

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ**



**ΤΜΗΜΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗΣ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ**

**Π.Μ.Σ. ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ**

**Διπλωματική Εργασία:**

***Αποτίμηση Δικαιωμάτων Προαίρεσης Με Ένα Ευέλικτο  
Διωνυμικό Μοντέλο***

***Πασχάκη Ευθυμία***

***Επιβλέπων***

Επικ. Καθηγητής Εγγλέζος Νικόλαος

***Τριμελής Επιτροπή***

Καθηγητής Πιπτής Νικήτας

Αναπλ. Καθηγητής Κουρογένης Νικόλαος

Επικ. Καθηγητής Εγγλέζος Νικόλαος

***Πειραιάς, Φεβρουάριος 2020***

## Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική έχει ως αντικείμενο την Αποτίμηση Δικαιωμάτων Προαίρεσης Με Ένα Ευέλικτο Διωνυμικό Μοντέλο. Προκειμένου να γίνει η αποτίμηση των συμβολαίων, αλλά και για σκοπούς σύγκρισης γίνεται χρήση του Διωνυμικού Μοντέλου των Cox-Ross-Rubinstein (1979), του Ευέλικτου Διωνυμικού Μοντέλου του Tian (1999) με μία δεδομένη παράμετρο κλίσης, και του τελευταίου με τη χρήση μίας μεθόδου παρέκτασης.

Αρχικά, παραθέτουμε το θεωρητικό κομμάτι που απαιτείται για την ολοκλήρωση της εμπειρικής μελέτης. Στη θεωρία αναπτύσσεται το μοντέλο των Cox-Ross-Rubinstein (1979) και συγκρίνεται με την επέκτασή του, η οποία είναι το ευέλικτο διωνυμικό μοντέλο με παράμετρο “κλίσης” που αλλάζει το σχήμα και το εύρος του διωνυμικού δέντρου. Αυτή η επέκταση του διωνυμικού μοντέλου φαίνεται να συγκλίνει για οποιαδήποτε τιμή της παραμέτρου κλίσης. Ακόμα πιο ενδιαφέρον είναι το γεγονός ότι το δέντρο μπορεί να αναπροσαρμοστεί μέσω της παραμέτρου κλίσης δίνοντας ως αποτέλεσμα την ακριβέστερη αποτίμηση τυποποιημένων δικαιωμάτων. Εξίσου σημαντική είναι η ύπαρξη μίας μεθόδου παρέκτασης η οποία βελτιώνει τη σύγκλιση του ευέλικτου διωνυμικού μοντέλου, σε αντίθεση με το μοντέλο των Cox-Ross-Rubinstein που η σύγκλιση του χαρακτηρίζεται ασταθής.

Τη σκυτάλη παίρνει η εμπειρική μελέτη στην οποία τα δικαιώματα συνάπτονται βάση ενός υποκείμενου τίτλου, όπου εδώ είναι η εταιρεία Microsoft και για δεδομένο χρονικό ορίζοντα. Κατόπιν, εκτιμάμε τις τιμές των παραμέτρων των μοντέλων αλλά και την προβλεπτική τους ικανότητα εκτός του δείγματος εκτίμησης. Τέλος, με τη βοήθεια διαγραμμάτων γίνεται η σύγκριση των μοντέλων ώστε να καταλήξουμε στο πιο αποδοτικό.

**Λέξεις κλειδιά:** αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης, διωνυμικό δέντρο, ευέλικτο διωνυμικό μοντέλο, Ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς, Αμερικάνικα δικαιώματα πώλησης, παράμετρος-κλίση, μέθοδος παρέκτασης, ομαλή σύγκλιση, χρονικά βήματα, σφάλματα αποτίμησης, εκτίμηση παραμέτρων

## **Abstract**

The theme of this thesis is the Flexible Binomial Option Pricing Model. In order pricing and comparison to be succeeded, we use the binomial model of Cox-Ross-Rubinstein (1979), the Flexible Binomial Model of Tian (1999) with a given "tilt" parameter and the latter with the use of an extrapolation method.

Firstly, we cite the theoretical piece, which is required for the completion of the empirical study. Within this theory, the Cox-Ross-Rubinstein (1979) is developed and compared with its extension, which is the flexible binomial model with a "tilt" parameter, which alters the shape and span of the binomial tree. This extension of binomial model seems to converge with any finite value of the tilt parameter. Even more interesting is the fact that the tree can be recalibrated through the tilt parameter giving as a result the most accurate pricing of standard options. Equally important is the existence of an extrapolation method, which enhances the convergence of the flexible binomial model contrary to the model of Cox-Ross-Rubinstein, where the convergence is characterized as an erratic fashion.

Then the empirical study takes its turn, in which the options are adjusted based on an underlying asset, which is the Microsoft company for a given time horizon. Afterwards, the prices of the models of parameters are estimated as well as the way the models perform out of the sample of estimation. Finally, the comparison of the model is done with the help of plots in order to come up with the most efficient.

**Key Words:** *option pricing, binomial tree, flexible binomial model, European call, American put, tilt parameter, extrapolation method, smooth convergence, time steps, pricing errors, parameters estimation*

## Περιεχόμενα

<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1.....</b>	<b>1</b>
Εισαγωγή.....	1
1.1 Το Ευέλικτο Διωνυμικό Μοντέλο στα δικαιώματα προαίρεσης .....	1
1.2 Ιστορική Αναδρομή.....	3
1.3 Περιγραφή Διπλωματικής .....	8
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2.....</b>	<b>9</b>
Βασικές έννοιες των Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών .....	9
2.1 Δικαιώματα Προαίρεσης ( Options ).....	9
2.2 Διωνυμικό δέντρο .....	15
2.3 Στοχαστικές Διαδικασίες .....	19
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3.....</b>	<b>29</b>
Ευέλικτο Διωνυμικό Μοντέλο .....	29
3.1 Αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης με το ευέλικτο διωνυμικό μοντέλο .....	38
3.2 Βελτιωμένη σύγκλιση για τυποποιημένα δικαιώματα προαίρεσης.....	44
3.3 Μέθοδος παρέκτασης.....	44
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4.....</b>	<b>50</b>
Εμπειρική μελέτη .....	50
4.1 Περιγραφή Δεδομένων Αγοράς .....	51
4.2 Εκτίμηση Παραμέτρων .....	52
4.3 Μελέτη Αποδοτικότητας των μοντέλων εντός δείγματος .....	53
4.4 Μελέτη Προβλεπτικής Ικανότητας.....	61
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5.....</b>	<b>64</b>
Συμπεράσματα .....	64
<b>Βιβλιογραφία.....</b>	<b>65</b>
<b>Παράρτημα.....</b>	<b>67</b>
Κώδικες Matlab.....	67

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

### Εισαγωγή

#### 1.1 Το Ευέλικτο Διωνυμικό Μοντέλο στα δικαιώματα προαίρεσης

Οι Fischer Black & Myron Scholes (1973) παρουσίασαν το πρώτο μοντέλο για την αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης. Θεωρείται το κυρίαρχο υπόδειγμα αποτίμησης δικαιωμάτων προαίρεσης σε συνεχή χρόνο, εφόσον η τιμή του δικαιώματος καθορίζεται αυστηρά από γνωστές παραμέτρους. Το υπόδειγμα αυτό ξεχωρίζει από τα υπόλοιπα, γιατί δίνει τη δυνατότητα αποτίμησης δικαιωμάτων ανεξάρτητα από τις προσωπικές προτιμήσεις των συμμετεχόντων στην αγορά. Βασίζεται δηλαδή στις αποτελεσματικές αγορές, οι οποίες προϋποθέτουν ότι δεν υπάρχει ευκαιρία εξισορροπητικής κερδοσκοπίας. Το κύριο πλεονέκτημα του μοντέλου αυτού είναι η ταχύτητά του, αφού επιτρέπει στον επενδυτή να αποτιμήσει έναν πολύ μεγάλο αριθμό δικαιωμάτων σε πολύ σύντομο χρονικό διάστημα.

Οι υποθέσεις στις οποίες το υπόδειγμα στηρίχτηκε ήταν οι εξής:

1. Αναφέρεται στην αποτίμηση δικαιωμάτων Ευρωπαϊκού τύπου, που εξασκούνται μόνο στην ημερομηνία λήξης τους.
2. Ο υποκείμενος τίτλος δεν πληρώνει μέρισμα.
3. Η διακύμανση των αποδόσεων είναι σταθερή καθ' όλη τη διάρκεια του συμβολαίου.
4. Τα κόστη συναλλαγών και οι φόροι είναι μηδενικά.
5. Οι τιμές των περιουσιακών στοιχείων (π.χ. μετοχές) ακολουθούν την κανονική κατανομή.
6. Τα επιτόκια χωρίς κίνδυνο είναι γνωστά και σταθερά καθ' όλη τη διάρκεια του συμβολαίου.
7. Οι επενδυτές μπορούν να δανείζουν και να δανείζονται στο επιτόκιο χωρίς κίνδυνο.
8. Οι τιμές είναι συνεχείς, δεν υπάρχουν απότομες μεταβολές στις τιμές ούτε ευκαιρίες εξισορροπητικής κερδοσκοπίας.
9. Επιτρέπεται η ανοιχτή προθεσμιακή πώληση των τίτλων (short selling).

(Πηγή, James C. Van Horne, 2002, σελ.113)

Στη συνέχεια, τη σειρά του παίρνει το διωνυμικό μοντέλο. Πρόκειται για το βασικό εργαλείο, που θα χρησιμοποιήσουμε στην εργασία μας για να αποτιμήσουμε τα δικαιώματα προαίρεσης.

Σύμφωνα με το άρθρο του Tian (1999), το διωνυμικό μοντέλο αποτίμησης δικαιωμάτων προαίρεσης επισημοποιήθηκε από τους Cox, Ross και Rubinstein (1979), (*CRR* στο εξής) και είναι ένα πολύ γνωστό και ευρέως χρησιμοποιούμενο μοντέλο για την αποτίμηση τυποποιημένων δικαιωμάτων προαίρεσης σε διακριτό χρόνο. Το μοντέλο αυτό :

- 1) Είναι απλό στη χρήση του.
- 2) Επιτρέπει μία σαφή κατανόηση της έννοιας της εξισορροπητικής κερδοσκοπίας (arbitrage), της αντιστάθμισης κινδύνου (hedging) και της αντιγραφής χαρτοφυλακίου (replication).
- 3) Κάνει εφικτή την αποτίμηση των Αμερικανικών δικαιωμάτων πώλησης.
- 4) Συγκλίνει αρκετά γρήγορα στην τιμή Black-Scholes.

Το μοντέλο των *CRR* αναφέρεται στην κατασκευή ενός διωνυμικού δέντρου υποθέτοντας ότι η τιμή του περιουσιακού στοιχείου ακολουθεί τυχαίο περίπατο. Πρόκειται για ένα πλέγμα που αντιπροσωπεύει τα πιθανά μονοπάτια της κίνησης της τιμής του περιουσιακού στοιχείου εστιάζοντας την προσοχή στη διάρκεια του δικαιώματος προαίρεσης. Το μοντέλο αυτό δίνει επίσης τη δυνατότητα αποτίμησης σε δικαιώματα προαίρεσης, που είναι γραμμένα πάνω σε ένα περιουσιακό στοιχείο το οποίο αποδίδει μέρισμα (π.χ. μετοχή). Όπως θα δούμε παρακάτω, η τιμή του διωνυμικού μοντέλου προσεγγίζει την τιμή Black-Scholes στο όριο καθώς αυξάνεται ο αριθμός των χρονικών βημάτων. Το μοντέλο αυτό είναι βασισμένο στη μη ύπαρξη εξισορροπητικής κερδοσκοπίας.

Στο μοντέλο των *CRR*, κεντρικοί κόμβοι του διωνυμικού δέντρου ορίζονται ως ο μεσαίος κόμβος σε μία χρονική περίοδο. Με άλλα λόγια, υπάρχουν ίσοι αριθμοί κόμβων πάνω και κάτω από αυτό. Η αρχική τιμή του περιουσιακού στοιχείου είναι ένας κεντρικός κόμβος. Έτσι, οι κεντρικοί κόμβοι του διωνυμικού δέντρου σχηματίζουν μία οριζόντια γραμμή, που διέρχεται από την αρχική τιμή του περιουσιακού στοιχείου. Επομένως, το αρχικό μοντέλο των *CRR* μπορεί να θεωρηθεί ότι έχει μηδενική κλίση, επειδή η τιμή του περιουσιακού στοιχείου μετά από μία κίνηση πάνω (ή κάτω) που ακολουθείται από μία κίνηση κάτω (ή πάνω) δε μεταβάλλεται σχετικά με πριν.

Αναφέραμε λοιπόν παραπάνω πως το αρχικό διωνυμικό μοντέλο των *CRR* θεωρείται πως έχει μηδενική κλίση. Το ευέλικτο διωνυμικό μοντέλο (*FB* στο εξής) είναι μία γενίκευση του μοντέλου των *CRR*, που διαθέτει μια παράμετρο "**κλίσης**" που αλλάζει το σχήμα και το εύρος του διωνυμικού δέντρου. Στην περίπτωση που το μοντέλο είναι των *CRR*, η παράμετρος κλίσης την οποία συμβολίζουμε με  $\lambda$  ισούται με μηδέν. Με μία θετική ή αρνητική παράμετρο κλίσης, το ευέλικτο δέντρο μπορεί να κλίνει προς τα πάνω ή προς τα κάτω αντίστοιχα. Με μία θετική παράμετρο κλίσης η κίνηση προς τα πάνω (ή κάτω) είναι μεγαλύτερη (ή μικρότερη) από την αντίστοιχη κίνηση προς τα πάνω (ή κάτω) σε ένα τυποποιημένο δέντρο. Κατά συνέπεια, οι κεντρικοί κόμβοι σχηματίζουν μία ανοδικής κλίσης γραμμή. Έτσι, το εύρος του δέντρου που

προκύπτει μετατοπίζεται προς τα πάνω. Το ακριβώς αντίθετο ισχύει για διωνυμικά δέντρα με παράμετρο κλίσης αρνητική. Η επέκταση του μοντέλου των *CRR* φαίνεται να συγκλίνει για οποιαδήποτε οριστική τιμή της παραμέτρου κλίσης. Το πιο σημαντικό είναι ότι η ευελιξία του νέου μοντέλου επιτρέπει:

- 1) Την κατάλληλη προσαρμογή του διωνυμικού δέντρου, ώστε να είναι εφικτή η ακριβέστερη αποτίμηση των τυποποιημένων δικαιωμάτων προαίρεσης. Συγκεκριμένα, είναι δυνατή η ομαλή σύγκλιση για τυποποιημένα Ευρωπαϊκά και Αμερικάνικα δικαιώματα προαίρεσης.
- 2) Την εφαρμογή μίας μεθόδου παρέκτασης, που χρησιμοποιείται για τη βελτίωση του ρυθμού σύγκλισης για διάφορους τύπους τυποποιημένων δικαιωμάτων προαίρεσης.

Δεδομένου ότι το *FB* μοντέλο καθορίζεται μόνο μέχρι μία αυθαίρετη σταθερά, έχει έναν επιπλέον βαθμό ελευθερίας έναντι του μοντέλου των *CRR*. Σκοπός αυτού του βαθμού ελευθερίας είναι η ικανότητα τροποποίησης του μοντέλου με ορισμένους τρόπους για να επιτύχουμε έναν συγκεκριμένο στόχο. Τέλος, είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι η σύγκλιση των μοντέλων που βασίζονται σε διωνυμικά και τριωνυμικά δέντρα δεν είναι ομαλή. Αυτό σημαίνει ότι:

- ✓ περισσότερα βήματα χρόνου μπορεί να μην εξασφαλίζουν πιο ακριβείς τιμές ή
- ✓ ακόμα και αν υπάρχει αρκετά καλή ακρίβεια τιμών καθώς συγκλίνουν, τα διαδοχικά σφάλματα αποτίμησης είναι αρκετά μεγάλα.

Ανάλογα με τη θέση της τιμής εξάσκησης (για τυποποιημένα δικαιώματα προαίρεσης) σε σχέση με τους κόμβους του δέντρου το σφάλμα προσέγγισης ενδέχεται να διαφέρει. Συγκεκριμένα, με το μοντέλο των *CRR* η μέθοδος παρέκτασης δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί, επειδή η σύγκλιση δεν είναι ομαλή. Αντιθέτως, με το *FB* μοντέλο υπάρχει ένας τρόπος που θα αναλυθεί σε επόμενη ενότητα προκειμένου να επιτευχθεί ομαλή σύγκλιση.

## 1.2 Ιστορική Αναδρομή

Παρά το γεγονός ότι οι συναλλαγές στα δικαιώματα προαίρεσης λάμβαναν χώρα εδώ και πολλά χρόνια, παρέμεναν άγνωστα ως χρηματοοικονομικά προϊόντα. Το πρώτο οργανωμένο χρηματιστήριο παραγώγων λειτούργησε στο Σικάγο στις 26 Απριλίου του 1973 από το Chicago Board of Trades και το Chicago Mercantile Exchange και ονομάστηκε Chicago Board Option Exchange. Στην Ελλάδα, το Χρηματιστήριο Παραγώγων Αθηνών ξεκίνησε τη διαπραγμάτευση τον Αύγουστο του 1999.

Οι Fisher Black , Myron Scholes και Robert Merton (1973) έκαναν μια σημαντική ανακάλυψη στην αποτίμηση των δικαιωμάτων προαίρεσης –

αναπτύσσουν το μοντέλο συνεχούς χρόνου Black – Scholes (ή το Black – Scholes – Merton) ,το οποίο εξακολουθεί μέχρι σήμερα να είναι το κυρίαρχο υπόδειγμα για την εύρεση των τιμών των δικαιωμάτων προαίρεσης. Το μοντέλο αυτό ήταν σημαντικά καινοτόμο, γιατί η τιμή του δικαιώματος καθοριζόταν από γνωστές παραμέτρους.

Έπειτα οι Cox, Ross, και Rubinstein (1979) ανέδειξαν ένα πολύ γνωστό και ευρέως χρησιμοποιούμενο μοντέλο διακριτού χρόνου για την αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης, το διωνυμικό μοντέλο. Σχετίζεται με την κατασκευή του διωνυμικού δέντρου που μοντελοποιεί την κίνηση της τιμής του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου. Το μοντέλο αυτό δεν περιλαμβάνει ευκαιρίες κερδοσκοπίας.

Το άρθρο Jarrow και Rudd (1983) επεκτείνει το κλασσικό μοντέλο των CRR με δύο τρόπους. Πρώτα, αναπτύσσει ένα διωνυμικό μοντέλο με παραμέτρους που εξαρτώνται από το χρόνο και που είναι ίσες με όλες τις στιγμές της αποτίμησης του δέντρου και αυξάνεται με τα αντίστοιχα στιγμιότυπα των αυξήσεων της διαδικασίας αποτίμησης Itô. Έπειτα, εισάγει ένα νέο τριωνυμικό μοντέλο στον φυσικό (ιστορικό) κόσμο που ταιριάζει και πάλι σε όλες τις στιγμές της αποτίμησης του δένδρου και προσομοιώνεται με την αντίστοιχη γεωμετρική κίνηση Brown.

Το άρθρο Hull και White (1990) προτείνει μια τροποποίηση της ρητής μεθόδου πεπερασμένων διαφορών για την αποτίμηση των παραγώγων ασφαλείας. Στο άρθρο αυτό, καθώς μελετώνται μικρότερα χρονικά διαστήματα οι υπολογιζόμενες τιμές του παραγώγου ασφαλείας συγκλίνουν στη λύση της υποκείμενης διαφορικής εξίσωσης. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση οποιουδήποτε παραγώγου ασφαλείας εξαρτώμενου από μία μεταβλητή κατάσταση και μπορεί να επεκταθεί για να αντιμετωπίσει πολλά προβλήματα αποτίμησης παραγώγων όπου υπάρχουν πολλές μεταβλητές κατάσταση. Ενδεικτικά, το άρθρο αυτό απεικονίζει την προσέγγιση χρησιμοποιώντας την εκτίμηση των ομολόγων και των δικαιωμάτων προαίρεσης γραμμένων σε ομόλογα σε δύο διαφορετικές διαδικασίες επιτοκίων.

Το άρθρο των Kunitomo και Ikeda (1992) παρέχει μια γενική μέθοδο αποτίμησης για τα ευρωπαϊκά δικαιώματα προαίρεσης των οποίων η πληρωμή περιορίζεται από κυρτά όρια που καθορίζονται συμβατικά στη διαδικασία των τιμών των υποκείμενων περιουσιακών στοιχείων όταν ακολουθεί τη γεωμετρική κίνηση Brown. Το αποτέλεσμα τους βασίζεται στη γενίκευση της φόρμουλας Levy για την κίνηση Brown από τον T. W. Anderson σε διαδοχική ανάλυση. Δίνει τη ρητή φόρμουλα πιθανότητας ότι η γεωμετρική κίνηση Brown φθάνει σε ένα διάστημα στην ημερομηνία λήξης χωρίς να χτυπήσει ούτε τα κατώτερα ούτε τα ανώτερα κυρτά όρια. Παρόλο που οι γενικοί τύποι αποτίμησης για τα δικαιώματα με όρια εκφράζονται ως άπειρες σειρές στη γενική περίπτωση, η αριθμητική τους μελέτη δείχνει ότι η σύγκλιση της σειράς είναι γρήγορη. Τα



αποτελέσματά τους περιλαμβάνουν τους τύπους δικαιωμάτων με ένα χαμηλότερο όριο από τον Merton (1973) για τα δικαιώματα προαίρεσης που εξαρτώνται από το μονοπάτι των Goldman, Sossin και Gatto (1979) και για ορισμένες εταιρικές κινητές αξίες ως ειδικές περιπτώσεις.

Το άρθρο Tian (1993) προτείνει έναν νέο αποδοτικό αλγόριθμο για τον υπολογισμό των συντελεστών ευαισθησίας (Greek Letters) για δικαιώματα προαίρεσης που χρησιμοποιούν το διωνυμικό δέντρο. Δείχνει επίσης, ότι τα Greeks για Ευρωπαϊκά δικαιώματα προαίρεσης είναι ασυμπτωτικά ισοδύναμα με τη διακριτή εκδοχή των Malliavin Greeks. Αυτό το γεγονός μας επιτρέπει να δείξουμε ότι τα Greeks συγκλίνουν στα Malliavin Greeks σε συνεχή χρόνο. Ο αλγόριθμος υπολογισμού των Greeks για τα Αμερικάνικα δικαιώματα προαίρεσης που χρησιμοποιούν το διωνυμικό δέντρο δίνεται επίσης σε αυτό το άρθρο.

Οι Leisen και Reimer (1996) πρότειναν να θεωρηθεί ως μέτρο η σειρά σύγκλισης της ταχύτητας για τα ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς. Το άρθρο αυτό μελετά σε ένα πρώτο βήμα, το πρόβλημα καθορισμού της τάξης σύγκλισης στην αποτίμηση των αμερικανικών θέσεων πώλησης. Στη συνέχεια, εξετάζει λεπτομερώς την παρέκταση και τον έλεγχο της τεχνικής "Variate" για τη βελτίωση της σύγκλισης και εξηγεί τις παγίδες τους. Έτσι, η έρευνα αποκαλύπτει την ανάγκη για ομαλά συγκλίνοντα μοντέλα προκειμένου να γίνουν μικρότερα τα αρχικά σφάλματα.

Το άρθρο των Broadie και Detemple (1996) αναπτύσσει τα κατώτατα και ανώτερα όρια των τιμών των αμερικανικών δικαιωμάτων προαίρεσης αγοράς και πώλησης που είναι γραμμένα σε περιουσιακά στοιχεία που πληρώνουν μερίσματα. Παρέχει δύο προσεγγίσεις τιμής, μία με βάση το κατώτατο όριο (που ονομάζεται LBA) και μία με βάση τα δύο όρια (που ονομάζεται LUBA). Η προσέγγιση LUBA έχει μέση ακρίβεια συγκρίσιμη με διωνυμικό δέντρο 1.000 βημάτων με ταχύτητα υπολογισμού συγκρίσιμη με διωνυμικό δέντρο 50 βημάτων. Ακόμα, εισάγει μια τροποποίηση της διωνυμικής μεθόδου (που ονομάζεται BBSR), η οποία είναι πολύ απλή στην υλοποίησή της και αποδίδει εξαιρετικά καλά. Επίσης, διεξάγει μια προσεκτική αξιολόγηση μεγάλης κλίμακας πολλών πρόσφατων μεθόδων για τον υπολογισμό των τιμών των αμερικανικών δικαιωμάτων προαίρεσης.

Το άρθρο Heston και Zhou (1997) χαρακτηρίζει τον ρυθμό σύγκλισης ενός δικαιώματος προαίρεσης διακριτού χρόνου πολυεπίπεδων τιμών. Δείχνουμε ότι ο ρυθμός σύγκλισης εξαρτάται από την ομαλότητα της λειτουργίας πληρωμής του δικαιώματος προαίρεσης και είναι πολύ χαμηλότερη από ό, τι συνήθως πιστεύεται, επειδή οι λειτουργίες πληρωμής είναι συχνά τύπου "όλα ή τίποτα" και δεν είναι συνεχώς διαφοροποιήσιμα. Για να βελτιωθεί η ακρίβεια, προτείνουμε δύο απλές μεθόδους, μια προσαρμογή της λύσης διακριτού χρόνου πριν από τη λήξη, και την εξομάλυνση της συνάρτησης πληρωμής η

οποία αποφέρει λύσεις που συγκλίνουν προς το αντίστοιχο όριο συνεχούς χρόνου στο μέγιστο δυνατό ρυθμό που απολαμβάνουν οι λειτουργίες ομαλής πληρωμής. Προτείνουν, επίσης, μια προσέγγιση που συστηματικά αποκομίζει πολυεθνικά μοντέλα συνδυάζοντας τις στιγμές μιας κανονικής κατανομής.

Το άρθρο του P. Boyle (1998) αποτελεί μία επέκταση του μοντέλου των CRR στην αποτίμηση των δικαιωμάτων προαίρεσης. Βασικός σκοπός της μελέτης ήταν ότι η πληρωμή από τα δικαιώματα προαίρεσης εξαρτάται περισσότερο από μία μεταβλητές. Συγκεκριμένα, εξετάζει την περίπτωση κατά την οποία το δικαίωμα προαίρεσης είναι συνάρτηση δύο υποκείμενων μεταβλητών κατάστασης αν και είναι δυνατό η διαδικασία να επεκταθεί σε καταστάσεις που συνεπάγονται μεγαλύτερο αριθμό μεταβλητών κατάστασης.

Το άρθρο του Kou (2003) υποστηρίζει ότι ένα δικαίωμα προαίρεσης που υπόκειται σε φράγμα είναι μια σύμβαση παραγώγου που ενεργοποιείται ή σβήνει όταν η τιμή του υποκείμενου στοιχείου υπερβαίνει ένα ορισμένο επίπεδο. Τα περισσότερα μοντέλα υποθέτουν συνεχή παρακολούθηση του φραγμού. Ωστόσο στην πράξη το μεγαλύτερο μέρος, αν όχι όλο, των δικαιωμάτων προαίρεσης φραγμού που διαπραγματεύονται στις αγορές παρακολουθούνται διακριτικά. Σε αντίθεση με τα συνεχής ομόλογα τους που δεν έχουν λύση κλειστής μορφής ούτε αριθμητική η τιμολόγηση είναι δύσκολη. Αυτή η μελέτη επεκτείνει μια προσέγγιση από τους Broadie, Glasserman και Kou (1997) για διακριτικά δικαιώματα προαίρεσης φραγμού καλύπτοντας τις περισσότερες περιπτώσεις και δίνοντας μια απλούστερη απόδειξη. Οι τεχνικές που χρησιμοποιούνται προέρχονται από διαδοχική ανάλυση, ιδιαίτερα των Siegmund and Yuh (1982) και Siegmund (1985).

Το άρθρο του Walsh (2003) μελετά τη λεπτομερή σύγκλιση του διωνυμικού δέντρου. Είναι γνωστό ότι το σχήμα είναι πρώτης τάξης. Βρίσκει τις ακριβείς σταθερές και δείχνει ότι είναι δυνατή η τροποποίηση της παρεκβολής Richardson για να πάρουμε μια μέθοδο τάξης τριών ημίσεων. Ακόμα, παρατηρεί ότι το δέλτα που χρησιμοποιείται στην αντιστάθμιση συγκλίνει με τον ίδιο ρυθμό. Αυτό αναλύεται πρώτα με την ενσωμάτωση των δέντρων στο μοντέλο Black-Scholes μέσω της ενσωμάτωσης του Skorokhod. Παρατηρούμε ότι αυτή η τεχνική ισχύει σε πολύ πιο γενικές περιπτώσεις.

Το άρθρο Francine Diener και Marc Diener (2004) υποστηρίζει ότι η τιμή ενός Ευρωπαϊκού απλού δικαιώματος προαίρεσης που υπολογίζεται σε ένα διωνυμικό δέντρο συγκλίνει προς την τιμή Black-Scholes όταν το χρονικό βήμα τείνει στο μηδέν. Επιπλέον, παρατηρήθηκε ότι αυτή η σύγκλιση είναι της τάξεως  $1/n$  σε συνηθισμένα μοντέλα και ότι είναι ταλαντευόμενη. Επιπλέον, το άρθρο αυτό υπολογίζει αυτή την ταλαντευόμενη συμπεριφορά χρησιμοποιώντας ασύμπτωτα τις ολοκληρώσεις Laplace, δίδοντας ρητά τους πρώτους όρους ασύμπτωτων. Αυτό, λοιπόν, δείχνει ότι δεν υπάρχει ασύμπτωτη επέκταση με τη συνήθη έννοια αλλά ότι ο ρυθμός σύγκλισης είναι πράγματι της τάξης  $1/n$

στην περίπτωση των συνηθισμένων διωνυμικών μοντέλων από τη στιγμή που εξαφανίζεται ο δεύτερος όρος. Ο επόμενος όρος είναι τύπου  $\overline{C_2}(n)/n$  με  $C_2(n)$  κάποια ρητή περιορισμένη συνάρτηση του  $n$ , που δεν έχει όριο όταν το  $n$  τείνει στο άπειρο.

Το άρθρο των Chang και Palmer (2006) θεωρεί μια γενική τάξη διωνυμικών μοντέλων με μια επιπλέον παράμετρο  $\lambda$ . Δείχνει ότι στην περίπτωση ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς η διωνυμική τιμή συγκλίνει στην τιμή Black-Scholes με συντελεστή  $1/n$  και το πιο σημαντικό, δίνει έναν τύπο για τον συντελεστή  $1/n$  στην επέκταση του σφάλματος. Αυτό μας επιτρέπει κάνοντας ειδικές επιλογές για το  $\lambda$ , να αποδείξουμε ότι η σύγκλιση είναι ομαλή στο ευέλικτο διωνυμικό μοντέλο του Tian και επίσης σε ένα νέο κεντρικό διωνυμικό μοντέλο που προτείνει.

Το άρθρο του Joshi (2007) εισάγει μία νέα οικογένεια διωνυμικών δέντρων ως προσεγγίσεις στο μοντέλο Black-Scholes. Για αυτή την κατηγορία δένδρων, αποδεικνύεται η ύπαρξη πλήρων ασυμπτωτικών επεκτάσεων για τις τιμές των ευρωπαϊκών απλών δικαιωμάτων προαίρεσης και υπολογίζονται ρητά οι τρεις πρώτοι όροι. Ως ειδικές περιπτώσεις, κατασκευάζεται ένα δέντρο με σύγκλιση τρίτης τάξης και αποδεικνύεται η εικασία των Leisen & Reimer (1996) ότι το δένδρο τους έχει δευτερεύουσα σύγκλιση.

Το άρθρο των Chan, Joshi, Tang, και Yang (2008) εξετάζει την απόδοση των τιμών οκτώ τριωνυμικών δέντρων και ενός διωνυμικού δέντρου, που βρέθηκε σε μια προηγούμενη μελέτη ότι είναι αποτελεσματικό κάτω από είκοσι διαφορετικές μεθοδολογίες εφαρμογής για την αποτίμηση των αμερικανικών δικαιωμάτων πώλησης. Καταλήγει στο συμπέρασμα ότι το διωνυμικό δέντρο ταιριάζει με το δέντρο της τρίτης τάξης του Tian που η περικοπή, η παρέκταση και η ομαλότητα του Richardson έχουν καλύτερες επιδόσεις από τα τριωνυμικά δέντρα.

Το άρθρο του Joshi (2009) μελετά 20 διαφορετικές μεθοδολογίες εφαρμογής για κάθε μια από τις 11 διαφορετικές επιλογές των παραμέτρων των διωνυμικών δένδρων και διερευνάται η ταχύτητα σύγκλισης για την αποτίμηση των αμερικανικών δικαιωμάτων πώλησης αριθμητικά. Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι οι πιο αποτελεσματικές μέθοδοι περιλαμβάνουν τη χρήση της περικοπής και της παρέκτασης Richardson και κάποιες φορές την ομαλότητα. Τα πιο αποτελεσματικά δέντρα είναι το δέντρο τρίτης τάξης του Tian που ταιριάζει με το δέντρο και ένα νέο δέντρο σχεδιασμένο για να ελαχιστοποιεί τις ταλαντώσεις.

### 1.3 Περιγραφή Διπλωματικής

Ως τώρα έχουμε κάνει μία μικρή αναφορά για το διωνυμικό μοντέλο των Cox-Ross-Rubinstein (1979) που χρησιμοποιείται ως βασικό εργαλείο για την αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης και έχουμε αναφερθεί στις ευκολίες του. Στη συνέχεια, το μοντέλο αυτό επεκτείνεται και τη θέση του παίρνει το Ευέλικτο Διωνυμικό Μοντέλο του Tian (1999) που με την κατάλληλη προσαρμογή στο δέντρο πετυχαίνει την ακριβέστερη αποτίμηση τυποποιημένων δικαιωμάτων προαίρεσης. Έπειτα, γνωρίσαμε καλύτερα την έννοια του διωνυμικού μοντέλου μέσω της ιστορικής αναδρομής.

Στο κεφάλαιο 2 θέτουμε το απαιτούμενο υπόβαθρο παρουσιάζοντας την έννοια των δικαιωμάτων προαίρεσης, τους βασικούς τύπους που κατηγοριοποιούνται, τα βασικά χαρακτηριστικά τους και τις κατηγορίες που διαιρούνται. Έπειτα, θα συνεχίσουμε με την αποτίμησή τους σε συνεχή χρόνο με τη βοήθεια διάφορων στοχαστικών μοντέλων και κυρίως με το μοντέλο Black-Scholes (1973), και σε διακριτό χρόνο με τη βοήθεια του διωνυμικού μοντέλου των Cox-Ross-Rubinstein (1979).

Στο κεφάλαιο 3 θα παρουσιάσουμε το Ευέλικτο Διωνυμικό μοντέλο του Tian (1999) που με την επιλογή μίας παραμέτρου “κλίσης” επιτρέπει την ομαλή σύγκλιση των τιμών των δικαιωμάτων προαίρεσης στην τιμή Black-Scholes, ενώ κάνοντας χρήση μίας μεθόδου παρέκτασης καταφέρνει τη βελτίωση του ρυθμού σύγκλισης για διάφορους τύπους τυποποιημένων δικαιωμάτων προαίρεσης. Επιπλέον, το Ευέλικτο Διωνυμικό Μοντέλο με την επιλογή της συγκεκριμένης παραμέτρου “κλίσης”, καθώς επίσης και με τη χρήση της μεθόδου παρέκτασης θα συγκριθούν με το μοντέλο των Cox-Ross-Rubinstein (1979).

Στο κεφάλαιο 4 θα πραγματοποιήσουμε μία εμπειρική μελέτη αποτίμησης δικαιωμάτων προαίρεσης με τη βοήθεια του διωνυμικού μοντέλου των Cox-Ross-Rubinstein (1979) και του Ευέλικτου Διωνυμικού Μοντέλου του Tian (1999). Τέλος, επισυνάπτεται παράρτημα με τους κώδικες της Matlab που χρησιμοποιήθηκαν για την εμπειρική μελέτη.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

### Βασικές έννοιες των Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών

Σε αυτό το κεφάλαιο θα γνωρίσουμε βασικές χρηματοοικονομικές έννοιες, που θα μας βοηθήσουν να κατανοήσουμε βαθύτερα το ευέλικτο διωνυμικό μοντέλο, καθώς επίσης και διάφορα χρηματοοικονομικά μοντέλα που μελετούν τη συμπεριφορά του περιουσιακού στοιχείου που εξετάζουμε.

#### 2.1 Δικαιώματα Προαίρεσης ( Options )

Δικαίωμα προαίρεσης καλείται μία συμφωνία (ένα *συμβόλαιο*) μεταξύ δύο αντισυμβαλλομένων (τον αγοραστή και τον πωλητή του δικαιώματος) με τη μεσολάβηση του Χρηματιστηρίου Παραγώγων. Η συμφωνία αυτή δίνει στον αγοραστή το δικαίωμα (και όχι την υποχρέωση) να αγοράσει (ή να πωλήσει, ανάλογα με το είδος του δικαιώματος) από τον πωλητή του δικαιώματος ένα συγκεκριμένο αγαθό  $A$  σε μία προκαθορισμένη τιμή  $K$ , κατά τη διάρκεια μίας χρονικής περιόδου  $[0, T]$  ή σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή  $T$  στο μέλλον. Το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο μπορεί π.χ. να είναι μετοχή, χρηματιστηριακός δείκτης, συνάλλαγμα, αλλά μπορεί σε ορισμένες αγορές να είναι και κάποιο εμπόρευμα.

Το δικαίωμα είναι πιο σύνθετο παράγωγο από τα ΣΜΕ (*Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης*) και τα ΠΣ (*Προθεσμιακά Συμβόλαια*), διότι τώρα ο αγοραστής του δικαιώματος (*holder*) δεν είναι υποχρεωμένος να εξασκήσει το δικαίωμά του (να αγοράσει ή να πωλήσει) παρά μόνο εάν τον συμφέρει. Αντίθετα ο πωλητής (*writer*) του δικαιώματος είναι υποχρεωμένος να πράξει ότι τελικά αποφασίσει ο αγοραστής του δικαιώματος. Το γεγονός αυτό θέτει σε πλεονεκτική θέση τον αγοραστή και για αυτό ο αγοραστής θα πρέπει να καταβάλει ένα αντίτιμο  $C$  (*ασφάλιστρο ή τιμή δικαιώματος - Option price, option premium*) στον πωλητή (ο οποίος ουσιαστικά αναλαμβάνει ρίσκο) για να αποκτήσει το δικαίωμα.

Δύο στοιχειώδεις τύπους που μπορούμε να διακρίνουμε σε δικαιώματα προαίρεσης είναι οι εξής:

1. Το δικαίωμα προαίρεσης αγοράς (**call option**), το οποίο δίνει το δικαίωμα στον κάτοχο της θέσης αγοράς (*long position*) να αγοράσει το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο σε ή μέχρι συγκεκριμένη μελλοντική ημερομηνία, σε συγκεκριμένη τιμή.
2. Το δικαίωμα προαίρεσης πώλησης (**put option**), το οποίο δίνει το δικαίωμα στον κάτοχο της θέσης αγοράς (*long position*) να πωλήσει το

υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο σε ή μέχρι συγκεκριμένη μελλοντική ημερομηνία, σε συγκεκριμένη τιμή.

Τα βασικά χαρακτηριστικά που ορίζονται ρητά στο δικαίωμα προαίρεσης παρουσιάζονται παρακάτω:

- **Υποκείμενο Προϊόν** (ή *asset*): Το υποκείμενο προϊόν μπορεί να είναι ένας τίτλος, μια μετοχή, ένας χρηματιστηριακός δείκτης, ένα αγαθό, βάσει του οποίου συνάπτεται το δικαίωμα. Είναι δηλαδή το προϊόν που ο κάτοχος του δικαιώματος αγοράς δικαιούται να αγοράσει και ο κάτοχος του δικαιώματος πώλησης δικαιούται να πουλήσει.
- **Τιμή εξάσκησης** (ή *exercise price*): Η αμετάβλητη προκαθορισμένη τιμή, στην οποία ο κάτοχος ενός δικαιώματος αγοράς/πώλησης μπορεί να αγοράσει/πωλήσει τον τίτλο (εάν επιλέξει να εξασκήσει το δικαίωμα).
- **Χρόνος μέχρι τη λήξη** (ή *maturity*): Το χρονικό πλαίσιο μέσα στο οποίο ένα δικαίωμα θα εξασκηθεί.
  - Αν η εξάσκηση του δικαιώματος προαίρεσης γίνεται στην ημερομηνία λήξης και μόνο, τότε το δικαίωμα λέγεται *Ευρωπαϊκό (European option)*.
  - Αν η εξάσκηση του δικαιώματος προαίρεσης γίνεται σε οποιαδήποτε στιγμή μέχρι την ημερομηνία λήξης, τότε το δικαίωμα λέγεται *Αμερικάνικο (American option)*.
- **Θέση** (ή *position*): Ο κάτοχος είναι υποχρεωμένος να αγοράσει ή να πουλήσει το περιουσιακό στοιχείο, ανάλογα με τη θέση (*long* ή *short*) που έχει.
- **Ασφάλιστρο** (ή *premium*): Η χρηματική αξία, που πρέπει να καταβάλλει ο αγοραστής του δικαιώματος στον πωλητή του δικαιώματος ανεξάρτητα αν το δικαίωμα εκτελεστεί ή όχι, σαν αντάλλαγμα για την παραχώρηση του δικαιώματος να αγοράσει ή να πουλήσει την υποκείμενη αξία. Το ποσό αυτό καθορίζεται από την προσφορά και τη ζήτηση στην αγορά την οποία διαπραγματεύεται.
- **Το μέγεθος του συμβολαίου**: Είναι ο αριθμός των μεριδίων του υποκείμενου τίτλου, που έχει το δικαίωμα ο κάτοχος (*holder*) να αγοράσει ή να πουλήσει στον εκδότη (*writer*).

**Πίνακας 2.1.** Παράγοντες που επηρεάζουν την τιμή ενός Ευρωπαϊκού ή Αμερικάνικου δικαιώματος προαίρεσης που θα λήξει σε μια μελλοντική στιγμή

Μεταβλητή	European call	European put	American call	American put
Αξία υποκείμενου τίτλου	+	-	+	-
Τιμή εξάσκησης	-	+	-	+
Χρόνος μέχρι τη λήξη	?	?	+	+
Μεταβλητότητα	+	+	+	+
Επιτόκιο χωρίς κίνδυνο	+	-	+	-
Μερίσματα	-	+	-	+

Σημείωση: +: υποδηλώνει ότι η αύξηση της μεταβλητής προκαλεί την αύξηση της τιμής του δικαιώματος προαίρεσης ή την παραμονή της τιμής του δικαιώματος προαίρεσης στο ίδιο επίπεδο. -: υποδηλώνει ότι η αύξηση της μεταβλητής προκαλεί τη μείωση της τιμής του δικαιώματος ή την παραμονή της τιμής του δικαιώματος προαίρεσης στο ίδιο επίπεδο. ?: δείχνει ότι η σχέση είναι αβέβαιη.

Πηγή John C.Hull,2017, σελ.232

Υπάρχουν τέσσερις δυνατές θέσεις σε δικαιώματα προαίρεσης:

1. Θέση αγοράς σε δικαίωμα αγοράς (**long call**)
2. Θέση πώλησης σε δικαίωμα αγοράς (**short call**)
3. Θέση αγοράς σε δικαίωμα πώλησης (**long put**)
4. Θέση πώλησης σε δικαίωμα πώλησης (**short put**)

Οι παραπάνω θέσεις μπορούν να μας δώσουν την πληρωμή και το κέρδος, που κάνει ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα προαίρεσης στη λήξη του. Για τον κάτοχο της θέσης αγοράς σε ένα δικαίωμα αγοράς, συμβολίζοντας με  $K$  την τιμή εξάσκησης,  $T$  το χρόνο λήξης και  $S_T$  την τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου στη λήξη, ισχύει ότι αν:

- $S_T > K$ , τότε το δικαίωμα έχει δυνατότητα εξάσκησης και δίνει κέρδος στον κάτοχο του  $S_T - K$ .
- $S_T \leq K$ , τότε το δικαίωμα δεν έχει δυνατότητα εξάσκησης και λήγει χωρίς αξία με κέρδος μηδέν.

Ως συνέπεια, η πληρωμή από ένα τέτοιο δικαίωμα αγοράς στη λήξη για τον αγοραστή είναι:

$$Payoff = \max\{S_T - K, 0\},$$

Η πληρωμή αυτή, δείχνει ακόμα την αξία του δικαιώματος και συμβολίζεται με  $f_{call}$ .

Το κέρδος από την χρήση του δικαιώματος αγοράς (*call option*) για τον αγοραστή (*long position*) θα είναι (χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η χρονική αξία του χρήματος):

$$(S_T - K) = \max\{S_T - K, 0\} = \begin{cases} S_T - K, & S_T > K \\ 0, & S_T \leq K \end{cases},$$

ενώ αν συνυπολογιστεί και το ασφάλιστρο ( $c$ ) θα είναι  $(K - S_T) - c$ .

Σε αυτό το σημείο να αναφέρουμε, ότι ο επενδυτής είναι αδιάφορος στην ισότητα της τιμής του περιουσιακού στοιχείου στη λήξη με την τιμή εξάσκησης, αφού το κέρδος είναι μηδέν.<sup>1</sup>

Με τον ίδιο τρόπο, για ένα συμβόλαιο πώλησης, παρατηρούμε ότι αν:

- $S_T < K$ , τότε το δικαίωμα έχει δυνατότητα εξάσκησης και δίνει κέρδος στον κάτοχο του  $K - S_T$ .
- $S_T \geq K$ , τότε το δικαίωμα δεν έχει δυνατότητα εξάσκησης και λήγει χωρίς αξία με κέρδος μηδέν.

Ως συνέπεια, η πληρωμή από ένα τέτοιο δικαίωμα αγοράς στη λήξη για τον κάτοχο της θέσης αγοράς είναι:

$$Payoff = \max\{K - S_T, 0\}.$$

Αντίστοιχα, η πληρωμή αυτή δείχνει ακόμα την αξία του δικαιώματος και συμβολίζεται με  $f_{put}$ .

Το κέρδος από την χρήση του δικαιώματος πώλησης (*put option*) για τον αγοραστή (*long position*) θα είναι (χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η χρονική αξία του χρήματος):

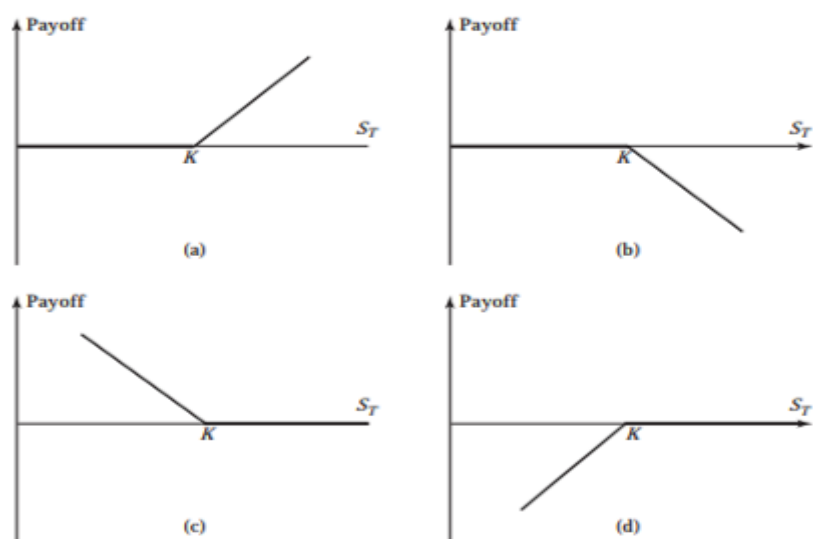
$$(K - S_T) = \max\{K - S_T, 0\} = \begin{cases} K - S_T, & S_T < K \\ 0, & S_T \geq K \end{cases},$$

ενώ αν συνυπολογιστεί και το ασφάλιστρο θα είναι  $(K - S_T) - c$ .

<sup>1</sup>Βλ. Θωμάς Πουφινάς - Χρήστος Φλώρος, Χρηματοοικονομικά Παράγωγα, Εκδ. Δίσιγμα, 2014, Σελ 139.



**Σχήμα 2.1.** Οι γραφικές παραστάσεις των πληρωμών (Payoff) ως συνάρτηση της τιμής του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου για τις τέσσερις δυνατές θέσεις δικαιωμάτων προαίρεσης



Πηγή John C.Hull,2017, σελ.213

## Επιλογή θέσης

Τα κριτήρια<sup>2</sup> που ένας επενδυτής επιλέγει τη θέση που θα πάρει εξαρτώνται από την άποψή του για την αγορά. Επομένως,

- Αν εκτιμά ότι η τιμή του περιουσιακού στοιχείου π.χ. της μετοχής θα ανέβει αρκετά, τότε μπορεί να πάρει θέση αγοράς σε δικαίωμα αγοράς. Έτσι, πετυχαίνει να έχει πρόσβαση στην άνοδο και προστασία στην πτώση.
- Αν εκτιμά ότι η τιμή της μετοχής θα υποχωρήσει λίγο, τότε μπορεί να πάρει θέση πώλησης σε δικαίωμα αγοράς. Καρπώνεται έτσι το αντίτιμο ελπίζοντας ότι η τιμή της μετοχής δε θα ανέβει. Φυσικά είναι εκτεθειμένος στον κίνδυνο εξάσκησης του δικαιώματος αν η τιμή της μετοχής ανέβει τελικά, εκτός αν έχει ήδη καλύψει τη θέση του με αγορά μετοχής.
- Αν εκτιμά ότι η τιμή της μετοχής θα υποχωρήσει αρκετά, τότε μπορεί να πάρει θέση αγοράς σε δικαίωμα πώλησης. Αν συμβεί αυτό, τότε ωφελείται από την πτώση και αν όχι προστατεύεται από την άνοδο, αφού το μέγιστο που μπορεί να χάσει είναι το αντίτιμο. Διαφορετικά, θα μπορούσε να δανειστεί τη μετοχή και να την πουλήσει (*short - selling*).

<sup>2</sup>Βλ. Θωμάς Πουφινάς - Χρήστος Φλώρος, Χρηματοοικονομικά Παράγωγα, Εκδ. Δίσιγμα, 2014, Σελ 145.

- Αν εκτιμά ότι η τιμή της μετοχής θα ανέβει λίγο τότε μπορεί να πάρει θέση πώλησης σε δικαίωμα πώλησης. Εισπράττει έτσι το αντίτιμο με την προσδοκία ότι η τιμή της μετοχής δε θα πέσει. Είναι εκτεθειμένος στον κίνδυνο αν η τιμή της μετοχής υποχωρήσει τελικά.

### Κατηγορίες δικαιωμάτων

- Υπάρχουν δύο τύποι δικαιωμάτων, τα Ευρωπαϊκά και τα Αμερικάνικα.
- Τα δικαιώματα του ίδιου τύπου και επί του ίδιου τίτλου ονομάζονται κλάση (ή *option class*).
- Τα δικαιώματα μίας κατηγορίας, που έχουν την ίδια ημερομηνία λήξης και την ίδια τιμή εξάσκησης είναι γνωστά ως σειρά δικαιωμάτων προαίρεσης (ή *option series*).

Τα δικαιώματα διακρίνονται ανάλογα με τη χρηματοροή, που προκαλούν από την άμεση εξάσκησή τους συγκριτικά με την τιμή εξάσκησης και την τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου. Επομένως, λέγεται:

- *In-the-money*: Θετική χρηματοροή αν εξασκηθεί αμέσως.
- *At-the-money*: Μηδενική χρηματοροή αν εξασκηθεί αμέσως.
- *Out-of-the-money*: Αρνητική χρηματοροή αν εξασκηθεί αμέσως.

### **Πίνακας 2.2.** Συνοπτικός πίνακας των χρηματοροών

	<b>Call Option</b>	<b>Put Option</b>
In-the-money	$S > K$	$S < K$
At-the-money	$S = K$	$S = K$
Out-of-the-money	$S < K$	$S > K$

Σημείωση:  $S$  : τρέχουσα τιμή του περιουσιακού στοιχείου  $K$  : Τιμή Εξάσκησης.

Με βάση τον Πίνακα 2.2 είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι:

- ✓ Ένα δικαίωμα θα εξασκηθεί μόνο όταν είναι in-the-money.
- ✓ Η αξία του δικαιώματος είναι ίση με την *εσωτερική αξία* συν τη *χρονική αξία*.

Η *εσωτερική αξία* για ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς και για ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης είναι αντίστοιχα:

$$\max\{S - K, 0\} \quad , \quad \max\{K - S, 0\} .$$

Η *χρονική αξία* δίνει την αξία του δικαιώματος προαίρεσης που διατηρείται αν αναβληθεί η εξάσκησή του. Ιδιαίτερα σημαντικό είναι το γεγονός ότι ένα Αμερικάνικο δικαίωμα προαίρεσης που είναι *in-the-money* έχει αξία τουλάχιστον όσο και η εσωτερική του αξία, αφού ο κάτοχος του μπορεί να αποδώσει μία θετική χρηματοροή εξασκώντας το αμέσως.

## 2.2 Διωνυμικό δέντρο

Πριν αναλύσουμε το ευέλικτο διωνυμικό μοντέλο για την καλύτερη κατανόησή του θα κάνουμε μία ανασκόπηση στο τυποποιημένο διωνυμικό δέντρο.

Στόχος της αποτίμησης των δικαιωμάτων προαίρεσης με το διωνυμικό μοντέλο είναι η μοντελοποίηση της κίνησης της τιμής του περιουσιακού στοιχείου σε χρόνο διακριτό. Αυτό πετυχαίνεται με τη βοήθεια ενός διωνυμικού δέντρου. Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, βασική προϋπόθεση είναι ότι η τιμή του υποκείμενου τίτλου ακολουθεί τυχαίο περίπατο. Πρόκειται για μία μέθοδο, που είναι στη βάση της αριθμητική.

Η απλούστερη μορφή διωνυμικού δέντρου είναι αυτή, που στη διάρκεια ζωής του δικαιώματος έχει μόνο δύο κλάδους και άρα προβλέπει μόνο δύο μονοπάτια για την τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου. Πιο συγκεκριμένα, σε κάθε κόμβο η τιμή του περιουσιακού στοιχείου θα έχει ανοδική ή καθοδική πορεία. Αναφερόμαστε στη μέθοδο αυτή υποθέτοντας ένα κόσμο ουδέτερο προς τον κίνδυνο.

Θεωρούμε ότι η τιμή της μετοχής στο χρόνο 0 είναι ίση με  $S_0$  και στο χρόνο λήξης  $T$  θα είναι ίση με  $S_T$ . Η μεταβλητή  $S_T$  θεωρείται τυχαία μεταβλητή, αφού δεν είναι γνωστό σήμερα (τη στιγμή 0) ποια τιμή θα λάβει τελικά η μετοχή τη στιγμή  $T$ .

### 2.2.1 Διωνυμικό δέντρο ενός βήματος

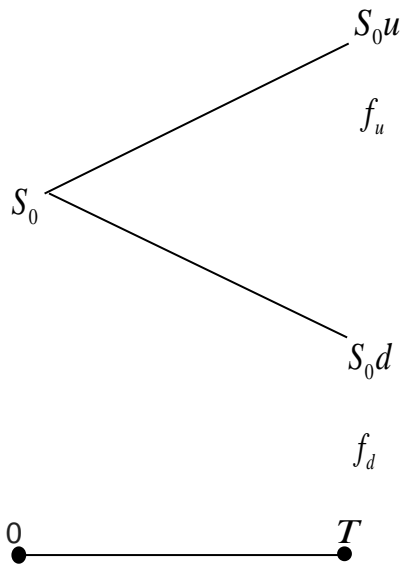
Υποθέτουμε ότι έχουμε ως περιουσιακό στοιχείο μία μετοχή, η οποία δεν καταβάλλει μέρισμα στη διάρκεια ζωής του παραγώγου με τα εξής στοιχεία:

- Αρχική τιμή  $S_0$ .
- Ένα δικαίωμα γραμμένο πάνω σε αυτή τη μετοχή με τιμή  $f$ .
- Το δικαίωμα λήγει τη χρονική στιγμή  $T$ .
- Κατά τη διάρκεια ζωής του option η μετοχή μπορεί να κινηθεί:
  - Είτε προς τα πάνω σε  $S_0u$ , με  $u > 1$  και η πληρωμή του δικαιώματος προαίρεσης να είναι  $f_u$ .
  - Είτε προς τα κάτω σε  $S_0d$ , με  $d < 1$  και η πληρωμή του δικαιώματος προαίρεσης να είναι  $f_d$ .
- Η πληρωμή στη λήξη από ένα δικαίωμα αγοράς για τον αγοραστή:
  - όταν η μετοχή κινηθεί πάνω είναι  $f_u = \max\{S_0u - K, 0\}$ ,
  - όταν η μετοχή κινηθεί κάτω είναι  $f_d = \max\{S_0d - K, 0\}$ .

- Η πληρωμή στη λήξη από ένα δικαίωμα πώλησης για τον αγοραστή:
  - όταν η μετοχή κινηθεί πάνω είναι  $f_u = \max\{K - S_0u, 0\}$ ,
  - όταν η μετοχή κινηθεί κάτω είναι  $f_d = \max\{K - S_0d, 0\}$ .

Θεωρούμε ότι δεν υπάρχουν ευκαιρίες εξισορροπητικής κερδοσκοπίας.

**Σχήμα 2.1.** Διωνυμικό δέντρο ενός χρονικού βήματος



Για να βρούμε την τιμή του παραγώγου τη χρονική στιγμή  $t=0$  θα κατασκευάσουμε ένα χαρτοφυλάκιο από τη μετοχή και το δικαίωμα, το οποίο δεν έχει κίνδυνο. Συγκεκριμένα, κατασκευάζουμε ένα χαρτοφυλάκιο που έχει  $\Delta$  μετοχές (θέση αγοράς) και θέση πώλησης σε ένα δικαίωμα (ή παράγωγο γενικά). Έτσι, η αξία του χαρτοφυλακίου είναι:

$$\Pi = \Delta S - f.$$

Για να είναι το χαρτοφυλάκιο χωρίς κίνδυνο θα πρέπει το αποτέλεσμά του τη χρονική στιγμή  $T$  να είναι το ίδιο ανεξάρτητα από το αν η μετοχή κινηθεί πάνω ή κάτω.

Συνεπώς,

$$\Pi_u = \Pi_d \Rightarrow S_0u\Delta - f_u = S_0d\Delta - f_d$$

Και λύνοντας ως προς  $\Delta$  έχουμε την αναλογία της μεταβολής της τιμής του δικαιώματος προαίρεσης με τη μεταβολή της τιμής της μετοχής, καθώς εμείς κινούμαστε ανάμεσα στους κόμβους:

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0(u - d)}. \quad (2.1)$$

Το ακίνδυνο χαρτοφυλάκιο κερδίζει ένα επιτόκιο χωρίς κίνδυνο  $r$  (με συνεχή κεφαλαιοποίηση). Συνεπώς,

$$\Pi_T = \Pi_0 e^{rT} \Rightarrow \Delta S_0 u - f_u = (\Delta S_0 - f_0) e^{rT}.$$

Στην παραπάνω σχέση αντικαθιστάμε τη σχέση (2.1) και βρίσκουμε τη  $f_0$ :

$$f_0 = e^{-rT} [p f_u + (1-p) f_d],$$

όπου,

$$p = \frac{e^{r\Delta} - d}{u - d}, \quad 0 \leq p \leq 1. \quad (2.2)$$

Η ερμηνεία που μπορούμε να δώσουμε στο  $p$  είναι ως την πιθανότητα κίνησης της τιμής της μετοχής προς τα πάνω, ενώ στο  $(1-p)$  ως την πιθανότητα κίνησης της τιμής της μετοχής προς τα κάτω. Επιλέγοντας την πιθανότητα  $p$  βρισκόμαστε σε ένα κόσμο ουδέτερο προς τον κίνδυνο, που μας αποδίδει το επιτόκιο της τράπεζας  $r$ . Λαμβάνοντας υπόψη αυτές τις πιθανότητες μπορούμε να ορίσουμε την αναμενόμενη τιμή της μετοχής στο χρόνο  $T$  που θα είναι:

$$E(S_T) = p S_0 u + (1-p) S_0 d = p S_0 (u - d) + S_0 d.$$

Και αντικαθιστώντας τη (2.2) καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση:

$$E(S_T) = S_0 e^{rT}.$$

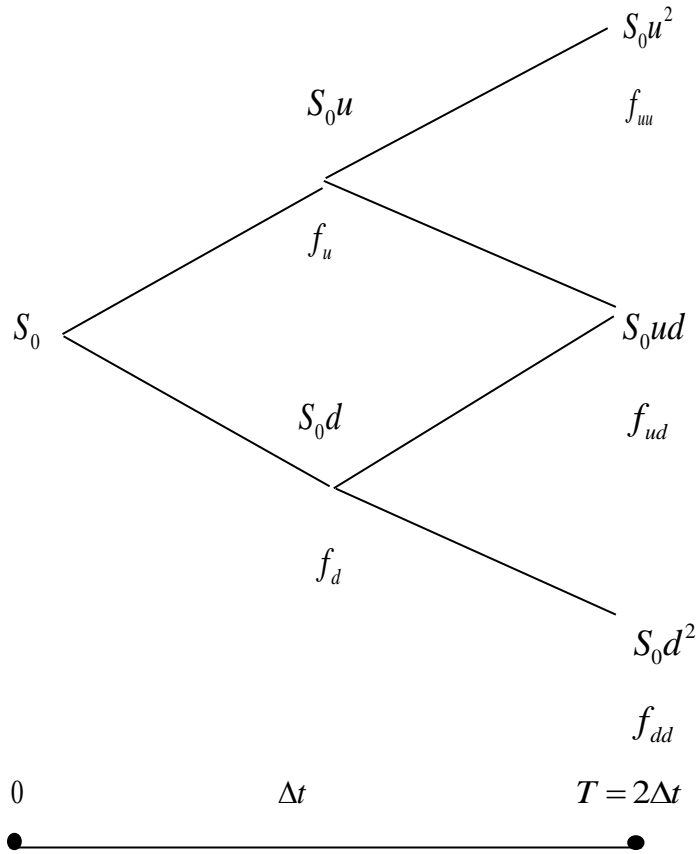
### 2.2.2 Διωνυμικό δέντρο δύο βημάτων

Τώρα προσθέτουμε ακόμα μία χρονική περίοδο και έτσι έχουμε 2 χρονικές περιόδους μέχρι τη λήξη. Ο στόχος μας εδώ πάλι είναι η εύρεση του  $f_0$  με τα εξής στοιχεία:

- Αρχική τιμή  $S_0$ .
- Κατά τη διάρκεια κάθε χρονικού βήματος η μετοχή μπορεί να κινηθεί:
  - Είτε προς τα πάνω σε  $S_0 u$ , με  $u > 1$  και η πληρωμή του δικαιώματος προαίρεσης να είναι  $f_u$ .

- Είτε προς τα κάτω σε  $S_0d$ , με  $d < 1$  και η πληρωμή του δικαιώματος προαίρεσης να είναι  $f_d$ .
- Το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο είναι  $r$ .
- Το μήκος του χρονικού βήματος είναι  $\Delta t$ .

**Σχήμα 2.2.** Διωνυμικό δέντρο δύο χρονικών βημάτων



Η αξία του δικαιώματος προαίρεσης σε κάθε κόμβο δίνεται από:

$$\bullet \quad f_u = e^{-r\Delta t} [pf_{uu} + (1-p)f_{ud}] \quad , \quad (2.3)$$

$$\bullet \quad f_d = e^{-r\Delta t} [pf_{ud} + (1-p)f_{dd}] \quad , \quad (2.4)$$

$$\bullet \quad f_0 = e^{-rT} [pf_u + (1-p)f_d] \quad , \quad (2.5)$$

όπου 
$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} .$$

Τέλος, βρίσκουμε την αξία του δικαιώματος στον αρχικό κόμβο αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2.3) και (2.4) στη σχέση (2.5) όπως την υπολογίσαμε στο διωνυμικό δέντρο ενός βήματος και καταλήγουμε σε:

$$f_0 = e^{-r\Delta t} [p^2 f_{uu} + 2p(1-p)f_{ud} + (1-p)^2 f_{dd}]$$

Οι μεταβλητές  $p^2$ ,  $2p(1-p)$  και  $(1-p)^2$  είναι οι πιθανότητες να βρεθούμε στον πάνω, τον κάτω και το μεσαίο κόμβο. Φυσικά, και αυτή η αποτίμηση είναι συνεπής με την αποτίμηση ουδέτερου κινδύνου (*risk-neutral*).

## 2.3 Στοχαστικές Διαδικασίες

Ως τώρα κάναμε μία ανασκόπηση για την αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης σε **διακριτό χρόνο** με τη βοήθεια του διωνυμικού μοντέλου. Σε αυτήν την ενότητα, θα παρουσιάσουμε την αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης σε **συνεχή χρόνο χωρίς μερίσματα**. Ονομάζουμε στοχαστική ανέλιξη ή στοχαστική διαδικασία κάθε οικογένεια τυχαίων μεταβλητών  $\{X(t) : t \in T\}$  πάνω σε ένα κοινό χώρο πιθανότητας  $(\Omega, F, P)$ .

### Διαδικασία Markov

<sup>3</sup>Μία διαδικασία Markov είναι ένα μαθηματικό σύστημα που μεταβάλλεται από μια κατάσταση σε μια άλλη, ανάμεσα σε ένα πεπερασμένο αριθμό καταστάσεων. Είναι μια τυχαία διαδικασία που δε διατηρεί μνήμη για τις προηγούμενες μεταβολές. Η επόμενη κατάσταση εξαρτάται μόνο από την τωρινή κατάσταση και σε καμιά περίπτωση από αυτές που προηγήθηκαν. Αυτό το συγκεκριμένο είδος "αμνησίας" ονομάζεται μαρκοβιανή ιδιότητα. Συγκεκριμένα, μία μαρκοβιανή αλυσίδα είναι μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών  $X_1, X_2, \dots, X_n$  με τη μαρκοβιανή ιδιότητα, δηλαδή με δεδομένη την παρούσα κατάσταση οι παλαιότερες και οι μελλοντικές καταστάσεις είναι ανεξάρτητες. Μαθηματικά, ορίζεται ως:

$$\Pr(X_{n+1} = x \mid X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = \Pr(X_{n+1} = x \mid X_n = x_n)$$

Οι πιθανές τιμές των  $X_i$  σχηματίζουν ένα αριθμήσιμο σύνολο  $S$ , που ονομάζεται χώρος-καταστάσεων της αλυσίδας.

<sup>3</sup> Πηγή Γ.Ε. Κοκολάκης, Σημειώσεις Στοχαστικών Ανελίξεων, Αθήνα 2017,σελ.7.

## Διαδικασία Wiener (ή κίνηση Brown)

Μία διαδικασία Wiener, γνωστή και ως κίνηση Brown, είναι μία κατηγορία της στοχαστικής διαδικασίας Markov. Για να αντιληφθούμε τη συμπεριφορά μίας μεταβλητής  $Z$ , που ακολουθεί μία διαδικασία Wiener είναι αρκετό να υποθέσουμε τις μεταβολές  $\Delta z$  σε ένα μικρό χρονικό διάστημα  $\Delta t$ . Όμως, οι μεταβολές αυτές πρέπει να ικανοποιούν τις εξής δύο ιδιότητες:

Ιδιότητα 1: Η μεταβολή  $\Delta z$  έχει σχέση με τη μεταβολή  $\Delta t$  μέσω της εξίσωσης:

$$\Delta z = \varepsilon \sqrt{\Delta t}, \quad (2.7)$$

όπου  $\varepsilon$  είναι μία τυχαία κλήρωση ή λήψη από μία τυπική κανονική κατανομή.

Ιδιότητα 2: Οι τιμές του  $\Delta z$  για δύο διαφορετικά χρονικά διαστήματα  $\Delta t$  είναι ανεξάρτητες.

Από την πρώτη ιδιότητα προκύπτει ότι  $\Delta z$  ακολουθεί και αυτή κανονική κατανομή με:

- μέση τιμή του  $\Delta z = 0$ ,
- διακύμανση του  $\Delta z = \Delta t$ ,
- τυπική απόκλιση του  $\Delta z = \sqrt{\Delta t}$ .

Από τη δεύτερη ιδιότητα συμπεραίνουμε ότι η  $\Delta z$  ακολουθεί μία διαδικασία Markov. Ας θεωρήσουμε ένα χρονικό διάστημα  $[0, T]$  με λήξη τη χρονική στιγμή  $T$ . Η μεταβολή στην τιμή  $Z$  κατά τη διάρκεια μίας μεγάλης περιόδου  $T$  μπορεί να συμβολιστεί ως  $z(T) - z(0)$  και μπορεί να θεωρηθεί ως το άθροισμα των μεταβολών  $Z$  σε  $N$  μικρά διαστήματα μεταβολής μήκους  $\Delta t$ , όπου:

$$N = \frac{T}{\Delta t}.$$

Επομένως,

$$z(T) - z(0) = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \sqrt{\Delta t}, \quad (2.8)$$

όπου  $\varepsilon_i (i=1, 2, \dots, N)$  είναι τυχαίες λήψεις από  $N(0,1)$ . Από τη δεύτερη ιδιότητα είναι γνωστό ότι τα  $\varepsilon_i$  είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Από τις εξισώσεις (2.7) και (2.8) προκύπτει ότι το  $z(T) - z(0)$  κατανέμεται κανονικά με:

- μέση τιμή  $[z(T) - z(0)] = 0$ ,
- διακύμανση  $[z(T) - z(0)] = N\Delta t = T$ ,
- τυπική απόκλιση  $[z(T) - z(0)] = \sqrt{T}$ .



## Γενικευμένη Διαδικασία Wiener

Χρησιμοποιούμε τη διαδικασία αυτή για να μοντελοποιήσουμε την κίνηση της τιμής του περιουσιακού στοιχείου (π.χ. μετοχή). Με τη βοήθεια της γενίκευσης καταφέρνουμε να έχουμε μία αναμενόμενη απόδοση διαφορετική του μηδενός και διακύμανση διαφορετική του χρόνου λήξης. Η διαδικασία Wiener λαμβάνει τη μορφή:

$$dx = adt + b dz .$$

Ο πρώτος όρος συμβολίζει ότι η διαδικασία έχει μία τάση  $a$  ανά μονάδα χρόνου και ο δεύτερος μπορεί να θεωρηθεί ότι προσθέτει θόρυβο ή μεταβλητότητα στο μονοπάτι που ακολουθεί η διαδικασία. Η ποσότητα αυτού του θορύβου είναι  $b$  φορές μία διαδικασία Wiener.

Σε ένα μικρό χρονικό διάστημα  $\Delta t$  η μεταβολή της  $x$  δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta x = a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t} .$$

Συνεπώς, η  $\Delta x$  ακολουθεί κανονική κατανομή με:

- μέση τιμή  $a\Delta t$ ,
- διακύμανση  $b^2\Delta t$ ,
- τυπική απόκλιση  $b\sqrt{\Delta t}$ .

Έτσι και σε ένα μεγαλύτερο χρονικό διάστημα λήξης  $T$  η μεταβολή της  $x$  ακολουθεί κανονική κατανομή με:

- μέση τιμή  $aT$ ,
- διακύμανση  $b^2T$ ,
- τυπική απόκλιση  $b\sqrt{T}$ .

**Παράδειγμα:** Η ταμειακή θέση της εταιρίας αρχίζει με \$50 σε χιλιάδες. Ακολουθεί μία γενικευμένη μέθοδο Wiener με  $a = 20/\text{χρόνο}$  και  $b^2 = 900/\text{χρόνο}$ . Έχουμε ότι:

$$x = x_0 + 20\Delta t + 30\varepsilon\sqrt{\Delta t} .$$

Στο τέλος του πρώτου χρόνου η ταμειακή θέση θα έχει κανονική κατανομή με:

- μέση τιμή  $50 + 20 \times 1 = 70$ ,
- διακύμανση  $900 \times 1 = 900$ ,
- τυπική απόκλιση  $\sqrt{900} = 30$ .

Στο τέλος του εξαμήνου η ταμειακή θέση θα έχει κανονική κατανομή με:

- μέση τιμή  $50 + 20 \times 1/2 = 60$ ,
- διακύμανση  $900 \times 1/2 = 450$ ,

- τυπική απόκλιση  $\sqrt{450} = 21.21$ .

### Διαδικασία Itô

Μία γενικευμένη διαδικασία Wiener, όπου τα  $a$  και  $b$  είναι συναρτήσεις της μεταβλητής  $x$  και του χρόνου  $t$  λέγεται διαδικασία Itô και έχει τη μορφή:

$$dx = \alpha(x, t)dt + b(x, t)dz.$$

Σε ένα μικρό χρονικό διάστημα  $[t, t + \Delta t]$ , η μεταβλητή αλλάζει από  $x$  σε  $x + \Delta x$  όπου:

$$\Delta x = \alpha(x, t)\Delta t + b(x, t)\varepsilon\sqrt{\Delta t}.$$

Η σχέση αυτή περιέχει μία μικρή προσέγγιση. Η υπόθεση που γίνεται είναι ότι τα ποσοστά μεταβολής και διακύμανσης παραμένουν σταθερά στο διάστημα  $[t, t + \Delta t]$ .

### Η στοχαστική διαδικασία της τιμής της μετοχής

Είναι δελεαστικό να υποθέσουμε ότι οι τιμές των μετοχών ακολουθούν τη γενικευμένη μέθοδο Wiener με σταθερά αναμενόμενο όρο τάσης και διακύμανσης. Ωστόσο, αν ίσχυε αυτό, η αναμενόμενη απόδοση των επενδυτών θα ήταν ανεξάρτητη από την τιμή της μετοχής, όπως αποτυπώνεται από το σταθερό αναμενόμενο όρο τάσης. Οι επενδυτές όμως, αναμένουν απόδοση, που είναι ανάλογη της τιμής της μετοχής.

Αν  $S$  είναι η τιμή της μετοχής και  $\mu$  η ποσοστιαία απόδοση της μετοχής, η τάση δίνεται από το γινόμενο  $\mu S$  για μερικές σταθερές παραμέτρους  $\mu$ . Τότε στο χρονικό διάστημα  $\Delta t$  η αναμενόμενη μεταβολή στο  $S$  είναι  $\mu S \Delta t$ . Υποθέτουμε ακόμα ότι η μεταβολή της τιμής της μετοχής είναι γνωστή με βεβαιότητα, που σημαίνει πως η διακύμανση είναι μηδενική. Τότε ολοκληρώνοντας στο χρόνο  $[0, t]$  καταλήγω να έχω:

$$S = \mu S dt \Rightarrow dS / S = \mu dt \Rightarrow S = S_0 e^{\mu t},$$

όπου  $S_0$  συμβολίζει την τιμή της μετοχής τη στιγμή  $t = 0$ .

Κατ' αναλογία και η διακύμανση της μεταβολής της τιμής της μετοχής θα πρέπει να είναι ανάλογη της τιμής της μετοχής στο χρονικό διάστημα  $\Delta t$ . Αν  $\sigma^2$  αντανakλά τη διακύμανση της ποσοστιαίας απόδοσης της τιμής της μετοχής, τότε στο χρονικό διάστημα  $\Delta t$  η διακύμανση της μεταβολής της τιμής της μετοχής είναι  $\sigma^2 S^2 \Delta t$ . Έτσι, προκύπτει το μοντέλο:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \Leftrightarrow dS / S = \mu dt + \sigma dz . \quad (2.9)$$

Η σχέση (2.9) ονομάζεται γεωμετρική κίνηση Brown και αποτελεί το πιο διαδεδομένο και ευρέως χρησιμοποιούμενο μοντέλο για τη συμπεριφορά της τιμής της μετοχής.

Η εκδοχή του μοντέλου αυτού σε **διακριτό χρόνο** είναι η εξής:

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta z \Leftrightarrow \Delta S / S = \mu \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t} . \quad (2.10)$$

Το αριστερό μέρος της εξίσωσης (2.10) εκφράζει την απόδοση της μετοχής για το μικρό χρονικό διάστημα  $\Delta t$ , ενώ το  $\varepsilon \sim N(0,1)$ . Ο όρος  $\mu \Delta t$  είναι η αναμενόμενη τιμή της απόδοσης αυτής και ο όρος  $\sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}$  αποτελεί το στοχαστικό όρο της απόδοσης. Η διακύμανση του στοχαστικού όρου και επομένως και της απόδοσης είναι ίση με  $\sigma^2 \Delta t$ . Η εξίσωση (2.10) δείχνει ότι το  $\frac{\Delta S}{S}$  είναι κανονικά κατανομημένο με:

- μέση τιμή  $\mu \Delta t$ ,
- διακύμανση  $\sigma^2 \Delta t$ ,
- τυπική απόκλιση  $\sigma \sqrt{\Delta t}$ .

**Παράδειγμα:** Μία μετοχή, η οποία δεν πληρώνει μέρισμα έχει μεταβλητότητα 30%/χρόνο και αναμενόμενο ρυθμό απόδοσης 15%/χρόνο. Σε αυτήν την περίπτωση,  $\mu = 0.15$  και  $\sigma = 0.30$ , η τιμή της μετοχής ακολουθεί:

$$\frac{dS}{S} = 0.15 dt + 0.30 dz .$$

Αν  $S$  είναι η τιμή της μετοχής σε μία συγκεκριμένη στιγμή  $t$  και  $\Delta S$  είναι η αύξηση ή μείωση της στο επόμενο χρονικό διάστημα  $[t, t + \Delta t]$ , τότε:

$$\frac{\Delta S}{S} = 0.15 \Delta t + 0.3 \varepsilon \sqrt{\Delta t} , \text{ όπου } \varepsilon \sim N(0,1) .$$

Επομένως, στο διάστημα μίας εβδομάδας που ισοδυναμεί με 0.0192 χρόνια με την αρχική τιμή της μετοχής να είναι \$100 η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\Delta S = 100(0.15 \times 0.0192 + 0.3 \sqrt{0.0192} \varepsilon) \quad , \text{ όπου } \varepsilon \sim N(0,1) .$$

$$\Delta S = 0.288 + 4.16 \varepsilon$$

Το  $\Delta S$  κατανέμεται κανονικά με:

- μέση τιμή 0.288,
- τυπική απόκλιση 4.16.

## Το Λήμμα Itô

Χρησιμοποιούμε το Λήμμα του Itô για να συνδέσουμε την τιμή του δικαιώματος προαίρεσης με την τιμή του περιουσιακού στοιχείου.

Έστω ότι μία μεταβλητή  $x$  ακολουθεί μία διαδικασία Itô:

$$dx = \alpha(x, t)dt + b(x, t)dz .$$

Έστω  $G$  μία συνάρτηση της  $x$  και του χρόνου  $t$ . Τότε η  $G$  ακολουθεί μία διαδικασία Itô, που δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$dG = \left( \frac{\partial G}{\partial x} \alpha + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} b dz . \quad (2.11)$$

Συνεπώς, πρόκειται για μία διαδικασία Itô που έχει όρο τάσης  $\left( \frac{\partial G}{\partial x} \alpha + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right)$  και ρυθμό διακύμανσης  $\left( \frac{\partial G}{\partial x} \right)^2 b^2$ .

Η σπουδαιότητα του λήμματος του Itô έγκειται στο γεγονός πως οι τιμές των δικαιωμάτων είναι συναρτήσεις της τιμής του υποκείμενου τίτλου και του χρόνου.

## Η λογαριθμοκανονική κατανομή

Ορίζω τον λογάριθμο της τιμής του περιουσιακού στοιχείου (π.χ. μετοχή) με :  
 $G = \ln S$

Οι μερικές παράγωγοι ορίζονται ως εξής:

$$\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S}, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}, \quad \frac{\partial G}{\partial t} = 0 .$$

Αντικαθιστώντας στην (2.11) τις μερικές παραγώγους παρατηρούμε ότι η διαδικασία, που ακολουθείται από το λογάριθμο της τιμής του περιουσιακού στοιχείου είναι:

$$dG = d \ln S = \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz .$$

Αυτή είναι μία γενικευμένη διαδικασία Wiener με σταθερούς όρους τάσης  $\left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)$  και διακύμανσης  $\sigma^2$  αντίστοιχα.

Η μεταβολή της  $G$ , ήτοι  $\ln S_T - \ln S_t$  ανάμεσα στη χρονική στιγμή  $t$  και τη χρονική στιγμή  $T$  ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή και διακύμανση

$(\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)$  και  $\sigma^2(T-t)$  αντίστοιχα. Έτσι, προκύπτει ότι η παραπάνω διαφορά ακολουθεί κανονική κατανομή ως εξής:

$$\ln S_T - \ln S_t \sim N[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t), \sigma\sqrt{T-t}] \quad . \quad (2.12)$$

Και τελικά,

$$\ln S_T \sim N[\ln S_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T, \sigma\sqrt{T}] \quad . \quad (2.13)$$

Επομένως, η  $S_T$  ακολουθεί τη λογαριθμοκανονική κατανομή με:

- $E(S_T) = S_t e^{\mu(T-t)}$ ,
- $Var(S_T) = S_t^2 e^{2\mu(T-t)} [e^{\sigma^2(T-t)} - 1]$ .

**Παράδειγμα:** Η αρχική τιμή μίας μετοχής είναι \$100, η αναμενόμενη απόδοση 10% κατ' έτος και η μεταβλητότητα 20% κατ' έτος. Η κατανομή της πιθανότητας της μετοχής σε 1 έτος από σήμερα δίνεται από τη σχέση (2.13):

$$\ln S_T \sim N[\ln 100 + (0.10 - \frac{0.20^2}{2})1, 0.20\sqrt{1}],$$

$$\ln S_T \sim N(4.705, 0.20) .$$

### Η κατανομή του ρυθμού απόδοσης

Ας θεωρήσουμε ως περιουσιακό στοιχείο μία μετοχή. Συμβολίζοντας με  $\eta$  την κατά έτος απόδοση με συνεχή κεφαλαιοποίηση της μετοχής στο διάστημα  $[0, T]$  λαμβάνουμε την εξίσωση:

$$S_T = S_t e^{\eta(T-t)} \Rightarrow \eta = \frac{1}{T-t} \ln \frac{S_T}{S_t} \Rightarrow \eta = \frac{\ln S_T - \ln S_t}{T-t} .$$

Επομένως, αν συνδυάσουμε τη σχέση αυτή με τη σχέση (2.12) καταλήγουμε ότι η  $\eta$  ακολουθεί κανονική κατανομή:

$$\eta \sim \varphi\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \frac{\sigma}{\sqrt{T-t}}\right) .$$

## Η διαφορική εξίσωση Black – Scholes

Η διαφορική εξίσωση Black – Scholes προκύπτει μέσω της κατασκευής ενός χαρτοφυλακίου από το δικαίωμα και το περιουσιακό στοιχείο (π.χ. τη μετοχή), που δεν έχει κίνδυνο. Οι αντίστοιχες εξισώσεις διαφορών είναι:

$$1) dS = \mu S dt + \sigma S dz ,$$

όπου η εξίσωση αυτή δείχνει ότι η κίνηση της τιμής του περιουσιακού στοιχείου ακολουθεί μία διαδικασία Itô που έχει στιγμιαίο αναμενόμενο όρο τάσης και διακύμανσης.

Η αντίστοιχη τιμή της μετοχής στη διακριτή περίπτωση είναι:

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta z , \quad (2.14)$$

και

$$2) df = \left( \frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S \Delta z ,$$

όπου η διακριτή περίπτωση του Λήμμα Itô δίνει:

$$\Delta f = \left( \frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S \Delta z . \quad (2.15)$$

Η εξίσωση αυτή, δείχνει την αξία του παραγώγου να ικανοποιεί το λήμμα του Itô. Αυτές οι δύο εξισώσεις δείχνουν τη μεταβολή στο περιουσιακό στοιχείο και στο δικαίωμα αντίστοιχα για ένα μικρό χρονικό διάστημα.

Μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα χαρτοφυλάκιο από το περιουσιακό στοιχείο και το παράγωγο. Έτσι λοιπόν, συγκρίνοντας τις δύο ανωτέρω εξισώσεις παρατηρούμε ότι το χαρτοφυλάκιο αποτελείται από μία *θέση πώλησης* στο παράγωγο και *θέση αγοράς* σε  $\frac{\partial f}{\partial S}$  μερίδια περιουσιακού στοιχείου. Η αξία του χαρτοφυλακίου θα είναι:

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S . \quad (2.16)$$

Η μεταβολή της αξίας του θα είναι:

$$\Delta \Pi = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S} \Delta S . \quad (2.17)$$

Το  $\frac{\partial f}{\partial S}$  δε μεταβάλλεται, καθώς αντιπροσωπεύει τον αριθμό των μεριδίων του περιουσιακού στοιχείου που έχουν συμπεριληφθεί στο χαρτοφυλάκιο το οποίο δεν αναδιαρθρώνεται.

Επομένως, στη σχέση (2.17) κάνω αντικατάσταση τις εξισώσεις (2.14) και (2.15) και καταλήγω στην εξίσωση:

$$\Delta\Pi = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2\right) \Delta t \quad . \quad (2.18)$$

Παρατηρούμε λοιπόν, ότι η εξίσωση αυτή δεν περιλαμβάνει τον όρο  $\Delta z$  και συνεπώς μπορούμε να ισχυριστούμε ότι το χαρτοφυλάκιο δεν έχει κίνδυνο κατά τη διάρκεια του διαστήματος  $\Delta t$ . Άρα, το χαρτοφυλάκιο θα πρέπει να έχει την ίδια απόδοση με το περιουσιακό στοιχείο χωρίς κίνδυνο, διαφορετικά θα υπήρχαν ευκαιρίες εξισορροπητικής κερδοσκοπίας. Συνεπώς, ισχύει:

$$\Delta\Pi = r\Pi\Delta t \quad .$$

Στη σχέση αυτή αντικαθιστώ τις εξισώσεις (2.18) και (2.16) και καταλήγω στην εξίσωση:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2\right) \Delta t = r\left(f - \frac{\partial f}{\partial S} S\right) \Delta t$$

ή

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf} \quad . \quad (2.19)$$

Αυτή είναι η διαφορική εξίσωση Black – Scholes. Έχει άπειρες λύσεις και για αυτό το λόγο χρησιμοποιώ συνθήκες, προκειμένου να βρω την τιμή του παραγώγου.

### Κίνδυνος-Ουδέτερη αποτίμηση

Απεικονίζουμε την ουδέτερη αποτίμηση από την αποτίμηση ενός forward συμβολαίου.

- Η τιμή του συμβολαίου με *θέση αγοράς* στη λήξη είναι  $S_T - K$ .
- Η τιμή του συμβολαίου στο χρόνο  $t$  είναι  $f = e^{-r(T-t)} \hat{E}_t(S_T - K)$ , όπου  $\hat{E}$  να συμβολίζει την αναμενόμενη αξία σε ένα κόσμο ουδέτερο προς τον κίνδυνο.

Αντικαθιστώντας όπου  $\mu = r$  βρισκόμαστε στον κόσμο ουδέτερου κινδύνου.

Έτσι, 
$$\hat{E}(S_T) = S e^{r(T-t)} \quad .$$

Και επομένως,

$$f = e^{-r(T-t)} \hat{E}(S_T) - K e^{-r(T-t)} = S - K e^{-r(T-t)} \quad ,$$

η οποία συμπίπτει με τη σχέση (2.13).

Ο τύπος των Black-Scholes για τιμές στο χρόνο  $t=0$  ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς και πώλησης αντίστοιχα πάνω σε μία μετοχή που δεν πληρώνει μέρισμα είναι:

$$c = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2), \quad (2.20)$$

$$p = Ke^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1). \quad (2.21)$$

Όπου,

$$d_1 = \frac{\ln(S_0 / K) + (r + \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad \text{και} \quad d_2 = \frac{\ln(S_0 / K) + (r - \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}}. \quad (2.22)$$

Και  $N(x)$  είναι η αθροιστική πιθανότητα κατανομής της  $N(0,1)$ .

Στον κόσμο ουδέτερου κινδύνου η τιμή του Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς είναι η αναμενόμενη πληρωμή του στη λήξη, ανατοκισμένη με επιτόκιο  $r$ :

$$c_T^E = e^{-rT} \hat{E}[\max(S_T - K, 0)].$$

Ο υπολογισμός αυτός οδηγεί σε δεδομένο τύπο για το  $c$ .

### Αντιστάθμιση Δέλτα (Delta Hedging)

Συντελεστής Δέλτα είναι ο ρυθμός μεταβολής της τιμής του δικαιώματος προαίρεσης σε σχέση με την τιμή του περιουσιακού στοιχείου. Συγκεκριμένα, είναι η κλίση της καμπύλης που συνδέει την τιμή του δικαιώματος με την τιμή του περιουσιακού στοιχείου. Αυτό σημαίνει ότι όταν η τιμή του περιουσιακού στοιχείου, π.χ. της μετοχής μεταβληθεί κατά ένα μικρό ποσό η τιμή του δικαιώματος προαίρεσης αλλάζει περίπου  $\Delta$  φορές αυτού του ποσού.

Προσεγγιστικά, δίνει ότι  $\Delta = \frac{\partial f}{\partial S}$ .

Μία θέση με μηδενικό Δέλτα αναφέρεται ως ουδέτερο Δέλτα. Επειδή το Δέλτα μεταβάλλεται η θέση του επενδυτή διατηρεί ουδέτερο Δέλτα μόνο για σχετικά σύντομο χρονικό διάστημα. Αυτό επιβεβαιώνεται παρακάτω. Το Δέλτα είναι συμβατό με την ανάλυση Black-Scholes.

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S = -f + \Delta S \Rightarrow \Pi = -\Delta f + \Delta * \Delta S = 0.$$



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

### Ευέλικτο Διωνυμικό Μοντέλο

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει το διωνυμικό μοντέλο προσομοιώνει τις κινήσεις ενός περιουσιακού στοιχείου. Στο κεφάλαιο αυτό θα δείξουμε πως το διωνυμικό μοντέλο των *CRR* επεκτείνεται και τη θέση του παίρνει το Ευέλικτο Διωνυμικό Μοντέλο του Tian (1999), γνωστό και ως *FB*.

#### 3.1 Αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης με το ευέλικτο διωνυμικό μοντέλο

Γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα ανοδικής κίνησης της τιμής της μετοχής είναι  $p$  σε ένα κόσμο ουδέτερο προς τον κίνδυνο καθώς επίσης και την αναμενόμενη τιμή να ισούται με:

$$E(S_T) = pS_0u + (1-p)S_0d = pS_0(u-d) + S_0d.$$

Εξισώνοντας  $\mu = r$  περνάμε από τον ουδέτερο στον πραγματικό κόσμο με πιθανότητα ανόδου  $q$ .

$$E(S_{\Delta t}) = S_0e^{\mu\Delta t} \Rightarrow qS_0u + (1-q)S_0d = S_0e^{\mu\Delta t} \Rightarrow q = \frac{e^{\mu\Delta t} - d}{u - d}.$$

Σκοπός είναι να προσδιορίσουμε τα άλματα  $u$  και  $d$  με την προϋπόθεση ότι η διακύμανση της κίνησης της τιμής της μετοχής είναι ίση με τη διακύμανση του διωνυμικού μοντέλου. Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι όταν η τιμή της μετοχής ακολουθεί κίνηση Brown στο διάστημα  $[t, t + \Delta t]$  η απόδοση της μετοχής ισούται με  $\Delta S = S_{t+\Delta t} - S$ , ενώ στο διωνυμικό μοντέλο στο ίδιο διάστημα ισούται με  $\Delta S = \frac{S_{t+\Delta t}}{S_t} - R$ . Επομένως,

$$\boxed{\text{Var}(Black - Scholes) = \text{Var}(BinomialModel)}$$

$$\text{Var}(BinomialModel) \stackrel{\Delta}{=} E(R^2) - E^2(R) = qu^2 + (1-q)d^2 - [qu + (1-q)d]^2.$$

Για την εύρεση, όμως, της διακύμανσης της κίνησης της τιμής της μετοχής θα πρέπει να θυμηθούμε την κίνηση Brown. Έτσι, στο διάστημα  $[t, t + \Delta t]$  έχω:

$$dS = \mu Sdt + \sigma Sdz.$$

Μετατρέποντας σε διακριτό χρόνο την παραπάνω σχέση και αντικαθιστώντας το  $\Delta S$  παίρνουμε ότι:

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \varepsilon \sqrt{\Delta t} \quad , \quad \text{όπου } \varepsilon \sim N(0,1)$$

$$S_{t+\Delta t} - S_t = \mu S \Delta t + \sigma S \varepsilon \sqrt{\Delta t}$$

$$\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t} = \frac{S_t}{S_t} + \frac{\mu S_t}{S_t} \Delta t + \frac{\sigma S_t \varepsilon \sqrt{\Delta t}}{S_t}$$

$$\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t} = 1 + \mu \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t} .$$

Άρα,  $R_{Black-Scholes} \sim N(1 + \mu \Delta t, \sigma \sqrt{\Delta t})$  και  $Var(Black - Scholes) = \sigma^2 \Delta t$ .

Εξισώνοντας τις δύο διακυμάνσεις και αντικαθιστώντας το  $q$  έχουμε:

$$qu^2 + (1-q)d^2 - [qu + (1-q)d]^2 = \sigma^2 \Delta t$$

$$qu^2(1-q) + (1-q)d^2(1-1+q) - 2q(1-q)ud = \sigma^2 \Delta t$$

$$q(1-q)(u^2 + d^2 - 2ud) = \sigma^2 \Delta t$$

$$q(1-q)(u-d)^2 = \sigma^2 \Delta t$$

$$\left(\frac{e^{\mu \Delta t} - d}{u - d}\right) \left(1 - \frac{e^{\mu \Delta t} - d}{u - d}\right) (u - d)^2 = \sigma^2 \Delta t$$

$$\left(\frac{e^{\mu \Delta t} - d}{u - d}\right) \left(\frac{u - e^{\mu \Delta t}}{u - d}\right) (u - d)^2 = \sigma^2 \Delta t$$

$$(e^{\mu \Delta t} - d)(u - e^{\mu \Delta t}) = \sigma^2 \Delta t$$

$$e^{\mu \Delta t}(u + d) - ud - e^{2\mu \Delta t} = \sigma^2 \Delta t$$

Απλοποιούμε τις πράξεις αντικαθιστώντας, όπου  $ud = 1 \Rightarrow d = u/1$  εξ' ορισμού και θα έχουμε:

$$e^{\mu \Delta t}(u + d) - 1 - e^{2\mu \Delta t} = \sigma^2 \Delta t$$

$$e^{\mu \Delta t}\left(u + \frac{1}{u}\right) - 1 - e^{2\mu \Delta t} = \sigma^2 \Delta t$$

$$u^2 e^{\mu \Delta t} - u(1 + e^{2\mu \Delta t} + \sigma^2 \Delta t) + e^{\mu \Delta t} = 0 .$$

Παρατηρούμε ότι καταλήξαμε σε μία δευτεροβάθμια εξίσωση της μορφής

$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$  και θα προχωρήσουμε με το γνωστό τρόπο προκειμένου να βρούμε μία ρίζα της άγνωστης μεταβλητής  $u$ .

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (1 + e^{2\mu \Delta t} + \sigma^2 \Delta t)^2 - 4e^{\mu \Delta t} e^{\mu \Delta t}$$

$$\Delta = (1 + e^{2\mu \Delta t} + \sigma^2 \Delta t)^2 - 4e^{2\mu \Delta t} .$$

Και μία από τις ρίζες είναι:

$$u = \frac{1 + e^{2\mu\Delta t} + \sigma^2\Delta t + \sqrt{(1 + e^{2\mu\Delta t} + \sigma^2\Delta t) - 4e^{2\mu\Delta t}}}{2e^{\mu\Delta t}}.$$

Απλοποιούμε περισσότερο τη λύση της εξίσωσης ξεκινώντας με την ποσότητα κάτω από την ρίζα. Για να αντιμετωπίσουμε τις πράξεις, χρησιμοποιούμε το ανάπτυγμα Taylor που ορίζεται ως εξής:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Και το ανάπτυγμα σε δυνάμεις τάξης  $\Delta t$ , που είναι:

$$\Delta t^p \approx 0, \quad \forall \quad p > 1$$

Έτσι, έχουμε:

$$\begin{aligned} & (1 + e^{2\mu\Delta t} + \sigma^2\Delta t)^2 - 4e^{2\mu\Delta t} \\ & \approx [1 + (1 + 2\mu\Delta t) + \sigma^2\Delta t]^2 - 4(1 + 2\mu\Delta t) \\ & = [2 + (2\mu + \sigma^2)\Delta t]^2 - 4(1 + 2\mu\Delta t) \\ & = 4 + (2\mu + \sigma^2)^2\Delta t^2 + 4(2\mu + \sigma^2)\Delta t - 4(1 + 2\mu\Delta t) \\ & \approx 4\sigma^2\Delta t. \end{aligned}$$

Επομένως, η λύση της εξίσωσης μετά από πράξεις θα είναι:

$$\begin{aligned} u &= \frac{(1 + e^{2\mu\Delta t} + \sigma^2\Delta t)^2 + \sqrt{4\sigma^2\Delta t}}{2e^{\mu\Delta t}} \\ & \approx \frac{[1 + (1 + 2\mu\Delta t) + \sigma^2\Delta t] + 2\sigma\sqrt{\Delta t}}{2} e^{-\mu\Delta t} \\ & \approx \frac{2 + (2\mu + \sigma^2)\Delta t + 2\sigma\sqrt{\Delta t}}{2} (1 - \mu\Delta t) \\ & \approx (1 + \mu\Delta t + \frac{\sigma^2}{2}\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t})(1 - \mu\Delta t) \\ & \approx 1 + \mu\Delta t + \frac{\sigma^2}{2}\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} - \mu\Delta t \\ & = 1 + \sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{\sigma^2}{2}\Delta t. \end{aligned}$$

Όμως, το  $1 + \sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{\sigma^2}{2}\Delta t$  είναι το ανάπτυγμα δεύτερης τάξης του  $e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ .

Σύμφωνα με το άρθρο του Yisong Sam Tian (1999) καταλήξαμε να ορίζουμε:

$$\boxed{u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}, \quad 0 < d < 1 < u. \quad (3.1)$$

Το  $1 + \sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{\sigma^2}{2}\Delta t$  μπορεί να γραφτεί και ως  $1 + \sigma\sqrt{\Delta t} + O(\Delta t)$  που ο όρος  $\frac{\sigma^2}{2}\Delta t$  δηλώνει την τάξη του  $\Delta t$  ή μεγαλύτερη. Έτσι, παίρνουμε την εξής μορφή:

$$\boxed{u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t} + O(\Delta t)}, d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t} + O(\Delta t)}}.$$

Για την καλύτερη κατανόηση των πράξεων, που θα συναντήσουμε παρακάτω είναι σημαντικό να αναφέρουμε τις ιδιότητες των τάξεων  $\Delta t$ .

- $O(\Delta t) \pm O(\Delta t) = O(\Delta t)$ ,
- $O(\Delta t^m) \pm O(\Delta t^n) = O(\Delta t^{\min(m,n)})$ .

Με τη χρήση Taylor και των ιδιοτήτων των τάξεων  $\Delta t$ , η πιθανότητα ανόδου της τιμής της μετοχής στον πραγματικό κόσμο γίνεται:

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$$

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - 1 + \sigma\sqrt{\Delta t}}{1 + \sigma\sqrt{\Delta t} - 1 + \sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$p = \frac{1 + r\Delta t - 1 + \sigma\sqrt{\Delta t}}{2\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$p = \frac{\sqrt{\Delta t}(r\sqrt{\Delta t} + \sigma)}{2\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$p = \frac{1}{2} + \frac{r}{2\sigma}O(\sqrt{\Delta t})$$

$$\boxed{p = \frac{1}{2} + O(\sqrt{\Delta t})}.$$

Χρησιμοποιώντας τα άλματα αυτά εύκολα αποδεικνύουμε πως οι τιμές των δικαιωμάτων προαίρεσης στο διωνυμικό μοντέλο συγκλίνουν στην τιμή Black-Scholes. Για να το ελέγξουμε αυτό, αρκεί να επιβεβαιώσουμε ότι:

1. Οι πρώτες δύο στιγμές του διωνυμικού μοντέλου συγκλίνουν στους αντίστοιχους συνεχείς χρόνους τους.
2. Οι συνθήκες του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος ικανοποιούνται.

Ξεκινώντας από το πρώτο, ορίζω με  $\hat{\mu}$  και  $\hat{\sigma}^2$  το μέσο και τη διακύμανση του  $\frac{S(t+\Delta t)}{S(t)}$ :

$$\hat{\mu} = pu + (1-p)d$$

$$\hat{\mu} = \left(\frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}\right)(1 + \sigma\sqrt{\Delta t}) + \left(1 - \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}\right)(1 - \sigma\sqrt{\Delta t})$$

$$\hat{\mu} = \frac{(e^{r\Delta t} - 1 + \sigma\sqrt{\Delta t})(1 + \sigma\sqrt{\Delta t})}{1 + \sigma\sqrt{\Delta t} - 1 + \sigma\sqrt{\Delta t}} + \left(\frac{u - d - e^{r\Delta t} + d}{u - d}\right)(1 - \sigma\sqrt{\Delta t})$$

$$\hat{\mu} = \frac{e^{r\Delta t} + \sigma\sqrt{\Delta t}e^{r\Delta t} - 1 - \sigma\sqrt{\Delta t} + \sigma\sqrt{\Delta t} + \sigma^2\sqrt{\Delta t}}{2\sigma\sqrt{\Delta t}} + \left(\frac{1 + \sigma\sqrt{\Delta t} - e^{r\Delta t}}{2\sigma\sqrt{\Delta t}}\right)(1 - \sigma\sqrt{\Delta t})$$

$$\hat{\mu} = \frac{e^{r\Delta t} + \sigma\sqrt{\Delta t}e^{r\Delta t} - 1 + \sigma^2\sqrt{\Delta t} - 1 - \sigma\sqrt{\Delta t} + \sigma\sqrt{\Delta t} - \sigma^2\sqrt{\Delta t} - e^{r\Delta t} + \sigma\sqrt{\Delta t}e^{r\Delta t}}{2\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$\hat{\mu} = \frac{2\sigma\sqrt{\Delta t}e^{r\Delta t}}{2\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$\hat{\mu} = e^{r\Delta t}$$

Διαπιστώνεται, λοιπόν, ότι ο διωνυμικός μέσος του  $\frac{S(t+\Delta t)}{S(t)}$  ταιριάζει ακριβώς

με το μέσο του συνεχούς χρόνου. Ας δούμε τώρα τι θα συμβεί με τη διωνυμική διακύμανση:

$$\hat{\sigma}^2 = \left[\frac{1}{2} + O(\sqrt{\Delta t})\right] \left[(1 + \sigma\sqrt{\Delta t} + O(\Delta t)) - (1 + O(\Delta t))\right]^2 + \left[\frac{1}{2} + O(\sqrt{\Delta t})\right] \left[(1 - \sigma\sqrt{\Delta t} + O(\Delta t)) - (1 + O(\Delta t))\right]^2$$

$$\hat{\sigma}^2 = \left[\frac{1}{2} + O(\sqrt{\Delta t})\right] \left[\sigma\sqrt{\Delta t} + O(\Delta t) - O(\Delta t)\right]^2 + \left[\frac{1}{2} + O(\sqrt{\Delta t})\right] \left[\sigma\sqrt{\Delta t} + O(\Delta t) - O(\Delta t)\right]^2$$

$$\hat{\sigma}^2 = \left[\frac{1}{2} + O(\sqrt{\Delta t})\right] \left[\sigma\sqrt{\Delta t} + O(\Delta t)\right]^2 + \left[\frac{1}{2} + O(\sqrt{\Delta t})\right] \left[\sigma\sqrt{\Delta t} + O(\Delta t)\right]^2$$

$$\hat{\sigma}^2 = \left[\frac{1}{2} + O(\sqrt{\Delta t})\right] \left[\sigma^2\Delta t + O(\Delta t^2) + O(\Delta t^{3/2})\right] + \left[\frac{1}{2} + O(\sqrt{\Delta t})\right] \left[\sigma^2\Delta t + O(\Delta t^2) + O(\Delta t^{3/2})\right]$$

$$\hat{\sigma}^2 = \left[\frac{1}{2} + O(\sqrt{\Delta t})\right] \left[\sigma^2\Delta t + O(\Delta t^{3/2})\right] + \left[\frac{1}{2} + O(\sqrt{\Delta t})\right] \left[\sigma^2\Delta t + O(\Delta t^{3/2})\right]$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sigma^2\Delta t}{2} + \frac{O(\Delta t^{3/2})}{2} + O(\sqrt{\Delta t})O(\Delta t) + O(\Delta t^{3/2})O(\sqrt{\Delta t}) + \frac{\sigma^2\Delta t}{2} + \frac{O(\Delta t^{3/2})}{2} + O(\sqrt{\Delta t})O(\Delta t) + O(\Delta t^{3/2})O(\sqrt{\Delta t})$$

$$\hat{\sigma}^2 = 2\frac{\sigma^2\Delta t}{2} + 2\frac{O(\Delta t^{3/2})}{2} + O(\Delta t^{3/2}) + O(\Delta t^2)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \sigma^2\Delta t + O(\Delta t^{3/2})$$

(3.2)

Εδώ παρατηρούμε ότι η διωνυμική διακύμανση του  $\frac{S(t+\Delta t)}{S(t)}$  δεν ταιριάζει

ακριβώς με αυτή στο συνεχή χρόνο,  $e^{2r\Delta t}[e^{\sigma^2\Delta t}-1]$  που συναντήσαμε παραπάνω με την τιμή της μετοχής  $S_t$  να ακολουθεί τη λογαριθμοκανονική κατανομή. Όμως, εύκολα αποδεικνύεται ότι:

$$\hat{\sigma}^2 - e^{2r\Delta t}(e^{\sigma^2\Delta t} - 1) = O(\Delta t^{3/2})$$

Κάνοντας αντικατάσταση την (3.2) στην παραπάνω σχέση καταλήγω:

$$\sigma^2\Delta t + O(\Delta t^{3/2}) - (1 + O(\Delta t))(\hat{\sigma}^2 + \sigma^2\Delta t - 1) = O(\Delta t^{3/2})$$

$$\sigma^2\Delta t + O(\Delta t^{3/2}) - \sigma^2\Delta t - \sigma^2\Delta t O(\Delta t) = O(\Delta t^{3/2})$$

$$\cancel{\sigma^2\Delta t} + O(\Delta t^{3/2}) - \cancel{\sigma^2\Delta t} - \sigma^2 O(\Delta t^2) = O(\Delta t^{3/2})$$

$$\boxed{O(\Delta t^{3/2}) = O(\Delta t^{3/2})}$$

Συνεπώς, η διωνυμική διακύμανση ταιριάζει με τη διακύμανση του συνεχούς χρόνου στο όριο καθώς το  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Για να διασφαλιστεί ότι οι τιμές των δικαιωμάτων προαίρεσης, που υπολογίζονται με το διωνυμικό μοντέλο συγκλίνουν στην τιμή Black-Scholes αρκεί να ισχύει η παρακάτω συνθήκη κεντρικού οριακού θεωρήματος:

$$\frac{p|u - \hat{\mu}|^3 + (1-p)|d - \hat{\mu}|^3}{\hat{\sigma}^3 \sqrt{N}} \rightarrow 0, \text{ καθώς } \Delta t \rightarrow 0 \quad (3.3)$$

Στη σχέση αυτή, κάνουμε αντικαταστάσεις στον αριθμητή και στον παρονομαστή, προκειμένου να εμφανίσουμε το  $\Delta t$ .

$$\frac{[\frac{1}{2} + O(\sqrt{\Delta t})]|1 + \sigma\sqrt{\Delta t} + O(\Delta t) - (1 + O(\Delta t))|^3 + [\frac{1}{2} + O(\sqrt{\Delta t})]|1 - \sigma\sqrt{\Delta t} + O(\Delta t) - (1 + O(\Delta t))|^3}{(\hat{\sigma}^2)^{3/2} \sqrt{\frac{T}{\Delta t}}}$$

$$\frac{[\frac{1}{2} + O(\sqrt{\Delta t})]|\sigma\sqrt{\Delta t} + O(\Delta t)|^3 + [\frac{1}{2} + O(\sqrt{\Delta t})]|\sigma\sqrt{\Delta t} + O(\Delta t)|^3}{[\sigma^2\Delta t + O(\Delta t^{3/2})]^{3/2} \sqrt{\frac{T}{\Delta t}}}$$

$$\frac{[\frac{1}{2} + O(\sqrt{\Delta t})][O(\sqrt{\Delta t})]^3 + [\frac{1}{2} + O(\sqrt{\Delta t})][O(\sqrt{\Delta t})]^3}{[O(\Delta t) + O(\Delta t^{3/2})]^{3/2} \sqrt{\frac{T}{\Delta t}}}$$

$$\frac{[\frac{1}{2} + O(\sqrt{\Delta t}) + \frac{1}{2} + O(\sqrt{\Delta t})][O(\sqrt{\Delta t})]^3}{O(\Delta t^{3/2})\sqrt{\frac{T}{\Delta t}}}$$

$$\frac{\frac{1}{2} + O(\sqrt{\Delta t}) + \frac{1}{2} + O(\sqrt{\Delta t})}{\sqrt{\frac{T}{\Delta t}}} = \frac{1 + O(\sqrt{\Delta t})}{\frac{\sqrt{T}}{\sqrt{\Delta t}}}$$

$$\frac{O(\sqrt{\Delta t}) + O(\Delta t)}{\sqrt{T}} \rightarrow 0. \quad (3.4)$$

Παρατηρούμε ότι το κλάσμα τείνει στο 0, εφόσον το  $T$  είναι μία σταθερά και ο αριθμητής περιέχει τάξεις του  $\Delta t$ .

Προχωρώντας τις πράξεις στη σχέση (3.4) αποδεικνύεται πως η σχέση (3.3) καταλήγει να ισούται με:

$$\frac{p|u - \hat{\mu}|^3 + (1-p)|d - \hat{\mu}|^3}{\hat{\sigma}^3 \sqrt{N}} = O(\sqrt{\Delta t}).$$

Επομένως, η σχέση αυτή δείχνει ότι εξασφαλίζεται η σύγκλιση του διωνυμικού μοντέλου με το όριο συνεχούς χρόνου.

Για την κατασκευή του ευέλικτου διωνυμικού μοντέλου ορίζουμε τα ακόλουθα άλματα:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t} + \lambda\sigma^2\Delta t}, d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t} + \lambda\sigma^2\Delta t}, \quad (3.5)$$

όπου  $\lambda$  συμβολίζει μία αυθαίρετη σταθερά που ονομάζεται "παράμετρος κλίσης". Αυτή η παράμετρος μπορεί να είναι θετική, αρνητική ακόμα και μηδενική. Επιπλέον, αφού το  $\lambda$  είναι φραγμένο, ισχύει  $\lambda\sigma^2\Delta t = O(\Delta t)$ . Αυτό μας εξασφαλίζει ότι η εξίσωση (3.5) συμμορφώνεται με την εξίσωση (3.1) για μικρό  $\Delta t$  και έτσι εξασφαλίζεται η σύγκλιση για το μοντέλο  $FB$ .

Είναι σημαντικό να ελέγξουμε πάλι αν οι μη αρνητικές πιθανότητες λαμβάνονται με τα άλματα  $u$  και  $d$  που έχω ορίσει. Αυτή η κατάσταση μη αρνητικότητας είναι ισοδύναμη με την κατάσταση μη εξισορροπητικής κερδοσκοπίας. Από την εξίσωση (2.2) εξασφαλίζουμε τη μη αρνητική πιθανότητα:

$$0 \leq p \leq 1$$

$$0 \leq \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} \leq 1$$

$$0 \leq e^{r\Delta t} - d \leq u - d$$

$$d \leq e^{r\Delta t} \leq u - d + d$$

$$\boxed{d \leq e^{r\Delta t} \leq u} \quad . \quad (3.6)$$

Η σχέση (3.6) είναι ισοδύναμη με την ακόλουθη αντικαθιστώντας τα  $u$  και τα  $d$ :

$$e^{-\sigma\sqrt{\Delta t} + \lambda\sigma^2\Delta t} \leq e^{r\Delta t} \leq e^{\sigma\sqrt{\Delta t} + \lambda\sigma^2\Delta t}$$

$$-\sigma\sqrt{\Delta t} + \lambda\sigma^2\Delta t \leq e^{r\Delta t} \leq \sigma\sqrt{\Delta t} + \lambda\sigma^2\Delta t$$

$$\frac{\Delta t[-\sigma\Delta t^{-1/2} + \lambda\sigma^2]}{\Delta t} \leq \frac{r\Delta t}{\Delta t} \leq \frac{\Delta t[\sigma\Delta t^{-1/2} + \lambda\sigma^2]}{\Delta t}$$

$$\sigma^2[-\sigma^{-1}\Delta t^{-1/2} + \lambda] \leq r \leq \sigma^2[\sigma^{-1}\Delta t^{-1/2} + \lambda]$$

$$-\sigma^{-1}\Delta t^{-1/2} \leq \left| \frac{r}{\sigma^2} - \lambda \right|$$

$$\boxed{\left| \lambda - \frac{r}{\sigma^2} \right| \leq \frac{1}{\sigma\sqrt{\Delta t}}} \quad . \quad (3.7)$$

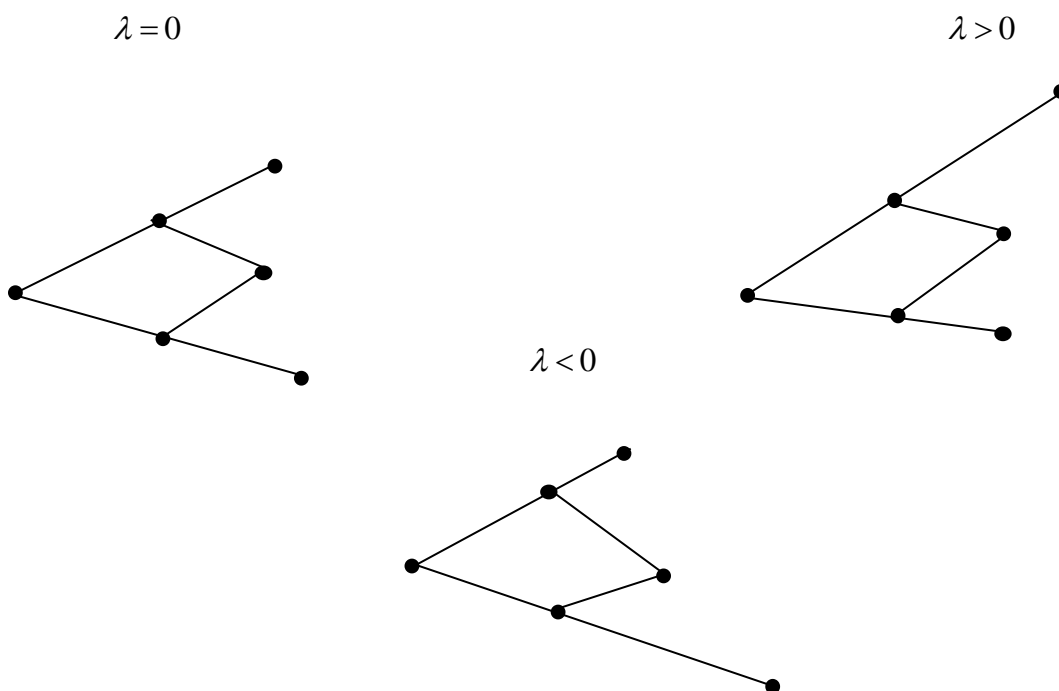
Είναι σαφές ότι οποιαδήποτε φραγμένο  $\lambda$  ικανοποιεί αυτή τη σχέση για ένα πολύ μικρό  $\Delta t$  (ή πολύ μεγάλο  $N$ ). Αυτό ενισχύει τη σύγκλιση, που εξασφαλίζεται από το κεντρικό οριακό θεώρημα. Στην περίπτωση, που το  $N$  είναι πολύ μικρό, τότε μπορεί να συμβεί αρνητική πιθανότητα ακόμα και στο μοντέλο  $CRR$  ( $\lambda = 0$ ) που είναι σαφές κι από την ανίσωση (3.7).

Το διωνυμικό μοντέλο των  $CRR$  είναι μία ειδική περίπτωση του διωνυμικού μοντέλου  $FB$  με  $\lambda = 0$ . Επομένως, καταλήγω να έχω τη σχέση (3.1) και (2.2). Με άλλα λόγια, το μοντέλο  $FB$  είναι η γενίκευση του αρχικού μοντέλου  $CRR$ . Η αυθαίρετη παράμετρος  $\lambda$  μπορεί να θεωρηθεί ως ο βαθμός κλίσης στο διωνυμικό δέντρο.

- Όταν το  $\lambda=0$ , το αρχικό δέντρο  $CRR$  πράγματι υφίσταται και το κέντρο του δέντρου σχηματίζει μία οριζόντια γραμμή. Με άλλα λόγια, μία κίνηση προς τα πάνω και μία κάτω φέρνει την τιμή του υποκείμενου τίτλου ακριβώς στο ίδιο επίπεδο με το οποίο ξεκίνησε. Αυτό είναι προφανές και από τον ορισμό  $u_0d_0 = 1$ . Σε αυτήν την περίπτωση, το δέντρο έχει μηδενική κλίση.
- Όταν το  $\lambda>0$ , το διωνυμικό δέντρο κλείνει προς τα πάνω, πράγμα που σημαίνει ότι μία κίνηση προς τα πάνω και μία κίνηση προς τα κάτω αυξάνουν το επίπεδο της τιμής του υποκείμενου τίτλου.
- Όταν το  $\lambda<0$ , το διωνυμικό δέντρο κλείνει προς τα κάτω, πράγμα που σημαίνει ότι μία κίνηση προς τα κάτω και μία κίνηση προς τα πάνω μειώνουν το επίπεδο της τιμής του υποκείμενου τίτλου.



**Σχήμα 3.1.** Το διωνυμικό δέντρο με τις διαφορετικές παραμέτρους κλίσης



**Πίνακας 3.1.** Τιμές δικαιωμάτων αγοράς με διαφορετικές παραμέτρους κλίσης

Χρονικά βήματα	$\lambda = 1$	$\lambda = 0$	$\lambda = -1$
50	7.1829	7.1276	7.1785
100	7.1648	7.1417	7.1624
150	7.1553	7.1464	7.1537
200	7.1491	7.1488	7.1480
300	7.1576	7.1512	7.1570
400	7.1591	7.1524	7.1585
500	7.1585	7.1531	7.1580
600	7.1572	7.1535	7.1568
700	7.1557	7.1539	7.1554
800	7.1542	7.1541	7.1539
900	7.1557	7.1543	7.1554
1000	7.1565	7.1545	7.1563
5000	7.1556	7.1556	7.1556
Τιμή Black-Scholes		7.1559	

Σημείωση: Τα δεδομένα είναι τα εξής:  $S_0 = 100$ ,  $K = 100$ ,  $r = 0.06$ ,  $T = 6/12$ ,  $\sigma = 0.2$ ,  $N$  ένα εύρος χρονικών βημάτων από 50 έως 5000 και τρεις διαφορετικές τιμές  $\lambda$ , που αντιπροσωπεύουν θετική, αρνητική και μηδενική κλίση. Αναφέρεται η τιμή Black-Scholes προκειμένου να συγκριθεί με τις διωνυμικές τιμές.

Είναι σαφές ότι οι διωνυμικές τιμές συγκλίνουν στην τιμή Black-Scholes και για τις τρεις τιμές του  $\lambda$ .

### 3.2 Βελτιωμένη σύγκλιση για τυποποιημένα δικαιώματα προαίρεσης

Σύμφωνα με το άρθρο του Yisong Sam Tian (1999) ,σε αυτήν την ενότητα παρουσιάζεται ο τρόπος με τον οποίο θα πρέπει να γίνει η επιλογή της τιμής του  $\lambda$  , έτσι ώστε να βελτιωθεί η σύγκλιση των Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς και των Αμερικανικών δικαιωμάτων πώλησης. Η βασική ιδέα και τα αποτελέσματα ισχύουν και για άλλους τύπους τυποποιημένων δικαιωμάτων προαίρεσης.

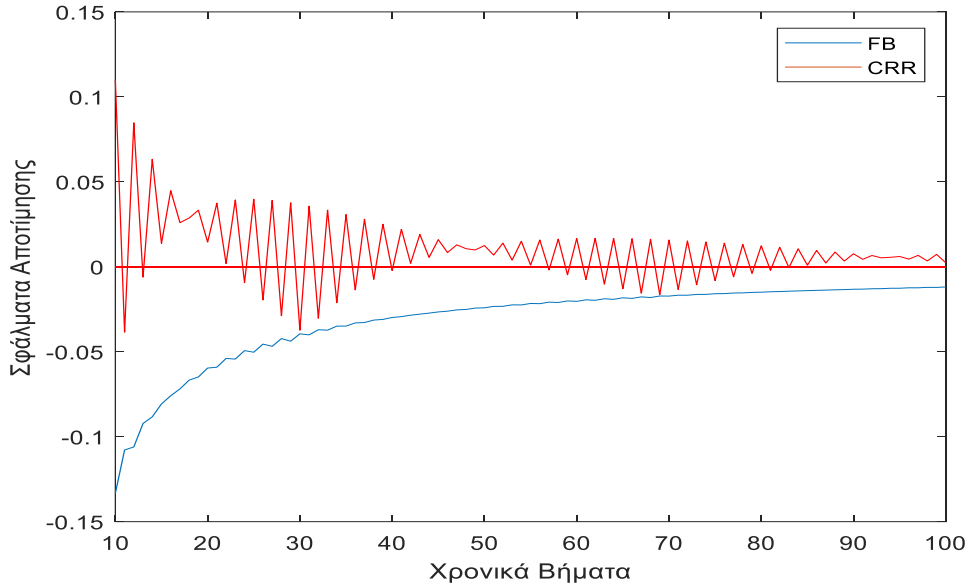
Η ομαλή σύγκλιση είναι σημαντική δεδομένου ότι οι τεχνικές παρέκτασης μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να βελτιώσουν σημαντικά το ρυθμό σύγκλισης.

- ✓ Με το μοντέλο *CRR* οι τεχνικές παρέκτασης δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν, επειδή η σύγκλιση δεν είναι ομαλή. Συγκεκριμένα, οι τιμές των δικαιωμάτων προαίρεσης που υπολογίζονται χρησιμοποιώντας το διωνυμικό μοντέλο *CRR* συγκλίνουν προς την τιμή Black-Scholes με κυματοειδές ασταθές τρόπο. Οι Heston & Zhou (1997) αποδεικνύουν ότι το σφάλμα αποτίμησης ενός διωνυμικού μοντέλου *CRR*  $N$  χρονικών βημάτων για τυποποιημένα δικαιώματα προαίρεσης κυμαίνεται μεταξύ του της τάξης των  $O(1/N)$  και  $O(1/\sqrt{N})$ . Αυτό σημαίνει ότι η σύγκλιση δεν είναι ομαλή για το *CRR* μοντέλο και το σφάλμα αποτίμησης δε μειώνεται μονότονα καθώς αυξάνεται το  $N$  .
- ✓ Με το μοντέλο *FB*, ωστόσο, υπάρχει ένας απλός τρόπος για να επιτευχθεί η σύγκλιση.

Η γραφική παράσταση *CRR* είναι η απεικόνιση του σφάλματος αποτίμησης του μοντέλου *CRR* σε σχέση με τα  $N$  - χρονικά βήματα. Σφάλμα αποτίμησης ορίζεται η διαφορά μεταξύ της τιμής *CRR* και της τιμής Black-Sholes. Στο Σχήμα 3.2 παρατηρείται ότι:

- Το σφάλμα αποτίμησης παίρνει τιμές αρνητικές και θετικές. Αυτή η συμπεριφορά σύγκλισης είναι αρκετά συνηθισμένη και δεν τη συναντούμε μόνο στη συγκεκριμένη περίπτωση.
- Καθώς αυξάνεται ο αριθμός των χρονικών βημάτων  $N$  από 10 σε 100 είναι σαφές ότι η σύγκλιση δεν είναι ομαλή για το μοντέλο *CRR*. Επομένως, δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν τεχνικές παρέκτασης σε αυτό το μοντέλο.

**Σχήμα 3.2.** Γραφική αναπαράσταση των μοντέλων CRR και FB σε συνάρτηση με τα χρονικά βήματα  $N$



Σημείωση: Τα δεδομένα είναι τα εξής:  $S_0 = 100$ ,  $K = 95$ ,  $r = 0.06$ ,  $\sigma = 0.2$ ,  $T = 6/12$  και ένα εύρος χρονικών βημάτων από 10 έως 100.

- Καθώς αυξάνεται ο αριθμός των χρονικών βημάτων  $N$  είναι φανερό ότι μοντέλο *FB* συγκλίνει μονοτονικά στην τιμή Black-Scholes. Αυτό επιτυγχάνεται επιλέγοντας μία παράμετρο κλίσης  $\lambda$ , ώστε ένας κόμβος του δέντρου να συμπίπτει ακριβώς με την τιμή εξάσκησης κατά τη λήξη του δικαιώματος προαίρεσης.

Η ιδέα της τοποθέτησης της τιμής εξάσκησης σε μία βέλτιστη θέση σε σχέση με τους κόμβους του δέντρου δεν είναι καινούργια. Οι Leisen και Reimer (1995) υποστηρίζουν ότι ο λόγος που η τιμή εξάσκησης συμπίπτει με έναν κόμβο του δέντρου οφείλεται στο γεγονός ότι ο περισσότερος χρόνος διαπραγμάτευσης των δικαιωμάτων προαίρεσης εμφανίζεται σε δικαιώματα προαίρεσης που η τρέχουσα τιμή του υποκείμενου τίτλου είναι ίση με την τιμή εξάσκησης (*at-the-money*) ή κοντά στην τιμή εξάσκησης (*near-the-money*).

Για να δούμε πως προκύπτει η παράμετρος κλίσης  $\lambda$ , θεωρούμε ένα *FB* μοντέλο  $N$ - περιόδων, ο χρόνος μέχρι τη λήξη  $[0, T]$  χωρίζεται σε  $N$  υποδιαστήματα μήκους  $\Delta t = T/N$ . Σε κάθε υποδιάστημα που ονομάζεται και χρονικό βήμα,  $(t_i, t_{i+1}]$  με  $i = 0, 1, 2, \dots, N$ , η τιμή του περιουσιακού στοιχείου θεωρείται ότι παραμένει σταθερή στο τέλος κάθε χρονικού βήματος. Εάν η τιμή

του περιουσιακού στοιχείου στην αρχή του χρόνου (δηλαδή τη στιγμή  $t=0$ ) είναι  $S_0$ , είναι πιθανό να πηδήσει είτε προς τα πάνω σε  $uS$  με πιθανότητα  $p$  ή προς τα κάτω σε  $dS$  με πιθανότητα  $1-p$ , όπου  $0 < d < 1 < u$  και  $0 \leq p \leq 1$ .

- Η τιμή του περιουσιακού στοιχείου στον κόμβο  $(i, j)$  δίνεται από:

$$S(i, j) = S_0 u^j d^{i-j}, \quad 0 \leq j \leq i.$$

- Η τελική τιμή του περιουσιακού στοιχείου μετά από  $N$  περιόδους και το σύνολο  $j$  κινήσεων προς τα πάνω δίνεται από:

$$S(N, j) = S_0 u^j d^{N-j}, \quad 0 \leq j \leq N.$$

Στους καταληκτικούς κόμβους οι αξίες του Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς και Αμερικάνικου δικαιώματος πώλησης θα είναι οι εξής αντίστοιχα:

- $f_{j,N} = \max\{S_0 u^j d^{N-j} - K, 0\}$ ,
- $f_{j,N} = \max\{K - S_0 u^j d^{N-j}, 0\}$ .

Και πηγαίνοντας πίσω στο χρόνο θα έχουμε τους εξής αναδρομικούς τύπους για τα Ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς και Αμερικανικά δικαιώματα πώλησης αντίστοιχα :

- $f_{ji} = e^{-r\Delta t} [pf_{j+1,i+1} + (1-p)f_{j,i+1}]$ ,
- $f_{ji} = \max\{\max(K - Su^j d^{N-j}, 0), e^{-r\Delta t} [pf_{j+1,i+1} + (1-p)f_{j,i+1}]\}$ .

Η αρχική τιμή του  $\lambda$  είναι :

$$\lambda_0 = 0,$$

που αντιπροσωπεύει το μοντέλο *CRR*. Ο κόμβος που βρίσκεται πολύ κοντά στην τιμή εξάσκησης  $K$ ,  $(N, j_0)$ , μπορεί να οριστεί έχοντας λύσει την παρακάτω εξίσωση:

$$S_0 u_0^\eta d_0^{N-\eta} = K$$

$$\log S_0 + \eta \log u_0 + (N - \eta) \log d_0 = \log K$$

$$\log S_0 + \eta \log u_0 + N \log d_0 - \eta \log d_0 = \log K$$

$$\log S_0 + \eta(\log u_0 - \log d_0) + N \log d_0 = \log K$$

$$\eta(\log u_0 - \log d_0) = \log K - \log S_0 - N \log d_0$$

$$\boxed{\eta = \frac{\log(K / S_0) - N \log d_0}{\log(u_0 / d_0)}}. \quad (3.8)$$

Η σχέση (3.8) συνήθως δεν είναι ακέραιος αριθμός. Επομένως, ορίζουμε τον πλησιέστερο κόμβο στην τιμή εξάσκησης με  $j_0 = [\bullet]$ , που δηλώνει τον πλησιέστερο ακέραιο αριθμό έπειτα από στρογγυλοποίηση.

$$j_0 = \left\lceil \frac{\log(K / S_0) - N \log d_0}{\log(u_0 / d_0)} \right\rceil.$$

Για να διασφαλίσουμε ότι ο κόμβος  $(N, j_0)$  συμπίπτει ακριβώς με την τιμή εξάσκησης  $K$ , επιλέγεται ένα καινούργιο  $\lambda$  ούτως ώστε:

$$S_0 u^{j_0} d^{N-j_0} = K$$

$$\log S_0 + j_0 \log u + (N - j_0) \log d = \log K$$

$$\log S_0 + j_0 \log e^{\sigma\sqrt{\Delta t} + \lambda\sigma^2\Delta t} + (N - j_0) \log e^{-\sigma\sqrt{\Delta t} + \lambda\sigma^2\Delta t} = \log K$$

$$\log S_0 + j_0(\sigma\sqrt{\Delta t} + \lambda\sigma^2\Delta t) + (N - j_0)(-\sigma\sqrt{\Delta t} + \lambda\sigma^2\Delta t) = \log K$$

$$\log S_0 + j_0\sigma\sqrt{\Delta t} + j_0\lambda\sigma^2\Delta t - N\sigma\sqrt{\Delta t} + N\lambda\sigma^2\Delta t + j_0\sigma\sqrt{\Delta t} - j_0\lambda\sigma^2\Delta t = \log K$$

$$2j_0\sigma\sqrt{\Delta t} - N\sigma\sqrt{\Delta t} + N\lambda\sigma^2\Delta t = \log K - \log S_0$$

$$N\lambda\sigma^2\Delta t = \log K - \log S_0 - 2j_0\sigma\sqrt{\Delta t} + N\sigma\sqrt{\Delta t}$$

$$\lambda = \frac{\log K - \log S_0 - 2j_0\sigma\sqrt{\Delta t} + N\sigma\sqrt{\Delta t}}{N\sigma^2\Delta t}$$

$$\lambda = \frac{\log(K / S_0) - \sigma\sqrt{\Delta t}(2j_0 - N)}{N\sigma^2\Delta t}.$$

(3.9)

Η σχέση (3.9) μπορεί να γραφτεί ως το εξής πηλίκο:

$$\frac{S_0 u^{j_0} d^{N-j_0}}{S_0 u_0^\eta d_0^{N-\eta}} = \frac{K}{K}$$

$$\frac{j_0 \log u + (N - j_0) \log d}{\eta \log u_0 + (N - \eta) \log d_0} = \frac{\log K - \log S_0}{\log K - \log S_0}$$

$$\frac{j_0(\sigma\sqrt{\Delta t} + \lambda\sigma^2\Delta t) + N(-\sigma\sqrt{\Delta t} + \lambda\sigma^2\Delta t) - j_0(-\sigma\sqrt{\Delta t} + \lambda\sigma^2\Delta t)}{\eta(\sigma\sqrt{\Delta t} + \lambda_0\sigma^2\Delta t) + N(-\sigma\sqrt{\Delta t} + \lambda_0\sigma^2\Delta t) - \eta(-\sigma\sqrt{\Delta t} + \lambda_0\sigma^2\Delta t)} = 1$$

$$\frac{j_0\sigma\sqrt{\Delta t} + j_0\lambda\sigma^2\Delta t - N\sigma\sqrt{\Delta t} + N\lambda\sigma^2\Delta t + j_0\sigma\sqrt{\Delta t} - j_0\lambda\sigma^2\Delta t}{\eta\sigma\sqrt{\Delta t} - N\sigma\sqrt{\Delta t} + \eta\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1$$

$$\frac{2j_0\sigma\sqrt{\Delta t} - N\sigma\sqrt{\Delta t}(1 - \lambda\sigma\sqrt{\Delta t})}{2\eta\sigma\sqrt{\Delta t} - N\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1$$

$$\frac{\sigma\sqrt{\Delta t}(2j_0 - N(1 - \lambda\sigma\sqrt{\Delta t}))}{\sigma\sqrt{\Delta t}(2\eta - N)} = 1$$

$$2j_0 - N(1 - \lambda\sigma\sqrt{\Delta t}) = 2\eta - N$$

$$2j_0 - N + N\lambda\sigma\sqrt{\Delta t} = 2\eta - N$$

$$\lambda = \frac{2(\eta - j_0)}{N\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$\lambda = \frac{2(\eta - j_0)\sqrt{\Delta t}}{\frac{T}{\Delta t}\sigma\sqrt{\Delta t}\sqrt{\Delta t}}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{2(\eta - j_0)\sqrt{\Delta t}}{\sigma T}} \quad (3.10)$$

Με αυτή τη συγκεκριμένη επιλογή του  $\lambda$ , η τιμή εξάσκησης είναι τοποθετημένη πάντα στον κόμβο  $(N, j_0)$  κατά τη λήξη του δικαιώματος προαίρεσης. Στη σχέση (3.10), η σύγκλιση εξασφαλίζεται ακόμα και αν το  $\lambda$  εξαρτάται από το  $\Delta t$ , καθώς ισχύουν τα παρακάτω:

- ✓  $|\eta - j_0| < 0.5$  εξ' ορισμού· στρογγυλοποιώντας το  $\eta$  στον κοντινότερο ακέραιο αριθμό  $j_0$ , εφόσον αυτό δε δίνει ακέραιο αριθμό
- ✓ Ως συνέπεια της προηγούμενης πρότασης και λαμβάνοντας υπόψη τη λήξη  $T$  ως μία σταθερά συμπεραίνουμε ότι:

$$\lambda = \frac{2|\eta - j_0|\sqrt{\Delta t}}{\sigma T} \Rightarrow \frac{2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\Delta t}}{\sigma T} = \frac{\sqrt{\Delta t}}{\sigma T} \rightarrow 0, \text{ το } \lambda \text{ τείνει στο } 0, \text{ καθώς } \Delta t \rightarrow 0.$$

- ✓ Από τη σχέση (3.7) εξασφαλίζονται οι μη αρνητικές πιθανότητες για επαρκώς μικρό  $\Delta t$ .

Ο Πίνακας 3.2 δείχνει ότι για ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς η ακρίβεια του διωνυμικού μοντέλου εκτιμάται σε σύγκριση με την τιμή Black-Scholes. Για το Αμερικάνικο δικαίωμα πώλησης δεν υπάρχει λύση στο όριο του συνεχές χρόνου κι επομένως η αριθμητική ακρίβεια εκτιμάται από τη σύγκλιση των σειρών τιμών. Παρατηρείται ότι οι τιμές με το ευέλικτο διωνυμικό μοντέλο συγκλίνουν πιο γρήγορα από εκείνες των  $CRR$  και για τους δύο τύπους.

**Πίνακας 3.2.** Οι τιμές και τα σφάλματα αποτίμησης για Ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς και Αμερικάνικα δικαιώματα πώλησης

<b>Ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς</b>						
<b>Ευέλικτο Διωνυμικό Μοντέλο</b>				<b>CRR Μοντέλο</b>		
<u>Χρονικά Βήματα</u>	<u>Τιμή call option</u>	<u>Error</u>	<u>Error ratio</u>	<u>Τιμή call option</u>	<u>Error</u>	<u>Error ratio</u>
25	10.139765	-0.050294	-	10.229789	0.039731	-
50	10.165893	-0.024166	2.081184	10.202537	0.012478	3.183973
100	10.178175	-0.011883	2.033633	10.192395	0.002337	5.340583
200	10.184097	-0.005962	1.993260	10.195410	0.005352	0.436570
400	10.187085	-0.002974	2.004896	10.192466	0.002408	2.222578
800	10.188570	-0.001489	1.997437	10.189847	-0.000211	-11.413150
1600	10.189314	-0.000745	1.998967	10.190394	0.000336	-0.627982
3200	10.189686	-0.000372	2.000770	10.190234	0.000175	1.916679
6400	10.189873	-0.000186	2.003083	10.190230	0.000172	1.019975
Τιμή Black-Scholes	10.190058			10.190058		
<b>Αμερικάνικα δικαιώματα πώλησης</b>						
25	2.493905	-	-	2.553684	-	-
50	2.507587	-0.013681	-	2.530140	0.023544	-
100	2.513679	-0.006092	2.245737	2.524845	0.005294	4.446938
200	2.516809	-0.003130	1.946452	2.525224	-0.000379	-13.9664
400	2.518496	-0.001687	1.855366	2.522484	0.002740	-0.138346
800	2.519292	-0.000796	2.119450	2.520055	0.002429	1.128062
1600	2.519672	-0.000380	2.093843	2.520397	-0.000342	-7.102269
3200	2.519856	-0.000184	2.064632	2.520230	0.000168	-2.039447
6400	2.519947	-0.000091	2.013085	2.520205	0.000025	6.773305

Σημείωση: Τα δεδομένα είναι τα εξής:  $S_0 = 100$ ,  $K = 95$ ,  $r = 0.06$ ,  $T = 6/12$ ,  $\sigma = 0.2$  και

$N$  ένα εύρος χρονικών βημάτων από 25 έως 6400. Αναφέρονται επίσης και οι τιμές του μοντέλου CRR για σκοπό σύγκρισης.

### 3.3 Μέθοδος παρέκτασης

Σύμφωνα με το άρθρο του Yisong Sam Tian (1999), μία σημαντική διαφορά ανάμεσα στα δύο μοντέλα είναι αυτή της ομαλότητας σύγκλισης. Αυτό το επιβεβαιώσαμε στο Σχήμα 3.2. Το μοντέλο *FB* συγκλίνει μονοτονικά στη λύση κλειστής μορφής παρουσιάζοντας μικρότερο σφάλμα αποτίμησης, καθώς χρησιμοποιούνται περισσότερα βήματα χρόνου. Αυτό δεν ισχύει για το μοντέλο των *CRR*. Στο ίδιο σχήμα παρατηρείται επίσης, ότι το μοντέλο των *CRR* συγκλίνει με *ταχύτερο ρυθμό* από το μοντέλο *FB*. Ωστόσο, αυτό δε δημιουργεί πρόβλημα, γιατί μία μέθοδος παρέκτασης μπορεί να χρησιμοποιηθεί και να βελτιώσει σημαντικά το ρυθμό σύγκλισης για το μοντέλο *FB*.

Ας υποθέσουμε μία σειρά χρονικών βημάτων με το καθένα να έχει το διπλάσιο μέγεθος του προηγούμενου. Έστω  $e(N)$  το σφάλμα αποτίμησης του διωνυμικού μοντέλου με  $N$  χρονικά βήματα. Τότε,

$$e(N) = C(N) - C_{BS} \quad , \quad (3.11)$$

όπου  $C(N)$  είναι η τιμή του δικαιώματος στο *FB* μοντέλο και  $C_{BS}$  είναι η τιμή Black-Scholes.

- ❖ Για τα Ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς, το σφάλμα αποτίμησης του *FB* μοντέλου είναι άμεσα μετρήσιμο, καθώς το μοντέλο Black-Scholes παρέχει λύση κλειστού τύπου για την τιμή του δικαιώματος προαίρεσης. Η ομαλότητα της σύγκλισης μετριέται από το λόγο σφάλματος, ο οποίος ορίζεται ως:

$$\rho(N) = \frac{e(N)}{e(2N)} \quad , \quad (3.12)$$

όπου μετράει τη βελτίωση της ακρίβειας, καθώς ο αριθμός των χρονικών βημάτων διπλασιάζεται. Αν η ακρίβεια βελτιώνεται καθώς ο αριθμός των χρονικών βημάτων αυξάνεται, ο λόγος σφάλματος πρέπει να είναι μεγαλύτερος της μονάδας σε απόλυτη τιμή. Παρακάτω αποδεικνύεται ότι η τιμή Black-Scholes μπορεί να υπολογιστεί με ακρίβεια από δύο διωνυμικές τιμές, εφόσον ο λόγος σφάλματος είναι γνωστός.

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (3.11) και (3.12) καταλήγουμε στην τιμή Black-Scholes συναρτήσει των διωνυμικών τιμών.

$$\rho(N) = \frac{e(N)}{e(2N)}$$

$$e(N) = \rho(N)e(2N)$$

$$C(N) - C_{BS} = \rho(N)e(2N)$$

$$C(N) - C_{BS} = \rho(N)[C(2N) - C_{BS}]$$



$$C(N) - C_{BS} = \rho(N)C(2N) - \rho(N)C_{BS}$$

$$-C_{BS}[\rho(N) - 1] = \rho(N)C(2N) - C(N)$$

$$\boxed{C_{BS} = \frac{\rho(N)C(2N) - C(N)}{\rho(N) - 1}}.$$

Φυσικά, αυτό δε συμβαίνει γενικά. Ωστόσο, όταν το σφάλμα αποτίμησης μειώνεται μονοτονικά, καθώς αυξάνεται το  $N$ , ο λόγος σφάλματος συγκλίνει σε μία σταθερά. Σε αυτή την περίπτωση, θεωρώ πως αν το όριο μία σειράς αναλογίας σφάλματος ( $\rho(N)$ ) ισούται με μία σταθερά  $\rho$ , τότε παρουσιάζεται μία μέθοδος παρέκτασης για τη βελτίωση της ακρίβειας του ευέλικτου διωνυμικού μοντέλου, η οποία είναι:

$$\hat{C}(2N) = \frac{\rho C(2N) - C(N)}{\rho - 1}. \quad (3.13)$$

Η σχέση (3.13) σε συνδυασμό με τη σχέση (3.11) και (3.12) μπορεί να γραφτεί και ως εξής:

$$\hat{C}(2N) = \frac{\rho C(2N) - C(N)}{\rho - 1}$$

$$\hat{C}(2N) = \frac{\rho[e(2N) + C_{BS}] - e(N) - C_{BS}}{\rho - 1}$$

$$\hat{C}(2N) = \frac{\rho e(2N) + \rho C_{BS} - \rho(N)e(2N) - C_{BS}}{\rho - 1}$$

$$\hat{C}(2N) = \frac{e(2N)[\rho - \rho(N)]}{\rho - 1} + \frac{C_{BS}[\rho - 1]}{\rho - 1}$$

$$\boxed{\hat{C}(2N) = \frac{e(2N)[\rho - \rho(N)]}{\rho - 1} + C_{BS}}. \quad (3.14)$$

Στη σχέση (3.14) εάν ο λόγος σφάλματος  $\rho(N)$  συγκλίνει στο  $\rho$  καθώς αυξάνεται το  $N$ , το σφάλμα αποτίμησης,  $e(2N)$ , ελέγχεται από το σφάλμα παρέκτασης,  $\frac{\rho - \rho(N)}{\rho - 1}$  και  $C_{BS} = \hat{C}(2N) = \frac{\rho C(2N) - C(N)}{\rho - 1}$ . Συνεπώς, η μέθοδος παρέκτασης μπορεί να βελτιώσει το ρυθμό σύγκλισης για το μοντέλο *FB*.

Στον Πίνακα 3.2 είναι σαφές ότι ο λόγος σφάλματος  $\rho(N)$  είναι σχεδόν σταθερός και συγκλίνει στο 2 πολύ γρήγορα για το μοντέλο *FB*, αλλά όχι για το μοντέλο των *CRR*. Επιπρόσθετος αριθμητικός πειραματισμός δείχνει ότι το ίδιο

συμπέρασμα ισχύει για όλα τα Ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς με βάση τα μοντέλα *FB* και *CRR*.

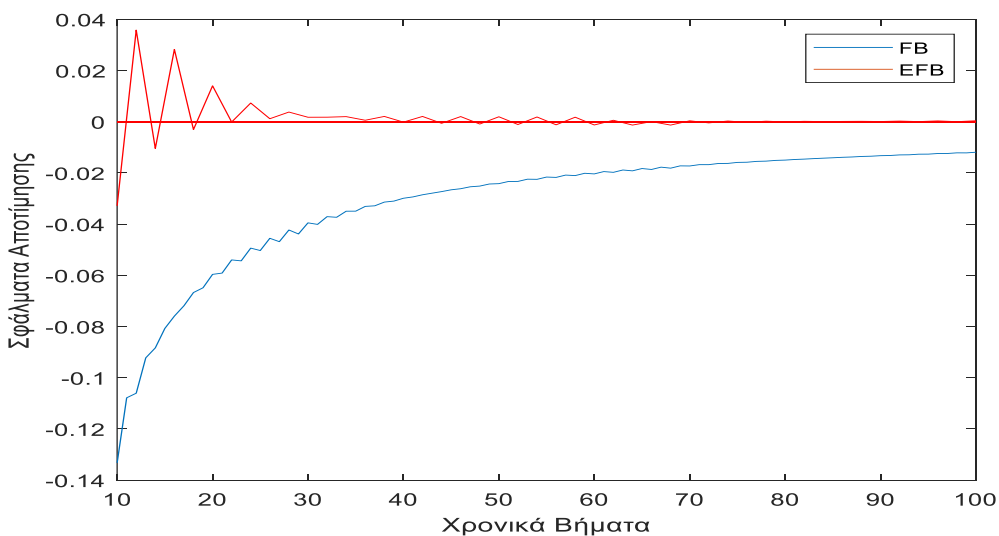
Ο ρυθμός σύγκλισης για το μοντέλο *FB* μπορεί να βελτιωθεί με τη μέθοδο παρέκτασης, που έχει οριστεί στην εξίσωση (3.13). Προκειμένου να ελέγξουμε πως η μέθοδος παρέκτασης βελτιώνει το ρυθμό σύγκλισης επιστρέφουμε στον Πίνακα 3.2 και αναφερόμαστε για  $N = 100$  χρονικά βήματα. Στο χρονικό σημείο αυτό, το σφάλμα αποτίμησης για το μοντέλο *FB* είναι  $-0.011883$ , σχεδόν πέντε φορές μεγαλύτερο, κατ' απόλυτη τιμή, από το σφάλμα αποτίμησης για το μοντέλο των *CRR* που είναι  $0.002337$ . Συνεπώς, αφού ο λόγος σφάλματος συγκλίνει σε μία σταθερά, στο 2, η μέθοδος παρέκτασης που ορίζεται στη σχέση (3.13) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη βελτίωση της σύγκλισης. Δεδομένου, λοιπόν, ότι ο λόγος σύγκλισης για  $N = 100$  είναι  $2.033633$ , παρατηρείται ότι η μέθοδος παρέκτασης μειώνει το σφάλμα αποτίμησης του μοντέλου *FB* σε:

$$\frac{2.033633 - 2}{2 - 1} * (-0.011883) = -0.000400 ,$$

το οποίο είναι σχεδόν έξι φορές μικρότερο από το σφάλμα στο μοντέλο των *CRR*.

Στο Σχήμα 3.3 γίνεται αντιληπτή η συμπεριφορά των ευέλικτων μοντέλων. Όσο το  $N$  αυξάνεται τα μοντέλα συγκλίνουν. Φυσικά, το μοντέλο *EFB* έχει μόλις συγκλίνει στα 30 χρονικά βήματα, ενώ το *FB* χρειάζεται 100 ή και παραπάνω χρονικά βήματα.

**Σχήμα 3.3.** Γραφικές παραστάσεις των σφαλμάτων αποτίμησης των δύο ευέλικτων διωνυμικών μοντέλων σε συνάρτηση με τα χρονικά βήματα  $N$



Σημείωση: Τα δεδομένα είναι τα εξής:  $S_0 = 100$ ,  $K = 95$ ,  $r = 0.06$ ,  $\sigma = 0.2$ ,  $T = 6/12$  και  $N$  ένα εύρος χρονικών βημάτων από 10 έως 100.

- ❖ Για τα Αμερικάνικα δικαιώματα πώλησης, το σφάλμα αποτίμησης του *FB* μοντέλου δεν είναι άμεσα μετρήσιμο, επειδή δεν υπάρχει λύση κλειστής μορφής της τιμής του δικαιώματος προαίρεσης. Συνεπώς, ο λόγος σφάλματος δεν μπορεί να υπολογιστεί άμεσα. Αντιθέτως, η μείωση σφάλματος όταν ο αριθμός των χρονικών βημάτων διπλασιάζεται υπολογίζεται ως εξής :

$$\varepsilon(N) = C(N) - C(2N)$$

Ο λόγος μείωσης σφάλματος ορίζεται ως:

$$\rho'(2N) = \frac{\varepsilon(N)}{\varepsilon(2N)} = \frac{C(N) - C(2N)}{C(2N) - C(4N)} \quad (3.15)$$

Σε αντίθεση με το λόγο σφάλματος, ο λόγος μείωσης σφάλματος είναι απλός υπολογισμός. Συνδυάζοντας τις σχέσεις (3.11), (3.12) και (3.15) ο λόγος μείωσης σφάλματος ορίζεται συναρτήσει του λόγου σφάλματος ως:

$$\rho'(2N) = \frac{C(N) - C(2N)}{C(2N) - C(4N)}$$

$$\rho'(2N) = \frac{e(N) - e(2N)}{e(2N) - e(4N)}$$

$$\rho'(2N) = \frac{\rho(N)e(2N) - e(2N)}{\rho(2N)e(4N) - e(4N)}$$

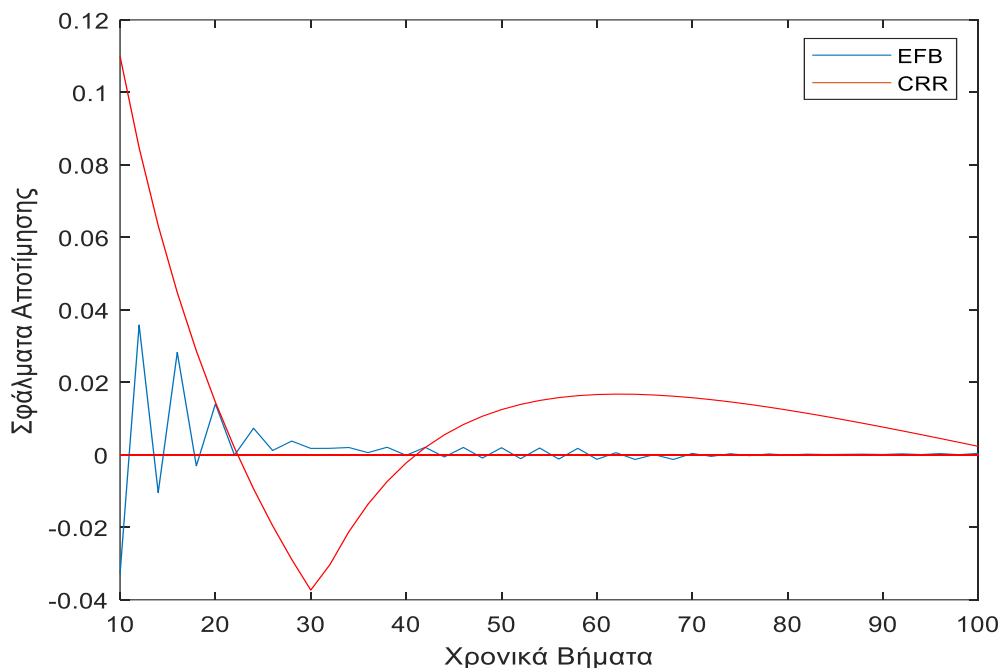
$$\rho'(2N) = \frac{[\rho(N) - 1] e(2N)}{[\rho(2N) - 1] e(4N)}$$

$$\rho'(2N) = \frac{[\rho(N) - 1]}{[\rho(2N) - 1]} \rho(2N)$$

Αυτό δείχνει ότι αν ο λόγος σφάλματος συγκλίνει σε μία σταθερά, τότε ο λόγος μείωσης σφάλματος επίσης συγκλίνει στην ίδια σταθερά και επομένως η μέθοδος παρέκτασης, που ορίζεται στη σχέση (3.13) βελτιώνει επίσης το ρυθμό σύγκλισης. Αυτό είναι ιδιαίτερα χρήσιμο για τα Αμερικάνικα δικαιώματα πώλησης που δεν έχουν λύση κλειστής μορφής. Στον Πίνακα 3.2 φαίνεται ότι ο λόγος σφάλματος συγκλίνει στο 2 για το μοντέλο *FB*, αλλά όχι για το μοντέλο των *CRR*.

Στο Σχήμα 3.4 παρουσιάζονται τα σφάλματα αποτίμησης ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς. Τα σφάλματα που προκύπτουν από το *EFB* μοντέλο συγκρίνονται με αυτά του μοντέλου των *CRR*. Η διαφορά είναι αξιοσημείωτη.

**Σχήμα 3.4.** Γραφική αναπαράσταση των μοντέλων *CRR* και *EFB* σε συνάρτηση με τα χρονικά βήματα  $N$



Σημείωση: Τα δεδομένα είναι τα εξής:  $S_0 = 100$ ,  $\kappa = 95$ ,  $\sigma = 0.2$ ,  $T = 6/12$  και  $N$  ένα εύρος χρονικών βημάτων από 10 έως 100.

Παρατηρείται ότι:

- Το σφάλμα αποτίμησης του μοντέλου *EFB* είναι ελάχιστα αισθητό μετά από 30 βήματα χρόνου.
- Για να γίνει το σφάλμα αποτίμησης του μοντέλου *CRR* παρόμοιο με αυτό του *EFB* απαιτούνται 100 ή περισσότερα βήματα χρόνου.

Συνοψίζοντας, από τα Σχήματα 3.2, 3.3 και 3.4 είναι σαφές ότι το μοντέλο *FB* με την επιλογή της παραμέτρου “κλίσης” συγκλίνει στην τιμή Black-Scholes μονοτονικά καθώς ο αριθμός των χρονικών βημάτων αυξάνεται, κάτι που δεν ισχύει για το μοντέλο των *CRR*. Επίσης, με τη χρήση της μεθόδου παρέκτασης βελτιώνεται ο ρυθμός σύγκλισης για το μοντέλο *FB*, ενώ για το μοντέλο των *CRR* αυτό δεν ισχύει καθώς δε συγκλίνει ομαλά.

Στον Πίνακα 3.3 που ακολουθεί είναι φανερό ότι:

- Η τιμή *EFB* συγκλίνει στην τιμή Black-Scholes με μόνο 30 βήματα χρόνου.
- οι τιμές του μοντέλου των *CRR* συγκλίνουν πολύ πιο αργά σε σύγκριση με τις τιμές του μοντέλου *EFB*.

**Πίνακας 3.3.** Βελτιωμένη σύγκλιση για τα Ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς και τα Αμερικάνικα δικαιώματα πώλησης

<b>Ευρωπαϊκό Δικαίωμα Αγοράς</b>		<b>Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης</b>		
<b>Χρονικά Βήματα</b>	<b>CRR</b>	<b>EFB</b>	<b>CRR</b>	<b>EFB</b>
<i>Strike Price = 95</i>				
20	10.2046	10.2041	2.5462	2.5487
50	10.2025	10.1920	2.5301	2.5213
100	10.1924	10.1905	2.5248	2.5198
150	10.1925	10.1900	2.5223	2.5201
200	10.1954	10.1900	2.5252	2.5199
300	10.1897	10.1901	2.5201	2.5201
400	10.1925	10.1901	2.5225	2.5202
500	10.1886	10.1901	2.5193	2.5201
1000	10.1907	10.1901	2.5208	2.5200
Τιμή B-S	10.1901	10.1901	2.5200	2.5200
<i>Strike Price = 100</i>				
20	7.0854	7.1549	4.4612	4.4910
50	7.1276	7.1663	4.4803	4.4978
100	7.1417	7.1559	4.4867	4.4932
150	7.1464	7.1575	4.4888	4.4934
200	7.1488	7.1559	4.4898	4.4928
300	7.1512	7.1559	4.4908	4.4929
400	7.1524	7.1559	4.4913	4.4929
500	7.1531	7.1559	4.4916	4.4928
1000	7.1545	7.1559	4.4922	4.4928
Τιμή B-S	7.1559	7.1559	4.4927	4.4927
<i>Strike Price = 105</i>				
20	4.8127	4.8421	7.2605	7.2729
50	4.7987	4.7893	7.2608	7.2502
100	4.7989	4.7890	7.2544	7.2487
150	4.7892	4.7927	7.2503	7.2498
200	4.7982	4.7940	7.2544	7.2502
300	4.7875	4.7922	7.2477	7.2496
400	4.7953	4.7922	7.2520	7.2496
500	4.7919	4.7925	7.2497	7.2496
1000	4.7935	4.7925	7.2505	7.2496
Τιμή B-S	4.7923	4.7923	7.2495	7.2495

Σημείωση: Τα δεδομένα είναι τα εξής:  $S_0 = 100$ ,  $K = 95, 100, 105$ ,  $\sigma = 0.2$ ,  $T = 6/12$ . Οι τιμές EFB είναι οι τιμές FB με δεδομένο  $\lambda$  από τον τύπο (3.9) με  $N$  και  $N/2$ .

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

### Εμπειρική μελέτη

Χρησιμοποιούμε την εμπειρική μελέτη για να εκφράσουμε την ικανότητα των μοντέλων, που περιγράφουν την τιμή των δικαιωμάτων προαίρεσης να συγκλίνουν στην τιμή Black-Scholes καθώς τα χρονικά βήματα ( $N$ ) αυξάνονται. Αυτά είναι τα εξής:

**Πίνακας 4.1.** Συνοπτικός πίνακας παρουσίασης των μοντέλων με τις παραμέτρους προς εκτίμηση

<b>CRR</b>	<b>FB2</b>	<b>FB</b>	<b>EFB</b>
$\sigma$	$\sigma, \lambda$	$\sigma$	$\rho$

Σημείωση: **CRR**: Το Μοντέλο των Cox-Ross-Rubinstein. **FB2**: Το Ευέλικτο Διωνυμικό Μοντέλο με αυθαίρετο  $\lambda$ . **FB**: Το Ευέλικτο Διωνυμικό Μοντέλο με την επιλογή δεδομένου  $\lambda$ . **EFB**: Το Ευέλικτο Διωνυμικό Μοντέλο με τη χρήση της μεθόδου παρέκτασης για το συγκεκριμένο  $\lambda$ .

Η διαδικασία αυτής της μελέτης συνοψίζεται παρακάτω:

- Αρχικά, θα περισυλλέξουμε τα δεδομένα μας από την πηγή, η οποία αναφέρεται παρακάτω, και έπειτα θα τα κατατάξουμε σε φύλλο του Excel.
- Στη συνέχεια, μέσω του προγράμματος Matlab θα καταφέρουμε να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους, στον οποίων αναφορά έγινε παραπάνω που φέρουν το καλύτερο ταίριασμα στις τιμές των μοντέλων με τις παρατηρηθείσες τιμές της αγοράς.
- Εκτιμώντας τις παραμέτρους θα ελέγξουμε πως τα μοντέλα συμπεριφέρονται, καθώς τα χρονικά βήματα  $N$  αυξάνονται εντός του δείγματος εκτίμησης (*In-Sample*).
- Ακόμα, θα κάνουμε έλεγχο για την προβλεπτική ικανότητα των μοντέλων σε εκτός του δείγματος παρατηρήσεις (*Out-of-sample*) για χρονικό ορίζοντα 15 ημερών.
- Τέλος, θα παρατηρήσουμε ποιο μοντέλο συγκλίνει γρηγορότερα και για ποια χρονικά βήματα το πετυχαίνουμε αυτό.

## 4.1 Περιγραφή Δεδομένων Αγοράς

Για την ανάγκη της εμπειρικής μελέτης θα χρειαστούμε δεδομένα για ένα *in-the-money*, *at-the-money*, *out-of-the money*, Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης με τον κάθε τύπο χρηματοροής να διαιρείται σε 3 ληκτότητες και για χρονικό ορίζοντα περίπου 5 μηνών. Αναλυτικότερα, χρειάζονται οι *in-the-money*, *at-the-money*, *out-of-the money*.

- τιμές του δικαιώματος για περίπου 5 μήνες (*market price*).
- τιμές εξάσκησης για τον ίδιο χρονικό ορίζοντα (*Strike price*).
- τεκμαρτή μεταβλητότητα για τον ίδιο χρονικό ορίζοντα (*implied volatility*).
- περίοδος μέχρι τη λήξη για τον ίδιο χρονικό ορίζοντα (*Time to maturity*).
- Το εγχώριο επιτόκιο, που στην περίπτωση μας είναι το 10ετές Αμερικάνικο επιτόκιο για χρονικό ορίζοντα 5 μηνών (*rate*).
- Η τιμή του υποκείμενου τίτλου βάση του οποίου συνάπτεται το δικαίωμα πώλησης για χρονικό ορίζοντα 5 μηνών (*Current Price*).

Για κάθε ημέρα έχουμε παρατηρήσεις δικαιωμάτων με ληκτότητες 1 βδομάδα, 6 μήνες και 12 μήνες. Επίσης, έχουμε τιμές εξάσκησης ίσες με την τρέχουσα τιμή της μετοχής (*At-the-money*), τιμές εξάσκησης σε επίπεδα 3% πάνω από την τρέχουσα τιμή της μετοχής (*In-the-money*) και τιμές εξάσκησης σε επίπεδα 3% κάτω από την τρέχουσα τιμή της μετοχής (*Out-of-the-money*). Αθροιστικά, διεξάγουμε έρευνα για διάστημα από 23 Μαΐου 2019 μέχρι και 31 Οκτωβρίου 2019.

Ο υποκείμενος τίτλος είναι η μετοχή της εταιρείας Microsoft. Ο πιο σημαντικός λόγος επιλογής της συγκεκριμένης εταιρείας οφείλεται στην ισχυρή δύναμη και πορεία που έχει καταγράψει τα τελευταία χρόνια στον κλάδο της τεχνολογίας με αποτέλεσμα να έχει μεγάλο αριθμό συμβολαίων.

Τα δεδομένα αντλούνται από δύο διαφορετικές ενδοπανεπιστημιακές πηγές. Οι τιμές των *in-the-money*, *at-the-money*, *out-of-the-money* δικαιωμάτων πώλησης, οι τιμές εξάσκησης τους, οι ληκτότητες τους, καθώς επίσης και οι τεκμαρτές μεταβλητότητές τους προέρχονται από τη βάση δεδομένων Bloomberg, ενώ η τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου και το εγχώριο επιτόκιο εξάγονται από το πρόγραμμα Thomson Reuters.

## 4.2 Εκτίμηση Παραμέτρων

Γενικά, από τις παρατηρήσεις του δείγματος μπορούμε να υπολογίσουμε τη σημειακή εκτίμηση (*point estimation*) της παραμέτρου μίας τυχαίας μεταβλητής. Η σημειακή εκτίμηση μίας παραμέτρου είναι η στατιστική που υπολογίζουμε από το δείγμα, δηλαδή είναι μία τιμή που υπολογίζεται με βάση τα δεδομένα του δείγματος και αντιπροσωπεύει την πραγματική τιμή της σχετικής παραμέτρου του πληθυσμού.

Για να πραγματοποιηθεί αυτή η εκτίμηση χρειάζεται ένα μοντέλο και μία ομάδα παραμέτρων, ώστε τα τετράγωνα των διαφορών από τις τιμές των δικαιωμάτων που εκτιμήθηκαν με τις αντίστοιχες παραμέτρους με τις τιμές της αγοράς να έχουν την ελάχιστη δυνατή τιμή. Αλγεβρικά, ορίζεται ως:

$$\hat{\varphi} = \arg \min \sum_{i=1}^N (f_i^{market}(T_i, K_i) - f_i^{model}(T_i, K_i))^2$$

Με  $\hat{\varphi}$  να είναι η ομάδα παραμέτρων του μοντέλου της κάθε περίπτωσης και  $N$  συμβολίζει τον αριθμό των δικαιωμάτων. Στην περίπτωση μας, όπου  $N=9$ .

Θα βρούμε τις τιμές των δικαιωμάτων, που έχουν διαμορφωθεί στην αγορά και θα κάνουμε χρήση του αλγορίθμου Levenberg - Marquardt με εφαρμογή στο υπολογιστικό πακέτο Matlab και την εντολή lsqnonlin για να βρούμε τις τιμές των παραμέτρων, που ταιριάζουν καλύτερα στα μοντέλα για την εύρεση της τιμής του δικαιώματος πώλησης. Στη συνέχεια, θα ελέγξουμε αν οι τιμές που μας παρουσίασαν τα μοντέλα είναι ορθές με τις εκτιμώμενες τιμές και τέλος θα βρούμε την προβλεπτική ικανότητα των μοντέλων για χρονικό διάστημα 15 ημερών.

Ο αλγόριθμος Levenberg - Marquardt αναπτύχθηκε στις αρχές της δεκαετίας του 1960 για να λύσει τα μη γραμμικά προβλήματα με ελάχιστα τετράγωνα. Λιγότερα προβλήματα με τα ελάχιστα τετράγωνα προκύπτουν στο πλαίσιο της τοποθέτησης μίας παραμέτρου  $\alpha$  σε ένα δείγμα δεδομένων ελαχιστοποιώντας το άθροισμα των τετραγώνων των σφαλμάτων μεταξύ των δεδομένων του δείγματος και της συνάρτησης. Εάν η συνάρτηση προσαρμογής δεν είναι γραμμική στις παραμέτρους, το πρόβλημα των ελάχιστων τετραγώνων είναι μη γραμμικό. Η μέθοδος των μη γραμμικών ελάχιστων τετραγώνων μειώνει επαναληπτικά το άθροισμα των τετραγώνων των σφαλμάτων μεταξύ της συνάρτησης και του δείγματος των δεδομένων μέσω μιας σειράς ενημερώσεων των τιμών παραμέτρων. Συγκεκριμένα, λύνει το εξής πρόβλημα ελαχιστοποίησης:

$$\min_x f(x) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N r_i(x)^2 = \frac{1}{2} R(x)^T R(x).$$

Όπου,

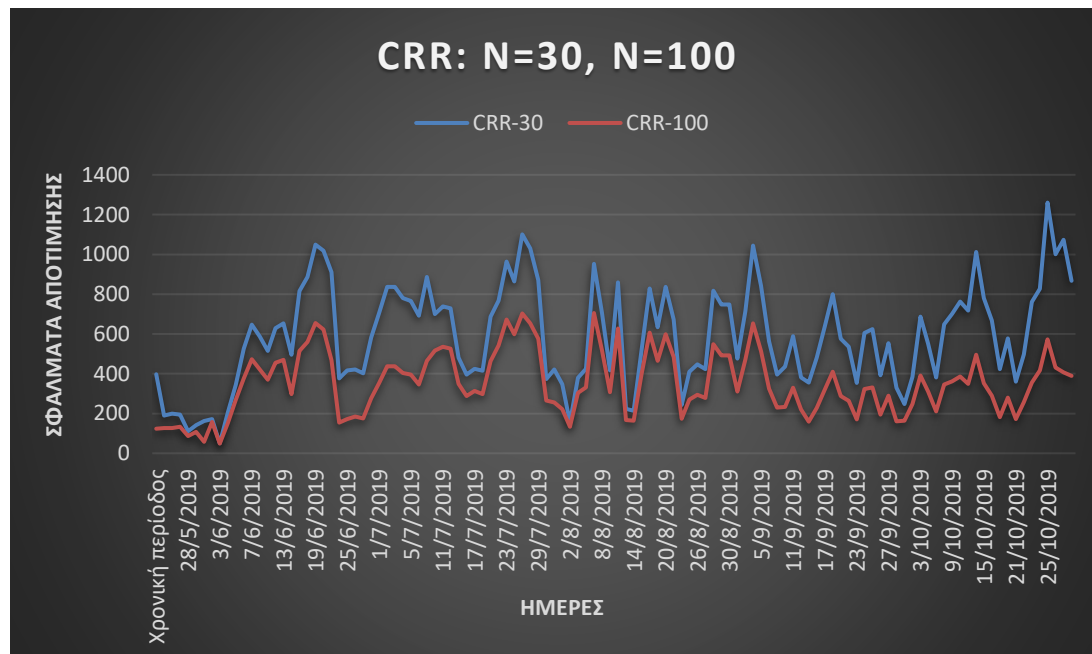


- $y(i)$  παρατηρήσεις με  $i = 1, \dots, N$
- $r_i(x) := \hat{y}_i - y_i$ , όπου  $\hat{y}_i$  οι τιμές δικαιωμάτων, που προέκυψαν από το μοντέλο με τις εκτιμώμενες παραμέτρους.
- $R = (r_1, \dots, r_N)^T$ , το οποίο είναι ένα διάνυσμα  $N$  καταλοίπων.

### 4.3 Μελέτη Αποδοτικότητας των μοντέλων εντός δείγματος

#### Αποτελέσματα Cox-Ross-Rubinstein

**Σχήμα 4.1.** Γραφικές παραστάσεις του μοντέλου των CRR με μία παράμετρο προς εκτίμηση για δύο διαφορετικά χρονικά βήματα

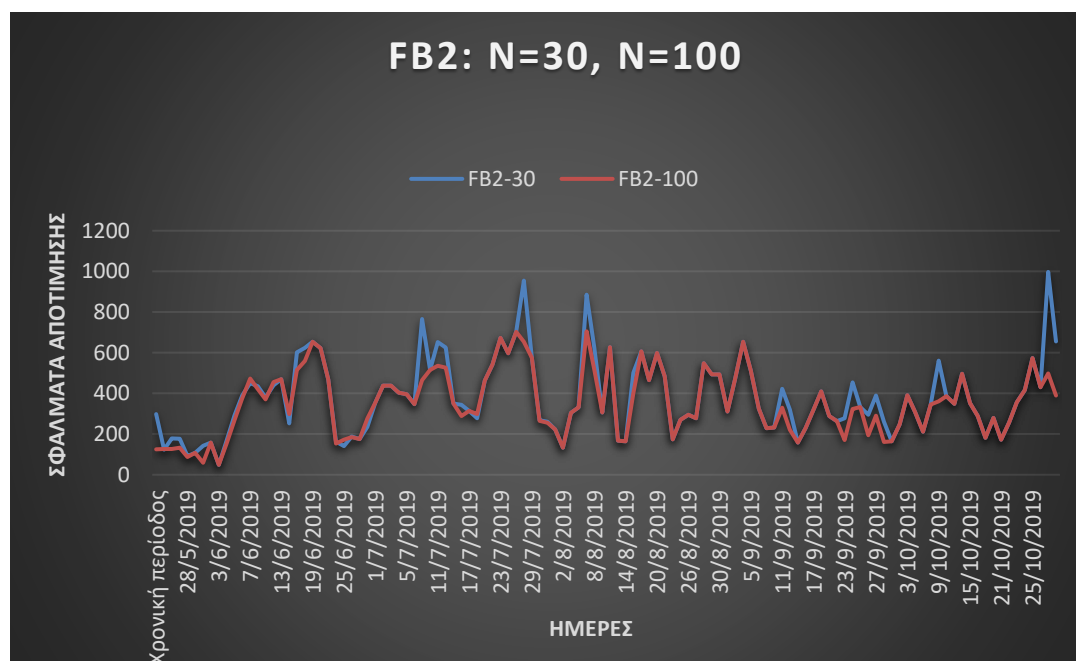


Σημείωση: CRR: εκτιμώντας το  $\sigma$ .

- ✓ Τα σφάλματα αποτίμησης για χρονικό βήμα  $N = 30$  είναι αρκετά υψηλά συγκριτικά με αυτά των  $N = 100$ .
- ✓ Το συγκεκριμένο μοντέλο απαιτεί από  $N = 100$  χρονικά βήματα και πάνω ώστε να συγκλίνει.

## Αποτελέσματα του Ευέλικτου Διωνυμικού μοντέλου

**Σχήμα 4.2.** Γραφικές παραστάσεις του μοντέλου *FB2* με δύο παραμέτρους προς εκτίμηση σχετικά με τα δύο διαφορετικά χρονικά βήματα

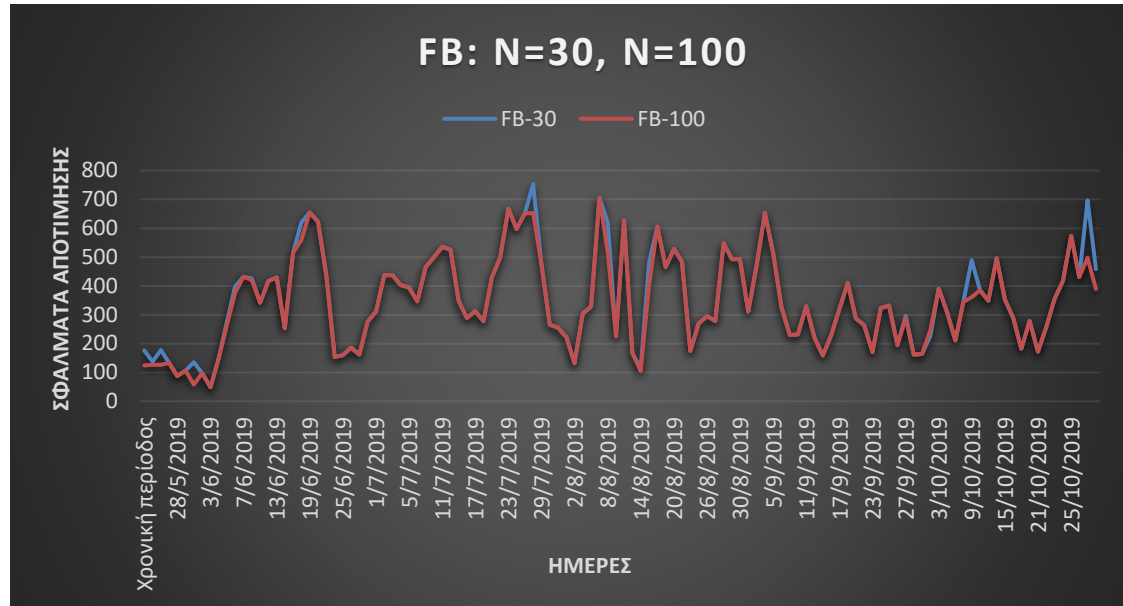


Σημείωση: *FB2*: εκτιμώντας το  $\sigma$  και  $\lambda$ .

- ✓ Το μοντέλο *FB2* συγκλίνει πιο γρήγορα συγκριτικά με το μοντέλο των *CRR* ανεξαρτήτου χρονικού βήματος.
- ✓ Τα κατάλοιπα για 30 βήματα χρόνου είναι μεγαλύτερα συγκριτικά με τα 100 χρονικά βήματα.
- ✓ Είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι σε μία συγκεκριμένη περίοδο του δείγματος το μοντέλο και για τα δύο χρονικά βήματα ταυτίζεται.

## Αποτελέσματα του Ευέλικτου Διωνυμικού μοντέλου

**Σχήμα 4.3.** Γραφικές παραστάσεις του μοντέλου *FB* με μία παράμετρο προς εκτίμηση σχετικά με τα δύο διαφορετικά χρονικά βήματα

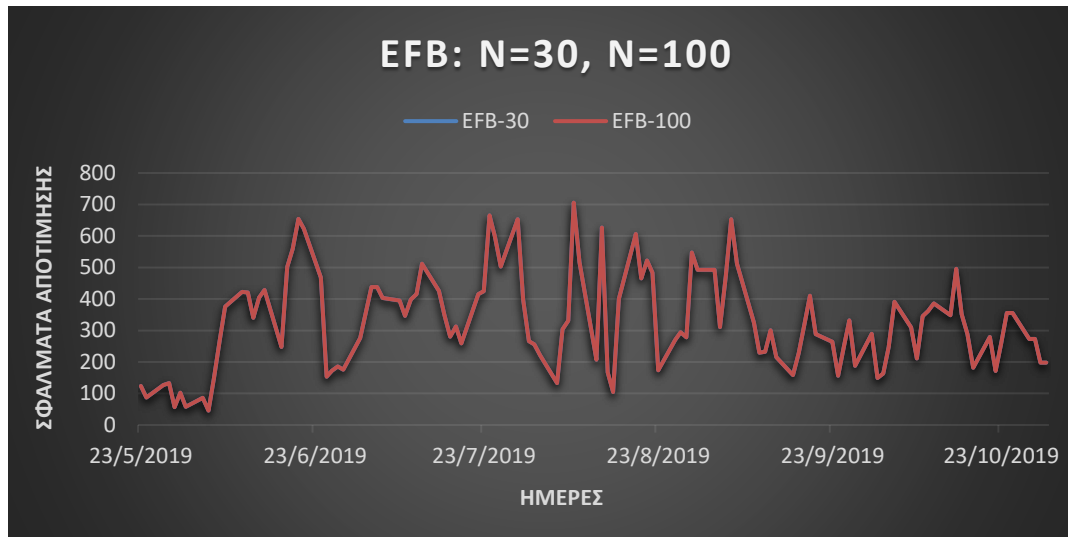


Σημείωση: *FB*: εκτιμώντας το  $\sigma$  με δεδομένο  $\lambda$  από το *FB*.

- ✓ Το μοντέλο *FB* με μία παράμετρο προς εκτίμηση συγκλίνει ταχύτερα από το μοντέλο *FB2*.
- ✓ Για τα χρονικά βήματα  $N = 30$  και συγκεκριμένα στην αρχή, στη μέση και προς το τέλος του διαστήματος εκτίμησης τα κατάλοιπα είναι μεγαλύτερα από αυτά των 100 βημάτων χρόνου.
- ✓ Το μοντέλο σχεδόν σε όλο το μήκος του διαστήματος εκτίμησης ταυτίζεται για τα διαφορετικά χρονικά βήματα.

## Αποτελέσματα του Ευέλικτου Διωνυμικού μοντέλου κάνοντας χρήση της μεθόδου παρέκτασης

**Σχήμα 4.4.** Γραφικές παραστάσεις του μοντέλου *EFB* με μία παράμετρο προς εκτίμηση σχετικά με τα δύο διαφορετικά χρονικά βήματα

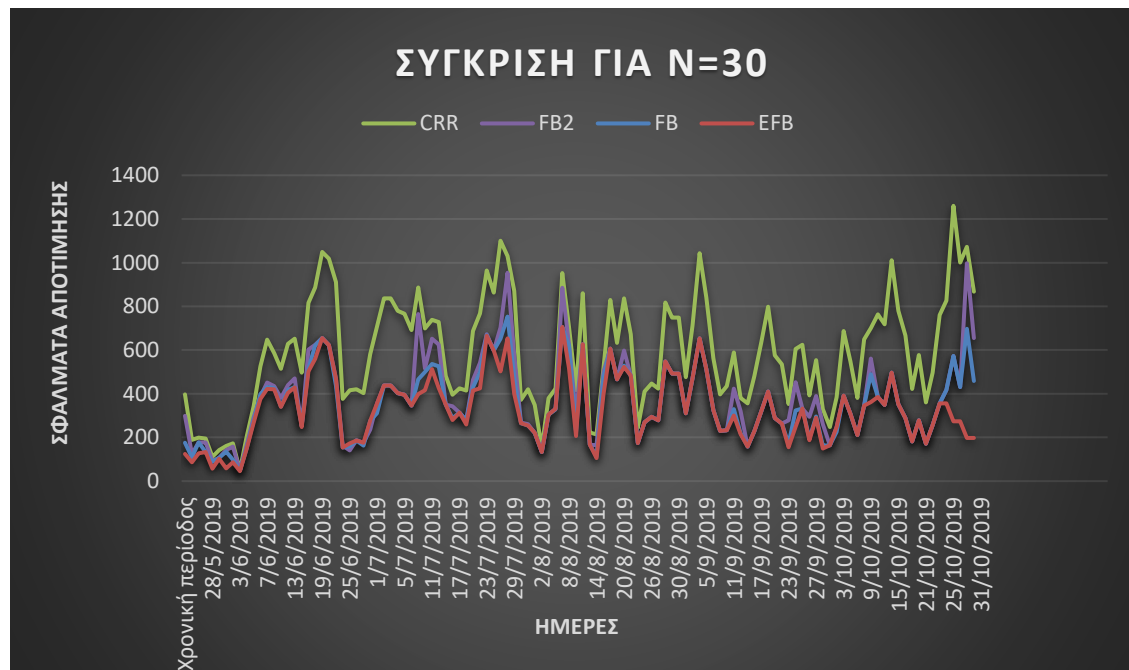


Σημείωση: *EFB*: εκτιμώντας το  $\rho$  της μεθόδου παρέκτασης με δεδομένο  $\lambda$  και  $\sigma$  από το *FB*.

- ✓ Το μοντέλο *EFB* κατά μήκος όλου του χρονικού διαστήματος της εκτίμησής μας ταυτίζεται και για τα δύο διαφορετικά χρονικά βήματα.
- ✓ Σε σύγκριση με τα υπόλοιπα μοντέλα, ανεξαρτήτου χρονικού βήματος, αυτό το μοντέλο συγκλίνει με τον πιο γρήγορο ρυθμό.

## Συνολική εικόνα αποτελεσμάτων όλων των μοντέλων

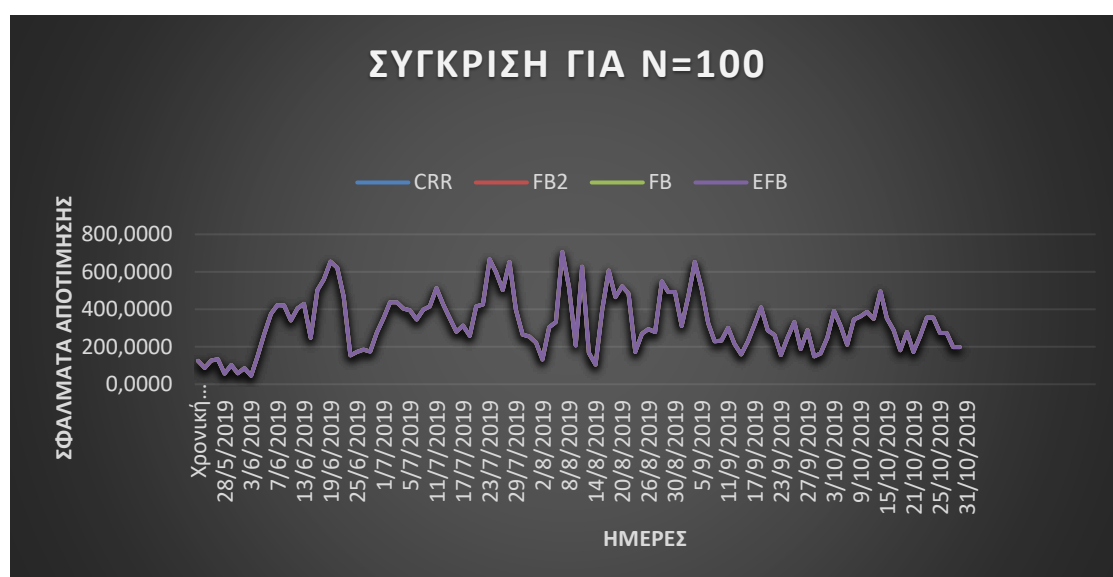
Σχήμα 4.5. Γραφικές παραστάσεις όλων των μοντέλων για  $N = 30$



Σημείωση: *CRR*: εκτιμώντας το  $\sigma$ , *FB2*: εκτιμώντας το  $\sigma$  και  $\lambda$ , *FB*: εκτιμώντας το  $\sigma$  με δεδομένο  $\lambda$  από το *FB*, *EFB*: εκτιμώντας το  $\rho$  της μεθόδου παρέκτασης με δεδομένο  $\lambda$  και  $\sigma$  από το *FB*.

- ✓ Τα σφάλματα αποτίμησης λόγω του συγκεκριμένου χρονικού βήματος είναι υψηλά για όλα τα μοντέλα.
- ✓ Είναι σαφές ότι το μοντέλο *EFB* συγκλίνει ταχύτερα συγκριτικά με τα υπόλοιπα μοντέλα.
- ✓ Κατατάσσοντας τα μοντέλα με βάση τα κατάλοιπα από τα μεγαλύτερα προς τα μικρότερα καταλήγουμε ως εξής:
  1. Μοντέλο των Cox-Ross-Rubinstein
  2. Ευέλικτο Διωνυμικό μοντέλο εκτιμώντας δύο παραμέτρους
  3. Ευέλικτο Διωνυμικό μοντέλο εκτιμώντας μία παράμετρο
  4. Ευέλικτο Διωνυμικό μοντέλο κάνοντας χρήση της μεθόδου παρέκτασης

Σχήμα 4.6. Γραφικές παραστάσεις όλων των μοντέλων για  $N = 100$



Σημείωση: CRR: εκτιμώντας το  $\sigma$ , FB2: εκτιμώντας το  $\sigma$  και  $\lambda$ , FB: εκτιμώντας το  $\sigma$  με δεδομένο  $\lambda$  από το FB, EFB: εκτιμώντας το  $\rho$  της μεθόδου παρέκτασης με δεδομένο  $\lambda$  και  $\sigma$  από το FB.

Από το Σχήμα 4.6 μπορούμε να συμπεράνουμε ότι τα κατάλοιπα για όλα τα μοντέλα είναι ίδια και έχουν μειωθεί για  $N = 100$  συγκριτικά με εκείνα του  $N = 30$ .

Επομένως, αναλύοντας κάθε μοντέλο με τα δύο διαφορετικά χρονικά βήματα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το χρονικό βήμα παίζει κυρίαρχο ρόλο στην ομαλή σύγκλιση και επηρεάζει όλα τα μοντέλα ανεξαρτήτου παραμέτρων εκτίμησης. Πιο συγκεκριμένα, καθώς αυξάνουμε το χρονικό βήμα τα σφάλματα αποτίμησης μειώνονται, με εντυπωσιακή εμφάνιση του ευέλικτου διωνυμικού μοντέλου χρησιμοποιώντας τη μέθοδο παρέκτασης που καταφέρνει να κάνει το σφάλμα αποτίμησης λιγότερο αισθητό χρησιμοποιώντας μόνο 30 χρονικά βήματα. Είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι για χρονικά βήματα άνω των 100 όλα τα μοντέλα συγκλίνουν περιορίζοντας ακόμα περισσότερο τα κατάλοιπά τους.

**Πίνακας 4.2.** Αποτελέσματα των μοντέλων αποτίμησης δικαιωμάτων πώλησης εντός του δείγματος εκτίμησης

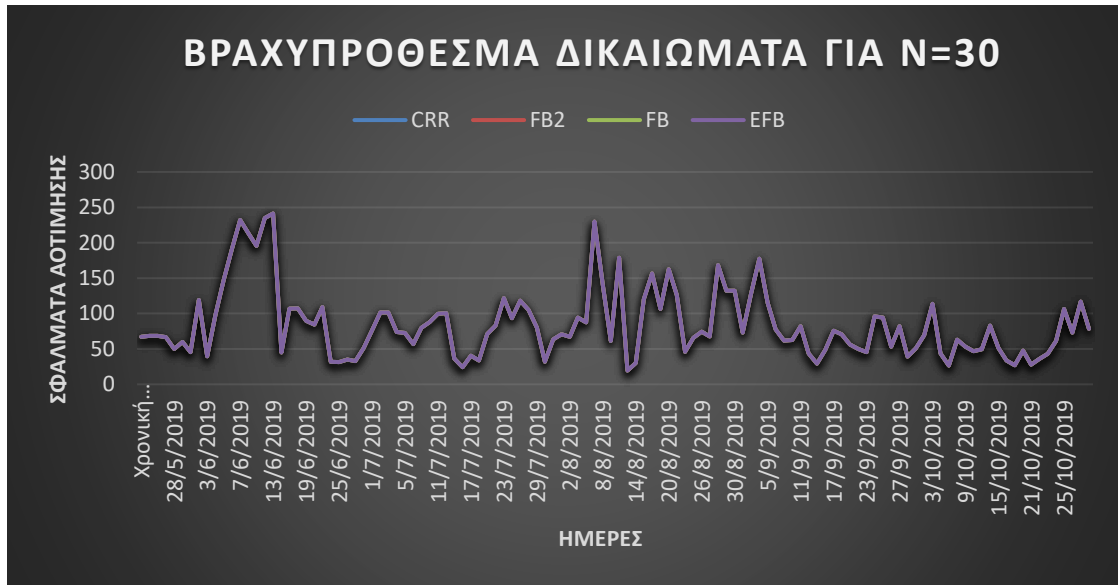
ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΜΟΝΤΕΛΩΝ									
<i>N=30</i>	<i>CRR</i>		<i>FB2</i>		<i>FB</i>		<i>EFB</i>		
	$\sigma$	Καταλ.	$\sigma$	$\lambda$	Καταλ.	$\sigma$	Καταλ.	$\rho$	Καταλ.
Μέσος όρος	0.234	589.96	0.226	0.009	381.71	0.224	353.47	2	329.61
Τυπική απόκλιση	0.019	255.12	0.018	0.251	185.32	0.217	162.79	1	152.18
Ελάχιστο	0.220	50.33	0.216	- 0.595	48.59	0.276	48.59	1	45.59
Μέγιστο	0.297	1260.30	0.290	0.647	997.38	0.013	753.25	6	705.89
<i>N=100</i>	<i>CRR</i>		<i>FB2</i>		<i>FB</i>		<i>EFB</i>		
Μέσος όρος	0.216	329.61	0.216	0.01	329.61	0.216	329.61	2	329.61
Τυπική απόκλιση	6* 10 <sup>-16</sup>	152.18	6* 10 <sup>-16</sup>	6* 10 <sup>-19</sup>	152.18	6* 10 <sup>-16</sup>	152.18	1	152.18
Ελάχιστο	0.216	45.59	0.216	0.01	45.59	0.216	45.59	1	45.59
Μέγιστο	0.216	705.89	0.216	0.01	705.89	0.216	705.89	6	705.89

Σημείωση:  $\sigma$ ,  $\lambda$  και  $\rho$  δηλώνουν τις παραμέτρους προς εκτίμηση και καταλ. τα αντίστοιχα κατάλοιπα των μοντέλων.

Στη συνέχεια, ψάχνουμε να βρούμε την αιτία που τα κατάλοιπα είναι αρκετά υψηλά και έτσι διακρίνουμε τα δικαιώματα πώλησης που έχουμε συλλέξει σε μακροπρόθεσμα (*long term*) και βραχυπρόθεσμα (*short term*) δικαιώματα πώλησης. Δηλαδή, σε αυτά που έχουν μεγαλύτερο χρόνο μέχρι τη λήξη και σε αυτά που έχουν μικρότερο αντίστοιχα.

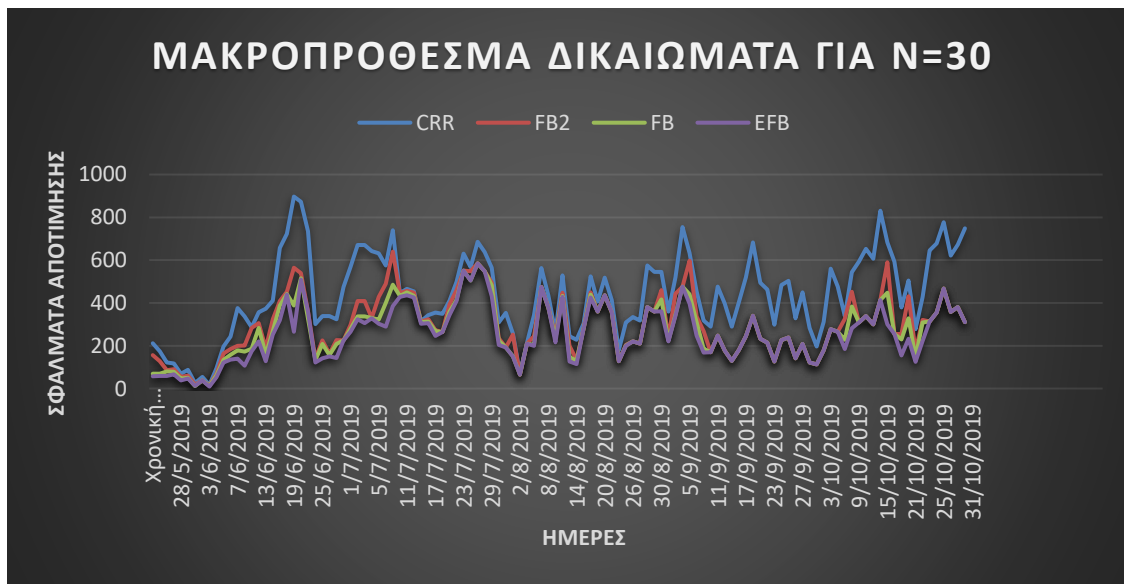
Όπως θα δούμε παρακάτω στα διαγράμματα οι τιμές των καταλοίπων των βραχυπρόθεσμων δικαιωμάτων πώλησης ταυτίζονται για όλα τα μοντέλα ανεξαρτήτου χρονικού βήματος και είναι σχετικά μικρές με αυτές των μακροπρόθεσμων δικαιωμάτων πώλησης ανεξαρτήτου χρονικού βήματος. Στα μακροπρόθεσμα δικαιώματα πώλησης με χρονικό βήμα ίσο με 100 τα κατάλοιπα είναι μικρότερα από αυτών των  $N = 30$  και τα μοντέλα ταυτίζονται μεταξύ τους.

**Σχήμα 4.7.** Γραφικές παραστάσεις όλων των μοντέλων για τα βραχυπρόθεσμα δικαιώματα πώλησης με  $N = 30$



Σημείωση: *CRR*: εκτιμώντας το  $\sigma$  , *FB2*: εκτιμώντας το  $\sigma$  και  $\lambda$  , *FB*: εκτιμώντας το  $\sigma$  με δεδομένο  $\lambda$  από το *FB* , *EFB*: εκτιμώντας το  $\rho$  της μεθόδου παρέκτασης με δεδομένο  $\lambda$  και  $\sigma$  από το *FB*.

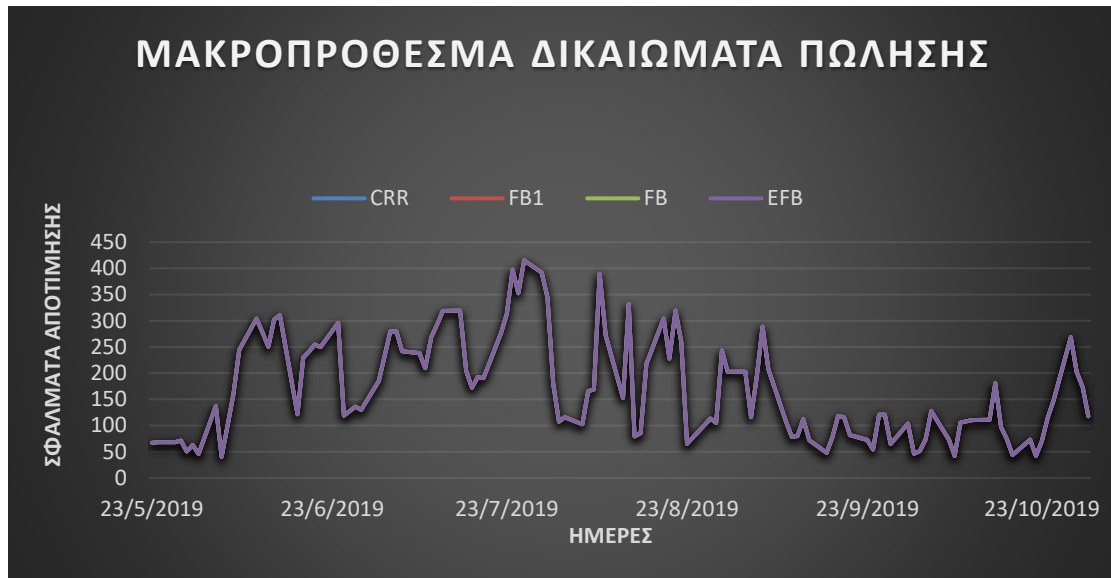
**Σχήμα 4.8.** Γραφικές παραστάσεις όλων των μοντέλων για τα μακροπρόθεσμα δικαιώματα πώλησης με  $N = 30$



Σημείωση: *CRR*: εκτιμώντας το  $\sigma$  , *FB2*: εκτιμώντας το  $\sigma$  και  $\lambda$  , *FB*: εκτιμώντας το  $\sigma$  με δεδομένο  $\lambda$  από το *FB* , *EFB*: εκτιμώντας το  $\rho$  της μεθόδου παρέκτασης με δεδομένο  $\lambda$  και  $\sigma$  από το *FB*.



**Σχήμα 4.9.** Γραφικές παραστάσεις όλων των μοντέλων για τα μακροπρόθεσμα δικαιώματα πώλησης με  $N = 100$



Σημείωση: CRR: εκτιμώντας το  $\sigma$ , FB2: εκτιμώντας το  $\sigma$  και  $\lambda$ , FB: εκτιμώντας το  $\sigma$  με δεδομένο  $\lambda$  από το FB, EFB: εκτιμώντας το  $\rho$  της μεθόδου παρέκτασης με δεδομένο  $\lambda$  και  $\sigma$  από το FB.

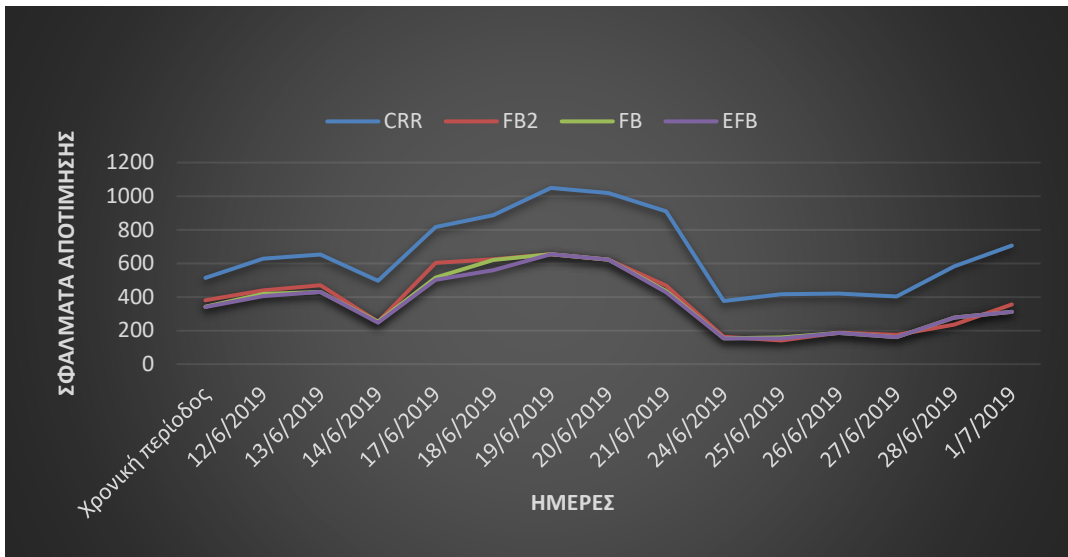
Συνεπώς, μπορούμε εύκολα να κατανοήσουμε ότι το μεγάλο μέγεθος των καταλοίπων οφείλεται στα μακροπρόθεσμα δικαιώματα πώλησης και συγκεκριμένα όταν  $N = 30$ . Εξίσου σημαντικό είναι ότι η μελέτη του Tian (1999) επιβεβαιώνεται μόνο για τα μακροπρόθεσμα δικαιώματα πώλησης. Τα συμπεράσματα αυτά οφείλονται κατά κύριο λόγο στην **τυχειότητα** που τα μακροπρόθεσμα δικαιώματα διαθέτουν, καθώς το χρονικό διάστημα μέχρι το χρόνο λήξης τους περιλαμβάνει πολλούς και διάφορους κινδύνους.

#### 4.4 Μελέτη Προβλεπτικής Ικανότητας

Το γεγονός ότι τα συγκεκριμένα μοντέλα καταφέρνουν να περιγράψουν την τιμή του συμβολαίου μέσα στο δείγμα δε σημαίνει ότι αυτό θα πρέπει να ισχύει και σε τιμές εκτός του δείγματος εκτίμησης. Για το λόγο αυτό, θα ελέγξουμε τη συμπεριφορά τους σε εκτός του δείγματος τιμές.

Συνεπώς, σα δείγμα εκτίμησης λαμβάνουμε τη χρονική περίοδο, όπου τα μοντέλα μας δεν ταυτίζονται. Δηλαδή, εκείνες τις χρονικές περιόδους όπου το χρονικό βήμα είναι  $N = 30$  και για τις ημέρες εκείνες όπου οι τιμές δεν συμπίπτουν. Επομένως, θα ελέγξω την ικανότητα πρόβλεψης χρονικού ορίζοντα 15 ημερών, για χρονικό βήμα ίσο με 30. Τα κατάλοιπα γίνονται ορατά στον παρακάτω πίνακα.

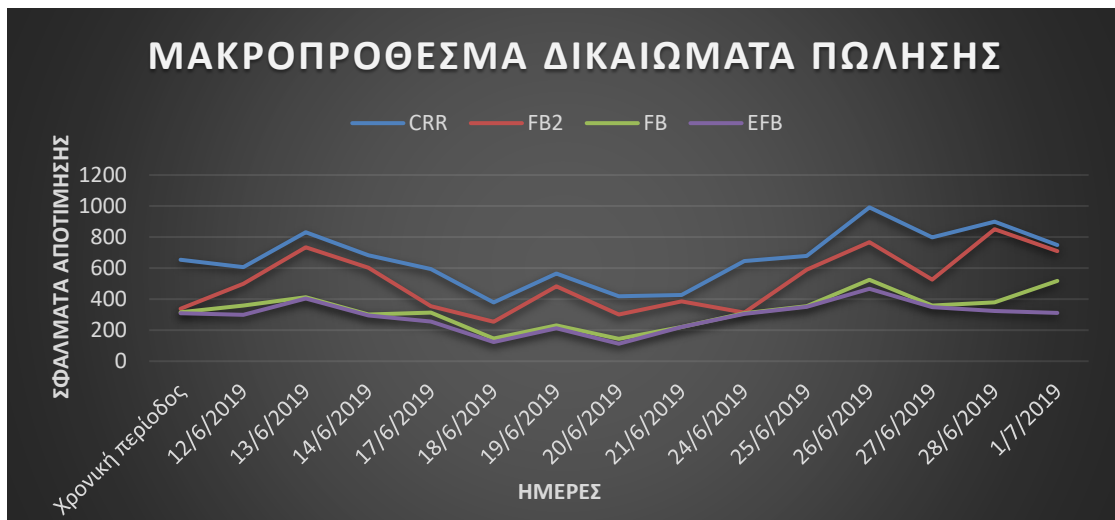
**Σχήμα 4.10.** Προβλεπτική ικανότητα των μοντέλων για  $N = 30$



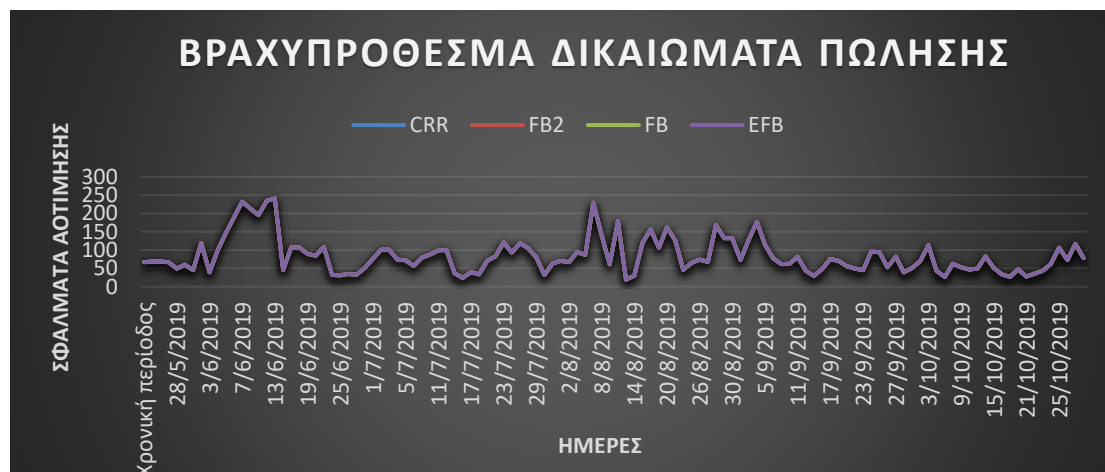
Σημείωση: μακροπρόθεσμα και βραχυπρόθεσμα δικαιώματα πώλησης

Παρατηρούμε ότι το μοντέλο με την καλύτερη προβλεπτική ικανότητα είναι το *EFB*, ενώ το μοντέλο των *CRR* είναι εκείνο με τη χειρότερη προβλεπτική ικανότητα. Στη συνέχεια, απεικονίζονται οι γραφικές παραστάσεις των μοντέλων για μακροπρόθεσμα και βραχυπρόθεσμα δικαιώματα πώλησης με χρονικό βήμα  $N = 30$ .

**Σχήμα 4.11.** Προβλεπτική ικανότητα των μοντέλων για τα μακροπρόθεσμα δικαιώματα πώλησης με  $N = 30$



**Σχήμα 4.12.** Προβλεπτική ικανότητα των μοντέλων για τα βραχυπρόθεσμα δικαιώματα πώλησης με  $N = 30$



Τα αποτελέσματά μας είναι παρόμοια με αυτά των τιμών εντός δείγματος. Παρατηρούμε ότι για τα *μακροπρόθεσμα* δικαιώματα πώλησης το μοντέλο που συμπεριφέρεται καλύτερα στις προβλέψεις της αγοράς είναι το ευέλικτο διωνυμικό μοντέλο με τη μέθοδο παρέκτασης (*EFB*). Για τα *βραχυπρόθεσμα* δικαιώματα πώλησης τα μοντέλα συμπεριφέρονται ίδια με κατάλοιπα μικρότερα από αυτά των *μακροπρόθεσμων*.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

### Συμπεράσματα

Τα τελευταία χρόνια τα δικαιώματα προαίρεσης αποτελούν μία από τις πιο γνωστές κατηγορίες παραγώγων. Συνεπώς, η ανάγκη για την πιο ακριβής αποτίμησή τους γίνεται όλο και πιο απαιτητική. Πολλά μοντέλα έχουν χρησιμοποιηθεί για αυτό το σκοπό. Εμείς αναφέραμε δύο από αυτά, το μοντέλο των Cox-Ross-Rubinstein (1979) και το Ευέλικτο Διωνυμικό μοντέλο του Tian (1999).

Η εμπειρική μελέτη που ακολουθήσε αποτίμησε ένα Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης με το διακριτό διωνυμικό μοντέλο. Αρχικά, εκτιμήσαμε τις παραμέτρους κάθε μοντέλου και διαπιστώσαμε τη σειρά με την οποία τα μοντέλα κατατάσσονται βάση των σφαλμάτων αποτίμησης. Έπειτα, ελέγξαμε την προβλεπτική ικανότητά τους για να διαπιστώσουμε πως τα μοντέλα συμπεριφέρονται στις τιμές των δικαιωμάτων προαίρεσης και σε εκτός δείγματος τιμές. Δηλαδή, πόσο ακριβέστερη μπορεί να είναι η συμπεριφορά των μοντέλων μας στις προβλέψεις της αγοράς.

Τέλος, αναφερθήκαμε στη διαφορά των δύο διωνυμικών μοντέλων, που βασίζεται κατά κύριο λόγο στην ομαλότητα σύγκλισης. Το μοντέλο των Cox-Ross-Rubinstein (1979) αδυνατεί στην επιτυχία ομαλής σύγκλισης. Έτσι, σειρά παίρνει το Ευέλικτο Διωνυμικό Μοντέλο του Tian (1999), που καταφέρνει μέσω της επιλογής της παραμέτρου “κλίσης” να μειώσει τα σφάλματα αποτίμησης των δικαιωμάτων προαίρεσης καθώς τα βήματα χρόνου αυξάνονται και ταυτόχρονα με τη χρήση μίας μεθόδου παρέκτασης να βελτιώσει το ρυθμό σύγκλισης. Συνεπώς, αν και διακριτού χρόνου, το μοντέλο του Tian είναι αρκετά αποδοτικό για την προσέγγιση της τιμής των δικαιωμάτων προαίρεσης εντός και εκτός δείγματος εκτίμησης, όπως αυτό αποδεικνύεται από τα σφάλματα αποτίμησης.

## Βιβλιογραφία

### Άρθρα

1. Boyle, P.P., & Tian, Y.S. (1997). An explicit finite difference approach to the pricing of barrier options. *Applied Mathematical Finance*, 5, 17-43.
2. Boyle, P.P. (1998). A lattice framework for option pricing with two state variables. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 35, 1-12.
3. Broadie, M., Detemple, J. (1996). American option valuation: new bounds, approximations, and a comparison of existing methods. *The Review of Financial Studies*, volume 9, issue 4, p. 1211 – 1250.
4. Chang- Palmer, (2005). Smooth convergence in the binomial model.
5. Chance, D. (2007). A synthesis of binomial options pricing models.
6. Chan, J-H., Joshi, M., Tang, R., Yang, C. (2008). Trinomial or binomial: accelerating American put option pricing on trees, to appear in *Journal of Futures Markets*.
7. Cheuk, T. H. F., & Vorst, T. C. F. (1996). Complex barrier option. *Journal of Derivatives*, 4, 8-22.
8. Cox, J. C., Ross, S. A., & Rubinstein, M. (1979). Option pricing: A simplified approach. *Journal of Financial Economics*, 7, 229-264.
9. Diener, F., Diener, M. (2004). Asymptotic of the Price Oscillations of a European Call Option in a Tree Model-Francine *Mathematical Finance*, Vol. 14, No. 2, 271-293.
10. Heston, S., & Zhou, G. F. (1997). On rate of convergence of discrete-time contingent claims. Working paper, Olin School of Business, Washington University.
11. Hull, J. C., & White, A. (1990). Valuing derivative securities using the explicit finite difference method. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 25, 87-100.
12. Jarrow, R., Rudd, A. (1986). Option pricing. *Journal of Banking & Finance*, vol. 10, issue 1, 157-161.
13. Joshi, M.S. (2007). Achieving Higher Order Convergence for the Prices of European Options in Binomial Trees, University of Melbourne, Centre for Actuarial Studies.
14. Leisen, D., & Reimer, M. (1995). Binomial models for option valuation: Examining and improving convergence. Discussion paper No. B-309, Rheinische Friedrich-Wilhelms - Universitat Bonn.
15. Kou, S.G. (2003). On pricing of discrete barrier options. *Statistica Sinica* 13, 955–964.
16. Kunito, N. and Ikeda, M. (1992). Pricing options with curved boundaries. *Math. Finance* 2, 275-298.
17. Ritchken, P. (1995). On pricing barrier options. *Journal of Derivatives*, 3, 19-28.
18. Tian, Y. (1993). A modified lattice approach to option pricing. *The Journal of Futures Markets*, 13, 563-577.

19. Tian, Y. (1999). *A flexible binomial option pricing model*. *Journal of Futures Markets*, 19, 817–843.
20. J. Walsh, (2003). *The rate of convergence of the binomial tree scheme*. *Finance and Stochastics*, 7, 337–361

### **Βιβλία**

1. Hull, John C. *Options, Futures, and Other Derivative Securities*. 2nd edition, Chapter 14.
2. Θωμάς Πουφινάς - Χρήστος Φλώρος, *Χρηματοοικονομικά Παράγωγα*, Εκδ. Δίσιγμα, 2014.
3. James C. Van Horne. *Financial Management and Policy*. 12<sup>th</sup> edition, Chapter 5.

### **Σημειώσεις Διδασκόντων**

1. Εγγλέζος Νικόλαος, *Ειδικά Θέματα Ποσοτικών Μεθόδων στη Χρηματοοικονομική*, Οκτώβριος 2019.
2. Εγγλέζος Νικόλαος, *Χρηματοοικονομικά Παράγωγα*, Μάρτιος 2019.
3. Μπούτσικας Μιχαήλ, *Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα*, Φεβρουάριος 2015, (Σημειώσεις Προπτυχιακού).

### **Διαδικτυακές πηγές**

1. [https://mathbooksgf.files.wordpress.com/2011/12/stochasticprocesses\\_kokolakis.pdf](https://mathbooksgf.files.wordpress.com/2011/12/stochasticprocesses_kokolakis.pdf)
2. <http://www.math.ntua.gr/~fouskakis/13.markov-chains.pdf>

## Παράρτημα

### Κώδικες Matlab

#### 1. Αποτίμηση Ευρωπαϊκού Δικαιώματος Αγοράς με το μοντέλο των CRR (Πίνακας 3 & 4 & 5)

```
function[price,lattice]=LatticeEurCall(S0,K,r,T,sigma,N,lamda)
deltaT=T/N;
u=exp(sigma*sqrt(deltaT)+(lamda*sigma^2*deltaT));
d=exp(-sigma*sqrt(deltaT)+(lamda*sigma^2*deltaT));
p=(exp(r*deltaT)-d)/(u-d);
lattice=zeros(N+1,N+1);
for j=0:N
    lattice(j+1,N+1)=max(0,S0*(u^j)*(d^(N-j))-K);
end
for i=N-1:-1:0
    for j=0:i
        lattice(j+1,i+1)=exp(-r*deltaT)*(p*lattice(j+2,i+2)+(1-p)*lattice(j+1,i+2));
    end
end
price=lattice(1,1);
```

#### 2. Αποτίμηση Αμερικάνικου Δικαιώματος Πώλησης με το μοντέλο των CRR (Πίνακας 4 & 5)

```
function[price,lattice]=LatticeAmericanPut(S0,K,r,T,sigma,N,lamda)
deltaT=T/N;
u=exp(sigma*sqrt(deltaT)+(lamda*sigma^2*deltaT));
d=exp(-sigma*sqrt(deltaT)+(lamda*sigma^2*deltaT));
p=(exp(r*deltaT)-d)/(u-d);
lattice=zeros(N+1,N+1);
for i=0:N
    for j=0:i
        lattice(j+1,N+1)=max(0,K-(S0*(u^j)*(d^(i-j))));
    end
end
for i=N-1:-1:0
    for j=0:i
        lattice(j+1,i+1)=max(max(0,K-(S0*(u^j)*(d^(i-j)))),exp(-r*deltaT)*(p*lattice(j+2,i+2)+(1-p)*lattice(j+1,i+2)));
    end
end
price=lattice(1,1);
```

### 3. Αποτίμηση Ευρωπαϊκού Δικαιώματος Αγοράς με το Ευέλικτο Διωνυμικό Μοντέλο του Tian ( Πίνακας 4 & 5)

```
function[price,lattice]=LatticeEurCall1(S0,K,r,T,sigma,N)

deltaT=T/N;

u=exp(sigma*sqrt(deltaT));
d=1/u;
j=round((log(K/S0)-N*log(d))/(log(u/d)));
lamda=(log(K/S0)-(2*j-N)*sigma*sqrt(deltaT))/(N*sigma^2*deltaT);
u=exp(sigma*sqrt(deltaT)+(lamda*sigma^2*deltaT));
d=exp(-sigma*sqrt(deltaT)+(lamda*sigma^2*deltaT));
p=(exp(r*deltaT)-d)/(u-d);
lattice=zeros(N+1,N+1);
for j=0:N
    lattice(j+1,N+1)=max(0,S0*(u^j)*(d^(N-j))-K);
end
for i=N-1:-1:0
    for j=0:i
        lattice(j+1,i+1)=exp(-r*deltaT)*(p*lattice(j+2,i+2)+(1-p)*lattice(j+1,i+2));
    end
end
price=lattice(1,1);
```

### 4. Αποτίμηση Αμερικάνικου Δικαιώματος Πώλησης με το Ευέλικτο Διωνυμικό μοντέλο του Tian ( Πίνακας 4 & 5)

```
function[price,lattice]=LatticeAmericanPutlamda(S0,K,r,T,sigma,N)
deltaT=T/N;
u=exp(sigma*sqrt(deltaT));
d=1/u;
j=round((log(K/S0)-N*log(d))/(log(u/d)));
lamda=(log(K/S0)-(2*j-N)*sigma*sqrt(deltaT))/(N*sigma^2*deltaT);
u=exp(sigma*sqrt(deltaT)+(lamda*sigma^2*deltaT));
d=exp(-sigma*sqrt(deltaT)+(lamda*sigma^2*deltaT));
p=(exp(r*deltaT)-d)/(u-d);
lattice=zeros(N+1,N+1);
for i=0:N-1
    for j=0:i
        lattice(j+1,N)=max(0,K-(S0*(u^j)*(d^(i-j))));
    end
end
for i=N-1:-1:0
    for j=0:i
        lattice(j+1,i+1)=max(max(0,K-(S0*(u^j)*(d^(i-j)))),exp(-
r*deltaT)*(p*lattice(j+2,i+2)+(1-p)*lattice(j+1,i+2)));
    end
end
price=lattice(1,1);
```



### 5. Διάγραμμα σφαλμάτων αποτίμησης σε σχέση με τα χρονικά βήματα (Σχήμα 5)

```
>> y=zeros(91);
>> for i=10:100
y(i-9)=LatticeEurCall1(100,95,0.06,6/12,0.2,i)-blsprice(100,95,0.06,6/12,0.2);
end
>> plot(10:100,y)
>> xlabel('Χρονικά Βήματα')
>> ylabel('Σφάλματα Αποτίμησης')
>> hold on
y=zeros(91);
for i=10:100
y(i-9)=LatticeEurCall(100,95,0.06,6/12,0.2,i,0)-blsprice(100,95,0.06,6/12,0.2);
end
plot(10:100,y,'r')
>> legend('FB','CRR')
```

### 6. Διάγραμμα σφαλμάτων αποτίμησης σε σχέση με τα χρονικά βήματα (Σχήμα 6)

```
>> y=zeros(46);
for i=5:50
y(i-4)=(2*LatticeEurCall1(100,95,0.06,6/12,0.2,2*i)-
LatticeEurCall1(100,95,0.06,6/12,0.2,i))/(2-1)-blsprice(100,95,0.06,6/12,0.2);
end
plot(10:2:100,y)
xlabel('Χρονικά Βήματα')
ylabel('Σφάλματα Αποτίμησης')
hold on
```

```

y=zeros(46);

for i=1:46

y(i)=LatticeEurCall(100,95,0.06,6/12,0.2,10+(i-1)*2,0)-
blsprice(100,95,0.06,6/12,0.2);

end

>> plot(10:2:100,y,'r')

legend('EFB','CRR')
    
```

## 7. Εκτίμηση μοντέλου των Cox-Ross-Rubinstein με χρονικό βήμα N=30

```

function[x,resnorm,residual,exitflag]=CRRCalibration(~)
clear all
global S0; %Τρέχουσα τιμή
global Strike; %Τιμή εξάσκησης-Strike Price
global rate; %Εγχώριο επιτόκιο, στην περίπτωση μας USD
global TTM; %Χρόνος για τη λήξη του δικαιώματος
global imp_vol; %Implied volatility- (Τεκμαρτή Μεταβλητότητα)
global mktprice; %αγοραία τιμή του δικαιώματος
global k; %βοηθητική μεταβλητή
%Φτιάχνω πίνακες μηδενικούς για να μπουν οι τιμές από το φύλλο του excel
% με τα δεδομένα
S0=zeros(116);
Strike=zeros(116,9);
rate=zeros(116);
TTM=zeros(116,9);
imp_vol=zeros(116,9);
mktprice=zeros(116,9);
parameter=zeros(116,1);
res=zeros(116,1);
exit=zeros(116,1);
%Εισάγω τις τιμές
S0=xlsread('Microsoftput.xls','Price','B2:B117');
Strike=xlsread('Microsoftput.xls','Strike','B3:J118');
rate=xlsread('Microsoftput.xls','rate','B2:B117');
TTM=xlsread('Microsoftput.xls','Timetomaturity','B3:J118');
imp_vol=xlsread('Microsoftput.xls','volatility','B3:J118');
mktprice=xlsread('Microsoftput.xls','mrktprice','B3:J118');
CRR_put_matrix=zeros(116,9);
for i=1:116
    %Θέτω αρχική τιμή στην παράμετρο, που θέλω να εκτιμήσω. Διαλέγω την
    % πιο ρεαλιστική των δεδομένων (μέσος των implied volatilities)
    x0=[0.2168972];
    
```

```

lb=[0.001];
ub=[2];
k=i;
[x,resnorm,residual,exitflag]=lsqnonlin(@CRRLSQD,x0,lb,ub);
parameter(i)=x;
res(i)=resnorm;
exit(i)=exitflag;
%Αποθηκεύω τις τιμές για κάθε ένα από τα 9 δικαιώματα με την
%εκτιμώμενη παράμετρο στο μοντέλο
for j=1:9

CRR_put_matrix(i,j)=LatticeAmericanPut(S0(i),Strike(i,j),rate(i),TTM(i,j),30,0,x
(1));
end
pricedata=(CRR_put_matrix);
end
xlswrite('Microsoftput.xls',pricedata,'resultsCRR','D3:L118');
xlswrite('Microsoftput.xls',res,'resultsCRR','B3:B118');
xlswrite('Microsoftput.xls',parameter,'resultsCRR','A3:A118');
end

```

```

function[CRR_Isqd]=CRRLSQD(x)
%καλείται από το CRRCalibration.m
%Εύρεση Διαφορών
global S0; %Τρέχουσα τιμή
global Strike; %Τιμή εξάσκησης-Strike Price
global rate; %Εγχώριο επιτόκιο, στην περίπτωση μας USD
global TTM; %Χρόνος για τη λήξη του δικαιώματος
global imp_vol; %Implied volatility- (Τεκμαρτή Μεταβλητότητα)
global mktprice; %αγοραία τιμή του δικαιώματος
global k; %βοηθητική μεταβλητή
CRR_Isqd=zeros(1,9);
for j=1:9
    CRR_Isqd(j)=mktprice(k,j)-
    LatticeAmericanPut(S0(k),Strike(k,j),rate(k),TTM(k,j),30,0,x(1));
end

```

```

function[price,lattice]=LatticeAmericanPut(S0,Strike,rate,TTM,NSteps,
lamda,sigma)
%Τύπος αποτίμησης του μοντέλου CRR
deltaTTM=TTM/NSteps;
u=exp(sigma*sqrt(deltaTTM)+(lamda*sigma^2*deltaTTM));
d=exp(-sigma*sqrt(deltaTTM)+(lamda*sigma^2*deltaTTM));
p=(exp(rate*deltaTTM)-d)/(u-d);
lattice=zeros(NSteps+1,NSteps+1);
for j=0:NSteps
    lattice(j+1,NSteps+1)=max(0,Strike-S0*(u^j)*(d^(NSteps-j)));
end

```

```

for i=NSteps-1:-1:0
    for j=0:i
        lattice(j+1,i+1)=max(Strike-(S0*(u^j)*(d^(i-j))),exp(-
rate*deltaTTM)*(p*lattice(j+2,i+2)+(1-p)*lattice(j+1,i+2)));
    end
end
price=lattice(1,1);

```

## 8. Εκτίμηση του Ευέλικτου Διωνυμικού μοντέλου με δύο παραμέτρους με χρονικό βήμα N=30

```

function[x,resnorm,residual,exitflag,output]=FB2Calibration(~)
clear all
global S0; %Τρέχουσα τιμή
global Strike; %Τιμή εξάσκησης-Strike Price
global rate; %Εγγώριο επιτόκιο, στην περίπτωση μας USD
global TTM; %Χρόνος για τη λήξη του δικαιώματος
global imp_vol; %Implied volatility – (Τεκμαρτή Μεταβλητότητα)
global mktprice; %αγοραία τιμή του δικαιώματος
global k; %βοηθητική μεταβλητή
%Φτιάχνω πίνακες μηδενικούς για να μπουν οι τιμές από το φύλλο του
excel
% με τα δεδομένα
S0=zeros(116);
Strike=zeros(116,9);
rate=zeros(116);
TTM=zeros(116,9);
imp_vol=zeros(116,9);
mktprice=zeros(116,9);
parameter=zeros(116,2);
res=zeros(116,1);
exit=zeros(116,1);
%Εισάγω τις τιμές
S0=xlsread('Microsoftput.xls','Price','B2:B117');
Strike=xlsread('Microsoftput.xls','Strike','B3:J118');
rate=xlsread('Microsoftput.xls','rate','B2:B117');
TTM=xlsread('Microsoftput.xls','Timetomaturity','B3:J118');
imp_vol=xlsread('Microsoftput.xls','volatility','B3:J118');
mktprice=xlsread('Microsoftput.xls','mrktprice','B3:J118');
FB2_put_matrix=zeros(116,9);
for i=1:116
    %Θέτω αρχική τιμή στην παράμετρο, που θέλω να εκτιμήσω. Διαλέγω την
    % πιο ρεαλιστική των δεδομένων (μέσος των implied volatilities)
    x0=[0.2168972,0.001];
    lb=[0.001,-inf];
    ub=[2,+inf];
    k=i;
    [x,resnorm,residual,exitflag,output]=lsqnonlin(@FB1LSQD,x0,lb,ub);
    parameter(i,:)=x;
end

```

```

res(i)=resnorm;
exit(i)=exitflag;
%Αποθηκεύω τις τιμές για κάθε ένα από τα 9 δικαιώματα με την
%εκτιμώμενη παράμετρο στο μοντέλο
for j=1:9

FB2_put_matrix(i,j)=LatticeAmericanPut(S0(i),Strike(i,j),rate(i),TTM(i,j),30,
x(1),x(2));
end
pricedata=(FB2_put_matrix);
end
xlswrite('Microsoftput.xls',pricedata,'resultsFB2','E3:M118');
xlswrite('Microsoftput.xls',res,'resultsFB2','D3:D118');
xlswrite('Microsoftput.xls',parameter,'resultsFB2','B3:C118');
end

function[FB2_Isqd]=FB2LSQD(x)
%καλείται από το FB2Calibration.m
%Εύρεση Διαφορών
global S0; %Τρέχουσα τιμή
global Strike; %Τιμή εξάσκησης-Strike Price
global rate; %Εγχώριο επιτόκιο, στην περίπτωση μας USD
global TTM; %Χρόνος για τη λήξη του δικαιώματος
global imp_vol; %Implied volatility – (Τεκμαρτή Μεταβλητότητα)
global mktprice; %αγοραία τιμή του δικαιώματος
global k; %βοηθητική μεταβλητή
FB2_Isqd=zeros(1,9);
for j=1:9
    FB2_Isqd(j)=mktprice(k,j)-
    LatticeAmericanPut(S0(k),Strike(k,j),rate(k),TTM(k,j),30,x(1),x(2));
end

function[price,lattice]=LatticeAmericanPut(S0,Strike,rate,TTM,NSteps,sigma,l
amda)
%Τύπος αποτίμησης του Ευέλικτου Διωνυμικού μοντέλου για δύο
%παραμέτρους εκτίμησης
deltaTTM=TTM/NSteps;
u=exp(sigma*sqrt(deltaTTM)+(lamda*sigma^2*deltaTTM));
d=exp(-sigma*sqrt(deltaTTM)+(lamda*sigma^2*deltaTTM));
p=(exp(rate*deltaTTM)-d)/(u-d);
lattice=zeros(NSteps+1,NSteps+1);
for j=0:NSteps
    lattice(j+1,NSteps+1)=max(0,Strike-S0*(u^j)*(d^(NSteps-j)));
end
for i=NSteps-1:-1:0
    for j=0:i
        lattice(j+1,i+1)=max(Strike-(S0*(u^j)*(d^(i-j))),exp(-
rate*deltaTTM)*(p*lattice(j+2,i+2)+(1-p)*lattice(j+1,i+2)));
    end
end

```

```
end
price=lattice(1,1);
```

## 9. Εκτίμηση του Ευέλικτου Διωνυμικού μοντέλου με μία παράμετρο εκτίμησης με χρονικό βήμα N=30

```
function[x,resnorm,residual,exitflag,output]=FBCalibration(~)
clear all
global S0; %Τρέχουσα τιμή
global Strike; %Τιμή εξάσκησης-Strike Price
global rate; %Εγχώριο επιτόκιο, στην περίπτωση μας USD
global TTM; %Χρόνος για τη λήξη του δικαιώματος
global imp_vol; %Implied volatility – (Τεκμαρτή Μεταβλητότητα)
global mktprice; %αγοραία τιμή του δικαιώματος
global k; %βοηθητική μεταβλητή
%Φτιάχνω πίνακες μηδενικούς για να μπουν οι τιμές από το φύλλο του excel
% με τα δεδομένα
S0=zeros(116);
Strike=zeros(116,9);
rate=zeros(116);
TTM=zeros(116,9);
imp_vol=zeros(116,9);
mktprice=zeros(116,9);
parameter=zeros(116,1);
res=zeros(116,1);
exit=zeros(116,1);
%Εισάγω τις τιμές
S0=xlsread('Microsoftput.xls','Price','B2:B117');
Strike=xlsread('Microsoftput.xls','Strike','B3:J118');
rate=xlsread('Microsoftput.xls','rate','B2:B117');
TTM=xlsread('Microsoftput.xls','Timetomaturity','B3:J118');
imp_vol=xlsread('Microsoftput.xls','volatility','B3:J118');
mktprice=xlsread('Microsoftput.xls','mrktprice','B3:J118');
FB_put_matrix=zeros(116,9);
for i=1:116
    %Θέτω αρχική τιμή στην παράμετρο, που θέλω να εκτιμήσω. Διαλέγω την
    % πιο ρεαλιστική των δεδομένων (μέσος των implied volatilities)
    x0=[0.2168972];
    lb=[0.001];
    ub=[2];
    k=i;
    [x,resnorm,residual,exitflag,output]=lsqnonlin(@FBLSQD,x0,lb,ub);
    parameter(i,:)=x;
    res(i)=resnorm;
    exit(i)=exitflag;
    %Αποθηκεύω τις τιμές για κάθε ένα από τα 9 δικαιώματα με την
```

```

%εκτιμώμενη παράμετρο στο μοντέλο
for j=1:9

FB_put_matrix(i,j)=LatticeAmericanPutlamda(S0(i),Strike(i,j),rate(i),TTM(i,j),30
,x(1));
    end
    pricedata=(FB_put_matrix);
end
xlswrite('Microsoftput.xls',pricedata,'resultsFB','D3:L118');
xlswrite('Microsoftput.xls',res,'resultsFB','B3:B118');
xlswrite('Microsoftput.xls',parameter,'resultsFB','A3:A118');
end

```

```

function[FB_Isqd]=FBLSQD(x)
%καλείται από το FBCalibration.m
%Εύρεση Διαφορών
global S0; %Τρέχουσα τιμή
global Strike; %Τιμή εξάσκησης-Strike Price
global rate; %Εγχώριο επιτόκιο, στην περίπτωση μας USD
global TTM; %Χρόνος για τη λήξη του δικαιώματος
global imp_vol; %Implied volatility – (Τεκμαρτή Μεταβλητότητα)
global mktprice; %αγοραία τιμή του δικαιώματος
global k; %βοηθητική μεταβλητή
FB_Isqd=zeros(1,9);
for j=1:9
    FB_Isqd(j)=mktprice(k,j)-
    LatticeAmericanPutlamda(S0(k),Strike(k,j),rate(k),TTM(k,j),30,x(1));
end

```

```

function[price,lattice]=LatticeAmericanPutlamda(S0,Strike,rate,TTM,NSteps,si
gma)
%Τύπος αποτίμησης του Ευέλικτου Διωνυμικού μοντέλου για μία
%παράμετρο εκτίμησης
deltaTTM=TTM/NSteps;
u=exp(sigma*sqrt(deltaTTM));
d=1/u;
j=round((log(Strike/S0)-NSteps*log(d))/(log(u/d)));
lamda=(log(Strike/S0)-(2*j-
NSteps)*sigma*sqrt(deltaTTM))/(NSteps*sigma^2*deltaTTM);
u=exp(sigma*sqrt(deltaTTM)+(lamda*sigma^2*deltaTTM));
d=exp(-sigma*sqrt(deltaTTM)+(lamda*sigma^2*deltaTTM));
p=(exp(rate*deltaTTM)-d)/(u-d);
lattice=zeros(NSteps+1,NSteps+1);
for j=0:NSteps
    lattice(j+1,NSteps+1)=max(0,Strike-S0*(u^j)*(d^(NSteps-j)));
end
for i=NSteps-1:-1:0

```

```

for j=0:i
    lattice(j+1,i+1)=max(Strike-(S0*(u^j)*(d^(i-j))),exp(-
rate*deltaTTM)*(p*lattice(j+2,i+2)+(1-p)*lattice(j+1,i+2)));
end
end
price=lattice(1,1);

```

### 10. Εκτίμηση του Ευέλικτου Διωνυμικού μοντέλου με δεδομένο lamda και χρησιμοποιώντας την μέθοδο παρέκτασης με χρονικό βήμα N=30

```

function[x,resnorm,residual,exitflag]=EFBCalibration(~)
clear all
global S0; %Τρέχουσα τιμή
global Strike; %Τιμή εξάσκησης-Strike Price
global rate; %Εγχώριο επιτόκιο, στην περίπτωση μας USD
global TTM; %Χρόνος για τη λήξη του δικαιώματος
global sigma; %το εκτιμώμενο Implied volatility από τον FB μοντέλο
global mktprice; %αγοραία τιμή του δικαιώματος
global k; %βοηθητική μεταβλητή
%Φτιάχνω πίνακες μηδενικούς για να μπουν οι τιμές από το φύλλο του
excel
% με τα δεδομένα
S0=zeros(116);
Strike=zeros(116,9);
rate=zeros(116);
TTM=zeros(116,9);
sigma=zeros(116);
mktprice=zeros(116,9);
parameter=zeros(116,1);
res=zeros(116,1);
exit=zeros(116,1);
%Εισάγω τις τιμές
S0=xlsread('Microsoftput.xls','Price','B2:B117');
Strike=xlsread('Microsoftput.xls','Strike','B3:J118');
rate=xlsread('Microsoftput.xls','rate','B2:B117');
TTM=xlsread('Microsoftput.xls','Timetomaturity','B3:J118');
sigma=xlsread('Microsoftput.xls','FBsigma','B3:J118');
mktprice=xlsread('Microsoftput.xls','mrktprice','B3:J118');
EFB_put_matrix=zeros(116,9);
for i=1:116
    %Θέτω αρχική τιμή στην παράμετρο, που θέλω να εκτιμήσω.
    x0=[2];
    lb=[1];
    ub=[+inf];
    k=i;

```



```

[x,resnorm,residual,exitflag]=lsqnonlin(@EFBLSQD,x0,lb,ub);
parameter(i)=x;
res(i)=resnorm;
exit(i)=exitflag;
%Αποθηκεύω τις τιμές για κάθε ένα από τα 9 δικαιώματα με την
%εκτιμώμενη παράμετρο στο μοντέλο
for j=1:9

EFB_put_matrix(i,j)=extrapolation(S0(i),Strike(i,j),rate(i),TTM(i,j),30,sigma(i
),x(1));
end
pricedata=(EFB_put_matrix);
end
xlswrite('Microsoftput.xls',pricedata,'resultsEFB','D3:L118');
xlswrite('Microsoftput.xls',res,'resultsEFB','B3:B118');
xlswrite('Microsoftput.xls',parameter,'resultsEFB','A3:A118');
end

function[EFB_Isqd]=EFBLSQD(x)
%καλείται από το EFBCalibration.m
%Εύρεση Διαφορών
global S0; %Τρέχουσα τιμή
global Strike; %Τιμή εξάσκησης-Strike Price
global rate; %Εγγώριο επιτόκιο, στην περίπτωση μας USD
global TTM; %Χρόνος για τη λήξη του δικαιώματος
global sigma; %Implied volatility – (Τεκμαρτή Μεταβλητότητα)
global mktprice; %αγοραία τιμή του δικαιώματος
global k; %βοηθητική μεταβλητή
EFB_Isqd=zeros(1,9);
for j=1:9
    EFB_Isqd(j)=mktprice(k,j)-
    extrapolation(S0(k),Strike(k,j),rate(k),TTM(k,j),30,sigma(k),x(1));
end

function[price]=extrapolation(S0,Strike,rate,TTM,NSteps,sigma,ro)
%τύπος της μεθόδου παρέκτασης
price=(ro*LatticeAmericanPutlamda(S0,Strike,rate,TTM,2*NSteps,sigma)-
LatticeAmericanPutlamda(S0,Strike,rate,TTM,NSteps,sigma))/(ro-1);
end

```

## 11. Ομοίως και για N=100 βήματα χρόνου

### 13. Προβλεπτική Ικανότητα για το μοντέλο των CRR με χρονικό βήμα N=30

```
function[pricedata,pricedata_squares,res]=forecastCRR(~)
clear all
sigma=0.251843; % Το sigma της τελευταίας ημέρας, που εκτιμήθηκε
%Φτιάχνω πίνακες μηδενικούς για να μπουν οι τιμές από το φύλλο του excel
% με τα δεδομένα
S0=zeros(15);
Strike=zeros(15,9);
rate=zeros(15);
TTM=zeros(15,9);
mktprice=zeros(15,9);
%Εισάγω τις τιμές
S0=xlsread('Microsoftput.xls','Price','B16:B30');
Strike=xlsread('Microsoftput.xls','Strike','B17:M31');
rate=xlsread('Microsoftput.xls','rate','B16:B30');
TTM=xlsread('Microsoftput.xls','Timetomaturity','B17:M31');
mktprice=xlsread('Microsoftput.xls','mrktprice','B17:M31');
res=zeros(15,1);
CRR_put_matrix=zeros(15,9);
CRR_put_matrix_squares=zeros(15,9);
for i=1:15
    for j=1:9
        CRR_put_matrix(i,j)=abs(mktprice(i,j)-
LatticeAmericanPut(S0(i),Strike(i,j),rate(i),TTM(i,j),30,0,sigma));
        CRR_put_matrix_squares(i,j)=(abs(mktprice(i,j)-
LatticeAmericanPut(S0(i),Strike(i,j),rate(i),TTM(i,j),30,0,sigma))^2);
    end
    pricedata=[CRR_put_matrix];
    pricedata_squares=[CRR_put_matrix_squares];
end
for i=1:15
    res(i)=(sum(CRR_put_matrix_squares(i,:)));
end
xlswrite('Microsoftput.xls',pricedata,'forecastCRR','B2:M16');
xlswrite('Microsoftput.xls',pricedata_squares,'forecastCRR','B18:M32');
xlswrite('Microsoftput.xls',res,'forecastCRR','B34:B48');
end
```

```
function[price,lattice]=LatticeAmericanPut(S0,Strike,rate,TTM,NSteps,lamda,s
igma)
%Τύπος αποτίμησης του μοντέλου των CRR
deltaTTM=TTM/NSteps;
u=exp(sigma*sqrt(deltaTTM)+(lamda*sigma^2*deltaTTM));
d=exp(-sigma*sqrt(deltaTTM)+(lamda*sigma^2*deltaTTM));
p=(exp(rate*deltaTTM)-d)/(u-d);
lattice=zeros(NSteps+1,NSteps+1);
```

```

for j=0:NSteps
    lattice(j+1,NSteps+1)=max(0,Strike-S0*(u^j)*(d^(NSteps-j)));
end
for i=NSteps-1:-1:0
    for j=0:i
        lattice(j+1,i+1)=max(Strike-(S0*(u^j)*(d^(i-j))),exp(-
rate*deltaTTM)*(p*lattice(j+2,i+2)+(1-p)*lattice(j+1,i+2)));
    end
end
price=lattice(1,1);

```

#### 14. Προβλεπτική Ικανότητα για το μοντέλο FB2 με χρονικό βήμα N=30

```

function[pricedata,pricedata_squares,res]=forecastFB2(~)
clear all
sigma=0.253963; % Το sigma της τελευταίας ημέρας, που εκτιμήθηκε
lamda=0.01; % Ο μ.ο των lamda των τελευταίων 5 ημερών που εκτιμήθηκαν
%Φτιάχνω πίνακες μηδενικούς για να μπουν οι τιμές από το φύλλο του excel
% με τα δεδομένα
S0=zeros(15);
Strike=zeros(15,9);
rate=zeros(15);
TTM=zeros(15,9);
mktprice=zeros(15,9);
%Εισάγω τις τιμές
S0=xlsread('Microsoftput.xls','Price','B16:B30');
Strike=xlsread('Microsoftput.xls','Strike','B17:M31');
rate=xlsread('Microsoftput.xls','rate','B16:B30');
TTM=xlsread('Microsoftput.xls','Timetomaturity','B17:M31');
mktprice=xlsread('Microsoftput.xls','mrktprice','B17:M31');
res=zeros(15,1);
FB2_put_matrix=zeros(15,9);
FB2_put_matrix_squares=zeros(15,9);
for i=1:15
    for j=1:9
        FB2_put_matrix(i,j)=abs(mktprice(i,j)-
LatticeAmericanPut(S0(i),Strike(i,j),rate(i),TTM(i,j),30,sigma,lamda));
        FB2_put_matrix_squares(i,j)=(abs(mktprice(i,j)-
LatticeAmericanPut(S0(i),Strike(i,j),rate(i),TTM(i,j),30,sigma,lamda))^2);
    end
    pricedata=[FB2_put_matrix];
    pricedata_squares=[FB2_put_matrix_squares];
end
for i=1:15
    res(i)=(sum(FB2_put_matrix_squares(i,:)));
end
xlswrite('Microsoftput.xls',pricedata,'forecastFB2','B2:M16');

```

```
xlswrite('Microsoftput.xls',pricedata_squares,'forecastFB2','B18:M32');
xlswrite('Microsoftput.xls',res,'forecastFB2','B34:B48');
end
```

```
function[price,lattice]=LatticeAmericanPut(S0,Strike,rate,TTM,NSteps,lamda,sigma)
%Τύπος αποτίμησης του μοντέλου του FB2
deltaTTM=TTM/NSteps;
u=exp(sigma*sqrt(deltaTTM)+(lamda*sigma^2*deltaTTM));
d=exp(-sigma*sqrt(deltaTTM)+(lamda*sigma^2*deltaTTM));
p=(exp(rate*deltaTTM)-d)/(u-d);
lattice=zeros(NSteps+1,NSteps+1);
for j=0:NSteps
    lattice(j+1,NSteps+1)=max(0,Strike-S0*(u^j)*(d^(NSteps-j)));
end
for i=NSteps-1:-1:0
    for j=0:i
        lattice(j+1,i+1)=max(Strike-(S0*(u^j)*(d^(i-j))),exp(-rate*deltaTTM)*(p*lattice(j+2,i+2)+(1-p)*lattice(j+1,i+2)));
    end
end
price=lattice(1,1);
```

### 15. Προβλεπτική Ικανότητα για το μοντέλο FB με χρονικό βήμα N=30

```
function[pricedata,pricedata_squares,res]=forecastFB(~)
clear all
sigma=0.250645;
% Το sigma της τελευταίας ημέρας, που εκτιμήθηκε
%Φτιάχνω πίνακες μηδενικούς για να μπουν οι τιμές από το φύλλο του excel
% με τα δεδομένα
S0=zeros(15);
Strike=zeros(15,9);
rate=zeros(15);
TTM=zeros(15,9);
mktprice=zeros(15,9);
%Εισάγω τις τιμές
S0=xlsread('Microsoftput.xls','Price','B16:B30');
Strike=xlsread('Microsoftput.xls','Strike','B17:M31');
rate=xlsread('Microsoftput.xls','rate','B16:B30');
TTM=xlsread('Microsoftput.xls','Timetomaturity','B17:M31');
mktprice=xlsread('Microsoftput.xls','mrktprice','B17:M31');
res=zeros(15,1);
FB_put_matrix=zeros(15,9);
FB_put_matrix_squares=zeros(15,12);
for i=1:15
```

```

for j=1:9
    FB_put_matrix(i,j)=abs(mktprice(i,j)-
    LatticeAmericanPutlamda(S0(i),Strike(i,j),rate(i),TTM(i,j),30,sigma));
    FB_put_matrix_squares(i,j)=(abs(mktprice(i,j)-
    LatticeAmericanPutlamda(S0(i),Strike(i,j),rate(i),TTM(i,j),30,sigma))^2);
end
    pricedata=[FB_put_matrix];
    pricedata_squares=[FB_put_matrix_squares];
end
for i=1:15
    res(i)=(sum(FB_put_matrix_squares(i,:)));
end
    xlswrite('Microsoftput.xls',pricedata,'forecastFB','B2:M16');
    xlswrite('Microsoftput.xls',pricedata_squares,'forecastFB','B18:M32');
    xlswrite('Microsoftput.xls',res,'forecastFB','B34:B48');
end

```

```

function[price,lattice]=LatticeAmericanPutlamda(S0,Strike,rate,TTM,NSteps,si
gma)
%Τύπος αποτίμησης του μοντέλου FB
deltaTTM=TTM/NSteps;
u=exp(sigma*sqrt(deltaTTM));
d=1/u;
j=round((log(Strike/S0)-NSteps*log(d))/(log(u/d)));
lamda=(log(Strike/S0)-(2*j-
NSteps)*sigma*sqrt(deltaTTM))/(NSteps*sigma^2*deltaTTM);
u=exp(sigma*sqrt(deltaTTM)+(lamda*sigma^2*deltaTTM));
d=exp(-sigma*sqrt(deltaTTM)+(lamda*sigma^2*deltaTTM));
p=(exp(rate*deltaTTM)-d)/(u-d);
lattice=zeros(NSteps+1,NSteps+1);
for j=0:NSteps
    lattice(j+1,NSteps+1)=max(0,Strike-S0*(u^j)*(d^(NSteps-j)));
end
for i=NSteps-1:-1:0
    for j=0:i
        lattice(j+1,i+1)=max(Strike-(S0*(u^j)*(d^(i-j))),exp(-
rate*deltaTTM)*(p*lattice(j+2,i+2)+(1-p)*lattice(j+1,i+2)));
    end
end
price=lattice(1,1);

```

## 17. Προβλεπτική Ικανότητα για το μοντέλο EFB με χρονικό βήμα N=30

```
function[pricedata,pricedata_squares,res]=forecastEFB(~)
clear all
sigma=0.250645; % Το sigma της τελευταίας ημέρας, που εκτιμήθηκε
ro=2; % Το rho της τελευταίας ημέρας, που εκτιμήθηκε
%Φτιάχνω πίνακες μηδενικούς για να μπουν οι τιμές από το φύλλο του excel
% με τα δεδομένα
S0=zeros(15);
Strike=zeros(15,9);
rate=zeros(15);
TTM=zeros(15,9);
mktprice=zeros(15,9);
%Εισάγω τις τιμές
S0=xlsread('Microsoftput.xls','Price','B16:B30');
Strike=xlsread('Microsoftput.xls','Strike','B17:M31');
rate=xlsread('Microsoftput.xls','rate','B16:B30');
TTM=xlsread('Microsoftput.xls','Timetomaturity','B17:M31');
mktprice=xlsread('Microsoftput.xls','mrktprice','B17:M31');
res=zeros(15,1);
EFB_put_matrix=zeros(15,9);
EFB_put_matrix_squares=zeros(15,9);
for i=1:15
    for j=1:9
        EFB_put_matrix(i,j)=abs(mktprice(i,j)-
        extrapolation(S0(i),Strike(i,j),rate(i),TTM(i,j),30,sigma,ro));
        EFB_put_matrix_squares(i,j)=(abs(mktprice(i,j)-
        extrapolation(S0(i),Strike(i,j),rate(i),TTM(i,j),30,sigma,ro))^2);
    end
    pricedata=[EFB_put_matrix];
    pricedata_squares=[EFB_put_matrix_squares];
end
for i=1:15
    res(i)=(sum(EFB_put_matrix_squares(i,:)));
end
xlswrite('Microsoftput.xls',pricedata,'forecastEFB','B2:M16');
xlswrite('Microsoftput.xls',pricedata_squares,'forecastEFB','B18:M32');
xlswrite('Microsoftput.xls',res,'forecastEFB','B34:B48');
end
```

```
function[price]=extrapolation(S0,Strike,rate,TTM,NSteps,sigma,ro)
%Ο τύπος της μεθόδου παρέκτασης
price=(ro*LatticeAmericanPutlamda(S0,Strike,rate,TTM,2*NSteps,sigma)-
LatticeAmericanPutlamda(S0,Strike,rate,TTM,NSteps,sigma))/(ro-1);
end
```

## 18. Ομοίως και για N=100 βήματα χρόνου