

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ**



**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ  
ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ  
ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ  
ΚΙΝΔΥΝΟΥ**

**Δυναμικά Μοντέλα Θνησιμότητας και Εφαρμογές στα  
Συνταξιοδοτικά Ταμεία**

**ΑΜΑΝΤΑ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ**

**M.A.E. 16031**

Διπλωματική εργασία

που υποβλήθηκε στο τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης  
του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την  
απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην  
Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Πειραιάς

Ιούλιος 2019



**UNIVERSITY OF PIRAEUS**



**DEPARTMENT OF STATISTICS & INSURANCE  
SCIENCE**

**POSTGRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL  
SCIENCE & RISK MANAGEMENT**

**Mortality Dynamical Models and Applications to Pension  
Plans**

**AMANDA KONSTANTINOU**

**M.A.E. 16031**

Msc Dissertation

submitted to the Department of Statistics & Insurance Science of the  
University of Piraeus in partial fulfillment of the requirements for the  
degree of Master of Science in Actuarial Science & Risk Management

Piraeus

July 2019



*Στους γονείς μου, Ρεγγίνα και Κώστα  
και στον Χρήστο*



## ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή της μεταπτυχιακής μου εργασίας, Επίκουρο Καθηγητή Γεώργιο Πιτσέλη, του τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς, τόσο για τη στήριξη, όσο και για τη συνεχή βοήθεια και συμπαράσταση που μου προσέφερε καθ' όλη τη διάρκεια της παρούσας εργασίας. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη της συμβουλευτικής επιτροπής, τον Επίκουρο Καθηγητή Πλάτωνα Τήνιο, καθώς και τον Καθηγητή Κλέοντα Τσίμπο, για την προσοχή που υπέδειξαν και την καθοδήγησή τους. Θα ήθελα, επίσης, να ευχαριστήσω τον Διδάκτορα Απόστολο Μποζίκα για τη σημαντική βοήθειά του στα τεχνικά ζητήματα της εργασίας και τις ουσιώδεις συμβουλές του. Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για την ηθική στήριξη και συμπαράσταση σε όλη τη διάρκεια του μεταπτυχιακού προγράμματος.





## Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, χρησιμοποιούμε το μοντέλο θνησιμότητας του Gompertz, στα δεδομένα θνησιμότητας της Ελλάδας για το έτος 2010, με σκοπό να εξετάσουμε κατά πόσο τα δεδομένα αυτά επαληθεύονται από το συγκεκριμένο μοντέλο. Διαπιστώνουμε ότι το μοντέλο των τεσσάρων υποπληθυσμών ταιριάζει καλύτερα στα δεδομένα μας. Στη συνέχεια, κατασκευάζουμε δύο πίνακες επιβίωσης. Ο πρώτος πίνακας αποτελείται από τα δεδομένα θνησιμότητας για την Ελλάδα του έτους 2010, ενώ ο δεύτερος πίνακας περιλαμβάνει τα δεδομένα, στα οποία έχει χρησιμοποιηθεί το μοντέλο θνησιμότητας του Gompertz. Συμπεραίνουμε ότι ο δεύτερος πίνακας επιβίωσης είναι ελαφρώς πιο αισιόδοξος από τον πρώτο πίνακα. Τέλος, δημιουργούμε ένα πλασματικό συνταξιοδοτικό πρόγραμμα για 7 άτομα διαφορετικής μεταξύ τους ηλικίας. Στο πρόγραμμα αυτό χρησιμοποιούμε δύο βάσεις δεδομένων για την εξαγωγή αποτελεσμάτων. Το πρώτο σύνολο δεδομένων είναι αυτών, που έχει εφαρμοστεί το μοντέλο του Gompertz και το δεύτερο σύνολο είναι τα δεδομένα θνησιμότητας της Ελλάδας για το έτος 2010. Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι οι τιμές του κανονικού κόστους και της αναλογιστικής υποχρέωσης που προκύπτουν από το πρώτο σύνολο δεδομένων είναι μικρότερες από αυτές του δεύτερου συνόλου δεδομένων.



## Abstract

In this thesis, we use the Gompertz mortality law in Greece's mortality data for the year 2010 in order to examine whether these data can be verified by this law. We observe that the model of four subpopulations fits better to our data. Furthermore, we construct two life tables. The first table consists of the mortality data for Greece for the year 2010, while the second table is composed of the data, in which we used the Gompertz mortality law. We conclude that the second life table is slightly more optimistic than the first life table. Finally, we create a fictitious retirement plan for 7 people with different ages. In this program, we use two databases to extract results. The first data set is that of Gompertz's law and the second set is Greece's mortality data for 2010. We note that the values of the Normal Cost and the Actuarial Liability resulting from the first set of data are smaller than those of the second set of data.



## Περιεχόμενα

Περίληψη.....	9
Abstract .....	11
Κεφάλαιο 1 – Εισαγωγή .....	15
Κεφάλαιο 2 – Δυναμικά Μοντέλα Θνησιμότητας .....	18
2.1 Εισαγωγή στους Πίνακες Επιβίωσης.....	19
2.2 Υπόβαθρο των Πινάκων Επιβίωσης .....	20
2.3 Συνταξιοδοτικά Προγράμματα.....	22
2.3.1 Ιστορική Αναδρομή και Κατηγορίες Αναλογιστικών Μεθόδων .....	22
2.3.2 Προγράμματα Ασφαλίσεων Ζωής .....	23
2.3.2.1 Ισόβια Ασφάλιση Θανάτου .....	24
2.3.2.2 Πρόσκαιρη Ασφάλιση Θανάτου .....	26
2.3.2.3 Ασφάλιση Καθαρής Προικοδότησης ή Μελλοντικού Κεφαλαίου $n - ετών$ ....	28
2.3.2.4 Μεικτή Ασφάλιση $n - ετών$ .....	29
2.3.2.5 Αναβαλλόμενη Ισόβια Ασφάλιση $m - ετών$ .....	31
2.3.2.6 Αναβαλλόμενη Πρόσκαιρη Ασφάλιση .....	32
2.3.3 Ράντες Ζωής .....	33
2.3.3.1 Ισόβια Ράντα Ζωής.....	34
2.3.3.2 Πρόσκαιρη Ράντα Ζωής $n - ετών$ .....	36
2.3.3.3 Αναβαλλόμενη Ράντα Ζωής $m - ετών$ .....	38
2.3.4 Κλασματικές Ράντες Ζωής σταθερού ποσού .....	39
2.3.4.1 Συνήθης Ισόβια Ράντα Ζωής πληρωτέα $m - φορές$ το χρόνο .....	40
2.3.4.2 Συνήθης Πρόσκαιρη Ράντα Ζωής $n - ετών$ πληρωτέα $m - φορές$ στο έτος ...	41
2.3.4.3 Συνήθης Αναβαλλόμενη Ράντα Ζωής $n - ετών$ πληρωτέα $m - φορές$ στο χρόνο .....	42
2.3.5 Συνταξιοδοτικές Μέθοδοι.....	43
2.3.5.1 Συνταξιοδοτικό Πρόγραμμα .....	43
2.3.5.2 Μέθοδος Πιστωτικής Μονάδας (Unit Credit Method) .....	45
2.3.5.3 Μέθοδος Προβαλλόμενης Πιστωτικής Μονάδας (Projected Unit Credit Method) .....	47
2.3.5.4 Μέθοδος Κανονικής Εισαγωγικής Ηλικίας σε Επίπεδο Ευρώ (Entry Age Normal – Level Dollar).....	49
2.3.5.5 Μέθοδος Κανονικής Εισαγωγικής Ηλικίας με το Κανονικό Κόστος ως Ποσοστό του Μισθού (Entry Age Normal – Cost as a Level Percent of Salary).....	50
2.3.5.6 Μέθοδος Συσσωρευμένου Κόστους σε Ατομική Βάση.....	51

Κεφάλαιο 3 – Μοντέλο Θνησιμότητας Gompertz .....	52
3.1 Μοντέλα Θνησιμότητας.....	52
3.2 Επιλογή Μοντέλου Θνησιμότητας .....	57
3.3 Μοντελοποίηση Ετερογένειας Πληθυσμού.....	62
3.4 Μαθηματικό Μοντέλο Ετερογενών Πληθυσμών .....	63
3.5 Δυναμική Θνησιμότητας στο Μοντέλο Ετερογενών Πληθυσμών .....	64
Κεφάλαιο 4 – Εφαρμογή στους Πίνακες Επιβίωσης και στα Συνταξιοδοτικά Προγράμματα	69
4.1 Εφαρμογή στην Ασφαλιστική Επιστήμη .....	69
4.2. Κατασκευή Πλήρων Πινάκων Επιβίωσης .....	70
4.2.1 Συνεπτυγμένοι Πίνακες Επιβίωσης .....	70
4.2.2 Δομή Πινάκων Επιβίωσης .....	71
4.2.3. Δομή Πίνακα Επιβίωσης ενός Στάσιμου Πληθυσμού.....	73
4.2.4 Μέθοδοι Περιγραφής της Θνησιμότητας βάσει της Ηλικίας (κατά Ηλικία Θνησιμότητα).....	74
4.2.5 Πίνακες Επιβίωσης .....	79
4.2.6 Εφαρμογή σε ένα Συνταξιοδοτικό Πρόγραμμα και Συγκριτικός Πίνακας Συνταξιοδοτικών Σχημάτων .....	81
Κεφάλαιο 5 – Συμπεράσματα.....	87
Παράρτημα.....	90
Βιβλιογραφία.....	102

## Κεφάλαιο 1 - Εισαγωγή

Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα παρουσιάσουμε και θα αναπτύξουμε τα συνταξιοδοτικά προγράμματα και τους πίνακες επιβίωσης. Η χρησιμότητά τους και η ανάγκη ύπαρξης αυτών των δύο αλληλένδετων αναλογιστικών θεμάτων έγιναν αντιληπτές τις τελευταίες δεκαετίες. Η δημιουργία τους, όμως, χρονολογείται αρκετά πιο παλιά.

Παρ' όλο που οι συντάξεις θεωρούνται δεδομένες στη σημερινή εποχή, αυτό δεν ίσχυε τα παλαιότερα χρόνια. Αντιθέτως, οι συντάξεις είναι μια αρκετά πρόσφατη εξέλιξη της οικονομικής και πολιτικής σκέψης. Αξίζει να αναλυθεί ο τρόπος και ο λόγος που δημιουργήθηκαν. Προκειμένου να πραγματοποιηθεί αυτό, θα επιστρέψουμε 374 χρόνια πίσω, στο δουκάτο της Γκότα, στην καρδιά της Γερμανίας.

Το 1645, ο δούκας Ernest ο ευσεβής της Γκότα, ένας προτεσταντικός πρίγκιπας, τον οποίο θαύμαζε βαθιά ο Oliver Cromwell, αποφάσισε να δημιουργήσει ένα ταμείο για την υποστήριξη των χήρων των κληρικών σε ολόκληρη την επικράτειά του. Το 1662, ένα παρόμοιο ταμείο θα δημιουργηθεί για να υποστηρίξει ξανά τις χήρες του δουκάτου. Αυτή τη φορά, οι δικαιούχοι θα ήταν οι χήρες των εκπαιδευτικών. Αυτά τα δύο ταμεία είναι από τα πρώτα μοντέρνα παραδείγματα αυτού που μπορούμε να ονομάσουμε συνταξιοδοτικά ταμεία.

Αργότερα, τον 17<sup>ο</sup> και 18<sup>ο</sup> αιώνα, οι συντάξεις με τη μορφή επιδομάτων θα γίνουν ολοένα και πιο συχνές σε ολόκληρη την Ευρώπη. Αυτές χορηγήθηκαν σε μεγάλο βαθμό ως αποζημίωση για την απώλεια των συζύγων (ειδικά για τους άνδρες που κατείχαν βαθμό και έχασαν τη ζωή τους στον πόλεμο), την απώλεια άκρων (και πάλι, κυρίως για τους τραυματίες πολέμου) ή για αντάλλαγμα αξιοκρατικών πράξεων, είτε στρατιωτικών είτε αστικών. Ήταν πράγματι κοινό για τους καινοτόμους, τους εφευρέτες, τους εμπόρους ή τους πολιτικούς να τους χορηγηθούν πρόσοδοι τον 18<sup>ο</sup> αιώνα για την προώθηση των συμφερόντων ή του πλούτου του έθνους. Αυτές οι πρόσοδοι παραδόθηκαν κατευθείαν από τα βασιλικά θησαυροφυλάκια.

Ωστόσο, δεν ήταν πριν από το 1889 που θεσπίστηκε και υλοποιήθηκε μια νομοθεσία εφαρμόσιμη σε όλους τους εκλέξιμους εργαζομένους. Ο άνθρωπος πίσω από την πρωτοβουλία του «νομοσχεδίου της μεγάλης ηλικίας και της αναπηρίας» ήταν ο Otto

von Bismarck. Η Γερμανία, επομένως, ήταν η πρώτη ευρωπαϊκή χώρα που καθιέρωσε πλήρη συνταξιοδοτικά συστήματα για εργαζομένους ηλικίας 70 ετών και άνω. Το όριο μειώθηκε στα 65 έτη το 1916. Οι εργαζόμενοι στη Μεγάλη Βρετανία έπρεπε να περιμένουν μέχρι το 1908, για να έχουν την ευκαιρία να τους χορηγηθεί κρατική σύνταξη, υπό τον όρο ότι τα ετήσια έσοδά τους δε θα υπερέβαιναν τα £ 31,50. Όπως και στη Γερμανία, η ελάχιστη ηλικία για τη χορήγηση σύνταξης ήταν τα 70 έτη. Ο «νόμος σύνταξης μεγάλης ηλικίας του 1908» αποσκοπούσε να απονείμει στους συνταξιούχους 5 σελίνια (£ 0,25) την εβδομάδα. Αν και οι συντάξεις το 1908 ήταν μικρές σύμφωνα με τα σύγχρονα πρότυπα (αξίζει να σημειωθεί ότι το παραπάνω ποσό δεν έχει προσαρμοστεί σε σημερινές λίρες), η πιο συγκλονιστική αντίθεση μεταξύ του σήμερα και του τότε είναι η αναλογία συνταξιούχου ανά εργαζόμενο. Το 1908, ο λόγος αυτός ήταν 1:22. Μέχρι το 2018, ο λόγος αυτός μειώθηκε στο 1:3,5 (Gianasso, 2015).

Για να έχουν τα συνταξιοδοτικά σχήματα ακριβέστερα και ορθότερα αποτελέσματα, δημιουργήθηκε η ανάγκη ύπαρξης πινάκων με δεδομένα θνησιμότητας και επιβίωσης του πληθυσμού. Με αυτόν τον τρόπο, αναπτύχθηκαν σταδιακά οι πίνακες επιβίωσης που χρησιμοποιούμε μέχρι σήμερα.

Ο Emilius Macer ήταν ο άνθρωπος που δημοσίευσε για πρώτη φορά πίνακα θνησιμότητας ή πίνακα επιβίωσης στο ρωμαϊκό προξενείο του Juris. Αυτός ο πίνακας χρονολογείται το έτος 225 μ.Χ.. Ένα πιο σωστό πρόγραμμα αναπτύχθηκε από τον Ulrian λίγες δεκαετίες αργότερα. Ο πίνακας ονομάστηκε αργότερα πίνακας Ulrian και θεωρήθηκε πιο ορθός από αυτόν του Macer, επειδή αντικατοπτρίζει το πραγματικό προσδόκιμο. Ο Girolamo Cardano το 1570 πρότεινε το προσδόκιμο ζωής ως γραμμική φθίνουσα συνάρτηση της ηλικίας  $x$ . Ο John Garaunt το 1662 κατέταξε τον αριθμό των θανάτων που βασίζονταν στη μελέτη «το νομοσχέδιο θνησιμότητας» του 1658 στην πόλη του Λονδίνου. Αυτός ήταν ο βασικός πίνακας επιβίωσης που έγινε η πηγή της έννοιας του πίνακα επιβίωσης, όπως γνωρίζουμε σήμερα. Ωστόσο, ο πίνακας επιβίωσης ήταν ελαττωματικός, επειδή βασίστηκε μόνο στην εμπειρία της θνησιμότητας.

Το 1693, ο πρώτος πίνακας επιβίωσης συνήθως πιστώνεται στον Edmund Halley, ο οποίος δημιούργησε μια βάση για τον πίνακα επιβίωσης από δεδομένα από την πόλη του Breslau στην Πολωνία. Ο πίνακας αυτός θεωρήθηκε ως ο πρώτος και ο



καλύτερος του είδους του. Ο πίνακας Halley που βασίστηκε στα στοιχεία σχετικά με τη γέννηση και το θάνατο κατά τη διάρκεια των ετών 1687 έως 1691, όπου περιείχαν το μεγαλύτερο μέρος της στήλης του σύγχρονου πίνακα επιβίωσης με δυνατότητα νέας εφαρμογής, επεκτάθηκε στις ασφάλειες, τις συντάξεις και τις ράντες. Ο πίνακας αυτός έγινε το αποδεκτό πρότυπο της εποχής του και δεν μπορούσε να διορθωθεί, επειδή βασίστηκε στην υπόθεση ότι ο πληθυσμός παρέμεινε στάσιμος, γεγονός που δεν ήταν απολύτως εφικτό.

Τον 17<sup>ο</sup> και 18<sup>ο</sup> αιώνα, αρκετές προσπάθειες έγιναν για την κατασκευή ενός πίνακα επιβίωσης με βάση περιορισμένα ή ελλιπή δεδομένα. Το 1746, ο Antoine De Parcieux συνέβαλε επίσης στην ανάπτυξη και τον υπολογισμό των προσδόκιμων. Ο Milne το 1815 ήταν ο πρώτος που δημιούργησε και δημοσίευσε έναν επιστημονικά ορθό πίνακα επιβίωσης ταξινομημένο κατά ηλικία που βασίστηκε σε δεδομένα τόσο του πληθυσμού όσο και της θνησιμότητας (Etikan et al., 2017).

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, θα αναλυθούν οι πίνακες επιβίωσης, καθώς και τα συνταξιοδοτικά προγράμματα. Πιο συγκεκριμένα, στο Κεφάλαιο 2, παρουσιάζονται και αναλύονται οι διάφοροι Πίνακες Επιβίωσης και κάποια Συνταξιοδοτικά Σχήματα. Στη συνέχεια, στο Κεφάλαιο 3, γίνεται ανάλυση των μοντέλων θνησιμότητας και διαμορφώνονται τα δεδομένα, στα οποία χρησιμοποιούμε το μοντέλο θνησιμότητας του Gompertz. Στην πορεία, στο Κεφάλαιο 4, δημιουργούνται Πίνακες Επιβίωσης με τα αρχικά δεδομένα και με τα δεδομένα που διαμορφώθηκαν από το μοντέλο θνησιμότητας του Gompertz, καθώς επίσης παρουσιάζεται ένα Συνταξιοδοτικό Πρόγραμμα για 7 άτομα διαφόρων ηλικιών. Τέλος, στο Κεφάλαιο 5, παρουσιάζονται συγκεντρωμένα τα συμπεράσματα για τις διεργασίες που έγιναν στα προηγούμενα κεφάλαια.

## Κεφάλαιο 2 - Δυναμικά Μοντέλα Θνησιμότητας

Στο Κεφάλαιο αυτό, θα ορίσουμε και θα αναλύσουμε τους Πίνακες Θνησιμότητας, καθώς και ορισμένα Συνταξιοδοτικά Προγράμματα. Πριν, όμως, την παρουσίαση των παραπάνω θεμάτων, είναι αναγκαίος ο ορισμός κάποιων βασικών συναρτήσεων, έτσι ώστε να καταστούν πιο κατανοητά τα ζητήματα που θα αναπτύξουμε σε όλη την παρούσα εργασία. Σύμφωνα με τον Jones (2005), ισχύουν οι παρακάτω εισαγωγικές σχέσεις:

$S(x) = P(X > x)$  είναι η συνάρτηση επιβίωσης ενός ατόμου ηλικίας  $x$

Χρησιμοποιώντας την αθροιστική συνάρτηση κατανομής  $F(x)$ , έχουμε ότι:

$$S(x) \equiv l(x) = 1 - F(x), \text{ όπου } F(x) = P(X \leq x)$$

Επίσης, η συνάρτηση  $S(x)$  είναι το ολοκλήρωμα της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας  $f(x)$ :

$$S(x) = P(X > x) = \int_x^{\infty} f(t) dt$$

Επομένως, έχοντας ως δεδομένη τη συνάρτηση επιβίωσης, μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(x) \equiv d(x) dt = -\frac{dS(x)}{dx}$$

Τέλος, θα ορίσουμε την ένταση θνησιμότητας  $\mu(x)$ :

$$\mu(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P((x \leq X < x + \Delta x | X \geq x))}{\Delta x}$$

Αν η τυχαία μεταβλητή  $X$ , που συμβολίζει τη διάρκεια ζωής ενός νεογέννητου ατόμου, είναι συνεχής, τότε:

$$\mu(x) = \frac{f(x)}{S(x)} = -d \log[S(x)]$$

Η αθροιστική ένταση θνησιμότητας είναι:

$$H(x) = \int_0^x \mu(u) du = -\log[S(x)]$$

Επομένως, εάν γνωρίζουμε την ένταση θνησιμότητας, τότε η συνάρτηση επιβίωσης, στη συνεχή περίπτωση, υπολογίζεται ως:

$$S(x) = \exp[-H(x)] = \exp\left[-\int_0^x \mu(u)du\right]$$

## 2.1 Εισαγωγή στους Πίνακες Επιβίωσης

Ένας πίνακας επιβίωσης είναι ένας σύντομος τρόπος να δείξουμε τις πιθανότητες ενός μέλους συγκεκριμένου πληθυσμού να ζήσει ή να πεθάνει σε μια συγκεκριμένη ηλικία. Είναι ένας άλλος αποτελεσματικός τρόπος έκφρασης των ποσοστών θανάτων που βιώνει ένας πληθυσμός κατά τη διάρκεια μιας δεδομένης χρονικής περιόδου. Τα ποσοστά θνησιμότητας συζητήθηκαν και αναφέρθηκαν από πολλούς ερευνητές ως παρατηρούμενα ποσοστά, αλλά ένα από τα προβλήματα χρήσης αυτών των ποσοστών ως επίπεδα θνησιμότητας είναι ότι η επίδραση της κατανομής της ηλικίας ενός πραγματικού πληθυσμού αντικατοπτρίζεται ή απαιτεί την υιοθέτηση κανονικών πληθυσμών για αποδεκτή σύγκριση των επιπέδων θνησιμότητας σε διάφορους πληθυσμούς. Για να ξεπεραστούν αυτά τα προβλήματα, χρησιμοποιείται ο πίνακας επιβίωσης. Ο πίνακας αυτός εκφράζει καλύτερα το πρότυπο της ανθρώπινης θνησιμότητας. Παρουσιάζει ένα λεπτομερές σχεδιάγραμμα ενός πληθυσμού που συστηματικά εξαντλείται λόγω του θανάτου σε κάθε ηλικία.

Το έτος 1960, ο Keyfitz ορίζει τον πίνακα επιβίωσης ως το σχέδιο για να εκφράσει τη μορφή της θνησιμότητας σε όρους πιθανοτήτων. Αναφέρει, επιπλέον, ότι είναι ακόμη ένα μοντέλο ενός πληθυσμού που καλύπτει την απλούστερη περίπτωση που αξίζει να συζητηθεί: μια κοορτή ή μια ομάδα ανθρώπων που γεννήθηκαν την ίδια στιγμή κοντά στη μετανάστευση και ακολουθούνται διαδοχικά μέχρι να πεθάνουν. Μερικές φορές, ο πίνακας επιβίωσης αναφέρεται ως πίνακας θνησιμότητας που αποτελεί μια μορφή συνδυασμού των ποσοστών θνησιμότητας ενός πληθυσμού διαφορετικών ηλικιών σε ένα ενιαίο στατιστικό μοντέλο. Η κατασκευή ενός πίνακα γενεάς δείχνει τις γενικές τάσεις της θνησιμότητας μεταξύ ανδρών και γυναικών των πληθυσμών ή της κατάστασης της θνησιμότητας των ανθρώπων (Etikan et al., 2017).

## 2.2 Υπόβαθρο των Πινάκων Επιβίωσης

Υπάρχουν δύο τύποι πινάκων επιβίωσης:

- 1) Οι πίνακες περιόδου ή στατικοί πίνακες επιβίωσης δείχνουν την τρέχουσα πιθανότητα θανάτου για άτομα διαφορετικών ηλικιών κατά το τρέχον έτος.
- 2) Οι πίνακες επιβίωσης γενεάς δείχνουν την πιθανότητα θανάτου ανθρώπων από μια συγκεκριμένη ομάδα (ιδιαίτερα το έτος γέννησης) κατά τη διάρκεια της ζωής τους.

Οι στατικοί πίνακες επιβίωσης χρησιμοποιούν δείγμα ατόμων υποθέτοντας ένα σταθερό πληθυσμό με επικαλυπτόμενες γενιές. Οι «στατικοί πίνακες επιβίωσης» και οι «πίνακες επιβίωσης γενεάς» θα είναι οι ίδιοι εάν ο πληθυσμός βρίσκεται σε ισορροπία και το περιβάλλον δεν αλλάζει. Εάν ένας πληθυσμός είχε ένα σταθερό αριθμό ανθρώπων κάθε χρόνο, θα σήμαινε ότι οι πιθανότητες θανάτου από τον πίνακα επιβίωσης ήταν απολύτως ακριβείς. Επίσης, ακριβώς 100.000 άτομα θα γεννιόντουσαν κάθε χρόνο χωρίς να υπάρχει μετανάστευση. Ο «πίνακας επιβίωσης» αναφέρεται κυρίως σε πίνακες της περιόδου ζωής, καθώς οι πίνακες επιβίωσης γενεάς μπορούν να κατασκευαστούν μόνο με τη χρήση δεδομένων μέχρι το σημερινό σημείο, καθώς και σε μακρινές προβολές για τη μελλοντική θνησιμότητα (Etikan et al., 2017).

Οι πίνακες επιβίωσης μπορούν να κατασκευαστούν χρησιμοποιώντας προβλέψεις μελλοντικών ποσοστών θνησιμότητας, αλλά πιο συχνά αποτελούν στιγμιότυπο των ποσοστών θνησιμότητας λόγω ηλικίας στο πρόσφατο παρελθόν και δεν αποτελούν κατ' ανάγκη προβολές. Για τους λόγους αυτούς, οι ηλικιωμένοι που εκπροσωπούνται σε έναν πίνακα επιβίωσης μπορεί να έχουν περισσότερες πιθανότητες να μην είναι αντιπροσωπευτικοί για το τι θα βιώσουν οι άνθρωποι σε αυτές τις ηλικίες στο μέλλον, δεδομένου ότι βασίζεται στις τρέχουσες προόδους της ιατρικής, της δημόσιας υγείας και των προτύπων ασφαλείας που δεν υπήρχαν στα πρώτα χρόνια αυτής της γενεάς. Ένας πίνακας επιβίωσης δημιουργείται από τα ποσοστά θνησιμότητας και τα απογραφικά στοιχεία ενός συγκεκριμένου πληθυσμού, ιδανικά κάτω από ένα κλειστό δημογραφικό σύστημα. Αυτό σημαίνει ότι η μετανάστευση δεν υπάρχει όταν αναλύεται η γενεά. Ένα κλειστό δημογραφικό σύστημα υποθέτει ότι οι μεταναστευτικές ροές είναι τυχαίες και ασήμαντες και ότι οι

μετανάστες από άλλους πληθυσμούς διατρέχουν τον ίδιο κίνδυνο θανάτου με ένα άτομο από τον νέο πληθυσμό. Ένα άλλο όφελος από τους πίνακες επιβίωσης είναι ότι μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την πρόβλεψη δημογραφικών ή διαφορετικών πληθυσμών.

Ωστόσο, υπάρχουν επίσης αδυναμίες των πληροφοριών που εμφανίζονται στους πίνακες επιβίωσης. Η πρώτη αδυναμία είναι ότι δε δηλώνουν τη γενική υγεία του πληθυσμού. Υπάρχουν περισσότερες από μία ασθένειες παρούσες στον κόσμο και ένα άτομο μπορεί να έχει περισσότερες από μία ασθένειες σε διαφορετικά στάδια ταυτόχρονα, εισάγοντας τον όρο συν-νοσηρότητα. Επομένως, οι πίνακες επιβίωσης δε δείχνουν επίσης την άμεση συσχέτιση της θνησιμότητας και της νοσηρότητας.

Ο πίνακας επιβίωσης παρατηρεί την εμπειρία της θνησιμότητας μίας μόνο γενεάς, που αποτελείται από 100.000 γεννήσεις, σε κάθε ηλικία που μπορούν να ζήσουν.

Οι πίνακες επιβίωσης κατασκευάζονται συνήθως ξεχωριστά για τους άνδρες και τις γυναίκες λόγω των ουσιαστικά διαφορετικών ποσοστών θνησιμότητας. Άλλα χαρακτηριστικά μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν για τη διάκριση διάφορων κινδύνων, όπως το κάπνισμα, το επάγγελμα και η κοινωνικό-οικονομική τάξη.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, θα αναφερθούμε στα δυναμικά μοντέλα θνησιμότητας. Μία από τις μεγαλύτερες δυσκολίες που έπρεπε να αντιμετωπίσουν οι επιστήμονες στο παρελθόν για την ορθότερη μοντελοποίηση των ανθρώπινων δεδομένων επιβίωσης σχετίζεται με τις ιδιομορφίες που αποκτά η ανθρώπινη ζωή κατά την εξέλιξη και ανάπτυξη της ιατρικής επιστήμης και της τεχνολογίας. Η ανάπτυξη αυτών των κλάδων αύξησαν το βιοτικό επίπεδο των διάφορων πληθυσμών, καθώς και το μέσο όρο επιβίωσης των ανθρώπων. Με αυτόν τον τρόπο, δημιουργήθηκε η ανάγκη διάφορων επιστημόνων (όπως του Benjamin Gompertz και του Wallodi Weibull) να συνδέσουν την πιθανότητα θανάτου ενός ατόμου με διάφορες παραμέτρους, όπως η ηλικιακή τους εξέλιξη και η αντίστοιχη μείωση της υγείας τους (Ματαλλιωτάκης, 2011). Αξίζει να σημειωθεί ότι η πιθανότητα ένα νεογέννητο να φτάσει την ηλικία των 105 ετών ξεπερνά το 50% στη σημερινή εποχή. Γίνεται, λοιπόν, ευδιάκριτο ότι η συνεχής αύξηση του προσδόκιμου επιβίωσης των ατόμων δημιουργεί την ανάγκη εύρεσης μεθοδολογιών για την ακριβή μοντελοποίηση των δεδομένων επιβίωσης (Gratton and Scott, 2018).

Οι πίνακες επιβίωσης που σχετίζονται με τη μητρική και βρεφική θνησιμότητα είναι σημαντικοί, καθώς βοηθούν στη διαμόρφωση προγραμμάτων οικογενειακού προγραμματισμού που λειτουργούν με συγκεκριμένους πληθυσμούς. Βοηθούν επίσης να συγκριθεί το μέσο προσδόκιμο ζωής μιας χώρας με αυτό άλλων χωρών. Η σύγκριση του προσδόκιμου ζωής παγκοσμίως βοηθά τις χώρες να καταλάβουν γιατί το προσδόκιμο ζωής μιας χώρας αυξάνεται σημαντικά εξετάζοντας την υγειονομική της περίθαλψη και υιοθετώντας ιδέες στα δικά τους συστήματα.

## 2.3 Συνταξιοδοτικά Προγράμματα

### 2.3.1 Ιστορική Αναδρομή και Κατηγορίες Αναλογιστικών Μεθόδων

Το 1722, η ιδέα για παροχή ετήσιων προσόδων σε φτωχούς ηλικιωμένους των ενοριών κατατέθηκε από τον Maseres, δικηγόρο στο Ηνωμένο Βασίλειο, στη Βουλή. Στη συνέχεια, το 1853, δημοσιεύτηκε στο Ηνωμένο Βασίλειο η «12<sup>η</sup> Ετήσια Έκθεση του ληξιαρχου Γεννήσεων, Θανάτων και Γάμων στην Αγγλία» από τον Farr. Σε αυτήν την έκθεση χρησιμοποιήθηκε η μισθολογική κλίμακα των υπαλλήλων που προάγονται για τον υπολογισμό συνταξιοδοτικών λογαριασμών.

Παρά το γεγονός ότι ο Farr έκανε μεγάλη προσπάθεια για να αναγνωρισθεί η χρησιμότητα της μισθολογικής κλίμακας, δεν υπήρξαν αναλογιστικές δημοσιεύσεις βάσει αυτής μέχρι το 1901, όπου ο Manly δημοσίευσε βιβλίο δίνοντας ακριβείς μαθηματικές λύσεις για προβλήματα που, από πολλούς, θεωρούνταν άλυτα σχετικά με την αποτίμηση συνταξιοδοτικών λογαριασμών. Ωστόσο, είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι πρωτοπόρος, όσον αφορά τις βασικές αρχές αποτίμησης των συνταξιοδοτικών προβλημάτων, θεωρείται ο Hardy. Το μειονέκτημα είναι ότι η δουλειά του Hardy ήταν γνωστή μόνο σε ένα στενό κύκλο των συναδέλφων του, μιας και δεν είχε δημοσιεύσει ποτέ τις μεθόδους που χρησιμοποιούσε.

Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφερθεί ότι τον 19<sup>ο</sup> αιώνα η ανάπτυξη της θεωρίας των συνταξιοδοτικών σχημάτων ήταν αρκετά αργή. Όμως, περίπου το 1950, ο αριθμός των γεννήσεων στην Αμερική αυξήθηκε με γρήγορους ρυθμούς, γεγονός που οδήγησε τους αναλογιστές να κατανοήσουν τη σπουδαιότητα και τη σημαντικότητα της ύπαρξης σωστά δομημένων συνταξιοδοτικών σχημάτων.

Οι αναλογιστικές μέθοδοι που υπάρχουν μπορούν να κατηγοριοποιηθούν βάσει 5 χαρακτηριστικών. Αναφορικά οι μέθοδοι είναι οι εξής:

- 1) Μέθοδοι Συσσωρευμένης (Accrued) και Προβεβλημένης (Projected) Παροχής.
- 2) Μέθοδοι χωριστού κόστους (ή με συμπληρωματικό κόστος) και συνολικού κόστους (ή χωρίς συμπληρωματικό κόστος)
- 3) Ατομικές και Ομαδικές Μέθοδοι
- 4) Μέθοδοι σταθερού και μεταβλητού κόστους
- 5) Μέθοδοι ποσοστών (ή χρηματικών) ποσών

### 2.3.2 Προγράμματα Ασφαλίσεων Ζωής

Στο σημείο αυτό, θα ορίσουμε κάποιες βασικές μεταβλητές που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια:

- $T(x)$  : ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής ενός ατόμου ηλικία  $x$  (τυχαία μεταβλητή), με

$$T(x) = X - x / X > x \text{ και } T(0) = X$$

- $K(x)$  : το ακέραιο μέρος της τυχαίας μεταβλητής  $T(x)$
- $i$  : το επιτόκιο
- $v$  : ο συντελεστής προεξόφλησης
- $\delta$  : η ένταση ανατοκισμού
- $d$  : το προεξοφλητικό επιτόκιο

Οι συναρτήσεις που συνδέουν τις 4 παραπάνω μεταβλητές παρουσιάζονται παρακάτω:

$$v = \frac{1}{1+i} \quad (1)$$

$$\delta = \ln(1+i) \quad (2)$$

$$i = e^\delta - 1 \quad (3)$$

$$d = \frac{i}{1+i} \quad (4)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (3), η (1) γράφεται:

$$v = e^{-\delta}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (1), η (4) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$d = 1 - v$$

Επίσης, αξίζει να οριστούν οι παρακάτω συναρτήσεις, οι οποίες θα μας διευκολύνουν στους μαθηματικούς υπολογισμούς των διάφορων ασφαλιστικών συναρτήσεων:

$$D_x = v^x l_x$$

$N_x = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} D_{x+t}$ , όπου  $\omega$  είναι η μέγιστη ηλικία που μπορεί να επιζήσει ένα άτομο

$$C_x = v^{x+1} d_x$$

$$M_x = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} C_{x+t}$$

Οι παραπάνω συναρτήσεις ονομάζονται συναρτήσεις μετατροπής και χρησιμοποιούνται ευρέως στους τύπους των Ασφαλίσεων και των Ραντών Ζωής (Χατζόπουλος, 2011).

### 2.3.2.1 Ισόβια Ασφάλιση Θανάτου

Σε αυτό το πρόγραμμα, η αποζημίωση καταβάλλεται στους δικαιούχους οποτεδήποτε συμβεί ο θάνατος του ασφαλισμένου. Ας θεωρήσουμε ότι το ασφαλισμένο κεφάλαιο είναι 1 νομισματική μονάδα. Χρειάζεται να διακριθούν δύο περιπτώσεις για την καταβολή του ασφαλισμένου κεφαλαίου. Στην πρώτη περίπτωση, η καταβολή γίνεται στο «τέλος του έτους θανάτου» του ασφαλισμένου. Με άλλα λόγια, αν ο ασφαλισμένος ηλικίας ( $x$ ) πεθάνει σε  $x+n+k$  χρόνια, όπου  $n$  είναι ακέραιος αριθμός και  $0 \leq k \leq 1$ , τότε η καταβολή του ασφαλισμένου κεφαλαίου θα γίνει στο  $n+1$  έτος. Αξίζει να σημειωθεί ότι η ηλικία  $x$  είναι η ηλικία του ασφαλισμένου κατά την έναρξη της ασφάλισης. Στη δεύτερη περίπτωση, το ασφαλισμένο κεφάλαιο καταβάλλεται «τη



στιγμή του θανάτου» του ασφαλισμένου. Για παράδειγμα, αν ο ασφαλισμένος ηλικίας (x) πεθάνει σε x+m χρόνια, όπου m θετικός πραγματικός αριθμός (m > 0), τότε η καταβολή του ασφαλισμένου κεφαλαίου θα γίνει στο x+m έτος (Χατζόπουλος, 2011).

A. Στην πρώτη περίπτωση, η παρούσα αξία της μονάδας ασφαλισμένου κεφαλαίου που θα καταβληθεί στο «τέλος του έτους θανάτου» είναι μία τυχαία μεταβλητή Y, όπου:

$$Y = v^{K(x)+1}, \text{ όπου } K(x) = 0, 1, 2, \dots$$

Το Ενιαίο Καθαρό Ασφάλιστρο είναι :

$$A_x = E(Y) = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} P(K(x) = k) = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_kq_x$$

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k}$$

Χρησιμοποιώντας τους όρους συναρτήσεων μετατροπής, προκύπτει ότι:

$$A_x = \frac{1}{l_x} \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} d_{x+k} = \frac{1}{l_x v^x} \sum_{k=0}^{\infty} v^{x+k+1} d_{x+k} = \frac{1}{D_x} \sum_{k=0}^{\infty} C_{x+k} = \frac{M_x}{D_x}$$

Αντίστοιχα,

$${}^2A_x = E(Y^2) = \sum_{k=0}^{\infty} v^{2(k+1)} P(K(x) = k) = \sum_{k=0}^{\infty} v^{2(k+1)} {}_k p_x q_{x+k}$$

Άρα,

$$\text{Var}(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = {}^2A_x - (A_x)^2$$

B. Στη δεύτερη περίπτωση, η παρούσα αξία της μονάδας ασφαλισμένου κεφαλαίου που θα καταβληθεί «τη στιγμή του θανάτου» είναι μία τυχαία μεταβλητή Z, όπου:

$$Z = v^{T(x)}, \text{ όπου } T(x) > 0$$

Το Ενιαίο Καθαρό Ασφάλιστρο είναι:

$$\bar{A}_x = E(Z) = \int_0^{\infty} v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

Με τους όρους των συναρτήσεων μετατροπής, έχουμε:

$$\overline{A}_x = \frac{1}{v^{x|_x}} \int_0^\infty v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt = \frac{1}{D_x} \sum_{k=0}^\infty \overline{C}_{x+k} = \frac{\overline{M}_x}{D_x}$$

Αντίστοιχα,

$$\overline{{}^2A}_x = E(Z^2) = \int_0^\infty v^{2t} {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

Επομένως,

$$\text{Var}(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2 = \overline{{}^2A}_x - (\overline{A}_x)^2$$

Αν υποθέσουμε, σε αυτό το σημείο, ότι ισχύει η ομοιόμορφη κατανομή θανάτων (μέθοδος UDD) σε κάθε έτος ηλικίας, τότε ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$\overline{A}_x \approx \frac{i}{\delta} A_x$$

### 2.3.2.2 Πρόσκαιρη Ασφάλιση Θανάτου

Σε αυτό το πρόγραμμα, η καταβολή της αποζημίωσης πραγματοποιείται μόνο αν ο ασφαλισμένος πεθάνει κατά τη διάρκεια της ασφαλιστικής του κάλυψης. Αν ο ασφαλισμένος επιβιώσει μετά το πέρας της ασφαλιστικής περιόδου, τότε δε λαμβάνει καμία αποζημίωση και η ασφάλιση λήγει. Θα διακρίνουμε πάλι δύο περιπτώσεις για τη χρονική στιγμή που θα καταβληθεί η αποζημίωση (Χατζόπουλος, 2011).

Α. Στην πρώτη περίπτωση, όπου το ασφαλισμένο κεφάλαιο θα καταβληθεί «στο τέλος του έτους θανάτου» του ασφαλισμένου, η παρούσα αξία της παροχής είναι η τυχαία μεταβλητή  $Y$ , όπου:

$$Y = v^{K(x)+1}, \text{ όπου } K(x) = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Το Ενιαίο Καθαρό Ασφάλιστρο είναι :

$$A_{1_{x:n|}} = E(Y) = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} P(K(x) = k)$$

$$A_{1_{x:n|}} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_kq_x = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_kp_x q_{x+k}$$

Χρησιμοποιώντας τους όρους συναρτήσεων μετατροπής, προκύπτει ότι:

$$A_{1_{x:n|}} = \frac{1}{l_x} \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} d_{x+k} = \frac{1}{v^x l_x} \sum_{k=0}^{n-1} v^{x+k+1} d_{x+k}$$

$$A_{1_{x:n|}} = \frac{1}{D_x} \sum_{k=0}^{n-1} C_{x+k} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

Αντίστοιχα,

$${}^2A_{1_{x:n|}} = E(Y^2) = \sum_{k=0}^{n-1} v^{2(k+1)} P(K(x) = k) = \sum_{k=0}^{n-1} v^{2(k+1)} {}_kp_x q_{x+k}$$

Άρα,

$$Var(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = {}^2A_{1_{x:n|}} - (A_{1_{x:n|}})^2$$

B. Στη δεύτερη περίπτωση, η παρούσα αξία της παροχής, που θα καταβληθεί «τη στιγμή του θανάτου» του ασφαλισμένου, είναι η τυχαία μεταβλητή Z, όπου:

$$Z = \begin{cases} v^{T(x)}, & 0 \leq T(x) < n \\ 0, & T(x) \geq n \end{cases}$$

Το Ενιαίο Καθαρό Ασφάλιστρο είναι:

$$\overline{A_{1_{x:n|}}} = E(Z) = \int_0^n v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt$$

Κάνοντας χρήση των όρων των συναρτήσεων μετατροπής και αντίστοιχα και με τη διακριτή πρόσκαιρη ασφάλιση θανάτου, η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$\overline{A_{1_{x:n|}}} = \frac{\overline{M_x - M_{x+n}}}{D_x}$$

Αντίστοιχα,

$$\overline{{}^2A_{1_{x:n|}}} = E(Z^2) = \int_0^n v^{2t} {}_tp_x \mu_{x+t} dt$$

Επομένως,

$$\text{Var}(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2 = \overline{{}^2A_{x:n|}} - (\overline{A_{x:n|}})^2$$

Αν υποθέσουμε, σε αυτό το σημείο, ότι ισχύει η ομοιόμορφη κατανομή θανάτων (μέθοδος UDD) σε κάθε έτος ηλικίας, τότε ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$\overline{A_{x:n|}} \approx \frac{i}{\delta} A_{x:n|}$$

### 2.3.2.3 Ασφάλιση Καθαρής Προικοδότησης ή Μελλοντικού Κεφαλαίου $n$ - ετών

Στο πρόγραμμα αυτό, το ασφαλισμένο κεφάλαιο καταβάλλεται εφ' όσον ο ασφαλισμένος βρίσκεται εν ζωή «στο τέλος του  $n$ -οστού έτους» (Χατζόπουλος, 2011). Η παρούσα αξία της παροχής είναι η τυχαία μεταβλητή  $Y$ , όπου:

$$Y = \begin{cases} 0, & 0 \leq T(x) < n \\ v^n, & T(x) \geq n \end{cases}$$

Το Ενιαίο Καθαρό Ασφάλιστρο είναι:

$$A_{x:n|} = E(Y) = v^n * {}_n p_x$$

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφεί:

$$A_{x:n|} = E(Y) = v^n * {}_n p_x = v^n \frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{v^x}{v^x} v^n \frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{v^{x+n} l_{x+n}}{v^x l_x}$$

Άρα,

$$A_{x:n|} = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

Αντίστοιχα,

$${}^2A_{x:n|} = E(Y^2) = v^{2n} * {}_n p_x$$

Επομένως,

$$\text{Var}(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = {}^2A_{x:n|} - A_{x:n|}^2$$

$$\begin{aligned}
&= v^{2n} * {}_n p_x - (v^n * {}_n p_x)^2 = v^{2n} * {}_n p_x - v^{2n} * {}_n p_x^2 \\
&= v^{2n} * {}_n p_x * (1 - {}_n p_x) = v^{2n} * {}_n p_x * {}_n q_x
\end{aligned}$$

### 2.3.2.4 Μεικτή Ασφάλιση n - ετών

Σε αυτό το πρόγραμμα, το ασφαλισμένο κεφάλαιο θα καταβληθεί είτε στον ίδιο τον ασφαλισμένο μετά τη διάρκεια της περιόδου ασφάλισης και εάν εκείνος έχει επιβιώσει είτε στους δικαιούχους του ασφαλισμένου σε περίπτωση που πεθάνει κατά τη διάρκεια της ασφαλιστικής περιόδου. Θα διακρίνουμε και εδώ δύο περιπτώσεις ανάλογα με τη χρονική στιγμή που καταβάλλεται το ασφαλισμένο κεφάλαιο (Χατζόπουλος, 2011).

A. Στην πρώτη περίπτωση, όπου σε περίπτωση θανάτου η καταβολή της παροχής θα γίνει «στο τέλος του έτους θανάτου» του ασφαλισμένου, η παρούσα αξία του ασφαλισμένου κεφαλαίου που θα καταβληθεί είναι η τυχαία μεταβλητή Y, όπου:

$$Y = \begin{cases} v^{K(x)+1}, & K(x) = 0, 1, \dots, n-1 \\ v^n, & K(x) = n, n+1, \dots \end{cases}$$

Το Ενιαίο Καθαρό Ασφάλιστρο είναι ίσο με:

$$A_{x:n|} = E(Y) = A_{x:n|}^1 + A_{x:n|}^2 = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} * {}_k p_x * q_{x+k} + v^n * {}_n p_x$$

Χρησιμοποιώντας τους όρους συναρτήσεων μετατροπής, προκύπτει ότι:

$$A_{x:n|} = \frac{D_{x+n}}{D_x} + \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$$

Επομένως,

$$Var(Y) = Var(Y_1) + Var(Y_2) + 2Cov(Y_1, Y_2) \text{ , όπου}$$

Y<sub>1</sub>: η παρούσα αξία της διακριτής πρόσκαιρης ασφάλισης n – ετών και

Y<sub>2</sub>: η παρούσα αξία της ασφάλισης προικοδότησης

Λόγω του ότι το γινόμενο  $Y_1 * Y_2$  είναι ίσο με μηδέν, τότε:

$$Cov(Y_1, Y_2) = E(Y_1 * Y_2) - E(Y_1) * E(Y_2) = 0 - A_{x:n|}^1 * A_{x:n|}^1$$

Άρα,

$$Var(Y) = Var(Y_1) + Var(Y_2) - 2A_{x:n|}^1 * A_{x:n|}^1$$

B. Στη δεύτερη περίπτωση, όπου σε περίπτωση θανάτου του ασφαλισμένου η καταβολή του ασφαλισμένου κεφαλαίου θα γίνει «τη στιγμή του θανάτου», η παρούσα αξία της παροχής που θα καταβληθεί είναι η τυχαία μεταβλητή Z, όπου:

$$Z = \begin{cases} v^{T(x)}, & 0 \leq T(x) < n \\ v^n, & T(x) \geq n \end{cases}$$

Το Ενιαίο Καθαρό Ασφάλιστρο είναι:

$$\overline{A_{x:n|}} = E(Z) = \overline{A_{x:n|}^1} + A_{x:n|}^1 = \int_0^n v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt + v^n {}_n p_x$$

Με τους όρους συναρτήσεων μετατροπής, η παραπάνω σχέση γράφεται ως εξής:

$$\overline{A_{x:n|}} = \frac{\overline{M_x - M_{x+n}} + D_{x+n}}{D_x}$$

Αντίστοιχα με την Περίπτωση A,

$$Var(Z) = Var(Z_1) + Var(Z_2) + 2 * Cov(Z_1, Z_2) , \text{ όπου}$$

$Z_1$ : η παρούσα αξία της συνεχούς πρόσκαιρης ασφάλισης n – ετών και

$Z_2$ : η παρούσα αξία της ασφάλισης προικοδότησης

Επομένως,

$$Var(Z) = Var(Z_1) + Var(Z_2) - 2 * \overline{A_{x:n|}^1} * A_{x:n|}^1$$

Υπό την υπόθεση της ομοιόμορφης κατανομής θανάτων σε κάθε έτος ηλικίας, ισχύει ότι:

$$\overline{A_{x:n}} = \overline{A_{x:n}^1} + A_{x:n} \approx \frac{i}{\delta} A_{x:n}^1 + A_{x:n} = A_{x:n} + \left(\frac{i}{\delta} - 1\right) A_{x:n}^1$$

### 2.3.2.5 Αναβαλλόμενη Ισόβια Ασφάλιση $m$ - ετών

Στο πρόγραμμα αυτό, το ασφαλισμένο κεφάλαιο αρχίζει να πληρώνεται μετά από  $m$  - έτη. Με άλλα λόγια, είναι μία ισόβια ασφάλιση θανάτου με τη διαφορά ότι η ασφάλιση αυτή ισχύει μετά από  $m$  - έτη. Εάν ο ασφαλισμένος ηλικίας ( $x$ ) πεθάνει στη διάρκεια των  $m$  - ετών δεν καταβάλλεται καμία αποζημίωση στους δικαιούχους του, ενώ αν πεθάνει μετά τα  $x+m$  χρόνια, τότε λαμβάνουν οι δικαιούχοι την αποζημίωση. Σε αυτό το σημείο, θα διαχωρίσουμε δύο περιπτώσεις για τη χρονική στιγμή της καταβολής του ασφαλισμένου κεφαλαίου (Χατζόπουλος, 2011).

Α. Στην πρώτη περίπτωση, όπου η καταβολή του ασφαλισμένου κεφαλαίου γίνεται «στο τέλος του έτους θανάτου» του ασφαλισμένου, η παρούσα αξία της 1 νομισματικής μονάδας είναι η τυχαία μεταβλητή  $Y$ , όπου:

$$Y = \begin{cases} 0, & K(x) = 0, 1, \dots, m-1 \\ v^{K(x)+1}, & K(x) = m, m+1, \dots \end{cases}$$

Το Ενιαίο Καθαρό Ασφάλιστρο είναι ίσο με:

$$\begin{aligned} {}_m/A_x &= \sum_{k=m}^{\infty} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+m+1} {}_{k+m} p_x q_{x+k+m} \\ &= v^m {}_m p_x \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_k p_{x+m} q_{x+m+k} \\ &= {}_m/A_x = v^m {}_m p_x * A_{x+m} \end{aligned}$$

Αξίζει, επίσης, να παρατηρηθεί ότι η παραπάνω σχέση γράφεται:

$${}_m/A_x = A_x - A_{x:m}^1$$

Με όρους συναρτήσεων μετατροπής, το ενιαίο καθαρό ασφάλιστρο γράφεται:

$${}_m/A_x = \frac{M_x}{D_x} - \frac{M_x - M_{x+m}}{D_x} = \frac{M_{x+m}}{D_x}$$

Β. Στη δεύτερη περίπτωση, όπου το ασφαλισμένο κεφάλαιο καταβάλλεται «τη στιγμή του θανάτου» του ασφαλισμένου, η παρούσα αξία της 1 νομισματικής μονάδας είναι η τυχαία μεταβλητή  $Z$ , όπου:

$$Z = \begin{cases} 0, & T(x) \leq m \\ v^{T(x)}, & T(x) \geq m \end{cases}$$

Το Ενιαίο Καθαρό Ασφάλιστρο είναι:

$$\overline{m/A_x} = \int_m^\infty v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt = v^m {}_m p_x * \overline{A_{x+m}}$$

Με όρους συναρτήσεων μετατροπής έχουμε ότι:

$$\overline{m/A_x} = \frac{\overline{M_{x+m}}}{D_x}$$

### 2.3.2.6 Αναβαλλόμενη Πρόσκαιρη Ασφάλιση

Στο πρόγραμμα αυτό, συνδυάζεται η αναβαλλόμενη και η πρόσκαιρη ασφάλιση θανάτου. Εδώ, το ασφαλισμένο κεφάλαιο καταβάλλεται μετά από  $m - \text{έτη}$  και διαρκεί  $m+n \text{ έτη}$ . Με άλλα λόγια, αν ο ασφαλισμένος πεθάνει πριν τα  $x+m$  χρόνια, τότε δεν καταβάλλεται αποζημίωση στους δικαιούχους του. Το ίδιο συμβαίνει και αν ο ασφαλισμένος πεθάνει μετά τα  $x+n+m$  έτη. Αντιθέτως, αν ο ασφαλισμένος πεθάνει μετά τα  $x+m$  έτη αλλά πριν τα  $x+m+n$  έτη, τότε οι δικαιούχοι λαμβάνουν το ασφαλισμένο κεφάλαιο. Θα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις σχετικά με το χρόνο καταβολής της αποζημίωσης (Χατζόπουλος, 2011).

Α. Στην πρώτη περίπτωση, όπου το ασφαλισμένο κεφάλαιο καταβάλλεται «στο τέλος του έτους θανάτου» του ασφαλισμένου, η παρούσα αξία της 1 νομισματικής μονάδας που θα καταβληθεί είναι η τυχαία μεταβλητή  $Y$ , όπου:

$$Y = \begin{cases} v^{K(x)+1}, & K(x) = m, m+1, \dots, m+n-1 \\ 0, & K(x) = 0, 1, \dots, m-1 \\ 0, & K(x) = m+n, m+n+1, \dots \end{cases}$$

Το Ενιαίο Καθαρό Ασφάλιστρο είναι:

$$m/n A_x = \sum_{k=m}^{m+n-1} v^k {}_k p_x q_{x+k} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+m+1} {}_{k+m} p_x q_{x+k+m}$$



$$= v^m {}_m p_x \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k p_{x+m} q_{x+k+m} \Rightarrow$$

$${}_{m/n} A_x = A_{x:m|}^1 * A_{x+m:n|}^1$$

Όπως και στο προηγούμενο πρόγραμμα ασφάλισης, παρατηρείται ότι:

$${}_{m/n} A_x = A_{x:m+n|}^1 - A_{x:m|}^1$$

Με όρους συναρτήσεων μετατροπής, ισχύει ότι:

$${}_{m/n} A_x = \frac{M_x - M_{x+m+n}}{D_x} - \frac{M_x - M_{x+m}}{D_x} = \frac{M_{x+m} - M_{x+m+n}}{D_x}$$

Β. Στη δεύτερη περίπτωση, όπου το ασφαλισμένο κεφάλαιο καταβάλλεται «τη στιγμή του θανάτου» του ασφαλισμένου, η παρούσα αξία της 1 νομισματικής μονάδας που θα καταβληθεί είναι η τυχαία μεταβλητή  $Z$ , όπου:

$$Z = \begin{cases} 0, & m+n \leq T(x) \leq m \\ v^{T(x)}, & m+n \geq T(x) \geq m \end{cases}$$

Το Ενιαίο Καθαρό Ασφάλιστρο είναι ίσο με:

$$\overline{{}_{m/n} A_x} = \int_n^{m+n} v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt = \overline{A_{x:m|}^1} * \overline{A_{x+m:n|}^1}$$

Με όρους συναρτήσεων μετατροπής έχουμε ότι:

$$\overline{{}_{m/n} A_x} = \frac{\overline{M_{x+m}} - \overline{M_{x+m+n}}}{D_x}$$

### 2.3.3 Ράντες Ζωής

Στην ενότητα αυτή, θα ορίσουμε και θα αναλύσουμε τις ράντες ζωής. Οι κατηγορίες, στις οποίες διακρίνονται, είναι οι παρακάτω:

- 1) σταθερές
- 2) μη σταθερές
- 3) πρόσκαιρες και
- 4) διηνεκείς

Μια ράντα μπορεί να είναι προκαταβλητέα, όταν οι πληρωμές γίνονται στην αρχή κάθε χρονικής περιόδου, ή ληξιπρόθεσμη, όταν οι πληρωμές γίνονται στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου.

### Βέβαιη Ράντα Ζωής

Ως βέβαιη προκαταβλητέα ράντα ορίζεται η:

$$a_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 + v^3 + \dots + v^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k$$

$$a_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{1-v} = \frac{1-v^n}{d}$$

Ως βέβαιη ληξιπρόθεσμη ράντα ορίζεται η:

$$a_{n|} = v + v^2 + v^3 + \dots + v^n = \sum_{k=1}^n v^k$$

$$a_{n|} = \frac{v-v^{n+1}}{1-v} = \frac{1-v^n}{i}$$

Τέλος, ως συνεχής βέβαιη ράντα ορίζεται η:

$$\overline{a}_{n|} = \int_0^n v^t dt = \int_0^n e^{-\delta t} dt = \frac{1-v^n}{\delta}$$

#### **2.3.3.1 Ισόβια Ράντα Ζωής**

Α. Ισόβια προκαταβλητέα ράντα ζωής. Ορίζουμε μια ράντα ζωής ως ισόβια και προκαταβλητέα όταν πληρώνει κάθε έτος μία νομισματική μονάδα εφ' όσον το άτομο βρίσκεται εν ζωή. Οι πληρωμές είναι διακριτές, δηλαδή γίνονται στις 0, 1, 2, ..., K(x) χρονικές στιγμές (συνήθως έτη) (Χατζόπουλος, 2011). Η παρούσα αξία είναι η τυχαία μεταβλητή Y, όπου:

$$Y = 1 + v + v^2 + \dots + v^{K(x)} = a_{\overline{K(x)+1}|} = \sum_{k=0}^n v^k$$

και η συνάρτηση πιθανότητας ορίζεται ως:

$$P(Y = y) = P(a_{\overline{K(x)+1}|} = a_{\overline{k+1}|}) = P(K(x) = k) = {}_k/q_x, k = 0,1,2, \dots$$

Το Καθαρό Ενιαίο Ασφάλιστρο είναι ίσο με:

$$\ddot{a}_x = E(Y) = E(\alpha_{K(x)+1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{k+1} \cdot {}_k p_x$$

Από τον ορισμό της παρούσας αξίας προκύπτει ότι:

$$Y = 1 + v + v^2 + \dots + v^{K(x)} = \sum_{k=0}^{K(x)} v^k = \frac{1-v^{K(x)+1}}{1-v}$$

Θέτουμε  $Z = v^{K(x)+1}$ , επομένως:

$$Y = \frac{1-Z}{d}$$

Z: Παρούσα αξία της Διακριτής Ισόβιας Ασφάλισης Θανάτου

Άρα,

$$E(Y) = \frac{1-E(Z)}{d} \Rightarrow \ddot{a}_x = \frac{1-A_x}{d} \Rightarrow A_x + d \cdot \ddot{a}_x = 1$$

Τέλος,

$$Var(Y) = \frac{1}{d^2} \cdot Var(Z) \Rightarrow Var(Y) = \frac{1}{d^2} ({}^2A_x - (A_x)^2)$$

B. Ισόβια ληξιπρόθεσμη ράντα ζωής. Μια ράντα ζωής ορίζεται ως ισόβια και ληξιπρόθεσμη όταν οι πληρωμές γίνονται στις 1, 2, 3, ..., K(x) χρονικές στιγμές (συνήθως έτη) και εφ' όσον ο ασφαλισμένος βρίσκεται στη ζωή. Αντίστοιχα με την Περίπτωση A, η παρούσα αξία είναι η τυχαία μεταβλητή Y, όπου:

$$Y = v + v^2 + \dots + v^{K(x)} = \alpha_{K(x)}$$

Το Ενιαίο Καθαρό Ασφάλιστρο είναι:

$$E(Y) = \alpha_x = \sum_{k=1}^{\infty} v^k \cdot {}_k p_x$$

Είναι εύκολο να παρατηρηθεί ότι η διαφορά των τυχαίων μεταβλητών  $\alpha_{K(x)+1}$  και  $\alpha_{K(x)}$  είναι η σταθερά 1. Επομένως, το ενιαίο καθαρό ασφάλιστρο μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\alpha_{K(x)} = \alpha_{K(x)+1} - 1 \Rightarrow E(\alpha_{K(x)}) = E(\alpha_{K(x)+1}) - 1$$

$$\Rightarrow \alpha_x = \ddot{\alpha}_x - 1 \Rightarrow \ddot{\alpha}_x = \alpha_x + 1$$

Γ. Ισόβια συνεχής ράντα ζωής. Μια ράντα ζωής ορίζεται ως ισόβια συνεχής όταν οι πληρωμές καταβάλλονται συνέχεια κατά τη διάρκεια του έτους. Η παρούσα αξία είναι η τυχαία μεταβλητή  $Y$ , όπου:

$$Y = \overline{\alpha_{T|}} = \frac{1-v^T}{\delta}$$

Το Ενιαίο Καθαρό Ασφάλιστρο είναι:

$$E(Y) = \overline{\alpha}_x = \int_0^{\infty} v^t {}_t p_x dt$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι:

$$\overline{\alpha}_x = E(Y) = E(\overline{\alpha_{T(x)|}}) = E\left(\frac{1-v^{T(x)}}{\delta}\right) = \frac{1-E(v^{T(x)})}{\delta} \Rightarrow$$

$$\overline{\alpha}_x = \frac{1-\overline{A}_x}{\delta} \Rightarrow \overline{A}_x + \delta * \overline{\alpha}_x = 1$$

Τέλος, αντίστοιχα με την Περίπτωση Α:

$$Var(Y) = \frac{1}{\delta^2} (\overline{{}^2 A}_x - (\overline{A}_x)^2)$$

### 2.3.3.2 Πρόσκαιρη Ράντα Ζωής $n$ - ετών

Α. Πρόσκαιρη προκαταβλητέα ράντα ζωής  $n$  - ετών (Χατζόπουλος, 2011). Η παρούσα αξία είναι η τυχαία μεταβλητή  $Y$ , όπου:

$$Y = \begin{cases} \alpha_{K(x)+1|}, & K(x) = 0, 1, \dots, n-1 \\ \ddot{\alpha}_n|, & K(x) = n, n+1, \dots \end{cases}$$

Το Ενιαίο Καθαρό Ασφάλιστρο είναι:

$$E(Y) = \alpha_{x:n|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k {}_k p_x$$

Επίσης, ισχύει η σχέση:

$$Y = \frac{1-Z}{d}, \text{ όπου:}$$

Z: η παρούσα αξία μίας διακριτής μεικτής ασφάλισης n – ετών.

Επομένως,

$$\alpha_{x:n|}^{\ddot{}} = \frac{1-A_{x:n|}}{d}$$

Τέλος,

$$\text{Var}(Y) = \frac{1}{d^2} \left( {}^2A_{x:n|} - (A_{x:n|})^2 \right)$$

B. Πρόσκαιρη ληξιπρόθεσμη ράντα ζωής n – ετών. Η παρούσα αξία είναι η τυχαία μεταβλητή Y, όπου:

$$Y = \begin{cases} \alpha_{K(x)|}, & K(x) = 0, 1, \dots, n-1 \\ \alpha_n, & K(x) = n, n+1, \dots \end{cases}$$

Το Ενιαίο Καθαρό Ασφάλιστρο είναι:

$$E(Y) = \alpha_{x:n|} = \sum_{k=1}^n v^k {}_k p_x$$

Ομοίως με την Περίπτωση A, αποδεικνύεται ότι:

$$\alpha_{x:n|} = \frac{1-(1+i)^{-n} A_{x:n|}}{i}$$

Γ. Πρόσκαιρη συνεχής ράντα ζωής n – ετών. Η παρούσα αξία είναι η τυχαία μεταβλητή Y, όπου:

$$Y = \begin{cases} \overline{a_{T(x)|}}, & 0 \leq T(x) < n \\ \overline{a_n}, & T(x) \geq n \end{cases}$$

Το Ενιαίο Καθαρό Ασφάλιστρο είναι:

$$E(Y) = \overline{a_{x:n|}} = \int_0^n v^t {}_t p_x dt$$

Επίσης, ισχύει η σχέση:

$$Y = \frac{1-Z}{\delta}, \text{ όπου}$$

Z: η παρούσα αξία μιας συνεχούς μεικτής ασφάλισης

$$\overline{a_{x:n}} = \frac{1 - \overline{A_{x:n}}}{\delta} \Rightarrow \overline{A_{x:n}} = 1 - \delta * \overline{a_{x:n}}$$

Τέλος,

$$Var(Y) = \frac{1}{\delta^2} \left( \overline{{}^2A_{x:n}} - (\overline{A_{x:n}})^2 \right)$$

### 2.3.3.3 Αναβαλλόμενη Ράντα Ζωής m - ετών

A. Αναβαλλόμενη προκαταβλητέα ράντα ζωής m - ετών (Χατζόπουλος, 2011). Η παρούσα αξία είναι η τυχαία μεταβλητή Y, όπου:

$$Y = \begin{cases} 0, & K(x) = 0, 1, 2, \dots, m-1 \\ v^m + \dots + v^{K(x)}, & K(x) = m, m+1, \dots \end{cases}$$

Το Ενιαίο Καθαρό Ασφάλιστρο είναι:

$${}_m\ddot{a}_x = {}_m p_x * v^m * \sum_{k=m}^{\infty} A_{x:k} \cdot 1$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως διαφορά του ενιαίου καθαρού ασφαλίστρου μιας ισόβιας προκαταβλητέας ράντας ζωής ( $\ddot{a}_x$ ) και του ενιαίου καθαρού ασφαλίστρου μιας πρόσκαιρης προκαταβλητέας ράντας ζωής m - ετών ( $a_{x:m}$ ):

$${}_m\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - a_{x:m}$$

B. Αναβαλλόμενη ληξιπρόθεσμη ράντα ζωής m - ετών. Το Ενιαίο Καθαρό Ασφάλιστρο είναι:

$${}_m\ddot{a}_x = a_x - a_{x:m} = {}_m p_x * v^m * a_{x+m}$$

Γ. Αναβαλλόμενη συνεχής ράντα ζωής  $m$  – ετών. Το Ενιαίο Καθαρό Ασφάλιστρο είναι ίσο με:

$$\overline{m/a_x} = \int_m^\infty v^t * {}_t p_x dt$$

με παρούσα αξία:

$$Y = \begin{cases} 0 & , T(x) \leq m \\ v^n \overline{a_{T(x)-m}|} & , T(x) \geq m \end{cases}$$

Η διασπορά της τυχαίας μεταβλητής  $Y$  είναι:

$$Var(Y) = \int_m^\infty v^{2m} (\overline{a_{t-m}|})^2 {}_t p_x \mu_{x+t} dt - (\overline{m/a_x})^2$$

Τέλος, όπως και παραπάνω, αξίζει να παρατηρηθεί ότι:

$$\overline{m/a_x} = \overline{a_x} - \overline{a_{x:m}|} = \frac{\overline{A_{x:m}|} - \overline{A_x}}{\delta}$$

### 2.3.4 Κλασματικές Ράντες Ζωής σταθερού ποσού

Στην προηγούμενη ενότητα, έγινε λόγος για τις ράντες που καταβάλλουν μία νομισματική μονάδα σε κάθε έτος. Στην ασφαλιστική αγορά, όμως, οι ράντες πληρώνονται πιο συχνά, με αποτέλεσμα να έχουμε διάφορες χρονικές στιγμές, συνήθως με βάση τους μήνες του έτους. Με αυτόν τον τρόπο, μπορεί μία ράντα να πληρώνεται σε εξαμηνιαία, τριμηνιαία, μηνιαία, κοκ. βάση. Επομένως, αν η ράντα καταβάλλεται  $m$  – φορές το χρόνο (δηλαδή  $m=2$  για το εξάμηνο,  $m=4$  για το τρίμηνο,  $m=12$  για το μήνα), τότε το ενιαίο καθαρό ασφάλιστρο μιας τέτοιας ράντας ζωής είναι (Χατζόπουλος, 2011):

$$\frac{1}{m} \sum_k A_{x:k/m|} = \frac{1}{m} \sum_k v^{k/m} {}_{k/m} p_x$$

Παρακάτω, θα διακρίνουμε περιληπτικά τις περιπτώσεις των κλασματικών ραντών ζωής.

### 2.3.4.1 Συνήθης Ισόβια Ράντα Ζωής πληρωτέα $m$ – φορές το χρόνο

A. Συνήθης ισόβια ληξιπρόθεσμη ράντα ζωής πληρωτέα  $m$  – φορές το χρόνο.

Μία ισόβια ληξιπρόθεσμη ράντα ζωής πληρωτέα  $m$  – φορές το χρόνο ορίζεται μία ράντα, η οποία πληρώνει  $1/m$  νομισματικές μονάδες κάθε χρονική περίοδο  $m$  σε ένα άτομο ηλικίας  $x$ . Οι πληρωμές γίνονται στις χρονικές περιόδους:  $x + 1/m, x + 2/m, \dots$  (Χατζόπουλος, 2011).

Το Ενιαίο Καθαρό Ασφάλιστρο είναι ίσο με:

$$\begin{aligned} a_x^{(m)} &= \frac{1}{m} A_{x:\frac{1}{m}} + \frac{1}{m} A_{x:\frac{2}{m}} + \dots = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{\infty} A_{x:k/m} \\ &= \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{\infty} v^{k/m} {}_{k/m}p_x \end{aligned}$$

Με όρους συναρτήσεων μετατροπής η παραπάνω εξίσωση είναι ίση με:

$$a_x^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_{x+k/m}}{D_x} = \frac{1}{mD_x} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=1}^m D_{x+i+k/m}$$

Κάνοντας την παρεμβολή  $D_{x+i+k/m} \approx D_{x+i} + \frac{k}{m}(D_{x+i+1} - D_{x+i})$  και μετά από πράξεις, προκύπτει ότι:

$$a_x^{(m)} = \frac{N_{x+1}}{D_x} + \frac{m-1}{2m}$$

B. Συνήθης ισόβια προκαταβλητέα ράντα ζωής πληρωτέα  $m$  – φορές το χρόνο.

Αντίστοιχα με την ισόβια ληξιπρόθεσμη ράντα ζωής, το ενιαίο καθαρό ασφάλιστρο της προκαταβλητέας ράντας ζωής 1 νομισματικής μονάδας, που είναι πληρωτέα  $m$  – φορές το χρόνο, είναι:

$$a_x^{(\ddot{m})} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{\infty} v^{k/m} {}_{k/m}p_x$$

Χρησιμοποιώντας τους όρους συναρτήσεων μετατροπής, η παραπάνω σχέση γράφεται:



$$a_x^{(\ddot{m})} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_{x+k/m}}{D_x}$$

Διαπιστώνεται εύκολα ότι:

$$a_x^{(\ddot{m})} = a_x^{(m)} + \frac{1}{m}$$

και επομένως,

$$\begin{aligned} a_x^{(\ddot{m})} &\approx a_x + \frac{m-1}{2m} + \frac{1}{m} \\ &= \ddot{a}_x - 1 + \frac{m-1}{2m} + \frac{1}{m} = \frac{N_x}{D_x} - \frac{m-1}{2m} \end{aligned}$$

#### 2.3.4.2 Συνήθης Πρόσκαιρη Ράντα Ζωής $n$ – ετών πληρωτέα $m$ – φορές στο έτος

Α. Συνήθης πρόσκαιρη προκαταβλητέα ράντα ζωής  $n$  – ετών πληρωτέα  $m$  – φορές μέσα στο έτος. Το ενιαίο καθαρό ασφάλιστρο αυτής της ράντας 1 νομισματικής μονάδας είναι ίσο με (Χατζόπουλος, 2011):

$$\begin{aligned} a_{x:n}^{(\ddot{m})} &= \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{n*m-1} v^{\frac{k}{m}} \frac{k}{m} p_x \\ &= a_x^{(\ddot{m})} - {}_n/a_x^{(\ddot{m})} \\ &\approx \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} - \left[ {}_n/a_x - \frac{D_{x+n}}{D_x} \left( \frac{m-1}{2m} \right) \right] \end{aligned}$$

Μετά από πράξεις, χρησιμοποιώντας τους όρους συναρτήσεων μετατροπής, καταλήγουμε στη σχέση:

$$a_{x:n}^{(\ddot{m})} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} - \left( \frac{m-1}{2m} \right) \left( 1 - \frac{D_{x+n}}{D_x} \right)$$

Β. Συνήθης ληξιπρόθεσμη ράντα ζωής  $n$  – ετών πληρωτέα  $m$  – φορές μέσα στο έτος. Το ενιαίο καθαρό ασφάλιστρο της ράντας 1 νομισματικής μονάδας είναι ίσο με:

$$\begin{aligned} a_{x:n}^{(m)} &= a_x - {}_n/a_x^{(m)} \\ &\approx a_x + \frac{m-1}{2m} - \left[ {}_n/a_x + \frac{D_{x+n}}{D_x} \left( \frac{m-1}{2m} \right) \right] \end{aligned}$$

Κάνοντας χρήση των όρων συναρτήσεων μετατροπής και μετά από πράξεις, οδηγούμαστε στη σχέση:

$$a_{x:n|}^{(m)} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} + \left(\frac{m-1}{2m}\right) \left(1 - \frac{D_{x+n}}{D_x}\right)$$

### 2.3.4.3 Συνήθης Αναβαλλόμενη Ράντα Ζωής $n$ – ετών πληρωτέα $m$ – φορές στο χρόνο

A. Αναβαλλόμενη προκαταβλητέα ράντα ζωής  $n$  – ετών πληρωτέα  $m$  – φορές μέσα στο έτος. Το ενιαίο καθαρό ασφάλιστρο αυτής της ράντας 1 νομισματικής μονάδας είναι ίσο με (Χατζόπουλος, 2011):

$$\begin{aligned} {}_n/a_x^{(m)} &= A_{x:n|} \ddot{a}_{x+n}^{(m)} \\ &\approx \frac{D_{x+n}}{D_x} \left( \ddot{a}_{x+n} - \frac{m-1}{2m} \right) \end{aligned}$$

Μετά από υπολογισμούς, προκύπτει ότι:

$${}_n/a_x^{(m)} = \frac{N_{x+n}}{N_x} - \frac{D_{x+n}}{D_x} \left( \frac{m-1}{2m} \right)$$

B. Αναβαλλόμενη ληξιπρόθεσμη ράντα ζωής  $n$  – ετών πληρωτέα  $m$  – φορές μέσα στο χρόνο. Το ενιαίο καθαρό ασφάλιστρο της ράντας 1 νομισματικής μονάδας πληρωτέα  $m$  – φορές μέσα στο έτος είναι ίσο με:

$$\begin{aligned} {}_n/a_x^{(m)} &= A_{x:n|} a_{x+n}^{(m)} \\ &\approx \frac{D_{x+n}}{D_x} \left( a_{x+n} + \frac{m-1}{2m} \right) \end{aligned}$$

Μετά από πράξεις, καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση:

$${}_n/a_x^{(m)} = \frac{N_{x+n+1}}{D_x} + \frac{D_{x+n}}{D_x} \left( \frac{m-1}{2m} \right)$$

### 2.3.5 Συνταξιοδοτικές Μέθοδοι

#### 2.3.5.1 Συνταξιοδοτικό Πρόγραμμα

Υπάρχουν δύο κύρια συνταξιοδοτικά προγράμματα στην ασφαλιστική αγορά. Αυτά είναι (Ζυμπίδης, 2008):

- 1) Συνταξιοδοτικό Πρόγραμμα Καθορισμένης Εισφοράς (Defined Contribution Plan). Σε αυτό το πρόγραμμα, η εισφορά του συμμετέχοντα στο πρόγραμμα καθορίζεται εκ των προτέρων. Η εισφορά του υπαλλήλου υπολογίζεται συνήθως ως ποσοστό του μισθού του συν την εισφορά του εργοδότη ως ποσοστό του μισθού του υπαλλήλου.
- 2) Συνταξιοδοτικό Πρόγραμμα Καθορισμένης Παροχής (Defined Benefit Plan). Στο πρόγραμμα αυτό, η παροχή κατά τη συνταξιοδότηση του ασφαλισμένου καθορίζεται/υπολογίζεται εκ των προτέρων. Υπάρχουν διάφοροι τρόποι υπολογισμού της παροχής ανάλογα με το πρόγραμμα:
  - a. Μπορεί να είναι ένα ποσό σε Ευρώ για κάθε μήνα και έτος υπηρεσίας του ασφαλισμένου (για παράδειγμα,  $(100 \text{ Ευρώ}) \cdot (12 \text{ μήνες}) \cdot (20 \text{ έτη υπηρεσίας})$ )
  - b. Μπορεί να είναι ένα συγκεκριμένο ποσό που παρέχεται κάθε έτος κατά τη συνταξιοδότηση (για παράδειγμα, 30000 Ευρώ αποζημίωση για κάθε έτος),
  - c. Τέλος, μπορεί να είναι ένα ποσοστό της μέσης ετήσιας αποζημίωσης.

#### **Κόστος Συνταξιοδοτικού Προγράμματος (Plan Cost)**

Το ποσό των εισφορών των ασφαλισμένων που συμμετέχουν στο εκάστοτε συνταξιοδοτικό πρόγραμμα υπολογίζεται από τον αναλογιστή. Το κόστος του κάθε ασφαλισμένου αλλάζει από χρόνο σε χρόνο ανάλογα με τη θνησιμότητα, το εισόδημά του, την αύξηση ή μείωση του μισθού, και γενικά την κατάσταση που βρίσκεται και εξελίσσεται το συνταξιοδοτικό πρόγραμμα (Ζυμπίδης, 2008).

#### **Κανονικό Κόστος (Normal Cost (NC))**

Το κανονικό κόστος αναφέρεται σε ένα έτος και ορίζεται ως η αναλογιστική αξία ενός μέρους της συνολικής παροχής συνταξιοδότησης. Αυτή η αναλογιστική αξία

προσδιορίζεται για το έτος που ακολουθεί την ημερομηνία αποτίμησης (valuation date), υποθέτοντας ότι η αποτίμηση γίνεται στην αρχή του έτους (Ζυμπίδης, 2008).

### **Αναλογιστική Υποχρέωση (Actuarial Liability (AL))**

Η αναλογιστική υποχρέωση αναφέρεται στην υποχρέωση για ένα άτομο που αποτελεί μέλος του συνταξιοδοτικού προγράμματος. Ουσιαστικά, η υποχρέωση αυτή είναι ένα χρηματικό ποσό που πρέπει να διαθέτει το συνταξιοδοτικό ταμείο προκειμένου να μπορεί να ανταπεξέλθει στις μελλοντικές παροχές που πρέπει να προσφέρει στα μέλη του (Ζυμπίδης, 2008).

Το συνολικό κανονικό κόστος, όπως και η συνολική αναλογιστική υποχρέωση, είναι ίσο με το άθροισμα των κάθε ατομικών κανονικών κοστών (αντίστοιχα των κάθε ατομικών αναλογιστικών υποχρεώσεων) για άτομα που ανήκουν στην ίδια εκάστοτε ηλικία  $x$ :

$$NC_x = \sum_x l_x^* NC_x \qquad AL_x = \sum_x l_x^* AL_x$$

όπου,  $l_x^*$  είναι το πλήθος ατόμων ηλικίας  $x$  του εκάστοτε συνταξιοδοτικού ταμείου (προγράμματος).

### **Ημερομηνίες και ηλικίες που χρησιμοποιούνται στα συνταξιοδοτικά προγράμματα:**

- 1) Ηλικία  $e$ : Αυτή η ηλικία είναι η ηλικία εισαγωγής ενός ατόμου στο συνταξιοδοτικό πρόγραμμα ή η ηλικία από την οποία οι παροχές συσσωρεύονται.
- 2) Ηλικία  $a$ : Αυτή η ηλικία είναι η ηλικία που έχει ο ασφαλισμένος στην έναρξη του συνταξιοδοτικού προγράμματος αν η έναρξη του συνταξιοδοτικού προγράμματος συμβαίνει μετά την ημερομηνία έναρξης συσσώρευσης παροχών. Η περίπτωση αυτό να συμβεί είναι όταν το συνταξιοδοτικό ταμείο ιδρύεται μετά το έτος πρόσληψης του ασφαλισμένου και δίνεται πίστωση για τα έτη πριν την ίδρυση του συνταξιοδοτικού ταμείου.
- 3) Ηλικία  $x$ : Είναι η ηλικία όπου πραγματοποιείται η αναλογιστική αποτίμηση.
- 4) Ηλικία  $r$ : Είναι η ηλικία κανονικής συνταξιοδότησης ενός εργαζομένου (συνήθως στα 65 έτη).

Κάποιες κατηγορίες των συνταξιοδοτικών ταμείων είναι οι παρακάτω (Πιτσέλης, 2018):

### 2.3.5.2 Μέθοδος Πιστωτικής Μονάδας (Unit Credit Method)

Στη μέθοδο αυτή δε χρησιμοποιείται η κλίμακα μισθών, εφ' όσον δεν εξαρτάται από την αύξηση ή τη μείωση του μισθού του κάθε εργαζομένου. Θεωρούμε ότι ένας υπάλληλος συνταξιοδοτείται σε μια καθορισμένη ηλικία  $r$  με ετήσια παροχή σύνταξης ίση με  $B_r^{(r-e)}$ , με το  $1/12$  της ετήσιας παροχής που είναι πληρωτέα στην αρχή κάθε μήνα. Με άλλα λόγια, το  $B_r^{(r-e)} * \ddot{a}_r^{(12)}$  είναι το απαραίτητο ποσό που πρέπει να έχει συλλέξει το συνταξιοδοτικό ταμείο για κάθε υπάλληλο, προκειμένου να του παρέχει την ετήσια αυτή παροχή κατά τη συνταξιοδότησή του.

Ας υποθέσουμε ότι κατά την ημερομηνία αποτίμησης ενός συνταξιοδοτικού προγράμματος, η ηλικία ενός εργαζομένου που συμμετέχει στο πρόγραμμα είναι  $x$ . Η ετήσια παροχή σύνταξης που συσσωρεύεται από την ηλικία  $e$  (ηλικία εισαγωγής του εργαζομένου στο πρόγραμμα) μέχρι την ηλικία  $x$  είναι συνήθως ένα συγκεκριμένο ποσό για κάθε μήνα και για κάθε έτος απασχόλησής του (Πιτσέλης, 2018).

Έστω  $b_x$  ένα μέρος της συνολικής παροχής σύνταξης για διάρκεια ενός έτους από την ηλικία  $x$  έως την ηλικία  $x+1$ . Η μορφή που συνήθως χρησιμοποιείται είναι:

$$b_x = \frac{B_x^{(x-e)}}{x-e} = \frac{B_r^{(r-e)}}{r-e}$$

Η αναλογιστική υποχρέωση του ατόμου ηλικίας  $x$  είναι ίση με την αξία της συσσωρευμένης παροχής σύνταξης από την ηλικία  $e$  μέχρι την ηλικία  $x$ , δηλαδή

$$\begin{aligned} AL_x &= B_x^{(x-e)} \frac{l_r}{l_x} v^{r-x} \ddot{a}_r^{(12)} \\ &= B_x^{(x-e)} {}_{r-x}p_x v^{r-x} \ddot{a}_r^{(12)} \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τους όρους συναρτήσεων μετατροπής, προκύπτει ότι:

$$AL_x = B_x^{(x-e)} \frac{D_r}{D_x} \ddot{a}_r^{(12)}$$

όπου

$B_x^{(x-e)}$ : είναι η παροχή που έχει συσσωρευτεί από την ηλικία εμέχρι την ηλικία  $x$  (έτη υπηρεσίας)

$l_x$ : είναι ο αριθμός των ατόμων ηλικίας  $x$

${}_{r-x}p_x$ : είναι η πιθανότητα επιβίωσης ενός ατόμου ηλικίας  $x$  μέχρι την ηλικία  $r$

$v^{r-x}$ : είναι το προεξοφλητικό επιτόκιο ενός ατόμου ηλικίας  $x$  μέχρι την ηλικία  $r$

$a_r^{(12)} = \frac{N_r}{D_r} - \frac{m-1}{2m}$ : είναι η παρούσα αξία μιας ισόβιας προκαταβλητέας ράντας ζωής πληρωτέας κάθε μήνα.

Το κόστος στην αρχή του έτους είναι ίσο με το κόστος παροχής της σύνταξης που αντιστοιχεί σε ένα έτος και δίνεται από τη σχέση:

$$NC_x = b_x {}_{r-x}p_x v^{r-x} \ddot{a}_r^{(12)} = b_x \frac{D_r}{D_x} \ddot{a}_r^{(12)}$$

Επίσης, ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$AL_x = NC_x (x - e)$$

Η συνολική αναλογιστική υποχρέωση είναι ίση με το άθροισμα των επιμέρους ατομικών αναλογιστικών υποχρεώσεων:

$$AL_x^{Total} = \sum_x l_x^* B_x^{(x-e)} {}_{r-x}p_x v^{r-x} \ddot{a}_r^{(12)}$$

$$AL_x^{Total} = \sum_x l_x^* B_x^{(x-e)} \frac{D_r}{D_x} \ddot{a}_r^{(12)}$$

όπου  $l_x^*$  είναι το πλήθος ατόμων ηλικίας  $x$  του συγκεκριμένου συνταξιοδοτικού ταμείου.

Το συνολικό κόστος στην αρχή του έτους είναι ίσο με το άθροισμα όλων των επιμέρους ατομικών κανονικών κοστών:

$$NC_x^{Total} = \sum_x l_x^* b_x {}_{r-x}p_x v^{r-x} \ddot{a}_r^{(12)}$$

$$AL_x^{Total} = \sum_x l_x^* b_x \frac{D_r}{D_x} \ddot{a}_r^{(12)}$$

Παρατήρηση:

Στην παρούσα εργασία θα θεωρήσουμε ότι η μοναδική αιτία αποχώρησης ενός εργαζομένου από το συνταξιοδοτικό πρόγραμμα είναι ο θάνατος. Υπάρχουν περιπτώσεις όπου η αιτία μπορεί να είναι η απόσυρση – απόλυση, η ανικανότητα και η συνταξιοδότηση. Με άλλα λόγια, ένα μέλος του συνταξιοδοτικού ταμείου μπορεί να αποχωρήσει από το ταμείο λόγω θνησιμότητας, απόσυρσης (απόλυσης), ανικανότητας ή συνταξιοδότησης.

### 2.3.5.3 Μέθοδος Προβαλλόμενης Πιστωτικής Μονάδας (Projected Unit Credit Method)

Η διαφορά αυτής της μεθόδου με τη μέθοδο πιστωτικής μονάδας είναι ότι στην προβαλλόμενη πιστωτική μονάδα χρησιμοποιείται η εξέλιξη του μισθού των εργαζομένων. Ο τρέχων μισθός προβάλλεται την ημέρα της συνταξιοδότησης χρησιμοποιώντας την κλίμακα αύξησης μισθού (Πιτσέλης, 2018).

Έστω ένα άτομο που συμμετέχει στο συνταξιοδοτικό ταμείο με μισθό  $S_x$  στην ηλικία  $x$  και αύξηση μισθού  $s = 3\%$ . Το συνταξιοδοτικό ταμείο δίνει παροχή κατά τη συνταξιοδότηση  $2\%$  του τελικού μισθού για κάθε έτος απασχόλησης. Ο τελικός μισθός θα είναι ο μισθός που θα παίρνει ο εργαζόμενος ένα έτος πριν τη συνταξιοδότησή του, δηλαδή:

$$S_{r-1} = S_x(1 + s)^{r-1-x}$$

$$S_{r-1} = S_x(1 + 0.03)^{r-1-x}$$

Επομένως, ως προβαλλόμενη παροχή κατά τη συνταξιοδότηση στην ηλικία  $x$ , έχουμε:

$$B_x^{(x-e)} = (0.02)S_{r-1} \text{ (έτη υπηρεσίας ατόμου)}$$

$$B_x^{(x-e)} = (0.02)S_{r-1} (x - e)$$

$$B_x^{(x-e)} = (0.02)S_x(1 + 0.03)^{r-1-x}(x - e)$$

και ως προβαλλόμενη παροχή κατά τη συνταξιοδότηση στην ηλικία  $r$ , έχουμε:

$$B_r^{(r-e)} = (0.02)S_{r-1} \text{ (έτη υπηρεσίας ατόμου)}$$

$$B_r^{(r-e)} = (0.02)S_{r-1} (r - e)$$

$$B_r^{(r-e)} = (0.02)S_x(1 + 0.03)^{r-1-x}(r - e)$$

Η συνταξιοδοτική παροχή που προέρχεται από το έτος που ακολουθεί την ηλικία  $x$  είναι 2% του τελικού μισθού (υπολογίζεται χωρίς τα έτη απασχόλησης του ατόμου):

$$b_x = \frac{B_x^{(x-e)}}{x-e} = \frac{B_r^{(r-e)}}{r-e}$$

$$b_x = (0.02)S_x(1 + 0.03)^{r-1-x}$$

Η μαθηματική σχέση που υπολογίζει την αναλογιστική υποχρέωση βάσει της μεθόδου της Προβαλλόμενης Πιστωτικής Μονάδας για ένα άτομο ηλικίας  $x$  είναι η ίδια με αυτήν της μεθόδου της Πιστωτικής Μονάδας για άτομο ηλικίας  $x$ , με τη μόνη διαφορά ότι για την εύρεση της τιμής της παροχής  $B_x$  κάνουμε χρήση της προβολής του μισθού. Επομένως, έχουμε:

$$\begin{aligned} AL_x &= B_x^{(x-e)} \frac{D_r}{D_x} \ddot{a}_r^{(12)} \\ &= (0.02)S_x(1 + 0.03)^{r-1-x}(x - e) \frac{D_r}{D_x} \ddot{a}_r^{(12)} \end{aligned}$$

Επομένως, η συνολική αναλογιστική υποχρέωση είναι ίση με το άθροισμα των επιμέρους ατομικών αναλογιστικών υποχρεώσεων για άτομα ηλικίας  $x$ ,

$$AL^{Total} = \sum_x l_x^* AL_x$$

$$AL^{Total} = \sum_x l_x^* (0.02)S_x(1 + 0.03)^{r-1-x}(x - e) \frac{D_r}{D_x} \ddot{a}_r^{(12)}$$

Το κανονικό κόστος για ένα άτομο ηλικίας  $x$  στην αρχή του έτους είναι ίσο με το κόστος παροχής της σύνταξης που αντιστοιχεί στο έτος που ακολουθεί και δίνεται από τη σχέση:

$$NC_x = b_x \frac{D_r}{D_x} \ddot{a}_r^{(12)}$$

$$NC_x = (0.02)S_x(1 + 0.03)^{r-1-x} \frac{D_r}{D_x} \ddot{a}_r^{(12)}$$

Το συνολικό κανονικό κόστος είναι:



$$NC^{Total} = \sum_x l_x^* NC_x$$

$$NC^{Total} = \sum_x l_x^* (0.02)S_x(1 + 0.03)^{r-1-x} \frac{D_r}{D_x} \ddot{a}_r^{(12)}$$

#### 2.3.5.4 Μέθοδος Κανονικής Εισαγωγικής Ηλικίας σε Επίπεδο Ευρώ (Entry Age Normal - Level Dollar)

Το κανονικό κόστος στη μέθοδο αυτή εκφράζεται ως ένα σταθερό χρηματικό ποσό, τέτοιο ώστε στην εισαγωγική ηλικία  $e$ , η παρούσα αξία των μελλοντικών κοστών να είναι ίση με την παρούσα αξία των μελλοντικών παροχών (Πιτσέλης, 2018). Με άλλα λόγια:

$$NC_e \ddot{a}_{e:r-e|} = B_x^{(r-e)} \frac{D_r}{D_e} \ddot{a}_r^{(12)}$$

ή αλλιώς

$$NC_e \left( \frac{N_e - N_r}{D_e} \right) = B_x^{(r-e)} \frac{D_r}{D_e} \ddot{a}_r^{(12)}$$

όπου  $B_x^{(r-e)}$  είναι η παροχή ενός ατόμου ηλικίας  $x$ , η οποία έχει συσσωρευτεί από την εισαγωγική ηλικία  $e$  μέχρι τη συνταξιοδοτική ηλικία  $r$ .

Η προηγούμενη σχέση γίνεται:

$$NC_e = \frac{D_r}{N_e - N_r} B_x^{(r-e)} \ddot{a}_r^{(12)}$$

Η αναλογιστική υποχρέωση υπολογίζεται αναδρομικά ως εξής:

$$AL_x = NC_e \frac{\ddot{a}_{e:x-e|}}{A_{x:x-e|}} = NC_e \frac{\left( \frac{N_e - N_x}{D_e} \right)}{\left( \frac{D_x}{D_e} \right)}$$

$$AL_x = NC_e \left( \frac{N_e - N_x}{D_x} \right)$$

Όπως και στις προηγούμενες μεθόδους, για τη συνολική αναλογιστική υποχρέωση ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$AL^{Total} = \sum_x l_x^* AL_x$$

### 2.3.5.5 Μέθοδος Κανονικής Εισαγωγικής Ηλικίας με το Κανονικό Κόστος ως Ποσοστό του Μισθού (Entry Age Normal - Cost as a Level Percent of Salary)

Το κανονικό κόστος στη μέθοδο αυτή εκφράζεται ως ποσοστό του μισθού για κάθε εργαζόμενο όταν οι παροχές τη στιγμή της συνταξιοδότησης στηρίζονται στο συνολικό μέσο μισθό των ετών υπηρεσίας του εργαζομένου (career average) ή στον τελικό μέσο μισθό (final average salary). Επομένως, έστω  $S_e$  ο μισθός ενός ατόμου που βρίσκεται στην ηλικία  $e$  και θεωρούμε ότι αυξάνεται με ένα ποσοστό  $s$  κάθε έτος. Στην περίπτωση που οι παροχές κατά τη συνταξιοδότηση στηρίζονται στο μισθό, το αναλογιστικό κόστος προκύπτει συνήθως ως ένα ποσοστό,  $K$ , του μισθού του εργαζομένου που συμμετέχει στο συνταξιοδοτικό πλάνο (Πιτσέλης, 2018). Με άλλα λόγια:

$$NC_x = K S_x = K S_e \frac{S_x}{S_e}$$

ενώ σε περίπτωση που σε κάθε ηλικία  $x$  η αύξηση του μισθού είναι σταθερή, τότε το κανονικό κόστος στην ηλικία  $x$  είναι:

$$NC_x = K S_x = K S_e (1 + s)^{x-e}$$

Αναδρομικά, η αναλογιστική υποχρέωση ενός εργαζομένου ηλικίας  $x$  υπολογίζεται ως εξής:

$$AL_x = NC_x \ddot{s}_{e:x-e|}$$

Στο σημείο αυτό, πρέπει να αναφερθεί ότι για τους υπολογισμούς των παραπάνω μεγεθών, χρησιμοποιούνται οι συναρτήσεις μετατροπής βασισμένες στο μισθό. Δηλαδή:

$$D_x^s = s_x D_x = s_x l_x v^x \text{ και } N_x^s = \sum_{j=x}^{\infty} D_j^s$$

### 2.3.5.6 Μέθοδος Συσσωρευμένου Κόστους σε Ατομική Βάση

Σε αυτή τη μέθοδο ισχύει πάλι το γεγονός ότι το συνολικό κόστος ισούται με το άθροισμα των επιμέρους ατομικών κοστών. Αξίζει να σημειωθεί ότι όσο μεγαλύτερο είναι το ενεργητικό του συνταξιοδοτικού ταμείου, τόσο μικρότερο είναι το κανονικό κόστος (Πιτσέλης, 2018).

Σε κάθε αποτίμηση για οποιοδήποτε μέλος του συνταξιοδοτικού προγράμματος έχουμε:

$$NC_x \ddot{a}_{x:r-x|} = PVB_x^{(r-e)} - F_x$$

$$NC_x \frac{N_x - N_r}{D_x} = \frac{D_r}{D_x} B_x^{(r-e)} \ddot{a}_r^{(12)} - F_x ,$$

όπου  $NC_x$  είναι το κανονικό κόστος για κάθε εργαζόμενο που συμμετέχει στο συνταξιοδοτικό πρόγραμμα σε Ευρώ,  $PVB_x^{(r-e)}$  είναι η παρούσα αξία συσσωρευμένων παροχών (ενός ατόμου ηλικίας  $x$ ) από την εισαγωγική ηλικία  $e$  μέχρι την ηλικία συνταξιοδότησης  $r$  και  $F_x$  είναι το μερίδιο του ενεργητικού του ταμείου που αντιστοιχεί σε ένα συμμετέχοντα ηλικίας  $x$ .

Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο, η διαφορά των παρούσων αξιών των συσσωρευμένων παροχών ( $PVB$ ) έναντι των κεφαλαίων που υπάρχουν ήδη στο συνταξιοδοτικό ταμείο θα αποπληρωθούν μέσω των μελλοντικών κοστών. Κανονικά, το μερίδιο των κεφαλαίων του συνταξιοδοτικού ταμείου για όλα τα μέλη ισούται με την παρούσα αξία των δεδουλευμένων (συσσωρευμένων παροχών) για τα μέλη αυτά.

## Κεφάλαιο 3 – Μοντέλο Θνησιμότητας Gompertz

### 3.1 Μοντέλα Θνησιμότητας

Από την εποχή του De Moivre (1725), έγιναν προτάσεις για την παρουσίαση του μοντέλου θνησιμότητας ως μαθηματικό τύπο, εκ των οποίων ο πιο διαδεδομένος είναι ίσως εκείνος του Gompertz (1825). Μέχρι την εποχή του John Graunt (1620-1674), οι πίνακες επιβίωσης είχαν κατασκευαστεί εμπειρικά. Αυτοί οι πίνακες επιβίωσης απεικόνιζαν τη θνησιμότητα καθ' όλη τη διάρκεια ζωής του ανθρώπου και ήταν αναμενόμενο να αναρωτηθεί κανείς αν οι μαθηματικές λειτουργίες που ορίζονταν από τον πίνακα επιβίωσης θα μπορούσαν να περιγραφούν με απλά μοντέλα, όπως είχαν επιτευχθεί με τη φυσική φιλοσοφία. Η επιλογή της συνάρτησης που πρέπει να περιγραφεί από ένα μοντέλο θνησιμότητας (ένα μαθηματικό τύπο εξαρτώμενο από την ηλικία) ποικίλει, καθώς διαφορετικοί συγγραφείς έχουν θεωρήσει το  $\mu_x$ , το  $q_x$  ή το  $m_x$  (ή κάτι διαφορετικό) ως την πιο κατάλληλη συνάρτηση. Στη σύγχρονη ορολογία θα μπορούσαμε να μοντελοποιήσουμε την παράμετρο που είναι πιο φυσικό να εκτιμήσουμε, δεδομένου του υποκείμενου μοντέλου πιθανοτήτων για τα δεδομένα.

Δεδομένου ότι τα μοντέλα θνησιμότητας είναι προσπάθειες σύνοψης των εμπειρικών παρατηρήσεων, έχουν στενά συνδεθεί με τις στατιστικές τεχνικές ανάλυσης δεδομένων θνησιμότητας και, στη σημερινή εποχή, θα περιγράφονταν ως παραμετρικές μορφές για τις ποσότητες που εμφανίζονται στα στατιστικά μοντέλα. Σε ορισμένες περιπτώσεις, αυτά τα μοντέλα μπορεί να έχουν φυσιολογική βάση και μπορεί να επιχειρήσουν να διαμορφώσουν τη διαδικασία γήρανσης.

Ένα τυπικό μοντέλο σύγχρονης θνησιμότητας μπορεί να χωριστεί σε τρεις περιόδους. Η πρώτη περίοδος είναι η θνησιμότητα των βρεφών, δηλαδή η ταχεία μείωση της θνησιμότητας κατά τα πρώτα χρόνια της ζωής ενός ατόμου. Η δεύτερη περίοδος περιλαμβάνει το λεγόμενο «όγκο ατυχημάτων» (“accidental hump”), όπου οι θάνατοι των ανθρώπων οφείλονται κυρίως σε ατυχήματα, όπως για παράδειγμα αυτοκινητών ή ποδηλάτων. Η τρίτη περίοδος είναι η σχεδόν γεωμετρική αύξηση της θνησιμότητας με την ηλικία (ο ρυθμός αύξησης επιβραδύνεται μετά την ηλικία των 80 ετών) – η ηλικιωμένη θνησιμότητα.

Στο σημείο αυτό, θα περιγράψουμε τα πιο σημαντικά μοντέλα θνησιμότητας που έχουν προταθεί και τα χαρακτηριστικά τους (Χατζόπουλος, 2011).

1) Το μοντέλο θνησιμότητας του De Moivre (1725)

Ο De Moivre χρησιμοποίησε ένα μαθηματικό τύπο με μία παράμετρο:

$$\mu_x = \frac{1}{\omega - x}$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με:

$${}_x p_0 = \left(1 - \frac{x}{\omega}\right)$$

όπου  $\omega$  είναι η μέγιστη ηλικία ζωής ενός ατόμου. Ο De Moivre χρησιμοποίησε την ηλικία των 86 ετών ως  $\omega$ .

2) Το μοντέλο θνησιμότητας του Babbage (1823)

Ο Babbage έκανε χρήση μιας συνάρτησης 2 παραμέτρων, θεωρώντας ότι το  ${}_x p_0$  ήταν τετραγωνικό (quadratic) (και όχι γραμμικό, όπως είχε θεωρήσει ο De Moivre):

$${}_x p_0 = 1 - b_x - ax^2$$

3) Το μοντέλο θνησιμότητας του Gompertz (1825)

Ο Gompertz χρησιμοποίησε κι εκείνος μια συνάρτηση με 2 παραμέτρους:

$$m_x = m_0 e^{\beta x}$$

όπου το  $m_0$  είναι η αρχική θνησιμότητα ενός ατόμου (μπορεί να θεωρηθεί ως η ένταση θνησιμότητας στην ηλικία 0) και  $\beta$  είναι ο συντελεστής θνησιμότητας, ο οποίος αποδίδει το ρυθμό αλλαγής της θνησιμότητας σε σχέση με την ηλικία (για να είμαστε πιο ακριβείς, η ηλικία  $x$  στο μοντέλο του Gompertz μπορεί να κυμανθεί μόνο σε ένα συγκεκριμένο εύρος τιμών, για παράδειγμα μεταξύ 20 και 80 ετών). Το σημαντικό συμπέρασμα του Gompertz ήταν ότι η ένταση θνησιμότητας αυξανόταν με γεωμετρική πρόοδο με την ηλικία. Αυτό το απλό μοντέλο έχει αποδειχθεί ότι είναι εξαιρετικά καλό σε διάφορους πληθυσμούς και σε διαφορετικές εποχές και πολλά μεταγενέστερα μοντέλα αποτελούν τροποποιήσεις του, για να αντιμετωπίσουν τις γνωστές αποκλίσεις σε πολύ μικρές ή πολύ μεγάλες ηλικίες ή για συγκεκριμένα χαρακτηριστικά του πληθυσμού.

4) Το μοντέλο θνησιμότητας του Makeham (1867)

Ο Makeham χρησιμοποίησε ένα μαθηματικό τύπο με 3 παραμέτρους:

$$\mu_x = A + Bc^x$$

Αυτή η συνάρτηση είναι επέκταση του μοντέλου θνησιμότητας του Gompertz, προσθέτοντας απλά έναν ανεξάρτητο από την ηλικία όρο, ο οποίος αντιπροσωπεύει το θάνατο που δεν επέρχεται από το γήρας, όπως για παράδειγμα, από ατυχήματα.

5) Το μοντέλο θνησιμότητας του Thiele (1871)

Ο Thiele πρότεινε μια συνάρτηση με 7 παραμέτρους:

$$\mu_x = Ae^{-Bx} + Ce^{-D(x-E)^2} + FG^x$$

η οποία περιλαμβάνει ολόκληρη τη ζωή ενός ατόμου. Κάθε όρος σε αυτόν τον τύπο αντιπροσωπεύει ένα από τα αναγνωρίσιμα χαρακτηριστικά της θνησιμότητας που αναφέρθηκαν παραπάνω. Ο πρώτος όρος αντιπροσωπεύει τη βρεφική θνησιμότητα, η οποία μειώνεται απότομα μετά τη γέννηση, ο δεύτερος όρος αντιπροσωπεύει τον «όγκο ατυχημάτων» και ο τρίτος όρος είναι το μοντέλο του Gompertz που είναι κατάλληλος για μεγαλύτερες ηλικίες. Αυτό το μοντέλο θνησιμότητας είναι αρκετά περίπλοκο και δε χρησιμοποιείται πλέον, παρά μόνο για ιστορικούς σκοπούς.

6) Το μοντέλο θνησιμότητας του Weibull (1951)

Ο Weibull πρότεινε μια συνάρτηση με 2 παραμέτρους:

$$\mu_x = \lambda\gamma x^{\gamma-1}$$

Σύμφωνα με τους Gavrilov and Gavrilova (1991), το μοντέλο θνησιμότητας του Weibull είναι ευρέως γνωστό και είναι από τους πιο σημαντικούς στη θεωρία της αξιολογίας. Έτσι, μπορούμε να διακρίνουμε 3 περιπτώσεις ανάλογα με τις τιμές που μπορεί να πάρει η παράμετρος  $\gamma$ :

- Αν  $\gamma > 1$ , τότε η συνάρτηση  $\mu_x$  είναι αύξουσα για κάθε  $x$
- Αν  $\gamma = 1$ , τότε η συνάρτηση  $\mu_x$  είναι σταθερή για κάθε  $x$  και
- Αν  $0 < \gamma < 1$ , τότε η συνάρτηση  $\mu_x$  είναι φθίνουσα για κάθε  $x$ .

7) Το μοντέλο θνησιμότητας του Opperman (1870)

Ο Opperman πρότεινε μια συνάρτηση με 3 παραμέτρους:

$$\mu_x = \frac{a}{\sqrt{x}} + b + c\sqrt{x}$$

Η παραπάνω συνάρτηση θνησιμότητας μπορεί να εφαρμοστεί μόνο σε νεαρές ηλικίες, όπου  $x \leq 20$ .

8) Το μοντέλο θνησιμότητας του Perk (1872)

Ο Perk χρησιμοποίησε συναρτήσεις με 4 και 5 παραμέτρους:

$$\mu_x = \frac{A+BC^x}{1+DC^x} \quad \text{και} \quad \mu_x = \frac{A+BC^x}{\kappa C^{-x}+1+DC^x}$$

Οι παραπάνω συναρτήσεις είναι μια προσπάθεια του Perk να δημιουργήσει μια μοναδική καμπύλη για όλο το εύρος της διάρκειας ζωής ενός ατόμου.

9) Το μοντέλο του Beard (1951)

Ο Beard χρησιμοποίησε ένα μαθηματικό τύπο με 3 παραμέτρους:

$$\mu_x = \frac{BC^x}{1+DC^x}$$

Γίνεται κατανοητό ότι ο τύπος του Beard είναι μια απλοποίηση του τύπου του Perk, με  $A=0$ .

10) Το μοντέλο του Wilkie (1976)

Ο Wilkie πρότεινε μια συνάρτηση με 1 παράμετρο:

$$q_x = \frac{e^{F(x)}}{1+e^{F(x)}}$$

όπου  $F(x)$  είναι ένα πολυώνυμο του  $x$ . Αυτός ο τύπος χρησιμοποιήθηκε για να περιγράψει τη θνησιμότητα των ατόμων που είχαν συνταξιοδοτηθεί στο Ηνωμένο Βασίλειο την περίοδο 1967-1970.

11) Το μοντέλο θνησιμότητας των Heligman και Pollard (1980)

Οι Heligman και Pollard χρησιμοποίησαν μια συνάρτηση με 8 παραμέτρους:

$$\frac{q_x}{p_x} = A^{(x+B)^C} + D e^{-E(\ln x - \ln F)^2} + GH^x$$

Οι τρεις όροι της παραπάνω εξίσωσης περιγράφουν τη βρεφική θνησιμότητα (υψηλή θνησιμότητα στα πρώτα χρόνια ζωής ενός ατόμου, ιδιαίτερα το πρώτο έτος ζωής), τη θνησιμότητα λόγω του «όγκου ατυχημάτων» (που συγκεντρώνεται γύρω στα 20 έτη)

και τη θνησιμότητα σε πολύ μεγάλες ηλικίες, όπως έκανε και το μοντέλο θνησιμότητας του Thiele 100 χρόνια πριν.

Παρακάτω παρατίθεται ένας συγκεντρωτικός πίνακας με όλα τα προαναφερθέντα μοντέλα θνησιμότητας:

Πίνακας Μοντέλων Θνησιμότητας

Μοντέλο Θνησιμότητας	Χαρακτηριστικός Τύπος Θνησιμότητας	Σχόλια
De Moivre (1725)	$\mu_x = \frac{1}{\omega - x}$	$\omega$ είναι η μέγιστη ηλικία ζωής ενός ατόμου. Ο De Moivre χρησιμοποίησε την ηλικία των 86 ετών ως $\omega$ .
Babbage (1823)	${}_x p_0 = 1 - b_x - ax^2$	Χρήση μιας συνάρτησης 2 παραμέτρων, θεωρώντας ότι το ${}_x p_0$ ήταν τετραγωνικό (quadratic) (και όχι γραμμικό, όπως είχε θεωρήσει ο De Moivre).
Gompertz (1825)	$m_x = m_0 e^{\beta x}$	Η ένταση θνησιμότητας αυξανόταν με γεωμετρική πρόοδο με την ηλικία.
Makeham (1867)	$\mu_x = A + Bc^x$	Επέκταση του μοντέλου θνησιμότητας του Gompertz, προσθέτοντας απλά έναν ανεξάρτητο από την ηλικία όρο
Thiele (1871)	$\mu_x = Ae^{-Bx} + Ce^{-D(x-E)^2} + FG^x$	Ο πρώτος όρος είναι για τη βρεφική θνησιμότητα, η οποία μειώνεται απότομα μετά τη γέννηση, ο δεύτερος όρος για τον «όγκο ατυχημάτων» και ο τρίτος όρος είναι το μοντέλο του Gompertz.
Weibull (1951)	$\mu_x = \lambda \gamma x^{\gamma-1}$	Αν $\gamma > 1$ , $\mu_x$ αύξουσα για κάθε $x$ Αν $\gamma = 1$ , $\mu_x$ σταθερή για κάθε $x$ Αν $0 < \gamma < 1$ , $\mu_x$ φθίνουσα για κάθε $x$ .



Opperman (1870)	$\mu_x = \frac{a}{\sqrt{x}} + b + c\sqrt{x}$	Μπορεί να εφαρμοστεί μόνο σε νεαρές ηλικίες, όπου $x \leq 20$ .
Perk (1872)	$\mu_x = \frac{A + BC^x}{1 + DC^x}$	Προσπάθεια του Perk να δημιουργήσει μια μοναδική καμπύλη για όλο το εύρος της διάρκειας ζωής ενός ατόμου.
Beard (1951)	$\mu_x = \frac{BC^x}{1 + DC^x}$	Απλοποίηση του τύπου του Perk, με $A=0$ .
Wilkie (1976)	$q_x = \frac{e^{F(x)}}{1 + e^{F(x)}}$	Χρησιμοποιήθηκε για να περιγράψει τη θνησιμότητα των ατόμων που είχαν συνταξιοδοτηθεί στο Ηνωμένο Βασίλειο την περίοδο 1967-1970.
Heligman και Pollard (1980)	$\frac{q_x}{p_x} = A^{(x+B)^C} + De^{-E(\ln x - \ln F)^2} + GH^x$	Περιγραφή βρεφικής θνησιμότητας, θνησιμότητας λόγω του «όγκου ατυχημάτων» και θνησιμότητας σε πολύ μεγάλες ηλικίες.

### 3.2 Επιλογή Μοντέλου Θνησιμότητας

Έχοντας αναφέρει τα παραπάνω, γίνεται κατανοητό ότι το έργο του Gompertz είναι υψίστης σημασίας μιας και ήταν ο πρώτος που θεώρησε ότι ο θάνατος μπορεί να προκληθεί από εσωτερικές δυνάμεις στους οργανισμούς και πρότεινε το πρώτο μοντέλο για την ένταση θνησιμότητας. Σύμφωνα με τον Gompertz, η ένταση της θνησιμότητας αυξάνεται με γεωμετρική πρόοδο μέσα σε ένα ευρύ φάσμα ηλικιών της ανθρώπινης ζωής, η οποία ξεκινάει από τη σεξουαλική ωρίμανση έως τις πολύ μεγάλες ηλικίες. Αυτή η ιδέα επιβεβαιώνεται από πολλές παρατηρήσεις και είναι γνωστή ως το μοντέλο θνησιμότητας του Gompertz. Μαθηματικά, το μοντέλο του Gompertz αντιπροσωπεύει το ρυθμό θνησιμότητας  $m_x$  στην ηλικία  $x$ , ως μια εκθετική συνάρτηση της ηλικίας

$$m_x = m_0 e^{\beta x}$$

όπου το  $m_0$  είναι η αρχική θνησιμότητα (μπορεί να θεωρηθεί ως ο ρυθμός θνησιμότητας στην ηλικία 0) και  $\beta$  είναι ο συντελεστής θνησιμότητας, ο οποίος αποδίδει το ρυθμό αλλαγής της θνησιμότητας βάσει της ηλικίας (ακριβολογώντας η ηλικία  $x$  στο μοντέλο του Gompertz μπορεί να διακυμανθεί μόνο σε ένα συγκεκριμένο εύρος, π.χ. μεταξύ 20 και 80 ετών).

Μια άλλη, ισοδύναμη με την παραπάνω, εξίσωση που παρουσιάζει το μοντέλο θνησιμότητας του Gompertz είναι:

$$m_x = \frac{\Delta N_i}{N_i - (1-a)\Delta N_i}$$

όπου  $N_i$  είναι το πλήθος των ατόμων που έχουν φτάσει στην ηλικία  $i$ ,  $\Delta N_i$  είναι ο αριθμός των θανάτων των ατόμων στην ηλικία  $i$  και  $a$  είναι ο αναμενόμενος σχετικός ρυθμός ετών που βιώνεται στο διάστημα ηλικίας  $[x, x+1)$  από ένα άτομο ηλικίας  $x$ , το οποίο πεθαίνει μέσα στο διάστημα αυτό.

Όπως γίνεται κατανοητό, η παράμετρος  $a$  υπόκειται σε μικρές μεταβολές. Σύμφωνα με τον Chiang (1960) οι τιμές της παραμέτρου  $a$ , στις ηλικίες 0 έως 4 ετών, διαφέρουν από την τιμή στις υπόλοιπες ηλικίες της ανθρώπινης ζωής. Πιο συγκεκριμένα,  $a_0 = 0.09$ ,  $a_1 = 0.43$ ,  $a_2 = 0.45$ ,  $a_3 = 0.47$ ,  $a_4 = 0.49$ , ενώ  $a_x = 0.50$  για κάθε  $x \geq 5$ .

Τα παρατηρούμενα δεδομένα θνησιμότητας και η θεωρητική ένταση θνησιμότητας αποτυπώνονται γενικά σε μια ημιλογαριθμική κλίμακα (Σχήμα 1 – «Η ένταση θνησιμότητας σε σχέση με την ηλικία»), όπου η εκθετική αύξηση της θνησιμότητας αντιπροσωπεύεται από μια ευθεία γραμμή. Γραφικά, τα πραγματικά δεδομένα θνησιμότητας δημιουργούν μοτίβα, τα οποία έχουν ορισμένα κοινά χαρακτηριστικά, καθώς και ορισμένες ποσοτικές διαφορές σε σύγκριση με διαφορετικές ομάδες και περιόδους. Ένα τυπικό μοτίβο θνησιμότητας (Σχήμα 1 – «Η ένταση θνησιμότητας σε σχέση με την ηλικία») προέρχεται από την αρχική θνησιμότητα στην ηλικία μηδέν (0), πέφτει σε ένα ελάχιστο σημείο (περίπου στην ηλικία των 10 ετών), αυξάνεται σε ένα τοπικό ανώτατο όριο (γύρω στην ηλικία των 25 ετών), στη συνέχεια ελαφρώς μειώνεται ή παραμένει σταθερή και μετά την ηλικία των 35-40 ετών προχωράει εκθετικά ικανοποιώντας το μοντέλο του Gompertz. Σε εξαιρετικά μεγάλες ηλικίες (ηλικίες άνω των 100 ετών) δεν υπάρχουν κοινά αποδεικτικά στοιχεία για τον τρόπο

συμπεριφοράς της καμπύλης θνησιμότητας, καθώς και οι αναφερθείσες παρατηρήσεις είναι αμφιλεγόμενες και παρέχονται με διαφορετικές εξηγήσεις.

Το υψηλό αρχικό επίπεδο θνησιμότητας οφείλεται στο γεγονός ότι τα νεογέννητα δεν είναι ιδιαίτερα κατάλληλα για το νέο περιβάλλον στο οποίο γεννιούνται και ως εκ τούτου ένα σχετικά υψηλό ποσοστό αυτών δεν είναι σε θέση να επιβιώσουν. Καθώς οι δυνάμεις θνησιμότητας λόγω περιβαλλοντικών παραγόντων μειώνονται, τα ποσοστά θνησιμότητας μειώνονται. Στη συνέχεια, η θνησιμότητα αρχίζει να αυξάνεται στην ηλικία των 10 ετών. Μπορεί κανείς να σημειώσει ότι η θνησιμότητα θα πρέπει να αυξηθεί εκθετικά από αυτήν την ηλικία. Ωστόσο, σε πραγματικά στοιχεία θνησιμότητας, η εκθετική αύξηση της θνησιμότητας παρατηρείται μόνο μετά την ηλικία των 35-40 ετών (Σχήμα 1 – «Η ένταση θνησιμότητας σε σχέση με την ηλικία»), αφού μεταξύ των ηλικιών 10 και 35 ετών επικαλύπτεται με τοπικό ανώτατο όριο στην καμπύλη θνησιμότητας. Αυτό το τοπικό ανώτατο όριο είναι εμφανές κατά την αναπαραγωγική περίοδο και ονομάζεται συνήθως «τυχαία καμπούρα» (“accidental hump”), καθώς σχετίζεται με τις εξωτερικές αιτίες θανάτων (κυρίως ατυχημάτων και μητρικών θανάτων) λόγω της επικίνδυνης συμπεριφοράς των νέων ενηλίκων.

Πολλές μελέτες έχουν επικεντρωθεί στην ανάλυση της εκθετικής αύξησης της θνησιμότητας στην ηλικία των 30 ετών και άνω. Συγκρίνοντας τις παραμέτρους που περιγράφουν την εκθετική δυναμική των δεδομένων που λαμβάνονται για διαφορετικές ανθρώπινες κοινωνίες διαπιστώθηκε ότι στις αναπτυγμένες χώρες η αρχική θνησιμότητα,  $m_0$ , είναι χαμηλότερη, ενώ ο συντελεστής θνησιμότητας  $\beta$  είναι υψηλότερος από αυτές τις παραμέτρους που περιγράφουν στοιχεία για τις λιγότερο ανεπτυγμένες χώρες. Το φαινόμενο αυτό, δηλαδή η αντίστροφη σχέση μεταξύ αρχικής θνησιμότητας και συντελεστή θνησιμότητας, φαίνεται να είναι θεμελιώδες (επιβεβαιώνεται από όλα τα διαθέσιμα δεδομένα) και ονομάζεται «νόμος αποζημίωσης» ή «αποζημιωτικό αποτέλεσμα» (“compensation law”) (Gavrilov and Gavrilova, 1979, 1991).

Ένας αριθμός μαθηματικών μοντέλων έχει αναπτυχθεί και χρησιμοποιείται για την ανάλυση των παρατηρήσεων σχετικά με τη δυναμική θνησιμότητας στους ανθρώπινους πληθυσμούς, καθώς και στους πληθυσμούς άλλων ειδών (Vaupel, 2010, Yashin et al., 2000). Έχουν διατυπωθεί διάφορες εξηγήσεις για τις ιδιαιτερότητες της

δυναμικής θνησιμότητας σε μικρές και μεγάλες ηλικίες. Για παράδειγμα, οι προτεινόμενες επεξηγήσεις για την «ισοπέδωση της θνησιμότητας»<sup>1</sup> (“late-life mortality plateau”) περιλαμβάνουν την υπόθεση ότι το εκθετικό μοντέλο δε λειτουργεί σε αυτές τις ηλικίες και ότι η δυναμική θνησιμότητας πρέπει να περιγραφεί από τις υλικοτεχνικές, τετραγωνικές (quadratic) ή άλλες μαθηματικές λειτουργίες (Gavrilov and Gavrilova, 2001; Kannisto et al., 1994; Pham, 2011). Έχει, επίσης, αποδειχθεί ότι οι αποκλίσεις από το εκθετικό μοντέλο μπορούν να εξηγηθούν από την ετερογένεια (Vaupel και Yashin, 1985, Vaupel et al., 1979), ενώ η ετερογένεια μπορεί να εξηγηθεί και να περιγραφεί χρησιμοποιώντας διαφορετικά μοντέλα (Lebreton, 1996; Steinsaltz and Wachter, 2006). Ωστόσο, θεωρούμε ότι η συστηματική ανάλυση της δυναμικής θνησιμότητας σε ετερογενείς πληθυσμούς είναι ελλιπής. Ιδιαίτερα, θα ήταν μια σημαντική άσκηση η κατασκευή ενός μοντέλου ετερογενούς πληθυσμού με παραμέτρους που να ταιριάζουν σε πραγματικές παρατηρήσεις, καθώς αυτό θα μπορούσε να παράσχει ενδείξεις σχετικά με τους βιολογικούς, γενετικούς και ιατρικούς παράγοντες που κατευθύνουν αυτά τα πρότυπα θνησιμότητας. Ένας άλλος λόγος για αποκλίσεις της δυναμικής θνησιμότητας από το μοντέλο του Gompertz μπορεί να συσχετιστεί με τυχαία γεγονότα που επηρεάζουν τη μακροζωία. Ο ρόλος των στοχαστικών επιδράσεων στη δυναμική της θνησιμότητας, όπως διαμεσολαβείται από την επίδρασή τους στην ατομική αδυναμία, έχει αντιμετωπιστεί από πολλούς συγγραφείς (Vaupel, 2010; Weitz and Fraser, 2001). Και πάλι, τα αποτελέσματα αυτών των μελετών δεν έχουν συστηματικά συγκριθεί με τις λεπτομερείς παρατηρήσεις που είναι διαθέσιμες σήμερα.

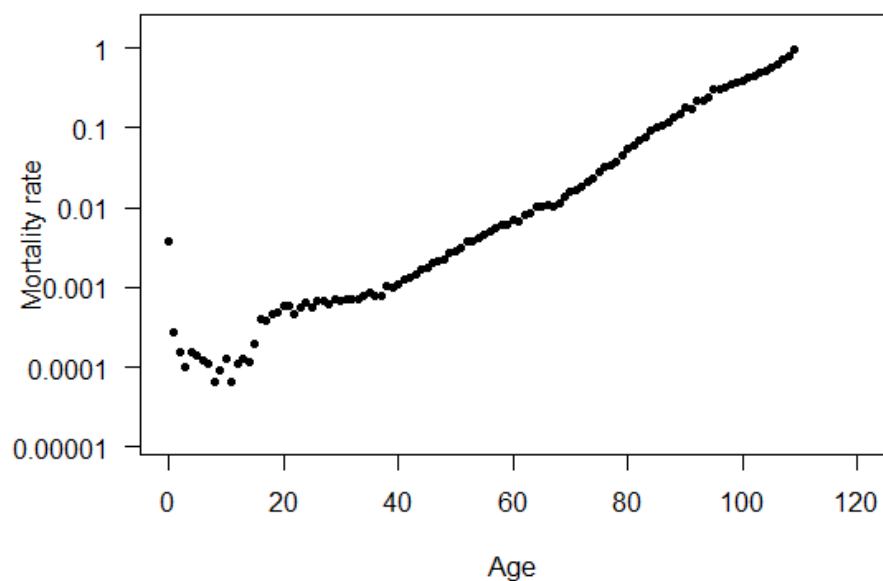
Σε αυτήν την εργασία, στοχεύουμε να μοντελοποιήσουμε τη θνησιμότητα καθ’ όλη τη διάρκεια ζωής, υποθέτοντας ότι ο ρυθμός θνησιμότητας μεταβάλλεται με την ηλικία σύμφωνα με το μοντέλο του Gompertz. Αν και πολλά άλλα μοντέλα έχουν χρησιμοποιηθεί για να περιγράψουν τη δυναμική της θνησιμότητας κατά ηλικία (Pletcher, 1999), υπάρχει μια πραγματική αίσθηση ότι οι θεμελιώδεις διαδικασίες που διέπουν τη θνησιμότητα θα πρέπει να καταλήξουν στο εκθετικό μοντέλο (Yashin et

---

<sup>1</sup>Ισοπέδωση θνησιμότητας: Ο κίνδυνος θανάτου σταματά να αυξάνεται μετά από κάποια μεγάλη ηλικία – συνήθως άνω των 85 ετών – (ή μάλλον, αυξάνεται ασυμπτωτικά προς ένα όριο) και έπειτα συνεχίζει με σταθερό ρυθμό (ή καλύτερα προσεγγίζει ένα σταθερό ρυθμό), αποδίδοντας εκθετική αποσύνθεση, όπως στη ραδιενεργή αποσύνθεση.

al., 2000). Επομένως, αναλύουμε αν οι αποκλίσεις από το μοντέλο του Gompertz μπορούν να εξηγηθούν από την ετερογένεια των πληθυσμών, ενώ η θνησιμότητα σε κάθε υποπληθυσμό εξακολουθεί να περιγράφεται από το μοντέλο του Gompertz. Επίσης, υποθέτοντας ότι η δυναμική θνησιμότητας περιγράφεται από το μοντέλο του Gompertz ελέγχεται εάν οι αποκλίσεις από αυτό το μοντέλο μπορούν να εξηγηθούν από στοχαστικές επιδράσεις. Προκειμένου να γίνει η ανάλυση αυτή, αναπτύξαμε μαθηματικά μοντέλα που περιλαμβάνουν την ετερογένεια του πληθυσμού και / ή τα στοχαστικά αποτελέσματα χρησιμοποιώντας τη γλώσσα προγραμματισμού R.

Σχήμα 1 – «Η ένταση θνησιμότητας σε σχέση με την ηλικία»



Τα δεδομένα του Σχήματος 1 έχουν συλλεχθεί από το Human Mortality Database για την Ελλάδα του έτους 2010.

### 3.3 Μοντελοποίηση Ετερογένειας Πληθυσμού

Ορισμένες μελέτες επεξεργάζονται την ετερογένεια των πληθυσμών ώστε να μοντελοποιήσουν και να αναλύσουν την επίδρασή τους στη δυναμική θνησιμότητας. Η ετερογένεια μπορεί να εισαχθεί με διαφορετικούς τρόπους. Για παράδειγμα, μπορεί να βασιστεί στην υπόθεση ότι ο πληθυσμός αποτελείται από κοορτές (υποπληθυσμούς), έτσι ώστε τα μέλη της κάθε ομάδας, σε δεδομένη ηλικία, να αντιμετωπίζουν την ίδια πιθανότητα θανάτου. Για το λόγο ότι όλα τα άτομα κάθε κοορτής εκτίθενται σε όμοια δυναμική θνησιμότητας, κάθε υποπληθυσμός θεωρείται ομοιογενής. Ωστόσο, στην πραγματικότητα, κάθε μεμονωμένο άτομο έχει συγκεκριμένα γενετικά, βιολογικά και φυσιολογικά χαρακτηριστικά που συμβάλλουν διαφορετικά σε μια διάρκεια ζωής κάθε ατόμου. Επομένως, ένας εναλλακτικός τρόπος εισαγωγής της ετερογένειας βασίζεται στην αντίληψη ότι κάθε μεμονωμένο άτομο σε έναν πληθυσμό έχει τα δικά του ειδικά χαρακτηριστικά και αντιμετωπίζει συγκεκριμένη δυναμική θνησιμότητας. Η δύναμη της θνησιμότητας που ενεργεί σε κάθε άτομο έχει τότε σωρευτική επίδραση στη διαδικασία της θνησιμότητας σε ολόκληρο τον πληθυσμό. Στην προσέγγιση αυτή, η ετερογένεια σε ατομικό επίπεδο μπορεί να εκπροσωπείται με δύο διαφορετικούς τρόπους. Ο πρώτος αναφέρεται στην ατομική αδυναμία ως προς την καταμέτρηση των πιθανών επιπέδων επιβίωσης. Στο δεύτερο, χρησιμοποιείται μια μεμονωμένη διαδικασία ζωτικότητας για την αναπαραγωγή των μοτίβων ανθρώπινης θνησιμότητας και, επομένως, επικεντρώνεται στη διαδικασία που οδηγεί στο θάνατο. Στο πλαίσιο αυτής της εκτίμησης, η ζωτικότητα ορίζεται ως ένα μέτρο της ικανότητας επιβίωσης που μειώνεται με την ηλικία και υπόκειται σε στοχαστικές αλλαγές. Η εγγενής θνησιμότητα είναι τότε αποτέλεσμα πλήρους απώλειας ζωτικότητας (κάθε άτομο γεννιέται με ένα αρχικό επίπεδο ζωτικότητας και πεθαίνει όταν η ζωτικότητά του μειωθεί στο μηδέν), ενώ η εξωγενής θνησιμότητα εμφανίζεται όταν μια περιβαλλοντική πρόκληση υπερβαίνει το (μη μηδέν) επίπεδο ζωτικότητας. Το μοντέλο των διαδικασιών ζωτικότητας χρησιμοποιήθηκε για την ανάλυση της χρονικής εξέλιξης της εγγενούς και εξωγενούς θνησιμότητας όσον αφορά τις αλλαγές στις παραμέτρους με την προσαρμογή του μοντέλου σε δεδομένα διαδοχικών περιόδων, καθώς και για τη διερεύνηση της ισοπέδωσης της θνησιμότητας (“late-life mortality plateaus”). Έτσι, η έννοια της

ετερογένειας χρησιμοποιείται για να εξηγήσει τις αποκλίσεις της θνησιμότητας από την εκθετική ανάπτυξη σε μικρές και πολύ μεγάλες ηλικίες.

### 3.4 Μαθηματικό Μοντέλο Ετερογενών Πληθυσμών

Κάθε ανθρώπινος πληθυσμός μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από έναν αριθμό υποπληθυσμών, οι οποίοι διαφέρουν γενετικά ή/και με τον τρόπο ζωής (για παράδειγμα σχετίζονται με το φύλο ή τη δουλειά). Οι παράμετροι που ορίζουν τη δυναμική θνησιμότητας ( $m_0$ ,  $\beta$  στην εξίσωση του μοντέλου του Gompertz) κάθε υποπληθυσμού μπορεί να είναι διαφορετικές, αντανακλώντας τις παραλλαγές του γονότυπου και του τρόπου ζωής (Vaupel et al., 1998). Επομένως, μπορούμε να μοντελοποιήσουμε ολόκληρο τον ετερογενή πληθυσμό με τον ακόλουθο τρόπο. Θεωρούμε ότι ο πληθυσμός αποτελείται από  $n$  υποπληθυσμούς και υποθέτουμε ότι ο ρυθμός θνησιμότητας σε κάθε υποπληθυσμό ορίζεται από την εξίσωση Gompertz, αν και οι παράμετροι εξισώσεων είναι διαφορετικές για διαφορετικούς υποπληθυσμούς (Vaupel, 2010). Ας χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό  $N_{j0}$  για το αρχικό μέγεθος,  $m_{j0}$  για το αρχικό ποσοστό θνησιμότητας και  $\beta_j$  για το ρυθμό της δυναμικής θνησιμότητας του υποπληθυσμού  $j$ . Σύμφωνα με το μοντέλο του Gompertz, το ποσοστό θνησιμότητας του υποπληθυσμού  $j$  είναι:

$$m_{jx} = m_{j0} e^{\beta_j x}$$

Εάν ο συνολικός πληθυσμός αποτελείται από  $n$  υποπληθυσμούς, τότε:

$$\begin{aligned} m_i &= \frac{\Delta N_{1i} + \Delta N_{2i} + \dots + \Delta N_{ni}}{N_{1i} + N_{2i} + \dots + N_{ni} - 0.5 (\Delta N_{1i} + \Delta N_{2i} + \dots + \Delta N_{ni})} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^n \Delta N_{jx}}{\sum_{j=1}^n N_{jx} - 0.5 \sum_{j=1}^n \Delta N_{jx}} \end{aligned} \quad (7)$$

όπου ο δείκτης  $x$  δηλώνει την ηλικία και ο δείκτης  $j$  τον υποπληθυσμό. Λαμβάνοντας υπόψη τις εξισώσεις (1) και (6), τότε η εξίσωση (7) μπορεί να γραφεί ως:

$$m_x = \frac{\sum_{j=1}^n \frac{N_{jx} m_{j0} e^{\beta_j x}}{1 + 0.5 m_{j0} e^{\beta_j x}}}{\sum_{j=1}^n N_{jx} - 0.5 \sum_{j=1}^n \frac{N_{jx} m_{j0} e^{\beta_j x}}{1 + 0.5 m_{j0} e^{\beta_j x}}} \quad (8)$$

Στην εξίσωση αυτή τα πραγματικά μεγέθη των υποπληθυσμών μπορούν να αντικατασταθούν από τα κλάσματά τους. Με άλλα λόγια, μπορούμε να προσδιορίσουμε το  $\rho_{jx}$  ως το κλάσμα που δημιουργήθηκε από τον υποπληθυσμό  $j$  πάνω στο συνολικό πληθυσμό σε οποιαδήποτε ηλικία  $x$ :

$$\rho_{jx} = \frac{N_{jx}}{N_x} = \frac{N_{jx}}{N_{1x} + N_{2x} + \dots + N_{nx}} \quad \text{με } \sum_{j=1}^n \rho_{jx} = 1 \quad (9)$$

Επομένως, η εξίσωση (8) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$m_x = \frac{\sum_{j=1}^n \frac{\rho_{jx} m_{j0} e^{\beta_{jx}}}{1 + 0.5 m_{j0} e^{\beta_{jx}}}}{1 - 0.5 \sum_{j=1}^n \frac{\rho_{jx} m_{j0} e^{\beta_{jx}}}{1 + 0.5 m_{j0} e^{\beta_{jx}}}} \quad (10)$$

Τα κλάσματα  $\rho_{jx}$  της εξίσωσης (10) ορίζονται από τα αρχικά κλάσματα  $\rho_{j0}$  από την εξίσωση που είναι παρόμοια με την εξίσωση (5):

$$\rho_{jx} = \frac{\rho_{j0} \prod_{k=0}^{x-1} \left( \frac{1 - 0.5 m_{j0} e^{\beta_{jk}}}{1 + 0.5 m_{j0} e^{\beta_{jk}}} \right)}{\sum_{s=1}^n \left( \rho_{s0} \prod_{k=0}^{x-1} \left( \frac{1 - 0.5 m_{s0} e^{\beta_{sk}}}{1 + 0.5 m_{s0} e^{\beta_{sk}}} \right) \right)} \quad (11)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις (10) και (11) για να ορίσουμε το ποσοστό θνησιμότητας του ετερογενούς πληθυσμού ως συνάρτηση της ηλικίας  $x$  και για να εξετάσουμε την επίδραση των παραμέτρων του μοντέλου στη δυναμική της θνησιμότητας σε σχέση με την ηλικία στον ετερογενή πληθυσμό. Το συνεχές αντίστοιχο της εξίσωσης (10) μπορεί να βρεθεί στους Vaupel και Yashin (1985).

### 3.5 Δυναμική Θνησιμότητας στο Μοντέλο Ετερογενών Πληθυσμών

Στην ενότητα αυτή εξετάζουμε τα δεδομένα σχετικά με τα ποσοστά θνησιμότητας στην Ελλάδα για το έτος 2010 που παρουσιάζονται στο Σχήμα 1 – «Η ένταση θνησιμότητας σε σχέση με την ηλικία» (που προέρχονται από το Human Mortality Database: <http://www.mortality.org>). Αξίζει να σημειωθεί ότι τα δεδομένα αυτά είναι αρκετά λεπτομερή για την ανάλυσή μας. Στο Σχήμα 1 – «Η ένταση θνησιμότητας σε σχέση με την ηλικία», παρατηρούμε ότι το ποσοστό θνησιμότητας αρχικά είναι



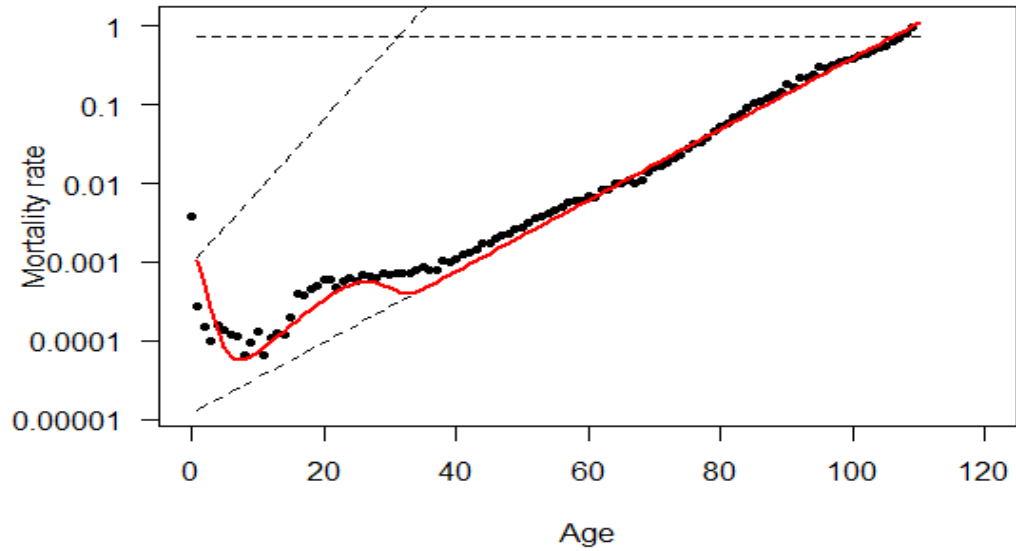
περίπου στα 0.038, μετά μειώνεται σε ένα ελάχιστο σημείο στην ηλικία των 10 ετών, στη συνέχεια αυξάνεται μέχρι μία τοπική μέγιστη τιμή στην ηλικία των 25 ετών, πέφτει ελαφρώς και αυξάνεται εκθετικά (κατά μήκος μια ευθεία γραμμή σε λογαριθμική κλίμακα) από την ηλικία των 30 έως περίπου 100 ετών. Σε προχωρημένες ηλικίες, δηλαδή μετά από περίπου 100 χρόνια, τα δεδομένα θνησιμότητας δεν ακολουθούν τη μονοτονικά αυξανόμενη γραμμή. Αυτό μπορεί να εξηγηθεί είτε από διακυμάνσεις των δεδομένων θνησιμότητας είτε από το γεγονός ότι το ποσοστό θνησιμότητας αρχίζει να μειώνεται με την ηλικία.

Το Σχήμα 2 – «Υποπληθυσμοί με το μοντέλο θνησιμότητας του Gompertz» παρουσιάζει 3 μοντέλα ετερογενών πληθυσμών που αποτελούνται από 3 (διάγραμμα A), 4 (διάγραμμα B) και 5 (διάγραμμα C) υποπληθυσμούς που αντιστοιχούν στα δεδομένα του Ελληνικού πληθυσμού που παρουσιάζονται στο Σχήμα 1. Παρατηρώντας και μόνο το Σχήμα 2 φαίνεται ότι τα διαγράμματα B και C είναι καλύτερα από το διάγραμμα A. Το Μπεϋζιανό Κριτήριο Πληροφοριών (Bayesian Information Criterion) υποδεικνύει ότι το μοντέλο των τεσσάρων υποπληθυσμών (διάγραμμα B) ταιριάζει ελάχιστα καλύτερα στα δεδομένα από το μοντέλο των 5 υποπληθυσμών (διάγραμμα C).

#### Σχήμα 2 – «Υποπληθυσμοί με το μοντέλο θνησιμότητας του Gompertz

Στο Σχήμα αυτό, προσαρμόζουμε το ετερογενές μοντέλο στα Ελληνικά δεδομένα θνησιμότητας με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων. Τα δεδομένα υποδηλώνονται από τα κυκλικά σύμβολα, τα ποσοστά θνησιμότητας των μοντελοποιημένων υποπληθυσμών δίδονται από τις μαύρες διακεκομμένες γραμμές και η θνησιμότητα ολόκληρου του πληθυσμού από την ενιαία κόκκινη καμπύλη.

Διάγραμμα Α – 3 υποπληθυσμοί



Α: Ο ετερογενής πληθυσμός αποτελείται από τρεις υποπληθυσμούς. Οι παράμετροι του μοντέλου είναι οι εξής:

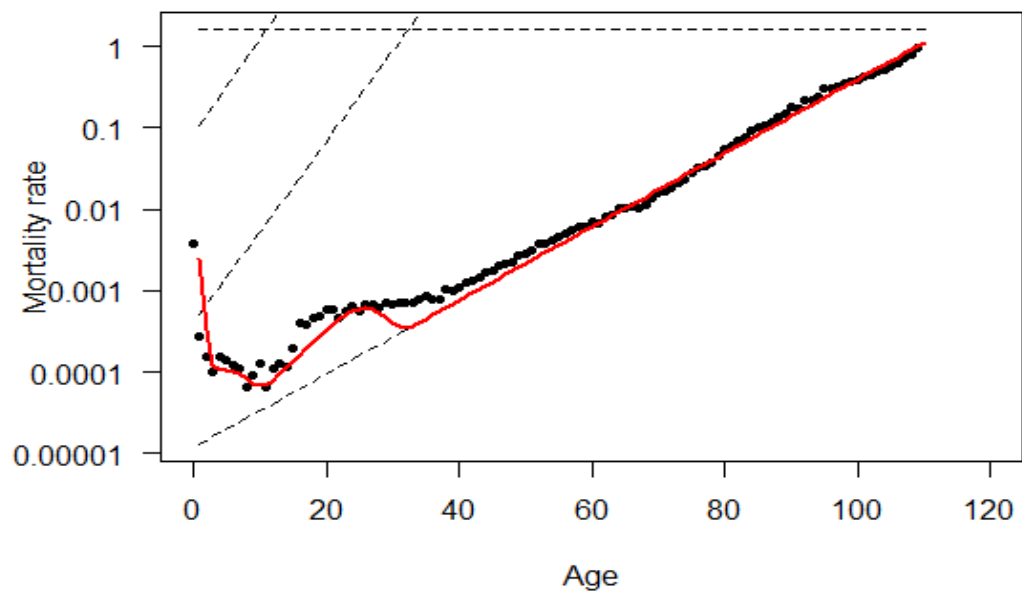
1<sup>ος</sup> υποπληθυσμός:  $m_{10} = 0.7211$ ,  $\rho_{10} = 0.00198$ ,  $\beta_1 = 0.67 * 10^{-5}$

2<sup>ος</sup> υποπληθυσμός:  $m_{20} = 0.001169$ ,  $\rho_{20} = 0.00483$ ,  $\beta_2 = 0.2129$

3<sup>ος</sup> υποπληθυσμός:  $m_{30} = 0.00001317$ ,  $\rho_{30} = 0.99319$ ,  $\beta_3 = 0.1041$

Άθροισμα τετραγώνων υπολοίπων (SSR) : 10.78723, BIC = -227.23

## Διάγραμμα Β – 4 υποπληθυσμοί



Β: Ο ετερογενής πληθυσμός αποτελείται από τέσσερις υποπληθυσμούς. Οι παράμετροι του μοντέλου είναι οι εξής:

1<sup>ος</sup> υποπληθυσμός:  $m_{10} = 1.6139$ ,  $\rho_{10} = 0.00266$ ,  $\beta_1 = 0.67 * 10^{-5}$

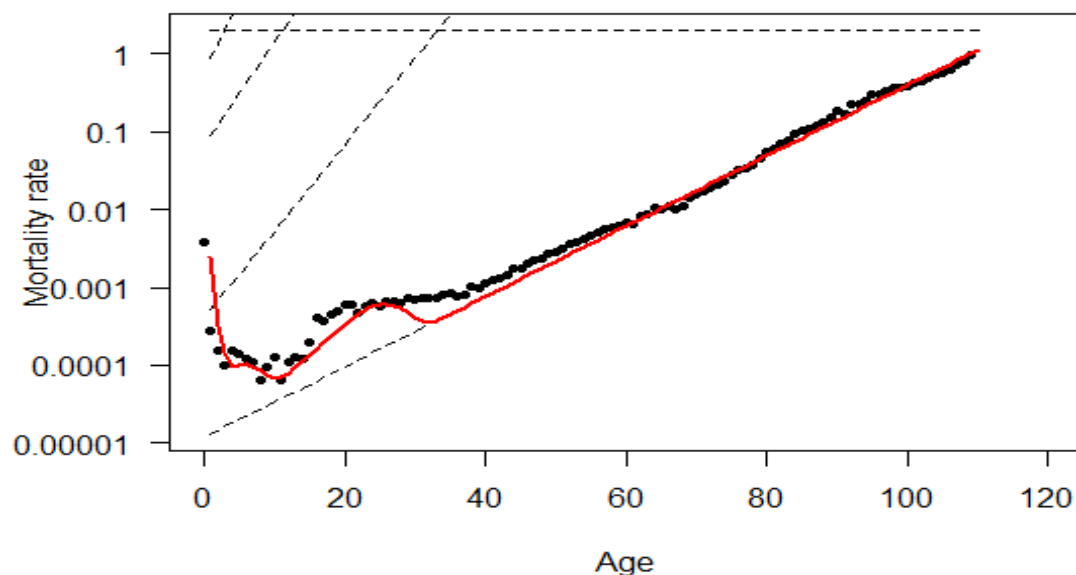
2<sup>ος</sup> υποπληθυσμός:  $m_{20} = 0.108$ ,  $\rho_{20} = 0.00057$ ,  $\beta_2 = 0.2685$

3<sup>ος</sup> υποπληθυσμός:  $m_{30} = 0.00052$ ,  $\rho_{30} = 0.00460$ ,  $\beta_3 = 0.2558$

4<sup>ος</sup> υποπληθυσμός:  $m_{40} = 0.000013146$ ,  $\rho_{40} = 0.99217$ ,  $\beta_4 = 0.1041$

Άθροισμα τετραγώνων υπολοίπων (SSR) = 7.912493, BIC = -233.1184

### Διάγραμμα C – 5 υποπληθυσμοί



C: Ο ετερογενής πληθυσμός αποτελείται από πέντε υποπληθυσμούς. Οι παράμετροι του μοντέλου είναι οι εξής:

1<sup>ος</sup> υποπληθυσμός:  $m_{10} = 1.986$ ,  $\rho_{10} = 0.002$ ,  $\beta_1 = 0.67 * 10^{-5}$

2<sup>ος</sup> υποπληθυσμός:  $m_{20} = 0.859$ ,  $\rho_{20} = 0.00074$ ,  $\beta_2 = 0.4254$

3<sup>ος</sup> υποπληθυσμός:  $m_{30} = 0.088$ ,  $\rho_{30} = 0.00052$ ,  $\beta_3 = 0.3041$

4<sup>ος</sup> υποπληθυσμός:  $m_{40} = 0.0005207$ ,  $\rho_{40} = 0.00459$ ,  $\beta_4 = 0.2558$

5<sup>ος</sup> υποπληθυσμός:  $m_{50} = 0.00001316$ ,  $\rho_{50} = 0.99215$ ,  $\beta_5 = 0.1041$

Άθροισμα τετραγώνων υπολοίπων (SSR) = 7.853288, BIC = -196.3407

Φαίνεται λοιπόν, ότι σύμφωνα με το κριτήριο BIC, το διάγραμμα B – 4 υποπληθυσμοί προσαρμόζεται καλύτερα στα δεδομένα μας. Με άλλα λόγια, τα αρχικά μας δεδομένα μπορούν να μοντελοποιηθούν σύμφωνα με το μοντέλο θνησιμότητας του Gompertz με 4 υποπληθυσμούς. Αξίζει να σημειωθεί ότι, για τη δημιουργία των παραπάνω διαγραμμάτων, χρησιμοποιήσαμε τη γλώσσα προγραμματισμού R.

## Κεφάλαιο 4 – Εφαρμογή στους Πίνακες Επιβίωσης και στα Συνταξιοδοτικά Προγράμματα

Στην αναλογιστική επιστήμη και στη δημογραφία, ένας πίνακας επιβίωσης (που ονομάζεται επίσης πίνακας θνησιμότητας ή αναλογιστικός πίνακας) είναι ένας πίνακας που δείχνει για κάθε ηλικία ποια είναι η πιθανότητα ένας άνθρωπος αυτής της ηλικίας να πεθάνει πριν τα επόμενα γενέθλιά του («πιθανότητα θανάτου»). Με άλλα λόγια, αντιπροσωπεύει την επιβίωση ανθρώπων από ένα συγκεκριμένο πληθυσμό. Τέτοιοι πίνακες μπορούν επίσης να εξηγηθούν ως ένας μακροπρόθεσμος μαθηματικός τρόπος μέτρησης της μακροζωίας του πληθυσμού.

### 4.1 Εφαρμογή στην Ασφαλιστική Επιστήμη

Προκειμένου να τιμολογούνται τα ασφαλιστικά προϊόντα και να εξασφαλίζεται η φερεγγυότητα των ασφαλιστικών εταιρειών μέσω επαρκών αποθεμάτων, οι αναλογιστές πρέπει να αναπτύξουν προβολές μελλοντικών ασφαλισμένων γεγονότων (όπως θάνατος, ασθένεια και αναπηρία). Για να γίνει αυτό, οι αναλογιστές αναπτύσσουν μαθηματικά μοντέλα των ποσοστών και της χρονομέτρησης των γεγονότων. Το πετυχαίνουν αυτό, μελετώντας την επίπτωση αυτών των γεγονότων στο πρόσφατο παρελθόν και, μερικές φορές, αναπτύσσοντας προσδοκίες για το πώς αυτά τα παρελθοντικά γεγονότα θα αλλάξουν με την πάροδο του χρόνου (για παράδειγμα, αν θα συνεχιστούν οι προοδευτικές μειώσεις των ποσοστών θνησιμότητας στο παρελθόν) και αποκομίζοντας αναμενόμενα ποσοστά τέτοιων γεγονότων στο μέλλον, συνήθως με βάση την ηλικία ή άλλα σχετικά χαρακτηριστικά του πληθυσμού. Η εργασία του αναλογιστή είναι να σχηματίσει μια σύγκριση μεταξύ ανθρώπων που κινδυνεύουν με θάνατο και ανθρώπων που πέθαναν πραγματικά για να βρουν μια πιθανότητα θανάτου για ένα άτομο σε κάθε αριθμό ηλικίας, που ορίζεται ως  $q_x$  σε μια συγκεκριμένη εξίσωση. Κατά την ανάλυση ενός πληθυσμού, μία από τις κύριες πηγές που χρησιμοποιήθηκαν για τη συγκέντρωση των απαιτούμενων πληροφοριών είναι η ασφάλιση με τη λήψη μεμονωμένων αρχείων που ανήκουν σε συγκεκριμένο πληθυσμό. Αυτά ονομάζονται πίνακες θνησιμότητας εάν παρουσιάζουν ποσοστά θνησιμότητας και πίνακες νοσηρότητας εάν παρουσιάζουν διάφορους τύπους ασθενειών ή αναπηρίας.

Η διαθεσιμότητα υπολογιστών και ο πολλαπλασιασμός της συλλογής δεδομένων σχετικά με τα άτομα έχουν καταστήσει πιθανούς υπολογισμούς που είναι πιο εντατικοί από εκείνους που χρησιμοποιήθηκαν στο παρελθόν και είναι πιο συνηθισμένο να επιχειρείται η παροχή διαφορετικών πινάκων για διαφορετικές χρήσεις και να συμπεριλαμβάνεται μια σειρά από μη παραδοσιακές συμπεριφορές (π.χ. τυχερά παιχνίδια, χρέος) σε εξειδικευμένους υπολογισμούς που χρησιμοποιούν ορισμένα ιδρύματα για την αξιολόγηση του κινδύνου. Αυτό ισχύει ιδιαίτερα στην περίπτωση της ασφάλισης ζημιών (π.χ. η τιμολόγηση της ασφάλισης αυτοκινήτων μπορεί να επιτρέψει ένα μεγάλο αριθμό παραγόντων κινδύνου, ο οποίος απαιτεί αντίστοιχα πολύπλοκο πίνακα αναμενόμενων απαιτήσεων). Ωστόσο, η έκφραση «πίνακας επιβίωσης» αναφέρεται συνήθως στα ποσοστά επιβίωσης ενός ανθρώπου και δε σχετίζεται με τις γενικές ασφαλίσεις.

## 4.2. Κατασκευή Πλήρων Πινάκων Επιβίωσης

### 4.2.1 Συνεπτυγμένοι Πίνακες Επιβίωσης

Συνεπτυγμένοι πίνακες επιβίωσης ονομάζονται οι πίνακες στους οποίους καταγράφεται η θνησιμότητα για ομάδες ηλικιών, συνήθως ομάδες των 5 ή 10 ετών, εξαιρώντας την ηλικία μηδέν που λόγω ιδιαιτερότητας αναλύεται ξεχωριστά.

#### Πλήρεις Πίνακες Επιβίωσης

Στους πλήρεις πίνακες επιβίωσης καταγράφεται η θνησιμότητα για όλες τις ηλικίες :  $x = 0, 1, 2, \dots, \omega$ .

Οι πίνακες που ανήκουν στην πρώτη κατηγορία είναι πιο περιληπτικοί, πιο εύκολα διαχειρίσιμοι λόγω του μικρότερου αριθμού δεδομένων (δημιουργούνται κλάσεις συγκεκριμένου εύρους για τις ηλικίες των ατόμων), αλλά σε κάποιες περιπτώσεις και οι μόνοι που υπάρχουν εξαιτίας έλλειψης δεδομένων στις δημογραφικές απογραφές. Αντίθετα, οι πίνακες που ανήκουν στη δεύτερη κατηγορία είναι περισσότερο αναλυτικοί, πιο ακριβείς και για συγκεκριμένους επιστημονικούς τομείς (όπως η αναλογιστική επιστήμη) απαραίτητοι.

#### 4.2.2 Δομή Πινάκων Επιβίωσης

Για την κατασκευή ενός πίνακα επιβίωσης λαμβάνεται υπόψη ένα δεδομένο σύνολο  $l_0$ , ταυτόχρονα γεννημένων ατόμων. Γενικά,  $l_0 = 10.000, 100.000, 1.000.000$  είναι αποδεκτό και ονομάζεται η ρίζα του πίνακα. Στις στήλες παρουσιάζονται τα δεδομένα για διάφορες δημογραφικές παραμέτρους (βιομετρικά χαρακτηριστικά) που ταξινομούνται κατά ηλικία.

Για να γίνουν γνωστές αυτές οι παράμετροι απαιτείται παρατήρηση ολόκληρου του κύκλου ζωής μιας πραγματικής γενιάς για 100 και περισσότερα έτη. Ο πίνακας της πραγματικής γενιάς που προκύπτει θα έχει ιστορική αξία, αφού η γενιά αυτή θα έχει ζήσει σε συνθήκες διαφορετικές από τις τωρινές. Με αυτόν τον τρόπο, η μελέτη και η πρόβλεψη της διαδικασίας της μείωσης της τρέχουσας γενιάς υπό την επίδραση της θνησιμότητας πραγματοποιείται βασιζόμενη σε μια υποθετική γενιά. Οι πίνακες επιβίωσης κατασκευάζονται με πραγματικά δεδομένα σχετικά με τη θνησιμότητα των ταυτόχρονα ζωντανών γενεών κατά τη διάρκεια συγκεκριμένης ημερολογιακής περιόδου.

Υπάρχουν διάφορες μέθοδοι για την κατασκευή πινάκων επιβίωσης. Η κύρια διαφορά μεταξύ τους συνίσταται στην επιλογή μιας βασικής παραμέτρου που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των υπόλοιπων παραμέτρων. Συνήθως, αυτή η παράμετρος είναι η πιθανότητα θανάτου  $q_x$  μεταξύ των ηλικιών  $x$  και  $(x+1)$  που δίδονται από τα στατιστικά ινστιτούτα με βάση μια μεθοδολογία την οποία υιοθέτησαν. Αυτές οι πιθανότητες αποτελούν τις βάσεις του πίνακα επιβίωσης και όλες οι επόμενες στήλες παράγονται από αυτόν.

Για κάθε έτος  $x$  της ζωής του πληθυσμού από το εξεταζόμενο σύνολο, προσδιορίζονται οι ακόλουθες παράμετροι:

- $p_x$  – υποθετική πιθανότητα επιβίωσης μεταξύ της ηλικίας  $x$  και της ηλικίας  $(x+1)$  (πιθανότητα επιβίωσης μεταξύ των ηλικιών  $x$  και  $(x+1)$ ) ως
  - $p_x + q_x = 1$  (1)
  - $p_x = 1 - q_x$  (2)

- $l_x$  – αριθμός των ατόμων που έχουν ζήσει έως την ηλικία  $x$  (αριθμός επιζώντων μέχρι την ηλικία  $x$ )

$$\circ l_{x+1} = l_x p_x = l_x (1 - q_x) \quad (3)$$

Είναι το πρώτο σημαντικό σύνολο των ζωντανών ανθρώπων, που παρουσιάζει την υποθετική γενεά και τη μείωσή της με την αύξηση της ηλικίας.

- $d_x$  – αριθμός των ατόμων που πεθαίνουν στο διάστημα  $[x, x+1)$  (αριθμός θανάτων)

$$\circ d_x = l_x - l_{x+1} = l_x q_x, l_x \geq l_{x+1} \quad (4)$$

- $L_x$  – αριθμός ετών ζωής που έχουν συσσωρευτεί από ολόκληρη την ομάδα στο διάστημα  $[x, x+1)$  ή ο μέσος αριθμός ατόμων εν ζωή (έτη ζωής μεταξύ των ηλικιών  $x$  και  $(x+1)$ )

$$\circ L_x = \frac{l_x + l_{x+1}}{2} = l_x - \frac{1}{2} d_x \quad (5)$$

Αυτό ισχύει στην περίπτωση ομοιόμορφης (γραμμικής) μείωσης του αριθμού των ανθρώπων που έφθασαν σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα. Η δεδομένη παράμετρος υπολογίζεται για όλες τις ηλικίες εκτός από το πρώτο (0 έτη) και το τελευταίο έτος,  $\omega$ . Φαίνεται πως είναι το δεύτερο σημαντικό σύνολο των ζωντανών ανθρώπων.

- $T_x$  – αριθμός ετών της αναμενόμενης ζωής του ατόμου που έχει ζήσει μέχρι την ηλικία  $x$  (συνολικός αριθμός ατόμων ζωής που έζησαν πάνω από την ηλικία  $x$ )

$$\circ T_x = \sum_{t=x}^{\omega} L_t \quad (6)$$

Αυτή η παράμετρος χαρακτηρίζει το συνολικό αριθμό ετών ζωής που απομένουν στην ομάδα των ατόμων να ζήσει μεταξύ της ηλικίας  $x$  και της οριακής ηλικίας.



- $e_x^o$  – το μέσο προσδόκιμο ζωής (μέση προσδοκία ζωής στην ηλικία  $x$ , δηλαδή ο μέσος αριθμός ετών που απομένουν για να ζήσει η ομάδα ατόμων που έφθασε σε μια ορισμένη ηλικία  $x$ )

$$\circ e_x^o = \frac{T_x}{l_x} \quad (7)$$

Η πρώτη τιμή του  $e_x^o$  δείχνει το μέσο προσδόκιμο ζωής για την αντίστοιχη ομάδα.

- $m_x$  – δείκτης θνησιμότητας

$$\circ m_x = \frac{d_x}{L_x} \quad (8)$$

- Η παράμετρος επιβίωσης,  $p_x$ , μπορεί να γραφεί και ως:

$$\circ p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} \quad (9)$$

#### 4.2.3. Δομή Πίνακα Επιβίωσης ενός Στάσιμου Πληθυσμού

Ένας εναλλακτικός τρόπος εξήγησης των στοιχείων που αποτελούν τον πίνακα επιβίωσης σχετίζεται με την υπόθεση ενός στάσιμου πληθυσμού.

Θεωρούμε ότι στον πίνακα επιβίωσης του στάσιμου πληθυσμού πραγματοποιούνται  $l_0$  (=100.000) γεννήσεις κάθε χρόνο (και συνεπώς  $l_0$  θάνατοι).

Με αυτόν τον τρόπο, έχουμε:

$l_x$  : ο αριθμός των ατόμων που έχουν ζήσει μέχρι την ηλικία  $x$  στο στάσιμο πληθυσμό

${}_n d_x$  : αριθμός των ατόμων που πεθαίνουν στο διάστημα  $[x, x+n)$  (αριθμός θανάτων)

${}_n L_x$  – αριθμός ετών ζωής που έχουν συσσωρευτεί από ολόκληρη την ομάδα στο διάστημα  $[x, x+n)$  ή ο μέσος αριθμός ατόμων εν ζωή (έτη ζωής μεταξύ των ηλικιών  $x$  και  $(x+n)$ )

${}_n T_x$  – αριθμός ετών της αναμενόμενης ζωής του ατόμου που έχει ζήσει μέχρι την ηλικία  $x$  (συνολικός αριθμός ατόμων ζωής που έζησαν πάνω από την ηλικία  $x$ )

Υπάρχουν δύο διαφορετικές αντιλήψεις σχετικά με τον πίνακα επιβίωσης. Σύμφωνα με την πρώτη αντίληψη (του πίνακα επιβίωσης υποθετικής γενεάς), ο πίνακας επιβίωσης χρησιμοποιείται κυρίως για εκτίμηση του πληθυσμού, της αναπαραγωγής και της γεννητικότητας. Σύμφωνα με τη δεύτερη αντίληψη (του πίνακα επιβίωσης του στάσιμου πληθυσμού), ο πίνακας επιβίωσης χρησιμοποιείται για να μελετηθεί η σύνθεση του πληθυσμού και να συγκριθεί η θνησιμότητα. Και οι δύο αυτές αντιλήψεις του πίνακα επιβίωσης είναι σωστές και αποδεκτές μιας και αναφέρονται σε διαφορετικές εφαρμογές.

Οι πίνακες επιβίωσης χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν και άλλα δημογραφικά γεγονότα, όπως π.χ. την οικονομική δραστηριότητα ενός πληθυσμού ή τη γαμηλιότητα, όπου αντίστοιχα με τους πίνακες επιβίωσης μελετούν τη γαμηλιότητα του πληθυσμού ανάλογα με την ηλικία του.

Μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι οι συναρτήσεις  ${}_n d_x$ ,  ${}_n p_x$ ,  ${}_n q_x$  και  ${}_n L_x$  έχουν ως εύρος τιμών το διάστημα ηλικίας  $[x, x+n)$ , ενώ οι  $e_x^0$  και  $l_x$  προσδιορίζουν την ακριβή ηλικία  $x$ . Επίσης, οι τιμές των συναρτήσεων  ${}_n d_x$ ,  $l_x$ ,  $T_x$  και  ${}_n L_x$  είναι εξαρτημένες από την τιμή του  $l_0$ , το οποίο είναι ο υποθετικός πληθυσμός που ορίζεται αυθαίρετα, ενώ οι τιμές των συναρτήσεων  ${}_n p_x$ ,  ${}_n q_x$  και  $e_x^0$  δεν εξαρτώνται από την τιμή του  $l_0$  και αναφέρονται στον πραγματικό πληθυσμό του πίνακα επιβίωσης.

#### 4.2.4 Μέθοδοι Περιγραφής της Θνησιμότητας βάσει της Ηλικίας (κατά Ηλικία Θνησιμότητα)

Όπως έχει ήδη αναφερθεί στο Κεφάλαιο 2 της παρούσας εργασίας, υπάρχουν αρκετά κοινά στοιχεία της κατά ηλικία θνησιμότητας στους ανθρώπινους πληθυσμούς. Για το λόγο αυτό, αναπτύχθηκαν διάφοροι γενικοί τρόποι για να περιγράψουν την κατά ηλικία θνησιμότητα. Οι δύο βασικές κατηγορίες αυτών των τρόπων είναι:

- 1) Οι Πρότυποι Πίνακες Επιβίωσης,
- 2) Παραμετρικά υποδείγματα, στα οποία παρουσιάζεται η θνησιμότητα του πληθυσμού ως συνάρτηση της ηλικίας.

## Πρότυποι Πίνακες Επιβίωσης (Model Life Tables)

Οι Πρότυποι Πίνακες Επιβίωσης είναι πίνακες ζωής που συνήθως βασίζονται σε παρατηρημένα δεδομένα σε πραγματικές χώρες. Τα πρώτα μοντέλα αναπτύχθηκαν από τα Ηνωμένα Έθνη τη δεκαετία του 1950. Οι πρότυποι πίνακες επιβίωσης είναι πολύ χρήσιμοι για την παροχή εκτιμήσεων για τις συνολικές συνθήκες θνησιμότητας σε χώρες για τις οποίες η καταχώριση των ανθρώπων που επιβιώνουν είναι ελλιπής ή χαμηλότερης ποιότητας. Επίσης, χρησιμοποιούνται συχνά για την επιρροή μερικών πληροφοριών. Για παράδειγμα, μπορεί κάποιος να υπολογίσει έναν ολόκληρο πίνακα επιβίωσης βάσει μιας ενιαίας εκτίμησης της βρεφικής θνησιμότητας.

Τυπικά, οι πρότυποι πίνακες επιβίωσης έχουν προκύψει από μια ομάδα χωρών που υποτίθεται ότι διαθέτουν δεδομένα υψηλής ποιότητας και τα οποία παρουσιάζουν διαφορετικά ηλικιακά πρότυπα θνησιμότητας.

Ένα σύνολο πρότυπων πινάκων επιβίωσης αναπτύχθηκε από τους Coale και Demeny (1966) στη δεκαετία του 1960. Τα πρότυπα αυτά ταξινομούν τους πίνακες επιβίωσης σε τέσσερα διαφορετικά σύνολα με την ονομασία Δυτικά, Ανατολικά, Βόρεια και Νότια, σύμφωνα με τα πρότυπα θνησιμότητας στις κυρίαρχες περιοχές της Ευρώπης που εκπροσωπούνται στα αρχικά δεδομένα.

Σε κάθε ένα από αυτά τα σύνολα, το προσδόκιμο ζωής στην ηλικία των 10 ετών συσχετίστηκε με την πιθανότητα θανάτου σε διαφορετικές ηλικίες και οι συσχετισμοί αυτοί παρείχαν τη βάση για την εκτίμηση μιας σειράς «ένθετων» πινάκων επιβίωσης σε διαφορετικά συνολικά επίπεδα  $e_x$ , αλλά με διαφορετικά ηλικιακά πρότυπα θνησιμότητας.

Την ίδια περίπου εποχή που εμφανίστηκαν τα μοντέλα Coale-Demeny, ο William Brass (Brass et al., 1968) ανέπτυξε το Γενικό Πρότυπο Μοντέλο (General Standard Model). Σε αυτό το μοντέλο, οι πίνακες ζωής συνδέονται με ένα σύστημα δύο παραμέτρων logit, βασισμένο σε ένα γενικό πρότυπο θνησιμότητας και μια γραμμική σχέση μεταξύ δύο ομάδων logit. Με την αλλαγή των δύο παραμέτρων της γραμμικής σχέσης, το γενικό πρότυπο αλλάζει σε σχέση με το επίπεδο και το πρότυπο της θνησιμότητας.

Ο βασικός στόχος στη δημιουργία οποιουδήποτε πρότυπου πίνακα επιβίωσης είναι η κατασκευή ενός συστήματος που δίνει χρονοδιαγράμματα της θνησιμότητας ανά φύλο και ηλικία, τα οποία καθορίζονται από ένα μικρό αριθμό παραμέτρων που καταγράφουν το επίπεδο, καθώς και το ηλικιακό μοτίβο της θνησιμότητας. Εάν ένα συγκεκριμένο μοντέλο αντιπροσωπεύει επαρκώς την πραγματικότητα, τα χαρακτηριστικά ενός συγκεκριμένου πληθυσμού μπορούν να συνοψιστούν με τις παραμέτρους του μοντέλου αυτού, διευκολύνοντας έτσι τη μελέτη της μεταβολής μεταξύ των πληθυσμών ή μέσα στον πληθυσμό με την πάροδο του χρόνου. Έτσι, οι πρότυποι πίνακες επιβίωσης αποτελούν βασικά δημογραφικά εργαλεία για τους πληθυσμούς που δε διαθέτουν ακριβή δημογραφικά δεδομένα. Οι αρχές που διέπουν κάθε υπάρχοντα πρότυπο πίνακα επιβίωσης συζητούνται παρακάτω.

### **Πρότυποι πίνακες επιβίωσης των Ηνωμένων Εθνών (1955)**

Το πρώτο σύνολο πρότυπων πινάκων επιβίωσης δημοσιεύθηκε από τον Ο.Η.Ε. το 1955. Κατασκευάστηκαν με τη χρήση 158 πινάκων επιβίωσης για κάθε φύλο, χρησιμοποιώντας στατιστικές τεχνικές για τη συσχέτιση της θνησιμότητας σε μια ηλικία με τη θνησιμότητα σε μια άλλη ηλικία για μια σειρά επιπέδων θνησιμότητας. Το πρότυπο υποθέτει ότι η τιμή του  ${}_nq_x$ , για κάθε ηλικιακό διάστημα σε έναν πίνακα επιβίωσης, είναι μια τετραγωνική συνάρτηση του ρυθμού στο προηγούμενο διάστημα, π.χ.  ${}_5q_{x-n}$  (εκτός από τις πρώτες δύο ηλικιακές ομάδες,  ${}_1q_0$  και  ${}_1q_4$ , όλες οι άλλες ομάδες θεωρούνται ότι έχουν διάρκεια 5 ετών). Έτσι, η γνώση μίας μόνο παραμέτρου θνησιμότητας (π.χ. το  ${}_1q_0$  ή ισοδύναμα του επιπέδου θνησιμότητας που καθορίζει τις τιμές  ${}_1q_0$  που χρησιμοποιούνται) καθορίζει έναν πλήρη πίνακα επιβίωσης. Για το λόγο αυτό, οι πρότυποι πίνακες επιβίωσης των Ηνωμένων Εθνών αναφέρονται συλλογικά ως μονοπαραμετρικό σύστημα. Σε κάθε επίπεδο θνησιμότητας αντιστοιχεί ένας πρότυπος πίνακας επιβίωσης για άντρες, γυναίκες και αμφότερα τα φύλα σε συνδυασμό.

Οι συντελεστές των τετραγωνικών εξισώσεων για κάθε φύλο υπολογίστηκαν από το αντίστοιχο δείγμα 158 πινάκων επιβίωσης. Αυτοί χρησιμοποιήθηκαν στην πορεία για τη δημιουργία πραγματικών προτύπων πινάκων επιβίωσης, αρχικά επιλέγοντας, αυθαίρετα, μια βολική τιμή  ${}_1q_0$ . Αυτή η τιμή, στη συνέχεια, αντικαταστάθηκε στην εξίσωση που σχετίζει το  ${}_1q_0$  με το  ${}_1q_4$  για να ληφθεί μια τιμή για το  ${}_1q_4$ , η οποία με τη σειρά της αντικαταστάθηκε στην εξίσωση που σχετίζει το  ${}_5q_5$  με το  ${}_1q_4$  για να ληφθεί

μια τιμή για το  $s_{q5}$ , κοκ. Αυτή η «αλυσιδωτή» διαδικασία συνεχίστηκε μέχρι να ολοκληρωθεί ο πρότυπος πίνακας επιβίωσης.

### **Τοπικοί Πρότυποι πίνακες επιβίωσης των Coale και Demeny (1966)**

Αυτοί οι πίνακες δημοσιεύθηκαν πρώτη φορά το 1966. Προέρχονται από ένα σύνολο 192 πινάκων επιβίωσης, ανά φύλο, από πραγματικούς πληθυσμούς. Το σύνολο αυτό περιελάμβανε πίνακες επιβίωσης από διάφορες χρονικές περιόδους (39 από περιόδους πριν το 1900 και 69 από περιόδους μετά το Δεύτερο Παγκόσμιο Πόλεμο) και κυρίως από τις δυτικές χώρες. Η Ευρώπη, η Βόρεια Αμερική, η Αυστραλία και η Νέα Ζηλανδία συνεισέφεραν συνολικά 176 πίνακες. Τρεις ήταν από το Ισραήλ, 6 από την Ιαπωνία, 3 από την Ταϊβάν και 4 από το λευκό πληθυσμό της Νότιας Αφρικής. Όλοι οι 192 επιλεγμένοι πίνακες επιβίωσης προέκυψαν από δεδομένα απογραφής και υποβλήθηκαν σε αυστηρά πρότυπα ακρίβειας.

Μέσω περαιτέρω ανάλυσης των υποκείμενων σχέσεων παρατηρήθηκε ότι υπάρχουν τέσσερα ηλικιακά μοτίβα θνησιμότητας, τα οποία καθορίστηκαν σε μεγάλο βαθμό από τη γεωγραφική θέση του πληθυσμού, αλλά και λόγω των μοτίβων των αποκλίσεων τους από τις εκτιμώμενες παλαιότερες εξισώσεις παλινδρόμησης. Αυτά τα μοτίβα ονομάστηκαν: Βόρεια, Νότια, Ανατολικά και Δυτικά. Το κάθε ένα είχε ένα χαρακτηριστικό μοτίβο παιδικής θνησιμότητας. Το ανατολικό μοντέλο προέρχεται κυρίως από τις χώρες της Ανατολικής Ευρώπης και χαρακτηρίζεται από υψηλή παιδική θνησιμότητα σε σχέση με τη βρεφική θνησιμότητα. Το βόρειο μοντέλο βασίζεται σε μεγάλο βαθμό στις σκανδιναβικές χώρες και χαρακτηρίζεται από συγκριτικά χαμηλή βρεφική θνησιμότητα, υψηλή παιδική θνησιμότητα και χαμηλή θνησιμότητα άνω των 50 ετών. Το νότιο μοντέλο βασίζεται σε πίνακες ζωής από τις χώρες της Νότιας Ευρώπης (Ισπανία, Πορτογαλία και νότια Ιταλία) και έχει ένα μοτίβο θνησιμότητας που χαρακτηρίζεται από (α) υψηλή παιδική θνησιμότητα σε σχέση με τη βρεφική θνησιμότητα με υψηλή συνολική θνησιμότητα και (β) χαμηλή παιδική θνησιμότητα σε σχέση με τη βρεφική θνησιμότητα σε χαμηλή συνολική θνησιμότητα. Το μοντέλο της Δύσης βασίζεται στους υπολειπόμενους πίνακες που δε χρησιμοποιούνται στα άλλα περιφερειακά σύνολα (δηλαδή στις χώρες της Δυτικής Ευρώπης και στους περισσότερους μη ευρωπαϊκούς πληθυσμούς). Χαρακτηρίζεται

από ένα πρότυπο ενδιάμεσο μεταξύ του Βόρειου και του Ανατολικού προτύπου. Επειδή αυτό το μοντέλο προέρχεται από το μεγαλύτερο αριθμό και την ευρύτερη ποικιλία περιπτώσεων, πιστεύεται ότι αντιπροσωπεύει το πιο γενικό πρότυπο θνησιμότητας. Σε αυτό το σύστημα, κάθε πιθανότητα επιβίωσης, είτε από τη γέννηση είτε από την προϋπόθεση ότι έχει φτάσει σε μια ορισμένη ηλικία, καθορίζεται με μοναδικό τρόπο έναν πίνακα επιβίωσης, αφού έχει επιλεγεί μια οικογένεια. Αν και είναι τεχνικά ένα σύστημα παραμέτρων, θα μπορούσε να υποστηριχθεί ότι η επιλογή μιας οικογένειας αποτελεί ξεχωριστή διάσταση.

### **Το σύστημα των πρότυπων πινάκων επιβίωσης του Ledermann (1959, 1969).**

Το σύστημα αυτό βασίζεται σε μια ανάλυση συντελεστών περίπου 157 εμπειρικών πινάκων. Η μέθοδος επιλογής ήταν λιγότερο αυστηρή από ό,τι στους πίνακες των Coale – Demeny, αλλά αντιπροσωπεύουν περισσότερες εμπειρίες από αναπτυσσόμενες χώρες. Η ανάλυση των πινάκων αποκάλυψε πέντε παράγοντες που προφανώς εξήγησαν μεγάλο ποσοστό της μεταβλητότητας μεταξύ των πινάκων επιβίωσης. Οι παράγοντες που εξήχθησαν σχετίζονται με: (α) το γενικό επίπεδο θνησιμότητας, (β) τη σχέση θνησιμότητας μεταξύ της παιδικής και της ενήλικης περιόδου, (γ) τη θνησιμότητα σε μεγαλύτερη ηλικία, (δ) τη θνησιμότητα κάτω των 5 ετών και (ε) διαφορά θνησιμότητας αντρών – γυναικών στο ηλικιακό εύρος 5 – 70 ετών. Αργότερα, ο Ledermann ανέπτυξε μια σειρά πινάκων επιβίωσης ενός και δύο παραμέτρων με βάση αυτά τα αποτελέσματα.

Ο πρότυπος πίνακας επιβίωσης των Ηνωμένων Εθνών για τις αναπτυσσόμενες χώρες (1981).

Οι πρότυποι αυτοί πίνακες επιβίωσης σχεδιάστηκαν για να ανταποκρίνονται στις ανάγκες των αναπτυσσόμενων χωρών. Τα υποκείμενα δεδομένα αποτελούνταν από 36 πίνακες επιβίωσης που κάλυπταν ένα ευρύ φάσμα επιπέδων θνησιμότητας, από τις αναπτυσσόμενες χώρες, ανά φύλο. Δεκαέξι ζευγάρια πινάκων επιβίωσης προέρχονταν από 10 χώρες της Λατινικής Αμερικής, 19 ζεύγη από 11 χώρες της Ασίας και 1 ζευγάρι από την Αφρική. Πέντε οικογένειες προτύπων εντοπίστηκαν, το

κάθε ένα με ένα σύνολο πινάκων που κυμαίνονται με προσδόκιμο ζωής 35 έως 75 ετών για κάθε φύλο. Κάθε οικογένεια προτύπων καλύπτει μια γεωγραφική περιοχή: Λατινική Αμερική, Χιλή, Νότια Ασία, Άπω Ανατολή και μία γενική. Το γενικό πρότυπο κατασκευάστηκε ως ο μέσος όρος όλων των παρατηρήσεων.

#### 4.2.5 Πίνακες Επιβίωσης

Στην Ενότητα αυτή παρουσιάζονται 2 πίνακες επιβίωσης για το συνολικό πληθυσμό της Ελλάδας για το έτος 2010. Αξίζει να αναφερθεί ότι και οι δύο πίνακες έχουν υπολογιστεί ανά έτος ηλικίας ( $x, x+1$ ). Τα δεδομένα που έχουν χρησιμοποιηθεί για τους υπολογισμούς και την εξαγωγή των πινάκων προέρχονται από το Human Mortality Database και είναι από 0 έως 109 ετών. Η διαφορά των δύο πινάκων είναι ότι στον Πίνακα Επιβίωσης για την Ελλάδα το 2010 του Παραρτήματος παρουσιάζονται τα αρχικά δεδομένα, όπως αυτά εξήχθησαν από το Human Mortality Database, ενώ στον Πίνακα Επιβίωσης για την Ελλάδα το 2010 με το μοντέλο θνησιμότητας του Gompertz του Παραρτήματος παρουσιάζονται τα δεδομένα, στα οποία χρησιμοποιήσαμε το μοντέλο θνησιμότητας του Gompertz.

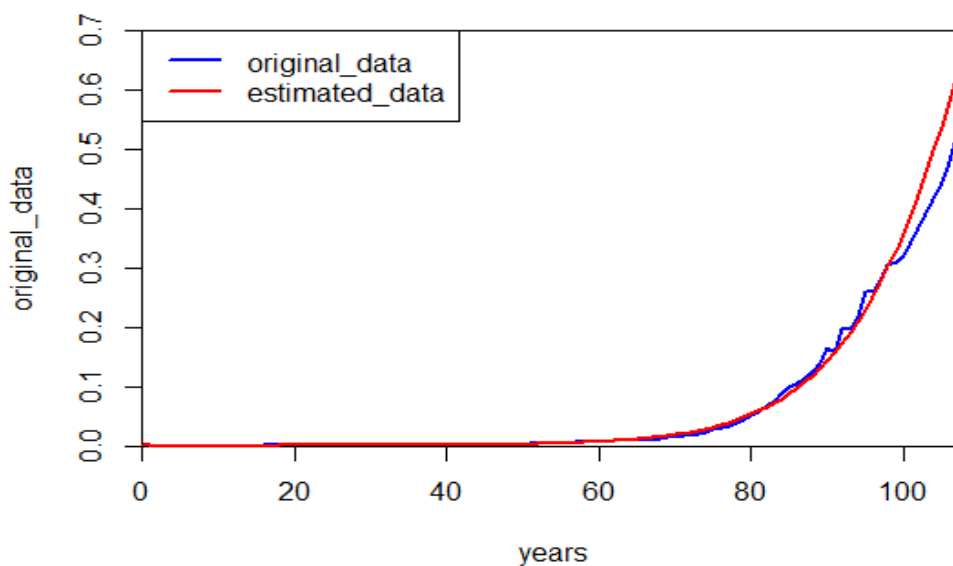
Γίνεται αντιληπτό ότι στον Πίνακα Επιβίωσης για την Ελλάδα το 2010, η πιθανότητα ένα νεογέννητο να πεθάνει είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα ένα άτομο να πεθάνει σε μετέπειτα ηλικία. Με άλλα λόγια, διακρίνεται ότι η πιθανότητα θανάτου ( ${}_nq_x$ ) στην αρχή είναι υψηλή, στη συνέχεια μειώνεται (από 1 έως 37 έτη), στην πορεία αρχίζει να αυξάνεται και τελικά φτάνει στη μέγιστη τιμή της στην ηλικία των 109 ετών ( $q_{109} = 0.6540$ ). Αξίζει να σημειωθεί ότι η πιθανότητα θανάτου ενός νεογέννητου ατόμου είναι σχεδόν ίση με την πιθανότητα ένα άτομο ηλικίας 53 ετών να πεθάνει κατά τη διάρκεια του επόμενου έτους. Ακριβώς το αντίθετο συμβαίνει με την πιθανότητα επιβίωσης ενός ατόμου, όπου η πιθανότητα  ${}_np_x$  αρχικά είναι μικρή, μετά αυξάνεται μέχρι την ηλικία των 37 ετών, στη συνέχεια μειώνεται και στο τέλος φτάνει στην ελάχιστη τιμή της στην ηλικία των 109 ετών ( $p_{109} = 0.3460$ ). Άλλωστε, όπως έχουμε αναφέρει και στην Ενότητα 4.2.3:

$${}_np_x = 1 - {}_nq_x \text{ ή ισοδύναμα}$$

$${}_n p_x + {}_n q_x = 1$$

Αντίστοιχα, στον Πίνακα Επιβίωσης για την Ελλάδα το 2010 με το μοντέλο θνησιμότητας του Gompertz, η πιθανότητα θανάτου ενός ατόμου αρχικά είναι υψηλή, στη συνέχεια μειώνεται (από 1 έως 41 έτη), στην πορεία αρχίζει να αυξάνεται, όπου φτάνει στο τέλος στη μέγιστη τιμή της στα 109 έτη ( $q_{109} \approx 1$ ). Στο σημείο αυτό, πρέπει να αναφερθεί ότι η πιθανότητα θανάτου ενός νεογέννητου είναι σχεδόν ίση με την πιθανότητα θανάτου ενός ατόμου ηλικίας 50 ετών. Αντιθέτως, η πιθανότητα επιβίωσης αρχικά είναι χαμηλή, μετά αυξάνεται (από 1 έως 41 έτη), στη συνέχεια ελαφρώς μειώνεται, όπου λαμβάνει τελικά την ελάχιστη τιμή της στα 109 έτη ( $p_{109} \approx 0$ ).

Σχήμα 3\_ Διαφορά πιθανότητας θανάτου μεταξύ των δύο πινάκων επιβίωσης



Στο παραπάνω σχήμα (Σχήμα 3\_ Διαφορά πιθανότητας θανάτου μεταξύ των δύο πινάκων επιβίωσης), παρατηρούμε ότι στις αρχικές ηλικίες (από 0 έως 40 περίπου έτη) η πιθανότητα θανάτου ενός ατόμου, χρησιμοποιώντας το μοντέλο θνησιμότητας του Gompertz, είναι μικρότερη από την πιθανότητα θανάτου όταν χρησιμοποιούμε τα αρχικά δεδομένα που έχουμε εξάγει από το Human Mortality Database. Το παραπάνω διάγραμμα δημιουργήθηκε με βάση τη γλώσσα προγραμματισμού R.



Τέλος, αξίζει να γίνει λόγος για τη διαφορά όσον αφορά το προσδόκιμο ζωής στους δύο πίνακες. Στον Πίνακα Επιβίωσης για την Ελλάδα το 2010, με τα αρχικά δεδομένα, το προσδόκιμο ζωής είναι ελαφρώς μικρότερο από το προσδόκιμο ζωής του Πίνακα Επιβίωσης για την Ελλάδα το 2010 με το μοντέλο θνησιμότητας του Gompertz. Επίσης, οι πιθανότητες θανάτου του Πίνακα Επιβίωσης για την Ελλάδα το 2010 είναι μεγαλύτερες από αυτές του Πίνακα Επιβίωσης για την Ελλάδα το 2010 με το μοντέλο θνησιμότητας του Gompertz σε όλες τις ηλικίες. Με άλλα λόγια, ο Πίνακας Επιβίωσης για την Ελλάδα το 2010 με το μοντέλο θνησιμότητας του Gompertz έχει χαμηλότερη πιθανότητα θανάτου και υψηλότερο προσδόκιμο ζωής από τον Πίνακα Επιβίωσης για την Ελλάδα το 2010. Επομένως, χρησιμοποιώντας το μοντέλο θνησιμότητας του Gompertz καταλήγουμε σε καλύτερες τιμές όσον αφορά τον πίνακα επιβίωσης.

#### **4.2.6 Εφαρμογή σε ένα Συνταξιοδοτικό Πρόγραμμα και Συγκριτικός Πίνακας Συνταξιοδοτικών Σχημάτων**

Στην ενότητα αυτή, θα παρουσιάσουμε μία εφαρμογή στο πιο διαδεδομένο και ευρέως γνωστό συνταξιοδοτικό πρόγραμμα, καθώς και έναν πίνακα όπου θα συγκρίνουμε 3 σημαντικά συνταξιοδοτικά σχήματα μεταξύ τους. Όπως είδαμε και στο Κεφάλαιο 3, υπάρχουν αρκετά συνταξιοδοτικά προγράμματα που μπορούν να χρησιμοποιηθούν. Σύμφωνα με το βιβλίο του κύριου Πιτσέλη «Μαθηματικά των Συνταξιοδοτικών Ταμείων και Πίνακες Επιβίωσης – Θνησιμότητας» (2018), μία από τις κύριες χρησιμότητες των αναλογιστικών μεθόδων για τα συνταξιοδοτικά προγράμματα είναι ο υπολογισμός του αποθέματος που πρέπει να έχουν αυτά, προκειμένου να μπορέσουν να αποδώσουν τις συντάξεις στα μέλη τους, καθώς και ο υπολογισμός ενός μεριδίου της συνολικής παροχής κατά τη συνταξιοδότηση, η οποία αναφέρεται για το επερχόμενο έτος.

Στην παρούσα εργασία, θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της Προβαλλόμενης Πιστωτικής Μονάδας (Projected Unit Credit). Ο λόγος που θα υπολογίσουμε το κανονικό κόστος και την αναλογιστική υποχρέωση των μελών του συνταξιοδοτικού ταμείου με αυτήν τη μέθοδο είναι, διότι η Προβαλλόμενη Πιστωτική Μονάδα

επιλέγεται από την ευρεία ασφαλιστική αγορά, καθώς επίσης είναι η μέθοδος που παρουσιάζεται για τη μελέτη αυτή από τα Διεθνή Λογιστικά Πρότυπα.

Σκοπός αυτής της εφαρμογής είναι να διαπιστώσουμε τις διαφορές που μπορεί να προκύψουν στα αποτελέσματά μας από τη χρήση ή όχι του μοντέλου του Gompertz στα αρχικά δεδομένα που έχουμε εξάγει από το Human Mortality Database (όπως έχει ήδη αναφερθεί).

Αρχικά, έστω ότι έχουμε 7 εργαζομένους, οι οποίοι ανήκουν στο συνταξιοδοτικό πρόγραμμα, ανεξαρτήτου φύλου. Επίσης, θεωρούμε ότι όλα τα άτομα συνταξιοδοτούνται στην ηλικία των 65 ετών. Λόγω της έλλειψης αρκετών παρατηρήσεων, θα υπολογίσουμε την κλασματική ράντα για άτομο ηλικίας 65 ετών, χρησιμοποιώντας τον πίνακα περιόδου του έτους 2010. Κανονικά, θα έπρεπε να δημιουργήσουμε πίνακες επιβίωσης από το έτος 1945 και για κάθε έτος μέχρι το 2010, προκειμένου να έχουμε την εξέλιξη του εκάστοτε ατόμου που θα συνταξιοδοτηθεί. Αναφέρουμε το έτος 1945, διότι μας ενδιαφέρει το άτομο που συνταξιοδοτείται στα 65 του έτη να βρίσκεται στο έτος 2010 (δηλαδή  $x = 65$  στο έτος 2010). Αυτό που θα αλλάζει σε κάθε άτομο διαφορετικής ηλικίας είναι το έτος έναρξης του υπολογισμού της κλασματικής ράντας. Επιπροσθέτως, η παροχή κατά τη συνταξιοδότηση είναι ίση με 2% του μέσου ετήσιου μισθού των τελευταίων τριών ετών επί τα έτη υπηρεσίας, η αύξηση του μισθού του κάθε εργαζομένου στο συνταξιοδοτικό πρόγραμμα είναι  $s=3\%$  και το επιτόκιο είναι  $i=4\%$ . Τέλος, ορίζουμε ότι η εισαγωγική ηλικία για κάθε άτομο είναι τα 25 έτη ( $e=25$ ). Παρακάτω, παρουσιάζεται ένας πίνακας με τα βασικά στοιχεία που πρέπει να ορίσουμε, προκειμένου να είναι εφικτό να εφαρμοστεί η Μέθοδος Προβαλλόμενης Παροχής.

Πίνακας Συνταξιοδοτικού Προγράμματος

Είδος Δεδομένων	Ηλικία εργαζομένου	Μισθός στο έτος 2010	$\ddot{a}_{65}^{(12)}$
Με Gompertz	30	12.000,00	12,73445
	35	15.000,00	12,73445
	40	17.000,00	12,73445
	45	20.000,00	12,73445
	50	30.000,00	12,73445
	55	40.000,00	12,73445
	60	45.000,00	12,73445

Αρχικά Δεδομένα	30	12.000,00	13,05568
	35	15.000,00	13,05568
	40	17.000,00	13,05568
	45	20.000,00	13,05568
	50	30.000,00	13,05568
	55	40.000,00	13,05568
	60	45.000,00	13,05568

Όπως φαίνεται και στον παραπάνω πίνακα, υπάρχουν 7 διαφορετικές ηλικίες για τα 7 άτομα που συμμετέχουν στο συνταξιοδοτικό ταμείο. Ο λόγος που επιλέχθηκαν ίδιες ηλικίες για τα αρχικά δεδομένα και για τα δεδομένα, στα οποία έχει χρησιμοποιηθεί το μοντέλο θνησιμότητας του Gompertz, είναι για να συγκριθούν τα αποτελέσματα και να βγει ένα ασφαλές συμπέρασμα.

Έχοντας ορίσει τα απαραίτητα στοιχεία για τη διεξαγωγή της μελέτης μας, θα διακρίνουμε τις δύο περιπτώσεις δεδομένων που θα χρησιμοποιήσουμε. Στην πρώτη περίπτωση, θα εφαρμόσουμε το μοντέλο του Gompertz στα αρχικά δεδομένα για την Ελλάδα για το έτος 2010. Τα δεδομένα αυτά έχουν παραχθεί μέσω της γλώσσας προγραμματισμού R. Τα μεγέθη που χρησιμοποιούνται για την επίλυση των συναρτήσεων της προβαλλόμενης πιστωτικής μονάδας παρουσιάζονται στους Πίνακες Επιβίωσης 3) και 4) του Παραρτήματος. Στη δεύτερη περίπτωση, θα χρησιμοποιήσουμε τα αρχικά δεδομένα για την Ελλάδα για το έτος 2010.

Τα αποτελέσματα που προκύπτουν χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις για τη μέθοδο προβαλλόμενης πιστωτικής μονάδας, παρουσιάζονται στον παρακάτω συγκεντρωτικό πίνακα:

Πίνακας Αποτελεσμάτων Συνταξιοδοτικού Προγράμματος

Είδος Δεδομένων	Ηλικία εργαζομένου	Ετήσιος Μισθός για το έτος 2010	$B_x^{(x-e)}$	$NC_x$	$AL_x$
Με Gompertz	30	12.000,00	3.183,73	1.856,69	9.283,44
	35	15.000,00	6.865,78	2.440,47	24.404,66
	40	17.000,00	10.068,22	2.911,87	43.678,03
	45	20.000,00	13.623,43	3.614,26	72.285,25
	50	30.000,00	22.034,42	5.740,36	143.509,08
	55	40.000,00	30.411,34	8.153,24	244.597,26
	60	45.000,00	34.430,93	9.870,97	345.483,97

Αρχικά Δεδομένα	30	12.000,00	3.183,73	1.884,53	9.422,63
	35	15.000,00	6.865,78	2.481,36	24.813,59
	40	17.000,00	10.068,22	2.964,52	44.467,79
	45	20.000,00	13.623,43	3.685,30	73.706,05
	50	30.000,00	22.034,42	5.865,11	146.627,83
	55	40.000,00	30.411,34	8.352,93	250.587,97
	60	45.000,00	34.430,93	10.136,69	354.784,07

Στον παραπάνω πίνακα μπορούμε να διακρίνουμε ότι σε όλες τις ηλικίες οι τιμές του εκάστοτε κανονικού κόστους και της αναλογιστικής υποχρέωσης που υπολογίσαμε, χρησιμοποιώντας το μοντέλο θνησιμότητας του Gompertz στα αρχικά δεδομένα, είναι εμφανώς μικρότερες από αυτές των αρχικών δεδομένων. Πιο συγκεκριμένα, παρατηρούμε ότι στην ηλικία των 30 ετών (που είναι η μικρότερη ηλικία του δείγματός μας) το κανονικό κόστος με το μοντέλο θνησιμότητας του Gompertz είναι κατά 27,838633 νομισματικές μονάδες μικρότερο από το κανονικό κόστος με τα αρχικά δεδομένα. Αντίστοιχα, η αναλογιστική υποχρέωση με το μοντέλο θνησιμότητας του Gompertz είναι κατά 139,1932 νομισματικές μονάδες μικρότερη από την αναλογιστική υποχρέωση με τα αρχικά δεδομένα.

Μια αντίστοιχη ανάλυση μπορούμε να κάνουμε και για τη μεγαλύτερη ηλικία του δείγματός μας. Έτσι, στην ηλικία των 60 ετών, το κανονικό κόστος ενός ατόμου χρησιμοποιώντας το μοντέλο του Gompertz είναι κατά 265,71711 νομισματικές μονάδες μικρότερο από το κανονικό κόστος με τα αρχικά δεδομένα. Επίσης, η αναλογιστική υποχρέωση ενός ατόμου 60 ετών με το μοντέλο του Gompertz είναι κατά 9.300,099 νομισματικές μονάδες μικρότερη από την αναλογιστική υποχρέωση με τα αρχικά δεδομένα.

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι η διαφορά των κανονικών κοστών και των αναλογιστικών υποχρεώσεων μεταξύ των αρχικών δεδομένων και των δεδομένων όπου χρησιμοποιήθηκε το μοντέλο θνησιμότητας του Gompertz αυξάνεται όσο μεγαλώνει ο εργαζόμενος που συμμετέχει στο συνταξιοδοτικό πρόγραμμα. Αυτό γίνεται προφανές και από το γεγονός ότι, στην ενότητα 4.2.5, ο Πίνακας Επιβίωσης για την Ελλάδα το 2010 με το μοντέλο θνησιμότητας του Gompertz, είχε πιο αισιόδοξα αποτελέσματα από ό,τι ο Πίνακας Επιβίωσης για την Ελλάδα το 2010.

Στο σημείο αυτό, θα παρουσιάσουμε έναν πίνακα, όπου θα αποτυπώνονται οι διαφορετικές τιμές του κανονικού κόστους και της αναλογιστικής υποχρέωσης για τα εξής συνταξιοδοτικά σχήματα:

- Μέθοδος Προβαλλόμενης Πιστωτικής Μονάδας
- Μέθοδος Κανονικής Εισαγωγικής Ηλικίας με το Κανονικό Κόστος ως Ποσοστό του Μισθού
- Μέθοδος Συσσωρευμένου Κόστους σε Ατομική Βάση

Πίνακας Σύγκρισης Συνταξιοδοτικών Μεθόδων

Ηλικία εργαζόμενου	Μισθός έτους 2010	NC <sub>x</sub> Projected Unit Credit	AL <sub>x</sub> Projected Unit Credit	NC <sub>x</sub> Entry Age Normal	AL <sub>x</sub> Entry Age Normal	NC <sub>x</sub> Ind. Aggregate Method	AL <sub>x</sub> Ind. Aggregate Method
30	12.000	2554,506	12772,53	533,66	2668,552	380,877	21843,37
35	15.000	3199,339	31993,39	1150,86	6980,052	883,3251	57422,69
40	17.000	3637,296	54559,44	1687,66	19513,11	1426,599	102771,8
45	20.000	4301,758	86035,16	2283,59	42320,25	2202,66	170082,8
50	30.000	6510,061	162751,5	3693,46	86069,74	4306,102	337668,2
55	40.000	8810,396	264311,9	5097,62	154830,7	8003,896	575522,5
60	45.000	10163,53	355723,4	5771,39	265317,9	16038,33	812902,8

Από τον παραπάνω πίνακα, παρατηρούμε ότι με τη μέθοδο της Προβαλλόμενης Πιστωτικής Μονάδας το κανονικό κόστος είναι μεγαλύτερο από τις άλλες δύο μεθόδους. Με άλλα λόγια, ο εργαζόμενος κάθε ηλικίας έχει μεγαλύτερο μερίδιο της συνολικής παροχής κατά τη συνταξιοδότηση για το επερχόμενο έτος επιλέγοντας το πρώτο συνταξιοδοτικό σχήμα. Αντίστοιχα, η μικρότερη αναλογιστική υποχρέωση είναι αυτή της Προβαλλόμενης Πιστωτικής Μονάδας. Το απόθεμα, δηλαδή, που χρειάζεται το συνταξιοδοτικό ταμείο σε κάθε ηλικία είναι μικρότερο με την Προβαλλόμενη Πιστωτική Μονάδα από τις άλλες δύο μεθόδους. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι τιμές των συναρτήσεων μετατροπής που βασίζονται στο μισθό για τη Μέθοδο Κανονική Εισαγωγικής Ηλικίας είναι οι εξής:  $D_{25}^s = 72489$ ,  $D_{30}^s = 69328$ ,  $D_{35}^s = 68589$ ,  $D_{40}^s = 65017$ ,  $D_{45}^s = 60234$ ,  $D_{50}^s = 58762$ ,  $D_{55}^s = 54441$ ,  $D_{60}^s = 47094$ ,

$D_{65}^s = 42715, N_{25}^s = 3248762, N_{30}^s = 2902092, N_{35}^s = 2832764, N_{40}^s = 2497020,$   
 $N_{45}^s = 2132486, N_{50}^s = 1879415, N_{55}^s = 1595218, N_{60}^s = 1083794, N_{65}^s =$   
 $816435.$  Τέλος, το ενεργητικό του ταμείου για τη μέθοδο συσσωρευμένου κόστους  
σε ατομική βάση είναι ίσο με 20.000 νομισματικές μονάδες.

## Κεφάλαιο 5 – Συμπεράσματα

Οι έρευνες για τη δυναμική της ανθρώπινης θνησιμότητας έχουν πρακτικές εφαρμογές, καθώς μπορούν να βοηθήσουν στην εξερεύνηση τρόπων για την αύξηση της διάρκειας ζωής μας. Οι έρευνες αυτές έχουν, επίσης, θεμελιώδη αξία καθώς βοηθούν στην κατανόηση των βιολογικών διεργασιών και της γενετικής που αποτελούν τη βάση της διαδικασίας γήρανσης. Ένας από τους πιο σημαντικούς τρόπους για τη διεξαγωγή αυτών των ερευνών είναι η μαθηματική μοντελοποίηση. Πρέπει να γίνουν διάφορες παραδοχές για το σχεδιασμό ενός μαθηματικού μοντέλου, ειδικά αν κάποιος στοχεύει στη μοντελοποίηση όλων των σχετικών χαρακτηριστικών που παρατηρούνται στο πρότυπο θνησιμότητας ολόκληρης της διάρκειας ζωής. Μία από τις κοινώς χρησιμοποιούμενες υποθέσεις είναι ότι ο πληθυσμός είναι ετερογενής και αποτελείται από αρκετούς υποπληθυσμούς που έχουν διαφορετική δυναμική θνησιμότητας (Rossolini and Piantanelli, 2001; Vaupel, 2010). Η πιθανή ερμηνεία αυτών των παραμέτρων είναι εξαιρετικά σημαντική για τη διεξαγωγή βαθύτερων αναλύσεων και για σκοπούς πρόβλεψης (Booth and Tickle, 2008).

Στην παρούσα εργασία, έχουμε δείξει ότι το μοντέλο μας είναι ικανό να αναπαράγει αρκετά καλά τα πραγματικά δεδομένα σχετικά με τη θνησιμότητα του ανθρώπινου πληθυσμού. Έπρεπε να εξετάσουμε μόνο τέσσερις υποπληθυσμούς για να αναπαραστήσουμε με αρκετή ακρίβεια τα λεπτομερή περιοδικά δεδομένα για τον πληθυσμό της Ελλάδας το 2010. Αν και αυτό είναι μια υποτίμηση της πραγματικής ετερογένειας των ανθρώπινων πληθυσμών, δείχνει πως ένα απλό μαθηματικό μοντέλο μπορεί να αντιπροσωπεύει την πραγματική ανθρώπινη θνησιμότητα. Μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση, που προκύπτει από τις τιμές των παραμέτρων του μοντέλου, είναι ότι ο κύριος υποπληθυσμός αποτελεί πάνω από το 99% του συνολικού πληθυσμού (Σχήμα 2 – «Υποπληθυσμοί»), που σημαίνει ότι στους σύγχρονους πληθυσμούς, η ετερογένεια είναι στην πραγματικότητα σχετικά χαμηλή. Οι προσομοιώσεις και οι αναλύσεις μας δείχνουν ότι η συμβολή της ετερογένειας είναι διαφορετική σε διαφορετικές ηλικίες. Η επίδραση της ετερογένειας είναι αξιοπρόσεκτη όταν τα κλάσματα που σχηματίζονται από τους υποπληθυσμούς απέχουν πολύ από το μηδέν ή τη μονάδα. Το μοντέλο μας υποδεικνύει ότι σε πρώιμες ηλικίες ένας μικρός υποπληθυσμός με υψηλή αρχική θνησιμότητα εξηγεί τη μείωση της θνησιμότητας, καθώς αυτός ο υποπληθυσμός σταδιακά εξαφανίζεται.

Μπορούμε, επίσης, να εντοπίσουμε έναν υποπληθυσμό (υποπληθυσμός 3 στο Σχήμα 2B), ο οποίος μας επιτρέπει να αναπαράγουμε το μέγιστο της θνησιμότητας περίπου στην ηλικία των 20 ετών. Παρ' όλο που ταιριάζει καλά στα δεδομένα, αυτός ο υποπληθυσμός μπορεί να θεωρηθεί κάπως τεχνητός, διότι αυτή η αιχμή της θνησιμότητας στα εφηβικά χρόνια πιθανώς προέρχεται λόγω συμπεριφοράς και όχι εγγενών βιολογικών ιδιοτήτων ενός υποσυνόλου ατόμων. Είναι πιθανόν ότι η αύξηση της θνησιμότητας στα εφηβικά έτη εξαρτάται από την ηλικία (αυξάνεται και μειώνεται σε συγκεκριμένο ηλικιακό εύρος) και δεν μπορεί να διαμορφωθεί από το μοντέλο θνησιμότητας του Gompertz. Παρ' όλα αυτά, εμείς υποθέτουμε ότι η συμπεριφορά ανάληψης κινδύνου σε ένα υποσύνολο ατόμων μπορεί να αποτελέσει ένα τέτοιο υποθετικό υποπληθυσμό.

Στη συνέχεια, κατασκευάσαμε δύο πίνακες επιβίωσης. Ο ένας πίνακας αποτελείται από τα αρχικά δεδομένα για την Ελλάδα του 2010, όπως αυτά εξήχθησαν από το Human Mortality Database, και ο δεύτερος πίνακας αποτελείται από τα δεδομένα στα οποία χρησιμοποιήθηκε το μοντέλο θνησιμότητας του Gompertz. Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι δεν υπήρχαν έντονες διαφορές μεταξύ των δύο πινάκων. Κατά γενική ομολογία, όμως, ο πίνακας επιβίωσης με τα δεδομένα του Gompertz είναι πιο αισιόδοξος από αυτόν με τα αρχικά δεδομένα. Αυτό γίνεται διακριτό από το γεγονός ότι η ένταση θνησιμότητας σε όλη τη διάρκεια ζωής του ανθρώπινου πληθυσμού είναι μεγαλύτερη στον πρώτο πίνακα επιβίωσης με τα αρχικά δεδομένα από αυτήν του δεύτερου πίνακα επιβίωσης. Επίσης, το προσδόκιμο ζωής σε όλες τις ηλικίες του ανθρώπινου πληθυσμού του πίνακα επιβίωσης με τα δεδομένα, στα οποία χρησιμοποιήθηκε το μοντέλο θνησιμότητας του Gompertz, είναι ελαφρώς μεγαλύτερο από αυτό του πρώτου πίνακα επιβίωσης με τα αρχικά δεδομένα. Επομένως, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο πίνακας επιβίωσης με τα δεδομένα από το μοντέλο θνησιμότητας του Gompertz είναι πιο αισιόδοξος από τον πίνακα επιβίωσης με τα αρχικά δεδομένα.

Τέλος, χρησιμοποιήσαμε τα παραπάνω δεδομένα – και τα αρχικά δεδομένα από το Human Mortality Database και τα δεδομένα όπου εφαρμόστηκε το μοντέλο θνησιμότητας του Gompertz – προκειμένου να δημιουργήσουμε ένα εικονικό συνταξιοδοτικό πρόγραμμα. Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τα δύο παραπάνω σύνολα δεδομένων, καταλήξαμε στο γεγονός ότι οι τιμές του



κανονικού κόστους και της αναλογιστικής υποχρέωσης ενός ατόμου που συμμετέχει στο συγκεκριμένο συνταξιοδοτικό πρόγραμμα, οι οποίες υπολογίστηκαν σύμφωνα με τα δεδομένα του μοντέλου θνησιμότητας του Gompertz, είναι μικρότερες από αυτές των αρχικών μας δεδομένων.

## Παράρτημα

### 1) Πίνακας Επιβίωσης για την Ελλάδα το 2010

Age	$n a_x$	$n m_x$	$n q_x$	$n p_x$	$n d_x$	$l_x$	$n L_x$	$T_x$	$e_x$
0	0,09	0,0038	0,0038	0,9962	382,0	100000,0	99652,0	8052383,0	80,52
1	0,43	0,0003	0,0003	0,9997	28,0	99618,0	99602,0	7952730,0	79,83
2	0,45	0,0002	0,0002	0,9998	15,0	99590,0	99582,0	7853128,0	78,85
3	0,47	0,0001	0,0001	0,9999	10,0	99575,0	99570,0	7753547,0	77,87
4	0,49	0,0002	0,0002	0,9998	16,0	99565,0	99557,0	7653977,0	76,87
5	0,5	0,0001	0,0001	0,9999	14,0	99549,0	99542,0	7554420,0	75,89
6	0,5	0,0001	0,0001	0,9999	12,0	99535,0	99529,0	7454878,0	74,9
7	0,5	0,0001	0,0001	0,9999	11,0	99523,0	99518,0	7355349,0	73,91
8	0,5	0,0001	0,0001	0,9999	7,0	99512,0	99508,0	7255832,0	72,91
9	0,5	0,0001	0,0001	0,9999	9,0	99505,0	99500,0	7156323,0	71,92
10	0,5	0,0001	0,0001	0,9999	13,0	99496,0	99490,0	7056822,0	70,93
11	0,5	0,0001	0,0001	0,9999	6,0	99483,0	99480,0	6957333,0	69,93
12	0,5	0,0001	0,0001	0,9999	11,0	99477,0	99472,0	6857853,0	68,94
13	0,5	0,0001	0,0001	0,9999	13,0	99466,0	99460,0	6758382,0	67,95
14	0,5	0,0001	0,0001	0,9999	12,0	99453,0	99447,0	6658922,0	66,96
15	0,5	0,0002	0,0002	0,9998	20,0	99441,0	99431,0	6559475,0	65,96
16	0,5	0,0004	0,0004	0,9996	40,0	99421,0	99401,0	6460044,0	64,98
17	0,5	0,0004	0,0004	0,9996	38,0	99381,0	99362,0	6360643,0	64,00
18	0,5	0,0005	0,0005	0,9995	45,0	99343,0	99320,0	6261281,0	63,03
19	0,5	0,0005	0,0005	0,9995	49,0	99298,0	99274,0	6161960,0	62,06
20	0,5	0,0006	0,0006	0,9994	58,0	99249,0	99220,0	6062687,0	61,09
21	0,5	0,0006	0,0006	0,9994	59,0	99191,0	99162,0	5963467,0	60,12
22	0,5	0,0005	0,0005	0,9995	47,0	99132,0	99108,0	5864306,0	59,16
23	0,5	0,0006	0,0006	0,9994	57,0	99085,0	99056,0	5765197,0	58,18
24	0,5	0,0006	0,0006	0,9994	63,0	99028,0	98996,0	5666140,0	57,22
25	0,5	0,0006	0,0006	0,9994	55,0	98965,0	98938,0	5567144,0	56,25
26	0,5	0,0007	0,0007	0,9993	67,0	98910,0	98876,0	5468206,0	55,28
27	0,5	0,0007	0,0007	0,9993	66,0	98843,0	98810,0	5369330,0	54,32
28	0,5	0,0006	0,0006	0,9994	62,0	98777,0	98746,0	5270520,0	53,36
29	0,5	0,0007	0,0007	0,9993	72,0	98715,0	98679,0	5171774,0	52,39
30	0,5	0,0007	0,0007	0,9993	69,0	98643,0	98608,0	5073095,0	51,43
31	0,5	0,0007	0,0007	0,9993	72,0	98574,0	98538,0	4974486,0	50,46
32	0,5	0,0007	0,0007	0,9993	70,0	98502,0	98467,0	4875948,0	49,5
33	0,5	0,0007	0,0007	0,9993	72,0	98432,0	98396,0	4777482,0	48,54
34	0,5	0,0008	0,0008	0,9992	79,0	98360,0	98320,0	4679086,0	47,57
35	0,5	0,0009	0,0009	0,9991	84,0	98281,0	98239,0	4580765,0	46,61
36	0,5	0,0008	0,0008	0,9992	76,0	98197,0	98159,0	4482526,0	45,65
37	0,5	0,0008	0,0008	0,9992	78,0	98121,0	98082,0	4384367,0	44,68
38	0,5	0,001	0,001	0,999	101,0	98043,0	97992,0	4286285,0	43,72
39	0,5	0,001	0,001	0,999	96,0	97942,0	97894,0	4188292,0	42,76
40	0,5	0,0011	0,0011	0,9989	108,0	97846,0	97792,0	4090398,0	41,8

Age	$n a_x$	$n m_x$	$n q_x$	$n p_x$	$n d_x$	$L_x$	$n L_x$	$T_x$	$e_x$
41	0,5	0,0012	0,0012	0,9988	121,0	97738,0	97678,0	3992606,0	40,85
42	0,5	0,0013	0,0013	0,9987	129,0	97617,0	97552,0	3894929,0	39,90
43	0,5	0,0014	0,0014	0,9986	139,0	97488,0	97418,0	3797376,0	38,95
44	0,5	0,0017	0,0017	0,9983	167,0	97349,0	97266,0	3699958,0	38,01
45	0,5	0,0018	0,0018	0,9982	172,0	97182,0	97096,0	3602692,0	37,07
46	0,5	0,002	0,002	0,998	193,0	97010,0	96914,0	3505596,0	36,14
47	0,5	0,0022	0,0022	0,9978	211,0	96817,0	96712,0	3408683,0	35,21
48	0,5	0,0023	0,0023	0,9977	221,0	96606,0	96496,0	3311972,0	34,28
49	0,5	0,0027	0,0027	0,9973	256,0	96385,0	96257,0	3215476,0	33,36
50	0,5	0,0028	0,0028	0,9972	270,0	96129,0	95994,0	3119219,0	32,45
51	0,5	0,0032	0,0032	0,9968	307,0	95859,0	95706,0	3023225,0	31,54
52	0,5	0,0037	0,0037	0,9963	353,0	95552,0	95376,0	2927520,0	30,64
53	0,5	0,0037	0,0037	0,9963	356,0	95199,0	95021,0	2832144,0	29,75
54	0,5	0,0041	0,0041	0,9959	391,0	94843,0	94648,0	2737123,0	28,86
55	0,5	0,0046	0,0046	0,9954	432,0	94452,0	94236,0	2642476,0	27,98
56	0,5	0,005	0,005	0,995	470,0	94020,0	93785,0	2548240,0	27,10
57	0,5	0,0057	0,0057	0,9943	528,0	93550,0	93286,0	2454454,0	26,24
58	0,5	0,006	0,006	0,994	558,0	93022,0	92743,0	2361168,0	25,38
59	0,5	0,0062	0,0062	0,9938	570,0	92464,0	92179,0	2268426,0	24,53
60	0,5	0,007	0,0069	0,9931	637,0	91894,0	91576,0	2176246,0	23,68
61	0,5	0,0066	0,0066	0,9934	598,0	91257,0	90958,0	2084671,0	22,84
62	0,5	0,0082	0,0082	0,9918	742,0	90659,0	90288,0	1993713,0	21,99
63	0,5	0,0085	0,0085	0,9915	763,0	89917,0	89536,0	1903425,0	21,17
64	0,5	0,0103	0,0102	0,9898	913,0	89154,0	88698,0	1813890,0	20,35
65	0,5	0,0102	0,0101	0,9899	893,0	88241,0	87794,0	1725192,0	19,55
66	0,5	0,011	0,0109	0,9891	954,0	87348,0	86871,0	1637398,0	18,75
67	0,5	0,0103	0,0102	0,9898	882,0	86394,0	85953,0	1550526,0	17,95
68	0,5	0,0111	0,011	0,989	945,0	85512,0	85040,0	1464574,0	17,13
69	0,5	0,014	0,0139	0,9861	1174,0	84567,0	83980,0	1379534,0	16,31
70	0,5	0,0157	0,0155	0,9845	1295,0	83393,0	82746,0	1295554,0	15,54
71	0,5	0,0169	0,0168	0,9832	1380,0	82098,0	81408,0	1212808,0	14,77
72	0,5	0,0185	0,0184	0,9816	1483,0	80718,0	79976,0	1131400,0	14,02
73	0,5	0,0206	0,0204	0,9796	1619,0	79235,0	78426,0	1051424,0	13,27
74	0,5	0,0233	0,023	0,977	1789,0	77616,0	76722,0	972998,0	12,54
75	0,5	0,0281	0,0277	0,9723	2104,0	75827,0	74775,0	896277,0	11,82
76	0,5	0,0319	0,0314	0,9686	2316,0	73723,0	72565,0	821502,0	11,14
77	0,5	0,0341	0,0335	0,9665	2394,0	71407,0	70210,0	748937,0	10,49
78	0,5	0,038	0,0373	0,9627	2576,0	69013,0	67725,0	678727,0	9,83
79	0,5	0,0458	0,0448	0,9552	2975,0	66437,0	64950,0	611002,0	9,20
80	0,5	0,0537	0,0523	0,9477	3318,0	63462,0	61803,0	546052,0	8,60
81	0,5	0,0595	0,0578	0,9422	3476,0	60144,0	58406,0	484250,0	8,05
82	0,5	0,0694	0,0671	0,9329	3802,0	56668,0	54767,0	425844,0	7,51
83	0,5	0,0777	0,0748	0,9252	3953,0	52866,0	50890,0	371076,0	7,02
84	0,5	0,0917	0,0876	0,9124	4287,0	48913,0	46770,0	320187,0	6,55
85	0,5	0,104	0,0989	0,9011	4412,0	44626,0	42420,0	273418,0	6,13

Age	${}_n a_x$	${}_n m_x$	${}_n q_x$	${}_n p_x$	${}_n d_x$	$L_x$	${}_n L_x$	$T_x$	$e_x$
86	0,5	0,1093	0,1036	0,8964	4168,0	40214,0	38130,0	230998,0	5,74
87	0,5	0,1201	0,1133	0,8867	4084,0	36046,0	34004,0	192868,0	5,35
88	0,5	0,1346	0,1261	0,8739	4032,0	31962,0	29946,0	158864,0	4,97
89	0,5	0,1494	0,139	0,861	3881,0	27930,0	25990,0	128918,0	4,62
90	0,5	0,1815	0,1664	0,8336	4003,0	24049,0	22048,0	102928,0	4,28
91	0,5	0,1699	0,1566	0,8434	3139,0	20046,0	18476,0	80880,0	4,03
92	0,5	0,2197	0,198	0,802	3347,0	16907,0	15234,0	62404,0	3,69
93	0,5	0,2224	0,2001	0,7999	2714,0	13560,0	12203,0	47170,0	3,48
94	0,5	0,2446	0,218	0,782	2364,0	10846,0	9664,0	34968,0	3,22
95	0,5	0,2999	0,2608	0,7392	2212,0	8482,0	7376,0	25304,0	2,98
96	0,5	0,298	0,2593	0,7407	1626,0	6270,0	5457,0	17928,0	2,86
97	0,5	0,3248	0,2794	0,7206	1298,0	4644,0	3995,0	12470,0	2,69
98	0,5	0,3582	0,3038	0,6962	1016,0	3346,0	2838,0	8476,0	2,53
99	0,5	0,3665	0,3098	0,6902	722,0	2330,0	1969,0	5638,0	2,42
100	0,5	0,3817	0,3205	0,6795	515,0	1608,0	1350,0	3668,0	2,28
101	0,5	0,4161	0,3444	0,6556	377,0	1093,0	904,0	2318,0	2,12
102	0,5	0,4527	0,3691	0,6309	264,0	716,0	584,0	1414,0	1,97
103	0,5	0,4877	0,3921	0,6079	177,0	452,0	364,0	830,0	1,84
104	0,5	0,5258	0,4164	0,5836	115,0	275,0	218,0	466,0	1,69
105	0,5	0,5709	0,4441	0,5559	71,0	160,0	124,0	248,0	1,55
106	0,5	0,6308	0,4795	0,5205	43,0	89,0	68,0	124,0	1,39
107	0,5	0,7067	0,5222	0,4778	24,0	46,0	34,0	56,0	1,23
108	0,5	0,7983	0,5706	0,4294	12,0	22,0	16,0	22,0	1,02

**2) Πίνακας Επιβίωσης για την Ελλάδα το 2010 με το μοντέλο θνησιμότητας Gompertz**

Age	$n\bar{a}_x$	$n\bar{m}_x$	$nq_x$	$n\rho_x$	$nd_x$	$L_x$	$nL_x$	$T_x$	$e_x$
0	0,09	0,0025	0,0024	0,9976	245,0	100000,0	99777,0	8066983,0	80,67
1	0,43	0,0003	0,0003	0,9997	34,0	99755,0	99736,0	7967206,0	79,87
2	0,45	0,0001	0,0001	0,9999	12,0	99721,0	99714,0	7867470,0	78,89
3	0,47	0,0001	0,0001	0,9999	10,0	99709,0	99704,0	7767756,0	77,90
4	0,49	0,0001	0,0001	0,9999	11,0	99699,0	99693,0	7668052,0	76,91
5	0,5	0,0001	0,0001	0,9999	10,0	99688,0	99683,0	7568358,0	75,92
6	0,5	0,0001	0,0001	0,9999	10,0	99678,0	99673,0	7468676,0	74,93
7	0,5	0,0001	0,0001	0,9999	8,0	99668,0	99664,0	7369002,0	73,94
8	0,5	0,0001	0,0001	0,9999	7,0	99660,0	99656,0	7269338,0	72,94
9	0,5	0,0001	0,0001	0,9999	7,0	99653,0	99650,0	7169682,0	71,95
10	0,5	0,0001	0,0001	0,9999	7,0	99646,0	99642,0	7070032,0	70,95
11	0,5	0,0001	0,0001	0,9999	8,0	99639,0	99635,0	6970390,0	69,96
12	0,5	0,0001	0,0001	0,9999	9,0	99631,0	99626,0	6870755,0	68,96
13	0,5	0,0001	0,0001	0,9999	12,0	99622,0	99616,0	6771128,0	67,97
14	0,5	0,0001	0,0001	0,9999	13,0	99610,0	99604,0	6671512,0	66,98
15	0,5	0,0002	0,0002	0,9998	17,0	99597,0	99588,0	6571909,0	65,99
16	0,5	0,0002	0,0002	0,9998	19,0	99580,0	99570,0	6472320,0	65,00
17	0,5	0,0002	0,0002	0,9998	24,0	99561,0	99549,0	6372750,0	64,01
18	0,5	0,0003	0,0003	0,9997	28,0	99537,0	99523,0	6273201,0	63,02
19	0,5	0,0003	0,0003	0,9997	33,0	99509,0	99492,0	6173678,0	62,04
20	0,5	0,0004	0,0004	0,9996	39,0	99476,0	99456,0	6074186,0	61,06
21	0,5	0,0005	0,0005	0,9995	45,0	99437,0	99414,0	5974729,0	60,09
22	0,5	0,0005	0,0005	0,9995	50,0	99392,0	99367,0	5875314,0	59,11
23	0,5	0,0006	0,0006	0,9994	56,0	99342,0	99314,0	5775948,0	58,14
24	0,5	0,0006	0,0006	0,9994	59,0	99286,0	99256,0	5676634,0	57,17
25	0,5	0,0006	0,0006	0,9994	60,0	99227,0	99197,0	5577377,0	56,21
26	0,5	0,0006	0,0006	0,9994	59,0	99167,0	99138,0	5478180,0	55,24
27	0,5	0,0005	0,0005	0,9995	53,0	99108,0	99082,0	5379042,0	54,27
28	0,5	0,0005	0,0005	0,9995	46,0	99055,0	99032,0	5279961,0	53,30
29	0,5	0,0004	0,0004	0,9996	41,0	99009,0	98988,0	5180929,0	52,33
30	0,5	0,0004	0,0004	0,9996	36,0	98968,0	98950,0	5081940,0	51,35
31	0,5	0,0004	0,0004	0,9996	34,0	98932,0	98915,0	4982990,0	50,37
32	0,5	0,0004	0,0004	0,9996	37,0	98898,0	98880,0	4884076,0	49,38
33	0,5	0,0004	0,0004	0,9996	41,0	98861,0	98840,0	4785196,0	48,4
34	0,5	0,0005	0,0005	0,9995	44,0	98820,0	98798,0	4686356,0	47,42
35	0,5	0,0005	0,0005	0,9995	50,0	98776,0	98751,0	4587558,0	46,44
36	0,5	0,0006	0,0006	0,9994	55,0	98726,0	98698,0	4488806,0	45,47
37	0,5	0,0006	0,0006	0,9994	61,0	98671,0	98640,0	4390108,0	44,49
38	0,5	0,0007	0,0007	0,9993	68,0	98610,0	98576,0	4291468,0	43,52
39	0,5	0,0008	0,0008	0,9992	75,0	98542,0	98504,0	4192892,0	42,55
40	0,5	0,0008	0,0008	0,9992	83,0	98467,0	98426,0	4094387,0	41,58
41	0,5	0,0009	0,0009	0,9991	92,0	98384,0	98338,0	3995962,0	40,62

Age	$n a_x$	$n m_x$	$n q_x$	$n p_x$	$n d_x$	$L_x$	$n L_x$	$T_x$	$e_x$
42	0,5	0,001	0,001	0,999	103,0	98292,0	98240,0	3897624,0	39,65
43	0,5	0,0012	0,0012	0,9988	113,0	98189,0	98132,0	3799383,0	38,69
44	0,5	0,0013	0,0013	0,9987	126,0	98076,0	98013,0	3701250,0	37,74
45	0,5	0,0014	0,0014	0,9986	139,0	97950,0	97880,0	3603238,0	36,79
46	0,5	0,0016	0,0016	0,9984	154,0	97811,0	97734,0	3505357,0	35,84
47	0,5	0,0018	0,0018	0,9982	171,0	97657,0	97572,0	3407623,0	34,89
48	0,5	0,0019	0,0019	0,9981	190,0	97486,0	97391,0	3310052,0	33,95
49	0,5	0,0022	0,0022	0,9978	210,0	97296,0	97191,0	3212660,0	33,02
50	0,5	0,0024	0,0024	0,9976	232,0	97086,0	96970,0	3115470,0	32,09
51	0,5	0,0027	0,0027	0,9973	257,0	96854,0	96726,0	3018500,0	31,17
52	0,5	0,0029	0,0029	0,9971	284,0	96597,0	96455,0	2921774,0	30,25
53	0,5	0,0033	0,0033	0,9967	315,0	96313,0	96156,0	2825319,0	29,33
54	0,5	0,0036	0,0036	0,9964	348,0	95998,0	95824,0	2729164,0	28,43
55	0,5	0,004	0,004	0,996	385,0	95650,0	95458,0	2633340,0	27,53
56	0,5	0,0045	0,0045	0,9955	425,0	95265,0	95052,0	2537882,0	26,64
57	0,5	0,005	0,005	0,995	469,0	94840,0	94606,0	2442830,0	25,76
58	0,5	0,0055	0,0055	0,9945	519,0	94371,0	94112,0	2348224,0	24,88
59	0,5	0,0061	0,0061	0,9939	572,0	93852,0	93566,0	2254112,0	24,02
60	0,5	0,0068	0,0068	0,9932	630,0	93280,0	92965,0	2160546,0	23,16
61	0,5	0,0075	0,0075	0,9925	695,0	92650,0	92302,0	2067582,0	22,32
62	0,5	0,0084	0,0083	0,9917	765,0	91955,0	91572,0	1975279,0	21,48
63	0,5	0,0093	0,0092	0,9908	841,0	91190,0	90770,0	1883706,0	20,66
64	0,5	0,0103	0,0102	0,9898	925,0	90349,0	89886,0	1792937,0	19,84
65	0,5	0,0114	0,0113	0,9887	1015,0	89424,0	88916,0	1703050,0	19,04
66	0,5	0,0127	0,0126	0,9874	1112,0	88409,0	87853,0	1614134,0	18,26
67	0,5	0,0141	0,014	0,986	1219,0	87297,0	86688,0	1526281,0	17,48
68	0,5	0,0156	0,0155	0,9845	1332,0	86078,0	85412,0	1439594,0	16,72
69	0,5	0,0173	0,0172	0,9828	1455,0	84746,0	84018,0	1354182,0	15,98
70	0,5	0,0192	0,019	0,981	1584,0	83291,0	82499,0	1270163,0	15,25
71	0,5	0,0213	0,0211	0,9789	1724,0	81707,0	80845,0	1187664,0	14,54
72	0,5	0,0237	0,0234	0,9766	1869,0	79983,0	79048,0	1106819,0	13,84
73	0,5	0,0262	0,0259	0,9741	2024,0	78114,0	77102,0	1027770,0	13,16
74	0,5	0,0291	0,0287	0,9713	2185,0	76090,0	74998,0	950668,0	12,49
75	0,5	0,0323	0,0318	0,9682	2351,0	73905,0	72730,0	875671,0	11,85
76	0,5	0,0359	0,0352	0,9648	2522,0	71554,0	70293,0	802942,0	11,22
77	0,5	0,0398	0,039	0,961	2694,0	69032,0	67685,0	732648,0	10,61
78	0,5	0,0442	0,0432	0,9568	2867,0	66338,0	64904,0	664964,0	10,02
79	0,5	0,049	0,0478	0,9522	3037,0	63471,0	61952,0	600059,0	9,45
80	0,5	0,0544	0,053	0,947	3201,0	60434,0	58834,0	538106,0	8,90
81	0,5	0,0604	0,0586	0,9414	3354,0	57233,0	55556,0	479273,0	8,37
82	0,5	0,067	0,0648	0,9352	3492,0	53879,0	52133,0	423717,0	7,86
83	0,5	0,0743	0,0717	0,9283	3612,0	50387,0	48581,0	371584,0	7,37
84	0,5	0,0825	0,0792	0,9208	3706,0	46775,0	44922,0	323003,0	6,91
85	0,5	0,0915	0,0875	0,9125	3770,0	43069,0	41184,0	278081,0	6,46
86	0,5	0,1016	0,0967	0,9033	3799,0	39299,0	37400,0	236897,0	6,03

Age	$n a_x$	$n m_x$	$n q_x$	$n p_x$	$n d_x$	$l_x$	$n L_x$	$T_x$	$e_x$
87	0,5	0,1127	0,1067	0,8933	3789,0	35500,0	33606,0	199498,0	5,62
88	0,5	0,1251	0,1177	0,8823	3734,0	31711,0	29844,0	165892,0	5,23
89	0,5	0,1388	0,1298	0,8702	3632,0	27977,0	26161,0	136048,0	4,86
90	0,5	0,1541	0,143	0,857	3482,0	24345,0	22604,0	109887,0	4,51
91	0,5	0,171	0,1575	0,8425	3286,0	20863,0	19220,0	87283,0	4,18
92	0,5	0,1897	0,1733	0,8267	3046,0	17577,0	16054,0	68063,0	3,87
93	0,5	0,2105	0,1905	0,8095	2768,0	14531,0	13147,0	52009,0	3,58
94	0,5	0,2336	0,2092	0,7908	2461,0	11763,0	10532,0	38862,0	3,30
95	0,5	0,2593	0,2295	0,7705	2135,0	9302,0	8234,0	28330,0	3,05
96	0,5	0,2877	0,2515	0,7485	1802,0	7167,0	6266,0	20095,0	2,80
97	0,5	0,3193	0,2753	0,7247	1477,0	5365,0	4626,0	13829,0	2,58
98	0,5	0,3543	0,301	0,699	1171,0	3888,0	3302,0	9202,0	2,37
99	0,5	0,3932	0,3286	0,6714	892,0	2717,0	2271,0	5900,0	2,17
100	0,5	0,4363	0,3582	0,6418	654,0	1825,0	1498,0	3629,0	1,99
101	0,5	0,4842	0,3898	0,6102	456,0	1171,0	943,0	2131,0	1,82
102	0,5	0,5373	0,4235	0,5765	303,0	715,0	564,0	1188,0	1,66
103	0,5	0,5963	0,4593	0,5407	189,0	412,0	318,0	624,0	1,52
104	0,5	0,6617	0,4972	0,5028	111,0	223,0	168,0	307,0	1,38
105	0,5	0,7343	0,5371	0,4629	60,0	112,0	82,0	140,0	1,25
106	0,5	0,8148	0,5789	0,4211	30,0	52,0	37,0	58,0	1,11
107	0,5	0,9042	0,6227	0,3773	14,0	22,0	15,0	20,0	0,93
108	0,5	1,0034	0,6682	0,3318	5,0	8,0	6,0	6,0	0,69

### 3) Πίνακας Επιβίωσης για την Ελλάδα το 2010 με συναρτήσεις μετατροπής

Age	$n a_x$	$n m_x$	$n q_x$	$n p_x$	$n d_x$	$L_x$	$n L_x$	$T_x$	$e_x$	$u^x$	$D_x$	$N_x$
0	0,09	0,0038	0,0038	0,9962	382,0	100000,0	99652,0	8052383,0	80,52	1,000	100000,00	2460033,56
1	0,43	0,0003	0,0003	0,9997	28,0	99618,0	99602,0	7952730,0	79,83	0,962	95786,54	2360033,56
2	0,45	0,0002	0,0002	0,9998	15,0	99590,0	99582,0	7853128,0	78,85	0,925	92076,55	2264247,02
3	0,47	0,0001	0,0001	0,9999	10,0	99575,0	99570,0	7753547,0	77,87	0,889	88521,81	2172170,47
4	0,49	0,0002	0,0002	0,9998	16,0	99565,0	99557,0	7653977,0	76,87	0,855	85108,58	2083648,65
5	0,5	0,0001	0,0001	0,9999	14,0	99549,0	99542,0	7554420,0	75,89	0,822	81822,02	1998540,07
6	0,5	0,0001	0,0001	0,9999	12,0	99535,0	99529,0	7454878,0	74,90	0,790	78663,96	1916718,05
7	0,5	0,0001	0,0001	0,9999	11,0	99523,0	99518,0	7355349,0	73,91	0,760	75629,30	1838054,10
8	0,5	0,0001	0,0001	0,9999	7,0	99512,0	99508,0	7255832,0	72,91	0,731	72712,44	1762424,80
9	0,5	0,0001	0,0001	0,9999	9,0	99505,0	99500,0	7156323,0	71,92	0,703	69910,89	1689712,35
10	0,5	0,0001	0,0001	0,9999	13,0	99496,0	99490,0	7056822,0	70,93	0,676	67215,93	1619801,46
11	0,5	0,0001	0,0001	0,9999	6,0	99483,0	99480,0	6957333,0	69,93	0,650	64622,26	1552585,53
12	0,5	0,0001	0,0001	0,9999	11,0	99477,0	99472,0	6857853,0	68,94	0,625	62133,04	1487963,27
13	0,5	0,0001	0,0001	0,9999	13,0	99466,0	99460,0	6758382,0	67,95	0,601	59736,70	1425830,23
14	0,5	0,0001	0,0001	0,9999	12,0	99453,0	99447,0	6658922,0	66,96	0,577	57431,63	1366093,52
15	0,5	0,0002	0,0002	0,9998	20,0	99441,0	99431,0	6559475,0	65,96	0,555	55216,06	1308661,89
16	0,5	0,0004	0,0004	0,9996	40,0	99421,0	99401,0	6460044,0	64,98	0,534	53081,68	1253445,84
17	0,5	0,0004	0,0004	0,9996	38,0	99381,0	99362,0	6360643,0	64,00	0,513	51019,55	1200364,15
18	0,5	0,0005	0,0005	0,9995	45,0	99343,0	99320,0	6261281,0	63,03	0,494	49038,50	1149344,61
19	0,5	0,0005	0,0005	0,9995	49,0	99298,0	99274,0	6161960,0	62,06	0,475	47131,04	1100306,11
20	0,5	0,0006	0,0006	0,9994	58,0	99249,0	99220,0	6062687,0	61,09	0,456	45295,95	1053175,06
21	0,5	0,0006	0,0006	0,9994	59,0	99191,0	99162,0	5963467,0	60,12	0,439	43528,34	1007879,12
22	0,5	0,0005	0,0005	0,9995	47,0	99132,0	99108,0	5864306,0	59,16	0,422	41829,28	964350,77
23	0,5	0,0006	0,0006	0,9994	57,0	99085,0	99056,0	5765197,0	58,18	0,406	40201,39	922521,49
24	0,5	0,0006	0,0006	0,9994	63,0	99028,0	98996,0	5666140,0	57,22	0,390	38632,95	882320,10
25	0,5	0,0006	0,0006	0,9994	55,0	98965,0	98938,0	5567144,0	56,25	0,375	37123,43	843687,15
26	0,5	0,0007	0,0007	0,9993	67,0	98910,0	98876,0	5468206,0	55,28	0,361	35675,77	806563,71
27	0,5	0,0007	0,0007	0,9993	66,0	98843,0	98810,0	5369330,0	54,32	0,347	34280,39	770887,94
28	0,5	0,0006	0,0006	0,9994	62,0	98777,0	98746,0	5270520,0	53,36	0,333	32939,90	736607,55
29	0,5	0,0007	0,0007	0,9993	72,0	98715,0	98679,0	5171774,0	52,39	0,321	31653,10	703667,65
30	0,5	0,0007	0,0007	0,9993	69,0	98643,0	98608,0	5073095,0	51,43	0,308	30413,48	672014,54
31	0,5	0,0007	0,0007	0,9993	72,0	98574,0	98538,0	4974486,0	50,46	0,296	29223,27	641601,06
32	0,5	0,0007	0,0007	0,9993	70,0	98502,0	98467,0	4875948,0	49,5	0,285	28078,78	612377,79
33	0,5	0,0007	0,0007	0,9993	72,0	98432,0	98396,0	4777482,0	48,54	0,274	26979,64	584299,01
34	0,5	0,0008	0,0008	0,9992	79,0	98360,0	98320,0	4679086,0	47,57	0,264	25922,98	557319,38
35	0,5	0,0009	0,0009	0,9991	84,0	98281,0	98239,0	4580765,0	46,61	0,253	24905,93	531396,39
36	0,5	0,0008	0,0008	0,9992	76,0	98197,0	98159,0	4482526,0	45,65	0,244	23927,54	506490,47
37	0,5	0,0008	0,0008	0,9992	78,0	98121,0	98082,0	4384367,0	44,68	0,234	22989,44	482562,93
38	0,5	0,001	0,001	0,999	101,0	98043,0	97992,0	4286285,0	43,72	0,225	22087,66	459573,49
39	0,5	0,001	0,001	0,999	96,0	97942,0	97894,0	4188292,0	42,76	0,217	21216,26	437485,83
40	0,5	0,0011	0,0011	0,9989	108,0	97846,0	97792,0	4090398,0	41,80	0,208	20380,25	416269,57
41	0,5	0,0012	0,0012	0,9988	121,0	97738,0	97678,0	3992606,0	40,85	0,200	19574,76	395889,32
42	0,5	0,0013	0,0013	0,9987	129,0	97617,0	97552,0	3894929,0	39,90	0,193	18798,59	376314,56



Age	$n a_x$	$n m_x$	$n q_x$	$n p_x$	$n d_x$	$L_x$	$n L_x$	$T_x$	$e_x$	$u^x$	$D_x$	$N_x$
43	0,5	0,0014	0,0014	0,9986	139,0	97488,0	97418,0	3797376,0	38,95	0,185	18051,68	357515,97
44	0,5	0,0017	0,0017	0,9983	167,0	97349,0	97266,0	3699958,0	38,01	0,178	17332,63	339464,29
45	0,5	0,0018	0,0018	0,9982	172,0	97182,0	97096,0	3602692,0	37,07	0,171	16637,40	322131,66
46	0,5	0,002	0,002	0,998	193,0	97010,0	96914,0	3505596,0	36,14	0,165	15969,19	305494,26
47	0,5	0,0022	0,0022	0,9978	211,0	96817,0	96712,0	3408683,0	35,21	0,158	15324,44	289525,07
48	0,5	0,0023	0,0023	0,9977	221,0	96606,0	96496,0	3311972,0	34,28	0,152	14702,93	274200,62
49	0,5	0,0027	0,0027	0,9973	256,0	96385,0	96257,0	3215476,0	33,36	0,146	14105,09	259497,70
50	0,5	0,0028	0,0028	0,9972	270,0	96129,0	95994,0	3119219,0	32,45	0,141	13526,56	245392,61
51	0,5	0,0032	0,0032	0,9968	307,0	95859,0	95706,0	3023225,0	31,54	0,135	12969,78	231866,04
52	0,5	0,0037	0,0037	0,9963	353,0	95552,0	95376,0	2927520,0	30,64	0,130	12431,00	218896,27
53	0,5	0,0037	0,0037	0,9963	356,0	95199,0	95021,0	2832144,0	29,75	0,125	11908,73	206465,26
54	0,5	0,0041	0,0041	0,9959	391,0	94843,0	94648,0	2737123,0	28,86	0,120	11407,88	194556,53
55	0,5	0,0046	0,0046	0,9954	432,0	94452,0	94236,0	2642476,0	27,98	0,116	10923,89	183148,65
56	0,5	0,005	0,005	0,995	470,0	94020,0	93785,0	2548240,0	27,10	0,111	10455,70	172224,76
57	0,5	0,0057	0,0057	0,9943	528,0	93550,0	93286,0	2454454,0	26,24	0,107	10003,30	161769,06
58	0,5	0,006	0,006	0,994	558,0	93022,0	92743,0	2361168,0	25,38	0,103	9564,27	151765,75
59	0,5	0,0062	0,0062	0,9938	570,0	92464,0	92179,0	2268426,0	24,53	0,099	9141,25	142201,48
60	0,5	0,007	0,0069	0,9931	637,0	91894,0	91576,0	2176246,0	23,68	0,095	8735,48	133060,23
61	0,5	0,0066	0,0066	0,9934	598,0	91257,0	90958,0	2084671,0	22,84	0,091	8341,28	124324,75
62	0,5	0,0082	0,0082	0,9918	742,0	90659,0	90288,0	1993713,0	21,99	0,088	7967,90	115983,47
63	0,5	0,0085	0,0085	0,9915	763,0	89917,0	89536,0	1903425,0	21,17	0,085	7598,74	108015,57
64	0,5	0,0103	0,0102	0,9898	913,0	89154,0	88698,0	1813890,0	20,35	0,081	7244,48	100416,83
65	0,5	0,0102	0,0101	0,9899	893,0	88241,0	87794,0	1725192,0	19,55	0,078	6894,51	93172,36
66	0,5	0,011	0,0109	0,9891	954,0	87348,0	86871,0	1637398,0	18,75	0,075	6562,25	86277,85
67	0,5	0,0103	0,0102	0,9898	882,0	86394,0	85953,0	1550526,0	17,95	0,072	6240,94	79715,60
68	0,5	0,0111	0,011	0,989	945,0	85512,0	85040,0	1464574,0	17,13	0,069	5939,64	73474,66
69	0,5	0,014	0,0139	0,9861	1174,0	84567,0	83980,0	1379534,0	16,31	0,067	5648,08	67535,02
70	0,5	0,0157	0,0155	0,9845	1295,0	83393,0	82746,0	1295554,0	15,54	0,064	5355,45	61886,95
71	0,5	0,0169	0,0168	0,9832	1380,0	82098,0	81408,0	1212808,0	14,77	0,062	5069,50	56531,50
72	0,5	0,0185	0,0184	0,9816	1483,0	80718,0	79976,0	1131400,0	14,02	0,059	4792,59	51461,99
73	0,5	0,0206	0,0204	0,9796	1619,0	79235,0	78426,0	1051424,0	13,27	0,057	4523,59	46669,41
74	0,5	0,0233	0,023	0,977	1789,0	77616,0	76722,0	972998,0	12,54	0,055	4260,73	42145,82
75	0,5	0,0281	0,0277	0,9723	2104,0	75827,0	74775,0	896277,0	11,82	0,053	4002,43	37885,09
76	0,5	0,0319	0,0314	0,9686	2316,0	73723,0	72565,0	821502,0	11,14	0,051	3741,70	33882,66
77	0,5	0,0341	0,0335	0,9665	2394,0	71407,0	70210,0	748937,0	10,49	0,049	3484,77	30140,96
78	0,5	0,038	0,0373	0,9627	2576,0	69013,0	67725,0	678727,0	9,83	0,047	3238,40	26656,19
79	0,5	0,0458	0,0448	0,9552	2975,0	66437,0	64950,0	611002,0	9,20	0,045	2997,62	23417,79
80	0,5	0,0537	0,0523	0,9477	3318,0	63462,0	61803,0	546052,0	8,60	0,043	2753,26	20420,17
81	0,5	0,0595	0,0578	0,9422	3476,0	60144,0	58406,0	484250,0	8,05	0,042	2508,95	17666,92
82	0,5	0,0694	0,0671	0,9329	3802,0	56668,0	54767,0	425844,0	7,51	0,040	2273,02	15157,97
83	0,5	0,0777	0,0748	0,9252	3953,0	52866,0	50890,0	371076,0	7,02	0,039	2038,96	12884,94
84	0,5	0,0917	0,0876	0,9124	4287,0	48913,0	46770,0	320187,0	6,55	0,037	1813,94	10845,98
85	0,5	0,104	0,0989	0,9011	4412,0	44626,0	42420,0	273418,0	6,13	0,036	1591,31	9032,04
86	0,5	0,1093	0,1036	0,8964	4168,0	40214,0	38130,0	230998,0	5,74	0,034	1378,83	7440,73
87	0,5	0,1201	0,1133	0,8867	4084,0	36046,0	34004,0	192868,0	5,35	0,033	1188,38	6061,90

Age	${}_n a_x$	${}_n m_x$	${}_n q_x$	${}_n p_x$	${}_n d_x$	$L_x$	${}_n L_x$	$T_x$	$e_x$	$u^x$	$D_x$	$N_x$
88	0,5	0,1346	0,1261	0,8739	4032,0	31962,0	29946,0	158864,0	4,97	0,032	1013,21	4873,52
89	0,5	0,1494	0,139	0,861	3881,0	27930,0	25990,0	128918,0	4,62	0,030	851,34	3860,31
90	0,5	0,1815	0,1664	0,8336	4003,0	24049,0	22048,0	102928,0	4,28	0,029	704,85	3008,97
91	0,5	0,1699	0,1566	0,8434	3139,0	20046,0	18476,0	80880,0	4,03	0,028	564,93	2304,12
92	0,5	0,2197	0,198	0,802	3347,0	16907,0	15234,0	62404,0	3,69	0,027	458,14	1739,19
93	0,5	0,2224	0,2001	0,7999	2714,0	13560,0	12203,0	47170,0	3,48	0,026	353,31	1281,05
94	0,5	0,2446	0,218	0,782	2364,0	10846,0	9664,0	34968,0	3,22	0,025	271,73	927,73
95	0,5	0,2999	0,2608	0,7392	2212,0	8482,0	7376,0	25304,0	2,98	0,024	204,33	656,00
96	0,5	0,298	0,2593	0,7407	1626,0	6270,0	5457,0	17928,0	2,86	0,023	145,23	451,68
97	0,5	0,3248	0,2794	0,7206	1298,0	4644,0	3995,0	12470,0	2,69	0,022	103,43	306,44
98	0,5	0,3582	0,3038	0,6962	1016,0	3346,0	2838,0	8476,0	2,53	0,021	71,66	203,01
99	0,5	0,3665	0,3098	0,6902	722,0	2330,0	1969,0	5638,0	2,42	0,021	47,98	131,35
100	0,5	0,3817	0,3205	0,6795	515,0	1608,0	1350,0	3668,0	2,28	0,020	31,84	83,37
101	0,5	0,4161	0,3444	0,6556	377,0	1093,0	904,0	2318,0	2,12	0,019	20,81	51,53
102	0,5	0,4527	0,3691	0,6309	264,0	716,0	584,0	1414,0	1,97	0,018	13,11	30,72
103	0,5	0,4877	0,3921	0,6079	177,0	452,0	364,0	830,0	1,84	0,018	7,96	17,62
104	0,5	0,5258	0,4164	0,5836	115,0	275,0	218,0	466,0	1,69	0,017	4,65	9,66
105	0,5	0,5709	0,4441	0,5559	71,0	160,0	124,0	248,0	1,55	0,016	2,60	5,01
106	0,5	0,6308	0,4795	0,5205	43,0	89,0	68,0	124,0	1,39	0,016	1,39	2,40
107	0,5	0,7067	0,5222	0,4778	24,0	46,0	34,0	56,0	1,23	0,015	0,69	1,01
108	0,5	0,7983	0,5706	0,4294	12,0	22,0	16,0	22,0	1,02	0,014	0,32	0,32

**4) Πίνακας Επιβίωσης για την Ελλάδα το 2010 με συναρτήσεις μετατροπής  
με το μοντέλο θνησιμότητας του Gompertz**

Age	$n a_x$	$n m_x$	$n q_x$	$n p_x$	$n d_x$	$L_x$	$n L_x$	$T_x$	$e_x$	$u^x$	$D_x$	$N_x$
0	0,09	0,0025	0,0024	0,9976	245,0	100000,0	99777,0	8066983,0	80,67	1,000	100000,00	2466476,11
1	0,43	0,0003	0,0003	0,9997	34,0	99755,0	99736,0	7967206,0	79,87	0,962	95918,27	2366476,11
2	0,45	0,0001	0,0001	0,9999	12,0	99721,0	99714,0	7867470,0	78,89	0,925	92197,67	2270557,84
3	0,47	0,0001	0,0001	0,9999	10,0	99709,0	99704,0	7767756,0	77,90	0,889	88640,94	2178360,17
4	0,49	0,0001	0,0001	0,9999	11,0	99699,0	99693,0	7668052,0	76,91	0,855	85223,12	2089719,23
5	0,5	0,0001	0,0001	0,9999	10,0	99688,0	99683,0	7568358,0	75,92	0,822	81936,27	2004496,11
6	0,5	0,0001	0,0001	0,9999	10,0	99678,0	99673,0	7468676,0	74,93	0,790	78776,97	1922559,84
7	0,5	0,0001	0,0001	0,9999	8,0	99668,0	99664,0	7369002,0	73,94	0,760	75739,49	1843782,87
8	0,5	0,0001	0,0001	0,9999	7,0	99660,0	99656,0	7269338,0	72,94	0,731	72820,59	1768043,38
9	0,5	0,0001	0,0001	0,9999	7,0	99653,0	99650,0	7169682,0	71,95	0,703	70014,88	1695222,80
10	0,5	0,0001	0,0001	0,9999	7,0	99646,0	99642,0	7070032,0	70,95	0,676	67317,27	1625207,92
11	0,5	0,0001	0,0001	0,9999	8,0	99639,0	99635,0	6970390,0	69,96	0,650	64723,59	1557890,65
12	0,5	0,0001	0,0001	0,9999	9,0	99631,0	99626,0	6870755,0	68,96	0,625	62229,23	1493167,06
13	0,5	0,0001	0,0001	0,9999	12,0	99622,0	99616,0	6771128,0	67,97	0,601	59830,39	1430937,83
14	0,5	0,0001	0,0001	0,9999	13,0	99610,0	99604,0	6671512,0	66,98	0,577	57522,29	1371107,44
15	0,5	0,0002	0,0002	0,9998	17,0	99597,0	99588,0	6571909,0	65,99	0,555	55302,68	1313585,15
16	0,5	0,0002	0,0002	0,9998	19,0	99580,0	99570,0	6472320,0	65,00	0,534	53166,58	1258282,47
17	0,5	0,0002	0,0002	0,9998	24,0	99561,0	99549,0	6372750,0	64,01	0,513	51111,95	1205115,89
18	0,5	0,0003	0,0003	0,9997	28,0	99537,0	99523,0	6273201,0	63,02	0,494	49134,26	1154003,94
19	0,5	0,0003	0,0003	0,9997	33,0	99509,0	99492,0	6173678,0	62,04	0,475	47231,19	1104869,67
20	0,5	0,0004	0,0004	0,9996	39,0	99476,0	99456,0	6074186,0	61,06	0,456	45399,55	1057638,48
21	0,5	0,0005	0,0005	0,9995	45,0	99437,0	99414,0	5974729,0	60,09	0,439	43636,30	1012238,93
22	0,5	0,0005	0,0005	0,9995	50,0	99392,0	99367,0	5875314,0	59,11	0,422	41938,99	968602,64
23	0,5	0,0006	0,0006	0,9994	56,0	99342,0	99314,0	5775948,0	58,14	0,406	40305,67	926663,65
24	0,5	0,0006	0,0006	0,9994	59,0	99286,0	99256,0	5676634,0	57,17	0,390	38733,60	886357,98
25	0,5	0,0006	0,0006	0,9994	60,0	99227,0	99197,0	5577377,0	56,21	0,375	37221,71	847624,38
26	0,5	0,0006	0,0006	0,9994	59,0	99167,0	99138,0	5478180,0	55,24	0,361	35768,47	810402,67
27	0,5	0,0005	0,0005	0,9995	53,0	99108,0	99082,0	5379042,0	54,27	0,347	34372,30	774634,20
28	0,5	0,0005	0,0005	0,9995	46,0	99055,0	99032,0	5279961,0	53,3	0,333	33032,61	740261,90
29	0,5	0,0004	0,0004	0,9996	41,0	99009,0	98988,0	5180929,0	52,33	0,321	31747,38	707229,29
30	0,5	0,0004	0,0004	0,9996	36,0	98968,0	98950,0	5081940,0	51,35	0,308	30513,68	675481,91
31	0,5	0,0004	0,0004	0,9996	34,0	98932,0	98915,0	4982990,0	50,37	0,296	29329,41	644968,23
32	0,5	0,0004	0,0004	0,9996	37,0	98898,0	98880,0	4884076,0	49,38	0,285	28191,66	615638,83
33	0,5	0,0004	0,0004	0,9996	41,0	98861,0	98840,0	4785196,0	48,40	0,274	27097,22	587447,17
34	0,5	0,0005	0,0005	0,9995	44,0	98820,0	98798,0	4686356,0	47,42	0,264	26044,22	560349,94
35	0,5	0,0005	0,0005	0,9995	50,0	98776,0	98751,0	4587558,0	46,44	0,253	25031,37	534305,72
36	0,5	0,0006	0,0006	0,9994	55,0	98726,0	98698,0	4488806,0	45,47	0,244	24056,44	509274,36
37	0,5	0,0006	0,0006	0,9994	61,0	98671,0	98640,0	4390108,0	44,49	0,234	23118,30	485217,92
38	0,5	0,0007	0,0007	0,9993	68,0	98610,0	98576,0	4291468,0	43,52	0,225	22215,40	462099,61
39	0,5	0,0008	0,0008	0,9992	75,0	98542,0	98504,0	4192892,0	42,55	0,217	21346,23	439884,22
40	0,5	0,0008	0,0008	0,9992	83,0	98467,0	98426,0	4094387,0	41,58	0,208	20509,60	418537,99
41	0,5	0,0009	0,0009	0,9991	92,0	98384,0	98338,0	3995962,0	40,62	0,200	19704,14	398028,39

Age	$n a_x$	$n m_x$	$n q_x$	$n p_x$	$n d_x$	$L_x$	$n L_x$	$T_x$	$e_x$	$u^x$	$D_x$	$N_x$
42	0,5	0,001	0,001	0,9990	103,0	98292,0	98240,0	3897624,0	39,65	0,193	18928,58	378324,25
43	0,5	0,0012	0,0012	0,9988	113,0	98189,0	98132,0	3799383,0	38,69	0,185	18181,48	359395,67
44	0,5	0,0013	0,0013	0,9987	126,0	98076,0	98013,0	3701250,0	37,74	0,178	17462,07	341214,19
45	0,5	0,0014	0,0014	0,9986	139,0	97950,0	97880,0	3603238,0	36,79	0,171	16768,88	323752,12
46	0,5	0,0016	0,0016	0,9984	154,0	97811,0	97734,0	3505357,0	35,84	0,165	16101,05	306983,24
47	0,5	0,0018	0,0018	0,9982	171,0	97657,0	97572,0	3407623,0	34,89	0,158	15457,40	290882,19
48	0,5	0,0019	0,0019	0,9981	190,0	97486,0	97391,0	3310052,0	33,95	0,152	14836,86	275424,79
49	0,5	0,0022	0,0022	0,9978	210,0	97296,0	97191,0	3212660,0	33,02	0,146	14238,41	260587,93
50	0,5	0,0024	0,0024	0,9976	232,0	97086,0	96970,0	3115470,0	32,09	0,141	13661,22	246349,53
51	0,5	0,0027	0,0027	0,9973	257,0	96854,0	96726,0	3018500,0	31,17	0,135	13104,40	232688,30
52	0,5	0,0029	0,0029	0,9971	284,0	96597,0	96455,0	2921774,0	30,25	0,130	12566,95	219583,90
53	0,5	0,0033	0,0033	0,9967	315,0	96313,0	96156,0	2825319,0	29,33	0,125	12048,08	207016,94
54	0,5	0,0036	0,0036	0,9964	348,0	95998,0	95824,0	2729164,0	28,43	0,120	11546,81	194968,86
55	0,5	0,004	0,004	0,9960	385,0	95650,0	95458,0	2633340,0	27,53	0,116	11062,45	183422,06
56	0,5	0,0045	0,0045	0,9955	425,0	95265,0	95052,0	2537882,0	26,64	0,111	10594,16	172359,61
57	0,5	0,005	0,005	0,9950	469,0	94840,0	94606,0	2442830,0	25,76	0,107	10141,24	161765,45
58	0,5	0,0055	0,0055	0,9945	519,0	94371,0	94112,0	2348224,0	24,88	0,103	9702,97	151624,21
59	0,5	0,0061	0,0061	0,9939	572,0	93852,0	93566,0	2254112,0	24,02	0,099	9278,47	141921,23
60	0,5	0,0068	0,0068	0,9932	630,0	93280,0	92965,0	2160546,0	23,16	0,095	8867,23	132642,76
61	0,5	0,0075	0,0075	0,9925	695,0	92650,0	92302,0	2067582,0	22,32	0,091	8468,60	123775,53
62	0,5	0,0084	0,0083	0,9917	765,0	91955,0	91572,0	1975279,0	21,48	0,088	8081,80	115306,92
63	0,5	0,0093	0,0092	0,9908	841,0	91190,0	90770,0	1883706,0	20,66	0,085	7706,32	107225,12
64	0,5	0,0103	0,0102	0,9898	925,0	90349,0	89886,0	1792937,0	19,84	0,081	7341,58	99518,80
65	0,5	0,0114	0,0113	0,9887	1015,0	89424,0	88916,0	1703050,0	19,04	0,078	6986,94	92177,22
66	0,5	0,0127	0,0126	0,9874	1112,0	88409,0	87853,0	1614134,0	18,26	0,075	6641,96	85190,28
67	0,5	0,0141	0,014	0,9860	1219,0	87297,0	86688,0	1526281,0	17,48	0,072	6306,17	78548,32
68	0,5	0,0156	0,0155	0,9845	1332,0	86078,0	85412,0	1439594,0	16,72	0,069	5978,95	72242,15
69	0,5	0,0173	0,0172	0,9828	1455,0	84746,0	84018,0	1354182,0	15,98	0,067	5660,03	66263,20
70	0,5	0,0192	0,019	0,9810	1584,0	83291,0	82499,0	1270163,0	15,25	0,064	5348,90	60603,17
71	0,5	0,0213	0,0211	0,9789	1724,0	81707,0	80845,0	1187664,0	14,54	0,062	5045,36	55254,27
72	0,5	0,0237	0,0234	0,9766	1869,0	79983,0	79048,0	1106819,0	13,84	0,059	4748,95	50208,91
73	0,5	0,0262	0,0259	0,9741	2024,0	78114,0	77102,0	1027770,0	13,16	0,057	4459,59	45459,97
74	0,5	0,0291	0,0287	0,9713	2185,0	76090,0	74998,0	950668,0	12,49	0,055	4176,96	41000,37
75	0,5	0,0323	0,0318	0,9682	2351,0	73905,0	72730,0	875671,0	11,85	0,053	3900,98	36823,41
76	0,5	0,0359	0,0352	0,9648	2522,0	71554,0	70293,0	802942,0	11,22	0,051	3631,62	32922,44
77	0,5	0,0398	0,039	0,9610	2694,0	69032,0	67685,0	732648,0	10,61	0,049	3368,86	29290,82
78	0,5	0,0442	0,0432	0,9568	2867,0	66338,0	64904,0	664964,0	10,02	0,047	3112,88	25921,96
79	0,5	0,049	0,0478	0,9522	3037,0	63471,0	61952,0	600059,0	9,45	0,045	2863,79	22809,08
80	0,5	0,0544	0,053	0,9470	3201,0	60434,0	58834,0	538106,0	8,90	0,043	2621,89	19945,29
81	0,5	0,0604	0,0586	0,9414	3354,0	57233,0	55556,0	479273,0	8,37	0,042	2387,51	17323,40
82	0,5	0,067	0,0648	0,9352	3492,0	53879,0	52133,0	423717,0	7,86	0,040	2161,15	14935,88
83	0,5	0,0743	0,0717	0,9283	3612,0	50387,0	48581,0	371584,0	7,37	0,039	1943,35	12774,73
84	0,5	0,0825	0,0792	0,9208	3706,0	46775,0	44922,0	323003,0	6,91	0,037	1734,66	10831,38
85	0,5	0,0915	0,0875	0,9125	3770,0	43069,0	41184,0	278081,0	6,46	0,036	1535,79	9096,72
86	0,5	0,1016	0,0967	0,9033	3799,0	39299,0	37400,0	236897,0	6,03	0,034	1347,46	7560,94

Age	${}_n a_x$	${}_n m_x$	${}_n q_x$	${}_n p_x$	${}_n d_x$	$L_x$	${}_n L_x$	$T_x$	$e_x$	$u^x$	$D_x$	$N_x$
87	0,5	0,1127	0,1067	0,8933	3789,0	35500,0	33606,0	199498,0	5,62	0,033	1170,38	6213,48
88	0,5	0,1251	0,1177	0,8823	3734,0	31711,0	29844,0	165892,0	5,23	0,032	1005,25	5043,10
89	0,5	0,1388	0,1298	0,8702	3632,0	27977,0	26161,0	136048,0	4,86	0,030	852,77	4037,84
90	0,5	0,1541	0,143	0,8570	3482,0	24345,0	22604,0	109887,0	4,51	0,029	713,53	3185,07
91	0,5	0,171	0,1575	0,8425	3286,0	20863,0	19220,0	87283,0	4,18	0,028	587,95	2471,54
92	0,5	0,1897	0,1733	0,8267	3046,0	17577,0	16054,0	68063,0	3,87	0,027	476,30	1883,59
93	0,5	0,2105	0,1905	0,8095	2768,0	14531,0	13147,0	52009,0	3,58	0,026	378,61	1407,29
94	0,5	0,2336	0,2092	0,7908	2461,0	11763,0	10532,0	38862,0	3,30	0,025	294,70	1028,68
95	0,5	0,2593	0,2295	0,7705	2135,0	9302,0	8234,0	28330,0	3,05	0,024	224,08	733,98
96	0,5	0,2877	0,2515	0,7485	1802,0	7167,0	6266,0	20095,0	2,80	0,023	166,01	509,90
97	0,5	0,3193	0,2753	0,7247	1477,0	5365,0	4626,0	13829,0	2,58	0,022	119,49	343,89
98	0,5	0,3543	0,301	0,6990	1171,0	3888,0	3302,0	9202,0	2,37	0,021	83,26	224,39
99	0,5	0,3932	0,3286	0,6714	892,0	2717,0	2271,0	5900,0	2,17	0,021	55,95	141,13
100	0,5	0,4363	0,3582	0,6418	654,0	1825,0	1498,0	3629,0	1,99	0,020	36,14	85,18
101	0,5	0,4842	0,3898	0,6102	456,0	1171,0	943,0	2131,0	1,82	0,019	22,29	49,05
102	0,5	0,5373	0,4235	0,5765	303,0	715,0	564,0	1188,0	1,66	0,018	13,09	26,75
103	0,5	0,5963	0,4593	0,5407	189,0	412,0	318,0	624,0	1,52	0,018	7,25	13,66
104	0,5	0,6617	0,4972	0,5028	111,0	223,0	168,0	307,0	1,38	0,017	3,77	6,41
105	0,5	0,7343	0,5371	0,4629	60,0	112,0	82,0	140,0	1,25	0,016	1,82	2,64
106	0,5	0,8148	0,5789	0,4211	30,0	52,0	37,0	58,0	1,11	0,016	0,81	0,81
106	0,5	0,8148	0,5789	0,4211	30,0	52,0	37,0	58,0	1,11	0,016	0,81	1,63
107	0,5	0,9042	0,6227	0,3773	14,0	22,0	15,0	20,0	0,93	0,015	0,33	1,96
108	0,5	10,034	0,6682	0,3318	5,0	8,0	6,0	6,0	0,69	0,014	0,12	2,07

## Βιβλιογραφία

### Ελληνική

- Ζυμπίδης, Αλέξανδρος, 2008, *Συνταξιοδοτικά Ταμεία και Αναλογιστικές Μελέτες*, Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών.
- Ματαλλιωτάκης, Γεώργιος, 2011, *Δυναμική μοντελοποίηση δεδομένων επιβίωσης και συγκριτική ανάλυση μεταξύ προκυπτόντων και σχετικών αιτιοκρατικών μοντέλων*, Πολυτεχνείο Κρήτης.
- Πιτσέλης, Γεώργιος, 2018, *Μαθηματικά των Συνταξιοδοτικών Ταμείων και Πίνακες Επιβίωσης – Θνησιμότητας*, Εκδόσεις Παπαζήση, Αθήνα.
- Χατζόπουλος, Πέτρος Φ., 2011, *Μαθηματικά Ασφαλίσεων Ζωής*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα.

### Ξένα

- Benjamin and Pollard, 1989, *The Analysis of Mortality and other Actuarial Statistics*, Heinemann.
- Booth, H., Tickle, L., 2008, *Mortality Modeling and Forecasting; A Review of Methods*, Ann. Actuar. Sci. 3, 3-43.
- Brass, W., Coale, A. J., 1968, *Methods of Analysis and Estimation in the Demography of Tropical Africa*, Edited by W. Brass et al. Princeton University Press, Princeton.
- Chiang, C.L., 1960, *A stochastic Study of the Life Table and its Applications: II. Sample Variance of the Observed Expectation of Life and other Biometric Functions*, Human biology, 32(3), 221-238.
- Coale, A.J., Demeny, P., Vaughan, B. 2013, *Regional Model Life Tables and Stable Populations: Studies in Population*, Elsevier.
- De Moivre, A., 1725, *Annuities on Lives*, London.
- Etikan, Í., Abubakar, S., Alkassim, R., 2017, *The Kaplan-Meier Estimate in Survival Analysis*, Biom. Biostatistics Int. J., 5(2), 00128.
- Etikan, Í., Abubakar, S., Alkassim, R., 2017, *A Review of Life Table Construction*, Biom. Biostatistics Int. J., 5(3), 00132.

- Gavrilov, L.A., Gavrilova, N.S., 1979, *Determination of Species Length of Life*, Dokl. Akad. Nauk SSSR Biol. Sci. 246, 905-908.
- Gavrilov, L.A., Gavrilova, N.S., 1991, *The Biology of Life Span: A Quantitative Approach*, Harwood Academic Publisher, New York.
- Gianasso, A., 2015, *A Brief History of Pensions*, Davidson Asset Management.
- Gompertz, B., 1825, *On the Nature of the Function Expressive of the Law of Human Mortality and on a New Mode of Determining the Value of Life Contingencies*, Philos. Trans. R. Soc. Lond. 115, 513-585.
- Gratton, L., Scott, A., 2016, *The 100-year Life: Living and Working in an Age of Longevity*, Bloomsbury Publishing.
- Halley, E., 1942, *An Estimate of Degrees of the Mortality of Mankind* [originally in *Philosophical Transactions of the Royal Society*. Vol. 17 (1693)], American edition edited by Lowell J. Reed, Johns Hopkins Press, Baltimore.
- Jones, J. H., 2005, *Mathematical Hazards Models and Model Life Tables*.
- Kannisto, V., Lauritsen, J., Thatcher, A.R., Vaupel, J.W., 1994, *Reductions in Mortality at Advanced Ages – Several Decades of Evidence from 72 Countries*, Popul. Dev. Rev. 20, 793-810.
- Keyfitz, N., Caswell, H., 1985, *Applied Mathematical Demography*, Springer Science & Business Media, Inc, New York.
- Lebreton, J.D., 1996, *Demographic Models for Subdivided Populations: the Renewal Equation Approach*, Theor. Popul. Biol. 49, 291-313.
- Ledermann, S., Breas, J., 1959, *Les Dimensions de la Mortalité*, Population (French Edition), 637-682.
- Ledermann, S., 1969, *Nouvelles Tables-Type de Mortalité: Travaux et Document*, Cahier, (53).
- Makeham, W.M., 1867, *On the Law of Mortality*, Journal of the Institute of Actuaries, 13(6), 325-358.
- Pham, H., 2011, *Modeling US Mortality and Risk – Cost Optimization on Life Expectancy*, IEEE Trans. Reliab. 60, 125-133.
- Pletcher, S.D., 1999, *Model Fitting and Hypothesis Testing for Age – Specific Mortality Data*, J. Evol. Biol. 12, 430-439.

- Reed, L.J., Merrell, M., 1939, *A Short Method for Constructing an Abridged Life Table*, American Journal of Hygiene, 30.
- Rossolini, G., Piantanelli, L., 2001, *Mathematical Modeling of the Aging Processes and the Mechanisms of Mortality: Paramount Role of Heterogeneity*, Exp. Gerontol. 36, 1277-1288.
- Steinsaltz, D.R., Wachter, K.W., 2006, *Understanding Mortality Rate Deceleration and Heterogeneity*, Math. Popul. Stud. 13, 19-37.
- Thiele, T.N., 1871, *On a Mathematical Formula to Express the Rate of Mortality throughout the Whole of Life, Tested by a Series of Observations Made Use of by the Danish Life Insurance Company of 1871*, Journal of the Institute of Actuaries, 16(5), 313-329.
- Vaupel, J.W., 2010, *Biodemography of Human Ageing*, Nature 464, 536-542.
- Vaupel, J.W., Yashin, A.I., 1985, *The Deviant Dynamics of Death in Heterogeneous Populations*, Sociol. Methodol. 179-211.
- Vaupel, J.W., Manton, K.G., Stallard, E., 1979, *Impact of Heterogeneity in Individual Frailty on the Dynamics of Mortality*, Demography 16, 439-454.
- Vaupel, J.W., Carey, J.R., Christensen, K., Johnson, T.E., Yashin, A.I., Holm, N.V., Iachine, I.A., Kannisto, V., Khazaeli, A.A., Liedo, P., Longo, V.D., Zeng, Y., Manton, K.G., Curtsinger, J.W., 1998, *Biodemographic Trajectories of Longevity*, Science 280, 855-860.
- Weitz, J.S., Fraser, H.B., 2001, *Explaining Mortality Rate Plateaus*, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. 98, 15383-15386.
- Yashin, A.I., Iachine, I.A., Begun, A.Z., 2000, *Mortality Modeling: A Review*, Mathematical Population Studies, 8, 305-332.

### Ιστοσελίδες:

- <http://www.mortality.org>