



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
Π.Μ.Σ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ
ΚΙΝΔΥΝΟΥ**

**ΚΙΝΔΥΝΟΣ ΜΑΚΡΟΖΩΙΑΣ ΚΑΙ ΤΙΣ ΕΠΙΠΤΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΕΧΕΙ ΣΤΙΣ
ΑΣΦΑΛΙΣΕΙΣ ΖΩΗΣ ΚΑΙ ΣΤΑ ΣΥΝΤΑΞΙΟΔΟΤΙΚΑ ΤΑΜΕΙΑ**

Διπλωματική Εργασία: Χρηστίδη Δ. Έρτα

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ : Πιτσέλης Γεώργιος

ΠΕΙΡΑΙΑΣ 2017



**UNIVERSITY OF PIRAEUS
DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE
M. Sc. IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT**

**LONGEVITY RISK AND THE IMPACT TO LIFE INSURANCE AND
THE PENSION PLAN**

MASTER THESIS : Christidi D. Erta

ADVISOR PROFESSOR: Pitselis Georgios

PIRAEUS 2017

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Με την ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας αισθάνομαι την ανάγκη να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον επιβλέποντα καθηγητή μου κύριο Γεώργιο Πιτσέλη για την ευκαιρία που μου έδωσε να ασχοληθώ με το αντικείμενο της εργασίας καθώς επίσης και στον υποψήφιο διδάκτορα κύριο Απόστολο Μποζίκα για την πολύτιμη βοήθειά του. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους καθηγητές κύριο Μιχαήλ Γκλεζάκο και κύριο Γεώργιο Ψαρράκο για τη συμμετοχή τους στην συμβουλευτική επιτροπή. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για την απεριόριστη υποστήριξή της, χωρίς την οποία θα ήταν αδύνατη η ολοκλήρωση των σπουδών μου.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η ανάπτυξη της φαρμακευτικής βιομηχανίας, της ιατρικής τεχνολογίας καθώς και η βελτίωση των συνθηκών διαβίωσης, είχαν ως αποτέλεσμα τη σταθερή αύξηση του προσδόκιμου ζωής στην Ευρώπη και τη Βόρεια Αμερική από το 1960 έως σήμερα. Έτσι, η αύξηση της μακροβιότητας των ανθρώπων και η αβεβαιότητα για τη μελλοντική θνησιμότητα ήταν οι λόγοι που ανέδειξαν τον κίνδυνο της μακροβιότητας σε έναν από τους πιο σημαντικούς κινδύνους για τις ασφαλιστικές εταιρίες, τα συνταξιοδοτικά ταμεία, αλλά και για άλλες εταιρίες, οι οποίες επηρεάζονται άμεσα από τον κίνδυνο. Ήδη από τη δεκαετία του 1990, άρχισε να αναπτύσσεται η αγορά χρηματοοικονομικών προϊόντων που συνδέονται με τη θνησιμότητα, με σκοπό την αντιστάθμιση του κινδύνου μακροβιότητας.

Σκοπός της εργασίας είναι η μελέτη μέσω των τιτλοποιήσεων του κινδύνου μακροβιότητας και η παρουσίαση των χρηματοοικονομικών προϊόντων που έπαιξαν καθοριστικό ρόλο στην ανάπτυξη της ασφαλιστικής αγοράς. Αρχικά περιγράφεται, πώς οι ασφαλιστικές (ή αντασφαλιστικές) εταιρίες μπορούν να χρησιμοποιήσουν τις τιτλοποιήσεις για να διαχειριστούν τον κίνδυνο της μακροβιότητας. Έπειτα, πραγματοποιείται η τιμολόγηση μιας ομολογίας μακροβιότητας, προκειμένου να γίνει αντιστάθμιση του κινδύνου που διατρέχουν οι ασφαλιστικές εταιρίες και τα συνταξιοδοτικά προγράμματα.

Στη συνέχεια, αφού υπολογίσουμε τις χρηματοροές μεταξύ των αντισυμβαλλομένων, δηλαδή της ασφαλιστικής εταιρίας, της Εταιρίας Ειδικού Σκοπού (Special Purpose Company-SPC) και των επενδυτών, γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων της τιμολόγησης για χώρες της Νότιας Ευρώπης, την Ελλάδα, την Ιταλία και την Ισπανία. Η τιμολόγηση έγινε με τη χρήση του μετασχηματισμού Wang (Wang, 2000), ενώ η προβολή της θνησιμότητας βασίστηκε στη μέθοδο των Lee-Carter (Lee & Carter, 1992).

ABSTRACT

The development of the pharmaceutical industry and the medical technology, in combination with the improvement of living conditions, resulted to a steady increase in life expectancy in Europe and North America from 1960 until today. Thus, the underestimation of longevity and the uncertainty about future mortality rates were the main reasons that made longevity risk one of the most significant risks for insurance companies, pension funds and other companies that are directly linked with the future mortality trends. Since the 90s, it had already begun the development of the mortality - linked products in order to hedge the longevity risk.

This master thesis aims to study the means of longevity risk securitization and analyze the mortality - linked products that led to the development of the insurance market. It is also described, how the insurers (or reinsurers) can use the securitization means to hedge the longevity risk and under this framework, we price a longevity bond, connected with the longevity risk.

Then, after calculating the cash flows between the counterparties (i.e. insurance companies, the Special Purpose Company (SPC) and the investors), we compare the pricing results for the countries of Greece, Spain and Italy. The pricing has been done using the Wang transformation (Wang, 2000) and the mortality projection is based on the Lee-Carter method (Lee & Carter, 1992).

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ	- 10 -
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ΣΧΗΜΑΤΩΝ	- 14 -
ΕΙΣΑΓΩΓΗ	- 16 -
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1	- 18 -
ΟΜΟΛΟΓΙΑ ΜΑΚΡΟΒΙΟΤΗΤΑΣ	- 18 -
1.1. Εισαγωγή	- 18 -
1.1 Swiss Re Ομολογία Μακροβιότητας.....	- 19 -
1.2 ΕΙΒ/ΒΡΝ Ομολογία Μακροβιότητας.....	- 26 -
1.3 Παρατηρήσεις για την ΕΙΒ/ΒΝΡ Ομολογίας Μακροβιότητας	- 31 -
1.4 Χρηματοροές Μίας Ομολογίας Μακροβιότητας.....	- 32 -
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2	- 39 -
SWAPS ΜΑΚΡΟΒΙΟΤΗΤΑΣ	- 39 -
2.1. Εισαγωγή	- 39 -
2.2. Swap Μακροβιότητας μιας πληρωμής	- 40 -
2.3. Vanilla Swap Μακροβιότητας.....	- 41 -
2.4. Παρατηρήσεις Swap Μακροβιότητας	- 42 -
2.5. Χρηματοροές ενός Swap Μακροβιότητας.....	- 44 -
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3	- 46 -
ΑΛΛΑ ΠΡΟΙΟΝΤΑ ΑΝΤΙΣΤΑΘΜΙΣΗΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΜΑΚΡΟΒΙΟΤΗΤΑΣ.....	- 46 -
3.1. Εισαγωγή	- 46 -
3.2. JP Morgans q-forward	- 46 -
3.3. Μέθοδος εξαγοράς συνταξιοδοτικού προγράμματος.....	- 49 -
3.4. Option Μακροβιότητας.....	- 51 -
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4	- 54 -
ΠΡΟΒΟΛΗ ΘΝΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ ΜΕ ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΟΥ LEE-CARTER.....	- 54 -
4.1. Εισαγωγή	- 54 -
4.2. Το μοντέλο Lee-Carter	- 55 -
4.2.1 Μέθοδος Διάσπασης Ιδιαζουσών Τιμών (SVD)	- 57 -
4.2.2 Εναλλακτική Προσέγγιση της SVD	- 58 -
4.3. Δεύτερο Στάδιο Εκτίμησης του Μοντέλου Lee-Carter	- 60 -
4.4. Προβολή Θνησιμότητας	- 63 -

4.5. Συμπεράσματα από το Μοντέλο Lee-Carter	66 -
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5	68 -
ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗΣ	68 -
5.1. Εισαγωγή	68 -
5.2. 'Τελεστής Διαταραχής' στις Ασφαλίσεις Ζωής	68 -
5.3. Ο Μετασχηματισμός του Wang.....	71 -
5.4. Market Price of Risk	72 -
5.5. Χρήση του Μετασχηματισμού του Wang	74 -
5.6. Τιμολόγηση Ομολογίας Μακροβιότητας και Swap Μακροβιότητας	76 -
5.7. Οριακές Τιμές Xt	77 -
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6	81 -
ΕΦΑΡΜΟΓΗ: ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗ ΟΜΟΛΟΓΙΑΣ ΚΑΙ SWAP ΜΑΚΡΟΒΙΟΤΗΤΑΣ.....	81 -
6.1. Εισαγωγή	81 -
6.2. Διαδικασία Τιμολόγησης.....	82 -
6.3. Εφαρμογή του μοντέλου Lee-Carter.....	84 -
6.4. Υπολογισμός των Οριακών Τιμών (Strike Levels) Xt	85 -
6.5. Υπολογισμός του Market Price of Risk	85 -
6.6. Σύγκριση Αποτελεσμάτων της Ομολογίας Μακροβιότητας	87 -
Αποτελέσματα τιμολόγησης για την Ελλάδα	87 -
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	90 -
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α.1 Κώδικας για τον υπολογισμό του market price of risk	91 -
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α.2 Κώδικας για τον υπολογισμό της προβολής της θνησιμότητας	95 -
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	96 -
Ξένη Βιβλιογραφία	96 -
Ελληνική Βιβλιογραφία.....	98 -

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

ΣΧΗΜΑ 1. 1 Τελικές πληρωμές της Swiss Re Ομολογίας Μακροβιότητας στους επενδυτές.	- 21 -
ΣΧΗΜΑ 1. 2 Οι χρηματοροές μιας Swiss Re Ομολογίας Μακροβιότητας.	- 22 -
ΣΧΗΜΑ 1. 3 Οι χρηματοροές μιας EIB/BPN Ομολογίας Μακροβιότητας.	- 27 -
ΣΧΗΜΑ 1. 4 Η δομή μιας EIB/BNP Ομολογίας Μακροβιότητας.	- 28 -
ΣΧΗΜΑ 1. 5 Η δομή μιας Ομολογίας Μακροβιότητας και η χρηματοροές μεταξύ των αντισυμβαλλομένων.	- 35 -
ΣΧΗΜΑ 1. 6 Οι χρηματοροές μιας Ομολογίας Μακροβιότητας μεταξύ των αντισυμβαλλομένων με την προσθήκη της κανονικής ομολογίας από την SPC.	- 36 -
ΣΧΗΜΑ 2. 1 Οι χρηματοροές ενός Vanilla Swap Μακροβιότητας τη χρονική στιγμή $t...$	- 42 -
ΣΧΗΜΑ 3. 1 Οι χρηματοροές ενός Q-forward μιας Ασφαλιστικής Εταιρίας Ζωής.	- 48 -
ΣΧΗΜΑ 3. 2 Οι χρηματοροές ενός Q-forward για ένα Συνταξιοδοτικό Πρόγραμμα.	- 49 -

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η μείωση της θνησιμότητας και η αύξηση του προσδόκιμου ζωής σε παγκόσμιο επίπεδο ήταν οι λόγοι που ανέδειξαν τον κίνδυνο της μακροβιότητας σε έναν από τους πιο σημαντικούς κινδύνους για τις ασφαλιστικές εταιρίες, τα συνταξιοδοτικά ταμεία, αλλά και για άλλες εταιρίες, οι οποίες επηρεάζονται άμεσα από τον κίνδυνο. Η εμφάνιση του κινδύνου μακροβιότητας είχε ως αποτέλεσμα, να αναπτυχθεί η αγορά χρηματοοικονομικών και παραγώγων προϊόντων που συνδέονται με τη θνησιμότητα, με σκοπό την αντιστάθμιση του κινδύνου μακροβιότητας.

Το πρόβλημα που αντιμετώπιζαν οι επιστήμονες ήταν ότι ο πληθυσμός της χρονικής περιόδου που μελετούσαν, επιβίωνε για παραπάνω έτη από τα αναμενόμενα που είχαν προβλέψει, υστερούσαν δηλαδή στην εκτίμηση μεταβολής της θνησιμότητας. Το πρόβλημα αυτό επηρέαζε άμεσα και τους αναλογιστές, καθώς η μείωση της θνησιμότητας και η συστηματική υποεκτίμησή της ανάγκαζε τις ασφαλιστικές εταιρείες να επανεκτιμούν τις μακροπρόθεσμες υποχρεώσεις τους και να δεσμεύσουν πρόσθετα κεφάλαια για να αυξήσουν τα αποθέματά τους ώστε να παραμείνουν φερέγγυες.

Σκοπός της εργασίας είναι η μελέτη των μέσων τιτλοποίησης για την αποτελεσματική αντιστάθμιση του κινδύνου μακροβιότητας. Πιο αναλυτικά, στο Κεφάλαιο 1, περιγράφεται η δομή και οι χρηματοροές μιας ομολογίας μακροβιότητας, οι οποίες συνδέονται με τον το δείκτη της θνησιμότητας, καθώς τα κουπόνια της εξαρτώνται από τους επιζώντες μιας συγκεκριμένης χρονικής στιγμής για ένα δεδομένο πληθυσμό. Επίσης, περιγράφονται τα δύο βασικά προϊόντα τιτλοποίησης που συνδέονται με τη θνησιμότητα, η Swiss Re ομολογία μακροβιότητας (Swiss Re longevity bond) και η EIB/BPN ομολογία μακροβιότητας (EIB/BPN longevity bond).

Στο Κεφάλαιο 2, ορίζονται και αναλύονται δύο swaps μακροβιότητας, το swap μιας πληρωμής και το vanilla swap, ενώ στο Κεφάλαιο 3, αναλύονται οι χρηματοροές ενός q-forward για ένα χαρτοφυλάκιο ζωής και για ένα συνταξιοδοτικό πρόγραμμα. Επίσης, παρουσιάζονται τα longevity options, συγκεκριμένα τα Longevity Caps, Longevity Floors και το Swaption. Τέλος, περιγράφεται η δομή μιας μεθόδου εξαγοράς συνταξιοδοτικού προγράμματος (pension buyouts).

Στη συνέχεια, στο Κεφάλαιο 4, αναλύεται το μοντέλο πρόβλεψης της θνησιμότητας των Lee & Carter (1992), ενώ στο Κεφάλαιο 5, αναλύεται η μέθοδος τιμολόγησης του Wang (Wang, 2000), που χρησιμοποιήθηκε για την αριθμητική εφαρμογή της εργασίας.

Τέλος, στο Κεφάλαιο 6 παρουσιάζεται η εφαρμογή της εργασίας, η οποία έχει ως αντικείμενο την τιμολόγηση μιας ομολογίας μακροβιότητας διάρκειας 30 ετών. Η τιμολόγηση αφορά άνδρες και γυναίκες, ηλικίας 65 ετών, για τρεις χώρες της Νότιας Ευρώπης, την Ελλάδα, την Ιταλία και την Ισπανία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΟΜΟΛΟΓΙΑ ΜΑΚΡΟΒΙΟΤΗΤΑΣ

1.1. Εισαγωγή

Εκτός από την ονομασία ομολογία μακροβιότητας, στην βιβλιογραφία, συναντάται και ως ομολογία θανάτου (death bond) ή ομολογία επιβίωσης (survival bond), καθώς πρόκειται για ένα χρηματοοικονομικό προϊόν που συνδέεται με το δείκτη θνησιμότητας. Τα κουπόνια που πληρώνει η ομολογία, εξαρτώνται από τους επιζώντες μιας συγκεκριμένης χρονικής στιγμής για ένα δεδομένο πληθυσμό. Παρακάτω, θα περιγράψουμε τα δύο βασικά προϊόντα τιτλοποίησης που συνδέονται με τη θνησιμότητα, τη Swiss Re ομολογία μακροβιότητας (Swiss Re longevity bond) και την EIB/BPN ομολογία μακροβιότητας (EIB/BPN longevity bond) (Blake, Cairns & Dowd, 2006).

Το Δεκέμβριο του 2003, η Swiss Re επιχείρησε για πρώτη φορά να αντισταθμίσει τον κίνδυνο μακροβιότητας με τέτοιου είδους ομολογίες. Έτσι, μέσω μιας εταιρίας ειδικού σκοπού (special purpose company, SPC) τη Vita Capital, εξέδωσε την ομολογία μακροβιότητας όπου η αποπληρωμή του κεφαλαίου και η αποζημίωση του ασφαλιστή συνδέονται με τις τιμές του δείκτη θνησιμότητας. Το κεφάλαιο της ομολογίας αποπληρώθηκε πλήρως και η Swiss Re προχώρησε στην έκδοση μια δεύτερης και μιας τρίτης ομολογίας, όπως αναλύονται στην ενότητα 1.1.

Το Νοέμβριο του 2004, ένα χρόνο μετά την έκδοση της Swiss Re ομολογίας, η τράπεζα BPN Paribas δημιούργησε την EIB/BPN ομολογία μακροβιότητας. Πρόκειται για μια ομολογία μακροχρόνιας διάρκειας, 25 ετών και με μια πιο περίπλοκη δομή από τη Swiss Re ομολογία, καθώς εκδόθηκε από την Ευρωπαϊκή Επενδυτική Τράπεζα (European Investment Bank, EIB), αλλά σχεδιάστηκε από την τράπεζα BPN Paribas. Επομένως, οι χρηματοροές πραγματοποιούνται

μεταξύ των επενδυτών, της αντασφαλιστικής εταιρίας Partner Re, της τράπεζας BPN Paribas και της Ευρωπαϊκής Επενδυτικής Τράπεζας (EIB), όπως αναλύονται στην ενότητα 1.2.

Στη συνέχεια, θα περιγράψουμε αναλυτικά τις χρηματοροές της διαδικασίας τιμολόγησης μιας ομολογίας μακροβιότητας για την αντιστάθμιση του κινδύνου μακροβιότητας. Συγκεκριμένα, οι χρηματοροές μεταξύ της εταιρίας ειδικού σκοπού (special purpose company, SPC), των ασφαλιστών και των επενδυτών, ώστε η SPC να μπορεί να εξυπηρετήσει τις υποχρεώσεις στους άλλους αντισυμβαλλομένους με βεβαιότητα.

Με τη βοήθεια ενός παραδείγματος, περιγράφονται οι χρηματοροές, όταν ο ασφαλιστής αγοράζει αντασφάλιση από μια SPC, η οποία στη συνέχεια εκδίδει μια ομολογία μακροβιότητας. Επίσης, περιγράφονται και οι χρηματοροές από την αγορά της ομολογίας και τα κουπόνια μεταξύ των επενδυτών και της SPC. Έτσι, με την ομολογία, οι αντασφαλιστές μεταφέρουν τον κίνδυνο του ασφαλιστή στους επενδυτές. Στη συνέχεια, η SPC επενδύει τα ασφάλιστρα και τα έσοδα από την πώληση των ομολογιών σε, χωρίς κίνδυνο αθέτησης, προϊόντα τιτλοποίησης.

1.1 Swiss Re Ομολογία Μακροβιότητας

Το Δεκέμβριο του 2003, η Swiss Re, εξέδωσε μια ομολογία μακροβιότητας διάρκειας τριών (3) ετών. Η κίνηση αυτή είχε σκοπό τη μείωση της έκθεσής της σε μια ακραία αλλαγή της θνησιμότητας, όπως για παράδειγμα η επανάληψη της ισπανικής πανδημίας γρίπης του 1918, ένα σπάνιο γεγονός που μπορεί να συμβεί 1 φορά στα 25 έτη σύμφωνα με τη Morgan Stanley (2003).

Η ομολογία της Swiss Re, είχε αξία \$400εκ. και οι επενδυτές λάμβαναν τριμηνιαία κουπόνια στο Libor (London Interbank Offered Rate) +135 bp (basis points) σε αμερικάνικα δολάρια. Το αρχικό κεφάλαιο εξαρτάται από έναν ειδικό δείκτη της θνησιμότητας από πέντε χώρες, τις Ηνωμένες Πολιτείες της Αμερικής, το Ηνωμένο Βασίλειο, τη Γαλλία, την Ιταλία και την Ελβετία. Ο δείκτης

θνησιμότητας ορίζεται ως ο σταθμισμένος μέσος όρος των ποσοστών θνησιμότητας (θάνατοι ανά 100,000) πάνω στην ηλικία, το φύλο (αρσενικό 65%, γυναίκες 35%) και την εθνικότητα (US 70%, Ηνωμένο Βασίλειο 15%, Γαλλία 7.5%, Ιταλία 5%, Ελβετία 2.5%) όπως φαίνεται από την παρακάτω σχέση, (Blake,Cairns & Dowd, 2006):

$$q_t = \sum_j C_j \sum_i (G^m A_i q_{i,j,t}^m + G^f A_i q_{i,j,t}^f), \quad (1.1)$$

όπου,

q_0 : ο βασικός δείκτης θνησιμότητας για το έτος 2002,

$q_{i,j,t}^m$: το ποσοστό θνησιμότητας ανδρών (m), ηλικιακής ομάδας (i), για τη χώρα (j), το έτος t,

$q_{i,j,t}^f$: το ποσοστό θνησιμότητας γυναικών (f), ηλικιακής ομάδας (i), για τη χώρα (j), το έτος t,

C_j : ο συντελεστής βαρύτητας για τη χώρα (j),

A_i : ο συντελεστής βαρύτητας για την ηλικιακή ομάδα (i) (είναι ίδιο για άνδρες και γυναίκες),

G^m : ο συντελεστής βαρύτητας για τους άνδρες (m),

G^f : ο συντελεστής βαρύτητας για τις γυναίκες (f).

Οι πληρωμές στη λήξη της ομολογίας Swiss Re, τη χρονική στιγμή $t=T$ υπολογίζονται ως εξής (Blake,Cairns & Dowd, 2006):

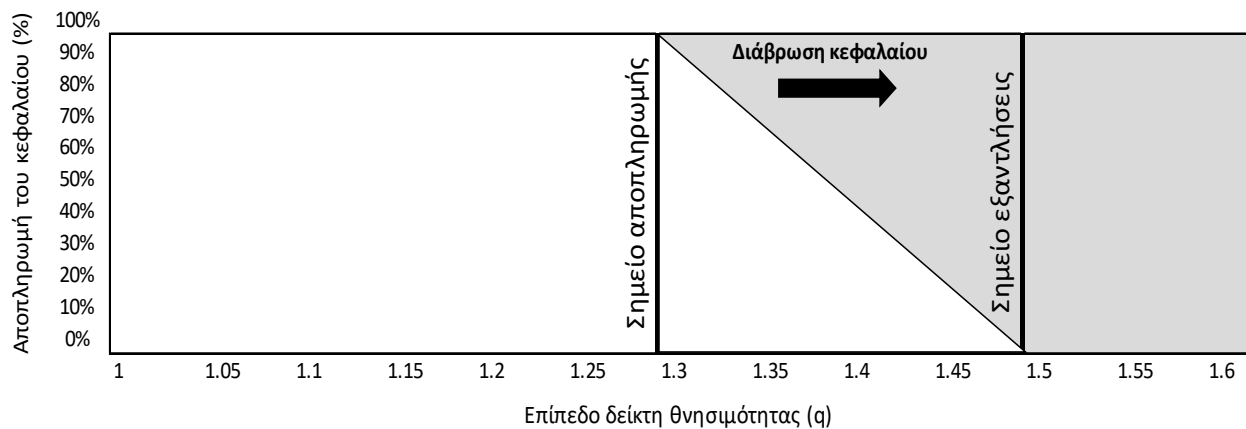
$$\text{payout}(t=T) = \begin{cases} 100\% - \sum_{t=1}^T \text{loss}_t, & \text{εάν } \sum_{t=1}^T \text{loss}_t < 100\% \\ 0\%, & \text{εάν } \sum_{t=1}^T \text{loss}_t \geq 100\%, \end{cases} \quad (1.2)$$

όπου, η μεταβλητή loss_t , εκφράζει την απώλεια επί τοις εκατό πάνω στο αρχικό κεφάλαιο, για το έτος t και εξαρτάται από το δείκτη θνησιμότητας.

Η μεταβλητή $loss_t$, ορίζεται από την παρακάτω τρίκλαδη εξίσωση ως εξής (Blake, Cairns & Dowd, 2006):

$$loss_t = \begin{cases} 0\%, & \text{εάν } q_t < 1.3q_0 \\ [(q_t - 1.3q_0) / (0.2q_0)] \times 100\%, & \text{εάν } 1.3q_0 \leq q_t \leq 1.5q_0 \\ 100\%, & \text{εάν } q_t > 1.5q_0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Διαγραμματικά οι πληρωμές της Swiss Re ομολογίας για την αποπληρωμή του κεφαλαίου φαίνονται στο παρακάτω διάγραμμα:



ΣΧΗΜΑ 1. 1 Τελικές πληρωμές της Swiss Re Ομολογίας Μακροβιότητας στους επενδυτές.
(Πηγή: Blake, Cairns & Dowd, 2006)

Το παραπάνω διάγραμμα δείχνει τη διάβρωση του κεφαλαίου, δηλαδή το ποσοστό αποπληρωμής του, σε σχέση με την πιθανή αύξηση του δείκτη θνησιμότητας. Ο κάθετος άξονας παριστάνει το ποσοστό αποπληρωμής του αρχικού κεφαλαίου και ο οριζόντιος άξονας τις τιμές του δείκτη θνησιμότητας, με σημείο πλήρους αποπληρωμής του κεφαλαίου.

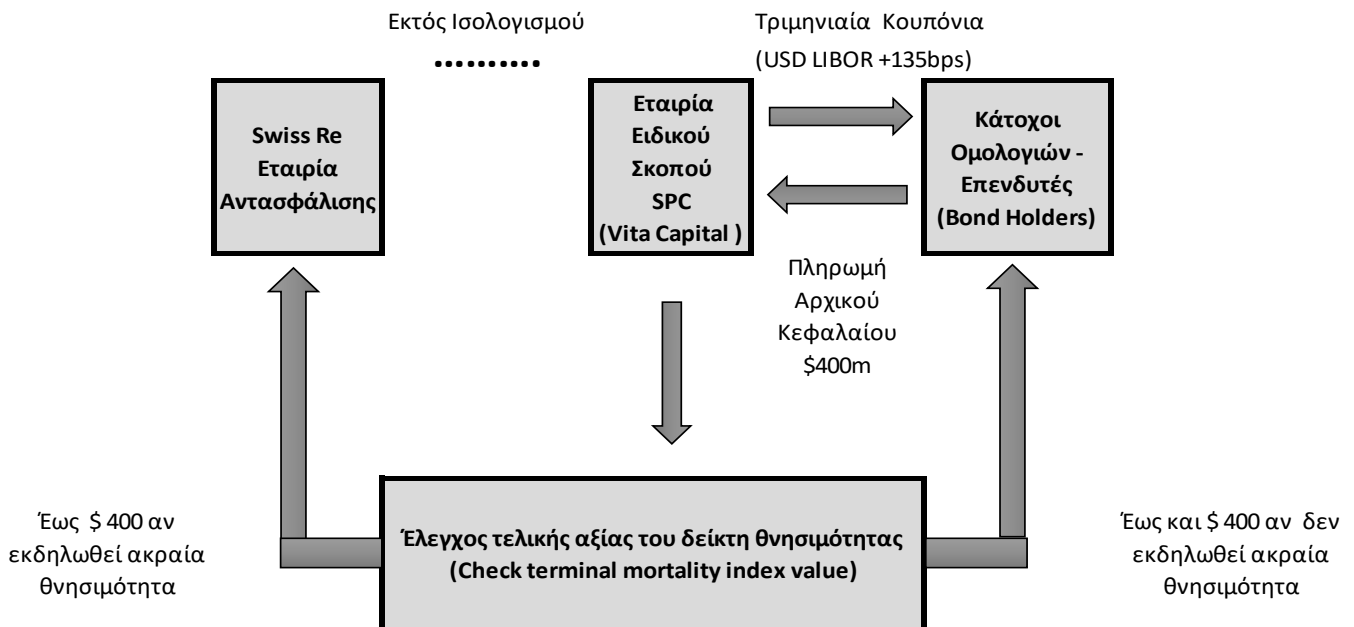
Συγκεκριμένα, το αρχικό κεφάλαιο πληρώνεται ολόκληρο αν ο δείκτης θνησιμότητας δεν υπερβεί τις 1.3 (ή 130%) φορές το βασικό επίπεδο του 2002 κατά τη διάρκεια οποιουδήποτε από τα τρία έτη της ομολογίας, ενώ μειώνεται κατά 5% για κάθε 0.01 αύξηση του δείκτη θνησιμότητα πάνω

από το όριο αυτό. Επίσης, το αρχικό κεφάλαιο εξαντλείται τελείως, αν ο δείκτης υπερβεί τις 1.5 (ή 150%) φορές το βασικό επίπεδο του 2002.

Η Swiss Re προκειμένου να εκδώσει την ομολογία, ίδρυσε την εταιρία Vita Capital, μια εταιρία ειδικού σκοπού (SPC), προκειμένου οι χρηματοροές της ομολογίας να μην επιβαρύνουν τον ισολογισμό της και κατά συνέπεια να μειωθεί ο πιστωτικός κίνδυνος για τους επενδυτές.

Η Vita Capital, με τη σειρά της, επένδυσε το κεφάλαιο των \$400 εκ. σε υψηλής ποιότητας ομόλογα και swaps και τα έσοδα από αυτά πληρώνονται με επιτόκιο Libor. Οι επενδυτές λάμβαναν τριμηνιαία κουπόνια και το αρχικό κεφάλαιο στη λήξη της ομολογίας.

Συγκεκριμένα, η δομή της Swiss Re ομολογίας μεταξύ των αντισυμβαλλομένων, σχηματικά φαίνεται παρακάτω:



ΣΧΗΜΑ 1. 2 Οι χρηματοροές μιας Swiss Re Ομολογίας Μακροβιότητας.
 Πηγή: Blake, Cairns & Dowd, 2006

Σύμφωνα με την ετήσια οικονομική έκθεση του 2004, η αντασφάλιση σε προϊόντα ζωής είναι η κύρια πηγή εσόδων για τη Swiss Re, καθώς ανέρχεται στο 30% των εσόδων της που σημαίνει ότι η κερδοφορία συσχετίζεται αρνητικά με τα ποσοστά της θνησιμότητας. Παρόλο, που η Swiss Re είναι από τους μεγαλύτερους παρόχους αντασφάλισης στον κόσμο σε προϊόντα ζωής και υγείας αντιμετωπίζει και εκείνη το πρόβλημα εύρεσης αντισυμβαλλομένων στους οποίους μπορεί να μεταφέρει τον κίνδυνο της θνησιμότητας με άμεση συνέπεια να μην μπορεί να ανταποκριθεί στις κεφαλαιακές απαιτήσεις των ρυθμιστικών αρχών.

Έτσι, η έκδοση της ομολογίας βοηθά τη Swiss Re να μεταφέρει τον κίνδυνο της θνησιμότητας που αντιμετωπίζει καθώς και να ανταποκρίνεται στις προϋποθέσεις των οργανισμών αξιολόγησης πιστοληπτικής ικανότητας σχετικά με τη διαχείριση του κινδύνου θνησιμότητας. Επίσης, η έκδοση της ομολογίας δίνει στην Swiss Re προστασία χωρίς να απαιτείται η εταιρεία να εκτεθεί στον πιστωτικό κίνδυνο διότι δεν εξαρτάται από την πιστοληπτική ικανότητα των αντισυμβαλλομένων της στην περίπτωση εκδήλωσης ακραίου κινδύνου θνησιμότητας.

Οι επενδυτές, στην ομολογία βρίσκονται στην αντίθετη θέση από τη Swiss Re και λαμβάνουν μια μεγαλύτερη απόδοση αν δεν επέλθει ακραία εκδήλωση του κινδύνου θνησιμότητας, ενώ στην αντίθετη περίπτωση που επέλθει ο κίνδυνος, λαμβάνουν μια υψηλή αποζημίωση της ανάληψης του κινδύνου ακραίας θνησιμότητας.

Αν παρομοιάζαμε τους όρους ομολογίας με ένα call option spread στο δείκτη θνησιμότητας με ελάχιστη τιμή άσκησης δικαιώματος $1.3q_0$ και μέγιστη τιμή $1.5q_0$, τότε οι πιθανότητες του κεφαλαίου όταν μπορεί να πληρωθεί εκτιμάται να είναι $Pr = q_t > 1.3q_0$ στους 33 bp και όταν εξαντλείται, δηλαδή δεν αποπληρώνεται εκτιμάται να είναι $Pr = q_t > 1.5q_0$ στους 15 bp. Η

αναμενόμενη ζημία από την ομολογία εκτιμάται να είναι 22 bp, λιγότερο από τις 135 bp των αποζημιώσεων που προσφέρθηκαν αρχικά στους επενδυτές (Beelders, Colarossi, 2004).

Η ομολογία έδειχνε να είναι μια καλή επένδυση για τους επενδυτές, καθώς τον Ιούνιο του 2004 διαπραγματευόταν σε LIBOR +100 bp. Ωστόσο, θα πρέπει να ληφθεί υπόψιν ότι οι εκτιμήσεις αυτές βασίζονται σε ένα μοντέλο που αγνοεί την παράμετρο της αβεβαιότητας, ενώ εναλλακτικές εκτιμήσεις της παραμέτρου μπορεί να είναι σε υψηλότερες τιμές bp σχετικά με την αποζημίωση που έλαβαν οι επενδυτές. Έτσι, δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι για το πόσο καλή είναι η επένδυση που έκαναν οι επενδυτές. Επιπλέον, το Νοέμβριο του 2005, η μέση τιμή αγοράς της ομολογίας ήταν ισοδύναμη με το LIBOR +123 bp και εικάζεται ότι η αύξηση αυτή ήταν αποτέλεσμα της αυξημένης πιθανότητας της πανδημίας της γρίπης των πτηνών το 2006. (Beelders, Colarossi, 2004).

Το αρχικό κεφάλαιο της Swiss Re αποπληρώθηκε πλήρως και δημοσιεύματα της Euroweek-19/12/2003 αναφέρουν ότι οι επενδυτές ήταν ικανοποιημένοι. Η ομολογία προσέφερε μια υψηλότερη απόδοση σε σχέση με τιτλοποιήσεις κυμαινόμενου επιτοκίου, παρόμοιας πιστοληπτικής βαθμίδας.

Επίσης, οι επενδυτές κατείχαν και μια σειρά από συνταξιοδοτικά προγράμματα, τα οποία θα αποπληρώνονταν επίσης από τις ευκαιρίες αντιστάθμισης που τους είχαν προσφερθεί από τον κίνδυνο θνησιμότητας της ομολογίας με τα ενεργά μέλη ενός συνταξιοδοτικού προγράμματος. Πιο συγκεκριμένα, ας θεωρήσουμε ένα γεγονός που θα προκαλέσει μείωση στην αποπληρωμή της ομολογίας Swiss Re. Ο μεγάλος αριθμός των επιπλέον θανάτων θα επεκταθεί κατά πάσα πιθανότητα στα ενεργά μέλη του συνταξιοδοτικού προγράμματος. Δεδομένου, ότι τα οφέλη του θανάτου ενός μέλους είναι συνήθως λιγότερα από τις υποχρεώσεις του συνταξιοδοτικού προγράμματος ενός μεμονωμένου μέλους, η μείωση της αξίας της επένδυσης της Swiss Re

ομολογίας στο συνταξιοδοτικό πρόγραμμα θα πρέπει να συνοδεύεται και από τη μείωση της αξίας των υποχρεώσεων του προγράμματος

Τον Απρίλιο του 2005, η Swiss Re ανακοίνωσε ότι είχε εκδώσει μια δεύτερη ομολογία μακροβιότητας με κεφάλαιο \$362 εκ. χρησιμοποιώντας μια νέα SPC τη Vita Capital II με ημερομηνία λήξης το 2010. Η διαφορά σε αυτήν την ομολογία είναι ότι εξαρτάται από ένα συνδυαστικό δείκτη θνησιμότητας, ο οποίος προκύπτει από το γενικό δείκτη θνησιμότητας πληθυσμού των Ηνωμένων Πολιτειών, του Ηνωμένου Βασιλείου, της Γερμανίας, της Ιαπωνίας και του Καναδά, σύμφωνα με την επίσημη ιστοσελίδα της Swiss Re (<http://www.swissre.com>).

Η ομολογία εκδόθηκε σε τρεις κατηγορίες ανάλογα με το κεφάλαιο επένδυσης: Κατηγορία B (\$ 62εκ.), Κατηγορία C (\$ 200εκ.) και Κατηγορίας D (\$ 100εκ.). Το αρχικό κεφάλαιο βρίσκεται σε κίνδυνο να μην αποπληρωθεί αν για δύο διαδοχικά έτη πριν από τη λήξη, ο δείκτης θνησιμότητας ξεπερνά συγκεκριμένο ποσοστό του αναμενόμενου επιπέδου θνησιμότητας που έχει οριστεί για κάθε κατηγορία, δηλαδή 120% για την κατηγορία B, 115% για την κατηγορία C, και 110% για την κατηγορία D. Τελικά, η ομολογία καλύφθηκε πλήρως.

Η Swiss Re, τον Ιανουάριο του 2007, συνέχισε στην έκδοση μιας τρίτης ομολογίας με σκοπό ένα μέρος της να αντικαταστήσει την πρώτη ομολογία, η οποία έληξε στο τέλος του 2006, αλλά και το υπόλοιπο μέρος να παρέχει πρόσθετη προστασία από τον κίνδυνο της μακροβιότητας, σύμφωνα με την επίσημη ιστοσελίδα της Swiss Re (<http://www.swissre.com>). Η ομολογία εκδόθηκε, μέσω της Vita Capital III και ήταν παρόμοιας δομής με τη δεύτερη ομολογία, εκδιδόμενη όμως σε δύο κατηγορίες A και B. Η ομολογία είχε αξία 705εκ. και οι πληρωμές των κουπονιών εξαρτώνταν από το γενικό δείκτη θνησιμότητας του πληθυσμού των Ηνωμένων Πολιτειών, του Ηνωμένου Βασιλείου, της Γερμανίας, της Ιαπωνίας και του Καναδά. Επίσης, οι πληρωμές των κουπονιών γίνονταν όπως στη δεύτερη ομολογία, δηλαδή για περίοδο δύο ετών πριν από τη λήξη, αν ο δείκτης

ξεπερνούσε κάποιο συγκεκριμένο ποσοστό, συγκεκριμένα, 125% για την κατηγορία A και 120% για την κατηγορία B.

1.2 EIB/BPN Ομολογία Μακροβιότητας

Η τράπεζα BPN Paribas το Νοέμβρη του 2004, ένα χρόνο μετά την έκδοση της Swiss Re ομολογίας, δημιούργησε την EIB/BPN ομολογία μακροβιότητας. Πρόκειται για μια μακροχρόνια ομολογία μακροβιότητας που απευθύνεται σε συνταξιοδοτικά προγράμματα και ασφάλειες ζωής, με σκοπό την αντιστάθμιση του κινδύνου μακροβιότητας. Το συγκεκριμένο προϊόν τιτλοποίησης δεν είχε τόσο καλή αποδοχή από τους επενδυτές και δεν δημιουργήθηκε αρκετή ζήτηση, με αποτέλεσμα στα τέλη του 2005 να την αποσύρουν για ανασχεδιασμό. Ωστόσο, η ομολογία έλαβε μεγάλη δημοσιότητα και αποτελεί ένα ενδιαφέρον προϊόν μελέτης τιτλοποίησης.

Η EIB/BPN ομολογία μακροβιότητας εκδόθηκε από την Ευρωπαϊκή Επενδυτική Τράπεζα (European Investment Bank, EIB), δημιουργήθηκε από τη γαλλική τράπεζα BPN Paribas και η Partner Re ανέλαβε την αντασφάλιση του κινδύνου μακροβιότητας. Η ονομαστική αξία της έκδοσης ήταν £540εκ. και η ομολογία είχε διάρκεια 25 έτη. Η ομολογία κάνει ετήσιες κυμαινόμενες πληρωμές κουπονιών και το αρχικό κουπόνι είχε οριστεί στα £50 εκ. Το καινοτόμο χαρακτηριστικό της ήταν ότι συνδέει τις πληρωμές των κουπονιών με το δείκτη των επιζώντων $S(t)$, ο οποίος βασίζεται σε πραγματικά ποσοστά θνησιμότητας ανδρών, ηλικίας 65 ετών, της Αγγλίας και της Ουαλίας του 2002.

Δεδομένου της απουσίας του πιστωτικού κινδύνου, οι χρηματοροές της σύμβασης είναι απλές στο να οριστούν. Για διευκόλυνση, ορίζουμε την ημερομηνία στις 31 Δεκεμβρίου 2004 ως χρόνο $t=0$, την ημερομηνία 31 Δεκεμβρίου 2005 ως $t=1$ κ.ο.κ. Έστω, το $m(y, x)$ δηλώνει το καθαρό μέσο

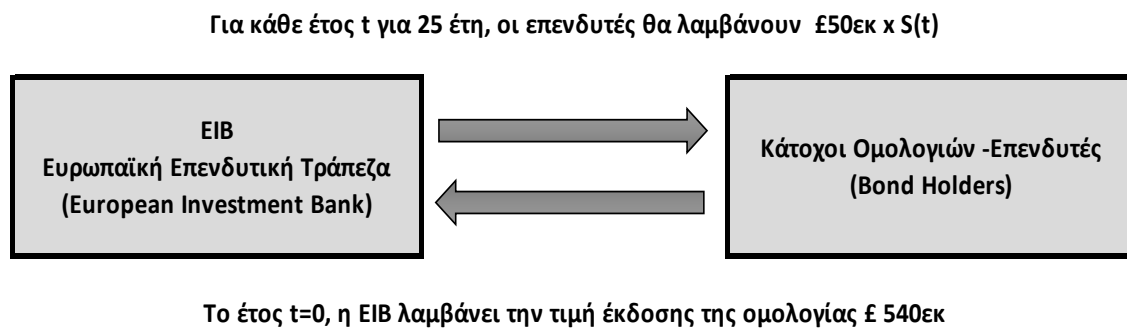
ποσοστό θανάτου στην ηλικία x που δημοσιεύεται από την Εθνική Στατιστική Υπηρεσία το έτος y .

Ο δείκτης επιζώντων $S(t)$ ορίζεται ως εξής (Blake, Cairns & Dowd, 2006):

$$\begin{aligned}
 S(0) &= 1 \\
 S(1) &= S(0)[1 - m(2003, 65)] \\
 &\vdots \\
 S(t) &= S(0) [1 - m(2003, 65)][1 - m(2004, 66)] \dots [1 - m(2002 + t, 64 + t)]. \quad (1.4)
 \end{aligned}$$

Για κάθε χρονική στιγμή $t=1,2,\dots,25$ η ομολογία πληρώνει ένα κουπόνι ίσο με $\text{£}50\text{εκ.}$ επί $S(t)$. Οι επενδυτές κάνουν μια αρχική πληρωμή ίση με $\text{£}540\text{ εκ.}$, η οποία είναι η τιμή της ομολογίας στην έκδοση και λαμβάνουν ένα ετήσιο κουπόνι, εξαρτώμενο από τη θνησιμότητα, δηλαδή λαμβάνουν $\text{£}50\text{ εκ.}$ επί $S(t)$ για κάθε έτος t για 25 έτη.

Οι χρηματοροές της ομολογίας φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:

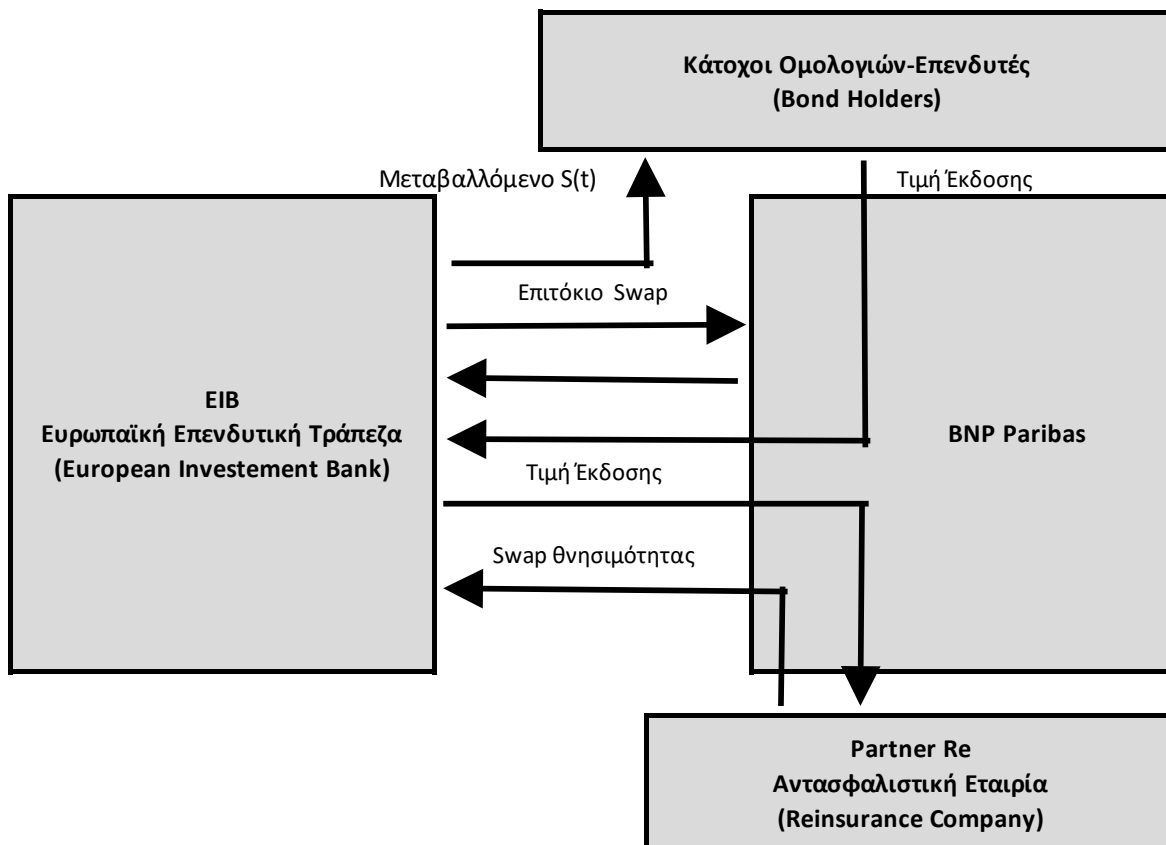


ΣΧΗΜΑ 1.3 Οι χρηματοροές της EIB/BPN Ομολογίας Μακροβιότητας.
Πηγή: Blake, Cairns & Dowd, 2006

Αγνοώντας το κουπόνι των $\text{£}50\text{ εκ.}$, η σύμβαση της ομολογίας καθορίζει ένα σύνολο ταμειακών ροών $\bar{S}(t)$ βασισμένο στις προβλέψεις θνησιμότητας του 2002, του Τμήματος Αναλογισμού της

Κυβέρνησης και κάθε πρόβλεψη χρηματοροής είναι προεξοφλημένη με Libor -35 bp. Η καμπύλη επιτοκίων της EIB ανέρχεται συνήθως σε 15 bp χαμηλότερα από την καμπύλη Libor. Έτσι, οι επενδυτές στην ομολογία μακροβιότητας καλούνται να πληρώσουν 20 bp, προκειμένου να αντισταθμίσουν τον κίνδυνο μακροβιότητας.

Αξίζει να σημειωθεί, ότι επειδή η EIB/BNP ομολογία έχει περίπλοκη δομή και πολλούς αντισυμβαλλομένους, η ομολογία μοιάζει να ενσωματώνει swaps μεταξύ των αντισυμβαλλομένων, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.4 και αναλύεται περαιτέρω στις συνιστώσες της ομολογίας. Παρακάτω, περιγράφεται η δομή της EIB/BNP ομολογίας, καθώς και η συμμετοχή της τράπεζας BNP Paribas και της αντασφαλιστικής εταιρίας Partner Re:



ΣΧΗΜΑ 1. 4 Η δομή της EIB/BNP Ομολογίας Μακροβιότητας.
(Πηγή: Blake, Cairns & Dowd, 2006)

Η ομολογία μακροβιότητας στην πραγματικότητα αποτελείται από 3 συνιστώσες:

1. Η πρώτη συνιστώσα είναι το μεταβαλλόμενο επιτόκιο της ομολογίας που εκδίδεται από την τράπεζα EIB Paribas, με τη δέσμευση να πληρώσει σε Ευρώ (€).
2. Η δεύτερη συνιστώσα είναι το διαφορετικό επιτόκιο νομισμάτων swar μεταξύ της EIB και της BNP Paribas, στο οποίο η EIB πληρώνει σε ευρώ (€), το οποίο είναι ένα κυμαινόμενο νόμισμα και λαμβάνει στερλίνες (£) που είναι ένα σταθερό νόμισμα. Αυτές οι σταθερές πληρωμές, $\hat{S}(t)$, μπορεί, αλλά δεν θα έπρεπε να είναι ίσες με $\bar{S}(t)$. Το σταθερό επιτόκιο, $\hat{S}(t)$, πρέπει να οριστεί για να διασφαλίσει ότι το swar έχει μηδενική αξία κατά την έναρξη. Συνήθως, αυτό θα απαιτούσε το σταθερό επιτόκιο να είναι κοντά, αλλά όχι ίσο με το $\bar{S}(t)$. Από τη σκοπιά της EIB αυτό αλλάζει τη πρώτη συνιστώσα και η ομολογία κυμαινόμενου επιτοκίου που πληρώνεται σε Ευρώ (€) μετατρέπεται σε μια ομολογία σταθερού επιτοκίου που πληρώνεται σε στερλίνες (£).
3. Και η τρίτη συνιστώσα είναι ότι η ομολογία μοιάζει με ένα swar μακροβιότητας μεταξύ της τράπεζας EIB και της αντασφαλιστικής εταιρίας Partner Re, στην οποία η EIB τράπεζα συναλλάσσει τη σταθερή στερλίνα $\hat{S}(t)$ με την κυμαινόμενη στερλίνα $S(t)$ σε κάθε ημερομηνία πληρωμής για $t=1, \dots, 25$. Επίσης, αποτελεί μια συμφωνία εξωχρηματιστηριακή μεταξύ της γαλλικής τράπεζας BNP και της αντασφαλιστικής εταιρίας Partner Re. Η δεύτερη συνιστώσα τότε γίνεται μια δέσμευση από τη BNP να πληρώσει £ επί $S(t)$ στην EIB, αντί £ επί $\bar{S}(t)$ σε αντάλλαγμα για το κυμαινόμενο νόμισμα Ευρώ (€).

Για αυτόν το λόγο, όπως βλέπουμε στο σχήμα 1.4, οι χρηματοροές του swar μακροβιότητας πραγματοποιούνται μέσω της τράπεζας BNP. Αγνοώντας τον πιστωτικό κίνδυνο, το αποτέλεσμα των δύο swars από την πλευρά της EIB είναι να μετατρέπει το κυμαινόμενο επιτόκιο Ευρώ (€) σε £ επί $S(t)$. Το ενδιάμεσο swar κυμαινόμενου επιτοκίου σε ευρώ (€) για το κυμαινόμενο £ επί $S(t)$,

όπως αναφέρθηκε πιο πάνω, δεν απαιτεί $\hat{S}(t) = \bar{S}(t)$: η τιμή που συμφωνήθηκε για αυτό το swap και το swap μακροβιότητας θα εξαρτηθεί από το επίπεδο που έχει οριστεί το $\hat{S}(t)$.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η δεύτερη συνιστώσα, υπονοεί ότι η EIB και η BNP έχουν μεγάλη πιστωτική έκθεση μεταξύ τους, και με την έκθεση αυτή είναι προφανές ότι αν μη αμερόληπτοι τυχαίοι παράγοντες μεταβληθούν, τότε η αξία του swap θα μετακινηθεί μακριά από το 0. Σε αυτήν την περίπτωση το swap θα γινόταν ένα περιουσιακό στοιχείο στο ένα μέρος και μια υποχρέωση στο άλλο μέρος. Η τρίτη συνιστώσα συνεπάγεται ότι η BNP έχει πιστωτική έκθεση στην Partner Re, αλλά τα δύο μέρη μπορεί να επιθυμούν ή και όχι ασφάλεια για αυτήν την πιστωτική έκθεση.

Με λίγα λόγια, η ομολογία εκδίδεται από την EIB τράπεζα, και μόνο οι επενδυτές καλούνται να αντιμετωπίσουν πιστωτική έκθεση απέναντι στην EIB. Η τράπεζα EIB έχει δεσμευτεί να κάνει πληρωμές που συνδέονται με τη θνησιμότητα σε στερλίνες (£), και στη συνέχεια συμμετέχει και δραστηριοποιείται μαζί με τη BNP τράπεζα για την ομολογία, με σκοπό να κάνει την ανταλλαγή αυτής της δέσμευσης για τη δέσμευση να κάνει πληρωμές με το κυμαινόμενο νόμισμα ευρώ (€).

Αρχικά, η BNP αναλαμβάνει την έκθεση στον κίνδυνο της θνησιμότητας, τον οποία στη συνέχεια θα τον αντισταθμίσει με την αντασφαλιστική εταιρία Partner Re. Έτσι, αν η Partner Re χρεοκοπήσει, αυτό αποτελεί πρόβλημα της BNP τράπεζας, και αν η BNP τράπεζα χρεοκοπήσει, θα αποτελεί πρόβλημα της EIB τράπεζας. Η EIB τράπεζα εξακολουθεί να δεσμεύεται να πληρώνει τους επενδυτές ανεξάρτητα από το αν η Partner Re αντασφαλιστική ή η BNP τράπεζα χρεοκοπήσουν ή όχι.

Από την πλευρά τους οι επενδυτές προστατεύονται από την δέσμευση της EIB ότι θα τους πληρώνει, η οποία υποστηρίζεται από την AAA πιστοληπτική αξιολόγηση της EIB τράπεζας. Και από την πλευρά της η EIB έχει την προστασία από τη δέσμευση της BNP να αναλάβει την έκθεση

στον κίνδυνο της μακροβιότητας της ομολογίας, η οποία υποστηρίζεται από την AA πιστοληπτική αξιολόγηση της BNP και από το γεγονός ότι η BNP αντασφαλίζει με τη σειρά της τον κίνδυνο στην Partner Re. Και τέλος, η BNP έχει την προστασία της αντασφάλισης από την Partner Re, της οποίας η αξιολόγηση είναι επίσης AA.

1.3 Παρατηρήσεις για την EIB/BNP Ομολογίας Μακροβιότητας

- Οι χρηματοροές της ομολογίας έχουν σχεδιαστεί για να βοηθήσουν τα συνταξιοδοτικά προγράμματα να αντισταθμίζουν την έκθεση τους στον κίνδυνο μακροβιότητας και παρέχουν την καταλληλότερη αντιστάθμιση απέναντι σε μια θεωρητική ασφάλεια ζωής που δεσμεύεται να παρέχει ετήσιες πληρωμές προς το πληθυσμό αναφοράς για ένα χρονικό ορίζοντα 25 ετών.
- Επίσης, ο δείκτης επιβίωσης $S(t)$ υπολογίζεται σε συνάρτηση με τα καθαρά ποσοστά θνησιμότητας που δημοσιεύονται στο ONS (Official National Statistics), το οποίο είναι μια αξιόπιστη και εύκολα προσβάσιμη δημόσια πηγή. Αυτό βοηθά στο να καθησυχαστούν οι επενδυτές ότι θα έχουν πλήρη πρόσβαση στα δεδομένα, με σκοπό να αποφευχθεί ο χειρισμός των ποσοστών θανάτου από τις ασφαλιστικές εταιρείες. Επίσης, η χρήση των καθαρών ποσοστών θανάτου βοηθά στην αποφυγή διαφωνιών σχετικά με μεθοδολογίες εξομάλυνσης.
- Οι μεταβολές στη θνησιμότητα πρέπει να παρέχουν μια λογική αντιστοιχία με τις μεταβολές των ραντών θνησιμότητας, και ως εκ τούτου να συμβάλει στη μείωση του βασικού κινδύνου σε ένα χαρτοφυλάκιο, το οποίο θα μπορούσε να αντισταθμιστεί από μια επένδυση πάνω σε μια ομολογία μακροβιότητας.
- Το ποσό του κεφαλαίου που απαιτείται είναι άμεσα συσχετισμένο με τη μείωση της έκθεσης στον κίνδυνο. Αυτό σημαίνει ότι το κεφάλαιο την ομολογίας της BNP τράπεζας αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο διαχείρισης του κινδύνου.

1.4 Χρηματοροές Μίας Ομολογίας Μακροβιότητας

Σύμφωνα με τους Lin και Cox (2005), μια ομολογία μακροβιότητας με κουπόνια βασίζεται στη διαφορά ανάμεσα στους πραγματικούς και στους αναμενόμενους επιζώντες από τον αρχικό αριθμό ασφαλισμένων ενός χαρτοφυλακίου. Ο ασφαλιστής έχει να πληρώσει προκαταβλητέα τους l_{x_0} ασφαλισμένους, ηλικίας x_0 στον αρχικό χρόνο $t = 0$. Ορίζουμε R το ποσό πληρωμής ανά έτος για κάθε ασφαλισμένο και l_{x_0+t} τον αριθμό των επιζώντων στην ηλικία $x_0 + t$ για κάθε $t = 1, 2, \dots, \omega - x_0$, όπου ω είναι η μέγιστη εφικτή ηλικία που μπορεί να φτάσει ο ασφαλισμένος στο χαρτοφυλάκιο. Έτσι, το έτος t ο ασφαλιστής καλείται να πληρώσει το ποσό Rl_{x_0+t} .

Έστω ότι εκδίδεται μια ομολογία με σκοπό να γίνει αντιστάθμιση του κινδύνου που διατρέχει ο ασφαλιστής για το μέρος πληρωμών που αντιστοιχεί στον αριθμό επιζώντων που υπερβαίνουν τον αναμενόμενο αριθμό των επιζώντων. Δεδομένου ότι η ποσότητα \hat{l}_{x_0+t} είναι ο αναμενόμενος αριθμός των επιζώντων στην ηλικία $x_0 + t$, ο ασφαλιστής είναι εκτεθειμένος στο συστημικό κίνδυνο για τη διαφορά $l_{x_0+t} - \hat{l}_{x_0+t}$ σε κάθε έτος t . Η απόκλιση αυτή αναπαριστά την απώλεια του ασφαλιστή για κάθε έτος t και μπορεί να αντισταθμιστεί μέσω τιτλοποίησης.

Οι ποσότητες l_{x_0+t} και \hat{l}_{x_0+t} δεν είναι στοιχεία ενός μόνο ασφαλιστή, αλλά προέρχονται από αξιόπιστες εθνικές στατιστικές υπηρεσίες και είναι ευκολά προσβάσιμες από όλους. Αυτό βοηθάει τους επενδυτές να έχουν πλήρη πρόσβαση στα δεδομένα, να αποφευχθεί ο ηθικός κίνδυνος και εξασφαλίζει ότι δεν θα παραποιηθούν οι αναφορές των ποσοστών θανάτων.

Η ομολογία μακροβιότητας έχει διάρκεια T έτη και πληρώνει συνολικά το κουπόνι RC_t για κάθε έτος t στους επενδυτές. Το αρχικό κεφάλαιο είναι RF με διάρκεια T έτη. Ο ασφαλιστής αγοράζει ασφάλεια (αντασφάλιση) με ασφάλιστρο (P) (premium) τη χρονική στιγμή 0 από την SPC . Το κουπόνι RC_t , που πληρώνει η SPC , μοιράζεται μεταξύ του ασφαλιστή και των επενδυτών (στον ασφαλιστή είναι αποζημίωση και στον επενδυτή είναι κουπόνι από την ομολογία) ανάλογα με την πραγματική θνησιμότητα για κάθε μελλοντικό έτος t , δηλαδή $t = 1, 2, \dots, T$, όπως φαίνεται στον παρακάτω τύπο (Lin & Cox, 2005):

$$RC_t = R(D_t + B_t), \quad (1.5)$$

όπου,

RB_t : είναι οι πληρωμές (αποζημίωση) που λαμβάνει ο ασφαλιστής από την SPC , εάν οι πληρωμές του υπερβούν τις αναμενόμενες πληρωμές για το συγκεκριμένο έτος, και μπορεί να πάρει μέγιστη τιμή το ποσό RC ,

RD_t : είναι οι πληρωμές που λαμβάνει ο επενδυτής από την SPC , είναι αντίστροφες με τις πληρωμές του ασφαλιστή και μπορεί να πάρει μέγιστη τιμή το ποσό RC .

Ο ασφαλιστής πληρώνει το ποσό Rl_{x_0+t} στους ασφαλισμένους και εισπράττει την αποζημίωση RB_t για κάθε έτος $t = 1, 2, \dots, T$ από την SPC , όπου το B_t υπολογίζεται σύμφωνα με τον παρακάτω τύπο (Levantesi, Menzietti & Torri, 2008):

$$(1.6)$$

Οι επενδυτές αγοράζουν στην αξία V την ομολογία μακροβιότητας και λαμβάνουν τις πληρωμές RD_t για κάθε έτος $t=1,2,\dots,T$ από την SPC, όπου το D_t υπολογίζεται σύμφωνα με τον τύπο (Levantesi, Menzietti & Torri, 2008):

$$\begin{aligned}
 D_t &= \begin{cases} 0, & \text{εάν } l_{x_0+t} - \hat{l}_{x_0+t} > C \\ C - B_t, & \text{εάν } 0 < l_{x_0+t} - \hat{l}_{x_0+t} \leq C \\ C, & \text{εάν } l_{x_0+t} - \hat{l}_{x_0+t} \leq 0 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 0, & \text{εάν } l_{x_0+t} - \hat{l}_{x_0+t} > C \\ C - (l_{x_0+t} - \hat{l}_{x_0+t}), & \text{εάν } 0 < l_{x_0+t} - \hat{l}_{x_0+t} \leq C \\ C, & \text{εάν } l_{x_0+t} - \hat{l}_{x_0+t} \leq 0 \end{cases} \quad (1.7) \\
 &= \begin{cases} 0, & \text{εάν } l_{x_0+t} - \hat{l}_{x_0+t} > C \\ C + \hat{l}_{x_0+t} - l_{x_0+t}, & \text{εάν } 0 < l_{x_0+t} - \hat{l}_{x_0+t} \leq C \\ C, & \text{εάν } l_{x_0+t} - \hat{l}_{x_0+t} \leq 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Οι Lin και Cox αναφέρουν ότι οι πληρωμές του ασφαλιστή στους ασφαλισμένους l_{x_0+t} το έτος t , αντισταθμίζονται από τις θετικές χρηματοροές B_t από την αντασφάλιση του χαρτοφυλακίου που λαμβάνει ως αποζημίωση από την SPC.

Έτσι, το κέρδος του ασφαλιστή προκύπτει όπως παρακάτω (Lin & Cox, 2005):

$$\text{Insurer's Net Cash Flow} = Rl_{x_0+t} - B_t = \begin{cases} RC(l_{x_0+t} - C), & \text{εάν } l_{x_0+t} - \hat{l}_{x_0+t} > C \\ R\hat{l}_{x_0+t}, & \text{εάν } 0 < l_{x_0+t} - \hat{l}_{x_0+t} \leq C \\ Rl_{x_0+t}, & \text{εάν } l_{x_0+t} - \hat{l}_{x_0+t} \leq 0. \end{cases} \quad (1.8)$$

Έστω, ότι πρόκειται για μια ομολογία μακροβιότητας με σταθερά κουπόνια RC . Όπως αναφέρθηκε και στην αρχή της ενότητας, οι πληρωμές του ασφαλιστή το έτος t είναι ανάλογες

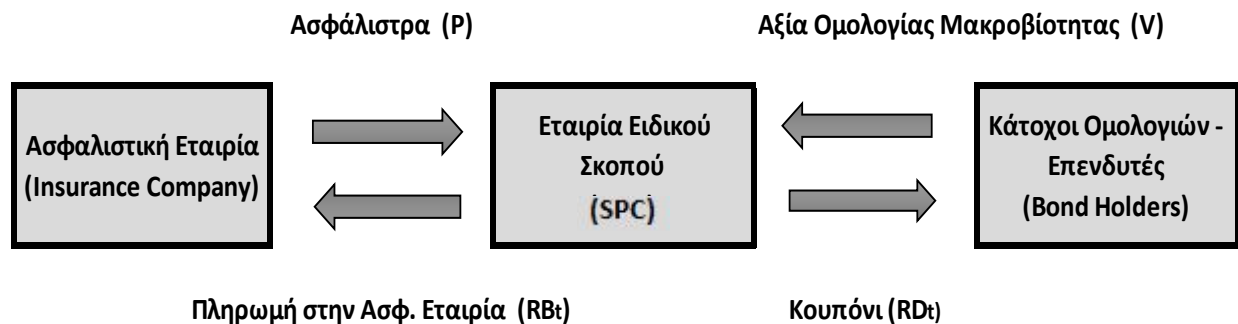
των επιζώντων l_{x_0+t} , ενώ τα ασφάλιστρα πληρώνονται από τον κάθε ασφαλισμένο ανάλογα με τις αναμενόμενες χρηματοροές των \hat{l}_{x_0+t} . Έτσι, πριν από την αγορά της ομολογίας μακροβιότητας η απώλεια του ασφαλιστή εκτιμάται να είναι (Levantesi, Menzietti & Torri, 2008):

$$Loss(t) = R(l_{x_0+t} - \hat{l}_{x_0+t}). \quad (1.9)$$

Ενώ, μετά την αγορά της ομολογίας, όπου πλέον προστίθεται και η θετική ποσότητα αποζημίωσης από την SPC, η απώλεια του ασφαλιστή εκτιμάται να είναι σύμφωνα με τον παρακάτω τύπο (Levantesi, Menzietti & Torri, 2008):

$$Loss(t)^{LB} = Loss(t) - RB_t. \quad (1.10)$$

Παρακάτω, περιγράφονται οι χρηματοροές μεταξύ των SPC, των επενδυτών και του ασφαλιστή:

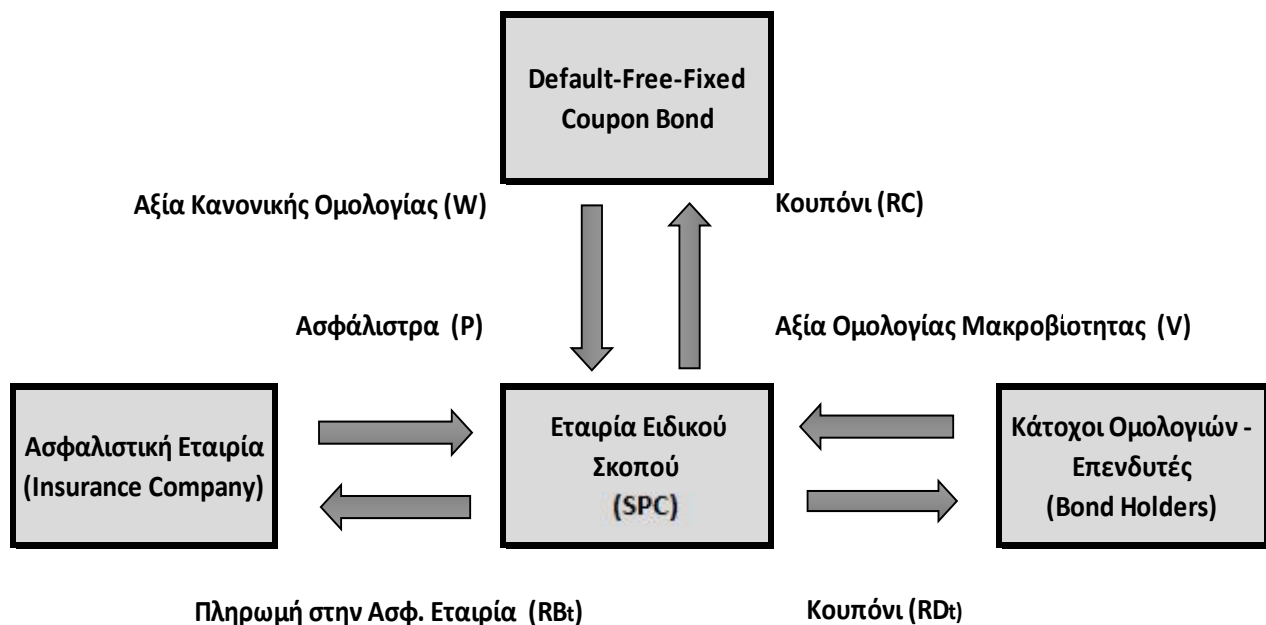


ΣΧΗΜΑ 1. 5 Η δομή μιας Ομολογίας Μακροβιότητας και η χρηματοροές μεταξύ των αντισυμβαλλομένων. (Πηγή: Levantesi, Menzietti & Torri, 2008)

Όπως φαίνεται και από το σχήμα (1.5), η SPC λαμβάνει τα ασφάλιστρα (P) από τον ασφαλιστή προκειμένου να αναλάβει τον κίνδυνο και λαμβάνει την αξία (V) της ομολογίας από τον επενδυτή, στον οποίο μεταφέρεται ο κίνδυνος μακροβιότητας. Τα ασφάλιστρα (P) και η αξία (V) της ομολογίας υπολογίζονται σε συνάρτηση με τον αναμενόμενο πληθυσμό που εκτιμάται ότι θα επιβιώσει. Από την άλλη πλευρά, η SPC, θα πρέπει συνολικά να πληρώσει το ποσό RC, το οποίο

μοιράζεται στον ασφαλιστή και τον επενδυτή, σύμφωνα με τη διαφορά του πραγματικού και αναμενόμενου αριθμού επιζώντων, όπως έχει αναφερθεί και πιο πάνω.

Ας υποθέσουμε ότι η SPC αγοράζει στην τιμή W , μια κανονική ομολογία μηδενικού κινδύνου με ετήσιο κουπόνι RC και αρχικό κεφάλαιο RF , το οποίο αποπληρώνεται τη χρονική στιγμή $t=T$. Επομένως, το σχήμα (1.5) με την προσθήκη της κανονικής ομολογίας διαμορφώνεται ως εξής:



ΣΧΗΜΑ 1. 6 Οι χρηματοροές μιας Ομολογίας Μακροβιότητας μεταξύ των αντισυμβαλλομένων με την προσθήκη της κανονικής ομολογίας από την SPC. (Πηγή: Lin & Cox, 2005)

Η SPC θα εκτελέσει τις δεσμεύσεις ως προς τον ασφαλιστή και τον επενδυτή, αλλά και ως προς τη δική της ασφάλεια που προσφέρει, με πιθανότητα 1, δηλαδή με απόλυτη βεβαιότητα, αν ισχύει (Lin & Cox, 2005):

$$P + V = W. \tag{1.11}$$

Ενώ, η SPC θα έχει κέρδος αν ισχύει:

$$P+V \geq W. \quad (1.12)$$

Η τιμή της κανονικής ομολογίας μηδενικού κινδύνου W που αγοράζει η SPC ισούται με

(Lin & Cox, 2005):

$$P+V \geq W = R F d(0, T) + \sum_{t=1}^T R C d(0, t), \quad (1.13)$$

όπου,

$d(0, t)$: ο προεξοφλητικός παράγοντας για τα έτη $t = 1, \dots, T$,

$d(0, T)$: ο προεξοφλητικός παράγοντας για τα έτος T (στη λήξη της ομολογίας).

Αξίζει να αναφερθεί ότι, ο προεξοφλητικός παράγοντας μηδενικού κινδύνου το έτος t , μπορεί να αντληθεί από την αγορά ομολογιών τη στιγμή της έκδοσης. Επίσης, τη χρονική στιγμή T , η SPC θα έχει τη συσσωρευμένη αξία $P + V - W$ και αυτό είναι θετικό με πιθανότητα 1.

Έτσι, βλέπουμε πως μπορούμε να δημιουργήσουμε μια σύμβαση ομολογίας με κίνδυνο μακροβιότητας, ο οποίος κίνδυνος μακροβιότητας πάνω από T έτη έχει περάσει εξολοκλήρου στην κεφαλαιαγορά.

Η τιμή της ομολογίας μακροβιότητας εκτιμάται με την αναμενομένη παρούσα αξία, όπου η αναμενομένη παρούσα αξία των μελλοντικών χρηματοροών αξιολογείται κάτω από ένα μέτρο μετασχηματισμένη (risk adjusted) πιθανότητας, το οποίο αναλύεται στο Κεφάλαιο 4.

Δεδομένης της ανεξαρτησίας μεταξύ του επιτοκίου και της θνησιμότητας, η τιμή της κανονικής ομολογίας (W), τα ασφάλιστρα (P) και η αξία της ομολογίας μακροβιότητας (V) δίνονται από τους παρακάτω τύπους (Levantesi, Menzietti & Torri, 2008):

$$W = RF(0, T) + RC \sum_{t=1}^T d(0, t), \quad (1.14)$$

$$P = R \sum_{t=1}^T E^*[B_t] d(0, t), \quad (1.15)$$

και

$$V = RFd(0, T) + R \sum_{t=1}^T E^*[D_t] d(0, t), \quad (1.16)$$

όπου, $E^*[B_t]$ και $E^*[D_t]$ είναι η μετασχηματισμένη αναμενόμενη τιμή των B_t και D_t , αντίστοιχα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

SWAPS ΜΑΚΡΟΒΙΟΤΗΤΑΣ

2.1. Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τη ανάλυση δύο ειδών swap μακροβιότητας, το swap μιας πληρωμής και το vanilla swap. Στη συνέχεια θα περιγράψουμε τις χρηματοροές μεταξύ των αντισυμβαλλομένων, μόνο στα σημεία στα οποία διαφοροποιούνται οι χρηματοροές ενός swap μακροβιότητας και μιας ομολογίας μακροβιότητας, οι οποίες αναλύθηκαν στο Κεφάλαιο 1. Στο μεγαλύτερο μέρος, οι χρηματοροές αυτές ισχύουν και για ένα swap μακροβιότητας, καθώς η μονή διαφορά τους είναι ότι το δεύτερο δεν περιέχει το αρχικό κεφάλαιο, μιας και αποτελεί μια συμφωνία ανταλλαγής χρηματοροών.

Πιο αναλυτικά, ένα swap μακροβιότητας είναι μια συμφωνία ανταλλαγής μελλοντικών χρηματοροών, η οποία βασίζεται στο δείκτη θνησιμότητας ή στην υπόθεση επιβίωσης ενός τουλάχιστον τυχαίου επιζώντος. Η EIB/BPN ομολογία, που περιγράφεται στο προηγούμενο κεφάλαιο, είναι ένα swap μακροβιότητας ενσωματωμένο στην EIB ομολογία. Ένα swap μακροβιότητας φέρει μεγάλη ομοιότητα με μια αντασφαλιστική σύμβαση, διότι και τα δύο συχνά χρησιμοποιούν 'swaps' για τις αναμενόμενες πραγματικές πληρωμές ή απαιτήσεις και θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για τον ίδιο σκοπό.

Ωστόσο, υπάρχουν και σημαντικές διαφορές μεταξύ ενός swap μακροβιότητας και μιας αντασφαλιστικής σύμβασης. Πιο συγκεκριμένα το swap μακροβιότητας δεν είναι ασφαλιστήριο συμβόλαιο με τη νομική έννοια και έτσι δεν επηρεάζεται από νομικά χαρακτηριστικά των ασφαλιστηρίων συμβολαίων, όπως είναι η αποζημίωση, το ασφαλιστικό επιτόκιο κ.α. Αντίθετα, τα swap μακροβιότητας υπόκεινται νομικά στις απαιτήσεις της νομοθεσίας των τιτλοποιήσεων

και για αυτό είναι λιγότερο περιοριστικά. Έτσι, για παράδειγμα ένα swap μακροβιότητας επιτρέπει να προβούμε σε εικασίες σχετικά με μια τυχαία μεταβλητή, ενώ ένα ασφαλιστήριο συμβόλαιο όχι. Ομοίως, μια ασφαλιστική σύμβαση απαιτεί από τον ασφαλισμένο να έχει ένα ασφαλιστικό επιτόκιο, ενώ ένα swap μακροβιότητας όχι.

Σύμφωνα με τους Blake, Cairns, και Dowd (2006), ορισμένες ασφαλιστικές εταιρείες είχαν ήδη συνάψει swaps μακροβιότητας εξωχρηματιστηριακά. Η αγορά ήταν σε αρχικό στάδιο και συγκεκριμένα στοιχεία ήταν δύσκολο να γίνουν αντιληπτά, αλλά σε ανεπίσημες συζητήσεις με επαγγελματίες ένας αριθμός αντασφαλιστικών εταιριών πραγματοποιούσαν συναλλαγές εξωχρηματιστηριακά με vanilla swaps μακροβιότητας, στις οποίες το προκαθορισμένο σταθερό επιτόκιο συνδέεται με μια επίσημη προβολή της θνησιμότητας και το κυμαινόμενο επιτόκιο συνδέεται με την πραγματοποιηθείσα θνησιμότητα του αντισυμβαλλομένου.

2.2. Swap Μακροβιότητας μιας πληρωμής

Σύμφωνα με τους Blake, Cairns, και Dowd (2006), το swap μακροβιότητας μιας πληρωμής είναι το πιο απλό είδος swap μακροβιότητας. Η δομή του περιλαμβάνει την ανταλλαγή μιας ενιαίας προκαθορισμένης πληρωμής για μια τυχαία πληρωμή εξαρτώμενη από τη θνησιμότητα. Πιο συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι κατά τη χρονική στιγμή 0, δύο εταιρείες συμφωνούν να ανταλλάξουν ένα προκαθορισμένο ποσό $K(t)$ για ένα τυχαίο ποσό $S(t)$ σε κάποια μελλοντική χρονική στιγμή t . Όπως συμβαίνει με μια τυπική σύμβαση μελλοντικού επιτοκίου (forward rate agreement, FRA), το ποσό $K(t)$ μπορεί να ερμηνευθεί ως ένα κουπόνι που σχετίζεται με το απεριόριστο πλασματικό κεφάλαιο για να κρατήσει τον αμοιβαίο πιστωτικό κίνδυνο χαμηλά. Η συμφωνία καθορίζει ότι τα δύο μέρη ανταλλάσσουν μόνο τη καθαρή διαφορά μεταξύ των δύο ποσών πληρωμής.

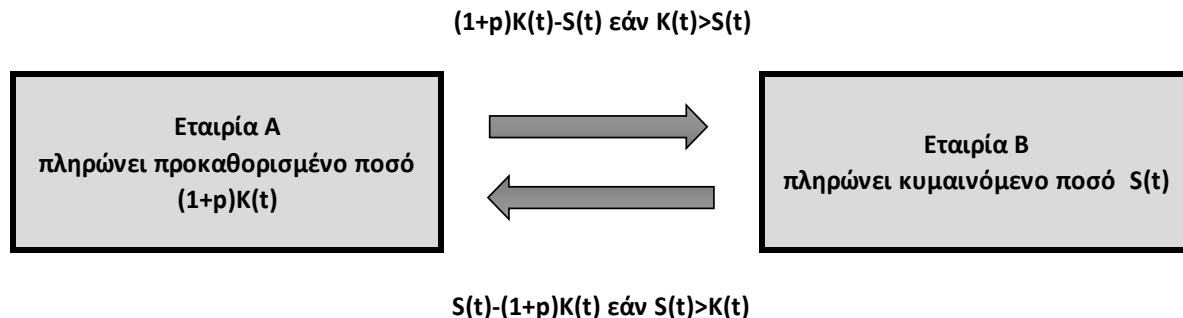
Για παράδειγμα, έστω η εταιρεία A πληρώνει στην εταιρεία B το ποσό $K(t) - S(t)$, εάν ισχύει $K(t) > S(t)$ και η B πληρώνει στην A το ποσό $S(t) - K(t)$, εάν ισχύει $S(t) > K(t)$. Το ποσό $S(t)$ έχει σχέση με τον αριθμό των ατόμων από έναν καθορισμένο πληθυσμό αναφοράς που μπορεί να είναι το σύνολο του πληθυσμού ή τον αριθμό των ασφαλισμένων τη χρονική στιγμή 0, που επιβίωσαν τη χρονική στιγμή t. Το ποσό $K(t)$ έχει σχέση με τον αναμενόμενο αριθμό των ατόμων που επιβιώνουν σύμφωνα με τις εκάστοτε εκτιμήσεις τη χρονική στιγμή 0. Εκ των υστέρων, η εταιρεία A επωφελείται αν το $S(t)$ αποδειχθεί πως έχει υψηλή συσχέτιση με το $K(t)$ και έχει απώλεια, εάν το $S(t)$ αποδειχθεί να έχει χαμηλή συσχέτιση. Αντίστοιχα, η εταιρεία A έχει μια μακρά έκθεση στο $S(t)$, ενώ η B έχει μικρή έκθεση στο $S(t)$.

2.3. Vanilla Swap Μακροβιότητας

Το swap μακροβιότητας μιας πληρωμής που περιγράφεται στην ενότητα 2.2, αποτελεί ένα από τα βασικά στοιχεία του πυρήνα ενός vanilla swap μακροβιότητας, στην οποία τα μέρη συμφωνούν να ανταλλάξουν μια σειρά περιοδικών πληρωμών δηλαδή, για κάθε $t = 1, 2, \dots, T$ μέχρι τη λήξη της συμφωνίας ανταλλαγής το έτος T. Οι Blake, Cairns, και Dowd (2006) αναφέρουν ότι το vanilla swap μακροβιότητας ενσωματώνει και το συντελεστή του ασφάλιστρο p , το οποίο μπορεί να είναι θετικό, 0 ή αρνητικό. Επομένως οι χρηματοροές που αναλύονται στην ενότητα 2.2 διαμορφώνονται ως εξής: η εταιρεία A πληρώνει στην εταιρεία B το ποσό $(1 + p)K(t) - S(t)$, εάν ισχύει $K(t) > S(t)$ και η B πληρώνει στην A το ποσό $S(t) - (1 + p)K(t)$, εάν ισχύει $S(t) > K(t)$.

Σχετικά με το ασφάλιστρο p , τη χρονική περίοδο $t=0$ θα πρέπει να οριστεί έτσι ώστε η αρχική αξία του swap να είναι 0 και στη πορεία με τη πάροδο του χρόνου να διαμορφωθεί σύμφωνα με τις τιμές του $S(t)$, το οποίο θα εκτιμάται σύμφωνα με τον πραγματικό αριθμό επιζώντων.

Σχηματικά οι παραπάνω χρηματοροές παρουσιάζονται στο παρακάτω σχήμα :



ΣΧΗΜΑ 2. 1 Οι χρηματοροές ενός Vanilla Swap Μακροβιότητας τη χρονική στιγμή t .
(Πηγή: Blake, Cairns & Dowd, 2006)

Ένα vanilla longevity swap (VLS) είναι ανάλογο ενός interest-rate swap (IRS), το οποίο περιλαμβάνει ένα σταθερό μέρος και ένα κυμαινόμενο συνήθως συναφές με ένα επιτόκιο αγοράς, όπως το LIBOR. Ωστόσο, υπάρχουν βασικές διαφορές. Το σταθερό μέρος του IRS καθορίζει τις πληρωμές που παραμένουν σταθερές στο χρόνο, ενώ το αντίστοιχο μέρος του VLS περιλαμβάνει προκαθορισμένες πληρωμές που ελαττώνονται με την πάροδο του χρόνου, σύμφωνα με το δείκτη επιζώντων που αναμένονται το έτος 0. Επίσης, το κυμαινόμενο μέρος του IRS είναι συνδεδεμένο με ένα επιτόκιο αγοράς, ενώ το κυμαινόμενο μέρος του VLS εξαρτάται από την πραγματική τιμή του δείκτη επιζώντων το έτος t . Τέλος, το IRS μπορεί να εκτιμηθεί με βάση μια κατάσταση που δεν υπάρχει arbitrage λόγω της ύπαρξης της ρευστότητας στην αγορά ομολογιών, ενώ για ένα VLS αυτή δεν είναι μια περίπτωση που μπορεί να εκτιμηθεί σε ένα ελλιπές περιβάλλον των αγορών.

2.4. Παρατηρήσεις Swap Μακροβιότητας

Αξίζει να επισημάνουμε μερικές παρατηρήσεις για τα swaps μακροβιότητας, προκειμένου να αναφερθούν μερικά ενδιαφέροντα χαρακτηριστικά και κάποια πλεονεκτήματα τους (Blake, Cairns, & Dowd, 2006):

- Οι αντισυμβαλλόμενοι ενός swap μπορεί να είναι από τη μια πλευρά ένας ασφαλιστής που επιθυμεί να διαχειριστεί τον κίνδυνο για το χαρτοφυλάκιο του, ενώ από την άλλη πλευρά μπορεί να είναι ένας οργανισμός κεφαλαιαγοράς που επιθυμεί να αποκτήσει έκθεση σε κίνδυνο μακροβιότητας.

- Ένα swap μακροβιότητας μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για να βοηθήσει τις εταιρίες που αναλαμβάνουν προγράμματα ζωής και συνταξιοδοτικά προγράμματα, να διαχειριστούν τους φυσικούς αντισταθμιστικούς παράγοντες απεριόριστα από τις θέσεις τους. Ο τύπος του swap, στην περίπτωση αυτή μπορεί να είναι ένα κυμαινόμενο προς κυμαινόμενο swap, με ένα κυμαινόμενο μέρος συνδεδεμένο με τους παρόχους των συνταξιοδοτικών των ετήσιων πληρωμών και το άλλο μέρος με την ασφάλιση πληρωμών των ασφαλίσεων ζωής (Lin & Cox, 2005).

- Μετά τη σύναψη ενός swap μακροβιότητας, μπορεί να αλλάξουν οι συνθήκες και ένα μέλος να θελήσει να αλλάξει την επιθυμητή έκθεσή του στον κίνδυνο. Έτσι, το swap παρέχει πιο ευέλικτα μέσα για την αλλαγή της έκθεσης στον κίνδυνο σε σχέση με άλλα μέσα τιτλοποίησης.

- Τα swaps, ακόμη και όταν υπάρχουν εναλλακτικές λύσεις, προσφέρουν στους ενδιαφερόμενους τους λιγότερο δαπανηρούς τρόπους διαχείρισης των κινδύνων μακροβιότητας.

- Δεδομένου ότι οι ανταλλαγές πληρωμών προορίζονται για συγκεκριμένες χρονικές περιόδους και καθορισμένους πληθυσμούς, οι επιχειρήσεις θα μπορούσαν να χρησιμοποιούν τέτοια swaps για να διαχειριστούν την έκθεσή τους. Για παράδειγμα, οι επιχειρήσεις σε διαφορετικές χώρες μπορούν να χρησιμοποιούν τέτοια swaps για να διαφοροποιήσουν την έκθεση τους στον κίνδυνο μακροβιότητα.

- Τέλος, τα swaps μακροβιότητας μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να γίνουν υποθέσεις, προβλέψεις και εικασίες σχετικά με τον κίνδυνο της μακροβιότητας.

2.5. Χρηματοροές ενός Swap Μακροβιότητας

Σύμφωνα με τους Lin και Cox (2005), οι ίδιες χρηματοροές, όπως στην ομολογία μακροβιότητας, μπορεί να πραγματοποιηθούν και με ένα παράγωγο προϊόν swap μακροβιότητας, το οποίο πληρώνει B_t στους ασφαλιστές και D_t στους ομολογιούχους, δηλαδή τους επενδυτές. Η διαφορά είναι ότι δεν υφίσταται το αρχικό κεφάλαιο F , έτσι δεν γίνεται η καταβολή του τη χρονική στιγμή T , το οποίο συνεπάγεται ότι χωρίς το αρχικό κεφάλαιο ως εγγύηση, οι πληρωμές του swap υπόκεινται σε κίνδυνο αντισυμβαλλομένου, στην περίπτωση που κάποιο μέλος αθετήσει και δεν εκπληρώσει τις υποχρεώσεις του.

Ας υποθέσουμε ότι δεν υπάρχει ο κίνδυνος αντισυμβαλλομένου, σε μια ισοδύναμη σύμβαση swap με την ομολογία μακροβιότητας. Τότε, η καταβολή της πληρωμής των ασφαλιστρών (P) τη χρονική στιγμή $t=0$ μπορεί να αντικατασταθεί με σταθερές ετήσιες πληρωμές x , δηλαδή ισχύει (Lin & Cox, 2005):

$$P = x \sum_{t=1}^T d(0,t). \quad (2.1)$$

Έτσι, κάθε χρόνο ο ασφαλιστής πληρώνει το ποσό x στην SPC και παίρνει ένα κυμαινόμενο κέρδος (αποζημίωση) B_t για κάθε $t = 1, 2, \dots, T$ και δεν υπάρχουν άλλες πληρωμές από την πλευρά του ασφαλιστή. Όσο δεν υπάρχει ο κίνδυνος αντισυμβαλλομένου, ο ασφαλιστής μπορεί να έχει από την αντασφάλιση το ίδιο κέρδος και από ένα swap μακροβιότητας.

Στη θέση της πληρωμής V , η οποία σε μια ομολογία μακροβιότητας εκφράζει την αξία της ομολογίας, οι επενδυτές μπορούν να πληρώνουν ένα σταθερό ποσό y κάθε χρόνο, προκειμένου να λαμβάνουν τα ίδια κουπόνια και σε αντιστοιχία με μια ομολογία, για το swap έχουμε (Lin & Cox, 2005):

$$y \sum_{t=1}^T d(0,t) + RFd(0,T) = \sum_{t=1}^T E^* [D_t] d(0,t) + RFd(0,T), \quad (2.2)$$

όπου, RF το αρχικό κεφάλαιο υπολογισμένο με το προεξοφλητικό επιτόκιο αγοράς της ομολογίας.

Όπως έχει αναφερθεί και πιο πάνω, σε ένα swar μακροβιότητας το αρχικό κεφάλαιο RF δεν υφίσταται στις πληρωμές ενός swar, επομένως η σχέση (2.2) διαμορφώνεται όπως παρακάτω (Lin & Cox, 2005):

$$y \sum_{t=1}^T d(0,t) = \sum_{t=1}^T E^* [D_t] d(0,t). \quad (2.3)$$

Στη συνέχεια, η SPC λαμβάνει τα ποσά $x + y$, τα οποία είναι αρκετά για να ανταποκριθεί στις υποχρεώσεις της που είναι οι πληρωμές $D_t + B_t$. Αν δεν υπήρχε η πιθανότητα αθέτησης των υποχρεώσεων, των σταθερών πληρωμών, η SPC θα έχει πάντοτε αρκετά χρήματα για να καλύψει τις υποχρεώσεις της.

Σε αυτήν την περίπτωση το swar μπορεί να αντικαταστήσει μια ομολογία μακροβιότητας. Ένα πλεονέκτημα ενός swar μακροβιότητας σε σχέση με μια ομολογία μακροβιότητας είναι ότι δεν υπάρχουν τα έξοδα αγοραπωλησίας, ενώ αντίθετα, ένα μειονέκτημα είναι ότι πρόκειται για ένα εξωρηματιστηριακό προϊόν που σημαίνει ότι εισάγει τον κίνδυνο αθέτησης από τους αντισυμβαλλομένους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΆΛΛΑ ΠΡΟΪΟΝΤΑ ΑΝΤΙΣΤΑΘΜΙΣΗΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΜΑΚΡΟΒΙΟΤΗΤΑΣ

3.1. Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό, περιγράφονται μερικά προϊόντα παραγώγων που σκοπό έχουν την αντιστάθμιση του κινδύνου μακροβιότητας. Η Swiss Re ομολογία μακροβιότητας και η EIB/BNP ομολογία μακροβιότητας, αποτέλεσαν τα πρώτα προϊόντα αντιστάθμισης του κινδύνου μακροβιότητας και ήταν κίνητρο έμπνευσης των εκδοτών παραγώγων για να εφεύρουν τέτοιου είδους προϊόντα. Όταν μια νέα αγορά είναι σε ανάπτυξη, οι τράπεζες επενδύσεων δεν χρειάζονται πολύ χρόνο να δημιουργήσουν χρηματοοικονομικά προϊόντα. Συνήθως, οι επενδυτικές τράπεζες που έχουν και το ρόλο του εκδότη προσφέρουν ποικιλία παραγώγων αντιστάθμισης.

Τα πλεονέκτημα αυτών των προϊόντων είναι η αντιστάθμιση και η απελευθέρωση κεφαλαίων από τον κίνδυνο μακροβιότητας. Παρακάτω, αναλύονται, οι χρηματοροές ενός JP Morgans q-forward για ένα χαρτοφυλάκιο ζωής και για ένα συνταξιοδοτικό πρόγραμμα. Επίσης, παρουσιάζονται τα longevity options, συγκεκριμένα τα Longevity Caps, Longevity Floors και το Swaption. Τέλος, περιγράφεται η δομή μιας μεθόδου εξαγοράς συνταξιοδοτικού προγράμματος (pension buyouts).

3.2. JP Morgans q-forward

Οι Coughlan et al (2007), αναφέρουν ότι τα παράγωγα προϊόντα q-forwards είναι απλές πράξεις στις κεφαλαιαγορές για τη μεταφορά του κινδύνου μακροβιότητας. Αποτελούν τα βασικά δομικά στοιχεία από τα οποία παράγονται πολλά άλλα πιο σύνθετα παράγωγα προϊόντα και μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να παρέχουν μια αποτελεσματική αντιστάθμιση του κινδύνου μακροβιότητας ενός χαρτοφυλακίου ασφαλειών ζωής ή συνταξιοδοτικών προγραμμάτων, επιτρέπουν τη μεταφορά του κινδύνου σε χρηματοοικονομικούς επενδυτές, οι οποίοι για να

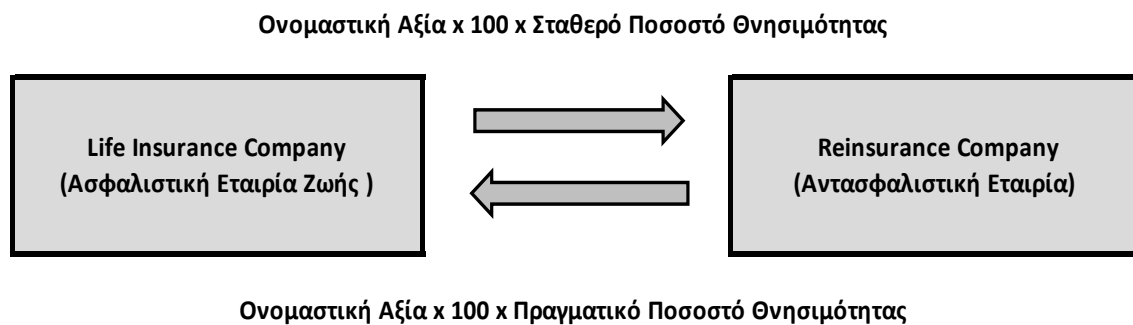
αναλάβουν τον κίνδυνο της μακροβιότητας απαιτούν ένα ασφάλιστρο και έτσι τα μελλοντικά ποσοστά θνησιμότητας, στα οποία τα q-forward συναλλάσσονται είναι τα αναμενόμενα ή η "καλύτερη εκτίμηση" των ποσοστών θνησιμότητας.

Η JP Morgan εισήγαγε τα q-forward τον Ιούλιο του 2007. Πρόκειται για μια συμφωνία μεταξύ δύο μερών για την ανταλλαγή ενός ποσού σε μια μελλοντική ημερομηνία (λήξη της σύμβασης). Η ανταλλαγή αυτή, είναι ανάλογη με το πραγματικό ποσοστό θνησιμότητας του πληθυσμού σε αντάλλαγμα με ένα ποσό ανάλογο με ένα σταθερό ποσοστό θνησιμότητας που έχει αμοιβαία συμφωνηθεί κατά την έναρξη της συμφωνίας. Με άλλα λόγια, ένα q-forward είναι ένα zero coupon swap που ανταλλάσσει τη σταθερή θνησιμότητα για τη πραγματική θνησιμότητα κατά τη λήξη. Η πρώτη σύμβαση q-forward έγινε τον Ιανουάριο του 2008, μεταξύ της Lucida plc, μιας νέας τότε ασφαλιστικής εταιρίας και της JP Morgan, ενώ τα ποσοστά θνησιμότητας λαμβάνονταν από το Life Metrics Longevity Index.

Το επιτόκιο αναφοράς είναι το πραγματικό ποσοστό θνησιμότητας, όπως καθορίζεται από το δείκτη θνησιμότητας. Αν το πραγματικό επιτόκιο στο έτος αναφοράς είναι κάτω από το σταθερό επιτόκιο, ο διακανονισμός είναι θετικός, και ο ασφαλιστής λαμβάνει την πληρωμή διακανονισμού για να αντισταθμίσει την αύξηση της αξίας της ευθύνης του. Εάν το επιτόκιο αναφοράς είναι πάνω από το σταθερό επιτόκιο, τότε ο διακανονισμός είναι αρνητικός και ο ασφαλιστής πληρώνει στον πάροχο αντιστάθμισης για την πτώση της αξίας των υποχρεώσεών του.

Ο κίνδυνος μακροβιότητας αντανάκλα την πιθανότητα το ποσοστό θνησιμότητας να είναι υψηλότερο από το αναμενόμενο ποσοστό και είναι ο μεγαλύτερος κίνδυνος που αντιμετωπίζουν οι ασφαλιστικές εταιρίες στο χαρτοφυλάκιο ζωής. Συγκεκριμένα, εάν τα ποσοστά θνησιμότητας είναι υψηλότερα από τα αναμενόμενα ποσοστά, τότε μια ασφαλιστική εταιρεία ζωής πρέπει να πληρώσει ένα μεγαλύτερο ποσό από το αναμενόμενο για τις παροχές θανάτου.

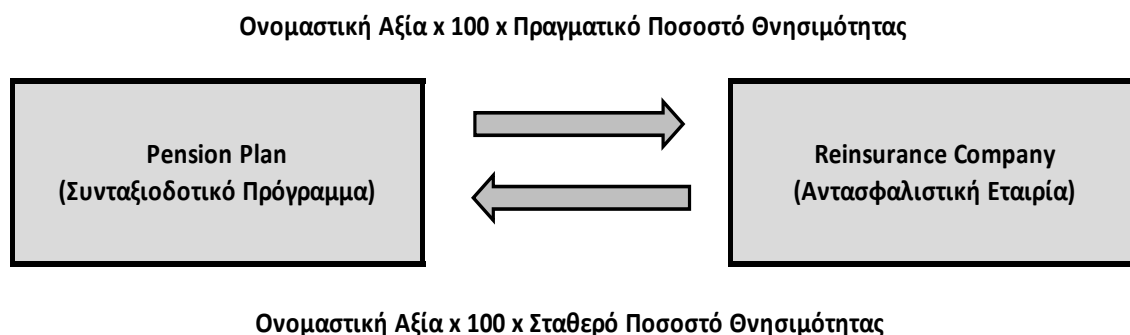
Για να αντισταθμίσει τον κίνδυνο αυτό, ο ασφαλιστής μπορεί να συνάψει συμβάσεις q-forward με τις οποίες καταβάλλει ποσά με σταθερά ποσοστά θνησιμότητας και λαμβάνει ποσά με πραγματικά ποσοστά θνησιμότητας. Στη λήξη, η σύμβαση αντιστάθμισης του κινδύνου, θα πληρώσει στον ασφαλιστή ένα ποσό το οποίο αυξάνεται εάν τα ποσοστά θνησιμότητας αυξάνονται για να αντισταθμίσει τις αντίστοιχες περισσότερες πληρωμές στο χαρτοφυλάκιο ζωής. Οι χρηματοροές αυτές απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα:



ΣΧΗΜΑ 3. 1 Οι χρηματοροές ενός Q-forward μιας Ασφαλιστικής Εταιρίας Ζωής.
(Πηγή: Coughlan et al, 2007)

Για ένα συνταξιοδοτικό πρόγραμμα, οι χρηματοροές είναι αντίθετες από αυτές ενός χαρτοφυλακίου ζωής. Ο ασφαλιστής λαμβάνει ποσά με τα σταθερά ποσοστά θνησιμότητας και πληρώνει ποσά με τα πραγματικά ποσοστά θνησιμότητας. Στην περίπτωση αυτή, έχουμε ένα χαρτοφυλάκιο με q-forwards, το οποίο παρέχει αντιστάθμιση στην αξία των συνταξιοδοτικών υποχρεώσεων και σταθεροποιεί την αξία των υποχρεώσεων αυτών σε κάποια μελλοντική ημερομηνία για τις μεταβολές των ποσοστών θνησιμότητας.

Οι χρηματοροές αυτές απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα:



ΣΧΗΜΑ 3. 2 Οι χρηματοροές ενός Q-forward για ένα Συνταξιοδοτικό Πρόγραμμα.
(Πηγή: Coughlan et al, 2007)

Η τιμολόγηση των q-forwards είναι παρόμοια με τη τιμολόγηση των άλλων forward-rate συμβάσεων, όπως τα interest rate forwards. Επειδή οι επενδυτές απαιτούν αποζημίωση με τη μορφή ενός ασφαλιστρου κινδύνου (risk premium) για να αναλάβουν τον κίνδυνο μακροβιότητας, τα μελλοντικά ποσοστά θνησιμότητας κατά τα οποία τα q-forwards θα κάνουν τις συναλλαγές βρίσκονται κάτω από τα αναμενόμενα ή από την «καλύτερη εκτίμηση» των ποσοστών θνησιμότητας. Η αναμενόμενη απόδοση για τον επενδυτή και το αντίστοιχο κόστος για το hedging ενός q-forward είναι ουσιαστικά μόνο η παρούσα αξία της διαφοράς μεταξύ του επιτοκίου και της ‘καλύτερης εκτίμησης’ ποσοστού κατά τη λήξη της σύμβασης.

3.3. Μέθοδος εξαγοράς συνταξιοδοτικού προγράμματος

Σύμφωνα με τους Biffis & Blake (2009), ο πιο άμεσος τρόπος για ένα συνταξιοδοτικό πρόγραμμα να μειώσει την έκθεση του στην βελτίωση του επιπέδου της θνησιμότητας είναι να μεταφέρει μέρος των υποχρεώσεών του σε κάποιον αντισυμβαλλόμενο. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με κάποιο ασφαλιστήριο συμβόλαιο, όταν ο αντισυμβαλλόμενος είναι μια ασφαλιστική ή αντασφαλιστική εταιρία, καθώς και όταν αλλάζει ο εργοδότης που σημαίνει ότι αλλάζει και ο πληρωτής των ασφαλιστικών εισφορών. Από το 2006, στο Ηνωμένο Βασίλειο, έχει αναπτυχθεί μια ενεργή αγορά

σχετικά με τις μεθόδους εξαγοράς συνταξιοδοτικού προγράμματος (Pension Buyout), με μεγάλη προσέλκυση συμμετεχόντων στις χρηματοπιστωτικές αγορές. Αξίζει να αναφερθεί ότι η εταιρία Paternoster, έκανε την πρώτη συμφωνία Buyout με τη Cuthbert Heath Family plan το Νοέμβριο του 2006.

Η συναλλαγή ενός Pension Buyout συνεπάγεται τη μεταβίβαση των περιουσιακών στοιχείων και υποχρεώσεων ενός συνταξιοδοτικού προγράμματος σε μια οργανωμένη ασφαλιστική εταιρία. Για παράδειγμα, έστω, μια εταιρία με A περιουσιακά στοιχεία και L στοιχεία που παθητικού (υποχρεώσεις), τα οποία αποτιμώνται σε συνεχή βάση από το αναλογιστικό τμήμα. Όταν τα περιουσιακά στοιχεία A δεν επαρκούν για να καλύψουν τις υποχρεώσεις L , δηλαδή ισχύει $A < L$, η εταιρία έχει έλλειμμα ίσο με $L - A$. Όταν $A > L$ η εταιρία έχει πλεόνασμα ίσο με $A - L$.

Οι ασφαλιστικές εταιρίες συνήθως απαιτούν η εκτίμηση των υποχρεώσεων να γίνεται με πιο συντηρητικές υποθέσεις (σχετικά με τις μελλοντικές βελτιώσεις της θνησιμότητας, τα ποσοστά πληθωρισμού, και τις αποδόσεις της αγοράς) από τα συνταξιοδοτικά προγράμματα, με αποτέλεσμα την αποτίμηση $\tilde{L} > L$ για τις υποχρεώσεις. Αυτές οι αυξήσεις σημαίνουν έλλειμμα ή μειώνουν το πλεόνασμα, όταν μια εταιρεία προσεγγίζει μια ασφαλιστική εταιρία για την εξαγορά των συνταξιοδοτικών στοιχείων του ενεργητικού και των συνταξιοδοτικών υποχρεώσεων. Στην περίπτωση ελλείμματος, μια εταιρεία δανείζεται το ποσό $\tilde{L} - A$ και πληρώνει σε μια ασφαλιστική εταιρία προκειμένου να εξαγοράσει τα συνταξιοδοτικά περιουσιακά στοιχεία και τις υποχρεώσεις της.

Η συναλλαγή επιτρέπει στον εργοδότη να κρατάει έξω από τον ισολογισμό της εταιρίας τις συνταξιοδοτικές υποχρεώσεις. Αυτό σημαίνει ότι η μεταβλητότητα των περιουσιακών στοιχείων και των υποχρεώσεων που συνδέονται με λογαριασμούς των συνταξιοδοτικών προγραμμάτων, τα

τέλη διαχείρισης των περιουσιακών στοιχείων του συνταξιοδοτικού προγράμματος καθώς και κάθε τέλη που επιβάλλονται για την ασφαλιστική κάλυψη των μελών, δεν υφίστανται.

Στην περίπτωση που το κόστος του pension buyout μπορεί να χρηματοδοτηθεί με δανεισμό, το δάνειο μπορεί να αντικαταστήσει τα συνταξιοδοτικά περιουσιακά στοιχεία και τις υποχρεώσεις στον ισολογισμό της εταιρίας. Από την πλευρά των μελών του συνταξιοδοτικού προγράμματος, οι συντάξεις εξασφαλίζονται στο ακέραιο από τη φερεγγυότητα του ασφαλιστικού φορέα.

Εκτός από τις πλήρης buyout συναλλαγές, υπάρχουν και εναλλακτικές λύσεις. Υπάρχουν τα μερικώς buyout, τα οποία περιλαμβάνουν τη μεταφορά των υποχρεώσεων που προέρχονται από κάποια υποομάδα των μελών ή που πρέπει να πληρωθούν για κάποιο περιορισμένο χρονικό ορίζοντα. Αυτές οι συμφωνίες είναι συνήθως μέρος μιας ευρύτερης στρατηγικής για τη μείωση της έκθεσης στον κίνδυνο που περιέχει ένα συνταξιοδοτικό πρόγραμμα ή τείνει προς κάποια επενδυτική στρατηγική αντιστάθμισης των υποχρεώσεων.

3.4. Option Μακροβιότητας

Οι Blake, Cairns, & Dowd (2006) αναφέρουν ότι οι πληρωμές ενός option μακροβιότητας ακολουθούν μη γραμμική συνάρτηση των μεταβλητών και είναι φυσικό να δημιουργείται ο προβληματισμός για το λόγο που οι αντισυμβαλλόμενοι θα προτιμήσουν ένα τέτοιο παράγωγο προϊόν με μη γραμμικές πληρωμές, δηλαδή μη σταθερές πληρωμές. Η απάντηση είναι ότι ένα τέτοιο παράγωγο προϊόν μπορεί να είναι χρήσιμο για αυτούς που θέλουν να αντισταθμίσουν το μειονέκτημα που έχουν σχετικά με την έκθεση στον κίνδυνο της μακροβιότητας. Επίσης, μπορεί να είναι χρήσιμο για αυτούς που θέλουν να κερδοσκοπήσουν από την πλευρά της μεταβλητότητας των χρηματοροών που προκύπτουν από τα ποσοστά του δείκτη θνησιμότητας. Η αποτίμηση των options και η διαχείριση του κινδύνου απαιτεί τη χρήση ενός καλού στοχαστικού μοντέλου για την θνησιμότητα.

Ένα είδος option μακροβιότητας είναι τα Longevity Caps and Longevity Floors. Η βασική ιδέα στα Longevity Caps και Longevity Floors είναι η χρήση του δείκτη $S(t, x)$ ως σημείο αναφοράς.

Έστω ότι $S_c(t)$ το ποσοστό Cap και $S_f(t)$ το ποσοστό Floor για το έτος t . Ένα Caplet πληρώνει εάν $\max\{S(t, x) - S_c(t), 0\}$ και ένα Floorlet πληρώνει εάν $\max\{S(t, x) - S_f(t), 0\}$. Στη συνέχεια τα Longevity Caplets και Longevity Floorlet ενσωματώνονται στα Longevity Caps και Longevity Floors.

Επίσης, ένα swaption είναι ένα χρηματοοικονομικό παράγωγο προϊόν, το οποίο παρέχει στον επενδυτή το δικαίωμα (option) να συνάψει ένα swap μακροβιότητας και είναι κατάλληλο για την αντιστάθμιση του κινδύνου μακροβιότητας. Υπάρχουν δύο είδη swaptions, το payer swaption και το receiver swaption, όπως περιγράφονται παρακάτω, σύμφωνα με τον Γκλεζάκο (2015) και τους Blake, Cairns & Dowd (2006).

Εάν το υποκείμενο swap είναι ένα vanilla longevity swap, το swaption μπορεί να είναι ένα payer swaption δίνοντας στον επενδυτή το δικαίωμα να συνάψει ένα swap ως υπόχρεος καταβολής του σταθερού επιτοκίου και δικαιούχος είσπραξης του κυμαινόμενου επιτοκίου, ή το swaption μπορεί να είναι ένα receiver swaption δίνοντας στον επενδυτή το δικαίωμα να συνάψει ένα swap ως υπόχρεος καταβολής του κυμαινόμενου επιτοκίου και δικαιούχος είσπραξης του σταθερού επιτοκίου. Όπως και με τα συμβατικά swaptions, ένα payer swaption μπορεί να θεωρηθεί ως ένα δικαίωμα πώλησης (put) ανάλογα με τα ποσοστά επιβίωσης, καθώς η αξία του θα ανέβαινε αν μειώνονταν τα ποσοστά επιβίωσης και ένα receiver swaption μπορεί να θεωρηθεί ως ένα δικαίωμα αγοράς (call), καθώς η αξία του θα ανέβαινε αν αυξάνονταν τα ποσοστά επιβίωσης. Σύμφωνα με τον Γκλεζάκο (2015), το swaption μπορεί να είναι Αμερικάνικο, όπου ο επενδυτής έχει το δικαίωμα να πραγματοποιήσει την ανταλλαγή χρηματοροής οποτεδήποτε ή μπορεί να είναι Ευρωπαϊκό, όπου ο επενδυτής έχει το δικαίωμα να πραγματοποιήσει την ανταλλαγή χρηματοροής

σε μια καθορισμένη ημερομηνία, ενώ τέλος μπορεί να είναι swaption Βερμούδων, όπου ο επενδυτής έχει το δικαίωμα να πραγματοποιήσει την ανταλλαγή χρηματοροής σε μια σειρά συγκεκριμένων ημερομηνιών.

Με το επιτόκιο ενός swaption, η εγγενής αξία του swap κατά την ημερομηνία άσκησης του δικαιώματος, τείνει να καθιερώσει την τρέχουσα καμπύλη απόδοσης. Ωστόσο, με ένα swap μακροβιότητας, η απόφαση γίνεται ενδιαφέρουσα, δεδομένου ότι τουλάχιστον προς το παρόν δεν υπάρχει κεφαλαιακή αγορά για την τιλοποίηση της μακροβιότητας που θα επιτρέψει να εκτιμηθεί η αξία ενός swap κατά την ημερομηνία άσκησης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΠΡΟΒΟΛΗ ΘΝΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ ΜΕ ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΟΥ LEE-CARTER

4.1. Εισαγωγή

Το πρόβλημα που αντιμετώπιζαν οι επιστήμονες ήταν ότι ο πληθυσμός της χρονικής περιόδου που μελετούσαν, επιβίωνε για παραπάνω έτη από τα αναμενόμενα που είχαν προβλέψει, υστερούσαν δηλαδή στην εκτίμηση μεταβολής της θνησιμότητας. Το πρόβλημα αυτό επηρέαζε άμεσα και τους αναλογιστές, καθώς η μείωση της θνησιμότητας και η συστηματική υποεκτίμησή της ανάγκαζε τις ασφαλιστικές εταιρείες να επανεκτιμούν τις μακροπρόθεσμες υποχρεώσεις τους και να δεσμεύσουν πρόσθετα κεφάλαια για να αυξήσουν τα αποθέματά τους ώστε να παραμείνουν φερέγγυες.

Στο κεφάλαιο αυτό, γίνεται ανάλυση και παρουσίαση του βασικού μοντέλου πρόβλεψης της θνησιμότητας έτσι όπως προτάθηκε από τους Lee και Carter, το 1992. Το μοντέλο αυτό σηματοδότησε την αρχή της βιβλιογραφίας σχετικά με τη στοχαστική πρόβλεψη της θνησιμότητας (Cui, 2008) και είναι μια από τις πιο διαδεδομένες και σχετικά απλές τεχνικές. Αποτελεί ένα από τα πιο σημαντικά στατιστικά μοντέλα για την πρόβλεψη της μελλοντικής θνησιμότητας (Deaton & Paxson, 2004) και είναι σχεδιασμένο για να δίνει μακροχρόνιες προβλέψεις, για αυτό το λόγο χρησιμοποιείται κυρίως στην αποτίμηση προϊόντων ζωής και συντάξεων.

Αρχικά, οι Lee και Carter (1992) ανέπτυξαν αυτήν την προσέγγιση της θνησιμότητας ειδικά για τον πληθυσμό των Η.Π.Α για τη χρονική περίοδο 1933-1987. Σήμερα χρησιμοποιείται ευρέως για όλες τις αιτίες θανάτων σε πολλές χώρες και χρονικές περιόδους. Η εφαρμογή του, έχει δώσει ικανοποιητικά αποτελέσματα για τον Καναδά, τη Χιλή, την Αργεντινή, την Ιαπωνία, το Βέλγιο, τη Σουηδία, την Ιταλία και την Ελλάδα (Μποζίκας, 2013). Επίσης, το μοντέλο Lee-Carter

εφαρμόστηκε για τη σύγκριση της θνησιμότητας σε επιλεγμένες χώρες της Νότιας, Κεντρικής και Βόρειας Ευρώπης (Μαυρομμάτη, 2012).

Το μοντέλο λειτουργεί κάνοντας χρήση ιστορικών δεδομένων θνησιμότητας και περιγράφεται από το λογάριθμο μιας χρονοσειράς ρυθμών θανάτου που αφορούν την ηλικία ως το άθροισμα τριών όρων. Ο πρώτος όρος αφορά στην ηλικία και είναι ανεξάρτητος του χρόνου, ο δεύτερος όρος είναι προϊόν μιας παραμέτρου που μεταβάλλεται με το χρόνο και αντικατοπτρίζει το γενικό επίπεδο της θνησιμότητας και ο τρίτος όρος αφορά την ηλικία και δείχνει πόσο γρήγορα ή αργά μεταβάλλεται η θνησιμότητα σε κάθε ηλικία όταν το γενικό επίπεδο της θνησιμότητας αλλάζει.

Η εκτίμηση που προκύπτει από τη χρονικά μεταβαλλόμενη παράμετρο μοντελοποιείται και προβάλλεται σαν μία χρονοσειρά χρησιμοποιώντας τη μέθοδο ARIMA (Autoregressive Integrated Moving Average Process). Από την πρόβλεψη του γενικού επιπέδου της θνησιμότητας και κάνοντας χρήση των εκτιμώμενων παραμέτρων που εξαρτώνται από την ηλικία, προκύπτουν οι μελλοντικοί ρυθμοί θανάτου (Pitacco, 2009).

4.2. Το μοντέλο Lee-Carter

Το μοντέλο των Lee & Carter (1992) μοντελοποιεί και προβλέπει τον παρατηρούμενο ρυθμό θνησιμότητας $m_{x,t}$ με τη βοήθεια των παραμέτρων a_x , b_x , k_t ως συνάρτηση του χρόνου t και της ηλικίας x σύμφωνα με την παρακάτω σχέση:

$$\ln(m_{x,t}) = a_x + b_x k_t + \varepsilon_{x,t}, \quad (4.1)$$

όπου,

x : η μεταβλητή της ηλικίας για $x = 1, \dots, N$,

t : η μεταβλητή του χρόνου ανά έτος για $t = 1, 2, \dots, T$,

$m_{x,t}$: ο παρατηρούμενος ρυθμός θνησιμότητας στην ηλικία x το έτος t ,

a_x : η μέση θνησιμότητα στην ηλικία x ,

b_x : η απόκλιση από τη μέση θνησιμότητα στην ηλικία x , όταν το γενικό επίπεδο θνησιμότητας k_t αλλάζει,

k_t : το γενικό επίπεδο θνησιμότητας το έτος t ,

$\varepsilon_{x,t}$: το σφάλμα στην ηλικία x το έτος t .

Οι παράμετροι του μοντέλου δεν εκτιμώνται με την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων του κλασσικού μοντέλου παλινδρόμησης, λόγω της ύπαρξης του διγραμμικού όρου $b_x k_t$ στο δεξιό μέλος της εξίσωσης. Η επίλυση της (4.1) για την εκτίμηση των παραμέτρων a_x, b_x, k_t γίνεται με τη μέθοδο Διάσπασης Ιδιαζουσών Τιμών (Singular Value Decomposition - SVD), η οποία περιγράφεται στην ενότητα 4.2.1 (Pitacco et al, 2009).

Συχνά χρησιμοποιείται μια αλγεβρική προσέγγιση της SVD που απλοποιεί τους υπολογισμούς και περιγράφεται στην ενότητα 4.2.2 (Lee & Carter, 1992; Wang, 2007).

Επιπλέον, γίνεται η υπόθεση των παρακάτω περιορισμών:

$$\sum_x b_x = 1, \quad (4.2)$$

$$\text{και } \sum_t k_t = 0. \quad (4.3)$$

Παρατηρήσεις:

- Συχνά στη βιβλιογραφία (Giroso & King, 2007), αντί της (4.2) συναντάμε τη σχέση

$$\sum_x b_x^2 = 1. \text{ Για τη διευκόλυνση των υπολογισμών, στην εφαρμογή μας θα χρησιμοποιηθεί}$$

η σχέση (4.2).

- Η παράμετρος b_x κάποιες φορές μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές για ορισμένες ηλικίες, κάτι που υποδεικνύει ότι σε αυτές τις ηλικίες η θνησιμότητα τείνει να αυξηθεί.
- Η παράμετρος k_t αν πάρει αρνητικές τιμές ή απειρίζεται τότε το ποσοστό στη συγκεκριμένη ηλικία παίρνει την τιμή 0, καθώς αρνητικά ποσοστά θανάτου δεν μπορούν να θεωρηθούν στο μοντέλο αυτό.
- Από εμπειρική εφαρμογή του μοντέλου γίνεται η υπόθεση ότι τα σφάλματα ακολουθούν κανονική κατανομή $\varepsilon_{x,t} \sim N(0, \sigma^2_{\varepsilon_{x,t}})$, είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και απεικονίζουν την απόκλιση του μοντέλου από το λογάριθμο του ρυθμού θνησιμότητας (Girosi & King, 2007).
- Με τη μέθοδο Διάσπασης Ιδιαζουσών Τιμών (Singular Value Decomposition - SVD) προκύπτει μια λύση ελαχίστων τετραγώνων, η οποία δίνει και τα καλύτερα αποτελέσματα για την παράμετρο k_t (Koissi, Shapiro, Hognas, 2005).

4.2.1 Μέθοδος Διάσπασης Ιδιαζουσών Τιμών (SVD)

Η μέθοδος Διάσπασης Ιδιαζουσών Τιμών (Singular Value Decomposition, SVD) είναι μια μέθοδος παραγοντοποίησης πινάκων, δηλαδή εκφράζει έναν πίνακα σε γινόμενο τριών πινάκων. Σε αυτήν την προσέγγιση, η διαφορά από τη μέση τιμή μπορεί να αναλυθεί στις παραμέτρους k_t και a_x , δείχνοντας την επιρροή της θνησιμότητας κατά τη διάρκεια των ετών για κάποια ηλικία (Pitacco et al, 2009).

Έστω, M είναι ο πίνακας θνησιμότητας με διαστάσεις $(x_m - x_1 + 1) \times (t_n - t_1 + 1)$:

$$M = \begin{pmatrix} m_{x_1 t_1} & \cdots & m_{x_1 t_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{x_m t_1} & \cdots & m_{x_m t_n} \end{pmatrix}.$$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα $Z = \ln M - a_x$, με διαστάσεις $(x_m - x_1 + 1) \times (t_n - t_1 + 1)$:

$$Z = \ln M - a_x = \begin{pmatrix} \ln m_{x_1 t_1} - a_{x_1} & \dots & \ln m_{x_1 t_n} - a_{x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \ln m_{x_m t_1} - a_{x_m} & \dots & \ln m_{x_m t_n} - a_{x_m} \end{pmatrix}.$$

Ο πίνακας Z υποδηλώνει την απουσία αλληλεπιδράσεων της ηλικίας και του χρόνου. Δηλαδή, τα b_x είναι σταθερά διατρέχοντας το χρόνο και τα k_t είναι σταθερά διατρέχοντας τις ηλικίες.

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε τα ιδιοδιανύσματα των τετραγωνικών πινάκων $U = Z^T Z$ και $V = Z Z^T$ με διαστάσεις $(t_n - t_1 + 1) \times (t_n - t_1 + 1)$, $(x_m - x_1 + 1) \times (x_m - x_1 + 1)$, αντίστοιχα.

Έτσι, εφαρμόζοντας τη μέθοδο SVD για τον πίνακα Z παράγονται οι τρεις πίνακες U, L, V^T , όπου L είναι ο πίνακας που περιέχει τις ιδιάζουσες τιμές του πίνακα Z , δηλαδή ισχύει:

$$Z = ULV^T, \text{ όπου, } \mathbf{b}_x = U \text{ και } \mathbf{k}_t = LV^T.$$

4.2.2 Εναλλακτική Προσέγγιση της SVD

Στην ενότητα αυτή, θα υπολογίσουμε τις τιμές των παραμέτρων a_x, b_x, k_t με μια αλγεβρική προσέγγιση της μεθόδου SVD, για τις οποίες ελαχιστοποιείται το άθροισμα των τετραγώνων των $\varepsilon_{x,t}$, δηλαδή υπολογίζοντας την ελάχιστη τιμή της σχέσης (Lee & Carter, 1992; Wang, 2007):

$$\sum_{x,t} \varepsilon_{x,t} = \sum_{x,t} (\ln m_{x,t} - a_x - b_x k_t)^2. \quad (4.4)$$

Θεωρούμε την εξίσωση:

$$f(a_x, b_x, k_t) = \sum_{x,t} (\ln m_{x,t} - a_x - b_x k_t)^2. \quad (4.5)$$

Για τις τρεις παραμέτρους υπολογίζουμε τη μερική παράγωγο της σχέσης (4.5) και την εξισώνουμε με το 0 για να εξασφαλίσουμε ότι υπολογίζουμε την ελάχιστη τιμή (Wang, 2007).

Για την παράμετρο a_x :

$$\frac{\partial f}{\partial a_x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial a_x} = -2 \sum_t (\ln m_{x,t} - a_x - b_x k_t) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial a_x} = \sum_t \ln m_{x,t} - \sum_t a_x - b_x \sum_t k_t = 0$$

$$\Rightarrow \sum_t a_x = \sum_t \ln m_{x,t} - b_x \sum_t k_t, \quad \text{όπου} \quad \sum_t k_t = 0 \quad (4.6)$$

$$\Rightarrow \sum_t a_x = \sum_t \ln m_{x,t}$$

$$\Rightarrow \hat{a}_x = \frac{1}{t_n - t_1 - 1} \sum_t \ln m_{x,t}$$

Για την παράμετρο k_t :

$$\frac{\partial f}{\partial k_t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial k_t} = -2 \sum_x (\ln m_{x,t} - a_x - b_x k_t) b_x = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial k_t} = \sum_x (\ln m_{x,t} - a_x - b_x k_t) = 0 \quad (4.7)$$

$$\Rightarrow \sum_x \ln m_{x,t} - \sum_x a_x - \sum_x b_x k_t = 0$$

$$\Rightarrow \sum_x \ln m_{x,t} - \sum_x a_x - k_t \sum_x b_x = 0, \quad \text{όπου} \quad \sum_x b_x = 1$$

$$\Rightarrow \hat{k}_t = \sum_t \ln m_{x,t} - \sum_x a_x$$

Για την παράμετρο b_x :

$$\frac{\partial f}{\partial b_x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial b_x} = -2 \sum_t (\ln m_{x,t} - a_x - b_x k_t) k_t = 0$$

(4.8)

$$\frac{\partial f}{\partial b_x} = \sum_t (\ln m_{x,t} - a_x) k_t - \sum_t b_x k_t^2 = 0$$

$$\Rightarrow b_x \sum_t k_t^2 = \sum_t (\ln m_{x,t} - a_x) k_t$$

$$\Rightarrow \hat{b}_x = \frac{\sum_t (\ln m_{x,t} - a_x) k_t}{\sum_t k_t^2}.$$

4.3. Δεύτερο Στάδιο Εκτίμησης του Μοντέλου Lee-Carter

Στο σημείο αυτό, ακολουθεί το δεύτερο στάδιο εκτίμησης της παραμέτρου k_t , προκειμένου να υπολογιστεί ο ακριβής αριθμός των παρατηρούμενων θανάτων σε σχέση με τον εκτιμώμενο αριθμό θανάτων για κάθε έτος t . Αναζητούμε την δεύτερη εκτίμηση της παραμέτρου k_t από την παρακάτω σχέση (Lee & Carter, 1992; Lee, 2000):

$$\sum_x D_{x,t} = \sum_x N_{x,t} e^{\left(\hat{a}_x + \hat{b}_x \hat{k}_t \right)}, \quad (4.9)$$

όπου,

\hat{k}_t : δεύτερη εκτίμηση της παραμέτρου k_t ,

$D_{x,t}$: το παρατηρούμενο πλήθος θανάτων στην ηλικία x και το έτος t ,

$N_{x,t}$: ο πληθυσμός στην ηλικία x και το έτος t (έκθεση στον κίνδυνο).

Η ισότητα του αριθμού των παρατηρούμενων θανάτων και του εκτιμώμενου αριθμού θανάτων δεν ικανοποιείται αυτόματα από το μοντέλο, για το λόγο αυτό χρειάζεται το δεύτερο στάδιο προσαρμογής, το οποίο περιγράφεται από τη σχέση (4.9). Ο λόγος που δεν ισχύει αυτή η ισότητα είναι ότι όλες οι ηλικίες λαμβάνουν το ίδιο βάρος στη μέθοδο SVD ανεξάρτητα από το μέγεθος του $m_{x,t}$ και του πλήθους θανάτων. Αρά οι τιμές που λαμβάνουν τα σφάλματα $\varepsilon_{x,t}$ στις νεότερες ηλικίες είναι ίσες με αυτές που αντιστοιχούν στις μεγαλύτερες ηλικίες.

Το πλεονέκτημα της παραπάνω μεθόδου είναι ότι μας δίνει τη δυνατότητα να υπολογίσουμε τη θνησιμότητα σε κάποια χρονική περίοδο, όπου γνωρίζουμε μόνο το παρατηρούμενο πλήθος θανάτων $D_{x,t}$ και όχι το ρυθμό θανάτων $m_{x,t}$ στην αντίστοιχη χρονική περίοδο.

Ένα μειονέκτημα της μεθόδου είναι ότι η σχέση (4.9) μπορεί να έχει 0,1 ή 2 λύσεις για τη δεύτερη εκτίμηση της παραμέτρου k_t , ανάλογα με τις τιμές του εκτιμητή \hat{b}_x . Η καλύτερη δεύτερη εκτίμηση της παραμέτρου k_t γίνεται όταν έχουμε μοναδική λύση, σε διαφορετική περίπτωση η εκτίμηση είναι μη συνεπής, αυτό όμως συμβαίνει σπάνια σε ορισμένες περιπτώσεις και σε μεγάλες ηλικίες.

Συγκεκριμένα, το παραπάνω παρατηρείται όταν υπάρχει μη ομοιομορφία στα πρόσημα του εκτιμητή \hat{b}_x , το οποίο δείχνει αυξομείωση της θνησιμότητας. Όταν λαμβάνονται υπόψιν όλες οι αιτίες θανάτου, η μη ομοιομορφία στα πρόσημα του εκτιμητή εμφανίζεται σπάνια, αφού σε παγκόσμιο επίπεδο η θνησιμότητα μειώνεται με κάποιες εξαιρέσεις όπως η Ουγγαρία (Giroso & King, 2007). Αντίθετα, όταν δεν λαμβάνονται υπόψιν όλες οι αιτίες θανάτου, η μη ομοιομορφία στα πρόσημα του εκτιμητή εμφανίζεται πιο συχνά. Σε αυτήν τη περίπτωση η δεύτερη εκτίμηση της παραμέτρου k_t δεν συνιστάται.

Αναλυτικότερα, έστω ότι υπάρχει μη ομοιομορφία στα πρόσημα του εκτιμητή \hat{b}_x . Αν χωρίζαμε τις τιμές του \hat{b}_x σε δύο σύνολα, τις θετικές τιμές $\hat{b}_x^+ = |\hat{b}_x|$ και τις αρνητικές τιμές $\hat{b}_x^- = -|\hat{b}_x|$ τότε η (4.9) θα διαμορφωνόταν ως εξής (Lee & Carter, 1992; Lee, 2000):

$$\sum_x D_{x,t} = \sum_x N_{x,t} e^{\left(\hat{a}_x + \hat{b}_x^+ \hat{k}_t\right)} + \sum_x N_{x,t} e^{\left(\hat{a}_x + \hat{b}_x^- \hat{k}_t\right)}. \quad (4.10)$$

Αν τα πρόσημα των τιμών του εκτιμητή \hat{b}_x είναι ομοιόμορφα, τότε η παραπάνω σχέση είναι ένα άθροισμα εκθετικών συναρτήσεων με μοναδικούς αγνώστους τις τιμές των \hat{k}_t , αποτελεί μια μονότονη συνάρτηση στο διάστημα $(0, +\infty)$ και έχει μοναδική λύση.

Αν τα πρόσημα των τιμών του εκτιμητή \hat{b}_x είναι μη ομοιόμορφα, τότε πάλι η παραπάνω σχέση είναι ένα άθροισμα εκθετικών με μοναδικούς αγνώστους τις τιμές των \hat{k}_t , αλλά δεν είναι μονότονη συνάρτηση και η γραφική της παράσταση έχει σχήμα U (κυρτή συνάρτηση) με το ελάχιστο σημείο της να είναι αυστηρά θετικό. Στην περίπτωση αυτή γραφικά, αν οι τιμές του $D_{x,t}$ είναι μεγάλες, τότε η γραφική της παράσταση θα τέμνει τη γραφική παράσταση του \hat{k}_t σε δύο σημεία και θα έχουμε δύο λύσεις, διαφορετικά η γραφική παράσταση των $D_{x,t}$ θα διέρχεται κάτω από τη γραφική παράσταση του \hat{k}_t , που σημαίνει ότι δεν υπάρχει καμία λύση.

Σχετικά με την εκτίμηση του \hat{k}_t , υπάρχουν δύο εναλλακτικές μέθοδοι. Η πρώτη μέθοδος κάνει προσαρμογή των τιμών του \hat{k}_t στα προσδόκιμα ζωής της παρατηρούμενης περιόδου και χρειάζεται να γνωρίζουμε τον αριθμό των θανάτων ή τον αριθμό του πληθυσμού που είναι

εκτεθειμένος στον κίνδυνο. Στη δεύτερη μέθοδο γίνεται προσαρμογή των τιμών k_t στην κατανομή της παρατηρούμενης ηλικίας των θανάτων.

Σε αυτό το σημείο, αφού εκτιμηθούν και αντικατασταθούν τα a_x, b_x, k_t στη (4.1), μπορούμε να υπολογίσουμε τις εκτιμήσεις του παρατηρούμενου ρυθμού θνησιμότητας $m_{x,t}$.

4.4. Προβολή Θνησιμότητας

Μια ιδιαίτερη πτυχή του μοντέλου Lee-Carter είναι ότι επιτρέπει την εισαγωγή της αβεβαιότητας στις προβλέψεις, με άλλα λόγια, η παράμετρος της θνησιμότητας k_t θεωρείται εγγενώς μια τυχαία διαδικασία. Έτσι, η τιμή της εκτίμησης της παραμέτρου διαμορφώνεται ως μια στοχαστική χρονοσειρά και η μοντελοποίηση των δεύτερων εκτιμήσεων, k_t γίνεται με ένα αυτοπαλινδρομούμενο μοντέλο κινούμενου μέσου (AutoRegressive Moving Average, ARIMA). Οι Lee και Carter (1992) μετά από δοκιμή πολλών μοντέλων ARIMA συμπέραναν ότι το πιο αξιόπιστο είναι ο τυχαίος περίπατος με μετατόπιση (Random Walk with Drift, RWD), όπως αναλύεται παρακάτω:

$$k_t = k_{t-1} + \theta + \varepsilon_t, \quad (4.11)$$

όπου,

θ : παράμετρος μετατόπισης (drift parameter),

ε_t : το σφάλμα το έτος t.

Η εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας της παραμέτρου μετατόπισης θ είναι:

$$\hat{\theta} = \frac{k_T - k_1}{T - 1}. \quad (4.12)$$

Υποθέτουμε ότι τα σφάλματα ε_t , είναι λευκός θόρυβος και ομοσκεδαστικά, δηλαδή ακολουθούν κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση σ^2 .

Για την πρόβλεψη δύο επόμενων περιόδων $t = 2$, με αντικατάσταση του οροῦ \hat{k}_{t-1} με τη σχέση (4.11), η πρόβλεψη των \hat{k}_t διαμορφώνεται ως εξής:

$$\begin{aligned}\hat{k}_t &= \hat{k}_{t-1} + \hat{\theta} + \varepsilon_t \\ \Rightarrow \hat{k}_t &= \left(\hat{k}_{t-2} + \hat{\theta} + \varepsilon_{t-1} \right) + \hat{\theta} + \varepsilon_t \\ \Rightarrow \hat{k}_t &= \hat{k}_{t-2} + 2\hat{\theta} + (\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t).\end{aligned}\tag{4.13}$$

Για την πρόβλεψη στο χρόνο $T + (\Delta t)$, επαναλαμβάνεται η ίδια διαδικασία αναδρομικά για (Δt) περιόδους, όπως παρακάτω:

$$\begin{aligned}\hat{k}_{T+(\Delta t)} &= \hat{k}_T + (\Delta t)\hat{\theta} + \sum_{n=1}^{(\Delta t)} \varepsilon_{T+n-1} \\ \Rightarrow \hat{k}_{T+(\Delta t)} &= \hat{k}_T + (\Delta t)\hat{\theta} + \sqrt{(\Delta t)}\varepsilon_t.\end{aligned}\tag{4.14}$$

Αναλυτικότερα, η σχέση (4.11) είναι μια αναδρομική σχέση και για κάθε έτος διαμορφώνεται ως εξής:

$$\begin{aligned}t = 1 & \quad \hat{k}_t = \hat{k}_{t-1} + 1\hat{\theta} + \varepsilon_t \\ t = 2 & \quad \hat{k}_t = \hat{k}_{t-2} + 2\hat{\theta} + (\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t) \\ t = 3 & \quad \hat{k}_t = \hat{k}_{t-3} + 3\hat{\theta} + (\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t)\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} \vdots & & \vdots \\ t = n & \hat{k}_t = \hat{k}_{t-n} + n\hat{\theta} + (\varepsilon_{t-n} + \varepsilon_{t-(n-1)} + \dots + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t) & (4.15) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} t = n+1 & \hat{k}_t = \hat{k}_{t-(n+1)} + (n+1)\hat{\theta} + (\varepsilon_{t-(n+1)} + \varepsilon_{t-n} + \dots + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t) \\ & \hat{k}_t = \hat{k}_{t-(n+1)} + (n+1)\hat{\theta} + \sum_{i=1}^{n+1} \varepsilon_i, \end{array}$$

όπου, για $n+1=\Delta t$ και $t=T$ έχουμε:

$$\hat{k}_T = \hat{k}_{T-\Delta t} + (\Delta t)\hat{\theta} + \sum_{i=1}^{(\Delta t)} \varepsilon_i, \quad (4.16)$$

και όπου, $T=T+\Delta t$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \hat{k}_{T+(\Delta t)} &= \hat{k}_{T+(\Delta t)-(\Delta t)} + (\Delta t)\hat{\theta} + \sum_{i=1}^{(\Delta t)} \varepsilon_i \\ \Rightarrow \hat{k}_{T+(\Delta t)} &= \hat{k}_T + (\Delta t)\hat{\theta} + \sum_{i=1}^{(\Delta t)} \varepsilon_i. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Στη συνέχεια, γίνεται απλοποίηση των σφαλμάτων ε_t , βασιζόμενοι στην υπόθεση ότι τα σφάλματα είναι ανεξάρτητα με διακύμανση ίση και σταθερή. Ακόμα, αν παραλείψουμε τον όρο του σφάλματος, υπολογίζονται τα σημεία πρόβλεψης εκτιμήσεων (forecast point estimates), τα οποία είναι συνάρτηση του (Δt) με κλίση $\hat{\theta}$. Με αυτόν τον τρόπο, γίνεται προεκβολή από μια ευθεία γραμμή από τα σημεία \hat{k}_1 και \hat{k}_T , ενώ τα ενδιάμεσα σημεία παραλείπονται όπως φαίνεται στην παρακάτω σχέση:

$$\begin{aligned} \hat{k}_{T+(\Delta t)} &= \hat{k}_T + (\Delta t)\hat{\theta} \\ \Rightarrow \hat{k}_{T+(\Delta t)} &= \hat{k}_T + (\Delta t)\frac{\hat{k}_T - \hat{k}_1}{T-1}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Επομένως, η προβολή της θνησιμότητας στο μέλλον δηλαδή ο υπολογισμός του μελλοντικού ρυθμού θνησιμότητας σύμφωνα με τη σχέση (4.1) μπορεί υπολογιστεί με τον παρακάτω τύπο:

$$\ln(m_{x,T+\Delta t}) = a_x + b_x k_{T+\Delta t}, \text{ όπου, } \Delta t \text{ είναι ο ορίζοντας πρόβλεψης.} \quad (4.19)$$

4.5. Συμπεράσματα από το Μοντέλο Lee-Carter

Η μέθοδος Lee-Carter είναι ένα κατάλληλο μοντέλο για την προεκβολή των ιστορικών τάσεων στην κατανομή επιπέδου ηλικίας της θνησιμότητας. Όμως η προεκβολή αυτή μπορεί να μην είναι πάντα μια λογική διαδικασία για να εφαρμοστεί (Lee, 2000). Παρακάτω, παρουσιάζονται μερικά συμπεράσματα που περιλαμβάνουν προβλήματα και περιορισμούς για το μοντέλο (Μαυρομμάτη, 2012).

- Από την εφαρμογή του μοντέλου στον πληθυσμό των Η.Π.Α (Lee & Carter, 1996), παρατηρήθηκε ότι η παράμετρος της θνησιμότητας k_t κατά τη διάρκεια των ετών δεν ήταν πάντοτε φθίνουσα. Σύμφωνα με το παραπάνω, η θνησιμότητα κατά τον 19^ο αιώνα θα ήταν σε μη φυσιολογικά υψηλά επίπεδα, άρα ο εκτιμητής k_t δεν μπορεί να αντανακλά τη θεμελιώδη ιδιότητα του τρόπου αλλαγής της θνησιμότητας με την πάροδο του χρόνου.
- Ένα άλλο συμπέρασμα που προέκυψε από την εφαρμογή του μοντέλου στον πληθυσμό των Η.Π.Α, είναι ότι παρατηρήθηκε χαμηλός ρυθμός στη μείωση της θνησιμότητας στις ηλικίες 5 έως 50 σε σχέση με τις υπόλοιπες ηλικίες. Στο μοντέλο, η αλλαγή στην κατανομή ηλικίας της θνησιμότητας γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε ο ρυθμός μείωσης σε διαφορετικές ηλικίες να διατηρεί πάντα την ίδια αναλογία μεταξύ τους με την πάροδο των ετών, στην πραγματικότητα όμως ο ρυθμός μείωσης της θνησιμότητας μπορεί να ποικίλει σε διαφορετικές ηλικίες.

- Το μοντέλο κάνει πρόβλεψη στο πως θα διαμορφωθεί η θνησιμότητα αν οι τάσεις του παρόντος συνεχιστούν και στο μέλλον. Αυτό σημαίνει ότι δεν λαμβάνει υπόψιν πληροφορίες για παράγοντες που θα διαφοροποιούσαν τη θνησιμότητα στο μέλλον.
- Το μοντέλο εμπεριέχει την αβεβαιότητα από τη πρόβλεψη της παραμέτρου της θνησιμότητας k_t , αβεβαιότητα από την εκτίμηση της τάσης στη θνησιμότητα που προέρχεται από το συντελεστή μετατόπισης (Lee & Carter, 1992). Υπάρχει όμως και αβεβαιότητα στην εκτίμηση της παραμέτρου b_x και κατ' επέκταση αβεβαιότητα στην εφαρμογή του βασικού μοντέλου στον πραγματικό πίνακα ρυθμών θανάτου.
- Αντίθετα, το μοντέλο δεν αντανακλά αβεβαιότητα για τα διαστήματα πιθανοτήτων σχετικά με τη θνησιμότητα, ενώ υπάρχουν οι απόψεις ότι το προσδόκιμο ζωής μπορεί να αλλάξει, είτε να αυξηθεί, είτε να μειωθεί στο μέλλον. Συγκεκριμένα, υπάρχουν απόψεις ότι η βελτίωση της τεχνολογίας στην ιατρική θα βελτιώσει το προσδόκιμο ζωής, ενώ άλλες απόψεις υποστηρίζουν ότι θα υπάρξουν ασθένειες με αποτέλεσμα τη μείωση του προσδόκιμου ζωής.
- Τέλος, η υπόθεση ότι τα σφάλματα είναι ασυσχέτιστα ανά ηλικία δεν λαμβάνεται υπόψιν στο μοντέλο με συνέπεια να επηρεάζονται οι προβλέψεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗΣ

5.1. Εισαγωγή

Ο Wang (1996, 2000, 2001) ανέπτυξε μια μέθοδο τιμολόγησης κινδύνων, η οποία ενσωματώνει οικονομικές και ασφαλιστικές θεωρίες τιμολόγησης. Ο Wang πρότεινε έναν καινούργιο τελεστή διαταραχής (distortion operator), ο οποίος προκύπτει μέσα από τη γενικευμένη κλάση του Wang (1996) και πλέον είναι γνωστός ως Wang transformation.

Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφεται η διαδικασία τιμολόγησης του κινδύνου μακροβιότητας χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό του Wang (Wang Transformation), όπου ο τελεστής διαταραχής (distortion operator) μετατρέπει την κατανομή της θνησιμότητας σε μια τροποποιημένη / μετασχηματισμένη (risk-adjusted) κατανομή θνησιμότητας.

Στη συνέχεια αναλύεται η διαδικασία τιμολόγησης που εφαρμόσαμε στην εφαρμογή που ακολουθεί στο Κεφάλαιο 6, όπως μας υπέδειξαν οι (Wang, 2000), (Lin & Cox, 2005) και (Levantesi & Menzietti, 2008). Η τιμολόγηση ολοκληρώνεται με τον υπολογισμό των ασφαλίσεων που πληρώνει ο ασφαλιστής, την αξία της ομολογίας που πληρώνει ο επενδυτής, και τα κουπόνια που λαμβάνουν οι παραπάνω από την SPC.

5.2. ‘Τελεστής Διαταραχής’ στις Ασφαλίσεις Ζωής

Στην παράγραφο αυτή, κάνουμε μια θεωρητική ανάλυση της διαδικασίας για το πώς προκύπτει ο τελεστής διαταραχής (distortion operator) και πώς συνδέεται με τον τομέα των ασφαλίσεων ζωής και τα συνταξιοδοτικά προγράμματα.

Έστω, X μια μη αρνητική τυχαία μεταβλητή απώλειας με αθροιστική συνάρτηση κατανομής

$$F_X = P(X \leq x) \text{ και συνάρτηση επιβίωσης } S_X = 1 - F_X.$$

Τα καθαρά ασφάλιστρα (εξαιρουμένων όλων των άλλων εξόδων του ασφαλιστή) είναι:

$$E[X] = \int_0^{\infty} yF_X(y)dy = \int_0^{\infty} S_X(y)dy. \quad (5.1)$$

Σύμφωνα με τους Wang (1996) και Πιτσέλη (2014), η συνάρτηση πληρωμής του ασφαλιστή ορίζεται ως εξής:

$$X(d, d+m) = \begin{cases} 0, & \text{εάν } 0 \leq X < d \\ X - d, & \text{εάν } d \leq X < d+m \\ m, & \text{εάν } d+m \leq X, \end{cases} \quad (5.2)$$

όπου, d είναι το αφαιρετέο ποσό και m το όριο ίδιας κράτησης.

Όπως φαίνεται και από την συνάρτηση (5.2), τα ποσά d και m αποτελούν ένα άνω όριο και κάτω όριο, αντίστοιχα, για την μεταβλητή $X(d, d+m)$.

Η συνάρτηση επιβίωσης των πληρωμών του ασφαλιστή, $X(d, d+m)$, δίνεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$S_{X(d, d+m)}(y) = \begin{cases} S_X(d+y), & \text{εάν } 0 \leq y < m \\ 0, & \text{εάν } m \leq y. \end{cases} \quad (5.3)$$

Έτσι, η αναμενόμενη ζημία για τον ασφαλιστή, $X(d, d+m)$, μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

$$E[X_{(d, d+m)}] = \int_0^{\infty} S_{X_{(d, d+m)}}(y)dy = \int_0^{d+m} S_X(x)dy. \quad (5.4)$$

Οι Venter (1991) και Wang (1996) πρότειναν τα ασφάλιστρα να υπολογίζονται με το μετασχηματισμό της συνάρτησης επιβίωσης:

$$H_g[X] = \int_0^\infty g[S_X(x)] dx, \quad (5.5)$$

όπου, g είναι ο τελεστής διαταραχής, μια αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα $(0,1)$ με $g(0) = 0$ και $g(1) = 1$.

Ο τελεστής διαταραχής (distortion operator) μετασχηματίζει την πιθανότητα της κατανομής S_X σε μια καινούργια κατανομή $g[S_X]$. Η μέση τιμή κάτω από τη μετασχηματισμένη κατανομή (distorted distribution) $H_g[X]$ αναπαριστά τα μετασχηματισμένα (risk-adjusted) ασφάλιστρα, εξαιρουμένων άλλων εξόδων. Έτσι:

$$H_g[X(d, d+m)] = \int_0^\infty g[S_{X(d,d+m)}(y)] dy = \int_0^{d+m} g[S_X(x)] dx. \quad (5.6)$$

Ο τελεστής διαταραχής g ακολουθεί τις παρακάτω ιδιότητες:

- Ισχύει $0 < g(u) < 1$, $g(0) = 0$ και $g(1) = 1$.
- Η $g(u)$ είναι αύξουσα και ισχύει $g'(u) \geq 0$.
- Η $g(u)$ είναι κοίλη και ισχύει $g''(u) \leq 0$.
- Ισχύει $g'(0) = \infty$.

Ακόμα, η συνάρτηση του διπλού τελεστής διαταραχής είναι:

$$g_\lambda(u) = 1 - g(1-u), \quad \text{όπου } u \in [0,1]. \quad (5.7)$$

5.3. Ο Μετασχηματισμός του Wang

Όπως αναλύθηκε στην ενότητα 5.2, ο Wang προτείνει μια μέθοδο προσαρμογής του κινδύνου χρησιμοποιώντας έναν τελεστή διαταραχής (distortion operator), ο οποίος είναι πλέον γνωστός ως Wang transformation. Ο τελεστής διαταραχής προκύπτει μέσα από τη γενικευμένη κλάση του Wang (1996) και μετατρέπει την κατανομή της θνησιμότητας σε μια μετασχηματισμένη κατανομή θνησιμότητας.

Έτσι, από την μετασχηματισμένη τιμή του ασφαλιστικού κινδύνου, δηλαδή του κινδύνου της μακροβιότητας προκύπτουν τα μετασχηματισμένα ασφάλιστρα, όπως αναλύονται στην συνέχεια του κεφαλαίου. Στην ενότητα αυτή, εμείς θα εφαρμόσουμε τον τελεστή διαταραχής την σχέση (5.5) με τη χρήση της αθροιστικής συνάρτησης της τυπικής κανονικής κατανομής.

Έστω ότι, η $\Phi(x)$ είναι μια αθροιστική τυπική κανονική συνάρτηση κατανομής με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (5.8)$$

Ο Wang ορίζει τον τελεστή διαταραχής για την παράμετρο λ και για κάθε $0 < u < 1$ ως εξής:

$$g_\lambda(u) = \Phi[\Phi^{-1}(u) + \lambda], \quad (5.9)$$

όπου, $x = \Phi^{-1}(u)$, είναι η αντίστροφη συνάρτηση της $u = \Phi(x)$.

Για τη σχέση (5.9) ικανοποιούνται οι παρακάτω ιδιότητες:

- $g_\lambda(0) = \lim_{u \rightarrow 0^+} g_\lambda(u) = 0$, και $g_\lambda(1) = \lim_{u \rightarrow 1^-} g_\lambda(u) = 1$.

- Η πρώτη παράγωγος της είναι: $\frac{dg_\lambda(u)}{du} = \frac{\varphi(x+\lambda)}{\varphi(x)} = e^{(-\lambda x - \lambda^2/2)} > 0$. (Γνησίως αύξουσα)
- Η δεύτερη παράγωγος της είναι: $\frac{d^2g_\lambda(u)}{du^2} = \frac{-\lambda\varphi(x+\lambda)}{\varphi(x)^2}$, όπου η g_λ είναι κοίλη για $\lambda > 0$ και κυρτή για $\lambda < 0$.
- Για $\lambda > 0$ είναι: $g'_\lambda(0) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{dg_\lambda(u)}{du} = \lim_{u \rightarrow -\infty} e^{(-\lambda x - \lambda^2/2)} = +\infty$. Η πρώτη παράγωγος δεν ορίζεται.
- Ο διπλός τελεστής διαταραχής της g_λ είναι: $g_\lambda^*(u) = 1 - g_\lambda(1-u) = g_{-\lambda}(u)$.

Επομένως, μπορούμε να πάρουμε το διπλό τελεστή διαταραχής με μια απλή αλλαγή του λ σε $-\lambda$ στη σχέση (5.9), λόγω συμμετρίας της κανονικής κατανομής:

$$g_\lambda(u) = \Phi[\Phi^{(-1)}(u) - \lambda]. \quad (5.10)$$

5.4. Market Price of Risk

Το Market price of Risk (λ), παριστάνει την τιμή του κινδύνου στην αγορά, αντικατοπτρίζοντας το επίπεδο του συστημικού κινδύνου. Στην Ελλάδα, η παράμετρος αυτή δεν παρέχεται από την αγορά, λόγω του ότι η αγορά παραγώγων που συνδέονται με τη θνησιμότητα δεν είναι ανεπτυγμένη.

Στα πλαίσια της εργασίας, γίνεται ο υπολογισμός του Market Price of Risk (λ) με τη βοήθεια της μαθηματικής εξίσωσης του μετασχηματισμού του Wang, σύμφωνα με την Torske (2015). Επειδή είναι μια πολύπλοκη διαδικασία, η εκτίμηση του θα γίνει με τη βοήθεια του στατιστικού πακέτου R (ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α.1).

Δοθέντος μιας κατανομής με αθροιστική συνάρτηση πυκνότητας $F(t)$, μια «distorted» κατανομή $F^*(t)$ η οποία καθορίζεται από το λ , εκφράζεται με την παρακάτω εξίσωση:

$$F^*(t) = g_\lambda(F)(t) = g_\lambda(F(t)), \quad (5.11)$$

όπου, g_λ ο τελεστής διαταραχής, η σχέση (5.10).

Στα πλαίσια της εφαρμογής, το Market Price of Risk (λ) υπολογίζεται λύνοντας τη σχέση (5.11) ως προς λ . Όμως οι τιμές που προκύπτουν δεν είναι όλες κατάλληλες για την τιμολόγηση. Παρακάτω, αναλύεται για ποιες τιμές του λ γίνεται ικανοποιητική εφαρμογή των δεδομένων στη μέθοδο τιμολόγησης.

Ο μετασχηματισμός του Wang τροποποιεί την θνησιμότητα με σκοπό να προκύψει μια 'βελτιωμένη' θνησιμότητα σε σχέση με το γενικό επίπεδο θνησιμότητας του πληθυσμού ώστε να εφαρμοστεί ικανοποιητικά στη μέθοδο τιμολόγησης. Αξίζει να επισημανθεί, ότι η έννοια της βελτίωσης της θνησιμότητας σημαίνει μείωση των τιμών της θνησιμότητας. Η ικανοποιητική εφαρμογή της μετασχηματισμένης θνησιμότητας επιτυγχάνεται για $\lambda > 0$.

Επίσης, η παράμετρος λ σχετίζεται άμεσα με την ηλικία και το φύλο, επομένως ορίζουμε $\lambda_{x,g}(\lambda_{x,m}, \lambda_{x,f})$. Για παράδειγμα, ένα άτομο σε μικρή ηλικία αποτελεί μεγαλύτερο κίνδυνο για τον ασφαλιστή από ότι ένα άτομο σε μεγάλη ηλικία, διότι υπάρχει μεγαλύτερη αβεβαιότητα για το νεαρό άτομο, σχετικά με την μελλοντική του θνησιμότητα και τις μελλοντικές του πληρωμές. Επιπλέον, αναμένεται η παράμετρος να μειώνεται καθώς αυξάνεται η ηλικία, επειδή όσο μεγαλύτερη είναι η ηλικία τόσο λιγότερες πληρωμές εκτιμάει ο ασφαλιστής ότι θα πληρώσει στο μέλλον.

Επίσης, ο παράγοντας του φύλου είναι σημαντικός, διότι όπως γνωρίζουμε οι γυναίκες έχουν την τάση να ζουν περισσότερο από τους άνδρες, επομένως λογικά θα πρέπει να ισχύει $\lambda_{x,f} > \lambda_{x,m}$. Έτσι, το μεγαλύτερο προσδόκιμο ζωής των γυναικών σημαίνει ότι ο ασφαλιστής εκτιμάει ότι έχει να κάνει περισσότερες πληρωμές για τις γυναίκες από ότι για τους άνδρες και για αυτόν τον λόγο δικαιολογείται η μεγαλύτερη τιμή της παραμέτρου για τις γυναίκες.

Αξίζει να σημειωθεί ότι, το market price of risk δεν αντικατοπτρίζει, και δεν χρειάζεται να αντικατοπτρίζει τον κίνδυνο επιτοκίων (interest rate), για αυτό γίνεται η υπόθεση ότι ο κίνδυνος θνησιμότητας και επιτοκίων είναι ανεξάρτητοι.

5.5. Χρήση του Μετασχηματισμού του Wang

Ακολουθώντας τους Lin και Cox (2005), ας θεωρήσουμε την αξία της υποχρέωσης για έναν ασφαλιστή, X , στο διάστημα $[0, T]$, με αθροιστική συνάρτηση πυκνότητας F . Ο μετασχηματισμός του Wang παράγει μια μετασχηματισμένη συνάρτηση πυκνότητας F^* .

Η μέση τιμή της F^* συμβολίζεται με το $E^*(X)$ και καθορίζει μια μετασχηματισμένη ‘δίκαιη τιμή’ του X τη χρονική στιγμή T , η οποία μπορεί να προεξοφληθεί τη χρονική στιγμή 0 , με ένα επιτόκιο μηδενικού κινδύνου (risk-free rate).

Παραλείποντας την προεξόφληση έχουμε την παρακάτω εξίσωση για την αξία της υποχρέωσης:

$$E^*(X) = \int x F^*(x) dx, \quad (5.12)$$

$$\text{όπου, } F^*(x) = g_\lambda(F)(x) = \Phi[\Phi^{-1}(F(x)) - \lambda].$$

Σε συνδυασμό με τις ράντες πληρωμών, η $E^*(X)$ μπορεί να γραφτεί στη μορφή:

$$E^*(X) = s \sum_{t=0}^{n-1} {}_t p_x^* d(0, t), \quad (5.13)$$

όπου,

${}_t p_x^*$: είναι η μετασχηματισμένη πιθανότητα επιβίωσης που προκύπτει,

s : είναι η μηνιαία ράντα πληρωμών,

$d(0, t)$: ο προεξοφλητικός παράγοντας.

Συνδυάζοντας τη σχέση (5.10) και (5.11) υπολογίζεται η παρακάτω μετασχηματισμένη πιθανότητα επιβίωσης:

$${}_t p_x^* = g_\lambda({}_t p_x) = \Phi[\Phi^{-1}({}_t p_x) - \lambda] = \Phi[\Phi^{-1}(1 - {}_t q_x) - \lambda], \quad (5.14)$$

όπου, g_λ ο τελεστής διαταραχής, η σχέση (5.10)

Επομένως, η σχέση (5.13) σε συνδυασμό με τη σχέση (5.14) διαμορφώνεται ως εξής:

$$E^*(X) = s \sum_{t=0}^{n-1} d^t {}_t p_x^* = s \sum_{t=0}^{n-1} d^t \Phi[\Phi^{(-1)}(1 - {}_t q_x) - \lambda]. \quad (5.15)$$

Τελικά, η ετήσια αναμενόμενη προεξοφλημένη αξία των χρηματοροών είναι:

$$12 \times E^*(X) = 12 \times s \sum_{t=0}^{n-1} d^t \Phi[\Phi^{(-1)}(1 - {}_t q_x) - \lambda]. \quad (5.16)$$

5.6. Τιμολόγηση Ομολογίας Μακροβιότητας και Swap Μακροβιότητας

Τα ασφάλιστρα (P) και η αξία της ομολογίας μακροβιότητας (V) δίνονται από τους παρακάτω τύπους αντίστοιχα:

$$P = R \sum_{t=1}^T E^*[B_t]d(0,t), \quad (5.17)$$

και

$$V = R F d(0,T) + R \sum_{t=1}^T E^*[D_t]d(0,t), \quad (5.18)$$

όπου,

R: είναι το ποσό του πληρώνει ο ασφαλιστής για κάθε ασφαλισμένο,

$d(0,t)$: είναι ο προεξοφλητικός παράγοντας βασισμένος σε risk-free καμπύλη επιτοκίων κατά τη στιγμή έκδοσης της ομολογίας και

F: είναι το αρχικό κεφάλαιο της ομολογίας μακροβιότητας.

Αξίζει να αναφερθεί, ότι το αρχικό κεφάλαιο F δεν βρίσκεται σε κίνδυνο και θα αποπληρωθεί τη χρονική στιγμή T ανεξάρτητα από τον αριθμό των ατόμων που έχουν επιβιώσει.

Αντίστοιχα, σε ένα παράγωγο προϊόν swap μακροβιότητας, σε συνδυασμό με την ανάλυση που έγινε στο Κεφάλαιο 2, οι σχέσεις (5.17) και (5.18) διαμορφώνονται ως εξής:

$$P = R \sum_{t=1}^T E^*[B_t]d(0,t), \quad (5.19)$$

και

$$V = R \sum_{t=1}^T E^*[D_t]d(0,t). \quad (5.20)$$

5.7. Οριακές Τιμές X_t

Οι χρηματοροές μιας ομολογίας μακροβιότητας ορίζονται με βάση τις οριακές τιμές X_t (Strike Levels X_t) για κάθε έτος, η χρησιμότητά τους είναι σημαντική, καθώς σε συνδυασμό με τα ποσοστά βελτίωσης (improvement rates) μας δίνουν αποτελέσματα για τον αριθμό των επιζώντων του πληθυσμού ανά έτος.

Στην εφαρμογή υπολογίζονται οι οριακές τιμές (strike levels) X_t για τις ηλικίες από 65 έως 94 με τον ακόλουθο τύπο (Lin & Cox, 2005):

$$X_t = \begin{cases} l_{x_0} {}_tP_x e^{\text{Improvement Rate} \times t} & , \quad \text{όταν } t=1 \\ l_{x_0} {}_tP_x e^{\text{Improvement Rate} \times \text{Projected Improvement Rate} \times t} & , \quad \text{όταν } t=2\dots30, \end{cases} \quad (5.21)$$

όπου,

t : ορίζεται από 1,...,30 έτη, σύμφωνα με τη διάρκεια της ομολογίας,

l_{x_0} : ο αρχικός πληθυσμός αναφοράς,

${}_tP_x$: πιθανότητα επιβίωσης,

projected improvement force of mortality (ποσοστό βελτίωσης της προβαλλόμενης έντασης θνησιμότητας): είναι μια βελτιωμένη προσέγγιση της έντασης θνησιμότητας και προκύπτει από τη διαφορά μεταξύ των ποσοστών της έντασης θνησιμότητας του έτους που μελετάμε και των ποσοστών της προβαλλόμενης έντασης θνησιμότητας του έτους που έχουμε επιλέξει,

improvement rate (ποσοστό βελτίωσης): προκύπτει από τη διαφορά των ποσοστών βελτίωσης της προβαλλόμενης έντασης θνησιμότητας του έτους που θέλουμε να υπολογίσουμε σε σχέση με το προηγούμενο.

Σε μια ομολογία μακροβιότητας, οι χρηματοροές D_t είναι τα κουπόνια που λαμβάνουν οι επενδυτές, οι οποίες εξαρτώνται από την κατανομή επιζώντων. Υποθέτουμε ότι οι επενδυτές δέχονται την ίδια μέθοδο τιμολόγησης, έτσι η τιμή της ομολογίας δίνεται από τη σχέση (5.18), όπου το D_t σε συνδυασμό με τις οριακές τιμές X_t διαμορφώνεται ως εξής:

$$D_t = \begin{cases} 0, & \text{εάν } l_{x+t} > X_t + C \\ R(l_{x+t} - X_t), & \text{εάν } X_t < l_{x+t} \leq X_t + C \\ RC, & \text{εάν } l_{x+t} \leq X_t \end{cases} \quad (5.22)$$

$$\frac{1}{R}D_t = \begin{cases} 0, & \text{εάν } l_{x+t} > X_t + C \\ C + X_t - l_{x+t}, & \text{εάν } X_t < l_{x+t} \leq X_t + C \\ RC, & \text{εάν } l_{x+t} \leq X_t. \end{cases}$$

Και τελικά οι πληρωμές του κουπονιού είναι:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R}D_t &= \begin{cases} 0, & \text{εάν } l_{x+t} > X_t + C \\ C + X_t - l_{x+t}, & \text{εάν } X_t < l_{x+t} \leq X_t + C \\ RC, & \text{εάν } l_{x+t} \leq X_t \end{cases} \\ &= C - (l_{x+t} - X_t)_+ + (l_{x+t} - X_t - C)_+ \\ &= C - \max(l_{x+t} - X_t, 0) + \max(l_{x+t} - X_t - C, 0). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Η μετασχηματισμένη αναμενόμενη τιμή των χρηματοροών D_t , $E^*(D_t)$ είναι:

$$\frac{1}{R}E^*[D_t] = C - E^*[(l_{x+t} - X_t)_+] + E^*[(l_{x+t} - X_t - C)_+]. \quad (5.24)$$

Η κατανομή των l_{x+t} εκφράζει τον αριθμό των επιζώντων με μετασηματισμένη πιθανότητα επιβίωσης ${}_t p_x^*$. Επομένως, οι l_{x+t} ακολουθούν διωνυμική κατανομή με παραμέτρους l_x και ${}_t p_x^*$.

Επειδή, το l_x είναι μια τυχαία μεταβλητή με μεγάλες τιμές, σύμφωνα με τον νόμο των μεγάλων αριθμών το l_{x+t} ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή και διακύμανση, αντίστοιχα:

$$E^*[l_{x+t}] = \mu_t^* = l_x p_x^*, \quad (5.25)$$

$$\text{και } Var^*[l_{x+t}] = \sigma_t^{*2} = l_x p_x^* (1 - t p_x^*). \quad (5.26)$$

Έστω, η τυχαία μεταβλητή X με $E[X] < \infty$. Ολοκληρώνοντας έχουμε:

$$E[(X - k)_+] = \int_k^\infty [1 - F(t)] dt, \quad \text{όπου } F(t) = \Pr(X \leq t). \quad (5.27)$$

Στη συνέχεια, για συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $\varphi(t) = \frac{u^{\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$, αθροιστική συνάρτηση

πυκνότητας $\Phi(t) = \int_{-\infty}^t \varphi(u) du$, και ροπές $E[X] = 0$, $Var[X] = 1$, σε συνδυασμό με τη σχέση (6.14)

προκύπτει ο παρακάτω τύπος:

$$E[(X - k)_+] = \int_k^\infty [1 - \Phi(t)] dt. \quad (5.28)$$

Δεδομένου ότι $\dot{\varphi}(t) = -t\varphi(t)$, ολοκληρώνοντας κατά μέλη μπορούμε να εκφράσουμε το ολοκλήρωμα συναρτήσει του $\Phi(t)$ και $\varphi(t)$ ως εξής:

$$\Psi(k) = \int_k^\infty [1 - \Phi(t)] dt = \varphi(k) - k[1 - \Phi(k)]. \quad (5.29)$$

Στη συνέχεια, σε συνδυασμό με τη σχέση (5.29) μπορούμε να υπολογίσουμε το $E^*[D_t]$:

$$\begin{aligned}
 E^*[(\psi - X_t)_+] &= E^*[(l_{x+t} - \mu_t^* - (X_t - \mu_t^*)_+)] \\
 &= \sigma_t^* E^* \left[\frac{l_{x+t} - \mu_t^*}{\sigma_t^*} - k_t \right] \\
 &= \sigma_t^* \Psi(k_t),
 \end{aligned} \tag{5.30}$$

όπου, το $k_t = \frac{X_t - \mu_t^*}{\sigma_t^*}$, με $\mu_t^* = l_{xt} p_x^*$, $\sigma_t^{*2} = l_{xt} p_x^* (1 - tp_x^*)$,

και $\Psi(k_t)$ είναι η σχέση (5.29).

Παρόμοια, ισχύει:

$$E^*[(l_{x+t} - X_t - C)_+] = \sigma_t^* \Psi \left(k_t + \frac{C}{\sigma_t^*} \right). \tag{5.31}$$

Και τελικά έχουμε:

$$E^*[D_t] = R \left\{ C - \sigma_t^* \left[\Psi(k_t) - \Psi \left(k_t + \frac{C}{\sigma_t^*} \right) \right] \right\}. \tag{5.32}$$

Μέσα από την παραπάνω διαδικασία, δείξαμε την τιμολόγηση στην τιλοποίηση μιας ομολογίας μακροβιότητας. Ακριβώς, αυτήν τη διαδικασία και τα ίδια βήματα με τους ίδιους μαθηματικούς τύπους ακολουθήσαμε στο υπολογιστικό πρόγραμμα Excel, για την εφαρμογή που ακολουθεί στο επόμενο κεφάλαιο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΕΦΑΡΜΟΓΗ: ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗ ΟΜΟΛΟΓΙΑΣ ΚΑΙ SWAP ΜΑΚΡΟΒΙΟΤΗΤΑΣ

6.1. Εισαγωγή

Το τελευταίο κεφάλαιο περιλαμβάνει την εφαρμογή με την οποία ασχοληθήκαμε στα πλαίσια της εργασίας και έχει ως αντικείμενο την τιμολόγηση μιας ομολογίας μακροβιότητας διάρκειας 30 ετών. Η τιμολόγηση χρησιμοποιεί το μετασχηματισμό του Wang (Wang, 2000), επειδή η τιμή της ομολογίας εκτιμάται με την αναμενομένη παρούσα αξία των μελλοντικών χρηματοροών και αξιολογείται κάτω από ένα μέτρο μετασχηματισμένης πιθανότητας. Επιπλέον, η προβολή της θνησιμότητας έγινε με τη μέθοδο Lee-Carter (Lee & Carter, 1992).

Η τιμολόγηση αφορά άνδρες και γυναίκες ηλικίας $x=65$ για τρεις χώρες της Νότιας Ευρώπης, την Ελλάδα, την Ιταλία και την Ισπανία. Η επιλογή των χωρών έγινε με το κριτήριο ότι η θνησιμότητα τους επηρεάζεται από τους ίδιους γεωγραφικούς παράγοντες. Τα αποτελέσματα της τιμολόγησης θα μας δώσουν μια εικόνα για την κάθε χώρα, για το πόσο πρέπει να πληρώσει ένας ασφαλιστής για να αντισταθμίσει τον κίνδυνο της μακροβιότητας και για το πόσο θα πληρώσει ο επενδυτής για να αναλάβει τον κίνδυνο.

Επίσης, τα δεδομένα των τριών χωρών για το έτος 2010, των πιθανοτήτων μη επιβίωσης (q_x) και των τιμών της έντασης θνησιμότητας, αντλήθηκαν από την ηλεκτρονική σελίδα Human Mortality Database (HMD-<http://www.mortality.org/>). Η προβολή της θνησιμότητας και ο υπολογισμός της παραμέτρου market price of risk (λ) έγινε με τη βοήθεια του στατιστικού προγράμματος R. Για τους υπόλοιπους υπολογισμούς χρησιμοποιήθηκε το υπολογιστικό πρόγραμμα Excel.

6.2. Διαδικασία Τιμολόγησης

Αρχικά, να αναφέρουμε τις σταθερές παραμέτρους που έχουμε ορίσει και είναι ίδιες για όλες τις χώρες:

- Πληθυσμός για την ηλικία $x=65$, $l_{65} = 10,000$.
- Risk-Free Rate, $r = 2\%$.
- Ετήσιο ποσό πληρωμής για τον κάθε ασφαλισμένο, $R = 1,000$.
- Διάρκεια ομολογίας, $t=30$.
- Κουπόνι της SPC, $C = 650$.
- Επιτόκιο κουπονιού της ομολογίας μακροβιότητας, $c = 6.5\%$.
- Αρχικό κεφάλαιο της ομολογίας μακροβιότητας, $F = 10,000$.

Στη συνέχεια περιγράφουμε τα βήματα που ακολουθήσαμε. Οι υπολογισμοί έχουν γίνει για κάθε χώρα και φύλο, ξεχωριστά και είναι τα παρακάτω:

- Εισαγωγή των πιθανοτήτων μη επιβίωσης (q_x) για το έτος 2010 από την ιστοσελίδα HMD.
- Υπολογισμός του αριθμού επιζώντων l_x , για κάθε ηλικία x σύμφωνα με τη σχέση:

$$l_{x+1} = l_x p_x = l_x (1 - q_x). \quad (6.1)$$

Η ποσότητα αυτή είναι χρήσιμη για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων μη επιβίωσης ${}_t q_{65}$.

- Εκτίμηση των πιθανοτήτων μη επιβίωσης ${}_t q_{65}$ ενός ατόμου ηλικίας $x=65$ να επιβιώσει για το επόμενο έτος, σύμφωνα με τη σχέση:

$${}_t q_x = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x}, \quad (6.2)$$

και για άτομο ηλικίας $x=65$, ${}_t q_{65} = \frac{l_{65} - l_{65+t}}{l_{65}}. \quad (6.3)$

- Ορισμός του προεξοφλητικού παράγοντα $d(0, t)$ σύμφωνα με το risk-free rate που έχει οριστεί παραπάνω:

$$d(0, t) = \frac{1}{(1+r)^t}. \quad (6.4)$$

Η ποσότητα αυτή είναι απαραίτητη στον υπολογισμό του βασικού τύπου του μετασχηματισμού του Wang.

- Καθορισμός των οριακών τιμών (strike levels) σύμφωνα με τη σχέση (5.21). Πιο αναλυτικά θα συζητηθούν στην ενότητα 6.5, καθώς αποτελούν καθοριστικά στοιχεία στη διαδικασία τιμολόγησης.
- Εκτίμηση του τελεστή διαταραχής του μετασχηματισμού του Wang από τη σχέση (5.10).
- Υπολογισμός των μετασχηματισμένων πιθανοτήτων επιβίωσης ενός ατόμου ηλικίας $x=65$ να επιβιώσει για το επόμενο έτος σύμφωνα με τη σχέση (5.14).
- Εκτίμηση της μέσης τιμής και της διακύμανσης που προκύπτουν από τις μετασχηματισμένες πιθανότητες επιβίωσης, οι οποίες υπολογίστηκαν από τις σχέσεις (5.25) και (5.26), αντίστοιχα.
- Υπολογίζεται η ποσότητα $k_t = \frac{X_t - \mu_t^*}{\sigma_t^*}$ και η συνάρτηση $\Psi(k_t)$ από τη σχέση (5.29).
- Στη συνέχεια, με το ίδιο σκεπτικό υπολογίζεται η συνάρτηση $\Psi\left(k_t + \frac{C}{\sigma_t^*}\right)$ από τη σχέση (5.29).
- Οι αναμενόμενες τιμές των χρηματοροών $E^*[D_t]$ προκύπτουν από τη σχέση (5.32) και στη συνέχεια υπολογίζονται οι προεξοφλημένες αναμενόμενες τιμές $d(0, t)E^*[D_t]$, σε συνδυασμό με τη σχέση (6.4).

Έπειτα, καταλήγουμε στον υπολογισμό των ασφαλιστρών από τη σχέση (5.17) και της αξίας της ομολογίας από τη σχέσης (5.18), αντίστοιχα.

6.3. Εφαρμογή του μοντέλου Lee-Carter

Σημαντικό μέρος της εφαρμογής αποτελεί η προβολή της θνησιμότητας στο μέλλον, η οποία έγινε με το μοντέλο Lee-Carter, σύμφωνα με την διαδικασία που περιγράφεται στην ενότητα 4.4.

Για την εφαρμογή, έγινε προβολή της θνησιμότητας μετά το έτος 2010, ώστε να επιλέξουμε το κατάλληλο έτος για την τιμολόγηση και συγκεκριμένα για την διαδικασία υπολογισμού των οριακών τιμών (strike levels).

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, για να γίνει η προβολή της θνησιμότητας αντλήθηκαν από τη ηλεκτρονική σελίδα HMD τα δεδομένα των ρυθμών θνησιμότητας των τριών χωρών για τα εξής διαστήματα ετών:

- Ελλάδα 1981-2010.
- Ιταλία 1970-2010.
- Ισπανία 1970-2010.

Στη συνέχεια με τον κατάλληλο κώδικα (βλ. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α.2) στο στατιστικό πρόγραμμα R προέκυψε η προβολή της θνησιμότητας.

6.4. Υπολογισμός των Οριακών Τιμών (Strike Levels) X_t

Από την προβολή της θνησιμότητας $m_{x,t}$ όπως υπολογίστηκε με τον κώδικα της ενότητας 6.3, επιλέξαμε για την κάθε χώρα:

- Για την Ελλάδα το έτος 2013.
- Για την Ισπανία το έτος 2012.
- Για την Ιταλία το έτος 2011.

Η διαδικασία υπολογισμού των οριακών τιμών X_t αποτελείται από τα εξής βήματα:

- Τον υπολογισμό των τιμών του Projected improvement rate of the force of mortality, το οποίο προκύπτει από τη διαφορά του τρέχοντα ρυθμού της θνησιμότητας, του έτους 2010 και από τον προβαλλόμενο ρυθμό της θνησιμότητας που επιλέξαμε για την κάθε χώρα.
- Τον υπολογισμό των τιμών του Improvement Rate, το οποίο προκύπτει από τη διαφορά των τιμών του Projected improvement rate of the force of mortality του έτους που θέλουμε να υπολογίσουμε και του προηγούμενου.
- Έχοντας τις τιμές των πιθανοτήτων μη επιβίωσης q_x , από την ιστοσελίδα HMD και τον αριθμό επιζώντων l_x , για κάθε ηλικία x , όπως υπολογίστηκε στην ενότητα 6.2, υπολογίστηκαν οι οριακές τιμές (strike levels) X_t σύμφωνα με τη σχέση (5.21).

6.5. Υπολογισμός του Market Price of Risk

Στην Ελλάδα, όπως αναφέραμε, η παράμετρος του market price of risk (λ) δεν παρέχεται από την αγορά, λόγω του ότι η αγορά παραγώγων που συνδέεται με τη θνησιμότητα δεν είναι ανεπτυγμένη. Επομένως, υπολογίσαμε τη παράμετρο λ στο στατιστικό πρόγραμμα R με έναν κώδικα (βλ. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α.1) ο οποίος επιλύει την εξίσωση (5.11) του μετασχηματισμού του Wang ως

προς τη παράμετρο λ . Υπολογίσαμε την παράμετρο για τις ηλικίες $I_0 \in (60, 75)$, για κάθε φύλο (gender) $g \in (\text{male}, \text{female})$ και για την κάθε χώρα, με risk-free rate, $r=2\%$ και $r=3\%$. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στους παρακάτω πίνακες:

Market Price of Risk (λ)				
r=2%				
		GR	ES	IT
Male	60-110	0.798172	0.838022	0.876692
	65-110	0.466721	0.501285	0.512274
	70-110	0.056904	0.09106	0.081021
	75-110	-0.43647	-0.40659	-0.44476
Female	60-110	1.214159	1.327674	1.260418
	65-110	0.843072	0.989793	0.918004
	70-110	0.37292	0.555193	0.496194
	75-110	-0.20063	0.020074	-0.03341

Market Price of Risk (λ)				
r=3%				
		GR	ES	IT
Male	60-110	0.623078	0.662911	0.700029
	65-110	0.283046	0.317529	0.326658
	70-110	-0.13901	-0.10554	-0.11833
	75-110	-0.64671	-0.62019	-0.66116
Female	60-110	1.038285	1.154725	1.087155
	65-110	0.656936	0.807784	0.736354
	70-110	0.17205	0.359984	0.301141
	75-110	-0.41719	-0.19297	-0.24592

Market Price of risk για $r=2\%$ και $r=3\%$

Αρχικά, παρατηρούμε ότι η παράμετρος λ μειώνεται καθώς αυξάνεται η ηλικία. Αυτό συμβαίνει επειδή όσο μεγαλύτερη είναι η ηλικία τόσο λιγότερες πληρωμές εκτιμάει ο ασφαλιστής ότι θα κάνει στο μέλλον. Επίσης, υπάρχει σημαντική διαφορά των τιμών μεταξύ των φύλων, με τις γυναίκες να έχουν μεγαλύτερη τιμή, σχεδόν διπλάσια από τους άνδρες, κάτι το οποίο είναι αναμενόμενο επειδή η διαφορά αυτή εκφράζει το μεγαλύτερο προσδόκιμο ζωής που έχουν οι

γυναίκες από τους άνδρες. Επίσης, αλλάζοντας ελάχιστα το risk-free rate, παρατηρούμε ότι προκύπτουν μεγάλες διαφορές στις τιμές της παραμέτρου.

Για την εφαρμογή του μετασχηματισμού του Wang και για να προκύψουν συγκρίσιμα αποτελέσματα, η τιμή της παραμέτρου θα πρέπει να είναι $\lambda > 0$. Έτσι, για την τιμολόγηση της ομολογίας επιλέξαμε την τιμή του market price of risk για την ηλικία $I_0 = 65$ με risk-free rate, $r=2\%$ για κάθε χώρα.

6.6. Σύγκριση Αποτελεσμάτων της Ομολογίας Μακροβιότητας

Παρακάτω, παρουσιάζονται τα τελικά αποτελέσματα από την τιμολόγηση της ομολογίας μακροβιότητας διάρκειας 30 ετών, για άνδρες και γυναίκες ηλικίας 65 ετών, για τις τρεις χώρες ξεχωριστά.

Αποτελέσματα τιμολόγησης για την Ελλάδα

Ελλάδα	Male (65)	Female (65)
Market price of risk (λ)	0.46672	0.84307
Αριθμός επιζώντων στην ηλικία 65	10,000	10,000
Ετήσια πληρωμή για κάθε ασφαλισμένο (R)	1,000	1,000
Ονομαστική αξία της κανονικής ομολογίας (RF)	10,000,000	10,000,000
Ονομαστική αξία της ομολογίας μακροβιότητας (RF)	10,000,000	10,000,000
Επιτόκιο κουπονιού και για τις δυο ομολογίες (c)	0.065	0.065
Συνολική Ετήσια πληρωμή της SPC (RC)	650,000	650,000
Αξία της κανονικής ομολογίας (W)	10,000,000	10,000,000
Αξία της ομολογίας μακροβιότητας (V)	9,522,420.47	9,454,857.38
Ασφάλιστρα Αντασφάλισης (P)	477,579.53	545,142.62

Αποτελέσματα τιμολόγησης για την Ιταλία

Ιταλία	Male (65)	Female (65)
Market price of risk (λ)	0.51227	0.98979
Αριθμός επιζώντων στην ηλικία 65	10,000	10,000
Ετήσια πληρωμή για κάθε ασφαλισμένο (R)	1,000	1,000
Ονομαστική αξία της κανονικής ομολογίας (RF)	10,000,000	10,000,000
Ονομαστική αξία της ομολογίας μακροβιότητας (RF)	10,000,000	10,000,000
Επιτόκιο κουπονιού και για τις δυο ομολογίες (c)	0.065	0.065
Συνολική Ετήσια πληρωμή της SPC (RC)	650,000	650,000
Αξία της κανονικής ομολογίας (W)	10,000,000	10,000,000
Αξία της ομολογίας μακροβιότητας (V)	9,727,823.58	8,797,836.78
Ασφάλιστρα Αντασφάλισης (P)	272,176.42	1,202,163.22

Αποτελέσματα τιμολόγησης για την Ισπανία

Ισπανία	Male (65)	Female (65)
Market price of risk (λ)	0.50129	0.98979
Αριθμός επιζώντων στην ηλικία 65	10,000	10,000
Ετήσια πληρωμή για κάθε ασφαλισμένο (R)	1,000	1,000
Ονομαστική αξία της κανονικής ομολογίας (RF)	10,000,000	10,000,000
Ονομαστική αξία της ομολογίας μακροβιότητας (RF)	10,000,000	10,000,000
Επιτόκιο κουπονιού και για τις δυο ομολογίες (c)	0.065	0.065
Συνολική Ετήσια πληρωμή της SPC (RC)	650,000	650,000
Αξία της κανονικής ομολογίας (W)	10,000,000	10,000,000
Αξία της ομολογίας μακροβιότητας (V)	9,472,347.15	9,180,100.06
Ασφάλιστρα Αντασφάλισης (P)	527,652.85	819,899.94

Σύμφωνα με τα παραπάνω αποτελέσματα, ο ασφαλιστής στην Ιταλία καλείται να πληρώσει τα λιγότερα ασφάλιστρα για να αντασφαλίσει το χαρτοφυλάκιο ασφαλειών ζωής των ανδρών προκειμένου να αντισταθμίσει τον κίνδυνο της μακροβιότητας, ενώ τα περισσότερα ασφάλιστρα θα τα πληρώσει ο ασφαλιστής στην Ισπανία. Σχετικά με το χαρτοφυλάκιο ασφαλειών ζωής των γυναικών, ο ασφαλιστής στην Ελλάδα θα καταβάλει τα λιγότερα ασφάλιστρα, ενώ τα περισσότερα θα τα καταβάλει ο ασφαλιστής στην Ισπανία.

Σε σύγκριση των ασφαλιστρών μεταξύ των δύο φύλων για κάθε χώρα, παρατηρούμε ότι οι ασφαλιστές καλούνται να πληρώσουν παραπάνω ασφάλιστρα για τις γυναίκες, κάτι το οποίο είναι αναμενόμενο καθώς οι γυναίκες έχουν μεγαλύτερο προσδόκιμο ζωής από τους άνδρες.

Αξίζει να σημειωθεί ότι συγκρίνοντας τα ασφάλιστρα ίδιου φύλου για τις τρεις χώρες, παρατηρούμε ότι δεν υπάρχουν σημαντικές διαφορές με εξαίρεση τις γυναίκες στην Ιταλία, για τις οποίες ο ασφαλιστής καλείται να πληρώσει κατά μέσο όρο τα διπλάσια σε σχέση με τα ασφάλιστρα των γυναικών των άλλων δύο χωρών. Επίσης, τα ασφάλιστρα μεταξύ των φύλων σε κάθε χώρα δεν διαφέρουν σημαντικά εκτός από την Ιταλία στην οποία τα ασφάλιστρα έχουν μεγάλη απόκλιση μεταξύ τους. Πιθανόν αυτό οφείλεται στις τιμές των πιθανοτήτων μη επιβίωσης και των ρυθμών θνησιμότητας του συγκεκριμένου έτους που χρησιμοποιήθηκε στην τιμολόγηση.

Επίσης, ένας λόγος για την απόκλιση των ασφαλιστρών της Ιταλίας θα μπορούσε να είναι η παράμετρος του market price of risk, η οποία είναι μια καθοριστική παράμετρος για την τιμολόγηση. Αναλύοντας όμως, τις τιμές της παραμέτρου στην ενότητα 6.5, παρατηρήσαμε ότι η παράμετρος έχει την ίδια 'συμπεριφορά' σε όλες τις χώρες και στις γυναίκες έχει σχεδόν την διπλάσια τιμή. Παρόλα αυτά, δεν μπορούμε να υποστηρίξουμε με βεβαιότητα ότι η παράμετρος του λ οφείλεται για την απόκλιση στις τιμές των ασφαλιστρών στην Ιταλία.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Κατά τη διάρκεια του εικοστού αιώνα, η εξέλιξη της ιατρικής επιστήμης και φαρμακευτικής βιομηχανίας είχε ως αποτέλεσμα την βελτίωση του προσδόκιμου ζωής των πληθυσμών στις ανεπτυγμένες χώρες και κατ' επέκταση της βελτίωσης της θνησιμότητας. Το φαινόμενο αυτό είχε ως αποτέλεσμα την ανάδειξη του κινδύνου μακροβιότητας ως έναν από τους πιο σημαντικούς κινδύνους που έχουν να αντιμετωπίσουν οι ασφαλιστικές εταιρείες και τα συνταξιοδοτικά προγράμματα.

Οι ασφαλιστικές εταιρείες αντιμετωπίζουν τον κίνδυνο της μακροβιότητας με προϊόντα τιτλοποίησης που συνδέονται με την θνησιμότητα, διαφορετικά η μη αντιστάθμιση του κινδύνου θα προκαλέσει σοβαρές ζημιές στα οικονομικά των εταιριών με αποτέλεσμα να επηρεαστεί ο ισολογισμός τους και κατ' επέκταση στο χρηματιστήριο η τιμή της μετοχής τους.

Επιπλέον, ο κίνδυνος μακροβιότητας δεν επηρεάζει μόνο τις ασφαλιστικές εταιρίες και τα συνταξιοδοτικά προγράμματα, αλλά και άλλους οργανισμούς που συνδέονται άμεσα με τους παραπάνω. Για παράδειγμα, ο κίνδυνος μακροβιότητας έχει σοβαρές συνέπειες για τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα που συνδέονται με τις ασφαλιστικές εταιρίες και τα συνταξιοδοτικά προγράμματα.

Επίσης, οι οργανισμοί αξιολόγησης πιστοληπτικής ικανότητας, λαμβάνουν σοβαρά υπόψιν τον κίνδυνο της μακροβιότητας και υποχρεώνουν τις ασφαλιστικές εταιρίες να αυξάνουν τα αποθεματικά τους για να παραμένουν φερέγγυες και να προστατέψουν τους ασφαλισμένους.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α.1 Κώδικας για τον υπολογισμό του market price of risk

Ο παρακάτω κώδικας (Torske, 2015), αφορά τους άνδρες ηλικίας 65-105 για την Ελλάδα, ενώ οι τιμές του Market Price of Risk για τις άλλες χώρες προκύπτουν φορτώνοντας τους αντίστοιχους πίνακες με τις πιθ. μη επιβίωσης, αλλάζοντας τη μεταβλητή male σε TRUE (άνδρες) ή FALSE (γυναίκες).

```
1 # Εισαγωγή/φόρτωση του αρχείου με τις πιθανότητες μη επιβίωσης του έτους 2010
2
3 q_x=read.table("Your own directory",header=T)
4
5 L=function(lambda,r,q,s,x0,le,male)
6 {
7 # r = risk free rate
8 # q = πιθανότητα θανάτου
9 # s = κλασματική μηνιαία ράντα πληρωμών
10 # x0 = αρχική ηλικία (65)
11 # le = μέγιστη ηλικία (105)
12 # male = TRUE/FALSE
13
14 q_male=q$Male
15 q_female=q$Female
16
17 # K=διάστημα ετών: διαφορά μέγιστης και αρχικής ηλικίας
18 K=le-x0
19
20 # Προεξοφλητικός παράγοντας
21 d=1/(1+r)
22
23 #s= ετήσια πληρωμή
24 s=s*12
25
26 # Υπολογισμός των k_q_x0 και η εισαγωγή τους σε πίνακα
27 if(male) q=q_male else
28 q=q_female
29 q_=c(q,rep(1,le))
30 kq=matrix(0,K+1,le)
31 for (l in 0:le)
32 {
33 kq[1:K+1,l]=1-cumprod(1-q_[l:(l+K-1)])
34 }
35 #ο μετασχηματισμός του Wang
36 A=s*sum(d**(0:K)*(pnorm(qnorm(1-kq[1:(K+1),x0])-lambda)))
37 list(A=A)
38 }
39 #τα s,x0 και male είναι μεταβλητές, όλα τα άλλα είναι σταθερές
40 f=function(lambda,r=0.02,q=q_x,s=650,x0=65,le=105,male=TRUE) L(lambda,r,q,s,x0,le,male)$A
41 fzero=function(lambda,pi_x0) f(lambda)-pi_x0
42 uni=uniroot(fzero,c(-10,10),pi_x0=100000)
43 lambda=uni$root
44 lambda
```

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α.2 Κώδικας για τον υπολογισμό της προβολής της θνησιμότητας

Ο παρακάτω κώδικας αφορά την προβολή της θνησιμότητας για διάστημα 15 ετών για την Ελλάδα από τα death rates των ετών 1981-2010 με μέγιστη ηλικία 105 για άνδρες και γυναίκες. Οι υπόλοιποι πίνακες προκύπτουν αλλάζοντας τα διεθνή αρχικά της εκάστοτε χώρας (GRC για την Ελλάδα, ITA για την Ιταλία και ESP για την Ισπανία), τα death rates των ετών που θα επιλέξουμε, δηλώνοντας το μελλοντικό διάστημα πρόβλεψης της θνησιμότητας και αναφέροντας την μέγιστη ηλικία.

```
1 # Εντολή για την εγκατάσταση των "πακέτων" που χρειαζόμαστε.
2
3 install.packages("demography")
4
5 # Φόρτωση του "πακέτου" "demography"
6
7 library(demography)
8
9 # Εισαγωγή από το Human Mortality Database τα death rates της εκάστοτε χώρας
10 # (GRC για την Ελλάδα, ITA για την Ιταλία και ESP για την Ισπανία)
11
12 greece<- hmd.mx(country ="GRC", username ="*****", password="*****")
13
14 # Εφαρμογή του μοντέλου Lee-Carter για την Ελλάδα για τους άνδρες για το διάστημα 1981-2010.
15
16 males_lc <- lca(greece, series="male", years=1981:2010, max.age=105, adjust="dt", interpolate = TRUE)
17 malesaxbx <- cbind(males_lc$ax,males_lc$bx); colnames(malesaxbx) <- c("ax", "bx")
18 maleskt <- cbind("",males_lc$kt)
19
20 # Εφαρμογή του μοντέλου Lee-Carter για την Ελλάδα για τις γυναίκες για το διάστημα 1981-2010
21
22 females_lc <- lca(greece, series="female", years=1981:2010, max.age=105, adjust="dt", interpolate = TRUE)
23 femalesaxbx <- cbind(females_lc$ax,females_lc$bx); colnames(femalesaxbx) <- c("ax", "bx")
24 femaleskt <- cbind("",females_lc$kt)
25
26 # Τα αποτελέσματα των προβλέψεων ανά έτος για 15 έτη.
27
28 males_for <- forecast(males_lc, h=15)
29 males_for$rate$male
30 females_for <- forecast(females_lc, h=15)
31 females_for$rate$female
32
33 # Εντολή για να πάρουμε τα αποτελέσματα σε αρχείο excel.
34
35 write.table(males_for$rate$male, "greece-clipboard .csv", sep="\t")
36 write.table(females_for$rate$female, "greece-clipboard1 .csv", sep="\t")
```

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ξένη Βιβλιογραφία

- Beelders, M., & Colarossi, D., (2004). Modelling mortality risk with extreme value theory. *Global Association of Risk Professionals*, 1(9): 26-30.
- Biffis, E., & Blake, D. P., (2009). Mortality-linked securities and derivatives. (https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1340409).
- Blake, D., Cairns, A. J., & Dowd, K., (2006). Living with mortality: Longevity bonds and other mortality-linked securities. *British Actuarial Journal*, 12(1): 153-197.
- Coughlan, G., Epstein, D., Sinha, A., & Honig, P., (2007). q-forwards: Derivatives for transferring longevity and mortality risks. JPMorgan Pension Advisory Group, 2. (https://www.researchgate.net/profile/Guy_Coughlan/publication/256109844_q-Forwards_Derivatives_for_Transferring_Longevity_and_Mortality_Risks/links/00463521c8e5387008000000.pdf).
- Cui, J. (2008). Longevity risk pricing. Netspar Discussion paper, 001.
- Deaton, A. S., & Paxson, C. (2004). Mortality, income, and income inequality over time in Britain and the United States. University of Chicago Press. In *Perspectives on the Economics of Aging*: 247-286.
- Girosi, F., & King, G., (2007). Understanding the Lee-Carter mortality forecasting method. (http://pages.stern.nyu.edu/~dbackus/BCH/demography/GirosiKing_LeeCarter_07.pdf).
- Koissi, M. C., Shapiro, A., & Högnäs, G., (2005). Fitting and Forecasting Mortality Rates for Nordic Countries Using the Lee-Carter method. *Actuarial Research Clearing House*, 1: 21.

- Lee, R., (2000). The Lee-Carter method for forecasting mortality, with various extensions and applications. North American actuarial journal, 4(1): 80-91.
- Lee, R. D., & Carter, L. R. (1992). Modeling and forecasting US mortality. Journal of the American statistical association, 87(419), 659-671.
- Levantesi, S., Menzietti, M., & Torri, T. (2008). Longevity bond pricing models: an application to the Italian annuity market and pension schemes. In 18th International AFIR Colloquium, Rome : 125-147.
- Lin, Y., & Cox, S. H., (2005). Securitization of mortality risks in life annuities. Journal of risk and Insurance, 72(2): 227-252.
- Pitacco, E., Denuit, M., & Haberman, S., (2009). Modelling longevity dynamics for pensions and annuity business. Oxford University Press.
- Stanley, M., (2003). Swiss Re innovative mortality-based security. News release, December, 8. (<http://www.macminn.org/life/mortality%20based%20security.pdf>).
- Torske, S., (2015). Pricing risk due to mortality under the Wang Transform (MSc thesis), University of Oslo.
- Venter, G. G., (1991). Premium calculation implications of reinsurance without arbitrage. Astin Bulletin, 21(02): 223-230.
- Wang, J. Z., (2007). Fitting and Forecastin Mortality for Sweden: Applying the Lee-Carter Model. Matematisk statistik, Stockholms universitet. (<http://www2.math.su.se/matstat/reports/serieb/2007/rep1/report.pdf>).
- Wang, S., (1996). Premium calculation by transforming the layer premium density. ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA, 26(1): 71-92.
- Wang, S., (2000). A Class of Distortion Operations for Pricing Financial and Insurance Risks. Journal of Risk and Insurance, 67(1): 15-36.

- Wang, S., (2002). A universal framework for pricing financial and insurance risks. *Astin Bulletin*, 32(02): 213-234.
- Wang, S., (2007). Fitting and Forecastin Mortality for Sweden: Applying the Lee-Carter Model. *Matematisk statistik*, Stockholms universitet.

Ελληνική Βιβλιογραφία

- Πιτσέλης, Γ., (2014) Αναλογιστικές Μέθοδοι Συνταξιοδότησης, Πανεπιστημιακές Σημειώσεις. Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.
- Γκλεζάκος Μ., (2015) Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα, Πανεπιστημιακές Σημειώσεις. Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.
- Μαυρομάτη, Ε. (2012). Μοντελοποίηση και πρόβλεψη θνησιμότητας: το μοντέλο του Lee-Carter και προεκτάσεις του (MSc thesis). Πανεπιστήμιο Πειραιώς.
(<http://dione.lib.unipi.gr/xmlui/handle/unipi/5064>).
- Μποζίκας, Α. (2013). Προβολή θνησιμότητας για προγράμματα κοινωνικής ασφάλισης στην Ελλάδα (MSc thesis). Πανεπιστήμιο Πειραιώς.
(<http://dione.lib.unipi.gr/xmlui/handle/unipi/5741>).