquad (4.2.13)$$

όπου

$$p_m(u,x)=\int_x^u p(u,t)p_{m-1}(t,x)dt\,,\ m=2,3,...,\ 0\le x\le u\,,\ \text{με}\ \ p_1(u,x)=p(u,x)\,.$$

Θέτοντας $u=b$ στην (4.2.13), έχουμε ότι

$$\begin{aligned}m_b(b)&=l(b)+\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^b p_m(b,x)l(x)dx\\&=l(b)+\int_0^b\sum_{m=1}^{\infty}p_m(b,x)\,l(x)dx\\&=l(b)+\int_0^b P(b,x)l(x)dx\end{aligned}$$

όπου

$$P(b,x)=\sum_{m=1}^{\infty}p_m(b,x)\,,\ 0\le x\le b\,.$$

Αλλά

$$l(b)=m_b(0)+\int_0^b(w'(x)-\alpha\,w(x))dx$$

και

$$l(x)=m_b(0)+\int_0^x(w'(y)-\alpha\,w(y))dy$$

οπότε

$$\begin{aligned}m_b(b)&=m_b(0)+\int_0^b(w'(x)-\alpha\,w(x))dx+\int_0^b P(b,x)\left(m_b(0)+\int_0^x(w'(y)-\alpha\,w(y))dy\right)dx\\&=m_b(0)\left(1+\int_0^b P(b,x)dx\right)+\int_0^b(w'(x)-\alpha\,w(x))dx+\int_0^b P(b,x)\int_0^x(w'(y)-\alpha\,w(y))dydx\end{aligned}$$

και λύνοντας ως προς $m_b(0)$ βρίσκουμε ότι

$$m_b(0)=\frac{m_b(b)-\int_0^b(w'(x)-\alpha\,w(x))dx-\int_0^b P(b,x)\int_0^x(w'(y)-\alpha\,w(y))dydx}{1+\int_0^b P(b,x)dx}\,,\qquad(4.2.14)$$

όπου η $m_b(b)$ δίνεται στην (4.2.9).

Χρησιμοποιώντας τις ίδιες τεχνικές, μπορούμε να βρούμε την ολοκληρωτική εξίσωση Volterra για τις αναμενόμενες προεξοφλημένες πληρωμές μερισμάτων μέχρι τη χρεοκοπία, $\upsilon(u,b)$, όπως δίνεται στην Πρόταση 4.2.6 χωρίς απόδειξη.

Πρόταση 4.2.6

Εάν η κατανομή του μεγέθους των ασφαλίστρων G είναι εκθετικά κατανεμημένη με μέσο $1/\alpha$ *,* $\alpha > 0$*. Τότε η ολοκληρωτική εξίσωση* (4.2.5) *μπορεί να εκφραστεί ως εξίσωση Volterra της μορφής*

$$\upsilon(u,b) = \int_0^u \upsilon(x,b)\, p(u,x)dx + \upsilon(0,b), \qquad 0 \le x \le u \le b. \tag{4.2.15}$$

Επιπλέον, για $0 \le u < b$,

$$\upsilon(u,b) = \frac{\upsilon(b,b)\left(1+\int_0^u P(u,x)dx\right)}{1+\int_0^b P(b,x)dx}. \tag{4.2.16}$$

4.2.3 Μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας

Υποθέτουμε ότι $\omega(x_1,x_2)=1$ και $\delta > 0$. Τότε η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής Gerber-Shiu είναι ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας, συμβολικά $\psi_b(u)$, με γενική έκφραση

$$\psi_b(u) = E[e^{-\delta T_b} I(T_b < \infty) \,|\, U_b(0) = u].$$

Ο αναλυτικός υπολογισμός του $\psi_b(u)$ είναι δύσκολος για οποιαδήποτε κατανομή για τα μεγέθη των απαιτήσεων και των ασφαλίστρων. Στη συνέχεια μελετάμε την ειδική περίπτωση που τα εν λόγω μεγέθη είναι εκθετικά κατανεμημένα και μπορεί να βρεθεί κλειστή έκφραση για το $\psi_b(u)$. Έστω ότι οι συναρτήσεις πυκνότητας των ασφαλίστρων και απαιτήσεων είναι αντίστοιχα

$$g(x) = \alpha e^{-\alpha x}, \qquad f_1(x) = \alpha_1 e^{-\alpha_1 x}, \qquad f_2(x) = \alpha_2 e^{-\alpha_2 x}, \qquad x \ge 0. \tag{4.2.17}$$

Θέτοντας $\omega(x_1,x_2)=1$ είναι

$$w_i(u) = \int_u^\infty f_i(y)dy = \overline{F}_i(u) = e^{-\alpha_i u},$$

οπότε η (4.2.6) διαμορφώνεται ως

$$\begin{aligned}\psi_b(u) &= \frac{\mu}{\lambda+\mu+\delta}\left(\int_0^{b-u} \psi_b(u+x)g(x)dx + \psi_b(b)e^{-\alpha(b-u)}\right) \\ &+ \frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta+\beta}\left(\int_0^u \psi_b(u-y)[f_1(y)-f_2(y)]dy + e^{-\alpha_1 u} - e^{-\alpha_2 u}\right) \\ &+ \frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta}\left(\int_0^u \psi_b(u-y)f_2(y)dy + e^{-\alpha_2 u}\right).\end{aligned} \tag{4.2.18}$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα θέτουμε $z = u + x$ ενώ για τα άλλα δύο θέτουμε $z = u - y$ και η (4.2.18) γίνεται

$$\psi_b(u) = \frac{\mu}{\lambda+\mu+\delta}\left(\int_u^b \psi_b(z) g(z-u)dz + \psi_b(b)e^{-\alpha(b-u)}\right)$$
$$+\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta+\beta}\left(\int_0^u \psi_b(z)[f_1(u-z) - f_2(u-z)]dz + e^{-\alpha_1 u} - e^{-\alpha_2 u}\right)$$
$$+\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta}\left(\int_0^u \psi_b(z) f_2(u-z)dz + e^{-\alpha_2 u}\right). \tag{4.2.19}$$

Στη συνέχεια παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη της (4.2.19) ως προς u, με εφαρμογή του κανόνα L1 του Leibniz (Παράρτημα Π8) και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι

$$\frac{d}{du} g(z-u) = \frac{d}{du}\alpha\, e^{-\alpha(z-u)} = \alpha\alpha\, e^{-\alpha(z-u)} = \alpha g(z-u),$$
$$\frac{d}{du} f_i(u-z) = \frac{d}{du}\alpha_i e^{-\alpha_i(u-z)} = -\alpha_i\alpha_i e^{-\alpha_i(u-z)} = -\alpha_i f_i(u-z), \quad i = 1,2,$$

παίρνουμε

$$\psi_b^{(1)}(u) = \frac{\mu}{\lambda+\mu+\delta}\left(-\alpha\psi_b(u) + \alpha\int_u^b \psi_b(z) g(z-u)dz + \alpha\psi_b(b)e^{-\alpha(b-u)}\right)$$
$$+\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta+\beta}\left((\alpha_1-\alpha_2)\psi_b(u) - \alpha_1\int_0^u \psi_b(z) f_1(u-z)dy\right.$$
$$\left. +\alpha_2\int_0^u \psi_b(z) f_1(u-z)dy - \alpha_1 e^{-\alpha_1 u} + \alpha_2 e^{-\alpha_2 u}\right)$$
$$+\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta}\left(\alpha_2\psi_b(z) - \alpha_2\int_0^u \psi_b(z) f_2(u-z)dy - \alpha_2 e^{-\alpha_2 u}\right)$$

από την οποία με αναδιάταξη των όρων προκύπτει η επόμενη ολοκληροδιαφορική εξίσωση

$$\psi_b^{(1)}(u) = \left(\frac{\lambda(\alpha_1-\alpha_2)}{\lambda+\mu+\delta+\beta} + \frac{\lambda\alpha_2 - \mu\alpha}{\lambda+\mu+\delta}\right)\psi_b(u) + \frac{\mu\alpha}{\lambda+\mu+\delta}\left(\int_u^b \psi_b(z) g(z-u)dz + \psi_b(b)e^{-\alpha(b-u)}\right)$$
$$+\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta+\beta}\left(-\alpha_1\int_0^u \psi_b(z) f_1(u-z)dz + \alpha_2\int_0^u \psi_b(z) f_2(u-z)dz - \alpha_1 e^{-\alpha_1 u} - \alpha_2 e^{-\alpha_2 u}\right)$$
$$-\frac{\lambda\alpha_2}{\lambda+\mu+\delta}\left(\int_0^u \psi_b(z) f_2(u-z)dz + e^{-\alpha_2 u}\right). \tag{4.2.20}$$

Παραγωγίζοντας ως προς u την (4.2.20) προκύπτει

$$\psi_b^{(2)}(u) = \left(\frac{\lambda(\alpha_1-\alpha_2)}{\lambda+\mu+\delta+\beta} + \frac{\lambda\alpha_2 - \mu\alpha}{\lambda+\mu+\delta}\right)\psi_b^{(1)}(u) - \left(\frac{\lambda(\alpha_1^2-\alpha_2^2)}{\lambda+\mu+\delta+\beta} + \frac{\lambda\alpha_2^2 + \mu\alpha^2}{\lambda+\mu+\delta}\right)\psi_b(u)$$
$$+\frac{\mu\alpha^2}{\lambda+\mu+\delta}\left(\int_u^b \psi_b(z) g(z-u)dz + \psi_b(b)e^{-\alpha(b-u)}\right)$$

$$+\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta+\beta}\left(\alpha_1^2\int_0^u\psi_b(z)\,f_1(u-z)dz-\alpha_2^2\int_0^u\psi_b(z)\,f_2(u-z)dz+\alpha_1^2e^{-\alpha_1 u}-\alpha_2^2e^{-\alpha_2 u}\right)$$

$$+\frac{\lambda\alpha_2^2}{\lambda+\mu+\delta}\left(\int_0^u\psi_b(z)\,f_2(u-z)dz+e^{-\alpha_2 u}\right). \qquad (4.2.21)$$

Παραγωγίζοντας την (4.2.21) ως προς *u* και κάνοντας χρήση των (4.2.19)-(4.2.21) βρίσκουμε

$$\psi_b^{(3)}(u)=\frac{A_1}{(\lambda+\mu+\delta)(\lambda+\mu+\beta+\delta)}\psi_b^{(2)}(u)+\frac{A_2}{(\lambda+\mu+\delta)(\lambda+\mu+\beta+\delta)}\psi_b^{(1)}(u)$$

$$+\frac{\alpha\alpha_1\alpha_2\delta}{\lambda+\mu+\delta}\psi_b(u), \qquad (4.2.22)$$

όπου,

$$A_1=\alpha(\lambda+\delta)(\lambda+\mu+\beta+\delta)-\alpha_1(\lambda+\mu+\delta)(\mu+\beta+\delta)-\alpha_2[(\lambda+\mu+\delta)^2+\beta(\mu+\delta)],$$

$$A_2=\alpha\alpha_1[\beta(\lambda+\delta)+\delta(\lambda+\mu+\delta)]+\alpha\alpha_2[\beta\delta+(\lambda+\delta)(\lambda+\mu+\delta)]$$

$$-\alpha_1\alpha_2(\mu+\delta)(\lambda+\mu+\beta+\delta).$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της (4.2.22) είναι

$$z^3=\frac{A_1}{(\lambda+\mu+\delta)(\lambda+\mu+\beta+\delta)}z^2+\frac{A_2}{(\lambda+\mu+\delta)(\lambda+\mu+\beta+\delta)}z+\frac{\alpha\alpha_1\alpha_2\delta}{\lambda+\mu+\delta}, \qquad (4.2.23)$$

και έχει τρεις ρίζες, έστω z_1, z_2, z_3.

Παρατηρούμε ότι καθώς $\delta\to 0$ είναι $z_1\to 0$ αφού η (4.2.23) γίνεται

$$z^3=\frac{A_1}{(\lambda+\mu)(\lambda+\mu+\beta)}z^2+\frac{A_2}{(\lambda+\mu)(\lambda+\mu+\beta)}z.$$

Έτσι η γενική λύση της $\psi_b(u)$ είναι

$$\psi_b(u)=C_1e^{z_1u}+C_2e^{z_2u}+C_3e^{z_3u}, \qquad 0\le u\le b. \qquad (4.2.24)$$

Στη συνέχεια θέλουμε να προσδιορίσουμε τους συντελεστές C_1, C_2 και C_3. Αντικαθιστώντας την (4.2.24) στην (4.2.19) μετά από τις πράξεις καταλήγουμε στην εξίσωση

$$C_1e^{z_1u}\left(\frac{\mu\alpha}{(\lambda+\mu+\delta)(\alpha-z_1)}+\frac{\lambda\left(\Delta_1+\frac{\beta\Lambda_1}{\lambda+\mu+\delta}\right)}{\lambda+\mu+\delta+\beta}-1\right)+\frac{e^{-u\alpha_1}\lambda[1-(C_1\Delta_1+C_2\Delta_2+C_3\Delta_3)]}{\lambda+\mu+\delta+\beta}$$

$$+C_2e^{z_2u}\left(\frac{\mu\alpha}{(\lambda+\mu+\delta)(\alpha-z_2)}+\frac{\lambda\left(\Delta_2+\frac{\beta\Lambda_2}{\lambda+\mu+\delta}\right)}{\lambda+\mu+\delta+\beta}-1\right)+\frac{e^{-u\alpha_2}\lambda\beta[1-(C_1\Lambda_1+C_2\Lambda_2+C_3\Lambda_3)]}{(\lambda+\mu+\delta)(\lambda+\mu+\delta+\beta)}$$

$$+C_3e^{z_3u}\left(\frac{\mu\alpha}{(\lambda+\mu+\delta)(\alpha-z_3)}+\frac{\lambda\left(\Delta_3+\dfrac{\beta\Lambda_2}{\lambda+\mu+\delta}\right)}{\lambda+\mu+\delta+\beta}-1\right)+\frac{\mu e^{-\alpha(b-u)}(C_1\Gamma_1+C_2\Gamma_2+C_3\Gamma_3)}{\lambda+\mu+\delta}=0\,.$$

όπου,

$$\Delta_i=\frac{\alpha_1}{z_i+\alpha_1},\quad \Lambda_i=\frac{\alpha_2}{z_i+\alpha_2},\ \Gamma_i=\frac{e^{bz_i}z_i}{z_i-\alpha},\qquad i=1,2,3. \tag{4.2.24α}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις ισχύουν για $0\le u\le b$. Με σύγκριση των συντελεστών των $e^{-u\alpha_1}$, $e^{-u\alpha_2}$ και $e^{(-b+u)\alpha}$ προκύπτει το σύστημα

$$\begin{cases}1-C_1\Delta_1+C_2\Delta_2+C_3\Delta_3)=0,\\ 1-(C_1\Lambda_1+C_2\Lambda_2+C_3\Lambda_3)=0,\\ C_1\Gamma_1+C_2\Gamma_2+C_3\Gamma_3=0.\end{cases} \tag{4.2.25}$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (4.2.25) βρίσκουμε

$$\begin{cases}C_1=-\dfrac{(\Gamma_2\Delta_3-\Gamma_3\Delta_2)(\Lambda_2-\Delta_2)+\Gamma_2(\Delta_2\Lambda_3-\Delta_3\Lambda_2)}{(\Gamma_2\Delta_3-\Gamma_3\Delta_2)(\Delta_2\Lambda_1-\Delta_1\Lambda_2)-(\Gamma_2\Delta_1-\Gamma_1\Delta_2)(\Delta_2\Lambda_3-\Delta_3\Lambda_2)},\\ C_2=-\dfrac{(\Gamma_1\Delta_3-\Gamma_3\Delta_1)(\Lambda_1-\Delta_1)+\Gamma_1(\Delta_1\Lambda_3-\Delta_3\Lambda_1)}{(\Gamma_1\Delta_3-\Gamma_3\Delta_1)(\Delta_1\Lambda_2-\Delta_2\Lambda_1)-(\Gamma_1\Delta_2-\Gamma_2\Delta_1)(\Delta_1\Lambda_3-\Delta_3\Lambda_1)},\\ C_3=-\dfrac{(\Gamma_1\Delta_2-\Gamma_2\Delta_1)(\Lambda_1-\Delta_1)+\Gamma_1(\Delta_1\Lambda_2-\Delta_2\Lambda_1)}{(\Gamma_1\Delta_2-\Gamma_2\Delta_1)(\Delta_1\Lambda_3-\Delta_3\Lambda_1)-(\Gamma_1\Delta_3-\Gamma_3\Delta_1)(\Delta_1\Lambda_2-\Delta_2\Lambda_1)}.\end{cases} \tag{4.2.26}$$

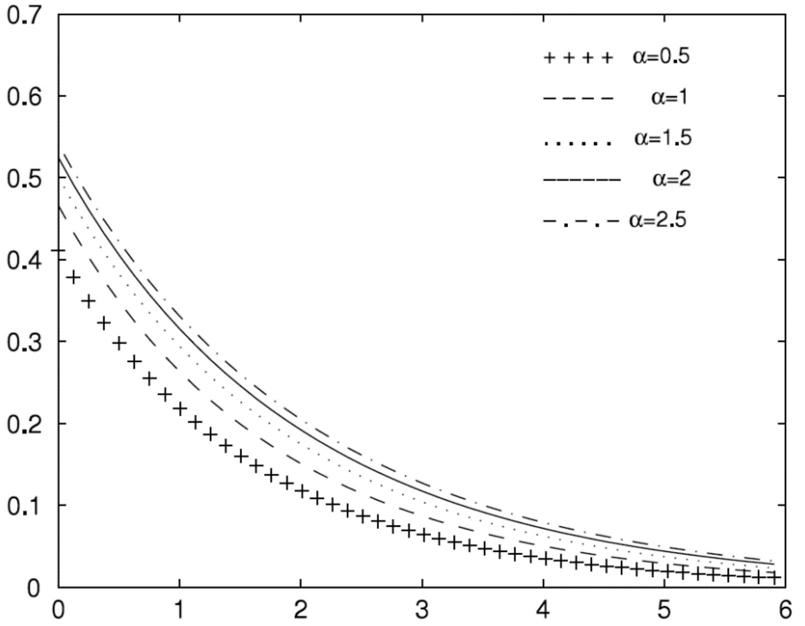
Παρατήρηση 4.2.1. Στην περίπτωση που $\delta=0$ τότε $z_1=0$ και ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας $\psi_b(u)$ είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας $m_b(u)$. Επιπλέον, από την (4.2.24α) προκύπτει $\Delta_1=\Lambda_1=1$, $\Gamma_1=1$, οπότε από την (4.2.26) έχουμε $C_2=0$, $C_3=0$ και από (4.2.25) βρίσκουμε $C_1=1$ και άρα $m_b(u)=1$, $0\le u\le b$. Αυτό δείχνει ότι η χρεοκοπία είναι βέβαιη όταν υπάρχει ένα πεπερασμένο οριζόντιο κατώφλι ($b<\infty$). Τότε η πιθανότητα επιβίωσης είναι $\varphi_b(u)=1-m_b(u)=0$.

4.2.4 Αριθμητική Εφαρμογή

Θεωρούμε τις τιμές των παραμέτρων

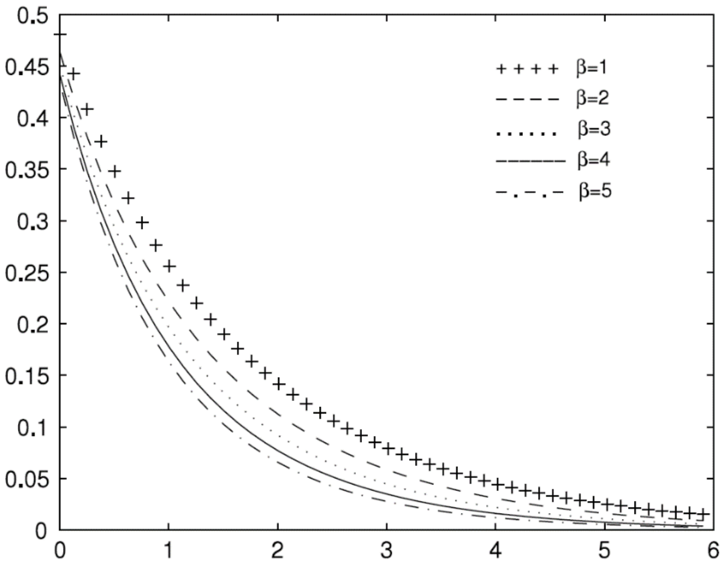
$$\delta = 0.6,\ \lambda = 1,\ \mu = 1.5,\ \alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 2,\ b = 10.$$

Από τις (4.2.24) και (4.2.26) βρίσκουμε αριθμητικές τιμές για την $\psi_b(u)$. Το Σχήμα 4.2.1 δείχνει το μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας $\psi_b(u)$ για β = 0.4 για τιμές του u στο διάστημα [0, 6] και α = 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5. Από το γράφημα βλέπουμε ότι η $\psi_b(u)$ φθίνει καθώς το αρχικό απόθεμα αυξάνει. Επιπλέον, σε συγκεκριμένη τιμή του u, η τιμή του $\psi_b(u)$ αυξάνει, καθώς αυξάνει η τιμή του α.



Σχήμα 4.2.1: Η $\psi_b(u)$ για β = 0.4

Το Σχήμα 4.2.2 απεικονίζει την $\psi_b(u)$ για α = 1.5 για διάφορες τιμές του u στο [0, 6] και β = 1, 2, 3, 4, 5. Στην περίπτωση αυτή, βλέπουμε ότι για μια συγκεκριμένη τιμή του u, η τιμή του $\psi_b(u)$ φθίνει, καθώς αυξάνει η τιμή του β.



Σχήμα 4.2.2: Η $\psi_b(u)$ για α = 1.5

4.2.5 Βέλτιστο όριο μερίσματος

Οι Dickson and Waters (2004) επιχειρηματολόγησαν ότι οι μέτοχοι είναι υποχρεωμένοι να καλύψουν το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας. Υπό αυτό το πρίσμα, οι μέτοχοι θα ήθελαν να μεγιστοποιήσουν την αναμενόμενη τιμή της διαφοράς των προεξοφλημένων μερισμάτων μέχρι τη χρεοκοπία και του προεξοφλημένου ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας. Δηλαδή, αναζητάμε την τιμή του ορίου b που μεγιστοποιεί την

$$M(u,b) = \upsilon(u,b) - \Psi_b(u), \tag{4.2.27}$$

για κάποιο $u \in [0,b]$.

Έστω b^* η βέλτιστη τιμή του b. Υποθέτοντας $b^* > 0$ ισχύει

$$\frac{\partial}{\partial b} M(u,b)\bigg|_{b=b^*} = 0\,. \tag{4.2.28}$$

Θεωρούμε όπως και πριν, την περίπτωση εκθετικά κατανεμημένων ασφαλίστρων και απαιτήσεων, δηλαδή ότι

$$g(x) = \alpha\, e^{-\alpha x}, \qquad f_1(x) = \alpha_1\, e^{-\alpha_1 x}, \qquad f_2(x) = \alpha_2\, e^{-\alpha_2 x}, \qquad x \ge 0\,.$$

Από την (4.2.15) θέτοντας $z = u + x$ στα δύο πρώτα ολοκληρώματα και $z = u - y$ στα τρία τελευταία, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\upsilon(u,b) = {} & \frac{\mu}{\lambda+\mu+\delta}\left(\int_u^b \upsilon(z,b) g(z-u)dz + \int_b^\infty (z-b+\upsilon(b,b)) g(z-u)dz\right) \\ & + \frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta+\beta}\left(\int_0^u \upsilon(z,b)\, f_1(u-z)dz - \int_0^u \upsilon(z,b)\, f_2(u-z)dz\right) \\ & + \frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta}\int_0^u \upsilon(z,b)\, f_2(u-z)dz\,.\end{aligned} \tag{4.2.29}$$

Παραγωγίζοντας την Εξίσωση (4.2.29) ως προς u, παίρνουμε την επόμενη ολοκληροδιαφορική εξίσωση:

$$\begin{aligned}\upsilon^{(1)}(u,b) = {} & \left(\frac{\lambda(\alpha_1-\alpha_2)}{\lambda+\mu+\delta+\beta} + \frac{\lambda\alpha_2 - \mu\alpha}{\lambda+\mu+\delta}\right)\upsilon(u,b) \\ & + \frac{\mu\alpha}{\lambda+\mu+\delta}\left(\int_u^b \upsilon(z,b) g(z-u)dz + \int_b^\infty (z-b+\upsilon(b,b)) g(z-u)dz\right) \\ & + \frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta+\beta}\left(-\alpha_1\int_0^u \upsilon(z,b)\, f_1(u-z)dz + \alpha_2\int_0^u \upsilon(z,b)\, f_2(u-z)dz\right) \\ & - \frac{\lambda\alpha_2}{\lambda+\mu+\delta}\int_0^u \upsilon(z,b)\, f_2(u-z)dz\,.\end{aligned} \tag{4.2.30}$$

Παραγωγίζοντας ξανά προς u, από την (4.2.30) προκύπτει

$$\upsilon^{(2)}(u,b) = \left(\frac{\lambda(\alpha_1-\alpha_2)}{\lambda+\mu+\delta+\beta} + \frac{\lambda\alpha_2 - \mu\alpha}{\lambda+\mu+\delta}\right)\upsilon^{(1)}(u,b) - \left(\frac{\lambda(\alpha_1^2-\alpha_2^2)}{\lambda+\mu+\delta+\beta} + \frac{\lambda\alpha_2^2 + \mu\alpha^2}{\lambda+\mu+\delta}\right)\upsilon(u,b)$$

$$+\frac{\mu\alpha^2}{\lambda+\mu+\delta}\left(\int_u^b \upsilon(z,b)g(z-u)dz+\int_b^\infty (z-b+\upsilon(b,b)g(z-u)dz\right)$$

$$+\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta+\beta}\left(\alpha_1^2\int_0^u \upsilon(z,b)\,f_1(u-z)dz-\alpha_2^2\int_0^u \upsilon(z,b)\,f_2(u-z)dz\right)$$

$$+\frac{\lambda\alpha_2^2}{\lambda+\mu+\delta}\int_0^u \upsilon(z,b)\,f_2(u-z)dz\,. \qquad (4.2.31)$$

Παραγωγίζοντας την (4.2.31) ως προς u και κάνοντας χρήση των (4.2.29) και (4.2.30) βρίσκουμε

$$\upsilon^{(3)}(u,b)=\frac{A_1}{(\lambda+\mu+\delta)(\lambda+\mu+\beta+\delta)}\upsilon^{(2)}(u,b)+\frac{A_2}{(\lambda+\mu+\delta)(\lambda+\mu+\beta+\delta)}\upsilon^{(1)}(u,b)$$

$$+\frac{\alpha\alpha_1\alpha_2\delta}{\lambda+\mu+\delta}\upsilon(u,b)\,, \qquad (4.2.32)$$

όπου τα A_1 και A_2 είναι ίδια όπως έχουν δοθεί στην Εξίσωση (4.2.22). Έτσι η γενική λύση της $\upsilon(u,b)$ είναι

$$\upsilon(u,b)=D_1(b)e^{z_1u}+D_2(b)e^{z_2u}+D_3(b)e^{z_3u}\,,\qquad 0\le u\le b\,. \qquad (4.2.33)$$

Για να προσδιοριστούν οι συντελεστές D_1, D_2 και D_3, η (4.2.33) αντικαθίσταται στην (4.2.29) και προκύπτει

$$D_1(b)e^{z_1u}\left(\frac{\mu\alpha}{(\lambda+\mu+\delta)(\alpha-z_1)}+\frac{\lambda\left(\Delta_1+\frac{\beta\Lambda_1}{\lambda+\mu+\delta}\right)}{\lambda+\mu+\delta+\beta}-1\right)-\frac{e^{-u\alpha_1}\lambda(D_1(b)\Delta_1+D_2(b)\Delta_2+D_3(b)\Delta_3)}{\lambda+\mu+\delta+\beta}$$

$$+D_2(b)e^{z_2u}\left(\frac{\mu\alpha}{(\lambda+\mu+\delta)(\alpha-z_2)}+\frac{\lambda\left(\Delta_2+\frac{\beta\Lambda_2}{\lambda+\mu+\delta}\right)}{\lambda+\mu+\delta+\beta}-1\right)-\frac{e^{-u\alpha_2}\lambda\beta(D_1(b)\Lambda_1+D_2(b)\Lambda_2+D_3(b)\Lambda_3)}{(\lambda+\mu+\delta)(\lambda+\mu+\delta+\beta)}$$

$$+D_3(b)e^{z_3u}\left(\frac{\mu\alpha}{(\lambda+\mu+\delta)(\alpha-z_3)}+\frac{\lambda\left(\Delta_3+\frac{\beta\Lambda_2}{\lambda+\mu+\delta}\right)}{\lambda+\mu+\delta+\beta}-1\right)$$

$$+\frac{\mu e^{-\alpha(b-u)}\left(\frac{1}{\alpha}+D_1(b)\Gamma_1+D_2(b)\Gamma_2+D_3(b)\Gamma_3\right)}{\lambda+\mu+\delta}=0\,.$$

όπου, Δ_i,Λ_i και Γ_i όπως στην (4.2.24α).

Με σύγκριση των συντελεστών των $e^{-u\alpha_1}$, $e^{-u\alpha_2}$ και $e^{-(b-u)\alpha}$ προκύπτει το σύστημα

$$\begin{cases} D_1(b)\Delta_1 + D_2(b)\Delta_2 + D_3(b)\Delta_3 = 0, \\ D_1(b)\Lambda_1 + D_2(b)\Lambda_2 + D_3(b)\Lambda_3 = 0, \\ \dfrac{1}{\alpha} + D_1(b)\Gamma_1 + D_2(b)\Gamma_2 + D_3(b)\Gamma_3 = 0. \end{cases} \tag{4.2.34}$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (4.2.34) βρίσκουμε

$$\begin{cases} D_1(b) = \dfrac{\Delta_2(\Delta_2\Lambda_3 - \Delta_3\Lambda_2)}{\alpha[(\Gamma_3\Delta_2 - \Gamma_2\Delta_3)(\Delta_2\Lambda_1 - \Delta_1\Lambda_2) - (\Gamma_1\Delta_2 - \Gamma_2\Delta_1)(\Delta_2\Lambda_3 - \Delta_3\Lambda_2)]}, \\ D_2(b) = \dfrac{\Delta_1(\Delta_1\Lambda_3 - \Delta_3\Lambda_1)}{\alpha[(\Gamma_3\Delta_1 - \Gamma_1\Delta_3)(\Delta_1\Lambda_2 - \Delta_2\Lambda_1) - (\Gamma_2\Delta_1 - \Gamma_1\Delta_2)(\Delta_1\Lambda_3 - \Delta_3\Lambda_1)]}, \\ D_3(b) = \dfrac{\Delta_1(\Delta_1\Lambda_2 - \Delta_2\Lambda_1)}{\alpha[(\Gamma_2\Delta_1 - \Gamma_1\Delta_2)(\Delta_1\Lambda_3 - \Delta_3\Lambda_1) - (\Gamma_3\Delta_1 - \Gamma_1\Delta_3)(\Delta_1\Lambda_2 - \Delta_2\Lambda_1)]}. \end{cases} \tag{4.2.35}$$

Με όμοια τεχνική προκύπτει

$$\Psi_b^{(3)}(u) = \frac{A_1}{(\lambda+\mu+\delta)(\lambda+\mu+\beta+\delta)}\Psi_b^{(2)}(u) + \frac{A_2}{(\lambda+\mu+\delta)(\lambda+\mu+\beta+\delta)}\Psi_b^{(1)}(u)$$
$$+\frac{\alpha\alpha_1\alpha_2\delta}{\lambda+\mu+\delta}\Psi_b(u), \tag{4.2.36}$$

και

$$\Psi_b(u) = E_1(b)e^{z_1 u} + E_2(b)e^{z_2 u} + E_3(b)e^{z_3 u}, \qquad 0 \le u \le b. \tag{4.2.37}$$

Αντικαθιστώντας την (4.2.37) στην (4.2.7) έχουμε

$$E_1(b)e^{z_1 u}\left(\frac{\mu\alpha}{(\lambda+\mu+\delta)(\alpha-z_1)} + \frac{\lambda\left(\Delta_1 + \dfrac{\beta\Lambda_1}{\lambda+\mu+\delta}\right)}{\lambda+\mu+\delta+\beta} - 1\right)$$
$$+\frac{e^{-u\alpha_1}\lambda[1-\alpha_1(E_1(b)\Delta_1 + E_2(b)\Delta_2 + E_3(b)\Delta_3)]}{\alpha_1(\lambda+\mu+\delta+\beta)}$$
$$+E_2(b)e^{z_2 u}\left(\frac{\mu\alpha}{(\lambda+\mu+\delta)(\alpha-z_2)} + \frac{\lambda\left(\Delta_2 + \dfrac{\beta\Lambda_2}{\lambda+\mu+\delta}\right)}{\lambda+\mu+\delta+\beta} - 1\right)$$
$$+\frac{e^{-u\alpha_2}\lambda\beta[1-\alpha_2(E_1(b)\Lambda_1 + E_2(b)\Lambda_2 + E_3(b)\Lambda_3)]}{\alpha_2(\lambda+\mu+\delta)(\lambda+\mu+\delta+\beta)}$$
$$+E_3(b)e^{z_3 u}\left(\frac{\mu\alpha}{(\lambda+\mu+\delta)(\alpha-z_3)} + \frac{\lambda\left(\Delta_3 + \dfrac{\beta\Lambda_2}{\lambda+\mu+\delta}\right)}{\lambda+\mu+\delta+\beta} - 1\right)$$

$$+\frac{\mu e^{-\alpha(b-u)}(E_1(b)\Gamma_1+E_2(b)\Gamma_2+E_3(b)\Gamma_3)}{\lambda+\mu+\delta}=0\,.$$

Με σύγκριση των συντελεστών των $e^{-u\alpha_1}$, $e^{-u\alpha_2}$ και $e^{-\alpha(b-u)}$ προκύπτει το σύστημα

$$\begin{cases}1-\alpha_1(E_1(b)\Delta_1+E_2(b)\Delta_2+E_3(b)\Delta_3)=0,\\ 1-\alpha_2(E_1(b)\Lambda_1+E_2(b)\Lambda_2+E_3(b)\Lambda_3)=0,\\ E_1(b)\Gamma_1+E_2(b)\Gamma_2+E_3(b)\Gamma_3=0.\end{cases} \tag{4.2.38}$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (4.2.38) βρίσκουμε

$$\begin{cases}E_1(b)=-\dfrac{(\Gamma_2\Delta_3-\Gamma_3\Delta_2)(\Lambda_2\alpha_2-\Delta_2\alpha_1)+\Gamma_2\alpha_2(\Delta_2\Lambda_3-\Delta_3\Lambda_2)}{\alpha_1\alpha_2[(\Gamma_2\Delta_3-\Gamma_3\Delta_2)(\Delta_2\Lambda_1-\Delta_1\Lambda_2)-(\Gamma_2\Delta_1-\Gamma_1\Delta_2)(\Delta_2\Lambda_3-\Delta_3\Lambda_2)]},\\ E_2(b)=-\dfrac{(\Gamma_1\Delta_3-\Gamma_3\Delta_1)(\Lambda_1\alpha_2-\Delta_1\alpha_1)+\Gamma_1\alpha_2(\Delta_1\Lambda_3-\Delta_3\Lambda_1)}{\alpha_1\alpha_2[(\Gamma_1\Delta_3-\Gamma_3\Delta_1)(\Delta_1\Lambda_2-\Delta_2\Lambda_1)-(\Gamma_1\Delta_2-\Gamma_2\Delta_1)(\Delta_1\Lambda_3-\Delta_3\Lambda_1)]},\\ E_3(b)=-\dfrac{(\Gamma_1\Delta_2-\Gamma_2\Delta_1)(\Lambda_1\alpha_2-\Delta_1\alpha_1)+\Gamma_1\alpha_2(\Delta_1\Lambda_2-\Delta_2\Lambda_1)}{\alpha_1\alpha_2[(\Gamma_1\Delta_2-\Gamma_2\Delta_1)(\Delta_1\Lambda_3-\Delta_3\Lambda_1)-(\Gamma_1\Delta_3-\Gamma_3\Delta_1)(\Delta_1\Lambda_2-\Delta_2\Lambda_1)]}.\end{cases} \tag{4.2.39}$$

Πρόταση 4.2.7

Η συνθήκη για τη βέλτιστη τιμή b^* ικανοποιεί τη σχέση

$$-\alpha[D_1(b^*)]^2\,\frac{\alpha[(\bar\Gamma_3\Delta_2z_3-\bar\Gamma_2\Delta_3z_2)(\Delta_2\Lambda_1-\Delta_1\Lambda_2)-(\bar\Gamma_1\Delta_2z_1-\bar\Gamma_2\Delta_1z_2)(\Delta_2\Lambda_3-\Delta_3\Lambda_2)]}{\Delta_2(\Delta_2\Lambda_3-\Delta_3\Lambda_2)}$$

$$=E_1(b^*)\,\frac{(\bar\Gamma_2\Delta_3z_2-\bar\Gamma_3\Delta_2z_3)(\Lambda_2\alpha_2-\Delta_2\alpha_1)+\bar\Gamma_1z_2\alpha_2(\Delta_2\Lambda_3-\Delta_3\Lambda_2)}{\alpha_1\alpha_2[(\bar\Gamma_2\Delta_3-\bar\Gamma_3\Delta_2)(\Delta_2\Lambda_1-\Delta_1\Lambda_2)-(\bar\Gamma_2\Delta_1-\bar\Gamma_1\Delta_2)(\Delta_2\Lambda_3-\Delta_3\Lambda_2)]}$$

$$-[E_1(b^*)]^2\,\frac{(\bar\Gamma_2\Delta_3z_2-\bar\Gamma_3\Delta_2z_3)(\Delta_2\Lambda_1-\Delta_1\Lambda_2)-(\bar\Gamma_2\Delta_1z_2-\bar\Gamma_1\Delta_2z_1)(\Delta_2\Lambda_3-\Delta_3\Lambda_2)}{(\bar\Gamma_2\Delta_3-\bar\Gamma_3\Delta_2)(\Delta_2\Lambda_1-\Delta_1\Lambda_2)-(\bar\Gamma_2\Delta_1-\bar\Gamma_1\Delta_2)(\Delta_2\Lambda_3-\Delta_3\Lambda_2)} \tag{4.2.40}$$

ή

$$-\alpha[D_2(b^*)]^2\,\frac{\alpha[(\bar\Gamma_3\Delta_1z_3-\bar\Gamma_1\Delta_3z_1)(\Delta_1\Lambda_2-\Delta_2\Lambda_1)-(\bar\Gamma_2\Delta_1z_2-\bar\Gamma_1\Delta_2z_1)(\Delta_1\Lambda_3-\Delta_3\Lambda_1)]}{\Delta_1(\Delta_1\Lambda_3-\Delta_3\Lambda_1)}$$

$$=E_2(b^*)\,\frac{(\bar\Gamma_1\Delta_3z_1-\bar\Gamma_3\Delta_1z_3)(\Lambda_1\alpha_2-\Delta_1\alpha_1)+\bar\Gamma_1z_1\alpha_2(\Delta_1\Lambda_3-\Delta_3\Lambda_1)}{\alpha_1\alpha_2[(\bar\Gamma_1\Delta_3-\bar\Gamma_3\Delta_1)(\Delta_1\Lambda_2-\Delta_2\Lambda_1)-(\bar\Gamma_1\Delta_2-\bar\Gamma_2\Delta_1)(\Delta_1\Lambda_3-\Delta_3\Lambda_2)]}$$

$$-[E_2(b^*)]^2\,\frac{(\bar\Gamma_1\Delta_3z_1-\bar\Gamma_3\Delta_1z_3)(\Delta_1\Lambda_2-\Delta_2\Lambda_1)-(\bar\Gamma_1\Delta_2z_1-\bar\Gamma_2\Delta_1z_2)(\Delta_1\Lambda_3-\Delta_3\Lambda_1)}{(\bar\Gamma_1\Delta_3-\bar\Gamma_3\Delta_1)(\Delta_1\Lambda_2-\Delta_2\Lambda_1)-(\bar\Gamma_1\Delta_2-\bar\Gamma_2\Delta_1)(\Delta_1\Lambda_3-\Delta_3\Lambda_1)}$$

(4.2.41)

ή

$$-\alpha[D_3(b^*)]^2\,\frac{\alpha[(\bar\Gamma_1\Delta_3z_1-\bar\Gamma_3\Delta_1z_3)(\Delta_1\Lambda_2-\Delta_2\Lambda_1)-(\bar\Gamma_2\Delta_1z_2-\bar\Gamma_1\Delta_2z_1)(\Delta_1\Lambda_3-\Delta_3\Lambda_1)]}{\Delta_1(\Delta_1\Lambda_2-\Delta_2\Lambda_1)}$$

$$=E_3(b^*)\,\frac{(\bar\Gamma_1\Delta_2z_1-\bar\Gamma_2\Delta_1z_2)(\Lambda_1\alpha_2-\Delta_1\alpha_1)+\bar\Gamma_1z_1\alpha_2(\Delta_1\Lambda_3-\Delta_3\Lambda_1)}{\alpha_1\alpha_2[(\bar\Gamma_1\Delta_2-\bar\Gamma_2\Delta_1)(\Delta_1\Lambda_3-\Delta_3\Lambda_1)-(\bar\Gamma_1\Delta_3-\bar\Gamma_3\Delta_1)(\Delta_1\Lambda_2-\Delta_2\Lambda_1)]}$$

$$-[E_3(b^*)]^2 \frac{(\bar{\Gamma}_3\Delta_1 z_3 - \bar{\Gamma}_1\Delta_3 z_1)(\Delta_1\Lambda_2 - \Delta_2\Lambda_1) - (\bar{\Gamma}_1\Delta_2 z_1 - \bar{\Gamma}_2\Delta_1 z_2)(\Delta_1\Lambda_3 - \Delta_3\Lambda_1)}{(\bar{\Gamma}_1\Delta_2 - \bar{\Gamma}_2\Delta_1)(\Delta_1\Lambda_3 - \Delta_3\Lambda_1) - (\bar{\Gamma}_1\Delta_3 - \bar{\Gamma}_3\Delta_1)(\Delta_1\Lambda_2 - \Delta_2\Lambda_1)}$$

(4.2.42)

όπου

$$\bar{\Gamma}_i = \frac{e^{b^* z_i} z_i}{z_i - \alpha}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Απόδειξη

Από την (4.2.28), η συνθήκη για το b^* μπορεί να διατυπωθεί ως

$$\left(\left.\frac{dD_1(b)}{db}\right|_{b=b^*} - \left.\frac{dE_1(b)}{db}\right|_{b=b^*} \right) e^{z_1 u} + \left(\left.\frac{dD_2(b)}{db}\right|_{b=b^*} - \left.\frac{dE_2(b)}{db}\right|_{b=b^*} \right) e^{z_2 u}$$

$$+ \left(\left.\frac{dD_3(b)}{db}\right|_{b=b^*} - \left.\frac{dE_3(b)}{db}\right|_{b=b^*} \right) e^{z_3 u} = 0. \qquad (4.2.43)$$

Συνεπώς, έχουμε τις επόμενες ισοδύναμες συνθήκες

$$\left.\frac{dD_i(b)}{db}\right|_{b=b^*} - \left.\frac{dE_i(b)}{db}\right|_{b=b^*} = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Κάνοντας τους σχετικούς υπολογισμούς παίρνουμε τα αποτελέσματα της Πρότασης (4.2.7).

□

4.3 Μοντέλο κινδύνου με στρατηγική μερίσματος κατωφλίου, με στοχαστικά ασφάλιστρα και εξαρτήσεις ανάμεσα στις απαιτήσεις και τους χρόνους εμφάνισης αυτών καθώς και ανάμεσα στα μεγέθη των ατομικών ασφαλίστρων και τους χρόνους που αυτά εμφανίζονται

Το μοντέλο κινδύνου της ενότητας αυτής, αποτελεί μια γενίκευση το μοντέλου που μελετήθηκε από τον Boikov (2003), καθώς θεωρεί ότι υπάρχει δομή εξάρτησης ανάμεσα στα μεγέθη των απαιτήσεων και στους ενδιάμεσους χρόνους εμφάνισης αυτών, καθώς εξάρτηση ανάμεσα στα μεγέθη των ασφαλίστρων και στους αντίστοιχους ενδιάμεσους χρόνους εμφάνισης αυτών, η οποία μοντελοποιείται σύμφωνα με τη σύζευξη (copula) Farlie-Gumbel-Morgenstern. Η εν λόγω σύζευξη επιτρέπει θετική και αρνητική εξάρτηση καθώς και ανεξαρτησία. Επίσης, η στρατηγική καταβολής μερίσματος που ακολουθεί η ασφαλιστική εταιρία είναι αυτή του κατωφλίου, δηλαδή, όταν το πλεόνασμα πέσει κάτω από κάποιο συγκεκριμένο κατώφλι, δεν καταβάλλονται μερίσματα, ενώ όταν το πλεόνασμα υπερβεί ή είναι ίσο με το κατώφλι, καταβάλλονται μερίσματα συνεχώς με σταθερό ρυθμό. Στις υποενότητες που ακολουθούν, περιγράφεται το υπό μελέτη μοντέλο, αναπτύσσονται οι ολοκληρωτικές και ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις που ικανοποιεί η συνάρτηση Gerber-Shiu καθώς και οι αντίστοιχες εξισώσεις για τις αναμενόμενες προεξοφλημένες καταβολές μερισμάτων μέχρι τη χρεοκοπία. Εξετάζονται κάποιες ειδικές περιπτώσεις του μοντέλου στην περίπτωση όπου οι απαιτήσεις και τα ατομικά ασφάλιστρα είναι εκθετικά κατανεμημένα. Συγκεκριμένα, θεωρείται η πιθανότητα χρεοκοπίας χωρίς μερίσματα ή εξάρτηση, καθώς και οι αναμενόμενες προεξοφλημένες καταβολές μερισμάτων χωρίς εξάρτηση. Οι περιπτώσεις αυτές απλοποιούν σημαντικά το μοντέλο και οι ολοκληρωτικές και ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις, που αναπτύχθηκαν για το γενικό μοντέλο, καταλήγουν σε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις για τις οποίες αποδεικνύονται αναλυτικές λύσεις.

4.3.1 Περιγραφή του μοντέλου

Για την καταβολή του μερίσματος στους μετόχους, θεωρούμε ότι η ασφαλιστική εταιρία ακολουθεί την ακόλουθη στρατηγική κατωφλίου. Όταν το πλεόνασμα είναι μικρότερο από ένα κατώφλι $b \geq 0$, δεν καταβάλλονται μερίσματα. Όταν το πλεόνασμα είναι μεγαλύτερο ή ίσο από b, καταβάλλονται μερίσματα συνεχώς με ρυθμό $r_d > 0$.

Για την τροποποιημένη διαδικασία πλεονάσματος $(U_b(t))_{t\geq 0}$ με αρχικό αποθεματικό $U_b(0) = u$ κάτω από την ύπαρξη στρατηγική μερίσματος έχουμε

$$U_b(t) = u + \sum_{i=1}^{M(t)} X_i - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i - r_d \int_0^t I(U_b(s) \geq b)ds, \qquad t \geq 0, \tag{4.3.1}$$

όπου $I(\cdot)$ είναι δείκτρια συνάρτηση.

Για τη διαδικασία καταβολής μερισμάτων $(D(t))_{t\geq 0}$, σύμφωνα με την παραπάνω στρατηγική μερίσματος, είναι

$$dD_t = \begin{cases} 0, & U_b(t) < b, \\ r_d\, dt, & U_b(t) \geq b. \end{cases}$$

Λόγω της ύπαρξης κατωφλίου, οι συναρτήσεις $m(u,b)$ και $\upsilon(u,b)$ που ορίστηκαν αντίστοιχα στις (4.1.3) και (4.1.6), και για λόγους απλοποίησης του συμβολισμού στη συνέχεια θα γράφουμε $m(u)$ και $\upsilon(u)$, έχουν διαφορετική συμπεριφορά αν το αρχικό πλεόνασμα u βρίσκεται πάνω ή κάτω από το κατώφλι b. Συγκεκριμένα, θεωρούμε

$$m(u,b) = \begin{cases} m_1(u), & \text{εάν } u \in [0,b], \\ m_2(u), & \text{εάν } u \in [b,\infty), \end{cases} \tag{4.3.2}$$

και

$$\upsilon(u,b) = \begin{cases} \upsilon_1(u), & \text{εάν } u \in [0,b], \\ \upsilon_2(u), & \text{εάν } u \in [b,\infty). \end{cases} \tag{4.3.3}$$

Από τα παραπάνω, έχουμε ότι οι συναρτήσεις $m_1(u)$ και $\upsilon_1(u)$ ορίζονται στο $[0,b]$, οι συναρτήσεις $m_2(u)$ και $\upsilon_2(u)$ ορίζονται στο $[b,\infty)$ και για $u = b$ είναι $m_1(b) = m_2(b)$ και $\upsilon_1(b) = \upsilon_2(b)$.

Στο μοντέλο κινδύνου της Εξίσωσης (4.1.1) που εξετάζουμε, θεωρούμε ότι υπάρχει εξάρτηση ανάμεσα στις μεταβλητές Y_i και V_i καθώς και ανάμεσα στις μεταβλητές X_i και W_i η οποία μοντελοποιείται μέσω της διδιάστατης σύζευξης Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM) με παράμετρο $\theta \in [-1,1]$ η οποία ορίζεται (Nelsen (2006)) ως

$$C_\theta^{FGM}(x_1, x_2) = x_1 x_2 + \theta x_1 x_2 (1-x_1)(1-x_2), \qquad x_1, x_2 \in [0,1].$$

Υποθέτουμε ότι $(Y_i, V_i)_{i\geq 1}$ είναι ανεξάρτητα και ισόνομα κατανεμημένα τυχαία διανύσματα και για συγκεκριμένο $i \geq 1$, η εξάρτηση ανάμεσα στις μεταβλητές Y_i και V_i δίνεται από τη σύζευξη FGM με παράμετρο $\theta_1 \in [-1,1]$. Δηλαδή, το μέγεθος μιας απαίτησης εξαρτάται από το χρόνο που έχει μεσολαβήσει από την εν λόγω απαίτηση και την προηγούμενη. Έτσι, η από κοινού συνάρτηση κατανομής του $(Y_i, V_i)_{i\geq 1}$ ορίζεται ως

$$\begin{aligned} F_{Y,V}(y,v) &= C_{\theta_1}^{FGM}(F(y), F_V(v)) \\ &= F(y)F_V(v) + \theta_1 F(y)F_V(v)(1-F(y))(1-F_V(v)), \qquad y \geq 0,\ v \geq 0. \end{aligned}$$

Η αντίστοιχη από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του $(Y_i, V_i)_{i\geq 1}$ είναι

$$\begin{aligned} f_{Y,V}(y,v) &= \frac{\partial^2 F_{Y,V}(y,v)}{\partial y \partial v} \\ &= f(y) f_V(v) + \theta_1 f(y) f_V(v)(1-2F(y))(1-2F_V(v)) \\ &= f(y) f_V(v) + \theta_1 f(y) f_V(v)(1-2F(y))(2\bar{F}_V(v)-1) \\ &= f(y)\lambda e^{-\lambda v} + \theta_1 f(y)\lambda e^{-\lambda v}(1-2F(y))(2e^{-\lambda v}-1) \\ &= f(y)\lambda e^{-\lambda v} + \theta_1 h_Y(y)(2\lambda e^{-2\lambda v} - \lambda e^{-\lambda v}), \qquad y \geq 0,\ v \geq 0, \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

όπου

$$h_Y(y) = f(y)(1-2F(y)) = f(y)(2\bar{F}(y)-1),\ y \geq 0.$$

Η συσχέτιση των μεταβλητών που ακολουθούν την κατανομή FGM, δηλαδή τα μεγέθη των απαιτήσεων και οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης των απαιτήσεων, εξαρτάται από την παράμετρο θ_1. Συγκεκριμένα, για $\theta_1 > 0$ οι μεταβλητές είναι θετικά συσχετισμένες, ενώ για $\theta_1 < 0$ είναι αρνητικά συσχετισμένες, και για $\theta_1 = 0$ έχουμε την περίπτωση της ανεξαρτησίας.

Από τη (4.3.4) βρίσκουμε τη δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των απαιτήσεων

$$\begin{aligned} f_{Y|V}(y \mid v) &= \frac{f_{Y,V}(y,v)}{f_V(v)} = \frac{\lambda e^{-\lambda v} f(y) + \theta_1 h_Y(y)(2\lambda e^{-2\lambda v} - \lambda e^{-\lambda v})}{\lambda e^{-\lambda v}} \\ &= f(y) + \theta_1 h_Y(y)(2e^{-\lambda v}-1), \quad y \geq 0,\ v \geq 0. \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

Υποθέτουμε ότι $(X_i, W_i)_{i\geq 1}$ είναι ανεξάρτητα και ισόνομα κατανεμημένα τυχαία διανύσματα και για συγκεκριμένο $i \geq 1$, η εξάρτηση ανάμεσα στις μεταβλητές X_i και W_i δίνεται από τη σύζευξη Farlie-Gumbel-Morgenstern με παράμετρο $\theta_2 \in [-1,1]$. Δηλαδή, το μέγεθος του ατομικού ασφαλίστρου εξαρτάται από το χρόνο που έχει μεσολαβήσει από το εν λόγω ασφάλιστρο κα το προηγούμενο. Έτσι, η από κοινού συνάρτηση κατανομής του $(X_i, W_i)_{i\geq 1}$ ορίζεται ως

$$F_{X,W}(x,w) = C_{\theta_2}^{FGM}(G(x), F_W(w))$$
$$= G(x)F_W(w) + \theta_2\, G(x)F_W(w)(1-G(x))(1-F_W(w)), \qquad x \geq 0,\ w \geq 0,$$

και η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του $(X_i, W_i)_{i\geq 1}$ είναι ως

$$f_{X,W}(x,w) = g(x)\, f_W(w) + \theta_2 g(x)\, f_W(w)(1-2G(x))(1-2F_W(w))$$
$$= g(x)\mu e^{-\mu w} + \theta_2\, h_X(x)(2\mu e^{-2\mu w} - \mu e^{-\mu w}),\ x \geq 0,\ w \geq 0, \tag{4.3.6}$$

όπου

$$h_X(x) = g(x)(1-2G(x)) = g(x)(2\overline{G}(x)-1) =,\ x \geq 0.$$

Για $\theta_2 = 0$ έχουμε την περίπτωση της ανεξαρτησίας ανάμεσα στα ασφάλιστρα και τους ενδιάμεσους χρόνους άφιξης των ασφαλίστρων.
Από την (4.3.6) βρίσκουμε τη δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητα των ασφαλίστρων,

$$f_{X|W}(x\,|\,w) = \frac{f_{X,W}(x,w)}{f_W(w)} = \frac{\mu e^{-\mu w} g(x) + \theta_2\, h_X(x)(2\mu e^{-2\mu w} - \mu e^{-\mu w})}{\mu e^{-\mu w}}$$
$$= g(x) + \theta_2\, h_X(x)(2e^{-\mu w} - 1),\ x \geq 0,\ w \geq 0. \tag{4.3.7}$$

Τα τυχαία διανύσματα $(Y_i, V_i)_{i\geq 1}$ και $(X_i, W_i)_{i\geq 1}$ θεωρούμε ότι είναι αμοιβαία ανεξάρτητα.

4.3.2 Εξισώσεις για τη συνάρτηση Gerber-Shiu

Πρόταση 4.3.1

Έστω η διαδικασία πλεονάσματος $(U_b(t))_{t\geq 0}$ που ορίστηκε στην (4.3.1) με τους παραπάνω περιορισμούς για $\theta_1 \neq 0$ και $\theta_2 \neq 0$. Επίσης, έστω ότι υπάρχουν οι παράγωγοι $f'(y)$ και $g'(x)$ στο $\mathbf{R}_+$, οι οποίες είναι συνεχείς και φραγμένες στο $\mathbf{R}_+$ και έστω ότι η συνάρτηση $\omega(x_1, x_2)$ έχει παραγώγους δεύτερης τάξης $\omega''_{x_1,x_1}(x_1,x_2)$, $\omega''_{x_1,x_2}(x_1,x_2)$ και $\omega''_{x_2,x_2}(x_1,x_2)$ στο $\mathbf{R}_+^2$, οι οποίες είναι συνεχείς και φραγμένες στο $\mathbf{R}_+^2$ σαν συναρτήσεις δυο μεταβλητών. Τότε η συνάρτηση Gerber-Shiu $m(u)$ ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$(\lambda+\mu+\delta_0)m_1(u)=\lambda\left(\int_0^u m_1(u-y)f(y)dy+\int_u^\infty \omega(u,y-u)f(y)dy\right)$$
$$+\frac{\lambda\theta_1(\mu+\delta_0)}{2\lambda+\mu+\delta_0}\left(\int_0^u m_1(u-y)h_Y(y)dy+\int_u^\infty \omega(u,y-u)h_Y(y)dy\right)$$
$$+\mu\left(\int_0^{b-u} m_1(u+y)g(y)dy+\int_{b-u}^\infty m_2(u+y)g(y)dy\right)$$
$$+\frac{\mu\theta_2(\lambda+\delta_0)}{\lambda+2\mu+\delta_0}\left(\int_0^{b-u} m_1(u+y)h_X(y)dy+\int_{b-u}^\infty m_2(u+y)h_X(y)dy\right),$$
$$u\in[0,b], \qquad (4.3.8)$$

και

$$r_d^3 m_2'''(u)+(4\lambda+4\mu+3\delta_0)r_d^2 m_2''(u)$$
$$+[(\lambda+2\mu+\delta_0)(3\lambda+2\mu+\delta_0)+(2\lambda+\mu+\delta_0)(\lambda+\mu+\delta_0)]r_d\, m_2'(u)$$
$$+(\lambda+2\mu+\delta_0)(2\lambda+\mu+\delta_0)(\lambda+\mu+\delta_0)m_2(u)$$
$$=(\lambda+2\mu+\delta_0)(2\lambda+\mu+\delta_0)\beta_1(u)+(3\lambda+3\mu+2\delta_0)r_d\beta_1'(u)$$
$$+r_d^2\beta_1''(u)-2(\lambda+2\mu+\delta_0)\beta_2(u)-2r_d\beta_2'(u)$$
$$+2\mu^2\theta_2(\mu-\lambda)\int_0^\infty m_2(u+y)h_X(y)dy, \quad u\in[b,\infty), \qquad (4.3.9)$$

όπου

$$\beta_1(u)=\lambda\int_{u-b}^{u} m_1(u-y)(f(y)+\theta_1 h_Y(y))dy$$
$$+\lambda\int_0^{u-b} m_2(u-y)(f(y)+\theta_1 h_Y(y))dy$$
$$+\lambda\int_u^\infty w(u,y-u)(f(y)+\theta_1 h_Y(y))dy$$
$$+\mu\int_0^\infty m_2(u+y)(g(y)+\theta_2 h_X(y))dy, \qquad u\in[b,\infty),$$

και

$$\beta_2(u)=\lambda^2\theta_1\left(\int_{u-b}^{u} m_1(u-y)f(y)dy+\int_0^{u-b} m_2(u-y)h_Y(y)dy+\int_u^\infty w(u,y-u)h_Y(y)dy\right)$$
$$+\mu^2\theta_2\int_0^\infty m_2(u+y)h_X(y)dy, \quad u\in[b,\infty).$$

Απόδειξη

Ξεκινώντας η διαδικασία $U_b(t)$ τη χρονική στιγμή $t=0$, ο χρόνος του νωρίτερου γεγονότος, δηλαδή της άφιξης απαίτησης ή της άφιξης ασφαλίστρου, συμβολικά

$$\min(V_1, W_1)$$

ακολουθεί εκθετική κατανομή (Παράρτημα Π5), με μέσο $\dfrac{1}{\lambda+\mu}$ αφού V_1 και W_1 είναι εκθετικά κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές με μέσους $\dfrac{1}{\lambda}$ και $\dfrac{1}{\mu}$. Επίσης, είναι

$$P(V_1 < W_1) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \text{ και } P(W_1 < V_1) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}.$$

Έστω ότι $u \in [0, b]$. Θεωρώντας το χρόνο και το μέγεθος του πρώτου γεγονότος της $(U_b(t))_{t\geq 0}$, από το θεώρημα ολικής πιθανότητας έχουμε

$$m(u) = \int_0^\infty e^{-(\lambda+\mu)t} \left(\lambda \int_0^u e^{-\delta_0 t} m(u-y) f_{Y|V}(y\,|\,t)dy + \lambda \int_u^\infty e^{-\delta_0 t} \omega(u, y-u) f_{Y|V}(y\,|\,t)dy \right.$$
$$\left. + \mu \int_0^\infty e^{-\delta_0 t} m(u+y) f_{X|W}(y\,|\,t)dy \right) dt, \quad u \in [0, b]. \tag{4.3.10}$$

Αντικαθιστώντας τις (4.3.5) και (4.3.7) στην (4.3.10) και λαμβάνοντας υπ' όψιν την (4.3.2), προκύπτει

$$m_1(u) = \int_0^\infty e^{-(\lambda+\mu+\delta_0)t} \left(\lambda \int_0^u m_1(u-y)[f(y) + \theta_1 h_Y(y)(2e^{-\lambda t} - 1)]dy \right.$$
$$+ \lambda \int_u^\infty \omega(u, y-u)[f(y) + \theta_1 h_Y(y)(2e^{-\lambda t} - 1)]dy$$
$$+ \mu \int_0^{b-u} m_1(u+y)(g(y) + \theta_2 h_X(y)(2e^{-\mu t} - 1)]dy$$
$$\left. + \mu \int_{b-u}^\infty m_2(u+y)(g(y) + \theta_2 h_X(y)(2e^{-\mu t} - 1)]dy \right) dt, \quad u \in [0, b]. \tag{4.3.11}$$

Ομαδοποιώντας τα ολοκληρώματα στο δεξί μέρος της (4.3.11) ως προς τη μεταβλητή ολοκλήρωσης, t ή y, έχουμε

$$m_1(u) = \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda+\mu+\delta_0)t} dt \left(\int_0^u m_1(u-y) f(y)dy + \int_u^\infty \omega(u, y-u) f(y)dy \right)$$
$$+ \lambda\theta \int_0^\infty e^{-(\lambda+\mu+\delta_0)t} (2e^{-\lambda t} - 1)dt \left(\int_0^u m_1(u-y) h_Y(y)dy + \int_u^\infty \omega(u, y-u) h_Y(y)dy \right)$$
$$+ \mu \int_0^\infty e^{-(\lambda+\mu+\delta_0)t} dt \left(\int_0^{b-u} m_1(u+y) g(y)dy + \int_{b-u}^\infty m_2(u+y) g(y)dy \right)$$
$$+ \mu\theta_2 \int_0^\infty e^{-(\lambda+\mu+\delta_0)t} (2e^{-\mu t} - 1)dt \left(\int_0^{b-u} m_1(u+y) g(y)dy + \int_{b-u}^\infty m_2(u+y) g(y)dy \right)$$

,

$$u\in[0,b]. \qquad (4.3.12)$$

Υπολογίζοντας τα ολοκληρώματα ως προς t στην (4.3.12) προκύπτει

$$\begin{aligned}m_1(u)=&\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta_0}\left(\int_0^u m_1(u-y)f(y)dy+\int_u^\infty \omega(u,y-u)f(y)dy\right)\\&+\frac{\lambda\theta_1(\mu+\delta_0)}{(2\lambda+\mu+\delta_0)(\lambda+\mu+\delta_0)}\left(\int_0^u m_1(u-y)h_Y(y)dy+\int_u^\infty \omega(u,y-u)h_Y(y)dy\right)\\&+\frac{\mu}{\lambda+\mu+\delta_0}\left(\int_0^{b-u} m_1(u+y)g(y)dy+\int_{b-u}^\infty m_2(u+y)g(y)dy\right)\\&+\frac{\mu\theta_2(\lambda+\delta_0)}{(\lambda+2\mu+\delta_0)(\lambda+\mu+\delta_0)}\left(\int_0^{b-u} m_1(u+y)g(y)dy+\int_{b-u}^\infty m_2(u+y)g(y)dy\right),\end{aligned}$$

$u\in[0,b]$,

από την οποία παίρνουμε την (4.3.8).

Έστω τώρα $u\in[b,\infty)$. Θεωρώντας το χρόνο και το μέγεθος του πρώτου γεγονότος της διαδικασίας $(U_b(t))_{t\geq 0}$, από το θεώρημα ολικής πιθανότητας έχουμε

$$\begin{aligned}m(u)=&\int_0^{(u-b)/r_d} e^{-(\lambda+\mu)t}\left(\lambda\int_0^{u-r_d t} e^{-\delta_0 t}m(u-r_d t-y)f_{Y|V}(y\,|\,t)dy+\lambda\int_{u-r_d t}^\infty e^{-\delta_0 t}\omega(u-r_d t,y-u-r_d t)f_{Y|V}(y\,|\,t)dy\right.\\&\left.+\mu\int_0^\infty e^{-\delta_0 t}m(u-r_d t+y)f_{X|W}(y\,|\,t)dy\right)dt\\&+\int_{(u-b)/r_d}^\infty e^{-(\lambda+\mu)t}\left(\lambda\int_0^b e^{-\delta_0 t}m(b-y)f_{Y|V}(y\,|\,t)dy+\lambda\int_b^\infty e^{-\delta_0 t}\omega(b,y-b)f_{Y|V}(y\,|\,t)dy\right.\\&\left.+\mu\int_0^\infty e^{-\delta_0 t}m(b+y)f_{X|W}(y\,|\,t)dy\right)dt, \qquad u\in[b,\infty). \qquad (4.3.13)\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις (4.3.5) και (4.3.7) στην (4.3.13) και λαμβάνοντας υπ' όψιν την (4.3.2) βρίσκουμε

$$m_2(u)=I_{1,2,3}(u)+I_{4,5,6}(u), \qquad u\in[b,\infty), \qquad (4.3.14)$$

όπου

$$\begin{aligned}I_{1,2,3}(u)=&\int_0^{(u-b)/r_d} e^{-(\lambda+\mu+\delta_0)t}\left(\lambda\int_0^{u-r_d t-b} m_2(u-r_d t-y)[f(y)+\theta_1 h_Y(y)(2e^{-\lambda t}-1)]dy\right.\\&+\lambda\int_{u-r_d t-b}^{u-r_d t} m_1(u-r_d t-y)[f(y)+\theta_1 h_Y(y)(2e^{-\lambda t}-1)]dy\\&+\lambda\int_{u-r_d t}^{\infty} \omega(u-r_d t,y-u+dt)[f(y)+\theta_1 h_Y(y)(2e^{-\lambda t}-1)]dy\end{aligned}$$

$$+\mu\int_0^{\infty} m_2(u-r_d t+y)[g(y)+\theta_2 h_X(y)(2e^{-\mu t}-1)]dy \Bigg)dt$$

και

$$I_{4,5,6}(u)=\int_{(u-b)/r_d}^{\infty} e^{-(\lambda+\mu+\delta_0)t}\Bigg(\lambda\int_0^b m_1(b-y)[f(y)+\theta_1 h_Y(y)(2e^{-\lambda t}-1)]dy$$

$$+\lambda\int_b^{\infty}\omega(b,y-b)[f(y)+\theta_1 h_Y(y)(2e^{-\lambda t}-1)]dy$$

$$+\mu\int_0^{\infty} m_2(b+y)[g(y)+\theta_2 h_X(y)(2e^{-\mu t}-1)]dy\Bigg)dt\,.$$

Στο εξωτερικό ολοκλήρωμα του $I_{1,2,3}(u)$ κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $u-r_d\,t=s$ βρίσκουμε

$t=\dfrac{u-s}{r_d}\Rightarrow dt=-\dfrac{1}{r_d}ds$ και $0\le t\le\dfrac{u-b}{r_d}\Rightarrow u\le s\le b$, οπότε

$$I_{1,2,3}(u)=\frac{1}{r_d}\int_b^u e^{-(\lambda+\mu+\delta_0)(u-s)/r_d}\Bigg(\lambda\int_0^{s-b} m_2(s-y)[f(y)+\theta_1 h_Y(y)(2e^{-\lambda(u-s)/r_d}-1)]dy$$

$$+\lambda\int_{s-b}^{s} m_1(s-y)[f(y)+\theta_1 h_Y(y)(2e^{-\lambda(u-s)/r_d}-1)]dy$$

$$+\lambda\int_s^{\infty}\omega(s,y-s)[f(y)+\theta_1 h_Y(y)(2e^{-\lambda(u-s)/r_d}-1)]dy$$

$$+\mu\int_0^{\infty} m_2(s+y)[g(y)+\theta_2 h_X(y)(2e^{-\mu(u-s)/r_d}-1)]dy\Bigg)ds$$

$$=\frac{1}{r_d}e^{-(\lambda+\mu+\delta_0)u/r_d}I_1(u)+\frac{2}{r_d}e^{-(2\lambda+\mu+\delta_0)u/r_d}I_2(u)+\frac{2}{r_d}e^{-(\lambda+2\mu+\delta_0)u/r_d}I_3(u),\quad u\in[b,\infty)\,,$$

(4.3.15)

όπου

$$I_1(u)=\int_b^u e^{-(\lambda+\mu+\delta_0)s/r_d}\Bigg(\lambda\int_0^{s-b} m_2(s-y)[f(y)-\theta_1 h_Y(y)]dy+\lambda\int_{s-b}^{s} m_1(s-y)[f(y)-\theta_1 h_Y(y)]dy$$

$$+\lambda\int_s^{\infty}\omega(s,y-s)[f(y)-\theta_1 h_Y(y)]dy+\mu\int_0^{\infty} m_2(s+y)[g(y)-\theta_2 h_X(y)]dy\Bigg)ds\,,$$

$$I_2(u)=\lambda\theta_1\int_b^u e^{(2\lambda+\mu+\delta_0)s/r_d}\Bigg(\int_0^{s-b} m_2(s-y)\,h_Y(y)dy+\int_{s-b}^{s} m_1(s-y)\,h_Y(y)dy$$

$$+\int_s^{\infty}\omega(s,y-s)\,h_Y(y)dy\Bigg)ds$$

και

$$I_3(u) = \mu\theta_2 \int_b^u e^{(\lambda+2\mu+\delta_0)s/r_d} \left(\int_0^\infty m_2(s+y)\, h_X(y)dy \right) ds \ .$$

Ομαδοποιώντας τα ολοκληρώματα ως προς t και y, η $I_{3,4,5}(u)$ γίνεται

$$\begin{aligned} I_{4,5,6}(u) = {} & \lambda \int_{(u-b)/r_d}^{\infty} e^{-(\lambda+\mu+\delta_0)t} dt \left(\int_0^b m_1(b-y) f(y)dy + \int_b^\infty \omega(b, y-b) f(y)dy \right) \\ & + \lambda\theta_1 \int_{(u-b)/r_d}^{\infty} e^{-(\lambda+\mu+\delta_0)t} (2e^{-\lambda t} - 1)dt \left(\int_0^b m_1(b-y)h_Y(y)dy + \int_b^\infty \omega(b, y-b)h_Y(y)dy \right) \\ & + \mu \int_{(u-b)/r_d}^{\infty} e^{-(\lambda+\mu+\delta_0)t} dt \int_0^\infty m_2(u+y)g(y)dy \\ & + \mu\theta_2 \int_{(u-b)/r_d}^{\infty} e^{-(\lambda+\mu+\delta_0)t} (2e^{-\mu t} - 1)dt \int_0^\infty m_2(b+y)h_X(y)dy \ . \end{aligned} \tag{4.3.16}$$

Υπολογίζοντας τα ολοκληρώματα ως προς t στην (4.3.16) παίρνουμε

$$I_{4,5,6}(u) = I_4(u) + I_5(u) + I_6(u) , \qquad u \in [b, \infty) , \tag{4.3.17}$$

όπου

$$\begin{aligned} I_4(u) = {} & \frac{e^{-(\lambda+\mu+\delta_0)(u-b)/r_d}}{\lambda+\mu+\delta_0} \left(\lambda \int_0^b m_1(b-y) f(y)dy + \lambda \int_b^\infty \omega(b, y-b) f(y)dy \right. \\ & - \lambda\theta_1 \int_0^b m_1(b-y)h_Y(y)dy - \lambda\theta_1 \int_b^\infty \omega(b, y-b)h_Y(y)dy \\ & \left. + \mu \int_0^\infty m_2(b+y)g(y)dy - \mu\theta_2 \int_0^\infty m_2(b+y)h_X(y)dy \right), \end{aligned}$$

$$I_5(u) = \frac{2\lambda\theta_1 \, e^{-(2\lambda+\mu+\delta_0)(u-b)/r_d}}{2\lambda+\mu+\delta_0} \left(\int_0^b m_1(b-y)h_Y(y)dy + \int_b^\infty \omega(b, y-b)h_Y(y)dy \right)$$

και

$$I_6(u) = \frac{2\mu\theta_2 \, e^{-(\lambda+2\mu+\delta_0)(u-b)/r_d}}{\lambda+2\mu+\delta_0} \int_0^\infty m_2(b+y)h_X(y)dy \ .$$

Αντικαθιστώντας τις (4.3.15) και (4.3.17) στην (4.3.14), έχουμε

$$\begin{aligned} m_2(u) = {} & \frac{1}{r_d} e^{-(\lambda+\mu+\delta_0)u/r_d} I_1(u) + \frac{2}{r_d} e^{-(2\lambda+\mu+\delta_0)u/r_d} I_2(u) \\ & + \frac{2}{r_d} e^{-(\lambda+2\mu+\delta_0)u/\bar{d}} I_3(u) + I_4(u) + I_5(u) + I_6(u) , \qquad u \in [b, \infty) . \end{aligned} \tag{4.3.18}$$

Από τις σχέσεις (4.3.8) και (4.3.18) βλέπουμε αντίστοιχα ότι η $m_1(u)$ είναι συνεχής στο $[0, b]$ και η $m_2(u)$ είναι συνεχής στο $[b, \infty)$. Πράγματι, το δεξί μέλος και στις δύο αυτές σχέσεις είναι συνεχής συνάρτηση στο $[0, b]$ και στο $[b, \infty)$ αντίστοιχα, και άρα είναι συνεχής συνάρτηση και το αριστερό μέλος των σχέσεων. Συνεπώς, από την (4.3.18), η $m_2(u)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[b,\infty)$. Παραγωγίζοντας ως προς u την (4.3.18) παίρνουμε

$$m_2'(u) = -\frac{\lambda+\mu+\delta_0}{r_d^2} e^{-(\lambda+\mu+\delta_0)u/r_d} I_1(u) - \frac{2(2\lambda+\mu+\delta_0)}{r_d^2} e^{-(2\lambda+\mu+\delta_0)u/r_d} I_2(u)$$
$$-\frac{2(\lambda+2\mu+\delta_0)}{r_d^2} e^{-(\lambda+2\mu+\delta_0)u/r_d} I_3(u) - \frac{\lambda+\mu+\delta_0}{r_d} I_4(u)$$
$$-\frac{2\lambda+\mu+\delta_0}{r_d} I_5(u) - \frac{\lambda+2\mu+\delta_0}{r_d} I_6(u) + \frac{1}{r_d}\beta_1(u), \quad u \in [b,\infty), \tag{4.3.19}$$

όπου η συνάρτηση $\beta_1(u)$ έχει οριστεί στον ισχυρισμό του θεωρήματος.

Πολλαπλασιάζοντας την (4.3.18) με $\dfrac{\lambda+\mu+\delta_0}{r_d}$ και προσθέτοντας την (4.3.19) προκύπτει

$$r_d m_2'(u) + (\lambda+\mu+\delta_0) m_2(u) = -\frac{2\lambda}{r_d} e^{-(2\lambda+\mu+\delta_0)u/r_d} I_2(u)$$
$$-\frac{2\mu}{r_d} e^{-(\lambda+2\mu+\delta_0)u/r_d} I_3(u) - \lambda I_5(u) - \mu I_6(u) + \beta_1(u), \quad u \in [b,\infty). \tag{4.3.20}$$

Αφού η $m_1(u)$ και η $m_2(u)$ είναι συνεχείς και φραγμένες αντίστοιχα στο $[0,b]$ και $[b,\infty)$, και η $\omega(x_1,x_2)$ είναι συνεχής και φραγμένη στο $\mathbf{R}_+^2$ σαν συνάρτηση δύο μεταβλητών, από την (4.3.20) συμπεραίνουμε ότι ισχύει το ίδιο και για την $m_2'(u)$ στο $[b,\infty)$. Επίσης, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι οι $f'(y)$ και $g'(y)$ είναι συνεχείς και φραγμένες στο $\mathbf{R}_+$ και οι $\omega_{x_1}'(x_1,x_2)$ και $\omega_{x_2}'(x_1,x_2)$ (δηλαδή, οι μερικές παράγωγοι της $\omega(x_1,x_2)$ ως προς την πρώτη και δεύτερη μεταβλητή αντίστοιχα) είναι συνεχείς και φραγμένες στο $\mathbf{R}_+^2$, από την (4.3.8) προκύπτει ότι ισχύει το ίδιο και για την $m_1'(u)$ στο $[0,b]$. Συνεπώς, η $\beta_1(u)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[b,\infty)$. Από αυτό και από την (4.3.20) προκύπτει ότι η $m_2(u)$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[b,\infty)$. Παραγωγίζοντας την (4.3.20) βρίσκουμε

$$r_d\, m_2''(u) + (\lambda+\mu+\delta_0) m_2'(u) = \frac{2\lambda(2\lambda+\mu+\delta_0)}{r_d^2} e^{-(2\lambda+\mu+\delta_0)u/r_d} I_2(u)$$
$$+\frac{2\mu(\lambda+2\mu+\delta_0)}{r_d^2} e^{-(\lambda+2\mu+\delta_0)u/r_d} I_3(u) + \frac{\mu(2\lambda+\mu+\delta_0)}{r_d} I_5(u)$$
$$+\frac{\mu(\lambda+2\mu+\delta_0)}{r_d} I_6(u) + \beta_1'(u) - \frac{2}{r_d}\beta_2(u), \quad u \in [b,\infty), \tag{4.3.21}$$

όπου

$$\beta_1'(u) = \lambda \int_{u-b}^{u} m_1'(u-y)(f(y) + \theta_1 h_Y(y))dy$$

$$+\lambda \int_{0}^{u-b} m_2'(u-y)(f(y)+\theta_1 h_Y(y))dy$$

$$+\lambda \int_{u}^{\infty} (\omega_{x_1}'(u,y-u)-\omega_{x_2}'(u,y-u))(f(y)+\theta_1 h_Y(y))dy$$

$$+\mu \int_{0}^{\infty} m_2'(u+y)(g(y)+\theta_2 h_X(y))dy$$

$$+\lambda(m_1(0)-w(u,0))(f(u)+\theta_1 h_Y(u)), \qquad u\in[b,\infty),$$

η οποία είναι συνεχής και φραγμένη στο $[b,\infty)$, και η συνάρτηση $\beta_2(u)$ έχει δοθεί στη δήλωση του θεωρήματος.

Πολλαπλασιάζοντας την (4.3.20) με $\dfrac{2\lambda+\mu+\delta_0}{r_d}$ και προσθέτοντας την (4.3.21) προκύπτει

$$r_d^2 m_2''(u)+(3\lambda+2\mu+2\delta_0)r_d m_2'(u)+(2\lambda+\mu+\delta_0)(\lambda+\mu+\delta_0)m_2(u)$$
$$=\frac{2\mu(\mu-\lambda)}{r_d}e^{-(\lambda+2\mu+\delta_0)u/r_d}I_3(u)+\mu(\mu-\lambda)I_6(u)$$
$$+(2\lambda+\mu+\delta_0)\beta_1(u)+r_d\beta_1'(u)-2\beta_2(u), \qquad u\in[b,\infty). \tag{4.3.22}$$

Από την (4.3.22) συμπεραίνουμε ότι η $m_2''(u)$ είναι συνεχής και φραγμένη στο $[b,\infty)$. Επίσης, λαμβάνοντας υπ’ όψιν ότι οι $f'(y)$ και $g'(y)$ είναι συνεχείς και φραγμένες στο $\mathbf{R}_+$ και οι $\omega_{x_1x_1}''(x_1,x_2)$, $\omega_{x_1x_2}''(x_1,x_2)$ και $\omega_{x_2x_2}''(x_1,x_2)$ είναι συνεχείς και φραγμένες στο $\mathbf{R}_+^2$, από την (4.3.8) προκύπτει ότι ισχύει το ίδιο και για την $m_1''(u)$ στο $[0,b]$. Συνεπώς, η $\beta_1(u)$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[b,\infty)$. Επίσης, με παρόμοιο συλλογισμό βλέπουμε ότι η $\beta_2(u)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[b,\infty)$. Από αυτό και την (4.3.22) προκύπτει ότι για τη $m_2(u)$ υπάρχει η τρίτη παράγωγος στο $[b,\infty)$. Παραγωγίζοντας την (4.3.22) παίρνουμε

$$r_d^2 m_2'''(u)+(3\lambda+2\mu+2\delta_0)r_d m_2''(u)+(2\lambda+\mu+\delta_0)(\lambda+\mu+\delta_0)m_2'(u)$$
$$=-\frac{2\mu(\mu-\lambda)(\lambda+2\mu+\delta_0)}{r_d^2}e^{-(\lambda+2\mu+\delta_0)u/r_d}I_3(u)-\frac{\mu(\mu-\lambda)(\lambda+2\mu+\delta_0)}{r_d}I_6(u)$$
$$+(2\lambda+\mu+\delta_0)\beta_1'(u)+r_d\beta_1''(u)-2\beta_2'(u)$$
$$+\frac{2\mu^2\theta_2(\mu-\lambda)}{r_d}\int_0^\infty m_2(u+y)h_X(y)dy, \quad u\in[b,\infty). \tag{4.3.23}$$

Πολλαπλασιάζοντας την (4.3.22) με $\dfrac{\lambda+2\mu+\delta_0}{r_d}$ και προσθέτοντας την (4.3.23) προκύπτει η (4.3.9), που ολοκληρώνει την απόδειξη.

□

Παρατήρηση 4.3.1. Για να λυθούν οι Εξισώσεις (4.3.8) και (4.3.9) απαιτούνται κάποιες συνοριακές συνθήκες. Η πρώτη συνθήκη είναι η $m_1(b)=m_2(b)$. Στη συνέχεια, με κατάλληλο συλλογισμό, μπορεί να δειχθεί ότι $\lim_{u\to\infty} m_2(u)=0$ δεδομένου ότι ισχύει η συνθήκη καθαρού κέρδους. Τέλος, θέτοντας $u=b$ στις ενδιάμεσες εξισώσεις, για παράδειγμα στην (4.3.20), προκύπτουν επιπλέον συνοριακές συνθήκες που εμπεριέχουν τις παραγώγους της $m_2(u)$. Οι Εξισώσεις (4.3.8) και (4.3.9) δεν μπορούν να λυθούν αναλυτικά στη γενική περίπτωση, οπότε για την επίλυσή τους απαιτούνται αριθμητικές μέθοδοι. Παρ' όλα αυτά, σε ειδικές περιπτώσεις μπορεί να δοθούν αναλυτικές εκφράσεις των λύσεων της $m(u)$, όπως αναπτύσσονται στην Παράγραφο 4.3.4. Η μοναδικότητα των απαιτούμενων λύσεων σε αυτές τις εξισώσεις δίνεται σε κάθε περίπτωση.

Παρατήρηση 4.3.2. Το αντίστοιχο μοντέλο χωρίς την καταβολή μερισμάτων προκύπτει για $b\to\infty$. Στην περίπτωση αυτή, η εξίσωση Gerber-Shiu $m(u)$ ικανοποιεί την επόμενη ολοκληρωτική εξίσωση

$$(\lambda+\mu+\delta_0)m(u)=\lambda\left(\int_0^u m(u)f(u-y)dy+\int_0^\infty \omega(u,y)f(u+y)dy\right)$$
$$+\frac{\lambda\theta_1(\mu+\delta_0)}{2\lambda+\mu+\delta_0}\left(\int_0^u m(y)h_Y(u-y)dy+\int_0^\infty \omega(u,y)h_Y(u+y)dy\right)$$
$$+\mu\int_u^\infty m(y)g(y-u)dy+\frac{\mu\theta_2(\lambda+\delta_0)}{\lambda+2\mu+\delta_0}\int_u^\infty m(y)h_X(y-u)dy \qquad u\in[0,\infty). \qquad (4.3.24)$$

Η Εξίσωση (4.3.24) για την πιθανότητα χρεοκοπίας συμπίπτει με την εξίσωση που αναπτύχθηκε στο Boikov (2003), εάν $\theta_1=0$ και $\theta_2=0$.

Παρατήρηση 4.3.3. Στην Πρόταση 1 υποθέτουμε $\theta_1\neq 0$ και $\theta_2\neq 0$. Αλλιώς, δεν χρειάζεται να παραγωγίσουμε την (4.3.18) τρεις φορές και μπορούμε να αναπτύξουμε εξισώσεις που δεν απαιτούν την τρίτη παράγωγο της $m_2(u)$ αντί της (4.3.9). Έτσι, αν $\theta_1=0$ και $\theta_2=0$, από την (4.3.20) βρίσκουμε

$$r_d\, m_2'(u)+(\lambda+\mu+\delta_0)m_2(u)=\beta_1(u), \qquad u\in[b,\infty). \qquad (4.3.25)$$

Στη συνέχεια, για $\theta_1\neq 0$ και $\theta_2\neq 0$, από την (4.3.22) έχουμε

$$r_d^2 m_2''(u)+(3\lambda+2\mu+2\delta_0)r_d\, m_2'(u)+(2\lambda+\mu+\delta_0)(\lambda+\mu+\delta_0)m_2(u)$$
$$=(2\lambda+\mu+\delta_0)\beta_1(u)+r_d\beta_1'(u)-2\beta_2(u), \qquad u\in[b,\infty). \qquad (4.3.26)$$

Τέλος, εάν $\theta_1=0$ και $\theta_2\neq 0$, πολλαπλασιάζοντας την (4.3.20) με $\dfrac{\lambda+2\mu+\delta_0}{r_d}$ και προσθέτοντας την (4.3.21) παίρνουμε

$$r_d^2 m_2''(u)+(2\lambda+3\mu+2\delta_0)r_d\, m_2'(u)+(\lambda+2\mu+\delta_0)(\lambda+\mu+\delta_0)m_2(u)$$
$$=(\lambda+2\mu+\delta_0)\beta_1(u)+r_d\beta_1'(u)-2\beta_2(u), \qquad u\in[b,\infty). \qquad (4.3.27)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι για να παραχθούν οι (4.3.25)-(4.3.27) αρκούν ασθενέστερες συνθήκες για τις $f(y)$, $g(y)$ και $w(x_1,x_2)$.

Η εξίσωση (4.3.8) ισχύει σε όλες τις ενδεχόμενες περιπτώσεις. Επιπλέον, η (4.3.8) δεν περιέχει παραγώγους και ισχύει κάτω από ασθενέστερες συνθήκες σε σχέση με την (4.3.9). Συγκεκριμένα, για να πάρουμε την (4.3.8) δεν απαιτείται η παραγωγισιμότητα των $f(y)$, $g(y)$ και $w(x_1, x_2)$.

4.3.3 Εξισώσεις αναμενόμενων προεξοφλημένων πληρωμών μερισμάτων μέχρι τη χρεοκοπία

Πρόταση 4.3.2

Έστω η διαδικασία πλεονάσματος $(U_b(t))_{t\geq 0}$ *που δόθηκε στην* (4.3.1) *με τους παραπάνω περιορισμούς και για* $\theta_1 \neq 0$ *και* $\theta_2 \neq 0$. *Επίσης, έστω ότι υπάρχουν οι παράγωγοι* $f'(y)$ *και* $g'(x)$ *στο* $\mathbf{R}_+$, *οι οποίες είναι συνεχείς και φραγμένες στο* $\mathbf{R}_+$. *Τότε η αναμενόμενη προεξοφλημένη πληρωμή μερισμάτων μέχρι τη χρεοκοπία* $\upsilon(u)$ *ικανοποιεί τις εξισώσεις*

$$\begin{aligned}(\lambda+\mu+\delta)\upsilon_1(u) &= \lambda\int_0^u \upsilon_1(u-y)f(y)dy + \frac{\lambda\theta_1(\mu+\delta)}{2\lambda+\mu+\delta}\int_0^u \upsilon_1(u-y)h_Y(y)dy \\ &+\mu\left(\int_0^{b-u}\upsilon_1(u+y)g(y)dy + \int_{b-u}^{\infty}\upsilon_2(u+y)g(y)dy\right) \\ &+\frac{\mu\theta_2(\lambda+\delta)}{\lambda+2\mu+\delta}\left(\int_0^{b-u}\upsilon_1(u+y)h_X(y)dy + \int_{b-u}^{\infty}\upsilon_2(u+y)h_X(y)dy\right), \qquad u\in[0,b].\end{aligned} \tag{4.3.28}$$

και

$$\begin{aligned} & r_d^3\upsilon_2'''(u) + (4\lambda+4\mu+3\delta)r_d^2\upsilon_2''(u) \\ &\quad +[(\lambda+2\mu+\delta)(3\lambda+2\mu+2\delta)+(2\lambda+\mu+\delta)(\lambda+\mu+\delta)]\,r_d\,\upsilon_2'(u) \\ &\quad +(\lambda+2\mu+\delta)(2\lambda+\mu+\delta)(\lambda+\mu+\delta)\,\upsilon_2(u) \\ &= (\lambda+2\mu+\delta)(2\lambda+\mu+\delta)\beta_3(u) + (3\lambda+3\mu+2\delta)r_d\,\beta_3'(u) + r_d^2\beta_3''(u) \\ &\quad -2(\lambda+2\mu+\delta)\beta_4(u) - 2r_d\,\beta_4'(u) + (\lambda+2\mu+\delta)(2\lambda+\mu+\delta)r_d \\ &\quad +2\mu^2\theta_2(\mu-\lambda)\int_0^{\infty}\upsilon_2(u+y)h_X(y)dy, \qquad u\in[b,\infty),\end{aligned} \tag{4.3.29}$$

όπου

$$\begin{aligned}\beta_3(u) &= \lambda\int_{u-b}^{u}\upsilon_1(u-y)(f(y)+\theta_1 h_Y(y))dy \\ &+\lambda\int_0^{u-b}\upsilon_2(u-y)(f(y)+\theta_1 h_Y(y))dy\end{aligned}$$

$$+\mu\int_0^\infty \upsilon_2(u+y)(g(y)+\theta_2\, h_X(y))dy\,, \qquad u\in[b,\infty)\,,$$

και

$$\beta_4(u)=\lambda^2\theta_1\left(\int_{u-b}^{u}\upsilon_1(u-y)h_Y(y)dy+\int_0^{u-b}\upsilon_2(u-y)h_Y(y)dy\right)+\mu^2\theta_2\int_u^\infty \upsilon_2(y)h_X(y-u)dy\,,$$

$$u\in[b,\infty)\,.$$

Απόδειξη

Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη της Πρότασης 4.3.1, οπότε θα παραλείψουμε κάποιες λεπτομέρειες.

Έστω $u\in[0,b]$. Θεωρώντας το χρόνο και το μέγεθος του πρώτου γεγονότος της $(U_b(t))_{t\geq 0}$, από το θεώρημα ολικής πιθανότητας έχουμε

$$\upsilon(u)=\int_0^\infty e^{-(\lambda+\mu)t}\left(\lambda\int_0^u e^{-\delta t}\upsilon(u-y)\,f_{Y|V}(y\,|\,t)dy+\mu\int_0^\infty e^{-\delta t}\upsilon(u+y)\,f_{X|W}(y\,|\,t)dy\right)dt\;,\quad u\in[0,b] \tag{4.3.30}$$

Συγκρίνοντας την (4.3.30) με την (4.3.10) και με παρόμοια επιχειρήματα με αυτά της απόδειξης της Πρότασης 4.3.1, παίρνουμε την (4.3.28).

Έστω τώρα $u\in[b,\infty)$. Από το θεώρημα ολικής πιθανότητας έχουμε

$$\begin{aligned}\upsilon(u)=&\int_0^{(u-b)/r_d} e^{-(\lambda+\mu)t}\left((\lambda+\mu)\int_0^t r_d e^{-\delta s}ds+\lambda\int_0^{u-r_d t} e^{-\delta t}\upsilon(u-r_d t-y)\,f_{Y|V}(y\,|\,t)dy\right.\\
&\qquad\left.+\mu\int_0^\infty e^{-\delta t}\upsilon(u-r_d t+y)\,f_{X|W}(y\,|\,t)dy\right)dt\\
&+\int_{(u-b)/r_d}^\infty e^{-(\lambda+\mu)t}\left((\lambda+\mu)\int_0^{(u-b)/r_d} r_d e^{-\delta s}ds+\lambda\int_0^b e^{-\delta t}\upsilon(b-y)\,f_{Y|V}(y\,|\,t)dy\right.\\
&\left.+\mu\int_0^\infty e^{-\delta t}\upsilon(b+y)\,f_{X|W}(y\,|\,t)dy\right)dt\,,\qquad u\in[b,\infty)\,.\end{aligned}\tag{4.3.31}$$

Λαμβάνοντας υπ’ όψιν ότι

$$\begin{aligned}\int_0^{(u-b)/r_d}(\lambda+\mu)e^{-(\lambda+\mu)t}\int_0^t r_d e^{-\delta s}dsdt&=\frac{(\lambda+\mu)r_d}{\delta}\int_0^{(u-b)/r_d} e^{-(\lambda+\mu)t}(1-e^{-\delta t})dt\\
&=\frac{r_d}{\delta}\left(\frac{\delta}{\lambda+\mu+\delta}-e^{-(\lambda+\mu)(u-b)/r_d}+\frac{\lambda+\mu}{\lambda+\mu+\delta}-e^{-(\lambda+\mu+\delta)(u-b)/r_d}\right)\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\int_{(u-b)/r_d}^\infty(\lambda+\mu)e^{-(\lambda+\mu)t}\int_0^{(u-b)/r_d} r_d e^{-\delta s}dsdt&=\frac{(\lambda+\mu)r_d}{\delta}(1-e^{-\delta(u-b)/r_d})\int_{(u-b)/r_d}^\infty e^{-(\lambda+\mu)t}dt\\
&=\frac{r_d}{\delta}(e^{-(\lambda+\mu)(u-b)/r_d}-e^{-(\lambda+\mu+\delta)(u-b)/r_d})\,,\end{aligned}$$

αντικαθιστώντας τις (4.3.5) και (4.3.7) στην (4.3.31) και χρησιμοποιώντας την (4.3.3), προκύπτει

$$\upsilon_2(u) = I_{7,8,9}(u) + I_{10,11,12}(u) + \frac{r_d}{\lambda+\mu+\delta}(1-e^{-(\lambda+\mu+\delta)(u-b)/r_d}), \qquad u \in [b,\infty), \qquad (4.3.32)$$

όπου

$$I_{7,8,9}(u) = \int_0^{(u-b)/r_d} e^{-(\lambda+\mu+\delta)t}\left(\lambda \int_0^{u-r_d t-b} \upsilon_2(u-r_d t-y)[f_Y(y)+\theta_1 h_Y(y)(2e^{-\lambda t}-1)]dy\right.$$
$$+\lambda \int_{u-r_d t-b}^{u-r_d t} \upsilon_1(u-r_d t-y)[f(y)+\theta_1 h_Y(y)(2e^{-\lambda t}-1)]dy$$
$$\left.+\mu\int_0^\infty \upsilon_2(u-r_d t+y)[g(y)+\theta_2 h_X(y)(2e^{-\mu t}-1)]dy\right)dt$$

και

$$I_{10,11,12}(u) = \int_{(u-b)/r_d}^{\infty} e^{-(\lambda+\mu+\delta)t}\left(\lambda\int_0^b \upsilon_1(b-y)[f(y)+\theta_1 h_Y(y)(2e^{-\lambda t}-1)]dy\right.$$
$$\left.+\mu\int_0^\infty \upsilon_2(b+y)[g(y)+\theta_2 h_X(y)(2e^{-\mu t}-1)]dy\right)dt.$$

Στο εξωτερικό ολοκλήρωμα του $I_{7,8,9}(u)$ κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $u-r_d t = s$ έχουμε

$t = \frac{u-s}{r_d} \Rightarrow dt = -\frac{1}{r_d}ds$ και $0 \le t \le \frac{u-b}{r_d} \Rightarrow 0 \le s \le b$, οπότε προκύπτει

$$I_{7,8,9}(u) = \frac{1}{r_d}e^{-(\lambda+\mu+\delta)u/r_d} I_7(u) + \frac{2}{r_d}e^{-(2\lambda+\mu+\delta)u/r_d} I_8(u) + \frac{2}{r_d}e^{-(\lambda+2\mu+\delta)u/r_d} I_9(u), \quad u \in [b,\infty), \qquad (4.3.33)$$

όπου

$$I_7(u) = \int_b^u e^{-(\lambda+\mu+\delta)s/r_d}\left(\lambda\int_0^{s-b}\upsilon_2(s-y)[f(y)-\theta_1 h_Y(y)]dy + \lambda\int_{s-b}^{s}\upsilon_1(s-y)[f(y)-\theta_1 h_Y(y)]dy\right.$$
$$\left.+\mu\int_0^\infty \upsilon_2(s+y)[g(y)-\theta_2 h_X(y)]dy\right)ds,$$

$$I_8(u) = \lambda\theta_1\int_b^u e^{(2\lambda+\mu+\delta)s/r_d}\left(\int_0^{s-b}\upsilon_2(s-y)h_Y(y)dy + \int_{s-b}^{s}\upsilon_1(s-y)h_Y(y)dy\right)ds$$

και

$$I_9(u) = \mu\theta_2\int_b^u e^{(\lambda+2\mu+\delta)s/r_d}\left(\int_0^\infty \upsilon_2(s+y)h_X(y)dy\right)ds.$$

Ομαδοποιώντας τα ολοκληρώματα ως προς t και y, και ολοκληρώνοντας ως προς t η $I_{10,11,12}(u)$ γίνεται

$$I_{10,11,12}(u) = I_{10}(u) + I_{11}(u) + I_{12}(u), \qquad u \in [b,\infty), \tag{4.3.34}$$

όπου

$$I_{10}(u) = \frac{e^{-(\lambda+\mu+\delta)(u-b)/r_d}}{\lambda+\mu+\delta_0}\left(\lambda\int_0^b \upsilon_1(b-y)f(y)dy - \lambda\theta_1\int_0^b \upsilon_1(b-y)h_Y(y)dy\right.$$

$$\left. + \mu\int_0^\infty \upsilon_2(b+y)g(y)dy - \mu\theta_2\int_0^\infty \upsilon_2(b+y)h_X(y)dy\right),$$

$$I_{11}(u) = \frac{2\lambda\theta_1\, e^{-(2\lambda+\mu+\delta)(u-b)/r_d}}{2\lambda+\mu+\delta}\int_0^b \upsilon_1(b-y)h_Y(y)dy$$

και

$$I_{12}(u) = \frac{2\mu\theta_2\, e^{-(\lambda+2\mu+\delta)(u-b)/r_d}}{\lambda+2\mu+\delta}\int_0^\infty \upsilon_2(b+y)h_X(y)dy \ .$$

Αντικαθιστώντας τις (4.3.33) και (4.3.34) στην (4.3.32), έχουμε

$$\upsilon_2(u) = \frac{1}{r_d}e^{-(\lambda+\mu+\delta)u/r_d}I_7(u) + \frac{2}{r_d}e^{-(2\lambda+\mu+\delta)u/r_d}I_8(u)$$

$$+\frac{2}{r_d}e^{-(\lambda+2\mu+\delta)u/r_d}I_9(u) + I_{10}(u) + I_{11}(u) + I_{12}(u)$$

$$+\frac{r_d}{\lambda+\mu+\delta}\left(1-e^{-(\lambda+\mu+\delta)(u-b)/r_d}\right), \qquad u \in [b,\infty). \tag{4.3.35}$$

Από τις σχέσεις (4.3.28) και (4.3.35) βλέπουμε αντίστοιχα ότι η $\upsilon_1(u)$ είναι συνεχής στο $[0,b]$ και η $\upsilon_2(u)$ είναι συνεχής στο $[b,\infty)$. Συνεπώς, από την (4.3.35), η $\upsilon_2(u)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[b,\infty)$. Παραγωγίζοντας ως προς u την (4.3.35) παίρνουμε

$$\upsilon_2'(u) = -\frac{\lambda+\mu+\delta}{r_d^2}e^{-(\lambda+\mu+\delta)u/r_d}I_7(u) - \frac{2(2\lambda+\mu+\delta)}{r_d^2}e^{-(2\lambda+\mu+\delta)u/r_d}I_8(u)$$

$$-\frac{2(\lambda+2\mu+\delta)}{r_d^2}e^{-(\lambda+2\mu+\delta)u/r_d}I_9(u) - \frac{\lambda+\mu+\delta}{r_d}I_{10}(u)$$

$$-\frac{2\lambda+\mu+\delta}{r_d}I_{11}(u) - \frac{\lambda+2\mu+\delta}{r_d}I_{12}(u) + \frac{1}{r_d}\beta_3(u)$$

$$+e^{-(\lambda+\mu+\delta)(u-b)/r_d}, \qquad u \in [b,\infty), \tag{4.3.36}$$

όπου η συνάρτηση $\beta_3(u)$ έχει οριστεί στον ισχυρισμό της πρότασης.

Πολλαπλασιάζοντας την (4.3.35) με $\dfrac{\lambda+\mu+\delta}{r_d}$ και προσθέτοντας την (4.3.36) προκύπτει

$$r_d\upsilon_2'(u) + (\lambda+\mu+\delta)\upsilon_2(u) = -\frac{2\lambda}{r_d}e^{-(2\lambda+\mu+\delta)u/r_d}I_8(u)$$

$$-\frac{2\mu}{r_d} e^{-(\lambda+2\mu+\delta)u/r_d} I_9(u) - \lambda I_{11}(u) - \mu I_{12}(u) + \beta_3(u) + r_d\,, \qquad u \in [b,\infty)\,. \qquad (4.3.37)$$

Αφού η $\upsilon_1(u)$ και η $\upsilon_2(u)$ είναι συνεχείς και φραγμένες αντίστοιχα στο $[0,b]$ και $[b,\infty)$, από την (4.3.37) συμπεραίνουμε ότι το ίδιο ισχύει για την $\upsilon_2'(u)$ στο $[b,\infty)$. Επίσης, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι οι $f'(y)$ και $g'(y)$ είναι συνεχείς και φραγμένες στο $\mathbf{R}_+$, από την (4.3.28) προκύπτει ότι ισχύει το ίδιο και για την $\upsilon_1'(u)$ στο $[0,b]$. Συνεπώς, η $\beta_3(u)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[b,\infty)$. Από αυτό και από την (4.3.37) προκύπτει ότι η $\upsilon_2(u)$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[b,\infty)$. Παραγωγίζοντας την (4.3.37) βρίσκουμε

$$\begin{aligned} r_d\,\upsilon_2''(u) + (\lambda+\mu+\delta)\upsilon_2'(u) &= \frac{2\lambda(2\lambda+\mu+\delta)}{r_d^2} e^{-(2\lambda+\mu+\delta)u/r_d} I_8(u) \\ &+ \frac{2\mu(\lambda+2\mu+\delta)}{r_d^2} e^{-(\lambda+2\mu+\delta)u/r_d} I_9(u) + \frac{\lambda(2\lambda+\mu+\delta)}{r_d} I_{11}(u) \\ &+ \frac{\mu(\lambda+2\mu+\delta)}{r_d} I_{12}(u) + \beta_3'(u) - \frac{2}{r_d}\beta_4(u)\,, \quad u\in[b,\infty)\,, \end{aligned} \qquad (4.3.38)$$

όπου

$$\begin{aligned} \beta_3'(u) = \lambda &\int_{u-b}^{u} \upsilon_1'(u-y)(f(y)+\theta_1\, h_Y(y))dy \\ &+ \lambda \int_0^{u-b} \upsilon_2'(u-y)(f(y)+\theta_1\, h_Y(y))dy \\ &+ \mu \int_0^{\infty} \upsilon_2'(u+y)(g(y)+\theta_2\, h_X(y))dy \\ &+ \lambda\,\upsilon_1(0)(f(u)+\theta_1\, h_Y(u))\,, \qquad u\in[b,\infty)\,, \end{aligned}$$

η οποία είναι συνεχής και φραγμένη στο $[b,\infty)$, και η συνάρτηση $\beta_4(u)$ έχει δοθεί στον ισχυρισμό της πρότασης.

Πολλαπλασιάζοντας την (4.3.37) με $\dfrac{2\lambda+\mu+\delta}{r_d}$ και προσθέτοντας την (4.3.38) προκύπτει

$$\begin{aligned} r_d^2\upsilon_2''(u) &+ (3\lambda+2\mu+2\delta)r_d\,\upsilon_2'(u) + (2\lambda+\mu+\delta)(\lambda+\mu+\delta)\upsilon_2(u) \\ &= \frac{2\mu(\mu-\lambda)}{r_d} e^{-(\lambda+2\mu+\delta)u/r_d} I_9(u) + \mu(\mu-\lambda)I_{12}(u) \\ &\quad + (2\lambda+\mu+\delta)\beta_3(u) + r_d\beta_3'(u) - 2\beta_4(u) + (2\lambda+\mu+\delta)r_d\,, \quad u\in[b,\infty)\,. \end{aligned} \qquad (4.3.39)$$

Από την (4.3.39) συμπεραίνουμε ότι η $\upsilon_2''(u)$ είναι συνεχής και φραγμένη στο $[b,\infty)$. Επίσης, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι οι $f'(y)$ και $g'(y)$ είναι συνεχείς και φραγμένες στο $\mathbf{R}_+$, από την (4.3.28) προκύπτει ότι ισχύει το ίδιο και για την $\upsilon_1''(u)$ στο $[0,b]$. Συνεπώς, η $\beta_3(u)$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[b,\infty)$. Επίσης, με παρόμοιο συλλογισμό βλέπουμε ότι η $\beta_4(u)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[b,\infty)$. Από αυτό και την (4.3.39) προκύπτει ότι για τη $\upsilon_2(u)$ υπάρχει η τρίτη παράγωγος στο $[b,\infty)$. Παραγωγίζοντας την (4.3.39) παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
& r_d^2\upsilon_2'''(u)+(3\lambda+2\mu+2\delta)r_d\upsilon_2''(u)+(2\lambda+\mu+\delta)(\lambda+\mu+\delta)\upsilon_2'(u) \\
&\qquad =-\frac{2\mu(\mu-\lambda)(\lambda+2\mu+\delta)}{r_d^2}e^{-(\lambda+2\mu+\delta)u/r_d}I_9(u)-\frac{\mu(\mu-\lambda)(\lambda+2\mu+\delta)}{r_d}I_{12}(u) \\
&\qquad\quad +(2\lambda+\mu+\delta)\beta_3'(u)+r_d\beta_3''(u)-2\beta_4'(u) \\
&\qquad\quad +\frac{2\mu^2\theta_2(\mu-\lambda)}{r_d}\int_0^\infty \upsilon_2(u+y)h_X(y)dy, \qquad u\in[b,\infty). \qquad (4.3.40)
\end{aligned}
$$

Πολλαπλασιάζοντας την (4.3.39) με $\dfrac{\lambda+2\mu+\delta}{r_d}$ και προσθέτοντας την (4.3.40) προκύπτει η (4.3.29), που ολοκληρώνει την απόδειξη.

□

Παρατήρηση 4.3.4. Για να λυθούν οι Εξισώσεις (4.3.28) και (4.3.29) απαιτούνται κάποιες συνοριακές συνθήκες. Η πρώτη συνθήκη είναι η $\upsilon_1(b)=\upsilon_2(b)$. Στη συνέχεια, με κατάλληλο συλλογισμό, μπορεί να δειχθεί ότι $\lim_{u\to\infty}\upsilon_2(u)=\dfrac{r_d}{\delta}$ δεδομένου ότι ισχύει η συνθήκη καθαρού κέρδους. Περαιτέρω, θέτοντας $u=b$ στις ενδιάμεσες εξισώσεις, για παράδειγμα στην (4.3.37), προκύπτουν επιπλέον συνοριακές συνθήκες που εμπεριέχουν τις παραγώγους της $\upsilon_2(u)$. Οι Εξισώσεις (4.3.28) και (4.3.29) δίνουν αναλυτικές λύσεις σε ειδικές περιπτώσεις, όπως αναπτύσσονται στην Παράγραφο 4.3.4 για $\theta_1=0$ και $\theta_2=0$. Η μοναδικότητα των απαιτούμενων λύσεων σε αυτές τις εξισώσεις δίνεται σε κάθε περίπτωση.

Παρατήρηση 4.3.5. Εάν τουλάχιστον μία από τις παραμέτρους θ_1 και θ_2 είναι μηδέν, δεν χρειάζεται να παραγωγίσουμε την (4.3.35) τρεις φορές και μπορούμε να αναπτύξουμε εξισώσεις που δεν απαιτούν την τρίτη παράγωγο της $\upsilon_2(u)$ αντί της (4.3.29). Συγκεκριμένα:

Αν $\theta_1=0$ και $\theta_2=0$, από την (4.3.37) βρίσκουμε

$$
r_d\upsilon_2'(u)+(\lambda+\mu+\delta)\upsilon_2(u)=\beta_3(u)+r_d, \qquad u\in[b,\infty). \qquad (4.3.41)
$$

Αν $\theta_1\neq 0$ και $\theta_2=0$, από την (4.3.39) έχουμε

$$
\begin{aligned}
& r_d^2\upsilon_2''(u)+(3\lambda+2\mu+2\delta)r_d\,\upsilon_2'(u)+(2\lambda+\mu+\delta)(\lambda+\mu+\delta)\upsilon_2(u) \\
&\qquad =(2\lambda+\mu+\delta)\beta_3(u)+r_d\beta_3'(u)-2\beta_4(u)+(2\lambda+\mu+\delta)r_d, \qquad u\in[b,\infty). \qquad (4.3.42)
\end{aligned}
$$

Αν $\theta_1=0$ και $\theta_2\neq 0$, πολλαπλασιάζοντας την (4.3.37) με $\dfrac{\lambda+2\mu+\delta}{r_d}$ και προσθέτοντας την (4.3.38) παίρνουμε

$$r_d^2 \upsilon_2''(u) + (2\lambda + 3\mu + 2\delta) r_d \upsilon_2''(u) + (\lambda + 2\mu + \delta)(\lambda + \mu + \delta)\upsilon_2(u)$$
$$= (\lambda + 2\mu + \delta)\beta_3(u) + r_d \beta_3'(u) - 2\beta_4(u) + (\lambda + 2\mu + \delta) r_d , \qquad u \in [b, \infty) . \qquad (4.3.43)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι για να παραχθούν οι (4.3.41)-(4.3.43) αρκούν ασθενέστερες συνθήκες για τις $f(y)$ και $g(y)$.

Η εξίσωση (4.3.28) ισχύει σε όλες τις ενδεχόμενες περιπτώσεις. Αφού η (4.3.28) δεν περιέχει παραγώγους, ισχύει κάτω από ασθενέστερες συνθήκες σε σχέση με την (4.3.29). Συγκεκριμένα, για να πάρουμε την (4.3.28) δεν απαιτείται η παραγωγισιμότητα των $f(y)$ και $g(y)$.

4.3.4 Εκθετικά κατανεμημένες απαιτήσεις και ασφάλιστρα

Στην ενότητα αυτή, θεωρούμε ότι οι απαιτήσεις και τα ατομικά ασφάλιστρα ακολουθούν εκθετική κατανομή, συγκεκριμένα

$$f(y) = \frac{1}{\mu_F} e^{-\frac{y}{\mu_F}}, \qquad h_Y(y) = \frac{2}{\mu_F} e^{-\frac{2y}{\mu_F}} - \frac{1}{\mu_F} e^{-\frac{y}{\mu_F}}, \quad y \ge 0 , \qquad (4.3.44)$$

και

$$g(y) = \frac{1}{\mu_G} e^{-\frac{y}{\mu_G}}, \qquad h_X(y) = \frac{2}{\mu_G} e^{-\frac{2y}{\mu_G}} - \frac{1}{\mu_G} e^{-\frac{y}{\mu_G}}, \quad y \ge 0 . \qquad (4.3.45)$$

4.3.4.1 Η πιθανότητα χρεοκοπίας σε μοντέλο χωρίς καταβολές μερισμάτων

Εάν δεν υπάρχουν καταβολές μερισμάτων, η Εξίσωση (4.3.24) για την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$ παίρνει τη μορφή

$$(\lambda + \mu)\psi(u) = \lambda \left(\int_0^u \psi(u) f(u-y)dy + \int_0^\infty f(u+y)dy \right)$$
$$+ \frac{\lambda\mu\theta_1}{2\lambda + \mu} \left(\int_0^u \psi(y) h_Y(u-y)dy + \int_0^\infty h_Y(u+y)dy \right)$$
$$+ \mu \int_u^\infty \psi(u) g(y-u)dy + \frac{\lambda\mu\theta_2}{\lambda + 2\mu} \int_u^\infty \psi(y) h_X(y-u)dy , \qquad u \in [0, \infty) . \qquad (4.3.46)$$

Αντικαθιστώντας τις (4.3.44) και (4.3.45) στην (4.3.46) προκύπτει

$$(\lambda + \mu)\psi(u) = \left(\lambda - \frac{\lambda\mu\theta_1}{2\lambda + \mu} \right) I_{13}(u) + \frac{\lambda\mu\theta_1}{2\lambda + \mu} I_{14}(u)$$
$$+ \left(\mu - \frac{\lambda\mu\theta_1}{\lambda + 2\mu} \right) I_{15}(u) + \frac{\lambda\mu\theta_1}{\lambda + 2\mu} I_{16}(u)$$

$$+\left(\lambda-\frac{\lambda\mu\theta_1}{2\lambda+\mu}\right)e^{-\frac{u}{\mu_F}}+\frac{\lambda\mu\theta_1}{2\lambda+\mu}e^{-\frac{2u}{\mu_F}}, \qquad u\in[0,\infty), \qquad (4.3.47)$$

όπου

$$I_{13}(u)=\frac{1}{\mu_F}e^{-\frac{u}{\mu_F}}\int_0^u\psi(y)e^{\frac{y}{\mu_F}}dy, \qquad I_{14}(u)=\frac{2}{\mu_F}e^{-\frac{2u}{\mu_F}}\int_0^u\psi(y)e^{\frac{2y}{\mu_F}}dy,$$

$$I_{15}(u)=\frac{1}{\mu_G}e^{\frac{u}{\mu_G}}\int_u^\infty\psi(y)e^{-\frac{y}{\mu_G}}dy, \qquad I_{16}(u)=\frac{2}{\mu_G}e^{\frac{2u}{\mu_G}}\int_u^\infty\psi(y)e^{-\frac{2y}{\mu_G}}dy.$$

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι αν $\theta_1=0$ ή $\theta_2=0$, η ολοκληροδιαφορική εξίσωση (4.3.47) μπορεί να μετατραπεί σε μια γραμμική διαφορική εξίσωση τρίτης τάξης με σταθερούς συντελεστές.

Λήμμα 4.3.1

Έστω η διαδικασία πλεονάσματος $(U_b(t))_{t\geq 0}$ σύμφωνα με την (4.1.1) *με τους παραπάνω περιορισμούς και έστω ότι οι απαιτήσεις και τα ατομικά ασφάλιστρα είναι εκθετικά κατανεμημένα με μέσους μ_F και μ_G αντίστοιχα.*

Εάν $\theta_1\neq 0$ και $\theta_2=0$, τότε η $\psi(u)$ είναι μία λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\begin{aligned}&\mu_F^2\mu_G(\lambda+\mu)(2\lambda+\mu)\psi'''(u)\\&+[\mu_F\mu_G(2\lambda+3\mu)(2\lambda+\mu)-\lambda\mu_F^2(2\lambda+\mu)+\lambda\mu\mu_F\mu_G\theta_1]\psi''(u)\\&+[2(\mu\mu_G-\lambda\mu_F)(2\lambda+\mu)+\lambda\mu\mu_F\theta_1]\psi'(u)=0, \qquad u\in[0,\infty).\end{aligned} \qquad (4.3.48)$$

Εάν $\theta_1=0$ και $\theta_2\neq 0$, τότε η $\psi(u)$ είναι μία λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\begin{aligned}&\mu_F\mu_G^2(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)\psi'''(u)\\&+[-\mu_F\mu_G(3\lambda+2\mu)(\lambda+2\mu)+\mu\mu_G^2(\lambda+2\mu)+\lambda\mu\mu_F\mu_G\theta_2]\psi''(u)\\&+[2(\lambda\mu_F-\mu\mu_G)(\lambda+2\mu)+\lambda\mu\mu_G\theta_2]\psi'(u)=0, \qquad u\in[0,\infty).\end{aligned} \qquad (4.3.49)$$

Απόδειξη

Αρχικά, έχουμε

$$I'_{13}(u)=-\frac{1}{\mu_F}I_{13}(u)+\frac{1}{\mu_F}\psi(u), \qquad I'_{14}(u)=-\frac{2}{\mu_F}I_{14}(u)+\frac{2}{\mu_F}\psi(u),$$

$$I'_{15}(u)=\frac{1}{\mu_G}I_{15}(u)-\frac{1}{\mu_G}\psi(u), \qquad I'_{16}(u)=\frac{2}{\mu_G}I_{16}(u)-\frac{2}{\mu_G}\psi(u).$$

Από την (4.3.47) βλέπουμε ότι η $\psi(u)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,\infty)$. Συνεπώς, παραγωγίζοντας την (4.3.47) παίρνουμε

$$(\lambda+\mu)\psi'(u)=-\frac{1}{\mu_F}\left(\lambda-\frac{\lambda\mu\theta_1}{2\lambda+\mu}\right)I_{13}(u)-\frac{2}{\mu_F}\frac{\lambda\mu\theta_1}{2\lambda+\mu}I_{14}(u)$$

$$+\frac{1}{\mu_G}\left(\mu-\frac{\lambda\mu\theta_2}{\lambda+2\mu}\right)I_{15}(u)+\frac{2}{\mu_G}\frac{\lambda\mu\theta_2}{\lambda+2\mu}I_{16}(u)+\left(\frac{1}{\mu_F}\left(\lambda-\frac{\lambda\mu\theta_1}{2\lambda+\mu}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{2}{\mu_F}\frac{\lambda\mu\theta_1}{2\lambda+\mu}-\frac{1}{\mu_G}\left(\mu-\frac{\lambda\mu\theta_2}{\lambda+2\mu}\right)-\frac{2}{\mu_G}\frac{\lambda\mu\theta_2}{\lambda+2\mu}\right)\psi(u)$$

$$-\frac{1}{\mu_F}\left(\lambda-\frac{\lambda\mu\theta_1}{2\lambda+\mu}\right)e^{-\frac{u}{\mu_F}}-\frac{2}{\mu_F}\frac{\lambda\mu\theta_1}{2\lambda+\mu}e^{-\frac{2u}{\mu_F}},\qquad u\in[0,\infty),\tag{4.3.50}$$

Πολλαπλασιάζοντας την (4.3.50) με μ_F και προσθέτοντας την (4.3.47) παίρνουμε

$$\mu_F(\lambda+\mu)\psi'(u)+\mu\psi(u)$$

$$=-\frac{\lambda\mu\theta_1}{2\lambda+\mu}I_{14}(u)+\left(1+\frac{\mu_F}{\mu_G}\right)\left(\mu-\frac{\lambda\mu\theta_2}{\lambda+2\mu}\right)I_{15}(u)+\left(1+\frac{2\mu_F}{\mu_G}\right)\frac{\lambda\mu\theta_2}{\lambda+2\mu}I_{16}(u)$$

$$+\left(\frac{\lambda\mu\theta_1}{2\lambda+\mu}-\frac{\mu_F}{\mu_G}\left(\mu+\frac{\lambda\mu\theta_2}{\lambda+2\mu}\right)\right)\psi(u)-\frac{\lambda\mu\theta_1}{2\lambda+\mu}e^{-\frac{2u}{\mu_F}},\quad u\in[0,\infty).\tag{4.3.51}$$

Από την (4.3.51) προκύπτει ότι η $\psi(u)$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,\infty)$. Παραγωγίζοντας την (4.3.51) βρίσκουμε

$$\mu_F(\lambda+\mu)\psi''(u)+\mu\psi'(u)$$

$$=\frac{2}{\mu_F}\frac{\lambda\mu\theta_1}{2\lambda+\mu}I_{14}(u)+\frac{1}{\mu_G}\left(1+\frac{\mu_F}{\mu_G}\right)\left(\mu-\frac{\lambda\mu\theta_2}{\lambda+2\mu}\right)I_{15}(u)$$

$$+\frac{2}{\mu_G}\left(1+\frac{2\mu_F}{\mu_G}\right)\frac{\lambda\mu\theta_2}{\lambda+2\mu}I_{16}(u)+\left(\frac{\lambda\mu\theta_1}{2\lambda+\mu}-\frac{\mu_F}{\mu_G}\left(\mu+\frac{\lambda\mu\theta_2}{\lambda+2\mu}\right)\right)\psi'(u)$$

$$-\left(\frac{2}{\mu_F}\frac{\lambda\mu\theta_1}{2\lambda+\mu}+\frac{1}{\mu_G}\left(1+\frac{\mu_F}{\mu_G}\right)\left(\mu-\frac{\lambda\mu\theta_2}{\lambda+2\mu}\right)+\frac{2}{\mu_G}\left(1+\frac{2\mu_F}{\mu_G}\right)\frac{\lambda\mu\theta_2}{\lambda+2\mu}\right)\psi(u)$$

$$+\frac{2}{\mu_F}\frac{\lambda\mu\theta_1}{2\lambda+\mu}e^{-\frac{2u}{\mu_F}},\qquad u\in[0,\infty).\tag{4.3.52}$$

Πολλαπλασιάζοντας την (4.3.52) με $(-\mu_G)$ και προσθέτοντας την (4.3.51) παίρνουμε

$$-\mu_F\mu_G(\lambda+\mu)\psi''(u)+(\lambda\mu_F-\mu\mu_G)\psi'(u)$$

$$=-\left(1+\frac{2\mu_G}{\mu_F}\right)\frac{\lambda\mu\theta_1}{2\lambda+\mu}I_{14}(u)-\left(1+\frac{2\mu_F}{\mu_G}\right)\frac{\lambda\mu\theta_2}{\lambda+2\mu}I_{16}(u)+\left(-\frac{\lambda\mu\mu_G\theta_1}{2\lambda+\mu}+\frac{\lambda\mu\mu_F\theta_2}{\lambda+2\mu}\right)\psi'(u)$$

$$+\left(\left(1+\frac{2\mu_G}{\mu_F}\right)\frac{\lambda\mu\theta_1}{2\lambda+\mu}+\left(1+\frac{2\mu_F}{\mu_G}\right)\frac{\lambda\mu\theta_2}{\lambda+2\mu}\right)\psi(u)-\left(1+\frac{2\mu_G}{\mu_F}\right)\frac{\lambda\mu\theta_1}{2\lambda+\mu}e^{-\frac{2u}{\mu_F}},$$

$$u\in[0,\infty).\tag{4.3.53}$$

Έστω τώρα $\theta_1\neq 0$ και $\theta_2=0$. Τότε η (4.3.53) γίνεται

$$-\mu_F\mu_G(\lambda+\mu)\psi''(u)+(\lambda\mu_F-\mu\mu_G)\psi'(u)$$

$$=-\left(1+\frac{2\mu_G}{\mu_F}\right)\frac{\lambda\mu\theta_1}{2\lambda+\mu}I_{14}(u)-\frac{\lambda\mu\mu_G\theta_1}{2\lambda+\mu}\psi'(u)+\left(1+\frac{2\mu_G}{\mu_F}\right)\frac{\lambda\mu\theta_1}{2\lambda+\mu}\psi(u)$$
$$-\left(1+\frac{2\mu_G}{\mu_F}\right)\frac{\lambda\mu\theta_1}{2\lambda+\mu}e^{-\frac{2u}{\mu_F}}, \qquad u\in[0,\infty). \tag{4.3.54}$$

Από την (4.3.54) προκύπτει ότι η $\psi(u)$ είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $[0,\infty)$. Παραγωγίζοντας την (4.3.54) βρίσκουμε

$$-\mu_F\mu_G(\lambda+\mu)\psi'''(u)+(\lambda\mu_F-\mu\mu_G)\psi''(u)$$
$$=\frac{2}{\mu_F}\left(1+\frac{2\mu_G}{\mu_F}\right)\frac{\lambda\mu\theta_1}{2\lambda+\mu}I_{14}(u)-\frac{\lambda\mu\mu_G\theta_1}{2\lambda+\mu}\psi''(u)+\left(1+\frac{2\mu_G}{\mu_F}\right)\frac{\lambda\mu\theta_1}{2\lambda+\mu}\psi'(u)$$
$$-\frac{2}{\mu_F}\left(1+\frac{2\mu_G}{\mu_F}\right)\frac{\lambda\mu\theta_1}{2\lambda+\mu}\psi(u)+\frac{2}{\mu_F}\left(1+\frac{2\mu_G}{\mu_F}\right)\frac{\lambda\mu\theta_1}{2\lambda+\mu}e^{-\frac{2u}{\mu_F}}, \quad u\in[0,\infty). \tag{4.3.55}$$

Πολλαπλασιάζοντας την (4.3.55) με μ_F και προσθέτοντας την (4.3.54) πολλαπλασιασμένη με 2, παίρνουμε

$$-\mu_F^2\mu_G(\lambda+\mu)\psi'''(u)+[\mu_F(\lambda\mu_F-\mu\mu_G)-2\mu_F\mu_G(\lambda+\mu)]\psi''(u)+2(\lambda\mu_F+\mu\mu_G)\psi'(u)$$
$$=\frac{\lambda\mu\mu_F\mu_G\theta_1}{2\lambda+\mu}\psi''(u)+\frac{\lambda\mu\mu_F\theta_1}{2\lambda+\mu}\psi'(u), \qquad u\in[0,\infty),$$

από την οποία προκύπτει η (4.3.48).

Στην περίπτωση που $\theta_1=0$ και $\theta_2\neq 0$, η (4.3.53) γίνεται

$$-\mu_F\mu_G(\lambda+\mu)\psi''(u)+(\lambda\mu_F-\mu\mu_G)\psi'(u)$$
$$=-\left(1+\frac{2\mu_F}{\mu_G}\right)\frac{\lambda\mu\theta_2}{\lambda+2\mu}I_{16}(u)+\frac{\lambda\mu\mu_F\theta_2}{\lambda+2\mu}\psi'(u)+\left(1+\frac{2\mu_F}{\mu_G}\right)\frac{\lambda\mu\theta_2}{\lambda+2\mu}\psi(u), \quad u\in[0,\infty). \tag{4.3.56}$$

Από την (4.3.56) προκύπτει ότι η $\psi(u)$ είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $[0,\infty)$. Παραγωγίζοντας την (4.3.56) βρίσκουμε

$$-\mu_F\mu_G(\lambda+\mu)\psi'''(u)+(\lambda\mu_F-\mu\mu_G)\psi''(u)$$
$$=-\frac{2}{\mu_G}\left(1+\frac{2\mu_F}{\mu_G}\right)\frac{\lambda\mu\theta_2}{\lambda+2\mu}I_{16}(u)+\frac{\lambda\mu\mu_F\theta_2}{\lambda+2\mu}\psi''(u)+\left(1+\frac{2\mu_F}{\bar{\mu}_G}\right)\frac{\lambda\mu\theta_2}{\lambda+2\mu}\psi'(u)$$
$$+\frac{2}{\mu_G}\left(1+\frac{2\mu_F}{\mu_G}\right)\frac{\lambda\mu\theta_2}{\lambda+2\mu}\psi(u), \ u\in[0,\infty). \tag{4.3.57}$$

Πολλαπλασιάζοντας την (4.3.57) με $(-\mu_G)$ και προσθέτοντας την (4.3.56) αφού την πολλαπλασιάσουμε με 2, παίρνουμε

$$\mu_F\mu_G^2(\lambda+\mu)\psi'''(u)-[\mu_G(\lambda\mu_F-\mu\mu_G)+2\mu_F\mu_G(\lambda+\mu)]\psi''(u)+2(\lambda\mu_F-\mu\mu_G)]\psi'(u)$$
$$=-\frac{\lambda\mu\mu_F\mu_G\theta_2}{\lambda+2\mu}\psi''(u)-\frac{\lambda\mu\mu_G\theta_2}{\lambda+2\mu}\psi'(u), \qquad u\in[0,\infty),$$

από την οποία προκύπτει η (4.3.49).

□

Πρόταση 4.3.3

Έστω η διαδικασία πλεονάσματος $(U_b(t))_{t\ge 0}$ *σύμφωνα με την* (4.1.1) *με τους παραπάνω περιορισμούς με* $\theta_1 \neq 0$ *και* $\theta_2 = 0$. *Έστω επίσης ότι οι απαιτήσεις και τα ατομικά ασφάλιστρα είναι εκθετικά κατανεμημένα με μέσους* μ_F *και* μ_G *αντίστοιχα και έστω ότι* $\mu\mu_G > \lambda\mu_F$. *Εάν* $2(\mu\mu_G - \lambda\mu_F)(2\lambda+\mu) + \lambda\mu\mu_F\theta_1 \le 0$, τότε

$$\psi(u) = \frac{\lambda(1-\mu_G\, z_3)}{\lambda(1-\mu_G z_3) - \lambda\mu_F\, z_3} e^{z_3 u}, \qquad u \in [0,\infty). \tag{4.3.58}$$

Εάν $2(\mu\mu_G - \lambda\mu_F)(2\lambda+\mu) + \lambda\mu\mu_F\theta_1 > 0$, τότε

$$\psi(u) = C_2 e^{z_2 u} + C_3 e^{z_3 u}, \qquad u \in [0,\infty). \tag{4.3.59}$$

όπου οι σταθερές C_2 *και* C_3 *προσδιορίζονται από το σύστημα των γραμμικών εξισώσεων*

$$\left(\lambda + \mu - \frac{\mu}{1-\mu_G\, z_2}\right)C_2 + \left(\lambda + \mu - \frac{\mu}{1-\mu_G\, z_3}\right)C_3 = \lambda \tag{4.3.60}$$

και

$$\left(\mu_F(\lambda+\mu)z_2 - \left(\mu + \frac{\mu\mu_F}{\mu_G}\right)\frac{\mu_G\, z_2}{1-\mu_G\, z_2} - \frac{\lambda\mu\theta_1}{2\lambda+\mu}\right)C_2$$

$$+\left(\mu_F(\lambda+\mu)z_3 - \left(\mu + \frac{\mu\mu_F}{\mu_G}\right)\frac{\mu_G\, z_3}{1-\mu_G\, z_3} - \frac{\lambda\mu\theta_1}{2\lambda+\mu}\right)C_3 = -\frac{\lambda\mu\theta_1}{2\lambda+\mu} \tag{4.3.61}$$

υπό την προϋπόθεση ότι $\Delta_1 \neq 0$, *όπου*

$$\Delta_1 = \left(\lambda + \mu - \frac{\mu}{1-\mu_G\, z_2}\right)\left(\mu_F(\lambda+\mu)z_3 - \left(\mu + \frac{\mu\mu_F}{\mu_G}\right)\frac{\mu_G\, z_3}{1-\mu_G\, z_3} - \frac{\lambda\mu\theta_1}{2\lambda+\mu}\right)$$

$$-\left(\lambda + \mu - \frac{\mu}{1-\mu_G\, z_3}\right)\left(\mu_F(\lambda+\mu)z_2 - \left(\mu + \frac{\mu\mu_F}{\mu_G}\right)\frac{\mu_G\, z_2}{1-\mu_G\, z_2} - \frac{\lambda\mu\theta_1}{2\lambda+\mu}\right).$$

Απόδειξη

Από το Λήμμα 4.3.1 έχουμε ότι η $\psi(u)$ είναι μία λύση της (4.3.48). Στη συνέχεια θα βρούμε τη γενική λύση της (4.3.48). Η χαρακτηριστική εξίσωσή της είναι

$$\mu_F^2\mu_G(\lambda+\mu)(2\lambda+\mu)z^3 + [\mu_F\mu_G(2\lambda+3\mu)(2\lambda+\mu) - \lambda\mu_F^2(2\lambda+\mu) + \lambda\mu\mu_F\mu_G\theta_1]z^2$$

$$+[2(\mu\mu_G - \lambda\mu_F)(2\lambda+\mu) + \lambda\mu\mu_F\theta_1]z = 0. \tag{4.3.62}$$

Από την εν λόγω εξίσωση, βλέπουμε ότι η $z_1 = 0$ είναι μία ρίζα της. Αποδεικνύουμε στη συνέχεια ότι η εξίσωση

$$\underbrace{\mu_F^2\mu_G(\lambda+\mu)(2\lambda+\mu)}_{\alpha}z^2+\underbrace{[\mu_F\mu_G(2\lambda+3\mu)(2\lambda+\mu)-\lambda\mu_F^2(2\lambda+\mu)+\lambda\mu\mu_F\mu_G\theta_1]}_{\beta}z$$
$$+\underbrace{[2(\mu\mu_G-\lambda\mu_F)(2\lambda+\mu)+\lambda\mu\mu_F\theta_1]}_{\gamma}=0 \qquad (4.3.63)$$

έχει δύο πραγματικές ρίζες. Η διακρίνουσα του παραπάνω τριωνύμου δευτέρου βαθμού ($\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$) είναι

$$D_1=\beta^2-4\alpha\gamma=[\mu_F\mu_G(2\lambda+3\mu)(2\lambda+\mu)-\lambda\mu_F^2(2\lambda+\mu)+\lambda\mu\mu_F\mu_G\theta_1]^2$$
$$-4\mu_F^2\mu_G(\lambda+\mu)(2\lambda+\mu)[2(\mu\mu_G-\lambda\mu_F)(2\lambda+\mu)+\lambda\mu\mu_F\theta_1].$$

Θα δείξουμε ότι η D_1 είναι θετική. Έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}\frac{D_1}{\mu_F^2}&=[(2\lambda\mu_G+3\mu\mu_G-\lambda\mu_F)(2\lambda+\mu)+\lambda\mu\mu_G\theta_1]^2\\
&\quad-8\mu_G(\lambda+\mu)(\mu\mu_G-\lambda\mu_F)(2\lambda+\mu)^2-4\lambda\mu\mu_F\mu_G\theta_1(\lambda+\mu)(2\lambda+\mu)\\
&=(2\lambda+\mu)^2[(2\lambda\mu_G+3\mu\mu_G-\lambda\mu_F)^2-8\mu_G(\lambda+\mu)(\mu\mu_G-\lambda\mu_F)]\\
&\quad+2\lambda\mu\mu_G\theta_1(2\lambda+\mu)(2\lambda\mu_G+3\mu\mu_G-\lambda\mu_F-2\mu_F(\lambda+\mu)]+(\lambda\mu\mu_G\theta_1)^2\\
&=(2\lambda+\mu)^2[2\lambda(\mu_F+\mu_G)+(\mu\mu_G-\lambda\mu_F)]^2\\
&\quad+2\lambda\mu\mu_G\theta_1(2\lambda+\mu)[2(\mu_G-\mu_F)(\lambda+\mu)+(\mu\mu_G-\lambda\mu_F)]+(\lambda\mu\mu_G\theta_1)^2\\
&=(2\lambda+\mu)^2(\mu\mu_G-\lambda\mu_F)^2+2\lambda\mu\mu_G\theta_1(2\lambda+\mu)(\mu\mu_G-\lambda\mu_F)+(\lambda\mu\mu_G\theta_1)^2\\
&\quad+(2\lambda+\mu)^2[4\lambda^2(\mu_F+\mu_G)^2+4\lambda(\mu_F+\mu_G)(\mu\mu_G-\lambda\mu_F)]\\
&\quad+4\lambda\mu\mu_G\theta_1(\mu_G-\mu_F)(\lambda+\mu)(2\lambda+\mu)\\
&=(2\lambda+\mu)^2(\mu\mu_G-\lambda\mu_F)^2+2\lambda\mu\mu_G\theta_1(2\lambda+\mu)(\mu\mu_G-\lambda\mu_F)+(\lambda\mu\mu_G\theta_1)^2\\
&\quad+4\lambda(2\lambda+\mu)[\lambda^2(\mu_F+\mu_G)^2+\lambda(\mu_F+\mu_G)(\mu\mu_G-\lambda\mu_F)]\\
&\quad+(\lambda+\mu)[\lambda(\mu_F+\mu_G)^2+(\mu_F+\mu_G)(\mu\mu_G-\lambda\mu_F)+\mu\mu_G\theta_1(\mu_G-\mu_F)]].\end{aligned}$$

Αφού $\mu\mu_G>\lambda\mu_F$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lambda(\mu_F+\mu_G)^2+(\mu_F+\mu_G)(\mu\mu_G-\lambda\mu_F)+\mu\mu_G\theta_1(\mu_G-\mu_F)>0.$$

Η ελάχιστη τιμή του αριστερού σκέλους της παραπάνω ανισότητας επιτυγχάνεται για $\theta_1=1$ με τιμή $\lambda\mu_G(\mu_F+\mu_G)+2\lambda\mu_G^2$ ή για $\theta_1=-1$ με τιμή $\lambda\mu_G(\mu_F+\mu_G)+2\lambda\mu_F\mu_G$. Και οι δύο αυτές ποσότητες είναι θετικές. Συνεπώς, $D_1>0$ και η (4.3.63) έχει δύο πραγματικές ρίζες τις

$$z_2=\frac{-\beta+\sqrt{D_1}}{2\alpha}=\frac{-[\mu_F\mu_G(2\lambda+3\mu)(2\lambda+\mu)-\lambda\mu_F^2(2\lambda+\mu)+\lambda\mu\mu_F\mu_G\theta_1]+\sqrt{D_1}}{2\mu_F^2\mu_G(\lambda+\mu)(2\lambda+\mu)},$$

$$z_3=\frac{-\beta-\sqrt{D_1}}{2\alpha}=\frac{-[\mu_F\mu_G(2\lambda+3\mu)(2\lambda+\mu)-\lambda\mu_F^2(2\lambda+\mu)+\lambda\mu\mu_F\mu_G\theta_1]-\sqrt{D_1}}{2\mu_F^2\mu_G(\lambda+\mu)(2\lambda+\mu)}.$$

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι η ποσότητα στις αγκύλες στους αριθμητές των ριζών είναι θετική. Για $\mu\mu_G>\lambda\mu_F$, είναι

$$\mu_F\mu_G(2\lambda+3\mu)(2\lambda+\mu)-\lambda\mu_F^2(2\lambda+\mu)+\lambda\mu\mu_F\mu_G\theta_1$$

$$= \mu_F (2\lambda+\mu)(2\lambda\mu_G + 3\mu\mu_G - \lambda\mu_F) + \lambda\mu\mu_F\mu_G\theta_1$$
$$> 2\mu_F\mu_G (2\lambda+\mu)(\lambda+\mu) - \lambda\mu\mu_F\mu_G > 3\lambda\mu\mu_F\mu_G > 0 .$$

Επομένως, ο αριθμητής της z_3 είναι αρνητικός, και αφού ο παρονομαστής της z_3 είναι θετικός, έχουμε ότι $z_3 < 0$. Επίσης είναι $z_2 \geq 0$ εάν

$$-\beta + \sqrt{D_1} \geq 0 \text{ ή } \sqrt{D_1} \geq \beta \text{ ή } D_1 \geq \beta^2 \text{ ή } \beta^2 - 4\alpha\gamma \geq \beta^2 \text{ ή } \alpha\gamma \leq 0 \text{ ή}$$
$$\mu_F^2\mu_G (\lambda+\mu)(2\lambda+\mu)[2(\mu\mu_G - \lambda\mu_F)(2\lambda+\mu) + \lambda\mu\mu_F\theta_1] \leq 0$$
$$2(\mu\mu_G - \lambda\mu_F)(2\lambda+\mu) + \lambda\mu\mu_F\theta_1 \leq 0$$

και είναι $z_2 < 0$ εάν $2(\mu\mu_G - \lambda\mu_F)(2\lambda+\mu) + \lambda\mu\mu_F\theta_1 > 0$.

Έτσι, η γενική λύση της (49) έχει τη μορφή

$$\psi(u) = C_1 + C_2 e^{z_2 u} + C_3 e^{z_3 u}, \quad u \in [0,\infty), \tag{4.3.64}$$

όπου C_1, C_2 και C_3 σταθερές. Για τον προσδιορισμό αυτών χρησιμοποιούμε τις εξής συνοριακές συνθήκες. Αρχικά, αφού $\mu\mu_G > \lambda\mu_F$ είναι $\lim_{u\to\infty}\psi(u) = 0$. Συνεπώς, αφού $z_3 < 0$, είναι $C_1 = 0$ και $C_2 = 0$ εάν $2(\mu\mu_G - \lambda\mu_F)(2\lambda+\mu) + \lambda\mu\mu_F\theta_1 \leq 0$, δηλαδή $z_2 \geq 0$, και είναι $C_1 = 0$ εάν $2(\mu\mu_G - \lambda\mu_F)(2\lambda+\mu) + \lambda\mu\mu_F\theta_1 > 0$, δηλαδή $z_2 < 0$. Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε ενδιάμεσες εξισώσεις. Έστω $2(\mu\mu_G - \lambda\mu_F)(2\lambda+\mu) + \lambda\mu\mu_G\theta_1 \leq 0$. Η σταθερά C_3 προσδιορίζεται θέτοντας $u = 0$ στην (4.3.47), δηλαδή έχουμε την εξίσωση

$$(\lambda+\mu)\psi(0) = \left(\mu - \frac{\lambda\mu\theta_2}{\lambda+2\mu}\right)\frac{1}{\mu_G}\int_0^\infty \psi(y)e^{-\frac{y}{\mu_G}}dy + \frac{\lambda\mu\theta_2}{\lambda+2\mu}\frac{2}{\mu_G}\int_0^\infty \psi(y)e^{-\frac{2y}{\mu_G}}dy + \lambda$$

$$(\lambda+\mu)\psi(0) = \frac{\mu}{\mu_G}\int_0^\infty \psi(y)e^{-\frac{y}{\mu_G}}dy - \frac{\lambda\mu\theta_2}{\lambda+2\mu}\frac{1}{\mu_G}\int_0^\infty \psi(y)e^{-\frac{y}{\mu_G}}dy + \frac{\lambda\mu\theta_2}{\lambda+2\mu}\frac{1}{\mu_G}\int_0^\infty \psi(y)e^{-\frac{y}{\mu_G}}dy + \lambda$$

$$(\lambda+\mu)\psi(0) = \frac{\mu}{\mu_G}\int_0^\infty \psi(y)e^{-\frac{y}{\mu_G}}dy + \lambda . \tag{4.3.65}$$

Αντικαθιστώντας $\psi(u) = C_3 e^{z_3 u}$ στην (4.3.65) προκύπτει

$$(\lambda+\mu)C_3 = \frac{\mu}{\mu_G}\int_0^\infty C_3 e^{z_3 y} e^{-\frac{y}{\mu_G}}dy + \lambda = C_3\frac{\mu}{\mu_G}\int_0^\infty e^{-\frac{1-\mu_G z_3}{\mu_G}y}dy + \lambda = C_3\frac{\mu}{1-\mu_G z_3} + \lambda$$

και ισοδύναμα

$$C_3 = \frac{\lambda(1-\mu_G z_3)}{\lambda(1-\mu_G z_3) - \mu\mu_G z_3}$$

οπότε προκύπτει η (4.3.58).

Εάν $2(\mu\mu_G - \lambda\mu_F)(2\lambda+\mu) + \lambda\mu\mu_F\theta_1 > 0$, τότε οι σταθερές C_2 και C_3 προσδιορίζονται θέτοντας $u = 0$ στην (4.3.47) και (4.3.51), δηλαδή έχουμε αντίστοιχα την (4.3.65) και την εξίσωση

$$
\begin{aligned}
&\mu_F\,(\lambda+\mu)\psi'(0)+\mu\psi(0)\\
&\quad=\left(1+\frac{\mu_F}{\mu_G}\right)\left(\mu-\frac{\lambda\mu\theta_2}{\lambda+2\mu}\right)\frac{1}{\mu_G}\int_0^\infty\psi(y)e^{-\frac{y}{\mu_G}}dy+\left(1+\frac{2\mu_F}{\mu_G}\right)\frac{\lambda\mu\theta_2}{\lambda+2\mu}\,\frac{2}{\mu_G}\int_0^\infty\psi(y)e^{-\frac{2y}{\mu_G}}dy\\
&\quad+\left(\frac{\lambda\mu\theta_1}{2\lambda+\mu}-\frac{\mu_F}{\mu_G}\left(\mu+\frac{\lambda\mu\theta_2}{\lambda+2\mu}\right)\right)\psi(0)-\frac{\lambda\mu\theta_1}{2\lambda+\mu}
\end{aligned}
$$

ή

$$
\mu_F\,(\lambda+\mu)\psi'(0)+\mu\psi(0)=\frac{\mu}{\mu_G}\left(1+\frac{\mu_F}{\mu_G}\right)\int_0^\infty\psi(y)e^{-\frac{y}{\mu_G}}dy+\left(\frac{\lambda\mu\theta_1}{2\lambda+\mu}-\frac{\mu\mu_F}{\mu_G}\right)\psi(0)-\frac{\lambda\mu\theta_1}{2\lambda+\mu}. \tag{4.3.66}
$$

Αντικαθιστώντας την (4.3.59) στην (4.3.65) και (4.3.66) παίρνουμε τις γραμμικές εξισώσεις (4.3.60) και (4.3.61) αντίστοιχα. Το σύστημα των εξισώσεων (4.3.60) και (4.3.61) έχει μοναδική λύση με την προϋπόθεση ότι η ορίζουσα του συστήματος $\Delta_1 \neq 0$ όπου Δ_1 έχει την έκφραση που δόθηκε στην Πρόταση 4.3.3.

Θέτοντας $u=0$ στην (4.3.53) (και στην (4.3.51) όταν $C_2=0$), δεν προκύπτει κάποια επιπλέον πληροφορία για τις άγνωστες σταθερές. Παρ' όλα αυτά, οι ισότητες πρέπει να ισχύουν για τις τιμές των σταθερών που βρέθηκαν από τις (4.3.47) (και την (4.3.51) όταν $C_2 \neq 0$). Συνεπώς, η διαφορική εξίσωση (4.3.48) έχει τη μοναδική λύση που δίνεται από την (4.3.58) ή την (4.3.59). Αφού η (4.3.48) έχει προκύψει από την (4.3.47) χωρίς επιπλέον υποθέσεις, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $\psi(u)$ που δίνεται στην (4.3.58) ή στην (4.3.59) είναι η μοναδική λύση της (4.3.47) που ικανοποιεί τις συγκεκριμένες συνθήκες. Αυτό εξασφαλίζει ότι η λύση που βρέθηκε είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας και η απόδειξη είναι πλήρης.

□

Η περίπτωση που $\theta_1=0$ και $\theta_2 \neq 0$ μπορεί να αναπτυχθεί με παρόμοιο τρόπο και να δώσει τη λύση της εξίσωσης (4.3.49).

4.3.4.2 Η πιθανότητα χρεοκοπίας στο μοντέλο χωρίς εξάρτηση

Έστω ότι $\theta_1=0$ και $\theta_2=0$. Θέτουμε

$$
\psi(u)=\begin{cases}\psi_1(u), & \text{εάν}\, u\in[0,b],\\ \psi_2(u), & \text{εάν}\, u\in[b,\infty).\end{cases}
$$

Τότε οι εξισώσεις (4.3.8) και (4.3.25) για την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$ στην περίπτωση των εκθετικά κατανεμημένων απαιτήσεων και ατομικών ασφαλίστρων, έχουν αντίστοιχα τη μορφή

$$(\lambda+\mu)\psi_1(u)=\frac{\lambda}{\mu_F}e^{-\frac{u}{\mu_F}}\int_0^u\psi_1(y)e^{\frac{y}{\mu_F}}dy+\lambda e^{-\frac{u}{\mu_F}}+\frac{\mu}{\mu_G}e^{\frac{u}{\mu_G}}\int_u^b\psi_1(y)e^{-\frac{y}{\mu_G}}dy+\frac{\mu}{\mu_G}e^{\frac{u}{\mu_G}}\int_b^\infty\psi_2(y)e^{-\frac{y}{\mu_G}}dy,$$
$$u\in[0,b], \qquad (4.3.67)$$

και

$$r_d\psi_2'(u)+(\lambda+\mu)\psi_2(u)=\frac{\lambda}{\mu_F}e^{-\frac{u}{\mu_F}}\int_0^b\psi_1(y)e^{\frac{y}{\mu_F}}dy+\frac{\lambda}{\mu_F}e^{-\frac{u}{\mu_F}}\int_b^u\psi_2(y)e^{\frac{y}{\mu_F}}dy+\lambda e^{-\frac{u}{\mu_F}}$$
$$+\frac{\mu}{\mu_G}e^{\frac{u}{\mu_G}}\int_u^\infty\psi_2(y)e^{-\frac{y}{\mu_G}}dy, \qquad u\in[b,\infty). \qquad (4.3.68)$$

Θα δείξουμε ότι οι ολοκληρο-διαφορικές εξισώσεις (4.3.67) και (4.3.68) μετατρέπονται σε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές.

Λήμμα 4.3.2

Έστω η διαδικασία πλεονάσματος $(U_b(t))_{t\geq 0}$ σύμφωνα με την (4.3.1) υπό τους παραπάνω περιορισμούς με $\theta_1=0$ και $\theta_2=0$. Έστω επίσης ότι οι απαιτήσεις και τα ατομικά ασφάλιστρα είναι εκθετικά κατανεμημένα με μέσους μ_F και μ_G αντίστοιχα. Τότε οι $\psi_1(u)$ και *$\psi_2(u)$ είναι λύσεις των διαφορικών εξισώσεων*

$$\mu_F\mu_G(\lambda+\mu)\psi_1''(u)+(\mu\mu_G-\lambda\mu_F)\psi_1'(u)=0, \quad u\in[0,b], \qquad (4.3.69)$$

και

$$r_d\,\mu_F\mu_G\psi_2'''(u)+[r_d\mu_G-r_d\mu_F+\mu_F\mu_G(\lambda+\mu)]\psi_2''(u)+(\mu\mu_G-\lambda\mu_F-r_d)\psi_2'(u)=0, \quad u\in[b,\infty).$$
$$(4.3.70)$$

Απόδειξη

Από την (4.3.67) βλέπουμε ότι η $\psi(u)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,b]$. Παραγωγίζοντας την (4.3.67) παίρνουμε

$$(\lambda+\mu)\psi_1'(u)=-\frac{1}{\mu_F}\left(\frac{\lambda}{\mu_F}e^{-\frac{u}{\mu_F}}\int_0^u\psi_1(y)e^{\frac{y}{\mu_F}}dy+\lambda e^{-\frac{u}{\mu_F}}\right)$$
$$+\frac{1}{\mu_F}\left(\frac{\mu}{\mu_G}e^{\frac{u}{\mu_G}}\int_u^b\psi_1(y)e^{-\frac{y}{\mu_G}}dy+\frac{\mu}{\mu_G}e^{\frac{u}{\mu_G}}\int_b^\infty\psi_2(y)e^{-\frac{y}{\mu_G}}dy\right)$$
$$+\left(\frac{\lambda}{\mu_F}-\frac{\mu}{\mu_G}\right)\psi_1(u), \quad u\in[0,b]. \qquad (4.3.71)$$

Πολλαπλασιάζοντας την (4.3.71) με $(-\mu_G)$ και προσθέτοντας την (4.3.67) προκύπτει

$$-\mu_G(\lambda+\mu)\psi_1'(u)+\lambda\left(1+\frac{\mu_G}{\mu_F}\right)\psi_1(u)$$

$$=\left(1+\frac{\mu_G}{\mu_F}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu_F}e^{-\frac{u}{\mu_F}}\int_0^u \psi_1(y)e^{\frac{y}{\mu_F}}dy+\lambda e^{-\frac{u}{\mu_F}}\right),\quad u\in[0,b]. \tag{4.3.72}$$

Από την (4.3.72) προκύπτει ότι $\psi(u)$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,b]$. Παραγωγίζοντας την (4.3.72) παίρνουμε

$$-\mu_G(\lambda+\mu)\psi_1''(u)+\lambda\left(1+\frac{\mu_G}{\mu_F}\right)\psi_1'(u)=-\frac{1}{\mu_F}\left(1+\frac{\mu_G}{\mu_F}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu_F}e^{-\frac{u}{\mu_F}}\int_0^u \psi_1(y)e^{\frac{y}{\mu_F}}dy+\lambda e^{-\frac{u}{\mu_F}}\right)$$

$$+\frac{\lambda}{\mu_F}\left(1+\frac{\mu_G}{\mu_F}\right)\psi_1(u),\quad u\in[0,b]. \tag{4.3.73}$$

Πολλαπλασιάζοντας την (4.3.73) με μ_F και προσθέτοντας την (4.3.72), προκύπτει η (4.3.69). Από την (4.3.68), η $\psi(u)$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[b,\infty)$. Παραγωγίζοντας την (4.3.68) παίρνουμε

$$r_d\psi_2''(u)+(\lambda+\mu)\psi_2'(u)=-\frac{1}{\mu_F}\left(\frac{\lambda}{\mu_F}e^{-\frac{u}{\mu_F}}\int_0^b \psi_1(y)e^{\frac{y}{\mu_F}}dy+\frac{\lambda}{\mu_F}e^{-\frac{u}{\mu_F}}\int_b^u \psi_2(y)e^{\frac{y}{\mu_F}}dy+\lambda e^{-\frac{u}{\mu_F}}\right)$$

$$+\frac{\mu}{\mu_G^2}e^{\frac{u}{\mu_G}}\int_u^\infty \psi_2(y)e^{-\frac{y}{\mu_G}}dy+\left(\frac{\lambda}{\mu_F}-\frac{\mu}{\mu_G}\right)\psi_2(u),\qquad u\in[b,\infty). \tag{4.3.74}$$

Πολλαπλασιάζοντας την (4.3.74) με μ_F και προσθέτοντας την (4.3.68), προκύπτει

$$r_d\mu_F\psi_2''(u)+[r_d+\mu_F(\lambda+\mu)]\psi_2'(u)+\mu\left(1+\frac{\mu_F}{\mu_G}\right)\psi_2(u)=\frac{\mu}{\mu_G}\left(1+\frac{\mu_F}{\mu_G}\right)e^{\frac{u}{\mu_G}}\int_u^\infty \psi_2(y)e^{-\frac{y}{\mu_G}}dy,$$

$$u\in[b,\infty). \tag{4.3.75}$$

Από την (4.3.75) προκύπτει ότι $\psi(u)$ είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $[b,\infty)$. Παραγωγίζοντας την (4.3.75) παίρνουμε

$$r_d\mu_F\psi_2'''(u)+[r_d+\mu_F(\lambda+\mu)]\psi_2''(u)+\mu\left(1+\frac{\mu_F}{\mu_G}\right)\psi_2'(u)$$

$$=\frac{\mu}{\mu_G^2}\left(1+\frac{\mu_F}{\mu_G}\right)e^{\frac{u}{\mu_G}}\int_u^\infty \psi_2(y)e^{-\frac{y}{\mu_G}}dy-\frac{\mu}{\mu_G}\left(1+\frac{\mu_F}{\mu_G}\right)\psi_2(u),\qquad u\in[b,\infty). \tag{4.3.76}$$

Πολλαπλασιάζοντας την (4.3.76) με $(-\mu_G)$ και προσθέτοντας την (4.3.75) προκύπτει η (4.3.70).

□

Πρόταση 4.3.4

Έστω η διαδικασία πλεονάσματος $(U_b(t))_{t\geq 0}$ σύμφωνα με την (4.3.1) υπό τους παραπάνω περιορισμούς με $\theta_1=0$ και $\theta_2=0$. Έστω επίσης ότι οι απαιτήσεις και τα ατομικά ασφάλιστρα *είναι εκθετικά κατανεμημένα με μέσους* μ_F *και* μ_G *αντίστοιχα έστω ότι* $\mu\mu_G > \lambda\mu_F + r_d$. *Τότε για την πιθανότητα χρεοκοπίας έχουμε*

$$\psi_1(u) = C_4 + C_5 e^{z_5 u}, \qquad u \in [0, b], \tag{4.3.77}$$

και

$$\psi_2(u) = C_7 e^{z_7 u} + C_8 e^{z_8 u}, \qquad u \in [b, \infty), \tag{4.3.78}$$

όπου οι σταθερές C_4, C_5, C_7 *και* C_8 *προσδιορίζονται από το σύστημα των γραμμικών εξισώσεων:*

$$(\lambda e^{b/\mu_G} + \mu)C_4 + \frac{\lambda+\mu}{\mu_F+\mu_G}(\mu_G e^{b/\mu_G} + \mu_F e^{z_5 b})C_5 + \frac{\mu e^{z_7 b}}{\mu_G z_7 - 1}C_7 + \frac{\mu e^{z_8 b}}{\mu_G z_8 - 1}C_8 = \lambda e^{b/\mu_G}, \tag{4.3.79}$$

$$\lambda\left(1 + \frac{\mu_G}{\mu_F}\right)C_4 + \frac{\mu_G(\lambda+\mu)}{\mu_F}C_5 = \lambda\left(1+\frac{\mu_G}{\mu_F}\right), \tag{4.3.80}$$

$$C_4 + C_5 e^{z_5 b} - C_7 e^{z_7 b} - C_8 e^{z_8 b} = 0 \tag{4.3.81}$$

και

$$\lambda(e^{-b/\mu_G} - 1)C_4 + \frac{\mu_G(\lambda+\mu)}{\mu_F+\mu_G}(e^{-b/\mu_F} - e^{z_5 b})C_5 + \left(\lambda + \mu + r_d\, z_7 + \frac{\mu}{\mu_G z_7 - 1}\right)e^{z_7 b}C_7$$
$$+\left(\lambda + \mu + r_d\, z_8 + \frac{\mu}{\mu_G z_8 - 1}\right)e^{z_8 b}C_8 = \lambda e^{-b/\mu_F}. \tag{4.3.82}$$

Απόδειξη

Από το Λήμμα 4.3.2, οι $\psi_1(u)$ και $\psi_2(u)$ είναι λύσεις των (4.3.69) και (4.3.70). Θα βρούμε τώρα τις γενικές λύσεις αυτών των εξισώσεων.

Η χαρακτηριστική εξίσωση που αντιστοιχεί στην (4.3.69) είναι

$$\mu_F\mu_G(\lambda+\mu)z^2 + (\mu\mu_G - \lambda\mu_F)z = 0$$

και έχει δύο ρίζες: $z_4 = 0$ και $z_5 = \dfrac{\lambda\mu_F - \mu\mu_G}{\mu_F\mu_G(\lambda+\mu)}$. Από τη συνθήκη $\mu\mu_G > \lambda\mu_F + r_d$ έχουμε ότι $\lambda\mu_F - \mu\mu_G < -r_d < 0$ συνεπώς, η ρίζα $z_5 < 0$.

Έτσι, η (4.3.77) είναι αληθής για κάποιες σταθερές C_4 και C_5.

Η χαρακτηριστική εξίσωση που αντιστοιχεί στην (4.3.70) είναι

$$r_d\,\mu_F\mu_G\, z^3 + (r_d\mu_G - r_d\mu_F + \mu_F\mu_G(\lambda+\mu))z^2 + (\mu\mu_G - \lambda\mu_F - r_d)z = 0 \tag{4.3.83}$$

και η $z_6 = 0$ είναι μία ρίζα της. Θα δείξουμε ότι η εξίσωση

$$\underbrace{r_d\,\mu_F\mu_G}_{\alpha} z^2 + \underbrace{(r_d\mu_G - r_d\mu_F + \mu_F\mu_G(\lambda+\mu))}_{\beta} z + \underbrace{(\mu\mu_G - \lambda\mu_F - r_d)}_{\gamma} = 0 \tag{4.3.84}$$

έχει δύο αρνητικές ρίζες. Η διακρίνουσα του παραπάνω τριωνύμου ($\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$) είναι

$$D_2 = \beta^2 - 4\alpha\gamma = [r_d(\mu_G - \mu_F) + \mu_F\mu_G(\lambda+\mu)]^2 - 4r_d\mu_F\mu_G(\mu\mu_G - \lambda\mu_F - r_d).$$

Για το πρόσημό της έχουμε

$$D_2 = r_d^2(\mu_G - \mu_F)^2 + \mu_F^2\mu_G^2(\lambda+\mu)^2 + 2r_d\mu_F\mu_G(\lambda+\mu)(\mu_G-\mu_F) + 4r_d\mu_F\mu_G(r_d + \lambda\mu_F - \mu\mu_G)$$

$$= r_d^2(\mu_G^2 + \mu_F^2 - 2\mu_G\mu_F)^2 + \mu_F^2\mu_G^2(\lambda+\mu)^2 + 2r_d\mu_F\mu_G(\lambda+\mu)(\mu_G-\mu_F)$$

$$+4r_d^2\mu_F\mu_G + 4r_d\lambda\mu_F^2\mu_G - 4r_d\mu\mu_F\mu_G^2$$

$$= r_d^2(\mu_G+\mu_F)^2 + \mu_F^2\mu_G^2(\lambda+\mu)^2 + 2r_d\mu_F\mu_G(\lambda-\mu)(\mu_F+\mu_G)$$

$$= [r_d(\mu_G+\mu_F) + \mu_F\mu_G(\lambda-\mu)]^2 - \mu_F^2\mu_G^2(\lambda-\mu)^2 + \mu_F^2\mu_G^2(\lambda+\mu)^2$$

$$= [r_d(\mu_G+\mu_F) + \mu_F\mu_G(\lambda-\mu)]^2 + 4\lambda\mu\mu_F^2\mu_G^2 > 0\,.$$

Συνεπώς, η (4.3.84) έχει δύο πραγματικές ρίζες έστω z_7 και z_8. Από τις συνθήκες της Πρότασης είναι

$$\gamma = \mu\mu_G - \lambda\mu_F - r_d > 0$$

και

$$\beta = r_d\mu_G - r_d\mu_F + \mu_F\mu_G(\lambda+\mu) = r_d\mu_G - r_d\mu_F + \mu_F\mu_G\lambda + \mu_F\mu_G\mu + \lambda\mu_F^2 - \lambda\mu_F^2$$

$$= \mu_F(\mu\mu_G - \lambda\mu_F - r_d) + \lambda\mu_F^2 + \lambda\mu_F\mu_G + r_d\mu_G > 0\,.$$

Για το παραπάνω τριώνυμο έχουμε ότι $\alpha > 0$, $\beta > 0$ και $\gamma > 0$. Συνεπώς, από τους τύπους Vieta είναι $z_7 z_8 = \dfrac{\gamma}{\alpha} > 0$ και $z_7 + z_8 = -\dfrac{\beta}{\alpha} < 0$, και άρα οι ρίζες του τριωνύμου είναι και οι δύο αρνητικές. Οι ρίζες είναι

$$z_7 = \frac{-\beta + \sqrt{D_2}}{2\alpha} = \frac{-[r_d\mu_G - r_d\mu_F + \mu_F\mu_G(\lambda+\mu)] + \sqrt{D_2}}{2r_d\mu_F\mu_G} < 0$$

και

$$z_8 = \frac{-\beta - \sqrt{D_2}}{2\alpha} = \frac{-[r_d\mu_G - r_d\mu_F + \mu_F\mu_G(\lambda+\mu)] - \sqrt{D_2}}{2r_d\mu_F\mu_G} < 0\,.$$

Συνεπώς, έχουμε

$$\psi_2(u) = C_6 + C_7 e^{z_7 u} + C_8 e^{z_8 u}, \quad u \in [b, \infty)\,,$$

για κάποιες σταθερές C_6, C_7 και C_8. Επίσης, αφού $\mu\mu_G > \lambda\mu_F + r_d$, είναι $\lim_{u\to\infty}\psi(u) = 0$, από το οποίο βρίσκουμε ότι $C_6 = 0$. Συνεπώς, προκύπτει η (4.3.78).

Οι σταθερές C_4, C_5, C_7 και C_8 προσδιορίζονται θέτοντας $u = 0$ στην (4.3.67) και στην (4.3.72), λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $\psi_1(b) = \psi_2(b)$ και θέτοντας $u = b$ στην (4.3.68).

Αντικαθιστώντας τις (4.3.77) και (4.3.78) στις (4.3.67) και (4.3.72) καθώς $u = 0$ και στην (4.3.68) καθώς $u = b$, απλοποιώντας προκύπτουν αντίστοιχα οι εξισώσεις (4.3.79), (4.3.80) και (4.3.82). Αντικαθιστώντας τις (4.3.77) και (4.3.78) στην ισότητα $\psi_1(b) = \psi_2(b)$ προκύπτει η (4.3.81). Η ορίζουσα του συστήματος (4.3.79)-(4.3.82) είναι

$$\Delta_2 = r_d(z_7 - z_8)e^{(z_7+z_8)b}\left[\lambda e^{z_5 b}\left(\frac{\mu\mu_G}{\mu_F} - \lambda\right)\right.$$
$$\left. + \frac{\mu_G^2 z_7 z_8}{\mu_G^2 z_7 z_8 - \mu_G(z_7+z_8)+1}\left((\lambda+\mu)\frac{\mu\mu_G}{\mu_F} - \lambda\mu e^{z_5 b}\left(1+\frac{\mu_G}{\mu_F}\right)\right)\right]$$

η οποία είναι θετική. Πράγματι, από τις ρίζες z_7 και z_8 που δόθηκαν παραπάνω, είναι $z_7 - z_8 = \frac{-\beta+\sqrt{D_2}}{2\alpha} - \frac{-\beta-\sqrt{D_2}}{2\alpha} = \frac{\sqrt{D_2}}{\alpha} > 0$. Επίσης από τη συνθήκη $\mu\mu_G > \lambda\mu_F + r_d$ έχουμε ότι $\frac{\mu\mu_G}{\mu_F} - \lambda > \frac{r_d}{\mu_F} > 0$. Είδαμε παραπάνω ότι $z_7 z_8 > 0$ και $z_7 + z_8 < 0$ συνεπώς είναι $\mu_G^2 z_7 z_8 - \mu_G(z_7+z_8)+1 > 0$. Αφού $z_5 < 0$ και $b > 0$ είναι $e^{z_5 b} > 1$, οπότε

$$(\lambda+\mu)\frac{\mu\mu_G}{\mu_F} - \lambda\mu e^{z_5 b}\left(1+\frac{\mu_G}{\mu_F}\right) > (\lambda+\mu)\frac{\mu\mu_G}{\mu_F} - \lambda\mu\left(1+\frac{\mu_G}{\mu_F}\right) > \mu\left(\frac{\mu\mu_G}{\mu_F} - \lambda\right) > 0.$$

Συνεπώς, αφού η ορίζουσα του συστήματος είναι $\Delta_2 \neq 0$, το σύστημα των εξισώσεων (4.3.79)-(4.3.82) έχει μοναδική λύση. Επίσης, θέτοντας $u = b$ στην (4.3.75) δεν προκύπτει κάποια επιπλέον πληροφορία για τις άγνωστες σταθερές, αλλά η ισότητα στην (4.3.75) ισχύει για τις τιμές των σταθερών που βρέθηκαν από το σύστημα των (4.3.79)-(4.3.82). Συνεπώς, κάθε μία από τις διαφορικές εξισώσεις (4.3.69) και (4.3.70) έχει τη μοναδική λύση που δίνεται από την (4.3.77) ή (4.3.78) αντίστοιχα. Αφού οι εξισώσεις αυτές έχουν προκύψει από τις (4.3.67) και (4.3.68) χωρίς κάποια πρόσθετη πληροφορία, συμπεραίνουμε ότι οι συναρτήσεις $\psi_1(u)$ και $\psi_2(u)$ που δίνονται στις (4.3.77) και (4.3.78) είναι οι μοναδικές λύσεις των (4.3.67) και (4.3.68) που ικανοποιούν τις συγκεκριμένες συνθήκες. Αυτό εξασφαλίζει ότι οι συναρτήσεις $\psi_1(u)$ και $\psi_2(u)$ που βρέθηκαν συμπίπτουν με τις πιθανότητες χρεοκοπίας στα διαστήματα $[0,b]$ και $[b,\infty)$ αντίστοιχα, και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

□

4.3.4.3 Οι αναμενόμενες προεξοφλημένες καταβολές μερισμάτων μέχρι τη χρεοκοπία στο μοντέλο χωρίς εξάρτηση

Έστω ότι $\theta_1 = 0$ και $\theta_2 = 0$. Οι εξισώσεις (4.3.28) και (4.3.41) για τις αναμενόμενες προεξοφλημένες καταβολές μερισμάτων $\upsilon(u)$ στην περίπτωση των εκθετικά κατανεμημένων απαιτήσεων και ατομικών ασφαλίστρων, έχουν αντίστοιχα τη μορφή

$$(\lambda+\mu+\delta)\upsilon_1(u) = \frac{\lambda}{\mu_F}e^{-\frac{u}{\mu_F}}\int_0^u \upsilon_1(y)e^{\frac{y}{\mu_F}}dy + \frac{\mu}{\mu_G}e^{\frac{u}{\mu_G}}\int_u^b \upsilon_1(y)e^{-\frac{y}{\mu_G}}dy + \frac{\mu}{\mu_G}e^{\frac{u}{\mu_G}}\int_b^\infty \upsilon_2(y)e^{-\frac{y}{\mu_G}}dy,$$
$$u \in [0,b], \qquad (4.3.85)$$

και

$$r_d\,\upsilon_2'(u)+(\lambda+\mu+\delta)\upsilon_2(u)=\frac{\lambda}{\mu_F}e^{-\frac{u}{\mu_F}}\int_0^b\upsilon_1(y)e^{\frac{y}{\mu_F}}dy+\frac{\lambda}{\mu_F}e^{-\frac{u}{\mu_F}}\int_b^u\upsilon_2(y)e^{\frac{y}{\mu_F}}dy$$

$$+\frac{\mu}{\mu_G}e^{\frac{u}{\mu_G}}\int_u^\infty\upsilon_2(y)e^{-\frac{y}{\mu_G}}dy+r_d\,,\qquad u\in[b,\infty)\,,\qquad (4.3.86)$$

Το Λήμμα 4.3.3 στη συνέχεια δείχνει ότι οι ολοκληρο-διαφορικές εξισώσεις (4.3.85) και (4.3.86) μετατρέπονται σε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές. Η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτήν του Λήμματος 4.3.2 και παραλείπεται.

Λήμμα 4.3.3

Έστω η διαδικασία πλεονάσματος $(U_b(t))_{t\geq 0}$ σύμφωνα με την (4.3.1) *υπό τους παραπάνω περιορισμούς με $\theta_1=0$ και $\theta_2=0$. Έστω επίσης ότι οι απαιτήσεις και τα ατομικά ασφάλιστρα είναι εκθετικά κατανεμημένα με μέσους μ_F και μ_G αντίστοιχα. Τότε οι $\upsilon_1(u)$* και *$\upsilon_2(u)$ είναι λύσεις των διαφορικών εξισώσεων*

$$\mu_F\mu_G(\lambda+\mu+\delta)\upsilon_1''(u)+[\mu_G(\mu+\delta)-\mu_F(\lambda+\delta)]\upsilon_1'(u)-\delta\upsilon_1(u)=0\,,\quad u\in[0,b]\,,\qquad (4.3.87)$$

και

$$r_d\,\mu_F\mu_G\upsilon_2'''(u)+[r_d(\mu_G-\mu_F)+\mu_F\mu_G(\lambda+\mu+\delta)]\upsilon_2''(u)$$

$$+[\mu_G(\mu+\delta)-\mu_F(\lambda+\delta)-r_d]\upsilon_2'(u)-\delta\upsilon_2(u)=-r_d\,,\quad u\in[b,\infty)\,.\qquad (4.3.88)$$

Πρόταση 4.3.5

Έστω η διαδικασία πλεονάσματος $(U_b(t))_{t\geq 0}$ σύμφωνα με την (4.3.1) *υπό τους παραπάνω περιορισμούς με $\theta_1=0$ και $\theta_2=0$. Έστω επίσης ότι οι απαιτήσεις και τα ατομικά ασφάλιστρα είναι εκθετικά κατανεμημένα με μέσους μ_F και μ_G αντίστοιχα* και έστω *$\mu\mu_G>\lambda\mu_F+r_d$ και $D_4>0$. Τότε έχουμε*

$$\upsilon_1(u)=C_9e^{z_9u}+C_{10}e^{z_{10}u}\,,\qquad u\in[0,b]\,,\qquad (4.3.89)$$

και

$$\upsilon_2(u)=C_{11}e^{z_{11}u}+C_{12}e^{z_{12}u}+\frac{r_d}{\delta}\,,\qquad u\in[b,\infty)\,,\qquad (4.3.90)$$

όπου z_{11} και z_{12} είναι αρνητικές ρίζες της κυβικής εξίσωσης

$$r_d\,\mu_F\mu_G\,z^3+[r_d(\mu_G-\mu_F)+\mu_F\mu_G(\lambda+\mu+\delta)]z^2+[\mu_G(\mu+\delta)-\mu_F(\lambda+\delta)-r_d]z-\delta=0$$

$$(4.3.91)$$

που έχει διακρίνουσα D_4 και οι σταθερές C_9, C_{10}, C_{11} και C_{12} προσδιορίζονται από το σύστημα των γραμμικών εξισώσεων:

$$\left((\lambda+\mu+\delta)e^{b/\mu_G} - \frac{\mu}{\mu_G z_9 - 1}(e^{z_9 b} - e^{b/\mu_G}) \right) C_9$$

$$+\left((\lambda+\mu+\delta)e^{b/\mu_G} - \frac{\mu}{\mu_G z_{10} - 1}(e^{z_{10} b} - e^{b/\mu_G}) \right) C_{10}$$

$$+\frac{\mu e^{z_{11}b}}{\mu_G z_{11}-1} C_{11} + \frac{\mu e^{z_{12}b}}{\mu_G z_{12}-1} C_{12} = \frac{r_d \mu}{\delta}, \tag{4.3.92}$$

$$\left(\lambda+\delta+\frac{\mu\mu_G}{\mu_F} - \mu_G\, z_9(\lambda+\mu+\delta) \right) C_9 + \left(\lambda+\delta+\frac{\mu\mu_G}{\mu_F} - \mu_G\, z_{10}(\lambda+\mu+\delta) \right) C_{10} = 0, \tag{4.3.93}$$

$$e^{z_9 b}C_9 + e^{z_{10}b}C_{10} - e^{z_{11}b}C_{11} - e^{z_{12}b}C_{12} = \frac{r_d}{\delta}, \tag{4.3.94}$$

και

$$\frac{\lambda}{\mu_F z_9 + 1}(e^{-b/\mu_F} - e^{z_9 b})C_9 + \frac{\lambda}{\mu_F z_{10} + 1}(e^{-b/\mu_F} - e^{z_{10} b})C_{10}$$

$$+\left(\lambda+\mu+\delta+r_d\, z_{11} + \frac{\mu}{\mu_G z_{11}-1} \right) e^{z_{11}b} C_{11}$$

$$+\left(\lambda+\mu+\delta+r_d\, z_{12} + \frac{\mu}{\mu_G z_{12}-1} \right) e^{z_{12}b} C_{12} = -r_d\left(1+\frac{\lambda}{\delta}\right) \tag{4.3.95}$$

με την προϋπόθεση ότι η ορίζουσα του συστήματος των εξισώσεων (4.3.92)-(4.3.95) *είναι διάφορη του μηδενός.*

Απόδειξη

Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη της Πρότασης 3.3.4 και θα παραλειφθούν οι λεπτομέρειες. Από το Λήμμα 4.3.3, οι $\upsilon_1(u)$ και $\upsilon_2(u)$ είναι λύσεις των (4.3.87) και (4.3.88). Η χαρακτηριστική εξίσωση της (4.3.87) είναι

$$\mu_F\mu_G(\lambda+\mu+\delta)z^2 + [\mu_G(\mu+\delta) - \mu_F(\lambda+\delta)]z - \delta = 0. \tag{4.3.96}$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου αυτού είναι

$$D_3 = [\mu_G(\mu+\delta) - \mu_F(\lambda+\delta)]^2 + 4\delta\mu_F\mu_G(\lambda+\mu+\delta) > 0$$

συνεπώς η (4.3.96) έχει δύο πραγματικές ρίζες, τις

$$z_9 = \frac{-[\mu_G(\mu+\delta) - \mu_F(\lambda+\delta)] + \sqrt{D_3}}{2\mu_F\mu_G(\lambda+\mu+\delta)} \text{ και } z_{10} = \frac{-[\mu_G(\mu+\delta) - \mu_F(\lambda+\delta)] - \sqrt{D_3}}{2\mu_F\mu_G(\lambda+\mu+\delta)}.$$

Έτσι έχουμε την (4.3.89) για κάποιες σταθερές C_9 και C_{10}.

Η εξίσωση (4.3.91) είναι μια κυβική εξίσωση της μορφής

$$az^3 + bz^2 + cz + d = 0$$

με διακρίνουσα

$$D_4 = b^2c^2 - 4ac^3 - 4b^3d - 27a^2d^2 + 18abcd$$

$$
\begin{aligned}
&= [r_d(\mu_G - \mu_F) + \mu_F\mu_G(\lambda+\mu+\delta)]^2[\mu_G(\mu+\delta) - \mu_F(\lambda+\delta) - r_d]^2 \\
&\quad -4r_d\mu_F\mu_G[\mu_G(\mu+\delta) - \mu_F(\lambda+\delta) - r_d]^3 \\
&\quad +4[r_d(\mu_G - \mu_F) + \mu_F\mu_G(\lambda+\mu+\delta)]^3\delta \\
&\quad -27(r_d\mu_F\mu_G\delta)^2 \\
&\quad -18\delta r_d\mu_F\mu_G[r_d(\mu_G - \mu_F) + \mu_F\mu_G(\lambda+\mu+\delta)][\mu_G(\mu+\delta) - \mu_F(\lambda+\delta) - r_d].
\end{aligned}
$$

Η υπόθεση $D_4 > 0$ μας εξασφαλίζει ότι η (4.3.91) έχει τρεις διακεκριμένες πραγματικές ρίζες, έστω z_{11}, z_{12} και z_{13}. Συνεπώς, η γενική εξίσωση της (4.3.88) είναι

$$\upsilon_2(u) = C_{11}e^{z_{11}u} + C_{12}e^{z_{12}u} + C_{13}e^{z_{13}u}, \quad u \in [b, \infty)$$

για κάποιες σταθερές C_{11}, C_{12} και C_{13}.

Από τους τύπους του Vieta, για τις ρίζες της (4.3.91) ισχύει $z_{11}z_{12}z_{13} = -\dfrac{d}{a} > 0$ αφού $a > 0$ και $d < 0$. Επομένως, η (4.3.91) έχει είτε δύο αρνητικές ρίζες είτε καμία. Αφού, από υπόθεση, $\mu\mu_G > \lambda\mu_F + r_d$, είναι $\lim\limits_{u\to\infty}\upsilon_2(u) = \dfrac{r_d}{\delta}$. Συνεπώς, εάν η (4.3.91) δεν έχει αρνητικές ρίζες, η συνάρτηση $\upsilon_2(u)$ θα είναι σταθερή, το οποίο είναι αδύνατο. Από αυτό, συμπεραίνουμε ότι η (4.3.91) έχει δύο αρνητικές ρίζες έστω z_{11} και z_{12}. Αφού $z_{13} > 0$, τότε προκύπτει $C_{13} = 0$, οπότε έχουμε την (4.3.90).

Για να προσδιοριστούν οι σταθερές C_9, C_{10}, C_{11} και C_{12}, εφαρμόζουμε παρόμοιο συλλογισμό όπως στην απόδειξη της Πρότασης 4.3.4 και προκύπτει το σύστημα των γραμμικών εξισώσεων (4.3.92)-(4.3.95) το οποίο έχει μοναδική λύση με την προϋπόθεση ότι η ορίζουσα του συστήματος είναι διάφορη του μηδενός. Τέλος, με παρόμοια επιχειρήματα με αυτά της απόδειξης της Πρότασης 4.3.4, μπορούμε να δούμε ότι οι συναρτήσεις $\upsilon_1(u)$ κι $\upsilon_2(u)$ που βρέθηκαν, συμπίπτουν με τις αναμενόμενες προεξοφλημένες καταβολές μερισμάτων στα διαστήματα $[0, b]$ και $[b, \infty)$.

□

4.3.5 Αριθμητική εφαρμογή

Στην ενότητα αυτή δίνονται κάποιες αριθμητικές εφαρμογές αναφορικά με τα αποτελέσματα της Ενότητας 4.3.4. Θεωρούμε ότι τα μεγέθη των ασφαλίστρων και των απαιτήσεων ακολουθούν εκθετικές κατανομές με τιμές των παραμέτρων

$$\lambda = 0.1,\ \mu = 2.3,\ \mu_F = 3,\ \mu_G = 0.2.$$

Για τις τιμές αυτές, ικανοποιείται η συνθήκη της Πρότασης 4.3.3,

$$\mu\mu_G = 0.46 > 0.3 = \lambda\mu_F .$$

Εφαρμόζοντας την Πρόταση 4.3.3 μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας για $u \in [0,\infty)$ στο μοντέλο χωρίς μερίσματα για διάφορες τιμές του θ_1. Συγκεκριμένα η εξίσωση $\psi(u)$ δίνεται στον Πίνακα 4.3.1:

θ_1	Εξίσωση πιθανότητας χρεοκοπίας
–0.9	$\psi(u) \approx 0.929934e^{-0.022277u} - 0.006234e^{-0.744001u}$
–0.5	$\psi(u) \approx 0.817753e^{-0.059151u} - 0.009736e^{-0.712238u}$
–0.1	$\psi(u) \approx 0.698198e^{-0.100061u} - 0.003545e^{-0.676439u}$
0.1	$\psi(u) \approx 0.634275e^{-0.122565u} + 0.004545e^{-0.656490u}$
0.5	$\psi(u) \approx 0.492433e^{-0.173655u} + 0.036374e^{-0.610511u}$
0.9	$\psi(u) \approx 0.309485e^{-0.239185u} + 0.111461e^{-0.550092u}$

Πίνακας 4.3.1: Εξίσωση πιθανότητας χρεοκοπίας

Στον Πίνακα 4.3.2 δίνονται τιμές της πιθανότητας χρεοκοπίας για διάφορες τιμές του u.

$u \setminus \theta_1$	–0.9	–0.5	–0.1	0.1	0.5	0.9
0	0.923700	0.808017	0.694653	0.638820	0.528807	0.420945
1	0.906484	0.766009	0.629915	0.563467	0.433686	0.307949
2	0.888003	0.724172	0.570650	0.497607	0.358674	0.228911
5	0.831762	0.608107	0.423229	0.343831	0.208380	0.100718
7	0.795628	0.540438	0.346536	0.268996	0.146531	0.060380
10	0.744222	0.452611	0.256692	0.186208	0.086812	0.028761
15	0.665780	0.336734	0.155646	0.100887	0.036402	0.008589
20	0.595603	0.250520	0.094376	0.054662	0.015276	0.002591
50	0.305291	0.042479	0.004690	0.001383	0.000083	0.000002
70	0.195532	0.013013	0.000634	0.000119	0.000003	0.000000

Πίνακας 4.3.2: Πιθανότητες χρεοκοπίας στο μοντέλο χωρίς μερίσματα

Για $\theta_1 = 0$, συμβολίζουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας με $\psi_0(u)$, η οποία δίνεται από τη σχέση (Boikov (2003)),

$$\psi_0(u) = \frac{\lambda(\mu_F + \mu_G)}{\mu_G(\lambda + \mu)} \exp\left(-\frac{\mu\mu_G - \lambda\mu_F}{\mu_F\mu_G\lambda\mu} u \right), \quad u \in [0,\infty).$$

Για τις τιμές των παραμέτρων που έχουμε θεωρήσει, είναι

$$\psi_0(u) \approx 0.666667e^{-0.111111u}, \quad u \in [0,\infty).$$

Οι τιμές της $\psi_0(u)$ για διάφορα u δίνονται στον Πίνακα 4.3.3.

Από τις Προτάσεις 4.3.4 και 4.3.5, θεωρώντας ότι ισχύουν οι σχετικές συνθήκες και θέτοντας τις τιμές των παραμέτρων

$$b = 5, \ r_d = 0.1, \ \delta = 0.01$$

υπολογίζουμε τις πιθανότητες χρεοκοπίας $\psi(u)$ και τις αναμενόμενες προεξοφλημένες καταβολές μερισμάτων μέχρι τη χρεοκοπία $\upsilon(u)$:

$$\begin{aligned}
&\psi_1(u) \approx 0.389315 + 0.407125e^{-0.111111u}, && u \in [0,5],\\
&\psi_2(u) \approx 0.809486e^{-0.051863u} - 1.24332 \cdot 10^{39} e^{-19.281470u}, && u \in [5,\infty),\\
&\upsilon_1(u) \approx 4.555889e^{0.049220u} - 2.296416e^{-0.140506u}, && u \in [0,5],\\
&\upsilon_2(u) \approx 10 - 9.149114e^{-0.107684u} + 4.07834 \cdot 10^{40} e^{-19.405407u}, && u \in [5,\infty).
\end{aligned}$$

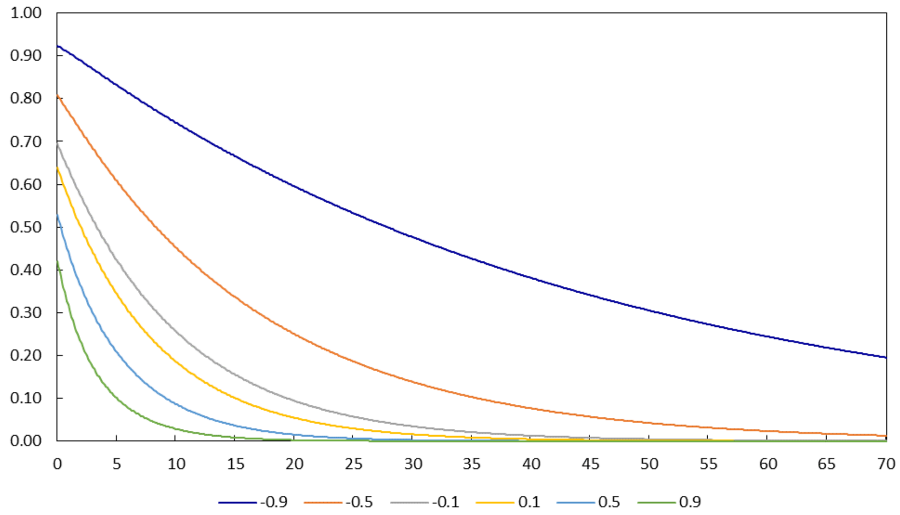
Τα αποτελέσματα των παραπάνω συναρτήσεων για διάφορα u δίνονται στον Πίνακα 4.3.3.

u	$\psi_0(u)$	$\psi(u)$	$\upsilon(u)$
0	0.666667	0.796440	2.259472
1	0.596560	0.753626	2.790339
2	0.533825	0.715315	3.293343
5	0.382502	0.622904	4.689607
7	0.306284	0.563044	5.694612
10	0.219462	0.481915	6.883176
15	0.125917	0.371835	8.180807
20	0.072245	0.286900	8.938193
50	0.002577	0.060536	9.958020
70	0.000279	0.021455	9.995128

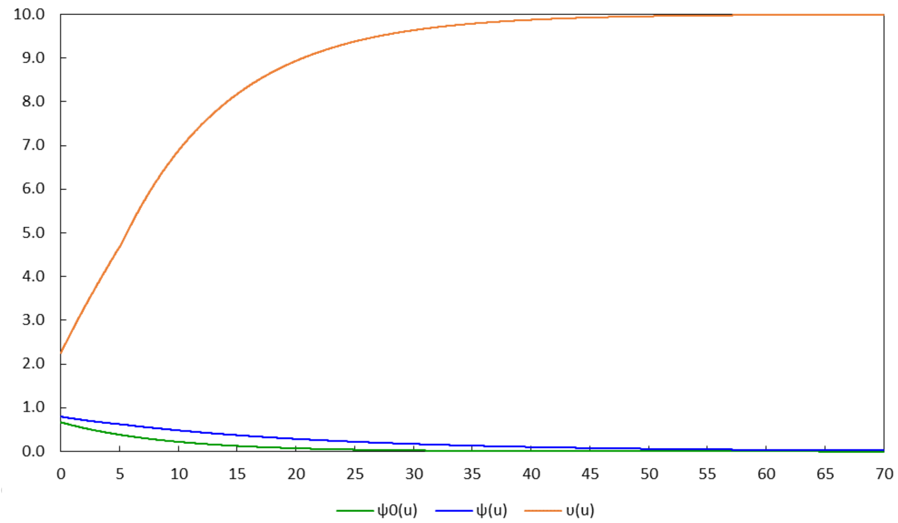
Πίνακας 4.3.3: Πιθανότητες χρεοκοπίας με και χωρίς μερίσματα και αναμενόμενες προεξοφλημένες καταβολές μερισμάτων στο μοντέλο χωρίς εξάρτηση

Τα αποτελέσματα που δίνονται στους Πίνακες 4.3.2 και 4.3.3 δείχνουν ότι η θετική εξάρτηση ανάμεσα στα μεγέθη των απαιτήσεων και στους ενδιάμεσους χρόνους ανάμεσα σε διαδοχικές αφίξεις απαιτήσεων μειώνει την πιθανότητα χρεοκοπίας, ενώ η αρνητική εξάρτηση την αυξάνει. Το συμπέρασμα αυτό φαίνεται να είναι λογικό. Στην περίπτωση της αρνητικής εξάρτησης, η κατάσταση στην οποία απαιτήσεις μεγάλου μεγέθους φτάνουν σε μικρής διάρκειας διαστήματα είναι πιο πιθανή, η οποία έχει σαν αποτέλεσμα να υπάρξει χρεοκοπία στο άμεσο μέλλον. Επιπλέον, από τον Πίνακα 4.3.3 βλέπουμε ότι οι καταβολές μερισμάτων αυξάνουν σημαντικά την πιθανότητα χρεοκοπίας, το οποίο είναι επίσης ένα αναμενόμενο συμπέρασμα.

Τα παραπάνω αποτελέσματα απεικονίζονται αντίστοιχα στα Σχήματα 4.3.1 και 4.3.2.



Σχήμα 4.3.1: Πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$ με για διάφορες τιμές του θ_1. Ο οριζόντιος άξονας απεικονίζει το αρχικό πλεόνασμα u. Καθώς το θ_1 αυξάνεται, η $\psi(u)$ μειώνεται.



Σχήμα 4.3.2: Πιθανότητες χρεοκοπίας $\psi_0(u)$ και $\psi(u)$ και αναμενόμενες προεξοφλημένες καταβολές μερισμάτων μέχρι τη χρεοκοπία $\upsilon(u)$. Ο οριζόντιος άξονας απεικονίζει το αρχικό πλεόνασμα u.

4.4 Σύνοψη Κεφαλαίου

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήθηκαν δύο μοντέλα κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα, εξαρτήσεις ανάμεσα στα εμπλεκόμενα μεγέθη (ασφάλιστρα, απαιτήσεις, χρόνοι μεσοδιαστημάτων μεταξύ δυο διαδοχικών αφίξεων απαιτήσεων ή ασφαλίστρων) και κάτω από κάποιες στρατηγικές καταβολής μερισμάτων.

Στην Ενότητα 4.2, στο θεωρούμενο μοντέλο κινδύνου, η κατανομή της επόμενης απαίτησης εξαρτάται από τον χρόνο που μεσολάβησε από την προηγούμενη απαίτηση. Υποθέτοντας ότι η διαδικασία των συνολικών ασφαλίστρων είναι μια σύνθετη διαδικασία Poisson, εξετάστηκε η στρατηγική σταθερού μερίσματος. Αναπτύχθηκαν οι ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra για τη συνάρτηση Gerber-Shiu και για τις αναμενόμενες προεξοφλημένες καταβολές μερισμάτων μέχρι τη χρεοκοπία και επιλύθηκαν όταν τα μεγέθη των ατομικών στοχαστικών ασφαλίστρων είναι εκθετικά κατανεμημένα. Υπολογίστηκε η συνθήκη του βέλτιστου ορίου όταν τα ατομικά ασφάλιστρα και οι στοχαστικές απαιτήσεις ακολουθούν την εκθετική κατανομή. Μια γενίκευση της μελέτης θα μπορούσε να είναι η θεώρηση ότι η κατανομή των ατομικών ασφαλίστρων και των απαιτήσεων είναι η *Erlang*(n) ή γενικότερα ότι ανήκει στην κλάση $K_n\,(n \in \mathbf{N}^+)$.

Στην Ενότητα 4.3 μελετήθηκε ένα μοντέλο κινδύνου που θεωρεί ότι υπάρχει εξάρτηση ανάμεσα στα μεγέθη των απαιτήσεων και τους ενδιάμεσους χρόνους εμφάνισης διαδοχικών απαιτήσεων, καθώς επίσης υπάρχει εξάρτηση ανάμεσα στα μεγέθη των ασφαλίστρων και στους αντίστοιχους ενδιάμεσους χρόνους εμφάνισης αυτών, η οποία μοντελοποιείται σύμφωνα με τη σύζευξη (copula) Farlie-Gumbel-Morgenstern. Επίσης, θεωρήθηκε ότι καταβάλλονται μερίσματα στους μετόχους σύμφωνα με τη στρατηγική κατωφλίου. Αναπτύχθηκαν οι ολοκληρωτικές και ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις που ικανοποιούν τη συνάρτηση Gerber-Shiu καθώς και οι αναμενόμενες προεξοφλημένες καταβολές μερισμάτων μέχρι τη χρεοκοπία. Στη συνέχεια η ανάλυση επικεντρώθηκε στη διερεύνηση του μοντέλου στην περίπτωση όπου οι απαιτήσεις και τα ατομικά ασφάλιστρα είναι εκθετικά κατανεμημένα. Συγκεκριμένα, αποδείχθηκαν αναλυτικές εκφράσεις για την πιθανότητα χρεοκοπίας χωρίς μερίσματα ή εξάρτηση, καθώς και για τις αναμενόμενες προεξοφλημένες καταβολές μερισμάτων χωρίς εξάρτηση.

Και στα τα δύο μοντέλα δόθηκαν αριθμητικά παραδείγματα.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

Π1. Μετασχηματισμός Laplace

Για μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $[0, +\infty)$, ο μετασχηματισμός Laplace ορίζεται ως

$$\hat{f}(s) = L\{f(x)\} := \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx, \qquad s \in \mathbf{C}.$$

Ο μετασχηματισμός Laplace είναι ένας τελεστής ο οποίος μετασχηματίζει μια συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής, σε μια συνάρτηση της μιγαδικής μεταβλητής s.

Ιδιότητες

1. $\hat{f}(0) = \int_0^\infty f(x)dx$

2. Γραμμικότητα

$$L\{c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\} = c_1 L\{f_1(x)\} + c_2 L\{f_2(x)\} \qquad \text{με } c_1, c_2 \in \mathbf{R}$$

3. Μετατόπιση στο πεδίο της μιγαδικής μεταβλητής

$$L\{e^{ax} f(x)\} = \hat{f}(s-a).$$

4. Μετατόπιση στο πεδίο της πραγματικής μεταβλητής

$$L\{f(x-a)I(x \geq a)\} = e^{-as}\hat{f}(s).$$

5. Πολλαπλασιασμός με σταθερά (αλλαγή κλίμακας)

$$L\{f(ax)\} = \frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{s}{a}\right) \text{ με } a > 0.$$

6. Παραγώγιση

$$L\{f'(x)\} = s\,\hat{f}(s) - f(0)$$

$$L\{f''(x)\} = s^2\,\hat{f}(s) - s\,f(0) - f'(0)$$

$$L\{f^{(n)}(x)\} = s^n\,\hat{f}(s) - s^{n-1}\,f(0) - s^{n-2}\,f'(0) - \ldots - s\,f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

$$= s^n\,\hat{f}(s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^j f^{(n-1-j)}(0)$$

όταν οι παράγωγοι $f', f'', \ldots, f^{(n)} / [0, +\infty)$, είναι συνεχείς.

7. Ολοκλήρωση

$$L\left\{\int_0^x f(u)du\right\} = \frac{\hat{f}(s)}{s}.$$

8. Πολλαπλασιασμός συνάρτησης επί x^n

$$L\{x^n f(x)\} = (-1)^n \frac{d^n \hat{f}(s)}{ds^n}.$$

9. Διαίρεση συνάρτησης δια x

$$L\left\{\frac{f(x)}{x}\right\} = \int_s^{\infty} \hat{f}(t)dt.$$

10. Συνέλιξη

$$L\{f(x) * g(x)\} = \hat{f}(s)\hat{g}(s)$$

όπου

$$f(x) * g(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt = \int_0^x f(x-t)g(t)dt.$$

11. Θεώρημα αρχικής τιμής

(αναφέρεται στη συμπεριφορά της συνάρτησης $f(x)$ καθώς $x \to 0$)

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{s\to\infty} s\,\hat{f}(s).$$

12. Θεώρημα τελικής τιμής

(αναφέρεται στη συμπεριφορά της συνάρτησης $f(x)$ καθώς $x \to \infty$)

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{s\to 0} s\,\hat{f}(s).$$

Τα θεωρήματα αρχικής και τελικής τιμής επιτρέπουν τον προσδιορισμό της αρχικής και τελικής τιμής της συνάρτησης $f(x)$, χωρίς να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της $\hat{f}(s)$. Τα θεωρήματα ισχύουν όταν, γράφοντας την $s\,\hat{f}(s)$ σαν λόγο δύο πολυωνύμων $N(s)/D(s)$, όλες οι ρίζες της εξίσωσης $D(s)=0$ είναι οι ρίζες της $s\,\hat{f}(s)$ και αυτές ικανοποιούν τη συνθήκη $\mathrm{Re}(s) < 0$.

Π2. Μετασχηματισμός Laplace και πιθανότητες

Έστω X μια μη αρνητική τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής $F(x) = P(X \le x)$. Ο μετασχηματισμός Laplace (Laplace-Stieltjes) ορίζεται ως

$$F^*(s) := \int_0^{\infty} e^{-sx} dF(x), \qquad s \ge 0.$$

Έστω ότι X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x) = F'(x)$. Τότε η παραπάνω σχέση γίνεται

$$F^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x)dx$$

που είναι ο συνήθης μετασχηματισμός Laplace $\hat{f}(s) = L\{f(x)\}$ της συνάρτησης πυκνότητας $f(x)$ όταν αυτή υπάρχει.

Ιδιότητες

1. $\hat{f}(s) = E(e^{-sX})$

2. $\hat{f}(0) = \int_0^\infty f(x)dx = 1$ (αφού *f* είναι σ.π.π.)

3. $0 \le \hat{f}(s) \le 1, \qquad s \ge 0$

4. Μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης κατανομής

   Αν $F(x) = P(X \le x) = \int_0^x f(t)dt$ η συνάρτηση κατανομής της τ.μ. *X*, τότε από την ιδιότητα του μετασχηματισμού Laplace ολοκληρώματος,

$$L\{F(x)\} = \hat{F}(s) = \int_0^\infty e^{-sx}F(x)dx = \int_0^\infty e^{-sx}\left(\int_0^x f(t)dt\right)dx = \frac{\hat{f}(s)}{s}$$

5. Μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης δεξιάς ουράς

   Αν $\overline{F}(x) = P(X > x) = \int_x^\infty f(t)dt = 1 - F(x)$ η δεξιά ουρά της τ.μ. *X*, τότε

$$L\{\overline{F}(x)\} = \hat{\overline{F}}(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\overline{F}(x)dx = L\{1 - F(x)\} = L\{1\} - L\{F(x)\} = \frac{1}{s} - \hat{F}(s) = \frac{1 - \hat{f}(s)}{s}$$

   Για $s = 0$, είναι $\hat{\overline{F}}(0) = \int_0^\infty \overline{F}(x)dx = E(X)$

6. Σχέση μετασχηματισμού Laplace και ροπογεννήτριας συνάρτησης

$$M_X(t) = E(e^{tX})$$

$$M_X(-s) = E(e^{-sX}) = \hat{f}(s)$$

7. Υπολογισμός ροπών με τη βοήθεια μετασχηματισμού Laplace

$$E(X^n) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\hat{f}(s)\bigg|_{s=0}$$

Π3. Τελεστής Dickson-Hipp

A. Στη συνεχή περίπτωση, ο ορισμός και κάποιες ιδιότητές του, σύμφωνα με τους Dikson and Hipp (2001), Li and Carrido (2004), είναι:

Για μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση *f* ο τελεστής Dickson-Hipp ορίζεται ως

$$T_r f(x) = \int_x^\infty e^{-r(y-x)} f(y)dy = \int_0^\infty e^{-ry} f(y+x)dy, \qquad r \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}(r) \ge 0,\ x \ge 0.$$

Ιδιότητες

1. Γραμμικότητα

$$T_r\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i \; f_i(x)\right\} = \sum_{i=1}^{n} a_i T_r f_i(x)$$

2. Για $x = 0$, είναι ο μετασχηματισμός Laplace της f

$$T_r f(0) = \int_0^\infty e^{-ry} f(y)dy = \hat{f}(r)$$

3. Για $r = 0$, αν θεωρήσουμε την f σαν συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, είναι η δεξιά ουρά της κατανομής

$$T_0 f(x) = \int_x^\infty f(y)dy = \overline{F}(x)$$

4. $T_{r_1, r_2, \ldots, r_n} f(x) = T_{r_1} T_{r_2} \ldots T_{r_n} f(x), \quad n = 1, 2, \ldots$

5. Μετασχηματισμός Laplace του $T_r f(x)$

$$L\{T_r f(x)\} = T_r \hat{f}(s) = \frac{T_s f(0) - T_r f(0)}{r - s} = \frac{\hat{f}(s) - \hat{f}(r)}{r - s} = T_s T_r f(0), \quad r \neq s$$

6. Ο τελεστής είναι αντιμεταθετικός

$$T_{r_1} T_{r_2} f(x) = T_{r_2} T_{r_1} f(x) = \frac{T_{r_1} f(x) - T_{r_2} f(x)}{r_2 - r_1}, \quad r_1 \neq r_2,\; r_1, r_2 \in \mathbf{C},\; x \geq 0$$

7. $T_{r_1} T_{r_2} f(0) = \dfrac{T_{r_1} f(0) - T_{r_2} f(0)}{r_2 - r_1} = \dfrac{\hat{f}(r_1) - \hat{f}(r_2)}{r_2 - r_1} = T_{r_2} T_{r_1} f(0), \qquad r_1 \neq r_2$

8. $T_r\, T_r f(x) = \displaystyle\int_x^\infty (z - x) e^{-r(z-x)} f(z)dz, \qquad x \geq 0$

9. $T_{r_1} T_{r_2} T_{r_3} f(x) = \dfrac{T_{r_1} T_{r_2} f(x) - T_{r_1} T_{r_3} f(x)}{r_3 - r_2}$

10. $T_{r_1} T_{r_2} T_{r_3} f(0) = \dfrac{\hat{f}(r_1)}{(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)} + \dfrac{\hat{f}(r_2)}{(r_2 - r_1)(r_2 - r_3)} + \dfrac{\hat{f}(r_3)}{(r_3 - r_1)(r_3 - r_2)}$

11. $s\, \hat{f}(s) - r\, \hat{f}(r) = (s - r)[-sT_r\, \hat{f}(s) - \hat{f}(r)]$

12. $T_0 T_r\, f(x) = \displaystyle\int_x^\infty T_r\, f(u)du = \frac{\overline{F}(x) - T_r\, f(x)}{r} = T_r \overline{F}(x)$

13. $\displaystyle\int_0^u T_r\, f(x + y)dx = T_r \overline{F}(y) - T_r \overline{F}(y + u)$

14. Εάν $r_i \neq r_j$ για $i \neq j$, τότε για $k \geq 1$,

$$T_{r_1} T_{r_2} \ldots T_{r_k} f(x) = (-1)^{k-1} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} (r_i - r_j)} T_{r_i} f(x)$$

και ο μετασχηματισμός Laplace της ποσότητας αυτής δίνεται από τη σχέση

$$T_s T_{r_1} T_{r_2} \dots T_{r_k} f(0) = (-1)^k \left[\frac{\hat{f}(s)}{\prod_{i=1}^{k}(s-r_i)} - \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{(s-r_i)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}(r_i-r_j)} \hat{f}(r_i) \right], \ s \geq 0$$

15. Για $k \geq 1$,

$$T_r^k f(x) = \underbrace{T_r T_r \dots T_r}_{k} f(x) = \lim_{s\to r} T_s T_r^{k-1} f(x)$$

$$= \int_x^{\infty} e^{-r(y-x)} \frac{(y-x)^{k-1}}{(k-1)!} f(y)dy = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dr^{k-1}} T_r f(x)$$

και ο μετασχηματισμός Laplace της ποσότητας αυτής δίνεται από τη σχέση

$$T_s T_r^k f(0) = \frac{\hat{f}(s)}{(r-s)^k} - \sum_{j=1}^{k} \frac{T_r^j f(0)}{(r-s)^{k+1-j}}, \qquad s \in \mathbf{C}.$$

16. Εάν f ανήκει στην κλάση $C^k[0,\infty)$, $k \geq 0$ και $r \in \mathbf{C}$,

$$T_r f^{(k)}(x) = r^k T_r f(x) - \sum_{i=0}^{k-1} r^i f^{(k-1-i)}(x), \qquad x \geq 0.$$

B. Στη διακριτή περίπτωση, ο ορισμός και κάποιες ιδιότητές του, σύμφωνα με τον Li (2005), είναι:

Για μία πραγματική συνάρτηση $f(x)$, $x \in \mathbf{N}^+$, ο τελεστής T_r ορίζεται ως

$$T_r f(x) = \sum_{y=x}^{\infty} r^{y-x} f(y) = \sum_{y=0}^{\infty} r^y f(y+x), \qquad r \in \mathbf{C},\ y \in \mathbf{N}^+$$

Ιδιότητες

1. $T_r f(0) = \sum_{x=0}^{\infty} r^x f(x) = \hat{f}(r)$

   δηλαδή προκύπτει η γεννήτρια συνάρτηση της f

2. $T_r f(1) = \frac{\hat{f}(r)}{r}$

3. $T_1 f(x) = \sum_{y=x}^{\infty} f(y)$

4. Εάν r_1 και r_2 είναι διακεκριμένα, τότε

$$T_{r_2} T_{r_1} f(x) = \frac{r_2 T_{r_2} f(x) - r_1 T_{r_1} f(x)}{r_2 - r_1} = T_{r_1} T_{r_2} f(x), \qquad r_1 \neq r_2$$

5. $T_{r_1}T_{r_2}\, f(0) = \dfrac{r_1 T_{r_1} f(0) - r_2 T_{r_2} f(0)}{r_1 - r_2} = \dfrac{r_1\, \hat{f}(r_1) - r_2\, \hat{f}(r_2)}{r_1 - r_2} = T_{r_2}T_{r_1} f(0)$

6. Εάν $r_1 = r_2 = r$, τότε

$$T_r^2 f(x) = T_r\, T_r\, f(x) = \lim_{r_1 \to r} T_{r_1} T_r\, f(x) = \lim_{r_1 \to r} \frac{r_1 T_{r_1} f(x) - r T_r\, f(x)}{r_1 - r}$$

$$= \frac{d\,[r\, T_r\, f(x)]}{dr} = \sum_{y=x}^{\infty} (y - x + 1) r^{y-x} f(y)$$

7. Εάν $r_1, r_2, ..., r_k$ είναι διακεκριμένα, τότε

$$T_{r_1}T_{r_2} \dots T_{r_k} f(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{r_i^{k-1}}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} (r_i - r_j)} T_{r_i} f(x)$$

και η γεννήτρια συνάρτηση της ποσότητας αυτής δίνεται από τη σχέση

$$sT_s T_{r_1} T_{r_2} \dots T_{r_k} f(1) = \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{s}{s - r_i} \right) \hat{f}(s) - \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{s}{s - r_i} \right) \frac{r_i^{k-1}}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} (r_i - r_j)}\, \hat{f}(r_i)$$

8. Εάν $r_i = r$, για $i = 1, 2, ..., k$, τότε

$$T_r^k f(x) = \underbrace{T_r T_r \dots T_r}_{k} f(x) = \lim_{s \to r} T_s T_r^{k-1} f(x) = \frac{d\,[r T_r^{k-1} f(x)]}{dr}$$

Π4. Παρεμβολή Lagrange

Το μοναδικό πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange το πολύ n βαθμού, $p_n(x)$, στα $n+1$ διακεκριμένα σημεία $(x_i, f(x_i))$, $i = 1, ..., n+1$, είναι ο γραμμικός συνδυασμός των $L_i(x)$,

$$p_n(x) = \sum_{i=1}^{n+1} L_i(x) f(x_i)$$

όπου $L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \dfrac{x - x_j}{x_i - x_j}$ οι συντελεστές Lagrange.

Εφαρμογή:

Για δύο σημεία $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$,

$$p_1(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

Για τρία σημεία $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, $(x_3, f(x_3))$,

$$p_2(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} f(x_1) + \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} f(x_2) + \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} f(x_3)$$

Π5. Εκθετική κατανομή - κάποιες ιδιότητες

Έστω $X_1, X_2, ..., X_n$ ανεξάρτητες εκθετικά κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση πυκνότητας

$$f_{X_i} = \lambda_i e^{-\lambda_i x}, \quad x > 0, \lambda_i > 0.$$

Ισχύουν οι ιδιότητες:

1. $P(X_1 > X_2) = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$

   Απόδειξη

   $$P(X_1 > X_2) = \int_0^\infty P(X_1 > x) f_{X_2}(2) dx = \int_0^\infty e^{-\lambda_1 x} \lambda_2 e^{-\lambda_2 x} dx = \lambda_2 \int_0^\infty e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x} dx = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

2. Η τυχαία μεταβλητή $Z = \min(X_1, ..., X_n)$ είναι εκθετικά κατανεμημένη με μέσο $\dfrac{1}{\lambda_1 + ... + \lambda_n}$.

   Απόδειξη

   $$\begin{aligned} F_Z(x) = P(Z \le x) = 1 - P(Z > x) &= 1 - P(\min(X_1, ..., X_n) > x) \\ &= 1 - P(X_1 > x, ..., X_n > x) \\ &= 1 - P(X_1 > x) \ ... \ P(X_n > x) \qquad \text{(αφού } X_i \text{ ανεξάρτητες)} \\ &= 1 - e^{-\lambda_1 x} ... \ e^{-\lambda_n x} \\ &= 1 - e^{-(\lambda_1 + ... + \lambda_n)x} \end{aligned}$$

   $$f_Z(x) = \frac{d}{dx} F_Z(x) = (\lambda_1 + ... + \lambda_n) e^{-(\lambda_1 + ... + \lambda_n)x}$$

Π6. Η υποεκθετική ή γενικευμένη Erlang *n* βαθμίδων κατανομή

Έστω $X_1, X_2, ..., X_n$ ανεξάρτητες εκθετικά κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές με παραμέτρους αντίστοιχα $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, $(\lambda_i \ne \lambda_j, i \ne j)$, τότε το άθροισμα X των X_i, $i = 1, ..., n$, ακολουθεί την υποεκθετική κατανομή (hypoexponential distribution)

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim HYPO(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n).$$

Ιδιότητες

1. Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_X(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i\lambda_i e^{-\lambda_i x}\,,\quad x>0\,,\ a_i=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{\lambda_j}{\lambda_j-\lambda_i}\,,\ 1\le i\le n\,.$$

2. Μέση τιμή

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}\,.$$

3. Διασπορά

$$V(X)=\sum_{i=1}^{n}V(X_i)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i^2}\,,\quad \text{λόγω ανεξαρτησίας των } X_i.$$

4. Μετασχηματισμός Laplace

$$L_X(s)=L\left\{\sum_{i=1}^{n}X_i\right\}=\prod_{i=1}^{n}L\{X_i\}=\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\lambda_i+s}\,,\ \text{λόγω ανεξαρτησίας των } X_i\,.$$

5. Άθροισμα ανεξάρτητων υποεκθετικών κατανομών

   Εάν $X_1\sim HYPO(\lambda_1,...,\lambda_k)$, και $X_2\sim HYPO(\lambda_{k+1},...,\lambda_r)$ όπου X_1 και X_2 ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, τότε

$$X_1+X_2\sim HYPO(\lambda_1,...,\lambda_k,\lambda_{k+1},...,\lambda_r)\,.$$

Π7. Α) Θεώρημα Rouché

Θεωρούμε δυο συναρτήσεις $f(z)$ και $g(z)$, οι οποίες είναι αναλυτικές πάνω σε μια απλή κλειστή καμπύλη *C* και στο εσωτερικό της. Εάν πάνω στη *C* ισχύει $|g(z)|<|f(z)|$, τότε οι συναρτήσεις $f(z)+g(z)$ και $f(z)$ έχουν το ίδιο πλήθος ριζών στο εσωτερικό της *C*.

Β) Τροποποίηση Θεωρήματος Rouche (Klimenok (2001)

Έστω οι συναρτήσεις $f(z)$ και $g(z)$, οι οποίες είναι αναλυτικές στον ανοικτό δίσκο $|z|<1$, συνεχείς στο σύνορο $|z|=1$ και ισχύουν τα εξής:

a) $\left|f(z)\right|_{|z|=1,z\neq 1}>\left|g(z)\right|_{|z|=1,z\neq 1}$,

b) $f(1)=-g(1)\neq 0$,

c) οι συναρτήσεις $f(z)$ και $g(z)$ έχουν παραγώγους στο σημείο $z=1$ και ισχύει η ανισότητα $\dfrac{f'(1)+g'(1)}{f(1)}>0$.

Τότε οι αριθμοί N_{f+g} και N_f που είναι ο αριθμός των ριζών αντίστοιχα των $f(z)+g(z)$ και $f(z)$ στο $|z|<1$ συνδέονται με τη σχέση:

$$N_{f+g}=N_f-1\,.$$

πάνω σε μια απλή κλειστή καμπύλη C και στο εσωτερικό της. Εάν πάνω στη C ισχύει $|g(z)| < |f(z)|$, τότε οι συναρτήσεις $f(z)+g(z)$ και $f(z)$ έχουν το ίδιο πλήθος ριζών στο εσωτερικό της C.

Π8. Κανόνας Leibniz για την παραγώγιση ολοκληρώματος

Έστω η συνάρτηση μιας μεταβλητής $F(x)=\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)dt$, δηλαδή υπό τη μορφή ολοκληρώματος, όπου οι συναρτήσεις $a(x)$ και $b(x)$ είναι παραγωγίσιμες ως προς x και $f(x,t)$ και $\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}$ είναι συνεχείς ως προς x,t. Τότε η παράγωγος $\frac{dF(x)}{dx}$ δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{dF(x)}{dx}=\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)dt = b'(x)\cdot f(x,b(x)) - a'(x)\cdot f(x,a(x)) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}dt . \qquad \text{(L1)}$$

Εάν οι $a(x)$ και $b(x)$ είναι σταθερές συναρτήσεις, η προηγούμενη σχέση απλοποιείται στη μορφή

$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x,t)dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)dt . \qquad \text{(L2)}$$

Επίσης είναι,

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt = b'(x)\cdot f(b(x)) - a'(x)\cdot f(a(x)) . \qquad \text{(L3)}$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] H. Albrecher and O. J. Boxma (2004), A ruin model with dependence between claim sizes and claim intervals, *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 35, no. 2, pp. 245-254.

[2] Z. Bao (2006), The expected discounted penalty at ruin in the risk process with random income, *Applied Mathematics and Computation*, vol. 179, no. 2, pp. 559-566.

[3] Z. Bao and Z. Ye (2007), The Gerber-Shiu discounted penalty function in the delayed renewal risk process with random income, *Applied Mathematics and Computation*, vol. 184, no. 2, pp. 857-863.

[4] A. V. Boikov (2003), The Cramer-Lundberg model with stochastic premium process, *Theory of Probability and Its Applications*, vol. 47, no. 3, pp. 489-493.

[5] R. J. Boucherie, O. J. Boxma, and K. Sigman (1997), A note on negative customers, GI/G/1 workload, and risk processes, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, vol. 11, no. 3, pp. 305-311.

[6] M. Boudreault, H. Cossette, D. Landriault, and E. Marceau (2006), On a risk model with dependence between interclaim arrivals and claim sizes, *Scandinavian Actuarial Journal*, vol. 2006, no. 5, pp. 265-285.

[7] J. Cai and D. C. M. Dickson (2002), On the expected discounted penalty function at ruin of a surplus process with interest, *Insurance: Mathematics & Economics*, vol. 30, no. 3, pp. 389-404.

[8] Y. Chi and X. S. Lin (2011), On the threshold dividend strategy for a generalized jump-diffusion risk model, *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 48, no. 3, pp. 326-337.

[9] H. Cossette, E. Marceau, F. Marri (2011), Constant dividend barrier in a risk model with a generalized Farlie-Gumbel-Morgenstern copula, *Methodology and Computing in Applied Probability*, vol. 13, no. 3, pp. 487-510.

[10] H. Cossette, E. Marceau, and F. Marri (2014), On a compound Poisson risk model with dependence and in the presence of a constant dividend barrier, *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, vol. 30, no. 2, pp. 82-98.

[11] D. C. M. Dickson and C. Hipp (2001), On the time to ruin for Erlang(2) risk processes, *Insurance: Mathematics & Economics*, vol. 29, no. 3, pp. 333-344.

[12] D. C. M. Dickson and H. R. Waters (2004), Some optimal dividends problems, *ASTIN Bulleting*, vol. 34, no. 1, pp. 49-74.

[13] B. De Finetti (1957), Su un’ impostazione alternativa dell teoria collettiva del rischio, *Transactions of the XVth International Congress of Actuaries*, vol. 2, pp. 433-443.

[14] H. U. Gerber and E. S. W. Shiu (1998), On the time value of ruin, *North American Actuarial Journal*, vol. 2, no. 1, pp. 48-78.

[15] H. U. Gerber and E. S. W. Shiu (2005), The time value of ruin in a Sparre Andersen model, *North American Actuarial Journal*, vol. 9, no. 2, pp. 49-69.

[16] Y-Y. Hao and H. Yang (2015), A ruin model with compound poisson income and dependence between claim sizes and claim intervals, *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*, vol. 31, no. 2, pp. 445-452.
[17] V. Klimenok (2001), On the modification of Rouché's theorem for the queueing theory problems, *Queueing Systems*, 38, pp. 431-434.
[18] C. Labbé and K. P. Sendova, (2009), The expected discounted penalty function under a risk model with stochastic income, *Applied Mathematics and Computation*, vol. 215, no. 5, pp. 1852-1867.
[19] D. Landriault (2008), Constant dividend barrier in a risk model with interclaim-dependent claim sizes, *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 42, no. 1, pp. 31-38.
[20] B. Li, R. Wu, and M. Song (2009), A renewal jump-diffusion process with threshold dividend strategy, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 228, no. 1, pp. 41-55.
[21] S. Li (2005), On a class of discrete time renewal risk models, *Scandinavian Actuarial Journal*, vol. 4, pp. 241-260.
[22] S. Li (2005b), Distributions of the surplus before ruin, the deficit at ruin and the claim causing ruin in a class of discrete time risk models, *Scandinavian Actuarial Journal*, vol. 2005, no. 4, pp. 271-284.
[23] S. Li and J. Carrido (2004), On ruin for the Erlang(*n*) risk process, *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 34, no. 3, pp. 391-408.
[24] S. Li and J. Garrido (2004b), On a class of renewal risk models with a constant dividend barrier, *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 35, no. 6, pp. 691-701.
[25] S. Li and J. Carrido (2005), The Gerber-Shiu function in a Sparre Andersen risk process perturbed by diffusion, *Scandinavian Actuarial Journal*, vol. 2005, no. 3, pp. 161-186.
[26] S. Li and J. Carrido (2005b), On a general class of renewal risk process: analysis of the Gerber-Shiu function, *Advances In Applied Probability*, vol. 37, no. 3, pp. 836-856.
[27] X. S. Lin and G. E. Willmot (1999), Analysis of a defective renewal equation arising in ruin theory, *Insurance: Mathematics & Economics*, vol. 25, no. 1, pp. 63-84.
[28] X. S. Lin, G. E. Willmot, and S. Drekic, (2003), The classical risk model with a constant dividend barrier: analysis of the Gerber-Shiu discounted penalty function, *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 33, no. 3, pp. 551-566.
[29] X. S. Lin, K. P. Pavlova (2006), The compound Poisson risk model with a threshold dividend strategy, *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 38, no. 1, pp. 57-80.
[30] D. Liu, Z. Liu, and D. Peng (2014), The Gerber-Shiu expected penalty function for the risk model with dependence and a constant dividend barrier, *Abstract and Applied Analysis*, vol. 2014, Article ID 730174, 7 pages.
[31] A. Melnikov (2003), *Risk Analysis in Finance and Insurance*, Chapman & Hall.

[32] Q. B. Meng, X. Zhang, and J. Y. Guo (2008), On a risk model with dependence between claim sizes and claim intervals, *Statistics & Probability Letters*, vol. 78, no. 13, pp. 1727-1734.

[33] R. B. Nelsen (2006), *An Introduction to Copulas*, 2nd Ed., Springer-Verlang, New York.

[34] O. Ragulina (2017), The risk model with stochastic premiums, dependence and a threshold dividend strategy, *Modern Stochastics: Theory and Applications*, vol. 4, no. 4, pp. 315-351.

[35] T. Rolski, H. Schmidli, V. Schmidt, and J. Teugels (1999), *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, 1st Edition, Wiley.

[36] H. Schmidli (2008), *Stochastic Control in Insurance*, Springer, London.

[37] Y. Shi, P. Liu, and C. Zhang (2013), On the compound poisson risk model with dependence and a threshold dividend strategy, *Statistics & Probability Letters*, vol. 83, no. 9, pp. 1998-2006.

[38] M. R. Spiegel (1965), *Schaum's Outline of Theory and Problems of Laplace Transforms*, New York.

[39] G. Strang, (1995, *Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

[40] G. Temnov (2004), Risk process with random income, *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 123, pp. 3780-3794.

[41] J. L. Teugels and B. Sundt (Editors) (2004), *Encycopedia of Actuarial Science*: *Volume 1*, John Wiley & Sons.

[42] W. Wang (2015), The perturbed Sparre Andersen model with interest and a threshold dividend strategy, *Methodology and Computing in Applied Probability*, vol. 17, pp. 251-283.

[43] G. E. Willmot, J. Cai, and X. S. Lin (2001), Lundberg inequalities for renewal equations, *Advances in Applied Probability*, vol. 33, no. 3, pp. 674-689.

[44] G. E. Willmot (2007), On the discounted penalty function in the renewal risk model with general interclaim times, *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 41, no. 1, pp. 17-31.

[45] J. H. Xie and W. Zou (2013), On a risk model with random incomes and dependence between claim sizes and claim intervals, *Indagationes Mathematicae*, vol. 24, no. 3, pp. 557-580.

[46] H. Yang and Z. Zhang (2009), On a class of renewal risk model with random income, *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, vol. 25, no. 6, pp. 678-695.

[47] Z. M. Zhang and H. Yang (2010), On a risk model with stochastic premiums income and dependence between income and loss, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 234, no. 1, pp. 44-57.

[48] Z. M. Zhang and H. Yang (2011), Gerber-Shiu analysis in a perturbed risk model with dependence between claim sizes and interclaim times, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 235, no. 5, pp. 1189-1204.

[49] M. Zhou and J. Cai (2009), A perturbed risk model with dependence between premium rates and claim sizes, *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 45, no. 3, pp. 382-392.

[50] W. Zou, J. W. Gao, and J. H. Xie (2014), On the expected discounted penalty function and optimal dividend strategy for a risk model with random incomes and interclaim-dependent claim sizes, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 255, no. 1, pp. 270-281.

[51] Κ. Πολίτης (2012), *Εισαγωγή στη Θεωρία Συλλογικού Κινδύνου: Το Συλλογικό Πρότυπο και Θεωρία Χρεοκοπίας*, Εκδόσεις Σταμούλη Α.Ε.

[52] Ε. Χατζηκωνσταντινίδης (2017), *Θεωρία Κινδύνων Ι & ΙΙ*, Σημειώσεις Παραδόσεων, *ΠΜΣ στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου*, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.