

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

ΜΕΛΕΤΗ ΤΩΝ ΡΟΠΩΝ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΣΤΟ ΚΛΑΣΙΚΟ ΠΡΟΤΥΠΟ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΙΝΔΥΝΩΝ

Μιχαήλ Μ. Μαρμαρίδης

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και
Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς
ως μέρος των απαιτήσεων του για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην
Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Πειραιάς

Ιούλιος 2020

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμόν συνεδρίαση του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της επιτροπής ήταν:

- Πιτσέλης Γεώργιος
- Πολίτης Κωνσταντίνος (Επιβλέπων)
- Ψαρράκος Γεώργιος

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα

UNIVERSITY OF PIRAEUS



**DEPARTMENT OF STATISTICS
AND INSURANCE SCIENCE**

**POSTGRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL SCIENCE
AND RISK MANAGEMENT**

A STUDY OF THE MOMENTS FOR THE TIME UNTIL RUIN IN THE CLASSICAL RISK MODEL

Michail M. Marmaridis

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and
Insurance Science of the University of Piraeus in
partial fulfilment of the requirements for the
degree of Master of Science in Actuarial Science
and Risk Management.

Piraeus, Greece

July 2020

This thesis was approved unanimously by the three-member Commission of Inquiry appointed by the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus No. meeting with the by laws of the Postgraduate Program in Actuarial Science and Risk Management.

Committee members were:

- Pitselis Georgios
- Politis Konstantinos (Supervisor)
- Psarrakos Georgios

The approval of the thesis by the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus does not imply acceptance of opinions of the author

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον Αναπληρωτή Καθηγητή κο Κωνσταντίνο Πολίτη του οποίου οι παρατηρήσεις και συμβουλές με καθοδήγησαν και συνέβαλαν τα μέγιστα στη συγγραφή καθώς και στην ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας.

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία επιχειρείται η μελέτη των ροπών του χρόνου χρεοκοπίας στο κλασικό πρότυπο της θεωρίας κινδύνων. Η ανάλυση των κατανομών της περιόδου της χρεοκοπίας, του πλεονάσματος πριν από την περίοδο της χρεοκοπίας, καθώς και του ελλείμματος κατά την περίοδο της χρεοκοπίας, έχει αποτελέσει αντικείμενο σημαντικού ερευνητικού ενδιαφέροντος. Ο προσδιορισμός αυτών των κατανομών είναι δύσκολος, δεδομένου ότι στις περισσότερες περιπτώσεις δεν υπάρχουν αναλυτικές εκφράσεις. Επιπλέον, δεν υπάρχουν γενικά λύσεις κλειστής μορφής για τις ροπές αυτών των κατανομών. Έχουν χρησιμοποιηθεί διάφορες προσεγγίσεις για τη μελέτη των πιθανολογικών ιδιοτήτων αυτών των κατανομών. Στην εργασία αρχικά αναλύεται η θεωρία του συλλογικού μοντέλου, καταλήγοντας στις αναδρομικές μεθόδους του Panjer για τον υπολογισμό της κατανομής των συνολικών αποζημιώσεων, ενώ στη συνέχεια πραγματοποιείται η ανάλυση της θεωρίας της χρεοκοπίας, παρουσιάζοντας ορισμένες εφαρμογές εύρεσης του συντελεστή προσαρμογής για την κατανομή της οικογένειας αποζημιώσεων Erlang. Οι ουρές των σύνθετων γεωμετρικών κατανομών έχουν μελετηθεί εκτενώς τόσο αναλυτικά όσο και αριθμητικά. Συγκεκριμένα, υπάρχουν αναδρομικοί τύποι (Panjer & Willmot, 1992), όπως και τα άνω και κάτω όρια (Lin, 1996), ενώ μερικές φορές υπάρχουν ακριβείς λύσεις (Dufresne & Gerber, 1988). Επίσης, διατίθεται ο γνωστός ασυμπτωτικός τύπος Cramer-Lundberg (Gerber, 1979). Για μια μεγάλη κατηγορία κατανομών μεγέθους απαίτησης, η ουρά της συσχετισμένης σύνθετης γεωμετρικής κατανομής μπορεί να προσεγγιστεί πολύ ικανοποιητικά με ένα συνδυασμό δύο, ή περισσότερων, εκθετικών κατανομών. Έτσι, στην εργασία αναλύονται οι δεσμευμένες ροπές του χρόνου χρεοκοπίας, μέσω της σύγκρισης των κατανομών ισορροπίας και σύνθετων γεωμετρικών ουρών, του υπολογισμού του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας και συνδυασμού εκθετικών κατανομών μεγεθών αποζημίωσης.

Λέξεις Κλειδιά: Χρόνος Χρεοκοπίας, Ροπές. Κλασικό Πρότυπο της Θεωρίας Κινδύνων

Abstract

In the present thesis, the study of the moments of ruin time in the classical model of risk theory is attempted. The analysis of the distributions of the period of ruin, the surplus before the time of ruin, as well as the deficit during the period of ruin, has been the subject of significant research interest. Determining these distributions is difficult, as in most cases there are no detailed expressions. In addition, there are generally no closed-form solutions for the moments of these distributions. Various approaches have been used to study the probabilistic properties of these distributions. The thesis first analyzes the theory of the collective model, concluding with Panjer's recursive methods for calculating the distribution of total claims, and then analyzes the theory of ruin, presenting some applications for finding the adjustment coefficient. The tails of compound geometric distributions have been extensively studied both analytically and numerically. In particular, there are recursive formulas (Panjer & Willmot, 1992), as well as upper and lower limits (Lin, 1996), while sometimes there are exact solutions (Dufresne & Gerber, 1988). Also known is the Cramer-Lundberg asymptotic approximation (Gerber, 1979). For a large category of claim-size distributions, the tail of the associated compound geometric distribution can be approached very well by a combination of two, or more, exponential distributions. Thus, the work analyzes the moments of ruin time, by comparing the equilibrium distributions and compound geometric tails, the calculation of the deficit at the time of ruin and the combination of exponential claim amounts.

Keywords: Ruin Time, Moments. Classical Model of Risk Theory

Περιεχόμενα

1.	Εισαγωγή στην Θεωρία Συλλογικού Μοντέλου.....	1
1.1.	Διατύπωση Του Συλλογικού Μοντέλου Κινδύνου	1
1.2.	Η Κατανομή Των Συνολικών Αποζημιώσεων	7
1.3.	Η Αναδρομική Μέθοδος του Panjer για τον Υπολογισμό της Κατανομής των Συνολικών Αποζημιώσεων.....	7
2.	Εισαγωγή στη Θεωρία Χρεοκοπίας.....	11
2.1.	Η Ανέλιξη των Συνολικών Απαιτήσεων	11
2.2.	Η Στοχαστική Ανέλιξη του Πλεονάσματος	12
2.3.	Πιθανότητα Χρεοκοπίας	16
2.4.	Συντελεστής Προσαρμογής.....	19
2.5.	Η Ανισότητα και οι Τύποι του Lundberg.....	19
2.6.	Εφαρμογές.....	21
3.	Οι δεσμευμένες ροπές του Χρόνου Χρεοκοπίας.....	26
3.1.	Βιβλιογραφική επισκόπηση	26
3.2.	Σύγκριση Κατανομών Ισορροπίας και Σύνθετων Γεωμετρικών Ουρών	27
3.3.	Το Έλλειμμα τη Στιγμή της Χρεοκοπίας	36
3.4.	Αριθμητικά Παραδείγματα.....	45
3.4.1.	Εκθετική κατανομή μεγέθους αποζημίωσης.....	46
3.5.	Μείξη Εκθετικών Κατανομών για το μέγεθος της Αποζημίωσης	46
3.5.1.	Συνδυασμός εκθετικών κατανομών μεγεθών αποζημίωσης.....	48
	Βιβλιογραφία.....	50

1. Εισαγωγή στην Θεωρία Συλλογικού Μοντέλου

1.1. Διατύπωση Του Συλλογικού Μοντέλου Κινδύνου

Οι συνολικές αποζημιώσεις λαμβάνονται στο συλλογικό πρότυπο σαν στοχαστική ανέλιξη $S(t)$ (και μελετούνται σε συνεχή ή σε διακριτό χρόνο t). Η στοχαστική ανέλιξη έχει την μορφή $S(t) = X_1 + X_2 + \dots + X_{N(t)}$ στην οποία το $N(t)$ είναι μία απεριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη και τα X_i , $i=1, 2, \dots, N(t)$ αποτελούν ισόνομες τ.μ. που είναι μεταξύ τους και με την $N(t)$ ανεξάρτητες. Η αρχική μελέτη θα γίνει για τις συνολικές αποζημιώσεις για ένα συγκεκριμένο και μάλλον μικρό χρονικό διάστημα. Η μελέτη για τις αποζημιώσεις που προκύπτουν σε μία χρονική περίοδο που λαμβάνεται ίση με ένα μήνα ή ένα εξάμηνο έως και χρόνο δεν απαιτεί την θεώρηση του χρόνου t , καθώς οι συνολικές αποζημιώσεις εκφράζονται σαν

$$S(t) = X_1 + X_2 + \dots + X_{N(t)}$$

με τα $S = S(t)$ και $N(t) = N(1)$ να αποτελούν απλά τ.μ. Η διαφορά αυτού του προτύπου από το ατομικό για μια περίοδο είναι ότι το πλήθος των αποζημιώσεων N είναι τυχαία μεταβλητή ενώ στο ατομικό αποτελεί ένα μη τυχαίο αριθμό n (Κουτσόπουλος, 1999). Επίσης η διάκριση των προτύπων σε βραχυχρόνια και μακροχρόνια γίνεται λαμβάνοντας υπόψη ότι για μικρά χρονικά διαστήματα, δεν μελετάται η επίδραση του επιτοκίου.

Σύμφωνα με το μοντέλο συλλογικού κινδύνου τα επιμέρους τμήματα του χαρτοφυλακίου εξετάζονται και αντιμετωπίζονται ως ένα ενιαίο σύνολο αποζημιώσεων, όπου οι αποζημιώσεις είναι ανεξάρτητες και ισόνομες.

Το συλλογικό μοντέλο περιγράφει την κατανομή του συνολικού ποσού απαίτησης μιας ασφάλισης του χαρτοφυλακίου, παράγοντας έναν τυχαίο αριθμό N απαιτήσεων για μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο. Οι πραγματικές απαιτήσεις αντιστοιχίζονται με τους όρους του μοντέλου, ενώ αν δεν εμφανιστεί καμία απαίτηση, το ποσό S καταβολής από την εταιρία θα είναι μηδέν. Πρακτικά χρησιμοποιείται πιο συχνά η κατανομή Poisson ως πρώτη επιλογή γιατί απαιτεί την εκτίμηση μόνο μιας παραμέτρου εξαιτίας της έλλειψης διαθέσιμων δεδομένων που δυσχεραίνει τους υπολογισμούς.

Οι συνολικές αποζημιώσεις στο μοντέλο συλλογικού κινδύνου δίνονται από τη σύνθετη τυχαία μεταβλητή

$$S_N = S = \begin{cases} X_1 + X_2 + \dots + X_N, & N = 1, 2, \dots \\ 0, & N = 0 \end{cases}$$

όπου:

- i. Η τυχαία μεταβλητή X_i αποτελεί το ύψος της i ατομικής ζημιάς (δεν παίρνει αρνητικές τιμές), με συνάρτηση πιθανότητας/πυκνότητας f και συνάρτηση κατανομής F .
- ii. Η τυχαία μεταβλητή N , αποτελεί το πλήθος των ζημιών (κινδύνων) ή και απαιτήσεων/αξιώσεων με συνάρτηση πιθανότητας p .
- iii. Η τυχαία μεταβλητή S_N , αποτελεί τη συνολική ζημιά με συνάρτηση πιθανότητας/πυκνότητας g και συνάρτηση κατανομής G .

Συνήθως, γράφουμε $g = p \vee f$.

Θα γίνει χρήση των ακόλουθων συμβολισμών:

- $F(x) = Pr(X \leq x)$ η συνάρτηση κατανομής της X ,
- $f(x)$ η συνάρτηση πιθανότητας/πυκνότητας της X ,
- $G(x) = Pr(S_N \leq x)$ η συνάρτηση κατανομής της S_N ,
- $g(x)$ η συνάρτηση πιθανότητας/πυκνότητας της S_N .

Η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής N , που είναι μια μη-αρνητική ακέραια (διακριτή) τυχαία μεταβλητή, δίνεται ως

$$p_n = p(n) = P(N = n), n = 0, 1, \dots$$

Για την τ.μ. $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n, n \geq 1$ ισχύει ότι

$$P(S_n \leq x) = F^{*n}(x) = \begin{cases} \int_0^x F^{*(n-1)}(x-y)f(y)dy, & X \text{ συνεχής τ.μ.} \\ \sum_{y=0}^x F^{*(n-1)}(x-y)f(y), & X \text{ διακριτή τ.μ.} \end{cases}$$

$$\text{όπου } F^{*0}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

Το επόμενο θεώρημα δίνει κάποια αποτελέσματα για το ύψος των συνολικών ζημιών S_N σύμφωνα με το μοντέλο συλλογικού κινδύνου.

Έστω ένα χαρτοφυλάκιο και οι αποζημιώσεις τυχαίου πλήθους N για μια χρονική μονάδα που συνήθως είναι το οικονομικό έτος της ασφαλιστικής επιχείρησης, (Χατζηκωνσταντινίδης, 2018). Τα ύψη των επιμέρους αποζημιώσεων X_i (που είναι ισόνομα) και η τυχαία μεταβλητή N είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και ισχύει το θεώρημα:

Θεώρημα 1.1

Αν $S = X_1 + X_2 + \dots + X_N$ όπου οι τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2, \dots, X_N , N είναι ανεξάρτητες και επιπλέον οι X_1, X_2, \dots, X_N είναι ισόνομες τυχαίες μεταβλητές τότε:

1. $E(S) = E(N)E(X)$
2. $\text{Var}(S) = E(N)\text{Var}(X) + (E(X))^2\text{Var}(N)$
3. $M_s(t) = M_N(\ln M_x(t)) = P_N(M_x(t))$
4. $P_s(t) = P_N(P_x(t))$

Σε σχέση με τη συνάρτηση κατανομής των συνολικών αποζημιώσεων, έχουμε το εξής αποτέλεσμα.

Θεώρημα 1.2

Η συνάρτηση κατανομής της τ.μ. S_N ικανοποιεί τη σχέση

$$G(x) = \Pr(S_N \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n F^{*n}(x), \quad x \geq 0$$

Απόδειξη ς:

Για $x \geq 0$ ισχύει

$$\begin{aligned} G(x) &= \Pr(S_N \leq x) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Pr(S_N \leq x | N = n) \Pr(N = n) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= p_0 \Pr(S_N \leq x | N = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} p_n \Pr(X_1 + X_2 + \dots + X_N \leq x | N = n) = \\
&= p_0 F^{*0}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} p_n \Pr(S_n \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n F^{*n}(x)
\end{aligned}$$

Στην περίπτωση που η τυχαία μεταβλητή X είναι συνεχής, τότε η τυχαία μεταβλητή S_N είναι τυχαία μεταβλητή μικτού τύπου με συνεχές μέρος στο $(0, \infty)$ που υπολογίζεται από τον τύπο

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n f^{*n}(x), \quad x > 0$$

και διακριτό μέρος την πιθανότητα μόνο στο 0 που είναι ίση με $g(0) = P(N=0) = p_0$.

Στον παραπάνω τύπο

$$\begin{aligned}
f^{*0}(x) &= \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases} \\
f^{*n}(x) &= \begin{cases} f(x), & n = 1 \\ \int_0^x f^{*(n-1)}(x-y)f(y)dy, & n = 2, 3, \dots \end{cases}
\end{aligned}$$

Για διακριτή τυχαία μεταβλητή X η τυχαία μεταβλητή S_N είναι διακριτή με συνάρτηση πιθανότητας υπολογιζόμενη από την εξίσωση

$$g(x) = \Pr(S_N = x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n f^{*n}(x), \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

Από τον ανωτέρω τύπο έχουμε $g(0) = P_N(f(0))$, όπου $P_N(\cdot)$ είναι η πιθανογεννήτρια της τ.μ. N .

Έστω $M_Y(t)$ και $P_Y(t)$ η ροπογεννήτρια και η πιθανογεννήτρια συνάρτηση για την τυχαία μεταβλητή Y . Το επόμενο θεώρημα δίνει διάφορες σχέσεις που ικανοποιούν η ροπογεννήτρια και η πιθανογεννήτρια συνάρτηση για το ύψος S_N των συνολικών ζημιών. Η τυχαία μεταβλητή S_N έχει πιθανογεννήτρια συνάρτηση όταν οι ατομικές ζημιές έχουν διακριτή κατανομή.

Θεώρημα 1.3

Αν $M_{S_N}(\cdot)$ η ροπογεννήτρια συνάρτηση και $P_{S_N}(\cdot)$ η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής S_N ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

- i. $M_{S_N}(t) = M_N[\log M_X(t)]$
- ii. $M_{S_N}(t) = P_N[M_X(t)]$
- iii. $P_{S_N}(t) = P_N[P_X(t)]$

Απόδειξη:

Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} M_{S_N}(t) &= E(e^{tS_N}) = E[E(e^{tS_N}|N)] \\ &= p_0 E(e^{t \cdot 0}) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} p_n E(e^{t(X_1+X_2+\dots+X_N)}|N=n) \\ &= p_0 \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} p_n E(e^{t(X_1+X_2+\dots+X_n)}) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (M_X(t))^n = E[(M_X(t))^N] \\ &= P_N[M_X(t)] \end{aligned}$$

Ακόμη

$$M_{S_N}(t) = E[(M_X(t))^N] = E[e^{\log(M_X(t))^N}] = E[e^{N \log(M_X(t))}] = M_N[\log M_X(t)]$$

Επίσης, καθώς

$$M_{S_N}(t) = P_N[M_X(t)]$$

Θέτοντας $t = \log u$, λαμβάνεται $P_{S_N}(u) = P_N[P_X(u)]$

Το θεώρημα αποδείχθηκε.

Για τη μέση τιμή ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
E(S_N) &= E[E(S_N|N)] = \sum_{n=0}^{\infty} p_n E(S_N|N=n) \\
&= p_0 E(S_N|N=0) + \sum_{n=1}^{\infty} p_n E(X_1 + X_2 + \dots + X_N|N=n) \\
&= p_0(0 \cdot \Pr(S_N=0)) + \sum_{n=1}^{\infty} p_n E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} p_n (nE(X)) = E(NE(X)) = E(N)E(X)
\end{aligned}$$

Για την διακύμανση ισχύει

$$\begin{aligned}
\text{Var}(S_N) &= E[\text{Var}(S_N|N)] + \text{Var}[E(S_N|N)] \\
&= E[N\text{Var}(X)] + \text{Var}[NE(X)] = E(N)\text{Var}(X) + \text{Var}(N)E^2(X).
\end{aligned}$$

Ακολουθεί ένα παράδειγμα υπολογισμού της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας και της συνάρτησης κατανομής των συνολικών ζημιών ενός χαρτοφυλακίου.

Παράδειγμα

Έστω ότι η συνάρτηση πυκνότητας της ατομικής ζημιάς δίνεται από

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}, \quad x > 0$$

δηλαδή $X \sim \text{Exp}(1/2)$. Για το πλήθος των ζημιών N ισχύει ότι

$$p_n = \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

δηλαδή $N \sim G(1/3)$. Οι συνολικές ζημιές του χαρτοφυλακίου υπολογίζονται από την εξίσωση $S_N = X_1 + X_2 + \dots + X_N$, $N = 1, 2, \dots$ και η τ.μ. S_N είναι συνεχής.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.2, έχουμε

$$\begin{aligned}
M_{S_N}(t) &= P_N[M_X(t)] = \frac{p\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)}{1 - q\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)} = \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-t}\right)}{1 - \frac{2}{3}\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-t}\right)} = \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-2t}\right)}{1 - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{1-2t}\right)} \\
&= \frac{\frac{1}{3(1-2t)}}{\frac{3(1-2t) - 2}{3(1-2t)}} = \frac{1}{3(1-2t) - 2} = \frac{1}{1-6t} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6} - t}
\end{aligned}$$

Συνεπώς $S_N \sim \text{Exp}(1/6)$, δηλαδή $g(x) = \frac{1}{6}e^{-x/6}$, $x > 0$,

και $G(x) = P(S \leq X) = 1 - e^{-x/6}$, $x > 0$.

1.2. Η Κατανομή Των Συνολικών Αποζημιώσεων

Η μέθοδος των συνελιξων χρησιμοποιείται για επιπλέον υπολογισμούς πέραν του θεωρήματος 1.1. Για ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2 , η σ.π. (ή σ.π.) για το άθροισμα $X_1 + X_2$ είναι $p * p$ ή p^{*2} , για το άθροισμα $X_1 + X_2 + X_3$ είναι $p^{*2} * p = p^{*3}$ κ.ο.κ. Το πλήθος των X_i είναι τυχαίο (και συχνά μη φραγμένο), γεγονός που μπορεί να οδηγήσει στην εφαρμογή του «θεωρήματος ολικής πιθανότητας». Εκτός της βεβαιωμένης ύπαρξης ενός τουλάχιστον ζημιογόνου γεγονότος (δηλαδή, αν $Pr(N=0) = 0$ για την «πιθανότητα μη ζημίας», η S έχει μικτή κατανομή με διακριτή πιθανότητα $Pr(S=0) = Pr(N=0)$ στο $x = 0$ και, για $x > 0$, συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας σε εξάρτηση με τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $p(x)$ των X_i (δηλαδή, η $p(x)$ είναι η σ.π. ή σ.π.π. της κατανομής των ατομικών ζημιών). Αν οι τυχαίες μεταβλητές X_i μπορούν να γίνουν μηδέν (π.χ. λόγω της λειτουργίας «απαλλαγής» στην κάλυψη), τότε ακόμα και αν $Pr(N=0) = 0$, η S θα έχει μικτή κατανομή.

1.3. Η Αναδρομική Μέθοδος του Panjer για τον Υπολογισμό της Κατανομής των Συνολικών Αποζημιώσεων

Όταν χρησιμοποιείται η σ.π. Poisson τότε η κατανομή των συνολικών αποζημιώσεων μπορεί να ευρεθεί με βάση την αναδρομική σχέση που ισχύει σε αυτή την περίπτωση

$p(k) = \lambda/k * p(k-1)$. Και για άλλες οικογένειες απαριθμητριών τ.μ. ισχύουν παρόμοιες αναδρομικές σχέσεις. Έτσι, στην περίπτωση που η σ.π. του πλήθους των ζημιών ανήκει σε μια από τις εν λόγω οικογένειες (και οι τιμές της αποζημίωσης είναι διακριτές και ισαπέχουσες), μπορεί να γίνει ο αναδρομικός υπολογισμός της συνάρτησης κατανομής των συνολικών αποζημιώσεων (Κουτσόπουλος, 1999).

Το ακόλουθο θεώρημα υπολογίζει ποιο αναλυτικά την σ.κ. των συνολικών αποζημιώσεων:

Θεώρημα 1.4.: Έστω σύνθετη κατανομή συνολικών αποζημιώσεων στην οποία

- (i) η σ.π. του αριθμού των ζημιών ικανοποιεί την αναδρομική σχέση της μορφής

$$\pi(k) = (a + \beta/k)\pi(k-1),$$

$k=1,2,3,\dots$ (α και β σταθερές) και

- (ii) η σ.π. του ύψους της αποζημίωσης είναι $Pr(X = iC) = p(i)$, $i = 0,1,\dots,n$
(C θετική σταθερά).

Η σ.π. των συνολικών αποζημιώσεων ικανοποιεί την αναδρομική σχέση:

$$f(0) = \pi(0) \text{ αν } p(0) = 0, f(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi(k)[p(0)]^k, \quad \text{αν } p(0) > 0$$

$$f(j) = \frac{1}{1 - ap(0)} \sum_{i=1}^M \left(a + \frac{\beta}{j}i\right) p(i)f(j-i), \quad j = 1,2,3 \dots, M = \min\{j, n\}$$

Επίσης, αν $a = 0$ και $\beta = \lambda$, έχουμε

$$f(j) = \frac{1}{j} \sum_{i=1}^M i \lambda p(i) f(j-i).$$

που αποτελεί την αναδρομική εξίσωση για την σύνθετη Poisson. Άλλες κατανομές με αντίστοιχη αναδρομική σχέση αποτελούν η σύνθετη διωνυμική και η σύνθετη αρνητική διωνυμική (που με $r = 1$ περιέχει τη σύνθετη γεωμετρική). Είναι δυνατόν να αποδειχθεί, ότι η διωνυμική, η Poisson και η αρνητική διωνυμική είναι οι μόνες κατανομές για τις οποίες ισχύει σχέση της μορφής $\pi(k) = (a + \beta/k)\pi(k-1)$ (βλ. Θεώρημα 1.1.), και ανήκουν στην οικογένεια κατανομών $R(\alpha, \beta, 0)$ (ή κλάση

κατανομών του Panjer). Οι τιμές των α , β για κάθε κατανομή σε αυτή την οικογένεια δίδονται στον ακόλουθο Πίνακα:

<i>KATANOMH</i>	α	β
<i>POISSON</i> (λ)	0	λ
<i>BERNOULLI</i> (p)	$-q/p$	$2q/p$
<i>ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ</i> (n,p)	$-q/p$	$(n+1)q/p$
<i>ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ</i> (p)	q	0
<i>ΑΡΝΗΤΙΚΗ ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ</i> (r,p)	q	$(r-1)q$

Η μετατροπή μιας σ.π.π. σε διακριτή σ.π για να γίνει χρήση της σχέσης (1.1) οδηγεί συχνά σε $p(0) > 0$. Έτσι πρέπει να είναι δυνατή η θετική τιμή του $p(0) = Pr(X=0)$. Η τάξη μεγέθους του πλήθους των αριθμητικών πράξεων για να υπολογιστεί η $f(j)$ είναι $5a(n/C)mp_1$ όπου $m = E(N)$, $p_1 = E(X)$, n είναι ο αριθμός των δυνατών τιμών του ύψους αποζημίωσης X , C το «βήμα» μεταξύ διαδοχικών τιμών του X και το a είναι ένας συντελεστής (συνήθως ≤ 10) που δείχνει σε ποιο πολλαπλάσιο του mp_1 πρέπει να φθάσει η αναδρομική σχέση, ώστε η παραμένουσα πιθανότητα να είναι αμελητέα (Κουτσόπουλος, 1999).

Για να μη συμβεί «υπερχείλιση» (overflow) κατά την εργασία με υπολογιστή, μπορεί να γίνει αλλαγή κλίμακας ή η χρήση λογαρίθμων. Αλλαγή κλίμακας (ακολουθούμενη από επαναφορά στην αρχική κλίμακα) μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε περίπτωση “underflow”, δηλαδή πιθανοτήτων τόσο μικρών (π.χ. όταν το λ μιας Poisson είναι πολύ μεγάλο) που λαμβάνονται ως μηδέν από τον υπολογιστή (Κουτσόπουλος, 1999).

Για την μετατροπή της σ.κ. $P(x)$ συνεχούς ύψους αποζημίωσης σε διακριτή σ.π θέτουμε:

$$p(2i - 1) = Pr(X = (2i-1)C) = P(2iC) - P((2i-2)C), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

(με n αρκετά μεγάλο ώστε η πιθανότητα $1 - P(2nC)$ να είναι αμελητέα).

Ένα μειονέκτημα της μεθόδου εμφανίζεται στα «σφάλματα στρογγυλοποίησης» για τη μέση τιμή και τις ροπές μεγαλύτερης τάξης. (Ένας έλεγχος για την ακρίβεια της μετατροπής είναι να συγκριθούν οι ροπές της διακριτής σ.π. με τις αντίστοιχες της αρχικής συνεχούς σ.κ.)

Σε ένα δεύτερο τρόπο μετατροπής τα σφάλματα στρογγυλοποίησης μειώνονται και η εξαχθείσα διακριτή σ.π. έχει ίδιο μέσο με της αρχικής σ.κ..

Η μέθοδος του Θεωρήματος 1.5. μπορεί να γενικευθεί με «χαλάρωση» μέχρι ένα βαθμό των δύο συνθηκών του Θεωρήματος 1.5. π.χ. με χρήση της μεθόδου για κατανομές του πλήθους ζημιών για τις οποίες ισχύει η αναδρομική σχέση

$\pi(k) = (a + \beta/k)\pi(k-1)$ για $k \geq 1$. (Κουτσόπουλος, 1999).

2. Εισαγωγή στη Θεωρία Χρεοκοπίας

2.1. Η Ανέλιξη των Συνολικών Απαιτήσεων

Αρχικά, στη θεωρία των κινδύνων, όσον αφορά το συλλογικό πρότυπο, γίνεται χρήση μίας τυχαίας μεταβλητής υπό τη μορφή $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Αυτή η τυχαία μεταβλητή έχει μία σύνθετη κατανομή και χρησιμεύει στην περιγραφή συνολικών απαιτήσεων, οι οποίες προκύπτουν από ένα ορισμένο χαρτοφυλάκιο και απευθύνονται σε μία ασφαλιστική εταιρεία. Αυτή η αναφορά σχετίζεται με τη θεωρία χρεοκοπίας, μέσω της οποίας εξετάζονται οι συνολικές αποζημιώσεις, οι οποίες σχετίζονται εξίσου με ένα χαρτοφυλάκιο υπό την έννοια της εξέλιξης που λαμβάνουν στο χρόνο. Ως εκ τούτου, πρέπει να ενταχθεί προς χρήση μία στοχαστική ανέλιξη που θα λάβει τη μορφή: $\{S(t): t \geq 0\}$. Αυτή η στοχαστική ανέλιξη χρησιμοποιείται έναντι της επιλογής μίας τυχαίας μεταβλητής, η οποία θα αναπαριστούσε το συνολικό μέγεθος των εν λόγω αποζημιώσεων.

Πιο αναλυτικά, το συλλογικό πρότυπο επιτρέπει τη χρήση μίας διακριτής αλλά τυχαίας μεταβλητής N , με στόχο τη μέτρηση –δηλαδή απαρίθμηση- του ακριβούς μεγέθους των απαιτήσεων για ένα καθορισμένο διάστημα. Αυτή η διαδικασία υποκαθίσταται από μία στοχαστική ανέλιξη, η οποία καλείται και απαριθμήτρια και εκφράζεται ως $\{N(t): t \geq 0\}$. Μέσω αυτής καταγράφεται ο αριθμός από τις απαιτήσεις που απευθύνονται σε μία εταιρεία με το πέρασμά του. Πιο απλά, η ποσότητα $N(t)$ αποτελεί την τυχαία μεταβλητή ενός συγκεκριμένου χρονικού σημείου t , μέσω της οποίας δηλώνεται το ακριβές μέγεθος των απαιτήσεων, το οποίο απευθύνεται στην εκάστοτε ασφαλιστική εταιρεία για ένα διάστημα $[0,t]$.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να επισημανθεί ότι η προαναφερθείσα απαριθμήτρια ανέλιξη θα αποτελεί την στοχαστική ανέλιξη σε χρόνο που εκφράζεται ως $\{X(t): t \geq 0\}$ στις περιπτώσεις που απαριθμείται το μέγεθος των εμφανίσεων από ένα γεγονός για χρονικό διάστημα $[0,t]$. Επεξηγηματικά, η μεταβλητή Xt θα εκφράζει τον αριθμό των εμφανίσεων του γεγονότος για κάθε $t \geq 0$, το οποίο είναι το γεγονός ενδιαφέροντος μέχρι τη δεδομένη χρονική στιγμή t (Πολίτης, 2012). Σύμφωνα με αυτά και λαμβάνοντας υπόψη την έννοια της σύνθετης κατανομής, προκύπτει ότι η $\{S(t): t \geq 0\}$ αποτελεί μία σύνθετη στοχαστική ανέλιξη η οποία θα οριστεί για κάθε t και θα εκφραστεί μέσω της σχέσης:

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{N(t)} X_i, & \text{αν } N(t) > 0 \\ 0, & \text{αν } N(t) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Ένα από τα βασικότερα παραδείγματα που προκύπτουν από μία σύνθετη ανέλιξη σχετίζεται με την ανέλιξη Poisson, που θα εκφραστεί $\{N(t): t \geq 0\}$. Σε αυτήν την περίπτωση θεωρείται πως η $\{S(t): t \geq 0\}$, η οποία αναπαριστά το σύνολο των αποζημιώσεων κατά τη διάρκεια της μεταβολής της στο χρόνο θα ακολουθεί τη σύνθετη ανέλιξη που κατονομάζεται σύνθετη Poisson (Πολίτης, 2012). Επιπρόσθετα, θεωρούμε μία συνάρτηση $P(t)$ που αναπαριστά το σύνολο των ασφαλιστρών που εισρέουν σε μία εταιρεία για το διάστημα $[0,t]$. Αυτά τα ασφάλιστρα θα προσδιοριστούν επακριβώς από τον εκάστοτε ασφαλιστή, παραδοχή που συνεπάγεται την βεβαιότητα σχετικά με το πώς εξελίσσονται στο χρόνο. Ως εκ τούτου, η $P(t)$ δε θα αποτελεί μία στοχαστική ανέλιξη, αλλά μία αύξουσα μαθηματική συνάρτηση. Στις πιο απλές περιπτώσεις, κατά τις οποίες η $P(t)$ θα αποτελεί μία γραμμική συνάρτηση.

2.2. Η Στοχαστική Ανέλιξη του Πλεονάσματος

Σχετικά με τη στοχαστική ανέλιξη του πλεονάσματος αναφέρεται πως ορίζεται ως $\{U(t): t \geq 0\}$ για κάθε $t \geq 0$ και θα εκφραστεί από τη σχέση $U(t) = u + P(t) - S(t)$, όπου:

$u =$ το αποθεματικό της εταιρείας σχετικά με το χαρτοφυλάκιο $P(t) =$ το συνολικό ασφάλιστρο για το διάστημα $[0,t]$ $S(t) =$ η σύνθετη ανέλιξη αναφορικά με το σύνολο των αποζημιώσεων για το διάστημα $[0,t]$
--

Πιο αναλυτικά το $U(t)$ ορίζεται ως το πλεόνασμα –ή αλλιώς αποθεματικό- για τη χρονική στιγμή t και το $U(0) = u$ ορίζεται ως το αρχικό πλεόνασμα –ή αλλιώς αρχικό αποθεματικό. Συμπληρωματικά, στη θεωρία της χρεοκοπίας πρέπει να εξεταστεί το σύνολο των αποζημιώσεων, οι οποίες σχετίζονται με ένα χαρτοφυλάκιο σχετικά με τη διάρκεια της εξέλιξής τους στο χρόνο. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να αναζητηθεί μία στοχαστική ανέλιξη $\{S(t): t \geq 0\}$ έναντι μίας τυχαίας μεταβλητής με στόχο την περιγραφή του συνολικού μεγέθους των εν λόγω αποζημιώσεων.

Ακόμη, η ποσότητα $N(t)$ αποτελεί μία τυχαία μεταβλητή για ένα ορισμένο χρονικό σημείο t από την οποία παρουσιάζεται το μέγεθος των απαιτήσεων προς την ασφαλιστική εταιρεία για ένα διάστημα $[0,t]$. Από τα προαναφερθέντα προκύπτει πως η $\{S(t): t \geq 0\}$ θα ορίζεται για κάθε t από την Εξίσωση 1. Στο ίδιο πλαίσιο δημιουργείται η υπόθεση συνάρτησης, η οποία θα αναπαριστά το σύνολο των ασφάλιστρων, τα οποία εισρέουν για ένα διάστημα $[0,t]$ στην εταιρεία. Με πιο απλοποιημένη μορφή η $P(t)$ θα αποτελεί μία γραμμική συνάρτηση, κατά την οποία το ασφάλιστρο θα συμβολίζεται με c , και θα είναι αυτό που εισρέει στη χρονική μονάδα με στόχο να εισπράττει το σύνολο από τα ασφάλιστρα η εταιρεία στο προαναφερθέν χρονικό διάστημα $[0,t]$. Συνεπώς, το σύνολο των ασφάλιστρων θα είναι ct (Πολίτης, 2012).

Έστω ότι συνάρτηση $P(t)$ μέσω της οποίας αναπαρίσταται το σύνολο των ασφαλίστρων της εταιρείας σε διάστημα $[0,t]$. Αυτά τα ασφάλιστρα θα καθοριστούν επακριβώς από τον εκάστοτε ασφαλιστή και κατ' επέκταση δεν προκύπτει αβεβαιότητα ως προς την εξέλιξη που έχουν στο χρόνο (Grandell, 1991). Ως εκ τούτου, η $P(t)$ θεωρείται ως μία αύξουσα συνάρτηση έναντι μίας στοχαστικής ανέλιξης, ενώ στην απλουστευμένη μορφή είναι μία γραμμική συνάρτηση. Για να οριστεί η στοχαστική ανέλιξη του πλεονάσματος πρέπει να αναφερθούν δύο βασικοί συμβολισμοί:

- A.** Το c αναπαριστά το ασφάλιστρο, το οποίο εισρέει στην εταιρεία σε μία μονάδα χρόνου, με στόχο το σύνολο από τα ασφάλιστρα που εισπράττονται από την εταιρεία σε χρονικό διάστημα $[0,t]$ να εκφράζεται $P(t) = ct$.
- B.** Τελείται η υπόθεση πως για κάθε χαρτοφυλάκιο πρέπει μία εταιρεία να έχει ένα u αποθεματικό σε μία χρονική στιγμή 0 , ούτως ώστε να περιοριστούν οι πιθανότητες να επέλθει κάποια μεγάλη αποζημίωση κατά την εκκίνηση λειτουργίας του εκάστοτε χαρτοφυλακίου.

Επιπλέον, αναφέρεται πως η στοχαστική ανέλιξη του πλεονάσματος που είναι $\{U(t): t \geq 0\}$ θα οριστεί για κάθε $t \geq 0$ και θα εκφραστεί από τη σχέση:

$$U(t) = u + P(t) - S(t),$$

από την οποία το u θα είναι το αρχικό αποθεματικό, το $P(t)$ το σύνολο των ασφαλίστρων που διέρχονται στην εταιρεία για το χρονικό διάστημα $[0,t]$, ενώ το $S(t)$ θα αναπαριστά τη σύνθετη ανέλιξη για το σύνολο των αποζημιώσεων το ίδιο χρονικό

διάστημα. Επομένως, το $U(t)$ είναι το πλεόνασμα –ή αλλιώς αποθεματικό– για την χρονική στιγμή t , ενώ το αρχικό αποθεματικό θα εκφραστεί ως: $U(0) = u(u \geq 0)$.

Μέσω του κλασσικού μοντέλου της θεωρίας κινδύνων προκύπτει ότι το σύνολο των ασφαλιστρών που θα εισπραχθεί από τους ασφαλισμένους θα αποτελεί την αποκλειστική πηγή εσόδων για μία εταιρείας, ενώ ως αποκλειστική πηγή εξόδων θα λαμβάνεται το σύνολο των αποζημιώσεων το οποίο θα υποχρεωθεί να προσφέρει η εταιρεία προς τους δικαιούχους σε περιπτώσεις που εμφανίζεται κίνδυνος. Συνεπώς, στο κλασσικό μοντέλο καθορίζονται οι τρεις ακόλουθες υποθέσεις:

- i. Η συνάρτηση $P(t)$ που αναπαριστά το συνολικό ποσό των ασφαλιστρών που έχουν καταβληθεί για ένα διάστημα $[0,t]$, θα οριστεί από τη σχέση $P(t) = ct$, όπου το $c > 0$ θα αποτελεί τη σταθερά η οποία εκφράζει το ασφάλιστρο που έχει πληρωθεί σε μία ορισμένη μονάδα χρόνου και καλείται ένταση του ασφάλιστρου (premium rate).
- ii. Η $\{N(t): t \geq 0\}$ θεωρείται ως η απαριθμήτρια ζημιών και αποτελεί μία ανέλιξη Poisson που θα έχει ένταση λ . Η λ αποτελεί με τη σειρά της μία σταθερά που εκφράζει τον προσδοκώμενο σύνολο ζημιών στην ορισμένη μονάδα χρόνου. Ως εκ τούτου προκύπτει μία πιθανότητα σχετικά με την εμφάνιση ενός ζημιογόνου γεγονότος που θα είναι αναλογική με το μήκος του διαστήματος. Έτσι, προκύπτει πως $N(t) \sim P(\lambda t)$ και

$$\Pr(N(t) = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

ώστε η $\{S(t): t \geq 0\}$ να αποτελεί την σύνθετη ανέλιξη Poisson.

- iii. Οι $X_i, i = 1, 2, \dots$ αποτελούν τυχαίες μεταβλητές, οι οποίες εκφράζουν τα μεγέθη των αποζημιώσεων και λειτουργούν ανεξάρτητα και ισόνομα ως προς το σύνολο των αποζημιώσεων $N(t)$ για ένα χρονικό διάστημα $[0,t]$.

Αν αυτές οι τυχαίες μεταβλητές X_i θεωρούνται συνεχείς προκύπτουν οι αντίστοιχοι συμβολισμοί, οι οποίοι θα είναι εξίσου εφαρμόσιμοι στην διακριτή περίπτωση και είναι οι ακόλουθοι:

$$F(x) = \Pr(X \leq x) = \int_0^x f(y) dy$$

$$\bar{F}(z) = 1 - F(x) = 1 - \Pr(X \leq x) = \int_x^{\infty} f(y)dy$$

$$\mu_k = E(X^k) = \int_0^{\infty} y^k f(y)dy = \int_0^{\infty} \bar{F}(y) dy$$

Πιο συγκεκριμένα, για τη μέση τιμή προκύπτει:

$$\mu = \mu_1 = E(X) = \int_0^{\infty} yf(y)dy = \int_0^{\infty} \bar{F}(y)dy$$

Αναφορικά με το προαναφερθέν κλασσικό μοντέλο υπάρχει μία βασική υπόθεση που αφορά στα αναμενόμενα έξοδα μίας εταιρείας, τα οποία δεν επιτρέπεται να είναι μεγαλύτερα από τα έσοδά της. Επεξηγηματικά, δημιουργείται η απαίτηση για κάθε χρονική στιγμή να εισπράττονται ασφάλιστρα που θα είναι μεγαλύτερα σε ένα βασικό μέσο όρο από τις καταβληθείσες αποζημιώσεις των ασφαλισμένων. Άρα, προκύπτει η απαίτηση να ισχύει η συνθήκη του καθαρού κέρδους η οποία θα οριστεί από τη σχέση:

$$ct > E(S(t)) = E(N(t))E(X) = \lambda t\mu$$

ή αλλιώς ισοδύναμα: $c > \lambda\mu$.

Η προαναφερθείσα βασική υπόθεση στο κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου, οδηγεί στη διαπίστωση ότι το c θα ικανοποιεί τη σχέση που λαμβάνει τη μορφή: $c = (1 + \theta)\lambda\mu$, $\theta > 0$.

Εν προκειμένω, το θ δηλώνεται ως το περιθώριο ή συντελεστής ασφαλείας και εκφράζεται με τον τύπο:

$$\theta = \frac{c}{\lambda\mu} - 1$$

Ο συντελεστής ασφαλείας θα λαμβάνει τιμές που κυμαίνονται μεταξύ 0 και 1, ούτως ώστε να είναι ανταγωνιστικό το χαρτοφυλάκιο και να είναι το μέτρο έκφρασης του ποσοστού κέρδους της ασφαλιστικής εταιρείας, το οποίο είναι αναμενόμενο για ένα ορισμένο χαρτοφυλάκιο. Επιπλέον, μέσω αυτού εκφράζεται ο αριθμός του κατά πόσο είναι μεγαλύτερα τα έσοδα της εταιρείας κατά μέσο όρο και αναλογικά με τα έξοδά της. Συγκεκριμένα, ο συντελεστής ασφαλείας (ή περιθώριο ασφαλείας) εκφράζει το αναμενόμενο ποσοστό κέρδους του ασφαλιστή.

Από τα παραπάνω προκύπτει πως η στοχαστική ανέλιξη του πλεονάσματος που λαμβάνει τη μορφή $\{U(t): t \geq 0\}$, θα εκφραστεί ως: $U(t) = u + P(t) - S(t)$ ή ισοδύναμα ως: $U(t) = u + (1 + \theta)\lambda\mu t - S(t)$.

2.3. Πιθανότητα Χρεοκοπίας

Η πιθανότητα χρεοκοπίας θα εκφραστεί με $\psi(u)$, που είναι το αρχικό αποθεματικό σε άπειρο χρόνο και θα οριστεί μέσω της σχέσης:

$$\psi(u) = \Pr [U(t) < 0 \text{ για κάποιο } t \geq 0 | U(0) = u].$$

Θεωρούμε ότι ως $\mu_1 = E(X_i)$ τη μέση αποζημίωση και ως λ την ένταση της Poisson ανέλιξης για τις αφίξεις του συνόλου των αποζημιώσεων. Ακόμη, ως θ ορίζεται το περιθώριο ασφάλειας, το οποίο θα εκφραστεί ως:

$$\theta = \frac{c}{\lambda \mu_1} - 1$$

Το σημαντικό αποτέλεσμα που προκύπτει και φανερώνει τη χρησιμότητα της παραπάνω συνάρτησης είναι:

*Αν $\theta \leq 0$ τότε $\psi(u) = 1, \forall u \geq 0$.
Επομένως η πιθανότητα χρεοκοπίας εκλαμβάνεται ως βέβαιη, ανεξάρτητα με το πόσο μεγάλο θα είναι το u ως αρχικό αποθεματικό.*

Ακόμη, αν ισχύει πως $c > \lambda \cdot \mu_1$, και $\theta > 0$, τότε το $\psi(u) < 1, \forall u \geq 0$.

Είναι σημαντικό να καθοριστεί ο τρόπος που ορίζονται ορισμένα βασικά μέτρα χρεοκοπίας, όπως προκύπτουν από τη θεωρία κινδύνου. Σε πρώτη φάση πρέπει να παρουσιαστούν οι ορισμοί για τον χρόνο και την πιθανότητα χρεοκοπίας. Αναφορικά με τον χρόνο αναφέρεται πως ο χρόνος T για $t \geq 0$ όπου η στοχαστική διαδικασία του πλεονάσματος θα είναι για πρώτη φορά αρνητική θα εκφραστεί ως:

$$T = \begin{cases} \inf\{t \geq 0 : U(t) < 0\} \\ \infty, & \text{αν } U(t) \geq 0 \text{ για κάθε } t \geq 0 \end{cases}$$

Φαίνεται πως ο χρόνος χρεοκοπίας αποτελεί μία τυχαία μεταβλητή, η οποία είναι ελαττωματική υπό το πρίσμα ότι $Pr(T = \infty) > 0$.

Αναφορικά με την πιθανότητα χρεοκοπίας σε άπειρο χρόνο για $u \geq 0$, παρουσιάζεται η σχέση:

$$\psi(u) = Pr(T < \infty | U(0) = u) = Pr(U(t) < 0 \text{ για κάποιο } t \geq 0 | U(0) = u).$$

Επομένως, η πιθανότητα χρεοκοπίας θα εκφραστεί:

$$\delta(u) = 1 - \psi(u) = Pr(T = \infty | U(0) = u) = Pr(U(t) \geq 0 \text{ για κάθε } t \geq 0 | U(0) = u).$$

Ειδικότερα, παρατηρείται πως στο κλασσικό μοντέλο, στις περιπτώσεις που σχέση $c > \lambda \mu$ δεν έχει ισχύ, τότε $\psi(u) = 1$ για κάθε u , ενώ στις περιπτώσεις που έχει ισχύ αυτή η σχέση, τότε $\psi(u) < 1$ για κάθε u . Επιπλέον, η πιθανότητα χρεοκοπίας αποτελεί μία φθίνουσα συνάρτηση του u , ενώ η πιθανότητα μη χρεοκοπίας θα αποτελεί μία αύξουσα συνάρτηση. Σύμφωνα με αυτά προκύπτουν:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) = 0$$

και επίσης:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \delta(u) = 1.$$

Επομένως, το $U(T)$ θα αναπαριστά την τυχαία μεταβλητή, η οποία εκφράζει το έλλειμμα που εμφανίζεται όταν παρατηρείται η χρεοκοπία. Αυτό σημαίνει πως εκφράζει το μέγεθος του πλεονάσματος όταν βρίσκεται κάτω του μηδενός σε μία χρονική στιγμή $t = T$. Επίσης, το $U(T-)$ αναπαριστά την τυχαία μεταβλητή, η οποία εκφράζει το πλεόνασμα που εμφανίζεται πριν επέλθει χρεοκοπία και εξηγείται από τον τύπο: $U(T-) = \lim_{t \rightarrow T-} U(t)$. Σημειώνεται πως αυτή η μεταβλητή λαμβάνει μόνο θετικές τιμές.

Πιο αναλυτικά, αν γίνει η γραμμική αναπαράσταση του παραπάνω τύπου, θα προκύψει ότι το $U(t)$ που είναι το πλεόνασμα παρουσιάζει άλματα με κλίση προς τα κάτω κατά τη χρονική στιγμή που διέρχονται τα ζημιολόγα γεγονότα. Διευκρινίζεται πως τα προαναφερόμενα άλματα θα έχουν αναλογικό μέγεθος με αυτό των αντιστοίχων αλμάτων με κλίση προς τα πάνω κατά τη διάρκεια της διαδικασίας του συνόλου των αποζημιώσεων. Επιπλέον, μπορεί να διαφανεί ότι υπάρχει η πιθανότητα η διαδικασία πλεονάσματος να γίνει αρνητική. Με αναλογιστικούς όρους, αυτό το

ενδεχόμενο καλείται χρεοκοπία και η πιθανότητα που υπάρχει για αυτό ονομάζεται πιθανότητα χρεοκοπίας.

Εν συνεχεία, ορίζονται ως τυχαίες μεταβλητές οι $L_i (i = 1, 2, \dots)$, οι οποίες δηλώνουν τις πτώσεις που σημειώνονται από το πλεόνασμα, οι οποίες είναι σταδιακές και εκκινούν από την τιμή του u ως αρχικού αποθεματικού και φτάνουν τη στιγμή T που είναι η στιγμή που πραγματώνεται η χρεοκοπία. Αν δεν υπάρχει χρεοκοπία οι τ.μ. L_i θα δηλώνουν το μέγεθος που σημειώνεται κατά την πτώση του πλεονάσματος εκκινώντας από την τιμή u έως την ελάχιστη τιμή της στοχαστικής διαδικασίας του πλεονάσματος, η οποία εκφράζεται από τον τύπο $\{U(t): t \geq 0\}$.

Εν συνεχεία, η W θα χρησιμοποιηθεί ως διακριτή τ.μ. που θα δηλώνει το συνολικό πλήθος των πτώσεων που είναι σταδιακές στο πλεόνασμα από την τιμή μηδέν έως τη στιγμή T . Αυτό σημαίνει ότι εκφράζεται το πλήθος από τις μεταβλητές L_i κατά την ανέλιξη πλεονάσματος. Σύμφωνα με τα παραπάνω, η κατανομή που προκύπτει από την W όσον αφορά το κλασσικό μοντέλο θα είναι η γεωμετρική κατανομή, η οποία θα έχει πιθανότητα επιτυχίας $\delta(0)$. Πιο συγκεκριμένα:

$$Pr(W = k) = (\psi(0))^k \delta(0) = \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^k \left(\frac{\theta}{1+\theta}\right), \quad k = 0, 1, \dots$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι οι $L_i (i = 1, 2, \dots)$ είναι ισόνομες μεταξύ τους αλλά και ανεξάρτητες με την W , οπότε προκύπτει μία σύνθετη μεταβλητή L που θα είναι τυχαία, θα καλείται μέγιστη σωρευτική απώλεια και θα εκφράζεται από:

$$L = \begin{cases} 0, & W = 0 \\ L_1 + L_2 + \dots + L_W, & W \geq 1 \end{cases}$$

Η προαναφερθείσα μεταβλητή L δηλώνει το σύνολο του μεγέθους της πτώσης από το πλεόνασμα κάτω από την τιμή του u μέχρι την ελάχιστη τιμή του πλεονάσματος κατά την στοχαστική διαδικασία που λαμβάνει τη μορφή $\{U(t): t \geq 0\}$.

Από αυτή η σύνθετη γεωμετρική κατανομή της τ.μ. L προκύπτει:

$$Pr(L = 0) = Pr(W = 0) = \delta(0) = \frac{\theta}{1+\theta}$$

Συμπληρωματικά: $Pr(L \leq u) = \delta(u)$

$$Pr(L > u) = \psi(u) = \bar{F}_L(u)$$

Σχετικά με την κατανομή των τυχαίων μεταβλητών L_i προκύπτει ότι:

$$F_{L_i}(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x F_x(y) dy, \quad i = 1, 2 \dots$$

2.4. Συντελεστής Προσαρμογής

Ο συντελεστής προσαρμογής θα είναι η θετική σταθερά R που αποτελεί λύση της εξίσωσης ως προς r :

$$M_X(r) = 1 + (1 + \theta) \cdot \mu_1 \cdot r$$

Αυτός καλείται και εξίσωση του συντελεστή και συχνότερα κατονομάζεται εξίσωση του Lundberg.

Ο συντελεστής προσαρμογής δεν υπάρχει όταν η ροπογεννήτρια
θα απειρίζεται για κάθε $r > 0$.

2.5. Η Ανισότητα και οι Τύποι του Lundberg

Η εφαρμογή της ανισότητας του Lundberg για να καταμετρηθεί η πιθανότητα χρεοκοπίας και θα εκφραστεί μέσω της σχέσης:

$$\psi(u) \leq e^{-R \cdot u}$$

Σημαντικό είναι πως η ανισότητα Lundberg παρέχει λεπτομέρειες για την πιθανότητα χρεοκοπίας μέσω της βοήθειας του πάνω φράγματος που βρίσκεται σε συνάρτηση με το αρχικό αποθεματικό u καθώς και τον συντελεστή προσαρμογής. Αν δεν υπάρχει κάποιος αναλυτικός τύπος που θα χρησιμοποιηθεί για να υπολογιστεί η πιθανότητα χρεοκοπίας, τότε η παραπάνω ανισότητα θα παρέχει την ακόλουθη εγγύηση:

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}, \quad u \geq 0$$

Οι γενικές παρατηρήσεις που προκύπτουν αφορούν στο ότι για μία δεδομένη τιμή R η πιθανότητα χρεοκοπίας θα ελαττώνεται αναλογικά με το πόσο μεγεθύνεται το αρχικό αποθεματικό. Η δεύτερη παρατήρηση σχετίζεται με το ότι για μία δεδομένη τιμή του

αρχικού αποθεματικού η πιθανότητα χρεοκοπίας θα μικραίνει αναλογικά με το πόσο μεγαλώνεται η R .

Επιπρόσθετα, σχετικά με άνω φράγμα του συντελεστή προσαρμογής R πρέπει να αναφερθεί πως στη θεωρία της χρεοκοπίας υπάρχουν περιπτώσεις που ενώ υπάρχει ο συντελεστής προσαρμογής, δεν υπολογίζεται επακριβώς. Συνεπώς, για να επέλθει ακρίβεια, πρέπει να υπολογιστεί το άνω φράγμα για τον συντελεστή προσαρμογής R . Αν χρησιμοποιηθεί η πρωταρχική εξίσωση με αυτήν της έντασης ασφαλίστρου προκύπτει ότι $\lambda + cR = \lambda MX(R)$. Εδώ, γίνεται η υπόθεση ότι το σύνολο των αποζημιώσεων θα έχει f πυκνότητα.

Από τα παραπάνω συμπεραίνεται ότι:

$$\begin{aligned} \lambda + cR &= \lambda \int_0^{\infty} e^{Rx} f(x) dx > \lambda \int_0^{\infty} \left(1 + Rx + \frac{1}{2} R^2 x^2\right) f(x) dx \\ &= \lambda \left[\int_0^{\infty} f(x) dx + \int_0^{\infty} Rxf(x) dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{2} R^2 x^2 f(x) dx \right] \\ &= \lambda \left(1 + R\mu + \frac{1}{2} R^2 \mu_2\right) \\ &\Rightarrow 2(c + \lambda\mu)R > \lambda R^2 \mu_2 \Leftrightarrow R < \frac{2(c + \lambda\mu)}{\lambda\mu_2} \end{aligned}$$

Αν χρησιμοποιηθεί η σχέση $c = (1 + \theta)\lambda\mu$, $\theta > 0$, τότε προκύπτει μια ισοδύναμη σχέση για το φράγμα, η οποία θα είναι: $R < \frac{2\theta\mu}{\mu_2}$.

Μια πιο γενική προσέγγιση με συντελεστή προεξόφλησης δ είναι η θεμελιώδης εξίσωση του Lundberg η οποία ορίζεται από τη σχέση

$$cs + \lambda \hat{f}(s) - (\lambda + \delta) = 0$$

όπου $\hat{f}(s)$ δηλώνεται ο Laplace μετασχηματισμός της πυκνότητας f του συνόλου των αποζημιώσεων. Επομένως:

$$\hat{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx \text{ και αν } \delta > 0 \text{ τότε θα έχει αύξουσα θετική ρίζα } \rho = \rho(\delta).$$

Οι παρατηρήσεις που προκύπτουν είναι οι ακόλουθες:

- α.** Αν $\delta = 0$, τότε $\rho = 0$.

β. Αν $\delta = 0$ τότε έστω $l(s) = \lambda \hat{f}(s)$, από τα οποία προκύπτει μία καθορισμένη ισοδύναμη σχέση με την εξίσωση του Lundberg, από την οποία θα οριστεί ο συντελεστής προσαρμογής.

γ. Αν $\delta = 0$, ο συντελεστής προσαρμογής στο κλασσικό μοντέλο θα αποτελεί την μοναδική αρνητική ρίζα της ακόλουθης εξίσωσης: $l(s) = \lambda \hat{f}(s)$.

Αναφορικά με τον ασυμπτωτικό τύπο των Cramer-Lundberg πρέπει να αναφερθεί ότι αποτελεί μία προσέγγιση σχετικά με την πιθανότητα χρεοκοπίας στην περίπτωση που το u θα μπορεί να λάβει μεγάλες τιμές.

Επιπλέον, ο ασυμπτωτικός τύπος των Cramer-Lundberg, παρέχει μία προσέγγιση για την πιθανότητα χρεοκοπίας στο κλασσικό πρότυπο όταν το αρχικό αποθεματικό u παίρνει πολύ μεγάλες τιμές. Σύμφωνα με τον ασυμπτωτικό τύπο και μετά την προϋπόθεση ότι

$$\int_0^{\infty} x e^{Rx} \bar{F}(x) dx < \infty$$

τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας θα ικανοποιεί την ασυμπτωτική σχέση

$$\psi(u) \sim C e^{-Ru}$$

όπου $u \rightarrow \infty$ ή αλλιώς ισοδύναμα: $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{e^{-Ru}} = C$, το οποίο C αποτελεί μία θετική σταθερά, που υπολογίζεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$C = \frac{\theta \mu}{R \int_0^{\infty} x e^{Rx} \bar{F}(x) dx}$$

2.6. Εφαρμογές

1. Εύρεση του συντελεστή προσαρμογής για την κατανομή της οικογένειας αποζημιώσεων Erlang (Lin & Willmotm, 2000).

Υπόθεση ότι η $X \sim Erlang(2, \beta)$, πιο αναλυτικά δίνεται:

$$f(x) = \beta^2 x e^{-\beta x}, \quad \beta > 0, \quad x \geq 0$$

Η X θα έχει ροπογεννήτρια $M(r) = \frac{\beta^2}{(\beta - r)^2}$, οπότε η εξίσωση για το συντελεστή προσαρμογής γράφεται:

$$M(r) = \frac{\beta^2}{(\beta - r)^2} = 1 + (1 + \theta)r\mu$$

ή αλλιώς θα είναι ισοδύναμα μέσω:

$$\beta^2 = (\beta - r)^2[1 + (1 + \theta)r\mu]$$

Έτσι προκύπτει μία τριτοβάθμια εξίσωση ως προς το r , στην οποία η μία ρίζα θα είναι το μηδέν –το οποίο απορρίπτεται– και ως εκ τούτου προκύπτει η δευτεροβάθμια εξίσωση:

$$r^2(1 + \theta)\mu - r(2\beta(1 + \theta)\mu - 1) - (2\beta + (1 + \theta)\mu\beta^2) = 0$$

Αυτή έχει δύο ρίζες όπου:

$$r_1 = \frac{2\beta\mu(1 + \theta) - 1 \pm \sqrt{1 + 4\beta\mu(1 + 2\beta\mu + \theta + 4\beta\mu\theta + 2\beta\mu\theta^2)}}{2\mu(1 + \theta)}$$

όπου ο συντελεστής προσαρμογής θα είναι η μικρότερη ρίζα.

2. Ο συντελεστής προσαρμογής για τις αποζημιώσεις που είναι σταθερές

Αν τεθεί η υπόθεση ότι οι αποζημιώσεις θα πάρουν αποκλειστικά μία τιμή και έστω $X_i = 10$ με πιθανότητα 1, προκύπτει η εξίσωση (Lin & Willmotm, 2000):

$$M_x(r) = 1 + (1 + \theta)r\mu$$

η οποία θα λάβει τη μορφή: $e^{10r} = 1 + 10(1 + \theta)r$.

Η παραπάνω θεωρείται ως μία μη γραμμική εξίσωση για το r , που δεν μπορεί να δοθεί σε αυτήν αναλυτική επίλυση. Επιπλέον, στην περίπτωση εκφυλισμού της κατανομής των αποζημιώσεων, τότε ο συντελεστής προσαρμογής δε θα υπολογίζεται με ακρίβεια. Παρόλα αυτά, $\mu_1 = \mu = 10$ και $\mu_2 = 100$, τότε για το R προκύπτει πως το άνω φράγμα θα είναι:

$$R < \frac{2\theta\mu}{\mu_2} \Leftrightarrow R < \frac{20\theta}{100} = \frac{\theta}{5}$$

3. Η πιθανότητα χρεοκοπίας σχετικά με τη μείξη των εκθετικών κατανομών

Σε αυτήν την εφαρμογή επιχειρείται να βρεθεί η πιθανότητα χρεοκοπίας όταν η κατανομή των αποζημιώσεων αποτελεί μείξη εκθετικών κατανομών. Πιο συγκεκριμένα (Lin & Willmotm, 2000):

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \pi_i b_i e^{-b_i x}, \quad x \geq 0$$

από την οποία $\pi_i \geq 0$ και $\sum_{i=1}^n \pi_i = 1$. Εδώ, η πιθανότητα χρεοκοπίας θα δοθεί από τον τύπο (Gerber κ.ά., 1987):

$$\psi(u) = \sum_{k=1}^n C_k e^{-r_k u}, \quad u \geq 0$$

Από τον οποίο οι ρίζες της εξίσωσης του Lundberg θα είναι r_1, r_2, \dots, r_n και προκύπτει:

$$C_k = \sum_{j=1}^n \frac{C_{jk}}{b_j}, \quad C_{jk} = \frac{\pi_j / (b_j - r_k)}{\sum_{m=1}^n \frac{\pi_m}{(b_m - r_k)^2}}$$

Αν η συνάρτηση πυκνότητας για την τυχαία μεταβλητή X είναι η $f(x)$, τότε υποθέτουμε ότι αυτή δίνεται από τη σχέση

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right) 3e^{-3x} + \left(\frac{1}{2}\right) 7e^{-7x}, \quad x \geq 0$$

όπου επεξηγηματικά αναφέρεται ότι $(\pi_1, \pi_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ καθώς και $(b_1, b_2) = (3, 7)$.

Αναφορικά με την ραπογεννήτρια συνάρτηση και τη μέση τιμή που λαμβάνουν οι αποζημιώσεις, έχουμε

$$\mu = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{7}\right) = \frac{5}{21}$$

καθώς και:

$$M_x(r) = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{3-r}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{7}{7-r}\right)$$

Μέσω της εξίσωσης του Lundberg, που είναι: $M_x(r) = 1 + (1 + \theta)r\mu$ με περιθώριο ασφάλειας με $\theta = 2/5$ προκύπτει η σχέση:

$$1 + \left(1 + \frac{2}{5}\right) \left(\frac{5}{21}\right) r = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{3-r}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{7}{7-r}\right)$$

ή με ισοδύναμο τρόπο:

$$2r^3 + 14r^2 + 12r = 0$$

Η ρίζα που απορρίπτεται είναι το μηδέν και οι εναπομείνουσες δύο θα είναι $r_1 = 1$ και η δεύτερη θα είναι $r_2 = 6$. Σχετικά με τα C_1, C_2 προκύπτει:

$$C_1 = \frac{24}{35}, \quad C_2 = \frac{1}{35}$$

Συνεπώς, η πιθανότητα χρεοκοπίας θα αναπαρίσταται από τη σχέση:

$$\psi(u) = \frac{24}{35} e^{-u} + \frac{1}{35} e^{-6u}, \quad u \geq 0$$

Το προαναφερθέν παράδειγμα μπορεί να επαναχρησιμοποιηθεί με διαφορετική προσέγγιση αν εξεταστεί στο πλαίσιο των κατανομών τύπου φάσεων (Gerber et al., 1987).

4. Τρόπος εύρεσης των ριζών της εξίσωσης του Lundberg

Η τέταρτη εφαρμογή στοχεύει στον υπολογισμό του πλήθους των ριζών που επιδέχεται η θεμελιώδης εξίσωση του Lundberg όταν $\delta = 1$. Δηλαδή, στην περίπτωση που ο συντελεστής προεξόφλησης δ είναι ίσος με τη μονάδα. Συνεπώς (Lin & Willmotm, 2000):

$$f(x) = \frac{e^{-2x}}{2} + \frac{9e^{-3x}}{4}$$

στην οποία δίνεται $\lambda = \frac{3}{2}$ καθώς και $c = 1$.

Σε αυτήν την περίπτωση παρατηρείται πως η πυκνότητα του συνόλου των αποζημιώσεων αποτελεί μία μείξη των εκθετικών κατανομών, οι οποίες έχουν ως παραμέτρους $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$ και εντοπίζονται τα ανάλογα βάρη $w_1 = \frac{1}{4}, w_2 = \frac{3}{4}$. Συνεπώς, προκύπτει ότι ο μετασχηματισμός Laplace για την f διαμορφώνεται ως:

$$\hat{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx = \frac{1}{2(2+s)} + \frac{9}{4(3+s)}, \quad s > 2$$

Παράλληλα, παρατηρείται ότι η συνάρτηση αυτή απειρίζεται η $\hat{f}(s)$ για $s \leq -2$.

Αν λυθεί το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{cases} cs + \lambda \hat{f}(s) - (\lambda + \delta) = 0 \\ l(s) = \lambda \hat{f}(s) \end{cases}$$

Προκύπτει πως

$$l(s) = \delta + \lambda - cs = \frac{5}{2} - s$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνεται πως:

$$\begin{aligned} l(s) = \lambda \hat{f}(s) &\Leftrightarrow \frac{5}{2} - s = \left(\frac{3}{2}\right) \frac{1}{2(2+s)} + \frac{9}{4(3+s)} = \frac{3}{4(2+s)} + \frac{27}{8(3+s)} \\ &\Leftrightarrow 4(5-2s)(2+s)(3+s) = 6(3+s) + 27(3+s) \\ &\Leftrightarrow 8s^3 + 20s^2 - 19s - 48 = 0, \quad s > 2 \end{aligned}$$

Τέλος, υποθέτουμε ότι $L(s) = 8s^3 + 20s^2 - 19s - 48$ για να εξεταστεί η συνάρτηση βάσει των επιμέρους διαστημάτων που προκύπτουν από το πεδίο ορισμού της. Εν συνεχεία, για το διάστημα $(-2,0)$ θα δίνεται $L(-2) = 6 > 0$ και $L(0) = -48 < 0$. Αυτό συνεπάγεται πως η $L(s) = 0$ θα παρουσιάζει ένα περιττό πλήθος ριζών. Επομένως, εφόσον η εξίσωση του Lundberg δε δύναται να έχει πάνω από μία αρνητικές ρίζες, προκύπτει πως η $L(s) = 0$ θα έχει μόνο μία ρίζα.

Κατά τον ίδιο τρόπο, για το διάστημα $(0,2)$ στο οποίο δίνεται $L(2) = 58 > 0$ θα προκύπτει μία μόνο ρίζα. Παράλληλα, για το διάστημα $(2,+\infty)$ προκύπτει πως $\lim_{s \rightarrow \infty} L(s) = +\infty$, αποτέλεσμα που δείχνει ότι παρέχεται ένα άρτιο πλήθος ριζών. Ωστόσο, δεν υπάρχει κάποια ρίζα σε αυτό, γιατί οι δύο εκ των τριών ριζών της εξίσωσης βρίσκονται εκτός του διαστήματος $(2,+\infty)$. Η εναπομείνασα ρίζα δεν είναι αποδεκτή εξαιτίας του πεδίου ορισμού της συνάρτησης, το οποίο υποχρεωτικά βρίσκεται στο διάστημα $(-\infty,-2)$. Επομένως, προκύπτει πως απορρίπτεται η μία από τις τρεις ρίζες (Lin & Willmotm, 2000).

3. Οι δεσμευμένες ροπές του Χρόνου Χρεοκοπίας

3.1. Βιβλιογραφική επισκόπηση

Παρακάτω επιχειρείται μία παρουσίαση των αποτελεσμάτων της έρευνας των Lin & Willmot (1999) σε περιπτώσεις που σχετίζονται με τις κοινές και περιθωριακές ροπές της χρεοκοπίας, το πλεόνασμα πριν την περίοδο της χρεοκοπίας και το έλλειμμα κατά την περίοδο της χρεοκοπίας. Χρησιμοποιείται μια προσέγγιση που αναπτύχθηκε στην έρευνα των Lin & Willmot (1999), σύμφωνα με την οποία η λύση σε μια ελαττωματική εξίσωση ανανέωσης εκφράζεται με την έννοια μιας σύνθετης γεωμετρικής ουράς, για να αντλήσουμε ρητά τις κοινές και οριακές ροπές και η οποία επιτρέπει επίσης τη δημιουργία επαναλαμβανόμενων σχέσεων μεταξύ των ροπών αυτών, ενώ παρατίθενται παραδείγματα για τις περιπτώσεις κατά τις οποίες η κατανομή μεγέθους απαίτησης είναι εκθετική, συνδυασμοί εκθετικών και μείζων Erlangs.

Η ανάλυση των κατανομών της περιόδου της χρεοκοπίας, του πλεονάσματος πριν από την περίοδο της χρεοκοπίας, καθώς και του ελλείμματος κατά την περίοδο της χρεοκοπίας, έχει αποτελέσει αντικείμενο σημαντικού ερευνητικού ενδιαφέροντος. Ο προσδιορισμός αυτών των κατανομών είναι δύσκολος, δεδομένου ότι στις περισσότερες περιπτώσεις δεν υπάρχουν αναλυτικές εκφράσεις. Επιπλέον, δεν υπάρχουν γενικά λύσεις κλειστής μορφής για τις ροπές αυτών των διανομών. Έχουν χρησιμοποιηθεί διάφορες προσεγγίσεις για τη μελέτη των πιθανολογικών ιδιοτήτων αυτών των κατανομών. Η μελέτη των Gerber et al. (1987) και των Dufresne & Gerber (1988) εστιάζεται στην αναλυτική έκφραση της πιθανότητας καταστροφής και της λειτουργίας διανομής του πλεονάσματος πριν από την περίοδο της καταστροφής, στην περίπτωση που το ατομικό μέγεθος της απαίτησης είναι συνδυασμός εκθετικών διανομών ή συνδυασμός διανομών γ .

Στις έρευνες των Dickson (1992), Dickson & Water (1992), Dickson & Dos Reis (1995), Willmot & Lin (1998) και Schmidli (1999), συζητούνται αναλυτικές ιδιότητες της κατανομής του πλεονάσματος πριν από τη στιγμή της καταστροφής, του ελλείμματος κατά την περίοδο της καταστροφής και της σχέσης τους. Οι μελέτες των Dickson & Water (1991) και Dickson et al. (1995) εξετάζουν τον επαναλαμβανόμενο υπολογισμό για τις εν λόγω διανομές όταν το ατομικό μέγεθος της απαίτησης είναι πλήρως διακριτό. Οι Di Lorenzo & Tessitore (1996) προτείνουν μια αριθμητική

προσέγγιση για τον υπολογισμό της κατανομής του πλεονάσματος πριν από την καταστροφή. Οι Gerber & Shiu (1997, 1998) μελέτησαν την κοινή κατανομή του χρόνου καταστροφής, του πλεονάσματος πριν από την περίοδο της καταστροφής και του ελλείμματος κατά την περίοδο της καταστροφής εξετάζοντας μια αναμενόμενη μειωμένη ποινή που αφορά αυτές τις τρεις τυχαίες μεταβλητές και έδειξαν ότι αυτή η αναμενόμενη μειωμένη ποινή ως συνάρτηση του αρχικού πλεονάσματος είναι η λύση μιας ορισμένης (ελαττωματικής) εξίσωσης ανανέωσης. Η προσέγγιση αυτή επιτρέπει τη χρήση υφιστάμενων θεωρητικών τεχνικών ανανέωσης καθώς και νέων τεχνικών που αναπτύχθηκαν για εξισώσεις ανανέωσης. Στις έρευνες των Lin & Willmot (1999) και των Willmot & Lin (2000), προτείνεται διαφορετική προσέγγιση για την επίλυση των ελαττωματικών εξισώσεων ανανέωσης, σύμφωνα με την οποία, η λύση μιας ελαττωματικής εξίσωσης ανανέωσης εκφράζεται με τη μορφή σύνθετης γεωμετρικής ουράς. Αυτό έχει το πλεονέκτημα ότι επιτρέπει τη χρήση των αναλυτικών ιδιοτήτων μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής και την εφαρμογή ακριβών και κατά προσέγγιση αποτελεσμάτων που έχουν αναπτυχθεί για την ουρά. Οι ουρές των σύνθετων γεωμετρικών κατανομών έχουν μελετηθεί εκτενώς τόσο αναλυτικά όσο και αριθμητικά. Συγκεκριμένα, υπάρχουν αναδρομικοί τύποι (Panjer & Willmot, 1992), όπως και τα άνω και κάτω όρια (Lin, 1996), ενώ μερικές φορές υπάρχουν ακριβείς λύσεις (Dufresne & Gerber, 1988). Επίσης, διατίθεται ο γνωστός ασυμπτωτικός τύπος Cramer-Lundberg (Gerber, 1979). Δεύτερον και σημαντικότερο, για μια μεγάλη κατηγορία κατανομών μεγέθους απαίτησης, η ουρά της συσχετισμένης σύνθετης γεωμετρικής κατανομής μπορεί να προσεγγιστεί πολύ ωραία με ένα συνδυασμό δύο εκθετικών κατανομών. Για παράδειγμα, αν η κατανομή μεγέθους ισχυρισμών είναι χειρότερη από εκείνη που χρησιμοποιείται στη μεταφορά παραγγελίας (NWUC) ή νέα καλύτερη από αυτή που χρησιμοποιείται στη μεταφορά παραγγελίας (NBUC), ένας συνδυασμός δύο εκθετικών κατανομών με σωστές τιμές παραμέτρων θα ταιριάζει με τη μάζα πιθανότητας στο μηδέν και τον μέσο όρο και έχει τον ίδιο ασύμπτωτο τύπο. Ο συνδυασμός αυτός αναφέρεται ως προσέγγιση Tijms (Tijms & Tijms, 1994) και συνεπώς, μπορούμε να εκμεταλλευτούμε την αναλυτική μορφή της εν λόγω προσέγγισης.

3.2. Σύγκριση Κατανομών Ισορροπίας και Σύνθετων Γεωμετρικών Ουρών

Παρακάτω Σε αυτήν την ενότητα παρουσιάζουμε δύο βοηθητικές συναρτήσεις που περιλαμβάνουν τη συνέλιξη της σύνθετης γεωμετρικής ουράς $\bar{K}(u)$ και της $n^{\text{οστής}}$

ουράς ισορροπίας $\overline{G_n}(x)$ της διανομής του «μεγέθους αξίωσης» $G(x) = G_0(x)$. Και οι δύο λειτουργίες είναι απαραίτητες για τον υπολογισμό των ροπών του (μειωμένου) ελλείμματος και των ροπών κατά την χρεοκοπία, καθώς και άλλων σημαντικών ποσοτήτων στη θεωρία χρεοκοπίας.

Ορίζεται $g_{-1}(\rho) = p_1$, $\mu_0(\rho) = 1$, και $g_n(\rho)$ ο μέσος όρος της συνάρτησης κατανομής $G_n(x)$ της $G(x)$. Ορίζεται:

$$g_n(\rho) = \frac{\mu_{n+1}(\rho)}{(n+1)\mu_n(\rho)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Επίσης ορίζεται:

$$\alpha_n(u, \rho) = g_n(\rho) \left\{ \int_0^u \overline{K}(u-x) dG_{n+1}(x) + \overline{G_{n+1}}(u) \right\}, \quad n = -1, 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

Επιπλέον ορίζεται:

$$\alpha_{-1}(u, \rho) = p_1(1 + \beta)\overline{K}(u), \quad \text{και}$$

$$\alpha_n(u, \rho) = \int_0^u \overline{K}(u-x)\overline{G_n}(x)dx + \int_u^\infty \overline{G_n}(x)dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

Είναι δυνατή η παραγωγή μιας εναλλακτικής αναπαράστασης για $\alpha_n(u, \rho)$ ξεκινώντας με την ακόλουθη αναδρομική σχέση.

Λήμμα 3.1

$$\alpha_{n+1}(u, \rho) = \frac{1}{g_n(\rho)} \int_u^\infty \alpha_n(t, \rho) dt - \int_u^\infty \overline{K}(t) dt, \quad n = -1, 0, 1, 2,$$

Απόδειξη:

Για $n = -1, 0, 1, 2, \dots$, βάσει της σχέσης (2) προκύπτει:

$$\frac{1}{g_n(\rho)} \int_u^\infty \alpha_n(t, \rho) dt = \int_u^\infty \int_0^t \bar{K}(t-x) dG_{n+1}(x) dt + \int_u^\infty \overline{G_{n+1}}(t) dt$$

Ανταλλάσσοντας τη σειρά της ολοκλήρωσης, έχουμε:

$$\begin{aligned} & \int_u^\infty \int_0^t \bar{K}(t-x) dG_{n+1}(x) dt \\ &= \int_0^u \int_u^\infty \bar{K}(t-x) dt dG_{n+1}(x) + \int_u^\infty \int_x^\infty \bar{K}(t-x) dt dG_{n+1}(x) \\ &= \int_0^u \int_{u-x}^\infty \bar{K}(t) dt dG_{n+1}(x) + \overline{G_{n+1}}(u) \int_0^\infty \bar{K}(t) dt \end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας τα παραγωγίσιμα μέρη:

$$\begin{aligned} \int_0^u \int_{u-x}^\infty \bar{K}(t) dt dG_{n+1}(x) &= -\overline{G_{n+1}}(x) \int_{u-x}^\infty \bar{K}(t) dt \Big|_{x=0}^u + \int_0^u \bar{K}(u-x) \overline{G_{n+1}}(x) dx / \\ &= -\overline{G_{n+1}}(u) \int_0^\infty \bar{K}(t) dt + \int_u^\infty \bar{K}(t) dt + \int_0^u \bar{K}(u-x) \overline{G_{n+1}}(x) dx \end{aligned}$$

Έτσι

$$\begin{aligned} \frac{1}{g_n(\rho)} \int_u^\infty \alpha_n(t, \rho) dt &= \int_u^\infty \bar{K}(t) dt + \int_0^u \bar{K}(u-x) \overline{G_{n+1}}(x) dx + \int_u^\infty \overline{G_{n+1}}(t) dt \\ &= \int_u^\infty \bar{K}(t) dt + \alpha_{n+1}(u, \rho) \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (3) έχουμε την ακόλουθη εναλλακτική αναπαράσταση για την $\alpha_n(u, \rho)$ από το θεώρημα.

Θεώρημα 3.1

Ισχύει ότι

$$\alpha_0(u, \rho) = \beta \int_u^\infty \bar{K}(x) dx \quad (4)$$

και για $n = 1, 2, 3, \dots$,

$$\alpha_n(u, \rho) = \frac{\beta}{\mu_n(\rho)} \int_u^\infty (x-u)^n \bar{K}(x) dx - \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} \frac{\mu_{n-j}(\rho)}{\mu_n(\rho)} \int_u^\infty (x-u)^j \bar{K}(x) dx \quad (5)$$

Απόδειξη:

Από την ποσότητα $\alpha_{-1}(u, \rho) = p_1(1+\beta)\bar{K}(u)$, (3.4) παράγεται για $n = -1$

$$\alpha_0(u, \rho) = \frac{p_1(1+\beta)}{p_1} \int_u^\infty \bar{K}(t) dt - \int_u^\infty \bar{K}(t) dt = \beta \int_u^\infty \bar{K}(t) dt$$

αποδεικνύοντας τη σχέση (4). Για $j \geq 0$, και εναλλάσσοντας τη σειρά της ολοκλήρωσης, προκύπτει ότι

$$\int_u^\infty \int_t^\infty (y-t)^j \bar{K}(y) dy dt = \frac{1}{j+1} \int_u^\infty (y-u)^{j+1} \bar{K}(y) dy \quad (6)$$

Με τη βοήθεια της (6) και του θεωρήματος 3.2, είναι εύκολο να επαληθεύσουμε ότι (5) διατηρείται με επαγωγή στο n .

Στην ειδική περίπτωση όταν $\delta = 0$, είναι βολικό να οριστεί:

$$\tau_n(u) = \int_0^u \psi(u-x)\bar{P}_n(x)dx + \int_u^\infty \bar{P}_n(x)dx, \quad n = 1,2,3 \dots$$

και έτσι

$$\tau_n(u) = \frac{p_{n+1}}{(n+1)p_n} \left\{ \int_0^u \psi(u-x)dP_{n+1}(x) + \overline{P_{n+1}}(u) \right\}, \quad n = 1,2,3,$$

Έχουμε το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 3.1

$$\tau_1(u) = \theta \int_u^\infty \psi(x)dx \quad (7)$$

και για $n = 2,3,4, \dots$

$$\tau_n(u) = \frac{np_1\theta}{p_n} \int_u^\infty (x-u)^{n-1}\psi(x)dx - \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n}{j} \frac{p_{n-j}}{p_n} \int_u^\infty (x-u)^j\psi(x)dx \quad (8)$$

Απόδειξη:

Όταν $\delta = 0$, $\rho = 0$, $G(x) = P_1(x)$, και $\bar{P}_n(x) = \overline{G_{n-1}}(x)$. Από τη στιγμή που $\bar{K}(u) = \psi(u)$ σε αυτή την περίπτωση ισχύει:

$$\tau_n(u) = \alpha_{n-1}(u, 0), \quad n = 1,2,3,$$

Από τη στιγμή που $\beta = \theta$ όταν $\rho = 0$ από την (4) προκύπτει η (7). Τότε η (8) ακολουθεί απευθείας από την (5).

Είναι προφανές στις αποδείξεις των παραπάνω θεωρημάτων ότι απαιτείται η ύπαρξη ορισμένων ροπών της κατανομής μεγέθους της αξίωσης $P(x)$. Για παράδειγμα, εάν το ρ_{n+2} είναι πεπερασμένο, τότε $\alpha_n(u, \rho)$ και $\tau_{n+1}(u)$ είναι και τα δύο πεπερασμένα. Προκειμένου να επικεντρωθούμε στην αναλυτική αναπαράσταση των συναρτήσεων ενδιαφέροντος, υποθέτουμε πάντα ότι οι απαιτούμενες ροπές είναι πεπερασμένες σε όλη την υπόλοιπη εργασία.

Στα ακόλουθα παραδείγματα παρουσιάζουμε πώς να υπολογίζουμε τα $\alpha_n(u, \rho)$ και $\tau_n(u)$ όταν το $P(x)$ είναι ένας συνδυασμός εκθετικών ή μείξη κατανομών Erlang. Από τυπική άποψη, ο συνδυασμός δύο εκθετικών είναι πολύ σημαντικός, καθώς μπορεί να θεωρηθεί ότι παρέχει προσέγγιση Tijms για την ποσότητα που μας ενδιαφέρει. Συγκεκριμένα, οι προσεγγίσεις Tijms για $\alpha_n(u, \rho)$ και $\tau_n(u)$ επιτρέπουν τις αντίστοιχες προσεγγίσεις για ροπές του χρόνου χρεοκοπίας και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας, όπως συζητείται σε επόμενες ενότητες. Στη συνέχεια ακολουθεί, ένας συνδυασμός δύο εκθετικών ο οποίος μπορεί να προβληθεί σε αυτό το πλαίσιο.

Εφαρμογή 1: Συνδυασμοί εκθετικών

Η περίπτωση όπου το $P(x)$ είναι ένας συνδυασμός εκθετικών εξετάζεται για πρώτη φορά στους Gerber et al. (1987) και Dufresne και Gerber (1988) στις οποίες δίνονται μια έκφραση κλειστής μορφής για την πιθανότητα χρεοκοπίας, και την κατανομή του ελλείμματος κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας.

Ξεκινάμε με ένα εκθετικό μέγεθος απαίτησης με αντίστοιχη συνάρτηση κατανομής $\bar{P}(x) = e^{-\mu x}$. Σε αυτή την περίπτωση, για όλα τα $n = 0, 1, \dots$, $\bar{P}_n(x) = e^{-\mu x}$. Ακολουθούν τα εξής:

$$\bar{G}_n(x) = e^{-\mu x}$$

Έτσι, $\mu_n(\rho) = \mu_n(0) = n!/\mu^n$. Επιπλέον

$$\bar{K}(u) = \frac{1}{1 + \beta} e^{-Ru}$$

όπου

$$\frac{1}{1 + \beta} = \frac{\mu}{\rho + \mu} \frac{1}{1 + \theta}$$

$$R = \frac{\beta\mu}{1 + \beta} = \frac{\theta\mu}{1 + \theta} + \frac{\rho}{\rho + \mu} \frac{\mu}{1 + \theta}$$

Ένας άμεσος υπολογισμός από τη σχέση (2) αποδίδει $\alpha_n(u, \rho) = \frac{1}{\mu} e^{-Ru}$

Υποθέτουμε τώρα ότι η συνάρτηση $K(u)$ έχει τη μορφή:

$$\bar{K}(u) = C_1 e^{-R_1 u} + C_2 e^{-R_2 u}$$

Αυτό συμβαίνει όταν το $P(x)$ είναι ένας συνδυασμός δύο εκθετικών ή χρησιμοποιείται προσέγγιση Tijms. Είναι ένας συνδυασμός δύο εκθετικών ή μια προσέγγιση Tijms.

$$\begin{aligned} \int_u^\infty (x - u)^j \bar{K}(x) dx &= C_1 e^{-R_1 u} \int_0^\infty x^j e^{-R_1 x} dx + C_2 e^{-R_2 u} \int_0^\infty x^j e^{-R_2 x} dx \\ &= C_1 j! R_1^{-j-1} e^{-R_1 u} + C_2 j! R_2^{-j-1} e^{-R_2 u} \end{aligned}$$

Απόδοση Θεωρήματος

$$\alpha_n(u, \rho) = C_{1,n}^* e^{-R_1 u} + C_{2,n}^* e^{-R_2 u}$$

Όπου

$$C_{1,n}^* = C_1 \left[\frac{\beta n! R_1^{-n-1}}{\mu_n(\rho)} - \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} \frac{\mu_{n-j}(\rho) j! R_1^{-j-1}}{\mu_n(\rho)} \right]$$

$$C_{2,n}^* = C_2 \left[\frac{\beta n! R_2^{-n-1}}{\mu_n(\rho)} - \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} \frac{\mu_{n-j}(\rho) j! R_2^{-j-1}}{\mu_n(\rho)} \right]$$

Με $\rho = 0$, υπολογίζεται

$$\tau_n(u) = C_{1,n}^{**} e^{-R_1 u} + C_{2,n}^{**} e^{-R_2 u}$$

$$C_{1,n}^{**} = \frac{n! C_1 R_1^{-n}}{p_n} \left[p_1 \theta - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{p_{j+1} R_1^j}{(j+1)!} \right]$$

$$C_{2,n}^{**} = \frac{n! C_2 R_2^{-n}}{p_n} \left[p_1 \theta - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{p_{j+1} R_2^j}{(j+1)!} \right]$$

Για έναν γενικό γραμμικό συνδυασμό εκθετικών, η παραγοντοποίηση είναι παρόμοια και παραλείπεται εδώ.

Οι συνδυασμοί Erlang είναι μια σημαντική οικογένεια κατανομών στη μοντελοποίηση των ζημιών ασφάλισης για το λόγο ότι οποιαδήποτε συνεχής κατανομή στο $(0, \infty)$ μπορεί να προσεγγιστεί με αυθαίρετη ακρίβεια από μια κατανομή αυτού του τύπου (Tijms, 1994).

Εφαρμογή 2: Συνδυασμοί του Erlangs

Η συνάρτηση πυκνότητας ενός συνδυασμού Erlangs δίνεται από

$$P'(x) = \sum_{k=1}^r q_k \frac{\mu(\mu x)^{k-1} e^{-\mu x}}{(k-1)!}, \quad x \geq 0$$

όπου $\{q_1, q_2, \dots, q_r\}$ είναι μια κατανομή πιθανότητας. Οι Lin και Willmot (1999) δείχνουν ότι

$$\bar{K}(u) = e^{-\mu u} \sum_{j=0}^{\infty} \bar{C}_j \frac{(\mu u)^j}{j!}, \quad u \geq 0$$

όπου

$$\bar{C}_j = \frac{1}{1+\beta} \sum_{k=1}^j q_k^* \bar{C}_{j-k} + \frac{1}{1+\beta} \sum_{k=j+1}^{\infty} q_k^*, \quad j = 1, 2, 3$$

Εδώ υποτίθεται ότι $\bar{C}_0 = (1 + \beta)^{-1}$, και

$$q_k^* = \frac{\sum_{j=k}^r q_j \left(\frac{\mu}{\mu + \rho}\right)^{j-k}}{\sum_{j=1}^r q_j \sum_{i=0}^{j-1} \left(\frac{\mu}{\mu + \rho}\right)^i}$$

Για $k = 1, 2, \dots, r$, και $q_k^* = 0$, για $k > r$

Τώρα, για οποιοδήποτε $i = 0, 1, \dots$, και $j = 0, 1, \dots$

$$\begin{aligned} \int_u^{\infty} (x-u)^j \frac{(\mu x)^i}{i!} e^{-\mu x} dx &= \frac{\mu^i}{i!} e^{-\mu u} \int_0^{\infty} x^j (x+u)^i e^{-\mu x} dx \\ &= \mu^{-j-1} e^{-\mu u} \sum_{k=0}^i \frac{(j+i-k)!}{(i-k)!} \frac{(\mu u)^k}{k!} \end{aligned}$$

Έτσι,

$$\alpha_n(u, \rho) = e^{-\mu u} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{C}_{k,n}^* \frac{(\mu u)^k}{k!}$$

όπου:

$$\bar{C}_{k,n}^* = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{C}_{k+i} \left[\frac{\beta \mu^{-n-1}}{\mu_n(\rho)} \frac{(n+i)!}{i!} - \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} \frac{\mu_{n-j}(\rho) \mu^{-j-1}}{\mu_n(\rho)} \frac{(j+i)!}{i!} \right]$$

3.3. Το Έλλειμμα τη Στιγμή της Χρεοκοπίας

Σε αυτήν την ενότητα εξετάζουμε λεπτομερέστερα το (ενδεχομένως προεξοφλημένο) έλλειμμα κατά την χρεοκοπία ξεκινώντας από τις ροπές. Εστιάζουμε στις αναλυτικές λύσεις τους. Για αριθμητικούς αλγόριθμους, δίνονται σαφείς περιγραφές στην μελέτη των Dickson et al. (1995).

Εξετάζοντας την ειδική περίπτωση όπου $w(x_1, x_2) = x_2^k$, και όπου k ένας θετικός ακέραιος. Μια σχετικά απλή αναπαράσταση για $\phi(u)$ είναι η

$$\phi(u) = E\{e^{-\delta T} w(U(T-), |U(T)|) I(T < \infty)\}$$

Τότε ισχύει το εξής.

Θεώρημα 3.2.

Για $k = 1, 2, 3, \dots$

$$E\{e^{-\delta T} |U(T)|^k | T < \infty\} = \frac{1}{\beta\psi(u)} [k\mu_{k-1}(\rho)\alpha_{k-1}(u, \rho) - \mu_k(\rho)\bar{K}(u)]$$

Όπου $\mu_n(\rho) = \int_0^\infty x^n dG(x)$ και το $\alpha_n(u, \rho)$ δίνεται στο Θεώρημα 3.1

Απόδειξη Θεωρήματος

Για $w(x_1, x_2) = x_2^k$ έχουμε:

$$H(u) = \frac{e^{\rho u} \int_u^\infty e^{-\rho x} \int_x^\infty (y-x)^k dP(y) dx}{\int_0^\infty e^{-\rho y} \bar{P}(y) dy} = \frac{p_k e^{\rho u} \int_u^\infty e^{-\rho x} \bar{P}_k(x) dx}{p_1 \int_0^\infty e^{-\rho y} dP_1(y)} =$$

$$\frac{p_k \int_0^\infty e^{-\rho y} \bar{P}_k(y) dy}{p_1 \int_0^\infty e^{-\rho y} dP_1(y)} \bar{G}_k(u)$$

Επιπλέον

$$H(u) = \frac{p_{k+1} \int_0^\infty e^{-\rho y} dP_{k+1}(y)}{(k+1)p_1 \int_0^\infty e^{-\rho y} dP_1(y)} \bar{G}_k(u)$$

και έτσι προκύπτει ότι

$$H(u) = \mu_k(\rho) \overline{G}_k(u)$$

Χρησιμοποιώντας την (2), και από τη στιγμή που $\overline{G}_k(u) = \int_u^\infty \overline{G}_{k-1}(x) dx / g_{k-1}(\rho)$, καταλήγουμε στο εξής:

$$H'(u) = -\frac{\mu_k(\rho)}{g_{k-1}(\rho)} \overline{G}_{k-1}(u) = -k\mu_{k-1}(\rho) \overline{G}_{k-1}(u)$$

Άρα,

$$\begin{aligned} H'(u) &= \frac{k\mu_{k-1}(\rho)}{\beta} \int_0^u \overline{K}(u-x) \overline{G}_{k-1}(x) dx + \frac{\mu_k(\rho)}{\beta} \int_u^\infty \frac{\overline{G}_{k-1}(x)}{g_{k-1}(\rho)} dx - \frac{\mu_k(\rho)}{\beta} \overline{K}(u) \\ &= \frac{k\mu_{k-1}(\rho)}{\beta} \left\{ \int_0^u \overline{K}(u-x) \overline{G}_{k-1}(x) dx + \int_u^\infty \overline{G}_{k-1}(x) dx \right\} - \frac{\mu_k(\rho)}{\beta} \overline{K}(u) \\ &= \frac{k\mu_{k-1}(\rho)}{\beta} \alpha_{k-1}(u, \rho) - \frac{\mu_k(\rho)}{\beta} \overline{K}(u) \end{aligned}$$

Έτσι έχουμε:

$$E\{e^{-\delta T} |U(T)|^k I(T < \infty)\} = \frac{k\mu_{k-1}(\rho)}{\beta} \alpha_{k-1}(u, \rho) - \frac{\mu_k(\rho)}{\beta} \overline{K}(u)$$

και διαιρώντας με $\psi(u)$ έχουμε τη σχέση (1).

Όταν $k = 1$, η σχέση που προκύπτει είναι η εξής:

$$E\{e^{-\delta T} |U(T)| I(T < \infty)\} = \int_a^\infty \overline{K}(x) dx - \frac{\mu_1(\rho)}{\beta} \overline{K}(u)$$

Πόρισμα 3.2.

Για $k = 1, 2, 3, \dots$

$$E\{|U(T)|^k \mid T < \infty\} = \frac{p_k \tau_k(u)}{p_1 \theta \psi(u)} - \frac{p_{k+1}}{(k+1)p_1 \theta} \quad (10)$$

Όπου η συνάρτηση $\tau_k(u)$ δόθηκε στο Πόρισμα 3. 1.

Απόδειξη:

Όταν $\delta = 0$, $\bar{K}(u) = \psi(u)$, $\alpha_{k-1}(u, 0) = \tau_k(u)$, $\mu_n(0)$ και $\beta = \theta$. Έτσι η (9) ανάγεται στη σχέση (10)

Όταν $k = 1$, βάσει της (10) προκύπτει:

$$E\{|U(T)| \mid T < \infty\} = \int_u^\infty \frac{\psi(x)}{\psi(u)} dx - \frac{p_2}{2p_1 \theta}$$

Η δεύτερη ροπή του ελλείμματος, εξ ου και η διακύμανση του ελλείμματος, μπορεί επίσης εύκολα να αξιολογηθεί από τη (10). Όπως αποδεικνύεται στις εφαρμογές 3.1 και 3.2, $\psi(u)$ και $\tau_k(u)$ μπορεί να υπολογιστούν ρητά όταν το $P(x)$ είναι ένας συνδυασμός εκθετικών, μία μείξη Erlangs, ή κατά προσέγγιση χρησιμοποιώντας μια προσέγγιση Tijms. Έτσι, με τη βοήθεια της (9) οι ροπές του ελλείμματος $|U(T)|$ είναι επίσης διαθέσιμες όπως φαίνεται στα ακόλουθα παραδείγματα.

Εφαρμογή 3: Συνδυασμοί εκθετικών

Ξεκινάμε ξανά με την εκθετική κατανομή για τις αποζημιώσεις. Σε αυτήν την περίπτωση,

$$E\{|U(T)|^k \mid T < \infty\} = \frac{p_k \tau_k(u)}{p_1 \theta \psi(u)} - \frac{p_{k+1}}{(k+1)p_1 \theta}$$

$$= \frac{k! \mu^{-k}}{\mu^{-1} \theta} \frac{\mu^{-1} e^{-Ru}}{(1 + \theta)^{-1} e^{-Ru}} - \frac{(k + 1)! \mu^{-k-1}}{(k + 1) \mu^{-1} \theta} = k! \mu^{-k}$$

που συμφωνεί με το γεγονός ότι στην εκθετική περίπτωση το έλλειμμα κατανέμεται εκθετικά και είναι ανεξάρτητο από το χρόνο της χρεοκοπίας.

Στη συνέχεια, εξετάζουμε έναν συνδυασμό δύο εκθετικών. Αυτό ισχύει επίσης όταν χρησιμοποιείται μια προσέγγιση Tijms. Έτσι, προκύπτει ότι:

$$E\{|U(T)|^k \mid T < \infty\} = \frac{p_k \tau_k(u)}{p_1 \theta \psi(u)} - \frac{p_{k+1}}{(k+1)p_1 \theta} = \frac{C_{1,k} \widehat{e^{-R_1 u}} + C_{2,k} \widehat{e^{-R_2 u}}}{C_1 e^{-R_1 u} + C_2 e^{-R_2 u}} \quad (11)$$

όπου

$$\widehat{C}_{1,k} = \frac{k! C_1 R_1^{-k}}{p_1 \theta} \left[p_1 \theta - \sum_{j=1}^k \frac{p_{j+1} R_1^j}{(j+1)!} \right]$$

$$\widehat{C}_{2,k} = \frac{k! C_2 R_2^{-k}}{p_1 \theta} \left[p_1 \theta - \sum_{j=1}^k \frac{p_{j+1} R_2^j}{(j+1)!} \right]$$

Εφαρμογή 4: Συνδυασμοί Erlangs.

Για ένα συνδυασμό Erlang κατανομών για τις ατομικές ζημιές, προκύπτει αμέσως από την Εφαρμογή 2 ότι η k -τάξης προεξοφλημένη ροπή είναι

$$E\{e^{-\delta T} |U(T)|^k I(T < \infty)\} = e^{-\mu u} \sum_{j=0}^{\infty} \widehat{C}_{j,k} \frac{(\mu u)^j}{j!} \quad (12)$$

όπου

$$\widehat{C}_{j,k} = \frac{1}{\beta} [k \mu_{k-1}(\rho) \overline{C_{j,k-1}^*} - \mu_k(\rho) \overline{C_j}]$$

Οι σταθερές $\overline{C_{j,k-1}^*}$ και $\overline{C_j}$ δίδονται στην Εφαρμογή 1.

Παρατηρούμε ότι όταν το μέγεθος της ατομικής απαίτησης είναι ένας συνδυασμός εκθετικών ή μιας μείξης Erlangs, η συνάρτηση πυκνότητας του ελλείμματος είναι του ίδιου τύπου αλλά με νέα βάρη. Αυτά τα βάρη εκφράζονται ως συναρτήσεις του αρχικού πλεονάσματος. Ως αποτέλεσμα, οι ροπές του ελλείμματος μπορούν να υπολογιστούν ανάλογα (Willmot, 2000). Η μέθοδος που χρησιμοποιήσαμε σε αυτήν την ενότητα παρέχει μια διαφορετική προσέγγιση για τον υπολογισμό των ροπών του ελλείμματος. Σύμφωνα με αυτήν τη μέθοδο, οι ροπές του ελλείμματος υπολογίζονται άμεσα. Οι συντελεστές (11) και (12) είναι ανεξάρτητοι από το αρχικό πλεόνασμα u , το οποίο επιτρέπει τον υπολογισμό των ροών του ελλείμματος για διαφορετικές τιμές του u χωρίς επανεκτίμηση της κατανομής του ελλείμματος. Ένα άλλο πλεονέκτημα αυτής της προσέγγισης είναι ότι είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε το αναμενόμενο προεξοφλημένο έλλειμμα χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.1

Θεώρημα 3.3.

Αν η κατανομή των αποζημιώσεων $P(x)$ είναι *IMRL(DMRL)*, τότε για $k = 1, 2, 3, \dots$

$$E\{e^{-\delta T} |U(T)|^k I(T < \infty)\} \geq (\leq) \mu_k(\rho) \overline{K}(u)$$

Απόδειξη Θεωρήματος

Από το Θεώρημα 3.2 των Lin and Willmott (1999), η κατανομή $G(x)$ είναι *IMRL(DMRL)*. Αυτό συνεπάγεται (Fagioli & Pellerey, 1994) ότι η j - τάξης κατανομή ισορροπίας $G_j(x)$ είναι *NWUE (NBUE)*, δηλαδή $\overline{G_{j+1}}(x) \geq (\leq) \overline{G_j}(x)$. Έτσι έχουμε:

$$H(u) = \mu_k(\rho) \overline{G_k}(u) \geq (\leq) \mu_k(\rho) \overline{G_{k-1}}(u) \geq (\leq) \dots \geq (\leq) \mu_k(\rho) \overline{G}(u)$$

Έτσι, μπορεί να χρησιμοποιηθεί το Θεώρημα 4.1 των Lin και Willmot (1999), το οποίο δείχνει ότι εάν $H(u) \leq (\geq) c \overline{G}(u)$, για κάποια σταθερά $c > 0$, τότε

$$\phi(u) \leq (\geq) cK(u)$$

και το αποτέλεσμα έπεται.

Για να αντλήσουμε ένα απλό όριο για γενικότερες λειτουργίες του ελλείμματος, θυμόμαστε ένα αποτέλεσμα στους Lin και Willmot (1999).

Πόρισμα 3.3

Ο μέσος χρόνος για χρεοκοπία, δεδομένου ότι έχει συμβεί χρεοκοπία, δίνεται από

$$E(T | T < \infty) = \frac{\psi_1(u)}{\psi(u)}$$

Όπου $\psi_1(u)$ ικανοποιεί την ελαττωματική εξίσωση ανανέωσης

$$\psi_1(u) = \frac{1}{1+\theta} \int_0^u \psi_1(u-x) dP_1(x) + \frac{1}{c} \int_u^\infty \psi(x) dx$$

και δίνεται ρητά από τη σχέση:

$$\psi_1(u) = \frac{1}{\lambda p_1 \theta} \left\{ \int_0^u \psi(u-x) \psi(x) dx + \int_u^\infty \psi(x) dx - \frac{p_2}{2p_1 \theta} \psi(u) \right\}$$

Πόρισμα 3.4.

$$E\{T|U(T)| | T < \infty\} = \frac{\Phi_{1,1}(u)}{\psi(u)}$$

Όπου $\Phi_{1,1}(u)$, ικανοποιεί την ελαττωματική εξίσωση ανανέωσης

$$\Phi_{1,1}(u) = \frac{1}{1+\theta} \int_0^u \Phi_{1,1}(u-x) dP_1(x) + \frac{1}{c} \int_u^\infty (x-u) \psi(x) dx - \frac{p_2}{2cp_1\theta} \int_u^\infty \psi(x) dx$$

Και δίνεται ρητά από την ακόλουθη σχέση:

$$\begin{aligned} \Phi_{1,1}(u) = & \frac{1}{\lambda p_1 \theta} \int_0^u \psi(u-x) \int_x^\infty \psi(t) dt dx - \frac{p_2}{2\lambda p_1^2 \theta^2} \int_0^u \psi(u-x) \psi(x) dx + \\ & + \frac{1}{\lambda p_1 \theta} \int_u^\infty (x-u) \psi(x) dx - \frac{p_2}{2\lambda p_1^2 \theta^2} \int_u^\infty \psi(x) dx - \frac{p_3}{6\lambda p_1^2 \theta^2} \psi(u) \end{aligned}$$

Θεώρημα 3.4.

Η $k^{\text{οστή}}$ ροπή κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας, δεδομένου ότι έχει συμβεί χρεοκοπία, δίνεται από

$$E(T^k | T < \infty) = \frac{\Psi_k(u)}{\Psi(u)}$$

όπου $\Psi_k(u)$ ικανοποιεί μια ακολουθία ελλειμματικών ανανεωτικών εξισώσεων

$$\Psi_k(u) = \frac{1}{1 + \theta} \int_0^u \Psi_k(u - x) dP_1(x) + \frac{k}{c} \int_u^\infty \Psi_{k-1}(x) dx$$

για $k = 1, 2$, με $\Psi_0(u) = \Psi(u)$ την πιθανότητα χρεοκοπίας. Επιπλέον, κάθε $\Psi_k(u)$ δίνεται αναδρομικά από

$$\Psi_k(u) = \frac{k}{\lambda p_1 \theta} \left[\int_0^u \Psi(u - x) \Psi_{k-1}(x) dx + \int_u^\infty \Psi_{k-1}(x) dx - \Psi(u) \int_0^\infty \Psi_{k-1}(x) dx \right]$$

σε σχέση με τη συνάρτηση $\Psi_{k-1}(u)$.

Βάσει των παραπάνω μπορούμε να αξιολογήσουμε τους χρόνους της χρεοκοπίας στην περίπτωση που το μέγεθος της αξίωσης είναι είτε ένας συνδυασμός εκθετικών είτε μία μείξη Erlangs. Ο Gerber (1979) θεωρεί τον μέσο χρόνο για χρεοκοπία στην εκθετική περίπτωση. Στο επόμενο παράδειγμα, οι τύποι δίνονται για υψηλότερες ροπές τη στιγμή που καταστρέφονται στην εκθετική περίπτωση. Θα πρέπει να επισημανθεί ότι εάν η κατανομή μεγέθους αξιώσεων δεν είναι ούτε συνδυασμός εκθετικών ούτε συνδυασμών Erlangs, ο υπολογισμός των υψηλότερων ($n > 2$) ροπών θα μπορούσε να είναι περίπλοκος. Ωστόσο, ενδέχεται να χρησιμοποιηθεί η προσέγγιση Tijms και σε αυτήν την περίπτωση, ισχύει η προσέγγιση της εφαρμογής που ακολουθεί.

Εφαρμογή 5 - Συνδυασμοί Εκθετικών

Αρχικά, θεωρούμε $\bar{P}(x) = e^{-\mu x}$. Με $\delta = 0$, $\Psi(u) = C e^{-Ru}$, όπου $R = \theta\mu/(1+\theta)$. Για το $\Psi_k(u)$ θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε:

$$\Psi_k(u) = e^{-Ru} \sum_{j=0}^k \bar{C}_{j,k} \frac{(Ru)^j}{j!}$$

Τώρα αντλούμε έναν αναδρομικό τύπο για τους συντελεστές $\bar{C}_{j,k}$. Στη συνέχεια έχουμε:

$$\int_0^u \Psi(u - x) \Psi_{k-1}(x) dx = \frac{1}{1 + \theta} e^{-Ru} \sum_{j=0}^{k-1} \bar{C}_{j,k-1} \int_0^u \frac{(Rx)^j}{j!} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(1 + \theta)R} e^{-Ru} \sum_{j=1}^k \overline{C_{j-1,k-1}} \frac{(Ru)^j}{j!} \\
\int_0^u \psi(u-x) \psi_{k-1}(x) dx &= \frac{1}{1 + \theta} e^{-Ru} \sum_{j=0}^{k-1} \overline{C_{j,k-1}} \int_0^u \frac{(Rx)^j}{j!} dx \\
&= \frac{1}{(1 + \theta)R} e^{-Ru} \sum_{j=1}^k \overline{C_{j-1,k-1}} \frac{(Ru)^j}{j!} \\
\int_u^\infty \psi_{k-1}(x) dx &= R^{-1} \sum_{j=0}^{k-1} \overline{C_{j,k-1}} \int_u^\infty \frac{R^{j+1} x^j e^{-Rx}}{j!} dx \\
&= R^{-1} e^{-Ru} \sum_{j=0}^{k-1} \left(\sum_{i=j}^{k-1} \overline{C_{i,k-1}} \right) \frac{(Ru)^j}{j!} \int_0^\infty \psi_{k-1}(x) dx = R^{-1} \sum_{i=0}^{k-1} \overline{C_{i,k-1}} \\
&= R^{-1} e^{-Ru} \sum_{j=0}^{k-1} \left(\sum_{i=j}^{k-1} \overline{C_{i,k-1}} \right) \frac{(Ru)^j}{j!}
\end{aligned}$$

Έτσι, εξισώνοντας τους συντελεστές του $\frac{(Ru)^j}{j!}$, έχουμε

$$\overline{C_{0,k}} = \frac{k(1 + \theta)}{c\mu\theta} \sum_{i=0}^{k-1} \overline{C_{i,k-1}}$$

και για $j = 1, 2, \dots, k$,

$$\overline{C_{j,k}} = \frac{k(1 + \theta)^2}{c\mu\theta^2} \left[\frac{1}{1 + \theta} \overline{C_{j-1,k-1}} + \sum_{i=j}^{k-1} \overline{C_{i,k-1}} \right]$$

Με $\sum_{i=j}^{k-1} = 0$ και $\overline{C_{0,0}} = C$. Οι δύο πρώτες ροπές μπορούν να προκύψουν εύκολα:

$$\overline{C_{0,1}} = \frac{1 + \theta}{c\mu\theta} \overline{C_{0,0}} = \frac{1}{c\mu\theta}$$

$$\overline{C}_{1,1} = \frac{(1+\theta)^2}{c\mu\theta^2} \frac{1}{1+\theta} \overline{C}_{0,0} = \frac{1}{c\mu\theta^2}$$

Έτσι,

$$E\{T I(T < \infty)\} = \left[\frac{1}{c\mu\theta} + \frac{1}{c\mu\theta^2} (Ru) \right] e^{-Ru}$$

που συμφωνεί με τον Gerber (1979).

Επίσης,

$$\overline{C}_{0,2} = \frac{2(1+\theta)}{c\mu\theta} [\overline{C}_{0,1} + \overline{C}_{1,1}] = \frac{2(1+\theta)^2}{c^2\mu^2\theta^3}$$

$$\overline{C}_{1,2} = \frac{2(1+\theta)^2}{c\mu\theta^2} \left[\frac{1}{1+\theta} \overline{C}_{0,1} + \overline{C}_{1,1} \right] = \frac{2(1+\theta)(1+2\theta)}{c^2\mu^2\theta^4}$$

$$\overline{C}_{2,2} = \frac{2(1+\theta)^2}{c\mu\theta^2} \frac{1}{1+\theta} \overline{C}_{1,1} = \frac{2(1+\theta)}{c^2\mu^2\theta^4}$$

$$E\{T^2 I(T < \infty)\} = \frac{2}{c^2\mu^2\theta^3} \left[(1+\theta)^2 + \frac{(1+\theta)(1+2\theta)}{\theta} (Ru) + \frac{1+\theta}{\theta} \frac{(Ru)^2}{2!} \right] e^{-Ru}$$

Για συνδυασμό δύο εκθετικών,

$$\psi(u) = C_1 e^{-R_1 u} + C_2 e^{-R_2 u}$$

Ο γενικός τύπος της $\psi_k(u)$ είναι,

$$\psi_k(u) = \sum_{j=0}^k [A_{j,k} e^{-R_1 u} + B_{j,k} e^{-R_2 u}] \frac{u^j}{j!}$$

Οι συντελεστές $A_{j,k}$ και $B_{j,k}$ μπορούν να ληφθούν αναδρομικά, παρόμοιοι με τη μέθοδο που χρησιμοποιείται στην εκθετική περίπτωση παραπάνω. Παραλείπουμε τις λεπτομέρειες, αλλά δίνουμε το μέσο όρο του χρόνου καταστροφής σε αυτήν την περίπτωση.

$$\int_0^u \psi(u-x)\psi(x)dx = C_1^2 u e^{-R_1 u} + C_2^2 u e^{-R_2 u} + \frac{2C_1 C_2}{R_2 - R_1} [e^{-R_1 u} - e^{-R_2 u}]$$

$$\int_u^\infty \psi(x)dx = \frac{C_1}{R_1} e^{-R_1 u} + \frac{C_2}{R_2} e^{-R_2 u}$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} E\{T I(T < \infty)\} = \\ \frac{1 + \theta}{c\theta} \left\{ C_1^2 u e^{-R_1 u} + C_2^2 u e^{-R_2 u} + \left[\frac{C_1}{R_1} + \frac{2C_1 C_2}{R_2 - R_1} - \left(\frac{C_1}{R_1} + \frac{C_2}{R_2} \right) C_1 \right] e^{-R_1 u} + \right. \\ \left. + \left[\frac{C_2}{R_2} - \frac{2C_1 C_2}{R_2 - R_1} - \left(\frac{C_1}{R_1} + \frac{C_2}{R_2} \right) C_2 \right] e^{-R_2 u} \right\} \end{aligned}$$

3.4. Αριθμητικά Παραδείγματα

Η ανάπτυξη συμβολικών ρουτινών πηγάζει από την ανάγκη για έναν πιο εύχρηστο τρόπο μελέτης των ροπών και των σχετιζόμενων κατανομητικών ιδιοτήτων του T_c όταν αυτές περιλαμβάνουν μεγάλους αλγεβρικούς χειρισμούς. Στην εργασία των (Drekic et al., 2004), παρουσιάζονται τρία ξεχωριστά παραδείγματα για να επιδειχθούν οι συμβολικοί αλγόριθμοι εν δράσει και να απεικονιστεί η αποτελεσματικότητά τους στην προσέγγιση διαφόρων προβλημάτων. Και τα τρία παραδείγματα περιλαμβάνουν κατανομές των μεγεθών αποζημίωσης από την κλάση τύπου «φάσης» (phase-type).

Πρέπει να επισημανθεί ότι οι (Lin & Willmot, 2000) εξετάζουν συγκεκριμένα την εκτίμηση του $E\{T_c^k\}$ όταν τα μεγέθη αποζημίωσης είναι εκθετικά ή συνδυασμοί δύο εκθετικών. Σε αυτές τις περιπτώσεις, εφαρμόζουν διαδικασίες που αξιοποιούν την απλούστερη δομή αυτών των κατανομών προκειμένου να ταυτοποιήσουν τη μορφή των υψηλότερης τάξης ροπών. Επιπλέον, η προσέγγισή τους απαιτεί μια εντατική αναδρομική διαδικασία για τον προσδιορισμό των κατάλληλων συντελεστών, και ο υπολογισμός των ροπών υψηλότερης τάξης ($k > 2$) γίνεται πολύπλοκος. Με την προσέγγισή των (Drekic et al., 2004) παρέχεται μια συστηματική διαδικασία που είναι κατάλληλη για οποιοδήποτε μοντέλο από την κλάση τύπου «φάσης», συμπεριλαμβανομένων εκείνων που εξετάστηκαν στην εργασία των (Lin & Willmot, 2000).

3.4.1. Εκθετική κατανομή μεγέθους αποζημίωσης

Είναι δυνατόν να εξαχθούν γενικές εκφράσεις για τις ροπές του T_c στην περίπτωση που τα ποσά των αποζημιώσεων κατανέμονται εκθετικά με ρυθμό μ . Εφαρμόζοντας τις διαδικασίες των (Drekic et al., 2004) σε συνδυασμό με τις ακόλουθες εντολές *Mathematica* σχετικά με την εκθετική υπόθεση αποζημίωσης:

$$\psi_x := \text{Exp}[-\theta\mu x/(1 + \theta)]/(1 + \theta)$$

$$p_i := i!/\mu^i$$

Είναι επίσης δυνατή η παραγωγή ρητών μαθηματικών σχέσεων του $E\{T_c^k\}$, $k \geq 1$ σε όρους των παραμέτρων x_0 , λ , θ και μ . Οι πρώτες πέντε ροπές του T_c δίνονται ως:

$$E\{T_c\} = \frac{1}{\theta\lambda} + \frac{\mu u}{\theta(1 + \theta)\lambda}$$

$$E\{T_c^2\} = \frac{2(1 + \theta)}{\theta^3 \lambda^2} + \frac{2(1 + 2\theta)\mu u}{\theta^3(1 + \theta)\lambda^2} + \frac{\mu^2 u^2}{\theta^2(1 + \theta)^2 \lambda^2}$$

$$E\{T_c^3\} = \frac{6(1 + \theta)(2 + \theta)}{\theta^5 \lambda^3} + \frac{6(2 + 3\theta)\mu u}{\theta^5 \lambda^3} + \frac{3(2 + 3\theta)\mu^2 u^2}{\theta^4(1 + \theta)^2 \lambda^3} + \frac{\mu^3 u^3}{\theta^3(1 + \theta)^3 \lambda^3}$$

$$E\{T_c^4\} = \frac{24(1 + \theta)(5 + 5\theta + \theta^2)}{\theta^7 \lambda^4} + \frac{24(6 + 10\theta + 4\theta^2)\mu u}{\theta^7 \lambda^4} + \frac{12(5 + 6\theta)\mu^2 u^2}{\theta^6(1 + \theta)\lambda^4} + \frac{4(3 + 4\theta)\mu^3 u^3}{\theta^5(1 + \theta)^3 \lambda^4} + \frac{\mu^4 u^4}{\theta^4(1 + \theta)^4 \lambda^4}$$

$$E\{T_c^5\} = \frac{120(1 + \theta)(2 + \theta)(7 + 7\theta + \theta^2)}{\theta^9 \lambda^5} + \frac{120(14 + 35\theta + 25\theta^2 + 5\theta^3)\mu u}{\theta^9 \lambda^5} + \frac{60(14 + 25\theta + 10\theta^2)\mu^2 u^2}{\theta^8(1 + \theta)\lambda^5} + \frac{20(9 + 10\theta)\mu^3 u^3}{\theta^7(1 + \theta)^2 \lambda^5} + \frac{5(4 + 5\theta)\mu^4 u^4}{\theta^6(1 + \theta)^4 \lambda^5} + \frac{\mu^5 u^5}{\theta^5(1 + \theta)^5 \lambda^5}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις συμφωνούν με αυτές που ελήφθησαν από τους (Drekic & Willmot, 2003).

3.5. Μείξη Εκθετικών Κατανομών για το μέγεθος της Αποζημίωσης

Όπως φάνηκε στο προηγούμενο παράδειγμα, ένα από τα βασικά πλεονεκτήματα του συμβολικού υπολογισμού είναι η ικανότητα εξαγωγής εκφράσεων όταν μία ή περισσότερες παραμέτροι μοντέλου παραμένουν μη καθορισμένες. Σε αυτές ακριβώς

τις καταστάσεις οι συμβολικές αυτές διαδικασίες χρησιμεύουν ως αρκετά ισχυρά ερευνητικά εργαλεία, επιτρέποντας σε κάποιον να εκτιμήσει, για παράδειγμα, τις επιπτώσεις διαφόρων παραμέτρων στα μεγέθη ενδιαφέροντος που βασίζονται στις ροπές μέσω γραφημάτων. Για την επίδειξη της χρησιμότητας του αλγορίθμου υπό αυτό το πρίσμα, ας θεωρηθεί μια μεμονωμένη κατανομή μεγέθους αποζημίωσης που είναι μια ίση μείξη δύο εκθετικών με ρυθμούς 3 και 7, αντίστοιχα, με αποζημιώσεις Poisson ρυθμού $\lambda = 1$ (βλ. Gerber et al., 1987). Έστω ότι το σχετικό περιθώριο ασφαλείας θ και το αρχικό πλεόνασμα x_0 επιτρέπεται να διαφέρουν. Χρησιμοποιώντας τη μεθοδολογία των (Gerber et al., 1987), οι ακόλουθες εντολές *Mathematica* μπορούν να κωδικοποιηθούν για να αντλήσουν μια ρητή σχέση για την πιθανότητα χρεοκοπίας:

$$\lambda = 1$$

$$n = 2$$

$$A_1 = 0.5$$

$$A_2 = 0.5$$

$$\mu_1 = 3$$

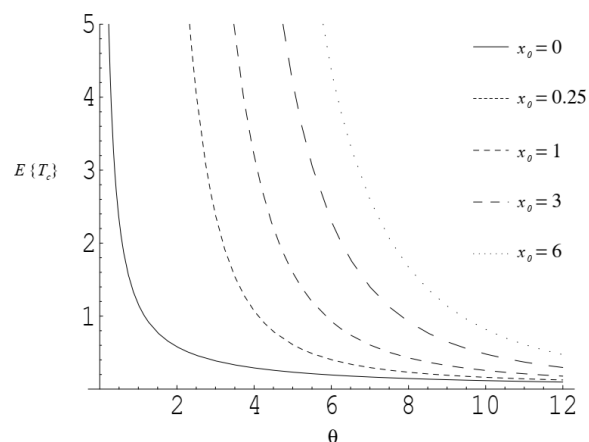
$$\mu_2 = 7$$

$$p_i := \text{Sum}[A_j i! / \mu_j^i, j, 1, n]$$

$$r = x /. \text{Solve}[\text{Sum}[A_j / (\mu_j - x), j, 1, n] - (1 + \theta)p_1 == 0, x]$$

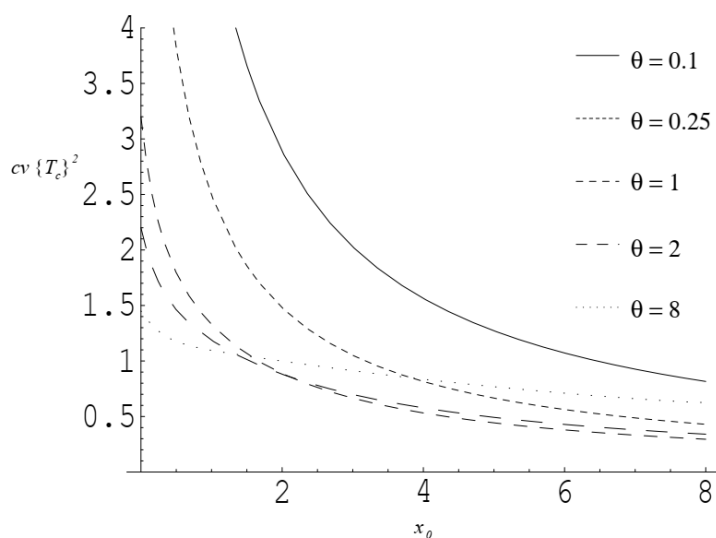
$$C_k := \frac{\text{Sum}[A_j / (\mu_j (\mu_j - r[[k]])), j, 1, n]}{\text{Sum}[A_j / (\mu_j - r[[k]])^2, j, 1, n]}$$

$$\psi_x := \text{Sum}[C_k \text{Exp}[-r[[k]]x], k, 1, n]$$



Εικόνα 1. Σύγκριση του $E\{T_c\}$ για διάφορες τιμές του x_0 στο παράδειγμα μείξης εκθετικών. Πηγή: (Drekic & Willmot, 2003)

Η Εικ. 1 απεικονίζει τον μέσο χρόνο χρεοκοπίας $E\{T_c\}$ για πολλές επιλογές του x_0 ως συνάρτηση του θ , επιτρέποντας στον χρήστη να διαπιστώσει οπτικά την επίδραση που έχει το σχετικό περιθώριο ασφαλείας στο σχήμα των καμπυλών του μέσου χρόνου χρεοκοπίας. Εναλλακτικά, η Εικ. 2 εμφανίζει τον τετραγωνικό συντελεστή μεταβλητότητας, $CV\{T_c\}^2$, για διάφορες τιμές του θ ως συνάρτηση του x_0 . Συγκεκριμένα, ο συντελεστής μεταβλητότητας (Coefficient of Variation - CV) χρησιμοποιείται συχνά ως μέτρο του πάχους της ουράς, καθώς μια κατανομή με ελαφριά (παχιά) ουρά συνήθως έχει $CV > 1$ (<1). Ενώ όλες οι καμπύλες στην Εικ. 2 είναι μονότονες και έχουν CVs μεγαλύτερους από 1 για αρχικές τιμές x_0 , να σημειωθεί ότι καμία από αυτές δεν έχει CVs μεγαλύτερους από 1 σε όλο το εύρος του u . Στην πραγματικότητα, χρησιμοποιήθηκε το *Mathematica* για να εντοπιστούν οι τιμές του u (με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων) στις οποίες ο CV πέφτει κάτω από το 1 για καθεμία από τις πέντε καμπύλες - δηλαδή, $u = 6.457$ (για $\theta = 0.1$), $u = 3.176$ (για $\theta = 0.25$), $u = 1.660$ (για $\theta = 1$), $u = 1.538$ (για $\theta = 2$) και $u = 1.988$ (για $\theta = 8$).



Εικόνα 2. Σύγκριση του $cv\{T_c\}^2$ για διάφορες τιμές του θ στο παράδειγμα μείζης εκθετικών. Πηγή: (Drekić & Willmot, 2003)

3.5.1. Συνδυασμός εκθετικών κατανομών μεγεθών αποζημίωσης

Το τελικό παράδειγμα έχει ως στόχο να δείξει την αποτελεσματικότητα του αλγορίθμου αριθμητικά στην περίπτωση όπου όλες οι παράμετροι του μοντέλου έχουν καθοριστεί πλήρως. Ειδικότερα, έστω ότι οι αποζημιώσεις συμβαίνουν με ρυθμό Poisson $\lambda = 0.5$ και το σχετικό περιθώριο ασφαλείας τίθεται σε $\theta = 0.875$. Έστω ότι η κατανομή του ποσού της αποζημίωσης καθορίζεται από τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$P'(x) = \frac{2}{5}(2e^{-x} + 7e^{-2x} - 12e^{-3x} + 4e^{-4x}), \quad x > 0$$

Το μπλοκ εντολών που δίνεται στο (3.1) μπορεί εύκολα να τροποποιηθεί ώστε να αντικατοπτρίζει τις παραδοχές που αντιστοιχούν σε αυτό το νέο παράδειγμα. Με αυτόν τον τρόπο, το *Mathematica* κατάφερε να δημιουργήσει την ακόλουθη έκφραση για την πιθανότητα χρεοκοπίας (εμφανίζεται με ακρίβεια πέντε δεκαδικών ψηφίων):

$$\begin{aligned} \psi(u) = & 0.04076e^{-1.66876u} + 0.52503e^{-0.49787u} - \\ & 0.03247e^{-3.66668u} \cos(0.18942u) - 0.12122e^{-3.66668u} \sin(0.18942u) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Χρησιμοποιώντας τις συμβολικές διαδικασίες σε συνδυασμό με το (3.2), κατασκευάστηκε ο Πίνακας 1, ο οποίος παρουσιάζει μια περίληψη αρκετών μεγεθών ενδιαφέροντος που βασίζονται στις ροπές για διάφορες τιμές του αρχικού πλεονάσματος x_0 . Όπως έγινε εμφανές στις Εικ. 1 και 2, ο $E\{T_c\}$ αυξάνεται και ο $cv\{T_c\}^2$ μειώνεται καθώς ο x_0 αυξάνεται. Επιπλέον, και οι δύο συντελεστές λοξότητας (skewness) και κύρτωσης (kurtosis) παρουσιάζουν μια παρόμοια φθίνουσα τάση.

Πίνακας 1. Διάφορα μεγέθη που βασίζονται σε ροπές για το παράδειγμα συνδυασμού εκθετικών. Πηγή: (Drekic & Willmot, 2003)

	x_0											
	0	0.25	0.5	0.75	1	1.5	2	4	5	7.5	8	10
$\psi(x_0)$	0.533	0.475	0.420	0.370	0.325	0.252	0.195	0.072	0.044	0.013	0.010	0.004
$E\{T_c\}$	2.003	2.246	2.522	2.815	3.115	3.716	4.309	6.604	7.733	10.548	11.111	13.361
$\text{Var}\{T_c\}$	13.098	15.357	17.788	20.295	22.828	27.878	32.874	52.558	62.352	86.831	91.727	111.311
$cv\{T_c\}$	1.807	1.744	1.672	1.600	1.534	1.421	1.331	1.098	1.021	0.883	0.862	0.790
$skew\{T_c\}$	5.294	4.912	4.579	4.296	4.058	3.682	3.397	2.699	2.481	2.107	2.050	1.862
$kurt\{T_c\}$	49.896	43.228	37.866	33.643	30.302	25.428	22.067	14.994	13.125	10.286	9.899	8.690

Βιβλιογραφία

- Di Lorenzo, E., & Tessoro, G. (1996). Approximate solutions of severity of ruins. *Blätter der DGVMF*, 22(4), 705-709.
- Dickson, D. C. (1992). On the distribution of the surplus prior to ruin. *Insurance: Mathematics and Economics*, 11(3), 191-207.
- Dickson, D. C., & Waters, H. R. (1991). Recursive calculation of survival probabilities. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 21(2), 199-221.
- Dickson, D. C., & Waters, H. R. (1992). The probability and severity of ruin in finite and infinite time. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 22(2), 177-190.
- Dickson, D. C., dos Reis, A. D. E., & Waters, H. R. (1995). Some stable algorithms in ruin theory and their applications. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 25(2), 153-175.
- Drekic, S., & Willmot, G. E. (2003). On the density and moments of the time of ruin with exponential claims. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 33(1), 11-21.
- Drekic, S., Stafford, J. E., & Willmot, G. E. (2004). Symbolic calculation of the moments of the time of ruin. *Insurance: Mathematics and Economics*, 34(1), 109-120.
- Dufresne, F., & Gerber, H. U. (1988). The probability and severity of ruin for combinations of exponential claim amount distributions and their translations. *Insurance: Mathematics and Economics*, 7(2), 75-80.
- Gerber, H. U. (1979). *An introduction to mathematical risk theory* (No. 517/G36i).
- Gerber, H. U., & Shiu, E. S. (1997). The joint distribution of the time of ruin, the surplus immediately before ruin, and the deficit at ruin. *Insurance: Mathematics and Economics*, 21(2), 129-137.
- Gerber, H. U., & Shiu, E. S. (1998). Pricing perpetual options for jump processes. *North American Actuarial Journal*, 2(3), 101-107.
- Gerber, H. U., Goovaerts, M. J., & Kaas, R. (1987). On the probability and severity of ruin. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 17(2), 151-163.
- Gerber, H. U., Goovaerts, M. J., & Kaas, R. (1987). On the probability and severity of ruin. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 17(2), 151-163.

- Grandell, J. (1991). *Aspects of Risk Theory*, 1st ed, Springer-Verlag, New York
- Lin, X. (1996). Tail of compound distributions and excess time. *Journal of Applied Probability*, 184-195.
- Lin, X. S., & Willmot, G. E. (1999). Analysis of a defective renewal equation arising in ruin theory. *Insurance: Mathematics and Economics*, 25(1), 63-84.
- Lin, X. S., & Willmot, G. E. (2000). The moments of the time of ruin, the surplus before ruin, and the deficit at ruin. *Insurance: Mathematics and Economics*, 27(1), 19-44.
- Panjer, H. H., & Willmot, G. E. (1992). *Insurance risk models* (No. 517/P19i).
- Schmidli, H. (1999). On the distribution of the surplus prior and at ruin. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 29(2), 227-244.
- Tijms, H. C., & Tijms, H. C. (1994). *Stochastic models: an algorithmic approach* (Vol. 303). New York: Wiley.
- Willmot, G. E., & Lin, X. S. (1998). Exact and approximate properties of the distribution of surplus before and after ruin. *Insurance: Mathematics and Economics*, 23(1), 91-110.
- Willmot, G. E., Lin, X. S., & Lin, X. S. (2001). *Lundberg approximations for compound distributions with insurance applications* (Vol. 156). Springer Science & Business Media.
- Κουτσόπουλος Κ. Ι. , *Αναλογιστικά Μαθηματικά Μέρος Ι Θεωρία Των Κινδύνων*, Εκδόσεις Συμμετρία , Αθήνα, 1999
- Πολίτης, Κ. (2012). *Εισαγωγή Στη Θεωρία Συλλογικού Κινδύνου - Το Συλλογικό Πρότυπο Και Θεωρία Χρεοκοπίας*. Αθήνα: Εκδόσεις Σταμούλης.
- Χατζηκωνσταντινίδης Ε. , *Πανεπιστημιακές Σημειώσεις Π.Μ.Σ. «Αναλογιστική Επιστήμη & Διοικητική Κινδύνου»* Τμήμα Στατιστικής & Ασφαλιστικής Επιστήμης Πανεπιστήμιο Πειραιώς Στο Μάθημα *Θεωρία Κινδύνου Ι* , Πειραιάς, 2018