



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

UNIVERSITY OF PIRAEUS

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ & ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ
ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

**Η ΒΑΘΜΙΔΑ ΑΠΟΤΥΧΙΑΣ ΚΑΙ Ο ΜΕΣΟΣ
ΥΠΟΛΕΙΠΟΜΕΝΟΣ ΧΡΟΝΟΣ ΖΩΗΣ ΓΙΑ
ΜΕΙΞΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ ERLANG**

Κουτροπούλου Η. Χριστίνα

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων
για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος στην
Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Πειραιάς

Ιούνιος 2019



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

UNIVERSITY OF PIRAEUS

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ & ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ
ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

**Η ΒΑΘΜΙΔΑ ΑΠΟΤΥΧΙΑΣ ΚΑΙ Ο ΜΕΣΟΣ
ΥΠΟΛΕΙΠΟΜΕΝΟΣ ΧΡΟΝΟΣ ΖΩΗΣ ΓΙΑ
ΜΕΙΞΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ ERLANG**

Κουτροπούλου Η. Χριστίνα

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων
για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος στην
Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Πειραιάς

Ιούνιος 2019

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Ε-
ξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής
και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμόν
..... συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας
του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και
Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της ήταν:

- Πολίτης Κωνσταντίνος (Επιβλέπων)
- Βερροπούλου Γεωργία
- Σεβρόγλου Βασίλης

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφα-
λιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των
γνώμων του συγγραφέα.



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS & INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN
ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

**THE FAILURE RATE AND MEAN RESIDUAL LIFE
FOR MIXTURES OF ERLANG DISTRIBUTIONS**

Koutropoulou E. Christina

MSc Dissertation

Submitted to the Department of Statistics and
Insurance Science of the University of Piraeus in
partial fulfillment of the requirements for the degree of
Master of Science in Actuarial Science and Risk Management

Piraeus, Greece

June 2019

This thesis was approved unanimously by the three-member Commission of Inquiry appointed by the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus No. meeting in accordance with the by laws of the Postgraduate Program in Actuarial Science and Risk Management.

Committee members were:

- Politis Konstantinos (Supervisor)
- Veropoulou Georgia
- Sevroglou Bassilis

The approval of the thesis by the Department of Statistics, University of Piraeus does not imply acceptance of opinions of the author.

Στους γονείς μου,

Βαρβάρα και Ηλία

Πρόλογος και Ευχαριστίες

Η περιγραφή του χρόνου αποτελεί ζωτικό πυρήνα πολλών Επιστημών. Ενδιαφέρον εντοπίζεται στον χρόνο ζωής και στους παράγοντες που υφαρπάζουν τη ζωή. Ο Αναλογισμός ισορροπεί μεταξύ της ανθρώπινης ζωής και κινδύνων που δεν σχετίζονται με την θνησιμότητα, ενώ η Μηχανική εξετάζει την φθορά μηχανημάτων και εξαρτημάτων.

Οι μέθοδοι προσέγγισης αυτών των προβλημάτων στηρίζονται στη χρήση συναρτήσεων όπως η βαθμίδα αποτυχίας και ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής κάτω από συγκεκριμένες υποθέσεις. Στην προκειμένη περίπτωση, θα μελετηθούν υπό την μείξη Erlang κατανομών. Η παρούσα διατριβή συντάχθηκε στα πλαίσια της περάτωσης των μεταπτυχιακών σπουδών στο Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

Θα ήθελα να ευχαριστώ θερμά τον Επιβλέποντα Καθηγητή κύριο Κωνσταντίνο Πολίτη για την καθοδήγησή του, αλλά και τις πολύτιμες συμβουλές του για τα επόμενα βήματα στην ακαδημαϊκή/επαγγελματική μου ζωή. Οφείλω να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στον πατέρα μου, τον άνθρωπο που με υπομονή όλα αυτά τα χρόνια με στηρίζει και με ενθαρρύνει να ακολουθήσω τα όνειρά μου.

Πειραιάς, Ιούνιος 2019

Κουτροπούλου Χριστίνα

Περίληψη

Η ζωή μπορεί να περιγραφεί από τη στιγμιαία πιθανότητα θανάτου και τον αναμενόμενο χρόνο που απομένει μέχρι την έλευση του θανάτου. Πιο συγκεκριμένα, θα μελετήσουμε τη βαθμίδα αποτυχίας και τον μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής κάτω από την μείξη των κατανομών Erlang. Η περιγραφή του χρόνου από μια μείξη κατανομών μπορεί να είναι περισσότερο ακριβής από μια μοναδική κατανομή. Επίσης, η επιλογή της Erlang βασίζεται στην πληθώρα των εφαρμογών της, καθώς η παράμετρος σχήματος είναι θετικός ακέραιος αριθμός και η συνάρτηση κατανομής είναι ευκολότερα διαχειρίσιμη σε σχέση με εκείνη της Γάμμα κατανομής.

Σκοπός μας είναι η διάκριση και η μελέτη σχέσεων μεταξύ των δύο αυτών συναρτήσεων, αλλά και αν υπό την μείξη διατηρούνται κάποια χαρακτηριστικά τους, όπως η μονοτονία, η κυρτότητα και συντελεστές της κατανομής. Κύριο μέλημά μας, όμως, είναι να εντοπίζουμε ποιοι συνδυασμοί των παραμέτρων και των βαρών των κατανομών οδηγούν σε συγκεκριμένα χαρακτηριστικά στοιχεία των συναρτήσεων.

Λέξεις-Κλειδιά: Βαθμίδα Αποτυχίας, Μέσος Υπολειπόμενος Χρόνος Ζωής, Κατανομή Erlang, Κυρτότητα, Μονοτονία

Abstract

The length of a lifetime could be described by the instantaneous probability of death and the expected remaining time until death. In particular, in the present dissertation we study failure rate and mean residual life under mixture of Erlang distributions. The distribution of time may be more precise under mixture of distributions than a single distribution. Moreover, the selection of Erlang distribution is based on its various applications, because the shape parameter is positive integer and the cumulative distribution function is easily manipulated compared with Gamma distribution.

Our aim is to distinguish and study relationships between the two functions and also whether some characteristics work under mixture, such as monotonicity, kurtosis and measures of the distribution. Our main concern is to examine what combination of parameters and weights can lead to specific characteristics.

Keywords: Failure Rate, Mean Residual Life, Erlang Distribution, Kurtosis, Monotonicity

Περιεχόμενα

Κατάλογος Πινάκων	i
Κατάλογος Διαγραμμάτων	v
0 Εισαγωγή	1
1 Βιβλιογραφική Επισκόπηση	3
2 Εισαγωγικές Έννοιες	5
2.1 Πιθανότητες	5
2.1.1 Δεσμευμένη Πιθανότητα	6
2.1.2 Ολική Πιθανότητα	7
2.2 Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές	7
2.2.1 Μέση Τιμή	9
2.2.2 Διακύμανση	9
2.3 Συνεχείς Κατανομές	10
2.3.1 Διαδικασία <i>Poisson</i>	10
2.3.2 Εκθετική Κατανομή	11
2.3.3 Γάμμα Κατανομή	12
2.3.4 Κατανομή <i>Erlang</i>	14
2.3.5 Κατανομή <i>Weibull</i>	15
2.4 Χαρακτηριστικά Συναρτήσεων	17
2.4.1 Κυρτότητα	18

2.4.2	Μονοτονία	20
3	Μείξεις Κατανομών	23
3.1	Ορισμός	23
3.2	Μείξεις Κατανομών <i>Erlang</i>	25
3.2.1	Άπειρες Μείξεις <i>Erlang</i>	36
4	Βαθμίδα Αποτυχίας	37
4.1	Ορισμός	38
4.2	Μονοτονία - Κλάσεις Κατανομών	41
4.3	Κλάσεις Μείξης Κατανομών	45
5	Μέσος Υπολειπόμενος Χρόνος Ζωής	49
5.1	Ορισμός	49
5.2	Σύνδεση με Βαθμίδα Αποτυχίας	52
5.3	Βασικές Κλάσεις Κατανομών	54
5.4	Επιπλέον Κλάσεις Κατανομών	56
5.4.1	Συνεχής Περίπτωση	56
5.4.2	Διακριτή Περίπτωση	60
6	Κυρτότητα	65
6.1	Κυρτότητα <i>Erlang</i> Κατανομών	65
6.2	Κυρτότητα Μείξης <i>Erlang</i> Κατανομών	69
7	Επιλογή Παραμέτρων Μείξης	77
7.1	Βαθμίδα Αποτυχίας	78
7.2	Κυρτότητα Συνάρτησης Πυκνότητας	86
7.3	Συντελεστής Μεταβλητότητας	88
7.4	Μέσος Υπολειπόμενος Χρόνος Ζωής	93
8	Συμπεράσματα	105

Ευρετήριο	109
Βιβλιογραφία	113
Παράρτημα	118

Κατάλογος Πινάκων

4.1	Μονοτονία Βαθμίδας Αποτυχίας σε Σύγκριση με Άλλες Συναρτήσεις	42
6.1	Διαστήματα Κυρτότητας για τη Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας και τη Συνάρτηση Δεξιάς Ουράς	68
6.2	Διαστήματα Κυρτότητας για τη Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας και τη Συνάρτηση Δεξιάς Ουράς Μείξεων Κατανομών	71
7.1	Όρια Λόγου της Συνάρτησης Μείξης Βαθμίδας Αποτυχίας προς τις επιμέρους Βαθμίδες Αποτυχίας	83
7.2	Διαστήματα Μεταβλητής x με Κυρτή Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας	86
7.3	Διάγνωση Συντελεστών (Κύρτωσης, Ασυμμετρίας, Μεταβλητότητας) ^T	91
7.4	Στατιστικά Μείξεων Κατανομών	92
7.5	Σημεία Καμπής Συναρτήσεων και Βέλτιστο Burn-in	101

Κατάλογος Διαγραμμάτων

1	Συνάρτηση Πυκνότητας και Κατανομής μιας Συνεχούς Τυχαίας Μεταβλητής	8
2	Συνάρτηση Πυκνότητας και Κατανομής για την Εκθετική, $(\alpha)Exp(0.5)$ και $(\beta)Exp(1.5)$	12
3	Συνάρτηση Πυκνότητας και Κατανομής για την Γάμμα, $(\alpha)G(0.5, 1.5)$, $(\beta)G(0.5, 2)$ και $(\gamma)G(3.5, 1.5)$	13
4	Συνάρτηση Πυκνότητας και Κατανομής για την Erlang, $(\alpha)Erl(2, 0.1)$, $(\beta)Erl(2, 3)$ και $(\gamma)Erl(4, 0.1)$	15
5	Συνάρτηση Πυκνότητας και Κατανομής για την Weibull, $(\alpha)W(0.5, 3)$, $(\beta)W(4, 3)$ και $(\gamma)W(0.5, 5)$	17
6	Απεικόνιση (α) Κυρτής και (β) Κοίλης Συνάρτησης	20
7	Συνάρτησης Πυκνότητας (Μπλε) και Κατανομής (Κόκκινη) της $0.4Exp(0.5) + 0.6Exp(1.5)$	27
8	Συνάρτησης Πυκνότητας ¹ (Μπλε) και Κατανομής (Κόκκινη) της $0.3Erl(2, 1.5) + 0.2Erl(2, 2) + 0.5Erl(3, 1.5)$	31
9	Συνάρτηση Πυκνότητας και Κατανομής της $0.3G(1, 1.5) + 0.2G(2, 2) + 0.5G(3.5, 1.5)$	34
10	Συνάρτηση Πυκνότητας και Κατανομής της $0.3W(3, 1) + 0.2W(3, 2) + 0.5W(5, 1)$	35
11	Πυκνότητα (πάνω αριστερά), Δεξιά Ουρά (πάνω δεξιά) και Βαθμίδα Αποτυχίας (κάτω) Κανονικής (Μπλε) και Weibull (Κόκκινη) Κατανομής	40

12	Γραφική Απεικόνιση των Κατανομών με Μονότονη Βαθμίδα Αποτυχίας	44
13	Βαθμίδα Αποτυχίας για Εκθετική Κατανομή	44
14	Βαθμίδα Αποτυχίας για την Γάμμα Κατανομή	45
15	Βαθμίδα Αποτυχίας για την Erlang Κατανομή	47
16	Βαθμίδα Αποτυχίας για την Weibull Κατανομή	47
17	Μέσος Υπολειπόμενος Χρόνος Ζωής για Εκθετική(πάνω αριστερά), Γάμμα(πάνω δεξιά), <i>Erlang</i> (κάτω αριστερά) και <i>Weibull</i> (κάτω δεξιά)	53
18	Γραφική Απεικόνιση των Κλάσεων IFR, DFR, IMRL, και DMRL	55
19	Διαμέριση των Επιπλέον Κλάσεων που Αφορούν Συνεχείς Κατανομές	59
20	Διαμέριση των Επιπλέον Κλάσεων που Αφορούν Διακριτές Κατανομές, Μέρος I	63
21	Διαμέριση των Επιπλέον Κλάσεων που Αφορούν Διακριτές Κατανομές, Μέρος II	63
22	Εφαρμογή της (6.1) στις Συναρτήσεις της Πυκνότητας και της Δεξιάς Ουράς για $y = 1$ (αριστερά) και $y = 2$ (δεξιά)	67
23	Εφαρμογή του Ορισμού 2.4.3 στη Συνάρτηση της Πυκνότητας Πιθανότητας της <i>Erl</i> (2, 3)	68
24	Συνάρτηση Πυκνότητας και Δεξιάς Ουράς	69
25	Συνάρτηση Πυκνότητα και Δεξιάς Ουράς Μείξης Κατανομών . . .	72
26	Εφαρμογή της Συνθήκης του Ορισμού 2.4.1 για τη Συνάρτηση Πυκνότητας για $p = 0.7$ (αριστερά) και $p = 0.3$ (δεξιά) για $y = 1$.	72
27	Εφαρμογή της Ανισότητας (2.10) στη Συνάρτηση Πιθανότητας για $y = 1$	73
28	Εφαρμογή της Ανισότητας (2.10) στη Συνάρτηση Πυκνότητας για $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = \lambda + 5$ (αριστερά) και $\lambda_1 = \lambda + 25$, $\lambda_2 = \lambda$ (δεξιά) για $y = 1$	74
29	Εφαρμογή της Ανισότητας (2.10) στη Συνάρτηση Πυκνότητας για $n_1 = n_2 = n$ (αριστερά) και $n_1 = n$, $n_2 = n + 25$ (δεξιά) για $y = 1$	74

30	Μορφές Συνάρτησης Βαθμίδας Αποτυχίας	80
31	Συνάρτηση Βαθμίδας Αποτυχίας για τη Μείξη του Τύπου (A) . .	81
32	Βαθμίδα Αποτυχίας για $0.5Erl(3, 0.1) + 0.5Erl(3 + d, 0.1)$ και $0.5Erl(3, 0.1) + 0.5Erl(3 + d, 1)$	84
33	Βαθμίδα Αποτυχίας για $0.7Erl(n, 3) + 0.3Erl(n, 50)$ (αριστερά) και για $0.5Erl(2, 5) + 0.5Erl(n, \lambda)$ (δεξιά)	85
34	Συναρτήσεις Πυκνότητας των αντίστοιχων Μορφών των Συναρ- τήσεων Βαθμίδας Αποτυχίας	87
35	Συνάρτηση Πυκνότητας Μείξης και Επιμέρους Κατανομών	90
36	Συναρτήσεις Μέσου Υπολειπόμενου Χρόνου Ζωής	94
37	Μέσος Υπολειπόμενος Χρόνος Ζωής και Βαθμίδα Αποτυχίας για $0.5Erl(1, 1) + 0.5Erl(2, 1)$	95
38	Βαθμίδα Αποτυχίας (αριστερά) και Μέσος Υπολειπόμενος Χρόνος Ζωής (δεξιά) για τις Μείξεις $0.95Erl(15, 0.1) + 0.05Erl(3, 12)$ (πάνω) και $0.95Erl(4, 0.15) + 0.05Erl(3, 5)$ (κάτω)	96
39	Βαθμίδα Αποτυχίας και Μέσος Υπολειπόμενος Χρόνος Ζωής Μείξεων, Μέρος I	98
40	Βαθμίδα Αποτυχίας και Μέσος Υπολειπόμενος Χρόνος Ζωής Μείξεων, Μέρος II	98
41	Μείξη $pErl(n_1, \lambda_1) + (1 - p)Erl(n_1 + r, \lambda_1)$ με Μεταβαλλόμενο το r	102
42	Μείξη $pErl(n_1, \lambda_1) + (1 - p)Erl(n_1, \lambda_1 + r)$ με Μεταβαλλόμενο το r	103
43	Μείξη $pErl(n_1, \lambda_1) + (1 - p)Erl(n_2, \lambda_2)$ με μεταβαλλόμενο το p .	104

Κεφάλαιο 0

Εισαγωγή

Στη μελέτη ασφαλιστικών προβλημάτων που σχετίζονται με την ζωή συχνά χρησιμοποιούνται Πίνακες θνησιμότητας. Όμως, υπάρχει η δυνατότητα να περιγραφεί ο χρόνος από συγκεκριμένη κατανομή. Δύο από τις συναρτήσεις που παίζουν σημαντικό ρόλο στην Αναλογιστική Επιστήμη είναι η βαθμίδα αποτυχίας και ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής. Εδώ θα μελετηθούν, θεωρώντας πως ο χρόνος ακολουθεί την μείξη Erlang κατανομών.

Για την Erlang γνωρίζουμε από την βιβλιογραφία πως φέρει αύξουσα βαθμίδα αποτυχίας. Επίσης, είναι γνωστό πως όταν η βαθμίδα αποτυχίας είναι αύξουσα, ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής είναι φθίνουσα συνάρτηση. Στόχος μας, λοιπόν, είναι να μελετήσουμε τι συμβαίνει όταν έχουμε μείξη κατανομών.

Πιο συγκεκριμένα, στο Κεφάλαιο 2 ορίζονται βασικές έννοιες, που αφορούν σε πιθανότητες, στις συνεχείς τυχαίες μεταβλητές και κατανομές, αλλά και σε χαρακτηριστικά συναρτήσεων, όπως είναι η κυρτότητα και η μονοτονία. Στα επόμενα τρία κεφάλαια, ορίζονται τα είδη των μίξεων κατανομών και οι συναρτήσεις της βαθμίδας αποτυχίας και του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής,

αντίστοιχα. Στο Κεφάλαιο 6, ορίζουμε την Κυρτότητα, αλλά και παρατηρήσεις που μας βοηθούν στο Κεφάλαιο 7 να εντοπίσουμε σημαντικά ευρήματα για το ποιες παράμετροι και βάρη μας δίνουν συγκεκριμένη μονοτονία και κυρτότητα στην βαθμίδα αποτυχίας και τον μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής. Θα πρέπει εδώ να σημειωθεί πως η μορφή των δύο συναρτήσεων είναι αρκετά πολύπλοκη για να εξαχθεί ένας καθολικός κανόνας για την επιλογή των παραμέτρων.

Για την κατασκευή των διαγραμμάτων χρησιμοποιήθηκε η γλώσσα προγραμματισμού R και το υπολογιστικό σύστημα Wolfram Mathematica (Mathematica). Για τους πίνακες χρησιμοποιήθηκε αποκλειστικά το Mathematica. Τέλος, για τη συγγραφή της διατριβής χρησιμοποιήθηκε η γλώσσα δημιουργίας κειμένου L^AT_EX.

Κεφάλαιο 1

Βιβλιογραφική Επισκόπηση

Τουλάχιστον από την δεκαετία του 80, έχει ξεκινήσει η μελέτη της συνάρτησης της βαθμίδας αποτυχίας και του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής ως προς τη μονοτονία τους. Ο Glaser (1980) δημοσιεύει ποιες μορφές μπορεί να παρουσιάσει η βαθμίδα αποτυχίας, θεωρώντας πως ο χρόνος ως τυχαία μεταβλητή ακολουθεί κατανομή από την Εκθετική οικογένεια. Οι Guess & Proschan (1985) θεωρητικά αλλά και με τη χρήση εφαρμογών μελετούν τον μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής στα μέσα του 80, ενώ από Gupta¹ λίγο αργότερα και για αρκετές δεκαετίες προκύπτουν αποτελέσματα για την μονοτονία και τα σημεία καμπής των δύο συναρτήσεων, κυρίως, σε θεωρητικό πλαίσιο, χρησιμοποιώντας κατανομές σε παραδείγματα.

Οι Barlow & Proschan (1996) προσεγγίζουν την Θεωρία Αξιοπιστίας από μαθηματική σκοπιά ορίζοντας τις συναρτήσεις και προχωρώντας σε ανάλυση με τη χρήση στοχαστικών μοντέλων. Η συνεργασία των Willmot, Woo (2007) και Lin (2001, 2011) έδωσε σημαντικά αποτελέσματα στον Αναλογισμό, όσο και τη Θεωρία Κινδύνου. Ασχολούνται με μείξεις Erlang και παρουσιάζουν ευρήματα για την βαθμίδα αποτυχίας όσο και τον μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής.

¹Gupta (1987, 2006), Gupta & Akman (1995), Gupta & Warren (2001), Gupta et al (2010)

Παράλληλα, άλλοι ερευνητές παρουσιάζουν αποτελέσματα και παρατηρήσεις για τις δύο συναρτήσεις ενδιαφέροντος και, μάλιστα, υπό την μείξη κατανομών. Οι Bekker & Mi (2003) εξέτασαν την μορφή και τις ιδιότητες των σημείων καμπής του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής, ο Block (2012) μελέτησε τη μονοτονία της βαθμίδας αποτυχίας υπό την μείξη Εκθετικής και IFR Γάμμα κατανομής. Ο Finkelstein (2009) ασχολείται με την κατανόηση της βαθμίδας αποτυχίας προερχόμενη από μείξη κατανομών, αναφέροντας τον όρο “ισχυρός” πληθυσμός.

Οι Parsa et al (2014) χρησιμοποιούν την γενικευμένη Γάμμα κατανομή για τα σημεία καμπής των δύο συναρτήσεων. Οι Navarro & Hernandez (2008) μελετούν τον μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής κάτω από μείξεις, coherent systems και διατεταγμένα στατιστικά. Τέλος, οι Politis & Koutras (2006) εντοπίζουν άνω φράγματα στα πλαίσια της Ανανεωτικής Θεωρίας.

Οι IFR κατανομές είναι άγνωστο τι είδους κλάση μείξης δίνουν, αλλά και εξαιτίας του ότι η Erlang είναι μια πολύ χρήσιμη κατανομή τόσο στον Αναλογισμό, όσο και τη Μηχανική, προσπαθήσαμε να ανταποκριθούμε στο μέτρο του δυνατού στο κενό που υπάρχει στη βιβλιογραφία ως προς το ποιος συνδυασμός παραμέτρων και βαρών μπορεί να προσφέρει IFR/DFR ή λεκανοειδή μορφή.

Κεφάλαιο 2

Εισαγωγικές Έννοιες

Είναι σημαντικό πριν προχωρήσουμε στο αντικείμενο της διατριβής, να τεθούν κάποιες θεμελιώδεις έννοιες, όπως η έννοια της δεσμευμένης πιθανότητας που συναντάται στον υπολειπόμενο χρόνο ζωής, βασικά στοιχεία συνεχών κατανομών, χρήσιμων για την περιγραφή του χρόνου ζωής ή της αξιοπιστίας ενός εξαρτήματος, η αναφορά μέτρων θέσης και διασποράς, τα οποία χαρακτηρίζουν την κάθε κατανομή και, τέλος, χαρακτηριστικά συναρτήσεων, όπως είναι η κυρτότητα και η μονοτονία.

2.1 Πιθανότητες

Παρακάτω ακολουθούν δύο βασικά θεωρήματα των πιθανοτήτων, τα οποία θα βοηθήσουν στον ορισμό, κυρίως, της συνάρτησης του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής. Αυτά είναι ο τύπος της δεσμευμένης πιθανότητας και το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας που προέρχεται από τον πολλαπλασιαστικό κανόνα, ο οποίος προκύπτει από τη δεσμευμένη πιθανότητα.

2.1.1 Δεσμευμένη Πιθανότητα

Ορισμός 2.1.1 Έστω Ω ένας δειγματικός χώρος και $B \subseteq \Omega$. Για ένα ενδεχόμενο A του Ω , η δεσμευμένη πιθανότητα του A δοθέντος του B δίνεται από τον τύπο

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) \neq 0 \quad (2.1)$$

Η δεσμευμένη πιθανότητα εκφράζει την πιθανότητα να συμβεί το ενδεχόμενο A , δεδομένου ότι έχει προηγηθεί το ενδεχόμενο B . Συνήθως, χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της τομής των ενδεχομένων A και B , που εμφανίζονται στον αριθμητή του παραπάνω τύπου.

Αντίστοιχα, ισχύει η εξής σχέση:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad P(A) \neq 0. \quad (2.2)$$

Παρατηρώντας τις σχέσεις (2.1) και (2.2), προκύπτει ο πολλαπλασιαστικός κανόνας και έχει ως εξής:

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A).$$

Τέλος, η δεσμευμένη πιθανότητα ακολουθεί τις εξής ιδιότητες (για την απόδειξη, βλ. Κούτρας, 2004):

- $P(A|B) \leq 1$ αν $A \subseteq \Omega$,
- $P(\Omega|B) = 1$ και
- Αν A_1, A_2, \dots είναι ακολουθία ξένων ανά δύο ενδεχομένων του Ω , τότε

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i | B\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i | B)$$

2.1.2 Ολική Πιθανότητα

Η παρακάτω πρόταση είναι γνωστή ως το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας (ΘΟΠ) και προκύπτει με την χρήση του πολλαπλασιαστικού κανόνα, που αναφέρθηκε παραπάνω.

Πρόταση 2.1.1 Έστω ότι A_1, A_2, \dots, A_n είναι μία διαμέριση του δειγματικού χώρου Ω , τέτοια ώστε $P(A_i) \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Τότε για κάθε ενδεχόμενο B έχουμε

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \dots + P(A_n)P(B|A_n).$$

2.2 Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές

Ορισμός 2.2.1 Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Μια πραγματική συνάρτηση $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ λέγεται τυχαία μεταβλητή του πειράματος αν για κάθε διάστημα $I \subseteq \mathbf{R}$, το σύνολο $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in I\}$ είναι ενδεχόμενο του Ω . Η πιθανότητα εμφάνισης του τελευταίου θα γράφεται ως $P(X \in I)$.

Ως σύνολο τιμών μιας τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται το σύνολο $R_X = \{x \in \mathbf{R} : X(\omega) = x \text{ με } \omega \in \Omega\}$, το οποίο κρίνεται σημαντικό στο να χαρακτηριστεί μια μεταβλητή ως συνεχής ή διακριτή.

Στην προκειμένη περίπτωση, θα ασχοληθούμε με συνεχείς τυχαίες μεταβλητές, καθώς θεωρούμε πως ο χρόνος είναι μια συνεχής μεταβλητή και συνεχείς οι συναρτήσεις και οι κατανομές που τον περιγράφουν.

Ορισμός 2.2.2 Μια τυχαία μεταβλητή X λέγεται συνεχής, αν το σύνολο τιμών R_X δεν είναι αριθμήσιμο. Για παράδειγμα, $R_X = \mathbf{R}$ ή $R_X = \mathbf{R}^+$.

2.2.0.1 Συνάρτηση Πυκνότητας και Κατανομής

Ορισμός 2.2.3 Έστω X μια τυχαία μεταβλητή και $f : \mathbf{R} \rightarrow [0, \infty)$ μια μη αρνητική πραγματική συνάρτηση, τέτοια ώστε για κάθε υποσύνολο του $A \in \mathbf{R}$, το οποίο μπορεί να γραφεί ως ένωση ενός πεπερασμένου ή απείρως αριθμήσιμου πλήθους διαστημάτων, ισχύει

$$P(X \in A) = \int_A f(x)dx.$$

Τότε η τυχαία μεταβλητή X λέγεται απόλυτα συνεχής και η συνάρτηση f συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ή απλά συνάρτηση πυκνότητας της X . Για $A \in (-\infty, t]$ προκύπτει η σχέση $F(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^t f(y)dy$.

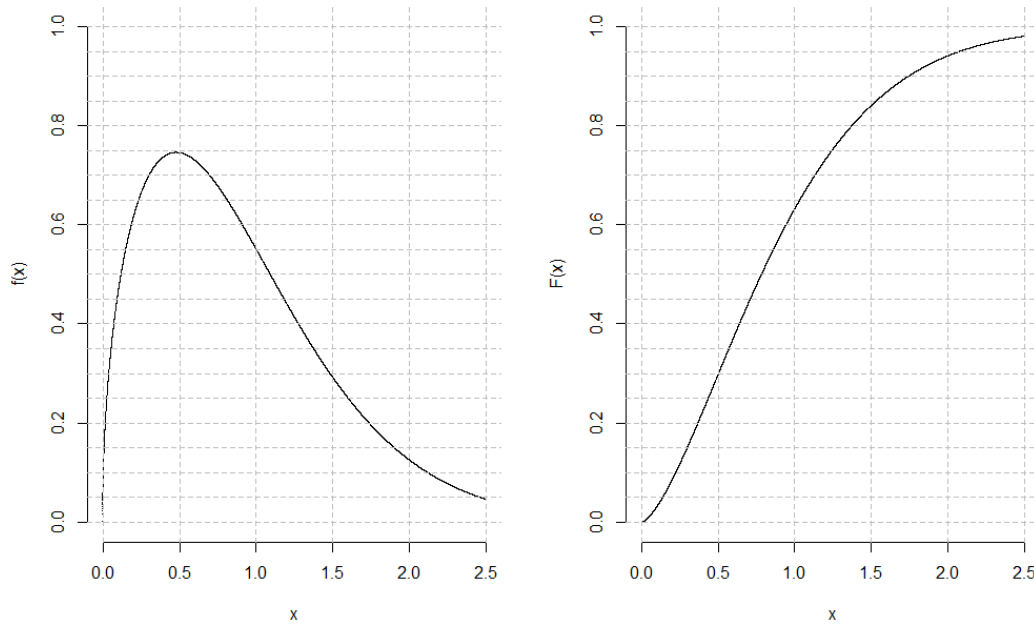
Έχει ενδιαφέρον να αναφερθούν οι ιδιότητες των δύο αυτών συναρτήσεων, δηλαδή

- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1,$
- $F(t) = \int_{-\infty}^t f(x)dx,$
- $f(x) = F'(x), \forall x \in \mathbf{R}$ και
- $P(\alpha \leq x \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha)$

Το παρακάτω διάγραμμα μας δίνει μια απεικόνιση των δύο συναρτήσεων, ενώ μπορούμε να εξάγουμε κάποια χαρακτηριστικά τους. Και οι δύο είναι θετικές και συνεχείς συναρτήσεις. Η συνάρτηση πυκνότητας δεν είναι γνήσια μονότονη, το οποίο είναι στοιχείο που δεν συναντάται σε όλες τις συνεχείς κατανομές. Όσο για τη συνάρτηση κατανομής είναι αύξουσα και ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1.$$

Διάγραμμα 1: Συνάρτηση Πυκνότητας και Κατανομής μιας Συνεχούς Τυχαίας Μεταβλητής



2.2.1 Μέση Τιμή

Ορισμός 2.2.4 Έστω X μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας f . Η μέση τιμή ή αναμενόμενη τιμή της τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται από τον τύπο

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

με την προϋπόθεση ότι το ολοκλήρωμα συγκλίνει απόλυτα, δηλαδή $\int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x)dx < \infty$.

2.2.2 Διακύμανση

Ορισμός 2.2.5 Έστω X μια συνεχής τυχαία μεταβλητή για την οποία υπάρχει η μέση τιμή $\mu = E(X)$. Η ποσότητα

$$\sigma^2 = Var(X) = E[(X - \mu)^2] = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - E^2(X)$$

λέγεται διακύμανση της τυχαίας μεταβλητής X .

Ο παραπάνω ορισμός είναι ίδιος για συνεχείς και διακριτές τυχαίες μεταβλητές, ενώ διαφέρει ο τρόπος υπολογισμού των ροπών -ολοκλήρωμα για τις συνεχείς, άθροισμα για τις διακριτές.

2.3 Συνεχείς Κατανομές

Οι κυριότερες κατανομές συνεχών τυχαίων μεταβλητών με τις οποίες θα ασχοληθούμε στην παρούσα διατριβή είναι η Εκθετική, η Γάμμα, η Erlang, ενώ η Weibull θα αναφερθεί συγκριτικά με τις υπόλοιπες κατανομές.

Παρότι δεν θα ασχοληθούμε με την Poisson ως κατανομή, μας απασχολεί ως διαδικασία, καθώς βάση αυτής ορίζονται οι τρεις κατανομές ενδιαφέροντος.

2.3.1 Διαδικασία Poisson

Έστω ότι για $t = 0$ ξεκινούμε ένα πείραμα με στόχο να καταγραφεί η εμφάνιση ενός ενδεχομένου A . Έστω ότι η ποσότητα $N(t)$ εκφράζει τον αριθμό των εμφανίσεων του ενδεχομένου ενδιαφέροντος στο διάστημα $[0, t]$. Προφανώς, θα ισχύει $R_{N(t)} = \{0, 1, 2, \dots\}$, αφού η ποσότητα $N(t)$ αποτελεί τυχαία μεταβλητή. Για να μελετηθεί η κατανομή της $N(t)$, λαμβάνουμε υπόψιν τις εξής υποθέσεις

- Χρονική στασιμότητα: οι συνθήκες του πειράματος δεν μεταβάλλονται καθ' όλη τη διάρκεια διεξαγωγής του πειράματος
- Ανεξάρτητες προσαυξήσεις: οι εμφανίσεις του ενδεχομένου A σε δύο ξένα μεταξύ τους χρονικά διαστήματα είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα

- Η πιθανότητα να εμφανιστεί το ενδεχόμενο A σε ένα μικρό χρονικό διάστημα θεωρείται ανάλογη του πλάτους του χρονικού διαστήματος, ενώ η πιθανότητα να εμφανιστεί δύο φορές σε αυτό το μικρό διάστημα είναι αμελητέα.

Εξαιτίας των παραπάνω υποθέσεων, προκύπτει ότι η κατανομή της $N(t)$ (Κούτρας, 2004) είναι

$$P(N(t) = x) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

2.3.2 Εκθετική Κατανομή

Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ συνεχείς τυχαίες μεταβλητές που εκφράζουν ενδιάμεσους χρόνους μεταξύ διαδοχικών εμφανίσεων ενός ενδεχομένου A σε μία απαριθμήτρια στοχαστική διαδικασία. Τότε, η X_i τυχαία μεταβλητή ακολουθεί Εκθετική κατανομή, αν η διαδικασία αυτή είναι μια διαδικασία Poisson.

Ορισμός 2.3.1 Έστω X μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

όπου $\lambda > 0$. Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X καλείται Εκθετική με παράμετρο λ και θα συμβολίζεται με $Exp(\lambda)$.

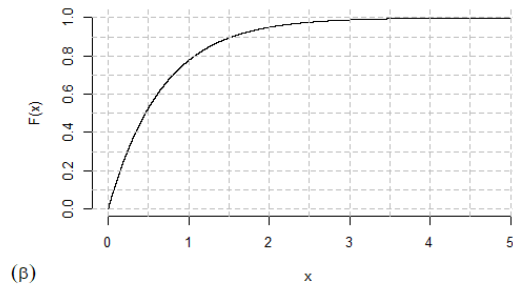
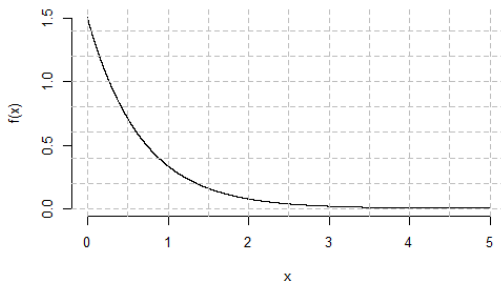
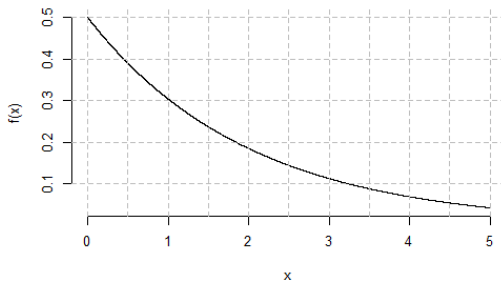
Από τον Ορισμό 2.3.1, προκύπτουν άμεσα ότι

- η μέση τιμή είναι ίση με $\mu = E(X) = \frac{1}{\lambda}$ και
- η διακύμανση ισούται με $\sigma^2 = Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

Η Εκθετική κατανομή χαρακτηρίζεται από έλλειψη μνήμης, που σημαίνει ότι για $\forall x, t \geq 0$ ισχύει πως

$$P(X > s + t | X > s) = P(X > t). \quad (2.5)$$

Διάγραμμα 2: Συνάρτηση Πυκνότητας και Κατανομής για την Εκθετική, (α) $Exp(0.5)$ και (β) $Exp(1.5)$



2.3.3 Γάμμα Κατανομή

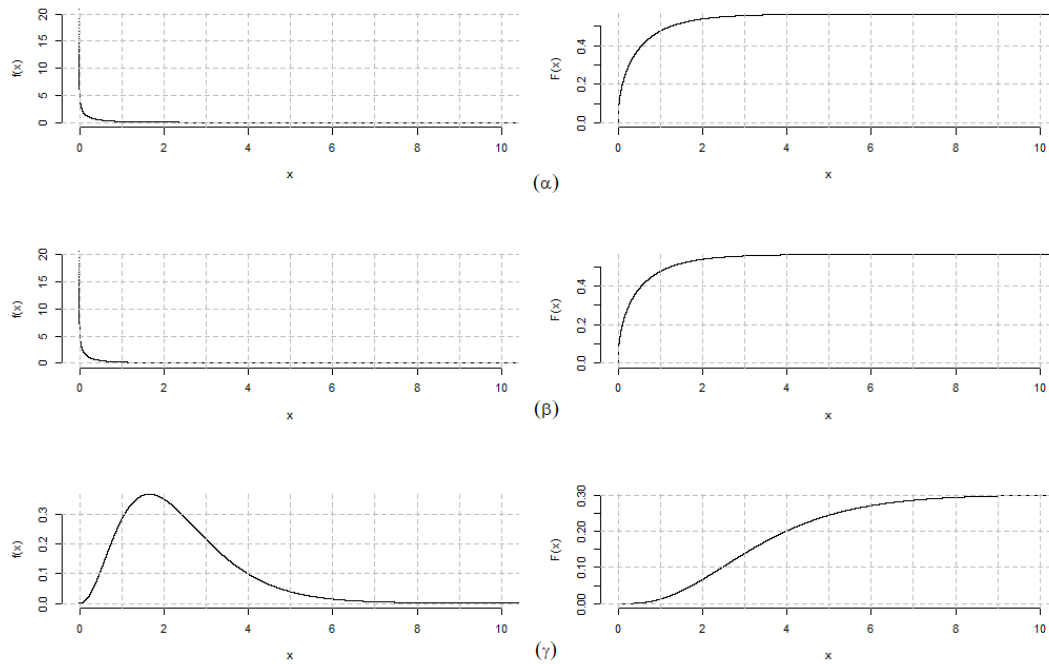
Ορισμός 2.3.2 Έστω X μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

όπου $\lambda > 0$ και $\alpha > 0$ πραγματικοί αριθμοί. Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X καλείται κατανομή Γάμμα με παραμέτρους λ και α και συμβολίζεται ως $X \sim G(\alpha, \lambda)$, ενώ η συνάρτηση $\Gamma : (0, \infty) \mapsto \mathbf{R}$, η οποία καλείται Γάμμα συνάρτηση υπολογίζεται ως

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \quad \alpha > 0.$$

Διάγραμμα 3: Συνάρτηση Πυκνότητας και Κατανομής για την Γάμμα, (α) $G(0.5, 1.5)$, (β) $G(0.5, 2)$ και (γ) $G(3.5, 1.5)$



Από τον Ορισμό, προκύπτουν τα παρακάτω (Παπαϊωάννου και Φερεντίνος, 2000):

- η μέση τιμή είναι ίση με $\mu = E(X) = \frac{\alpha}{\lambda}$ και
- η διακύμανση ισούται με $\sigma^2 = Var(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$

2.3.4 Κατανομή Erlang

Έστω η τυχαία μεταβλητή $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, η οποία εκφράζει σε μια διαδικασία Poisson το συνολικό χρόνο μέχρι την n -οστή εμφάνιση του A ενδεχομένου. Έστω ότι θέλουμε να βρούμε τη συνάρτηση κατανομής αυτής της τυχαίας μεταβλητής και, εν συνεχεία, τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

Η τυχαία μεταβλητή X θυμίζει την ποσότητα $N(t)$, της οποίας η κατανομή δίνεται από τον τύπο (2.3). Συνεπώς, η συνάρτηση δεξιάς ουράς της X , \bar{F} , μπορεί να γραφεί ως:

$$\bar{F}(t) = 1 - F(t) = P(X > t) = P(N(t) > n) = \sum_{i=n+1}^{\infty} P(N(t) = i) = \sum_{i=n+1}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^i}{i!}$$

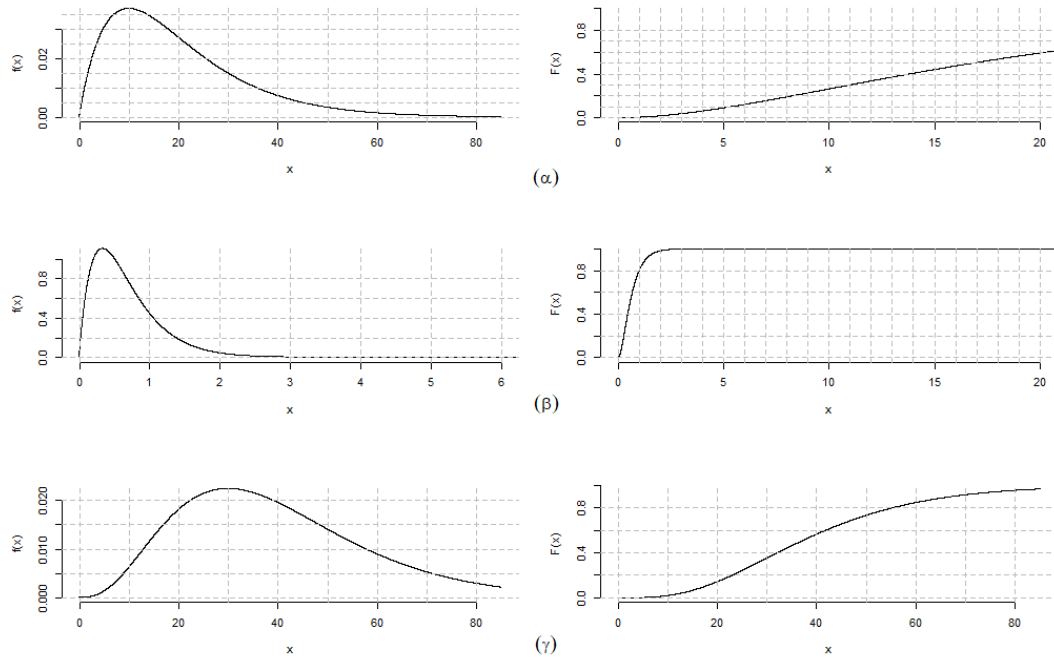
Ορισμός 2.3.3 Έστω X μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

όπου $n \in \mathbf{N}$ και $\lambda > 0$. Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X καλείται κατανομή Erlang με παραμέτρους n και λ και τη συμβολίζουμε $X \sim \text{Erl}(n, \lambda)$.

Η κατανομή Erlang μπορεί να γενικευτεί, παρότι ο όρος $(n-1)!$ απαιτεί ακέραιες τιμές για το n , χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση $\Gamma(\cdot)$, όπως έχει περιγραφεί παραπάνω, μπορούμε να συμπεριλάβουμε και τις μη ακέραιες τιμές. Σε αυτή την περίπτωση, όμως, η κατανομή καλείται Γάμμα και όχι Erlang, καθώς ο τύπος του n καθορίζει την κατανομή.

Διάγραμμα 4: Συνάρτηση Πυκνότητας και Κατανομής για την Erlang, (α) $Erl(2, 0.1)$, (β) $Erl(2, 3)$ και (γ) $Erl(4, 0.1)$



2.3.5 Κατανομή Weibull

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε μία άλλη συνεχή κατανομή, η οποία αποτελεί γενίκευση της εκθετικής.

Ορισμός 2.3.4 Έστω X μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

όπου $\lambda > 0$ και $k > 0$. Η κατανομή της τυχαίας αυτής μεταβλητής ονομάζεται

Weibull κατανομή με παραμέτρους λ και k και συμβολίζεται $X \sim W(k, \lambda)$.

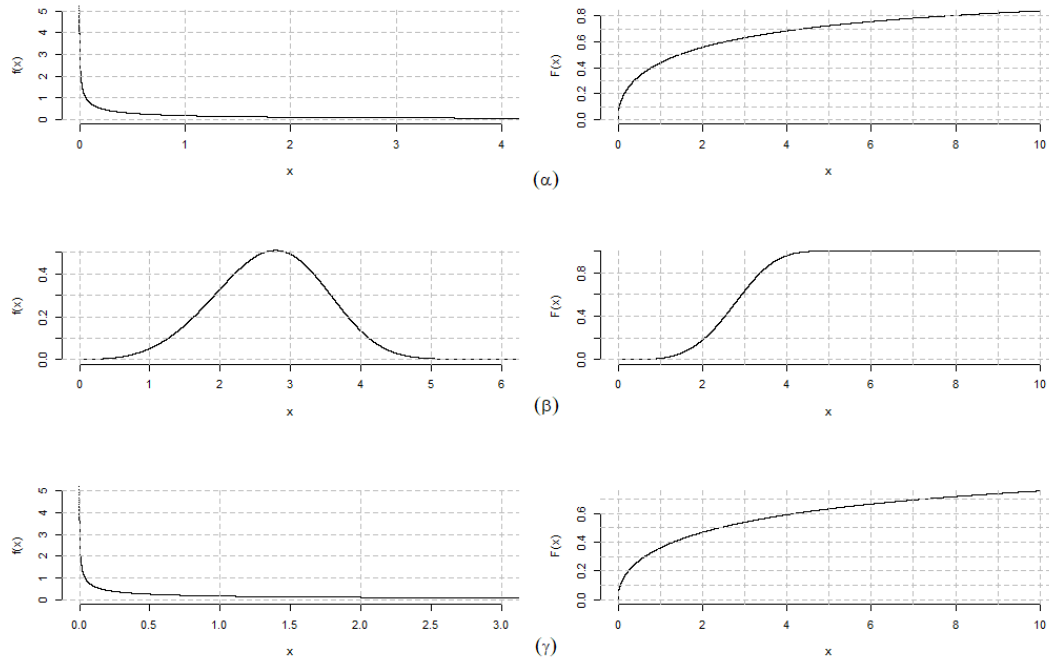
Από τη συνάρτηση πυκνότητας της X προκύπτει πως

- η μέση τιμή είναι ίση με $\mu = E(X) = \lambda \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ και
- η διακύμανση ισούται με $\sigma^2 = Var(X) = \lambda^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right) - \left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right)^2 \right]$.

Παρατηρώντας το Διάγραμμα 5, βλέπει κανείς πως τα διαγράμματα (α) και (γ) μοιάζουν αρκετά, που είναι αναμενόμενο, καθώς έχουν την ίδια παράμετρο σχήματος (shape) $k = 0.5$. Η μόνη διαφορά που παρουσιάζουν είναι πως στο διάγραμμα της συνάρτησης κατανομής στο (γ) εμφανίζει “στενότερη” καμπύλη, καθώς η παράμετρος κλίμακας (scale) είναι μικρότερης εκείνης του διαγράμματος (α).

Τέλος, είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι το διάγραμμα (β) της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας θυμίζει αυτό της κανονικής, αν δεν λάβουμε υπόψιν την δεξιά ουρά. Γι' αυτό ευθύνεται το ό,τι η παράμετρος σχήματος είναι ίση με $k = 2$. Μπορούμε, λοιπόν, με την Weibull να κατασκευάσουμε διαγράμματα, που θυμίζουν την κατανομή, παίρνοντας $k = 2$, αλλά πάντα για θετικές τιμές. Και αυτό γιατί αν και η κανονική κατανομή ορίζεται σε όλο το εύρος των πραγματικών αριθμών, η Weibull ορίζεται μόνο για $x > 0$.

Διάγραμμα 5: Συνάρτηση Πυκνότητας και Κατανομής για την Weibull, (α) $W(0.5, 3)$, (β) $W(4, 3)$ και (γ) $W(0.5, 5)$



2.4 Χαρακτηριστικά Συναρτήσεων

Στον πυρήνα της προκειμένης διατριβής είναι η μελέτη της βαθμίδας αποτυχίας και ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής ως συναρτήσεις, και πιο συγκεκριμένα θα εξετάσουμε την κυρτότητα και την μονοτονία τους, καθώς μπορούμε να εξάγουμε συμπεράσματα τόσο για την ουρά της κατανομής, όσο και για το σε ποια κλάση ανήκει η κατανομή που μελετάμε. Σημαντικό, επίσης, είναι ότι η κυρτότητα προσφέρει ενδείξεις για την μονοτονία μιας κατανομής. Κύριος σκοπός μας, λοιπόν, είναι να περιγράψουμε μια κατανομή (ως συνάρτηση), η οποία χαρακτηρίζει τη ζωή και την έλευση του κινδύνου.

2.4.1 Κυρτότητα

Ορισμός 2.4.1 (Peacarriac and Tong, 1992; Tunc, 2014) Έστω I διάστημα πραγματικών αριθμών, δηλαδή $I \subseteq \mathbf{R}$. Τότε, η συνάρτηση $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ λέγεται κυρτή (convex) στο I , εάν για $\forall x, y \in I$ και $a \in [0, 1]$ ισχύει η ανισότητα

$$f(ax + (1 - a)y) \leq af(x) + (1 - a)f(y). \quad (2.9)$$

Από τους Hardy, Littlewood & Polya, 1934, δίδεται εναλλακτικός ορισμός, οποίος λαμβάνει υπόψιν τον αριθμητικό μέσο όρο συναρτήσεων και τιμών των συναρτήσεων.

Ορισμός 2.4.2 (Hardy, Littlewood & Polya, 1934) Έστω μια συνάρτηση ϕ καλείται κυρτή συνάρτηση, αν ικανοποιεί την εξής σχέση:

$$\phi\left(\frac{x + y}{2}\right) \leq \frac{\phi(x) + \phi(y)}{2}.$$

Αντίστοιχα, μπορεί να ορισθεί και η λογαριθμικά κυρτή συνάρτηση.

Ορισμός 2.4.3 (Tunc, 2014) Μία συνάρτηση $f : I \rightarrow \mathbf{R}^+$ ονομάζεται λογαριθμικά κυρτή, εάν η $\log(f(x))$ είναι κυρτή, ή, ισοδύναμα, αν για $\forall x, y \in I$ και $a \in [0, 1]$ ισχύει η ανισότητα

$$f(ax + (1 - a)y) \leq |f(x)|^a |f(y)|^{1-a}. \quad (2.10)$$

Κρίνεται σημαντικό να αναφερθούν κάποιες ιδιότητες των κυρτών και λογαριθμικά κυρτών συναρτήσεων, που αφορούν το αντικείμενο μελέτης μας. Αρχικά, ως προς την ουρά μιας κατανομής, μια καλά ορισμένη πυκνότητα, που χαρακτηρίζεται ως λογαριθμικά κυρτή, αναμένεται να εμφανίζει παχιές ουρές

(Asmussen & Lehtomaa, 2017). Τέλος, αν έχουμε περισσότερες από μία συναρτήσεις, τότε το άθροισμα λογαριθμικά κυρτών συναρτήσεων δίνει, επίσης, λογαριθμικά κυρτή συνάρτηση (Tunc, 2014).

Ορισμός 2.4.4 (Peajcariaac and Tong, 1992) Έστω I διάστημα πραγματικών αριθμών, δηλαδή $I \subset \mathbf{R}$. Τότε, η συνάρτηση $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ λέγεται κοίλη (concave) στο I , εάν για $\forall x, y \in I$ και $a \in [0, 1]$ ισχύει η ανισότητα

$$f(ax + (1 - a)y) \geq af(x) + (1 - a)f(y).$$

Ένας ισοδύναμος ορισμός δίνεται παρακάτω.

Ορισμός 2.4.5 (Hardy, Littlewood & Polya, 1934) Μια συνάρτηση ϕ καλείται κοίλη συνάρτηση, αν ικανοποιεί την εξής σχέση:

$$\phi\left(\frac{x + y}{2}\right) \geq \frac{\phi(x) + \phi(y)}{2}.$$

Από τον παραπάνω ορισμό, προκύπτει πως αν μια συνάρτηση ϕ είναι κυρτή, τότε η $-\phi$ θα είναι κοίλη.

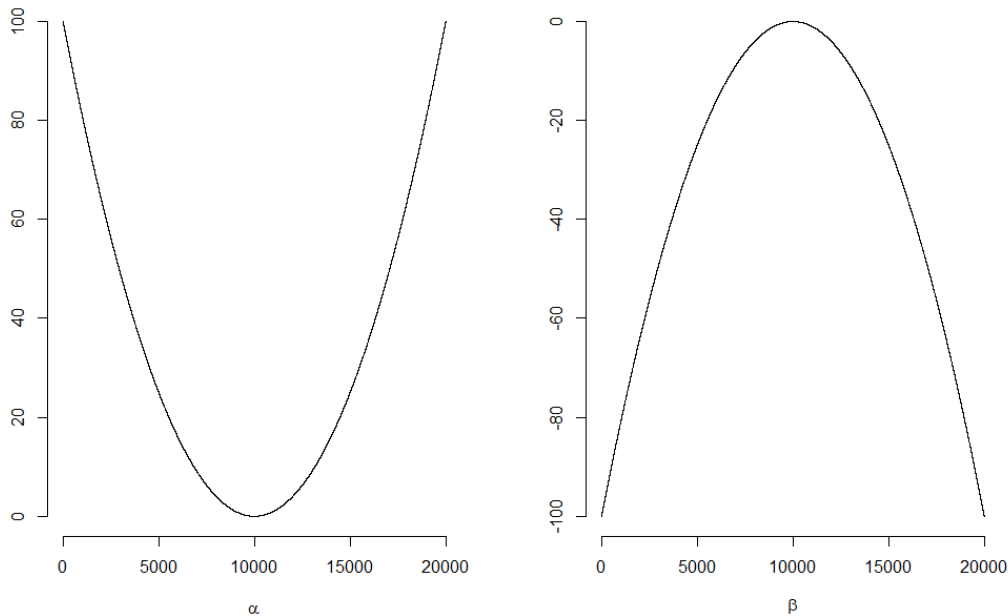
Ορισμός 2.4.6 (Tunc, 2014) Μία συνάρτηση $f : I \rightarrow \mathbf{R}^+$ ονομάζεται λογαριθμικά κοίλη, εάν η $\log(f(x))$ είναι κοίλη, ή, ισοδύναμα, αν για $\forall x, y \in I$ και $a \in [0, 1]$ ισχύει η ανισότητα

$$f(ax + (1 - a)y) \geq |f(x)|^a |f(y)|^{1-a}.$$

Οι ιδιότητες που διέπουν τις συγκεκριμένες συναρτήσεις απορρέουν, όπως αναμενόταν, από τις αντίστοιχες των λογαριθμικά κυρτών συναρτήσεων. Τώρα, το άθροισμα λογαριθμικά κοίλων συναρτήσεων δεν δίνει απαραίτητα λογαριθμικά

κοίλη μείξη. Ακόμη, μια καλά ορισμένη πυκνότητα, που είναι λογαριθμικά κοίλη, αναμένεται να φέρει ελαφριές ουρές.

Διάγραμμα 6: Απεικόνιση (α) Κυρτής και (β) Κοίλης Συνάρτησης



2.4.2 Μονοτονία

Ορισμός 2.4.7 Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα (αύξουσα) σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν ισχύει

$$f(x_1) > (<)f(x_2), \quad x_1 < x_2 \text{ με } x_1, x_2 \in \Delta.$$

Αν η παράγωγος της συνάρτησης της οποίας θέλουμε να ελέγξουμε την μονοτονία είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$, τότε η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα για κάθε x . Διαφορετικά, αν είναι αρνητικό το πρόσημο της παραγώγου, η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα.

Ο διπλός παραπάνω ορισμός αφορά σε γνησίως μονότονες συναρτήσεις. Όπως θα δούμε σε επόμενα κεφάλαια, η μείξη Erlang κατανομών δεν δίνει πάντα γνήσια μονότονες συναρτήσεις (βαθμίδα αποτυχίας ή μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής), αλλά μία “μείξη” των δύο βασικών τύπων μονοτονίας, η οποία παίρνει λεκανοειδή μορφή ή θυμίζει roller-coaster.

Ορισμός 2.4.8 (*Gupta & Akman, 1995*) Έστω $f : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$ μια πραγματική διαφορίσιμη συνάρτηση. Τότε εμφανίζει ανάποδα λεκανοειδή μορφή (*upside-bathtub*), αν υπάρχει ένα $\xi > 0$ τέτοιο ώστε να ισχύει

- $f'(x) < 0$ για $t \in (0, \xi)$,
- $f'(\xi) = 0$ και
- $f'(t) > 0$ για κάθε $t > \xi$.

Ορισμός 2.4.9 (*Gupta & Akman, 1995*) Έστω $f : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$ μια πραγματική διαφορίσιμη συνάρτηση. Τότε εμφανίζει λεκανοειδή μορφή (*bathtub*), αν υπάρχει ένα $\xi > 0$ τέτοιο ώστε να είναι

- $f'(x) > 0$ για $t \in (0, \xi)$,
- $f'(\xi) = 0$ και
- $f'(t) < 0$ για κάθε $t > \xi$.

Μια συνάρτηση με μορφή roller-coaster παρουσιάζει περισσότερα από ένα ξ , δηλαδή εμφανίζει περισσότερα από ένα σημεία καμπής. Θυμίζουμε πως μπορούμε να βρούμε τα πιθανά σημεία καμπής, αν μηδενίσουμε την πρώτη παράγωγο. Με την χρήση της δεύτερης παραγώγου μπορούμε να ελέγξουμε αν είναι, πράγματι, σημεία καμπής και αν αποτελούν ελάχιστα ή μέγιστα σημεία της συνάρτησης.

Κεφάλαιο 3

Μείξεις Κατανομών

Σκοπός των παρακάτω κεφαλαίων είναι η μελέτη της μείξης κατανομών και, μάλιστα, όταν αυτές οι κατανομές ανήκουν στην Erlang. Στο παρόν κεφάλαιο, αρχικά, ορίζουμε την διακριτή μείξη κατανομών, αλλά και τη συνεχή μείξη, παρότι δεν ανήκει στο αντικείμενο της παρούσας διατριβής. Επίσης, αναφέρονται κριτήρια κατά τα οποία από μια μείξη Erlang μπορούμε να μεταφερθούμε σε άλλες κατανομές. Τέλος, δίνεται μια γενική μορφή μιας άπειρης μείξης Erlang κατανομών και εξετάζονται ειδικές περιπτώσεις.

3.1 Ορισμός

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η μείξη κατανομών διακρίνεται σε διακριτή και συνεχή. Στην διακριτή περίπτωση, η κατανομή της μείξης προκύπτει από σταθμισμένο άθροισμα (πεπερασμένο ή μη) κατανομών. Στη συνεχή περίπτωση, η κατανομή της μείξης προκύπτει με τη χρήση ολοκληρωμάτων και δεσμευμένων κατανομών. Παρακάτω ακολουθούν οι ακριβείς ορισμοί των δύο περιπτώσεων.

Ορισμός 3.1.1 (Πολίτης, 2012) Η κατανομή F της τυχαίας μεταβλητής X

λέγεται πως είναι μία διακριτή μείξη κατανομών, όταν ισχύει

$$F(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i F_{X_i}(x)$$

για κάποιες μεταβλητές X_1, X_2, \dots, X_n , έτσι ώστε η X_i έχει συνάρτηση κατανομής $F_{X_i}(x)$ και για κάποιες θετικές σταθερές $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, τέτοιες ώστε $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$.

Ορισμός 3.1.2 (Πολίτης, 2012) Η κατανομή F της τυχαίας μεταβλητής X λέγεται πως είναι μία συνεχής μείξη κατανομών, όταν γράφεται στη μορφή

$$F(x) = \int_0^{\infty} F_{X|Y}(x|y) f_Y(y) dy$$

για κάποια τυχαία μεταβλητή Y με συνάρτηση πυκνότητας $f_Y(y)$.

Αντίστοιχοι τύποι προκύπτουν και για τη συνάρτηση πιθανότητας f , δηλαδή

- Διακριτή Μείξη:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_{X_i}(x), \quad x \in \mathbf{R}$$

- Συνεχής Μείξη:

$$f(x) = \int_0^{\infty} f_{X|Y}(x|y) f_Y(y) dy.$$

Μια διαφορά που εντοπίζεται είναι ο περιορισμός στο είδος της τυχαίας μεταβλητής. Στην διακριτή μείξη, η τυχαία μεταβλητή μπορεί να είναι διακριτή ή συνεχής, ενώ στη συνεχή μείξη, λόγω της ολοκλήρωσης ως προς την Y , απαιτείται η τυχαία μεταβλητή Y να είναι συνεχής για να ορίζεται το ολοκλήρωμα.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι το πλήθος των X_i στην διακριτή περίπτωση θα μπορούσε να απειρίζεται. Τότε, η μείξη ονομάζεται μη-πεπερασμένη, ενώ διακριτή κλασική προσέγγιση καλείται η περίπτωση, στην οποία το άθροισμα φτάνει ως ένα συγκεκριμένο αριθμό, έστω n .

3.2 Μείξεις Κατανομών *Erlang*

Έχοντας ορίσει το γενικό πλαίσιο των εννοιών των μείξεων κατανομών, μπορούμε να περιγράψουμε παραδείγματα μείξεων Erlang κατανομών που καταλήγουν σε άλλες κατανομές, αλλά και το αντίστροφο. (Willmot & Lin, 2011; Willmot & Woo, 2007).

Ορισμός 3.2.1 (Willmot & Lin, 2011; Willmot & Woo, 2007) Έστω τυχαία μεταβλητή $X_j \sim \text{Erl}(\beta, j)$ και $q_j \in (0, 1)$, $j = 1, 2, \dots$. Τότε, η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X ως διακριτή μείξη Erlang κατανομών θα γραφεί ως

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j f_{X_j}(x), \quad x > 0, \beta > 0, j \in \{1, 2, \dots\} \quad (3.1)$$

με

$$f_{X_j}(x) = \frac{\beta(\beta x)^{j-1} e^{-\beta x}}{(j-1)!}.$$

Αποδεικνύεται πως από τη σχέση (3.1) για συγκεκριμένες τιμές του q_j από μείξεις Erlang μπορούν να προκύψουν άλλες κατανομές. Χαρακτηριστικά παραδείγματα είναι τα εξής:

- για $q_1 = 1$, τότε η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί Εκθετική κατανομή,
- για $q_j = 1$, τότε η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί $\text{Erl}(\beta, j)$,
- για $q_k = 1 - q_1$, τότε η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί $\text{Erl}(1, k)$,
- για $q_k = 1 - q_{k+1}$, τότε η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί $\text{Erl}(k, k+1)$ και
- για

$$q_j = \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{j-m} e^{-\lambda/2} \frac{1}{(j-m)!}$$

και επιπλέον να ισχύει ότι $\beta = 0.5$, τότε η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί μη κεντρική χ^2 με βαθμούς ελευθερίας $2m$ και λ , δηλαδή $X_{2m, \lambda}^2$.

Εκτός από τις παραπάνω περιπτώσεις, εντοπίζονται παραδείγματα στα οποία προκύπτει μείξη Erlang με λιγότερο προφανή τρόπο. Θα αναφερθούμε σε μείξη δύο Εκθετικών, σε πεπερασμένη μείξη Erlang, σε μείξη Erlang κατανομών και, τέλος, στην κατανομή του αθροίσματος Γάμμα τυχαίων μεταβλητών.

Οι αποδείξεις των παρακάτω παραδειγμάτων δίνονται από τους Willmot & Lin (2011) και βασίζονται στον μετασχηματισμό Laplace $\tilde{f}(s)$ και την πιθανογεννήτρια $Q(S)$ όπου S είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί $Exp(\frac{1}{\beta})$ με

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sy} f(y) dy$$

και

$$Q(s) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k s^k = \frac{s \frac{\beta_1}{\beta}}{1 - s \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta}\right)}.$$

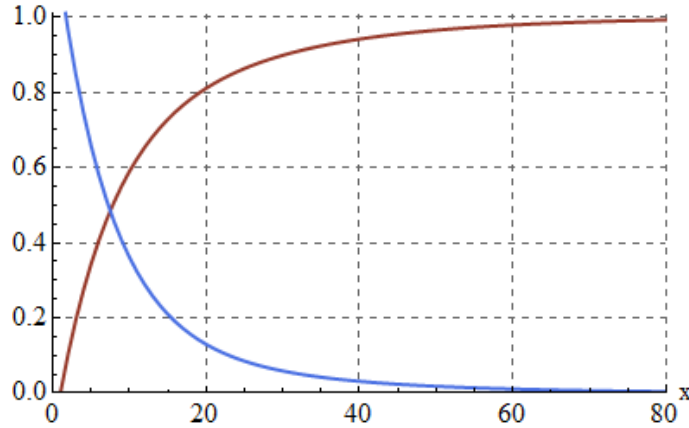
Για την απόδειξη των παραδειγμάτων χρησιμοποιούμε τη σχέση

$$\tilde{f}(s) = Q\left(\frac{\beta}{\beta + s}\right), \quad (3.2)$$

η οποία είναι ισοδύναμη με

$$\frac{\beta_1}{\beta_1 + s} = \frac{\beta}{\beta + s} \left(\frac{\frac{\beta_1}{\beta}}{1 - \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta}\right) \frac{\beta}{\beta + s}} \right), \quad 0 < \beta_1 \leq \beta < \infty. \quad (3.3)$$

Διάγραμμα 7: Συνάρτησης Πυκνότητας (Μπλε) και Κατανομής (Κόκκινη) της $0.4Exp(0.5) + 0.6Exp(1.5)$



Παράδειγμα 3.2.1 Η μείξη δύο Εκθετικών κατανομών με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(y) = p\beta_1 e^{-\beta_1 y} + (1-p)\beta_2 e^{-\beta_2 y}$$

δίνει μείξη Erlang της μορφής (3.1) με

$$\beta = \beta_2, q_1 = (1-p) + p\frac{\beta_1}{\beta_2} \text{ και } q_j = p\frac{\beta_1}{\beta_2} \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^{j-1}, j = 2, 3, \dots$$

Απόδειξη

Για την απόδειξη θα στηριχθούμε στη σχέση (3.2). Οπότε, για τη μείξη Εκθετικών έχουμε ότι ο μετασχηματισμός Laplace είναι

$$\tilde{f}(s) = p\frac{\beta_1}{\beta_1 + s} + (1-p)\frac{\beta_2}{\beta_2 + s}.$$

Ως προς την πιθανογεννήτρια, από τη σχέση (3.3), έχουμε:

$$\begin{aligned} \bullet \frac{\beta_1}{\beta_1 + s} &= \frac{\beta}{\beta + s} \frac{\frac{\beta_1}{\beta}}{1 - \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta}\right) \frac{\beta}{\beta + s}} \\ \bullet \frac{\beta_2}{\beta_2 + s} &= \frac{\beta}{\beta + s} \frac{\frac{\beta_2}{\beta}}{1 - \left(1 - \frac{\beta_2}{\beta}\right) \frac{\beta}{\beta + s}} \end{aligned}$$

Αν, όμως, $\beta = \beta_2$, τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} \bullet \frac{\beta_1}{\beta_1 + s} &= \frac{\beta_2}{\beta_2 + s} \frac{\frac{\beta_1}{\beta_2}}{1 - \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2}\right) \frac{\beta_2}{\beta_2 + s}} = z \frac{\frac{\beta_1}{\beta_2}}{1 - \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2}\right) z} \\ \bullet \frac{\beta_2}{\beta_2 + s} &= \frac{\beta_2}{\beta_2 + s} \frac{\frac{\beta_2}{\beta_2}}{1 - \left(1 - \frac{\beta_2}{\beta_2}\right) \frac{\beta_2}{\beta_2 + s}} = z \end{aligned}$$

Άρα, ο τύπος που δίνει την πιθανογεννήτρια για μείξη εκθετικών κατανομών είναι ο εξής:

$$\begin{aligned} Q(z) &= p \left(z \frac{\frac{\beta_1}{\beta_2}}{1 - \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2}\right) z} \right) + (1-p)z \\ &= zp \frac{\frac{\beta_1}{\beta_2} \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2}\right) z}}{1} + (1-p)z \\ &= zp \frac{\beta_1}{\beta_2} \frac{1 - \frac{\beta_1}{\beta_2}}{1 - \frac{\beta_1}{\beta_2} - z} + (1-p)z \end{aligned}$$

Αλλά, ισχύει η παρακάτω σχέση

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{u}{\rho}\right)^i = \frac{\rho}{\rho - u}, \quad \rho > |u|.$$

με

- $\rho = \frac{\beta_2}{\beta_2 - \beta_1}$ και
- $u = z$.

Ωστόσο, πρέπει να δειχθεί ότι ισχύει και η προϋπόθεση $\frac{\beta_2}{\beta_2 - \beta_1} > |z|$. Έστω πως ισχύει:

$$\frac{\beta_2}{\beta_2 - \beta_1} > z,$$

αφού $z > 0$ με $s > 0$ και $\beta_2 > 0$. Η τελευταία σχέση είναι ισοδύναμη με

$$\frac{\beta_2}{\beta_2 - \beta_1} > \frac{\beta_2}{\beta_2 + s} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\beta_2 - \beta_1} > \frac{1}{\beta_2 + s} \Leftrightarrow$$

$$\beta_2 - \beta_1 < \beta_2 + s$$

δηλαδή τελικά $0 < s + \beta_1$, που ισχύει, πράγματι, αφού είναι θετικές ποσότητες.

Συνεπώς, η πιθανογεννήτρια γίνεται

$$\begin{aligned} Q(z) &= zp \frac{\beta_1}{\beta_2} \sum_{i=0}^{\infty} \left(z \left(\frac{1}{1 - \frac{\beta_1}{\beta_2}} \right)^{-1} \right)^i + (1-p)z \\ &= zp \frac{\beta_1}{\beta_2} \sum_{i=0}^{\infty} \left(z \left(\frac{\beta_2}{\beta_2 - \beta_1} \right)^{-1} \right)^i + (1-p)z \\ &= zp \frac{\beta_1}{\beta_2} \sum_{i=0}^{\infty} \left(z \frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_2} \right)^i + (1-p)z \\ &= zp \frac{\beta_1}{\beta_2} \sum_{i=0}^{\infty} \left(z \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2} \right) \right)^i + (1-p)z \\ &= zp \frac{\beta_1}{\beta_2} \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(z \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2} \right) \right)^i \right) + (1-p)z \\ &= zp \frac{\beta_1}{\beta_2} + zp \frac{\beta_1}{\beta_2} \sum_{j=2}^{\infty} \left(z \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2} \right) \right)^{j-1} + (1-p)z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q(z) &= zp \frac{\beta_1}{\beta_2} + p \sum_{j=2}^{\infty} \left(z^j \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2} \right)^{j-1} \frac{\beta_1}{\beta_2} \right) + (1-p)z \\
&= z \left(p \frac{\beta_1}{\beta_2} + (1-p) \right) + p \sum_{j=2}^{\infty} \left(z^j \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2} \right)^{j-1} \frac{\beta_1}{\beta_2} \right), \quad z > 0, \quad j = 2, 3, \dots
\end{aligned}$$

Όμως, η πιθανογεννήτρια είναι της μορφής

$$Q(z) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k z^k,$$

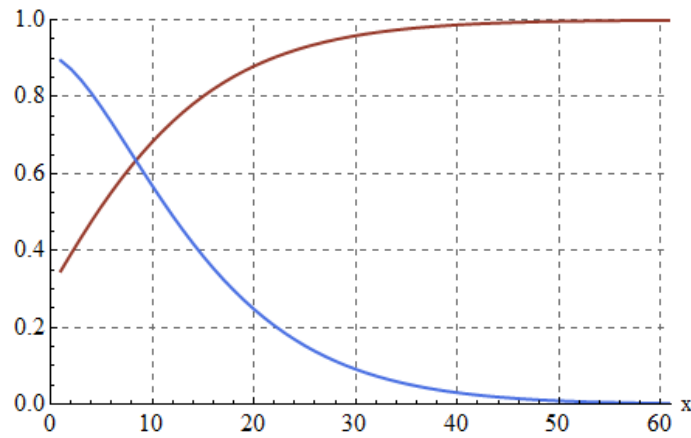
με

- $q_1 = p \frac{\beta_1}{\beta_2} + (1-p),$
- $q_j = \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2} \right)^{j-1} \frac{\beta_1}{\beta_2} p, \quad j = 2, 3, \dots \text{ και}$
- $\beta = \beta_2.$

Για τα q_j θα πρέπει $\sum_{j=1}^{\infty} q_j = 1$, που ισχύει αφού:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} q_j &= q_1 + \sum_{j=2}^{\infty} q_j \\
&= p \frac{\beta_1}{\beta_2} + (1-p) + \sum_{j=2}^{\infty} \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2} \right)^{j-1} \frac{\beta_1}{\beta_2} p \\
&= p \frac{\beta_1}{\beta_2} + 1 - p + \frac{\beta_1}{\beta_2} p \sum_{j=2}^{\infty} \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2} \right)^{j-1} \\
&= p \frac{\beta_1}{\beta_2} \left(1 + \sum_{j=2}^{\infty} \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2} \right)^{j-1} \right) + 1 - p \\
&= p \frac{\beta_1}{\beta_2} \sum_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2} \right)^{j-1} + 1 - p \\
&= p \frac{\beta_1}{\beta_2 - \beta_1} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_2} \right)^j + 1 - p \\
&= p \frac{\beta_1}{\beta_2 - \beta_1} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_2} \right)^j - \frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_2} p + 1 - p \\
&=^* p \frac{\beta_1}{\beta_2 - \beta_1} \frac{1}{1 - \frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_2}} - p \frac{\beta_1}{\beta_2 - \beta_1} + 1 - p
\end{aligned}$$

Διάγραμμα 8: Συνάρτησης Πυκνότητας¹ (Μπλε) και Κατανομής (Κόκκινη) της $0.3Erl(2, 1.5) + 0.2Erl(2, 2) + 0.5Erl(3, 1.5)$



$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} q_j &= p \frac{\beta_1}{\beta_2 - \beta_1} \frac{\beta_2}{\beta_2 - \beta_2 + \beta_1} - p \frac{\beta_1}{\beta_2 - \beta_1} + 1 - p \\ &= p \frac{\beta_2}{\beta_2 - \beta_1} - p \frac{\beta_1}{\beta_2 - \beta_1} + 1 - p = 1. \end{aligned}$$

Για την παραπάνω απόδειξη, χρησιμοποιήθηκε στο (*), η υπόθεση ότι ο λόγος $\frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_2} < 1$, καθώς

$$\beta_2 - \beta_1 < \beta_2 \Rightarrow \frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_2} < 1 \Rightarrow \left| \frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_2} \right| < 1.$$

Παράδειγμα 3.2.2 Έστω Y μία τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την πεπερασμένη μείξη Erlang με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(y) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik} \frac{\beta_i (\beta_i y)^{k-1} e^{-\beta_i y}}{(k-1)!},$$

¹Η συνάρτηση πυκνότητας πολλαπλασιάστηκε με το τρία, ώστε να βρεθεί στην ίδια κλίμακα με τη συνάρτηση κατανομής

$$\mu \in n \in \{2, 3, \dots\}, p_{ik} \geq 0 \text{ για } \forall i, k \text{ και } \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik} = 1$$

τότε αποδεικνύεται ότι προκύπτει μείξη Erlang, όπως ορίστηκε στη σχέση (3.1), με

$$\beta = \beta_n \text{ και}$$

$$q_j = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^j p_{ik} \binom{j-1}{k-1} \left(\frac{\beta_i}{\beta_n} \right)^k \left(1 - \frac{\beta_i}{\beta_n} \right)^{j-k}, \text{ όπου } j = \{1, 2, \dots\}$$

Απόδειξη

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της μείξης $Erl(\beta_i, k)$ είναι

$$f(y) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik} \frac{\beta_i (\beta_i y)^{k-1} e^{-\beta_i y}}{(k-1)!}, \quad y > 0$$

Τότε, ο μετασχηματισμός Laplace είναι

$$\tilde{f}(s) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik} z^k \left(\frac{\frac{\beta_i}{\beta}}{1 - \left(1 - \frac{\beta_i}{\beta}\right) z} \right)^k$$

Αλλά, αν θέσουμε $\beta = \beta_n$, η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\tilde{f}(s) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik} z^k \left(\frac{\frac{\beta_i}{\beta_n}}{1 - \left(1 - \frac{\beta_i}{\beta_n}\right) z} \right)^k$$

Επίσης, ισχύει η σχέση

$$\left(\frac{\frac{\beta_i}{\beta_n}}{1 - \left(1 - \frac{\beta_i}{\beta_n}\right) z} \right)^k = \sum_{m=0}^{\infty} z^m h_m \left(k, \frac{\beta_i}{\beta_n} \right)$$

όπου $h_m \left(k, \frac{\beta_i}{\beta_n} \right)$ εκφράζει τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της αρνητικής διωνυμικής και δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} h_m \left(k, \frac{\beta_i}{\beta_n} \right) &= \frac{\Gamma(k+m)}{\Gamma(k)m!} \left(1 - \frac{\beta_i}{\beta_n} \right)^m \left(\frac{\beta_i}{\beta_n} \right)^k \\ h_m \left(k, \frac{\beta_i}{\beta_n} \right) &\stackrel{*}{=} \frac{(j-1)!}{(k-1)!(j-k)!} \left(1 - \frac{\beta_i}{\beta_n} \right)^m \left(\frac{\beta_i}{\beta_n} \right)^k \\ &= \binom{j-1}{k-1} \left(1 - \frac{\beta_i}{\beta_n} \right)^m \left(\frac{\beta_i}{\beta_n} \right)^k \end{aligned} \quad (3.4)$$

Για την παραπάνω απόδειξη, θέτοντας $j = k + m$ με $j, m \in \mathbf{N}$ στο (*), παίρνουμε ότι $\frac{\Gamma(k+m)}{\Gamma(k)m!} = \frac{\Gamma(j)}{\Gamma(k)(j-m)!} = \frac{(j-1)!}{(k-1)!(j-k)!} = \binom{j-1}{k-1}$.

Οπότε, η πιθανογεννήτρια γίνεται

$$\begin{aligned} Q(s) &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik} z^k \sum_{m=0}^{\infty} z^m \binom{j-1}{k-1} \left(1 - \frac{\beta_i}{\beta_n} \right)^m \left(\frac{\beta_i}{\beta_n} \right)^k \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik} z^k \sum_{j=k}^{\infty} z^{j-k} \binom{j-1}{k-1} \left(1 - \frac{\beta_i}{\beta_n} \right)^{j-k} \left(\frac{\beta_i}{\beta_n} \right)^k \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\infty} z^j \sum_{k=1}^j p_{ik} \binom{j-1}{k-1} \left(1 - \frac{\beta_i}{\beta_n} \right)^{j-k} \left(\frac{\beta_i}{\beta_n} \right)^k \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} q_j z^j \end{aligned}$$

όπου

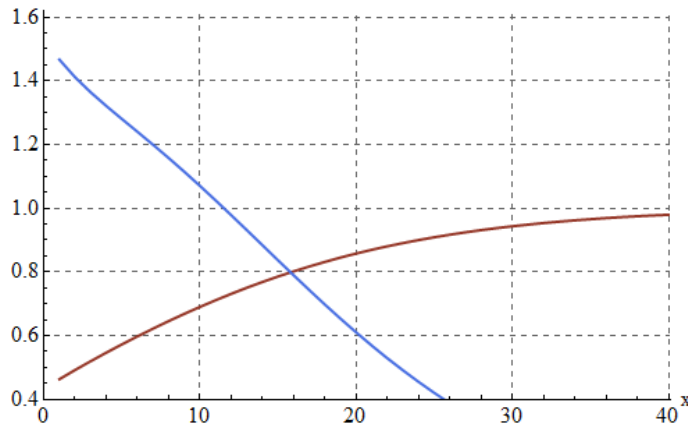
$$q_j = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^j \binom{j-1}{k-1} \left(1 - \frac{\beta_i}{\beta_n} \right)^{j-k} \left(\frac{\beta_i}{\beta_n} \right)^k p_{ik}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Και πάλι θα πρέπει να δειχθεί πως $\sum_{j=1}^{\infty} q_j = 1$. Έχουμε από τη σχέση (3.4) πως

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} q_j &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^j p_{ik} \binom{j-1}{k-1} \left(1 - \frac{\beta_i}{\beta_n}\right)^{j-k} \left(\frac{\beta_i}{\beta_n}\right)^k \right) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^j p_{ik} h_{j-k} \left(k, \frac{\beta_i}{\beta_n}\right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik} h_{n-k} \left(k, \frac{\beta_i}{\beta_n}\right) = 1 \end{aligned}$$

αφού το παραπάνω άθροισμα παραπέμπει σε μείξη αρνητικών διωνυμικών κατανομών με βάρη τα p_{ik} και συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας $h_{n-k} \left(k, \frac{\beta_i}{\beta_n}\right)$.

Διάγραμμα 9: Συνάρτηση Πυκνότητας και Κατανομής της $0.3G(1, 1.5) + 0.2G(2, 2) + 0.5G(3.5, 1.5)$



Παράδειγμα 3.2.3 Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X_i , $i = 1, 2, \dots, n$ ακολουθεί Εκθετική με παράμετρο $\frac{1}{\beta_i}$, ενώ υπάρχει ανεξαρτησία μεταξύ των X_i και, έστω, $S = \sum_{i=1}^n X_i$. Τότε και πάλι προκύπτει μείξη Erlang με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας εκείνη της σχέσης (3.1), όπου

$$q_j = \sum_{i=1}^{n-1} w_i \frac{\beta_i}{\beta_n} \left(1 - \frac{\beta_i}{\beta_n}\right)^{j-n}, \quad j = n, n+1, \dots$$

με

$$w_i = \prod_{k=1, k \neq i}^{n-1} \left(\frac{\frac{\beta_k}{\beta_n - \beta_k}}{\frac{\beta_k}{\beta_n - \beta_k} - \frac{\beta_i}{\beta_n - \beta_i}} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

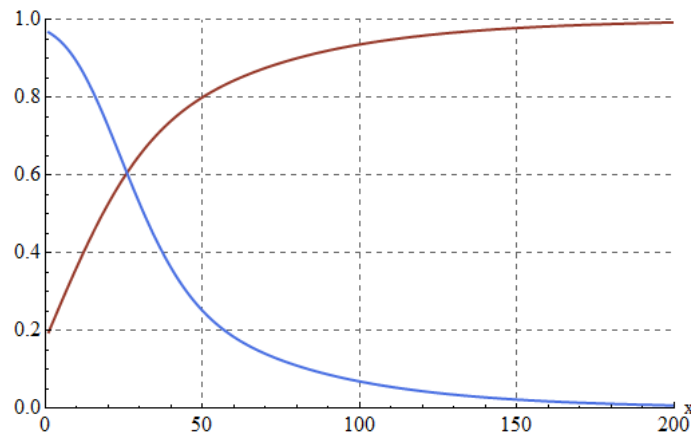
Παράδειγμα 3.2.4 Έστω X_i , $i = 1, 2, \dots, n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν Γάμμα κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{X_i}(x) = \beta_i (\beta_i x)^{\alpha_i - 1} e^{-\beta_i x} \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)}.$$

Τότε, το άθροισμα των X_i δίνει Erlang με την μορφή της (3.1), αλλά με

$$q_j = \frac{1}{j-m} \sum_{k=1}^{j-m} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \left(1 - \frac{\beta_i}{\beta_n} \right)^k \right) q_{j-k}, \quad j = m+1, m+2, \dots \quad (3.5)$$

Διάγραμμα 10: Συνάρτηση Πυκνότητας και Κατανομής της $0.3W(3,1) + 0.2W(3,2) + 0.5W(5,1)$



Σημαντικό είναι να σημειωθεί ότι στην περίπτωση του αθροίσματος Γάμμα τυχαίων μεταβλητών, όπου προκύπτει μείξη Erlang κατανομών, ο αναδρομικός τύπος (3.5) για τον υπολογισμό της ποσότητας q_j αποτελεί αναδρομικό τύπο σύνθετης Poisson, που προκύπτει από τη συνέλιξη αρνητικών διωνυμικών (Willmot & Woo, 2007). Κάποιες φορές η ποσότητα q δεν μπορεί να υπολογιστεί με ακρίβεια. Σε αυτή την περίπτωση, χρησιμοποιούνται αριθμητικές ή αναδρομικές μέθοδοι υπολογισμού. Μία από αυτές είναι ο αναδρομικός τύπος του Panjer.

3.2.1 Άπειρες Μείξεις Erlang

Ολοκληρώνοντας αυτό το κεφάλαιο, έχει ενδιαφέρον να επισημάνουμε πως σε μια άπειρη μείξη της μορφής

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i f_i(x),$$

όπου $p_i \sim \text{Γεωμετρική}_1(p)$ και $X \sim \text{Erl}(1, \lambda)$, προκύπτει γνωστό αποτέλεσμα. Η σύνθετη γεωμετρική κατανομή δίνει $\text{Erl}(1, p\lambda)$ (Χατζηκωνσταντινίδης, 2018).

Συνεπώς, η συνάρτηση της βαθμίδας αποτυχίας και η συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής που προκύπτουν από μια άπειρη μείξη μεταξύ αυτών των δύο κατανομών είναι γνωστές και με γνωστές ιδιότητες, όπως θα δούμε στη συνέχεια της παρούσας διατριβής.

Κεφάλαιο 4

Βαθμίδα Αποτυχίας

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η μελέτη της συνάρτησης της βαθμίδας αποτυχίας είναι βασικό αντικείμενο της παρούσας διατριβής, καθώς παρουσιάζει εφαρμογές στην Αναλογιστική Επιστήμη και τη Θεωρία Χρεοκοπίας, αλλά και τη Μηχανική. Παρότι χαρακτηρίζεται διαφορετικά σε κάθε σχεδόν κλάδο, ο ορισμός της είναι ίδιος. Πιο συγκεκριμένα, η βαθμίδα αποτυχίας, όταν συναντάται στην Αναλογιστική Επιστήμη, και, ειδικά, στις Ασφαλίσεις Ζωής, καλείται ένταση θνησιμότητας (force of mortality). Στην Ανάλυση Επιβίωσης, συνάρτηση κινδύνου (hazard rate/function). Στη Στατιστική, Mill's Ratio. Στη Θεωρία Αχραίων Τιμών εντοπίζει την μορφή της κατανομής των αχραίων τιμών, ενώ στην Ανάλυση Συστημάτων, ονομάζεται βαθμίδα αποτυχίας (failure rate). Όπως προϋποθέτει το όνομά της, η βαθμίδα αποτυχίας αποτελεί τη συνάρτηση εκείνη, η οποία εκφράζει την πιθανότητα αποτυχίας από ένα σημείο αναφοράς, συνήθως μετά την έναρξη λειτουργίας (ή γέννησης), μέχρι κάποια χρονική στιγμή σχεδόν αμέσως μετά (Barlow & Proschan, 1996).

Στο παρόν κεφάλαιο, θα δοθεί ο μαθηματικός τύπος που την ορίζει και από αυτόν θα επαληθεύσουμε και μαθηματικά τη φυσική ερμηνεία της συνάρτησης της βαθμίδας αποτυχίας. Επιπλέον, θα δούμε τη μορφή της θεωρώντας συγκεκριμένες συνεχείς κατανομές. Τέλος, θα καθορίσουμε κατηγορίες (κλάσεις) κατανομών

τυχαίων μεταβλητών σύμφωνα με την μονοτονία της συνάρτησης της βαθμίδας αποτυχίας τους, με κύριο στόχο μας να διακρίνουμε περιπτώσεις κλάσεων στην περίπτωση της μείζης κατανομών.

4.1 Ορισμός

Έστω συνεχής μεταβλητή X που μετρά είτε χρόνο ζωής είτε την αξιοπιστία ενός εξαρτήματος. Οπότε η X είναι μη αρνητική τυχαία μεταβλητή με κατανομή $F(x)$ και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$. Τότε, η βαθμίδα αποτυχίας, $r(x)$, ορίζεται ως

$$r(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)} = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)} = -\frac{d}{dx} \ln \bar{F}(x), \quad x \geq 0$$

όπου η $\bar{F}(x)$ καλείται δεξιά ουρά της κατανομής $F(x)$ ή, διαφορετικά, συνάρτηση επιβίωσης και ισχύει

$$\bar{F}(x) = \int_x^{\infty} f(y) dy = 1 - \int_0^x f(y) dy = 1 - F(x), \quad x \geq 0.$$

Συνεπώς, η βαθμίδα αποτυχίας $r(x)dx$ εκφράζει την πιθανότητα αποτυχίας¹ αντικειμένου ηλικίας x στο διάστημα $[x, x + dx]$ με $x \geq 0$ και $dx \rightarrow 0$. Μπορούμε να διαπιστώσουμε από τα παραπάνω ότι

$$r(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h\bar{F}(x)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(1 - \frac{\bar{F}(x+h)}{\bar{F}(x)} \right)$$

ή

$$r(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(1 - Pr(X > x+h | X > x) \right), \quad x \geq 0.$$

Παρατηρώντας την παραπάνω σχέση, βλέπουμε πως η βαθμίδα αποτυχίας σχετίζεται με την δεξιά ουρά και, μάλιστα, προκύπτει πως μεγάλες τιμές

¹Ως αποτυχία ορίζουμε την μη λειτουργικότητα ενός μηχανήματος (X : αξιοπιστία μηχανήματος) ή την έλευση του θανάτου σε άτομο ηλικίας x (X : χρόνος ζωής).

της βαθμίδας αποτυχίας συνδέονται με παχιά δεξιά ουρά. Στο Διάγραμμα 11, χρησιμοποιείται η κανονική κατανομή, η οποία χαρακτηρίζεται από ελαφριά δεξιά ουρά και η κατανομή Weibull, η οποία για κάποιες τιμές των παραμέτρων της είναι κατανομή με βαριά ουρά. Συγκρίνοντας, λοιπόν, τη συνάρτηση της βαθμίδας αποτυχίας με την αντίστοιχη πυκνότητα μπορούμε να ανιχνεύσουμε τη σύνδεσή τους με την μορφή της δεξιάς ουράς.

Ακόμη πιο ισχυρή απόδειξη για τη σύνδεση της βαθμίδας αποτυχίας με την κατανομή είναι η σχέση που δίδεται παρακάτω, η οποία αποδεικνύει πως η βαθμίδα αποτυχίας όχι απλά συνδέεται με την κατανομή της X , αλλά την καθορίζει.

$$r(x) = -\frac{d}{dx} \ln \bar{F}(x) \Rightarrow \int_0^x r(y) dy = -\ln \bar{F}(x) \Rightarrow \bar{F}(x) = e^{-\int_0^x r(y) dy}, \quad x \geq 0. \quad (4.1)$$

Καθώς η μέση τιμή παρουσιάζει σημαντικές εφαρμογές στη Στατιστική, έχει ενδιαφέρον να δούμε τη σχέση της αναμενόμενης τιμής με την βαθμίδα αποτυχίας.

Ξεκινώντας από τον ορισμό της αναμενόμενης τιμής παίρνουμε ότι

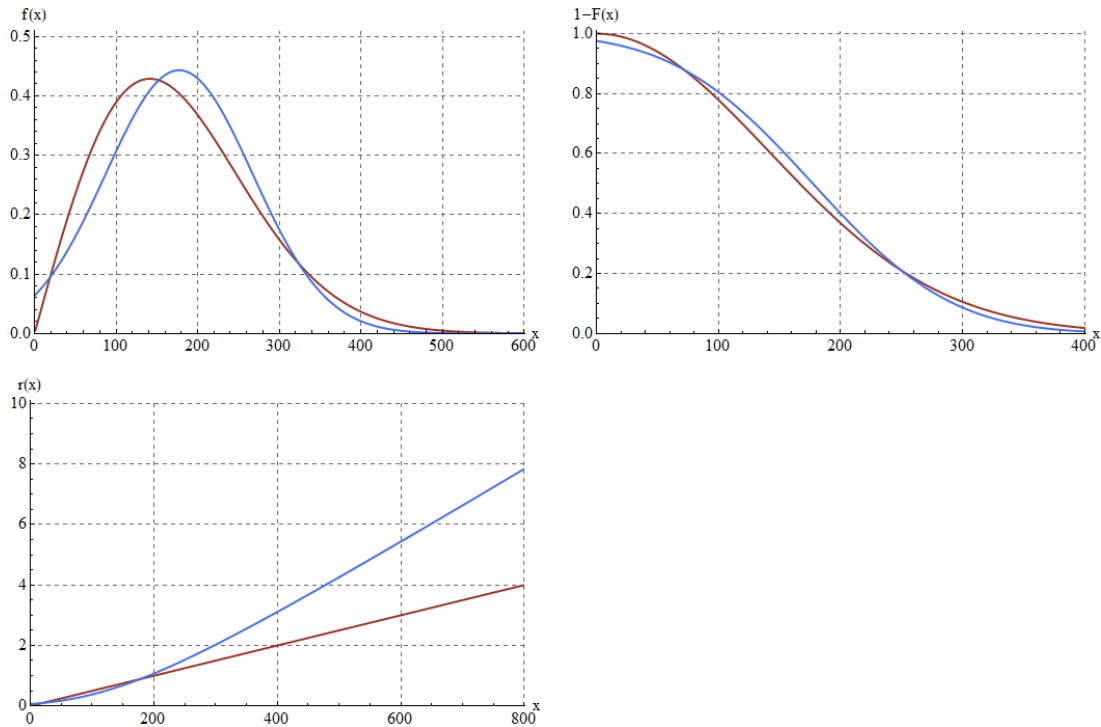
$$E(X) = \int_0^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{\infty} -x d(1-F(x)) = -\left[x(1-F(x)) \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} (1-F(x)) dx \Rightarrow$$

$$E(X) = \int_0^{\infty} \bar{F}(x) dx = \int_0^{\infty} \frac{f(x)}{r(x)} dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{r(x)} f(x) dx = E\left(\frac{1}{r(X)}\right)$$

με $\lim_{x \rightarrow 0} x(1-F(x)) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow \infty} x(1-F(x)) = 0$, θεωρώντας ότι η μέση τιμή είναι πεπερασμένη.

Συνεπώς, μεγάλη μέση τιμή αντιστοιχεί διαισθητικά σε μικρές τιμές στη βαθμίδα αποτυχίας και το αντίθετο. Αυτό το συμπέρασμα επιβεβαιώνει τη σχέση της βαθμίδας αποτυχίας και της δεξιάς ουράς.

Διάγραμμα 11: Πυκνότητα (πάνω αριστερά), Δεξιά Ουρά (πάνω δεξιά) και Βαθμίδα Αποτυχίας (κάτω) Κανονικής (Μπλε) και Weibull (Κόκκινη) Κατανομής



Ολοκληρώνοντας με τον ορισμό της συνάρτησης της βαθμίδα αποτυχίας, θα πρέπει να σημειωθεί πως δεν μπορεί να καλείται βαθμίδα αποτυχίας η οποιαδήποτε συνάρτηση. Για να θεωρηθεί, λοιπόν, μία συνάρτηση ως συνάρτηση βαθμίδα αποτυχίας, θα πρέπει να πληροί τις εξής προϋποθέσεις (Marshall & Olkin, 2007)

- $r(x) \geq 0, \forall x > 0,$
- $\int_0^x r(t)dt < \infty,$ για κάποια $x > 0,$
- $\int_0^\infty r(t)dt = \infty$ και
- $\int_0^x r(t)dt = \infty \Rightarrow r(z) = \infty, \forall z > x.$

4.2 Μονοτονία - Κλάσεις Κατανομών

Η ερμηνεία της βαθμίδας αποτυχίας σχετίζεται με την φθορά ενός αντικειμένου ή ατόμου με την επέλευση του χρόνου, όπως έχει ήδη αναφερθεί. Στην ανθρώπινη ζωή, αλλά και τη Μηχανική, η “γήρανση” καθιστά στις περισσότερες φορές περιπτώσεις τη συνάρτηση της βαθμίδας αποτυχίας μια αύξουσα συνάρτηση. Παρ’ όλα αυτά, η μονοτονία της συνάρτησης της βαθμίδας αποτυχίας δεν είναι απαραίτητα αυστηρά αύξουσα ή, ακόμη και, αυστηρά φθίνουσα. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η ανθρώπινη ζωή (Unger, 1988). Λόγω της βρεφικής θνησιμότητας η καμπύλη ξεκινά από ένα σχετικά υψηλό σημείο του άξονα (early failure) και, στη συνέχεια, μειώνεται απότομα, ενώ για ένα διάστημα γύρω στην ηλικία των 20 παραμένει σταθερή, έως ότου ξεκινήσει την ανοδική τάση έως την τελική ηλικία. Η μορφή της βαθμίδας αποτυχίας είναι λεκανοειδής (bathtub), όπως την περιγράψαμε στο Κεφάλαιο 2.

Από την άλλη η επίδραση της γήρανσης μπορεί να αγνοηθεί και, μάλιστα, μπορεί να επιτύχει και βελτίωση της ζωής. Πιο συγκεκριμένα, στη Θεωρία Αξιοπιστίας χρησιμοποιείται ο όρος work-hardening, που περιγράφει την περίπτωση κατά την οποία, υπό συγκεκριμένες προϋποθέσεις (επιδιόρθωση ή συνθήκες θερμοκρασίας), ένα εξάρτημα μπορεί να αυξήσει την αντοχή του στη φθορά (Barlow & Proschan, 1996; Unger, 1988).

Συνεπώς, έχει νόημα να ελέγξουμε την μονοτονία της συνάρτησης της βαθμίδας αποτυχίας, καθώς οι διάφοροι τύποι μονοτονίας που μπορεί να παρουσιάσει έχουν φυσική ερμηνεία. Στη βιβλιογραφία, διακρίνονται δύο κλάσεις μονοτονίας της βαθμίδας αποτυχίας και έχουν μελετηθεί κάποιες κατανομές ως προς το σε ποια κλάση ανήκουν και ποιες ιδιότητες φέρουν.

Στην προηγούμενη ενότητα, συμπεράναμε ότι η βαθμίδα αποτυχίας, άρα και η μονοτονία της, συνδέεται άμεσα με την δεξιά ουρά της κατανομής και κατ’

επέκταση με τη συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής που μελετάμε. Εχμεταλλευόμενοι αυτή τη σχέση, θέτουμε ως κριτήριο για τη μονοτονία της βαθμίδας αποτυχίας την λογαριθμισμένη κυρτότητα της δεξιάς ουράς και τη μονοτονία του λόγου $\frac{\bar{F}(y+x)}{\bar{F}(x)}$, όπως ορίζεται ο κανόνας απόφασης από τον Πίνακα 4.1 (Willmot & Lin, 2001).

Ορισμός 4.2.1 (Marshall & Olkin, 2007; Barlow & Proschan, 1996) Λέμε ότι μία τυχαία μεταβλητή έχει DFR (IFR) κατανομή, όταν καθώς περνά ο χρόνος, η βαθμίδα αποτυχίας μειώνεται (αυξάνεται).

Πίνακας 4.1: Μονοτονία Βαθμίδας Αποτυχίας σε Σύγκριση με Άλλες Συναρτήσεις

$\frac{\bar{F}(y+x)}{\bar{F}(x)}$	$\bar{F}(x)$	$r(x)$	Ορολογία
Αύξουσα στο x για δεδομένο y	λογαριθμικά κυρτή (log-convex)	Φθίνουσα	DFR (decreasing failure rate) ή DHR (decreasing hazard rate)
Φθίνουσα στο x για δεδομένο y	λογαριθμικά κοίλη (log-concave)	Αύξουσα	IFR (increasing failure rate) ή IHR (increasing hazard rate)

Μια σημαντική ιδιότητα της βαθμίδας αποτυχίας είναι η (Willmot & Lin, 2001):

$$\frac{1}{r(\infty)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F(x)}{f(x)} \stackrel{\text{De l'Hôspital}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{f(x)}{f'(x)}. \quad (4.2)$$

Θεώρημα 4.2.1 (Barlow & Proschan, 1996) Εάν μία συνάρτηση κατανομής F με μέσο μ είναι IFR, τότε

$$\bar{F}(x) \geq \begin{cases} e^{-x/\mu}, & x < \mu \\ 0, & x \geq \mu. \end{cases} \quad (4.3)$$

Απόδειξη

Έστω X μία συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής $F(X)$. Τότε, από τον Πίνακα 4.1, έχουμε ότι η $\log \bar{F}$ είναι κοίλη συνάρτηση στο x , ενώ από την ανισότητα του Jensen ισχύει

$$E(\log \bar{F}(X)) \leq \log \bar{F}(\mu).$$

Επειδή η $F(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση, τότε η $\bar{F}(x)$ ακολουθεί Ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(0,1)$. Οπότε, έχουμε

$$E(\log \bar{F}(X)) = \int_0^1 \log(u) du = -1.$$

Άρα, η παραπάνω ανισότητα γίνεται $\log \bar{F}(\mu) \geq -1 \Rightarrow \bar{F}(\mu) \geq e^{-1}$.

Από Barlow & Proschan (1996), ισχύει η εξής ανισότητα

$$\left(\bar{F}(x)\right)^{1/x} \geq \left(\bar{F}(\mu)\right)^{1/\mu}, \quad x < \mu.$$

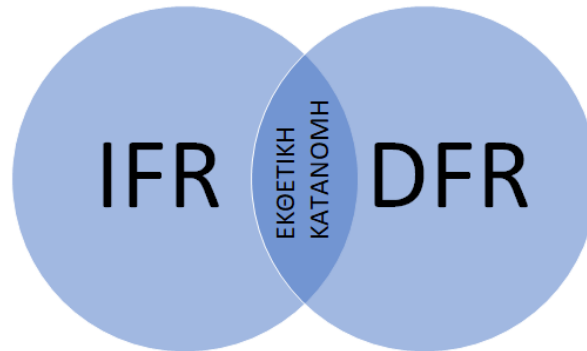
Συνεπώς, έχουμε $\bar{F}(x) \geq \exp\left(-\frac{x}{\mu}\right)$, $x < \mu$.

Για $x \geq \mu$, είναι προφανές ότι $\bar{F}(x) \geq 0$.

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει πως η δεξιά ουρά μιας Εκθετικής κατανομής με παράμετρο $\frac{1}{\mu}$ καθορίζει τον κανόνα απόφασης. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, έχουμε υποθέσει ότι έχουμε IFR και ισχύει $\bar{F}(x) \geq \bar{F}_{exp}(x)$, ενώ για DFR έχουμε $\bar{F}(x) \leq \bar{F}_{exp}(x)$. Η ισότητα ισχύει και στις δύο περιπτώσεις, καθώς η Εκθετική κατανομή ανήκει και στις δύο κλάσεις, αφού η βαθμίδα αποτυχίας είναι σταθερά και έτσι φαίνεται πως ορίζεται ως σημείο αναφοράς. Το Διάγραμμα 12 απεικονίζει τη διαμέριση των κλάσεων βάσει της μονοτονίας της βαθμίδας αποτυχίας. Η τομή των

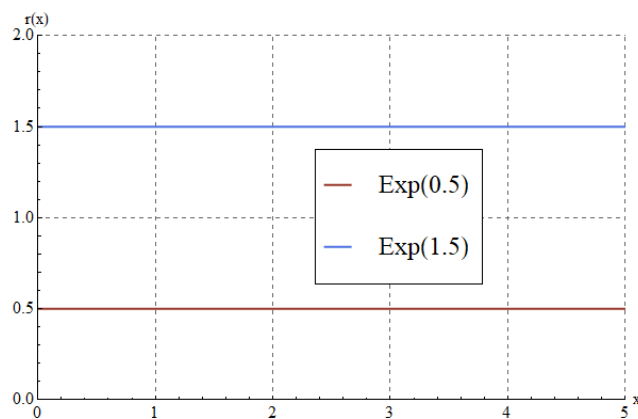
δύο κλάσεων περιλαμβάνει την οικογένεια Εκθετικών κατανομών για τις πιθανές τιμές της παραμέτρου της κατανομής.

Διάγραμμα 12: Γραφική Απεικόνιση των Κατανομών με Μονότονη Βαθμίδα Αποτυχίας



Σημαντικό είναι να δει κανείς πώς διαφοροποιείται η μονοτονία της βαθμίδας αποτυχίας όταν η X ακολουθεί κάποιες γνωστές κατανομές, όπως η Εκθετική, η Γάμμα (κατ' επέκταση και η Erlang) και η Weibull. Αυτό ακολουθεί παρακάτω (Barlow & Proschan, 1996).

Διάγραμμα 13: Βαθμίδα Αποτυχίας για Εκθετική Κατανομή

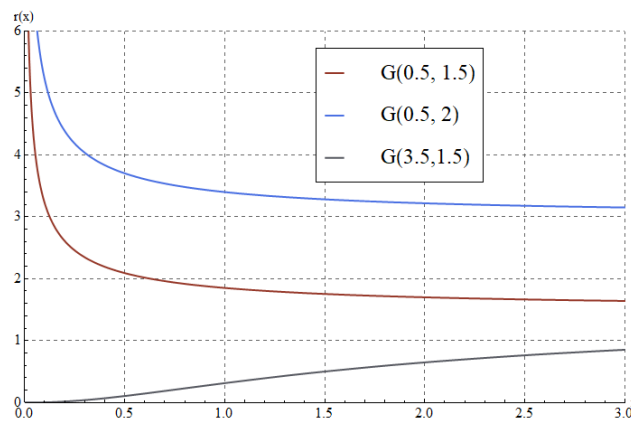


Η *Εκθετική* κατανομή εκτός από την ιδιότητα της έλλειψης μνήμης, διαθέτει και σταθερή συνάρτηση βαθμίδα αποτυχίας. Οπότε, μπορεί κανείς να πει ότι είναι, ταυτόχρονα, φθίνουσα και αύξουσα. Η *Γάμμα* ως κατανομή είναι ασύμμετρη και, έτσι, φέρει μια πιο φυσική μορφή συγκριτικά με την Κανονική κατανομή και, επιπλέον, δίνει φθίνουσα ή αύξουσα βαθμίδα αποτυχίας, ανάλογα με το αν $\alpha < 1$ ή $\alpha > 1$, αντίστοιχα. Ως προς την Erlang, αφού ισχύει ότι α ή $n \in \mathcal{N}^*$, τότε η βαθμίδα αποτυχίας θα είναι αύξουσα. Τέλος, η *Weibull*, όπως και η *Γάμμα*, για $k < 1$ η βαθμίδα αποτυχίας είναι φθίνουσα, ενώ για $k > 1$ είναι αύξουσα, χωρίς κανένα περιορισμό για την παράμετρο λ της κατανομής.

4.3 Κλάσεις Μείξης Κατανομών

Έχοντας δει τις ιδιότητες της βαθμίδα αποτυχίας για μία τυχαία μεταβλητή, μπορούμε να ελέγξουμε τις αντίστοιχες ιδιότητες για μια μείξη κατανομών.

Διάγραμμα 14: Βαθμίδα Αποτυχίας για την Γάμμα Κατανομή



Παρατήρηση 4.3.1 Έστω F μία διακριτή μείξη των συναρτήσεων κατανομών F_1 και F_2 και έστω $a \in (0, 1)$. Τότε, ισχύουν

$$F(x) = aF_1(x) + (1 - a)F_2(x),$$

$$f(x) = af_1(x) + (1 - a)f_2(x) \text{ και}$$

$$\bar{F}(x) = a\bar{F}_1(x) + (1 - a)\bar{F}_2(x)$$

Οπότε, η βαθμίδα αποτυχίας ισούται με

$$r(x) = \frac{af_1(x) + (1 - a)f_2(x)}{a\bar{F}_1(x) + (1 - a)\bar{F}_2(x)}$$

Παρατηρείται (Marshall & Olkin, 2007; Barlow & Proschan, 1996) ότι δεν υπάρχει κλειστότητα στην κλάση κατανομών IFR υπό τις μείξεις κατανομών. Αυτό σημαίνει πως από αυστηρά IFR κατανομές μπορεί να προκύψει μείξη αυστηρά DFR. Αποδεικνύεται πως αν μία IFR κατανομή G με $G(0) = 0$, τότε η μείξη

$$\bar{H}(x) = \int_0^\infty \bar{F}(x|\theta)dG(\theta)$$

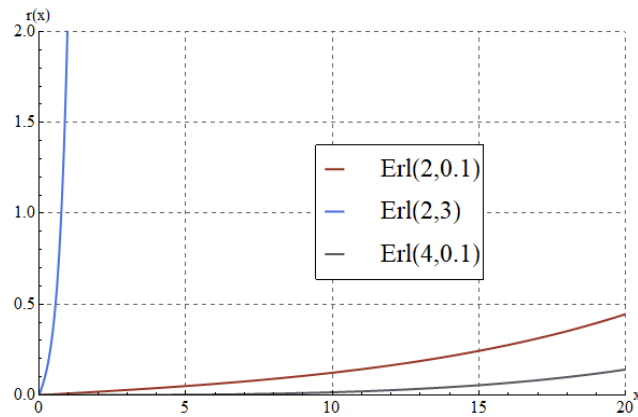
είναι IFR. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η μείξη Εκθετικών κατανομών είναι DFR. Επίσης, και η μείξη Γάμμα κατανομών με $a < 1$ δίνει DFR κλάση. Αυτό προκύπτει από την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 4.3.1 (Marshall & Olkin, 2007; Barlow & Proschan, 1996)
Αντίθετα με την κλάση κατανομών IFR, οι DFR κατανομές δίνουν πάντα μείξεις, που είναι DFR.

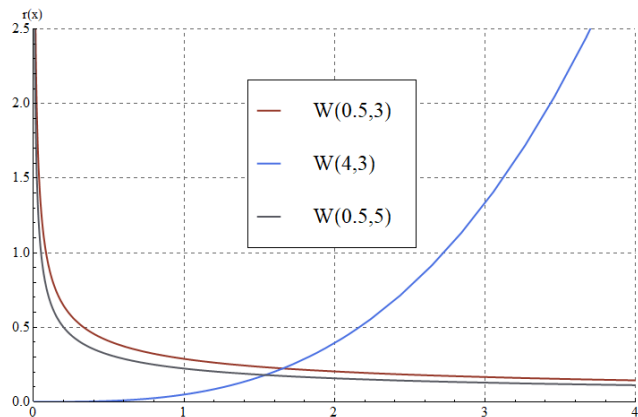
Αυτή η πρόταση δημιουργεί ερωτήματα για το τι ισχύει όταν έχουμε μείξη Erlang κατανομών, που σε κάθε μία από αυτές η βαθμίδα αποτυχίας είναι αύξουσα. Στο Κεφάλαιο 7, θα παρατηρήσουμε υπό ποιες συνθήκες παρατηρούμε IFR ή

DFR κατανομή.

Διάγραμμα 15: Βαθμίδα Αποτυχίας για την Erlang Κατανομή



Διάγραμμα 16: Βαθμίδα Αποτυχίας για την Weibull Κατανομή



Παρατηρώντας τα διαγράμματα των συναρτήσεων της βαθμίδας αποτυχίας για τις τρεις κατανομές επιβεβαιώνουμε την ιδιότητα που αφορά την παράμετρο σχήματος της Γάμμα και της Weibull. Διακρίνουμε, ακόμη, πως για την εκθετική έχουμε $r(x) = \lambda$.

Σημαντικό είναι να σημειωθεί πως όταν $X \sim Erl(n, \lambda)$, το όριο με $x \rightarrow \infty$ της συνάρτησης βαθμίδας αποτυχίας γίνεται (με τη βοήθεια του Mathematica)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} r(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-\lambda x} \lambda^n x^{n-1} \Gamma(n)}{(n-1)! \Gamma(n, \lambda x)} = \lambda \frac{\Gamma(n)}{(n-1)!} \stackrel{n \in \mathbb{N}}{=} \lambda \frac{(n-1)!}{(n-1)!} = \lambda.$$

Αυτό το αποτέλεσμα θα είναι χρήσιμο στο Κεφάλαιο 7, όπου θα ασχοληθούμε και με την ασυμπτωτική συμπεριφορά της βαθμίδας αποτυχίας, όταν αφορά σε μείξη κατανομών.

Κεφάλαιο 5

Μέσος Υπολειπόμενος Χρόνος Ζωής

Έχοντας ορίσει τη συνάρτηση της βαθμίδας αποτυχίας, στο παρόν κεφάλαιο θα ορίσουμε το δεύτερο αντικείμενο ενδιαφέροντος, τον μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής. Αρχικά, θα ορίσουμε τον υπολειπόμενο χρόνο ζωής, δηλαδή το χρόνο μέχρι την αποτυχία ή τον θάνατο, ενώ έχει περάσει ένα χρονικό διάστημα από την κατασκευή ή την γέννηση. Θα μελετήσουμε, όμως, τη μέση τιμή αυτής της τυχαίας μεταβλητής και θα την ονομάσουμε μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής.

Όπως μπορεί διαισθητικά κανείς να αντιληφθεί ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής συνδέεται με τη βαθμίδα αποτυχίας. Εκτός από τις συνδετικές σχέσεις μεταξύ τους, θα περιγράψουμε τις αντίστοιχες κλάσεις κατανομών που σχετίζονται με τον μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής, αλλά και κάποιες που συναντώνται μόνο σε αυτή τη συνάρτηση και δεν υπάρχει αντιστοιχία με τις κλάσεις της βαθμίδας αποτυχίας.

5.1 Ορισμός

Έστω X ο χρόνος ζωής ενός αντικειμένου, οπότε η X είναι μία μη αρνητική συνεχής τυχαία μεταβλητή. Τότε ορίζουμε ως $T_X(t)$ την μεταβλητή που εκφράζει

την υπολειπόμενη ζωή με $t \geq 0$ και ισχύει

$$T_X(t) = X - t | X > t.$$

Η κατανομή της $T_X(t)$ ορίζεται ως

$$F_{T_X}(t) = Pr(T_X(x) \leq t) = 1 - Pr(T_X(x) > t) = 1 - Pr(X - x > t | X > x).$$

Επομένως,

$$F_{T_X}(t) = 1 - \frac{Pr(X - x > t, X > x)}{Pr(X > x)} = 1 - \frac{Pr(X > x + t)}{Pr(X > x)} = 1 - \frac{\bar{F}(x + t)}{\bar{F}(x)}, \quad t \geq 0.$$

Αν θυμηθούμε τον τύπο (2.5) και την ιδιότητα της έλλειψης μνήμης, η Εκθετική κατανομή, καθώς αγνοεί τον χρόνο που έχει παρέλθει, δεν εμφανίζει κάποιο ενδιαφέρον, ώστε να περιγράψει τον υπολειπόμενο χρόνο ζωής. Ισχύει, δηλαδή, η εξής σχέση

$$F_{T_X}(t) = F_X(t).$$

Όπως έχει αναφερθεί, θα μελετήσουμε τον μέσο της $T_X(t)$, καθώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί τόσο ως στατιστικό εργαλείο για την κατασκευή ελέγχων υποθέσεων και διαστημάτων εμπιστοσύνης, όσο και ως μια πρώτη ένδειξη για την εικόνα των δεδομένων. Στην προκειμένη περίπτωση, ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής ορίζεται (Willmot & Lin, 2001) όπως κάθε μέση τιμή, δηλαδή

$$E(T_X(x)) := m_X(x) = \int_x^\infty (t-x) \frac{d(\bar{F}(t))}{\bar{F}(x)} = \int_0^\infty Pr(T_X(x) > t) dt = \int_0^\infty \frac{\bar{F}(x+t)}{\bar{F}(x)} dt. \quad (5.1)$$

Η σχέση αυτή γράφεται επίσης

$$m_X(x) = \frac{1}{\bar{F}(x)} \int_x^\infty \bar{F}(y) dy = \frac{E(X)\bar{F}_e(x)}{\bar{F}(x)} = \int_x^\infty \left(\frac{uf(u)}{\bar{F}(x)} - x \right) du, \quad (5.2)$$

όπου $\bar{F}(t) > 0$ η συνάρτηση δεξιάς ουράς, $\bar{F}_e(t) = e^{-\int_0^t (m(x))^{-1} dx}$, $t \geq 0$ η δεξιά ουρά της κατανομής ισορροπίας (equilibrium) και $F_1'(t) = \frac{\bar{F}(t)}{m(0)} = \frac{\bar{F}(t)}{\mu}$ η πυκνότητα της κατανομής ισορροπίας, με $m(x)$ να είναι ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής και μ η μέση τιμή της X .

Και εδώ, δεν καλείται συνάρτηση μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής οποιαδήποτε συνάρτηση. Οφείλει να πληροί κάποιες προϋποθέσεις, είτε η X λαμβάνει υπόψιν το μηδέν, είτε όχι. Στην πρώτη περίπτωση ($x = 0$), οι προϋποθέσεις για το προσδόκιμο ζωής (Guess & Proschan, 1985) είναι

- $m : [0, \infty) \mapsto [0, \infty)$,
- $m(0) > 0$,
- m δεξιά συνεχής συνάρτηση,
- $d(t) = m(t) + t$ αύξουσα συνάρτηση, όπου $d(t)$ εκφράζει το συνολικό αναμενόμενο χρόνο ζωής ως το θάνατο ή την αποτυχία, δεδομένου ότι μια μονάδα επιβιώνει στο χρόνο t , είτε
- να υπάρχει t_0 , τέτοιο ώστε $m(t_0^-) := \lim_{t \rightarrow t_0^-} m(t) = 0$ και $m(t) = 0, t \in [0, \infty)$ είτε
- αν δεν υπάρχει t_0 με την ιδιότητα $m(t_0^-) = 0$, τότε το ολοκλήρωμα $\int_0^\infty \frac{dy}{m(y)}$ υπάρχει.

Στην δεύτερη περίπτωση, που το μηδέν δεν ανήκει στο πεδίο τιμών του μέσου υπολειπόμενου χρόνου, οι προϋποθέσεις διαμορφώνονται ως εξής (Guess & Proschan, 1985)

- $m(t) \leq \left(\frac{1}{F(1) - t} \right)^+$, $\forall t$, αν και μόνο αν $F(t) = F\left((F^{-1}(1))^{-}\right)$ ή 1,
- $m(t) \leq \frac{\mu}{\bar{F}(t)} - t$, $\forall t$, αν και μόνο αν $F(t) = 0$,
- $m(t) < \left(\frac{\mu}{\bar{F}(t)} \right)^{\frac{1}{r}} - t$, $\forall t$,
- $m(t) \geq \frac{(\mu - t)^t}{\bar{F}(t)}$, $t < F^{-1}(1)$, αν και μόνο αν $F(t) = 0$,
- $m(t) > \frac{1}{\bar{F}(t)} \left(\mu - F(t) \left(\frac{\mu_r}{F(t)} \right) \right) - t$, $\forall t < F^{-1}(1)$ και
- $m(t) \geq (\mu - t)^+$.

5.2 Σύνδεση με Βαθμίδα Αποτυχίας

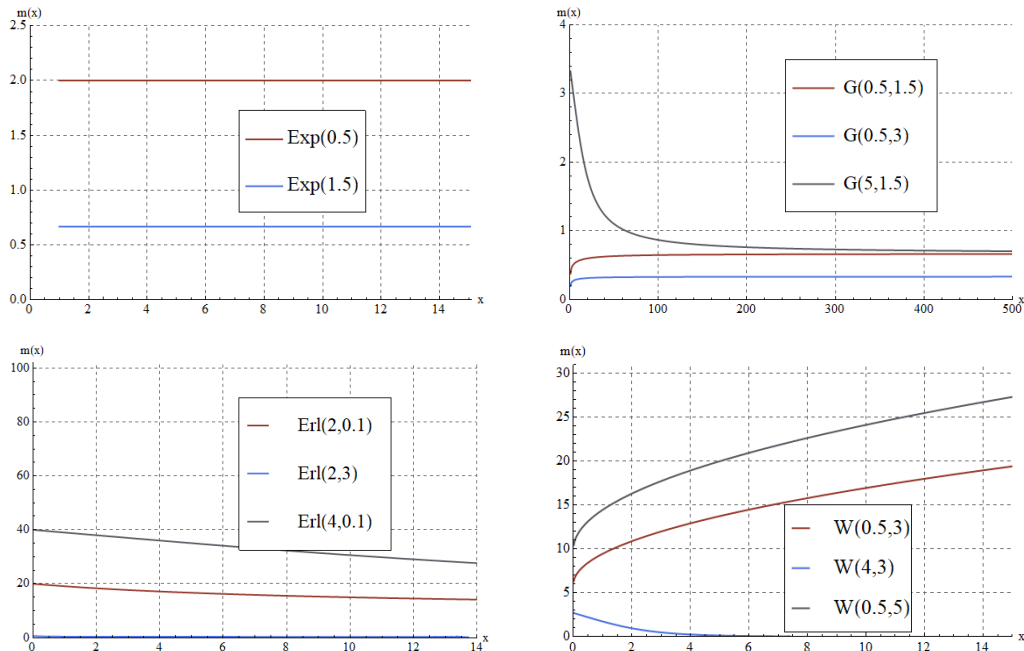
Παρακάτω φαίνεται πως η βαθμίδα αποτυχίας και ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής σχετίζονται. Διαισθητικά, τουλάχιστον, για έναν ανθρώπινο οργανισμό, η βαθμίδα αποτυχίας, εκφράζοντας την γήρανση του, λαμβάνει μεγαλύτερες τιμές, όσο περνάει η χρόνος, ενώ η υπολειπόμενη ζωή αποτελεί την ζωή που απομένει σε ένα άτομο, συνεχώς, μειώνεται. Συνεπώς, περιμένει κανείς να δει "αντίστροφες" σχέσεις μεταξύ των δύο μεγεθών. Πράγματι, καθώς, όπως δίνει η σχέση (5.3), είναι ασυμπτωτικά αντιστρόφως ανάλογες ποσότητες.

Συγκεκριμένα, έστω Y μία τυχαία μεταβλητή με βαθμίδα αποτυχίας $r(y)$ και μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής $m(y)$. Τότε, θα ισχύει

$$r(\infty) = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{E(Y)\bar{F}_1(y)}{\bar{F}(y)} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{-\bar{F}(y)}{-f(y)} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{m(y)} = \frac{1}{m(\infty)}. \quad (5.3)$$

Από την παραπάνω σχέση, μπορούμε να εξάγουμε και άλλα συμπεράσματα. Περιμένουμε πως όταν η μία συνάρτηση είναι αύξουσα, τότε η άλλη είναι φθίνουσα, και το αντίστροφο. Αυτό ισχύει καθώς όταν η μέση υπολειπόμενη ζωή φθίνει (αυξάνει), η βαθμίδα αποτυχίας θα αυξάνει (φθίνει). Την περίπτωση κατά την οποία είναι γνησίως μονότονες οι συναρτήσεις θα την εξετάσουμε στην επόμενη ενότητα, ενώ σε επόμενο κεφάλαιο θα μελετήσουμε τη σχέση των συναρτήσεων, όταν δεν είναι γνησίως μονότονες. Τέλος, όταν οι συναρτήσεις είναι σταθερές, τότε και οι δύο προέρχονται από Εκθετική κατανομή.

Διάγραμμα 17: Μέσος Υπολειπόμενος Χρόνος Ζωής για Εκθετική(πάνω αριστερά), Γάμμα(πάνω δεξιά), *Erlang*(κάτω αριστερά) και *Weibull*(κάτω δεξιά)



Παρότι παρατηρούμε σύνδεση μεταξύ των δύο συναρτήσεων, αν και υπάρχει πάντα ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής, δεν σημαίνει ότι πάντα υπάρχει και η βαθμίδα αποτυχίας. Αυτό προξενεί προβλήματα, καθώς δίνουν από κοινού πολύ σημαντικά αποτελέσματα, καθιστώντας τες και τις δύο αναγκαίες σε μια μελέτη. Ακόμη, μπορεί να σημειωθεί άλλη μία αναντιστοιχία μεταξύ τους. Η βαθμίδα

αποτυχίας αναφέρεται στη συμπεριφορά του χρόνου ζωής για μικρά χρονικά διαστήματα (dt), ενώ η υπολειπόμενη ζωή επεκτείνεται από το τώρα μέχρι την αποτυχία.

Πρόταση 5.2.1 *Ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής μπορεί να υπολογιστεί συναρτήσει της βαθμίδας αποτυχίας από τη σχέση*

$$m(x) = \int_0^{\infty} e^{-\int_x^{x+t} r(y)dy} dt, \quad x \geq 0.$$

Απόδειξη Έχοντας τις σχέσεις (5.1) και (4.1), προκύπτει πως

$$\frac{\bar{F}(x+t)}{\bar{F}(x)} = \frac{e^{-\int_0^{x+t} r(y)dy}}{e^{-\int_0^x r(y)dy}} = e^{-\int_0^{x+t} r(y)dy + \int_0^x r(y)dy} = e^{-\int_x^{x+t} r(y)dy}.$$

Οπότε, έχουμε

$$m(x) = \int_0^{\infty} \frac{\bar{F}(x+t)}{\bar{F}(x)} dt = \int_0^{\infty} e^{-\int_x^{x+t} r(y)dy} dt.$$

5.3 Βασικές Κλάσεις Κατανομών

Σύνδεση μεταξύ των δύο συναρτήσεων υπάρχει και στις κλάσεις κατανομών. Αν είναι αύξουσα η συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής, η κατανομή είναι IMRL (increasing mean residual lifetime), ενώ αν είναι φθίνουσα συνάρτηση, η κατανομή είναι DMRL (decreasing mean residual lifetime). Και εδώ, η Εκθετική κατανομή δίνει σταθερή αναμενόμενη υπολειπόμενη ζωή.

Πρέπει να σημειωθεί πως η DFR κλάση είναι υποσύνολο της IMRL, και, αντίστοιχα, η IFR είναι μέρος της DMRL, λόγω της αντίστροφης σχέσης που εμφανίζουν η βαθμίδα αποτυχίας και η μέση υπολειπόμενη ζωή.

Ισχύει δηλαδή πως:

- αν η $F(x)$ ανήκει στην DFR κλάση, και η $r(x)$, αν υπάρχει, είναι φθίνουσα και τότε η $F(x)$ ανήκει και στην IMRL, ενώ
- αν η $F(x)$ ανήκει στην IFR κλάση, και η $r(x)$, αν υπάρχει, είναι αύξουσα και τότε η $F(x)$ ανήκει και στην DMRL.

Από τον Πίνακα 4.1, γνωρίζουμε πως η F ανήκει στην DFR (IFR) κλάση, αν ο λόγος $\frac{\bar{F}(y+t)}{\bar{F}(y)}$ είναι αύξουσα (φθίνουσα) συνάρτηση ως προς y . Τότε, θα ισχύει

$$\frac{\bar{F}(y_1+t)}{\bar{F}(y_1)} < \frac{\bar{F}(y_2+t)}{\bar{F}(y_2)} \Rightarrow$$

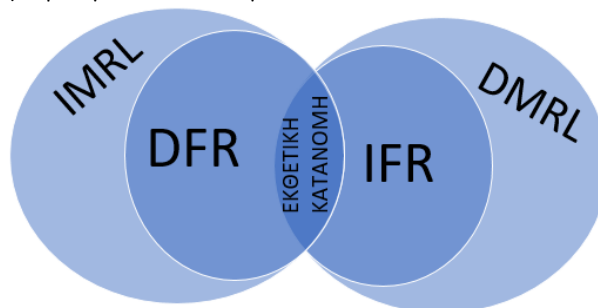
$$\int_0^\infty \frac{\bar{F}(y_1+t)}{\bar{F}(y_1)} dt < \int_0^\infty \frac{\bar{F}(y_2+t)}{\bar{F}(y_2)} dt \Rightarrow$$

$$m(y_1) < m(y_2).$$

Άρα, ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής, $m(y)$, είναι αύξουσα συνάρτηση στο y με $y > 0$, δηλαδή η $F(y)$ είναι IMRL. Ομοίως, αποδεικνύεται ο δεύτερος κλάδος της παραπάνω λίστας.

Αντίστοιχα, μπορεί να εκφραστεί η κλάση της F με βάση τη μονοτονία της μέσης υπολειπόμενης ζωής, χρησιμοποιώντας τον λόγο $\frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(x)}$ και της κυρτότητας ή μη της συνάρτησης $\log \bar{F}(x)$.

Διάγραμμα 18: Γραφική Απεικόνιση των Κλάσεων IFR, DFR, IMRL, και DMRL



5.4 Επιπλέον Κλάσεις Κατανομών

Εώς τώρα εξετάσαμε τις κλάσεις IFR και DFR για τη βαθμίδα αποτυχίας και τις DMRL και IMRL για τον μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής. Παρ' όλα αυτά, θα εξετάσουμε κάποιες επιπλέον κλάσεις που παρουσιάζουν ενδιαφέρον, και, μάλιστα, συνδέονται τόσο μεταξύ τους, όσο και με τις αρχικές κλάσεις που έχουμε ήδη αναφέρει. Αυτές οι ομάδες κατανομών διακρίνονται σε συνεχείς και διακριτές, ανάλογα με τον τύπο της τυχαίας μεταβλητής που περιγράφουν.

5.4.1 Συνεχής Περίπτωση

Η πρώτη ομάδα είναι η NWU (new worse than used) και NBU (new better than used). Για να χαρακτηριστεί μια κατανομή ως NWU (NBU) θα πρέπει να ισχύει η σχέση

$$\bar{F}(x+y) \geq (\leq) \bar{F}(x)\bar{F}(y), \quad \forall x \geq 0, y \geq 0.$$

Αν θέλουμε να ερμηνεύσουμε τον όρο new worse (better) than used, παίρνουμε από την παραπάνω ανισότητα τη σχέση

$$Pr(Y > x+y | Y > y) = Pr(T_Y(y) > x) \geq (\leq) Pr(Y > x), \quad (5.4)$$

που σημαίνει πως η υπολειπόμενη ζωή είναι στοχαστικά μεγαλύτερη (μικρότερη) από τη νέα ζωή.

Τέλος, προκύπτει πως η DFR (IFR) κλάση κατανομών ανήκει στην NWU (NBU).

Επόμενη ομάδα είναι η NWUE (new worse than used in expectation) και NBUE (new better than used in expectation). Η συγκεκριμένη ομάδα υποθέτει ότι η μέση υπολειπόμενη ζωή ενός νεογέννητου αναμένεται να είναι μικρότερη (ή μεγαλύτερη, αν αφορά την NBUE (new better than used in expectation)) από εκείνη ενός μεγαλύτερου. Άρα η NWU (NBU) είναι υποομάδα της NWUE (NBUE).

Ορισμός 5.4.1 Έστω μία τυχαία μεταβλητή Y με συνάρτηση κατανομής F και συνάρτηση μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής $m(y)$. Θα λέμε ότι η F είναι NWUE (NBUE) αν

$$m(y) \geq (\leq) m(0) \Leftrightarrow E(T_Y(y)) \geq (\leq) E(Y) \quad (5.5)$$

ή, ισοδύναμα,

$$m(y) = \int_0^{\infty} \frac{\bar{F}(y+t)}{\bar{F}(y)} dt \geq (\leq) \int_0^{\infty} \bar{F}(t) dt = E(Y) = m(0).$$

Φαίνεται πως η NWUE περιλαμβάνει αρκετές μικρότερες κλάσεις. Οπότε κρίνεται ενδιαφέρον να μελετηθούν κάποιες ιδιότητες. Πριν προχωρήσουμε, όμως, στις υπόλοιπες κλάσεις, θα πρέπει να ορισθεί ο συντελεστής μεταβλητότητας.

Ορισμός 5.4.2 (Πανάρετος & Ξεκαλάκη, 2003) Ο συντελεστής μεταβλητότητας μιας τυχαίας μεταβλητής X συμβολίζεται με CV μετρά το άπλωμα των δεδομένων σε σχέση με το μέσο και δίνεται από τη σχέση

$$CV = \frac{\sqrt{Var(X)}}{E(X)}.$$

Το CV εκφράζεται συνήθως σε ποσοστό, που διευκολύνει τη σύγκριση μεταξύ ομάδων, οι οποίες, όμως, παρότι έχουν ίδιες μονάδες μέτρησης, δεν μπορούν να συγκριθούν μέσω της τυπικής απόκλισης. Επίσης, ο συντελεστής μεταβλητότητας

αποτελεί καθαρό αριθμό, που σημαίνει ότι μπορούν τα συγκριθούν ομάδες με διαφορετικές μονάδες μέτρησης, για παράδειγμα διαφορετικά νομίσματα.

Η κλάση NWUE συνδέεται με την δεξιά ουρά. Χρησιμοποιώντας το συντελεστή μεταβλητότητας, παρατηρείται (Willmot & Lin, 2001) ότι για τις κατανομές που ανήκουν στην NWUE το τετράγωνο του συντελεστή παίρνει τιμές μεγαλύτερες της μονάδας, δηλαδή ισχύει η σχέση

$$\text{Var}(X) \geq E^2(X).$$

Επιπλέον, για την NWUE (NBUE) ισχύουν οι εξής σχέσεις

$$m(y) \geq (\leq) E(Y) \Rightarrow$$

$$\bar{F}(y) \leq (\geq) \frac{E(Y)}{y + m(y)}, \quad y \geq 0$$

Τέλος, αν θέσουμε ως δ την διάμεσο, δηλαδή $\bar{F}(\delta) = \frac{1}{2}$, τότε θα ισχύει πως

$$\frac{1}{2} \leq (\geq) \frac{E(Y)}{\delta + E(Y)} \Rightarrow \delta \leq (\geq) E(Y)$$

Άρα, η κατανομή δεν είναι συμμετρική, αλλά εμφανίζει θετική (αρνητική) ασυμμετρία.

Η κλάση κατανομών UWA (used worse than aged) και UBA (used better than aged) είναι εκείνη η ομάδα κατανομών για την οποία ισχύουν

$$0 < m(\infty) < r(\infty) \text{ και } \bar{F}(x+y) \leq (\geq) \bar{F}(y) e^{-\frac{x}{m(\infty)}}, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0. \quad (5.6)$$

Αντίστοιχα, αν χρησιμοποιηθεί η βαθμίδα αποτυχίας, μια κατανομή ανήκει σε αυτή την ομάδα, αν ισχύουν οι σχέσεις της παρακάτω Πρότασης 5.4.1, αν, βέβαια, υπάρχει η βαθμίδα αποτυχίας. Επιπλέον, αν μια κατανομή ανήκει στην IMRL (DMRL), τότε η κατανομή αυτή ανήκει και στην UWA (UBA).

Πρόταση 5.4.1 (*Willmot & Lin, 2001*) *Εάν η $F(x)$ είναι απολύτως συνεχής με βαθμίδα αποτυχίας $r(x) = -\frac{d}{dy} \ln \bar{F}(y)$, τότε αποδεικνύεται ότι η $F(x)$ είναι UWA (UBA) αν*

$$r(y) \geq (\leq) r(\infty) \text{ όπου } 0 < r(\infty) < \infty.$$

Τέλος, η κλάση UWAE (used worse than aged in expectation) και UBAE (used better than aged in expectation) είναι χαρακτηρισμός για κατανομή που ικανοποιεί την παρακάτω ανισότητα.

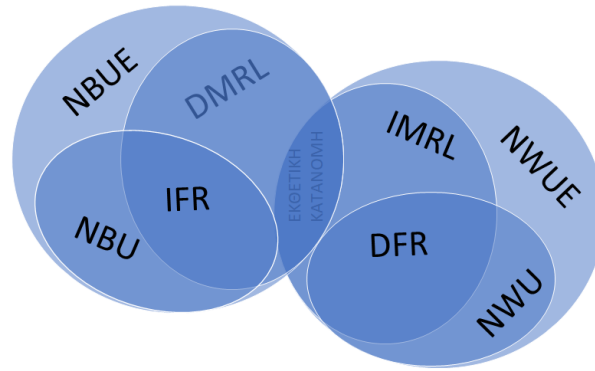
$$m(y) \leq (\geq) m(\infty)$$

Η κλάση κατανομών UWA (UBA) είναι υποσύνολο της κλάσης UWAE (UBAE), αφού ισχύει

$$m(y) = \int_0^\infty \frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(y)} dx \leq (\geq) \int_0^\infty e^{-\frac{x}{m(\infty)}} dx = m(\infty).$$

Πριν προχωρήσουμε στην διακριτή περίπτωση ομάδων κατανομών, είναι χρήσιμο να κατασκευάσουμε ένα διάγραμμα στο οποίο θα αποτυπώνονται τα υποσύνολα των παραπάνω κλάσεων.

Διάγραμμα 19: Διαμέριση των Επιπλέον Κλάσεων που Αφορούν Συνεχείς Κατανομές



5.4.2 Διακριτή Περίπτωση

Οι κλάσεις που έχουν αναφερθεί έως τώρα αφορούν συνεχείς κατανομές. Στη διακριτή περίπτωση (Willmot & Lin, 2001), οι ποσότητες ενδιαφέροντος δεν διαφέρουν ιδιαίτερα, αν και θα πρέπει να ορισθούν κάποιες νέες ποσότητες, ενώ θα μας απασχολήσει η ποσότητα

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1 - h_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

όπου $\alpha_n = Pr(N > n)$.

Πριν προχωρήσουμε, θα πρέπει να ορίσουμε τις εξής ποσότητες

- N : μεταβλητή μέτρησης με πιθανότητες $p_n = Pr(N = n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$,
- $\alpha_n = Pr(N > n) = \sum_{\kappa=n+1}^{\infty} p_{\kappa}$ και
- $\{h_n\}$: διακριτή βαθμίδα αποτυχίας με

$$h_n = Pr(N = n | N \geq n) = \frac{p_n}{p_n + \alpha_n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Ορισμός 5.4.3 (*Willmot & Lin, 2001*) Ορίζουμε τη συνάρτηση πιθανότητας p_n ως *log-convex* (*log-concave*), αν

$$p_{n+1}^2 \leq (\geq) p_n p_{n+2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ή ισοδύναμα όταν ο λόγος

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} \tag{5.7}$$

είναι αύξουσα (φθίνουσα) συνάρτηση του n .

Η πρώτη κλάση διακριτών κατανομών που θα εξετάσουμε είναι η D-IFR (discrete increasing failure rate) και D-DFR (discrete decreasing failure rate). Η $\{p_n\}_{n \leq 0}$ ανήκει στην D-DFR, αν ο λόγος $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$ είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς το n ή, διαφορετικά, αν η h_n είναι φθίνουσα. Αντίστοιχα, ισχύουν και για την D-IFR. Σημαντικό είναι να σημειωθούν περιπτώσεις για τις τιμές της $\{\alpha_n\}$.

- Αν και δεν είναι σύννητες, όταν $\alpha_n = 0$, χρησιμοποιείται η ανισότητα $\alpha_{n+1}^2 \leq \alpha_n \alpha_{n+2}$, $n = 0, 1, 2, \dots$
- Αν $\alpha_n, \alpha_{n+1} > 0$, τότε, παίρνοντας την παραπάνω εναλλακτική ανισότητα, προκύπτει η σχέση $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \leq \frac{\alpha_{n+2}}{\alpha_{n+1}}$, που σημαίνει πως η $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$ είναι αύξουσα.
- Αν $\alpha_n = \alpha_{n+1} = \alpha_{n+2} = 0$, τότε ικανοποιείται η σχέση $\alpha_{n+1}^2 \leq \alpha_n \alpha_{n+2}$.
- Αν η α_n είναι log-convex, η $\{p_n\}_{n \leq 0}$ ανήκει στην D-DFR.

Επόμενο βήμα είναι η DS-DFR (discrete strong decreasing failure rate) και DS-IFR (discrete strong increasing failure rate), η οποία είναι μικρότερη κλάση της D-DFR και της D-IFR, αντίστοιχα. Αυτό ισχύει, επειδή αποτελεί μία κλάση με περισσότερο αυστηρές συνθήκες της παραπάνω ομάδας ως προς το ότι τα μεγέθη h_0 και p_0 έχουν επιλεχθεί αυθαίρετα. Οπότε, τώρα, προϋποθέτουμε πως η p_n

είναι γνησίως φθίνουσα, όσον αφορά την DS-DFR, δηλαδή η h_n θα είναι φθίνουσα στο n . Συνεπώς, μπορεί να δει κανείς πως η DS-DFR κλάση είναι υποσύνολο της D-DFR. Τέλος, η log-convex (log-concave) είναι υποσύνολο του DS-DFR (DS-IFR).

Η διακριτή αναμενόμενη υπολειπόμενη ζωή υπολογίζεται ως

$$m_n = E(N - n | N > n) = \frac{\sum_{\kappa=n+1}^{\infty} (\kappa - n)p_{\kappa}}{\alpha_n} = \frac{\sum_{\kappa=n}^{\infty} \alpha_{\kappa}}{\alpha_n}. \quad (5.8)$$

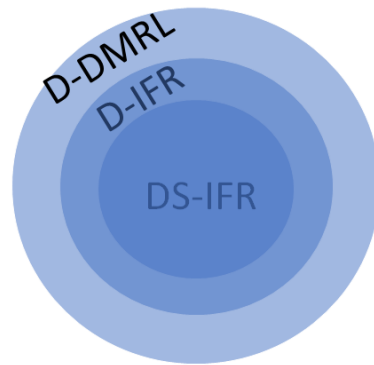
Η συνάρτηση πιθανότητας p_n ανήκει στην D-IMRL (discrete increasing mean residual lifetime) και D-DMRL (discrete decreasing mean residual lifetime), όταν η m_n είναι αύξουσα (φθίνουσα) στο n . Όπως και στη συνεχή περίπτωση, η D-DFR (D-IFR) περιέχεται στην κλάση D-IMRL (D-DMRL).

Τελευταία κλάση είναι η DS-NWU (discrete new worse than used) και DS-NBU (discrete new better than used). Η συνάρτηση πιθανότητας p_n χαρακτηρίζεται ως DS-NWU (DS-NBU) αν ισχύει η παρακάτω ανισότητα (5.9). Η DS-DFR (DS-IFR) περιλαμβάνεται στην DS-NWU (DS-NBU).

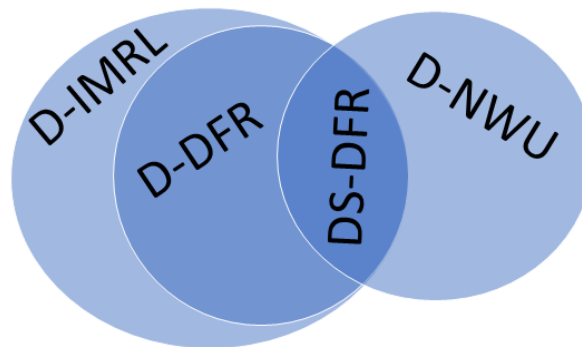
$$\alpha_{n+l+1} \geq (\leq) \alpha_n \alpha_l, \quad n, l = 0, 1, 2, \dots \quad (5.9)$$

Συνοψίζοντας τα υποσύνολα των κλάσεων στις ευρύτερες ομάδες κατανομών προκύπτουν τα Διαγράμματα 20 και 21.

Διάγραμμα 20: Διαμέριση των Επιπλέον Κλάσεων που Αφορούν Διακριτές Κατανομές, Μέρος I



Διάγραμμα 21: Διαμέριση των Επιπλέον Κλάσεων που Αφορούν Διακριτές Κατανομές, Μέρος II



Κεφάλαιο 6

Κυρτότητα

Έχουμε ήδη ορίσει στο Κεφάλαιο 2, πότε καλείται μια συνάρτηση (λογαριθμικά) κυρτή ή (λογαριθμικά) κοίλη. Τώρα θεωρώντας πως η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής που μελετάμε είναι Erlang, μπορούμε να εξετάσουμε την κυρτότητα της συνάρτησης πυκνότητας και της δεξιάς ουράς, σε μια κατανομή ή σε μείξη κατανομών. Αρχικά, θα αναφέρουμε θεωρήματα που συνδέουν την κυρτότητα της συνάρτησης πυκνότητας με την βαθμίδα αποτυχίας, αλλά και με την δεξιά ουρά που είναι σημαντικό για να εξάγουμε συμπεράσματα απλά μελετώντας την μία συνάρτηση. Στη συνέχεια, θα ελέγξουμε την κυρτότητα τόσο με την εφαρμογή ορισμών που έχουν περιγραφεί στο Κεφάλαιο 2, όσο και με την παράγωγο της συνάρτησης ενδιαφέροντος. Θα πρέπει να αναφερθεί πως κύριος σκοπός σε αυτό το κεφάλαιο, είναι να διερευνήσουμε αν η (λογαριθμισμένη) κυρτότητα της κατανομής της Erlang διατηρείται υπό την μείξη κατανομών.

6.1 Κυρτότητα Erlang Κατανομών

Στο Κεφάλαιο 4, είδαμε ότι η συνάρτηση της βαθμίδας αποτυχίας της Erlang είναι πάντοτε αύξουσα, οπότε η κατανομή είναι IFR. Ενδιαφέρον έχει να ελέγξουμε αν μπορούμε να συνδέσουμε την κυρτότητα ή την λογαριθμική κυρτότητα και την κλάση της κατανομής, είτε με τη βοήθεια της συνάρτησης πυκνότητας ή της

δεξιάς ουράς. Με τη βοήθεια των δύο παρακάτω προτάσεων, αυτά τα ερωτήματα θα απαντηθούν. Τέλος, θα συσχετίσουμε την λογαριθμική κυρτότητα με την κυρτότητα πέραν από τη σχέση που έχουμε αναφέρει στο Κεφάλαιο 2.

Πρόταση 6.1.1 (*Bagnoli & Berstrom, 1989*) Όταν η F έχει αύξουσα βαθμίδα αποτυχίας, είναι δηλαδή IFR, τότε μπορεί να χαρακτηριστεί ως λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση.

Στο Κεφάλαιο 4, και συγκεκριμένα στον Πίνακα 4.1, αναφέρουμε πως αν μια συνάρτηση F είναι λογαριθμικά κοίλη, τότε είναι και IFR (Marshall & Olkin, 2007). Οπότε, με την παραπάνω πρόταση, αποδεικνύεται πως ισχύει και το αντίστροφο.

Πρόταση 6.1.2 (*Bagnoli & Berstrom, 1989*) Αν η f είναι λογαριθμικά κοίλη, τότε η συνάρτηση κατανομής, F , καθώς και η συνάρτηση δεξιάς ουράς, \bar{F} , είναι λογαριθμικά κοίλες συναρτήσεις.

Συνεπώς, για την κατανομή Erlang παρατηρούμε τα εξής

- η βαθμίδα αποτυχίας είναι αύξουσα, η κατανομή είναι, δηλαδή, IFR,
- η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, f , είναι λογαριθμικά κοίλη και
- η συνάρτηση δεξιάς ουράς, \bar{F} , είναι λογαριθμικά κοίλη.

Τα παραπάνω συμπεράσματα μπορούν να εξεταστούν, ελέγχοντας τα κριτήρια των Ορισμών 2.4.1 και 2.4.3, που αναφέρονται στην κυρτότητα και τη λογαριθμική κυρτότητα με τις εξής ανισότητες

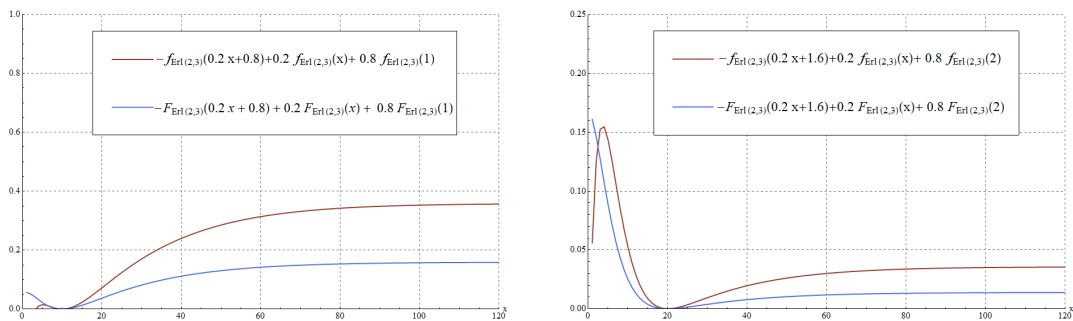
$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) \Rightarrow$$

$$\alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) - f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq 0 \text{ και} \quad (6.1)$$

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq |f(x)|^\alpha |f(y)|^{1-\alpha}, \quad (6.2)$$

αντίστοιχα.

Διάγραμμα 22: Εφαρμογή της (6.1) στις Συναρτήσεις της Πυκνότητας και της Δεξιάς Ουράς για $y = 1$ (αριστερά) και $y = 2$ (δεξιά)



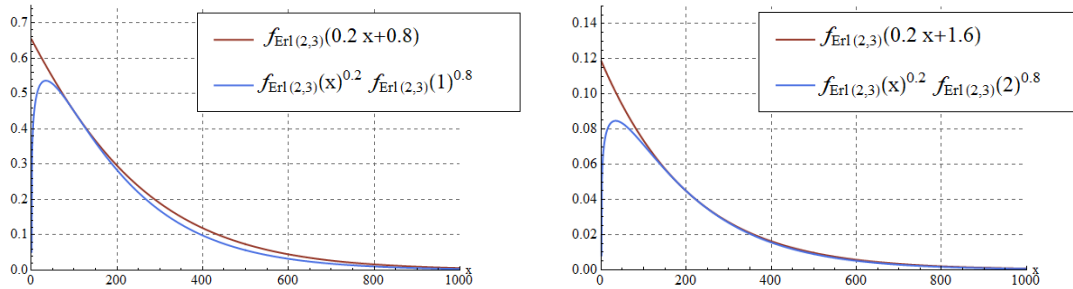
Στο Διάγραμμα 22, βλέπουμε πως η ανισότητα (6.1) πληρείται για τη συνάρτηση πυκνότητας και τη δεξιά ουρά, όπου σημαίνει πως και οι δύο είναι κυρτές συναρτήσεις. Στο Διάγραμμα 23, ελέγχουμε την ανισότητα (6.2), η οποία, όμως, δεν τηρείται. Παρότι συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας δεν είναι λογαριθμικά κυρτή, δεν μπορούμε να την θεωρήσουμε λογαριθμικά κοίλη, καθώς η συνάρτηση, ενδεχομένως, να μην είναι γνήσια λογαριθμικά κυρτή ή κοίλη, όπως δείχνουν και τα παραδείγματα που περιγράφονται στον Πίνακα 6.1.

Εναλλακτικά, μπορούμε να ελέγξουμε την κυρτότητα μιας συνάρτησης μέσω της παραγώγου. Δηλαδή,

- αν έχουμε $f'' > 0$ σε ένα διάστημα Δ , τότε η f είναι κυρτή σε αυτό το διάστημα, ενώ

- αν έχουμε $f'' < 0$ σε ένα διάστημα Δ , τότε η f είναι κοίλη σε αυτό το διάστημα.

Διάγραμμα 23: Εφαρμογή του Ορισμού 2.4.3 στη Συνάρτηση της Πυκνότητας Πιθανότητας της $Erl(2, 3)$



Τα διαστήματα της x που αναφέρονται στον παραπάνω πίνακα υπολογίστηκαν με αριθμητικές μεθόδους. Παρατηρούμε πως η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και η συνάρτηση δεξιάς ουράς δεν είναι κυρτές συναρτήσεις για κάθε x , δηλαδή δεν παρουσιάζουν γνήσια κυρτότητα. Το Διάγραμμα 24 επιβεβαιώνει τα αποτελέσματα του παρακάτω πίνακα. Βλέπουμε πως, αρχικά, οι συναρτήσεις είναι κοίλες και, στη συνέχεια, μοιάζουν να είναι κυρτές.

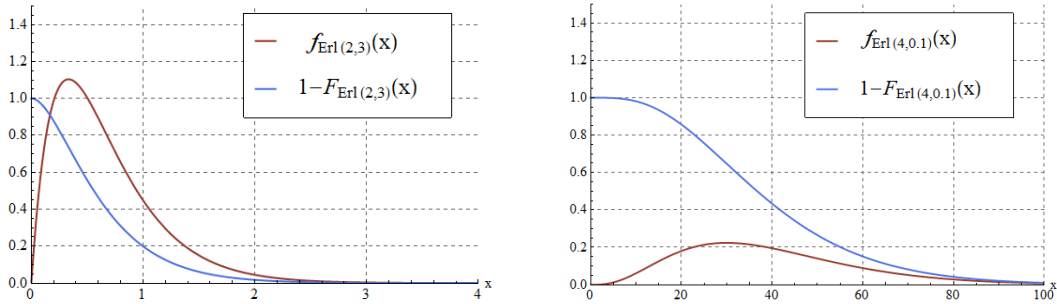
Στον Πίνακα 6.1, παίρνοντας ενδεικτικά κάποιες κατανομές, έχουμε εντοπίσει ότι σε κάποια διαστήματα για το x , η Erlang εμφανίζει κυρτές συναρτήσεις $f(x)$ και $\bar{F}(x)$, ενώ στα συμπληρωματικά διαστήματα, οι δύο συναρτήσεις είναι κοίλες.

Πίνακας 6.1: Διαστήματα Κυρτότητας για τη Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας και τη Συνάρτηση Δεξιάς Ουράς

Παράμετροι Κατανομής	Διάστημα x για f	Διάστημα x για \bar{F}
$n = 2$ και $\lambda = 3$	$x \geq 0.66$	$x \geq 0.33$
$n = 4$ και $\lambda = 0.1$	$0 \leq x \leq 12.67, x \geq 47.32$	$x \geq 30$
$n = 2$ και $\lambda = 10$	$x \geq 1/5$	$x \geq 1/10$

Βλέπουμε, λοιπόν, πως δεν είναι γνήσια κυρτές οι συναρτήσεις f και \bar{F} , αλλά μόνο κατά διαστήματα. Τα παρακάτω διαγράμματα απεικονίζουν τις δύο πρώτες περιπτώσεις, που αναφέρονται στον παραπάνω πίνακα.

Διάγραμμα 24: Συνάρτηση Πυκνότητας και Δεξιάς Ουράς



6.2 Κυρτότητα Μείξης Erlang Κατανομών

Επόμενο βήμα είναι να ελέγξουμε αν τα συμπεράσματα που προηγήθηκαν διατηρούνται κάτω από την μείξη. Στο Κεφάλαιο 2, είδαμε πως αν κάποιες συναρτήσεις είναι κυρτές, τότε η μείξη τους θα είναι επίσης κυρτή. Για την λογαριθμική κυρτότητα, γνωρίζουμε πως η μείξη λογαριθμικά κυρτών συναρτήσεων είναι και εκείνη λογαριθμικά κυρτή. Επιπλέον, ισχύει και υπό τη μείξη κατανομών η σύνδεση της κυρτότητας της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας και της συνάρτησης δεξιάς ουράς, η οποία μας διευκολύνει στο να εξάγουμε συμπεράσματα ταυτόχρονα και για τις δύο συναρτήσεις.

Στην περίπτωση της Erlang, δείξαμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας και η συνάρτηση δεξιάς ουράς είναι κυρτές μόνο σε κάποια διαστήματα και δεν είναι λογαριθμικά κυρτές.

Για τον έλεγχο όσων θα εξετασθούν σε αυτή την ενότητα, χρησιμοποιούνται η μείξη με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$g(x) = pf_1(x) + (1 - p)f_2(x)$$

και, αντίστοιχα, συνάρτηση δεξιάς ουράς

$$\bar{G}(x) = p\bar{F}_1(x) + (1 - p)\bar{F}_2(x)$$

με τις εξής τυχαίες μεταβλητές:

- $X_1 \sim Erl(n = 2, \lambda = 3) = F_1$,
- $X_2 \sim Erl(n = 4, \lambda = 0.1) = F_2$ και
- $0 < p < 1$ το βάρος που αντιστοιχεί στην X_1 .

Εδώ υποθέτουμε ότι f_i είναι η πυκνότητα της συνάρτησης κατανομής F_i για $i = 1, 2$.

Πριν προχωρήσουμε στην διαδικασία ελέγχου και τα συμπεράσματα που εξάγονται από αυτή, σημαντικό είναι να δούμε τι ισχύει για την ανισότητα του Ορισμού 2.4.1, όπου έχουμε τη συνθήκη

$$g(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha g(x) + (1 - \alpha)g(y).$$

Δηλαδή έχουμε

- $g(\alpha x + (1 - \alpha)y) = pf_1(\alpha x + (1 - \alpha)y) + (1 - p)f_2(\alpha x + (1 - \alpha)y)$ και
- $\alpha g(x) + (1 - \alpha)g(y) = \alpha[pf_1(x) + (1 - p)f_2(x)] + (1 - \alpha)[pf_1(y) + (1 - p)f_2(y)].$

Οπότε, φέρνοντας τις δύο συναρτήσεις, f_1 και f_2 , στο αριστερό και το δεξί μέλος της ανισότητας 2.9, αντίστοιχα, έχουμε πως

- $p[f_1(\alpha x + (1 - \alpha)y) - \alpha f_1(x) - (1 - \alpha)f_1(y)] = p[f_1(\alpha x + (1 - \alpha)y) - (\alpha f_1(x) + (1 - \alpha)f_1(y))]$ και
- $(1 - p)[-f_2(\alpha x + (1 - \alpha)y) + \alpha f_2(x) + (1 - \alpha)f_2(y)] = -(1 - p)[f_2(\alpha x + (1 - \alpha)y) - (\alpha f_2(x) + (1 - \alpha)f_2(y))]$.

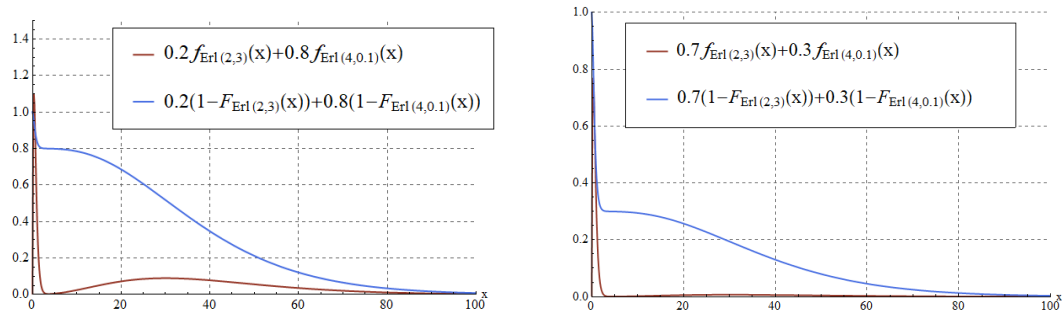
Παρατηρεί κανείς στην τελευταία σχέση πως προκύπτουν οι διαφορές των συναρτήσεων του ορισμού, από αριστερά στην X_1 πολλαπλασιασμένη με p , ενώ δεξιά στην X_2 πολλαπλασιασμένη με $1 - p$. Συνεπώς, αν γνωρίζει κανείς την κυρτότητα της κάθε επιμέρους συνάρτησης, $f_1(x)$ και $f_2(x)$, μπορεί να εξάγει συμπεράσματα για την κυρτότητα της συνάρτησης $g(x)$, που αφορά στη μείξη των $f_1(x)$ και $f_2(x)$. Το ίδιο, όμως, δεν μπορεί να προκύψει στην περίπτωση της ανισότητας του Ορισμού 2.4.3, λόγω της δύναμης που εμφανίζεται στο άθροισμα.

Χρησιμοποιώντας την δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας και της συνάρτησης δεξιάς ουράς, διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

Πίνακας 6.2: Διαστήματα Κυρτότητας για τη Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας και τη Συνάρτηση Δεξιάς Ουράς Μείξεων Κατανομών

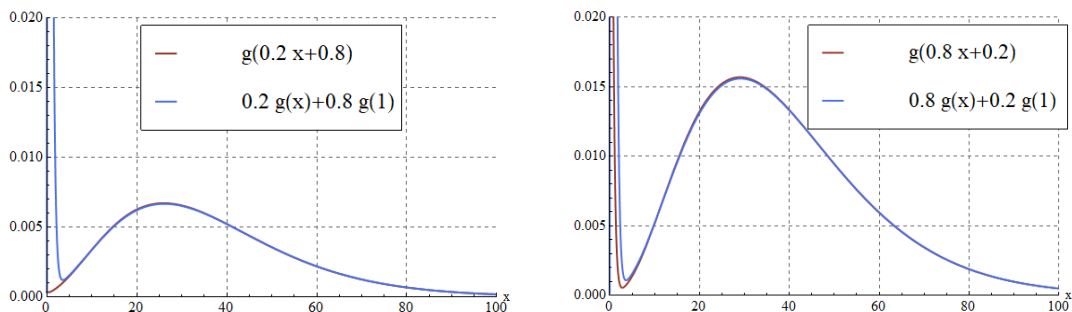
Μείξη Κατανομών	Διάστημα x για f	Διάστημα x για F
0.2 $Erl(n = 2, \lambda = 3)$ + 0.8 $Erl(n = 4, \lambda = 0.1)$	$0.66 \leq x \leq 12.67,$ $x \leq 47.32$	$0.33 \leq x \leq 3.57$ $x \geq 10$
0.7 $Erl(n = 2, \lambda = 3)$ + 0.3 $Erl(n = 4, \lambda = 0.1)$	$0.66 \leq x \leq 12.67,$ $x \leq 47.32$	$0.33 \leq x \leq 3.57$ $x \geq 10$
0.2 $Erl(n = 2, \lambda = 1.5)$ + 0.8 $Erl(n = 2, \lambda = 2)$	$x \geq 1.03$	$x \geq 0.52$
0.7 $Erl(n = 2, \lambda = 1.5)$ + 0.3 $Erl(n = 2, \lambda = 2)$	$x \geq 1.19$	$x \geq 0.59$

Διάγραμμα 25: Συνάρτηση Πυκνότητα και Δεξιάς Ουράς Μείξης Κατανομών



Όπως και πριν, τα αποτελέσματα του πίνακα επιβεβαιώνονται από το Διάγραμμα 26, όπου βλέπουμε πως η κυρτότητα και στις δύο περιπτώσεις δεν είναι γνήσια, καθώς δεν είναι ξεκάθαρο ότι η μία καμπύλη ξεπερνά την άλλη για κάθε x , και κυρίως για τις μεγάλες τιμές της μεταβλητής. Παρατηρώντας και το Διάγραμμα 25, μπορούμε να δούμε πως οι συναρτήσεις δεν είναι γνήσια κυρτές.

Διάγραμμα 26: Εφαρμογή της Συνθήκης του Ορισμού 2.4.1 για τη Συνάρτηση Πυκνότητας για $p = 0.7$ (αριστερά) και $p = 0.3$ (δεξιά) για $y = 1$



Είναι ασαφές αν είναι η μείξη κυρτή ή κοίλη συνάρτηση, εξαιτίας του ότι δεν είναι γνήσια κυρτή η συνάρτηση της πυκνότητας και της δεξιάς ουράς. Το συμπέρασμα αυτό είναι παρόμοιο με εκείνο που λάβαμε για την μία κατανομή Erlang. Η επιλογή των παραμέτρων και των βαρών των κατανομών κρύβει ενδιαφέρον για

το αν διαφοροποιεί την κυρτότητα της μείξης, αλλά δεν ανήκει στο αντικείμενο της παρούσας διατριβής. Παρ' όλα αυτά, μπορούμε να προχωρήσουμε στον έλεγχο της λογαριθμικής κυρτότητας.

Στα παρακάτω διαγράμματα, χρησιμοποιούνται οι εξής δυο συναρτήσεις

- $0.7f_{Erl(2,3)}(0.2x + 0.8y) + 0.3f_{Erl(4,0.1)}(0.2x + 0.8y)$ (κόκκινη) και
- $0.7f_{Erl(2,3)}^{0.2}(x) + 0.3f_{Erl(4,0.1)}^{0.8}(x)$ (μπλε),

εκτός αν ορίζεται διαφορετικά.

Διάγραμμα 27: Εφαρμογή της Ανισότητας (2.10) στη Συνάρτηση Πιθανότητας για $y = 1$

Από το παραπάνω διάγραμμα, βλέπουμε πως δεν αλλάζει η συμπεριφορά των συναρτήσεων ως προς την λογαριθμισμένη κυρτότητα. Και πάλι έχουμε ασαφές συμπέρασμα, καθώς δεν είναι γνήσια λογαριθμικά κυρτή συνάρτηση. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η επιλογή των βαρών της μείξης (p) και των μεταβλητών (α) δεν διαμορφώνει την λογαριθμισμένη κυρτότητα, όπως και στην κυρτότητα που ελέγξαμε πριν.

Διάγραμμα 28: Εφαρμογή της Ανισότητας (2.10) στη Συνάρτηση Πυκνότητας για $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = \lambda + 5$ (αριστερά) και $\lambda_1 = \lambda + 25$, $\lambda_2 = \lambda$ (δεξιά) για $y = 1$

Στο παραπάνω διάγραμμα, παρατηρούμε πως δεν είναι καθόλου ξεκάθαρο, όσο αυξάνεται η παράμετρος κλίμακας (λ), ποια από τις δύο καμπύλες υπερβαίνει την άλλη, καθιστώντας αδύνατο να κρίνουμε αν είναι λογαριθμικά κυρτή ή κοίλη.

Διάγραμμα 29: Εφαρμογή της Ανισότητας (2.10) στη Συνάρτηση Πυκνότητας για $n_1 = n_2 = n$ (αριστερά) και $n_1 = n$, $n_2 = n + 25$ (δεξιά) για $y = 1$

Ως προς το παραπάνω διάγραμμα, φαίνεται πως η παράμετρος σχήματος (n) διαμορφώνει την λογαριθμισμένη κυρτότητα, όταν ισχύει $n_1 = n_2$. Βλέπουμε ότι για μικρές τιμές του x , οι δύο καμπύλες εναλλάσσουν τη θέση τους, έχοντας, όμως, και σημεία τομής. Από την άλλη, όταν $n_2 = n_1 + 25$, οι δύο καμπύλες δεν

εμφανίζουν κάποια διαφοροποίηση. Βλέπουμε, δηλαδή, ότι η διαφορά μεταξύ των παραμέτρων αυτών είναι τέτοια που δεν επιτρέπει αλλαγές στην λογαριθμισμένη κυρτότητα.

Ολοκληρώνοντας την μελέτη των συναρτήσεων f και \bar{F} , συμπεραίνουμε πως οι δύο συναρτήσεις δεν είναι γνήσια (λογαριθμικά) κυρτές τόσο στην κατανομή όσο και στη μείξη Erlang. Έχοντας αναφέρει αρχικά πως η κυρτότητα συνδέεται με την κλάση της κατανομής, μπορεί η κυρτότητα να αποτελεί ένδειξη για την μονοτονία της συνάρτησης της βαθμίδας αποτυχίας. Πιο συγκεκριμένα, αν η μονοτονία της είναι γνήσια ή θυμίζει roller-coaster (βλέπε κάτω από Ορισμό (2.4.9)), τότε και η κυρτότητα δεν είναι γνήσια, όπως έχουμε δει. Αυτό είναι το αντικείμενο μελέτης του επόμενου κεφαλαίου.

Κεφάλαιο 7

Επιλογή Παραμέτρων Μείξης

Στο παρόν κεφάλαιο θα εξετάσουμε παραδείγματα στα οποία η μείξη κατανομών Erlang δίνει αύξουσα βαθμίδα αποτυχίας και γνησίως κυρτή ή κοίλη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας. Γνωρίζουμε πως οι μείξεις IFR κατανομών δεν δίνουν απαραίτητα IFR ή απαραίτητα μία από τις δύο βασικές κλάσεις που χαρακτηρίζουν την βαθμίδα αποτυχίας (IFR/DFR). Ως προς τη κυρτότητα, είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο πως η μείξη δίνει κυρτότητα ανά διαστήματα, άρα, ενδεχομένως, να σηματοδοτεί κάτι ανάλογο για την μονοτονία της r , δηλαδή να μην παρουσιάζει γνήσια μονοτονία.

Για την μελέτη αυτών των περιπτώσεων, κατασκευάζουμε διαγράμματα και εξετάζουμε τις παραγώγους των συναρτήσεων ενδιαφέροντος (βαθμίδα αποτυχίας και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας). Όπως έχει περιγραφεί στα αντίστοιχα κεφάλαια, η πρώτη παράγωγος αφορά την μελέτη της μονοτονίας και εδώ εφαρμόζεται στη συνάρτηση της βαθμίδας αποτυχίας, ενώ η δεύτερη παράγωγος αφορά την κυρτότητα και εφαρμόζεται στη συνάρτηση πυκνότητας της κατανομής.

Στα πλαίσια της μελέτης της μονοτονίας και της κυρτότητας των αντίστοιχων συναρτήσεων θα επιβεβαιώσουμε θεωρήματα και προτάσεις που έχουν καταγραφεί στην βιβλιογραφία, ενώ, παράλληλα, θα παρατηρήσουμε μοτίβα συμπεριφορών των

συναρτήσεων ενδιαφέροντος, χωρίς αυτά να αποτελούν κριτήρια για την μονοτονία και την κύρτωσή τους κατ' επέκταση. Τέλος, θα συνδέσουμε με τα παραπάνω το συντελεστή μεταβλητότητας για την μείξη κατανομών.

7.1 Βαθμίδα Αποτυχίας

Όπως έχουμε αναφέρει, μια συνάρτηση κατανομής ανήκει στην IFR κλάση κατανομών, όταν η αντίστοιχη συνάρτηση βαθμίδα αποτυχίας είναι αύξουσα συνάρτηση ή, αλλιώς, αν η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης είναι θετική, δηλαδή αν ισχύει:

$$r'(x) > 0.$$

Στην περίπτωση της μείξης, θέλουμε να ισχύει για τη βαθμίδα αποτυχίας (Marshall & Olkin, 2007):

$$\frac{dr_m(x)}{dx} = \frac{d(p(x)r_1(x) + (1 - p(x))r_2(x))}{dx} > 0,$$

όπου

$$p(x) = \frac{p\bar{F}_1(x)}{p\bar{F}_1(x) + (1 - p)\bar{F}_2}. \quad (7.1)$$

Η παραπάνω παράγωγος δεν μπορεί να αναλυθεί εύκολα με αλγεβρικές μεθόδους, δηλαδή να δούμε για το ποιες τιμές της μεταβλητής x και για δεδομένες τιμές των παραμέτρων των δύο κατανομών έχουμε αύξουσα συνάρτηση. Μπορούμε, όμως, να δούμε τι ισχύει όταν οι παράμετροι των κατανομών πάρουν συγκεκριμένες τιμές.

Πρόταση 7.1.1 *Ενδεικτικά, ακολουθεί η απόδειξη που αφορά στη μείξη των $Erl(2, \lambda)$ και $Erl(3, \lambda)$ με οποιοδήποτε βάρος p , η οποία δίνει IFR κατανομή.*

Απόδειξη Η παράγωγος της βαθμίδας αποτυχίας μπορεί να γραφεί ως

$$\frac{dr(x)}{dx} = \frac{f'(x)\bar{F}(x) + f^2(x)}{\bar{F}^2(x)},$$

όπου

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-\lambda x} \lambda^2 x \left(p + (1-p)\lambda x \frac{1}{2} \right), \\ f'(x) &= e^{-\lambda x} \lambda^2 \left(p(1-\lambda x) + (1-p)\lambda x(1-\lambda x \frac{1}{2}) \right) \text{ και} \\ \bar{F}(x) &= e^{-\lambda x} \lambda^2 \left(p(1+\lambda x) + (1-p)(1+\lambda x + (\lambda x)^2 \frac{1}{2}) \right). \end{aligned}$$

Βλέπουμε ότι ο παρονομαστής του λόγου είναι θετικός, λόγω του τετραγώνου. Οπότε, εξετάζουμε τον αριθμητή, ο οποίος έχει ως εξής:

$$f'(x)\bar{F}(x) + f^2(x) = e^{-2\lambda x} \lambda^2 (AA),$$

όπου

$$\begin{aligned} AA &= \left(p(1-\lambda x) + (1-p)\lambda x(1-\lambda x \cdot 0.5) \right) \\ &\quad \left(p(1+\lambda x) + (1-p)(1+\lambda x + (\lambda x)^2 \cdot 0.5) \right) + \\ &\quad (\lambda x)^2 (p^2 + (1-p)^2 \cdot 0.25 + p(1-p)(\lambda x)) \\ &= (\lambda x)^2 (1-p^2) \cdot 0.5 + (1-p)(\lambda x) + p \geq 0, \quad \forall p, \lambda \end{aligned}$$

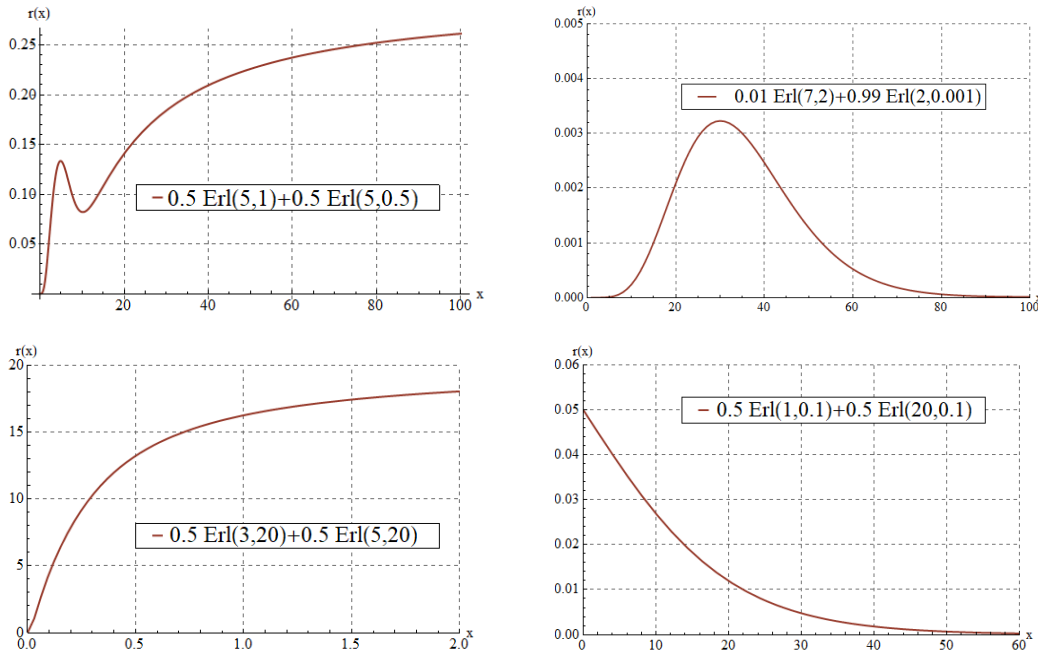
Για να λάβουμε, όμως, συμπεράσματα γενικά για την μείξη των Erlang κατανομών, προχωρούμε στην κατασκευή διαγραμμάτων, στα οποία εξετάζουμε πώς η επιλογή των παραμέτρων και των βαρών των κατανομών διαμορφώνει την μονοτονία της βαθμίδας αποτυχίας.

Στο Διάγραμμα 30, αποτυπώνονται οι μορφές της συνάρτησης της βαθμίδας αποτυχίας. Πιο συγκεκριμένα, παίρνουμε τέσσερις μορφές, τις οποίες περιγράφουμε μέσω των εξής μείξεων κατανομών

- **Τύπος (A):** $0.5Erl(5, 1) + 0.5Erl(5, 0.5)$,

- Τύπος (B): $0.01Erl(7, 2) + 0.99Erl(2, 0.001)$,
- Τύπος (Γ): $0.5Erl(3, 20) + 0.5Erl(5, 20)$ και
- Τύπος (Δ): $0.5Erl(1, 0.1) + 0.5Erl(20, 0.1)$.

Διάγραμμα 30: Μορφές Συνάρτησης Βαθμίδας Αποτυχίας



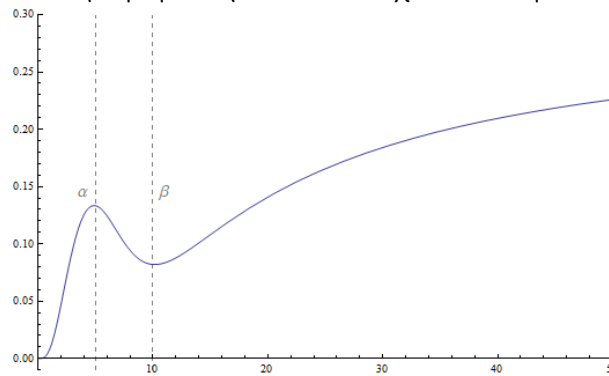
Ο τύπος (A) θυμίζει συνάρτηση με μορφή roller-coaster, όπως έχει περιγραφεί στο Κεφάλαιο 2, δηλαδή παρουσιάζει μια “μείξη” των δύο βασικών ειδών μονοτονιών. Στην προκειμένη περίπτωση, η συνάρτηση είναι αρχικά αύξουσα, έπειτα γίνεται φθίνουσα και τέλος είναι πάλι αύξουσα. Ο τύπος (B) εμφανίζει λεκανοειδή μορφή και, μάλιστα, upside-bathtub. Οι περιπτώσεις (Γ) και (Δ) είναι γνήσιως μονότονες, με την μία να είναι αύξουσα (IFR κατανομή) και η άλλη φθίνουσα (DFR κατανομή).

Έτσι, αποδεικνύεται εμπειρικά πως η μείξη IFR κατανομών, όπως είναι εκείνες που περιγράφουν την Erlang, δίνουν τόσο γνήσια μονότονες (αύξουσες, αλλά και

φθίνουσες) συναρτήσεις βαθμίδας αποτυχίας είτε και άλλων μορφών συναρτήσεις.

Θα μπορούσε κανείς να πει ότι η μορφή (A) μπορεί τμηματικά να δώσει τις άλλες μορφές. Συγκεκριμένα, με τη βοήθεια του παρακάτω διαγράμματος, βλέπουμε πως αποκόπτοντας το τμήμα της κατανομής για $x \in [0, \beta)$, η κατανομή μοιάζει στη μορφή (B), ενώ στο διάστημα $x \in [\beta, \infty)$ δίνει τη μορφή (Γ), και τέλος, στο $x \in [\alpha, \beta]$, έχουμε την μορφή (Δ). Η επιλογή των παραμέτρων n και λ δίνουν ποιο τμήμα της (A) θα προκύψει.

Διάγραμμα 31: Συνάρτηση Βαθμίδας Αποτυχίας για τη Μείξη του Τύπου (A)



Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε δύο αποτελέσματα που αφορούν στην ασυμπτωτική συμπεριφορά της βαθμίδας αποτυχίας για μια μείξη κατανομών.

Θεώρημα 7.1.1 (Finkelstein, 2009) Έστω $F_1(x)$ και $F_2(x)$ δύο απόλυτα συνεχείς συναρτήσεις κατανομής με $r_1(x)$ και $r_2(x)$ να είναι οι αντίστοιχες συναρτήσεις βαθμίδας αποτυχίας. Έστω η μείξη

$$F(x) = pF_1(x) + (1 - p)F_2(x),$$

με συνάρτηση της βαθμίδας αποτυχίας της μείξης να είναι

$$r_m(x) = p(x)r_1(x) + (1 - p(x))r_2(x),$$

όπου η $p(x)$ είναι όπως ορίστηκε στην (7.1). Αν

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \inf \left[\frac{r_2(x)}{r_1(x)} \right] > 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow \infty} \sup \left[\frac{r_2(x)}{r_1(x)} \right] < \infty,$$

τότε

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{r_m(x)}{r_1(x)} = 1.$$

Η ερμηνεία του παραπάνω θεωρήματος βασίζεται στη “συμπεριφορά” των δύο πληθυσμών που αποτελούν τη μείξη. Αν, δηλαδή, ο λόγος των συνεχών συναρτήσεων r_i με $i = 1, 2$ είναι πεπερασμένος, όταν $x \rightarrow \infty$, η μείξη συγκλίνει στον “ισχυρότερο” πληθυσμό. Αυτό προκύπτει ευκρινέστερα στην επόμενη πρόταση, η οποία υποθέτει την ύπαρξη ορίων για τις συναρτήσεις $r_1(x)$, $r_2(x)$ και $r_m(x)$.

Πρόταση 7.1.2 (Marshall & Olkin, 2007) Έστω η μείξη

$$F(x) = pF_1(x) + (1 - p)F_2(x)$$

με αντίστοιχη συνάρτηση βαθμίδας αποτυχίας

$$r_m(x) = p(x)r_1(x) + (1 - p(x))r_2(x).$$

Αν όλα τα όρια των $r_m(x)$, $r_1(x)$ και $r_2(x)$ για $x \rightarrow \infty$ υπάρχουν, τότε ισχύει πως

$$\lim_{x \rightarrow \infty} r_m(x) = \min \left[\lim_{x \rightarrow \infty} r_1(x), \lim_{x \rightarrow \infty} r_2(x) \right].$$

Θα πρέπει να υπενθυμίσουμε πως στο Κεφάλαιο 4 είδαμε ότι ασυμπτωτικά για την $Erl(n, \lambda)$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow \infty} r(x) = \lambda$.

Συνεπώς, μια παρατήρηση που αφορά στη μείξη Erlang είναι πως το όριο του λόγου της μείξης προς τις επιμέρους συναρτήσεις για κοινή παράμετρο λ ,

ανεξάρτητα από την επιλογή της n , δίνει μονάδα. Στον παρακάτω πίνακα, αναφέρονται παραδείγματα που το επιβεβαιώνουν. Προηγείται, όμως, η πρόταση που μας δίνει αποτέλεσμα για την βαθμίδα αποτυχίας της μείξης μεταξύ μιας Εκθετικής και μιας Erlang κατανομής.

Πρόταση 7.1.3 (*Gupta & Warren, 2001*) Η μείξη μιας $X_1 \sim \text{Erl}(1, \lambda)$, δηλαδή μιας Εκθετικής με παράμετρο λ και μιας $X_2 \sim \text{Erl}(2, \lambda)$, δίνει πάντα IFR κατανομή.

Πίνακας 7.1: Όρια Λόγου της Συνάρτησης Μείξης Βαθμίδας Αποτυχίας προς τις επιμέρους Βαθμίδες Αποτυχίας

Μείξη Κατανομών	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{r_m(x)}{r_1(x)}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{r_m(x)}{r_2(x)}$
0.5 $\text{Erl}(n = 2, \lambda = 20)$ + 0.5 $\text{Erl}(n = 3, \lambda = 20)$	1	1
0.75 $\text{Erl}(n = 2, \lambda = 2.5)$ + 0.25 $\text{Erl}(n = 3, \lambda = 2.5)$	1	1
0.75 $\text{Erl}(n = 1, \lambda = 1.5)$ + 0.25 $\text{Erl}(n = 7, \lambda = 1.5)$	1	1
0.5 $\text{Erl}(n = 2, \lambda = 20)$ + 0.5 $\text{Erl}(n = 2, \lambda = 2)$	0.1	1
0.50 $\text{Erl}(n = 5, \lambda = 15)$ + 0.50 $\text{Erl}(n = 5, \lambda = 20)$	1	0.75
0.5 $\text{Erl}(n = 3, \lambda = 1)$ + 0.5 $\text{Erl}(n = 3, \lambda = 0.2)$	0.2	1
0.5 $\text{Erl}(n = 5, \lambda = 1)$ + 0.5 $\text{Erl}(n = 5, \lambda = 0.3)$	1	0.3

Παρότι δεν άπτεται του αντικειμένου της προκειμένης διατριβής η μείξη μεταξύ Εκθετικής και Erlang, θα πρέπει να σημειώσουμε πως η συμπεριφορά της μείξης

που ορίζεται στην παραπάνω πρόταση δεν παρουσιάζει κοινά με άλλες μείξεις. Το παράδειγμα της μείξης του τύπου (A) δείχνει πως η μείξη αυτών των δύο κατανομών μπορεί να δώσει μη μονότονη βαθμίδα αποτυχίας.

Επιπλέον, μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι για τις μείξεις που σχηματίζονται από μια Εκθετική με παράμετρο λ_1 ($n_1 = 1$) και μια Erlang με παραμέτρους n_2 και λ_2 τηρούνται οι επισημάνσεις των Block et al. (2012), δηλαδή:

- Όταν $\lambda_1 = \lambda_2$ και $n_2 \leq 2$, τότε έχουμε IFR κατανομή.
- Όταν $\lambda_1 = \lambda_2$ και $n_2 > 2$, τότε η μείξη δίνει συνάρτηση βαθμίδας αποτυχίας λεκανοειδούς μορφής και, μάλιστα, (bathtub).

Συμπληρωματικά, μπορούμε να σημειώσουμε πως στην περίπτωση όπου $\lambda_2 < \lambda_1$ και $n_1 = 1$ και $n_2 \geq 2$ η μορφή της συνάρτησης παίρνει τη μορφή (Δ).

Διάγραμμα 32: Βαθμίδα Αποτυχίας για $0.5Erl(3, 0.1) + 0.5Erl(3 + d, 0.1)$ και $0.5Erl(3, 0.1) + 0.5Erl(3 + d, 1)$

Στην περίπτωση που κρατάμε κοινή την παράμετρο λ , και σχηματίζουμε $|n_1 - n_2| \gg 0$ (βλέπε Διάγραμμα 32), παρατηρούμε πως έχουμε την (A) μορφή, αρχικά, και στη συνέχεια μοιάζει με τον τύπο (B) της βαθμίδας αποτυχίας. Στην περίπτωση, όμως, που έχουμε $\lambda_1 \neq \lambda_2$, παρατηρούμε ότι η μορφή (A) διατηρείται και, μάλιστα, η απόσταση των δύο μαζών/κορυφών της συνάρτησης

να απομακρύνονται όσο αυξάνεται η διαφορά των παραμέτρων n_1 και n_2 , όμως, και πάλι καταλήγει να είναι της μορφής (B).

Διάγραμμα 33: Βαθμίδα Αποτυχίας για $0.7Erl(n, 3) + 0.3Erl(n, 50)$ (αριστερά) και για $0.5Erl(2, 5) + 0.5Erl(n, \lambda)$ (δεξιά)

Διακρίνουμε από το παραπάνω διάγραμμα (στο αριστερό τμήμα του) πως όταν $\lambda_2 \gg \lambda_1$, η συνάρτηση παραμένει αύξουσα, αλλά μεγαλώνοντας το n , απλώνεται η συνάρτηση και μοιάζει να έχει λεκανοειδή μορφή (bathtub).

Στο δεξί μέρος του παραπάνω διαγράμματος διακρίνουμε παράλληλα δύο περιπτώσεις. Μία με κοινή παράμετρο σχήματος ($\lambda = 5$) και εκείνη με $\lambda_1 = 5$ και $\lambda_2 = 10$ με μπλε και κόκκινο, αντίστοιχα. Στη μείξη των $Erl(2, \lambda)$ και $Erl(n, \lambda)$ (κόκκινη καμπύλη) βλέπουμε πως για $n \leq 9$ η κατανομή που προκύπτει είναι IFR, ενώ για $n \geq 10$ η μορφή της βαθμίδας αποτυχίας θυμίζει λεκανοειδή μορφή. Στην περίπτωση που η δεύτερη παράμετρος της κατανομής δεν είναι κοινή (μπλε καμπύλη), παρατηρούμε ότι είτε εξ' αρχής σχηματίζει την (A) μορφή, είτε είναι διαφορετική η τιμή του n που αλλάζει τη μορφή της κατανομής από IFR σε μια μορφή της (A) περισσότερο.

7.2 Κυρτότητα Συνάρτησης Πυκνότητας

Όπως έχουμε δει στο προηγούμενο κεφάλαιο, η μείξη κατανομών Erlang δίνει κυρτές ανά διαστήματα συναρτήσεις πυκνότητας και δεξιάς ουράς. Εξαιτίας της Πρότασης 6.1.2, θα μελετήσουμε μόνο τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, καθώς τα συμπεράσματα γενικεύονται και για τη συνάρτηση δεξιάς ουράς. Για την μελέτη της κυρτότητας, χρησιμοποιούμε τις μείξεις για τις οποίες μελετήσαμε την μορφή της βαθμίδας αποτυχίας.

Αρχικά, εξετάζουμε την δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης με τη χρήση αριθμητικών μεθόδων, βλέποντας πως σε συγκεκριμένα διαστήματα η συνάρτηση είναι κυρτή. Αυτή η παρατήρηση ευσταθεί, καθώς όταν η συνάρτηση δεξιάς ουράς είναι κοίλη, η συνάρτηση κατανομής είναι κυρτή, το οποίο, όμως, δεν μπορεί να συμβεί σε όλο το θετικό ημιάξονα. Πράγματι, αν η F είναι κυρτή, τότε ισχύει πως $F'(x) = f(x)$ είναι αύξουσα συνάρτηση και η $f'(x) > 0$. Η f , όμως, θα πρέπει να συγκλίνει στο μηδέν όταν $x \rightarrow \infty$, άρα έχουμε άτοπο.

Πίνακας 7.2: Διαστήματα Μεταβλητής x με Κυρτή Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας

Μείξη Κατανομών	x
0.5 $Erl(n = 5, \lambda = 1)$ + 0.5 $Erl(n = 5, \lambda = 0.5)$	$x \leq 2.01886, 5.96464 \leq x \leq 12.7514$ $x \geq 19.9245$
0.5 $Erl(n = 3, \lambda = 0.1)$ + 0.5 $Erl(n = 30, \lambda = 0.1)$	$x \leq 5.85786, 34.1421 \leq x \leq 236.149$ $x \geq 343.852$
0.5 $Erl(n = 3, \lambda = 20)$ + 0.5 $Erl(n = 5, \lambda = 20)$	$x \leq 0.0343102, x \geq 0.244798$
0.5 $Erl(n = 1, \lambda = 0.1)$ + 0.5 $Erl(n = 20, \lambda = 0.1)$	$x \leq 146.413, x \geq 233.589$

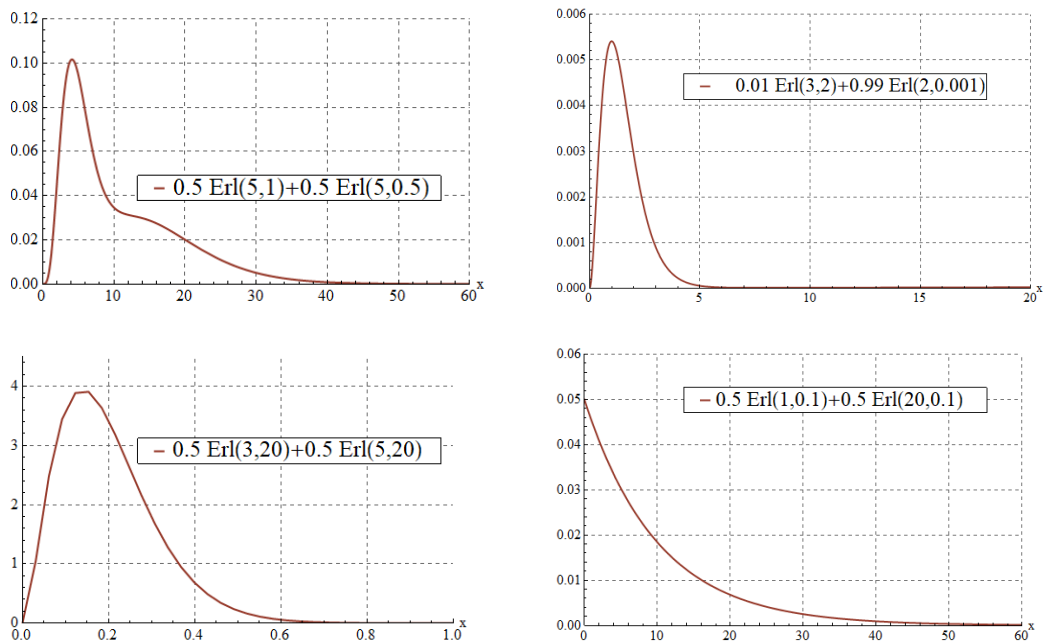
Βλέπουμε πως ακόμη και κατανομές με γνήσια μονότονες βαθμίδες αποτυχίας, δεν έχουν πιθανά γνήσια κυρτότητα, καθώς η δεύτερη παράγωγος εμφανίζει, όπως

αναμενόνταν, διαστήματα στα οποία η συνάρτηση αλλάζει κυρτότητα. Παρακάτω ακολουθούν τα διαγράμματα αυτών των συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας.

Παρατηρούμε, λοιπόν, πως η κυρτότητα των μείξεων που χρησιμοποιήθηκαν στην προηγούμενη ενότητα, παρότι εμφανίζουν διαφορετικού τύπου μονοτονίας για τη βαθμίδα αποτυχίας, παρουσιάζουν πολλά κοινά στοιχεία μεταξύ τους. Πιο συγκεκριμένα, ο τύπος (A) της προηγούμενης ενότητας δίνει μη γνήσια κυρτή συνάρτηση πυκνότητας. Οι τύποι (B) και (Γ) είναι, αρχικά, κοίλες και στη συνέχεια κυρτές συναρτήσεις. Τέλος, η DFR μείξη αντιστοιχεί σε κυρτή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

Θα πρέπει να σημειωθεί εδώ πως το διάγραμμα που αντιστοιχεί στον τύπο (A) της βαθμίδας αποτυχίας δίνει την εντύπωση πως με διαφορετικές επιλογές παραμέτρων και βαρών, θα μπορούσε να προκύψει δικόρυφη συνάρτηση.

Διάγραμμα 34: Συναρτήσεις Πυκνότητας των αντίστοιχων Μορφών των Συναρτήσεων Βαθμίδας Αποτυχίας



Τέλος, δεν διακρίνεται κάποιο μοτίβο συμπεριφοράς των κατανομών που δίνουν την ίδια μορφή της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας, όπως, επίσης, δεν διακρίνονται στοιχεία που να συνδέουν την μονοτονία της συνάρτησης βαθμίδας αποτυχίας με την κυρτότητα της αντίστοιχης κατανομής.

7.3 Συντελεστής Μεταβλητότητας

Έως τώρα είδαμε πως η μείξη συναρτήσεων που είναι αύξουσες ή κυρτές δεν δίνει IFR ή κυρτή κατανομή. Παρατηρήσαμε ότι δεν έχουμε πάντα γνήσια μονοτονία ή κυρτότητα.

Για να μελετήσουμε τα δύο αυτά χαρακτηριστικά, υπολογίσαμε και το συντελεστή μεταβλητότητας, ο οποίος, όπως έχει αναφερθεί, είναι ένα μέτρο σχετικής μεταβλητότητας, όταν αυτή είναι απαλλαγμένη τόσο από την επιρροή της μέσης τιμής, όσο και από τις μονάδες μέτρησης. Χρησιμοποιείται για τη σύγκριση πληθυσμών και, μάλιστα, η ομογένεια ενός πληθυσμού αποτελεί την ερμηνεία της τιμής του συντελεστή. Όσο μικρότερη η τιμή του συντελεστή μεταβλητότητας, τόσο πιο ομογενής είναι ο πληθυσμός.

Από Willmot & Lin (2001) μπορούμε να συνδέσουμε το συντελεστή μεταβλητότητας με την κλάση της βαθμίδας αποτυχίας, δηλαδή

- Αν η F είναι DFR, τότε ισχύει $CV \geq 1$.
 - Αν η F είναι IFR, τότε ισχύει $CV \leq 1$.
- (Σ1)

Στην απλή Erlang κατανομή, ισχύει πάντα ότι ο συντελεστής μεταβλητότητας είναι μικρότερος της μονάδας, $CV^2 \leq 1$, αφού

$$\sqrt{Var(X)} = \sqrt{\frac{n}{\lambda^2}} = \frac{\sqrt{n}}{\lambda} < E(X) = \frac{n}{\lambda}.$$

Αυτό σημαίνει ότι η κατανομή είναι IFR, που πράγματι ισχύει.

Μπορούμε, λοιπόν, πια να δούμε τι ισχύει για το συντελεστή μεταβλητότητας κάτω από την μείξη. Αν υπάρχουν, δηλαδή, περιπτώσεις στις οποίες μπορούμε να ισχυριστούμε πως ο συντελεστής παίρνει πάντα τιμές μεγαλύτερες ή μικρότερες της μονάδας.

Πρώτα από όλα, για τη μείξη κατανομών με $X_1 \sim Erl(n_1, \lambda_1)$, $X_2 \sim Erl(n_2, \lambda_2)$ και βάρη p , $1-p$, αντίστοιχα, ισχύουν οι εξής τύποι για τον μέσο και τη διακύμανση (με χρήση του Mathematica):

$$\begin{aligned} \bullet E(X) &= \int_0^{\infty} x(pf_1(x) + (1-p)f_2(x))dx = p\frac{n_1}{\lambda_1} + (1-p)\frac{n_2}{\lambda_2} \text{ και} \\ \bullet Var(X) &= \int_0^{\infty} (x - \mu)^2(pf_1(x) + (1-p)f_2(x))dx = \\ &= \frac{-2\lambda_1\lambda_2n_1n_2(1-p) + \lambda_2^2n_1p(1+n_1(1-p)) + \lambda_1^2n_2(1-p)(1+n_2p)}{(\lambda_1\lambda_2)^2}. \end{aligned}$$

Τα παρακάτω διαγράμματα αφορούν στη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της μείξης $pErl(n_1, \lambda_1) + (1-p)Erl(n_2, \lambda_2)$ (κόκκινη καμπύλη) και των συναρτήσεων $f_{Erl(n_1, \lambda_1)}(x)$ (μπλε καμπύλη) και $f_{Erl(n_2, \lambda_2)}(x)$ (γκρι καμπύλη). Στο διάγραμμα αριστερά έχουμε επιλέξει τις παραμέτρους $n_1 = 5$, $\lambda_1 = 1$, $n_2 = 5$, και $\lambda_2 = 0.5$, ενώ οι παράμετροι για το διπλανό διάγραμμα είναι $n_1 = 5$, $\lambda_1 = 1$, $n_2 = 10$, και $\lambda_2 = 1$. Και στα δύο διαγράμματα μεταβάλλονται οι τιμές των βαρών των δύο κατανομών.

Παρατηρείται ότι όταν στις δύο κατανομές, που σχηματίζουν την μείξη, βρίσκονται μακριά οι κορυφές τους ($|n_1 - n_2| \gg 0$), διαγραμματικά, η κατανομή με το μεγαλύτερο βάρος “επιβάλλεται” της άλλης. Βλέπουμε δηλαδή πως η κατανομή

της μείξης τείνει προς την κατανομή με το μεγαλύτερο βάρος. Αυτό σημαίνει ότι οι τιμές της μέσης τιμής και της διακύμανσης τείνουν προς τις τιμές της κατανομής με το μεγαλύτερο βάρος και, πρακτικά, πως $CV_{p>0.5} > CV_{p=0.5}$ και $CV_{p>0.5} > 1 \rightarrow CV_{p>0.5}^2 > 1$.

Διάγραμμα 35: Συνάρτηση Πυκνότητας Μείξης και Επιμέρους Κατανομών

Εκτός από το συντελεστή μεταβλητότητας, μπορούμε να εξετάσουμε την κυρτότητα (και εν γένει την μορφή) της συνάρτησης με βάση τα παρακάτω στατιστικά της κατανομής, τα οποία υπολογίζονται στον πίνακα που ακολουθεί:

- Συντελεστής Κύρτωσης: $\frac{E[(X - \mu)^4]}{\sigma^4} \left(= \frac{6}{n} \right)$
- Συντελεστής Ασυμμετρίας: $E \left[\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \right)^3 \right] \left(= \frac{2}{\sqrt{n}} \right)$ και
- Συντελεστής Μεταβλητότητας: $\frac{\sigma}{E(X)} \left(= \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$.

Εντός της παρένθεσης δίνονται οι τύποι των συντελεστών όταν $X \sim Erl(n, \lambda)$. Στον Πίνακα 7.3, όμως, αναφέρονται τα παραδείγματα μείξεων κατανομών που δόθηκαν στις μορφές που μπορεί να λάβει η συνάρτηση της βαθμίδας αποτυχίας. Κρατάμε τις παραμέτρους σχήματος των μείξεων ως έχουν και μεταβάλλουμε την κοινή παράμετρο σχήματος και τα βάρη των κατανομών. Παρατηρούμε πως όταν

αλλάζει η παράμετρος λ για τα ίδια βάρη κατανομών, οι συντελεστές παραμένουν αμετάβλητοι, δεδομένων των n_1 και n_2 .

Εκτός από την περίπτωση που έχουμε παρόμοιες τιμές των συντελεστών (ανεξάρτητα από την τιμή της παραμέτρου λ) που εξετάζονται στον Πίνακα 7.3, η επιλογή των βαρών των κατανομών φαίνεται πως δεν επηρεάζει τη συμπεριφορά της μείξης, είτε αφορά τη μονοτονία της συνάρτησης της βαθμίδας αποτυχίας, είτε χαρακτηριστικά, όπως είναι το όριο του λόγου της μείξης προς τις επιμέρους συναρτήσεις της βαθμίδας αποτυχίας, επιβεβαιώνοντας τα συμπεράσματα του παραπάνω διαγράμματος.

Πίνακας 7.3: Διάλυση Συντελεστών (Κύρτωσης, Ασυμμετρίας, Μεταβλητότητας)^T

$(n_1, n_2), \forall \lambda$	$p = 0.15$	$p = 0.5$	$p = 0.75$
$(3, 5)$ $\lambda \in \{0.1, 1, 10\}$	$\begin{pmatrix} 4.1054 \\ 4.3200 \\ 4.8777 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.8590 \\ 0.9838 \\ 1.1413 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.4856 \\ 0.5590 \\ 0.5890 \end{pmatrix}$
$(3, 30)$ $\lambda \in \{3, 8, 20\}$	$\begin{pmatrix} 3.4641 \\ 1.3715 \\ 3.0083 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.0998 \\ 0.2069 \\ 1.2837 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.4201 \\ 0.8544 \\ 1.2411 \end{pmatrix}$
$(1, 20)$ $\lambda \in \{2, 5, 10\}$	$\begin{pmatrix} 3.2106 \\ 1.4991 \\ 3.2935 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.8757 \\ 0.2884 \\ 1.3627 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.4634 \\ 0.9559 \\ 1.4903 \end{pmatrix}$

Κοιτάζοντας τον παρακάτω πίνακα, θα πρέπει να σημειώσουμε ότι, όταν οι επιμέρους κατανομές είναι πολύ κοντά η μία στην άλλη ($|n_1 - n_2| \approx 0$), τα CV και CV^2 της μείξης βρίσκονται πολύ κοντά με τους αντίστοιχους συντελεστές για κάθε επιλογή βάρους. Η διαφορά, ίσως, να γίνεται αντιληπτή μετά το πέμπτο δεκαδικό ψηφίο.

Από τη Συνθήκη (Σ1) έχουμε πως για γνωστή κλάση της κατανομής (IFR/DFR), αναμένουμε την τιμή του CV να είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από τη μονάδα. Το αντίστροφο αποδεικνύεται πως δεν ισχύει, καθώς ο παρακάτω πίνακας δίνει τιμές του CV μεγαλύτερες και μικρότερες της μονάδας για μείξεις που δεν παρουσιάζουν γνήσια μονότονη βαθμίδα αποτυχίας.

Πίνακας 7.4: Στατιστικά Μείξεων Κατανομών

Μείξη Κατανομών	μ	σ	σ^2	CV	CV^2
0.5 $Erl(n = 2, \lambda = 5)$ + 0.5 $Erl(n = 8, \lambda = 10)$	0.60	0.3464	0.1200	0.5773	0.3500
0.7 $Erl(n = 12, \lambda = 3)$ + 0.3 $Erl(n = 20, \lambda = 20)$	3.10	1.6847	2.8383	0.5434	0.2953
0.2 $Erl(n = 12, \lambda = 3)$ + 0.8 $Erl(n = 12, \lambda = 30)$	1.12	1.5332	2.3509	1.3690	1.8741
0.7 $Erl(n = 12, \lambda = 3)$ + 0.3 $Erl(n = 12, \lambda = 30)$	2.92	1.9128	3.6589	0.6550	0.4291
0.5 $Erl(n = 4, \lambda = 5)$ + 0.5 $Erl(n = 20, \lambda = 10)$	1.40	0.7348	0.5400	0.5248	0.2755
0.5 $Erl(n = 10, \lambda = 5)$ + 0.5 $Erl(n = 20, \lambda = 10)$	2.00	0.5477	0.3000	0.2738	0.0750
0.8 $Erl(n = 30, \lambda = 26)$ + 0.2 $Erl(n = 30, \lambda = 25)$	1.16	0.2131	0.0454	0.1832	0.0335
0.8 $Erl(n = 30, \lambda = 2)$ + 0.2 $Erl(n = 30, \lambda = 25)$	12.24	6.0398	36.4800	0.4934	0.2434
0.5 $Erl(n = 2, \lambda = 2)$ + 0.5 $Erl(n = 30, \lambda = 25)$	1.10	0.5329	0.2840	0.2347	0.2347
0.45 $Erl(n = 2, \lambda = 2)$ + 0.55 $Erl(n = 30, \lambda = 25)$	1.11	0.5111	0.2613	0.4605	0.2120
0.7 $Erl(n = 2, \lambda = 2)$ + 0.3 $Erl(n = 30, \lambda = 25)$	1.06	0.6105	0.3728	0.5760	0.3317

7.4 Μέσος Υπολειπόμενος Χρόνος Ζωής

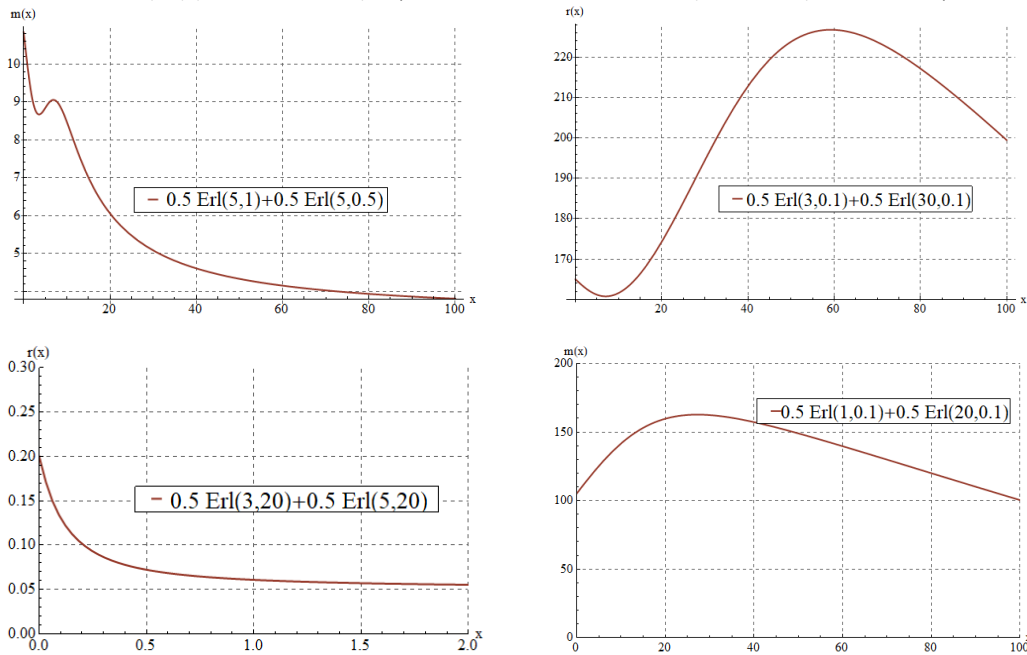
Έχοντας μελετήσει τη συνάρτηση βαθμίδας αποτυχίας για την μείξη των κατανομών Erlang, μπορούμε να προχωρήσουμε στην μελέτη του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής. Αρχικά, εξετάζουμε τη σχέση του με την βαθμίδα αποτυχίας και, στη συνέχεια, εξετάζουμε σημαντικά στοιχεία που χαρακτηρίζουν τον μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής.

Γνωρίζουμε από προηγούμενο κεφάλαιο ότι όταν μία κατανομή είναι IFR, είναι και DMRL, ενώ, αντίστοιχα, αν είναι DFR, θα είναι IMRL. Το αντίστροφο δεν ισχύει, καθώς οι κλάσεις που αφορούν τον μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής είναι μεγαλύτερες από εκείνες που αφορούν την βαθμίδα αποτυχίας. Συνεπώς, ενδιαφέρον έχει να ελέγξουμε αν πράγματι πληρείται αυτή η διαπίστωση και στις μείξης κατανομών, αλλά και να παρατηρήσουμε τι ισχύει για τον μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής, όταν δεν έχουμε γνήσια μονότονες συναρτήσεις που περιγράφουν την βαθμίδα αποτυχίας.

Για την μελέτη των παραπάνω κατασκευάζουμε διαγράμματα, χρησιμοποιώντας τα ίδια παραδείγματα μείξεων που περιγράφηκαν και στις προηγούμενες ενότητες του κεφαλαίου.

Παίρνοντας, λοιπόν, περιπτώσεις κατανομών, και λαμβάνοντας υπόψιν τις μορφές που απεικονίζονται και στο Διάγραμμα 30, παρατηρούμε πως η μονοτονία της συνάρτησης του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής είναι αντίστροφη εκείνης της συνάρτησης της βαθμίδας αποτυχίας. Παρατηρούμε, όμως, πως η μείξη $0.5Erl(1, 0.1) + 0.5Erl(20, 0.1)$ δεν εμφανίζει γνήσια φθίνουσα συνάρτηση, καθώς για μικρά x , η συνάρτηση είναι αύξουσα και στη συνέχεια γίνεται φθίνουσα.

Διάγραμμα 36: Συναρτήσεις Μέσου Υπολειπόμενου Χρόνου Ζωής



Συνέχεια της Πρότασης 7.1.3 είναι η παρακάτω που συνδέει με ένα αλγεβρικό παράδειγμα (με τη χρήση του Mathematica) την μονοτονία της βαθμίδας αποτυχίας και του αντίστοιχου μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής για τη μείξη μιας Εκθετικής και μιας Erlang κατανομής.

Πρόταση 7.4.1 Η μείξη μιας $X_1 \sim Erl(1, \lambda)$, δηλαδή μιας $Exp(\lambda)$, και μιας $X_2 \sim Erl(2, \lambda)$ δίνει πάντα DMRL κατανομή.

Απόδειξη

Έχουμε ότι

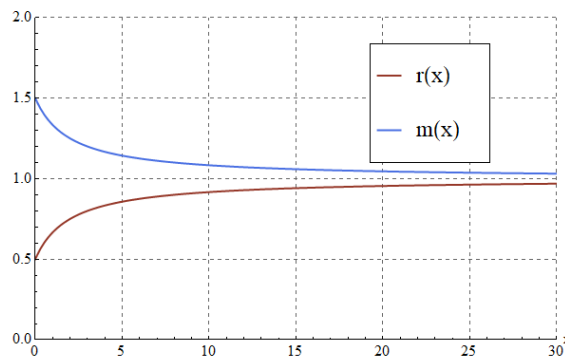
$$\frac{dr(x)}{dx} = \left(\frac{0.5e^{-x} + 0.5e^{-x}x}{0.5e^{-x} + 0.5(e^{-x} + e^{-x}x)} \right)^2 - \frac{0.5e^{-x}x}{0.5e^{-x} + 0.5(e^{-x} + e^{-x}x)},$$

ενώ για το μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής ισχύει πως

$$\frac{dm(x)}{dx} = \frac{e^{-x}(1.5 + 0.5x)(0.5e^{-x} + 0.5e^{-x}x)}{(0.5e^{-x} + 0.5(e^{-x} + e^{-x}x))^2} - \frac{e^{-x}(1 + 0.5x)}{0.5e^{-x} + 0.5(e^{-x} + e^{-x}x)}.$$

Συνεπώς, για κάθε $x > 0$, ισχύουν οι εξής συνθήκες $\frac{dr(x)}{dx} \geq 0$ και $\frac{dm(x)}{dx} < 0$, ή, διαφορετικά, η κατανομή είναι IFR και DMRL, όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα. λ •

Διάγραμμα 37: Μέσος Υπολειπόμενος Χρόνος Ζωής και Βαθμίδα Αποτυχίας για $0.5Erl(1, 1) + 0.5Erl(2, 1)$



Εδώ, θα πρέπει να γίνουν δύο επισημάνσεις. Η μία αφορά στο ότι η μονοτονία της μίας συνάρτησης εξαρτάται, ως ένα βαθμό, από την άλλη, αλλά όπως έχουμε αναφέρει η κλάση I(D)MRL είναι μεγαλύτερη της D(I)FR.

Ενδιαφέρον έχει να εξετάσουμε την ισχύ του παρακάτω Θεωρήματος που συνδέει τον μέσο υπολειπόμενο χρόνο, την τιμή της βαθμίδας αποτυχίας στο σημείο μηδέν ($r(0)$) και την μέση τιμή για τις περιπτώσεις των συναρτήσεων που έχουν λεκανοειδή μορφή.

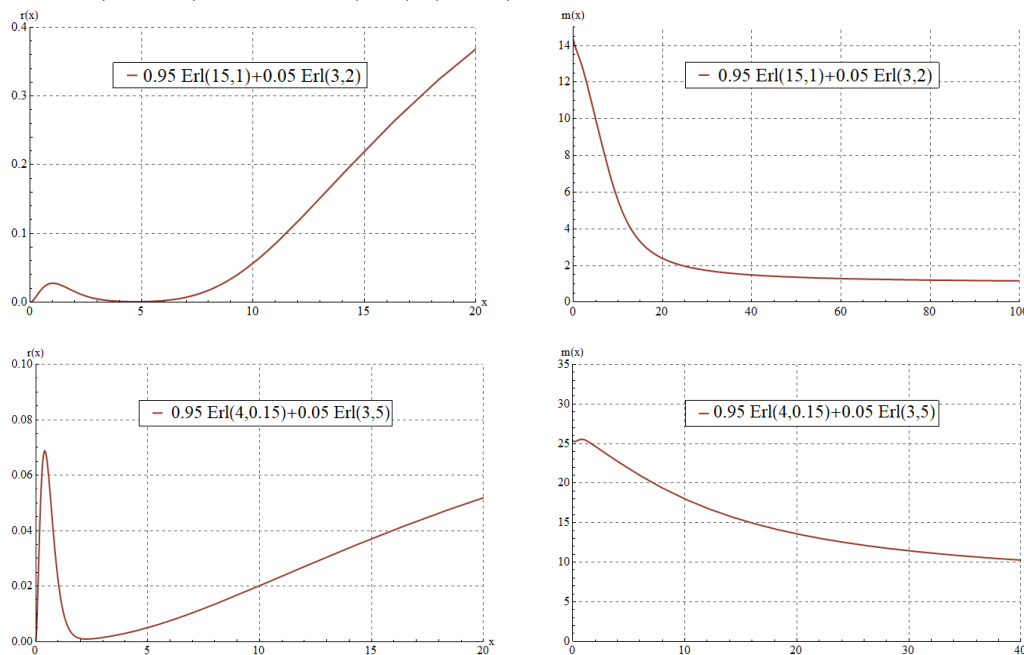
Θεώρημα 7.4.1 (Gupta & Akman, 1995) Έστω $r(t)$ η βαθμίδα αποτυχίας και $m(t)$ ο αντίστοιχος μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής. Αν η $r(t)$ παρουσιάζει λεκανοειδή μορφή, τότε

- η $m(t)$ είναι φθίνουσα (η συνάρτηση, δηλαδή, κατανομής είναι DMRL), αν $r(0) \leq \frac{1}{\mu}$,
- η $m(t)$ έχει ανάποδη λεκανοειδή μορφή, αν $r(0) > \frac{1}{\mu}$.

Αντίστοιχα, αν η $r(t)$ εμφανίζει ανάποδη λεκανοειδή μορφή, τότε

- η $m(t)$ είναι αύξουσα (η συνάρτηση κατανομής είναι IMRL), αν $r(0) \geq \frac{1}{\mu}$,
- η $m(t)$ έχει λεκανοειδή μορφή, αν $r(0) < \frac{1}{\mu}$.

Διάγραμμα 38: Βαθμίδα Αποτυχίας (αριστερά) και Μέσος Υπολειπόμενος Χρόνος Ζωής (δεξιά) για τις Μείξεις $0.95Erl(15, 0.1) + 0.05Erl(3, 12)$ (πάνω) και $0.95Erl(4, 0.15) + 0.05Erl(3, 5)$ (κάτω)



Πριν προχωρήσουμε στην δεύτερη επισήμανση, μπορούμε να διακρίνουμε δύο ενδιαφέρουσες περιπτώσεις: μείξεις Erlang και μείξεις Εκθετικής με Erlang. Αυτός ο διαχωρισμός είναι σημαντικός, καθώς στην πρώτη περίπτωση, παίρνουμε $\lim_{x \rightarrow 0} r(x) = 0$, ενώ στην δεύτερη περίπτωση παίρνουμε $r(0) = \lambda_1 p$. Σε κάθε

περίπτωση, έχουμε

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{p \frac{n_1}{\lambda_1} + (1-p) \frac{n_2}{\lambda_2}}.$$

Ελέγχοντας την ισχύ του παραπάνω θεωρήματος σε μείξεις Erlang κατανομών βλέπουμε ότι στην περίπτωση της λεγόμενης upside-bathtub μορφής τηρείται.

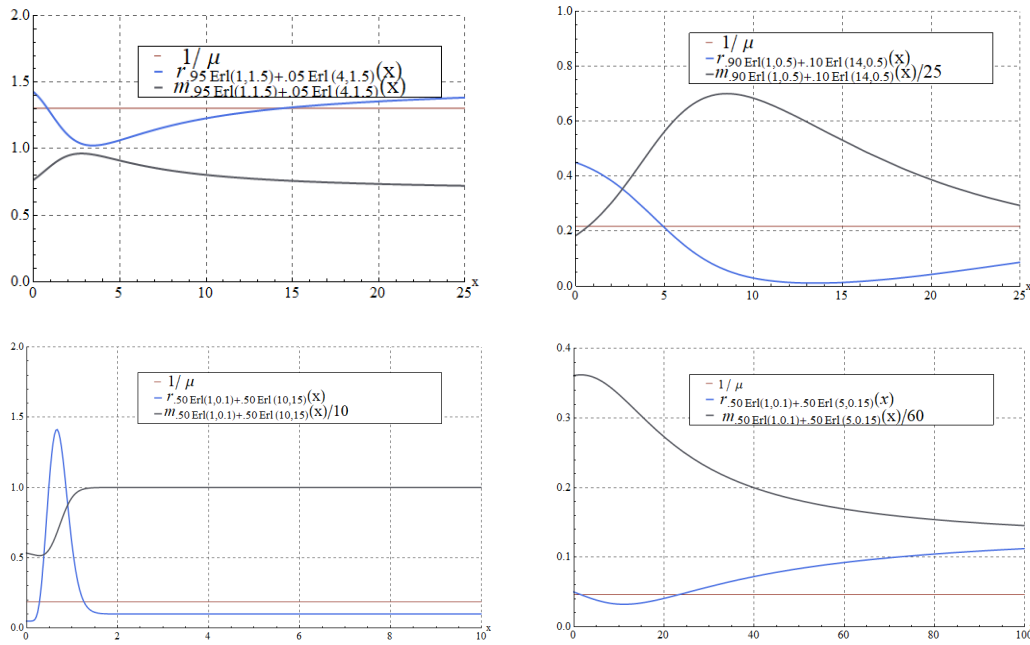
Στην περίπτωση της μείξης Εκθετικής και Erlang, παρατηρούμε ότι οι περιπτώσεις εξαιρέσεων είναι περισσότερες από εκείνες που επιβεβαιώνουν τον κανόνα.

Πιο συγκεκριμένα, στην περίπτωση μιας bathtub συνάρτησης βαθμίδας αποτυχίας με $r(0) \geq \frac{1}{\mu}$, παίρνουμε φθίνουσα και bathtub συνάρτηση μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής, εκτός από την αναμενόμενη αύξουσα συνάρτηση. Όταν έχουμε $r(0) < \frac{1}{\mu}$, αναμένουμε bathtub συνάρτηση μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής, αλλά βλέπουμε και DMRL.

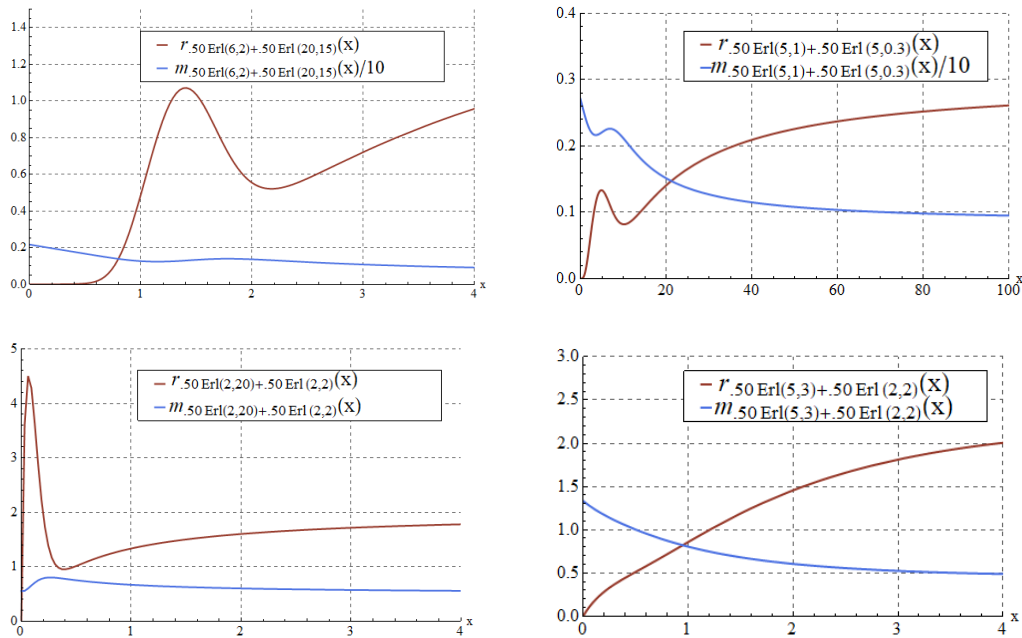
Από την άλλη, ελέγχοντας τις upsidedown-bathtub συναρτήσεις βαθμίδας αποτυχίας, δεν παρατηρείται το αναμενόμενο (upsidedown-bathtub για $r(0) > \frac{1}{\mu}$ και bathtub για $r(0) \leq \frac{1}{\mu}$).

Η δεύτερη επισήμανση είναι πως όταν ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής εμφανίζει αντίστροφη μονοτονία από εκείνη της βαθμίδας αποτυχίας, τα σημεία καμπής της μίας συνάρτησης δεν ταυτίζονται με εκείνα της άλλης συνάρτησης (βλέπε Διάγραμμα 40, κάτω αριστερά). Από Parsa et al. (2014), προκύπτει πως όταν η βαθμίδα αποτυχίας είναι διαφορίσιμη με λεκανοειδή μορφή και μοναδικό σημείο καμπής $0 < \tau_0 < \infty$, αν $r(0)m(0) > 1$, τότε ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής εμφανίζει ανάποδα λεκανοειδή μορφή με μοναδικό σημείο καμπής το t_0 και ισχύει $0 < t_0 \leq \tau_0$.

Διάγραμμα 39: Βαθμίδα Αποτυχίας και Μέσος Υπολειπόμενος Χρόνος Ζωής Μείξεων, Μέρος I



Διάγραμμα 40: Βαθμίδα Αποτυχίας και Μέσος Υπολειπόμενος Χρόνος Ζωής Μείξεων, Μέρος II



Στην περίπτωση που έχουμε παραπάνω από ένα σημείο καμπής, οι Bekker & Mi (2003), δίνουν το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 7.4.2 (Bekker & Mi, 2003) Έστω $r(t)$ είναι μία διαφορίσιμη συνάρτηση βαθμίδας αποτυχίας, που δεν παρουσιάζει γνήσια μονοτονία (roller-coaster shape) με σημεία καμπής $\{t_1, \dots, t_k\}$. Έστω $m(t)$ ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής. Η απαραίτητη και ικανή συνθήκη για να έχει το $m(t)$ ένα σημείο καμπής στο (t_{j-1}, t_j) , $1 \leq j \leq k$, είναι

$$\left[m(t_{j-1})r(t_{j-1}) - 1 \right] \left[m(t_j)r(t_j) - 1 \right] < 0. \quad (7.2)$$

Επισημαίνεται πως το πλήθος των σημείων καμπής του μέσου υπολειπόμενου χρόνος δεν μπορεί να υπερβαίνει εκείνο της βαθμίδας αποτυχίας.

Οι Parsa et al. (2014) εξέτασαν τον βέλτιστο χρόνο για να μειωθεί το συνολικό μέσο κόστος ή αλλιώς τον βέλτιστο burn-in χρόνο στο διάστημα $[a, b]$ (δηλαδή ο χρόνος στον οποίο ένα εξάρτημα ενός συστήματος χρησιμοποιείται και φθείρεται πριν εισαχθεί στο σύστημα, ώστε να ελεγχθούν σφάλματα) με τη χρήση του λόγου

$$D = \frac{\tau - t}{\tau}, \quad (7.3)$$

όπου:

τ : το σημείο καμπής της συνάρτησης βαθμίδας αποτυχίας και

t : το σημείο καμπής της συνάρτησης του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής, με $a < t < \tau < b$.

Στον Πίνακα 7.5, αποτυπώνονται τα σημεία καμπής των δύο συναρτήσεων ενδιαφέροντος και η τιμή που λαμβάνει το D . Θα πρέπει να σημειωθεί πως ο λόγος υπολογίζεται εδώ σε διαστήματα.

Ως προς τον Πίνακα 7.5, διακρίνει κανείς πως υπάρχουν αρκετές περιπτώσεις κατανομών που το μέγιστο σημείο καμπής του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής είναι μεγαλύτερο από το αντίστοιχο μέγιστο της βαθμίδας αποτυχίας. Ακόμη, παρατηρούμε πως όταν έχουμε μείξη με n_1 , n_2 και κοινό λ , το D λαμβάνει την ίδια τιμή, ανεξάρτητα της τιμής της παραμέτρου λ .

Στους δύο πίνακες που παρατέθηκαν παραπάνω, έχουμε λάβει διάφορες αλλαγές των παραμέτρων της “βασικής” μείξης με $Erl(5, 2)$ και $Erl(200, 2)$ με βάρος $p = 0.5$. Αρχικά, παρατηρούμε πως όταν αυξάνουμε το βάρος (από 0.5 σε 0.75), τότε τα σημεία καμπής των κατανομών αυξάνονται, αλλά φαίνεται να αυξάνεται και το D .

Επιπλέον, όταν μεταβάλλουμε την κοινή παράμετρο λ , τα σημεία καμπής λαμβάνουν μεγαλύτερες τιμές σε μία μείωση της παραμέτρου και μικρότερες τιμές σε μία αύξηση της λ . Ενδιαφέρον παρουσιάζει το ότι, όσο και αν μεταβληθεί η παράμετρος, η τιμή του βέλτιστου burn-in χρόνου παραμένει σταθερή.

Επίσης, σε μεταβολές των παραμέτρων n_1 και n_2 βλέπουμε πως όταν αυξάνουμε είτε τη μία είτε την άλλη, τα σημεία καμπής λαμβάνουν μεγαλύτερες τιμές και αντίστοιχα και ο λόγος D . Το ίδιο ισχύει και όσον αφορά σε μεταβολή και των δύο παραμέτρων θέσης.

Τέλος, αν παρατηρήσουμε τις μείξεις $0.5Erl(5, 2) + 0.5Erl(200, 2)$ και $0.5Erl(5, 4) + 0.5Erl(200, 2)$, βλέπουμε ότι το σημείο καμπής της πρώτης μείξης λαμβάνει διπλάσια τιμή από το αντίστοιχο σημείο καμπής της δεύτερης μείξης.

Το τελευταίο βήμα είναι να ελεγχθεί η ασυμπτωτική συμπεριφορά της συνάρτησης του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής. Οι Politis and Koutras (2006), μελέτησαν την παρακάτω συνθήκη του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής

Πίνακας 7.5: Σημεία Καμπής Συναρτήσεων και Βέλτιστο Burn-in

Κατανομή Μείξης	Σημεία Καμπής $r(x)$	Σημεία Καμπής $m(x)$	D
$0.5Erl(5, 2)+$ $0.5Erl(200, 2)$	{0, 2.2829}	{0.5435, 5.9870}	0.7619
$0.75Erl(5, 2)+$ $0.25Erl(200, 2)$	{0, 2.58828, 40.1889}	{0.5922, 6.7816}	{0.7711, 0.8312}
$0.5Erl(5, 3)+$ $0.5Erl(200, 3)$	{0, 1.5219, 26.6407}	{0.3623, 3.9913, 8.7373 10^8 }	{0.7619, 0.8501}
$0.5Erl(5, 4)+$ $0.5Erl(200, 4)$	{0, 1.1414, 19.9806}	{0.2717, 2.9935, 7.2972 10^8 }	{0.7619, 0.8501}
$0.5Erl(5, 10)+$ $0.5Erl(200, 10)$	{0, 0.4565, 7.9922}	{0.1087, 1.1974, 1.6397 10^8 }	{0.7619, 0.8501}
$0.5Erl(5, 2)+$ $0.5Erl(100, 2)$	{0, 2.2829, 21.1067, 4.8969 10^8 }	{0.693962, 5.3976}	{0.6960, 0.7442}
$0.5Erl(4, 2)+$ $0.5Erl(200, 2)$	{1.7450, 39.3526}	{0.2993, 5.2447}	{0.8284, 0.8667}
$0.5Erl(6, 2)+$ $0.5Erl(205, 2)$	{0, 2.2829, 41.4788}	{0.8193, 6.7223}	{1.4636}

$$m(x) \leq \frac{E(X^2)}{E(X)} = \frac{\mu_2}{\mu}, \quad x > 0. \quad (7.4)$$

Όπως αναφέρεται στο συγκεκριμένο άρθρο, η συνθήκη αυτή έχει ενδιαφέρον σε διάφορα προβλήματα των εφαρμοσμένων πιθανοτήτων.

Η συνθήκη αυτή ικανοποιείται πάντοτε, όταν η αντίστοιχη κατανομή F είναι IFR. Στην περίπτωση της μείξης $pErl(n_1, \lambda_1) + (1-p)Erl(n_2, \lambda_2)$, έχουμε

- $\mu = p \frac{n_1}{\lambda_1} + (1-p) \frac{n_2}{\lambda_2}$ και
- $\mu_2 = p \frac{n_1(n_1+1)}{\lambda_1^2} + (1-p) \frac{n_2(n_2+1)}{\lambda_2^2}$.

Για να ελέγξουμε αν το συγκεκριμένο φράγμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί ικανοποιητικά για μια μείξη Erlang, παίρνουμε τις εξής περιπτώσεις μείξεων:

- $pErl(n_1, \lambda_1) + (1 - p)Erl(n_1 + r, \lambda_1)$, όπου $r > 0$ παράμετρος που μεταβάλλεται,
- $pErl(n_1, \lambda_1) + (1 - p)Erl(n_1, \lambda_1 + r)$, όπου $r > 0$ παράμετρος που μεταβάλλεται και
- $pErl(n_1, \lambda_1) + (1 - p)Erl(n_2, \lambda_2)$, όπου μεταβάλλεται το p .

Μη λαμβάνοντας υπ' όψιν την κλάση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής, παρατηρούμε ότι όταν κρατάμε ίδιο το λ της μείξης και μεταβάλλεται το $n_2 = n_1 + r$, βλέπουμε ότι η ανισότητα (7.4) τηρείται. Αν και δεν είναι αρκετά ικανοποιητικό, καθώς το φράγμα είναι μια ευθεία οριζόντια γραμμή και ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής είναι μια συνάρτηση που μπορεί να παίρνει οποιαδήποτε μορφή (αύξουσα, φθίνουσα, bathtub, rollercoaster). Μπορεί, λοιπόν, να πληρείται η ανισότητα, αλλά δεν μπορεί να χαρακτηριστεί ως ένα ικανοποιητικό μέτρο προσέγγισης του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής.

Διάγραμμα 41: Μείξη $pErl(n_1, \lambda_1) + (1 - p)Erl(n_1 + r, \lambda_1)$ με Μεταβαλλόμενο το r

Στην επόμενη περίπτωση, κρατάμε ίδιο το n των κατανομών των μείξεων και μεταβάλλουμε το $\lambda_2 = \lambda_1 + r$. Εδώ, βλέπουμε ότι η πραγματική συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ξεπερνά την τιμή του άνω φράγματος. Αυτό, όμως, παρατηρείται για μικρές τιμές του x , καθώς για μεγαλύτερες ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής τείνει στο μηδέν και το άνω φράγμα είναι μια σταθερή συνάρτηση.

Τέλος, για μια μείξη με διαφορετικά n και λ και μεταβαλλόμενο το βάρος των κατανομών που σχηματίζουν την μείξη, παρατηρούμε ότι η ανισότητα για μικρά p ικανοποιείται, ενώ στη συνέχεια το άνω φράγμα βρίσκεται κάτω από την πραγματική συνάρτηση.

Διάγραμμα 42: Μείξη $pErl(n_1, \lambda_1) + (1 - p)Erl(n_1, \lambda_1 + r)$ με Μεταβαλλόμενο το r

Σημαντικό είναι να διακρίνουμε αν η αποτελεσματικότητα του άνω φράγματος σχετίζεται με την κλάση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ή είναι ανεξάρτητο και αφορά απλά και μόνο την κατανομή της μείξης. Κάτι τέτοιο θα μπορούσε να εξεταστεί στο μέλλον.

Διάγραμμα 43: Μείξη $pErl(n_1, \lambda_1) + (1 - p)Erl(n_2, \lambda_2)$ με μεταβαλλόμενο το p

Κεφάλαιο 8

Συμπεράσματα

Αρχικά, εντοπίσαμε παραδείγματα μείξεων που ξεκινούν ή καταλήγουν σε κατανομές Erlang. Κύριος σκοπός μας, όμως, ήταν να εντοπίσουμε τις παραμέτρους και τα βάρη εκείνα που μας δίνουν IFR/DFR/bathtub μείξη, καθώς γνωρίζουμε πως κατανομές IFR δεν δίνουν απαραίτητα IFR μείξη. Λόγω της πολυπλοκότητας των παραγώγων της βαθμίδας αποτυχίας και του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής, κατασκευάζουμε διαγράμματα, αν και, ενδεικτικά, αποδείχθηκε πως η μείξη $pErl(n_1 = 2, \lambda_1 = \lambda) + (1 - p)Erl(n_2 = 3, \lambda_2 = \lambda)$ είναι IFR για κάθε λ και p . Γενικά, είδαμε πως τα βάρη των κατανομών που συνθέτουν την μείξη δεν παίζουν όλο στη διαμόρφωση της κλάσης της κατανομής, αλλά επηρεάζουν μόνο τις τιμές των συντελεστών κύρτωσης, ασυμμετρίας και μεταβλητότητας.

Παρατηρήσαμε περιπτώσεις που μας δίνουν συγκεκριμένες μορφές της βαθμίδας αποτυχίας. Είδαμε ακόμη πως η αποτελούμενη μείξη από μία Εκθετική και την Erlang στην περίπτωση όπου $n_2 = 2$ και $\lambda_1 = \lambda_2$ έχει αύξουσα βαθμίδα αποτυχίας, αλλά για διαφορετική τιμή της παραμέτρου σχήματος της Erlang δεν έχουμε μια μοναδική και συγκεκριμένη μορφή της βαθμίδας αποτυχίας.

Ως προς τον μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής διακρίνουμε πως τις περισσότερες φορές υπό την μείξη ισχύει η αντιστρόφως ανάλογη σχέση με την βαθμίδα αποτυχίας, αν και θα πρέπει να σημειωθεί πως οι κλάσεις $I(D)MRL$ είναι ευρύτερες των αντίστοιχων $D(I)FR$. Αυτό σημαίνει πως μια κατανομή μπορεί να ανήκει σε μια από τις δύο βασικές κλάσεις του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής, αλλά να μην ανήκει στην αντίστοιχη της βαθμίδας αποτυχίας. Επίσης, θα πρέπει να σημειωθεί ότι η Εκθετική κατανομή ανήκει στην τομή των κλάσεων, καθώς έχει σταθερή βαθμίδα αποτυχίας. Παρατηρείται πως τα σημεία καμπής των δύο συναρτήσεων δεν ταυτίζονται πάντα. Εξαιτίας αυτού μελετάμε τον burn-in χρόνο, ο οποίος παρουσιάζει εξαιρετικό ενδιαφέρον, καθώς δεν διαφοροποιείται η τιμή του, όταν μεταβάλλουμε μόνο την παράμετρο κλίμακας $\lambda_1 = \lambda_2$.

Επιπλέον, εξετάσαμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά των δύο συναρτήσεων ενδιαφέροντος. Δείξαμε πως και στην περίπτωση της μείξης, η $r(x)$ τείνει στην παράμετρο $\lambda_1 = \lambda_2$, όταν $x \rightarrow \infty$, ενώ παρατηρήσαμε πως ο πιο ισχυρός πληθυσμός (κατανομή με μεγαλύτερο βάρος) επιβάλλει τα χαρακτηριστικά του. Από την άλλη, ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής ασυμπτωτικά εδώ εξετάστηκε μέσω ενός άνω φράγματος, το οποίο δεν μπορεί γενικά να χαρακτηρίσει ικανοποιητικά τη συνάρτηση.

Όσον αφορά τα χαρακτηριστικά της μείξης κατανομών, είδαμε πως είναι ανά διαστήματα (λογαριθμικά) κυρτές η συνάρτηση πυκνότητας και η συνάρτηση δεξιάς ουράς, οι οποίες από θεώρημα γνωρίζουμε πως συνδέονται στενά τόσο μεταξύ τους ως προς την κυρτότητα όσο και με την βαθμίδα αποτυχίας. Εντυπωσιακό είναι ότι κατανομές με διαφορετική μορφή βαθμίδας αποτυχίας μπορούν να δώσουν την ίδια κυρτότητα στη συνάρτηση πυκνότητας.

Τέλος, για τους συντελεστές, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, παρατηρήσαμε πως μόνο η μεταβλητή του βάρους δίνει διαφορετικές τιμές. Σημαντικό είναι να σημειωθεί πως ο συντελεστής μεταβλητότητας δεν μπορεί να θεωρηθεί ως

ένδειξη για το αν μια κατανομή είναι IFR/DFR, παρά μόνο το αντίστροφο. Γνωρίζοντας, δηλαδή, την κλάση της κατανομής αναμένουμε συγκεκριμένο εύρος τιμών (μεγαλύτερο ή μικρότερο της μονάδας) του συντελεστή.

Ευρετήριο

Ευρετήριο Ελληνικών Όρων

A

Αναμενόμενη Τιμή, 9
Ανάποδα Λεκανοειδής Μορφή, 21, 80
Ανισότητα του *Jensen*, 43

B

Βαθμίδα Αποτυχίας, 38, 37

Γ

Γάμμα Κατανομή, 12
Γνήσια Μονοτονία, 20
Γάμμα Συνάρτηση, 13

Δ

Δεξιά Ουρά Κατανομής Ισορροπίας, 51
Δεξιά Ουρά Κατανομής, 38
Δεσμευμένη Πιθανότητα, 6
Διαδικασία *Poisson*, 10
Διακριτή Μείξη Κατανομών, 23
Διακύμανση, 9, 89

E

Εκθετική Κατανομή, 11, ;, 96
Ένταση Θνησιμότητας, 37

Θ

Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας (ΘΟΠ), 7

I

Ιδιότητα Έλλειψης Μνήμης, 12, 50
Ισορροπίας Κατανομή, 51
Ισχυρός Πληθυσμός, 82

K

Κατανομή *Erlang*, 14
Κατανομή *Weibull*, 15
Κοίλη Συνάρτηση, 19, 19
Κυρτή Συνάρτηση, 18, 18, 86

Λ

Λεκανοειδής Μορφή, 21, 80, 95

Λογαριθμικά Κοίλη Συνάρτηση, 19, 42, 66

Λογαριθμικά Κυρτή Συνάρτηση, 18, 42

Μ

Μείξη *Erlang* Κατανομών, 25

Μέση Τιμή, 9, 89

Μέσος Υπολειπόμενος Χρόνος Ζωής, 50, 93

Μετασχηματισμός *Laplace*, 26

Μορφή *roller – coaster*, 21, 80

Ο

Ολική Πιθανότητα, 7

Ομοιογένεια Πληθυσμού, 88

Π

Πιθανογεννήτρια Συνάρτηση, 26

Πολλαπλασιαστικός Κανόνας, 6

Σ

Σημεία Καμπής, 97

Συνάρτηση Κινδύνου, 37

Συνάρτηση Πυκνότητας (Πιθανότητας), 8

Συνεχής Μείξη Κατανομών, 24

Συνεχής Τυχαία Μεταβλητή, 7

Συντελεστής Ασυμμετρίας, 90

Συντελεστής Κύρτωσης, 90

Συντελεστής Μεταβλητότητας, 88

Τ

Τυχαία Μεταβλητή, 7

Υ

Υπολειπόμενος Χρόνος Ζωής, 49

Χ

Χρόνος *burn – in*, 99

Ευρετήριο Αγγλικών Όρων

D

D-DFR, 62

D-DMRL, 62

D-IFR, 61

D-IMRL, 62

DFR, 42, 58

DMRL, 54, 93

DS-DFR, 62

DS-IFR, 62

DS-NBU, 62

DS-NWU, 62

I

IMRL, 54, 93

IFR, 42, 58, 66

M

Mill's Ratio, 37

N

NBU, 56

NBUE, 57

NWU, 56

NWUE, 57

U

UBA, 58

UBAE, 59

UWA, 58

UWAE, 59

W

Work-hardening, 41

Βιβλιογραφία

Ξένη Βιβλιογραφία

- Ando, T. & Hiai, F. (2011) Operator log-convex functions and operator means. *Mathematische Annalen*, 350, 611–630
- Asmussen, S. & Lehtomaa, J. (2017) Distinguishing Log-Concavity from Heavy Tails. *Risks*, 5 (1), 10
- Bagnoli, M. & Bergstrom, T. (1989) *Log-Concave Probability and Its Applications*, University of Michigan
- Barlow, R. E. & Proschan, F. (1996) *Mathematical Theory of Reliability*. Wiley and Sons Inc.
- Bekker, L. & Mi, J. (2003) Shape and Crossing Properties of Mean Residual Life Functions. *Statistics and Probability Letters*, 64, 225-234
- Block et al. (2012) A Mixture of Exponential and IFR Gamma Distributions having an Upsidedown Bathtub-Shaped Failure Rate. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 26, 573-850
- Finkelstein, M. (2009) Understanding the Shape of the Mixture Failure Rate (with Engineering and Demographic Applications). *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 25, 673-677

- Guess, F. & Proschan, F. (1985) Mean Residual Life: Theory and Applications. North Carolina State University and Florida State University
- Gupta, A. K. & Zeng, W. B. & Wu, Y. (2010) Probability and Statistical Models: Foundations for Problems in Reliability and Financial Mathematics. Springer Science and Business Media
- Gupta, R. C. (1987) On the Monotonic Properties of the Residual Variance and their Applications in Reliability. Journal of Statistical Planning and Inference, 16, 329-335
- Gupta, R. C. (2006) Variance Residual Life Function in Reliability Studies. METRON, LXIV, 3, 343-355
- Gupta, R. C. & Akman, H. O. (1995) Mean residual life function for certain types of non-monotonic ageing, Communications in Statistics. Stochastic Models, 111, 219-225
- Gupta, R. C. & Warren, R. (2001) Determination of Change Points of non Monotonic Failure Rates, Communications in Statistics Theory and Methods, 30, 1903-1920
- Hardy, G. H, Littlewood, J. E. & Polya, G (1934) Inequalities. Cambridge University Press
- Jiang, R & Murthy, D. N. (1998) Mixture of Weibull Distributions-Parametric Characterization of Failure Rate function, Applied Stochastic Models and Data Analysis, 14, 47-65
- Parsa, M., Motashami Borzadaran, G. R. & Rezaei Roknabadi, A. H. (2014) On the Change Points of Mean Residual Life and Failure Rate Functions for Some Generalized Gamma Type Distributions, International Journal of Metrology and Quality Engineering, 5, 102

- Poitis, K. & Koutras, M. (2006) Some New Bounds for the Renewal Function. *Probability in the Engineering & Informational Sciences*, 20, 231-250
- Marshall A. & Olkin, I. (2007) *Life Distributions*. Springer Science and Business Media, LLC
- Navarro, J. & Hernandez, J. P. (2008) Mean Residual Life Functions of finite Mixtures, Order Statistics and Coherent Systems. *Metrika*, 67, 227-298
- Peajcariac, J. E. & Tong, Y. L. (1992) *Convex Functions, Partial Orderings, and Statistical Applications*. Academic Press, Inc
- Tunc, M. (2014) Some integral inequalities for logarithmically convex functions. *Journal of the Egyptian Mathematical Society* 22, 177–181
- Unger, A. B. (1988) Early Life Failure. *Quality and Reliability Engineering International*, 4, 27-34
- Willmot, G. E. & Lin, X. E. (2011) Risk modeling with the mixed Erlang distribution. *Applied Stochastic Models Business and Industry*, 27 (1), 2–16
- Willmot, G. E. & Lin, X. S. (2001) *Lundberg Approximations for Compound Distributions with Insurance Applications*. Springer Science and Business Media, LLC
- Willmot, G. E. & Woo, J (2007) On the Class of Erlang mixtures with Risk Theoretic Applications, *North American Actuarial journal*, 11 (2), 99-115

Mathematica

- Mangano, S. (2010) Mathematica Cookbook, O' Reilly Media
- Peasly, E. (2013) An Introduction to Mathematica, University of Oxford
- Peasly, E. (2013) An Introduction to Mathematica, University of Oxford

Ελληνική Βιβλιογραφία

- Κούτρας, Μ. (2004) Εισαγωγή στις Πιθανότητες: Θεωρία και Εφαρμογές. Μέρος I και II, Εκδόσεις Σταμούλη
- Πανάρετος, Ι. και Ξεκαλάκη, Ε. (2000) Εισαγωγή στη Στατιστική Σκέψη. Τόμος I και II, Εκδόσεις Μπένου
- Παπαϊωάννου, Τ. και Φερεντίνου, Κ. (2000) Μαθηματική Στατιστική: Εκτιμητική - Έλεγχος Υποθέσεων - Εφαρμογές, Εκδόσεις Σταμούλη
- Πολίτης, Κ. (2012) Εισαγωγή στη Θεωρία Συλλογικού Κινδύνου. Εκδόσεις Σταμούλη
- Χατζηκωνσταντινίδης, Ε. (2018) Πανεπιστημιακές Σημειώσεις Μεταπτυχιακού Μαθήματος Θεωρίας Κινδύνου I

R

- Ντζούφρας, Ι (2014) Πανεπιστημιακές Σημειώσεις Μαθήματος “Εισαγωγή στον Προγραμματισμό με R, S-Plus”, Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών
- Ντζούφρας, Ι & Καρλής, Δ. (2015) Εισαγωγή στον Προγραμματισμό και στη Στατιστική Ανάλυση με R, Εκδόσεις Κάλλιπος

Mathematica

- Πολίτης, Κ. & Δερμιτζάκης, Β. (2015) Πανεπιστημιακές Σημειώσεις Μαθήματος “Θεωρία Κινδύνου II”, Πανεπιστήμιο Πειραιώς

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Παράρτημα Εντολών

Το παρόν τμήμα αφορά στις εντολές που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή των διαγραμμάτων και των πινάκων που παρατέθηκαν κατά το κύριο σώμα της διατριβής. Όπως έχει αναφερθεί, χρησιμοποιήθηκε η γλώσσα προγραμματισμού R-3.6.0 (R) και το λογισμικό Wolfram Mathematica 8 (Mathematica) .

Ως προς τα διαγράμματα, τα πρώτα έξι πραγματοποιήθηκαν στην R, ενώ τα υπόλοιπα με την βοήθεια του Mathematica. Αντίθετα, όλοι οι πίνακες κατασκευάστηκαν με το Mathematica.

Διάγραμμα 1: Συνάρτηση Πυκνότητας και Κατανομής για την Εκθετική, $(\alpha)Exp(0.5)$ και $(\beta)Exp(1.5)$

```
windows();par(mfrow=c(2,2))
x<-seq(0,5,.0001);lambda<-.5
f<-lambda*exp(-lambda*x);F<-1-exp(-lambda*x)
plot(x,f, col=0, bty="n", ylab="f(x)")
abline(h=seq(0,1.5,0.1), v=seq(0,5,0.5), lty=2, col="gray")
points(x,f, pch=".")
plot(x,F, type="l", bty="n", ylab="F(x)", ylim=c(0,1))
abline(h=seq(0,1,0.1), v=seq(0,5,0.5), lty=2, col="gray")
mtext(expression((alpha)), side = 3, line = -21, outer = TRUE)
```

```
lambda<-1.5
f<-lambda*exp(-lambda*x);F<-1-exp(-lambda*x)
plot(x,f, col=0, bty="n", ylab="f(x)")
abline(h=seq(0,1.5,0.2), v=seq(0,5,0.5), lty=2, col="gray")
points(x,f, pch=".")
plot(x,F, type="l", bty="n", ylab="F(x)")
abline(h=seq(0,1,0.1), v=seq(0,5,0.5), lty=2, col="gray")
mtext(expression((beta)), side = 3, line = -42, outer = TRUE)
```

Διάγραμμα 2: Συνάρτηση Πυκνότητας και Κατανομής για την Γάμμα, $(\alpha)G(1.5,0.5)$, $(\beta)G(2,0.5)$ και $(\gamma)G(1.5,3.5)$

```
windows();par(mfrow=c(3,2))
x<-seq(0,20,.0001)
a<-1;lambda<-1.5
f<-(lambda^a/gamma(a))*(x^(a-1))*exp(-x*lambda)
F<-pgamma(x,a)/gamma(a)
```

```

plot(x,f, pch=".", bty="n", ylab="f(x)", ylim=c(0,20),
xlim=c(0,10))
abline(h=seq(0,20,5), v=seq(0,10,1), lty=2, col="gray")
plot(x,F, type="l", bty="n", ylab="F(x)", xlim=c(0,10))
abline(h=seq(0,0.5,0.2), v=seq(0,10,1), lty=2, col="gray")
mtext(expression((alpha)), side = 3, line = -18, outer = TRUE)

```

```

a<-1;lambda<-2
f<-(lambda^a/gamma(a))*(x^(a-1))*exp(-x*lambda)
F<-pgamma(x,a)/gamma(a)
plot(x,f, pch=".", bty="n", ylab="f(x)", ylim=c(0,20),
xlim=c(0,10))
abline(h=seq(0,20,5), v=seq(0,10,1), lty=2, col="gray")
plot(x,F, type="l", bty="n", ylab="F(x)", xlim=c(0,10))
abline(h=seq(0,0.5,0.2), v=seq(0,10,1), lty=2, col="gray")
mtext(expression((beta)), side = 3, line = -35, outer = TRUE)

```

```

a<-3.5;lambda<-1.5
f<-(lambda^a/gamma(a))*(x^(a-1))*exp(-x*lambda)
F<-pgamma(x,a)/gamma(a)
plot(x,f, pch=".", bty="n", ylab="f(x)", xlim=c(0,10))
abline(h=seq(0,0.3,0.1), v=seq(0,10,1), lty=2, col="gray")
plot(x,F, type="l", bty="n", ylab="F(x)", xlim=c(0,10))
abline(h=1, lty=2, col="gray")
mtext(expression((gamma)), side = 3, line = -53, outer = TRUE)

```

Διάγραμμα 3: Συνάρτηση Πυκνότητας και Κατανομής για την Erlang, $(\alpha)Erl(2, 0.1)$, $(\beta)Erl(2, 3)$ και $(\gamma)Erl(4, 0.1)$

```

windows();par(mfrow=c(3,2))
x<-seq(0,85,.001)
n<-2;lambda<-0.1
f<-((lambda^n)*(x^(n-1))*exp(-lambda*x)/factorial(n-1))
F<-numeric()
n<-0:(k-1)
for(j in 1: length(x)){
F[j]<-1-sum((1/factorial(n))*exp(-lambda*x[j])*(lambda*x[j])^n)}
plot(x,f, pch=".", bty="n", ylab="f(x)", xlim=c(0,85))
abline(h=seq(0,0.04,0.005), v=seq(0,85,10), lty=2, col="gray")
plot(x,F, type="l", bty="n", ylab="F(x)", xlim=c(0,20))
abline(h=seq(0,0.8,0.1), v=seq(0,20,1), lty=2, col="gray")
mtext(expression((alpha)), side = 3, line = -18, outer = TRUE)

n<-2;lambda<-3
f<-((lambda^n)*(x^(n-1))*exp(-lambda*x)/factorial(n-1))
F<-numeric()
n<-0:(k-1)
for(j in 1: length(x)){
F[j]<-1-sum((1/factorial(n))*exp(-lambda*x[j])*(lambda*x[j])^n)}
plot(x,f, pch=".", bty="n", ylab="f(x)", xlim=c(0,20))
abline(h=seq(0,0.9,0.2), v=seq(0,20,1), lty=2, col="gray")
plot(x,F, type="l", bty="n", ylab="F(x)", xlim=c(0,20))
abline(h=seq(0,0.9,0.2), v=seq(0,20,1), lty=2, col="gray")
mtext(expression((beta)), side = 3, line = -35, outer = TRUE)

n<-3;lambda<-1.5
f<-((lambda^n)*(x^(n-1))*exp(-lambda*x)/factorial(n-1))
F<-numeric()

```

```

n<-0:(k-1)
for(j in 1: length(x)){
F[j]<-1-sum((1/factorial(n))*exp(-lambda*x[j])*(lambda*x[j])^n)}
plot(x,f, pch=".", bty="n", ylab="f(x)", xlim=c(0,20))
abline(seq(0,0.9,0.005), v=seq(0,85,10), lty=2, col="gray")
plot(x,F, type="l", bty="n", ylab="F(x)", xlim=c(0,20))
abline(h=seq(0,0.9,0.2), v=seq(0,85,10), lty=2, col="gray")
mtext(expression((gamma)), side = 3, line = -53, outer = TRUE)

```

Διάγραμμα 4: Συνάρτηση Πυκνότητας και Κατανομής για την *Weibull*,
(α) $W(3, 0.5)$, (β) $W(3, 2)$ και (γ) $W(5, 0.5)$

```

windows();par(mfrow=c(3,2))
x<-seq(0,10,.0001)
lambda<-3;k<-0.5
F<-1-exp(-(x/lambda)^k)
f<-(k/lambda)*(x/lambda)^(k-1)*exp(-(x/lambda)^k)
plot(x,f, pch=".", bty="n", ylab="f(x)", xlim=c(0, 4),
ylim=c(0,5))
abline(h=seq(0,5,1), v=seq(0,10,1), lty=2, col="gray")
plot(x,F, type="l", bty="n", ylab="F(x)")
abline(h=seq(0,0.8,0.1), v=seq(0,10,1), lty=2, col="gray")
mtext(expression((alpha)), side = 3, line = -18, outer = TRUE)

```

```

lambda<-3;k<-4
F<-1-exp(-(x/lambda)^k)
f<-(k/lambda)*(x/lambda)^(k-1)*exp(-(x/lambda)^k)
plot(x,f, pch=".", bty="n", ylab="f(x)", xlim=c(0, 6))
abline(h=seq(0,0.8,0.1), v=seq(0,10,1), lty=2, col="gray")

```

```

plot(x,F, type="l", bty="n", ylab="F(x)")
abline(h=seq(0,0.9,0.2), v=seq(0,10,1), lty=2, col="gray")
mtext(expression((beta)), side = 3, line = -35, outer = TRUE)

lambda<-5;k<-0.5
F<-1-exp(-(x/lambda)^k)
f<-(k/lambda)*(x/lambda)^(k-1)*exp(-(x/lambda)^k)
plot(x,f, pch=".", bty="n", ylab="f(x)", xlim=c(0, 3),
ylim=c(0,5))
abline(h=seq(0,5,1), v=seq(0,10,1), lty=2, col="gray")
plot(x,F, type="l", bty="n", ylab="F(x)")
abline(h=seq(0,0.9,0.1), v=seq(0,10,1), lty=2, col="gray")
mtext(expression((gamma)), side = 3, line = -53, outer = TRUE)

```

Διάγραμμα 5: Απεικόνιση (α) Κυρτής και (β) Κοίλης Συνάρτησης

```

windows();par(mfrow=c(1,2))
plot(seq(-10,10,0.001)^2, type="l", bty="n", xlab="(a)", ylab="")
plot(-seq(-10,10,0.001)^2, type="l", bty="n", xlab="(b)",
ylab="")

```

Διάγραμμα 6: Συνάρτησης Πυκνότητας (Μπλε) και Κατανομής (Κόκκινη) της $0.4Exp(0.5) + 0.6Exp(1.5)$

```

F[l_, x_] := 1 - Exp[-l * x]; f[l_, x_] := l * Exp[-l * x];
x = Range[0, 70, 0.1]; a = 0.4; l1 = 0.5; l2 = 1.5;
ListLinePlot[{a * F[l1, x] + (1 - a) * F[l2, x], a * f[l1, x] + (1 - a) * f[l2, x]},
PlotRange -> {{0, 80.01}, {0, 1.01}},

```

```

PlotStyle → {Directive[RGBColor[0.58847, 0.22163, 0.16064], Thick],
Directive[RGBColor[0.291989, 0.437977, 0.888609], Thick]},
AxesLabel → {Style[x, 16], Style[, 16]},
TicksStyle → Directive[FontSize → 16], GridLines → Automatic,
GridLinesStyle → Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed]]

```

Διάγραμμα 7: Συνάρτησης Πυκνότητας (Μπλε) και Κατανομής (Κόκκινη) της $0.3Erl(2, 1.5) + 0.2Erl(2, 2) + 0.5Erl(3, 1.5)$

```

f[l_, k_, x_] := ((l^k) * (x^(k - 1)) * Exp[-l * x]) / ((k - 1)!);
F[l_, k_, x_] := 1 - Sum[ (1/n!) * Exp[-l * x] * (l * x)^n, {n, 0, k - 1}];
x = Range[1, 70, 0.1]; p = 0.3; q = 0.2; l1 = 1.5; k1 = 2; l2 = 2; k2 = 2; l3 = 1.5; k3 = 3;
ListLinePlot[{p * F[l1, k1, x] + q * F[l2, k2, x] + (1 - p - q) * F[l3, k3, x],
(p * f[l1, k1, x] + q * f[l2, k2, x] + (1 - p - q) * f[l3, k3, x]) * 2},
PlotRange → {{0, 61}, {0, 1}},
PlotStyle → {Directive[RGBColor[0.58847, 0.22163, 0.16064], Thick],
Directive[RGBColor[0.291989, 0.437977, 0.888609], Thick]},
AxesLabel → {Style[x, 16], Style[, 16]},
TicksStyle → Directive[FontSize → 16], GridLines → Automatic,
GridLinesStyle → Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed]]

```

Διάγραμμα 8: Συνάρτηση Πυκνότητας και Κατανομής της $0.3G(1, 1.5) + 0.2G(2, 2) + 0.5G(3.5, 1.5)$

```

f[a_, b_, x_] := (b^a / Gamma[a]) * (x^(a - 1)) * Exp[-x * b];
F[a_, b_, x_] := Gamma[a, 0, b * x] / Gamma[a];
x = Range[1, 70, 0.1]; p = 0.3; q = 0.2; a1 = 1; b1 = 1.5; a2 = 1; b2 = 2; a3 = 3.5; b3 = 1.5;
ListLinePlot[{p * F[a1, b1, x] + q * F[a2, b2, x] + (1 - p - q) * F[a3, b3, x],
(p * f[a1, b1, x] + q * f[a2, b2, x] + (1 - p - q) * f[a3, b3, x]) * 5},

```



```

PlotRange → {{0, 40.1}, {0.4, 1.62}},
PlotStyle → {Directive[RGBColor[0.58847, 0.22163, 0.16064], Thick],
Directive[RGBColor[0.291989, 0.437977, 0.888609], Thick]},
AxesLabel → {Style[x, 16], Style[, 16]},
TicksStyle → Directive[FontSize → 16], GridLines → Automatic,
GridLinesStyle → Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed]

```

Διάγραμμα 9: Συνάρτηση Πυκνότητας και Κατανομής της $0.3W(3, 1) + 0.2W(3, 2) + 0.5W(5, 1)$

```

F[l_, k_, x_] := 1 - Exp[-(x/l)^k];
f[l_, k_, x_] := (k/l) * (x/l)^(k - 1) * Exp[-(x/l)^k];
x = Range[1, 70, 0.1]; p = 0.3; q = 0.2; l1 = 3; k1 = 1; l2 = 3; k2 = 2; l3 = 5; k3 = 1;
ListLinePlot[{p * F[l1, k1, x] + q * F[l2, k2, x] + (1 - p - q) * F[l3, k3, x],
(p * f[l1, k1, x] + q * f[l2, k2, x] + (1 - p - q) * f[l3, k3, x]) * 5},
PlotRange → {{0, 200}, {0, 1}},
PlotStyle → {Directive[RGBColor[0.58847, 0.22163, 0.16064], Thick],
Directive[RGBColor[0.291989, 0.437977, 0.888609], Thick]},
AxesLabel → {Style[x, 16], Style[, 16]},
TicksStyle → Directive[FontSize → 16], GridLines → Automatic,
GridLinesStyle → Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed]

```

Διάγραμμα 10: Πυκνότητα, Δεξιά Ουρά και Βαθμίδα Αποτυχίας Κανονικής (Μπλε) και Weibull (Κόκκινη) Κατανομής

```

k = 2; l = 2;
r1[x_] :=  $\frac{e^{-(\frac{x}{l})^k} k (\frac{x}{l})^{-1+k}}{l} \left( e^{-(\frac{x}{l})^k} \right)^{-1}$ 
r2[x_] := PDF[NormalDistribution[lGamma[1 + 1/k], 0.90], x]/
(1 - CDF[NormalDistribution[lGamma[1 + 1/k], 0.9], x])

```

```

x = Range[0.01, 100, 0.01];
ListLinePlot[{PDF[WeibullDistribution[k, l], x],
PDF[NormalDistribution[lGamma[1 + 1/k], 0.90], x]},
PlotRange → {{0, 601}, {0, 0.51}},
PlotStyle → {Directive[RGBColor[0.58847, 0.22163, 0.16064], Thick],
Directive[RGBColor[0.291989, 0.437977, 0.888609], Thick]},
AxesLabel → {Style[x, 16], Style[f(x), 16]},
TicksStyle → Directive[FontSize → 16], GridLines → Automatic,
GridLinesStyle → Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed]]

```

```

ListLinePlot[{1 - CDF[WeibullDistribution[k, l], x],
1 - CDF[NormalDistribution[lGamma[1 + 1/k], 0.90], x]},
PlotRange → {{0, 401}, {0, 1.01}},
PlotStyle → {Directive[RGBColor[0.58847, 0.22163, 0.16064], Thick],
Directive[RGBColor[0.291989, 0.437977, 0.888609], Thick]},
AxesLabel → {Style[x, 16], Style[1-F(x), 16]},
TicksStyle → Directive[FontSize → 16], GridLines → Automatic,
GridLinesStyle → Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed]]

```

```

ListLinePlot[{r1[x], r2[x]}, PlotRange → {{0, 801}, {0, 10.1}},
PlotStyle → {Directive[RGBColor[0.58847, 0.22163, 0.16064], Thick],
Directive[RGBColor[0.291989, 0.437977, 0.888609], Thick]},
AxesLabel → {Style[x, 16], Style[r(x), 16]},
TicksStyle → Directive[FontSize → 16], GridLines → Automatic,
GridLinesStyle → Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed]]

```

Διάγραμμα 13: Βαθμίδα Αποτυχίας για Εκθετική Κατανομή με $Exp(0.5)$ (Κόκκινη) και $Exp(1.5)$ (Μπλε)

```

f[l_, x_] := l * Exp[-l * x];
F[l_, x_] := 1 - Exp[-l * x]; l = 1/2;
Plot[{f[0.5, x]/(1 - F[0.5, x]), f[1.5, x]/(1 - F[1.5, x])}, {x, 0, 5},
PlotRange -> {{0, 5}, {0, 2}},
PlotStyle -> {Directive[RGBColor[0.58847, 0.22163, 0.16064], Thick],
Directive[RGBColor[0.291989, 0.437977, 0.888609], Thick]}, AxesLabel -> {Style[x, 16],
Style[r(x), 16]}, TicksStyle -> Directive[FontSize -> 16], GridLines -> Automatic,
GridLinesStyle -> Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed]]

```

Διάγραμμα 14: Βαθμίδα Αποτυχίας για την Γάμμα Κατανομή

```

f[a_, b_, x_] := (b^a / Gamma[a]) * (x^(a - 1)) * Exp[-x * b];
F[a_, b_, x_] := Gamma[a, 0, b * x] / Gamma[a]; a = 0.5; b = 1.5;
Plot[{f[0.5, x]/(1 - F[0.5, x]), f[1.5, x]/(1 - F[1.5, x])}, {x, 0, 5},
PlotRange -> {{0, 5}, {0, 2}},
PlotStyle -> {Directive[RGBColor[0.58847, 0.22163, 0.16064], Thick],
Directive[RGBColor[0.291989, 0.437977, 0.888609], Thick]},
AxesLabel -> {Style[x, 16], Style[r(x), 16]},
TicksStyle -> Directive[FontSize -> 16], GridLines -> Automatic,
GridLinesStyle -> Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed],
PlotLegend -> {Exp(0.5), Exp(1.5)}, LegendSize -> {0.5, 0.4},
LegendPosition -> {-0.1, -0.2}, LegendShadow -> False]

```

Διάγραμμα 15: Βαθμίδα Αποτυχίας για την Erlang Κατανομή

```

f[l_, k_, x_] := (l^k) * (x^(k - 1)) * Exp[-l] / (k - 1)!
F[l_, k_, x_] := 1 - Sum[ (1/n!) * Exp[-l * x] * (l * x)^n, {n, 0, k - 1}]
Plot[{f[0.1, 2, x]/(1 - F[0.1, 2, x]), f[3, 2, x]/(1 - F[3, 2, x]),
f[0.1, 4, x]/(1 - F[0.1, 4, x])}, {x, 0, 20}, PlotRange -> {{0, 20}, {0, 2}},

```

```

PlotStyle → {Directive[RGBColor[0.58847, 0.22163, 0.16064], Thick],
Directive[RGBColor[0.291989, 0.437977, 0.888609], Thick],
Directive[RGBColor[0.341176, 0.34902, 0.380392], Thick]},
AxesLabel → {Style[x, 16], Style[r(x), 16]},
TicksStyle → Directive[FontSize → 16], GridLines → Automatic,
GridLinesStyle → Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed],
PlotLegend → {Er1(2, 0.1), Er1(2, 3), Er1(4, 0.1)},
LegendSize → {0.5, 0.4}, LegendPosition → {-0.1, -0.2},
LegendShadow → False]

```

Διάγραμμα 16: Βαθμίδα Αποτυχίας για την Weibull Κατανομή

```

F[l_, k_, x_] := 1 - Exp[-(x/l)^k];
f[l_, k_, x_] := (k/l) * (x/l)^(k - 1) * Exp[-(x/l)^k];
Plot[{f[3, 0.5, x]/(1 - F[3, 0.5, x]), f[3, 4, x]/(1 - F[3, 4, x]),
f[5, 0.5, x]/(1 - F[5, 0.5, x])}, {x, 0, 10}, PlotRange → {{0, 4}, {0, 2.5}},
PlotStyle → {Directive[RGBColor[0.58847, 0.22163, 0.16064], Thick],
Directive[RGBColor[0.291989, 0.437977, 0.888609], Thick],
Directive[RGBColor[0.341176, 0.34902, 0.380392], Thick]},
AxesLabel → {Style[x, 16], Style[r(x), 16]},
TicksStyle → Directive[FontSize → 16], GridLines → Automatic,
GridLinesStyle → Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed],
GridLinesStyle → Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed],
PlotLegend → {W(0.5, 3), W(4, 3), W(0.5, 5)},
LegendSize → {0.5, 0.5}, LegendPosition → {-0.3, -0.1},
LegendShadow → False]

```

Διάγραμμα 17: Μέσος Υπολειπόμενος Χρόνος Ζωής για Εκθετική(πάνω αριστερά), Γάμμα(πάνω δεξιά), *Erlang*(κάτω αριστερά) και *Weibull*(κάτω δεξιά)

(*Εκθετική Κατανομή*)

```
F[l_, x_] := 1 - Exp[-lx]; x = Range[-1, 20];
m[l_] = Integrate[(1 - F[l, x + t]) / (1 - F[l, x]), {t, 0, ∞}];
ListLinePlot[{m[0.5], m[1.5]}, PlotRange → {{0, 15.1}, {0, 2.5}},
PlotStyle → {Directive[RGBColor[0.58847, 0.22163, 0.16064], Thick],
Directive[RGBColor[0.291989, 0.437977, 0.888609], Thick]},
AxesLabel → {Style[x, 16], Style[m(x), 16]},
TicksStyle → Directive[FontSize → 16], GridLines → Automatic,
GridLinesStyle → Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed],
PlotLegend → {Exp(0.5), Exp(1.5)}, LegendSize → {0.5, 0.4},
LegendPosition → {-0.1, -0.2}, LegendShadow → False]
```

(*Γάμμα Κατανομή*)

$$m[a_, b_, x_] := \frac{-bx\Gamma[a, bx] + b(100000000 + x)\Gamma[a, b(100000000 + x)]}{b\Gamma[a, bx]} + \frac{\Gamma[1 + a, bx] - \Gamma[1 + a, b(100000000 + x)]}{b\Gamma[a, bx]}$$

```
x = Range[0.01, 500, 0.1]; ListLinePlot[{m[0.5, 1.5, x], m[0.5, 3, x], m[5, 1.5, x]},
PlotRange → {{0, 500}, {0, 4}},
PlotStyle → {Directive[RGBColor[0.58847, 0.22163, 0.16064], Thick],
Directive[RGBColor[0.291989, 0.437977, 0.888609], Thick],
Directive[RGBColor[0.341176, 0.34902, 0.380392], Thick]},
AxesLabel → {Style[x, 16], Style[m(x), 16]},
TicksStyle → Directive[FontSize → 16], GridLines → Automatic,
GridLinesStyle → Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed],
PlotLegend → {G(0.5, 1.5), G(0.5, 3), G(5, 1.5)},
```

LegendSize → {0.6, 0.6}, LegendPosition → {-0.1, -0.2}, LegendShadow → False]

(*Erlang Κατανομή*)

$F[l_, k_, x_] := 1 - \text{Sum}[(1/n!) * \text{Exp}[-l * x] * (l * x)^n, \{n, 0, k - 1\}];$

$x = \text{Range}[1, 20];$

Plot[{m2[0.1, 2, x], m2[3, 2, x], m2[0.1, 4, x]}, {x, 0.01, 20},

PlotRange → {{0, 14}, {0, 102}},

PlotStyle → {Directive[RGBColor[0.58847, 0.22163, 0.16064], Thick],

Directive[RGBColor[0.291989, 0.437977, 0.888609], Thick],

Directive[RGBColor[0.341176, 0.34902, 0.380392], Thick]},

AxesLabel → {Style[x, 16], Style[m(x), 16]},

TicksStyle → Directive[FontSize → 16], GridLines → Automatic,

GridLinesStyle → Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed],

PlotLegend → {Erl(2, 0.1), Erl(2, 3), Erl(4, 0.1)},

LegendSize → {0.6, 0.6}, LegendPosition → {-0.1, -0.2}, LegendShadow → False]

(*Weibull Κατανομή*)

$F[l_, k_, x_] := 1 - \text{Exp}[-(x/l)^k];$

$m3[l_, k_, x_] := \text{Integrate}[(1 - F[l, k, x + t]) / (1 - F[l, k, x]), \{t, 0, 1000000\}]$

Plot[{m3[3, 0.5, x], m3[3, 4, x], m3[5, 0.5, x]}, {x, 0.01, 20},

PlotRange → {{0, 15}, {0, 31}},

PlotStyle → {Directive[RGBColor[0.58847, 0.22163, 0.16064], Thick],

Directive[RGBColor[0.291989, 0.437977, 0.888609], Thick],

Directive[RGBColor[0.341176, 0.34902, 0.380392], Thick]},

AxesLabel → {Style[x, 16], Style[m(x), 16]},

TicksStyle → Directive[FontSize → 16], GridLines → Automatic,

```

GridLinesStyle → Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed],
PlotLegend → {W(0.5, 3), W(4, 3), W(0.5, 5)},
LegendSize → {0.5, 0.5}, LegendPosition → {-0.1, -0.52},
LegendShadow → False]

```

Διάγραμμα 22: Εφαρμογή της (6.1) στις Συναρτήσεις της Πυκνότητας και της Δεξιάς Ουράς

```

x = Range[0.1, 101, 0.1]; y = 1; n = 2; l = 3; a = 0.2;
ListLinePlot[{- (f[l, n, a * x + (1 - a) * y]) + (a * f[l, n, x] + (1 - a) * f[l, n, y]),
-(1 - F[l, n, a * x + (1 - a) * y]) + (a * (1 - F[l, n, x]) + (1 - a) * (1 - F[l, n, y]))},
PlotRange → {{0, 120}, {0, 1}},
PlotStyle → {Directive[RGBColor[0.58847, 0.22163, 0.16064], Thick],
Directive[RGBColor[0.291989, 0.437977, 0.888609], Thick]},
AxesLabel → {Style[x, 16], Style[, 16]},
TicksStyle → Directive[FontSize → 16],
GridLines → Automatic,
GridLinesStyle → Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed],
PlotLegend → {-fEr1(2,3)(0.2 x+0.8)+0.2
fEr1(2,3)(x)+ 0.8 fEr1(2,3)(1),
-FEr1(2,3)(0.2 x+0.8)+0.2 FEr1(2,3)(x)+ 0.8
FEr1(2,3)(1)}, LegendSize → {1.4, 0.4},
LegendPosition → {-0.68, 0.1}, LegendShadow → False]
x = Range[0.1, 101, 0.1]; y = 2; n = 2; l = 3; a = 0.2;
ListLinePlot[{- (f[l, n, a * x + (1 - a) * y]) + (a * f[l, n, x] + (1 - a) * f[l, n, y]),
-(1 - F[l, n, a * x + (1 - a) * y]) + (a * (1 - F[l, n, x]) + (1 - a) * (1 - F[l, n, y]))},
PlotRange → {{0, 120}, {0, 0.25}},
PlotStyle → {Directive[RGBColor[0.58847, 0.22163, 0.16064], Thick],

```

```

Directive[RGBColor[0.291989, 0.437977, 0.888609], Thick]},
AxesLabel → {Style[x, 16], Style[, 16]},
TicksStyle → Directive[FontSize → 16],
GridLines → Automatic,
GridLinesStyle → Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed],
PlotLegend → { $-f_{\text{Er1}(2,3)}(0.2 x+1.6)+0.2$ 
 $f_{\text{Er1}(2,3)}(x)+ 0.8 f_{\text{Er1}(2,3)}(2)$ ,
 $-F_{\text{Er1}(2,3)}(0.2 x+1.6)+0.2 F_{\text{Er1}(2,3)}(x)+ 0.8$ 
 $F_{\text{Er1}(2,3)}(2)$ }, LegendSize → {1.4, 0.4},
LegendPosition → {-0.68, 0.1}, LegendShadow → False]

```

Διάγραμμα 23: Εφαρμογή του Ορισμού 2.4.3 στη Συνάρτηση της Πυκνότητας Πιθανότητας

```

x = Range[0.000001, 150, 0.01]; y = 1; n = 2; l = 3; a = 0.2;
ListLinePlot[{f[l, n, a * x + (1 - a) * (y)], (f[l, n, x]^a) * (f[l, n, y]^(1 - a))},
PlotRange → {{0, 1000}, {0, 0.75}},
PlotStyle → {Directive[RGBColor[0.58847, 0.22163, 0.16064], Thick],
Directive[RGBColor[0.291989, 0.437977, 0.888609], Thick]},
AxesLabel → {Style[x, 16], Style[, 16]},
TicksStyle → Directive[FontSize → 16],
GridLines → Automatic,
GridLinesStyle → Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed],
PlotLegend → { $f_{\text{Er1}(2,3)}(0.2 x+0.8)$ ,
 $f_{\text{Er1}(2,3)}(x)^{0.2} f_{\text{Er1}(2,3)}(1)^{0.8}$ },
LegendSize → {1.3, 0.4}, LegendPosition → {-0.25, 0.1},
LegendShadow → False]
x = Range[0.000001, 150, 0.01]; y = 2; n = 2; l = 3; a = 0.2;

```



```

ListLinePlot[{f[l, n, a * x + (1 - a) * (y)], (f[l, n, x]^a) * (f[l, n, y]^(1 - a))},
PlotRange -> {{0, 1000}, {0, 0.15}},
PlotStyle -> {Directive[RGBColor[0.58847, 0.22163, 0.16064], Thick],
Directive[RGBColor[0.291989, 0.437977, 0.888609], Thick]},
AxesLabel -> {Style[x, 16], Style[, 16]},
TicksStyle -> Directive[FontSize -> 16],
GridLines -> Automatic,
GridLinesStyle -> Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed],
PlotLegend -> {fEr1(2,3)(0.2 x+1.6),
fEr1(2,3)(x)0.2fEr1(2,3)(2)0.8},
LegendSize -> {1.3, 0.4}, LegendPosition -> {-0.25, 0.1},
LegendShadow -> False]

```

Διάγραμμα 24: Συνάρτησης Πυκνότητας και Δεξιάς Ουράς

```

n = 2; l = 3; Plot[{f[l, n, x], 1 - F[l, n, x]}, {x, 0, 15},
PlotRange -> {{0, 4}, {0, 1.5}},
PlotStyle -> {Directive[RGBColor[0.58847, 0.22163, 0.16064], Thick],
Directive[RGBColor[0.291989, 0.437977, 0.888609], Thick]},
AxesLabel -> {Style[x, 16], Style[, 16]},
TicksStyle -> Directive[FontSize -> 16], GridLines -> Automatic,
GridLinesStyle -> Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed],
PlotLegend -> {fEr1(2,3)(x),
1 - FEr1(2,3)(x)}, LegendSize -> {0.8, 0.4},
LegendPosition -> {-0.10, 0.1}, LegendShadow -> False]n = 4; l = 0.1;
Plot[{f[l, n, x] * 10, 1 - F[l, n, x]}, {x, 0, 500},
PlotRange -> {{0, 100}, {0, 1.5}},

```

```

PlotStyle → {Directive[RGBColor[0.58847, 0.22163, 0.16064], Thick],
Directive[RGBColor[0.291989, 0.437977, 0.888609], Thick]},
AxesLabel → {Style[x, 16], Style[, 16]},
TicksStyle → Directive[FontSize → 16], GridLines → Automatic,
GridLinesStyle → Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed],
PlotLegend → { $f_{\text{Er1}(4,0.1)}(x)$ ,
 $1 - F_{\text{Er1}(4,0.1)}(x)$ }, LegendSize → {0.8, 0.4},
LegendPosition → {-0.10, 0.1}, LegendShadow → False]

```

Διάγραμμα 25: Συνάρτηση Πυκνότητα και Δεξιάς Ουράς Μείξης Κατανομών

```

Plot[{(0.2f[3, 2, x] + 0.8f[0.1, 4, x]) * 5, 0.2(1 - F[3, 2, x]) + 0.8(1 - F[0.1, 4, x])},
{x, 0, 500}, PlotRange → {{0, 100}, {0, 1.5}},
PlotStyle → {Directive[RGBColor[0.58847, 0.22163, 0.16064], Thick],
Directive[RGBColor[0.291989, 0.437977, 0.888609], Thick]},
AxesLabel → {Style[x, 16], Style[, 16]},
TicksStyle → Directive[FontSize → 16], GridLines → Automatic,
GridLinesStyle → Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed],
PlotLegend → {0.2 $f_{\text{Er1}(2,3)}(x)$ +0.8 $f_{\text{Er1}(4,0.1)}(x)$ ,
0.2(1- $F_{\text{Er1}(2,3)}(x)$ )+0.8(1- $F_{\text{Er1}(4,0.1)}(x)$ )},
LegendSize → {1.5, 0.4}, LegendPosition → {-0.50, 0.1},
LegendShadow → False]
Plot[{(0.7f[3, 2, x] + 0.3f[0.1, 4, x]), 0.7(1 - F[3, 2, x])+
0.3(1 - F[0.1, 4, x])}, {x, 0, 500}, PlotRange → {{0, 100}, {0, 1}},
PlotStyle → {Directive[RGBColor[0.58847, 0.22163, 0.16064], Thick],
Directive[RGBColor[0.291989, 0.437977, 0.888609], Thick]},
AxesLabel → {Style[x, 16], Style[, 16]},

```

```

TicksStyle → Directive[FontSize → 16], GridLines → Automatic,
GridLinesStyle → Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed],
PlotLegend → {0.7 $f_{\text{Er1}(2,3)}(x)$ +0.3 $f_{\text{Er1}(4,0.1)}(x)$ ,
0.7(1- $F_{\text{Er1}(2,3)}(x)$ )+0.3(1- $F_{\text{Er1}(4,0.1)}(x)$ )},
LegendSize → {1.5, 0.4}, LegendPosition → {-0.80, 0.1},
LegendShadow → False]

```

Διάγραμμα 26: Εφαρμογή της συνθήκης του Ορισμού 2.4.1 για τη Συνάρτηση Πυκνότητας για $p = 0.7$ (αριστερά) και $p = 0.3$ (δεξιά)

```

x = Range[0.1, 101, 0.1]; y = 1;
Plot[{g[3, 2, 0.1, 4, 0.7, 0.2 * x + 0.8(x + 5)], 0.2 * g[3, 2, 0.1, 4, 0.7, x] + 0.8 * g[3, 2, 0.1, 4, 0.7, x + 5]},
PlotRange → {{0, 100}, {0, 0.02}},
PlotStyle → {Directive[RGBColor[0.58847, 0.22163, 0.16064], Thick],
Directive[RGBColor[0.291989, 0.437977, 0.888609], Thick]},
AxesLabel → {Style[x, 16], Style[, 16]},
TicksStyle → Directive[FontSize → 16],
GridLines → Automatic,
GridLinesStyle → Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed],
PlotLegend → {g(0.2 x+0.8), 0.2 g(x)+0.8 g(1)},
LegendSize → {1, 0.4}, LegendPosition → {-0.50, 0.1},
LegendShadow → False]
x = Range[0.1, 101, 0.1]; y = 1;
Plot[{g[3, 2, 0.1, 4, 0.3, 0.8 * x + 0.2(x + 5)],
0.8 * g[3, 2, 0.1, 4, 0.3, x] + 0.2 * g[3, 2, 0.1, 4, 0.3, x + 5]}, {x, 0, 100},
PlotRange → {{0, 100}, {0, 0.02}},
PlotStyle → {Directive[RGBColor[0.58847, 0.22163, 0.16064], Thick],
Directive[RGBColor[0.291989, 0.437977, 0.888609], Thick]},

```

```

AxesLabel → {Style[x, 16], Style[, 16]},
TicksStyle → Directive[FontSize → 16],
GridLines → Automatic,
GridLinesStyle → Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed],
PlotLegend → {g(0.8 x+0.2), 0.8 g(x)+0.2 g(1)},
LegendSize → {1, 0.4}, LegendPosition → {-0.1, 0.1},
LegendShadow → False]

```

Διάγραμμα 27: Εφαρμογή της Ανισότητας (;;) στη Συνάρτηση Πιθανότητας

```

x = Range[1, 101, 0.1]; y = 1;
f = Table[ListLinePlot[{g[3, 2, 0.1, 4, 0.7, a * x + (1 - a) * y],
(Abs[g[3, 2, 0.1, 4, 0.7, x]]^a) * (Abs[g[3, 2, 0.1, 4, 0.7, y]]^(1 - a))}],
PlotStyle → {Directive[RGBColor[0.58847, 0.22163, 0.16064], Thick],
Directive[RGBColor[0.291989, 0.437977, 0.888609], Thick]},
AxesLabel → {Style[x, 16], Style[, 16]},
TicksStyle → Directive[FontSize → 16],
GridLines → Automatic,
GridLinesStyle → Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed],
Epilog → {Text[Style[a = <> ToString[a], 25,
RGBColor[0.341176, 0.34902, 0.380392]], Scaled[{0.5, 0.5}],
{Center, Center}]]], {a, 0.1, 1, 0.001}];
Export[f.png, f, VideoFrames]
x = Range[1, 101, 0.1]; y = 1;
ff = Table[ListLinePlot[{g[3, 2, 0.1, 4, p, 0.2 * x + (1 - 0.2) * y],
(g[3, 2, 0.1, 4, p, x]^0.2) * (g[3, 2, 0.1, 4, p, y]^(1 - 0.2))}],
PlotStyle → {Directive[RGBColor[0.58847, 0.22163, 0.16064],

```

```
Thick], Directive[RGBColor[0.291989, 0.437977, 0.888609], Thick]},  
AxesLabel → {Style[x, 16], Style[, 16]},  
TicksStyle → Directive[FontSize → 16],  
GridLines → Automatic,  
GridLinesStyle → Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed],  
Epilog → {Text[Style[p= <> ToString[p], 25,  
RGBColor[0.341176, 0.34902, 0.380392]], Scaled[{0.5, 0.5}],  
{Center, Center}]]], {p, 0.1, 0.99, 0.001}}];  
Export[ff.png, ff, VideoFrames]
```

Διάγραμμα 28: Εφαρμογή της Ανισότητας (;;) στη Συνάρτηση Πυκνότητας για $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = \lambda + 5$ (αριστερά) και $\lambda_1 = \lambda + 25$, $\lambda_2 = \lambda$ (δεξιά)

```

x = Range[1, 101, 0.1]; y = 1;

j = Table[ListLinePlot[{g[1a, 2, 1a + 5, 4, 0.7, 0.2 * x + (1 - 0.2) * y],
(Abs[g[1a, 2, 1a + 5, 4, 0.7, x]]^0.2) * (Abs[g[1a,
2, 1a + 5, 4, 0.7, y]]^(1 - 0.2))}], (*,
PlotRange -> {{0, 60}, {0, 0.45}}, *)
PlotStyle -> {Directive[RGBColor[0.58847, 0.22163, 0.16064], Thick],
Directive[RGBColor[0.291989, 0.437977, 0.888609], Thick]},
AxesLabel -> {Style[x, 16], Style[, 16]},
TicksStyle -> Directive[FontSize -> 16],
GridLines -> Automatic,
GridLinesStyle -> Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed],
Epilog -> {Text[Style[λ= <> ToString[1a], 25,
RGBColor[0.341176, 0.34902, 0.380392]], Scaled[{0.5, 0.5}],
{Center, -4.35}]}], {1a, 0.1, 20, 0.5}];
Export[j.png, j, VideoFrames]

x = Range[1, 101, 0.1]; y = 1;

jj = Table[ListLinePlot[{g[1a + 25, 2, 1a, 4, 0.7, 0.2 * x + (1 - 0.2) * y],
(Abs[g[1a + 25, 2, 1a, 4, 0.7, x]]^0.2) * (Abs[g[1a + 25
, 2, 1a, 4, 0.7, y]]^(1 - 0.2))}], (*,
PlotRange -> {{0, 60}, {0, 0.45}}, *)
PlotStyle -> {Directive[RGBColor[0.58847, 0.22163, 0.16064], Thick],
Directive[RGBColor[0.291989, 0.437977, 0.888609], Thick]},
AxesLabel -> {Style[x, 16], Style[, 16]},
TicksStyle -> Directive[FontSize -> 16],

```

```

GridLines → Automatic,
GridLinesStyle → Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed],
Epilog → {Text[Style[λ= <> ToString[1a], 25,
RGBColor[0.341176, 0.34902, 0.380392]], Scaled[{0.5, 0.5}],
{Center, -4.35}]]], {1a, 0.1, 20, 0.5}];
Export[jj.png, jj, VideoFrames]

```

Διάγραμμα 29: Εφαρμογή της Ανισότητας (;;) στη Συνάρτηση Πυκνότητας για $n_1 = n_2 = n$ (αριστερά) και $n_1 = n$, $n_2 = n + 25$ (δεξιά)

```

x = Range[1, 101, 0.1]; y = 1;
h = Table[ListLinePlot[{g[3, n, 0.1, n, 0.7, 0.2 * x + (1 - 0.2) * y],
(Abs[g[3, n, 0.1, n, 0.7, x]]^0.2) * (Abs[g[3, n, 0.1, n, 0.7, y]]^(1 - 0.2))}],
PlotStyle → {Directive[RGBColor[0.58847, 0.22163, 0.16064], Thick],
Directive[RGBColor[0.291989, 0.437977, 0.888609], Thick]},
AxesLabel → {Style[x, 16], Style[, 16]},
TicksStyle → Directive[FontSize → 16],
GridLines → Automatic,
GridLinesStyle → Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed],
Epilog → {Text[Style[n= <> ToString[n], 25,
RGBColor[0.341176, 0.34902, 0.380392]], Scaled[{0.5, 0.5}],
{Center, -4.35}]]], {n, 2, 20, 1}];
Export[h.png, h, VideoFrames]
x = Range[1, 101, 0.1]; y = 1;
hh = Table[ListLinePlot[{g[3, n, 0.1, n + 25, 0.7, 0.2 * x + (1 - 0.2) * y],
(Abs[g[3, n, 0.1, n + 25, 0.7, x]]^0.2) * (Abs[g[3, n, 0.1, n + 25, 0.7, y]]^(1 - 0.2))}],
(*, PlotRange → {{0, 60}, {0, 0.45}}, *)
PlotStyle → {Directive[RGBColor[0.58847, 0.22163, 0.16064], Thick],

```

```

Directive[RGBColor[0.291989, 0.437977, 0.888609], Thick]},
AxesLabel → {Style[x, 16], Style[, 16]},
TicksStyle → Directive[FontSize → 16],
GridLines → Automatic,
GridLinesStyle → Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed],
Epilog → {Text[Style[n= <> ToString[n], 25,
RGBColor[0.341176, 0.34902, 0.380392]], Scaled[{0.5, 0.5}],
{Center, -4.35}]}], {n, 2, 20, 1}];
Export[hh.png, hh, VideoFrames]

```

Διάγραμμα 30: Μορφές Συνάρτησης Βαθμίδας Αποτυχίας

```

x = Range[0.1, 10000, 0.1];
ListLinePlot[{rmixed[2, 7, 0.001, 2, 0.01, x]},
PlotRange → {{0, 100}, {0, 0.005}},
PlotStyle → {Directive[RGBColor[0.58847, 0.22163, 0.16064], Thick]},
AxesLabel → {Style[x, 16], Style[r(x), 16]},
TicksStyle → Directive[FontSize → 16],
GridLines → Automatic,
GridLinesStyle → Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed],
AxesLabel → {Style[x, 16], Style[r(x), 16]},
TicksStyle → Directive[FontSize → 16], GridLines → Automatic,
GridLinesStyle → Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed],
PlotLegend → {0.01 Erl(7, 2)+0.99 Erl(2, 0.001)},
LegendSize → {1.2, 0.1}, LegendPosition → {-0.5, 0.2},
LegendShadow → False]

```

Διάγραμμα 31: Συνάρτηση Βαθμίδας Αποτυχίας για τη Μείξη του Τύπου (A)


```
n1 = 5; l1 = 1; n2 = 5; l2 = 0.3; p = 0.5;
Show[Plot[rmixed[l1, n1, l2, n2, p, x], {x, 0.1, 100}, PlotRange → {{0, 50}, {-0.01, 0.30}},
GridLines → {{5, 10}, {}}, GridLinesStyle → Directive[Gray, Dashed]
],
Graphics[Text[Style[StringForm[“α”], FontSize → 15, Gray], {4, Center}]],
Graphics[Text[Style[StringForm[“β”], FontSize → 15, Gray], {11, Center}]]]
```

Διάγραμμα 32: Βαθμίδα Αποτυχίας για $0.5Erl(3, 0.1) + 0.5Erl(3 + d, 0.1)$ και $0.5Erl(3, 0.1) + 0.5Erl(3 + d, 1)$

```

x = Range[1, 101, 0.1];

k = Table[ListLinePlot[{rmixed[0.1, 3, 0.1, 3 + d, 0.5, x]},
PlotStyle → {Directive[RGBColor[0.58847, 0.22163, 0.16064], Thick]},
AxesLabel → {Style[x, 16], Style[r(x), 16]},
TicksStyle → Directive[FontSize → 16], GridLines → Automatic,
GridLinesStyle → Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed],
Epilog → {Text[Style[d = <> ToString[d], 25,
RGBColor[0.341176, 0.34902, 0.380392]], Scaled[{0.5, 0.5}],
{Center, Center}]}], {d, 10, 200, 1}];

Export[k.png, k, VideoFrames]

kk = Table[ListLinePlot[{rmixed[0.1, 3, 1, 3 + d, 0.5, x]},
PlotStyle → {Directive[RGBColor[0.58847, 0.22163, 0.16064], Thick]},
AxesLabel → {Style[x, 16], Style[r(x), 16]},
TicksStyle → Directive[FontSize → 16], GridLines → Automatic,
GridLinesStyle → Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed],
Epilog → {Text[Style[d = <> ToString[d], 25,
RGBColor[0.341176, 0.34902, 0.380392]],
Scaled[{0.5, 0.5}], {Center, Center}]}], {d, 10, 200, 1}];

Export[kk.png, kk, VideoFrames]

```

Διάγραμμα 33: Βαθμίδα Αποτυχίας για $0.7Erl(n, 3) + 0.3Erl(n, 50)$ (αριστερά) και για $0.5Erl(2, 5) + 0.5Erl(n, 5)$ (δεξιά)

```

x = Range[1, 101, 0.1];

t = Table[ListLinePlot[{rmixed[3, n, 50, n, 0.7, x]},
PlotRange → {{0, 100}, Automatic},

```

```

PlotStyle → {Directive[RGBColor[0.58847, 0.22163, 0.16064], Thick]},
AxesLabel → {Style[x, 16], Style[r(x), 16]},
TicksStyle → Directive[FontSize → 16], GridLines → Automatic,
GridLinesStyle → Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed],
Epilog → {Text[Style[n= <> ToString[n], 25,
RGBColor[0.341176, 0.34902, 0.380392]], Scaled[{0.5, 0.5}],
{Center, Center}]]], {n, 2, 50, 1}};
Export[t.png, t, VideoFrames] tt = Table[ListLinePlot[{rmixed[5, 2, 5, n, 0.5, x],
rmixed[5, 2, 10, n, 0.5, x]}, PlotRange → {{0, 60}, Automatic},
PlotStyle → {Directive[RGBColor[0.58847, 0.22163, 0.16064], Thick],
Directive[RGBColor[0.291989, 0.437977, 0.888609], Thick]},
AxesLabel → {Style[x, 16], Style[r(x), 16]},
TicksStyle → Directive[FontSize → 16], GridLines → Automatic,
GridLinesStyle → Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed],
Epilog → {Text[Style[n= <> ToString[n], 25,
RGBColor[0.341176, 0.34902, 0.380392]], Scaled[{0.5, 0.5}],
{Center, Center}]]], {n, 2, 50, 1}};
Export[tt.png, tt, VideoFrames]

```

Διάγραμμα 34: Συναρτήσεις Πυκνότητας των αντίστοιχων Μορφών των Συναρτήσεων Βαθμίδας Αποτυχίας

```

Plot[{g[1, 5, 0.3, 5, 0.5, x]}, {x, 0, 100},
PlotRange → {{0, 60}, {0, 0.12}},
PlotStyle → {Directive[RGBColor[0.58847, 0.22163, 0.16064], Thick]},
AxesLabel → {Style[x, 16], Style[, 16]},
TicksStyle → Directive[FontSize → 16], GridLines → Automatic,
GridLinesStyle → Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed],

```

```

PlotLegend → {0.5 Er1(5,1)+0.5 Er1(5,0.5)}, LegendSize → {1.2, 0.1},
LegendPosition → {-0.5, -0.2}, LegendShadow → False]
Plot[{g[20, 3, 20, 5, 0.5, x]}, {x, 0, 100},
PlotRange → {{0, 1}, {0, 4.5}},
PlotStyle → {Directive[RGBColor[0.58847, 0.22163, 0.16064], Thick]},
AxesLabel → {Style[x, 16], Style[, 16]},
TicksStyle → Directive[FontSize → 16], GridLines → Automatic,
GridLinesStyle → Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed],
PlotLegend → {0.5 Er1(3,20)+0.5 Er1(5,20)}, LegendSize → {1.2, 0.1},
LegendPosition → {-0.5, 0.1}, LegendShadow → False]
Plot[{g[0.1, 3, 0.1, 30, 0.5, x]}, {x, 0, 100},
PlotRange → {{0, 100}, {0, 0.02}},
PlotStyle → {Directive[RGBColor[0.58847, 0.22163, 0.16064], Thick]},
AxesLabel → {Style[x, 16], Style[, 16]},
TicksStyle → Directive[FontSize → 16], GridLines → Automatic,
GridLinesStyle → Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed],
PlotLegend → {0.5 Er1(3,0.1)+0.5 Er1(30,0.1)}, LegendSize → {1.2, 0.1},
LegendPosition → {-0.5, 0.2}, LegendShadow → False]
Plot[{g[0.1, 1, 0.1, 20, 0.5, x]}, {x, 0, 100},
PlotRange → {{0, 60}, {0, 0.06}},
PlotStyle → {Directive[RGBColor[0.58847, 0.22163, 0.16064], Thick]},
AxesLabel → {Style[x, 16], Style[(x), 16]},
TicksStyle → Directive[FontSize → 16], GridLines → Automatic,
GridLinesStyle → Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed],
PlotLegend → {0.5 Er1(1,0.1)+0.5 Er1(20,0.1)},
LegendSize → {1.2, 0.1}, LegendPosition → {-0.5, 0.3},

```

LegendShadow → False]

Διάγραμμα 35: Συνάρτηση Πυκνότητας Μείξης και Επιμέρους Κατανομών

```
x = Range[1, 101, 0.1];  
v = Table[ListLinePlot[{g[1, 5, 0.5, 5, p, x], f[1, 5, x], f[0.5, 5, x]},  
PlotRange → {{0, 200}, {0, 0.5}},]  
PlotStyle → {Directive[RGBColor[0.58847, 0.22163, 0.16064], Thick],  
Directive[RGBColor[0.291989, 0.437977, 0.888609], Thick],  
Directive[RGBColor[0.341176, 0.34902, 0.380392], Thick]},  
AxesLabel → {Style[x, 16], Style[, 16]},  
TicksStyle → Directive[FontSize → 16], GridLines → Automatic,  
GridLinesStyle → Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed],  
Epilog → {Text[Style[p = <> ToString[p], 25,  
RGBColor[0.341176, 0.34902, 0.380392]], Scaled[{0.5, 0.5}],  
{Center, Center}]}], {p, 0.1, 0.99, 0.01}}];  
Export[v.png, v, VideoFrames]  
vv = Table[ListLinePlot[{g[1, 5, 1, 10, p, x], f[1, 5, x], f[1, 10, x]},  
PlotRange → {{0, 200}, {0, 0.5}},  
PlotStyle → {Directive[RGBColor[0.58847, 0.22163, 0.16064], Thick],  
Directive[RGBColor[0.291989, 0.437977, 0.888609], Thick],  
Directive[RGBColor[0.341176, 0.34902, 0.380392], Thick]},  
AxesLabel → {Style[x, 16], Style[, 16]},  
TicksStyle → Directive[FontSize → 16], GridLines → Automatic,  
GridLinesStyle → Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed],  
Epilog → {Text[Style[p = <> ToString[p], 25,  
RGBColor[0.341176, 0.34902, 0.380392]], Scaled[{0.5, 0.5}],
```

```
{Center, Center}]]], {p, 0.1, 0.99, 0.01}];
```

```
Export[vv.png, vv, VideoFrames]
```

Διάγραμμα 36: Συναρτήσεις Μέσου Υπολειπόμενου Χρόνου Ζωής

```
Plot[{mr10[1, 5, 0.3, 5, 0.5, x]}, {x, 0, 100},  
PlotStyle → {Directive[RGBColor[0.58847, 0.22163, 0.16064],  
Thick]}, AxesLabel → {Style[x, 16], Style[m(x), 16]},  
TicksStyle → Directive[FontSize → 16], GridLines → Automatic,  
GridLinesStyle → Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed],  
AxesLabel → {Style[x, 16], Style[r(x), 16]},  
TicksStyle → Directive[FontSize → 16], GridLines → Automatic,  
GridLinesStyle → Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed],  
PlotLegend → {0.5 Erl(5, 1)+0.5 Erl(5, 0.5)}, LegendSize → {1.0, 0.1},  
LegendPosition → {-0.5, -0.2}, LegendShadow → False]  
Plot[{mr10[20, 3, 20, 5, 0.5, x]}, {x, 0, 100},  
PlotRange → {{0, 2}, {0, 0.3}},  
PlotStyle → {Directive[RGBColor[0.58847, 0.22163, 0.16064], Thick]},  
AxesLabel → {Style[x, 16], Style[m(x), 16]},  
TicksStyle → Directive[FontSize → 16], GridLines → Automatic,  
GridLinesStyle → Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed],  
AxesLabel → {Style[x, 16], Style[r(x), 16]},  
TicksStyle → Directive[FontSize → 16], GridLines → Automatic,  
GridLinesStyle → Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed],  
PlotLegend → {0.5 Erl(3, 20)+0.5 Erl(5, 20)},  
LegendSize → {1.2, 0.1}, LegendPosition → {-0.5, -0.05},  
LegendShadow → False]
```

```

Plot[{mr10[0.1, 3, 0.1, 30, 0.5, x]}, {x, 0, 100},
PlotStyle → {Directive[RGBColor[0.58847, 0.22163, 0.16064], Thick]},
AxesLabel → {Style[x, 16], Style[m(x), 16]},
TicksStyle → Directive[FontSize → 16], GridLines → Automatic,
GridLinesStyle → Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed],
AxesLabel → {Style[x, 16], Style[r(x), 16]},
TicksStyle → Directive[FontSize → 16], GridLines → Automatic,
GridLinesStyle → Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed],
PlotLegend → {0.5 Erl(3, 0.1) + 0.5 Erl(30, 0.1)}, LegendSize → {1, 0.1},
LegendPosition → {-0.35, -0.2}, LegendShadow → False]
Plot[{mr10[0.1, 1, 0.1, 20, 0.5, x]}, {x, 0, 100},
PlotRange → {{0, 100}, {0, 200}},
PlotStyle → {Directive[RGBColor[0.58847, 0.22163, 0.16064], Thick]},
AxesLabel → {Style[x, 16], Style[m(x), 16]},
TicksStyle → Directive[FontSize → 16], GridLines → Automatic,
GridLinesStyle → Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed],
AxesLabel → {Style[x, 16], Style[r(x), 16]},
TicksStyle → Directive[FontSize → 16], GridLines → Automatic,
GridLinesStyle → Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed],
PlotLegend → {0.5 Erl(1, 0.1) + 0.5 Erl(20, 0.1)},
LegendSize → {1.0, 0.1}, LegendPosition → {-0.20, 0.3},
LegendShadow → False]

```

Διάγραμμα 37: Μέσος Υπολειπόμενος Χρόνος Ζωής και Βαθμίδα Αποτυχίας για $0.5Erl(1, 1) + 0.5Erl(2, 1)$

```

Plot[{rmixed[1, 1, 1, 2, 0.5, x], mr10[1, 1, 1, 2, 0.5, x]}, {x, 0, 100},
PlotRange → {{0, 30}, {0, 2}},

```

```

PlotStyle → {Directive[RGBColor[0.58847, 0.22163, 0.16064], Thick],
Directive[RGBColor[0.291989, 0.437977, 0.888609], Thick]},
AxesLabel → {Style[x, 16], Style[, 16]},
TicksStyle → Directive[FontSize → 16], GridLines → Automatic,
GridLinesStyle → Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed],
PlotLegend → {r(x), m(x)}, LegendSize → {0.4, 0.4},
LegendPosition → {0.2, 0.05}, LegendShadow → False]

```

Διάγραμμα 38: Βαθμίδα Αποτυχίας (αριστερά) και Μέσος Υπολειπόμενος Χρόνος Ζωής (δεξιά) για τις Μείξεις $0.95Erl(15, 0.1) + 0.05Erl(3, 12)$ (πάνω) και $0.95Erl(4, 0.15) + 0.05Erl(3, 5)$ (κάτω)

```

Plot[{rmixed[1, 15, 2, 3, 0.95, x]}, {x, 0, 100},
PlotRange → {{0, 20}, {0, 0.4}},
PlotStyle → {Directive[RGBColor[0.58847, 0.22163, 0.16064], Thick]},
AxesLabel → {Style[x, 16], Style[r(x), 16]},
TicksStyle → Directive[FontSize → 16], GridLines → Automatic,
GridLinesStyle → Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed],
PlotLegend → {0.95 Erl(15, 1)+0.05 Erl(3, 2)},
LegendSize → {1.0, 0.1}, LegendPosition → {-0.60, 0.3},
LegendShadow → False]
Plot[{mr10[1, 15, 2, 3, 0.95, x]}, {x, 0, 100},
PlotRange → {{0, 100}, {0, 15}},
PlotStyle → {Directive[RGBColor[0.58847, 0.22163, 0.16064], Thick]},
AxesLabel → {Style[x, 16], Style[m(x), 16]},
TicksStyle → Directive[FontSize → 16], GridLines → Automatic,
GridLinesStyle → Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed],
PlotLegend → {0.95 Erl(15, 1)+0.05 Erl(3, 2)},

```



```

LegendSize → {1.0, 0.1}, LegendPosition → {-0.50, 0.3},
LegendShadow → False]
Plot[{rmixed[0.15, 4, 5, 3, 0.95, x]}, {x, 0, 100},
PlotRange → {{0, 20}, {0, 0.1}},
PlotStyle → {Directive[RGBColor[0.58847, 0.22163, 0.16064], Thick]},]
AxesLabel → {Style[x, 16], Style[r(x), 16]},
TicksStyle → Directive[FontSize → 16], GridLines → Automatic,
GridLinesStyle → Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed],
PlotLegend → {0.95 Er1(4, 0.15)+0.05 Er1(3, 5)},
LegendSize → {1.0, 0.1}, LegendPosition → {-0.50, 0.3},
LegendShadow → False]
Plot[{mr10[0.15, 4, 5, 3, 0.95, x]}, {x, 0, 100},
PlotRange → {{0, 40}, {0, 35}},
PlotStyle → {Directive[RGBColor[0.58847, 0.22163, 0.16064], Thick]},]
AxesLabel → {Style[x, 16], Style[m(x), 16]},
TicksStyle → Directive[FontSize → 16], GridLines → Automatic,
GridLinesStyle → Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed],
PlotLegend → {0.95 Er1(4, 0.15)+0.05 Er1(3, 5)},
LegendSize → {1.0, 0.1}, LegendPosition → {-0.50, 0.3},
LegendShadow → False]

```

Διάγραμμα 39: Βαθμίδα Αποτυχίας και Μέσος Υπολειπόμενος Χρόνος Ζωής Μειξέων, Μέρος I

$$p = 0.95; n1 = 1; l1 = 1.5; n2 = 4; l2 = 1.5;$$

```

Plot[{(pn1/l1 + (1 - p)n2/l2)^(-1),
rmixed[l1, n1, l2, n2, p, x],
mr10[l1, n1, l2, n2, p, x]}, {x, 0, 100},

```

```

PlotRange → {{0, 25}, {0, 2}},
PlotStyle → {Directive[RGBColor[0.58847, 0.22163, 0.16064], Thin],
Directive[RGBColor[0.291989, 0.437977, 0.888609], Thick],
Directive[RGBColor[0.341176, 0.34902, 0.380392], Thick]},
AxesLabel → {Style[x, 16], Style[ , 16]},
TicksStyle → Directive[FontSize → 16], GridLines → Automatic,
GridLinesStyle → Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed],
PlotLegend → {1/  $\mu$ ,  $r_{.95\text{Erl}(1,1.5)+.05\text{Erl}(4,1.5)}(\mathbf{x})$ ,
 $m_{.95\text{Erl}(1,1.5)+.05\text{Erl}(4,1.5)}(\mathbf{x})$ },
LegendSize → {1.2, 0.2}, LegendPosition → {-0.5, 0.20},
LegendShadow → False]
p = 0.90; n1 = 1; l1 = 0.5; n2 = 14; l2 = 0.5;
Plot[{{(pn1/l1 + (1 - p)n2/l2)^(-1),
rmixed[l1, n1, l2, n2, p, x],
mr10[l1, n1, l2, n2, p, x]/25}}, {x, 0, 100}},
PlotRange → {{0, 25}, {0, 1.0}},
PlotStyle → {Directive[RGBColor[0.58847, 0.22163, 0.16064], Thin],
Directive[RGBColor[0.291989, 0.437977, 0.888609], Thick],
Directive[RGBColor[0.341176, 0.34902, 0.380392], Thick]},
AxesLabel → {Style[x, 16], Style[ , 16]},
TicksStyle → Directive[FontSize → 16], GridLines → Automatic,
GridLinesStyle → Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed],
PlotLegend → {1/  $\mu$ ,  $r_{.90\text{Erl}(1,0.5)+.10\text{Erl}(14,0.5)}(\mathbf{x})$ ,
 $m_{.90\text{Erl}(1,0.5)+.10\text{Erl}(14,0.5)}(\mathbf{x})$ }, LegendSize → {1.2, 0.2},
LegendPosition → {-0.5, 0.25}, LegendShadow → False]
p = 0.50; n1 = 1; l1 = 0.1; n2 = 10; l2 = 15;

```

```

Plot[ $\{(pn1/l1 + (1 - p)n2/l2)^{-1}$ ,
rmixed[l1, n1, l2, n2, p, x],
mr10[l1, n1, l2, n2, p, x]/10}, {x, 0, 100},
PlotRange  $\rightarrow$  {{0, 10}, {0, 2}},
PlotStyle  $\rightarrow$  {Directive[RGBColor[0.58847, 0.22163, 0.16064], Thin],
Directive[RGBColor[0.291989, 0.437977, 0.888609], Thick],
Directive[RGBColor[0.341176, 0.34902, 0.380392], Thick]},
AxesLabel  $\rightarrow$  {Style[x, 16], Style[ , 16]},
TicksStyle  $\rightarrow$  Directive[FontSize  $\rightarrow$  16], GridLines  $\rightarrow$  Automatic,
GridLinesStyle  $\rightarrow$  Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed],
PlotLegend  $\rightarrow$  {1/  $\mu$ ,  $r_{.50Er1(1,0.1)+.50Er1(10,15)}$ (x),
 $m_{.50Er1(1,0.1)+.50Er1(10,15)}$ (x)/10}, LegendSize  $\rightarrow$  {1.2, 0.2},
LegendPosition  $\rightarrow$  {-0.5, 0.25}, LegendShadow  $\rightarrow$  False]
p = 0.50; n1 = 1; l1 = 0.1; n2 = 5; l2 = 0.15;
Plot[ $\{(pn1/l1 + (1 - p)n2/l2)^{-1}$ ,
rmixed[l1, n1, l2, n2, p, x],
mr10[l1, n1, l2, n2, p, x]/60}, {x, 0, 100},
PlotRange  $\rightarrow$  {{0, 100}, {0, 0.4}},
PlotStyle  $\rightarrow$  {Directive[RGBColor[0.58847, 0.22163, 0.16064], Thin],
Directive[RGBColor[0.291989, 0.437977, 0.888609], Thick],
Directive[RGBColor[0.341176, 0.34902, 0.380392], Thick]},
AxesLabel  $\rightarrow$  {Style[x, 16], Style[ , 16]},
TicksStyle  $\rightarrow$  Directive[FontSize  $\rightarrow$  16], GridLines  $\rightarrow$  Automatic,
GridLinesStyle  $\rightarrow$  Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed],
PlotLegend  $\rightarrow$  {1/  $\mu$ ,  $r_{.50Er1(1,0.1)+.50Er1(5,0.15)}$ (x),
 $m_{.50Er1(1,0.1)+.50Er1(5,0.15)}$ (x)/60}, LegendSize  $\rightarrow$  {1.2, 0.2},

```

LegendPosition $\rightarrow \{-0.5, 0.25\}$, LegendShadow \rightarrow False]

Διάγραμμα 40: Βαθμίδα Αποτυχίας και Μέσος Υπολειπόμενος Χρόνος Ζωής Μείξεων, Μέρος II

Plot[{rmixed[2, 6, 15, 20, 0.5, x], mr10[2, 6, 15, 20, 0.5, x]/10}, {x, 0, 100},

PlotRange $\rightarrow \{\{0, 4\}, \{0, 1.5\}\}$,

PlotStyle $\rightarrow \{\text{Directive}[\text{RGBColor}[0.58847, 0.22163, 0.16064], \text{Thick}],$

Directive[RGBColor[0.291989, 0.437977, 0.888609], Thick]},

AxesLabel $\rightarrow \{\text{Style}[x, 16], \text{Style}[, 16]\}$,

TicksStyle \rightarrow Directive[FontSize \rightarrow 16], GridLines \rightarrow Automatic,

GridLinesStyle \rightarrow Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed],

PlotLegend $\rightarrow \{r_{.50Er1(6,2)+.50Er1(20,15)}(x),$

$m_{.50Er1(6,2)+.50Er1(20,15)}(x)/10\}$,

LegendSize $\rightarrow \{1.2, 0.2\}$, LegendPosition $\rightarrow \{-0.5, 0.25\}$,

LegendShadow \rightarrow False]

Plot[{rmixed[1, 5, 0.3, 5, 0.5, x], mr10[1, 5, 0.3, 5, 0.5, x]/40}, {x, 0, 100},

PlotRange $\rightarrow \{\{0, 100\}, \{0, 0.4\}\}$,

PlotStyle $\rightarrow \{\text{Directive}[\text{RGBColor}[0.58847, 0.22163, 0.16064], \text{Thick}],$

Directive[RGBColor[0.291989, 0.437977, 0.888609], Thick]},

AxesLabel $\rightarrow \{\text{Style}[x, 16], \text{Style}[, 16]\}$,

TicksStyle \rightarrow Directive[FontSize \rightarrow 16], GridLines \rightarrow Automatic,

GridLinesStyle \rightarrow Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed],

PlotLegend $\rightarrow \{r_{.50Er1(5,1)+.50Er1(5,0.3)}(x),$

$m_{.50Er1(5,1)+.50Er1(5,0.3)}(x)/10\}$, LegendSize $\rightarrow \{1.2, 0.2\}$,

LegendPosition $\rightarrow \{-0.5, 0.25\}$, LegendShadow \rightarrow False]

Plot[{rmixed[20, 2, 2, 2, 0.5, x], mr10[20, 2, 2, 2, 0.5, x]}, {x, 0, 100},

PlotRange $\rightarrow \{\{0, 4\}, \{0, 5\}\}$,

```

PlotStyle → {Directive[RGBColor[0.58847, 0.22163, 0.16064], Thick],
Directive[RGBColor[0.291989, 0.437977, 0.888609], Thick]},
AxesLabel → {Style[x, 16], Style[, 16]},
TicksStyle → Directive[FontSize → 16], GridLines → Automatic,
GridLinesStyle → Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed],
PlotLegend → { $r_{.50Er1(2,20)+.50Er1(2,2)}(x)$ ,
 $m_{.50Er1(2,20)+.50Er1(2,2)}(x)$ }, LegendSize → {1.2, 0.2},
LegendPosition → {-0.5, 0.25}, LegendShadow → False]
Plot[{rmixed[3, 5, 2, 2, 0.5, x], mrl0[3, 5, 2, 2, 0.5, x]}, {x, 0, 100},
PlotRange → {{0, 4}, {0, 3}},
PlotStyle → {Directive[RGBColor[0.58847, 0.22163, 0.16064], Thick],
Directive[RGBColor[0.291989, 0.437977, 0.888609], Thick]},
AxesLabel → {Style[x, 16], Style[, 16]},
TicksStyle → Directive[FontSize → 16], GridLines → Automatic,
GridLinesStyle → Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed],
PlotLegend → { $r_{.50Er1(5,3)+.50Er1(2,2)}(x)$ ,
 $m_{.50Er1(5,3)+.50Er1(2,2)}(x)$ }, LegendSize → {1.2, 0.2},
LegendPosition → {-0.5, 0.25}, LegendShadow → False]

```

Διάγραμμα 41: Μείξη $pErl(n_1, \lambda_1) + (1 - p)Erl(n_1 + r, \lambda_1)$ με Μεταβλλόμενο το r

```

x = Range[0.1, 100, 0.1]; p = 0.2; n1 = 20; l1 = 1; l2 = 1;
mu11[r_] := p n1 / l1 + (1 - p) (n1 + r) / l2;
mu22[r_] := p (n1 (n1 + 1) / l1^2) + (1 - p)
((n1 + r) (n1 + r + 1) / l2^2);
y = Table[ListLinePlot[{mrl0[l1, n1, l2, n1 + r, p, x],
ConstantArray[mu22[r] / mu11[r], Length[x]]},

```

```

PlotRange → {{0, 500}, {0, (mu22[100]/mu11[100]) + 5}},
PlotStyle → {Directive[RGBColor[0.58847, 0.22163, 0.16064], Thick]},
AxesLabel → {Style[x, 16], Style[m(x), 16]},
TicksStyle → Directive[FontSize → 16], GridLines → Automatic,
GridLinesStyle → Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed],
Epilog → {Text[Style[r= <> ToString[r], 25,
RGBColor[0.341176, 0.34902, 0.380392]], Scaled[{0.5, 0.5}],
{Center, Center}]]], {r, 2, 100, 1}}];
Export[y.png, y, VideoFrames]

```

Διάγραμμα 42: Μείξη $pErl(n_1, \lambda_1) + (1 - p)Erl(n_1, \lambda_1 + r)$ με Μεταβαλλόμενο το r

```

mu1111[p_] := pn1/11 + (1 - p)n2/12
mu2222[p_] := p(n1(n1 + 1)/11^2) + (1 - p)(n2(n2 + 1)/12^2)
x = Range[0.1, 100, 0.1]; p = 0.2; n1 = 20; n2 = 20; l1 = 1;
yy = Table[ListLinePlot[{mrl0[l1, n1, l1 + r, n2, p, x],
ConstantArray[mu2222[r]/mu1111[r], Length[x]]},
PlotRange → {{0, 500}, {0, (mu2222[100]/mu1111[100]) * 5}},
PlotStyle → {Directive[RGBColor[0.58847, 0.22163, 0.16064], Thick]},
AxesLabel → {Style[x, 16], Style[m(x), 16]},
TicksStyle → Directive[FontSize → 16], GridLines → Automatic,
GridLinesStyle → Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed],
Epilog → {Text[Style[r= <> ToString[r], 25,
RGBColor[0.341176, 0.34902, 0.380392]], Scaled[{0.5, 0.5}],
{Center, Center}]]], {r, 2, 10, 0.1}}];
Export[yy.png, yy, VideoFrames]

```

Διάγραμμα 43: Μείξη $pErl(n_1, \lambda_1) + (1 - p)Erl(n_2, \lambda_2)$ με Μεταβαλλόμενο το p

```
mu1111[p_]:=pn1/l1 + (1 - p)n2/l2
mu2222[p_]:=p(n1(n1 + 1)/l1^2) + (1 - p)
(n2(n2 + 1)/l2^2)
x = Range[0.1, 100, 0.1]; n1 = 20; n2 = 25; l1 = 5; l2 = 2;
yyy = Table[ListLinePlot[{mr10[l1, n1, l2, n2, p, x],
ConstantArray[mu2222[p]/mu1111[p], Length[x]]},
PlotRange -> {{0, 500}, {0, 20}},
PlotStyle -> {Directive[RGBColor[0.58847, 0.22163, 0.16064], Thick]},
AxesLabel -> {Style[x, 16], Style[m(x), 16]},
TicksStyle -> Directive[FontSize -> 16], GridLines -> Automatic,
GridLinesStyle -> Directive[RGBColor[0.4, 0.4, 0.4], Dashed],
Epilog -> {Text[Style[p= <> ToString[p], 25,
RGBColor[0.341176, 0.34902, 0.380392]], Scaled[{0.5, 0.5}],
{Center, Center}]}], {p, .1, 0.99, 0.01}];
Export[yyy.png, yyy, VideoFrames]
```

Πίνακας 6. 1: Διαστήματα Κυρτότητας για τη Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας και τη Συνάρτηση Δεξιάς Ουράς

$$n = 2; l = 3; \text{Reduce}[D[f[l, n, x], \{x, 2\}] \geq 0, x]; \text{Reduce}[D[1 - F[l, n, x], \{x, 2\}] \geq 0, x]$$

$$n = 4; l = 0.1; \text{Reduce}[D[f[l, n, x], \{x, 2\}] \geq 0, x]; \text{Reduce}[D[1 - F[l, n, x], \{x, 2\}] \geq 0, x]$$

$$n = 2; l = 10; \text{Reduce}[D[f[l, n, x], \{x, 2\}] \geq 0, x]; \text{Reduce}[D[1 - F[l, n, x], \{x, 2\}] \geq 0, x]$$

Πίνακας 6. 2: Διαστήματα Κυρτότητας για τη Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας και τη Συνάρτηση Δεξιάς Ουράς Μείξεων Κατανομών

$$\text{Reduce}[D[0.2 * f[3, 2, x] + (1 - 0.2)f[0.1, 4, x], \{x, 2\}] \geq 0, x]$$

$$\text{Reduce}[D[0.2 * (1 - F[3, 2, x]) + (1 - 0.2) * (1 - F[0.1, 4, x]), \{x, 2\}] \geq 0, x]$$

$$\text{Reduce}[D[0.7 * f[3, 2, x] + (1 - 0.7)f[0.1, 4, x], \{x, 2\}] \geq 0, x]$$

$$\text{Reduce}[D[0.7 * (1 - F[3, 2, x]) + (1 - 0.7) * (1 - F[0.1, 4, x]), \{x, 2\}] \geq 0, x]$$

$$a = 0.2; \text{Reduce}[D[a * f[11, n1, x] + (1 - a)f[12, n2, x], \{x, 2\}] \geq 0, x]$$

$$\text{Reduce}[D[a * (1 - F[11, n1, x]) + (1 - a) * (1 - F[12, n2, x]), \{x, 2\}] \geq 0, x]$$

$$a = 0.7; \text{Reduce}[D[a * f[11, n1, x] + (1 - a)f[12, n2, x], \{x, 2\}] \geq 0, x]$$

$$\text{Reduce}[D[a * (1 - F[11, n1, x]) + (1 - a) * (1 - F[12, n2, x]), \{x, 2\}] \geq 0, x]$$

Πίνακας 7. 1: Όρια Λόγου της Συνάρτησης Μείξης Βαθμίδας Αποτυχίας προς τις επιμέρους Βαθμίδες Αποτυχίας

$$f[1_, k_, x_] := (l^k) * (x^(k - 1)) * \text{Exp}[-l * x] / (k - 1)!;$$

$$F[1_, k_, x_] := 1 - \text{Sum}[(1/n!) * \text{Exp}[-l * x] * (l * x)^n, \{n, 0, k - 1\}];$$

$$\text{rmixed}[11_, n1_, 12_, n2_, p_, x_] :=$$

$$(p * f[11, n1, x] + (1 - p) * f[12, n2, x]) / (p * (1 - F[11, n1, x]) + (1 - p) * (1 - F[12, n2, x]));$$

$$r[1_, n_, x_] := f[l, n, x] / (1 - F[l, n, x]);$$

Limit[rmixed[20, 2, 20, 3, 0.5, x]/r[20, 2, x], x → Infinity]
 Limit[rmixed[20, 2, 20, 3, 0.5, x]/r[20, 3, x], x → Infinity]
 Limit[rmixed[2.5, 2, 2.5, 3, 0.75, x]/r[2.5, 2, x], x → Infinity]
 Limit[rmixed[2.5, 2, 2.5, 3, 0.75, x]/r[2.5, 3, x], x → Infinity]
 Limit[rmixed[1.5, 1, 1.5, 7, 0.75, x]/r[1.5, 1, x], x → Infinity]
 Limit[rmixed[1.5, 1, 1.5, 7, 0.75, x]/r[1.5, 7, x], x → Infinity]
 Limit[rmixed[20, 2, 2, 2, 0.5, x]/r[20, 2, x], x → Infinity]
 Limit[rmixed[20, 2, 2, 2, 0.5, x]/r[2, 2, x], x → Infinity]
 Limit[rmixed[15, 5, 20, 5, 0.5, x]/r[15, 5, x], x → Infinity]
 Limit[rmixed[15, 5, 20, 5, 0.5, x]/r[20, 5, x], x → Infinity]
 Limit[rmixed[1, 3, 0.2, 3, 0.5, x]/r[1, 3, x], x → Infinity]
 Limit[rmixed[1, 3, 0.2, 3, 0.5, x]/r[0.2, 3, x], x → Infinity]
 Limit[rmixed[1, 5, 0.3, 5, 0.5, x]/r[1, 5, x], x → Infinity]
 Limit[rmixed[1, 5, 0.3, 5, 0.5, x]/r[0.3, 5, x], x → Infinity]

Πίνακας 7. 2: Διαστήματα Μεταβλητής x με Κυρτή Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας

$f[l_-, k_-, x_-] := (l^k) * (x^{(k-1)}) * \text{Exp}[-l * x] / (k-1)!;$
 $g[l1_-, n1_-, l2_-, n2_-, p_-, x_-] := p * f[l1, n1, x] + (1 - p) * f[l2, n2, x];$
 Reduce[D[g[1, 5, 0.3, 5, 0.5, x], {x, 2}] ≥ 0, x]
 Reduce[D[g[0.1, 3, 0.1, 30, 0.5, x], {x, 2}] ≥ 0, x]
 Reduce[D[g[20, 3, 20, 5, 0.5, x], {x, 2}] ≥ 0, x]
 Reduce[D[g[0.1, 1, 0.1, 20, 0.5, x], {x, 2}] ≥ 0, x]

Πίνακας 7. 3: Διάλυση Συντελεστών (Κύρτωσης, Ασυμμετρίας, Μεταβλητότητας)^T

```

fmixi[x_]:=p * PDF[GammaDistribution[n1, l1], x] + (1 - p) * PDF[GammaDistribution[n2, l2], x]
meso:=Integrate[x * fmixi[x], {x, 0, Infinity}]
variance:=Integrate[(x - meso)^2 * fmixi[x], {x, 0, Infinity}]
numerator:=Integrate[(x - meso)^4 * fmixi[x], {x, 0, Infinity}]
kyrtosi:=numerator/variance^2
skew:=Integrate[(((x - meso)/Sqrt[variance])^3) * fmixi[x], {x, 0, Infinity}]
cv:=Sqrt[variance]/meso
n1 = 3; l1 = 1; n2 = 5; l2 = 11; p = 0.15;
kyrtosi
skew
cv
n1 = 3; l1 = 1; n2 = 5; l2 = 11; p = 0.50;
kyrtosi
skew
cv
n1 = 3; l1 = 1; n2 = 5; l2 = 11; p = 0.75;
kyrtosi
skew
cv
n1 = 3; l1 = 10; n2 = 5; l2 = 11; p = 0.15;
kyrtosi
skew
cv
n1 = 3; l1 = 10; n2 = 5; l2 = 11; p = 0.50;
kyrtosi

```

skew

cv

$n1 = 3; l1 = 10; n2 = 5; l2 = 11; p = 0.75;$

kyrtosi

skew

cv

$n1 = 3; l1 = 0.1; n2 = 5; l2 = 11; p = 0.15;$

kyrtosi

skew

cv

$n1 = 3; l1 = 0.1; n2 = 5; l2 = 11; p = 0.50;$

kyrtosi

skew

cv

$n1 = 3; l1 = 0.1; n2 = 5; l2 = 11; p = 0.75;$

kyrtosi

skew

cv

$n1 = 3; l1 = 3; n2 = 30; l2 = 11; p = 0.15;$

kyrtosi

skew

cv

$n1 = 3; l1 = 3; n2 = 30; l2 = 11; p = 0.50;$

kyrtosi

skew

cv

$n1 = 3; l1 = 3; n2 = 30; l2 = 11; p = 0.75;$

kyrtosi

skew

cv

$n1 = 3; l1 = 8; n2 = 30; l2 = 11; p = 0.15;$

kyrtosi

skew

cv

$n1 = 3; l1 = 8; n2 = 30; l2 = 11; p = 0.50;$

kyrtosi

skew

cv

$n1 = 3; l1 = 8; n2 = 30; l2 = 11; p = 0.75;$

kyrtosi

skew

cv

$n1 = 3; l1 = 20; n2 = 30; l2 = 11; p = 0.15;$

kyrtosi

skew

cv

$n1 = 3; l1 = 20; n2 = 30; l2 = 11; p = 0.50;$

kyrtosi

skew

cv

$n1 = 3; l1 = 20; n2 = 30; l2 = 11; p = 0.75;$

kyrtosi

skew

cv

$n1 = 1; l1 = 2; n2 = 20; l2 = 11; p = 0.15;$

kyrtosi

skew

cv

$n1 = 1; l1 = 2; n2 = 20; l2 = 11; p = 0.50;$

kyrtosi

skew

cv

$n1 = 1; l1 = 2; n2 = 20; l2 = 11; p = 0.75;$

kyrtosi

skew

cv

$n1 = 1; l1 = 5; n2 = 20; l2 = 11; p = 0.15;$

kyrtosi

skew

cv

$n1 = 1; l1 = 5; n2 = 20; l2 = 11; p = 0.50;$

kyrtosi

skew

cv

$n1 = 1; l1 = 5; n2 = 20; l2 = 11; p = 0.75;$

kyrtosi

skew

cv

```

n1 = 1; l1 = 10; n2 = 20; l2 = 11; p = 0.15;
kyrtosi
skew
cv
n1 = 1; l1 = 10; n2 = 20; l2 = 11; p = 0.50;
kyrtosi
skew
cv
n1 = 1; l1 = 10; n2 = 20; l2 = 11; p = 0.75;
kyrtosi
skew
cv

```

Πίνακας 7. 4: Στατιστικά Μείξεων Κατανομών

```

n1 = 2; l1 = 5; n2 = 8; l2 = 10; p = 0.50;
Print["Mean=", meso]
Print["Variance^(1/2)=", variance^(1/2)]
Print["CV=", cv]
Print["Variance=", variance]
Print["CV^2=", cv^2]
n1 = 12; l1 = 3; n2 = 20; l2 = 20; p = 0.70;
Print["Mean=", meso]
Print["Variance^(1/2)=", variance^(1/2)]
Print["CV=", cv]
Print["Variance=", variance]
Print["CV^2=", cv^2]

```

```

n1 = 12; l1 = 3; n2 = 12; l2 = 30; p = 0.70;
Print[‘Mean=’, meso]
Print[‘Variance^(1/2)=’, variance^(1/2)]
Print[‘CV=’, cv]
Print[‘Variance=’, variance]
Print[‘CV^2=’, cv^2]
n1 = 4; l1 = 5; n2 = 20; l2 = 10; p = 0.50;
Print[‘Mean=’, meso]
Print[‘Variance^(1/2)=’, variance^(1/2)]
Print[‘CV=’, cv]
Print[‘Variance=’, variance]
Print[‘CV^2=’, cv^2]
n1 = 10; l1 = 5; n2 = 20; l2 = 10; p = 0.50;
Print[‘Mean=’, meso]
Print[‘Variance^(1/2)=’, variance^(1/2)]
Print[‘CV=’, cv]
Print[‘Variance=’, variance]
Print[‘CV^2=’, cv^2]
n1 = 30; l1 = 26; n2 = 30; l2 = 25; p = 0.80;
Print[‘Mean=’, meso]
Print[‘Variance^(1/2)=’, variance^(1/2)]
Print[‘CV=’, cv]
Print[‘Variance=’, variance]
Print[‘CV^2=’, cv^2]
n1 = 12; l1 = 3; n2 = 12; l2 = 30; p = 0.20;
Print[‘Mean=’, meso]

```

```

Print["Variance^(1/2)=", variance^(1/2)]
Print["CV=", cv]
Print["Variance=", variance]
Print["CV^2=", cv^2]
n1 = 30; l1 = 2; n2 = 30; l2 = 25; p = 0.80;
Print["Mean=", meso]
Print["Variance^(1/2)=", variance^(1/2)]
Print["CV=", cv]
Print["Variance=", variance]
Print["CV^2=", cv^2]
n1 = 2; l1 = 2; n2 = 30; l2 = 25; p = 0.50;
Print["Mean=", meso]
Print["Variance^(1/2)=", variance^(1/2)]
Print["CV=", cv]
Print["Variance=", variance]
Print["CV^2=", cv^2]
n1 = 2; l1 = 2; n2 = 30; l2 = 25; p = 0.45;
Print["Mean=", meso]
Print["Variance^(1/2)=", variance^(1/2)]
Print["CV=", cv]
Print["Variance=", variance]
Print["CV^2=", cv^2]
n1 = 2; l1 = 2; n2 = 30; l2 = 25; p = 0.70;
Print["Mean=", meso]
Print["Variance^(1/2)=", variance^(1/2)]
Print["CV=", cv]

```



```
Print["Variance=", variance]
Print["CV^2=", cv^2]
n1 = 5; l1 = 2; n2 = 200; l2 = 2; p = 0.5;
```

Πίνακας 7. 5: Σημεία Καμπής Συναρτήσεων και Βέλτιστο Burn-in

```
Print[Σημεία Καμπής Βαθμίδας: ,
Assuming[{x ≥ 0}, Reduce[D[rmixed[l1, n1, l2, n2, p, x], {x, 1}] ≥ 0, x]]]
Print[Σημεία Καμπής Μέσου Υπολειπομένου: ,
Assuming[{x ≥ 0}, Reduce[D[mr1[x], {x, 1}] ≥ 0, x]]]
n1 = 5; l1 = 2; n2 = 200; l2 = 2; p = 0.75;
Print[Σημεία Καμπής Βαθμίδας: ,
Assuming[{x ≥ 0}, Reduce[D[rmixed[l1, n1, l2, n2, p, x], {x, 1}] ≥ 0, x]]]
Print[Σημεία Καμπής Μέσου Υπολειπομένου: ,
Assuming[{x ≥ 0}, Reduce[D[mr1[x], {x, 1}] ≥ 0, x]]]
n1 = 5; l1 = 3; n2 = 200; l2 = 3; p = 0.5;
Print[Σημεία Καμπής Βαθμίδας: ,
Assuming[{x ≥ 0}, Reduce[D[rmixed[l1, n1, l2, n2, p, x], {x, 1}] ≥ 0, x]]]
Print[Σημεία Καμπής Μέσου Υπολειπομένου: ,
Assuming[{x ≥ 0}, Reduce[D[mr1[x], {x, 1}] ≥ 0, x]]]
n1 = 5; l1 = 4; n2 = 200; l2 = 4; p = 0.5;
Print[Σημεία Καμπής Βαθμίδας: ,
Assuming[{x ≥ 0}, Reduce[D[rmixed[l1, n1, l2, n2, p, x], {x, 1}] ≥ 0, x]]]
Print[Σημεία Καμπής Μέσου Υπολειπομένου: ,
Assuming[{x ≥ 0}, Reduce[D[mr1[x], {x, 1}] ≥ 0, x]]]
n1 = 5; l1 = 10; n2 = 200; l2 = 10; p = 0.5;
Print[Σημεία Καμπής Βαθμίδας: ,
```

```

Assuming[{x ≥ 0}, Reduce[D[rmixed[l1, n1, l2, n2, p, x], {x, 1}] ≥ 0, x]]
Print[Σημεια Καμπης Μεσου Υπολειπομενου: ,
Assuming[{x ≥ 0}, Reduce[D[mr1[x], {x, 1}] ≥ 0, x]]
n1 = 5; l1 = 2; n2 = 100; l2 = 2; p = 0.5;
Print[Σημεια Καμπης Βαθμιδας: ,
Assuming[{x ≥ 0}, Reduce[D[rmixed[l1, n1, l2, n2, p, x], {x, 1}] ≥ 0, x]]
Print[Σημεια Καμπης Μεσου Υπολειπομενου: ,
Assuming[{x ≥ 0}, Reduce[D[mr1[x], {x, 1}] ≥ 0, x]]
n1 = 4; l1 = 2; n2 = 200; l2 = 2; p = 0.5;
Print[Σημεια Καμπης Βαθμιδας: ,
Assuming[{x ≥ 0}, Reduce[D[rmixed[l1, n1, l2, n2, p, x], {x, 1}] ≥ 0, x]]
Print[Σημεια Καμπης Μεσου Υπολειπομενου: ,
Assuming[{x ≥ 0}, Reduce[D[mr1[x], {x, 1}] ≥ 0, x]]
n1 = 6; l1 = 2; n2 = 205; l2 = 2; p = 0.5;
Print[Σημεια Καμπης Βαθμιδας: ,
Assuming[{x ≥ 0}, Reduce[D[rmixed[l1, n1, l2, n2, p, x], {x, 1}] ≥ 0, x]]
Print[Σημεια Καμπης Μεσου Υπολειπομενου: ,
Assuming[{x ≥ 0}, Reduce[D[mr1[x], {x, 1}] ≥ 0, x]]

```

