Πανεπιστήμιο Πειραιώς – Τμήμα Πληροφορικής
Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
«Προηγμένα Συστήματα Πληροφορικής»

Μεταπτυχιακή Διατριβή

Τίτλος Διατριβής	**ΜΙΚΤΟ ΟΛΙΓΟΠΩΛΙΟ ΚΑΙ ΧΩΡΙΚΟΣ ΑΝΤΑΓΩΝΙΣΜΟΣ – ΤΟ ΚΑΤΑ NASH ΣΗΜΕΙΟ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ΕΙΝΑΙ ΚΟΙΝΩΝΙΚΑ ΒΕΛΤΙΣΤΟ** **MIXED OLIGOPOLY AND SPATIAL PRICE DISCRIMINATION – NASH EQUILIBRIUM IS SOCIALLY OPTIMAL**
Ονοματεπώνυμο Φοιτητή	**Χαράλαμπος Παπανικολάου**
Πατρώνυμο	**Σωτήριος**
Αριθμός Μητρώου	**ΜΠΣΠ/ 16023**
Επιβλέπων	**Μιχελακάκης Νικόλαος, Αναπληρωτής Καθηγητής**

31/10/2019 **10/2019**

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή

(υπογραφή)	(υπογραφή)	(υπογραφή)
ΜΙΧΕΛΑΚΑΚΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΑΝΑΠΛ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ	ΤΣΙΚΟΥΡΑΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ-ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ	ΣΑΠΟΥΝΑΚΗΣ ΑΡΙΣΤΕΙΔΗΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Εξετάζουμε ένα δυοπωλιακό μοντέλο χωρικού ανταγωνισμού. Οι δύο εταιρείες παράγουν κοινό προϊόν με διαφορετικό κόστος παραγωγής και διαφορετικό κόστος μεταφοράς. Αποδεικνύεται ότι, ανεξάρτητα από το ιδιοκτησιακό τους καθεστώς , όταν εφαρμόζουν τιμολόγηση χωρικής διάκρισης το κατά Nash σημείο ισορροπίας είναι κοινωνικά βέλτιστο.

ABSTRACT

We examine a duopoly model of firms of mixed ownership. No firm can produce all varieties demanded and price competition is carried out applying spatial discrimination. The common variety being heterogeneous, production cost as well as transportation cost are different. We prove that the Nash equilibrium locations are socially optimal.

Λίγα λόγια γενικά για τη θεωρία παιγνίων :

Η βασική πτυχή της θεωρίας αυτής αποσκοπεί να απεικονίσει με μαθηματικά μοντέλα σύνθετα προβλήματα αποφάσεων μεταξύ κοινών ή αντικρουόμενων θέσεων και συμφερόντων. Το όλον αποσκοπεί στη μείωση ζημιών ή στην αύξηση κέρδους ή στην ενδυνάμωση ίδιων θέσεων για ένα μεταβατικό διάστημα. Βασικό στοιχείο είναι ο εκάστοτε υπολογισμός της ισχύος των συνεταίρων και αντιπάλων, που όμως μεταβάλλεται ενίοτε σημαντικά στην πορεία. Μία εταιρεία , προκειμένου να πετύχει την ανάπτυξή της , θα πρέπει να δημιουργήσει ανταγωνιστικά πλεονεκτήματα και ο τομέας της στρατηγικής διαχείρισης έχει αναδειχθεί ως ένας από τους πιο καθοριστικούς παράγοντες για μια ισχυρή επιχειρηματική παρουσία. Μέσω της εφαρμογής της θεωρίας παιγνίων , μία εταιρεία μπορεί να ενισχύσει τη διαδικασία λήψης αποφάσεων. Εδώ υπεισέρχεται η ψυχολογία και μάλιστα με αξιώσεις που επισκιάζουν τους μαθηματικούς αναλυτές. Προβλήματα που προκύπτουν στο πεδίο της πολιτικής, της ψυχολογίας, των κοινωνικών και οικονομικών επιστημών με παίκτες εκπροσώπους κρατών, μεμονωμένα άτομα, οργανώσεις, οργανισμούς, επιχειρήσεις, συνασπισμούς, μπορούν να εκφραστούν ως παίγνια τα οποία επιζητούν μελέτη και λύσεις. Έτσι όταν αναφερόμαστε στον όρο παίγνια προσβλέπουμε σε μια μέθοδο ανάλυσης των προβλημάτων κάτω από το πρίσμα των πολυδιάστατων σχέσεων αλληλεξάρτησης και αλληλεπίδρασης, έχοντας ως τρόπο λήψης των αποφάσεων είτε τη σύγκρουση είτε τη συνεργασία. Η θεωρία παιγνίων θα μπορούσε να είναι ο συνδετικός κρίκος που θα ανέπτυσσε επιστημονικές θεωρίες με βάση την κοινωνιολογία, ανθρωπολογία, οικονομία, πολιτική, βιολογία κ.ά. δημιουργώντας προϋποθέσεις διεπιστημονικής συνεκτικότητας με σκοπό τη δημιουργία προβλέψεων που θα δίνουν εξηγήσεις σε όλο το φάσμα της ιστορικής πορείας, σε κάθε οικονομικό, κοινωνικό και πολιτικό φαινόμενο, εξετάζοντας κάθε πτυχή, αναζητώντας ταυτόχρονα το επιθυμητό αποτέλεσμα και ίσως και μια ζητούμενη ισορροπία. Ένα ιστορικώς καταγεγραμμένο πολιτικό και στρατιωτικό θέμα εφαρμογής έγινε κατά τον Δεύτερο Παγκόσμιο πόλεμο από τους Άγγλους, οι οποίοι προσπάθησαν να αποκωδικοποιήσουν τις κινήσεις του Χίτλερ χρησιμοποιώντας παρόμοιες μεθόδους και με προσοχή συνέλεγαν όλα τα στοιχεία που μπορούσαν να βρουν για τη συμπεριφορά του. Στόχος ήταν να προβλέψουν την επόμενη κίνηση και να τοποθετηθούν καταλλήλως. Θα αναφέρω εδώ το γνωστότερο παράδειγμα της θεωρίας παιγνίων , το prisoners dilemma. Αναφέρεται στη δύσκολη θέση δυο ή περισσότερων κακοποιών, συνεταίρων, για τους οποίους όμως δεν υπάρχουν αρκετά και διαθέσιμα αποδεικτικά στοιχεία στην εισαγγελία. Φυλακισμένοι σε χωριστά κελιά πιέζονται να ομολογήσουν, ο ένας εναντίον των άλλων, με αντάλλαγμα ο συνεργαζόμενος με τις Αρχές να αθωωθεί και ο άλλος να φυλακιστεί για χρόνια. Αν δεν μαρτυρήσει κανένας, ίσως να αφεθούν ελεύθεροι και οι δυο ή όλοι. Μέχρι και βραβείο Νόμπελ πήγε, στον αμερικανό μαθηματικό Nash που έφτιαξε ένα καινοτόμο μοντέλο, ανατρέποντας παλιούς μαθηματικούς, έχοντας σαν αποτέλεσμα να είναι χρήσιμο και στις χρηματοοικονομικές εφαρμογές.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο Hotteling (1929) εισήγαγε το μοντέλο της χωρικής διάταξης, με το οποίο συνέβαλε στην κατανόηση του εταιρικού ανταγωνισμού. Θεώρησε ένα γραμμικό μοντέλο , όπου οι καταναλωτές τοποθετούνται ομοιόμορφα σε ένα συμπαγές διάστημα , όπως το [0,1], μιας γραμμικής πόλης. Στην συνέχεια το 1937 , οι Lerner και Singer εισήγαγαν την χωρική διάκριση τιμών. Στο μοντέλο του ο Hotteling χρέωνε την ίδια τιμή για το προϊόν σε οποιαδήποτε θέση και αν βρισκόταν ο καταναλωτής. Στο μοντέλο της χωρικής διάκρισης των τιμών, το προϊόν τιμολογείται ανάλογα την τοποθεσία του καταναλωτή και το μεταφορικό κόστος που χρειάζεται να φτάσει το προϊόν στον καταναλωτή.

Το μοντέλο των Lerner και Singer (1937) υποθέτει ανελαστική ζήτηση, δηλαδή όλοι οι καταναλωτές αγοράζουν μία μονάδα προϊόντος. Είναι κατάλληλο για την περιγραφή του ανταγωνισμού των προϊόντων, όπου η τιμή μονάδας προϊόντος είναι σχετικά μικρή σε σχέση με το κόστος μεταφοράς (π.χ. το τσιμέντο). Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον ανταγωνισμό στην εκπαίδευση ή τον ανταγωνισμό μεταξύ των φαρμακευτικών εταιρειών. Για παράδειγμα , ένας καταναλωτής όταν χρειάζεται ένα φάρμακο για να νιώσει καλύτερα δεν θα αγοράσει περισσότερα διότι τα βρήκε σε προσφορά ή σε οικονομικότερη τιμή.

Το 1979 οι D’ Aspremont et. al, κατασκεύασαν ένα μοντέλο με σκοπό να αποδείξει ότι το σημείο ισορροπίας στο μοντέλο του Hotteling (1979) υπάρχει μόνο όταν οι δύο ανταγωνιστές βρίσκονται μακριά ο ένας από τον άλλον και όχι στο κέντρο. Το μοντέλο που κατασκεύασε ήταν μια παραλλαγή του μοντέλου του Hotteling και έδειξε ότι οι ανταγωνιστές έχουνε την τάση να αποστασιοποιούνται περισσότερο ο ένας από τον άλλον πάνω στο γραμμικό διάστημα που τοποθετούνται. Έδειξε ότι υπάρχει αντίθεση στο κατά Nash σημείο ισορροπίας , σε σχέση με τα αποτελέσματα του μοντέλου του Hotteling.

Το 1994 η Barnali Gupta μελέτησε την ισορροπία μεταξύ δύο ανταγωνιστικών επιχειρήσεων που έχουν αυστηρά κυρτό κόστος παραγωγής. Στο μοντέλο της η Gupta στο πρώτο στάδιο τοποθετεί τις ανταγωνίστριες επιχειρήσεις να επιλέγουν ταυτόχρονα τη θέση τους. Στο δεύτερο στάδιο έχοντας παρατηρήσει την τοποθεσία του αποφασίζουν ταυτόχρονα. Λύνοντας το παίγνιο με προς τα πίσω αναγωγή, κατέληξε στα εξής αποτελέσματα : Όταν το οριακό κόστος παραμένει σταθερό οι εταιρείες τοποθετούνται στις κοινωνικά βέλτιστες θέσεις που βρίσκονται στα τεταρτημόρια. Με μεταβλητό οριακό κόστος οι θέσεις των τεταρτημορίων εξακολουθούν να είναι κοινωνικά βέλτιστες, αλλά οι εταιρείες τοποθετούνται αλλού σε ισορροπία.

Το 2008 ο Braid επεκτείνοντας προηγούμενη δουλειά των Lederer και Hurter (1985) έδειξε στο μοντέλο χωρικής διάκρισης τιμών που κατασκεύασε, ότι το κατά Nash σημείο ισορροπίας παραμένει κοινωνικά βέλτιστο ακόμη και όταν έχουμε περισσότερα προϊόντα από ένα. Υπέθεσε ότι

3 προϊόντα προορίζονται για τους καταναλωτές. Από έναν ανταγωνιστή D_1 τα J και K και από τον ανταγωνιστή D_2 τα K και L. Το μοντέλο βασίστηκε στην σχέση f(ψ-s) = f(s-χ) , όπου s είναι η θέση του αδιάφορου καταναλωτή. Υπέθεσε ότι το κόστος παραγωγής είναι σταθερό και κατέληξε ότι το σημείο ισορροπίας παραμένει κοινωνικά βέλτιστο.

Το 2014 οι Beladi, Chakrabarti και Marjit επέκτειναν το μοντέλο του Braid, αποδεικνύοντας ότι τα αποτελέσματα του Braid είναι ισχυρά ακόμη και για δημόσιες η μερικώς ιδιωτικές εταιρείες. Θεώρησαν στο μοντέλο τους ότι η μία εταιρεία είναι εξ' ολοκλήρου δημόσια και η άλλη εν μέρει ιδιωτική κατά ένα ποσοστό 1-a. Το κόστος μεταφοράς των προϊόντων στους καταναλωτές εκφράζεται από μία συνάρτηση f(d) , η οποία είναι μη αρνητική , αύξουσα και συνεχής. Κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι ο βαθμός ιδιωτικοποίησης δεν επηρεάζει το κατά Nash σημείο ισορροπίας που μάλιστα παραμένει κοινωνικά βέλτιστο. Συγκεκριμένα για την μερικώς ιδιωτικοποιημένη εταιρεία εξετάζοντας τον βαθμό ιδιωτικοποίησης κατέληξαν ότι δεν επηρεάζει τις θέσεις ισορροπίας , καθώς επίσης είναι και κοινωνικά βέλτιστες για συνάρτηση κόστους μεταφοράς f(χ) = a*χ.

Με τη σειρά μας, συνεισφέρουμε στη βιβλιογραφία με την εργασία αυτή , θεωρώντας ότι το κόστος μεταφοράς του προϊόντος στους καταναλωτές δεν είναι σταθερό , αφού εκφράζεται με δύο διαφορετικές συναρτήσεις f, g. Στο συγκεκριμένο μοντέλο η θέση s του αδιάφορου καταναλωτή θα ικανοποιεί την εξίσωση $\boldsymbol{f(\psi-s)+c_2=g(s-\chi)+c_1}$. Θεωρούμε ένα δυοπωλιακό μοντέλο δύο επιχειρήσεων , με μικτό ιδιοκτησιακό καθεστώς οι οποίες παράγουν ένα κοινό προϊόν. Ο ανταγωνισμός βασίζεται σε ένα παίγνιο πλήρους πληροφόρησης δύο σταδίων όπου κατά το πρώτο στάδιο οι ανταγωνίστριες εταιρείες τοποθετούνται στο χώρο και κατά το δεύτερο ανταγωνίζονται μεταξύ τους για μερίδιο αγοράς , εφαρμόζοντας χωρική διάκριση τιμών. Αποδεικνύουμε ότι ακόμα και όταν τόσο το κόστος παραγωγής του κοινού προϊόντος όσο και το κόστος μεταφοράς διαφέρει για τις δύο επιχειρήσεις, το κατά Nash σημείο ισορροπίας είναι κοινωνικά βέλτιστο. Η εργασία μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για τη διαμόρφωση πολιτικής , αφού ενισχύει το επιχείρημα του ελεύθερου ανταγωνισμού και την έλλειψη κρατικής παρέμβασης.

Μοντέλο και αποτελέσματα:

Κατασκευάζουμε ένα μοντέλο πλήρους πληροφόρησης , όπου καθένας από τους ανταγωνιστές γνωρίζει τις επιλογές που έκανε ο αντίπαλός του στο προηγούμενο στάδιο. Αδιάφορος καταναλωτής είναι αυτός για τον οποίο δεν έχει διαφορά από ποιον ανταγωνιστή θα αγοράσει το προϊόν. Θεωρούμε ένα δυοπώλιο με μία συνεχή κατανομή ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα [0,1] μιας γραμμικής πόλης. Από τον ανταγωνιστή D_1 τα J και K και από τον ανταγωνιστή D_2 τα K και L. Τα προϊόντα J και L προτιμούνται από το ίδιο πλήθος καταναλωτών , το οποίο ορίζεται ως c. Το προϊόν K προτιμάται από ένα σύνολο b των καταναλωτών . Οι ανταγωνιστές (D_1,D_2) τοποθετούνται στις θέσεις χ, ψ αντίστοιχα. Η εταιρεία του D_1 είναι ιδιωτική , ενώ του D_2 δημόσια κατά ένα ποσοστό α και ιδιωτική κατά ένα ποσοστό 1-α.

Ο D_1 για να μεταφέρει τα προϊόντα του, επιλέγει την μεταφορική U και ο ανταγωνιστής D_2 την μεταφορική V. Το κόστος μεταφοράς για τον D_1 περιγράφεται από την συνάρτηση g και του D_2 από την συνάρτηση f. Θεωρώ s την τοποθεσία του αδιάφορου καταναλωτή με την εξής σχέση:

$$f(\psi-s)+c_2=g(s-\chi)+c_1$$

Ο παραπάνω τύπος είναι καθοριστικός για την κατασκευή του μοντέλου του παιγνίου που θα εξετάσουμε. Τα στοιχεία του συγκεκριμένου παιγνίου είναι οι ανταγωνίστριες εταιρείες D_1 και D_2 , ο κανόνας που διέπει το παίγνιο είναι η σχέση

$$\boldsymbol{f(\psi-s)+c_2=g(s-\chi)+c_1}$$

καθώς επίσης οι πληροφορίες που υπάρχουν κατά τη διάρκεια διεξαγωγής του παιγνίου.

Ο καταναλωτής τοποθετείται σε μία τυχαία θέση ανάμεσα στο διάστημα [0,1] , όχι απαραίτητα στη μέση του διαστήματος αυτού αλλά σε οποιοδήποτε σημείο μπορεί να υπάρχει μέσα σε αυτό το διάστημα. Σε πρώτο στάδιο, αυτό που ενδιαφέρει τις ανταγωνίστριες εταιρείες είναι να δούνε και να υπολογίσουνε το κόστος μεταφοράς των προιόντων τους από τις εγκαταστάσεις τους μέχρι το τυχαίο σημείο αυτού του διαστήματος που έχει τοποθετηθεί ο αδιάφορος καταναλωτής.

Το πρώτο βήμα είναι να υπολογίσουμε το συνολικό κόστος μεταφοράς και των δύο ανταγωνιστών εταιρειών στο διάστημα [0,1]. Για το λόγο αυτό πρέπει να δώσουμε μεγάλη σημασία στα άκρα των ολοκληρωμάτων που θα χρησιμοποιήσουμε για την κάθε ανταγωνίστρια εταιρεία. Συγκεκριμένα για την D_1 εταιρεία πρέπει να υπολογίσουμε το κόστος μεταφοράς των προϊόντων J , L που προτιμώνται από το ίδιο πλήθος καταναλωτών , το οποίο εκφράζεται με το c , και στην συνέχεια να υπολογίσουμε το κόστος μεταφοράς του προϊόντος K το οποίο προτιμάται από συγκεκριμένο πλήθος καταναλωτών , το οποίο εκφράζεται με την παράμετρο b. Τα προϊόντα J,L που προτιμώνται από όλους τους καταναλωτές υπολογίζονται σε όλο το διάστημα του συνόλου [0,1]. Για το λόγο αυτό τα άκρα των ολοκληρωμάτων που χρησιμοποιούμε είναι από το 0 εώς χ για την συνάρτηση g και από το χ εώς 1. Εκεί που υπάρχει μία διαφορά για τον υπολογισμό του κόστους μεταφοράς είναι για το προιόν K όπου πρέπει να υπολογιστεί από το 0 εώς το χ και αντί για το διάστημα [χ,1] παίρνουμε το [χ,s] διότι ο αδιάφορος καταναλωτής μπορεί να βρίσκεται σε οποιοδήποτε σημείο μέσα στο διάστημα αυτό.

Αντίστοιχα υπολογίζονται και τα ολοκληρώματα για την συνάρτηση του κόστους μεταφοράς της f.

Υπολογισμός κοινωνικά βέλτιστου σημείου ισορροπίας.

Για όλες τις τυχαίες θέσεις z ∈ [0,1] των καταναλωτών, το σύνολο του κόστους μεταφοράς δίνεται από τον τύπο:

$$T(\chi,\psi)= c^*[\int_0^X g(\chi - z)+c_1 dz+\int_\chi^1 g(z-\chi)+c_1 dz]$$

$$+b^*[\int_0^X g(\chi - z)+c_1 dz+\int_\chi^s g(z-\chi)+c_1 dz]$$

$$+c^*[\int_0^\psi f(\psi - z)+c_2 dz+\int_\psi^1 f(z-\psi)+c_2 dz]$$

$$+b^*[\int_s^\psi f(\psi - z)+c_2 dz+\int_\psi^1 f(z-\psi)+c_2 dz]$$

Υπολογίζουμε τα ολοκληρώματα ξεχωριστά όπου τα πρόσημα εξαρτώνται από την θέση του αδιάφορου καταναλωτή και για το λόγο αυτόν έχουμε διαφορετικά πρόσημα σε κάθε σημείο.

$$T(\chi,\psi)=c^*[G(\chi)-G(0)+c_1x+G(1-\chi)-G(0)+c_1^*(1-\chi)]$$
$$+b^*[G(\chi)-G(0)+c_1 * \chi+G(s-\chi) -G(0) +c_1(s-\chi)]$$
$$+c^*[F(\psi)-F(0)+ c_2 *\psi+F(1-\psi)-F(0)+c_2 *(1-\psi)]$$
$$+b\ [F(\psi-s)-F(0)+c_2 *(\psi-s)+ F(1-\psi)-F(0)+c_2 *(1-\psi)]$$

Ομαδοποιούμε τις συναρτήσεις κόστους μεταφοράς της κάθε εταιρείας μέσα σε κάθε αγκύλη και έχουμε :

$$T(\chi,\psi)=c^*[G(\chi)+G(1-x)-2^*G(0)+c_1]$$
$$+b^*[G(\chi)+G(s-\chi)-2^*G(0)+c_1^*s]$$
$$+c^*[F(\psi)+F(1-\psi)-2^*F(0)+c_2]$$
$$+b^*[F(\psi-s)+F(1-\psi)-2^*F(0)+c_2^*(1-s)]$$

Ο παραπάνω τύπος περιγράφει το συνολικό κόστος μεταφοράς των προϊόντων από τις δύο ανταγωνίστριες εταιρείες D_1 και D_2.

Αναζήτηση σημείου ισορροπίας κατά Nash.

Θέλω να βρω τις κοινωνικά βέλτιστες θέσεις ισορροπίας. Για τον σκοπό αυτό πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε την συνάρτηση κόστους Τ(x,ψ) ως προς x και ως προς ψ.

Παίρνω υπόψιν ότι: $f(\psi-s)+c_2=g(s-\chi)+c_1$

Έχω,

$$\frac{\theta T(\chi,\psi)}{\theta\chi}=c^*[g(\chi)+g(1-\chi)^*(-1)]+b^*[g(\chi)+g(s-\chi)^*(\frac{\theta s}{\theta\chi}-1)+c_1\frac{\theta s}{\theta\chi}]+b^*[f(\psi-s)\frac{\theta(\psi-s)}{\theta\chi}+c_2\frac{\theta(1-s)}{\theta\chi}]$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\theta T(\chi,\psi)}{\theta\chi}=c^*[g(\chi)-g(1-\chi)]+b^*[g(\chi)+g(s-\chi)\frac{\theta s}{\theta\chi}-g(s-\chi)+c_1\frac{\theta s}{\theta\chi}]+b^*[-f(\psi-s)\frac{\theta s}{\theta\chi}-c_2\frac{\theta s}{\theta\chi}]$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\theta T(\chi,\psi)}{\theta\chi}= c^*[g(\chi)-g(1-\chi)]+b^*[g(\chi)+g(s-\chi)\frac{\theta s}{\theta\chi}-g(s-\chi)-f(\psi-s)\frac{\theta s}{\theta\chi}+(c_1-c_2)\frac{\theta s}{\theta\chi}]$$

και

$$\frac{\theta T(\chi,\psi)}{\theta\psi}=c^*[f(\psi)+f(1-\psi)^*(-1)]+b^*[f(\psi-s)(1-\frac{\theta s}{\theta\psi})+f(1-\psi)^*(-1)+c_2(-\frac{\theta s}{\theta\psi})]+b^*[g(s-\chi)\frac{\theta s}{\theta\psi}+c_1\frac{\theta s}{\theta\psi}]$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\theta T(\chi,\psi)}{\theta\psi}=c^*[f(\psi)-f(1-\psi)]+b^*[f(\psi-s)-f(\psi-s)\frac{\theta s}{\theta\psi}-f(1-\psi)-c_2\frac{\theta s}{\theta\psi}+g(s-\chi)\frac{\theta s}{\theta\psi}+c_1\frac{\theta s}{\theta\psi}]$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\theta T(\chi,\psi)}{\theta\psi}= c^*[f(\psi)-f(1-\psi)]+b^*[f(\psi-s)-f(\psi-s)\frac{\theta s}{\theta\psi}-f(1-\psi)+g(s-\chi)\frac{\theta s}{\theta\psi}+(c_1-c_2)\frac{\theta s}{\theta\psi}$$

Σύμφωνα με τον Braid (2008) όταν υπάρχει χωρική διάκριση των τιμών οι εταιρείες επιλέγουν να τοποθετηθούν στο κοινωνικά βέλτιστο σημείο ισορροπίας. Οι συναρτήσεις κέρδους δύο ιδιωτικών εταιρειών (γνωρίζοντας ότι η κάθε μία πουλάει στην τιμή του κόστους του ανταγωνισμού) είναι οι εξής:

Θεωρώ k το χρηματικό ποσό που είναι διατεθειμένος ο καταναλωτής να δώσει.

Η συνάρτηση κέρδους του D_1 είναι:

$Π_{D1}(χ,ψ)=c*k-c*[\int_0^{\chi} g(\chi-z)+c_1dz+\int_{\chi}^{1} g(z-\chi)+c_1dz]$

$+b*[\int_0^{\chi} f(\psi-z)+c_2-g(χ-z)-c_1dz]$

$+b*[\int_{\chi}^{s} f(\psi-z)+c_2-g(z-χ)-c_1dz]$

Υπολογίζω τις αρχικές συναρτήσεις G, F στο κάθε ολοκλήρωμα και ανάλογα την θέση του χ σε σχέση με το z αντίστοιχα αλλάζουν και τα πρόσημα υπολογίζοντας τα ολοκληρώματα.

$Π_{D1}(χ,ψ)=c*k-c*[G(χ)-G(0)+c_1*χ+G(1-χ)-G(0)+c_1*(1-χ)]$

$+b*[-F(ψ-χ)+F(ψ)+c_2*χ-G(x)+G(0)-c_1*χ+G(χ-z)]$

$+b*[-F(ψ-s)+F(ψ-χ)+c_2*(s-χ)-G(s-χ)+G(0)-G(s-χ)]$

Θεωρώ F(0)=G(0)=0

$Π_{D1}(χ,ψ)=c*k-c*[G(χ)+G(1-χ)+c_1]$

$+b*[F(ψ)-F(ψ-s)+c_2*s]+b*[-G(χ)-G(s-χ)-c_1*s]$

Έχοντας υπολογίσει την συνάρτηση κέρδους της εταιρείας D_1 με σκοπό στην συνέχεια να το μεγιστοποιήσει , αντίστοιχα υπολογίζω και τη συνάρτηση κέρδους της εταιρείας D_2 .

Για την συνάρτηση κέρδους του D_2 έχω:

$Π_{D2}(χ,ψ)=c*k-c*[\int_0^{\psi} f(\psi-z)+c_2dz+\int_{\psi}^{1} f(z-\psi)+c_2dz]$

$+b*[\int_s^{\psi} g(z-\chi)+c_1-f(ψ-z)-c_2dz]$

$+b*[\int_{\psi}^{1} g(z-\chi)+c_1-f(z-ψ)-c_2dz]$

⇒

$Π_{D2}(χ,ψ)=c*k-c*[F(ψ)-F(0)+c_2*ψ+F(1-ψ)-F(0)+c_2*(1-ψ)]$

$+b*[G(ψ-χ)-G(s-χ)+c_1*(ψ-s)+F(0)-F(ψ-s)-c_2*(ψ-s)]$

$+b*[G(1-χ)-G(ψ-χ)+c_1*(1-ψ)-F(1-ψ)+F(0)-c_2(1-ψ)]$

⇒

$Π_{D2}(χ,ψ)=c*k-c*[F(ψ)+F(1-ψ)+c_2*ψ+c_2-c_2*ψ]$

$+b*[G(ψ-χ)-G(s-χ)+c_1*-(ψ-s)-F(ψ-s)-c_2*ψ+c_2*s+G(1-χ)$

$-G(ψ-χ)+c_1-c_1*ψ-F(1-ψ)-c_2+c_2*ψ]$

⇒

$Π_{D2}(χ,ψ)= c*k-c*[F(ψ)+F(1-ψ)+c_2]+b*[G(1-χ)-G(s-χ)-c_1*s+c_1]$

$+b*[-F(ψ-s)-F(1-ψ)+c_2*s-c_2]$

Ο τελευταίος τύπος περιγράφει την συνάρτηση κέρδους της εταιρείας D_2.

Σκοπός μας είναι να βρούμε το σημείο ισορροπίας των δύο ανταγωνιστριών εταιρειών και στη συνέχεια να εξετάσουμε αν αυτές οι θέσεις που περιγράφονται από το σημείο ισορροπίας είναι κοινωνικά βέλτιστες.

Σύμφωνα με τον Nash, όταν δύο εταιρείες είναι ιδιωτικές το σημείο ισορροπίας δίνεται από τον τύπο:

$$\frac{\theta \Pi D1(\chi,\psi)}{\theta\chi}=\frac{\theta \Pi D2(\chi,\psi)}{\theta\psi}=0$$

Πρέπει να παραγωγίσουμε μερικώς τις συναρτήσεις κέρδους ως προς χ και ως προς ψ των D_1 και D_2 αντίστοιχα.

Υπολογίζω χωριστά $\frac{\theta \Pi D1}{\theta\chi}$ και $\frac{\theta \Pi D2}{\theta\psi}$, και έχω:

$$\frac{\theta \Pi D1(\chi,\psi)}{\theta\chi}= -c*[g(\chi)-g(1-\chi)]+b*[c_2\frac{\theta s}{\theta\chi}] +b*[-g(\chi)-g(s-\chi)*(\frac{\theta s}{\theta\chi}-1) -c_1\frac{\theta s}{\theta\chi}] +b*[-f(\psi-s](-\frac{\theta s}{\theta\chi})]$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\theta \Pi D1(\chi,\psi)}{\theta\chi}= -c*[g(\chi)-g(1-\chi)]+b*[f(\psi-s)\frac{\theta s}{\theta\chi} + c_2\frac{\theta s}{\theta\chi}] +b*[-g(\chi)-g(s-\chi)\frac{\theta s}{\theta\chi} + g(s-\chi) - c_1\frac{\theta s}{\theta\chi}]$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\theta \Pi D1(\chi,\psi)}{\theta\chi}= -c*[g(\chi)-g(1-\chi)]+b*[f(\psi-s)\frac{\theta s}{\theta\chi} + c_2\frac{\theta s}{\theta\chi} -g(\chi)-g(s-\chi)\frac{\theta s}{\theta\chi} +g(s-\chi)-c_1\frac{\theta s}{\theta\chi}]$$

και

$$\frac{\theta \Pi D2(\chi,\psi)}{\theta\psi}= -c*[f(\psi)-f(1-\psi)]+b*[-g(s-\chi)\frac{\theta s}{\theta\psi} - c_1\frac{\theta s}{\theta\psi}]+b*[-f(\psi-s)(1-\frac{\theta s}{\theta\psi})+f(1-\psi)+c_2\frac{\theta s}{\theta\psi}]$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\theta \Pi D2(\chi,\psi)}{\theta\psi}= -c*[f(\psi)-f(1-\psi)]+b*[-g(s-\chi)\frac{\theta s}{\theta\psi} - c_1\frac{\theta s}{\theta\psi}]+b*[-f(\psi-s)+ f(\psi-s)\frac{\theta s}{\theta\psi} + f(1-\psi) +c_2\frac{\theta s}{\theta\psi}]$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\theta \Pi D2(\chi,\psi)}{\theta\psi}= -c*[f(\psi)-f(1-\psi)]+b*[-g(s-\chi)\frac{\theta s}{\theta\psi} -f(\psi-s) + f(\psi-s)\frac{\theta s}{\theta\psi} + f(1-\psi) +\frac{\theta s}{\theta\psi}*(c_2-c_1)]$$

Έτσι λοιπόν παραγωγίσαμε τις συναρτήσεις κερδών των δυο ανταγωνιστριών εταιρειών λαμβάνοντας υπόψιν ότι και οι δύο εταιρείες είναι ιδιωτικές. Όμως στο μοντέλο μας αρχικά υποθέσαμε ότι η εταιρεία D_1 είναι ιδιωτική , ενώ η εταιρεία D_2 είναι ιδιωτική κατά ένα ποσοστό α και δημόσια κατά ένα ποσοστό 1-α.

Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση κέρδους της D_2 θα περιέχει και μία επιπλέον συνάρτηση h(x,ψ) , που θα αφορά το κομμάτι του δημοσίου μέρους της εταιρείας.

Επειδή η D_2 είναι εν μέρει ιδιωτική και δημόσια κατά ένα ποσοστό (1-α) έχω:

$$\Pi_{D2}(\chi,\psi)= c*k-c*[F(\psi)+F(1-\psi)+ c_2]+b*[G(1-\chi) -G(s-\chi)-c_1*s+c_1]$$
$$+b*[-F(\psi-s)-F(1-\psi)+c_2*s-c_2]+ (1-\alpha)*h(\chi,\psi)$$

Όπου:

$$h(\chi,\psi)=c*k-c*[\int_0^{\chi} g(\chi-z)+c_1dz+\int_{\chi}^{1} g(z-\chi)+c_1dz]$$
$$+b*[\int_0^{\chi} f(\psi-z)+c_2-g(\chi-z)- c_1dz]$$
$$+b*[\int_{\chi}^{s} f(\psi-z)+c_2 - g(z-\chi)- c_1dz]$$
$$+b\int_0^{s} k-f(\psi-z)-c_2dz$$
$$+b* [\int_s^{1} k -g(z-\chi)-c_1dz]$$

⇒

$$h(\chi,\psi)=c*k-c*[G(\chi)-G(0)+c_1*\chi+G(1-\chi)-G(0)+c_1*(1-\chi)]$$
$$+b*[-F(\psi-\chi)+F(\psi)+c_2*\chi+G(0)-G(\chi)-c_1*\chi]$$
$$+b*[-F(\psi-s)+F(\psi-\chi)+c_2*(s-\chi)-G(s-\chi)+G(0)-c_1(s-\chi)]$$
$$+b*[(k-c_2)*s+F(\psi-s)-F(\psi)]$$
$$+b*[-G(1-\chi)+G(s-\chi)+(k-c_1)*(1-s)]$$

$$\Rightarrow h(\chi,\psi)=c*k-c*[G(\chi)+G(1-\chi)+c_1]+b*[G(\chi)-G(1-\chi)+k-c_1]$$

Εφόσον η h(x,ψ) δεν εξαρτάται από το ψ , έχω ότι: $\frac{\theta\Pi D2(\chi,\psi)}{\theta\psi}=\frac{\theta\Pi D2(\chi,\psi)}{\theta\psi}$

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ:

Στην παραπάνω εργασία εξετάζουμε δύο εταιρείες ως προς την απόφασή τους να τοποθετηθούν στην αγορά. Οι εταιρείες διεκδικούν μερίδιο αγοράς για την παραγωγή ενός κοινού μονοπωλιακού προϊόντος όταν ο ανταγωνισμός γίνεται εντός πλαισίου χωρικής διάκρισης τιμών. Υποθέσαμε ότι ο βαθμός ιδιωτικοποίησης των δύο εταιρειών είναι μεταβλητός , δηλαδή οι εταιρείες μπορεί να είναι ένα ποσοστό ιδιωτικές και ένα ποσοστό δημόσιες. Ο ανταγωνισμός εκτείνεται σε δύο στάδια, στο πρώτο τοποθετούνται οι εταιρείες ταυτόχρονα στην αγορά, ενώ στο δεύτερο αποφασίζουν για την τιμολογιακή πολιτική τους. Οι Beladi et al έδειξαν ότι ο βαθμός ιδιωτικοποίησης της κάθε εταιρείας δεν επηρεάζει το κατά Nash σημείο ισορροπίας που παραμένει κοινωνικά βέλτιστο. Η συγκεκριμένη εργασία βασίστηκε στην υπόθεση ότι η συνάρτηση κόστους μεταφοράς των δύο εταιρειών, της μίας δημόσιας και της άλλης κατά ένα ποσοστό ιδιωτικής, εκφράζεται με διαφορετικές συναρτήσεις κόστους για την καθεμία και αποδείξαμε ότι ακόμα και όταν τόσο το κόστος παραγωγής του κοινού προϊόντος, όσο και το κόστος μεταφοράς διαφέρει για τις εταιρείες, το κατά Nash σημείο ισορροπίας παραμένει κοινωνικά βέλτιστο. Η εργασία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για μικτές ολιγοπωλιακές αγορές και αγορές που πραγματοποιούνται κάθετες συγχωνεύσεις. Επιπρόσθετα, θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για να παρέχει απαντήσεις σε συναφή ερωτήματα οικονομικής πολιτικής σχετικά με τη σκοπιμότητα της ιδιωτικοποίησης κάποιων δημόσιων οργανισμών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Beladi H., Chakrabarti A., and Marjit S., (2014), A public firm in a model of a spatial duopoly with price discrimination. *Economics letters* 123(1), 79-81.

[2] Braid R. (2008), Spatial price discrimination and the locations of firms with different product selections or product varieties. *Economics letters* 98(1), 342-347.

[3] Eleftheriou K., -Michelacakis N., (2015), Socially optimal Nash equilibrium locations and privatization in a model of spatial duopoly with price discrimination. *MPRA* No.84850 , Munich.

[4] D' Aspremont, C., Gabszewich, J. J. and Thisse J. F. (1979), On Hotelling's 'stability competition'. *Econometrica* 47(5), 1045-1050.

[5] Lederer, P.J., Hurter, A.P., (1986), Competition of Örms: Discriminatory pricing and location. *Econometrica* 54 (6), 623-640.