ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

ΘΕΩΡΙΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΓΙΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΙΝΔΥΝΩΝ ΜΕ ΔΥΟ ΚΛΑΣΕΙΣ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΑΠΑΙΤΗΣΕΩΝ

Αναστάσιος Θ. Γούλας

Διατριβή
που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των
απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού
Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και
Διοικητική Κινδύνου

Πειραιάς
Σεπτέμβριος 2020

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμόν 6 /11.06.2018 συνεδρίασή της σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Αναπληρωτής Καθηγητής Ε. Χαντζηκωνσταντινίδης (Επιβλέπων)

- Αναπληρωτής Καθηγητής Γ. Ψαρράκος

- Επίκουρος Καθηγητής Γ. Τζαβελάς

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

MASTER PROGRAM IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

RUIN THEORY FOR RISK MODELS WITH TWO CLASSES OF STOCHASTIC CLAIMS

Anastasios T. Goulas

Thesis
submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in actuarial science and risk management

Piraeus, Greece
September 2020

Στην οικογένειά μου και στους φίλους μου

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές ευχαριστίες και την ιδιαίτερη εκτίμηση μου, προς τον καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς και επιβλέποντα στην διπλωματική μου εργασία κ. Ευστάθιο Χατζηκωνσταντινίδη, για την καθοδήγησή του καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας αυτής καθώς και την καθοριστική συμβολή του στην ολοκλήρωσή της.

Ακόμη, θα ήθελα να ευχαριστήσω και τους καθηγητές κ. Γ. Ψαρράκο και κ. Γεώργιο Τζαβελά, που δέχτηκαν να είναι μέλη της τριμελούς επιτροπής αξιολόγησης της μεταπτυχιακής μου εργασίας, καθώς επίσης και όλους τους διδάσκοντες του μεταπτυχιακού προγράμματος για τις γνώσεις που μας προσέφεραν.

Τέλος, θα ήθελα να εκφράσω βαθιά ευγνωμοσύνη και ένα τεράστιο ευχαριστώ, προς τους γονείς μου για την υποστήριξη, την υπομονή και την βοήθειά τους σε αυτό το μεγάλο ταξίδι των προπτυχιακών και μεταπτυχιακών μου σπουδών.

Περίληψη

Η μαθηματική θεωρία κινδύνου ξεκινάει ουσιαστικά από τις αρχές του 20^{ού} αιώνα, με τους μαθηματικούς Filip Lundberg και Harald Cramer να ενσωματώνουν τη θεωρία των στοχαστικών απαιτήσεων στην αναλογιστική επιστήμη.

Πρόσφατα, οι Gerber και Shiu, στην εργασία τους ‘On the time value of ruin’ έδωσαν πρωτόγνωρες διαστάσεις στη μαθηματική θεωρία κινδύνου. Συγκεκριμένα, κατάφεραν να ενσωματώσουν όλα τα μέτρα κινδύνου ενός ασφαλιστικού οργανισμού, σε μία μόνο συνάρτηση, την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής.

Κύρια υπόθεση στα προαναφερόμενα μοντέλα είναι η ανεξαρτησία μεταξύ του χρόνου εμφάνισης των κινδύνων και του ύψους της ζημιάς, η οποία προκύπτει από την εμφάνιση αυτών. Στην πραγματικότητα, βέβαια, δεν αντικατοπτρίζεται πλήρως η εξάρτηση που υπάρχει μεταξύ του χρόνου εμφάνισης των κινδύνων και του μεγέθους ζημιών.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, θα ασχοληθούμε με τη μελέτη της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής των Gerber-Shiu, όπου η στοχαστική διαδικασία των συνολικών αποζημιώσεων παράγεται από δύο κλάσεις κινδύνων.

Στο πρώτο κεφάλαιο, θα ξεκινήσουμε κάνοντας μια εισαγωγή, εισάγοντας τα μέτρα κινδύνου, τη στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος, καθώς επίσης θα δώσουμε τον ορισμό της αναμενόμενης προεξοφλητικής συνάρτησης ποινής. Στη συνέχεια, θα δώσουμε την περιγραφή του ίδιου μοντέλου, αυτή τη φορά ορίζοντάς το για δύο κλάσεις στοχαστικών απαιτήσεων.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, πραγματευόμαστε την υπόθεση πως οι διαδικασίες αριθμού αξίωσης είναι ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson και γενικευμένη Erlang(n), αντίστοιχα. Στη συνέχεια, θα δώσουμε αποτελέσματα για τη συνάρτηση Gerber-Shiu, για δύο κλάσεις στοχαστικών απαιτήσεων.

Στο τρίτο κεφάλαιο, θεωρούμε ότι και οι δύο διαδικασίες αριθμού αξίωσης είναι ανανεωτικές διαδικασίες, με χρόνους απαιτήσεων τύπου φάσης(phase-type). Θα δώσουμε εκ νέου ολοκληρο-διαφορικές εξισώσεις, καθώς και ρίζες της εξίσωσης Lundberg, προσαρμοσμένες στην υπόθεσή μας.

Στο τέταρτο κεφάλαιο, θα ασχοληθούμε με τη μελέτη του μέγιστου πλεονάσματος, πριν ακριβώς από τη χρεοκοπία. Η μελέτη μας θα γίνει επίσης σε δύο κατηγορίες μοντέλου κινδύνου, όπου και οι δύο διαδικασίες αριθμού των απαιτήσεων έχουν χρόνους άφιξης που ακολουθούν κατανομή τύπου φάσης.

Τέλος, στο πέμπτο κεφάλαιο πραγματοποιείται μελέτη των στοχαστικών ασφαλίστρων, για δύο κλάσεις στοχαστικών απαιτήσεων, και δίνονται σχετικά αποτελέσματα για τους μετασχηματισμούς Laplace των αναμενόμενων προεξοφλητικών συναρτήσεων ποινής.

Abstract

Initially, Mathematical risk theory is obtained essentially at the beginning of the 20th century, with mathematicians Filip Lundberg and Harald Cramer incorporating the theory of contemplative requirements into actuarial science.

Recently, Gerber and Shiu, in their work 'On the time value of ruin', gave unprecedented dimensions to mathematical risk theory. In particular, they managed to incorporate all the risk measures of an insurance institution into a single function, the expected discounted penalty function.

The main hypothesis in the above models is the independence between the time of occurrence of the risks and the amount of damage resulting from their occurrence. In fact, the dependency between the time of occurrence of risks and the magnitude of damage is not fully reflected.

In this thesis, we will deal with the study of Gerber-Shiu's expected discounted penalty function, where the contemplative process of total compensation is produced by two classes of risk.

In the first chapter, we will first make an introduction, introducing risk measures, the contemplative surplus procedure, and also giving the definition of the expected penalty discount function. We will then give the description of the same model, this time by designing it for two classes of stochastic claims.

In the second chapter, we deal with the assumption that claim number procedures are independent Poisson procedures and generalized Erlang(n), respectively. We will then give results for the Gerber-Shiu function, for two classes of stochastic requirements.

In the third chapter, we consider both claim number procedures to be renewal procedures, with phase-type claim times. We will re-product whole-differential equations, as well as roots of the Lundberg equation, adapted to our hypothesis.

In the fourth chapter, we will deal with the study of the maximum surplus, just before bankruptcy. Our study will also be done in two categories of risk model, where both procedures have claim times that follow phase-type distribution.

Finally, the fifth chapter provides a study of stochastic premiums, for two classes of stochastic requirements, and gives relevant results for Laplace transformations of expected penalty discount functions.

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

Η Στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος- Μοντέλα με 2 κλάσεις κινδύνων

1.1 Εισαγωγή

Η ομαλή λειτουργεία ενός ασφαλιστικού οργανισμού εξαρτάται κατά κύριο λόγο από τον σχηματισμό επαρκών αποθεματικών ώστε να είναι σε θέση να ανταπεξέλθει στις υποχρεώσεις, κυρίως στα ασφαλιστικά ρίσκα, αλλά και γενικότερα, δηλαδή σε ρίσκα που αφορούν τον επαγγελματικό τομέα.

Το κλασικό μοντέλο της θεωρίας χρεοκοπίας (μοντέλο Cramer – Lundberg), το οποίο αποτελεί την αρχή της μαθηματικής θεωρίας κινδύνου, θεμελιώθηκε αρχικά βάσει της παρατήρησης του Filip Lundberg (1903) για την χρησιμοποίηση της διαδικασίας Poisson σε μοντέλα ασφαλίσεων, και στη συνέχεια, ο Harald Cramer, κατάφερε να ενσωματώσει στη θεωρία κινδύνου στοχαστικές διαδικασίες. Στο κλασικό μοντέλο, ο αριθμός των ζημιών σε ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο κινδύνων περιγράφεται κυρίως από τη διαδικασία Poisson.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα κάνουμε πρώτα μια αναφορά στη στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος, όπου θα φτάσουμε στην προεξοφλητική συνάρτηση των Gerber- Shiu. Στη συνέχεια, θα περιγράψουμε αναλυτικά ένα μη- ανανεωτικό στοχαστικό μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων. Βασική μας υπόθεση ότι και στη μία κλάση, ο αριθμός των κινδύνων είναι μία στοχαστική διαδικασία Poisson, ενώ στη δεύτερη είναι μία διαδικασία με γενικευμένους Erlang ενδιάμεσους χρόνους.

1.2 Το κλασσικό μοντέλο συλλογικού κινδύνου

Για την μοντελοποίηση του πλεονάσματος ενός ασφαλιστικού οργανισμού, αρχικά προσδιορίζουμε τον αριθμό των κινδύνων που είναι εκτεθειμένος.

<u>Ορισμός 1.1</u>

Μια στοχαστική διαδικασία $\{N(t) : t \geq 0\}$ η οποία εκφράζει τον αριθμό των κινδύνων στο χρονικό διάστημα $[0, t]$, ονομάζεται απαριθμήτρια διαδικασία του αριθμού των κινδύνων, αν και μόνο αν ισχύουν τα παρακάτω,

- $N(t) > 0$, με $N(0) = 0$
- $N(t)$ να είναι διακριτή
- αν $s \leq t$ τότε $N(s) \leq N(t)$

Μια χρήσιμη αλλά και ευρέως χρησιμοποιούμενη στοχαστική διαδικασία στην θεωρία κινδύνου είναι η οικογένεια των ανανεωτικών στοχαστικών διαδικασιών. Ο ορισμός μιας ανανεωτικής διαδικασίας βρίσκεται στους ενδιάμεσους χρόνους εμφάνισης των ενδεχομένων που απαριθμεί η $\{N(t): t \geq 0\}$. Έστω $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ μια ακολουθία μη αρνητικών ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. με συνάρτηση κατανομής $F_W(t)$, συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_W(t)$, μετασχηματισμό Laplace

$\hat{f}_W(t) = \int_0^{\infty} e^{-st} f_W(t)dt$ και μέση τιμή $E(W)<\infty$, όπου με W_i συμβολίζουμε τον ενδιάμεσο χρόνο εμφάνισης του i – ενδεχομένου(ζημιάς). Τότε η ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}_0^{\infty}$ ορίζεται ως ακολούθως.

<u>Ορισμός 1.2</u>

Έστω μια ακολουθία $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ μη αρνητικών ισόνομων και ανεξάρτητων τ.μ.. Η ακολουθία $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$,$\sigma_0 = 0$, με $\sigma_n = W_1 + W_2 + \cdots + W_n$ ονομάζεται ακολουθία ανανεώσεων. Τότε η απαριθμήτρια διαδικασία $\{N(t)\}_0^{\infty}$ με $N(0) = 0$ που δίνεται από την σχέση

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{(\sigma_n \leq t)}$$

και προσδιορίζει τον αριθμό των ανανεώσεων στο χρονικό διάστημα $[0,t]$, ονομάζεται ανανεωτική στοχαστική διαδικασία.

Για κάθε ανανεωτική ανέλιξη, παρατηρούμε ότι ισχύει

$$N(t) = n \text{ αν και μόνο αν } \{\sigma_n \leq t < \sigma_n + 1\}. \tag{1.1}$$

Θέλοντας να ερμηνεύσουμε τα παραπάνω έχουμε ότι η εξίσωση $(N(t) = n)$ σημαίνει την εμφάνιση ακριβώς n γεγονότων έως το χρόνο t, ενώ το ενδεχόμενο $\{\sigma_n \leq t < \sigma_n + 1\}$ σημαίνει ότι ο χρόνος αναμονής μέχρι να συμβούν n γεγονότα (ανανεώσεις) είναι t. Επειδή οι παραπάνω αποτελούν δύο διαφορετικές εκφράσεις του ίδιου ενδεχομένου, η (1.1) είναι αληθής.

Θεώρημα 1.1

Έστω $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$ μια ανανεωτική στοχαστική διαδικασία. Τότε με πιθανότητα 1 ισχύει ότι

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{E(W_1)} \tag{1.2}$$

(για την απόδειξη δείτε A.Papaioannou (2011), σελ.3) ■

Θεώρημα 1.2

Έστω $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$ μια ανανεωτική στοχαστική διαδικασία. Τότε ισχύει ότι

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E(N(t))}{t} = \frac{1}{E(W_1)}$$

(για την απόδειξη δείτε Rolski, Schmidt & Teugels (1996) σελ.211**).** ■

<u>Θεώρημα 1.3</u>

Έστω $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$ μια ανανεωτική στοχαστική διαδικασία, με ενδιάμεσους χρόνους άφιξης εκθετικά κατανεμημένους, με παράμετρο λ. Τότε η $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$ είναι μία διαδικασία Poisson με ένταση λ. Σε αυτή την περίπτωση οι ακόλουθες εκφράσεις είναι ισοδύναμες

(i) η $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$ έχει ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις, και σε ένα απειροστό διάστημα $[0, dt]$ ισχύει ότι

$$P(N(dt) = 1) = \lambda dt + o(dt), \quad P(N(dt) = 0) = 1 - \lambda dt + o(dt),$$

(ii) η $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$ έχει ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις, και για κάθε t, η τ.μ. $N(t)$ ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ.

(για την απόδειξη δείτε A.Papaioannou (2011), σελ.3) ■

1.3 Η στοχαστική διαδικασία των συνολικών αποζημιώσεων

Η λειτουργία μιας ασφαλιστικής επιχείρησης προϋποθέτει, μεταξύ άλλων, την καταβολή από την ίδια αποζημιώσεων στους ασφαλισμένους, σε περίπτωση που προκληθεί ζημιά, για την οποία βέβαια προβλέπει το ασφαλιστήριο συμβόλαιο. Για αυτό το λόγο είναι αναγκαία η μοντελοποίηση του ύψους των συνολικών αποζημιώσεων, προκειμένου να είναι εφικτή η αποτελεσματική παρακολούθηση της διαρκούς εξέλιξής τους. Δύο είναι οι σημαντικοί παράγοντες που επηρεάζουν το ύψος των συνολικών αποζημιώσεων: το πλήθος και το ύψος των ζημιογόνων ενδεχομένων, που εμφανίζονται σε κάποιο χρονικό διάστημα. Η στοχαστική διαδικασία των συνολικών αποζημιώσεων περιγράφεται από τον συμβολισμό $S(t)$. Ορίζουμε ως $\{W_n, n \geq 1\}$, μια ακολουθία τ.μ., η οποία εκφράζει τους ενδιάμεσους χρόνους άφιξης των ζημιογόνων ενδεχομένων, και T_n το χρόνο εμφάνισης του n −οστού ενδεχομένου. Ισχύει:

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} W_i$$

Επίσης, ορίζουμε ως $N(t) = \sup\{n: T_n < t\}$ τη στοχαστική διαδικασία του πλήθους των ενδεχομένων που εμφανίζονται στο διάστημα $[0, t]$.

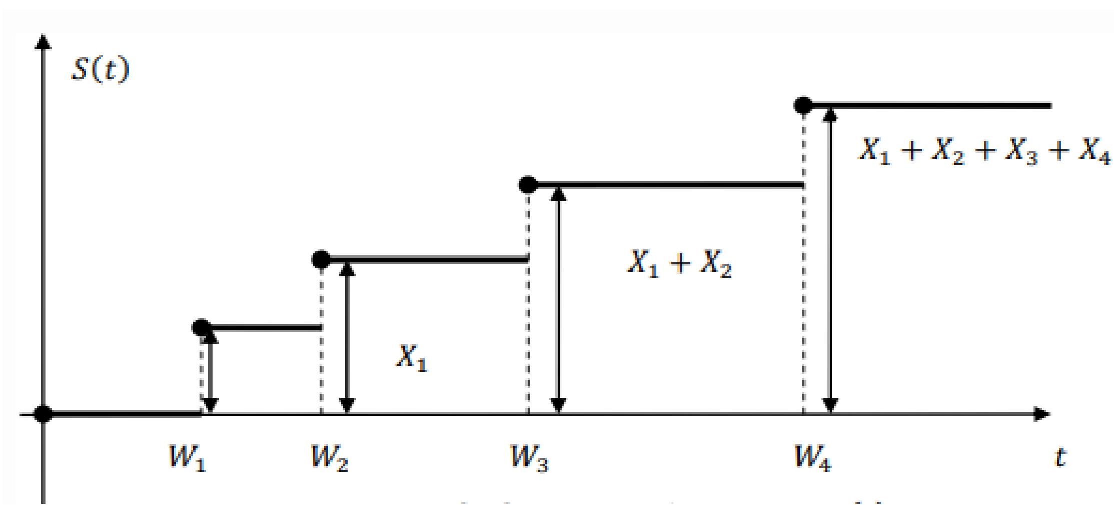
Ορισμός 1.3

Η στοχαστική διαδικασία των συνολικών αποζημιώσεων που καταβάλλονται έως το χρόνο t θα είναι

$$S(t) = X_1 + X_2 + \cdots + X_{N(t)} \text{ ή } S(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} X_i, & N(t) > 0, \\ 0, & N(t) = 0 \end{cases} \qquad (1.3)$$

όπου $\{X_i\}_{i\geq 1}^{\infty}$, μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών, με X_i την τ.μ. που εκφράζει το ύψος της n −οστής ζημιάς.

Οι $\{W_n,\ n \geq 1\}$, $\{X_n, n \geq 1\}$ είναι ανεξάρτητες ακολουθίες, οι οποίες αποτελούνται από ισόνομες, ανεξάρτητες και θετικά ορισμένες τ.μ..



Σχήμα 1.1 Στοχαστική διαδικασία αποζημιώσεων.

Όπως παρατηρούμε στο σχήμα 1.1, αρχικά οι συνολικές αποζημιώσεις $S(t)$ είναι μηδενικές, έως την εμφάνιση του πρώτου ζημιογόνου γεγονότος, τη χρονική στιγμή W_1. Από εκεί και ύστερα, η συνάρτηση $S(t)$ θα λέγαμε ότι μοιάζει με μία σκάλα, κάθε σκαλοπάτι της οποίας αντιστοιχεί στο ύψος της ζημιάς που εμφανίζεται στην εκάστοτε χρονική στιγμή W_i. Τέλος, στα διαστήματα μεταξύ της εμφάνισης των ζημιογόνων ενδεχομένων, η συνάρτηση $S(t)$ παραμένει σταθερή.

1.4 Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος

Έστω συνάρτηση $P(t)$, με την οποία δηλώνονται τα συνολικά ασφάλιστρα που εισπράττονται από την εταιρεία στο διάστημα $[0, t]$, c το ασφάλιστρο που εισρέει στη μονάδα του χρόνου, με αποτέλεσμα το σύνολο των ασφαλίστρων που η εταιρεία εισπράττει να περιγράφεται από τη συνάρτηση με μορφή ct, στο χρονικό διάστημα $[0, t]$. Επιπλέον, έστω u το αποθεματικό που κρατάει η εταιρεία για κάθε χαρτοφυλάκιο.

<u>Ορισμός 1.4</u>

Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος $\{U(t): t \geq 0\}$ ορίζεται για κάθε $t > 0$ από τη σχέση

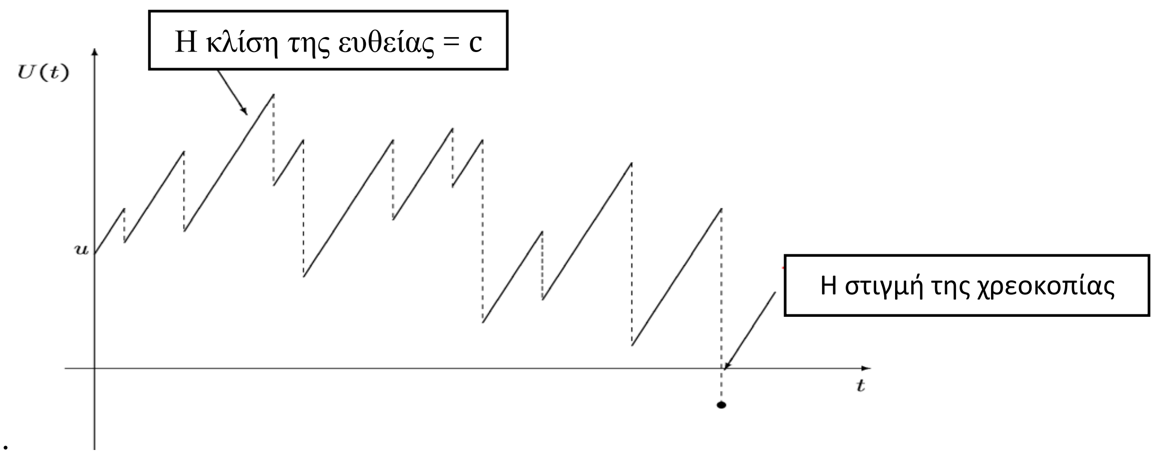
$$U(t) = u + P(t) - S(t), \tag{1.4}$$

όπου u το αρχικό αποθεματικό, $P(t)$ το συνολικό ασφάλιστρο στο διάστημα $[0, t]$ και $S(t)$ οι συνολικές αποζημιώσεις στο ίδιο διάστημα. Το $U(t)$ είναι το πλεόνασμα τη χρονική στιγμή t, ενώ ισχύει ότι $U(0) = u$.

Όσον αφορά το μοντέλο, καλό θα ήταν να σταθούμε σε κάποιες προφανείς, αλλά χρήσιμες παρατηρήσεις:

- Το u, το οποίο αποτελεί το αρχικό κεφάλαιο, συνιστά υποχρέωση, βάσει νόμου, της εκάστοτε ασφαλιστικής, το οποίο ουσιαστικά αποτελεί και το πλεόνασμα της εταιρείας τη χρονική στιγμή 0.

- Σε περίπτωση χρεοκοπίας, παρουσιάζει έντονο ενδιαφέρον το έλλειμμα που προκύπτει τη στιγμή της χρεοκοπίας, όπως αντίστοιχα και το πλεόνασμα πριν από αυτή (Σχήμα 1.2) .



.

Σχήμα 1.2 Στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος συναρτήσει της τ.μ. του ελλείμματος

1.5 Μοντέλα της Θεωρίας Κινδύνου

1.5.1 Μέτρα Χρεοκοπίας

Για την ανάπτυξη των μοντέλων χρεοκοπίας, θα ήταν χρήσιμο να αναφέρουμε κάποια βασικά μέτρα που αποτελούν τον πυλώνα ανάπτυξης των μοντέλων, όπως ο χρόνος και η πιθανότητα χρεοκοπίας.

<u>Ορισμός 1.5</u>

Για $t \geq 0$, ορίζουμε

$$T = inf\{t \geq 0: U(t) < 0\} \text{ με } inf\emptyset = \infty$$

τον χρόνο κατά τον οποίο το πλεόνασμα γίνεται για πρώτη φορά αρνητικό (έλλειμμα).

<u>Ορισμός 1.6</u>

Η πιθανότητα χρεοκοπίας, για $u \geq 0$, ορίζεται ως εξής:

$$\psi(u) = P(T < \infty | U(0) = u) = P(U(T) < 0 | U(0) = u) \qquad (1.5)$$

Σε αυτό το σημείο , θα ήταν σημαντικό να προσθέσουμε πως η μαθηματική χρεοκοπία δεν είναι κατ' ανάγκη ίση με την πραγματική χρεοκοπία του χαρτοφυλακίου, καθώς η διαδικασία πλεονάσματος $U(T)$ δεν αντικατοπτρίζει ακριβώς τα πραγματικά έσοδα της εταιρείας. Επιπλέον, οι αποζημιώσεις δεν καταβάλλονται στιγμιαία. Όπως παρατηρούμε, μέσω της παραπάνω εξίσωσης μπορούμε να προσδιορίσουμε το αρχικό αποθεματικό u, καθώς και το ασφάλιστρο c, με στόχο η διαδικασία πλεονάσματος να μη γίνει αρνητική.

1.5.2 Το κλασσικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου

Το κλασσικό μοντέλο αποτελεί ίσως το κυριότερο μοντέλο που χρησιμοποιείται στη Θεωρία Κινδύνου, δεδομένης της δυνατότητάς του σε απλούστερους μαθηματικούς υπολογισμούς. Εδώ θεωρούμε ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των ζημιογόνων γεγονότων είναι εκθετικά κατανεμημένοι ($\{W_n, n \geq 1\} \sim Exp(\lambda)$). Ισχύει:

$$\Pr(W_1 \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}, \qquad x > 0, \lambda > 0$$

Επίσης, η στοχαστική διαδικασία του αριθμού των γεγονότων σε ένα διάστημα αποτελεί στοχαστική διαδικασία $Poisson$, δηλαδή ισχύει:

$$\Pr(N(t) = n) = \frac{e^{-\lambda x}(\lambda t)^n}{n!}, \qquad x > 0, \lambda > 0$$

Έστω, τώρα, οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \dots, X_n$ και $N(t)$, οι οποίες είναι ανεξάρτητες και ισόνομες μεταξύ τους, με από κοινού συνάρτηση κατανομής

$$F(x) = \Pr(X \leq x)$$

Όπου $f(x) = \Pr(X = x)$, και η συνάρτηση δεξιάς ουράς είναι

$$\bar{F}(x) = 1 - \int_x^\infty f(x)dx$$

Το αναμενόμενο ύψος ζημιάς (μέση τιμή μ) θα είναι

$$\mu = E(x) = \int_0^\infty xf(x)dx = \int_x^\infty \bar{F}(x)dx$$

Σημαντική παράμετρος στο κλασσικό μοντέλο είναι το γεγονός πως ο ρυθμός είσπραξης των ασφαλίστρων είναι ίσος με c, επομένως τα εισπραττόμενα ασφάλιστρα στο χρονικό διάστημα $[0, t]$ θα είναι ct. Εάν $P(t)$ η στοχαστική διαδικασία των ασφαλίστρων, τότε θα έχουμε $P(t) = ct$. Με βάση τα παραπάνω, στο κλασσικό μοντέλο χρησιμοποιούμε πάντα την σχέση $ct \geq E[S(t)]$ (1), ως συνθήκη για την κάλυψη των αναμενόμενων συνολικών ζημιών. Εάν $N(t) \sim Poisson(\lambda t)$, τότε

$$E[N(t)] = \lambda t,\ E[S(t)] = E[N(t)]E[X] = \lambda t E[X] \qquad (2)$$

Οπότε, από (1),(2) έχουμε:

$$ct \geq \lambda t E[X] \Rightarrow c \geq \lambda E[X]$$

Η συνθήκη αυτή απαιτεί τα έσοδα να είναι τουλάχιστον τα ίδια με τα έξοδα, όπου ct τα έσοδα, και $\lambda t E[X]$ τα έξοδα.

<u>Ορισμός 1.7</u>

Ορίζουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας, δεδομένου του αρχικού αποθεματικού u ως

$$\psi(u) = P[U(t) < 0\ για\ κάποιο\ t \geq 0 \mid U(0) = u],$$

ενώ η δέσμευση παραλείπεται όταν η πιθανότητα χρεοκοπίας θεωρείται συνάρτηση του αρχικού αποθεματικού u.

Αντίστοιχα, ορίζουμε την πιθανότητα μη χρεοκοπίας ως

$$\delta(u) = 1 - \psi(u)$$

Ορισμός 1.8

Ορίζουμε την παράμετρο $\theta > 0$, η οποία ονομάζεται περιθώριο ασφάλειας, τέτοια ώστε

$$\theta = c/\lambda\mu - 1. \tag{1.6}$$

Το θ εκφράζει το αναμενόμενο ποσοστό κέρδους της εκάστοτε εταιρείας σε μοναδιαίο χρόνο.

Ο συντελεστής προσαρμογής

Ορισμός 1.9

Στο κλασσικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου ο συντελεστής προσαρμογής ορίζεται ως R, και αποτελεί τη μοναδική θετική ρίζα της εξίσωσης

$$1 + (1 + \theta)E(x)r = M_x(r) \tag{1.7}$$

όπου:

- θ το περιθώριο ασφαλείας,
- $M_x(r) = E(e^{rX}) = \int_0^\infty e^{rX} f(x)dx,$ η ροπογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής X στο σημείο r.

Η παραπάνω εξίσωση χρησιμοποιείται όταν η X έχει ροπογεννήτρια.
Μία πρόταση σημαντική για τη συνέχεια δίνεται παρακάτω.

Ανισότητα Lundberg

Θεώρημα 1.4

Όταν υπάρχει ο συντελεστής προσαρμογής R, τότε υπάρχει άνω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας,

$$\psi(u) \leq e^{-Ru} \quad (1.8)$$

Η ανισότητα αυτή ερμηνεύεται με δύο τρόπους:

1. Η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι αντιστρόφως ανάλογη του συντελεστή προσαρμογής.
2. Επίσης, όσο μεγαλύτερο είναι το αρχικό κεφάλαιο, τόσο μικρότερη η πιθανότητα χρεοκοπίας.

Θεμελιώδης εξίσωση του Lundberg

Ορισμός 1.10

Η θεμελιώδης εξίσωση του Lundberg είναι η εξής:

$$cs + \lambda\hat{f}(s) - (\lambda + \delta) = 0 \quad (1.9)$$

όπου $\hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-sy} f(y)dy$ ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης πιθανότητας $f(s)$.

Παρατήρηση 1.1

Για $\delta > 0$ η εξίσωση (1.9) έχει θετικές ρίζες, ανεξάρτητα από τον περιθώριο ασφαλείας.
Για $\delta = 0$ ισχύει:

- $\theta < 0$, θετικές ρίζες
- $\theta > 0$, αρνητικές ρίζες

1.5.3 Η προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber- Shiu

Οι Gerber & Shiu (1998), κατάφεραν να μοντελοποιήσουν μαζί το χρόνο χρεοκοπίας T, το πλεόνασμα τη στιγμή πριν τη χρεοκοπία $U(T-)$ και το έλλειμμα μετά ακριβώς τη χρεοκοπία $|U(T)|$, που μέχρι τότε προσεγγίζονταν μεμονωμένα. Αυτή η μοντελοποίηση έγινε σε μία συνάρτηση, την **αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής** (expected discounted penalty function).

<u>Ορισμός 1.11</u>

Για $u > 0$, $\delta > 0$, η συνάρτηση των Gerber- Shiu ορίζεται ως

$$m(u) = E\{e^{-\delta T} w(U(T-), |U(T)|) 1_{(T<\infty)} | U(0) = u)\}, \;\; u > 0, \qquad (1.10)$$

Όπου δ η ένταση ανατοκισμού, $0 < w(x, y) < \infty$ διδιάστατη συνάρτηση στο R^2 και ονομάζεται συνάρτηση ποινής, $U(T-)$ το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία, $|U(T)|$ το έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία και $1_{(T<\infty)}$ η δείκτρια συνάρτηση. Η συνάρτηση $e^{-\delta T}$ αποτελεί τον προεξοφλητικό παράγοντα.

Η συνάρτηση των Gerber- Shiu ερμηνεύεται και ως μια προεξοφλημένη ποινή, η οποία επιβάλλεται όταν συμβεί η χρεοκοπία. Από τον ορισμό της προκύπτουν διάφορα μέτρα κινδύνου:

- Για $\delta > 0, w(x, y) = 1$, παίρνουμε το μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας,
$$m_T(u) = E(e^{-\delta T} 1_{(T<\infty)} | U(0) = u),$$

- Για $\delta = 0, w(x, y) = 1$, παίρνουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας,
$$\psi(u) = P(T < \infty | U(0) = u),$$

- Για $\delta > 0, w(x, y) = 1_{(x=x_1)} 1_{(x=x_2)}$, παίρνουμε την προεξοφλημένη από κοινού σ.π.π. του τυχαίου διανύσματος $(U(T-), |U(T)|)$,

$$f(x_1, x_2|u) = E\{e^{-\delta T} 1_{(|U(T)|=x_2, U(T-)=x_1)} 1_{(T<\infty)} |U(0) = u\}$$

- Για $\delta > 0, w(x,y) = 1_{(x=x_1)}$, παίρνουμε την προεξοφλημένη σ.π.π. της τυχαίας μεταβλητής $U(T-)$,

$$h(x_1|u) = E\{e^{-\delta T} 1_{(U(T-)=x_1)} 1_{(T<\infty)} |U(0) = u\}$$

- Για $\delta > 0, w(x,y) = 1_{(x=x_2)}$, παίρνουμε την προεξοφλημένη σ.π.π. της τυχαίας μεταβλητής $|U(T)|$,

$$g(x_2|u) = E\{e^{-\delta T} 1_{(|U(T)|=x_2)} 1_{(T<\infty)} |U(0) = u\}$$

- Για $\delta > 0, w(x,y) = x_1^k$ ($w(x,y) = x_2^k$), παίρνουμε την προεξοφλημένη ροπή τάξης k του ελλείμματος κατά την χρεοκοπία (αντίστοιχα του πλεονάσματος κατά τη χρεοκοπία),

$$E\{e^{-\delta T} |U(T)|^k 1_{(T<\infty)} |U(0) = u\} E\{e^{-\delta T} U(T-)^k 1_{(T<\infty)} |U(0) = u\}$$

Στη μελέτη των Gerber & Shiu (1998), αποδείχτηκε πως η $m(u)$ ικανοποιεί μία ολοκληρο-διαφορική εξίσωση, η λύση της οποίας γίνεται με τη βοήθεια με τη βοήθεια μετασχηματισμών Laplace, δείχνοντας πως η ανανεωτική προεξοφλητική συνάρτηση ποινής ικανοποιεί μία ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση.

<u>Παρατήρηση 1.2</u>

Εφόσον το κλασσικό μοντέλο είναι ειδική περίπτωση του ανανεωτικού μοντέλου, σε επόμενο κεφάλαιο δίνουμε αναλυτικά την παραπάνω μεθοδολογία για το ανανεωτικό μοντέλο με ενδιάμεσους χρόνους άφιξης, που κατανέμονται σύμφωνα με μία γενικευμένη Erlang ($n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$).

1.6 Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος σε ένα μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων

Σε αυτή την ενότητα θα θεωρήσουμε μοντέλο, στο οποίο η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος αποτελείται από δύο κλάσεις κινδύνων. Συγκεκριμένα, θα υποθέσουμε πως η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος $\{S(t)\}_{t=0}^{\infty}$, οι συνολικές δηλαδή αποζημιώσεις ενός χαρτοφυλακίου, αποτελείται από δύο επιμέρους στοχαστικές διαδικασίες:

- μία σύνθετη διαδικασία Poisson (compound Poisson process), και
- μία ανανεωτική σύνθετη διαδικασία (compound renewal process).

Είναι φανερό πως το συγκεκριμένο μοντέλο αποτελεί γενίκευση του κλασσικού, καθώς και του ανανεωτικού μοντέλου χρεοκοπίας. Η διαφορά είναι πως το μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων ανήκει στην κατηγορία των μη ανανεωτικών μοντέλων.

Θα συνοψίσουμε τη δομή της συγκεκριμένης ενότητας ως εξής:

Αρχικά δίνεται λεπτομερής περιγραφή, οι υποθέσεις του μοντέλου κινδύνου, καθώς και ο συμβολισμός που θα χρησιμοποιήσουμε κάτω από την συνθήκη ότι η απαριθμήτρια διαδικασία της δεύτερης κλάσης είναι μια ανανεωτική διαδικασία με ενδιάμεσους χρόνους άφιξης, οι οποίοι ακολουθούν την γενικευμένη κατανομή Erlang$(2, \lambda 1, \lambda 2)$. Στη συνέχεια δίνουμε κάποιες ανανεωτικές ελαττωματικές εξισώσεις, τις οποίες ικανοποιούν οι συναρτήσεις Gerber-Shiu, καθώς και τρόπο υπολογισμού αυτών.

1.6.1 Περιγραφή του μοντέλου κινδύνου

Έστω η διαδικασία πλεονάσματος $\{U(t)\}_{t=0}^{\infty}$, ενός ασφαλιστικού οργανισμού στο χρόνο, όπως την ορίσαμε στον **Ορισμό 1.4**. Σε αυτή την ενότητα υποθέτουμε πως η στοχαστική διαδικασία των αποζημιώσεων $S(t)$ αποτελεί το άθροισμα δύο επιμέρους στοχαστικών διαδικασιών, δηλαδή

$$S(t) = S_1(t) + S_2(t) = \sum_{i=1}^{N_1(t)} X_i + \sum_{i=1}^{N_2(t)} Y_i\,, \quad t \geq 0 \tag{1.11}$$

Όπου οι $S_i(t)$, $i = 1,2$, παριστάνουν τις συνολικές αποζημιώσεις που καταβάλλονται μέχρι το χρόνο t και προέρχονται από την i- κλάση. Παρόλο που το συγκεκριμένο μοντέλο ορίστηκε αρχικά υποθέτοντας πως οι $S_i(t)$, i=1,2 είναι εξαρτημένες μεταξύ τους, εδώ θα υποθέσουμε πως είναι στοχαστικά ανεξάρτητες. Έτσι, οι σωρευτικές αποζημιώσεις $S_1(t)$, από την πρώτη κλάση προστίθενται στη μεταβλητότητα που παρουσιάζει η σωρευτική διαδικασία αποζημιώσεων $S_2(t)$.

Όσον αφορά την ακολουθία $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$, αποτελεί ακολουθία θετικών ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ., με σ.κ. $F_1(x) = P(X \leq x)$, σ.π.π. $f_1(x)$, μέση τιμή m_1 και μετασχηματισμό Laplace $\hat{f}_1(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f_1(x)dx$, που παριστάνουν το μέγεθος των αποζημιώσεων από την πρώτη κλάση.

Η ακολουθία $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία θετικών ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. με σ.κ. $F_2(x) = P(Y \leq x)$, σ.π.π. $f_2(x)$, μέση τιμή m_2 και μετασχηματισμό Laplace $\hat{f}_2(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f_2(x)dx$, που παριστάνουν το μέγεθος των αποζημιώσεων της δεύτερης κλάσης.

Αντίστοιχα, θα ορίσουμε τις απαριθμήτριες διαδικασίες $\{N_1\}_{t=1}^{\infty}$ και $\{N_2\}_{t=1}^{\infty}$. Έτσι λοιπόν, η απαριθμήτρια διαδικασία $\{N_1\}_{t=1}^{\infty}$ είναι μία ομογενής διαδικασία Poisson(λ), με ενδιάμεσους χρόνους άφιξης των κινδύνων $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$, η οποία αντίστοιχα είναι ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων εκθετικά κατανεμημένων τ.μ. με παράμετρο λ. Από την άλλη, η απαριθμήτρια διαδικασία $\{N_2\}_{t=1}^{\infty}$ είναι μία ανανεωτική διαδικασία, με ενδιάμεσους χρόνους άφιξης των κινδύνων $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$, η οποία αντίστοιχα είναι ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ., κατανεμημένων στην γενικευμένη Erlang(2), και άρα μπορούμε να γράψουμε $V_i = V_{i1} + V_{i2}$, όπου $\{V_{i1}\}_{i=0}^{\infty}$ και $\{V_{i2}\}_{i=0}^{\infty}$ ακολουθίες ισόνομων εκθετικά κατανεμημένων τ.μ., με παραμέτρους λ_1 και λ_2 αντίστοιχα, με $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Τέλος, υποθέτουμε πως οι $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ και $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι ανεξάρτητες, τόσο μεταξύ τους, όσο και με τις απαριθμήτριες $\{N_1\}_{t=1}^{\infty}$ και $\{N_2\}_{t=1}^{\infty}$. Επιπλέον, τα ασφάλιστρα που εισπράττονται στη μονάδα του χρόνου είναι τέτοια ώστε να ισχύει $c > \lambda m_1 + [\lambda_1 \lambda_2 / (\lambda_1 + \lambda_2)] m_2$. Επομένως, προκύπτει από την παραπάνω ανίσωση ένα περιθώριο ασφαλείας θ, τέτοιο ώστε $1/(1+\theta) = [\lambda m_1 + \lambda_1 \lambda_2 m_2 / (\lambda_1 + \lambda_2)]/c$.

Άλλα μέτρα που ορίζουμε είναι τα γνωστά από προηγούμενη ενότητα:

- ο χρόνος χρεοκοπίας $T = \inf\{t \geq 0 : U(t) < 0\}, με$ ($\inf\emptyset = \infty$),
- η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u) = P(T < \infty | U(0) = u) = P(U(T) < 0 | U(0) = u)$

Το μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνου εισήχθη αρχικά από τους Yuen, Guo και Wu (2002), με την υπόθεση ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης της δεύτερης κλάσης κινδύνων αποτελούν ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ., από την κατανομή Erlang(2). Οι Li και Garrido (2005), θεώρησαν το συγκεκριμένο μοντέλο, με την άποψη όμως πως οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης της δεύτερης κλάσης κινδύνων είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ., από την γενικευμένη Erlang (2) κατανομή. Στη συγκεκριμένη εργασία, δίνονται αποτελέσματα που αφορούν στην πιθανότητα επιβίωσης (μέσω μετασχηματισμών Laplace), στην περίπτωση που οι αποζημιώσεις κι από τις δύο κλάσεις ανήκουν στην κλασματική οικογένεια κατανομών. Μία ακόμη ανάλυση για το μοντέλο αυτό δόθηκε από τους Li και Lu (2005), μελετώντας, με τη βοήθεια μετασχηματισμών Laplace, τη συνάρτηση των Gerber- Shiu (βλ. επόμενη ενότητα).

<u>Παρατήρηση 1.2</u>

Το μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων μπορεί να χρησιμοποιηθεί προκειμένου να ορίσουμε ένα εξαρτημένο μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων.

Ειδικότερα, έστω ότι η διαδικασία πλεονάσματος $\{U(t)\}_{t=0}^{\infty}$, δίνεται από τη σχέση

$$U'(t) = u + ct - S'(t),\ t \geq 0 \qquad (1.12)$$

όπου $u = U'(0)$ το αρχικό κεφάλαιο, $c > 0$ το ασφάλιστρο στη μονάδα του χρόνουπου εισπράττεται και $\{S'(t)\}_{t\geq 0}$ η στοχαστική διαδικασία των αποζημιώσεων, με

$$S'(t) = \sum_{i=1}^{K_1(t)} X_i' + \sum_{i=1}^{K_2(t)} Y_i', \quad t \geq 0$$

όπου $\{X_i'\}_{i=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία θετικών ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. της πρώτης κλάσης και $\{Y_i'\}_{i=1}^{\infty}$ αντίστοιχα της δεύτερης, με σ.κ. αντίστοιχα $F_{X'}(x)$ και $F_{Y'}(x)$. Οι $\{K_1(t)\}_{t=1}^{\infty}$ και $\{K_2(t)\}_{t=1}^{\infty}$ είναι οι απαριθμήτριες διαδικασίες για την πρώτη και δεύτερη κλάση αντίστοιχα, οι οποίες είναι εξαρτημένες μεταξύ τους με την ακόλουθη μορφή

$$K_1(t) = M_1(t) + N_2(t) \text{ και } K_1(t) = M_3(t) + N_2(t), \qquad t \geq 0,$$

$M_i(t), \quad i = 1{,}3$ δύο ανεξάρτητες μεταξύ τους με διαδικασία Poisson(μ_i), κι επίσης ανεξάρτητες από την ανανεωτική διαδικασία $N_2(t)$, όπως αυτή ορίσθηκε παραπάνω.

Χρησιμοποιώντας το γεγονός πως η συνέλιξη δύο ανεξάρτητων διαδικασιών $Poisson$ είναι επίσης μία διαδικασία Poisson, τότε έχουμε ότι η στοχαστική διαδικασία των αποζημιώσεων που ορίσθηκε παραπάνω έχει την ίδια κατανομή με την

$$S'(t) = \sum_{i=1}^{K_{13}(t)} X_i' + \sum_{i=1}^{K_2(t)} Y_i', \quad t \geq 0$$

με $K_{13}(t) = K_1(t) + K_3(t)$. Επιπλέον, έχουμε

$$X_i' = X_i 1_{(\eta_i=0)} + Y_i 1_{(\eta_i=1)} \text{ και } Y_i' = X_i + Y_i$$

όπου $\{\eta_i, i = 1,2, \dots\}$ ακολουθία δίτιμων τ.μ., όπου

$$P(\eta_i = 0) = \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_3} \text{ και } P(\eta_i = 1) = \frac{\mu_3}{\mu_1+\mu_3}$$

οπότε

$$F_{X'}(x) = \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_3} F_1(x) + \frac{\mu_3}{\mu_1+\mu_3} F_2(x) \text{ και } F_{Y'}(x) = F_1(x) \star F_2(x),$$

όπου F_1 και F_2 οι σ.κ. των X και Y.

Συμπεραίνουμε πως το εξαρτημένο μοντέλο δύο κλάσεων κινδύνων ανάγεται στο μοντέλο με δύο ανεξάρτητες κλάσεις κινδύνων που ορίσθηκε στην (1.11).

1.6.2 Η συνάρτηση των Gerber-Shiu σε μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων

Σε αυτή την ενότητα θα δείξουμε πως η μεθοδολογία που δόθηκε στο ανανεωτικό μοντέλο της παραγράφου 1.5.3 μπορεί να προσαρμοσθεί κατάλληλα στο μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων, προκειμένου να υπολογίσουμε τη συνάρτηση Gerber-Shiu.

Οπότε για $\delta \geq 0$, ορίζουμε

$$m(u) = E\left(e^{-\delta T} w(U(T-), |U(T)|) 1_{(T<\infty)} \middle| U(0) = u\right),\ u \geq 0, \qquad (1.13)$$

να είναι η συνάρτηση των Gerber-Shiu, για το μοντέλο (1.11), με δ, $U(T-)$, $|U(T)|$, $, T-$, $w(x,y)$ και $1_{(.)}$, όπως και στον **<u>Ορισμό 1.10</u>**.

Στο κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου, λόγω της ιδιότητας έλλειψης μνήμης που παρουσιάζουν οι εκθετικά κατανεμημένοι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης των κινδύνων, η συνάρτηση των Gerber-Shiu είναι χρονικά ομογενής. Στο μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων, υποθέτουμε ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης των κινδύνων της δεύτερης κλάσης ακολουθούν Erlang, και λόγω αυτής της υπόθεσης η διαδικασία πλεονάσματος δε θα είναι πλέον ομογενής. Έτσι, για την (1.13), έστω ότι στο χρόνο 0 εμφανίζεται ακριβώς μία αποζημίωση.

Γενικότερα, μπορούμε να ορίσουμε για το μοντέλο (1.11) τη συνάρτηση των Gerber-Shiu σαν μία δισδιάστατη συνάρτηση, $m(u,\tau)$, του αρχικού αποθεματικού u και του χρόνου τ, όπου τ ο χρόνος που απαιτείται μέχρι την εμφάνιση της τελευταίας αποζημίωσης από τη δεύτερη κλάση (εδώ η διαδικασία πλεονάσματος ανανεώνεται). Για αυτό το λόγο εστιάζουμε την προσοχή μας τόσο στον προσδιορισμό της συνάρτησης Gerber-Shiu στο χρόνο 0, που ισχύει $m(u,0) = m(u)$, όσο και στη συνάρτηση

$$m_1(u) = E\left(e^{-\delta(T-t)} w(U(T-),|U(T)|) 1_{(T<\infty)} \middle| U(t) = u, L_{11} = t\right), \qquad (1.14)$$

που αποτελεί συνάρτηση των Gerber-Shiu δοθέντος ότι έχει ήδη εμφανισθεί από τη δεύτερη κλάση ένας εκθετικός χρόνος $\{L_{i1}\}_{i\geq 1}$.

Τότε, χρησιμοποιώντας το **θεώρημα ολικής πιθανότητας** έχουμε

$$m(u,\tau) = m(u)P(L_{11} > \tau) + m(u)P(L_{11} < \tau) = e^{-\lambda_1 \tau} m(u) + (1 - e^{-\lambda_1 \tau}) m(u).$$

Επιπλέον, σε αυτό το σημείο, θα εισάγουμε δύο άλλες συναρτήσεις των Gerber-Shiu για το μοντέλο (1.11). Για $\delta \geq 0$, ορίζουμε

$$m_{i1}(u) = E\left(e^{-\delta T} w(U(T-),|U(T)|) 1_{(T<\infty, J=i)} \middle| U(0) = u\right), \; u \geq 0, i = 1,2 \qquad (1.15)$$

να είναι η συνάρτηση Gerber-Shiu, δοθέντος ότι το μέγεθος της ζημιάς που προκαλεί η χρεοκοπία προέρχεται από την κλάση i, $i = 1,2$. Η τ.μ. J (cause of ruin) ορίζεται ως μία δίτιμη τ.μ., η οποία παριστάνει την κλάση από την οποία προκαλείται η χρεοκοπία, δηλαδή

$J = i$, όταν η χρεοκοπία προκαλείται από την εμφάνιση μιας αποζημίωσης από την κλάση $i, i = 1,2$.

Αντίστοιχα με την (1.14) και για τους ίδιους λόγους που αναφέρθηκαν παραπάνω, ορίζουμε τη (βοηθητική) συνάρτηση Gerber-Shiu, δοθέντος ότι ο εκθετικός χρόνος από τη δεύτερη κλάση έχει ήδη εμφανισθεί, και δίνεται από τη σχέση

$$m_{i2}(u) = E\left(e^{-\delta T} w(U(T-), |U(T)|) 1_{(T<\infty, J=i)} \middle| L_{11} = t, U(0) = u\right), \ u \geq 0, i = 1,2 \tag{1.16}$$

Έτσι, οι συναρτήσεις των Gerber-Shiu που ορίσθηκαν στις σχέσεις (1.13) και (1.14) μπορούν να γραφούν ως $m(u) = m_{11}(u) + m_{21}(u)$ και $m_1(u) = m_{12}(u) + m_{22}(u)$, για $u \geq 0$.

Κύριος σκοπός της ενότητας αυτής είναι ο προσδιορισμός αναλυτικών τύπων για τον υπολογισμό των συναρτήσεων $m(u)$ και $m_1(u)$. Για αυτό το λόγο θα δείξουμε οι συναρτήσεις $m(u)$ και $m_1(u)$ ικανοποιούν κάποιες ελαττωματικές ανανεωτικές εξισώσεις, παρόλο που η $S(t)$ δεν αποτελεί ούτε σύνθετη Poisson, ούτε σύνθετη ανανεωτική διαδικασία.

Αρχικά θα δώσουμε τις συνθήκες, κάτω από τις οποίες οι συναρτήσεις των Gerber-Shiu είναι πεπερασμένες.

<u>Λήμμα 1.1</u>

Έστω ότι

$$\int_0^\infty \int_0^\infty w(x,y) f_i(x+y) dx dy < \infty, \quad i = 1,2, \tag{1.17}$$

Τότε για κάθε $u > 0$ ισχύει ότι

$$m(u) < \infty \ \textit{και} \ m_1(u) < \infty.$$

Στο επόμενο θεώρημα θα δούμε ότι οι m και m_1 ικανοποιούν ένα σύστημα ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων.

Θεώρημα 1.5

Έστω η εξίσωση (1.17) είναι αληθής. Τότε, για $u \geq 0$, οι αναμενόμενες προεξοφλημένες συναρτήσεις ποινής m και m_1 ικανοποιούν το ακόλουθο σύστημα ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων :

$$cm'(u) = (\lambda + \lambda_1 + \delta)m(u) - \lambda \int_0^u m(u-x)f_1(x)dx - \lambda_1 m_1(u) - \lambda w_1(u),$$

$$cm'_1(u) = (\lambda + \lambda_2 + \delta)m_1(u) - \lambda \int_0^u m_1(u-x)f_1(x)dx - \lambda w_1(u) - \lambda_2 \int_0^u m(u-x)f_2(x)dx - \lambda_2 w_2(u) \quad , \tag{1.18}$$

όπου

$$w_j(x) = \int_x^\infty w(x, y-x)f_j(y)dy = \int_0^\infty w(x,y)f_j(x+y)dy, \quad j = 1,2 \tag{1.19}$$

(για την απόδειξη δείτε A.Papaioannou (2011), Θεώρημα 2.1) ■

Παρατήρηση 1.3

(i) Για $\lambda_1, \lambda_2 \to 0$, τότε $m = m_1$ και το σύστημα των ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων (1.18) ανάγεται στην εξίσωση

$$m(u) = \lambda_1 \int_0^\infty e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\delta)t} m_1(u+ct)dt + \int_0^\infty \left\{ \int_0^{(u+ct)} m(u+ct-x)f_1(x)dx + w_1(u+ct) \right\} dt, \tag{1.20}$$

(ii) Για $\lambda \to 0$, το σύστημα (1.18) απλοποιείται ως εξής

$$cm'(u) = -\lambda_1 m_1(u) + (\lambda_1 + \delta)m(u),$$

$$cm'_1(u) = -\lambda_2 \int_0^u m(u-x)\, f_2(x)dx - \lambda_2 w_2(u) + (\lambda_2 + \delta)m_1(u),$$

Από όπου παραγωγίζοντας την πρώτη εξίσωση ως προς u, και χρησιμοποιώντας και τη δεύτερη, προκύπτει

$$\prod_{j=1}^{2} \left(\lambda_j + \delta - c\frac{\partial}{\partial u}\right) m(u) = \lambda_1\lambda_2 \int_0^u m(u-x) f_2(x)dx + \lambda_1\lambda_2 w_2(u),$$

Που είναι η ολοκληροδιαφορική εξίσωση για το ανανεωτικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου με γενικευμένους Erlang (2) ενδιάμεσους χρόνους άφιξης των κινδύνων.

Χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς Laplace, τους τελεστές T_r (βλ. Ορισμός 1.12), και τις ιδιότητές τους, καθώς και το σύστημα ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων του **Θεωρήματος 1.3**, προκύπτει πως οι συναρτήσεις των Gerber-Shiu, m και m_1, ικανοποιούν κάποιες ελαττωματικές ανανεωτικές εξισώσεις. Πρώτα, όμως, χρειαζόμαστε τη λύση της εξίσωσης Lundberg για το μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων.

Ορισμός 1.12

(*T_r* operator). Έστω $f(x)$ μία ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε, για $\Re(r) \geq 0$, και $x \geq 0$, ορίζουμε τον τελεστή T_r να δίνεται από τη σχέση

$$T_r f(x) = \int_x^\infty e^{-r(u-x)} f(u)du = \int_0^\infty e^{-ru} f(u+x)du.$$

(Για πιο αυστηρό ορισμό του T_r παραπέμπουμε στους Butzer και Hubert (1967), παράγραφος 1.3.3.). Στη Θεωρία Κινδύνου ο τελεστής εισήχθη από τους Dickson και Hipp (2001), και διαθέτει ιδιότητες πολύ χρήσιμες, τις οποίες θα δούμε παρακάτω.

Λήμμα 1.2

Για $\delta > 0$, η εξίσωση του Lundberg για μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων δίνεται από τη σχέση

$$\gamma(s) - \lambda_1\lambda_2\hat{f}_2(s) = 0 \tag{1.21}$$

όπου $\gamma(s) = \prod_{i=1}^{2}[cs + \lambda\hat{f}_1(s) - (\lambda + \lambda_i + \delta)]$. Η εξίσωση (1.21) έχει ακριβώς δύο ρίζες, $r_1(\delta)$, $r_2(\delta)$, με $r_1(\delta) \neq r_2(\delta)$. Κάτω από την υπόθεση $r_1(\delta) < r_2(\delta)$, τότε $r_1(\delta) \to 0$ όταν $\delta \to 0^+$.

(για την απόδειξη βλ. Li & Lu (2005)). ■

Για λόγους ευκολίας, θα συμβολίζουμε τις ρίζες της εξίσωσης του Lundberg με r_i.

Έστω τώρα $\widehat{m}(s) = \int_0^\infty e^{-sx}m(x)dx$, $\widehat{m}_1(s) = \int_0^\infty e^{-sx}m_1(x)dx$ και $\widehat{w}_j(s) = \int_0^\infty e^{-sx}w_j(x)dx$ οι μετασχηματισμοί Laplace των συναρτήσεων $m(u), m_1(u)$ και $w_j(u)$, $j = 1,2$, αντίστοιχα.

Παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace και στις δύο εξισώσεις που αναφέρονται στην (1.18), και λύνοντας το σύστημα που προκύπτει ως προς $\widehat{m}$ και $\widehat{m}_1$, έχουμε ότι

$$\widehat{m}(s) = \frac{\lambda_1[\lambda_1\widehat{w}_1(s)+\lambda_2\widehat{w}_2(s)-cm_1(0)]+[cm(0)-\lambda\widehat{w}_1(s)][cs+\lambda\hat{f}_1(s)-(\lambda+\lambda_2+\delta)]}{\gamma(s)-\lambda_1\lambda_2\hat{f}_2(s)}, \tag{1.22}$$

$$\widehat{m}_1(s) = \frac{\lambda_2\hat{f}_2(s)[\lambda_1\widehat{w}_1(s)-cm(0)]+[cm_1(0)-\lambda\widehat{w}_1(s)-\lambda_2\widehat{w}_2(s)][cs+\lambda\hat{f}_1(s)-(\lambda+\lambda_1+\delta)]}{\gamma(s)-\lambda_1\lambda_2\hat{f}_2(s)}, \tag{1.23}$$

όπου οι αρχικές τιμές των m, m_1 στο σημείο 0 δίνονται από την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 1.1

Κάτω από τις συνθήκες του **Λήμματος 1.2**, ισχύει

$$m(0)=\frac{\lambda}{c}\left(\widehat{w}_1(r_2)-\frac{cr_1+\lambda\hat{f}_1(r_1)-(\lambda+\lambda_1+\lambda_2+\delta)}{c-\lambda T_{r_1}T_{r_2}f_1(0)}T_{r_1}T_{r_2}w_1(0)\right)$$
$$+\frac{\lambda_1\lambda_2}{c}\frac{T_{r_1}T_{r_2}w_2(0)}{c-\lambda T_{r_1}T_{r_2}f_1(0)}$$

$$m_1(0)=\ m(0)+\frac{\lambda_2}{c}\widehat{w}_2(r_2)+\frac{cm(0)-\lambda\widehat{w}_1(r_2)}{\lambda_1 c}(cr_2+\lambda\hat{f}_1(r_2)-(\lambda+\lambda_1+\lambda_2+\delta))\ .$$

Απόδειξη

Εφόσον $\widehat{m}(s)<\infty$, για κάθε $s>0$, ο αριθμητής της εξίσωσης (1.22) είναι 0, όταν $s=r_1$ και $s=r_2$, δηλαδή

$$[cm(0-\lambda\widehat{w}_1(r_i))]\left[cr_i+\lambda\hat{f}_1(r_i)-(\lambda+\lambda_2+\delta)\right]=-\lambda_1[\lambda\widehat{w}_1(r_i)+\lambda_2\widehat{w}_2(r_i)-cm_1(0)],\ \ i=1{,}2.$$

Λύνοντας το παραπάνω γραμμικό σύστημα εξισώσεων ως προς $m(0)$ και $m_1(0)$, παίρνουμε άμεσα το αποτέλεσμα της Πρότασης 1.1. ■

Πρόταση 1.2

Κάτω από τις συνθήκες του **Λήμματος 1.2**, οι Laplace μετασχηματισμοί των αναμενόμενων προεξοφλημένων συναρτήσεων ποινής επαληθεύουν τις σχέσεις

$$\widehat{m}(s)=\frac{\hat{A}(s)}{c^2-\hat{n}(s)},\quad \widehat{m}_1(s)=\widehat{m}(s)+\frac{\hat{A}_1(s)}{c^2-\hat{n}(s)}, \tag{1.24}$$

όπου

- $\hat{n}(s) = \lambda c T_{r_1}\hat{f}_1(s) + \lambda\big[(\lambda + \lambda_1 + \lambda_2 + \delta) - 2\lambda c r_2 - \lambda\hat{f}_1(r_1) - \lambda\hat{f}_1(r_2)\big]T_{r_1}T_{r_2}\hat{f}_1(s) - \lambda^2 T_{r_1}\hat{f}_1(s)T_{r_2}\hat{f}_1(s) + \lambda_1\lambda_2 T_{r_1}T_{r_2}\hat{f}_1(s),$

- $\hat{A}(s) = \lambda\big[(\lambda + \lambda_1 + \lambda_2 + \delta) - c r_2 - \lambda\hat{f}_1(r_1)\big]T_{r_1}T_{r_2}\widehat{w}_1(s) + \lambda_1\lambda_2 T_{r_1}T_{r_2}\widehat{w}_2(s) + \lambda[c m_\delta(0) - \lambda\widehat{w}_1(r_2)]T_{r_1}T_{r_2}\hat{f}_1(s) + \lambda c T_{r_1}\widehat{w}_1(s) - \lambda^2 T_{r_1}\hat{f}_1(s)T_{r_2}\widehat{w}_1(s),$

- $\hat{A}_1(s) = \lambda_2 c T_{r_1}\widehat{w}_2(s) - \lambda_2\lambda\left(1 - \hat{f}_2(r_1)\right)T_{r_1}T_{r_2}\widehat{w}_1(s) - \lambda_2\lambda T_{r_1}\hat{f}_1(s)T_{r_2}\widehat{w}_2(s) + \lambda_2\big[\lambda + \delta - c r_2 - \lambda\hat{f}_1(r_1)\big]T_{r_1}T_{r_2}\widehat{w}_2(s) + \lambda_2\lambda T_{r_1}\hat{f}_2(s)T_{r_2}\widehat{w}_1(s) + [c m_\delta(0) - \lambda\widehat{w}_1(r_2)]\left(\lambda\frac{c r_2 + \lambda\hat{f}_1(r_2) - (\lambda + \lambda_1 + \lambda_2 + \delta)}{\lambda_1}T_{r_1}T_{r_2}\hat{f}_1(s) - \lambda_2 T_{r_1}T_{r_2}\hat{f}_2(s)\right).$

(για την απόδειξη δείτε A.Papaioannou (2011), Πρόταση 2.2) ■

<u>Λήμμα 1.3</u>

Για $\delta > 0$ ισχύει ότι

$$2\lambda c\hat{\hat{F}}_1(r_1) + \lambda\left(2\lambda + \lambda_1 + \lambda_2 + \delta - 2c r_2 - \lambda\hat{f}_1(r_1) - \lambda\hat{f}_1(r_2)\right)\frac{\hat{\hat{F}}_1(r_1) - \hat{\hat{F}}_1(r_2)}{r_2 - r_1} - \lambda^2\hat{\hat{F}}_1(r_1)\hat{\hat{F}}_1(r_2) + \lambda_1\lambda_2\frac{\hat{\hat{F}}_1(r_1) - \hat{\hat{F}}_1(r_2)}{r_2 - r_1} = c^2 - \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)\delta + \delta^2}{r_1 r_2} \tag{1.25}$$

(Για την απόδειξη δείτε A.Papaioannou (2011), Λήμμα 2.3) ■

Τώρα, από το γεγονός πως για κάποια ολοκληρώσιμη συνάρτηση h ισχύει $T_r\hat{h}(s) = \left(\widehat{T_r h(x)}\right)(s) = T_r T_s h(0)$, βλέπουμε ότι οι συναρτήσεις $\hat{n}(s)$, $\hat{A}(s)$ και $\hat{A}_1(s)$ από την Πρόταση 1.2, είναι οι μετασχηματισμοί Laplace κάποιων συναρτήσεων n, A, A_1

αντίστοιχα, οι οποίες υπολογίζονται εύκολα με την αντιστροφή των προαναφερόμενων μετασχηματισμών Laplace ως προς s.

Πρόταση 1.3

Για $u \geq 0$ κάτω από την υπόθεση πως η εξίσωση (1.17) είναι αληθής, οι συναρτήσεις Gerber-Shiu $m(u), m_1(u)$ ικανοποιούν τις ακόλουθες ελαττωματικές ανανεωτικές εξισώσεις

$$m(u) = \frac{1}{1+\xi}\int_0^u m(u-x)\zeta(x)dx + \frac{B(u)}{1+\xi}, \tag{1.26}$$

$$m_1(u) = \frac{1}{1+\xi}\int_0^u m_1(u-x)\zeta(x)dx + \frac{B(u)+B_1(u)}{1+\xi}, \tag{1.27}$$

όπου $\zeta(y) = (\iota+\xi)\frac{1}{c^2}n(y)$ είναι σ.π.π, $B(y) = (\iota+\xi)\frac{1}{c^2}A(y)$,$B_1(y) = (\iota + \xi)\frac{1}{c^2}A_1(y)$ και ξ τέτοιο ώστε $\frac{1}{1+\xi} = \int_0^\infty \frac{1}{c^2}n(y)dy = 1 - \frac{(\lambda_1+\lambda_2)\delta+\delta^2}{c^2 r_1 r_2} < 1.$

Επιπλέον, για $\delta \to 0^+$ *τότε* $\xi \to \xi_0$ τέτοιο ώστε $\frac{1}{1+\xi_0} = \frac{\theta[(\lambda_1+\lambda_2)m_1+\lambda_1\lambda_2 m_2]}{c^2 r_2(0)} < 1,$ δεδομένου ότι το περιθώριο ασφαλείας θ είναι θετικό.

(Για την απόδειξη δείτε A.Papaioannou (2011), Πρόταση 2.3) ■

Η λύση των ελαττωματικών ανανεωτικών εξισώσεων (1.26) και (1.27) δίνεται σε όρους μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής. Έτσι, ορίζουμε $\overline{K}(u) = 1 - K(u)$ να είναι η σ.κ. της παρακάτω σύνθετης γεωμετρικής κατανομής

$$\overline{K}(u) = \frac{\xi}{1+\xi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\xi}\right)^n \bar{Z}^{*n}(u), \quad u > 0,$$

όπου $\bar{Z}^{*n}(u)$ είναι η $n-οστή$ συνέλιξη της δεξιάς ουράς $\bar{Z}(u) = \int_u^\infty \zeta(x)dx.$

Πρόταση 1.4

Κάτω από την υπόθεση πως η εξίσωση (1.17) είναι αληθής, τότε για $u \geq 0$, οι αναμενόμενες προεξοφλημένες συναρτήσεις ποινής $m(u)$ και $m_1(u)$, οι οποίες ικανοποιούν τις ελαττωματικές ανανεωτικές εξισώσεις (1.26) και (1.27), έχουν την ακόλουθη μορφή:

$$m(u) = \frac{1}{\xi}\int_0^u [1 - \bar{K}(u-x)]dB(x) + \frac{B(0)}{\xi}[1 - \bar{K}(u)], \qquad (1.28)$$

$$m_1(u) = m(u) + \frac{1}{\xi}\int_0^u [1 - \bar{K}(u-x)]dB_1(x) + \frac{B_1(0)}{\xi}[1 - \bar{K}(u)], \qquad (1.29)$$

(Για την απόδειξη δείτε A.Papaioannou (2011), Πρόταση 2.4) ■

Από την Πρόταση (1.4), δεδομένου ότι οι συναρτήσεις $B(u)$ και $B_1(u)$ μπορούν εύκολα να υπολογισθούν για διάφορες μορφές της συνάρτησης ποινής $w(x, y)$, έπεται ότι ο υπολογισμός των συναρτήσεων Gerber-Shiu μπορεί να γίνει όταν η δεξιά ουρά $\bar{K}(u)$ είναι γνωστή. Μία από τις περιπτώσεις όπου μπορούμε να υπολογίσουμε αναλυτικά την κατανομή της $K(u)$ με δεξιά ουρά $\bar{K}(u)$ είναι όταν ο μετασχηματισμός Laplace των σ.π.π. των μεγεθών των αποζημιώσεων, $\hat{f}_1(s)$ και $\hat{f}_2(s)$, είναι πηλίκα πολυωνύμων. Σε αυτή την περίπτωση, χρησιμοποιώντας την τεχνική των μερικών κλασμάτων, μπορούμε να βρούμε έναν αναλυτικό τύπο για τον υπολογισμό της $\bar{K}(u)$.

Οι Lin και Willnot (1999) (βλ. εξίσωση (1.18) του Θεωρήματος 1.5), έδειξαν ότι η δεξιά ουρά της σύνθετης γεωμετρικής $\bar{K}(u)$ ικανοποιεί την ακόλουθη ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση

$$\bar{K}(u) = \frac{1}{1+\xi}\int_0^u \bar{K}(u-x)\zeta(x)dx + \frac{1}{1+\xi}\bar{Z}(u), \quad u \geq 0,$$

Παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace και στα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης, έχουμε ότι

$$\hat{\hat{K}}(s) = \frac{\hat{n}(s)}{|c^2 - \hat{n}(s)|}, \tag{1.30}$$

όπου $\hat{n}(s)$ δίνεται από την πρόταση (1.2) και $\hat{\bar{n}}(s)$ ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $\bar{n}(x) = \int_x^\infty n(y)dy$. Αντικαθιστώντας τη σχέση

$$\gamma(s) - \lambda_1\lambda_2\hat{f}_2(s) = (s - r_1)(s - r_2)[c^2 - \hat{n}(s)], \tag{1.31}$$

(βλ. A.Papaioannou (2011), Πρόταση 2.2, εξίσωση (2.21)),

στην εξίσωση (1.36) και κάνοντας χρήση του ορισμού της $\gamma(s)$, έχουμε

$$\hat{\hat{K}}(s) = \frac{\hat{\bar{n}}(s)(s-r_1)(s-r_2)}{\prod_{i=1}^2[cs+\lambda\hat{f}_1(s)-(\lambda+\lambda_i+\delta)]-\lambda_1\lambda_2\hat{f}_2(s)}, \tag{1.32}$$

Τώρα, εφόσον $\hat{\bar{n}}(s) = T_s\bar{n}(0) = T_sT_0n(0) = (T_0n(0) - T_sn(0))/s = (\hat{n}(0) - \hat{n}(s))/s$ χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.31), και κάτω από τον ορισμό της συνάρτησης $\gamma(s)$, έχουμε ότι

$$\hat{\bar{n}}(s) = \frac{1}{s}\left[\frac{\prod_{i=1}^2[cs + \lambda\hat{f}_1(s) - (\lambda + \lambda_i + \delta)] - \lambda_1\lambda_2\hat{f}_2(s)}{(s - r_1)(s - r_2)} - c^2\frac{\xi}{1+\xi}\right],$$

και έτσι η εξίσωση (1.32) γίνεται

$$\hat{\hat{K}}(s) = \frac{\prod_{i=1}^2[cs+\lambda\hat{f}_1(s)-(\lambda+\lambda_i+\delta)]-\lambda_1\lambda_2\hat{f}_2(s)-c^2\frac{\xi}{1+\xi}(s-r_1)(s-r_2)}{s\{\prod_{i=1}^2[cs+\lambda\hat{f}_1(s)-(\lambda+\lambda_i+\delta)]-\lambda_1\lambda_2\hat{f}_2(s)\}}, \tag{1.33}$$

Από την παραπάνω σχέση, είναι φανερό πως όταν οι μετασχηματισμοί Laplace $\hat{f}_1(s)$ και $\hat{f}_2(s)$είναι πηλίκα πολυωνύμων, τότε ο μετασχηματισμός Laplace $\hat{\hat{K}}(s)$ έχει μορφή πηλίκου πολυωνύμων. Έτσι, θεωρούμε την περίπτωση όπου τα μεγέθη των αποζημιώσεων και από τις δύο κλάσεις ανήκουν στην κλασματική οικογένεια κατανομών. Αυτό συνεπάγεται ότι ο μετασχηματισμός Laplace των σ.π.π. των αποζημιώσεων έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\hat{f}_1(s) = \frac{p_{n-1}(s)}{p_n(s)},\ \text{με } p_{n-1}(0) = p_n(0) \text{ και } \hat{f}_2(s) = \frac{q_{m-1}(s)}{q_m(s)},\ \text{με } q_{m-1}(0) = q_m(0) \tag{1.34}$$

όπου $p_{n-1}(s)$, $q_{m-1}(s)$ είναι πολυώνυμα βαθμού $n-1$, $m-1$ ή μικρότερου ($\deg(p_{n-1}) \leq n-1$, $\deg(q_{m-1}) \leq m-1$) αντίστοιχα και $p_n(s)$, $q_m(s)$ είναι πολυώνυμα βαθμού n, m αντίστοιχα.

Έστω τώρα, $Q_{2n+m-1}(s) = \frac{1}{s}\left[\prod_{i=1}^{2n+m}(s+R_i) - \frac{\xi}{1+\xi}{p_n}^2(s)q_m(s)\right]$ ένα πολυώνυμο βαθμού $2n+m-1$ (βλ. Απόδειξη **Θεωρήματος 1.6**). Επιπλέον, ορίζουμε

$$\alpha_i = \frac{R_1 R_2 \dots R_{2n+m}}{R_i \prod_{j=1, j\neq i}^{2n+m}(R_j - R_i)} \cdot \frac{{p_n}^2(-R_i)q_m(-R_i)}{{p_n}^2(0)q_m(0)}, \quad i = 1,2,\dots,2n+m,$$

όπου τα $-R_i$, με $\Re(-R_i) > 0$, $i = 1,2,\dots,2n+m$, είναι οι ρίζες της εξίσωσης $D_{2n+m+2}(s) = 0$, όπου

$$D_{2n+m+2}(s) = q_m(s)\prod_{i=1}^{2}[[cs - (\lambda + \lambda_i + \delta)]p_n(s) - \lambda p_{n-1}(s)] - \lambda_1\lambda_2\, {p_n}^2(s)q_{m-1}(s) \tag{1.35}$$

Με βάση τα παραπάνω, όταν τα μεγέθη των αποζημιώσεων ανήκουν στην κλασματική οικογένεια κατανομών η εξίσωση (1.33) γράφεται ως

$$\hat{\hat{K}}(s) = \frac{D_{2n+m+2}(s) - c^2\frac{\xi}{1+\xi}(s-r_1)(s-r_2){p_n}^2(s)q_m(s)}{sD_{2n+m+2}(s)}, \tag{1.36}$$

Θεώρημα 1.6

Έστω ότι οι μετασχηματισμοί Laplace των σ.π.π. $\hat{f}_1(s)$ και $\hat{f}_2(s)$ είναι όπως στην εξίσωση (1.34). Τότε

$$\hat{\hat{K}}(s) = \frac{Q_{2n+m-1}(s)}{\prod_{i=1}^{2n+m}(s+R_i)}.$$

Επιπλέον, αν οι R_i, $\;i = 1,2,\dots,2n+m$ είναι διαφορετικές μεταξύ τους, τότε

$$\hat{\hat{K}}(s) = \sum_{i=1}^{2n+m} \frac{\alpha_i}{s+R_i}, \quad s \geq 0, \;\; \kappa\alpha\iota\; \hat{\hat{K}}(u) = \sum_{i=1}^{2n+m} \alpha_i e^{-R_i u}, \quad u \geq 0 \tag{1.37}$$

Απόδειξη

Υποθέτοντας τις εξισώσεις των σχέσεων (1.34), έχουμε από το Λήμμα 1.2:

$$0 = \gamma(s) - \lambda_1\lambda_2\hat{f}_2(s) = \prod_{i=1}^{2}\left[cs + \lambda\frac{p_{n-1}(s)}{p_n(s)} - (\lambda+\lambda_i+\delta)\right] - \lambda_1\lambda_2\frac{q_{m-1}(s)}{q_m(s)} = \frac{D_{2n+m+2}(s)}{p_n{}^2(s)q_m(s)}\;, \tag{1.38}$$

Σημειώνουμε ότι η συνάρτηση $D_{2n+m+2}(s)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $2n+m+2$ με μεγιστοβάθμιο όρο το c^2 και συνεπώς η εξίσωση $D_{2n+m+2}(s) = 0$ έχει $2n+m+2$ ρίζες στο μιγαδικό επίπεδο. Από το γεγονός πως $\gamma(s) - \lambda_1\lambda_2\hat{f}_2(s) = 0$ είναι η εξίσωση του Lundberg, έπεται, από την (1.44) ότι η εξίσωση $D_{2n+m+2}(s) = 0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες, r_1 και r_2, με θετικά πραγματικά μέρη και $2n+m$ ρίζες, R_i, με αρνητικά πραγματικά μέρη. Επομένως, η εξίσωση $D_{2n+m+2}(s)$ μπορεί να γραφεί ισοδύναμα

$$D_{2n+m+2}(s) = c^2(s-r_1)(s-r_2)\prod_{i=1}^{2n+m}(s+R_i) \tag{1.39}$$

Αντικαθιστώντας τη συνάρτηση $D_{2n+m+2}(s)$ στην εξίσωση (1.42) έπεται ότι

$$\widehat{\widehat{K}}(s) = \frac{\prod_{i=1}^{2n+m}(s+R_i) - \dfrac{\xi}{1+\xi}{p_n}^2(s)q_m(s)}{s\prod_{i=1}^{2n+m}(s+R_i)} = \frac{Q_{2n+m}(s)}{s\prod_{i=1}^{2n+m}(s+R_i)},$$

όπου $Q_{2n+m}(s) = \prod_{i=1}^{2n+m}(s+R_i) - \frac{\xi}{1+\xi}{p_n}^2(s)q_m(s)$. Από το γεγονός πως το $s = 0$ αποτελεί ρίζα του παρονομαστή της συνάρτησης $\widehat{\widehat{K}}(s)$, είναι φανερό ότι πρέπει να είναι και ρίζα του αριθμητή, δηλαδή $Q_{2n+m}(0) = 0$ από όπου παίρνουμε $\frac{\xi}{1+\xi} = \frac{R_1R_2\ldots R_{2n+m}}{{p_n}^2(s)q_m(s)}$. Επιπλέον, η συνάρτηση $Q_{2n+m-1}(s) = \frac{1}{s}Q_{2n+m}(s)$ αποτελεί πολυώνυμο $2n+m-1$ βαθμού, και επομένως, μέσω της τεχνικής μερικών κλασμάτων, έχουμε

$$\widehat{\widehat{K}}(s) = \frac{Q_{2n+m-1}(s)}{s\prod_{i=1}^{2n+m}(s+R_i)} = \sum_{i=1}^{2n+m}\frac{\alpha_i}{s+R_i}, \quad \alpha_i = \frac{Q_{2n+m-1}(-R_i)}{s\prod_{j=1,j\neq i}^{2n+m}(R_j-R_i)}, \quad i = 1,2,\ldots 2n+m,$$

από όπου αντιστρέφοντας τον παραπάνω μετασχηματισμό Laplace, παίρνουμε την εξίσωση (1.37). ■

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

Η προεξοφλητική συνάρτηση ζημιάς Gerber-Shiu για ένα μοντέλο κινδύνου με δύο κατηγορίες απαιτήσεων

2.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο, εξετάζουμε τα προβλήματα χρεοκοπίας, για ένα μοντέλο κινδύνου που περιλαμβάνει δύο ανεξάρτητες κλάσεις ασφαλιστικών κινδύνων. Υποθέτουμε ότι οι διαδικασίες αριθμού αξίωσης είναι ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson και γενικευμένη Erlang(n), αντίστοιχα.

Όταν η γενικευμένη εξίσωση Lundberg έχει τις μοναδικές ρίζες με θετικά πραγματικά μέρη, λαμβάνονται τόσο οι προεξοφλημένες συναρτήσεις ποινής Gerber-Shiu με μηδενικό αρχικό πλεόνασμα, όσο και οι μετασχηματισμοί Laplace των προεξοφλημένων συναρτήσεων ποινής Gerber-Shiu. Τέλος, ορισμένες σαφείς εκφράσεις για τις προεξοφλημένες συναρτήσεις ποινής Gerber-Shiu με θετικό αρχικό πλεόνασμα δίνονται, όταν οι κατανομές μεγέθους απαίτησης ανήκουν στην ορθολογική οικογένεια.

Συγκεκριμένα, θεωρούμε, όπως και στο πρώτο Κεφάλαιο, πως η διαδικασία πλεονάσματος ενός ασφαλιστικού οργανισμού ορίζεται όπως στη σχέση (1.11). Σε αυτό όμως το κεφάλαιο, υποθέτουμε ότι η απαριθμήτρια διαδικασία $\{N_2\}_{t=1}^{\infty}$ είναι μία ανανεωτική διαδικασία, με ενδιάμεσους χρόνους άφιξης των κινδύνων $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$, η οποία αντίστοιχα είναι ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ., κατανεμημένων στην γενικευμένη Erlang(n), και άρα μπορούμε να γράψουμε $V_i = V_{i1} + V_{i2} + \cdots + V_{in}$, όπου V_{ij} είναι ακολουθίες ισόνομων εκθετικά κατανεμημένων τ.μ., με παραμέτρους λ_j.

Η κατανομή Erlang είναι μία από τις πιο συχνά κατανομές στη θεωρία ουράς, καθώς και τη θεωρία κινδύνου. Πρόσφατα, όλο και περισσότερη προσοχή έχει δοθεί στο μοντέλο

Sparre Andersen, στο οποίο οι ενδιάμεσοι χρόνοι των απαιτήσεων ακολουθούν την Erlang ή γενικευμένη Erlang..

Στις επόμενες ενότητες θα εργαστούμε ως εξής. Στην ενότητα 2, αντλούμε ένα σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων για τις $m_1(0)$ και $m_2(0)$. Στην ενότητα 3 εξάγουμε την γενικευμένη εξίσωση του Lundberg, και αναφερόμαστε στον αριθμό των ριζών της. Οι μετασχηματισμοί Laplace των $m_1(0)$ και $m_2(0)$ και οι ρητές εκφράσεις για $m_1(0)$ και $m_2(0)$ προκύπτουν Στην ενότητα 4. Με την αντιστροφή των μετασχηματισμών Laplace, η ενότητα 5 παρέχει τις σαφείς εκφράσεις για $m_1(u)$ και $m_2(u)$, όταν τα ποσά απαίτησης και των δύο κλάσεων κατανέμονται κλασματικά. Τέλος, δίνουμε ένα παράδειγμα στην ενότητα 6.

2.2 Ολοκληρο - διαφορικές εξισώσεις

Σε αυτήν την ενότητα, δημιουργούμε ένα σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων για την προεξοφλητική συνάρτηση ζημιάς Gerber – Shiu.

Για την απλότητα της διαδικασίας, ορίζουμε την $N_{2,j}(t)$ ως την τροποποιημένη διαδικασία αριθμών των απαιτήσεων $N_2(t)$.

Έστω τώρα

$$V_1^{(j)} = V_{1j} + V_{1,j+1} + \cdots + V_{1n}$$

να είναι ο χρόνος μέχρι η πρώτη απαίτηση να προκύψει από τη δεύτερη τάξη, ενώ οι άλλοι χρόνοι διεκδίκησης είναι οι ίδιοι με εκείνους του $N_2(t)$. Οπότε το μόνο που αλλάζει σε όλη την ανανεωτική διαδικασία κινδύνου είναι η αντικατάσταση του $N_2(t)$ με $N_{2,j}(t)$.

Ορίζουμε με $U_j(t)$ την ανανεωτική διαδικασία κινδύνου όπου $U_1(t) = U(t)$ και θέτουμε με $m_{i,j}(u)$ με $j = 1,2,\dots,n$ την υποκείμενη συνάρτηση Gerber – Shiu εάν ο κίνδυνος προκαλείτε από την απαίτηση της τάξεως i.

Η ανανεωτική διαδικασία κινδύνου μπορεί να θεωρηθεί ότι ρυθμίζεται από μια ντετερμινιστική εξωτερική αλυσίδα Markov με κατάταξη $1, 2, \dots, n$. Η μετάβαση της αλυσίδας Markov από την κατάσταση j στην κατάσταση $j + 1$ δημιουργείται από μια εκθετική μεταβλητή με παράμετρο λ_i για $j = 1, 2, \dots, n - 1$ και η μετάβαση από την κατάσταση n στην κατάσταση 1 δημιουργείται από μια εκθετική μεταβλητή με παράμετρο λ_n. Όποτε αφού η διαδικασία κινδύνου βρίσκεται στην κατάσταση j, μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας και των υποθέσεων, να συμπεράνουμε ότι η διαδικασία αριθμού απαίτησης για τη δεύτερη κατηγορία είναι $N_{2,j}(t)$.

Ας υποθέσουμε ότι ξεκινάμε από την κατάσταση $i, i = 1, 2, \ldots, n-1$. Λαμβάνοντας υπόψη ένα ελάχιστο χρονικό διάστημα $(0, dt)$, υπάρχουν τέσσερα πιθανά συμβάντα σχετικά με το εμφάνιση της απαίτησης και αλλαγή της κατάστασης:

(1) καμία απαίτηση και καμία αλλαγή κατάστασης

(2) απαίτηση αλλά καμία αλλαγή κατάστασης

(3) αλλαγή κατάστασης αλλά χωρίς απαίτηση

(4) συμβαίνουν δύο ή περισσότερα γεγονότα.

Με βάση τα παραπάνω τέσσερα γεγονότα στο $(0, dt)$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} m_{1,i}(u) = {} & (1+\lambda dt)(1+\lambda_i dt)e^{-\delta dt} m_{1,i}(u+cdt) \\ & + \lambda dt(1-\lambda_i dt)e^{-\delta dt}\left[\int_0^{u+cdt} m_{1,i}(u+cdt-x)p(x)dx \right. \\ & \left. + \int_{u+cdt}^{\infty} w(u+cdt, x-u-cdt)p(x)dx \right] \\ & + (1+\lambda dt)\lambda_i dt e^{-\delta dt} m_{1,i+1}(u+cdt) + o(dt). \qquad (2.1) \end{aligned}$$

Μέσω του αναπτύγματος του Taylor που μας δίνει τις εξισώσεις:

$$m_{1,i}(u+cdt) = m_{1,i}(u) + cm'_{1,i}(u)dt + o(dt)$$

και

$$m_{1,i+1}(u+cdt) = m_{1,i+1}(u) + cm'_{1,i+1}(u)dt + o(dt)$$

αντικαθιστούμε στην (2.1) και δεδομένου ότι $dt \to 0$ έχουμε ότι

$$cm'_{1,i}(u) = (\lambda+\delta+\lambda_i)m_{1,i}(u)$$

$$-\lambda \int_0^u m_{1,i}(u-x)p(x)dx - \lambda_i\, m_{1,i+1}(u) - \lambda\omega_p(u),$$

και

$$cm'_{2,i}(u) = (\lambda+\delta+\lambda_i)m_{2,i}(u)$$

$$-\lambda \int_0^u m_{2,i}(u-x)p(x)dx - \lambda_i\, m_{2,i+1}(u)$$

όπου

$$\omega_p(u) = \int_u^{\infty} w(u, x-u)p(x)dx.$$

Ομοίως για την κατάσταση n έχουμε

$$cm'_{1,n}(u) = (\lambda + \delta + \lambda_n)m_{1,n}(u)$$

$$-\lambda \int_0^u m_{1,n}(u-x)p(x)dx - \lambda_n \int_0^u m_{1,1}(u-x)q(x)dx - \lambda\omega_p(u),$$

και

$$cm'_{2,n}(u) = (\lambda + \delta + \lambda_n)m_{2,n}(u)$$

$$-\lambda \int_0^u m_{2,n}(u-x)p(x)dx - \lambda_n \int_0^u m_{2,1}(u-x)q(x)dx - \lambda\omega_p(u),$$

όπου

$$\omega_p(u) = \int_u^{\infty} w(u, x-u)q(x)dx.$$

2.3 Μία γενικευμένη εξίσωση του Lundberg

Έστω $\tau_0 = 0$ και $\tau_k = \sum_{i=1}^{k} V_i$ ως τον χρόνο άφιξης της $k - o\sigma\tau\acute{\eta}\varsigma$ απαίτησης από τη δεύτερη τάξη. Ορίζουμε $U_0 = 0$ και για $k = 1,2, \ldots$ έχουμε την ποσότητα

$$U_k = U(\tau_k) = u + c\tau_k - \sum_{i=1}^{k} Y_i - \sum_{j=1}^{N_1(\tau_k)} X_j = u + \sum_{i=1}^{k}\left[cV_i - Y_i - \sum_{j=1}^{N_1(V_i)} X_j\right]$$

η οποία προσδιορίζει το πλεόνασμα αμέσως μετά την $k - o\sigma\tau\acute{\eta}$ απαίτησης από τη δεύτερη τάξη.

Στην συγκεκριμένη περίπτωση αναζητούμε έναν αριθμό s τέτοιο ώστε η διαδικασία $\left\{e^{-\delta\tau_k + sU_k}, k = 0,1,2, \ldots\right\}$ να δημιουργεί μία αλυσίδα με την ακόλουθη συνθήκη:

$$E\left[e^{(cs-\delta)V_1-sY_1-s\sum_{j=1}^{N_1(V_1)}X_j}\right]=E\left[e^{(cs-\delta)V_1-s\sum_{j=1}^{N_1(V_1)}X_j}\right]E\left[e^{sY_1}\right]=1 \qquad (2.2)$$

και επειδή

$$E\left[e^{(cs-\delta)V_1-s\sum_{j=1}^{N_1(V_1)}X_j}\right]=E\left[E\left[e^{(cs-\delta)V_1-s\sum_{j=1}^{N_1(V_1)}X_j}|V_1\right]\right]=E\left[e^{(cs-\delta)V_1-\lambda V_1(\hat{p}(s)-1)}\right]$$

η (2.2) είναι

$$E\left[e^{(cs-\lambda(\hat{p}(s)-1)-\delta)-V_1}\right]\hat{q}(s)=1 \qquad (2.3).$$

Έστω τώρα η εξίσωση

$$\gamma(s):=\prod_{i=1}^{n}\left[1-\frac{cs-\delta-\lambda\big(1-\hat{p}(s)\big)}{\lambda_i}\right],$$

τότε η (2.3) είναι ισοδύναμη με $\gamma(s)=\hat{q}(s)$ η οποία καλείται ως γενικευμένη εξίσωση του Lundberg για το ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου. Εάν $\lambda=0$ τότε το ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου απλοποιείται στο μοντέλο Spare-Andersen και έχει εξίσωση

$$\prod_{i=1}^{n}\left[1-\frac{cs-\delta}{\lambda_i}\right]=\hat{q}(s)\,,s\in\mathbb{C}.$$

Λήμμα 2.1

Η γενικευμένη εξίσωση του Lundberg έχει ακριβώς n ρίζες, έστω $s_1(\delta),s_2(\delta),\dots,s_n(\delta)$ στο δεξί μισό μιγαδικό επίπεδο.

Απόδειξη

Για την απόδειξη δείτε (Z. Zhang et al. / Journal of Computational and Applied Mathematics, σελ. 646). ■

Ορισμός 2.1

Ορίζουμε τους πίνακες

$$\boldsymbol{B}(s)=\begin{pmatrix} \lambda\hat{p}(s) & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda\hat{p}(s) & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n\hat{q}(s) & 0 & 0 & \cdots & \lambda\hat{p}(s) \end{pmatrix}$$

και

$$\boldsymbol{\Lambda}_\delta(s)=diag(cs-\delta-\lambda-\lambda_1,\dots,cs-\delta-\lambda-\lambda_n),$$

όπου

$$\boldsymbol{A}_\delta(s,u)=\boldsymbol{\Lambda}_\delta(s)+u\boldsymbol{B}(s)$$

και η εξίσωση

$$|\boldsymbol{A}_\delta(s,1)|=0$$

είναι ισοδύναμη της γενικευμένης εξίσωσης του Lundberg.

2.4 Μετασχηματισμοί Laplace

Σε αυτήν την ενότητα, παράγουμε τους μετασχηματισμούς Laplace για τις προεξοφλητικές συναρτήσεις ζημιάς Gerber – Shiu.

Έστω οι ακόλουθοι μετασχηματισμοί Laplace

$$\widehat{m}_{i,j}(s)=\int_0^\infty e^{-su}m_{i,j}(u)du\,,\quad i=1,2\,,\ \ j=1,2,\dots,n$$

και

$$\widehat{\omega}_p(s)=\int_0^\infty e^{-su}\omega_p(u)du\,,\qquad \widehat{\omega}_q(s)=\int_0^\infty e^{-su}\omega_q(u)du.$$

Στο σημείο αυτό και για ευκολία των υπολογισμών, χρησιμοποιούμε τον Dickson – Hipp παράγοντα T_s. Θεωρούμε την f μια πραγματική συνάρτηση η οποία ενσωματώνεται στον παράγοντα T_s και s έναν μη αρνητικό πραγματικό αριθμό.

Εφαρμόζοντας τους μετασχηματισμούς Laplace και στις δύο μεριές των εξισώσεων των ποσοτήτων $cm'_{1,i}(u)$ και $cm'_{1,n}(u)$ έχουμε τα ακόλουθα:

$$[cs-(\lambda+\delta+\lambda_i)+\lambda\hat{p}(s)]\widehat{m}_{1,i}(s)+\lambda_i\widehat{m}_{1,i+1}(s)=cm_{1,i}(0)-\lambda\widehat{\omega}_p(s),$$

$$i=1,\dots,n-1,$$

$$[cs-(\lambda+\delta+\lambda_n)+\lambda\hat{p}(s)]\widehat{m}_{1,n}(s)+\lambda_i\hat{q}(s)\widehat{m}_{1,1}(s)=cm_{1,n}(0)-\lambda\widehat{\omega}_p(s).$$

Έστω τώρα

$$\overrightarrow{\widehat{\boldsymbol{m}}}_i(s)=\left(\widehat{m}_{i,1}(s),\widehat{m}_{i,2}(s),\dots,\widehat{m}_{i,n}(s)\right)^T$$

και

$$\overrightarrow{\boldsymbol{m}}_i(0)=\left(m_{i,1}(0),m_{i,2}(0),\dots,m_{i,n}(0)\right)^T$$

τότε οι μετασχηματισμοί Laplace γράφονται στην ακόλουθη μορφή πινάκων:

$$\boldsymbol{A}_\delta(s)\overrightarrow{\widehat{\boldsymbol{m}}}_1(s)=c\overrightarrow{\boldsymbol{m}}_1(0)-\lambda\widehat{\omega}_p(s)\vec{\boldsymbol{e}}_1 \qquad (2.4)$$

και

$$\boldsymbol{A}_\delta(s)\overrightarrow{\widehat{\boldsymbol{m}}}_2(s)=c\overrightarrow{\boldsymbol{m}}_2(0)-\lambda_n\widehat{\omega}_q(s)\vec{\boldsymbol{e}}_2.$$

Συνεπώς έχουμε

$$\overrightarrow{\widehat{\boldsymbol{m}}}_1(s)=\frac{\boldsymbol{A}_\delta^*(s)\left(c\overrightarrow{\boldsymbol{m}}_1(0)-\lambda\widehat{\omega}_p(s)\vec{\boldsymbol{e}}_1\right)}{|\boldsymbol{A}_\delta(s)|}$$

και

$$\overrightarrow{\widehat{\boldsymbol{m}}}_2(s)=\frac{\boldsymbol{A}_\delta^*(s)\left(c\overrightarrow{\boldsymbol{m}}_2(0)-\lambda_n\widehat{\omega}_q(s)\vec{\boldsymbol{e}}_2\right)}{|\boldsymbol{A}_\delta(s)|}$$

όπου $\boldsymbol{A}_\delta^*(s)$ ο υποκείμενος συνοριακός πίνακας του $\boldsymbol{A}_\delta(s)$.

Στα θεωρήματα που ακολουθούν θα δούμε πως εκφράζονται οι ποσότητες $m_1(0)$ και $m_2(0)$ καθώς και τον μετασχηματισμό τους Laplace $\widehat{m}_1(s)$ και $\widehat{m}_2(s)$.

<u>Θεώρημα 2.1</u>

Εάν η γενικευμένη εξίσωση του Lundberg έχει n διακριτές ρίζες στο δεξί μισό μιγαδικό επίπεδο με μηδενικό αρχικό πλεόνασμα τότε για τις $m_1(0)$ και $m_2(0)$ ισχύει

$$m_1(0) = \frac{\lambda \prod_{k=1}^{n-1} \lambda_k}{c} \sum_{m=1}^{n} \frac{d_\delta(s_m)\widehat{\omega}_p(s_m)}{\prod_{k=1,k\neq m}^{n}(s_m - s_k)(c - \lambda\, T_{s_\kappa}\, T_{s_m} p(0))}, \qquad (2.5)$$

$$m_2(0) = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} \lambda_k}{c} \sum_{m=1}^{n} \frac{\widehat{\omega}_q(s_m)}{\prod_{k=1,k\neq m}^{n}(s_m - s_k)(c - \lambda\, T_{s_\kappa}\, T_{s_m} p(0))}, \qquad (2.6)$$

όπου

$$d_\delta(s) = 1 + \sum_{k=2}^{n} \prod_{j=k}^{n} \frac{\lambda\big(1 - \widehat{p}(s)\big) + \lambda_j + \delta - cs}{\lambda_{j-1}}.$$

<u>**Απόδειξη**</u>

Αφού $|\boldsymbol{A}_\delta(s_i)| = 0$ για $i = 1,2,\dots n$ τότε συμπεραίνουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον μία μη τετριμμένη λύση $\vec{\boldsymbol{d}}_i$ της εξίσωσης $\boldsymbol{A}_\delta^T(s_i)\vec{\boldsymbol{d}}_i = \vec{0}$.

Τότε από την (2.4) έχουμε

$$\vec{\boldsymbol{d}}_i^{\,T}\vec{\boldsymbol{m}}_1(0) = \frac{\lambda}{c}\widehat{\omega}_p(s_i)\vec{\boldsymbol{d}}_i^{\,T}\vec{\boldsymbol{e}}_1 \quad \text{για } i = 1,2,\dots n. \qquad (2.7)$$

Ακόμη, από την γενικευμένη εξίσωση του Lundberg μπορούμε να συμπεράνουμε για το $\vec{\boldsymbol{d}}_i$ ότι

$$\vec{\boldsymbol{d}}_i = \left(\prod_{j=2}^{n} \frac{\lambda\big(1 - \hat{p}(s_i)\big) + \lambda_j + \delta - cs_i}{\lambda_{j-1}}, \prod_{j=3}^{n} \frac{\lambda\big(1 - \hat{p}(s_i)\big) + \lambda_j + \delta - cs_i}{\lambda_{j-1}}, \dots, 1\right)^T.$$

Έστω τώρα $\boldsymbol{D} = \left(\vec{\boldsymbol{d}}_1, \dots, \vec{\boldsymbol{d}}_n\right)^T$ οπότε η (2.7) σε μορφή πινάκων γράφεται ως εξής:

$$\boldsymbol{D}\vec{\boldsymbol{m}}_1(0) = \frac{\lambda}{c}\begin{pmatrix} d_\delta(s_1)\widehat{\omega}_p(s_1) \\ \vdots \\ d_\delta(s_n)\widehat{\omega}_p(s_n) \end{pmatrix}.$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα του Crammer στο παραπάνω γραμμικό σύστημα έχουμε ότι

$$m_1(0) = \frac{\lambda}{c} \frac{\begin{vmatrix} d_\delta(s_1)\widehat{\omega}_p(s_1) & d_{1,2} & \cdots & d_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_\delta(s_n)\widehat{\omega}_p(s_n) & d_{n,2} & \cdots & d_{n,n} \end{vmatrix}}{|\boldsymbol{D}|}$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{m+1}\lambda\left|\boldsymbol{D}_{m,1}\right|d_\delta(s_m)}{c|\boldsymbol{D}|}\widehat{\omega}_p(s_m),$$

όπου

$d_{i,j}$ το $j - o\sigma\tau$ό στοιχείο στον $\vec{\boldsymbol{d}}_i$. Ακόμη για τον $\boldsymbol{D}$ ισχύει

$$|\boldsymbol{D}| = \frac{1}{\lambda_1\lambda_2^2 \dots \lambda_{n-1}^{n-1}} \prod_{\substack{j,k=1 \\ k>j}}^{n} \left[(s_k - s_j)(c - \lambda\, T_{s_\kappa} T_{s_j} p(0))\right]$$

και

$$|\boldsymbol{D}_{k1}| = \frac{1}{\lambda_2\lambda_3^2 \dots \lambda_{n-1}^{n-2}} \prod_{\substack{j,m=1 \\ j,m\neq k, m>j}}^{n} \left[(s_m - s_j)(c - \lambda\, T_{s_m} T_{s_j} p(0))\right].$$

Όμοια διαδικασία ακολουθούμε και για την απόδειξη του $m_2(0)$. Για περισσότερες λεπτομέρειες δείτε (Z. Zhang et al. / Journal of Computational and Applied Mathematics, σελ. 648-649).

Το θεώρημα αποδείχτηκε. ■

<u>Θεώρημα 2.2</u>

Εάν η γενικευμένη εξίσωση του Lundberg έχει n διακριτές ρίζες στο δεξί μισό μιγαδικό επίπεδο τότε ο μετασχηματισμός Laplace των προεξοφλητικών συναρτήσεων ζημιάς Gerber – Shiu δίνεται από τις ακόλουθες εξισώσεις

$$\widehat{m}_1(s) = \frac{\lambda}{\lambda_n} \frac{\sum_{m=1}^{n} \prod_{k=1,k\neq m}^{n} \frac{(s-s_k)(c-\lambda\, T_{s_\kappa} T_s p(0))}{(s_m - s_k)(c - \lambda\, T_{s_\kappa} T_{s_m} p(0))} d_\delta(s_m)\widehat{\omega}_p(s_m) - d_\delta(s)\widehat{\omega}_p(s)}{\widehat{q}(s) - \gamma(s)} \qquad (2.7),$$

$$\widehat{m}_2(s) = \frac{\sum_{m=1}^{n} \prod_{k=1,k\neq m}^{n} \frac{(s-s_k)(c-\lambda\, T_{s_\kappa} T_s p(0))}{(s_m - s_k)(c - \lambda\, T_{s_\kappa} T_{s_m} p(0))} \widehat{\omega}_q(s_m) - \widehat{\omega}_q(s)}{\widehat{q}(s) - \gamma(s)} \qquad (2.8)$$

Απόδειξη

Για την απόδειξη δείτε (Z. Zhang et al. / Journal of Computational and Applied Mathematics, σελ. 649-650). ■

2.5 Αποτελέσματα των προεξοφλητικών συναρτήσεων ζημιάς Gerber-Shiu

Σε αυτήν την ενότητα, παρουσιάζουμε ορισμένα αποτελέσματα για την προεξοφλητική συνάρτηση ζημιάς Gerber – Shiu. Υποθέτουμε ότι οι πυκνότητες p και q των απαιτήσεων ανήκουν στην οικογένεια κατανομών που μελετούμε, και οι μετασχηματισμοί Laplace έχουν τη μορφή:

$$\hat{p}(s) = \frac{p_{l_1-1}(s)}{p_{l_1}(s)} \quad , \quad \hat{q}(s) = \frac{q_{l_2-1}(s)}{q_{l_2}(s)} \quad , l_1, l_2 \in \mathbb{N}^+ \qquad (2.9)$$

όπου $p_{l_1-1}(s)$ και $q_{l_2-1}(s)$ πολυώνυμα βαθμού $l_1 - 1$ και $l_2 - 1$ ή λιγότερου, ενώ $p_{l_1}(s)$ και $q_{l_2}(s)$ πολυώνυμα βαθμού l_1 και l_2 με μόνο αρνητικές ρίζες. Οι παραπάνω ποσότητες ικανοποιούν τις σχέσεις $p_{l_1-1}(0) = p_{l_1}(0)$ και $q_{l_2-1}(0) = q_{l_2}(0)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι οι κύριοι συντελεστές των $p_{l_1}(s)$ και $q_{l_2}(s)$ είναι 1. Οι συντελεστές αυτοί χρησιμοποιούνται σε εφαρμογές πιθανότητας, που περιλαμβάνουν τις κατανομές Erlang, Coxian και κατανομές τύπου φάσεων, καθώς και μείξεις κατανομών.

Για την περίπτωση των $\hat{p}$ και $\hat{q}$ που ορίζονται στο (2.9), οι μετασχηματισμοί Laplace (2.7) και (2.8) μπορούν να μετατραπούν σε λογικές εκφράσεις για ορισμένες ειδικές συναρτήσεις ζημιάς. Στη συνέχεια, μερικές ποσότητες όπως η τελική πιθανότητα χρεοκοπίας, ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου της χρεοκοπίας, και η κατανομή του πλεονάσματος πριν από την χρεοκοπία αλλά και το έλλειμμα σε χρεοκοπία, μπορούν να υπολογιστούν από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace.

Στη συνέχεια, με τις ακόλουθες υποθέσεις θα εξετάσουμε τις εξισώσεις του **Θεωρήματος 2.2**

Θέτουμε λοιπόν για $k = 1,2, \dots, n$

$$y = cs + \lambda\hat{p}(s) \text{ και } y_k = cs_k + \lambda\hat{p}(s_k) \qquad (2.10)$$

τότε για την συνάρτηση $d_\delta(s)$ έχουμε τα ακόλουθα:

$$l_{\delta}(y) = 1 + \sum_{k=2}^{n} \prod_{j=k}^{n} \frac{\lambda + \lambda_j + \delta - y}{\lambda_{j-1}}$$

το οποίο είναι πολυώνυμο $n-1$ βαθμού. Μέσω της παρεμβολής του Lagrange προκύπτει ότι

$$l_{\delta}(y) = \sum_{m=1}^{n} \prod_{k=1,k\neq m}^{n} \frac{y - y_k}{y_m - y_k} d_{\delta}(s_m)$$

οπότε η $d_{\delta}(s)$ είναι

$$d_{\delta}(s) = \sum_{m=1}^{n} \prod_{k=1,k\neq m}^{n} \frac{cs + \lambda\hat{p}(s) - cs_k - \lambda\hat{p}(s_k)}{cs_m + \lambda\hat{p}(s_m) - cs_k - \lambda\hat{p}(s_k)} d_{\delta}(s_m) \qquad (2.11).$$

Από την (2.11) έχουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα

$$\widehat{m}_1(s) = \frac{\lambda}{\lambda_n} \frac{\sum_{m=1}^{n} \prod_{k=1,k\neq m}^{n} \frac{(s - s_k)(c - \lambda\, T_{s_\kappa}\, T_s p(0))}{(s_m - s_k)(c - \lambda\, T_{s_\kappa}\, T_{s_m} p(0))} d_{\delta}(s_m)\widehat{\omega}_p(s_m) - d_{\delta}(s)\widehat{\omega}_p(s)}{\hat{q}(s) - \gamma(s)}$$

$$= \frac{\lambda[\prod_{i=1}^{n-1} \lambda_\iota]\left[\prod_{j=1}^{n}(s - s_j)\right] \sum_{m=1}^{n} \prod_{k=1,k\neq m}^{n} \frac{(c - \lambda\, T_{s_\kappa}\, T_s p(0))}{(s_m - s_k)(c - \lambda\, T_{s_\kappa}\, T_{s_m} p(0))} d_{\delta}(s_m) T_s\, T_{s_m} \omega_p(0)}{(-1)^{(n-1)}[\prod_{i=1}^{n} \lambda_\iota][\hat{q}(s) - \gamma(s)]}$$

και

$$\widehat{m}_2(s) = \frac{[\prod_{i=1}^{n} \lambda_\iota]\left[\prod_{j=1}^{n}(s - s_j)\right] \sum_{m=1}^{n} \prod_{k=1,k\neq m}^{n} \frac{(c - \lambda\, T_{s_\kappa}\, T_s p(0))}{(s_m - s_k)(c - \lambda\, T_{s_\kappa}\, T_{s_m} p(0))} T_s\, T_{s_m} \omega_q(0)}{(-1)^{(n-1)} \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n [\hat{q}(s) - \gamma(s)]}.$$

Μέσω πράξεων και πολλαπλασιάζοντας τον αριθμητή και τον παρονομαστή των δύο παραπάνω εξισώσεων με $\left[p_{l_1}(s)\right]^n q_{l_2}(s)$ προκύπτει

$$\widehat{m}_1(s) = \frac{\left[\prod_{j=1}^{n}(s - s_j)\right] \sum_{m=1}^{n} L_{1,m}(s) T_s\, T_{s_m} \omega_p(0)}{(-1)^{(n-1)}[\prod_{i=1}^{n} \lambda_\iota]\ \left[p_{l_1}(s)\right]^n q_{l_2}(s)[\hat{q}(s) - \gamma(s)]} \qquad (2.12)$$

και

$$\widehat{m}_2(s) = \frac{\left[\prod_{j=1}^{n}(s-s_j)\right]\sum_{m=1}^{n} L_{2,m}(s) T_s\, T_{s_m}\omega_q(0)}{(-1)^{(n-1)}\left[\prod_{i=1}^{n}\lambda_\iota\right]\,\left[p_{l_1}(s)\right]^n q_{l_2}(s)[\widehat{q}(s)-\gamma(s)]} \qquad (2.13),$$

όπου

$$L_{1,m}(s) = \lambda\left[\prod_{i=1}^{n-1}\lambda_\iota\right] p_{l_1}(s) q_{l_2}(s) d_\delta(s_m) \prod_{k=1,k\neq m}^{n} \frac{c p_{l_1}(s) - \lambda\, p_{l_1}(s) T_{s_\kappa} T_s p(0)}{(s_m - s_k)(c - \lambda\, T_{s_\kappa} T_{s_m} p(0))}$$

και

$$L_{2,m}(s) = \left[\prod_{i=1}^{n-1}\lambda_\iota\right] p_{l_1}(s) q_{l_2}(s) \prod_{k=1,k\neq m}^{n} \frac{c p_{l_1}(s) - \lambda\, p_{l_1}(s) T_{s_\kappa} T_s p(0)}{(s_m - s_k)\left(c - \lambda\, T_{s_\kappa} T_{s_m} p(0)\right)}.$$

Ας εισάγουμε τώρα την ακόλουθη πολυωνυμική εξίσωση

$$D_{nl_1+l_2+n}(s) = c^n \left[\prod_{j=1}^{n}(s-s_j)\right]\left[\prod_{k=1}^{nl_1+l_2} s + R_k\right], \quad s \in \mathbb{C}$$

όπου τα R_k έχουν θετικό πραγματικό μέρος.

Συνεπώς οι σχέσεις (2.12) και (2.13) γράφονται ως εξής:

$$\widehat{m}_1(s) = \frac{\sum_{m=1}^{n} L_{1,m}(s) T_s\, T_{s_m}\omega_p(0)}{c^n\left[\prod_{k=1}^{nl_1+l_2}(s+R_k)\right]} \qquad (2.14)$$

και

$$\widehat{m}_2(s) = \frac{\sum_{m=1}^{n} L_{2,m}(s) T_s\, T_{s_m}\omega_q(0)}{c^n\left[\prod_{k=1}^{nl_1+l_2}(s+R_k)\right]} \qquad (2.15).$$

Εάν τώρα τα R_k είναι διαφορετικά για $k = 1,2,\dots,nl_1+l_2$ ισχύουν τα ακόλουθα

$$\frac{L_{i,m}(s)}{c^n\left[\prod_{k=1}^{nl_1+l_2}(s+R_k)\right]} = a_{i,m,0} + \sum_{k=1}^{nl_1+l_2}\frac{a_{i,m,k}}{s+R_k},$$

με

$$a_{1,m,0} = \frac{\lambda\left[\prod_{i=1}^{n-1}\lambda_\iota\right] d_\delta(s_m)}{c\prod_{k=1,k\neq m}^{n}(s_k - s_m)(c - \lambda\, T_{s_\kappa} T_{s_m} p(0))},$$

$$a_{2,m,0} = \frac{\prod_{i=1}^{n} \lambda_\iota}{c \prod_{k=1,k\neq m}^{n}(s_k - s_m)(c - \lambda\, T_{s_\kappa}\, T_{s_m} p(0))},$$

$$a_{i,m,k} = \frac{L_{i,m}(-R_k)}{c^n \prod_{l=1,l\neq k}^{nl_1+l_2}(R_l - R_k)}.$$

Άρα για τις (2.14) και (2.15) έχουμε

$$\widehat{m}_1(s) = \sum_{m=1}^{n}\left[a_{1,m,0} + \sum_{k=1}^{nl_1+l_2} \frac{a_{1,m,k}}{s + R_k}\right] T_s\, T_{s_m} \omega_p(0)$$

και

$$\widehat{m}_2(s) = \sum_{m=1}^{n}\left[a_{2,m,0} + \sum_{k=1}^{nl_1+l_2} \frac{a_{2,m,k}}{s + R_k}\right] T_s\, T_{s_m} \omega_q(0).$$

Έτσι με αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace καταλήγουμε στα εξής

$$m_1(u) = \sum_{m=1}^{n}\left[a_{1,m,0}\, T_{s_m}\omega_p(u) + \sum_{k=1}^{nl_1+l_2} a_{1,m,k} e^{-R_k u} *\, T_{s_m}\omega_p(u)\right] \quad (2.16),$$

$$m_2(u) = \sum_{m=1}^{n}\left[a_{2,m,0}\, T_{s_m}\omega_q(u) + \sum_{k=1}^{nl_1+l_2} a_{2,m,k} e^{-R_k u} *\, T_{s_m}\omega_q(u)\right] \quad (2.17).$$

2.6 Εφαρμογή

Σκοπός μας με την παρούσα εφαρμογή, είναι να υπολογίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$ μέσω των μετασχηματισμών Laplace, την ανανεωτική εξίσωση του Lundberg αλλά και την προεξοφλητική συνάρτηση ζημιάς Gerber – Shiu όπως αυτή παρουσιάστηκε στην αμέσως προηγούμενη ενότητα.

Για το λόγο αυτό κάνουμε τις ακόλουθες υποθέσεις:

Θεωρούμε

$$p(x) = ae^{-ax}\,, a > 0, x > 0,$$

την πυκνότητα των απαιτήσεων από την τάξη 1, και

$$q(x) = \eta\beta_1 e^{-\beta_1 x} + (1-\eta)\beta_2 e^{-\beta_2 x}, \qquad \beta_1, \beta_2 > 0, 0 < \eta < 1, x > 0,$$

την πυκνότητα των απαιτήσεων από την τάξη 2 η οποία ακολουθεί μία μείξη δύο εκθετικών κατανομών.

Οπότε οι μετασχηματισμοί Laplace για τις δύο πυκνότητες είναι

$$\hat{p}(s) = \frac{a}{s+a}\,,$$

με $p_0(s) = a$, $p_1(s) = s + a$

και

$$\hat{q}(s) = \frac{\eta\beta_1}{s+\beta_1} + \frac{(1-\eta)\beta_2}{s+\beta_2}\,,$$

με $q_1(s) = \eta\beta_1 s + (1-\eta)\beta_2 s + \beta_1\beta_2$, $q(s) = (s+\beta_1)(s+\beta_2)$.

Ακόμη θεωρούμε πως οι απαιτήσεις της τάξης 1 ακολουθούν μία διαδικασία Poisson με παράμετρο λ ενώ οι απαιτήσεις της τάξης 2 ακολουθούν μία ανανεωτική διαδικασία με τους χρόνους άφιξης των απαιτήσεων να ακολουθούν μία γενικευμένη $Erlang(3)$ με παραμέτρους $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Σύμφωνα με την ενότητα **2.3** αλλά και με τα παραπάνω δεδομένα η γενικευμένη εξίσωση του Lundberg ικανοποιείται με την ακόλουθη εξίσωση

$$\prod_{i=1}^{3}\left[1 - \frac{s(cs + ca - \lambda)}{\lambda_i(s+a)}\right] = \frac{\eta\beta_1}{s+\beta_1} + \frac{(1-\eta)\beta_2}{s+\beta_2} \qquad (2.18),$$

η οποία μας δίνει οχτώ ρίζες , έστω $s_1, s_2 > 0, s_3 = 0$ και

$-R_i$ με $\Re(R_i) > 0$ με $i = 1,2,3,4,5$.

Για ευκολία των υπολογισμών θέτουμε:

$$\delta = 0, c = 3, \lambda = 2, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \alpha = 1, \beta_1 = 1.5, \beta_2 = 0.5 \text{ και } \eta = 0.4 \ .$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω δεδομένα στην (2.18) προκύπτει ότι

$$s_1 = 0.777568 + 0.277217i \ , \qquad s_2 = 0.777568 - 0.277217i \, , s_3 = 0 \, ,$$

$$R_1 = 0.614296 \ + \ 0.123697i \, , R_2 = 0.614296 \ - \ 0.123697i \, ,$$

$$R_3 = 0.158887 \, , R_4 = 0.668052 \, , R_5 = 1.499606 \, .$$

Όταν λοιπόν $w \equiv 1$ οι προεξοφλητικές συναρτήσεις ζημιάς Gerber – Shiu $m_1(u)$, $m_2(u)$ απλοποιούνται στις πιθανότητες χρεοκοπίας $\psi_1(u), \psi_2(u)$. Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε ότι $\omega_p(u) = e^{-au}$ και $\omega_q(u) = \eta\beta_1 e^{-\beta_1 u} + (1-\eta)\beta_2 e^{-\beta_2 u}$. Μέσω των εξισώσεων (2.16) και (2.17) καταλήγουμε στα ακόλουθα

$$\psi_1(u) = 0.745352e^{-0.158887u} + 0.048666e^{-0.668052u} - 0.000263e^{-1.499606u}$$

$$+e^{0.614296u}[0.096627\cos(0.123697u) + 0.345425\sin(0.123697u)] \, ,$$

$$\psi_2(u) = 0.192335e^{-0.158887u} + 0.067579e^{-0.668052u} + 0.000256e^{-1.499606u}$$

$$-e^{0.614296u}[0.066736\cos(0.123697u) + 0.175503\sin(0.123697u)] \, .$$

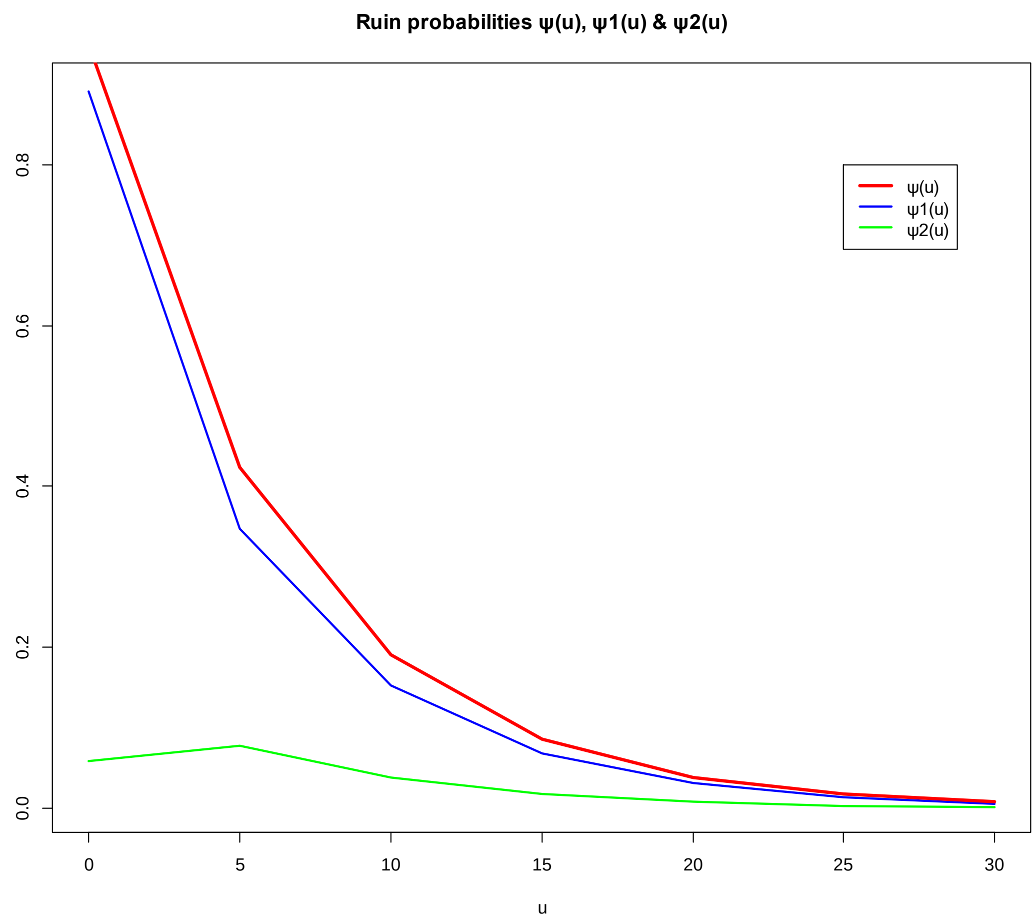
Και αφού $\psi_1(u) + \psi_2(u) = \psi(u) \Longrightarrow$

$$\psi(u) = 0.937657e^{-0.158887u} + 0.116245e^{-0.668052u} - 0.000007e^{-1.499606u}$$

$$+e^{0.614296u}[0.029891\cos(0.123697u) + 0.169922\sin(0.123697u)] \, .$$

Τέλος για να εξάγουμε το σχήμα μας περάσαμε τα δεδομένα μας στο R και για $u \in [0,30]$ παραθέτουμε τον κώδικα προσομοίωσης με το αντίστοιχο διάγραμμα

```
> u<-seq(0,30,5);
> y1<-0.745352*exp(-0.158887*u)+0.048666*exp(-0.668052*u)-0.000263*
exp(-1.499606*u)+exp(-0.614296*u)*(0.096627*cos(0.123697*u)+0.17550
3*sin(0.123697*u));
> y2<-0.192335*exp(-0.158887*u)-0.067579*exp(-0.668052*u)+0.000256*
exp(-1.499606*u)-exp(-0.614296*u)*(0.066736*cos(0.123697*u)+0.17550
3*sin(0.123697*u));
> y<-y1+y2;
> plot(u,y1,type="l",col="blue",xlab="u",ylab=" ",lwd=2,main="Ruin
probabilities ψ(u), ψ1(u) & ψ2(u)")
> lines(u,y2,lty=1,col="green",lwd=2);
> lines(u,y,lty=1,col="red",lwd=3);
>
> legend(25, 0.8, c("ψ(u)","ψ1(u)","ψ2(u)"),lty=c(1,1,1), col=c("re
d","blue","green"), lwd=c(3,2,2));
```



Σχήμα 2.1 Η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$σε συνδυασμό με τις $\psi_1(u)$ και $\psi_2(u)$

Στο παραπάνω σχήμα παρατηρούμε ότι $\psi_1(u) > \psi_2(u)$. Βλέπουμε ότι οι πιθανότητες $\psi_1(u)$ και $\psi(u)$ ελαττώνονται για όλα τα $u \geq 0$, ενώ η πιθανότητα $\psi_2(u)$ παρουσιάζει μία αύξηση για ένα μικρό u και στη συνέχεια ελαττώνεται και αυτή. Αυτό σημαίνει πως για τις αριθμητικές υποθέσεις που κάναμε, ο κίνδυνος της τάξης 1 είναι μεγαλύτερος από αυτόν της τάξης 2 για μικρό αρχικό πλεόνασμα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

Κατανομές τύπου φάσεων για τη προεξοφλητική συνάρτηση ζημιάς Gerber-Shiu σε ένα μοντέλο κινδύνου με δύο κατηγορίες απαιτήσεων

3.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα συνεχίσουμε τη μελέτη της συνάρτησης Gerber-Shiu για δύο κλάσεις στοχαστικών απαιτήσεων, υποθέτοντας όμως ότι και οι δύο διαδικασίες αριθμού αξίωσης είναι ανανεωτικές διαδικασίες, με χρόνους απαιτήσεων τύπου φάσης (phase-type). Με την εκ νέου σύνθεση και την ανάλυση των αλυσίδων Markov που συνδέονται με δύο συγκεκριμένες διανομές τύπου φάσης, λαμβάνουμε συστήματα διαφορικών εξισώσεων για δύο τύπους λειτουργιών Gerber-Shiu. Αντίστοιχα, δημιουργούνται σαφείς εκφράσεις για τους μετασχηματισμούς Laplace των δύο αυτών τύπων Gerber-Shiu συναρτήσεων.

Τα σαφή αποτελέσματα για τις λειτουργίες της συνάρτησης Gerber-Shiu προκύπτουν όταν το αρχικό πλεόνασμα είναι μηδέν και όταν οι και δύο κατανομές των απαιτήσεων προέρχονται από την κλασματική οικογένεια. Τέλος, παραθέτουμε ένα παράδειγμα, το οποίο δείχνει τη δυνατότητα εφαρμογής των κύριων αποτελεσμάτων μας.

3.2 Υποθέσεις του μοντέλου

Για την εφαρμογή του μοντέλου, θεωρούμε τη στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος στην εξίσωση (1.4), όπου η $S(t)$ περιγράφεται από τη σχέση (1.11). Θα θεωρήσουμε επίσης, τις απαριθμήτριες διαδικασίες $\{N_1\}_{t=1}^{\infty}$ και $\{N_2\}_{t=1}^{\infty}$, με ενδιάμεσους χρόνους άφιξης των κινδύνων $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ και $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ αντίστοιχα. Πρώτα, όμως, ας δώσουμε τον ορισμό μιας συνεχούς phase-type κατανομής, ορίζοντας αρχικά την Μαρκοβιανή διαδικασία.

<u>Ορισμός 3.1</u>

Μια στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ με αριθμήσιμο σύνολο καταστάσεων S ονομάζεται Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου αν έχει τη Μαρκοβιανή ιδιότητα, δηλαδή αν για κάθε ακολουθία χρόνων $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ και για κάθε $i_1, i_2, \ldots, i_n \in S$,

$$Pr(X(t_n) = i_n \mid X(t_{n-1}) = i_{n-1}, \ldots, X(t_1) = i_1) = Pr(X(t_n) = i_n \mid X(t_{n-1}) = i_{n-1}).$$

Η πιθανότητα $Pr(X(t_n) = i_n \mid X(t_{n-1}) = i_{n-1})$ ονομάζεται **πιθανότητα μετάβασης** (ή μεταπήδησης). Μια Μαρκοβιανή αλυσίδα λέγεται **ομογενής** αν για κάθε $s, t \geq 0$ και για κάθε $i, j \in S$,

$$Pr(X(s+t) = j \mid X(s) = i) = Pr(X(t) = j \mid X(0) = i) = p_{ij}(t).$$

Ο πίνακας $\boldsymbol{P}(t) = (p_{ij}(t))$ ονομάζεται πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης. Ο πίνακας $\boldsymbol{P}(t)$ είναι στοχαστικός πίνακας αφού για κάθε $t \geq 0$ ικανοποιεί τις δύο ακόλουθες ιδιότητες:

Ι1. $p_{ij}(t) \geq 0$, για κάθε $i, j \in S$.

Ι2. $\sum_{j\in S} p_{ij}(t) = 1$, για κάθε $i \in S$.

Συνήθως ορίζουμε ότι $\boldsymbol{P}(0) = \boldsymbol{I}$.

Οι εξισώσεις **Chapman-Kolmogorov** σε συνεχή χρόνο έχουν την παρακάτω μορφή

$$p_{ij}(s+t) = \sum_{k\in S} p_{ik}(s) p_{kj}(t)$$

για κάθε $i, j \in S$ και για κάθε $s, t \geq 0$. Πράγματι

$$
\begin{aligned}
p_{ij}(s+t) &= Pr(X(s+t) = j \mid X(0) = i) \\
&= \sum_{k \in S} Pr(X(s+t) = j \mid X(s) = k, X(0) = i) \times Pr(X(s) = k | X(0) = i) \\
&= \sum_{k \in S} Pr(X(s+t) = j \mid X(s) = k) \times Pr(X(s) = k | X(0) = i) \\
&= \sum_{k \in S} p_{ik}(s) p_{kj}(t)
\end{aligned}
$$

Σε μορφή πινάκων οι παραπάνω εξισώσεις, για κάθε $s, t \geq 0$, γράφονται ως

$$\boldsymbol{P}(s+t) = \boldsymbol{P}(s)\boldsymbol{P}(t).$$

Αν

$$a_i = Pr(X(0) = i), \quad i \in S$$

είναι οι αρχικές πιθανότητες της Μαρκοβιανής αλυσίδας $\{X(t)\}_{t \geq 0}$, τότε

$$Pr(X(t) = j) = \sum_{i \in S} a_i p_{ij}(t), \quad t \geq 0.$$

Ορισμός 3.2

Μια συνεχής κατανομή τύπου φάσεων είναι η κατανομή του χρόνου απορρόφησης μιας απορροφητικής Μαρκοβιανής αλυσίδας συνεχούς χρόνου με πεπερασμένο σύνολο καταστάσεων S.

Πιο συγκεκριμένα, έστω $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ μία ομογενής Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου με σύνολο καταστάσεων $S = \{1, 2, \dots, m, m+1\}$, όπου οι καταστάσεις $\{1, 2, \dots, m\}$ είναι παροδικές και η κατάσταση $\{m+1\}$ είναι απορροφητική. Ο απειροστός γεννήτορας πίνακας (infinitesimal generator matrix) πιθανοτήτων μετάβασης μιας τέτοιας Μαρκοβιανής αλυσίδας έχει τη μορφή

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{T} & \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{0} & 0 \end{pmatrix}$$

όπου $\boldsymbol{T} = (t_{ij})_{m \times m}$ είναι ένας τετραγωνικός πίνακας διάστασης $m \times m$ (το στοιχείο t_{ij}, για $i \neq j$, είναι ο ρυθμός μετάβασης από τη μεταβατική κατάσταση i στη μεταβατική κατάσταση j, $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, \dots, t_m)'$ είναι ένα διάνυσμα στήλη διάστασης $m \times 1$ που περιέχει τους ρυθμούς εξόδου από τις μεταβατικές καταστάσεις στην απορροφητική κατάσταση, και το $\mathbf{0}$ συμβολίζει το διάνυσμα γραμμή διάστασης $1 \times m$ με όλα τα στοιχεία του ίσα με μηδέν (0). Προφανώς ισχύει ότι $t_{ij} \geq 0$ για $i \neq j$, $t_{ii} < 0$, και $t_i \geq 0$ $(1 \leq i, j \leq m)$. Επειδή ο πίνακας $\boldsymbol{Q}$ είναι γεννήτορας πίνακας που αντιστοιχεί σε πεπερασμένο σύνολο καταστάσεων ισχύει η σχέση

$$\boldsymbol{T1} + \boldsymbol{t} = \mathbf{0}$$

όπου το $\mathbf{1}$ συμβολίζει το διάνυσμα στήλη διάστασης $m \times 1$ με όλα τα στοιχεία του ίσα με ένα (1). Έστω επίσης

$$Pr(X_0 = 1, X_0 = 2, \dots, X_0 = m+1) = (a_1, a_2, \dots, a_m, a_{m+1}) = (\boldsymbol{a}, a_{m+1})$$

η αρχική κατανομή της Μαρκοβιανής αλυσίδας. Είναι προφανές ότι

$$\boldsymbol{t} = -\boldsymbol{T1},$$

ή ισοδύναμα

$$-\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{t} = \mathbf{1},$$

όπου $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}_m$ είναι ο ταυτοτικός (μοναδιαίος) πίνακας διάστασης $m \times m$, και

$$a_{m+1} = 1 - \boldsymbol{a1}.$$

Τα στοιχεία που περιέχει το διάνυσμα $\boldsymbol{t}$ αποκαλούνται ρυθμοί εξόδου (exit rates).

Θα υποθέσουμε πως η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων άφιξης είναι μία κατανομή τύπου φάσης, με αναπαράσταση $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{a}^T)$, όπου $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ είναι ένας $n \times n$ πίνακας, με $a_{ii} < 0, a_{ij} \geq 0$, $i \neq j$, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \leq 0$, για κάθε $i = 1,2,\dots,n$, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_{1,} \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, με $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, και $\boldsymbol{a} = (a_{1,} a_2, \dots, a_n)$, με $\boldsymbol{a}^T = -\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_n^T$, όπου $\boldsymbol{x}^T$ δηλώνει τη μετατροπή ενός διανύσματος γραμμής $\boldsymbol{x}$, και $\boldsymbol{e}_n$ δηλώνει ένα διάνυσμα γραμμής μήκους n με όλα τα στοιχεία να είναι ένα. Ακολουθώντας τα αποτελέσματα της σχέσης (1.11), έχουμε

$$F(t) = 1 - \boldsymbol{\alpha} e^{At} \boldsymbol{e}_n^T, \quad t \geq 0,$$

$$f(t) = \boldsymbol{\alpha} e^{At} \boldsymbol{a}^T, \quad t \geq 0,$$

$$\hat{F}(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(dt) = \boldsymbol{\alpha}(sI - A)^{-1} \boldsymbol{a}^T, \quad s \in \mathbb{C}. \tag{3.1}$$

Επομένως, κάθε V_k αντιστοιχεί στο χρόνο απορρόφησης σε μια αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου τερματισμού $\left\{I_t^{(k)}; t \geq 0\right\}$, $k = 1,2,\ldots$, με κοινές προσωρινές καταστάσεις $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ και μία κατάσταση απορρόφησης $\{E_0\}$.

Ομοίως, υποθέτουμε πως η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων G είναι μια αναπαράσταση τύπου φάσης $(\boldsymbol{\beta}, B, \boldsymbol{b}^T)$, όπου $B = (b_{ij})_{i,j=1}^{m}$ είναι ένας $m \times m$ πίνακας, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$, $\sum_{i=1}^{m} \beta_i = 1$, και $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$, με $\boldsymbol{b}^T = -\boldsymbol{B}\boldsymbol{e}_m^T$. Τότε θα έχουμε

$$G(t) = 1 - \boldsymbol{\beta} e^{Bt} \boldsymbol{e}_m^T, \qquad t \geq 0,$$

$$g(t) = \boldsymbol{\beta} e^{Bt} \boldsymbol{b}^T, \qquad t \geq 0,$$

$$\hat{G}(s) = \int_0^\infty e^{-st} G(dt) = \boldsymbol{\beta}(sI - B)^{-1} \boldsymbol{b}^T, \qquad s \in \mathbb{C}.$$

Θεωρούμε με $\left\{J_t^{(k)}; t \geq 0\right\}$ την αντίστοιχη αλυσίδα Markov συνεχούς χρόνου τερματισμού των L_k, $k = 1,2,\ldots$, με κοινές προσωρινές καταστάσεις $\{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$ και μία κατάσταση απορρόφησης $\{F_0\}$.

Στη συνέχεια, δηλώνουμε ως $\otimes$ το γινόμενο δύο πινάκων Kronecker. Για κάθε $m, n, k, l \in \mathbb{N}$ το γινόμενο Kronecker ενός $m \times n$ πίνακα $A^{(1)} = (a_{ij}^{(1)})_{i=1,\ldots,m, j=1,\ldots,n}$ και ένας πίνακας $A^{(2)}$, για τον οποίο ισχύει

$$A^{(1)} \otimes A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} A^{(2)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} A^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}^{(1)} A^{(2)} & \cdots & a_{mn}^{(1)} A^{(2)} \end{pmatrix}$$

Ως $\{I(t), J(t); t \geq 0\}$ δηλώνουμε την υποκείμενη διαδικασία, η οποία ορίζεται ως

$$I(t) = I_t^{(1)}, \qquad 0 \leq t < V_1, \qquad I(t) = I_{t-V_1}^{(2)}, \qquad V_1 \leq t < V_1 + V_2, \ldots,$$

$$J(t) = J_t^{(1)}, \qquad 0 \leq t < L_1, \qquad J(t) = J_{t-L_1}^{(2)}, \qquad L_1 \leq t < L_1 + L_2, \ldots.$$

Εύκολα παρατηρούμε πως η $\{I(t), J(t); t \geq 0\}$ αποτελεί μία διδιάστατη Μαρκοβιανή αλυσίδα, με σημεία $\{(E_1, F_1), (E_2, F_1), \dots, (E_\nu, F_1), (E_1, F_2), (E_2, F_2), \dots, (E_n, F_2), \dots, (E_1, F_m), (E_2, F_m), \dots, (E_n, F_m)\}$, αρχική κατανομή $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\beta} \otimes \boldsymbol{\alpha}$ και πίνακα συνάρτησης L, ο οποίος λαμβάνεται ως ακολούθως.

Σημειώνοντας ότι η πιθανότητα με την οποία ο ορισμός της ταυτόχρονης αλλαγής των $\{I(t); t \geq 0\}$ και $\{J(t); t \geq 0\}$ είναι μηδέν, χρειάζεται να αναλογιστούμε τις παρακάτω δύο περιπτώσεις, για κάποιο μικρό χρονικό διάστημα $[s, s+\Delta],\ s \geq 0$,

(1) ο ορισμός του $\{I(t); t \geq 0\}$ δεν αλλάζει στο $[s, s+\Delta]$, ενώ του $\{J(t); t \geq 0\}$ αλλάζει.

(2) ο ορισμός του $\{J(t); t \geq 0\}$ δεν αλλάζει στο $[s, s+\Delta]$, ενώ του $\{I(t); t \geq 0\}$ αλλάζει.

Στην πρώτη περίπτωση, για $i = 1, \dots, n,\ j, k = 1, \dots, m$ και $i \neq j$, μία μετάβαση από (E_i, F_j) σε (E_i, F_k), χωρίς τον τερματισμό ορισμένων $\{J_t{}^q; t \geq 0\}$ σε κατάσταση F_j συμβαίνει σε ρυθμό b_{jk}, και μία μετάβαση από (E_i, F_j) σε (E_i, F_k), με τερματισμό ορισμένων $\{J_t{}^q; t \geq 0\}$ στην κατάσταση F_j, και μία επακόλουθη αρχική κατάσταση F_k του $\{J_t{}^{q+1}; t \geq 0\}$ συμβαίνει με ρυθμό $b_j \beta_k$, όπου $q \in \mathbb{N}^+$ είναι κατάλληλος αριθμός, έτσι ώστε $J^{(q)}_{(s-L_1-L_2 \dots -L_{q-1})} = J(s)$. Έτσι, το συνολικό ποσοστό από (E_i, F_j) έως (E_i, F_k), είναι $b_{jk} + b_j \beta_k$. Ξαναγράφοντας σε μορφή γραμμών πίνακα τον πίνακα συναρτήσεων της περίπτωσης (1), ως $B \otimes I_{n\times n} + (\boldsymbol{b}^T \boldsymbol{\beta}) \otimes I_{n\times n}$, όπου ο $I_{n\times n}$ δηλώνει τον ταυτοτικό πίνακα $n \times n$. Παρομοίως, ο πίνακας της περίπτωσης (2) γράφεται ως $I_{n\times n} \otimes A + I_{n\times n} \otimes (\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{\alpha})$. Επομένως, έχουμε $L = B \otimes I_{n\times n} + (\boldsymbol{b}^T \boldsymbol{\beta}) \otimes I_{n\times n} + I_{n\times n} \otimes A + I_{n\times n} \otimes (\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{\alpha})$, ο οποίος είναι ένας συντηρητικός Q-πίνακας.

Έστω, τώρα, $T = \inf\{t \geq 0; U(t) < 0\}$ ($T = \infty$ εφόσον δε συμβεί χρεοκοπία) να είναι ο χρόνος χρεοκοπίας για τη διαδικασία (1.11).

Ορίζουμε ως

$m(u) = m^{(1)}(u) + m^{(2)}(u),\ u \geq 0,$ η συνάρτηση Gerber-Shiu στη χρεοκοπία, όπου για $\delta > 0$ έχουμε

$$m^{(k)}(u) = E\left[e^{-\delta T} w_k(U(T-), |U(T)|) I_{(T<\infty, J=k)} \middle| U(0) = u\right],\ \ u \geq 0, k = 1,2,$$

όπου J είναι η μεταβλητή που δηλώνει την αιτία χρεοκοπίας, και $J = 1$ ή $J = 2$, εάν η χρεοκοπία προκαλείται από απαίτηση κλάσης 1 ή 2, $w_k(x, y)$ για $x, y \geq 0,\ k = 1,2$, είναι δύο πιθανώς διακριτές μη αρνητικές συναρτήσεις ποινής τιμών, και $U(T-)$, $|U(T)|$, είναι δύο σημαντικές μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές σε σχέση με το χρόνο χρεοκοπίας T, που αντιπροσωπεύουν το πλεόνασμα αμέσως πριν από την χρεοκοπία και το έλλειμμα στην χρεοκοπία, αντίστοιχα. Επιπλέον, ορίζουμε για $k = 1,2,\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m,\ u \geq 0,$

$$m_{ij}^{(k)}(u) = E\left[e^{-\delta T} w_k(U(T-), |U(T)|) I_{(T<\infty, J=k)} \middle| U(0) = u, I(0), J(0) = (E_i, F_j)\right]$$

να είναι η συνάρτηση Gerber-Shiu, δεδομένου ότι το αρχικό πλεόνασμα είναι u, η αρχική κατάσταση είναι (E_i, F_j), και η καταστροφή προκαλείται από μια αξίωση της κλάσης k. Κατά συνέπεια, έχουμε

$$m^{(k)}(u) = \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{m}^{(k)}(u), \qquad k = 1,2,$$

όπου $\boldsymbol{m}^{(k)}(u) = (m_{11}^{(k)}(u), m_{21}^{(k)}(u), \dots, m_{n1}^{(k)}(u), m_{12}^{(k)}(u), m_{22}^{(k)}(u), \ \dots, m_{n2}^{(k)}(u), \ \dots, m_{1m}^{(k)}(u), m_{2m}^{(k)}(u), \ \dots, m_{nm}^{(k)}(u))^T$.

Έστω μια διαδικασία κινδύνου με δύο εξαρτώμενες κατηγορίες ασφαλιστικών επιχειρήσεων. Με τη μετατροπή αυτού του είδους της διαδικασίας κινδύνου σε μια διαδικασία με δύο ανεξάρτητες κατηγορίες επιχειρήσεων, για τις οποίες η μία διαδικασία αριθμού αξίωσης είναι Poisson και η άλλη είναι μια ανανεωτική διαδικασία με γενικευμένη Erlang(2) απαίτηση , αντλούν σαφείς εκφράσεις για τις πιθανότητες επιβίωσης όταν τα μεγέθη απαίτησης κατανέμονται εκθετικά. Οι σαφείς εκφράσεις για το μετασχηματισμό Laplace της πιθανότητας επιβίωσης του χαρτοφυλακίου στο οποίο οι χρόνοι μεταξύ άφιξης αξίωσης έχουν πολυμεταβλητή κατανομή Γάμμα καθορίζονται, όταν κάθε μία από τις κατανομές χρόνου μεταξύ άφιξης που σχετίζονται με αυτές ανεξάρτητες διαδικασίες καταμέτρησης ακολουθεί την κατανομή Γάμμα. Από ένα πρόγραμμα Maple, η ρητή έκφραση για την πιθανότητα επιβίωσης μπορεί να ληφθεί για τα λογικά οικογενειακά μεγέθη αξίωσης. Οι Li και Garrido επίσης, πραγματοποιούν μελέτη των πιθανοτήτων καταστροφής για δύο ανεξάρτητες κατηγορίες διαδικασιών κινδύνου, για τις οποίες η μία διαδικασία αριθμού αξίωσης είναι Poisson και η άλλη είναι μια ανανεωτική διαδικασία με γενικευμένη Erlang απαίτηση. Τα σαφή αποτελέσματα δίνονται όταν οι κατανομές του ποσού απαίτησης και των δύο κατηγοριών ανήκουν στην οικογένεια κατανομών K_n. Η συνάρτηση Gerber-Shiu για ένα μοντέλο κινδύνου με δύο ανεξάρτητες κατηγορίες διαδικασιών κινδύνου έχει μελετηθεί για τη διαδικασία κινδύνου με διαδικασίες αριθμού απαίτησης να είναι ανεξάρτητη Poisson και γενικευμένη Erlang(2), και σύμφωνα με τον Zhang, για τη διαδικασία κινδύνου με διαδικασίες αριθμού απαίτησης έχουμε ανεξάρτητη διαδικασία Poisson και γενικευμένη Erlang (n), αντίστοιχα. Σαφείς εκφράσεις για τις συναρτήσεις Gerber-Shiu λαμβάνονται όταν οι κατανομές μεγέθους αξίωσης ανήκουν στην κλασματική οικογένεια. Πρόσφατα, οι Χατζηκωνσταντινίδης και Παπαϊωάννου μελέτησαν τις συναρτήσεις ποινής Gerber-Shiu, και τις στιγμές του προεξοφλημένου ποσού των πληρωμών μερισμάτων μέχρι την χρεοκοπία για δύο κατηγορίες διαδικασιών κινδύνου με σταθερό φράγμα μερίσματος, για το οποίο η μία διαδικασία αριθμού απαίτησης είναι Poisson και η άλλη είναι μια διαδικασία ανανέωσης με γενικευμένη Erlang(n) .

Με τον καθορισμό $m = 1$ και $Q(0) = 1$ in (1.11), λαμβάνουμε το γνωστό πρότυπο Sparre-Andersen με τους ενδιάμεσους χρόνους άφιξης τύπου φάσης που έχει μελετηθεί από πολλούς συντάκτες, και αντλεί μια απλή έκφραση μορφής μήτρας για την προεξοφλημένη κοινή πυκνότητα του πλεονάσματος πριν από την καταστροφή, και το έλλειμμα στην χρεοκοπία, από την άποψη ορισμένων αναμενόμενων προεξοφλημένων συναρτήσεων ποινής για το μη αρνητικό αρχικό πλεόνασμα. Ο Li λαμβάνει μια έκφραση πινάκων του μετασχηματισμού Laplace, της πρώτης φοράς που η διαδικασία του πλεονάσματος φθάνει ένα δεδομένο στόχο από το αρχικό πλεόνασμα που είναι μικρότερη από το επίπεδο-στόχο. Και έπειτα χρησιμοποιώντας αυτό το αποτέλεσμα, ο Li μελετά το μετασχηματισμό Laplace του χρόνου αποκατάστασης μετά από τη χρεοκοπία, η πιθανότητα ότι το πλεόνασμα επιτυγχάνει ένα επίπεδο πριν από τη χρεοκοπία και την κατανομή της μέγιστης σοβαρότητας της καταστροφής. Οι Albrecher και η Boxma, από την άλλη, θεωρούν τη συνάρτηση Gerber-Shiu για ένα μοντέλο κινδύνου Semi-Markov, το οποίο περιλαμβάνει το μοντέλο Sparre-Andersen, με χρόνους μεταξύ των αιτήσεων τύπου φάσης ως ειδική περίπτωση. Χρησιμοποιώντας την ίδια μέθοδο προσέγγισης διάχυσης, εάν αφήσουμε $m = 1$ και $P(Y = \varepsilon) = 1$, για κάποιο $\varepsilon > 0$ στο μοντέλο μας, μπορούμε επίσης να πάρουμε τις συναρτήσεις Gerber-Shiu για ένα διαιρεμένο μοντέλο κινδύνου Sparre-Andersen, που έχουν μελετηθεί πρόσφατα.

Στις επόμενες ενότητες, πρώτα θα εισάγουμε κάποια συστήματα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων για phase-type κατανομές, και μετά θα αναλύσουμε μία γενικευμένη εξίσωση Lundberg, και τα αποτελέσματά της. Τέλος, θα οδηγηθούμε σε τελικά αποτελέσματα για τις συναρτήσεις Gerber-Shiu, καθώς θα δώσουμε κι ένα παράδειγμα.

3.3 Ολοκληρο - διαφορικές εξισώσεις

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω υποθέσεις, ορίζουμε την ακόλουθη εξίσωση για την $m_{ij}^{(1)}(u)$, εξετάζοντας κατά πόσο η σχέση που συνδέεται με τη διαδικασία πλεονάσματος έχει αλλάξει σε κάποιο μικρό χρονικό διάστημα $[0, t]$,

$$e^{\delta t}m_{ij}^{(1)}(u) = (1 + a_{ii}t)\big(1 + b_{jj}t\big)m_{ij}^{(1)}(u + ct) + \big(1 + b_{jj}t\big)\sum_{k=1,k\neq i}^{n}(a_{ik}t)m_{kj}^{(1)}(u + ct)$$
$$+ (1 + a_{ii}t)\sum_{l=1,l\neq j}^{m}\big(b_{jl}t\big)m_{il}^{(1)}(u + ct)$$
$$+ \big(1 + b_{jj}t\big)(a_i t)\left[\sum_{f=1}^{n} a_f \int_0^{u+ct} m_{fj}^{(1)}(u + ct - x)P(dx) + \int_{u+ct}^{\infty}\omega_1(u + ct, x - u - ct)P(dx)\right]$$
$$+ \big(1 + (a_{ii}t)\big)\big(b_j t\big)\left[\sum_{g=1}^{m}\int_0^{u+ct} m_{ig}^{(1)}(u + ct - x)Q(dx)\right] + o(t), \qquad u \geq 0$$

(3.2)

Με τη βοήθεια της εξίσωσης $m_{ij}^{(1)}(u + ct) = m_{ij}^{(1)}(u) + m_{ij}^{(1)'}(u)(ct) + o(t)$, και μετά από τους ίδιους υπολογισμούς, από την (3.2) έχουμε

$$\delta m_{ij}^{(1)}(u) = cm_{ij}^{(1)}(u) + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}m_{kj}^{(1)}(u) + \sum_{l=1}^{m} b_{jl}m_{il}^{(1)}(u)$$
$$+ a_i\left[\sum_{f=1}^{n}\alpha_f \int_0^u m_{fj}^{(1)}(u - x)P(dx)\right] + b_j\left[\sum_{g=1}^{m}\beta_g \int_0^u m_{ig}^{(1)}(u - x)Q(dx)\right]$$
$$+ a_i w_1(u), \quad u \geq 0$$

(3.3)

όπου $w_1(u) = \int_u^{\infty}\omega_1(u, x - u)P(dx)$. Σε μορφή πίνακα, η (3.3) γίνεται

$$
\begin{aligned}
\delta \boldsymbol{m}^{(1)}(u) = c\boldsymbol{m}^{(1)'}(u) &+ I_{m\times m}\otimes \boldsymbol{A}\boldsymbol{m}^{(1)}(u) + \boldsymbol{B}\otimes I_{n\times n}\boldsymbol{m}^{(1)}(u) \\
&+ I_{m\times m}\otimes(\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{\alpha})\int_0^u \boldsymbol{m}^{(1)}(u-x)P(dx) \\
&+ (\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{\beta})\otimes I_{n\times n}\int_0^u \boldsymbol{m}^{(1)}(u-x)Q(dx) + (\boldsymbol{e}_m^T\otimes \boldsymbol{a}^T)w_1(u), \quad u \geq 0,
\end{aligned}
$$

η οποία ξαναγράφεται ως

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{m}^{(1)'}(u) = \frac{\delta}{c}\boldsymbol{m}^{(1)}(u) &- \frac{1}{c}I_{m\times m}\otimes \boldsymbol{A}\boldsymbol{m}^{(1)}(u) - \frac{1}{c}\boldsymbol{B}\otimes I_{n\times n}\boldsymbol{m}^{(1)}(u) \\
&- \frac{1}{c}I_{m\times m}\otimes(\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{\alpha})\int_0^u \boldsymbol{m}^{(1)}(u-x)P(dx) \\
&- \frac{1}{c}(\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{\beta})\otimes I_{n\times n}\int_0^u \boldsymbol{m}^{(1)}(u-x)Q(dx) - \frac{1}{c}(\boldsymbol{e}_m^T\otimes \boldsymbol{a}^T)w_1(u), \quad u \geq 0
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

Με παρόμοιο τρόπο, έχουμε

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{m}^{(2)'}(u) = \frac{\delta}{c}\boldsymbol{m}^{(2)}(u) &- \frac{1}{c}I_{m\times m}\otimes \boldsymbol{A}\boldsymbol{m}^{(2)}(u) - \frac{1}{c}\boldsymbol{B}\otimes I_{n\times n}\boldsymbol{m}^{(2)}(u) \\
&- \frac{1}{c}I_{m\times m}\otimes(\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{\alpha})\int_0^u \boldsymbol{m}^{(2)}(u-x)P(dx) \\
&- \frac{1}{c}(\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{\beta})\otimes I_{n\times n}\int_0^u \boldsymbol{m}^{(2)}(u-x)Q(dx) - \frac{1}{c}(\boldsymbol{b}^T\otimes \boldsymbol{e}_n^T)w_2(u), \quad u \geq 0,
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

όπου $w_1(u) = \int_u^\infty \omega_2(u, x-u)Q(dx)$.

Παρατήρηση 3.1

Για $m = 1$ και $Q(0) = 1$, η (3.4) θα είναι ίση με την (3.5).

Παρατήρηση 3.2

Εάν λάβουμε υπόψη πως οι δύο διαδικασίες αριθμού των απαιτήσεων προέρχονται από μια ανεξάρτητη Poisson και γενικευμένη Erlang(2), αντίστοιχα, δηλαδή $\boldsymbol{\alpha} = (1)$, $\boldsymbol{\beta} = (1,0)$, $\boldsymbol{A} = (-\lambda)$ και $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 \\ 0 & -\lambda_2 \end{pmatrix}$, παίρνουμε από την (3.4) ότι η σχέση $\boldsymbol{m}^{(1)}(u) = (m_{11}^{(1)}(u), m_{12}^{(1)}(u))^T$ ικανοποιεί την ακόλουθη εξίσωση, για $u \geq 0$,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{m}^{(1)\prime}(u) = \frac{\delta}{c}\boldsymbol{m}^{(1)}(u) + \frac{1}{c}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\boldsymbol{m}^{(1)}(u) - \frac{1}{c}\begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 \\ 0 & -\lambda_2 \end{pmatrix}\boldsymbol{m}^{(1)}(u) \\ - \frac{1}{c}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\int_0^u \boldsymbol{m}^{(1)}(u-x)P(dx) - \frac{1}{c}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda_2 & 0 \end{pmatrix}\int_0^u \boldsymbol{m}^{(1)}(u-x)Q(dx) \\ - \frac{1}{c}\begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} w_1(u).\end{aligned}$$

3.4 Ρίζες για τη γενικευμένη θεμελιώδη εξίσωση του Lundberg

Έστω ότι το όριο $\lim_{u\to\infty} e^{-su} m_{ij}^{(1)}(u) = 0$ ισχύει για $i = 1,2,\dots,n,\ j = 1,2,\dots,m$ και κάθε $s \in \mathbb{C}$ που ικανοποιεί $\Re(s) \geq 0$. Παίρνοντας και στις δύο πλευρές της εξίσωσης (3.4) μετασχηματισμούς Laplace, έχουμε, για $s \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}s\widehat{\boldsymbol{m}}^{(1)}(s) - \boldsymbol{m}^{(1)}(0) \\ = \frac{\delta}{c}\widehat{\boldsymbol{m}}^{(1)}(s) - \frac{1}{c} I_{m\times m} \otimes \boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{m}}^{(1)}(s) - \frac{1}{c}\boldsymbol{B} \otimes I_{n\times n}\widehat{\boldsymbol{m}}^{(1)}(s) \\ - \frac{1}{c} I_{m\times m} \otimes (\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{\alpha})\widehat{\boldsymbol{m}}^{(1)}(s)P(s) - \frac{1}{c}(\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{\beta}) \otimes I_{n\times n}\widehat{\boldsymbol{m}}^{(1)}(s)Q(s) \\ - \frac{1}{c}(\boldsymbol{e}_m^T \otimes \boldsymbol{a}^T)\widehat{w}_1(s),\end{aligned}$$

δηλαδή,

$$\frac{1}{c} L_\delta(s)\widehat{\boldsymbol{m}}^{(1)}(s) = \boldsymbol{m}^{(1)}(0) - \frac{1}{c}(\boldsymbol{e}_m^T \otimes \boldsymbol{a}^T)\widehat{w}_1(s), \quad s \in \mathbb{C}, \tag{3.6}$$

όπου $\widehat{w}_1(s) = \int_0^\infty e^{-su} w_1(u) du$ και

$$L_\delta(s) = (cs - \delta) I_{mn\times mn} + I_{m\times m} \otimes \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} \otimes I_{n\times n} + I_{m\times m} \otimes (\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{\alpha}) \hat{P}(s) \\ + (\boldsymbol{b}^T \boldsymbol{\beta}) \otimes I_{n\times n} \hat{Q}(s). \tag{3.7}$$

Παρομοίως, έστω ότι $\lim_{u\to\infty} e^{-su} m_{ij}^{(1)}(u) = 0$ ισχύει για $i = 1,2,\dots,n,\ j = 1,2,\dots,m$ και κάθε $s \in \mathbb{C}$ που ικανοποιεί $\Re(s) \geq 0$. Από την (3.5) έχουμε πως

$$\frac{1}{c} L_\delta(s) \widehat{\boldsymbol{m}}^{(2)}(s) = \boldsymbol{m}^{(2)}(0) - \frac{1}{c} (\boldsymbol{b}^T \otimes \boldsymbol{e}_n^T) \widehat{w}_2(s), \quad s \in \mathbb{C}, \tag{3.8}$$

όπου $\widehat{w}_2(s) = \int_0^\infty e^{-su} w_2(u) du$.

Στο θεώρημα παρακάτω παρουσιάζεται αποτέλεσμα για τη γενικευμένη θεμελιώδη εξίσωση του Lundberg.

<u>Θεώρημα του Rouche</u>

Θεωρούμε δυο συναρτήσεις $f(z)$ και $g(z)$, οι οποίες είναι αναλυτικές πάνω σε μια απλή κλειστή καμπύλη C και στο εσωτερικό της. Εάν πάνω στη C ισχύει $|g(z)| < |f(z)|$, τότε οι συναρτήσεις $f(z) + g(z)$ και $f(z)$ έχουν το ίδιο πλήθος ριζών στο εσωτερικό της C.

<u>Θεώρημα 3.1</u>

Για $\delta > 0$, η γενικευμένη θεμελιώδης εξίσωση του Lundberg $\det[L_\delta(s)] = 0$ έχει ακριβώς mn ρίζες, έστω $\rho_1(\delta), \rho_2(\delta), \dots, \rho_{mn}(\delta)$, με $\Re(\rho_i(\delta)) > 0$.

<u>Απόδειξη</u>

Θα ακολουθήσουμε την εξής ιδέα. Έστω $\Lambda = diag(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ και $\Gamma = diag(b_{11}, b_{22}, \dots, b_{mm})$. Από την (3.7) έχουμε

$$L_\delta(s) = (cs-\delta)I_{mn\times mn} + [I_{m\times m}\otimes\Lambda + \Gamma\otimes I_{n\times n}] + I_{m\times m}\otimes(\boldsymbol{A}-\Lambda) + (\boldsymbol{B}-\Gamma)\otimes I_{n\times n} + I_{m\times m}\otimes(\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{\alpha})\hat{P}(s) + (\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{\beta})\otimes I_{n\times n}\hat{Q}(s), \qquad s\in\mathbb{C}\,.$$

Έστω, τώρα, C_δ, κύκλος, με κέντρο $\frac{\delta+max_{1\le i\le n,1\le j\le m}(|a_{ii}|,|b_{jj}|)}{c}$, και ακτίνας $\frac{\delta+max_{1\le i\le n,1\le j\le m}(|a_{ii}|,|b_{jj}|)}{c}$. Δηλώνουμε το εσωτερικό του C_δ με C_δ^+, το κλειστό δεξί μισό του μιγαδικού επιπέδου με $\mathbb{C}^+$, και το $\mathbb{C}^+ - C_\delta - C_\delta^+$ με C_δ^-. Ορίζουμε, για $0\le u\le 1, , s\in\mathbb{C}$

$$L_\delta(u,s) = (cs-\delta)I_{mn\times mn} + [I_{m\times m}\otimes\Lambda + \Gamma\otimes I_{n\times n}] + u[I_{m\times m}\otimes(\boldsymbol{A}-\Lambda) + (\boldsymbol{B}-\Gamma)\otimes I_{n\times n} + I_{m\times m}\otimes(\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{\alpha})\hat{P}(s) + (\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{\beta})\otimes I_{n\times n}\hat{Q}(s)]$$

Πρώτα δείχνουμε ότι

$$\det[L_\delta(u,s)] \neq 0 \text{ για } 0\le u\le 1, , s\in C_\delta \tag{3.9}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την ((k-1)n+1)ή γραμμή του $mn\times mn$ πίνακα $L_\delta(u,s)(1\le k\le m, 1\le l\le n)$, φτάνουμε στο

$$\begin{aligned}
&\left|(cs-\delta) + a_{ll} + b_{kk} + ua_l\alpha_l\hat{P}(s) + ub_k\beta_k\hat{Q}(s)\right| \\
&\quad\ge |\delta + |a_{ll}| + |b_{kk}| - cs| - ua_l\alpha_l\hat{P}(0) - ub_k\beta_k\hat{Q}(0) \\
&\quad\ge \delta + |a_{ll}| + |b_{kk}| - cs - ua_l\alpha_l\hat{P}(0) - ub_k\beta_k\hat{Q}(0) \\
&\quad> (|a_{ll}| + |b_{kk}|)u - ua_l\alpha_l\hat{P}(0) - ub_k\beta_k\hat{Q}(0) \\
&\quad= \left(\sum_{i=1,i\neq l}^{n} a_{li} + a_l\right)u + \left(\sum_{j=1,j\neq k}^{m} b_{kj} + b_k\right)u - ua_l\alpha_l\hat{P}(0) \\
&\quad- ub_k\beta_k\hat{Q}(0) \\
&\quad= u\sum_{i=1,i\neq l}^{n} a_{li} + \sum_{j=1,j\neq k}^{m} b_{kj} + ua_l\sum_{i=1,i\neq l}^{n}\alpha_i\hat{P}(0) + ub_k\sum_{j=1,j\neq k}^{m}\beta_j\hat{Q}(0) \\
&\quad= u\sum_{i=1,i\neq l}^{n}\left(a_{li} + a_l\alpha_i\hat{P}(0)\right) + u\sum_{j=1,j\neq k}^{m}\left(b_{kj} + b_k\beta_j\hat{Q}(0)\right) \\
&\quad\ge u\sum_{i=1,i\neq l}^{n}\left|a_{li} + a_l\alpha_i\hat{P}(s)\right| + u\sum_{j=1,j\neq k}^{m}|b_{kj} + b_k\beta_j\hat{Q}(s)\,|
\end{aligned} \tag{3.10}$$

για $0 \leq u \leq 1$ και $s \in C_\delta$, με τα οποία συμπεραίνουμε πως η (3.9) ισχύει. Χρησιμοποιώντας την ίδια εξαγωγή με την (3.10), εύκολα αντιλαμβανόμαστε πως η ανισότητα (3.9) ισχύει για $0 \leq u \leq 1,\ \ s \in \mathbb{C}_\delta^-$.

Τώρα, έστω $f(u)$ ο αριθμός των μηδενικών του $\det[L_\delta(u,s)]$ στο $\mathbb{C}_\delta^+$. Ως απόρροια του θεωρήματος Rouche, έχουμε:

$$f(u) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\delta} \frac{\frac{\partial}{\partial s}\det[L_\delta(u,s)]}{\det[L_\delta(u,s)]}ds$$

το οποίο δείχνει ότι η $f(u)$ αποτελεί μία συνεχή συνάρτηση στο $[0,1]$, και παίρνει ακέραιες τιμές, κι ως εκ τούτου είναι σταθερή. Εύκολα διαπιστώνουμε πως ισχύει $f(0) = mn$, το οποίο σημαίνει ότι $f(1) = mn$.

Το θεώρημα αποδείχτηκε. ■

<u>Παρατήρηση 3.3</u>

Εάν $\delta \to 0_+$, τότε $\rho_i(\delta) \to \rho_i(0)$, για $1 \leq i \leq mn$, και επιπλέον έχουμε ότι η $s = 0$ αποτελεί ρίζα της (3.7), καθώς και ο λόγος που έχουμε $L_0(0) = L$, όπου L είναι ένας Q-πίνακας.

Στην επόμενη ενότητα, οι $\rho_i(\delta)$ θα απλοποιηθούν ως ρ_i, για $i = 1, , \dots, mn$, και $\delta \geq 0$. Επίσης, υποθέτουμε πως οι $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{mn}$ είναι διακριτές.

3.5 Αποτελέσματα για τη συνάρτηση Gerber-Shiu

3.5.1 Ακριβείς εκφράσεις για την $\boldsymbol{m}^{(\mathbf{1})}(\boldsymbol{u})$

Τώρα θα θυμηθούμε τις διαφορές ενός πίνακα $L(s)$, σε σχέση με τους διακριτούς αριθμούς r_1, r_2, ..., οι οποίοι ορίζονται αναδρομικά ως εξής:

$$L[r_1, s] = \frac{L(s)-L(r_1)}{s-r_1}, \tag{3.11}$$

$$L[r_1, r_2, s] = \frac{L(r_1,s)-L(r_1,r_2)}{s-r_2}, \tag{3.12}$$

$$L[r_1, r_2, r_3, s] = \frac{L(r_1,r_2,s)-L(r_1,r_2,r_3)}{s-r_3},$$

και ούτω καθ' εξής.

Χρησιμοποιώντας την ίδια μέθοδο, παίρνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα.

<u>Θεώρημα 3.2</u>

Οι συναρτήσεις Gerber-Shiu, με μηδενικό αρχικό πλεόνασμα, δίνονται από:

$$\boldsymbol{m}^{(1)}(0) = \frac{1}{c} L_\delta^*[\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{mn}]^{-1}(L_\delta^* \widehat{w}_1)[\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{mn}](\boldsymbol{e}_m^T \otimes \boldsymbol{a}^T), \tag{3.13}$$

$$\boldsymbol{m}^{(2)}(0) = \frac{1}{c} L_\delta^*[\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{mn}]^{-1}(L_\delta^* \widehat{w}_2)[\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{mn}](\boldsymbol{b}^T \otimes \boldsymbol{e}_n^T), \tag{3.14}$$

όπου $L_\delta^*[\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_{mn}]$ είναι ο συμπληρωματικός πίνακας του $L_\delta[\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_{mn}]$, και $(L_\delta^*\widehat{w}_k)[\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_{mn}]=\sum_{i=1}^{mn}L_\delta^*[\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_{mn}]\,\widehat{w}_k[\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_{mn}]$, $k=1{,}2$, ορίζεται αναδρομικά από

$$(L_\delta^*\widehat{w}_k)[\rho_1,\rho_2]=L_\delta^*(\rho_1)\widehat{w}_k[\rho_1,\rho_2]+L_\delta^*[\rho_1,\rho_2]\widehat{w}_k(\rho_2). \tag{3.15}$$

$$(L_\delta^*\widehat{w}_k)[\rho_1,\rho_2,\rho_3]=L_\delta^*(\rho_1)\widehat{w}_k[\rho_1,\rho_2,\rho_3]+L_\delta^*[\rho_1,\rho_2]\widehat{w}_k[\rho_2,\rho_3]+ \\ L_\delta^*[\rho_1,\rho_2,\rho_3]\widehat{w}_k(\rho_3),$$

και ούτω καθ' εξής.

<u>Απόδειξη</u>

Από το γεγονός πως η $m_{ij}^{(1)}(s)$ είναι πεπερασμένη για $i=1,2,\dots,n$, $j=1,2,\dots,m$ και κάθε $s\in\mathbb{C}$, τέτοιο ώστε $\Re(s)\geq 0$, παίρνουμε, από την (3.6), για διακριτούς αριθμούς $\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_{mn}$,

$$\begin{aligned}L_\delta^*[\rho_1,\rho_2]c\boldsymbol{m}^{(1)}(0)&=\frac{L_\delta^*(\rho_2)-L_\delta^*(\rho_1)}{\rho_2-\rho_1}\Big(c\boldsymbol{m}^{(1)}(0)\Big)\\&=\frac{L_\delta^*(\rho_2)\widehat{w}_1(\rho_2)-L_\delta^*(\rho_1)\widehat{w}_1(\rho_1)}{\rho_2-\rho_1}(\boldsymbol{e}_m^T\otimes\boldsymbol{a}^T)\\&=\frac{(L_\delta^*(\rho_2)-L_\delta^*(\rho_1)\widehat{w}_1(\rho_2)+L_\delta^*(\rho_1)\widehat{w}_1(\rho_2)-\widehat{w}_1(\rho_1))}{\rho_2-\rho_1}(\boldsymbol{e}_m^T\otimes\boldsymbol{a}^T)\\&=[L_\delta^*(\rho_1)\widehat{w}_1[\rho_1,\rho_2]+L_\delta^*[\rho_1,\rho_2]\widehat{w}_1(\rho_2)](\boldsymbol{e}_m^T\otimes\boldsymbol{a}^T)\\&=(L_\delta^*\widehat{w}_1)[\rho_1,\rho_2](\boldsymbol{e}_m^T\otimes\boldsymbol{a}^T).\end{aligned}$$

Αναδρομικά, παίρνουμε τελικά ότι

$$L_\delta^*[\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_{mn}]c\boldsymbol{m}^{(1)}(0)=(L_\delta^*\widehat{w}_1)[\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_{mn}](\boldsymbol{e}_m^T\otimes\boldsymbol{a}^T),$$

με το οποίο η (3.13) αποδεικνύεται. Παρομοίως αποδεικνύεται η (3.14) από την (3.8). ■

3.5.2 Εκφράσεις για τους μετασχηματισμούς Laplace των συναρτήσεων Gerber-Shiu

Οι εξισώσεις (3.6) και (3.7) γράφονται ως

$$\widehat{\boldsymbol{m}}^{(1)}(s) = \frac{1}{\det[L_\delta(s)]}\left[L_\delta^*[s]\, c\boldsymbol{m}^{(1)}(0) - L_\delta^*[s]\, \widehat{w}_1(s)(\boldsymbol{e}_m^T \otimes \boldsymbol{a}^T)\right], \tag{3.16}$$

$$\widehat{\boldsymbol{m}}^{(2)}(s) = \frac{1}{\det[L_\delta(s)]}\left[L_\delta^*[s]\, c\boldsymbol{m}^{(2)}(0) - L_\delta^*[s]\, \widehat{w}_2(s)(\boldsymbol{b}^T \otimes \boldsymbol{e}_n^T)\right], \tag{3.17}$$

Εφαρμόζοντας τις διαιρεμένες διαφορές επανειλημμένα στους αριθμητές των δύο τελευταίων εξισώσεων, αντίστοιχα, μπορούμε να πάρουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα.

<u>Θεώρημα 3.3</u>

Οι μετασχηματισμοί Laplace για την συναρτήσεις Gerber-Shiu, θα είναι:

$$\widehat{\boldsymbol{m}}^{(1)}(s) = \frac{\prod_{i=1}^{mn}(s-\rho_i)}{\det[L_\delta(s)]}\Big\{L_\delta^*[\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{mn}, s]\left[c\boldsymbol{m}^{(1)}(0) - \widehat{w}_1(s)(\boldsymbol{e}_m^T \otimes \boldsymbol{a}^T)\right] - \sum_{i=1}^{mn} L_\delta^*[\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_i]\, \widehat{w}_1[\rho_i, \dots, \rho_{mn}, s](\boldsymbol{e}_m^T \otimes \boldsymbol{a}^T)\Big\}, \qquad s \in \mathbb{C} \tag{3.18}$$

$$\widehat{\boldsymbol{m}}^{(2)}(s) = \frac{\prod_{i=1}^{mn}(s-\rho_i)}{\det[L_\delta(s)]}\Big\{L_\delta^*[\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{mn}, s]\left[c\boldsymbol{m}^{(2)}(0) - \widehat{w}_2(s)(\boldsymbol{b}^T \otimes \boldsymbol{e}_n^T)\right] - \sum_{i=1}^{mn} L_\delta^*[\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_i]\, \widehat{w}_1[\rho_i, \dots, \rho_{mn}, s](\boldsymbol{b}^T \otimes \boldsymbol{e}_n^T)\Big\}, \qquad s \in \mathbb{C} \tag{3.19}$$

<u>Απόδειξη</u>

Σημειώνοντας πως $s = \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{mn}$ είναι οι ρίζες του αριθμητή της (3.16), βλέπουμε πως

$$
\begin{aligned}
L_\delta^*[s]c\boldsymbol{m}^{(1)}(0) - L_\delta^*[s]\,\widehat{w}_1(s)(\boldsymbol{e}_m^T \otimes \boldsymbol{a}^T)
&= L_\delta^*[s]c\boldsymbol{m}^{(1)}(0) - L_\delta^*[s]\,\widehat{w}_1(s)(\boldsymbol{e}_m^T \otimes \boldsymbol{a}^T) \\
&- \left[L_\delta^*[\rho_1]c\boldsymbol{m}^{(1)}(0) - L_\delta^*[\rho_1]\,\widehat{w}_1(\rho_1)(\boldsymbol{e}_m^T \otimes \boldsymbol{a}^T)\right] \\
&= (s-\rho_1)\left[L_\delta^*[\rho_1, s]c\boldsymbol{m}^{(1)}(0) - L_\delta^*\ \widehat{w}_1[\rho_1, s](\boldsymbol{e}_m^T \otimes \boldsymbol{a}^T)\right] = \cdots \\
&= \prod_{i=1}^{mn}(s-\rho_i)\left\{L_\delta^*[\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{mn}, s]c\boldsymbol{m}^{(1)}(0)\right. \\
&\left. - (L_\delta^*\ \widehat{w}_1)[\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{mn}, s](\boldsymbol{e}_m^T \otimes \boldsymbol{a}^T)\right\} \\
&= \prod_{i=1}^{mn}(s-\rho_i)\left\{L_\delta^*[\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{mn}, s]\left[c\boldsymbol{m}^{(1)}(0) - \widehat{w}_1[s](\boldsymbol{b}^T \otimes \boldsymbol{e}_n^T)\right]\right. \\
&\left. - \sum_{i=1}^{mn} L_\delta^*[\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_i]\,\widehat{w}_1[\rho_i, \dots, \rho_{mn}, s](\boldsymbol{e}_m^T \otimes \boldsymbol{a}^T)\right\}.
\end{aligned}
$$

όπου στην τελευταία εξίσωση χρησιμοποιούμε την εξίσωση $(L_\delta^*\ \widehat{w}_1)[\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{mn}, s] = L_\delta^*[\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{mn}, s]\widehat{w}_1[s] + \sum_{i=1}^{mn} L_\delta^*[\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_i]\,\widehat{w}_1[\rho_i, \dots, \rho_{mn}, s]$, το οποίο μπορεί να προκύψει αναδρομικά από την (3.15), και χρησιμοποιώντας επιπλέον τις σχέσεις (3.16), (3.18) αποδεικνύεται. Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε τις (3.19) και (3.17), αντίστοιχα. ■

3.5.3 Αποτελέσματα για την κλασματική οικογένεια κατανομών των απαιτήσεων

Οι μετασχηματισμοί Laplace του προηγούμενου θεωρήματος μπορούν να αντιστραφούν για ορισμένες ειδικές διανομές ποσού απαίτησης. Στα ακόλουθα, εξετάζουμε την περίπτωση κατά την οποία οι κατανομές ποσού της απαίτησης P και Q προέρχονται και οι δύο από την κλασματική οικογένεια, δηλαδή, οι μετασχηματισμοί θα έχουν τη μορφή

$$
\widehat{P}(s) = \frac{p_{k_1-1}^{(2)}(s)}{p_{k_1}^{(1)}(s)}, \qquad \widehat{Q}(s) = \frac{q_{k_2-1}^{(2)}(s)}{q_{k_2}^{(1)}(s)}, \qquad k_1, k_2 \in \mathbb{N},
$$

όπου $p_{k_1}^{(1)}(s)$ (ή $q_{k_2}^{(1)}(s)$) αποτελεί πολυώνυμο βαθμού k_1 (αντίστοιχα k_2), ενώ $p_{k_1-1}^{(2)}(s)$ (ή $q_{k_2-1}^{(2)}(s)$) αποτελεί πολυώνυμο βαθμού $k_1 - 1$ (αντίστοιχα $k_2 - 1$) ή λιγότερο. Ακόμα, υποθέτουμε πως οι εξισώσεις $p_{k_1}^{(1)}(s) = 0$ και $q_{k_2}^{(1)}(s) = 0$ έχουν ρίζες μόνο με αρνητικά πραγματικά μέρη. Μπορούμε επιπλέον, χωρίς βλάβη της γενικότητας, να υποθέσουμε ότι οι $p_{k_1}^{(1)}(s)$ και $q_{k_2}^{(1)}(s)$ έχουν κύριο συντελεστή 1. Μπορούμε από την (3.1) να δούμε πως αυτή η μεγάλη κλάση κατανομών περιλαμβάνει την phase-type κατανομή, επομένως περιλαμβάνει και την Erlang, την Coxian, εκθετική και μίξεις αυτών.

Έστω $r(s) = [p_{k_1}^{(1)}(s) q_{k_2}^{(1)}(s)]^{mn}$. Πολλαπλασιάζοντας τόσο τον αριθμητή, όσο και τον παρονομαστή με $r(s)$, έχουμε

$$\widehat{\boldsymbol{m}}^{(1)}(s) = \frac{\prod_{i=1}^{mn}(s-\rho_i)}{\det[L_\delta(s)]r(s)} \left\{ L_\delta^*[\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{mn}, s]\, r(s) \left[c\boldsymbol{m}^{(1)}(0) - \widehat{w}_1(s)(\boldsymbol{e}_m^T \otimes \boldsymbol{a}^T) \right] - r(s) \sum_{i=1}^{mn} L_\delta^*[\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_i]\, \widehat{w}_1[\rho_i, \dots, \rho_{mn}, s](\boldsymbol{e}_m^T \otimes \boldsymbol{a}^T) \right\}, \qquad s \in \mathbb{C} \tag{3.20}$$

Εύκολα βλέπει κανείς πως ο παρονομαστής $\det[L_\delta(s)]\, r(s)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $(k_1 + k_2 + 1)mn$ με κύριο συντελεστή c^{mn}, τότε θα έχουμε

$$\det[L_\delta(s)]\, r(s) = c^{mn} \prod_{i=1}^{mn}(s - \rho_i) \prod_{i=1}^{(k_1+k_2)mn}(s + R_i), \quad s \in \mathbb{C},$$

όπου όλα τα R_i έχουν θετικά πραγματικά μέρη, σύμφωνα με τον ορισμό της κλασματικής κατανομής, και του γεγονότος ότι η γενικευμένη εξίσωση του Lundberg έχει μόνο mn ρίζες στο δεξί μισό του μιγαδικού πίνακα. Απαλείφοντας τον κοινό όρο $\prod_{i=1}^{mn}(s - \rho_i)$ από αριθμητή και παρονομαστή στην (3.18), έχουμε

$$\widehat{\boldsymbol{m}}^{(1)}(s) = \frac{1}{c^{mn} \prod_{i=1}^{(k_1+k_2)mn}(s+R_i)} \left\{ L_\delta^*[\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{mn}, s]\, r(s) \left[c\boldsymbol{m}^{(1)}(0) - \widehat{w}_1(s)(\boldsymbol{e}_m^T \otimes \boldsymbol{a}^T) \right] - r(s) \sum_{i=1}^{mn} L_\delta^*[\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_i]\, \widehat{w}_1[\rho_i, \dots, \rho_{mn}, s](\boldsymbol{e}_m^T \otimes \boldsymbol{a}^T) \right\}, \quad s \in \mathbb{C}, \tag{3.21}$$

Προκειμένου να δείξουμε ότι τα στοιχεία του πίνακα $L_\delta^*[\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{mn}, s]\, r(s)$ είναι πολυώνυμα βαθμού μικρότερου του $(k_1 + k_2 + 1)mn$, θα πρέπει πρώτα να λάβουμε υπόψη το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 3.1

Για δύο συναρτήσεις $f(s) = \frac{h_{m-1}(s)}{a_m(s)}$ και $g(s) = \frac{h_{m+n}(s)}{a_m(s)}$, $s \in \mathbb{C}$, όπου $a_m(s)$ είναι πολυώνυμο βαθμού m, $h_{m+n}(s)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $m+n$, και $h_{m-1}(s)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $m-1$ η λιγότερο, έχουμε

(i) $$g[r_1, \dots, r_k, s] = \begin{cases} \frac{d^{(k)}_{m+n-k}(s)}{a_m(s)} & 1 \le k \le n \\ \frac{\upsilon^{(n+1)}_{m-1}(s)}{a_m(s)}, & k = n+1, \end{cases}$$

(ii) $$f[r_1, \dots, r_k, s] = \frac{c^{(k)}_{m-1}(s)}{a_m(s)}, \quad k = 1,2, \dots,$$

όπου $r_i \in \mathbb{C}$, $i = 1,2, \dots$, είναι διαφορετικοί αριθμοί, (επίσης διάφοροι του s) οι οποίοι καθορίζουν καλώς τα $f(r_i), g(r_i)$, $\upsilon^{(n+1)}_{m-1}(s)$ και $c^{(k)}_{m-1}(s)$, $k = 1,2, \dots$, αποτελούν πολυώνυμα βαθμού $m-1$ η λιγότερο, και $d^{(k)}_{m+n-k}(s)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $m+n-k$, για $1 \le k \le n$.

Απόδειξη

Για την απόδειξη δείτε (Z. Zhang et al. / Journal of Computational and Applied Mathematics, σελ. 2582). ■

Λήμμα 3.2

Τα στοιχεία του πίνακα $L^*_\delta[\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{mn}, s]\, r(s)$ είναι πολυώνυμα βαθμών $(k_1 + k_2)mn - 1$ ή λιγότερο.

Απόδειξη

Για την απόδειξη δείτε (Z. Zhang et al. / Journal of Computational and Applied Mathematics, σελ. 2583). ■

Θεώρημα 3.4

Εάν οι P και Q προέρχονται από την κλασματική οικογένεια, οι εκφράσεις των συναρτήσεων Gerber-Shiu δίνονται από τη σχέση

$$\widehat{\boldsymbol{m}}^{(1)}(u) = \frac{1}{c^{mn}} \sum_{k=1}^{(k_1+k_2)mn} \Big\{ c e^{-R_k u} M^{(k)} \widehat{\boldsymbol{m}}^{(1)}(0) - e^{-R_k u} \star \Big[M^{(k)} w_1(u) (\boldsymbol{e}_m^T \otimes \boldsymbol{a}^T) - G^{(k)} \sum_{i=1}^{mn} (-1)^{mn-i} L_\delta^* [\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_i] \big(\prod_{i=1}^{mn} T_{\rho_i} \big) w_1(u) (\boldsymbol{e}_m^T \otimes \boldsymbol{a}^T) \Big] \Big\} + \frac{1}{c^{mn}} \sum_{i=1}^{mn} (-1)^{mn-i} L_\delta^* [\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_i] \big(\prod_{i=1}^{mn} T_{\rho_i} \big) w_1(u) (\boldsymbol{e}_m^T \otimes \boldsymbol{a}^T), \qquad u \geq 0 \qquad (3.22)$$

$$\widehat{\boldsymbol{m}}^{(2)}(u) = \frac{1}{c^{mn}} \sum_{k=1}^{(k_1+k_2)mn} \Big\{ c e^{-R_k u} M^{(k)} \widehat{\boldsymbol{m}}^{(2)}(0) - e^{-R_k u} \star \Big[M^{(k)} w_2(u) (\boldsymbol{b}^T \otimes \boldsymbol{e}_n^T) - G^{(k)} \sum_{i=1}^{mn} (-1)^{mn-i} L_\delta^* [\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_i] \big(\prod_{i=1}^{mn} T_{\rho_i} \big) w_2(u) (\boldsymbol{b}^T \otimes \boldsymbol{e}_n^T) \Big] \Big\} + \frac{1}{c^{mn}} \sum_{i=1}^{mn} (-1)^{mn-i} L_\delta^* [\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_i] \big(\prod_{i=1}^{mn} T_{\rho_i} \big) w_2(u) (\boldsymbol{b}^T \otimes \boldsymbol{e}_n^T), \qquad u \geq 0 \qquad (3.23)$$

όπου $\star$ ο τελεστής συνέλιξης.

Παρατήρηση 3.4

Έστω $m = 1$ και $Q(0) = 1$. Τότε, θα έχουμε $\hat{Q}(0) \equiv 1$ και $k_2 = 0$. Επομένως, η $m(u) = \boldsymbol{\alpha m}^{(1)}(u)$ είναι η συνάρτηση Gerber-Shiu για το μοντέλο κινδύνου Sparre Andersen, με phase-type ενδιάμεσους χρόνους απαιτήσεων, ενώ η $\boldsymbol{m}^{(2)}(u)$ δε λαμβάνεται υπόψη.

3.6 Εφαρμογή

Σκοπός μας στην παρούσα ενότητα είναι να καταδείξουμε μια εφαρμογή των αποτελεσμάτων μας. Υποθέτουμε πως η διαδικασία πλεονάσματος μιας ασφαλιστικής εταιρείας δίνεται από την εξίσωση $U_0(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N_1(t)} X_i$. Επιπλέον, υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι την παρούσα στιγμή ως τον αρχικό χρόνο, και την ίδια στιγμή η εταιρεία έχει ευκαιρία να αποδεχθεί ένα αντασφαλιστήριο συμβόλαιο, με διαδικασία κέρδους $c_2 t - \sum_{i=1}^{N_2(t)} Y_i$. Τώρα, το ερώτημα είναι κατά πόσο η εταιρεία θα έπρεπε να αποδεχθεί το συμβόλαιο. Ένας αποτελεσματικός τρόπος επίλυσης του προβλήματος είναι η σύγκριση της πιθανότητας χρεοκοπίας πριν την αποδοχή του συμβολαίου και της αντίστοιχης πιθανότητας μετά την αποδοχή.

Παρακάτω, θεωρούμε την αρχική διαδικασία πλεονάσματος $U_0(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N_1(t)} X_i$, όπου $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$, και η κατανομή των απαιτήσεων P είναι εκθετικά κατανεμημένη, με μετασχηματισμό Laplace $\hat{P} = \frac{\lambda}{s+\lambda}$. Επίσης, θεωρούμε τη διαδικασία πλεονάσματος $U_1(t) = u + (c_1 + c_2)t - \sum_{i=1}^{N_1(t)} X_i - \sum_{i=1}^{N_2(t)} Y_i$, με την αποδοχή της σύμβασης, με διαδικασία κέρδους $c_2 t - \sum_{i=1}^{N_2(t)} Y_i$, όπου $\boldsymbol{\beta} = (1)$, $\boldsymbol{B} = (b_{11})$, $\boldsymbol{b} = (b_1)$, και η κατανομή των απαιτήσεων Q είναι εκθετικά κατανεμημένη, με μετασχηματισμό Laplace $\hat{Q} = \frac{\xi}{s+\xi}$.

Προκειμένου να βρούμε την πιθανότητα χρεοκοπίας, υποθέτουμε $\delta = 0$ και $\omega_1(x,y) = \omega_2(x,y) = 1$. Αναλόγως, παίρνουμε $w_1(x) = e^{-\lambda x}$, $w_2(x) = e^{-\xi x}$, οπότε και $\hat{w}_1(s) = \frac{1}{s+\lambda}$ και $\hat{w}_2(s) = \frac{1}{s+\xi}$. Οι εκφράσεις για τις πιθανότητες χρεοκοπίας των δύο διαδικασιών πλεονάσματος $U_0(t)$ και $U_1(t)$, με βάση τις $\psi_0(u)$ και $\psi_1(u)$, ορίζονται:

Τώρα, έστω $c_1 = 1, c_2 = 2, \boldsymbol{\alpha} = (0.5, 0.5)$, $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0.5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = (-2)$, $\lambda = 1, \xi = 2$. Εύκολα βλέπουμε ότι η κύρια συνθήκη θετικής ασφαλείας ικανοποιείται, αφού $c_1 = 1 > E(X)/E(V) = 0.6667$, και $c_2 = 2 > E(Y)/E(L) = 1$. Έστω $\rho_1^0 = 0$, $\rho_2^0 = 2.3229$, $R_1^0 = 1$, $R_2^0 = 0.3229$, $\rho_1^1 = 0$, $\rho_2^1 = 0.9863$, $R_1^1 = 1$, $R_2^1 = 1.584$, $R_3^1 = 1.5$, $R_4^1 = 0.569$. Οπότε, έχουμε αντίστοιχα $\boldsymbol{m}_0^{(1)}(0) = \begin{pmatrix} 0.6457 \\ 0.7085 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{m}_1^{(1)}(0) = \begin{pmatrix} 0.2019 \\ 0.2685 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{m}_1^{(2)}(0) = \begin{pmatrix} 0.3441 \\ 0.3234 \end{pmatrix}$.

Έτσι, για $u \geq 0$, έχουμε

$$\boldsymbol{m}_0^{(1)}(u) = \begin{pmatrix} 0.6457 \\ 0.7085 \end{pmatrix} e^{-0.3229u},$$

$$\boldsymbol{m}_1^{(1)}(u) = \begin{pmatrix} -0.0556 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-u} + \begin{pmatrix} -0.0160 \\ -0.1105 \end{pmatrix} e^{-1.584u} + \begin{pmatrix} -0.0746 \\ 0.0006 \end{pmatrix} e^{-1.5u} + \begin{pmatrix} 0.3480 \\ 0.3785 \end{pmatrix} e^{-0.5690u},$$

$$\boldsymbol{m}_1^{(2)}(u) = \begin{pmatrix} 0.0431 \\ 0.1598 \end{pmatrix} e^{-1.5840u} + \begin{pmatrix} 0.1429 \\ 0.0012 \end{pmatrix} e^{-1.5u} + \begin{pmatrix} 0.1580 \\ 0.1624 \end{pmatrix} e^{-0.5690u}.$$

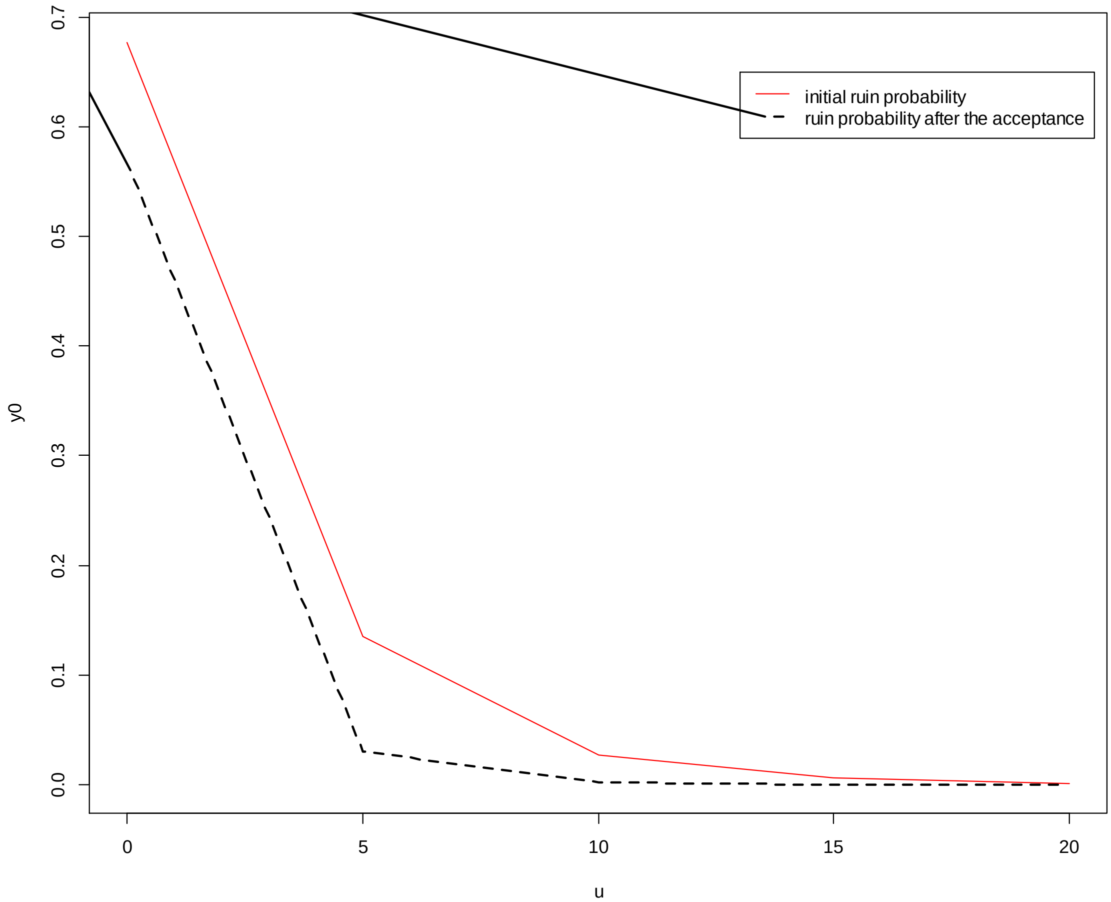
Συνεπώς, έχουμε πως

$$\psi_0(u) = \boldsymbol{\alpha m_0^{(1)}}(u) = 0.6771 e^{-0.3229u}, \quad u \geq 0,$$

$$\psi_1(u) = \boldsymbol{\alpha}\left(\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{1}}^{(\boldsymbol{1})}(u) + \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{1}}^{(\boldsymbol{2})}(u)\right) = -0.0278e^{-u} + 0.0382e^{-1.584u} + 0.0351e^{-1.5u} + 0.5234e^{-0.5690u}, \;\; u \geq 0$$

Στο γράφημα που δημιουργήσαμε μέσω κώδικα R βλέπουμε τις πιθανότητες χρεοκοπίας $\psi_0(u)$ και $\psi_1(u)$, για $u \in [0,20]$.

```
> u<-seq(0,20,5);
> y0<-0.6771*exp(-0.3229*u);
> y1<--0.0278*exp(-u)+0.0382*exp(-1.584*u)+0.035*exp(-1.5*u)+0.5234*e
xp(-0.569*u);
> plot(u,y0,type="l",col="red");
> lines(u,y1,lty=2,col="black",lwd=2);
> legend(13, 0.65, c("initial ruin probability","ruin probability aft
er the acceptance"),lty=c(1,2),
+        col=c("red","black"), lwd=c(1,2));
```



Σχήμα 3.1 Οι πιθανότητες χρεοκοπίας πριν και μετά την αποδοχή του αντασφαλιστηρίου συμβολαίου

Με αυτό το γράφημα και το γεγονός ότι $\psi_1(u)/\psi_0(u) = o(u)$, μπορούμε να δούμε ότι η εταιρεία θα πρέπει να αποδεχθεί τη σύμβαση αντασφάλισης, ανεξάρτητα από το πόσα χρήματα έχουν αυτή τη στιγμή που η $\psi_1(u)$ είναι μικρότερη από την $\psi_0(u)$, για κάθε $u \geq 0$. Διαισθητικά, το ποσοστό του αναμενόμενου κέρδους της αντασφάλισης $c_2 - E(Y)/E(L) = 1$ είναι μεγαλύτερο από το αρχικό ποσοστό της εταιρείας, $c_1 - E(X)/E(V) = 0.3333$, οπότε εύλογα γίνεται δεκτή η σύμβαση αντασφάλισης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Το μέγιστο πλεόνασμα πριν από την ζημιά για δύο κλάσεις κινδύνου

4.1 Εισαγωγή

Στην αναλογιστική επιστήμη και στην βιβλιογραφία που τη συνοδεύει, έχει διαπιστωθεί ότι τα μέτρα κινδύνου για ένα μοντέλο που περιλαμβάνει δύο ανεξάρτητες κατηγορίες κινδύνων έχουν αναλυθεί εκτενώς. Μεταξύ αυτών, αξίζει να σημειωθεί τις ότι οι διαδικασίες των απαιτήσεων των αναμενόμενων προεξοφλητικών συναρτήσεων ζημιάς είναι ανεξάρτητες Poisson και γενικευμένες Erlang(2) διαδικασίες.

Ας υποθέσουμε ότι οι διαδικασίες των απαιτήσεων είναι ανεξάρτητες Poisson και γενικευμένες Erlang(n), αντίστοιχα, στις οποίες λαμβάνονται οι μετασχηματισμοί Laplace των αναμενόμενων προεξοφλητικών συναρτήσεων ζημιάς. Σε αυτή την περίπτωση, διερευνούμε τα μέτρα κινδύνου στο μοντέλο, υποθέτοντας ότι οι χρόνοι άφιξης των δύο διαδικασιών των απαιτήσεων ακολουθούν κατανομή τύπου φάσης. Είναι γνωστό ότι το μέγιστο πλεόνασμα πριν από την χρεοκοπία είναι ένας σημαντικός παράγοντας των περιουσιακών στοιχείων των ασφαλιστικών επιχειρήσεων και θα παρέχει τη βάση για την εκτέλεση της πληρωμής του μερίσματος και της επενδυτικής απόφασης.

Ο σκοπός μας μέσα από αυτήν την ενότητα είναι να εξετάσουμε την κατανομή του μέγιστου πλεονάσματος πριν από την χρεοκοπία σε δύο κατηγορίες μοντέλου κινδύνου, όπου και οι δύο διαδικασίες αριθμού των απαιτήσεων έχουν χρόνους άφιξης που ακολουθούν κατανομή τύπου φάσης. Στη συνέχεια της ενότητας περιγράφουμε το μοντέλο παρουσιάζουμε τις διαφορικές εξισώσεις για την κατανομή του μέγιστου πλεονάσματος πριν από την χρεοκοπία, λαμβάνουμε τα κύρια αποτελέσματα και τέλος εφαρμόζουμε τις προαναφερθείσες διαδικασίες μέσα από ένα παράδειγμα.

4.2 Παρουσίαση του μοντέλου

Θεωρούμε την διαδικασία πλεονάσματος $U(t)$, όπως την αναφέραμε και στις προηγούμενες ενότητες, με τα θεωρήματα, τους ορισμούς, τους περιορισμούς και όλα τα αποτελέσματα που τη συνοδεύουν. Η διαφοροποίηση που θα έχουμε είναι ότι θα εισαγάγουμε στην εξίσωση την διαδικασία Brown $\{B(t): t \geq 0\}$ και μία μεταβλητή σ η οποία ονομάζεται παράμετρος διασποράς.

<u>Ορισμός 4.1</u>

Μία στοχαστική ανέλιξη $X_t,\ t \geq 0$ (με τιμές στο R) καλείται κίνηση Brown με παραμέτρους $\mu \in R$ (τάση - drift parameter) και $\sigma > 0$ (μεταβλητότητα - volatility) (συμβ. BM(μ, σ2)) αν ισχύει ότι, για κάθε y ≥ 0, t > 0,

1) Η τ.μ. $X_t + y - X_y \sim N(\mu t, t\sigma^2)$.

2) Η τ.μ. $X_t + y - X_y$, είναι ανεξάρτητη από τις $X_u, 0 \leq u \leq y$ (δηλ. ανεξ. της $\sigma(X_u, u \leq y)$).

Συνεπώς έχουμε:

$$U(t) = u + ct - S(t) + B(t)\sigma\ ,\ t \geq 0, \qquad (4.1)$$

ενώ για $d > 0$, ορίζουμε με $\mathcal{G}(u{:}\,d)$ την πιθανότητα ότι η χρεοκοπία συμβαίνει, με αρχικό πλεόνασμα u, χωρίς η διαδικασία του πλεονάσματος να φτάσει στο επίπεδο d πριν από την χρεοκοπία, η οποία είναι

$$\mathcal{G}(u{:}\,d) = Pr\left(\sup_{0\leq t\leq T} U(t) < d, T < \infty | U(0) = u\right),$$

όπου $\mathcal{G}(u{:}\,d) = 1$ για $u = 0$, $\mathcal{G}(u{:}\,d) = 0$ για $d \leq u$ και $\mathcal{G}(u{:}\,d) = \psi(u)$ για $d \to \infty$.

Ορίζουμε την συνάρτηση κατανομής $F(t) = 1 - \boldsymbol{\alpha}^T e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{e}_n\ , t \geq 0$ και την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(t) = \boldsymbol{\alpha}^T e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{a}\ , t \geq 0$ με χρόνους άφιξης $\{T_i\}_{i=1,2,\ldots}$ να είναι μία κατανομή τύπου φάσης με αναπαράσταση $(\boldsymbol{\alpha}^T, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{a})$ όπου

$$\boldsymbol{\alpha}^T = (\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_n)\ , a_i > 0 \text{ και } \textstyle\sum_{i=1}^n a_i = 1\ ,$$

$$\boldsymbol{A} = \left(a_{i,j}\right)_{i,j=1}^{n},$$

$$\boldsymbol{a} = (\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_n)^T \text{ με } \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_n ,$$

με την συνάρτηση Laplace να έχει την εξίσωση

$$\hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \boldsymbol{\alpha}^T (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} \boldsymbol{a} .$$

Αξίζει να σημειωθεί πως οι χρόνοι άφιξης $\{T_i\}_{i=1,2,\dots}$ αναφέρονται στον χρόνο μέχρι η συνεχής αλυσίδα Markov, έστω $I_t^{(i)}{}_{i=1,2,\dots}$, να φτάσει στην απορροφητική της κατάσταση με n μεταβατικές καταστάσεις $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ και μία απορροφητική κατάσταση E_0.

Συνεχίζουμε με την συνάρτηση κατανομής $G(t) = 1 - \boldsymbol{\beta}^T e^{\boldsymbol{B}t}\boldsymbol{e}_m$, $t \geq 0$ και την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $g(t) = \boldsymbol{\beta}^T e^{\boldsymbol{B}t}\boldsymbol{b}$, $t \geq 0$ με χρόνους άφιξης $\{V_i\}_{i=1,2,\dots}$ να είναι μία κατανομή τύπου φάσης με αναπαράσταση $(\boldsymbol{\beta}^T, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{b})$ όπου

$$\boldsymbol{\beta}^T = (\beta_1, \beta_2 \dots, \beta_m) , a_i > 0 \text{ και } \textstyle\sum_{i=1}^m \beta_i = 1 ,$$

$$\boldsymbol{B} = \left(b_{i,j}\right)_{i,j=1}^m ,$$

$$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2 \dots, b_m)^T \text{ με } \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{B}\boldsymbol{e}_m ,$$

με την συνάρτηση Laplace να έχει την εξίσωση

$$\hat{g}(s) = \int_0^\infty e^{-st} g(t)dt = \boldsymbol{\beta}^T (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})^{-1} \boldsymbol{b} .$$

Οι χρόνοι άφιξης $\{V_i\}_{i=1,2,\dots}$ αναφέρονται στον χρόνο μέχρι η συνεχής αλυσίδα Markov, έστω $J_t^{(i)}{}_{i=1,2,\dots}$, να φτάσει στην απορροφητική της κατάσταση με m μεταβατικές καταστάσεις $\{Q_1, Q_2, \dots, Q_n\}$ και μία απορροφητική κατάσταση Q_0.

Τώρα ας δημιουργήσουμε μία δισδιάστατη διαδικασία Markov $\left\{I_t^{(i)}{}_{i=1,2,\dots}, J_t^{(i)}{}_{i=1,2,\dots}\right\}$ όπου

$$I(t) = I(t)^{(1)}, 0 \leq t \leq T_1, \dots, I(t) = I_{t-T_k}^{k+1}, T_k \leq t \leq T_k + T_{k+1}, \dots,$$

$$J(t) = J(t)^{(1)}, 0 \leq t \leq V_1, \dots, J(t) = J_{t-V_k}^{k+1}, V_k \leq t \leq V_k + V_{k+1}, \dots,$$

συνεπώς οι υποκείμενες διαδικασίες με καταστάσεις $\{(E_1, Q_1), (E_2, Q_1), \dots, (E_n, Q_1), (E_1, Q_2), (E_2, Q_2), \dots, (E_n, Q_2), \dots, (E_1, Q_m), (E_2, Q_m), \dots, (E_n, Q_m)\}$

έχουν κατανομή $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\beta} \otimes \boldsymbol{a}$ όπου $\otimes$ το γινόμενο του Kronecker για δύο πίνακες.

Άρα για $i = 1,2, \dots n$, $j = 1,2, \dots , m$, $k = 1,2$ η συνάρτηση του πλεονάσματος πριν από την χρεοκοπία εάν η χρεοκοπία προκλήθηκε από μία απαίτηση τάξης k είναι

$$\mathcal{G}^{(k)}(u{:}\, d) = \boldsymbol{\gamma}^T \boldsymbol{\mathcal{G}}^{(k)}(u{:}\, d),$$

με $U(0) = u \cdot \mathcal{G}_{i,j}^{(k)}(u{:}\, d)$.

Οπότε καταλήγουμε στο ακόλουθο αποτέλεσμα

$$\mathcal{G}(u{:}\, d) = \boldsymbol{\gamma}^T \boldsymbol{\mathcal{G}}(u{:}\, d) = \boldsymbol{\gamma}^T \left[\boldsymbol{\mathcal{G}}^{(1)}(u{:}\, d) + \boldsymbol{\mathcal{G}}^{(2)}(u{:}\, d)\right].$$

4.3 Ολοκληρο-διαφορικές εξισώσεις

Θεώρημα 4.1

Όταν $0 \leq u < d$ τότε τα διανύσματα $\mathcal{G}_{i,j}^{(k)}(u{:}\, d), k = 1,2$ ικανοποιούν τις ακόλουθες ολοκληρο-διαφορικές εξισώσεις

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial u^2} + c\frac{\partial}{\partial u}\right)\boldsymbol{\mathcal{G}}^{(1)}(u{:}\, d) + \boldsymbol{I}_{m\times m} \otimes \boldsymbol{A}\boldsymbol{\mathcal{G}}^{(1)}(u{:}\, d) \\
&+\boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{I}_{n\times n}\, \boldsymbol{\mathcal{G}}^{(1)}(u{:}\, d) + \boldsymbol{I}_{m\times m} \otimes (\boldsymbol{a}\, \boldsymbol{a}^T) \int_0^u \boldsymbol{\mathcal{G}}^{(1)}(u - x{:}\, d)\, f(x)dx \\
&+(\boldsymbol{b}\, \boldsymbol{\beta}^T) \otimes \boldsymbol{I}_{n\times n} \int_0^u \boldsymbol{\mathcal{G}}^{(1)}(u - x{:}\, d)\, g(x)dx + (\boldsymbol{e}_m \otimes \boldsymbol{a})\bar{F}(u) = \boldsymbol{0}_{mn} \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

και

$$\left(\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial u^2}+c\frac{\partial}{\partial u}\right)\boldsymbol{\mathcal{G}}^{(2)}(u{:}\,d)+\boldsymbol{I}_{m\times m}\otimes \boldsymbol{A}\boldsymbol{\mathcal{G}}^{(2)}(u{:}\,d)$$

$$+\boldsymbol{B}\otimes \boldsymbol{I}_{n\times n}\,\boldsymbol{\mathcal{G}}^{(2)}(u{:}\,d)+\boldsymbol{I}_{m\times m}\otimes(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{a}^T)\int_0^u \boldsymbol{\mathcal{G}}^{(2)}(u-x{:}\,d)\,f(x)dx$$

$$+(\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{\beta}^T)\otimes \boldsymbol{I}_{n\times n}\int_0^u \boldsymbol{\mathcal{G}}^{(2)}(u-x{:}\,d)\,g(x)dx+(\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{e}_n)\bar{G}(u)=\boldsymbol{0}_{mn} \qquad (4.3).$$

<u>Απόδειξη</u>

$$\mathcal{G}_{i,j}^{(1)}(u{:}\,d)=(1+a_{ii}dt)\big(1+b_{jj}dt\big)E\Big[\mathcal{G}_{i,j}^{(1)}(u+cdt+B(dt)\sigma:d)\Big]$$

$$+\big(1+b_{jj}dt\big)\sum_{k=1,k\neq i}^{n}(a_{ik}dt)E\Big[\mathcal{G}_{k,j}^{(1)}(u+cdt+B(dt)\sigma:d)\Big]$$

$$+(1+a_{ii}dt)\sum_{h=1,k\neq j}^{m}(b_{jh}dt)E\Big[\mathcal{G}_{i,h}^{(1)}(u+cdt+B(dt)\sigma:d)\Big]+\big(1+b_{jj}dt\big)(a_i dt)$$

$$\times E\left[\sum_{s=1}^{n}a_s\int_0^{u+cdt+B(dt)\sigma}\mathcal{G}_{s,j}^{(1)}(u+cdt+B(dt)\sigma-x:d)f(x)dx\right.$$

$$\left.+\int_{u+cdt+B(dt)\sigma}^{\infty}f(x)dx\right]+(1+a_{ii}dt)(b_j dt)$$

$$\times E\left[\sum_{r=1}^{n}b_r\int_0^{u+cdt+B(dt)\sigma}\mathcal{G}_{i,r}^{(1)}(u+cdt+B(dt)\sigma-x:d)g(x)dx\right]+o(dt).$$

Εάν τώρα στην παραπάνω εξίσωση αντικαταστήσουμε με το ακόλουθο ανάπτυγμα του Taylor

$$E\Big[\mathcal{G}_{i,j}^{(1)}(u+cdt+B(dt)\sigma:d)\Big]$$
$$=\mathcal{G}_{i,j}^{(1)}(u{:}\,d)+cdt\frac{\partial\mathcal{G}_{i,j}^{(1)}(u{:}\,d)}{\partial u}+\frac{\sigma^2}{2}dt\frac{\partial^2\mathcal{G}_{i,j}^{(1)}(u{:}\,d)}{\partial u^2}+o(dt)$$

καταλήγουμε στο ζητούμενο, δηλαδή

$$\left(\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial u^2} + c\frac{\partial}{\partial u}\right)\boldsymbol{\mathcal{G}}^{(1)}(u{:}\,d) + \boldsymbol{I}_{m\times m} \otimes \boldsymbol{A}\boldsymbol{\mathcal{G}}^{(1)}(u{:}\,d)$$

$$+\boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{I}_{n\times n}\, \boldsymbol{\mathcal{G}}^{(1)}(u{:}\,d) + \boldsymbol{I}_{m\times m} \otimes (\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{a}^T)\int_0^u \boldsymbol{\mathcal{G}}^{(1)}(u-x{:}\,d)\, f(x)dx$$

$$+(\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{\beta}^T) \otimes \boldsymbol{I}_{n\times n}\int_0^u \boldsymbol{\mathcal{G}}^{(1)}(u-x{:}\,d)\, g(x)dx + (\boldsymbol{e}_m \otimes \boldsymbol{a})\bar{F}(u) = \boldsymbol{0}_{mn}.$$

Ομοίως ενεργούμε και για το δεύτερο σκέλος του Θεωρήματος.

Το θεώρημα αποδείχτηκε. ■

Σε αυτό το σημείο αξίζει να σημειωθεί πως εάν θέσουμε $m = 1$ και $\boldsymbol{B} = (0)$ τότε έχουμε ότι $\boldsymbol{b} = 0$ συνεπώς οι απαιτήσεις της δεύτερης τάξης δεν συμβαίνουν. Οπότε έχουμε ότι

$$\left(\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial u^2} + c\frac{\partial}{\partial u}\right)\boldsymbol{\mathcal{G}}^{(1)}(u{:}\,d) + \boldsymbol{A}\boldsymbol{\mathcal{G}}^{(1)}(u{:}\,d)$$

$$+\left(\boldsymbol{a}^T\int_0^u \boldsymbol{\mathcal{G}}^{(1)}(u-x{:}\,d)\, f(x)dx + \bar{F}(u)\right)\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}_n.$$

Τώρα προσθέτοντας την (4.2) στην (4.3) και με την σημείωση ότι

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}(u{:}\,d) = \boldsymbol{\mathcal{G}}^{(1)}(u{:}\,d) + \boldsymbol{\mathcal{G}}^{(2)}(u{:}\,d)$$

οδηγούμαστε στο ακόλουθο πόρισμα.

<u>Πόρισμα 4.1</u>

Όταν $0 \le u < d$ τότε το διάνυσμα $\boldsymbol{\mathcal{G}}(u{:}\,d)$ ικανοποιεί την ακόλουθη ολοκληρο-διαφορική εξίσωση

$$\left(\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial u^2}+c\frac{\partial}{\partial u}\right)\boldsymbol{\mathcal{G}}(u{:}\,d)+\boldsymbol{I}_{m\times m}\otimes \boldsymbol{A}\boldsymbol{\mathcal{G}}(u{:}\,d)+\boldsymbol{B}\otimes \boldsymbol{I}_{n\times n}\,\boldsymbol{\mathcal{G}}(u{:}\,d)$$

$$+\boldsymbol{I}_{m\times m}\otimes(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{a}^T)\int_0^u \boldsymbol{\mathcal{G}}(u-x{:}\,d)\,f(x)dx+(\boldsymbol{e}_m\otimes\boldsymbol{a})\bar{F}(u)$$

$$+(\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{\beta}^T)\otimes\boldsymbol{I}_{n\times n}\int_0^u \boldsymbol{\mathcal{G}}(u-x{:}\,d)\,g(x)dx+(\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{e}_n)\bar{G}(u)=\boldsymbol{0}_{mn},$$

με $\boldsymbol{\mathcal{G}}(0{:}\,d)=\boldsymbol{e}_{mn}$ και $\boldsymbol{\mathcal{G}}(d{:}\,d)=\boldsymbol{0}_{mn}$.

Στη συνέχεια ορίζουμε την ποσότητα

$$\varrho_d = inf\{t>0{:}\,U(t)\geq d|U(0)=u\}$$

να είναι η πρώτη φορά που η διαδικασία του πλεονάσματος (4.1) υπερβαίνει το επίπεδο d ,και

$$\chi(u{:}\,d)=Pr(T>\varrho_d|U(0)=u)$$

να είναι η πιθανότητα ότι η διαδικασία του πλεονάσματος (4.1) επιτυγχάνει σε ένα δεδομένο επίπεδο από το αρχικό πλεόνασμα $d\geq u$ χωρίς πρώτα να υποχωρήσει κάτω από το μηδέν.

Τώρα ισχύει $\chi(u{:}\,d)=1-\psi(u)$ για $d\to\infty$ και δεδομένου ότι τελικά είτε η χρεοκοπία συμβαίνει χωρίς τη διαδικασία του πλεονάσματος να φτάσει στο d ή το πλεόνασμα να φτάσει στο επίπεδο d, τότε $\mathcal{G}(u{:}\,d)=1-\chi(u{:}\,d)$.

Έπειτα, έστω $\chi_{ij}(u{:}\,d)$ για $i=1,2,\dots n$, $j=1,2,\dots,m$ να δηλώνει την πιθανότητα ότι η διαδικασία του πλεονάσματος επιτυγχάνει το επίπεδο d από την αρχική κατάσταση $\left(I_0^{(1)}.J_0^{(1)}\right)=\left(E_i,Q_j\right)$ και για u το αρχικό πλεόνασμα πριν από την χρεοκοπία η $\chi(u{:}\,d)$ γράφεται ως

$$\chi(u{:}\,d)=\boldsymbol{\gamma}^T\boldsymbol{\chi}(u{:}\,d)$$

όπου

$$\boldsymbol{\chi}(u{:}\,d)=(\chi_{11}(u{:}\,d),\chi_{21}(u{:}\,d),\dots,\chi_{n1}(u{:}\,d),\chi_{12}(u{:}\,d),\chi_{22}(u{:}\,d),\dots,\chi_{n2}(u{:}\,d),\dots,$$

$$\chi_{1m}(u{:}\,d),\chi_{2m}(u{:}\,d),\dots,\chi_{nm}(u{:}\,d))^T$$

τότε προφανώς

$$\boldsymbol{\chi}(u\colon d) = \boldsymbol{e}_{mn} - \boldsymbol{\mathcal{G}}(u\colon d).$$

όπου $\boldsymbol{\chi}(d\colon d) = \boldsymbol{e}_{mn}$.

<u>Λήμμα 4.1</u>

Έστω $\boldsymbol{I}_{n\times n} = \left(\eta_{i,j}\right)_{i,j=1}^{n}$ με $\eta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$, τότε ικανοποιούνται οι ακόλουθες εξισώσεις

$$\boldsymbol{I}_{m\times m} \otimes \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_{mn} = -\boldsymbol{I}_{m\times m} \otimes (\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{a}^{T})\boldsymbol{e}_{mn} = -\boldsymbol{e}_{m} \otimes \boldsymbol{a}$$

και

$$\boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{I}_{n\times n}\boldsymbol{e}_{mn} = -(\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{\beta}^{T}) \otimes \boldsymbol{I}_{n\times n}\boldsymbol{e}_{mn} = -\boldsymbol{b} \otimes \boldsymbol{e}_{n}\ .$$

Για την απόδειξη δείτε (Wuyuan Jiang & Chaoqun Ma (2018) The maximum surplus before ruin for two classes of perturbed risk model. σελ.128-129). ■

<u>Πόρισμα 4.2</u>

Όταν $0 \leq u < d$ τότε το διάνυσμα $\boldsymbol{\chi}(u\colon d)$ ικανοποιεί την ακόλουθη ολοκληρο-διαφορική εξίσωση

$$\left(\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial u^2} + c\frac{\partial}{\partial u}\right)\boldsymbol{\chi}(u\colon d) + \boldsymbol{I}_{m\times m} \otimes \boldsymbol{A}\boldsymbol{\chi}(u\colon d)$$

$$+\boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{I}_{n\times n}\,\boldsymbol{\chi}(u\colon d) + \boldsymbol{I}_{m\times m} \otimes (\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{a}^{T})\int_{0}^{u}\boldsymbol{\chi}(u-x\colon d)\,f(x)dx$$

$$+(\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{\beta}^{T}) \otimes \boldsymbol{I}_{n\times n}\int_{0}^{u}\boldsymbol{\chi}(u-x\colon d)\,g(x)dx = \boldsymbol{0}_{mn},$$

με $\boldsymbol{\chi}(0\colon d) = \boldsymbol{0}_{mn}$ και $\boldsymbol{\chi}(d\colon d) = \boldsymbol{e}_{mn}$.

4.4 Επιλύσεις των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων

Στην ενότητα που παρουσιάζουμε θεωρούμε το διάνυσμα στήλη διάστασης mn $\boldsymbol{\xi}(u),\ u \geq 0$, ως τη λύση της κοινής ομοιογενούς ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης

$$\left(\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial u^2} + c\frac{\partial}{\partial u}\right)\boldsymbol{\xi}(u) + \boldsymbol{I}_{m\times m} \otimes \boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}(u)$$

$$+\boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{I}_{n\times n}\boldsymbol{\xi}(u) + \boldsymbol{I}_{m\times m} \otimes (\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{a}^T)\int_0^u \boldsymbol{\xi}(u-x)\,f(x)dx$$

$$+(\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{\beta}^T) \otimes \boldsymbol{I}_{n\times n}\int_0^u \boldsymbol{\xi}(u-x)\,g(x)dx = \boldsymbol{0}_{mn}. \qquad (4.4)$$

<u>Λήμμα 4.2</u>

Για $u \geq 0$, έστω οι πίνακες διαστάσεων $mn \times mn$, $\boldsymbol{\Phi}(u) = \left(\Phi_{i,j}\right)_{i,j=1}^{mn}$ και $\boldsymbol{\Gamma}(u) = \left(\Gamma_{i,j}\right)_{i,j=1}^{mn}$ των οποίων οι στήλες έχουν παρόμοιες λύσεις με την εξίσωση (4.4), και με αρχικές συνθήκες $\boldsymbol{\Phi}(0) = \boldsymbol{I}_{mn\times mn}$, $\boldsymbol{\Phi}'(0) = \boldsymbol{0}_{mn\times mn}$, $\boldsymbol{\Gamma}(0) = \boldsymbol{0}_{mn\times mn}$ και $\boldsymbol{\Gamma}'(0) = \boldsymbol{I}_{mn\times mn}$. Τότε η εξίσωση (4.4) γράφεται ως εξής

$$\boldsymbol{\xi}(u) = \boldsymbol{\Gamma}(u)\boldsymbol{\xi}'(0) + \boldsymbol{\Phi}(u)\boldsymbol{\xi}(0). \qquad (4.5)$$

<u>Απόδειξη</u>

Αρχικά επισημαίνουμε ότι η $\boldsymbol{\Phi}(u)$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$\left(\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial u^2} + c\frac{\partial}{\partial u}\right)\boldsymbol{\Phi}(u) + \boldsymbol{I}_{m\times m} \otimes \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Phi}(u)$$

$$+\boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{I}_{n\times n}\boldsymbol{\Phi}(u) + \boldsymbol{I}_{m\times m} \otimes (\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{a}^T)\int_0^u \boldsymbol{\Phi}(u-x)\,f(x)dx$$

$$+(\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{\beta}^T)\otimes \boldsymbol{I}_{n\times n}\int_0^u \boldsymbol{\Phi}(u-x)\,g(x)dx = \boldsymbol{0}_{mn}. \qquad (4.6)$$

Στη συνέχεια ορίζουμε τους ακόλουθους μετασχηματισμούς Laplace $\widehat{\boldsymbol{\Phi}}(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\,\boldsymbol{\Phi}(x)dx$ και $\widehat{\boldsymbol{\Gamma}}(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\,\boldsymbol{\Gamma}(x)dx$. Ακολούθως, εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέρη της εξίσωσης (4.6) προκύπτουν τα ακόλουθα

$$\left[\left(\frac{\sigma^2}{2}s^2+cs\right)\boldsymbol{I}_{mn\times mn}+\boldsymbol{I}_{m\times m}\otimes \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\otimes \boldsymbol{I}_{n\times n}+\boldsymbol{I}_{m\times m}\otimes(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{a}^T)\hat{f}(s)+(\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{\beta}^T)\right.$$
$$\left.\otimes\, \boldsymbol{I}_{n\times n}\hat{g}(s)\right]\widehat{\boldsymbol{\Phi}}(s)=\frac{\sigma^2}{2}\boldsymbol{\Phi}'(0)+p(s)\boldsymbol{\Phi}(0) \qquad (4.7)$$

όπου

$$p(s) = c + s(\sigma^2/2).$$

Θέτουμε $\boldsymbol{L}(s)=\left(\frac{\sigma^2}{2}s^2+cs\right)\boldsymbol{I}_{mn\times mn}+\boldsymbol{I}_{m\times m}\otimes \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\otimes \boldsymbol{I}_{n\times n}+\boldsymbol{I}_{m\times m}\otimes(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{a}^T)\hat{f}(s)+(\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{\beta}^T)\otimes \boldsymbol{I}_{n\times n}\hat{g}(s)$ και $\boldsymbol{L}^*(s)$ ο συμπληρωματικός πίνακας του $\boldsymbol{L}(s)$. Έτσι όταν $det[\boldsymbol{L}(s)]\neq 0$ από την (4.7) έχουμε ότι

$$\widehat{\boldsymbol{\Phi}}(s)=\frac{\boldsymbol{L}^*(s)}{det[\boldsymbol{L}(s)]}\left(\frac{\sigma^2}{2}\boldsymbol{\Phi}'(0)+p(s)\boldsymbol{\Phi}(0)\right)\Leftrightarrow$$

$$\widehat{\boldsymbol{\Phi}}(s)=\frac{\boldsymbol{L}^*(s)}{det[\boldsymbol{L}(s)]}p(s). \qquad (4.8)$$

Ομοίως έχουμε ότι

$$\widehat{\boldsymbol{\Gamma}}(s)=\frac{\boldsymbol{L}^*(s)}{det[\boldsymbol{L}(s)]}\frac{\sigma^2}{2}. \qquad (4.9)$$

Τώρα εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέρη της εξίσωσης (4.4) προκύπτουν τα ακόλουθα

$$\boldsymbol{L}(s)\hat{\boldsymbol{\xi}}(s)=\frac{\sigma^2}{2}\boldsymbol{\xi}'(0)+p(s)\boldsymbol{\xi}(0), \qquad (4.10)$$

με $\hat{\boldsymbol{\xi}}(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\,\boldsymbol{\xi}(x)dx$, οπότε

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}(s) = \frac{\boldsymbol{L}^*(s)}{det[\boldsymbol{L}(s)]}\frac{\sigma^2}{2}\boldsymbol{\xi}'(0) + \frac{\boldsymbol{L}^*(s)}{det[\boldsymbol{L}(s)]}p(s)\boldsymbol{\xi}(0). \qquad (4.11)$$

Με την προσθήκη των (4.8), (4.9) στην (4.11) προκύπτει

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}(s) = \widehat{\boldsymbol{\Gamma}}(s)\boldsymbol{\xi}'(0) + \widehat{\boldsymbol{\Phi}}(s)\boldsymbol{\xi}(0) \qquad (4.12)$$

όπου με αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace στην (4.12) προκύπτει το ζητούμενο.

Το λήμμα αποδείχτηκε. ■

Συνεχίζοντας στη συγκεκριμένη ενότητα και λαμβάνοντας υπόψη το **<u>Πόρισμα 4.2</u>** αλλά και το **<u>Λήμμα 4.2</u>** έχουμε

$$\boldsymbol{\chi}(u{:}\,d) = \boldsymbol{\Gamma}(u)\frac{\partial}{\partial u}\boldsymbol{\chi}(0{:}\,d) + \boldsymbol{\Phi}(u)\boldsymbol{\chi}(0{:}\,d), \quad 0 \le u < d \qquad (4.13)$$

και για $u = d$ η (4.13) είναι

$$\frac{\partial}{\partial u}\boldsymbol{\chi}(0{:}\,d) = [\boldsymbol{\Gamma}(d)]^{-1}\boldsymbol{e}_{mn}. \qquad (4.14)$$

Με αντικατάσταση της (4.14) στην (4.13) και με τη χρήση της σχέσης $\boldsymbol{\chi}(u{:}\,d) = \boldsymbol{e}_{mn} - \boldsymbol{\mathcal{G}}(u{:}\,d)$, για , $0 \le u < d$ μπορούμε να εξάγουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα.

$$\boldsymbol{\chi}(u{:}\,d) = \boldsymbol{\Gamma}(u)[\boldsymbol{\Gamma}(d)]^{-1}\boldsymbol{e}_{mn} \qquad (4.15)$$

και

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}(u{:}\,d) = \{\boldsymbol{I}_{mn\times mn} - \boldsymbol{\Gamma}(u)[\boldsymbol{\Gamma}(d)]^{-1}\}\boldsymbol{e}_{mn}. \qquad (4.16)$$

Η γενικευμένη εξίσωση του Lundberg $det[\boldsymbol{L}(s)] = 0$ έχει ακριβώς mn ρίζες με

$\rho_1 = 0$ και $\rho_2, \dots, \rho_{mn} \in \mathcal{R}(\rho_i) > 0$.

Προτού συνεχίσουμε θα ήταν χρήσιμο να αναφέρουμε δύο κλασματικές σχέσεις που θα βοηθήσουν στην κατανόηση των παρακάτω υπολογισμών.

$$\boldsymbol{L}(r_1, s) = \frac{\boldsymbol{L}(s) - \boldsymbol{L}(r_1)}{s - r_1},$$

$$\boldsymbol{L}(r_1, r_2, s) = \frac{\boldsymbol{L}(r_1, s) - \boldsymbol{L}(r_1, r_2)}{s - r_2}.$$

Αφού κάθε στοιχείο του $\widehat{\boldsymbol{\Gamma}}(s)$ είναι άπειρο για όλα τα $\mathcal{R}(s) > 0$ και $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{mn}$ οι αριθμητικές λύσεις της (4.9) τότε για $\boldsymbol{L}^*(\rho_i)_{i=1,2,\dots,mn} = \boldsymbol{0}_{mn\times mn}$ έχουμε

$$\boldsymbol{L}^*[\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{mn}] = \boldsymbol{0}_{mn\times mn}, \quad i = 2,3,\dots,mn. \qquad (4.17)$$

Τότε

$$\boldsymbol{L}^*(s) = \boldsymbol{L}^*(s) - \boldsymbol{L}^*(\rho_1) = (s-\rho_1)\boldsymbol{L}^*[\rho_1, s]$$

$$= (s-\rho_1)\{\boldsymbol{L}^*[\rho_1, s] - \boldsymbol{L}^*[\rho_1, \rho_2]\} = (s-\rho_1)(s-\rho_2)\boldsymbol{L}^*[\rho_1, \rho_2, s]$$

$$= \cdots$$

$$= \prod_{j=1}^{mn}(s-\rho_j)\,\boldsymbol{L}^*[\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{mn}, s]. \qquad (4.18)$$

Αντικαθιστώντας την (4.18) στην (4.9) καταλήγουμε στο συμπέρασμα

$$\widehat{\boldsymbol{\Gamma}}(s) = \frac{\prod_{j=1}^{mn}(s-\rho_j)\,\boldsymbol{L}^*[\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{mn}, s]}{det[\boldsymbol{L}(s)]}\frac{\sigma^2}{2}. \qquad (4.19)$$

4.5 Αποτελέσματα για τα μεγέθη των αποζημιώσεων με μετασχηματισμό Laplace

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζουμε τις κατανομές $F(x)$ και $G(x)$ των απαιτήσεων με μετασχηματισμό Laplace, όπως φαίνεται παρακάτω.

$$\hat{f}(s) = \frac{q_{l_1-1}(s)}{q_{l_1}(s)}\ ,\ \ \hat{g}(s) = \frac{\tau_{l_2-1}(s)}{\tau_{l_2}(s)}\ \ , l_1, l_2 \in \mathbb{N}^+ \qquad (4.20)$$

όπου $q_{l_1-1}(s)$ και $\tau_{l_2-1}(s)$ πολυώνυμα βαθμού $l_1 - 1$ και $l_2 - 1$ ή λιγότερου, ενώ $q_{l_1}(s)$ και $\tau_{l_2}(s)$ πολυώνυμα βαθμού l_1 και l_2 με μόνο αρνητικές ρίζες. Οι παραπάνω ποσότητες ικανοποιούν τις σχέσεις $q_{l_1-1}(0) = q_{l_1}(0)$ και $\tau_{l_2-1}(0) = \tau_{l_2}(0)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι οι κύριοι συντελεστές των $q_{l_1}(s)$ και $\tau_{l_2}(s)$ είναι 1.

Πολλαπλασιάζοντας τον αριθμητή και τον παρονομαστή της (4.19) με την ποσότητα $\mathfrak{h}(s) = \left[q_{l_1}(s)\tau_{l_2}(s)\right]^{mn}$ προκύπτει ότι

$$\widehat{\boldsymbol{\Gamma}}(s) = \frac{\prod_{j=1}^{mn}\left(s-\rho_j\right)\boldsymbol{L}^*[\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_{mn},s]\mathfrak{h}(s)}{\mathfrak{h}(s)det[\boldsymbol{L}(s)]}\frac{\sigma^2}{2}\,. \qquad (4.21)$$

Είναι προφανές ότι ο παράγοντας $\mathfrak{h}(s)det[\boldsymbol{L}(s)]$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $mn(l_1+l_2+2)$ με αρχικό συντελεστή $(\sigma^2/2)^{mn}$. Τότε η εξίσωση $\mathfrak{h}(s)det[\boldsymbol{L}(s)] = 0$ έχει $mn(l_1+l_2+2)$ ρίζες στο μιγαδικό επίπεδο και παραγοντοποιώντας την $\mathfrak{h}(s)det[\boldsymbol{L}(s)]$ έχουμε

$$\mathfrak{h}(s)det[\boldsymbol{L}(s)] = \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^{mn}\prod_{j=1}^{mn}\left(s-\rho_j\right)\prod_{j=1}^{mn(l_1+l_2+1)}\left(s+R_j\right), \qquad (4.22)$$

με R_j να έχει ένα θετικό πραγματικό μέρος για κάθε j και υποθέτουμε ότι όλα είναι διαφορετικά μεταξύ τους.

Αντικαθιστώντας την (4.22) στην (4.21) συμπεραίνουμε ότι:

$$\widehat{\boldsymbol{\Gamma}}(s) = \frac{\boldsymbol{L}^*[\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_{mn},s]\mathfrak{h}(s)}{\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^{mn-1}\prod_{j=1}^{mn(l_1+l_2+1)}\left(s+R_j\right)}. \qquad (4.23)$$

Στη συνέχεια θέτουμε

$$Q_j = \frac{\boldsymbol{L}^*\left[\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_{mn},-R_j\right]\mathfrak{h}\left(-R_j\right)}{\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^{mn-1}\prod_{i=1,i\neq j}^{mn(l_1+l_2+1)}\left(R_i-R_j\right)}$$

οπότε η (4.23) γράφεται ως εξής:

$$\widehat{\boldsymbol{\Gamma}}(s) = \sum_{j=1}^{mn(l_1+l_2+1)}\frac{Q_j}{s+R_j}.$$

Συνεπώς με αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace καταλήγουμε στην σχέση

$$\boldsymbol{\Gamma}(u) = \sum_{j=1}^{mn(l_1+l_2+1)} Q_j e^{-R_j u}\,.$$

Οπότε αντικαθιστώντας την τελευταία σχέση στις εξισώσεις (4.15) και (4.16) λαμβάνουμε αποτελέσματα για το $\boldsymbol{\chi}(u{:}\,d)$ και το $\boldsymbol{\mathcal{G}}(u{:}\,d)$.

4.6 Εφαρμογή

Στόχος μας, με την συγκεκριμένη εφαρμογή, είναι να υπολογίσουμε το μέγιστο πλεόνασμα πριν από την χρεοκοπία $\boldsymbol{\mathcal{G}}(u{:}\,d)$ χρησιμοποιώντας τη θεωρία που αναπτύξαμε στις παραπάνω ενότητες.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι οι απαιτήσεις των τάξεων 1 και 2 έχουν τις ακόλουθες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \mu_1 e^{-\mu_1 x}, \mu_1 > 0, x > 0$$

και

$$g(y) = \mu_2 e^{-\mu_2 y}, \mu_2 > 0, y > 0,$$

με τον μετασχηματισμό τους Laplace να είναι

$$\hat{f}(s) = \frac{\mu_1}{s + \mu_1},$$

$$\hat{g}(s) = \frac{\mu_2}{s + \mu_2}.$$

Οι χρόνοι των απαιτήσεων από την τάξη 1 ακολουθούν μία διαδικασία Poisson με παράμετρο λ και $\boldsymbol{\alpha} = (1)$, $\boldsymbol{a} = (\lambda), \boldsymbol{A} = (-\lambda)$, ενώ οι χρόνοι των απαιτήσεων από την τάξη 2 ακολουθούν μία κατανομή τύπου φάσης με $\boldsymbol{\beta} = \left({}^1/_2, {}^1/_2\right)^T, \boldsymbol{b} = (\lambda_1, \lambda_2)^T$, $\boldsymbol{B} = diag(-\lambda_1, -\lambda_2)$. Τότε $\mathfrak{h}(s) = [(s + \mu_1)(s + \mu_2)]^2$ και

$$\boldsymbol{L}(s) = \begin{pmatrix} \zeta(s) - \lambda_1 + \dfrac{\lambda_1\mu_2}{2(s + \mu_2)} & \dfrac{\lambda_1\mu_2}{2(s + \mu_2)} \\ \dfrac{\lambda_2\mu_2}{2(s + \mu_2)} & \zeta(s) - \lambda_2 + \dfrac{\lambda_2\mu_2}{2(s + \mu_2)} \end{pmatrix}$$

όπου $\zeta(s) = \frac{\sigma^2}{2}s^2 + cs - \lambda + \frac{\lambda_1\mu_1}{(s+\mu_1)}$.

Κάτω από αυτήν την υπόθεση η εξίσωση $\mathfrak{h}(s)det[\boldsymbol{L}(s)] = 0$ έχει ακριβώς δύο μη αρνητικές πραγματικές ρίζες $\rho_1 = 0$ και ρ_2 και έξι ρίζες με το πραγματικό τους μέρος αρνητικό $\left[-R_j\right]_{j=1,\dots,6}$.

Άρα

$$\boldsymbol{L}^*(s) = \begin{pmatrix} \zeta(s) - \lambda_2 + \dfrac{\lambda_2\mu_2}{2(s+\mu_2)} & -\dfrac{\lambda_1\mu_2}{2(s+\mu_2)} \\ -\dfrac{\lambda_2\mu_2}{2(s+\mu_2)} & \zeta(s) - \lambda_1 + \dfrac{\lambda_1\mu_2}{2(s+\mu_2)} \end{pmatrix}$$

και

$$\boldsymbol{L}^*[\rho_1, \rho_2, s] = \begin{pmatrix} \dfrac{\sigma^2}{2} + \dfrac{\lambda}{(s+\mu_1)(\rho_2+\mu_1)} + \dfrac{\lambda_2}{2(s+\mu_2)(\rho_2+\mu_2)} & -\dfrac{\lambda_1}{2(s+\mu_2)(\rho_2+\mu_2)} \\ -\dfrac{\lambda_2}{2(s+\mu_2)(\rho_2+\mu_2)} & \dfrac{\sigma^2}{2} + \dfrac{\lambda}{(s+\mu_1)(\rho_2+\mu_1)} + \dfrac{\lambda_1}{2(s+\mu_2)(\rho_2+\mu_2)} \end{pmatrix}$$

Οπότε για την ποσότητα Q_j ισχύει:

$$Q_j = \frac{\boldsymbol{L}^*[\rho_1, \rho_2, -R_j]\mathfrak{h}(-R_j)}{\frac{\sigma^2}{2}\prod_{i=1, i\neq j}^{6}(R_i - R_j)},$$

συνεπώς

$$\boldsymbol{\Gamma}(u) = \sum_{j=1}^{6} Q_j e^{-R_j u}.$$

Τότε από τις εξισώσεις (4.15) και (4.16) έχουμε

$$\boldsymbol{\chi}(u\colon d) = \boldsymbol{\Gamma}(u)[\boldsymbol{\Gamma}(d)]^{-1}\boldsymbol{e}_2, 0 \leq u < d$$

και

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}(u\colon d) = \{\boldsymbol{I}_{2\times 2} - \boldsymbol{\Gamma}(u)[\boldsymbol{\Gamma}(d)]^{-1}\}\boldsymbol{e}_2, \quad 0 \leq u < d.$$

Τέλος, καταλήγουμε στο ζητούμενο όπου η κατανομή του μέγιστου πλεονάσματος πριν από την χρεοκοπία είναι

$$\mathcal{G}(u\colon d) = (\boldsymbol{\beta} \otimes \boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\mathcal{G}}(u\colon d) = \left({}^{1}\!/_{2}, {}^{1}\!/_{2}\right)^T \boldsymbol{\mathcal{G}}(u\colon d), 0 \leq u < d.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Στοχαστικά ασφάλιστρα σε μοντέλο με δύο κλάσεις κινδύνων

5.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο, θεωρούμε ένα μοντέλο κινδύνου με δύο ανεξάρτητες κατηγορίες ασφαλιστικών κινδύνων και τυχαίων εισοδημάτων. Υποθέτουμε ότι οι δύο ανεξάρτητες διαδικασίες καταμέτρησης των απαιτήσεων είναι, αντίστοιχα, η διαδικασία Poisson και Erlang (2). Όταν τα ατομικά ασφάλιστρα κατανέμονται εκθετικά, παράγονται οι εκφράσεις για τους μετασχηματισμούς Laplace των αναμενόμενων προεξοφλητικών συναρτήσεων ζημιάς.

Στόχος μας είναι να αποδείξουμε ότι οι αναμενόμενες προεξοφλητικές συναρτήσεις ζημιάς ικανοποιούν ορισμένες ελαττωματικές ανανεωτικές εξισώσεις. Χρησιμοποιώντας μια σύνθετη γεωμετρική κατανομή, λαμβάνουμε τις αναλυτικές εκφράσεις για τις λύσεις των ελαττωματικών ανανεωτικών εξισώσεων. Υποθέτουμε ότι οι κατανομές των μεγεθών των ασφαλίστρων έχουν ορθολογικούς μετασχηματισμούς Laplace, και παρουσιάζουμε τους μετασχηματισμούς Laplace των αναμενόμενων προεξοφλητικών συναρτήσεων ζημιάς.

Μέσα από την ανάλυση, τα θεωρήματα και τις εξισώσεις θα βγάλουμε τα συμπεράσματά μας για την συμπεριφορά της συνάρτησης χρεοκοπίας σε σχέση με την κατανομή του ασφαλίστρου. Τέλος θα δούμε αριθμητικά αλλά και γραφικά πως συμπεριφέρεται το μοντέλο μας κάτω από συγκεκριμένες υποθέσεις.

5.2 Παρουσίαση και περιγραφή του μοντέλου

Η ανανεωτική διαδικασία μίας ασφαλιστικής εταιρείας ακολουθεί το παρακάτω μοντέλο διαδικασίας κινδύνου

$$U(t) = u + \sum_{j=1}^{M(t)} X_j - S(t), \;\; t \geq 0,$$

με $U(0) = u$ το αρχικό αποθεματικό και την ακολουθία $\{X_j\}_{j=1}^{\infty}$, να αποτελεί μία ακολουθία θετικών ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ., που παριστάνουν το εισόδημα των ασφαλίστρων, με σ.κ. $F(x) = Pr(X \leq x)$, σ.π.π. $f(x)$, μέση τιμή μ και μετασχηματισμό Laplace $\hat{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x)dx$. Υποθέτουμε ότι η $M(t)$ είναι μία διαδικασία Poisson με ένταση $\lambda > 0$, με τους αντίστοιχους χρόνους κατά την άφιξη των εσόδων από ασφάλιστρα, που υποδηλώνονται με $\{W_i\}_{i\geq 1}$ να είναι ανεξάρτητοι και να ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο λ.

Σε αυτή την ενότητα υποθέτουμε πως η στοχαστική διαδικασία των αποζημιώσεων $S(t)$ αποτελεί το άθροισμα δύο επιμέρους στοχαστικών διαδικασιών, δηλαδή

$$S(t) = S_1(t) + S_2(t) = \sum_{i=1}^{N_1(t)} Y_i + \sum_{i=1}^{N_2(t)} Z_i \,, \quad t \geq 0,$$

όπου οι $S_i(t)$, i=1,2, παριστάνουν τις συνολικές αποζημιώσεις που καταβάλλονται μέχρι το χρόνο t και προέρχονται από την i- κλάση. Παρόλο που το συγκεκριμένο μοντέλο ορίστηκε αρχικά υποθέτοντας πως οι $S_i(t)$, i=1,2 είναι εξαρτημένες μεταξύ τους, εδώ θα υποθέσουμε πως είναι στοχαστικά ανεξάρτητες. Έτσι, οι σωρευτικές αποζημιώσεις $S_1(t)$, από την πρώτη κλάση προστίθενται στη μεταβλητότητα που παρουσιάζει η σωρευτική διαδικασία αποζημιώσεων $S_2(t)$.

Η ακολουθία $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι η μη αρνητική ακολουθία των απαιτήσεων από την πρώτη κλάση με σ.κ. $F_1(x) = Pr(X \leq x)$, σ.π.π. $f_1(x)$, μέση τιμή μ_1 και μετασχηματισμό Laplace $\hat{f}_1(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f_1(x)dx$. Υποθέτουμε ότι $N_1(t)$ είναι μία διαδικασία Poisson με ένταση $\lambda_1 > 0$, με τους αντίστοιχους χρόνους κατά την άφιξη των εσόδων από ασφάλιστρα, που υποδηλώνονται με $\{V_i\}_{i\geq 1}$ να είναι ανεξάρτητοι και να ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο λ_1.

Ακόμη η ακολουθία $\{Z_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι η θετική ακολουθία των απαιτήσεων από την δεύτερη κλάση με σ.κ. $F_2(x) = Pr(X \leq x)$, σ.π.π. $f_2(x)$, μέση τιμή μ_2 και μετασχηματισμό

Laplace $\hat{f}_2(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f_2(x)dx$. Υποθέτουμε ότι $N_2(t)$ είναι μία ανανεωτική διαδικασία , με τους αντίστοιχους χρόνους κατά την άφιξη των εσόδων από ασφάλιστρα, που υποδηλώνονται με $\{L_i\}_{i\geq 1}$ να είναι ανεξάρτητοι από τους χρόνους $\{V_i\}_{i\geq 1}$ και να ακολουθούν κατανομή Erlang με $L_i = L_{i1} + L_{i2}$ όπου τα $\{L_{ij}\}_{i,j\geq 1}$ ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο λ_2.

Τέλος υποθέτουμε ότι οι $\{X_j\}_{j=1}^\infty$, $\{Y_\iota\}_{\iota=1}^\infty$, $\{Z_\iota\}_{\iota=1}^\infty$ είναι ανεξάρτητες όπως και οι $M(t)$, $N_1(t)$, $N_2(t)$ με την σχέση $\lambda\mu = \lambda_1\mu_1 + \lambda_2/2\mu_2$ να παρέχει μία κατάσταση καθαρού κέρδους.

Όπως ορίσαμε και στο πρώτο κεφάλαιο η συνάρτηση των Gerber-Shiu για το μοντέλο μας είναι

$$m_j(u) = E\left(e^{-\delta T} w_j(U(T-), |U(T)|)1_{(T<\infty)} \middle| U(0) = u\right), \qquad u \geq 0.$$

Γενικότερα, μπορούμε να ορίσουμε για το μοντέλο μας τη συνάρτηση των Gerber-Shiu σαν μία δισδιάστατη συνάρτηση, $m(u, \tau)$, του αρχικού αποθεματικού u και του χρόνου τ, όπου τ ο χρόνος που απαιτείται μέχρι την εμφάνιση της τελευταίας αποζημίωσης από τη δεύτερη κλάση (εδώ η διαδικασία πλεονάσματος ανανεώνεται). Για αυτό το λόγο εστιάζουμε την προσοχή μας τόσο στον προσδιορισμό της συνάρτησης Gerber-Shiu στο χρόνο 0, που ισχύει $m(u, 0) = m(u)$, όσο και στη συνάρτηση

$$\Psi_j(u) = E\left(e^{-\delta(T-t)} w_j(U(T-), |U(T)|)1_{(T<\infty)} \middle| U(t) = u, L_{11} = t\right),$$

που αποτελεί συνάρτηση των Gerber-Shiu δοθέντος ότι έχει ήδη εμφανισθεί από τη δεύτερη κλάση ένας εκθετικός χρόνος $\{L_{i1}\}_{i\geq 1}$.

Τότε, χρησιμοποιώντας το **θεώρημα ολικής πιθανότητας** και για $j = 1,2$ έχουμε

$$m_j(u, \tau) = m_j(u)P(L_{11} > \tau) + \Psi_j(u)P(L_{11} < \tau) = e^{-\lambda_2 \tau} m_j(u) + (1 - e^{-\lambda_2 \tau})\Psi_j(u).$$

5.3 Μετασχηματισμοί Laplace

Δεδομένου ότι το μέγεθος των ασφαλίστρων κατανέμεται εκθετικά, μπορούν να προκύψουν οι εκφράσεις για τους μετασχηματισμούς Laplace των αναμενόμενων προεξοφλητικών συναρτήσεων ζημιάς. Για το σκοπό αυτό, θεωρούμε πρώτα την ολοκληρώσιμη εξίσωση που ικανοποιείται από την αναμενόμενη προεξοφλητική συνάρτηση ζημιάς.

Έστω $J = min\{V_1, L_{11}, W_1\}$, τότε για $u \geq 0$ έχουμε

$$m_1(u) = \int_0^\infty \int_0^\infty Pr(J = t, J = W_1) e^{-\delta t} m_1(u + x) dF(x) dt$$

$$+ \int_0^\infty Pr(J = t, J = W_1) e^{-\delta t} \left[\int_0^u m_1(u - y)\, dF_1(y) + \int_u^\infty w_1(u, y - u) dF_1(y) \right] dt$$

$$+ \int_0^\infty Pr(J = t, J = L_{11}) e^{-\delta t} \Psi_1(u) dt. \tag{5.1}$$

Σε αυτό το σημείο να σημειώσουμε ότι

$$Pr(J = W_1) = \frac{\lambda}{\lambda + \lambda_1 + \lambda_2}, Pr(J = V_1) = \frac{\lambda_1}{\lambda + \lambda_1 + \lambda_2}, Pr(J = L_{11}) = \frac{\lambda_2}{\lambda + \lambda_1 + \lambda_2}$$

και

$$Pr(J > t |\, J = W_1) = Pr(J > t |\, J = V_1) = Pr(J > t |\, J = L_{11}) = e^{-(\lambda + \lambda_1 + \lambda_2)t}.$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στην (5.1) προκύπτει ότι

$$m_1(u) = \frac{\lambda}{\lambda^* + \delta} \int_0^\infty m_1(u + x) dF(x) + \frac{\lambda_2}{\lambda^* + \delta} \Psi_1(u)$$

$$+ \frac{\lambda_1}{\lambda^* + \delta} \left[\int_0^u m_1(u - y)\, dF_1(y) + w_1(u) \right], \tag{5.2}$$

όπου

$\lambda^* = \lambda + \lambda_1 + \lambda_2$ και $w_1(u) = \int_u^\infty w_1(u, y - u) dF_1(y)$.

Ομοίως έχουμε,

$$\Psi_1(u) = \frac{\lambda}{\lambda^* + \delta}\int_0^\infty \Psi_1(u+x)dF(x) + \frac{\lambda_2}{\lambda^* + \delta}\int_0^u m_1(u-y)\,dF_2(y)$$
$$+ \frac{\lambda_1}{\lambda^* + \delta}\left[\int_0^u \Psi_1(u-y)\,dF_1(y) + w_1(u)\right]. \qquad (5.3)$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι

$$A_1(u) = \int_0^\infty m_1(u+x)dF(x)\ , \qquad \overline{A}_1(u) = \int_0^\infty \Psi_1(u+x)dF(x)\ ,$$

οπότε οι μετασχηματισμοί Laplace των (5.2) και (5.3) είναι

$$\widehat{m}_1(s) = \frac{\lambda}{\lambda^* + \delta}\hat{A}_1(s) + \frac{\lambda_2}{\lambda^* + \delta}\widehat{\Psi}_1(s) + \frac{\lambda_1}{\lambda^* + \delta}\left[\widehat{m}_1(s)\hat{f}_1(s) + \widehat{w}_1(s)\right], \quad (5.4)$$

$$\widehat{\Psi}_1(s) = \frac{\lambda}{\lambda^* + \delta}\widehat{\overline{A}}_1(s) + \frac{\lambda_2}{\lambda^* + \delta}\widehat{m}_1(s)\hat{f}_2(s) + \frac{\lambda_1}{\lambda^* + \delta}\left[\widehat{\Psi}_1(s)\hat{f}_1(s) + \widehat{w}_1(s)\right]. \quad (5.5)$$

Όμοια αποτελέσματα μας δίνει και η ανάλυση των $m_2(u), \Psi_2(u), \widehat{m}_2(u), \widehat{\Psi}_2(u)$.

Χρησιμοποιώντας τον Dickson – Hipp τελεστή T_r μέσω της f, παρατηρούμε ότι $T_s f(0) = \hat{f}(s)$ και για διαφορετικά r_1, r_2 είναι:

$$T_{r_1}T_{r_2}f(x) = T_{r_2}T_{r_1}f(x) = \frac{T_{r_1}f(x) - T_{r_2}f(x)}{r_2 - r_1},\ \ x \geq 0.$$

Στη συνέχεια θεωρούμε ότι τα μεγέθη των ασφαλίστρων είναι εκθετικά κατανεμημένα με $F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\mu}}$ με $\mu > 0$ τη μέση τιμή. Μέσω του μετασχηματισμού Laplace των $A_i(u)$, $i = 1,2$ και με τη χρήση του Dickson – Hipp τελεστή προκύπτουν τα εξής:

$$\hat{A}_i(s) = \int_0^\infty e^{-su}\int_0^\infty m_i(u+x)\frac{e^{-\frac{x}{\mu}}}{\mu}dxdu = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-su}m_i(u+x)du\frac{e^{-\frac{x}{\mu}}}{\mu}dx$$

$$= \int_0^\infty T_s\, m_i(x)\frac{e^{-\frac{x}{\mu}}}{\mu}dx = \frac{1}{\mu}T_{\frac{1}{\mu}}T_s m_i(0) = \frac{\widehat{m}_i(s) - \widehat{m}_i\left(\frac{1}{\mu}\right)}{1 - s\mu}. \qquad (5.6)$$

Ομοίως έχουμε,

$$\widehat{\widehat{A}}_i(s) = \frac{\widehat{\Psi}_i(s) - \widehat{\Psi}_i\left(\frac{1}{\mu}\right)}{1 - s\mu}. \qquad (5.7)$$

Οπότε ενώνοντας τα παραπάνω αποτελέσματα με τις εξισώσεις (5.4) και (5.5) και αφού θέσουμε την ποσότητα

$$\overline{\omega}_i(s) = \frac{\lambda \widehat{\Psi}_i\left(\frac{1}{\mu}\right)}{(\lambda^* + \delta)(1 - s\mu)} - \frac{\lambda_i \widehat{w}_i(s)}{\lambda^* + \delta}, \;\; i = 1,2$$

συμπεραίνουμε τα ακόλουθα

$$\widehat{m}_1(s) = \frac{-\left(1 - \frac{\lambda}{(\lambda^*+\delta)(1-s\mu)} - \frac{\lambda_1 \widehat{f}_1(s)}{\lambda^*+\delta}\right)\left(\frac{\lambda \widehat{m}_1\left(\frac{1}{\mu}\right)}{(\lambda^*+\delta)(1-s\mu)} - \frac{\lambda_1 \widehat{w}_1(s)}{\lambda^*+\delta}\right) - \frac{\lambda_2 \overline{\omega}_1(s)}{\lambda^*+\delta}}{\left(1 - \frac{\lambda}{(\lambda^*+\delta)(1-s\mu)} - \frac{\lambda_1 \widehat{f}_1(s)}{\lambda^*+\delta}\right)^2 - \frac{\lambda_2^2 \widehat{f}_2(s)}{(\lambda^*+\delta)^2}}, \;\; (5.8)$$

και

$$\widehat{m}_2(s) = \frac{-\frac{\lambda \widehat{m}_2\left(\frac{1}{\mu}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{(\lambda^*+\delta)(1-s\mu)} - \frac{\lambda_1 \widehat{f}_1(s)}{\lambda^*+\delta}\right)}{(\lambda^*+\delta)(1-s\mu)} - \frac{\lambda_2 \overline{\omega}_2(s)}{\lambda^*+\delta}}{\left(1 - \frac{\lambda}{(\lambda^*+\delta)(1-s\mu)} - \frac{\lambda_1 \widehat{f}_1(s)}{\lambda^*+\delta}\right)^2 - \frac{\lambda_2^2 \widehat{f}_2(s)}{(\lambda^*+\delta)^2}}. \qquad (5.9)$$

<u>Λήμμα 5.1</u>

Για $\delta > 0$ η εξίσωση

$$\left(1 - \frac{\lambda}{(\lambda^* + \delta)(1 - s\mu)} - \frac{\lambda_1 \hat{f}_1(s)}{\lambda^* + \delta}\right)^2 - \frac{\lambda_2^2 \hat{f}_2(s)}{(\lambda^* + \delta)^2} = 0 \qquad (5.10)$$

έχει ακριβώς δύο ρίζες. Έστω $\rho_1(\delta)$ και $\rho_2(\delta)$ στο δεξί μισό μιγαδικό επίπεδο με το πραγματικό τους μέρος να είναι θετικό για $i = 1,2$.

<u>Απόδειξη</u>

Αρχικά η σχέση (5.10) απλοποιείται ως εξής:

$$\left(1 - s\mu - \frac{\lambda}{\lambda^* + \delta} - \frac{\lambda_1(1 - s\mu)\hat{f}_1(s)}{\lambda^* + \delta}\right)^2 - \frac{(\lambda_2(1 - s\mu))^2 - \widehat{f}_2(s)}{(\lambda^* + \delta)^2} = 0.$$

Έπειτα, έστω $r > 0$ να είναι αρκετά μεγάλος αριθμός και ορίζουμε το C_r ως το περίγραμμα που περιέχει τον φανταστικό άξονα από το $-ir$ έως το ir και τον μισό κύκλο με ακτίνα r να πηγαίνει δεξιόστροφα από ir έως $-ir$. Πρώτον, εφαρμόζουμε το θεώρημα του Rouche για να αποδείξουμε ότι η εξίσωση

$$1 - s\mu - \frac{\lambda}{\lambda^* + \delta} - \frac{\lambda_1(1 - s\mu)\hat{f}_1(s)}{\lambda^* + \delta} = 0$$

έχει ακριβώς μία ρίζα μέσα στο C_r. Όταν το s είναι στον φανταστικό άξονα έχουμε

$$\left|\frac{\frac{\lambda_1(1 - s\mu)\hat{f}_1(s)}{\lambda^* + \delta}}{1 - s\mu - \frac{\lambda}{\lambda^* + \delta}}\right| = \frac{\left|\frac{\lambda_1(1 - s\mu)}{\lambda^* + \delta}\right| \left|\hat{f}_1(s)\right|}{\left|\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \delta}{\lambda^* + \delta} - s\mu\right|} \leq \frac{\left|\frac{\lambda_1(1 - s\mu)}{\lambda^* + \delta}\right|}{\left|\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \delta}{\lambda^* + \delta} - s\mu\right|} < 1.$$

Για s στον μισό κύκλο και $\forall\, \varepsilon > 0$,

$$\frac{\left|\frac{1}{\mu} - s\right|}{\left|\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \delta}{(\lambda^* + \delta)\mu} - s\right|} < 1 + \varepsilon.$$

Για $\varepsilon = \frac{\lambda + \lambda_2 + \delta}{\lambda_1}$ υπάρχει $r_0 > 0$ τέτοιο ώστε όταν $r > r_0$ να ισχύει

$$\frac{\left|\frac{\lambda_1(1 - s\mu)\hat{f}_1(s)}{\lambda^* + \delta}\right|}{\left|1 - s\mu - \frac{\lambda}{\lambda^* + \delta}\right|} \leq \frac{\lambda_1}{\lambda^* + \delta} \frac{\left|\frac{1}{\mu} - s\right|}{\left|\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \delta}{(\lambda^* + \delta)\mu} - s\right|} < \frac{\lambda_1}{\lambda^* + \delta}(1 + \varepsilon) \leq 1.$$

Έτσι αποδείξαμε το πρώτο σκέλος της απόδειξης.

Με τον ίδιο τρόπο χειριζόμαστε και το δεύτερο μέρος της απόδειξης και καταλήγουμε σε όμοιο συμπέρασμα.

Το λήμμα αποδείχτηκε. ■

5.4 Ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις

Σε αυτήν την ενότητα, μελετάμε τις ελλειμματικές εξισώσεις ανανέωσης που ικανοποιούνται από τις δύο αναμενόμενες προεξοφλητικές συναρτήσεις ζημιάς στο μοντέλο κινδύνου με δύο κατηγορίες απαιτήσεων και τυχαίο εισόδημα.

Ας δούμε πως απλοποιούνται οι μετασχηματισμοί Laplace των ποσοτήτων $m_1(u), m_2(u)$.

$$\widehat{m}_1(s) = \frac{\hat{f}_{1,1}(s) - \hat{f}_{1,2}(s)}{\hat{h}_1(s) - \hat{h}_2(s)}, \qquad (5.11)$$

$$\widehat{m}_2(s) = \frac{\hat{f}_{2,1}(s) - \hat{f}_{2,2}(s)}{\hat{h}_1(s) - \hat{h}_2(s)}, \qquad (5.12)$$

όπου

$$\hat{h}_1(s) = \left(1 - s\mu - \frac{\lambda}{\lambda^* + \delta}\right)^2,$$

$$\begin{aligned}\hat{h}_2(s) = \frac{(s\mu)^2}{(\lambda^* + \delta)^2}\left(2\lambda_1(\lambda^* + \delta)\hat{f}_1(s) + \lambda_2^2\widehat{f}_2(s) - \lambda_1^2\widehat{f}_1(s)\right) \\ + \frac{2s\mu}{(\lambda^* + \delta)^2}\left((2\lambda_1(\lambda^* + \delta) - \lambda\lambda_1)\hat{f}_1(s) + \lambda_2^2\widehat{f}_2(s) - \lambda_1^2\widehat{f}_1(s)\right) \\ + \frac{1}{(\lambda^* + \delta)^2}\left((2\lambda_1(\lambda^* + \delta) - 2\lambda\lambda_1)\hat{f}_1(s) + \lambda_2^2\widehat{f}_2(s) - \lambda_1^2\widehat{f}_1(s)\right),\end{aligned}$$

$$\hat{f}_{1,1}(s) = -\left(1 - s\mu - \frac{\lambda}{\lambda^* + \delta}\right)\frac{\lambda\widehat{m}_1\left(\frac{1}{\mu}\right)}{\lambda^* + \delta} - \frac{\lambda\lambda_2(1 - s\mu)\widehat{\Psi}_1\left(\frac{1}{\mu}\right)}{(\lambda^* + \delta)^2},$$

$$\begin{aligned}\hat{f}_{1,2}(s) = \frac{\lambda_1}{(\lambda^* + \delta)^2}\left((\lambda^* + \lambda_2 - \lambda_1 + \delta)\widehat{w}_1(s) - \lambda_1\hat{f}_1(s)\widehat{w}_1(s) + \lambda\widehat{m}_1\left(\frac{1}{\mu}\right)\hat{f}_1(s)\right) \\ - \frac{2s\mu\lambda_1}{(\lambda^* + \delta)^2}\Bigg(2\big((\lambda^* + \lambda_2 + \delta) - \lambda\big)\widehat{w}_1(s) - 2\lambda_1\hat{f}_1(s)\widehat{w}_1(s) \\ + \lambda\widehat{m}_1\left(\frac{1}{\mu}\right)\hat{f}_1(s)\Bigg) + \frac{(s\mu)^2\lambda_1}{(\lambda^* + \delta)^2}\left((\lambda^* + \lambda_2 + \delta)\widehat{w}_1(s) - 2\lambda_1\hat{f}_1(s)\widehat{w}_1(s)\right),\end{aligned}$$

$$\hat{f}_{2,1}(s) == -\left(1 - s\mu - \frac{\lambda}{\lambda^* + \delta}\right)\frac{\lambda\widehat{m}_2\left(\frac{1}{\mu}\right)}{\lambda^* + \delta} - \frac{\lambda\lambda_2(1 - s\mu)\widehat{\Psi}_2\left(\frac{1}{\mu}\right)}{(\lambda^* + \delta)^2},$$

$$\hat{f}_{2,2}(s) = \frac{1}{(\lambda^* + \delta)^2}\left(\lambda_2^2 w_2(s) + \lambda\lambda_1\hat{f}_1(s)\widehat{m}_2\left(\frac{1}{\mu}\right)\right)$$
$$- \frac{s\mu}{(\lambda^* + \delta)^2}\left(2\lambda_2^2\widehat{w}_2(s) + \lambda\lambda_1\hat{f}_1(s)\widehat{m}_2\left(\frac{1}{\mu}\right)\right) + \frac{(s\mu\lambda)^2\widehat{w}_2(s)}{(\lambda^* + \delta)^2},$$

και

$$T_s f_{i,j}(0) = \hat{f}_{i,j}(s) \quad , \quad T_s h_i(0) = \hat{h}_i(s) \;\; , \;\; i,j = 1,2.$$

<u>Πρόταση 5.1</u>

Ο μετασχηματισμός Laplace $\widehat{m}_i(s)$ της αναμενόμενης προεξοφλητικής συνάρτησης ζημιάς ικανοποιεί την ακόλουθη σχέση

$$\widehat{m}_i(s) = \frac{T_s T_{\rho_2} T_{\rho_1} h_2(0)}{(\mu)^2} + \frac{T_s T_{\rho_2} T_{\rho_1} f_{i,2}(0)}{(\mu)^2} \;, i = 1,2. \qquad (5.13)$$

<u>Απόδειξη</u>

Αφού η $\widehat{m}_i(s)$, $i = 1,2$ είναι αναλυτική για όλα τα s με $\boldsymbol{Re}\ s > 0$ και αφού οι ρίζες ρ_1 και ρ_2 είναι μηδενικές για τους αριθμητές σύμφωνα με το Λήμμα 5.1, τότε ισχύει $\hat{f}_{i,1}(\rho_j) = \hat{f}_{i,2}(\rho_j)$ για $i,j = 1,2$. Επειδή η $\hat{f}_{i,1}(s)$ είναι μία πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού 1, εφαρμόζουμε το θεώρημα παρεμβολής Lagrange και έχουμε

$$\hat{f}_{i,1}(s) = \frac{\hat{f}_{i,2}(\rho_1)(s - \rho_2) - \hat{f}_{i,2}(\rho_2)(s - \rho_1)}{\rho_2 - \rho_1} \implies$$

$$\hat{f}_{i,1}(s) + \hat{f}_{i,2}(s) = \frac{(s - \rho_2)\left(\hat{f}_{i,2}(s) - \hat{f}_{i,2}(\rho_1)\right) - (s - \rho_1)\left(\hat{f}_{i,2}(s) - \hat{f}_{i,2}(\rho_2)\right)}{\rho_2 - \rho_1} =$$

$$(s - \rho_1)(s - \rho_2)T_s T_{\rho_2} T_{\rho_1} f_{i,2}(0). \qquad (5.14)$$

Ομοίως εργαζόμαστε και για το πρώτο σκέλος της (5.13) και αφού $\hat{h}_1(\rho_i) = \hat{h}_2(\rho_i)$ για $i = 1,2$ όπου η $\hat{h}_1(s)$ είναι μία πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού 2, προκύπτει το αποτέλεσμά μας που είναι

$$\hat{h}_1(s) = \hat{h}_1(0)\frac{(s-\rho_1)(s-\rho_2)}{\rho_1\rho_2} + (s-\rho_1)(s-\rho_2)\left(\frac{\hat{h}_2(\rho_1)}{\rho_1}\frac{1}{\rho_1-\rho_2} + \frac{\hat{h}_2(\rho_2)}{\rho_2}\frac{1}{\rho_2-\rho_1}\right)$$

$$+\hat{h}_2(\rho_1)\frac{s-\rho_2}{\rho_1-\rho_2} + \hat{h}_2(\rho_2)\frac{s-\rho_1}{\rho_2-\rho_1}.$$

Οπότε,

$$\hat{h}_1(s) - \hat{h}_2(s) = (s-\rho_1)(s-\rho_2)\left((\mu)^2 - T_sT_{\rho_2}T_{\rho_1}h_2(0)\right). \tag{5.15}$$

Συνεπώς αν αντικαταστήσουμε τις (5.14) και (5.15) στις (5.11) και (5.12) προκύπτει το ζητούμενο.

Η πρόταση αποδείχτηκε. ∎

<u>Πρόταση 5.2</u>

Η $m_i(u)$ για $i = 1,2$ ικανοποιεί την ακόλουθη ελλειμματική εξίσωση

$$m_i(u) = \kappa_\delta \int_0^u m_i(u-y)\varsigma(y)dy + \xi_i(u)\ , \tag{5.16}$$

όπου

$$\kappa_\delta = \frac{(2\lambda_1(\lambda^* + \delta) - 2\lambda\lambda_1)T_0T_{\rho_2}T_{\rho_1}f_1(0) + \lambda_2^2T_0T_{\rho_2}T_{\rho_1}f_2(0) - \lambda_1^2T_0T_{\rho_2}T_{\rho_1}f * f_1(0)}{(\lambda^* + \delta)^2(\mu)^2}$$

$$+\frac{2}{(\lambda^*+\delta)^2\mu}\Big((2\lambda_1(\lambda^*+\delta) - \lambda\lambda_1)\left(\rho_1T_0T_{\rho_2}T_{\rho_1}f_1(0) - T_0T_{\rho_2}f_1(0)\right)$$

$$+\lambda_2^2\left(\rho_1T_0T_{\rho_2}T_{\rho_1}f_2(0) - T_0T_{\rho_2}f_2(0)\right)$$

$$-\lambda_1^2\left(\rho_1T_0T_{\rho_2}T_{\rho_1}f * f_1(0) - T_0T_{\rho_2}f * f_1(0)\right)\Big)$$

$$+\frac{1}{(\lambda^*+\delta)^2}\Big(2\lambda_1(\lambda^*+\delta)\left(1-(\rho_2+\rho_1)T_0T_{\rho_2}f_1(0)+{\rho_1}^2T_0T_{\rho_2}T_{\rho_1}f_1(0)\right)$$
$$+\lambda_2^2\left(1-(\rho_2+\rho_1)T_0T_{\rho_2}f_2(0)+{\rho_1}^2T_0T_{\rho_2}T_{\rho_1}f_2(0)\right)$$
$$-\lambda_1^2\left(1-(\rho_2+\rho_1)T_0T_{\rho_2}f*f_1(0)+{\rho_1}^2T_0T_{\rho_2}T_{\rho_1}f*f_1(0)\right)\Big),$$

$$\varsigma(y)=\frac{1}{\kappa_\delta}\Bigg\{\frac{(2\lambda_1(\lambda^*+\delta)-2\lambda\lambda_1)T_{\rho_2}T_{\rho_1}f_1(y)+\lambda_2^2T_{\rho_2}T_{\rho_1}f_2(y)-\lambda_1^2T_{\rho_2}T_{\rho_1}f*f_1(y)}{(\lambda^*+\delta)^2(\mu)^2}$$
$$+\frac{2}{(\lambda^*+\delta)^2\mu}\Big((2\lambda_1(\lambda^*+\delta)-\lambda\lambda_1)\left(\rho_1T_{\rho_2}T_{\rho_1}f_1(y)-T_{\rho_2}f_1(y)\right)$$
$$+\lambda_2^2\left(\rho_1T_{\rho_2}T_{\rho_1}f_2(y)-T_{\rho_2}f_2(y)\right)$$
$$-\lambda_1^2\left(\rho_1T_{\rho_2}T_{\rho_1}f*f_1(y)-T_{\rho_2}f*f_1(y)\right)\Big)$$
$$+\frac{1}{(\lambda^*+\delta)^2}\Big(2\lambda_1(\lambda^*+\delta)\left(f_1(y)-(\rho_2+\rho_1)T_{\rho_2}f_1(y)+{\rho_1}^2T_{\rho_2}T_{\rho_1}f_1(y)\right)$$
$$+\lambda_2^2\left(f_2(y)-(\rho_2+\rho_1)T_{\rho_2}f_2(y)+{\rho_1}^2T_{\rho_2}T_{\rho_1}f_2(y)\right)$$
$$-\lambda_1^2\left(f*f_1(y)-(\rho_2+\rho_1)T_{\rho_2}f*f_1(y)+{\rho_1}^2T_{\rho_2}T_{\rho_1}f*f_1(y)\right)\Big)\Bigg\}$$

και

$$\xi_1(u)$$
$$=\frac{\lambda_1\left((\lambda^*+\lambda_2-\lambda_1+\delta)T_{\rho_2}T_{\rho_1}w_1(u)-\lambda_1T_{\rho_2}T_{\rho_1}f_1*w_1(u)+\lambda\widehat{m}_1\left(\frac{1}{\mu}\right)T_{\rho_2}T_{\rho_1}f_1(u)\right)}{(\lambda^*+\delta)^2(\mu)^2}$$
$$-\frac{2}{(\lambda^*+\delta)^2\mu}\Big((2(\lambda^*+\lambda_2+\delta)-\lambda)\left(\rho_1T_{\rho_2}T_{\rho_1}w_1(u)-T_{\rho_2}w_1(u)\right)$$
$$-\lambda_1\left(\rho_1T_{\rho_2}T_{\rho_1}f_1*w_1(u)-T_{\rho_2}f_1*w_1(u)\right)+\lambda\widehat{m}_1\left(\frac{1}{\mu}\right)\left(\rho_1T_{\rho_2}T_{\rho_1}f_1(u)-T_{\rho_2}f_1(u)\right)\Big)$$

$$+\frac{\lambda_1}{(\lambda^*+\delta)^2}\Big((\lambda^*+\lambda_2+\delta)\left(w_1(u)-(\rho_2+\rho_1)T_{\rho_2}w_1(u)+{\rho_1}^2T_{\rho_2}T_{\rho_1}w_1(u)\right)$$

$$-\lambda_1\left(f_1*w_1(u)-(\rho_2+\rho_1)T_{\rho_2}f_1*w_1(u)+{\rho_1}^2T_{\rho_2}T_{\rho_1}f_1*w_1(u)\right)\Big),$$

$$\xi_2(u)=\frac{1}{(\lambda^*+\delta)^2(\mu)^2}\left(\lambda_2^2T_{\rho_2}T_{\rho_1}w_2(u)+\lambda\lambda_1\widehat{m}_2\left(\frac{1}{\mu}\right)T_{\rho_2}T_{\rho_1}f_1(u)\right)$$

$$-\frac{2\lambda_2^2\left(\rho_1T_{\rho_2}T_{\rho_1}w_2(u)-T_{\rho_2}w_2(u)\right)+\lambda\lambda_1\widehat{m}_2\left(\frac{1}{\mu}\right)\left(\rho_1T_{\rho_2}T_{\rho_1}f_1(u)-T_{\rho_2}f_1(u)\right)}{(\lambda^*+\delta)^2\mu}$$

$$+\frac{\lambda_2^2}{(\lambda^*+\delta)^2}\left(w_2(u)-(\rho_2+\rho_1)T_{\rho_2}w_2(u)+{\rho_1}^2T_{\rho_2}T_{\rho_1}w_2(u)\right).$$

<u>Απόδειξη</u>

Για την απόδειξη δείτε (Xie, J.H. and Zou, W. On the Expected Discounted Penalty Function for A Risk Model σελ. 12-13) . ■

<u>Πρόταση 5.3</u>

Η αναμενόμενη προεξοφλητική συνάρτηση ζημιάς $m_i(u)$ ικανοποιεί την εξίσωση (5.16) και γράφεται ως εξής

$$m_i(u)=\frac{1}{\zeta}\int_0^u\left[1-\overline{H}(u-y)\right]dB_i(y)+\frac{B_i(0)}{\zeta}\left[1-\overline{H}(u)\right], i=1,2, \quad (5.17)$$

ή

$$m_i(u)=\frac{1}{\zeta}\int_0^u B_i(u-y)dH(y)+\frac{1}{1+\zeta}B_i(u), \qquad i=1,2, \qquad (5.18)$$

όπου $B_i(u)=\xi_i(u)/\kappa_\delta$.

<u>Απόδειξη</u>

Για την απόδειξη δείτε (Xie, J.H. and Zou, W. On the Expected Discounted Penalty Function for A Risk Model σελ. 14) . ■

5.5 Μεγέθη ασφαλίστρων με κλασματικούς Laplace μετασχηματισμούς

Σε αυτή την ενότητα, εξετάζουμε την περίπτωση στην οποία το μέγεθος των ασφαλίστρων έχουν τους ακόλουθους κλασματικούς Laplace μετασχηματισμούς:

$$\hat{f}(s) = \frac{\rho(s)}{\prod_{i=1}^{N}(s+\rho_i)^{n_i}}, \tag{5.19}$$

όπου $N, n_i \in \mathbb{N}^+$ με $n_1 + n_2 + \cdots + n_N = n, \rho_i > 0, i = 1,2, \ldots, N$, και $\rho_i \neq \rho_j, i \neq j$. Η $\rho(s)$ αποτελεί μία πολυωνυμική συνάρτηση $n-1$ βαθμού ή μικρότερου, και ικανοποιεί τη σχέση $\rho(0) = \prod_{i=1}^{N} {\rho_i}^{n_i}$. Χρησιμοποιώντας μερικό κλάσμα, η (1) ξαναγράφεται ως

$$\hat{f}(s) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\alpha_{ij} {\rho_i}^j}{(s+\rho_i)^j}\ , \tag{5.20}$$

όπου

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{{\rho_i}^j (n_i - j)!} \frac{d^{n_i - j}}{ds^{n_i - j}} \left\{ \prod_{k=1, k\neq i}^{N} \frac{\rho(s)}{(s+\rho_k)^{n_k}} \right\} |_{s=-\rho_i}$$

Παίρνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της (2), έχουμε

$$\hat{f}(x) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} \frac{x^{j-1}{\rho_i}^j e^{-\rho_i x}}{(j-1)!}, \tag{5.21}$$

η οποία είναι συνάρτηση πυκνότητας ενός συνδυασμού Erlang κατανομών. Ορίζουμε

$$\beta_{ij}(x) = \frac{x^{j-1}{\rho_i}^j e^{-\rho_i x}}{(j-1)!}, x > 0, j \in \mathbb{N}^+,$$

ως συνάρτηση πυκνότητας Erlang(j), με παράμετρο ρ_i, x_{ij} είναι μία τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας $\beta_{ij}(x)$. Έτσι, η x_{ij} μπορεί να ορισθεί ως $x_{ij} = \theta_{i1} + \theta_{i2} + \cdots + \theta_{ij}$, όπου $\theta_{i1}, \theta_{i2}, \dots, \theta_{ij}$ ισόνομες εκθετικές, με μέση τιμή $1/\rho_i$. Για $\boldsymbol{Re}\, s > \max(\rho_i)$, παίρνουμε, για $k = 1,2$,

$$\begin{aligned}\hat{A}_k(s) &= \int_0^\infty e^{-su}\int_0^\infty m_k(u+x) f_G(x)\,dx\,du = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n_i}\alpha_{ij}\int_0^\infty \beta_{ij}(x) T_s m_k(x)\,dx \\ &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n_i}\alpha_{ij} E\left[T_s m_k(\theta_{i1}+\theta_{i2}+\cdots+\theta_{ij})\right] \\ &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n_i}\alpha_{ij}{\rho_i}^j E\left[T_s T_{\rho_i}^{j} m_k(0)\right],\end{aligned}$$

όπου $T_{\rho_i}^{j} = T_{\rho_i} \dots T_{\rho_i}$ $(j - \varphi o \rho \acute{\varepsilon} \varsigma)$. Επιπλέον, από τις προϋποθέσεις του $T - operator$, παίρνουμε, για $k = 1,2$,

$$\hat{A}_k(s) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n_i}\alpha_{ij}{\rho_i}^j\left(\frac{\widehat{m}_k(s)}{(\rho_i - s)^j} - \sum_{i=1}^{j}\frac{T_{\rho_i}^{j} m_k(0)}{(\rho_i - s)^{j+1-i}}\right) = \widehat{f}(-s)\widehat{m}_k(s) - Q_k(s), \tag{5.22}$$

όπου $Q_k(s) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n_i}\alpha_{ij}{\rho_i}^j\sum_{i=1}^{j}\frac{T_{\rho_i}^{j} m_k(0)}{(\rho_i - s)^{j+1-i}}$. Παρομοίως, μετά από μερικούς προσεκτικούς υπολογισμούς, βρίσκουμε ότι, για $k = 1,2$,

$$\hat{A}_k(s) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n_i}\alpha_{ij}{\rho_i}^j\left(\frac{\widehat{\Psi}_k(s)}{(\rho_i - s)^j} - \sum_{i=1}^{j}\frac{T_{\rho_i}^{j} \Psi_k(0)}{(\rho_i - s)^{j+1-i}}\right) = \widehat{f}(-s)\widehat{\Psi}_k(s) - \bar{Q}_k(s), \tag{5.23}$$

όπου $\bar{Q}_k(s) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n_i}\alpha_{ij}{\rho_i}^j\sum_{i=1}^{j}\frac{T^j_{\rho_i}\Psi_k(0)}{(\rho_i-s)^{j+1-i}}$.

Αντικαθιστώντας τις (5.22), (5.23) στις σχέσεις των $\widehat{m}_1(s)$, $\widehat{\Psi}_1(s)$, $\widehat{m}_2(s)$και $\widehat{\Psi}_2(s)$, έχουμε

$$\widehat{m}_1(s) = \frac{\lambda_1 L(s)\widehat{w}_1(s) - \lambda L(s)Q_1(s) - \lambda\lambda_2\bar{Q}_1(s) + \lambda_1\lambda_2\widehat{w}_1(s)}{L^2(s) - \lambda_2^2\,\hat{f}_2(s)}\,, \tag{5.24}$$

$$\widehat{m}_2(s) = \frac{-\lambda L(s)Q_2(s) - \lambda\lambda_2\Lambda(s)\bar{Q}_2(s) + \lambda_2^2\widehat{w}_2(s)}{L^2(s) - \lambda_2^2\,\hat{f}_2(s)}, \tag{5.25}$$

όπου $L(s) = \lambda^* + \delta - \lambda\widehat{f}(-s) - \lambda\hat{f}_1(s)$.

Σημειώνουμε εδώ πως ο κοινός παρονομαστής των (5.24) και (5.25) είναι αναλυτικός για τον s στο δεξί μισό μιγαδικό επίπεδο εκτός των ρ_i. Προκειμένου να το κάνουμε αναλυτικό για κάθε s με $\boldsymbol{Re}\ s \geq 0$, υποθέτουμε πως $\Lambda(s) = \prod_{i=1}^{N}(s-\rho_i)^{n_i}$, με το οποίο πολλαπλασιάζουμε τόσο τον αριθμητή, όσο και τον παρονομαστή των σχέσεων (5.24)και (5.25). Έπειτα, βρίσκουμε πως

$$\widehat{m}_1(s) = \frac{\lambda_1 L(s)\Lambda(s)\widehat{w}_1(s) - \lambda L(s)\Lambda(s)Q_1(s) - \lambda\lambda_2\Lambda(s)\bar{Q}_1(s) + \lambda_1\lambda_2\Lambda(s)\widehat{w}_1(s)}{L^2(s)\Lambda(s) - \lambda_2^2\,\hat{f}_2(s)\Lambda(s)}, \tag{5.26}$$

$$\widehat{m}_2(s) = \frac{-\lambda L(s)\Lambda(s)Q_2(s) - \lambda\lambda_2\Lambda(s)\bar{Q}_2(s) + \lambda_2^2\widehat{w}_2(s)\Lambda(s)}{L^2(s)\Lambda(s) - \lambda_2^2\,\hat{f}_2(s)}, \tag{5.27}$$

Από τις (8) και (9), προκειμένου να ορίσουμε τις $\widehat{m}_1(s)$ και $\widehat{m}_2(s)$, χρειάζεται να βρούμε τις $\Lambda(s)Q_k(s)$ και $\Lambda(s)\bar{Q}_k(s)$, $k = 1{,}2$, οι οποίες αποτελούν πολυώνυμα βαθμού $n-1$.

$$\Lambda(s)Q_k(s) = \sum_{i=1}^{n} L_{k,i}s^{i-1},\ \ \Lambda(s)\bar{Q}_1(s) = \sum_{i=1}^{n}\hat{L}_{k,i}s^{i-1},$$

Στη συνέχεια, πρέπει να βρούμε n άγνωστους συντελεστές $L_{k,i}$ και n άγνωστους συντελεστές $\hat{L}_{k,i}$. Για το σκοπό αυτό, δίνουμε χωρίς αποδείξεις το ακόλουθο Λήμμα. Το αποτέλεσμα από το ακόλουθο Λήμμα μπορεί να αποδειχθεί με την ίδια τεχνική που παρέχεται στο Λήμμα 5.1.

Λήμμα 5.2

Για $\delta > 0$, ο κοινός παρονομαστής των (5.26) και (5.27) έχει ακριβώς $2n$ ρίζες, έστω $\rho_1(\delta), \rho_2(\delta), \dots, \rho_{2n}(\delta)$, στο δεξί μισό μιγαδικό επίπεδο.

Έστω ότι $\rho_1(\delta), \rho_2(\delta), \dots, \rho_{2n}(\delta)$ είναι διακριτές. Από τη στιγμή που οι $\widehat{m}_1(s)$ και $\widehat{m}_2(s)$ είναι αναλυτικές για όλα τα s, με $\boldsymbol{Re}\ s \geq 0$, τότε οι ρίζες $\rho_1(\delta), \rho_2(\delta), \dots, \rho_{2n}(\delta)$ είναι μηδενικές των αριθμητών των (8) και (9). Έτσι, παίρνουμε τις ακόλουθες $2n$ γραμμικές εξισώσεις, οι οποίες ικανοποιούνται από τις $L_{1,i}$ και $\widehat{L}_{1,i}$, $i = 1,2,..,2n$,

$$\lambda_1 L(\rho_i(\delta))\Lambda(\rho_i(\delta))\widehat{w}_1(\rho_i(\delta)) - \lambda L\big(\rho_i(\delta)\big)\Lambda\big(\rho_i(\delta)\big)Q_1\big(\rho_i(\delta)\big) - \lambda\lambda_2\Lambda(\rho_i(\delta))\bar{Q}_1(\rho_i(\delta)) + \lambda_1\lambda_2\Lambda(\rho_i(\delta))\widehat{w}_1(\rho_i(\delta)) = 0 \tag{5.28}$$

Παρομοίως, παίρνουμε επίσης $2n$ γραμμικές εξισώσεις, οι οποίες ικανοποιούνται από τις $L_{2,i}$ και $\widehat{L}_{2,i}$, $i = 1,2,..,2n$,

$$-\lambda L(\rho_i(\delta)\Lambda(\rho_i(\delta)Q_2(\rho_i(\delta) - \lambda\lambda_2\Lambda(\rho_i(\delta)\bar{Q}_2(\rho_i(\delta) + \lambda_2^2\widehat{w}_2(\rho_i(\delta)\Lambda(\rho_i(\delta) = 0 \tag{5.29}$$

Μετά την επίλυση των δύο αυτών γραμμικών εξισώσεων, οι $L_{k,i}$ και $\widehat{L}_{k,i}$, $i = 1,2,..,2n$, μπορούν να προσδιορισθούν. Έπειτα, οδηγούμαστε στους μετασχηματισμούς Laplace (5.26) και (5.27). . ■

5.6 Εφαρμογή

5.6.1 Παράδειγμα 1

Στο παράδειγμα αυτό, θα απεικονίσουμε τις πιθανότητες χρεοκοπίας, όταν τα μεγέθη των απαιτήσεων και των ασφαλίστρων κατανέμονται εκθετικά. Για λόγους απεικόνισης, θέτουμε $\mu = 1.8, \mu_1 = 1.5, \mu_2 = 1, \lambda = 2.5, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$. Έστω $\delta = 0, w_i(x_1, x_2) = 1 (i = 1,2)$, τότε η αναμενόμενη συνάρτηση ποινής $m_i(u) (i = 1,2)$ απλοποιείται στην πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi_i(u) (i = 1,2)$.

Η εξίσωση $\left(1 - s\mu - \frac{\lambda}{\lambda^* + \delta} - \frac{\lambda_1(1 - s\mu)\hat{f}_1(s)}{\lambda^* + \delta}\right)^2 - \frac{\left(\lambda_2(1 - s\mu)\right)^2 - \widehat{f}_2(s)}{(\lambda^* + \delta)^2} = 0$ απλοποιείται ως εξής

$$\left(1-\frac{5}{13(1-1.8s)}-\frac{1}{6.5(1+1.5s)}\right)^2=\left(\frac{3}{6.5}\right)^2\frac{1}{(1+s)}.$$

Μετά την επίλυση της παραπάνω εξίσωσης, καταλήγουμε σε πέντε ρίζες, τις 0, 0.390477, -0.879945, -0.600289, -0.141669. Έπειτα, παράγουμε τις $\widehat{m}_1\left(\frac{1}{\mu}\right)=0.640091$, $\widehat{\Psi}_1\left(\frac{1}{\mu}\right)=0.559909, \widehat{m}_2\left(\frac{1}{\mu}\right)=0.510574, \widehat{\Psi}_2\left(\frac{1}{\mu}\right)=0.689426$. Τέλος, η αντιστροφή των μετασχηματισμών Laplace των $\widehat{m}_1(s)$ και $\widehat{m}_2(s)$ αποδίδει τις πιθανότητες χρεοκοπίας

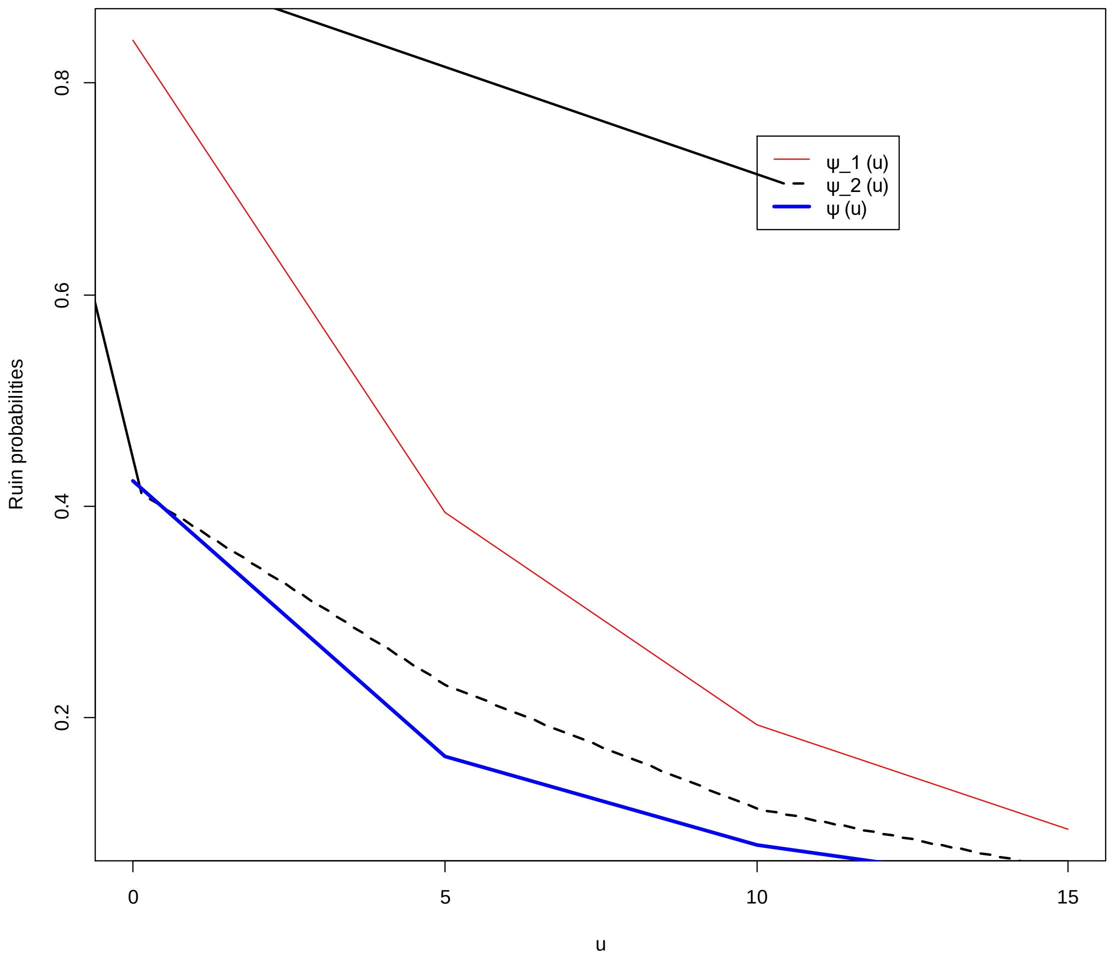
$$\psi_1(u)=-0.071144e^{-0.879945u}+0.018003e^{-0.600289u}+0.469982e^{-0.141669u}$$

$$\psi_2(u)=0.079266e^{-0.879945u}+0.016749e^{-0.600289u}+0.327589e^{-0.141669u}$$

Μέσα από την R διαχειριστήκαμε το παράδειγμα που παρουσιάζεται με σκοπό να εξαγάγουμε το κατάλληλο γράφημα.

Παρακάτω παρουσιάζεται ο κώδικας σε R καθώς και η γραφική παράσταση.

```
> u<-seq(0,15,5);
> ψ1<- -0.071144*exp(-0.879945*u)+0.018003*exp(-0.600289*u)+0.469982*exp
(-0.141669*u);
> ψ2<- 0.079266*exp(-0.879945*u)+0.016749*exp(-0.600289*u)+0.327589*exp(
-0.141669*u);
> ψ<-ψ1+ψ2;
> plot(u,ψ,type="l",col="red");
> lines(u,m1,lty=2,col="black",lwd=2);
> lines(u,m2,lty=1,col="blue",lwd=3);
> legend(10, 0.75, c("ψ_1 (u)","ψ_2 (u)","ψ (u)"),lty=c(1,2),col=c("red"
,"black","blue"), lwd=c(1,2,3));
```



Σχήμα 5.1 Οι πιθανότητες χρεοκοπίας για το παράδειγμα 1.

5.6.2 Παράδειγμα 2

Σε αυτό το παράδειγμα, απεικονίζουμε τις πιθανότητες χρεοκοπίας, όταν τα μεγέθη των απαιτήσεων της μίας κλάσης κατανέμονται, σύμφωνα με μία Erlang(2) κατανομή, ενώ τα μεγέθη των απαιτήσεων της δεύτερης κλάσης κατανέμονται σύμφωνα με μία μίξη δύο Εκθετικών, $f_1(x) = 6.76e^{-2.6x}$ και $f_2(x) = 0.15e^{-x} + 1.5e^{-2x}$, για $x \geq 0$. Για λόγους απεικόνισης, υποθέτουμε επιπλέον ότι $\delta = 0$, $w_i(x_1, x_2) = 1 (i = 1,2)$ και τα μεγέθη των ασφαλίστρων κατανέμονται εκθετικά με $\mu = 1.8$. Έστω τώρα $\lambda = 2.5, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$. Επιλύοντας την $\left(1 - s\mu - \frac{\lambda}{\lambda^* + \delta} - \frac{\lambda_1(1-s\mu)\hat{f}_1(s)}{\lambda^* + \delta}\right)^2 - \frac{(\lambda_2(1-s\mu))^2 - \hat{f}_2(s)}{(\lambda^* + \delta)^2} = 0$, αποδίδει οκτώ ρίζες, τις $0, 0.390985, -1.194764, -0.489621, -3.578668 - 0.234714i, -3.578668 + 0.234714i, -1.946361 - 0.1240087i, -1.946361 + 0.1240087i$. Τότε, βρίσκουμε ότι $\widehat{m}_1\left(\frac{1}{\mu}\right) = 0.307941$, $\widehat{\Psi}_1\left(\frac{1}{\mu}\right) = 0.307444, m_2\left(\frac{1}{\mu}\right) = 0.453832, \Psi_1\left(\frac{1}{\mu}\right) = 0.296168$. Επιπλέον, η αντιστροφή των μετασχηματισμών Laplace των $\widehat{m}_1(s)$ και $\widehat{m}_2(s)$ αποδίδει τις πιθανότητες χρεοκοπίας

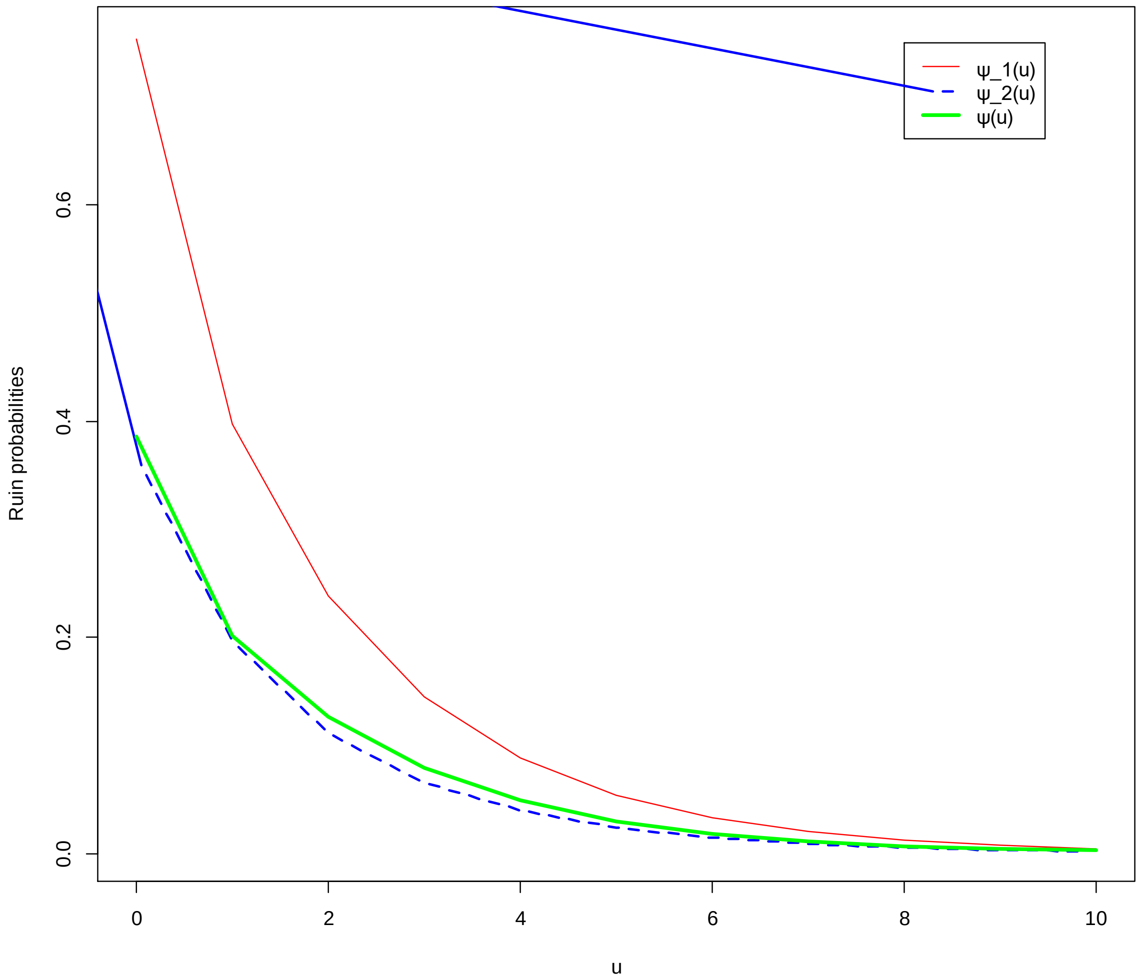
$$\begin{aligned}\psi_1(u) = 0.081003e^{-1.946361u}\cos(0.124009u) \\ + 0.088605e^{-1.946361u}\sin(0.124009u) \\ - 0.125463e^{-3.578668u}\cos(0.234714u) \\ + 0.117397e^{-3.578668u}\sin(0.234714u) + 0.093966e^{-1.194764u} \\ + 0.273590e^{-0.489621u}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_2(u) = -0.072828e^{-1.946361u}\cos(0.124009u) \\ - 0.084349e^{-1.946361u}\sin(0.124009u) \\ + 0.084415e^{-3.578668u}\cos(0.234714u) \\ - 0.108023e^{-3.578668u}\sin(0.234714u) + 0.046824e^{-1.194764u} \\ + 0.348229e^{-0.489621u}\end{aligned}$$

Παρακάτω φαίνεται ο κώδικας σε R και το σχήμα σύμφωνα με το οποίο φαίνεται η συμπεριφορά των $\psi_1(u)$, $\psi_2(u)$, $\psi(u)$, για $u \in [0,10]$.

```
> u<-seq(0,10,1);
> ψ1<- 0.081003*exp(-1.946361*u)*cos(0.124009*u)+0.088605*exp(-1.946361*
u)*sin(0.124009*u)-0.125463*exp(-3.578668*u)*cos(0.234714*u)
> +0.117397*exp(-3.578668*u)*sin(0.234714*u)+0.093966*exp(-1.194764*u)+0
.273590*exp(-0.489621*u);
> ψ2<- -0.072828*exp(-1.946361*u)*cos(0.124009*u)-0.084349*exp(-1.946361
*u)*sin(0.124009*u)
> +0.084415*exp(-3.578668*u)*cos(0.234714*u)-0.108023*exp(-3.578668*u)*s
in(0.234714*u)-0.046824*exp(-1.194764*u)+0.348229*exp(-0.489621*u);
> ψ<-ψ1+ψ2;
> [1] 0.753376000 0.397713083 0.237936143 0.144444706 0.088117541 0.0538
80726 0.032984072 0.020203311 0.012378363
[10] 0.007585154 0.004648315

> plot(u,ψ,ylab="Ruin probabilities",type="l",col="red");
> lines(u,ψ1,lty=2,col="blue",lwd=2);
> lines(u,ψ2,lty=1,col="green",lwd=3);
> legend(8, 0.75, c("ψ_1(u)","ψ_2(u)","ψ(u)"),lty=c(1,2), col=c("red","b
lue","green"), lwd=c(1,2,3));
```



Σχήμα 5.2 Οι πιθανότητες χρεοκοπίας για το παράδειγμα 2.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική

Παπαϊωάννου, Δ. Απόστολος. (2011). *Μελέτη μη Ανανεωτικών Στοχαστικών Μοντέλων στη Θεωρία Κινδύνου,* 1η Έκδοση, Πειραιάς.

Ξενόγλωσση

Gerber, H.U. & Shiu, E.S.W. (1998). On the time value of ruin, NORTH AMERICAN ACTUARIAL JOURNAL, **2**, NUMBER 1, 48-78.

Ji, L. & Zhang, C. (2010). The Gerber–Shiu penalty functions for two classes of renewal risk processes, Journal of Computational and Applied Mathematics **233**, 2575-2589.

Jiang, W. & Ma, C. (2018). The maximum surplus before ruin for two classes of perturbed risk model, Applicable Analysis, **97:1**, 124-133.

Li, S., Zhang, Z. & Yang, H. (2009). The Gerber–Shiu discounted penalty functions for a risk model with two classes of claims, Journal of Computational and Applied Mathematics **230**, 643-655.

Xie, J.H. & Zou, W. (2015). On the expected discounted penalty function for a risk model with classes of claims and random incomes, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, **44**, 485-501.

Gerber, H.U., Shiu, E.S.W., 2005. The time value of ruin in a Sparre Andersen model. North American Actuarial Journal, **9**, 49-69.

Dickson, D.C.M., Hipp, C., 2001. On the time to ruin for Erlang (2) risk processes. Insurance: Mathematics and Economics, **29**, 333-344.

Li, S., Garrido, J., 2005. Ruin probabilities for two classes of risk processes. ASTIN Bulletin, **35**, 61-77.