Τμήμα Χρηματοοικονομικής και Τραπεζικής Διοικητικής

ΠΜΣ στη

Χρηματοοικονομική και Τραπεζική με κατεύθυνση στη Χρηματοοικονομική και Τραπεζική Διοικητική

Διπλωματική Εργασία

Θέμα

«ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΤΕΚΜΑΡΤΗΣ & ΤΟΠΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑΣ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΑ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΑ ΠΡΟΑΙΡΕΣΗΣ»

ΒΛΑΧΟΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ

ΜΧΡΗ 1605

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ

Επικ. Καθηγητής ΕΓΓΛΕΖΟΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ

ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Αναπ. Καθηγητής ΚΟΥΡΟΓΕΝΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ

Καθηγητής ΣΚΙΑΔΟΠΟΥΛΟΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2019

Περίληψη

Θεωρώντας ότι τα δικαιώματα που παρατηρούνται στις αγορές είναι ορθά τιμολογημένα μπορεί να εξαχθεί η μεταβλητότητα που τις δικαιολογεί, η οποία αντιστοιχεί στην έννοια της τεκμαρτής μεταβλητότητας (implied volatility). Η μεταβλητότητα αυτή λειτουργεί σε ένα κατά κάποιο τρόπο μακροχρόνιο πλαίσιο και αγνοεί την τυχόν μεταβολή της σε επιμέρους χρονικές στιγμές. Αυτό το κενό έρχεται να το καλύψει η λεγόμενη τοπική μεταβλητότητα (local volatility). Στην εργασία αυτή παρουσιάζονται όλα τα απαραίτητα θεωρητικά υποδείγματα που αφορούν την εκτίμηση αυτών των μεταβλητοτήτων με όλες τις αναγκαίες υποθέσεις. Καθώς η μεταβλητότητα εξαρτάται από δύο βασικούς παράγοντες, όπως είναι ο χρόνος στη λήξη του δικαιώματος και η τιμή εξάσκησης, προκύπτει πλέον μια διμεταβλητή συνάρτηση μεταβλητότητας η οποία δίνει τη λεγόμενη επιφάνεια μεταβλητότητας (volatility surface). Με εμπειρικά δεδομένα από το χρηματιστήριο του Johannesburg που αφορούν δικαιώματα πάνω σε futures επί του δείκτη FTSE TOP 40 INDEX και λήξης μέσα στο 2019, εκτιμήθηκαν οι επιφάνειες τεκμαρτής και τοπικής μεταβλητότητας. Τα αποτελέσματα έδειξαν μια αναμενόμενη ομαλή επιφάνεια τεκμαρτής μεταβλητότητας σύμφωνα με τη θεωρία, ενώ για την τοπική μεταβλητότητα προέκυψε μια επιφάνεια με ανωμαλίες σε πιο έντονο βαθμό από τον αναμενόμενο, η οποία υποδεικνύει την ύπαρξη παραγόντων που επιδρούν στη μεταβλητότητα βραχυχρόνια.

Λέξεις κλειδιά: Implied Volatility , Local Volatility ,Volatility Surface, FTSE Top 40, Futures , διμεταβλητή συνάρτηση , χρόνος στη λήξη, τιμή εξάσκησης , ομαλή επιφάνεια, ανώμαλη επιφάνεια.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται μια εισαγωγή στην παρούσα εργασία. Αρχικά παρουσιάζεται το θέμα που θα απασχολήσει την παρούσα εργασία και έπειτα παρουσιάζεται ένα βασικό θεωρητικό υπόβαθρο. Πιο συγκεκριμένα, παρουσιάζεται το υπόδειγμα Black & Scholes που χρησιμοποιείται για την αποτίμηση των ευρωπαϊκών δικαιωμάτων (European Options) και πιο συγκεκριμένα η έννοια της μεταβλητότητας (volatility) της τιμής του υποκείμενου τίτλου πάνω στο οποίο είναι γραμμένο ένα δικαίωμα. Καθώς η εργασία ασχολείται με την μεταβλητότητα, αναπτύσσεται η έννοια του χαμόγελου μεταβλητότητας (volatility smile).

1.1 Θέμα Εργασίας

Το κεντρικό θέμα της παρούσας εργασίας είναι το υπόδειγμα αποτίμησης Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων προαίρεσης (European options) ως προς την διάσταση της μεταβλητότητας (volatility) που αναφέρεται στην τιμή του υποκείμενου τίτλου (underlying asset).

Η διάσταση αυτή θεωρείται μείζονος σημασίας όχι μόνο για την ορθή αποτίμηση των απλών ευρωπαϊκών δικαιωμάτων (plain vanilla options), αλλά και για μια ορθή αποτίμηση και πιο περίπλοκων δικαιωμάτων των λεγόμενων εξωτικών δικαιωμάτων (exotic options).

Το θέμα με την μεταβλητότητα είναι ότι αποτελεί μια ιδιάζουσα περίπτωση ως προσδιοριστικός παράγοντας της τιμής των δικαιωμάτων. Πράγματι, σύμφωνα με τη θεωρία αποτίμησης των δικαιωμάτων, που θα αναπτυχθεί παρακάτω, η τιμή ενός δικαιώματος εξαρτάται, μεταξύ άλλων, και από την μεταβλητότητα. Το πρόβλημα είναι, όμως, ότι ενώ οι άλλοι προσδιοριστικοί παράγοντες είτε παρατηρούνται εύκολα από την αγορά των δικαιωμάτων άμεσα (τιμή εξάσκησης, χρόνος έως τη λήξη), είτε εύκολα προκύπτουν από τις αγορές χρήματος (επιτόκιο χωρίς κίνδυνο) και τις αγορές κεφαλαίου (μερισματική απόδοση), η μεταβλητότητα δεν είναι άμεσα παρατηρήσιμη από τις αγορές.

Για αυτό ακριβώς το λόγο ήταν απαραίτητη και αναγκαία η θεμελίωση και εφαρμογή θεωρητικών και εμπειρικών υποδειγμάτων που αφορούν την μεταβλητότητα της τιμής του υποκείμενου τίτλου. Για αυτό έχει αναπτυχθεί και η έννοια της τεκμαρτής μεταβλητότητας (implied volatility), με τη λογική ότι αφού δεν παρατηρείται άμεσα η μεταβλητότητα να υπολογισθεί (να τεκμαίρεται) η μεταβλητότητα ενός τίτλου που «δικαιολογεί» ένα τρέχον άμεσα παρατηρούμενο επίπεδο της τιμής ενός δικαιώματος που είναι γραμμένο πάνω σε αυτόν τον τίτλο.

Εντούτοις, ακόμη και η έννοια της τεκμαρτής μεταβλητότητας στηρίζεται σε κάποιες υποθέσεις μη ρεαλιστικές, όπως πχ ότι η μεταβλητότητα της τιμής του τίτλου παραμένει σταθερή σε όλες τις μελλοντικές στιγμές έως και τη λήξη ενός δικαιώματος γραμμένο πάνω σε αυτόν. Για αυτό και αναπτύχθηκε η έννοια της τοπικής μεταβλητότητας (local volatility), ώστε να ληφθεί υπόψη τυχόν μεταβολές της μελλοντικής μεταβλητότητας. Όλο αυτό είναι ανάλογο, όπως θα αναπτυχθεί περαιτέρω, με τη λογική της μοναδικής απόδοσης στη λήξη (yield to maturity) έως και τη λήξη ενός ομολόγου και των μελλοντικών αποδόσεων (forward rates) που με αυτά ανατοκίζονται τα κουπόνια που εισπράττονται κάθε περίοδο έως τη λήξη του ομολόγου.

Το κύριο θέμα, λοιπόν, της παρούσας εργασίας αφορά στην πλήρη παρουσίαση των εννοιών της τεκμαρτής και, κυρίως της τοπικής μεταβλητότητας, αλλά και των σχετικών μαθηματικών υποδειγμάτων που τις διέπουν. Σκοπός της εργασίας είναι εκτός από την πλήρη παρουσίαση των εννοιών και των υποδειγμάτων είναι να γίνουν και οι σχετικές συγκρίσεις μεταξύ τους, καθώς και να αναδειχθούν τα μειονεκτήματα και τα πλεονεκτήματα τους.

Εκτός από την θεωρητική παρουσίαση των σχετικών υποδειγμάτων, θα παρουσιαστεί και μια εμπειρική εφαρμογή σε πραγματικά δεδομένα που αφορούν τιμές δικαιωμάτων σε μια συγκεκριμένη αγορά, έτσι ώστε να εφαρμοστούν τα υποδείγματα της τεκμαρτής και τοπικής μεταβλητότητας και στην πράξη και να αναδειχθούν οι όποιες διαφορές και ομοιότητες μεταξύ τους.

1.2 Υπόδειγμα Black & Scholes και Μεταβλητότητα (Volatility)

Η βασική παραδοχή του υποδείγματος αποτίμησης ευρωπαϊκών δικαιωμάτων προαίρεσης των Black & Scholes ξεκινάει από την κανονικότητα των ποσοστιαίων αποδόσεων ενός υποκείμενου τίτλου σε ένα μικρό διάστημα χρόνου Δt, όπως αναφέρει ο Hull (2012). Αυτό σημαίνει ότι ισχύει το παρακάτω:

$$\frac{\Delta S}{S} \sim N(\mu \Delta t, \sigma^2 \Delta t) \qquad (1.1)$$

Όπου, μ = αναμενόμενη απόδοση του υποκείμενου τίτλου σε ετήσια βάση

σ = μεταβλητότητα (volatility) του υποκείμενου τίτλου σε ετήσια βάση

Ο πολλαπλασιαστής Δt υπονοεί ότι η μέση τιμή και η διακύμανση αναφέρονται σε αυτήν την μικρή χρονική περίοδο Δt. Από τη σχέση (1.1) προκύπτει ότι η ποσοστιαία απόδοση του τίτλου, που προσεγγίζεται και ως διαφορά λογαρίθμων των τιμών του, ακολουθεί την κανονική κατανομή. Έτσι, μέσα από εφαρμογή μαθηματικών και θεωρώντας χρονικό διάστημα T, που αντιπροσωπεύει το χρόνο έως στη λήξη του δικαιώματος, τότε προκύπτει η εξής κατανομή που αφορά τον λογάριθμο της τιμής του υποκείμενου τίτλου:

$$\frac{\Delta S}{S} \approx \Delta \ln S_T = lnS_T - lnS_0 = \ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right) \sim N\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma^2 T\right] \qquad (1.2)$$

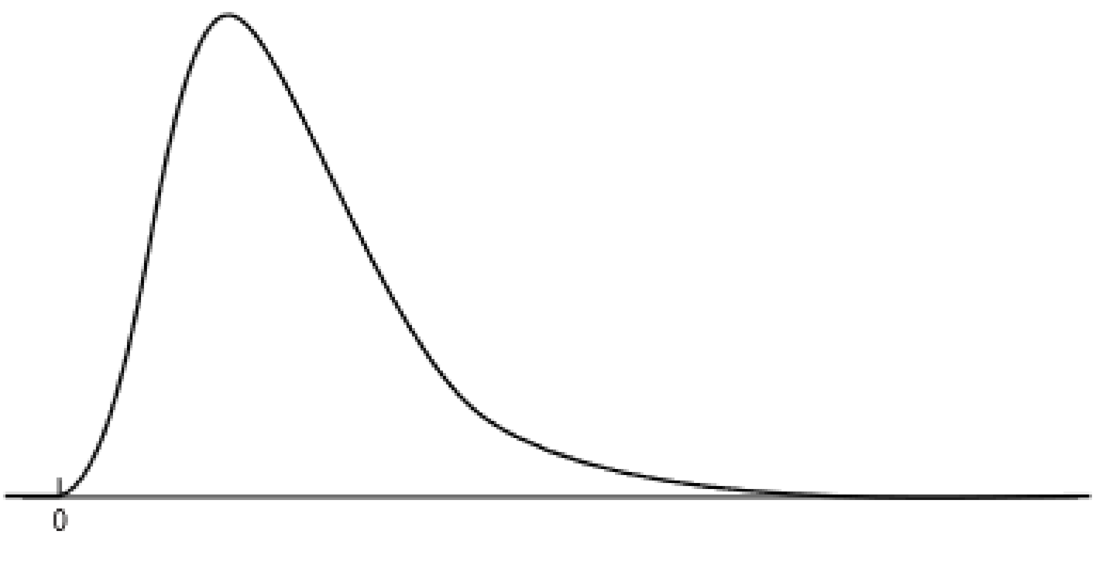
$$lnS_T \sim N\left[lnS_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma^2 T\right] \qquad (1.3)$$

Η σχέση (1.3) υποδηλώνει ότι αφού ο λογάριθμος της τιμής του υποκείμενου τίτλου στη λήξη T ακολουθεί την κανονική κατανομή, τότε η τιμή του τίτλου στη λήξη T ακολουθεί τη λογαριθμο-κανονική κατανομή (log-normal distribution). Σύμφωνα με τις μαθηματικές ιδιότητες που αφορούν το μέσο και την διακύμανση μιας λογαριθμο-κανονικής κατανομής σε σχέση με την κανονική, ισχύει το παρακάτω:

$$S_T \sim log - N\left[S_0 e^{\mu T}, S_0^2 e^{2\mu T}\left(e^{\sigma^2 T} - 1\right)\right] \qquad (1.4)$$

Η λογαριθμο-κανονική κατανομή είναι μια κατανομή με δεξιά ασυμμετρία, όπως στο σχήμα παρακάτω.

Διάγραμμα 1.1, Λογαριθμο-κανονική Κατανομή



Πηγή: Hull (2012)

Καθώς η τιμή ενός τίτλου μπορεί να λάβει μόνο θετικές τιμές, ενώ μπορεί να πάρει κάποιες ακραίες υψηλές τιμές, όταν η αγορά είναι σε ανοδική φάση, αλλά μπορεί να φτάσει μόνο κοντά στο μηδέν, όταν η αγορά καταρρέει, τότε αυτή η κατανομή φαίνεται να είναι απολύτως συμβατή με την πιθανή κατανομή της τιμής ενός υποκείμενου τίτλου.

Η συνεχώς ανατοκιζόμενη απόδοση ενός υποκείμενου τίτλου, έστω x, θα πρέπει να είναι συμβατή με τον τύπο του συνεχούς ανατοκισμού, έτσι ώστε να ισχύει το εξής:

$$S_T = S_0 e^{xT} \Rightarrow x = \frac{1}{T}\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right) \quad (1.5)$$

Με βάση λοιπόν τις σχέσεις (1.2) και (1.5) προκύπτει ότι για την κατανομή της συνεχούς ανατοκιζόμενης απόδοσης ισχύει το εξής:

$$x \sim N\left[\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \frac{\sigma^2}{T}\right] \quad (1.6)$$

Παρατηρείται ότι ενός κάποιος θα περίμενε η αναμενόμενη απόδοση της συνεχούς ανατοκιζόμενους απόδοσης να είναι μ, σύμφωνα με την σχέση (1.1), τελικά προκύπτει να είναι $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$, σύμφωνα με την σχέση (1.6). Αυτό εξηγείται, όπως αναφέρει ο Hull (2012), λόγων των ενδιάμεσων ανατοκισμών που προκύπτουν σε ένα οποιοδήποτε διάστημα του χρόνου. Εντούτοις, στην προκειμένη περίπτωση το ενδιαφέρον μελέτης δεν βρίσκεται στην συνεχώς ανατοκιζόμενη ή στην αναμενόμενη απόδοση ενός υποκείμενου τίτλου, αλλά στη μεταβλητότητα της τιμής του.

Σύμφωνα με τον Hull (2012), η μεταβλητότητα της τιμής ενός τίτλου, σ, είναι ένα μέτρο αβεβαιότητας για το μελλοντικό επίπεδο απόδοσης και τιμής ενός υποκείμενου τίτλου. Η μεταβλητότητα εκφράζεται ως ποσοστό, όπως και η απόδοση, και πολλαπλασιάζοντας την με την τρέχουσα τιμή ενός τίτλου (σε νομισματικές μονάδες) προκύπτει πόσο μπορεί να μεταβληθεί (πόσες νομισματικές μονάδες), κατά μέσο όρο, η τιμή του σε ένα έτος. Καθώς η μεταβλητότητα εκφράζεται σε ετήσια βάση, εάν πολλαπλασιαστεί με την τρέχουσα τιμή του υποκείμενου τίτλου, αλλά και με την τετραγωνική ρίζα του χρόνου, τότε υπολογίζεται η μεταβολή της τιμής του τίτλου σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα.

Η μεταβλητότητα σ είναι μια πολύ σημαντική παράμετρος στο πλαίσιο της αποτίμησης ευρωπαϊκών δικαιωμάτων προαίρεσης στο πλαίσιο του υποδείγματος των Black & Scholes, όπως θα παρουσιαστεί αμέσως παρακάτω.

Όπως αναφέρει ο Hull (2012), το υπόδειγμα αυτό διέπεται από τις παρακάτω βασικές παραδοχές:

1) Η τιμή του υποκείμενου τίτλου ακολουθεί τη λογαριθμο-κανονικής κατανομή με αναμενόμενη ετήσια απόδοση μ και ετήσια μεταβλητότητα σ σταθερές στο χρόνο
2) Επιτρέπεται η ανοιχτή πώληση τίτλων (short selling)
3) Δεν υπάρχουν κόστη συναλλαγών ή φόροι και οι συναλλαγές γίνονται και σε κλάσματα τίτλων
4) Δεν υπάρχουν μερίσματα
5) Δεν υπάρχουν ευκαιρίες αρμπιτράζ
6) Η συναλλαγή των τίτλων γίνεται σε συνεχής διάστημα
7) Το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο r είναι συνεχώς ανατοκιζόμενο και σταθερό για όλες τις λήξεις (επίπεδη καμπύλη επιτοκίων)

Θεωρώντας, λοιπόν, ένα χαρτοφυλάκιο με ένα δικαίωμα και κάποιες μονάδες του υποκείμενου τίτλου, τόσες ώστε να είναι πλήρως προστατευμένο από τον κίνδυνο ότι, σε συνθήκες μη αρμπιτράζ, θα πρέπει να αποδώσει όσο το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο, τότε, όπως αναφέρει και ο Hull (2012), προκύπτει η στοχαστική μερική διαφορική εξίσωση των Black & Scholes (stochastic partial differential equation – PDE) ως εξής:

$$\frac{\partial V_{BS}}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V_{BS}}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V_{BS}}{\partial S} - rV_{BS} = 0 \qquad (1.7)$$

Όπου, V_{BS} = η αξία του δικαιώματος

Σύμφωνα με την εξίσωση (1.7) μπορεί να αποτιμηθεί η αξία ενός δικαιώματος και, όπως επισημαίνει ο Hull (2012), αυτή η αξία είναι συνάρτηση της τρέχουσας τιμής του τίτλου, του χρόνου έως τη λήξη, του επιτοκίου χωρίς κίνδυνου και της μεταβλητότητας της τιμής του τίτλου, αλλά δεν είναι συνάρτηση των προτιμήσεων των επενδυτών, καθώς η αναμενόμενη απόδοση του τίτλου μ, που θα έδειχνε τις προτιμήσεις τους (με τη λογική ότι σε υψηλότερο κίνδυνο, οι επενδυτές που τον αποστρέφονται θα ζητούσαν υψηλότερη απόδοση) δεν εμφανίζεται πουθενά στην εξίσωση. Για αυτό και η αποτίμηση ευρωπαϊκών δικαιωμάτων προαίρεσης με βάση το υπόβαθρο των Black & Scholes πραγματοποιείται με την παραδοχή περί ουδετερότητας στον κίνδυνο (risk neutral valuation).

Στο πλαίσιο, λοιπόν, της ουδετερότητας στον κίνδυνο, η κάθε πιθανή χρηματική ροή από ένα δικαίωμα στη λήξη του θα πρέπει να προεξοφληθεί με το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο για να υπολογιστεί η παρούσα αξία των χρηματικών ροών η οποία και αντανακλά την τρέχουσα αξία – αποτίμηση της τιμής του δικαιώματος, όπως αναφέρει και ο Hull (2012).

Συνδυάζοντας, λοιπόν, την κατανομή της τιμής του υποκείμενου τίτλου με βάση τη σχέση (1.2) και την στοχαστική μερική διαφορική εξίσωση (1.7) η οποία επιλύεται ως προς την αξία του δικαιώματος προκύπτουν οι τύποι υπολογισμού για τις τιμές των δικαιωμάτων αγοράς (call c) και πώλησης (put p) με βάση τους Black & Scholes:

$$c = S_0 N(d_1) - Ke^{rT} N(d_2) \qquad (1.8)$$

$$p = Ke^{rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1) \qquad (1.9)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \qquad (1.10)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} \qquad (1.11)$$

N(Z) = αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής κατανομής, όπου Z ~ N(0,1).

Όπως αναφέρθηκε και πριν, αλλά και προκύπτει και πάλι από τους τύπους αποτίμησης των ευρωπαϊκών δικαιωμάτων (1.8) και (1.9), η τιμή ενός δικαιώματος εξαρτάται από την τρέχουσα τιμής του τίτλου, την τιμή εξάσκησης, το χρόνο έως τη λήξη, το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο και τη μεταβλητότητα της τιμής του τίτλου. Όλοι οι προσδιοριστικοί αυτοί παράγοντες είναι άμεσα παρατηρήσιμοι σε μια αγορά εκτός από την μεταβλητότητα, όπως επισημαίνει και ο Hull (2012).

Για αυτό το λόγο, άλλωστε έχουν αναπτυχθεί αρκετές θεωρίες και υποδείγματα που ασχολούνται με την έννοια της μεταβλητότητας και πως μπορεί αυτή να εκτιμηθεί.

Στο πλαίσιο της εκτίμησης της μεταβλητότητας της τιμής ενός υποκείμενου τίτλου, όπως αναφέρει ο Hull (2012), αυτή μπορεί να εκτιμηθεί με χρήση ιστορικών στοιχείων της τιμής του έστω S_0, S_1, …, S_n. Η σχετική εκτίμηση πραγματοποιείται υπολογίζοντας, αρχικά τις λογαριθμικές αποδόσεις για κάθε περίοδο:

$$u_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right) \text{ για i = 1, 2, ..,n} \qquad (1.12)$$

Έπειτα υπολογίζεται η τυπική απόκλιση αυτών των αποδόσεων, η οποία εκφράζεται ως η τυπική απόκλιση της περιόδου. Για παράδειγμα, με εβδομαδιαία συχνότητα παρατηρήσεων, θα προκύψει εβδομαδιαία τυπική απόκλιση:

$$s = \sqrt{\frac{\sum(u_i - \bar{u})^2}{n-1}} \tag{1.13}$$

Όπου, $\bar{u} = \frac{\sum u_i}{n}$ (1.14)

Η τυπική απόκλιση, λοιπόν, s είναι μια εκτίμηση της πραγματικής τυπικής απόκλισης $σ\sqrt{\tau}$, όπου σ είναι η τυπική απόκλιση σε ετήσια βάση ή αλλιώς η μεταβλητότητα που επιθυμείται να εκτιμηθεί και τ είναι το διάστημα του χρόνου (πχ μια εβδομάδα) που έχουν συλλεχθεί δεδομένα. Έτσι, η εκτίμηση, έστω $\hat{\sigma}$, της μεταβλητότητας σε ετήσια βάση έχει ως εξής:

$$\hat{\sigma} = \frac{s}{\sqrt{\tau}} \tag{1.15}$$

Πιο προηγμένες μέθοδοι για εκτίμηση της μεταβλητότητας αποτελούν, σύμφωνα με τον Hull (2012), τα οικονομετρικά υποδείγματα της οικογένειας GARCH, τα οποία θεωρούν ότι η μεταβλητότητα έχει μια δυναμική μέσα στο χρόνο και προσδιορίζεται σε περιοδική (πχ καθημερινή, εβδομαδιαία, κτλ) βάση από παρελθοντικές μεταβλητότητες και παρελθοντικά σοκ στις αποδόσεις. Εντούτοις, η πλήρης παράθεση αυτών των υποδειγμάτων είναι εκτός του σκοπού και το αντικειμένου μελέτης της παρούσας εργασίας.

Παρόλο που υπάρχουν μέθοδοι για να εκτμηθεί η μεταβλητότητα της τιμής ενός τίτλου, είτε απλές είτε πιο προηγμένες, ο Hull (2012) επισημαίνει ότι οι αναλυτές και διαπραγματευτές στις αγορές των δικαιωμάτων χρησιμοποιούν την έννοια της τεκμαρτής μεταβλητότητας (implied volatility), δηλαδή της μεταβλητότητας της τιμής ενός υποκείμενου τίτλου που «δικαιολογεί» ένα τρέχον άμεσα παρατηρούμενο επίπεδο της τιμής ενός δικαιώματος που είναι γραμμένο πάνω σε αυτόν.

Ο Hull (2012) επισημαίνει ότι από τους τύπους (1.8) και (1.9) δεν μπορεί να προκύψει αναλυτική λύση ως προς την μεταβλητότητα σ, δηλαδή να προκύψει μια συνάρτηση του σ ως προς τις παραμέτρους S_0, K, T, r και c ή p ανάλογα. Μπορεί απλά να προσεγγιστεί με αριθμητικό τρόπο μια λύση ως προς την παράμετρο σ.

Πιο συγκεκριμένα, με δεδομένες τις τιμές για τις παραμέτρους S_0, K, T, r που παρατηρούνται άμεσα στις αγορές προκύπτει βάσει των τύπων (1.8) ή (1.9) μια τιμή για το call ή το put. Γνωρίζοντας ότι όσο αυξάνει (μειώνεται) η μεταβλητότητα, αυξάνεται (μειώνεται) η τιμή και του c και του p, τότε μπορεί με διαδοχικές δοκιμές τιμών του σ να προσεγγίζεται όλο και πιο ακριβές η τιμή του c ή του p από τους τύπους (1.8) και (1.9), όπου η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να βρεθεί η τιμή του σ που θα δώσει με ακρίβεια την παρατηρούμενη αγοραία τιμή του c ή του p, ανάλογα με το πιο δικαίωμα χρησιμοποιείται. Η παραπάνω διαδικασία, βέβαια, υποθέτει ότι η αγορά των δικαιωμάτων λειτουργεί αποτελεσματικά (efficient market) και ότι οι παρατηρούμενες αγοραίες τιμές των δικαιωμάτων αντανακλούν τις θεωρητικές τιμές ισορροπίας όπως προκύπτουν από τους τύπους και τις σχετικές διαδικασίες αποτίμησης.

Η τεκμαρτή μεταβλητότητα χρησιμοποιείται, σύμφωνα με τον Hull (2012), για να αποκρυσταλλωθεί ποια είναι η γνώμη της αγοράς σχετικά με την μεταβλητότητα στην τιμή ενός τίτλου. Μάλιστα, σε αντίθεση με την ιστορική μεταβλητότητα που βασίζεται σε ιστορικά παρελθοντικά δεδομένα και είναι μοιραία προσανατολισμένη στο παρελθόν, η τεκμαρτή μεταβλητότητα είναι προσανατολισμένη στο μέλλον.

Για αυτό και πολύ συχνά, οι διαπραγματευτές στην αγορά δικαιωμάτων καθορίζουν το επίπεδο της για ένα δικαίωμα, παρά την τιμή του. Μάλιστα αυτό θεωρείται πιο αποδοτικό, διότι, όπως αναφέρει και ο Hull (2012), η τεκμαρτή μεταβλητότητα τείνει να μεταβάλλεται λιγότερο από ότι η τιμή ενός δικαιώματος. Επιπλέον, όπως τονίζεται και από τον Hull (2012), η τεκμαρτή μεταβλητότητα τίτλων πολύ ρευστοποιήσιμων δικαιωμάτων (πχ plain vanilla options) χρησιμοποιείται πολύ συχνά για να εκτιμηθεί η κατάλληλη τεκμαρτή μεταβλητότητα αλλά και οι τιμές που αφορούν πιο σύνθετα δικαιώματα (πχ exotic options).

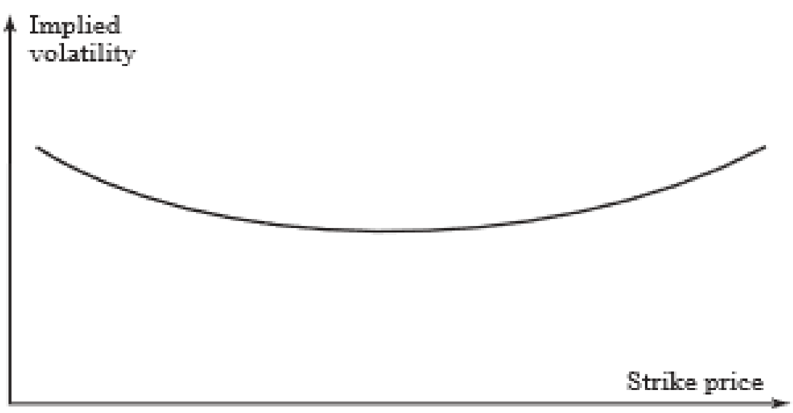
Αξίζει να σημειωθεί ότι υπάρχουν και επίσημοι δείκτες τεκμαρτής μεταβλητότητας, όπως ο δείκτης VIX που είναι ένας δείκτης τεκμαρτής μεταβλητότητας μηνιαίων δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης με αρκετές διαφορετικές τιμές εξάσκησης πάνω στον χρηματιστηριακό δείκτη S&P500, όπως αναφέρει ο Hull (2012).

1.3 Επιφάνεια Μεταβλητότητας (Volatility Smile) και Επιφάνεια (Volatilities Surface)

Ο Hull (2012) αναρωτιέται κατά πόσο το υπόδειγμα των Black & Scholes χρησιμοποιείται στην πράξη για να αποτιμηθούν οι τιμές των ευρωπαϊκών δικαιωμάτων, με την έννοια εάν όντως δίνει αξιόπιστες αποτιμήσεις και εάν οι διάφορες υποθέσεις, ειδικά για την κατανομή της τιμής του υποκείμενου τίτλου, όντως τηρούνται. Στην πραγματικότητα, το υπόδειγμα αυτό χρησιμοποιείται στην πράξη με την (τεκμαρτή) μεταβλητότητα που χρησιμοποιείται για να αποτιμηθεί ένα δικαίωμα να εξαρτάται από την τιμή εξάσκησης και το χρόνο στη λήξη, όπως επισημαίνει σχετικά ο Hull (2012).

Η σχέση ανάμεσα στην τεκμαρτή μεταβλητότητα και την τιμή εξάσκησης, για δεδομένο χρόνο στη λήξη, δείχνει ότι για πολύ μικρές και πολύ μεγάλες τιμές εξάσκησης αντιστοιχεί υψηλή μεταβλητότητα, ενώ για μεσαίες τιμές εξάσκησης αντιστοιχεί χαμηλή μεταβλητότητα, στο πλαίσιο μιας συνάρτηση σχήματος «U» γνωστού στη βιβλιογραφία και ως «χαμόγελο μεταβλητότητας» (volatility smile), όπως αναφέρει σχετικά ο Hull (2012), και απεικονίζεται στο παρακάτω διάγραμμα 1.2 παρακάτω.

Διάγραμμα 1.2, Χαμόγελο Μεταβλητότητας (Volatility Smile)

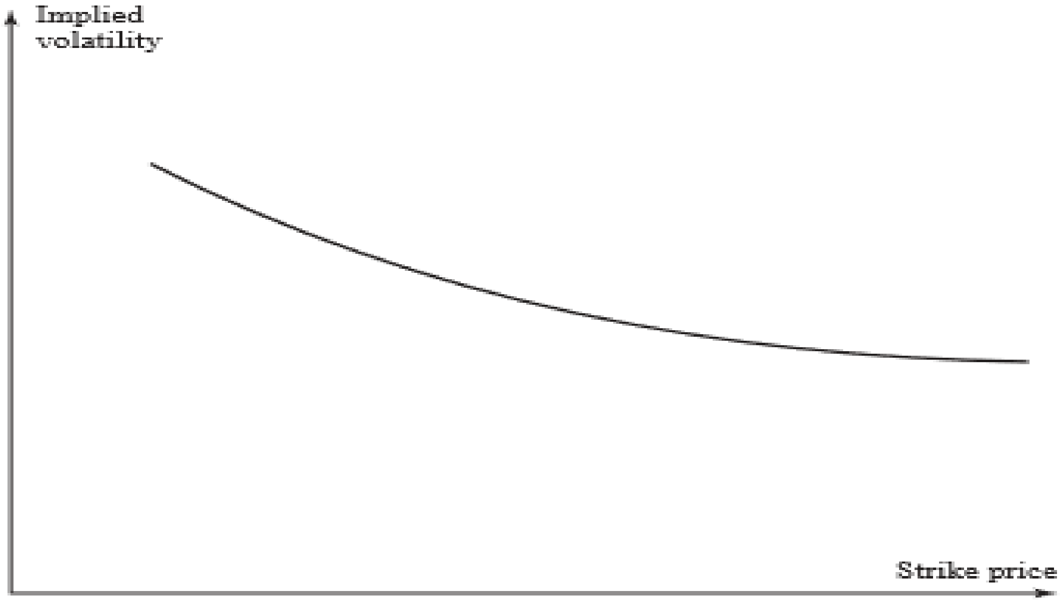


Πηγή: Hull (2012)

Με βάση την γνωστή σχέση ισοδυναμίας τιμών δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης (put-call parity), προκύπτει εύκολα ότι η τεκμαρτή μεταβλητότητα είναι η ίδια για put και call που έχουν ίδια τιμή εξάσκησης και ίδιο χρόνο στη λήξη. Έτσι, όπως επισημαίνει και ο Hull (2012), δικαιώματα αγοράς και πώλησης με ίδιο χρόνο στη λήξη αναμένεται να έχουν ίδιο «χαμόγελο μεταβλητότητας».

Σύμφωνα με τον Hull (2012) στην αγορά του συναλλάγματος παρατηρείται ένα «χαμόγελο μεταβλητότητας» σε οριζόντια θέση, ενώ στην αγορά μετοχικών τίτλων παρατηρείται ότι σε αυξημένη τιμή εξάσκησης η μεταβλητότητα όλο και μειώνεται, κάτι που απεικονίζεται από ένα σχήμα «χαμόγελου» το οποίο έχει μια αρνητική κλίση (skew), όπως φαίνεται στο διάγραμμα 1.3 αμέσως παρακάτω.

Διάγραμμα 1.3, Χαμόγελο Μεταβλητότητας με Κλίση (Volatility Skew)



Πηγή: Hull (2012)

Ένας λόγος, σύμφωνα με τον Hull (2012), που υπάρχει κλίση σε αυτό το διάγραμμα είναι η μόχλευση. Η λογική είναι ότι όσο μειώνεται η αξία των μετοχών αυξάνει η σχετική αξία του χρέους σε μια εταιρεία, δηλαδή αυξάνει η μόχλευση, κάτι που κάνει την εταιρεία ακόμη πιο επικίνδυνη και συντελεί στο να αυξάνεται η (τεκμαρτή) μεταβλητότητα της. Το ακριβώς αντίθετο συμβαίνει όταν αυξάνεται η αξία των μετοχών, όπου μειώνεται η μόχλευση, η επικινδυνότητα άρα και η (τεκμαρτή) μεταβλητότητα. Ένας άλλος λόγος, όπως αναφέρει και ο Hull (2012) είναι και ο φόβος της κατάρρευσης της τιμής, όπου όσο πέφτει μια μετοχή, δημιουργείται επιπλέον φόβος και νευρικότητα στην αγορά, κάτι που εντείνει την άνοδο της (τεκμαρτής) μεταβλητότητας, ενώ στην άνοδο της τιμής της μετοχής δεν υπάρχει τέτοιος φόβος, κάτι που αντικατοπτρίζεται σε χαμηλότερη (τεκμαρτή) μεταβλητότητα.

Καθώς η σχέση μεταξύ τεκμαρτής μεταβλητότητας και τιμής εξάσκησης εξαρτάται από το επίπεδο της τρέχουσας τιμής του τίτλου, για να είναι πιο σταθερό το χαμόγελο μεταβλητότητας, σε πολλές περιπτώσεις σχεδιάζεται ανάμεσα στην τεκμαρτή μεταβλητότητα και το λόγο τιμής εξάσκησης και τρέχουσας τιμής K/S_0.

Καθώς, όπως έχει ήδη αναφερθεί, η τεκμαρτή μεταβλητότητα είναι συνάρτηση όχι μόνο της τιμής εξάσκησης, αλλά και του χρόνου στη λήξη, και ότι προκύπτει ένα «χαμόγελο μεταβλητότητας» για κάθε δεδομένο χρόνο στη λήξη, τότε το σύνολο των «χαμόγελων μεταβλητότητας» για όλους τους χρόνους στη λήξη ή αλλιώς ο συνδυασμός των «χαμόγελων μεταβλητότητας» με την «καμπύλη μεταβλητοτήτων στη λήξη» (volatility term structure) αποτελεί τη λεγόμενη «επιφάνεια μεταβλητότητας» (volatility surface).

Ουσιαστικά, η επιφάνεια μεταβλητότητας είναι ένας πίνακας διπλής εισόδου όπου για δεδομένα επίπεδα τιμής εξάσκησης ή λόγου K/S_0 και για δεδομένους χρόνους στη λήξη αποτιμάται η τεκμαρτή μεταβλητότητα. Μάλιστα, αυτός ο πίνακας διπλής εισόδου μπορεί να απεικονιστεί και γραφικά σε ένα τρισδιάστατο γράφημα, όπου στους δύο οριζόντιους άξονες μετρώνται η τιμή εξάσκησης (level) και ο χρόνος στη λήξη (term) και στον κάθετο η τεκμαρτή μεταβλητότητα που προκύπτει από κάθε δυνατό συνδυασμό. Ένα παράδειγμα επιφάνειας τεκμαρτής μεταβλητότητας δίνεται στο γράφημα 1,4, αμέσως παρακάτω.

Γράφημα 1.4, Παράδειγμα Επιφάνειας Τεκμαρτής Μεταβλητότητας (Implied Volatility Surface)

	K/S_0				
	0.90	*0.95*	*1.00*	*1.05*	*1.10*
1 month	14.2	13.0	12.0	13.1	14.5
3 month	14.0	13.0	12.0	13.1	14.2
6 month	14.1	13.3	12.5	13.4	14.3
1 year	14.7	14.0	13.5	14.0	14.8
2 year	15.0	14.4	14.0	14.5	15.1
5 year	14.8	14.6	14.4	14.7	15.0

Πηγή: Hull (2012)

Για ένα δικαίωμα που έχει τιμή εξάσκησης 5% πάνω από την τρέχουσα τιμή, άρα λόγο K/S_0 = 1,05 και λήξη στους 3 μήνες η εκτίμηση της τεκμαρτής μεταβλητότητας είναι 13,1% σε ετήσια βάση. Αυτή είναι η μεταβλητότητα που θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί για περαιτέρω αποτιμήσεις δικαιωμάτων.

Εάν επιθυμείται η εκτίμηση της τεκμαρτής μεταβλητότητας ενός δικαιώματος που έχει λόγο K/S_0 ή / και λήξη που δεν υπάρχουν σε μια επιφάνεια τεκμαρτής μεταβλητότητας, τότε θα πρέπει να πραγματοποιηθεί μια απλή γραμμική παρεμβολή, όπως επισημαίνει ο Hull (2012). Πράγματι, εάν για παράδειγμα, επιθυμείται για ένα δικαίωμα με λόγο K/S_0 = 1,05 και λήξη στους 9 μήνες, τότε θα πρέπει να γίνει γραμμική παρεμβολή ανάμεσα στις τιμές 13,4 (λήξη 6 μήνες) και 14,0 (λήξη 12 μήνες) για να προκύψει η εκτίμηση της τεκμαρτής μεταβλητότητας στους 9 μήνες 13,7% που θα είναι μια κατάλληλη τιμή για να εφαρμοστεί μια αποτίμηση δικαιωμάτων είτε με τύπους Black & Scholes, είτε με διωνυμικά δέντρα, εάν πρόκειται για ένα πιο σύνθετο δικαιώματα.

Κεφάλαιο 2: Υπόδειγμα Black-Scholes και Σταθερή ή Στοχαστική Μεταβλητότητα (Constant or Stochastic Volatility)

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται μια εισαγωγή στα υποδείγματα μεταβλητότητας στο ευρύτερο πλαίσιο του υποβάθρου των Black & Scholes. Αρχικά παρουσιάζεται το πιο απλό υπόδειγμα που περιλαμβάνει την έννοια της σταθερής στο χρόνο μεταβλητότητας (constant volatility) και έπειτα ένα πιο περίπλοκο υπόδειγμα που ασχολείται με την έννοια της στοχαστικής μεταβλητότητας (stochastic volatility). Τέλος, παρουσιάζεται ένα επίσης περίπλοκο υπόδειγμα αυτό της τοπικής μεταβλητότητας (local volatility) το οποίο αναπαράγει την έννοια της μη σταθερής στο χρόνο μεταβλητότητας ως μια συνάρτηση του χρόνου και της τιμής του υποκείμενου τίτλου.

2.1 Υπόδειγμα Σταθερής Μεταβλητότητας (Constant Volatility Model)

Οι Black & Scholes θεμελίωσαν την θεωρία τους σχετικά με την τιμολόγηση περιουσιακών στοιχείων με βάση μια σειρά αναγκαίων υποθέσεων οι οποίες είχαν να κάνουν με το πώς εξελίσσεται η τιμή ενός περιουσιακού στοιχείου στο χρόνο, όπως παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 1. Το υπόδειγμα τους αναπτύσσεται αρχικά υποθέτοντας ότι η τιμή ενός περιουσιακού στοιχείου (S) ακολουθεί την λογαριθμο-κανονική κατανομή και διέπεται από την παρακάτω στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW \qquad (2.1)$$

μ = συνεχώς ανατοκιζόμενη αναμενόμενη απόδοση που αποκομίζεται σε ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα dt ή αλλιώς η στιγμιαία αναμενόμενη απόδοση

σ = τυπική απόκλιση των αποδόσεων στο πολύ μικρό χρονικό διάστημα dt ή αλλιώς στιγμιαία μεταβλητότητα

W = τυπική κίνηση Brown όπου το διαφορικό dW θεωρείται ότι ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέσο μηδενικό και τυπική απόκλιση ίση με τη μονάδα

Η γεωμετρική κίνηση Brown είναι ένα υπόδειγμα δύο παραμέτρων της στοχαστικής διαδικασίας της τιμής ενός περιουσιακού στοιχείου και έχει πολύ απλές ερμηνείες για τις παραμέτρους μ και σ. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η αβεβαιότητα του υποδείγματος πηγάζει μόνο από την στοχαστική ποσότητα dW.

Μια από τις βασικές υποθέσεις – παραδοχές του υποδείγματος των Black & Scholes είναι η απουσία δυνατότητας αρμπιτράζ. Αυτή η παραδοχή οδηγεί στη λογική της ουδετερότητας ως προς τον κίνδυνο, από τη μεριά των επενδυτών, ως προτίμηση τους. Αυτό ισοδυναμεί με το γεγονός ότι όλα τα χαρτοφυλάκια που χαρακτηρίζονται από μηδενικό κίνδυνο (risk-free) θα πρέπει να έχουν μια ίδια χωρίς κίνδυνο απόδοση (risk-free rate).

Μια ακόμη πολύ βασική υπόθεση τους, στο πλαίσιο και της λογικής της σταθερής μεταβλητότητας, είναι ότι η τυπική απόκλιση σ στην στοχαστική διαφορική εξίσωση (2.1) είναι ντετερμινιστική – σταθερή και ότι υπάρχει ένα επίσης ντετερμινιστικό – σταθερό προεξοφλητικό επιτόκιο χωρίς κίνδυνο r.

Κάτω από τις δύο παραπάνω υποθέσεις – παραδοχές, η δυναμική (dynamics) της τιμής ενός περιουσιακού στοιχείου (που δίνει, όμως μερισματική απόδοση q) σε ένα πλαίσιο ουδετερότητας στον κίνδυνο περιγράφεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$dS_t = (r-q)S_t\, dt + \sigma(K, T)\, S_t\, dW_t \qquad (2.2)$$

W_t = τυπική κίνηση Brown στη χρονική στιγμή t

S_t = διαδικασία τιμής περιουσιακού στοιχείου με κίνδυνο στη χρονική στιγμή t

q = σταθερή μερισματική απόδοση

Η εξίσωση (2.2), λοιπόν, περιγράφει μια απλή μονό-παραγοντική διαδικασία της τιμής ενός περιουσιακού στοιχείου όπου η ποσότητα σ(K, T) αποτελεί την τεκμαρτή μεταβλητότητα (implied volatility) η οποία είναι συνάρτηση, μόνο, της τιμής εξάσκησης K ενός δικαιώματος (options) πάνω στο περιουσιακό στοιχείο και του χρόνου στη λήξη του.

Ορίζεται αμέσως παρακάτω η βαθμωτή συνάρτηση $V_{BS}(S, t)$ που αντιπροσωπεύει την αξία μιας δυνητικής απαίτησης, όπως ενός δικαιώματος προαίρεσης, σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t, δοθέντος και της τιμής του υποκείμενου τίτλου (underlying asset) εκείνη τη στιγμή. Με βάση το γνωστό μαθηματικό λήμμα του Ito, η εξίσωση (2.2) μετατρέπεται στην στοχαστική μερική διαφορική εξίσωση των Black & Scholes (stochastic partial differential equation – PDE) η οποία έχει την παρακάτω μορφή (υποθέτοντας εδώ και μερισματική απόδοση q σε σχέση με την σχέση (1.7 που δεν περιείχε):

$$\frac{\partial V_{BS}}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(K,T)S^2\frac{\partial^2 V_{BS}}{\partial S^2} + (r-q)S\frac{\partial V_{BS}}{\partial S} - rV_{BS} = 0 \qquad (2.3)$$

Η εξίσωση (2.3) περιγράφει, βασικά, πως η αξία ενός παράγωγου συμβολαίου πάνω σε έναν υποκείμενο τίτλο διαχέεται, με βάση πολλά πιθανά μελλοντικά σενάρια εξέλιξης της τιμής του τίτλου, με μια διαδικασία οπισθοδρόμησης από το μέλλον στο παρόν. Αυτό πολύ απλά σημαίνει ότι η διαδικασία διάχυσης ξεκινάει τη στιγμή λήξης T και καταλήγει σε μια τρέχουσα χρονική στιγμή t.

Κάτω από την υπόθεση της σταθερής μεταβλητότητας σ(K, T), αυτή η εξίσωση μπορεί να επιλυθεί αναλυτικά και μέσω μιας τελικής συνθήκης της μορφής $V_{bs}(ST, T) = \max(S_T – K, 0)$ να έχει ως αποτέλεσμα τον τελικό τύπο αποτίμησης της αξίας ενός παραγώγου συμβολαίου των Black & Scholes (βλέπε τύπους 1.8 και 1.9 από το κεφάλαιο 1).

Ένα πολύ σημαντικό σημείο που πρέπει να γίνει απόλυτα κατανοητό είναι ότι η τεκμαρτή μεταβλητότητα, σ(K, T), στην εξίσωση (2.3) δεν συνδέεται με κανένα τρόπο με την μεταβλητότητα, σ, της πραγματικής διαδικασίας της τιμής του υποκείμενου τίτλου στην εξίσωση (2.1). Ουσιαστικά, η τεκμαρτή μεταβλητότητα δεν αποτελεί σε καμία περίπτωση την τυπική απόκλιση της διαδικασίας S.

2.2 Υπόδειγμα Στοχαστικής Μεταβλητότητας (Stochastic Volatility Model)

Σύμφωνα με κλασικό υπόδειγμα των Black, Scholes & Merton η μεταβλητότητα θεωρείται σταθερή, κάτι που αυτό είναι μια από τις πλέον βασικές παραδοχές του, όπως αναφέρει ο Hull (2012). Η εμπειρία όμως έχει δείξει, μέσα από σχετικά υποδείγματα μεταβλητότητας GARCH, πως αυτή η παραδοχή δεν είναι ρεαλιστική και ότι η μεταβλητότητα μεταβάλλεται διαχρονικά, όπως επισημαίνουν οι Lorig & Sircar (2014). Έτσι, η εξίσωση (2.2) θα πρέπει να διατυπωθεί ως εξής:

$$dS_t = (r-q)S_t\, dt + \sigma_t\, S_t\, dW_t \tag{2.4}$$

Η εξίσωση (2.4) υπονοεί ότι η μεταβλητότητα είναι μια ντετερμινιστική συνάρτηση του χρόνου και ότι η στιγμιαία μεταβλητότητα μπορεί να προβλεφθεί επακριβώς. Εντούτοις, αυτό στην πράξη δεν ισχύει και, όπως υποστηρίζουν οι Hull (2012) και Lorig & Sircar (2014), η μεταβλητότητα χαρακτηρίζεται από μια στοχαστική δυναμική μέσα στο χρόνο. Μάλιστα οι Lorig & Sircar (2014) υποστηρίζουν ότι δεν υπάρχει απόλυτη συμφωνία ως προς το πώς θα μοντελοποιηθεί η στοχαστική δομή της.

Για αυτό το λόγο έχουν αναπτυχθεί διάφορα πιο περίπλοκα υποδείγματα τα οποία θεωρούν στοχαστική όχι μόνο την τιμή του υποκείμενου τίτλου, όπως στο κλασικό υπόδειγμα των Black, Scholes & Merton, αλλά και την μεταβλητότητα. Ένα σχετικό υπόδειγμα, όπως αναφέρει ο Hull (2012), αποτελείται από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$dS_t = (r-q)S_t\, dt + \tilde{\sigma}_t\, S_t\, dW_t^S \tag{2.5}$$

$$d\tilde{\sigma}_t^2 = \alpha(\sigma_L^2 - \tilde{\sigma}_t^2)dt + b(\tilde{\sigma}_\tau^2)^c dW_t^{\tilde{\sigma}_\tau^2} \tag{2.6}$$

Στις παραπάνω εξισώσεις, οι ποσότητες α, b, c και σ_L^2 είναι σταθερές παράμετροι, ενώ οι ποσότητες dW_t^S και $dW_t^{\tilde{\sigma}_t^2}$ είναι οι κλασικές διαδικασίες Wiener που αντιστοιχούν στην τιμή του υποκείμενου τίτλου και στην μεταβλητότητα. Ουσιαστικά, η εξίσωση (2.6) είναι αυτή που δείχνει ότι η μεταβλητότητα $\tilde{\sigma}_t$ αποτελεί μια στοχαστική διαδικασία. Πιο συγκεκριμένα, η μεταβλητότητα, ως διακύμανση, τείνει στο επίπεδο σ_L^2 με ένα ρυθμό α.

Λαμβάνοντας, λοιπόν, υπόψη τη στοχαστική φύση της μεταβλητότητας της τιμής ενός υποκείμενου τίτλου, η τιμή ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος, στο πλαίσιο του υποδείγματος Black, Scholes & Merton κα θεωρώντας ότι η στοχαστική διαδικασία της μεταβλητότητας είναι ανεξάρτητη με την στοχαστική διαδικασία της τιμής, αποτιμάται με βάση τον παρακάτω τύπο, όπως αναφέρει ο Hull (2012):

$$V_0 = \int_0^{\infty} V(\bar{\sigma}_t^2)\, f(\bar{\sigma}_t^2) d\bar{\sigma}_t^2 \qquad (2.7)$$

Η σχέση (2.7) δείχνει ότι η αξία ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος (V_0), υπολογίζεται ως η αναμενόμενη τιμή της τυχαίας μεταβλητής $V(\bar{\sigma}_t^2)$, η οποία εκφράζει την τιμή του Ευρωπαϊκού δικαιώματος ως συνάρτηση της μεταβλητότητας $\bar{\sigma}_t^2$, ενώ η ποσότητα $f(\bar{\sigma}_t^2)$ εκφράζει την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $\bar{\sigma}_t^2$ στο πλαίσιο ουδετερότητας στον κίνδυνο. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι αυτή η τυχαία μεταβλητή εκφράζει την αναμενόμενη τιμή της στοχαστικής μεταβλητότητας.

Όταν η υπόθεση ανεξαρτησίας ανάμεσα στις στοχαστικές διαδικασίες τιμής και μεταβλητότητας του υποκείμενου τίτλου δεν ισχύει, τότε, σύμφωνα με τον Hull (2012), η διαδικασία αποτίμησης είναι πιο περίπλοκη και περιλαμβάνει εφαρμογή της μεθόδου προσομοίωσης Monte Carlo.

Η ύπαρξη της στοχαστικής μεταβλητότητας δεν έχει μεγάλη επίπτωση, σε απόλυτους όρους, στις τιμές των δικαιωμάτων που λήγουν σε λιγότερο από ένα έτος, αν και υπάρχει μια σημαντική επίπτωση, σε σχετικούς όρους, για τα δικαιώματα που είναι βαθιά OTM, όπως επισημαίνει ο Hull (2012).

Πάντως όσο αυξάνει η διάρκεια λήξης ενός δικαιώματος, τόσο μεγαλώνει η επίπτωση της στοχαστικής μεταβλητότητας, κάτι που επηρεάζει και την αποτελεσματικότητα της δέλτα αντιστάθμισης. Για αυτό, άλλωστε, επισημαίνει ο Hull (2012) ότι οι διάφοροι διαπραγματευτές λαμβάνουν υπόψη πολύ πιο συχνά και τον συντελεστή vega στο πλαίσιο της μεταβολής της μεταβλητότητας.

2.3 Συνάρτηση Τοπικής Μεταβλητότητας (Local volatility Function)

Οι Engelmann et al (2009) αναφέρουν ότι τα υποδείγματα τοπικής μεταβλητότητας (local volatility models) χρησιμοποιούνται πολύ συχνά στο πλαίσιο της χρηματοοικονομικής. Ενώ τα διάφορα μοντέλα στοχαστικής μεταβλητότητας και διάχυσης εισάγουν νέους κινδύνους στη διαδικασία μοντελοποίησης, τα υποδείγματα τοπικής μεταβλητότητας βρίσκονται πολύ κοντά στο υπόβαθρο των Black & Scholes και απλά εισάγουν μια περισσότερη ευελιξία στον τομέα της μεταβλητότητας. Μάλιστα, αυτός είναι και ένας από τους κύριους λόγους δριμύς κριτικής αυτών των υποδειγμάτων, όπως επισημαίνουν και οι Ayache et al (2004).

Συνεπώς, είναι λάθος να ερμηνεύεται η τοπική μεταβλητότητα ως μια πλήρης αναπαράσταση της πραγματικής στοχαστικής διαδικασίας που διέπει την τιμή ενός περιουσιακού στοιχείου. Αντίθετα, πρόκειται για μια απλούστευση η οποία είναι πρακτικά χρήσιμη για να περιγράψει μια στοχαστική διαδικασία της τιμής ενός υποκείμενου τίτλου με μη σταθερή μεταβλητότητα. Ουσιαστικά πρόκειται για μια ειδική περίπτωση περισσότερο γενικευμένων μοντέλων στοχαστικής μεταβλητότητας. Για αυτό άλλωστε και τα υποδείγματα τοπικής μεταβλητότητας είναι γνωστά και ως περιορισμένα υποδείγματα στοχαστικής μεταβλητότητας.

Η συνάρτηση τοπικής μεταβλητότητας σ(S, t) είναι μια ντετερμινιστική διαδικασία ως μια συνάρτηση της στοχαστικής ποσότητας S και του χρόνου. Έτσι, υπάρχει μια πηγή τυχαιότητας η οποία και εξασφαλίζει την πληρότητα του υποδείγματος των Black & Scholes. Η πληρότητα είναι μια σημαντική έννοια, καθώς η ισχύς εξασφαλίζει μοναδικές τιμές για τον υποκείμενο τίτλο και ύπαρξη συνθήκης μη αρμπιτράζ για τιμολόγηση και αντιστάθμιση, σύμφωνα με τον Dupire (1993).

Ο Dupire (1994) ήταν ο πρώτος που έδειξε αλγεβρικά πως με δοσμένες τις τιμές ευρωπαϊκών δικαιωμάτων προαίρεσης αγοράς (calls) και πώλησης (puts) για διάφορες τιμές εξάσκησης και λήξεις, μπορεί κάποιος να συνάγει τη συνάρτηση μεταβλητότητας σ(S, t) η οποία με τη σειρά της αναπαράγει τις τιμές των δικαιωμάτων μέσω της πλήρης εξίσωσης των Black & Scholes. Η διαίσθηση του Dupire (1993) ήταν ότι η τιμή του υποκείμενου τίτλου ακολουθεί ένα υπόδειγμα τυχαίου περιπάτου ουδέτερο στον κίνδυνο και είναι διαθέσιμες παρατηρούμενες αγοραίες τιμές απλών δικαιωμάτων προαίρεσης (plain vanilla options) με συνθήκη μη αρμπιτράζ, για όλες τις λήξεις και διάφορες τιμές εξάσκησης, τότε η τοπική μεταβλητότητα βάσει της εξίσωσης (2.2) μπορεί να εξαχθεί αναλυτικά για τις τιμές των ευρωπαϊκών δικαιωμάτων.

Κεφάλαιο 3: Υπόδειγμα Black & Scholes και Επιφάνειες Τεκμαρτής και Τοπικής Μεταβλητότητας (Implied and Local Volatility Surfaces)

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται πιο αναλυτικά τα υποδείγματα που αφορούν τις επιφάνειες της τεκμαρτής και, κατά κύριο λόγο, της τοπικής μεταβλητότητας, όπου και τονίζεται η σχέση μεταξύ των δύο αυτών εννοιών. Αρχικά παρουσιάζεται πως ορίζεται και υπολογίζεται η επιφάνεια τεκμαρτής μεταβλητότητας, ως μια πιο απλή έννοια και έπειτα παρουσιάζεται το σχετικό πλαίσιο προσέγγισης της επιφάνειας της τοπικής μεταβλητότητας. Έπειτα, παρουσιάζεται και το σχετικό υπόβαθρο κατά Dupire που αφορά και πάλι την έννοια της τοπικής μεταβλητότητας. Τέλος, παρουσιάζονται ορισμένα εμπειρικά αποτελέσματα που αφορούν στην εκτίμηση αυτών των επιφανειών.

3.1 Τεκμαρτή Μεταβλητότητα (Implied Volatility)

Στο κλασικό υπόδειγμα των Black, Scholes & Merton η μεταβλητότητα υπονοείται ότι είναι ένας προσδιοριστικός παράγοντας (input) για την τιμή ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος (output). Εντούτοις, η διαφορά της με τους άλλους προσδιοριστικούς παράγοντες της τιμής ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος (επιτόκιο, μερισματική απόδοση, τιμή υποκείμενου τίτλου, τιμή εξάσκηση, περίοδος λήξης) είναι ότι η πρώτη δεν παρατηρείται – καταγράφεται άμεσα στην αγορά, ενώ οι δεύτερες παρατηρούνται και καταγράφονται καθημερινά. Επιπλέον, μάλιστα, η αγοραία τιμή ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος και αυτή παρατηρείται – καταγράφεται καθημερινά, στο πλαίσιο της καθημερινής λειτουργίας των αγορών δικαιωμάτων και της προσφοράς και ζήτησης για αυτά που πραγματοποιούν οι συμμετέχοντες επενδυτές σε αυτές.

Έτσι, καθώς στο πλαίσιο των υποδειγμάτων αποτίμησης, επιθυμία ήταν να υπάρχει πλήρης προσαρμογής της αγοραίας τιμής ενός δικαιώματος στις τιμές των διαφόρων προσδιοριστικών παραγόντων (άρα και της μεταβλητότητας η οποία, όμως, δεν παρατηρείται), για αυτό το επόμενο βήμα μετά την ανάπτυξη του κλασικού υποδείγματος αποτίμησης ευρωπαϊκών δικαιωμάτων, όπως αναφέρει ο Hull (2012), ήταν ένα υπόδειγμα που να θεωρεί ως ορθή την παρατηρούμενη αγοραία τιμή ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος και να αποτιμά – υπολογίζει ποιο επίπεδο μεταβλητότητας δικαιολογεί την τιμή αυτή. Αυτή είναι και η λογική της τεκμαρτής μεταβλητότητας (implied volatility) με την οποία συμφωνούν και οι Lorig & Sircar (2014). Οι Derman et al (1994) είχαν αναπτύξει την έννοια της συνάρτησης της τεκμαρτής μεταβλητότητας (implied volatility function – IVF) η οποία υπολογίζεται με βάση το παρακάτω σκεπτικό.

Αρχικά θεωρείται η διαφορική εξίσωση (2.2) στο πλαίσιο ουδετερότητας στον κίνδυνο, αλλά σε μια τρέχουσα χρονική στιγμή t, όπου η μεταβλητότητα θεωρείται συνάρτηση του χρόνου και τη τιμής του υποκείμενου τίτλου:

$$dS_t = [r(t)-q(t)]S_t\, dt + \sigma(S_t, t)\, S_t\, dW_t \qquad (3.1)$$

Η εξίσωση (3.1) υπονοεί ότι το επιτόκιο r(t) αποτελεί το στιγμιαίο προθεσμιακό επιτόκιο που λήγει την περίοδο t, ενώ και η ποσότητα q(t) αποτελεί την αντίστοιχη στιγμιαία μερισματική απόδοση. Η ποσότητα $\sigma(S_t, t)$ αποτελεί την στιγμιαία μεταβλητότητα ως συνάρτηση της τρέχουσας τιμής του τίτλου και του χρόνου και έχει επιλεχθεί έτσι ώστε να προσαρμόζει και να αντανακλά πλήρως στην τρέχουσα τιμή του ευρωπαϊκού δικαιώματος.

Με βάση, λοιπόν, την μερική διαφορική εξίσωση PDE (2.3) των Black & Scholes, οι Dupire (1994) και Andersen et al (1997) έδειξαν την αναλυτική λύση ως προς την τεκμαρτή μεταβλητότητα η οποία δίνεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$\sigma(K,T)^2 = 2\frac{\frac{\partial V_M}{\partial T}+q(T)V_M+K[r(T)-q(T)]\frac{\partial V_M}{\partial K}}{K^2\left(\frac{\partial^2 V_M}{\partial K^2}\right)} \qquad (3.2)$$

Όπου η ποσότητα V_M(K,T) είναι η αγοραία τιμή (market price) ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος με τιμή εξάσκησης K που λήγει σε χρόνο T. Η λογική της εξίσωσης (3.2), όπως αναφέρει ο Hull, είναι ότι εάν υπάρχουν στην αγορά ένας μεγάλος αριθμός διαθέσιμων δικαιωμάτων με διάφορες τιμές εξάσκησης και διάφορες λήξεις, τότε μπορεί να εκτιμηθεί η εξίσωση για την ποσότητα $\sigma(S_t, t)$. Πράγματι, με χρήση της εξίσωσης (3.2), οι Andersen et al (1997) εφάρμοσαν τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών, ενώ οι Derman & Kani (1994) και Rubinstein (1994) εφάρμοσαν τη μέθοδο των διωνυμικών δέντρων για να εκτιμήσουν τη συνάρτηση της ποσότητας $\sigma(S_t, t)$.

Σε ένα πιο εμπειρικό – πρακτικό πλαίσιο, όπως αναφέρουν και οι Kotzé et al (2015), η τεκμαρτή μεταβλητότητα έχει την ιδιότητα, όπως και κάθε τεκμαρτό μέγεθος άλλωστε, να μην παρατηρείται ευθέως, αλλά να εκτιμάται (τεκμαίρεται) μέσω άλλων παρατηρούμενων στοιχείων. Καθώς, λοιπόν, οι τεκμαρτές ή αγοραίες μεταβλητότητες δεν είναι γνωστές μέσω παρατήρησης, τότε αναγκαστικά λαμβάνονται υπόψη οι ιστορικές ή αλλιώς πραγματοποιηθείσες μεταβλητότητες.

Έστω ότι υπάρχουν διαθέσιμες ιστορικές παρατηρήσεις που αφορούν την τιμή ενός υποκείμενου τίτλου S_1, S_2, …, S_n όπου S_i είναι η τιμή του τίτλου στην i στιγμή. Παρακάτω παρουσιάζεται, σύμφωνα με τους Kotzé et al (2015), πως υπολογίζεται η λογαριθμική απόδοση για κάθε χρονική στιγμή αλλά και η τυπική απόκλιση των αποδόσεων αυτών η οποία αναφέρεται σε όλο το χρονικό διάστημα:

$$r_i = ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right) \tag{3.3}$$

$$\hat{\sigma}(T) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(r_i-\bar{r})^2}{n}} \tag{3.4}$$

Ο τύπος (3.4) αντιστοιχεί σε αυτό που ονομάζεται ιστορική μεταβλητότητα για το χρονικό διάστημα [0, T]. Ουσιαστικά πρόκειται για μια μέση μεταβλητότητα για n διακριτά διαστήματα του χρόνου. Εάν επιθυμείται να ετησιοποιηθεί αυτή η μεταβλητότητα τότε πολλαπλασιάζεται με τον παράγοντα $\sqrt{\kappa}$ όπου η τιμή κ αντιστοιχεί πόσες φορές το χρόνο παρατηρούνται οι αποδόσεις ανάλογα με το διάστημα του χρόνου. Για παράδειγμα, εάν πρόκειται για ημερήσιες παρατηρήσεις τιμών και σε ένα έτος παρατηρούνται 252 τέτοιες τιμές, στις εργάσιμες ημέρες της αγοράς που γίνεται η διαπραγμάτευση, τότε η σχέση (3.4) υπολογίζεται την ημερήσια ιστορική μεταβλητότητα και ο πολλαπλασιασμός με τον παράγοντα $\sqrt{252}$ θα δώσει ως αποτέλεσμα την ετήσια ιστορική μεταβλητότητα.

Όσο το πλήθος των διαστημάτων n γίνεται όλο και πιο μεγάλο, κάτι που σημαίνει ότι όλο και πιο συχνή είναι η παρατήρηση των τιμών του τίτλου, ή αλλιώς όσο n → ∞, τότε η ιστορική μεταβλητότητα συγκλίνει σε αυτό που ονομάζεται στιγμιαία μεταβλητότητα (instantaneous volatility). Πρακτικά, η μεταβλητότητα αυτή υπολογίζεται ως εξής:

$$\sigma_{inst}(t_i) = \sqrt{r_{i+1}} \qquad (3.5)$$

Καθώς η στιγμιαία μεταβλητότητα λαμβάνει υπόψη την επόμενη μελλοντική απόδοση, είναι κάτι ανάλογο με το στιγμιαίο μελλοντικό επιτόκιο, σύμφωνα με τους Brigo & Mercurio (2001). Προφανώς, με χρήση ιστορικών δεδομένων τιμών ενός τίτλου, μπορεί να προκύψει μόνο μία στιγμιαία μεταβλητότητα για κάθε χρονικό σημείο.

3.2 Τοπική Μεταβλητότητα (Local Volatility)

Το ερώτημα που τίθεται ως προς την τοπική μεταβλητότητα, σύμφωνα με τους Kotzé et al (2015), είναι πως είναι δυνατό να εκτιμηθεί η συνάρτηση τοπικής μεταβλητότητας σ(S, t) όταν υπάρχουν διαθέσιμα στοιχεία για τις τεκμαρτές μεταβλητότητες σ(K, T) που προκύπτουν μέσα από τις συναλλαγές. Δηλαδή, προκύπτει θέμα ως προς το ποια είναι η σχέση που συνδέει τις δύο αυτές μεταβλητότητες.

Ενώ ο Dupire (1993) είχε συναίσθηση ότι οι δύο αυτές μεταβλητότητες θα έπρεπε να είναι συμβατές με τα παρατηρούμενα σχήματα (τα λεγόμενα «χαμόγελα») των αποδόσεων των δικαιωμάτων, σε κάθε λήξη, ο Rubinstein (1994), από τη δική του μεριά, υποστήριζε ότι μια από τις κεντρικές ιδέες οικονομικής σκέψης ήταν ότι σε ορθά λειτουργικά χρηματοοικονομικές αγορές οι τιμές των περιουσιακών στοιχείων εμπεριέχουν σημαντικό πληροφοριακό περιεχόμενο το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για μια ευρεία γκάμα οικονομικών αποφάσεων από τη μεριά των διαφόρων αρχών και επενδυτών. Για αυτό και πρέπει να δημιουργούνται υποδείγματα που να συνδέουν τις τιμές περιουσιακών στοιχείων με τέτοιες πληροφορίες.

Έτσι, στο πλαίσιο αυτό οι Rubinstein (1994) και οι Derman & Kani (1994) ανέπτυξαν διάφορες αριθμητικές μεθόδους για να συνδέσουν την τοπική μεταβλητότητα με την τιμή του υποκείμενου τίτλου, την τεκμαρτή μεταβλητότητα και τον χρόνο. Οι μέθοδοι αυτές περιελάμβαναν τη διαδικασία των λεγόμενων «δέντρων» οι οποίες τιμολογούσαν ένα δικαίωμα υποθέτοντας σταθερή μεταβλητότητα αρχικά, στο πλαίσιο του κλασικού υποδείγματος των διωνυμικών δέντρων των Cox, Ross and Rubinstein (CRR), και έπειτα τη προσάρμοζαν σε κάθε κόμβο του δέντρου χρησιμοποιώντας τη δοσμένη τεκμαρτή ασυμμετρία μεταβλητότητας, έτσι ώστε να αποτιμούν ακόμη πιο ορθά τις αγοραίες τιμές των δικαιωμάτων. Πάντως, αυτές οι μέθοδοι είχαν μειονεκτήματα ως προς την αργοπορία τους και ως προς την μη σταθερότητα και σύγκλιση στο τελικό αποτέλεσμα τους, όπως επισημαίνει και ο Rebonato (2004). Για αυτό προτιμάται εντέλει η αναλυτική λύση που προτείνει ο Dupire.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να τονιστεί ότι η μεν ιστορική μεταβλητότητα υπολογίζεται με βάση ιστορικά στοιχεία και έχει μια φύση οπισθοδρόμησης (backwards), ενώ η τεκμαρτή ή αγοραία μεταβλητότητα έχει μια φύση εμπροσθοδρόμησης (forward) με την έννοια ότι αποτελεί μια εκτίμηση της μελλοντικής μεταβλητότητας των τιμών ενός υποκείμενου τίτλου έως και τη λήξη ενός δικαιώματος πάνω σε αυτόν, όπως αναφέρουν οι Kotzé et al (2015). Έτσι, οι συμμετέχοντες στις αγορές των δικαιωμάτων τιμολογούν στην τρέχουσα στιγμή ένα δικαίωμα βασιζόμενοι στην εκτίμηση της μελλοντικής μεταβλητότητας του υποκείμενου τίτλου. Για πολλούς η τεκμαρτή αυτή μεταβλητότητα αποτελεί ένα μέσο όρο, κατά κάποιο τρόπο, των μελλοντικών μεταβλητοτήτων και με αυτή τη λογική η τεκμαρτή μεταβλητότητα $\sigma(K, T)$ αποτελεί ένα ολικό (global) μέτρο μεταβλητότητας. Παρολαυτά, δεν πρέπει να λησμονείται ότι η τεκμαρτή μεταβλητότητα δεν είναι, εντέλει, ένα στατιστικό μέτρο, αλλά μια τιμή που τεκμαίρεται, όπως επισημαίνουν οι Kotzé et al (2015).

Από την άλλη μεριά η έννοια της τοπικής μεταβλητότητας $\sigma(S, t)$ είναι λίγο πιο περίπλοκη και έχει να κάνει με έναν μέσο όρο και αυτή, κατά κάποιο τρόπο, όλων των δυνατών στιγμιαίων μεταβλητοτήτων σε ένα συγκεκριμένο χρονικό σημείο, στο πλαίσιο ενός στοχαστικού κόσμου, όπως αναφέρει χαρακτηριστικά ο Gatheral (2006). Η τοπική μεταβλητότητα, λοιπόν, τεκμαίρεται από τις τιμές των δικαιωμάτων οι οποίες και αποτιμώνται βάση της PDE εξίσωσης των Black & Scholes η οποία αποτελεί μια παραλλαγή της (2.3) και παρουσιάζεται αμέσως παρακάτω:

$$\frac{\partial V_{\tau}(S,t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(S,t)S^2\frac{\partial^2 V_t}{\partial S^2} + (r-q)S\frac{\partial V_t}{\partial S} - rV_t = 0 \qquad (3.6)$$

Στο πλαίσιο της αγοράς δικαιωμάτων, κάθε δικαίωμα με δεδομένη τιμή εξάσκησης και χρόνο στη λήξη έχει και μια μοναδική τεκμαρτή μεταβλητότητα η οποία είναι η τεκμαρτή σταθερή μελλοντική τοπική μεταβλητότητα η οποία και εξισώνει την θεωρητική τιμή του δικαιώματος βάσει της εξίσωσης αποτίμησης των Black & Scholes με την παρατηρούμενη αγοραία τιμή του. Επιπλέον σκέψεις πάνω σε αυτό, οδήγησαν τους Dupure (1993) και Derman & Kani (1994) να συναισθανθούν ότι η γνώση των τιμών ευρωπαϊκών δικαιωμάτων για όλες τις τιμές εξάσκησης και χρόνων λήξης απλώς έχει ένα αποτέλεσμα στην εκτίμηση της κατανομής των πιθανών τιμών του υποκείμενου τίτλου σε κάθε στιγμή στο μέλλον δοθέντος της τρέχουσας τιμής του. Έτσι, κάτω από ένα πλαίσιο ουδετερότητας στον κίνδυνο, υπάρχει μια μοναδική διαδικασία διάχυσης των τιμών συμβατή με την ουδέτερη στον κίνδυνο κατανομή πιθανότητας η οποία προκύπτει από τις τιμές των δικαιωμάτων πάνω στον ίδιο τίτλο με διαφορετικές τιμές εξάσκησης και χρόνων λήξης. Αυτή η σκέψη, πάντως, είναι τελείως διαφορετική από αυτή του υποβάθρου των Black & Scholes, σύμφωνα με το οποίο το κάθε ένα δικαίωμα, πάνω στον ίδιο υποκείμενο τίτλο, δημιουργούσε μια διαφορετική διαδικασία διάχυσης των τιμών του ανάλογα με την τιμή εξάσκησης και το χρόνο στη λήξη.

Οι Kani et al (1996) έδειξαν ότι η τοπική μεταβλητότητα αποτελεί την υπό συνθήκη ουδέτερη στον κίνδυνο προσδοκία των στιγμιαίων μελλοντικών μεταβλητοτήτων δοθέντος ότι η μελλοντική τιμή του υποκείμενου τίτλου στη λήξη θα είναι ίση με την τιμή εξάσκησης K. Αυτό το εύρημα είναι ανάλογο με τη σχέση που έχουν τα σημερινά προθεσμιακά επιτόκια (current forward rates) με τα μελλοντικά τρέχοντα επιτόκια (future spot rates), όπου σύμφωνα με τους Brigo & Mercurio (2001) το προθεσμιακό επιτόκιο αντιστοιχεί στην τοπική μεταβλητότητα.

Εφαρμόζοντας ένα γνωστό θεώρημα του Gyöngy, στο πλαίσιο των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων (stochastic differential equations – SDE), οι Alexander & Nogueira (2008) υποστήριξαν ότι η SDE της τοπικής μεταβλητότητας (3.7) είναι απλώς μια ειδική περίπτωση μιας πιο γενικής SDE με στοχαστική τάση και μεταβλητότητα.

$$dS_t = (r-q)S_t dt + \sigma(S_t,t)S_t dW_t \qquad (3.7)$$

Σε ένα πιο πρακτικό πλαίσιο, σύμφωνα με τους Kotzé et al (2015), η τοπική μεταβλητότητα συνδέεται σαφώς με την λογική της στιγμιαίας μεταβλητότητας, με την έννοια ότι η πρώτη αποτελεί, κατά κάποιο τρόπο, μια προσδοκία της δεύτερης, όπως έχει ήδη αναφερθεί. Πάντως, ενώ η στιγμιαία μεταβλητότητα εξαρτάται μόνο από το χρόνο, η τοπική μεταβλητότητα εξαρτάται και από το χρόνο αλλά και από την κατάσταση και για αυτό η στιγμιαία μεταβλητότητα από μόνη της δεν μπορεί να εξηγήσει επαρκώς την τοπική μεταβλητότητα. Ουσιαστικά, η τοπική μεταβλητότητα δεν μπορεί ποτέ να προκύψει μόνο βάσει ιστορικών στοιχείων της τιμής ενός υποκείμενου τίτλου. Αντίθετα, μπορεί να προκύψει μόνο μέσα από προσομοίωση μελλοντικών τιμών του τίτλου ή από τις τιμές δικαιωμάτων πάνω σε αυτόν.

Αρχικά παρουσιάζεται η εκτίμηση της τοπικής μεταβλητότητας μέσα από διαδικασία προσομοίωσης, όπως αναφέρουν και οι Kotzé et al (2015). Έστω οι μελλοντικές (και όχι αυτές που όντως θα πραγματοποιηθούν αφού σήμερα είναι άγνωστες εκ των προτέρων) τιμές ενός τίτλου όπως έχουν προσομοιωθεί από τη γνωστή μέθοδο προσομοίωσης Monte Carlo έχοντας λάβει υπόψη την PDE που αποτιμά ορθά τη στοχαστική μεταβλητότητα. Με βάση, λοιπόν, τις προσομοιωμένες τιμές του τίτλου υπολογίζονται οι μελλοντικές στιγμιαίες μεταβλητότητες με βάση τις σχέσεις (3.3)-(3.5) και η τεκμαρτή μεταβλητότητα που αντιστοιχεί στο χρονικό διάστημα της προσομοίωσης.

Τρέχοντας μια ακόμη προσομοίωση, σε κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, έστω t*, θα προκύψει η ίδια προσομοιωμένη τιμή. Σε αυτήν την ημερομηνία μπορεί να υπολογιστεί μια στιγμιαία μεταβλητότητα και η εκτιμώμενη τοπική μεταβλητότητα θα προκύπτει μέσα από το μέσο όρο των δύο στιγμιαίων μεταβλητοτήτων. Επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία πολλές φορές έτσι ώστε να προκύψει η ίδια τιμή του τίτλου στην ημερομηνία t* m φορές, τότε η εκτίμηση της τοπικής μεταβλητότητας προκύπτει ως εξής:

$$\sigma(S_{t*}, t^*) = \sqrt{\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} r_{j,t^*+1}} \qquad (3.8)$$

Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί πολλές φορές για κάθε χρονικό διάστημα του μέλλοντος και έτσι να υπολογιστεί η τοπική μεταβλητότητα όχι μόνο στην ημερομηνία t*, αλλά σε κάθε ημερομηνία t_i που βρίσκεται στο μελλοντικό παράθυρο των προσομοιωμένων τιμών του τίτλου. Συνεπώς, προκύπτει η παρακάτω εκτίμηση της τοπικής μεταβλητότητας για κάθε ημερομηνία t_i αλλά και για κάθε επίπεδο τιμής S_k, ως εξής:

$$\sigma(S_k(t_i), t_i) = \sqrt{\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} r_j(S_k(t_i), t_i + 1)} \qquad (3.9)$$

Εάν όλη η σχετική διαδικασία επαναλαμβάνεται για ένα διακριτό πλήθος τιμών μετοχών S_k και για ένα διακριτό πλήθος χρονικών στιγμών, καταλήγει σε μια μήτρα τοπικών μεταβλητοτήτων όπου η κάθε μία αντιστοιχεί για κάθε τιμή μετοχής και για κάθε χρονικό σημείο. Εάν το πλήθος των τιμών μετοχών, των χρονικών διαστημάτων και των φορών που εκτελείται η προσομοίωση τείνει στο άπειρο, τότε προκύπτει η συνεχής έκδοση της όλης διαδικασίας της εκτίμησης της τοπικής μεταβλητότητας. Η μήτρα αυτή αναπαριστά τη λεγόμενη επιφάνεια τοπικής μεταβλητότητας. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι αν και αυτές οι μεταβλητότητες δεν είναι πραγματικές, εντούτοις, μοιάζουν πολύ στις τεκμαρτές ή αγοραίες μεταβλητότητες.

Καθώς η επιφάνεια τοπικής μεταβλητότητας είναι αρκετά προσκολλημένη στην τιμή του υποκείμενου τίτλου για κάθε χρονική στιγμή, τότε πρόκειται για μια επιφάνεια προσκολλημένης τοπικής μεταβλητότητας. Σύμφωνα με τους Bennett & Gil (2012), η προσέγγιση του ότι η τοπική μεταβλητότητα προκύπτει ως ο μέσος όρος των τοπικών μεταβλητοτήτων στην σημερινή τιμή του τίτλου και στην τιμή εξάσκησης και ότι η τεκμαρτή μεταβλητότητα κατά Black & Scholes προκύπτει ως ο μέσος των μελλοντικών στιγμιαίων μεταβλητοτήτων έδωσε τα παρακάτω τρία αποτελέσματα:

1) Η μεταβλητότητα κατά Black & Scholes είναι ίση με την τοπική μεταβλητότητα όταν πρόκειται για ένα at-the-money (ATM) δικαίωμα.
2) Η κλίση στην σχέση τιμής – μεταβλητότητας κατά Black & Scholes είναι η μισή από την κλίση στη σχέση τιμής – τοπικής μεταβλητότητας.
3) Η επιφάνεια προσκολλημένης τοπικής μεταβλητότητας υπονοεί μια αρνητική συσχέτιση μεταξύ τρέχουσας και τοπικής μεταβλητότητας, κάνοντας το πλαίσιο της τοπικής μεταβλητότητας αρκετά ρεαλιστικό.

Παρακάτω παρουσιάζεται η προσέγγιση της τοπικής μεταβλητότητας μέσω των τιμών των δικαιωμάτων, όπως αναφέρουν οι Kotzé et al (2015). Καθώς τοπική μεταβλητότητα δεν είναι αντικείμενο συναλλαγών και διαπραγμάτευσης, συνεπώς, δεν είναι μετρήσιμη ποσοτικά, όπως η τεκμαρτή μεταβλητότητα. Εντούτοις, πρέπει κάπως να υπολογιστεί και αυτό αποτέλεσε ένα γρίφο για μεγάλο χρονικό διάστημα. Όπως έχει ήδη αναφερθεί αρκετοί γνώριζαν ότι υπήρχε κάποια σύνδεση ανάμεσα στην τοπική μεταβλητότητα και την τεκμαρτή. Αυτό έχει λογική με την έννοια ότι η τεκμαρτή μεταβλητότητα είναι μια ειδική περίπτωση της τοπικής μεταβλητότητας στο παρακάτω πλαίσιο.

$$\sigma(K,T) \propto \sigma(S,t) \qquad (3.10)$$

Μια πρώτη προσέγγιση που ήταν δημοφιλής στη δεκαετία του 90, και ισχύει ακόμη, στηριζόταν στην παρακάτω σχέση:

$$V_l(\sigma(S,t)) - V_{bs}(\sigma(K,T)) = 0 \quad (3.11)$$

Η εύρεση της τοπικής μεταβλητότητας σ(S,t) πραγματοποιείται επιλύοντας την εξίσωση (3.7) αριθμητικά είτε μέσω της μεθόδου Monte Carlo, είτε μέσω πεπερασμένων διαφορών, όπως αναφέρουν οι Kotzé et al (2015). Η σχετική βελτιστοποίηση μέχρι να προκύψει λύση λαμβάνει χώρα μέσω μη γραμμικών ελαχίστων τετραγώνων.

Η επιφάνεια τοπικής μεταβλητότητας που προκύπτει μέσα από αυτές τις μεθόδους δεν είναι, γενικά, και τόσο ομαλή. Οι Dumas et al (1998) βρήκαν ότι εάν η μεταβλητότητα είναι μια ντετερμινιστική συνάρτηση της τιμής του υποκείμενου τίτλου και / ή του χρόνου, η αποτίμηση των δικαιωμάτων που βασίζεται στην PDE (3.6), παραμένει δυνατή, αν και όχι από τον τύπο των Black & Scholes αυτό κάθε αυτό. Υποστήριξαν ότι πρόκειται για μια ειδική περίπτωση και την ονόμασαν υπόθεση ντετερμινιστικής συνάρτησης μεταβλητότητας (Deterministic volatility function – DVF). Η αξιοπιστία αυτής της υπόθεσης εξαρτάται κατά πόσο καλά μπορεί να εκτιμηθεί η δυναμική της τιμής του υποκείμενου τίτλου από διαστρωματικά στοιχεία τιμών δικαιωμάτων, δηλαδή τιμών με διαφορετικές τιμές εξάσκησης.

Οι Carr et al (2013) έδειξαν, πρόσφατα, ότι υπάρχει μια τετραγωνική αναλυτική μορφή της συνάρτησης της τοπικής μεταβλητότητας σύμφωνα με την SDE της τοπικής μεταβλητότητας (3.7).

Οι Lorig & Sircar (2014) υποστηρίζουν ότι το υπόδειγμα της τοπικής μεταβλητότητας είναι συμβατό με την υπόθεση των πλήρων αγορών, όπως και το υπόδειγμα Black & Scholes. Επιπλέον, ένα ακόμη πλεονέκτημα του υποδείγματος αυτού είναι, σύμφωνα με τους Lorig & Sircar (2014), ότι προσφέρουν ακόμη πιο καλύτερη προσαρμογή της θεωρητικής τιμής ενός δικαιώματος στην αγοραία τιμή που διαπραγματεύεται. Εντούτοις, επισημαίνεται παράλληλα ότι η προσαρμογή αυτή θα πρέπει να εξισορροπείται με την σταθερότητα στην εκτίμηση. Στην πραγματικότητα το υπόδειγμα της τοπικής μεταβλητότητας δεν είναι και τόσο καλό από πλευράς σταθερότητας και για αυτό θα πρέπει να εφαρμόζεται και να προκύπτουν εκτιμήσεις της μεταβλητότητας πολύ συχνά στο πλαίσιο μιας ημέρας συναλλαγών, όπως επισημαίνουν οι Lorig & Sircar (2014).

3.3 Υπόβαθρο του Dupire

Στο πλαίσιο της σχέσης (3.7), η συνάρτηση σ(S, t) αποτελεί τη στιγμιαία μεταβλητότητα ενός τίτλου που αναφέρεται σε ένα δικαίωμα που έχει χρόνο λήξης T και έχει μια στοχαστική δυναμική εξέλιξη, σύμφωνα με τους Kotzé et al (2015). Επίσης, παρόμοια με τον ορισμό του στιγμιαίου προθεσμιακού επιτοκίου, ορίζεται και το τετράγωνο της τεκμαρτής μεταβλητότητας που αναφέρεται σε ένα ATM δικαίωμα ως εξής:

$$\sigma^2(T) = \frac{1}{T}\int_0^T \sigma^2(t)\, dt \qquad (3.12)$$

Η λογική της σχέσης (3.12) έχει να κάνει με την ιδιότητα της προσθετικότητας της διακύμανσης. Αυτή η σχέση δείχνει ότι η τεκμαρτή μεταβλητότητα είναι, ουσιαστικά, ένας μέσος όρος όλων των άπειρων στιγμιαίων μεταβλητοτήτων στο χρονικό διάστημα [0, T].

Ο Dupire (1993) προσπάθησε να απαντήσει στο ερώτημα κατά πόσο είναι δυνατό να κατασκευαστεί μια συνάρτηση στιγμιαίας μεταβλητότητας που να είναι εξαρτώμενη και από το επίπεδο της τιμής του τίτλου (state-dependent), η οποία όταν τροφοδοτηθεί στην εξίσωση (3.5) να αποκαλύψει την ολοκληρωτική επιφάνεια τεκμαρτής μεταβλητότητας σ(K, T). Όλο αυτό προϋποθέτει ότι επιθυμούσε να γνωρίζει εάν μια ντετερμινιστική συνάρτηση μεταβλητότητας υπάρχει ώστε να ικανοποιεί την εξίσωση (3.7).

Η απάντηση σε αυτό είναι αρνητική, εκτός και εάν εφαρμοστεί το θεώρημα του Gyöngy όπου η SDE (3.5) τροποποιείται σε μια άλλη SDE με μη στοχαστική συνάρτηση μεταβλητότητας. Αυτό, επί της ουσίας, είναι που απέδειξε ο Dupire (1993).

Με βάση την κλασική χρηματοοικονομική θεωρία, η τρέχουσα τιμή ενός δικαιώματος αγοράς (call) τη χρονική στιγμή t με τιμή εξάσκησης K και χρόνο στη λήξη T, είναι η προεξοφλημένη προσδοκία της μελλοντικής αποπληρωμής του κατά τη λήξη, κάτω από ένα μέτρο ουδέτερο στον κίνδυνο. Στο πλαίσιο αυτό, ο Dupire (1993) υπέθεσε ότι η κατανομή πιθανότητας της τιμής του υποκείμενου τίτλου, S_t, πρέπει να ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial S_T^2}(\sigma^2(S_T,T)S_T^2\varphi) - S_t\frac{\partial}{\partial S_T}((r-q)S_T\varphi) \quad (3.13)$$

Όπου η ποσότητα $\varphi \equiv \varphi(S_T,T)$ αποτελεί τη μελλοντική κατανομή πιθανότητας μετάβασης της τυχαίας μεταβλητής S_T στην SDE (3.7). Δοθέντος της σχέσης (3.14) και με σχετικούς μαθηματικούς υπολογισμούς, προκύπτει η εξίσωση (3.15) του Dupire (1993) η οποία είναι εκφρασμένη σε όρους τιμών δικαιωμάτων αγοράς C(K, T).

$$\frac{\partial^2 C}{\partial K^2} = \varphi(K,T) \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial T}C(K,T) + (r-q)K\frac{\partial}{\partial K}C(K,T) - \frac{1}{2}\sigma^2(K,T)K^2\frac{\partial^2}{\partial K^2}C(K,T) + qC(K,T) = 0 \quad (3.15)$$

Στην παραπάνω σχέση η συνάρτηση σ(K,T) είναι συνεχής και παραγωγίσιμη και ως προς την τιμή εξάσκησης K και ως προς το χρόνο στη λήξη T. Έτσι, η συνάρτηση τοπικής μεταβλητότητας καθορίζεται μονοσήμαντα από την επιφάνεια των τιμών των δικαιωμάτων. Αξίζει κάποιος να παρατηρήσει ότι η σχέση (3.15) προέκυψε σταδιακά μέσα από την (3.13) όπου ο τρέχον χρόνος t αντικαθίσταται από τον χρόνο στη λήξη T και το επίπεδο της τιμής της μετοχής S αντικαθίσταται από την τιμή εξάσκησης K.

Ενώ η εξίσωση (3.13) είναι χρήσιμη όταν προϋπάρχει γνώση της κατανομής πιθανότητας της τιμής ενός τίτλου και επιθυμείται να εξεταστεί πως θα κινηθεί μελλοντικά με δεδομένη την τάση και την διάχυση που υπάρχει, η εξίσωση του Dupire (3.15) δίνει την δυνατότητα να διερευνηθεί και το αντίστροφο πρόβλημα να προσαρμοστούν υποδείγματα διάχυσης σε παρατηρούμενες ιστορικές τιμές δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης, όπως αναφέρουν οι Kotzé et al (2015).

Επίσης, το προθεσμιακό υπόδειγμα (3.15) είναι πολύ χρήσιμο διότι εμπεριέχει ένα πολύ πιο γενικό πλαίσιο, ακόμα και εάν η ουδέτερη στον κίνδυνο δυναμική της τιμής του υποκείμενου τίτλου δεν είναι απαραίτητα Μαρκοβιανή, αλλά μπορεί να περιγραφεί από ένα συνεχές martingale Brown της μορφής $dSt = S_t\sigma dW_t$, σύμφωνα με τους Kotzé et al (2015). Σε αυτή την περίπτωση, τα δικαιώματα αγοράς θα ικανοποιούν την προθεσμιακή PDE όπου ο συντελεστής διάχυσης δίνεται από την συνάρτηση τοπικής μεταβλητότητας σ(S, t) η οποία δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$\sigma(S,t) = \sqrt{E[\sigma^2|S_t = S]} \qquad (3.16)$$

Η ποσότητα σ αποτελεί την στιγμιαία η στοχαστική μεταβλητότητα της διαδικασίας S_t. Η παραπάνω μέθοδος συνδέεται με το πρόβλημα της Μαρκοβιανής πρόβλεψης, όπως αναφέρουν οι Kotzé et al (2015).

Ο Dupire (1994) χρησιμοποίησε τη δεύτερη παράγωγο ως προς την τιμή εξάσκησης της τιμής του δικαιώματος αγοράς, η οποία δίνει την οριακή κατανομή πιθανότητας. Καθώς η εξίσωση (3.13) περιγράφει τη χρονική εξέλιξη των μελλοντικών πιθανοτήτων μετάβασης, είναι δυνατό να απομονωθούν οι συντελεστές της μεταβλητότητας οι οποίοι δείχνουν τις τιμές των δικαιωμάτων για διάφορες τιμές εξάσκησης και χρόνων στη λήξη στην εξίσωση (3.15).

Ο Dupire (1993), στην πραγματικότητα, απέδειξε ότι είναι δυνατό να υπολογιστεί η ίδια τιμή δικαιώματος επιλύοντας ένα δυικό πρόβλημα που εμπλέκει την παραβολική εξίσωση με τις μεταβλητές K και T, γνωστή και ως δυική εξίσωση των Black & Scholes ή ως εξίσωση Dupire. Αυτή η εξίσωση επιτρέπει τον υπολογισμό της τιμής ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς για κάθε τιμή εξάσκησης και χρόνου στη λήξη, δοθέντος της σημερινής τιμής του τίτλου S_t και της τρέχουσα στιγμή t. O Dupire (1994) επίλυσε την εξίσωση αυτή ως προς την μεταβλητότητα και έλαβε τον παρακάτω τύπο:

$$\sigma_{loc}^2(K,\tau) = 2\left\{\frac{\frac{\partial C(K,\tau)}{\partial \tau}+C(K,\tau)q+(r-q)K\frac{\partial C(K,\tau)}{\partial K}}{K^2\frac{\partial^2 C(K,\tau)}{\partial K^2}}\right\} \tag{3.17}$$

τ = ο εναπομείναν χρόνος έως τη λήξη του δικαιώματος

Με βάση τον τύπο (3.17), έχοντας ως δεδομένες τις αγοραίες τιμές των δικαιωμάτων αγοράς για διάφορες τιμές εξάσκησης K και χρόνου έως τη λήξη τ, υπολογίζεται η τοπική μεταβλητότητα $\sigma_{loc}(K,\tau)$ η οποία θα επικρατήσει κατά τη στιγμή λήξης τ, όταν και η μελλοντική τιμή του τίτλου θα καταλήξει να είναι ίση με την τιμή εξάσκησης (S_T = K).

Είναι προφανές από τον τύπο αυτόν ότι η τοπική μεταβλητότητα εξαρτάται από την τιμή εξάσκησης και από τον εναπομείναν χρόνο έως τη λήξη. Έτσι, για να σχεδιαστεί η τρισδιάστατη επιφάνεια της τοπικής μεταβλητότητας ορίζεται αρχικά τ = t, που αντανακλά την αρχή της περιόδου και έπειτα θεωρούνται πολύ μικρά διαστήματα του χρόνου έως το χρόνο στη λήξη, άρα τ = T. Για κάθε χρονικό διάστημα, δε, υπολογίζεται η τοπική μεταβλητότητα και για μια μεγάλη γκάμα από τιμές εξάσκησης, όπως αναφέρουν οι Kotzé et al (2015).

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι οι ποσότητες r και q αντανακλούν το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο και την μερισματική απόδοση, αντίστοιχα, σε ένα συνεχές πλαίσιο, όπως αναφέρουν οι Kotzé et al (2015), ενώ ο αριθμός 2 που είναι πολλαπλασιαστής στον τύπο (3.17) είναι συμβατός με το συμπέρασμα που αναφέρθηκε προηγουμένως για μισή κλίση της τεκμαρτής μεταβλητότητας σε σχέση με την τοπική.

Θα πρέπει, επίσης, να τονιστεί ότι ο τύπος (3.17) εξασφαλίζει μια μονοσήμαντη λύση ως προς την επιφάνεια τοπικής μεταβλητότητας, με την έννοια ότι η υπολογισμένη επιφάνεια τοπικής μεταβλητότητας αναπαράγει τις παρατηρούμενες τιμές των δικαιωμάτων αγοράς για αντίστοιχες τιμές εξάσκησης και χρόνου λήξης, όπως υποστηρίζουν οι Kotzé et al (2015).

Καθώς ο τύπος (3.17) αναπαράγει μια διακύμανση, δηλαδή μια θετική ποσότητα, τότε θα πρέπει να εξασφαλίζεται ότι το δεξί μέλος του είναι πάντα θετικό και άρα έχει την πρέπουσα ερμηνευτικότητα ως διακύμανση. Αυτό εξασφαλίζεται από τις παραδοχές για μη-αρμπιτράζ, σύμφωνα με τους Kotzé et al (2015). Εάν ληφθεί υπόψη ο παρανομαστής του τύπου, τότε προκύπτει το εξής:

$$\sigma_{loc}^{2}(K,\tau) \propto \left(K^{2}\frac{\partial^{2}C(K,\tau)}{\partial K^{2}}\right)^{-1} \tag{3.18}$$

Ενώ η ποσότητα K^2 είναι σαφώς θετική εξορισμού, η δεύτερη παράγωγος της τιμής του δικαιώματος ως προς την τιμή εξάσκησης πρέπει να είναι θετική υπό την παραδοχή της απουσίας αρμπιτράζ καθώς η παράγωγος αυτή είναι συμβατή στο πλαίσιο ενός butterfly spread, με βάση τους Kotzé et al (2015). Αντιστοίχως, ο αριθμητής εξασφαλίζεται ότι είναι θετικός στο πλαίσιο ενός calendar spreads. Προκύπτει, λοιπόν, ότι μια επιφάνεια τεκμαρτής μεταβλητότητας υπολογίζεται απουσία αρμπιτράζ, εάν η τοπική μεταβλητότητα είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός, όπως καταλήγουν οι Kotzé et al (2015).

Ο τύπος του Dupire (3.17) δεν είναι αναλυτικά επιλύσιμος. Η συνάρτηση της τιμής του δικαιώματος, καθώς και οι παράγωγοί της, σε αυτή την εξίσωση θα πρέπει να προσεγγιστούν αριθμητικά, σύμφωνα με τους Kotzé et al (2015). Μάλιστα, για να υπολογιστεί ο συντελεστής δέλτα της τιμής του δικαιώματος ως προς την τιμή εξάσκησης θα χρησιμοποιηθεί ο παρακάτω τύπος:

$$\frac{\partial C(K,\tau)}{\partial K} = \frac{C\big(K+\Delta K,\sigma(K+\Delta K,T)\big)-C(K,\sigma(K,T))}{\Delta K} \qquad (3.19)$$

Αντίστοιχα, ο συντελεστής γάμμα του δικαιώματος ως προς την τιμή εξάσκησης υπολογίζεται αριθμητικά με βάση τον παρακάτω τύπο:

$$\frac{\partial^2 C(K,\tau)}{\partial K^2} = \frac{C\big(K+\Delta K,\sigma(K+\Delta K)\big)+C\big(K-\Delta K,\sigma(K-\Delta K)\big)-2C(K,\sigma(K))}{\Delta K^2} \qquad (3.20)$$

Δυστυχώς ανακύπτουν και κάποια πρακτικά προβλήματα στην εξίσωση (3.17), όπως αναφέρουν οι Kotzé et al (2015). Πιο συγκεκριμένα, όταν οι τιμές που είναι να προσεγγιστούν είναι πολύ μικρές, και έτσι μικρά απόλυτα σφάλματα μπορεί να οδηγήσουν σε πολύ μεγάλα σχετικά σφάλματα, οδηγώντας σε μη αξιόπιστες εκτιμήσεις της μεταβλητότητας. Αυτά μπορούν να παρατηρηθούν είτε σε δικαιώματα που είναι βαθιά ITM ή OTM ή έχουν πολύ μικρή περίοδος στη λήξη. Μάλιστα, τα σφάλματα μπορεί να είναι τέτοια που να οδηγούν σε αρνητικές διακυμάνσεις και, κατά συνέπεια σε περίπλοκες και μη ερμηνεύσιμες τοπικές μεταβλητότητες.

Επίσης, η υπόθεση της συνέχειας των τιμών των δικαιωμάτων δεν είναι και τόσο ρεαλιστική, τονίζουν οι Kotzé et al (2015). Στην πράξη, οι τιμές των δικαιωμάτων παρατηρούνται σε συνεχή διαστήματα και για ένα συγκεκριμένο πεπερασμένο, μάλλον περιορισμένο, πλήθος τιμών εξάσκησης και χρόνων στη λήξη. Όλα αυτά έχουν ως αποτέλεσμα, στην πράξη, να μην υπάρχει μονοσήμαντη λύση της μεταβλητότητας και να τίθεται και θέμα σταθερότητας αυτής. Για αυτό και πρέπει να υπάρχει στροφή σε άλλες εναλλακτικές.

Μια σκέψη, όπως αναφέρουν οι Kotzé et al (2015), είναι ότι καθώς τα δικαιώματα διαπραγματεύονται πάνω στην τεκμαρτή μεταβλητότητα της τιμής του υποκείμενου τίτλου, να τροποποιηθεί ο τύπος (3.17) ώστε εμπεριέχει αυτές τις τεκμαρτές μεταβλητότητες αντί για τις τιμές των δικαιωμάτων. Λαμβάνοντας υπόψη τον κλασικό τύπο αποτίμησης ενός δικαιώματος αγοράς από τους Black & Scholes, προκύπτει ο παρακάτω τύπος αποτίμησης της τοπικής μεταβλητότητας:

$$\sigma_{loc}^2(K,\tau) = \frac{\sigma_{imp}^2 + 2\tau\sigma_{imp}\frac{\partial\sigma_{imp}}{\partial\tau} + 2(r-q)Kt\sigma_{imp}\frac{\partial\sigma_{imp}}{\partial K}}{\left(1+Kd_1\sqrt{\tau}\frac{\partial\sigma_{imp}}{\partial K}\right)^2 + K^2\tau\sigma_{imp}\left(\frac{\partial^2\sigma_{imp}}{\partial K^2} - d_1\sqrt{\tau}\left(\frac{\partial\sigma_{imp}}{\partial K}\right)^2\right)} \quad (3.21)$$

Όπου, $d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r-q+\frac{\sigma_{imp}^2}{2}\right)\tau}{\sigma_{imp}\sqrt{\tau}}$

Η τεκμαρτή μεταβλητότητα σ_{imp} είναι μια συνάρτηση της τιμής εξάσκησης Κ και του εναπομείναν χρόνου στη λήξη τ.

Συγκρίνοντας τους τύπους (3.17) και (3.21), είναι ξεκάθαρο ότι το πρόβλημα μεγάλων αριθμητικών σφαλμάτων δεν υπάρχει πια με βάση τον δεύτερο, όπως υποστηρίζουν οι Kotzé et al (2015). Ο σχετικός μετασχηματισμός του τύπου του Dupire (3.17) στον τύπο (3.21) εξασφαλίζει πια ότι ο συντελεστής γάμμα, δηλαδή η δεύτερη παράγωγος της τιμής του δικαιώματος ως προς την τιμή εξάσκησης, δεν βρίσκεται πια μόνος του στον παρανομαστή, όπως ήταν στον τύπο (3.17), και για αυτό μικρά σφάλματα σε αυτή την ποσότητα δε θα οδηγήσουν σε μεγάλα σφάλματα στην τελική εκτίμηση της τοπικής μεταβλητότητας. Πάντως, θα πρέπει να σημειωθεί ότι μικρές διαφορές στην επιφάνεια μεταβλητότητας, μπορούν να οδηγήσουν σε μεγάλες διαφορές στην εκτιμώμενη τοπική μεταβλητότητα, σύμφωνα και με τους Kotzé et al (2015).

Το κύριο πρόβλημα που διέπει τον τύπο (3.21) είναι ότι οι τεκμαρτές μεταβλητότητες πραγματοποιούνται μόνο για διακριτές περιπτώσεις τιμών εξάσκησης Κ και χρόνων στη λήξη Τ. Για αυτό, οι Kotzé et al (2015) αναφέρουν ότι η επιλεγείσα παραμετροποίηση της επιφάνειας της τεκμαρτής μεταβλητότητας είναι ιδιαίτερα σημαντική. Εάν οι τεκμαρτές μεταβλητότητες χρησιμοποιούνται απευθείας από την αγορά, τότε οι παράγωγοι στον τύπο (3.21) θα πρέπει να υπολογιστούν αριθμητικά χρησιμοποιώντας πεπερασμένες διαφορές ή άλλες αντίστοιχες μεθόδους. Πάντως ακόμη και αυτό μπορεί να παραμένει να δίνει μη σταθερές λύσεις στην επιφάνεια τοπικής μεταβλητότητας.

Επιπλέον, θα πρέπει να εφαρμοστούν μέθοδοι παρεμβολής των δοσμένων δεδομένων σε μια τελική επιφάνεια αποτελεσμάτων για να προκύψει μια συνεχής επιφάνεια, όπως αναφέρουν οι Kotzé et al (2015), αλλά και άλλοι συγγραφείς. Καθώς η εκτίμηση της τοπικής μεταβλητότητας εμπλέκει τη χρήση παραγώγων, η εκτιμηθείσα τεκμαρτή επιφάνεια μεταβλητότητας δεν μπορεί να είναι τόσο ανομοιόμορφη. Εάν υπάρχει, όμως, μια τέτοια ανομοιομορφία θα φαίνεται χειρότερη στην επιφάνεια της τοπικής μεταβλητότητας, υπονοώντας ότι δεν υπάρχει απουσία αρμπιτράζ σε αυτές τις περιοχές – περιπτώσεις.

Αξίζει, τέλος, να σημειωθεί ότι υπάρχουν αγορές, όπως για παράδειγμα αυτή του ξένου συναλλάγματος, όπου τα δικαιώματα διαπραγματεύονται με βάση κυρίως το συντελεστή δέλτα, που δείχνει κατά πόσο υπάρχει τρέχον κέρδος, και όχι με βάση την απόλυτη τιμή της τιμής εξάσκησης. Για αυτό ο Clark (2011) έχει προτείνει μια έκδοση του τύπου (3.19) που λαμβάνει υπόψη αυτό το γεγονός.

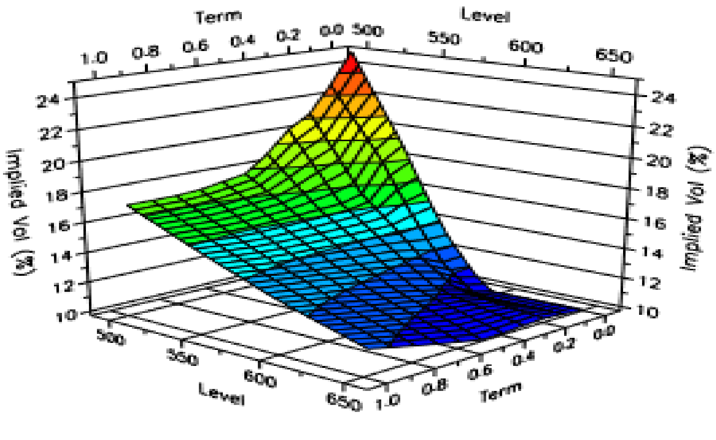
3.4 Εμπειρικό Παράδειγμα Εκτίμησης Επιφανειών Τεκμαρτής και Τοπικής Μεταβλητότητας

Οι Derman et al (1995) ανάφεραν πως οι παρατηρούμενες τιμές των δικαιωμάτων σε κάποιο χρηματιστηριακό δείκτη για διάφορες τιμές εξάσκησης και χρονικές λήξεις μπορούν να αποκαλύψουν την επιφάνεια τοπικής μεταβλητότητας του υποκείμενου δείκτη. Μάλιστα η σχετική διαδικασία είναι παρόμοια με εκείνη που από τη καμπύλη επιτοκίων προκύπτουν τα προθεσμιακά επιτόκια. Έτσι, οι αναλυτές των δικαιωμάτων σε δείκτες αναλύουν το «χαμόγελο μεταβλητότητας» σε όρους τοπικών μεταβλητοτήτων.

Όπως έχει δειχθεί και σε θεωρητικό – μαθηματικό πλαίσιο, η τεκμαρτή μεταβλητότητα είναι συνάρτηση της τιμής εξάσκησης και του χρόνου στη λήξη. Έτσι, πρόκειται, ουσιαστικά για μια διμεταβλητή συνάρτηση της οποίας το αποτέλεσμα (μεταβλητότητα) απεικονίζεται σε μια επιφάνεια και όχι σε μια γραμμή, όπως θα επρόκειτο σε περίπτωση μονομεταβλητής συνάρτησης. Στο διάγραμμα 3.1 αμέσως παρακάτω παρουσιάζεται μια τυπική επιφάνεια τεκμαρτής μεταβλητότητας που αναφέρεται στον δείκτη S&P500 και έχει προκύψει από τιμές δικαιωμάτων που λήγουν τον Σεπτέμβρη του 1995. Θα πρέπει να τονιστεί, όπως αναφέρουν και οι Derman et al (1995), ότι η επιφάνεια μεταβλητότητας, ή αλλιώς και χαμόγελο μεταβλητότητας, υπολογίζεται και μεταβάλλεται σε καθημερινή βάση, παρόλο που κάποια στοιχεία της μένουν σταθερά στο χρόνο.

Από το γράφημα είναι εύκολο να παρατηρήσει κάποιος τις τρεις διαστάσεις. Η διάσταση term μετράει τον χρόνο έως τη λέξη (σε έτη), ενώ η διάσταση Level μετράει τις τιμές εξάσκησης που κυμαίνονται από τις 500 έως τις 650 μονάδες δείκτη. Ο κάθετος άξονας μετράει την τεκμαρτή μεταβλητότητα η οποία μετράται σε ποσοστιαίες μονάδες (%) σε ετήσια βάση. Η μεταβλητότητα, λοιπόν, του δείκτη S&P500 τεκμαίρεται σε ένα εύρος από 10% έως 24% για τα εύρη χρόνου λήξης και τιμών εξάσκησης που αναφέρθηκαν. Παρατηρείται ότι για δικαιώματα που έχουν μεγάλο χρόνο λήξης και μικρή τιμή εξάσκησης τεκμαίρεται η υψηλότερη μεταβλητότητα, ενώ η χαμηλότερη παρατηρείται για δικαιώματα με μεσαίους χρόνους λήξης και μεγάλες τιμές εξάσκησης.

Διάγραμμα 3.1, Επιφάνεια Τεκμαρτής Μεταβλητότητας για Δικαιώματα στον Δείκτη S&P500 ως Συνάρτηση της Τιμής Εξάσκησης και του Χρόνου στη Λήξη με Περίοδο Λήξης 27 Σεπτεμβρίου 1995



Πηγή: Derman et al (1995)

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι οι παρατηρούμενες τιμές των δικαιωμάτων αφορούν διακριτές τιμές εξάσκησης και περιόδους λήξης. Για να κατασκευαστεί, όμως, μια συνεχής επιφάνεια, εφαρμόζεται η μέθοδος της γραμμικής παρεμβολής, έτσι ώστε να τεκμαίρονται και οι μεταβλητότητες που αφορούν τιμές εξάσκησης και χρόνους λήξης ανάμεσα στα παρατηρούμενα σημεία, όπως αναφέρουν οι Derman et al (1995).

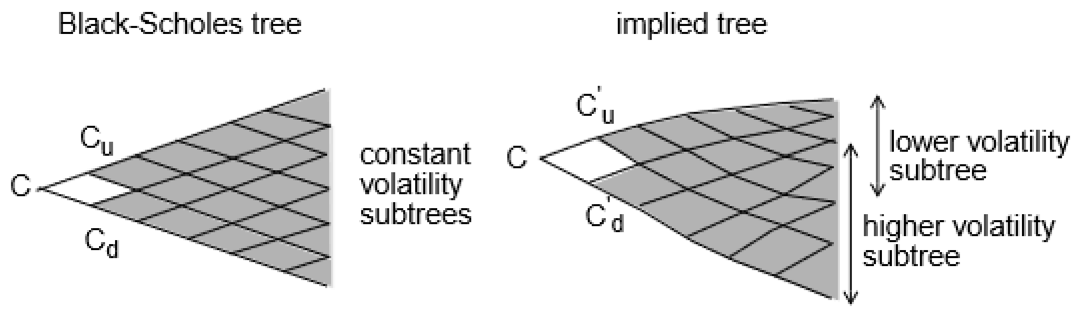
Σε ένα μονομεταβλητό επίπεδο παρατηρούνται τα εξής: Η δομή τιμών εξάσκησης δείχνει ότι, για δεδομένο κάθε φορά χρόνο στη λήξη, η τεκμαρτή μεταβλητότητα αυξάνει για χαμηλότερο επίπεδο τιμών εξάσκησης. Αυτό σημαίνει, σύμφωνα με τους Derman et al (1995), ότι τα OTM δικαιώματα πώλησης διαπραγματεύονται σε υψηλότερη τεκμαρτή μεταβλητότητα σε σχέση με τα OTM δικαιώματα αγοράς. Μάλιστα, αυτό το χαρακτηριστικό αναφέρεται και ως αρνητική ασυμμετρία. Η δομή χρόνου στη λήξη δείχνει ότι, για δεδομένη τιμή εξάσκησης, οι μακροχρόνιες μεταβλητότητες είναι πιο υψηλές από ότι οι βραχυχρόνιες. Μάλιστα, η μεταβολή της μεταβλητότητας, ως προς το χρόνο λήξης είναι πιο έντονη για μικρότερες τιμές εξάσκησης.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί σε θεωρητικό – μαθηματικό επίπεδο, η έννοια της τοπικής μεταβλητότητας αποτελεί μια ποιοτική επέκταση της τεκμαρτής μεταβλητότητας στο πλαίσιο του υπόβαθρου των Black & Scholes. Πιο συγκεκριμένα, η αποτίμηση της τιμής ενός δικαιώματος είναι βασισμένη στην εκτίμηση της μελλοντικής μεταβλητότητας, όπου στο πλαίσιο αυτό, η τεκμαρτή μεταβλητότητα είναι, κατά κάποιο τρόπο, σαν ένας μέσος όρος των επιμέρους μελλοντικών μεταβλητοτήτων έως τη λήξη του.

Κάτω από αυτή τη λογική, σύμφωνα και με τους Derman et al (1995), η τεκμαρτή μεταβλητότητα αποτελεί ένα ολικό μέτρο μεταβλητότητας, σε αντίθεση με την τοπική μεταβλητότητα η οποία εκτιμάται σε κάθε κόμβο ενός δέντρου που απεικονίζει την εξέλιξη της τιμής του υποκείμενου τίτλου. Έτσι, υπάρχει μια εμφανής διαφορά ανάμεσα στις έννοιες της τεκμαρτής και τοπικής μεταβλητότητας, όπως επισημαίνουν οι Derman et al (1995), και με χρήση των δεδομένων για τον δείκτη S&P500 προσπάθησαν να εξάγουν τις προσδοκίες της αγοράς για την τοπική μεταβλητότητα από το επίπεδο που είχε προκύψει για την τεκμαρτή μεταβλητότητα.

Για να γίνει ακόμη πιο κατανοητή η έννοια της τεκμαρτής και τοπικής μεταβλητότητας παρουσιάζεται στο γράφημα 3.2 αμέσως παρακάτω το τεκμαρτό διωνυμικό δέντρο της εξέλιξης της τιμής ενός τίτλου και το κλασικό διωνυμικό δέντρο των Black & Scholes.

Διάγραμμα 3.2, Τεκμαρτό Διωνυμικό Δέντρο Εξέλιξης Τιμής του Υποκείμενου Τίτλου, Διωνυμικό Δέντρο των Black & Scholes και Τοπική Μεταβλητότητα



Πηγή: Derman et al (1995)

Το συνολικό «άνοιγμα των πιθανών τιμών που αναφέρεται στο συνολικό δέντρο στην αρχή της περιόδου (C) δείχνει την τρέχουσα μεταβλητότητα.

Στο πρώτο γράφημα, στην επόμενη χρονική στιγμή προκύπτει ότι η τότε μελλοντική μεταβλητότητα παραμένει ίδια είτε ανέβει (Cu), είτε πέσει (Cd) η αγορά, υπονοώντας μια σταθερή μεταβλητότητα.

Στο δεύτερο γράφημα, στην επόμενη χρονική στιγμή προκύπτει η τότε μελλοντική τοπική μεταβλητότητα ανάλογα με το που βρίσκεται, τότε, η τιμή του υποκείμενου τίτλου. Σε περίπτωση ανοδική αγοράς (Cu), προκύπτει από το πάνω σκιασμένο «υπό-δέντροο» ένα άνοιγμα τιμών που υπονοεί μια χαμηλή, σχετικά, μεταβλητότητα, ενώ σε περίπτωση καθοδικής αγοράς (Cd), προκύπτει από το κάτω σκιασμένο «υπό-δέντροο» ένα άνοιγμα τιμών του τίτλου που υπονοεί μια υψηλή, σχετικά, μεταβλητότητα. Αυτή η αρνητική σχέση ανάμεσα στην τιμή του τίτλου και τη μεταβλητότητα υπονοεί και την αρνητική ασυμμετρία που ήδη έχει αναφερθεί.

Από το ορισμό της τοπικής μεταβλητότητας, προκύπτει, σύμφωνα με τους Derman et al (1995), ότι όπως η τεκμαρτή μεταβλητότητα μεταβάλλεται για δεδομένη τιμή εξάσκησης και χρόνο στη λήξη, έτσι η τοπική μεταβλητότητα μεταβάλλεται για δεδομένη μελλοντική τιμή του υποκείμενου τίτλου και το χρόνο. Καθώς, λοιπόν, η τεκμαρτή μεταβλητότητα αποτελεί έναν μέσο όρο των πιθανών τοπικών μεταβλητοτήτων, οι Derman et al (1995) επισημαίνουν ότι η επιφάνεια της τεκμαρτής μεταβλητότητας υπονοεί κάποια δυσδιάκριτη καλά «κρυμμένη» επιφάνεια τοπικής μεταβλητότητας.

Θεωρώντας, λοιπόν, τις αγορές των δικαιωμάτων ως αποτελεσματικές και λαμβάνοντας υπόψη ότι η μεταβλητότητα του υποκείμενου τίτλου έως τη λήξη τους δεν παραμένει σταθερή, εκτιμάται η επιφάνεια τοπικής μεταβλητότητας, ως συνάρτηση της μελλοντικής τιμής του τίτλου και του χρόνου, όπως αναφέρουν οι Derman et al (1995).

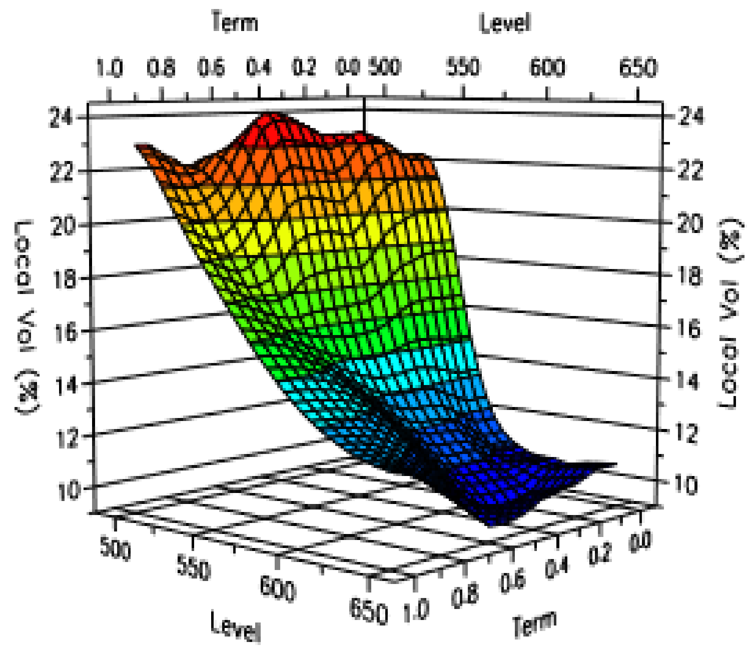
Με άλλα λόγια, το τρέχον επίπεδο των τιμών δικαιωμάτων, άρα και το τρέχον επίπεδο της τεκμαρτής μεταβλητότητας, προσδιορίζεται από τις προσδοκίες της αγοράς για την τοπική μεταβλητότητα στο μέλλον. Μάλιστα, οι Derman et al (1995) αναφέρουν ότι πολλοί αναλυτές εκτιμούν την τοπική μεταβλητότητα, μέσα από τις τιμές δικαιωμάτων, ενστικτωδώς, κατά κάποιο τρόπο.

Στο διάγραμμα 3.3 αμέσως παρακάτω παρουσιάζεται μια τυπική επιφάνεια τοπικής μεταβλητότητας που αναφέρεται στον δείκτη S&P500 και έχει προκύψει από τιμές δικαιωμάτων που λήγουν τον Σεπτέμβρη του 1995. Αυτή η επιφάνεια έχει υπολογιστεί, ουσιαστικά, μέσα από την αντίστοιχη επιφάνεια τεκμαρτής μεταβλητότητας, όπως είχε αρχικά υπολογιστεί.

Παρατηρείται ότι η πιο υψηλή μεταβλητότητα παρατηρείται όχι μόνο για πιο μακροχρόνια δικαιώματα, σε συνδυασμό με χαμηλή τιμή εξάσκησης όπως και στην περίπτωση της τεκμαρτής μεταβλητότητας, αλλά περισσότερο για πιο μεσοπρόθεσμα δικαιώματα, σε συνδυασμό πάντα με χαμηλή τιμή εξάσκησης. Χαμηλή μεταβλητότητα παρατηρείται, για δικαιώματα μεσοπρόθεσμα με υψηλή τιμή εξάσκησης.

Αυτό που είναι ενδιαφέρον να παρατηρηθεί είναι ότι η επιφάνεια της τοπικής μεταβλητότητας χαρακτηρίζεται από κάποια σημεία με ανωμαλίες και ασυνέχειες και δεν είναι ομαλή, όπως αυτή της τεκμαρτής μεταβλητότητας. Αυτό το χαρακτηριστικό είχε επισημανθεί και σε θεωρητικό επίπεδο και παρατηρείται, λοιπόν, και σε εμπειρικό με βάση τα δεδομένα που χρησιμοποίησαν οι Derman et al (1995). Οι ανωμαλίες αυτές παρατηρούνται διότι η μεταβλητότητα έχει, εκ φύσεως, μια στοχαστική συνιστώσα κάτι που επιτρέπει τυχαίες και απρόβλεπτες μεταβολές της. Το υπόδειγμα της τοπικής μεταβλητότητας λαμβάνει υπόψη του αυτό το χαρακτηριστικό, όπως έχει ήδη αναφερθεί σχετικά.

Διάγραμμα 3.2, Επιφάνεια Τοπικής Μεταβλητότητας για Δικαιώματα στον Δείκτη S&P500 ως Συνάρτηση της Τιμής Εξάσκησης και του Χρόνου στη Λήξη με Περίοδο Λήξης 27 Σεπτεμβρίου 1995



Πηγή: Derman et al (1995)

Κεφάλαιο 4: Εμπειρική Μελέτη

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται η εμπειρική μελέτη της παρούσας εργασίας, όπου με πραγματικά δεδομένα από τη χρηματιστηριακή αγορά έγινε προσπάθεια να εκτιμηθεί η επιφάνεια τεκμαρτής μεταβλητότητας και η επιφάνεια τοπικής μεταβλητότητας. Αρχικά παρουσιάζεται η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε για να εκτιμηθούν οι σχετικές επιφάνειες και έπειτα παρουσιάζονται και σχολιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν.

4.1 Περιγραφή Δεδομένων και Μεθοδολογίας

Για την εφαρμογή εμπειρικής μελέτης πάνω στην εκτίμηση των επιφανειών τεκμαρτής και τοπικής μεταβλητότητας χρησιμοποιήθηκαν δεδομένα από το χρηματιστήριο του Johannesburg. Πιο συγκεκριμένα, με χρήση της βάσης δεδομένων του Bloomberg αντλήθηκαν δεδομένα που αφορούν δικαιώματα με υποκείμενο τίτλο (underlying asset) Future συμβόλαια στο χρηματιστηριακό δείκτη FTSEINDEX TOP 40 από το JSE (Johannesburg Stock Exchange Market) με λήξη τις ημερομηνίες 20 Μάρτιου 2019, 20 Ιουνίου 2019, 19 Σεπτεμβρίου 2019 και 19 Δεκεμβρίου 2019.

Ακολουθήθηκε η μεθοδολογία των Kotzé et al (2015) για να εκτιμηθεί η επιφάνεια τεκμαρτής και τοπικής μεταβλητότητας η οποία και περιγράφτηκε, θεωρητικά σε προηγούμενο κεφάλαιο. Καθώς, όμως, τα δεδομένα αναφερόντουσαν σε ένα περιορισμένο εύρος τιμών εξάσκησης και χρόνων στη λήξη, έπρεπε να εφαρμοστεί η διαδικασία της γραμμικής παρεμβολής (interpolation / extrapolation) για να αποτιμηθούν μεταβλητότητες και για ενδιάμεσες τιμές εξάσκησης και χρόνων στη λήξη.

Πιο συγκεκριμένα, ως προς την τιμή εξάσκησης, ακολουθήθηκε η εξής διαδικασία. Έστω ότι για δύο παρατηρούμενες τιμές εξάσκησης K_1 και K_2 έχουν εκτιμηθεί μεταβλητότητες σ_1^2 και σ_2^2. Έτσι, για μια ενδιάμεση τιμή εξάσκησης K για την οποία ισχύει $K_1 < K < K_2$ η μεταβλητότητα σ(K) εκτιμάται με βάση τον παρακάτω τύπο:

$$\sigma^2(K) = \sigma_1^2 + (\sigma_2^2 - \sigma_1^2)\frac{K-K_1}{K_2-K_1} \qquad (4.1)$$

Έτσι, για κάθε ημερομηνία λήξης με βήμα ΔΚ = 100 μονάδες δείκτη εκτιμήθηκαν με τον τύπο (4.1) οι διάφορες μεταβλητότητες ανά τιμή εξάσκησης, έχοντας βάσει, βέβαια, τις μεταβλητότητες για τις παρατηρούμενες τιμές εξάσκησης. Δηλαδή, αρχικά εκτιμήθηκαν οι μεταβλητότητες με κάποια υπάρχοντες τιμές εξάσκησης Κ και έπειτα με βήμα ΔΚ = 100 εκτιμούνταν με τον τύπο (4.1) και οι υπόλοιπες μεταβλητότητες, έτσι ώστε να προκύψουν εκτιμώμενες μεταβλητές για πολλές τιμές εξάσκησης. Όλα αυτά, επαναλαμβάνουμε, για κάθε παρατηρούμενη ημερομηνία λήξης.

Στα εμπειρικά δεδομένα, η χαμηλότερη παρατηρούμενη τιμή εξάσκησης ήταν Κ = 44.200 μονάδες δείκτη και η υψηλότερη παρατηρούμενη τιμή εξάσκησης ήταν Κ = 50.400 μονάδες δείκτη. Η επιφάνεια μεταβλητότητας κατασκευάστηκε για τιμές εξάσκησης με βήμα ΔΚ = 100 μονάδες δείκτη, όπως αναφέρθηκε και πριν, δηλαδή για τιμές εξάσκησης 44.300, 44.400 κ.ο.κ. Για όσες τιμές εξάσκησης ενδιάμεσα παρατηρούνταν δικαιώματα στην αγορά η μεταβλητότητα εκτιμήθηκε με βάση τους τύπους που αναπτύχθηκαν σε προηγούμενα κεφάλαια και για όσες ενδιάμεσες δεν υπήρχαν παρατηρούμενα δικαιώματα να διαπραγματεύονται, εφαρμόστηκε η διαδικασία της γραμμικής παρεμβολής με τον τύπο (4.1).

Επιπλέον, υπήρξε αναγκαιότητα να εφαρμοστεί γραμμική παρεμβολή και ως προς τον χρόνο λήξης, με τη λογική ότι έπρεπε να υπάρχουν εκτιμήσεις μεταβλητότητας και για περισσότερους ενδιάμεσους χρόνους λήξης, εκτός από όσους υπήρχαν παρατηρούμενους. Για την περίπτωση αυτή εφαρμόστηκε η παρακάτω διαδικασία για να εκτιμηθούν μεταβλητότητες σε χρονικά σημεία t_1, t_2, …., t_N.

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma_1 & t < t_1 \\ \sqrt{\frac{1}{t}\left[\sigma_i^2 t_i + \sigma_{i,i+1}^2 (t - t_i)\right]}, & t_i \leq t \leq t_{i+1} \;\gamma\iota\alpha\; i < N \\ \sigma_N & t > t_N \end{cases} \qquad (4.2)$$

Όπου, $\sigma_{i,i+1}^2 = \frac{\sigma_{i+1}^2 t_{i+1} - \sigma_i^2 t_i}{t_{i+1} - t_i}$

Η λογική του τύπου (4.2) είναι πως για χρονικό σημείο t_1 έχει εκτιμηθεί μεταβλητότητα σ_1 και για χρονικό σημείο t_2 έχει εκτιμηθεί μεταβλητότητα σ_2, με δεδομένα ότι για τα χρονικά αυτά σημεία υπήρχαν δικαιώματα με αντίστοιχες λήξεις. Έτσι, για ένα τυχαίο χρονικό σημείο t ανάμεσα στα χρονικά σημεία εκτιμάται μέσω γραμμικής παρεμβολής και εφαρμογής της τύπου (4.2) η αντίστοιχη μεταβλητότητα σ(t).

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, τα παρατηρούμενα δικαιώματα για τα οποία υπάρχει διαπραγμάτευση, οι λήξεις ήταν 20 Μάρτιου 2019, 20 Ιουνίου 2019, 19 Σεπτεμβρίου 2019 και 19 Δεκεμβρίου 2019. Με την εφαρμογή του τύπου της γραμμικής παρεμβολής (4.2) εκτιμήθηκαν και μεταβλητότητες για τους ενδιάμεσους μήνες (Απρίλιος, Μάιος, Ιούλιος, Αύγουστος, Οκτώβριος και Νοέμβριος).

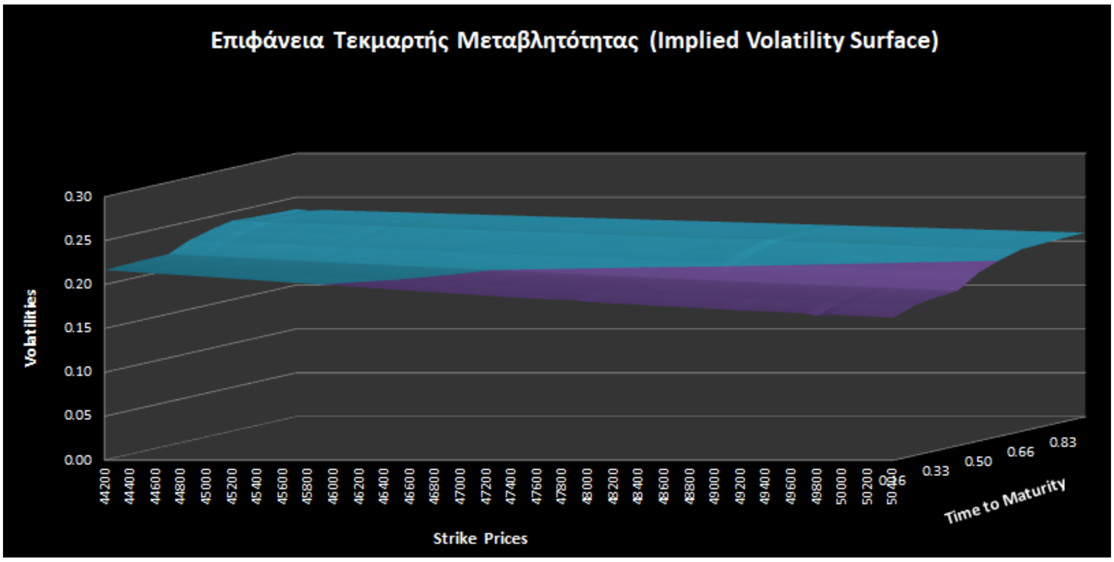
4.2 Εμπειρικά Αποτελέσματα και Σχολιασμός

Εφαρμόζοντας, λοιπόν, τις παραπάνω διαδικασίες και με χρήση των δεδομένων που αναφέρθηκαν, προέκυψαν τα παρακάτω αποτελέσματα. Αρχικά παρουσιάζεται η επιφάνεια τεκμαρτής μεταβλητότητας.

Παρατηρείται, σύμφωνα με το γράφημα 4.1, ότι η επιφάνεια τεκμαρτής μεταβλητότητας είναι αρκετά ομαλή και περίπου στο επίπεδο λίγο πάνω ή λίγο κάτω από 20%, όπου αυτή είναι και η τεκμαρτή μεταβλητότητα του υποκείμενου τίτλου σε ετήσια βάση.

Παρατηρείται, επίσης, ότι η τεκμαρτή μεταβλητότητα είναι κάπως υψηλότερη σε μεσαίες χρονικές στιγμές λήξης, ενώ είναι μικρότερη σε λήξεις κοντινές και πολύ πιο αργότερες. Παρατηρείται, επίσης, ότι η τεκμαρτή μεταβλητότητα τείνει να είναι υψηλότερη για χαμηλότερες τιμές εξάσκησης.

Διάγραμμα 4.1, Επιφάνεια Τεκμαρτής Μεταβλητότητας (Implied Volatility Surface)

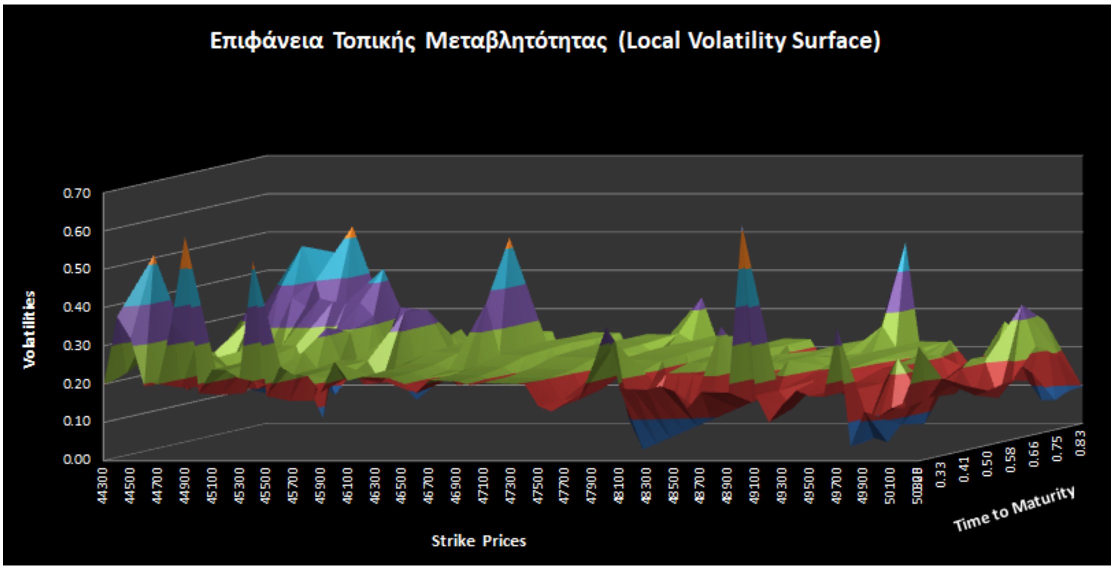


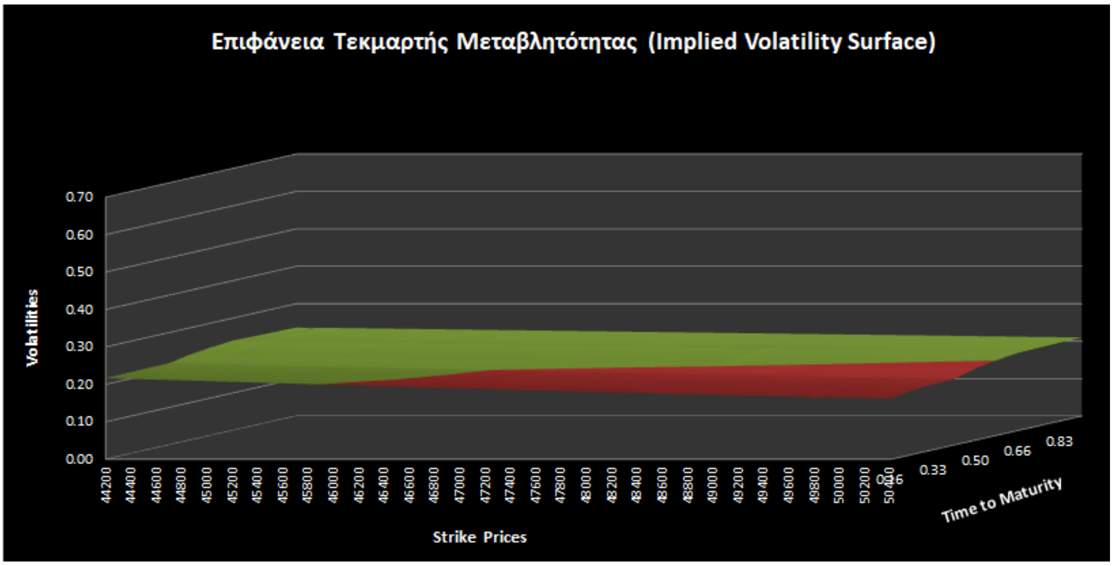
Τα αποτελέσματα αυτά ως προς την επιφάνεια τεκμαρτής μεταβλητότητας είναι συμβατά και με τα αντίστοιχα ευρήματα της εφαρμογής αυτή στην έρευνα των Kotzé et al (2015).

Παρατηρείται, σύμφωνα με το γράφημα 4.2, ότι η επιφάνεια τοπικής μεταβλητότητας δεν είναι καθόλου ομαλή και υπάρχουν αρκετές κορυφές σε διάφορα σημεία της. Το επίπεδο της επιφάνειας αυτής βρίσκεται λίγο πάνω από το 20%, όπως ήταν και της τεκμαρτής μεταβλητότητας, ενώ λόγω των κορυφών, υπάρχουν περιπτώσεις που η τοπική μεταβλητότητα φτάνει και το επίπεδο του 50% σε ετησία βάση.

Φαίνεται να υπάρχει μια τάση για χαμηλότερη τοπική μεταβλητότητα σε κοντινές και πιο μακρινές χρονικές λήξεις, ενώ υπάρχει και μια ελαφρά τάση για υψηλότερη μεταβλητότητα σε χαμηλότερες λήξεις, όπως και στην περίπτωση της τεκμαρτής μεταβλητότητας. Αυτό που αξίζει να παρατηρηθεί είναι ότι οι περισσότερες κορυφές και γενικότερη η πιο έντονη ανωμαλία της επιφάνειας καταγράφεται για χαμηλότερες τιμές εξάσκησης, ενώ η λιγότερο έντονη ανωμαλία καταγράφεται για μεσαίες τιμές εξάσκησης.

Διάγραμμα 4.2, Επιφάνεια Τοπικής Μεταβλητότητας (Local Volatility Surface)





Στο δεύτερο μέρος του γραφήματος 4.2 παρουσιάζεται και πάλι η επιφάνεια τεκμαρτής μεταβλητότητας σε παρόμοια κλίμακα μεταβλητότητας (στον κάθετο άξονα) για να γίνουν οι σχετικές συγκρίσεις. Πράγματι, εδώ φαίνεται ακόμη πιο έντονα η ανωμαλία της επιφάνειας της τοπικής μεταβλητότητας σε σχέση με την επιφάνεια της τεκμαρτής. Σύμφωνα και με τα ευρήματα της έρευνας των Kotzé et al (2015), αλλά και με τη σχετική θεωρία, αναμένεται να έχει η επιφάνεια της τοπικής μεταβλητότητας κάποιες ανωμαλίες και κατά τόπους κορυφές. Εντούτοις, στην προκειμένη περίπτωση, οι ανωμαλίες της επιφάνειας της τοπικής μεταβλητότητας ήταν αρκετά πιο έντονες, δείχνοντας ότι υπάρχουν κάποιοι παράγοντες οι οποίοι επηρεάζουν με έντονο τρόπο την τοπική μεταβλητότητα, η οποία θεωρείται, άλλωστε, μια πιο «βραχυχρόνια» μεταβλητότητα σε σχέση με την τεκμαρτή η οποία λογίζεται ως μια πιο «μακροχρόνια» και λειτουργεί ως μέσος όρος των επιμέρους τοπικών μεταβλητοτήτων. Προφανώς, φαίνεται ότι στη χρηματιστηριακή αγορά του Johannesburg υπάρχουν κάποιοι παράγοντες που δημιουργούν έντονη αβεβαιότητα και τυχαιότητα στις επιμέρους τοπικές μεταβλητότητες του γενικού δείκτη.

Παράρτημα

Πίνακας implied volatility

expiry	20 march 2019	vol	20 jun 2019	vol	19 sept 2019	vol	19 dec 2019	vol
Lowest Price	44200	21,65	44200	21,83	44200	24	44200	23,65
strike	44300	21,55	44300	21,76	44300	23,94	44300	23,47
strike	44400	21,46	44400	21,69	44400	23,89	44400	23,57
strike	44500	21,36	44500	21,62	44500	23,72	44500	23,52
strike	44600	21,26	44600	21,55	44600	23,70	44600	23,47
strike	44700	21,17	44700	21,47	44700	23,69	44700	23,43
strike	44800	21,08	44800	21,4	44800	23,67	44800	23,39
strike	44900	20,98	44900	21,33	44900	23,61	44900	23,34
strike	45000	20,88	45000	21,25	45000	23,56	45000	23,3
strike	45100	20,78	45100	21,18	45100	23,50	45100	23,26
strike	45200	20,69	45200	21,10	45200	23,45	45200	23,21
strike	45300	20,59	45300	21,03	45300	23,39	45300	23,17
strike	45400	20,49	45400	20,96	45400	23,29	45400	23,12
strike	45500	20,39	45500	20,88	45500	23,28	45500	23,08
strike	45600	20,29	45600	20,81	45600	23,22	45600	23,04
strike	45700	20,19	45700	20,74	45700	23,16	45700	22,99
strike	45800	20,09	45800	20,67	45800	23,11	45800	22,95
strike	45900	19,99	45900	20,59	45900	23,05	45900	22,91
strike	46000	19,90	46000	20,52	46000	23	46000	22,87
strike	46100	19,80	46100	20,45	46100	22,94	46100	22,82
strike	46200	19,70	46200	20,38	46200	22,89	46200	22,78

strike	46300	19,60	46300	20,31	46300	22,83	46300	22,74
strike	46400	19,50	46400	20,24	46400	22,78	46400	22,69
strike	46500	19,40	46500	20,17	46500	22,72	46500	22,65
strike	46600	19,30	46600	20,1	46600	22,67	46600	22,61
strike	46700	19,21	46700	20,03	46700	22,62	46700	22,57
strike	46800	19,11	46800	19,96	46800	22,56	46800	22,52
strike	46900	19,02	46900	19,89	46900	22,51	46900	22,48
strike	47000	18,93	47000	19,82	47000	22,45	47000	22,43
strike	47100	18,83	47100	19,75	47100	22,40	47100	22,39
strike	47200	18,74	47200	19,68	47200	22,34	47200	22,35
strike	47300	18,64	47300	19,61	47300	22,29	47300	22,30
strike	47400	18,55	47400	19,54	47400	22,23	47400	22,26
strike	47500	18,45	47500	19,47	47500	22,18	47500	22,22
strike	47600	18,36	47600	19,40	47600	22,13	47600	22,18
strike	47700	18,31	47700	19,34	47700	22,07	47700	22,13
strike	47800	18,27	47800	19,27	47800	22,02	47800	22,09
strike	47900	18,24	47900	19,21	47900	21,96	47900	22,04
strike	48000	18,02	48000	19,14	48000	21,910	48000	22
strike	48100	17,94	48100	19,07	48100	21,903	48100	21,96
strike	48200	17,86	48200	19,01	48200	21,895	48200	21,92
strike	48300	17,78	48300	18,94	48300	21,888	48300	21,87
strike	48400	17,69	48400	18,88	48400	21,880	48400	21,83
strike	48500	17,61	48500	18,81	48500	21,65	48500	21,79
strike	48600	17,53	48600	18,74	48600	21,6	48600	21,74
strike	48700	17,46	48700	18,68	48700	21,55	48700	21,70
strike	48800	17,38	48800	18,61	48800	21,50	48800	21,65
strike	48900	17,31	48900	18,55	48900	21,45	48900	21,61
strike	49000	17,23	49000	18,49	49000	21,4	49000	21,57
strike	49100	17,13	49100	18,43	49100	21,35	49100	21,53
strike	49200	17,03	49200	18,37	49200	21,30	49200	21,49
strike	49300	16,98	49300	18,30	49300	21,25	49300	21,44
strike	49400	16,94	49400	18,24	49400	21,2	49400	21,4
strike	49500	16,87	49500	18,18	49500	21,15	49500	21,36
strike	49600	16,8	49600	18,12	49600	21,1	49600	21,31
strike	49700	16,73	49700	18,06	49700	21,05	49700	21,27
strike	49800	16,42	49800	18	49800	20,99	49800	21,23
strike	49900	16,58	49900	17,97	49900	20,95	49900	21,17
strike	50000	16,52	50000	17,88	50000	20,9	50000	21,12
strike	50100	16,44	50100	17,82	50100	20,85	50100	21,1
strike	50200	16,37	50200	17,76	50200	20,8	50200	21,05
strike	50300	16,31	50300	17,7	50300	20,76	50300	21,01
strike	50400	16,23	50400	17,64	50400	20,71	50400	20,97
Future Price	47960		48479		48718		49172	

Πίνακας implied volatility (interpolation through time {April-May})

expiry	20 march 2019	vol	20 april 2019		vol	20 may 2019		vol	20 jun 2019
	0,16		0,25	σi,i+1		0,33	σi,i+1		0,41
Lowest Price	44200	21,65	44200	481,56	21,76	44200	481,56	21,80	44200
strike	44300	21,55	44300	479,32	21,67	44300	479,32	21,73	44300
strike	44400	21,46	44400	476,81	21,60	44400	476,81	21,65	44400
strike	44500	21,36	44500	474,58	21,51	44500	474,58	21,58	44500
strike	44600	21,26	44600	472,00	21,43	44600	472,00	21,50	44600
strike	44700	21,17	44700	469,15	21,35	44700	469,15	21,42	44700
strike	44800	21,08	44800	466,66	21,27	44800	466,66	21,35	44800
strike	44900	20,98	44900	464,45	21,19	44900	464,45	21,28	44900
strike	45000	20,88	45000	461,54	21,10	45000	461,54	21,19	45000
strike	45100	20,78	45100	459,02	21,02	45100	459,02	21,12	45100
strike	45200	20,69	45200	456,50	20,93	45200	456,50	21,04	45200
strike	45300	20,59	45300	453,98	20,85	45300	453,98	20,96	45300
strike	45400	20,49	45400	451,79	20,77	45400	451,79	20,89	45400
strike	45500	20,39	45500	448,92	20,68	45500	448,92	20,80	45500
strike	45600	20,29	45600	446,73	20,60	45600	446,73	20,73	45600
strike	45700	20,19	45700	444,41	20,52	45700	444,41	20,65	45700
strike	45800	20,09	45800	442,07	20,43	45800	442,07	20,58	45800
strike	45900	19,99	45900	439,73	20,35	45900	439,73	20,50	45900
strike	46000	19,90	46000	437,11	20,27	46000	437,11	20,43	46000
strike	46100	19,80	46100	434,95	20,19	46100	434,95	20,35	46100
strike	46200	19,70	46200	432,79	20,10	46200	432,79	20,28	46200
strike	46300	19,60	46300	430,64	20,02	46300	430,64	20,20	46300
strike	46400	19,50	46400	428,48	19,94	46400	428,48	20,13	46400
strike	46500	19,40	46500	426,33	19,86	46500	426,33	20,05	46500
strike	46600	19,30	46600	424,18	19,78	46600	424,18	19,98	46600
strike	46700	19,21	46700	421,88	19,70	46700	421,88	19,90	46700
strike	46800	19,11	46800	419,58	19,62	46800	419,58	19,83	46800
strike	46900	19,02	46900	417,28	19,54	46900	417,28	19,76	46900
strike	47000	18,93	47000	414,98	19,46	47000	414,98	19,68	47000
strike	47100	18,83	47100	412,75	19,38	47100	412,75	19,61	47100
strike	47200	18,74	47200	410,52	19,30	47200	410,52	19,54	47200
strike	47300	18,64	47300	408,29	19,22	47300	408,29	19,46	47300
strike	47400	18,55	47400	406,06	19,14	47400	406,06	19,39	47400
strike	47500	18,45	47500	403,84	19,06	47500	403,84	19,32	47500
strike	47600	18,36	47600	401,66	18,99	47600	401,66	19,25	47600
strike	47700	18,31	47700	398,82	18,92	47700	398,82	19,18	47700
strike	47800	18,27	47800	395,60	18,87	47800	395,60	19,12	47800
strike	47900	18,24	47900	392,14	18,82	47900	392,14	19,06	47900

strike	48000	18,02	48000	392,98	18,69	48000	392,98	18,97	48000
strike	48100	17,94	48100	390,73	18,62	48100	390,73	18,90	48100
strike	48200	17,86	48200	388,48	18,55	48200	388,48	18,83	48200
strike	48300	17,78	48300	386,23	18,47	48300	386,23	18,77	48300
strike	48400	17,69	48400	383,98	18,40	48400	383,98	18,70	48400
strike	48500	17,61	48500	381,79	18,33	48500	381,79	18,63	48500
strike	48600	17,53	48600	379,28	18,25	48600	379,28	18,56	48600
strike	48700	17,46	48700	377,04	18,19	48700	377,04	18,49	48700
strike	48800	17,38	48800	374,80	18,12	48800	374,80	18,43	48800
strike	48900	17,31	48900	372,56	18,05	48900	372,56	18,36	48900
strike	49000	17,23	49000	370,68	17,98	49000	370,68	18,30	49000
strike	49100	17,13	49100	369,12	17,91	49100	369,12	18,23	49100
strike	49200	17,03	49200	367,54	17,83	49200	367,54	18,16	49200
strike	49300	16,98	49300	364,86	17,77	49300	364,86	18,10	49300
strike	49400	16,94	49400	361,97	17,72	49400	361,97	18,04	49400
strike	49500	16,87	49500	359,90	17,66	49500	359,90	17,98	49500
strike	49600	16,8	49600	357,83	17,59	49600	357,83	17,92	49600
strike	49700	16,73	49700	355,78	17,53	49700	355,78	17,86	49700
strike	49800	16,42	49800	358,81	17,37	49800	358,81	17,76	49800
strike	49900	16,58	49900	353,66	17,41	49900	353,66	17,76	49900
strike	50000	16,52	50000	349,64	17,34	50000	349,64	17,68	50000
strike	50100	16,44	50100	347,81	17,27	50100	347,81	17,61	50100
strike	50200	16,37	50200	345,78	17,20	50200	345,78	17,55	50200
strike	50300	16,31	50300	343,55	17,14	50300	343,55	17,49	50300
strike	50400	16,23	50400	341,73	17,08	50400	341,73	17,43	50400

Πίνακας implied volatility (interpolation through time {June-Sept})

20 jun 2019	vol	20 july 2019		vol	20 aug 2019		vol	19 Sept 2019
0,41		0,50	σi,i+1		0,58	σi,i+1		0,66
44200	21,83	44200	739,10	22,89	44200	739,10	23,53	44200
44300	21,76	44300	736,51	22,82	44300	736,51	23,46	44300
44400	21,69	44400	735,18	22,76	44400	735,18	23,41	44400
44500	21,62	44500	718,79	22,64	44500	718,79	23,26	44500
44600	21,55	44600	722,00	22,60	44600	722,00	23,23	44600
44700	21,47	44700	725,22	22,55	44700	725,22	23,2	44700
44800	21,4	44800	728,06	22,51	44800	728,06	23,18	44800
44900	21,33	44900	725,47	22,44	44900	725,47	23,11	44900
45000	21,25	45000	724,83	22,38	45000	724,83	23,06	45000
45100	21,18	45100	722,89	22,31	45100	722,89	23	45100
45200	21,10	45200	720,95	22,25	45200	720,95	22,94	45200
45300	21,03	45300	719,02	22,18	45300	719,02	22,88	45300

45400	20,96	45400	711,51	22,10	45400	711,51	22,78	45400
45500	20,88	45500	715,77	22,05	45500	715,77	22,76	45500
45600	20,81	45600	713,19	21,99	45600	713,19	22,7	45600
45700	20,74	45700	710,76	21,92	45700	710,76	22,63	45700
45800	20,67	45800	709,57	21,86	45800	709,57	22,58	45800
45900	20,59	45900	707,17	21,80	45900	707,17	22,52	45900
46000	20,52	46000	706,00	21,73	46000	706,00	22,46	46000
46100	20,45	46100	703,43	21,67	46100	703,43	22,4	46100
46200	20,38	46200	701,46	21,61	46200	701,46	22,34	46200
46300	20,31	46300	699,50	21,54	46300	699,50	22,29	46300
46400	20,24	46400	697,53	21,48	46400	697,53	22,23	46400
46500	20,17	46500	695,56	21,42	46500	695,56	22,17	46500
46600	20,1	46600	694,20	21,36	46600	694,20	22,11	46600
46700	20,03	46700	692,23	21,30	46700	692,23	22,06	46700
46800	19,96	46800	690,26	21,24	46800	690,26	22	46800
46900	19,89	46900	688,29	21,17	46900	688,29	21,94	46900
47000	19,82	47000	686,32	21,11	47000	686,32	21,88	47000
47100	19,75	47100	684,47	21,05	47100	684,47	21,83	47100
47200	19,68	47200	682,62	20,99	47200	682,62	21,77	47200
47300	19,61	47300	680,77	20,93	47300	680,77	21,71	47300
47400	19,54	47400	678,91	20,86	47400	678,91	21,65	47400
47500	19,47	47500	677,06	20,80	47500	677,06	21,6	47500
47600	19,40	47600	674,96	20,74	47600	674,96	21,54	47600
47700	19,34	47700	672,85	20,68	47700	672,85	21,48	47700
47800	19,27	47800	670,74	20,62	47800	670,74	21,43	47800
47900	19,21	47900	668,64	20,56	47900	668,64	21,37	47900
48000	19,14	48000	666,53	20,50	48000	666,53	21,31	48000
48100	19,07	48100	669,78	20,47	48100	669,78	21,3	48100
48200	19,01	48200	673,04	20,43	48200	673,04	21,28	48200
48300	18,94	48300	676,29	20,40	48300	676,29	21,26	48300
48400	18,88	48400	679,54	20,36	48400	679,54	21,24	48400
48500	18,81	48500	657,17	20,21	48500	657,17	21,04	48500
48600	18,74	48600	655,77	20,15	48600	655,77	20,99	48600
48700	18,68	48700	653,96	20,09	48700	653,96	20,93	48700
48800	18,61	48800	652,15	20,04	48800	652,15	20,88	48800
48900	18,55	48900	650,34	19,98	48900	650,34	20,83	48900
49000	18,49	49000	648,33	19,93	49000	648,33	20,78	49000
49100	18,43	49100	646,47	19,87	49100	646,47	20,73	49100
49200	18,37	49200	644,61	19,81	49200	644,61	20,67	49200
49300	18,30	49300	642,76	19,76	49300	642,76	20,62	49300
49400	18,24	49400	640,90	19,70	49400	640,90	20,57	49400
49500	18,18	49500	638,89	19,65	49500	638,89	20,52	49500
49600	18,12	49600	636,89	19,59	49600	636,89	20,46	49600
49700	18,06	49700	634,88	19,54	49700	634,88	20,41	49700
49800	18	49800	631,77	19,48	49800	631,77	20,35	49800

49900	17,97	49900	629,11	19,44	49900	629,11	20,31	49900
50000	17,88	50000	628,88	19,37	50000	628,88	20,26	50000
50100	17,82	50100	626,88	19,32	50100	626,88	20,2	50100
50200	17,76	50200	624,88	19,26	50200	624,88	20,15	50200
50300	17,7	50300	623,99	19,21	50300	623,99	20,11	50300
50400	17,64	50400	621,99	19,16	50400	621,99	20,06	50400

Πίνακας implied volatility (interpolation through time {Sept-Dec})

19 Sept 2019	vol	19 Oct 2019		vol	19 Nov 2019		vol	19 dec 2019	vol
0,66		0,75	σi,i+1		0,83	σi,i+1		0,91	
44200	24	44200	515,29	23,85	44200	515,29	23,74	44200	23,65
44300	23,94	44300	492,01	23,74	44300	492,01	23,59	44300	23,47
44400	23,89	44400	515,45	23,75	44400	515,45	23,65	44400	23,57
44500	23,72	44500	528,25	23,63	44500	528,25	23,57	44500	23,52
44600	23,70	44600	521,78	23,60	44600	521,78	23,53	44600	23,47
44700	23,69	44700	517,04	23,57	44700	517,04	23,50	44700	23,43
44800	23,67	44800	512,31	23,55	44800	512,31	23,46	44800	23,39
44900	23,61	44900	511,29	23,49	44900	511,29	23,41	44900	23,34
45000	23,56	45000	510,73	23,45	45000	510,73	23,37	45000	23,3
45100	23,50	45100	510,42	23,40	45100	510,42	23,32	45100	23,26
45200	23,45	45200	510,11	23,35	45200	510,11	23,27	45200	23,21
45300	23,39	45300	509,81	23,29	45300	509,81	23,23	45300	23,17
45400	23,29	45400	513,71	23,22	45400	513,71	23,16	45400	23,12
45500	23,28	45500	508,21	23,19	45500	508,21	23,13	45500	23,08
45600	23,22	45600	508,86	23,14	45600	508,86	23,09	45600	23,04
45700	23,16	45700	507,83	23,09	45700	507,83	23,03	45700	22,99
45800	23,11	45800	507,25	23,04	45800	507,25	22,99	45800	22,95
45900	23,05	45900	507,88	22,99	45900	507,88	22,95	45900	22,91
46000	23	46000	507,29	22,94	46000	507,29	22,90	46000	22,87
46100	22,94	46100	506,26	22,89	46100	506,26	22,85	46100	22,82
46200	22,89	46200	505,85	22,84	46200	505,85	22,81	46200	22,78
46300	22,83	46300	505,45	22,79	46300	505,45	22,76	46300	22,74
46400	22,78	46400	505,04	22,74	46400	505,04	22,71	46400	22,69
46500	22,72	46500	504,64	22,69	46500	504,64	22,67	46500	22,65
46600	22,67	46600	504,04	22,64	46600	504,04	22,63	46600	22,61
46700	22,62	46700	503,21	22,59	46700	503,21	22,58	46700	22,57
46800	22,56	46800	502,39	22,54	46800	502,39	22,53	46800	22,52
46900	22,51	46900	501,56	22,49	46900	501,56	22,48	46900	22,48
47000	22,45	47000	500,74	22,44	47000	500,74	22,44	47000	22,43
47100	22,40	47100	500,27	22,39	47100	500,27	22,39	47100	22,39
47200	22,34	47200	499,81	22,34	47200	499,81	22,35	47200	22,35

47300	22,29	47300	499,34	22,30	47300	499,34	22,30	47300	22,30
47400	22,23	47400	498,88	22,25	47400	498,88	22,26	47400	22,26
47500	22,18	47500	498,42	22,20	47500	498,42	22,21	47500	22,22
47600	22,13	47600	497,62	22,15	47600	497,62	22,16	47600	22,18
47700	22,07	47700	496,82	22,10	47700	496,82	22,12	47700	22,13
47800	22,02	47800	496,03	22,05	47800	496,03	22,07	47800	22,09
47900	21,96	47900	495,23	22,00	47900	495,23	22,02	47900	22,04
48000	21,91	48000	494,43	21,95	48000	494,43	21,98	48000	22
48100	21,903	48100	488,59	21,93	48100	488,59	21,94	48100	21,96
48200	21,895	48200	482,75	21,90	48200	482,75	21,91	48200	21,92
48300	21,888	48300	476,91	21,88	48300	476,91	21,88	48300	21,87
48400	21,880	48400	471,07	21,86	48400	471,07	21,84	48400	21,83
48500	21,65	48500	490,86	21,71	48500	490,86	21,75	48500	21,79
48600	21,6	48600	488,65	21,66	48600	488,65	21,70	48600	21,74
48700	21,550	48700	487,49	21,61	48700	487,49	21,66	48700	21,70
48800	21,500	48800	486,34	21,57	48800	486,34	21,61	48800	21,65
48900	21,45	48900	485,18	21,52	48900	485,18	21,57	48900	21,61
49000	21,4	49000	484,55	21,47	49000	484,55	21,53	49000	21,57
49100	21,350	49100	483,53	21,43	49100	483,53	21,48	49100	21,53
49200	21,300	49200	482,50	21,38	49200	482,50	21,44	49200	21,49
49300	21,250	49300	481,48	21,33	49300	481,48	21,39	49300	21,44
49400	21,2	49400	480,45	21,29	49400	480,45	21,35	49400	21,4
49500	21,15	49500	479,82	21,24	49500	479,82	21,31	49500	21,36
49600	21,1	49600	477,63	21,19	49600	477,63	21,26	49600	21,31
49700	21,05	49700	476,99	21,15	49700	476,99	21,21	49700	21,27
49800	20,99	49800	477,46	21,10	49800	477,46	21,17	49800	21,23
49900	20,95	49900	472,63	21,05	49900	472,63	21,11	49900	21,17
50000	20,9	50000	470,46	21,00	50000	470,46	21,06	50000	21,12
50100	20,85	50100	472,90	20,96	50100	472,90	21,04	50100	21,1
50200	20,8	50200	470,72	20,91	50200	470,72	20,99	50200	21,05
50300	20,76	50300	468,99	20,87	50300	468,99	20,95	50300	21,01
50400	20,71	50400	468,35	20,82	50400	468,35	20,90	50400	20,97

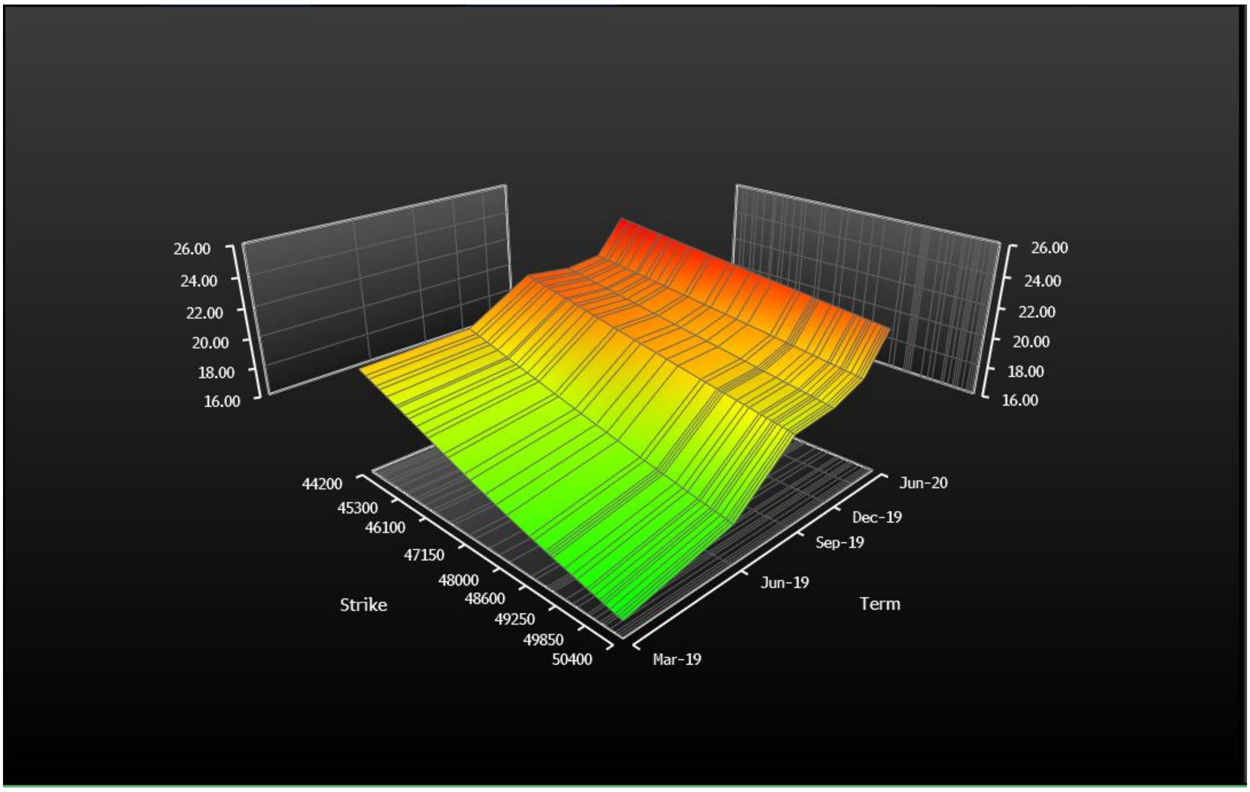
Πίνακας Local Volatility(Dupire)

	20 April 2019	*20 May 2019*	*20 June 2019*	*20 July 2019*	*20 August 2019*	*19 September 2019*	*19 october2019*	*20 November 2019*
Strike Price/Time	0,25	0,33	0,41	0,50	0,58	0,66	0,75	0,83
44300	0,195142	0,214856	0,250277	0,183733	0,135773	0,116777	0,105418	0,079113
44400	0,377149	0,288293	0,248759	0,142046	0,158658	0,26976	0,103536	0,103936
44500	0,318747	0,523441	0,263666	0,198508	0,224156	0,324607	0,123677	0,090863
44600	0,193712	0,215634	0,255736	0,242143	0,274444	0,245126	0,147528	0,116731
44700	0,199946	0,17699	0,164564	0,191036	0,316848	0,244808	0,244194	0,10308
44800	0,359755	0,279144	0,242592	0,19455	0,354212	0,349102	0,268611	0,073997
44900	0,586796	0,167856	0,20632	0,254608	0,387995	0,491261	0,376076	0,120702
45000	0,175984	0,158147	0,148762	0,247085	0,370893	0,400668	0,459037	0,187551
45100	0,23838	0,238565	0,246401	0,259896	0,3474	0,263028	0,529146	0,254401
45200	0,236746	0,236991	0,244893	0,258577	0,368457	0,261881	0,255307	0,253466
45300	0,215646	0,188545	0,174467	0,174831	0,35991	0,242823	0,315966	0,104766
45400	0,521314	0,238964	0,205811	0,069767	0,358657	0,213726	0,140111	0,060833
45500	0,168761	0,142144	0,128593	0,302335	0,3574	0,431755	0,17111	0,090503
45600	0,245852	0,27111	0,318346	0,294406	0,321157	0,250671	0,197297	0,128258
45700	0,225005	0,226668	0,236073	0,157516	0,148887	0,111097	0,220395	0,099058
45800	0,223333	0,225091	0,234602	0,20091	0,345219	0,149327	0,241291	0,104898
45900	0,178865	0,197884	0,233094	0,283747	0,341583	0,211344	0,260517	0,159741
46000	0,258717	0,201599	0,175754	0,347361	0,337907	0,25891	0,21375	0,112862
46100	0,208929	0,208196	0,214499	0,178582	0,155889	0,139252	0,122508	0,112678
46200	0,218939	0,219281	0,227181	0,243073	0,247033	0,248588	0,243706	0,242821
46300	0,21735	0,217773	0,225745	0,241796	0,245832	0,247466	0,242713	0,241899
46400	0,215753	0,21626	0,224302	0,240514	0,244626	0,24634	0,241717	0,240973
46500	0,202832	0,202429	0,209009	0,17513	0,153347	0,137379	0,140391	0,1454

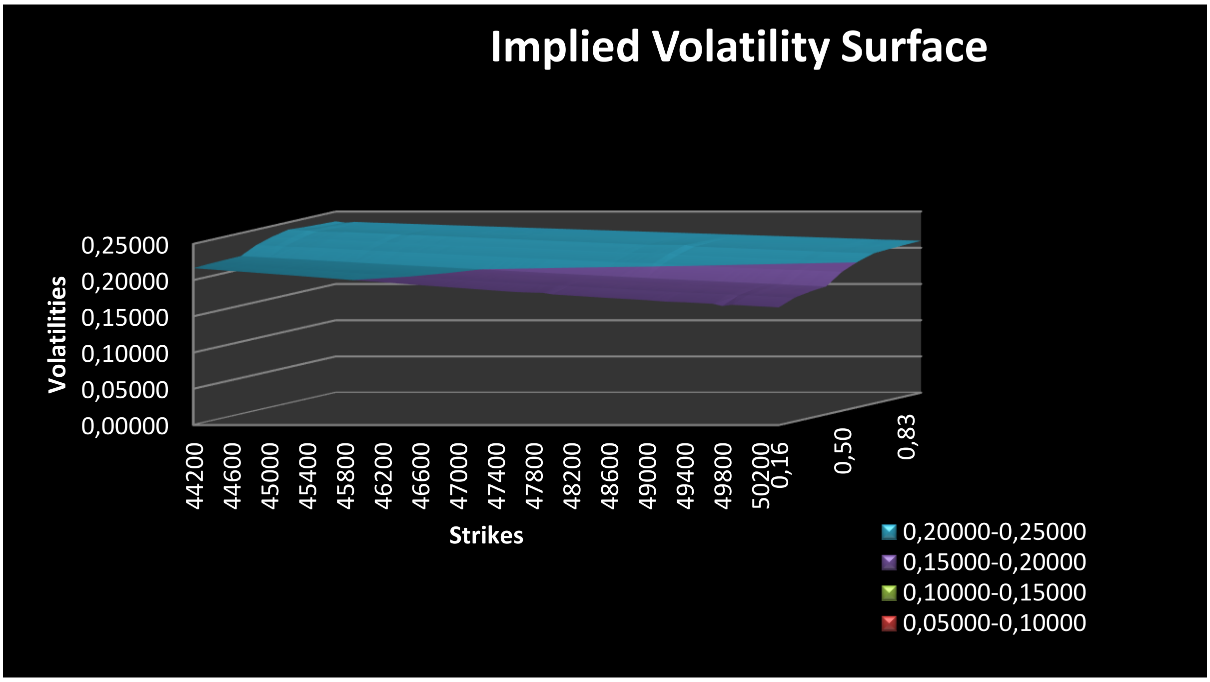
46600	0,176121	0,187018	0,207543	0,369784	0,527622	0,19232	0,168739	0,161423
46700	0,210074	0,211131	0,219605	0,236367	0,240747	0,242713	0,238957	0,23881
46800	0,208513	0,209631	0,218161	0,235086	0,239542	0,24158	0,237924	0,237833
46900	0,206946	0,208126	0,216711	0,233802	0,238333	0,240444	0,236888	0,236852
47000	0,197355	0,191796	0,193116	0,197622	0,19272	0,186453	0,16281	0,149066
47100	0,203714	0,204947	0,213551	0,230843	0,235437	0,237616	0,233969	0,233781
47200	0,202149	0,203449	0,212114	0,229579	0,234254	0,236512	0,232987	0,232866
47300	0,200578	0,201946	0,210671	0,228311	0,233066	0,235405	0,232002	0,231949
47400	0,199001	0,200438	0,209223	0,227039	0,231875	0,234294	0,231015	0,231029
47500	0,142641	0,140667	0,143758	0,168492	0,186415	0,207602	0,248979	0,329323
47600	0,1287	0,152208	0,205566	0,223893	0,229101	0,231876	0,229111	0,229477
47700	0,146956	0,166071	0,204183	0,222656	0,227924	0,23076	0,228098	0,228519
47800	0,159221	0,174122	0,202782	0,221416	0,226743	0,229641	0,227082	0,227557
47900	0,246718	0,293584	0,201369	0,220172	0,225559	0,228518	0,226063	0,226593
48000	0,348857	0,091992	0,180511	0,08044	0,062427	0,12054	0,198015	0,081012
48100	0,188068	0,015343	0,198763	0,215816	0,220053	0,22211	0,220146	0,221933
48200	0,186639	0,030764	0,197525	0,215292	0,219799	0,221944	0,219549	0,221134
48300	0,185206	0,046186	0,196282	0,205794	0,13192	0,221777	0,218951	0,220334
48400	0,19494	0,061607	0,195034	0,113169	0,180617	0,203066	0,123365	0,159262
48500	0,181663	0,077029	0,322465	0,154696	0,218729	0,072366	0,168135	0,113889
48600	0,136081	0,09245	0,12452	0,187229	0,223298	0,211085	0,203272	0,116395
48700	0,179865	0,107872	0,190464	0,214891	0,215795	0,219057	0,221995	0,218477
48800	0,178516	0,123294	0,18916	0,208913	0,214703	0,21802	0,21647	0,217536
48900	0,177951	0,138715	0,143907	0,169967	0,187704	0,208097	0,164247	0,142813
49000	0,615968	0,154137	0,235101	0,231785	0,218194	0,205058	0,268708	0,473534
49100	0,171547	0,169558	0,185398	0,205445	0,211398	0,214882	0,213517	0,214655
49200	0,099875	0,122587	0,184135	0,204295	0,210309	0,213848	0,212555	0,213731
49300	0,146485	0,158619	0,182832	0,203142	0,209217	0,212811	0,21159	0,212805
49400	0,183619	0,199335	0,14589	0,170653	0,185517	0,201143	0,167697	0,149598
49500	0,167987	0,169218	0,17743	0,197171	0,202941	0,206313	0,231822	0,103072
49600	0,166776	0,168028	0,176249	0,196077	0,201888	0,205284	0,122165	0,097426
49700	0,344295	0,030309	0,175071	0,091617	0,110824	0,10417	0,141012	0,079011
49800	0,036772	0,045721	0,240616	0,124009	0,151686	0,141484	0,14327	0,111612
49900	0,128162	0,034084	0,180208	0,149542	0,183673	0,170833	0,280728	0,111079
50000	0,113801	0,080928	0,068682	0,171311	0,210861	0,207884	0,249718	0,060847
50100	0,137236	0,148559	0,170396	0,198353	0,205071	0,200257	0,146932	0,060399
50200	0,137102	0,147912	0,169233	0,128823	0,108451	0,337499	0,282069	0,085098
50300	0,298744	0,201478	0,168091	0,140911	0,153942	0,228843	0,191204	0,096109

Γράφημα 3D surface Implied volatility before Interpolation

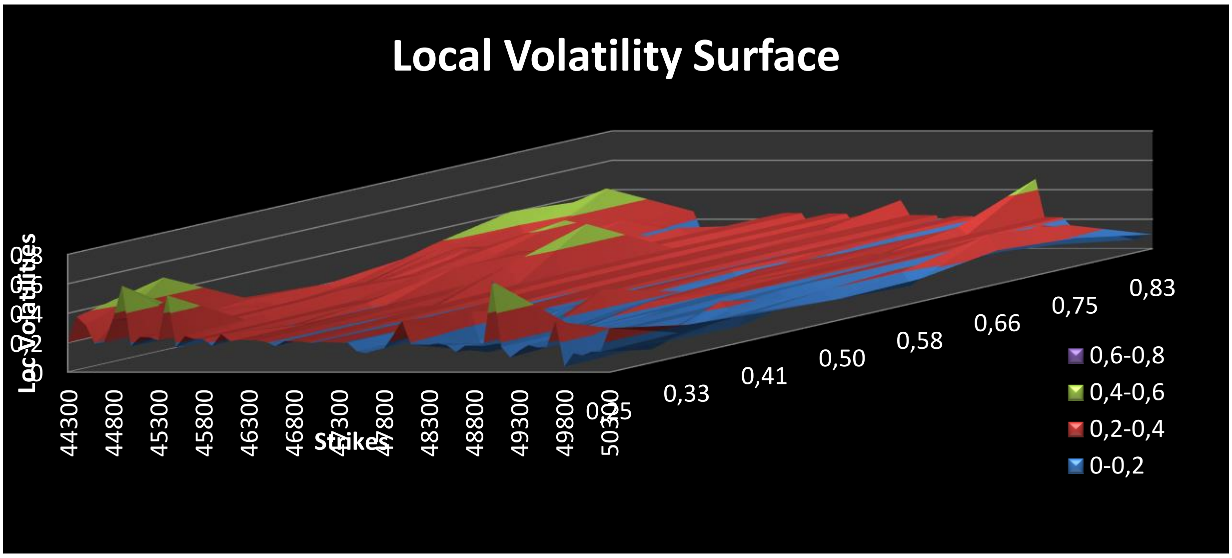
(source bloomberg)



Γράφημα 3D surface Implied volatility after Interpolation



Γράφημα 3D surface Local volatility



Βιβλιογραφία

Alexander, C., Nogueira, L.M. (2008) "*Stochastic Local Volatility*", Technical Report DP2008-02; ICMA Centre: Henley Business School, Reading, UK

Ayache, E., Henrotte,P., Nassar,S., Wang,X. (20040 "Can anyone solve the smile problem?" *Wilmott Magazine*, January, 78–96.

Bennett, C., Gil, M.A. (2012) "Volatility Trading: Trading Volatility, Correlation, Term Structure and Skew" Technical Report, *Santander Global Banking and Markets*. Publisher: Santander Global Banking & Markets, Equity Derivatives, Madrid, Spain, Europe

Brigo, D., Mercurio, F. (2001) "*Interest Rate Models: Theory and Practice*", Springer: New York, USA, 2001

Carr, P., Fisher, T., Ruf, J. (2013) "Why are quadratic normal volatility models analytically tractable?" *SIAM Journal of Financial Mathematics*, 4, 185–202

Clark, I.J. (2011) "*Foreign Exchange Option Pricing*" John Wiley and Sons: Hoboken, NJ, USA

Derman, E. Kani, I., Zou, J.Z. (1995) "The Local Volatility Surface: Unlocking the Information in Index Option Prices", *Goldman Sachs, Quantitative Strategies Research Notes*

Derman, E., Kani, I. (1994) "Riding on a smile" *RISK Magazine*, 1, 32–39

Derman, E., Kani, I. (1994) "Riding on a smile", *RISK Magazine*, 1, 32–39

Dumas, B., Fleming, J., Whaley, R.E. (1998) “Implied volatility functions: Empirical tests”, *Journal of Finance*, 56, 2059–2106

Dupire, B. (1993) “Pricing and Hedging with Smiles”, Technical Report, Paribas Capital Markets, Swaps and Options Research Team: London, UK

Dupire, B. (1994) “Pricing with a smile” *RISK Magazine*, 1, 18–20

Engelmann, B., Fengler, M.R., Schwendner, P. (2009) “Better than its reputation: An empirical hedging analysis of the local volatility model for barrier options”, *Journal of Risk*, 12, 53–77.

Gatheral, J. (2006) “*The Volatility Surface: A Practitioner’s Guide*”, John Wiley and Sons: New York, NY, USA, 2006.

Hull, J. (2012) “*Options, Futures, and other Derivatives”*, Pearson: Upper Saddle River, NJ, USA

Kani, I., Derman, E., Kamal, M. (1996) “Trading and hedging local volatility” In *Goldman Sachs Quantitative Strategies Research Notes*; Pulisher: Goldman Sachs & Co, New York, NY, USA

Kotzé, A., Oosthuizen, R., Pindza, E. (2015) “Implied and Local Volatility Surfaces for South African Index and Foreign Exchange Options”, *Journal of Risk Financial Management*, 8, 43-82

Lorig, M. & Sircar, R. (2012) “Stochastic Volatility: Modeling and Asymptotic Approaches to Option Pricing & Portfolio Selection”, *Working Paper*

Rebonato,R. (2004) “*Volatility and Correlation: The Perfect Hedger and the Fox*”, 2nd ed. John Wiley and Sons: Chichester, United Kindgdom

Rubinstein, M. (1994) “Implied binomial trees” *Journal of Finance*, 49, 771–818