

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής



Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Η ΧΡΗΣΗ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ ΣΤΗΝ ΥΓΕΙΑ ΚΑΙ ΤΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΤΗΣ ΥΓΕΙΑΣ

Ταλιαδούρος Βασίλειος

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των
απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού
Διπλώματος Ειδίκευσης στην *Εφαρμοσμένη Στατιστική*

Πειραιάς
Ιούλιος 2020

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής



Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Η ΧΡΗΣΗ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ ΣΤΗΝ ΥΓΕΙΑ ΚΑΙ ΤΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΤΗΣ ΥΓΕΙΑΣ

Ταλιαδούρος Βασίλειος

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των
απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού
Διπλώματος Ειδίκευσης στην *Εφαρμοσμένη Στατιστική*

Πειραιάς
Ιούλιος 2020

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από το ΓΣΕΣ του τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμόν συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Τα μέλη της επιτροπής ήταν:

- Μπερσίμης Σωτήριος (Επιβλέπων)
- Γεωργακέλλος Δημήτριος
- Τζαβελάς Γεώργιος

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS
School of Finance and Statistics



Department of Statistics and Insurance Science

**POSTGRADUATE PROGRAM IN
APPLIED STATISTICS**

**THE USE OF CONTROL CHARTS
IN HEALTH AND HEALTH
ECONOMICS**

By

Vasileios Taliadouros

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance
Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of
the requirements for the degree of Master of Science in
Applied Statistics

Piraeus, Greece
July 2020

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

*Στους γονείς μου
Ευάγγελο και Αλεξάνδρα*

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου κύριο Σωτήριο Μπερσίμη για το θέμα που μου εμπιστεύτηκε, τις κατευθυντήριες συμβουλές και παρεμβάσεις που μου παρείχε κατά την διάρκεια εκπόνησης της παρούσας διπλωματικής εργασίας, καθώς και τα μέλη της τριμελούς επιτροπής κ.κ Γεωργακέλλο Δ. και Τζαβελά Γ. για τον χρόνο που αφιέρωσαν στην μελέτη και διόρθωσή της.

Θα ήταν άκομψο να μην πω ένα μεγάλο «ευχαριστώ» στους γονείς μου για την αδιάκοπη υπομονή και στήριξη που μου παρείχαν όλα τα χρόνια των σπουδών μου.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Περίληψη

Ο Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών αποτελεί μια από τις διασημότερες τακτικές για την παρακολούθηση της ποιότητας των παραγόμενων προϊόντων ή υπηρεσιών και είναι εφοδιασμένος με στατιστικές τεχνικές και μεθόδους που συντελούν στη προσπάθεια επίτευξης αυτού του στόχου, της παρακολούθησης και της βελτίωσης της ποιότητας. Οι πρώτες εφαρμογές και αναφορές για την χρήση αυτών των τεχνικών συνδέονται με τον κλάδο της βιομηχανίας, ωστόσο η εξέλιξη της τεχνογνωσίας αυτής οδήγησε στην επέκταση και εφαρμογή της και σε άλλους παραγωγικούς τομείς όπως ο οικονομικός, ο περιβαλλοντικός, ο κλάδος της τεχνολογίας και των τηλεπικοινωνιών, όπως και ο τομέας της υγείας και άλλοι.

Στην παρούσα διπλωματική επικεντρωνόμαστε στον τομέα της υγείας και των οικονομικών. Το βασικότερο εργαλείο του Στατιστικού Ελέγχου Διεργασιών είναι τα διαγράμματα ελέγχου. Στόχος της διπλωματικής αυτής είναι η παρουσίαση και χρήση των διαγραμμάτων ελέγχου στην υγεία και τα οικονομικά της υγείας. Για να πραγματοποιηθεί αυτό, στο Κεφάλαιο 1 δίνεται μια εισαγωγή στην υγεία και στα οικονομικά της υγείας όπως επίσης και στον στατιστικό έλεγχο διεργασιών. Έπειτα στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζονται τα βασικότερα διαγράμματα ελέγχου μονομεταβλητά και πολυμεταβλητά συνοδευόμενα και από εφαρμογές στον κλάδο της υγείας. Εν συνέχεια στο Κεφάλαιο 3 επικεντρωνόμαστε στα διαγράμματα ελέγχου στην υγεία όπου διαμορφώθηκαν ειδικά για την χρήση σε αυτό το πεδίο. Ακολουθεί το Κεφάλαιο 4 όπου δίνονται εφαρμογές διαγραμμάτων ελέγχου στα οικονομικά της υγείας. Τέλος στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζονται ενδεικτικές εφαρμογές προσομοίωσης όπως και κάποια συμπεράσματα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Abstract

Statistical Process Control is one of the most popular tactics for monitoring the quality of products or services produced and is equipped with statistical techniques and methods that contribute to the effort to achieve this goal, monitoring and improving quality. The first applications and reports on the use of these techniques are related to the industry, however, the development of this know-how has led to its expansion and application in other productive sectors such as economics, environment, technology and telecommunications, as well as health incisions and others.

In this dissertation we focus on health and finance. The most basic tool of Statistical Process Control is control charts. The aim of this dissertation is the presentation and use of control charts in health and health economics. To do this, Chapter 1 provides an introduction to health and health economics as well as statistical process control. Then in Chapter 2 are presented the main control charts univariate and multivariate accompanied by applications in the health sector. Next in Chapter 3 we focus on the health control charts where they were formulated specifically for use in this field. The following is Chapter 4 where applications of control charts in health economics are given. Finally, Chapter 5 presents indicative simulation applications as well as some conclusions

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες	vii
Περίληψη	ix
Abstract	xi
Περιεχόμενα	xii
Κεφάλαιο 1	
Εισαγωγή στην Υγεία και τα Οικονομικά της Υγείας	
1.1 Ορισμός της Υγείας	1
1.1.1 Η ποιότητα στο χώρο της Υγείας	1
1.1.2 Σύντομη αναδρομή της ποιότητας στο χώρο της Υγείας	2
1.1.3 Στόχοι και διαστάσεις της ποιότητας	3
1.2 Οικονομικά της Υγείας	4
Στατιστικός Έλεγχος Διαργασιών	
1.3 Εισαγωγή στον Στατιστικό Έλεγχο Διαργασιών	6
1.4 Αρχική προσέγγιση των διαγραμμάτων ελέγχου	6
1.5 Δομή Διαγράμματος Ελέγχου	9
1.6 Κατασκευή Διαγράμματος Ελέγχου	12
1.7 Χαρακτηριστική Καμπύλη	13
1.8 Μέσο μήκος ροής	13
1.9 Φάση I και II	14
1.10 Ιστορικά στοιχεία	15
Κεφάλαιο 2	
Διαγράμματα Ελέγχου	
2.1 Διαγράμματα ελέγχου	17
2.2 Διαγράμματα ελέγχου Τύπου Shewhart για Μεταβλητές	18
2.2.1 Διαγράμματα ελέγχου για τη μέση τιμή	18
2.2.2 Διαγράμματα ελέγχου για τη διασπορά	22
2.3 Διαγράμματα ελέγχου Τύπου Shewhart για Ιδιότητες	26
2.3.1 Διάγραμμα ελέγχου p	26
2.3.2 Διάγραμμα ελέγχου c	27
2.3.3 Διάγραμμα ελέγχου u	28
2.4 Διαγράμματα CUSUM & EWMA	29
2.4.1 Διάγραμμα CUSUM	29
2.4.2 Διάγραμμα Scale CUSUM για την διασπορά	30
2.4.3 Διάγραμμα EWMA	31
2.4.4 Διάγραμμα EWRMS για την διασπορά	32
2.4.5 Υπολογισμός ARL για διαγράμματα CUSUM & EWMA	33
2.5 Η περίπτωση της διαμέσου	37

2.6 Διεργασίες υψηλής απόδοσης	38
2.7 Πολυμεταβλητά Διαγράμματα ελέγχου	39
2.7.1 Εισαγωγή	39
2.7.2 Υποθέσεις Εφαρμογής	40
2.7.3 Εκτίμηση παραμέτρων μ και Σ	40
2.7.4 Hotelling T^2	41
2.7.4.1 Περίπτωση δειγμάτων ($n > 1$)	41
2.7.4.2 Περίπτωση μεμονωμένων παρατηρήσεων ($n = 1$)	43
2.7.5 Παρακολούθηση Διασποράς	44
2.7.6 Διαγράμματα MEWMA	45
2.7.7 Διαγράμματα MCUSUM	45
Κεφάλαιο 3	
Η χρήση των Διαγραμμάτων Ελέγχου στην Υγεία	
3.1 Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών στην Υγεία	47
3.2 Sets Method, CUSCORE Method, SHDA Method	48
3.3 League Tables και Funnel Plots	51
3.4 Προσαρμογή κινδύνου	54
3.5 VLAD και CRAM	55
3.6 RSPRT	56
3.7 Risk-adjusted CUSUM	58
3.8 Εφαρμογές	61
Κεφάλαιο 4	
Η χρήση των Διαγραμμάτων Ελέγχου στα Οικονομικά της Υγείας	
4.1 Εισαγωγή	72
4.2 Χρονοσειρές	73
4.3 Διαγράμματα Ελέγχου και Οικονομικά Υγείας	76
Κεφάλαιο 5	
Εφαρμογές Προσομοίωσης & Συμπεράσματα	
5.1 Εφαρμογές Προσομοίωσης	80
5.2 Συμπεράσματα – Συζήτηση	85
Παράρτημα	87
Βιβλιογραφία	92

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή στην Υγεία και τα Οικονομικά της Υγείας

1.1 Ορισμός της Υγείας

Στην προσπάθεια απόδοσης ενός σύντομου ορισμού της Υγείας, θα μπορούσαμε να πούμε ότι αποτελεί παράγοντα μέτρησης και αξιολόγησης της σωματικής και πνευματικής κατάστασης ενός ζώντος οργανισμού. Μια πιο «αυστηρή» προσέγγιση του όρου Υγεία, όπως αυτή καταγράφηκε το 1946, έδωσε ο Παγκόσμιος Οργανισμός Υγείας (Who, 2006) διατυπώνοντας ότι «η υγεία είναι η κατάσταση της πλήρους σωματικής, ψυχικής και κοινωνικής ευεξίας και όχι μόνο η απουσία ασθένειας ή αναπηρίας». Δεδομένου του τελευταίου ορισμού, η σημασία της υγείας δεν συνδέεται μόνο με τον κλάδο της ιατρικής καθώς λαμβάνει και άλλες διαστάσεις που αποδίδονται σε παράγοντες όπως η κοινωνία, η ψυχολογία, η οικονομία, η εργασία κ.α.

Μπορεί να γίνει εύκολα αντιληπτό ότι βασικό θεμέλιο της υγείας και οτιδήποτε εκείνη αντιπροσωπεύει, είναι ο άνθρωπος. Οποιαδήποτε ενέργεια, παρέμβαση ή πρωτοβουλία λαμβάνεται σε ατομικό, διοικητικό ή κυβερνητικό επίπεδο έχει απώτερο σκοπό την βελτίωση και παροχή καλύτερων, ως προς την ποιότητα, υπηρεσιών.

1.1.1 Η ποιότητα στο χώρο της Υγείας

Η υγειονομική φροντίδα και γενικότερα η παροχή υπηρεσιών Υγείας αποτελεί μια μορφή προσωπικής φροντίδας, όπου εξαιτίας της σύνδεσής της με κάτι πολύ σημαντικό όπως είναι η υγεία των ασθενών, ο εκάστοτε αποδέκτης έχει παραπάνω απαιτήσεις από οργανισμούς και υπηρεσίες που τις παρέχουν. Οι απαιτήσεις αυτές έχουν να κάνουν με την εξ ορισμού ιδιαιτερότητα του κλάδου. Οδηγώντας με αυτό τον τρόπο σε μια άμεσα συνδεδεμένη έννοια με την υγεία που είναι αναμφίβολα η ποιότητά της.

Έχοντας ως κοινό παρονομαστή την διάθεση προϊόντων και υπηρεσιών, η έννοια της ποιότητας στον τομέα της υγείας διαφοροποιείται σε σχέση με άλλους κλάδους παροχής υπηρεσιών ή προϊόντων. Σε ένα γενικότερο πλαίσιο, η ποιότητα αποτελείται από διάφορα συνθετικά μέρη που μπορούν να μετρηθούν και να αξιολογηθούν, όπως είναι η αξιοπιστία μιας υπηρεσίας, η ευκολία απόκτησης και πρόσβασης σε αυτήν καθώς και η ταχύτητα διάθεσής της. Ωστόσο στο χώρο της υγείας θα πρέπει να προστεθούν σε όλα τα παραπάνω, ο αυστηρός επαγγελματισμός, η λογική και χωρίς συναισθηματισμούς διαχείριση σοβαρών καταστάσεων, η διάθεση και παροχή ανώτερων τεχνολογικά υποδομών, η αυστηρή προτεραιότητα και ένα διαπρεπές ιστορικό. Βέβαια ενώ όλοι αυτοί οι άξονες που διαμερίζεται η έννοια της ποιότητας μπορεί να μοιάζουν απλοί, ο καθορισμός και η εφαρμογή τους είναι εξαιρετικά δύσκολος αφού ισοδυναμούν με την σωστή λειτουργία πολλών διαφορετικών τομέων αλλά και με υψηλό κόστος. Ο όρος αυτός έχει λάβει διάφορες ερμηνείες και ορισμούς εξαιτίας του πολύπλευρου χαρακτήρα του. Για αυτόν ακριβώς το λόγο παρουσιάζεται και η δυσκολία διευκρίνησής του.

Μεγάλο ρόλο σε αυτό το φαινόμενο έχουν παίξει και οι προσεγγίσεις ανθρώπων διαφορετικού επαγγελματικού υποβάθρου, καταθέτοντας ο καθένας μια άποψη από την δική του οπτική γωνία. Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να δώσουμε μια σύντομη αναδρομή της έννοιας.

1.1.2 Σύντομη αναδρομή της ποιότητας στο χώρο της Υγείας

Η εξέλιξη και αξιολόγηση οποιουδήποτε αγαθού αποτελεί κομμάτι της ανθρώπινης φύσης. Συγκεκριμένα η βελτίωση της ποιότητας στο χώρο της υγείας φαίνεται να είναι αντικείμενο μελέτης από τον 5^ο αιώνα π.Χ. με χαρακτηριστικό παράδειγμα τον Όρκο του Ιπποκράτη, μιας σειράς ηθικών κανόνων που αναφέρονται στην καλή πρακτική και ηθική εξάσκηση της ιατρικής επιστήμης (Madhok 2002).

Κατά την διάρκεια του Κριμαϊκού πολέμου μια Αγγλίδα νοσηλεύτρια, η Florence Nightingale η οποία είναι μια από τις πιο αξιοθαύμαστες γυναικείες φιγούρες του 19^{ου} αιώνα, θεωρείται καινοτόμος στην ορθή διαχείριση επιδημιολογικών δεδομένων για την παροχή όσο το δυνατόν καλύτερης υγειονομικής περίθαλψης συμβάλλοντας έτσι στα θεμέλια εξέλιξης της νοσηλευτικής.

Αργότερα και συγκεκριμένα στις αρχές του 20^{ου} αιώνα, ένας χειρουργός από την Βοστώνη ο Ernest Codman πρωτοπόρος στις χειρουργικές επεμβάσεις, επικεντρώθηκε στην μετεγχειρητική παρακολούθηση. Οι απόψεις του για την παρακολούθηση των ασθενών δεν συμβάδιζαν με τις ιδέες της εποχής, αντικρουόμενος έτσι με την ιατρική κοινότητα της Μασαχουσέτης όπου και εργαζόταν. Υποστήριξε ότι η μετέπειτα παρακολούθηση του ασθενούς είναι πιο σημαντική από την ίδια την επέμβαση. Βασιζόμενος λοιπόν σε κάποιους δείκτες προχωρούσε στην επανεξέταση των ασθενών ώστε να συμπεράνει κατά πόσο ήταν ωφέλιμη η επέμβαση που πραγματοποιήθηκε, καθώς και να αξιολογήσει αν τυχόν παρενέργειες συνδέονται με τον ίδιο τον ασθενή, τον γιατρό ή το νοσοκομείο.

Ακολούθησε ο Αμερικανός εκπαιδευτικός Abraham Flexner ο οποίος μέσα από δημοσίευση του με τίτλο «The American College: A Criticism» κατέκρινε την κατάσταση του αμερικανικού εκπαιδευτικού συστήματος. Η εργασία του προσέλυσε το Ίδρυμα Carnegie να χρηματοδοτήσει μια εκτεταμένη μελέτη αξιολόγησης 155 ιατρικών σχολών στις ΗΠΑ. Ως αποτέλεσμα αυτής της μελέτης προέκυψε το έργο του με τίτλο «Flexner Report» φέρνοντας αρκετές μεταρρυθμίσεις στην εκπαίδευση της ιατρικής τόσο στις Ηνωμένες Πολιτείες όσο και τον Καναδά. Πρότεινε την λειτουργία προτύπων ιατρικών σχολών, τονίζοντας ότι η ποιότητα της εκπαίδευσης του ιατρικού προσωπικού έχει αντίκτυπο στην φροντίδα των ασθενών (Beck, 2010).

Αποκτώντας όλο και περισσότερο έδαφος η μελέτη της ποιότητας στο χώρο της υγείας, περί τα μέσα του 1960-1970 καθιερώθηκε από την Joint Commission on Accreditation of Health Organizations, ενός μη-κερδοσκοπικού οργανισμού, η πιστοποίηση αξιολόγησης της λειτουργίας των νοσοκομειακών μονάδων, ελέγχοντας με αυτό τον τρόπο την ορθή χρήση υπηρεσιών υγείας (Παπακωστίδη Α., Τσουκαλάς Ν., 2012).

Η χρήση στατιστικών μεθόδων ανάλυσης για την διασφάλιση της ποιότητας ήταν προνόμιο μόνο του βιομηχανικού κλάδου όπου και χρησιμοποιούταν ήδη από το 1930. Η μετάβαση στο

κλάδο της υγείας πραγματοποιήθηκε πολύ αργότερα στα τέλη του 1970, έχοντας μέχρι εκείνη την στιγμή ακαδημαϊκό κυρίως χαρακτήρα. Ο Avedis Donabedian (1988), γιατρός και καθηγητής ιατρικής, σε μια ανασκόπηση προηγούμενων μελετών εστίασε την προσοχή του στην διασφάλιση της ποιότητας με πρωταρχικό του μέλημα τον διαχωρισμό της σε δομή, διαδικασία και αποτέλεσμα.

Εξαιτίας του πολύπλευρου χαρακτήρα της η έννοια της ποιότητας συνδέεται με πολλούς κλάδους ταυτόχρονα. Ξεκινά από την διασφάλιση αξιόλογων διοικητικών στελεχών προσφέροντας μια δυνατή βάση ενός υγειονομικού οργανισμού, και φτάνει ως τον ιατρικό εξοπλισμό και κλινική πρακτική έχοντας πάντα ως πυρήνα τον ασθενή.

1.1.3 Στόχοι και διαστάσεις της ποιότητας

Λαμβάνοντας υπόψιν τα παραπάνω, η ποιότητα παίρνει πολλές και διαφορετικές μορφές. Από την πλευρά του ασθενή σημαίνει εξασφάλιση του καλύτερου δυνατού αποτελέσματος μέσω κατάλληλων υπηρεσιών σε σύντομο χρονικό διάστημα. Από την πλευρά της διοίκησης αντιστοιχεί μεν στην βέλτιστη παροχή υγειονομικής φροντίδας, εξαρτώμενη όμως από τους διαθέσιμους πόρους, έχοντας έτσι έναν πιο οικονομικό χαρακτήρα. Αντιλαμβάνεται λοιπόν κανείς τις διαστάσεις που λαμβάνουν οι υπηρεσίες υγείας με γνώμονα την ποιότητα.

Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί ότι χρησιμοποιώντας τον όρο υπηρεσίες υγείας, γίνεται αναφορά στο σύνολο των μέσων για ιατρική, προληπτική και θεραπευτική φροντίδα. Ο όρος αυτός περιλαμβάνει δύο άξονες που είναι η φροντίδα και η περίθαλψη. Η περίθαλψη έχει να κάνει με μέσα που προσφέρονται σε άτομα που έχουν εκδηλώσει, ή είναι στο στάδιο εκδήλωσης, συμπτώματα μιας ασθένειας ή γενικότερα μιας κατάστασης υγείας που χρήζει αντιμετώπισης. Η φροντίδα θα λέγαμε ότι αποτελεί μια γενίκευση του προηγούμενου όρου αφού περιλαμβάνει μέσα που παρέχονται και σε υγιή άτομα (Π. Καρυώτης 1992).

Όπως κάθε οργανισμός έτσι και τα συστήματα υγείας δημιουργούν φιλοδοξίες και οργανώνουν στρατηγικές για την επίτευξή τους. Από την μεριά της διοίκησης, που αποτελεί και την αφετηρία ενός οργανισμού, οι στόχοι (Παπακωστίδη Α., Τσουκαλάς Ν., 2012) επικεντρώνονται στην:

1. Αποτελεσματικότητα και ικανότητα. Η ποιότητα στις υπηρεσίες υγείας επιτυγχάνεται μέσω της ορθολογικής και σωστής διαχείρισης των διαθέσιμων πόρων. Η ανούσια χρήση διάφορων μέσων θα πρέπει να μετριαστεί καθώς η σπατάλη τους οδηγεί στην αύξηση απαιτήσεων. Προκειμένου να γίνει αυτό οι οργανισμοί υγείας θα πρέπει να στελεχώνονται από κατάλληλα εκπαιδευμένο ανθρώπινο δυναμικό που θα προσφέρει το βέλτιστο των υπηρεσιών σε μια ήδη υψηλά απαιτούμενη καθημερινότητα.
2. Ασφάλεια. Όταν πρόκειται για ανθρώπινες ζωές η ασφάλεια αποτελεί κύριο μέλημα για την φήμη ενός οργανισμού υγείας καθώς η μη τήρηση κανόνων ασφαλείας, πέραν της εμπιστοσύνης που χάνεται από την μεριά των πελατών, επιφέρει και ζημιές σε οικονομικό επίπεδο όπως παραδείγματος χάριν μηνύσεις και δικαστικές διαμάχες.
3. Πρόσβαση. Στόχος της παροχής υπηρεσιών είναι η διάθεση και η πρόσβαση σε αυτές από οποιοδήποτε οικονομικό και κοινωνικό στρώμα. Πυρήνας των συστημάτων υγείας

είναι ο ασθενής. Επομένως θα πρέπει το εκάστοτε σύστημα να είναι κοντά του και να προσαρμόζεται στις ανάγκες του.

4. Εκτεταμένη παρακολούθηση. Η εξασφάλιση της ποιότητας εξαρτάται από την αποτελεσματική λειτουργία διαφορετικών τμημάτων που συντελούν στη σωστή διαχείριση των αναγκών ενός ασθενή.
5. Καλή σχέση των ατόμων που απαρτίζουν το ανθρώπινο δυναμικό. Αδιαμφισβήτητα η καλή σχέση και η καλή επαγγελματική συνεργασία των ανθρώπων που παρέχουν υπηρεσίες υγείας είναι σημαντικός παράγοντας στην διάθεση ποιοτικότερων υπηρεσιών.

1.2 Οικονομικά της Υγείας

Ένας κλάδος που έχει τραβήξει το ενδιαφέρον ερευνητών και επαγγελματιών δίχως βέβαια να υπάρχει πληθώρα πληροφοριών, είναι αυτός των Οικονομικών της Υγείας. Σύμφωνα με τον Robbins (1932) «τα οικονομικά είναι η επιστήμη η οποία μελετά τη σχέση μεταξύ (απεριόριστων) αναγκών και (περιορισμένων) πόρων, οι οποίοι έχουν εναλλακτική χρήση». Η αρχή της εξέλιξης οποιουδήποτε οργανισμού είναι η αύξηση της αποτελεσματικότητας και της παραγωγικότητας στο περιβάλλον που δραστηριοποιείται, με το λιγότερο δυνατό κόστος. Αντίστοιχη νοοτροπία επικρατεί και στο περιβάλλον της υγείας όπου κυβερνήσεις χωρών σε συνεργασία με τους παρόχους υπηρεσιών υγείας προσπαθούν να αναζητήσουν τρόπους επίτευξης αυτού του στόχου (Μανιαδάκης, 2005). Βέβαια σε έναν χώρο όπως αυτός της υγείας όπου υπάρχουν πολλοί εμπλεκόμενοι και ο καθένας επιδιώκει το δικό του συμφέρον κάτι τέτοιο δεν είναι τόσο εύκολα εφικτό.

Το μεγαλύτερο ενδιαφέρον στρέφεται στο περιβάλλον της δημόσιας υγείας όπου περιλαμβάνει και το μεγαλύτερο μέρος του πληθυσμού. Απώτερος σκοπός των οικονομικών δημόσιας υγείας είναι ο συνδυασμός χρηματοδοτικών πόρων για την στήριξη των παρεχόμενων υπηρεσιών υγείας. Το θεμελιώδες πρόβλημα για τους υπεύθυνους και επαγγελματίες του χώρου, αποτελεί η πολιτική που πρέπει να εφαρμοσθεί και να τηρηθεί για τον έλεγχο των οικονομικών πόρων που διασφαλίζονται για την δημόσια υγεία ως προς τις πηγές και την αξιοποίησή τους. Ο έλεγχος αυτός μπορεί να ασκείται από δημόσιους είτε από ιδιωτικούς φορείς, μέσω φορολογικών εσόδων, τελών, ασφαλειών υγείας εργαζομένων κλπ. Στο δυναμικό αυτό περιβάλλον οι αρμόδιοι καλούνται να αντιμετωπίσουν προκλήσεις που σχετίζονται με την επάρκεια και την προβλεψιμότητα των χρηματοδοτικών πόρων, την οικονομικά αποδοτική κατανομή τους και την αποτελεσματική διαχείριση τους για την θεμελίωση ενός δημόσιου συστήματος υγείας που θα είναι κατάλληλα εξοπλισμένο για την αντιμετώπιση αναδυόμενων μολυσματικών ασθενειών, επιδημιών και άλλων απειλών (Moulton et al., 2004).

Το φαινόμενο που παρατηρείται τις τελευταίες δεκαετίες είναι η αύξηση δαπανών υγείας σε ένα ταχύτατα αυξανόμενο οικονομικό περιβάλλον. Διάφοροι παράγοντες έχουν «βοηθήσει» στην όξυνση της κατάστασης, με τις δημόσιες δαπάνες να αντιστοιχούν στο 10% του ΑΕΠ κάποιων χωρών έναντι του 3% που ήταν μερικές δεκαετίες πριν. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελούν οι ΗΠΑ με τις δαπάνες υγείας να ξεπερνούν το 14% του ΑΕΠ (Μανιαδάκης, 2005). Σημαντικό στοιχείο που επηρέασε αυτή την αυξητική τάση δαπανών και άρα κατανάλωσης υπηρεσιών, είναι η αύξηση της αναλογίας των ηλικιωμένων ατόμων στο πληθυσμό.

Ηλικιωμένοι έχουν μεγαλύτερη ανάγκη κατανάλωσης υπηρεσιών υγείας αναλογικά με τις υπόλοιπες ηλικιακές ομάδες. Ακόμη, διάφορες μελέτες παρουσιάζουν την αύξηση του προσδόκιμου επιβίωσης, γεγονός που συνδράμει στην τελευταία αναφορά (Κωνσταντοπούλου, 2011). Επίσης, τα πρότυπα ζωής. Η δυνατότητα πρόσβασης σε ένα μεγάλο όγκο κοινωνικών δικτύων που προβάλλουν πρότυπα διατροφής, επαγγελματικής απασχόλησης, θεραπειών παχυσαρκίας ή άλλων life-style, όπως λέγονται, καταστάσεων όπως πλαστικές επεμβάσεις, επιδρούν στην εμφάνιση ψυχικών διαταραχών, ατυχημάτων, αυτοκτονιών, καταστάσεων δηλαδή που προωθούν την κατανάλωση των υπηρεσιών. Τέλος, ο κλάδος της τεχνολογίας και ανάπτυξης συνεισφέρει και αυτός με την σειρά του. Προηγμένος ιατρικός εξοπλισμός, καλύτερες σε ποιότητα υπηρεσίες, αποτελεσματικότερα φάρμακα και θεραπείες είναι προφανές ότι έχουν συντελέσει στην καταπολέμηση ή και εξάλειψη ορισμένων ασθενειών αλλά ισοδυναμούν ταυτόχρονα και με υψηλότερο κόστος. Γεγονός που οδηγεί και σε ανθρώπινο δυναμικό υψηλότερης γνωστικής κατάρτισης και άρα υψηλότερων απολαβών.

Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών

1.3 Εισαγωγή στον Στατιστικό Έλεγχο Διεργασιών

Ο Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών (Statistical Process Control ή SPC) αποτελεί μια από τις διασημότερες τακτικές που μπορεί να ακολουθήσει κάποιος για την παρακολούθηση-επίβλεψη μιας παραγωγικής διεργασίας. Απώτερος σκοπός της εν λόγω μεθόδου είναι ο άμεσος εντοπισμός μιας ιδιόμορφης-ανώμαλης συμπεριφοράς της εκάστοτε διεργασίας με στόχο την βελτίωση των υπό επεξεργασία προϊόντων ή υπηρεσιών. Υπάρχουν ποικίλοι τρόποι με τους οποίους μπορεί να γίνει η παραπάνω εργασία. Ωστόσο πρωταρχικό εργαλείο του Στατιστικού Ελέγχου Διεργασιών προκειμένου να γίνει η προαναφερόμενη μελέτη είναι τα διαγράμματα ελέγχου (control charts). Η συμβολή τους είναι εξαιρετικά σημαντική καθώς έχουμε την δυνατότητα, σε πρώτο στάδιο, να εντοπιστεί σε πραγματικό χρόνο οι αιτίες που ευθύνονται για μια αφύσικη συμπεριφορά, σε σχέση με τις προδιαγραφές που έχουν οριστεί, η οποία με την σειρά της θα μας οδηγήσει σε περαιτέρω ανάλυση ώστε να ανιχνεύσουμε τι την προκάλεσε και να προχωρήσουμε σε κατάλληλες παρεμβάσεις για να διορθωθεί. Η παραπάνω διαδικασία συντελεί στη σημαντική ελάττωση του κόστους της παραγωγικής διαδικασίας όσον αφορά τους παράγοντες χρόνο και χρήμα που ξοδεύει ένας οργανισμός για την γραμμή παραγωγής του. Εν συνεχεία, εφόσον διορθωθεί το προαναφερθέν πρόβλημα, τα διαγράμματα ελέγχου χρησιμοποιούνται για την παρακολούθηση της διεργασίας στο μέλλον. Στο στάδιο αυτό, αξίζει να σημειωθεί ότι προτού προχωρήσουμε στην παρουσίαση των βασικότερων διαγραμμάτων ελέγχου, θα δώσουμε μια πιο ευρεία εικόνα του τι είναι ένα διάγραμμα ελέγχου, πως κατασκευάζεται αλλά και κάποιες χρήσιμες ορολογίες και έννοιες για την συνέχεια. Η ακόλουθη περιγραφή θα βασιστεί στις σημειώσεις των Αντζουλάκο (2016) και Γεωργακάκο (2002).

1.4 Αρχική προσέγγιση των διαγραμμάτων ελέγχου

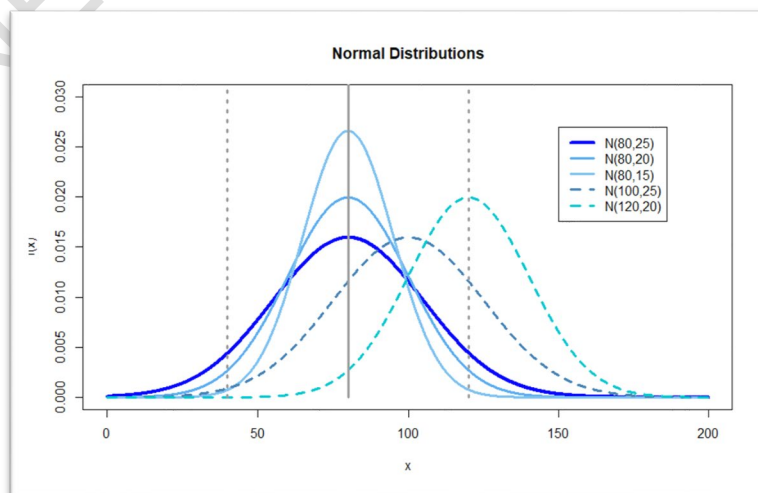
Μπορεί να γίνει εύκολα αντιληπτό από οποιονδήποτε μη ειδικό ότι είναι πρακτικά απίθανο δύο παραγόμενα προϊόντα (ή υπηρεσίες) να είναι πανομοιότυπα (-ες). Με άλλα λόγια, ασχέτως από το πόσο εύστοχα έχει δομηθεί μια παραγωγική διεργασία, κάνουμε λόγο για μια «παράμετρο» που επηρεάζει την κατάσταση αυτή και ονομάζεται φυσική μεταβλητότητα με τις αιτίες που την απαρτίζουν να καλούνται κοινές ή τυχαίες αιτίες μεταβλητότητας (common causes of variation). Για να γίνει περισσότερο αντιληπτό, οι τυχαίες αυτές αιτίες έχουν να κάνουν για παράδειγμα με μεταβολές στο εξωτερικό περιβάλλον, φυσιολογικές αποκλίσεις κατά τον χειρισμό και τη λειτουργία σωστά συντηρημένων μηχανών και γενικότερα από μη ελέγξιμους παράγοντες. Το μέγεθος αυτής είναι μικρό και είναι δύσκολο ή καλύτερα αδύνατο να περιοριστεί. Λέμε ότι μια διεργασία είναι εντός στατιστικού ελέγχου διεργασία (in control process) ή ότι λειτουργεί σε ευσταθή κατάσταση (stable state) υπό την ύπαρξη μόνο της φυσικής μεταβλητότητας.

Από την άλλη πλευρά, διακρίνουμε κι άλλες μορφές μεταβλητότητας οι οποίες όμως δεν εξαρτώνται από τυχαίες αλλά συστηματικές αιτίες που επηρεάζουν έναν ή περισσότερους παράγοντες μείζονος σημασίας για την ποιότητα του προϊόντος. Αυτού του τύπου η μεταβλητότητα είναι μεγαλύτερη της φυσικής μεταβλητότητας και αναφέρεται ως ειδική

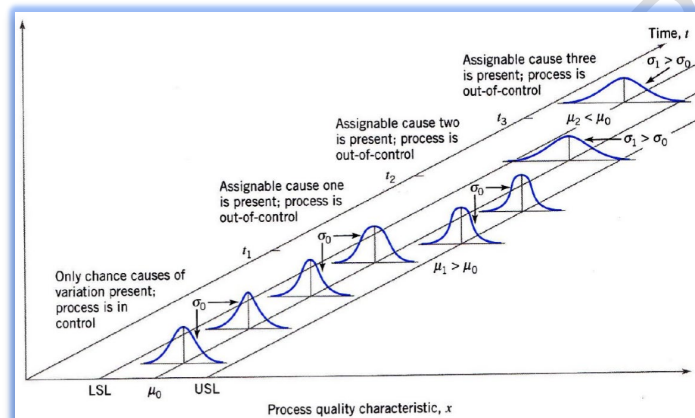
μεταβλητότητα με τις αντίστοιχες αιτίες που την προκαλούν να ονομάζονται ειδικές ή συστηματικές αιτίες μεταβλητότητας (special causes of variation). Εδώ μπορούμε να αναφέρουμε ως παραδείγματα τις λάθος ρυθμίσεις των μηχανών, λάθη των χειριστών, κακής ποιότητας πρώτη ύλη, ελαττωματικά εξαρτήματα, κτλ. Υπό την ύπαρξη μόνο της ειδικής μεταβλητότητας λέμε ότι μια διεργασία είναι εκτός στατιστικού ελέγχου διεργασία (out of control process) ή ότι λειτουργεί σε ασταθή κατάσταση (unstable state).

Έπειτα, είναι σκόπιμο να αναφερθούμε σε μια άλλη σημαντική έννοια, αυτή των ορίων προδιαγραφών (specifications limits) των ποιοτικών χαρακτηριστικών του προϊόντος (ή υπηρεσίας), τα οποία όπως είναι φυσικό προσδιορίζονται κατά την φάση σχεδιασμού του. Οριοθετούνται με τέτοιο τρόπο ώστε μεταξύ αυτών πρέπει να κυμαίνονται οι τιμές των ποιοτικών χαρακτηριστικών προκειμένου το αντίστοιχο προϊόν να είναι ποιοτικά αποδεκτό. Αυτά αποδίδονται ως άνω και κάτω όριο προδιαγραφών (upper and lower specification limit) ή LSL και USL, ενώ στο ίδιο στάδιο θέτουμε και την τιμή στόχο (target value, T) που αντικατοπτρίζει την ευκαταία τιμή του ποιοτικού χαρακτηριστικού. Συνδυάζοντας τα όσα περιεγράφηκαν, είναι κατανοητό ότι για μια διεργασία που λειτουργεί υπό συνθήκες φυσικής μεταβλητότητας περιμένουμε το μεγαλύτερο πλήθος των προϊόντων να έχουν τιμές ποιοτικών χαρακτηριστικών που βρίσκονται μέσα στο διάστημα [LSL,USL], μια κατάσταση η οποία είναι ευκόλως εννοούμενο ότι δεν ισχύει υπό συνθήκες ειδικής μεταβλητότητας. Στη εικόνα που ακολουθεί δίνεται ένα παράδειγμα, όπου θεωρούμε ότι για ένα προϊόν X έχουν οριστεί ως τιμή στόχο, άνω και κάτω όρια προδιαγραφών τα $T=80$, $USL=120$, $LSL=40$ αντίστοιχα, και ακόμη υποθέτουμε ότι υπό συνθήκες φυσικής μεταβλητότητας οι τιμές του χαρακτηριστικού που μελετάμε περιγράφονται από την κανονική κατανομή $N(80,15)$. Όπως αναμενόταν, στο διάγραμμα που ακολουθεί, υπό την κατάσταση φυσικής μεταβλητότητας η πλειοψηφία των προϊόντων είναι εντός των ορίων προδιαγραφών. Αντίθετα, συνθήκες ειδικής μεταβλητότητας επηρεάζουν την κατανομή των τιμών του χαρακτηριστικού:

- Μετατόπιση μόνο του μέσου της κατανομής ($N(100,25)$)
- Αλλαγή μόνο στη διακύμανση της κατανομής ($N(80,20)$, $N(80,25)$)
- Αλλαγή του μέσου και της διακύμανσης ($N(120,20)$)



Ένα άκρως κατατοπιστικό σχήμα για τα αποτελέσματα των κοινών και ειδικών αιτιών μεταβλητότητας δίνεται παρακάτω. Στη τρισδιάστατη αυτή εικόνα βλέπουμε ορισμένες μεταβολές είτε στη μέση τιμή είτε στη τυπική απόκλιση σε διαφορετικές χρονικές στιγμές. Για να είναι κατανοητή η περιγραφή που θα ακολουθήσει αναφέρεται ότι η εντός ελέγχου μέση τιμή αντιστοιχεί στην τιμή μ_0 με αντίστοιχη τυπική απόκλιση σ_0 . Την χρονική στιγμή t_1 παρατηρείται μια μετατόπιση της μέσης τιμής από την τιμή μ_0 στην τιμή μ_1 ($\mu_1 > \mu_0$). Την χρονική στιγμή t_2 βλέπουμε ότι η μέση τιμή λαμβάνει πάλι την αρχική εντός ελέγχου τιμή της αλλά αλλάζει η τυπική απόκλιση λαμβάνοντας την μεγαλύτερη από την σ_0 τιμή σ_1 ενώ στην χρονική στιγμή t_3 καθώς διατηρείται η τυπική απόκλιση στην τιμή σ_1 , μετατοπίζεται και η μέση τιμή στη τιμή μ_2 ($\mu_2 < \mu_0$).



Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, νούμερο ένα στόχος του Στατιστικού Ελέγχου Διεργασιών αποτελεί η άμεση εξακρίβωση μιας μη λογικής συμπεριφοράς μιας διεργασίας που ευθύνεται στην εμφάνιση ειδικών αιτιών μεταβλητότητας με σκοπό την εφαρμογή κατάλληλων ενεργειών για την πρόληψη κατασκευής μη συμμορφούμενων με τις προδιαγραφές προϊόντων (nonconforming product). Διαβάζοντας όμως την τελευταία πρόταση, είναι εύλογο να αναρωτιέται κανείς τι θεωρείται μη συμμορφούμενο προϊόν. Χρησιμοποιώντας αυτόν το όρο, γίνεται λόγος για ένα προϊόν (ή υπηρεσία) το οποίο παρουσιάζει για τουλάχιστον ένα ποιοτικό χαρακτηριστικό του τιμή που δεν περιέχεται εντός των ορίων προδιαγραφών. Ουσιαστικά είναι εκείνος ο προσδιορισμός που κάποιος θα ανέφερε ως ελάττωμα ή ατέλεια, χρησιμοποιώντας μη επιστημονικούς όρους. Συχνά αντί για τον όρο μη συμμορφούμενο χρησιμοποιείται ο όρος ελαττωματικό προϊόν (defective product). Άρρηκτα συνδεδεμένη έννοια με την τελευταία είναι και ο αριθμός ελαττωμάτων ή ατελειών (defects or nonconformities). Ενδεχομένως με μια γρήγορη ματιά οι δύο παραπάνω έννοιες μπορεί να φαίνονται ίδιες, ωστόσο έχουν ουσιαστικές διαφορές τόσο ως προς τον ορισμό τους όσο και ως προς την μελέτη τους.

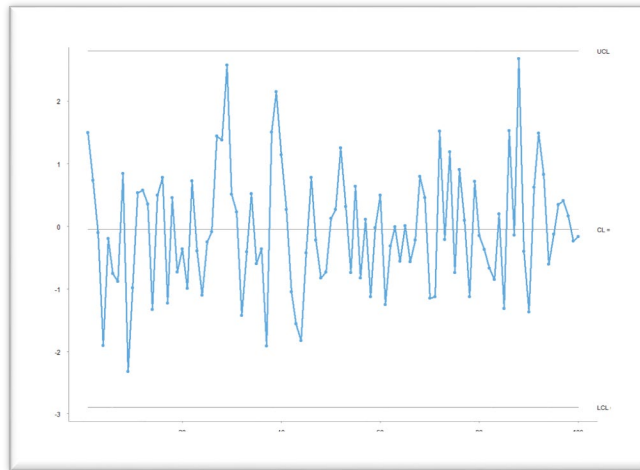
Υπάρχουν περιπτώσεις όπου ένα προϊόν να χαρακτηρίζεται ως ελαττωματικό όμως ο αριθμός των ελαττωμάτων του να είναι αμελητέος, με αποτέλεσμα να κυκλοφορήσει στην αγορά. Γίνεται κατανοητό ότι κάναμε λόγο για δυο τελείως διαφορετικές έννοιες που όμως η μια επηρεάζει σε ένα βαθμό την άλλη. Έτσι λοιπόν κατασκευάζονται τα αντίστοιχα διαγράμματα ελέγχου για την παρακολούθηση των μεν αριθμού ελαττωματικών προϊόντων και των δε αριθμού των ελαττωμάτων. Προκειμένου να υπάρχει ένας διαχωρισμός στα διαγράμματα ελέγχου ανάλογα με το τι μελετάται κάθε φορά σύμφωνα με την μεταβλητή που περιγράφει το ποιοτικό χαρακτηριστικό του προϊόντος διακρίνονται δύο κύριες κατηγορίες:

- ❖ Διαγράμματα ελέγχου για συνεχή χαρακτηριστικά – μεταβλητές (control charts for variables)
- ❖ Διαγράμματα ελέγχου για διακριτά χαρακτηριστικά – ιδιότητες (control charts for attributes)

1.5 Δομή Διαγράμματος Ελέγχου

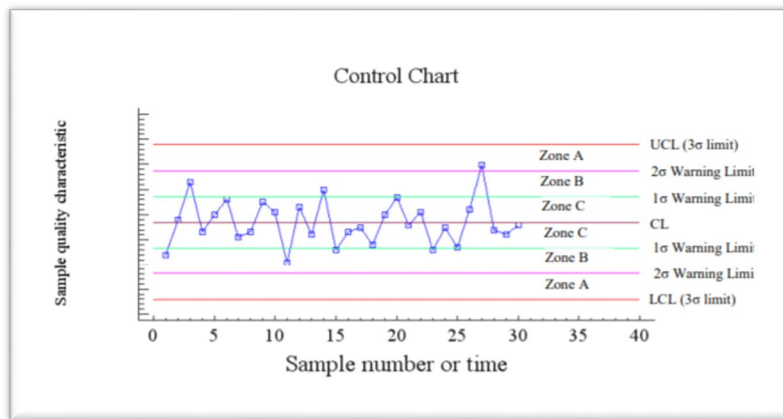
Αυτό που θα ενδιέφερε κάποιον να παρακολουθήσει σε μια γραμμή παραγωγής, είναι η συμπεριφορά μιας όπως λέγεται κρίσιμης ποσότητας ενός συγκεκριμένου χαρακτηριστικού των προϊόντων ή των υπηρεσιών που μελετώνται, όπως για παράδειγμα η μέση τιμή (κρίσιμη ποσότητα) της διαμέτρου (χαρακτηριστικό) των βελονών για αιμοδοσία που παράγει ένα μηχάνημα. Το χαρακτηριστικό θεωρείται τυχαία μεταβλητή, έστω X . Κάνοντας λόγο για μια μετρήσιμη πάντα ποσότητα, η μελέτη αυτή βασίζεται σε τυχαία δείγματα τα X_1, X_2, X_3, \dots που λαμβάνονται σε διάφορες χρονικές στιγμές. Αξιοποιώντας αυτά τα δείγματα, γίνεται ο υπολογισμός μιας κατάλληλα επιλεγμένης στατιστικής συνάρτησης, έστω η $W_i = g(X_i)$ για $i = 1, 2, \dots$, η οποία εκτιμά συνήθως αμερόληπτα την κρίσιμη ποσότητα που μας ενδιαφέρει. Με αυτό τον τρόπο η μελέτη της κρίσιμης ποσότητας μεταφράζεται στη μελέτη των τιμών της συνάρτησης W όπως αυτές υπολογίζονται από τα διάφορα επιλεγμένα τυχαία δείγματα.

Οι τιμές της W θα δώσουν απαντήσεις στα ερωτήματα που έχουν τεθεί, απεικονίζοντας τες στο επίπεδο, έχοντας έτσι μια γραφική αντίληψη των δεδομένων μας. Βέβαια ένα διάγραμμα ελέγχου δεν περιέχει μόνο τις τιμές της W αντιστοιχίζοντάς τες ως σημεία στο επίπεδο, αλλά θα πρέπει να υπάρχουν και κάποια “στοιχεία” που να ορίζουν κάποιους κανόνες. Έτσι σχεδιάζονται ακόμη η κεντρική γραμμή (center line, CL) της διεργασίας, που αντιστοιχεί συνήθως στη μέση τιμή της W , και τα κάτω και άνω όρια ελέγχου (lower and upper control limits, LSL and USL). Στόχος είναι οι τιμές της W να βρίσκονται εντός των ορίων ελέγχου και να παρουσιάζουν μια τυχαία συμπεριφορά, κάνοντας έτσι λόγο για εντός ελέγχου διεργασία. Ενώ σε περίπτωση που εντοπισθεί σημείο πέραν των ορίων ελέγχου, λέμε ότι υπάρχει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας και άρα θα πρέπει να γίνουν κατάλληλες έρευνες για τον εντοπισμό ειδικών αιτιών μεταβλητότητας που ευθύνονται για αυτή την κατάσταση. Βέβαια ακόμα και όταν όλα τα σημεία παρατηρούνται εντός των ορίων ελέγχου αλλά έχουν μια μη τυχαία συμπεριφορά τότε υπάρχει μεγάλη πιθανότητα η διεργασία να βρίσκεται εκτός ελέγχου. Παρακάτω δίνεται η μορφή ενός τυπικού διαγράμματος ελέγχου.



Σύμφωνα με την τελευταία εικόνα αλλά και με όσα όλα προηγήθηκαν, σημαντικό ρόλο παίζει η μεταβλητότητα των δεδομένων η οποία μπορεί να μελετηθεί επίσης από κατάλληλα διαγράμματα ελέγχου που θα κάνουν γνωστό τον τύπο της μεταβλητότητας που υπάρχει σε μια διεργασία και αυτό συνδέεται με την μορφή που αυτά απεικονίζονται μέσω της W . Για να γίνει περισσότερο οικεία η τελευταία πρόταση, παρουσιάζονται οι παρακάτω δυνατές καταστάσεις. Όταν όλα τα σημεία τοποθετούνται γύρω από μια συγκεκριμένη τιμή με σταθερό τρόπο, αναφερόμαστε σε μια διεργασία στάσιμης συμπεριφοράς (stationary behavior). Σε αυτού του τύπου τις διεργασίες τα δεδομένα μας μπορούν να χαρακτηριστούν είτε ως ασυσχέτιστα, γεγονός που επηρεάζεται από την επιλογή του δείγματος, είτε αυτοσυσχετιζόμενα. Η κύρια διαφορά είναι ότι στα μεν πρώτα η πληροφορία που αποκομίζεται από το “παρόν” δεν μας δίνει καμία πληροφορία για το μέλλον, πράγμα που δεν συμβαίνει στα δεύτερα όπως μαρτυρούν τα επαναλαμβανόμενα μοτίβα που παρουσιάζονται. Επιπλέον υπάρχει και ο χαρακτηρισμός της μη στάσιμης (nonstationary) διεργασίας, κατάσταση όπου τα δεδομένα παρουσιάζονται δίχως λογική.

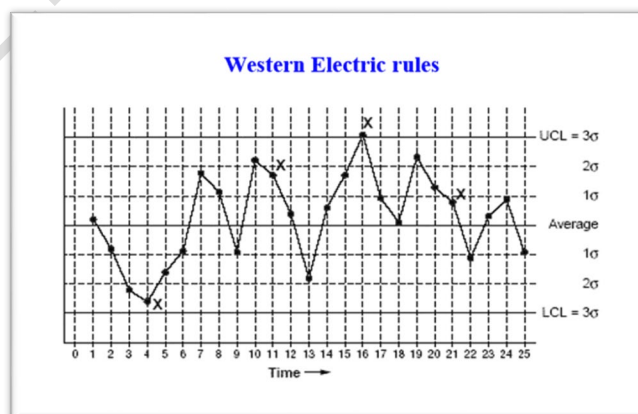
Ανάλογα με την σημαντικότητα του τι μελετάται κάθε φορά, δίνεται η δυνατότητα παρέμβασης και αναδιαμόρφωσης ενός διαγράμματος ελέγχου ώστε αυτό να γίνει πιο ευαίσθητο ως προς την ικανότητα πιο άμεσης ανίχνευσης εκτός ελέγχου διεργασιών. Αυτό πραγματοποιείται με την προσθήκη των προειδοποιητικών ορίων (warning limits) εσωτερικά των ορίων ελέγχου. Τα προειδοποιητικά όρια, όπως αυτά παρουσιάζονται στο σχήμα που ακολουθεί, συνοδεύονται από μια σειρά κανόνων οι οποίοι έχουν οριστεί με τέτοιο τρόπο ώστε να εντοπίζουν μοτίβα που μαρτυρούν εκτός ελέγχου διεργασία.



Οι σημαντικότεροι από αυτούς τους κανόνες δίνονται παρακάτω:

1. Ένα ή περισσότερα σημεία εκτός των ορίων ελέγχου
2. Δύο από τρία συνεχόμενα σημεία στη ζώνη A (σε μια από τις δύο ζώνες A)
3. Τέσσερα από πέντε συνεχόμενα σημεία πέραν της ζώνης C (σε μια από τις δύο περιοχές)
4. Οκτώ συνεχόμενα σημεία στην ίδια μεριά (επάνω ή κάτω) της κεντρικής γραμμής
5. Έξι συνεχόμενα σημεία σε αύξουσα ή φθίνουσα διάταξη
6. Δεκαπέντε συνεχόμενα σημεία στην ολική ζώνη C
7. Δεκατέσσερα συνεχόμενα σημεία σε εναλλασσόμενη μορφή “πάνω-κάτω”
8. Οκτώ συνεχόμενα σημεία εκτός της ολικής ζώνης C
9. Ένα ή περισσότερα σημεία κοντά στα προειδοποιητικά όρια ή τα όρια ελέγχου
10. Οποιαδήποτε ασυνήθιστη ή μη τυχαία ακολουθία σημείων.

Με την σειρά που δόθηκαν, οι πρώτοι τέσσερις κανόνες είναι γνωστοί ως Western Electric Rules. Ενδείκνυται η αποφυγή της ταυτόχρονης χρήσης πολλών κανόνων καθώς θα οδηγήσουν σε μη αποδοτικές για την διεργασία ενέργειες. Στο διάγραμμα που ακολουθεί, με την ένδειξη “X” έχουν σημειωθεί, διαβάζοντας από αριστερά προς τα δεξιά, οι κανόνες 2, 3, 1 και 4.



1.6 Κατασκευή Διαγράμματος Ελέγχου

Τα δημοφιλέστερα διαγράμματα ελέγχου αποτελούν τα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart. Αυτό οφείλεται κυρίως στην απλοποιημένη μορφή τους καθώς και της ικανότητας τους να εντοπίζουν σε μικρό σχετικά χρονικό διάστημα μεγάλες μεταβολές της παραμέτρου του χαρακτηριστικού ποιότητας που μελετάται κάθε φορά (π.χ. μέση τιμή), γεγονός που δεν συμβαίνει για μικρές μετατοπίσεις.

Ένα γενικό μοντέλο, είναι το μοντέλο ορίων σίγμα (sigma limits models). Για την κατασκευή των κάτω και άνω ορίων ελέγχου καθώς και της κεντρικής γραμμής χρησιμοποιούνται οι τύποι του παρακάτω πλαισίου

Μοντέλο ορίων L σίγμα
$UCL = \mu_w + L\sigma_w$
$CL = \mu_w$
$LCL = \mu_w - L\sigma_w$

όπου με μ_w και σ_w συμβολίζουμε την μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της στατιστικής συνάρτησης W όπως αυτές προκύπτουν από μια εντός ελέγχου διεργασία. Η ποσότητα L αντιστοιχεί την απόσταση των ορίων ελέγχου από την κεντρική γραμμή σε μονάδες τυπικής απόκλισης. Όταν χρησιμοποιείται το $L = 3$, που είναι και το σύνηθες, γίνεται λόγος για κατασκευή ορίων ελέγχου τριών σίγμα (three sigma control limits). Υποθέτουμε ότι η κατανομή που χρησιμοποιείται για να περιγράψει την τυχαία μεταβλητή W είναι κανονική κατανομή ή περίπου κανονική.

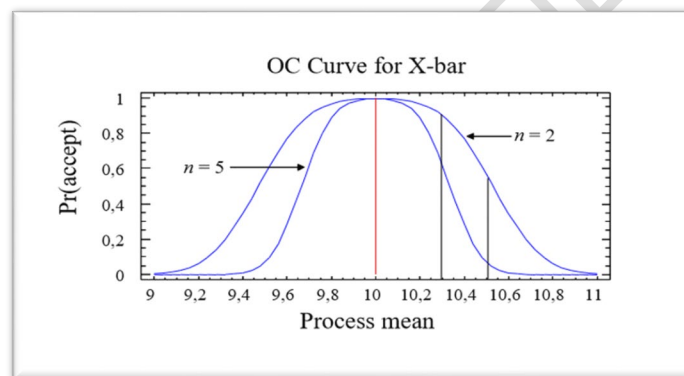
Εκτός του μοντέλου ορίων σίγμα, γνωστό είναι και το μοντέλο ορίων πιθανότητας (probability limits model), για την κατασκευή του χρησιμοποιείται το επόμενο πλαίσιο

Μοντέλο ορίων πιθανότητας α
$UCL = w_{\alpha/2}$
$CL = w_{0.5}$
$LCL = w_{1-(\alpha/2)}$

όπου με w_α συμβολίζεται το άνω α ποσοστιαίο σημείο της στατιστικής συνάρτησης W . Έχοντας παρουσιάσει μια πρώτη εικόνα της δομής και της κατασκευής ενός τυπικού διαγράμματος ελέγχου, αξίζει να σημειωθεί ότι για κάθε σημείο του ουσιαστικά εφαρμόζεται ο έλεγχος των υποθέσεων $H_0: \mu = \mu_w$ έναντι της $H_1: \mu \neq \mu_w$ για σταθερή τυπική απόκλιση της κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X και σταθερό επίπεδο σημαντικότητας α , που χρησιμοποιούμε για το εκάστοτε χαρακτηριστικό μελέτης.

1.7 Χαρακτηριστική καμπύλη

Η χαρακτηριστική καμπύλη (operating curve, OC) αποτελεί ένα γραφικό μέσο με την βοήθεια του οποίου γνωρίζουμε την πιθανότητα μια διεργασία να είναι εντός ελέγχου συναρτήσει της μετατόπισης του μέσου. Αυτό που δηλαδή παρουσιάζεται στην χαρακτηριστική καμπύλη είναι η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί σφάλμα τύπου II, να δώσει το διάγραμμα ένδειξη εντός ελέγχου ενώ στην πραγματικότητα η διεργασία είναι εκτός ελέγχου. Χρησιμοποιώντας 3σ όρια ελέγχου η πιθανότητα σφάλματος τύπου II, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ και $W = \bar{X}$ για την μετατόπιση του μέσου της διεργασίας από μ σε μ^* δίνεται από τον τύπο $\beta = P(\mu - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} \leq \mu + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} | X \sim N(\mu^*, \sigma^2)) = \Phi(\sqrt{n} \frac{\mu - \mu^*}{\sigma} + 3) - \Phi(\sqrt{n} \frac{\mu - \mu^*}{\sigma} - 3)$. Βασιζόμενοι στον τελευταίο τύπο βλέπουμε ότι η πιθανότητα σφάλματος τύπου II εξαρτάται τόσο από το μέγεθος της μετατόπισης όσο και από το μέγεθος του δείγματος. Αυτό μαρτυρά και η εικόνα που ακολουθεί, δίνοντας μια επιπλέον πληροφορία. Παρατηρείται ότι για σχετικά μικρές μετατοπίσεις του μέσου της διεργασίας η πιθανότητα σφάλματος τύπου II αυξάνεται όσο μικραίνει το δείγμα. Άρα μικρές μετατοπίσεις απαιτούν μεγαλύτερο δείγμα.



1.8 Μέσο μήκος ροής

Εξαιρετικά σημαντική έννοια, άμεσα συνδεδεμένη με τα διαγράμματα ελέγχου είναι και εκείνη του μέσου μήκους ροής (average run length, ARL) και ορίζεται ως εξής

$$ARL = \frac{1}{p}$$

όπου η ποσότητα p αντιστοιχεί στην πιθανότητα να εντοπιστεί ένα σημείο του διαγράμματος ελέγχου εκτός των ορίων ελέγχου. Το ARL αντιπροσωπεύει τον αναμενόμενο αριθμό σημείων που πρέπει να απεικονιστούν σε ένα διάγραμμα ελέγχου μέχρι να εντοπιστεί το πρώτο εκτός των ορίων ελέγχου. Με αυτή τη λογική είναι προφανές ότι το μήκος ροής ή run length (RL) ακολουθεί γεωμετρική κατανομή με πιθανότητα επιτυχίας p , εν συντομία $RL \sim G(p)$.

Στην περίπτωση διεργασίας εντός στατιστικού ελέγχου και χρήσης μοντέλου ορίων $L \cdot \sigma$, το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής (in-control average run length ή ARL_0 ή ARL_{in}) δίνεται από τον τύπο

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha}$$

με α να είναι η πιθανότητα σφάλματος τύπου I, δηλαδή η πιθανότητα να εντοπιστεί σημείο εκτός των ορίων ελέγχου δοθέντος ότι η διεργασία είναι εντός ελέγχου. Πιο συγκεκριμένα, υπό την χρήση 3σ ορίων ελέγχου για μια διεργασία εντός ελέγχου με την απεικονιζόμενη στατιστική συνάρτηση W να ακολουθεί κανονική κατανομή, η τιμή του εντός ελέγχου μέσου μήκους ροής είναι

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{0.0027} = 370.$$

Αντίθετα, για την περίπτωση διεργασίας εκτός στατιστικού ελέγχου εξαιτίας της μετατόπισης του μέσου αυτής σε μ^* χρησιμοποιώντας μοντέλο ορίων $L \cdot \sigma$, το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής (out-of-control average run length ή ARL_1 ή ARL_{out}) δίνεται από τον τύπο

$$ARL_1 = \frac{1}{1-\beta}$$

με β να είναι η πιθανότητα σφάλματος τύπου II, δηλαδή η πιθανότητα να εντοπιστεί σημείο εντός των ορίων ελέγχου ενώ έχει μετατοπιστεί ο μέσος και άρα και η κατανομή της στατιστικής συνάρτησης W . Συμπερασματικά, το ARL_1 αντιπροσωπεύει τον αναμενόμενο αριθμό σημείων που πρέπει να απεικονιστούν για να εντοπιστεί η συζητούμενη μετατόπιση στο μέσο της διεργασίας από την στιγμή που εκείνη πραγματοποιήθηκε.

Ευελπιστούμε σε μια εντός ελέγχου διεργασία να επικρατεί μεγάλο ARL_0 αφού θα ήταν αρεστό να αποφύγουμε την διακοπή μιας καλά αναπτυσσόμενης διεργασίας. Σε αντίθεση με την τελευταία πρόταση, για μια εκτός ελέγχου διεργασία είναι επιθυμητό μικρό ARL_1 καθώς θέλουμε έγκαιρο εντοπισμό ενδεχόμενης μετατόπισης της διεργασίας.

Στο σημείο αυτό αναφέρεται ότι αύξηση του μεγέθους του δείγματος n επιφέρει μείωση της πιθανότητας β με αποτέλεσμα να παρατηρείται βελτίωση στην ικανότητα του εκάστοτε διαγράμματος ελέγχου να εντοπίζει την κατάλληλη χρονική στιγμή αλλαγές στο μέσο επίπεδο της διεργασίας. Ανάλογα με την μετατόπιση που θέλουμε να εντοπίσουμε, επιλέγεται κατάλληλα το μέγεθος δείγματος ώστε να αναλογεί συγκεκριμένη τιμή για το ARL_1 . Γενικά, αύξηση της τιμής του L στο μοντέλο ορίων $L \cdot \sigma$ ισοδυναμεί με μείωση της πιθανότητας εσφαλμένης ένδειξης εκτός ελέγχου διεργασίας. Ωστόσο αυξάνεται η πιθανότητα το διάγραμμα να δώσει, λανθασμένα, ότι η υπό εξέταση διεργασία είναι εντός ελέγχου ενώ στην πραγματικότητα είναι εκτός ελέγχου εξαιτίας της μετατόπισης του μέσου επιπέδου της.

Επιπλέον πέραν του μέσου μήκους ροής αξιοποιείται και μια άλλη έννοια που συνδέεται με τα διαγράμματα ελέγχου, αυτή του μέσου χρόνου σήματος (average time to signal, ATS) η οποία ορίζεται ως εξής

$$ATS = ARL \times h$$

με h να είναι ο χρόνος που μεσολαβεί για τη λήψη δύο διαδοχικών δειγμάτων και θεωρείται σταθερός. Εξ ορισμού η ποσότητα αυτή δηλώνει τον μέσο απαιτούμενο χρόνο για να δώσει το διάγραμμα ένδειξη ότι η διεργασία βρίσκεται εκτός ελέγχου.

1.9 Φάση I και II

Τα διαγράμματα ελέγχου για την μελέτη μιας διεργασίας μελετώνται και διαμορφώνονται σε δύο φάσεις, τη Φάση I και τη Φάση II.

Στην Φάση I η κύρια χρήση των διαγραμμάτων ελέγχου είναι αναδρομική. Δηλαδή αξιοποιούνται με τέτοιο τρόπο ώστε να ελεγχθούν τα υπό εξέταση δείγματα που έχουμε στα χέρια μας αν βρίσκονταν εντός ή εκτός ελέγχου. Βέβαια τα δείγματα έχουν ληφθεί σε διαφορετικές χρονικές στιγμές, δημιουργώντας έτσι την ανάγκη μιας εκ βάθους μελέτης της διεργασίας ώστε να αποφασιστεί αν ήταν εντός ή εκτός στατιστικού ελέγχου. Σε αυτή τη φάση λοιπόν τα διαγράμματα ελέγχου προσφέρονται ώστε να γίνουν οι κατάλληλες ενέργειες για να φέρουμε την διεργασία εντός στατιστικού ελέγχου.

Έχοντας υλοποιήσει το στάδιο της Φάσης I, είμαστε σε θέση να περάσουμε στη Φάση II. Σε τούτη τη φάση τα τελικά διαγράμματα που διαμορφώθηκαν αξιοποιούνται ώστε να ελέγχεται αν η διεργασία στην πάροδο του χρόνου παραμένει εντός ελέγχου. Σε κάθε χρονική στιγμή, υπάρχει η δυνατότητα άμεσης ανίχνευσης ενδεχόμενης αλλαγής στο μέσο επίπεδο των χαρακτηριστικών που επηρεάζουν την ποιότητα του παραγόμενου προϊόντος. Για κάθε νέο δείγμα που λαμβάνεται δίνεται μια έγκυρη και έγκαιρη απάντηση στο ερώτημα «παραμένει η διεργασία εντός ελέγχου;».

1.10 Ιστορικά στοιχεία

Εάν κάποιος ανατρέξει στη παγκόσμια βιβλιογραφία θα αντιληφθεί τα τεράστια άλματα που έχει κάνει η έννοια του Στατιστικού Ελέγχου Διεργασιών. Σήμερα αποτελείται από ένα ευρύ σύνολο στατιστικών τεχνικών διαμορφωμένων με τρόπο όπου η σύνθεση αυστηρών μεθόδων ανάλυσης χρονοσειρών και γραφικών παρουσιάσεων των δεδομένων δίνουν μια διαφορετική οπτική γωνία αυτών προσφέροντάς τα με τρόπο που κάνει πιο κατανοητή και ευέλικτη για τους υπεύθυνους τη λήψη αποφάσεων (Benneyan et al., 2003). Ωστόσο διαδικασίες ποιοτικού ελέγχου δρομολογούνται αιώνες πριν φτάνοντας ως την Αρχαία Ελλάδα, όπου είχε διαμορφωθεί μια κατάλληλα προσαρμοσμένη, στα τότε δεδομένα, μέθοδο ελέγχου για την ποιότητα των προϊόντων. Το αξιοσημείωτο είναι ότι οι μέθοδοι αυτοί δεν είχαν περιορισμούς αφού έβρισκαν εφαρμογή σε όλο το φάσμα των παραγόμενων προϊόντων.

Με το πέρασμα των χρόνων, ο άνθρωπος έχοντας διαφορετικές εικόνες και μέσα στη διάθεσή του πήγαινε τον έλεγχο ποιότητας ένα βήμα παρακάτω, καθώς η βελτίωση της ποιότητας αποτελεί κομμάτι της ανθρώπινης φύσης. Το 1875 περίπου, ο Frederick Taylor (Frederick, 1911) παρουσιάζει τον όρο «Επιστημονική Διαχείριση» (Scientific Management). Σύμφωνα με αυτή, υποστήριξε ότι οι εργαζόμενοι είναι άμεσα συνδεδεμένοι με το λάθος και ως εκ τούτου τοποθέτησε κατάλληλους επιθεωρητές στο τελευταίο στάδιο της γραμμής παραγωγής οι οποίοι με την σειρά τους θα αποφάσιζαν ποια προϊόντα δεν ακολουθούν τις υφιστάμενες προδιαγραφές κρίνοντάς τα σε πρώτο χρόνο ελαττωματικά και έπειτα απαγορεύοντας την προώθηση αυτών στην αγορά. Αυτή η διαδικασία επέφερε κυρώσεις για τον εκάστοτε εργαζόμενο, αφού για κάθε τεμάχιο που κρινόταν μη εμπορεύσιμο και θα έπρεπε είτε να καταστραφεί είτε να ανακατασκευαστεί, θα μειωνόταν ανάλογα ο μισθός του. Αν βέβαια το πλήθος των ακατάλληλων προϊόντων αυξανόταν τότε τον απέλυαν (Montgomery, 2009) .

Η νοοτροπία του Frederick Taylor ήρθε να συμπληρώσει την λογική που ανέπτυξε ο πατέρας της γραμμής συναρμολόγησης Henry Ford, ο οποίος ακολούθησε το ίδιο μήκος κύματος έχοντας ως αποτέλεσμα η μεθοδολογία του να βρίσκει εφαρμογή σε δημόσιο και ιδιωτικό τομέα στην αμερικανική ήπειρο. Αυτή η αντίληψη του Taylor προσέφερε μια χείρα βοήθειας στο μεγάλο πλήθος μεταναστών να εξασφαλίσουν μια δουλειά στα αμερικανικά εργοστάσια, καθώς η πλειοψηφία αυτών δεν γνώριζε γραφή και ανάγνωση κάνοντας έτσι πιο δύσκολο τον τρόπο επικοινωνίας.

Έχοντας λάβει διάφορες διαστάσεις η έννοια και ο έλεγχος της ποιότητας και της παραγωγής, φτάνουμε στη δεκαετία του 1920 και στον William Edwards Deming έναν Αμερικανό φυσικό που δούλευε για την Western Electric's Hawthorne plant στο Σικάγο. Αξιοποιώντας την φιλοσοφία του Taylor, ο μισθός των εργατών αντιστοιχούσε στο πλήθος των τεμαχίων που παρήγαγαν σε καθημερινή βάση, ενώ η ποιότητα της εργασίας δεν αποτελούσε κομμάτι της δουλειάς τους.

Η πρωτοπορία, ωστόσο, ήρθε μεταγενέστερα στα εργαστήρια της Bell στο New Jersey, όπου ο φιλόδοξος φυσικός Deming γνώρισε τον φυσικό, μηχανικό και στατιστικό Walter Andrew Shewhart ο οποίος είχε αναλάβει, μέσω των γνώσεων του, να οδηγήσει την εταιρεία στην βελτίωση της αξιοπιστίας των τηλεφώνων. Αυτό το πέτυχε μέσα από την εύρεση και ανάπτυξη μιας νέας μεθοδολογίας με στόχο την βελτίωση της απόδοσης των εργαζομένων και γενικότερα της γραμμής παραγωγής, μελετώντας κατά πόσο ο αριθμός των παραγόμενων αντικειμένων βρίσκεται εντός κάποιων αποδεκτών ορίων. Η τεχνική αυτή παρουσιάζει με γραφικό τρόπο την διαφορά στο ποσοστό των αποδεκτών προϊόντων. Την μέθοδο που εισήγαγε ο Shewhart την μοιράστηκε με τον Deming και την ονόμασε διάγραμμα στατιστικού ελέγχου (Statistical Control Chart).

Η εξέλιξη των τεχνικών και των κανόνων βελτίωσης της ποιότητας συνεχίστηκε και συνεχίζεται μέχρι σήμερα καθώς ο στατιστικός έλεγχος διεργασιών πέραν των γραφικών μεθόδων όπως τα διαγράμματα ελέγχου, αποτελείται και από άλλα μέσα όπως το διάγραμμα διαδοχικών τιμών, ο πίνακας συχνοτήτων, το ιστόγραμμα, η ανάλυση Pareto, το διάγραμμα διασποράς, το διάγραμμα ροής και άλλα. Ωστόσο κύριο εργαλείο του στατιστικού ελέγχου αποτελούν τα διαγράμματα ελέγχου που εφοδιάζουν ερευνητές και επαγγελματίες με μια μέθοδο καλύτερης αντίληψης των δεδομένων στην προσπάθεια βελτιστοποίησης της ποιότητας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Διαγράμματα Ελέγχου

2.1 Διαγράμματα ελέγχου

Διαδικασίες ποιοτικού ελέγχου και συγκεκριμένα τα διαγράμματα ελέγχου χρησιμοποιούνται ευρέως σε βιομηχανικό πλαίσιο όπου γρήγορη ανίχνευση προβλημάτων είναι απαραίτητη για την αποτελεσματικότητα της διεργασίας με στόχο την καλύτερη ποιότητα (Nix et al., 1987). Ο Shewhart μαζί με τον Deming αφού παρατήρησαν ότι επαναλαμβανόμενες μετρήσεις μιας διεργασίας εμφανίζουν μια εγγενής μεταβλητότητα, δούλεψαν και εξέλιξαν την ιδέα του πρώτου, εργαζόμενοι πάνω σε εργοστασιακές διεργασίες, όταν γρήγορα συνειδητοποίησαν ότι οι μέθοδοι και οι παρατηρήσεις τους θα μπορούσαν να βρουν εφαρμογή σε διαδικασίες διαφορετικού υποβάθρου. Ενδεικτικά αναφέρεται ότι ο στατιστικός έλεγχος διεργασιών έχει εφαρμοστεί σε διάφορους τομείς παραγωγικών κοινωνιών, από την Οικονομία και τον Βιομηχανικό κλάδο ως τον τομέα της Υγείας όπου και θα επικεντρωθούμε σε επόμενο κεφάλαιο. Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί ότι ορισμένοι συγγραφείς χρησιμοποιούν εναλλακτικά τον όρο Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας (Statistical Quality Control, SQC), μόνο στην περίπτωση όπου οι στατιστικές τεχνικές χρησιμοποιούνται επίσης για την βελτίωση μιας διαδικασίας.

Αυτό που ουσιαστικά συμπεράναν, λοιπόν, είναι ότι σε περίπτωση που η παρατηρούμενη διεργασία είναι σταθερή, η διακύμανση της είναι δυνατό να προβλεφθεί και να περιγραφεί από μια ή περισσότερες κατανομές. Ανάλογα με την φύση της διεργασίας και τον τύπο των δεδομένων που την διέπουν έχουν παρατηρηθεί διάφοροι τύποι κατανομών με τις πιο συχνές να είναι η κανονική (ή Gaussian), η Poisson, η διωνυμική και η γεωμετρική. Για παράδειγμα η διακύμανση του αριθμού των λοιμώξεων ύστερα από μια χειρουργική επέμβαση, θα ακολουθεί διωνυμική κατανομή καθώς τα δυνατά αποτελέσματα είναι δύο αφού κάθε ασθενής είτε είχε είτε δεν είχε μετεγχειρητική λοίμωξη.

Η πληθώρα στατιστικών εργαλείων που έχουμε στη διάθεσή μας υπάρχουν και χρειάζονται ώστε να συνεισφέρουν στην προσπάθεια να εντοπιστεί αν τα μοτίβα που παρατηρούνται σε ένα σύνολο μετρήσεων αποτελούν αποτέλεσμα κοινών ή ειδικών αιτιών μεταβλητότητας. Τα διαγράμματα ελέγχου δημιουργήθηκαν και αναπτύχθηκαν για αυτόν ακριβώς τον σκοπό, να προσφέρουν μια γρήγορη και σχετικά εύκολη απάντηση σε αυτό το ερώτημα.

Προτού ο αρμόδιος σχεδιαστής ενός διαγράμματος ελέγχου προχωρήσει στη δημιουργία του αντίστοιχου διαγράμματος είναι σημαντικό να έχει καθοριστεί ο στόχος αλλά και να έχουν οριστεί οι τρόποι με τους οποίους ειδικές αιτίες θα διερευνηθούν ή στο πως για μια εν εξελίξει διαδικασία που υπάρχει μόνο κοινή αιτία μεταβλητότητας μπορεί να βελτιωθεί (Mohammed et al., 2008). Επίσης, κατά την κατασκευή, προσοχή χρειάζεται και η δημιουργία των ορίων ελέγχου αφού στενά όρια ισοδυναμούν με υψηλό ρίσκο σφάλματος τύπου I ενώ πλατιά όρια ισοδυναμούν με υψηλό ρίσκο σφάλματος τύπου II. Η πρώτη περίπτωση μεταφράζεται σε αύξηση του πλήθους των ψευδών θετικών συναγερμών (false positive) σε μια διεργασία που είναι σε κατάσταση ελέγχου και λανθασμένα λέγεται ότι βρίσκεται εκτός ελέγχου ενώ η δεύτερη περίπτωση αναλογεί σε ψευδή αρνητικούς συναγερμούς (false negative) και αποτυχία ανίχνευσης μιας διεργασίας που είναι εκτός ελέγχου (Hart et al., 2003). Για αυτούς τους λόγους

ειδικοί του SPC και ο Shewhart προτείνουν την περίπτωση ± 3 SD ώστε να υπάρξει μια ισορροπία στους δύο αυτούς κινδύνους επιτρέποντας την ανίχνευση ουσιαστικών αλλαγών στην απόδοση της διεργασίας. Σημαντικό ακόμη κομμάτι αποτελεί ο ορισμός της μεθόδου συλλογής των δεδομένων, η οποία θα πρέπει να διαμορφωθεί κατάλληλα ώστε να διαθέτει ένα σύνολο δεδομένων τέτοιο ώστε να αντικατοπτρίζει την υποκείμενη διαδικασία. Ενώ έχει γραφεί και δημοσιευθεί ένας μεγάλος αριθμός ερευνητικών εργασιών πάνω στον στατιστικό έλεγχο διεργασιών και δη στα διαγράμματα ελέγχου, αρκετά λιγότερη έμφαση έχει δοθεί στο κομμάτι της δειγματοληψίας.

Ύστερα από έναν μεγάλο αριθμό βιομηχανικών εφαρμογών και εργασιών, βρέθηκε ότι για την αποδοτικότερη χρήση των διαγραμμάτων ελέγχου θα ήταν ωφέλιμο να υπάρχει ένας διαχωρισμός δύο φάσεων (Benneyan et al., 2003). Όπως αυτές προσδιορίστηκαν στο 1^ο Κεφάλαιο όπου κατά την φάση I αξιοποιούνται ιστορικά δεδομένα για την παροχή ενός σημείου αναφοράς, την αξιολόγηση της σταθερότητας, την διερεύνηση και εντοπισμό ειδικών αιτιών καθώς και την εκτίμηση παραμέτρων που περιγράφουν την συμπεριφορά της διεργασίας. Ολοκληρώνοντας την φάση I, η φάση II αποτελείται από μια συνεχή παρακολούθηση με τυχαία δείγματα που λαμβάνονται διαδοχικά σε διάφορες, προκαθορισμένες ή και μη, χρονικές στιγμές. Για την φάση I προτείνονται τα διαγράμματα Shewhart ενώ στη φάση II τα CUSUM και EWMA, που θα παρουσιαστούν πιο κάτω, έχει παρατηρηθεί ότι δουλεύουν εξαιρετικά καλά στην ανίχνευση μικρών αλλαγών με αποτέλεσμα ένας συνδυασμός αυτών να είναι εξαιρετικά επωφελής (Woodall, 2000).

Έχοντας εισάγει και αναλύσει έννοιες που συνδέονται με τα διαγράμματα ελέγχου, θα ακολουθήσει η παρουσίαση των βασικότερων από εκείνα συνδυάζοντάς τα με περιπτώσεις που αυτά εφαρμόζονται μαζί με τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις ώστε να γίνει ξεκάθαρη η χρησιμότητα και λειτουργία τους. Όπως αναφέρθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο θα αναφερθούμε σε διαγράμματα ελέγχου για την μέση τιμή και την διασπορά καθώς και σε διαγράμματα ελέγχου για ιδιότητες. Δηλαδή για διαγράμματα ελέγχου ποσοτικών και ποιοτικών μεταβλητών.

2.2 Διαγράμματα Ελέγχου Τύπου Shewhart για Μεταβλητές

2.2.1 Διαγράμματα ελέγχου για τη μέση τιμή

Σε αυτή την παράγραφο αναπτύσσονται τα διαγράμματα ελέγχου που χρησιμοποιούνται με βασικό στόχο την παρακολούθηση της συμπεριφοράς της μέσης τιμής του συνεχούς χαρακτηριστικού X κάτω από την υπόθεση ότι η διακύμανση παραμένει σταθερή κατά την διάρκεια της διεργασίας. Θεωρείται ότι η κατανομή του ποιοτικού χαρακτηριστικού X είναι κανονική με γνωστές παραμέτρους, συμβολικά $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Υποθέτοντας ότι $X_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$, $i \geq 1$ αντιπροσωπεύει ένα τυχαίο δείγμα του χαρακτηριστικού X μεγέθους n , τότε ο δειγματικός μέσος

$$\bar{X}_i = \frac{X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{in}}{n}$$

ακολουθεί κανονική κατανομή με παραμέτρους μ και σ^2/n ή $\bar{X}_i \sim N(\mu, \sigma^2/n)$ έχοντας επίσης την ιδιότητα του αμερόληπτου εκτιμητή της μέσης τιμής μ . Επομένως, τα όρια ελέγχου τριών

σίγμα και η κεντρική γραμμή ενός διαγράμματος για τη μέση τιμή του χαρακτηριστικού X δίνονται στο ακόλουθο πλαίσιο

\bar{X} Διάγραμμα με 3σ όρια ελέγχου για δείγματα – Φάση II
UCL = $\mu + A\sigma$ CL = μ LCL = $\mu - A\sigma$

όπου $A = \frac{3}{\sqrt{n}}$. Τα παραπάνω ορίσματα αναφέρονται στη Φάση II δεδομένου ότι οι τιμές της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης του ποιοτικού χαρακτηριστικού είναι γνωστές.

Βέβαια υπάρχει και η περίπτωση όπου το μέγεθος του δείγματος είναι ίσο με 1 και άρα έχουμε διαγράμματα ελέγχου για μεμονωμένες παρατηρήσεις (individuals observations). Θεωρούμε και πάλι ότι η κατανομή του χαρακτηριστικού X των παραγόμενων προϊόντων ακολουθεί κανονική κατανομή με μ και σ γνωστά. Στο διάγραμμα αυτό απεικονίζονται οι ατομικές παρατηρήσεις X_i , για $i \geq 1$ και τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή δίνονται στο παρακάτω πλαίσιο

X Διάγραμμα με 3σ όρια ελέγχου για μεμονωμένες παρατηρήσεις – Φάση II
UCL = $\mu + 3\sigma$ CL = μ LCL = $\mu - 3\sigma$

Μέχρι στιγμής όσα έχουν παρουσιαστεί επικεντρώνονται στην περίπτωση όπου οι παράμετροι μ και σ του χαρακτηριστικού X είναι γνωστές, γεγονός που δεν συναντάται στην πραγματικότητα και επομένως θα πρέπει να εκτιμηθούν. Η διαδικασία της εκτίμησης θα πραγματοποιηθεί με τη λήψη m ανεξάρτητων προκαταρκτικών τυχαίων δειγμάτων μεγέθους n το καθένα $X_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$, $1 \leq i \leq m$, κάτω από την υπόθεση ότι η επιλογή αυτών των δειγμάτων έγινε κατά την διάρκεια που η διεργασία βρισκόταν εντός ελέγχου. Συνηθίζεται το m να είναι από 20 έως 25 και n από 4 έως 6. Στην συνέχεια υποθέτουμε ότι το χαρακτηριστικό X ακολουθεί κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ με μ και σ άγνωστα. Προκειμένου να εκτιμήσουμε το μ χρησιμοποιούμε τους δειγματικούς μέσους των m δειγμάτων παίρνοντας

$$\bar{\bar{X}} = \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \dots + \bar{X}_m}{m}$$

και άρα θα έχουμε $\hat{\mu} = \bar{X}$. Για την εκτίμηση της τυπικής απόκλισης υπάρχουν διάφορες μέθοδοι που μπορούν να χρησιμοποιηθούν. Αρχικά έχουμε τη μέθοδο R, όπου βασίζεται στα εύρη R_1, R_2, \dots, R_m των m δειγμάτων. Θέτοντας

$$\bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_m}{m}$$

και αξιοποιώντας τις σχέσεις $\mu_{R_i} = E(R_i) = \sigma d_2$, προκύπτει ότι $E(\bar{R}) = \sigma d_2$ και άρα η στατιστική συνάρτηση \bar{R}/d_2 είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της σ οπότε έχουμε $\hat{\sigma} = \bar{R}/d_2$. Άλλη προσέγγιση που μπορούμε να ακολουθήσουμε είναι η μέθοδος S στην οποία βασίζομαστε στις δειγματικές τυπικές αποκλίσεις S_i . Σε αυτή την περίπτωση θέτοντας

$$\bar{S} = \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_m}{m}$$

και κάνοντας χρήση των σχέσεων $\mu_{S_i} = E(S_i) = \sigma c_4$ προκύπτει ότι $E(\bar{S}) = \sigma c_4$ λαμβάνοντας έτσι την ποσότητα \bar{S}/c_4 ως αμερόληπτη εκτιμήτρια της σ , δηλαδή $\hat{\sigma} = \bar{S}/c_4$. Με την ίδια λογική στη θέση των δειγματικών τυπικών αποκλίσεων χρησιμοποιώντας τις δειγματικές διακυμάνσεις S_i^2 , και άρα την μέθοδο S^2 , για τις οποίες ισχύει $\mu_{S_i^2} = E(S_i^2)$ προκύπτει ότι η ποσότητα $\sqrt{\bar{S}^2}$ αποτελεί εκτίμηση (όχι αμερόληπτη) της σ , όπου

$$\bar{S}^2 = \frac{S_1^2 + S_2^2 + \dots + S_m^2}{m}$$

Σύμφωνα με την εκτίμηση που χρησιμοποιείται για την τυπική απόκλιση διαμορφώνεται και διαφορετικό διάγραμμα ελέγχου για τη μέση τιμή.

Ξεκινώντας με την μέθοδο R, έχοντας ως εκτίμηση της μέσης τιμής την στατιστική συνάρτηση $\hat{\mu} = \bar{X}$ και ως εκτίμηση της τυπικής απόκλισης την $\hat{\sigma} = \bar{R}/d_2$, τότε τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή για την μέση τιμή του χαρακτηριστικού X δίνονται στο ακόλουθο πλαίσιο

<p style="text-align: center;">\bar{X} Διάγραμμα με 3σ όρια ελέγχου Μέθοδος R - Φάση I</p>
<p style="text-align: center;">UCL = $\bar{X} + A_2 \bar{R}$ CL = \bar{X} LCL = $\bar{X} - A_2 \bar{R}$</p>

με την σταθερά A_2 να δίνεται από τον τύπο $A_2 = \frac{3}{d_2 \sqrt{n}}$.

Συνεχίζοντας με την μέθοδο S, έχοντας ως εκτίμηση της μέσης τιμής την στατιστική συνάρτηση $\hat{\mu} = \bar{X}$ και ως εκτίμηση της τυπικής απόκλισης την $\hat{\sigma} = \bar{S}/c_4$, τότε τα όρια ελέγχου

και η κεντρική γραμμή για την μέση τιμή του χαρακτηριστικού X δίνονται στο ακόλουθο πλαίσιο

\bar{X} Διάγραμμα με 3σ όρια ελέγχου Μέθοδος S – Φάση I
$UCL = \bar{\bar{X}} + A_3 \bar{S}$ $CL = \bar{\bar{X}}$ $LCL = \bar{\bar{X}} - A_3 \bar{S}$

με την σταθερά A_3 να δίνεται από τον τύπο $A_3 = \frac{3}{c_4 \sqrt{n}}$.

Ενώ για την μέθοδο S^2 , έχοντας ως εκτίμηση της μέσης τιμής την στατιστική συνάρτηση $\hat{\mu} = \bar{\bar{X}}$ και ως εκτίμηση της τυπικής απόκλισης την $\hat{\sigma} = \sqrt{\bar{S}^2}$, τότε τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή για την μέση τιμή του χαρακτηριστικού X δίνονται στο ακόλουθο πλαίσιο

\bar{X} Διάγραμμα με 3σ όρια ελέγχου Μέθοδος S^2 Φάση I
$UCL = \bar{\bar{X}} + A \sqrt{\bar{S}^2}$ $CL = \bar{\bar{X}}$ $LCL = \bar{\bar{X}} - A \sqrt{\bar{S}^2}$

με την σταθερά A να δίνεται από τον τύπο $A = \frac{3}{\sqrt{n}}$.

Ωστόσο όπως επισημάνθηκε προηγουμένως υπάρχει και η περίπτωση όπου το μέγεθος του δείγματος είναι ίσο με 1. Σε αυτή την περίπτωση η χρήση του εύρους R δεν είναι δυνατή καθώς δεν μπορεί να υπολογιστεί αφού μόλις μια παρατήρηση είναι διαθέσιμη. Για αυτό το λόγο χρησιμοποιείται το κινούμενο εύρος των μεμονωμένων παρατηρήσεων που υπολογίζεται ως εξής

$$MR_i = |X_i - X_{i-1}| = \max(X_{i-1}, X_i) - \min(X_{i-1}, X_i) \quad i \geq 2.$$

Έτσι λοιπόν για να εκτιμήσουμε τις ποσότητες μ και σ λαμβάνουμε ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους m από το χαρακτηριστικό X, έστω $X = (X_1, X_2, \dots, X_m)$ οπότε για την εκτίμηση της μέσης τιμής έχουμε

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_m}{m}$$

για την οποία ισχύει $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/m)$. Για την εκτίμηση του σ παίρνουμε

$$\overline{MR} = \frac{MR_2 + MR_3 + \dots + MR_m}{m-1}$$

για το οποίο ισχύει $E(\overline{MR}) = \sigma d_2$ και άρα η ποσότητα \overline{MR}/d_2 αποτελεί αμερόληπτη εκτιμήτρια της σ . Τελικά τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή δίνονται στο ακόλουθο πλαίσιο

X Διάγραμμα με 3σ όρια ελέγχου - Φάση I
$UCL = \bar{X} + 3 \frac{\overline{MR}}{d_2}$ $CL = \bar{X}$ $LCL = \bar{X} - 3 \frac{\overline{MR}}{d_2}$

2.2.2 Διαγράμματα ελέγχου για τη διασπορά

Σε αυτή την παράγραφο αναπτύσσονται τα διαγράμματα ελέγχου που χρησιμοποιούνται με βασικό στόχο την παρακολούθηση της συμπεριφοράς της διασποράς του συνεχούς χαρακτηριστικού X κάτω από την υπόθεση ότι το X ακολουθεί κανονική κατανομή με γνωστή τυπική απόκλιση, δηλαδή $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Θεωρώντας ένα τυχαίο δείγμα $X_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$, $i \geq 1$ μεγέθους n , τότε για την στατιστική συνάρτηση $W_i = R_i = X_{i(n)} - X_{i(1)}$ ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις $\mu_{R_i} = E(R_i) = \sigma \cdot d_2$ και $\sigma_{R_i} = \sqrt{V(R_i)} = \sigma \cdot d_3$ με τις ποσότητες d_2 και d_3 να εξαρτώνται από το μέγεθος του δείγματος n . Επομένως, δύναται να χρησιμοποιηθεί το εύρος R_i των δειγμάτων ως την απεικονιζόμενη ποσότητα ενός διαγράμματος ελέγχου για την διασπορά αποτελώντας μέτρο της διασποράς της X . Στο ακόλουθο πλαίσιο δίνονται η κεντρική γραμμή και τα όρια ελέγχου τριών σίγμα

R Διάγραμμα με 3σ όρια Φάση II
$UCL = D_2 \cdot \sigma$ $CL = d_2 \cdot \sigma$ $LCL = D_1 \cdot \sigma$

όπου $D_1 = d_2 - 3d_3$ και $D_2 = d_2 + 3d_3$. Σημειώνεται ότι όταν $n \leq 6$, τότε το $D_1 < 0$ γεγονός που μεταφράζεται σε αρνητικά όρια ελέγχου, κάτι το οποίο δεν μπορεί να ισχύει και άρα θέτουμε $D_1 = 0$.

Δυνατή, επίσης, είναι και η χρήση της στατιστικής συνάρτησης $W_i = S_i = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}$, $1 \leq i \leq m$, όπου ισχύουν $\mu_{S_i} = E(S_i) = \sigma \cdot c_4$ και $\sigma_{S_i} = \sqrt{V(S_i)} = \sigma \cdot \sqrt{1 - c_4^2}$. Επομένως, δύναται να χρησιμοποιηθούν οι δειγματικές τυπικές αποκλίσεις S_i των δειγμάτων ως την απεικονιζόμενη ποσότητα ενός διαγράμματος ελέγχου για

την διασπορά αποτελώντας μέτρο της διασποράς της X. Στο ακόλουθο πλαίσιο δίνονται η κεντρική γραμμή και τα όρια ελέγχου τριών σίγμα

S Διάγραμμα με 3σ όρια Φάση II
$\text{UCL} = B_6 \cdot \sigma$ $\text{CL} = c_4 \cdot \sigma$ $\text{LCL} = B_5 \cdot \sigma$

Σημειώνεται ότι όταν $n \leq 5$, τότε το $B_5 < 0$ γεγονός που μεταφράζεται σε αρνητικά όρια ελέγχου, κάτι το οποίο δεν μπορεί να ισχύει και άρα θέτουμε $B_5 = 0$.

Για την παρακολούθηση της διασποράς του ποιοτικού χαρακτηριστικού X, μπορεί ακόμα να χρησιμοποιηθεί και η ακόλουθη στατιστική συνάρτηση

$$W_i = S_i^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2, \quad 1 \leq i \leq m,$$

για την οποία ισχύουν ότι $\mu_{S_i} = E(S_i^2) = \sigma^2$ και $\frac{(n-1) \cdot S_i^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$.

Βασίζομενοι στις σχέσεις αυτές, ισχύει ότι:

$$P(\chi_{n-1;1-a/2}^2 \leq \frac{(n-1) \cdot S_i^2}{\sigma^2} \leq \chi_{n-1;a/2}^2) = 1 - \alpha$$

και με στοιχειώδεις πράξεις προκύπτει

$$P\left(\frac{\sigma^2}{(n-1)} \chi_{n-1;1-a/2}^2 \leq S_i^2 \leq \frac{\sigma^2}{(n-1)} \chi_{n-1;a/2}^2\right) = 1 - \alpha$$

Λαμβάνοντας έτσι ένα διάγραμμα ελέγχου όπου η απεικονιζόμενη ποσότητα θα είναι η δειγματική διακύμανση S_i^2 που είναι ένα μέτρο διασποράς της X. Στο ακόλουθο πλαίσιο δίνονται η κεντρική γραμμή και τα όρια ελέγχου του διαγράμματος

S² Διάγραμμα με όρια ελέγχου Πιθανότητας α - Φάση II
$\text{UCL} = \frac{\sigma^2}{(n-1)} \chi_{n-1;a/2}^2$ $\text{CL} = \sigma^2$ $\text{LCL} = \frac{\sigma^2}{(n-1)} \chi_{n-1;1-a/2}^2$

Για το ενδεχόμενο όπου το μέγεθος του δείγματος είναι ίσο με 1 χρησιμοποιείται το κινούμενο εύρος που είναι το εύρος δύο παρατηρήσεων για το οποίο ισχύουν $\mu_{MR_i} = E(MR_i)$

= σd_2 και $\sigma_{MR_i} = \sqrt{V(MR_i)} = \sigma d_3$. Συνεπώς χρησιμοποιώντας το κινούμενο εύρος MR_i για την απεικονιζόμενη ποσότητα στο διάγραμμα ελέγχου για τη διασπορά του χαρακτηριστικού X , τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή δίνονται στο πλαίσιο που ακολουθεί

MR Διάγραμμα με 3σ όρια ελέγχου Φάση II
UCL = $D_2 \cdot \sigma$ CL = $d_2 \cdot \sigma$ LCL = $D_1 \cdot \sigma$

όπου $D_1 = d_2 - 3d_3$ και $D_2 = d_2 + 3d_3$ με τις σταθερές D_1 , D_2 , d_2 και d_3 να υπολογίζονται για $n = 2$.

Όπως και στην περίπτωση της μέσης τιμής έτσι και στη περίπτωση της διασποράς, η ποσότητα σ δεν είναι γνωστή εκ των προτέρων και απαιτείται να εκτιμηθεί. Η διαδικασία της εκτίμησης θα πραγματοποιηθεί με τη λήψη m ανεξάρτητων προκαταρκτικών τυχαίων δειγμάτων μεγέθους n το καθένα $X_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$, $1 \leq i \leq m$, κάτω από την υπόθεση ότι η επιλογή αυτών των δειγμάτων έγινε κατά την διάρκεια που η διεργασία βρισκόταν εντός ελέγχου. Ακόμη υποθέτουμε ότι το χαρακτηριστικό X ακολουθεί κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$.

Χρησιμοποιώντας το εύρος R και παίρνοντας ως εκτίμηση της τυπικής απόκλισης σ την ποσότητα $\hat{\sigma} = \bar{R}/d_2$ τότε τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή για την τυπική απόκλιση του χαρακτηριστικού X δίνονται στο ακόλουθο πλαίσιο:

R Διάγραμμα με 3σ όρια Φάση I
UCL = $D_4 \cdot \bar{R}$ CL = \bar{R} LCL = $D_3 \cdot \bar{R}$

όπου $D_3 = 1 - 3 \cdot \frac{d_3}{d_2}$ και $D_4 = 1 + 3 \cdot \frac{d_3}{d_2}$. Σημειώνεται ότι όταν $n \leq 6$, τότε το $D_3 < 0$ γεγονός που μεταφράζεται σε αρνητικά όρια ελέγχου, κάτι το οποίο δεν μπορεί να ισχύει και άρα θέτουμε $D_3 = 0$.

Άλλη μέθοδος είναι η χρήση της δειγματικής τυπικής απόκλισης και της εκτίμησης $\hat{\sigma} = \bar{S}/c_4$, τότε τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή για την τυπική απόκλιση του χαρακτηριστικού X δίνονται στο ακόλουθο πλαίσιο

S Διάγραμμα με 3σ όρια Φάση I
$UCL = B_4 \cdot \bar{S}$ $CL = \bar{S}$ $LCL = B_3 \cdot \bar{S}$

όπου $B_3 = 1 - \frac{3}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2}$ και $B_4 = 1 + \frac{3}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2}$. Σημειώνεται ότι όταν $n \leq 5$, τότε το $B_3 < 0$ γεγονός που μεταφράζεται σε αρνητικά όρια ελέγχου, κάτι το οποίο δεν μπορεί να ισχύει και άρα θέτουμε $B_3 = 0$.

Ενώ αξιοποιώντας την δειγματική διακύμανση και παίρνοντας ως εκτίμηση της διακύμανσης σ^2 την ποσότητα $\hat{\sigma}^2 = \bar{S}^2$, τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή δίνονται στο ακόλουθο πλαίσιο

S² Διάγραμμα με όρια ελέγχου Πιθανότητας α - Φάση I
$UCL = \frac{\bar{S}^2}{(n-1)} \chi_{n-1, \alpha/2}^2$ $CL = \bar{S}^2$ $LCL = \frac{\bar{S}^2}{(n-1)} \chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2$

Τέλος για την περίπτωση των μεμονωμένων παρατηρήσεων χρησιμοποιώντας ως εκτίμηση της ποσότητας σ την στατιστική συνάρτηση $\hat{\sigma} = \overline{MR} / d_2$, τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή θα είναι τα ακόλουθα

MR Διάγραμμα με 3σ όρια ελέγχου - Φάση I
$UCL = D_4 \cdot \overline{MR}$ $CL = \overline{MR}$ $LCL = D_3 \cdot \overline{MR}$

όπου $D_3 = 1 - 3 \cdot \frac{d_3}{d_2}$ και $D_4 = 1 + 3 \cdot \frac{d_3}{d_2}$ με τις σταθερές να υπολογίζονται για $n = 2$.

2.3 Διαγράμματα ελέγχου Τύπου Shewhart για Ιδιότητες

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιαστούν διαγράμματα ελέγχου ιδιοτήτων, τα οποία χρησιμοποιούνται για δεδομένα που αφορούν ποσότητες με δύο πιθανά αποτελέσματα της μορφής ναι ή όχι και όχι μετρήσιμες μονάδες. Η προσοχή επικεντρώνεται στις ελαττωματικές μονάδες και στα ελαττώματα του χαρακτηριστικού που μελετάται, με το μέγεθος του δείγματος που λαμβάνεται να είναι σταθερό είτε μεταβλητό. Για να δοθεί ο χαρακτηρισμός ελαττωματικό θα πρέπει τουλάχιστον ένα ποιοτικό χαρακτηριστικό του προϊόντος να λάβει θέση εκτός των ορίων προδιαγραφών, λέγοντας έτσι ότι το αντίστοιχο προϊόν παρουσιάζει τουλάχιστον ένα ελάττωμα. Άρα ο ορισμός της ελαττωματικής μονάδας δίνεται στην περίπτωση παρουσίας ελαττωμάτων με τα δε ελαττώματα να είναι εκείνα τα χαρακτηριστικά που καταστούν τις μονάδες ελαττωματικές εμποδίζοντάς τες να προσαρμοστούν στις προδιαγραφές. Τόσο το πλήθος ελαττωματικών μονάδων όσο και το πλήθος των ελαττωμάτων αποτελούν ποιοτικά χαρακτηριστικά που περιγράφονται με διακριτές τυχαίες μεταβλητές.

2.3.1 Διάγραμμα ελέγχου p

Σε αυτή την περίπτωση μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε το ποσοστό των ελαττωματικών μονάδων, εξ ου και ο συμβολισμός p. Πιο συγκεκριμένα, με τον όρο ποσοστό εννοούμε το πηλίκο του αριθμού των ελαττωματικών προϊόντων προς το συνολικό αριθμό εκείνων που παράχθηκαν. Προκειμένου να προχωρήσουμε στην κατασκευή του διαγράμματος θα πρέπει να ληφθούν m προκαταρκτικά τυχαία δείγματα. Επειδή όμως υπάρχουν διάφοροι παράγοντες, κυρίως οικονομικοί, που επηρεάζουν την παραγωγή σε ημερήσια βάση το μέγεθος του δείγματος μπορεί να ποικίλοι, όπως είναι και το αναμενόμενο αφού είναι εξαιρετικά δύσκολο το μέγεθος της παραγωγής να είναι ίσο κάθε μέρα.

Έστω ότι το ποσοστό p των ελαττωματικών μονάδων μιας παραγωγικής διεργασίας είναι άγνωστο και για τον λόγο αυτό επιλέγονται m ανεξάρτητα τυχαία δείγματα με μεγέθη n_1, n_2, \dots, n_m αντίστοιχα, ώστε να εκτιμηθεί. Έστω ακόμα με $X_{ij}, i \geq 1, 1 \leq j \leq n_i$ συμβολίζεται η τυχαία μεταβλητή με δυνατές τιμές 1 και 0 ανάλογα με το αν το j προϊόν του i δείγματος είναι ελαττωματικό ή όχι. Σύμφωνα με την τελευταία παραδοχή, έχουμε ότι $X_{ij} \sim B(1, p)$ με αποτέλεσμα για την ποσότητα $X_i = X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{in_i}$ που αντιστοιχεί στο πλήθος των ελαττωματικών προϊόντων του i δείγματος να ισχύει $X_i \sim B(n_i, p)$. Επομένως το ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων στο i δείγμα δίνεται από την τυχαία μεταβλητή $W_i = p_i = \frac{X_i}{n_i}$ για την οποία ισχύει ότι $\mu_{W_i} = p$ και $\sigma_{W_i}^2 = \frac{p(1-p)}{n_i}, 1 \leq i \leq m$. Η εκτίμηση της ποσότητας p θα είναι η

$$\bar{p} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}}{n_1 + n_2 + \dots + n_m}.$$

Χρησιμοποιώντας ως εικονιζόμενη ποσότητα την ποσότητα $W_i = p_i = \frac{X_i}{n_i}$, τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή δίνονται στο πλαίσιο που ακολουθεί

p Διάγραμμα με 3σ όρια ελέγχου - Φάση I
$UCL = \bar{P} + 3\sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{P})}{n_i}}$
$CL = \bar{P}$
$LCL = \bar{P} - 3\sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{P})}{n_i}}$

2.3.2 Διάγραμμα ελέγχου c

Στο c διάγραμμα ελέγχου αυτό που μελετάται είναι ο συνολικός αριθμός των ελαττωμάτων σε μια μονάδα επιθεώρησης. Η υπόθεση που γίνεται σε τούτη την μελέτη είναι ότι ο συνολικός αριθμός των ελαττωμάτων μιας μονάδας ακολουθεί Poisson κατανομή, με την πιθανότητα εμφάνισης ελαττώματος να είναι μικρή. Απαιτώντας, επίσης οι μονάδες ελέγχου στα δείγματα να είναι ίδιες υποθέτουμε ότι X είναι το πλήθος των ελαττωμάτων για μια μονάδα επιθεώρησης για την οποία ισχύει ότι ακολουθεί Poisson κατανομή με παράμετρο c, δηλαδή X~P(c).

Προκειμένου να κατασκευαστεί ένα διάγραμμα ελέγχου για την παρακολούθηση του αριθμού των ελαττωμάτων μιας μονάδας θα πρέπει να γνωρίζουμε την παράμετρο c. Θεωρώντας ότι αυτή είναι άγνωστη και θα πρέπει να εκτιμηθεί λαμβάνονται m προκαταρκτικές μονάδες επιθεώρησης που θα δώσουν την πληροφορία που ζητείται. Θεωρούμε X_i τον αριθμό της i μονάδας επιθεώρησης για $1 \leq i \leq m$. Θέτοντας $\bar{C} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_m}{m}$, ισχύει ότι $E(\bar{C}) = c$ και άρα η ποσότητα \bar{C} χρησιμοποιείται ως εκτίμηση της c, δηλαδή $\hat{c} = \bar{C}$. Χρησιμοποιώντας ως απεικονιζόμενη ποσότητα την ποσότητα $W_i = X_i$, τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή δίνονται στο πλαίσιο που ακολουθεί

c Διάγραμμα με 3σ όρια ελέγχου - Φάση I
$UCL = \bar{C} + 3\sqrt{\bar{C}}$
$CL = \bar{C}$
$LCL = \bar{C} - 3\sqrt{\bar{C}}$

2.3.3 Διάγραμμα ελέγχου u

Ένας άλλος τύπος μελέτης είναι αυτός του διαγράμματος ελέγχου u. Η κατασκευή αυτού του διαγράμματος ελέγχου γίνεται για την παρακολούθηση του μέσου αριθμού των ελαττωμάτων ανά μονάδα επιθεώρησης σε κάθε δείγμα. Η υπόθεση που γίνεται είναι ότι ο αριθμός, έστω X, των ελαττωμάτων σε μια μονάδα επιθεώρησης ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο c. Η κύρια διαφορά από το διάγραμμα c είναι ότι στην περίπτωση του u διαγράμματος υπάρχει η δυνατότητα λήψης δείγματος μεγέθους μεγαλύτερου της μιας μονάδας επιθεώρησης.

Έστω ότι επιλέγονται m ανεξάρτητα τυχαία δείγματα μεγέθους n_1, n_2, \dots, n_m μονάδων επιθεώρησης αντίστοιχα και $X_i = X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{in_i}$ με $1 \leq i \leq m$ ο συνολικός αριθμός των

ελαττωμάτων στο i δείγμα. Με X_{ij} , $i \geq 1$ και $1 \leq j \leq n_i$, συμβολίζουμε την τυχαία μεταβλητή που αντιστοιχεί στον αριθμό των ελαττωμάτων της j μονάδας επιθεώρησης στο i δείγμα, για την οποία ισχύει $X_{ij} \sim P(c)$. Σύμφωνα με την τελευταία πρόταση για την X_i θα ισχύει ότι $X_i \sim P(n_i c)$. Για την κατασκευή του u διαγράμματος θα χρησιμοποιηθεί η τυχαία μεταβλητή $U_i = \frac{X_i}{n_i}$, $1 \leq i \leq m$ για την οποία ισχύει $\mu_{U_i} = c$ και $\sigma_{U_i}^2 = \frac{c}{n_i}$. Ως εκτίμηση της ποσότητας c

χρησιμοποιούμε την τυχαία μεταβλητή $\bar{U} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}}{n_1 + n_2 + \dots + n_m}$ για την οποία ισχύει $E(\bar{U}) = c$ και άρα $\hat{c} = \bar{U}$. Έτσι λοιπόν τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή για την παρακολούθηση του μέσου αριθμού των ελαττωμάτων ανά μονάδα επιθεώρησης παρουσιάζονται στο πλαίσιο που ακολουθεί

u Διάγραμμα με 3σ όρια ελέγχου - Φάση I
$UCL = \bar{U} + 3 \sqrt{\frac{\bar{U}}{n_i}}$
$CL = \bar{U}$
$LCL = \bar{U} - 3 \sqrt{\frac{\bar{U}}{n_i}}$

2.4 Διαγράμματα CUSUM & EWMA

Εκτός από τα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart, που χρησιμοποιούνται κυρίως στη Φάση I για την ανίχνευση μεσαίων και μεγάλων αλλαγών, παρατηρείται και μια άλλη ομάδα διαγραμμάτων που αποδίδουν εξαιρετικά καλά στην ανίχνευση μικρών μεταβολών της διεργασίας, εξ ου και η προτίμησή τους στη Φάση II. Η χρήση αυτών των διαγραμμάτων βοηθά στο περιορισμό των λανθασμένων συναγερωμών και την ίδια στιγμή προσφέρει στο πιο έγκαιρο εντοπισμό της αιτίας ενός προβλήματος. Αυτά είναι τα διαγράμματα CUSUM και EWMA, τα οποία έχουν την δυνατότητα να εντοπίσουν διεργασίες που ενδεχομένως δεν είχαν σχεδιαστεί σωστά με αποτέλεσμα να φαίνονται εντός στατιστικού ελέγχου αλλά με όχι και τόσο καλά επίπεδα ποιότητας.

2.4.1 Διαγράμματα CUSUM

Τα διαγράμματα CUSUM (cumulative sum control charts) σήμερα αποτελούν την δημοφιλέστερη μέθοδο παρακολούθησης διαδοχικών δεδομένων και αυτό γιατί εκμεταλλεύονται την πληροφορία που δίνουν τόσο τα πιο πρόσφατα όσο και προηγούμενα σε χρονολογική σειρά δείγματα. Υπάρχουν δύο ειδών CUSUM, η αλγοριθμική μέθοδος ή tabular CUSUM και η V μάσκα ή καλύτερα V-mask. Η αλγοριθμική μέθοδος παρουσιάστηκε από τον Page (Page 1954), ύστερα από την παρουσίαση των ακολουθιακών ελέγχων λόγω πιθανοφάνειας του Wald (Wald 1947). Ενώ λίγα χρόνια αργότερα και συγκεκριμένα το 1959 παρουσιάστηκε η μέθοδος V-mask από τον George Alfred Barnard (Barnard 1959), με στόχο την συνδυασμένη ανίχνευση αυξήσεων και μειώσεων της παραμέτρου της διεργασίας που μελετάται. Σήμερα η μέθοδος V-mask θεωρείται άβολη στην πράξη και χρησιμοποιείται περισσότερο σε ερευνητικό επίπεδο. Αξίζει να σημειωθεί ότι επειδή τα διαγράμματα αυτά

αξιοποιούν την πληροφορία όλων των παρατηρήσεων μέσω του υπολογισμού των συσσωρευμένων αθροισμάτων C_i αποδίδουν καλύτερα για την παρακολούθηση μεμονωμένων παρατηρήσεων για σχετικές αποκλίσεις από την μέση τιμή.

Για την κατασκευή λοιπόν ενός CUSUM, έστω ότι το χαρακτηριστικό X ακολουθεί κανονική κατανομή $N(\mu_0, \sigma^2)$. Λαμβάνοντας m ανεξάρτητα τυχαία δείγματα μεγέθους $n \geq 1$, για τον δειγματικό μέσο

$$\bar{X} = \frac{X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{im}}{n}$$

ισχύει ότι ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή μ_0 και διακύμανση $\frac{\sigma^2}{n}$. Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως τα αθροίσματα C_i παρουσιάζουν μια ολοκληρωμένη εικόνα απόκλισης από την μέση τιμή. Ενδεικτικά οι τιμές που παίρνουν είναι $C_1 = X_1 - \mu_0$, $C_2 = (X_2 - \mu_0) + (X_1 - \mu_0)$, ..., $C_m = (X_m - \mu_0) + (X_{m-1} - \mu_0) + \dots + (X_1 - \mu_0)$ με γενικό τύπο $C_i = (X_i - \mu_0) + C_{i-1}$ με $1 \leq i \leq m$ και $C_0 = 0$. Τυχόν αποκλίσεις από το 0, είτε θετικές είτε αρνητικές, θα παρουσιαστούν στο γράφημα.

Στο διάγραμμα Tabular CUSUM υπολογίζονται δύο αθροίσματα για κάθε μεμονωμένη παρατήρηση X_i . Αυτά είναι, το άνω συσσωρευμένο άθροισμα που συμβολίζεται με C_i^+ συγκεντρώνοντας τις θετικές αποκλίσεις από την τιμή μ_0 και το κάτω συσσωρευμένο άθροισμα που συμβολίζεται με C_i^- συγκεντρώνοντας τις αρνητικές αποκλίσεις από την τιμή μ_0 . Τα δύο αθροίσματα υπολογίζονται ως εξής :

$$C_i^+ = \max [0, X_i - (\mu_0 + K) + C_{i-1}^+]$$

$$C_i^- = \min [0, (\mu_0 - K) - X_i + C_{i-1}^-]$$

για $1 \leq i \leq m$ και $C_0^+ = C_0^- = 0$. Παρατηρούμε ότι η τιμή K (τιμή αναφοράς) που παρεμβάλλεται στον υπολογισμό των δύο αθροισμάτων επηρεάζει τις διαφορές $X_i - (\mu_0 + K)$ και $(\mu_0 - K) - X_i$ αφού όταν αυτές λάβουν αρνητικό πρόσημο τα αθροίσματα επαναφέρονται στο 0 παίρνοντας νέες τιμές όταν οι διαφορές αποκτήσουν θετικές τιμές. Τα δύο αθροίσματα σχεδιάζονται εκατέρωθεν της τιμής μ_0 αναπαριστώντας τις τιμές που αυτά λαμβάνουν. Εκτός αυτών σχεδιάζονται ακόμα δύο παράλληλες ευθείες προς την μ_0 δηλώνοντας το διάστημα στο οποίο μπορούν να πάρουν τιμές τα C_i^+ και C_i^- , δηλώνοντας με αυτόν τρόπο όρια ελέγχου. Το διάστημα αυτό συμβολίζεται με H και ονομάζεται διάστημα απόφασης, με H^+ να αντιστοιχεί στο άνω άθροισμα και H^- στο κάτω. Για τα K και H ισχύει:

$$H = h \cdot \sigma \text{ και } K = k \cdot \sigma = \frac{\delta}{2} \cdot \sigma$$

όπου $\delta = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{\sigma}$, k το μέγεθος της μετατόπισης που θέλουμε να εξετάσουμε ενώ h η εκτός ελέγχου τιμή του μέσου. Συνήθως για H έχουμε $4 \cdot \sigma$ ή $5 \cdot \sigma$.

Μερικοί συγγραφείς προτείνουν την τυποποίηση των τιμών πριν τον υπολογισμό των αθροισμάτων και αυτό γιατί από τον ορισμό των H και K συμπεραίνουμε ότι δεν επηρεάζονται από την τιμή της σ . Έτσι για $Y_i = \frac{X_i - \mu_0}{\sigma} \sim N(0,1)$ έχουμε

$$C_i^+ = \max [0, Y_i - k + C_{i-1}^+]$$

$$C_i^- = \min [0, -Y_i - k + C_{i-1}^-]$$

για $1 \leq i \leq m$ και $C_0^+ = C_0^- = 0$.

2.4.2 Διαγράμματα Scale CUSUM για την διασπορά

Βέβαια τα CUSUM διαγράμματα ελέγχου δεν περιορίζονται μόνο στην παρακολούθηση του μέσου της διεργασίας αλλά και σε εκείνη της διασποράς αυτής. Την ιδέα πρότεινε ο Hawkins (1981) τονίζοντας την άποψη του Shewhart ότι σε μια βιομηχανική διεργασία η παρακολούθηση της διασποράς είναι εξίσου σημαντική με την παρακολούθηση του μέσου, ενώ λίγα χρόνια αργότερα (Hawkins 1993) προτείνει οι δύο ποσότητες να απεικονίζονται στο ίδιο διάγραμμα.

Θεωρώντας τις X_i μεμονωμένες παρατηρήσεις κάτω από την υπόθεση ότι ακολουθούν κανονική κατανομή με μέση τιμή μ_0 και τυπική απόκλιση σ , συμβολίζουμε με U_i την τυποποίησή τους έχοντας $U_i = \frac{X_i - \mu_0}{\sigma}$. Βασιζόμενος σε αυτές τις υποθέσεις ο Hawkins εισήγαγε την ποσότητα

$$v_i = \frac{\sqrt{|U_i|} - 0.822}{0.349}$$

όπου υπό συνθήκες εντός ελέγχου ακολουθεί προσεγγιστικά τυπική κανονική κατανομή και είναι ευαίσθητη σε μετατοπίσεις της διακύμανσης. Η δημιουργία του διαγράμματος ελέγχου για την παρακολούθηση της διασποράς της διεργασίας βασίζεται στα αθροίσματα

$$S_i^+ = \max [0, v_i - k + S_{i-1}^+]$$

$$S_i^- = \max [0, -v_i - k + S_{i-1}^-]$$

για $1 \leq i \leq m$ και $S_0^+ = S_0^- = 0$. Για τις τιμές k και h ισχύει ό,τι αναπτύχθηκε προηγουμένως. Στο ενδεχόμενο αύξησης της τυπικής απόκλισης της διεργασίας αυξάνονται και οι τιμές της ποσότητας S_i^+ μέχρις ότου να ξεπεραστεί το διάστημα απόφασης H , ενώ θα μειώνονται στην περίπτωση μείωσης της τυπικής απόκλισης αναμένοντας να ξεπεραστεί το H . Στην περίπτωση που το διάγραμμα Scale CUSUM δώσει σημείο εκτός ελέγχου τότε υπάρχει υποψία μετατόπισης της διασποράς της διεργασίας ενώ όταν δοθούν ενδείξεις εκτός ελέγχου τόσο στο διάγραμμα του μέσου όσο και σε αυτό της διασποράς τότε υπάρχει υποψία ότι ο μέσος μετατοπίστηκε.

2.4.3 Διαγράμματα EWMA

Μια διαφορετική πρόταση αντί των διαγραμμάτων Shewhart είναι τα διαγράμματα EWMA (Exponentially Weighted Moving Average) που παρουσιάστηκαν από τον Roberts (Roberts 1959). Το πλεονέκτημά τους είναι η εξάρτηση που τα αντιπροσωπεύει από προγενέστερα δεδομένα, σε σχέση με τα Shewhart που χρησιμοποιούν την πληροφορία που προσφέρει ένα μόνο δείγμα, κάνοντάς τα πιο ευαίσθητα στις μετατοπίσεις έως και 1.5σ . Προτείνονται για μεμονωμένες παρατηρήσεις, δίχως αυτό να σημαίνει ότι δεν επιτρέπεται η χρήση τους στην περίπτωση των δειγμάτων. Η προς έλεγχο ποσότητα που απεικονίζεται είναι η z_i και υπολογίζεται ως $z_i = \lambda x_i + (1 - \lambda)z_{i-1}$, όπου x_i είναι οι διαθέσιμες παρατηρήσεις και λ μια παράμετρος που ορίζεται ως συντελεστής βαρύτητας με δυνατές τιμές στο $(0,1]$. Η τιμή της

παραμέτρου λ επηρεάζει σε τι βαθμό θα βασιστούμε σε προηγούμενες παρατηρήσεις για τον υπολογισμό του στατιστικού. Τιμές πιο κοντά στην μονάδα δίνουν μικρότερο βάρος σε πιο πρόσφατες παρατηρήσεις. Ως τιμή εκκίνησης λαμβάνεται η μέση τιμή $z_0 = \mu_0$ που ορίζεται και ως τιμή στόχος. Για την πρώτη τιμή εκμεταλλευόμαστε είτε το μέσο που προκύπτει από ιστορικά δεδομένα είτε τον δειγματικό μέσο \bar{X} .

Από τον καθορισμό των τιμών z_i , αν αντικατασταθεί η τιμή z_{i-1} από τον τύπο υπολογισμού της, επαναλαμβάνοντας την διαδικασία καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο EWMA αντιστοιχεί σε έναν σταθμισμένο μέσο αφού

$$z_i = \lambda \cdot \sum_{j=0}^{i-1} (1 - \lambda)^j \cdot x_{i-j} + (1 - \lambda)^i \cdot z_0$$

Με τις πιο πρόσφατες παρατηρήσεις να επηρεάζουν σε μεγαλύτερο βαθμό το παρόν αφού τα βάρη $\lambda \cdot (1 - \lambda)^j$ μειώνονται γεωμετρικά, δίνοντας μικρότερα «σημασία» σε παλαιότερες παρατηρήσεις. Υπό την υπόθεση ότι τα x_i είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με διασπορά σ^2 τότε για την z_i ισχύει:

$$\sigma_{z_i}^2 = \sigma^2 \cdot \left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right) \cdot (1 - (1 - \lambda)^{2i})$$

Επομένως τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή του διαγράμματος είναι:

$$UCL = \mu_0 + L\sigma \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right)(1 - (1 - \lambda)^{2i})}$$

$$CL = \mu_0$$

$$LCL = \mu_0 - L\sigma \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right)(1 - (1 - \lambda)^{2i})}$$

με L να είναι το εύρος των ορίων και μ_0 η τιμή στόχος.

Καθώς αυξάνεται το i η ποσότητα $(1 - \lambda)^{2i}$ τείνει στο 0, σταθεροποιώντας τα όρια ελέγχου από μια τιμή και μετά:

$$UCL = \mu_0 + L\sigma \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right)}$$

$$CL = \mu_0$$

$$LCL = \mu_0 - L\sigma \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right)}$$

2.4.4 Διαγράμματα EWRMS για την διασπορά

Έστω X_i τυχαίες διαθέσιμες παρατηρήσεις που ακολουθούν κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και τυπική απόκλιση σ . Έχοντας ως βασικό υπόβαθρο τον σχεδιασμό ενός EWMA διαγράμματος ελέγχου, οι MacGregor και Harris (1993) παρουσίασαν ένα αντίστοιχο διάγραμμα για την παρακολούθηση της διασποράς της υπό εξέταση διεργασίας.

Χρησιμοποιήθηκε λοιπόν η ποσότητα

$$S_i^2 = \lambda \cdot (X_i - \mu)^2 + (1 - \lambda) \cdot S_{i-1}^2$$

η οποία είναι γνωστή ως *exponentially weighted mean squared error (EWMS)*, με $\lambda \in (0,1]$ και $E(S_i^2) = \sigma^2$ δημιουργώντας έτσι μια αμερόληπτη εκτιμήτρια της σ^2 καθώς αυξάνει το i . Η ποσότητα αυτή, στην περίπτωση που οι διαθέσιμες παρατηρήσεις είναι ανεξάρτητες, ακολουθεί προσεγγιστικά χ^2 κατανομή με $\nu = (2 - \lambda)/\lambda$ βαθμούς ελευθερίας. Θεωρώντας σ_0 την τιμή της τυπικής απόκλισης που αντιστοιχεί στην τιμή στόχο (που έχει υπολογιστεί από ιστορικά δεδομένα μιας εντός ελέγχου διεργασίας) κατασκευάζεται το διάγραμμα EWRMS (Exponentially weighted root mean square) στο οποίο απεικονίζονται οι ποσότητες $\sqrt{S_i^2}$ με όρια ελέγχου που παρουσιάζονται ακολούθως

$$UCL = \sigma_0 \cdot \sqrt{\frac{\chi_{\nu, \alpha/2}^2}{\nu}}$$
$$LCL = \sigma_0 \cdot \sqrt{\frac{\chi_{\nu, 1-(\alpha/2)}^2}{\nu}}$$

ενώ έδωσαν και πίνακες για τον υπολογισμό των ορίων ελέγχου σύμφωνα με το επίπεδο σημαντικότητας α και τους βαθμούς ελευθερίας ν . Ακόμα εξαιτίας της ευαισθησίας της S_i^2 που παρατηρήθηκε στην μετατόπιση τόσο του μέσου όσο και της τυπικής απόκλισης προτάθηκε αντί για την χρήση της σταθερής μέσης τιμής μ η εκτίμηση αυτής κάθε χρονική στιγμή έχοντας με αυτό τον τρόπο την $\hat{\mu}_i$. Χρησιμοποιώντας την ποσότητα z_i που αξιοποιείται για την δημιουργία του EWMA διαγράμματος ελέγχου ως εκτιμητή της μέσης τιμής κάθε χρονική στιγμή, δημιουργείται η ποσότητα EWMV (Exponentially weighted moving variance)

$$S_i^2 = \lambda \cdot (X_i - z_i)^2 + (1 - \lambda) \cdot S_{i-1}^2$$

με τα όρια ελέγχου να διαμορφώνονται σύμφωνα με αυτή την ποσότητα (MacGregor & Harris, 1993).

2.4.5 Υπολογισμός ARL για διαγράμματα CUSUM & EWMA

Στην περίπτωση όπου οι παρατηρήσεις μιας διεργασίας είναι ανεξάρτητες τα μέσα μήκη ροής ή ARLs είναι εύκολο να προσδιοριστούν για γραφήματα ελέγχου Shewhart όπως παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Η κατανομή του μήκους ροής είναι γεωμετρική με το ARL του διαγράμματος να αντιστοιχεί στη μέση τιμή της κατανομής αυτής. Ωστόσο η ακολουθία των απεικονιζόμενων σημείων στα διαγράμματα CUSUM και EWMA δεν είναι ανεξάρτητη με αποτέλεσμα να πρέπει να αξιοποιηθεί κάποια άλλη προσέγγιση για την εύρεση των ARLs.

Τόσο για τα διαγράμματα ελέγχου τύπου CUSUM όσο και για τα διαγράμματα ελέγχου τύπου EWMA δύο είναι οι μεθοδολογίες που χρησιμοποιούνται περισσότερο για τον υπολογισμό του ARL. Η μία είναι η μέθοδος των ολοκληρωτικών εξισώσεων και η άλλη η μέθοδος των Μαρκοβιανών αλυσίδων. Όσον αφορά την πρώτη μέθοδο, οδηγεί σε μια ακριβής ολοκληρωτική εξίσωση που ικανοποιεί το ARL και λύνεται με προσεγγιστικές μεθόδους. Ενώ μέσω της δεύτερης ξεκινάμε με μια προσεγγιστική εξίσωση που ικανοποιεί το ARL και βρίσκεται ακριβής λύση. Ενδεικτικά θα αναφερθούν ορισμένες μέθοδοι ενώ θα προταθούν και άλλες για περαιτέρω μελέτη στον ενδιαφερόμενο αναγνώστη.

- Μέθοδος ολοκληρωτικών εξισώσεων

Αρχικά θα γίνει αναφορά στην περίπτωση ενός (άνω) μονόπλευρου διαγράμματος ελέγχου τύπου CUSUM (με την ίδια λογική προκύπτουν αντίστοιχα συμπεράσματα για ένα κάτω μονόπλευρο CUSUM) σύμφωνα με τον Watherill (1977). Πριν όμως αναπτυχθεί η προσέγγιση που ακολούθησε θεωρείται σκόπιμο να δοθούν κάποιοι χρήσιμοι συμβολισμοί για την συνέχεια. Με $L(z)$ συμβολίζεται το μέσο μήκος ροής που αντιστοιχεί σε ένα μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου τύπου CUSUM με αφετηρία την τιμή z για $z \in [0, H]$. Έπειτα με $P(z)$ συμβολίζεται η πιθανότητα να καταλήξει ένα μονοπάτι με αφετηρία την τιμή z σε τιμή μικρότερη ή ίση του μηδενός, ενώ με $N(z)$ συμβολίζεται ο μέσος αριθμός δείγματος ενός μονοπατιού με αφετηρία την τιμή z . Κάνοντας λόγω για έναν ακολουθιακό έλεγχο, αυτός είναι ένα μονοπάτι σημείων με αφετηρία την τιμή z και σημείο τερματισμού είτε στο κάτω όριο 0 είτε στο άνω όριο H .

Για ένα (άνω) μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου τύπου CUSUM ο Wetherill (1977) κάνει χρήση του αθροίσματος

$$S_i^+ = \max [0, X_i - C + S_{i-1}^+]$$

με $S_0^+ = z$ για $z \in [0, H]$ και $C = \mu_0 + k$. Όταν το άθροισμα S_i^+ λάβει τιμή μεγαλύτερη του άνω ορίου ελέγχου για πρώτη φορά, τότε στην περίπτωση αυτή η διεργασία βρίσκεται εκτός ελέγχου εξαιτίας μεταβολής του μέσου. Ανάλογα με την τιμή που λαμβάνει το άθροισμα, θεωρώντας πάντα τιμή αφετηρίας του ελέγχου την τιμή z , όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, οι δυνατές περιπτώσεις κάθε χρονική στιγμή είναι οι ακόλουθες:

- Αν $X \leq C - z$ τότε $S_i^+ = 0$ και ο έλεγχος καταλήγει στο κάτω όριο
- Αν $C - z < X < H + C - z$ τότε $S_i^+ = z + X - C$ και ο έλεγχος συνεχίζεται
- Αν $X \geq H + C - z$ τότε $S_i^+ = H$ και ο έλεγχος καταλήγει στο άνω όριο ελέγχου

Βασίζόμενος σε αυτές τις εκδοχές λοιπόν κατέληξε σε ολοκληρωτικές εξισώσεις που ικανοποιούν οι ποσότητες $L(z)$, $P(z)$ και $N(z)$. Θεωρώντας $F(x)$ την συνάρτηση κατανομής της X , η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί η πρώτη εκ των τριών περιπτώσεων είναι ίση με $F(C - z)$, αν πραγματοποιηθεί η δεύτερη κατά σειρά περίπτωση τότε στην τελευταία προστίθεται η πιθανότητα $P(z + X - C)$. Χρησιμοποιώντας τα όσα έχουν αναφερθεί παραπάνω τελικά προκύπτει ότι

$$P(z) = F(C - z) + \int_{C - z}^{H + C - z} P(z + X - C) f(x) dx$$

ή θεωρώντας $y = z + X - C$ θα ισχύει

$$P(z) = F(C - z) + \int_0^H P(y) f(y + C - z) dy$$

όπου $f(x)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X . Με την ίδια λογική ισχύουν και οι ακόλουθες σχέσεις

$$N(z) = 1 + \int_0^H N(y)f(y + C - z)dy$$

$$P(z) = 1 + L(0)F(C-z) + \int_0^H L(y)f(y + C - z)dy.$$

Έχοντας βρει τις λύσεις των $P(0)$ και $N(0)$ προκύπτει ότι

$$L(0) = \frac{N(0)}{1-P(0)}.$$

Άλλες μέθοδοι είναι αυτές των Ewan και Kemp (1960) και του Van Dobben de Bruyn (1968) δίνοντας ο καθένας την δική του προσέγγιση.

Για την περίπτωση των EWMA διαγραμμάτων ελέγχου η προσέγγιση των ολοκληρωτικών εξισώσεων δόθηκε από τον Crowder (1987). Θεωρούμε ανεξάρτητες και ισόνομες παρατηρήσεις X_i $i \geq 1$ με μέση τιμή και διακύμανση 0 και 1 αντίστοιχα. Ακόμα f και F είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής αυτών, ενώ επίσης θεωρούμε ότι στο διάγραμμα με σταθερά όρια ελέγχου $UCL = h_z$ και $LCL = -h_z$ απεικονίζονται οι ποσότητες $z_i = \lambda x_i + (1 - \lambda)z_{i-1}$ με $z_0 = u$, $i \geq 1$ και $\lambda \in (0, 1]$. Επιπλέον, έχουμε $P(N(u)=n) = P(n, u)$ για $n \geq 1$ όπου $N(u)$ αντιστοιχεί στο μήκος ροής του διαγράμματος. Για $n = 1$ ισχύει

$$P(1, u) = \frac{1}{\lambda} \int_{-h_z}^{h_z} f\left(\frac{x-(1-\lambda)u}{\lambda}\right) dx$$

ενώ για $n \geq 2$ ισχύει

$$P(n, u) = \frac{1}{\lambda} \int_{-h_z}^{h_z} P(n-1, u) f\left(\frac{x-(1-\lambda)u}{\lambda}\right) dx$$

Το μέσο μήκος ροής του διαγράμματος προκύπτει από την ακόλουθη σχέση

$$L(u) = E(N(u)) = \sum_{n=1}^{\infty} n P(n, u) = G_0(u) \Big|_{g(x)=x}$$

$$\text{όπου } G_0(u) = g(1)P(1, u) + \frac{1}{\lambda} \int_{-h_z}^{h_z} G_1(y) f\left(\frac{x-(1-\lambda)u}{\lambda}\right) dx.$$

- Μέθοδος Μαρκοβιανών αλυσίδων

Την χρήση μαρκοβιανών αλυσίδων για την προσέγγιση του μέσου μήκους ροής ενός διαγράμματος ελέγχου CUSUM πρότειναν οι Brook και Evans (1972). Όπως και στην παρουσίαση της μεθόδου των ολοκληρωτικών εξισώσεων χρησιμοποίησαν ένα (άνω) μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου τύπου CUSUM αξιοποιώντας το άθροισμα

$$S_i^+ = \max [0, X_i - C + S_{i-1}^+]$$

με $S_0^+ = z$ για $z \in [0, H)$ και $C = \mu_0 + k$. Όταν το άθροισμα S_i^+ λάβει τιμή μεγαλύτερη του άνω ορίου ελέγχου για πρώτη φορά, τότε στην περίπτωση αυτή η διεργασία βρίσκεται εκτός ελέγχου. Η προτεινόμενη αυτή μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί τόσο για διακριτές όσο και για συνεχείς τυχαίες μεταβλητές.

Σύμφωνα με την προσέγγιση των Brook και Evans (1972) χωρίζουμε το διάστημα $(-\infty, +\infty)$ σε $m + 1$ ζώνες όπου κάθε μια αποτελεί και μια κατάσταση της αλυσίδας Markov. Οι ζώνες που προκύπτουν από την διάσπαση του διαστήματος $(-\infty, +\infty)$ είναι οι ακόλουθες $(-\infty, w/2]$, $[w/2, 3w/2]$, ..., $[(k - 1/2)w, (k + 1/2)w]$, ..., $[(m - 3/2)w, H]$, $[H, +\infty)$ με

$$w = \frac{2H}{m-1}.$$

Σε κάθε ζώνη λοιπόν αντιστοιχεί και μια κατάσταση της αλυσίδας Markov. Αυτές είναι οι $0, 1, \dots, m - 1$ που ονομάζονται μη απορροφητικές ενώ η κατάσταση m που αντιστοιχεί στο διάστημα $[H, +\infty)$ ονομάζεται απορροφητική κατάσταση. Στο σημείο αυτό αναφέρεται ότι μια κατάσταση ονομάζεται απορροφητική αν η πιθανότητα μετάβασης από εκείνη στον εαυτό της είναι ίση με 1, δηλαδή όταν η στοχαστική διαδικασία βρεθεί σε αυτή την κατάσταση δεν μπορεί να αλλάξει κατάσταση.

Τα στοιχεία του πίνακα μετάβασης $P = [p_{ij}]$ δίνονται στην συνέχεια

$$p_{i0} = \int_{-\infty}^{w/2} f(x - iw + C) dx \text{ με } i = 0, \dots, m - 1$$

$$p_{ij} = \int_{(j-i/2)w}^{(j+i/2)w} f(x - iw + C) dx \text{ με } \begin{cases} i = 0, 1, \dots, m - 1 \\ j = 1, 2, \dots, m - 1 \end{cases}$$

$$p_{im} = \int_H^{+\infty} f(x - iw + C) dx \text{ με } i = 0, \dots, m - 1$$

$$p_{mj} = 0 \text{ με } j = 0, \dots, m - 1$$

$$p_{mm} = 1.$$

Έστω στην συνέχεια θεωρούμε $Q = [p_{ij}]$ $i, j = 0, 1, \dots, m - 1$ είναι ο πίνακας που προκύπτει αν διαγραφεί η τελευταία γραμμή και τελευταία στήλη του πίνακα P . Ορίζουμε ακόμα

$$\tilde{L}_n = \begin{bmatrix} P(N_0 = n) \\ P(N_1 = n) \\ \vdots \\ P(N_{m-2} = n) \\ P(N_{m-1} = n) \end{bmatrix} \text{ και } \tilde{\mu} = \begin{bmatrix} E(N_0) \\ E(N_1) \\ \vdots \\ E(N_{m-2}) \\ E(N_{m-1}) \end{bmatrix}$$

όπου N_i είναι το μήκος ροής του διαγράμματος ξεκινώντας από την κατάσταση i για $i = 0, 1, \dots, m - 1$. Επομένως βάσει των παραπάνω προκύπτει ότι

$$\tilde{L}_1 = (I - Q)\tilde{1} \text{ και } \tilde{L}_n = Q\tilde{L}_{n-1} \text{ για } n = 2, 3, \dots \text{ και}$$

$$\tilde{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{H \times 1}$$

και $\tilde{\mu}$ είναι το διάνυσμα με το μέσο μήκος ροής του διαγράμματος CUSUM. Το πρώτο στοιχείο του διανύσματος δίνει το μέσο μήκος ροής για $S_0^+ = 0$ ενώ τα υπόλοιπα για $S_0^+ = z$ για $z = 1, 2, \dots, H - 1$.

Όσον αφορά την περίπτωση των EWMA διαγραμμάτων, η μέθοδος παρουσιάστηκε από τους Lucas και Saccucci (1990). Η νοοτροπία υπολογισμού του μέσου μήκους ροής είναι ανάλογη με εκείνη που παρουσιάστηκε για τα διαγράμματα ελέγχου τύπου CUSUM. Θεωρούμε ότι η απειονιζόμενη ποσότητα στο διάγραμμα ελέγχου EWMA, με σταθεροποιημένα όρια $UCL = h_z$ και $LCL = -h_z$, είναι

$$z_i = \lambda x_i + (1 - \lambda)z_{i-1} \text{ με } z_0 = \mu_0, i \geq 1 \text{ και } \lambda \in (0,1]$$

όπου μ_0 αντιστοιχεί στο εντός ελέγχου μέσο της υπό εξέταση διεργασίας. Αυτό που ακόμα θεωρείται είναι ότι x_i είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή μ , διακύμανση 1 και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$.

Η διαφορά σε σχέση με την προηγούμενη μεθοδολογία των (μονόπλευρων) CUSUM διαγραμμάτων είναι ότι χωρίζουμε το διάστημα $(-\infty, +\infty)$ σε $2m + 1$ ζώνες με την κάθε ζώνη να αντιστοιχεί και σε μια κατάσταση της μαρκοβιανής αλυσίδας. Τα διαστήματα (ζώνες) που προκύπτουν είναι τα $(-\infty, -h_z]$, $(-h_z, (-m + 3/2)w]$, ..., $((k - 1/2)w, (k + 1/2)w]$, ..., $[(m - 3/2)w, h_z]$, $[h_z, +\infty)$ με $k = -(m - 1), -(m - 2), \dots, 0, \dots, m - 2, m - 1$ και

$$w = \frac{2h_z}{m-1}$$

Τα στοιχεία του πίνακα μετάβασης $P = [p_{ij}]$ της μαρκοβιανής αλυσίδας είναι τα ακόλουθα

$$p_{ij} = \frac{1}{\lambda} \int_{(j-1/2)w}^{(j+1/2)w} f\left(\frac{x - (1-\lambda)iw}{\lambda}\right) dx \text{ με } i, j = -(m-1), \dots, 0, \dots, m-1$$

$$p_{im} = \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{-h_z} f\left(\frac{x - (1-\lambda)iw}{\lambda}\right) dx + \frac{1}{\lambda} \int_{h_z}^{\infty} f\left(\frac{x - (1-\lambda)iw}{\lambda}\right) dx$$

$$\text{με } i = -(m-1), \dots, 0, \dots, m-1$$

$$p_{mj} = 0 \text{ με } j = -(m-1), \dots, 0, \dots, m-1$$

$$p_{mm} = 1.$$

Έστω στην συνέχεια θεωρούμε $Q = [q_{ij}]$ $i, j = -(m-1), \dots, 0, 1, \dots, m-1$ είναι ο πίνακας που προκύπτει αν διαγραφεί η τελευταία γραμμή και τελευταία στήλη του πίνακα P. Ορίζουμε ακόμα

$$\widetilde{L}_n = \begin{bmatrix} P(N_{-(m-1)} = n) \\ P(N_{-(m-2)} = n) \\ \vdots \\ P(N_{m-2} = n) \\ P(N_{m-1} = n) \end{bmatrix} \text{ και } \widetilde{\mu} = \begin{bmatrix} E(N_{-(m-1)}) \\ E(N_{-(m-2)}) \\ \vdots \\ E(N_{m-2}) \\ E(N_{m-1}) \end{bmatrix}$$

όπου N_i είναι το μήκος ροής του διαγράμματος για $z_0 = iw$. Επομένως βάσει των παραπάνω προκύπτει ότι

$$\widetilde{L}_1 = (I - Q)\widetilde{1} \text{ και } \widetilde{L}_n = Q\widetilde{L}_{n-1} \text{ για } n = 2, 3, \dots \text{ και}$$

$$\tilde{\mathbf{1}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{H \times 1}$$

και $\tilde{\mu}$ είναι το διάνυσμα με το μέσο μήκος ροής του διαγράμματος CUSUM. Για $i = 0$ και $z_0 = 0, w = 0$ το μέσο μήκος ροής είναι το $E[N_0]$. Όσο μεγαλύτερη είναι η μέση τιμή του m καλύτερη είναι η προσέγγιση του μέσου μήκους ροής.

2.5 Η περίπτωση της διαμέσου

Στα διαγράμματα που αναλύθηκαν παραπάνω είναι γνωστή η κατανομή από την οποία προέρχονται τα δεδομένα μας ή υποθέτουμε ότι ακολουθούν γνωστή κατανομή, για αυτό και τους αποδίδεται ο χαρακτηρισμός των παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου. Ωστόσο, υπάρχει και η περίπτωση να μην μας είναι γνωστή η κατανομή που ακολουθούν τα διαθέσιμα δεδομένα ή να μην κρίνεται αναγκαίο να την γνωρίζουμε κάνοντας έτσι λόγο για μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου. Αυτή η υπόθεση της ελεύθερης κατανομής είναι ένα από τα πλεονεκτήματα αυτής της κατηγορίας διαγραμμάτων ελέγχου, κάνοντας τα απλούστερα στην εφαρμογή τους. Σημαντικό επίσης πλεονέκτημα που ευνοεί και τη σύγκριση μεταξύ των διαγραμμάτων είναι ότι το ίδιο εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής αντιστοιχεί σε όλες τις συνεχείς κατανομές. Ακόμα ο υπολογισμός της διασποράς δεν αποτελεί αναγκαίο κομμάτι αυτών ενώ παρατηρείται καλύτερη ισχύ, αποδίδουν καλύτερα στην ανίχνευση μετατοπίσεων στην περίπτωση που η κατανομή έχει βαριά ουρά και είναι πιο ανθεκτικά στην εμφάνιση outliers.

Η γενικότερη ιδέα των μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου είναι η μελέτη της διεργασίας με την βοήθεια της κεντρικής γραμμής ή αξιοποιώντας την παράμετρο θέσης. Παράμετρο θέσης μπορεί να είναι οποιοδήποτε ποσοστιαίο της κατανομής, με πιο συνήθης επιλογή αυτή της διαμέσου για καταστάσεις λοξών κατανομών ή κατανομών με βαριές ουρές. Από τις πιο γνωστές μεθόδους για την κατασκευή τέτοιου είδους διαγραμμάτων είναι εκείνη της χρήσης της προσημικής συνάρτησης.

Πιο συγκεκριμένα οι Amin et al. (1995) παρουσίασαν το SN διάγραμμα ελέγχου. Υποθέτουμε ότι $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in}$ για $i = 1, 2, \dots, n$ είναι n δείγματα μεγέθους n . Θεωρώντας ότι μελετάται η διάμεσος, έστω μ , μιας συνεχούς κατανομής με εντός ελέγχου τιμή μ_0 (τιμή στόχο), η στατιστική συνάρτηση που χρησιμοποιείται είναι η

$$SN_i = \sum_{j=1}^n \text{sign}(X_{ij} - \mu_0) \text{ για } i = 1, 2, \dots, n$$

$$\text{με } \text{sign}(t) = \begin{cases} 1, & \text{αν } t > 0 \\ 0, & \text{αν } t = 0. \\ -1, & \text{αν } t < 0 \end{cases}$$

Ακόμα με T_i συμβολίζουμε την τυχαία μεταβλητή που δίνει το πλήθος των παρατηρήσεων κάθε δείγματος που είναι μεγαλύτερες ή ίσες από την τιμή στόχο μ_0 για την οποία ισχύει $T_i = (SN_i + n)/2$. Η εν λόγω ποσότητα ακολουθεί διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n και $p = P(X_{ij} > \mu_0)$. Στην περίπτωση εντός ελέγχου διεργασίας ισχύει ότι $p = 1/2$, με την κατανομή της SN_i να είναι συμμετρική γύρω από το μηδέν και τα όρια ελέγχου να είναι τα $UCL = c$ και $LCL = -c$ με c θετικός ακέραιος. Αν $|SN_i| > \alpha_2$ με α_2 θετική σταθερά τότε

δίνεται προειδοποίηση ότι η εξεταζόμενη ποσότητα έχει υποστεί μετατόπιση.

2.6 Διεργασίες υψηλής απόδοσης

Εξαιτίας των μεγάλων τεχνολογικών προόδων ως προς την αυτοματοποίηση των διαδικασιών παραγωγής υπάρχουν διεργασίες που εμφανίζουν εξαιρετικά χαμηλά επίπεδα ελαττωματικών προϊόντων, με το ποσοστό αυτών να είναι μικρότερο του 0.001 κάνοντας τα διαγράμματα p ακατάλληλα για υψηλής απόδοσης διεργασίες. Πιο συγκεκριμένα, η εκμετάλλευση τέτοιων διαγραμμάτων οδηγούν σε υψηλά ποσοστά λανθασμένων συναγερμών εκτός ελέγχου διεργασίας καθώς και αδυναμία εντοπισμού βελτίωσης της υπό εξέταση διεργασίας. Για τον λόγο αυτό, όπου παρατηρείται χαμηλό ποσοστό ελαττωματικών προϊόντων αναπτύχθηκε νέα μέθοδος που βασίζεται στο συνολικό αριθμό μη ελαττωματικών προϊόντων ανάμεσα σε δύο ελαττωματικά.

Τα διαγράμματα αυτά, γνωστά και ως CCC διαγράμματα ελέγχου (Cumulative Count of Conforming) προτάθηκαν από τους Xie και Gosh (1997). Το υπόβαθρο κατασκευής τέτοιων διαγραμμάτων είναι η καταμέτρηση των συνεχόμενων μη ελαττωματικών προϊόντων σε αντίθεση με την ιδέα εστίασης στον αριθμό των ελαττωματικών.

Θεωρώντας ότι η καταμέτρηση αυτή αντιστοιχίζεται στην ποσότητα N , γίνεται αντιληπτό ότι αυτή ακολουθεί γεωμετρική κατανομή. Έστω ότι η εξεταζόμενη διεργασία έχει ποσοστό ελαττωματικών p , τότε η πιθανότητα το i -οστό κατά σειρά προϊόν να είναι το πρώτο ελαττωματικό που θα εντοπιστεί είναι ίση με

$$P(N = i) = (1 - p)^{i-1}p \text{ με } i = 1, 2, \dots$$

Ισχύει λοιπόν ότι η ποσότητα N ακολουθεί γεωμετρική κατανομή με μέση τιμή $1/p$. Για τον υπολογισμό των άνω και κάτω ορίων ελέγχου βάσει της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής που δίνεται από τον παρακάτω τύπο

$$F(n) = \sum_{j=1}^n (1 - p)^{j-1}p = 1 - (1 - p)^n$$

θεωρώντας ότι a είναι η πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού ισχύει ότι

$$UCL = \frac{\ln(a/2)}{\ln(1-p)}$$

και

$$LCL = \frac{\ln(1 - a/2)}{\ln(1-p)}.$$

Όπως σε όλα τα διαγράμματα ελέγχου, έτσι και σε αυτού του τύπου τα διαγράμματα σημαντικό μέσο για την μελέτη της απόδοσης του είναι το μέσο μήκος ροής (ARL). Ο τύπος υπολογισμού του για ένα CCC διάγραμμα ελέγχου δίνεται ακολούθως

$$ARL = \frac{1}{1 + (1-p)^{UCL} - (1-p)^{LCL}}.$$

2.7 Πολυμεταβλητά Διαγράμματα Ελέγχου

2.7.1 Εισαγωγή

Στις προηγούμενες παραγράφους παρουσιάστηκαν κλασσικές μέθοδοι διαγραμμάτων ελέγχου για την παρακολούθηση μιας τυχαίας μεταβλητής ή ενός ποιοτικού χαρακτηριστικού της υπό μελέτη διεργασίας. Εξαιτίας της ολοένα και μεγαλύτερης ανάπτυξης τεχνολογικών μέσων, γίνεται ευκολότερη η συλλογή και μέτρηση περισσότερων παραμέτρων δημιουργώντας με αυτό τον τρόπο και μεγαλύτερο ενδιαφέρον για ταυτόχρονη παρακολούθηση μεγαλύτερου πλήθους μεταβλητών ώστε να αποδειχθεί αν πληρούνται ή όχι οι προδιαγραφές που έχουν οριστεί. Από μια γραμμή παραγωγής είναι εύκολα κατανοητό ότι προκύπτει ένας μεγάλος όγκος δεδομένων. Η χρήση μεμονωμένων διαγραμμάτων ελέγχου για την κάθε μεταβλητή κρίνεται ανεπαρκής και οδηγεί σε παραπλανητικά συμπεράσματα (S Bersimis et al., 2007).

Το συμπέρασμα αυτό προκύπτει άμεσα από την πιθανότητα σφάλματος τύπου I που διαμορφώνεται από την εφαρμογή πολλών διαγραμμάτων ελέγχου. Ενδεικτικά, αν έχουμε στην διάθεση μας p στατιστικά ανεξάρτητα ποιοτικά χαρακτηριστικά από ένα προϊόν και κατασκευαστούν p το πλήθος \bar{X} διαγράμματα ελέγχου με σταθερή πιθανότητα σφάλματος τύπου I ίση με α για το καθένα, τότε η αντίστοιχη πιθανότητα για ολόκληρη την διαδικασία ελέγχου (Montgomery 2009), είναι ίση με

$$\alpha' = 1 - \prod_{i=1}^p (1 - \alpha)$$

ενώ η πιθανότητα όλοι οι μέσοι των υπό μελέτη χαρακτηριστικών να βρεθούν ταυτόχρονα εντός ελέγχου είναι ίση με

$$P = (1 - \alpha)^p .$$

Αντιλαμβάνεται λοιπόν κανείς την αλλοίωση που παρατηρείται στην πιθανότητα σφάλματος τύπου I ακόμα και όταν το p λάβει μικρές τιμές. Άλλο ένα ζήτημα που τίθεται είναι η περίπτωση όπου τα p χαρακτηριστικά δεν είναι ανεξάρτητα. Ένα φαινόμενο αρκετά σύνηθες και κοντά στην πραγματικότητα, καθιστώντας τις προηγούμενες σχέσεις μη αληθείς και δίχως να υπάρξει εύκολος τρόπος υπολογισμού αυτών των πιθανοτήτων. Όλα τα παραπάνω οδήγησαν στην μελέτη και εξέλιξη μεθόδων Πολυμεταβλητού Στατιστικού Ελέγχου Διεργασιών (Multivariate Statistical Process Control ή MSPM).

2.7.2 Υποθέσεις Εφαρμογής

Έστω X_1, X_2, \dots, X_m είναι m ανεξάρτητα τυχαία δείγματα μιας διεργασίας. Στη μελέτη πολυμεταβλητών διαγραμμάτων ελέγχου τα δεδομένα που συγκεντρώνονται εκτός του ότι αφορούν περισσότερα από ένα χαρακτηριστικά ($p > 1$), είναι και συσχετισμένα μεταξύ τους. Επίσης συνηθίζεται κάθε δείγμα να αντιστοιχεί και στο ίδιο μέγεθος n , αποτελούμενο έτσι από διανύσματα διάστασης $p \times 1$, έστω τα $X_{1k}, X_{2k}, \dots, X_{nk}$. Για κάθε δείγμα λοιπόν ισχύει

$$X_k = \{X_{1k}, X_{2k}, \dots, X_{nk}\} = \left\{ \begin{pmatrix} X_{11k} \\ X_{12k} \\ \vdots \\ X_{1pk} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_{21k} \\ X_{22k} \\ \vdots \\ X_{2pk} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} X_{n1k} \\ X_{n2k} \\ \vdots \\ X_{npk} \end{pmatrix} \right\}, k = 1, \dots, m$$

Υποθέτοντας ακόμη ότι X_{ik} ακολουθεί p -διάστατη κανονική κατανομή με μέση τιμή το διάνυσμα $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)'$ και πίνακα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων Σ ($p \times p$), συμβολικά $X_{ik} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ για $i = 1, \dots, n$.

2.7.3 Εκτίμηση παραμέτρων μ και Σ

Στην πράξη η μέση τιμή μ και ο πίνακας διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων Σ δεν είναι γνωστοί και θα πρέπει να εκτιμηθούν. Θεωρώντας m προκαταρκτικά τυχαία δείγματα μεγέθους n το καθένα, τα οποία συλλέγονται από μια εντός ελέγχου διεργασία, οι δειγματικοί μέσοι και οι δειγματικές διακυμάνσεις υπολογίζονται από κάθε δείγμα σύμφωνα με τις ακόλουθες σχέσεις (Montgomery 2009) :

$$\bar{X}_{jk} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{ijk}$$

$$S_{jk}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_{ijk} - \bar{X}_{jk})^2$$

για $j = 1, \dots, p$ και $k = 1, \dots, m$ με X_{ijk} να αντιστοιχεί στην i παρατήρηση του j χαρακτηριστικού στο k δείγμα. Για την συνδιακύμανση των j και h ποιοτικών χαρακτηριστικών στο k δείγμα, ισχύει

$$S_{jhk} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_{ijk} - \bar{X}_{jk}) \cdot (X_{ihk} - \bar{X}_{hk})$$

για $k = 1, \dots, m$ και $j \neq h$.

Συγκεντρώνοντας όλες τις παραπάνω στατιστικές συναρτήσεις οι μέσοι για όλα τα δείγματα θα είναι

$$\bar{\bar{X}}_j = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \bar{X}_{jk}$$

$$\bar{S}_j^2 = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m S_{jk}^2$$

$$\bar{S}_{jh} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m S_{jhk}$$

με $j = 1, \dots, p$ και $j \neq h$. Με αυτό τον τρόπο σχηματίζεται το διάνυσμα $\bar{\bar{X}}$ που έχει συνιστώσες τα $\bar{\bar{X}}_j$. Ενώ για τον δειγματικό πίνακα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων S , διάστασης $p \times p$, ισχύει

$$S = \begin{bmatrix} \bar{S}_1^2 & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{13} & \dots & \bar{S}_{1p} \\ \bar{S}_{21} & \bar{S}_2^2 & \bar{S}_{23} & \dots & \bar{S}_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{S}_{p1} & \bar{S}_{p2} & \bar{S}_{p3} & \dots & \bar{S}_p^2 \end{bmatrix}$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι όταν η υπό μελέτη διεργασία είναι εντός ελέγχου ο δειγματικός πίνακας S αποτελεί αμερόληπτος εκτιμητής του Σ .

2.7.4 Hotelling T^2

Το έναυσμα στα πολυμεταβλητά διαγράμματα ελέγχου έδωσε ο Harold Hotelling το 1947 (Hotelling, 1947) με την εφαρμογή πολυμεταβλητών μεθόδων ελέγχου σε δεδομένα βομβαρδισμένων περιοχών του Β Παγκοσμίου Πολέμου. Το Hotelling T^2 διάγραμμα αποτελεί το δημοφιλέστερο πολυμεταβλητό διάγραμμα ελέγχου και είναι το αντίστοιχο \bar{X} Shewhart της πολυμεταβλητής περίπτωσης. Συνοπτικά θα αναφερθούν οι περιπτώσεις μελέτης δειγμάτων καθώς και μεμονωμένων παρατηρήσεων.

2.7.4.1 Περίπτωση δειγμάτων ($n>1$)

Για την περίπτωση των δειγμάτων, θεωρούμε ότι για να ελεγχθεί η ποιότητα ενός προϊόντος έχουμε στην διάθεση μας p συσχετισμένα ποιοτικά χαρακτηριστικά, τα X_1, X_2, \dots, X_p υπό την υπόθεση ότι ακολουθούν p -διάστατη κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και πίνακα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων Σ . Υποθέτουμε ακόμα ότι έχουμε m ανεξάρτητα τυχαία δείγματα μεγέθους n . Για την δημιουργία ενός πολυμεταβλητού διαγράμματος ελέγχου με σκοπό την παρακολούθηση της μέσης τιμής της διεργασίας κάθε δείγμα θα απεικονίζεται στο διάγραμμα με την βοήθεια της στατιστικής συνάρτησης

$$\chi_k^2 = n \cdot (\bar{X}_k - \mu)' \cdot \Sigma^{-1} \cdot (\bar{X}_k - \mu)$$

όπου μ αντιστοιχεί στο διάνυσμα των μέσων τιμών στόχων για το κάθε χαρακτηριστικό, \bar{X}_k είναι οι μέσες τιμές των χαρακτηριστικών στο k δείγμα για $k = 1, \dots, m$ και Σ είναι ο πίνακας διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων. Η στατιστική συνάρτηση χ_k^2 ακολουθεί χ^2 κατανομή με p βαθμούς ελευθερίας. Στην περίπτωση που μ και Σ είναι γνωστά προκύπτει ένα διάγραμμα ελέγχου Φάσης II με όρια ελέγχου

$$LCL = 0$$

$$UCL = \chi_{p,a}^2$$

το οποίο είναι γνωστό ως χ^2 διάγραμμα ελέγχου με $\chi_{p,a}^2$ να είναι το άνω α -ποσοστιαίο σημείο της χ^2 κατανομής με p βαθμούς ελευθερίας. Το διάγραμμα σηματοδοτεί εκτός ελέγχου συναγερό όταν η στατιστική συνάρτηση δώσει τιμή μεγαλύτερη του άνω ορίου ελέγχου καθώς συνηθίζεται να χρησιμοποιείται μόνο αυτό λόγω της φύσης της στατιστικής συνάρτησης η οποία είναι ανάλογη της απόστασης Mahalanobis. Μεγάλες τιμές της συνάρτησης αντιστοιχούν σε απομακρυσμένα σημεία του μ ενώ τιμές που τείνουν στο μηδέν σε σημεία κοντά στο μ (S Bersimis et al., 2007).

Όπως είναι φυσιολογικό, στην πράξη οι παράμετροι της μέσης τιμής και του πίνακα Σ θεωρούνται άγνωστοι και επομένως για την δημιουργία του διαγράμματος ελέγχου θα πρέπει να εκτιμηθούν. Οι εκτιμήσεις των μ και Σ είναι τα $\bar{\bar{X}}$ και S όπως αυτά υπολογίστηκαν στην προηγούμενη παράγραφο. Η στατιστική συνάρτηση τώρα θα έχει την παρακάτω μορφή

$$T^2 = n \cdot (\bar{X}_k - \bar{\bar{X}})' \cdot S^{-1} \cdot (\bar{X}_k - \bar{\bar{X}}) \text{ για } k = 1, \dots, m.$$

Το εν λόγω διάγραμμα καλείται Hotelling T^2 διάγραμμα ελέγχου με τα όρια ελέγχου Φάσης I που δίνονται παρακάτω να χρησιμοποιούνται ώσπου να βρεθεί η διεργασία εντός ελέγχου

$$LCL = 0$$

$$UCL = \frac{p(m-1)(n-1)}{mn-m-p-1} \cdot F_{p, mn-m-p-1; \alpha}$$

Έχοντας πλέον μια διεργασία εντός ελέγχου χρησιμοποιούνται τα όρια ελέγχου Φάσης II που δίνονται ακολούθως

$$LCL = 0$$

$$UCL = \frac{p(m+1)(n-1)}{mn-m-p-1} \cdot F_{p, mn-m-p-1; \alpha}$$

Στην περίπτωση όπου η εκτίμηση των μ και Σ προκύπτει από ένα πλήθος προκαταρκτικών δειγμάτων μεγαλύτερου του 50 τότε ως άνω όριο ελέγχου χρησιμοποιείται το $UCL = \chi_{p, \alpha}^2$ και για τις δύο φάσεις (Lowry & Montgomery, 1995).

2.7.4.2 Περίπτωση μεμονωμένων παρατηρήσεων ($n=1$)

Υπάρχουν περιπτώσεις όπου το μέγεθος του δείγματος που λαμβάνεται για την ταυτόχρονη παρακολούθηση p ποιοτικών χαρακτηριστικών είναι ίσο με την μονάδα. Θεωρώντας ότι έχουν ληφθεί m τυχαία δείγματα μεγέθους 1 και ότι τα διανύσματα των δειγματικών μέσων και ο πίνακας διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων των παρατηρήσεων αντιστοιχούν στα \bar{x} και S , τότε η στατιστική συνάρτηση που χρησιμοποιείται για την απεικόνισή τους είναι η

$$T^2 = (\bar{x} - \bar{X})' \cdot S^{-1} \cdot (\bar{x} - \bar{X}).$$

Δεδομένου ότι \bar{x} και S είναι γνωστά τα όρια ελέγχου (Φάσης II) δίνονται ακολούθως

$$LCL = 0$$

$$UCL = \frac{p(m+1)(n-1)}{m^2-mp} \cdot F_{p, m-p; \alpha}$$

Εάν το πλήθος των προκαταρκτικών δειγμάτων που έχει συγκεντρωθεί είναι μεγαλύτερο του 100 μπορούν να χρησιμοποιηθούν τα όρια

$$UCL = \frac{p(m-1)}{m-p} \cdot F_{p, m-p; \alpha}$$

ή

$$UCL = \chi_{p, \alpha}^2$$

Για τα όρια ελέγχου Φάσης I, σύμφωνα με τους Tracy et al. (1992) όταν το μέγεθος του δείγματος είναι ίσο με την μονάδα πρέπει να βασίζονται στην Βήτα κατανομή και δίνονται ακολούθως

$$LCL = 0$$

$$UCL = \frac{(m-1)^2}{m} \cdot B_{p/2, (m-p-1)/2; \alpha}$$

με το $B_{p/2, (m-p-1)/2; \alpha}$ να αντιστοιχεί στο άνω α -ποσοστιαίο σημείο της Βήτα κατανομής με παραμέτρους $p/2$ και $(m-p-1)/2$.

2.7.5 Παρακολούθηση Διασποράς

Η παρακολούθηση μιας πολυμεταβλητής διεργασίας δεν αποτελείται μόνο από την παρακολούθηση της μέσης τιμής της αλλά και από εκείνη της διασποράς της, γενικεύοντας την μονομεταβλητή περίπτωση. Η διασπορά της υπό εξέταση διεργασίας δίνεται μέσω του συμμετρικού ($p \times p$) πίνακα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων Σ όπου η κύρια διαγώνιος του περιλαμβάνει τις διακυμάνσεις των μεταβλητών ενώ τα υπόλοιπα στοιχεία του πίνακα αντιστοιχούν στις συνδιακυμάνσεις μεταξύ αυτών. Εν συνεχεία θα δοθούν δύο διαφορετικές προσεγγίσεις για την παρακολούθηση της διασποράς στην πολυμεταβλητή περίπτωση όπως αυτές παρουσιάστηκαν από τον Alt (1985).

Επεκτείνοντας το S^2 διάγραμμα ελέγχου της μονομεταβλητής περίπτωσης, η πρώτη μέθοδος βασίζεται στον επαναλαμβανόμενο έλεγχο των στατιστικών υποθέσεων

$$H_0: \Sigma = \Sigma_0 \text{ έναντι της } H_1: \Sigma \neq \Sigma_0$$

Η στατιστική συνάρτηση που χρησιμοποιείται για την απεικόνιση των τιμών στο διάγραμμα ελέγχου είναι η ακόλουθη

$$W_i = -pn - pn \cdot \ln(n) - n \cdot \ln(|A_i|/|\Sigma|) + \text{tr}(\Sigma^{-1}A_i)$$

με $A_i = (n-1)S_i$, όπου S_i είναι ο πίνακας διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων που αντιστοιχεί στο i δείγμα, ενώ με tr αναφερόμαστε στο ίχνος ενός (συμμετρικού) πίνακα που αντιστοιχεί στο άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων του. Τα όρια ελέγχου (Φάσης II) δίνονται ακολούθως

$$LCL = 0$$

$$UCL = \chi_{p(p+1)/2, \alpha}^2$$

με το διάγραμμα να δίνει σήμα εκτός ελέγχου όταν η συνάρτηση λάβει τιμή μεγαλύτερη του άνω ορίου ελέγχου.

Μια άλλη μέθοδος βασίζεται στον έννοια της γενικευμένης δειγματικής διακύμανσης $|S|$. Βασιζόμενος στην πρώτη και δεύτερη ροπή της $|S|$ τα όρια ελέγχου (Φάσης I) καθώς και η κεντρική γραμμή δίνονται ακολούθως

$$LCL = |\Sigma| (b_1 + 3b_2^{1/2})$$

$$CL = b_1 |\Sigma|$$

$$UCL = |\Sigma| (b_1 - 3b_2^{1/2})$$

Ισχύει ότι $E(|S|) = b_1|\Sigma|$ και $V(|S|) = b_2|\Sigma|^2$ με:

$$b_1 = \frac{1}{(n-p)^p} \cdot \prod_{i=1}^p (n-i)$$

$$b_2 = \frac{1}{(n-p)^{2p}} \cdot \prod_{i=1}^p (n-i) [\prod_{j=1}^p (n-j+2) - \prod_{j=1}^p (n-j)]$$

Στην περίπτωση που το LCL λάβει τιμή μικρότερη του μηδενός τότε τίθεται αυτόματα 0. Επιπλέον, επειδή στην πράξη το Σ εκτιμάται, όντας άγνωστο, από προκαταρκτικά δείγματα στην θέση του $|\Sigma|$ στα παραπάνω όρια ελέγχου τοποθετείται ο αμερόληπτος εκτιμητής $|S|/b_1$.

2.7.6 Διαγράμματα MEWMA

Οι πολυμεταβλητές περιπτώσεις διαγραμμάτων ελέγχου χ^2 και Hotelling T^2 που παρουσιάστηκαν παραπάνω είναι τεχνικές τύπου Shewhart, δηλαδή βασίζονται εξ ολοκλήρου στην πληροφορία που δίνει η τρέχουσα παρατήρηση και δεν λειτουργούν αποδοτικά στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων. Για το λόγο αυτό, συσσωρευμένα αθροίσματα και EWMA μέθοδοι διαγραμμάτων ελέγχου αναπτύχθηκαν με στόχο την ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων σε πρώτο στάδιο στην μονομεταβλητή εκδοχή ελέγχου και έπειτα επεκτάθηκαν και στην πολυμεταβλητή περίπτωση. Η εφαρμογή τους προτιμάται σε διεργασίες Φάσης II, ενώ τα χ^2 και Hotelling T^2 αξιοποιούνται εξίσου στις Φάσεις I και II.

Οι Lowry et. al (1992) παρουσίασαν μια επέκταση της μονομεταβλητής έκδοσης του EWMA στην οποία απεικονίζονται οι τιμές που προκύπτουν από την ακόλουθη στατιστική συνάρτηση

$$T_i^2 = Z_i' \Sigma_{Z_i}^{-1} Z_i$$

με $Z_i = \lambda x_i + (1-\lambda) Z_{i-1}$ όπου $\lambda \in (0,1]$, $Z_0 = 0$ ενώ Σ_{Z_i} είναι ο πίνακας διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων

$$\Sigma_{Z_i} = \frac{\lambda}{\lambda-2} [1 - (1-\lambda)^{2i}] \Sigma$$

Τέλος οι Prabhu and Runger (1997) πέραν της εκτεταμένης ανάλυσης για την απόδοση του μέσου μήκους ροής παρουσίασαν κάποιους πίνακες που ανάλογα με το πλήθος των χαρακτηριστικών επιλέγεται και το άνω όριο ελέγχου.

2.8.7 Διαγράμματα MCUSUM

Μια συνήθης πρακτική στον βιομηχανικό τομέα είναι η χρήση μονοδιάστατων διαγραμμάτων CUSUM για την επίβλεψη διαφορετικών μεταβλητών, με την βοήθεια των οποίων αξιολογείται κατάλληλα η ποιότητα της διεργασίας. Για την μελέτη αυτή οι Woodall και Ncube (1985) θεώρησαν αξιοποιήσιμη την ταυτόχρονη χρήση μονοδιάστατων διαγραμμάτων ελέγχου CUSUM. Την ιδέα αυτή την αποδίδουν ως MCUSUM (single multivariate CUSUM procedure).

Για την εφαρμογή της πρότασής τους, θεώρησαν ότι στην διάθεσή μας έχουμε m ανεξάρτητα τυχαία δείγματα μεγέθους n , τα X_1, X_2, \dots, X_m όπου για το καθένα ισχύει $X_j = (X_{1j}, X_{2j}, \dots, X_{nj})$ για $j = 1, 2, \dots, m$. Για τις μεταβλητές $X_{ik} = (X_{i1k}, X_{i2k}, \dots, X_{ipk})^T$ όπου $i = 1, 2, \dots, n$ και $k = 1, 2, \dots, m$ θεωρούμε ότι προέρχονται από μια p -διάστατη κανονική κατανομή με γνωστό μέσο το διάνυσμα $\mu_{ik} = (\mu_{i1k}, \mu_{i2k}, \dots, \mu_{ipk})^T$ και γνωστό πίνακα διακυμάνσεων – συνδιακυμάνσεων Σ (διάστασης $p \times p$). Δίχως βλάβη της γενικότητας για την τιμή στόχο θεωρείται ότι $\mu_{ik} = (0, 0, \dots, 0)^T = \mathbf{0}$ όπου $i = 1, 2, \dots, n$ και $k = 1, 2, \dots, m$. Σύμφωνα με αυτές τις παραδοχές, για μια MCUSUM διαδικασία εφαρμόζεται είτε ένα μονόπλευρο είτε ένα δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου CUSUM για την εκάστοτε ακολουθία $\{X_{ik}\}$ με $i = 1, 2, \dots, n$ και $k = 1, 2, \dots, m$. Όσον αφορά το μήκος ροής που αντιστοιχεί σε ένα μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου CUSUM για την k -οστη μεταβλητή, αυτό είναι το $N(k) = \min\{n: S_{i,k} \geq h_k\}$ για $k = 1, 2, \dots, m$ και $h_k > 0$ το οποίο επιλέγεται κατάλληλα για να ληφθεί το επιθυμητό εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής. Ο τρόπος υπολογισμού της στατιστικής συνάρτησης $S_{i,k}$ δίνεται στην συνέχεια

$$S_{i,k} = \max [0, S_{i-1,k} + X_{ik} - K_k]$$

για $i = 1, 2, \dots, n$, $k = 1, 2, \dots, m$ με $S_{0,k} \in [0, h_k]$ και $K_k > 0$. Προκειμένου να εντοπιστούν μεταβολές ως προς οποιαδήποτε κατεύθυνση των $\{\mu_{ik}\}$, το δίπλευρο διάγραμμα CUSUM σηματοδοτεί εκτός ελέγχου διεργασία στο βήμα $N(k) = \min\{n: S_{i,k} \geq h_k \text{ ή } T_{i,k} \leq -h_k\}$ με την συνάρτηση $T_{i,k}$ να υπολογίζεται ως εξής

$$T_{i,k} = \min [0, T_{i-1,k} + X_{ik} + K_k]$$

για $i = 1, 2, \dots, n$, $k = 1, 2, \dots, m$ με $T_{0,k} \in [-h_k, 0]$. Σε αυτό το σημείο είναι σημαντικό να τονιστεί ότι η τιμή K_k που αντιστοιχεί στην k -οστη μεταβλητή επιλέγεται βάση της μεταβολής του μέσου για την μεταβλητή που βρίσκεται εκτός ελέγχου. Για το μήκος ροής λοιπόν της διαδικασίας MCUSUM ισχύει

$$N = \min\{N(1), N(2), \dots, N(m)\}.$$

Συμπερασματικά, στην περίπτωση που ένα διάγραμμα (μονοδιάστατο) CUSUM σημάνει συναγερμό, τότε η διεργασία τίθεται εκτός ελέγχου, με τους ίδιους να αναφέρουν ότι η κατεύθυνση της μεταβολής του μέσου επηρεάζει το μέσο μήκος ροής της διεργασίας.

Διάφορες προτάσεις και μελέτες έχουν γίνει για την εφαρμογή πολυμεταβλητών CUSUM διαγραμμάτων όπως εκείνες των Healy (1987), Crosier (1988) και Pignatiello και Runger (1990).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Η χρήση των Διαγραμμάτων ελέγχου στην Υγεία

3.1 Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών στην Υγεία

Στατιστικές τεχνικές και μέθοδοι του Στατιστικού Ελέγχου Διεργασιών έχουν κάνει αισθητή την παρουσία τους μέσω της ευελιξίας εφαρμογής και ωφέλιμης προσφοράς τους σε ένα ευρύ φάσμα πεδίων, όπως αυτό της Υγείας. Ένα από αυτά τα εργαλεία είναι και τα διαγράμματα ελέγχου που παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 2. Εάν και η αρχική κατασκευή τους αποσκοπούσε σε βιομηχανικούς σκοπούς, γρήγορα εφαρμόστηκαν και στο τομέα της Υγείας, με τις πρώτες αναφορές να γίνονται σε εργαστηριακό επίπεδο (Fisher & Humphries, 1966) και έπειτα σε εφαρμογές φροντίδας ασθενών.

Αν και η πρώτη αντίδραση του ιατρικού προσωπικού ήταν αρνητική, τονίζοντας ότι «Εμείς οι γιατροί θεραπεύουμε ανθρώπους, δεν είμαστε μέρος κάποιας βιομηχανικής διαδικασίας» (Noyez, 2009), ωστόσο η εμφάνιση περιπτώσεων κατώτερης, του συνηθισμένου, ιατρικής απόδοσης οδήγησε στην ανάγκη παρακολούθησης των αποτελεσμάτων υγειονομικής φροντίδας. Συνεπώς διαγραμματικές τεχνικές ελέγχου εφαρμόστηκαν σε διάφορες πτυχές της υγείας από την παρακολούθηση σπάνιων ασθενειών μέχρι την μελέτη σωστής διαχείρισης μιας κλινικής. Αρκετοί συγγραφείς συνδέουν την βελτίωση της υγειονομικής περίθαλψης με δύο πράγματα: τις αλλαγές στη διαδικασία φροντίδας και τις αλλαγές στην εξυπηρέτηση. Εντούτοις, η έννοια της αλλαγής δεν είναι άμεσα συνυφασμένη με την βελτίωση, για αυτό και θα πρέπει να γίνει διάκριση των ενεργειών που αποφέρουν βελτιωτικά αποτελέσματα και εκείνων που δεν το κάνουν (Thor et al., 2007). Οι αποδόσεις των αλλαγών αυτών μετρούνται προκειμένου να μελετηθεί αν επιφέρουν τα επιθυμητά αποτελέσματα. Η ερμηνεία και ανάλυση για την ανίχνευση αλλαγών δεν είναι εύκολη διαδικασία εξαιτίας της φυσικής μεταβλητότητας των δεδομένων. Για παράδειγμα, διαφορές στις επαναλαμβανόμενες μετρήσεις της αρτηριακής πίεσης ενός ασθενούς ή ο χρόνος αναμονής οφείλονται στις διακυμάνσεις των βιολογικών διεργασιών του ασθενή και στις διαδικασίες εξυπηρέτησης αντίστοιχα (Benneyan et al., 2003). Οι περισσότερες δημοσιευμένες εργασίες βελτίωσης ιατρικής φροντίδας σήμερα, λαμβάνουν χώρα στην Αμερική, με το πρώτο δημοσιευμένο άρθρο το 1990 ενώ πολλά νοσοκομεία των ΗΠΑ έχουν υιοθετήσει την νοοτροπία της συνεχούς παρακολούθησης για την παροχή βέλτιστης ποιότητας υπηρεσιών. Μεταξύ του 1998 και 2003 ακολούθησαν και ερευνητικές ομάδες άλλων χωρών να μελετούν την εφαρμογή των διαγραμμάτων ελέγχου όπως το Ηνωμένο Βασίλειο, η Ελβετία, η Νορβηγία, η Αυστραλία και άλλες (Thor et al., 2007).

Όπως αναφέρθηκε, τα διαγράμματα ελέγχου βοηθούν σε πολλούς τομείς. Μαζί με την βελτίωση και διαχείριση διαδικασιών περίθαλψης βοηθούν γιατρούς να κατανοήσουν και να βελτιώσουν την υγεία των ασθενών τους ενώ υπάρχει η δυνατότητα εφαρμογής τους κατευθείαν από τον ίδιο τον ασθενή για παρακολούθηση της υγείας του. Για παράδειγμα, περιπτώσεις άσθματος και μελέτη του δείκτη PEF ή παρακολούθηση της συγκέντρωσης σακχάρου στην περίπτωση του διαβήτη. Με αυτό τον τρόπο τα διαγράμματα ελέγχου έχουν και θεραπευτικές δυνατότητες και, τους Alemi and Neuhauser (2004) να υποστηρίζουν ότι το θέμα χρήζει παραπάνω έρευνας. Διαδικασίες Στατιστικού Ελέγχου Διεργασιών και διαγραμμάτων ελέγχου έχουν εφαρμοστεί επίσης, σε μελέτες για την μείωση του ποσοστού

απόκτησης ανθεκτικού στη μεθικιλίνη χρυσίζων σταφυλόκοκκου (MRSA) σε ασθενείς στην Σκωτία και συγκεκριμένα στο Glasgow Royal Infirmary (Curran et al., 2014). Ακόμη, σε ένα τμήμα παιδιατρικής, ερευνητές θέλοντας να μελετήσουν την μείωση του ποσοστού μόλυνσης ύστερα από την εφαρμογή μιας νέας μεθόδου για τη λήψη αίματος για καλλιέργεια εφάρμοσαν τεχνικές των διαγραμμάτων ελέγχου (Alona et al., 2003).

Ενώ στην βιβλιογραφία επικρατούν διάφορες θεωρητικές απόψεις που ευνοούν την αξιοποίηση των διαγραμμάτων ελέγχου, με τους Sonesson και Bock (2003) να παρουσιάζουν μια ολοκληρωμένη ανασκόπηση της στατιστικής παρακολούθησης στη δημόσια υγεία, κυριαρχούν και διάφορα ερωτήματα στα οποία δεν δίνονται ξεκάθαρες απαντήσεις. Ορισμένα από αυτά έχουν να κάνουν κυρίως με την σπάνια εφαρμογή τους σε σχέση με τις βιομηχανικές διεργασίες που χρησιμοποιούνται κατά κόρον (Plesk, 1999). Το φαινόμενο αυτό παρατηρείται γιατί υπογραμμίζονται κυρίως τα οφέλη και όχι οι περιορισμοί. Μάλιστα επισημαίνεται ότι ενώ μπορεί να είναι εύκολα στη χρήση, είτε από γιατρούς και διευθυντές νοσοκομείων είτε από ασθενείς, δεν είναι τόσο απλά στην σωστή κατασκευή τους καθιστώντας την εφαρμογή τους απλή και δύσκολη ταυτόχρονα. Προτείνεται λοιπόν, να εφαρμόζονται με σύνεση καθώς ενδεχόμενη εσφαλμένη εφαρμογή τους μπορεί να οδηγήσει σε μη αναστρέψιμες βλάβες.

Έχουν αναπτυχθεί και εφαρμοστεί διάφοροι τύποι διαγραμματικών και στατιστικών τεχνικών που εφαρμόζονται στο τομέα της υγείας, όπως για παράδειγμα η προσαρμογή των δεδομένων και συγκεκριμένα η προσαρμογή κινδύνου (risk - adjustment), όπου διαφορετικοί παράγοντες μπορούν να διαμορφώσουν το αποτέλεσμα. Ενδεικτικά αναφέρεται, ότι δεν είναι λογικό για παράδειγμα ασθενείς διαφορετικής ηλικίας και ιστορικού υγείας να έχουν την ίδια πιθανότητα επιβίωσης ύστερα από μια καρδιοχειρουργική επέμβαση (Woodall 2006). Ένα άλλο στοιχείο που συνδέεται με τον τομέα της Υγείας προκειμένου να είναι εποικοδομητικά τα συμπεράσματα της ανάλυσης, είναι η χρήση του 100% των παρατηρήσεων και όχι κάποιου δείγματος όπως επισημαίνουν ερευνητές για την παρακολούθηση παραδείγματος χάρη του ποσοστού ασθενειών, ποσοστού θνησιμότητας ή ποσοστού εμφάνισης συγγενών δυσμορφιών.

Επιπλέον, σε σύγκριση με την βιομηχανική πρακτική, σε εφαρμογές της δημόσιας υγείας στην περίπτωση που η διεργασία οριστεί εκτός ελέγχου, δεν είναι τόσο εύκολη διαδικασία επαναφοράς της σε κατάσταση εντός ελέγχου αφού ύστερα από ένα συναγερμό υπάρχει το ενδεχόμενο να συνεχίσει να σηματοδοτεί εκτός ελέγχου. Οι Kennet και Pollak (1983) καθώς και οι Chen et al. (1993) μελέτησαν μεθόδους που επεξηγούν το φαινόμενο αυτό ενώ υποδεικνύουν ότι ο αναμενόμενος χρόνος μέχρι το πρώτο συναγερμό αποτελεί κύριο αντικείμενο μελέτης.

3.2 Sets Method, CUSCORE Method, SHDA Method

Μια μέθοδος με στόχο την μελέτη εμφάνισης ενός σπάνιου γεγονότος, όπως οι γεννήσεις βρεφών με μια μορφή δυσπλασίας, είναι αυτή που προτάθηκε από τον Chen (1978) γνωστή ως Sets Method. Η μελέτη αυτή διαμορφώνεται κάτω από σημαντικές υποθέσεις όπως η συλλογή των δεδομένων η οποία πρέπει να πραγματοποιείται υπό 100% επιθεώρηση καθώς και η καταγραφή γεννήσεων που γίνεται σε χρονολογική σειρά ή και η γεωγραφική τοποθεσία. Η γενική ιδέα της μεθόδου έχει ως εξής. Αφού πραγματοποιηθεί η παραπάνω διαδικασία προσδιορίζεται ο αριθμός των βρεφών που γεννήθηκαν μεταξύ διαδοχικών δυσπλασιών συγκεκριμένης μορφής. Στην περίπτωση όπου όλες οι μετρήσεις των γεννήσεων μεταξύ n_s

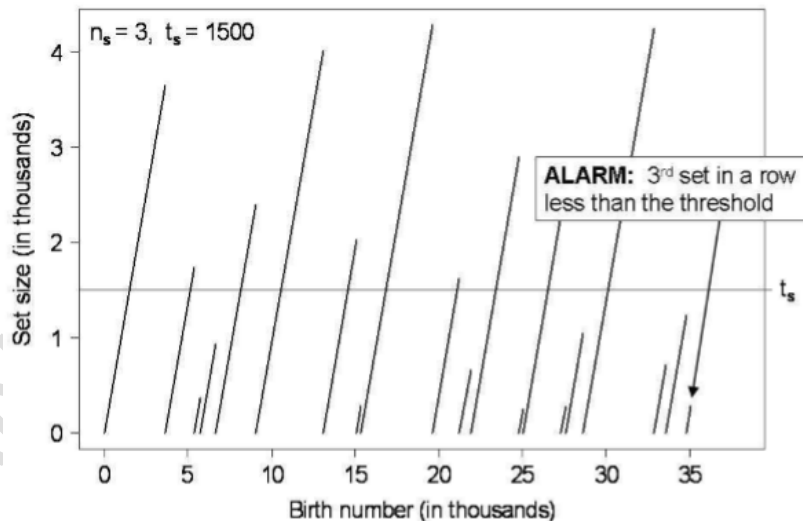
διαδοχικών δυσπλασιών είναι μικρότερες από ένα κατώφλι, έστω t_s , τότε η μέθοδος σηματοδοτεί συναγερμό αύξησης εμφανίσεων της εκάστοτε μορφής δυσπλασίας.

Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε ως set τις διαδοχικές γεννήσεις βρεφών μεταξύ εκείνων που γεννιούνται με κάποια μορφή δυσπλασίας. Θεωρώντας X_i τον αριθμό των γεννήσεων μεταξύ των συμβάντων $i-1$ και i , δίχως η τρέχουσα να συμπεριλαμβάνεται, τα X_1, X_2, \dots απαρτίζουν μια ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων γεωμετρικών μεταβλητών με συνάρτηση πιθανότητας $P(X = x) = p(1-p)^x$ λαμβάνοντας τις τιμές $\{0, 1, 2, \dots\}$. Όπως επισημάνθηκε και προηγουμένως εάν παρατηρηθούν n_s διαδοχικά sets με μέγεθος το καθένα μικρότερο από το t_s τότε σηματοδοτείται συναγερμός. Για να γίνει πιο εύκολη η εφαρμογή της μεθόδου εΐθισται όταν παρατηρείται η i -οστη δυσπλασία να χρησιμοποιείται ο μετρητής S_i που αντιστοιχεί στον αριθμό των διαδοχικών sets με μέγεθος μικρότερο από t_s , δηλαδή ισχύει

$$S_0 = 0$$

$$S_i = (1 + S_{i-1}I_{\{S_{i-1} < n_s\}}) I_{\{X_i < t_s\}} \quad i = 1, 2, \dots$$

Με αυτή την λογική ένας συναγερμός σηματοδοτείται όταν $S_i = n_s$, και γίνεται επαναφορά του μετρητή ύστερα από κάθε συναγερμό. Ενώ υπάρχουν διάφοροι τρόποι με τους οποίους μπορεί να αποδοθεί γραφικά η μέθοδος, συνηθίζεται η χρήση του grass plot που χρησιμοποιήθηκε από τους Grigg και Farewell (2004) με το κάθε set να αντιστοιχεί σε μια κεκλιμένη γραμμή. Παράδειγμα αυτού του διαγράμματος δίνεται στο γράφημα που ακολουθεί.



Πολλοί μελέτησαν την παραπάνω μέθοδο, την συνέκριναν με άλλες ενώ πρότειναν και τροποποιήσεις της. Ο Walter (1987) εισήγαγε τη μέθοδο Cuscore (cumulative score), όπου η υπό εξέταση μεταβλητή λαμβάνει τιμές όπως 1 και -1. Αν το σύνολο των βρεφών που αντιστοιχεί μεταξύ διαδοχικών δυσπλασιών είναι μικρότερο από το όριο που έχει τεθεί, τότε παίρνει την τιμή 1 ενώ σε διαφορετική περίπτωση την τιμή -1. Το επόμενο βήμα είναι οι νέες μεταβλητές να απεικονιστούν σε ένα διάγραμμα CUSUM. Αναλυτικότερα αν θεωρήσουμε τα

X_i , n_c και t_c όπως και στην Sets Method (χρησιμοποιείται ο δείκτης c για να υπάρξει διάκριση μεταξύ των μεθόδων) τότε για κάθε X_i δίνεται ένα σκορ, όπως παρουσιάστηκε:

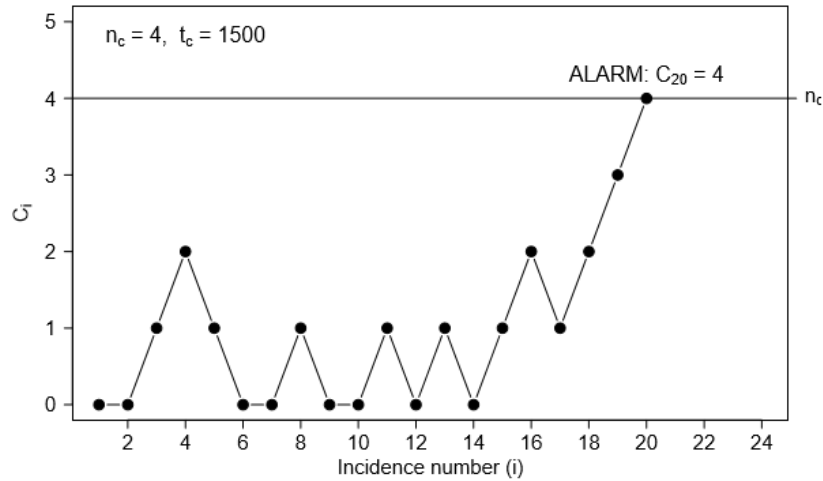
$$g(X_i) = \begin{cases} 1, & \text{αν } X_i < t_c \\ -1, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Έπειτα το CUSCORE που συμβολίζεται ως C_i και διαμορφώνεται ως:

$$C_0 = 0$$

$$C_i = \max(0, C_{i-1}I_{\{C_{i-1} < n_c\}} + g(X_i)) \quad i = 1, 2, \dots$$

απεικονίζεται σε ένα CUSUM που ο κάθετος άξονας θα αντιστοιχεί στις τιμές C_i και ο οριζόντιος στον δείκτη i , με όριο ελέγχου μια γραμμή που αντιστοιχεί στο n_c . Παράδειγμα αυτής της μεθόδου δίνεται στην εικόνα που ακολουθεί όπου σηματοδοτείται συναγερωμός όταν $C_i = n_c$ με την C_i να επαναφέρεται μετά από έναν συναγερωμό:



Από την άλλη μεριά οι Sitter et al. (1990) πρότειναν την SHDA μέθοδο, όπου δουλεύει όπως η Sets method μόνο που σηματοδοτεί συναγερωμό όταν παρατηρηθούν δύο συνεχόμενα σήματα. Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε και πάλι X_i , n_t και t_t με τον δείκτη t να χρησιμοποιείται για λόγους διευκόλυνσης ως προς την διάκριση των μεθόδων. Η διαφορά με όσα αναφέρθηκαν είναι ότι σε αυτή την περίπτωση αν παρατηρηθούν n_t διαδοχικά sets με μεγέθη μικρότερα του t_t τότε σηκώνεται μια σημαία. Από την στιγμή που σηκώνεται μια σημαία τότε αν ο συνολικός αριθμός των sets που έχουν συγκεντρωθεί από την τελευταία σημαία είναι μικρότερος ή ίσος από ένα κατώφλι b_t τότε σηματοδοτείται συναγερωμός. Για να γίνει πιο σαφή και φιλική στην εφαρμογή της η μέθοδος, θεωρούμε G_i τον αντίστοιχο μετρητή S_i της Sets Method, και T_i να δηλώνει τον συνολικό των συμβάντων που έχουν συμβεί από την τελευταία σημαία, έχοντας έτσι τις εξής σχέσεις:

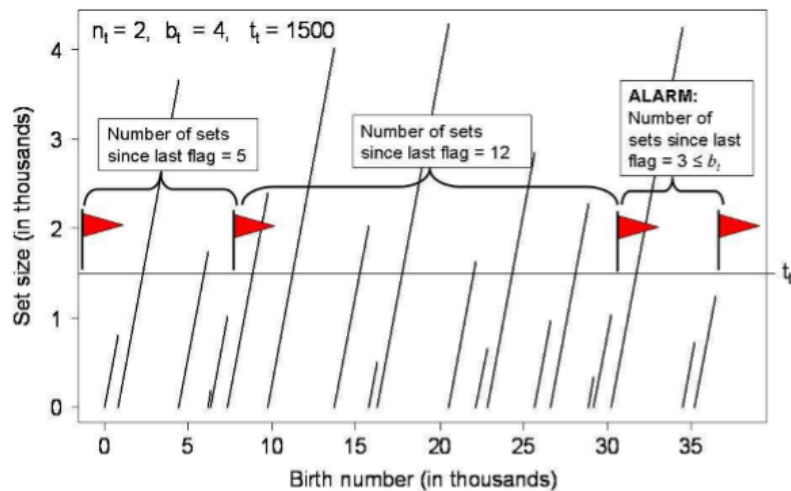
$$G_0 = 0$$

$$G_i = (1 + G_{i-1}I_{\{G_{i-1} < n_t\}})I_{\{X_i < t_t\}} \quad i = 1, 2, \dots$$

$$T_0 = 0$$

$$T_i = 1 + T_{i-1} I_{\{G_{i-1} < n_t\}} \quad i = 1, 2, \dots$$

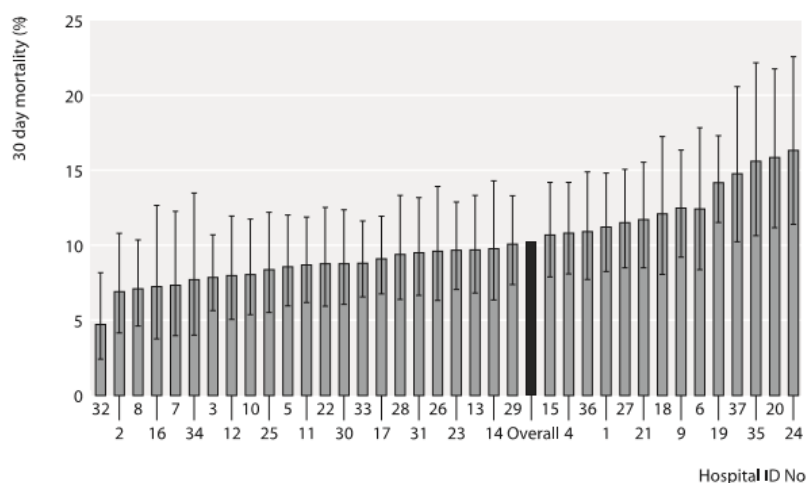
Λαμβάνοντας υπόψη τον τρόπο λειτουργίας της μεθόδου, το διάγραμμα σηματοδοτεί συναγερμό όταν $G_i = n_t$ και $T_i \leq b_t$, με τους δύο μετρητές να επαναφέρονται όταν $G_i = n_t$. Παράδειγμα αυτής της μεθόδου δίνεται στην εικόνα ου ακολουθεί, επισημαίνοντας ότι η επιλογή του n_t είναι πολύ σημαντική καθώς αν είναι μεγαλύτερο από το κατώφλι b_t δεν θα δώσει ποτέ συναγερμό



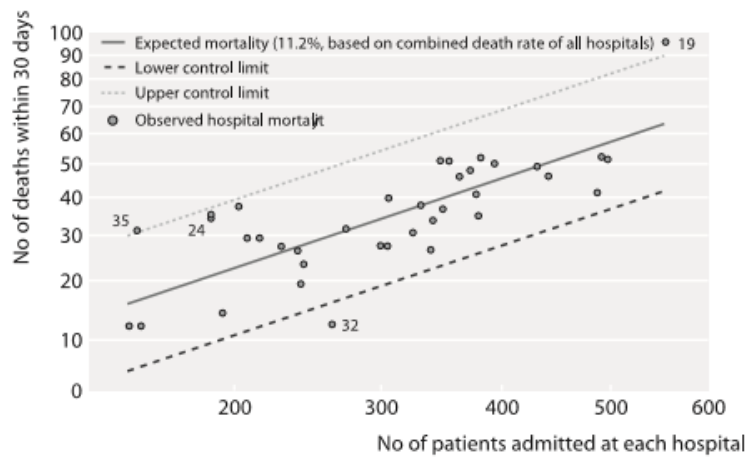
Οι Sego et al. (2006) σύγκρινε τις αποδόσεις της μεθόδου Sets τόσο με το Bernoulli Cusum διάγραμμα όσο και με το Poisson Cusum. Έδειξε ότι ένα βέλτιστα σχεδιασμένο διάγραμμα Bernoulli Cusum αποδίδει καλύτερα από τις μεθόδους που βασίζονται στην Sets method. Έδειξαν επίσης ότι πρόταση της Sets method του Chen (1978) που χρησιμοποίησε ένα γεωμετρικό μοντέλο για την παρακολούθηση σπάνιων συμβάντων, αποτελεί μια ειδική περίπτωση της πρότασης του Page (1955). Οι Gallus et al. (1986) και Radaelli (1992) συμπέραναν ότι ένα Poisson Cusum σηματοδοτεί γρηγορότερα έναν συναγερμό από την Sets method στην περίπτωση μικρότερης της τετραπλάσιας αύξησης του ποσοστού επίπτωσης, δηλαδή της συχνότητας εμφάνισης ενός ατυχήματος ή μιας ασθένειας σε μια καθορισμένη χρονική περίοδο, ενώ συμβαίνει το αντίθετο όταν η αύξηση είναι μεγαλύτερη. Ακόμη οι Barbujani & Calzolari (1984) εφάρμοσε μια μελέτη προσομοίωσης. Κατέληξε ότι το Poisson Cusum σε σχέση με την Sets Method έχει ταχύτερους χρόνους σήματος, μεγαλύτερη ευαισθησία, μεγαλύτερη ειδικότητα και μεγαλύτερη ακρίβεια.

3.3 League Tables και Funnel Plots

Διαγραμματικές τεχνικές στο τομέα της Υγείας χρησιμοποιούνται και για την σύγκριση της απόδοσης νοσοκομειακών μονάδων. Για την σύγκριση των ποσοστών θνησιμότητας διαφορετικών νοσοκομείων και γιατρών συνηθίζεται τα δεδομένα να απεικονίζονται σε ένα League table, ή comparison chart όπως αναφέρεται άλλες φορές, όπου η κατάταξη των στοιχείων γίνεται από το καλύτερο προς το χειρότερο. Η τεχνική αυτή έχει βρει αρκετούς επικριτές, όπως τους Adab et al. (2002), οι οποίοι θεωρούν ότι η στατιστική σημασία της κατάταξης δεν επιφέρει κάποιο αποτέλεσμα. Με αυτή την μέθοδο, σύμφωνα με τους Lee και McGreevy (2002b), για κάθε υπό μελέτη μονάδα που αποκλίνει από τον μέσο όρο δίνεται ένα διάστημα εμπιστοσύνης μόνο στην περίπτωση όπου ο μέσος όρος δεν ανήκει στο αντίστοιχο διάστημα. Στο διάγραμμα που ακολουθεί, παρατηρείται ότι με γνώμονα μια περίοδο μελέτης 30 ημερών, το νοσοκομείο με αύξοντα αριθμό 32 εμφανίζει την καλύτερη απόδοση ως προς το μέσο όρο σύμφωνα με το ποσοστό θνησιμότητας που του αναλογεί. Από την άλλη πλευρά, τα νοσοκομεία με αύξοντα αριθμό 19, 20, 24 και 35 παρουσιάζουν την μικρότερη απόδοση σε σύγκριση με τον μέσο όρο.

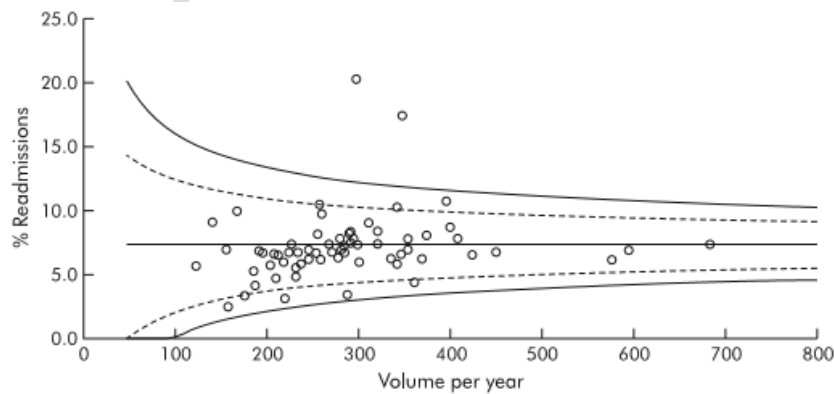


Μελετώντας αυτή την μέθοδο, οι Mohammed et al. (2001) και Adab (2002) συνιστούν την χρήση ενός νέου διαγράμματος με σταθερά όρια ελέγχου. Η έννοια του διαγράμματος ελέγχου φαίνεται ακατάλληλη αφού η πρόταση τους δεν θεωρείται ως ένα τυπικό διάγραμμα ελέγχου με δεδομένα σε χρονολογική σειρά. Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα που παρουσιάστηκαν προηγουμένως για τον αριθμό των θανάτων που πραγματοποιήθηκαν σε κάθε νοσοκομείο για μια περίοδο μελέτης 30 ημερών, προέκυψε το ακόλουθο γράφημα. Οι διακεκομμένες γραμμές αντιστοιχούν στο κάτω και άνω όριο ελέγχου ενώ η συνεχής γραμμή στο μέσο ποσοστό θνησιμότητας βάσει όλων των νοσοκομείων. Φαίνεται το νοσοκομείο που αντιστοιχεί στον αριθμό 32 να έχει καλύτερη απόδοση σε σχέση με το αναμενόμενο ποσοστό θνησιμότητας, γεγονός που δεν συμβαίνει με τα νοσοκομεία με αριθμούς 19 και 35 παρουσιάζοντας την χειρότερη απόδοση.



Μια άλλη κατηγορία διαγραμμάτων είναι εκείνη των funnel plots που προτάθηκε από τον Spiegelhalter (2002). Σε ένα τέτοιο διάγραμμα ο οριζόντιος άξονας αντιστοιχεί στο σύνολο των ασθενών που αντιστοιχεί σε ένα νοσοκομείο ή γιατρό, ενώ ο κάθετος άξονας αντιπροσωπεύει το ποσοστό του χαρακτηριστικού που μελετάται. Οι γραμμές απόφασης στηρίζονται σε πολλαπλάσιο του τυπικού σφάλματος σε σχέση με την μέση τιμή. Παρουσιάζεται ένας κοινός παρονομαστής με τα league tables, με την διαφορά ότι σε αυτή την περίπτωση δεν κατατάσσονται τα στοιχεία ως προς την απόδοσή τους. Στο διάγραμμα που ακολουθεί μελετήθηκε το ποσοστό ασθενών που εισήχθησαν σε νοσοκομείο της Αγγλίας και της Ουαλίας την περίοδο 2000-2001 εξαιτίας της έξαρσης μια ασθένειας.

Χρησιμοποιήθηκαν 95% και 99.9% όρια ελέγχου, βασισμένα στην διωνυμική κατανομή και όπως φαίνεται δύο νοσοκομεία παρουσιάζουν φανερόνουν χαμηλή απόδοση και άρα για τα συγκεκριμένα η διεργασία τίθεται εκτός ελέγχου.



3.4 Προσαρμογή κινδύνου

Σημαντικό, όπως αναφέρθηκε, στοιχείο στην εφαρμογή διαγραμματικών τεχνικών ελέγχου για την παρακολούθηση ιατρικών δεδομένων είναι, όπως λέγεται, η προσαρμογή κινδύνου (risk- adjustment). Ο Grigg et al. (2003) και Grigg & Farewell (2004) δημοσίευσαν σημαντικές αναφορές για την δημιουργία τέτοιου τύπου διαγραμμάτων ελέγχου, επισημαίνοντας ότι από ασθενή σε ασθενή η εντός ελέγχου πιθανότητα θανάτου διαφέρει. Ένας παράγοντας μελέτης και ανάπτυξης αυτού του πεδίου είναι η επίβλεψη των χειρουργικών αποτελεσμάτων, δεδομένου ότι σε διαφορετικούς ασθενείς αντιστοιχεί και διαφορετικός κίνδυνος θανάτου εξαιτίας της μοναδικότητας του ιστορικού υγείας τους. Προκειμένου να γίνει η σωστή και ακριβής εφαρμογή τους θα πρέπει να εξεταστούν και να ληφθούν σοβαρά υπόψη στοιχεία του ασθενή όπως η ηλικία, το φύλο, η χορήγηση φαρμακευτικής αγωγής την περίοδο της μελέτης, το ιατρικό ιστορικό του, το είδος της χειρουργικής επέμβασης κλπ. Παράγοντες δηλαδή που προσφέρουν πολύτιμες πληροφορίες για την εξέλιξη της υγείας του ασθενούς. Όλα αυτά τα στοιχεία απαρτίζουν όπως αναφέρεται, το «μείγμα» του ασθενούς ή patient-mix, με την ενσωμάτωση όλων αυτών των πληροφοριών σε ένα διάγραμμα ελέγχου να είναι γνωστή ως προσαρμογή κινδύνου (Sego et al, 2006).

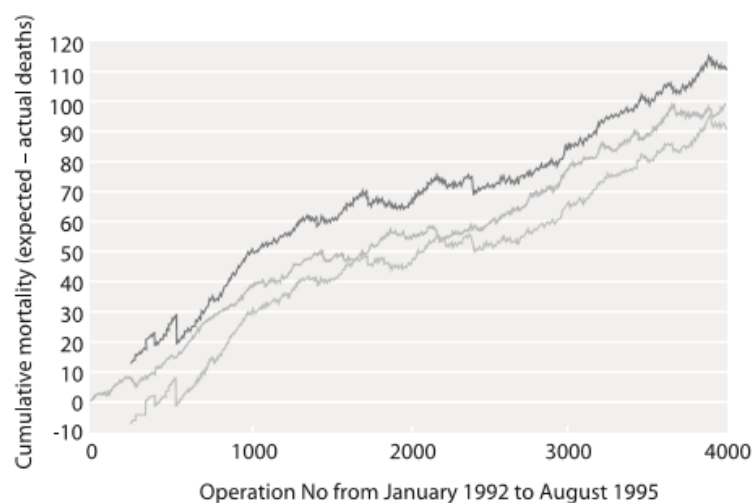
Μια μελέτη για τις συνέπειες που προκύπτουν από την αποφυγή της προσαρμογής κινδύνου, ανέπτυξαν οι Steiner et al. (2000). Αναφέρθηκε στο γεγονός της διάκρισης ανάθεσης σοβαρότερων καταστάσεων σε πιο έμπειρους χειρουργούς και των περιπτώσεων ρουτίνας που ανατίθενται σε εκπαιδευόμενους. Συγκεκριμένα απέδειξε ότι αν κάποιος δεν λάβει υπόψη του τα χαρακτηριστικά που συνθέτουν το patient-mix που έχει αναλάβει ο εκάστοτε χειρουργός, τότε θα κατέληγε σε εσφαλμένα συμπεράσματα όσον αφορά την ποιότητα των χειρουργικών διαδικασιών. Ειδικότερα, τόνισε ότι εσφαλμένα η ποιότητα της χειρουργικής επέμβασης από τους εκπαιδευόμενους είναι καλύτερη από εκείνη των έμπειρων, έχοντας ως επακόλουθο την σπατάλη χρόνου και μελέτης αναζήτησης ειδικών αιτιών που εξηγούν την «καλή» απόδοση των εκπαιδευόμενων και την «κακή» απόδοση των έμπειρων.

Ωστόσο, μια τέτοια διαδικασία, δημιουργίας και εφαρμογής μιας μεθόδου παρακολούθησης προσαρμοσμένης στον κίνδυνο εμπεριέχει την πρόκληση ανάπτυξης μοντέλων που έχουν την δυνατότητα να προβλέπουν με υψηλή ακρίβεια τον κίνδυνο θανάτου για έναν ασθενή που υποβλήθηκε σε κάποια επέμβαση, βάση μετρήσεων που συγκεντρώθηκαν πριν από το χειρουργείο. Επομένως, αναπτύσσονται μοντέλα βασισμένα στο patient-mix. Συχνά ένα τέτοιο μοντέλο μπορεί να αντιστοιχεί σε κάποιον ειδικό δείκτη, που προκύπτει ως μια σταθμισμένη σύνθεση των μετρήσεων που έχουν συγκεντρωθεί. Ορισμένα παραδείγματα τέτοιων δεικτών είναι το Parsonnet Score (Parsonnet et al., 1989) και το EuroSCORE (Nashef et al., 1999) που χρησιμοποιούνται κυρίως σε ασθενείς με καρδιακά προβλήματα ή το APACHE III score (Knaus et al., 1991) που αξιοποιείται για την παρακολούθηση κινδύνου σε μονάδες εντατικής θεραπείας.

3.5 VLAD και CRAM

Με στόχο την εκτίμηση της αναμενόμενης θνησιμότητας, οι Lovegrove et al. (1997) και Poloniecki et al. (1998) παρείχαν ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον συσσωρευτικές γραφικές τεχνικές, με θετική τάση να παρουσιάζει επιβίωση του ασθενή και καλύτερη από την μέση, απόδοση. Μολονότι οι προτάσεις τους προσφέρουν αποτελεσματικές γραφικές αναπαραστάσεις αξιολόγησης προσαρμοσμένων στον κίνδυνο αποτελεσμάτων για την μέση θνησιμότητα μείον την προβλεπόμενη, ή όπως γράφεται συχνά «καθαρές ζωές που σώζονται» (net lives saved), η ιδιαιτερότητα αυτών των διαγραμμάτων VLAD (variable life adjusted display) και CRAM (cumulative risk adjusted mortality) είναι ότι δεν διαθέτουν κάποιο ουσιαστικό όριο ελέγχου ή απόφασης που θα επισημάνει επίσημα την βελτίωση ή χειροτέρευση της ποιότητας μιας χειρουργικής επέμβασης (Sego et al., 2006). Όσον αφορά αυτό το κομμάτι, οι Poloniecki et al., 1998 πρότειναν μια ιδέα ορίων ελέγχου που δημιουργήθηκαν σε συγκεκριμένο επίπεδο σημαντικότητας για τον έλεγχο της υπόθεσης, αν το ποσοστό θνησιμότητας σε μια ομάδα ασθενών διαφέρει από προγενέστερες περιπτώσεις. Για αυτή την εξέταση χρησιμοποιήθηκαν επαναλαμβανόμενοι έλεγχοι υποθέσεων χρησιμοποιώντας την X^2 κατανομή με 1 βαθμό ελευθερίας, με την αντιπαράθεση συγγραφέων και αναλυτών ότι κάτι τέτοιο δεν αντιστοιχεί σε τυπικό έλεγχο σημαντικότητας, δεδομένου ότι οι υπολογισμοί πραγματοποιήθηκαν ύστερα από κάθε επέμβαση αδιαφορώντας για το πλήθος των ελέγχων. Με αυτή τη λογική η πιθανότητα σφάλματος τύπου I δεν είναι δυνατό να ερμηνευθεί άμεσα για αυτούς τους ελέγχους από την άποψη της απόδοσης του μέσου μήκος ροής της διεργασίας.

Καθώς παρουσιάζεται μια ισοδυναμία σε αυτούς τους τύπους των διαγραμμάτων, ενδεικτικά παρακάτω δίνεται ένα παράδειγμα ενός CRAM διαγράμματος με 90% όρια ελέγχου που παρουσίασαν οι Poloniecki et al., 1998. Σε αυτό το διάγραμμα παρουσιάζεται η απόδοση ενός υπό παρακολούθηση νοσοκομείου, δίνοντας αρκετά θετικά αποτελέσματα όπως μαρτυρά η αυξητική του τάση. Στις επεμβάσεις που αντιστοιχούν σε αύξοντες αριθμούς 1651 και 2189 φαίνεται ότι ξεπεράστηκε το κατώτερο όριο ελέγχου γεγονός που αντιστοιχεί σε επιδείνωση της απόδοσης σε σύγκριση με προηγούμενη.



3.6 RSPRT

Η ιδέα της Rmorton μεθόδου ή Resetting Sequential Probability Ratio Test, στηρίχτηκε στην επαναλαμβανόμενη διαδικασία διαδοχικών ελέγχων υποθέσεων με δημιουργό τον Wald (1947). Θεωρώντας ότι αναπτύσσεται ο έλεγχος των υποθέσεων $H_0: p = p_0$ έναντι της $H_1: p = p_1$ η διαδικασία εκτέλεσης του ελέγχου βασίζεται στον υπολογισμό της παράστασης $X_t = X_{t-1} + W_t$ που αντιστοιχεί στην t παρατήρηση για $t = 1, 2, 3, \dots$ με $X_0 = 0$ συνήθως και W_t να είναι ίσο με $\log \frac{L_{1t}}{L_{0t}}$, το σωρευτικό άθροισμα του λογαρίθμου του λόγου πιθανοφανειών $L_{1t} = L(p_1 | x) = \prod_{t=1}^n f(x_t; p_1)$ και $L_{0t} = L(p_0 | x) = \prod_{t=1}^n f(x_t; p_0)$. Αφού γίνει ο παραπάνω υπολογισμός ανάλογα με την τιμή που λαμβάνει η παράσταση $X_t = X_{t-1} + W_t$ οδηγούμαστε και στην ανάλογη απόφαση βασιζόμενοι σε δύο κρίσιμες τιμές α και β . Οι δυνατές περιπτώσεις θα έχουν ως εξής:

- Αν $X_t \geq \beta$, Αποδοχή της H_1
- Αν $X_t \leq \alpha$, Αποδοχή της H_0
- Αν $\alpha < X_t < \beta$, Συνεχίζεται η δειγματοληψία

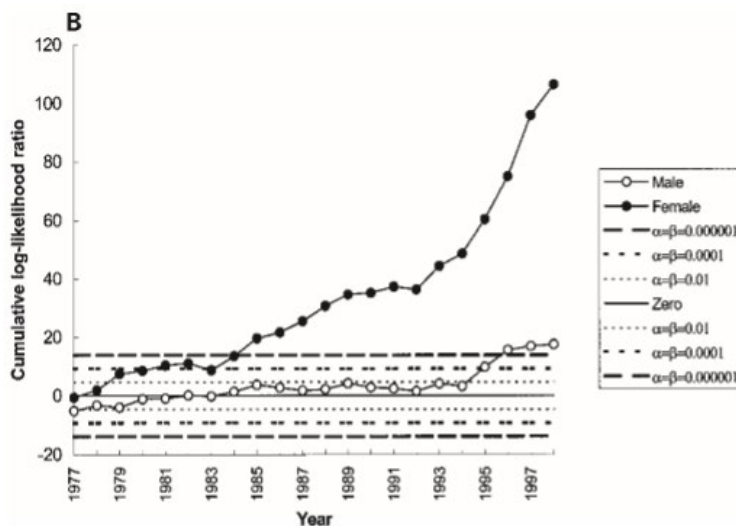
Τα α και β είναι γνωστά και ως φράγματα απορρόφησης και επιλέγονται με τέτοιο τρόπο ώστε να ισχύει $\alpha = \log \frac{\beta^*}{1-\alpha^*}$ και $\beta = \log \frac{1-\beta^*}{\alpha^*}$, όπου α^* και β^* αντιστοιχούν στα σφάλματα τύπου I και II, με το εύρος των τιμών τους να είναι $0 < \alpha < \beta < \infty$.

Στηριζόμενοι σε αυτή την ιδέα, οι Morton και Lindsten (1976) την εφάρμοσαν για τον εντοπισμό ενδεχόμενης αύξησης του ποσοστού εμφάνισης ατόμων με σύνδρομο Down. Η διαδικασία των ληφθέντων μετρήσεων έγινε κάτω από την υπόθεση ότι τα δεδομένα βασίζονται σε Poisson κατανομή όπου η εντός ελέγχου τιμή της παραμέτρου Poisson ενδέχεται να ποικίλλει με την πάροδο του χρόνου. Έχοντας αξιολογήσει ότι τα α^* και β^* που αντιστοιχούν στις πιθανότητες σφάλματος τύπου I και II αντίστοιχα θα είναι πιο κατανοητές και φιλικές ως προς την ερμηνεία σε σχέση με τα ARL's, επέλεξαν την χρήση της μεθόδου για δεδομένα αυτής της κατανομής στο γράφημα CUSUM ως καλύτερη συγκριτικά με το τυπικό CUSUM όπου δεν θα ήταν δυνατή, στην δεδομένη στιγμή, η λήψη διαφορετικών τιμών στις εντός ελέγχου τιμές της παραμέτρου.

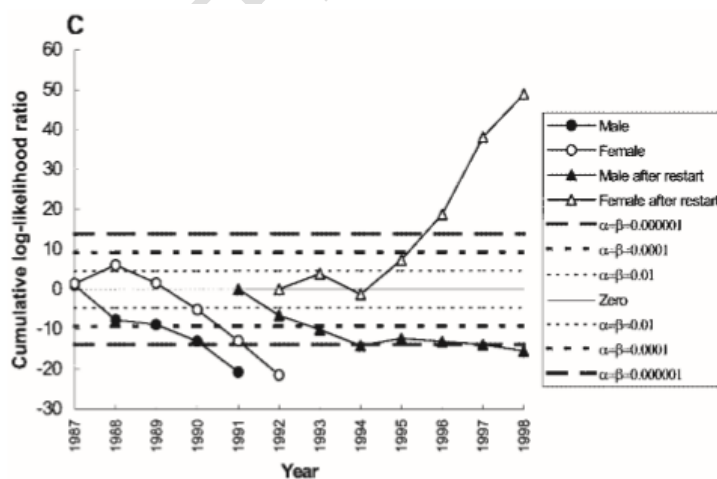
Αν και η εφαρμογή της μεθόδου αποτελεί μια χείρα βοήθειας για τους επαγγελματίες του χώρου της Υγείας που γνωρίζουν την διαδικασία των ελέγχων υποθέσεων, για την εξασφάλιση της ποιότητας και της άμεσης διάγνωσης, οι Grigg et al. (2003) και Spiegelhalter (2004) υποστήριξαν ότι οι πιθανότητες α^* και β^* δεν αποτελούν αντικείμενο εύκολης επεξήγησης. Επιπροσθέτως στην περίπτωση που η μηδενική υπόθεση είναι αληθής ο επαναλαμβανόμενος έλεγχος υποθέσεων οδηγεί σε πιθανότητα απόρριψής της ίση με 1, γεγονός που με την σειρά του μεταφράζεται σε εσφαλμένο συναγερμό.

Ενδεικτικά παρουσιάζεται στο σχήμα που ακολουθεί μια εφαρμογή της μεθόδου που πραγματοποιήθηκε από τους Spiegelhalter et al. (2003), σε δεδομένα από την διάρκεια εκτέλεσης της πρακτικής άσκησης του γιατρού Harold Shipman, ενός ανθρώπου που το 2000 καταδικάστηκε για την αφαίρεση της ζωής 15 ασθενών του καθώς και της, όπως φαίνεται, ανάμειξής του σε παρόμοιες καταστάσεις άλλων 215 περίπου ανθρώπων με το μεγαλύτερο ποσοστό αυτών να είναι γυναίκες. Ο σχεδιασμός αυτός έγινε για τον έλεγχο της μηδενικής

υπόθεσης της τυπικής απόδοσης έναντι του διπλασιασμού πιθανοτήτων θανάτου αναλογικά με τους τοπικούς γιατρούς.



Ακολουθώς παρουσιάζεται άλλη μια εφαρμογή παρόμοια με αυτή της περίπτωσης του γιατρού Harold Shipman, όπου πραγματοποιήθηκε μια σύγκριση ανάμεσα στους γιατρούς στην Ουαλία και την Αγγλία. Όπως φαίνεται και από τα δύο αυτά γραφήματα, περισσότεροι θάνατοι μεγαλύτερων σε ηλικία γυναικών πραγματοποιήθηκαν από ότι θα περίμενε κάποιος βάσει της τυπικής απόδοσης.



Σε αρκετές δημοσιευμένες εργασίες θεωρείται ότι ένα τυπικό μονόπλευρο διάγραμμα CUSUM ουσιαστικά είναι ένα SPRT το οποίο έχει κάτω όριο στο μηδέν. Εξαιτίας της φύσης της μεθόδου των επαναλαμβανόμενων ελέγχων, αξιοποιείται σε πληθώρα εφαρμογών στο τομέα της Υγείας με ένα ωστόσο μειονέκτημα, ότι η στατιστική που χρησιμοποιείται για τον έλεγχο ενδέχεται να είναι κάτω από το μηδέν όταν υπάρχει αύξηση στο ρυθμό του αντικειμένου που παρακολουθείται (Woodall 2006). Έχει δοθεί και χρησιμοποιείται στο περιβάλλον της

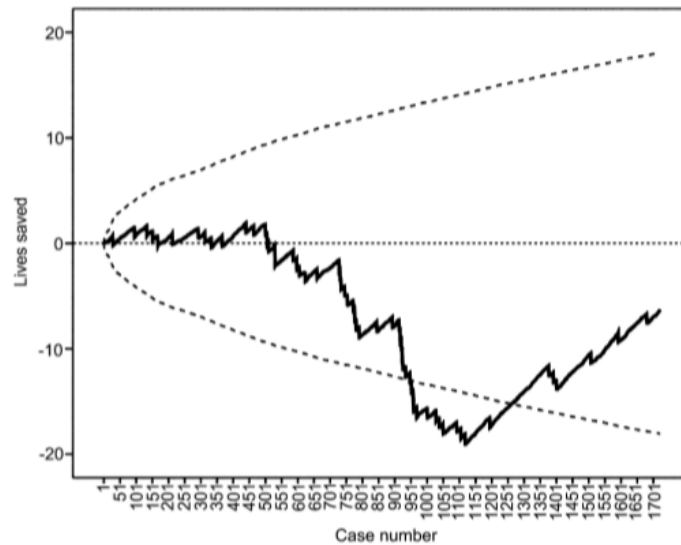
Υγείας ο όρος "credit" όταν γίνεται λόγος για αυτό το ζήτημα, σε σχέση με τον Βιομηχανικό κλάδο που έχει δοθεί ο όρος "inertia".

Ακόμη, οι Reynolds και Stoumbos (2000a, 2000b) έδειξαν ότι παρατηρούνται περιπτώσεις όπου για το "βέλτιστο" κάτω όριο αποδοχής υπάρχει δυνατότητα να είναι και θετικό όταν η μέθοδος σχεδιάζεται κατά το βέλτιστο, δίνοντας έτσι ένα όριο που προσεγγίζει το μηδέν συγκριτικά με τα αποτελέσματα που παρείχε ο Wald. Έδειξαν επίσης ότι ως προ την στατιστική τους απόδοση τα διαγράμματα είναι σχεδόν ισοδύναμα με τα CUSUM, όταν όμως δύναται θετικό κάτω όριο παρατηρείται μεγαλύτερη αδράνεια. Τέλος, τόνισαν ότι η μέθοδος είναι χρήσιμη στον έλεγχο που πραγματοποιείται μέσω των διαγραμμάτων όταν οι ρυθμοί συλλογής των δεδομένων δεν είναι σταθεροί, βοηθώντας με αυτό τον τρόπο στη μείωση του κόστους δειγματοληψίας.

3.7 Risk-adjusted CUSUM

Η γενική ιδέα της ανάλυσης CUSUM προσαρμοσμένου στον κίνδυνο (risk-adjusted CUSUM) είναι όμοια με εκείνη του μη προσαρμοσμένου στον κίνδυνο CUSUM (non risk-adjusted CUSUM). Ωστόσο, παρατηρείται μια ειδοποιός διαφορά στις δύο αυτές μεθόδους. Σύμφωνα και με την εκτενέστερη παρουσίαση που έγινε παραπάνω, όταν μεταξύ των ασθενών δεν λαμβάνεται υπόψιν ο διαφορετικός κίνδυνος θανάτου, η διαχείριση των δεδομένων είναι η ίδια. Κάτι τέτοιο δεν ισχύει στην περίπτωση του risk-adjusted CUSUM, όπου δίνεται διαφορετικό "σκορ" σε ασθενείς υψηλού κινδύνου. Παραδείγματος χάριν, για έναν ασθενή με υψηλό επίπεδο κινδύνου, έστω 40%, στην περίπτωση που επιβιώνει από μια χειρουργική επέμβαση δίνεται το σκορ 0.40, γεγονός που σημαίνει ότι για άτομα υψηλού κινδύνου που επιβιώνουν δίνεται και μεγαλύτερο σκορ σε σύγκριση με ασθενείς χαμηλού κινδύνου (Noyez, 2009). Βέβαια στην περίπτωση που δεν επιβιώνει τιμωρούμαστε με $-(1 - 0.40) = -0.60$, ένα σκορ που με την σειρά του οδηγεί στο συμπέρασμα ότι δίνεται μεγαλύτερο σκοράρισμα στους ασθενείς χαμηλού κινδύνου που δεν επιβιώνουν.

Για αυτού του τύπου τα διαγράμματα η κατασκευή των ορίων ελέγχου ενώ είναι δυνατή, είναι ένα περίπλοκο θέμα εξαιτίας των διαφοροποιήσεων που υπάρχουν μεταξύ των ασθενών. Οι Sherlaw-Johnson et al. (2000) πρότεινε ένα διάστημα πρόβλεψης για το τελευταίο σημείο της ανάλυσης βοηθώντας έτσι και στην ερμηνεία της διεργασίας. Οι Grunkemeier et al. (2003) έδωσε μια προέκταση αυτής της μεθόδου με αντίστοιχα διαστήματα πρόβλεψης για κάθε σημείο της καμπύλης. Προκειμένου να γίνει αυτό βασίστηκε στο τυπικό σφάλμα (S.E = standard error) του προσαρμοσμένου στον κίνδυνο σωρευτικού αθροίσματος. Δηλαδή στην τετραγωνική ρίζα του σωρευτικού αθροίσματος $E(1-E)$ ($E = \text{Expected Mortality}$, $0 < E < 1$), για όλους τους ασθενείς από την αρχή της ανάλυσης μέχρι την στιγμή t . Έπειτα για την δημιουργία των 90%, 95% και 99% δίπλευρων ορίων πρόβλεψης πολλαπλασιάζουμε το S.E με τα αντίστοιχα αντίστροφα ποσοστιαία σημεία της τυπικής κανονικής κατανομής, 1.64, 1.96 και 2.58. Ένα παράδειγμα αυτής της ιδέας δίνεται στην εικόνα που ακολουθεί, όπου κατασκευάστηκε ένα risk-adjusted CUSUM με 95% δίπλευρα όρια για την παρακολούθηση της νοσοκομειακής θνησιμότητας 1772 ασθενών ενός νοσοκομείου. Μια ανοδική κλίση δηλώνει βελτίωση ενώ μια καθοδική χειροτέρευση. Σε αυτό το παράδειγμα μια μη αποδεκτή απόδοση παρουσιάστηκε για πρώτη φορά στον ασθενή με αύξοντα αριθμό 951.

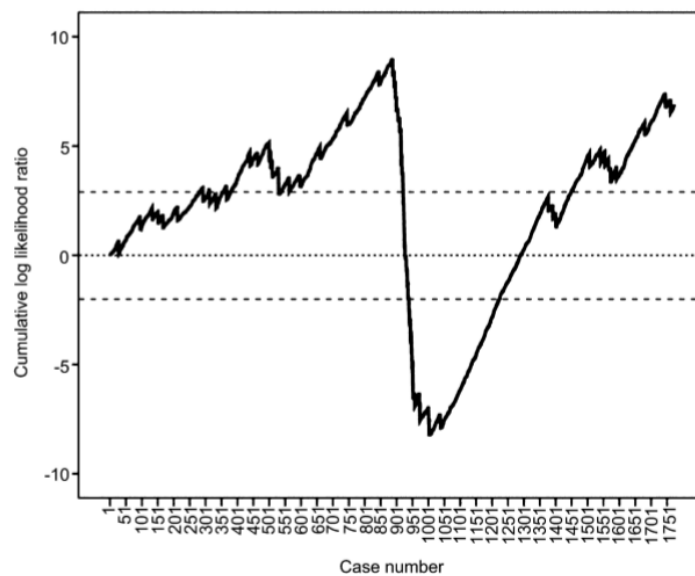


Αν και αυτά τα όρια δίνουν μια ιδέα για την μεταβλητότητα που υπάρχει στην διεργασία, δεν υπολογίζουν την περίπτωση των πολλαπλών ελέγχων, πόσο μάλλον όταν πρόκειται για μια εν εξελίξει διεργασία όπου τα διαστήματα πρόβλεψης δεν διατηρούν το ονομαστικό τους μέγεθος κάνοντας τα ανεπαρκή. Οι Steiner et al. (2000) και Spiegelhalter et al. (2003) πρότειναν έναν προσαρμοσμένο στον κίνδυνο ακολουθιακό έλεγχο λόγω πιθανοφάνειας (risk-adjusted sequential probability ratio testing). Αυτή η μέθοδος χρησιμοποιεί ένα σωρευτικό άθροισμα του λόγου λογαριθμικής πιθανοφάνειας (logarithm likelihood ratio), με το λόγο πιθανοφάνειας να αντιστοιχεί στο λόγο των μέγιστων πιθανοτήτων δύο υποθέσεων. Έστω θεωρούμε H_0 και H_1 τις δύο υπό εξέταση υποθέσεις για τον έλεγχο του λόγου πιθανοτήτων (odds ratio) OR_0 και OR_1 αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας $OR_0 = 1$ για την μηδενική υπόθεση σημαίνει ότι η παρατηρηθείσα θνησιμότητα είναι ίση με την εκτιμώμενη (Noyez, 2009), και ανάλογα με το τι θέλουμε να ανιχνεύσουμε ορίζεται και το OR_1 . Παραδείγματος χάριν για την ανίχνευση της αύξησης στο ρυθμό θανάτων θα πρέπει να ισχύει $OR_1 > OR_0$, ενώ αν επιθυμούμε να ανιχνεύσουμε λιγότερους θανάτους από ότι αναμενόταν τότε ισχύει $OR_1 < OR_0$.

Έχοντας ορίσει εκ των προτέρων τον εκτιμώμενο κίνδυνο $p_t(\theta) = g(\theta, x_t)$, όπου θ η υπό εξέταση διεργασία, x_t το διάγνυμα με τους παράγοντες κινδύνου για τον ασθενή t και g μια συνάρτηση που καθορίζεται προ-εγχειρητικά χρησιμοποιώντας για παράδειγμα ένα μοντέλο λογιστικής παλινδρόμησης, το odds αποτυχίας ισούται με $p_t/(1 - p_t)$. Κάτω από την H_0 το odds αποτυχίας ισούται με $OR_0 \cdot p_t/(1 - p_t)$ ενώ υπό την H_1 με $OR_1 \cdot p_t/(1 - p_t)$ που αντιστοιχεί στην πιθανότητα αποτυχίας $OR_0 \cdot p_t/(1 - p_t + OR_1 \cdot p_t)$. Για την κατασκευή του γραφήματος λοιπόν χρησιμοποιούνται τα δύο ακόλουθα αποτελέσματα:

$$W_t = \begin{cases} \log \left[\frac{(1 - p_t + OR_0 \cdot p_t) \cdot OR_1}{(1 - p_t + OR_1 \cdot p_t) \cdot OR_0} \right], & \text{αν επιβιώσει} \\ \log \left[\frac{1 - p_t + OR_0 \cdot p_t}{1 - p_t + OR_1 \cdot p_t} \right], & \text{αν πεθάνει} \end{cases}$$

Ένα παράδειγμα αυτής της μεθόδου δίνεται στο γράφημα που ακολουθεί όπου πραγματοποιήθηκε ο έλεγχος των υποθέσεων $H_0: OR_0 = 1$ έναντι της $H_1: OR_1 = 2$. Αν το γράφημα ξεπεράσει την οριζόντια γραμμή πάνω από την μηδενική γραμμή τότε απορρίπτουμε την εναλλακτική υπόθεση ενώ αν ξεπεράσει την κάτω απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση. Η εναλλακτική υπόθεση επιβεβαιώνεται μεταξύ των υποθέσεων με αύξοντα αριθμό 901 και 1301.

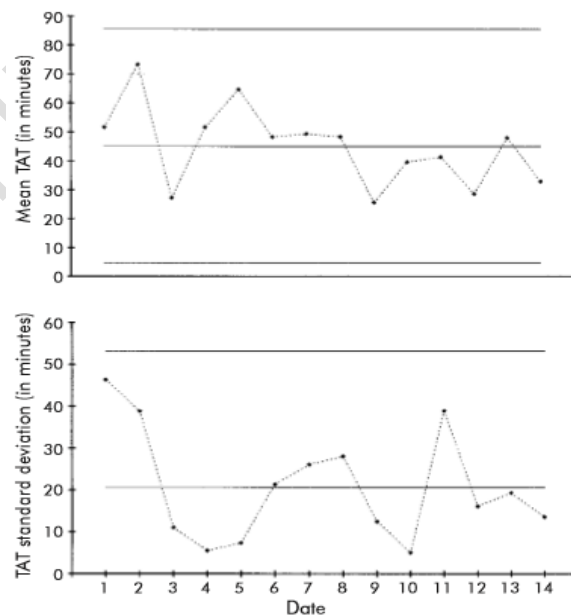


3.8 Εφαρμογές

Στην παρούσα παράγραφο θα δοθεί μια συνοπτική περιγραφή ενδεικτικών παραδειγμάτων εφαρμογής των διαγραμμάτων ελέγχου που παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες παραγράφους. Δίνοντας μια πιο χειροπιαστή εικόνα για την χρήση τους στο χώρο της Υγείας.

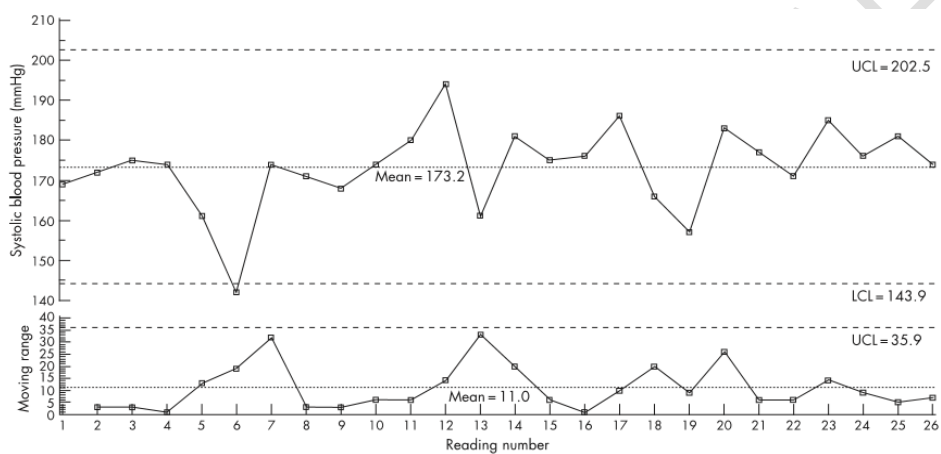
- X-bar & S charts

Σε ένα νοσοκομείο αρκετοί κλινικοί γιατροί από το τμήμα επειγόντων περιστατικών (accident & emergency department, A&E) εξέφρασαν την δυσαρέσκειά τους σχετικά με τον χρόνο που μεσολαβεί από την λήψη αίματος μέχρι την εξαγωγή των αποτελεσμάτων από το εργαστήριο, γνωστός και ως turn-around-time ή TAT, δηλώνοντας ότι είναι εκτός ελέγχου με συνεχή επιδείνωση (Benneyan et al., 2003). Ο υπεύθυνος του εργαστηρίου θέλοντας να ερευνήσει περισσότερο την άποψη των γιατρών αποφάσισε να βασιστεί σε δεδομένα, τα οποία στρωματοποιούνται ανά μετατόπιση και τύπο αίματος, επείγον έναντι ρουτίνας. Επειδή οι χρόνοι ακολουθούν συχνά κανονικές κατανομές τα X-bar και S μοιάζουν κατάλληλα. Για να κατασκευαστούν επιλέγονται τρία τυχαία δείγματα βάσει των οποίων υπολογίζονται η μέση τιμή και τυπική απόκλιση του TAT. Στην περίπτωση που οι γιατροί είχαν δίκιο θα έπρεπε να παρουσιάζονταν σημεία εκτός ελέγχου καθώς και μια ανοδική τάση, γεγονός που δεν ισχύει στα διαγράμματα που ακολουθούν αφού φαίνεται η διαδικασία να είναι εντός ελέγχου. Φαίνεται να υπάρχει μόνο κοινή αιτία μεταβλητότητας πράγμα που δεν μεταφράζεται απαραίτητα σε αποδεκτά αποτελέσματα, αλλά σε διαδικασία σταθερή και προβλέψιμη. Ωστόσο στην περίπτωση μάλλον έχουμε μια προβλέψιμη κακή διεργασία αφού δεν είναι αποδεκτή από τους γιατρούς και παραπάνω διερεύνηση κρίνεται απαραίτητη.



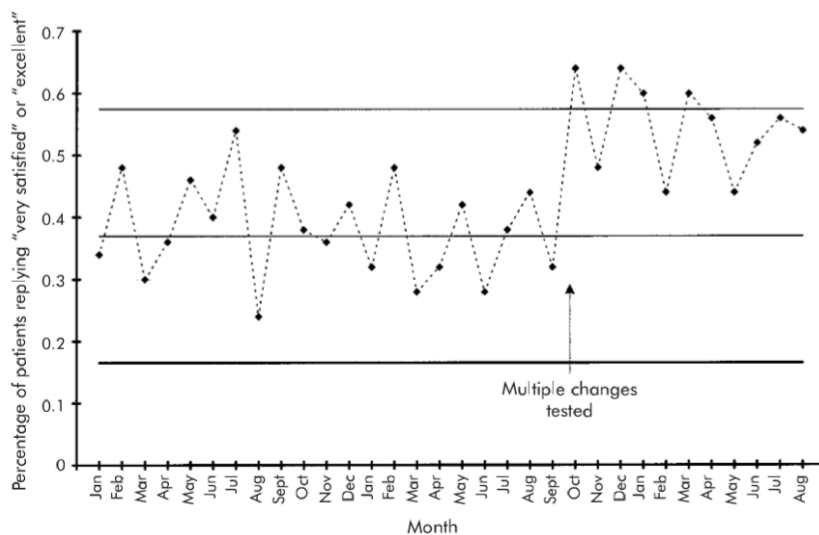
- X & MR charts

Για την θεραπεία που πρέπει να ακολουθήσει ένας ασθενής ύστερα από μια μεταμόσχευση, συγκεντρώθηκαν μετρήσεις συστολικής πίεσης του αίματος, σε χιλιοστά της στήλης υδραργύρου (mmHg), για 26 συνεχόμενες μέρες (Mohammed et al., 2008). Επειδή πρόκειται για μεμονωμένες παρατηρήσεις η χρήση των X και MR είναι ιδανική. Βέβαια για χρονικά ταξινομημένα δεδομένα, όπως στην περίπτωση αυτή, θα πρέπει να αξιολογηθεί η ανεξαρτησία με την πάροδο του χρόνου, αφού ύπαρξη αυτοσυσχέτισης θα επηρεάσει την περαιτέρω ανάλυση. Ωστόσο ο Wheeler (Wheeler D. 1995) έδειξε ότι ακόμα και στην περίπτωση εμφάνισης αυτοσυσχέτισης τα διαγράμματα αυτά συμπεριφέρονται καλά. Την 6^η ημέρα στο X διάγραμμα παρατηρείται μια ασυνήθιστα χαμηλή τιμή η οποία πρέπει να ερευνηθεί.



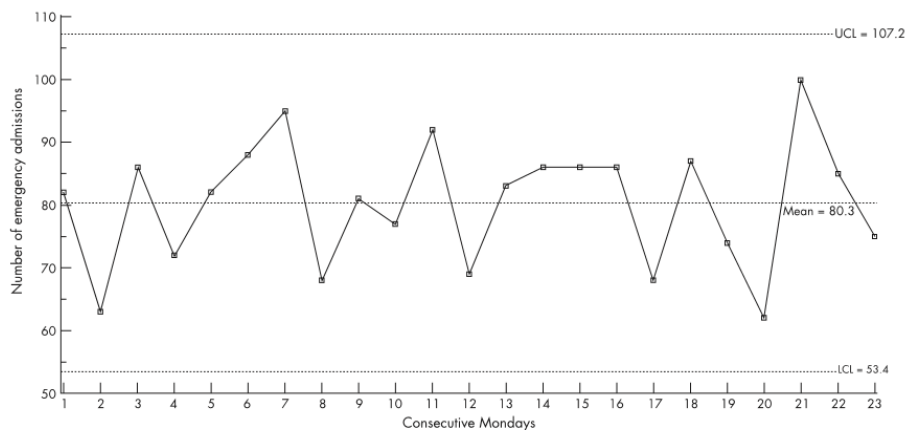
- p – chart

Ένας γιατρός στην προσπάθεια μελέτης για την βελτίωση ικανοποίησης της πρόσβασης των ασθενών σε ραντεβού, συγκέντρωσε διάφορα μέτρα απόδοσης κάθε μήνα. Οργανώθηκε έρευνα ώστε να μετρηθεί η ικανοποίηση των ασθενών ως προς την καθυστέρηση ανταπόκρισης, την τηλεφωνική ικανοποίηση, τους χρόνους αναμονής κλπ. Στους ασθενείς τέθηκε το ερώτημα, πόσο ικανοποιημένοι ήταν από την καθυστέρηση να κλείσουν ραντεβού με τον γιατρό τους και υπολογίστηκε το ποσοστό εκείνων που απάντησαν «πολύ καλά» ή «άριστα». Επιλέχθηκε ένα p-διάγραμμα (με βάση την διωνυμική κατανομή) για την παρακολούθηση του ποσοστού (Benneyan et al., 2003). Παρακολουθώντας άλλες μελέτες αποφασίστηκε να εφαρμοστούν ταυτόχρονα κάποιες αλλαγές όπως απλοποίηση τηλεφωνικών διαλόγων και ραντεβού με την νοσοκόμα σε περιπτώσεις που δεν χρειαζόταν γιατρός. Σύμφωνα με τον διάγραμμα βελτιώθηκε η ικανοποίηση των ασθενών μετά τις αλλαγές χωρίς να είναι γνωστό ποιος παράγοντας επηρέασε την βελτίωση αυτή.



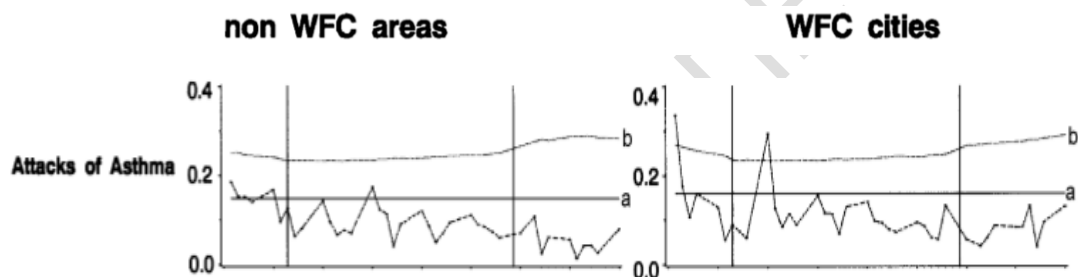
- c – chart

Σε ένα μεγάλο νοσοκομείο της Αγγλίας δημιουργήθηκε η ανάγκη παρακολούθησης του αριθμού εισαγωγών έκτακτης ανάγκης. Για τον λόγο αυτό συλλέχθηκαν δεδομένα στο ξεκίνημα κάθε εβδομάδας για 23 διαδοχικές εβδομάδες. Η επιλογή της Δευτέρας και όχι διαδοχικών ημερών για την καταγραφή των δεδομένων σχετίζεται με την ύπαρξη ορθολογικών υποομάδων. Σύμφωνα με τον όρο αυτό ορισμένες διεργασίες εμφανίζουν διαφορετικές αιτίες ειδικής μεταβλητότητας και η εισαγωγή έκτακτων αναγκών είναι μια τέτοια. Η πιθανότητα εμφάνισης εισαγωγής ενός έκτακτου περιστατικού σε ένα νοσοκομείο δεν είναι η ίδια για τα Σαββατοκύριακα και την Παρασκευή σε σχέση με τις υπόλοιπες μέρες. Η μελέτη διαδοχικών ημερών θα συνδεόταν και με το πρόβλημα της εποχικότητας για αυτό προτιμήθηκε η μέρα Δευτέρα ως μέρα αναφοράς προκειμένου να ξεπεραστεί το πρόβλημα. Έτσι λοιπόν επιλέχθηκε ένα c-διάγραμμα (Mohammed et al., 2008) το οποίο δίνεται παρακάτω



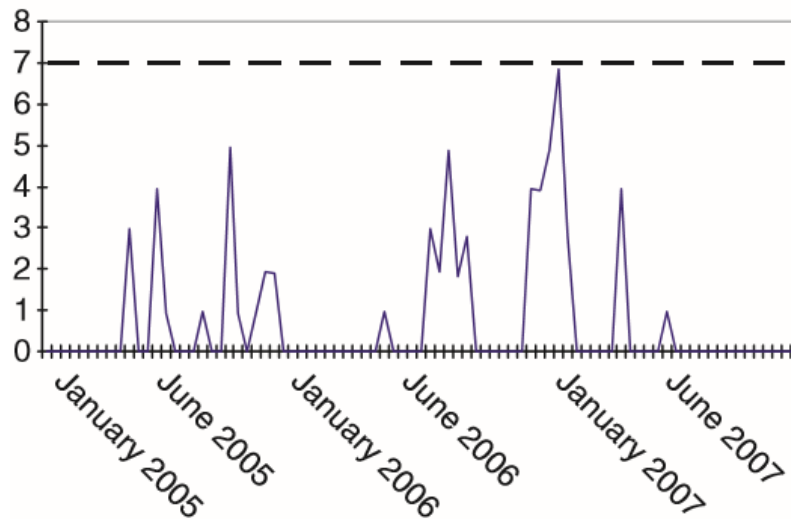
- u – chart

Το 1998 η Γαλλία θα φιλοξενούσε το παγκόσμιο κύπελλο ποδοσφαίρου προσελκύνοντας χιλιάδες φιλάθλους από όλο τον κόσμο. Εξαιτίας της συγκέντρωσης μεγάλου πλήθους ανθρώπων, οι υγειονομικές αρχές της χώρας εξέφρασαν την ανησυχία τους για την παροχή υψηλών προτύπων ασφαλείας. Προκειμένου να λυθεί το πρόβλημα πραγματοποιήθηκε πιλοτική μελέτη λίγες εβδομάδες πριν την έναρξη των αγώνων με στόχο την συγκέντρωση δεδομένων που θα βοηθούσαν στην επιτήρηση των πιο συχνά εμφανιζόμενων περιστατικών όπως άσθμα, οξεία διάρροια και τάση προς εμετό, τραυματισμοί που απαιτούν άμεση φροντίδα, καταστάσεις πανικού και άλλα. Βασιζόμενοι λοιπόν σε ορισμένους δείκτες θεωρήθηκε ωφέλιμη η παρακολούθηση του μέσου αριθμού περιπτώσεων ανά περιστατικό, χρησιμοποιώντας ένα u-διάγραμμα για κάθε κατάσταση (Hanslik et al., 2001) προσφέροντας ένα μέσο επιτήρησης της δημόσιας υγείας σε πόλεις που είτε φιλοξενούσαν αγώνες είτε όχι. Ενδεικτικά δίνεται το u-διάγραμμα για την περίπτωση παρακολούθησης περιστατικών άσθματος.



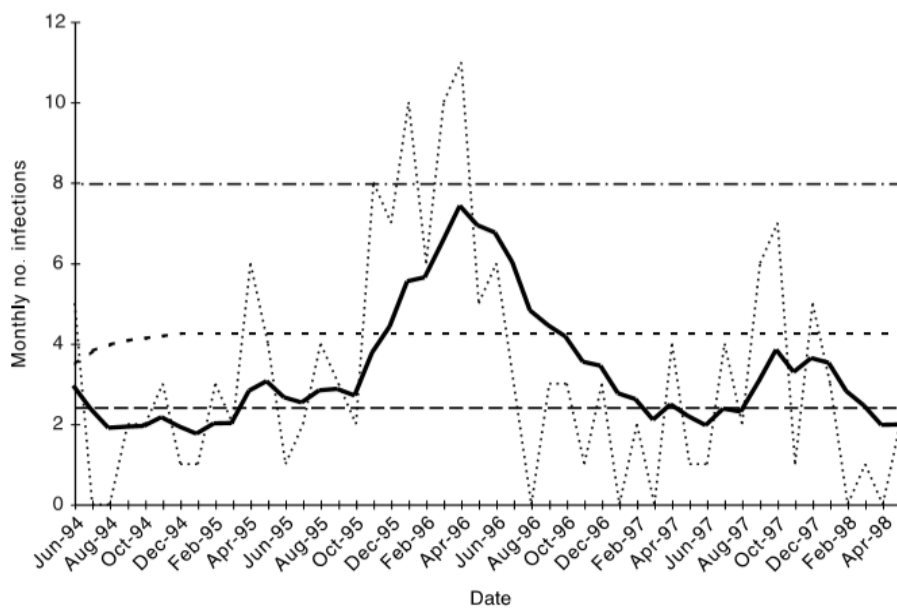
- CUSUM

Στο μαιευτικό τμήμα του Robert Debré Hospital, Παρίσι (Γαλλία) εφαρμόστηκε μελέτη για την παρακολούθηση της ποιότητας φροντίδας τόσο των γυναικών όσο και των νεογέννητων (Boulkedid et al., 2010). Για τον σκοπό αυτό έμπειροι μαιευτήρες, γυναικολόγοι, μαιές και νοσοκόμες πρότειναν τους απαραίτητες δείκτες και αποτελέσματα που το επαγγελματικό υπόβαθρο του καθενός θεωρούσε αναγκαίο για την παρακολούθηση τέτοιων καταστάσεων. Η μελέτη εφαρμόστηκε από 1^η Ιανουαρίου του 2000 έως 31 Δεκεμβρίου 2007. Τα δεδομένα που συλλέχθηκαν τα 5 πρώτα χρόνια (1^η Ιανουαρίου 2000 – 31 Δεκεμβρίου 2004) χρησιμοποιήθηκαν για την εκτίμηση των αποδεκτών και μη ορίων των δεικτών και αποτελεσμάτων που μελετήθηκαν. Για την κάθε υπό εξέταση ποσότητα εφαρμόστηκε και ένα CUSUM διάγραμμα ελέγχου. Ενδεικτικά στο διάγραμμα που ακολουθεί δίνεται η πορεία του δείκτη των προγραμματισμένων καισαρικών τομών με το κάθε σημείο του διαγράμματος να αντιστοιχεί στον αριθμό των γεγονότων ανά περίοδο και το όριο ελέγχου να είναι η διακεκομμένη γραμμή από όπου παρατηρούμε ότι δεν σήμα εκτός ελέγχου.



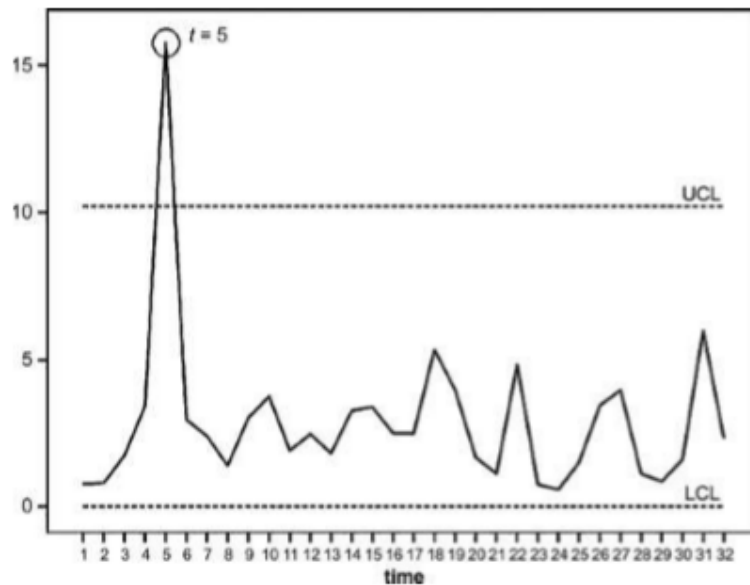
- EWMA

Προκειμένου να υπάρξει βελτίωση στην ποιότητα της περίθαλψης και της ασφάλειας των ασθενών για την μείωση δυσάρεστων αποτελεσμάτων θα πρέπει να παρακολουθείται η εξ ολοκλήρου λειτουργία ενός νοσοκομείου. Ένα σημαντικό ζήτημα που επηρεάζει την ασφάλεια των ασθενών είναι οι ενδονοσοκομειακές λοιμώξεις. Η εμφάνιση ενός τέτοιου φαινομένου έχει μεγάλη επίδραση σε κλινικό και οικονομικό επίπεδο. Οι πιο συχνές εμφανίσεις έχουν να κάνουν με λοιμώξεις ύστερα από χειρουργικές επεμβάσεις, λοιμώξεις στην κυκλοφορία του αίματος που πραγματοποιείται από την παρουσία βακτηρίων και μυκήτων καθώς και η εμφάνιση λοιμώξεων από πολύ-ανθεκτικούς οργανισμούς που είναι βακτήρια ανθεκτικά σε ορισμένα αντιβιοτικά. Μελετήθηκαν λοιπόν οι εμφανίσεις κρουσμάτων ασθενών με βακτηριαμία *Klebsiella pneumoniae* και εφαρμόστηκε διάγραμμα EWMA με στόχο την ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων στις εμφανίσεις αυτών από το 1994 έως και το 1998 (Morton et al., 2001). Όπως φαίνεται στο διάγραμμα που ακολουθεί την περίοδο του 1996 τα κρούσματα ξεπέρασαν το άνω όριο ελέγχου



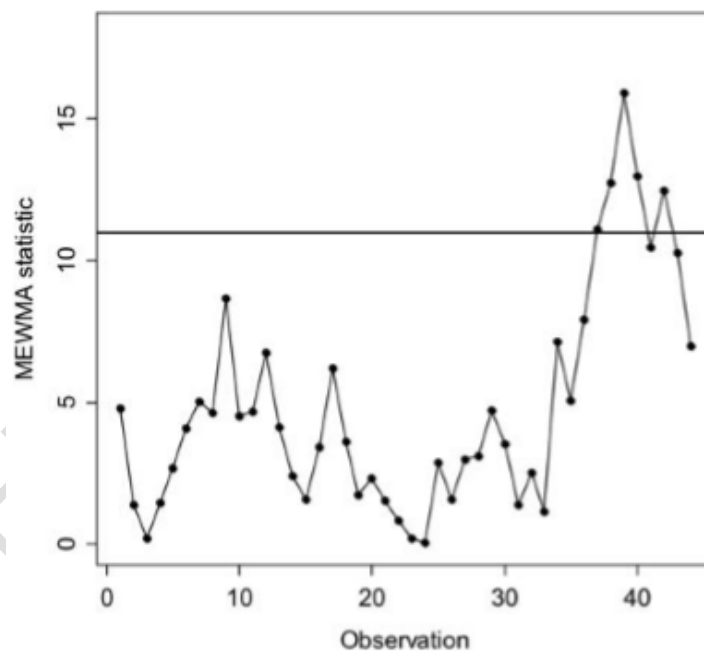
- Hotelling T^2

Οι χρόνιες αναπνευστικές ασθένειες επηρεάζουν τις αέριες μεταφορές μεταξύ των πνευμόνων και του αίματος. Ως αναπνευστική ανεπάρκεια ορίζεται η ανικανότητα του αναπνευστικού συστήματος να διατηρεί την αέρια ανταλλαγή σε επαρκή επίπεδα. Σε περιπτώσεις εμφάνισης τέτοιων φαινομένων ελαττώνονται τα επίπεδα πρόσληψης οξυγόνου και απομάκρυνσης διοξειδίου του άνθρακα. Η μελέτη τους κρίνεται δύσκολη εξαιτίας των μη ακριβών προσδιορισμών επιπέδων της κυψελιδικής μερικής πίεσης ($P_{A}O_2$) και της μερικής πίεσης του διοξειδίου του άνθρακα ($P_{A}CO_2$). Η πιο σημαντική και επικίνδυνη περίπτωση είναι αυτή της χρόνιας αποφρακτικής πνευμονοπάθειας αν αναλογιστεί κανείς ότι σήμερα είναι η τρίτη πιο συχνή αιτία θανάτου παγκοσμίως. Πέραν των ποσοστών των δεικτών που παρουσιάστηκαν προηγουμένως έχει μελετηθεί ότι η παχυσαρκία αποτελεί παράγοντα όξυνσης του προβλήματος. Σε αυτή τη μελέτη επικεντρώθηκαν και οι Correia et al. (2011) δημιουργώντας για δύο ασθενείς πολυμεταβλητά διαγράμματα T^2 για την παρακολούθηση των μεταβλητών $P_{A}O_2$, $P_{A}CO_2$ και BMI (δείκτης μάζας σώματος). Παρακάτω δίνεται το T^2 διάγραμμα για τον ασθενή 1 όπου παρατηρείται σημείο εκτός του άνω ορίου ελέγχου, πράγμα που σημαίνει εμφάνιση ειδικής αιτίας μεταβλητότητας και άρα μελέτης για το ποια μεταβλητή ευθύνεται για αυτό.



- MEWMA

Η στεφανιαία αγγειογραφία αποτελεί την πιο ακριβή μέθοδο διάγνωσης και αξιολόγησης της νόσου των στεφανιαίων αγγείων. Κατά την διάρκεια της εξέτασης αυτής ένας μικρός καθετήρας εισάγεται μέσω του δέρματος μέσα σε μια αρτηρία του βραχίονα του ασθενή και με την χρήση ακτινολογικού μηχανήματος εισχωρεί προς τις στεφανιαίες αρτηρίες που τροφοδοτούν αίμα στην καρδιά. Η ακρίβεια των αποτελεσμάτων βρίσκεται σε υψηλά επίπεδα ωστόσο η έκθεση των ασθενών σε παρατεταμένη ακτινοβολία είναι επιβλαβής για την υγεία. Θέλοντας λοιπόν να βελτιστοποιήσουν τις διαδικασίες της εξέτασης αυτής ώστε να είναι όσο το δυνατόν λιγότερο επιβλαβής και ταυτόχρονα ακριβής οι Waterhouse et al. (2010) δημιούργησαν πολυμεταβλητά διαγράμματα ελέγχου για την παρακολούθηση των διαθέσιμων δεδομένων. Αυτά ήταν η dose area product (DAP) η οποία είναι μια ποσότητα που χρησιμοποιείται για την εκτίμηση του κινδύνου ακτινοβολίας από διαγνωστικές εξετάσεις ακτίνων X, η fluoroscopy που αποτελεί τεχνική απεικόνισης που χρησιμοποιεί ακτίνες X για τη λήψη κινούμενων εικόνων σε πραγματικό χρόνο του εσωτερικού ενός αντικειμένου και τον αριθμό των ψηφιακών εικόνων (καρέ) που αποκτήθηκαν κατά τη διάρκεια της εξέτασης. Παρακάτω δίνεται το EWMA όπου στο σημείο 37 δίνει σήμα εκτός ελέγχου και άρα απαιτούνται διορθωτικές κινήσεις.



- Q-chart

Μια άλλη πρόταση διαγραμμάτων ελέγχου είναι τα Q διαγράμματα που βασίζονται στην γεωμετρική κατανομή. Στον έλεγχο των λοιμώξεων, επειδή τα συνήθη διαγράμματα SPC βασίζονται στα παρατηρηθέντα ποσοστά και τη διωνυμική κατανομή απαιτούν εξαιρετικά μεγάλα μεγέθη δειγμάτων, ορισμένοι συγγραφείς έχουν χρησιμοποιήσει τον αριθμό των ημερών μεταξύ των λοιμώξεων (DBI) και τη γεωμετρική κατανομή ως βάση για την κατασκευή διαγραμμάτων. Ωστόσο προτάθηκε η μετατροπή των δεδομένων DBI από ορισμένους μετασχηματισμούς για τη βελτίωση της κανονικότητας των δεδομένων. Στη συνέχεια, τα μετασχηματισμένα δεδομένα σχεδιάζονται σε κλασικά διαγράμματα ελέγχου μεμονωμένων μετρήσεων. Αυτή η σχεδίαση μπορεί να δώσει μια μάλλον αδιάφορη ανάλυση για αυτούς τους τύπους δεδομένων ενώ μερικές φορές μπορεί ακόμη και να είναι παραπλανητική. Για αυτό το λόγο προτάθηκε η χρήση ενός διαγράμματος ελέγχου για DBI με βάση άμεσα τη γεωμετρική κατανομή των δεδομένων. Το διάγραμμα σχηματίστηκε με τη χρήση ορίων ελέγχου που βασίζονται σε όρια ελέγχου τριών σίγμα ή πιθανότητας για τη γεωμετρική κατανομή. Όταν το ποσοστό μόλυνσης p δεν είναι γνωστό εκ των προτέρων, τα όρια αυτά σχηματίζονται με την αντικατάσταση p στους τύπους υπολογισμού των ορίων ελέγχου από μια εκτίμηση. Αυτά είναι τα διαγράμματα ελέγχου Q.

Ας υποθέσουμε ότι μια περίοδος (όπως μια εβδομάδα, μήνας ή έτος) χωρίζεται σε χρονικά διαστήματα (όπως ημέρες) ίσου μήκους. Εξετάζουμε ένα συμβάν ενδιαφέροντος που εμφανίζεται στον τομέα του χρόνου, όπως η εμφάνιση μιας περίπτωσης συγκεκριμένου τύπου μόλυνσης. Έστω X υποδηλώνει τον αριθμό των χρονικών διαστημάτων μεταξύ διαδοχικών συμβάντων του συμβάντος, όπως ο αριθμός ημερών μεταξύ διαδοχικών εμφανίσεων μιας συγκεκριμένης λοίμωξης στη λειτουργική μονάδα υπό παρακολούθηση, δηλαδή, στον πληθυσμό που κινδυνεύει. Επιπλέον, ας υποδηλώσουμε την πιθανότητα ότι το συμβάν θα συμβεί σε ένα από τα χρονικά διαστήματα (δηλαδή, σε οποιαδήποτε συγκεκριμένη ημέρα). Αν ισχύει ότι α) η πιθανότητα εμφάνισης p σε ένα χρονικό διάστημα είναι ίδια για όλα τα διαστήματα, β) τα συμβάντα συμβαίνουν ανεξάρτητα σε διαφορετικά χρονικά διαστήματα και γ) η πιθανότητα εμφάνισης περισσότερων του ενός συμβάντος στο ίδιο χρονικό διάστημα είναι μικρή (περίπου μηδέν), τότε η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί γεωμετρική κατανομή με πιθανότητα p .

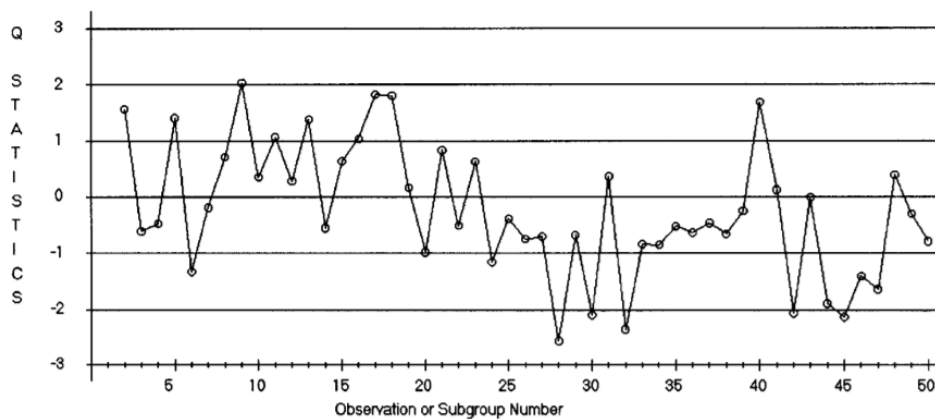
Ας υποθέσουμε ακόμα ότι ξεκινάμε ένα πρόγραμμα επιτήρησης μιας υγειονομικής περίθαλψης ή ιατρικής εγκατάστασης, όπως ένα νοσοκομείο ή, ίσως, μια συγκεκριμένη υπηρεσία, όπως ένα χειρουργείο ή μαιευτική πτέρυγα μέσα σε μια μεγαλύτερη εγκατάσταση. Στη συνέχεια, θεωρούμε το X_1 να δηλώνει τον αριθμό των ημερών μέχρι να εμφανιστεί η πρώτη μόλυνση, το X_2 δηλώνει τον αριθμό των πρόσθετων ημερών μέχρι να εμφανιστεί η δεύτερη μόλυνση και ούτω καθεξής μέχρι να υποδείξουμε με X_n τον αριθμό των πρόσθετων ημερών μέχρι να εμφανιστεί η n -ιοστή λοίμωξη. Στη συνέχεια, εάν ο ρυθμός μόλυνσης p είναι σταθερός, οι τιμές X_1, X_2, \dots, X_n αποτελούν ένα δείγμα μεγέθους n από μια γεωμετρική κατανομή.

Το διάγραμμα ελέγχου Q είναι ένας συγκεκριμένος τύπος διαγράμματος ελέγχου Shewhart και, συνεπώς, οι γραμμές σε $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ σχεδιάζονται σε μονάδες τυπικής απόκλισης πάνω

και κάτω από την κεντρική γραμμή όταν ο ρυθμός μόλυνσης είναι σταθερός. Το διάγραμμα συνοδεύεται και από τους εξής κανόνες:

- 1) Εάν ένα σημείο είναι πάνω από το όριο ελέγχου +3 τότε σηματοδοτείται αύξηση στο ποσοστό μόλυνσης ενώ εάν ένα σημείο είναι κάτω από το -3 τότε σηματοδοτείται μείωση του ποσοστού μόλυνσης.
- 2) Εάν τουλάχιστον 4 από 5 συνεχόμενα σημεία είναι πάνω από το όριο ελέγχου +1 τότε σηματοδοτείται αύξηση του ποσοστού μόλυνσης. Εάν τουλάχιστον 4 από 5 διαδοχικά σημεία είναι κάτω από το -1 όριο ελέγχου τότε σηματοδοτείται μείωση του ποσοστού μόλυνσης.

Ένα Q-διάγραμμα χρησιμοποιήθηκε για το DBI στη μονάδα εντατικής θεραπείας ενός νοσοκομείου για μια περίοδο κατά την οποία παρατηρήθηκαν 25 λοιμώξεις (Quesenberry, 2000). Καθ' όλη τη διάρκεια αυτής της περιόδου, το ποσοστό μόλυνσης που παρατηρήθηκε ήταν περίπου 36 ανά 1000 ημέρες, και το διάγραμμα δεν σηματοδότησε καμία αστάθεια στη διαδικασία μόλυνσης. Το προσωπικό θεώρησε ότι το ποσοστό αυτό θα μπορούσε να βελτιωθεί, και ξεκίνησε μια πρωτοβουλία δυναμικής βελτίωσης. Όπως φαίνεται στο διάγραμμα παρατηρείται μείωση του συνολικού ποσοστού μόλυνσης αφού υπάρχουν 4 από 5 (44-47) συνεχόμενα σημεία κάτω από το όριο -1 σύμφωνα με τον 2^ο κανόνα.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Η χρήση των διαγραμμάτων ελέγχου στα Οικονομικά της Υγείας

4.1 Εισαγωγή

Όπως επισημάνθηκε και σε προηγούμενα κεφάλαια η εφαρμογή και χρήση των διαγραμμάτων ελέγχου έχει παρατηρηθεί σε μια μεγάλη γκάμα κλάδων με έναν από αυτούς να είναι και εκείνος της υγείας. Πέραν της παρακολούθησης μιας ασθένειας, της απόδοσης εργαζομένων, του χρόνου αναμονής των πελατών κ.α., τεχνικές των διαγραμμάτων ελέγχου έχουν χρησιμοποιηθεί και στο περιβάλλον των οικονομικών. Τα διαγράμματα ελέγχου αποτελούν ισχυρά, φιλικά προς τον χρήστη και στατιστικά αυστηρά εργαλεία ανάλυσης μιας διεργασίας που χρησιμοποιούνται τόσο από ερευνητές όσο και από επαγγελματίες (Benneyan et al., 2003). Η σωστή κατασκευή και η αποτελεσματική εκμετάλλευσή τους στο τομέα της υγείας και πιο συγκεκριμένα σε αυτό των οικονομικών με τόσες ιδιοσυγκρασίες σε σχέση με άλλα οικονομικά περιβάλλοντα, οδηγεί στη λήψη αποφάσεων και την εφαρμογή στρατηγικών για την καλύτερη διαχείριση και παροχή υπηρεσιών υγείας. Ειδικότερα τις τελευταίες δεκαετίες που παρατηρείται ιδιαίτερο ενδιαφέρον στο κομμάτι των οικονομικών υγείας από την πλευρά του σύγχρονου μάνατζμεντ στη διοίκηση υπηρεσιών υγείας (Μανιαδάκης, 2005), τα διαγράμματα ελέγχου αποτελούν ένα αξιόπιστο μέσο για τους υπεύθυνους λήψης αποφάσεων.

Στα όσα έχουν περιγραφεί μέχρι τώρα, σαν περιβάλλον της υγείας θεωρείται η ιατρική-νοσοκομειακή όψη. Ωστόσο ο κλάδος αυτός διασπάται και σε άλλους όπως ο φαρμακευτικός, νοσηλευτικός, ερευνητικός κ.α., που όλοι μαζί όμως τον συνθέτουν. Είναι ένα δυναμικό περιβάλλον με υψηλές ευθύνες τόσο σε ατομικό όσο και κοινωνικό επίπεδο όπου δραστηριοποιούνται πολλοί επαγγελματίες. Ένα δυσάρεστο φαινόμενο που παρατηρείται στο χώρο σύμφωνα με την Ετήσια Διεθνή Έρευνα Gallup 2013 (Ανδρεαδάκη Ε. & Καλοκαιρινού Αναγνωστοπούλου Α. 2018) είναι το κομμάτι της διαφθοράς το οποίο αποτελεί μάλιστα το σημαντικότερο πρόβλημα που θα πρέπει να αντιμετωπίσει ο άνθρωπος σήμερα μαζί με το φαινόμενο της σπατάλης και της κατάχρησης υπηρεσιών υγείας, με διάφορες στατιστικές μεθόδους να έχουν εφαρμοστεί για την παρακολούθηση και εξάλειψή του (Kirlidog & Asuk, 2012). Σε οικονομικά δεδομένα χρησιμοποιούνται περισσότερο τεχνικές data mining, ανάλυσης χρονοσειρών, νευρωνικών δικτύων κ.α. αφού δεν έχουν αναπτυχθεί και μελετηθεί σε βάθος διαγραμματικές τεχνικές ελέγχου για την εξορισμού παρακολούθηση οικονομικών στοιχείων. Διαγράμματα ελέγχου όμως έχουν χρησιμοποιηθεί για τον έλεγχο κατανάλωσης φαρμάκων, την παρακολούθηση των καθαρών εσόδων ανά ασθενή που μεταφράζονται σε λειτουργική και οικονομική απόδοση (Stewart & Greisler, 2002), των εξόδων προσωπικού ανά βάρδια που μεταφράζεται σε μεταβλητότητα του προϋπολογισμού του εκάστοτε νοσοκομείου (Shaha, 1995) και του μέσου κόστους ανά επέμβαση (Johnson, Martin 1996). Στην συνέχεια θα δοθούν μερικές θεωρητικές βάσεις για την παρακολούθηση οικονομικών δεδομένων καθώς και αναφορές εφαρμογών στατιστικού ελέγχου διεργασιών στα οικονομικά, ενώ θα γίνει και αναφορά και στο κομμάτι της υγείας.

4.2 Χρονοσειρές

Η εφαρμογή οποιασδήποτε μεθόδου ανάλυσης δεδομένων για να πραγματοποιηθεί και να είναι αποτελεσματική προϋποθέτει την τήρηση ορισμένων υποθέσεων. Στη περίπτωση μη εκπλήρωσης τουλάχιστον μιας υπόθεσης τα εξαγόμενα αποτελέσματα θεωρούνται ανακριβή. Όσον αφορά τα τυπικά διαγράμματα ελέγχου Shewhart που αναπτύχθηκαν σε προηγούμενο κεφάλαιο θα πρέπει για μια διεργασία που είναι εντός ελέγχου τα δεδομένα να κατανέμονται κανονικά και να είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους (Αντζουλάκος 2016). Αν οι δύο αυτές συνθήκες δεν ισχύουν ταυτόχρονα τότε τα διαγράμματα είναι αμφισβητούμενα εξάγοντας λανθασμένα συμπεράσματα. Βέβαια, αν δεν αληθεύει η υπόθεση της κανονικότητας το ζητούμενο μπορεί να ξεπεραστεί χρησιμοποιώντας κάποιο μετασχηματισμό. Αν όμως υπάρχει αυτοσυσχέτιση, γεγονός εφικτό και συχνό για χρηματοοικονομικά δεδομένα καθώς οι μετρήσεις που καταγράφονται για το χαρακτηριστικό που μελετάται είναι πιθανό να μην είναι ανεξάρτητες, η αποτελεσματικότητα και λειτουργικότητα των τυπικών διαγραμμάτων ελέγχου δεν είναι η αναμενόμενη (Martin & Petr, 2012). Ακόμα και η περίπτωση εμφάνισης μικρού βαθμού αυτοσυσχέτισης των δεδομένων οδηγεί σε πληθώρα λανθασμένων εκτός ελέγχου συναγερμών (Montgomery & Mastrangelo 1991) και άρα στη λήψη λανθασμένων αποφάσεων.

Όταν λοιπόν παρατηρούνται δεδομένα με ύπαρξη αυτοσυσχέτισης, ο τρόπος αντιμετώπισης που επικρατεί στη βιβλιογραφία είναι η στοχαστική μοντελοποίησή τους χρησιμοποιώντας το πρότερον μοντέλο χρονοσειρών. Το επόμενο βήμα από την επιλογή και αξιοποίηση του μοντέλου είναι η απεικόνιση των καταλοίπων σε κάποιο διάγραμμα ελέγχου με απώτερο σκοπό την μελέτη και τον εντοπισμό αλλαγών στη δομή της χρονοσειράς (Knoth & Schmid, 2004). Προτού δοθούν μερικοί τρόποι αντιμετώπισης του προβλήματος, αξίζει να σημειωθεί ότι άμεσα συνδεδεμένη έννοια η οποία επηρεάζει και την επιλογή του μοντέλου είναι η έννοια της στασιμότητας. Με τον χαρακτηρισμό της στάσιμης χρονοσειράς, δηλώνεται ότι δεν υπάρχει συστηματική αλλαγή στις στατιστικές της ιδιότητες (μέσος και διακύμανση) με την πάροδο του χρόνου, ενώ η συνδιακύμανση για τις τιμές δύο χρονικών περιόδων εξαρτάται μόνο από τις χρονικές υστερήσεις. Αποτελεί ένα από τα βασικότερα προβλήματα και το νούμερο ένα που καλείται κάποιος να αντιμετωπίσει.

Θεωρώντας Y_t το χαρακτηριστικό που μελετάται την t χρονική στιγμή θα έχουμε:

- Αυτοπαλίνδρομο Μοντέλο (Autoregressive Model)

Η απλούστερη μορφή αυτού του μοντέλου είναι η

$$Y_t = \xi + \varphi \cdot Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

με $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ ενώ ξ και φ είναι άγνωστες σταθερές, με $|\varphi| < 1$. Ένα τέτοιο μοντέλο συμβολίζεται ως AR(1) και καλείται αυτοπαλίνδρομο πρώτης τάξης, με τα δεδομένα να έχουν μέση τιμή $\xi / (1 - \varphi)$ και τυπική απόκλιση $\sigma / \sqrt{(1 - \varphi)^2}$. Αφού εκτιμηθεί το φ από τις διαθέσιμες παρατηρήσεις προκύπτει η εκτιμώμενη τιμή της Y_t , με τα κατάλοιπα να υπολογίζονται από την ακόλουθη σχέση

$$\varepsilon_t = Y_t - \hat{Y}_t.$$

Πλέον είναι δυνατή η χρήση των τυπικών διαγραμμάτων ελέγχου χρησιμοποιώντας τους παραπάνω υπολογισμούς αφού τα ε_t είναι ανεξάρτητα ακολουθώντας κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση σ^2 (σταθερή). Όταν παρατηρηθεί σημείο εκτός ελέγχου ή κάποιο μη προβλεπόμενο μοτίβο, η παράμετρος φ έχει μεταβληθεί και άρα η Y_t είναι εκτός ελέγχου. Η γενίκευση αυτού είναι το AR(p) μοντέλο p-τάξης που δίνεται από την σχέση

$$Y_t = \xi + \varphi_1 \cdot Y_{t-1} + \varphi_2 \cdot Y_{t-2} + \dots + \varphi_p \cdot Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

όπου η Y_t γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των p προηγούμενων τιμών.

- Μοντέλο κινητού μέσου (Moving Average)

Αυτό το μοντέλο χρησιμοποιείται για φαινόμενα όπου τα αποτελέσματα που προκύπτουν συνεχίζουν να έχουν επιδράσεις και μετά το πέρας εμφάνισής του (Martin & Petr, 2012). Η απλούστερη μορφή σε αυτή την περίπτωση είναι η

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t - \theta \cdot \varepsilon_{t-1}$$

Συμβολίζεται με MA(1) και καλείται μοντέλο κινητού μέσου πρώτου βαθμού. Η συσχέτιση διαδοχικών παρατηρήσεων Y_t και Y_{t-1} υπολογίζεται από τον τύπο $\rho_1 = \theta / (1 + \theta^2)$ ενώ για τις υπόλοιπες υστερήσεις είναι ίση με 0. Η γενίκευση αυτού του μοντέλου είναι το MA(q) q-τάξης, που ορίζεται ως

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \cdot \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \cdot \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \cdot \varepsilon_{t-q}$$

Τα προαναφερθέντα μοντέλα χρησιμοποιούνται όταν αντιμετωπίζονται στάσιμες χρονοσειρές. Όταν αυτή η υπόθεση δεν ισχύει τότε χρησιμοποιούνται πρώτες, δεύτερες ... και γενικότερα d διαφορές ώσπου να εξασφαλισθεί μια στάσιμη χρονοσειρά, οδηγώντας στην δημιουργία των μοντέλων ARIMA(p,d,q), autoregressive integrated moving average models. Σύμφωνα και με τα παραπάνω, το p αντιστοιχεί στις παραμέτρους του αυτοπαλίνδρομου μέρους του μοντέλου, το q στις παραμέτρους του κινητού μέρους και d είναι οι διαφορές για τον σχηματισμό στάσιμης χρονοσειράς.

Έχοντας καθορίσει το καταλληλότερο μοντέλο για τα δεδομένα που μελετώνται επιλέγεται αντίστοιχα και το διάγραμμα ελέγχου. Στην περίπτωση δεδομένων υγείας όπου επικρατούν κυρίως διακριτές διαδικασίες και έχοντας ανεξάρτητα και κανονικά κατανομημένα κατάλοιπα, θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ένα ARIMA διάγραμμα ελέγχου όπου η κεντρική γραμμή και τα άρια ελέγχου του δίνονται ακολούθως

$$UCL = \bar{e} + \frac{3}{1.128} \cdot \bar{R}_{kl}$$

$$CL = \bar{e} \approx 0$$

$$LCL = \bar{e} - \frac{3}{1.128} \cdot \bar{R}_{kl}$$

Όπως είναι εύκολα κατανοητό \bar{e} αντιστοιχεί στο μέσο των καταλοίπων και \bar{R}_{kl} αντιστοιχεί στο κινούμενο εύρος αυτών. Ένα τέτοιο διάγραμμα χρησιμοποιήθηκε για την παρακολούθηση της

χρονοσειράς του ετήσιου ΑΕΠ του Ηνωμένου Βασιλείου από το 1960 έως το 1997 (Martin & Petr, 2012).

Οι εν λόγω μέθοδοι αποτελούν προσεγγίσεις της απόδοσης της μέσης τιμής της χρονοσειράς ώστε να προβλεφθούν οι επόμενες. Παρ' όλα αυτά, δεν ενδείκνυται η χρήση τους για την πρόβλεψη της διακύμανσης που είναι και το ζητούμενο για την μελέτη και προσέγγιση μιας χρηματοοικονομικής σειράς. Απάντηση σε αυτό το πρόβλημα έδωσαν τα μοντέλα ARCH (Engle 1982) και GARCH (Bollerslev 1986).

Η μέθοδος που εφηύρε ο Engle (1982) βασίζεται στη μοντελοποίηση της διακύμανσης των χρονοσειρών υπό τον αναδρομικό υπολογισμό της υπό όρους διακύμανσης. Ο στόχος είναι η μελέτη της μεταβολής της διακύμανσης για την ανάλυση ετεροσκεδαστικών, όπως δηλώνει και το όνομα του μοντέλου (Autoregressive Conditionally Heteroscedastic), χρονοσειρών. Δηλαδή χρονοσειρών που οι τιμές τους εμφανίζουν διαφορετική διακύμανση. Στο μοντέλο χρησιμοποιούνται σταθμίσεις που υπολογίζονται βάσει ιστορικών δεδομένων, με τις μεγαλύτερες τιμές να δίνονται στις πιο πρόσφατες παρατηρήσεις. Το κύριο πλεονέκτημα αυτής της προσέγγισης είναι η αντιμετώπιση του φαινομένου μεταβλητότητας κατά ομάδες ή «volatility clustering», όπου υψηλές τιμές έχουν την τάση να ακολουθούν υψηλές ενώ το ίδιο ισχύει και στις χαμηλές. Το μοντέλο p-τάξης που συμβολίζεται ως ARCH(p) δίνεται στον ακόλουθο τύπο

$$Y_t = \sigma_t \cdot \varepsilon_t$$

με $\sigma_t^2 = a_0 + a_1 \cdot Y_{t-1}^2 + \dots + a_p \cdot Y_{t-p}^2$ ($a_0 > 0$ και $a_i \geq 0$ για $i = 1, 2, \dots$) και ε_t ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν τυπική κανονική κατανομή.

Ένα πρόβλημα που παρατηρήθηκε κατά την εφαρμογή του τελευταίου μοντέλου ήταν η ανάγκη μεγάλης τάξης για την απόκτηση μη αμφισβητούμενων συμπερασμάτων, γεγονός που οδηγεί στην εκτίμηση περισσότερων παραμέτρων. Το εμπόδιο αυτό ξεπεράστηκε μέσω του γενικευμένου μοντέλου GARCH που προτάθηκε από τον Bollerslev (1986). Στο ήδη υπάρχον μοντέλο προστέθηκαν q αυτοπαλίνδρομοι όροι κινούμενου μέσου των δεσμευμένων διακυμάνσεων, κατασκευάζοντας με αυτό τον τρόπο το GARCH(p,q), στο οποίο συνεισφέρουν τόσο χρονικές υστερήσεις των τιμών της χρονοσειράς όσο και οι υπό συνθήκη διακυμάνσεις της. Το μοντέλο τάξεως (p,q) συμβολίζεται ως GARCH(p,q) και δίνεται στον ακόλουθο τύπο

$$Y_t = \sigma_t \cdot \varepsilon_t$$

όπου για τα ε_t ισχύει ότι και προηγουμένως αλλά για το σ_t^2 έχουμε $\sigma_t^2 = a_0 + a_1 \cdot Y_{t-1}^2 + \dots + a_p \cdot Y_{t-p}^2 + \gamma_1 \cdot \sigma_{t-1}^2 + \dots + a_q \cdot \sigma_{t-q}^2$ με $a_i > 0$ και $\gamma_j > 0$ για $i = 1, \dots, p$ και $j = 1, \dots, q$ αντίστοιχα.

Μια επέκταση του παραπάνω μοντέλου είναι αυτή των πολυμεταβλητών GARCH. Προκειμένου να κατανοήσουμε τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ οικονομικών δεδομένων τα πολυμεταβλητά υποδείγματα GARCH συνεισφέρουν στην μελέτη αυτή αφού λαμβάνουν υπόψη συσχετίσεις μεταξύ εξεταζόμενων μεταβλητών. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η τιμή μιας μεταβλητής να επηρεάζει τις τιμές των υπολοίπων. Η γενική μορφή αυτών είναι ίδια με εκείνη των μονομεταβλητών με την διαφορά ότι ο πίνακας διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων αποτελεί χρονικά μεταβαλλόμενο στοιχείο ύστερα από την εισαγωγή ενός αριθμού μεταβλητών. Αν και η κατασκευαστική τους φύση μοιάζει ελκυστική, αν αναλογιστεί κανείς ότι επιτρέπουν την

είσοδο πολλών μεταβλητών, η εφαρμογή τους δεν είναι απλή. Αυτό οφείλεται κυρίως στον αριθμό των παραμέτρων που πρέπει να εκτιμηθούν καθώς όσες περισσότερες μεταβλητές μελετώνται τόσο περισσότεροι παράμετροι πρέπει να εκτιμηθούν.

Τεχνικές πολυμεταβλητών διαγραμμάτων ελέγχου σε συνδυασμό με πολυμεταβλητά μοντέλα χρονοσειρών έχουν εφαρμοστεί στην οικονομική παρακολούθηση (financial monitoring). Εξαιτίας της δυσκολίας μοντελοποίησης τέτοιων χρονοσειρών απαιτείται και προσεκτική κατασκευή κατάλληλων διαγραμμάτων ελέγχου για την παρακολούθησή τους, καθώς σε αντίθετη περίπτωση μπορεί να οδηγήσουν σε λανθασμένα συμπεράσματα (Sotiris Bersimis et al., 2016). Στο πεδίο της οικονομετρίας το συνηθέστερο πρόβλημα αλλά και πρόκληση είναι η ανίχνευση αλλαγών στις παραμέτρους μιας στοχαστικής διαδικασίας αποτελώντας ένα ζήτημα λήψης απόφασης. Πραγματοποιούνται δοκιμές σε δύο ξεχωριστά υποδείγματα. Διαφορετικά χρησιμοποιούνται ακολουθιακοί μέθοδοι έχοντας το ίδιο σημείο εκκίνησης μέχρι να παρθεί απόφαση μετατόπισης και άρα διακοπής της διεργασίας. Την δουλειά αυτή κάνουν τα διαγράμματα ελέγχου. Οι Taylor & Bodnar (2009) ανέπτυξαν διαγράμματα ελέγχου από την μεγιστοποίηση του λόγου πιθανοφάνειας και ακολουθιακών ελέγχων λόγου πιθανοφάνειας δύο προτεινόμεμων μοντέλων για την παρακολούθηση του διανύσματος των μέσων πολυμεταβλητών GARCH διεργασιών. Παρόμοια μελέτη έγινε και από τους (Å & Schmid, 2011) παρουσιάζοντας διαγράμματα ελέγχου για την παρακολούθηση του μέσου μιας πολυμεταβλητής Gaussian διαδικασίας. Η ιδέα πίσω από την μελέτη αυτή είναι να επιλεγεί το «καλύτερο» διάγραμμα ελέγχου υποθέτοντας ότι το μέγεθος της επίδρασης της μετατόπισης στο μέσο της διεργασίας είναι γνωστό. Εάν ένας επαγγελματίας καθορίζει την τιμή αναφοράς ενός σχήματος CUSUM ή την παράμετρο εξομάλυνσης ενός γραφήματος EWMA, πρέπει να διορθώσει την αλλαγή σε σχέση με αυτό θέλει να προστατευθεί με τον καλύτερο τρόπο. Τα «καλύτερα» διαγράμματα λαμβάνονται με την εφαρμογή της προσέγγισης λόγου πιθανοφάνειας και ακολουθιακών ελέγχων λόγου πιθανοφάνειας. Αυτό πραγματοποιείται στη βάση δύο μοντέλων αλλαγής σημείων (change-points models).

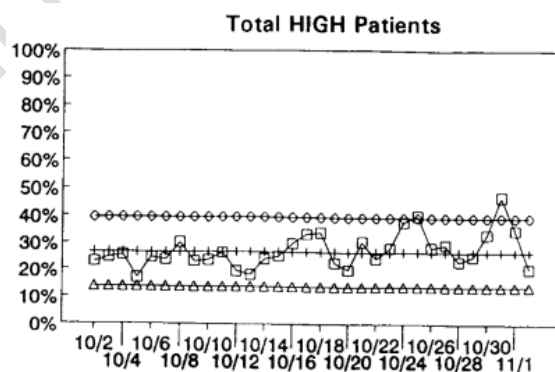
4.3 Διαγράμματα ελέγχου και Οικονομικά Υγείας

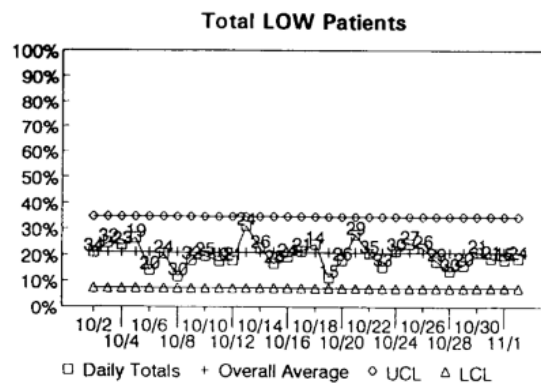
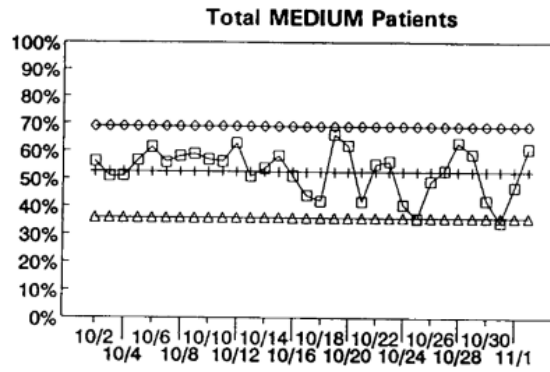
Όπως έχει ήδη αναφερθεί στο τομέα των οικονομικών λίγες αναφορές του στατιστικού ελέγχου διεργασιών και ειδικότερα των διαγραμμάτων ελέγχου έχουν γίνει. Ωστόσο η παρακολούθηση οικονομικών χρονοσειρών παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον εξαιτίας της ιδιαίτερης φύσης τους όσον αφορά το πεδίο χρήσεις των καθώς και της συχνότητας συλλογής των δεδομένων που μπορεί να ποικίλοι από ωριαία δεδομένα μέχρι μηνιαία ακόμη και ετήσια. Ακόμα μεγαλύτερη πρόκληση αποτελεί η παρακολούθηση τέτοιων δεδομένων στο χώρο της Υγείας όπου και η εφαρμογή τέτοιων μεθόδων μοιάζει σπάνια. Εντούτοις υπάρχουν ορισμένες μελέτες αξιοποίησης αυτών των μεθόδων.

Οι Johnson & Martin (1996) μελέτησαν τα οικονομικά αποτελέσματα που επιφέρουν ειδικά προγράμματα εκπαίδευσης και επιμόρφωσης γιατρών. Πιο συγκεκριμένα μελέτησαν το μέσο κόστος ανά επέμβαση σε μια πλήρη αντικατάσταση ισχίου. Ορθοπεδικοί χειρουργοί συμμετείχαν στο εκπαιδευτικό αυτό πρόγραμμα το οποίο πραγματοποιήθηκε σε μια περίοδο 7 εβδομάδων. Διαγράμματα X-bar και R χρησιμοποιήθηκαν για την παρακολούθηση των πόρων που χρησιμοποιούνται πριν και μετά την πραγματοποίηση του σεμιναρίου επιμόρφωσης. Αυτό

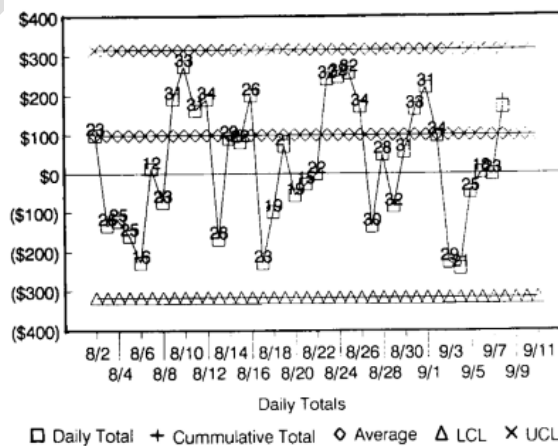
που παρατηρήθηκε σε πρώτο στάδιο ήταν ότι η διάρκεια παραμονής των ασθενών στο νοσοκομείο ύστερα από την επέμβαση μειώθηκε από 13.7, κατά μέσο όρο ημέρες, σε 9.9 ημέρες μειώνοντας έτσι νοσοκομειακού πόρους. Η παραπάνω μείωση παραμονής μεταφράζεται σε μείωση συνολικών χρεώσεων από 22.103 δολάρια σε 18.607 δολάρια κάνοντας τα εκπαιδευτικά αυτά προγράμματα άκρως αποτελεσματικά για την ελάττωση κατανάλωσης νοσοκομειακών πόρων.

Ο Shaha (1995) μελέτησε τις δαπάνες που καταναλώνονται στις βάρδιες των φροντιστών και των νοσοκόμων. Όπως κάθε οικονομικός οργανισμός έτσι και οι οργανισμοί ιατροφαρμακευτικής περίθαλψης έχουν ανάγκη από σωστή και συστηματική οργάνωση ώστε να προσφέρουν τις υπηρεσίες τους κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο. Στο Intermountain Health Care (IHC), ένα σύστημα υγειονομικής περίθαλψης 24 εγκαταστάσεων στην πόλη Salt Lake στην Γιούτα των ΗΠΑ εφαρμόστηκε ένα νέο σύστημα οξύτητας των ασθενών (acuity system). Με τον όρο «acuity» δηλώνεται η ψυχοσωματική σοβαρότητα της ασθένειας του ασθενούς η οποία συνεπάγεται και το βαθμό ανάγκης για νοσηλευτική φροντίδα. Αφού αξιολογήθηκαν οι ανάγκες του κάθε ασθενή βάσει προκαθορισμένων κριτηρίων, το επόμενο βήμα ήταν η ταξινόμηση αυτών σε τρεις κατηγορίες χαμηλή, μέτρια και υψηλή ανάλογα με τις ανάγκες πόρων και αριθμού νοσοκόμων για επίβλεψη. Με αυτό τον τρόπο καθορίζεται το επίπεδο στελέχωσης νοσοκόμων για το κάθε τμήμα και γίνεται η σωστή κατανομή των γενικών εξόδων καθώς σε διαφορετική περίπτωση παρατηρείται κατάχρηση υπηρεσιών υγείας. Για τον λόγο αυτό διαγράμματα ελέγχου εφαρμόστηκαν για την μελέτη της μεταβλητότητας του ποσοστού των ασθενών που ταξινομήθηκαν σε κάθε μια από τις παραπάνω κατηγορίες. Ενώ στις βιομηχανικές διεργασίες ο στόχος είναι να μειωθεί η μεταβλητότητα και να τυποποιηθεί η διεργασία, κάτι τέτοιο δεν ισχύει σε αυτή την μελέτη παρουσιάζοντας μια ιδιαιτερότητα. Σκοπός δεν είναι απαραίτητα η μείωση της μεταβλητότητας αλλά η κατανόηση της που θα οδηγήσει σε λήψεις καλύτερων αποφάσεων για τη χρήση των διαθέσιμων πόρων για την φροντίδα των ασθενών. Διαγράμματα ελέγχου για μια από τις μονάδες για τις τρεις κατηγορίες ταξινόμησης δίνονται στις εικόνες που ακολουθούν



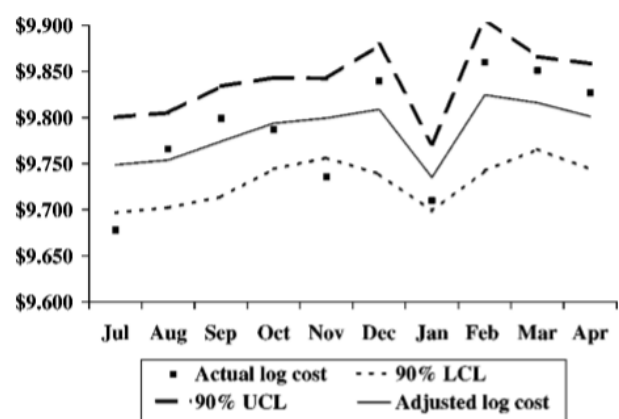
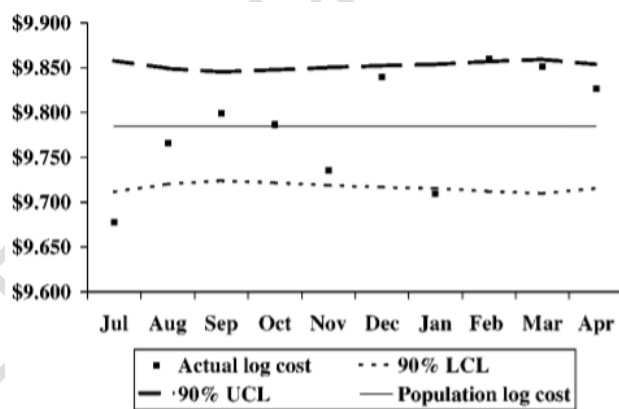


Επιπλέον για την καλύτερη διαχείριση του υπάρχοντος προϋπολογισμού, κατανεμήθηκε το budget που αντιστοιχεί σε κάθε τμήμα έτσι ώστε οι υπεύθυνοι λήψεις αποφάσεων σε συνεργασία με τους προϊσταμένους νοσοκόμους να διαχειρίζονται το ανθρώπινο δυναμικό με εποικοδομητικό τρόπο για την παροχή φροντίδας στους ασθενείς. Για να γίνει αυτό κατασκευάστηκε ένα διάγραμμα ελέγχου για την ημερήσια παρακολούθηση των χρηματικών πόρων που δαπανώνται σε σχέση με τους αντίστοιχους πόρους (budget) παριστάνοντας τις αποκλίσεις από το προϋπολογισμό. Το διάγραμμα αυτό δίνεται στην εικόνα που ακολουθεί



Μια ακόμα εφαρμογή του στατιστικού ελέγχου διεργασιών και συγκεκριμένα των διαγραμμάτων ελέγχου παρουσίασαν οι Eisenstein & Bethea (1999). Εξαιτίας της συνεχούς εξέλιξης το περιβάλλον της υγειονομικής περίθαλψης στις ΗΠΑ γίνεται ολοένα και πιο ανταγωνιστικό τα νοσοκομεία ερευνούν τρόπους για την παρακολούθηση και τον έλεγχο του κόστους. Στο νοσοκομείο Baptist Medical Center στην πόλη της Οκλαχόμα των ΗΠΑ διαγραμματικές μέθοδοι ελέγχου εφαρμόστηκαν για την επίβλεψη του ενδονοσοκομειακού κόστους για την επέμβαση αρτοστεφανιαίας παράκαμψης (CABG, coronary after bypass surgery). Η εν λόγω επέμβαση πραγματοποιείται όταν οι στεφανιαίες αρτηρίες δεν λειτουργούν σωστά και άρα δεν υπάρχει φυσιολογική αιματική ροή στην καρδιά με αποτέλεσμα να παρακάμπτονται με μοσχεύματα που δημιουργούν νέους τρόπους ώστε οξυγονωμένο αίμα να ρέει στην καρδιά. Ο λόγος της παρακολούθησης του κόστους της συγκεκριμένης επέμβασης είναι το γεγονός ότι αποτελεί μια επέμβαση ρουτίνας αλλά με υψηλό κόστος.

Τα δεδομένα που συλλέχθηκαν ήταν το κόστος της κάθε επέμβασης καθώς και οι μέρες παραμονής του κάθε ασθενή στην κλινική. Κατασκευάστηκαν δύο διαγράμματα, ένα μη προσαρμοσμένο και ένα προσαρμοσμένο στο μείγμα ασθενούς (patient-mix). Επειδή η κατανομή του κόστους ήταν λοξή προς τα δεξιά χρησιμοποιήθηκε ο λογάριθμος του κόστους. Στις δύο εικόνες που ακολουθούν, στην πρώτη δίνεται το διάγραμμα ελέγχου μη προσαρμοσμένο στο μείγμα ασθενή και στην δεύτερη δίνεται το προσαρμοσμένο. Αυτό που παρατηρήθηκε ήταν ότι στην πρώτη περίπτωση παρουσιάστηκαν τρία σημεία εκτός των ορίων ελέγχου ενώ στην δεύτερη μόνο δύο.

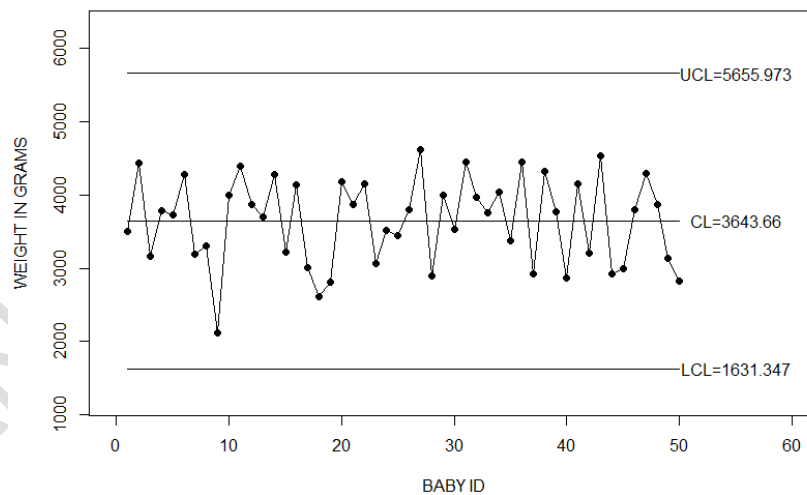


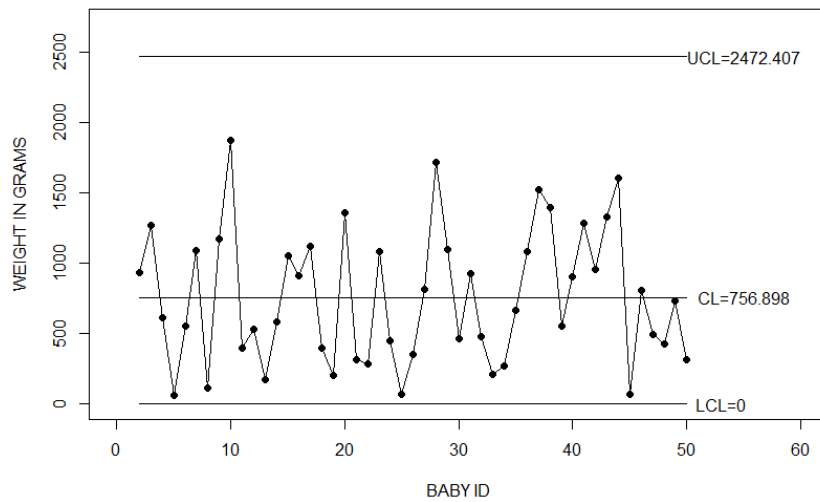
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Εφαρμογές Προσομοίωσης & Συμπεράσματα

5.1 Εφαρμογές Προσομοίωσης

- Κατά την γέννηση ενός βρέφους ένα σημαντικό ζήτημα είναι αυτό του βάρους του. Αυτό εξαρτάται τόσο από την τροφή που καταναλώνει η εγκυμονούσα μητέρα όσο και από τις καθημερινές της συνήθειες κατά την διάρκεια της κύησης. Με αφορμή αυτή την ιδέα κατασκευάστηκαν διαγράμματα ελέγχου για την παρακολούθηση του βάρους των νεογέννητων. Πιο συγκεκριμένα αφού παράχθηκαν 10^8 βάρη σύμφωνα με το φυσιολογικό εύρος ενός νεογέννητου, που κυμαίνεται από 2500 μέχρι 4500 γραμμάρια, ώστε να εκτιμηθεί η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση του (φυσιολογικού) βάρους εν συνεχεία παράχθηκαν 50 βάρη από την κανονική κατανομή με μέση τιμή και την τυπική απόκλιση που εκτιμήθηκαν. Το πρώτο εκ των δύο ακόλουθων διαγραμμάτων απεικονίζονται τα βάρη των 50 νέων βρεφών ενώ στο επόμενο παρουσιάζεται το κινούμενο εύρος αυτών. Η χρήση διαγραμμάτων ελέγχου για την παρακολούθηση των βαρών των νεογέννητων έχει επιδημιολογικό χαρακτήρα. Ακόμη δίνεται ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε για την δημιουργία των διαγραμμάτων.





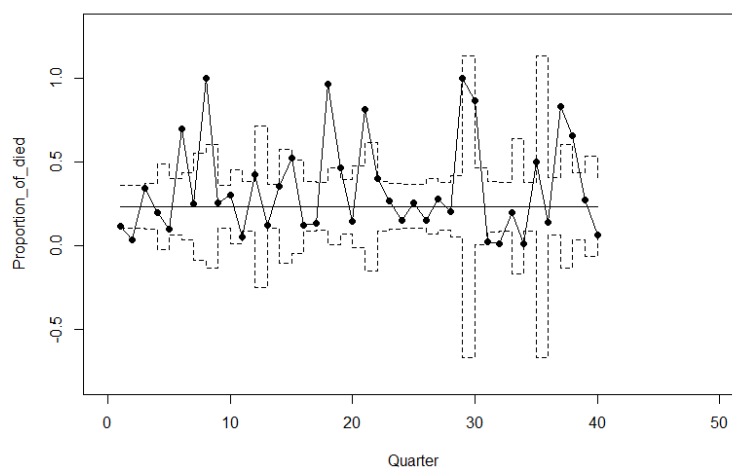
```

> #####
>                               ##Infant_weight##
> #####
>
> data=sample(2500:4500,100000000,replace=TRUE)
> mu=mean(data)
> s0=sd(data)
> m=50
> weight=round(rnorm(m,mean=mu,sd=s0))
> (Xbar=sum(weight)/m)
[1] 3643.66
> j=1
> MR=rep(0,times=m-1)
> for(i in 2:50){
+ MR[j]=max(weight[i-1],weight[i])-min(weight[i-1],weight[i]);
+ j=j+1
+ }
> MRbar=sum(MR)/(m-1)
> d2=1.1284
> (LCL=Xbar-3*MRbar/d2)
[1] 1631.347
> (UCL=Xbar+3*MRbar/d2)
[1] 5655.973
> x=1:50
> plot(x,weight,type="o",pch=16,xlim=c(0,60),ylim=c(1200,6300),xlab="BABY ID", ylab="WEIGHT IN GRAMS")
> y1=rep(LCL,times=50)
> y2=rep(Xbar,times=50)
> y3=rep(UCL,times=50)
> lines(x,y1);lines(x,y2);lines(x,y3)
> text(55,LCL,label="LCL=1631.347")
> text(55,Xbar,label="CL=3643.66")
> text(55,UCL,label="UCL=5655.973")

> D3=0
> D4=3.2665
> (MR_LCL=D3*MRbar)
[1] 0
> (MR_CL=MRbar)
[1] 756.898
> (MR_UCL=D4*MRbar)
[1] 2472.407
> x2=2:50
> plot(x2,MR,type="o",pch=16,xlim=c(0,60),ylim=c(0,2700),xlab="BABY ID", ylab="WEIGHT IN GRAMS")
> y1_MR=rep(MR_LCL,times=49)
> y2_MR=rep(MRbar,times=49)
> y3_MR=rep(MR_UCL,times=49)
> lines(x2,y1_MR);lines(x2,y2_MR);lines(x2,y3_MR)
> text(53,MR_LCL,label="LCL=0")
> text(55,MR_CL,label="CL=756.898")
> text(55,MR_UCL,label="UCL=2472.407")

```

- Μια σημαντική λοίμωξη που σχετίζεται με την παροχή υπηρεσιών υγείας είναι εκείνη από *Clostridium difficile*. Η εμφάνιση αυτής συνεπάγεται αυξημένη νοσηρότητα, θνητότητα, κόστος νοσηλείας καθώς και παραμονής στο νοσοκομείο. Τα τελευταία χρόνια έχει παρατηρηθεί μια αυξητική τάση αυτού του φαινομένου και μάλιστα σε εκδηλώσεις σοβαρών περιστατικών τόσο στην Ευρώπη όσο και την Αμερική. Οι βασικότεροι παράγοντες τέτοιων περιστατικών είναι η λανθασμένη αντιβιοτική θεραπεία και ενδεχόμενη έκθεση στο βακτήριο. Παράχθηκαν δεδομένα 40 τριμήνων με τον αριθμό των ασθενών και εκείνων που πέθαναν για την παρακολούθηση του ποσοστού θνησιμότητας. Στο παρακάτω διάγραμμα βλέπουμε αρκετά σημεία (ποσοστά θανάτων) εκτός ορίων ελέγχου γεγονός που συνδέεται με εμφάνιση ειδικής αιτίας μεταβλητότητας και άρα άπτεται έρευνας. Στην συνέχεια δίνεται και ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε για την δημιουργία του διαγράμματος.

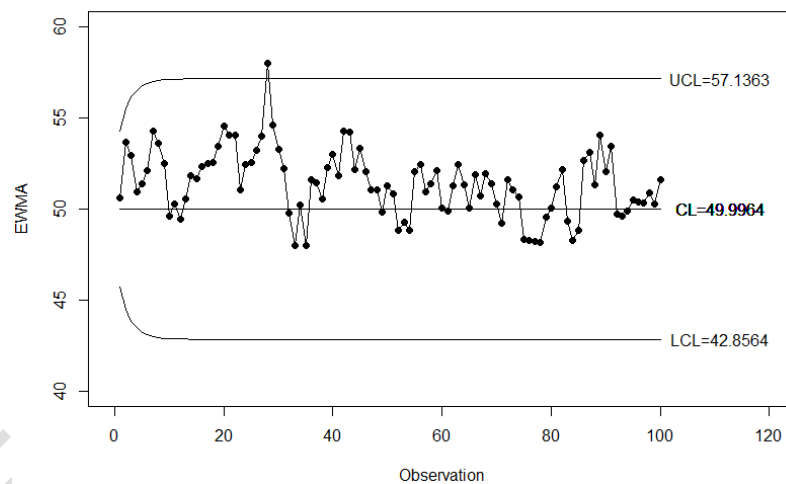


```

> #####
>                               ##Clostridium difficile##
> #####
> Quarter= seq(1,40,1)
> number_of_patients=sample(1:100,size=40,replace=TRUE)
> number_of_died=rep(0,times=40)
> j=1
> for (i in 1:40){
+   k=sample(1:30,size=1)
+   if(k<number_of_patients[i]){
+     number_of_died[j]=k
+   } else {
+     while(k>number_of_patients[i]){
+       k=sample(1:30,size=1)
+     }
+     number_of_died[j]=k
+   }
+   j=j+1
+ }
> proportion_of_died=rep(0,times=40)
> for(i in 1:40){
+   proportion_of_died[i]=number_of_died[i]/number_of_patients[i]
+ }
> pbar=sum(number_of_died)/sum(number_of_patients);(CL=pbar)
[1] 0.2364341
> LCL=rep(0,times=40);UCL=rep(0,times=40)
> for(i in 1:40){
+   LCL[i]=pbar-3*sqrt((pbar*(1-pbar))/number_of_patients[i]);
+   UCL[i]=pbar+3*sqrt((pbar*(1-pbar))/number_of_patients[i]);
+ }
> LCL[40];UCL[40];min(LCL);max(UCL)
[1] 0.07048552
[1] 0.4023827
[1] -0.6648975
[1] 1.137766
> plot(Quarter,LCL,type="s",pch=16,lty=2,xlim=c(0,50),ylim=c(-0.8,1.3),xlab="Quarter",ylab="Proportion_of_died")
> lines(Quarter,UCL,type="s",lty=2)
> points(Quarter,proportion_of_died,pch=16,type="o")
> y=rep(CL,times=40)
> lines(Quarter,y)

```

- Στα τέλη του 2019 εμφανίστηκε η πανδημία της νόσου του κορονοϊού 2019, ή εν συντομία COVID-19, που προκλήθηκε από τον ιό SARS-CoV-2. Ο ιός αυτός είναι μεταδοτικός και η μετάδοσή του πραγματοποιείται μέσω των σταγονιδίων του βήχα ή του φτερνίσματος. Ο ασθενής που έχει προσβληθεί από τον ιό εμφανίζει συμπτώματα υψηλού πυρετού, βήχα και αναπνευστικών δυσκολιών ενώ περιπτώσεις σοβαρότερων καταστάσεων μπορούν να οδηγήσουν σε πνευμονία και σύνδρομο οξείας αναπνευστικής δυσχέρειας (Harapan et al., 2020). Θεωρούμε ένα υποθετικό νοσοκομείο στο οποίο καταφθάνουν ασθενείς που εμφάνισαν τα συμπτώματα και θα θέλαμε να παρακολουθήσουμε τον αριθμό των ασθενών που φτάνουν και εισάγονται στο νοσοκομείο χρησιμοποιώντας ένα διάγραμμα EWMA. Θεωρούμε $\lambda=0.2$ και $L=3$. Ακόμη αρχικά παράγουμε ένα δείγμα 10000 ημερών από την Poisson(50) ώστε να εκτιμηθούν η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση. Στην συνέχεια εξαιτίας έλλειψης του ιού υποθέτουμε ότι τα άτομα φτάνουν με μέσο ρυθμό 100 την ημέρα (Poisson(100)), και παράγουμε δείγμα 100 ατόμων. Όπως είναι φυσικό το διάγραμμα δίνει σήμα εκτός ελέγχου όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί. Ακολούθως παρουσιάζεται και ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε για την κατασκευή του διαγράμματος βάσει των υποθέσεων που έγιναν.



```

> #####
>                                     ##Covid-19##
> #####
>
> x=rpois(10000,lambda=50)
> (target=mean(x))
[1] 49.9964
> (s=sd(x))
[1] 7.139992
> data=rpois(100,lambda=100)
> lambda=0.2
> L=3
> LCL=rep(0,times=100)
> UCL=rep(0,times=100)
> for (i in 1:100){
+   LCL[i]=target-L*s*sqrt((lambda/(2-lambda))*(1-(1-lambda)^(2*i)));
+   UCL[i]=target+L*s*sqrt((lambda/(2-lambda))*(1-(1-lambda)^(2*i)))
+ }
> z=target
> for (i in 1:100){
+   EWMA[i]=(1-lambda)*z+lambda*x[i];
+   z=EWMA[i]
+ }
> (min(LCL))
[1] 42.85641
> (max(UCL))
[1] 57.13639
> plot(EWMA~c(1:length(EWMA)),type="o",pch=16,ylim=c(40,60),xlim=c(0,120),xlab="Observation",
+ ylab="EWMA")
> x1=seq(1,100,1)
> lines(x1,LCL);lines(x1,UCL)
> CL=rep(target,times=100)
> lines(x1,CL)
> text(111,LCL[100],label="LCL=42.8564")
> text(111,CL,label="CL=49.9964")
> text(111,UCL[100],label="UCL=57.1363")

```

5.2 Συμπεράσματα - Συζήτηση

Τα διαγράμματα ελέγχου αποτελούν μια ισχυρή στατιστική μέθοδο παρακολούθησης δεδομένων σε πραγματικό χρόνο. Όπως τονίστηκε αν και η μορφή τους σε πρώτη όψη μοιάζει απλή, η κατασκευή και η ερμηνεία τους δεν είναι κάτι εύκολο. Απαιτείται καλή γνώση της θεωρίας της στατιστικής και του στατιστικού ελέγχου διεργασιών ώστε σε πρώτο στάδιο να κατασκευαστεί ένα διάγραμμα ελέγχου και εν συνεχεία να ερμηνευθεί ορθά. Το αξιοσημείωτο του στατιστικού ελέγχου διεργασιών είναι ο συνδυασμός πολλών κλάδων της στατιστικής επιστήμης που μεταφράζεται σε ένα διάγραμμα ελέγχου.

Το εύρος εφαρμογής των διαγραμματικών αυτών τεχνικών είναι αρκετά μεγάλο και σημαντικό για την παρακολούθηση δεδομένων σε πραγματικό χρόνο. Εφαρμογές έχουν πραγματοποιηθεί στην βιομηχανία, σε περιβαλλοντολογικό επίπεδο, σε οικονομικό επίπεδο, στην υγεία κ.α. Απώτερος στόχος των μεθόδων αυτών είναι η παρακολούθηση και η επιτήρηση διεργασιών που δεν πληρούν τις προδιαγραφές των εκάστοτε κλάδων έτσι ώστε να υπάρχει άμεση επέμβαση για να διορθωθούν.

Στα παραπάνω κεφάλαια έγινε μια αναφορά των διαγραμμάτων ελέγχου στο τομέα της υγείας. Αφού πρώτα παρουσιάστηκαν κλασικά μονομεταβλητά διαγράμματα ελέγχου Shewhart, CUSUM και EWMA δόθηκαν αντίστοιχες πολυμεταβλητές εκδοχές τους ενώ έπειτα ακολούθησαν εφαρμογές του κάθε διαγράμματος στο τομέα της παρακολούθησης δεδομένων υγείας. Στη συνέχεια έγινε μια εκτενέστερη αναφορά στο τομέα της υγείας με τεχνικές διαγραμμάτων ελέγχου αποκλειστικά για τον κλάδο της υγείας με πληθώρα αναφορών και εφαρμογών για την αξιοποίησή τους. Έπειτα, το ενδιαφέρον στράφηκε στο τομέα των οικονομικών υγείας όπου δεν υπάρχουν πολλές αναφορές για την εκμετάλλευση των μεθόδων αυτών. Ωστόσο δόθηκαν τρόποι αντιμετώπισης οικονομικών δεδομένων μαζί με μερικές αναφορές παρακολούθησης και της νοοτροπίας που επικρατεί σε τέτοιου τύπου δεδομένα.

Τέλος, αυτό που αξίζει να σημειωθεί είναι ότι τα διαγράμματα ελέγχου μπορούν να εφαρμοστούν από κάποιον ασθενή για να παρακολουθεί την κατάσταση της υγείας του μέχρι κάποιο διοικητικό στέλεχος ενός νοσοκομείου για την λήψη των καλύτερων δυνατών αποφάσεων ώστε να προσφέρονται υψηλής ποιότητας υπηρεσίες υγείας για την ασφάλεια των ασθενών. Όσα αναπτύχθηκαν για την εφαρμογή των διαγραμμάτων ελέγχου στην υγεία έχουν να κάνουν με περιπτώσεις σοβαρών καταστάσεων όπου παρακολουθείται το ενδιαφερόμενο στοιχείο για την παρακολούθηση της υγείας των ασθενών. Ωστόσο θα μπορούσαν να βρουν και εφαρμογές και σε άλλες καταστάσεις υγείας. Για παράδειγμα στο κομμάτι του αθλητισμού κατά καιρούς εμφανίζονται κρίσιμα περιστατικά ανακοπής καρδιάς. Με την βοήθεια της τεχνολογίας θα ήταν προσοδοφόρο, αφού υπάρχει δυνατότητα καταγραφής δεδομένων κατά την εξέλιξη ενός αγώνα, να εφαρμοστούν ή να αναπτυχθούν τεχνικές των διαγραμμάτων ελέγχου ώστε να αποτραπεί το ενδεχόμενο της ανακοπής ή σε απλούστερη περίπτωση κάποιος τραυματισμός ή ακόμα η παρακολούθηση της συνολικής απόδοσης ενός αθλητή ή μιας ομάδας. Επιπλέον στο τμήμα έκτακτων περιστατικών ενός νοσοκομείου πολύ συχνά εξαιτίας της εμφάνισης πολλών και διαφορετικών περιστατικών παρατηρείται απόδοση χαμηλότερη από την αναμενόμενη με αποτέλεσμα να επιδεινωθούν οι καταστάσεις των ασθενών. Σε μια τέτοια κατάσταση θα μπορούσε να αναπτυχθεί διάγραμμα το οποίο θα «προσαρμοζόταν» στις αφίξεις των έκτακτων περιστατικών ανάλογα με το ιατρικό προσωπικό που είναι διαθέσιμο εκείνη την

στιγμή και με αυτό τον τρόπο θα ήταν δυνατός ο καλύτερος καταμερισμός των ιατρών και νοσοκόμων στις αρμόδιες θέσεις.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Παράρτημα

Κατά την παρακολούθηση Φάσης I, οι τιμές του μέσου και της διασποράς των τιμών του εξεταζόμενου χαρακτηριστικού είναι άγνωστες και πρέπει να εκτιμηθούν, τόσο για την περίπτωση των μεμονωμένων παρατηρήσεων όσο και για την περίπτωση των δειγμάτων.

1) Μεμονωμένες παρατηρήσεις

Θεωρούμε ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n το X_1, X_2, \dots, X_n που λαμβάνεται από έναν πληθυσμό με άγνωστη μέση τιμή μ και άγνωστη διακύμανση σ^2 . Η μέση τιμή εκτιμάται αμερόληπτα με την βοήθεια του δειγματικού μέσου, ενώ η διακύμανση σ^2 εκτιμάται αμερόληπτα μέσω της δειγματικής διακύμανσης έχοντας λοιπόν

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

και

$$\hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

Αν στην παραπάνω υπόθεση προστεθεί ότι το τυχαίο δείγμα προέρχεται από τον κανονικό πληθυσμό $N(\mu, \sigma^2)$ τότε προκύπτουν οι αμερόληπτες εκτιμήσεις της τυπικής απόκλισης

$$\hat{\sigma} = \frac{R}{d_2(n)} \text{ και } \hat{\sigma} = \frac{S}{c_4(n)} = \frac{\sqrt{S^2}}{c_4(n)}$$

όπου $R = X_{(n)} - X_{(1)}$ με τα $d_2(n)$ και $c_4(n)$ σταθερές που εξαρτώνται από το μέγεθος του δείγματος και οι τιμές τους δίνονται από συγκεντρωτικούς πίνακες. Περαιτέρω ανάλυση σχετικά με τις κατανομές R και S θα δοθούν στην συνέχεια.

Θεωρούμε ότι X_1, X_2, \dots, X_n τυχαίο δείγμα από έναν πληθυσμό. Έστω ότι f και F η συνάρτηση πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής αντίστοιχα και

$$X = X_{(1)} = \min \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

$$Y = X_{(n)} = \max \{X_1, X_2, \dots, X_n\}.$$

Ισχύει ότι

$$f_{X,Y}(x, y) = n(n-1)f(x)f(y)[F(y) - F(x)]^{n-2}, \text{ για } x, y \in (-\infty, +\infty)$$

όπου θεωρώντας $V = X = g(X, Y)$ και $R = Y - X = h(X, Y)$ ισχύει

$$f_{V,R}(v, r) = f_{X,Y}(v, r) \cdot |J| = n(n-1)f(v)f(r)[F(v+r) - F(v)]^{n-2}, \text{ με } v \in (-\infty, +\infty) \text{ } r > 0.$$

Ακόμη για $r > 0$ για την περιθώρια συνάρτηση

$$f_R(r) = n(n-1) \int_{-\infty}^{+\infty} f(v)f(v+r)[F(v+r) - F(v)]^{n-2} dv$$

και άρα

$$\begin{aligned}
F_R(r) &= \int_0^r f_R(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} n f(v) \left(\int_0^r (n-1) f(v+t) [F(v+t) - F(v)]^{n-2} dt \right) dv = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} n f(v) \left(\int_0^r \frac{d}{dt} [F(v+t) - F(v)]^{n-1} dt \right) dv \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} n f(v) [F(v+r) - F(v)]^{n-1} dv. \quad (1)
\end{aligned}$$

Έπειτα υποθέτουμε ότι το δείγμα X_1, X_2, \dots, X_n ακολουθεί τώρα $N(\mu, \sigma^2)$. Θεωρούμε ακόμη την στατιστική συνάρτηση $W = R/\sigma$ από όπου για

$$W = \frac{R}{\sigma} = \frac{X_{(n)} - X_{(1)}}{\sigma} = \frac{X_{(n)} - \mu}{\sigma} - \frac{X_{(1)} - \mu}{\sigma}$$

εκφράζοντας έτσι το εύρος του δείγματος

$$\frac{X_1 - \mu}{\sigma}, \frac{X_2 - \mu}{\sigma}, \dots, \frac{X_n - \mu}{\sigma}.$$

Έχοντας φ και Φ συνάρτηση πυκνότητας και την συνάρτηση κατανομής που αντιστοιχούν στην τυπική κανονική κατανομή $N(0,1)$ βάσει της (1) προκύπτει

$$\begin{aligned}
F_W(w) &= \int_{-\infty}^{+\infty} n \varphi(v) [\Phi(v+r) - \Phi(v)]^{n-1} dv \\
F_R(r) &= P(R \leq r) = P(R/\sigma \leq r/\sigma) = P(W \leq r/\sigma) = \\
&= F_W(r/\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} n \varphi(v) [\Phi(v+r) - \Phi(v)]^{n-1} dv
\end{aligned}$$

με

$$f_R(r) = \frac{d}{dr} F_R(r) = n(n-1)\sigma^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(v) [\Phi(v+r) - \Phi(v)]^{n-2} \varphi(v+r/\sigma) dv.$$

Για την μέση τιμή θα έχουμε

$$E(R) = \int_0^{\infty} r f_R(r) dr = n(n-1)\sigma^{-1} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} r \varphi(v) [\Phi(v+r) - \Phi(v)]^{n-2} \varphi(v+r/\sigma) dv dr$$

θέτοντας στην συνέχεια $u = r/\sigma$

$$E(R) = \sigma \underbrace{n(n-1) \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u \varphi(v) [\Phi(v+u) - \Phi(v)]^{n-2} \varphi(v+u) dv du}$$

και συμβολίζοντας με d_2 την υπογραμμισμένη ποσότητα προκύπτει

$$\mu_R = E(R) = \sigma d_2 \quad (2) \quad \text{και} \quad \mu_W = d_2. \quad \text{Ενώ για τη διασπορά θα έχουμε}$$

$$V(R) = \int_0^{\infty} (r - \mu_R)^2 f_R(r) dr = n(n-1)\sigma^{-1} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (r - \sigma d_2)^2 \varphi(v) [\Phi(v+r/\sigma) - \Phi(v)]^{n-2} \varphi(v+r/\sigma) dv dr$$

και θέτοντας όπως και πριν $u = r/\sigma$

$$V(R) = \sigma^2 \underbrace{n(n-1) \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (u - d_2)^2 \varphi(v) [\Phi(v+u) - \Phi(v)]^{n-2} \varphi(v+u) dv du}$$

και συμβολίζοντας με d_3^2 την υπογραμμισμένη ποσότητα προκύπτει

$$\sigma_R^2 = V(R) = \sigma^2 d_3^2 \quad \text{και} \quad \sigma_W^2 = d_3^2.$$

Για την κατανομή του S θεωρείται τυχαία μεταβλητή $X \sim \chi_n^2$ με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} e^{-x/2} x^{(n/2)-1} \text{ με } x > 0.$$

Από όπου έχουμε

$$E(X^k) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \int_0^{+\infty} e^{-x/2} x^{(n/2)+k-1} dx. \quad (3)$$

Από την σχέση (3) θέτοντας $t = x/2$

$$E(X^k) = \frac{2^{(n/2)+k}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{(n/2)+k-1} dt = \frac{2^k \Gamma((n/2)+k)}{\Gamma(n/2)}. \quad (4)$$

Εν συνεχεία για την τυχαία μεταβλητή $Y = \sqrt{X}$ που ακολουθεί χ_n βάσει στις (4) προκύπτει

$$E(Y^k) = \frac{2^{k/2} \Gamma((n+k)/2)}{\Gamma(n/2)}. \quad (5)$$

Θεωρώντας τυχαίο δείγμα μεγέθους n από την $N(\mu, \sigma^2)$ ισχύει ότι

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

όπου $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ παίρνοντας έτσι

$$E(S^2) = \sigma^2 \text{ και } V(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}.$$

Βασιζόμενοι στις τελευταίες παρατηρήσεις για την τυχαία μεταβλητή $\frac{\sqrt{n-1}S}{\sigma}$ ισχύει ότι ακολουθεί χ_{n-1} και από την (5) έχουμε

$$E\left[\left(\frac{\sqrt{n-1}S}{\sigma}\right)^k\right] = \frac{2^{k/2} \Gamma((n-1+k)/2)}{\Gamma((n-1)/2)}$$

$$E(S^k) = \sigma^k \left(\frac{2}{n-1}\right)^{k/2} \frac{\Gamma((n-1+k)/2)}{\Gamma((n-1)/2)}.$$

Εάν το k αντικατασταθεί με την τιμή 1 τότε

$$E(S) = \sigma \left(\frac{2}{n-1}\right)^{1/2} \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma((n-1)/2)}$$

και συμβολίζοντας με c_4 την υπογραμμισμένη ποσότητα προκύπτει

$$E(S) = \sigma c_4 \quad (6)$$

ενώ αξιοποιώντας την σχέση $E(S^2) = \sigma^2$ και την σχέση $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ προκύπτει

$$V(S) = E(S^2) - (E(S))^2 = \sigma^2 - \sigma^2 c_4^2 = \sigma \sqrt{1 - c_4^2}.$$

2) Δείγματα

Εδώ υποθέτουμε την διάθεση m ανεξάρτητων τυχαίων δειγμάτων τα $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$ με $1 \leq i \leq m$ από την $N(\mu, \sigma^2)$ με μέση τιμή και διακύμανση άγνωστα.

Υπολογίζοντας τους δειγματικούς μέσους των m δειγμάτων $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_m$ προκύπτει η αμερόληπτη εκτιμήτρια της μέσης τιμής

$$\bar{\bar{X}} = \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \dots + \bar{X}_m}{m} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij}}{mn}$$

η οποία ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και διακύμανση σ^2/nm .

Για την εκτίμηση του σ με την βοήθεια του εύρους R , θεωρούμε R_i το εύρος του i δείγματος έχοντας

$$R_i = X_{i(n)} - X_{i(1)} \quad \text{με } 1 \leq i \leq m.$$

Θεωρώντας

$$\bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_m}{m}$$

βάσει της σχέσης (2) προκύπτει η αμερόληπτη εκτιμήτρια της τυπικής απόκλισης σ αφού $E(\bar{R}) = \sigma d_2$ και άρα

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}.$$

Για την εκτίμηση του σ με την βοήθεια του S , θεωρούμε S_i την δειγματική τυπική απόκλιση του i δείγματος έχοντας

$$S_i = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2} \quad \text{με } 1 \leq i \leq m$$

και βάσει της σχέσης (6) προκύπτει η αμερόληπτη εκτιμήτρια της τυπικής απόκλισης σ αφού $E(\bar{S}) = \sigma c_4$ και άρα

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{S}}{c_4}.$$

Για την εκτίμηση του σ με την βοήθεια του S^2 , θεωρούμε S_i^2 την δειγματική διακύμανση του i δείγματος έχοντας

$$S_i^2 = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2} \quad \text{με } 1 \leq i \leq m$$

για την οποία όπως έχει αναφερθεί και παραπάνω γνωρίζουμε ότι ισχύει

$$E(S_i^2) = \sigma^2.$$

Με την βοήθεια της ποσότητας

$$\overline{S^2} = \frac{S_1^2 + S_2^2 + \dots + S_m^2}{m}$$

εκτιμάται, όχι αμερόληπτα, η τυπική απόκλιση σ έχοντας

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\overline{S^2}}.$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Α. Παπακωστίδη, Τσουκαλάς, Ν. (2012). Η ποιότητα στις υπηρεσίες υγείας και η αξιολόγησή της.
- Ανδρεαδάκη Ε. & Καλοκαιρινού Αναγνωστοπούλου Α. (2018). Η διαφθορά στο χώρο της υγείας και το υπόδειγμα της θεωρίας των παιγνίων. *Ελληνικό Περιοδικό Νοσηλευτικής Επιστήμης* 11(3): 10-32
- Αντζουλάκος Δ. (2016). Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας, Σημειώσεις Παραδόσεων του μαθήματος «Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας», Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική, Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Πειραιάς
- Γεωργακάκος, Γ. Σ. (2002). Προηγμένα Εργαλεία και Μέθοδοι για τον Έλεγχο Ποιότητας, Τόμος Α: Στατιστικός Έλεγχος Διεργασίας, Εκδόσεις Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου, Πάτρα.
- Κωνσταντοπούλου, Θ. (2011). Η ανάγκη λήψης τεκμηριωμένων αποφάσεων στα σύγχρονα Συστήματα Υγείας και η διαδικασία της οικονομικής αξιολόγησης.
- Μανιαδάκης, Ν. (2005). Τα οικονομικά της Υγείας α π ό την οπτική του μανάτζερ. 75–92.
- Π.Καρυώτης (1992), *Management υπηρεσιών υγείας και βιοιατρική τεχνολογία*, Εκδ. Euroclinica, Αθήνα.
- Ã, O. B., & Schmid, W. (2011). Journal of Statistical Planning and Inference CUSUM charts for monitoring the mean of a multivariate Gaussian process. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 141(6), 2055–2070.
<https://doi.org/10.1016/j.jspi.2010.12.020>
- Adab, P., Rouse, A. M., Mohammed, M. A., Marshall, T. (2002). "Performance League Tables: The NHS Deserves Better". *British Medical Journal* 324, 95-98
- Alemi, F., & Neuhauser, D. (2004). Time-Between Control Charts for Monitoring Asthma Attacks. *The Joint Commission Journal on Quality and Safety*, 30(2), 95–102.
[https://doi.org/10.1016/S1549-3741\(04\)30011-0](https://doi.org/10.1016/S1549-3741(04)30011-0)
- Alona, N., Christopher, N. C., Ramundo, M. L., Bower, J. R., & Berman, S. A. (2003). Contamination Rates of Blood Cultures Obtained by Dedicated Phlebotomy. 289 (726–9).
- Alt, F. B. (1985). "Multivariate Quality Control," in *Encyclopedia of Statistical Sciences*, Vol. 6, N. L. Johnson and S. Kortz, (eds.) Wiley, New York.
- Amin, R. W., Reynolds, M. R., & Bakir, S. (1995). Nonparametric quality control charts based on the sign statistic. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 24(6),

1597–1623. <https://doi.org/10.1080/03610929508831574>

- Barbujani, G., & Calzolari, E. (1984). Comparison of two statistical techniques for the surveillance of birth defects through a monte carlo simulation. *Statistics in Medicine*, 5(1), 98–99. <https://doi.org/10.1002/sim.4780050113>
- Barnard, G.A. (1959), Control Charts and Stochastic Processes. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 21: 239-257.
doi:[10.1111/j.2517-6161.1959.tb00336.x](https://doi.org/10.1111/j.2517-6161.1959.tb00336.x)
- Beck, A. H., & Beck, A. H. (2010). The Flexner Report and the Standardization of American Medical Education The Flexner Report and the Standardization.
<https://doi.org/10.1001/jama.291.17.2139>
- Benneyan, J. C. (2001). Performance of number-between g-type statistical control charts for monitoring adverse events. *Health Care Management Science*, 4(4), 319–336.
<https://doi.org/10.1023/A:1011806727354>
- Benneyan, J. C., Lloyd, R. C., & Plsek, P. E. (2003). Statistical process control as a tool for research and healthcare improvement. *Quality and Safety in Health Care*, 12(6), 458–464. <https://doi.org/10.1136/qhc.12.6.458>
- Bersimis, S., Psarakis, S., & Panaretos, J. (2007). Multivariate Statistical Process Control Charts : An Overview. November 2006, 517–543. <https://doi.org/10.1002/qre.829>
- Bersimis, S., Sgora, A., & Psarakis, S. (2016). The application of multivariate statistical process monitoring in non-industrial processes. *Quality Technology & Quantitative Management*, 3703(September), 1–24. <https://doi.org/10.1080/16843703.2016.1226711>
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31(3), 307–327. [https://doi.org/10.1016/0304-4076\(86\)90063-1](https://doi.org/10.1016/0304-4076(86)90063-1)
- Boukdedid, R., Sibony, O., Bossu-Salvador, C., Oury, J. F., & Alberti, C. (2010). Monitoring healthcare quality in an obstetrics and gynaecology department using a CUSUM chart. *BJOG: An International Journal of Obstetrics and Gynaecology*, 117(10), 1225–1235.
<https://doi.org/10.1111/j.1471-0528.2010.02632.x>
- Brook, D., & Evans, D. A. (1972). An approach to the probability distribution of cusum run length. *Biometrika*, 59(3), 539–549. <https://doi.org/10.1093/biomet/59.3.539>
- Chen C. A surveillance system for congenital malformations. *Journal of the American Statistical Association* 1978; 73:323–327
- Chen, R., Connelly, R. R., & Mantel, N. (1993). Analysing post-alarm data in a monitoring system in order to accept or reject the alarm. *Statistics in medicine*, 12(19-20), 1807–1812. <https://doi.org/10.1002/sim.4780121908>
- Chen C. A surveillance system for congenital malformations. *Journal of the American Statistical Association* 1978; 73:323–327

- Correia, F., Nêveda, R., & Oliveira, P. (2011). Chronic respiratory patient control by multivariate charts. *International journal of health care quality assurance*, 24(8), 621–643. <https://doi.org/10.1108/09526861111174198>
- Crosier, R. B. (1988). Multivariate Generalizations of Cumulative Sum Quality Control Schemes, *Technometrics*, 30, 291-303.
- Crowder, S. V. (1987). A simple method for studying run – length distributions of exponentially weighted moving average charts. *Technometrics*, 29(4), 401–407. <https://doi.org/10.1080/00401706.1987.10488267>
- Curran, E. T., Benneyan, J. C., & Hood, J. (2014). CONTROLLING METHICILLIN-RESISTANT STAPHYLOCOCCUS AUREUS : A FEEDBACK APPROACH USING ANNOTATED STATISTICAL PROCESS CONTROL CHARTS. 23(1), 13–18.
- Donabedian A. The quality of care. How can it be assessed?. *JAMA*. 1988;260(12):1743-1748. doi:10.1001/jama.260.12.1743
- Douglas C. Montgomery & Christina M. Mastrangelo (1991) Some Statistical Process Control Methods for Autocorrelated Data, *Journal of Quality Technology*, 23:3, 179-193, DOI: 10.1080/00224065.1991.11979321
- Douglas M. Hawkins (1981) A Cusum for a Scale Parameter, *Journal of Quality Technology*, 13:4, 228-231, DOI: [10.1080/00224065.1981.11978762](https://doi.org/10.1080/00224065.1981.11978762)
- Douglas M. Hawkins (1993) Cumulative sum control charting: An underutilized SPC Tool, *Quality Engineering*, 5:3, 463-477, DOI: [10.1080/08982119308918986](https://doi.org/10.1080/08982119308918986)
- Eisenstein, E. L., & Bethea, C. F. (1999). The use of patient mix-adjusted control charts to compare in-hospital costs of care. 2, 193–198
- Engle. (1982). Autoregressive Conditional Heteroscedacity with Estimates of variance of United Kingdom Inflation, *Journal of Econometrica*, Volume 50, Issue 4 (Jul., 1982), 987-1008. In *Econometrica* (Vol. 50, Issue 4, 987–1008). <https://doi.org/10.2307/1912773>
- Ewan, W. D., & Kemp, K. W. (1960). Sampling Inspection of Continuous Processes with No Autocorrelation Between Successive Results. *Biometrika*, 47(3/4), 363. <https://doi.org/10.2307/2333307>
- Fisher, L. M., & Humphries, B. L. O. U. (1966). Statistical quality control of rabbit brain thromboplastin for clinical use in the prothrombin time determination. 45(2), 148–152.
- Frederick, W. T. (1911). *The Principles of Scientific Management*.
- Gallus G, Mandelli C, Marchi M, Radaelli G. On surveillance methods for congenital malformations. *Statistics in Medicine* 1986; 5:565–571
- Grigg, O. A., Farewell, V. T., Spiegelhalter, D. J. (2003). "Use of Risk-adjusted CUSUM and RSPRT Charts for Monitoring in Medical Contexts". *Statistical Methods in Medical Research* 12, pp. 147-17

- Grigg O, Farewell V. An overview of risk-adjusted charts. *Journal of the Royal Statistical Society, Series A* 2004; 167:523–539
- Grunkemeier, G. L., Wu, Y. X., & Furnary, A. P. (2003). Cumulative sum techniques for assessing surgical results. *Annals of Thoracic Surgery*, 76(3), 663–667.
[https://doi.org/10.1016/S0003-4975\(03\)00873-7](https://doi.org/10.1016/S0003-4975(03)00873-7)
- Hanslik, T., Boelle, P. Y., & Flahault, A. (2001). The control chart: An epidemiological tool for public health monitoring. *Public Health*, 115(4), 277–281.
[https://doi.org/10.1016/s0033-3506\(01\)00459-0](https://doi.org/10.1016/s0033-3506(01)00459-0)
- Harapan, H., Itoh, N., Yufika, A., Winardi, W., Keam, S., Te, H., Megawati, D., Hayati, Z., Wagner, A. L., & Mudatsir, M. (2020). Coronavirus disease 2019 (COVID-19): A literature review. *Journal of Infection and Public Health*, 13(5), 667–673.
<https://doi.org/10.1016/j.jiph.2020.03.019>
- Hart, M. K., Lee, K. Y., Hart, R. F., & Robertson, J. W. (2003). Application of attribute control charts to risk-adjusted data for monitoring and improving health care performance. *Quality Management in Health Care*, 12(1), 5–19.
<https://doi.org/10.1097/00019514-200301000-00004>
- Healy, J. D. (1987). A note on multivariate CUSUM procedures. *Technometrics*, 29(4), 409–412. <https://doi.org/10.1080/00401706.1987.10488268>
- Hotelling, H. (1947) Multivariate Quality Control Illustrated by Air Testing of Sample Bombsights. In: Eisenhart, C., Hastay, M.W. and Wallis, W.A., Eds., *Techniques of Statistical Analysis*, McGraw Hill, New York, 111-184
- Johnson, C. C., & Martin, M. (1996). Effectiveness of a physician education program in reducing consumption of hospital resources in elective total hip replacement. *Southern medical journal*, 89(3), 282–289. <https://doi.org/10.1097/00007611-199603000-00005>
- J. F. Macgregor & T. J. Harris (1993) The Exponentially Weighted Moving Variance, *Journal of Quality Technology*, 25:2, 106-118, DOI: 10.1080/00224065.1993.11979433
- Kennet, R and Pollak, M. (1983). "On Sequential Detection of a Shift in the Probability of a Rare Event". *Journal of the American Statistical Association* 78, pp. 389-395
- Kirlidog, M., & Asuk, C. (2012). A fraud detection approach with data mining in health insurance. 62, 989–994. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2012.09.168>
- Knaus, W. A., Wagner, D. P., Draper, E. A., Zimmerman, J. E., Bergner, M., Bastos, P. G., Sirio, C. A., Murphy, D. J., Lotring, T., & Damiano, A. (1991). The APACHE III prognostic system. Risk prediction of hospital mortality for critically ill hospitalized adults. *Chest*, 100(6), 1619–1636. <https://doi.org/10.1378/chest.100.6.1619>
- Knuth, Sven & Schmid, Wolfgang. (2004). Control Charts for Time Series: A Review. 10.1007/978-3-7908-2674-6_14.
- Lee, K. Y. and McGreevey, C. (2002b). "Using Comparison Charts to Assess Performance Measurement Data". *Journal on Quality Improvement* 28, pp. 129-138

- Lovegrove, J., Valencia, O., Treasure, T., Sherlaw-johnson, C., & Gallivan, S. (1997). Monitoring the results of cardiac surgery by variable life-adjusted display. 350, 1991–1993.
- Lowry, C. A., & Montgomery, D. C. (1995). A review of multivariate control charts. *March* 2013, 37–41.
- Lowry, C. A., W. H. Woodall, C. W. Champ, and S. E. Rigdon (1992). “A Multivariate Exponentially Weighted Moving Average Control Chart,” *Technometrics*, Vol. 34(1), pp. 46–53.
- Lucas, J. M., & Saccucci, M. S. (1990). Exponentially weighted moving average control schemes: Properties and enhancements. *Technometrics*, 32(1), 1–12. <https://doi.org/10.1080/00401706.1990.10484583>
- Martin, K., & Petr, K. (2012). The Usage of Time Series Control Charts for Financial Process Analysis. 4(2), 29–45. <https://doi.org/10.7441/joc.2012.03.03>
- Mary Waterhouse, Ian Smith, Hassan Assareh, Kerrie Mengersen, Implementation of multivariate control charts in a clinical setting, *International Journal for Quality in Health Care*, Volume 22, Issue 5, October 2010, 408-414, <https://doi.org/10.1093/intqhc/mzq044>
- Mohammed, M. A., Cheng, K. K., Rouse, A., Marshall, T. (2001). "Bristol, Shipman, and Clinical Governance: Shewhart's Forgotten Lessons". *The Lancet* 357, pp. 463-467
- Mohammed, M. A., Worthington, P., & Woodall, W. H. (2008). Plotting basic control charts: Tutorial notes for healthcare practitioners. *Quality and Safety in Health Care*, 17(2), 137–145. <https://doi.org/10.1136/qshc.2004.012047>
- Montgomery, D. C. (2009). *Introduction to Statistical Quality Control*. 6th Edition, John Wiley & Sons, New York.
- Morton, A. P., Ppl, M. S. C. A., Whitby, M., Laws, M. M. C., Dobson, A., Ms, C., Elwain, S. M. C., Ons, B. S. C. H., Looke, D., Pidemiol, M. C. L. I. N. E., Stackelroth, J., Ip, G. R. A. D. D., Ontrol, I. N. F. C., Sartor, A., & Ons, B. S. C. H. (2001). The application of statistical process control charts to the detection and monitoring of hospital-acquired infections. 112–117.
- Morton, N.E. and Lindsten, J. (1976). "Surveillance of Down's Syndrome as a Paradigm of Population Monitoring". *Human Heredity* 26, pp. 360-37
- Moulton, A. D., Halverson, P. K., Honor, P. A., & Berkowitz, B. (2004). Public Health Finance: A Conceptual Framework. *10(5)*, 377–382
- Nashef, S. A., Roques, F., Michel, P., Gauducheau, E., Lemeshow, S., & Salamon, R. (1999). European system for cardiac operative risk evaluation (EuroSCORE). *European journal of cardio-thoracic surgery: official journal of the European Association for Cardio-thoracic Surgery*, 16(1), 9–13. [https://doi.org/10.1016/s1010-7940\(99\)00134-7](https://doi.org/10.1016/s1010-7940(99)00134-7)

- Nix, A. B., Rowlands, R. J., Kemp, K. W., Wilson, D. W., & Griffiths, K. (1987). Internal quality control in clinical chemistry: a teaching review. *Statistics in medicine*, 6(4), 425–440. <https://doi.org/10.1002/sim.4780060403>
- Noyez, L. (2009). Control charts, Cusum techniques and funnel plots. A review of methods for monitoring performance in healthcare. *Interactive CardioVascular and Thoracic Surgery*, 9(3), 494–499. <https://doi.org/10.1510/icvts.2009.204768>
- Page, E.S (1954), “Continuous Inspection Schemes”, *Biometrika*, Vol.41 (1/2), 100-115
- Page ES. Control charts with warning lines. *Biometrika* 1955; 42:243–25
- Parsonnet, V., Dean, D., & Bernstein, A. D. (1989). A method of uniform stratification of risk for evaluating the results of surgery in acquired adult heart disease. *Circulation*, 79(6 Pt 2), I3–I12.
- Pignatiello, J. J., & Runger, G. C. (1990). Comparisons of Multivariate CUSUM Charts. *Journal of Quality Technology*, 22(3), 173–186. <https://doi.org/10.1080/00224065.1990.11979237>
- Plsek PE. Quality improvement methods in clinical medicine. *Pediatrics* 1999;103(1 Suppl E):203–14.
- Poloniecki, J., Valencia, O., & Littlejohns, P. (1998). Cumulative risk adjusted mortality chart for detecting changes in death rate: observational study of heart surgery. 316(June), 1998–2001.
- Prabhu, S. S., and G. C. Runger (1997). “Designing a Multivariate EWMA Control Chart,” *Journal of Quality Technology*, Vol. 29(1), pp. 8–15
- Quesenberry, C. P. (2000). Statistical process control geometric Q-chart for nosocomial infection surveillance. *American Journal of Infection Control*, 28(4), 314–320. <https://doi.org/10.1067/mic.2000.106277>
- Roberts, S. W. (1959). “Control Chart Tests Based on Geometric Moving Averages,” *Technometrics*, Vol. 42(1), pp. 97–102
- Radaelli G. Using the cuscore technique in the surveillance of rare health events. *Journal of Applied Statistics* 1992; 19:75–81
- Rajan Madhok (2002) Crossing the Quality Chasm: Lessons from Health Care Quality Improvement Efforts in England, *Baylor University Medical Center Proceedings*, 15:1, 77-83, DOI: 10.1080/08998280.2002.11927816
- Reynolds, M. R., JR. and Stoumbos, Z. G. (2000a). "A General Approach to Modeling CUSUM Charts for a Proportion". *IIE Transactions on Quality and Reliability Engineering* 32, pp. 515-535
- Reynolds, M. R., JR. and Stoumbos, Z. G. (2000b). "Some Recent Developments in Control Charts for Monitoring a Proportion", in *Statistical Process Monitoring and Optimization*, eds. S. H. Park and G. G. Vining, Marcel Dekker, New York, pp. 117-138

- Robbins, L. (1932). AN ESSAY ON THE NATURE AND SIGNIFICANCE OF ECONOMIC SCIENCE.
- Shaha S. H. (1995). Acuity systems and control charting. *Quality management in health care*, 3(3), 22–30. <https://doi.org/10.1097/00019514-199503030-00003>
- Sego, L. H., Woodall, W. H., Reynolds, M. R. J., Birch, J. B., Spitzner, D. J., & Vining, G. G. (2006). Applications of control charts in medicine and epidemiology. *Department of Statistics, Doctor of (April)*, 149.
- Sherlaw-Johnson, C., Lovegrove, J., Treasure, T., & Gallivan, S. (2000). Likely variations in perioperative mortality associated with cardiac surgery: When does high mortality reflect bad practice? *Heart*, 84(1), 79–82. <https://doi.org/10.1136/heart.84.1.79>
- SITTER, R., HANRAHAN, L., DEMETS, D., & ANDERSON, H. (1990). A MONITORING SYSTEM TO DETECT INCREASED RATES OF CANCER INCIDENCE. *American Journal Of Epidemiology*, 132, 123-130. doi: 10.1093/oxfordjournals.aje.a115773
- Sonesson, C., & Bock, D. (2003). A review and discussion of prospective statistical surveillance in public health. 5–21
- Spiegelhalter, D. (2002). "Letter to the Editor: Funnel Plots for Institutional Comparison," *Quality and Safety in Health Care* 11, pp. 390-39
- Spiegelhalter, D., Grigg, O., Kinsman, R., Treasure, T. (2003). "Risk-Adjusted Sequential Probability Ratio Tests: Applications to Bristol, Shipman and Adult Cardiac Surgery". *International Journal for Quality in Health Care* 15, pp. 7-13
- Spiegelhalter, D. (2004). "Monitoring Clinical Performance: A Commentary". *Journal of Thoracic and Cardiovascular Surgery* 128, pp. 820-825
- Steiner, S. H., Cook, R. J., Farewell, V. T., Treasure, T. (2000). "Monitoring Surgical Performance Using Risk-Adjusted Cumulative Sum Charts". *Biostatistics* 1, pp. 441-452
- Stewart, L. J., & Greisler, D. (2002). Measuring primary care practice performance within an integrated delivery system: a case study. *Journal of healthcare management / American College of Healthcare Executives*, 47(4), 250–261
- Taylor, P., & Bodnar, O. (2009). Application of the Generalized Likelihood Ratio Test for Detecting Changes in the mean of multivariate GARCH processes. October 2014, 37–41. <https://doi.org/10.1080/03610910802691861>
- Thor, J., Lundberg, J., Ask, J., Olsson, J., Carli, C., Härenstam, K. P., & Brommels, M. (2007). Application of statistical process control in healthcare improvement: Systematic review. *Quality and Safety in Health Care*, 16(5), 387–399. <https://doi.org/10.1136/qshc.2006.022194>
- Tracy, N. D., J. C. Young, and R. L. Mason (1992). "Multivariate Control Charts for Individual Observations," *Journal of Quality Technology*, Vol. 24(2), 88–95

- VAN DOBBEN DE BRUYN, C. S. (1968), Cumulative Sum Tests: Theory and Practice, Griffin's Statistical Monographs and Courses, No. 24, London: Griffin
- Wald, A. (1947) Sequential Analysis. John Wiley & Sons, New York.
- Wetherill, G. B. (1977), Sampling Inspection and Quality Control, New York: Halsted Press
- Wheeler D. Advanced topics in statistical process control. The power of Shewhart's charts. Knoxville, TN: SPC Press, 1995
- Who, C. O. F. (2006). OF THE WORLD HEALTH ORGANIZATION 1. February 1977, 1–18
- William H. Woodall (2000) Controversies and Contradictions in Statistical Process Control, Journal of Quality Technology, 32:4, 341-350, DOI: 10.1080/00224065.2000.11980013
- William H. Woodall (2006) The Use of Control Charts in Health - Care and Public-Health Surveillance, Journal of Quality Technology, 38:2, 89-104, DOI: 10.1080/00224065.2006.11918593
- Wolter C. Monitoring intervals between rare events: a cumulative score procedure compared with Rina Chen's sets technique. Methods of Information in Medicine 1987; 26:215–219
- Woodall, W., & Ncube, M. (1985). Multivariate CUSUM Quality-Control Procedures. *Technometrics*, 27(3), 285-292. doi: 10.1080/00401706.1985.10488053
- Xie, M., & Goh, T. N. (1997). *The use of probability limits for process control based on geometric distribution*. 14(1), 64–73.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ