ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΤΜΗΜΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗΣ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ

ΠΜΣ ΣΤΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«Μια προσέγγιση πλέγματος για την αποτίμηση δικαιωμάτων με δύο μεταβλητές κατάστασης»

Οικονόμου Βιολέτα

Επιβλέπων Καθηγητής: Επίκουρος Καθηγητής Εγγλέζος Νικόλαος

Επιτροπή: Καθηγητής Πιττής Νικήτας

Αναπληρωτής Καθηγητής Κουρογένης Νικόλαος

Επίκουρος Καθηγητής Εγγλέζος Νικόλαος

Φεβρουάριος 2020

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία πραγματεύεται την αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης που έχουν ως υποκείμενο τίτλο δύο μεταβλητές κατάστασης με χρήση ενός πλέγματος. Πιο συγκεκριμένα εξετάζεται η περίπτωση στην οποία η απόδοση του δικαιώματος είναι συνάρτηση (μέγιστο & ελάχιστο) δύο υποκείμενων μεταβλητών κατάστασης. Αρχικά περιγράφονται γενικά τα δικαιώματα προαίρεσης με τα χαρακτηριστικά τους και η ιστορική αναδρομή αποτίμησης δικαιωμάτων πάνω σε δύο μεταβλητές κατάστασης. Στη συνέχεια περιγράφονται τα μοντέλα πλέγματος των Cox-Ross-Rubinstein (1979), του Boyle (1988) καθώς και των Kamrad & Ritchken (1991) για την αποτίμηση δικαιωμάτων με μία μεταβλητή κατάστασης, για να ακολουθήσει η παρουσίαση της προέκτασης του μοντέλου Black & Scholes (1973) και των προαναφερθέντων μοντέλων πλέγματος (Boyle, Kamrad & Ritchken) για την αποτίμηση δικαιωμάτων με δύο μεταβλητές κατάστασης.

Έπειτα πραγματοποιείται εμπειρική μελέτη και αριθμητική ανάλυση με τη βοήθεια της γλώσσας προγραμματισμού MATLAB για τα μοντέλα πλέγματος του Boyle (1988) καθώς και των Kamrad & Ritchken (1991) για μία και δύο μεταβλητές κατάστασης αντίστοιχα. Εκτιμώντας τις παραμέτρους των μοντέλων με τον επαναληπτικό αλγόριθμο Levenberg - Marquardt και ελέγχοντας την προβλεπτική τους ικανότητα, καταλήγουμε ότι το μοντέλο πλέγματος των Kamrad & Ritchken (1991) είναι ένα αξιόπιστο υπόδειγμα αποτίμησης δικαιωμάτων προαίρεσης που έχουν ως υποκείμενο τίτλο δύο μεταβλητές κατάστασης.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ

Δικαίωμα Προαίρεσης, Μία Μεταβλητή Κατάστασης, Δύο Μεταβλητές Κατάστασης, Μοντέλο Boyle, Μοντέλο Kamrad & Ritchken, Μοντέλο Stulz, Αλγόριθμος Levenberg-Marquardt, Εκτίμηση Παραμέτρων, Προβλεπτική Ικανότητα, Αριθμητική Ανάλυση

Abstract

This thesis refers to the valuation of options via a lattice approach when there are two underlying state variables. More specifically, the case where the payoff of the option is a function (maximum & minimum) of two underlying state variables is examined. Initially, the options and their characteristics are described in general and we also provide a historical review of options' valuation with two state variables. Then the lattice models of Cox-Ross-Rubinstein (1979), Boyle (1988) and Kamrad & Ritchken (1991) for valuation of options with one state variable are presented, followed by the extension of the Black & Scholes (1973) model as well as of the aforementioned lattice models (Boyle, Kamrad & Ritchken) for valuation of options with two state variables.

Empirical study and numerical analysis is also performed using the MATLAB programming language for the lattice models of Boyle (1988) and Kamrad & Ritchken (1991) for one and two state variables, respectively. After evaluating the parameters of the models with the Levenberg - Marquardt iterative algorithm and checking their predictive ability, we conclude that the Kamrad & Ritchken (1991) lattice model is a reliable model for valuation of options with two state variables.

KEY WORDS

Option, One State Variable, Two State Variables, Boyle Model, Kamrad & Ritchken Model, Stulz Model, Levenberg-Marquardt Algorithm, Parameter Estimation, Forecasting Ability, Numerical Analysis

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Δικαιώματα Προαίρεσης

Τα δικαιώματα προαίρεσης (options) χαρακτηρίζονται ως μία από τις ευρύτερα διαδεδομένες κατηγορίες χρηματοοικονομικών παραγώγων. Πρόκειται για μία σύμβαση που παρέχει στον κάτοχό της (αγοραστή) το δικαίωμα, όχι όμως και την υποχρέωση, να αγοράσει ή να πουλήσει ένα υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο σε μία προκαθορισμένη τιμή και χρονική περίοδο.

Αντίθετα, ο πωλητής ενός τέτοιου δικαιώματος έχει την υποχρέωση και όχι το δικαίωμα να πραγματοποιήσει την συναλλαγή για το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο με τον αγοραστή - κάτοχο του δικαιώματος αν αυτός εξασκήσει το δικαίωμα του. Η πραγματοποίηση της συναλλαγής γίνεται είτε στη λήξη του συμβολαίου είτε κατά την διάρκειά του, ανάλογα με τον τύπο του δικαιώματος και τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του.

Τα δικαιώματα προαίρεσης ταξινομούνται είτε ως δικαιώματα αγοράς ενός υποκείμενου τίτλου (Call options) είτε ως δικαιώματα πώλησής του (Put options). Τα βασικά στοιχεία που χαρακτηρίζουν ένα δικαίωμα προαίρεσης και τα οποία ορίζονται στο συμβόλαιο έχουν ως εξής:

- Ο *υποκείμενος τίτλος* (underlying asset), ο οποίος είναι οποιοδήποτε χρηματοοικονομικό και μη προϊόν. Μια μετοχή, μια ισοτιμία, ένα εμπορικό αγαθό (καταναλωτικό ή μη) αποτελούν παραδείγματα υποκείμενων τίτλων σε ένα συμβόλαιο δικαιώματος προαίρεσης.
- Η *τιμή* του υποκείμενου τίτλου (price), η οποία καθορίζει και τις χρηματοροές στη λήξη του συμβολαίου αν πρόκειται για δικαίωμα Ευρωπαϊκού τύπου ή τις χρηματοροές σε κάθε χρονική στιγμή κατά τη διάρκεια ισχύος του συμβολαίου αν πρόκειται για δικαίωμα Αμερικανικού τύπου.
- Η *τιμή εξάσκησης* του δικαιώματος (strike price), η οποία είναι η καθορισμένη τιμή στην οποία ο κάτοχος ενός δικαιώματος θα πραγματοποιήσει την συναλλαγή, αν εξασκήσει το δικαίωμα.

- Η *ημερομηνία λήξης* του δικαιώματος (time to maturity), η οποία αναφέρεται στον χρόνο έως την λήξη του δικαιώματος. Στα δικαιώματα προαίρεσης Ευρωπαϊκού τύπου η ημερομηνία λήξης συμπίπτει με την ημερομηνία που μπορούν να εξασκηθούν τα δικαιώματα, ενώ στα δικαιώματα Αμερικάνικου τύπου η εξάσκηση μπορεί να πραγματοποιηθεί σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή μέχρι και την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος.
- Το *ασφάλιστρο ή τιμή του δικαιώματος* (premium) το οποίο είναι η χρηματική αξία που καταβάλλει ο αγοραστής του δικαιώματος στον πωλητή για να λάβει το δικαίωμα να πραγματοποιήσει συναλλαγή με τον υποκείμενο τίτλο.
- Η *θέση* (position) σε ένα δικαίωμα. Κάθε επενδυτής μπορεί να κατέχει δύο αντίθετες θέσεις: την θέση αγοράς του δικαιώματος (long position) και την θέση πώλησης του δικαιώματος (short position).
- Το *μέγεθος του συμβολαίου* (contract size). Πρόκειται για τον αριθμό των μεριδίων του υποκείμενου τίτλου που έχει το δικαίωμα ο κάτοχος να αγοράσει ή να πωλήσει στον εκδότη του δικαιώματος.
- Ο *τύπος του δικαιώματος* (option type), ορίζει αν το δικαίωμα είναι Ευρωπαϊκού ή Αμερικανικού τύπου.
- Η *κλάση του δικαιώματος* (option class), αφορά δικαιώματα τα οποία είναι ίδιου τύπου και πάνω στον ίδιο υποκείμενο τίτλο.
- Η *σειρά του δικαιώματος* (option series), αφορά δικαιώματα τα οποία ανήκουν στην ίδια κλάση, έχουν ίδια ημερομηνία λήξης και ίδια τιμή εξάσκησης.

Το πρώτο οργανωμένο χρηματιστήριο παραγώγων ξεκίνησε την λειτουργία του τον Απρίλιο του 1973 στο Chicago και ονομάστηκε Chicago Board Option Exchange (CBOE). Ασχολήθηκε αποκλειστικά με τις αγοραπωλησίες δικαιωμάτων προαίρεσης επί μετοχών. Ωστόσο στην Ελλάδα το Χρηματιστήριο Παραγώγων Αθηνών ξεκίνησε την διαπραγμάτευση τέτοιων προϊόντων τον Αύγουστο του 1999.

Η πιο απλή μορφή δικαιώματος είναι το δικαίωμα Ευρωπαϊκού τύπου (plain vanilla option). Μπορούμε να θεωρήσουμε ένα δικαίωμα αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου το οποίο λήγει στον χρόνο T, με τιμή του υποκείμενου τίτλου S και τιμή εξάσκησης του δικαιώματος Κ. Τότε οι χρηματοροές που θα λάβει ο αγοραστής του συμβολαίου στην λήξη εξαρτώνται από την τιμή του υποκείμενου τίτλου στην λήξη.

Συνεπώς αν $S_T > K$, όπου S_T η τιμή του υποκείμενου τίτλου στον χρόνο Τ, ο αγοραστής θα εξασκήσει το δικαίωμα και θα έχει απόδοση $S_T - K$,ενώ αν $S_T < K$ τότε ο αγοραστής δεν θα εξασκήσει το δικαίωμα αφού έχει τη δυνατότητα να αγοράσει τον υποκείμενο τίτλο με λιγότερα χρήματα στην αγορά και άρα η απόδοσή του από το συμβόλαιο είναι 0. Παρατηρούμε ότι η απόδοση από ένα δικαίωμα αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου εκφράζεται ως:
$payoff_{call,T} = \max[S_T - K, 0]$.

Αντίστοιχα για ένα δικαίωμα πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου αν $S_T < K$, ο αγοραστής θα εξασκήσει το δικαίωμα και θα έχει απόδοση $K - S_T$, ενώ αν $S_T > K$ ο αγοραστής δεν θα εξασκήσει το δικαίωμα, αφού έχει τη δυνατότητα να πουλήσει τον υποκείμενο τίτλο στην αγορά με περισσότερα χρήματα και άρα η απόδοσή του από το συμβόλαιο είναι 0. Παρατηρούμε ότι η απόδοση από ένα δικαίωμα πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου εκφράζεται ως:
$payoff_{put,T} = \max[K - S_T, 0]$.

Εδώ θα πρέπει να αναφέρουμε ότι η τιμή ενός δικαιώματος επηρεάζεται από τους εξής παράγοντες:

- *Τιμή του υποκείμενου τίτλου*: Τα δικαιώματα αγοράς αποκτούν μεγαλύτερη αξία όταν η τιμή του υποκείμενου τίτλου αυξάνεται, ενώ τότε η αξία των δικαιωμάτων πώλησης μειώνεται.
- *Τιμή εξάσκησης*: Τα δικαιώματα πώλησης αποκτούν μεγαλύτερη αξία όταν η τιμή εξάσκησης αυξάνεται, ενώ τότε η αξία των δικαιωμάτων αγοράς μειώνεται.
- *Χρόνος μέχρι τη λήξη*: Στα δικαιώματα Αμερικανικού τύπου, εκείνο με τη μεγαλύτερη χρονική διάρκεια έχει μεγαλύτερη αξία, ενώ στα δικαιώματα Ευρωπαϊκού τύπου είναι αβέβαιη η επίδραση του χρόνου στην αξία τους.

- *Μεταβλητότητα του υποκείμενου τίτλου*: Η αξία των δικαιωμάτων αυξάνεται όταν η μεταβλητότητα του υποκείμενου τίτλου αυξάνεται.
- *Risk free επιτόκιο*: Η αξία του δικαιώματος πώλησης μειώνεται όταν το επιτόκιο αυξάνεται, ενώ τότε η αξία του δικαιώματος αγοράς αυξάνεται.
- *Μερισματική απόδοση του υποκείμενου τίτλου*: Κάθε αναμενόμενη μερισματική απόδοση είναι αρνητικά συσχετισμένη με την αξία ενός δικαιώματος αγοράς, ενώ είναι θετικά συσχετισμένη με την αξία του δικαιώματος πώλησης.

Συνεπώς για να υπολογιστεί η αξία ενός δικαιώματος αγοράς ή πώλησης τη στιγμή της συμφωνίας ώστε να δοθεί το κατάλληλο ασφάλιστρο, πρέπει να υπολογιστεί η τιμή του στην λήξη όσο πιο αξιόπιστα γίνεται και έπειτα να προεξοφληθούν οι τελικές χρηματοροές. Άρα η δυσκολία αποτίμησης ενός δικαιώματος έγκειται την πρωταρχική δυσκολία να αποτιμήσουμε ένα οποιοδήποτε περιουσιακό στοιχείο με αβέβαια έσοδα.

1.2 Το πρόβλημα της αποτίμησης ενός δικαιώματος με περισσότερες από μια μεταβλητές κατάστασης

Η αποτίμηση ενός δικαιώματος έχει αποδειχθεί ιδιαίτερα σημαντική για την ανάλυση πολλών διαστάσεων της εταιρικής χρηματοδότησης και των επενδυτικών πρακτικών. Ο όγκος και η ποικιλία των δικαιωμάτων που εμπορεύονται στης παγκόσμιες συναλλαγές έχουν επεκταθεί σε μεγάλο βαθμό έπειτα από την προσέγγιση που ανέπτυξαν οι Black & Scholes (1973).

Μελέτες δείχνουν ότι η θεωρία της αποτίμησης δικαιωμάτων είναι συναφής σχεδόν με κάθε πεδίο στα χρηματοοικονομικά. Για παράδειγμα, όλα τα εταιρικά αξιόγραφα μπορούν να ερμηνευθούν σαν χαρτοφυλάκια που αποτελούνται από δικαιώματα αγοράς και πώλησης πάνω σε περιουσιακά στοιχεία της εταιρείας. Πράγματι η θεωρία της αποτίμησης δικαιωμάτων εφαρμόζεται και σε γενικότερα οικονομικά ζητήματα, με την προϋπόθεση να υπάρχουν μετρήσιμες μελλοντικές χρηματοροές.

Πλέον επιχειρήσεις σε πολλές χώρες προσφέρουν συνεχώς αυξανόμενα και εκλεπτυσμένα εργαλεία στο επενδυτικό κοινό. Αξιοσημείωτα είναι τα δικαιώματα που έχουν ως υποκείμενο τίτλο ομόλογα (option-bonds) και τα οποία αποτελούν χρηματοοικονομικά εργαλεία που πρωτοεμφανίστηκαν στην Eurobond αγορά (Feiger & Jacquillat 1979, Officer & Willet 1980).

Στην συγκεκριμένη αγορά όταν ο εκδότης (issuer) ενός option-bond θα πραγματοποιήσει την πληρωμή στον κάτοχο (bearer), ο κάτοχος έχει την επιλογή δύο ή περισσότερων νομισμάτων στα οποία μπορεί να γίνει η πληρωμή, δείχνοντας προτίμηση σε εκείνα τα νομίσματα που τον συμφέρουν. Η συναλλαγματική ισοτιμία μεταξύ των νομισμάτων αναγράφεται στο συμφωνητικό του ομολόγου.

Για παράδειγμα ένα discount bond option που εκδίδεται από μία εταιρεία αφήνει τον κάτοχο να διαλέξει στη λήξη ανάμεσα σε Αμερικανικά Δολάρια (USD) και Βρετανικές Λίρες (GBP) σε μία προσυμφωνημένη ισοτιμία των 2USD για κάθε GBP. Αν η εταιρεία είναι φερέγγυα στη λήξη, ο κάτοχος διαλέγει να πληρωθεί σε GBP μόνο αν η τιμή της λίρας σε δολάρια είναι μεγαλύτερη των 2USD.

Ακόμη τα risk-sharing συμβόλαια, τα σχέδια για αποζημιώσεις (compensation plans), τα δάνεια και τα χρέη τα οποία έχουν συνδεθεί με ενέχυρα (collateralized loans & secured debt), οι δομημένες επενδύσεις, οι μισθοί οι οποίοι προσαρμόζονται με βάση τα επίπεδα του πληθωρισμού ή σύμφωνα με κάποιον δείκτη (indexed wages) και τα επενδυτικά σχέδια ανάμεσα σε αμοιβαία αποκλειόμενα έργα αποτελούν παραδείγματα συνθετότερων χρηματοοικονομικών προϊόντων που κερδίζουν έδαφος στο επενδυτικό κοινό (Fischer 1978, Ingersoll 1982, Myers 1977).

Ωστόσο η απόδοση τέτοιων προϊόντων εξαρτάται από δύο ή περισσότερες μεταβλητές κατάστασης και είναι ενδιαφέρον να δούμε πώς αυτή στη λήξη επηρεάζεται από τις στοχαστικές ιδιότητες των περιουσιακών στοιχείων που περιλαμβάνουν.

Συνεπώς η αποτίμηση τέτοιων αξιογράφων θέτει απαιτητικά προβλήματα, αφού πρόκειται για ένα περίπλοκο σύνολο από ενσωματωμένα δικαιώματα των οποίων η απόδοση εξαρτάται από δύο ή παραπάνω μεταβλητές κατάστασης. Τέτοια προβλήματα γίνονται πιο έντονα όταν τίθεται και το πρόσθετο ζήτημα της πρόωρης εξάσκησης.

Μια χρήσιμη και αρκετά δημοφιλής τεχνική για την αποτίμηση ενός δικαιώματος είτε απλής μορφής είτε σύνθετης, είναι η κατασκευή ενός διωνυμικού δέντρου. Πρόκειται για ένα διάγραμμα το οποίο αναπαριστά διαφορετικές πιθανές πορείες που ίσως ακολουθήσει η τιμή του υποκείμενου τίτλου κατά την διάρκεια ζωής του δικαιώματος.

Η θεμελιώδης υπόθεση είναι ότι η τιμή του υποκείμενου τίτλου ακολουθεί έναν “τυχαίο περίπατο”. Σε κάθε χρονικό βήμα η τιμή του τίτλου έχει μία συγκεκριμένη πιθανότητα ανοδικής πορείας και μία συγκεκριμένη πιθανότητα καθοδικής πορείας. Καθώς το χρονικό βήμα γίνεται μικρότερο και όσο αυξάνεται το πλήθος των βημάτων, η τιμή του δικαιώματος που έχει ως αποτέλεσμα το διωνυμικό μοντέλο, είναι πλησιέστερη σε εκείνη που προκύπτει από το μοντέλο των Black–Scholes–Merton (1973).

1.3 Ιστορική αναδρομή

Δικαιώματα τα οποία περιλαμβάνουν δύο μεταβλητές κατάστασης, έχουν συζητηθεί στο παρελθόν από τους Stulz (1982), Schwartz (1982) και τους Boyle και Kirzner (1985). Τα άρθρα αυτά εστιάζουν στην αποτίμηση Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων και αναπτύσσουν αναλυτικές ή οιονεί αναλυτικές λύσεις, οι οποίες περιλαμβάνουν την διμεταβλητή συνάρτηση πυκνότητας-πιθανότητας κανονικής κατανομής (bivariate normal density function).

Ο Stulz (1982) παρουσιάζει αναλυτικές φόρμουλες για την τιμολόγηση ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης και αγοράς πάνω στο μέγιστο ή στο ελάχιστο δυο επισφαλών περιουσιακών στοιχείων (maximum or minimum of two risky assets) και κάνει λόγο για κάποιες ιδιότητες αυτών των δικαιωμάτων. Αποδεικνύεται ότι ένα δικαίωμα αγοράς πάνω στο ελάχιστο των δύο επισφαλών στοιχείων με τιμή εξάσκησης ίση με μηδέν μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας την φόρμουλα για την τιμολόγηση ενός δικαιώματος που ανταλλάσσει το ένα περιουσιακό στοιχείο με το άλλο στη λήξη (Margrabe 1978).

Έπειτα εξηγεί ότι η τιμή του δικαιώματος αγοράς πάνω στο ελάχιστο των δύο επισφαλών στοιχείων είναι μία αύξουσα συνάρτηση της τιμής για καθένα από τα επισφαλή περιουσιακά στοιχεία, ενώ αποτελεί φθίνουσα συνάρτηση της τιμής εξάσκησης. Επίσης αποτελεί αύξουσα συνάρτηση του συντελεστή συσχέτισης των δύο επισφαλών περιουσιακών στοιχείων. Ακόμη μια αύξηση στο χρονικό διάστημα μέχρι τη λήξη ή στην τυπική απόκλιση των αποδόσεων ενός από τα επισφαλή περιουσιακά στοιχεία έχει αμφίσημο αποτέλεσμα την αξία του δικαιώματος.

Ο Stulz (1982) στη συνέχεια εξηγεί μια σειρά από εφαρμογές πάνω στο μέγιστο ή στο ελάχιστο επισφαλών περιουσιακών στοιχείων, οι οποίες δείχνουν ότι η απόδοσή τους στη λήξη εμπεριέχει την απόδοση στη λήξη ενός δικαιώματος πάνω στο μέγιστο ή στο ελάχιστο των επισφαλών περιουσιακών στοιχείων. Επενδυτικές ευκαιρίες οι οποίες αντιστοιχούν σε περίπλοκα ερευνητικά σχέδια στα οποία μια εταιρεία καλείται να επιλέξει ανάμεσα σε ποικίλες μελλοντικές χρηματοροές, μπορούν να τιμολογηθούν με τη χρήση τέτοιων τεχνικών.

Ο Schwartz (1982) ασχολείται με το πρόβλημα της αποτίμησης ομολόγων των οποίων η αξία είναι άμεσα συνδεδεμένη με την τιμή ενός συγκεκριμένου αγαθού (commodity backed bonds ή commodity linked bonds). Αυτό το είδος ομολόγων αποτελεί νέα αξιόγραφο του οποίου η χρησιμότητα συνεχώς αυξάνεται.

Το μοντέλο που αναπτύσσει ο Schwartz (1982) στο άρθρο μπορεί να χρησιμοποιηθεί βοηθητικά από εταιρείες και κυβερνήσεις που εκδίδουν τέτοιου τύπου ομόλογα, ώστε να θέσουν τους όρους της έκδοσης. Ακόμη το μοντέλο μπορεί να χρησιμοποιηθεί από επενδυτές που ερευνούν την ύπαρξη ή όχι, “υποτιμημένων” ή “υπερτιμημένων” τέτοιων ομολόγων. Θεωρητικά αν η αγοραία τιμή διαφέρει από εκείνη του μοντέλου, με τις κατάλληλες θέσεις στην αγορά κάποιος μπορεί να επωφεληθεί κάνοντας arbitrage.

Ωστόσο κάποιες από τις υποθέσεις του μοντέλου θεωρούνται αμφισβητήσιμες. Για παράδειγμα το μοντέλο υποθέτει ότι το υποκείμενο αγαθό είναι τέλεια εμπορεύσιμο. Η υπόθεση αυτή ίσως είναι μια καλή προσέγγιση στην περίπτωση του χρυσού ή του αργύρου, όχι όμως στην περίπτωση του πετρελαίου. Το μοντέλο αγνοεί πλήρως την ύπαρξη φόρων, κάτι το οποίο κάνει πιο ελκυστικά αυτά τα ομόλογα καθώς μετατρέπουν το σύνηθες εισόδημα σε κεφαλαιακά κέρδη. Επίσης υποθέτει σταθερές διακυμάνσεις όπως και τα περισσότερα μοντέλα αποτίμησης δικαιωμάτων.

Η σημαντικότητα αυτών των περιοριστικών υποθέσεων τίθεται σαν εμπειρικό ερώτημα, καθώς όσο περισσότερα ομόλογα εμφανίζονται στην αγορά, τόσο περισσότερα δεδομένα θα είναι διαθέσιμα για να πραγματοποιηθούν οι κατάλληλοι έλεγχοι. Ωστόσο ομόλογα με περισσότερο σύνθετα χαρακτηριστικά θα αυξάνουν τη χρήση αριθμητικών διαδικασιών που χρειάζονται για να λυθούν οι κατάλληλες μερικές διαφορικές εξισώσεις.

Οι Boyle και Kirzner (1985) αναπτύσσουν μια φόρμουλα αποτίμησης δικαιωμάτων πάνω σε περιουσιακά στοιχεία των οποίων η απόδοση εξαρτάται από την αξία της συνδεδεμένης εταιρείας. Η συγκεκριμένη εφαρμογή εξετάζει την αποτίμηση τίτλων κτήσης χρυσού (gold purchase warrants) από την Echo-Bay (Ltd) και εμφανίζει μια σειρά από σημαντικά προβλήματα αποτίμησης.

Στην προσπάθεια παρουσίασης ενός διαχειρίσιμου και εύληπτου αποτελέσματος, πραγματοποιήθηκε μια σειρά από απλουστεύσεις στις υποθέσεις. Η τελική φόρμουλα αποτίμησης του δικαιώματος είναι μία συνάρτηση εννέα μεταβλητών. Όμως από τη στιγμή που το βασικό περιουσιακό στοιχείο της Echo - Bay είναι το ορυχείο χρυσού με πεπερασμένες πηγές, ίσως είναι αμφισβητήσιμη η χρήση της βασικής λογαριθμοκανονικής (lognormal) υπόθεσης.

Κατά την εφαρμογή του μοντέλου εμφανίστηκαν πρακτικά υπολογιστικά προβλήματα. Ένα από αυτά είναι η εκτίμηση της διακύμανσης της απόδοσης του χρυσού. Η τιμή του δικαιώματος πάνω σε χρυσό μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση της μεταβλητότητας. Ωστόσο τα εμπορεύσιμα δικαιώματα (traded options) πάνω σε χρυσό έχουν μικρότερη διάρκεια από τους τίτλους κτήσης χρυσού (gold purchase warrants) που μελετά το εν λόγω άρθρο. Ακόμη η εκτίμηση της αξίας "κατώφλι" (threshold value) της εταιρείας είναι ένα από τα σημαντικά προβλήματα του μοντέλου. Είναι δύσκολο να μετατραπεί η απόδοση της παραγωγής σε ισοδύναμη αξία της εταιρείας.

Το πρόβλημα της αποτίμησης δικαιωμάτων τα οποία περιλαμβάνουν δύο μεταβλητές κατάστασης ως μέρος ενός συνθετότερου αξιογράφου, έχει επίσης αναλυθεί από τους Stulz & Johnson (1985), Hull & White (1987) και Johnson & Shanno (1987).

Οι Stulz & Johnson (1985) περιγράφουν τη διαδικασία αποτίμησης δύο κατηγοριών του "ασφαλισμένου" χρέους με κάποιο ενέχυρο (secured debt) και αναλύουν το πώς αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αυξήσει την αξία της εταιρείας. Το secured debt τιμολογείται για μία εταιρεία η οποία έχει στην κατοχή της δύο περιουσιακά στοιχεία και ένα μη ασφαλισμένο χρέος.

Επίσης αποδεικνύεται ότι η αξία του secured debt μπορεί να αυξάνεται, αν η τυπική απόκλιση της απόδοσης του ενέχυρου ή των άλλων περιουσιακών στοιχείων που έχει στην κατοχή της η εταιρεία αυξάνεται. Ακόμη εξηγείται ότι μία εταιρεία κρίνει πιο ελκυστική την αύξηση κεφαλαίου εκδίδοντας secured debt, σε σχέση με κάποια άλλη μορφή χρηματοδότησης. Γενικότερα, οι υπάρχοντες ομολογιούχοι γίνονται πλουσιότεροι αν η εταιρεία αναλάβει ένα νέο έργο και το χρηματοδοτήσει μερικώς από secured debt.

Οι Johnson & Shanno (1987) και Hull & White (1987) παρουσίασαν προσεγγίσεις αποτίμησης δικαιωμάτων με στοχαστική μεταβλητότητα (stochastic volatility). Έτσι μπορούμε να έχουμε δύο στοχαστικές μεταβλητές από τις οποίες εξαρτάται η τιμή του δικαιώματος.

Οι Johnson & Shanno (1987) ισχυρίζονται ότι θα ήταν χρήσιμο να υπάρχει κάποιο μοντέλο το οποίο να επιτρέπει την ύπαρξη μεταβλητής διακύμανσης, καθώς έτσι θα μπορούν να εξετάσουν εάν οι αγοραίες τιμές των δικαιωμάτων είναι ορθές, αφού θα ήταν δύσκολο να ξέρουν ποια τιμή της διακύμανσης έχει χρησιμοποιηθεί στην εξίσωση των Black & Scholes (1973). Επομένως προχωρούν στη λύση των διαφορικών εξισώσεων που καταλήγουν για την αξία ενός δικαιώματος αγοράς, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Monte Carlo.

Οι Hull & White (1987) χρησιμοποιούν την διαφορική εξίσωση του Garman (1976) για να αποδώσουν την τιμή ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς σε μία μετοχή με στοχαστική μεταβλητότητα, η οποία είναι συσχετισμένη με την τιμή της μετοχής. Τότε προκύπτει ότι το μοντέλο των Black & Scholes (1973) "υπερτιμά" τα ATM (at the money) δικαιώματα και "υποτιμά" τα deep-ITM (in the money) και deep-OTM (out of the money) δικαιώματα.

Η περίπτωση στην οποία η μεταβλητότητα δεν συσχετίζεται με την τιμή της μετοχής, εξετάζεται με τη χρήση αριθμητικών μεθόδων. Τότε αν υπάρχει θετική συσχέτιση, τα OTM δικαιώματα "υποτιμώνται" από τους Black & Scholes (1973), ενώ τα ITM "υπερτιμώνται". Αν η συσχέτιση είναι αρνητική τα αποτελέσματα αντιστρέφονται. Τα αποτελέσματα των Hull & White (1987) ισχύουν και στην περίπτωση του Ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης καθώς και του Αμερικανικού δικαιώματος αγοράς για μετοχές που δεν καταβάλουν μέρισμα.

Αξίζει να σημειωθεί ότι στα παραπάνω άρθρα η τιμή του προϊόντος δεν εξαρτάται από την συμπεριφορά των επενδυτών απέναντι στον κίνδυνο. Συνεπώς θεωρείται ότι οι επενδυτές έχουν ουδέτερη προτίμηση στον κίνδυνο. Επίσης τα αποτελέσματα στα παραπάνω άρθρα αγνοούν την ύπαρξη φόρων, τα έξοδα συναλλαγών και λεπτομέρειες που υπάρχουν στα πραγματικές συνθήκες (υπόθεση τέλειας αγοράς).

Όσο αφορά τα Αμερικανικά δικαιώματα με απόδοση (payoff) η οποία εξαρτάται από δύο μεταβλητές κατάστασης, ικανοποιούν την ίδια βασική γενίκευση της εξίσωσης Black & Scholes (1973) όπως τα Ευρωπαϊκά δικαιώματα. Ωστόσο, οι συνοριακές συνθήκες είναι περισσότερο σύνθετες στην περίπτωση των Αμερικανικών δικαιωμάτων αφού προβλέπουν την περίπτωση της πρόωρης εξάσκησης. Είναι πιθανό να λυθεί η εξίσωση των Black & Scholes (1973) για Αμερικανικά δικαιώματα στην περίπτωση των παραπάνω από μια μεταβλητών κατάστασης, χρησιμοποιώντας μια προσέγγιση πεπερασμένων διαφορών (finite difference approach).

Έχοντας δύο ή περισσότερες μεταβλητές κατάστασης, οι υπολογισμοί γρήγορα γίνονται αρκετά ακριβοί με την μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών. Επιπροσθέτως, υπάρχουν αξιόλογες αρχικές δοκιμές οι οποίες αναπτύσσουν αποτελεσματικούς υπολογιστικούς αλγόριθμους.

Στην περίπτωση των Αμερικανικών δικαιωμάτων όταν υπάρχει μόνο μία μεταβλητή κατάστασης, η διωνυμική προσέγγιση πλέγματος (lattice binomial approach) που αναπτύχθηκε από τους Cox, Ross και Rubinstein (1979) έχει σημαντική και εύληπτη απήχηση. Είναι εξαιρετικά απλή για να προσαρμοστεί. Η βασική ιδέα είναι να αντικατασταθεί η συνεχής κατανομή των τιμών των μετοχών με μία διακριτή κατανομή δύο βημάτων (two point discrete distribution) σε μικρότερα χρονικά διαστήματα. Είναι σαφές πως όταν η κίνηση της τιμής της μετοχής συμβαδίζει με μία διακριτή διωνυμική διαδικασία ή σε ειδική μορφή τέτοιας διαδικασίας, τα δικαιώματα αποτιμώνται αποκλειστικά έχοντας ως αρχή την μη ύπαρξη arbitrage.

Η προσέγγιση στην πραγματική αξία του δικαιώματος επιτυγχάνεται όσο αυξάνεται ο αριθμός των χρονικών βημάτων. Το μοντέλο αυτό στηρίζεται σε στοιχειώδεις μαθηματικές γνώσεις και περιλαμβάνει σαν ειδική περίπτωση το μοντέλο των Black & Scholes (1973), το οποίο είχε παραχθεί με πιο πολύπλοκες μεθόδους. Η τελική κατανομή της τιμής της μετοχής αναπτύσσεται χρησιμοποιώντας μια διωνυμική προσέγγιση πλέγματος. Αυτή η μέθοδος έχει επικρατήσει ευρέως στην περίπτωση της μίας μεταβλητής κατάστασης για την αποτίμηση δικαιωμάτων των οποίων η εξάσκηση πριν τη λήξη ίσως είναι βέλτιστη.

Οι Geske και Shastri (1985) σκιαγράφησαν τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της παραπάνω μεθόδου καθώς και άλλες τεχνικές εκτίμησης της αξίας ενός δικαιώματος στην περίπτωση μιας μεταβλητής κατάστασης. Όλες οι τεχνικές που χρησιμοποιήθηκαν συγκλίνουν, είναι ασφαλής και η καθεμία έχει τα δυνατά της σημεία.

Η διωνυμική μέθοδος (binomial method) εφαρμόζεται καλύτερα σε μικρό αριθμό δικαιωμάτων πάνω σε μετοχές χωρίς μέρισμα, αλλά είναι αναποτελεσματική όταν η επίδραση του μερίσματος σε μετρητά (cash dividend) πρέπει να αναλυθεί. Ωστόσο η υπόθεση μιας σταθερής μερισματικής απόδοσης φαίνεται να είναι μια λογικά σωστή και αποτελεσματική προσέγγιση. Βέβαια υστερεί σε αποτελεσματικότητα στην αποτίμηση δικαιωμάτων Αμερικανικού τύπου. Επιπροσθέτως, επειδή η διωνυμική μέθοδος χρησιμοποιεί ένα υποθετικό αρχικό σημείο, γίνεται λιγότερο αποτελεσματική σε σχέση με τις μεθόδους των πεπερασμένων διαφορών για την αποτίμηση πολλαπλών δικαιωμάτων.

Η άμεση μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών (explicit finite difference method) δεν πρέπει να απορρίπτεται σε προβλήματα ισορροπίας, καθώς αυτά μπορούν να ξεπεραστούν εύκολα. Επιπροσθέτως, όταν η άμεση μέθοδος (explicit method) τροποποιείται με τον λογάριθμο, γίνεται πιο αποτελεσματική από την έμμεση μέθοδο (implicit method) καθώς δεν απαιτεί τη λύση ενός συστήματος εξισώσεων. Ωστόσο η διωνυμική μέθοδος είναι περισσότερο εύληπτη και εφαρμόσιμη συγκριτικά με τις μεθόδους των πεπερασμένων διαφορών. Συνεπώς η διωνυμική μέθοδος είναι καλύτερης ποιότητας παιδαγωγικά.

Συμπερασματικά, οι Geske και Shastri (1985) υποστηρίζουν ότι οι ερευνητές για να υπολογίσουν την αξία ενός μικρού αριθμού δικαιωμάτων προτιμούν τη διωνυμική προσέγγιση, ενώ οι επαγγελματίες στις επιχειρήσεις για τον υπολογισμό της αξίας πολλών δικαιωμάτων θεωρούν αποτελεσματικότερη την μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών.

1.4 Περιγραφή της διπλωματικής

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι να παρουσιάσει την επέκταση της διωνυμικής προσέγγιση πλέγματος (lattice binomial approach) που αναπτύχθηκε από τους Cox, Ross και Rubinstein (CRR-1979) για να διαχειριστεί την περίπτωση στην οποία η απόδοση (payoff) του δικαιώματος εξαρτάται από περισσότερες από μία μεταβλητές κατάστασης. Πιο συγκεκριμένα, λαμβάνεται υπόψη η περίπτωση στην οποία η απόδοση του δικαιώματος είναι συνάρτηση (max & min) δύο υποκείμενων μεταβλητών κατάστασης (underlying state variables), αν και η διαδικασία θα μπορούσε να επεκταθεί και να συμπεριλάβει μεγαλύτερο αριθμό μεταβλητών κατάστασης.

Το Κεφάλαιο 2 περιγράφει το κλασικό μοντέλο CRR (1979) αλλά και την τροποποίηση της προσέγγισης του στην περίπτωση της μίας μεταβλητής κατάστασης από τον Boyle (1988) καθώς και εκείνη των Kamrad & Ritchken (1991). Έτσι λοιπόν σαν προάγγελος της ανάπτυξης της προσέγγισης για τις δύο μεταβλητές κατάστασης, κρίνεται χρήσιμο να τροποποιηθεί η CRR (1979) προσέγγιση στην περίπτωση της μίας μεταβλητής κατάστασης. Αυτή η τροποποίηση συντελείται με την αντικατάσταση της κίνησης με δύο “άλματα” (two point jump process) που χρησιμοποιείται στο CRR (1979) από μία κίνηση τριών “αλμάτων” (three point jump process).

Το Κεφάλαιο 3 αρχικά παρουσιάζει την επέκταση του μοντέλου των Black & Scholes (1973) για την αποτίμηση δικαιωμάτων Ευρωπαϊκού τύπου και εστιάζει στην ιδέα του Stulz (1982) για την αποτίμηση δικαιωμάτων Ευρωπαϊκού τύπου στο μέγιστο και στο ελάχιστο των δύο μεταβλητών κατάστασης. Έπειτα παρουσιάζεται η προσέγγιση πλέγματος για την αποτίμηση δικαιωμάτων των οποίων η απόδοση (payoff) εξαρτάται από δύο μεταβλητές κατάστασης, όπως αντιμετωπίστηκε από τον Boyle (1988) καθώς και από τους Kamrad & Ritchken

(1991). Προκύπτει ότι η κίνηση πέντε "αλμάτων" (five point jump process) είναι χρήσιμη στην ανάπτυξη της κατάλληλης προσέγγισης πλέγματος σε τρεις διαστάσεις (δύο διαστάσεις για το περιουσιακό στοιχείο και μία χρονική διάσταση).

Το Κεφάλαιο 4 χωρίζεται σε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος πραγματοποιείται η εμπειρική μελέτη αποτίμησης δικαιωμάτων σύμφωνα με τα μοντέλα του Boyle (1988) και των Kamrad & Ritchken (1991), όπως παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 2. Πρώτα απ' όλα παραθέτουμε τα δεδομένα για τα δικαιώματα αγοράς που θέλουμε να κάνουμε την αποτίμηση. Στη συνέχεια εκτιμούμε τις άγνωστες παραμέτρους σ και λ με χρήση του επαναληπτικού αλγόριθμου Levenberg - Marquardt και τέλος εξετάζουμε την προβλεπτική ικανότητα των προαναφερθέντων μοντέλων. Στόχος της εμπειρικής μελέτης είναι να διαπιστώσουμε πόσο καλά συμπεριφέρονται οι τιμές των μοντέλων αυτών σε σχέση με την τιμή της αγοράς. Ουσιαστικά θέλουμε να εξετάσουμε την αξιοπιστία τους και να τα συγκρίνουμε μεταξύ τους.

Στο δεύτερο μέρος του Κεφαλαίου 4, πραγματοποιείται κατά κάποιον τρόπο αριθμητική ανάλυση για τα τρισδιάστατα αυτά μοντέλα, όπως παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 3. Συγκεκριμένα καθώς τα δικαιώματα που προσπαθούμε να αποτιμήσουμε δεν υπάρχουν στην αγορά, σκεφτήκαμε να δημιουργήσουμε "δεδομένα αγοράς" τα οποία θα χρησιμοποιηθούν στην εκτίμηση των παραμέτρων των μοντέλων ως τιμές αγοράς των δικαιωμάτων μέσω των τύπων κλειστής μορφής του Stulz (1982). Έτσι θα εκτιμήσουμε τις άγνωστες παραμέτρους που εμφανίζονται στα τρισδιάστατα μοντέλα και έπειτα θα τις χρησιμοποιήσουμε για να ελέγξουμε την προβλεπτική ικανότητα τους και να τα συγκρίνουμε μεταξύ τους.

Στο Κεφάλαιο 5, θα παρουσιαστούν τα συμπεράσματα τα οποία θα προκύψουν από την σύγκριση του μοντέλου του Boyle (1988) και των Kamrad & Ritchken (1991), τόσο για μία όσο και για δύο μεταβλητές κατάστασης.

Στη συνέχεια, περιλαμβάνεται παράρτημα με την σκιαγράφηση της απόδειξης της σχέσης η οποία αφορά την αποτίμηση δικαιώματος αγοράς στο ελάχιστο δύο περιουσιακών στοιχείων, όπως παρουσιάζει στο άρθρο του ο Stulz (1982). Ακολουθούν σε επόμενο παράρτημα οι κώδικες της MATLAB που χρησιμοποιήθηκαν στο Κεφάλαιο 4, αλλά και για λόγους πληρότητας οι κώδικες των δικαιωμάτων πώλησης Αμερικανικού τύπου για μία και δύο μεταβλητές κατάστασης, σύμφωνα με τα μοντέλα πλέγματος που αναπτύχθηκαν στο Κεφάλαιο 2 και στο Κεφάλαιο 3. Τέλος παρουσιάζονται τα διαγράμματα και οι πίνακες της εμπειρικής μελέτης και της αριθμητικής ανάλυσης του Κεφαλαίου 4 αντίστοιχα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΜΟΝΤΕΛΑ ΑΠΟΤΙΜΗΣΗΣ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ ΜΕ ΜΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

2.1 Διωνυμικό μοντέλο Cox-Ross-Rubinstein

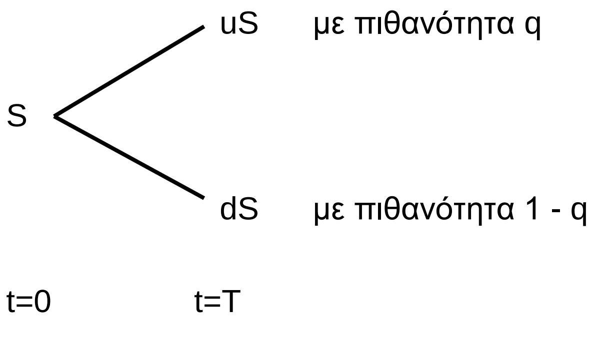
Το διωνυμικό υπόδειγμα για την αποτίμηση ενός δικαιώματος θεμελιώθηκε το 1979 από τους John Cox, Stephen Ross και Mark Rubinstein (CRR). Το μοντέλο στηρίζεται στην ιδέα των Black & Scholes (1973). Ωστόσο η φόρμουλα που παρουσιάζεται στο άρθρο τους είναι σε διακριτό χρόνο, σε αντίθεση με εκείνη των Black & Scholes (1973) η οποία είναι σε συνεχή χρόνο.

Οι CRR (1979) κατασκεύασαν ένα διωνυμικό δέντρο το οποίο παρουσιάζει διαφορετικές πιθανές πορείες της τιμής της υποκείμενης μετοχής έως τη λήξη του δικαιώματος. Η βασική υπόθεση που κάνουν για τη τιμή της μετοχής είναι ότι ακολουθεί τυχαίο περίπατο. Σε κάθε χρονικό βήμα η τιμή της μετοχής έχει μια συγκεκριμένη πιθανότητα ανόδου και μια συγκεκριμένη πιθανότητα καθόδου.

2.1.1 Διωνυμικό δέντρο μίας περιόδου

Υποθέτουμε ότι η τρέχουσα τιμή της μετοχής είναι S. Στο τέλος της χρονικής περιόδου η τιμή της μετοχής θα είναι είτε uS αν η μετοχή κινηθεί ανοδικά με πιθανότητα q, είτε dS αν η μετοχή κινηθεί καθοδικά με πιθανότητα 1 - q.

Διαγραμματικά:



Γίνονται οι εξής υποθέσεις:

- Σταθερό επιτόκιο
- ∄ φόροι
- ∄ έξοδα συναλλαγών
- ∄ margin requirements
- ∄ περιθώριο για arbitrage

Ορίζουμε $r = 1 + r_f$, όπου r_f είναι το risk-free επιτόκιο για μία χρονική περίοδο. Επίσης πρέπει $u > r > d$. Αν αυτές οι ανισότητες δεν ισχύουν, τότε υπάρχει περιθώριο για arbitrage.

Για την αποτίμηση ενός δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου με υποκείμενο τίτλο την εν λόγω μετοχή και λήξη σε μία χρονική περίοδο, υποθέτουμε ότι η τρέχουσα αξία του δικαιώματος είναι C. Η αξία του δικαιώματος στο τέλος της μίας χρονικής περιόδου θα είναι C_u, αν η τιμή της μετοχής γίνει uS, ενώ θα είναι C_d, αν η τιμή της μετοχής γίνει dS.

Καθώς υπάρχει μόνο μία χρονική περίοδο μέχρι τη λήξη του δικαιώματος, γνωρίζουμε από τους όρους του συμβολαίου αλλά και από τη λογική εξάσκησης του δικαιώματος ότι $C_u = \max[0, uS - K]$ και $C_d = \max[0, dS - K]$.

Διαγραμματικά:

$C_u = \max[0, uS - K]$ με πιθανότητα q

C

$C_d = \max[0, dS - K]$ με πιθανότητα 1 - q

t=0 t=T

Κατασκευάζουμε ένα χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης (replicating portfolio) το οποίο αποτελείται από Δ μετοχές και Β μετρητά (ή ομόλογα μηδενικού κινδύνου) τα οποία καταθέτουμε με ένα επιτόκιο r_f . Η τρέχουσα αξία του χαρτοφυλακίου είναι ΔS+B. Στο τέλος της χρονικής περιόδου η αξία του θα έχει ως εξής:

$\Delta uS + rB$ με πιθανότητα q

$\Delta S + B$

$\Delta dS + rB$ με πιθανότητα 1 - q

t=0 t=T

Διαλέγουμε τα Δ και Β με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε οι δύο πιθανές αξίες του χαρτοφυλακίου στο τέλος της περιόδου να είναι ίσες με την αντίστοιχη αξία του δικαιώματος αγοράς. Δηλαδή:

$$\Delta dS + rB = C_d$$

$$\Delta uS + rB = C_u \qquad (1)$$

Λύνοντας το σύστημα εξισώσεων προκύπτει ότι:

$$\Delta = \frac{C_u - C_d}{(u-d)\mathrm{S}} \quad \text{και} \quad B = \frac{uC_d - dC_u}{(u-d)\mathrm{r}} \qquad (2)$$

Εφόσον δεν υπάρχουν ευκαιρίες για arbitrage και αφού η αξία του δικαιώματος στο μέλλον ισούται με την αξία του χαρτοφυλακίου στο μέλλον, θα πρέπει και η αξία του δικαιώματος σήμερα να ισούται με την αξία του χαρτοφυλακίου σήμερα. Άρα:

$$C = \Delta S + \mathrm{B} = \frac{C_u - C_d}{u-d} + \frac{uC_d - dC_u}{(u-d)r} = [(\frac{r-d}{u-d})\mathrm{C}_u + (\frac{u-r}{u-d})C_d]/\mathrm{r} \qquad (3)$$

Ορίζουμε:

$$p \equiv \frac{r-d}{u-d} \quad \text{και} \quad 1-p \equiv \frac{u-r}{u-d} \qquad (4)$$

Τότε η (3) απλοποιείται και γράφεται ως εξής:

$$C = \left[pC_u + (1-p)C_d \right] / r \tag{5}$$

Η (5) αποτελεί τη φόρμουλα αποτίμησης του δικαιώματος αγοράς, πριν τη λήξη του, για μία περίοδο σε όρους S,K,u,d,r. Αυτή η φόρμουλα διαθέτει ένα σύνολο από αξιοσημείωτα χαρακτηριστικά. Αρχικά η πιθανότητα q δεν εμφανίζεται στην φόρμουλα.

Αυτό σημαίνει ότι ακόμη και αν διαφορετικοί επενδυτές έχουν διαφορετικές προτιμήσεις στην πιθανότητα για την ανοδική ή την καθοδική κίνηση της μετοχής, τελικά όλοι θα μπορούσαν να συμφωνήσουν στην τιμή C, καθώς αυτή είναι ανεξάρτητη από το q.

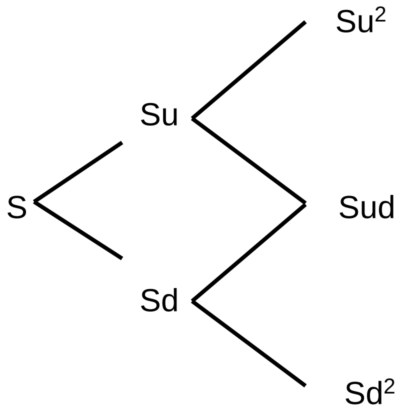
Έπειτα, η τιμή του δικαιώματος αγοράς είναι ανεξάρτητη από τις προτιμήσεις των επενδυτών στον κίνδυνο. Για την κατασκευή της φόρμουλας η μόνη υπόθεση η οποία γίνεται είναι ότι κάθε επενδυτής προτιμάει τον περισσότερο πλούτο από τον λιγότερο και άρα θα υπήρχε κίνητρο για arbitrage.

Συνεπώς θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί η ίδια φόρμουλα είτε ο επενδυτής είναι risk-preffering είτε risk-averse. Ακόμη, η μόνη τυχαία μεταβλητή από την οποία η τιμή του δικαιώματος εξαρτάται, είναι η ίδια η τιμή της μετοχής. Δηλαδή δεν εξαρτάται από τις αγοραίες τιμές άλλων αξιογράφων ή χαρτοφυλακίων.

Τέλος παρατηρείται ότι $0<p<1$ και άρα θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως ψευδο-πιθανότητα. Στην πραγματικότητα το p είναι η τιμή του q που θα είχαμε αν όλοι οι επενδυτές ήταν ουδέτεροι απέναντι στον κίνδυνο. Άρα η αξία του δικαιώματος αγοράς αναπαρίσταται ως η αναμενόμενη μελλοντική τιμή του, προεξοφλημένη σε έναν κόσμο ουδέτερου κινδύνου.

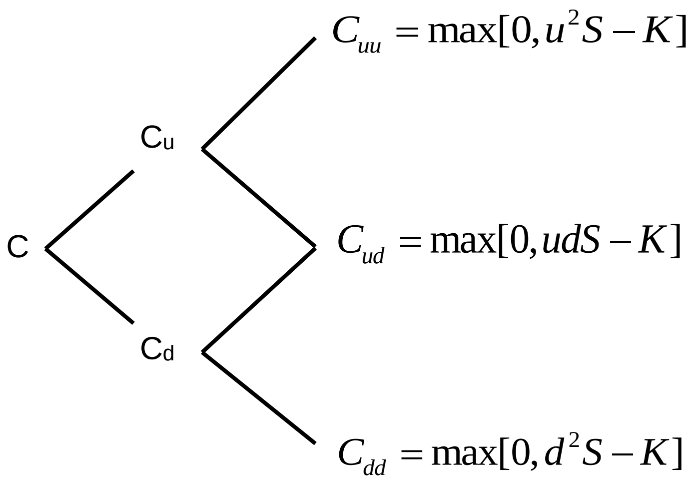
2.1.2 Διωνυμικό δέντρο δύο περιόδων

Η επόμενη απλή περίπτωση είναι εκείνη ενός δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου, στο οποίο απομένουν δύο ίσες χρονικές περιοδοι μέχρι την λήξη. Ακολουθώντας την προηγούμενη διαδικασία, η τιμή τις μετοχής μετά από δύο χρονικές περιόδους θα έχει τρεις ενδεχόμενες τιμές.



t=0 t=T/2 t=T

Όμοια για την αξία του δικαιώματος αγοράς:



t=0 t=T/2 t=T

όπου C_{uu} είναι η τιμή του δικαιώματος αγοράς όταν η τιμή της μετοχής έχει κινηθεί ανοδικά και στις δύο περιόδους, C_{ud} είναι η τιμή του δικαιώματος αγοράς όταν η τιμή της μετοχής έχει κινηθεί ανοδικά στη πρώτη περίοδο και καθοδικά στη δεύτερη και C_{dd} είναι η τιμή του δικαιώματος αγοράς όταν η τιμή της μετοχής έχει κινηθεί καθοδικά και στις δύο περιόδους.

Στο τέλος της πρώτης περιόδου, θα υπάρχει μόνο μία περίοδος μέχρι τη λήξη του δικαιώματος και τότα θα αντιμετωπίσουμε το ίδιο πρόβλημα με εκείνο της ενότητας 2.1.1. Επομένως, σύμφωνα με την προηγούμενη ανάλυση ξέρουμε ότι

$$C_u = [pC_{uu} + (1-p)C_{ud}]/r$$

$$C_d = [pC_{ud} + (1-p)C_{dd}]/r \tag{6}$$

Όπως πριν, προκύπτει ότι η αξία του δικαιώματος αγοράς είναι:

$$C = [pC_u + (1-p)C_d]/\mathrm{r}$$

$$\mathrm{C} = [\mathrm{p}^2\mathrm{C}_{uu} + 2p(1-p)C_{ud} + (1-p)^2 C_{dd}]/r^2 \tag{7}$$

Το διωνυμικό πλέγμα θα μπορούσε να είναι μια καλή προσέγγιση της διαδικασίας ουδέτερου κινδύνου:

$$dS = r_f Sdt + \sigma SdW \tag{8}$$

όπου W μεταβλητή που ακολουθεί διαδικασία Wiener.

Ξεκινώντας από την τιμή S_t, μετά από μικρό χρονικό διάστημα δt η νέα τιμή θα είναι η τυχαία μεταβλητή $S_{t+\delta t}$ έτσι ώστε:

$$\log(S_{t+\delta t} / S_t) \sim N((r_f - \frac{\sigma^2}{2})\delta\,\mathrm{t}, \sigma^2 \delta t) \tag{9}$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της λογαριθμοκανονικής κατανομής έχουμε ότι:

$$\mathrm{E}(S_{t+\delta t} / \mathrm{S}_t) = e^{r_f \delta t} \tag{10}$$

$$Var(S_{t+\delta t} / \mathrm{S}_t) = e^{2r_f \delta t}(\mathrm{e}^{\sigma^2 \delta t} - 1) \tag{11}$$

Στη διωνυμική προσέγγιση όμως έχουμε ότι:

$$E(S_{t+\delta t}) = puS_t + (1-p)dS_t \tag{12}$$

Χρησιμοποιώντας την (10) προκύπτει ότι:

$$puS_t + (1-p)dS_t = e^{r_f \delta t} S_t \Rightarrow p = \frac{e^{r_f \delta t} - d}{u - d} \qquad (13)$$

Από την ιδιότητα της διακύμανσης ισχύει ότι:

$$Var(S_{t+\delta t}) = \mathrm{E}(\mathrm{S}^2_{t+\delta t}) - E^2(\mathrm{S}_{t+\delta t}) = S_t^2(pu^2 + (1-p)d^2) - S_t^2 e^{2r_f \delta t} \qquad (14)$$

Από την (11) και εξισώνοντας με την (14) έχουμε ότι:

$$S_t^2 e^{2r_f \delta t}(e^{\sigma^2 \delta t} - 1) = S_t^2(pu^2 + (1-p)d^2) - S_t^2 e^{2r_f \delta t} \qquad (15)$$

Και συνοψίζεται ως εξής:

$$e^{2r_f \delta t + \sigma^2 \delta t} = pu^2 + (1-p)d^2 \qquad (16)$$

Αντικαθιστώντας το p καταλήγουμε στη εξίσωση:

$$e^{2r_f \delta t + \sigma^2 \delta t} = (u+d)\,\mathrm{e}^{r_f \delta t} - 1 \qquad (17)$$

Αν υποθέσουμε ότι $ud = 1$, και αντικαθιστώντας στην (17) προκύπτει η τετραγωνική εξίσωση:

$$u^2 e^{r_f \delta t} - u(1 + e^{2r_f \delta t + \sigma^2 \delta t}) + e^{r_f \delta t} = 0 \qquad (18)$$

Η μία λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι:

$$u = \frac{(1 + e^{2r_f \delta t + \sigma^2 \delta t}) + \sqrt{(1 + e^{2r_f \delta t + \sigma^2 \delta t})^2 - 4e^{2r_f \delta t}}}{2e^{r_f \delta t}} \qquad (19)$$

Απλοποιώντας την (19) με τη χρήση αναπτύγματος Taylor πρώτης και δεύτερης τάξης καταλήγουμε ότι $u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}}$ και $d = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}$.

Έτσι ένας άλλος τύπος για την αποτίμηση ενός δικαιώματος αγοράς για μια περίοδο είναι ο εξής:

$$C = e^{-r_f \delta t}[pC_u + (1-p)C_d] \qquad (20)$$

όπου $u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}}$, $d = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}$, $p = \dfrac{e^{r_f \delta t} - d}{u - d}$ και σ είναι η τυπική απόκλιση της τιμής της μετοχής.

Για δύο περιόδους έχουμε τους εξής τύπους:

$$\begin{aligned}
C_u &= e^{-r_f \delta t}[pC_{uu} + (1-p)C_{ud}] \\
C_d &= e^{-r_f \delta t}[pC_{du} + (1-p)C_{dd}] \\
C &= e^{-r_f \delta t}[pC_u + (1-p)C_d] \Rightarrow \\
C &= e^{-2r_f \delta t}[p^2 C_{uu} + 2p(1-p)C_{ud} + (1-p)^2 C_{dd}]
\end{aligned} \tag{21}$$

Με την παραπάνω μέθοδο έχουμε μια επαναλαμβανόμενη διαδικασία με την οποία μπορούμε να βρίσκουμε την αξία ενός δικαιώματος αγοράς για κάθε αριθμό χρονικών περιόδων. Ξεκινώντας από την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος και προχωρώντας προς τα πίσω, προκύπτει μια γενική φόρμουλα αποτίμησης δικαιώματος για n χρονικές περιόδους:

$$C = \left[\sum_{j=0}^{n} \left(\frac{n!}{j!(\mathrm{n-j})!}\right) p^j (1-p)^{n-j} \max[0, u^j d^{n-j} S - K] \right] / r^n \tag{22}$$

Για την αποτίμηση ενός δικαιώματος πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου ακολουθείται ακριβώς η ίδια διαδικασία. Ωστόσο, για την αποτίμηση ενός δικαιώματος Αμερικανικού τύπου ακολουθείται η ίδια διαδικασία με το παραπάνω δικαίωμα Ευρωπαϊκού τύπου, με τη μόνη διαφορά ότι καθώς κινούμαστε στους κόμβους προς τα πίσω, συγκρίνουμε την τιμή που μας δίνει η φόρμουλα του δικαιώματος Ευρωπαϊκού τύπου με την τιμή που προκύπτει από την άμεση εξάσκηση του δικαιώματος Αμερικανικού τύπου.

2.2 Τροποποίηση του διωνυμικού μοντέλου των Cox-Ross-Rubinstein υπό το πρίσμα δύο μεταβλητών κατάστασης- Μοντέλο Boyle

Σε αυτή την ενότητα αναπτύσσεται μία τροποποίηση της διωνυμικής προσέγγισης πλέγματος των CRR (1979) για την αποτίμηση ενός δικαιώματος στην περίπτωση μίας μεταβλητής κατάστασης σύμφωνα με τον Boyle (1988). Αυτή η τροποποίηση θα χρησιμοποιηθεί για την γενίκευση της προσέγγισης σε δύο μεταβλητές κατάστασης.

Ένα από τα χαρακτηριστικά της προσέγγισης των CRR (1979) είναι ότι με την υπόθεση της κίνησης της μετοχής είτε ανοδικά είτε καθοδικά η σχέση μεταξύ του επιχειρήματος πως δεν μπορεί να υπάρχει arbitrage και η μαθηματική ανάπτυξή της είναι απόλυτα σαφής.

Έτσι, στην προσέγγισή τους η τιμή του δικαιώματος μπορεί να υπολογιστεί προεξοφλώντας την αναμενόμενη τιμή του στον κόσμο του ουδέτερου κινδύνου. Επομένως, αν γνωρίζουμε τις υποθέσεις περί κατανομών και εξασφαλίσουμε την τιμολόγηση με τον παραπάνω τρόπο, τότε μπορούν να χρησιμοποιηθούν και άλλοι τύποι διακριτών προσεγγίσεων.

Κατά συνέπεια, θεωρούμε το πρόβλημα της αποτίμησης του δικαιώματος σαν ένα πρόβλημα αριθμητικής ανάλυσης και αντικαθιστούμε την συνεχή κατανομή της τιμής της μετοχής με μια “κατάλληλη” διακριτή κατανομή, η οποία στο όριο της προσεγγίζει την “κατάλληλη” συνεχή κατανομή. Χρησιμοποιούμε λοιπόν μια διαδικασία τριών αλμάτων (three-jump process) αντί για εκείνη των δύο αλμάτων που χρησιμοποιείτε στην προσέγγιση των CRR (1979).

Μοντέλα τριών αλμάτων έχουν χρησιμοποιηθεί στη βιβλιογραφία στο παρελθόν για να αναλύσουν προβλήματα αποτίμησης δικαιωμάτων. Οι Stapleton και Subrahmanyan (1984) έκαναν λόγο για ένα μοντέλο τριών αλμάτων, αλλά δεν εξέτασαν την αριθμητική του αποτελεσματικότητα ή την λύση ως προς τις πιθανότητες άλματος.

Ο Parkinson (1977) χρησιμοποίησε ένα μοντέλο τριών αλμάτων για να αποτιμήσει το δικαίωμα πώλησης Αμερικανικού τύπου, αλλά η προσέγγισή του φαίνεται δύσκολη για να γενικευτεί σε προβλήματα που περιλαμβάνουν περισσότερες από μία μεταβλητές κατάστασης. Οι Brennan και Schwartz (1978) συσχέτισαν τους συντελεστές της τροποποιημένης εξίσωσης των Black & Scholes (1973) με τις πιθανότητες μίας διαδικασίας τριών αλμάτων.

2.2.1 Υποθέσεις και περιγραφή του μοντέλου

Για να αναπτύξουμε την προσέγγιση του Boyle (1988), ας υποθέσουμε ότι θεωρούμε ένα περιουσιακό στοιχείο (S), του οποίου η απόδοση ακολουθεί λογαριθμοκανονική κατανομή (lognormal distribution).

Για μικρά χρονικά διαστήματα αυτή η κατανομή προσεγγίζεται από την διαδικασία τριών αλμάτων (three-jump process) με τέτοιο τρόπο ώστε η αναμενόμενη απόδοση του περιουσιακού στοιχείου να είναι το risk-free επιτόκιο και η διακύμανση της διακριτής κατανομής να ισούται με τη διακύμανση της αντίστοιχης λογαριθμοκανονικής κατανομής.

Χρησιμοποιείται ο παρακάτω συμβολισμός:

- T = το χρονικό διάστημα μέχρι τη λήξη του δικαιώματος σε έτη
- x = η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος
- r = το συνεχώς ανατοκιζόμενο ετήσιο επιτόκιο
- σ^2 = η διακύμανση της απόδοσης του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου σε ετήσια βάση
- n = ο αριθμός των βημάτων στα οποία διαιρείται το χρονικό διάστημα T
- $h \equiv \frac{T}{n}$ = το μήκος ενός χρονικού βήματος
- Su = τιμή του περιουσιακού στοιχείου μετά από ένα άλμα προς τα πάνω
- S = τιμή του περιουσιακού στοιχείου μετά από ένα οριζόντιο άλμα
- Sd = τιμή του περιουσιακού στοιχείου μετά από ένα άλμα προς τα κάτω

Για την διαδικασία τριών αλμάτων λαμβάνεται υπόψιν, η ακόλουθη διακριτή κατανομή:

Κατάσταση	**Πιθανότητα Κατάστασης**	**Τιμή Περιουσιακού Στοιχείου**
Άνω	p_1	Su
Οριζόντια	p_2	S

Κάτω	p_3	Sd

Υποθέτουμε ότι $ud = 1$. Σκοπός μας είναι να βρούμε κατάλληλες τιμές για τις πιθανότητες p_1 , p_2 , p_3 και για την ευέλικτη παράμετρο u εκφρασμένη σε όρους γνωστών μεταβλητών. Δίνονται οι εξής συνθήκες:

- Οι πιθανότητες αθροίζουν στη μονάδα
- Η μέση τιμή της διακριτής κατανομής SM ,ισούται με τη μέση τιμή της λογαριθμοκανονικής κατανομής: $\boldsymbol{S\, \mathrm{e}^{rh} \equiv SM}$
- Η διακύμανση της διακριτής κατανομής S^2V ,ισούται με τη διακύμανση της λογαριθμοκανονικής κατανομής: $S^2M^2(e^{\sigma^2 h} - 1) \equiv \mathrm{S}^2 V$

Όταν θα προσδιορίσουμε την παράμετρο u , θα απαιτήσουμε οι πιθανότητες να είναι θετικές. Οι υποθέσεις γράφονται ως:

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1 \tag{23}$$

$$E(\mathrm{S}_{t+h}) = p_1 Su + p_2 S + p_3 \frac{S}{u} = SM \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
Var(S_{t+h}) &= E(S_{t+h}^2) - \mathrm{E}^2(S_{t+h}) \Rightarrow \\
Var(S_{t+h}) &= p_1 S^2u^2 + p_2 S^2 + p_3 \frac{S^2}{u^2} - (p_1 Su + p_2 S + p_3 \frac{S}{u})^2 \Rightarrow \\
Var(S_{t+h}) &= p_1 S^2u^2 + p_2 S^2 + p_3 \frac{S^2}{u^2} - S^2M^2 \Rightarrow \\
Var(S_{t+h}) &= p_1 S^2u^2 + p_2 S^2 + p_3 \frac{S^2}{u^2} - S^2M^2(p_1 + p_2 + p_3) \Rightarrow \\
Var(S_{t+h}) &= p_1 S^2u^2 + p_2 S^2 + p_3 \frac{S^2}{u^2} - S^2M^2 p_1 - S^2M^2 p_2 - S^2M^2 p_3 \Rightarrow \\
Var(S_{t+h}) &= p_1(S^2u^2 - S^2M^2) + p_2(S^2 - S^2M^2) + p_3(\frac{S^2}{u^2} - S^2M^2) = S^2V
\end{aligned} \tag{25}$$

Διαιρούμε την (24) με S και την (25) με S^2. Χρησιμοποιούμε την (23) για να εξαλείψουμε την p_2 από τις άλλες δύο εξισώσεις.

Τότε προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$p_1(u-1)+p_3(\frac{1}{u}-1)=M-1 \tag{26}$$

$$p_1(u^2-1)+p_3(\frac{1}{u^2}-1)=V+M^2-1 \tag{27}$$

Λύνοντας τις εξισώσεις (26) και (27) προκύπτουν αναλυτικές εκφράσεις για τις πιθανότητες:

$$p_1=\frac{(V+M^2-M)u-(M-1)}{(u-1)(u^2-1)} \tag{28}$$

$$p_3=\frac{u^2(V+M^2-M)-u^3(M-1)}{(u-1)(\mathrm{u}^2-1)} \tag{29}$$

$$p_2=1-p_1-p_3 \tag{30}$$

Είναι βολικότερο να χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό:

$$p_1=f(u,M,V) \tag{31}$$

$$p_3=g(u,M,V) \tag{32}$$

Παρατηρούμε ότι από τις παραπάνω εξισώσεις το $u \neq 1$. Είναι λογικό αφού πολλαπλασιάζοντας με το u έχω ένα ανοδικό άλμα και επομένως $u > 1$. Μέχρι τώρα η παράμετρος u δεν έχει εκφραστεί με κάποια συγκεκριμένη μορφή. Γενικά θα μπορούσε να υπάρχει ένα εύρος τιμών του u, για το οποίο να προκύπτουν λογικές τιμές στις πιθανότητες. Από το μοντέλο των CRR (1979) ξέρουμε ότι:

$$u=e^{\sigma\sqrt{h}} \tag{33}$$

Χρησιμοποιώντας αυτή την μορφή για το u, τότε πολλές τιμές της πιθανότητας

p_2 θα γίνουν αρνητικές.

2.2.2 Παράδειγμα και παρατηρήσεις

Ας υποθέσουμε ότι σ = 0.2, r = 0.1, T = 1 και n = 20. Με αντικατάσταση στην (33) προκύπτει ότι το u = 1.045736 και εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα στις σχέσεις (28), (29), (30) έχουμε ότι p_1 = 0.553839, p_2 = - 0.018440 και p_3 = 0.464581. Παρατηρούμε λοιπόν ότι οι τιμές του u που προκύπτουν με τη χρήση της (33) είναι αρκετά μικρές για να παράγουν θετικές τιμές στην p_2.

Για να διορθώσουμε την (33), ορίζουμε το u ως εξής:

$$u = e^{\lambda\sigma\sqrt{h}}, \text{ με } \lambda > 1. \tag{34}$$

Αν δοκιμάσουμε αρκετές διαφορετικές τιμές για το λ παρατηρούμε ότι υπάρχει ένα εύρος τιμών του u για το οποίο παράγονται αποδεκτές τιμές για όλες τις πιθανότητες, ιδίως για την p_2. Στον Πίνακα 1 παρουσιάζονται οι τιμές του u και οι αντίστοιχες πιθανότητες για ένα εύρος τιμών του λ.

Ωστόσο ένα σύνολο από δικαιώματα θα πρέπει να αποτιμηθεί σε ένα εύρος τιμών, για να αποφασίσουμε την πιο αποτελεσματική τιμή του λ που είναι καλύτερη να χρησιμοποιηθεί. Έχει αποδειχτεί ότι καλύτερα αποτελέσματα υπάρχουν όταν οι πιθανότητες είναι περίπου ίσες.
Πρωταρχικός στόχος του μοντέλου που αναπτύχθηκε ήταν να δημιουργήσει τις κατάλληλες προϋποθέσεις για την επέκταση του σε δύο ή και περισσότερες μεταβλητές κατάστασης. Ωστόσο αξίζει να αναφερθεί ότι η ακρίβεια του μοντέλου τριών αλμάτων (three-jump process) για πέντε χρονικά βήματα είναι συγκρίσιμη με εκείνη της προσσέγγισης των CRR (1979) για είκοσι χρονικά βήματα.

2.3 Εναλλακτική προσέγγιση πλέγματος για την αποτίμηση δικαιωμάτων με μία μεταβλητή κατάστασης- Μοντέλο Kamrad & Ritchken

Οι Kamrad και Ritchken (1991) ανέπτυξαν μια εναλλακτική τεχνική για την αποτίμηση δικαιωμάτων με μία ή περισσότερες μεταβλητές κατάστασης, εξελίσσοντας το μοντέλο του Boyle (1988). Στην παρούσα ενότητα γίνεται λόγος για το μοντέλο αποτίμησης δικαιωμάτων με μία μεταβλητή κατάστασης.

Υποθέτουμε ότι το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο ακολουθεί γεωμετρική κίνηση Brown. Για τις ανάγκες της αποτίμησης θα θεωρήσουμε ότι $\mu = r - \frac{\sigma^2}{2}$ και σ^2 είναι ο αναμενόμενος ρυθμός απόδοσης (drift rate) και η διακύμανση της απόδοσης του περιουσιακού στοιχείου αντίστοιχα. Τότε για το περιουσιακό στοιχείο για το χρονικό διάστημα $[t, t+\Delta t]$ θα ισχύει:

$$\ln\{\mathrm{S}(\mathrm{t}+\Delta t)\} = \ln\{S(t)\} + \zeta(t) \tag{35}$$

όπου $\zeta(t)$ είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu\,\Delta t$ και διακύμανση $\sigma^2 \Delta t$. Θεωρούμε ότι η $\zeta^a(t)$ είναι η προσεγγιστική κατανομή της $\zeta(t)$ για το χρονικό διάστημα $[t, t+\Delta t]$. Η $\zeta^a(t)$ είναι η διακριτή τυχαία μεταβλητή που έχει την εξής κατανομή:

Κατάσταση	$\zeta^a(\mathrm{t})$	**Πιθανότητα Κατάστασης**
Ανοδική Απόδοση	u	p_1
Μηδενική Απόδοση	0	p_2
Καθοδική Απόδοση	$-u$	p_3

όπου $u = \lambda\,\sigma\,\sqrt{\Delta t}$ και $\lambda \geq 1$.

Η μέση τιμή και η διασπορά της προσεγγιστικής κατανομής θα πρέπει να εξισώνονται με την μέση τιμή και τη διασπορά της $\zeta(t)$. Πιο συγκεκριμένα έχουμε:

$$E\{\zeta^a(t)\} = u\,(p_1 - p_3) = \mu\,\Delta t \tag{36}$$

$$\mathrm{Var}\{\zeta^a(t)\} = u^2(p_1 + p_3) = \sigma^2 \Delta t + \mathrm{O}(\Delta t) \tag{37}$$

Αντικαθιστώντας το $u = \lambda\,\sigma\,\sqrt{\Delta t}$, για μικρό Δt και σε συνδυασμό με το ότι πρέπει $\sum_{j=1}^{3} p_j = 1$ οι παραπάνω εξισώσεις λύνονται ως εξής:

$$p_1 = \frac{1}{2\lambda^2} + \frac{\mu\sqrt{\Delta t}}{2\lambda\sigma} \tag{38}$$

$$p_2 = 1 - \frac{1}{\lambda^2} \tag{39}$$

$$p_3 = \frac{1}{2\lambda^2} - \frac{\mu\sqrt{\Delta t}}{2\lambda\sigma} \tag{40}$$

Παρατηρείται ότι για $\lambda = 1$ η p_2 γίνεται 0 και τότε οι παραπάνω εκφράσεις για τις πιθανότητες συμπίπτουν με το διωνυμικό μοντέλο των Cox, Ross & Rubinstein (1979). Επίσης αποδεικνύεται ότι σε αντίθεση με το μοντέλο του Boyle (1988), κάθε τιμή του λ με $\lambda \geq 1$ δίνει ένα εφικτό σύνολο πιθανοτήτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΜΟΝΤΕΛΑ ΑΠΟΤΙΜΗΣΗΣ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ ΜΕ ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

3.1 Μοντέλο Black & Scholes για την αποτίμηση δικαιωμάτων Ευρωπαϊκού τύπου με δύο μεταβλητές κατάστασης

Στις αρχές του 1970, οι Black & Scholes (1973) και ο Merton (1973) πραγματοποίησαν ένα μεγάλο κατόρθωμα στην αποτίμηση δικαιωμάτων Ευρωπαϊκού τύπου πάνω σε μία μετοχή (μια μεταβλητή κατάστασης). Με την ίδια μεθοδολογία θα μπορούσε να αναπτυχθεί το μοντέλο για δύο μεταβλητές κατάστασης.

3.1.1 Περιγραφή του μοντέλου

Υποθέτουμε ότι V και H είναι οι τιμές των δύο επισφαλών στοιχείων. Τότε το δικαίωμα αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου θα έχει απόδοση στη λήξη:

$$\mathrm{g} \equiv \mathrm{g}(\mathrm{V}, \mathrm{H}) \tag{41}$$

Γίνονται οι εξής υποθέσεις:

- Η αγορά δεν έχει περιορισμούς
- Οι τιμές V και H ικανοποιούν αντίστοιχα τις ακόλουθες στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις:

$$\frac{dV}{V} = \mu_V dt + \sigma_V dZ_V \tag{42}$$

$$\frac{dH}{H} = \mu_H dt + \sigma_H dZ_H \tag{43}$$

όπου σ_V^2 και σ_H^2 είναι οι αντίστοιχες διασπορές των αποδόσεων των περιουσιακών στοιχείων V και H οι οποίες είναι σταθερές. Ως μ_V και μ_H εμφανίζονται οι αντίστοιχες μέσες τιμές των αποδόσεων των περιουσιακών στοιχείων V και H, τέτοιες ώστε να ικανοποιούνται οι (42) και (43). Οι dZ_V και dZ_H ακολουθούν διαδικασία Wiener και έχουν συντελεστή συσχέτισης ρ_{VH} , ο οποίος είναι σταθερός. Οι σχέσεις (42) & (43) εισάχθηκαν πρώτη φορά από τον Merton (1971).

- Το επιτόκιο R είναι σταθερό

Στη συνέχεια θεωρούμε $M(V,H,F,T-t)$ να είναι η τιμή του δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου με απόδοση $g(V,H)$ στη λήξη T και τιμή εξάσκησης F.

Για να βρούμε το Μ είναι χρήσιμο να υπολογίσουμε την αξία ενός χαρτοφυλακίου στη λήξη T που η αξία του είναι ίση με εκείνη του δικαιώματος στη λήξη T. Αν ένα τέτοιο χαρτοφυλάκιο μπορεί να βρεθεί, η αξία του στο χρόνο t θα πρέπει να είναι ίση με την αξία του δικαιώματος στο χρόνο t, $\forall t \leq T$, ώστε να μην υπάρχει περιθώριο για arbitrage.

Ορίζουμε τ να ισούται με T - t, δηλαδή να είναι ο χρόνος μέχρι τη λήξη του δικαιώματος και $P = P(V,H,\tau)$ να ισούται με την αξία του χαρτοφυλακίου, σύμφωνα με τις παραπάνω υποθέσεις. Χρησιμοποιώντας το λήμμα του Ito, έχουμε το εξής:

$$
\begin{aligned}
dP &= P_V dV + P_H dH - P_\tau dt + \frac{1}{2}\{P_{VV}V^2\sigma_V^2 + P_{HH}H^2\sigma_H^2 + 2P_{VH}VH\rho_{VH}\sigma_V\sigma_H\}\,\mathrm{dt} \\
\Leftrightarrow dP &= P_V(V\mu_V dt + V\sigma_V dZ_V) + P_H(\mathrm{H}\,\mu_H dt + H\sigma_H dZ_H) - P_\tau dt \\
&+ \frac{1}{2}\{P_{VV}V^2\sigma_V^2 + P_{HH}H^2\sigma_H^2 + 2P_{VH}VH\rho_{VH}\sigma_V\sigma_H\}\,\mathrm{dt}
\end{aligned}
\tag{44}
$$

Αν το χαρτοφυλάκιο είναι ακίνδυνο και αποτελείται από επενδύσεις στα επισφαλή περιουσιακά στοιχεία V και H και σε ασφαλή περιουσιακά στοιχεία, τότε η (44) γράφεται ως εξής:

$$dP = x(\frac{dV}{V})P + y(\frac{dH}{H})P + (1-x-y)RPdt \Leftrightarrow$$

$$dP = x(\mu_V dt + \sigma_V\,\mathrm{dZ}_V)P + y(\mu_H dt + \sigma_H\,\mathrm{dZ}_H)P + (1-x-y)RPdt \tag{45}$$

όπου x είναι το κλάσμα του χαρτοφυλακίου που επενδύεται στο περιουσιακό στοιχείο V και y το κλάσμα του χαρτοφυλακίου που επενδύεται στο περιουσιακό στοιχείο H.

Τα x και y είναι συναρτήσεις των V,H, τ. Αντιστοιχίζοντας τα dt, dZ_V, dZ_H μέρη από τις (44) και (45) προκύπτει ότι θα πρέπει τα x και y να ικανοποιούν τις ακόλουθες σχέσεις σε κάθε χρονική στιγμή:

$$P_V V = xP \quad (46)$$

$$P_H H = yP \quad (47)$$

και να ισχύει η ακόλουθη μερική διαφορική εξίσωση (PDE):

$$-P_\tau = RP - RP_V V - RP_H H - \frac{1}{2}\{P_{VV}V^2\sigma_V^2 + P_{HH}H^2\sigma_H^2 + 2P_{VH}VH\rho_{VH}\sigma_V\sigma_H\} \quad (48)$$

Παρατηρούμε ότι οι στοχαστικοί όροι της (45) δεν εμφανίζονται πλέον και το χαρτοφυλάκιο του οποίου η αξία είναι P, θα είναι ακίνδυνο αν ικανοποιείται η μερική διαφορική εξίσωση (48). Για να είναι η αξία αυτού του χαρτοφυλακίου ίση με εκείνη του δικαιώματος θα πρέπει να ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες:

$$P(V,H,\tau) = g(V,H) \quad (49)$$

$$P(0,H,\tau) = 0 \quad (50)$$

$$P(V,0,\tau) = 0. \quad (51)$$

Παρατηρούμε ότι οι (48), (49), (50) και (51) δεν περιλαμβάνουν όρους που εκφράζουν τις προτιμήσεις των επενδυτών ως προς τον κίνδυνο και άρα το R είναι το risk-free επιτόκιο.

3.1.2 Αποτίμηση δικαιώματος αγοράς στο ελάχιστο επισφαλών περιουσιακών στοιχείων

Εξειδικεύοντας το μοντέλο της ενότητας 3.1.1, παρουσιάζονται οι φόρμουλες αποτίμησης δικαιωμάτων Ευρωπαϊκών τύπου πάνω στο ελάχιστο ή στο μέγιστο επισφαλών περιουσιακών στοιχείων, όπως συζητήθηκαν από τον Stulz (1982).

Πιο συγκεκριμένα το δικαίωμα αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου με βάση την (41) θα έχει απόδοση στη λήξη:

$$g(V,H) = \max\{\min(\mathrm{V,H}) - \mathrm{F}, 0\} \quad (41΄)$$

όπου F είναι η τιμή εξάσκησης.

Έπειτα θεωρούμε $M(V,H,F,T-t)$ να είναι η τιμή του δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου στο $\min(V,H)$ με ημερομηνία λήξης T και τιμή εξάσκησης F.

Ακολουθώντας την προηγούμενη μεθοδολογία, καταλήγουμε ξανά στην ΜΔΕ (48), η οποία θα πρέπει και να ικανοποιείται για να είναι ακίνδυνο το χαρτοφυλάκιο.

Τότε για να είναι η αξία αυτού του χαρτοφυλακίου ίση με εκείνη του δικαιώματος, ανακαλώντας την (49) και την (41΄) θα πρέπει να έχουμε:

$$P(V,H,\tau)=\max\{\min(V,H)-F,0) \tag{49΄}$$

κάτω από τις συνοριακές συνθήκες (50) και (51).

Προεξοφλώντας λοιπόν την απόδοση στη λήξη με το R, προκύπτει η αξία του δικαιώματος ως εξής (Cox-Ross 1976):

$$\begin{aligned} M &= HN_2(\gamma_1+\sigma_H\sqrt{\tau},(\ln(\frac{V}{H})-\frac{1}{2}\sigma^2\sqrt{\tau})/\sigma\sqrt{\tau},(\rho_{VH}\sigma_V-\sigma_H)/\sigma) \\ &+VN_2(\gamma_2+\sigma_V\sqrt{\tau},(\ln(\frac{H}{V})-\frac{1}{2}\sigma^2\sqrt{\tau})/\sigma\sqrt{\tau},(\rho_{VH}\sigma_H-\sigma_V)/\sigma) \\ &-\mathrm{F}e^{-R\tau}N_2(\gamma_1,\gamma_2,\rho_{\mathrm{VH}}) \end{aligned} \tag{52}$$

όπου $N_2(\alpha,\beta,\theta)$ είναι η διμεταβλητή αθροιστική τυποποιημένη κανονική κατανομή με άνω όρια ολοκλήρωσης τα α και β και συντελεστή συσχέτισης θ και

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= (\ln(\frac{H}{F})+(R-\frac{1}{2}\sigma_{\mathrm{H}}^2)\tau)/\sigma_H\sqrt{\tau} \\ \gamma_2 &= (\ln(\frac{V}{F})+(R-\frac{1}{2}\sigma_V^2)\tau)/\sigma_V\sqrt{\tau} \\ \sigma^2 &= \sigma_V^2+\sigma_H^2-2\rho_{VH}\sigma_V\sigma_H \end{aligned}$$

Ωστόσο η (52) απλοποιείται αν $F=0$. Έστω $E(V,H,1,\tau)$ να είναι η τιμή του δικαιώματος που ανταλλάσσει μία μονάδα του περιουσιακού στοιχείου H με μία μονάδα του περιουσιακού στοιχείου V στη λήξη. O Margrabe (1978) τιμολογεί τέτοια δικαιώματα και χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματά του καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση:

$$M(V,H,0,\tau)=V-E(V,H,1,\tau)=V-VN(d_1)+HN(d_2) \tag{52΄}$$

όπου

$$\begin{aligned} d_1 &= (\ln(\frac{V}{H})+\frac{1}{2}\sigma^2\tau)/\sigma\sqrt{\tau} \\ d_2 &= d_1-\sigma\sqrt{\tau} \end{aligned}$$

Η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε παρουσιάζεται αναλυτικά στα άρθρα των Cox & Ross (1976) και Harrison & Kreps (1979). Για λόγους πληρότητας, στο ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1 σκιαγραφείται η απόδειξη της σχέσης (52).

3.1.3 Αποτίμηση δικαιώματος στο ελάχιστο ή στο μέγιστο δύο επισφαλών περιουσιακών στοιχείων

Στο άρθρο του Stulz (1982) επισημαίνονται κάποιες χρήσιμες ιδιότητες των κλειστών τύπων για την αποτίμηση δικαιωμάτων Ευρωπαϊκού τύπου. Εξηγείται ότι από την τιμή του δικαιώματος αγοράς στο ελάχιστο δύο επισφαλών περιουσιακών στοιχείων και την τιμή των περιουσιακών στοιχείων V και H και το επιτόκιο R, μπορεί να προκύψει η τιμή του δικαιώματος αγοράς στο μέγιστο δύο επισφαλών περιουσιακών στοιχείων, η τιμή του δικαιώματος πώλησης στο ελάχιστο δύο επισφαλών περιουσιακών στοιχείων και η τιμή του δικαιώματος πώλησης στο μέγιστο δύο επισφαλών περιουσιακών στοιχείων.

- Αξία ενός δικαιώματος αγοράς στο μέγιστο δύο επισφαλών περιουσιακών στοιχείων

Έστω $MX(V,H,\mathrm{F},\tau)$ να είναι η τιμή ενός δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου με απόδοση στη λήξη $\max\{\max(V,H)-F,0\}$.

Η τιμή αυτού του δικαιώματος αποδεικνύεται ότι είναι:

$$MX(V,H,\mathrm{F},\tau)=\mathrm{C}(\mathrm{V},\mathrm{F},\tau)+\mathrm{C}(\mathrm{H},\mathrm{F},\tau)-M(V,H,F,\tau) \qquad (53)$$

με $C(A,F,\tau)$ να είναι η τιμή ενός δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου πάνω στο περιουσιακό στοιχείο A με τιμή εξάσκησης F και χρόνο μέχρι τη λήξη τ.

- Αξία ενός δικαιώματος πώλησης στο ελάχιστο δύο επισφαλών περιουσιακών στοιχείων

Έστω $PM(V,H,F,\tau)$ να είναι η τιμή ενός δικαιώματος πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου με απόδοση στη λήξη $\max\{F-\min(V,H),0\}$.

Η τιμή αυτού του δικαιώματος αποδεικνύεται ότι είναι:

$$PM(V,H,F,\tau)=e^{-R\tau}F-M(V,H,0,\tau)+M(V,H,F,\tau) \qquad (54)$$

- Αξία ενός δικαιώματος πώλησης στο μέγιστο δύο επισφαλών περιουσιακών στοιχείων

Έστω $PX(\mathrm{V},\mathrm{H},\mathrm{F},\tau)$ να είναι η τιμή ενός δικαιώματος πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου με απόδοση στη λήξη $\max\{F-\max(V,H),0\}$.

Η τιμή αυτού του δικαιώματος αποδεικνύεται ότι είναι:

$$PX(\mathrm{V},\mathrm{H},\mathrm{F},\tau)=e^{-R\tau}F-M\mathrm{X}(V,\mathrm{H},0,\tau)+\mathrm{MX}(\mathrm{V},\mathrm{H},\mathrm{F},\tau) \tag{55}$$

3.2 Μοντέλο πλέγματος Boyle για την αποτίμηση δικαιωμάτων με δύο μεταβλητές κατάστασης

Σε αυτή την ενότητα αναπτύσσεται μια μέθοδος για την αποτίμηση δικαιωμάτων πάνω σε δύο μεταβλητές κατάστασης, δηλαδή δικαιώματα με δύο υποκείμενους τίτλους. Η διαδικασία που ακολουθείται είναι ίδια με εκείνη της προσέγγισης για μια μεταβλητή κατάστασης όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενη ενότητα. Συγκεκριμένα η ουσία της ιδέας αποτελεί γενίκευση της μεθόδου της ενότητας 2.2 σύμφωνα με τον Boyle (1988).

3.2.1 Υποθέσεις και περιορισμοί του μοντέλου

Υποθέτουμε ότι η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας (joint density function) των δύο υποκείμενων τίτλων είναι η διμεταβλητή λογαριθμοκανονική κατανομή (bivariate lognormal distribution). Επίσης θεωρούμε ότι κατά την αποτίμηση δικαιωμάτων, δεδομένου ότι όλοι οι επενδυτές είναι ουδέτεροι στον κίνδυνο, εφαρμόζεται το risk-free επιτόκιο και στα δύο περιουσιακά στοιχεία.

Ακόμη υποθέτουμε ότι οι πιθανότητες των αλμάτων αθροίζουν στη μονάδα και ότι θα πρέπει η μέση τιμή της διακριτής κατανομής να ισούται με τη μέση τιμή της συνεχούς κατανομής και ο πίνακας διακυμάνσεων - συνδιακυμάνσεων της διακριτής κατανομής να ισούται με τον αντίστοιχο της συνεχούς κατανομής.

Συνεπώς θα πρέπει να γίνονται τουλάχιστον πέντε άλματα για να ικανοποιούνται οι ανωτέρω υποθέσεις και να μπορεί να παραχθεί ένα κατάλληλο 2x1 πλέγμα αποτίμησης (δύο διαστάσεις για το περιουσιακό στοιχείο και μία χρονική διάσταση).

Για τον συμβολισμό θεωρούμε ότι ο δείκτης 1 αναφέρεται στο πρώτο περιουσιακό στοιχείο, ενώ ο δείκτης 2 στο δεύτερο περιουσιακό στοιχείο.

Συνεπώς ορίζουμε:

- T = το χρονικό διάστημα μέχρι τη λήξη του δικαιώματος σε έτη
- X = η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος
- r = το συνεχώς ανατοκιζόμενο ετήσιο επιτόκιο

- σ_i^2 = η διακύμανση της απόδοσης του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου σε ετήσια βάση με $i = 1, 2$
- n = ο αριθμός των βημάτων στα οποία διαιρείται το χρονικό διάστημα Τ
- $h = \frac{T}{n}$ = το μήκος ενός χρονικού βήματος
- S_i = η τρέχουσα τιμή του περιουσιακού στοιχείου με $i = 1, 2$

Επίσης οι μέσες τιμές των περιουσιακών στοιχείων στο τέλος του κάθε υποδιαστήματος h σύμφωνα με τις ιδιότητες της λογαριθμοκανονικής κατανομής είναι:

	Περιουσιακό στοιχείο 1	**Περιουσιακό στοιχείο 2**
Μέση τιμή	$S_1 M_1$	$S_2 M_2$
Διακύμανση	$S_1^2 V_1$	$S_2^2 V_2$

όπου

$$M_i = e^{rh} \text{ με } i = 1, 2 \tag{56}$$

$$V_i = M_i^2 [e^{\sigma_i^2 h} - 1] \text{ με } i = 1, 2 \tag{57}$$

Η αναμενόμενη τιμή του γινομένου των δύο μεταβλητών S_1 και S_2 γράφεται με τη βοήθεια των ιδιοτήτων της λογαριθμοκανονικής κατανομής ως:

$$E(S_1 S_2) = S_1 S_2 M_1 M_2 e^{\rho \sigma_1 \sigma_2 h} \equiv S_1 S_2 R \tag{58}$$

Από την (58) προκύπτει η συνδιακύμανση των δύο περιουσιακών στοιχείων. Επομένως έχουμε τις μέσες τιμές και τον πίνακα διακυμάνσεων – συνδιακυμάνσεων της διμεταβλητής λογαριθμοκανονικής κατανομής των τιμών των περιουσιακών στοιχείων στο τέλος κάθε υποδιαστήματος h.

3.2.2 Περιγραφή του μοντέλου

Για να αντικαταστήσουμε τη συνεχή κατανομή με μία διακριτή θεωρούμε ότι οι ροπές πρώτης και δεύτερης τάξης είναι ίσες στις δύο κατανομές. Αν λοιπόν μπορούν να πραγματοποιηθούν πέντε άλματα για το ζευγάρι $(S_1 S_2)$ τότε έχουμε τα παρακάτω αποτελέσματα όπου :

- $S_i u_i$ είναι η τιμή του περιουσιακού στοιχείου i όταν κάνει ανοδική κίνηση
- $S_i d_i$ είναι η τιμή του περιουσιακού στοιχείου i όταν κάνει καθοδική κίνηση
- S_i είναι η τιμή του περιουσιακού στοιχείου i όταν κάνει οριζόντια κίνηση

Κατάσταση	**Πιθανότητα Κατάστασης**	**Τιμή περιουσιακού στοιχείου 1**	**Τιμή περιουσιακού στοιχείου 2**
E_1	p_1	$S_1 u_1$	$S_2 u_2$
E_2	p_2	$S_1 u_1$	$S_2 d_2$
E_3	p_3	$S_1 d_1$	$S_2 d_2$
E_4	p_4	$S_1 d_1$	$S_2 u_2$
E_5	p_5	S_1	S_2

Αντίστοιχα με την περίπτωση της μίας μεταβλητής (ενότητα 2.2) το u_1 είναι η ευέλικτη παράμετρος περιουσιακού στοιχείου 1 και το u_2 αναπαριστά την ευέλικτη παράμετρο του περιουσιακού στοιχείου 2. Ισχύουν οι συνθήκες:

$$u_1 d_1 = 1 \text{ και } u_2 d_2 = 1 \tag{59}$$

Φανταζόμαστε λοιπόν ότι έχουμε μία τρισδιάστατη αναπαράσταση αυτής της κατάστασης στο πέρασμα του χρόνου. Το ζευγάρι των τιμών των δύο περιουσιακών στοιχείων μπορεί να πάρει τις τιμές όπως απεικονίζονται στον ανωτέρω πίνακα.

Οι δύο οριζόντιες διαστάσεις είναι οι πιθανές τιμές του S_1, S_2 και η κατακόρυφη διάσταση ο χρόνος. Οι τέσσερις πρώτες δυνατές επιλογές αντιστοιχούν στις κορυφές ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου και η πέμπτη επιλογή στο κέντρο του παραλληλογράμμου. Στο πέρασμα του χρόνου, όσο η διαδικασία επαναλαμβάνεται το αποτέλεσμα της απεικόνισης θα είναι ένα τρισδιάστατο πλέγμα που θα θυμίζει μια ανεστραμμένη πυραμίδα. Η τελική κατανομή του ζευγαριού των περιουσιακών στοιχείων, αναπαρίσταται από την πιο ψηλή διαστρωματική σειρά ορθογώνιων παραλληλογράμμων, στην οποία το κέντρο κάθε ορθογωνίου βρίσκεται ακριβώς κατακόρυφα πάνω από το αρχικό σημείο της κίνησης.

Για να υπολογίσουμε τις πιθανότητες και τις ευέλικτες μεταβλητές επαναλαμβάνουμε την διαδικασία όπως στην περίπτωση της μίας μεταβλητής. Δηλαδή εκφράζουμε πρώτα τις πιθανότητες σε σχέση με τα u_i και τις άλλες μεταβλητές. Εξισώνοντας τη μέση τιμή της διακριτής κατανομής με εκείνη της συνεχούς, παίρνουμε τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$(p_1 + p_2)S_1 u_1 + p_5 S_1 + (p_3 + p_4)\mathrm{S}_1\, d_1 = S_1 M_1 \tag{60}$$

$$(p_1 + p_4)S_2 u_2 + p_5 S_2 + (p_2 + p_3)\mathrm{S}_2\, d_2 = S_2 M_2 \tag{61}$$

Δύο ακόμη εξισώσεις προκύπτουν εξισώνοντας τις αντίστοιχες διασπορές:

$$(p_1 + p_2)(S_1^2 u_1^2 - \mathrm{S}_1^2 \mathrm{M}_1^2) + p_5(S_1^2 - \mathrm{S}_1^2 \mathrm{M}_1^2) + (p_3 + p_4)(S_1^2 d_1^2 - \mathrm{S}_1^2 \mathrm{M}_1^2) = S_1^2 V_1 \tag{62}$$

$$(p_1 + p_4)(S_2^2 u_2^2 - \mathrm{S}_2^2 \mathrm{M}_2^2) + p_5(S_2^2 - \mathrm{S}_2^2 \mathrm{M}_2^2) + (p_2 + p_3)(S_2^2 d_2^2 - \mathrm{S}_2^2 \mathrm{M}_2^2) = S_2^2 V_2 \tag{63}$$

Επίσης έχουμε άλλη μία εξίσωση:

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1 \tag{64}$$

Παρατηρούμε ότι οι (60), (62), (64) και οι (61), (63), (64) θυμίζουν τις αντίστοιχες (23),(24),(25) της ενότητας 2.2.1. Άρα αν θεωρήσουμε σαν νέες πιθανότητες τις (p_1+p_2), (p_3+p_4), p_5, μπορούμε να λύσουμε ως προς αυτές τροποποιώντας τις (28), (29), (30). Αντίστοιχα μπορούμε να θεωρήσουμε σαν νέες πιθανότητες και τις (p_1+p_4), (p_2+p_3), p_5 και να λύσουμε με τον ίδιο τρόπο.

Ουσιαστικά αυτή η διαδικασία επίλυσης ταιριάζει με την προβολή της διμεταβλητής κατανομής στην αδέσμευτη κατανομή για την περίπτωση της μίας μεταβλητής κατάστασης. Τότε προκύπτουν οι εξής σχέσεις:

$$p_1 + p_2 = \frac{(\mathrm{V}_1 + M_1^2 - M_1)u_1 - (M_1 - 1)}{(u_1 - 1)(u_1^2 - 1)} \tag{65}$$

$$p_3 + p_4 = \frac{u_1^2(V_1 + M_1^2 - M_1) - u_1^3(M_1 - 1)}{(u_1 - 1)(\mathrm{u}_1^2 - 1)} \tag{66}$$

$$p_1 + p_4 = \frac{(\mathrm{V}_2 + M_2^2 - M_2)u_2 - (M_2 - 1)}{(u_2 - 1)(u_2^2 - 1)} \tag{67}$$

$$p_2 + p_3 = \frac{u_2^2(V_2 + M_2^2 - M_2) - u_2^3(M_2 - 1)}{(u_2 - 1)(\mathrm{u}_2^2 - 1)} \tag{68}$$

$$p_5 = 1 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4 \tag{69}$$

Είναι βολικότερο να χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό:

$$p_1 + p_2 = f(u_1, M_1, V_1) = f_1 \tag{70}$$

$$p_3 + p_4 = g(u_1, M_1, V_1) = \mathrm{g}_1 \tag{71}$$

$$p_1 + p_4 = f(u_2, M_2, V_2) = f_2 \tag{72}$$

$$p_2 + p_3 = g(u_2, M_2, V_2) = \mathrm{g}_2 \tag{73}$$

Σύμφωνα με την (69) έχουμε δύο εκφράσεις για το p_5:

$$p_5 = 1 - f_1 - g_1 \tag{74}$$

$$p_5 = 1 - f_2 - g_2 \tag{75}$$

Επομένως έχουμε ότι:

$$f_1 + g_1 = f_2 + g_2 \tag{76}$$

Η (76) είναι μία σχέση την οποία θα πρέπει να ικανοποιούν τα u_1 και u_2.

Η τελική εξίσωση προκύπτει αν συσχετίσουμε την αναμενόμενη τιμή του γινομένου των δύο περιουσιακών στοιχείων στη συνεχή κατανομή και στη διακριτή κατανομή. Με τη βοήθεια της (58) έχουμε ότι:

$$(p_1u_1u_2 + p_2u_1d_2 + p_3d_1d_2 + p_4d_1u_2 + p_5)S_1S_2 = RS_1S_2 \tag{77}$$

Στη συνέχεια διαιρούμε με S_1S_2. Έχουμε ότι:

$$(p_1u_1u_2 + p_2u_1d_2 + p_3d_1d_2 + p_4d_1u_2 + p_5) = R$$

Αντικαθιστώντας την (69) έχουμε ότι:

$$p_1(u_1u_2 - 1) + p_2(u_1d_2 - 1) + p_3(d_1d_2 - 1) + p_4(d_1u_2 - 1) = R - 1$$

Εξαλείφοντας το d_1 και το d_2 προκύπτει ότι:

$$p_1(u_1u_2 - 1) + p_2(\frac{u_1}{u_2} - 1) + p_3(\frac{1}{u_1u_2} - 1) + p_4(\frac{u_2}{u_1} - 1) = R - 1 \tag{78}$$

Με τη βοήθεια των (70), (71), (72), (73) αντικαθιστώντας στην (78) παίρνουμε την παρακάτω έκφραση για το p_1:

$$p_1 = \frac{u_1 u_2 (R-1) - f_1(u_1^2 - 1) - f_2(u_2^2 - 1) + (f_2 + g_2)(u_1 u_2 - 1)}{(u_1^2 - 1)(u_2^2 - 1)} \tag{79}$$

Χρησιμοποιώντας τις (70), (71), (72), (73) μπορώ να εκφράσω και τις υπόλοιπες πιθανότητες:

$$p_2 = \frac{f_1(\mathrm{u}_1^2 - 1)\,\mathrm{u}_2^2 + f_2(u_2^2 - 1) - (f_2 + g_2)(u_1 u_2 - 1) - u_1\,\mathrm{u}_2(\mathrm{R} - 1)}{(u_1^2 - 1)(u_2^2 - 1)} \tag{80}$$

$$p_3 = \frac{u_1 u_2 (R-1) - f_1(u_1^2 - 1)\,\mathrm{u}_2^2 + g_2(u_2^2 - 1)\,\mathrm{u}_1^2 + (f_2 + g_2)(u_1 u_2 - u_2^2)}{(u_1^2 - 1)(u_2^2 - 1)} \tag{81}$$

$$p_4 = \frac{f_1(\mathrm{u}_1^2 - 1) + f_2(u_2^2 - 1)\,\mathrm{u}_1^2 - (f_2 + g_2)(u_1 u_2 - 1) - u_1\,\mathrm{u}_2(\mathrm{R} - 1)}{(u_1^2 - 1)(u_2^2 - 1)} \tag{82}$$

3.2.3 Παράδειγμα και παρατηρήσεις

Ας υποθέσουμε ότι $\sigma_1 = 0.2$, $\sigma_2 = 0.25$, r = 0.1, ρ=0.5, T = 1 και n = 20 και ότι $u_i = e^{\lambda \sigma_i \sqrt{h}}$ με $i = 1, 2$. Αντικαθιστώντας $u_1 = e^{\lambda \sigma_1 \sqrt{h}}$ και $u_2 = e^{\lambda \sigma_2 \sqrt{h}}$ με λ = 1.1 έχω $u_1 = 1.05042358$ και $u_2 = 1.06342185$. Όμως θα πρέπει να ικανοποιείται και η (76). Με χρήση Solver στο Excel (για την επίλυση μη γραμμικών συστημάτων εξισώσεων με την μέθοδο του Νεύτωνα) προκύπτει ότι δεδομένου του u_1, το $u_2 = 1{,}0632918$ και έπειτα υπολογίζουμε τις αντίστοιχες πιθανότητες. Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία για αρκετές τιμές του λ, προκύπτει ο Πίνακας 2.

Παρατηρούμε ότι αν αθροίσουμε τις στήλες p_1, p_2 και τις στήλες p_3, p_4 προκύπτουν οι στήλες p_1 και p_3 από τον Πίνακα 1, ενώ η στήλη p_5 είναι ίδια με την p_2 του Πίνακα 1. Συνεπώς είναι εμφανής η σχέση που υπάρχει ανάμεσα στη διμεταβλητή κατανομή των S_1, S_2 και στην αδέσμευτη κατανομή των S_1 και S_2 αντίστοιχα.

3.3 Εναλλακτική προσέγγιση πλέγματος Kamrad & Ritchken για την αποτίμηση δικαιωμάτων με δύο μεταβλητές κατάστασης

Στην παρούσα ενότητα, κατ' αντιστοιχία με την ενότητα 2.3, αναπτύσσεται η τεχνική αποτίμησης δικαιωμάτων των Kamrad και Ritchken (1991) για δύο μεταβλητές κατάστασης.

Υποθέτουμε ότι $\{S_1(t), S_2(t)\}$ ορίζεται το ζευγάρι τιμών των δύο περιουσιακών στοιχείων την χρονική στιγμή t και ότι η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των δύο περιουσιακών στοιχείων είναι η διμεταβλητή λογαριθμοκανονική κατανομή.

Έστω $\mu_i = r - \frac{\sigma_i^2}{2}$ και σ_i^2 να είναι η μέση τιμή και η διακύμανση κατ' αντιστοιχία για το περιουσιακό στοιχείο i με $i = 1, 2$ και ρ ο συντελεστής συσχέτισης. Τότε για κάθε περιουσιακό στοιχείο, για το χρονικό διάστημα $[t, t+\Delta t]$ θα ισχύει:

$$\ln S_i(t+\Delta t) = \ln S_i(t) + \zeta_i(t) \tag{83}$$

όπου $\zeta_i(t)$ είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu_i \Delta t$ και διακύμανση $\sigma_i^2 \Delta t$. Η συσχέτιση μεταξύ $\zeta_1(t)$ και $\zeta_2(t)$ είναι ρ.

Η από κοινού κανονική κατανομή της μεταβλητής $\{\zeta_1(t), \zeta_2(t)\}$ προσεγγίζεται από ζευγάρια διακριτών μεταβλητών που έχουν την εξής κατανομή:

Κατάσταση	$\zeta_1^a(t)$	$\zeta_2^a(t)$	**Πιθανότητα Κατάστασης**
E_1	u_1	u_2	p_1
E_2	u_1	$-u_2$	p_2
E_3	$-u_1$	$-u_2$	p_3

E_4	$-u_1$	u_2	p_4
E_5	0	0	p_5

όπου $u_i = \lambda_i \sigma_i \sqrt{\Delta t}$ με $i = 1, 2$.

Για να επιβεβαιωθεί η σύγκλιση της προσεγγιστικής κατανομής στην πραγματική κατανομή καθώς το $\Delta t \to 0$ οι πρώτες δύο ροπές της προσεγγιστικής κατανομής εξισώνονται με τις αντίστοιχες ροπές της πραγματικής συνεχούς κατανομής. Συγκεκριμένα έχουμε:

$$E\{\zeta_1^a(t)\} = u_1(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) = \mu_1 \Delta t \tag{84}$$

$$E\{\zeta_2^a(t)\} = u_2(p_1 - p_2 - p_3 + p_4) = \mu_2 \Delta t \tag{85}$$

$$\mathrm{Var}\{\zeta_1^a(t)\} = u_1^2(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) = \sigma_1^2 \Delta t + \mathrm{O}(\Delta t) \tag{86}$$

$$\mathrm{Var}\{\zeta_2^a(t)\} = u_2^2(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) = \sigma_2^2 \Delta t + \mathrm{O}(\Delta t) \tag{87}$$

Επιπροσθέτως θα πρέπει και οι αντίστοιχες συνδιακυμάνσεις να είναι ίσες. Άρα:

$$E\{\zeta_1^a(t)\zeta_2^a(t)\} = u_1 u_2(p_1 - p_2 + p_3 - p_4) = \sigma_1 \sigma_2 \rho \Delta t + \mathrm{O}(\Delta t) \tag{88}$$

Αντικαθιστώντας το $u_i = \lambda_i \sigma_i \sqrt{\Delta t}$ με $i = 1, 2$ και για μικρό Δt οι (84), (85), (86), (87), (88) απλοποιούνται ως εξής:

$$p_1 + p_2 - p_3 - p_4 = \frac{\mu_1 \sqrt{\Delta t}}{\lambda_1 \sigma_1} \tag{89}$$

$$p_1 - p_2 - p_3 + p_4 = \frac{\mu_2 \sqrt{\Delta t}}{\lambda_2 \sigma_2} \tag{90}$$

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = \frac{1}{\lambda_1^2} \tag{91}$$

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = \frac{1}{\lambda_2^2} \tag{92}$$

$$p_1 - p_2 + p_3 - p_4 = \frac{\rho}{\lambda_1 \lambda_2} \tag{93}$$

Από τις (91) και (92) προκύπτει ότι $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \forall \lambda \geq 1$. Συνεπώς σε συνδυασμό με το ότι πρέπει $\sum_{j=1}^{5} p_j = 1$ οι παραπάνω εξισώσεις λύνονται ως εξής:

$$p_1 = \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{\lambda^2} + \frac{\sqrt{\Delta t}}{\lambda}\left(\frac{\mu_1}{\sigma_1} + \frac{\mu_2}{\sigma_2}\right) + \frac{\rho}{\lambda^2}\right\} \tag{94}$$

$$p_2 = \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{\lambda^2} + \frac{\sqrt{\Delta t}}{\lambda}\left(\frac{\mu_1}{\sigma_1} - \frac{\mu_2}{\sigma_2}\right) - \frac{\rho}{\lambda^2}\right\} \tag{95}$$

$$p_3 = \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{\lambda^2} + \frac{\sqrt{\Delta t}}{\lambda}\left(-\frac{\mu_1}{\sigma_1} - \frac{\mu_2}{\sigma_2}\right) + \frac{\rho}{\lambda^2}\right\} \tag{96}$$

$$p_4 = \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{\lambda^2} + \frac{\sqrt{\Delta t}}{\lambda}\left(-\frac{\mu_1}{\sigma_1} + \frac{\mu_2}{\sigma_2}\right) - \frac{\rho}{\lambda^2}\right\} \tag{97}$$

$$p_5 = 1 - \frac{1}{\lambda^2} \tag{98}$$

Σε αντίθεση με το μοντέλο πέντε αλμάτων του Boyle (1988), εδώ δεν υπάρχουν τιμές του λ οι οποίες να δίνουν αρνητικές πιθανότητες. Δηλαδή οι παραπάνω σχέσεις ικανοποιούνται $\forall \lambda \geq 1$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

4.1 Εμπειρική μελέτη για τα μοντέλα μίας μεταβλητής κατάστασης (One State)

Στην συγκεκριμένη ενότητα θα προσεγγίσουμε εμπειρικά τα μοντέλα πλέγματος των Boyle (1988) και Kamrad & Ritchken (1991) που αναπτύχθηκαν στο Κεφάλαιο 2 και θα τα συγκρίνουμε ως προς την αποτελεσματικότητά τους. Πιο συγκεκριμένα:

1. Θα εκτιμήσουμε τις παραμέτρους που εμφανίζονται στα παραπάνω μοντέλα.
2. Θα χρησιμοποιήσουμε τις τιμές των παραμέτρων που εκτιμήθηκαν για να ελέγξουμε την προβλεπτική ικανότητα των ανωτέρω μοντέλων.

4.1.1 Δεδομένα εμπειρικής μελέτης

Για την πραγματοποίηση της εμπειρικής μελέτης αντλήσαμε δεδομένα από την Bloomberg για δικαιώματα αγοράς Αμερικανικού τύπου, με υποκείμενο τίτλο την μετοχή της Apple για το χρονικό διάστημα 5/8/2019-8/11/2019. Το συγκεκριμένο χρονικό διάστημα επιλέχθηκε καθώς τότε υπήρχαν διαθέσιμες αρκετές ιστορικές τιμές των δικαιωμάτων αγοράς.

Επομένως ανασταλτικός παράγοντας στην διεξαγωγή της εμπειρικής μελέτης υπήρξε η περιορισμένη διαθεσιμότητα ιστορικών τιμών των δικαιωμάτων αγοράς. Η μετοχή της Apple επιλέχθηκε αφού ικανοποιούσε τα εξής κριτήρια:

- Να είναι εισηγμένη σε Αμερικανικό χρηματιστήριο.
- Να έχει μεγάλη χρηματιστηριακή αξία.
- Να έχει έναν ικανό όγκο αξιογράφων που συναλλάσσονται καθημερινά.

Η μετοχή της Apple αν και δίνει μέρισμα, θεωρήσαμε ότι αυτό δεν επηρεάζει σημαντικά την τιμή της. Επισημαίνουμε ότι τα μοντέλα πλέγματος που παρουσιάσαμε δεν περιλαμβάνουν μέρισμα, αν και μπορούν να επεκταθούν κατάλληλα.

Να σημειωθεί ότι αποδεικνύεται πως τα δικαιώματα αγοράς Αμερικανικού τύπου με υποκείμενο τίτλο μία μετοχή η οποία δεν δίνει μέρισμα, ως προς τη δυνατότητα πρόωρης εξάσκησης λειτουργούν όπως τα δικαιώματα αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου.

Δηλαδή, τέτοια δικαιώματα δεν είναι φρόνιμο να εξασκηθούν πριν την λήξη. Ωστόσο στην περίπτωση που η μετοχή αναμένεται να δώσει μέρισμα, ίσως είναι βέλτιστο το δικαίωμα να εξασκηθεί πριν τη λήξη. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι όταν δοθεί το μέρισμα, η τιμή της μετοχής θα μειωθεί και κατά συνέπεια το δικαίωμα αγοράς θα είναι λιγότερο ελκυστικό αφού θα έχει μειωθεί η αξία του.

Απόδειξη

Έστω ένα δικαίωμα αγοράς Αμερικανικού τύπου το οποίο την χρονική στιγμή $t^* < T$, όπου T ο χρόνος μέχρι την λήξη του δικαιώματος, είναι deep ITM και η τιμή της μετοχής να είναι $S_{t^*} > S_0$, όπου S_0 η τιμή της μετοχής τη χρονική στιγμή της αγοράς του δικαιώματος. Η αξία του δικαιώματος αγοράς την χρονική στιγμή $t^* < T$, θα είναι C_{t^*}.

Γνωρίζουμε ότι $C_{t^*} \geq c_{t^*}$, όπου c_{t^*} η τιμή του αντίστοιχου Ευρωπαϊκού δικαιώματος την ίδια χρονική στιγμή. Από γνωστές ιδιότητες των δικαιωμάτων ισχύει ότι: $C_{t^*} \geq c_{t^*} \geq S_{t^*} - Ke^{-r(T-t^*)} > S_{t^*} - K$.

Συνεπώς την χρονική στιγμή $t^* < T$, ο αγοραστής του δικαιώματος κατέχει ένα προϊόν με μεγαλύτερη αξία από εκείνη που θα του απόφερε η πρόωρη εξάσκηση του. □

Για την συγκεκριμένη μελέτη μιας και θεωρούμε ότι το μέρισμα επηρεάζει αμελητέα την τιμή της μετοχής, θα αντιμετωπίσουμε το δικαίωμα αγοράς Αμερικανικού τύπου ως δικαίωμα αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου. Δεν επιλέχθηκε εξαρχής δικαίωμα Ευρωπαϊκού τύπου καθώς η αγορά τα θεωρεί τετριμμένα και είτε δεν υπάρχουν, είτε δεν εμπορεύονται και άρα δεν έχουμε ικανοποιητικό αριθμό ιστορικών στοιχείων.

Για την πραγματοποίηση της εμπειρικής μελέτης χρειαστήκαμε ιστορικές τιμές των παρακάτω δεδομένων:

- Τις τιμές των δικαιωμάτων αγοράς για διαφορετικές ληκτότητες και για διαφορετικές τιμές εξάσκησης.
- Τις αντίστοιχες τιμές εξάσκησης για τα παραπάνω δικαιώματα.
- Τις αντίστοιχες ληκτότητες για τα παραπάνω δικαιώματα.
- Την ημερήσια τιμή αγοράς της μετοχής της Apple.
- Την μεταβλητότητα (Implied Volatility) κάθε δικαιώματος αγοράς.
- Την απόδοση του 10-ετούς Αμερικανικού κρατικού ομολόγου (10 years Treasury YTM).

Τα δεδομένα που χρησιμοποιήσαμε αφορούν μόνο δικαιώματα αγοράς για εξοικονόμηση χρόνου της εμπειρικής μελέτης. Συγκεκριμένα χρησιμοποιήθηκαν 15 δικαιώματα αγοράς για κάθε μέρα. Χρειάστηκαν δεδομένα για 5 συγκεκριμένες ληκτότητες και 3 τιμές εξάσκησης. Τα ticker των δικαιωμάτων από την Bloomberg είναι τα ακόλουθα:

AAPL US 11/15/19 C230 Equity	**AAPL US 11/15/19 C240 Equity**	**AAPL US 11/15/19 C250 Equity**
AAPL US 12/20/19 C230 Equity	**AAPL US 12/20/19 C240 Equity**	**AAPL US 12/20/19 C250 Equity**
AAPL US 03/20/20 C230 Equity	**AAPL US 03/20/20 C240 Equity**	**AAPL US 03/20/20 C250 Equity**
AAPL US 01/15/21 C230 Equity	**AAPL US 01/15/21 C240 Equity**	**AAPL US 01/15/21 C250 Equity**
AAPL US 06/18/21 C230 Equity	**AAPL US 06/18/21 C240 Equity**	**AAPL US 06/18/21 C250 Equity**

4.1.2 Εκτίμηση παραμέτρων

Στα μοντέλα που μελετάμε η μεταβλητότητα σ και η παράμετρος λ η οποία χρησιμοποιείται στο άλμα u της τιμής της μετοχής ή της απόδοσης της μετοχής αποτελούν άγνωστες παραμέτρους. Επομένως, οι δυο αυτοί παράμετροι θα πρέπει να εκτιμηθούν. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε τον επαναληπτικό αλγόριθμο Levenberg - Marquardt (1944 & 1963). Πρόκειται για μία διαδικασία η οποία υποθέτει ότι έχουμε ένα μοντέλο και ένα σύνολο παραμέτρων προς εκτίμηση.

Ο αλγόριθμος εντοπίζει εκείνες τις τιμές των παραμέτρων, για τις οποίες τα τετράγωνα των διαφορών από τις τιμές των δικαιωμάτων που προήλθαν από το μοντέλο (θεωρητικές τιμές) με τις τιμές των δικαιωμάτων της αγοράς (πραγματικές τιμές), να έχουν όσο το δυνατό μικρότερη τιμή. Η διαδικασία της ελαχιστοποίησης των τετραγωνικών σφαλμάτων αποτυπώνεται από την εξής σχέση:

$$\hat{\theta}=\operatorname{argmin}\sum_{i=0}^{N}\left(f_i^{market}-f_i^{model}\right)^2 \tag{99}$$

όπου $\hat{\theta}$ είναι οι υπό εκτίμηση παράμετροι σ & λ και N είναι ο αριθμός των ημερών που πραγματοποιήθηκαν οι παρατηρήσεις μέσα στο δείγμα (in sample). Στην συγκεκριμένη περίπτωση ο αριθμός των ημερών που χρησιμοποιούνται από το δείγμα για την εκτίμηση της άγνωστης παραμέτρου είναι N=60.

Ο αλγόριθμος Levenberg - Marquardt (1944 & 1963) είναι μία δημοφιλής μέθοδος που χρησιμοποιείται για την επίλυση μη-γραμμικών least square curve fitting problems (διαδικασία με την οποία βρίσκουμε την καλύτερη δυνατή καμπύλη από ένα σύνολο σημείων, ελαχιστοποιώντας το άθροισμα των τετραγωνικών αποστάσεων των σημείων από την καμπύλη, δηλαδή τα κατάλοιπα).

Έστω ότι έχουμε N παρατηρήσεις y_i με $i=1,2,...,N$ και μία συνάρτηση $g:R^n \to R$ με n παραμέτρους $x_1,x_2,...x_n$ με $N \geq n$. Στην εν λόγω περίπτωση, οι y_i είναι οι τιμές των δικαιωμάτων όπως τις συλλέξαμε από την αγορά. Υπολογίζουμε τις τιμές του μοντέλου $g(x)=\hat{y}_i$ και έπειτα υπολογίζουμε τα κατάλοιπα $n(x)=\hat{y}_i-y_i$. Επομένως έχουμε υπολογίσει ένα διάνυσμα N διάστασης το οποίο περιέχει τα κατάλοιπα $R=(r_1,r_2...,r_n)^T$.

Άρα θα πρέπει να λυθεί το εξής πρόβλημα ελαχιστοποίησης:

$$\min_x f(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} r_i(x)^2 = \frac{1}{2}R(x)^T R(x) \tag{100}$$

Οι Levenberg - Marquardt (1944 & 1963) για την επίλυση του παραπάνω προβλήματος πρότειναν να χρησιμοποιηθεί ένας επαναληπτικός αλγόριθμος, ο οποίος να συνδυάζει τις μεθόδους των Newton-Gauss και την Steepest Descent μέθοδο (επέκταση της μεθόδου Laplace για την προσέγγιση ενός ολοκληρώματος).

Ο Levenberg στο άρθρο του (1944) προτείνει τον υπολογισμό μίας κατεύθυνσης αναζήτησης d_k, ως λύση της προσαρμοσμένης εξίσωσης των Newton-Gauss:

$$(R'(x^k)^T R'(x^k) + \lambda_k I)d_k = -(R'(x^k)^T R'(x^k)) \tag{101}$$

όπου I είναι ο μοναδιαίος πίνακας και λ_k είναι μία παράμετρος απόσβεσης με $\lambda_k > 0$. Ο πίνακας στην αριστερή πλευρά της εξίσωσης είναι θετικά ορισμένος, ώστε η λύση d_k να είναι σίγουρο ότι θα έχει μια δίκαιη κατεύθυνση για τη συνάρτηση f για όλες τις θετικές παραμέτρους απόσβεσης.

Για μικρά λ_k ο επαναληπτικός αλγόριθμος Levenberg - Marquardt (1944 & 1963) θυμίζει την επαναληπτική μέθοδο Newton-Gauss και παρουσιάζει ένα ρυθμό τετραγωνικής σύγκλισης των x^k τιμών που επικρατούν και βρίσκονται κοντά στο x^*

Για επαναλήψεις μακριά από το βέλτιστο, η παράμετρος απόσβεσης είναι πολύ μεγάλη και η κατεύθυνση αναζήτησης d_k είναι περίπου:

$$d_k = \frac{1}{\lambda_k} R'(x^k)^T R'(x^k) \tag{102}$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί ένα βήμα της μεθόδου Steepest Descent. Η επιλογή της παραμέτρου απόσβεσης επηρεάζει άμεσα την σταθερότητα της μεθόδου. Η συνηθέστερη επιλογή είναι η εξής:

$$\lambda_0 = \tau \max_i \{D_0(i,i)\}_{i=1,\dots,n} \tag{103}$$

όπου τ είναι η παράμετρος που σχετίζεται με την αρχική πρόβλεψη που κάνουμε για τις υπό εκτίμηση παραμέτρους.

Στην μελέτη μας θα βρούμε τις τιμές των 15 δικαιωμάτων αγοράς για τις 60 ημέρες (5/8/2019-25/10/2019) και θα εφαρμόσουμε τον επαναληπτικό αλγόριθμο Levenberg - Marquardt (1944 & 1963), χρησιμοποιώντας την γλώσσα προγραμματισμού MATLAB και πιο συγκεκριμένα την εντολή Lsqnonlin. Δίνουμε μια αρχική τιμή στις παραμέτρους που θέλουμε να εκτιμήσουμε. Εφαρμόζεται συνήθως εκείνη η τιμή που θεωρούμε πιο πιθανή ώστε αν τρέξουμε τον αλγόριθμο για το μοντέλο, να προκύψει μια θεωρητική τιμή με το μικρότερο δυνατό σφάλμα ως προς την πραγματική τιμή του δικαιώματος που έχουμε συγκεντρώσει από την αγορά.

Αρχικά λοιπόν εκτιμήσαμε τις άγνωστες παραμέτρους για όλα τα δικαιώματα αγοράς (In Sample). Στη συνέχεια υπολογίσαμε τις θεωρητικές τιμές των δικαιωμάτων αγοράς που έχουμε σύμφωνα με τα μοντέλα και τις εκτιμημένες παραμέτρους, όπως προέκυψαν για κάθε ημέρα. Οι θεωρητικές τιμές των δικαιωμάτων αγοράς υπολογίστηκαν για την απεικόνιση του απόλυτου σφάλματος, το οποίο είναι χρήσιμο στην εξαγωγή συμπερασμάτων σε συνδυασμό με τα τετραγωνικά κατάλοιπα και εκφράζεται ως εξής:

$$absolute\_error = | market\_price - model\_price | \tag{104}$$

<u>Αποτελέσματα εκτίμησης πάνω σε όλα τα δικαιώματα (In Sample)</u>

<u>*Boyle Model (1988)*</u>

Στο μοντέλο του Boyle υπάρχουν δύο υπό εκτίμηση παράμετροι, η μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής σ και η παράμετρος λ η οποία χρησιμοποιείται στο άλμα u της τιμής της μετοχής. Τα ακόλουθα στατιστικά στοιχεία αναφέρονται στον <u>Πίνακα 3</u>. Η μέση τιμή για τις εκτιμήσεις κάθε ημέρας που πραγματοποιήσαμε για το σ και το λ είναι 0.242869 και 1.345273 αντίστοιχα, με τυπική απόκλιση 0.011603 και 0.282254 αντίστοιχα. Το ελάχιστο και το μέγιστο των δύο παραμέτρων είναι 0.197309 και 1.07008 για το ελάχιστο, ενώ 0.270241 και 2.035294 για το μέγιστο, για την εκάστοτε παράμετρο.

Kamrad & Ritchken Model (1991)

Στο μοντέλο των Kamrad & Ritchken υπάρχουν δύο υπό εκτίμηση παράμετροι, η μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής σ και η παράμετρος λ η οποία χρησιμοποιείται στο άλμα u της τιμής της απόδοσης της μετοχής. Τα ακόλουθα στατιστικά στοιχεία αναφέρονται στον Πίνακα 3. Η μέση τιμή για τις εκτιμήσεις κάθε ημέρας που πραγματοποιήσαμε για το σ και το λ είναι 0.242964 και 1.429865 αντίστοιχα, με τυπική απόκλιση 0.011601 και 0.295620 αντίστοιχα. Το ελάχιστο και το μέγιστο των δύο παραμέτρων είναι 0.197390 και 1.013404 για το ελάχιστο, ενώ 0.270078 και 1.853403 για το μέγιστο, για την εκάστοτε παράμετρο.

Συμπέρασμα

Από το διάγραμμα τετραγωνικών καταλοίπων (Διάγραμμα 1) προκύπτει ποικιλία καταλοίπων, με τιμές που ξεκινούν από λίγο μεγαλύτερες του 1 έως λίγο μεγαλύτερες του 5. Ωστόσο αυτό είναι ένα αποτέλεσμα που εξηγείται από το διάγραμμα του μέσου όρου των απόλυτων σφαλμάτων για κάθε ημέρα (Διάγραμμα 2), τα οποία φαίνεται ότι είναι πολύ μικρά, πόσο μάλλον αν σκεφτούμε ότι τα τετραγωνικά κατάλοιπα αποτελούν άθροισμα των απολύτων σφαλμάτων, υψωμένων στο τετράγωνο που μεγαλώνουν έτσι ακόμη περισσότερο τις μέγιστες τιμές.

Επίσης, έχοντας λάβει υπόψη μας και τα 15 δικαιώματα για την εκτίμηση, των οποίων οι τιμές αγοράς επηρεάζονται και από άλλες παραμέτρους τις οποίες το μοντέλο μας δεν λαμβάνει υπόψη, όπως η ζήτηση ενός δικαιώματος μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή, είναι λογικό να υπάρχουν τέτοιες αποκλίσεις. Συνεπώς, από το διάγραμμα τετραγωνικών καταλοίπων (Διάγραμμα 1) καταλήγουμε ότι τα δύο μοντέλα προσαρμόζονται με τον ίδιο σχεδόν τρόπο στις τιμές τις αγοράς.

4.1.3 Προβλεπτική ικανότητα

Αφού ολοκληρώσαμε την εκτίμηση των παραμέτρων των μοντέλων μας, ακολουθεί ο έλεγχος της προβλεπτικής τους ικανότητας. Δηλαδή, θα χρησιμοποιήσουμε τον μέσο όρο των τιμών των παραμέτρων που εκτιμήσαμε από τις 21/10/2019 έως και τις 25/10/2019 (εκτιμήσεις των 5 τελευταίων ημερών

In Sample) για να υπολογίσουμε την θεωρητική τιμή των δικαιωμάτων αγοράς σύμφωνα με τα μοντέλα μας για το χρονικό διάστημα από τις 28/10/2019 έως και τις 8/11/2019 (Out of Sample).

Οι θεωρητικές τιμές των δικαιωμάτων αγοράς χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό του απόλυτου σφάλματος πρόβλεψης, ώστε να προκύψουν τα τετραγωνικά κατάλοιπα. Το απόλυτο σφάλμα εκφράζεται ως εξής:

$$absolute\_forecast\_error = | market\_price - \mathrm{mod}el\_forecast\_price | \tag{105}$$

Όπως ήταν αναμενόμενο τα τετραγωνικά κατάλοιπα μεταξύ των τιμών που υπολογίσαμε με τα δύο μοντέλα πλέγματος και με αυτών της αγοράς ήταν μικρά τις πρώτες μέρες, ακολουθώντας την τιμή των καταλοίπων της τελευταίας μέρας εκτίμησης (In Sample) και σταδιακά αυξάνονταν.

Να σημειωθεί ότι ενώ σύμφωνα με τα αποτελέσματα τις ενότητας 4.1.2 για την εκτίμηση πάνω σε όλα τα δικαιώματα (In Sample) προέκυψε ότι και τα δύο μοντέλα συμπεριφέρονται όμοια στις αγοραίες τιμές, εδώ παρατηρούμε ότι το μοντέλο των Kamrad & Ritchken (1991) έχει καλύτερη προβλεπτική ικανότητα από εκείνο του Boyle (1988) σύμφωνα με τον Πίνακα 4 και το Διάγραμμα 3 για τα τετραγωνικά κατάλοιπα από την προβλεπτική ικανότητα. Αυτό συμβαίνει κυρίως γιατί το μοντέλο των Kamrad & Ritchken (1991) είναι αποτελεσματικότερο για δικαιώματα με μακροπρόθεσμη λήξη, όπως φαίνεται στον Πίνακα 4.2 και στο Διάγραμμα 3.2 για τα τετραγωνικά κατάλοιπα από την προβλεπτική ικανότητα των long term option. Άλλωστε στην περίπτωση των δικαιωμάτων με βραχυπρόθεσμη λήξη και τα δύο μοντέλα μας παρουσιάζουν εξίσου την ίδια προβλεπτική ικανότητα (βλ. Πίνακα 4.1 και Διάγραμμα 3.1 των τετραγωνικών καταλοίπων για την προβλεπτική ικανότητα των short term option) .

Εδώ θα πρέπει να αναφέρουμε ότι ως βραχυπρόθεσμα δικαιώματα αγοράς (short term option) χρησιμοποιήθηκαν εκείνα με λήξη 11/15/19 και 12/20/19, ενώ ως μακροπρόθεσμα δικαιώματα (long term option) εκείνα με λήξη 03/20/20, 01/15/21 και 06/18/21.

Τα παραπάνω είναι αποτελέσματα που δεν θα πρέπει να μας εκπλήσσουν καθώς βραχυπρόθεσμα η αβεβαιότητα είναι μικρότερη σε αντίθεση με μία μακροπρόθεσμη κατάσταση. Παράγοντας ο οποίος ενσωματώνει την αβεβαιότητα στο πέρασμα του χρόνου κατά κύριο λόγο είναι η μεταβλητότητα σ . Στο μοντέλο του Boyle (1988) η μεταβλητότητα χρησιμοποιείται κατ' επανάληψη στον υπολογισμό των πιθανοτήτων των αλμάτων και άρα επηρεάζει αρκετά την θεωρητική τιμή του δικαιώματος.

4.2 Αριθμητική ανάλυση για τα μοντέλα δύο μεταβλητών κατάστασης (Two States)

Ο Stulz (1982) έχει εξάγει έναν αριθμό αποτελεσμάτων για δικαιώματα Ευρωπαϊκού τύπου, στα οποία υπάρχουν δύο υποκείμενα τίτλοι (περιουσιακά στοιχεία). Συγκεκριμένα υπάρχουν τύποι κλειστής μορφής για δικαιώματα αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου στο μέγιστο των δύο περιουσιακών στοιχείων και για δικαιώματα πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου στο ελάχιστο των δύο περιουσιακών στοιχείων. Επομένως οι τύποι αυτοί θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για να ελέγξουμε την ακρίβεια των αποτελεσμάτων αποτίμησης δικαιωμάτων για δύο υποκείμενους τίτλους με το μοντέλο πλέγματος.

Ο Johnson (1987) προέβη σε μία γενίκευση των παραπάνω αποτελεσμάτων για δικαιώματα αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου στο μέγιστο ή το ελάχιστο παραπάνω από δύο περιουσιακών στοιχείων. Τα αποτελέσματά του θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν σαν δείκτες για να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα τυχόν επέκτασης των μοντέλων πλέγματος των Boyle (1988) και των Kamrad & Ritchken (1991) για δύο περιουσιακά στοιχεία σε τρία ή περισσότερα περιουσιακά στοιχεία.

Στην συγκεκριμένη ενότητα θα προσεγγίσουμε αριθμητικά τα μοντέλα πλέγματος των Boyle (1988) και Kamrad & Ritchken (1991) που αναπτύχθηκαν στο Κεφάλαιο 3 και θα τα συγκρίνουμε ως προς την αποτελεσματικότητά τους. Πιο συγκεκριμένα:

1. Θα εκτιμήσουμε τις παραμέτρους που εμφανίζονται στα παραπάνω μοντέλα.
2. Θα χρησιμοποιήσουμε τις τιμές των παραμέτρων που εκτιμήθηκαν για να ελέγξουμε την προβλεπτική ικανότητα των μοντέλων.

4.2.1 Δεδομένα αριθμητικής μελέτης

Τα προϊόντα με τα οποία θα ασχοληθούμε στην ενότητα 4.2, αποτελούν παράγωγα τα οποία δεν υπάρχουν εισηγμένα στην οργανωμένη χρηματιστηριακή αγορά. Πρόκειται για δικαιώματα αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου, τα οποία αποτιμώνται στο μέγιστο των δύο μετοχών και για δικαιώματα πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου, τα οποία αποτιμώνται στο ελάχιστο των δύο μετοχών. Συνεπώς θα πρέπει να δημιουργήσουμε “δεδομένα αγοράς” ώστε να χρησιμοποιηθούν στην εκτίμηση των παραμέτρων των προαναφερθέντων μοντέλων ως τιμές αγοράς (mkt price) των δικαιωμάτων.

Για να δημιουργήσουμε λοιπόν “δεδομένα αγοράς”, στηριζόμενοι στο άρθρο του Boyle (1988) και του Stulz (1982), σκεφτήκαμε να παράγουμε τιμές δύο μετοχών για 30 ημέρες με τη χρήση μονοπατιών των τιμών μετοχής που προσομοιάζουν την Γεωμετρική Κίνηση Brown (μεθοδολογία Monte Carlo), λαμβάνοντας ως αρχική τιμή των μετοχών $S01 = 40$ και $S02 = 40$ (Boyle 1988-numerical examples), ως αναμενόμενο ρυθμό απόδοσης των μετοχών $mu1 = 0.06$ και $mu2 = 0.08$ καθώς και τον συντελεστή συσχέτισης $\rho = 0.5$.

Εδώ θα πρέπει να εξηγήσουμε ότι τα μονοπάτια των τιμών που παράγονται, πρέπει να λαμβάνουν υπόψη τον συντελεστή συσχέτισης. Δηλαδή αν στο μονοπάτι της τιμής της πρώτης μετοχής παράγονται ε_i τυχαίοι αριθμοί από την τυποποιημένη κανονική κατανομή, τότε στο μονοπάτι της τιμής της δεύτερης μετοχής παράγονται ζ_i τυχαίοι αριθμοί από την τυποποιημένη κανονική κατανομή, όπου $\zeta_i = \rho\varepsilon_i + \sqrt{1-\rho^2}\eta_i$ και η_i τυχαίοι αριθμοί από την τυποποιημένη κανονική κατανομή.

Θεωρήσαμε ότι η μεταβλητότητες των τιμών των μετοχών έχουν ως εξής: $\sigma1 = 0.2$ και $\sigma2 = 0.3$ για το χρονικό διάστημα των 30 ημερών και ο συντελεστής συσχέτισης επίσης λαμβάνει την τιμή $\rho = 0.5$ για το ίδιο χρονικό διάστημα. Ως risk free επιτόκιο θεωρούμε το $r = 0.05$ επίσης σταθερό σε όλο το χρονικό διάστημα. Ως τιμές εξάσκησης θεωρήσαμε τις εξής: $K = 35, 40, 45$ και ως λημκτότητες των δικαιωμάτων τους 2 μήνες, 5 μήνες, 8 μήνες, 11 μήνες και 14 μήνες ώστε να σχηματίσουμε 15 δικαιώματα και κατ' επέκταση 15 ημερήσιες τιμές για την εκτίμηση των παραμέτρων.

Να σημειωθεί τα προαναφερθέντα αριθμητικά δεδομένα χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό της τιμής αγοράς (mkt price) των δικαιωμάτων τόσο για τα δικαιώματα αγοράς, όσο και για τα δικαιώματα πώλησης. Η τιμής αγοράς (mkt price) των δικαιωμάτων υπολογίστηκε με τη χρήση των τύπων κλειστής μορφής του Stulz (1982) για τα δικαιώματα αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου, τα οποία αποτιμώνται στο μέγιστο των δύο μετοχών και για τα δικαιώματα πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου, τα οποία αποτιμώνται στο ελάχιστο των δύο μετοχών. Από τα αποτελέσματα που παράχθηκαν, οι 20 μέρες χρησιμοποιήθηκαν στην εκτίμηση των άγνωστων παραμέτρων και οι 10 στην εξέταση της προβλεπτικής ικανότητας των μοντέλων.

4.2.2 Εκτίμηση παραμέτρων

Στα μοντέλα που μελετάμε η μεταβλητότητα $\sigma 1$ της τιμής της πρώτης μετοχής, η μεταβλητότητα $\sigma 2$ της τιμής της δεύτερης μετοχής, ο συντελεστής συσχέτισης ρ των προαναφερθέντων μετοχών και η παράμετρος λ η οποία χρησιμοποιείται στο άλμα u της τιμής της μετοχής ή της απόδοσης της μετοχής αποτελούν άγνωστες παραμέτρους. Επομένως οι τέσσερις αυτοί παράμετροι θα πρέπει να εκτιμηθούν για τα δικαιώματα αγοράς και για τα δικαιώματα πώλησης. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε όπως στην ενότητα 4.1.2 τον επαναληπτικό αλγόριθμο Levenberg & Marquardt (1944 & 1963) και επαναλαμβάνουμε τα βήματα της προαναφερθείσας ενότητας.

Θα πρέπει να αναφερθεί ότι οι κώδικες αποτίμησης για τα τρισδιάστατα μοντέλα των Boyle (1988) και Kamrad & Ritchken (1991) έχουν παραχθεί στην Διπλωματική Εργασία του Johannes Barend van Biljon με τίτλο "*A comparative study of tree-based models and their application in modern finance*" (University of Pretoria-May 2014).

<u>Αποτελέσματα εκτίμησης για όλα τα δικαιώματα αγοράς (In Sample)</u>

<u>*Boyle Model (1988)*</u>

Από την εκτίμηση των άγνωστων παραμέτρων προκύπτουν τα ακόλουθα στατιστικά στοιχεία, όπως αναφέρονται στον Πίνακα 5. Η μέση τιμή για τις εκτιμήσεις κάθε ημέρας που πραγματοποιήσαμε για το $\sigma 1$, το $\sigma 2$, το ρ και το λ είναι 0.33302, 0.19414, 0.11413 και 2.20027 αντίστοιχα, με τυπική απόκλιση 0.06899, 0.04696, 0.36981 και 0.47590 αντίστοιχα. Το ελάχιστο και το μέγιστο των τεσσάρων παραμέτρων είναι 0.16906, 0.13638, -0.26933 και 1.20688 για το ελάχιστο, ενώ 0.38798, 0.29448, 0.98925 και 2.65073 για το μέγιστο, για την εκάστοτε παράμετρο.

Kamrad & Ritchken Model (1991)

Από την εκτίμηση των άγνωστων παραμέτρων προκύπτουν τα ακόλουθα στατιστικά στοιχεία, όπως αναφέρονται στον Πίνακα 5. Η μέση τιμή για τις εκτιμήσεις κάθε ημέρας που πραγματοποιήσαμε για το $\sigma 1$, το $\sigma 2$, το ρ και το λ είναι 0.07882, 0.39607, 0.69751 και 3.82902 αντίστοιχα, με τυπική απόκλιση 0.02070, 0.04174, 0.18397 και 3.50398 αντίστοιχα. Το ελάχιστο και το μέγιστο των τεσσάρων παραμέτρων είναι 0.03965, 0.35615, 0.45458 και 1.00005 για το ελάχιστο ενώ 0.11568, 0.48222, 0.97557 και 9.99996 για το μέγιστο, για την εκάστοτε παράμετρο.

Συμπέρασμα

Από το διάγραμμα τετραγωνικών καταλοίπων (Διάγραμμα 4) προκύπτει ποικιλία καταλοίπων, με τιμές που ξεκινούν από λίγο μεγαλύτερες του 3 έως λίγο μεγαλύτερες του 5.5. Ωστόσο αυτό είναι ένα αποτέλεσμα που εξηγείται από το διάγραμμα του μέσου όρου των απόλυτων σφαλμάτων για κάθε ημέρα (Διάγραμμα 5), τα οποία φαίνεται ότι είναι πολύ μικρά, πόσο μάλλον αν σκεφτούμε ότι τα τετραγωνικά κατάλοιπα αποτελούν άθροισμα των απολύτων σφαλμάτων, υψωμένων στο τετράγωνο που μεγαλώνουν έτσι ακόμη περισσότερο τις μέγιστες τιμές.

Επίσης έχοντας λάβει υπόψη μας και τα 15 δικαιώματα για την εκτίμηση, των οποίων οι τιμές αγοράς επηρεάζονται και από άλλες παραμέτρους τις οποίες το μοντέλο μας δεν λαμβάνει υπόψη όπως η ζήτηση ενός δικαιώματος μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή, είναι λογικό να υπάρχουν τέτοιες αποκλίσεις. Συνεπώς, από το διάγραμμα τετραγωνικών καταλοίπων (Διάγραμμα 4) καταλήγουμε ότι το μοντέλο των Kamrad & Ritchken (1991) προσαρμόζεται καλύτερα στις τιμές τις αγοράς. Για την πληρότητα της μελέτης μας και λόγω του αποτελέσματος που προέκυψε, πραγματοποιήσαμε εκτίμηση των άγνωστων παραμέτρων ανάλογα με την ληκτότητά τους, δηλαδή διαχωρίζοντάς τα σε short term (εκείνα με λήξη σε 2 μήνες και 5 μήνες) και long term (εκείνα με λήξη σε 8 μήνες, 11 μήνες και 14 μήνες). Όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 4.1 και στο Διάγραμμα 4.2, εκείνο το μοντέλο που κερδίζει είναι πάλι αυτό των Kamrad & Ritchken (1991). Στατιστικά στοιχεία για τις επιμέρους εκτιμήσεις παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.1 και στον Πίνακα 5.2.

Αποτελέσματα εκτίμησης για όλα τα δικαιώματα πώλησης (In Sample)

Boyle Model (1988)

Από την εκτίμηση των άγνωστων παραμέτρων προκύπτουν τα ακόλουθα στατιστικά στοιχεία, όπως αναφέρονται στον Πίνακα 7. Η μέση τιμή για τις εκτιμήσεις κάθε ημέρας που πραγματοποιήσαμε για το $\sigma 1$, το $\sigma 2$, το ρ και το λ είναι 0.28590, 0.29841, -0.23609 και 3.42446 αντίστοιχα, με τυπική απόκλιση 0.06014, 0.06654, 0.47320 και 1.54357 αντίστοιχα. Το ελάχιστο και το μέγιστο των τεσσάρων παραμέτρων είναι 0.14190, 0.18641, -0.97556 και 1.29280 για το ελάχιστο, ενώ 0.33902, 0.40996, 0.99958 και 5.50661 για το μέγιστο, για την εκάστοτε παράμετρο.

Kamrad & Ritchken Model (1991)

Από την εκτίμηση των άγνωστων παραμέτρων προκύπτουν τα ακόλουθα στατιστικά στοιχεία, όπως αναφέρονται στον Πίνακα 7. Η μέση τιμή για τις εκτιμήσεις κάθε ημέρας που πραγματοποιήσαμε για το $\sigma 1$, το $\sigma 2$, το ρ και το λ είναι 0.23789, 0.28671, 0.66596 και 1.66362 αντίστοιχα, με τυπική απόκλιση 0.03752, 0.01977, 0.09355 και 0.67240 αντίστοιχα. Το ελάχιστο και το μέγιστο των τεσσάρων παραμέτρων είναι 0.17337, 0.23883, 0.55430 και 1.00215 για το ελάχιστο ενώ 0.29940, 0.31692, 0.83830 και 2.92967 για το μέγιστο, για την εκάστοτε παράμετρο.

Συμπέρασμα

Από το διάγραμμα τετραγωνικών καταλοίπων (Διάγραμμα 7) προκύπτει ποικιλία καταλοίπων, με τιμές που ξεκινούν από λίγο μικρότερες του 2 έως λίγο μεγαλύτερες του 4. Ωστόσο αυτό είναι ένα αποτέλεσμα που εξηγείται από το διάγραμμα του μέσου όρου των απόλυτων σφαλμάτων για κάθε ημέρα (Διάγραμμα 8), τα οποία φαίνεται ότι είναι πολύ μικρά, πόσο μάλλον αν σκεφτούμε ότι τα τετραγωνικά κατάλοιπα αποτελούν άθροισμα των απολύτων σφαλμάτων, υψωμένων στο τετράγωνο που μεγαλώνουν έτσι ακόμη περισσότερο τις μέγιστες τιμές.

Επίσης έχοντας λάβει υπόψη μας και τα 15 δικαιώματα για την εκτίμηση, των οποίων οι τιμές αγοράς επηρεάζονται και από άλλες παραμέτρους τις οποίες το μοντέλο μας δεν λαμβάνει υπόψη όπως η ζήτηση ενός δικαιώματος μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή, είναι λογικό να υπάρχουν τέτοιες αποκλίσεις. Συνεπώς, από το διάγραμμα τετραγωνικών καταλοίπων (Διάγραμμα 7) καταλήγουμε ότι το μοντέλο των Kamrad & Ritchken (1991) προσαρμόζεται καλύτερα στις τιμές τις αγοράς.

Για την πληρότητα της μελέτης μας και λόγω του αποτελέσματος που προέκυψε, πραγματοποιήσαμε εκτίμηση των άγνωστων παραμέτρων ανάλογα με την ληκτότητά τους, δηλαδή διαχωρίζοντάς τα σε short term (εκείνα με λήξη σε 2 μήνες και 5 μήνες) και long term (εκείνα με λήξη σε 8 μήνες, 11 μήνες και 14 μήνες). Όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 7.1 και στο Διάγραμμα 7.2, εκείνο το μοντέλο που κερδίζει είναι πάλι αυτό των Kamrad & Ritchken (1991). Στατιστικά στοιχεία για τις επιμέρους εκτιμήσεις παρουσιάζονται στον Πίνακα 7.1 και στον Πίνακα 7.2.

4.2.3 Προβλεπτική ικανότητα

Αφού ολοκληρώσαμε την εκτίμηση των παραμέτρων των μοντέλων μας, ακολουθεί ο έλεγχος της προβλεπτικής τους ικανότητας τόσο στα δικαιώματα αγοράς όσο και στα δικαιώματα πώλησης. Δηλαδή, θα χρησιμοποιήσουμε τον μέσο όρο της τιμής των παραμέτρων των πέντε τελευταίων ημερών που εκτιμήσαμε από τις 20 ημέρες (In Sample), για να υπολογίσουμε την θεωρητική τιμή των δικαιωμάτων αγοράς σύμφωνα με τα μοντέλα μας για το χρονικό διάστημα των επόμενων 10 ημερών (Out of Sample).

Οι θεωρητικές τιμές των δικαιωμάτων αγοράς χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό του απόλυτου σφάλματος πρόβλεψης, ώστε να προκύψουν τα τετραγωνικά κατάλοιπα. Το απόλυτο σφάλμα εκφράζεται όπως είπαμε στην ενότητα 4.1.3 από τη σχέση (105).

Όπως ήταν αναμενόμενο τα τετραγωνικά κατάλοιπα μεταξύ των τιμών που υπολογίσαμε και με τα δύο μοντέλα μας και με αυτών της “αγοράς” ήταν μικρά τις πρώτες μέρες και σταδιακά αυξάνονταν. Η εν λόγω διαπίστωση αφορά τόσο τα δικαιώματα αγοράς όσο και τα δικαιώματα πώλησης.

Παρατηρούμε ότι το μοντέλο των Kamrad & Ritchken (1991) έχει καλύτερη προβλεπτική ικανότητα από εκείνο του Boyle (1988) σύμφωνα με τον Πίνακα 6 και τον Πίνακα 8 καθώς και με το Διάγραμμα 6 και το Διάγραμμα 9, για τα τετραγωνικά κατάλοιπα από την προβλεπτική ικανότητα. Τα ίδια αποτελέσματα προκύπτουν αν εξετάσουμε την προβλεπτική ικανότητα ξεχωριστά των short term και long term δικαιωμάτων (βλ. Πίνακες: 6.1, 6.2,8.1 & 8.1 και Διαγράμματα: 6.1, 6.2, 9.1 & 9.2).

Να θυμίσουμε ότι ως βραχυπρόθεσμα δικαιώματα αγοράς (short term option) χρησιμοποιήθηκαν εκείνα με λήξη σε 2 μήνες και 5 μήνες, ενώ ως μακροπρόθεσμα δικαιώματα (long term option) εκείνα με λήξη 8 μήνες, 11 μήνες και 14 μήνες.

Τα παραπάνω ήταν αναμενόμενα αποτελέσματα καθώς ο παράγοντας αβεβαιότητα στο πέρασμα του χρόνου (μεταβλητότητα-συσχέτιση των τιμών των μετοχών-$\sigma 1$, $\sigma 2$, ρ), όπως επισημάναμε και στην περίπτωση της μίας μεταβλητής κατάστασης (1 State), ενσωματώνεται κατά κύριο λόγο και κατ' επανάληψη στο μοντέλο του Boyle (1988) τόσο στον υπολογισμό των πιθανοτήτων των αλμάτων όσο και κατά την επίλυση συστημάτων εξισώσεων για τον επαναπροσδιορισμό του u_2 χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Νεύτωνα. Συνεπώς η αβεβαιότητα αυτή επηρεάζει σε πολύ σημαντικό βαθμό την θεωρητική τιμή του δικαιώματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Τα δικαιώματα προαίρεσης βρίσκονται ανάμεσα στα πιο δημοφιλή αξιόγραφα τα οποία συναλλάσσονται στις αγορές. Μάλιστα ολοένα και περισσότερο, οι επιχειρήσεις θέλουν να παρέχουν στο επενδυτικό κοινό πιο εκλεπτυσμένα χρηματοοικονομικά προϊόντα, για τα οποία αναζητούνται καλύτεροι τρόποι αποτίμησης. Τέτοια προϊόντα είναι τα δικαιώματα προαίρεσης με δύο μεταβλητές κατάστασης, για την αποτίμηση των οποίων μέσω ενός πλέγματος γίνεται λόγος στην παρούσα διπλωματική εργασία.

Στην εν λόγω εργασία αρχικά περιγράψαμε το μοντέλο CRR (1979) και έπειτα την προσέγγιση που έδωσαν οι Boyle (1988) και Kamrad & Ritchken (1991) για μία μεταβλητή κατάστασης. Έπειτα παρουσιάσαμε την επέκταση του μοντέλου των Black & Scholes (1973) για την αποτίμηση δικαιωμάτων Ευρωπαϊκού τύπου, το οποίο εστιάζει στην ιδέα του Stulz (1982) για την αποτίμηση δικαιωμάτων Ευρωπαϊκού τύπου στο μέγιστο και στο ελάχιστο των δύο μεταβλητών κατάστασης. Έπειτα παρουσιάστηκε η προσέγγιση πλέγματος για την αποτίμηση δικαιωμάτων των οποίων η απόδοση (payoff) εξαρτάται από δύο μεταβλητές κατάστασης, όπως αντιμετωπίστηκε από τον Boyle (1988) καθώς και από τους Kamrad & Ritchken (1991). Πρόκειται για τρισδιάστατα μοντέλα πλέγματος αφού αποτελούνται από δύο διαστάσεις για το περιουσιακό στοιχείο και μία χρονική διάσταση.

Στη συνέχεια πραγματοποιήσαμε εμπειρική μελέτη για τα μοντέλα πλέγματος του Boyle (1988) και των Kamrad & Ritchken (1991) για την περίπτωση μίας μεταβλητή κατάστασης πάνω σε δικαιώματα αγοράς Αμερικανικού τύπου Ωστόσο επειδή η μετοχή την οποία έχουν ως υποκείμενο τίτλο δίνει μέρισμα το οποίο επηρεάζει αμελητέα την τιμή της, θεωρούμε ότι η μετοχή φέρεται σαν να μη δίνει μέρισμα και άρα το δικαίωμα λειτουργεί σαν δικαίωμα αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου. Από τα αποτελέσματα της εκτίμησης παραμέτρων (In Sample), προέκυψε ότι τα προαναφερθέντα μοντέλα προσαρμόζονται με παρόμοιο τρόπο στις τιμές της αγοράς. Στην εξέταση της προβλεπτικής ικανότητας των παραπάνω μοντέλων (Out of Sample) τα αποτελέσματα ήταν ξεκάθαρα, αφού καταλήξαμε ότι το μοντέλο των Kamrad & Ritchken (1991) είναι αποτελεσματικότερο από εκείνο του Boyle (1988). Επισημάναμε ότι αυτό οφείλεται στην καλύτερη εφαρμογή του μοντέλου των Kamrad & Ritchken (1991) για δικαιώματα με μακροπρόθεσμη λήξη από εκείνο του Boyle (1988), καθώς για δικαιώματα με βραχυπρόθεσμη λήξη έχουν εξίσου την ίδια συμπεριφορά. Καθώς τα ανωτέρω μοντέλα έχουν τις ίδιες υπό εκτίμηση παραμέτρους, καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι αυτή η διαφορά οφείλεται στην πολλαπλή χρήση της μεταβλητότητας στο μοντέλο του Boyle (1988) κυρίως στον υπολογισμό των πιθανοτήτων των αλμάτων. Δηλαδή ένα μοντέλο το οποίο λαμβάνει υπόψη του συνεχώς τον παράγοντα αβεβαιότητα λόγω της μεταβλητότητας, είναι λογικό να μην είναι το ίδιο αξιόπιστο με ένα άλλο που την ενσωματώνει σε μικρότερο βαθμό.

Έπειτα προχωρήσαμε στην αριθμητική ανάλυση για τα μοντέλα πλέγματος του Boyle (1988) και των Kamrad & Ritchken (1991) για την περίπτωση των δύο μεταβλητών κατάστασης τόσο για δικαιώματα αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου, όσο και για δικαιώματα πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου. Προέκυψε λοιπόν ότι τόσο για τα δικαιώματα αγοράς όσο και για τα δικαιώματα πώλησης κατά την εκτίμηση των παραμέτρων (In Sample), το μοντέλο των Kamrad & Ritchken (1991) προσαρμόζεται καλύτερα στις τιμές της αγοράς. Λόγω αυτού του αποτελέσματος προχωρήσαμε στην εκτίμηση των παραμέτρων διαχωρίζοντας τα δικαιώματα ανάλογα με την ληκτότητά τους, σε βραχυπρόθεσμα (short term) και μακροπρόθεσμα (long term) δικαιώματα. Το αποτέλεσμα δεν άλλαξε αφού το μοντέλο των Kamrad & Ritchken (1991) πάλι ανταποκρίνεται καλύτερα στις αγοραίες τιμές. Όπως στην περίπτωση της μίας μεταβλητής κατάστασης, έτσι και τώρα προχωρήσαμε στην εξέταση της προβλεπτικής ικανότητας (Out of Sample) των τρισδιάστατων προαναφερθέντων μοντέλων. Πάλι ήταν διακριτή η διαφορά μεταξύ των δύο μοντέλων, αφού εκείνο των Kamrad & Ritchken (1991) είναι σαφώς καλύτερο τόσο αν εφαρμοστεί σε όλες τις ληκτότητες δικαιωμάτων ταυτόχρονα, όσο και αν το εφαρμόσουμε διαχωρίζοντας τα δικαιώματα σε βραχυπρόθεσμα (short term) και μακροπρόθεσμα (long term).

Επομένως καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι εφόσον τα εν λόγω μοντέλα λαμβάνουν υπόψη τους τις ίδιες παραμέτρους, η διαφορά στην αποτελεσματικότητά τους οφείλεται στην κατ’ επανάληψη χρήση της μεταβλητότητας και κατ’ επέκταση της αβεβαιότητας στο πέρασμα του χρόνου στο μοντέλο του Boyle (1988) συγκριτικά με εκείνο των Kamrad & Ritchken (1991) τόσο στον υπολογισμό των πιθανοτήτων των αλμάτων όσο και κατά την επίλυση συστημάτων εξισώσεων για τον επαναπροσδιορισμό του u_2 χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Νεύτωνα. Συμπερασματικά λοιπόν καταλήγουμε ότι το μοντέλο των Kamrad & Ritchken (1991), είναι σαφώς περισσότερο αξιόπιστο από αυτό του Boyle (1988).

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι τέτοιες προσεγγίσεις πλέγματος, εφόσον αποδεικνύονται αξιόπιστες, στην περίπτωση που η τιμή του προϊόντος εξαρτάται από πολλαπλές πηγές αβεβαιότητας δίνουν ένα πολύ καλό αποτέλεσμα, όταν οι αριθμητικές μέθοδοι είναι υπολογιστικά ακριβές και χρονοβόρες. Βασικό πλεονέκτημα των προσεγγίσεων πλέγματος, για δύο μεταβλητές κατάστασης στην περίπτωσή μας αλλά και γενικότερα, είναι ότι δίνουν τη δυνατότητα πρόωρης εξάσκησης και επομένως μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για την αποτίμηση δικαιωμάτων Αμερικανικού τύπου με ή χωρίς μέρισμα.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1 - ΣΚΙΑΓΡΑΦΗΣΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ

Στο παρόν παράρτημα σκιαγραφείται η απόδειξη της σχέσης 52 (ενότητα 3.1.2) η οποία αφορά την αποτίμηση δικαιώματος αγοράς στο ελάχιστο δύο περιουσιακών στοιχείων, όπως παρουσιάζει στο άρθρο του ο Stulz (1982). Για τον υπολογισμό της αναμενόμενης αξίας του δικαιώματος στη λήξη σε έναν κόσμο ουδέτερου κινδύνου, χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι οι μεταβλητές V και H ακολουθούν και οι δύο την λογαριθμοκανονική κατανομή.

Έστω $u = \ln V$ και $h = \ln H$.Ορίζουμε $k = \min(v, h)$. Η πιθανότητα το k να είναι μικρότερο από κάποια τιμή του K, είναι:

$$F(K) = 1 - \int_K^{\infty}\int_K^{\infty} n_2(v,h)\,dh\,dv \qquad \text{(A1)}$$

όπου $n_2(v,h)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας της διμεταβλητής κανονικής κατανομής. Για να υπολογίσουμε το ελάχιστο της παραπάνω συνάρτησης, παίρνουμε την παράγωγο της (A1) ως προς το K.

Έστω $\bar{v}$ να είναι η αναμενόμενη τιμή του v , $\sigma(v)$ η τυπική απόκλιση του v , $\sigma(h)$ η τυπική απόκλιση του h και ρ ο συντελεστής συσχέτισης ανάμεσα στα v και h. Αν $f(k)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του k, τότε:

$$\begin{aligned} f(k) &= N_1\Big(\frac{-k + \bar{v}\rho(\sigma(v)/(\sigma(h))(k-\bar{h})}{\sqrt{1-\rho^2}\,\sigma(v)}\Big)n_1\Big(\frac{k-\bar{h}}{\sigma(h)}\Big) \\ &+ N_1\Big(\frac{-k + \bar{h}\rho(\sigma(h)/(\sigma(v))(k-\bar{v})}{\sqrt{1-\rho^2}\,\sigma(h)}\Big)n_1\Big(\frac{k-\bar{v}}{\sigma(v)}\Big) \end{aligned} \qquad \text{(A2)}$$

Το $N_1(a)$ θεωρείται η αθροιστική συνάρτηση της τυποποιημένης κανονικής κατανομής υπολογισμένη στο a και το $n_1(a)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας της τυποποιημένης κανονικής κατανομής, υπολογισμένη στο a .

Η αναμενόμενη απόδοση στη λήξη του δικαιώματος είναι:

$$E(C(V,H,F,0)) = \int_{\ln F}^{\infty} e^{k} f(k)dk - \int_{\ln F}^{\infty} Ff(k)dk \tag{A3}$$

Τότε η (A3) μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα τριών όρων. Ο πρώτος όρος είναι η αναμενόμενη τιμή του H στη λήξη, αν το H είναι το μέγιστο και υπερβεί το F. Ο δεύτερος όρος είναι η αναμενόμενη τιμή του V στη λήξη, αν το V είναι το ελάχιστο και υπερβεί το F. Ο τρίτος όρος είναι μείον F φορές την πιθανότητα το δικαίωμα να εξασκηθεί στη λήξη. Ο πρώτος όρος γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned} A = \int_{\ln(\frac{F}{H})}^{\infty} & e^{R\tau} H N_1 \Bigg(\frac{-a+\ln(V/H)+(R-\frac{1}{2}\sigma_V^2)\tau}{\sigma_V\sqrt{\tau}\sqrt{1-\rho_{VH}^2}} \\ & + \frac{\rho_{VH}(\sigma_V/\sigma_H)(a-(R-\frac{1}{2}\sigma_H^2)\tau)}{\sigma_V\sqrt{\tau}\sqrt{1-\rho_{VH}^2}} \\ & + n_1\Big(\frac{a-(R+\frac{1}{2}\sigma_H^2)\tau}{\sigma_H\sqrt{\tau}} \Big) d\alpha \end{aligned} \tag{A4}$$

Ξαναγράφοντας την παραπάνω σχέση με διπλό ολοκλήρωμα έχουμε:

$$A = e^{R\tau} \int_{\ln(\frac{F}{H})}^{x} \int_{-x}^{Q} n_1(Z) n_1\Big(\frac{a-(R+\frac{1}{2}\sigma_H^2)\tau}{\sigma_H\sqrt{\tau}} \Big) dZ d\alpha \tag{A5}$$

όπου Q να είναι το άνω όριο ολοκλήρωσης.

Θέτοντας το Q ως $aX+B$, κάνουμε αλλαγή των μεταβλητών ως εξής: $Y=-X$ &$U=aY+Z$ και υπολογίζουμε τα ολοκληρώματα της (A5). Πολλαπλασιάζοντας το A με $e^{-R\tau}$ έχουμε τον πρώτο όρο της (52). Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία για τους άλλους δύο όρους όπως ορίστηκαν προηγουμένως, καταλήγουμε στην (52).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2 - ΚΩΔΙΚΕΣ MATLAB

1. Κώδικας αποτίμησης δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου με διωνυμικό μοντέλο πλέγματος CRR

```
function [price] = EuropeanCallBinomial(strike,S0,irate,TTM,sigma,N)
deltaT=TTM/N;
u=exp(sigma*sqrt(deltaT));
d=1/u;
p=(exp(irate*deltaT)-d)/(u-d);
lattice=zeros(N+1,N+1);
for i=0:N
   lattice(i+1,N+1)=max(0,S0*(u^i)*(d^(N-i))-strike);
end
for j=N-1:-1:0
   for i=0:j
      lattice(i+1,j+1)=exp(-irate*deltaT)*(p*lattice(i+2,j+2)+(1-
p)*lattice(i+1,j+2));
   end
end
price=lattice(1,1);
end
```

2. Κώδικας αποτίμησης δικαιώματος πώλησης Αμερικανικού τύπου με διωνυμικό μοντέλο πλέγματος CRR

```
function [price] = LatticeAmerPut(strike,S0,irate,TTM,sigma,N)
deltaT=TTM/N;
u=exp(sigma*sqrt(deltaT));
d=1/u;
p=(exp(irate*deltaT)-d)/(u-d);
lattice=zeros(N+1,N+1);
for i=0:N
   lattice(i+1,N+1)=max(0,strike-S0*(u^i)*(d^(N-i)));
end
for j=N-1:-1:0
   for i=0:j
      latticeEurPut=exp(-irate*deltaT)*(p*lattice(i+2,j+2)+(1-
p)*lattice(i+1,j+2));
      inValue=max(0,strike-S0*(u^(i))*(d^(j-i)));
      lattice(i+1,j+1)=max(inValue,latticeEurPut);
   end
end
price=lattice(1,1);
end
```

3. <u>Κώδικας αποτίμησης δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου με τριωνυμικό μοντέλο πλέγματος του Boyle (1 State)</u>

```
function [price] =
EuropeanCallTrinBoyle(strike,S0,irate,TTM,sigma,lamda,N)
deltaT=TTM/N;
u=exp(sigma*lamda*sqrt(deltaT));
d=1/u;
M=exp(irate*deltaT);
V=(M^2)*(exp((sigma^2)*deltaT)-1);
p1=(((V+M^2-M)*u)-(M-1))/((u-1)*((u^2)-1));
p3=(((V+M^2-M)*(u^2))-(u^3)*(M-1))/((u-1)*((u^2)-1));
p2=1-p1-p3;
lattice=zeros(2*N+1,N+1);
for i=0:2*N
   lattice(i+1,N+1)=max(0,S0*(u^(i-N))-strike);
end
for j=N-1:-1:0
   for i=0:2*j
      lattice(i+1,j+1)=exp(-
irate*deltaT)*(p1*lattice(i+3,j+2)+p2*lattice(i+2,j+2)+p3*lattice(i+1,j+2));
   end
end
price=lattice(1,1);
end
```

4. <u>Κώδικας αποτίμησης δικαιώματος πώλησης Αμερικανικού τύπου με τριωνυμικό μοντέλο πλέγματος του Boyle (1 State)</u>

```
function [price] =
AmericanPutTrinBoyle(strike,S0,irate,TTM,sigma,lamda,N)
deltaT=TTM/N;
u=exp(sigma*lamda*sqrt(deltaT));
d=1/u;
M=exp(irate*deltaT);
V=(M^2)*(exp((sigma^2)*deltaT)-1);
p1=(((V+M^2-M)*u)-(M-1))/((u-1)*((u^2)-1));
p3=(((V+M^2-M)*(u^2))-(u^3)*(M-1))/((u-1)*((u^2)-1));
p2=1-p1-p3;
lattice=zeros(2*N+1,N+1);
for i=0:2*N
   lattice(i+1,N+1)=max(0,strike-S0*(u^(i-N)));
end
for j=N-1:-1:0
   for i=0:2*j
      latticeEurPut=exp(-
irate*deltaT)*(p1*lattice(i+3,j+2)+p2*lattice(i+2,j+2)+p3*lattice(i+1,j+2));
      inValue=max(0,strike-S0*(u^(i-j)));
      lattice(i+1,j+1)=max(inValue,latticeEurPut);
   end
```

```
end
price=lattice(1,1);
end
```

5. Κώδικας αποτίμησης δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου με τριωνυμικό μοντέλο πλέγματος των Kamrad & Ritchken (1 State)

```
function [price] =
EuropeanCallTrinKamradRitchken(strike,S0,irate,TTM,sigma,lamda,N)
deltaT=TTM/N;
u=sigma*lamda*sqrt(deltaT);
d=1/u;
miu=irate-((sigma^2)/2);
p1=(1/(2*(lamda^2)))+((miu*sqrt(deltaT))/(2*lamda*sigma));
p3=(1/(2*(lamda^2)))-((miu*sqrt(deltaT))/(2*lamda*sigma));
p2=1-(1/(lamda^2));
lattice=zeros(2*N+1,N+1);
for i=0:2*N
   lattice(i+1,N+1)=max(0,S0*exp(u*(i-N))-strike);
end
for j=N-1:-1:0
   for i=0:2*j
      lattice(i+1,j+1)=exp(-
irate*deltaT)*(p1*lattice(i+3,j+2)+p2*lattice(i+2,j+2)+p3*lattice(i+1,j+2));
   end
end
price=lattice(1,1);
end
```

6. Κώδικας αποτίμησης δικαιώματος πώλησης Αμερικανικού τύπου με τριωνυμικό μοντέλο πλέγματος των Kamrad & Ritchken (1 State)

```
function [price] =
AmericanPutTrinKamradRitchken(strike,S0,irate,TTM,sigma,lamda,N)
deltaT=TTM/N;
u=sigma*lamda*sqrt(deltaT);
d=1/u;
miu=irate-((sigma^2)/2);
p1=(1/(2*(lamda^2)))+((miu*sqrt(deltaT))/(2*lamda*sigma));
p3=(1/(2*(lamda^2)))-((miu*sqrt(deltaT))/(2*lamda*sigma));
p2=1-(1/(lamda^2));
lattice=zeros(2*N+1,N+1);
for i=0:2*N
   lattice(i+1,N+1)=max(0,strike-S0*(exp(u*(i-N))));
end
for j=N-1:-1:0
   for i=0:2*j
      latticeEurPut=exp(-
irate*deltaT)*(p1*lattice(i+3,j+2)+p2*lattice(i+2,j+2)+p3*lattice(i+1,j+2));
      inValue=max(0,strike-S0*(exp(u*(i-j))));
```

```
        lattice(i+1,j+1)=max(inValue,latticeEurPut);
    end
end
price=lattice(1,1);
end
```

7. Κώδικας αποτίμησης δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου με μοντέλο των Black & Scholes

```
function [c,d1,d2] = BLSCALLprice(strike,S0,irate,TTM,sigma)
d1=(log(S0/strike)+(irate+(sigma^2)/2)*TTM)/(sigma*sqrt(TTM));
d2=(log(S0/strike)+(irate-(sigma^2)/2)*TTM)/(sigma*sqrt(TTM));
c=S0*normcdf(d1)-strike*normcdf(d2)*exp(-irate*TTM);
end
```

8. Κώδικας αποτίμησης δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου με τριωνυμικό μοντέλο πλέγματος του Boyle (2 State-max)

```
function [P] =
TwoStatesEuropeanCallTrinBoyleMax(strike,S01,S02,irate,TTM,sigma1,sig
ma2,rho,lamda,N)
deltaT=TTM/N;
u1=exp(sigma1*lamda*sqrt(deltaT));
u20=exp(sigma2*lamda*sqrt(deltaT));
u2=fsolve(@myfun,u20,irate,TTM,sigma1,sigma2,lamda,N);
d1=1/u1;
d2=1/u2;
M1=exp(irate*deltaT);
M2=exp(irate*deltaT);
V1=(M1^2)*(exp((sigma1^2)*deltaT)-1);
V2=(M2^2)*(exp((sigma2^2)*deltaT)-1);
f1=((V1+(M1^2)-M1)*u1-(M1-1))/((u1-1)*((u1^2)-1));
f2=((V2+(M2^2)-M2)*u20-(M2-1))/((u20-1)*((u20^2)-1));
g2=((V2+(M2^2)-M2)*(u20^2)-(u20^3)*(M2-1))/((u20-1)*((u20^2)-1));
R=M1*M2*exp(rho*sigma1*sigma2*deltaT);
a=u1*u2; b=u1^2; c=u2^2; d=b-1;
h=c-1; l=a-1; m=d*h; n=a-c; q=f2+g2; s=R-1;
p1=(a*s-f1*d-f2*h+q*l)/m;
p2=(f1*d*c+f2*h-q*l-a*s)/m;
p3=(a*s-f1*d*c+g2*h*b+q*n)/m;
p4=(f1*d+f2*h*b-q*l-a*s)/m;
p5=1-p1-p2-p3-p4;
for j=1:N+1
    S1(1,j)=S01*u1^(j-1);
    S2(1,j)=S02*u2^(j-1);
    for i=1:2*N+1
        if i==j
            S1(i,j)=S01;
            S2(i,j)=S02;
        end
```

```
        if i==2*j-1
            S1(i,j)=S01*d1^(j-1);
            S2(i,j)=S02*d2^(j-1);
        end
    end
end
for j=3:N+1
    for i=2:2*(j-1)
      S1(i,j)=S1(i-1,j-1);
      S2(i,j)=S2(i-1,j-1);
    end
end
T=zeros(2*N+1,2*N+1,N+1);
U=zeros(2*N+1,2*N+1,N+1);
P=zeros(2*N+1,2*N+1,N+1);
for j=1:1:N+1
    T(:,:,j)=repmat(S1(:,j),1,2*N+1);
    U(:,:,j)=repmat(S2(:,j),1,2*N+1);
    P(:,:,j)=max(max(T(:,:,j),U(:,:,j)')-strike,0);
end
E=zeros(2*N+1,2*N+1,N+1);
E(:,:,N+1)= P(:,:,N+1);
for j=N:-1:1
    for i=1:1:2*j-1
        for k=1:1:2*j-1
            E(i,k,j)=exp(-
irate*deltaT)*(p1*E(i,k,j+1)+p2*E(i,k+2,j+1)+p3*E(i+2,k+2,j+1)+p4*E(i+2,k,j+
1)+p5*E(i+1,k+1,j+1));
        end
    end
end
EuropeanCall(N)=E(1,1,1);
B=EuropeanCall;
P=B(:,N);
end
```

9. <u>Κώδικας αποτίμησης δικαιώματος πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου με τριωνυμικό μοντέλο πλέγματος του Boyle (2 State-min)</u>

```
function [P] =
TwoStatesEuropeanPutTrinBoyleMin(strike,S01,S02,irate,TTM,sigma1,sig
ma2,rho,lamda,N)
deltaT=TTM/N;
u1=exp(sigma1*lamda*sqrt(deltaT));
u20=exp(sigma2*lamda*sqrt(deltaT));
u2=fsolve(@myfun,u20);
d1=1/u1;
d2=1/u2;
M1=exp(irate*deltaT);
M2=exp(irate*deltaT);
```

```
V1=(M1^2)*(exp((sigma1^2)*deltaT)-1);
V2=(M2^2)*(exp((sigma2^2)*deltaT)-1);
f1=((V1+(M1^2)-M1)*u1-(M1-1))/((u1-1)*((u1^2)-1));
f2=((V2+(M2^2)-M2)*u20-(M2-1))/((u20-1)*((u20^2)-1));
g2=((V2+(M2^2)-M2)*(u20^2)-(u20^3)*(M2-1))/((u20-1)*((u20^2)-1));
R=M1*M2*exp(rho*sigma1*sigma2*deltaT);
a=u1*u2; b=u1^2; c=u2^2; d=b-1;
h=c-1; l=a-1; m=d*h; n=a-c; q=f2+g2; s=R-1;
p1=(a*s-f1*d-f2*h+q*l)/m;
p2=(f1*d*c+f2*h-q*l-a*s)/m;
p3=(a*s-f1*d*c+g2*h*b+q*n)/m;
p4=(f1*d+f2*h*b-q*l-a*s)/m;
p5=1-p1-p2-p3-p4;
for j=1:N+1
    S1(1,j)=S01*u1^(j-1);
    S2(1,j)=S02*u2^(j-1);
    for i=1:2*N+1
        if i==j
            S1(i,j)=S01;
            S2(i,j)=S02;
        end
        if i==2*j-1
            S1(i,j)=S01*d1^(j-1);
            S2(i,j)=S02*d2^(j-1);
        end
    end
end
for j=3:N+1
    for i=2:2*(j-1)
      S1(i,j)=S1(i-1,j-1);
      S2(i,j)=S2(i-1,j-1);
    end
end
T=zeros(2*N+1,2*N+1,N+1);
U=zeros(2*N+1,2*N+1,N+1);
P=zeros(2*N+1,2*N+1,N+1);
for j=1:1:N+1
    T(:,:,j)=repmat(S1(:,j),1,2*N+1);
    U(:,:,j)=repmat(S2(:,j),1,2*N+1);
    P(:,:,j)=max(strike-min(T(:,:,j),U(:,:,j)'),0);
end
E=zeros(2*N+1,2*N+1,N+1);
E(:,:,N+1)= P(:,:,N+1);
for j=N:-1:1
    for i=1:1:2*j-1
        for k=1:1:2*j-1
            E(i,k,j)=exp(-
irate*deltaT)*(p1*E(i,k,j+1)+p2*E(i,k+2,j+1)+p3*E(i+2,k+2,j+1)+p4*E(i+2,k,j+
1)+p5*E(i+1,k+1,j+1));
        end
```

```
    end
end
EuropeanPut(N)=E(1,1,1);
B=EuropeanPut;
P=B(:,N);
end
```

10. <u>Κώδικας αποτίμησης δικαιώματος πώλησης Αμερικανικού τύπου με τριωνυμικό μοντέλο πλέγματος του Boyle (2 State-min)</u>

```
function [P] =
TwoStatesAmericanPutTrinBoyleMin(strike,S01,S02,irate,TTM,sigma1,sig
ma2,rho,lamda,N)
deltaT=TTM/N;
u1=exp(sigma1*lamda*sqrt(deltaT));
u20=exp(sigma2*lamda*sqrt(deltaT));
u2=fsolve(@myfun,u20);
d1=1/u1;
d2=1/u2;
M1=exp(irate*deltaT);
M2=exp(irate*deltaT);
V1=(M1^2)*(exp((sigma1^2)*deltaT)-1);
V2=(M2^2)*(exp((sigma2^2)*deltaT)-1);
f1=((V1+(M1^2)-M1)*u1-(M1-1))/((u1-1)*((u1^2)-1));
f2=((V2+(M2^2)-M2)*u20-(M2-1))/((u20-1)*((u20^2)-1));
g2=((V2+(M2^2)-M2)*(u20^2)-(u20^3)*(M2-1))/((u20-1)*((u20^2)-1));
R=M1*M2*exp(rho*sigma1*sigma2*deltaT);
a=u1*u2; b=u1^2; c=u2^2; d=b-1;
h=c-1; l=a-1; m=d*h; n=a-c; q=f2+g2; s=R-1;
p1=(a*s-f1*d-f2*h+q*l)/m;
p2=(f1*d*c+f2*h-q*l-a*s)/m;
p3=(a*s-f1*d*c+g2*h*b+q*n)/m;
p4=(f1*d+f2*h*b-q*l-a*s)/m;
p5=1-p1-p2-p3-p4;
for j=1:N+1
    S1(1,j)=S01*u1^(j-1);
    S2(1,j)=S02*u2^(j-1);
    for i=1:2*N+1
        if i==j
            S1(i,j)=S01;
            S2(i,j)=S02;
        end
        if i==2*j-1
            S1(i,j)=S01*d1^(j-1);
            S2(i,j)=S02*d2^(j-1);
        end
    end
end
for j=3:N+1
    for i=2:2*(j-1)
```

```
      S1(i,j)=S1(i-1,j-1);
      S2(i,j)=S2(i-1,j-1);
    end
end
T=zeros(2*N+1,2*N+1,N+1);
U=zeros(2*N+1,2*N+1,N+1);
P=zeros(2*N+1,2*N+1,N+1);
for j=1:1:N+1
    T(:,:,j)=repmat(S1(:,j),1,2*N+1);
    U(:,:,j)=repmat(S2(:,j),1,2*N+1);
    P(:,:,j)=max(strike-min(T(:,:,j),U(:,:,j)'),0);
end
E=zeros(2*N+1,2*N+1,N+1);
E(:,:,N+1)= P(:,:,N+1);
for j=N:-1:1
    for i=1:1:2*j-1
        for k=1:1:2*j-1
            latticeEurPut=(exp(-
irate*deltaT))*(p1*E(i,k,j+1)+p2*E(i,k+2,j+1)+p3*E(i+2,k+2,j+1)+p4*E(i+2,k,j
+1)+p5*E(i+1,k+1,j+1));
            inValue=max(0,max(strike-(S01*(exp(u1^(i-j)))),strike-
(S02*(exp(u1^(i-j))))));
            E(i,k,j)=max(inValue,latticeEurPut);
        end
    end
end
AmericanPut(N)=E(1,1,1);
B=AmericanPut;
P=B(:,N);
End
```

11. Κώδικας βοηθητικής συνάρτησης για τους κώδικες του μοντέλου Boyle (2 State-max & 2 State-min)

```
function [F] = myfun(u20,irate,TTM,sigma1,sigma2,lamda,N)
deltaT=TTM/N;
u1=exp(sigma1*lamda*sqrt(deltaT));
M1=exp(irate*deltaT);
M2=exp(irate*deltaT);
V1=(M1^2)*(exp((sigma1^2)*deltaT)-1);
V2=(M2^2)*(exp((sigma2^2)*deltaT)-1);
f1=((V1+(M1^2)-M1)*u1-(M1-1))/((u1-1)*((u1^2)-1));
g1=((V1+(M1^2)-M1)*(u1^2)-(u1^3)*(M1-1))/((u1-1)*((u1^2)-1));
f2=((V2+(M2^2)-M2)*u20-(M2-1))/((u20-1)*((u20^2)-1));
g2=((V2+(M2^2)-M2)*(u20^2)-(u20^3)*(M2-1))/((u20-1)*((u20^2)-1));
F=f1+g1-(f2+g2);
End
```

12. Κώδικας αποτίμησης δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου με τριωνυμικό μοντέλο πλέγματος των Kamrad & Ritchken (2 State-max)

```
function [P] =
TwoStatesEuropeanCallTrinKamradRitchkenMax(strike,S01,S02,irate,TTM,
sigma1,sigma2,rho,lamda,N)
deltaT=TTM/N;
u1=exp(sigma1*lamda*sqrt(deltaT));
u2=exp(sigma2*lamda*sqrt(deltaT));
d1=1/u1;
d2=1/u2;
miu1=irate-(sigma1^2/2);
miu2=irate-(sigma2^2/2);
p1=0.25*((1+rho)/(lamda^2)+(sqrt(deltaT)/lamda)*((miu1/sigma1)+(miu2/sig
ma2)));
p2=0.25*((1-rho)/(lamda^2)+(sqrt(deltaT)/lamda)*((miu1/sigma1)-
(miu2/sigma2)));
p3=0.25*((1+rho)/(lamda^2)+(sqrt(deltaT)/lamda)*(-(miu1/sigma1)-
(miu2/sigma2)));
p4=0.25*((1-rho)/(lamda^2)+(sqrt(deltaT)/lamda)*(-
(miu1/sigma1)+(miu2/sigma2)));
p5=1-(1/(lamda^2));
for j=1:N+1
    S1(1,j)=S01*u1^(j-1);
    S2(1,j)=S02*u2^(j-1);
    for i=1:2*N+1
        if i==j
            S1(i,j)=S01;
            S2(i,j)=S02;
        end
        if i==2*j-1
            S1(i,j)=S01*d1^(j-1);
            S2(i,j)=S02*d2^(j-1);
        end
    end
end
for j=3:N+1
    for i=2:2*(j-1)
      S1(i,j)=S1(i-1,j-1);
      S2(i,j)=S2(i-1,j-1);
    end
end
T=zeros(2*N+1,2*N+1,N+1);
U=zeros(2*N+1,2*N+1,N+1);
P=zeros(2*N+1,2*N+1,N+1);
for j=1:1:N+1
    T(:,:,j)=repmat(S1(:,j),1,2*N+1);
    U(:,:,j)=repmat(S2(:,j),1,2*N+1);
    P(:,:,j)=max(max(T(:,:,j),U(:,:,j)')-strike,0);
end
```

```
E=zeros(2*N+1,2*N+1,N+1);
E(:,:,N+1)= P(:,:,N+1);
for j=N:-1:1
    for i=1:1:2*j-1
        for k=1:1:2*j-1
            E(i,k,j)=(exp(-
irate*deltaT))*(p1*E(i,k,j+1)+p2*E(i,k+2,j+1)+p3*E(i+2,k+2,j+1)+p4*E(i+2,k,j
+1)+p5*E(i+1,k+1,j+1));
        end
    end
end
EuropeanCall(N)=E(1,1,1);
B=EuropeanCall;
P=B(:,N);
end
```

13. <u>Κώδικας αποτίμησης δικαιώματος πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου με τριωνυμικό μοντέλο πλέγματος των Kamrad & Ritchken (2 State-min)</u>

```
function [P] =
TwoStatesEuropeanPutTrinKamradRitchkenMin(strike,S01,S02,irate,TTM,s
igma1,sigma2,rho,lamda,N)
deltaT=TTM/N;
u1=exp(sigma1*lamda*sqrt(deltaT));
u2=exp(sigma2*lamda*sqrt(deltaT));
d1=1/u1;
d2=1/u2;
miu1=irate-(sigma1^2/2);
miu2=irate-(sigma2^2/2);
p1=0.25*((1+rho)/(lamda^2)+(sqrt(deltaT)/lamda)*((miu1/sigma1)+(miu2/sig
ma2)));
p2=0.25*((1-rho)/(lamda^2)+(sqrt(deltaT)/lamda)*((miu1/sigma1)-
(miu2/sigma2)));
p3=0.25*((1+rho)/(lamda^2)+(sqrt(deltaT)/lamda)*(-(miu1/sigma1)-
(miu2/sigma2)));
p4=0.25*((1-rho)/(lamda^2)+(sqrt(deltaT)/lamda)*(-
(miu1/sigma1)+(miu2/sigma2)));
p5=1-(1/(lamda^2));
for j=1:N+1
    S1(1,j)=S01*u1^(j-1);
    S2(1,j)=S02*u2^(j-1);
    for i=1:2*N+1
        if i==j
            S1(i,j)=S01;
            S2(i,j)=S02;
        end
        if i==2*j-1
            S1(i,j)=S01*d1^(j-1);
            S2(i,j)=S02*d2^(j-1);
        end
```

```
    end
end
for j=3:N+1
    for i=2:2*(j-1)
      S1(i,j)=S1(i-1,j-1);
      S2(i,j)=S2(i-1,j-1);
    end
end
T=zeros(2*N+1,2*N+1,N+1);
U=zeros(2*N+1,2*N+1,N+1);
P=zeros(2*N+1,2*N+1,N+1);
for j=1:1:N+1
    T(:,:,j)=repmat(S1(:,j),1,2*N+1);
    U(:,:,j)=repmat(S2(:,j),1,2*N+1);
    P(:,:,j)=max(strike-min(T(:,:,j),U(:,:,j)'),0);
end
E=zeros(2*N+1,2*N+1,N+1);
E(:,:,N+1)= P(:,:,N+1);
for j=N:-1:1
    for i=1:1:2*j-1
        for k=1:1:2*j-1
            E(i,k,j)=(exp(-
irate*deltaT))*(p1*E(i,k,j+1)+p2*E(i,k+2,j+1)+p3*E(i+2,k+2,j+1)+p4*E(i+2,k,j
+1)+p5*E(i+1,k+1,j+1));
        end
    end
end
EuropeanPut(N)=E(1,1,1);
B=EuropeanPut;
P=B(:,N);
end
```

14. <u>Κώδικας αποτίμησης δικαιώματος πώλησης Αμερικανικού τύπου με τριωνυμικό μοντέλο πλέγματος των Kamrad & Ritchken (2 State-min)</u>

```
function [P] =
TwoStatesAmericanPutTrinKamradRitchkenMin(strike,S01,S02,irate,TTM,s
igma1,sigma2,rho,lamda,N)
deltaT=TTM/N;
u1=exp(sigma1*lamda*sqrt(deltaT));
u2=exp(sigma2*lamda*sqrt(deltaT));
d1=1/u1;
d2=1/u2;
miu1=irate-(sigma1^2/2);
miu2=irate-(sigma2^2/2);
p1=0.25*((1+rho)/(lamda^2)+(sqrt(deltaT)/lamda)*((miu1/sigma1)+(miu2/sig
ma2)));
p2=0.25*((1-rho)/(lamda^2)+(sqrt(deltaT)/lamda)*((miu1/sigma1)-
(miu2/sigma2)));
```

```
p3=0.25*((1+rho)/(lamda^2)+(sqrt(deltaT)/lamda)*(-(miu1/sigma1)-
(miu2/sigma2)));
p4=0.25*((1-rho)/(lamda^2)+(sqrt(deltaT)/lamda)*(-
(miu1/sigma1)+(miu2/sigma2)));
p5=1-(1/(lamda^2));
for j=1:N+1
   S1(1,j)=S01*u1^(j-1);
   S2(1,j)=S02*u2^(j-1);
   for i=1:2*N+1
      if i==j
         S1(i,j)=S01;
         S2(i,j)=S02;
      end
      if i==2*j-1
         S1(i,j)=S01*d1^(j-1);
         S2(i,j)=S02*d2^(j-1);
      end
   end
end
for j=3:N+1
   for i=2:2*(j-1)
    S1(i,j)=S1(i-1,j-1);
    S2(i,j)=S2(i-1,j-1);
   end
end
T=zeros(2*N+1,2*N+1,N+1);
U=zeros(2*N+1,2*N+1,N+1);
P=zeros(2*N+1,2*N+1,N+1);
for j=1:1:N+1
   T(:,:,j)=repmat(S1(:,j),1,2*N+1);
   U(:,:,j)=repmat(S2(:,j),1,2*N+1);
   P(:,:,j)=max(strike-min(T(:,:,j),U(:,:,j)'),0);
end
E=zeros(2*N+1,2*N+1,N+1);
E(:,:,N+1)= P(:,:,N+1);
for j=N:-1:1
   for i=1:1:2*j-1
      for k=1:1:2*j-1
         latticeEurPut=(exp(-
irate*deltaT))*(p1*E(i,k,j+1)+p2*E(i,k+2,j+1)+p3*E(i+2,k+2,j+1)+p4*E(i+2,k,j
+1)+p5*E(i+1,k+1,j+1));
         inValue=max(0,max(strike-(S01*(exp(u1^(i-j)))),strike-
(S02*(exp(u1^(i-j))))));
         E(i,k,j)=max(inValue,latticeEurPut);
      end
   end
end
AmericanPut(N)=E(1,1,1);
B=AmericanPut;
P=B(:,N);
```

End

15. <u>Κώδικας αποτίμησης δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου με τύπο κλειστής μορφής Stulz (2 State-min)</u>

```
function [EurCallPriceMin] =
EuropeanCallStulzMin(strike,S01,S02,irate,TTM,sigma1,sigma2,rho)
aa=sigma2^2; bb=sigma1^2; cc=sqrt(TTM); ac=sigma2*cc ; ab=sigma1*cc;
dc=log(S01/S02); de=log(S02/S01);
sigmatetr=bb+aa-2*rho*sigma1*sigma2;
da=log(S02/strike); db=log(S01/strike); dda=irate-0.5*aa; ddb=irate-0.5*bb;
ds=sqrt(sigmatetr);
gamma1=(da+dda*TTM)/ac;
gamma2=(db+ddb*TTM)/ab;
EurCallPriceMin=S02* bivnormcdf(gamma1+ac,(dc-
0.5*sigmatetr*cc)/(ds*cc),(rho*sigma1-sigma2)/ds)+S01*
bivnormcdf(gamma2+ab,(de-0.5*sigmatetr*cc)/(ds*cc),(rho*sigma2-
sigma1)/(ds))-strike*(exp(-irate*TTM))*bivnormcdf(gamma1,gamma2,rho);
End
```

16. <u>Κώδικας αποτίμησης δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου με τύπο κλειστής μορφής Stulz (2 State-max)</u>

```
function [EurCallPriceMax] =
EuropeanCallStulzMax(strike,S01,S02,irate,TTM,sigma1,sigma2,rho)
c1=blsprice(S01,strike,irate,TTM,sigma1);
c2=blsprice(S02,strike,irate,TTM,sigma2);
EurCallPriceMax=c1+c2-
EuropeanCallStulzMin(strike,S01,S02,irate,TTM,sigma1,sigma2,rho);
end
```

17. <u>Κώδικας αποτίμησης δικαιώματος πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου με τύπο κλειστής μορφής Stulz (2 State-min)</u>

```
function [EurPutPriceMin] =
EuropeanPutStulzMin(strike,S01,S02,irate,TTM,sigma1,sigma2,rho)
SIGMAtetr=(sigma1^2)+(sigma2^2)-2*rho*sigma1*sigma2;
di1=(log(S01/S02)+0.5*SIGMAtetr*sqrt(TTM))/(sqrt(SIGMAtetr)*sqrt(TTM));
di2=di1-(sqrt(SIGMAtetr)*sqrt(TTM));
Df=exp(-irate*TTM);
PriceExchange=-S01+S01*normcdf(di1)-S02*normcdf(di2);
EurPutPriceMin=strike*Df+PriceExchange+EuropeanCallStulzMin(strike,S0
1,S02,irate,TTM,sigma1,sigma2,rho);
end
```

18. <u>Κώδικας εκτίμησης παραμέτρων δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου με μοντέλο του Boyle (1 State)</u>

```
function [x,resnorm,residual,exitflag] = TrCalibrationBoyle(~)
clear all
```

```
global strike;
global S0;
global irate;
global TTM;
global mktprice;
global N;
global k;
strike=zeros(66,15);
S0=zeros(66,15);
irate=zeros(66,15);
TTM=zeros(66,15);
mktprice=zeros(66,15);
N=zeros(66,15);
parameter=zeros(66,2);
res=zeros(66,1);
exit=zeros(66,1);
strike=xlsread('DATA2.xls','strike','A1:O66');
S0=xlsread('DATA2.xls','S0','A1:O66');
irate=xlsread('DATA2.xls','irate','A1:O66');
TTM=xlsread('DATA2.xls','TTM','A1:O66');
mktprice=xlsread('DATA2.xls','mktprice','A1:O66');
N=xlsread('DATA2.xls','N','A1:O66');
trB_matrix=zeros(66,15);
for i=1:65
    x0=[0.25,1.099];
    lb=[0.01,1];
    ub=[1,2.5];
    k=i;
    x=zeros(1,2);
    [x,resnorm,residual,exitflag]=lsqnonlin(@TrBoyleLSQD,x0,lb,ub);
    parameter(i,:)=x;
    res(i)=resnorm;
    exit(i)=exitflag;
    for j=1:15

trB_matrix(i,j)=EuropeanCallTrinBoyle(strike(i,j),S0(i,j),irate(i,j),TTM(i,j),x(1),
x(2),N(i,j));
    end
    pricedata=[trB_matrix];
end
xlswrite('apotelesmataBoyle.xls',res,'results','A1:A66');
xlswrite('apotelesmataBoyle.xls',pricedata,'results','D1:R66');
xlswrite('apotelesmataBoyle.xls',parameter,'results','B1:C66');
end
```

19. Βοηθητικός κώδικας για την εκτίμηση παραμέτρων δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου με μοντέλο του Boyle (1 State)

```
function [trBoyle_lsqd] = TrBoyleLSQD(x)
global strike;
```

```
global S0;
global irate;
global TTM;
global mktprice;
global N;
global k;
trBoyle_lsqd=zeros(66,15);
for j=1:15
    trBoyle_lsqd(1,j)=mktprice(k,j)-
EuropeanCallTrinBoyle(strike(k,j),S0(k,j),irate(k,j),TTM(k,j),x(1),x(2),N(k,j));
end
end
```

20. <u>Κώδικας εκτίμησης παραμέτρων δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου με μοντέλο των Kamrad & Ritchken (1 State)</u>

```
function [x,resnorm,residual,exitflag] = TrCalibrationKamradRitchken(~)
clear all
global strike;
global S0;
global irate;
global TTM;
global mktprice;
global N;
global k;
strike=zeros(67,15);
S0=zeros(67,15);
irate=zeros(67,15);
TTM=zeros(67,15);
mktprice=zeros(67,15);
N=zeros(67,15);
parameter=zeros(67,2);
res=zeros(67,1);
exit=zeros(67,1);
strike=xlsread('DATA2.xls','strike','A1:O67');
S0=xlsread('DATA2.xls','S0','A1:O67');
irate=xlsread('DATA2.xls','irate','A1:O66');
TTM=xlsread('DATA2.xls','TTM','A1:O67');
mktprice=xlsread('DATA2.xls','mktprice','A1:O67');
N=xlsread('DATA2.xls','N','A1:O67');
trKR_matrix=zeros(67,15);
for i=1:65
    x0=[0.25,1.2];
    lb=[0.01,1];
    ub=[1,2];
    k=i;

[x,resnorm,residual,exitflag]=lsqnonlin(@TrKamradRitchkenLSQD,x0,lb,ub)
;
    parameter(i,:)=x;
```

```
    res(i)=resnorm;
    exit(i)=exitflag;

    for j=1:15

trKR_matrix(i,j)=EuropeanCallTrinKamradRitchken(strike(i,j),S0(i,j),irate(i,j),
TTM(i,j),x(1),x(2),N(i,j));
    end
    pricedata=trKR_matrix;
end
xlswrite('apotelesmataKR.xls',res,'results','A1:A67');
xlswrite('apotelesmataKR.xls',pricedata,'results','D1:R67');
xlswrite('apotelesmataKR.xls',parameter,'results','B1:C67');
end
```

21. <u>Βοηθητικός κώδικας για την εκτίμηση παραμέτρων δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου με μοντέλο των Kamrad & Ritchken (1 State)</u>

```
function [trKamradRitchken_lsqd] = TrKamradRitchkenLSQD(x)
global strike;
global S0;
global irate;
global TTM;
global mktprice;
global N;
global k;
trKamradRitchken_lsqd=zeros(67,15);
for j=1:15
    trKamradRitchken_lsqd(j)=mktprice(k,j)-
EuropeanCallTrinKamradRitchken(strike(k,j),S0(k,j),irate(k,j),TTM(k,j),x(1),x
(2),N(k,j));
end
end
```

22. <u>Κώδικας εκτίμησης παραμέτρων δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου με μοντέλο του Boyle (2 State-max)</u>

```
function [x,resnorm,residual,exitflag] = TrCalibrationBoyle2C(~)
clear all
global strike;
global S01;
global S02;
global irate;
global TTM;
global mktpriceCALL;
global N;
global k;
strike=zeros(31,15);
S01=zeros(31,15);
S02=zeros(31,15);
```

```
irate=zeros(31,15);
TTM=zeros(31,15);
mktpriceCALL=zeros(31,15);
N=zeros(31,15);
parameter=zeros(31,4);
res=zeros(31,1);
exit=zeros(31,1);
strike=xlsread('2STATES.xls','strike','A1:O30');
S01=xlsread('2STATES.xls','S01','A1:O30');
S02=xlsread('2STATES.xls','S02','A1:O30');
irate=xlsread('2STATES.xls','irate','A1:O30');
TTM=xlsread('2STATES.xls','TTM','A1:O30');
mktpriceCALL=xlsread('2STATES.xls','mktpriceCALL','A1:O30');
N=xlsread('2STATES.xls','N','A1:O30');
trB_matrix=zeros(31,15);
for i=1:30
   x0=[0.2,0.3,0.5,1.2];
   lb=[0.01,0.01,-1,1];
   ub=[1,1,1,10];
   k=i;
   x=zeros(1,4);
   [x,resnorm,residual,exitflag]=lsqnonlin(@TrBoyle2CLSQD,x0,lb,ub);
   parameter(i,:)=x;
   res(i)=resnorm;
   exit(i)=exitflag;
   for j=1:15

trB_matrix(i,j)=TwoStatesEuropeanCallTrinBoyleMax(strike(i,j),S01(i,j),S02(
i,j),irate(i,j),TTM(i,j),x(1),x(2),x(3),x(4),N(i,j));
   end
   pricedata=[trB_matrix];
end
xlswrite('apotelesmata2states.xls',res,'resultsBoyleC','A1:A30');
xlswrite('apotelesmata2states.xls',pricedata,'resultsBoyleC','G1:U30');
xlswrite('apotelesmata2states.xls',parameter,'resultsBoyleC','B1:E30');
end
```

23. Βοηθητικός κώδικας για την εκτίμηση παραμέτρων δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου με μοντέλο του Boyle (2 State-max)

```
function [trBoyle2C_lsqd] = TrBoyle2CLSQD(x)
global strike;
global S01;
global S02;
global irate;
global TTM;
global mktpriceCALL;
global N;
global k;
trBoyle2C_lsqd=zeros(31,15);
```

```
for j=1:15
    trBoyle2C_lsqd(j)=mktpriceCALL(k,j)-
TwoStatesEuropeanCallTrinBoyleMax(strike(k,j),S01(k,j),S02(k,j),irate(k,j),T
TM(k,j),x(1),x(2),x(3),x(4),N(k,j));
end
end
```

24. <u>Κώδικας εκτίμησης παραμέτρων δικαιώματος πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου με μοντέλο του Boyle (2 State-min)</u>

```
function [x,resnorm,residual,exitflag] = TrCalibrationBoyle2P(~)
clear all
global strike;
global S01;
global S02;
global irate;
global TTM;
global mktpricePUT;
global N;
global k
strike=zeros(31,15);
S01=zeros(31,15);
S02=zeros(31,15);
irate=zeros(31,15);
TTM=zeros(31,15);
mktpricePUT=zeros(31,15);
N=zeros(31,15);
parameter=zeros(31,4);
res=zeros(31,1);
exit=zeros(31,1);
strike=xlsread('2STATES.xls','strike','A1:O30');
S01=xlsread('2STATES.xls','S01','A1:O30');
S02=xlsread('2STATES.xls','S02','A1:O30');
irate=xlsread('2STATES.xls','irate','A1:O30');
TTM=xlsread('2STATES.xls','TTM','A1:O30');
mktpricePUT=xlsread('2STATES.xls','mktpricePUT','A1:O30');
N=xlsread('2STATES.xls','N','A1:O30');
trB_matrix=zeros(31,15);
for i=1:30
    x0=[0.2,0.3,0.5,1.2];
    lb=[0.01,0.01,-1,1];
    ub=[1,1,1,10];
    k=i;
    x=zeros(1,4);
    [x,resnorm,residual,exitflag]=lsqnonlin(@TrBoyle2PLSQD,x0,lb,ub);
    parameter(i,:)=x;
    res(i)=resnorm;
    exit(i)=exitflag;
  for j=1:15
```

```
trB_matrix(i,j)=TwoStatesEuropeanPutTrinBoyleMin(strike(i,j),S01(i,j),S02(i,
j),irate(i,j),TTM(i,j),x(1),x(2),x(3),x(4),N(i,j));
    end
    pricedata=[trB_matrix];
end
xlswrite('apotelesmata2states.xls',res,'resultsBoyleP','A1:A30');
xlswrite('apotelesmata2states.xls',pricedata,'resultsBoyleP','G1:U30');
xlswrite('apotelesmata2states.xls',parameter,'resultsBoyleP','B1:E30');
end
```

25. Βοηθητικός κώδικας για την εκτίμηση παραμέτρων δικαιώματος πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου με μοντέλο του Boyle (2 State-min)

```
function [trBoyle2P_lsqd] = TrBoyle2PLSQD(x)
global strike;
global S01;
global S02;
global irate;
global TTM;
global mktpricePUT;
global N;
global k;
trBoyle2P_lsqd=zeros(31,15);
for j=1:15
    trBoyle2P_lsqd(j)=mktpricePUT(k,j)-
TwoStatesEuropeanPutTrinBoyleMin(strike(k,j),S01(k,j),S02(k,j),irate(k,j),T
TM(k,j),x(1),x(2),x(3),x(4),N(k,j));
end
end
```

26. Κώδικας εκτίμησης παραμέτρων δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου με μοντέλο των Kamrad & Ritchken (2 State-max)

```
function[x,resnorm,residual,exitflag]= TrCalibrationKamradRitchken2C(~)
clear all
global strike;
global S01;
global S02;
global irate;
global TTM;
global mktpriceCALL;
global N;
global k;
strike=zeros(31,15);
S01=zeros(31,15);
S02=zeros(31,15);
irate=zeros(31,15);
TTM=zeros(31,15);
mktpriceCALL=zeros(31,15);
```

```
N=zeros(31,15);
parameter=zeros(31,4);
res=zeros(31,1);
exit=zeros(31,1);
strike=xlsread('2STATES.xls','strike','A1:O30');
S01=xlsread('2STATES.xls','S01','A1:O30');
S02=xlsread('2STATES.xls','S02','A1:O30');
irate=xlsread('2STATES.xls','irate','A1:O30');
TTM=xlsread('2STATES.xls','TTM','A1:O30');
mktpriceCALL=xlsread('2STATES.xls','mktpriceCALL','A1:O30');
N=xlsread('2STATES.xls','N','A1:O30');
trKR_matrix=zeros(31,15);
for i=1:30
   x0=[0.2,0.3,0.5,1.2];
   lb=[0.01,0.01,-1,1];
   ub=[1,1,1,10];
   k=i;
   x=zeros(1,4);

[x,resnorm,residual,exitflag]=lsqnonlin(@TrKamradRitchken2CLSQD,x0,lb,
ub);
   parameter(i,:)=x;
   res(i)=resnorm;
   exit(i)=exitflag;
     for j=1:15

trKR_matrix(i,j)=TwoStatesEuropeanCallTrinKamradRitchkenMax(strike(k,j)
,S01(k,j),S02(k,j),irate(k,j),TTM(k,j),x(1),x(2),x(3),x(4),N(k,j));
   end
   pricedata=trKR_matrix;
end
xlswrite('apotelesmata2states.xls',res,'resultsKRC','A1:A30');
xlswrite('apotelesmata2states.xls',pricedata,'resultsKRC','G1:U30');
xlswrite('apotelesmata2states.xls',parameter,'resultsKRC','B1:E30');
end
```

27. <u>Βοηθητικός κώδικας για την εκτίμηση παραμέτρων δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου με μοντέλο των Kamrad & Ritchken (2 State-max)</u>

```
function [trKamradRitchken2C_lsqd] = TrKamradRitchken2CLSQD(x)
global strike;
global S01;
global S02;
global irate;
global TTM;
global mktpriceCALL;
global N;
global k
trKamradRitchken2C_lsqd=zeros(31,15);
for j=1:15
```

```
    trKamradRitchken2C_lsqd(j)=mktpriceCALL(k,j)-
TwoStatesEuropeanCallTrinKamradRitchkenMax(strike(k,j),S01(k,j),S02(k,j
),irate(k,j),TTM(k,j),x(1),x(2),x(3),x(4),N(k,j));
end
end
```

28. <u>Κώδικας εκτίμησης παραμέτρων δικαιώματος πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου με μοντέλο των Kamrad & Ritchken (2 State-min)</u>

```
function [x,resnorm,residual,exitflag] = TrCalibrationKamradRitchken2P(~)
clear all
global strike;
global S01;
global S02;
global irate;
global TTM;
global mktpricePUT;
global sigma1;
global sigma2;
global rho;
global N;
global k;
strike=zeros(31,15);
S01=zeros(31,15);
S02=zeros(31,15);
irate=zeros(31,15);
TTM=zeros(31,15);
mktpricePUT=zeros(31,15);
sigma1=zeros(31,15);
sigma2=zeros(31,15);
rho=zeros(31,15);
N=zeros(31,15);
parameter=zeros(31,4);
res=zeros(31,1);
exit=zeros(31,1);
strike=xlsread('2STATES.xls','strike','A1:O30');
S01=xlsread('2STATES.xls','S01','A1:O30');
S02=xlsread('2STATES.xls','S02','A1:O30');
irate=xlsread('2STATES.xls','irate','A1:O30');
TTM=xlsread('2STATES.xls','TTM','A1:O30');
mktpricePUT=xlsread('2STATES.xls','mktpricePUT','A1:O30');
N=xlsread('2STATES.xls','N','A1:O30');
trKR_matrix=zeros(31,15);
for i=1:30
    x0=[0.2,0.3,0.5,1.2];
    lb=[0.01,0.01,-1,1];
    ub=[1,1,1,10];
    k=i;
    x=zeros(1,4);
```

```
[x,resnorm,residual,exitflag]=lsqnonlin(@TrKamradRitchken2PLSQD,x0,lb,
ub);
    parameter(i,:)=x;
    res(i)=resnorm;
    exit(i)=exitflag;
    for j=1:15

trKR_matrix(i,j)=TwoStatesEuropeanPutTrinKamradRitchkenMin(strike(k,j),
S01(k,j),S02(k,j),irate(k,j),TTM(k,j),x(1),x(2),x(3),x(4),N(k,j));
    end
    pricedata=trKR_matrix;
end
xlswrite('apotelesmata2states.xls',res,'resultsKRP','A1:A30');
xlswrite('apotelesmata2states.xls',pricedata,'resultsKRP','G1:U30');
xlswrite('apotelesmata2states.xls',parameter,'resultsKRP','B1:E30');
end
```

29. Βοηθητικός κώδικας για την εκτίμηση παραμέτρων δικαιώματος πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου με μοντέλο των Kamrad & Ritchken (2 State-min)

```
function [trKamradRitchken2P_lsqd] = TrKamradRitchken2PLSQD(x)
global strike;
global S01;
global S02;
global irate;
global TTM;
global mktpricePUT;
global N;
global k;
trKamradRitchken2P_lsqd=zeros(31,15);
for j=1:15
    trKamradRitchken2P_lsqd(j)=mktpricePUT(k,j)-
TwoStatesEuropeanPutTrinKamradRitchkenMin(strike(k,j),S01(k,j),S02(k,j),
irate(k,j),TTM(k,j),x(1),x(2),x(3),x(4),N(k,j));
end
end
```

30. Κώδικας εύρεσης προβλεπτικής ικανότητας δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου με μοντέλο του Boyle (1 State)

```
function [pricedata,pricedata_squares,resB] = forecastBoyle(~)
clear all
sigma=0.23519;
lamda=1.38685;
strike=zeros(15,15);
S0=zeros(15,15);
irate=zeros(15,15);
TTM=zeros(15,15);
mktprice=zeros(15,15);
N=zeros(15,15);
```

```
strike=xlsread('DATA22.xls','strike','A1:O15');
S0=xlsread('DATA22.xls','S0','A1:O15');
irate=xlsread('DATA22.xls','irate','A1:O15');
TTM=xlsread('DATA22.xls','TTM','A1:O15');
mktprice=xlsread('DATA22.xls','mktprice','A1:O15');
N=xlsread('DATA22.xls','N','A1:O15');
resB=zeros(15,1);
trB_matrix=zeros(15,15);
trB_matrix_squares=zeros(15,15);
for i=6:15
   for j=1:15
        trB_matrix(i,j)=abs(mktprice(i,j)-
EuropeanCallTrinBoyle(strike(i,j),S0(i,j),irate(i,j),TTM(i,j),sigma,lamda,N(i,j))
);
   trB_matrix_squares(i,j)=(abs(mktprice(i,j)-
EuropeanCallTrinBoyle(strike(i,j),S0(i,j),irate(i,j),TTM(i,j),sigma,lamda,N(i,j))
)^2);
   end
pricedata=[trB_matrix];
pricedata_squares=[trB_matrix_squares];
end
for i=6:15
   resB(i)=(sum(trB_matrix_squares(i,:)));
end
xlswrite('apotelesmataBoyle.xls',pricedata,'forecast','A1:O15');
xlswrite('apotelesmataBoyle.xls',pricedata_squares,'forecast','A17:O31');
xlswrite('apotelesmataBoyle.xls',resB,'forecast','A33:A47');
end
```

31. Κώδικας εύρεσης προβλεπτικής ικανότητας δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου με μοντέλο των Kamrad & Ritchken (1 State)

```
function [pricedata,pricedata_squares,resKR] = forecastKR(~)
clear all
sigma=0.23525;
lamda=1.53438;
strike=zeros(15,15);
S0=zeros(15,15);
irate=zeros(15,15);
TTM=zeros(15,15);
mktprice=zeros(15,15);
N=zeros(15,15);
strike=xlsread('DATA22.xls','strike','A1:O15');
S0=xlsread('DATA22.xls','S0','A1:O15');
irate=xlsread('DATA22.xls','irate','A1:O15');
TTM=xlsread('DATA22.xls','TTM','A1:O15');
mktprice=xlsread('DATA22.xls','mktprice','A1:O15');
N=xlsread('DATA22.xls','N','A1:O15');
trKR_matrix=zeros(15,15);
resKR=zeros(15,1);
```

```
trKR_matrix_squares=zeros(15,15);
for i=6:15
   for j=1:15
   trKR_matrix(i,j)=abs(mktprice(i,j)-
EuropeanCallTrinKamradRitchken(strike(i,j),S0(i,j),irate(i,j),TTM(i,j),sigma,la
mda,N(i,j)));
   trKR_matrix_squares(i,j)=(abs(mktprice(i,j)-
EuropeanCallTrinKamradRitchken(strike(i,j),S0(i,j),irate(i,j),TTM(i,j),sigma,la
mda,N(i,j))))^2);
   end
pricedata=[trKR_matrix];
pricedata_squares=[trKR_matrix_squares];
end
for i=6:15
   resKR(i)=(sum(trKR_matrix_squares(i,:)));
end
xlswrite('apotelesmataKR.xls',pricedata,'forecast','A1:O15');
xlswrite('apotelesmataKR.xls',pricedata_squares,'forecast','A17:O31');
xlswrite('apotelesmataKR.xls',resKR,'forecast','A33:A47');
end
```

32. <u>Κώδικας εύρεσης προβλεπτικής ικανότητας δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου με μοντέλο του Boyle (2 State-max)</u>

```
function [pricedata,pricedata_squares,resB] = forecastBoyle2C(~)
clear all
sigma1=0.3481091;
sigma2=0.136381775;
rho=0.025378025;
lamda=2.65073373;
strike=zeros(31,15);
S01=zeros(31,15);
S02=zeros(31,15);
irate=zeros(31,15);
TTM=zeros(31,15);
mktpriceCALL=zeros(31,15);
N=zeros(31,15);
strike=xlsread('2STATES.xls','strike','A1:O30');
S01=xlsread('2STATES.xls','S01','A1:O30');
S02=xlsread('2STATES.xls','S02','A1:O30');
irate=xlsread('2STATES.xls','irate','A1:O30');
TTM=xlsread('2STATES.xls','TTM','A1:O30');
mktpriceCALL=xlsread('2STATES.xls','mktpriceCALL','A1:O30');
N=xlsread('2STATES.xls','N','A1:O30');
resB=zeros(31,1);
trB_matrix=zeros(31,15);
trB_matrix_squares=zeros(31,15);
for i=1:10
   for j=1:15
```

```
        trB_matrix(i,j)=abs(mktpriceCALL(i,j)-
TwoStatesEuropeanCallTrinBoyleMax(strike(i,j),S01(i,j),S02(i,j),irate(i,j),TT
M(i,j),sigma1,sigma2,rho,lamda,N(i,j)));
    trB_matrix_squares(i,j)=(abs(mktpriceCALL(i,j)-
TwoStatesEuropeanCallTrinBoyleMax(strike(i,j),S01(i,j),S02(i,j),irate(i,j),TT
M(i,j),sigma1,sigma2,rho,lamda,N(i,j))))^2);
    end
pricedata=[trB_matrix];
pricedata_squares=[trB_matrix_squares];
end
for i=1:10
    resB(i)=(sum(trB_matrix_squares(i,:)));
end
xlswrite('apotelesmata2states.xls',pricedata,'forecastBC','A1:O15');
xlswrite('apotelesmata2states.xls',pricedata_squares,'forecastBC','A17:O31'
);
xlswrite('apotelesmata2states.xls',resB,'forecastBC','A33:A47');
end
```

33. Κώδικας εύρεσης προβλεπτικής ικανότητας δικαιώματος πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου με μοντέλο του Boyle (2 State-min)

```
function [pricedata,pricedata_squares,resB] = forecastBoyle2P(~)
clear all
sigma1=0.33901766;
sigma2=0.3864789;
rho=-0.231213233;
lamda=4.446724772;
strike=zeros(31,15);
S01=zeros(31,15);
S02=zeros(31,15);
irate=zeros(31,15);
TTM=zeros(31,15);
mktpricePUT=zeros(31,15);
N=zeros(31,15);
strike=xlsread('2STATES.xls','strike','A1:O30');
S01=xlsread('2STATES.xls','S01','A1:O30');
S02=xlsread('2STATES.xls','S02','A1:O30');
irate=xlsread('2STATES.xls','irate','A1:O30');
TTM=xlsread('221STATES.xls','TTM','A1:O30');
mktpricePUT=xlsread('2STATES.xls','mktpricePUT','A1:O30');
N=xlsread('2STATES.xls','N','A1:O30');
resB=zeros(31,1);
trB_matrix=zeros(31,15);
trB_matrix_squares=zeros(31,15);
for i=1:10
    for j=1:15
        trB_matrix(i,j)=abs(mktpricePUT(i,j)-
TwoStatesEuropeanPutTrinBoyleMin(strike(i,j),S01(i,j),S02(i,j),irate(i,j),TTM
(i,j),sigma1,sigma2,rho,lamda,N(i,j)));
```

```
    trB_matrix_squares(i,j)=(abs(mktpricePUT(i,j)-
TwoStatesEuropeanPutTrinBoyleMin(strike(i,j),S01(i,j),S02(i,j),irate(i,j),TTM
(i,j),sigma1,sigma2,rho,lamda,N(i,j)))^2);
    end
pricedata=[trB_matrix];
pricedata_squares=[trB_matrix_squares];
end
for i=1:10
    resB(i)=(sum(trB_matrix_squares(i,:)));
end
xlswrite('apotelesmata2states.xls',pricedata,'forecastBP','A1:O15');
xlswrite('apotelesmata2states.xls',pricedata_squares,'forecastBP','A17:O31'
);
xlswrite('apotelesmata2states.xls',resB,'forecastBP','A33:A47');
end
```

34. <u>Κώδικας εύρεσης προβλεπτικής ικανότητας δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου με μοντέλο των Kamrad & Ritchken (2 State-max)</u>

```
function [pricedata,pricedata_squares,resB] = forecastKR2C(~)
clear all
sigma1=0.108488146;
sigma2=0.369564712;
rho=0.544435976;
lamda=1.929653902;
strike=zeros(31,15);
S01=zeros(31,15);
S02=zeros(31,15);
irate=zeros(31,15);
TTM=zeros(31,15);
mktpriceCALL=zeros(31,15);
N=zeros(31,15);
strike=xlsread('2STATES.xls','strike','A1:O30');
S01=xlsread('2STATES.xls','S01','A1:O30');
S02=xlsread('2STATES.xls','S02','A1:O30');
irate=xlsread('2STATES.xls','irate','A1:O30');
TTM=xlsread('2STATES.xls','TTM','A1:O30');
mktpriceCALL=xlsread('2STATES.xls','mktpriceCALL','A1:O30');
N=xlsread('2STATES.xls','N','A1:O30');
resB=zeros(31,1);
trB_matrix=zeros(31,15);
trB_matrix_squares=zeros(31,15);
for i=1:10
    for j=1:15
        trB_matrix(i,j)=abs(mktpriceCALL(i,j)-
TwoStatesEuropeanCallTrinKamradRitchkenMax(strike(i,j),S01(i,j),S02(i,j),i
rate(i,j),TTM(i,j),sigma1,sigma2,rho,lamda,N(i,j)));
    trB_matrix_squares(i,j)=(abs(mktpriceCALL(i,j)-
TwoStatesEuropeanCallTrinKamradRitchkenMax(strike(i,j),S01(i,j),S02(i,j),i
rate(i,j),TTM(i,j),sigma1,sigma2,rho,lamda,N(i,j)))^2);
```

```
   end
pricedata=[trB_matrix];
pricedata_squares=[trB_matrix_squares];
end
for i=1:10
   resB(i)=(sum(trB_matrix_squares(i,:)));
end
xlswrite('apotelesmata2states.xls',pricedata,'forecastKRC','A1:O15');
xlswrite('apotelesmata2states.xls',pricedata_squares,'forecastKRC','A17:O3
1');
xlswrite('apotelesmata2states.xls',resB,'forecastKRC','A33:A47');
end
```

35. Κώδικας εύρεσης προβλεπτικής ικανότητας δικαιώματος πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου με μοντέλο των Kamrad & Ritchken (2 State-min)

```
function [pricedata,pricedata_squares,resB] = forecastKR2P(~)
clear all
sigma1=0.272124425;
sigma2=0.238828585;
rho=0.569275707;
lamda=1.707886647;
strike=zeros(31,15);
S01=zeros(31,15);
S02=zeros(31,15);
irate=zeros(31,15);
TTM=zeros(31,15);
mktpricePUT=zeros(31,15);
N=zeros(31,15);
strike=xlsread('2STATES.xls','strike','A1:O30');
S01=xlsread('2STATES.xls','S01','A1:O30');
S02=xlsread('2STATES.xls','S02','A1:O30');
irate=xlsread('2STATES.xls','irate','A1:O30');
TTM=xlsread('2STATES.xls','TTM','A1:O30');
mktpricePUT=xlsread('2STATES.xls','mktpricePUT','A1:O30');
N=xlsread('2STATES.xls','N','A1:O30');
resB=zeros(31,1);
trB_matrix=zeros(31,15);
trB_matrix_squares=zeros(31,15);
for i=1:10
   for j=1:15
        trB_matrix(i,j)=abs(mktpricePUT(i,j)-
TwoStatesEuropeanPutTrinKamradRitchkenMin(strike(i,j),S01(i,j),S02(i,j),ir
ate(i,j),TTM(i,j),sigma1,sigma2,rho,lamda,N(i,j)));
   trB_matrix_squares(i,j)=(abs(mktpricePUT(i,j)-
TwoStatesEuropeanPutTrinKamradRitchkenMin(strike(i,j),S01(i,j),S02(i,j),ir
ate(i,j),TTM(i,j),sigma1,sigma2,rho,lamda,N(i,j))))^2);
   end
pricedata=[trB_matrix];
pricedata_squares=[trB_matrix_squares];
```

```
end
for i=1:10
   resB(i)=(sum(trB_matrix_squares(i,:)));
end
xlswrite('apotelesmata2states.xls',pricedata,'forecastKRP','A1:O15');
xlswrite('apotelesmata2states.xls',pricedata_squares,'forecastKRP','A17:O3
1');
xlswrite('apotelesmata2states.xls',resB,'forecastKRP','A33:A47');
end
```

36. <u>Κώδικας για την δημιουργία μονοπατιών τιμών για τις συσχετισμένες μετοχές 1 & 2</u>

```
function [SPaths1, SPaths2]=Asset12Paths(~)
randn('state',0) ;
S01=40;
S02=40;
mu1=0.06;
mu2=0.08;
sigma1=0.2;
sigma2=0.3;
T=30/365;
NSteps=30;
NRepl=1;
rho=0.5;
SPaths1=zeros(NRepl,1+NSteps);
SPaths2=zeros(NRepl,1+NSteps);
SPaths1(:,1)=S01;
SPaths2(:,1)=S02;
dt=T/NSteps;
nudt1=(mu1-0.5*sigma1^2)*dt
nudt2=(mu2-0.5*sigma2^2)*dt;
sidt1=sigma1*sqrt(dt);
sidt2=sigma2*sqrt(dt);
E=randn(NRepl,1);
H=randn(NRepl,1);
Z=(rho*E)+(sqrt(1-rho^2))*H;
for i=1:NRepl
   for j=1:NSteps
        SPaths1(i,j+1)=SPaths1(i,j)*exp(nudt1+sidt1*E(i,1));
        SPaths2(i,j+1)=SPaths2(i,j)*exp(nudt2+sidt2*Z(i,1));
   end
price1=[SPaths1'];
price2=[SPaths2'];
end
xlswrite('2STATES.xls',price1,'S01','A1:A70');
xlswrite('2STATES.xls',price2,'S02','A1:A70');
end
```

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Άρθρα

1. Black F. and Scholes M. (1973) "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, Vol. 81, pp. 637-654.

2. Boyle, P. P. (1988) "A Lattice Framework for Options with Two State Variables", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 23, pp. 1-12.

3. Boyle, P. P. and Kirzner, E. F. (1985) "Pricing Complex Options: Echo-Bay Ltd. Gold Purchase Warrants", *Canadian Journal of Administrative Sciences*, Vol. 2, pp. 2294-306.

4. Brennan, M. J. and Schwartz, E. S. (1978) "Finite Difference Methods and Jump Processes Arising in the Pricing of Contingent Claims: A Synthesis", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 13, pp. 461-474.

5. Cox, J. and Ross S. (1976) “The valuation of options for alternative stochastic processes”, *Journal of Financial Economics*, Vol.3, pp. 145-166.

6. Cox, J., Ross S. and Rubinstein, M. (1979) "Option Pricing: A Simplified Approach", *Journal of Financial Economics*, Vol. 7, pp. 229-264.

7. Feiger, G. and Jacquillat, B. (1979) "Currency option bonds, puts and calls on spot exchange and the hedging of contingent claims", *Journal of Finance*, Vol. 34, pp. 1129-1139.

8. Fischer, S. (1978) "Call option pricing when the exercise price is uncertain ", *Journal of Finance*, Vol. 33, pp. 169-176.
9. Garman, M. (1976) “A General theory of asset valuation under diffusion state processes”, *Working Paper*, No.50. University of California, Berkeley.

10. Geske, R. and Shastri, K. (1985) "Valuation by Approximation: A Comparison of Alternative Option Valuation Techniques", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 20, pp. 45-71.

11. Harrison J.M. and Kreps D.M. (1979) “Martingales and arbitrage in multiperiod securities market”, *Journal of Economic Theory*, Vol.20, pp. 381-408.

12. Hull, J. and White, A. (1987) "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities", *Journal of Finance*, Vol. 42, pp. 281-300.

13. Ingersoll, J.E. (1982) "The pricing of commodity-linked bonds: Discussion", *Journal of Finance*, Vol. 37, pp. 540-541.

14. Johnson, H. (1987) "Options on the Maximum or the Minimum of Several Assets", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 22, pp. 277-283.

15. Johnson, H. and Shanno, D. (1987) "Option Pricing when the Variance is Changing", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 22, pp. 143-151.

16. Kamrad, B. and Ritchken, P. (1991) "Multinomial Approximating Models for Options with k State Variables", *Management Science*, Vol. 37, pp. 1640-1652.

17. Levenberg, K. (1944) "A Method for the Solution of Certain Problems in Least-Squares", *Quarterly Applied Mathematics*, Vol.2, pp. 164–168.

18. Margrabe, W. (1978) "The value of an option to exchange one asset for another ", *Journal of Finance*, Vol. 33, pp. 177-186.

19. Marquardt, D.(1963) "An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters," *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol. 11, pp. 431-441.

20. Merton, R.C. (1971) "Optimum consumption and portfolio rules in a

continuous-time model", *Journal of Economic Theory*, Vol. 3, pp. 373-413.

21. Merton, R.C. (1973) "The theory of rational option pricing", *The Bell Journal of Economics and Management Science*, Vol 4, pp. 141-183.

22. Myers, S. (1977) "Determinants of corporate borrowing", *Journal of Financial Economics*, Vol. 5, pp. 147-175.

23. Officer, L.H. and Willet, T.O. (1980) " The covered arbitrage schedule: A critical survey of recent developments", *Journal of Money, Credit and Banking*, Vol. 2, pp. 247-257.

24. Parkinson, M. (1977) "Option Pricing: The American Put", *Journal of Business*, Vol. 50, pp. 21-36.

25. Schwartz, E.S. (1982) "The Pricing of Commodity Linked Bonds", *Journal of Finance*, Vol. 37, pp. 525-541.

26. Stapleton, R.C, and Subrahmanyan, M.G. (1984) "The Valuation of Options when Asset Returns are Generated by a Binomial Process", *The Journal of Finance*, Vol. 39, pp. 1525-1540.

27. Stulz, R.M. (1982) "Options on the Minimum or the Maximum of Two Risky Assets: Analysis and Applications", *Journal of Financial Economics*, Vol. 10, pp. 161-185.

28. Stulz, R.M. and Johnson H. (1985) "An Analysis of Secured Debt", *Journal of Financial Economics*, Vol. 14, pp. 501-521.

<u>Βιβλία</u>

1. Brandimarte P. (2006) "*Numerical Methods in Finance and Economics*", 2th edition, New Jersey, Pbl Wiley.

2. Hull J. (2015) "*Options, Futures and other Derivatives*", 9th edition, New York, Pearson.

3. Saunders, A and Cornett, M.M (2017) “*Financial Institutions Management: A Risk Management Approach*”, 8th edition, New York, McGraw Hill.

Ακαδημαϊκές Σημειώσεις- Εργασίες

1. Σημειώσεις μαθήματος «*Ειδικά Θέματα Ποσοτικών Μεθόδων στη Χρηματοοικονομική*», Νικόλαος Εγγλέζος, Χειμερινό Εξάμηνο 2019, ΠΜΣ Χρηματοοικονομικής και Τραπεζικής Διοικητικής, Πανεπιστήμιο Πειραιά.

2. Σημειώσεις μαθήματος «*Παράγωγα Αξιόγραφα*», Νικόλαος Εγγλέζος, Εαρινό Εξάμηνο 2019, ΠΜΣ Χρηματοοικονομικής και Τραπεζικής Διοικητικής, Πανεπιστήμιο Πειραιά.

3. Διπλωματική Εργασία του Johannes Barend van Biljon με τίτλο “*A comparative study of tree-based models and their application in modern finance*” (University of Pretoria-May 2014).

Ιστοσελίδες

1. www.euretirio.com

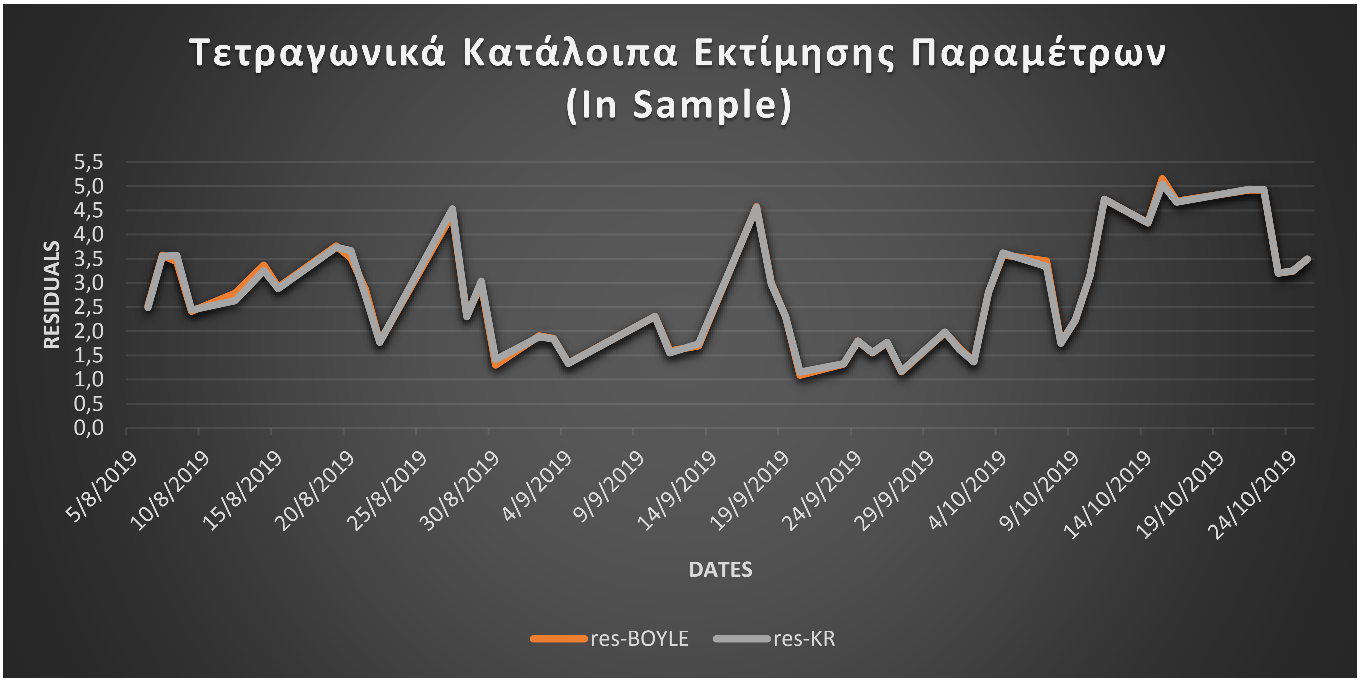
2. www.investopedia.com

3. https://ch.mathworks.com/

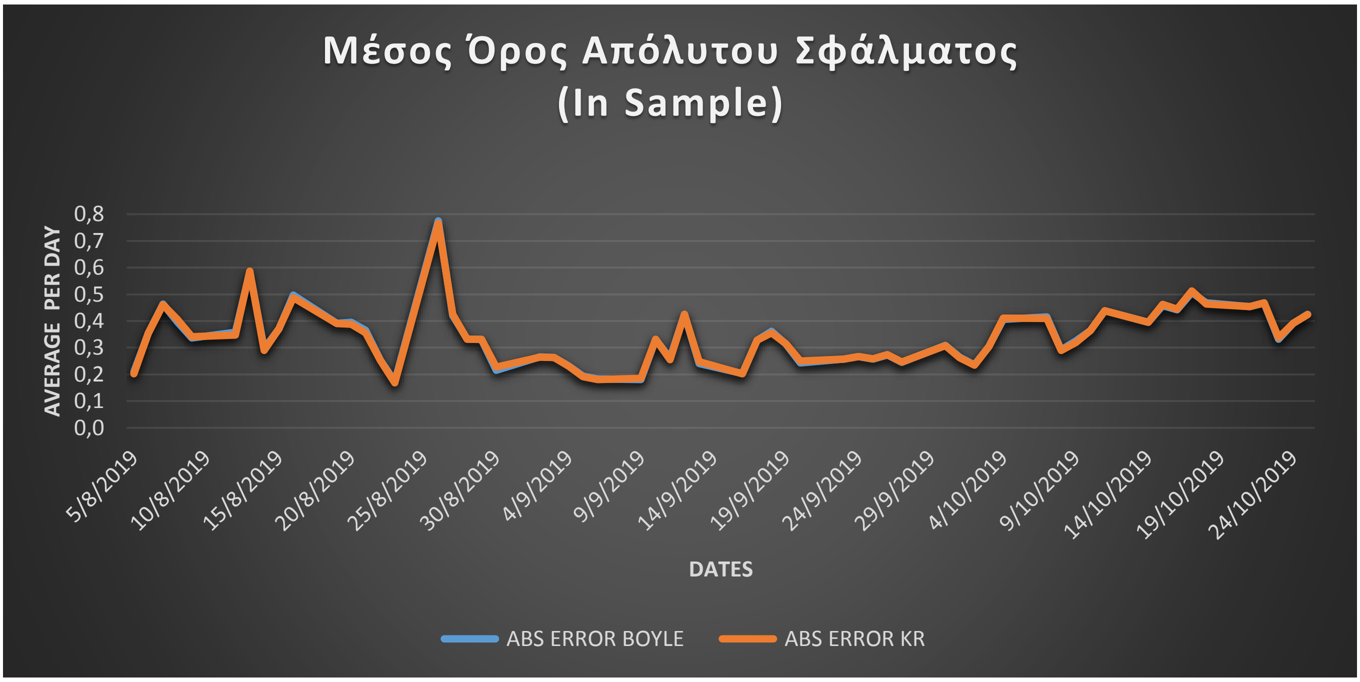
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ

Διαγράμματα εμπειρικής μελέτης (1 State)

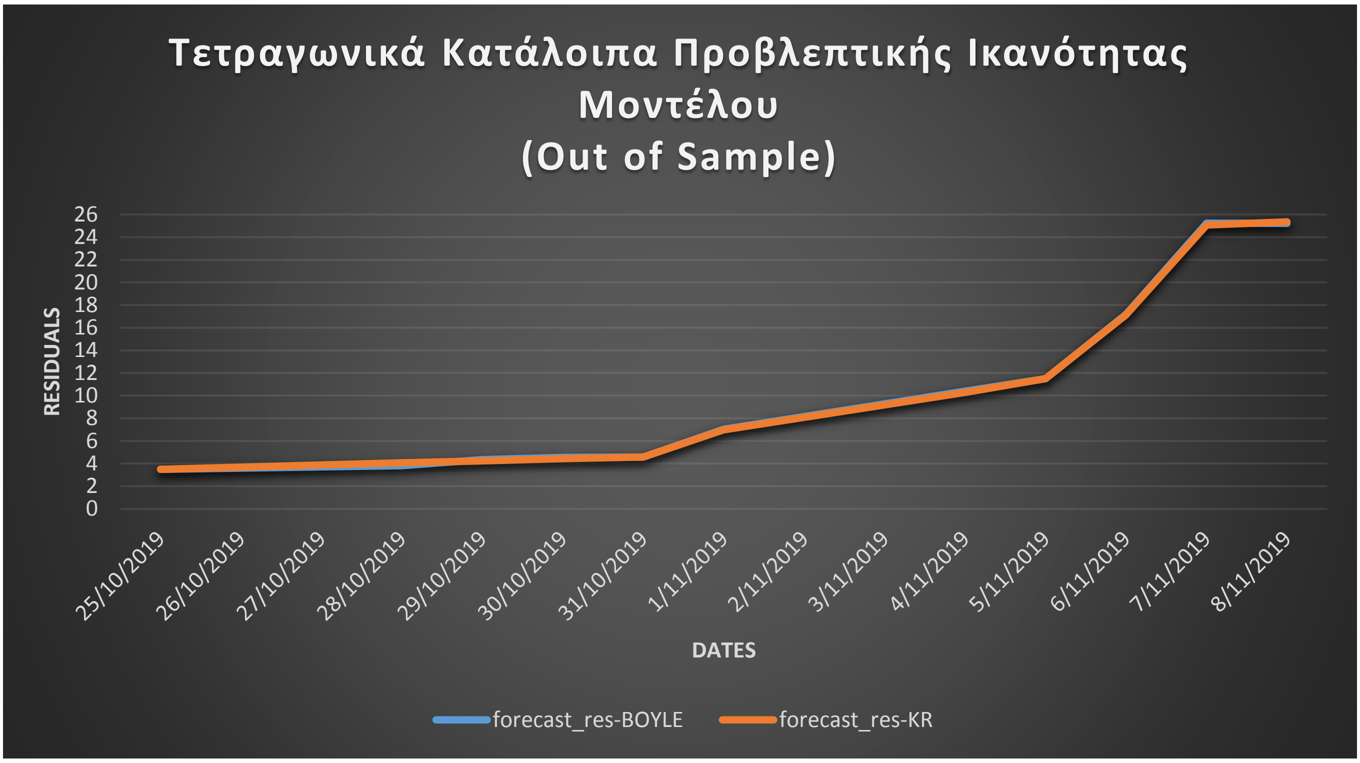
Διάγραμμα 1



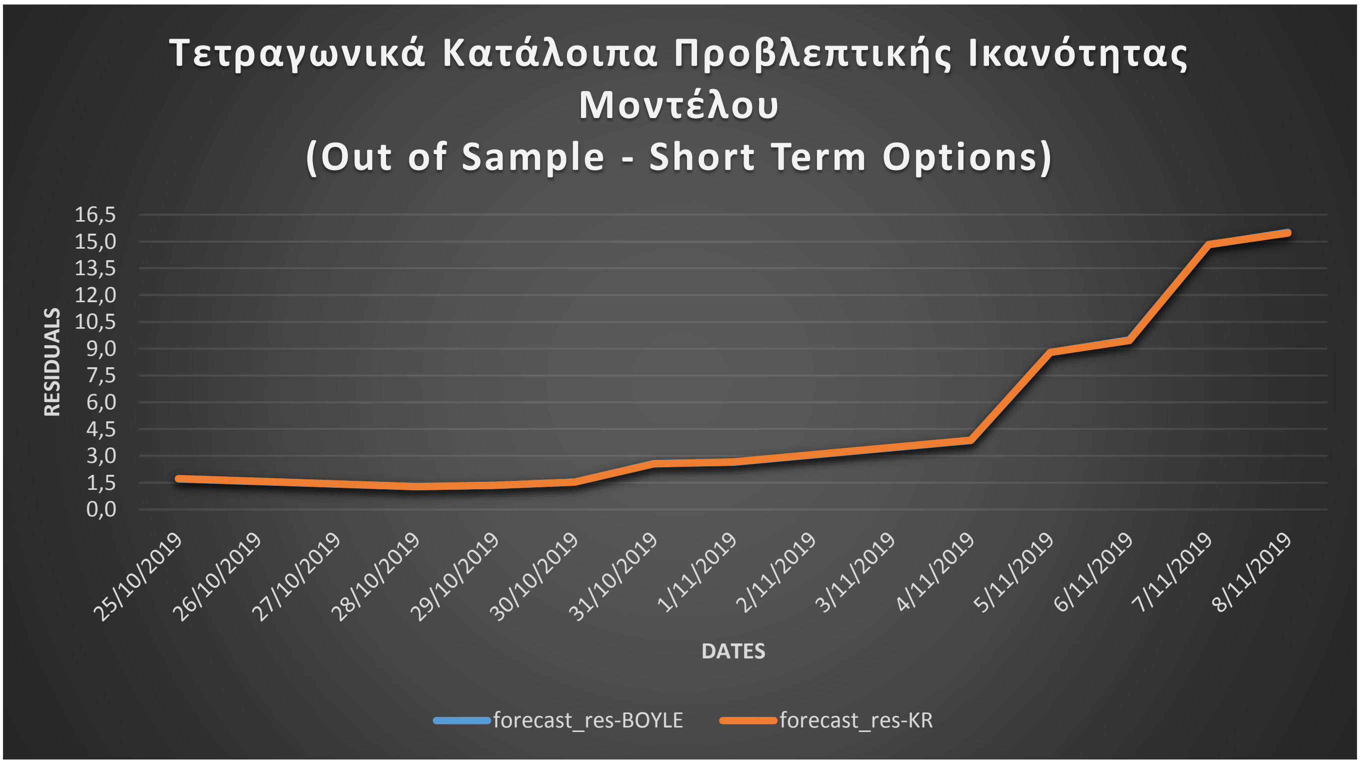
Διάγραμμα 2



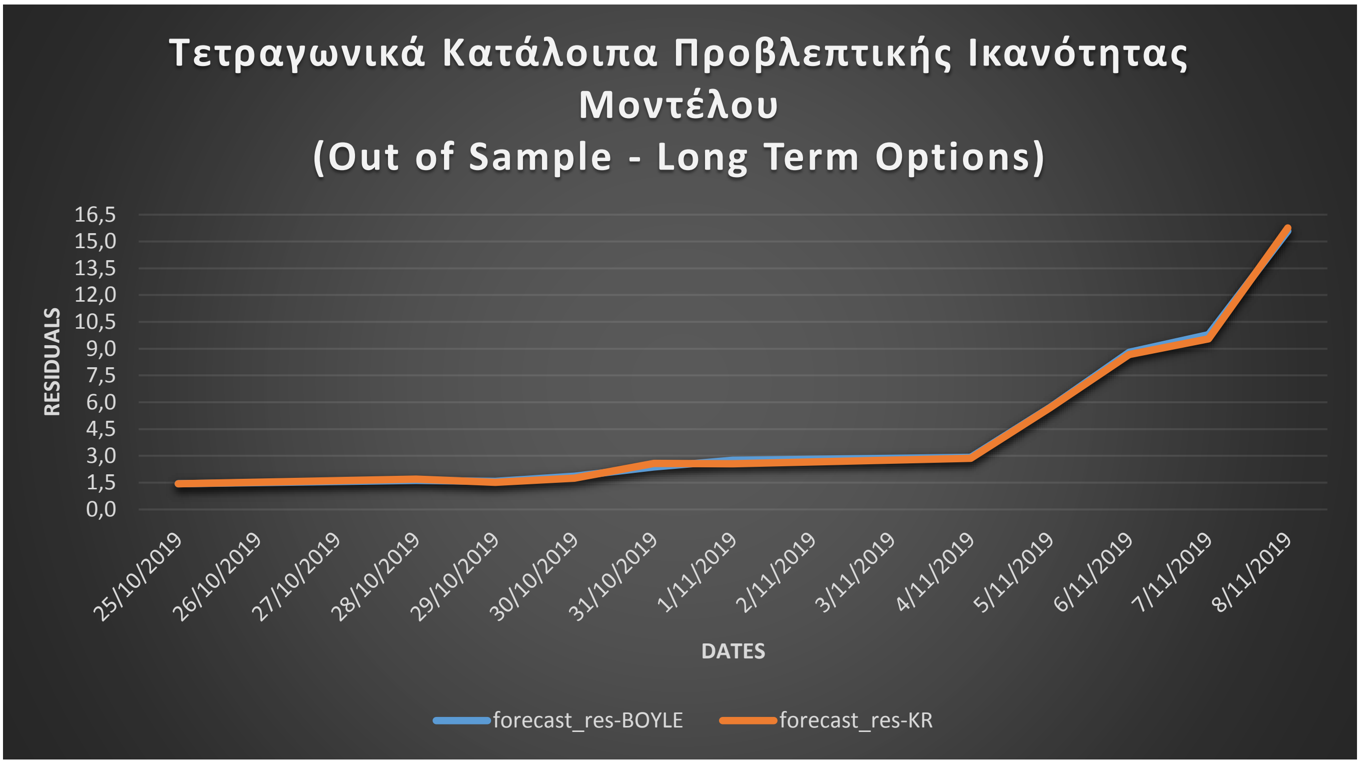
Διάγραμμα 3



Διάγραμμα 3.1



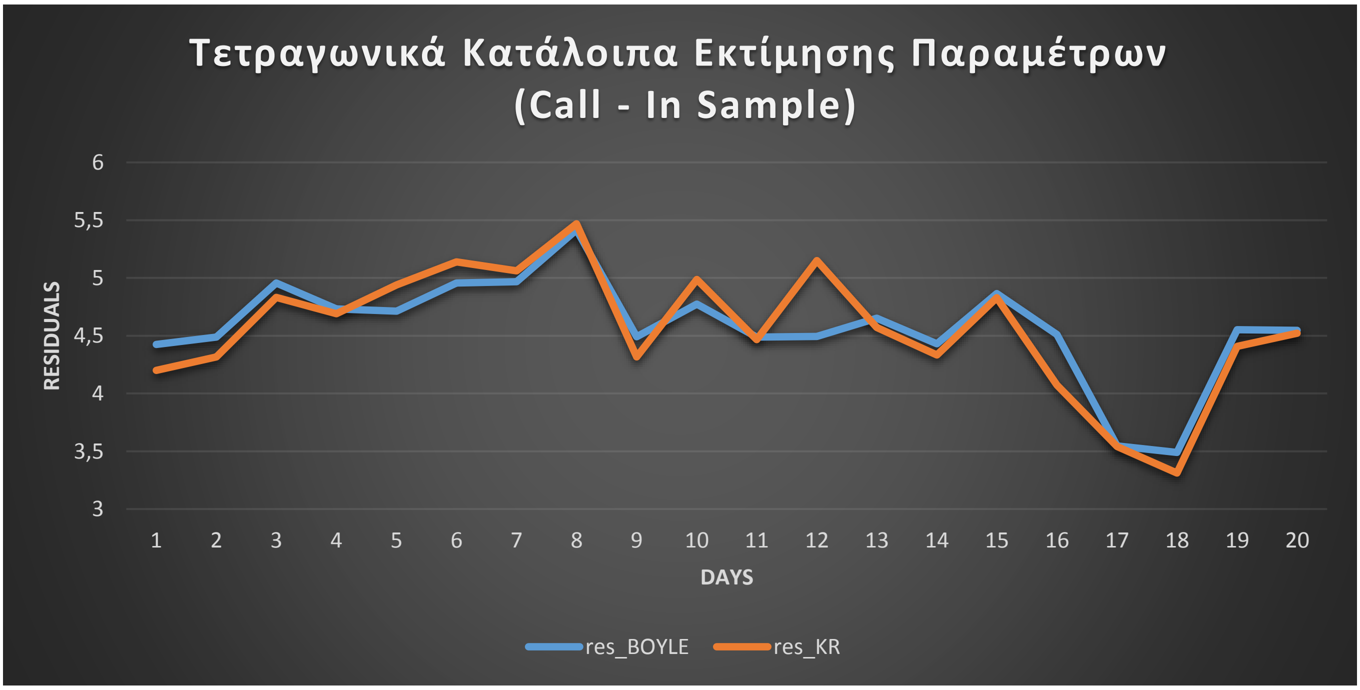
Διάγραμμα 3.2



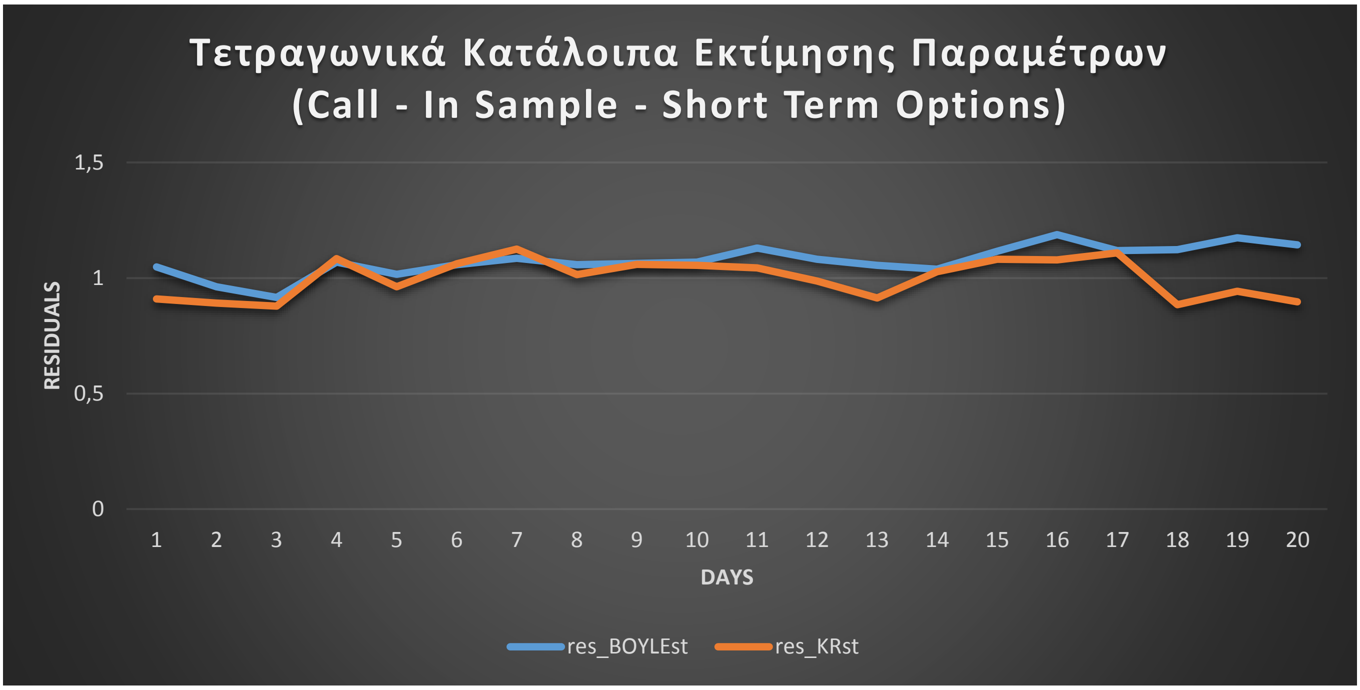
Διαγράμματα αριθμητικής ανάλυσης (2 States)

Δικαιώματα Αγοράς

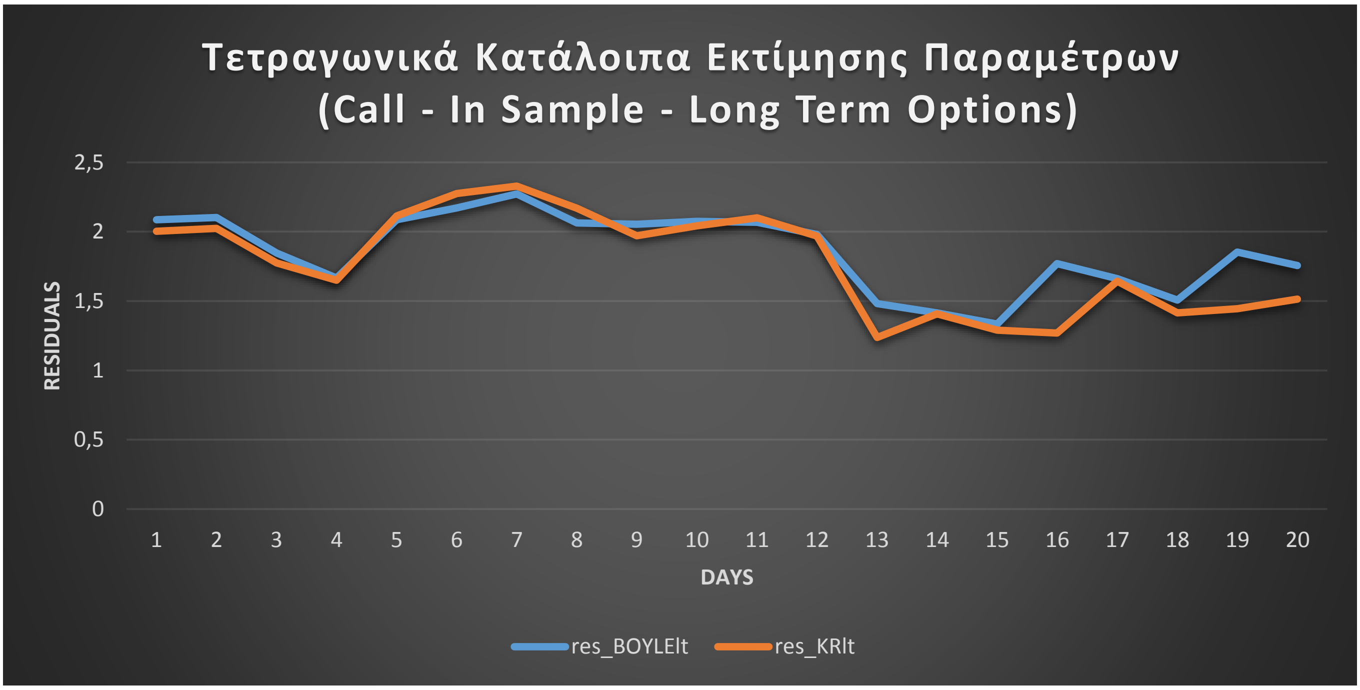
Διάγραμμα 4



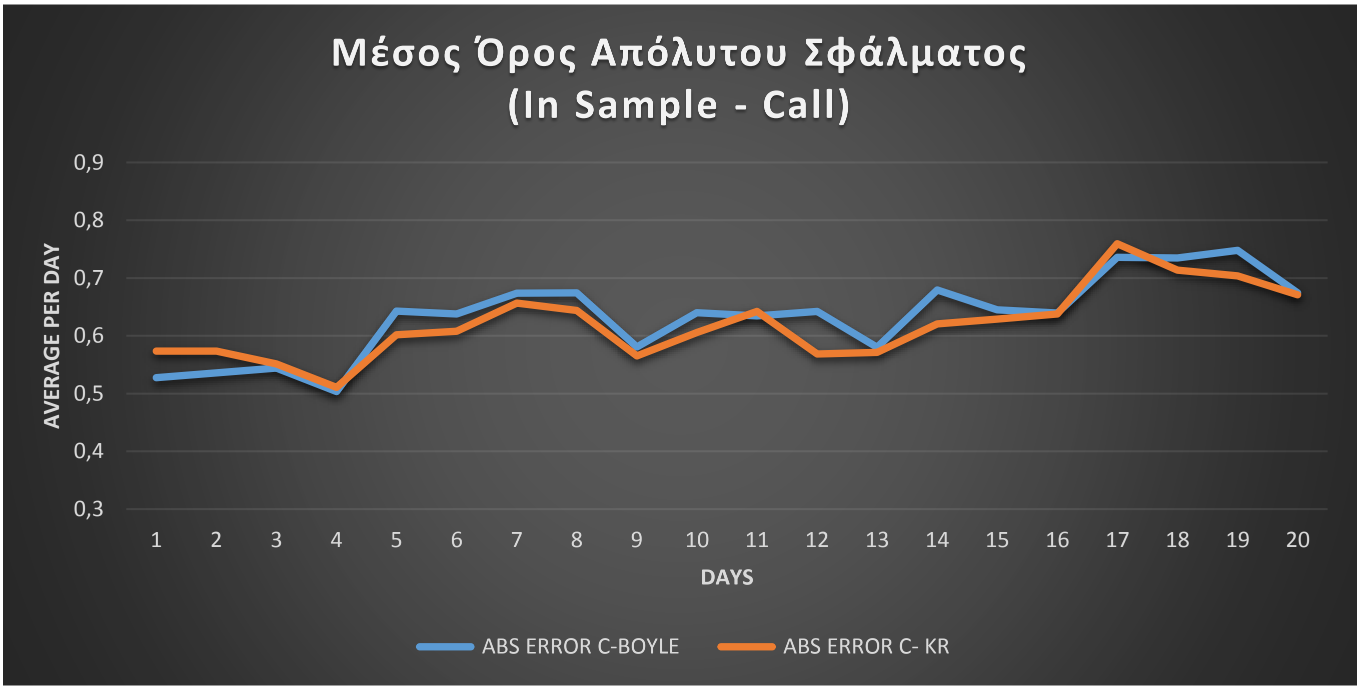
Διάγραμμα 4.1



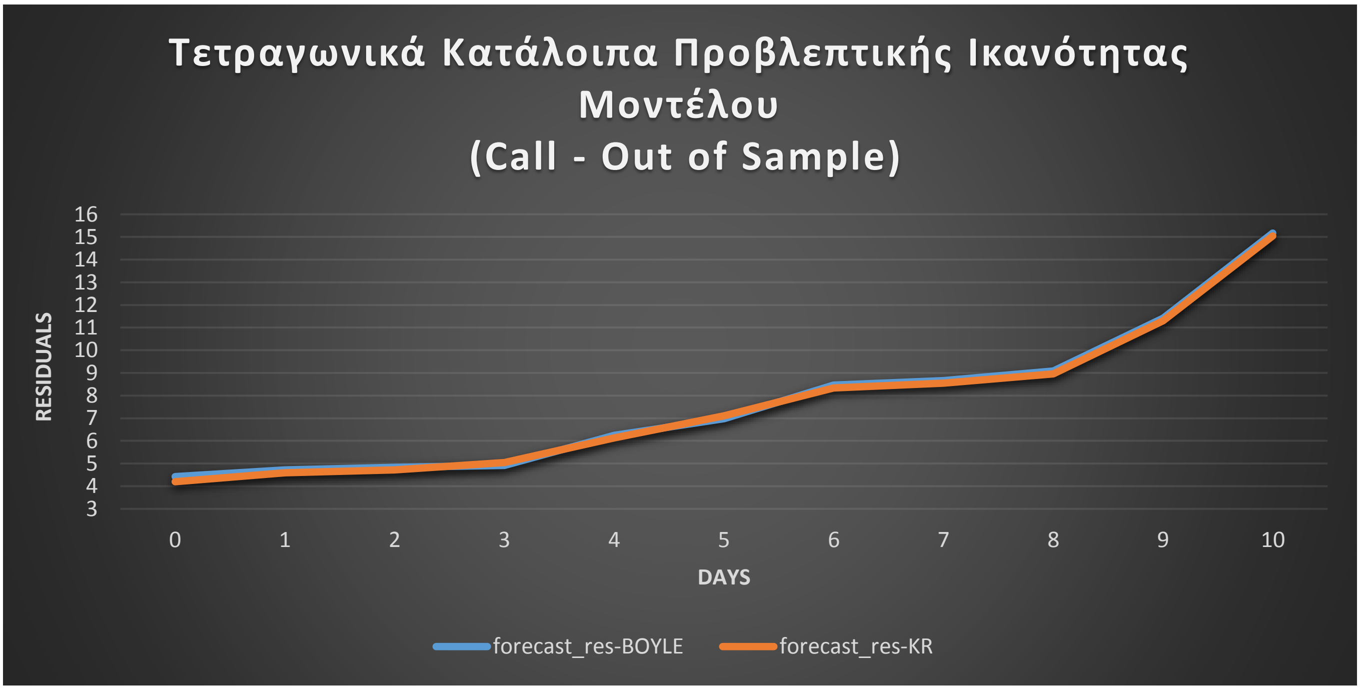
Διάγραμμα 4.2



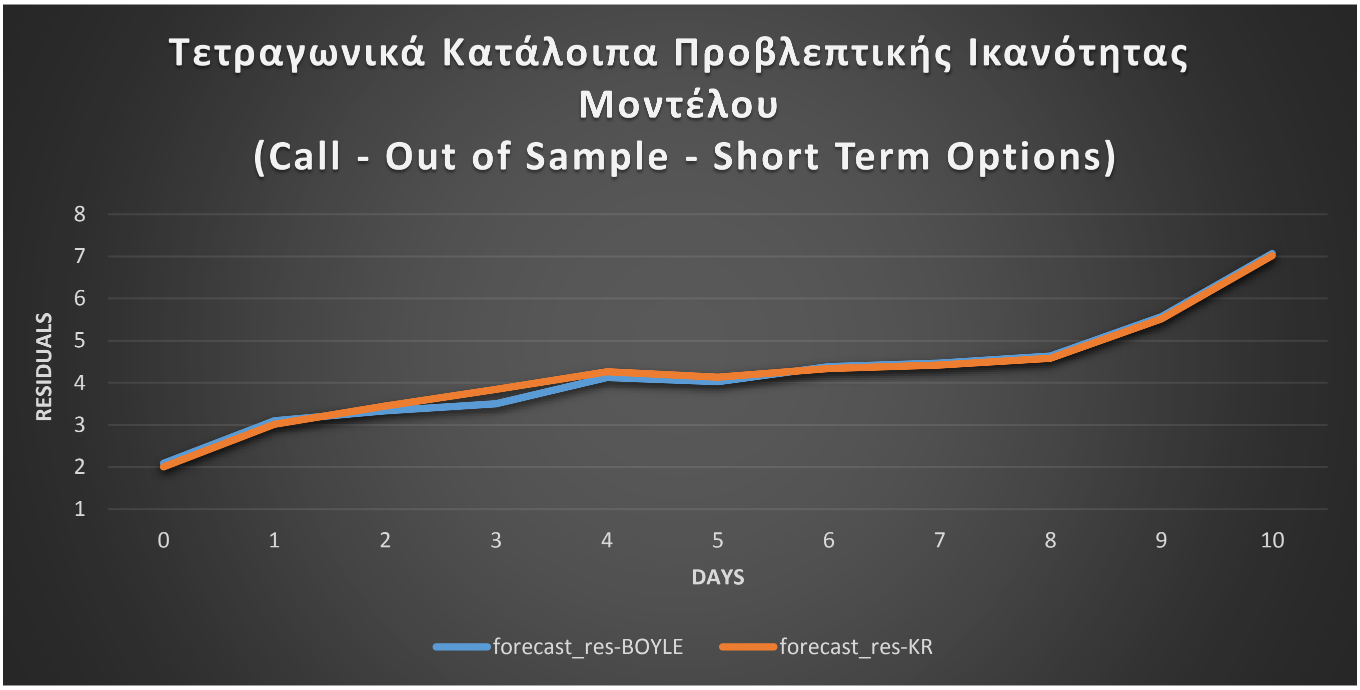
Διάγραμμα 5



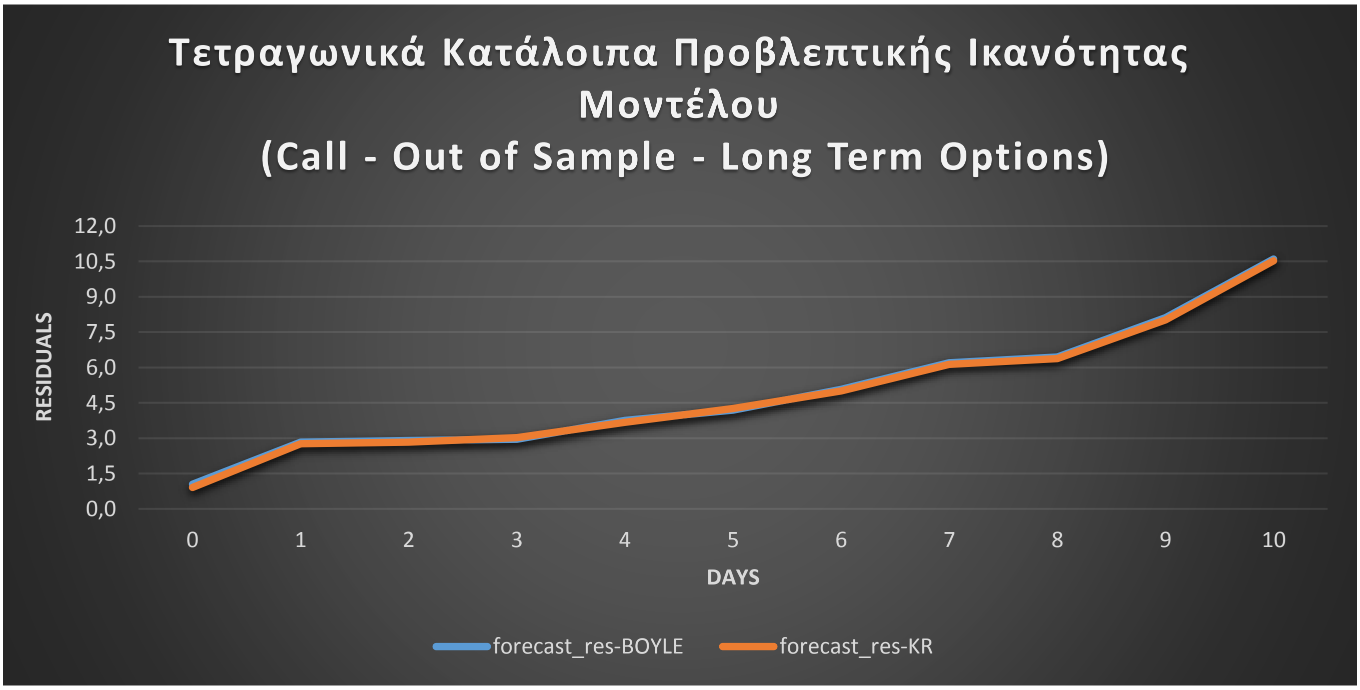
Διάγραμμα 6



Διάγραμμα 6.1

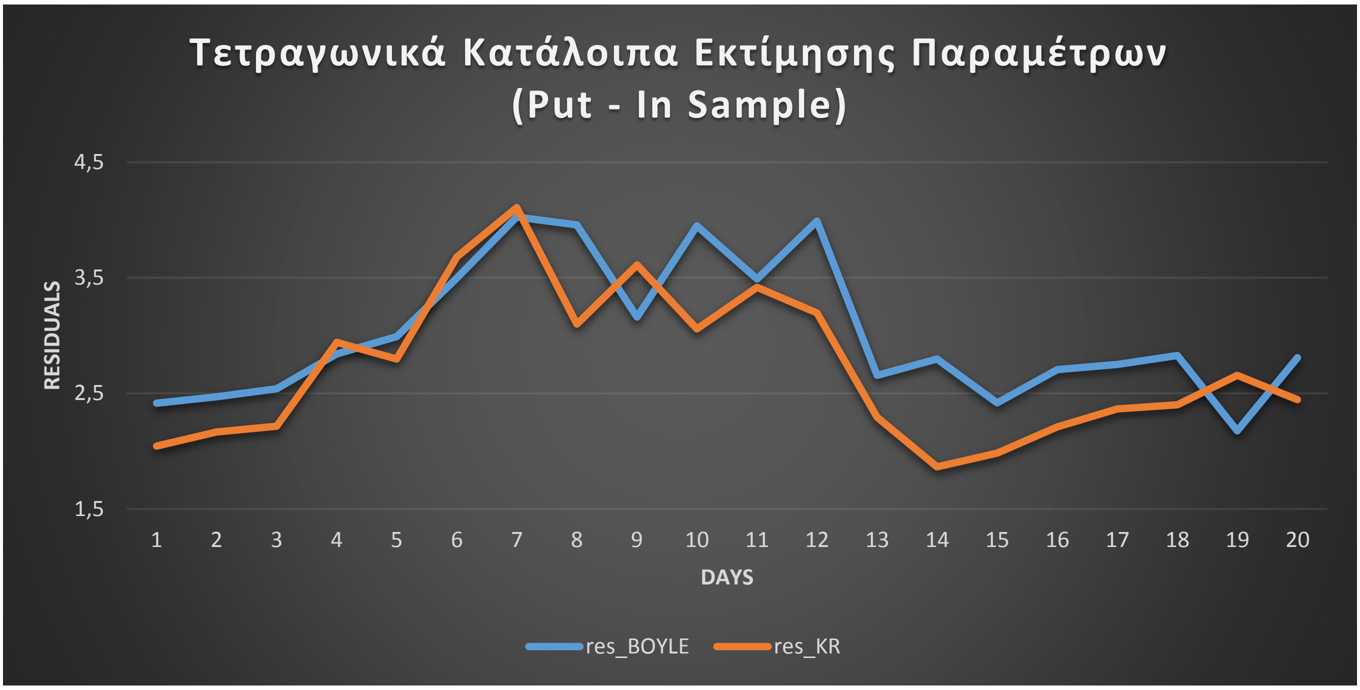


Διάγραμμα 6.2

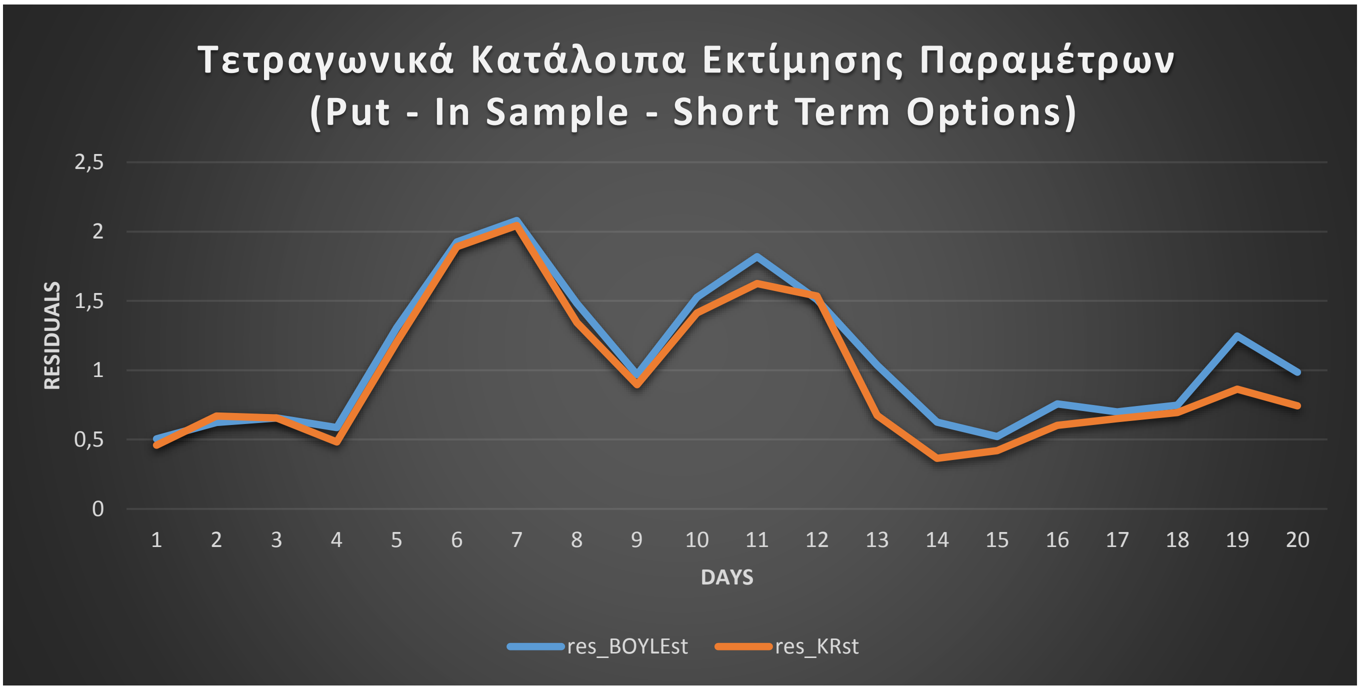


Δικαιώματα Πώλησης

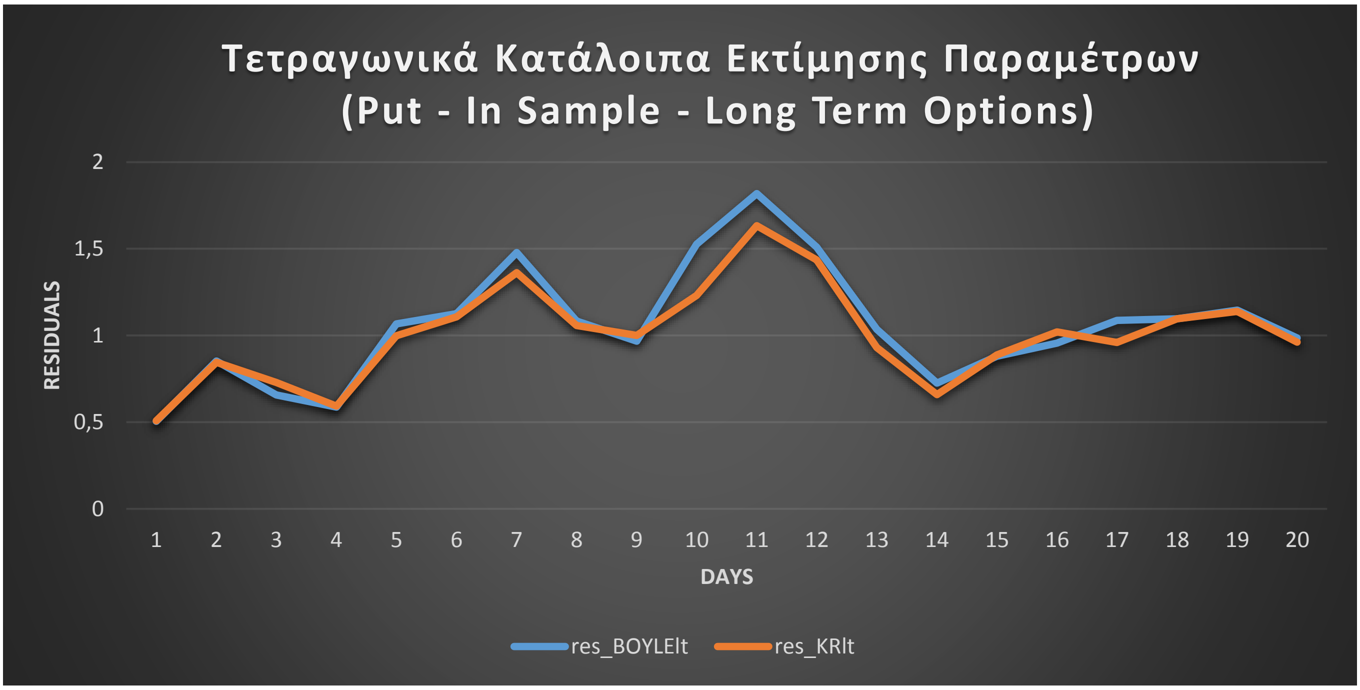
Διάγραμμα 7



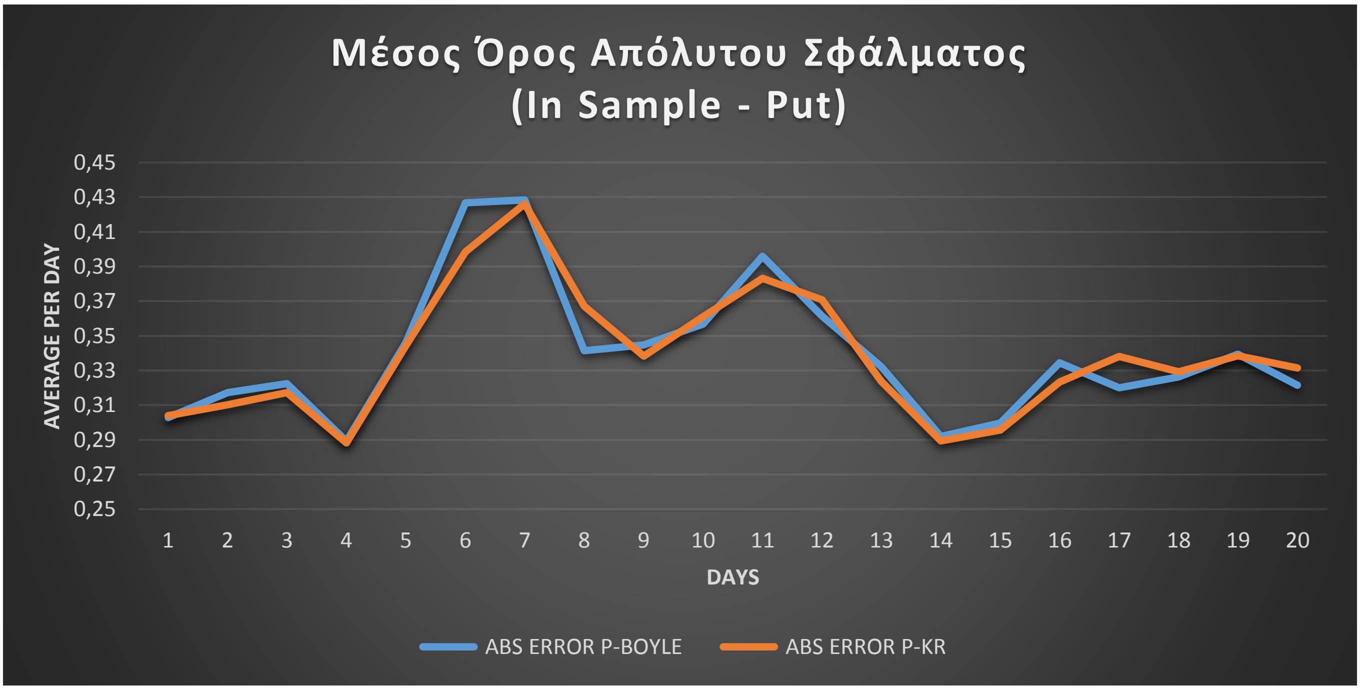
Διάγραμμα 7.1



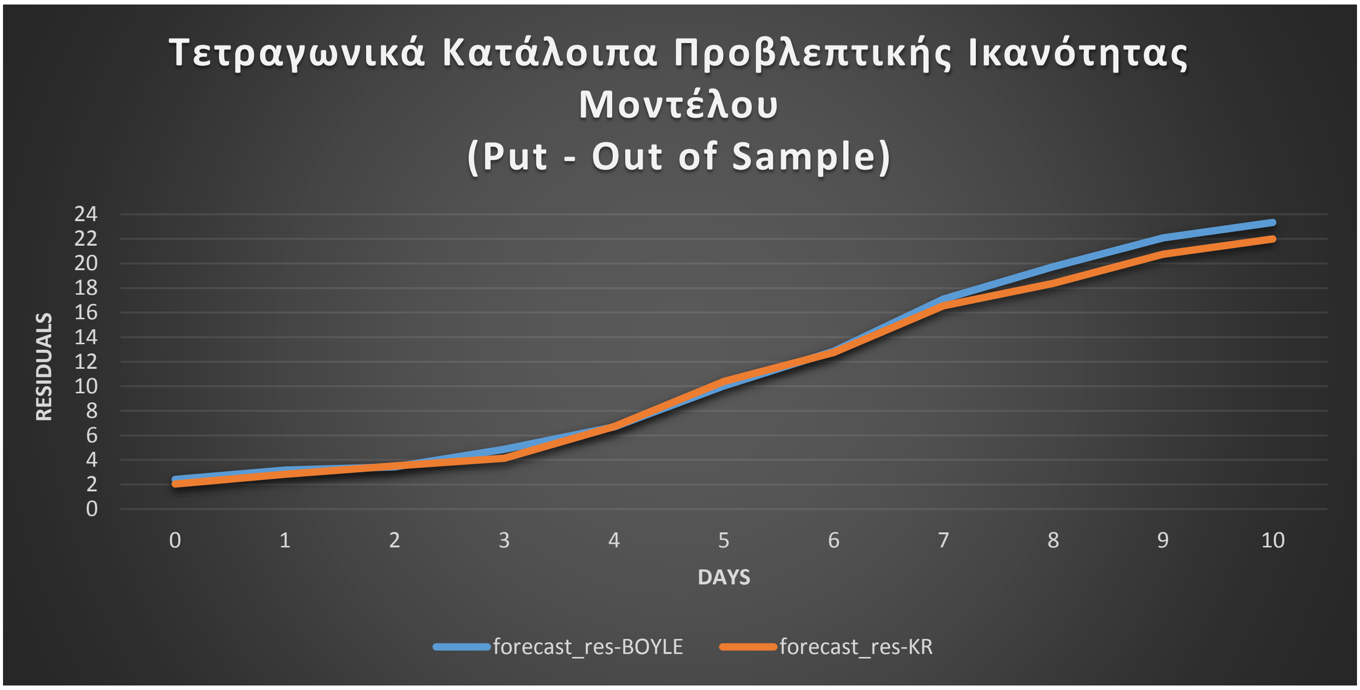
Διάγραμμα 7.2



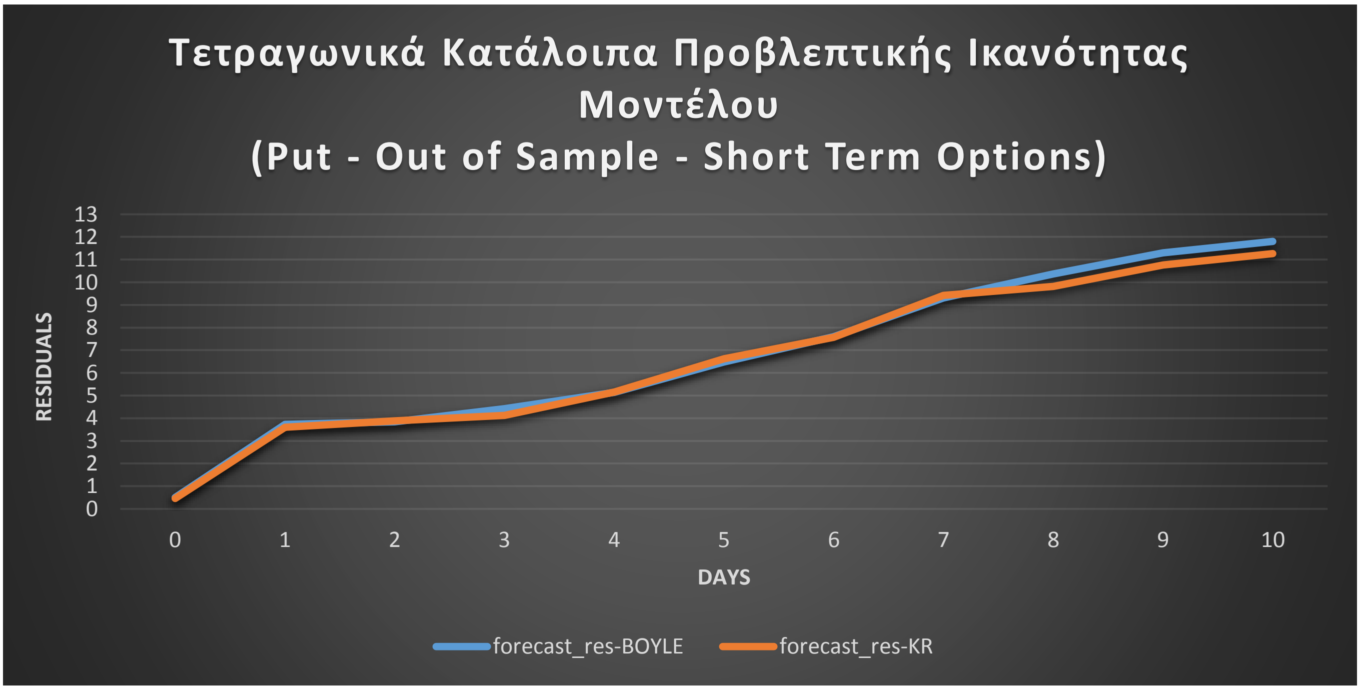
Διάγραμμα 8



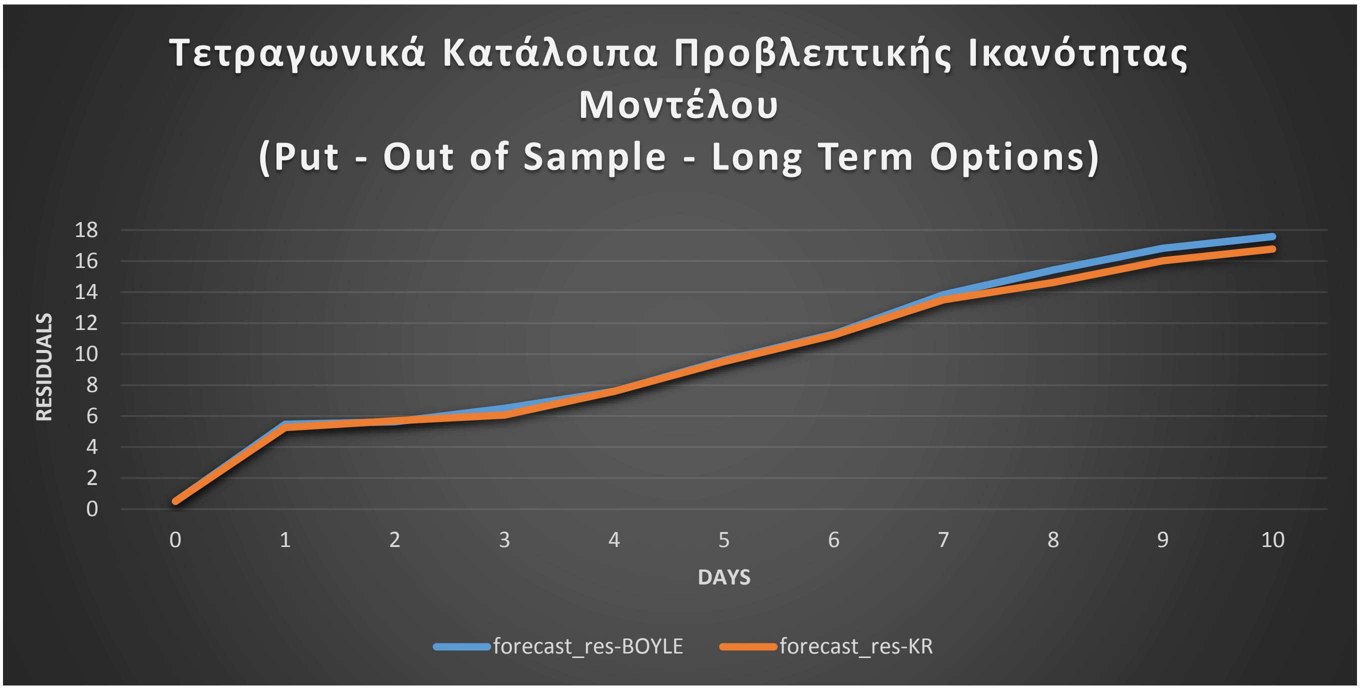
Διάγραμμα 9



Διάγραμμα 9.1



Διάγραμμα 9.2



ΠΙΝΑΚΕΣ

Πίνακες παραδειγμάτων από ενότητες 2.2.2 & 3.2.3

Πίνακας 1

Εύρος Άλματος Τιμής & Πιθανότητες (3-jump)				
$\sigma=0.2$ $r=0.1$ $T=1$ $n=20$				
λ	**u**	**p_1**	**p_3**	**p_2**
1	1.0457	0.5539	0.4646	-0.0184
1.1	1.0504	0.4610	0.3798	0.1592
1.2	1.0551	0.3900	0.3156	0.2943
1.3	1.0599	0.3346	0.2659	0.3995
1.4	1.0646	0.2904	0.2266	0.4829
1.5	1.0694	0.2547	0.1951	0.5502
1.6	1.0742	0.2253	0.1694	0.6053
1.7	1.0790	0.2008	0.1482	0.6510
1.8	1.0838	0.1802	0.1305	0.6892
1.9	1.0887	0.1627	0.1156	0.7216
2	1.0936	0.1477	0.1030	0.7493

Πίνακας 2

Εύρος Άλματος Τιμής & Πιθανότητες (5-jump)							
$\sigma_1=0.2$, $\sigma_2=0.25$, $r=0.1$, $n=20$, $T=1$, $\rho=0.5$							
λ	**u_1**	**u_2**	**p_1**	**p_2**	**p_3**	**p_4**	**p_5**
1	1.0457	1.0574	0.4201	0.1337	0.3448	0.1198	-0.0184
1.1	1.0504	1.0633	0.3499	0.1111	0.2814	0.0984	0.1592
1.2	1.0551	1.0692	0.2962	0.0938	0.2334	0.0822	0.2943
1.3	1.0599	1.0752	0.2543	0.0803	0.1963	0.0696	0.3995
1.4	1.0646	1.0812	0.2208	0.0696	0.1670	0.0597	0.4829
1.5	1.0694	1.0873	0.1937	0.0609	0.1434	0.0517	0.5502
1.6	1.0742	1.0934	0.1715	0.0538	0.1243	0.0451	0.6053
1.7	1.0790	1.0995	0.1529	0.0479	0.1085	0.0397	0.6510
1.8	1.0838	1.1056	0.1373	0.0429	0.0953	0.0352	0.6892
1.9	1.0887	1.1118	0.1240	0.0387	0.0842	0.0314	0.7216
2	1.0936	1.1180	0.1126	0.0351	0.0748	0.0282	0.7493

Πίνακες εμπειρικής μελέτης (1 State)

Πίνακας 3

Αποτελέσματα Εκτίμησης Παραμέτρων (In Sample)				
Μοντέλο	**Boyle**		**Kamrad&Ritchken**	
	sigma	**lamda**	**sigma**	**lamda**
Μέσος	0.242869	1.345273	0.242964	1.429865
Τυπική Απόκλιση	0.011603	0.282254	0.011601	0.295620
Διάμεσος	0.243859	1.258168	0.244001	1.332983
Ελάχιστο	0.197309	1.070080	0.197390	1.013404
Μέγιστο	0.270241	2.035294	0.270078	1.853403

Πίνακας 4

FORECAST RESIDUALS (Out of Sample)			
DATES	**forecast_res-BOYLE**	**forecast_res-KR**	**for_resBoyle>for_res KR**
8/11/2019	25.228047	25.352407	-
7/11/2019	25.237228	25.071087	1
6/11/2019	17.185242	17.119117	1
5/11/2019	11.493400	11.494111	-
4/11/2019	10.410221	10.294494	1
1/11/2019	7.039469	6.988589	1
31/10/2019	4.568043	4.588077	-
30/10/2019	4.539688	4.440333	1
29/10/2019	4.343404	4.231881	1
28/10/2019	3.805800	4.056339	-
25/10/2019	3.491374	3.491703	
		COUNT	6
		COUNT/10	60%

Σημείωση 1: Όταν ισχύει η ανισότητα η τιμή είναι 1, ενώ όταν δεν ισχύει δίνεται το σύμβολο "-". Στις ανισότητες και στο άθροισμα δεν περιλαμβάνονται οι τιμές της 25/10/2019.

Πίνακας 4.1

FORECAST RESIDUALS (Out of sample-Short Term Options)			
DATES	forecast_res-BOYLE	forecast_res-KR	for_resBoyle>for_res KR
8/11/2019	15.507242	15.469015	1
7/11/2019	14.818337	14.825443	-
6/11/2019	9.495083	9.461959	1
5/11/2019	8.788747	8.784350	1
4/11/2019	3.865738	3.879024	-
1/11/2019	2.644975	2.657921	-
31/10/2019	2.571451	2.561181	1
30/10/2019	1.537476	1.533357	1
29/10/2019	1.347706	1.350075	-
28/10/2019	1.273594	1.277942	-
25/10/2019	1.703290	1.720690	
		COUNT	5
		COUNT/10	50%

Σημείωση 2: Όταν ισχύει η ανισότητα η τιμή είναι 1, ενώ όταν δεν ισχύει δίνεται το σύμβολο "-". Στις ανισότητες και στο άθροισμα δεν περιλαμβάνονται οι τιμές της 25/10/2019.

Πίνακας 4.2

FORECAST RESIDUALS (Out of Sample-Long Term Options)			
DATES	forecast_res-BOYLE	forecast_res-KR	for_resBoyle>for_res KR
8/11/2019	15.585908	15.756738	-
7/11/2019	9.783394	9.556301	1
6/11/2019	8.798725	8.662881	1
5/11/2019	5.719009	5.701186	1
4/11/2019	2.910650	2.868951	1
1/11/2019	2.761598	2.550245	1
31/10/2019	2.383105	2.567781	-
30/10/2019	1.859909	1.755538	1
29/10/2019	1.577074	1.517273	1
28/10/2019	1.632941	1.691204	-
25/10/2019	1.441878	1.438647	
		COUNT	7
		COUNT/10	70%

Σημείωση 3: Όταν ισχύει η ανισότητα η τιμή είναι 1, ενώ όταν δεν ισχύει δίνεται το σύμβολο "-". Στις ανισότητες και στο άθροισμα δεν περιλαμβάνονται οι τιμές της 25/10/2019.

Πίνακες αριθμητικής ανάλυσης (2 States)

Δικαιώματα Αγοράς

Πίνακας 5

Αποτελέσματα Εκτίμησης Παραμέτρων (Call-In Sample)								
Μοντέλο	**Boyle**				**Kamrad&Ritchken**			
	sigma1	**sigma2**	**rho**	**lamda**	**sigma1**	**sigma2**	**rho**	**lamda**
Μέσος	0.33302	0.19414	0.11413	2.20027	0.07882	0.39607	0.69751	3.82902
Τυπική Απόκλιση	0.06899	0.04696	0.36981	0.47590	0.02070	0.04174	0.18397	3.50398
Διάμεσος	0.35451	0.18186	0.01080	2.41204	0.08059	0.37680	0.65045	2.00731
Ελάχιστο	0.16906	0.13638	-0.26933	1.20688	0.03965	0.35615	0.45458	1.00005
Μέγιστο	0.38798	0.29448	0.98925	2.65073	0.11568	0.48222	0.97557	9.99996

Πίνακας 5.1

Αποτελέσματα Εκτίμησης Παραμέτρων (Call-In Sample-Short Term Options)								
Μοντέλο	**Boyle**				**Kamrad&Ritchken**			
	sigma1	**sigma2**	**rho**	**lamda**	**sigma1**	**sigma2**	**rho**	**lamda**
Μέσος	0.35424	0.09119	0.82438	3.09362	0.06937	0.40982	-0.69728	4.33988
Τυπική Απόκλιση	0.02348	0.02109	0.37013	0.28448	0.03726	0.02667	0.24985	3.15419
Διάμεσος	0.34969	0.08306	0.84468	3.07970	0.06815	0.40907	-0.74733	3.88659
Ελάχιστο	0.32582	0.07449	-0.03581	2.58805	0.01837	0.35461	-0.99998	1.02014
Μέγιστο	0.39468	0.14647	0.98426	3.46549	0.14874	0.45286	-0.20558	9.98760

Πίνακας 5.2

Αποτελέσματα Εκτίμησης Παραμέτρων (Call-In Sample-Long Term Options)								
Μοντέλο	**Boyle**				**Kamrad&Ritchken**			
	sigma1	**sigma2**	**rho**	**lamda**	**sigma1**	**sigma2**	**rho**	**lamda**
Μέσος	0.32810	0.27451	0.04828	1.65699	0.15358	0.33612	0.59826	1.62337
Τυπική Απόκλιση	0.04118	0.02151	0.36936	0.28666	0.02215	0.01825	0.07341	0.50236
Διάμεσος	0.34190	0.27209	-0.07358	1.72082	0.14594	0.34082	0.61533	1.50256
Ελάχιστο	0.22234	0.24885	-0.22359	1.00803	0.12134	0.29685	0.47412	1.01325
Μέγιστο	0.36481	0.33677	0.99347	1.92253	0.20163	0.35974	0.70829	2.65541

Πίνακας 6

FORECAST RESIDUALS (Call-Out of Sample)			
DATES	**forecast_res-BOYLE**	**forecast_res-KR**	**for_resBoyle>for_resKR**
10	15.169909	15.046694	1
9	11.422462	11.299247	1
8	9.079942	8.956727	1
7	8.666754	8.543539	1
6	8.458181	8.334965	1
5	6.981794	7.105009	-
4	6.251804	6.128588	1
3	4.917085	5.040300	-
2	4.839246	4.716030	1
1	4.722876	4.599661	1
0	4.425673	4.199661	
		COUNT	8
		COUNT/10	80%

Σημείωση 4: Όταν ισχύει η ανισότητα η τιμή είναι 1, ενώ όταν δεν ισχύει δίνεται το σύμβολο “-“. Στις ανισότητες και στο άθροισμα δεν περιλαμβάνονται οι τιμές της ημέρας 0 (ημέρα 0 θεωρείται η τελευταία ημέρα της εκτίμησης).

Πίνακας 6.1

FORECAST RESIDUALS (Call-Out of Sample-Short Term Options)			
DATES	**forecast_res-BOYLE**	**forecast_res-KR**	**for_resBoyle>for_resKR**
10	7.067964	7.018678	-
9	5.568985	5.519699	-
8	4.631977	4.582691	-
7	4.466702	4.417415	-
6	4.383272	4.333986	1
5	4.028218	4.130348	1
4	4.124957	4.265129	1
3	3.500722	3.842004	1
2	3.330834	3.451435	1
1	3.097098	3.016120	1
0	2.087339	2.003369	
		COUNT	6
		COUNT/10	60%

Σημείωση 5: Όταν ισχύει η ανισότητα η τιμή είναι 1, ενώ όταν δεν ισχύει δίνεται το σύμβολο “-“. Στις ανισότητες και στο άθροισμα δεν περιλαμβάνονται οι τιμές της ημέρας 0 (ημέρα 0 θεωρείται η τελευταία ημέρα της εκτίμησης).

Πίνακας 6.2

FORECAST RESIDUALS (Call-Out of Sample-Long Term Options)			
DATES	forecast_res-BOYLE	forecast_res-KR	for_resBoyle>for_resKR
10	10.601946	10.528016	1
9	8.110047	8.023048	-
8	6.447965	6.374036	1
7	6.200053	6.126123	1
6	5.074909	5.000979	1
5	4.189076	4.263006	1
4	3.751082	3.677153	1
3	2.950251	3.024180	-
2	2.903547	2.829618	1
1	2.833726	2.759796	1
0	1.047246	0.909161	
		COUNT	8
		COUNT/10	80%

Σημείωση 6: Όταν ισχύει η ανισότητα η τιμή είναι 1, ενώ όταν δεν ισχύει δίνεται το σύμβολο "-". Στις ανισότητες και στο άθροισμα δεν περιλαμβάνονται οι τιμές της ημέρας 0 (ημέρα 0 θεωρείται η τελευταία ημέρα της εκτίμησης).

Δικαιώματα Πώλησης

Πίνακας 7

Αποτελέσματα Εκτίμησης Παραμέτρων (Put-In Sample)								
Μοντέλο	Boyle				Kamrad&Ritchken			
	sigma1	sigma2	rho	lamda	sigma1	sigma2	rho	lamda
Μέσος	0.28590	0.29841	-0.23609	3.42446	0.23789	0.28671	0.66596	1.66362
Τυπική Απόκλιση	0.06014	0.06654	0.47320	1.54357	0.03752	0.01977	0.09355	0.67240
Διάμεσος	0.31427	0.29613	-0.34555	3.80821	0.24191	0.28912	0.62868	1.52875
Ελάχιστο	0.14190	0.18641	-0.97556	1.29280	0.17337	0.23883	0.55430	1.00215
Μέγιστο	0.33902	0.40996	0.99958	5.50661	0.29940	0.31692	0.83830	2.92967

Πίνακας 7.1

Αποτελέσματα Εκτίμησης Παραμέτρων (Put-In Sample-Short Term Options)								
Μοντέλο	Boyle				Kamrad&Ritchken			
	sigma1	sigma2	rho	lamda	sigma1	sigma2	rho	lamda
Μέσος	0.25024	0.42086	-0.19463	3.17900	0.20906	0.25324	0.68317	4.05962
Τυπική Απόκλιση	0.04403	0.11032	0.19730	0.52592	0.06155	0.05726	0.18879	2.96834
Διάμεσος	0.24978	0.41806	-0.15718	3.16928	0.23519	0.24625	0.63961	3.64005
Ελάχιστο	0.08070	0.26404	-0.87594	2.24734	0.09090	0.14203	0.38296	1.01739
Μέγιστο	0.29146	0.69635	0.08086	4.20710	0.28892	0.34024	0.99786	8.00982

Πίνακας 7.2

Αποτελέσματα Εκτίμησης Παραμέτρων (Put-In Sample-Long Term Options)								
Μοντέλο	**Boyle**				**Kamrad&Ritchken**			
	sigma1	**sigma2**	**rho**	**lamda**	**sigma1**	**sigma2**	**rho**	**lamda**
Μέσος	0.25024	0.42086	-0.19463	3.17900	0.21277	0.29018	0.50600	1.35562
Τυπική Απόκλιση	0.04403	0.11032	0.19730	0.52592	0.02839	0.01814	0.03549	0.38877
Διάμεσος	0.24978	0.41806	-0.15718	3.16928	0.20223	0.29658	0.49530	1.20173
Ελάχιστο	0.08070	0.26404	-0.87594	2.24734	0.16777	0.24899	0.44024	1.00399
Μέγιστο	0.29146	0.69635	0.08086	4.20710	0.27281	0.31237	0.57580	2.59941

Πίνακας 8

FORECAST RESIDUALS (Put-Out of Sample)			
DATES	**forecast_res-BOYLE**	**forecast_res-KR**	**for_resBoyle>for_resKR**
10	23.338346	21.993103	1
9	22.094241	20.748998	1
8	19.734912	18.389669	1
7	17.088473	16.553949	1
6	12.844442	12.747097	1
5	10.045064	10.390307	-
4	6.692846	6.716470	-
3	4.873557	4.141820	1
2	3.450021	3.528313	-
1	3.173557	2.828313	1
0	2.415971	2.042563	
		COUNT	7
		COUNT/10	70%

Σημείωση 7: Όταν ισχύει η ανισότητα η τιμή είναι 1, ενώ όταν δεν ισχύει δίνεται το σύμβολο “-“. Στις ανισότητες και στο άθροισμα δεν περιλαμβάνονται οι τιμές της ημέρας 0 (ημέρα 0 θεωρείται η τελευταία ημέρα της εκτίμησης).

Πίνακας 8.1

FORECAST RESIDUALS (Put-Out of Sample-Short Term Options)			
DATES	**forecast_res-BOYLE**	**forecast_res-KR**	**for_resBoyle>for_resKR**
10	11.802738	11.264641	1
9	11.305096	10.766999	1
8	10.361365	9.823267	1
7	9.302789	9.418320	-
6	7.605177	7.566239	1
5	6.485425	6.623523	-
4	5.144538	5.153988	-
3	4.416823	4.124128	1
2	3.847408	3.878725	-
1	3.736823	3.598725	1
0	0.504958	0.459834	
		COUNT	6
		COUNT/10	60%

Σημείωση 8: Όταν ισχύει η ανισότητα η τιμή είναι 1, ενώ όταν δεν ισχύει δίνεται το σύμβολο “-“. Στις ανισότητες και στο άθροισμα δεν περιλαμβάνονται οι τιμές της ημέρας 0 (ημέρα 0 θεωρείται η τελευταία ημέρα της εκτίμησης).

Πίνακας 8.2

FORECAST RESIDUALS (Put-Out of Sample-Long Term Options)			
DATES	**forecast_res-BOYLE**	**forecast_res-KR**	**for_resBoyle>for_resKR**
10	17.580378	16.773232	1
9	16.833915	16.026769	1
8	15.418317	14.611171	1
7	13.830454	13.509739	1
6	11.284035	11.225628	1
5	9.604408	9.511554	1
4	7.593078	7.607252	-
3	6.501504	6.062462	1
2	5.647383	5.694358	-
1	5.481504	5.274358	1
0	0.504958	0.508471	
		COUNT	8
		COUNT/10	80%

Σημείωση 9: Όταν ισχύει η ανισότητα η τιμή είναι 1, ενώ όταν δεν ισχύει δίνεται το σύμβολο “-“. Στις ανισότητες και στο άθροισμα δεν περιλαμβάνονται οι τιμές της ημέρας 0 (ημέρα 0 θεωρείται η τελευταία ημέρα της εκτίμησης).