

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής



Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

R και S διαγράμματα ελέγχου με όρια
πιθανότητας

Αλέξιος Π. Κοϊμτζόγλου

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των
απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος
Ειδίκευσης στην *Εφαρμοσμένη Στατιστική*

Πειραιάς
Ιούλιος 2020

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Αντζουλάκος Δημήτριος, Αναπληρωτής Καθηγητής (Επιβλέπων)
- Χαράλαμπος Ευαγγελάρας, Επίκουρος Καθηγητής
- Γεώργιος Τζαβελάς, Επίκουρος Καθηγητή

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS
School of Finance and Statistics



Department of Statistics and Insurance Science

POSTGRADUATE PROGRAM IN
APPLIED STATISTICS

R and S control charts with probability limits

By

Alexios P. Koimtzoglou

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science
of the University of Piraeus in partial fulfilment of the
requirements for the degree of Master of Science in Applied
Statistics

Piraeus, Greece
July 2020

Ευχαριστίες

Με την περάτωση της συγκεκριμένης διπλωματικής εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον κ. Δημήτριο Αντζουλάκο επιβλέποντα καθηγητή μου για την συνεργασία που είχαμε, τις υποδείξεις του αλλά και την καθοδήγησή του σε όλο το διάστημα.

Περίληψη

Τα διαγράμματα ελέγχου Shewhart είναι ένα σημαντικό και ισχυρό εργαλείο σε μια προσπάθεια προς μια σταθερότερη παραγωγική διεργασία. Μέσω αυτών των διαγραμμάτων, μπορούν να ελεγχθούν πιθανές αποκλίσεις σε διάφορες παραμέτρους του προϊόντος, οι οποίες αν δεν προσδιοριστούν εγκαίρως, θα μπορούσαν ενδεχομένως να οδηγήσουν σε διεργασία εκτός ελέγχου. Η αποτελεσματική χρήση των διαγραμμάτων ελέγχου Shewhart έχει ως αποτέλεσμα την παραγωγή προϊόντων βέλτιστης ποιότητας και την ελαχιστοποίηση της παραγωγής μη συμμορφούμενων προϊόντων. Συνήθως, χρησιμοποιούνται δύο τύποι διαγραμμάτων ελέγχου για μεταβλητές. Ένα διάγραμμα για την παρακολούθηση της μέσης τιμής της διεργασίας και ένα για την παρακολούθηση της μεταβλητότητας της διεργασίας. Η μέθοδος υπολογισμού των ορίων ελέγχου έχει μεγάλη σημασία λόγω του γεγονότος ότι η λανθασμένη επιλογή των ορίων θα μπορούσε να επηρεάσει σοβαρά την αποτελεσματικότητα του διαγράμματος. Η παρακολούθηση της μεταβλητότητας της διεργασίας με τα κλασικά R και S διαγράμματα με όρια ελέγχου 3σ δεν παρέχει εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής περίπου 370 ούτε εγγυώνται το επιθυμητό σφάλμα τύπου I 0.0027. Σε αυτή τη διατριβή μελετάμε R και S διαγράμματα ελέγχου με όρια πιθανότητας για κανονικά δεδομένα τα οποία φυσικά εγγυώνται εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής περίπου 370. Εξετάζεται επίσης η περίπτωση μη κανονικών δεδομένων.

Η παρούσα διατριβή χωρίζεται σε τρία κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται εκτενής περιγραφή των διαγραμμάτων ελέγχου Shewhart για την παρακολούθηση της μέσης και της μεταβλητότητας μιας διεργασίας. Επιπλέον, παρουσιάζονται ορισμένα μειονεκτήματα αυτών των διαγραμμάτων με όρια ελέγχου 3σ . Στο δεύτερο κεφάλαιο μελετώνται τα διαγράμματα ελέγχου R και S με όρια πιθανότητας. Πραγματοποιείται σύγκριση της αποτελεσματικότητας των διαγραμμάτων ελέγχου R και S για την παρακολούθηση της μεταβλητότητας μιας διεργασίας για διάφορα μεγέθη δειγμάτων και για διάφορες μετατοπίσεις της τυπικής απόκλισης. Τέλος, στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται μια έρευνα σχετικά με το πώς η υπόθεση της μη κανονικότητας μπορεί να επηρεάσει ένα διάγραμμα ελέγχου R .

Abstract

Shewhart control charts are a significant and powerful tools in an attempt towards a more stable production process. Through these charts, possible deviations on various product parameters can be controlled, which if not identified on time, could possibly lead to an out of control process. Effective use of Shewhart control charts results in the production of optimum quality products and minimize the production of non-conforming ones. Usually, two types of control charts are compiled. One chart for monitoring the process mean and one for monitoring the process variability. The computation method of control limits is of great importance due to the fact that wrong choice of the limits could seriously affect the effectiveness of the chart. Monitoring the process variability with the classical R and S charts with 3σ control limits neither provide an in control average run length of approximately 370 nor guarantee the desired type I error of 0.0027. In this thesis we study R and S control charts with probability limits for normal data which guarantee an in control average run length equal to 370. The non-normal data case is also discussed.

The present thesis is divides in three chapters. In the first chapter an extensive analysis of Shewhart control charts structure for monitoring the process mean and variability is given. In addition certain disadvantages of these charts with 3σ control limits are presented. In the second chapter R and S control charts with probability limits are studied. A comparison in the effectiveness of R and S control charts for monitoring process variability for various sample sizes and various shifts in the standard deviation is performed. Finally, in the third chapter a research on how the assumption of non-normality can affect an R control chart is discussed.

Περιεχόμενα

Διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart με όρια ελέγχου 3σ	1
1.1 Εισαγωγή.....	1
1.2 Περιγραφή και χρήση ενός διαγράμματος ελέγχου.....	2
1.3 Μέσο μήκος ροής (ARL).....	6
1.4 Ορθολογικές υποομάδες.....	7
1.5 Διαγράμματα ελέγχου φάσης I και φάσης II.....	8
1.6 Εκτίμηση της μέσης τιμής και της διασποράς.....	9
1.6.1 Η περίπτωση των μεμονωμένων παρατηρήσεων.....	9
1.6.2 Η περίπτωση των δειγμάτων.....	10
1.7 Διαγράμματα ελέγχου για τη μέση τιμή.....	12
1.7.1 Διαγράμματα ελέγχου φάσης II.....	12
1.7.2 Διαγράμματα ελέγχου φάσης I.....	13
1.8 Διαγράμματα ελέγχου για τη διασπορά.....	15
1.8.1 S διάγραμμα ελέγχου.....	15
1.8.2 R διάγραμμα ελέγχου.....	17
1.9 Παράδειγμα.....	19
1.10 Απόδοση του R και του S διαγράμματος ελέγχου με όρια ελέγχου 3σ	25
R και S διαγράμματα ελέγχου με όρια πιθανότητας	31
2.1 Εισαγωγή.....	31
2.2 Διαγράμματα ελέγχου με όρια πιθανότητας.....	32
2.3 S διάγραμμα ελέγχου με όρια πιθανότητας.....	33
2.4 R διάγραμμα ελέγχου με όρια πιθανότητας.....	37
2.5 R και S διαγράμματα ελέγχου με όρια πιθανότητας: Σύγκριση και μελέτη.....	45
2.5.1 Μονόπλευρα άνω R και S διαγράμματα ελέγχου.....	45
2.5.2 Μονόπλευρα κάτω R και S διαγράμματα ελέγχου.....	50
2.5.3 Δίπλευρα R και S διαγράμματα ελέγχου.....	55
2.6 Παράδειγμα.....	62
R διαγράμματα ελέγχου για μη κανονικά δεδομένα	69
3.1 Εισαγωγή.....	69
3.2 Εκθετική Κατανομή.....	70
3.2.1 R διάγραμμα ελέγχου με όρια ελέγχου πιθανότητας από κανονική κατανομή.....	70
3.2.2 R διάγραμμα ελέγχου με όρια ελέγχου που αντιστοιχούν σε εκθετική κατανομή....	71
3.3 Γάμμα Κατανομή.....	74

3.3.1 R διάγραμμα ελέγχου με όρια ελέγχου πιθανότητας από κανονική κατανομή.....	74
3.3.2 R διάγραμμα ελέγχου με όρια ελέγχου που αντιστοιχούν σε κατανομή Γάμμα.....	76
3.4 Συμπεράσματα	78
Βιβλιογραφία.....	80
Παράρτημα	82

Πίνακες

Πίνακας 1.1. Τιμές των σταθερών $d2$, $d3$ και $c4$	10
Πίνακας 1.2. Τιμές των $B3$, $B4$, $B5$ και $B6$	16
Πίνακας 1.3. Τιμές των $D1$, $D2$, $D3$ και $D4$	18
Πίνακας 1.4. Τα δεδομένα του παραδείγματος.....	19
Πίνακας 1.5. Τιμές ARL για το R διάγραμμα ελέγχου ορίων 3σ	26
Πίνακας 1.6. Τιμές ARL για το S διάγραμμα ελέγχου ορίων 3σ	28
Πίνακας 2.1. Τιμές των $B5^*$, $B6^*$, BL^* , BU^* , $B3^*$ και $B4^*$ για $\alpha = 0.0027$ ($ARL0 = 370$) 36	
Πίνακας 2.2. Τιμές των $B5^*$, $B6^*$, BL^* , BU^* , $B3^*$ και $B4^*$ για $\alpha = 0.005$ ($ARL0 = 200$) 37	
Πίνακας 2.3. Τιμές των $D1^*$, $D2^*$, DL^* , DU^* , $D3^*$ και $D4^*$ για $\alpha = 0.0027$ ($ARL0 = 370$).....	43
Πίνακας 2.4. Τιμές των $D1^*$, $D2^*$, DL^* , DU^* , $D3^*$ και $D4^*$ για $\alpha = 0.005$ ($ARL0 = 200$) 44	
Πίνακας 2.5. Τιμές ARL για το μονόπλευρο άνω R διάγραμμα ελέγχου ($\alpha = 0.0027$).....	45
Πίνακας 2.6. Τιμές ARL για το μονόπλευρο άνω S διάγραμμα ελέγχου ($\alpha = 0.0027$)	47
Πίνακας 2.7. Τιμές ARL για το μονόπλευρο κάτω R διάγραμμα ελέγχου ($\alpha = 0.0027$)	51
Πίνακας 2.8. Τιμές ARL για το μονόπλευρο κάτω S διάγραμμα ελέγχου ($\alpha = 0.0027$).....	52
Πίνακας 2.9. Τιμές ARL για το δίπλευρο R διάγραμμα ελέγχου ($\alpha = 0.0027$)	56
Πίνακας 2. 10. Τιμές ARL για το δίπλευρο S διάγραμμα ελέγχου ($\alpha = 0.0027$)	58
Πίνακας 2.11. Τα προσομοιωμένα δεδομένα.....	62
Πίνακας 3.1. Τιμές ARL για το R διάγραμμα ελέγχου εκθετικών δεδομένων με όρια ελέγχου πιθανότητας από κανονική κατανομή	71
Πίνακας 3.2. Τιμές ARL για το R διάγραμμα ελέγχου υποθέτοντας εκθετική κατανομή	74
Πίνακας 3.3. Τιμές ARL για το R διάγραμμα ελέγχου υποθέτοντας την κανονικότητα.....	76
Πίνακας 3.4. Τιμές ARL για το R διάγραμμα ελέγχου υποθέτοντας Γάμμα κατανομή	78

Σχήματα

Σχήμα 1.1. Τυπικό διάγραμμα ελέγχου τύπου Shewhart.....	3
Σχήμα 1.2. Προειδοποιητικά όρια ελέγχου.....	5
Σχήμα 1.3. R διάγραμμα ελέγχου για τα δεδομένα του πίνακα 1.4.....	20
Σχήμα 1.4. R διάγραμμα ελέγχου για τα δεδομένα του Πίνακα 1.4 πλην του 9 ^{ου} δείγματος.....	21
Σχήμα 1.5. S διάγραμμα ελέγχου για τα δεδομένα του Πίνακα 1.4.....	22
Σχήμα 1.6. S διάγραμμα ελέγχου για τα δεδομένα του Πίνακα 1.4 πλην του 9 ^{ου} δείγματος.....	23
Σχήμα 1.7. \bar{X} διάγραμμα ελέγχου με τη μέθοδο R για τα δεδομένα του Πίνακα 1.4 πλην του 9 ^{ου} δείγματος.....	24
Σχήμα 1.8. \bar{X} διάγραμμα ελέγχου με την μέθοδο S για τα δεδομένα του Πίνακα 1.4 πλην του 9 ^{ου} δείγματος.....	25
Σχήμα 1.9. Καμπύλη ARL για το R διάγραμμα ελέγχου ορίων 3σ	27
Σχήμα 1.10. Καμπύλη ARL για το S διάγραμμα ελέγχου ορίων 3σ	29
Σχήμα 2.1. Καμπύλες ARL για μονόπλευρα άνω R διαγράμματα ελέγχου ($\alpha = 0.0027$).....	46
Σχήμα 2.2. Καμπύλες ARL για μονόπλευρα άνω S διαγράμματα ελέγχου ($\alpha = 0.0027$).....	48
Σχήμα 2.3. Διαφορά των πιθανοτήτων διάπραξης σφάλματος τύπου II για τα μονόπλευρα άνω R και S διαγράμματα ελέγχου ($\alpha = 0.0027$).....	49
Σχήμα 2.4. Διαφορά των τιμών ARL για τα μονόπλευρα άνω R και S διαγράμματα ελέγχου ($\alpha = 0.0027$).....	50
Σχήμα 2.5. Καμπύλες ARL για μονόπλευρα κάτω R διαγράμματα ελέγχου ($\alpha = 0.0027$).....	51
Σχήμα 2.6. Καμπύλες ARL για μονόπλευρα κάτω S διαγράμματα ελέγχου ($\alpha = 0.0027$).....	53
Σχήμα 2.7. Διαφορά των πιθανοτήτων διάπραξης σφάλματος τύπου II για τα μονόπλευρα κάτω R και S διαγράμματα ελέγχου ($\alpha = 0.0027$).....	54
Σχήμα 2.8. Διαφορά των τιμών ARL για τα μονόπλευρα κάτω R και S διαγράμματα ελέγχου ($\alpha = 0.0027$).....	54

Σχήμα 2.9. Καμπύλες ARL για δίπλευρα R διαγράμματα ελέγχου ($\alpha = 0.0027$).....	57
Σχήμα 2.10. Καμπύλες ARL για δίπλευρα S διαγράμματα ελέγχου ($\alpha = 0.0027$).....	59
Σχήμα 2.11. Διαφορά των πιθανοτήτων διάπραξης σφάλματος τύπου II για τα δίπλευρα R και S διαγράμματα ελέγχου ($\alpha = 0.0027$).....	60
Σχήμα 2.12. Διαφορά των πιθανοτήτων διάπραξης σφάλματος τύπου II για τα δίπλευρα R και S διαγράμματα ελέγχου για $0.75 < \delta < 1.05$ ($\alpha = 0.0027$).....	60
Σχήμα 2.13. Διαφορά των τιμών ARL για τα δίπλευρα R και S διαγράμματα ελέγχου ($\alpha = 0.0027$).....	61
Σχήμα 2.14. Δίπλευρο R διάγραμμα ελέγχου Φάσης II για τα δεδομένα του Πίνακα 2.11.....	63
Σχήμα 2.15. Δίπλευρο S διάγραμμα ελέγχου Φάσης II για τα δεδομένα του Πίνακα 2.11.....	64
Σχήμα 2.16. Δίπλευρο R διάγραμμα ελέγχου Φάσης II με όρια ελέγχου 3σ για τα δεδομένα του Πίνακα 2.11.....	65
Σχήμα 2.17. Δίπλευρο S διάγραμμα ελέγχου Φάσης II με όρια ελέγχου 3σ για τα δεδομένα του Πίνακα 2.11.....	65
Σχήμα 2.18. Μονόπλευρο άνω R διάγραμμα ελέγχου Φάσης II για τα δεδομένα του Πίνακα 2.11.....	66
Σχήμα 2.19. Μονόπλευρο άνω S διάγραμμα ελέγχου Φάσης II για τα δεδομένα του Πίνακα 2.11.....	67
Σχήμα 3.1. Δίπλευρο R διάγραμμα ελέγχου εκθετικών δεδομένων με όρια ελέγχου πιθανότητας κανονικών δεδομένων.....	70
Σχήμα 3.2. Δίπλευρο R διάγραμμα ελέγχου εκθετικών δεδομένων.....	73
Σχήμα 3.3. Δίπλευρο R διάγραμμα ελέγχου δεδομένων από κατανομή Γάμμα με όρια ελέγχου πιθανότητας κανονικών δεδομένων.....	75
Σχήμα 3.4. Δίπλευρο R διάγραμμα ελέγχου δεδομένων από κατανομή Γάμμα.....	77

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart με όρια ελέγχου 3σ

1.1 Εισαγωγή

Σε μια παραγωγική διαδικασία εξαιρετικά σημαντική είναι η ποιότητα των παραγόμενων προϊόντων. Για αυτό το λόγο κάθε εταιρεία επιθυμεί την παραγωγή όσο το δυνατόν περισσότερων προϊόντων με χαρακτηριστικά τα οποία πληρούν συγκεκριμένες προδιαγραφές. Αυτό προϋποθέτει ότι η παραγωγική διαδικασία είναι όσο γίνεται πιο σταθερή με ελάχιστη μεταβλητότητα σε σημαντικούς παράγοντες που επηρεάζουν την παραγωγή. Ο στατιστικός έλεγχος ποιότητας διαθέτει τις κατάλληλες στατιστικές μεθόδους μέσα από τις οποίες ελέγχεται η σταθερότητα της παραγωγικής διαδικασίας και γίνεται όσο το δυνατόν πιο έγκαιρη η ανίχνευση παραγόμενων προϊόντων που δεν πληρούν τις προδιαγραφές έτσι ώστε να διακοπεί η παραγωγική διαδικασία έως ότου βρεθεί και διορθωθεί η αιτία που οδήγησε σε παραγωγή μη συμμορφούμενων προϊόντων. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα μεγαλύτερη αξιοπιστία για τα προϊόντα της εταιρείας αλλά και μικρότερο κόστος για την παραγωγή.

Ο Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας αποτελείται από ένα σύνολο μεθόδων στατιστικών μεθόδων όπου κάθε μια είναι προσαρμοσμένη σε μια συγκεκριμένη φάση της παραγωγικής διαδικασίας. Οι μέθοδοι είναι οι ακόλουθες:

1. Σχεδιασμός και Ανάλυση Πειραμάτων (Design of Experiments)
2. Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών (Statistical Process Control)
3. Δειγματοληψία Αποδοχής (Acceptance Sampling)

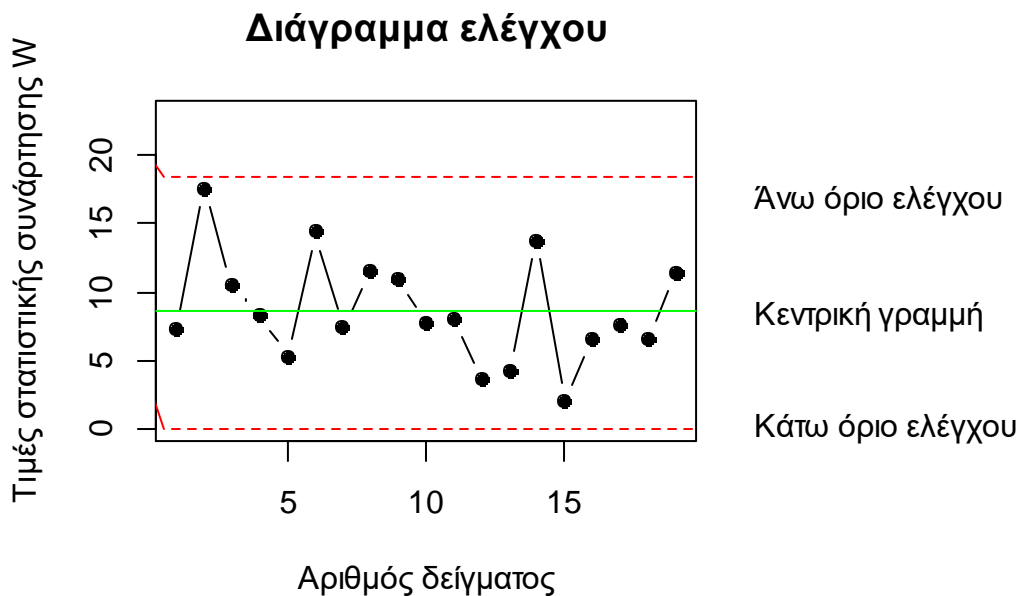
Το αντικείμενο της παρούσης διπλωματικής εργασίας υπάγεται στο μέρος του Στατιστικού Ελέγχου Διεργασιών, ο οποίος περιέχει στατιστικές τεχνικές απαραίτητες για τον έλεγχο της παραγωγικής διαδικασίας κατά την παραγωγή των προϊόντων. Κατά την παραγωγική διαδικασία ανεξάρτητα από την ποιότητα των μηχανημάτων, την άρτια εκπαίδευση του

προσωπικού ή την πρώτη ύλη που θα χρησιμοποιηθεί, τα παραγόμενα προϊόντα δεν θα είναι ποτέ ίδια. Θα είναι πάντα παρούσα μια φυσική μορφή μεταβλητότητας η οποία προέρχεται από τυχαίες αιτίες και γενικά μη ελέγξιμους παράγοντες. Μια διεργασία που λειτουργεί μόνο με την παρουσία φυσικής μεταβλητότητας θα είναι μια εντός ελέγχου διεργασία (in control process). Παρ' όλα αυτά υπάρχει το ενδεχόμενο σε μια παραγωγική διαδικασία να εμφανιστεί και μια δεύτερη μορφή μεταβλητότητας η οποία χαρακτηρίζεται ως ειδική μορφή μεταβλητότητας. Η παρουσία αυτής οφείλεται σε συστηματική αλλαγή στα επίπεδα σημαντικών για την ποιότητα του προϊόντος παραγόντων. Δύναται συνήθως να προκληθεί από φθορές μηχανών, από λάθη του προσωπικού ή από κακής ποιότητας πρώτη ύλη. Μια διεργασία που λειτουργεί με την παρουσία ειδικής μεταβλητότητας χαρακτηρίζεται ως εκτός ελέγχου διεργασία (out of control process). Μέσα από την χρήση των διαγραμμάτων ελέγχου τύπου Shewhart γίνεται συνεχής παρακολούθηση μιας παραγωγικής διαδικασίας για την γρήγορη ανίχνευση οποιασδήποτε μορφής ειδικής μεταβλητότητας. Σε αυτό το εισαγωγικό κεφάλαιο θα αναπτυχθούν τα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart, που εισήχθησαν από τον Shewhart (1931 [10]), για τη μέση τιμή και τη διακύμανση όπου θα δοθεί ιδιαίτερη έμφαση στα R και S διαγράμματα ελέγχου, καθώς και ένα διαφωτιστικό παράδειγμα που χρησιμοποιούνται τα συγκεκριμένα διαγράμματα. Η κύρια πηγή για το παρόν κεφάλαιο είναι το βιβλίο του Montgomery (2013 [8]) οι πανεπιστημιακές σημειώσεις Αντζουλάκος (2010 [1]) και τα βιβλία των Δαμιανού, Χ. (1996, [2]) και Ταγαράς, Γ. (2002, [3]).

1.2 Περιγραφή και χρήση ενός διαγράμματος ελέγχου

Κατά την παραγωγική διαδικασία μας ενδιαφέρει η παρακολούθηση της συμπεριφοράς μιας κρίσιμης ποσότητας ενός χαρακτηριστικού X (τυχαία μεταβλητή) Για την παρακολούθηση του συγκεκριμένου χαρακτηριστικού επιλέγονται τυχαία δείγματα προϊόντων από την παραγωγή σε διάφορες χρονικές στιγμές τα οποία αντιστοιχούν σε τυχαία δείγματα τιμών του χαρακτηριστικού X , έστω τα X_1, X_2, \dots . Στην συνέχεια υπολογίζεται η τιμή μιας στατιστικής συνάρτησης $W_i = g(X_i)$, $i = 1, 2, 3, \dots$ η οποία εκτιμά ένα κρίσιμο χαρακτηριστικό ποιότητας της X και είναι συνήθως μια αμερόληπτη εκτιμήτριά του. Έτσι την συμπεριφορά του κρίσιμου χαρακτηριστικού που μας ενδιαφέρει την παρακολουθούμε μέσα από τις τιμές που παίρνει η στατιστική συνάρτηση W , οι οποίες απεικονίζονται σε ένα ειδικό διάγραμμα που ονομάζεται διάγραμμα ελέγχου.

Μια τυπική μορφή διαγράμματος ελέγχου είναι η ακόλουθη.



Σχήμα 1.1. Τυπικό διάγραμμα ελέγχου τύπου Shewhart

Σε ένα διάγραμμα ελέγχου όπως αυτό της παραπάνω εικόνας απεικονίζεται η συμπεριφορά του χαρακτηριστικού που μας ενδιαφέρει στην διάρκεια της παραγωγής. Στο διάγραμμα παρατηρούμε την κεντρική γραμμή (center line, CL) ή μέσο επίπεδο της διεργασίας όπου παριστάνει συνήθως την μέση τιμή της στατιστικής συνάρτησης W καθώς και άλλες δύο οριζόντιες γραμμές οι οποίες αποτελούν τα άνω και κάτω όρια ελέγχου (upper and lower control limits, UCL και LCL). Τέλος παρατηρούμε τις τιμές της στατιστικής συνάρτησης W οι οποίες ενώνονται μεταξύ τους με μια τεθλασμένη γραμμή. Στην περίπτωση που όλες οι τιμές της στατιστικής συνάρτησης βρίσκονται ανάμεσα στα όρια ελέγχου μπορούμε να υποθέσουμε ότι η διεργασία παραμένει εντός στατιστικού ελέγχου και η παραγωγή συνεχίζεται κανονικά. Στην περίπτωση όμως που παρατηρηθεί κάποιο σημείο εκτός των ορίων ελέγχου πρέπει να σταματήσουμε την παραγωγική διαδικασία καθώς είναι πιθανό η διεργασία να βρίσκεται εκτός ελέγχου και να ελέγξουμε τυχόν αιτίες μεταβλητότητας στις οποίες οφείλεται αυτή η συμπεριφορά. Ένδειξη ότι η διεργασία μπορεί να βρίσκεται εκτός ελέγχου αποτελεί και η περίπτωση που τα σημεία παρ' όλο που βρίσκονται εντός των ορίων ελέγχου δεν είναι καταναμημένα με τυχαίο τρόπο.

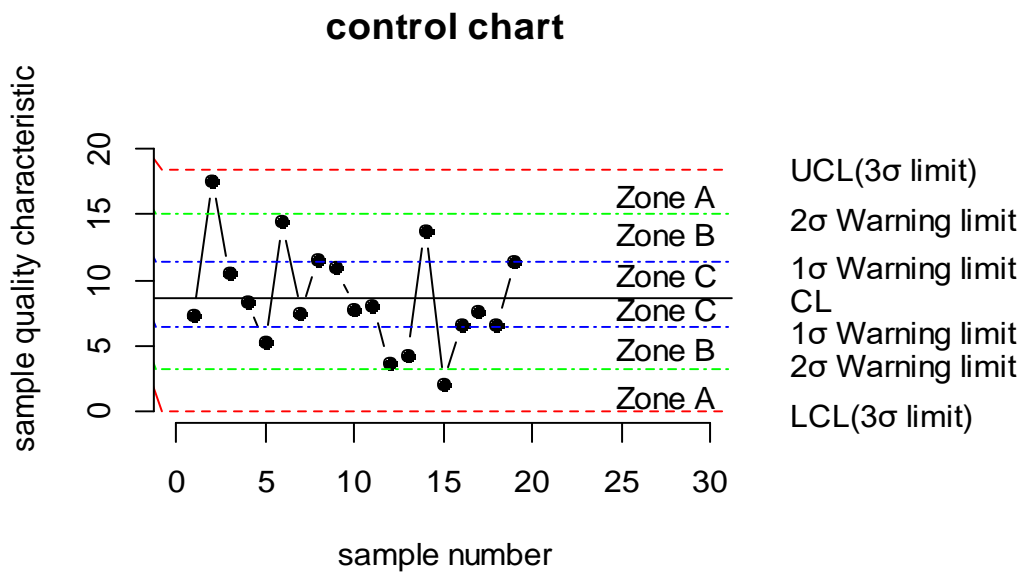
Η πιο συνήθης μέθοδος κατασκευής ενός διαγράμματος ελέγχου τύπου Shewhart είναι η μέθοδος ορίων ελέγχου L σίγμα που παρουσιάζεται στο ακόλουθο πλαίσιο.

Μοντέλο ορίων L σίγμα
$UCL = \mu_W + L\sigma_W$
$CL = \mu_W$
$LCL = \mu_W - L\sigma_W$

Προφανώς με W συμβολίζεται η στατιστική συνάρτηση που απεικονίζεται στο διάγραμμα η οποία «παρακολουθεί» την κρίσιμη ποσότητα που μελετάμε. Η μέση τιμή της W συμβολίζεται με μ_W και η τυπική της απόκλιση με σ_W . Το L δηλώνει την απόσταση των ορίων ελέγχου από την κεντρική γραμμή εκφρασμένη σε μονάδες τυπικής απόκλισης. Το σύνηθες είναι να παίρνει την τιμή 3 οπότε σε αυτή την περίπτωση αναφερόμαστε σε όρια ελέγχου 3σ. Μπορούμε βέβαια να δώσουμε και άλλες τιμές στο L ανάλογα με τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της παραγωγικής διεργασίας και τις ανάγκες μας. Αν δώσουμε μεγαλύτερη τιμή από το 3 τα όρια ελέγχου θα απομακρυνθούν από την κεντρική γραμμή με αποτέλεσμα να είναι πιο δύσκολο να εντοπιστεί κάποιο σημείο εκτός των ορίων σε μια εντός ελέγχου διεργασία. Ταυτόχρονα όμως αυξάνεται η πιθανότητα να βρεθεί εντός των ορίων ελέγχου ένα σημείο που έχει παραχθεί ενώ η διεργασία είναι εκτός ελέγχου. Αν δώσουμε μικρότερες τιμές στο L θα μικρύνει η απόσταση ανάμεσα στα όρια ελέγχου και την κεντρική γραμμή με αποτέλεσμα να εμφανίζονται πιο συχνά σημεία εκτός ορίων ελέγχου ενώ η διεργασία είναι εντός ελέγχου. Αυτό σημαίνει αύξηση της πιθανότητας του σφάλματος τύπου I ενώ παράλληλα μειώνεται η πιθανότητα μια διεργασία να βρίσκεται εκτός ελέγχου και να εντοπιστεί ένα σημείο εντός ορίων. Κάτι που σημαίνει μείωση στην πιθανότητα σφάλματος τύπου II.

Ανάλογα με το είδος της μετατόπισης που περιμένουμε να εντοπίσουμε κατασκευάζουμε είτε δίπλευρα είτε μονόπλευρα διαγράμματα ελέγχου. Στην περίπτωση όπου γνωρίζουμε ποια μπορεί να είναι η πιθανή μεταβολή ή μας ενδιαφέρει να εξετάσουμε μόνο μια αύξηση ή μείωση αντίστοιχα στο επίπεδο του υπό μελέτη χαρακτηριστικού μπορούμε να κατασκευάσουμε μονόπλευρα διαγράμματα ελέγχου. Σε διαφορετική περίπτωση περνάμε σε κατασκευή δίπλευρων διαγραμμάτων ελέγχου.

Στην περίπτωση που επιθυμούμε να εντοπίζουμε πιο γρήγορα εκτός ελέγχου διεργασίες σχεδιάζουμε και προειδοποιητικά όρια ελέγχου (warning limits) όπως φαίνονται στο ακόλουθο σχήμα.



Σχήμα 1.2. Προειδοποιητικά όρια ελέγχου

Τα προειδοποιητικά όρια μαζί με κάποιους κανόνες που περιγράφουν ειδικές ακολουθίες σημείων (μοτίβων) χρησιμεύουν στο να ανιχνεύουμε νωρίτερα αν μια διεργασία είναι εκτός ελέγχου χωρίς να χρειάζεται απαραίτητα να παρατηρήσουμε ένα σημείο εκτός των ορίων ελέγχου. Σε περίπτωση που παρατηρηθεί κάποιο μοτίβο τότε υπάρχει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας.

Μερικοί από τους σημαντικότερους κανόνες είναι οι ακόλουθοι:

1. Ένα ή περισσότερα σημεία εκτός των ορίων ελέγχου
2. Δύο από τρία συνεχόμενα σημεία στην ζώνη A (σε μια από τις δύο ζώνες A)
3. Τέσσερα από πέντε συνεχόμενα σημεία πέραν της ζώνης C (σε μια από τις δύο περιοχές)
4. Οκτώ συνεχόμενα σημεία στην ίδια μεριά (επάνω ή κάτω) της κεντρικής γραμμής
5. Έξι συνεχόμενα σημεία σε αύξουσα ή φθίνουσα διάταξη
6. Δεκαπέντε συνεχόμενα σημεία στην ολική ζώνη C
7. Δεκατέσσερα συνεχόμενα σημεία σε εναλλασσόμενη μορφή “πάνω-κάτω”
8. Οκτώ συνεχόμενα σημεία εκτός της ζώνης C
9. Οποιαδήποτε ασυνήθιστη ή μη τυχαία ακολουθία σημείων
10. Ένα ή περισσότερα σημεία κοντά στα προειδοποιητικά όρια ή τα όρια ελέγχου.

1.3 Μέσο μήκος ροής (ARL)

Μια βασική έννοια που σχετίζεται με τα διαγράμματα ελέγχου είναι το μέσο μήκος ροής ARL (average run length). Υπολογίζεται από τον τύπο

$$ARL = \frac{1}{p}$$

οπού το p συμβολίζει την πιθανότητα να βρεθεί ένα σημείο του διαγράμματος εκτός των ορίων ελέγχου. Είναι γνωστό ότι αν μια μεταβλητή X ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή $G(p)$, τότε

$$P(X = x) = p(1 - p)^{x-1}, \quad x = 1, 2, 3, \dots$$

και

$$E(X) = \frac{1}{p}, \quad V(X) = \frac{1 - p}{p^2}.$$

Το μήκος ροής σε ένα διάγραμμα ελέγχου ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή καθώς δηλώνει τον αριθμό των σημείων που θα απεικονιστούν σε αυτό έως ότου εμφανιστεί το πρώτο σημείο εκτός των ορίων ελέγχου. Συνεπώς το μέσο μήκος ροής δηλώνει τον αναμενόμενο αριθμό σημείων που πρέπει να σχεδιαστούν στο διάγραμμα ελέγχου μέχρι να εντοπιστεί το πρώτο σημείο εκτός των ορίων ελέγχου.

Σε μια εντός ελέγχου διεργασία όπου στο διάγραμμα ελέγχου απεικονίζεται η στατιστική συνάρτηση W η οποία έχει μέση τιμή μ , τυπική απόκλιση σ και συνάρτηση κατανομής $F_0(\cdot)$, η πιθανότητα α εμφάνισης στο διάγραμμα ενός σημείου εκτός των ορίων ελέγχου ισούται με

$$\alpha = 1 - P(LCL \leq W \leq UCL) = 1 - F_0(\mu + L\sigma) + F_0(\mu - L\sigma).$$

Το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής είναι προφανώς ίσο με

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha}.$$

Το ARL_0 θέλουμε να έχει μεγάλη τιμή έτσι ώστε να μειωθεί ο αριθμός των λανθασμένων ενδείξεων εκτός ελέγχου διεργασίας.

Στην περίπτωση όπου η στατιστική συνάρτηση W ακολουθεί την κανονική κατανομή και χρησιμοποιούμε 3σ όρια ελέγχου το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής θα είναι

$$ARL_0 = \frac{1}{0.0027} = 370.$$

Σε μια εκτός ελέγχου διεργασία, όπου στο διάγραμμα ελέγχου απεικονίζεται η στατιστική συνάρτηση W η οποία έχει μέση τιμή μ' , τυπική απόκλιση σ' και συνάρτηση κατανομής $F_1(\cdot)$, η πιθανότητα $1 - \beta$ εμφάνισης ενός σημείου εκτός των ορίων ελέγχου του διαγράμματος ισούται με

$$1 - \beta = 1 - P(LCL \leq W \leq UCL) = 1 - F_1(\mu' + L\sigma') + F_1(\mu' - L\sigma').$$

Το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής ισούται με

$$ARL_1 = \frac{1}{1 - \beta}$$

και δηλώνει τον αναμενόμενο αριθμό σημείων που θα απεικονιστούν στο διάγραμμα μέχρι να εντοπιστεί η αλλαγή στο μέσο επίπεδο της διεργασίας. Το ARL_1 θέλουμε να παίρνει μικρές τιμές έτσι ώστε να ανιχνευτεί όσο το δυνατόν νωρίτερα μια ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας.

Η χρήση του ARL ως περιγραφικό μέτρο της απόδοσης μιας διεργασίας έχει υποστεί αρκετή κριτική (δείτε Chakraborti(2000 [2])) καθώς το ARL που παρατηρείται στην πράξη διαφέρει από το θεωρητικό και αυτό οφείλεται στο ότι η κατανομή του μήκους ροής που είναι η γεωμετρική είναι μια ασύμμετρη κατανομή (λοξή προς τα δεξιά), και άρα η μέση τιμή δεν μπορεί να θεωρηθεί ως αντιπροσωπευτικό μέτρο κεντρικής τάσης της κατανομής.

Ένα άλλο μέτρο που χρησιμοποιείται αρκετά συχνά εκτός από το μέσο μήκος ροής είναι ο μέσος χρόνος σήματος ATS (average time to signal)

$$ATS = ARL \times h$$

όπου το h συμβολίζει το χρόνο που μεσολαβεί ανάμεσα στην λήψη δύο διαδοχικών δειγμάτων, και άρα ο μέσος χρόνος σήματος δηλώνει τον μέσο χρόνο που απαιτείται για να δώσει το διάγραμμα ελέγχου ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας.

1.4 Ορθολογικές υποομάδες

Για τον τρόπο συλλογής των δεδομένων που θα χρησιμοποιηθούν στην κατασκευή ενός διαγράμματος ελέγχου ο Shewhart πρότεινε την έννοια των ορθολογικών υποομάδων (rational subgroups). Στην περίπτωση όπου υπάρχει ειδική αιτία μεταβλητότητας τα δείγματα πρέπει να επιλέγονται με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε οι διαφορές ανάμεσα στις υποομάδες να μεγιστοποιούνται ενώ οι διαφορές μέσα στις υποομάδες να ελαχιστοποιούνται. Για να το πετύχουμε αυτό υπάρχουν δύο διαφορετικές προσεγγίσεις.

Σύμφωνα με την πρώτη μέθοδο, τα προϊόντα ενός δείγματος θα πρέπει να έχουν παραχθεί την ίδια χρονική στιγμή. Αυτό συμβαίνει διότι αν πάρουμε, για παράδειγμα, δείγμα από δύο διαφορετικές βάρδιες η μεταβλητότητα μπορεί να διαφέρει από δείγμα σε δείγμα και έτσι με αυτόν τον τρόπο το διάγραμμα ελέγχου είναι πιθανό να μην μπορεί να εντοπίσει ειδική αιτία μεταβλητότητας ανάμεσα στις δύο βάρδιες. Αυτή η προσέγγιση χρησιμοποιείται όταν θέλουμε μέσα από το διάγραμμα ελέγχου να ανιχνεύσουμε αλλαγές στην διεργασία.

Σύμφωνα με τη δεύτερη μέθοδο, τα προϊόντα ενός δείγματος επιλέγονται τυχαία από όλη την παραγωγή. Αυτό συμβαίνει όταν μέσα από το διάγραμμα θέλουμε να πάρουμε αποφάσεις γύρω από την αποδοχή όλου του αριθμού των παραγόμενων προϊόντων από την τελευταία φορά που είχαμε δειγματοληψία.

1.5 Διαγράμματα ελέγχου φάσης I και φάσης II

Φάση I: Σε αυτή τη φάση χρησιμοποιούνται δείγματα που συλλέχθηκαν σε παρελθόντα χρόνο. Σκοπός είναι να ελεγχθεί αν η διεργασία ήταν εντός ελέγχου και αν δεν ήταν να γίνουν τα κατάλληλα βήματα ώστε ο διαχειριστής να την φέρει εντός στατιστικού ελέγχου. Το αποτέλεσμα αυτής της φάσης είναι να προκύψουν η κεντρική γραμμή και τα όρια ελέγχου τα οποία θα χρησιμοποιηθούν για την παρακολούθηση της διεργασίας στο μέλλον. Αυτή η χρήση των διαγραμμάτων αναφέρεται και ως αναδρομική (retrospective). Πολλές δράσεις και σκέψεις εξελίσσονται στην διάρκεια αυτής της φάσης εκτός από την απλή διαγραμματοποίηση κάποιων δεδομένων. Αυτό γιατί ο διαχειριστής πρέπει να μελετήσει σε βάθος την διεργασία έως ότου αποφασίσει αν αυτή βρισκόταν εντός ή εκτός στατιστικού ελέγχου την περίοδο που συλλέχθηκαν τα δεδομένα. Στην συνέχεια τα διαγράμματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την παρακολούθηση της μελλοντικής συμπεριφοράς της διεργασίας (φάση II).

Φάση II: Σε αυτή τη φάση χρησιμοποιούνται η κεντρική γραμμή και τα όρια ελέγχου που προέκυψαν από τη φάση I. Τα διαγράμματα ελέγχου χρησιμοποιούνται για την συνεχή παρακολούθηση της παραγωγικής διαδικασίας και γίνεται έλεγχος κάθε στιγμή αν υπάρχει κάποια αλλαγή στο μέσο επίπεδο των χαρακτηριστικών που μελετάμε που θα μπορούσε να επηρεάσει την ποιότητα του προϊόντος. Για κάθε δείγμα που συλλέγεται ο διαχειριστής έχει την δυνατότητα να καταλάβει εάν η διεργασία παραμένει εντός στατιστικού ελέγχου.

1.6 Εκτίμηση της μέσης τιμής και της διασποράς

1.6.1 Η περίπτωση των μεμονωμένων παρατηρήσεων

Έστω $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ είναι ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n από ένα πληθυσμό με άγνωστη μέση τιμή μ και άγνωστη διακύμανση σ^2 . Μια αμερόληπτη εκτιμήτρια της μέσης τιμής είναι ο δειγματικός μέσος:

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

και μια αμερόληπτη εκτιμήτρια της διακύμανσης του πληθυσμού είναι η δειγματική διακύμανση

$$\hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

Στην περίπτωση όπου το τυχαίο δείγμα προέρχεται από κανονικό πληθυσμό $N(\mu, \sigma^2)$, καταλήγουμε στις ακόλουθες αμερόληπτες εκτιμήτριες της τυπικής απόκλισης σ ,

$$\hat{\sigma} = \frac{R}{d_2} = \frac{X_{(n)} - X_{(1)}}{d_2}$$

και

$$\hat{\sigma} = \frac{S}{c_4} = \frac{\sqrt{S^2}}{c_4}.$$

Επίσης

$$\mu_R = E(R) = \sigma d_2 \quad , \quad \sigma_R = \sqrt{V(R)} = \sigma d_3$$

$$\mu_S = E(S) = \sigma c_4 \quad , \quad \sigma_S = \sigma \sqrt{1 - c_4^2}$$

Οι ποσότητες d_2, d_3 και c_4 είναι σταθερές που εξαρτώνται από το μέγεθος του δείγματος οι τιμές των οποίων δίνονται στον ακόλουθο πίνακα.

Πίνακας 1.1. Τιμές των σταθερών d_2 , d_3 και c_4

n	d_2	d_3	c_4
2	1.12837917	0.85250247	0.79788456
3	1.69256875	0.88836800	0.88622693
4	2.05875075	0.87980820	0.92131773
5	2.32592895	0.86408194	0.93998560
6	2.53441272	0.84803969	0.95153286
7	2.70435675	0.83320534	0.95936879
8	2.84720061	0.81983110	0.96503046
9	2.97002632	0.80783427	0.96931070
10	3.07750546	0.79705067	0.97265927
11	3.17287270	0.78731462	0.97535008
12	3.25845528	0.77847834	0.97755935
13	3.33598036	0.77041620	0.97940560
14	3.40676311	0.76302309	0.98097144
15	3.47182690	0.75621142	0.98231618
16	3.53198280	0.74990808	0.98348353
17	3.58788398	0.74405177	0.98450641
18	3.64006378	0.73859084	0.98541004
19	3.68896305	0.73348148	0.98621414
20	3.73494927	0.72869080	0.98693427
21	3.77833585	0.72417333	0.98758293
22	3.81938466	0.71991481	0.98817025
23	3.85832342	0.71588675	0.98870455
24	3.89534813	0.71206822	0.98919267
25	3.93062918	0.70844083	0.98964038

1.6.2 Η περίπτωση των δειγμάτων

Έστω ότι έχουμε στη διάθεση μας m τυχαία δείγματα, τα $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$, για $1 \leq i \leq m$, μεγέθους n το καθένα από τον κανονικό πληθυσμό $N(\mu, \sigma^2)$ με άγνωστη μέση τιμή και διακύμανση.

- **Εκτίμηση της μέσης τιμής**

Έστω $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_m$, οι δειγματικοί μέσοι των m δειγμάτων. Θέτουμε

$$\bar{\bar{X}} = \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \dots + \bar{X}_m}{m} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij}}{mn}.$$

Η ποσότητα $\bar{\bar{X}}$ ακολουθεί κατανομή $N(\mu, \frac{\sigma^2}{mn})$ και χρησιμοποιείται ως εκτιμήτρια της μέσης τιμής μ (αμερόληπτη εκτιμήτρια του μ), δηλαδή

$$\hat{\mu} = \bar{\bar{X}}.$$

- **Εκτίμηση της τυπικής απόκλισης σ (μέθοδος R)**

Έστω R_1, R_2, \dots, R_m τα εύρη των m δειγμάτων, δηλαδή

$$R_i = X_{i(n)} - X_{i(1)}, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Θέτοντας

$$\bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_m}{m}$$

καταλήγουμε ότι μια αμερόληπτη εκτιμήτρια του σ θα είναι η

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}.$$

- **Εκτίμηση της τυπικής απόκλισης σ (Μέθοδος S)**

Έστω S_i η δειγματική τυπική απόκλιση του i δείγματος, δηλαδή

$$S_i = \sqrt{S_i^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Θέτοντας

$$\bar{S} = \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_m}{m}$$

καταλήγουμε ότι μια αμερόληπτη εκτιμήτρια του σ θα είναι η

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{S}}{c_4}.$$

- **Εκτίμηση της διακύμανσης σ (Μέθοδος S^2)**

Έστω $S_1^2, S_2^2, \dots, S_m^2$ οι δειγματικές διασπορές των m δειγμάτων, δηλαδή

$$S_i^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Θέτοντας

$$\bar{S}^2 = \frac{S_1^2 + S_2^2 + \dots + S_m^2}{m}$$

έχουμε ότι μια εκτιμήτρια του σ είναι η

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\bar{S}^2}$$

η οποία αν και δεν είναι αμερόληπτη, χρησιμοποιείται αρκετές φορές λόγω του ότι έχει μικρότερο μέσο τετραγωνικό σφάλμα από την \bar{S}/c_4 .

1.7 Διαγράμματα ελέγχου για τη μέση τιμή

1.7.1 Διαγράμματα ελέγχου φάσης II

Ας υποθέσουμε ότι η κατανομή του χαρακτηριστικού X των προϊόντων που παράγονται ακολουθεί κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ με γνωστές παραμέτρους και έστω $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$, $i \geq 1$, τυχαία δείγματα μεγέθους n από το χαρακτηριστικό X . Θέτουμε

$$\bar{X}_i = \frac{X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{in}}{n}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Για να γίνει ο έλεγχος κατά πόσο η διεργασία βρίσκεται εντός ή εκτός ελέγχου ανάλογα με το αν υπάρχει μετατόπιση ή όχι της μέσης τιμής του χαρακτηριστικού X , χρησιμοποιείται συνήθως το \bar{X} διάγραμμα ελέγχου με 3σ όρια ελέγχου. Κάνοντας την υπόθεση ότι η διακύμανση του χαρακτηριστικού X παραμένει σταθερή σε όλη την διαδικασία, στο παρακάτω πλαίσιο δίνονται τα όρια ελέγχου καθώς και η κεντρική γραμμή του διαγράμματος

\bar{X} διάγραμμα ελέγχου
Φάση II - Όρια ελέγχου 3σ
$UCL = \mu + A\sigma$
$CL = \mu$
$LCL = \mu - A\sigma$

όπου $A = \frac{3}{\sqrt{n}}$

Στην περίπτωση όπου θέλουμε διάγραμμα ελέγχου με όρια διαφορετικά των 3σ τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή προκύπτουν από το παρακάτω πλαίσιο.

\bar{X} διάγραμμα ελέγχου
Φάση II - Όρια ελέγχου $L\sigma$
$UCL = \mu + L \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $CL = \mu$ $LCL = \mu - L \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

1.7.2 Διαγράμματα ελέγχου φάσης I

Σε αυτή την φάση η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση του χαρακτηριστικού X είναι άγνωστες και άρα είναι απαραίτητο να εκτιμηθούν. Για την εκτίμηση τους χρησιμοποιούνται m ανεξάρτητα προκαταρκτικά τυχαία δείγματα μεγέθους n το καθένα, τα $X_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$, $i = 1, 2, \dots, m$, και γίνεται η υπόθεση ότι η επιλογή των προκαταρκτικών δειγμάτων συνέβη όταν η διεργασία ήταν εντός ελέγχου. Οι εκτιμήσεις των παραμέτρων προκύπτουν συνήθως από 20 έως 25 προκαταρκτικά δείγματα μεγέθους 4 έως 6.

Η (αμερόληπτη) εκτιμήτρια που χρησιμοποιείται για την μέση τιμή είναι η

$$\hat{\mu} = \bar{\bar{X}}$$

ενώ για την εκτίμηση της τυπικής απόκλισης έχουμε τις ακόλουθες στατιστικές συναρτήσεις

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}, \quad \hat{\sigma} = \frac{\bar{S}}{c_4}, \quad \hat{\sigma} = \sqrt{\bar{S}^2}.$$

Συνεπώς, ανάλογα με την στατιστική συνάρτηση που χρησιμοποιούμε για την εκτίμηση της τυπικής απόκλισης προκύπτει διαφορετικό διάγραμμα ελέγχου για την παρακολούθηση της μέσης τιμής. Σε κάθε περίπτωση στο διάγραμμα ελέγχου απεικονίζονται οι δειγματικές μέσες τιμές \bar{X}_i ($i = 1, 2, \dots, m$). Έτσι έχουμε τα τρία ακόλουθα διαγράμματα ελέγχου

\bar{X} διάγραμμα ελέγχου
Φάση I - Όρια ελέγχου 3σ Μέθοδος R
$UCL = \bar{\bar{X}} + A_2\bar{R}$ $CL = \bar{\bar{X}}$ $LCL = \bar{\bar{X}} - A_2\bar{R}$

\bar{X} διάγραμμα ελέγχου
Φάση I - Όρια ελέγχου 3σ Μέθοδος S
$UCL = \bar{\bar{X}} + A_3\bar{S}$ $CL = \bar{\bar{X}}$ $LCL = \bar{\bar{X}} - A_3\bar{S}$

\bar{X} διάγραμμα ελέγχου
Φάση II - Όρια ελέγχου 3σ Μέθοδος S²
$UCL = \bar{\bar{X}} + A\sqrt{\bar{S}^2}$ $CL = \bar{\bar{X}}$ $LCL = \bar{\bar{X}} - A\sqrt{\bar{S}^2}$

όπου

$$A_2 = \frac{3}{d_2\sqrt{n}}, \quad A_3 = \frac{3}{c_4\sqrt{n}}$$

1.8 Διαγράμματα ελέγχου για τη διασπορά

1.8.1 S διάγραμμα ελέγχου

Ας υποθέσουμε ότι η κατανομή του χαρακτηριστικού X των προϊόντων που παράγονται ακολουθεί κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ με γνωστές παραμέτρους και έστω $X_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$, $i \geq 1$, τυχαία δείγματα μεγέθους n από το χαρακτηριστικό X . Για την παρακολούθηση της διασποράς του χαρακτηριστικού X την στατιστική συνάρτηση

$$W_i = S_i = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}, \quad i = 1, 2, \dots$$

για την οποία γνωρίζουμε ότι

$$\mu_{S_i} = E(S_i) = \sigma c_4, \quad \sigma_{S_i} = \sqrt{V(S_i)} = \sigma \sqrt{1 - c_4^2}.$$

Το διάγραμμα ελέγχου ορίων 3σ , που χρησιμοποιείται για την παρακολούθηση της διασποράς είναι το S διάγραμμα ελέγχου στο οποίο απεικονίζονται οι δειγματικές τυπικές αποκλίσεις S_i ($i = 1, 2, \dots$). Τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή του διαγράμματος δίνονται στο ακόλουθο πλαίσιο

S διάγραμμα ελέγχου
Φάση II - Όρια ελέγχου 3σ
$UCL = B_6\sigma$
$CL = c_4\sigma$
$LCL = B_5\sigma$

όπου

$$B_5 = c_4 - 3\sqrt{1 - c_4^2}, \quad B_6 = c_4 + 3\sqrt{1 - c_4^2}.$$

Στις περιπτώσεις όπου $n \leq 5$ προκύπτει ότι $B_5 < 0$ και τότε θέτουμε $B_5 = 0$.

Στην περίπτωση όπου οι ποσότητα σ δεν είναι γνωστή πρέπει να εκτιμηθεί. Χρησιμοποιώντας ως εκτίμηση του σ την ποσότητα $\hat{\sigma} = \frac{\bar{s}}{c_4}$ προκύπτει το S διάγραμμα ελέγχου φάσης I το οποίο φαίνεται στο ακόλουθο πλαίσιο

S διάγραμμα ελέγχου
Φάση I - Όρια ελέγχου 3σ
$UCL = B_4\bar{S}$
$CL = \bar{S}$
$LCL = B_3\bar{S}$

όπου

$$B_3 = 1 - \frac{3}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2}, \quad B_4 = 1 + \frac{3}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2}.$$

Στις περιπτώσεις όπου $n \leq 5$ προκύπτει ότι $B_3 < 0$ και τότε θέτουμε $B_3 = 0$.

Παρακάτω δίνεται πίνακας με τις τιμές των σταθερών B_3, B_4, B_5 και B_6 .

Πίνακας 1.2. Τιμές των B_3, B_4, B_5 και B_6

n	B_3	B_4	B_5	B_6
2	0	3.26653192	0	2.60631539
3	0	2.56816960	0	2.27598105
4	0	2.26604708	0	2.08774936
5	0	2.08899787	0	1.96362792
6	0.03036321	1.96963679	0.02889159	1.87417413
7	0.11768503	1.88231497	0.11290335	1.80583423
8	0.18508960	1.81491040	0.17861710	1.75144381
9	0.23913280	1.76086720	0.23179398	1.70682742
10	0.28370556	1.71629444	0.27594884	1.66936971
11	0.32128015	1.67871985	0.31336062	1.63733954
12	0.35351183	1.64648817	0.34557880	1.60953991
13	0.38155570	1.61844430	0.37369779	1.58511342
14	0.40624538	1.59375462	0.39851512	1.56342775
15	0.42819954	1.57180046	0.42062734	1.54400502
16	0.44788816	1.55211184	0.44049063	1.52647643
17	0.46567554	1.53432446	0.45846055	1.51055226
18	0.48184896	1.51815104	0.47481881	1.49600128
19	0.49663844	1.50336156	0.48979185	1.48263642
20	0.51023059	1.48976941	0.50356405	1.47030448
21	0.52277862	1.47722138	0.51628724	1.45887862
22	0.53440963	1.46559037	0.52808770	1.44825280
23	0.54523009	1.45476991	0.53907147	1.43833762
24	0.55532993	1.44467007	0.54932830	1.42905705
25	0.56478571	1.43521429	0.55893474	1.42034601

1.8.2 R διάγραμμα ελέγχου

Ας υποθέσουμε ότι η κατανομή του χαρακτηριστικού X των προϊόντων που παράγονται ακολουθεί κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ με γνωστές παραμέτρους και έστω $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$, $i \geq 1$, τυχαία δείγματα μεγέθους n από το χαρακτηριστικό X . Για την παρακολούθηση της διασποράς του χαρακτηριστικού X χρησιμοποιούμε τη στατιστική συνάρτηση

$$W_i = R_i = X_{i(n)} - X_{i(1)}, \quad i = 1, 2, \dots$$

για την οποία γνωρίζουμε ότι

$$\mu_{R_i} = E(R_i) = \sigma d_2, \quad \sigma_{R_i} = \sqrt{V(R_i)} = \sigma d_3.$$

Το διάγραμμα ελέγχου ορίων 3σ , που χρησιμοποιείται για την παρακολούθηση της διασποράς είναι το R διάγραμμα ελέγχου στο οποίο η απεικονιζόμενη ποσότητα θα είναι το εύρος R_i . Τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή του διαγράμματος δίνονται στο ακόλουθο πλαίσιο

R διάγραμμα ελέγχου
Φάση II - Όρια ελέγχου 3σ
$UCL = D_2\sigma$
$CL = d_2\sigma$
$LCL = D_1\sigma$

όπου

$$D_1 = d_2 - 3d_3, \quad D_2 = d_2 + 3d_3.$$

Στις περιπτώσεις που $n \leq 6$ προκύπτει ότι $D_1 < 0$ και τότε θέτουμε $D_1 = 0$.

Στην περίπτωση όπου η ποσότητα σ δεν είναι γνωστή πρέπει να εκτιμηθεί. Χρησιμοποιώντας ως εκτίμηση του σ την ποσότητα $\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}$ προκύπτει το R διάγραμμα ελέγχου φάσης I το οποίο δίνεται στο ακόλουθο πλαίσιο

R διάγραμμα ελέγχου
Φάση Ι - Όρια ελέγχου 3σ
$UCL = D_4\bar{R}$
$CL = \bar{R}$
$LCL = D_3\bar{R}$

όπου

$$D_3 = 1 - 3\frac{d_3}{d_2}, \quad D_4 = 1 + 3\frac{d_3}{d_2}.$$

Στις περιπτώσεις όπου $n \leq 6$ προκύπτει ότι $D_3 < 0$ και τότε θέτουμε $D_3 = 0$.

Παρακάτω δίνεται πίνακας με τις τιμές των σταθερών D_1, D_2, D_3 και D_4 .

Πίνακας 1.3. Τιμές των D_1, D_2, D_3 και D_4 .

n	D_1	D_2	D_3	D_4
2	0	3.68588657	0	3.26653192
3	0	4.35767276	0	2.57459129
4	0	4.69817535	0	2.28205156
5	0	4.91817477	0	2.11449915
6	0	5.07853178	0	2.00382982
7	0.20474074	5.20397276	0.07570774	1.92429226
8	0.38770732	5.30669390	0.13617141	1.86382859
9	0.54652350	5.39352915	0.18401302	1.81598698
10	0.68635344	5.46865748	0.22302266	1.77697734
11	0.81092884	5.53481656	0.25558190	1.74441810
12	0.92302026	5.59389030	0.28326927	1.71673073
13	1.02473175	5.64722896	0.30717560	1.69282440
14	1.11769383	5.69583239	0.32808088	1.67191912
15	1.20319263	5.74046117	0.34655893	1.65344107
16	1.28225856	5.78170704	0.36304213	1.63695787
17	1.35572867	5.82003929	0.37786302	1.62213698
18	1.42429128	5.85583629	0.39128196	1.60871804
19	1.48851862	5.88940748	0.40350597	1.59649403
20	1.54887688	5.92102167	0.41469824	1.58530176
21	1.60581586	5.95085584	0.42500612	1.57499388
22	1.65964023	5.97912908	0.43453079	1.56546921
23	1.71066316	6.00598368	0.44336956	1.55663044
24	1.75914348	6.03155277	0.45160110	1.54839890
25	1.80530667	6.05595168	0.45929204	1.54070796

1.9 Παράδειγμα

Τα δεδομένα του Πίνακα 1.4 αναφέρονται σε εξαρτήματα που κατασκευάζονται με μια διαδικασία χύτευσης με έγχυση. Συλλέχθηκαν 20 δείγματα μεγέθους $n = 5$ το κάθε ένα, για να ελεγχθεί η αντοχή τους στην συμπίεση (Montgomery (2013, p. 285[8])). Επίσης δίνονται το εύρος και η τυπική απόκλιση κάθε δείγματος.

Πίνακας 1.4. Τα δεδομένα του παραδείγματος

n	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	R_i	S_i
1	83.0	81.2	78.7	75.7	77.0	7.3	2.9894815604
2	88.6	78.3	78.8	71.0	84.2	17.6	6.6477063714
3	85.7	75.8	84.3	75.2	81.0	10.5	4.7921811318
4	80.8	74.4	82.5	74.1	75.7	8.4	3.8826537317
5	83.4	78.4	82.6	78.2	78.9	5.2	2.4939927827
6	75.3	79.9	87.3	89.7	81.8	14.4	5.7775427303
7	74.5	78.0	80.8	73.4	79.7	7.4	3.2228869046
8	79.2	84.4	81.5	86.0	74.5	11.5	4.5339827966
9	80.5	86.2	76.2	64.1	80.2	22.1	8.2645629044
10	75.7	75.2	71.1	82.1	74.3	11.0	4.0102369007
11	80.0	81.5	78.4	73.8	78.1	7.7	2.8901557051
12	80.6	81.8	79.3	73.8	81.7	8.0	3.3110421320
13	82.7	81.3	79.1	82.0	79.5	3.6	1.5658863305
14	79.2	74.9	78.6	77.7	75.3	4.3	1.9424211696
15	85.5	82.1	82.8	73.4	71.7	13.8	6.1420680556
16	78.8	79.6	80.2	79.1	80.8	2.0	0.8124038405
17	82.1	78.2	75.5	78.2	82.1	6.6	2.8507893644
18	84.5	76.9	83.5	81.2	79.2	7.6	3.1053180191
19	79.0	77.8	81.2	84.4	81.6	6.6	2.5495097568
20	73.1	73.1	78.6	78.7	80.6	11.4	4.1176449580

Η κατανομή του χαρακτηριστικού που θέλουμε να μελετήσουμε είναι άγνωστη. Συνεπώς δεν γνωρίζουμε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση του. Υποθέτοντας ότι η κατανομή του χαρακτηριστικού είναι κανονική θα κατασκευάσουμε R και S διαγράμματα ελέγχου (φάση I) για να ελέγξουμε εάν η διασπορά είναι εντός στατιστικού ελέγχου.

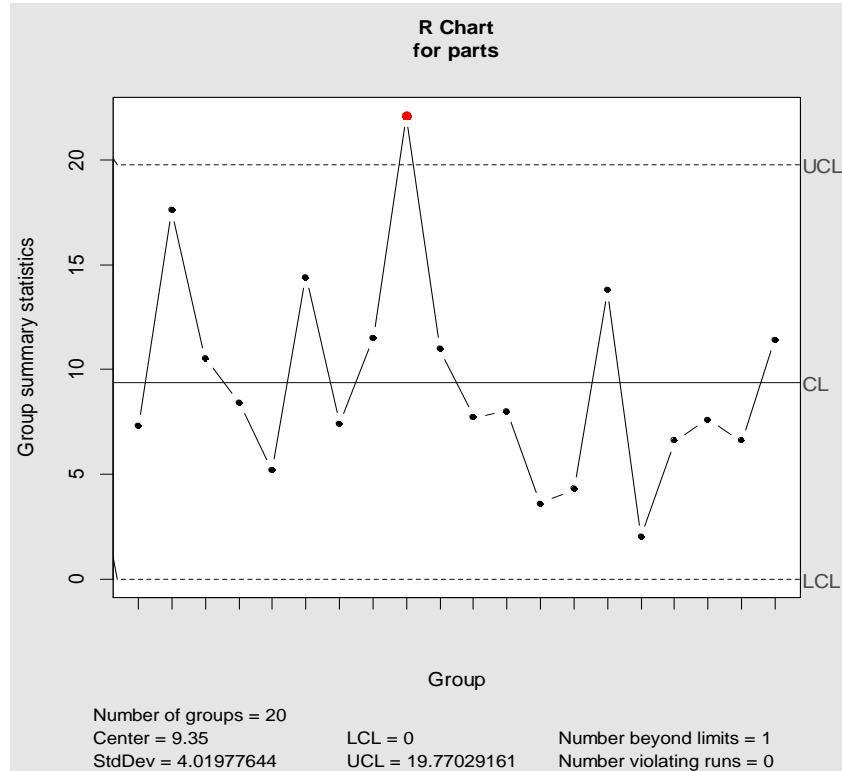
- **R διάγραμμα ελέγχου**

Χρησιμοποιώντας αποτελέσματα της Παραγράφου 1.8.2 έχουμε

$$CL = \bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_{20}}{20} = 9.35$$

$$LCL = D_3\bar{R} = 0 \times 9.35 = 0$$

$$UCL = D_4 \times \bar{R} = 2.11449915 \times 9.35 = 19.770$$



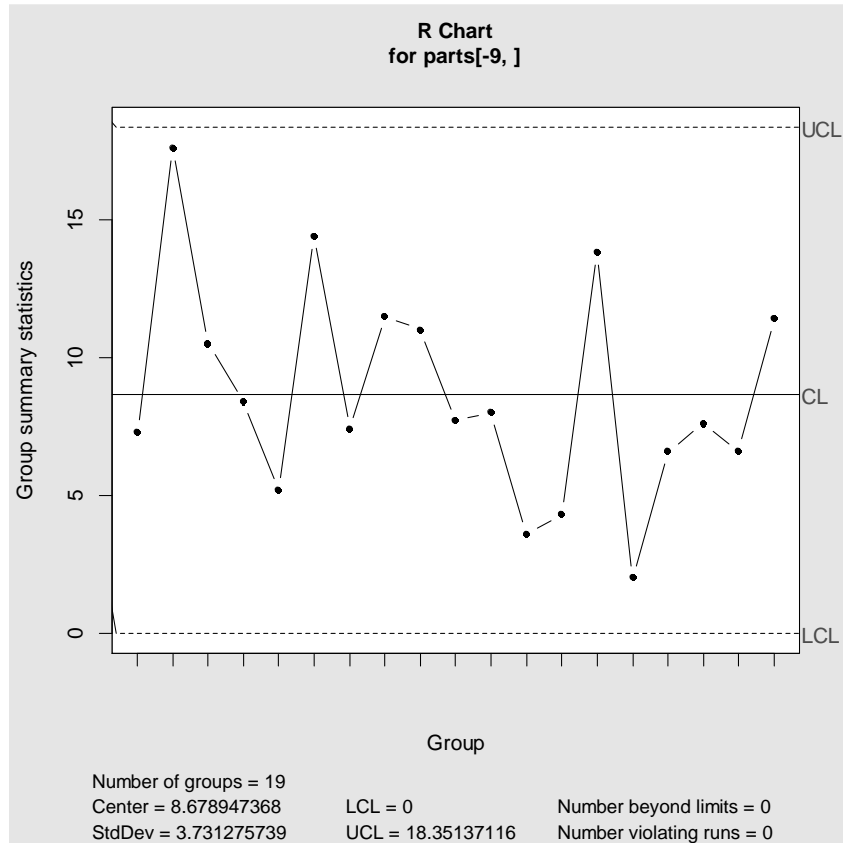
Σχήμα 1.3. R διάγραμμα ελέγχου για τα δεδομένα του πίνακα 1.4

Παρατηρούμε από το διάγραμμα ότι υπάρχει ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός στατιστικού ελέγχου καθώς η ένατη παρατήρηση βρίσκεται εκτός ορίων ελέγχου. Στην συνέχεια αφαιρούμε την ένατη παρατήρηση και υπολογίζουμε ξανά τα όρια ελέγχου και την κεντρική γραμμή, θεωρώντας ότι πράγματι υπήρξε εμφάνιση ειδικής αιτίας μεταβλητότητας. Έτσι

$$CL = \bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_{20}}{19} = 8.6789$$

$$LCL = D_3\bar{R} = 0 \times 8.6789 = 0$$

$$UCL = D_4\bar{R} = 2.11449915 \times 8.6789 = 18.35$$



Σχήμα 1.4. R διάγραμμα ελέγχου για τα δεδομένα του Πίνακα 1.4 πλην του 9^{ου} δείγματος

Η διεργασία είναι πλέον εντός στατιστικού ελέγχου και τα όρια που καταλήξαμε θα χρησιμοποιηθούν στα διαγράμματα της φάσης II. Επιπροσθέτως

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2} = \frac{8.6789}{2.325928947} = 3.731.$$

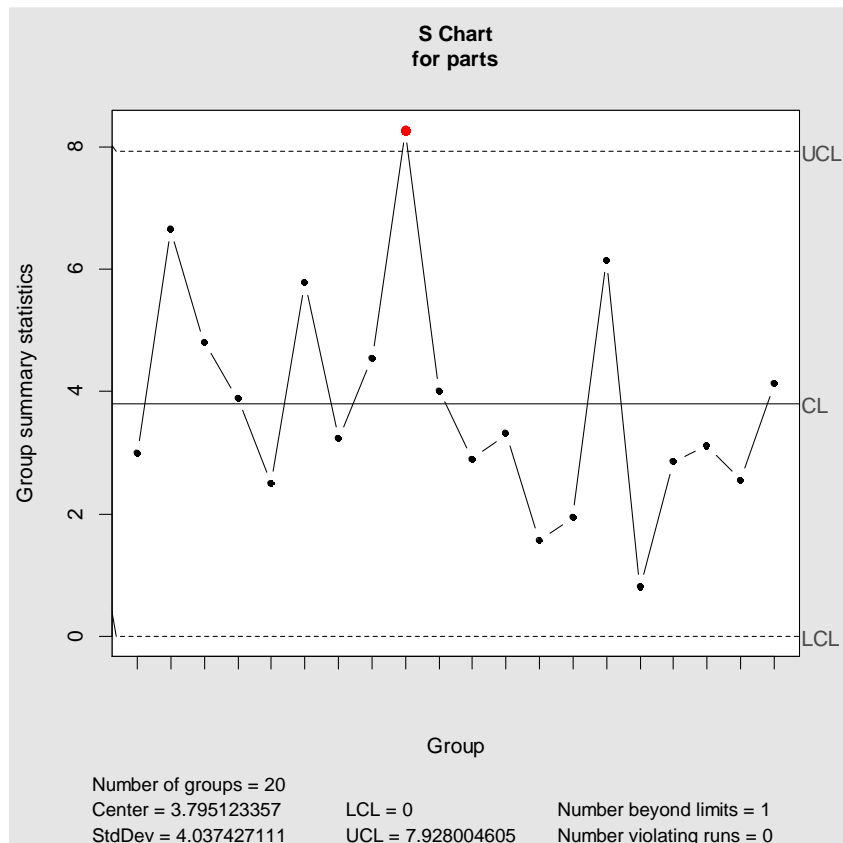
- **S διάγραμμα ελέγχου**

Χρησιμοποιώντας αποτελέσματα της Παραγράφου 1.8.1 έχουμε

$$CL = \bar{S} = \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_{20}}{20} = 3.7951$$

$$LCL = B_3 \bar{S} = 0 \times 3.7951 = 0$$

$$UCL = B_4 \bar{S} = 2.08899787 \times 3.7951 = 7.9279.$$



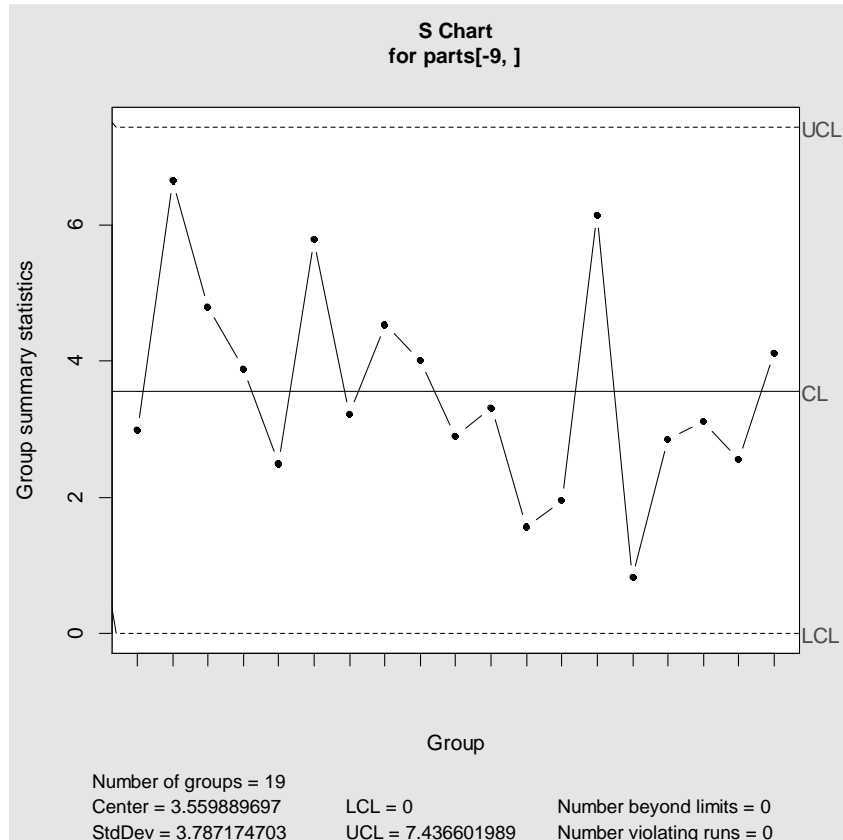
Σχήμα 1.5. S διάγραμμα ελέγχου για τα δεδομένα του Πίνακα 1.4

Παρατηρούμε ότι και σε αυτό το διάγραμμα υπάρχει ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός στατιστικού ελέγχου καθώς η ένατη παρατήρηση βρίσκεται εκτός ορίων ελέγχου. Αφαιρώντας την ένατη παρατήρηση από τα δεδομένα παίρνουμε

$$CL = \bar{S} = \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_{20}}{19} = 3.5598$$

$$LCL = B_3 \bar{S} = 0 \times 3.5598 = 0$$

$$UCL = B_4 \bar{S} = 2.08899787 \times 3.5598 = 7.4364$$



Σχήμα 1.6. S διάγραμμα ελέγχου για τα δεδομένα του Πίνακα 1.4 πλην του 9ου δείγματος

Η διεργασία φαίνεται να είναι εντός στατιστικού ελέγχου και τα όρια που καταλήξαμε θα χρησιμοποιηθούν στα διαγράμματα της φάσης II. Επιπροσθέτως

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{S}}{c_4} = \frac{3.5598}{0.93998560} = 3.787.$$

- **\bar{X} διάγραμμα ελέγχου**

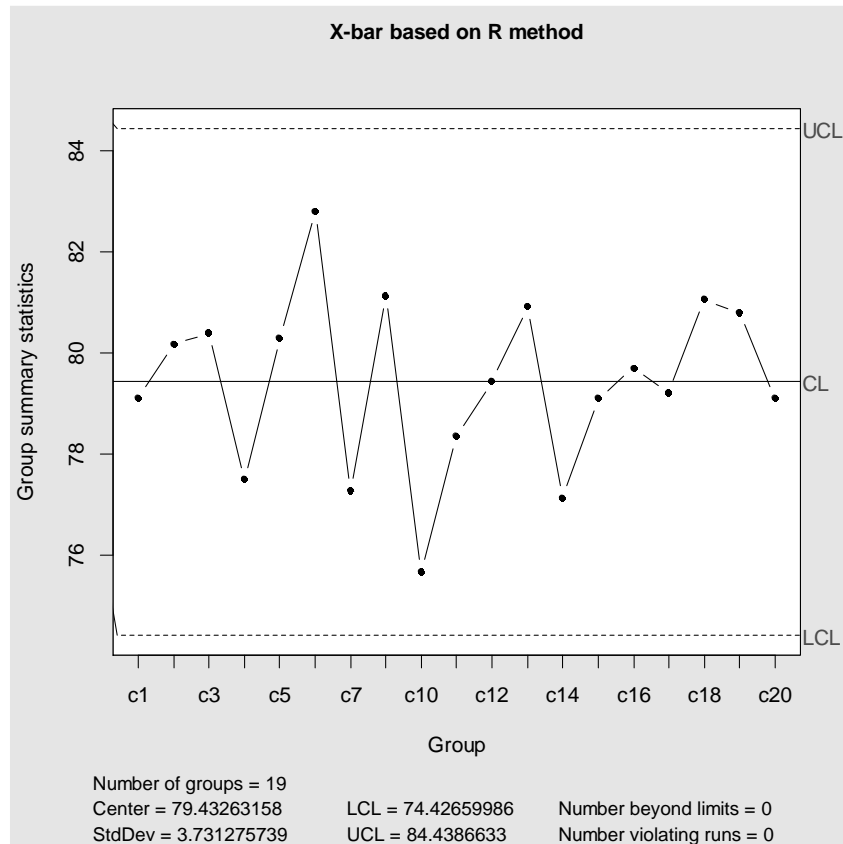
Για να παρακολουθήσουμε αν η μέση τιμή είναι εντός στατιστικού ελέγχου αφαιρούμε από τα δεδομένα το ένατο δείγμα. Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα της Παραγράφου 1.7.2 για την ανάπτυξη του \bar{X} διαγράμματος ελέγχου και εκτιμώντας την τυπική απόκλιση με τη μέθοδο R έχουμε

$$CL = \bar{\bar{X}} = 79.4327$$

$$LCL = \bar{\bar{X}} - A_2\bar{R} = 79.4326 - 0.577 * 8.6789 = 74.4265$$

$$UCL = \bar{\bar{X}} + A_2\bar{R} = 79.4326 + 0.577 * 8.6789 = 84.4386$$

Το αντίστοιχο \bar{X} διάγραμμα ελέγχου είναι το ακόλουθο



Σχήμα 1.7. \bar{X} διάγραμμα ελέγχου με τη μέθοδο R για τα δεδομένα του Πίνακα 1.4 πλην του 9^{ου} δείγματος

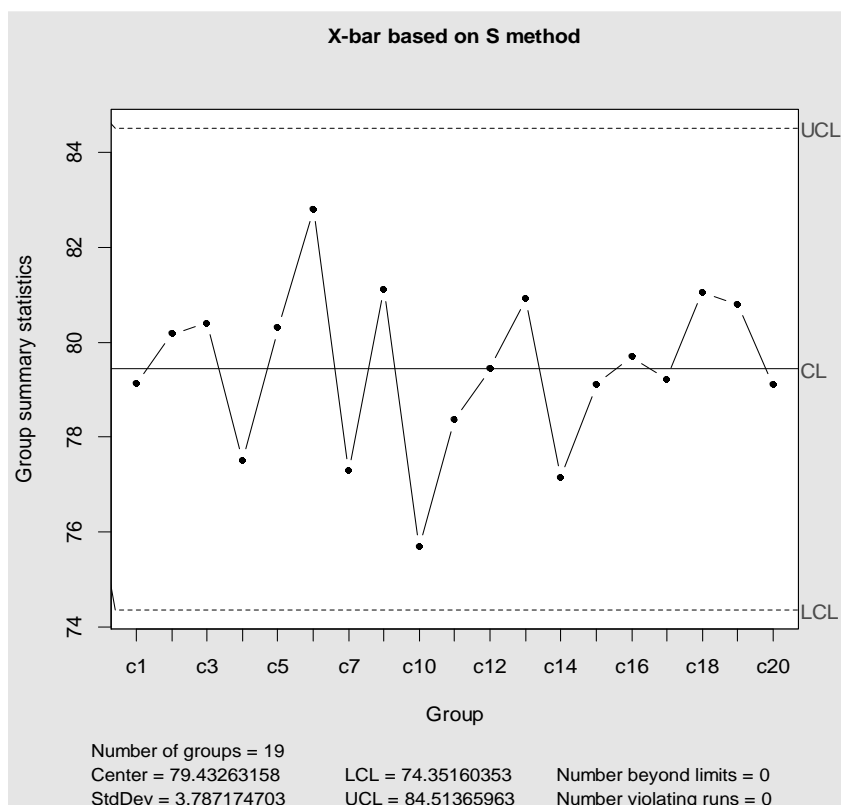
Χρησιμοποιώντας αποτελέσματα της Παραγράφου 1.7.2 για την ανάπτυξη του \bar{X} διαγράμματος ελέγχου και εκτιμώντας την τυπική απόκλιση με τη μέθοδο S έχουμε

$$CL = \bar{\bar{X}} = 79.4326$$

$$LCL = \bar{\bar{X}} - A_3\bar{S} = 79.4326 - 1.427 * 3.5598 = 74.3516$$

$$UCL = \bar{\bar{X}} + A_3\bar{S} = 79.4326 + 1.427 * 3.5598 = 84.5136$$

Το αντίστοιχο \bar{X} διάγραμμα ελέγχου είναι το ακόλουθο



Σχήμα 1.8. \bar{X} διάγραμμα ελέγχου με την μέθοδο S για τα δεδομένα του Πίνακα 1.4 πλην του 9^{ου} δείγματος

Από τα δύο παραπάνω διαγράμματα απουσιάζουν ενδείξεις για εκτός στατιστικού ελέγχου διεργασία λόγω μετατόπισης της μέσης τιμής.

1.10 Απόδοση του R και του S διαγράμματος ελέγχου με όρια ελέγχου 3σ

Παρά την χρησιμότητα των R και S διαγραμμάτων ελέγχου 3σ στην παρακολούθηση μιας παραγωγικής διαδικασίας όπως φαίνεται και από το παράδειγμα στην προηγούμενη παράγραφο, παρουσιάζουν μειονεκτήματα κυρίως λόγω του μη σταθερού εντός ελέγχου μέσου μήκους ροής για διάφορα μεγέθη δειγμάτων. Ακόμη το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής δεν είναι ίσο με 370 (δείτε, π.χ., Zhang and Govindaraju (2007 [14]) αφού η απεικονιζόμενη στατιστική συνάρτηση W δεν έχει την κανονική κατανομή. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε πίνακες και διαγράμματα για να γίνει πλήρως ορατή αυτή η αδυναμία.

Έστω ότι η εντός ελέγχου κατανομή του ποιοτικού χαρακτηριστικού που παρακολουθούμε είναι η $N(\mu_0, \sigma_0^2)$. Ας υποθέσουμε ότι η εντός ελέγχου κατανομή άλλαξε λόγω μετατόπισης της

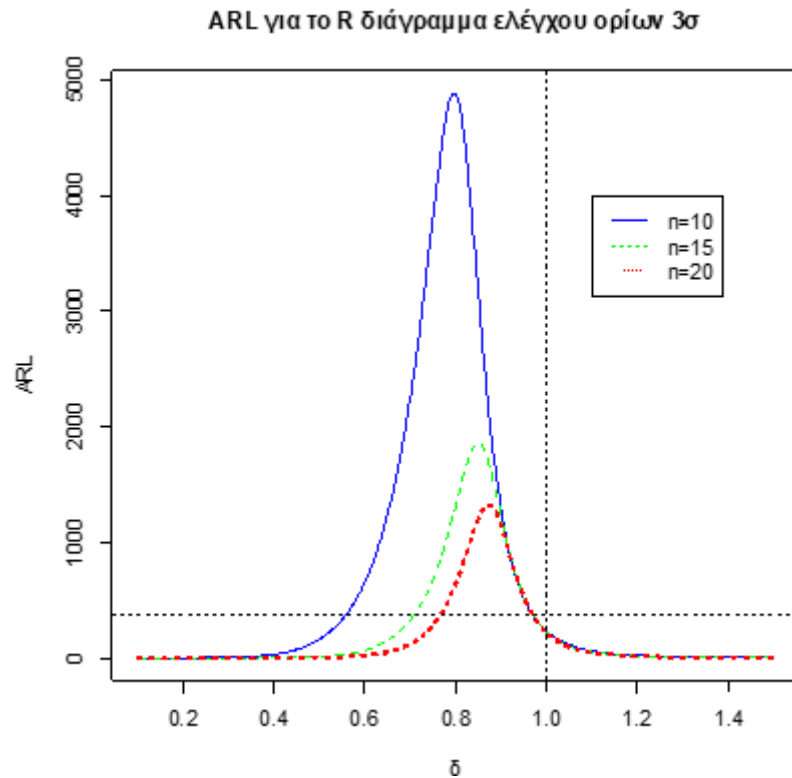
τυπικής απόκλισης από την (εντός ελέγχου) τιμή σ_0 στην (εκτός ελέγχου) τιμή $\sigma_1 = \delta\sigma_0$, δηλαδή η εκτός ελέγχου κατανομή είναι η $N(\mu_0, \sigma_1^2)$ (ή ισοδύναμα $N(\mu_0, (\delta\sigma_0)^2)$).

Στον Πίνακα 1.5 δίνονται τιμές για το μέσο μήκος ροής του R διαγράμματος ελέγχου (φάση II) στις περιπτώσεις που το μέγεθος δείγματος είναι $n = 5$, $n = 10$ και $n = 20$. Τα αποτελέσματα αφορούν διάφορες μετατοπίσεις στην τιμή της τυπικής απόκλισης.

Πίνακας 1.5. Τιμές ARL για το R διάγραμμα ελέγχου ορίων 3σ

δ	$n = 5$	$n = 10$	$n = 20$
0.10	Inf	1.0001	1.0000
0.20	Inf	1.4486	1.0000
0.30	Inf	6.2450	1.0362
0.40	2.4410e+13	33.8730	1.6659
0.50	2.8408e+10	162.4694	5.1745
0.60	1.4762e+07	655.5565	23.5333
0.70	1.4924e+05	2250.6214	123.2211
0.80	7.4392e+03	4865.0004	641.2930
0.90	9.4707e+02	1278.0315	1139.6411
1.00	2.1725e+02	228.9670	216.5794
1.05	1.2146e+02	114.1248	98.0265
1.10	7.3510e+01	62.6948	49.5492
1.15	4.7527e+01	37.4048	27.6318
1.20	3.2480e+01	23.9295	16.7618
1.25	2.3262e+01	16.2425	10.9248
1.30	1.7337e+01	11.5953	7.5715
1.35	1.3369e+01	8.6431	5.5317
1.40	1.0616e+01	6.6862	4.2291
1.45	8.6455e+00	5.3407	3.3623
1.50	7.1975e+00	4.3860	2.7651
1.60	5.2707e+00	3.1697	2.0331
1.70	4.0948e+00	2.4653	1.6312
1.80	3.3310e+00	2.0284	1.3959
1.90	2.8096e+00	1.7426	1.2520
2.00	2.4391e+00	1.5480	1.1617
2.10	2.1670e+00	1.4111	1.1041
2.20	1.9617e+00	1.3126	1.0670
2.30	1.8032e+00	1.2401	1.0432
2.40	1.6785e+00	1.1861	1.0277
2.50	1.5787e+00	1.1452	1.0178
2.60	1.4978e+00	1.1141	1.0114
2.70	1.4313e+00	1.0901	1.0074
2.80	1.3762e+00	1.0715	1.0047
2.90	1.3300e+00	1.0570	1.0031
3.00	1.2910e+00	1.0456	1.0020

Στο Σχήμα 1.7 δίνονται οι καμπύλες ARL του R διαγράμματος ελέγχου για $n = 10$, $n = 15$ και $n = 20$. Με διακεκομμένες γραμμές είναι οι ευθείες $x = 1$ και $y = 370$.

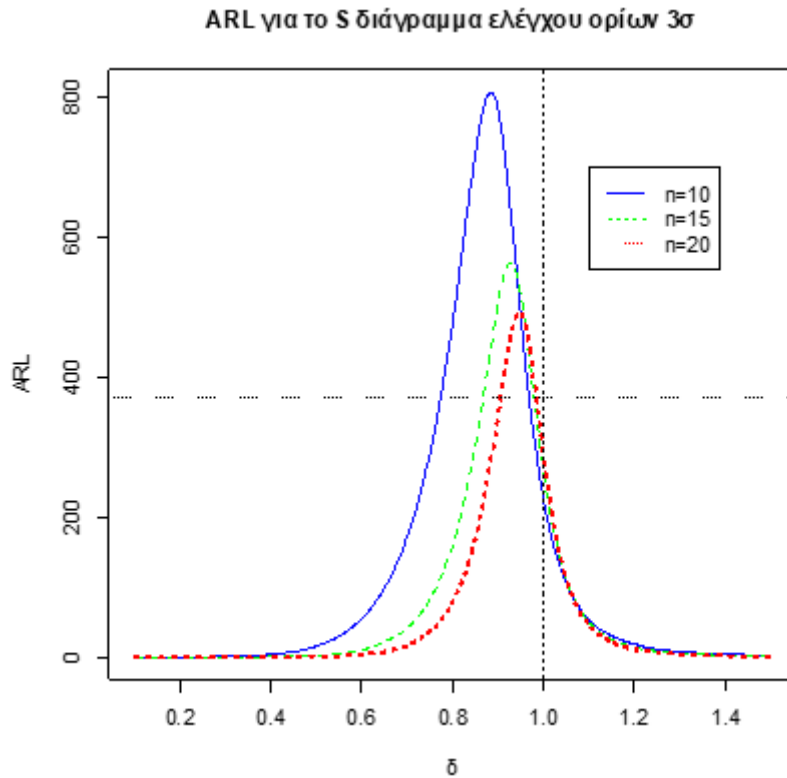


Σχήμα 1.9. Καμπύλη ARL για το R διάγραμμα ελέγχου ορίων 3σ

Αντίστοιχα αποτελέσματα για το S διάγραμμα ελέγχου με όρια 3σ δίνονται στον Πίνακα 1.6 και στο Σχήμα 1.8.

Πίνακας 1.6. Τιμές *ARL* για το *S* διάγραμμα ελέγχου ορίων 3σ

δ	$n = 5$	$n = 10$	$n = 20$
0.10	80.1458	1.0000	1.0000
0.20	1180.5026	1.0087	1.0000
0.30	5884.8528	1.5755	1.0000
0.40	18498.8083	4.6839	1.0354
0.50	45050.1951	16.4674	1.6108
0.60	92694.8122	55.7805	4.5395
0.70	67129.2444	172.6049	17.9124
0.80	4804.1826	480.3351	80.1360
0.90	603.2314	781.6397	347.4716
1.00	140.0912	225.1427	286.5455
1.05	79.3734	105.5209	111.0329
1.10	48.8135	54.2414	46.2066
1.15	32.1201	30.7230	22.2351
1.20	22.3582	18.9543	12.2100
1.25	16.3136	12.5717	7.4864
1.30	12.3853	8.8615	5.0266
1.35	9.7249	6.5739	3.6365
1.40	7.8585	5.0916	2.7972
1.45	6.5085	4.0898	2.2626
1.50	5.5061	3.3881	1.9074
1.60	4.1536	2.5062	1.4907
1.70	3.3135	2.0023	1.2753
1.80	2.7595	1.6929	1.1573
1.90	2.3763	1.4925	1.0907
2.00	2.1009	1.3574	1.0524
2.10	1.8968	1.2635	1.0303
2.20	1.7415	1.1967	1.0176
2.30	1.6209	1.1484	1.0102
2.40	1.5254	1.1129	1.0059
2.50	1.4488	1.0865	1.0035
2.60	1.3863	1.0668	1.0020
2.70	1.3349	1.0518	1.0012
2.80	1.2921	1.0404	1.0007
2.90	1.2562	1.0317	1.0004
3.00	1.2258	1.0250	1.0003



Σχήμα 1.10. Καμπύλη ARL για το S διάγραμμα ελέγχου ορίων 3σ

Από την παρακολούθηση των παραπάνω πινάκων και σχημάτων είναι φανερό πως τα R και S διαγράμματα ελέγχου ορίων 3σ στην πράξη δεν δίνουν εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής 370 γεγονός που καθιστά τη χρήση τους προβληματική ιδίως για μικρά δείγματα. Αυτή η αδυναμία θεραπεύεται με τη χρήση ορίων πιθανότητας που θα παρουσιαστούν στο επόμενο κεφάλαιο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

***R* και *S* διαγράμματα ελέγχου με όρια πιθανότητας**

2.1 Εισαγωγή

Στο πρώτο κεφάλαιο αναλύσαμε τα διαγράμματα ελέγχου Shewhart και πιο συγκεκριμένα τα διαγράμματα ελέγχου με όρια ελέγχου 3σ. Παρά την χρησιμότητα τους στην παρακολούθηση και διασφάλιση της ομαλής λειτουργίας μιας παραγωγικής διεργασίας τα συγκεκριμένα διαγράμματα παρουσιάζουν κάποια μειονεκτήματα. Παρ' όλο που το \bar{X} διάγραμμα, όταν οι τιμές του χαρακτηριστικού που μελετάμε ακολουθούν κανονική κατανομή, θα δώσει πιθανότητα σφάλματος τύπου I 0.0027 κάτι τέτοιο δεν ισχύει για τα *R* και *S* διαγράμματα ελέγχου. Γνωρίζουμε ότι οι κατανομές του εύρους και της τυπικής απόκλισης είναι λοξές, συνεπώς αυτή η ασυμμετρία έχει σαν αποτέλεσμα τα διαγράμματα αυτά να μην δίνουν εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής 370 ούτε πιθανότητα σφάλματος τύπου I ίση με 0.0027. Έχουν γίνει αρκετές προσπάθειες ώστε να δημιουργηθούν βελτιωμένα διαγράμματα ελέγχου, όπως ο Khoo (2005 [4]) ο οποίος πρότεινε ένα τροποποιημένο *S* διάγραμμα ελέγχου για την παρακολούθηση της διακύμανσης. Οι Khoo and Lim(2005 [5]) πρότειναν ένα βελτιωμένο *R* διάγραμμα ελέγχου βασισμένο στο σφάλμα τύπου I από τη συνάρτηση πυκνότητας του εύρους. Ο Lee (2001 [6]) πρότεινε προσαρμοσμένα *R* διαγράμματα ελέγχου για την ανίχνευση αυξήσεων στην τιμή της διακύμανσης. Οι Chan and Cui (2003 [3]) πρότειναν την δημιουργία \bar{X} και *R* διαγραμμάτων ελέγχου σύμφωνα με τον βαθμό λοξότητας της κατανομής, καθώς και οι Tadikamalla and Popescu (2007 [11]) τη δημιουργία \bar{X} και *R* διαγράμματα ελέγχου όταν η κατανομή του χαρακτηριστικού είναι συμμετρική με μακριά ουρά. Οι Rakitzis and Antzoulakos (2011 [9]) πρότειναν μονόπλευρα προσαρμοσμένα (adaptive) *S* διαγράμματα ελέγχου για την παρακολούθηση της μεταβλητότητας της διεργασίας. Οι Acosta-Meija and Pignatiello (2008 [1]) πρότειναν τροποποιημένα *R* διαγράμματα ελέγχου. Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο θα

αναφερθούμε στα R και S διαγράμματα ελέγχου με όρια πιθανότητας. Βασιζόμενοι στην εργασία του Zhang (2014 [13]), θα παραθέσουμε τα δύο αυτά διαγράμματα στην φάση I καθώς και στην φάση II. Θα δοθούν αναλυτικά πίνακες για τις τιμές των σταθερών στα δίπλευρα αλλά και στα άνω και κάτω μονόπλευρα διαγράμματα στις περιπτώσεις όπου $\alpha = 0.0027$ και $\alpha = 0.005$, καθώς επίσης και πληροφορίες για το μέσο μήκος ροής τους. Στην συνέχεια θα γίνει μελέτη πάνω στην αποτελεσματικότητα αυτών των διαγραμμάτων ανάλογα με το μέγεθος του δείγματος αλλά και το μέγεθος της μετατόπισης που επιθυμούμε κάθε φορά να εντοπίσουμε. Μέσα από σχήματα όπου θα απεικονίζεται η διαφορά στις πιθανότητες σφάλματος τύπου II, αλλά και η διαφορά ανάμεσα στις τιμές ARL, θα γίνει σύγκριση των δύο διαγραμμάτων. Τέλος θα παρουσιαστεί ένα παράδειγμα όπου μέσα από προσομοιωμένα δεδομένα θα ελεγχθεί η αποτελεσματικότητα των δύο αυτών διαγραμμάτων ελέγχου.

2.2 Διαγράμματα ελέγχου με όρια πιθανότητας

Για την παρακολούθηση της μεταβλητότητας μιας διεργασίας εκτός από τα διαγράμματα ελέγχου με όρια ελέγχου 3σ που παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο μπορούν εύκολα να αναπτυχθούν και αντίστοιχα διαγράμματα ελέγχου με όρια πιθανότητας α ($0 < \alpha < 1$). Έστω

- X_1, X_2, \dots είναι τυχαία δείγματα τιμών του χαρακτηριστικού X της διεργασίας που παρακολουθούμε,
- $W_t = g(X_t)$, $t = 1, 2, \dots$, είναι η στατιστική συνάρτηση που απεικονίζεται στο διάγραμμα ελέγχου, και
- w_α είναι το άνω α -ποσοστιαίο σημείο των ισόνομων τυχαίων μεταβλητών W_t ($t = 1, 2, \dots$).

Τότε το διάγραμμα ελέγχου με όρια πιθανότητας α συνοψίζεται στο ακόλουθο πλαίσιο.

Μοντέλο ορίων πιθανότητας α
$UCL = w_{\alpha/2}$
$CL = w_{0.5}$
$LCL = w_{1-\alpha/2}$

Τα διαγράμματα ελέγχου με όρια πιθανότητας α εγγυώνται ότι η πιθανότητα σφάλματος τύπου I είναι πάντα ίση με α και το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής είναι $ARL_0 = 1/\alpha$. Επομένως για $\alpha = 0.0027$ έχουμε ότι $ARL_0 = 370$.

2.3 S διάγραμμα ελέγχου με όρια πιθανότητας

Ας υποθέσουμε ότι το τυχαίο δείγμα X_1, X_2, \dots, X_n προέρχεται από τον κανονικό πληθυσμό $N(\mu_0, \sigma_0^2)$. Τότε ως γνωστό η στατιστική συνάρτηση $(n-1)S^2/\sigma_0^2$ έχει την κατανομή χι τετράγωνο με $n-1$ βαθμούς ελευθερίας, δηλαδή

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi_{n-1}^2.$$

Επομένως, αν συμβολίσουμε με $\chi_{\alpha;n}^2$ το άνω α -ποσοστιαίο σημείο της κατανομής χ_n^2 , παίρνουμε

$$P\left(\chi_{1-(\alpha/2);n-1}^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \leq \chi_{\alpha/2;n-1}^2\right) = 1 - \alpha$$

ή ισοδύναμα

$$P\left(\sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{1-(\alpha/2);n-1}^2}{n-1}} \leq S \leq \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{\alpha/2;n-1}^2}{n-1}}\right) = 1 - \alpha.$$

Έτσι, το δίπλευρο S διάγραμμα ελέγχου Φάσης II με όρια ελέγχου πιθανότητας α δίνεται στο ακόλουθο πλαίσιο.

Δίπλευρο S διάγραμμα ελέγχου - Πληθυσμός $N(\mu_0, \sigma_0^2)$ Φάση II - Όρια ελέγχου πιθανότητας α
$UCL = B_6^* \sigma_0 = \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{\alpha/2;n-1}^2}{n-1}}$ $LCL = B_5^* \sigma_0 = \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{1-(\alpha/2);n-1}^2}{n-1}}$

όπου

$$B_5^* = \sqrt{\frac{\chi_{1-(\alpha/2);n-1}^2}{n-1}}, \quad B_6^* = \sqrt{\frac{\chi_{\alpha/2;n-1}^2}{n-1}}.$$

Με παρόμοιο τρόπο μπορούν να προκύψουν ανάλογα αποτελέσματα για το μονόπλευρο άνω και το μονόπλευρο κάτω S διάγραμμα ελέγχου που δίνονται στα δύο ακόλουθα πλαίσια.

Μονόπλευρο άνω S διάγραμμα ελέγχου - Πληθυσμός $N(\mu_0, \sigma_0^2)$ Φάση II - Όρια ελέγχου πιθανότητας α
$U = UCL = B_U^* \sigma_0 = \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{\alpha; n-1}^2}{n-1}}$

Μονόπλευρο κάτω S διάγραμμα ελέγχου - Πληθυσμός $N(\mu_0, \sigma_0^2)$ Φάση II - Όρια ελέγχου πιθανότητας α
$L = LCL = B_L^* \sigma_0 = \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi_{1-\alpha; n-1}^2}{n-1}}$

όπου

$$B_L^* = \sqrt{\frac{\chi_{1-\alpha; n-1}^2}{n-1}}, \quad B_U^* = \sqrt{\frac{\chi_{\alpha; n-1}^2}{n-1}}.$$

Σε όλα τα παραπάνω διαγράμματα ελέγχου έχουμε ότι η πιθανότητα διάπραξης σφάλματος τύπου I είναι ίση με α , και επομένως η τιμή του εντός ελέγχου μέσου μήκους ροής ARL_0 είναι

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha}.$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η εντός ελέγχου κατανομή του ποιοτικού χαρακτηριστικού που παρακολουθούμε άλλαξε λόγω μετατόπισης της τυπικής απόκλισης από την (εντός ελέγχου) τιμή σ_0 στην (εκτός ελέγχου) τιμή $\sigma_1 = \delta\sigma_0$, δηλαδή οι παρατηρήσεις X_1, X_2, \dots, X_n προέρχονται πλέον από τον κανονικό πληθυσμό $N(\mu_0, \sigma_1^2)$ (ή ισοδύναμα $N(\mu_0, (\delta\sigma_0)^2)$). Σε αυτή την περίπτωση η πιθανότητα διάπραξης σφάλματος τύπου II, έστω $\beta(\delta)$, για κάθε ένα από τα τρία παραπάνω είδη των S διαγραμμάτων ελέγχου με όρια πιθανότητας α δίνεται από τους τύπους:

- Δίπλευρο S διάγραμμα ελέγχου

$$\beta(\delta) = P(LCL \leq S \leq UCL | X \sim N(\mu_0, (\delta\sigma_0)^2)) = F_{\chi_{n-1}^2} \left(\frac{UCL^2(n-1)}{(\delta\sigma_0)^2} \right) - F_{\chi_{n-1}^2} \left(\frac{LCL^2(n-1)}{(\delta\sigma_0)^2} \right).$$

- Μονόπλευρο άνω S διάγραμμα ελέγχου

$$\beta(\delta) = P(S \leq U | X \sim N(\mu_0, (\delta\sigma_0)^2)) = F_{\chi_{n-1}^2} \left(\frac{U^2(n-1)}{(\delta\sigma_0)^2} \right).$$

- Μονόπλευρο κάτω S διάγραμμα ελέγχου

$$\beta(\delta) = P(S \geq L | X \sim N(\mu_0, (\delta\sigma_0)^2)) = 1 - F_{\chi^2_{n-1}}\left(\frac{L^2(n-1)}{(\delta\sigma_0)^2}\right).$$

Σε κάθε περίπτωση η τιμή του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής ARL_1 είναι ίση με

$$ARL_1 = \frac{1}{1 - \beta(\delta)}.$$

Στην περίπτωση που θέλουμε να αναπτύξουμε διαγράμματα ελέγχου Φάσης I, δηλαδή για την περίπτωση που η (εντός ελέγχου) τυπική απόκλιση σ_0 είναι άγνωστη, στη βιβλιογραφία προτείνεται απλά να αντικαθιστούμε την τιμή σ_0 με την εκτίμησή της

$$\hat{\sigma}_0 = \frac{\bar{S}}{c_4}$$

(δείτε Κεφάλαιο 1, Παράγραφο 1.6).

Τα S διαγράμματα ελέγχου Φάσης I με όρια πιθανότητας α δίνονται στα ακόλουθα πλαίσια

<p>Δίπλευρο S διάγραμμα ελέγχου - Πληθυσμός $N(\mu_0, \sigma_0^2)$ Φάση I - Όρια ελέγχου πιθανότητας α</p>
$UCL = B_4^* \bar{s} = \frac{\bar{s}}{c_4} \sqrt{\frac{\chi_{\alpha/2; n-1}^2}{n-1}}$ $LCL = B_3^* \bar{s} = \frac{\bar{s}}{c_4} \sqrt{\frac{\chi_{1-(\alpha/2); n-1}^2}{n-1}}$

<p>Μονόπλευρο άνω S διάγραμμα ελέγχου - Πληθυσμός $N(\mu_0, \sigma_0^2)$ Φάση I - Όρια ελέγχου πιθανότητας α</p>
$U = UCL = \frac{\bar{s}}{c_4} \sqrt{\frac{\chi_{\alpha; n-1}^2}{n-1}}$

<p>Μονόπλευρο κάτω S διάγραμμα ελέγχου - Πληθυσμός $N(\mu_0, \sigma_0^2)$ Φάση I - Όρια ελέγχου πιθανότητας α</p>
$L = LCL = \frac{\bar{s}}{c_4} \sqrt{\frac{\chi_{1-\alpha; n-1}^2}{n-1}}$

όπου

$$B_3^* = \frac{B_5^*}{c_4}, \quad B_4^* = \frac{B_6^*}{c_4}.$$

Στους δύο παρακάτω πίνακες δίνονται τιμές των σταθερών B_5^* , B_6^* , B_L^* , B_U^* , B_3^* και B_4^* για $\alpha = 0.0027$ και $\alpha = 0.005$.

Πίνακας 2.1: Τιμές των B_5^* , B_6^* , B_L^* , B_U^* , B_3^* και B_4^* για $\alpha = 0.0027$ ($ARL_0 = 370$)

n	B_5^*	B_6^*	B_L^*	B_U^*	B_3^*	B_4^*
2	0.00169197	3.20513318	0.00338395	2.99997699	0.00212058	4.01703873
3	0.03675476	2.57053510	0.05199665	2.43197523	0.04147330	2.90053825
4	0.09951769	2.28257189	0.12560505	2.17226859	0.10801669	2.47750782
5	0.16260928	2.10952676	0.19409758	2.01563707	0.17299125	2.24421177
6	0.21815524	1.99104360	0.25201045	1.90814762	0.22926717	2.09245911
7	0.26563401	1.90346392	0.30034136	1.82856510	0.27688415	1.98407948
8	0.30617834	1.83536843	0.34097603	1.76661060	0.31727325	1.90187617
9	0.34106312	1.78048237	0.37556165	1.71662439	0.35186151	1.83685414
10	0.37137176	1.73503535	0.40537243	1.67520027	0.38181074	1.78380590
11	0.39796326	1.69660796	0.43136883	1.64014974	0.40802095	1.73948615
12	0.42150710	1.66356734	0.45427589	1.60999424	0.43118313	1.70175584
13	0.44252536	1.63476653	0.47464670	1.58369423	0.45183054	1.66914149
14	0.46142830	1.60937318	0.49290890	1.56049477	0.47037893	1.64059127
15	0.47854155	1.58676676	0.50939773	1.53983261	0.48715633	1.61533201
16	0.49412638	1.56647398	0.52437956	1.52127791	0.50242466	1.59278110
17	0.50839469	1.54812675	0.53806871	1.50449619	0.51639551	1.57249027
18	0.52152006	1.53143393	0.55063960	1.48922277	0.52924167	1.55410830
19	0.53364608	1.51616186	0.56223570	1.47524510	0.54110569	1.53735563
20	0.54489256	1.50212051	0.57297618	1.46239027	0.55210624	1.52200664
21	0.55536034	1.48915359	0.58296090	1.45051602	0.56234300	1.50787701
22	0.56513490	1.47713121	0.59227423	1.43950405	0.57190033	1.49481448
23	0.57428922	1.46594439	0.60098799	1.42925510	0.58085018	1.48269207
24	0.58288603	1.45550098	0.60916372	1.41968520	0.58925429	1.47140291
25	0.59097958	1.44572241	0.61685450	1.41072273	0.59716600	1.46085633

Πίνακας 2.2: Τιμές των B_5^* , B_6^* , B_L^* , B_U^* , B_3^* και B_4^* για $\alpha = 0.005$ ($ARL_0 = 200$)

n	B_5^*	B_6^*	B_L^*	B_U^*	B_3^*	B_4^*
2	0.00313329	3.02334144	0.00626661	2.80703377	0.00392700	3.78919657
3	0.05003129	2.44774683	0.07079931	2.30180741	0.05645427	2.76198653
4	0.12239463	2.18482243	0.15461972	2.06866756	0.13284737	2.37141037
5	0.19030690	2.02632279	0.22748027	1.92745032	0.20245725	2.15569555
6	0.24798460	1.91758247	0.28696408	1.83027880	0.26061591	2.01525616
7	0.29624566	1.83709018	0.33559072	1.75819909	0.30879227	1.91489467
8	0.33689083	1.77443716	0.37592850	1.70200470	0.34909865	1.83873695
9	0.37152650	1.72389364	0.40994102	1.65661383	0.38328939	1.77847376
10	0.40140648	1.68201198	0.43905617	1.61896231	0.41268972	1.72929208
11	0.42748063	1.64657739	0.4643120	1.58707843	0.43828430	1.68819117
12	0.45046830	1.61609376	0.48647357	1.55962842	0.46080915	1.65319247
13	0.47091952	1.58950934	0.50611458	1.53567354	0.48082175	1.62293265
14	0.48926027	1.56606036	0.52367302	1.51453144	0.49875078	1.59643828
15	0.50582495	1.54517707	0.53948884	1.49569262	0.51493090	1.57299361
16	0.52087953	1.52642469	0.55383003	1.47876797	0.52962710	1.55205923
17	0.53463816	1.50946492	0.56691079	1.46345453	0.54305198	1.53322001
18	0.54727527	1.49403006	0.57890450	1.44951241	0.55537821	1.51615063
19	0.55893443	1.47990516	0.58995314	1.43674887	0.56674753	1.50059212
20	0.56973494	1.46691538	0.60017416	1.42500705	0.57727750	1.48633544
21	0.57977683	1.45491684	0.60966566	1.41415781	0.58706647	1.47320979
22	0.58914462	1.44378993	0.61851025	1.40409376	0.59619748	1.46107407
23	0.59791029	1.43343430	0.62677807	1.39472472	0.60474112	1.44981057
24	0.60613556	1.42376504	0.63452909	1.38597439	0.61275783	1.43932024
25	0.61387365	1.41470973	0.64181492	1.37777768	0.62029972	1.42951901

2.4 R διάγραμμα ελέγχου με όρια πιθανότητας

Έστω X_1, X_2, \dots, X_n ένα τυχαίο δείγμα από συνεχή πληθυσμό με συνάρτηση πυκνότητας f και συνάρτηση κατανομής F , και έστω

$$U = X_{(1)} = \min(X_1, X_2, \dots, X_n),$$

$$V = X_{(n)} = \max(X_1, X_2, \dots, X_n).$$

Από τη θεωρία των διατεταγμένων παρατηρήσεων (order statistics) είναι γνωστό ότι η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας $f_{U,V}$ της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής (U, V) δίνεται από τον τύπο

$$f_{U,V}(u, v) = n(n-1)f(u)f(v)[F(v) - F(u)]^{n-2}, \quad -\infty < u < v < \infty.$$

Θέτοντας $T = U = g(U, V)$, $R = V - U = X_{(n)} - X_{(1)} = h(U, V)$ και εφαρμόζοντας σχετική μεθοδολογία από τη Θεωρία Πιθανοτήτων για την εύρεση της από κοινού συνάρτησης πυκνότητας $f_{T,R}$ της δισδιάστατης τυχαίας μεταβλητής (T, R) παίρνουμε διαδοχικά

$$u = t = g^*(t, r), \quad v = t + r = h^*(t, r),$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial g^*(t, r)}{\partial t} & \frac{\partial g^*(t, r)}{\partial r} \\ \frac{\partial h^*(t, r)}{\partial t} & \frac{\partial h^*(t, r)}{\partial r} \end{vmatrix} = 1,$$

και

$$\begin{aligned} f_{T,R}(t, r) &= f_{U,V}(g^*(t, r), h^*(t, r))|J| \\ &= n(n-1)f(t)f(t+r)[F(t+r) - F(t)]^{n-2}, \quad -\infty < t < \infty, \quad r > 0. \end{aligned}$$

Επομένως η συνάρτηση πυκνότητας f_R και η συνάρτηση κατανομής F_R του εύρους R του τυχαίου δείγματος X_1, X_2, \dots, X_n δίνονται από τους τύπους

$$f_R(r) = n(n-1) \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t+r)[F(t+r) - F(t)]^{n-2} dt, \quad r > 0$$

και

$$F_R(r) = \int_{-\infty}^{\infty} nf(t)[F(t+r) - F(t)]^{n-1} dt, \quad r > 0.$$

Ο τύπος για τη συνάρτηση κατανομής F_R προκύπτει ως εξής:

$$F_R(r) = \int_0^r f_R(s) ds$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} nf(t) \left(\int_0^r (n-1)f(t+s)[F(t+s) - F(t)]^{n-2} ds \right) dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} nf(t) \left(\int_0^r \left\{ \frac{d}{ds} [F(t+s) - F(t)]^{n-1} \right\} ds \right) dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} nf(t)[F(t+r) - F(t)]^{n-1} dt.
\end{aligned}$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το τυχαίο δείγμα X_1, X_2, \dots, X_n προέρχεται από ένα κανονικό πληθυσμό $N(\mu_0, \sigma_0^2)$ και έστω g και G η συνάρτηση πυκνότητας και η συνάρτηση κατανομής της κατανομής $N(\mu_0, \sigma_0^2)$. Τότε η συνάρτηση πυκνότητας g_R και η συνάρτηση κατανομής G_R του εύρους R του τυχαίου δείγματος X_1, X_2, \dots, X_n δίνονται από τους τύπους

$$g_R(r) = n(n-1) \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g(t+r)[G(t+r) - G(t)]^{n-2} dt, \quad r > 0$$

και

$$G_R(r) = n \int_{-\infty}^{\infty} g(t)[G(t+r) - G(t)]^{n-1} dt, \quad r > 0.$$

Στην ειδικότερη περίπτωση που το τυχαίο μας δείγμα Z_1, Z_2, \dots, Z_n προέρχεται από την τυποποιημένη κανονική κατανομή $N(0,1)$ με συνάρτηση πυκνότητας φ και συνάρτηση κατανομής Φ , έχουμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας φ_W και η συνάρτηση κατανομής Φ_W του εύρους W των παρατηρήσεων ($W = Z_{(n)} - Z_{(1)}$) δίνονται από τους τύπους

$$\varphi_W(r) = n(n-1) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\varphi(t+r)[\Phi(t+r) - \Phi(t)]^{n-2} dt, \quad r > 0$$

και

$$\Phi_W(r) = n \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)[\Phi(t+r) - \Phi(t)]^{n-1} dt, \quad r > 0.$$

Σε αυτή την περίπτωση τα όρια ελέγχου πιθανότητας α , έστω \mathcal{L} και \mathcal{U} του δίπλευρου W διαγράμματος ελέγχου Φάσης II, προκύπτουν ως λύσεις των εξισώσεων

$$\Phi_W(\mathcal{L}) = \alpha/2$$

και

$$\Phi_W(\mathcal{U}) = 1 - (\alpha/2)$$

τα οποία συμβολίζουμε με $\mathcal{L} = D_1^*$ και $\mathcal{U} = D_2^*$.

Στη γενικότερη περίπτωση όπου το τυχαίο δείγμα X_1, X_2, \dots, X_n προέρχεται από τον κανονικό πληθυσμό $N(\mu_0, \sigma_0^2)$, τα όρια ελέγχου πιθανότητας α , έστω LCL και UCL του δίπλευρου R διαγράμματος ελέγχου Φάσης II, προκύπτουν ως λύσεις των εξισώσεων

$$G_R(LCL) = \alpha/2$$

και

$$G_R(UCL) = 1 - (\alpha/2)$$

Μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι

$$LCL = D_1^* \sigma_0, \quad UCL = D_2^* \sigma_0$$

αφού το εύρος R των παρατηρήσεων X_1, X_2, \dots, X_n και το εύρος W των παρατηρήσεων

$$Z_1 = \frac{X_1 - \mu_0}{\sigma_0}, \quad Z_2 = \frac{X_2 - \mu_0}{\sigma_0}, \quad \dots, \quad Z_n = \frac{X_n - \mu_0}{\sigma_0}$$

συνδέονται με τη σχέση

$$W = \frac{R}{\sigma_0}$$

και επομένως $G_R(x) = \Phi_W\left(\frac{x}{\sigma_0}\right)$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι το δίπλευρο R διάγραμμα ελέγχου Φάσης II, με όρια ελέγχου πιθανότητας α , δίνεται στο ακόλουθο πλαίσιο

Δίπλευρο R διάγραμμα ελέγχου - Πληθυσμός $N(\mu_0, \sigma_0^2)$
Φάση II - Όρια ελέγχου πιθανότητας α
$UCL = D_2^* \sigma_0$
$LCL = D_1^* \sigma_0$

όπου φυσικά D_1^* και D_2^* οι λύσεις των εξισώσεων

$$\Phi_W(D_1^*) = \frac{\alpha}{2}, \quad \Phi_W(D_2^*) = 1 - \left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Με παρόμοιο τρόπο μπορούν να προκύψουν ανάλογα αποτελέσματα για το μονόπλευρο άνω και το μονόπλευρο κάτω R διάγραμμα ελέγχου που δίνονται στα δύο ακόλουθα πλαίσια

<p>Μονόπλευρο άνω R διάγραμμα ελέγχου - Πληθυσμός $N(\mu_0, \sigma_0^2)$</p> <p>Φάση II - Όρια ελέγχου πιθανότητας α</p>
$U = UCL = D_U^* \sigma_0$

<p>Μονόπλευρο κάτω R διάγραμμα ελέγχου - Πληθυσμός $N(\mu_0, \sigma_0^2)$</p> <p>Φάση II - Όρια ελέγχου πιθανότητας α</p>
$L = LCL = D_L^* \sigma_0$

όπου οι σταθερές D_L^* και D_U^* προκύπτουν ως λύσεις των εξισώσεων

$$\Phi_W(D_L^*) = \alpha$$

και

$$\Phi_W(D_U^*) = 1 - \alpha.$$

Σε όλα τα παραπάνω διαγράμματα ελέγχου έχουμε ότι η πιθανότητα διάπραξης σφάλματος τύπου I είναι ίση με α , και επομένως η τιμή του εντός ελέγχου μέσου μήκους ροής ARL_0 είναι ίση με

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha}.$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η εντός ελέγχου κατανομή του ποιοτικού χαρακτηριστικού που παρακολουθούμε άλλαξε λόγω μετατόπισης της τυπικής απόκλισης από την (εντός ελέγχου) τιμή σ_0 στην (εκτός ελέγχου) τιμή $\sigma_1 = \delta\sigma_0$, δηλαδή οι παρατηρήσεις X_1, X_2, \dots, X_n προέρχονται πλέον από τον κανονικό πληθυσμό $N(\mu_0, \sigma_1^2)$ (ή ισοδύναμα $N(\mu_0, (\delta\sigma_0)^2)$). Σε αυτή την περίπτωση η πιθανότητα διάπραξης σφάλματος τύπου II, έστω $\beta(\delta)$, για κάθε ένα από τα τρία παραπάνω είδη των R διαγραμμάτων ελέγχου με όρια πιθανότητας α δίνεται από τους τύπους:

- Δίπλευρο S διάγραμμα ελέγχου

$$\beta(\delta) = P(LCL \leq R \leq UCL | X \sim N(\mu_0, (\delta\sigma_0)^2)) = G_R(UCL) - G_R(LCL) = \Phi_W(D_2^*) - \Phi_W(D_1^*).$$

- Μονόπλευρο άνω S διάγραμμα ελέγχου

$$\beta(\delta) = P(R \leq U | X \sim N(\mu_0, (\delta\sigma_0)^2)) = G_R(U) = \Phi_W(D_U^*).$$

- Μονόπλευρο κάτω S διάγραμμα ελέγχου

$$\beta(\delta) = P(R \geq L | X \sim N(\mu_0, (\delta\sigma_0)^2)) = 1 - G_R(L) = 1 - \Phi_W(D_L^*).$$

Σε κάθε περίπτωση η τιμή του εκτός ελέγχου μήκους ροής ARL_1 είναι

$$ARL_1 = \frac{1}{1 - \beta(\delta)}.$$

Στην περίπτωση που θέλουμε να αναπτύξουμε διαγράμματα ελέγχου Φάσης I, δηλαδή για την περίπτωση που η (εντός ελέγχου) τυπική απόκλιση σ_0 είναι άγνωστη, στη βιβλιογραφία προτείνεται απλά να αντικαθιστούμε την τιμή σ_0 με την εκτίμησή της

$$\hat{\sigma}_0 = \frac{\bar{R}}{d_2}$$

(δείτε Κεφάλαιο 1, Παράγραφο 1.6).

Τα R διαγράμματα ελέγχου Φάσης I με όρια πιθανότητας α δίνονται στα ακόλουθα πλαίσια

Δίπλευρο R διάγραμμα ελέγχου - Πληθυσμός $N(\mu_0, \sigma_0^2)$ Φάση I - Όρια ελέγχου πιθανότητας α
$UCL = D_2^* \frac{\bar{R}}{d_2} = D_4^* \bar{R}$ $LCL = D_1^* \frac{\bar{R}}{d_2} = D_3^* \bar{R}$

Μονόπλευρο άνω R διάγραμμα ελέγχου - Πληθυσμός $N(\mu_0, \sigma_0^2)$ Φάση I - Όρια ελέγχου πιθανότητας α
$U = UCL = D_U^* \frac{\bar{R}}{d_2}$

Μονόπλευρο κάτω S διάγραμμα ελέγχου - Πληθυσμός $N(\mu_0, \sigma_0^2)$ Φάση I - Όρια ελέγχου πιθανότητας α
$L = LCL = D_L^* \frac{\bar{R}}{d_2}$

όπου

$$D_3^* = \frac{D_1^*}{d_2}, \quad D_4^* = \frac{D_2^*}{d_2}.$$

Στους δύο παρακάτω πίνακες δίνονται τιμές των σταθερών D_1^* , D_2^* , D_L^* , D_U^* , D_3^* και D_4^* για $\alpha = 0.0027$ και $\alpha = 0.005$.

Πίνακας 2.3: Τιμές των D_1^* , D_2^* , D_L^* , D_U^* , D_3^* και D_4^* για $\alpha = 0.0027$ ($ARL_0 = 370$)

n	D_1^*	D_2^*	D_L^*	D_U^*	D_3^*	D_4^*
2	0.00239281	4.53274281	0.00478563	4.24260815	0.00212058	4.01703873
3	0.07000363	4.95017506	0.09903466	4.67870314	0.04135940	2.92465228
4	0.22055164	5.19965723	0.27837786	4.93845559	0.10712887	2.52563709
5	0.39652809	5.37740238	0.47338377	5.12314014	0.17048160	2.31193751
6	0.56899583	5.51506523	0.65750635	5.26596958	0.22450796	2.17607226
7	0.72884702	5.62713250	0.82450833	5.38211271	0.26950846	2.08076560
8	0.87439594	5.72145757	0.97449834	5.47978001	0.30710725	2.00950279
9	1.00641122	5.80277497	1.10928601	5.56391535	0.33885599	1.95377897
10	1.12634306	5.87415750	1.23093181	5.63772351	0.36599222	1.90873991
11	1.23570683	5.93771110	1.34131930	5.70340010	0.38945995	1.87139909
12	1.33588290	5.99494106	1.44205842	5.76251255	0.40997429	1.83981075
13	1.42806792	6.04696000	1.53449316	5.81621881	0.42808043	1.81264856
14	1.51327952	6.09461303	1.61973805	5.86539792	0.44419863	1.78897470
15	1.59237682	6.13855635	1.69871812	5.91073260	0.45865674	1.76810553
16	1.66608569	6.17931098	1.77220399	5.95276341	0.47171399	1.74953031
17	1.73501990	6.21729554	1.84084284	5.99192549	0.48357748	1.73285858
18	1.79970472	6.25285229	1.90517866	6.02857417	0.49441571	1.71778646
19	1.86058447	6.28626434	1.96567518	6.06300325	0.50436517	1.70407354
20	1.91804391	6.31776851	2.02272792	6.09545840	0.51353948	1.69152726
21	1.97241483	6.34756480	2.07667718	6.12614760	0.52203269	1.67998956
22	2.02398450	6.37582367	2.12781810	6.15524674	0.52992424	1.66933269
23	2.07300653	6.40269151	2.17640483	6.18290789	0.53728169	1.65944915
24	2.11969912	6.42829497	2.22266316	6.20926230	0.54416167	1.65024916
25	2.16425733	6.45274432	2.26678954	6.23442421	0.55061346	1.64165685

Πίνακας 2.4: Τιμές των D_1^* , D_2^* , D_L^* , D_U^* , D_3^* και D_4^* για $\alpha = 0.005$ ($ARL_0 = 200$)

n	D_1^*	D_2^*	D_L^*	D_U^*	D_3^*	D_4^*
2	0.00443114	4.27565047	0.00886233	3.96974523	0.00392700	3.78919657
3	0.09529133	4.70957257	0.13484755	4.42423527	0.05629983	2.78250001
4	0.27126100	4.96813081	0.34270220	4.69408746	0.13176000	2.41317742
5	0.46412980	5.15200918	0.55490392	4.88558454	0.19954599	2.21503292
6	0.64697677	5.29423882	0.74898299	5.03347915	0.25527680	2.08894107
7	0.81321178	5.40990905	0.92182532	5.15361337	0.30070433	2.00044208
8	0.96273480	5.50718877	1.07528121	5.25454999	0.33813381	1.93424683
9	1.09723756	5.59099746	1.21211484	5.34143874	0.36943698	1.88247404
10	1.21871293	5.66452459	1.33492717	5.41761601	0.39600675	1.84062211
11	1.32900365	5.72995529	1.44591958	5.48536413	0.41886447	1.80592032
12	1.42969490	5.78884977	1.54689776	5.54631219	0.43876462	1.77656260
13	1.52211461	5.84236070	1.63932736	5.60166276	0.45627205	1.75131748
14	1.60736710	5.89136320	1.72440342	5.65232826	0.47181652	1.72931402
15	1.68636974	5.93653695	1.80310370	5.69901694	0.48572979	1.70991732
16	1.75988932	5.97842016	1.87623628	5.74228935	0.49827233	1.69265268
17	1.82856853	6.01744607	1.94447129	5.78259652	0.50965096	1.67715737
18	1.89294991	6.05396851	2.00837181	5.82030661	0.52003207	1.66314902
19	1.95349566	6.08828004	2.06841301	5.85572395	0.52955143	1.65040418
20	2.01059941	6.12062529	2.12499956	5.88910291	0.53832041	1.63874389
21	2.06460087	6.15121129	2.17847794	5.92065820	0.54643127	1.62802131
22	2.11579416	6.18021335	2.22914725	5.95057319	0.55396205	1.61811755
23	2.16443395	6.20778287	2.27726666	5.97900401	0.56097784	1.60893274
24	2.21074483	6.23405055	2.32306267	6.00608674	0.56753460	1.60038342
25	2.25492308	6.25913017	2.36673357	6.03193952	0.57367993	1.59239905

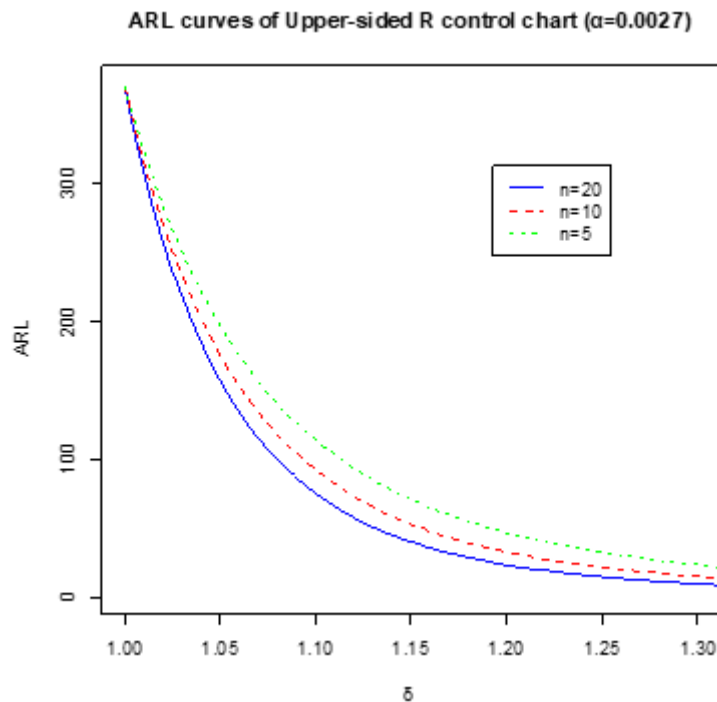
2.5 R και S διαγράμματα ελέγχου με όρια πιθανότητας: Σύγκριση και μελέτη

2.5.1 Μονόπλευρα άνω R και S διαγράμματα ελέγχου

Ξεκινώντας τη μελέτη των μονόπλευρων άνω R διαγραμμάτων ελέγχου δίνεται αρχικά ο Πίνακας 2.5 που περιέχει τιμές του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής για διάφορες μετατοπίσεις της τυπικής απόκλισης και για μεγέθη δείγματος 5, 10 και 20, αντίστοιχα, στην περίπτωση όπου $\alpha = 0.0027$. Στη συνέχεια παρουσιάζονται στο Σχήμα 2.1 οι καμπύλες ARL ($ARL_0 = 1/\alpha = 370$).

Πίνακας 2.5: Τιμές ARL για το μονόπλευρο άνω R διάγραμμα ελέγχου ($\alpha = 0.0027$)

δ	$n = 5$	$n = 10$	$n = 20$
1.00	370.370	370.370	370.370
1.05	196.789	175.350	156.881
1.10	113.921	92.249	75.329
1.15	70.834	53.000	40.185
1.20	46.766	32.794	23.433
1.25	32.482	21.607	14.739
1.30	23.557	15.020	9.892
1.35	17.727	10.931	7.019
1.40	13.771	8.275	5.226
1.45	10.995	6.482	4.057
1.50	8.992	5.230	3.264
1.60	6.384	3.666	2.312
1.70	4.834	2.780	1.799
1.80	3.849	2.240	1.502
1.90	3.188	1.891	1.322
2.00	2.726	1.656	1.208
2.10	2.390	1.492	1.136
2.20	2.139	1.374	1.088
2.30	1.948	1.288	1.058
2.40	1.798	1.223	1.038
2.50	1.678	1.175	1.024
2.60	1.582	1.138	1.016
2.70	1.504	1.109	1.010
2.80	1.439	1.087	1.007
2.90	1.384	1.069	1.004
3.00	1.339	1.056	1.003



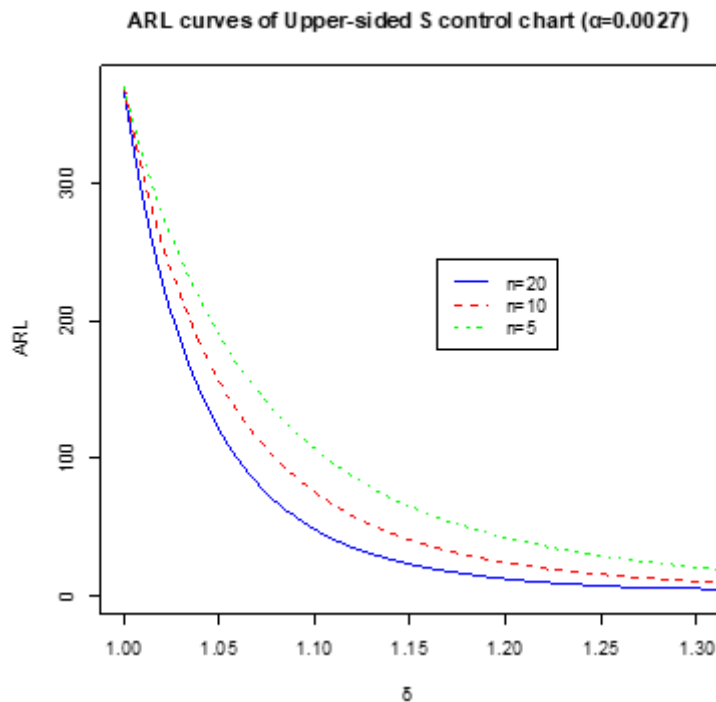
Σχήμα 2.1. Καμπύλες *ARL* για μονόπλευρα άνω *R* διαγράμματα ελέγχου ($\alpha = 0.0027$)

Παρατηρούμε ότι όσο μεγαλύτερη είναι η αλλαγή που προκαλείται μετρημένη σε μονάδες τυπικής απόκλισης τόσο μικρότερη είναι η τιμή του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής. Δηλαδή όσο μεγαλύτερη η μεταβολή τόσο πιο γρήγορα το διάγραμμα θα την εντοπίσει. Όσον αφορά το μέγεθος του δείγματος όσο μεγαλύτερο το δείγμα τόσο μικρότερη τιμή θα πάρει και το μέσο μήκος ροής κάτι που είναι ολοφάνερο από τις καμπύλες *ARL* στο Σχήμα 2.1. Για παράδειγμα αν πάρουμε την τιμή $\delta = 1.25$ για μέγεθος δείγματος 5 έχουμε $ARL = 32.482$. Για μέγεθος δείγματος 10 έχουμε $ARL = 21.607$, ενώ για μέγεθος δείγματος 20 $ARL = 14.739$. Έτσι καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι για να ανιχνεύσουμε μικρές μετατοπίσεις σχετικά γρήγορα θα χρειαστούμε μεγαλύτερο μέγεθος δείγματος. Στην περίπτωση όπου η μετατόπιση είναι αρκετά μεγάλη όπως φαίνεται και από το Σχήμα 2.1 το *R* διάγραμμα φαίνεται να έχει την ίδια απόδοση ανεξάρτητα από το μέγεθος του δείγματος.

Όσον αφορά τα μονόπλευρα άνω *S* διαγράμματα ελέγχου παρακάτω δίνεται ο Πίνακας 2.6 που περιέχει τιμές του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής για διάφορες μετατοπίσεις της τυπικής απόκλισης και για μεγέθη δείγματος 5, 10 και 20, αντίστοιχα, στην περίπτωση όπου $\alpha = 0.0027$. Στη συνέχεια παρουσιάζονται στο Σχήμα 2.2 οι καμπύλες *ARL* ($ARL_0 = 1/\alpha = 370$).

Πίνακας 2.6: Τιμές *ARL* για το μονόπλευρο άνω *S* διάγραμμα ελέγχου ($\alpha = 0.0027$)

δ	$n = 5$	$n = 10$	$n = 20$
1.00	370.370	370.370	370.370
1.05	189.706	156.127	120.892
1.10	106.927	75.614	48.588
1.15	65.224	41.025	23.110
1.20	42.489	24.444	12.605
1.25	29.247	15.741	7.690
1.30	21.090	10.815	5.141
1.35	15.821	7.846	3.706
1.40	12.275	5.958	2.842
1.45	9.803	4.704	2.293
1.50	8.027	3.837	1.929
1.60	5.727	2.767	1.502
1.70	4.365	2.166	1.282
1.80	3.500	1.802	1.161
1.90	2.921	1.569	1.093
2.00	2.515	1.412	1.054
2.10	2.221	1.304	1.031
2.20	2.001	1.227	1.018
2.30	1.832	1.172	1.011
2.40	1.700	1.131	1.006
2.50	1.595	1.100	1.004
2.60	1.511	1.078	1.002
2.70	1.442	1.060	1.001
2.80	1.384	1.047	1.001
2.90	1.337	1.037	1.000
3.00	1.296	1.029	1.000



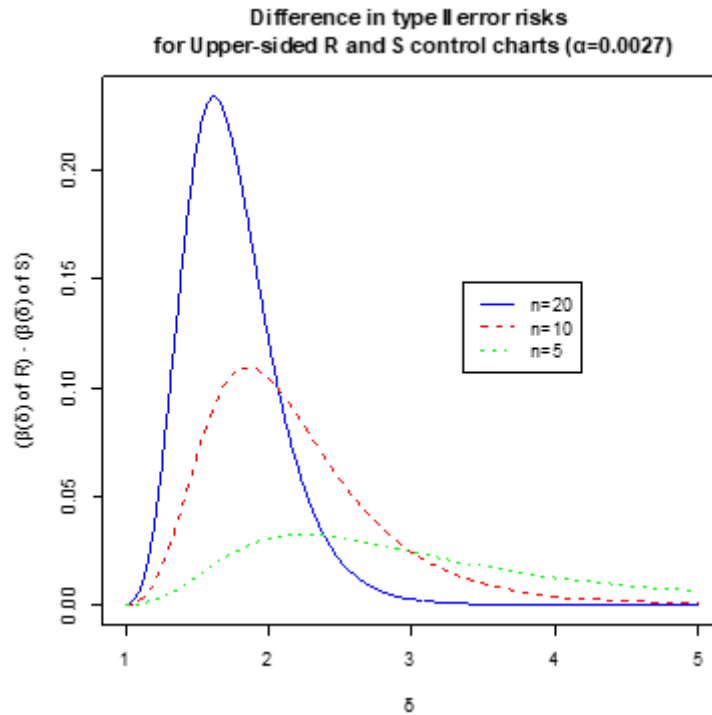
Σχήμα 2.2. Καμπύλες *ARL* για μονόπλευρα άνω *S* διαγράμματα ελέγχου ($\alpha = 0.0027$)

Όπως και στα *R* διαγράμματα ελέγχου έτσι και εδώ παρατηρούμε ότι όσο μεγαλύτερη είναι η μετατόπιση της τυπικής απόκλισης τόσο μικρότερη είναι η τιμή του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής. Ταυτόχρονα παρατηρούμε ότι όσο μεγαλύτερο είναι το μέγεθος δείγματος τόσο μικρότερες οι τιμές του μέσου μήκους ροής. Πράγματι για την τιμή $\delta = 1.25$ και μέγεθος δείγματος 5 έχουμε $ARL = 29.247$. Για μέγεθος δείγματος 10 έχουμε $ARL = 15.741$, ενώ για μέγεθος δείγματος 20 έχουμε $ARL = 7.690$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι για να ανιχνεύσουμε μικρές μετατοπίσεις σχετικά γρήγορα στην τυπική απόκλιση θα χρειαστεί να έχουμε μεγαλύτερο μέγεθος δείγματος. Τέλος παρατηρούμε ότι για μεγαλύτερες μετατοπίσεις οι καμπύλες του μέσου μήκους ροής σχεδόν ταυτίζονται και επομένως θα λάβουμε παρόμοια αποτελέσματα και με μικρότερο μέγεθος δείγματος.

Στη συνέχεια ακολουθεί η σύγκριση των δύο διαγραμμάτων όπου παρατίθενται δύο σχήματα που παρουσιάζουν τη διαφορά των πιθανοτήτων διάπραξης σφάλματος τύπου II καθώς και τη διαφορά στις τιμές *ARL*.

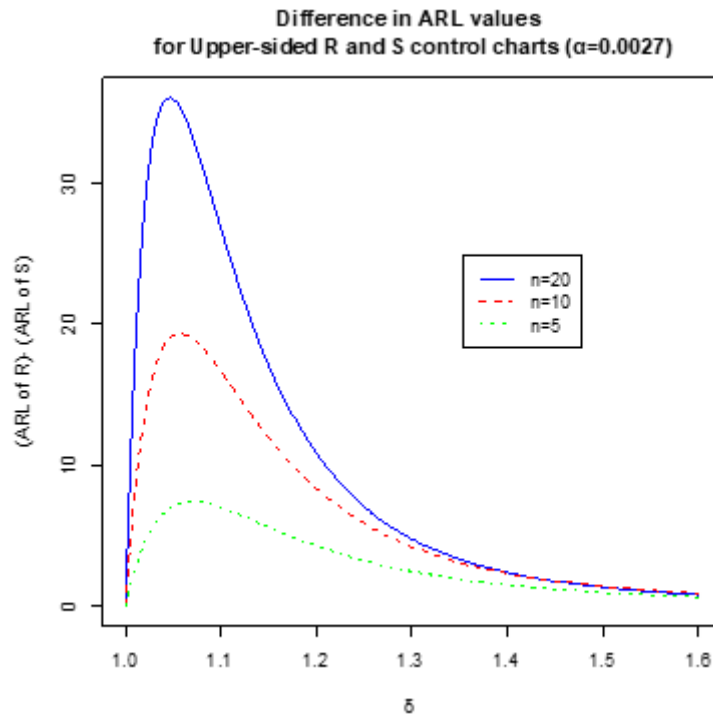
Στο Σχήμα 2.3 παρατηρούμε ότι κάθε μια καμπύλη, που αναφέρεται στη διαφορά ανάμεσα στις πιθανότητες σφάλματος τύπου II, $\beta_R(\delta) - \beta_S(\delta)$, παρουσιάζει ένα μέγιστο. Όσο μεγαλύτερο είναι το μέγεθος του δείγματος τόσο νωρίτερα η καμπύλη φτάνει σε αυτό το σημείο. Επίσης όσο μεγαλύτερο το μέγεθος του δείγματος σε τόσο μεγαλύτερη τιμή φτάνει αυτό το μέγιστο. Αυτό σημαίνει ότι για μικρές μετατοπίσεις της τυπικής απόκλισης το *R*

διάγραμμα δίνει μεγαλύτερη πιθανότητα σφάλματος τύπου II από το S διάγραμμα. Για πολύ μεγάλες μετατοπίσεις οι τρεις καμπύλες σχεδόν ταυτίζονται.



Σχήμα 2.3. Διαφορά των πιθανοτήτων διάπραξης σφάλματος τύπου II για τα μονόπλευρα άνω R και S διαγράμματα ελέγχου ($\alpha = 0.0027$)

Στο Σχήμα 2.4 φαίνεται ότι για μικρές μετατοπίσεις της τυπικής απόκλισης η διαφορά ανάμεσα στις τιμές ARL των δύο διαγραμμάτων, $ARL_R - ARL_S$, είναι μεγαλύτερη για μεγαλύτερο μέγεθος δείγματος. Για παράδειγμα η μπλε καμπύλη που αντιστοιχεί σε μέγεθος δείγματος 20 για $\delta = 1.20$ δίνει μια τιμή στην διαφορά των ARL γύρω στο 10. Πράγματι αν παρατηρήσουμε τους πίνακες με τις τιμές των μέσων μηκών ροής φαίνεται ότι για την συγκεκριμένη μετατόπιση στο R διάγραμμα έχουμε $ARL = 23.433$ ενώ στο S διάγραμμα $ARL = 12.605$. Συμπεραίνουμε ότι για μικρές μετατοπίσεις της τυπικής απόκλισης το S διάγραμμα είναι πιο αποτελεσματικό ενώ για μεγαλύτερες μετατοπίσεις τα δύο διαγράμματα έχουν την ίδια περίπου αποτελεσματικότητα.



Σχήμα 2.4. Διαφορά των τιμών *ARL* για τα μονόπλευρα άνω R και S διαγράμματα ελέγχου ($\alpha = 0.0027$)

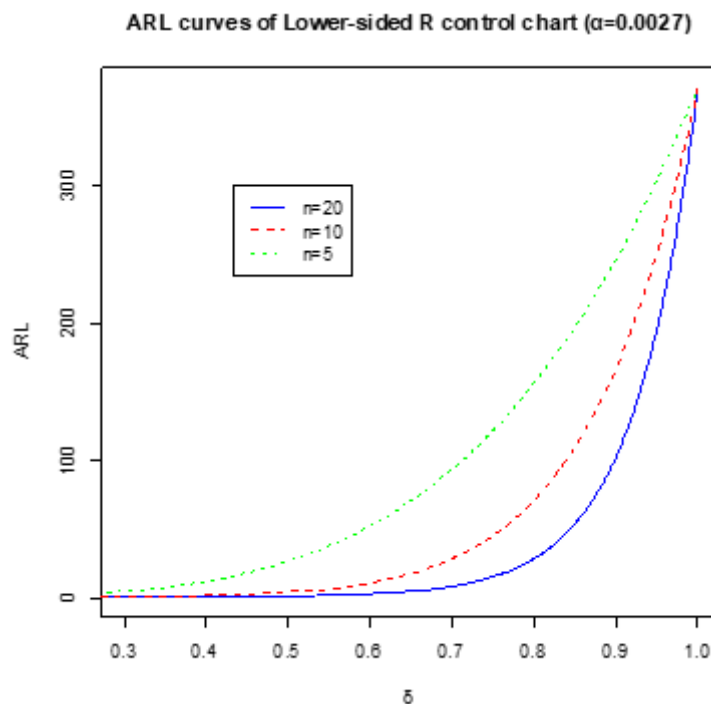
2.5.2 Μονόπλευρα κάτω R και S διαγράμματα ελέγχου

Για την μελέτη των μονόπλευρων κάτω R διαγραμμάτων ελέγχου δίνεται ο Πίνακας 2.7 που περιέχει τιμές του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής για διάφορες μετατοπίσεις της τυπικής απόκλισης και για μεγέθη δείγματος 5, 10 και 20, αντίστοιχα, στην περίπτωση όπου $\alpha = 0.0027$. Στο Σχήμα 2.5 δίνονται οι καμπύλες *ARL* που αντιστοιχούν προφανώς σε $ARL_0 = 1/\alpha = 370$.

Πίνακας 2.7: Τιμές *ARL* για το μονόπλευρο κάτω *R* διάγραμμα ελέγχου ($\alpha = 0.0027$)

δ	$n = 5$	$n = 10$	$n = 20$
0.1	1.007	1.000	1.000
0.2	1.819	1.001	1.000
0.3	4.958	1.117	1.000
0.4	12.375	1.899	1.047
0.5	26.992	4.387	1.459
0.6	52.600	11.241	3.066
0.7	93.836	28.852	8.677
0.8	156.184	71.239	28.865
0.9	245.971	166.928	102.761
1.0	370.371	370.370	370.370

Παρατηρούμε ότι όσο η τιμή του δ πλησιάζει το 1 (δηλαδή όσο μικρότερη είναι η μείωση της τυπικής απόκλισης μετρημένη σε μονάδες τυπικής απόκλισης) τόσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής. Δηλαδή όσο μεγαλύτερη η μεταβολή (μικρές τιμές του δ) τόσο πιο γρήγορα το διάγραμμα θα την εντοπίσει.



Σχήμα 2.5. Καμπύλες *ARL* για μονόπλευρα κάτω *R* διαγράμματα ελέγχου ($\alpha = 0.0027$)

Επίσης από το Σχήμα 2.5 παρατηρούμε ότι όσο μεγαλύτερο είναι το μέγεθος του δείγματος τόσο μικρότερη παρουσιάζεται η τιμή του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής. Για παράδειγμα αν πάρουμε την τιμή $\delta = 0.6$ για μέγεθος δείγματος 5 έχουμε $ARL = 52.600$. Για μέγεθος δείγματος 10 έχουμε $ARL = 11.24$, ενώ για μέγεθος δείγματος 20 έχουμε $ARL = 3.066$. Έτσι καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι για να ανιχνεύσουμε μικρές μειώσεις της τυπικής

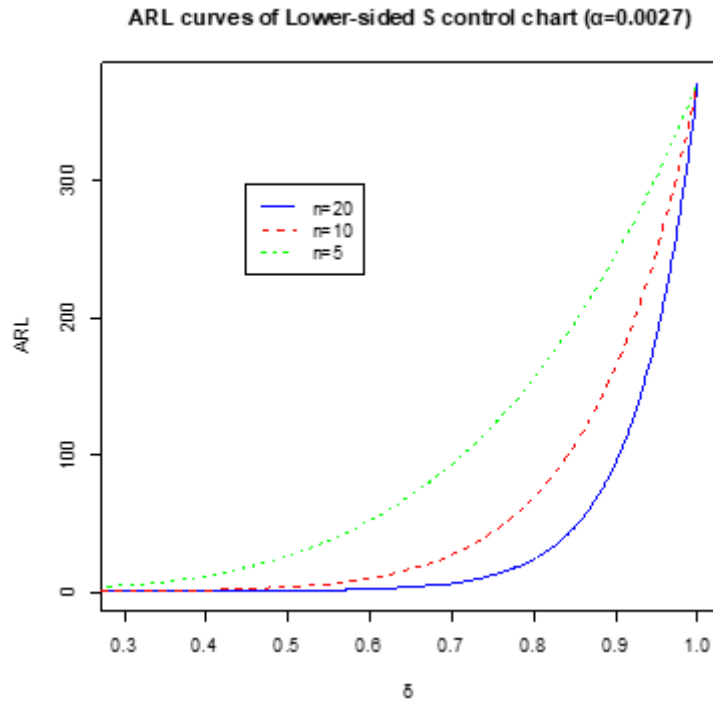
απόκλισης σχετικά γρήγορα θα χρειαστούμε μεγαλύτερο μέγεθος δείγματος. Στην περίπτωση όπου η μείωση είναι αρκετά μεγάλη, όπως φαίνεται και από το Σχήμα 2.5, το R διάγραμμα θα έχει την ίδια απόδοση ανεξάρτητα από το μέγεθος του δείγματος.

Όσον αφορά τα μονόπλευρα κάτω S διαγράμματα ελέγχου δίνεται ο Πίνακας 2.8 με τιμές του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής για διάφορες μετατοπίσεις της τυπικής απόκλισης και για μεγέθη δείγματος 5, 10 και 20, αντίστοιχα, στην περίπτωση όπου $\alpha = 0.0027$. Στο Σχήμα 2.6 δίνονται οι αντίστοιχες καμπύλες ARL .

Και σε αυτή την περίπτωση η συμπεριφορά του S διαγράμματος ελέγχου είναι παρόμοια με αυτή του R διαγράμματος. Όσο η τιμή του δ πλησιάζει την τιμή 1, άρα όσο μικρότερη είναι η μείωση της τυπικής απόκλισης, η τιμή του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής μεγαλώνει. Παράλληλα από το Σχήμα 2.6 παρατηρώντας την μπλε καμπύλη η οποία αντιστοιχεί σε μέγεθος δείγματος 20 φαίνεται ότι για να ανιχνεύσουμε μικρές μειώσεις της τυπικής απόκλισης χρειαζόμαστε το μεγαλύτερο μέγεθος δείγματος. Πράγματι για τιμή $\delta = 0.6$ έχουμε ότι για μέγεθος δείγματος 5 η τιμή του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής είναι $ARL = 52.428$. Για μέγεθος δείγματος 10 έχουμε $ARL = 10.433$ ενώ για μέγεθος δείγματος 20 έχουμε $ARL = 2.313$. Για ανίχνευση μεγαλύτερων μειώσεων οι τιμές ARL δεν έχουν σημαντικές διαφορές.

Πίνακας 2.8: Τιμές ARL για το μονόπλευρο κάτω S διάγραμμα ελέγχου ($\alpha = 0.0027$)

δ	$n = 5$	$n = 10$	$n = 20$
0.1	1.005	1.000	1.000
0.2	1.781	1.000	1.000
0.3	4.887	1.062	1.000
0.4	12.267	1.710	1.004
0.5	26.849	3.973	1.194
0.6	52.428	10.433	2.313
0.7	93.652	27.448	6.761
0.8	156.016	69.183	24.346
0.9	245.860	164.788	94.657
1.0	370.370	370.370	370.370

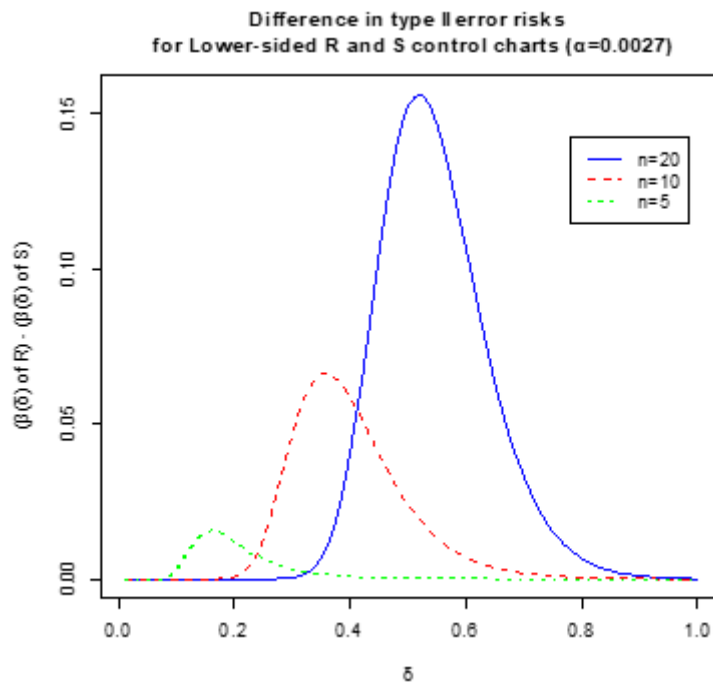


Σχήμα 2.6. Καμπύλες *ARL* για μονόπλευρα κάτω *S* διαγράμματα ελέγχου ($\alpha = 0.0027$)

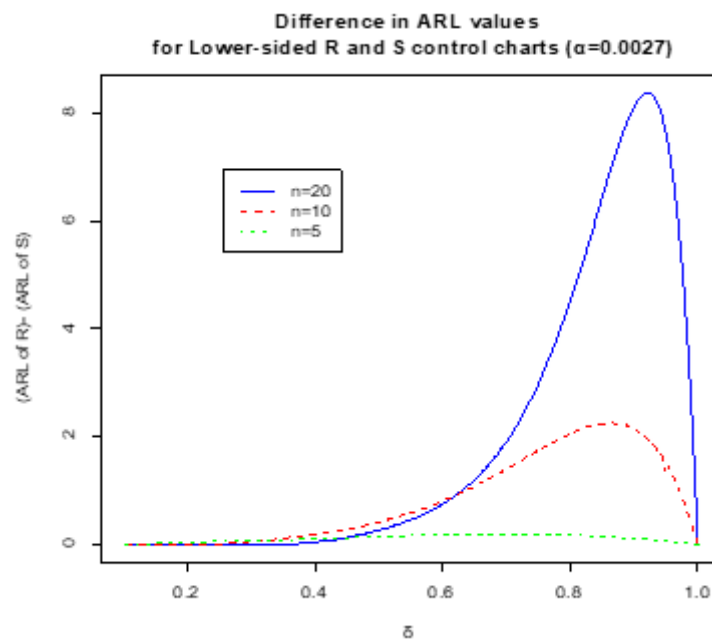
Στη συνέχεια ακολουθεί η σύγκριση των δύο διαγραμμάτων όπου παρατίθενται δύο σχήματα που παρουσιάζουν τη διαφορά των πιθανοτήτων διάπραξης σφάλματος τύπου II καθώς και τη διαφορά στις τιμές *ARL*.

Στο Σχήμα 2.7 παρατηρούμε ότι κάθε μια καμπύλη που αναφέρεται στη διαφορά ανάμεσα στις πιθανότητες σφάλματος τύπου II, $\beta_R(\delta) - \beta_S(\delta)$, για τα τρία μεγέθη δειγμάτων που εξετάζουμε, παρουσιάζει ένα μέγιστο. Όσο μεγαλύτερο είναι το μέγεθος του δείγματος τόσο νωρίτερα η καμπύλη φτάνει σε αυτό το σημείο. Επίσης όσο μεγαλύτερο είναι το μέγεθος του δείγματος σε τόσο μεγαλύτερη τιμή φτάνει αυτό το μέγιστο. Αυτό σημαίνει ότι για μικρές μετατοπίσεις της τυπικής απόκλισης το *R* διάγραμμα δίνει μεγαλύτερη πιθανότητα σφάλματος τύπου II από το *S* διάγραμμα. Για πολύ μεγάλες μετατοπίσεις (μικρές τιμές δ) οι τρεις καμπύλες σχεδόν ταυτίζονται.

Στο Σχήμα 2.8 παρατηρούμε ότι οι καμπύλες σχεδόν ταυτίζονται για τις μικρές τιμές του δ κάτι που σημαίνει ότι τα δύο διαγράμματα έχουν την ίδια αποτελεσματικότητα για μεγάλες μειώσεις της τυπικής απόκλισης. Για τιμές του δ κοντά στην μονάδα παρατηρούμε ότι η διαφορά ανάμεσα στα *ARL* των δύο διαγραμμάτων αυξάνεται. Αν πάρουμε για παράδειγμα την τιμή $\delta = 0.6$ για το *R* διάγραμμα θα έχουμε $ARL = 3.066$ ενώ για το *S* διάγραμμα $ARL = 2.313$. Έτσι συμπεραίνουμε ότι για μικρές μετατοπίσεις της τυπικής απόκλισης και σε μεγαλύτερο μέγεθος δείγματος το *S* διάγραμμα παρουσιάζεται αρκετά πιο αποτελεσματικό.



Σχήμα 2.7. Διαφορά των πιθανοτήτων διάπραξης σφάλματος τύπου II για τα μονόπλευρα κάτω R και S διαγράμματα ελέγχου ($\alpha = 0.0027$)



Σχήμα 2.8. Διαφορά των τιμών *ARL* για τα μονόπλευρα κάτω R και S διαγράμματα ελέγχου ($\alpha = 0.0027$)

2.5.3 Δίπλευρα R και S διαγράμματα ελέγχου

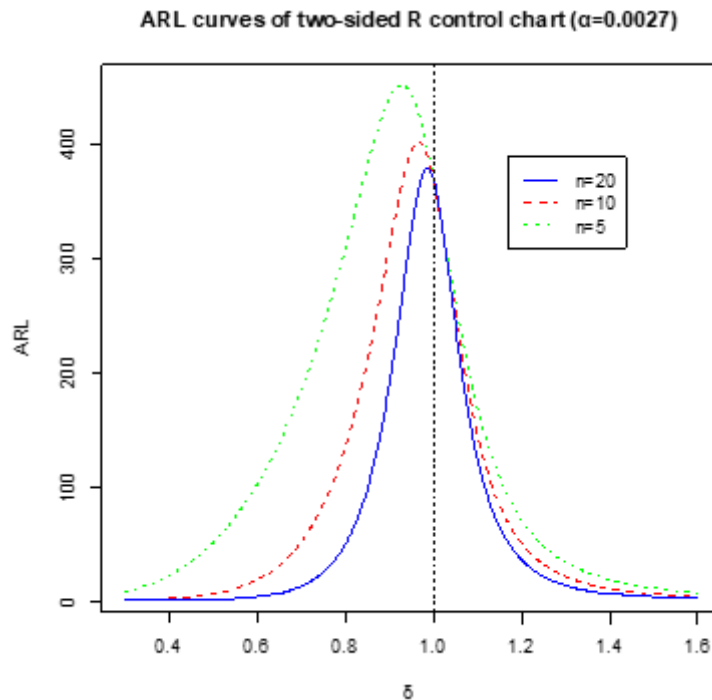
Για την μελέτη του δίπλευρου R διαγράμματος ελέγχου δίνεται ο Πίνακας 2.9 με τιμές του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής για διάφορες μετατοπίσεις (μειώσεις ή αυξήσεις) της τυπικής απόκλισης για μεγέθη δειγμάτων 5, 10 και 20 στην περίπτωση όπου $\alpha = 0.0027$. Στο Σχήμα 2.9 δίνονται οι αντίστοιχες καμπύλες ARL .

Παρατηρούμε ότι όσο μεγαλύτερο είναι το μέγεθος του δείγματος τόσο πιο αποτελεσματικό φαίνεται να είναι το διάγραμμα στην ανίχνευση οποιασδήποτε μετατόπισης. Όταν το δ πάρει τιμές μικρότερες (ή μεγαλύτερες) του 1 η αποτελεσματικότητα του διαγράμματος για μέγεθος δείγματος 20 είναι η καλύτερη. Για παράδειγμα για $\delta = 0.9$ και για μέγεθος δείγματος 5 έχουμε ότι $ARL = 440.191$, για μέγεθος δείγματος 10 έχουμε $ARL = 309.03$, ενώ για μέγεθος δείγματος 20 έχουμε $ARL = 188.504$.

Για μεγάλες μετατοπίσεις της τυπικής απόκλισης (πολύ μεγάλες ή πολύ μικρές του δ) το R διάγραμμα φαίνεται να έχει την ίδια αποτελεσματικότητα ανεξάρτητα από το μέγεθος του δείγματος, με την καλύτερη συμπεριφορά να την επιδεικνύει το διάγραμμα με το μεγαλύτερο μέγεθος δείγματος.

Πίνακας 2.9: Τιμές *ARL* για το δίπλευρο *R* διάγραμμα ελέγχου ($\alpha = 0.0027$)

δ	$n = 5$	$n = 10$	$n = 20$
0.10	1.042	1.000	1.000
0.20	2.677	1.003	1.000
0.30	8.583	1.238	1.001
0.40	22.899	2.534	1.088
0.50	51.601	6.759	1.720
0.60	102.397	19.068	4.202
0.70	184.694	52.210	13.557
0.80	307.801	134.638	50.022
0.90	440.191	309.034	188.504
1.00	370.373	370.370	370.370
1.05	261.274	251.860	242.649
1.10	169.762	147.089	125.576
1.15	109.026	84.987	65.487
1.20	71.688	51.256	36.613
1.25	48.861	32.649	22.051
1.30	34.588	21.926	14.207
1.35	25.376	15.444	9.710
1.40	19.232	11.344	6.986
1.45	15.002	8.643	5.256
1.50	12.005	6.799	4.110
1.60	8.201	4.560	2.770
1.70	6.011	3.334	2.069
1.80	4.656	2.605	1.672
1.90	3.768	2.144	1.433
2.00	3.158	1.838	1.283
2.10	2.722	1.627	1.186
2.20	2.401	1.476	1.123
2.30	2.158	1.367	1.082
2.40	1.970	1.285	1.054
2.50	1.822	1.224	1.036
2.60	1.703	1.177	1.024
2.70	1.607	1.140	1.016
2.80	1.527	1.112	1.010
2.90	1.461	1.090	1.007
3.00	1.406	1.073	1.004



Σχήμα 2.9. Καμπύλες *ARL* για δίπλευρα *R* διαγράμματα ελέγχου ($\alpha = 0.0027$)

Από το Σχήμα 2.9 είναι ολοφάνερη η μεροληπτική συμπεριφορά του δίπλευρου *R* διαγράμματος ελέγχου, δηλαδή η αύξηση των τιμών *ARL* πέραν του $ARL_0 = 370$, για πολύ μικρές μειώσεις της τυπικής απόκλισης. Ωστόσο αυτή η μεροληπτική συμπεριφορά βαίνει μειούμενη με την αύξηση του μεγέθους του δείγματος

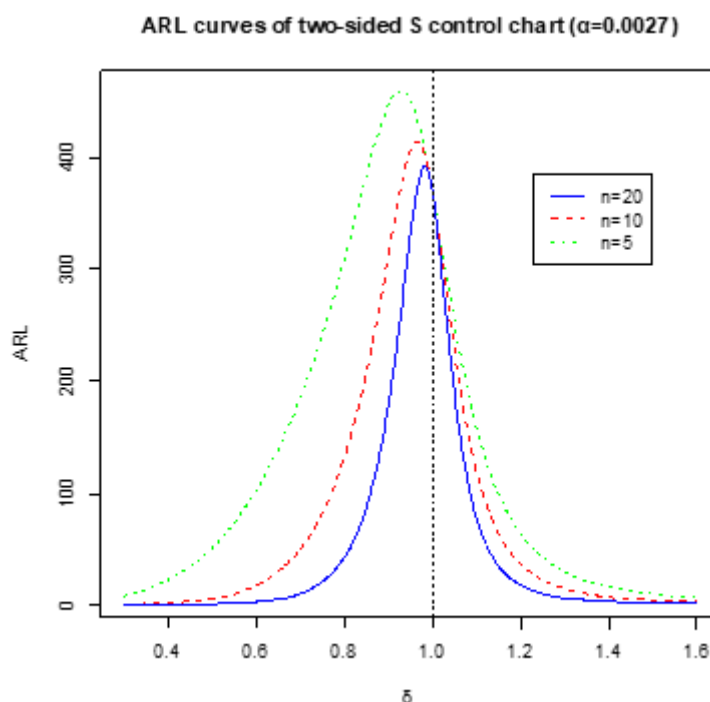
Για την μελέτη του δίπλευρου *S* διαγράμματος ελέγχου παρουσιάζεται ο Πίνακας 2.10 με τιμές του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής για διάφορες τιμές του δ σε τρεις διαφορετικές περιπτώσεις μεγέθους δείγματος 5, 10 και 20 και στην περίπτωση όπου $\alpha = 0.0027$. Στο Σχήμα 2.10 δίνονται οι αντίστοιχες καμπύλες *ARL*.

Τα συμπεράσματα είναι παρόμοια με αυτά του δίπλευρου *R* διαγράμματος ελέγχου. Για μεγάλες τιμές του μεγέθους του δείγματος η τιμή του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής βαίνει μειούμενη και το διάγραμμα ελέγχου γίνεται ολοένα και πιο αποτελεσματικό στην ανίχνευση οποιασδήποτε μετατόπισης της τυπικής απόκλισης. Για τιμές του δ μικρότερες (ή μεγαλύτερες) του 1 το διάγραμμα ελέγχου με μέγεθος δείγματος 20 αναμένεται να δώσει πολύ πιο γρήγορα ένδειξη για σημείο εκτός των ορίων ελέγχου έναντι των διαγραμμάτων που αντιστοιχούν σε μέγεθος δείγματος 5 και 10. Για μεγάλες μετατοπίσεις της τυπικής απόκλισης (πολύ μεγάλες ή πολύ μικρές του δ) το *S* διάγραμμα φαίνεται να έχει την ίδια περίπου

αποτελεσματικότητα ανεξάρτητα από το μέγεθος του δείγματος, με την καλύτερη συμπεριφορά να την επιδεικνύει το διάγραμμα με το μεγαλύτερο μέγεθος δείγματος.

Πίνακας 2. 10: Τιμές *ARL* για το δίπλευρο *S* διάγραμμα ελέγχου ($\alpha = 0.0027$)

δ	$n = 5$	$n = 10$	$n = 20$
0.10	1.033	1.000	1.000
0.20	2.625	1.000	1.000
0.30	8.487	1.149	1.000
0.40	22.750	2.266	1.013
0.50	51.401	6.148	1.346
0.60	102.156	17.815	3.117
0.70	184.445	49.945	10.569
0.80	308.152	131.343	42.437
0.90	445.751	311.289	177.058
1.00	370.370	370.370	370.370
1.05	253.531	227.709	190.711
1.10	159.560	119.856	78.563
1.15	99.864	64.223	35.444
1.20	64.455	36.873	18.225
1.25	43.380	22.793	10.535
1.30	30.462	15.064	6.719
1.35	22.245	10.549	4.649
1.40	16.823	7.761	3.441
1.45	13.119	5.956	2.692
1.50	10.509	4.739	2.206
1.60	7.216	3.275	1.647
1.70	5.327	2.479	1.364
1.80	4.160	2.008	1.210
1.90	3.395	1.710	1.122
2.00	2.869	1.514	1.072
2.10	2.493	1.378	1.042
2.20	2.215	1.283	1.025
2.30	2.005	1.214	1.015
2.40	1.842	1.164	1.009
2.50	1.714	1.126	1.005
2.60	1.610	1.098	1.003
2.70	1.526	1.076	1.002
2.80	1.457	1.060	1.001
2.90	1.400	1.047	1.001
3.00	1.352	1.037	1.000

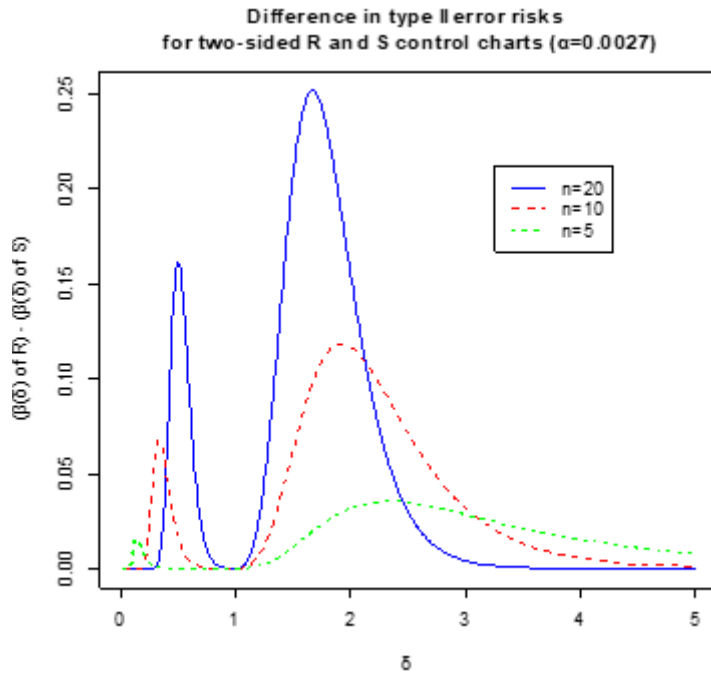


Σχήμα 2.10. Καμπύλες ARL για δίπλευρα S διαγράμματα ελέγχου ($\alpha = 0.0027$)

Από το Σχήμα 2.10 είναι επίσης φανερή η μεροληπτική συμπεριφορά του δίπλευρου S διαγράμματος ελέγχου.

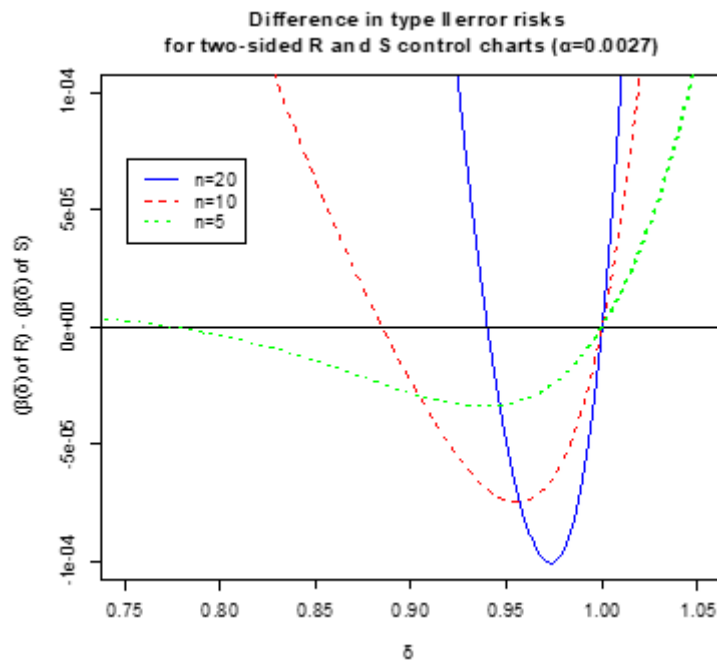
Για την σύγκριση των δίπλευρων R και S διαγραμμάτων ελέγχου δίνονται τα Σχήματα 2.11 και 2.13 που απεικονίζουν τη διαφορά ανάμεσα στις πιθανότητες σφάλματος τύπου II $\beta_R(\delta) - \beta_S(\delta)$ και την διαφορά των τιμών ARL , αντίστοιχα.

Στο Σχήμα 2.11 παρατηρούμε ότι η μέγιστη τιμή της διαφοράς των πιθανοτήτων διάπραξης σφάλματος τύπου II είναι μεγαλύτερη όταν το δ παίρνει τιμές στο διάστημα $(1, 5)$ από ότι στο διάστημα $(0, 1)$. Για μεγάλα μεγέθη δείγματος παρατηρούμε ότι το S διάγραμμα φαίνεται πολύ πιο αποτελεσματικό και αυτό συμβαίνει διότι για μεγάλο μέγεθος δείγματος το εύρος R δεν μπορεί να μεταφέρει το ίδιο καλά όλη την πληροφορία που εμπεριέχεται στο δείγμα (αφού βασίζεται μόνο σε δύο τιμές, την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή) συγκριτικά με τη δειγματική τυπική απόκλιση S .



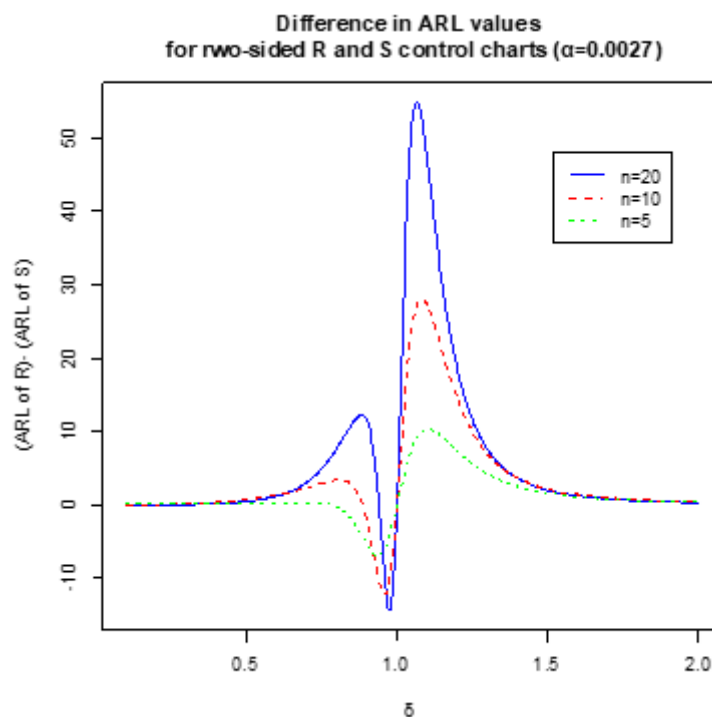
Σχήμα 2.11. Διαφορά των πιθανοτήτων διάπραξης σφάλματος τύπου II για τα δίπλευρα R και S διαγράμματα ελέγχου ($\alpha = 0.0027$)

Αν και στο Σχήμα 2.11 δεν είναι εκ πρώτης όψεως φανερό, για τιμές του δ λίγο μικρότερες του 1, η διαφορά ανάμεσα στις πιθανότητες σφάλματος τύπου II $\beta_R(\delta) - \beta_S(\delta)$ παίρνει αρνητικές τιμές. Ενδεικτικό είναι το ακόλουθο σχήμα.



Σχήμα 2.12. Διαφορά των πιθανοτήτων διάπραξης σφάλματος τύπου II για τα δίπλευρα R και S διαγράμματα ελέγχου για $0.75 < \delta < 1.05$ ($\alpha = 0.0027$)

Στο Σχήμα 2.13 παρατηρούμε ότι για τιμές του δ στο διάστημα $(0.75, 1)$ η καμπύλη παίρνει αρνητικές τιμές το οποίο (όπως αναμενόταν) δείχνει ότι το R διάγραμμα φαίνεται να είναι πιο αποτελεσματικό. Πιο συγκεκριμένα για $\delta = 0.9$ για το S διάγραμμα σε μέγεθος δείγματος 5 έχουμε $ARL = 445.751$ ενώ για το R διάγραμμα έχουμε $ARL = 440.191$. Αντίθετα για τιμές του δ μεγαλύτερες από το 1 η καμπύλη παίρνει θετικές τιμές κάτι που σημαίνει ότι το S διάγραμμα φαίνεται να είναι πάντα πιο αποτελεσματικό. Για παράδειγμα για $\delta = 1.2$ για το S διάγραμμα για μέγεθος δείγματος 20 έχουμε $ARL = 64.455$ ενώ για το R διάγραμμα έχουμε $ARL = 71.688$. Τέλος για πολύ μεγάλες τιμές του δ οι καμπύλες μοιάζουν να ταυτίζονται.



Σχήμα 2.13. Διαφορά των τιμών ARL για τα δίπλευρα R και S διαγράμματα ελέγχου ($\alpha = 0.0027$)

Συμπερασματικά και τα δύο διαγράμματα για να μπορέσουν να εντοπίσουν έγκαιρα μικρές μετατοπίσεις (αυξήσεις και μειώσεις) στην τυπική απόκλιση θα πρέπει το μέγεθος του δείγματος να είναι αρκετά μεγάλο. Για μεγάλες μετατοπίσεις έχουν παρόμοια αποτελεσματικότητα και με μικρότερα μεγέθη δείγματος. Το S διάγραμμα ελέγχου φαίνεται να είναι πιο αποτελεσματικό από το R διάγραμμα. Παρ' όλα αυτά στα δίπλευρα διαγράμματα ελέγχου υπάρχει ένα διάστημα τιμών για το δ που αντιστοιχεί σε πολύ μικρές μειώσεις της τυπικής απόκλισης στο οποίο το R διάγραμμα παρουσιάζεται πιο αποτελεσματικό. Για μεγάλα μεγέθη δείγματος προτείνεται η χρήση του S διαγράμματος ελέγχου.

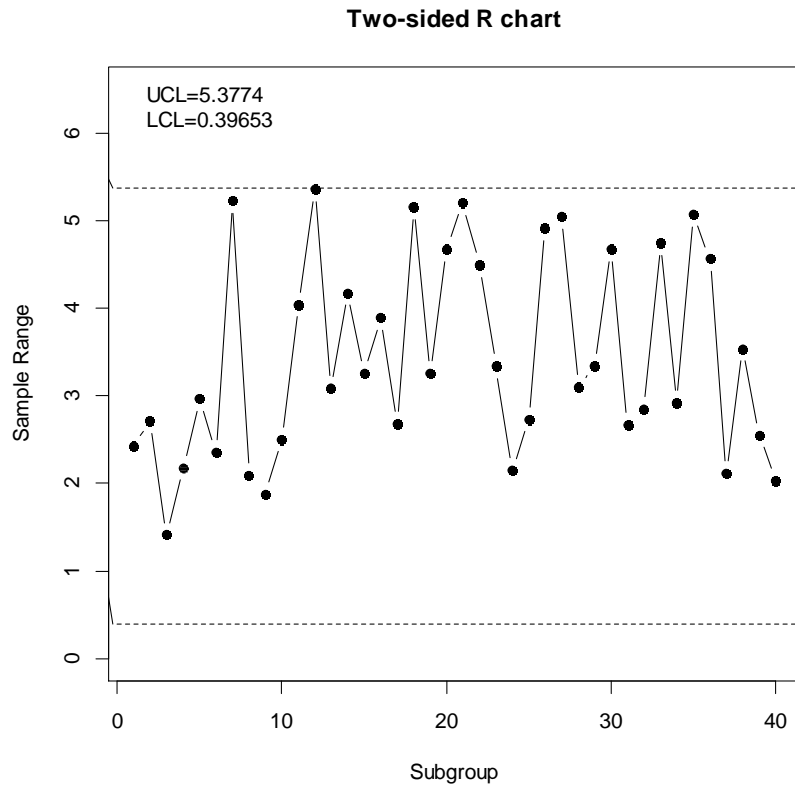
2.6 Παράδειγμα

Στην παράγραφο αυτή θα δοθεί ένα παράδειγμα για να επιδειχθεί η εφαρμογή των διαγραμμάτων ελέγχου R και S με όρια πιθανότητας Φάσης II. Τα δεδομένα που θα χρησιμοποιήσουμε προέκυψαν με προσομοίωση (για μια ανάλογη εφαρμογή δείτε Khoo and Lim (2005 [5]). Πήραμε $m = 40$ υποομάδες μεγέθους $n = 5$ η κάθε μια. Οι πρώτες 6 υποομάδες είναι εντός ελέγχου και είναι παρατηρήσεις από την κατανομή $N(0, 1)$, ενώ οι επόμενες 34 υποομάδες είναι εκτός ελέγχου αφού προέρχονται από την κατανομή $N(0, 1.5)$ (δηλαδή $\delta = 1.5$). Παρακάτω δίνεται ο πίνακας με τα δεδομένα αυτά όπου για κάθε δείγμα έχει υπολογιστεί το εύρος και η δειγματική τυπική απόκλιση.

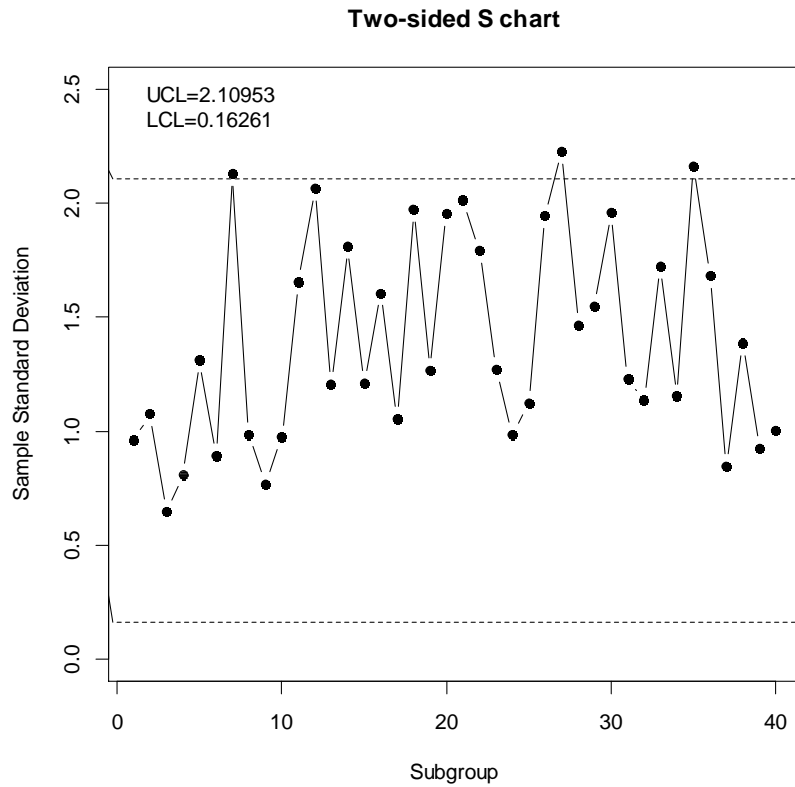
Πίνακας 2.11. Τα προσομοιωμένα δεδομένα

Δείγμα	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	R	S
1	-0.626454	0.183643	-0.835629	1.595281	0.329508	2.430909	0.9610394
2	-0.896915	0.184849	1.587845	-1.130376	-0.080252	2.718221	1.0749003
3	-0.961933	-0.292526	0.258788	-1.152132	0.195783	1.410920	0.6483674
4	0.216755	-0.542493	0.891145	0.595981	1.635618	2.178111	0.8064135
5	-0.840855	1.384359	-1.255492	0.070143	1.711441	2.966933	1.3138580
6	0.269606	-0.629985	0.868660	1.727196	0.024188	2.357181	0.8925683
7	3.430871	-1.795158	-1.041439	-0.618439	-1.456010	5.226028	2.1296894
8	-0.126879	1.260600	-0.695224	-0.826253	1.104061	2.086853	0.9858464
9	-1.150194	-1.224688	-0.212303	-0.416408	0.654460	1.879148	0.7690754
10	0.028119	-0.276379	-2.056996	-0.898752	0.441818	2.498814	0.9728087
11	-0.886547	0.039892	-2.274830	-2.043980	1.767734	4.042563	1.6550097
12	-2.220851	2.365754	-1.435117	-1.380008	-2.996463	5.362217	2.0645510
13	0.831490	-0.420408	2.662745	0.280980	1.713789	3.083153	1.2079134
14	-0.992775	2.578431	3.182500	2.245731	-0.054211	4.175275	1.8111490
15	0.388234	2.746681	-0.509428	1.345797	0.732024	3.256109	1.2121578
16	0.714620	-0.188070	1.644324	-2.166344	1.721744	3.888087	1.6055604
17	-1.522513	-0.119455	-0.349481	-1.225902	1.158136	2.680649	1.0548098
18	1.389689	2.734232	-2.415850	-0.427665	-0.513110	5.150082	1.9730700
19	-1.784181	0.582872	-0.516500	-0.821844	1.470993	3.255174	1.2649758
20	1.744028	-0.878887	2.678198	-1.998891	-0.669850	4.677088	1.9543602
21	1.189520	0.783377	2.619333	-1.907004	3.296084	5.203088	2.0146443
22	-0.768209	3.727776	1.511739	0.439222	-0.313439	4.495984	1.7913909
23	0.289819	-0.652023	1.369901	2.690082	1.494908	3.342105	1.2712445
24	-0.818821	0.804878	0.629435	-0.875441	1.271190	2.146631	0.9864436
25	-0.317750	-1.562387	-1.729961	0.482297	-2.250195	2.732492	1.1231877
26	-3.194763	1.721844	-0.734253	1.239516	-0.614903	4.916607	1.9444786
27	2.860744	1.717315	-1.146796	-2.186149	-1.640203	5.046893	2.2297120
28	-2.853236	-0.096442	-1.996751	-2.729988	0.244005	3.097240	1.4664149
29	-1.925057	-1.895175	0.322009	1.420423	-1.762537	3.345480	1.5472333
30	-1.932777	-0.521534	-0.782443	1.910210	2.736781	4.669558	1.9596531
31	0.083355	-0.276358	2.393643	1.447254	2.259400	2.670001	1.2281140
32	0.021961	1.309933	-1.541919	1.028497	0.674155	2.851852	1.1358506
33	-0.203887	-0.061195	1.515809	-0.237394	-3.234956	4.750765	1.7231632
34	-0.208335	1.799719	-1.121584	-0.862872	-0.395372	2.921303	1.1529183
35	1.597688	0.199322	-0.051066	-0.067465	5.006757	5.074221	2.1638295
36	0.467597	1.274744	1.058300	2.549893	-2.018356	4.568249	1.6821602
37	0.187131	0.573112	0.868864	-0.440622	-1.242524	2.111388	0.8449599
38	-0.380387	-1.583404	1.029745	0.037735	-2.507762	3.537506	1.3860905
39	-0.278349	-1.843864	-0.640804	-0.893973	0.700985	2.544849	0.9261369
40	0.716609	0.744274	-1.289376	-1.243590	-0.482360	2.033651	1.0032312

Στην συνέχεια δίνουμε τα δίπλευρα R και S διαγράμματα ελέγχου στην περίπτωση όπου $\alpha = 0.0027$. Τα όρια ελέγχου για το R διάγραμμα ελέγχου έχουν υπολογιστεί στον Πίνακα 2.3 ενώ για το S διάγραμμα στον Πίνακα 2.1.



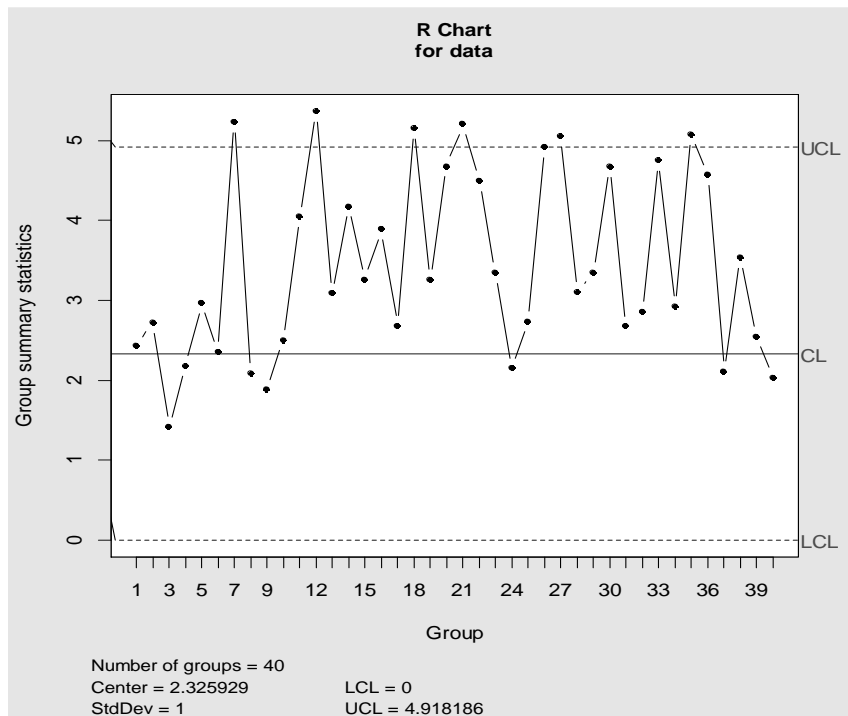
Σχήμα 2.14. Δίπλευρο R διάγραμμα ελέγχου Φάσης II για τα δεδομένα του Πίνακα 2.11



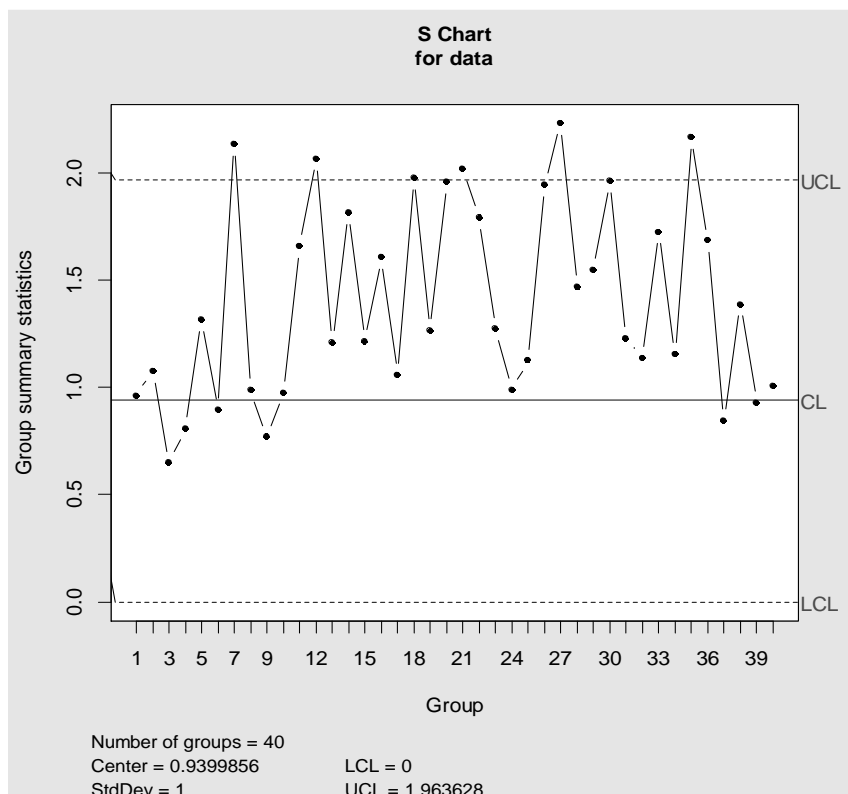
Σχήμα 2.15. Δίπλευρο S διάγραμμα ελέγχου Φάσης ΙΙ για τα δεδομένα του Πίνακα 2.11

Παρατηρούμε ότι στο R διάγραμμα δεν υπάρχει κανένα σημείο εκτός των ορίων ελέγχου και επομένως δεν λαμβάνουμε σήμα για εκτός ελέγχου διεργασία. Ωστόσο σημειώνουμε ότι το 12^ο σημείο είναι οριακά κάτω από το UCL. Σε αντίθεση με το R διάγραμμα, στο S διάγραμμα υπάρχουν τρία σημεία εκτός των ορίων ελέγχου που αντιστοιχούν στο 7^ο, στο 27^ο και στο 35^ο δείγμα. Το παράδειγμα αυτό επιβεβαιώνει την υπεροχή του S διαγράμματος ελέγχου έναντι του R διαγράμματος ελέγχου στην ανίχνευση μετατοπίσεων της τυπικής απόκλισης.

Τα αντίστοιχα παραδοσιακά διαγράμματα ελέγχου με όρια ελέγχου 3σ δίνονται στα δύο ακόλουθα σχήματα.



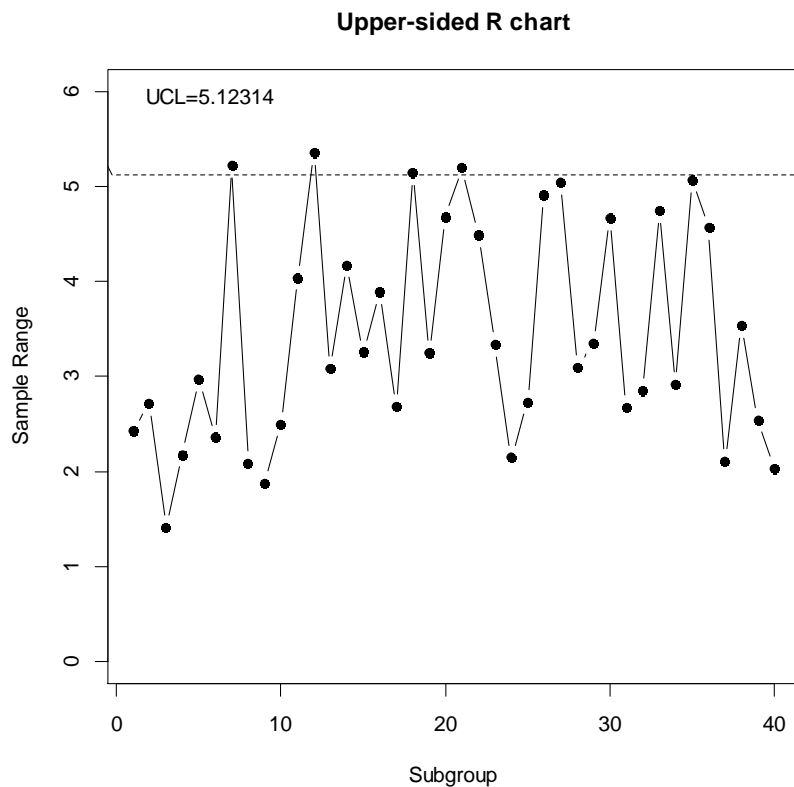
Σχήμα 2.16. Δίπλευρο R διάγραμμα ελέγχου Φάσης II με όρια ελέγχου 3σ για τα δεδομένα του Πίνακα 2.11



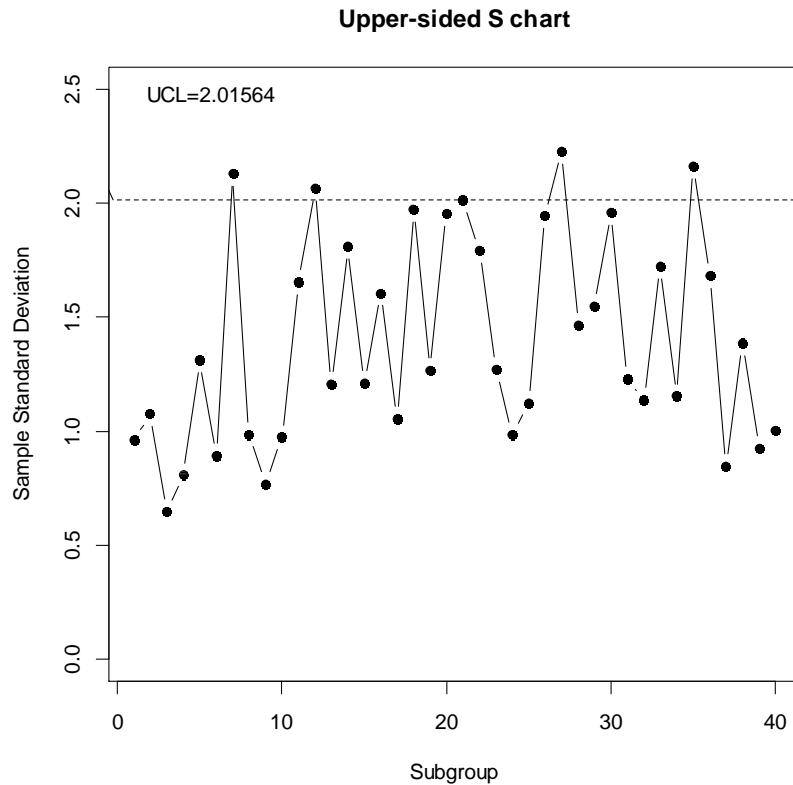
Σχήμα 2.17. Δίπλευρο S διάγραμμα ελέγχου Φάσης II με όρια ελέγχου 3σ για τα δεδομένα του Πίνακα 2.11

Το R και το S διάγραμμα ελέγχου με όρια ελέγχου 3σ δίνουν και τα δύο σήμα για εκτός ελέγχου διεργασία στα δείγματα 7, 12, 18, 21, 27 και 35. Ωστόσο σύγκριση με τα αντίστοιχα διαγράμματα ελέγχου που δόθηκαν στα Σχήματα 2.14 και 2.15 δεν είναι εφικτή αφού το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής είναι διαφορετικό. Στα διαγράμματα ελέγχου των Σχημάτων 2.14 και 2.15 είναι 370, στο Σχήμα 2.16 είναι 140 και στο Σχήμα 2.17 είναι 217.

Στην συνέχεια δίνουμε τα μονόπλευρα άνω R και S διαγράμματα ελέγχου στην περίπτωση όπου $\alpha = 0.0027$. Τα όρια ελέγχου για το R διάγραμμα ελέγχου έχουν υπολογιστεί στον Πίνακα 2.3 ενώ για το S διάγραμμα στον Πίνακα 2.1.



Σχήμα 2.18. Μονόπλευρο άνω R διάγραμμα ελέγχου Φάσης II για τα δεδομένα του Πίνακα 2.11



Σχήμα 2.19. Μονόπλευρο άνω *S* διάγραμμα ελέγχου Φάσης II για τα δεδομένα του Πίνακα 2.11

Παρατηρούμε ότι *R* διάγραμμα ελέγχου δίνει σήμα για εκτός ελέγχου διεργασία στα δείγματα 7, 12, 18 και 21. Το *S* διάγραμμα ελέγχου δίνει σήμα για εκτός ελέγχου διεργασία στα δείγματα 7, 12, 27 και 35.

Ολοκληρώνοντας το παρόν Κεφάλαιο σημειώνουμε ότι στο Παράρτημα δίνονται Κώδικες στη γλώσσα προγραμματισμού R με τους οποίους εξήχθησαν οι βασικοί πίνακες και τα βασικά σχήματα του παρόντος κεφαλαίου. Με πολύ απλές αλλαγές μπορούν να εξαχθούν ανάλογα αποτελέσματα για οποιοδήποτε μέγεθος δείγματος και για οποιαδήποτε πιθανότητα σφάλματος τύπου I.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

R διαγράμματα ελέγχου για μη κανονικά δεδομένα

3.1 Εισαγωγή

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάστηκαν τα κλασικά *R* και *S* διαγράμματα ελέγχου με όρια ελέγχου 3σ , ενώ στο δεύτερο κεφάλαιο μελετήθηκαν αναλυτικά τα αντίστοιχα διαγράμματα ελέγχου με όρια ελέγχου πιθανότητας. Παρατηρήσαμε ότι και στις δύο περιπτώσεις τα διαγράμματα αυτά είναι αποτελεσματικά στην παρακολούθηση μιας παραγωγικής διαδικασίας και στην ανίχνευση παρουσίας ειδικής αιτίας μεταβλητότητας, με τα διαγράμματα ελέγχου με όρια ελέγχου πιθανότητας να αποδεικνύονται πιο λειτουργικά και αποτελεσματικά αφού με αυτά εξαλείφεται το μειονέκτημα της μη εμφάνισης εντός ελέγχου μέσου μήκους ροής 370 (που ισοδυναμεί με πιθανότητα σφάλματος τύπου I 0.0027), έναντι των διαγραμμάτων ελέγχου με όρια ελέγχου 3σ .

Ωστόσο και στις δύο περιπτώσεις υπάρχει μια βασική προϋπόθεση. Για να υπολογιστούν τα όρια ελέγχου γίνεται η υπόθεση ότι η κατανομή του χαρακτηριστικού *X* των προϊόντων που παράγονται και παρακολουθούνται είναι η κανονική. Έχει παρατηρηθεί όμως ότι σε αρκετές περιπτώσεις το μοντέλο της κανονικής κατανομής δεν είναι το κατάλληλο. Σε πολλές περιπτώσεις η κατανομή μπορεί να είναι η Εκθετική, η Γάμμα, η Weibull, κ.λπ. Γνωρίζουμε ωστόσο ότι το \bar{X} διάγραμμα ελέγχου είναι πιο ανθεκτικό στην παραβίαση της υπόθεσης της κανονικότητας σε σχέση με τα *R* και *S* διαγράμματα ελέγχου. Σε αυτό το κεφάλαιο θα εξετάσουμε την ανθεκτικότητα του *R* διαγράμματος ελέγχου με όρια ελέγχου πιθανότητας στην περίπτωση όπου η κατανομή του χαρακτηριστικού που μελετάμε δεν ακολουθεί την κανονική κατανομή. Αυτό θα γίνει σε δύο περιπτώσεις. Στην πρώτη το χαρακτηριστικό θα ακολουθεί την Εκθετική κατανομή, ενώ στην δεύτερη θα ακολουθεί την κατανομή Γάμμα. Σε κάθε μια περίπτωση θα δοθούν διαγράμματα ελέγχου υποθέτοντας ότι τα δεδομένα προέρχονται από κανονική κατανομή καθώς και τα διαγράμματα ελέγχου με όρια ελέγχου που υπολογίζονται με βάση την πραγματική κατανομή του χαρακτηριστικού *X*.

3.2 Εκθετική Κατανομή

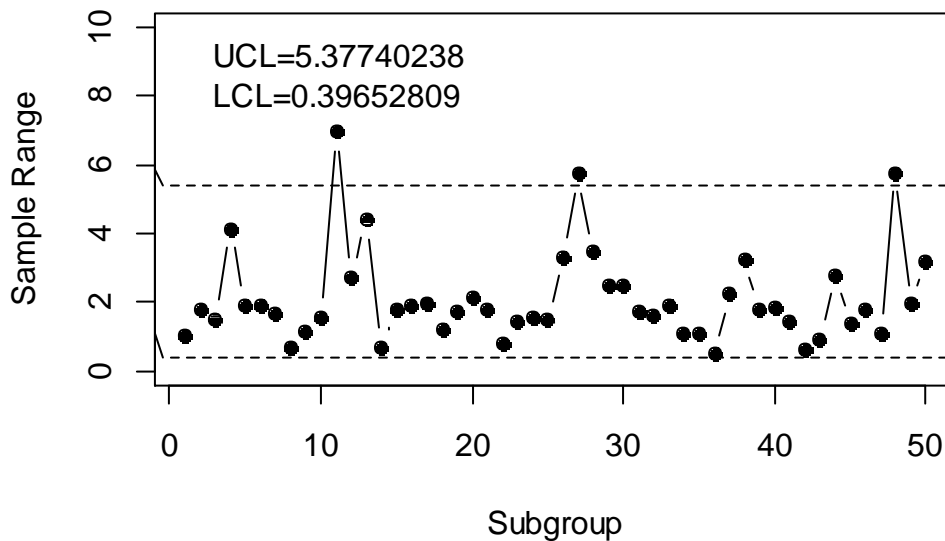
3.2.1 R διάγραμμα ελέγχου με όρια ελέγχου πιθανότητας από κανονική κατανομή

Παράγουμε τυχαία $m = 50$ υποομάδες μεγέθους $n = 5$ η καθεμία από την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = 1$ ($X \sim \text{Exp}(1)$). Υποθέτοντας ότι το χαρακτηριστικό ακολουθεί την κανονική κατανομή κατασκευάζουμε δίπλευρο R διάγραμμα ελέγχου Φάσης II με όρια ελέγχου πιθανότητας που προκύπτουν με χρήση του Πίνακα 2.3 (δηλαδή υποθέτουμε ότι τα δεδομένα προέρχονται από κανονική κατανομή με εντός ελέγχου τυπική απόκλιση $\sigma_0 = 1$). Επομένως

$$LCL = D_1^* \sigma_0 = (0.39652809)(1) = 0.39652809$$

$$UCL = D_2^* \sigma_0 = (5.37740238)(1) = 5.37740238$$

Two-sided Range chart



Σχήμα 3.1. Δίπλευρο R διάγραμμα ελέγχου εκθετικών δεδομένων με όρια ελέγχου πιθανότητας κανονικών δεδομένων

Από το παραπάνω διάγραμμα παρατηρούμε ότι υπάρχουν σημεία εκτός ελέγχου τα οποία δίνουν εσφαλμένους συναγερμούς. Πιο συγκεκριμένα τα σημεία αυτά αντιστοιχούν στα δείγματα 11, 27, 48. Αυτό δείχνει πως η αποτελεσματικότητα του διαγράμματος επηρεάζεται σε μεγάλο βαθμό από την μη κανονικότητα των δεδομένων καθώς υπάρχει μεγάλος αριθμός λανθασμένων συναγερμών (false alarms) σε μια διεργασία η οποία είναι εντός ελέγχου. Στον

επόμενο πίνακα δίνονται τιμές του ARL για διάφορες μετατοπίσεις στην τιμή της παραμέτρου λ που έχουν σαν αποτέλεσμα μετατόπιση και στην τιμή της τυπικής απόκλισης. Οι τιμές του ARL υπολογίστηκαν χρησιμοποιώντας τη γενική κατανομή του εύρους που δόθηκε στην Παράγραφο 2.4, θεωρώντας ότι έχουμε δείγμα από εκθετική κατανομή. Παρατηρούμε ότι για $\delta = \lambda = 1$, το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής παίρνει την τιμή 33.51856443 που απέχει πάρα πολύ από την τιμή 370. Συνεπώς το συγκεκριμένο διάγραμμα ελέγχου είναι ακατάλληλο.

Πίνακας 3.1. Τιμές ARL για το R διάγραμμα ελέγχου εκθετικών δεδομένων με όρια ελέγχου πιθανότητας από κανονική κατανομή

$\delta = \lambda$	$n = 5$
0.10	1.030850163
0.20	1.232153890
0.30	1.697765425
0.40	2.558740046
0.50	4.057804775
0.60	6.596490208
0.70	10.75021910
0.80	17.08245576
0.90	25.39318091
1.00	33.51856443
1.10	37.92918394
1.20	37.25507369
1.30	33.33492768
1.40	28.50248499
1.50	24.00745108
1.60	20.22863352
1.70	17.16522326
1.80	14.70448697
1.90	12.72290920
2.00	11.11537019

3.2.2 R διάγραμμα ελέγχου με όρια ελέγχου που αντιστοιχούν σε εκθετική κατανομή

Παρατηρώντας από την προηγούμενη παράγραφο την αδυναμία του R διαγράμματος ελέγχου, θα κατασκευάσουμε στην συγκεκριμένη παράγραφο όρια ελέγχου πιθανότητας που βασίζονται στην πραγματική κατανομή των δεδομένων.

Όπως έχει αναφερθεί στην Παράγραφο 2.4, η συνάρτηση πυκνότητας $f_R(\cdot)$ και η συνάρτηση κατανομής $F_R(\cdot)$ του εύρους R ενός τυχαίου δείγματος X_1, X_2, \dots, X_n από πληθυσμό

με συνάρτηση πυκνότητας $f(\cdot)$ και συνάρτηση κατανομής $F(\cdot)$ δίνονται από τους παρακάτω τύπους

$$f_R(r) = n(n-1) \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t+r)[F(t+r) - F(t)]^{n-2} dt, \quad r > 0$$

και

$$F_R(r) = \int_{-\infty}^{\infty} nf(t)[F(t+r) - F(t)]^{n-1} dt, \quad r > 0.$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μια εκθετικής κατανομής με παράμετρο λ δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

και η συνάρτηση κατανομής της από τον τύπο

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Συνεπώς η συνάρτηση πυκνότητας $f_R(r), r > 0$, του εύρους όταν το δείγμα ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο λ είναι

$$\begin{aligned} f_R(r) &= n(n-1) \int_0^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda(t+r)} e^{-\lambda t} [(1 - e^{-\lambda(t+r)}) - (1 - e^{-\lambda t})]^{n-2} dt \\ &= n(n-1) \int_0^{\infty} (e^{-\lambda t} - e^{-\lambda(t+r)})^{n-2} \lambda^2 e^{-\lambda r} e^{-2\lambda t} dt \\ &= n(n-1) \lambda^2 e^{-\lambda r} (1 - e^{-\lambda r})^{n-2} \int_0^{\infty} e^{-n\lambda t} dt \\ &= (n-1) \lambda e^{-\lambda r} (1 - e^{-\lambda r})^{n-2}. \end{aligned}$$

Για τη συνάρτηση κατανομής $F_R(r), r > 0$, έχουμε

$$\begin{aligned} F_R(r) &= \int_0^{\infty} nf(t)[F(t+r) - F(t)]^{n-1} dt \\ &= \int_0^{\infty} n\lambda e^{-\lambda t} [(1 - e^{-\lambda(t+r)}) - (1 - e^{-\lambda t})]^{n-1} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= n\lambda(1 - e^{-\lambda r})^{n-1} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} e^{-\lambda t(n-1)} dt \\
&= (1 - e^{-\lambda r})^{n-1}.
\end{aligned}$$

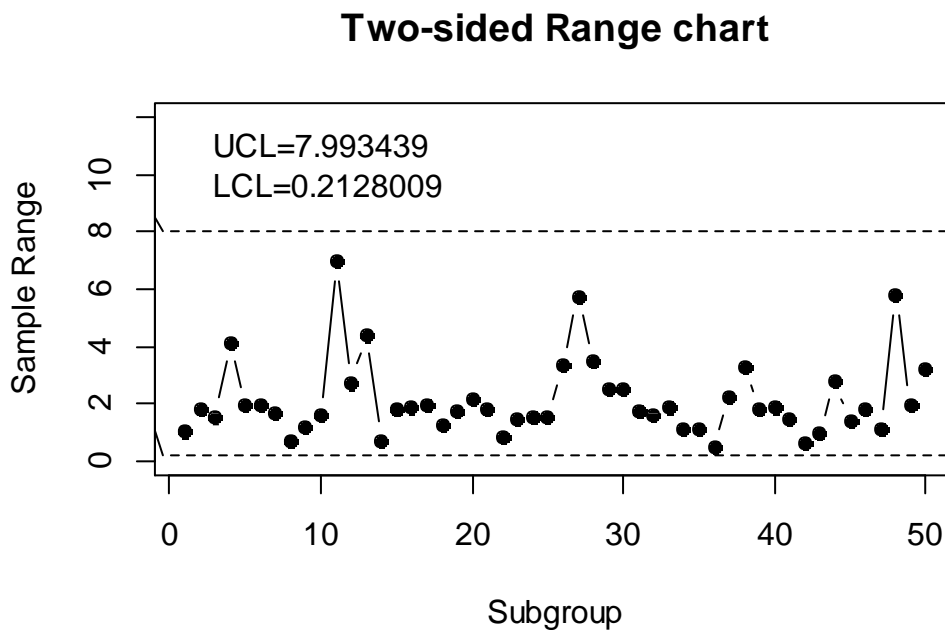
Από τον παραπάνω τύπο (δείτε και Levinson (2011 [7]) προκύπτει ότι το r_p ποσοστιαίο σημείο του εύρους R ($P(R \leq r_p) = p$) είναι

$$r_p = -\frac{\ln(1 - p^{1/(n-1)})}{\lambda}, \quad 0 < p < 1.$$

Για $n = 5$ και $\lambda = 1$, έχουμε ότι

$$r_{0.00135} = 0.2128009, \quad r_{0.99865} = 7.993439.$$

Έτσι το δίπλευρο R διάγραμμα ελέγχου που αντιστοιχεί στα δεδομένα της προηγούμενης παραγράφου με τα παραπάνω όρια ελέγχου πιθανότητας δίνεται στο παρακάτω σχήμα



Σχήμα 3.2. Δίπλευρο R διάγραμμα ελέγχου εκθετικών δεδομένων

Στο νέο διάγραμμα ελέγχου παρατηρούμε ότι όλα τα σημεία βρίσκονται εντός των ορίων ελέγχου. Συγκριτικά με το διάγραμμα της προηγούμενης παραγράφου παρατηρούμε ότι αν δημιουργήσουμε διάγραμμα ελέγχου για το εύρος με όρια ελέγχου πιθανότητας λαμβάνοντας

υπόψιν την πραγματική κατανομή του χαρακτηριστικού το διάγραμμα δεν δίνει πλέον λανθασμένους συναγερούς.

Στον επόμενο πίνακα δίνονται τιμές του ARL για διάφορες μετατοπίσεις στην τιμή της παραμέτρου λ ($\delta = \lambda$) που έχουν σαν αποτέλεσμα τη μετατόπιση στην τιμή της τυπικής απόκλισης. Οι τιμές του ARL υπολογίστηκαν χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση κατανομής

$$F_R(r) = (1 - e^{-\lambda r})^4.$$

Πίνακας 3.2. Τιμές ARL για το R διάγραμμα ελέγχου υποθέτοντας εκθετική κατανομή

$\delta = \lambda$	$n = 5$
0.10	1.101026477
0.20	1.681203183
0.30	3.154933482
0.40	6.503215966
0.50	13.965356311
0.60	30.443317408
0.70	66.033574751
0.80	137.647354724
0.90	254.869957272
1.00	370.370413015
1.10	399.306487685
1.20	350.568275073
1.30	282.962761013
1.40	224.149779351
1.50	178.524790392
1.60	143.973739240
1.70	117.710028857
1.80	97.503288502
1.90	81.738828043
2.00	69.271419884

3.3 Γάμμα Κατανομή

3.3.1 R διάγραμμα ελέγχου με όρια ελέγχου πιθανότητας από κανονική κατανομή

Παράγουμε τυχαία $m = 50$ υποομάδες μεγέθους $n = 5$ η καθεμία από την Γάμμα κατανομή με παραμέτρους $a = 2$ και $\beta = 1$. Σημειώνουμε ότι η κατανομή $G(a, \beta)$, έχει συνάρτηση πυκνότητας που δίνεται από τον τύπο

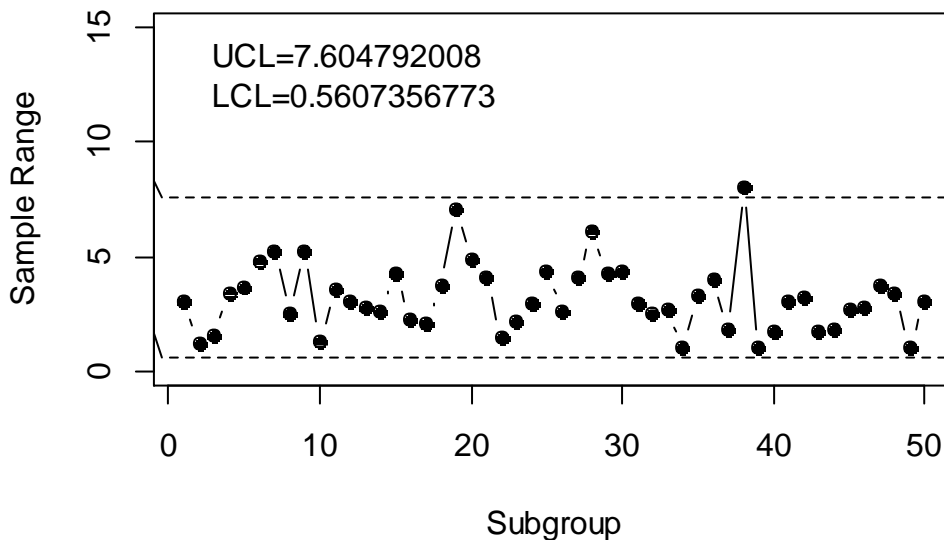
$$f(x) = \frac{1}{\beta^a \Gamma(a)} x^{a-1} e^{-x/\beta}, \quad x \geq 0.$$

Υποθέτοντας ότι το χαρακτηριστικό ακολουθεί την κανονική κατανομή κατασκευάζουμε δίπλευρο R διάγραμμα ελέγχου Φάσης II με όρια ελέγχου πιθανότητας που προκύπτουν με χρήση του Πίνακα 2.3 (δηλαδή υποθέτουμε ότι τα δεδομένα προέρχονται από κανονική κατανομή με εντός ελέγχου τυπική απόκλιση $\sigma_0 = \sqrt{2}$). Επομένως

$$LCL = D_1^* \sigma_0 = (0.39652809) \sqrt{2} = 0.5607356773$$

$$UCL = D_2^* \sigma_0 = (5.37740238) \sqrt{2} = 7.604792008$$

Two-sided Range chart



Σχήμα 3.3. Δίπλευρο R διάγραμμα ελέγχου δεδομένων από κατανομή Γάμμα με όρια ελέγχου πιθανότητας κανονικών δεδομένων

Παρατηρούμε, όπως και στην περίπτωση της εκθετικής κατανομής, ότι υπάρχουν σημεία εκτός των ορίων ελέγχου παρά το γεγονός ότι η διεργασία βρίσκεται εντός ελέγχου. Οι λανθασμένοι συναγερμοί που προκύπτουν καθιστούν προβληματικό το συγκεκριμένο διάγραμμα ελέγχου. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τιμές του ARL, διατηρώντας σταθερή την παράμετρο β και ίση με 1 και δίνοντας στην παράμετρο a διάφορες τιμές οι οποίες συμβολίζονται με το d . Για διάφορες τιμές του d έχουμε και διαφορετικές μετατοπίσεις στην τυπική απόκλιση. Το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής για $d = 2$ παίρνει την τιμή 12.694614214.

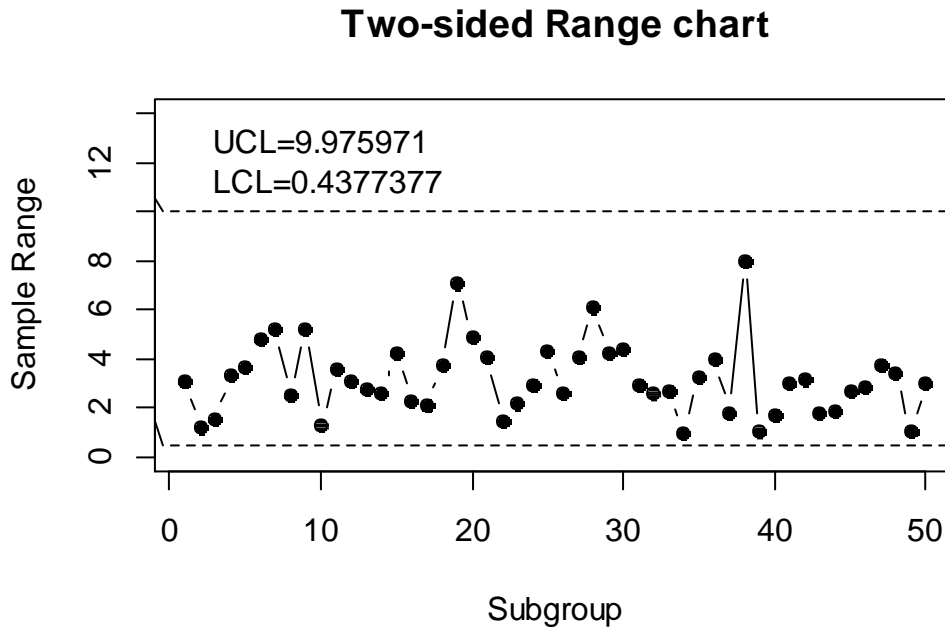
Πίνακας 3.3. Τιμές *ARL* για το *R* διάγραμμα ελέγχου υποθέτοντας την κανονικότητα

$d = a$	$n = 5$
0.10	1.459447689
0.20	2.221200829
0.30	3.479927605
0.40	5.527395341
0.50	8.741867747
0.60	13.454070003
0.70	19.570164694
0.80	26.079642931
0.90	31.185557785
1.00	33.518564437
1.10	33.111392813
1.20	30.947407065
1.30	28.037270611
1.40	25.022908218
1.50	22.211939653
1.60	19.714181321
1.70	17.543881232
1.80	15.675829145
1.90	14.072303384
2.00	12.694614214
2.10	11.507697411
2.20	10.481298456
2.30	9.589951342
2.40	8.812482202
2.50	8.131358561
2.60	7.532069763
2.70	7.002586108
2.80	6.532905433
2.90	6.114681140
3.00	5.740919950

3.3.2 R διάγραμμα ελέγχου με όρια ελέγχου που αντιστοιχούν σε κατανομή Γάμμα

Στην παράγραφο αυτή θα βρούμε αρχικά προσεγγιστικά όρια ελέγχου πιθανότητας βασιζόμενοι στην κατανομή του χαρακτηριστικού ($X \sim G(2,1)$). Παράγουμε τυχαία 100.000 υποομάδες μεγέθους $n = 5$ από την κατανομή $G(2,1)$ και στη συνέχεια υπολογίζουμε τα 100000 εύρη. Στη συνέχεια βρίσκουμε (μέσω της συνάρτησης quantile της R) το 0.00135 και το 0.99865 ποσοστιαίο σημείο των 100000 ευρών, τα οποία θα παίξουν το ρόλο των ορίων

ελέγχου πιθανότητας στο R διάγραμμα. Το νέο δίπλευρο R διάγραμμα ελέγχου φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 3.4. Δίπλευρο R διάγραμμα ελέγχου δεδομένων από την κατανομή Γάμμα

Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχουν σημεία εκτός ορίων ελέγχου. Φαίνεται και σε αυτή την περίπτωση ότι εάν γνωρίζουμε την κατανομή που ακολουθεί το χαρακτηριστικό που μελετάμε είναι προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε διαγράμματα ελέγχου ορίων πιθανότητας βασισμένοι στην πραγματική κατανομή των δεδομένων καθώς το R διάγραμμα φαίνεται να επηρεάζεται αρκετά από την μη κανονικότητα του χαρακτηριστικού X . Παρακάτω δίνεται πίνακας τιμών των ARL όπου είναι φανερό ότι το εντός ελέγχου μήκος ροής παίρνει την τιμή 370.369174962 για $a = 2$, όπως αναμενόταν.

Πίνακας 3.4. Τιμές *ARL* για το *R* διάγραμμα ελέγχου υποθέτοντας Γάμμα κατανομή

$d = a$	$n = 5$
0.10	1.410539151
0.20	2.073541231
0.30	3.143872059
0.40	4.863698456
0.50	7.601540569
0.60	11.895236965
0.70	18.484158880
0.80	28.308322836
0.90	42.446106961
1.00	61.963867390
1.10	87.674982033
1.20	119.840222683
1.30	157.864452064
1.40	200.086138463
1.50	243.779384600
1.60	285.424262006
1.70	321.334524676
1.80	348.413339027
1.90	364.856417503
2.00	370.369174962
2.10	366.085849954
2.20	353.995092209
2.30	336.366478226
2.40	315.341862568
2.50	292.688428428
2.60	269.723786766
2.70	247.347306546
2.80	226.118680362
2.90	206.345278297
3.00	188.158943220

3.4 Συμπεράσματα

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο μελετήσαμε την επιρροή της μη κανονικότητας των δεδομένων στο *R* διάγραμμα ελέγχου. Έχοντας ήδη υπολογίσει πίνακες για τις τιμές των ορίων ελέγχου σε προηγούμενο κεφάλαιο υποθέσαμε την κανονικότητα των δεδομένων παρ' όλο που η κατανομή του υπό μελέτη χαρακτηριστικού την μια φορά ήταν η Εκθετική και την άλλη η Γάμμα και κατασκευάσαμε το διάγραμμα ελέγχου. Δείξαμε ότι το συγκεκριμένο διάγραμμα είναι ακατάλληλο δίνοντας αρκετούς λανθασμένους συναγερούς σε μια εντός ελέγχου

διεργασία. Το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής σε καμία από τις δύο περιπτώσεις που μελετήσαμε δεν πήρε τιμές κοντά στο 370.

Η λύση που προτείνεται είναι η κατασκευή διαγραμμάτων με όρια ελέγχου πιθανότητας βασιζόμενα στην πραγματική κατανομή του χαρακτηριστικού. Τα νέα όρια προκύπτουν από τον υπολογισμό των 0.00135 και 0.99865 ποσοστιαίων σημείων της συνάρτησης κατανομής του εύρους της πραγματικής κατανομής του χαρακτηριστικού. Τα νέα διαγράμματα ελέγχου φαίνεται να είναι πιο αποτελεσματικά δίνοντας εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής 370.

Βιβλιογραφία

Ξένη Βιβλιογραφία

- [1] Acosta-Mejia C.A. and Pignatiello J.J.(2008), Modified R charts for improved performance, Qual. Eng. 20, pp. 361–369.
- [2] Chakraborti S. (2000). Run length, Average Run length and false alarm rate of Shewhart X-bar chart: exact derivations by conditioning, Communications in Statistics, Simulation and Computaton 29, pp. 61-81.
- [3] Chan L.K. and Cui H.J.(2003), Skewness correction x-bar and R-charts for skewed distributions, Naval Res. Log. 50, pp. 555–573.
- [4] Khoo M.B.C.(2005), A modified s chart for the process variance, Qual. Eng. 17,pp. 567–577.
- [5] Khoo M.B.C. and Lim E.G. (2005). An improved R (range) control chart for monitoring the process variance, Qual. Reliab. Eng. Inst. 21 , pp. 43-50.
- [6] Lee P.(2011), Adaptive R charts with variable parameters, Comput. Stat. Data Anal. 55, pp. 2003–2010.
- [7] Levinson W.A. (2011). Statistical Process Control for real- world applications, CRC Press Taylor and Francis Group.
- [8] Montgomery, D. C. (2009). Introduction to Statistical Quality Control, 6th edition. *John Wiley and Sons, Inc.*, New York.
- [9] Rakitzis A.C. and Antzoulakos D.L.(2011), On the improvement of one-sided S control charts, J. Appl. Stat. 38, pp. 2839–2858.
- [10] Shewhart W. A. (1931). Economic Control of Quality of Manufactured Products, New York, N.Y.: Van Nostrand.
- [11] Tadikamalla P. and Popescu D. (2007), Kurtosis correction method for x-bar and R control charts for long-tailed symmetrical distributions, Naval Res. Log. 54 , pp. 371–383.
- [12] Tuprah K. and Ncube M. (1987). A comparison of dispersion quality control charts, Sequential Analysis, 6(2), pp.155-163.
- [13] Zhang G. (2014). Improved R and s control charts for monitoring the process variance , Journal of Applied Statistics.
- [14] Zhang L. and Govindaraju K. (2007), On probability limits for phase II S control chart, International Journal of Statistics, vol. LXV, n. 3, pp. 305-318.

Ελληνική Βιβλιογραφία

- [1] Αντζουλάκος, Δ. (2010). Πανεπιστημιακές σημειώσεις: Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας, Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Μ.Δ.Ε Εφαρμοσμένη Στατιστική.
- [2] Δαμιανού, Χ. (1996). Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας και Αξιοπιστία, Σημειώσεις παραδόσεων, Πανεπιστήμιο Αθηνών, Αθήνα
- [3] Ταγαράς, Γ. (2002). Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας, Εκδόσεις ΖΗΤΗ, Αθήνα.

Παράρτημα Κώδικες

Κ.1 Κώδικας για τον υπολογισμό των σταθερών B_5^* , B_6^* , B_L^* , B_U^* , B_3^* και B_4^* για $\alpha = 0.0027$ και $ARL_0 = 370$ (Πίνακας 2.1)

```
#####  
# S CONTROL CHART WITH PROBABILITY LIMITS a #  
#      CONSTANTS B5, B6, BL, BU, B3 B4      #  
#####  
options(digits=10)  
B3 <- B4 <- B5 <- B6 <- BL <- BU <- c()  
a=0.0027  
n <- 2:25  
B5 <- sqrt(qchisq(a/2, df=n-1)/(n-1))  
B6 <- sqrt(qchisq(1-a/2, df=n-1)/(n-1))  
c4 <- sqrt(2/(n-1))*gamma(n/2)*(1/(gamma((n-1)/2)))  
B3 <- B5/c4  
B4 <- B6/c4  
BL <- sqrt(qchisq(a, df=n-1)/(n-1))  
BU <- sqrt(qchisq(1-a, df=n-1)/(n-1))  
mat <- cbind(n,B5,B6,BL,BU,B3,B4)  
rownames(mat) <- rep("", nrow(mat))  
colnames(mat) <- c("n","B5","B6","BL","BU","B3","B4")  
round(mat,digits=8)
```

n	B5	B6	BL	BU	B3	B4
2	0.00169197	3.20513318	0.00338395	2.99997699	0.00212058	4.01703873
3	0.03675476	2.57053510	0.05199665	2.43197523	0.04147330	2.90053825
4	0.09951769	2.28257189	0.12560505	2.17226859	0.10801669	2.47750782
5	0.16260928	2.10952676	0.19409758	2.01563707	0.17299125	2.24421177
6	0.21815524	1.99104360	0.25201045	1.90814762	0.22926717	2.09245911
7	0.26563401	1.90346392	0.30034136	1.82856510	0.27688415	1.98407948
8	0.30617834	1.83536843	0.34097603	1.76661060	0.31727325	1.90187617
9	0.34106312	1.78048237	0.37556165	1.71662439	0.35186151	1.83685414
10	0.37137176	1.73503535	0.40537243	1.67520027	0.38181074	1.78380590
11	0.39796326	1.69660796	0.43136883	1.64014974	0.40802095	1.73948615
12	0.42150710	1.66356734	0.45427589	1.60999424	0.43118313	1.70175584
13	0.44252536	1.63476653	0.47464670	1.58369423	0.45183054	1.66914149
14	0.46142830	1.60937318	0.49290890	1.56049477	0.47037893	1.64059127
15	0.47854155	1.58676676	0.50939773	1.53983261	0.48715633	1.61533201
16	0.49412638	1.56647398	0.52437956	1.52127791	0.50242466	1.59278110
17	0.50839469	1.54812675	0.53806871	1.50449619	0.51639551	1.57249027
18	0.52152006	1.53143393	0.55063960	1.48922277	0.52924167	1.55410830
19	0.53364608	1.51616186	0.56223570	1.47524510	0.54110569	1.53735563
20	0.54489256	1.50212051	0.57297618	1.46239027	0.55210624	1.52200664
21	0.55536034	1.48915359	0.58296090	1.45051602	0.56234300	1.50787701
22	0.56513490	1.47713121	0.59227423	1.43950405	0.57190033	1.49481448
23	0.57428922	1.46594439	0.60098799	1.42925510	0.58085018	1.48269207
24	0.58288603	1.45550098	0.60916372	1.41968520	0.58925429	1.47140291
25	0.59097958	1.44572241	0.61685450	1.41072273	0.59716600	1.46085633

Κ.2 Κώδικας για τον υπολογισμό των σταθερών D_1^* , D_2^* , D_L^* , D_U^* , D_3^* και D_4^* για $\alpha = 0.0027$ και $ARL_0 = 370$ (Πίνακας 2.3)

```
#####
# R CONTROL CHART WITH PROBABILITY LIMITS a #
#   CONSTANTS D1, D2, DL, DU, D3 D4   #
#####
options(digits=10)
D1 <- D2 <- DL <- DU <- D3 <- D4 <- c()
n <- 2:25
a <- 0.0027
D1 <- qtuke(a/2, n, Inf)
D2 <- qtuke(1-(a/2), n, Inf)
DL <- qtuke(a, n, Inf)
DU <- qtuke(1-a, n, Inf)
#####
#   Evaluation of d2   #
#####
fund2 <- function(n = NA) {
  f <- function(x) {1 - ptuke(x, n, Inf)}
  d2 <- integrate(f, 0, Inf)
  d2 <- d2$value
  return(d2)
}
d2 <- sapply(n, fund2)
#####
D3 <- D1/d2
D4 <- D2/d2

mat <- cbind(n,D1,D2,DL,DU,D3,D4)
rownames(mat) <- rep("", nrow(mat))
colnames(mat) <- c("n","D1","D2","DL","DU","D3","D4")
round(mat,digits=8)

  n      D1      D2      DL      DU      D3      D4
2 0.00239281 4.53274281 0.00478563 4.24260815 0.00212058 4.01703873
3 0.07000363 4.95017506 0.09903466 4.67870314 0.04135940 2.92465228
4 0.22055164 5.19965723 0.27837786 4.93845559 0.10712887 2.52563709
5 0.39652809 5.37740238 0.47338377 5.12314014 0.17048160 2.31193751
6 0.56899583 5.51506523 0.65750635 5.26596958 0.22450796 2.17607226
7 0.72884702 5.62713250 0.82450833 5.38211271 0.26950846 2.08076560
8 0.87439594 5.72145757 0.97449834 5.47978001 0.30710725 2.00950279
9 1.00641122 5.80277497 1.10928601 5.56391535 0.33885599 1.95377897
10 1.12634306 5.87415750 1.23093181 5.63772351 0.36599222 1.90873991
11 1.23570683 5.93771110 1.34131930 5.70340010 0.38945995 1.87139909
12 1.33588290 5.99494106 1.44205842 5.76251255 0.40997429 1.83981075
13 1.42806792 6.04696000 1.53449316 5.81621881 0.42808043 1.81264856
14 1.51327952 6.09461303 1.61973805 5.86539792 0.44419863 1.78897470
15 1.59237682 6.13855635 1.69871812 5.91073260 0.45865674 1.76810553
16 1.66608569 6.17931098 1.77220399 5.95276341 0.47171399 1.74953031
17 1.73501990 6.21729554 1.84084284 5.99192549 0.48357748 1.73285858
18 1.79970472 6.25285229 1.90517866 6.02857417 0.49441571 1.71778646
19 1.86058447 6.28626434 1.96567518 6.06300325 0.50436517 1.70407354
20 1.91804391 6.31776851 2.02272792 6.09545840 0.51353948 1.69152726
21 1.97241483 6.34756480 2.07667718 6.12614760 0.52203269 1.67998956
22 2.02398450 6.37582367 2.12781810 6.15524674 0.52992424 1.66933269
23 2.07300653 6.40269151 2.17640483 6.18290789 0.53728169 1.65944915
24 2.11969912 6.42829497 2.22266316 6.20926230 0.54416167 1.65024916
25 2.16425733 6.45274432 2.26678954 6.23442421 0.55061346 1.64165685
```

K.3 Κώδικας μελέτης των μονόπλευρων άνω R και S διαγραμμάτων ελέγχου (Πίνακες 2.5 και 2.6, Σχήματα 2.1 - 2.4)

```
#-----  
# Control Limits for Upper-sided R and S control chart, a=0.0027  
#-----  
options(digits=10)  
a=0.0027  
n <- 1:25  
BU <- sqrt(qchisq(1-a, df=n-1)/(n-1)) # UCL of S chart  
DU <- qtukey(1-a, n, Inf) # UCL of R chart  
#-----  
# Upper-sided R chart  
# Probability of type II error (betaR) as a function of n,  $\delta(=d)$ ,  $X\sim N(0,\delta^2)$   
# G: Value of the probability of type II error  
#-----  
  
betaR <- function(d,n) {  
  h <- function(r) {n*dnorm(r,0,d)*(pnorm(r+DU[n],0,d)-pnorm(r,0,d))^(n-1)}  
  G <- integrate(h, -Inf, Inf)$value  
  return(G)  
}  
  
#-----  
# Upper-sided R chart  
# Evaluation of the probability of type II error: yR  
# n=5,10,20,  $X\sim N(0,\delta^2)$ ,  $\delta=1(0.01)^5$  ( $\delta=x$ )  
#-----  
  
xlim <- 5  
x <- seq(1,xlim,0.01)  
yR5 <- sapply(x,n=5,betaR)  
yR10 <- sapply(x,n=10,betaR)  
yR20 <- sapply(x,n=20,betaR)  
  
#-----  
# Upper sided S chart  
# Probability of type II error (betaR) as a function of n,  $\delta(=d)$ ,  $X\sim N(0,\delta^2)$   
# G: Value of the probability of type II error  
#-----  
>  
betaS <- function(d,n) {  
  G <- pchisq((n-1)*(BU[n]^2)/(d^2),df=n-1)  
  return(G)  
}  
  
#-----  
# Upper-sided S chart  
# Evaluation of the probability of type II error: yS  
# n=5,10,20,  $X\sim N(0,\delta^2)$ ,  $\delta=1(0.01)^5$  ( $\delta=x$ )  
#-----  
  
xlim <- 5  
x <- seq(1,xlim,0.01)  
yS5 <- sapply(x,n=5,betaS)  
yS10 <- sapply(x,n=10,betaS)  
yS20 <- sapply(x,n=20,betaS)
```



```
#-----
# Difference in type II errors risks for Upper-sided R and S control charts
# Σχήμα 2.3
#-----
```

```
plot(x,yR20-yS20, type="l", main="Difference in type II errors risks \n for one
+ sided upper R and S control charts",
+ col="blue",lty=1,lwd=1,xlab="δ",ylab="(β(δ) of R) - (β(δ) of S)")
lines(x,yR10-yS10, type="l", lty=2, col="red",lwd=2)
lines(x,yR5-yS5, type="l", lty=3, col="green",lwd=3)
leg.names <- c("n=20","n=10","n=5")
legend(locator(1),leg.names,lty=1:3,col=c("blue","red","green"), lwd=1:3)
```

```
#-----
# ARL values for Upper-sided R control chart (n=5,10,20, a=0.0027, X~N(0,δ^2))
# Πίνακας 2.5
#-----
```

```
> x1 <- seq(1,1.5,0.05)
> x2 <- seq(1.6,3,0.1)
> x <-c(x1,x2)
> yR5 <- sapply(x,n=5,betaR)
> yR10 <- sapply(x,n=10,betaR)
> yR20 <- sapply(x,n=20,betaR)
> ARLR5 <- 1/(1-yR5)
> ARLR10 <- 1/(1-yR10)
> ARLR20 <- 1/(1-yR20)
> mat <- cbind(x,ARLR5,ARLR10,ARLR20)
> rownames(mat) <- rep("", nrow(mat))
> colnames(mat) <- c("δ","n=5","n=10","n=20")
> round(mat,digits=3)
```

δ	n=5	n=10	n=20
1.00	370.370	370.370	370.370
1.05	196.789	175.350	156.881
1.10	113.921	92.249	75.329
1.15	70.834	53.000	40.185
1.20	46.766	32.794	23.433
1.25	32.482	21.607	14.739
1.30	23.557	15.020	9.892
1.35	17.727	10.931	7.019
1.40	13.771	8.275	5.226
1.45	10.995	6.482	4.057
1.50	8.992	5.230	3.264
1.60	6.384	3.666	2.312
1.70	4.834	2.780	1.799
1.80	3.849	2.240	1.502
1.90	3.188	1.891	1.322
2.00	2.726	1.656	1.208
2.10	2.390	1.492	1.136
2.20	2.139	1.374	1.088
2.30	1.948	1.288	1.058
2.40	1.798	1.223	1.038
2.50	1.678	1.175	1.024
2.60	1.582	1.138	1.016
2.70	1.504	1.109	1.010
2.80	1.439	1.087	1.007
2.90	1.384	1.069	1.004
3.00	1.339	1.056	1.003

```
#-----
# ARL values for Upper-sided  $\Sigma$  control chart (n=5,10,20, a=0.0027,  $X \sim N(0, \delta^2)$ )
# Πίνακας 2.6
#-----
```

```
> x1 <- seq(1,1.5,0.05)
> x2 <- seq(1.6,3,0.1)
> x <-c(x1,x2)
> yS5 <- sapply(x,n=5,betaS)
> yS10 <- sapply(x,n=10,betaS)
> yS20 <- sapply(x,n=20,betaS)
> ARLS5 <- 1/(1-yS5)
> ARLS10 <- 1/(1-yS10)
> ARLS20 <- 1/(1-yS20)
> mat <- cbind(x,ARLS5,ARLS10,ARLS20)
> rownames(mat) <- rep("", nrow(mat))
> colnames(mat) <- c("δ", "n=5", "n=10", "n=20")
> round(mat,digits=3)
```

δ	n=5	n=10	n=20
1.00	370.370	370.370	370.370
1.05	189.706	156.127	120.892
1.10	106.927	75.614	48.588
1.15	65.224	41.025	23.110
1.20	42.489	24.444	12.605
1.25	29.247	15.741	7.690
1.30	21.090	10.815	5.141
1.35	15.821	7.846	3.706
1.40	12.275	5.958	2.842
1.45	9.803	4.704	2.293
1.50	8.027	3.837	1.929
1.60	5.727	2.767	1.502
1.70	4.365	2.166	1.282
1.80	3.500	1.802	1.161
1.90	2.921	1.569	1.093
2.00	2.515	1.412	1.054
2.10	2.221	1.304	1.031
2.20	2.001	1.227	1.018
2.30	1.832	1.172	1.011
2.40	1.700	1.131	1.006
2.50	1.595	1.100	1.004
2.60	1.511	1.078	1.002
2.70	1.442	1.060	1.001
2.80	1.384	1.047	1.001
2.90	1.337	1.037	1.000
3.00	1.296	1.029	1.000

```
#-----
# Plot of Difference in ARL values for Upper-sided R and S control charts
# n=5,10,20, a=0.0027 (ARL0=370)
# Σχήμα 2.4
#-----
```

```
ARLR <- function(d,n) return(1/(1-betaR(d,n)))
ARLS <- function(d,n) return(1/(1-betaS(d,n)))
d <- seq(1,1.6,0.001)
ARLR5 <- sapply(d,n=5,ARLR)
ARLS5 <- sapply(d,n=5,ARLS)
ARLR10 <- sapply(d,n=10,ARLR)
ARLS10 <- sapply(d,n=10,ARLS)
ARLR20 <- sapply(d,n=20,ARLR)
```

```

ARLS20 <- sapply(d,n=20,ARLS)

plot(d,ARLR20-ARLS20, type="l", main="Difference in ARL values \n for Upper-sided
+ R and S control charts ( $\alpha=0.0027$ ), col="blue", lty=1, lwd=1, xlab="δ",
+ ylab="(ARL of R)- (ARL of S)")
lines(d,ARLR10-ARLS10, type="l", lty=2, col="red",lwd=2)
lines(d,ARLR5-ARLS5, type="l", lty=3, col="green",lwd=3)
leg.names <- c("n=20","n=10","n=5")
legend(locator(1),leg.names,lty=1:3,col=c("blue","red","green"), lwd=1:3)

#-----
# Plot of ARL curve of Upper-sided R control chart (n=5,10,20, a=0.0027, ARL0=370)
# Σχήμα 2.1
#-----

plot(d,ARLR20, type="l", main="ARL curves of Upper-sided R control chart
+ ( $\alpha=0.0027$ )", col="blue", lty=1, lwd=1, xlab="δ", ylab="ARL", xlim=c(1,1.3))
lines(d,ARLR10, type="l", lty=2, col="red",lwd=2)
lines(d,ARLR5, type="l", lty=3, col="green",lwd=3)
leg.names <- c("n=20","n=10","n=5")
legend(locator(1),leg.names,lty=1:3,col=c("blue","red","green"), lwd=1:3)

#-----
# Plot of ARL curve of Upper-sided S control chart (n=5,10,20, a=0.0027, ARL0=370)
# Σχήμα 2.2
#-----

plot(d,ARLS20, type="l", main="ARL curves of Upper-sided S control chart
+ ( $\alpha=0.0027$ )", col="blue", lty=1, lwd=1, xlab="δ", ylab="ARL", xlim=c(1,1.3))
lines(d,ARLS10, type="l", lty=2, col="red",lwd=2)
lines(d,ARLS5, type="l", lty=3, col="green",lwd=3)
leg.names <- c("n=20","n=10","n=5")
legend(locator(1),leg.names,lty=1:3,col=c("blue","red","green"), lwd=1:3)

```

Κ.4 Κώδικας για το παράδειγμα της Παραγράφου 2.5 (Σχήματα 2.14 , 2.15, 2.18 και 2.19)

```
#-----  
# Παραγωγή των προσομοιωμένων δεδομένων  
#-----  
  
process=function(m_ic,sigma_ic,subgroup,size,m_out=0,sigma_out=0,  
flag=F,change_point=0){  
DATA=matrix(0,subgroup,size)  
  for (i in 1:subgroup) {  
    if((flag==TRUE)&(i>=change_point)) {  
      m_ic=m_out  
      sigma_ic=sigma_out  
      flag=FALSE  
    }  
    set.seed(i)  
    DATA[i,]=rnorm(size,m_ic,sigma_ic)  
  }  
  return(as.data.frame(DATA))  
}  
  
#-----  
# Υπολογισμός στατιστικών συναρτήσεων που θα απεικονιστούν στα διαγράμματα R, S  
#-----  
  
sub=40  
data <- as.data.frame(process(0,1,sub,5,m_out=0,sigma_out=1.5,flag=T,  
change_point=7))  
attach(data)  
  
range=c()  
sd=c()  
for(i in 1:sub) {  
  range[i]=(max(data[i,])-min(data[i,]))  
  sd[i]=sd(data[i,])  
}  
  
#-----  
# Δίπλευρο R διάγραμμα ελέγχου  
# Σχήμα 2.14  
#-----  
  
plot(range,type="b",ylim=c(0,6.5), xlim=c(1,sub),xlab="Subgroup", ylab="Sample  
Range", main="Two-sided R chart", pch=19)  
legend("topleft",c("UCL=5.3774", "LCL=0.39653"),bty="n")  
abline(h=5.3774, lty=2)  
abline(h=0.39653, lty=2)  
  
#-----  
# Δίπλευρο S διάγραμμα ελέγχου  
# Σχήμα 2.15  
#-----  
  
plot(sd,type="b",ylim=c(0,2.5), xlim=c(1,sub),ylab="Sample Standard Deviation",  
xlab="Subgroup", main="Two-sided S chart",pch=19)  
legend("topleft",c("UCL=2.10953", "LCL=0.16261"),xpd=TRUE,bty="n")  
abline(h=2.10953, lty=2)  
abline(h=0.16261, lty=2)
```

```

#-----
# Μονόπλευρο άνω R διάγραμμα ελέγχου
# Σχήμα 2.18
#-----

plot(range,type="b",ylim=c(0,6), xlim=c(1,sub),xlab="Subgroup", ylab="Sample
Range", main="Upper-sided R chart", pch=19)
legend("topleft",c("UCL=5.12314"),bty="n")
abline(h=5.12314, lty=2)

```

```

#-----
# Μονόπλευρο άνω S διάγραμμα ελέγχου
# Σχήμα 2.19
#-----

plot(sd,type="b",ylim=c(0,2.5), xlim=c(1,sub),ylab="Sample Standard Deviation",
xlab="Subgroup", main="Upper-sided S chart",pch=19)
legend("topleft",c("UCL=2.01564"),xpd=TRUE,bty="n")
abline(h=2.01564, lty=2)

```

Κ.5 Κώδικας Παραγράφου 3.3.1 (Σχήμα 3.4 και Πίνακας 3.4)

```

#-----
# Παραγωγή 50 υποομάδων μεγέθους δείγματος 5 απο Γάμμα Κατανομή με  $\alpha=2$  και  $\beta=1$ 
#-----

processg=function(shape_ic,scale_ic,subgroup,size)
{
  DATA1=matrix(0,subgroup,size)
  for(i in 1:subgroup) {
    set.seed(i)
    DATA1[i,]=rgamma(size,shape_ic,scale_ic)
  }
  return(as.data.frame(DATA1))
}
data1<- as.data.frame(processg(2,1,50,5))

#-----
# Υπολογισμός στατιστικής συνάρτησης για διάγραμμα R
#-----

subgroup=50
range=c()
for(i in 1:subgroup) {
  range[i]=(max(data1[i,])-min(data1[i,]))
}

#-----
# Παραγωγή νέων ορίων για Γάμμα Κατανομή
#-----

processg1= function(shape_ic,scale_ic,subgroup,size)
{
  DATAg1=matrix(0,subgroup,size)
  for (i in 1:subgroup) {
    set.seed(i)
    DATAg1[i,]=rgamma(size,shape_ic,scale_ic)
  }
}

```

```

    return(as.data.frame(DATAg1))
}
datag1<- as.data.frame(processg1(2,1,100000,5))
subgroup1=100000
rangeg1=c()
for(i in 1:subgroup1) {
  rangeg1[i]=(max(datag1[i,])-min(datag1[i,]))
}
quantile(rangeg1,0.99865)
99.865%
9.975971
quantile(rangeg1,0.00135)
0.135%
0.4377377

#-----
# Δίπλευρο R διάγραμμα ελέγχου με όρια Γάμμα Κατανομής
# Σχήμα 3.4
#-----

plot(rangeg,type="b",pch=19,ylim=c(0,14),ylab="Sample
Range",xlab="Subgroup",main="Two-sided Range chart")
abline(h=0.4377377,lty=2)
abline(h=9.975971,lty=2)
legend("topleft",c("UCL=9.975971", "LCL=0.4377377"),bty="n")

#-----
# Τιμές ARL για το R διάγραμμα ελέγχου με όρια Γάμμα Κατανομής
# Πίνακας 3.4
#-----

betaRgamma1<- function(d) {
  h1gamma1 <- function(x) {5*dgamma(x,d,1)*(pgamma(x+0.439099,d,1)-
pgamma(x,d,1))^(5-1)}
  G1gamma1<- integrate(h1gamma1, 0, Inf)$value
  h2gamma1 <- function(x) {5*dgamma(x,d,1)*(pgamma(x+9.96807,d,1)-
pgamma(x,d,1))^(5-1)}
  G2gamma1 <- integrate(h2gamma1, -Inf, Inf)$value
  Ggamma1<- G2gamma1-G1gamma1
  return(Ggamma1)
}

x<- seq(0.1,xlim,0.1)
yR5gamma1 <- sapply(x,betaRgamma1)
ARLR5gamma1 <- 1/(1-yR5gamma1)
ARLR5gamma1

mat<- cbind(x, ARLR5gamma1)
rownames(mat)<- rep("", nrow(mat))
colnames(mat)<- c(" d ", " ARL ")
round(mat,digits=9)

```