

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΟΛΟΓΙΑ ΓΙΑ
ΤΙΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥΣ ΤΗΣ
ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ LAPLACE**

Μαρία Χρ. Ταφιάδη

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Υποβλήθηκε στο
Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης
του Πανεπιστημίου Πειραιώς

Πειραιάς
Φεβρουάριος, 2019

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΟΛΟΓΙΑ ΓΙΑ
ΤΙΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥΣ ΤΗΣ
ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ LAPLACE**

Μαρία Χρ. Ταφιάδη

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Υποβλήθηκε στο
Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης
του Πανεπιστημίου Πειραιώς

Πειραιάς
Φεβρουάριος, 2019

UNIVERSITY OF PIRAEUS



**DEPARTMENT OF STATISTICS
AND INSURANCE SCIENCE**

**STATISTICAL INFERENCE
FOR THE PARAMETERS OF
LAPLACE DISTRIBUTION**

Maria Ch. Tafiadi

PhD Thesis

Submitted to

Department of Statistics and Insurance Science of
the University of Piraeus

Piraeus, Greece

February, 2019

*Στον σύζυγό μου Λάμπρο
και στους γονείς μου
Χρήστο, Γεωργία*

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον δάσκαλό μου, Καθηγητή κ. Γ. Ηλιόπουλο αρχικά για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε κι έπειτα για την πολύτιμη και ουσιαστική του καθοδήγηση κατά τη διάρκεια εκπόνησης της παρούσας διατριβής. Η απύθμενη και πολύπλευρη γνώση του σε όλα τα επιστημονικά πεδία που άπτονται του θέματος της διατριβής ήταν αρωγός στο να διευρύνω τους ορίζοντές μου και να ξεπεράσω τις όποιες δυσκολίες προέκυψαν κατά τη διάρκεια της έρευνας.

Ευχαριστώ επίσης, τον Επίκουρο Καθηγητή κ. Κ. Πετρόπουλο και τον Επίκουρο Καθηγητή κ. Γ. Τζαβελά, για τη συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή μου καθώς επίσης και τα υπόλοιπα μέλη της επταμελούς επιτροπής, Καθηγητή κ. Σ. Κουρούκλη, Καθηγητή κ. Μ. Κούτρα, Καθηγητή κ. Κ. Ζωγράφο και Επίκουρο Καθηγητή κ. Α. Μπατσίδα. Ιδιαίτερα ευχαριστώ τον κ. Α. Μπατσίδα για τον πολύτιμο χρόνο που αφιέρωσε για τη λεπτομερή μελέτη της διατριβής καθώς και για τα εύστοχα σχόλια που έκανε.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά και τους εξαιρετους καθηγητές που είχα κατά τη διάρκεια των προπτυχιακών και μεταπτυχιακών μου σπουδών στο Πανεπιστήμιο Πατρών. Επί πλέον, ευχαριστώ το Κέντρο Ερευνών καθώς και το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιά, τα οποία υποστήριξαν οικονομικά τη συμμετοχή μου σε συνέδρια και τις δημοσιεύσεις μου στο πλαίσιο του προγράμματος «Δράσεις Έρευνας και Προβολής του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης».

Θα ήταν παράλειψή μου αν δεν ευχαριστούσα τον σύζυγό μου για την αμέριστη συμπαράστασή του και την υπομονή του καθώς και τους γονείς μου για την πολύπλευρη στήριξη που μου προσέφεραν όλα αυτά τα χρόνια.

Περίληψη

Το αντικείμενο της παρούσας διατριβής εντάσσεται ερευνητικά στο πεδίο της Μαθηματικής Στατιστικής. Αρχικά γίνεται παρουσίαση της κατανομής Laplace και ιδιοτήτων αυτής. Αναφέρονται γνωστά γενικά αποτελέσματα που αφορούν σε διατεταγμένες παρατηρήσεις που προκύπτουν από τυχαία δείγματα. Ειδικότερα, παρατίθενται αποτελέσματα στην περίπτωση που η αρχική κατανομή είναι η εκθετική. Στη συνέχεια αποδεικνύονται νέα αποτελέσματα για διατεταγμένες παρατηρήσεις που προκύπτουν από τυχαία δείγματα από την κατανομή Laplace.

Ακολουθούν τα πρώτα κύρια αποτελέσματα της διατριβής που αφορούν στη σύγκριση των παραμέτρων θέσης δύο πληθυσμών που προέρχονται από την κατανομή Laplace. Κατασκευάζονται ακριβείς έλεγχοι για την ισότητα των παραμέτρων θέσης δύο κατανομών Laplace με κοινή, αλλά άγνωστη παράμετρο κλίμακας βάσει ανεξάρτητων τυχαίων δειγμάτων. Οι έλεγχοι που συζητώνται είναι ο έλεγχος γενικευμένου λόγου πιθανοφανειών και έλεγχοι που βασίζονται στην τυποποιημένη διαφορά των βέλτιστων γραμμικών αμερόληπτων εκτιμητών των παραμέτρων. Δεσμεύοντας σε συγκεκριμένες ποσότητες οι ακριβείς κατανομές τους εκφράζονται ως μείξεις κατανομών λόγων γραμμικών συνδυασμών ανεξάρτητων εκθετικών τυχαίων μεταβλητών. Αυτό δίνει τη δυνατότητα να υπολογιστούν κλασικά ποσοστιαία σημεία καθώς και να κατασκευαστούν ακριβή διαστήματα εμπιστοσύνης για την διαφορά των δύο παραμέτρων θέσης. Τέλος, συγκρίνεται αριθμητικά η ισχύς των ελέγχων.

Στη συνέχεια γίνεται σύγκριση των παραμέτρων κλίμακας δύο πληθυσμών που προέρχονται από την κατανομή Laplace. Ειδικότερα, κατασκευάζονται ακριβείς έλεγχοι για τη σύγκριση των παραμέτρων κλίμακας δύο κατανομών Laplace βάσει ανεξάρτητων τυχαίων δειγμάτων. Οι έλεγχοι που συζητώνται είναι ο έλεγχος γενικευμένου λόγου πιθανοφανειών και έλεγχοι που βασίζονται είτε στον λόγο των εκτιμητών μέγιστης πιθανοφάνειας είτε στον λόγο των βέλτιστων γραμμικών αμερόληπτων εκτιμητών των παραμέτρων. Υπολογίζεται η ακριβής συνάρτηση κατανομής των στατιστικών συναρτήσεων και μέσω αυτής κλασικά ποσοστιαία σημεία. Επίσης, κατασκευάζονται αριθμητικά αμερόληπτοι έλεγχοι και αμερόληπτα διαστήματα εμπιστοσύνης για τον λόγο των παραμέτρων κλίμακας. Τέλος, συγκρίνεται αριθμητικά η ισχύς των ελέγχων.

Abstract

The subject of this PhD thesis is in the field of Mathematical Statistics. First there is a presentation of Laplace distribution and its properties. Known general results concerning order statistics from independent samples are presented. In particular, there are also results in the case where the parent distribution is exponential. Moreover, new results concerning order statistics from the Laplace distribution are proved.

The main results of the PhD thesis concerning the comparison of the location parameters of two populations from Laplace distribution follow. Exact tests for the comparison of the location parameters of two Laplace distributions with common yet unknown scale parameter based on corresponding independent samples are constructed. The likelihood ratio test statistic and the scaled difference of the best linear unbiased estimators of the parameters are considered. By conditioning on certain quantities, the exact distributions of the test statistics are expressed as mixtures of ratios of linear combinations of standard exponential random variables. Exact quantiles are found and exact confidence intervals are constructed for the difference of the means as well. The tests are numerically compared via their power.

The comparison of the scale parameters of two populations from Laplace distribution follows. More specifically, exact tests for the comparison of the scale parameters of two Laplace distributions based on corresponding independent samples are constructed. The likelihood ratio test statistic, the ratio of the maximum likelihood estimators and the ratio of the best linear unbiased estimators of the parameters are considered. Following the same procedure as in the case of the comparison of the location parameters their exact distributions and their exact quantiles are presented. Unbiased tests and unbiased confidence intervals are constructed numerically. The tests are numerically compared via their power.

1	Εισαγωγή	1
2	Η κατανομή Laplace	7
2.1	Εισαγωγή	7
2.2	Ιστορική αναδρομή	7
2.3	Ορισμός και βασικές ιδιότητες	9
2.4	Διατεταγμένες παρατηρήσεις	12
2.4.1	Κατανομές διατεταγμένων παρατηρήσεων	13
2.5	Εκτίμηση των παραμέτρων της κατανομής Laplace	15
2.5.1	Εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας	16
2.5.2	Βέλτιστοι γραμμικοί αμερόληπτοι εκτιμητές (BLUE)	17
3	Συμπερασματολογία για τη διαφορά των παραμέτρων θέσης δύο κατανομών Laplace	21
3.1	Εισαγωγή	21
3.2	Σύγκριση παραμέτρων θέσης	22
3.3	Έλεγχος λόγου πιθανοφαιών	22
3.3.1	Βασικά αποτελέσματα για την κατανομή Erlang	29
3.3.2	Το σύνολο P_{n_1, n_2} και τα βάρη $w(p)$	31
3.4	Έλεγχοι που βασίζονται στην διαφορά των BLUE	36
3.5	Ακριβή διαστήματα εμπιστοσύνης για τη διαφορά $\mu_1 - \mu_2$	38
3.6	Σύγκριση των ελέγχων και των διαστημάτων εμπιστοσύνης	41
3.7	Έλεγχοι υπό ετεροσκεδαστικότητα	42
3.8	Αριθμητικό παράδειγμα	43
4	Συμπερασματολογία για τον λόγο των παραμέτρων κλίμακας δύο κατανομών Laplace	51
4.1	Εισαγωγή	51

4.2	Σύγκριση παραμέτρων κλίμακας	51
4.3	Έλεγχος λόγου πιθανοφανειών	52
4.4	Έλεγχος ίσων ουρών που βασίζεται στους ΕΜΠ	53
4.5	Έλεγχος ίσων ουρών που βασίζεται στους BLUE	54
4.6	Αμερόληπτοι έλεγχοι και αμερόληπτα διαστήματα εμπιστοσύνης	55
4.7	Σύγκριση των ελέγχων	58
4.8	Αριθμητικό Παράδειγμα	59
5	Σύνοψη – Μελλοντικές κατευθύνσεις	69
	Παράρτημα	77
A	Συμμετρία των κατανομών των T_2, T_3	77
B	Η Εικασία 4.1	77
	Βιβλιογραφία	107

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

Το αντικείμενο της παρούσας διατριβής εντάσσεται ερευνητικά στο πεδίο της Μαθηματικής Στατιστικής. Ειδικότερα γίνεται σύγκριση των παραμέτρων θέσης και των παραμέτρων κλίμακας δύο πληθυσμών, που προέρχονται από την κατανομή Laplace, είτε μέσω κρίσιμης περιοχής είτε μέσω διαστημάτων εμπιστοσύνης.

Σε αυτό το κεφάλαιο λόγω της ομοιότητας της κατανομής Laplace με την κανονική κατανομή γίνεται αναφορά στους ήδη υπάρχοντες ελέγχους οι οποίοι αφορούν την κανονική κατανομή. Τέλος, παρουσιάζεται συνοπτικά η δομή και τα αποτελέσματα της διατριβής.

Ανασκόπηση βιβλιογραφίας

Οι κλασικοί έλεγχοι για τη σύγκριση των παραμέτρων θέσης και κλίμακας δύο πληθυσμών που υπάρχουν στη βιβλιογραφία αφορούν συνήθως την κανονική κατανομή. Συγκεκριμένα, για να συγκρίνουμε τις παραμέτρους θέσης μ_1, μ_2 (μέσες τιμές) δύο κανονικών πληθυσμών με άγνωστη αλλά κοινή διασπορά σ , κάνουμε το γνωστό σε όλους έλεγχο t. Η πρώτη φορά που έγινε αναφορά, στην αγγλική βιβλιογραφία, στον όρο έλεγχος t ήταν το 1908 από τον χημικό William Sealy Gosset. Ο Gosset εργαζόταν στη ζυθοποιεία Guinness στην Ιρλανδία και εισήγαγε το t-test ως έναν οικονομικό τρόπο ελέγχου της ποιότητας της μαύρης μπύρας. Επειδή η πολιτική της εταιρείας απαγόρευε στους χημικούς να δημοσιεύουν τα αποτελέσματα της έρευνάς τους, ο Gosset δημοσίευσε την εργασία του με το ψευδώνυμο "Student", οπότε έτσι κι έμεινε στην ιστορία. Ο λεγόμενος έλεγχος t για τη σύγκριση των μέσων τιμών δύο κανονικών πληθυσμών με άγνωστη αλλά κοινή διασπορά, βασίζεται σε αντίστοιχα ανεξάρτητα τυχαία δείγματα και η στατιστική συνάρτηση του ελέγχου είναι της μορφής $(\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2)/\hat{\sigma}$, όπου $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\sigma}$ είναι εκτιμητές των μέσων τιμών και της διασποράς αντίστοιχα.

Από την άλλη πλευρά, αν θέλουμε να συγκρίνουμε τις παραμέτρους κλίμακας σ_1, σ_2

(διασπορές) δύο κανονικών πληθυσμών με άγνωστες μέσες τιμές θα κάνουμε έναν έλεγχο F. Η ονομασία αυτού του ελέγχου δόθηκε από τον μαθηματικό George W. Snedecor προς τιμήν του στατιστικού Ronald A. Fisher. Ειδικότερα, τη δεκαετία του 1920, ο Fisher ήταν ο πρώτος που αναφέρθηκε στη στατιστική συνάρτηση η οποία ήταν ίση με το λόγο των δειγματικών διασπορών. Συνεπώς, ο έλεγχος βασίζεται σε δύο ανεξάρτητα δείγματα και η στατιστική συνάρτηση του ελέγχου είναι η $\hat{\sigma}_1/\hat{\sigma}_2$, όπου $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2$ είναι εκτιμητές των διασπορών (δειγματικές διασπορές) από το κάθε δείγμα.

Πέρα από την κανονική κατανομή ένα εναλλακτικό μοντέλο για ελέγχους όπως οι παραπάνω, είναι η κατανομή Laplace. Αρχικά στη βιβλιογραφία, μπορούμε να βρούμε την εργασία των Bain and Engelhardt (1973) οι οποίοι κατασκεύασαν προσεγγιστικά διαστήματα εμπιστοσύνης για τις παραμέτρους της κατανομής Laplace βασιζόμενοι σε ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n . Συγκεκριμένα, κατασκεύασαν διαστήματα εμπιστοσύνης για την παράμετρο θέσης και κλίμακας μ, σ αντίστοιχα, βασιζόμενοι στους εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας των παραμέτρων και μάλιστα στις κατανομές των ποσοτήτων οδηγών $(\hat{\mu} - \mu)/\hat{\sigma}$ και $\hat{\sigma}/\sigma$, αντίστοιχα. Οι ακριβείς κατανομές τους βρέθηκαν μόνο για $n = 3$ και $n = 5$, ενώ για μεγαλύτερες τιμές του n υπολογίστηκαν οι ασυμπτωτικές κατανομές τους. Επί πλέον, χρησιμοποιώντας αυτές τις ποσότητες οδηγούς, κατασκεύασαν ελέγχους και υπολόγισαν την ισχύ τους ενώ τέλος υπολόγισαν και όρια ανοχής.

Αυτό είχε ως συνέπεια ο Karpenman (1975) να κατασκευάσει ακριβή διαστήματα εμπιστοσύνης για τις παραμέτρους της κατανομής Laplace βασιζόμενος σε δεσμευμένες κατανομές των ποσοτήτων οδηγών $(\hat{\mu} - \mu)/\hat{\sigma}$ και $\hat{\sigma}/\sigma$, δεσμεύοντας σε κατάλληλες βοηθητικές ποσότητες. Στη συνέχεια οι Grice, Bain and Engelhardt (1978) συνέκριναν αριθμητικά τις δύο παραπάνω μεθόδους (δεσμευμένη και μη) μέσω του αναμενόμενου μήκους των διαστημάτων εμπιστοσύνης. Για τη δεσμευμένη μέθοδο προέκυψαν ελαφρώς καλύτερα αποτελέσματα (πιο στενά διαστήματα εμπιστοσύνης) για μικρά μεγέθη δείγματος. Αργότερα, η δεσμευμένη προσέγγιση του Karpenman επεκτάθηκε από τους Childs and Balakrishnan (1996, 2000) σε παρατηρήσεις που υπόκεινται σε λογοκρισία τύπου II και σε προοδευτική λογοκρισία τύπου II. Ειδικότερα, παρουσίασαν τους εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας των παραμέτρων και υπολόγισαν τις κατανομές των ποσοτήτων οδηγών $(\hat{\mu} - \mu)/\hat{\sigma}$ και $\hat{\sigma}/\sigma$ δεσμεύοντας σε βοηθητικές ποσότητες. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τις κατανομές αυτές κατασκεύασαν διαστήματα εμπιστοσύνης καθώς και διαστήματα ανοχής.

Συνεχίζοντας με τις λογοκριμένες παρατηρήσεις, αλλά ξεφεύγοντας από τους εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας οι Balakrishnan and Chandramouleeswaran (1996) εκτίμησαν

την συνάρτηση αξιοπιστίας και βρήκαν όρια ανοχής χρησιμοποιώντας δείγματα που έχουν υποστεί λογοκρισία τύπου II. Ειδικότερα, για τον υπολογισμό του εκτιμητή της συνάρτησης αξιοπιστίας βασίστηκαν στους βέλτιστους γραμμικούς αμερόληπτους εκτιμητές των παραμέτρων θέσης και κλίμακας. Επί πλέον, διαπίστωσαν μέσω προσομοίωσης ότι ο εκτιμητής είναι σχεδόν αμερόληπτος για διάφορα επίπεδα αξιοπιστίας. Στη συνέχεια βασιζόμενοι σε συναρτήσεις των βέλτιστων γραμμικών αμερόληπτων εκτιμητών υπολόγισαν όρια ανοχής.

Οι Piiopoulos and Balakrishnan (2011) θεώρησαν λογοκριμένα δείγματα υποκείμενα σε δεξιά και αριστερή λογοκρισία τύπου II και ανέπτυξαν ακριβή συμπερασματολογία για τις παραμέτρους θέσης και κλίμακας. Ειδικότερα, θεώρησαν την τυχαία μεταβλητή D η οποία παριστάνει το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες από τη διάμεσο του πληθυσμού και δεσμεύοντας στο ενδεχόμενο $D = d$ εξέφρασαν τις ακριβείς κατανομές των ποσοτήτων οδηγών $(\hat{\mu} - \mu)/\hat{\sigma}$ και $\hat{\sigma}/\sigma$ ως μείξεις κατανομών λόγων γραμμικών συνδυασμών ανεξάρτητων τυπικών εκθετικών τυχαίων μεταβλητών. Αυτό τους οδήγησε στην εύρεση αντίστοιχων ποσοστιαίων σημείων και στην κατασκευή ακριβών διαστημάτων εμπιστοσύνης και ελέγχων για τις παραμέτρους θέσης και κλίμακας. Η ίδια προσέγγιση ακολουθήθηκε και από τους Piiopoulos and MirMostafae (2014) οι οποίοι κατασκεύασαν ακριβή διαστήματα πρόβλεψης για τις λογοκριμένες τυχαίες μεταβλητές. Επίσης, οι Zhu and Balakrishnan (2016) ανέπτυξαν ακριβή συμπερασματολογία για τα ποσοστιαία σημεία, τη συνάρτηση αξιοπιστίας και την αθροιστική συνάρτηση κινδύνου της κατανομής Laplace βασιζόμενοι στους εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας. Η μεθοδολογία αυτή μπορεί να επεκταθεί και στους βέλτιστους γραμμικούς αμερόληπτους εκτιμητές των παραμέτρων. Ειδικότερα, βασίστηκαν σε λογοκριμένα δείγματα υποκείμενα σε δεξιά λογοκρισία τύπου II και παρουσίασαν σε κλειστή μορφή τους εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας των παραμέτρων καθώς και τις ακριβείς κατανομές των ποσοτήτων οδηγών $(\hat{\mu} - \mu)/\hat{\sigma}$ και $\hat{\sigma}/\sigma$ δεσμεύοντας σε βοηθητικές ποσότητες ακολουθώντας τους Piiopoulos and Balakrishnan (2011). Στη συνέχεια υπολόγισαν την ακριβή κατανομή του εκτιμητή μέγιστης πιθανοφάνειας ενός ποσοστιαίου σημείου και τη χρησιμοποίησαν για να κατασκευάσουν ένα ακριβές διάστημα εμπιστοσύνης γι' αυτό. Ανάλογα, αποτελέσματα αποδείχθηκαν και για τη συνάρτηση αξιοπιστίας και την αθροιστική συνάρτηση κινδύνου.

Η τελευταία αυτή εργασία παρακίνησε τους Liu, Zhu and Balakrishnan (2018) ώστε να αναπτύξουν ακριβή συμπερασματολογία για τις παραμέτρους της κατανομής Laplace βασιζόμενοι στους βέλτιστους γραμμικούς αμερόληπτους εκτιμητές των παραμέτρων. Ειδικότερα, βασίστηκαν σε λογοκριμένα δείγματα υποκείμενα σε προοδευτική δεξιά λογοκρισία

και παρουσίασαν σε κλειστή μορφή τους βέλτιστους γραμμικούς αμερόληπτους εκτιμητές. Θεώρησαν την τυχαία μεταβλητή D η οποία παριστάνει το πλήθος των παρατηρήσεων στο προοδευτικά τύπου II λογοκριμένο δείγμα που είναι μικρότερες από τη διάμεσο του πληθυσμού και δεσμεύοντας στο ενδεχόμενο $D = d$ υπολόγισαν την κατανομή ενός γραμμικού συνδυασμού διατεταγμένων παρατηρήσεων από την τυπική κατανομή Laplace χρησιμοποιώντας την ροπογεννήτριά του. Στη συνέχεια θεώρησαν τις ποσότητες οδηγούς $(\bar{\mu} - \mu)/\bar{\sigma}$ και $\bar{\sigma}/\sigma$ και υπολόγισαν τις ακριβείς κατανομές τους αφού πρόκειται για λόγους γραμμικών συνδυασμών διατεταγμένων παρατηρήσεων. Βασιζόμενοι σε αυτές τις κατανομές κατασκεύασαν διαστήματα εμπιστοσύνης για τις παραμέτρους θέσης και κλίμακας. Επί πλέον, υπολόγισαν την ακριβή κατανομή του βέλτιστου γραμμικού αμερόληπτου εκτιμητή ενός ποσοστιαίου σημείου και κατασκεύασαν αντίστοιχα διαστήματα εμπιστοσύνης, ενώ ακριβή διαστήματα εμπιστοσύνης κατασκευάστηκαν και για τη συνάρτηση αξιοπιστίας και την αθροιστική συνάρτηση κινδύνου.

Τέλος, οι Su, Zhu and Balakrishnan (2018) χρησιμοποίησαν παρατηρήσεις από την κατανομή Laplace υποκειμένες σε υβριδική λογοκρισία τύπου I και τύπου II και παρουσίασαν τους εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας των παραμέτρων. Στη συνέχεια υπολόγισαν την από κοινού δεσμευμένη ροπογεννήτρια των εκτιμητών αυτών δεσμεύοντας σε βοηθητικές ποσότητες ανάλογα με τον τύπο της λογοκρισίας. Μέσω της δεσμευμένης ροπογεννήτριας υπολόγισαν τις ακριβείς κατανομές των εκτιμητών και βασιζόμενοι σε αυτές κατασκεύασαν ακριβή διαστήματα εμπιστοσύνης για τις παραμέτρους της κατανομής. Συνεχίζοντας με όμοιο τρόπο υπολόγισαν την ακριβή κατανομή του εκτιμητή μέγιστης πιθανοφάνειας ενός ποσοστιαίου σημείου και κατασκεύασαν αντίστοιχα διαστήματα εμπιστοσύνης. Επί πλέον, ακριβή διαστήματα εμπιστοσύνης κατασκευάστηκαν για τη συνάρτηση αξιοπιστίας και την αθροιστική συνάρτηση κινδύνου.

Σε αυτό το σημείο αξίζει να σημειώσουμε ότι στη διεθνή βιβλιογραφία δεν υπάρχει ακριβής συμπερασματολογία για τη σύγκριση των παραμέτρων θέσης και κλίμακας δύο πληθυσμών που προέρχονται από την κατανομή Laplace .

Στόχος και περίγραμμα της διατριβής

Στόχος της παρούσας διατριβής είναι η ακριβής συμπερασματολογία για τις παραμέτρους της κατανομής Laplace . Ειδικότερα συζητάμε για ακριβείς ελέγχους, ακριβή διαστήματα εμπιστοσύνης που αφορούν τις παραμέτρους της κατανομής βασιζόμενοι σε ανεξάρτητα

τυχαία δείγματα τα οποία προέρχονται από δύο κατανομές Laplace.

Τα κεφάλαια της διατριβής έχουν οργανωθεί ως εξής :

Στο Κεφάλαιο 2 γίνεται παρουσίαση της κατανομής καθώς και των ιδιοτήτων αυτής. Ειδικότερα, γίνεται αναφορά στη χαρακτηριστική της συνάρτηση, τη ροπογεννήτριά της, σε συντελεστές ασυμμετρίας και κυρτότητας καθώς και στα ποσοστιαία σημεία της. Αναφέρονται γνωστά αποτελέσματα που αφορούν γενικά διατεταγμένες παρατηρήσεις και ειδικότερα διατεταγμένες παρατηρήσεις οι οποίες προέρχονται από κάποια αρχική κατανομή καθώς και από την εκθετική κατανομή. Επίσης, περιέχονται νέα αποτελέσματα που αφορούν διατεταγμένες παρατηρήσεις που ακολουθούν την κατανομή Laplace. Τέλος, γίνεται αναφορά στους κλασσικούς εκτιμητές των παραμέτρων της κατανομής και στον υπολογισμό τους.

Στο Κεφάλαιο 3 κατασκευάζονται ακριβείς έλεγχοι για τη σύγκριση των παραμέτρων θέσης δύο κατανομών Laplace με κοινή παράμετρο κλίμακας βασιζόμενοι σε αντίστοιχα ανεξάρτητα δείγματα. Οι στατιστικές συναρτήσεις βασίζονται είτε στους εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας (EMΠ) είτε στους βέλτιστους γραμμικούς αμερόληπτους εκτιμητές (best linear unbiased estimators–BLUE) των παραμέτρων. Οι έλεγχοι που συζητώνται είναι ο έλεγχος λόγου πιθανοφανειών και οι έλεγχοι που βασίζονται στην τυποποιημένη διαφορά των BLUE των παραμέτρων. Αφ' ότου βρούμε σε κλειστή μορφή την συνάρτηση κατανομής των στατιστικών συναρτήσεων υπολογίζουμε κλασσικά ποσοστιαία σημεία, ενώ συζητάμε και για ακριβή διαστήματα εμπιστοσύνης για τη διαφορά των παραμέτρων θέσης. Τέλος, συγκρίνουμε αριθμητικά την ισχύ των ελέγχων καθώς και τα διαστήματα εμπιστοσύνης βασιζόμενοι στα αναμενόμενα μήκη τους. Τα αποτελέσματα του κεφαλαίου με οδήγησαν στη συγγραφή μιας εργασίας η οποία έχει ήδη δημοσιευθεί στο διεθνές περιοδικό Στατιστικής *Metrika* (Tafiadi and Pioroulos, 2017).

Στο Κεφάλαιο 4 κατασκευάζονται ακριβείς έλεγχοι για τη σύγκριση των παραμέτρων κλίμακας δύο κατανομών Laplace βασιζόμενοι σε αντίστοιχα ανεξάρτητα δείγματα. Οι στατιστικές συναρτήσεις βασίζονται είτε στους EMΠ, είτε στους BLUE των παραμέτρων. Οι έλεγχοι που συζητώνται είναι ο έλεγχος λόγου πιθανοφανειών και οι έλεγχοι που βασίζονται είτε στον λόγο των EMΠ είτε στον λόγο των BLUE των παραμέτρων. Υπολογίζουμε την συνάρτηση κατανομής των στατιστικών συναρτήσεων και στη συνέχεια υπολογίζουμε διάφορα ποσοστιαία σημεία. Συνεχίζουμε κατασκευάζοντας αριθμητικά αμερόληπτους ελέγχους και αμερόληπτα διαστήματα εμπιστοσύνης για τον λόγο των παραμέτρων κλίμακας. Τέλος, συγκρίνουμε αριθμητικά την ισχύ των ελέγχων. Τα αποτελέσματα του

κεφαλαίου με οδήγησαν στη συγγραφή μιας εργασίας η οποία έχει ήδη δημοσιευθεί στα πρακτικά του 30^{ου} Πανελληνίου Συνεδρίου Στατιστικής (Ταφιάδη και Ηλιόπουλος, 2017).

Η διατριβή ολοκληρώνεται με μία σύνοψη των σημαντικότερων αποτελεσμάτων και την παράθεση κάποιων ανοικτών θεμάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Η κατανομή Laplace

2.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο αρχικά γίνεται μια ιστορική αναδρομή σχετικά με την κατανομή Laplace και στη συνέχεια γίνεται παρουσίαση της κατανομής καθώς και των ιδιοτήτων αυτής. Συγκεκριμένα, γίνεται σύγκριση με την κανονική κατανομή και αναφορά στη χαρακτηριστική της συνάρτηση, τη ροπογεννήτριά της, σε συντελεστές ασυμμετρίας και κυρτότητας καθώς και στα ποσοστιαία σημεία της. Κλείνοντας, γίνεται παρουσίαση των στοχαστικών αναπαραστάσεων της κατανομής. Στην Ενότητα 2.4 ορίζονται οι διατεταγμένες παρατηρήσεις και παρουσιάζονται γνωστές κατανομές παρατηρήσεων που ανήκουν στο διατεταγμένο δείγμα από την κατανομή Laplace. Επί πλέον, αναφέρονται γνωστά αποτελέσματα που αφορούν διατεταγμένες παρατηρήσεις οι οποίες προέρχονται από κάποια αρχική κατανομή καθώς και από την εκθετική κατανομή. Τέλος, η συγκεκριμένη ενότητα περιέχει νέα αποτελέσματα που αφορούν διατεταγμένες παρατηρήσεις από την κατανομή Laplace. Ολοκληρώνοντας, στην Ενότητα 2.5 γίνεται αναφορά στους κλασσικούς εκτιμητές των παραμέτρων της κατανομής και στον υπολογισμό τους.

2.2 Ιστορική αναδρομή

Πριν από περίπου έναν αιώνα και συγκεκριμένα το 1923 δημοσιεύτηκαν στο περιοδικό *JASA* το άρθρο του καθηγητή της Δημογραφικής Στατιστικής του Πανεπιστημίου του Harvard, E.B. Wilson (1923), με τίτλο “*First and Second Laws of Error*” καθώς και το άρθρο του καθηγητή Οικονομικών W.L. Crum (1923) με τίτλο “*The use of median in determining seasonal variation*”. Τα άρθρα αυτά αφορούν σε δεδομένα από οικονομικές πηγές και καταλήγουν στα ίδια συμπεράσματα. Πιο συγκεκριμένα, στο άρθρο του ο Crum κάνει μια ενδιαφέρουσα συνεισφορά στη χρήση της διαμέσου στην Οικονομική Στατιστική. Ειδι-

κότερα, διαθέτει κάποια σύνολα οικονομικών δεδομένων και προσπαθεί να προσαρμόσει σε αυτά τρεις διαφορετικές καμπύλες συχνοτήτων (συμπεριλαμβανομένης της κανονικής καμπύλης). Δεδομένου του ότι δεν υπάρχει καλή προσαρμογή καμίας από τις καμπύλες στα δεδομένα, τα γενικά συμπεράσματα είναι ότι οι σειρές δεδομένων από οικονομικές πηγές θα ήταν καλύτερο να αναλυθούν με τη χρήση της διαμέσου παρά με τον μέσο των δεδομένων. Ένα τέτοιο συμπέρασμα θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως επαναστατικό σε μια εποχή όπου κυριαρχούσε ο αριθμητικός μέσος και η κανονική κατανομή στην θεωρία της Στατιστικής. Ωστόσο, με το παραπάνω συμπέρασμα συμφωνεί και ο Wilson στο άρθρο του στο οποίο μάλιστα υπενθυμίζει την πρώτη και τη δεύτερη κατανομή των σφαλμάτων οι οποίες διατυπώθηκαν πρώτη φορά από τον Laplace.

Η πρώτη κατανομή παρουσιάστηκε το 1774 και διατυπώνει ότι η συχνότητα ενός σφάλματος μπορεί να εκφραστεί ως μία εκθετική συνάρτηση του αριθμητικού μεγέθους του σφάλματος, μη λαμβάνοντας υπ' όψιν το πρόσημό του. Αυτή η διατύπωση είναι ισοδύναμη με το ότι ο λογάριθμος της συχνότητας ενός σφάλματος (παραβλέποντας τα πρόσημα) είναι μία γραμμική συνάρτηση του σφάλματος.

Η δεύτερη κατανομή παρουσιάστηκε το 1778 και διατυπώνει ότι η συχνότητα ενός σφάλματος είναι μία εκθετική συνάρτηση του τετραγώνου του σφάλματος, ή ισοδύναμα ότι ο λογάριθμος της συχνότητας είναι μία τετραγωνική συνάρτηση του σφάλματος. Η κατανομή αυτή καλείται κανονική κατανομή ή κατανομή του Gauss.

Ο Wilson στο άρθρο του υπογραμμίζει ότι, εφ' όσον η πρώτη κατανομή βασίζεται στην απόλυτη τιμή του σφάλματος αυτό επιφέρει σημαντικές δυσκολίες στον χειρισμό του, οπότε δίνει μεγαλύτερη σημασία στην δεύτερη κατανομή. Μάλιστα, σημειώνει ότι είναι σημαντική αφού εμπλέκει τη μεταβλητή x^2 (αν x είναι το σφάλμα) κάτι που αποτελεί αντικείμενο όλων των κατανομών. Στη συνέχεια αναφέρει ότι οι συχνότητες που συναντάμε στους τομείς της Οικονομίας, της Βιομετρίας ή της Δημογραφικής Στατιστικής δεν προσεγγίζουν την διαδεδομένη σε όλους κανονική κατανομή. Σημειώνει επίσης ότι μόνο ακριβείς μετρήσεις των θέσεων των σφαλμάτων στην αστρονομία κατανέμονται γύρω από τον μέσο σύμφωνα με την κατανομή Gauss, συνεπώς χρειάζεται μελέτη των πραγματικών δεδομένων ώστε να αποφασίσει κάποιος σε ποια κατανομή θα βασιστεί. Τέλος, μελετά και αναλύει τα δεδομένα από το άρθρο του Cram και καταλήγει στο συμπέρασμα πως υπάρχει ένδειξη σχετικά με το ότι τα δεδομένα προσαρμόζονται καλύτερα στην πρώτη κατανομή του Laplace.

Παρά το κύρος του περιοδικού στο οποίο δημοσιεύτηκε το άρθρο, ο ισχυρισμός του

2.3. Ορισμός και βασικές ιδιότητες

Wilson ήταν φωνή βοώντος εν τη ερήμω για πάνω από πέντε δεκαετίες έως ότου να μεταποπιστεί το ενδιαφέρον στην πρώτη κατανομή του Laplace, γνωστή ως κατανομή Laplace.

Η κατανομή Laplace πήρε αργότερα το όνομά της από τον Pierre-Simon Laplace (1749 – 1827), ο οποίος μεγιστοποίησε την πιθανοφάνειά της ως προς την παράμετρο θέσης, στη διάμεσο της κατανομής. Είναι επίσης γνωστή και ως διπλή εκθετική κατανομή. Για πολλά χρόνια η κατανομή Laplace ήταν ένα γνωστό θέμα της Θεωρίας Πιθανοτήτων λόγω της απλότητας της χαρακτηριστικής της συνάρτησης αλλά και της συνάρτησης πυκνότητας.

Τέλος, μία από τις πιθανές αλλά και πρώτες πηγές στις οποίες η κατανομή Laplace αναφέρεται ως η κατανομή των σφαλμάτων, στην αγγλική γλώσσα είναι το 1911 στο άρθρο του οικονομολόγου J.M. Keynes (1911), “*The Principal Averages and the Laws of Error which Lead to Them*”.

Συνοψίζοντας, η κατανομή των σφαλμάτων είναι η γνωστή σε όλους κατανομή Laplace η οποία παρουσιάστηκε από τον Laplace το 1774. Ιστορικά, ήταν η πρώτη συνεχής κατανομή με μη φραγμένο στήριγμα. Παρ’ ό,τι η κατανομή προτάθηκε ως εκείνη που προσαρμοζόταν καλύτερα σε συγκεκριμένα σύνολα δεδομένων, είναι λιγότερο δημοφιλής από την δεύτερη κατανομή των σφαλμάτων, τη γνωστή κανονική κατανομή (ή κατανομή του Gauss ή γκαουσιανή κατανομή).

2.3 Ορισμός και βασικές ιδιότητες

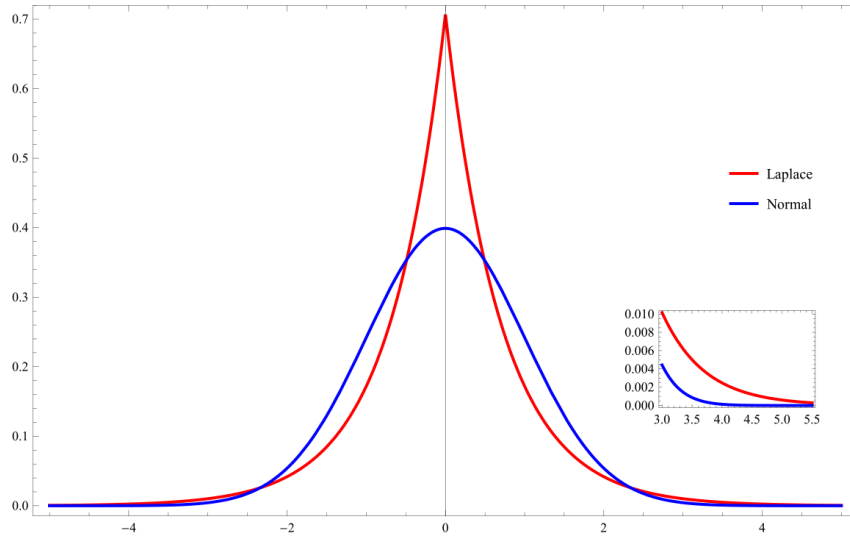
Η κατανομή Laplace, η οποία συμβολίζεται με $\mathcal{L}(\mu, \sigma)$, είναι μία κατανομή ορισμένη στο \mathbb{R} με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας η οποία δίνεται από τον τύπο

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{2\sigma} e^{-|x-\mu|/\sigma}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

όπου $\mu \in \mathbb{R}$ και $\sigma > 0$ είναι οι παράμετροι θέσης και κλίμακας αντίστοιχα. Η συνάρτηση κατανομής δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$F(x; \mu, \sigma) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{(x-\mu)/\sigma} & x < \mu \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-(x-\mu)/\sigma} & x \geq \mu \end{cases} \quad (2.2)$$

Η κατανομή Laplace είναι συμμετρική γύρω από το μ , δηλαδή για κάθε πραγματικό αριθμό x , ισχύει $f(\mu - x; \mu, \sigma) = f(\mu + x; \mu, \sigma)$. Αυτό έχει ως συνέπεια το μ να ισούται με τη μέση τιμή και τη διάμεσο της κατανομής. Επίσης, η κατανομή είναι μονοκόρυφη και το μ είναι η κορυφή της. Τέλος, μπορεί ναδειχθεί ότι η διασπορά της κατανομής είναι ίση με $2\sigma^2$.



Σχήμα 2.1: Πυκνότητες πιθανότητας της κατανομής $\mathcal{L}(0, \sqrt{2}/2)$ και της $\mathcal{N}(0, 1)$

Η συνάρτηση πυκνότητας της κατανομής θυμίζει την κανονική κατανομή, ωστόσο η συνάρτηση πυκνότητας της κανονικής κατανομής στον εκθέτη του e έχει τα τετράγωνα των διαφορών από το μ ενώ η κατανομή Laplace έχει τις απόλυτες διαφορές από το μ . Επομένως, η πυκνότητα στο $\pm\infty$ συγκλίνει στο μηδέν, οπότε προκύπτει ότι η κατανομή Laplace έχει πιο βαριές ουρές από την κανονική κατανομή.

Ενδεικτικά, στο Σχήμα 2.1 απεικονίζεται η συνάρτηση πυκνότητας της κατανομής Laplace με μέση τιμή 0 και $\sigma = \sqrt{2}/2$, έτσι ώστε η διασπορά της να ισούται με τη μονάδα, μαζί με τη συνάρτηση πυκνότητας της τυπικής κανονικής. Από το σχήμα αυτό μπορεί κανείς να παρατηρήσει τις πιο βαριές ουρές της Laplace.

Αν στη (2.1) τεθεί $\mu = 0$ και $\sigma = 1$, τότε προκύπτει η τυπική κατανομή Laplace $\mathcal{L}(0, 1)$ με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x; 0, 1) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι αν $Z \sim \mathcal{L}(0, 1)$, τότε η $X = \mu + \sigma Z$ ακολουθεί την $\mathcal{L}(\mu, \sigma)$.

Η χαρακτηριστική συνάρτηση της τυπικής κατανομής Laplace είναι

$$\phi_Z(t) = E(e^{itZ}) = \frac{1}{1+t^2}, \quad t \in \mathbb{R},$$

ενώ της $\mathcal{L}(\mu, \sigma)$ είναι

$$\phi_X(t) = E\{e^{it(\sigma Z + \mu)}\} = e^{it\mu} \phi_Z(\sigma t) = \frac{e^{it\mu}}{1 + \sigma^2 t^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Η ροπογεννήτρια της τυπικής κατανομής Laplace είναι

$$M_Z(t) = E(e^{tZ}) = \frac{1}{1-t^2}, \quad |t| < 1,$$

2.3. Ορισμός και βασικές ιδιότητες

ενώ της $X \sim \mathcal{L}(\mu, \sigma)$ υπολογίζεται ως εξής

$$M_X(t) = E\{e^{t(\sigma Z + \mu)}\} = e^{t\mu} M_Z(\sigma t) = \frac{e^{t\mu}}{1 - \sigma^2 t^2}, \quad |t| < 1/\sigma.$$

Η κεντρική ροπή n τάξης της τυχαίας μεταβλητής $X \sim \mathcal{L}(\mu, \sigma)$ είναι ίση με

$$\mu_n(X) = E[(X - \mu)^n] = \begin{cases} 0, & \text{αν } n \text{ περιττός} \\ n! \sigma^n, & \text{αν } n \text{ άρτιος} \end{cases} \quad (2.3)$$

Ο συντελεστής ασυμμετρίας μιας τυχαίας μεταβλητής Y με πεπερασμένη τρίτη ροπή και θετική τυπική απόκλιση είναι ίσος με

$$\gamma_1 = \frac{E(Y - \mu)^3}{\text{Var}(Y)^{3/2}}.$$

Αν $X \sim \mathcal{L}(\mu, \sigma)$ τότε από την (2.3) προκύπτει ότι $\gamma_1 = 0$, κάτι που είναι αναμενόμενο αφού η κατανομή Laplace είναι συμμετρική γύρω από το μ .

Ο συντελεστής κύρτωσης μιας τυχαίας μεταβλητής Y με πεπερασμένη τέταρτη ροπή και θετική τυπική απόκλιση δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$\gamma_2 = \frac{E(Y - \mu)^4}{\text{Var}(Y)^2} - 3.$$

Στην περίπτωση όπου $X \sim \mathcal{L}(\mu, \sigma)$ από την (2.3) προκύπτει ότι $\gamma_2 = \frac{4! \sigma^4}{(2\sigma^2)^2} - 3 = 3$, οπότε συμπεραίνουμε ότι η κατανομή Laplace είναι λεπτόκυρτη. Αυτό είναι επίσης αναμενόμενο αφού έχει πιο βαριές ουρές από την κανονική κατανομή.

Το γεγονός ότι η συνάρτηση κατανομής της $\mathcal{L}(\mu, \sigma)$ δίνεται από κλειστό τύπο (δες (2.2)) μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τα αντίστοιχα άνω ποσοστιαία σημεία της. Το ξ_q είναι άνω ποσοστιαίο σημείο της X αν $P(X > \xi_q) = q$. Τα άνω ποσοστιαία σημεία κ_q της τυπικής κατανομής Laplace $\mathcal{L}(0, 1)$ είναι

$$\kappa_q = \begin{cases} -\log(2q), & q \in (0, 1/2] \\ \log[2(1 - q)], & q \in (1/2, 1) \end{cases}$$

Επειδή το μ είναι παράμετρος θέσης και το σ παράμετρος κλίμακας, τα ποσοστιαία σημεία της $\mathcal{L}(\mu, \sigma)$ δίνονται από

$$\xi_q = \begin{cases} \mu - \sigma \log(2q), & q \in (0, 1/2] \\ \mu + \sigma \log[2(1 - q)], & q \in (1/2, 1) \end{cases}$$

Ειδικότερα, το πρώτο τεταρτημόριο είναι $Q_1 = \xi_{3/4} = \mu - \sigma \log 2$, το τρίτο τεταρτημόριο είναι $Q_3 = \xi_{1/4} = \mu + \sigma \log 2$ και τέλος $Q_2 = \mu$.

Σε αυτό το σημείο θα αναφέρουμε διάφορους μετασχηματισμούς γνωστών κατανομών οι οποίοι ακολουθούν την κατανομή Laplace (δες Kotz et al., 2001). Ειδικότερα, θα εστιάσουμε στην τυπική κατανομή $\mathcal{L}(0, 1)$ εφ' όσον όπως έχουμε αναφέρει ήδη στην προηγούμενη ενότητα $X = \mu + \sigma Z$, με $Z \sim \mathcal{L}(0, 1)$ και $X \sim \mathcal{L}(\mu, \sigma)$.

- Αν W_1, W_2 ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $W_i \sim \mathcal{E}(1)$, $i = 1, 2$, τότε $W_1 - W_2 \sim \mathcal{L}(0, 1)$ και αντίστοιχα, $\mu + \sigma(W_1 - W_2) \sim \mathcal{L}(\mu, \sigma)$.
- Αν W, Z ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $W \sim \mathcal{E}(1)$ και $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, τότε $\sqrt{2W}Z \sim \mathcal{L}(0, 1)$.
- Αν W, I ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $W \sim \mathcal{E}(1)$ και I που παίρνει τις τιμές ± 1 με πιθανότητες $1/2$, τότε $IW \sim \mathcal{L}(0, 1)$.
- Αν P_1, P_2 ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $P_i \sim \text{Pareto}$ με συνάρτηση πυκνότητας $P_i \sim f(x) = 1/x^2$, $x \geq 1$, για $i = 1, 2$, τότε $\log \frac{P_1}{P_2} \sim \mathcal{L}(0, 1)$ και αντίστοιχα, $\log\{e^\mu + (P_1/P_2)^\sigma\} \sim \mathcal{L}(\mu, \sigma)$.
- Αν Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $Z_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $i = 1, 2, 3, 4$, τότε

$$\begin{vmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_3 & Z_4 \end{vmatrix} = Z_1 Z_4 - Z_2 Z_3 \sim \mathcal{L}(0, 1)$$

2.4 Διατεταγμένες παρατηρήσεις

Έστω X_1, \dots, X_n παρατηρήσεις τις οποίες διατάσσουμε σε αύξουσα σειρά. Τότε το δείγμα που προκύπτει ονομάζεται διατεταγμένο και το συμβολίζουμε ως εξής

$$X_{1:n} \leq \dots \leq X_{n:n}.$$

Σημειώνεται ότι με $X_{1:n}$ συμβολίζεται η ελάχιστη ενώ με $X_{n:n}$ η μέγιστη από τις n παρατηρήσεις. Ο ορισμός των διατεταγμένων παρατηρήσεων δεν απαιτεί οι τυχαίες μεταβλητές να κατανέμονται ισόνομα και να είναι ανεξάρτητες, ωστόσο τα περισσότερα αποτελέσματα έχουν προκύψει θεωρώντας ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές δηλαδή χρησιμοποιώντας τυχαία δείγματα.

2.4.1 Κατανομές διατεταγμένων παρατηρήσεων

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε κάποια γνωστά αποτελέσματα σχετικά με κατανομές διατεταγμένων παρατηρήσεων που προέρχονται γενικά από συνεχείς κατανομές και στη συνέχεια από την κατανομή Laplace (δες Arnold et al., 1992 και Kotz et al., 2001). Ωστόσο, θα πρέπει να αναφερθεί ότι στη βιβλιογραφία υπάρχουν αποτελέσματα και για διατεταγμένες παρατηρήσεις που προέρχονται από διακριτές κατανομές.

Έστω X_1, X_2, \dots, X_n ένα τυχαίο δείγμα που προέρχεται από κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας f και συνάρτηση κατανομής F . Οι αντίστοιχες διατεταγμένες παρατηρήσεις θα συμβολίζονται με

$$X_{1:n} \leq \dots \leq X_{n:n}.$$

Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των διατεταγμένων παρατηρήσεων $X_\delta = (X_{1:n}, \dots, X_{n:n})$ είναι η εξής,

$$f_{1,\dots,n:n}(x_1, \dots, x_n) = n! \prod_{i=1}^n f(x_i), \quad x_1 < \dots < x_n.$$

Όταν έχουμε δεξιά ή και αριστερή λογοκρισία τύπου II όπου παρατηρούμε

$$X_{r:n}, \dots, X_{n-s:n}, \quad r, s > 1$$

η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας είναι,

$$f_{r+1,\dots,n-s:n}(x_1, \dots, x_n) = \frac{n!}{r!s!} \{F(x_{r+1:n})\}^r \left\{ \prod_{i=r+1}^{n-s} f(x_{i:n}) \right\} \{1 - F(x_{n-s:n})\}^s, \quad x_{r+1} < \dots < x_{n-s}.$$

Σε αυτό το σημείο παραθέτουμε κάποια γνωστά αποτελέσματα που αφορούν σε διατεταγμένες παρατηρήσεις και θα χρειαστούν στη συνέχεια. Ειδικότερα, το πρώτο λήμμα αποδείχθηκε από τους Piouros and Balakrishnan (2009) και αφορά σε διατεταγμένες παρατηρήσεις οι οποίες προέρχονται από οποιαδήποτε κατανομή. Στη συνέχεια παρατίθεται ένα λήμμα με γνωστά αποτελέσματα για διατεταγμένες παρατηρήσεις που προέρχονται από την τυπική εκθετική κατανομή και βρίσκεται στο βιβλίο των Arnold et al. (2008). Τέλος, παρατίθεται ένα λήμμα με ειδικά αποτελέσματα για διατεταγμένες παρατηρήσεις οι οποίες προέρχονται από την κατανομή Laplace.

Λήμμα 2.1. (Piouros and Balakrishnan, 2009) Έστω Z_1, \dots, Z_n ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές από κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας f και D το πλήθος των Z_i τα οποία είναι μικρότερα ή ίσα από μία προκαθορισμένη σταθερά c . Τότε, δοθέντος $D =$

d , τα μπλοκ των διατεταγμένων παρατηρήσεων $(Z_{1:n}, \dots, Z_{d:n})$ και $(Z_{d+1:n}, \dots, Z_{n:n})$ είναι ανεξάρτητα και ισχύει ότι

$$(Z_{1:n}, \dots, Z_{d:n}) \stackrel{d}{=} (L_{1:d}, \dots, L_{d:d}),$$

$$(Z_{d+1:n}, \dots, Z_{n:n}) \stackrel{d}{=} (R_{1:n-d}, \dots, R_{n-d:n-d}),$$

όπου L_1, \dots, L_d είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές από την αρχική κατανομή δεξιά περικεκομμένη στο c δηλαδή αυτή που έχει πυκνότητα $\frac{f(x)}{P(X \leq c)} I_{(X \leq c)}$ και R_1, \dots, R_{n-d} είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές από την αρχική κατανομή αριστερά περικεκομμένη στο c δηλαδή αυτή που έχει πυκνότητα $\frac{f(x)}{P(X > c)} I_{(X > c)}$.

Εδώ, το σύμβολο $\stackrel{d}{=}$ σημαίνει ισότητα κατά κατανομή, δηλαδή αυτό που βρίσκεται αριστερά του $\stackrel{d}{=}$ έχει την ίδια κατανομή με αυτό που βρίσκεται δεξιά.

Στο παραπάνω λήμμα και οποτεδήποτε χρειαστεί, για $d = 0$ ή n θα θεωρούμε ότι τα μπλοκ είναι κενά.

Λήμμα 2.2. (Arnold et al., 2008) Έστω E_1, \dots, E_n ένα τυχαίο δείγμα από την τυπική εκθετική κατανομή $\mathcal{E}(1)$ και $E_{1:n}, \dots, E_{n:n}$ οι αντίστοιχες διατεταγμένες παρατηρήσεις. Για $i = 1, \dots, n$, θεωρούμε τις διαφορές $E_{i:n} - E_{i-1:n}$, με $E_{0:n} \equiv 0$. Τότε οι κανονικοποιημένες διαφορές

$$nE_{1:n}, (n-1)(E_{2:n} - E_{1:n}), \dots, (n-i+1)(E_{i:n} - E_{i-1:n}), \dots, E_{n:n} - E_{n-1:n}$$

είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν τυπική εκθετική κατανομή.

Αν $X \sim \mathcal{L}(\mu, \sigma)$ τότε η δεσμευμένη κατανομή της $\mu - X$ δοθέντος $X \leq \mu$ και η δεσμευμένη κατανομή της $X - \mu$ δοθέντος $X \geq \mu$ είναι και οι δύο εκθετικές με μέση τιμή σ , $\mathcal{E}(\sigma)$ (δες Kotz et al., 2001). Έστω X_1, \dots, X_n ένα τυχαίο δείγμα από την κατανομή $\mathcal{L}(\mu, \sigma)$ και $D = \sum_{i=1}^n I_{(X_i \leq \mu)}$ δηλαδή το πλήθος των X_i που είναι μικρότερα ή ίσα του μ . Αφού το μ είναι η διάμεσος της κατανομής, η τυχαία μεταβλητή D ακολουθεί την διωνυμική κατανομή $\mathcal{B}(n, 1/2)$.

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.1 προκύπτει ότι, δεσμεύοντας στο ενδεχόμενο $D = d$, τα μπλοκ $(X_{1:n}, \dots, X_{d:n})$ και $(X_{d+1:n}, \dots, X_{n:n})$ είναι ανεξάρτητα και $(\mu - X_{1:n}, \dots, \mu - X_{d:n}) \stackrel{d}{=} (L_{d:d}, \dots, L_{1:d})$ και $(X_{d+1:n} - \mu, \dots, X_{n:n} - \mu) \stackrel{d}{=} (R_{1:n-d}, \dots, R_{n-d:n-d})$, όπου L_1, \dots, L_d και R_1, \dots, R_{n-d} είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με κατανομή $\mathcal{E}(\sigma)$.

Λήμμα 2.3. Έστω X_1, \dots, X_n ένα τυχαίο δείγμα από την κατανομή $\mathcal{L}(0, \sigma)$, D το πλήθος των X_i που είναι μικρότερα ή ίσα από το μηδέν και c_1, \dots, c_n κάποιες σταθερές. Τότε,

$$\left[\sum_{i=1}^n c_i X_{i:n} \middle| D = d \right] \stackrel{d}{=} - \sum_{j=1}^d \frac{\sum_{i=1}^{d-j+1} c_i}{d-j+1} E_j + \sum_{j=d+1}^n \frac{\sum_{i=j}^n c_i}{n-j+1} E_j,$$

2.5. Εκτίμηση των παραμέτρων της κατανομής Laplace

όπου E_1, \dots, E_n είναι ανεξάρτητες εκθετικές τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή σ .

Απόδειξη. Δεσμεύοντας στο ενδεχόμενο $D = d$ προκύπτει ότι,

$$\sum_{i=1}^n c_i X_{i:n} \stackrel{d}{=} - \sum_{i=1}^d c_i L_{d-i+1:d} + \sum_{i=d+1}^n c_i R_{i-d:n-d}. \quad (2.4)$$

Από το Λήμμα 2.2 συνεπάγεται ότι κάθε διατεταγμένη παρατήρηση της περικεκομμένης κατανομής εκφράζεται μέσω των κανονικοποιημένων διαφορών ως

$$L_{i:d} = \sum_{j=1}^i (L_{j:d} - L_{j-1:d}), \quad i = 1, \dots, d.$$

Ομοίως, για τις $R_{i:n-d}$. Επί πλέον, από την ανεξαρτησία των τυχαίων διανυσμάτων $(L_{1:d}, \dots, L_{d:d})$ και $(R_{1:n-d}, \dots, R_{n-d:n-d})$ (Λήμμα 2.1) και τις ιδιότητες των διατεταγμένων παρατηρήσεων που προέρχονται από εκθετική κατανομή (Λήμμα 2.2) προκύπτει ότι

$$(L_{i:d}; i = 1, \dots, d) \stackrel{d}{=} \left(\sum_{j=1}^i E_j / (d - j + 1); i = 1, \dots, d \right),$$

$$(R_{i:n-d}; i = 1, \dots, n - d) \stackrel{d}{=} \left(\sum_{j=1}^i E_{d+j} / (n - d - j + 1); i = 1, \dots, n - d \right)$$

Αντικαθιστώντας στην (2.4) προκύπτει το αποτέλεσμα. □

2.5 Εκτίμηση των παραμέτρων της κατανομής Laplace

Οι εκτιμητές με τους οποίους θα ασχοληθούμε είναι οι ΕΜΠ και οι BLUE. Η μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας αποτελεί έναν γενικό τρόπο εύρεσης εκτιμητών για μία άγνωστη παράμετρο και είναι μια κλασική μέθοδος στην Στατιστική. Βασίζεται στην αρχή ότι αν για δεδομένα X με από κοινού πυκνότητα $f(\cdot, \theta)$, $\theta \in \Theta$, έχει παρατηρηθεί η τιμή x , τότε επιλέγεται ως εκτίμηση του θ η τιμή $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x)$ που μεγιστοποιεί ως προς $\theta \in \Theta$ τη συνάρτηση πιθανοφάνειας του $L(\theta|x) = f(x, \theta)$: ο ΕΜΠ του θ είναι η στατιστική συνάρτηση $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X)$. Από την άλλη πλευρά οι BLUE υπολογίζονται ελαχιστοποιώντας το μέσο τετραγωνικό σφάλμα υπό την προϋπόθεση ότι είναι αμερόληπτοι και είναι γραμμικοί συνδυασμοί των διατεταγμένων παρατηρήσεων. Τελικά, οι BLUE είναι αμερόληπτοι με ελάχιστη διασπορά στην κλάση των γραμμικών εκτιμητών. Όλα αυτά θα τα δούμε συνοπτικά παρακάτω όπου θα γίνει εύρεση των εκτιμητών των παραμέτρων της κατανομής Laplace.

2.5.1 Εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας

Τα αποτελέσματα του παρακάτω λήμματος είναι γνωστά (δες Johnson et al., 1995), όμως για την πληρότητα της παρουσίασης παραθέτουμε την απόδειξη ακολούθως.

Λήμμα 2.4. Θεωρούμε ένα τυχαίο δείγμα

$$X = (X_1, \dots, X_n), \quad n \geq 2,$$

από την κατανομή $\mathcal{L}(\mu, \sigma)$. Οι ΕΜΠ των μ, σ είναι

$$\hat{\mu} = \text{οποιαδήποτε διάμεσος του } X$$

και

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_{i:n} - \hat{\mu}| = \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=m+1}^n X_{i:n} - \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} X_{i:n} \right\},$$

όπου $\lfloor x \rfloor$ παριστάνει το ακέραιο μέρος του x .

Απόδειξη. Έχουμε ότι $X_i \sim f_1(x_i; \mu, \sigma) = \frac{1}{2\sigma} e^{-|x_i - \mu|/\sigma}$, $x_i \in \mathbb{R}$, οπότε

$$X \sim f(x; \mu, \sigma) = \prod_{i=1}^n f_1(x_i; \mu, \sigma) = \frac{1}{(2\sigma)^n} e^{-\sum_{i=1}^n |x_i - \mu|/\sigma}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Για το παρατηρηθέν $x \in \mathbb{R}^n$ η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι,

$$L(\mu, \sigma|x) = \frac{1}{(2\sigma)^n} e^{-\sum_{i=1}^n |x_i - \mu|/\sigma}, \quad (\mu, \sigma) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \quad (2.5)$$

με λογάριθμο

$$\log L(\mu, \sigma|x) = -n \log(2\sigma) - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n |x_i - \mu|, \quad (\mu, \sigma) \in \mathbb{R} \times (0, \infty).$$

Θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε την $\log L$, η οποία είναι συνάρτηση δύο μεταβλητών, ως προς μ και σ . Το πρόβλημα θα το αναγάγουμε στη μελέτη συναρτήσεων μιας μεταβλητής μέσω κατάταξης της πιθανοφάνειας.

Θεωρώντας σταθερό $\sigma > 0$ η μεγιστοποίηση της $\log L$ ως προς μ είναι ισοδύναμη με την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης $\sum_{i=1}^n |x_i - \mu|$. Έστω $h(\mu) = \sum_{i=1}^n |x_i - \mu| = \sum_{i=1}^n |x_{i:n} - \mu|$ και $x_{1:n} \leq \dots \leq x_{n:n}$ οι διατεταγμένες παρατηρήσεις.

- ◊ Αν $\mu \leq x_{1:n}$, τότε η συνάρτηση $h(\mu) = \sum_{i=1}^n (x_{i:n} - \mu) = \sum_{i=1}^n x_{i:n} - n\mu$ είναι γνησίως φθίνουσα ως προς μ .

2.5. Εκτίμηση των παραμέτρων της κατανομής Laplace

- ◊ Αν $\mu \geq x_{n:n}$, τότε η συνάρτηση $h(\mu) = \sum_{i=1}^n (\mu - x_{i:n}) = n\mu - \sum_{i=1}^n x_{i:n}$ είναι γνησίως αύξουσα ως προς μ .
- ◊ Αν $x_{j:n} < \mu < x_{j+1:n}$, $j = 1, \dots, n-1$ τότε η συνάρτηση $h(\mu) = \sum_{i=1}^j (\mu - x_{i:n}) + \sum_{i=j+1}^n (x_{i:n} - \mu) = \sum_{i=j+1}^n x_{i:n} - \sum_{i=1}^j x_{i:n} - (n-2j)\mu$ είναι γνησίως φθίνουσα ως προς μ για $j < n/2$ και γνησίως αύξουσα ως προς μ για $j > n/2$. Αν $j = n/2$ και το $n = 2m$ είναι άρτιος, τότε η συνάρτηση είναι σταθερή και ίση με $h(\mu) = \sum_{i=m+1}^n x_{i:n} - \sum_{i=1}^m x_{i:n}$.

Συνεπώς, το ελάχιστο της h επιτυγχάνεται στη διάμεσο. Όταν $n = 2m - 1$, η διάμεσος του x ορίζεται μοναδικά: είναι η μεσαία παρατήρηση $x_{m:n}$. Από την άλλη πλευρά, όταν $n = 2m$, διάμεσος του x είναι κάθε σημείο του διαστήματος $[x_{m:n}, x_{m+1:n}]$. Ωστόσο, η κλασική επιλογή για τη διάμεσο είναι το μέσο αυτού του διαστήματος. Επειδή η μεγιστοποίηση της $\log L$ για οποιαδήποτε τιμή του σ επιτυγχάνεται στη διάμεσο του x ανεξάρτητα από την τιμή του σ που επιλέξαμε συμπεραίνουμε ότι, η εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας του μ είναι ο $\hat{\mu} =$ οποιαδήποτε διάμεσος του x .

Η (2.5) γίνεται,

$$L(\hat{\mu}, \sigma|x) = \frac{1}{(2\sigma)^n} e^{-\sum_{i=1}^n |x_i - \hat{\mu}|/\sigma}, \quad \sigma \in (0, \infty),$$

και η μεγιστοποίησή της (ή ισοδύναμα του λογαρίθμου της) ως προς σ μας δίνει τον ΕΜΠ του σ . Έχουμε

$$\log L(\hat{\mu}, \sigma|x) = -n \log(2\sigma) - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n |x_i - \hat{\mu}|, \quad \sigma \in (0, \infty).$$

Η παράγωγος αυτής της συνάρτησης ως προς σ είναι

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \log L(\hat{\mu}, \sigma|x) = \frac{n}{\sigma^2} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \hat{\mu}| - \sigma \right\}, \quad \sigma \in (0, \infty).$$

Παρατηρούμε ότι η παράγωγος είναι θετική για $\sigma < \sum_{i=1}^n |x_i - \hat{\mu}|/n$, μηδενίζεται για $\sigma = \sum_{i=1}^n |x_i - \hat{\mu}|/n$ και είναι αρνητική για $\sigma > \sum_{i=1}^n |x_i - \hat{\mu}|/n$. Οπότε, η $\log L(\hat{\mu}, \sigma|x)$ μεγιστοποιείται μοναδικά στο σημείο $\sum_{i=1}^n |x_i - \hat{\mu}|/n$. Συνεπώς, το σημείο $(\hat{\mu}, \sum_{i=1}^n |x_{i:n} - \hat{\mu}|/n)$ μεγιστοποιεί μοναδικά την (2.5). Επειδή το $\sum_{i=1}^n |x_i - \hat{\mu}| = \sum_{i=m+1}^n x_{i:n} - \sum_{i=1}^m x_{i:n}$ η επιλογή του $\hat{\mu}$ (αν το n είναι άρτιος) δεν επηρεάζει τον ΕΜΠ του σ . □

2.5.2 Βέλτιστοι γραμμικοί αμερόληπτοι εκτιμητές (BLUE)

Οι BLUE των μ, σ υπολογίζονται σύμφωνα με την εργασία του Lloyd (1952) εφαρμόζοντας το θεώρημα ελαχίστων τετραγώνων των Gauss–Markov. Ο Lloyd χρησιμοποίησε για πρώτη

φορά τη γενική θεωρία ελαχίστων τετραγώνων σε διατεταγμένες παρατηρήσεις που προέρχονται από κατανομές οι οποίες εξαρτώνται μόνο από παραμέτρους θέσης και κλίμακας και έδωσε εκφράσεις για τους γραμμικούς αμερόληπτους εκτιμητές των παραμέτρων οι οποίοι έχουν ελάχιστη διασπορά στην κλάση αυτών των εκτιμητών. Για τον αναλυτικό τρόπο εύρεσης των BLUE των μ, σ παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο βιβλίο των Arnold et al. (1992). Ωστόσο, θα αναφέρουμε κάποια βασικά σημεία της μεθοδολογίας.

Έστω X_1, \dots, X_n τυχαίο δείγμα από την $\mathcal{L}(\mu, \sigma)$ και Z_1, \dots, Z_n με $Z_i = (X_i - \mu)/\sigma$ οι τυποποιημένες εκδοχές τους. Έστω $X_\delta = (X_{1:n}, \dots, X_{n:n})'$ και $Z_\delta = (Z_{1:n}, \dots, Z_{n:n})'$ οι αντίστοιχες διατεταγμένες παρατηρήσεις (σε ό,τι ακολουθεί ο τόνος συμβολίζει αναστροφή ενός πίνακα) τότε

$$E(X_{r:n}) = \mu + \sigma E(Z_{r:n}) \quad \text{και} \quad \text{Cov}(X_{r:n}, X_{k:n}) = \sigma^2 \text{Cov}(Z_{r:n}, Z_{k:n}), \quad (2.6)$$

με $1 \leq r, k \leq n$.

Έστω $\theta = (\mu, \sigma)'$ το διάνυσμα των άγνωστων παραμέτρων, $v_n = E(Z_\delta)$, $\Sigma_n = \text{Cov}(Z_\delta)$ και 1_n το n -διάστατο διάνυσμα που αποτελείται από μονάδες. Τότε οι εξισώσεις στην (2.6) εκφράζονται ισοδύναμα σε μορφή πινάκων ως

$$E(X_\delta) = A\theta \quad \text{και} \quad \text{Cov}(X_\delta) = \sigma^2 \Sigma_n,$$

όπου $A = (1_n \ v_n)$ είναι πίνακας διαστάσεων $n \times 2$. Οι τιμές των μ, σ που ελαχιστοποιούν την τετραγωνική μορφή

$$\begin{aligned} Q(\theta) &= (X_\delta - A\theta)' \Sigma_n^{-1} (X_\delta - A\theta) \\ &= (X_\delta - \mu 1_n - \sigma v_n)' \Sigma_n^{-1} (X_\delta - \mu 1_n - \sigma v_n) \\ &= X_\delta' \Sigma_n^{-1} X_\delta - 2\mu 1_n' \Sigma_n^{-1} X_\delta - 2\sigma v_n' \Sigma_n^{-1} X_\delta \\ &\quad + 2\mu \sigma v_n' \Sigma_n^{-1} 1_n + \mu^2 1_n' \Sigma_n^{-1} 1_n + \sigma^2 v_n' \Sigma_n^{-1} v_n \end{aligned}$$

είναι οι BLUE των μ, σ . Λαμβάνοντας υπ' όψιν τη συμμετρία της κατανομής, οι BLUE $\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}$ των μ, σ είναι

$$\tilde{\mu} = \frac{1_n' \Sigma_n^{-1} X_\delta}{1_n' \Sigma_n^{-1} 1_n} = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_{i:n}, \quad \tilde{\sigma} = \frac{v_n' \Sigma_n^{-1} X_\delta}{v_n' \Sigma_n^{-1} v_n} = \sum_{i=1}^n \beta_i X_{i:n},$$

Τις ακριβείς εκφράσεις των v_n και Σ_n μπορεί κάποιος να τις βρει στην εργασία του Govindarajulu (1966). Ενδεικτικά, παραθέτουμε τους BLUE των μ, σ για $n = 2, 3, 4$

2.5. Εκτίμηση των παραμέτρων της κατανομής Laplace

- Για $n = 2$ έχουμε $\tilde{\mu} = \frac{1}{2}X_{1:2} + \frac{1}{2}X_{2:2}$ και $\tilde{\sigma} = -\frac{2}{3}X_{1:2} + \frac{2}{3}X_{2:2}$.
- Για $n = 3$ έχουμε $\tilde{\mu} = \frac{4}{27}X_{1:3} + \frac{19}{27}X_{2:3} + \frac{4}{27}X_{3:3}$ και $\tilde{\sigma} = -\frac{4}{9}X_{1:3} + \frac{4}{9}X_{3:3}$.
- Για $n = 4$ έχουμε $\tilde{\mu} = \frac{7}{148}X_{1:4} + \frac{67}{148}X_{2:4} + \frac{67}{148}X_{3:4} + \frac{7}{148}X_{4:4}$ και
 $\tilde{\sigma} = -\frac{2728}{12715}X_{1:4} - \frac{3912}{12715}X_{2:4} + \frac{2728}{12715}X_{3:4} + \frac{3912}{12715}X_{4:4}$.

Επειδή τόσο οι BLUE όσο και οι ΕΜΠ είναι γραμμικοί συνδυασμοί διατεταγμένων παρατηρήσεων που προέρχονται από την κατανομή Laplace, δεσμεύοντας στο ενδεχόμενο $D = d$ (όπου $D = \sum_{i=1}^n I_{(X_i \leq \mu)}$) και χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.3 μπορούμε να βρούμε τις ακριβείς κατανομές τους καθώς και τις ακριβείς κατανομές συναρτήσεών τους. Πιο συγκεκριμένα, σε τέτοιες στατιστικές συναρτήσεις βασίζονται οι έλεγχοι για παραμέτρους θέσης και κλίμακας δύο κατανομών Laplace που θα δούμε πιο αναλυτικά στα κεφάλαια που ακολουθούν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Συμπερασματολογία για τη διαφορά των παραμέτρων θέσης δύο κατανομών Laplace

3.1 Εισαγωγή

Η σύγκριση των παραμέτρων θέσης δύο πληθυσμών, αποτελεί κλασσικό πρόβλημα της Στατιστικής. Ένας παραμετρικός έλεγχος καλείται ακριβής, αν ο υπολογισμός των κρίσιμων σημείων του γίνεται χρησιμοποιώντας την ακριβή κατανομή της στατιστικής συνάρτησης στην οποία βασίζεται υπό την μηδενική υπόθεση. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα το μέγεθός του να είναι ίσο με το ονομαστικό επίπεδο σημαντικότητας.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα κατασκευάσουμε ακριβείς ελέγχους για τη σύγκριση των παραμέτρων θέσης δύο κατανομών Laplace με κοινή παράμετρο κλίμακας βασιζόμενοι σε αντίστοιχα ανεξάρτητα δείγματα. Το πρόβλημα αυτό περιγράφεται στην Ενότητα 3.2. Οι στατιστικές συναρτήσεις βασίζονται είτε στους ΕΜΠ, είτε στους BLUE των παραμέτρων. Στις Ενότητες 3.3 και 3.4 θεωρούμε τον έλεγχο λόγου πιθανοφανειών (ΕΛΠ) και την τυποποιημένη διαφορά των BLUE των μ_1, μ_2 αντίστοιχα. Δεσμεύοντας σε συγκεκριμένες ποσότητες εκφράζουμε τις ακριβείς τους κατανομές ως μείξεις κατανομών λόγων γραμμικών συνδυασμών ανεξάρτητων τυπικών εκθετικών τυχαίων μεταβλητών. Αυτό μας επιτρέπει να βρούμε σε κλειστή μορφή την συνάρτηση κατανομής των στατιστικών συναρτήσεων και να υπολογίσουμε διάφορα ποσοστιαία σημεία. Στην Ενότητα 3.5 συζητάμε ακριβή διαστήματα εμπιστοσύνης για τη διαφορά $\mu_1 - \mu_2$. Στην Ενότητα 3.6 συγκρίνουμε αριθμητικά την ισχύ των ελέγχων που κατασκευάσαμε στις Ενότητες 3.3 και 3.4. Συζητάμε επίσης και ελέγχους που βασίζονται σε άλλες στατιστικές συναρτήσεις για τους οποίους δείχνουμε μέσω προσομοίωσης ότι είναι γενικά λιγότερο ισχυροί από αυτούς των Ενοτήτων 3.3 και 3.4. Στην ίδια ενότητα συγκρίνουμε τα διαστήματα εμπιστοσύνης που συζητήσαμε στην Ενότητα 3.5 βασιζόμενοι στα αναμενόμενα μήκη τους. Τέλος, στην Ενότητα 3.8

παραθέτουμε ένα αριθμητικό παράδειγμα.

3.2 Σύγκριση παραμέτρων θέσης

Έστω

$$X = (X_1, \dots, X_{n_1}), Y = (Y_1, \dots, Y_{n_2}), \quad n_1, n_2 \geq 2, \quad (3.1)$$

δύο ανεξάρτητα τυχαία δείγματα από τις κατανομές $\mathcal{L}(\mu_1, \sigma)$, $\mathcal{L}(\mu_2, \sigma)$, αντίστοιχα, και

$$X_{1:n_1} < X_{2:n_1} < \dots < X_{n_1:n_1}, \quad Y_{1:n_2} < Y_{2:n_2} < \dots < Y_{n_2:n_2}$$

οι αντίστοιχες διατεταγμένες στατιστικές συναρτήσεις. Θεωρούμε το πρόβλημα ελέγχου των υποθέσεων

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad \text{κατά} \quad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2.$$

Ο παραπάνω έλεγχος μπορεί να γίνει θεωρώντας διαφορετικές διαδικασίες, ωστόσο οι πιο κοινές επιλογές είναι ο έλεγχος του λόγου πιθανοφανειών (ΕΛΠ) καθώς και έλεγχοι που βασίζονται σε τυποποιημένες διαφορές συγκεκριμένων εκτιμητών των παραμέτρων μ_1, μ_2 . Τέτοιες είναι για παράδειγμα οι $(\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2)/\hat{\sigma}$ και $(\tilde{\mu}_1 - \tilde{\mu}_2)/\tilde{\sigma}$, όπου $\hat{\mu}_i, \tilde{\mu}_i, i = 1, 2$, είναι οι ΕΜΠ και οι BLUE των μ_i ενώ $\hat{\sigma}, \tilde{\sigma}$ είναι κάποιοι εκτιμητές του σ . Σημειώνουμε ότι όλες αυτές οι στατιστικές συναρτήσεις έχουν κατανομές οι οποίες υπό τη μηδενική υπόθεση δεν εξαρτώνται από τις παραμέτρους. Συνεπώς, εφ' όσον οι κατανομές αυτών των στατιστικών συναρτήσεων μπορούν να εκφραστούν σε κλειστή μορφή μπορούν να βρεθούν τα αντίστοιχα ποσοστιαία σημεία και να καταλήξουμε σε ακριβείς ελέγχους.

3.3 Έλεγχος λόγου πιθανοφανειών

Θεωρούμε δεδομένα όπως στην (3.1) και θέτουμε $n = n_1 + n_2, m = [(n+1)/2], m_i = [(n_i+1)/2], i = 1, 2$. Αυτό συνεπάγεται ότι $n = 2m - 1$ αν το n είναι περιττός και ότι $n = 2m$ αν το n είναι άρτιος. Όμοια $n_i = 2m_i - 1$ αν το n_i είναι περιττός και ότι $n_i = 2m_i$ αν το n_i είναι άρτιος. Είναι σαφές ότι η πιθανοφάνεια του (μ_1, μ_2, σ) είναι ίση με

$$L(\mu_1, \mu_2, \sigma | X, Y) = \frac{1}{(2\sigma)^{n_1+n_2}} e^{-\frac{1}{\sigma} \{ \sum_{i=1}^{n_1} |X_i - \mu_1| + \sum_{i=1}^{n_2} |Y_i - \mu_2| \}}, \quad \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}, \sigma > 0,$$

και αποδεικνύεται ότι το μέγιστό της ισούται με $L(\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\sigma} | X, Y) = (2e\hat{\sigma})^{-n}$, όπου $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2$ είναι οι ΕΜΠ των μ_1, μ_2 , δηλαδή οι δειγματικές διάμεσοι και

$$\begin{aligned}\hat{\sigma} &= \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^{n_1} |X_i - \hat{\mu}_1| + \sum_{i=1}^{n_2} |Y_i - \hat{\mu}_2| \right\} \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=m_1+1}^{n_1} X_{i:n_1} - \sum_{i=1}^{\lfloor n_1/2 \rfloor} X_{i:n_1} + \sum_{i=m_2+1}^{n_2} Y_{i:n_2} - \sum_{i=1}^{\lfloor n_2/2 \rfloor} Y_{i:n_2} \right).\end{aligned}$$

Έστω $Z = (Z_1, \dots, Z_n)$ το συνδυασμένο δείγμα (δηλαδή όλες οι X_i, Y_i παρατηρήσεις) και $Z_{1:n} < \dots < Z_{n:n}$ οι αντίστοιχες διατεταγμένες παρατηρήσεις. Σημειώνουμε ότι υπό τη μηδενική υπόθεση, το Z είναι ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n από την κατανομή Laplace $\mathcal{L}(\mu_0, \sigma)$, όπου με μ_0 συμβολίζουμε την κοινή τιμή των μ_1, μ_2 . Σε αυτήν την περίπτωση το μέγιστο της πιθανοφάνειας είναι $L(\hat{\mu}_0, \hat{\mu}_0, \hat{\sigma}_0 | X, Y) = (2e\hat{\sigma}_0)^{-n}$, όπου $\hat{\mu}_0$ είναι οποιαδήποτε διάμεσος του Z και

$$\hat{\sigma}_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |Z_i - \hat{\mu}_0| = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=m+1}^n Z_{i:n} - \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} Z_{i:n} \right).$$

Αφού η στατιστική συνάρτηση του (γενικευμένου) λόγου πιθανοφανειών είναι της μορφής

$$\frac{L(\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\sigma} | X, Y)}{L(\hat{\mu}_0, \hat{\mu}_0, \hat{\sigma}_0 | X, Y)} = \left(\frac{\hat{\sigma}_0}{\hat{\sigma}} \right)^n,$$

η μηδενική υπόθεση απορρίπεται για μεγάλες τιμές της στατιστικής συνάρτησης

$$T_1 := \frac{\hat{\sigma}_0}{\hat{\sigma}} = \frac{\sum_{i=m+1}^n Z_{i:n} - \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} Z_{i:n}}{\sum_{i=m_1+1}^{n_1} X_{i:n_1} - \sum_{i=1}^{\lfloor n_1/2 \rfloor} X_{i:n_1} + \sum_{i=m_2+1}^{n_2} Y_{i:n_2} - \sum_{i=1}^{\lfloor n_2/2 \rfloor} Y_{i:n_2}}. \quad (3.2)$$

Είναι σαφές ότι, υπό τη μηδενική υπόθεση η κατανομή της T_1 δεν εξαρτάται από τις άγνωστες παραμέτρους.

Έστω $1_k, -1_k$ και 0_k διανύσματα που αποτελούνται από k το πλήθος 1, k το πλήθος -1 και k το πλήθος μηδέν, αντίστοιχα. Στην περίπτωση όπου $k = 0$, το αντίστοιχο διάνυσμα θεωρείται κενό. Επί πλέον, έστω \mathbb{Q}, \mathbb{Q}_+ τα σύνολα των ρητών αριθμών και των μη αρνητικών ρητών αριθμών, αντίστοιχα.

Θεώρημα 3.1. (α) Υπό την $H_0 : \mu_1 = \mu_2$, ισχύει

$$\mathbb{P}(T_1 > x) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{n_1}^{-1} \sum_{p \in P_{n_1, n_2}} \sum_{d=0}^n w(p) \binom{n}{d} \mathbb{P} \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n s_i(d, p) E_i}{\sum_{i=1}^n t_i(d, p) E_i} > x \right\}, \quad (3.3)$$

όπου P_{n_1, n_2} είναι ένα σύνολο μεταθέσεων του n -διάστατου διανύσματος $(1_{\lfloor n_1/2 \rfloor + \lfloor n_2/2 \rfloor}, -1_{\lfloor n_1/2 \rfloor + \lfloor n_2/2 \rfloor}, 0_{m_1 - \lfloor n_1/2 \rfloor + m_2 - \lfloor n_2/2 \rfloor})$ και $w(p)$ είναι το βάρος της μετάθεσης p , $E_i, i = 1, \dots, n$, είναι ανεξάρτητες τυπικές εκθετικές τυχαίες μεταβλητές και $s_i, t_i \in \mathbb{Q}_+, i = 1, \dots, n$, είναι σταθερές που εξαρτώνται από τα d, p .

(β) Υπό την $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$, η κατανομή της T_1 εξαρτάται από τις άγνωστες παραμέτρους μόνο μέσω του $\xi = (\mu_1 - \mu_2)/\sigma$.

Απόδειξη. (α) Υπό την μηδενική υπόθεση και χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Από την (3.2) παρατηρούμε ότι ο αριθμητής της T_1 εξαρτάται από την από κοινού διάταξη των X_i, Y_i . Το πλήθος των διαφορετικών από κοινού διατάξεων των X_i και Y_i είναι ίσο με $\binom{n}{n_1}$. Κάθε διάταξη συνεπάγεται ότι ο παρονομαστής της T_1 είναι της μορφής $\sum_{i=1}^n p_i Z_{i:n}$ όπου $p = (p_1, \dots, p_n)$ είναι ένα διάνυσμα αποτελούμενο από 1, -1 και πιθανόν 0 το οποίο αντιστοιχεί στη συγκεκριμένη διάταξη. Αν συμβολίσουμε με $w(p)$ το πλήθος των διαφορετικών διατάξεων που προκύπτουν από τη μετάθεση p και με P_{n_1, n_2} το σύνολο όλων των δυνατών μεταθέσεων, τότε από το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας προκύπτει ότι

$$P(T_1 > x) = \sum_{p \in P_{n_1, n_2}} \binom{n}{n_1}^{-1} w(p) P\left\{ \frac{\sum_{i=m+1}^n Z_{i:n} - \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} Z_{i:n}}{\sum_{i=1}^n p_i Z_{i:n}} > x \right\}.$$

Έστω $D =$ το πλήθος των παρατηρήσεων $\{Z_i \leq 0\}$. Δεσμεύοντας στο ενδεχόμενο $D = d$ το οποίο έχει πιθανότητα $2^{-n} \binom{n}{d}$, $d = 0, 1, \dots, n$, και χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.3 προκύπτει η (3.3).

(β) Έστω $\mu_1 \neq \mu_2$. Τότε, η δεξιά ουρά της ακριβούς κατανομής της T_1 εκφράζεται ως $P(T_1 > x) = \sum_{p \in P_{n_1, n_2}} w(p) P(T_1 > x | p)$. Θεωρούμε τις τυχαίες μεταβλητές $U_i = (X_i - \mu_1)/\sigma$, $i = 1, \dots, n_1$ και $V_i = (Y_i - \mu_2)/\sigma$, $i = 1, \dots, n_2$, οι οποίες όπως είδαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές από την $\mathcal{L}(0, 1)$. Συνεπώς, οι αντίστοιχες διατεταγμένες παρατηρήσεις των X_i και Y_i εκφράζονται από τις σχέσεις $X_{i:n_1} = \sigma U_{i:n_1} + \mu_1$, $i = 1, \dots, n_1$, και $Y_{i:n_2} = \sigma V_{i:n_2} + \mu_2$, $i = 1, \dots, n_2$. Κάθε μετάθεση p των $X_{1:n_1}, \dots, X_{n_1:n_1}, Y_{1:n_2}, \dots, Y_{n_2:n_2}$ εκφράζεται πλέον από έναν πεπερασμένο αριθμό ανισοτήτων ο οποίος προκύπτει από τη σύγκριση των διαφορών $X_{i:n_1} - Y_{j:n_2}$ με το μηδέν για συγκεκριμένα ζεύγη i, j , ή ισοδύναμα από τη σύγκριση των $U_{i:n_1} - V_{j:n_2}$ με το πηλίκο $(\mu_2 - \mu_1)/\sigma$, αφού $X_{i:n_1} - Y_{j:n_2} = (\sigma U_{i:n_1} + \mu_1) - (\sigma V_{j:n_2} + \mu_2) = \sigma \{U_{i:n_1} - V_{j:n_2} - (\mu_2 - \mu_1)/\sigma\}$. Από την άλλη πλευρά, δεσμεύοντας στη μετάθεση p , έχουμε ότι

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{\sum_{i=1}^{n_1} q_i X_{i:n_1} + \sum_{i=1}^{n_2} r_i Y_{i:n_2}}{\sum_{i=m_1+1}^{n_1} X_{i:n_1} - \sum_{i=1}^{\lfloor n_1/2 \rfloor} X_{i:n_1} + \sum_{i=m_2+1}^{n_2} Y_{i:n_2} - \sum_{i=1}^{\lfloor n_2/2 \rfloor} Y_{i:n_2}} \quad (3.4) \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n_1} q_i (U_{i:n_1} + \mu_1/\sigma) + \sum_{i=1}^{n_2} r_i (V_{i:n_2} + \mu_2/\sigma)}{\sum_{i=m_1+1}^{n_1} U_{i:n_1} - \sum_{i=1}^{\lfloor n_1/2 \rfloor} U_{i:n_1} + \sum_{i=m_2+1}^{n_2} V_{i:n_2} - \sum_{i=1}^{\lfloor n_2/2 \rfloor} V_{i:n_2}}, \end{aligned}$$

όπου q_i, r_i είναι πρόσημα που αντιστοιχούν στη συγκεκριμένη μετάθεση p . Εφ' όσον στον αριθμητή το πλήθος των -1 είναι ίσο με το πλήθος των 1 (δες 3.2) συνεπάγεται ότι $\sum_{i=1}^{n_1} q_i + \sum_{i=1}^{n_2} r_i = 0$. Κατά συνέπεια, ο αριθμητής της T_1 εκφράζεται ως $\sum_{i=1}^{n_1} q_i U_{i:n_1} + \sum_{i=1}^{n_2} r_i V_{i:n_2} +$

3.3. Έλεγχος λόγου πιθανοφανειών

$\sum_{i=1}^{n_1} q_i(\mu_1 - \mu_2)/\sigma$. Αυτό σημαίνει ότι η δεσμευμένη κατανομή της T_1 δοθέντος p εξαρτάται από τις παραμέτρους μόνο μέσω του ξ και αφού το p εξαρτάται και αυτό μόνο από το ξ συμπεραίνουμε ότι η περιθωριακή κατανομή της T_1 εξαρτάται μόνο από το ξ . \square

Η αναλυτική έκφραση για τον υπολογισμό της πιθανότητας $P\left\{\frac{\sum_{i=1}^n s_i(d,p)E_i}{\sum_{i=1}^n t_i(d,p)E_i} > x\right\}$ που εμφανίζεται στο προηγούμενο θεώρημα θα δοθεί στην Ενότητα 3.3.1, ενώ το σύνολο των μεταθέσεων P_{n_1, n_2} καθώς και τα βάρη $w(p)$ αποτελούν αντικείμενο μελέτης της Ενότητας 3.3.2.

Για την καλύτερη κατανόηση όσων είδαμε παραπάνω, ακολουθεί ένα παράδειγμα στο οποίο βρίσκουμε τις ακριβείς μορφές των συνόλων $P_{2,2}, P_{2,3}, P_{3,3}$ και των αντίστοιχων βαρών $w(p)$.

Παράδειγμα 3.1. (α) Αν $n_1 = n_2 = 2$ τότε η T_1 γίνεται

$$T_1 = \frac{Z_{4:4} + Z_{3:4} - Z_{2:4} - Z_{1:4}}{X_{2:2} - X_{1:2} + Y_{2:2} - Y_{1:2}}.$$

Υπενθυμίζουμε ότι η T_1 εκφράζεται μέσω των Z_i ανάλογα με την από κοινού διάταξη των X_i, Y_i , οπότε έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

$$\begin{aligned} \text{Αν } X_{1:2} < X_{2:2} < Y_{1:2} < Y_{2:2} \text{ τότε } T_1 &= \frac{-Z_{1:4} - Z_{2:4} + Z_{3:4} + Z_{4:4}}{-Z_{1:4} + Z_{2:4} - Z_{3:4} + Z_{4:4}}. \\ \text{Αν } X_{1:2} < Y_{1:2} < X_{2:2} < Y_{2:2} \text{ τότε } T_1 &= \frac{-Z_{1:4} - Z_{2:4} + Z_{3:4} + Z_{4:4}}{-Z_{1:4} - Z_{2:4} + Z_{3:4} + Z_{4:4}} = 1. \\ \text{Αν } X_{1:2} < Y_{1:2} < Y_{2:2} < X_{2:2} \text{ τότε } T_1 &= \frac{-Z_{1:4} - Z_{2:4} + Z_{3:4} + Z_{4:4}}{-Z_{1:4} - Z_{2:4} + Z_{3:4} + Z_{4:4}} = 1. \\ \text{Αν } Y_{1:2} < X_{1:2} < Y_{2:2} < X_{2:2} \text{ τότε } T_1 &= \frac{-Z_{1:4} - Z_{2:4} + Z_{3:4} + Z_{4:4}}{-Z_{1:4} - Z_{2:4} + Z_{3:4} + Z_{4:4}} = 1. \\ \text{Αν } Y_{1:2} < Y_{2:2} < X_{1:2} < X_{2:2} \text{ τότε } T_1 &= \frac{-Z_{1:4} - Z_{2:4} + Z_{3:4} + Z_{4:4}}{-Z_{1:4} + Z_{2:4} - Z_{3:4} + Z_{4:4}}. \\ \text{Αν } Y_{1:2} < X_{1:2} < X_{2:2} < Y_{2:2} \text{ τότε } T_1 &= \frac{-Z_{1:4} - Z_{2:4} + Z_{3:4} + Z_{4:4}}{-Z_{1:4} - Z_{2:4} + Z_{3:4} + Z_{4:4}} = 1. \end{aligned}$$

Επομένως, για $n_1 = n_2 = 2$

$$T_1 = \begin{cases} 1, & \text{με πιθανότητα } 4/6, \\ \frac{-Z_{1:4} - Z_{2:4} + Z_{3:4} + Z_{4:4}}{-Z_{1:4} + Z_{2:4} - Z_{3:4} + Z_{4:4}}, & \text{με πιθανότητα } 2/6. \end{cases}$$

Σε αυτό το σημείο σημειώνουμε ότι η T_1 έχει πάντα εξ' ορισμού τον ίδιο αριθμητή, ενώ ο παρονομαστής εξαρτάται κάθε φορά από την από κοινού διάταξη των X_i και Y_i . Συνεπώς, η

$d = 0$	$d = 1$	$d = 2$	$d = 3$	$d = 4$
$\frac{E_2/3+E_3+E_4}{E_2/3+E_4}$	$\frac{E_1+E_2/3+E_3+E_4}{E_1+E_2/3+E_4}$	$\frac{E_1+E_2+E_3+E_4}{E_1+E_4}$	$\frac{E_1+E_2+E_3/3+E_4}{E_1+E_3/3+E_4}$	$\frac{E_1+E_2+E_3/3}{E_1+E_3/3}$

Πίνακας 3.1: Δεσμευμένες κατανομές της T_1 δοθέντος $D = d$ συναρτήσει ανεξάρτητων τυπικών εκθετικών τυχαίων μεταβλητών E_1, E_2, E_3, E_4 όταν $n_1 = n_2 = 2$. Οι δεσμευμένες κατανομές συμπίπτουν για $d = 0, d = 4$ και $d = 1, d = 3$ λόγω συμμετρίας.

κάθε πιθανή μορφή της T_1 προκύπτει από μία συγκεκριμένη διάταξη των $n_1 = 2$ το πλήθος 1 και των $n_2 = 2$ το πλήθος -1 , τα οποία είναι τα πρόσημα των Z_i -διατεταγμένων παρατηρήσεων στον παρονομαστή. Η παραπάνω ανάλυση μας οδηγεί στο να συμπεράνουμε ότι $P_{2,2} = \{(-1, -1, 1, 1), (-1, 1, -1, 1)\}$ με αντίστοιχα βάρη 4, 2.

Έχοντας πλέον την τελική μορφή της στατιστικής συνάρτησης T_1 μπορούμε να δώσουμε μια στοχαστική αναπαράσταση για τη δεσμευμένη κατανομή της δοθέντος $D = d$ και $p = (-1, 1, -1, 1)$ χρησιμοποιώντας τα Λήμματα 2.1, 2.2 και 2.3. Η μορφή των δεσμευμένων κατανομών δίνεται στον Πίνακα 3.1. Για παράδειγμα, όταν $d = 0$ οι συντελεστές των E_i που εμφανίζονται στη σχέση (3.3) είναι $s_1(0, p) = 0, s_2(0, p) = 1/3, s_3(0, p) = s_4(0, p) = 1, t_1(0, p) = t_3(0, p) = 0, t_2(0, p) = 1/3, t_4(0, p) = 1$, ενώ για $d = 2$ έχουμε ότι $s_i(2, p) = 1$ για όλα τα i και $t_1(2, p) = t_4(2, p) = 1, t_2(2, p) = t_3(2, p) = 0$.

(β) Αν $n_1 = 2, n_2 = 3$ τότε η T_1 έχει την μορφή

$$T_1 = \frac{Z_{5:5} + Z_{4:5} - Z_{2:5} - Z_{1:5}}{X_{2:2} - X_{1:2} + Y_{3:3} - Y_{1:3}}.$$

Συνοψίζοντας όλες τις διαφορετικές μορφές της T_1 για κάθε μία από τις $\binom{3+2}{2} = 10$ διαφορετικές διατάξεις των X_i και Y_i προκύπτει ότι

$$T_1 = \begin{cases} 1, & \text{με πιθανότητα } 4/10, \\ \frac{-Z_{1:5} - Z_{2:5} + Z_{4:5} + Z_{5:5}}{-Z_{1:5} - Z_{3:5} + Z_{4:5} + Z_{5:5}}, & \text{με πιθανότητα } 2/10, \\ \frac{-Z_{1:5} - Z_{2:5} + Z_{4:5} + Z_{5:5}}{-Z_{1:5} - Z_{2:5} + Z_{3:5} + Z_{5:5}}, & \text{με πιθανότητα } 2/10, \\ \frac{-Z_{1:5} - Z_{2:5} + Z_{4:5} + Z_{5:5}}{-Z_{1:5} + Z_{2:5} - Z_{3:5} + Z_{5:5}}, & \text{με πιθανότητα } 1/10, \\ \frac{-Z_{1:5} - Z_{2:5} + Z_{4:5} + Z_{5:5}}{-Z_{1:5} + Z_{3:5} - Z_{4:5} + Z_{5:5}}, & \text{με πιθανότητα } 1/10. \end{cases}$$

Σε αυτή την περίπτωση, $P_{2,3} = \{(-1, -1, 0, 1, 1), (-1, 0, -1, 1, 1), (-1, -1, 1, 0, 1), (-1, 1, -1, 0, 1), (-1, 0, 1, -1, 1)\}$ με αντίστοιχα βάρη 4, 2, 2, 1, 1.

3.3. Έλεγχος λόγου πιθανοφανειών

	$d = 0$	$d = 1$	$d = 2$
$T_1 = \frac{-Z_{1:5}-Z_{2:5}+Z_{4:5}+Z_{5:5}}{-Z_{1:5}-Z_{3:5}+Z_{4:5}+Z_{5:5}}$	$\frac{E_2/4+2E_3/3+E_4+E_5}{E_2/4+E_3/3+E_4+E_5}$	$\frac{E_1+E_2/4+2E_3/3+E_4+E_5}{E_1+E_2/4+E_3/3+E_4+E_5}$	$\frac{E_1+E_2+2E_3/3+E_4+E_5}{E_1+E_2/2+E_3/3+E_4+E_5}$
	$d = 3$	$d = 4$	$d = 5$
	$\frac{E_1+E_2+2E_3/3+E_4+E_5}{E_1+E_2/2+2E_3/3+E_4+E_5}$	$\frac{E_1+E_2+2E_3/3+E_4/4+E_5}{E_1+E_2/2+2E_3/3+E_4/4+E_5}$	$\frac{E_1+E_2+2E_3/3+E_4/4}{E_1+E_2/2+2E_3/3+E_4/4}$
	$d = 0$	$d = 1$	$d = 2$
$T_1 = \frac{-Z_{1:5}-Z_{2:5}+Z_{4:5}+Z_{5:5}}{-Z_{1:5}-Z_{2:5}+Z_{3:5}+Z_{5:5}}$	$\frac{E_2/4+2E_3/3+E_4+E_5}{E_2/4+2E_3/3+E_4/2+E_5}$	$\frac{E_1+E_2/4+2E_3/3+E_4+E_5}{E_1+E_2/4+2E_3/3+E_4/2+E_5}$	$\frac{E_1+E_2+2E_3/3+E_4+E_5}{E_1+E_2+2E_3/3+E_4/2+E_5}$
	$d = 3$	$d = 4$	$d = 5$
	$\frac{E_1+E_2+2E_3/3+E_4+E_5}{E_1+E_2+E_3/3+E_4/2+E_5}$	$\frac{E_1+E_2+2E_3/3+E_4/4+E_5}{E_1+E_2+E_3/3+E_4/4+E_5}$	$\frac{E_1+E_2+2E_3/3+E_4/4}{E_1+E_2+E_3/3+E_4/4}$
	$d = 0$	$d = 1$	$d = 2$
$T_1 = \frac{-Z_{1:5}-Z_{2:5}+Z_{4:5}+Z_{5:5}}{-Z_{1:5}+Z_{2:5}-Z_{3:5}+Z_{5:5}}$	$\frac{E_2/4+2E_3/3+E_4+E_5}{E_2/4+E_4/2+E_5}$	$\frac{E_1+E_2/4+E_4/2+E_5}{E_1+E_2/4+E_4/2+E_5}$	$\frac{E_1+E_2+2E_3/3+E_4+E_5}{E_1+E_4/2+E_5}$
	$d = 3$	$d = 4$	$d = 5$
	$\frac{E_1+E_2+2E_3/3+E_4+E_5}{E_1+E_3/3+E_4/2+E_5}$	$\frac{E_1+E_2+2E_3/3+E_4/4+E_5}{E_1+E_3/3+E_4/4+E_5}$	$\frac{E_1+E_2+2E_3/3+E_4/4}{E_1+E_3/3+E_4/4}$
	$d = 0$	$d = 1$	$d = 2$
$T_1 = \frac{-Z_{1:5}-Z_{2:5}+Z_{4:5}+Z_{5:5}}{-Z_{1:5}+Z_{3:5}-Z_{4:5}+Z_{5:5}}$	$\frac{E_2/4+2E_3/3+E_4+E_5}{E_2/4+E_3/3+E_5}$	$\frac{E_1+E_2/4+2E_3/3+E_4+E_5}{E_1+E_2/4+E_3/3+E_5}$	$\frac{E_1+E_2+2E_3/3+E_4+E_5}{E_1+E_2/2+E_3/3+E_5}$
	$d = 3$	$d = 4$	$d = 5$
	$\frac{E_1+E_2+2E_3/3+E_4+E_5}{E_1+E_2/2+E_5}$	$\frac{E_1+E_2+2E_3/3+E_4/4+E_5}{E_1+E_2/2+E_4/4+E_5}$	$\frac{E_1+E_2+2E_3/3+E_4/4}{E_1+E_2/2+E_4/4}$

Πίνακας 3.2: Δεσμευμένες κατανομές της T_1 δοθέντος $D = d$ συναρτήσσει ανεξάρτητων τυπικών εκθετικών τυχαίων μεταβλητών E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 όταν $n_1 = 2, n_2 = 3$.

Έχοντας πλέον την τελική μορφή της στατιστικής συνάρτησης T_1 μπορούμε να δώσουμε μια στοχαστική αναπαράσταση για τη δεσμευμένη κατανομή της δοθέντος $D = d$ και κάθε μετάθεση του συνόλου $P_{2,3}$ χρησιμοποιώντας τα Λήμματα 2.1, 2.2 και 2.3. Η μορφή των δεσμευμένων κατανομών δίνεται στον Πίνακα 3.2.

(γ) Αν $n_1 = n_2 = 3$ τότε η T_1 έχει την μορφή

$$T_1 = \frac{Z_{6:6} + Z_{5:6} + Z_{4:6} - Z_{3:6} - Z_{2:6} - Z_{1:6}}{X_{3:3} - X_{1:3} + Y_{3:3} - Y_{1:3}}.$$

Αν συνοψίσουμε, όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, όλες τις διαφορετικές μορφές της T_1 για κάθε μία από τις $\binom{3+3}{3} = 20$ διαφορετικές διατάξεις των X_i και Y_i προκύπτει ότι

$$T_1 = \begin{cases} \frac{-Z_{1:6} - Z_{2:6} - Z_{3:6} + Z_{4:6} + Z_{5:6} + Z_{6:6}}{-Z_{1:6} - Z_{2:6} + Z_{5:6} + Z_{6:6}}, & \text{με πιθανότητα } 8/20, \\ \frac{-Z_{1:6} - Z_{2:6} - Z_{3:6} + Z_{4:6} + Z_{5:6} + Z_{6:6}}{-Z_{1:6} - Z_{3:6} + Z_{5:6} + Z_{6:6}}, & \text{με πιθανότητα } 4/20, \\ \frac{-Z_{1:6} - Z_{2:6} - Z_{3:6} + Z_{4:6} + Z_{5:6} + Z_{6:6}}{-Z_{1:6} - Z_{2:6} + Z_{4:6} + Z_{6:6}}, & \text{με πιθανότητα } 4/20, \\ \frac{-Z_{1:6} - Z_{2:6} - Z_{3:6} + Z_{4:6} + Z_{5:6} + Z_{6:6}}{-Z_{1:6} + Z_{3:6} - Z_{4:6} + Z_{6:6}}, & \text{με πιθανότητα } 2/20, \\ \frac{-Z_{1:6} - Z_{2:6} - Z_{3:6} + Z_{4:6} + Z_{5:6} + Z_{6:6}}{-Z_{1:6} - Z_{3:6} + Z_{4:6} + Z_{6:6}}, & \text{με πιθανότητα } 2/20. \end{cases}$$

Οπότε, $P_{3,3} = \{(-1, -1, 0, 0, 1, 1), (-1, 0, -1, 0, 1, 1), (-1, -1, 0, 1, 0, 1), (-1, 0, 1, -1, 0, 1), (-1, 0, -1, 1, 0, 1)\}$ με αντίστοιχα βάρη 8, 4, 4, 2, 2.

Έχοντας πλέον την τελική μορφή της στατιστικής συνάρτησης T_1 μπορούμε να δώσουμε μια στοχαστική αναπαράσταση για τη δεσμευμένη κατανομή της δοθέντος $D = d$ και κάθε μετάθεση του συνόλου $P_{3,3}$ χρησιμοποιώντας τα Λήμματα 2.1, 2.2 και 2.3. Η μορφή των δεσμευμένων κατανομών είναι παρόμοια με αυτή των προηγούμενων περιπτώσεων, απλώς λόγω μεγέθους δεν παρατίθεται ο αντίστοιχος πίνακας. \square

Έχοντας στη διάθεσή μας την ακριβή συνάρτηση επιβίωσης της T_1 μπορούμε να υπολογίσουμε ποσοστιαία σημεία, οπότε μπορούμε και να κάνουμε τον έλεγχο σχετικά με την ισότητα ή μη των παραμέτρων θέσης. Ειδικότερα, η υπόθεση της ισότητας των παραμέτρων θέσης απορρίπτεται σε επίπεδο σημαντικότητας α , αν $T_1 > T_{1,\alpha}$, όπου με $T_{1,\alpha}$ συμβολίζουμε το άνω α -ποσοστιαίο σημείο της T_1 , δηλαδή, τη μοναδική λύση της εξίσωσης

$$P_{H_0}(T_1 > x) = \alpha \quad (3.5)$$

ως προς x . Η επίλυση της εξίσωσης αυτής έγινε μέσω του προγράμματος Mathematica 9.0 χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της διχοτόμησης. Επειδή το αριστερό μέλος της (3.5) είναι το άθροισμα πολλών ποσοτήτων (δες Θεώρημα 3.1) επιλέγουμε να λύσουμε την Εξίσωση (3.5) προσεγγίζοντας τη λύση με ρητούς αριθμούς. Αυτό δεν δημιουργεί πρόβλημα δεδομένου του ότι το σύνολο των ρητών είναι πυκνό στο σύνολο των πραγματικών αριθμών \mathbb{R} , οπότε μπορεί κανείς να προσεγγίσει τη λύση με οποιαδήποτε επιθυμητή ακρίβεια. Ο λόγος είναι ότι πολύ συχνά, όταν το x είναι αριθμός κινητής υποδιαστολής, η $P_{H_0}(T_1 > x)$ δεν υπολογίζεται σωστά από τα υπολογιστικά προγράμματα. Τα ποσοστιαία σημεία της στατιστικής συνάρτησης T_1 υπολογίστηκαν με ακρίβεια οκτώ δεκαδικών ψηφίων και παρατίθενται στον Πίνακα 3.3. Συγκεκριμένα ο πίνακας αυτός περιέχει τις τιμές των $T_{1,\alpha}$

για $\alpha = 0.1, 0.05, 0.01$ και $2 \leq n_1, n_2 \leq 20$. Τέλος, σημειώνουμε ότι, λόγω συμμετρίας της κατανομής ως προς n_1, n_2 , το ποσοστιαίο σημείο $T_{1,\alpha}$ παραμένει το ίδιο υπό αμοιβαία εναλλαγή των n_1, n_2 .

Ένας άλλος τρόπος για να κάνουμε έναν έλεγχο είναι μέσω της p-value. Γενικά, αν η μηδενική υπόθεση ενός ελέγχου απορρίπτεται για «μεγάλες» τιμές κάποιας στατιστικής συνάρτησης T , τότε η παρατηρηθείσα p-value είναι

$$\text{p-value} = \sup_{H_0} P(T > t) = P_{H_0}(T > t),$$

όπου t η παρατηρηθείσα τιμή της T . Το supremum της πιθανότητας στην παραπάνω ισότητα είναι ίσο με την ίδια την πιθανότητα επειδή υπό την H_0 η T έχει μοναδική κατανομή. Όπως συνήθως, η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται σε επίπεδο σημαντικότητας α αν $\text{p-value} < \alpha$. Αφού έχουμε στη διάθεσή μας την ακριβή συνάρτηση επιβίωσης της T_1 μπορούμε να υπολογίσουμε την p-value του ΕΛΠ, η οποία ισούται με $P_{\mu_1=\mu_2}(T_1 > t_1)$, όπου t_1 η παρατηρηθείσα τιμή της T_1 .

3.3.1 Βασικά αποτελέσματα για την κατανομή Erlang

Πριν βρούμε την αναλυτική έκφραση της πιθανότητας $P(\sum s_i E_i / \sum t_i E_i > x)$ που εμφανίζεται στην (3.3), θα αναφέρουμε κάποια βασικά αποτελέσματα για την κατανομή Erlang. Ειδικότερα, θα χρειαστούμε την κατανομή του αθροίσματος τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν την κατανομή Erlang (δηλαδή, γάμμα με ακέραιες παραμέτρους σχήματος). Μία έκφραση αυτής της κατανομής δόθηκε από τους Amari and Misra (1997) και αργότερα με έναν διαφορετικό αλλά ισοδύναμο τύπο από τους Jasiulewicz and Kordecki (2003). Το αποτέλεσμα τους παρουσιάζεται στο Λήμμα 3.1. Στη συνέχεια θα συμβολίζουμε με $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$ την κατανομή Erlang με παράμετρο σχήματος $\alpha \in \{1, 2, \dots\}$ και παράμετρο ρυθμού $\beta > 0$ και με $g(\cdot; \alpha, \beta)$ και $\bar{G}(\cdot; \alpha, \beta)$ θα συμβολίζουμε τη συνάρτηση πυκνότητας και την συνάρτηση επιβίωσης, αντίστοιχα. Υπενθυμίζουμε ότι

$$\bar{G}(x; \alpha, \beta) = \sum_{i=0}^{\alpha-1} e^{-x\beta} \frac{(x\beta)^i}{i!}, \quad x > 0.$$

Λήμμα 3.1. (Amari and Misra, 1997) Έστω $V_a \sim \mathcal{G}(\gamma_a, \lambda_a)$, $a = 1, \dots, p$, $p \geq 2$, ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με διαφορετικές μεταξύ τους παραμέτρους ρυθμού. Τότε, για $x > 0$ έχουμε

$$P\left\{ \sum_{a=1}^p V_a > x \right\} = \sum_{a=1}^p \sum_{j=1}^{\gamma_a} \psi_{j,a}(\gamma, \lambda) \bar{G}(x; j, \lambda_a),$$

όπου $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_p)$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ και

$$\psi_{j,a}(\gamma, \lambda) = (-\lambda_a)^{\gamma_a - j} \sum_{\substack{\sum_{i=1}^p v_i = \gamma_a - j \\ v_a = 0}} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq a}}^p \binom{\gamma_i + v_i - 1}{v_i} \frac{\lambda_i^{\gamma_i}}{(\lambda_i - \lambda_a)^{\gamma_i + v_i}} \quad (3.6)$$

όπου η άθροιση να γίνεται για όλα τα διανύσματα (v_1, \dots, v_p) με στοιχεία μη αρνητικούς ακεραίους τέτοιους ώστε $\sum_{i=1}^p v_i = \gamma_a - j$ και $v_a = 0$.

Σημειώνουμε ότι η παραπάνω έκφραση ισχύει και για $p = 1$ αν ορίσουμε

$$\psi_{j,1}((\gamma_1), (\lambda_1)) = \begin{cases} 0, & \text{αν } j < \gamma_1, \\ 1, & \text{αν } j = \gamma_1. \end{cases}$$

Πρόταση 3.1. Έστω $E_1, \dots, E_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{E}(1)$, $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{R}$, $t_1, \dots, t_n \geq 0$ με $\sum t_i > 0$ και $\xi \in \mathbb{R}$. Για $x \in \mathbb{R}$ θέτουμε $\tau_i = s_i - xt_i$, $i = 1, \dots, n$. Έστω p και q το πλήθος των διακεκομμένων θετικών και αρνητικών τ_i , αντίστοιχα, και (λ_a, γ_a) , $a = 1, \dots, p$, $(-\mu_b, \delta_b)$, $b = 1, \dots, q$, οι αντίστροφοί τους με τις αντίστοιχες συχνότητές τους. Τότε,

$$\mathbb{P}\left\{\frac{\sum_{i=1}^n s_i E_i - \xi}{\sum_{i=1}^n t_i E_i} > x\right\} = \sum_{a=1}^p \sum_{b=1}^q \sum_{j=1}^{\gamma_a} \sum_{k=1}^{\delta_b} \psi_{j,a}(\gamma, \lambda) \psi_{k,b}(\delta, \mu) \Phi_{j,k}(\lambda_a, \mu_b, \xi),$$

όπου $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_p)$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$, $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_q)$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_q)$,

$$\Phi_{j,k}(\lambda_a, \mu_b, \xi) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{j-1} \binom{i+k-1}{i} \frac{\lambda_a^i \mu_b^k}{(\lambda_a + \mu_b)^{i+k}} \sum_{\ell=0}^{j-i-1} e^{-\xi \lambda_a} \frac{(\xi \lambda_a)^\ell}{\ell!}, & \xi \geq 0, \\ 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \binom{i+j-1}{i} \frac{\lambda_a^j \mu_b^i}{(\lambda_a + \mu_b)^{j+i}} \sum_{\ell=0}^{k-i-1} e^{\xi \mu_b} \frac{(-\xi \mu_b)^\ell}{\ell!}, & \xi < 0. \end{cases}$$

και τα $\psi_{j,a}$, $\psi_{k,b}$ δίνονται στην (3.6).

Απόδειξη. Για $\xi \geq 0$ έχουμε

$$\mathbb{P}\left\{\frac{\sum_{i=1}^n s_i E_i - \xi}{\sum_{i=1}^n t_i E_i} > x\right\} = \mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^n (s_i - xt_i) E_i > \xi\right\} = \mathbb{P}\left\{\sum_{a=1}^p V_a > \sum_{b=1}^q W_b + \xi\right\}, \quad (3.7)$$

όπου $V_a \sim \mathcal{G}(\gamma_a, \lambda_a)$, $a = 1, \dots, p$, $W_b \sim \mathcal{G}(\delta_b, \mu_b)$, $b = 1, \dots, q$, είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με κατανομή Erlang. Συνεπώς, από το Λήμμα 3.1 προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left\{\frac{\sum_{i=1}^n s_i E_i - \xi}{\sum_{i=1}^n t_i E_i} > x\right\} &= \int \bar{F}_{\sum V_a}(w + \xi) f_{\sum W_b}(w) dw \\ &= \sum_{a=1}^p \sum_{b=1}^q \sum_{j=1}^{\gamma_a} \sum_{k=1}^{\delta_b} \psi_{j,a}(\gamma, \lambda) \psi_{k,b}(\delta, \mu) \int_0^\infty \bar{G}(w + \xi; j; \lambda_a) g(w; k; \mu_b) dw. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Όμως,

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \bar{G}(w + \xi; j; \lambda_a) g(w; k; \mu_b) dw &= \int_0^\infty \sum_{\ell=0}^{j-1} e^{-(w+\xi)\lambda_a} \frac{\{(w+\xi)\lambda_a\}^\ell}{\ell!} \frac{\mu_b^k w^{k-1} e^{-w\mu_b}}{(k-1)!} dw \\
 &= \sum_{\ell=0}^{j-1} \frac{e^{-\xi\lambda_a} \lambda_a^\ell \mu_b^k}{\ell!(k-1)!} \sum_{i=0}^{\ell} \binom{\ell}{i} \xi^{\ell-i} \int_0^\infty w^{i+k-1} e^{-(\lambda_a+\mu_b)w} dw = \\
 &= \sum_{\ell=0}^{j-1} \sum_{i=0}^{\ell} \binom{i+k-1}{i} \frac{e^{-\xi\lambda_a} \lambda_a^i \mu_b^k}{(\lambda_a + \mu_b)^{i+k}} \frac{(\xi\lambda_a)^{\ell-i}}{(\ell-i)!} \\
 &= \sum_{i=0}^{j-1} \binom{i+k-1}{i} \frac{\lambda_a^i \mu_b^k}{(\lambda_a + \mu_b)^{i+k}} \sum_{\ell=i}^{j-1} e^{-\xi\lambda_a} \frac{(\xi\lambda_a)^{\ell-i}}{(\ell-i)!} \\
 &= \sum_{i=0}^{j-1} \binom{i+k-1}{i} \frac{\lambda_a^i \mu_b^k}{(\lambda_a + \mu_b)^{i+k}} \sum_{\ell=0}^{j-i-1} e^{-\xi\lambda_a} \frac{(\xi\lambda_a)^\ell}{\ell!} \\
 &= \Phi_{j,k}(\lambda_a, \mu_b, \xi),
 \end{aligned}$$

και αντικαθιστώντας στην (3.8) προκύπτει το αποτέλεσμα.

Για $\xi < 0$ έχουμε

$$\mathbb{P}\left\{\frac{\sum_{i=1}^n s_i E_i - \xi}{\sum_{i=1}^n t_i E_i} > x\right\} = \mathbb{P}\left\{\sum_{a=1}^p V_a > \sum_{b=1}^q W_b + \xi\right\} = 1 - \mathbb{P}\left\{\sum_{b=1}^q W_b > \sum_{a=1}^p V_a - \xi\right\}$$

οπότε χρησιμοποιούμε το προηγούμενο αποτέλεσμα εναλλάσσοντας τους ρόλους των V_a και W_b . \square

3.3.2 Το σύνολο P_{n_1, n_2} και τα βάρη $w(p)$

Υπενθυμίζουμε ότι το σύνολο P_{n_1, n_2} περιέχει όλες τις μεταθέσεις $p = (p_1, \dots, p_n)$ οι οποίες αναπαριστούν τα πιθανά πρόσημα των $X_{i:n_1}$ και $Y_{i:n_2}$ στην έκφραση

$$\sum_{i=1}^n p_i Z_{i:n} = \sum_{i=m_1+1}^{n_1} X_{i:n_1} - \sum_{i=1}^{\lfloor n_1/2 \rfloor} X_{i:n_1} + \sum_{i=m_2+1}^{n_2} Y_{i:n_2} - \sum_{i=1}^{\lfloor n_2/2 \rfloor} Y_{i:n_2}. \quad (3.9)$$

Για κάθε μετάθεση ενός διανύσματος προσήμων, δηλαδή ενός διανύσματος που αποτελείται από 1, -1 και (ενδεχομένως) 0, έστω k_1, k_2, ℓ_1, ℓ_2 οι θέσεις του πρώτου 1, του τελευταίου -1 και του πρώτου και του τελευταίου 0, αντίστοιχα. Στην περίπτωση που υπάρχει μόνο ένα 0 θέτουμε $\ell_1 = \ell_2 =: \ell_0$.

(α) Έστω $n_1 = 2m_1, n_2 = 2m_2$ με $m_1 \leq m_2$ και $m = m_1 + m_2$. Σε αυτήν την περίπτωση, το σύνολο P_{n_1, n_2} περιέχει τις μεταθέσεις των $(1_m, -1_m)$ για τα οποία ισχύει $k_1 > m_1$ και

$k_2 \leq n - m_1$. Επί πλέον, οι ανισότητες $k_1 \leq m_2$ και $k_2 > n - m_2$ δε μπορούν να ισχύουν ταυτόχρονα. Για να καταλάβουμε γιατί, ας παρατηρήσουμε ότι σε αυτήν την περίπτωση στο δεξί μέλος της (3.9) εμφανίζονται όλα τα X_i και Y_i , συνεπώς δεν υπάρχει 0 στα πρόσημα των $Z_{1:n}, \dots, Z_{n:n}$. Είναι σαφές ότι αν $p \in P_{n_1, n_2}$ τότε, δεδομένου του ότι τα πρώτα m_1 στοιχεία του p πρέπει να είναι όλα -1 και τα τελευταία m_1 στοιχεία του p πρέπει να είναι όλα 1 , θα πρέπει να ισχύει ότι $m_1 < k_1$ και $k_2 \leq n - m_1$. Αυτό συνεπάγεται ότι οι n_2 κεντρικές θέσεις που απομένουν πρέπει να συμπληρωθούν με m_2 το πλήθος 1 και m_2 το πλήθος -1 , κάτι που μπορεί να γίνει με $\binom{n_2}{m_2}$ διαφορετικούς τρόπους. Αν $m_1 = m_2$, τότε οι τρόποι με τους οποίους συμπληρώνονται οι n_2 κεντρικές θέσεις παραμένουν $\binom{n_2}{m_2}$. Αν $m_1 < m_2$ θα πρέπει να εξαιρεθούν κάποιες περιπτώσεις. Συγκεκριμένα, δε μπορεί να ισχύει ταυτόχρονα $k_1 \leq m_2$ και $k_2 > n - m_2$: Αν $k_1 \leq m_2$ τότε τα $k_1 - 1$ το πλήθος -1 που προηγούνται του πρώτου 1 θα πρέπει οπωσδήποτε να περιλαμβάνουν τα m_1 το πλήθος -1 των X_i και αυτό σημαίνει ότι το τελευταίο -1 προέρχεται από τα Y_i , συνεπώς πρέπει να προηγείται των m_2 το πλήθος 1 των Y_i . Τέλος, αφού ο αριθμός των μεταθέσεων που έχει το πρώτο 1 στη θέση k_1 και το τελευταίο -1 στη θέση k_2 είναι $\binom{k_2 - k_1 - 1}{m_2 - k_1}$, συμπεραίνουμε ότι το πλήθος των στοιχείων του συνόλου P_{n_1, n_2} είναι

$$\binom{n_2}{m_2} - \sum_{k_1=m_1+1}^{m_2} \sum_{k_2=n-m_2+1}^{n-m_1} \binom{k_2 - k_1 - 1}{m_2 - k_1} = \binom{n_2}{m_2} - \sum_{i=1}^{m_2-m_1} \sum_{j=1}^{m_2-m_1} \binom{n_2 - i - j}{m_2 - i}.$$

Το πλήθος των διαφορετικών από κοινού διατάξεων των X_i και Y_i που αντιστοιχούν στη μετάθεση p είναι

$$w(p) = \begin{cases} \binom{m}{m_1}^2, & \text{αν } k_1 = m + 1 \text{ (οπότε } k_2 = m) \\ \binom{k_1-1}{m_1} \binom{n-k_2}{m_2} + \binom{k_1-1}{m_2} \binom{n-k_2}{m_1}, & \text{αν } k_1 \leq m \text{ (οπότε } k_2 > m). \end{cases}$$

Για να το κατανοήσουμε πρέπει αρχικά να παρατηρήσουμε πως αν $k_1 = m + 1$ τότε $k_2 = m$ και αντίστροφα. Αυτό αντιστοιχεί μόνο στη μετάθεση $(-1_m, 1_m)$. Οι τρόποι με τους οποίους μπορούν να εμφανιστούν τα m_1 το πλήθος -1 των X_i στο διάνυσμα -1_m είναι $\binom{m}{m_1}$. Όμοια και οι τρόποι για τα Y_i . Στην περίπτωση που $k_1 \leq m$ έχουμε $k_2 > m$ και υπάρχουν τα εξής δύο ενδεχόμενα. Τα $k_1 - 1$ το πλήθος -1 που προηγούνται του πρώτου 1 περιλαμβάνουν όλα τα m_1 το πλήθος -1 που αντιστοιχούν στα X_i ή όλα τα m_2 το πλήθος -1 αντιστοιχούν στα Y_i . Η πρώτη περίπτωση συνεπάγεται ότι τα $n - k_2$ το πλήθος 1 που έπονται του τελευταίου -1 περιλαμβάνουν όλα τα m_2 το πλήθος 1 που αντιστοιχούν στα Y_i , ενώ η δεύτερη ότι περιλαμβάνουν όλα τα m_1 το πλήθος 1 που αντιστοιχούν στα X_i .

Παράδειγμα 3.2. Για να δούμε γιατί δε μπορούν να ισχύουν ταυτόχρονα οι ανισότητες $k_1 \leq m_2$ και $k_2 > n - m_2$ ας πάρουμε για παράδειγμα την περίπτωση όπου $n_1 = 6$ και $n_2 = 14$ επομένως $m_1 = 3$, $m_2 = 7$ και $n = 20$. Δεν γίνεται να ισχύει ταυτόχρονα $k_1 \leq 7$ και $k_2 > 13$. Έστω $k_1 = 5$ η θέση του πρώτου 1. Τότε, το πρώτο 1 προέρχεται υποχρεωτικά από τα X_i και επομένως θα προηγούνται 3 το πλήθος -1 τα οποία αντιστοιχούν στα X_i και ένα -1 το οποίο αντιστοιχεί στα Y_i . Άρα το τελευταίο -1 αντιστοιχεί σίγουρα σε Y_i (δεδομένου του ότι τα -1 που προέρχονται από X_i έχουν εξαντληθεί) και πρέπει να έπονται αυτού όλα τα 1 που προέρχονται από τα Y_i .

(β) Έστω $n_1 = 2m_1 - 1$, $n_2 = 2m_2 - 1$ με $m_1 \leq m_2$ και $m = m_1 + m_2 - 1$. Σε αυτή την περίπτωση, το σύνολο P_{n_1, n_2} περιέχει τις μεταθέσεις των $(1_{m-1}, -1_{m-1}, 0_2)$ για τα οποία ισχύει $m_1 \leq \ell_1 \leq m$, $m < \ell_2 \leq n - m_1 + 1$. Επί πλέον, οι ανισότητες $\ell_1 < m_2$ και $\ell_2 > n - m_2 + 1$ δε μπορούν να ισχύουν ταυτόχρονα. Για να καταλάβουμε γιατί ας παρατηρήσουμε ότι σε αυτή την περίπτωση στο δεξί μέλος της (3.9) δεν εμφανίζονται οι διάμεσοι των X_i και Y_i , συνεπώς υπάρχουν δύο 0 ανάμεσα στα πρόσημα των $Z_{1:n}, \dots, Z_{n:n}$, εκ των οποίων το ένα αντιστοιχεί στα X_i και το άλλο στα Y_i . Είναι σαφές ότι αριστερά του 0 το οποίο αντιστοιχεί στα X_i , πρέπει να βρίσκονται τουλάχιστον $m_1 - 1$ το πλήθος -1 και δεξιά του τουλάχιστον $m_1 - 1$ το πλήθος 1. Αντίστοιχα, αριστερά του 0 το οποίο αντιστοιχεί στα Y_i , πρέπει να βρίσκονται τουλάχιστον $m_2 - 1$ το πλήθος -1 και δεξιά του τουλάχιστον $m_2 - 1$ το πλήθος 1. Αυτό συνεπάγεται ότι το πρώτο 0 βρίσκεται στις m πρώτες θέσεις και ότι το δεύτερο 0 βρίσκεται στις m τελευταίες θέσεις. Συνεπώς $\ell_1 \geq m_1$ και $\ell_2 \leq n - m_1 + 1$ (αφού $m_1 \leq m_2$) και $\ell_1 \leq m < \ell_2$. Επί πλέον, όλα τα πρόσημα που προηγούνται του πρώτου 0 είναι -1 ενώ όλα τα πρόσημα που έπονται του δεύτερου 0 είναι 1. Κατά συνέπεια, το πλήθος των μεταθέσεων που έχουν τα δύο 0 στις θέσεις ℓ_1, ℓ_2 είναι $\binom{\ell_2 - \ell_1 - 1}{m - \ell_1}$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν $\sum_{\ell_1=m_1}^m \sum_{\ell_2=m+1}^{n-m_1+1} \binom{\ell_2 - \ell_1 - 1}{m - \ell_1}$ μεταθέσεις οι οποίες ικανοποιούν τις παραπάνω συνθήκες. Ωστόσο, αν το πρώτο 0 βρίσκεται μεταξύ των θέσεων m_1 και m_2 τότε απαραίτητα αντιστοιχεί στα X_i κι έτσι το δεύτερο 0 πρέπει να έχει στα δεξιά του τουλάχιστον $m_2 - 1$ το πλήθος 1. Αυτό συνεπάγεται ότι δεν γίνεται να ισχύει ταυτόχρονα $\ell_1 < m_2$ και $\ell_2 > n - m_2 + 1$. Αυτός ο περιορισμός μας οδηγεί στο να εξαιρέσουμε $\sum_{\ell_1=m_1}^{m_2-1} \sum_{\ell_2=n-m_2+2}^{n-m_1+1} \binom{\ell_2 - \ell_1 - 1}{m - \ell_1}$ το πλήθος μεταθέσεις. Συνοψίζοντας, το πλήθος των μεταθέσεων του συνόλου P_{n_1, n_2} είναι

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell_1=m_1}^m \sum_{\ell_2=m+1}^{n-m_1+1} \binom{\ell_2 - \ell_1 - 1}{m - \ell_1} - \sum_{\ell_1=m_1}^{m_2-1} \sum_{\ell_2=n-m_2+2}^{n-m_1+1} \binom{\ell_2 - \ell_1 - 1}{m - \ell_1} \\ &= \sum_{i=1}^{m_2} \sum_{j=1}^{m_2} \binom{n_2 + 1 - i - j}{m_2 - i} - \sum_{i=1}^{m_2-m_1} \sum_{j=1}^{m_2-m_1} \binom{n_2 + 1 - i - j}{m_2 - i}. \end{aligned}$$

Το πλήθος των διαφορετικών από κοινού διατάξεων των X_i και Y_i που αντιστοιχούν στη μετάθεση p είναι

$$w(p) = \begin{cases} \binom{m-1}{m_1-1}^2, & \text{αν } \ell_1 = m \text{ και } \ell_2 = m + 1 \\ \binom{\ell_1-1}{m_1-1} \binom{n-\ell_2}{m_2-1} + \binom{\ell_1-1}{m_2-1} \binom{n-\ell_2}{m_1-1}, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Για να το κατανοήσουμε πρέπει αρχικά να παρατηρήσουμε πως η περίπτωση $\ell_1 = m$ και $\ell_2 = m + 1$ αντιστοιχεί μόνο στη μετάθεση $(-1_{m-1}, 1_{m-1})$. Οι τρόποι με τους οποίους μπορούν να εμφανιστούν τα $m_1 - 1$ το πλήθος -1 των X_i στο διάνυσμα -1_{m-1} είναι $\binom{m-1}{m_1-1}$. Όμοια και οι τρόποι για τα Y_i . Σε κάθε άλλη περίπτωση, αν τα $\ell_1 - 1$ το πλήθος -1 που προηγούνται του πρώτου 0 περιλαμβάνουν όλα τα $m_1 - 1$ το πλήθος -1 που αντιστοιχούν στα X_i τότε τα $n - \ell_2$ το πλήθος 1 που έπονται του δεύτερου 0 περιλαμβάνουν όλα τα $m_2 - 1$ το πλήθος 1 που αντιστοιχούν στα Y_i . Αν από την άλλη πλευρά τα $\ell_1 - 1$ το πλήθος -1 που προηγούνται του πρώτου μηδέν περιλαμβάνουν όλα τα $m_2 - 1$ το πλήθος -1 που αντιστοιχούν στα Y_i τότε τα $n - \ell_2$ το πλήθος 1 που έπονται του δεύτερου 0 περιλαμβάνουν όλα τα $m_1 - 1$ το πλήθος 1 που αντιστοιχούν στα X_i .

(γ) Έστω $n_1 = 2m_1, n_2 = 2m_2 - 1$ και $m = m_1 + m_2 - 1$. Σε αυτή την περίπτωση, το σύνολο P_{n_1, n_2} περιέχει τις μεταθέσεις των $(1_m, -1_m, 0)$ οι οποίες εμπίπτουν σε μία από τις τρεις περιπτώσεις:

- (i) $\ell_0 = m + 1, k_1 = m + 2, k_2 = m$
- (ii) $m_2 \leq \ell_0 < m + 1, \ell_0 < k_1 \leq m + 2, m \leq k_2 \leq n - m_1$
- (iii) $m + 1 < \ell_0 \leq n - m_2 + 1, m_1 < k_1 \leq m + 2, m \leq k_2 < \ell_0$.

Για να καταλάβουμε γιατί ας παρατηρήσουμε ότι σε αυτή την περίπτωση στο δεξί μέλος της (3.9) δεν εμφανίζεται η διάμεσος των Y_i ενώ εμφανίζονται όλα τα X_i έχοντας ως αποτέλεσμα να υπάρχει ακριβώς ένα 0 ανάμεσα στα πρόσημα των $Z_{1:n}, \dots, Z_{n:n}$ το οποίο αντιστοιχεί στα Y_i . Είναι σαφές ότι αριστερά του 0 πρέπει να βρίσκονται τουλάχιστον $m_2 - 1$ το πλήθος -1 και δεξιά του τουλάχιστον $m_2 - 1$ το πλήθος 1 και αυτό συνεπάγεται ότι $m_2 \leq \ell_0 \leq n - m_2 + 1$. Όσον αφορά στο πρώτο 1, αν αυτό αντιστοιχεί στα X_i τότε θα πρέπει να βρίσκονται στα αριστερά του τουλάχιστον m_1 το πλήθος -1 ενώ αν αυτό αντιστοιχεί στα Y_i θα πρέπει να βρίσκονται στα αριστερά του τουλάχιστον $m_2 - 1$ το πλήθος -1 και το 0, κάτι που σημαίνει ότι $k_1 > \min\{m_1, m_2\}$. Από την άλλη πλευρά, αφού υπάρχουν ακριβώς $m_1 + m_2 - 1 = m$ το πλήθος 1, η μεγαλύτερη πιθανή θέση του πρώτου 1 είναι η $n - m + 1 = m + 2$. Λόγω συμμετρίας, το τελευταίο -1 μπορεί να εμφανιστεί μεταξύ των θέσεων m και $n - \min\{m_1, m_2\}$. Στην περίπτωση (i) μπορούμε εύκολα να παρατηρήσουμε πως

όταν $\ell_0 = m + 1$ τότε το 0 βρίσκεται στην κεντρική θέση του διανύσματος των μεταθέσεων ενώ όλα τα -1 πρέπει να βρίσκονται στα αριστερά του και όλα τα 1 στα δεξιά του. Στην περίπτωση (ii) όπου $\ell_0 < m + 1$, το 0 δεν μπορεί να έχει στα αριστερά του 1 ενώ το τελευταίο -1 αντιστοιχεί οπωσδήποτε στα X_i , συνεπώς $k_1 > \ell_0$ και $k_2 \leq n - m_1$. Τέλος, το αποτέλεσμα ισχύει και για την περίπτωση (iii) λόγω συμμετρίας με την (ii). Προκειμένου να μετρήσουμε το πλήθος των μεταθέσεων που αντιστοιχούν στην περίπτωση (ii), σημειώνουμε ότι εφ' όσον πριν το 0 υπάρχουν μόνο -1 και οι τελευταίες m_1 θέσεις έχουν μόνο 1 , υπάρχουν $n - \ell_0 - m_1 = n_2 + m_1 - \ell_0$ θέσεις αριστερά για να συμπληρωθούν με τα υπόλοιπα $m_2 - 1$ το πλήθος 1 . Αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{n_2 + m_1 - \ell_0}{m_2 - 1}$ τρόπους κάτι που συνεπάγεται ότι ο αριθμός των μεταθέσεων $p \in P_{n_1, n_2}$ για τις οποίες $\ell_0 < m + 1$ είναι ίσος με

$$\sum_{\ell_0=m_2}^m \binom{n_2 + m_1 - \ell_0}{m_2 - 1} = \sum_{i=m_2-m_1}^{m_2-1} \binom{n_2 - i}{m_2 - 1}.$$

Αυτός είναι και ο αριθμός των μεταθέσεων p που αντιστοιχούν στην περίπτωση (iii) λόγω συμμετρίας με τη (ii). Λαμβάνοντας υπ' όψιν τη μοναδική μετάθεση p για την οποία ισχύει $\ell_0 = m + 1$, συνοψίζουμε ότι το πλήθος των μεταθέσεων p του συνόλου P_{n_1, n_2} είναι

$$1 + 2 \sum_{i=m_2-m_1}^{m_2-1} \binom{n_2 - i}{m_2 - 1}.$$

Το πλήθος των διαφορετικών από κοινού διατάξεων των X_i και Y_i που αντιστοιχούν στη μετάθεση p είναι

$$w(p) = \begin{cases} \binom{m_1+m_2-1}{m_2-1}^2, & \text{αν } \ell_0 = m + 1, \\ \binom{\ell_0-1}{m_2-1} \binom{n-k_2}{m_1}, & \text{αν } \ell_0 < m + 1, \\ \binom{k_1-1}{m_1} \binom{n-\ell_0}{m_2-1}, & \text{αν } \ell_0 > m + 1. \end{cases}$$

Για να το κατανοήσουμε πρέπει αρχικά να παρατηρήσουμε πως αν $\ell_0 = m + 1$ αυτό αντιστοιχεί μόνο στη μετάθεση $(-1_m, 1_m, 0)$. Οι τρόποι με τους οποίους μπορούν να εμφανιστούν τα $m_2 - 1$ το πλήθος -1 των Y_i στο διάνυσμα -1_m είναι $\binom{m_1+m_2-1}{m_2-1}$. Όμοια και οι τρόποι για τα X_i . Στην περίπτωση που $\ell_0 < m + 1$ τότε τα $\ell_0 - 1$ το πλήθος -1 που προηγούνται του μηδενός περιλαμβάνουν όλα τα $m_2 - 1$ το πλήθος -1 που αντιστοιχούν στα Y_i και τα $n - k_2$ το πλήθος 1 που έπονται του τελευταίου -1 περιλαμβάνουν όλα τα m_1 το πλήθος 1 που αντιστοιχούν στα X_i . Τέλος, στην περίπτωση που $\ell_0 > m + 1$, τα $n - \ell_0$ το πλήθος 1 που έπονται του τελευταίου -1 περιλαμβάνουν όλα τα $m_2 - 1$ το πλήθος 1 που αντιστοιχούν στα Y_i και τα $k_1 - 1$ το πλήθος -1 περιλαμβάνουν όλα τα m_1 το πλήθος -1 που αντιστοιχούν στα X_i .

3.4 Έλεγχοι που βασίζονται στην διαφορά των BLUE

Σε αυτήν την ενότητα θεωρούμε μία άλλη κλάση ελέγχων οι οποίοι βασίζονται στη διαφορά των BLUE των μ_1, μ_2 . Έστω $\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2$ οι BLUE των μ_1, μ_2 αντίστοιχα και $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2$ οι BLUE του σ οι οποίοι βασίζονται στα δείγματα X και Y , αντίστοιχα. Οι στατιστικές συναρτήσεις στις οποίες θα βασιστούμε είναι οι

$$T_2 := \frac{\tilde{\mu}_1 - \tilde{\mu}_2}{\tilde{\sigma}} \quad \text{και} \quad T_3 := \frac{\tilde{\mu}_1 - \tilde{\mu}_2}{\tilde{\sigma}_p}, \quad (3.10)$$

όπου

$$\tilde{\sigma} = (n_1\tilde{\sigma}_1 + n_2\tilde{\sigma}_2)/n \quad \text{και} \quad \tilde{\sigma}_p = c_1^*\tilde{\sigma}_1 + c_2^*\tilde{\sigma}_2,$$

με $c_j^* = \nu'_{n_j} \Sigma_{n_j}^{-1} \nu_{n_j} / (\nu'_{n_1} \Sigma_{n_1}^{-1} \nu_{n_1} + \nu'_{n_2} \Sigma_{n_2}^{-1} \nu_{n_2})$, $j = 1, 2$. Ο $\tilde{\sigma}$ είναι ένας απλοϊκός σταθμισμένος μέσος των BLUE ενώ ο $\tilde{\sigma}_p$ είναι ο συνδυασμένος BLUE του σ (δες Nelson, 1982, σελ.509). Σε αυτό το σημείο σημειώνουμε ότι για $n_1 = n_2$, οι $\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}_p$ συμπίπτουν και κατ' επέκταση συμπίπτουν και οι στατιστικές συναρτήσεις T_2 και T_3 . Παρατηρώντας τις T_2, T_3 καθίσταται σαφές ότι οι κατανομές τους δεν εξαρτώνται από τις παραμέτρους υπό την μηδενική υπόθεση. Εφ' όσον και η στατιστική συνάρτηση T_2 αλλά και η T_3 είναι λόγοι γραμμικών συνδυασμών διατεταγμένων παρατηρήσεων από την κατανομή Laplace, μπορούμε να υπολογίσουμε αναλυτικά τις κατανομές τους οπότε συνεχίζουμε διατυπώνοντας το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 3.2. (α) Υπό την $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ η ουρά της ακριβούς κατανομής των στατιστικών συναρτήσεων T_2 και T_3 που ορίστηκαν στην (3.10) μπορεί να εκφραστεί ως εξής

$$P(T_j > x) = \frac{1}{2^n} \sum_{d_1=0}^{n_1} \sum_{d_2=0}^{n_2} \binom{n_1}{d_1} \binom{n_2}{d_2} P \left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n_1} s_i(d_1)E_i - \sum_{i=n_1+1}^n s_i(d_2)E_i}{\sum_{i=1}^{n_1} t_i^{(j)}(d_1)E_i + \sum_{i=n_1+1}^n t_i^{(j)}(d_2)E_i} > x \right\}, \quad j = 2, 3, \quad (3.11)$$

όπου E_i , $i = 1, \dots, n$, είναι ανεξάρτητες τυπικές εκθετικές τυχαίες μεταβλητές και $s_i \in \mathbb{Q}$, $t_i^{(j)} \in \mathbb{Q}_+$, είναι σταθερές που εξαρτώνται από τα d_1, d_2 .

(β) Υπό την $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$, η κατανομή των T_2 και T_3 εξαρτάται από τις άγνωστες παραμέτρους μόνο μέσω του $\xi = (\mu_1 - \mu_2)/\sigma$.

Απόδειξη. (α) Υπό την μηδενική υπόθεση και χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Στη συνέχεια θεωρούμε τις τυχαίες μεταβλητές $D_1 =$ το πλήθος των παρατηρήσεων $\{X_i \leq 0\}$, $D_2 =$ το πλήθος των παρατηρήσεων $\{Y_i \leq 0\}$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.3 και για τα δύο δείγματα X και Y καθώς και την ανεξαρτησία τους προκύπτει ότι

δεσμεύοντας στο ενδεχόμενο $D_1 = d_1, D_2 = d_2$ οι κατανομές των εκτιμητών έχουν ως εξής :

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}_1 &\stackrel{d}{=} \sigma \sum_{i=1}^{n_1} s_i(d_1)E_i, & \tilde{\mu}_2 &\stackrel{d}{=} \sigma \sum_{i=1}^{n_2} s_{n_1+i}(d_2)E_{n_1+i}, \\ \tilde{\sigma}_1 &\stackrel{d}{=} \sigma \sum_{i=1}^{n_1} t_i^{(j)}(d_1)E_i, & \tilde{\sigma}_2 &\stackrel{d}{=} \sigma \sum_{i=1}^{n_2} t_{n_1+i}^{(j)}(d_2)E_{n_1+i},\end{aligned}$$

όπου $E_1, \dots, E_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{E}(1)$ και $s_i \in \mathbb{Q}, t_i^{(j)} \in \mathbb{Q}_+, i = 1, \dots, n$. Τέλος, αφού $P(D_1 = d_1, D_2 = d_2) = 2^{-n} \binom{n_1}{d_1} \binom{n_2}{d_2}, d_1 = 0, \dots, n_1, d_2 = 0, \dots, n_2$, προκύπτει η τελική μορφή της ουράς.

(β) Έστω $\mu_1 \neq \mu_2$. Τότε, η δεξιά ουρά της ακριβούς κατανομής της T_j εκφράζεται ως $P(T_j > x) = \frac{1}{2^n} \sum_{d_1=0}^{n_1} \sum_{d_2=0}^{n_2} \binom{n_1}{d_1} \binom{n_2}{d_2} P(T_j > x | d_1, d_2)$. Ας θεωρήσουμε τις τυχαίες μεταβλητές U_i, V_i όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.1. Δεσμεύοντας στο ενδεχόμενο $D_1 = d_1, D_2 = d_2$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}T_j &= \frac{\sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i X_{i:n_1} - \sum_{i=1}^{n_2} \gamma_i Y_{i:n_2}}{c_1 \sum_{i=1}^{n_1} \beta_i X_{i:n_1} + c_2 \sum_{i=1}^{n_2} \delta_i Y_{i:n_2}} & (3.12) \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i (U_{i:n_1} + \mu_1/\sigma) - \sum_{i=1}^{n_2} \gamma_i (V_{i:n_2} + \mu_2/\sigma)}{c_1 \sum_{i=1}^{n_1} \beta_i (U_{i:n_1} + \mu_1/\sigma) + c_2 \sum_{i=1}^{n_2} \delta_i (V_{i:n_2} + \mu_2/\sigma)},\end{aligned}$$

όπου $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ είναι οι συντελεστές των BLUE. Αφού οι εκτιμητές είναι αμερόληπτοι $\sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n_2} \gamma_i = 1$ και $\sum_{i=1}^{n_1} \beta_i = \sum_{i=1}^{n_2} \delta_i = 0$. Επομένως, έχουμε

$$T_j = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i U_{i:n_1} - \sum_{i=1}^{n_2} \gamma_i V_{i:n_2} + (\mu_1 - \mu_2)/\sigma}{c_1 \sum_{i=1}^{n_1} \beta_i U_{i:n_1} + c_2 \sum_{i=1}^{n_2} \delta_i V_{i:n_2}},$$

με $c_1 = n_1/n, c_2 = n_2/n$ για $j = 2$ και $c_1 = c_1^*, c_2 = c_2^*$ για $j = 3$, πράγμα που αποδεικνύει τον ισχυρισμό. \square

Έχοντας στη διάθεσή μας την ακριβή συνάρτηση επιβίωσης της $T_j, j = 2, 3$, μπορούμε να υπολογίσουμε ποσοστιαία σημεία, οπότε μπορούμε και να κάνουμε τον έλεγχο σχετικά με την ισότητα ή μη των παραμέτρων θέσης. Ειδικότερα, η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται σε επίπεδο σημαντικότητας α , αν $|T_j| > T_{j,\alpha/2}$ όπου με $T_{j,\alpha/2}$ συμβολίζουμε το άνω $(\alpha/2)$ -ποσοστιαίο σημείο της $T_j, j = 2, 3$. Ο κανόνας απόρριψης θυμίζει τον αντίστοιχο για την ισότητα των μέσων της κανονικής κατανομής και αυτό λόγω του ότι η κατανομή των T_2 και T_3 υπό την H_0 είναι συμμετρική ως προς το μηδέν. Η απόδειξη αυτής της ιδιότητας παρουσιάζεται αναλυτικά στο Παράρτημα. Τα ποσοστιαία σημεία της στατιστικής συνάρτησης $T_j, j = 2, 3$ παρατίθενται στον Πίνακα 3.4. Συγκεκριμένα, ο πίνακας αυτός περιέχει τις τιμές $T_{2,\alpha/2}$ και $T_{3,\alpha/2}$ για $\alpha = 0.1, 0.05, 0.01$ και n_1, n_2 μέχρι το 20. Τα ποσοστιαία σημεία $T_{2,\alpha/2}$ βρίσκονται πάνω από τη διαγώνιο ενώ τα $T_{3,\alpha/2}$ βρίσκονται κάτω από τη διαγώνιο.

Από την άλλη πλευρά, η διαγώνιος περιέχει τις κοινές τιμές των ποσοστιαίων σημείων των δύο στατιστικών συναρτήσεων, αφού όπως αναφέραμε νωρίτερα για $n_1 = n_2$ ισχύει $T_2 = T_3$. Για παράδειγμα αν $n_1 = 2, n_2 = 4$ ή $n_1 = 4, n_2 = 2$, τότε έχουμε ότι $T_{2,0.05} = 2.208$ και $T_{3,0.05} = 2.232$, ενώ όταν $n_1 = n_2 = 5$ έχουμε ότι $T_{2,0.025} = T_{3,0.025} = 1.738$.

Αφού έχουμε στη διάθεσή μας την ακριβή συνάρτηση επιβίωσης της T_j , $j = 2, 3$, μπορούμε να υπολογίσουμε την p-value του κάθε ελέγχου καθώς και να γίνει ο έλεγχος μέσω αυτής. Η p-value για τους δύο ελέγχους υπολογίζεται ως εξής

$$\text{p-value} = P_{\mu_1=\mu_2}(|T_j| > |t_j|) = 2P_{\mu_1=\mu_2}(T_j > |t_j|)$$

όπου t_j η παρατηρηθείσα τιμή της T_j , $j = 2, 3$. Σημειώνουμε ότι η τελευταία ισότητα ισχύει λόγω της συμμετρίας της κατανομής της T_j , $j = 2, 3$.

3.5 Ακριβή διαστήματα εμπιστοσύνης για τη διαφορά $\mu_1 - \mu_2$

Όπως συνήθως, το $100(1 - \alpha)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης (ΔE) για τη διαφορά $\mu_1 - \mu_2$ που αντιστοιχεί σε κάθε έλεγχο περιέχει τις τιμές του ξ για τις οποίες δεν απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση

$$H_{0,\xi} : \mu_1 - \mu_2 = \xi \quad \text{έναντι της} \quad H_{1,\xi} : \mu_1 - \mu_2 \neq \xi$$

από τον συγκεκριμένο έλεγχο σε επίπεδο σημαντικότητας α . Αφού $\mu_1 - \mu_2 = \xi$ ή $\neq \xi$ είναι ισοδύναμο με $(\mu_1 - \xi) - \mu_2 = 0$ ή $\neq 0$ σε αυτήν την ενότητα η στατιστική συνάρτηση του ΕΛΠ και οι στατιστικές συναρτήσεις των δύο ελέγχων που βασίζονται στους BLUE για τις παραπάνω υποθέσεις θα συνεχίσουν να συμβολίζονται με T_1, T_2 και T_3 , αλλά έχοντας αντικαταστήσει τα X_1, \dots, X_{n_1} με $X_1 - \xi, \dots, X_{n_1} - \xi$. Άμεσα μπορούμε να αντιληφθούμε ότι το $100(1 - \alpha)\%$ ΔE που αντιστοιχεί στους ελέγχους που βασίζονται στις T_2 και T_3 είναι

$$\tilde{\mu}_1 - \tilde{\mu}_2 \pm T_{2,\alpha/2}\tilde{\sigma} \quad \text{και} \quad \tilde{\mu}_1 - \tilde{\mu}_2 \pm T_{3,\alpha/2}\tilde{\sigma}_p,$$

αντίστοιχα. Προκειμένου να βρούμε το ΔE που αντιστοιχεί στον ΕΛΠ ας γράψουμε $T_1 = T_1(\xi)$ όπου

$$T_1(\xi) := \frac{\sum_{i=1}^n |Z_i(\xi) - \hat{\mu}_0(\xi)|}{n_1\hat{\sigma}_1 + n_2\hat{\sigma}_2},$$

με $Z(\xi) = (X_1 - \xi, \dots, X_{n_1} - \xi, Y_1, \dots, Y_{n_2})$ και $\hat{\mu}_0(\xi) = \text{διάμεσος}(Z(\xi))$.

Λήμμα 3.2. Για δεδομένα X, Y η συνάρτηση $T_1(\xi)$ είναι μία συνεχής, τμηματικά γραμμική σχήματος μπωλ (bowl shaped) συνάρτηση του ξ με $\lim_{\xi \downarrow -\infty} T_1(\xi) = \lim_{\xi \uparrow \infty} T_1(\xi) = \infty$.

Απόδειξη. Δεδομένου του ότι ο παρονομαστής της $T_1(\xi)$ δεν εξαρτάται από το ξ , αρκεί να δείξουμε τον ισχυρισμό για τον αριθμητή. Θέτουμε $\sum_{i=1}^n |Z_i(\xi) - \hat{\mu}_0(\xi)| =: h(\xi)$ και χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $n_1 \leq n_2$. Σημειώνουμε ότι αφού $n_1 \leq n_2$ έχουμε ότι $n_1 \leq m$. Θεωρούμε τα σύνολα

$$\begin{aligned} A_{00} &= \emptyset, \quad A_{01} = (-\infty, X_{1:n_1} - Y_{m:n_2}), \\ A_{k\ell} &= [X_{k:n_1} - Y_{m-k+1-\ell:n_2}, X_{k+\ell:n_1} - Y_{m-k:n_2}), \quad k = 1, \dots, n_1 - 1, \ell = 0, 1, \\ A_{n_1 0} &= [X_{n_1:n_1} - Y_{m-n_1+1:n_2}, X_{n_1:n_1} - Y_{m-n_1:n_2}), \quad A_{n_1 1} = [X_{n_1:n_1} - Y_{m-n_1:n_2}, \infty), \\ A_k &= A_{k0} \cup A_{k1} = \begin{cases} (-\infty, X_{1:n_1} - Y_{m:n_2}), & k = 0, \\ [X_{k:n_1} - Y_{m-k+1:n_2}, X_{k+1:n_1} - Y_{m-k:n_2}), & k = 1, \dots, n_1 - 1, \\ [X_{n_1:n_1} - Y_{m-n_1+1:n_2}, \infty), & k = n_1. \end{cases} \end{aligned}$$

Παρατηρώντας τα σύνολα $A_{k\ell}$, $k = 0, 1, \dots, n_1$, $\ell = 0, 1$, καθώς και τα σύνολα A_k , $k = 0, 1, \dots, n_1$, θα διαπιστώσουμε ότι αποτελούν διαμερίσεις του \mathbb{R} και ότι είναι διατεταγμένα με την έννοια ότι αν $\xi \in A_i, \xi' \in A_j$ για κάποιο $0 \leq i < j \leq n_1$ τότε $\xi < \xi'$ και επίσης αν $\xi \in A_{k0}, \xi' \in A_{k1}$ για κάποιο $1 \leq k \leq n_1$ τότε και πάλι $\xi < \xi'$.

Αρχικά θεωρούμε την περίπτωση όπου $n_1 + n_2 = 2m$. Τότε η συνάρτηση $h(\xi)$ εκφράζεται ως $h(\xi) = \sum_{i=m+1}^n Z_{i:n}(\xi) - \sum_{i=1}^m Z_{i:n}(\xi)$ και για $\xi \in A_k$ το άθροισμα αυτό γίνεται

$$\sum_{i=k+1}^{n_1} X_{i:n_1} - \sum_{i=1}^k X_{i:n_1} + \sum_{i=m-k+1}^{n_2} Y_{i:n_2} - \sum_{i=1}^{m-k} Y_{i:n_2} - (n_1 - 2k)\xi =: h_k(\xi) \quad (3.13)$$

το οποίο μας δείχνει ότι η h είναι τμηματικά γραμμική συνάρτηση. Επί πλέον, η συνάρτηση $h_k(\xi)$ είναι γνησίως φθίνουσα για $\xi \in A_k$, $k < n_1/2$, γνησίως αύξουσα για $\xi \in A_k$, $k > n_1/2$, και σταθερή για $\xi \in A_{n_1/2}$ αν το n_1 είναι άρτιος. Για να κατανοήσουμε το παραπάνω άθροισμα ως παρατηρήσουμε πως αν $\xi \in A_0$ τότε όλα τα Y_i προηγούνται των $X_i - \xi$ και κατά συνέπεια τα $X_i - \xi$ βρίσκονται μεταξύ των μεγαλύτερων m το πλήθος Z_i . Από την άλλη πλευρά, αν $\xi \in A_{n_1}$, τότε όλα τα $X_i - \xi$ προηγούνται των Y_i και κατά συνέπεια τα $X_i - \xi$ βρίσκονται μεταξύ των μικρότερων m το πλήθος, Z_i . Επί πλέον, αν $\xi \in A_k$, $k = 1, \dots, n_1 - 1$, τότε $X_{k:n_1} - \xi \leq Y_{m-k+1:n_2}$ και $X_{k+1:n_1} - \xi > Y_{m-k:n_2}$ που σημαίνει ότι τα m το πλήθος μικρότερα $Z_i(\xi)$ είναι $X_{1:n_1} - \xi, \dots, X_{k:n_1} - \xi, Y_{1:n_2}, \dots, Y_{m-k:n_2}$. Οπότε από τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι,

$$\lim_{\xi \uparrow X_{k:n_1} - Y_{m-k+1:n_2}} h_{k-1}(\xi) = h_k(X_{k:n_1} - Y_{m-k+1:n_2}), \quad k = 1, \dots, n_1,$$

δηλαδή η h_k είναι συνεχής. Τέλος, από την (3.13) είναι σαφές ότι $\lim_{\xi \downarrow -\infty} h_0(\xi) = \lim_{\xi \uparrow \infty} h_{n_1}(\xi) = \infty$. Άρα αποδείχθηκε ο ισχυρισμός ότι η συνάρτηση $T_1(\xi)$ είναι μία συνεχής, τμηματικά γραμμική σχήματος μπωλ συνάρτηση του ξ με $\lim_{\xi \downarrow -\infty} T_1(\xi) = \lim_{\xi \uparrow \infty} T_1(\xi) = \infty$ για $n_1 + n_2 = 2m$.

Έστω τώρα ότι $n_1 + n_2 = 2m - 1$. Επειδή έχουμε υποθέσει ότι $n_1 \leq n_2$ προκύπτει ότι $n_1 < m$. Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε ότι $h(\xi) = \sum_{i=m+1}^n Z_{i:n}(\xi) - \sum_{i=1}^{m-1} Z_{i:n}(\xi)$ και για $\xi \in A_{k\ell}$ το άθροισμα αυτό γίνεται

$$\sum_{i=k+1}^{n_1} X_{i:n_1} - \sum_{i=1}^{k+\ell-1} X_{i:n_1} + \sum_{i=m-k+1}^{n_2} Y_{i:n_2} - \sum_{i=1}^{m-k-\ell} Y_{i:n_2} - (n_1 - 2k + 1 - \ell)\xi =: h_{k\ell}(\xi) \quad (3.14)$$

το οποίο μας δείχνει ότι η h είναι τμηματικά γραμμική συνάρτηση. Επί πλέον, η συνάρτηση $h_{k\ell}(\xi)$ είναι γνησίως φθίνουσα για $\xi \in A_{k\ell}$, $2k + \ell < n_1 + 1$ και γνησίως αύξουσα για $\xi \in A_{k\ell}$, $2k + \ell > n_1 + 1$. Για να κατανοήσουμε το παραπάνω άθροισμα ας παρατηρήσουμε πως αν $\xi \in A_{01}$ τότε όλα τα Y_i προηγούνται των $X_i - \xi$ και κατά συνέπεια όλα τα $X_i - \xi$ βρίσκονται μεταξύ των μεγαλύτερων $m - 1$ το πλήθος Z_i , ενώ αν $\xi \in A_k$, $k \geq 1$, τότε το μέγιστο των $X_i - \xi$ και Y ανάμεσα στα m μικρότερα Z_i είναι τα $X_{k:n_1} - \xi$ και $Y_{m-k:n_2}$, αντίστοιχα, όπως εξηγήσαμε παραπάνω. Συνεπώς αν $\xi \in A_k$, τότε $Z_{m:n} = \max\{X_{k:n_1} - \xi, Y_{m-k:n_2}\}$. Όμως, $\{\xi : X_{k:n_1} - \xi \geq Y_{m-k:n_2}\} \cap A_k = A_{k0}$ και $\{\xi : X_{k:n_1} - \xi < Y_{m-k:n_2}\} \cap A_k = A_{k1}$, οπότε για $\xi \in A_{k\ell}$ έχουμε ότι

$$h(\xi) = \sum_{i=k+1}^{n_1} (X_{i:n_1} - \xi) - \sum_{i=1}^k (X_{i:n_1} - \xi) + \sum_{i=m-k+1}^{n_2} Y_{i:n_2} - \sum_{i=1}^{m-k} Y_{i:n_2} + Z_{m:n} = h_{k\ell}(\xi).$$

Επομένως από τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι,

$$\lim_{\xi \uparrow X_{k:n_1} - Y_{m-k+1-\ell:n_2}} h_{(k-1)\ell}(\xi) = h_{k\ell}(X_{k:n_1} - Y_{m-k+1-\ell:n_2}), \quad k = 1, \dots, n_1, \ell = 0, 1,$$

δηλαδή η $h_{k\ell}$ είναι συνεχής. Τέλος, από την (3.14) είναι σαφές ότι $\lim_{\xi \downarrow -\infty} h_0(\xi) = \lim_{\xi \uparrow \infty} h_{n_1}(\xi) = \infty$. Άρα αποδείχθηκε ο ισχυρισμός ότι η συνάρτηση $T_1(\xi)$ είναι μία συνεχής, τμηματικά γραμμική σχήματος μπωλ συνάρτηση του ξ , με $\lim_{\xi \downarrow -\infty} T_1(\xi) = \lim_{\xi \uparrow \infty} T_1(\xi) = \infty$ για $n_1 + n_2 = 2m - 1$. \square

Σε αυτό το σημείο σημειώνουμε ότι για παρατηρηθέντα δεδομένα (X, Y) το Λήμμα 3.2 συνεπάγεται ότι η εξίσωση $T_1(\xi) = T_{1,\alpha}$ έχει ακριβώς δύο λύσεις $\hat{\xi}_1(X, Y) < \hat{\xi}_2(X, Y)$, και το διάστημα $[\hat{\xi}_1(X, Y), \hat{\xi}_2(X, Y)]$ περιέχει τις τιμές των ξ για τις οποίες δεν απορρίπτεται η υπόθεση $H_{0,\xi}$ σε επίπεδο σημαντικότητας α . Στην πρόταση που ακολουθεί βλέπουμε τις ακριβείς εκφράσεις των παραπάνω διαστημάτων εμπιστοσύνης.

Πρόταση 3.2. Για $k = 0, 1, \dots, n_1$, $\ell = 0, 1$, έστω

$$S_k = \sum_{i=k+1}^{n_1} X_{i:n_1} - \sum_{i=1}^k X_{i:n_1} + \sum_{i=m-k+1}^{n_2} Y_{i:n_2} - \sum_{i=1}^{m-k} Y_{i:n_2},$$

$$S_{k,\ell} = \sum_{i=k+1}^{n_1} X_{i:n_1} - \sum_{i=1}^{k+\ell-1} X_{i:n_1} + \sum_{i=m-k+1}^{n_2} Y_{i:n_2} - \sum_{i=1}^{m-k-\ell} Y_{i:n_2}.$$

Υποθέτουμε ότι οι δύο λύσεις της εξίσωσης $T_1(\xi) = T_{1,\alpha}$ βρίσκονται στα σύνολα $A_{k_1\ell_1}, A_{k_2\ell_2}$, όπου $k_1 < k_2$. Τότε, όταν το n είναι άρτιος,

$$\hat{\xi}_j(X, Y) = \{S_{k_j} - (n_1\hat{\sigma}_1 + n_2\hat{\sigma}_2)T_{1,\alpha}\}/(n_1 - 2k_j), \quad j = 1, 2,$$

ενώ όταν το n είναι περιττός,

$$\hat{\xi}_j(X, Y) = \{S_{k_j\ell_j} - (n_1\hat{\sigma}_1 + n_2\hat{\sigma}_2)T_{1,\alpha}\}/(n_1 - 2k_j + 1 - \ell_j), \quad j = 1, 2.$$

Απόδειξη. Όπως είδαμε στην απόδειξη του Λήμματος 3.2, όταν το n είναι άρτιος και $\xi \in A_k$ έχουμε ότι $T_1(\xi) = \{S_k - (n_1 - 2k)\xi\}/(n_1\hat{\sigma}_1 + n_2\hat{\sigma}_2)$, ενώ αν το n είναι περιττός και $\xi \in A_{k\ell}$ έχουμε ότι $T_1(\xi) = \{S_{k\ell} - (n_1 - 2k + 1 - \ell)\xi\}/(n_1\hat{\sigma}_1 + n_2\hat{\sigma}_2)$. Συνεπώς, το αποτέλεσμα είναι άμεσο. \square

3.6 Σύγκριση των ελέγχων και των διαστημάτων εμπιστοσύνης

Προκειμένου να συγκρίνουμε τους τρεις ελέγχους που προτείναμε παραπάνω για την υπόθεση της ισότητας των παραμέτρων θέσης υπολογίσαμε κάποια αριθμητικά αποτελέσματα που αφορούν την ισχύ τους για συγκεκριμένες τιμές των n_1, n_2 και $\xi = \mu_1 - \mu_2$. Σημειώνουμε ότι η ισχύς των ελέγχων που βασίζονται στις στατιστικές συναρτήσεις T_2 και T_3 μπορούν να υπολογιστούν χρησιμοποιώντας τις ακριβείς ουρές των κατανομών τους οι οποίες δίνονται στη σχέση (3.11) έχοντας αντικαταστήσει το $\sum_{i=1}^{n_1} s_i(d_1)E_i - \sum_{i=n_1+1}^{n_2} s_i(d_2)E_i$ με $\sum_{i=1}^{n_1} s_i(d_1)E_i - \sum_{i=n_1+1}^n s_i(d_2)E_i - \xi$. Από την άλλη πλευρά, η μορφή της ακριβούς ισχύος της T_1 δεν είναι εύκολο να βρεθεί καθώς υπό την εναλλακτική υπόθεση $\mu_1 \neq \mu_2$ θα χρειαζόταν να υπολογίσουμε την κατανομή των μεταθέσεων τυχαίων μεταβλητών που προέρχονται από δύο διαφορετικές κατανομές. Γι' αυτό η ισχύς της T_1 υπολογίστηκε μέσω προσομοίωσης. Για να επιτύχουμε μεγάλη ακρίβεια κάναμε 500000 επαναλήψεις Monte Carlo. Τα αποτελέσματα παρατίθενται στους Πίνακες 3.5 και 3.6. Συνοψίζουμε σημειώνοντας ότι κάνας από τους τρεις ελέγχους δεν υπερτερεί ομοιόμορφα των υπολοίπων. Ειδικότερα όταν το $|\xi|$ έχει μικρή τιμή ο έλεγχος που βασίζεται στην T_1 φαίνεται να είναι ισχυρότερος από τους ελέγχους που βασίζονται στην T_2 και την T_3 ενώ για μεγάλες τιμές του $|\xi|$ ισχύει το αντίθετο.

Εκτός από τον υπολογισμό της ισχύος των προαναφερθέντων ελέγχων, υπολογίσαμε μέσω προσομοίωσης και την ισχύ ελέγχων οι οποίοι βασίζονται σε διαφορετικές συναρτήσεις

των ΕΜΠ και των BLUE. Ειδικότερα, θεωρήσαμε τις στατιστικές συναρτήσεις

$$T_4 := \frac{\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2}{\hat{\sigma}}, \quad T_5 := \frac{\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2}{\hat{\sigma}_0}, \quad \text{και} \quad T_6 := \frac{\tilde{\mu}_1 - \tilde{\mu}_2}{\tilde{\sigma}_0}. \quad (3.15)$$

Οι εκτιμητές $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2, \hat{\sigma}, \hat{\sigma}_0$ είναι ακριβώς ίδιοι με αυτούς από τις προηγούμενες ενότητες ενώ ο $\tilde{\sigma}_0$ είναι ο BLUE του σ υπό τη μηδενική υπόθεση, δηλαδή ο BLUE που βασίζεται στο συνδυασμένο δείγμα Z_1, \dots, Z_n . Από τους Πίνακες 3.5 και 3.6 συμπεραίνουμε ότι οι έλεγχοι που συζητήθηκαν στις Ενότητες 3.3 και 3.4 έχουν γενικά μεγαλύτερη ισχύ από αυτούς που βασίζονται στις στατιστικές συναρτήσεις T_4, T_5 και T_6 . Επομένως, οι τελευταίοι δεν χρήζουν περαιτέρω ανάλυσης.

Ακολουθώς το ενδιαφέρον επικεντρώνεται στη σύγκριση των διαφορετικών διαστημάτων εμπιστοσύνης. Γενικά, ένας τρόπος να συγκρίνει κανείς διαφορετικά διαστήματα εμπιστοσύνης είναι βάσει του αναμενόμενου μήκους τους, ιδιαίτερα όταν αυτά εκτιμούν παραμέτρους θέσης. Στην περίπτωση μας το αναμενόμενο μήκος του $100(1 - \alpha)\%$ διαστήματος εμπιστοσύνης για την διαφορά $\mu_1 - \mu_2$ που βασίζεται στις T_2 και T_3 είναι $2T_{j,\alpha/2}\sigma$, $j = 2, 3$, καθώς οι $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2$ και $\tilde{\sigma}_p$ είναι αμερόληπτοι εκτιμητές του σ . Από την άλλη πλευρά, το αναμενόμενο μήκος του διαστήματος εμπιστοσύνης που βασίζεται στην T_1 δε μπορεί να εκφραστεί αναλυτικά εφ' όσον τα άκρα του εξαρτώνται από τους (τυχαίους) δείκτες των συνόλων A_{kl} οι οποίοι περιέχουν τις λύσεις της εξίσωσης $T_1(\xi) = T_{1,\alpha}$ (βλέπε Πρόταση 3.2). Συνεπώς, όπως και πριν, για τον υπολογισμό του αναμενόμενου μήκους του διαστήματος εμπιστοσύνης χρησιμοποιήσαμε προσομοίωση. Για να επιτύχουμε πιο ακριβείς εκτιμήσεις Monte Carlo του αναμενόμενου μήκους χρησιμοποιήσαμε τα προσομοιωμένα μήκη των διαστημάτων εμπιστοσύνης τα οποία βασίζονται στις T_2 και T_3 ως μεταβλητές ελέγχου (control variates δεξ Robert and Casella, 2004). Τα αποτελέσματα παρατίθενται στον Πίνακα 3.7. Όπως ακριβώς με την ισχύ των ελέγχων ομοίως κι εδώ δεν υπάρχει ομοιόμορφα μικρότερο διάστημα για όλα τα μεγέθη δείγματος και τα επίπεδα σημαντικότητας. Ωστόσο, φαίνεται ότι τα 90% διαστήματα εμπιστοσύνης που βασίζονται στις T_2 και T_3 είναι μικρότερα από το διάστημα που βασίζεται στην T_1 ενώ το 95% και 99% διάστημα εμπιστοσύνης που βασίζεται στην T_1 είναι μικρότερο όταν $n_1, n_2 \geq 3$.

3.7 Έλεγχοι υπό ετεροσκεδαστικότητα

Θα μπορούσε κάποιος να αναρωτηθεί πώς θα συμπεριφέρονταν οι έλεγχοι που παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες ενότητες αν δεν ίσχυε η υπόθεση της ισότητας των παραμέτρων κλίμακας. Είναι σαφές ότι για $\sigma_1 \neq \sigma_2$ ο έλεγχος της ισότητας των παραμέτρων μ_1 και μ_2

3.8. Αριθμητικό παράδειγμα

αποτελεί ένα πρόβλημα τύπου Behrens–Fisher. Σημειώνουμε ότι σε αυτήν την περίπτωση όλες οι στατιστικές συναρτήσεις εξαρτώνται από τις παραμέτρους μέσω του $\xi_1 = (\mu_1 - \mu_2)/\sigma_1$ και του $\rho = \sigma_2/\sigma_1$. Για παράδειγμα, θεωρούμε την T_1 και όμοια με τις αποδείξεις των Θεωρημάτων 3.1(β) και 3.2(β) θέτουμε $U_i = (X_i - \mu_1)/\sigma_1$, $i = 1, \dots, n_1$, $V_i = (Y_i - \mu_2)/\sigma_2$, $i = 1, \dots, n_2$. Τότε, οι $U_1, \dots, U_{n_1}, V_1, \dots, V_{n_2}$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές από την κατανομή $\mathcal{L}(0, 1)$ και η (3.4) γίνεται

$$T_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} q_i U_{i:n_1} + (\sigma_2/\sigma_1) \sum_{i=1}^{n_2} r_i V_{i:n_2} + \sum_{i=1}^{n_1} q_i (\mu_1 - \mu_2)/\sigma_1}{\sum_{i=m_1+1}^{n_1} U_{i:n_1} - \sum_{i=1}^{\lfloor n_1/2 \rfloor} U_{i:n_1} + (\sigma_2/\sigma_1) (\sum_{i=m_2+1}^{n_2} V_{i:n_2} - \sum_{i=1}^{\lfloor n_2/2 \rfloor} V_{i:n_2})}. \quad (3.16)$$

Οι εκφράσεις των άλλων στατιστικών συναρτήσεων είναι παρόμοιες. Ο Πίνακας 3.8 περιέχει τις προσομοιωμένες τιμές της ισχύος των ελέγχων που βασίζονται στις T_1, T_2, T_3 για διάφορα μεγέθη δείγματος και διάφορες τιμές των ξ_1 και $\rho \neq 1$. Από τον πίνακα αυτό μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το πραγματικό μέγεθος του ελέγχου διαφέρει από το ονομαστικό επίπεδο και η ισχύς τους αυξάνεται καθώς αυξάνεται το ξ_1 . Επί πλέον, καθώς $\rho \rightarrow \infty$ η ισχύς συγκλίνει στην ίδια τιμή ανεξάρτητα από την τιμή του ξ_1 . Αυτό μπορούμε να το κατανοήσουμε καλύτερα από την (3.16) η οποία δίνει

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} P(T_1 > x) = P\left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n_2} r_i V_{i:n_2}}{\sum_{i=m_2+1}^{n_2} V_{i:n_2} - \sum_{i=1}^{\lfloor n_2/2 \rfloor} V_{i:n_2}} > x \right\}.$$

Συμπεραίνουμε ότι οι έλεγχοι που είδαμε στις προηγούμενες ενότητες εξαρτώνται άμεσα από την ομοσκεδαστικότητα. Επομένως προτείνεται για τη χρήση τους να προηγείται ένας έλεγχος ομοσκεδαστικότητας όπως συνηθίζεται και στην περίπτωση της κανονικής κατανομής.

3.8 Αριθμητικό παράδειγμα

Σε αυτήν την ενότητα θα παρουσιάσουμε τους ελέγχους και τα διαστήματα εμπιστοσύνης, που συζητήθηκαν στις προηγούμενες ενότητες χρησιμοποιώντας ένα σύνολο δεδομένων (βλέπε Lehmann 1975, σελ.27). Τα δεδομένα αυτά αρχικά εμφανίστηκαν στην εργασία των Agosti and Camerota (1965) και αναπαριστούν μία συγκεκριμένη μονάδα μέτρησης αέρα κατά την εισπνοή και την εκπνοή. Οι μετρήσεις αυτές λήφθηκαν από οκτώ άτομα που δεν είχαν υπνωτιστεί (ομάδα ελέγχου) και οκτώ άτομα που είχαν υπνωτιστεί (ομάδα θεραπείας) και είναι οι ακόλουθες:

Ομάδα ελέγχου: 3.99, 4.19, 4.21, 4.54, 4.64, 4.69, 4.84, 5.48

Ομάδα θεραπείας: 4.36, 4.67, 4.78, 5.08, 5.16, 5.20, 5.52, 5.74

Συμβολίζουμε με X και Y τα τυχαία δείγματα μεγέθους $n_1 = n_2 = 8$ από τα δεδομένα της ομάδας ελέγχου και τα δεδομένα της ομάδας θεραπείας και υποθέτουμε ότι ακολουθούν τις κατανομές $\mathcal{L}(\mu_1, \sigma)$ και $\mathcal{L}(\mu_2, \sigma)$, αντίστοιχα. Σημειώνεται ότι αυτή η παραδοχή γίνεται μόνο για την επίδειξη των διαδικασιών και δεν υποστηρίζουμε ότι πραγματικά ισχύει.

Οι ΕΜΠ των μ_1 και σ_1 που βασίζονται στα δεδομένα από την ομάδα ελέγχου είναι $\hat{\mu}_1 = 4.590$ και $\hat{\sigma}_1 = 0.340$ ενώ οι ΕΜΠ που βασίζονται στα δεδομένα από την ομάδα θεραπείας είναι $\hat{\mu}_2 = 5.120$, $\hat{\sigma}_2 = 0.341$. Ο ΕΜΠ του σ που βασίζεται στα συνδυασμένα δεδομένα είναι $\hat{\sigma} = 0.341$ ενώ ο ΕΜΠ του σ υπό την υπόθεση $\mu_1 = \mu_2$ είναι $\hat{\sigma}_0 = 0.407$. Επομένως, $T_1 = 0.407/0.341 \approx 1.195$. Οι BLUE είναι $\tilde{\mu}_1 = 4.5503$, $\tilde{\mu}_2 = 5.0846$, $\tilde{\sigma}_1 = 0.3662$, $\tilde{\sigma}_2 = 0.3694$, $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_p = 0.3678$ (αφού $n_1 = n_2$). Συνεπώς, $T_2 = T_3 = (4.5503 - 5.0846)/0.3678 \approx -1.453$.

Εφ' όσον $T_{1,0.05} = 1.164$, ο έλεγχος λόγου πιθανοφανειών απορρίπτει την υπόθεση της ισότητας των παραμέτρων θέσης σε επίπεδο σημαντικότητας 5%. Πιο συγκεκριμένα, η p-value είναι ίση με $P_{\mu_1 - \mu_2 = 0}(T_1 > 1.195) = .0338$. Επί πλέον, ο έλεγχος που βασίζεται στην T_2 (ή την T_3) απορρίπτει τη μηδενική υπόθεση σε επίπεδο σημαντικότητας 5% αφού $T_{2,0.025} = 1.256$. Η αντίστοιχη p-value είναι $P_{\mu_1 - \mu_2 = 0}(|T_2| > 1.453) = .0267$.

Προκειμένου να βρούμε το 95% διάστημα εμπιστοσύνης για τη διαφορά $\mu_1 - \mu_2$ το οποίο βασίζεται στην T_2 υπολογίζουμε

$$\tilde{\mu}_1 - \tilde{\mu}_2 \pm T_{2,0.025} \tilde{\sigma} = 4.5502 - 5.0846 \pm 1.256 \times 0.3678 = [-0.996, -0.072].$$

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 3.2 υπολογίζουμε τα άκρα του 95% διαστήματος εμπιστοσύνης, το οποίο βασίζεται στην T_1 . Εφ' όσον $n_1 + n_2 = 16$ είναι άρτιος, αναζητούμε τις λύσεις της εξίσωσης $T_1(\xi) = T_{1,0.05}$ μέσα στα διαστήματα A_k , $k = 0, 1, \dots, 8$. Τα άκρα τους είναι $(-\infty, x_{1:8} - y_{8:8}, x_{2:8} - y_{7:8}, \dots, x_{8:8} - y_{1:8}, \infty) = (-\infty, -1.75, -1.33, -0.99, -0.62, -0.44, -0.09, 0.17, 1.12, \infty)$. Οι τιμές της T_1 σε αυτά τα σημεία είναι $(\infty, 1.848, 1.385, 1.136, 1, 1, 1.128, 1.319, 2.365, \infty)$. Παρατηρούμε ότι η τιμή $T_{1,0.05} = 1.164$ βρίσκεται μεταξύ του 1.385 και 1.136 και μεταξύ 1.128 και 1.319. Οι τιμές 1.385 και 1.128 αντιστοιχούν στα μικρότερα άκρα των A_2 και A_6 , αντίστοιχα, συνεπώς $k_1 = 2$, $k_2 = 6$. Αφού $S_2 = 2.23$ και $S_6 = 6.51$, τα δύο όρια εμπιστοσύνης είναι

$$(2.23 - 16 \times 0.341 \times 1.164)/(8 - 2 \times 2) = -1.031$$

και

$$(6.51 - 16 \times 0.341 \times 1.164)/(8 - 2 \times 6) = -0.040.$$

Συνεπώς, το 95% διάστημα εμπιστοσύνης που βασίζεται στην T_1 είναι $[-1.031, -0.040]$.

n_1	n_2																			
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
2	2.102	1.654	1.482	1.365	1.303	1.252	1.220	1.192	1.173	1.155	1.142	1.130	1.120	1.112	1.105	1.098	1.093	1.087	1.083	
3	3.058	2.087	1.757	1.564	1.457	1.378	1.326	1.284	1.254	1.228	1.208	1.190	1.176	1.163	1.152	1.143	1.134	1.127	1.120	
4	7.015	3.558	2.560	2.126	1.874	1.717	1.605	1.525	1.463	1.414	1.374	1.342	1.314	1.291	1.271	1.253	1.238	1.224	1.212	
5	1.654	1.538	1.370	1.332	1.258	1.242	1.199	1.191	1.162	1.157	1.137	1.133	1.118	1.116	1.104	1.102	1.093	1.092	1.084	
6	2.087	1.774	1.547	1.480	1.372	1.344	1.283	1.267	1.229	1.218	1.192	1.185	1.165	1.160	1.145	1.141	1.129	1.126	1.117	
7	3.558	2.791	2.111	1.945	1.715	1.637	1.524	1.480	1.413	1.385	1.341	1.322	1.290	1.276	1.253	1.242	1.224	1.215	1.201	
8	1.482	1.370	1.302	1.250	1.217	1.190	1.170	1.153	1.139	1.128	1.118	1.110	1.103	1.096	1.091	1.086	1.082	1.077	1.074	
9	1.757	1.547	1.440	1.365	1.312	1.273	1.242	1.218	1.199	1.182	1.168	1.156	1.146	1.137	1.129	1.122	1.115	1.110	1.105	
10	2.560	2.111	1.827	1.687	1.577	1.500	1.441	1.394	1.357	1.325	1.299	1.276	1.258	1.240	1.226	1.213	1.201	1.191	1.181	
11	1.365	1.332	1.250	1.233	1.189	1.182	1.153	1.149	1.129	1.126	1.111	1.110	1.098	1.097	1.088	1.086	1.079	1.078	1.072	
12	1.564	1.480	1.365	1.340	1.274	1.262	1.220	1.212	1.184	1.178	1.158	1.154	1.139	1.135	1.124	1.121	1.112	1.109	1.102	
13	2.126	1.945	1.687	1.621	1.504	1.464	1.398	1.372	1.328	1.310	1.279	1.266	1.243	1.233	1.215	1.208	1.193	1.187	1.176	
14	1.303	1.258	1.217	1.189	1.168	1.151	1.137	1.126	1.116	1.108	1.101	1.095	1.089	1.084	1.080	1.076	1.072	1.069	1.066	
15	1.457	1.372	1.312	1.274	1.239	1.217	1.195	1.180	1.165	1.154	1.143	1.134	1.126	1.119	1.113	1.107	1.102	1.097	1.093	
16	1.874	1.715	1.577	1.504	1.440	1.393	1.354	1.322	1.296	1.274	1.255	1.238	1.223	1.210	1.199	1.188	1.180	1.171	1.163	
17	1.252	1.242	1.190	1.182	1.151	1.148	1.126	1.125	1.109	1.108	1.096	1.095	1.085	1.085	1.077	1.076	1.070	1.069	1.065	
18	1.378	1.344	1.273	1.262	1.217	1.210	1.181	1.176	1.155	1.151	1.136	1.133	1.121	1.118	1.109	1.107	1.099	1.097	1.091	
19	1.717	1.637	1.500	1.464	1.393	1.368	1.323	1.306	1.275	1.263	1.239	1.230	1.212	1.204	1.189	1.183	1.172	1.167	1.158	
20	1.220	1.199	1.170	1.153	1.137	1.126	1.115	1.108	1.100	1.094	1.088	1.083	1.079	1.075	1.071	1.068	1.065	1.063	1.060	
21	1.326	1.283	1.242	1.220	1.195	1.181	1.164	1.154	1.142	1.134	1.125	1.118	1.112	1.106	1.101	1.097	1.092	1.088	1.085	
22	1.605	1.524	1.441	1.398	1.354	1.323	1.296	1.273	1.254	1.237	1.221	1.209	1.197	1.186	1.178	1.169	1.161	1.155	1.148	
23	1.192	1.191	1.153	1.149	1.126	1.125	1.108	1.107	1.095	1.094	1.084	1.084	1.076	1.076	1.069	1.069	1.064	1.063	1.059	
24	1.284	1.267	1.218	1.212	1.180	1.176	1.154	1.151	1.135	1.132	1.120	1.117	1.108	1.106	1.098	1.096	1.090	1.088	1.083	
25	1.525	1.480	1.394	1.372	1.322	1.306	1.273	1.264	1.239	1.230	1.210	1.203	1.188	1.182	1.171	1.166	1.156	1.152	1.144	
26	1.173	1.162	1.139	1.129	1.116	1.109	1.100	1.095	1.088	1.084	1.078	1.075	1.071	1.068	1.065	1.062	1.060	1.057	1.055	
27	1.254	1.229	1.199	1.184	1.165	1.155	1.142	1.135	1.125	1.119	1.112	1.107	1.101	1.097	1.092	1.089	1.085	1.082	1.078	
28	1.463	1.413	1.357	1.328	1.296	1.275	1.254	1.239	1.222	1.210	1.199	1.188	1.178	1.169	1.162	1.155	1.149	1.143	1.137	
29	1.155	1.157	1.128	1.126	1.108	1.108	1.094	1.094	1.083	1.083	1.075	1.075	1.069	1.068	1.063	1.063	1.058	1.058	1.054	
30	1.228	1.218	1.182	1.178	1.154	1.151	1.134	1.132	1.119	1.116	1.107	1.105	1.097	1.095	1.089	1.087	1.082	1.081	1.076	
31	1.414	1.385	1.325	1.310	1.274	1.263	1.237	1.230	1.210	1.202	1.186	1.181	1.169	1.164	1.155	1.151	1.142	1.139	1.132	
32	1.142	1.137	1.118	1.111	1.101	1.096	1.088	1.084	1.078	1.075	1.071	1.068	1.065	1.062	1.059	1.057	1.055	1.053	1.051	
33	1.208	1.192	1.168	1.158	1.143	1.136	1.125	1.120	1.112	1.107	1.101	1.096	1.092	1.088	1.084	1.081	1.078	1.075	1.073	
34	1.374	1.341	1.299	1.279	1.255	1.239	1.221	1.210	1.199	1.186	1.176	1.168	1.160	1.154	1.147	1.141	1.136	1.131	1.126	
35	1.130	1.133	1.110	1.110	1.095	1.095	1.083	1.084	1.075	1.075	1.068	1.068	1.063	1.062	1.058	1.058	1.054	1.053	1.050	
36	1.190	1.185	1.156	1.154	1.134	1.133	1.118	1.117	1.107	1.105	1.096	1.095	1.088	1.087	1.082	1.080	1.076	1.075	1.071	
37	1.342	1.322	1.276	1.266	1.238	1.230	1.209	1.203	1.188	1.181	1.168	1.164	1.154	1.150	1.141	1.138	1.131	1.128	1.122	
38	1.120	1.118	1.103	1.098	1.089	1.085	1.079	1.076	1.071	1.069	1.065	1.063	1.059	1.057	1.055	1.053	1.051	1.050	1.048	
39	1.176	1.165	1.146	1.139	1.126	1.121	1.112	1.108	1.101	1.097	1.092	1.088	1.084	1.081	1.078	1.075	1.072	1.070	1.068	
40	1.314	1.290	1.258	1.243	1.223	1.212	1.197	1.188	1.178	1.169	1.160	1.154	1.147	1.141	1.135	1.130	1.126	1.121	1.117	
41	1.112	1.116	1.096	1.097	1.084	1.085	1.075	1.076	1.068	1.068	1.062	1.062	1.057	1.057	1.053	1.053	1.050	1.049	1.047	
42	1.163	1.160	1.137	1.135	1.119	1.118	1.106	1.106	1.097	1.095	1.088	1.087	1.081	1.081	1.075	1.075	1.070	1.069	1.066	
43	1.291	1.276	1.240	1.233	1.210	1.204	1.186	1.182	1.169	1.164	1.154	1.150	1.141	1.139	1.131	1.129	1.123	1.120	1.115	
44	1.105	1.104	1.091	1.088	1.080	1.077	1.071	1.069	1.065	1.063	1.059	1.058	1.055	1.053	1.051	1.050	1.048	1.047	1.045	
45	1.152	1.145	1.129	1.124	1.113	1.109	1.101	1.098	1.092	1.089	1.084	1.082	1.078	1.075	1.073	1.070	1.068	1.066	1.064	
46	1.271	1.253	1.226	1.215	1.199	1.189	1.178	1.171	1.162	1.155	1.147	1.141	1.135	1.131	1.127	1.123	1.118	1.115	1.111	
47	1.098	1.102	1.086	1.086	1.076	1.076	1.068	1.069	1.062	1.063	1.057	1.058	1.053	1.053	1.050	1.050	1.047	1.047	1.044	
48	1.143	1.141	1.122	1.121	1.107	1.107	1.097	1.096	1.089	1.087	1.081	1.080	1.075	1.075	1.070	1.070	1.066	1.065	1.062	
49	1.253	1.242	1.213	1.208	1.188	1.183	1.169	1.166	1.155	1.151	1.141	1.138	1.130	1.129	1.123	1.120	1.114	1.113	1.108	
50	1.093	1.093	1.082	1.079	1.072	1.070	1.065	1.064	1.060	1.058	1.055	1.054	1.051	1.050	1.048	1.047	1.045	1.044	1.042	
51	1.134	1.129	1.115	1.112	1.102	1.099	1.092	1.090	1.085	1.082	1.078	1.076	1.072	1.070	1.068	1.066	1.063	1.062	1.060	
52	1.238	1.224	1.201	1.193	1.180	1.172	1.161	1.156	1.149	1.142	1.136	1.131	1.126	1.123	1.118	1.114	1.111	1.108	1.105	
53	1.087	1.092	1.077	1.078	1.069	1.069	1.063	1.063	1.057	1.058	1.053	1.053	1.050	1.049	1.047	1.047	1.044	1.044	1.041	
54	1.127	1.126	1.110	1.109	1.097	1.097	1.088	1.088	1.082	1.081	1.075	1.075	1.070	1.069	1.066	1.065	1.062	1.061	1.058	
55	1.224	1.215	1.191	1.187	1.171	1.167	1.155	1.152	1.143	1.139	1.131	1.128	1.121	1.120	1.115	1.113	1.108	1.106	1.102	
56	1.083	1.084	1.074	1.072	1.066	1.065	1.060	1.059	1.055	1.054	1.051	1.050	1.048	1.047	1.045	1.044	1.042	1.041	1.051	
57	1.120	1.117	1.105	1.102	1.093	1.091	1.085	1.083	1.078	1.076	1.073	1.071	1.068	1.066	1.064	1.062	1.060	1.058	1.073	
58	1.212	1.201	1.181	1.176	1.163	1.158	1.148	1.144	1.137	1.132	1.126	1.122	1.117	1.115	1.111	1.108	1.105	1.102	1.127	

Πίνακας 3.3: Άνω 0.10-, 0.05- και 0.01-ποσοστιαία σημεία της T_1 (1η, 2η και 3η γραμμή, αντίστοιχα) για $2 \leq n_1, n_2 \leq 20$.

Συμπερασματολογία για τη διαφορά των παραμέτρων θέσης

		n_2																		
n_1		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2		3.154	2.495	2.208	2.059	1.968	1.908	1.865	1.833	1.809	1.790	1.774	1.761	1.751	1.742	1.734	1.727	1.721	1.716	1.711
2		4.588	3.323	2.858	2.621	2.483	2.395	2.335	2.291	2.259	2.234	2.214	2.197	2.184	2.173	2.163	2.155	2.148	2.142	2.137
2		10.52	6.067	4.810	4.225	3.892	3.681	3.538	3.437	3.361	3.304	3.260	3.225	3.197	3.174	3.155	3.138	3.125	3.113	3.103
3		2.501	2.089	1.858	1.727	1.639	1.578	1.533	1.498	1.471	1.449	1.431	1.416	1.403	1.392	1.383	1.374	1.367	1.360	1.355
3		3.321	2.669	2.349	2.170	2.054	1.975	1.917	1.874	1.840	1.812	1.790	1.772	1.756	1.743	1.731	1.721	1.712	1.705	1.698
3		6.039	4.242	3.583	3.241	3.037	2.903	2.808	2.739	2.685	2.643	2.609	2.581	2.558	2.538	2.521	2.506	2.494	2.482	2.472
4		2.232	1.860	1.647	1.524	1.441	1.382	1.338	1.304	1.277	1.255	1.237	1.221	1.208	1.197	1.188	1.179	1.172	1.165	1.159
4		2.879	2.352	2.059	1.895	1.786	1.710	1.654	1.611	1.578	1.551	1.528	1.510	1.494	1.481	1.469	1.459	1.450	1.443	1.436
4		4.801	3.590	3.060	2.769	2.587	2.463	2.375	2.309	2.258	2.217	2.185	2.158	2.135	2.116	2.099	2.085	2.072	2.061	2.051
5		2.092	1.731	1.525	1.405	1.322	1.263	1.219	1.184	1.156	1.134	1.115	1.099	1.085	1.074	1.064	1.055	1.047	1.040	1.033
5		2.661	2.177	1.896	1.738	1.631	1.556	1.499	1.456	1.422	1.394	1.372	1.352	1.336	1.322	1.310	1.300	1.290	1.282	1.275
5		4.243	3.259	2.771	2.499	2.328	2.209	2.124	2.060	2.010	1.970	1.938	1.911	1.888	1.869	1.853	1.838	1.826	1.815	1.805
6		2.005	1.645	1.442	1.322	1.240	1.180	1.135	1.100	1.072	1.049	1.029	1.013	0.999	0.987	0.976	0.967	0.959	0.951	0.945
6		2.534	2.065	1.789	1.631	1.524	1.449	1.392	1.348	1.313	1.285	1.261	1.241	1.224	1.210	1.197	1.186	1.176	1.168	1.160
6		3.933	3.063	2.592	2.328	2.158	2.041	1.955	1.890	1.839	1.799	1.765	1.738	1.715	1.695	1.678	1.663	1.650	1.638	1.628
7		1.945	1.584	1.384	1.264	1.181	1.121	1.075	1.039	1.010	0.987	0.967	0.950	0.936	0.923	0.912	0.902	0.894	0.886	0.879
7		2.452	1.988	1.714	1.557	1.449	1.372	1.315	1.270	1.234	1.205	1.181	1.160	1.143	1.128	1.115	1.103	1.093	1.084	1.076
7		3.740	2.934	2.472	2.212	2.041	1.923	1.836	1.770	1.718	1.676	1.642	1.614	1.590	1.569	1.552	1.536	1.523	1.511	1.500
8		1.902	1.540	1.340	1.219	1.136	1.075	1.029	0.992	0.963	0.939	0.918	0.901	0.886	0.874	0.862	0.852	0.843	0.836	0.828
8		2.393	1.931	1.659	1.501	1.392	1.315	1.256	1.211	1.174	1.144	1.119	1.098	1.080	1.065	1.051	1.039	1.029	1.019	1.011
8		3.610	2.843	2.386	2.128	1.956	1.836	1.748	1.681	1.627	1.584	1.549	1.520	1.495	1.474	1.455	1.439	1.425	1.413	1.402
9		1.869	1.506	1.307	1.185	1.101	1.039	0.992	0.955	0.926	0.901	0.880	0.863	0.847	0.834	0.823	0.812	0.803	0.795	0.788
9		2.350	1.888	1.617	1.458	1.349	1.270	1.211	1.164	1.127	1.097	1.071	1.050	1.031	1.015	1.001	0.989	0.978	0.968	0.959
9		3.518	2.775	2.322	2.065	1.892	1.771	1.681	1.612	1.557	1.513	1.477	1.447	1.421	1.399	1.380	1.363	1.349	1.336	1.324
10		1.844	1.478	1.280	1.158	1.072	1.011	0.963	0.926	0.895	0.870	0.849	0.831	0.816	0.802	0.790	0.780	0.770	0.762	0.754
10		2.317	1.854	1.584	1.425	1.314	1.235	1.174	1.127	1.089	1.058	1.032	1.010	0.991	0.975	0.960	0.948	0.936	0.926	0.917
10		3.449	2.722	2.272	2.016	1.842	1.719	1.628	1.557	1.502	1.457	1.419	1.388	1.362	1.339	1.319	1.302	1.287	1.273	1.261
11		1.823	1.456	1.258	1.135	1.049	0.987	0.939	0.901	0.870	0.845	0.823	0.805	0.789	0.775	0.763	0.753	0.743	0.734	0.727
11		2.290	1.827	1.557	1.397	1.286	1.206	1.145	1.097	1.058	1.026	0.999	0.977	0.958	0.941	0.926	0.913	0.902	0.892	0.882
11		3.396	2.680	2.233	1.977	1.802	1.678	1.585	1.513	1.457	1.410	1.372	1.340	1.313	1.290	1.269	1.251	1.236	1.222	1.209
12		1.806	1.438	1.240	1.116	1.030	0.967	0.919	0.880	0.849	0.823	0.802	0.783	0.767	0.753	0.741	0.730	0.720	0.711	0.703
12		2.268	1.805	1.535	1.375	1.263	1.182	1.120	1.071	1.032	1.000	0.973	0.950	0.930	0.913	0.898	0.885	0.873	0.862	0.853
12		3.354	2.646	2.201	1.946	1.770	1.644	1.550	1.477	1.419	1.372	1.333	1.300	1.273	1.249	1.228	1.209	1.193	1.179	1.166
13		1.792	1.423	1.225	1.101	1.014	0.950	0.901	0.863	0.831	0.805	0.783	0.764	0.748	0.734	0.721	0.710	0.700	0.691	0.683
13		2.250	1.786	1.517	1.356	1.243	1.161	1.099	1.050	1.012	0.977	0.950	0.927	0.906	0.889	0.874	0.860	0.848	0.837	0.827
13		3.320	2.618	2.174	1.919	1.742	1.616	1.521	1.447	1.388	1.340	1.301	1.267	1.238	1.214	1.192	1.174	1.157	1.142	1.129
14		1.780	1.410	1.212	1.087	1.000	0.936	0.887	0.848	0.816	0.789	0.767	0.748	0.731	0.717	0.704	0.693	0.683	0.674	0.665
14		2.235	1.770	1.501	1.340	1.226	1.144	1.081	1.031	0.991	0.958	0.930	0.907	0.886	0.868	0.853	0.839	0.826	0.815	0.805
14		3.292	2.594	2.152	1.897	1.720	1.593	1.497	1.422	1.362	1.313	1.273	1.238	1.209	1.184	1.162	1.143	1.126	1.111	1.097
15		1.770	1.399	1.201	1.076	0.988	0.924	0.874	0.834	0.802	0.776	0.753	0.734	0.717	0.702	0.689	0.678	0.668	0.658	0.650
15		2.222	1.756	1.488	1.326	1.212	1.129	1.066	1.015	0.975	0.941	0.913	0.889	0.868	0.850	0.834	0.820	0.808	0.796	0.786
15		3.268	2.573	2.132	1.878	1.700	1.572	1.476	1.400	1.339	1.290	1.249	1.214	1.184	1.158	1.136	1.116	1.099	1.083	1.069
16		1.761	1.390	1.191	1.065	0.977	0.913	0.863	0.823	0.790	0.763	0.741	0.721	0.704	0.689	0.676	0.665	0.654	0.645	0.636
16		2.211	1.745	1.476	1.314	1.199	1.116	1.052	1.002	0.961	0.927	0.898	0.874	0.853	0.834	0.818	0.804	0.791	0.780	0.769
16		3.248	2.555	2.116	1.862	1.683	1.555	1.457	1.381	1.320	1.270	1.228	1.192	1.162	1.136	1.113	1.093	1.075	1.059	1.045
17		1.753	1.381	1.183	1.057	0.968	0.903	0.853	0.813	0.780	0.753	0.730	0.710	0.693	0.678	0.665	0.653	0.642	0.633	0.624
17		2.201	1.734	1.466	1.303	1.188	1.105	1.040	0.989	0.948	0.914	0.885	0.860	0.839	0.820	0.804	0.789	0.776	0.765	0.754
17		3.230	2.540	2.101	1.847	1.668	1.540	1.441	1.365	1.303	1.252	1.210	1.174	1.143	1.116	1.093	1.073	1.054	1.038	1.024
18		1.746	1.374	1.175	1.049	0.960	0.895	0.844	0.804	0.771	0.743	0.720	0.700	0.683	0.668	0.654	0.642	0.632	0.622	0.613
18		2.192	1.725	1.457	1.294	1.179	1.095	1.030	0.978	0.937	0.902	0.873	0.848	0.827	0.808	0.791	0.776	0.763	0.752	0.741
18		3.215	2.526	2.089	1.835	1.655	1.526	1.428	1.350	1.288	1.236	1.193	1.157	1.126	1.099	1.075	1.054	1.036	1.020	1.005
19		1.740	1.367	1.168	1.042	0.953	0.887	0.836	0.795	0.762	0.735	0.711	0.691	0.674	0.658	0.645	0.633	0.622	0.612	0.603
19		2.185	1.717	1.449	1.286	1.170	1.086	1.020	0.969	0.927	0.892	0.862	0.837	0.815	0.796	0.780	0.765	0.752	0.740	0.729
19		3.201	2.514	2.077	1.824	1.644	1.514	1.415	1.337	1.274	1.222	1.179	1.142	1.111	1.083	1.059	1.038	1.020	1.003	0.988
20		1.734	1.361	1.162	1.035	0.946	0.880	0.829	0.788	0.755	0.727	0.703	0.683	0.665	0.650	0.636	0.624	0.613	0.603	0.594
20		2.178	1.710	1.442	1.278	1.162	1.077	1.012	0.960	0.918	0.883	0.853	0.827	0.806	0.786	0.769	0.754	0.741	0.729	0.718
20		3.189	2.503	2.067	1.814	1.634	1.504	1.404	1.326	1.262	1.210	1.166	1.129	1.097	1.070	1.045	1.024	1.005	0.988	0.972

Πίνακας 3.4: Άνω 0.05-, 0.025- και 0.005-ποσοστιαία σημεία (1η, 2η και 3η γραμμή αντίστοιχα) της T_2 για $2 \leq n_1 \leq n_2 \leq 20$ (πάνω από την διαγώνιο και συμπεριλαμβανομένης και της διαγωνίου) και της T_3 για $2 \leq n_2 \leq n_1 \leq 20$ (κάτω από την διαγώνιο και συμπεριλαμβανομένης και της διαγωνίου).

Πίνακες

		$n_1 = 2, n_2 = 3$						$n_1 = 2, n_2 = 4$					
ξ	α	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
0.5	10%	.1293	.1292	.1292	.1283	.1216	.1241	.1326	.1338	.1327	.1324	.1239	.1251
	5%	.0672	.0672	.0673	.0672	.0628	.0639	.0693	.0702	.0700	.0694	.0637	.0643
	1%	.0140	.0139	.0140	.0139	.0131	.0132	.0146	.0147	.0147	.0144	.0134	.0134
1	10%	.2084	.2086	.2082	.2045	.1766	.1867	.2250	.2267	.2227	.2225	.1926	.1964
	5%	.1181	.1176	.1178	.1165	.0944	.1007	.1277	.1309	.1297	.1284	.1046	.1068
	1%	.0268	.0267	.0267	.0263	.0201	.0217	.0306	.0308	.0308	.0302	.0236	.0236
1.5	10%	.3190	.3193	.3181	.3117	.2525	.2731	.3528	.3561	.3489	.3498	.2926	.8985
	5%	.1957	.1958	.1960	.1924	.1388	.1550	.2204	.2270	.2239	.2223	.1694	.1734
	1%	.0497	.0497	.0498	.0490	.0304	.0357	.0603	.0619	.0620	.0607	.0412	.0406
2	10%	.4400	.4413	.4393	.4313	.3369	.3702	.4886	.4954	.4865	.4882	.4075	.4193
	5%	.2919	.2921	.2923	.2863	.1894	.2193	.3357	.3452	.3399	.3384	.2510	.2578
	1%	.0835	.0837	.0840	.0824	.0425	.0545	.1066	.1101	.1102	.1081	.0665	.0654
3	10%	.6595	.6627	.6602	.6506	.4997	.5629	.7167	.7317	.7241	.7255	.6304	.6467
	5%	.4971	.4988	.4985	.4897	.2963	.3632	.5687	.5861	.5790	.5781	.4384	.4489
	1%	.1804	.1811	.1820	.1786	.0685	.1041	.2415	.2515	.2515	.2469	.1411	.1373
5	10%	.9015	.9075	.9069	.9014	.7331	.8253	.9319	.9472	.9462	.9457	.8986	.9100
	5%	.8018	.8059	.8057	.7977	.4808	.6230	.8643	.8839	.8813	.8805	.7548	.7679
	1%	.4328	.4349	.4373	.4288	.1194	.2318	.5678	.5875	.5875	.5812	.3479	.3381
		$n_1 = 3, n_2 = 3$						$n_1 = 4, n_2 = 7$					
ξ	α	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
0.5	10%	.1378	.1364	.1364	.1330	.1245	.1332	.1724	.1678	.1674	.1637	.1568	.1634
	5%	.0762	.0739	.0739	.0714	.0630	.0688	.0977	.0945	.0941	.0923	.0853	.0894
	1%	.0170	.0168	.0168	.0167	.0129	.0142	.0255	.0235	.0234	.0222	.0194	.0206
1	10%	.2391	.2357	.2357	.2236	.1907	.2233	.3627	.3519	.3507	.3421	.3164	.3366
	5%	.1518	.1434	.1434	.1341	.0980	.1218	.2433	.2324	.2310	.2229	.1949	.2122
	1%	.0409	.0398	.0398	.0384	.0196	.0252	.0872	.0777	.0768	.0714	.0528	.0596
1.5	10%	.3774	.3732	.3732	.3513	.2805	.3487	.5857	.5801	.5787	.5662	.5299	.5593
	5%	.2639	.2497	.2497	.2314	.1464	.2023	.4515	.4387	.4366	.4239	.3665	.4009
	1%	.0862	.0829	.0829	.0789	.0285	.0417	.2126	.1931	.1910	.1781	.1194	.1416
2	10%	.5221	.5197	.5197	.4920	.3754	.4862	.7648	.7703	.7694	.7582	.7222	.7534
	5%	.3934	.3767	.3767	.3502	.1957	.2988	.6522	.6476	.6456	.6307	.5591	.6057
	1%	.1541	.1469	.1469	.1387	.0376	.0620	.3860	.3625	.3592	.3385	.2213	.2679
3	10%	.7607	.7614	.7614	.7355	.5369	.7230	.9418	.9535	.9534	.9481	.9333	.9493
	5%	.6389	.6266	.6266	.5937	.2720	.4975	.8963	.9056	.9050	.8959	.8439	.8841
	1%	.3337	.3207	.3207	.3030	.0482	.1048	.7186	.7109	.7078	.6848	.4799	.5741
5	10%	.9608	.9628	.9628	.9539	.7049	.9443	.9977	.9992	.9993	.9990	.9984	.9992
	5%	.9113	.9117	.9117	.8935	.3047	.7794	.9949	.9975	.9975	.9967	.9916	.9966
	1%	.6898	.6783	.6783	.6538	.0412	.1685	.9721	.9778	.9775	.9724	.8531	.9308

Πίνακας 3.5: Ισχύς των ελέγχων για την ισότητα των παραμέτρων θέσης που βασίζονται στις $T_j, j = 1, \dots, 6$, για διάφορα μεγέθη δείγματος και διάφορες τιμές του $\xi = (\mu_1 - \mu_2)/\sigma$. Με έντονη γραφή συμβολίζεται η μέγιστη ισχύς.

Συμπερασματολογία για τη διαφορά των παραμέτρων θέσης

		$n_1 = 5, n_2 = 10$						$n_1 = 6, n_2 = 12$					
ξ	α	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
0.5	10%	.2001	.1908	.1904	.1797	.1730	.1864	.2202	.2120	.2116	.2069	.2011	.2072
	5%	.1184	.1099	.1095	.0997	.0926	.1051	.1341	.1250	.1246	.1202	.1139	.1198
	1%	.0324	.0287	.0285	.0250	.0198	.0248	.0390	.0340	.0338	.0314	.0275	.0300
1	10%	.4474	.4327	.4317	.4051	.3830	.4209	.5103	.4990	.4982	.4887	.4739	.4880
	5%	.3222	.2994	.2980	.2664	.2358	.2804	.3809	.3601	.3589	.3472	.3225	.3422
	1%	.1296	.1100	.1088	.0895	.0585	.0867	.1698	.1439	.1428	.1317	.1042	.1194
1.5	10%	.6996	.6989	.6980	.6706	.6425	.6870	.7698	.7773	.7768	.7684	.7555	.7694
	5%	.5818	.5639	.5621	.5194	.4630	.5362	.6644	.6580	.6568	.6435	.6113	.6377
	1%	.3223	.2869	.2841	.2389	.1458	.2254	.4148	.3758	.3735	.3515	.2775	.3166
2	10%	.8646	.8751	.8748	.8555	.8349	.8695	.9131	.9271	.9270	.9220	.9166	.9246
	5%	.7846	.7858	.7847	.7492	.6910	.7641	.8552	.8652	.8647	.8562	.8344	.8539
	1%	.5559	.5226	.5191	.4576	.2881	.4305	.6680	.6466	.6443	.6207	.5196	.5768
3	10%	.9815	.9873	.9873	.9823	.9775	.9870	.9964	.9958	.9958	.9962	.9963	.9961
	5%	.9619	.9704	.9703	.9587	.9365	.9665	.9826	.9893	.9893	.9873	.9847	.9886
	1%	.8746	.8741	.8725	.8325	.6277	.8077	.9355	.9436	.9431	.9346	.8813	.9181
5	10%	.9999	1	1	.9999	.9998	1	1	1	1	1	1	1
	5%	.9995	.9998	.9998	.9996	.9990	.9998	.9999	1	1	1	1	1
	1%	.9963	.9979	.9979	.9958	.9600	.9944	.9992	.9997	.9997	.9996	.9985	.9995
		$n_1 = 7, n_2 = 14$						$n_1 = 10, n_2 = 10$					
ξ	α	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
0.5	10%	.2448	.2332	.2329	.2184	.2117	.2301	.2542	.2470	.2470	.2391	.2339	.2437
	5%	.1518	.1404	.1400	.1276	.1200	.1368	.1602	.1526	.1526	.1454	.1395	.1485
	1%	.0462	.0397	.0395	.0343	.0287	.0361	.0502	.0462	.0462	.0428	.0380	.0428
1	10%	.5710	.5602	.5596	.5319	.5140	.5533	.5913	.5903	.5903	.5774	.5655	.5842
	5%	.4417	.4192	.4183	.3822	.3533	.4059	.4660	.4543	.4543	.4372	.4166	.4423
	1%	.2135	.1811	.1800	.1499	.1122	.1566	.2334	.2137	.2137	.1960	.1635	.1928
1.5	10%	.8289	.8374	.8372	.8148	.8006	.8340	.8483	.8605	.8605	.8512	.8441	.8577
	5%	.7402	.7362	.7355	.7003	.6641	.7244	.7648	.7705	.7705	.7556	.7348	.7617
	1%	.5037	.4642	.4623	.4048	.3067	.4141	.5388	.5201	.5201	.4915	.4210	.4824
2	10%	.9479	.9581	.9581	.9469	.9407	.9575	.9580	.9680	.9680	.9637	.9614	.9675
	5%	.9073	.9172	.9170	.8963	.8747	.9130	.9240	.9350	.9350	.9270	.9176	.9320
	1%	.7627	.7481	.7466	.6926	.5687	.7011	.7942	.7946	.7946	.7723	.7007	.7650
3	10%	.9970	.9986	.9986	.9974	.9968	.9987	.9982	.9993	.9993	.9989	.9988	.9993
	5%	.9932	.9962	.9963	.9933	.9908	.9962	.9958	.9978	.9978	.9970	1	.9978
	1%	.9705	.9762	.9761	.9626	.9144	.9680	.9794	.9847	.9847	.9805	.9633	.9809
5	10%	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	5%	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1%	.9999	1	1	.9999	.9992	1	1	1	1	1	1	1

Πίνακας 3.6: Ισχύς των ελέγχων για την ισότητα των παραμέτρων θέσης που βασίζονται στις $T_j, j = 1, \dots, 6$, για διάφορα μεγέθη δείγματος και διάφορες τιμές του $\xi = (\mu_1 - \mu_2)/\sigma$. Με έντονη γραφή συμβολίζεται η μέγιστη ισχύς.

		$n_1 = 2, n_2 = 3$			$n_1 = 2, n_2 = 4$			$n_1 = 3, n_2 = 3$			$n_1 = 4, n_2 = 7$		
$1 - \alpha$		T_1	T_2	T_3	T_1	T_2	T_3	T_1	T_2	T_3	T_1	T_2	T_3
90%		5.049	4.989	5.001	4.576	4.415	4.464	4.183	4.178	4.178	2.790	2.764	2.768
95%		6.703	6.646	6.642	5.939	5.716	5.757	5.271	5.338	5.338	3.428	3.420	3.428
99%		12.220	12.130	12.080	9.923	9.620	9.603	8.374	8.484	8.484	4.874	4.926	4.944
		$n_1 = 5, n_2 = 10$			$n_1 = 6, n_2 = 12$			$n_1 = 7, n_2 = 14$			$n_1 = 10, n_2 = 10$		
$1 - \alpha$		T_1	T_2	T_3	T_1	T_2	T_3	T_1	T_2	T_3	T_1	T_2	T_3
90%		2.319	2.312	2.315	2.078	2.059	2.060	1.874	1.871	1.872	1.809	1.791	1.791
95%		2.822	2.844	2.849	2.518	2.522	2.525	2.269	2.286	2.288	2.185	2.179	2.179
99%		3.927	4.019	4.033	3.463	3.531	3.539	3.102	3.180	3.185	2.976	3.003	3.003

Πίνακας 3.7: Αναμενόμενο μήκος (διαιρεμένο με σ) των διαστημάτων εμπιστοσύνης για τη διαφορά $\mu_1 - \mu_2$ που βασίζονται στις T_1, T_2, T_3 για διάφορα μεγέθη δείγματος. Με έντονη γραφή συμβολίζεται το διάστημα με το ελάχιστο αναμενόμενο μήκος.

Συμπερασματολογία για τη διαφορά των παραμέτρων θέσης

$n_1 = 3, n_2 = 3$													
		$\rho = 2$			$\rho = 5$			$\rho = 10$			$\rho = 50$		
ξ_1	α	T_1	T_2	T_3	T_1	T_2	T_3	T_1	T_2	T_3	T_1	T_2	T_3
0	10%	.1141	.1140	.1140	.1613	.1585	.1585	.1990	.1931	.1931	.2425	.2312	.2312
	5%	.0590	.0592	.0592	.0905	.0917	.0917	.1178	.1193	.1193	.1540	.1529	.1529
	1%	.0132	.0133	.0133	.0257	.0257	.0257	.0376	.0379	.0379	.0571	.0577	.0577
1	10%	.1806	.1779	.1779	.1794	.1754	.1754	.2041	.1979	.1979	.2428	.2318	.2318
	5%	.1069	.1031	.1031	.1051	.1046	.1046	.1229	.1234	.1234	.1543	.1531	.1531
	1%	.0273	.0267	.0267	.0304	.0303	.0303	.0395	.0397	.0397	.0573	.0579	.0579
2	10%	.3435	.3377	.3377	.2296	.2231	.2231	.2201	.2125	.2125	.2435	.2322	.2322
	5%	.2370	.2250	.2250	.1455	.1413	.1413	.1360	.1345	.1345	.1549	.1537	.1537
	1%	.0768	.0741	.0741	.0451	.0446	.0446	.0449	.0449	.0449	.0576	.0583	.0583
5	10%	.8128	.8123	.8123	.4718	.4591	.4591	.3133	.2996	.2996	.2492	.2368	.2368
	5%	.7054	.6953	.6953	.3583	.3419	.3419	.2177	.2083	.2083	.1597	.1579	.1579
	1%	.4106	.3973	.3973	.1532	.1491	.1491	.0819	.0812	.0812	.0596	.0605	.0605
$n_1 = 6, n_2 = 12$													
		$\rho = 2$			$\rho = 5$			$\rho = 10$			$\rho = 50$		
ξ_1	α	T_1	T_2	T_3	T_1	T_2	T_3	T_1	T_2	T_3	T_1	T_2	T_3
0	10%	.0782	.0554	.0538	.0930	.0452	.0428	.1162	.0492	.0461	.1515	.0569	.0530
	5%	.0364	.0230	.0222	.0462	.0180	.0169	.0621	.0206	.0190	.0878	.0253	.0231
	1%	.0059	.0030	.0028	.0091	.0022	.0020	.0142	.0028	.0025	.0237	.0038	.0033
1	10%	.2882	.2249	.2204	.1496	.0790	.0751	.1333	.0584	.0547	.1528	.0573	.0536
	5%	.1833	.1260	.1226	.0831	.0356	.0333	.0737	.0252	.0233	.0886	.0254	.0232
	1%	.0551	.0298	.0284	.0196	.0055	.0051	.0178	.0039	.0035	.0240	.0038	.0034
2	10%	.7012	.6378	.6318	.3110	.1871	.1798	.1845	.0861	.0813	.1553	.0587	.0546
	5%	.5754	.4798	.4723	.2025	.0995	.0942	.1098	.0404	.0375	.0903	.0261	.0239
	1%	.3068	.2014	.1948	.0644	.0211	.0194	.0304	.0072	.0065	.0247	.0041	.0035
5	10%	.9982	.9985	.9984	.8453	.7460	.7367	.4864	.2958	.2849	.1739	.0673	.0627
	5%	.9954	.9948	.9944	.7602	.5973	.5841	.3620	.1762	.1672	.1040	.0308	.0282
	1%	.9745	.9572	.9543	.5158	.2894	.2759	.1555	.0473	.0434	.0299	.0052	.0045
$n_1 = 10, n_2 = 10$													
		$\rho = 2$			$\rho = 5$			$\rho = 10$			$\rho = 50$		
ξ_1	α	T_1	T_2	T_3	T_1	T_2	T_3	T_1	T_2	T_3	T_1	T_2	T_3
0	10%	.1168	.1161	.1161	.1643	.1622	.1622	.1982	.1934	.1934	.2355	.2256	.2256
	5%	.0618	.0619	.0619	.0977	.0975	.0975	.1245	.1226	.1226	.1563	.1507	.1507
	1%	.0142	.0144	.0144	.0301	.0303	.0303	.0436	.0432	.0432	.0616	.0600	.0600
1	10%	.3717	.3614	.3614	.2326	.2244	.2244	.2172	.2106	.2106	.2364	.2265	.2265
	5%	.2597	.2466	.2466	.1500	.1441	.1441	.1396	.1358	.1358	.1569	.1511	.1511
	1%	.1021	.0929	.0929	.0538	.0515	.0515	.0515	.0499	.0499	.0618	.0604	.0604
2	10%	.7760	.7810	.7810	.4057	.3869	.3869	.2742	.2604	.2604	.2391	.2290	.2290
	5%	.6778	.6739	.6739	.2983	.2792	.2792	.1858	.1762	.1762	.1590	.1529	.1529
	1%	.4431	.4188	.4188	.1368	.1240	.1240	.0756	.0712	.0712	.0632	.0612	.0612
5	10%	.9988	.9995	.9995	.8705	.8768	.8768	.5570	.5347	.5347	.2577	.2440	.2440
	5%	.9974	.9988	.9988	.8093	.8097	.8097	.4514	.4251	.4251	.1738	.1653	.1653
	1%	.9884	.9921	.9921	.6388	.6174	.6174	.2608	.2333	.2333	.0720	.0687	.0687

Πίνακας 3.8: Ισχύς των ελέγχων για την ισότητα των παραμέτρων θέσης όταν $\sigma_1 \neq \sigma_2$ που βασίζονται στις T_1, T_2, T_3 για διάφορα μεγέθη δείγματος και διάφορες τιμές των $\xi_1 = (\mu_1 - \mu_2)/\sigma_1, \rho = \sigma_2/\sigma_1$. Με έντονη γραφή συμβολίζεται η μέγιστη ισχύς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Συμπερασματολογία για τον λόγο των παραμέτρων κλίμακας δύο κατανομών Laplace

4.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα κατασκευάσουμε ακριβείς ελέγχους και διαστήματα εμπιστοσύνης για τη σύγκριση των παραμέτρων κλίμακας δύο κατανομών Laplace βασιζόμενοι σε αντίστοιχα ανεξάρτητα δείγματα. Το πρόβλημα αυτό περιγράφεται στην Ενότητα 4.2. Οι στατιστικές συναρτήσεις βασίζονται είτε στους ΕΜΠ είτε στους BLUE των παραμέτρων. Στις Ενότητες 4.3, 4.4 και 4.5 θεωρούμε τον έλεγχο λόγου πιθανοφανειών (ΕΛΠ) και τους ελέγχους που βασίζονται στον λόγο των ΕΜΠ και των BLUE των σ_1, σ_2 . Δεσμεύουμε σε συγκεκριμένες ποσότητες, όπως και στο Κεφάλαιο 3, και εκφράζουμε τις ακριβείς τους κατανομές ως μείξεις κατανομών λόγων γραμμικών συνδυασμών ανεξάρτητων τυπικών εκθετικών τυχαίων μεταβλητών. Έτσι, αφού έχουμε την συνάρτηση κατανομής των στατιστικών συναρτήσεων σε κλειστή μορφή, υπολογίζουμε διάφορα ποσοστιαία σημεία. Στην Ενότητα 4.6 κατασκευάζουμε αριθμητικά αμερόληπτους ελέγχους και αμερόληπτα διαστήματα εμπιστοσύνης για τον λόγο σ_1/σ_2 και συγκρίνουμε την ισχύ των ελέγχων που κατασκευάστηκαν στις Ενότητες 4.3, 4.4 και 4.5 και 4.6. Επί πλέον στη συγκεκριμένη ενότητα παρουσιάζεται αναλυτικά όλη η προσπάθεια κατασκευής βελτιωμένων διαστημάτων με ακριβείς διαδικασίες και όχι με τη χρήση αριθμητικών μεθόδων. Τέλος, στην Ενότητα 4.8 παραθέτουμε ένα αριθμητικό παράδειγμα.

4.2 Σύγκριση παραμέτρων κλίμακας

Έστω

$$X = (X_1, \dots, X_{n_1}), Y = (Y_1, \dots, Y_{n_2}), \quad n_1, n_2 \geq 2, \quad (4.1)$$

δύο ανεξάρτητα τυχαία δείγματα από τις κατανομές $\mathcal{L}(\mu_1, \sigma_1)$, $\mathcal{L}(\mu_2, \sigma_2)$, αντίστοιχα, και

$$X_{1:n_1} < X_{2:n_1} < \dots < X_{n_1:n_1}, \quad Y_{1:n_2} < Y_{2:n_2} < \dots < Y_{n_2:n_2}$$

οι αντίστοιχες διατεταγμένες στατιστικές συναρτήσεις. Θεωρούμε το πρόβλημα ελέγχου

$$H_0 : \sigma_1/\sigma_2 = \rho_0 \quad \text{κατά} \quad H_1 : \sigma_1/\sigma_2 \neq \rho_0.$$

Στα επόμενα θα θεωρήσουμε μόνο την περίπτωση $\rho_0 = 1$. Αν $\rho_0 \neq 1$ τότε το πρόβλημα ανάγεται στην πρώτη περίπτωση πολλαπλασιάζοντας τα Y_i με ρ_0 . Συζητάμε τρεις ακριβείς ελέγχους που βασίζονται στους λόγους αντίστοιχων εκτιμητών των σ_1, σ_2 και συγκεκριμένα των ΕΜΠ και των BLUE. Ο πρώτος είναι ο έλεγχος γενικευμένου λόγου πιθανοφαινιών. Εκφράζοντας την κατανομή των στατιστικών συναρτήσεων μέσω κλειστών τύπων υπολογίζουμε ακριβώς τα κρίσιμα σημεία των ελέγχων.

4.3 Έλεγχος λόγου πιθανοφαινιών

Θεωρούμε τα δεδομένα στην (4.1) και θέτουμε $n = n_1 + n_2$, $m_i = [(n_i + 1)/2]$, $i = 1, 2$. Η συνάρτηση πιθανοφάνειας του $(\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2)$ είναι

$$L(\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2 | X, Y) = \frac{1}{2^{n_1+n_2} \sigma_1^{n_1} \sigma_2^{n_2}} e^{-\frac{1}{\sigma_1} \sum_{i=1}^{n_1} |X_i - \mu_1| - \frac{1}{\sigma_2} \sum_{i=1}^{n_2} |Y_i - \mu_2|}, \quad \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}, \sigma_1, \sigma_2 > 0,$$

και είναι εύκολο να δει κανείς ότι μεγιστοποιείται στο σημείο $(\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2)$, όπου $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2$ είναι οποιεσδήποτε διάμεσοι των X, Y , αντίστοιχα, και

$$\hat{\sigma}_1 = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} |X_i - \hat{\mu}_1| = \frac{1}{n_1} \left(\sum_{i=m_1+1}^{n_1} X_{i:n_1} - \sum_{i=1}^{[n_1/2]} X_{i:n_1} \right),$$

$$\hat{\sigma}_2 = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} |Y_i - \hat{\mu}_2| = \frac{1}{n_2} \left(\sum_{i=m_2+1}^{n_2} Y_{i:n_2} - \sum_{i=1}^{[n_2/2]} Y_{i:n_2} \right)$$

είναι οι ΕΜΠ των σ_1, σ_2 . Υπό τη μηδενική υπόθεση $\sigma_1 = \sigma_2$ η πιθανοφάνεια μεγιστοποιείται στο σημείο $(\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\sigma}, \hat{\sigma})$ όπου

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^{n_1} |X_i - \hat{\mu}_1| + \sum_{i=1}^{n_2} |Y_i - \hat{\mu}_2| \right\} = \frac{n_1 \hat{\sigma}_1 + n_2 \hat{\sigma}_2}{n}.$$

Κάνοντας τις απαραίτητες πράξεις καταλήγουμε στο ότι ο γενικευμένος λόγος πιθανοφαινιών είναι

$$\frac{L(\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2 | X, Y)}{L(\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\sigma}, \hat{\sigma} | X, Y)} = \frac{\hat{\sigma}^n}{\hat{\sigma}_1^{n_1} \hat{\sigma}_2^{n_2}} \propto \frac{(n_2/n_1 + \hat{\sigma}_1/\hat{\sigma}_2)^n}{(\hat{\sigma}_1/\hat{\sigma}_2)^{n_1}},$$

4.4. Έλεγχος ίσων ουρών που βασίζεται στους ΕΜΠ

Η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται αν

$$\frac{L(\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2 | X, Y)}{L(\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\sigma}, \hat{\sigma} | X, Y)} > k,$$

όπου k είναι μία σταθερά. Ισοδύναμα, η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται αν

$$\frac{(\hat{\sigma}_1/\hat{\sigma}_2)^{n_1}}{(n_2/n_1 + \hat{\sigma}_1/\hat{\sigma}_2)^n} < c, \quad (4.2)$$

όπου $c = 1/k$. Έστω

$$g(t) = \frac{t^{n_1}}{(n_2/n_1 + t)^n}.$$

Τότε

$$g'(t) \propto n_2 t^{n_1-1} (n_2/n_1 + t)^{-n} (1-t).$$

Η g είναι γνησίως αύξουσα για $t < 1$ και γνησίως φθίνουσα για $t > 1$ άρα παρουσιάζει μέγιστο για $t = 1$. Αυτό συνεπάγεται ότι ισχύει η (4.2) αν ο λόγος είναι μικρότερος του c_1 ή μεγαλύτερος του c_2 , όπου $c_1 < 1 < c_2$ σταθερές που ικανοποιούν τη σχέση $\frac{c_1^{n_1}}{(n_2/n_1 + c_1)^n} = \frac{c_2^{n_1}}{(n_2/n_1 + c_2)^n}$.

Συνεπώς, απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση αν ο λόγος

$$R_1 := \hat{\sigma}_1/\hat{\sigma}_2 \quad (4.3)$$

πάρει είτε μικρή είτε μεγάλη τιμή. Επομένως, η $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$ απορρίπτεται για μικρές ή μεγάλες τιμές του λόγου των ΕΜΠ των σ_1, σ_2 .

Για να υπολογίσουμε τις σταθερές c_1, c_2 πρέπει να λύσουμε το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{aligned} F(c_2) - F(c_1) &= 1 - \alpha \\ \frac{c_1^{n_1}}{(n_2/n_1 + c_1)^n} &= \frac{c_2^{n_1}}{(n_2/n_1 + c_2)^n}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

όπου F είναι η συνάρτηση κατανομής της $R_1 := \hat{\sigma}_1/\hat{\sigma}_2$ και $c_1 < 1 < c_2$. Η επίλυση του συστήματος (4.4) και συνεπώς η εύρεση των c_1, c_2 συζητάται παρακάτω, μετά τον υπολογισμό της συνάρτησης κατανομής F .

4.4 Έλεγχος ίσων ουρών που βασίζεται στους ΕΜΠ

Μιμούμενοι τον παραπάνω λογικό κανόνα θεωρούμε την ίδια στατιστική συνάρτηση R_1 με τη διαφορά ότι γι' αυτόν τον έλεγχο θα θεωρήσουμε ως κρίσιμα σημεία τα κάτω και άνω $\alpha/2$ ποσοστιαία σημεία της R_1 . Ομοίως και αυτός ο έλεγχος, απορρίπτει την $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$ για μικρές ή μεγάλες τιμές του λόγου των ΕΜΠ των σ_1, σ_2 .

4.5 Έλεγχος ίσων ουρών που βασίζεται στους BLUE

Μία εναλλακτική επιλογή θα μπορούσε να είναι ο έλεγχος που βασίζεται στον αντίστοιχο λόγο των BLUE $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2$ των σ_1, σ_2 ,

$$R_2 = \tilde{\sigma}_1 / \tilde{\sigma}_2.$$

Προκειμένου να βρούμε κρίσιμα σημεία για τους παραπάνω ελέγχους θα χρειαστούμε την ακριβή κατανομή των αντίστοιχων στατιστικών συναρτήσεων. Επειδή τόσο οι BLUE όσο και οι ΕΜΠ των σ_1, σ_2 είναι γραμμικοί συνδυασμοί των διατεταγμένων στατιστικών συναρτήσεων που προκύπτουν από τα δύο δείγματα, θα διατυπώσουμε ένα γενικότερο αποτέλεσμα το οποίο καλύπτει όλες τις περιπτώσεις.

Πρόταση 4.1. Έστω δεδομένα όπως στην (4.1) και $a_1, \dots, a_{n_1}, b_1, \dots, b_{n_2}$ κάποιες σταθερές. Τότε, για οποιοδήποτε $x \in \mathbb{R}$,

$$P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n_1} a_i X_{i:n_1}}{\sum_{i=1}^{n_2} b_i Y_{i:n_2}} \leq x\right\} = \frac{1}{2^n} \sum_{d_1=0}^{n_1} \sum_{d_2=0}^{n_2} \binom{n_1}{d_1} \binom{n_2}{d_2} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n_1} s_i(d_1) U_i}{\sum_{i=1}^{n_2} t_i(d_2) V_i} \leq \frac{\sigma_2}{\sigma_1} x\right\} \quad (4.5)$$

όπου $U_1, \dots, U_{n_1}, V_1, \dots, V_{n_2}$, είναι ανεξάρτητες τυπικές εκθετικές τυχαίες μεταβλητές και

$$s_i(d_1) = \begin{cases} -\frac{\sum_{j=1}^{d_1-i+1} a_j}{d_1 - i + 1}, & i \leq d_1, \\ \frac{\sum_{j=i}^{n_1} a_j}{n_1 - i + 1}, & i > d_1, \end{cases} \quad t_i(d_2) = \begin{cases} -\frac{\sum_{j=1}^{d_2-i+1} b_j}{d_2 - i + 1}, & i \leq d_2, \\ \frac{\sum_{j=i}^{n_2} b_j}{n_2 - i + 1}, & i > d_2. \end{cases}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τις τυχαίες μεταβλητές $D_1 =$ το πλήθος των παρατηρήσεων $\{X_i \leq 0\}$ και $D_2 =$ το πλήθος των παρατηρήσεων $\{Y_i \leq 0\}$ οι οποίες έχουν συνάρτηση πιθανότητας $P(D_1 = d_1) = 2^{-n_1} \binom{n_1}{d_1}$, $d_1 = 0, 1, \dots, n_1$ και $P(D_2 = d_2) = 2^{-n_2} \binom{n_2}{d_2}$, $d_2 = 0, 1, \dots, n_2$, αντίστοιχα. Λόγω της ανεξαρτησίας των X και Y , οι D_1, D_2 είναι επίσης ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με διωνυμικές κατανομές $\mathcal{B}(n_1, 1/2), \mathcal{B}(n_2, 1/2)$, αντίστοιχα. Συνεπώς δεσμεύοντας στα ενδεχόμενα $D_1 = d_1$ και $D_2 = d_2$ η κατανομή του λόγου $\sum_{i=1}^{n_1} a_i X_i / \sum_{i=1}^{n_2} b_i Y_i$ είναι ίδια με την κατανομή του λόγου $\sum_{i=1}^{n_1} s_i(d_1) \sigma_1 U_i / \sum_{i=1}^{n_2} t_i(d_2) \sigma_2 V_i$ με τους συντελεστές $s_i(d_1), t_i(d_2)$ όπως στην εκφώνηση της πρότασης. Αθροίζοντας για όλα τα d_1, d_2 , από το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας προκύπτει η (4.5). \square

Οι ΕΜΠ και οι BLUE των σ_1, σ_2 είναι γραμμικές συναρτήσεις των αντίστοιχων διατεταγμένων στατιστικών συναρτήσεων, επομένως η συνάρτηση κατανομής των στατιστικών συναρτήσεων R_1, R_2 έχει την μορφή (4.5). Επειδή δε οι R_1, R_2 είναι θετικές με πιθανότητα ένα, οι συντελεστές $s_i(d_1), t_i(d_2)$ είναι και αυτοί θετικοί. Αυτό αιτιολογείται καθώς

σε διαφορετική περίπτωση θα υπήρχε τουλάχιστον ένα ζεύγος d_1, d_2 τέτοιο ώστε ο λόγος $\sum s_i(d_1)U_i / \sum t_i(d_2)V_i$ να γίνεται αρνητικός με θετική πιθανότητα. Έτσι, για τις R_1, R_2 η κατανομή των συνιστωσών της μείξης στην (4.5) δίνεται από την Πρόταση 3.1.

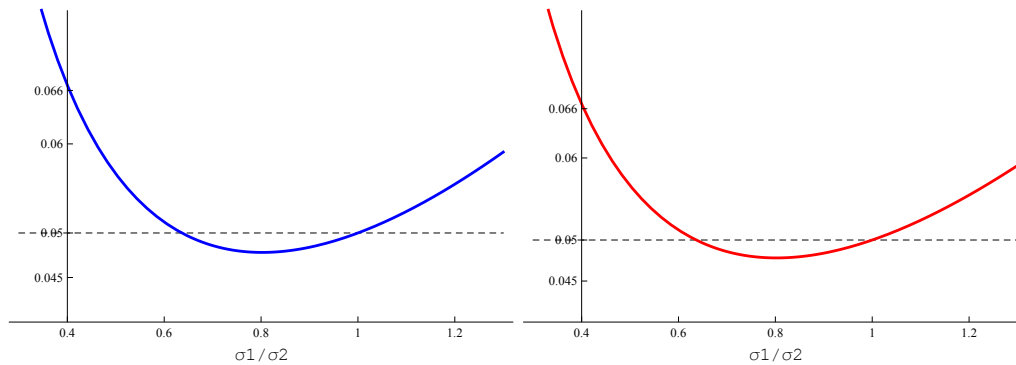
Βασιζόμενοι στις ακριβείς εκφράσεις των συναρτήσεων κατανομής των R_1, R_2 μπορούμε να υπολογίσουμε αριθμητικά κατάλληλα κρίσιμα σημεία για να κατασκευάσουμε τις περιοχές απόρριψης των ελέγχων καθώς και διαστήματα εμπιστοσύνης για τον λόγο σ_1/σ_2 . Όσον αφορά στον ΕΛΠ οι σταθερές c_1, c_2 υπολογίστηκαν θεωρώντας ότι $c_2 = c_2(c_1)$ και οι τιμές που προέκυψαν για τα c_1, c_2 ταξινομήθηκαν στον Πίνακα 4.1. Συμβολίζοντας με $R_{j,\alpha}$ το (άνω) α -ποσοστιαίο σημείο της R_j , $j = 1, 2$, ο απλούστερος έλεγχος μεγέθους α είναι εκείνος που απορρίπτει την υπόθεση $\sigma_1 = \sigma_2$ όταν $R_j < R_{j,1-\alpha/2}$ ή $R_j > R_{j,\alpha/2}$. Τα ποσοστιαία σημεία υπολογίστηκαν με ακρίβεια οκτώ δεκαδικών ψηφίων και περιέχονται στους Πίνακες 4.2, 4.3 και 4.4. Συγκεκριμένα, οι πίνακες αυτοί περιέχουν τις τιμές των $R_{j,1-\alpha/2}$ και $R_{j,\alpha/2}$ για $\alpha = 0.1, 0.05, 0.01$ και $2 \leq n_1, n_2 \leq 10, 20$.

4.6 Αμερόληπτοι έλεγχοι και αμερόληπτα διαστήματα εμπιστοσύνης

Είναι γνωστό ότι κάθε $100(1-\alpha)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για μια παράμετρο θ αντιστοιχεί σε έναν δίπλευρο έλεγχο μεγέθους α για την παράμετρο θ και αντίστροφα. Το διάστημα εμπιστοσύνης περιέχει μία τιμή της παραμέτρου θ_0 αν και μόνον αν ο αντίστοιχος έλεγχος δεν απορρίπτει την υπόθεση $\theta = \theta_0$ έναντι της $\theta \neq \theta_0$. Επί πλέον, ένας έλεγχος μεγέθους α για μία παράμετρο θ καλείται αμερόληπτος αν η ισχύς του είναι τουλάχιστον α και ένα $100(1-\alpha)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης καλείται αμερόληπτο αν περιέχει οποιαδήποτε τιμή της παραμέτρου θ εκτός της πραγματικής της τιμής, με πιθανότητα το πολύ $1-\alpha$. Τέλος, ένας έλεγχος μεγέθους α για μία παράμετρο θ καλείται αμερόληπτος αν και μόνον αν το αντίστοιχο διάστημα εμπιστοσύνης είναι αμερόληπτο.

Παρ' όλο που τα διαστήματα εμπιστοσύνης ίσων ουρών και οι αντίστοιχοι έλεγχοι (στους οποίους θα αναφερόμαστε στο εξής επίσης ως «ίσων ουρών») είναι βολικές διαδικασίες, όταν πρόκειται για παραμέτρους κλίμακος (όπως είναι εδώ το σ_1/σ_2 για την κατανομή των $R_1 = \hat{\sigma}_1/\hat{\sigma}_2$ και $R_2 = \tilde{\sigma}_1/\tilde{\sigma}_2$) έχουν το πρόβλημα της μεροληψίας. Στο Σχήμα 4.1 βλέπουμε τις καμπύλες ισχύος των ελέγχων μεγέθους $\alpha = 0.05$ ίσων ουρών που βασίζονται στις R_1 και R_2 όταν $n_1 = 2, n_2 = 3$: και στις δύο περιπτώσεις υπάρχουν τιμές σ_1/σ_2 για τις οποίες η ισχύς είναι μικρότερη του 5%.

Δεδομένου του ότι οι στατιστικές συναρτήσεις R_1 και R_2 και οι κατανομές τους έχουν



Σχήμα 4.1: Ακριβής ισχύς των ελέγχων που βασίζονται στις R_1 (μπλε γραμμή) και R_2 για $\alpha = 0.05$.

την ίδια μορφή θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια και για τις δύο το σύμβολο R καθώς και για την συνάρτηση πυκνότητάς τους το σύμβολο f_R και για την συνάρτηση κατανομής τους το σύμβολο F_R όταν $\sigma_1/\sigma_2 = 1$.

Εικασία 4.1. Η συνάρτηση $xf_R(x)$ είναι μονοκόρυφη με $\lim_{x \downarrow 0} xf_R(x) = \lim_{x \uparrow \infty} xf_R(x) = 0$.

Ο παραπάνω ισχυρισμός διατυπώνεται ως εικασία γιατί δεν έχουμε γενική απόδειξη. Είναι βέβαιο όμως ότι ισχύει και η επιχειρηματολογία γι' αυτό παρουσιάζεται στο Παράρτημα.

Λήμμα 4.1. Ο έλεγχος που απορρίπτει την υπόθεση $\sigma_1/\sigma_2 = 1$ αν $R < c_1$ ή $R > c_2$ είναι αμερόληπτος μεγέθους α αν και μόνον αν

$$F_R(c_2) - F_R(c_1) = 1 - \alpha \quad (4.6 \alpha)$$

και

$$c_1 f_R(c_1) = c_2 f_R(c_2). \quad (4.6 \beta)$$

Η απόδειξη του λήμματος βασίζεται στο γεγονός ότι η ισχύς του ελέγχου όταν $\sigma_1/\sigma_2 = \rho$ δίνεται από την διαφορά

$$1 - (F_R(c_2/\rho) - F_R(c_1/\rho)) \quad (4.7)$$

και η συνθήκη για την ελαχιστοποίησή της στο $\rho = 1$ (έτσι ώστε η ισχύς να είναι μεγαλύτερη από α για $\rho \neq 1$) είναι η $c_2 f_R(c_2) - c_1 f_R(c_1) = 0$. Το λήμμα είναι γνωστό για την περίπτωση της

4.6. Αμερόληπτοι έλεγχοι και αμερόληπτα διαστήματα εμπιστοσύνης

διασποράς κανονικής κατανομής και της μέσης τιμής εκθετικής κατανομής (βλ. Lehmann, 1986).

Η Εικασία 4.1 εξασφαλίζει ότι υπάρχουν c_1, c_2 με $c_1 < c_2$ έτσι ώστε να ισχύει η (4.6 β) και επομένως το σύστημα που αποτελείται από τις (4.6 α) και (4.6 β) έχει μία και μοναδική λύση.

Προκειμένου να καθορίσουμε τις κρίσιμες σταθερές c_1, c_2 για τον αμερόληπτο έλεγχο μεγέθους α θα πρέπει να λύσουμε το σύστημα που αποτελείται από τις (4.6 α) και (4.6 β). Εδώ έχουμε το εξής πρακτικό πρόβλημα. Δεδομένου του ότι η συνάρτηση κατανομής και η πυκνότητα πιθανότητας δίνονται από άθροισματα $(n_1 + 1)(n_2 + 1)$ όρων με τον κάθε ένα από αυτούς να είναι ένα αρκετά πολύπλοκο άθροισμα, η επίλυση του συστήματος είναι πολύ χρονοβόρα. Γι' αυτό προτιμούμε να λύσουμε το σύστημα αριθμητικά αποφεύγοντας τον υπολογισμό των πυκνοτήτων πιθανότητας και σε αυτό μας βοηθάει η ακόλουθη παρατήρηση.

Γενικά, το διάστημα εμπιστοσύνης που αντιστοιχεί στον έλεγχο που απορρίπτει την $\sigma_1/\sigma_2 = 1$ αν $R < c_1$ ή $R > c_2$ είναι το $[R/c_2, R/c_1]$. Ο αναμενόμενος λόγος άκρων αυτού του διαστήματος είναι $(c_2/c_1)E_{\sigma_1=\sigma_2}(R)$ και η ελαχιστοποίησή του ισοδυναμεί προφανώς με ελαχιστοποίηση του λόγου c_2/c_1 . Σε αυτό το σημείο θα δούμε ότι τα c_1, c_2 που αντιστοιχούν στο $100(1 - \alpha)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης ελαχίστου αναμενόμενου λόγου άκρων είναι ακριβώς η λύση των (4.6 α) και (4.6 β). Θεωρούμε ότι $c_2 = c_2(c_1)$ και παραγωγίζουμε ως προς c_1

$$\left(\frac{c_2}{c_1}\right)' = \frac{c_2'c_1 - c_2}{c_1^2} = 0 \Leftrightarrow c_2' = \frac{c_2}{c_1}. \quad (4.8)$$

Επί πλέον παραγωγίζοντας ως προς c_1 την (4.6 α) προκύπτει ότι

$$c_2'f_R(c_2) - f_R(c_1) = 0 \Rightarrow c_2' = \frac{f_R(c_1)}{f_R(c_2)}$$

οπότε από την (4.8) παίρνουμε την (4.6 β).

Επομένως, η επίλυση το συστήματος που αποτελείται από τις (4.6 α) και (4.6 β) ισοδυναμεί με την εύρεση των c_1, c_2 που ελαχιστοποιούν τον λόγο c_2/c_1 υπό τον περιορισμό $F_R(c_2) - F_R(c_1) = 1 - \alpha$. Επειδή δε

$$F_R(c_2) - F_R(c_1) = 1 - \alpha \Leftrightarrow c_2 = F_R^{-1}(1 - \alpha + F_R(c_1)),$$

το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση του c_1 που ελαχιστοποιεί την συνάρτηση

$$g(c_1) = F_R^{-1}(1 - \alpha + F_R(c_1))/c_1. \quad (4.9)$$

Για την ελαχιστοποίηση της g ως προς c_1 χρησιμοποιούμε την μέθοδο golden-section search (βλ. Cheney et al., 2008) την οποία περιγράφουμε ακολούθως.

Έστω g μία προς ελαχιστοποίηση συνάρτηση για την οποία γνωρίζουμε ότι το ελάχιστο αντιστοιχεί σε κάποιο σημείο του διαστήματος $[a, b]$ και ότι σε αυτό το διάστημα η g είναι πρώτα γνησίως φθίνουσα και μετά γνησίως αύξουσα. Θεωρούμε $x_1 < x_2 \in (a, b)$ και υπολογίζουμε τις τιμές $g(x_1), g(x_2)$.

- Αν $g(x_1) < g(x_2)$ τότε το ελάχιστο βρίσκεται στο διάστημα $[a, x_2]$ οπότε θέτουμε $b = x_2$, $x_2 = x_1$ και $x_1 = (\phi - 1)a + (2 - \phi)b$, όπου $\phi = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1.618$ είναι η σταθερά της χρυσής τομής, υπολογίζουμε το νέο $g(x_1)$ και επαναλαμβάνουμε την σύγκριση.
- Αν $g(x_1) \geq g(x_2)$ τότε το ελάχιστο βρίσκεται στο διάστημα $[x_1, b]$ οπότε θέτουμε $a = x_1$, $x_1 = x_2$ και $x_2 = (2 - \phi)a + (\phi - 1)b$, υπολογίζουμε το νέο $g(x_2)$ και επαναλαμβάνουμε την σύγκριση.

Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι το μήκος του διαστήματος $[a, b]$ να γίνει μικρότερο από κάποια προεπιλεγμένη σταθερά ϵ . Η επιλογή των κυρτών συνδυασμών $(\phi - 1)a + (2 - \phi)b$ και $(2 - \phi)a + (\phi - 1)b$ εξασφαλίζει ότι έπειτα από k βήματα το διάστημα $[a, b]$ θα έχει μήκος ίσο με $(\phi - 1)^k$ φορές το μήκος του αρχικού διαστήματος.

Επιστρέφοντας στο πρόβλημα ελαχιστοποίησης της (4.9), το ζητούμενο c_1 βρίσκεται υποχρεωτικά στο διάστημα $(0, F_R^{-1}(\alpha))$ λόγω της εξίσωσης $F_R(c_2) - F_R(c_1) = 1 - \alpha$. Επομένως, εφαρμόζοντας την παραπάνω μέθοδο μπορούμε να εντοπίσουμε το ελάχιστο χωρίς να χρειαστεί ο υπολογισμός της πυκνότητας πιθανότητας f_R στα διάφορα σημεία. Τα κρίσιμα σημεία c_1, c_2 των αμερόληπτων ελέγχων υπολογίστηκαν μέσω της διαδικασίας που περιγράψαμε παραπάνω με τη βοήθεια του προγράμματος Mathematica 9.0 και παρατίθενται στους Πίνακες 4.5 και 4.6.

4.7 Σύγκριση των ελέγχων

Η ισχύς των ελέγχων ίσων ουρών, των αμερόληπτων ελέγχων και του ελέγχου λόγου πιθανοφανειών παρουσιάζεται στον Πίνακα 4.7 για επιλεγμένα μεγέθη δείγματος και τιμές του $\rho = \sigma_1/\sigma_2$. Από τα αποτελέσματα φαίνεται ότι ο έλεγχος λόγου πιθανοφανειών έχει μεγαλύτερη ισχύ από τους ελέγχους που βασίζονται στις στατιστικές συναρτήσεις $R_1 = \hat{\sigma}_1/\hat{\sigma}_2$, $R_2 = \tilde{\sigma}_1/\tilde{\sigma}_2$ για μικρές τιμές του ρ και συγκεκριμένα όταν $\rho < 1$. Από την άλλη πλευρά, καθώς το ρ αυξάνεται, οι έλεγχοι που βασίζονται στη στατιστική συνάρτηση R_2 είναι

4.8. Αριθμητικό Παράδειγμα

ισχυρότεροι τόσο από εκείνους που βασίζονται στην R_1 όσο και από τον έλεγχο λόγου πιθανοφαινιών μόνο που η διαφορά της ισχύς τους είναι ελάχιστη. Η μεροληψία των ελέγχων ίσων ουρών φαίνεται μόνο στην περίπτωση των πολύ μικρών μεγεθών δείγματος ($n_1 = 2, n_2 = 3$) μια και όσο μεγαλώνουν τα n_1, n_2 τόσο μειώνεται το διάστημα που περιέχει τα ρ για τα οποία η ισχύς είναι μικρότερη του α . Εκτός από την ισχύ των παραπάνω ελέγχων κατασκευάστηκαν και αντίστοιχα διαστήματα εμπιστοσύνης και υπολογίστηκαν τα αναμενόμενα μήκη τους χρησιμοποιώντας προσομοίωση. Τα αποτελέσματα παρατίθενται στον Πίνακα 4.8. Όπως ακριβώς με την ισχύ των ελέγχων ομοίως κι εδώ το μικρότερο διάστημα εμπιστοσύνης είναι αυτό που προκύπτει από τον ΕΛΠ.

4.8 Αριθμητικό Παράδειγμα

Σε αυτήν την ενότητα παρουσιάζουμε τους ελέγχους και τα αμερόληπτα διαστήματα εμπιστοσύνης που περιγράψαμε σε αυτό το κεφάλαιο μέσω ενός αριθμητικού παραδείγματος. Τα παρακάτω δεδομένα παριστάνουν αποδόσεις φοιτητών σε μία εργασία, σύμφωνα με την κλίμακα Wechsler Adult Intelligence και μπορεί να τα δει κανείς στο ww2.coastal.edu/kingw/statistics/R-tutorials/independent-t.html. Οι φοιτητές χωρίστηκαν σε δύο ομάδες: «μη καπνιστές», όσοι ισχυρίζονταν ότι δεν κάπνιζαν μαριχουάνα και «καπνιστές», όσοι ισχυρίζονταν ότι κάπνιζαν μαριχουάνα τακτικά. Τα δεδομένα είναι τα εξής:

Μη καπνιστές: 18,22,21,17,20,17,23,20,22,21

Καπνιστές: 16,20,14,21,20,18,13,15,17,21

Έστω X και Y τα τυχαία δείγματα μεγέθους $n_1 = n_2 = 10$ των μη καπνιστών και των καπνιστών αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι προέρχονται από τις κατανομές Laplace $\mathcal{L}(\mu_1, \sigma_1)$ και $\mathcal{L}(\mu_2, \sigma_2)$, αντίστοιχα. Σημειώνεται ότι αυτή η παραδοχή γίνεται μόνο για την επίδειξη των διαδικασιών και δεν υποστηρίζουμε ότι πραγματικά ισχύει.

Ο ΕΜΠ του σ_1 για τους μη καπνιστές είναι $\hat{\sigma}_1 = 1.7$ ενώ ο ΕΜΠ του σ_2 για τους καπνιστές είναι $\hat{\sigma}_2 = 2.5$. Συνεπώς, $R_1 = 1.7/2.5 = 0.68$. Οι BLUE είναι $\tilde{\sigma}_1 = 1.7754$, $\tilde{\sigma}_2 = 2.6320$, οπότε $R_2 = 1.7754/2.2037 \approx 0.675$. Τα ποσοστιαία σημεία των R_1 και R_2 παρατίθενται στους Πίνακες 4.2, 4.3 και 4.4 αντίστοιχα. Για $n_1 = n_2 = 10$ και $\alpha = 5\%$ είναι $R_{1,0.975} = 0.394$, $R_{1,0.025} = 2.540$, $R_{2,0.975} = 0.394$, $R_{2,0.025} = 2.539$. Τα κρίσιμα σημεία της R_1 που προέκυψαν από τον ΕΛΠ παρατίθενται στον Πίνακα 4.1 και για $n_1 = n_2 = 10$ και $\alpha = 5\%$ είναι $R_{1,0.95} = 0.394$, $R_{1,0.05} = 2.540$. Παρατηρούμε ότι συμπίπτουν με τα $\alpha/2$

ποσοστιαία σημεία της R_1 και κατά συνέπεια συμπίπτουν και τα αντίστοιχα διαστήματα εμπιστοσύνης. Επειδή $R_{1,0.975} < R_1 < R_{1,0.025}$ και $R_{2,0.975} < R_2 < R_{2,0.025}$, κανένας από τους ελέγχους δεν απορρίπτει σε επίπεδο σημαντικότητας 5% τη μηδενική υπόθεση περί ισότητας των παραμέτρων κλίμακας, γεγονός που επιβεβαιώνεται και από τις p-value οι οποίες είναι ίσες με 0.41 και 0.40 αντίστοιχα.

Το 95% διάστημα εμπιστοσύνης ίσων ουρών για το λόγο σ_1/σ_2 που βασίζεται στην R_1 είναι

$$[R_1/R_{1,0.025}, R_1/R_{1,0.975}] = [0.68/2.540, 0.68/0.394] = [0.268, 1.726].$$

Ο λόγος των άκρων του παραπάνω διαστήματος είναι ίσος με $R_{1,0.025}/R_{1,0.975} = 2.540/0.394 = 6.447$. Το αντίστοιχο 95% αμερόληπτο διάστημα εμπιστοσύνης για το λόγο σ_1/σ_2 είναι: $[R_1/c_2, R_1/c_1] = [0.68/2.540, 0.68/0.394] = [0.268, 1.726]$.

Το 95% διάστημα εμπιστοσύνης ίσων ουρών για το λόγο σ_1/σ_2 που βασίζεται στην R_2 είναι

$$[R_2/R_{2,0.025}, R_2/R_{2,0.975}] = [0.675/2.539, 0.675/0.394] = [0.266, 1.713].$$

Ο λόγος των άκρων του παραπάνω διαστήματος είναι ίσος με $R_{2,0.025}/R_{2,0.975} = 2.539/0.394 = 6.444$. Το αντίστοιχο 95% αμερόληπτο διάστημα εμπιστοσύνης για το λόγο σ_1/σ_2 είναι: $[R_2/c_2, R_2/c_1] = [0.675/2.539, 0.675/0.394] = [0.266, 1.713]$.

Πίνακες

		n_2																	
		2		3		4		5		6		7		8		9		10	
n_1		c_1	c_2	c_1	c_2	c_1	c_2	c_1	c_2	c_1	c_2	c_1	c_2	c_1	c_2	c_1	c_2	c_1	c_2
2		0.067	14.900	0.093	7.940	0.097	6.536	0.100	5.784	0.100	5.419	0.100	5.124	0.100	4.950	0.100	4.791	0.100	4.688
		0.033	29.950	0.050	12.770	0.051	9.859	0.052	8.363	0.052	7.640	0.052	7.079	0.051	6.741	0.052	6.448	0.051	6.251
		0.007	149.989	0.011	37.240	0.011	24.140	0.011	18.290	0.011	15.540	0.011	13.650	0.011	12.490	0.011	11.580	0.011	10.960
3				0.180	5.564	0.196	4.552	0.207	4.043	0.209	3.812	0.214	3.618	0.214	3.512	0.216	3.408	0.216	3.346
				0.123	8.154	0.136	6.247	0.144	5.358	0.146	4.953	0.149	4.628	0.149	4.445	0.150	4.275	0.150	4.169
				0.053	18.850	0.060	12.230	0.065	9.641	0.065	8.478	0.066	7.632	0.066	7.134	0.067	6.714	0.066	6.435
4						0.252	3.961	0.270	3.491	0.280	3.243	0.288	3.070	0.292	2.961	0.296	2.871	0.299	2.809
						0.189	5.291	0.204	4.498	0.212	4.091	0.219	3.815	0.223	3.642	0.226	3.501	0.228	3.405
						0.103	9.741	0.113	7.587	0.118	6.567	0.123	5.912	0.125	5.511	0.127	5.194	0.128	4.978
5								0.308	3.248	0.321	3.006	0.331	2.839	0.337	2.735	0.343	2.647	0.346	2.589
								0.242	4.138	0.253	3.747	0.262	3.485	0.263	3.322	0.273	3.188	0.275	3.098
								0.147	6.824	0.155	5.871	0.162	5.270	0.165	4.903	0.169	4.615	0.171	4.419
6										0.349	2.862	0.362	2.696	0.370	2.585	0.377	2.499	0.382	2.437
										0.282	3.541	0.294	3.284	0.301	3.113	0.308	2.983	0.313	2.890
										0.183	5.471	0.192	4.891	0.198	4.521	0.203	4.246	0.207	4.052
7												0.384	2.601	0.394	2.490	0.402	2.405	0.408	2.343
												0.317	3.151	0.326	2.983	0.334	2.854	0.340	2.762
												0.215	4.651	0.222	4.289	0.229	4.021	0.233	3.833
8														0.413	2.422	0.422	2.336	0.429	2.272
														0.346	2.889	0.355	2.761	0.362	2.666
														0.242	4.124	0.250	3.861	0.256	3.669
9																0.438	2.284	0.446	2.219
																0.372	2.690	0.379	2.596
																0.267	3.740	0.274	3.550
10																		0.459	2.178
																		0.394	2.540
																		0.289	3.458

Πίνακας 4.1: Τιμές των c_1, c_2 της R_1 για τον ΕΛΠ με $2 \leq n_1, n_2 \leq 10$ και $\alpha = 10\%, 5\%, 1\%$ (1η, 2η και 3η γραμμή αντίστοιχα).

n_1	n_2																	
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0.067	0.067	0.058	0.058	0.055	0.055	0.054	0.054	0.053	14.904	6.016	4.031	3.532	3.115	2.954	2.778	2.700	2.604
	0.033	0.033	0.029	0.029	0.028	0.028	0.027	0.027	0.026	29.948	8.929	5.538	4.680	4.045	3.785	3.525	3.402	3.262
	0.007	0.007	0.006	0.006	0.006	0.006	0.005	0.005	0.005	149.989	20.902	10.571	8.159	6.709	6.073	5.531	5.246	4.966
3	0.180	0.161	0.165	0.159	0.160	0.158	0.159	0.157	5.564	3.614	3.111	2.714	2.554	2.387	2.310	2.219		
	0.123	0.111	0.113	0.110	0.111	0.109	0.110	0.109	8.154	4.874	4.036	3.444	3.194	2.955	2.837	2.710		
	0.053	0.048	0.050	0.048	0.049	0.048	0.048	0.048	18.845	9.086	6.834	5.532	4.952	4.474	4.218	3.973		
4	0.252	0.261	0.253	0.257	0.253	0.255	0.253	3.961	3.375	2.924	2.738	2.550	2.460	2.358				
	0.189	0.196	0.191	0.194	0.192	0.194	0.193	5.291	4.329	3.665	3.378	3.112	2.977	2.835				
	0.103	0.107	0.105	0.107	0.106	0.108	0.107	9.741	7.210	5.773	5.128	4.605	4.320	4.053				
5	0.308	0.300	0.306	0.303	0.306	0.304	3.248	2.801	2.613	2.427	2.336	2.235						
	0.242	0.237	0.242	0.240	0.243	0.242	4.138	3.484	3.197	2.935	2.800	2.661						
	0.147	0.145	0.148	0.148	0.150	0.150	6.824	5.424	4.791	4.283	4.004	3.747						
6	0.349	0.357	0.354	0.358	0.357	2.862	2.662	2.468	2.371	2.266								
	0.282	0.290	0.288	0.292	0.291	3.541	3.239	2.967	2.825	2.680								
	0.183	0.188	0.188	0.192	0.192	5.471	4.812	4.289	3.999	3.734								
7	0.384	0.382	0.387	0.386	2.601	2.407	2.309	2.204										
	0.317	0.316	0.321	0.321	3.151	2.881	2.738	2.594										
	0.215	0.215	0.220	0.220	4.651	4.135	3.847	3.585										
8	0.413	0.419	0.418	2.422	2.321	2.213												
	0.346	0.352	0.352	2.889	2.742	2.595												
	0.242	0.248	0.249	4.124	3.830	3.565												
9	0.438	0.437	2.284	2.176														
	0.372	0.372	2.690	2.544														
	0.267	0.268	3.740	3.476														
10	0.459	2.178																
	0.394	2.540																
	0.289	3.458																

Πίνακας 4.2: Αριστερό μέρος : Κάτω 0.95-, 0.975- και 0.995-ποσοστιαία σημεία της R_1 (1η, 2η και 3η γραμμή αντίστοιχα) Δεξί μέρος : Άνω 0.05-, 0.025- και 0.005-ποσοστιαία σημεία της R_1 (1η, 2η και 3η γραμμή αντίστοιχα) για $2 \leq n_1, n_2 \leq 10$.

n_1	n_2																			
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
1	0.067	0.067	0.067	0.067	0.067	0.067	0.067	0.067	0.067	0.067	0.067	0.067	0.067	0.067	0.067	0.067	0.067	0.067	0.067	
2	0.033	0.033	0.033	0.033	0.033	0.033	0.033	0.033	0.033	0.033	0.033	0.033	0.033	0.033	0.033	0.033	0.033	0.033	0.033	
3	0.007	0.007	0.007	0.007	0.007	0.007	0.007	0.007	0.007	0.007	0.007	0.007	0.007	0.007	0.007	0.007	0.007	0.007	0.007	
4	0.180	0.186	0.190	0.193	0.194	0.196	0.197	0.198	0.198	0.199	0.199	0.200	0.200	0.201	0.201	0.201	0.201	0.201	0.202	
5	0.123	0.128	0.131	0.133	0.134	0.135	0.136	0.137	0.137	0.138	0.138	0.139	0.139	0.139	0.139	0.140	0.140	0.140	0.140	
6	0.053	0.056	0.057	0.058	0.059	0.059	0.060	0.060	0.060	0.061	0.061	0.061	0.061	0.061	0.061	0.061	0.061	0.061	0.062	
7	0.254	0.262	0.267	0.271	0.274	0.276	0.278	0.280	0.281	0.282	0.283	0.284	0.285	0.286	0.286	0.287	0.287	0.287	0.287	
8	0.190	0.197	0.202	0.205	0.208	0.210	0.212	0.213	0.214	0.215	0.216	0.217	0.218	0.218	0.219	0.219	0.219	0.220	0.220	
9	0.103	0.108	0.111	0.113	0.115	0.117	0.118	0.119	0.119	0.120	0.121	0.121	0.122	0.122	0.122	0.123	0.123	0.123	0.123	
10	0.308	0.316	0.322	0.326	0.330	0.333	0.335	0.337	0.339	0.340	0.342	0.343	0.344	0.345	0.346	0.346	0.346	0.346	0.346	
11	0.242	0.249	0.254	0.259	0.262	0.265	0.267	0.269	0.270	0.272	0.273	0.274	0.275	0.276	0.277	0.277	0.277	0.277	0.277	
12	0.147	0.152	0.156	0.159	0.162	0.164	0.165	0.167	0.168	0.169	0.170	0.171	0.171	0.172	0.173	0.173	0.173	0.173	0.173	
13	0.350	0.358	0.363	0.368	0.372	0.375	0.377	0.380	0.382	0.383	0.385	0.386	0.388	0.389	0.390	0.390	0.390	0.390	0.390	
14	0.283	0.290	0.296	0.300	0.304	0.307	0.309	0.311	0.313	0.315	0.316	0.318	0.319	0.320	0.321	0.321	0.321	0.321	0.321	
15	0.183	0.189	0.193	0.197	0.200	0.202	0.204	0.206	0.208	0.209	0.210	0.211	0.212	0.213	0.214	0.214	0.214	0.214	0.214	
16	0.385	0.391	0.397	0.401	0.405	0.408	0.411	0.414	0.416	0.418	0.419	0.421	0.422	0.423	0.423	0.423	0.423	0.423	0.423	
17	0.317	0.324	0.329	0.334	0.338	0.341	0.343	0.346	0.348	0.35	0.351	0.353	0.354	0.355	0.355	0.355	0.355	0.355	0.355	
18	0.215	0.221	0.225	0.229	0.232	0.235	0.237	0.239	0.241	0.242	0.244	0.245	0.246	0.247	0.247	0.247	0.247	0.247	0.247	
19	0.413	0.420	0.425	0.429	0.433	0.436	0.439	0.441	0.444	0.446	0.447	0.449	0.450	0.450	0.450	0.450	0.450	0.450	0.450	
20	0.347	0.353	0.358	0.362	0.366	0.369	0.372	0.374	0.377	0.379	0.380	0.382	0.383	0.383	0.383	0.383	0.383	0.383	0.383	
21	0.243	0.248	0.253	0.257	0.260	0.263	0.265	0.267	0.269	0.271	0.273	0.274	0.275	0.275	0.275	0.275	0.275	0.275	0.275	
22	0.438	0.444	0.449	0.453	0.456	0.460	0.462	0.465	0.467	0.469	0.471	0.472	0.472	0.472	0.472	0.472	0.472	0.472	0.472	
23	0.372	0.378	0.382	0.387	0.390	0.393	0.396	0.399	0.401	0.403	0.405	0.406	0.406	0.406	0.406	0.406	0.406	0.406	0.406	
24	0.267	0.273	0.277	0.281	0.284	0.287	0.29	0.292	0.294	0.296	0.297	0.299	0.299	0.299	0.299	0.299	0.299	0.299	0.299	
25	0.459	0.465	0.469	0.473	0.477	0.48	0.482	0.485	0.487	0.489	0.491	0.491	0.491	0.491	0.491	0.491	0.491	0.491	0.491	
26	0.394	0.399	0.404	0.408	0.411	0.415	0.417	0.420	0.422	0.424	0.426	0.426	0.426	0.426	0.426	0.426	0.426	0.426	0.426	
27	0.289	0.294	0.299	0.302	0.306	0.309	0.311	0.313	0.316	0.317	0.319	0.319	0.319	0.319	0.319	0.319	0.319	0.319	0.319	
28	0.478	0.483	0.487	0.491	0.495	0.497	0.500	0.503	0.505	0.507	0.507	0.507	0.507	0.507	0.507	0.507	0.507	0.507	0.507	
29	0.414	0.419	0.423	0.427	0.430	0.433	0.436	0.438	0.441	0.443	0.443	0.443	0.443	0.443	0.443	0.443	0.443	0.443	0.443	
30	0.309	0.314	0.318	0.322	0.325	0.328	0.33	0.333	0.335	0.337	0.337	0.337	0.337	0.337	0.337	0.337	0.337	0.337	0.337	
31	0.495	0.500	0.504	0.507	0.510	0.513	0.516	0.518	0.520	0.520	0.520	0.520	0.520	0.520	0.520	0.520	0.520	0.520	0.520	
32	0.431	0.436	0.440	0.444	0.447	0.450	0.453	0.455	0.457	0.457	0.457	0.457	0.457	0.457	0.457	0.457	0.457	0.457	0.457	
33	0.327	0.332	0.336	0.339	0.342	0.345	0.348	0.350	0.352	0.352	0.352	0.352	0.352	0.352	0.352	0.352	0.352	0.352	0.352	
34	0.510	0.515	0.518	0.522	0.525	0.527	0.530	0.532	0.532	0.532	0.532	0.532	0.532	0.532	0.532	0.532	0.532	0.532	0.532	
35	0.447	0.452	0.455	0.459	0.462	0.465	0.468	0.470	0.470	0.470	0.470	0.470	0.470	0.470	0.470	0.470	0.470	0.470	0.470	
36	0.344	0.348	0.352	0.355	0.358	0.361	0.364	0.366	0.366	0.366	0.366	0.366	0.366	0.366	0.366	0.366	0.366	0.366	0.366	
37	0.524	0.528	0.532	0.535	0.538	0.540	0.543	0.543	0.543	0.543	0.543	0.543	0.543	0.543	0.543	0.543	0.543	0.543	0.543	
38	0.462	0.466	0.470	0.473	0.476	0.479	0.481	0.481	0.481	0.481	0.481	0.481	0.481	0.481	0.481	0.481	0.481	0.481	0.481	
39	0.359	0.363	0.367	0.370	0.373	0.376	0.378	0.378	0.378	0.378	0.378	0.378	0.378	0.378	0.378	0.378	0.378	0.378	0.378	
40	0.537	0.540	0.544	0.547	0.549	0.552	0.552	0.552	0.552	0.552	0.552	0.552	0.552	0.552	0.552	0.552	0.552	0.552	0.552	
41	0.475	0.479	0.482	0.486	0.488	0.491	0.491	0.491	0.491	0.491	0.491	0.491	0.491	0.491	0.491	0.491	0.491	0.491	0.491	
42	0.373	0.377	0.380	0.383	0.386	0.389	0.389	0.389	0.389	0.389	0.389	0.389	0.389	0.389	0.389	0.389	0.389	0.389	0.389	
43	0.548	0.552	0.555	0.558	0.560	0.560	0.560	0.560	0.560	0.560	0.560	0.560	0.560	0.560	0.560	0.560	0.560	0.560	0.560	
44	0.487	0.491	0.494	0.497	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	
45	0.386	0.390	0.393	0.396	0.399	0.399	0.399	0.399	0.399	0.399	0.399	0.399	0.399	0.399	0.399	0.399	0.399	0.399	0.399	
46	0.559	0.562	0.565	0.568	0.568	0.568	0.568	0.568	0.568	0.568	0.568	0.568	0.568	0.568	0.568	0.568	0.568	0.568	0.568	
47	0.499	0.502	0.505	0.508	0.508	0.508	0.508	0.508	0.508	0.508	0.508	0.508	0.508	0.508	0.508	0.508	0.508	0.508	0.508	
48	0.398	0.402	0.405	0.408	0.408	0.408	0.408	0.408	0.408	0.408	0.408	0.408	0.408	0.408	0.408	0.408	0.408	0.408	0.408	
49	0.569	0.572	0.574	0.574	0.574	0.574	0.574	0.574	0.574	0.574	0.574	0.574	0.574	0.574	0.574	0.574	0.574	0.574	0.574	
50	0.509	0.513	0.516	0.516	0.516	0.516	0.516	0.516	0.516	0.516	0.516	0.516	0.516	0.516	0.516	0.516	0.516	0.516	0.516	
51	0.410	0.413	0.416	0.416	0.416	0.416	0.416	0.416	0.416	0.416	0.416	0.416	0.416	0.416	0.416	0.416	0.416	0.416	0.416	
52	0.578	0.581	0.581	0.581	0.581	0.581	0.581	0.581	0.581	0.581	0.581	0.581	0.581	0.581	0.581	0.581	0.581	0.581	0.581	
53	0.519	0.522	0.522	0.522	0.522	0.522	0.522	0.522	0.522	0.522	0.522	0.522	0.522	0.522	0.522	0.522	0.522	0.522	0.522	
54	0.420	0.423	0.423	0.423	0.423	0.423	0.423	0.423	0.423	0.423	0.423	0.423	0.423	0.423	0.423	0.423	0.423	0.423	0.423	
55	0.586	0.586	0.586	0.586	0.586	0.586	0.586	0.586	0.586	0.586	0.586	0.586	0.586	0.586	0.586	0.586	0.586	0.586	0.586	
56	0.528	0.528	0.528	0.528	0.528	0.528	0.528	0.528	0.528	0.528	0.528	0.528	0.528	0.528	0.528	0.528	0.528	0.528	0.528	
57	0.430	0.430	0.430	0.430	0.430	0.430	0.430	0.430	0.430	0.430	0.430	0.430	0.430	0.430	0.430	0.430	0.430	0.430	0.430	

Πίνακας 4.3: Κάτω 0.95-, 0.975- και 0.995-ποσοστιαία σημεία της R_2 (1η, 2η και 3η γραμμή αντίστοιχα) για $2 \leq n_1, n_2 \leq 20$.

Συμπερασματολογία για τον λόγο των παραμέτρων κλίμακας

n_1	n_2																			
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
1	14.904	6.016	4.630	4.071	3.768	3.578	3.447	3.352	3.279	3.222	3.176	3.138	3.106	3.079	3.056	3.036	3.018	3.002	2.988	
2	29.948	8.929	6.356	5.394	4.892	4.583	4.374	4.223	4.109	4.020	3.948	3.889	3.840	3.798	3.762	3.731	3.703	3.679	3.658	
3	149.989	20.902	12.117	9.404	8.110	7.354	6.86	6.512	6.254	6.054	5.896	5.767	5.661	5.571	5.494	5.427	5.369	5.318	5.273	
4		5.564	4.150	3.586	3.282	3.092	2.962	2.867	2.795	2.739	2.693	2.655	2.623	2.597	2.573	2.553	2.536	2.520	2.506	
5		8.154	5.592	4.652	4.165	3.867	3.666	3.522	3.413	3.328	3.259	3.203	3.157	3.117	3.083	3.053	3.027	3.004	2.984	
6		18.845	10.411	7.877	6.685	5.997	5.549	5.235	5.003	4.824	4.683	4.568	4.473	4.393	4.325	4.266	4.215	4.169	4.129	
7			3.940	3.371	3.064	2.873	2.741	2.645	2.572	2.515	2.469	2.431	2.399	2.371	2.348	2.328	2.310	2.294	2.280	
8			5.260	4.323	3.839	3.543	3.343	3.200	3.092	3.007	2.939	2.884	2.837	2.798	2.764	2.735	2.709	2.686	2.666	
9			9.670	7.198	6.043	5.377	4.945	4.642	4.419	4.248	4.112	4.001	3.910	3.833	3.768	3.711	3.662	3.619	3.580	
10				3.248	2.939	2.745	2.612	2.515	2.442	2.384	2.337	2.298	2.266	2.238	2.214	2.194	2.175	2.159	2.145	
11				4.137	3.653	3.358	3.159	3.015	2.907	2.823	2.755	2.699	2.652	2.613	2.579	2.549	2.524	2.501	2.481	
12				6.823	5.686	5.032	4.608	4.312	4.093	3.925	3.791	3.683	3.594	3.519	3.455	3.399	3.351	3.309	3.271	
13					2.856	2.661	2.527	2.429	2.354	2.296	2.248	2.209	2.176	2.148	2.124	2.103	2.085	2.068	2.054	
14					3.532	3.237	3.037	2.893	2.785	2.700	2.632	2.576	2.529	2.489	2.455	2.426	2.400	2.377	2.356	
15					5.455	4.808	4.388	4.095	3.879	3.713	3.581	3.474	3.386	3.311	3.248	3.193	3.145	3.103	3.066	
16						2.601	2.466	2.367	2.292	2.232	2.184	2.145	2.112	2.083	2.059	2.037	2.019	2.002	1.987	
17						3.151	2.951	2.806	2.697	2.612	2.544	2.488	2.44	2.401	2.366	2.336	2.310	2.287	2.267	
18						4.650	4.234	3.942	3.727	3.562	3.431	3.325	3.237	3.163	3.100	3.046	2.999	2.957	2.920	
19							2.419	2.32	2.244	2.184	2.136	2.096	2.062	2.034	2.009	1.987	1.968	1.952	1.937	
20							2.886	2.741	2.632	2.546	2.477	2.421	2.373	2.333	2.299	2.269	2.242	2.219	2.198	
							4.118	3.828	3.614	3.450	3.319	3.213	3.126	3.052	2.989	2.935	2.888	2.846	2.809	
								2.283	2.207	2.147	2.098	2.057	2.023	1.994	1.969	1.948	1.928	1.911	1.896	
								2.690	2.580	2.494	2.425	2.368	2.321	2.280	2.245	2.215	2.189	2.165	2.144	
								3.739	3.526	3.362	3.232	3.126	3.039	2.965	2.902	2.848	2.801	2.759	2.722	
									2.177	2.116	2.067	2.026	1.992	1.963	1.937	1.915	1.896	1.879	1.863	
									2.539	2.452	2.383	2.326	2.278	2.237	2.202	2.172	2.145	2.122	2.101	
									3.455	3.291	3.161	3.056	2.969	2.895	2.832	2.778	2.731	2.689	2.652	
										2.091	2.041	2.000	1.966	1.936	1.911	1.888	1.869	1.852	1.836	
										2.418	2.348	2.291	2.243	2.202	2.167	2.136	2.109	2.085	2.064	
										3.233	3.104	2.998	2.911	2.837	2.775	2.720	2.673	2.631	2.594	
											2.020	1.978	1.944	1.914	1.888	1.866	1.846	1.829	1.813	
											2.319	2.261	2.213	2.172	2.137	2.106	2.079	2.055	2.034	
											3.055	2.950	2.863	2.789	2.726	2.672	2.624	2.583	2.546	
												1.960	1.925	1.895	1.869	1.846	1.826	1.809	1.793	
												2.236	2.188	2.146	2.111	2.080	2.053	2.029	2.007	
												2.909	2.821	2.748	2.685	2.630	2.583	2.541	2.504	
													1.908	1.878	1.852	1.829	1.809	1.792	1.776	
													2.166	2.124	2.089	2.058	2.030	2.006	1.984	
													2.786	2.712	2.649	2.595	2.547	2.505	2.468	
														1.864	1.838	1.815	1.795	1.777	1.761	
														2.105	2.069	2.038	2.010	1.986	1.964	
														2.681	2.618	2.563	2.516	2.474	2.437	
															1.825	1.802	1.781	1.763	1.747	
															2.052	2.021	1.993	1.969	1.947	
															2.591	2.536	2.488	2.446	2.409	
																1.790	1.770	1.751	1.735	
																2.005	1.978	1.953	1.931	
																2.512	2.464	2.422	2.384	
																	1.759	1.741	1.724	
																	1.964	1.939	1.917	
																	2.442	2.400	2.362	
																		1.731	1.715	
																		1.926	1.904	
																		2.380	2.342	
																			1.706	
																			1.893	
																			2.325	

Πίνακας 4.4: Άνω 0.05-, 0.025- και 0.005-ποσοστιαία σημεία της R_2 (1η, 2η και 3η γραμμή αντίστοιχα) για $2 \leq n_1, n_2 \leq 20$.

		n_2																	
		2		3		4		5		6		7		8		9		10	
n_1		c_1	c_2	c_1	c_2	c_1	c_2	c_1	c_2	c_1	c_2	c_1	c_2	c_1	c_2	c_1	c_2	c_1	c_2
2		0.067	14.900	0.086	7.276	0.081	5.059	0.084	4.494	0.082	3.989	0.083	3.798	0.082	3.580	0.083	3.485	0.082	3.363
		0.033	29.950	0.043	10.860	0.041	6.970	0.043	5.955	0.042	5.170	0.043	4.847	0.042	4.520	0.043	4.364	0.042	4.185
		0.007	149.990	0.009	25.560	0.008	13.330	0.009	10.360	0.009	8.521	0.009	7.707	0.009	7.010	0.009	6.640	0.009	6.277
3				0.180	5.564	0.172	3.825	0.181	3.373	0.178	2.980	0.182	2.827	0.181	2.658	0.183	2.582	0.182	2.487
				0.123	8.154	0.119	5.175	0.126	4.390	0.124	3.793	0.127	3.544	0.126	3.296	0.128	3.175	0.128	3.041
				0.053	18.850	0.052	9.709	0.056	7.484	0.055	6.127	0.057	5.522	0.056	5.008	0.057	4.734	0.057	4.468
4						0.252	3.960	0.268	3.469	0.265	3.051	0.272	2.885	0.271	2.704	0.275	2.621	0.275	2.521
						0.189	5.291	0.202	4.454	0.201	3.828	0.207	3.562	0.206	3.302	0.210	3.174	0.210	3.032
						0.103	9.741	0.111	7.437	0.111	6.048	0.115	5.422	0.115	4.898	0.117	4.615	0.117	4.344
5								0.308	3.248	0.305	2.846	0.315	2.683	0.314	2.510	0.319	2.428	0.319	2.332
								0.242	4.138	0.241	3.541	0.249	3.284	0.249	3.036	0.254	2.912	0.254	2.777
								0.147	6.824	0.147	5.520	0.153	4.928	0.154	4.437	0.157	4.169	0.158	3.915
6										0.349	2.862	0.361	2.692	0.361	2.513	0.367	2.428	0.368	2.329
										0.282	3.541	0.293	3.275	0.293	3.023	0.300	2.893	0.300	2.756
										0.183	5.471	0.191	4.868	0.192	4.372	0.197	4.099	0.198	3.843
7												0.384	2.601	0.385	2.426	0.392	2.340	0.393	2.243
												0.317	3.151	0.318	2.903	0.326	2.752	0.327	2.641
												0.215	4.651	0.217	4.168	0.223	3.901	0.224	3.651
8														0.413	2.422	0.422	2.335	0.423	2.235
														0.346	2.889	0.355	2.758	0.356	2.622
														0.242	4.124	0.249	3.854	0.251	3.603
9																0.438	2.284	0.439	2.185
																0.372	2.690	0.374	2.555
																0.267	3.740	0.270	3.493
10																		0.459	2.178
																		0.394	2.540
																		0.289	3.458

Πίνακας 4.5: Τιμές των c_1, c_2 της R_1 για $2 \leq n_1, n_2 \leq 10$ και $\alpha = 10\%, 5\%, 1\%$ (1η, 2η και 3η γραμμή αντίστοιχα).

		n_2																	
		2		3		4		5		6		7		8		9		10	
n_1		c_1	c_2	c_1	c_2	c_1	c_2	c_1	c_2	c_1	c_2	c_1	c_2	c_1	c_2	c_1	c_2	c_1	c_2
2		0.067	14.900	0.086	7.276	0.093	5.812	0.097	5.180	0.099	4.826	0.101	4.600	0.102	4.442	0.103	4.326	0.104	4.237
		0.033	29.950	0.043	10.860	0.047	8.001	0.050	6.864	0.051	6.253	0.052	5.870	0.052	5.608	0.053	5.417	0.053	5.271
		0.007	149.990	0.009	25.560	0.010	15.280	0.010	11.940	0.011	10.300	0.011	9.333	0.011	8.694	0.011	8.242	0.011	7.905
3				0.180	5.564	0.198	4.393	0.209	3.888	0.216	3.605	0.221	3.424	0.225	3.298	0.228	3.205	0.230	3.133
				0.123	8.154	0.137	5.939	0.145	5.060	0.150	4.587	0.154	4.292	0.157	4.089	0.159	3.942	0.161	3.830
				0.053	18.850	0.060	11.130	0.064	8.626	0.067	7.406	0.069	6.686	0.070	6.212	0.071	5.876	0.072	5.626
4						0.254	3.940	0.269	3.464	0.280	3.197	0.287	3.025	0.293	2.905	0.298	2.817	0.301	2.749
						0.190	5.260	0.203	4.446	0.212	4.009	0.218	3.735	0.223	3.547	0.227	3.410	0.230	3.306
						0.103	9.670	0.112	7.423	0.117	6.330	0.121	5.685	0.125	5.260	0.127	4.959	0.129	4.735
5								0.308	3.248	0.321	2.986	0.331	2.818	0.338	2.701	0.344	2.614	0.349	2.548
								0.242	4.137	0.253	3.714	0.262	3.449	0.268	3.268	0.274	3.135	0.278	3.034
								0.147	6.823	0.155	5.787	0.161	5.176	0.166	4.773	0.169	4.489	0.173	4.277
6										0.350	2.856	0.361	2.689	0.370	2.573	0.377	2.487	0.383	2.420
										0.283	3.532	0.293	3.272	0.301	3.093	0.308	2.963	0.313	2.864
										0.183	5.455	0.191	4.863	0.197	4.473	0.202	4.197	0.206	3.991
7												0.385	2.601	0.394	2.484	0.402	2.398	0.409	2.332
												0.317	3.151	0.327	2.974	0.334	2.844	0.340	2.746
												0.215	4.650	0.222	4.2268	0.229	3.997	0.233	3.796
8														0.413	2.419	0.422	2.333	0.429	2.267
														0.347	2.886	0.355	2.757	0.362	2.659
														0.243	4.118	0.250	3.851	0.256	3.652
9																0.438	2.283	0.446	2.217
																0.372	2.690	0.379	2.592
																0.267	3.739	0.274	3.542
10																		0.459	2.177
																		0.394	2.539
																		0.289	3.455

Πίνακας 4.6: Τιμές των c_1, c_2 της R_2 για $2 \leq n_1, n_2 \leq 10$ και $\alpha = 10\%, 5\%, 1\%$ (1η, 2η και 3η γραμμή αντίστοιχα).

		$n_1 = 2, n_2 = 3$					$n_1 = 4, n_2 = 7$					$n_1 = 6, n_2 = 12$					$n_1 = 10, n_2 = 10$				
ρ	α	EIO		AE		ΕΑΠ	EIO		AE		ΕΑΠ	EIO		AE		ΕΑΠ	EIO		AE		ΕΑΠ
		R_1	R_2	R_1	R_2		R_1	R_2	R_1	R_2		R_1	R_2	R_1	R_2		R_1	R_2	R_1	R_2	
0.6	10%	.1030	.1030	.1198	.1198	.1260	.1620	.1624	.1793	.1797	.1964	.2202	.2207	.2394	.2398	.2656	.2876	.2879	.2876	.2879	.2876
	5%	.0512	.0512	.0607	.0607	.0665	.0891	.0893	.1009	.1011	.1131	.1307	.1309	.1447	.1450	.1641	.1860	.1862	.1860	.1862	.1860
	1%	.0102	.0102	.0123	.0123	.0146	.0206	.0206	.0244	.0244	.0287	.0353	.0354	.0406	.0407	.0480	.0614	.0615	.0614	.0615	.0614
0.7	10%	.0979	.0979	.1098	.1098	.1142	.1269	.1272	.1391	.1393	.1514	.1555	.1557	.1693	.1695	.1884	.1933	.1935	.1933	.1935	.1933
	5%	.0486	.0486	.0553	.0553	.0594	.0667	.0668	.0747	.0748	.0832	.0862	.0863	.0957	.0958	.1089	.1145	.1145	.1145	.1145	.1145
	1%	.0096	.0096	.0111	.0111	.0128	.0144	.0144	.0168	.0168	.0196	.0207	.0208	.0239	.0239	.0284	.0319	.0319	.0319	.0319	.0319
0.8	10%	.0964	.0964	.1039	.1039	.1067	.1078	.1079	.1155	.1156	.1233	.1188	.1189	.1275	.1276	.1399	.1368	.1368	.1368	.1369	.1368
	5%	.0478	.0478	.0521	.0521	.0548	.0547	.0548	.0597	.0598	.0651	.0621	.0621	.0679	.0679	.0762	.0746	.0747	.0746	.0747	.0746
	1%	.0095	.0095	.0105	.0105	.0115	.0112	.0112	.0127	.0127	.0144	.0135	.0135	.0153	.0153	.0179	.0178	.0178	.0178	.0178	.0178
0.9	10%	.0973	.0973	.1009	.1009	.1022	.0998	.0998	.1035	.1035	.1073	.1020	.1021	.1062	.1062	.1122	.1082	.1082	.1082	.1082	.1082
	5%	.0484	.0484	.0505	.0505	.0518	.0498	.0498	.0522	.0522	.0548	.0513	.0513	.0580	.0540	.0540	.0554	.0554	.0554	.0554	.0554
	1%	.0096	.0096	.0101	.0101	.0106	.0099	.0099	.0106	.0106	.0114	.0103	.0103	.0112	.0112	.0124	.0117	.0117	.0117	.0117	.0117
1.1	10%	.1041	.1041	.1007	.1007	.0995	.1063	.1063	.1029	.1029	.0993	.1090	.1091	.1052	.1052	.0995	.1067	.1067	.1067	.1067	.1067
	5%	.0524	.0524	.0504	.0504	.0492	.0541	.0541	.0519	.0519	.0494	.0560	.0560	.0534	.0534	.0495	.0544	.0544	.0544	.0544	.0544
	1%	.0106	.0106	.0101	.0101	.0096	.0112	.0112	.0105	.0105	.0097	.0119	.0119	.0110	.0110	.0098	.0113	.0114	.0113	.0114	.0113
1.2	10%	.1093	.1093	.1027	.1027	.1002	.1173	.1173	.1107	.1108	.1038	.1266	.1266	.1192	.1192	.1080	.1246	.1246	.1246	.1246	.1246
	5%	.0555	.0555	.0515	.0515	.0491	.0614	.0614	.0569	.0570	.0520	.0679	.0680	.0628	.0628	.0550	.0663	.0664	.0663	.0664	.0663
	1%	.0113	.0113	.0103	.0103	.0093	.0135	.0135	.0120	.0120	.0103	.0158	.0158	.0141	.0141	.0114	.0151	.0151	.0151	.0151	.0151
2	10%	.1704	.1704	.1431	.1431	.1322	.2814	.2820	.2577	.2584	.2309	.3909	.3915	.3672	.3679	.3283	.4289	.4293	.4289	.4293	.4289
	5%	.0938	.0938	.0756	.0756	.0638	.1834	.1838	.1640	.1644	.1410	.2794	.2799	.2582	.2587	.2230	.3051	.3055	.3051	.3055	.3051
	1%	.0212	.0212	.0162	.0162	.0105	.0618	.0619	.0524	.0525	.0402	.1167	.1170	.1040	.1042	.0825	.1222	.1224	.1222	.1224	.1222
5	10%	.4071	.4071	.3487	.3487	.3227	.7577	.7593	.7354	.7372	.7073	.9122	.9129	.9030	.9037	.8856	.9602	.9604	.9602	.9604	.9602
	5%	.2788	.2788	.2265	.2266	.1877	.6601	.6618	.6329	.6346	.5963	.8619	.8627	.8487	.8496	.8235	.9243	.9247	.9243	.9247	.9243
	1%	.0910	.0910	.0668	.0668	.0363	.4290	.4304	.3974	.3987	.3495	.7083	.7095	.6867	.6880	.6434	.7842	.7849	.7842	.7849	.7842
10	10%	.6233	.6233	.5671	.5671	.5400	.9418	.9426	.9343	.9352	.9242	.9925	.9926	.9914	.9916	.9893	.9991	.9991	.9991	.9991	.9991
	5%	.4976	.4976	.4340	.4340	.3810	.9061	.9072	.8947	.8959	.8780	.9861	.9863	.9842	.9800	.9844	.9977	.9977	.9977	.9977	.9977
	1%	.2305	.2305	.1809	.1809	.1081	.7836	.7854	.7613	.7631	.7238	.9577	.9581	.9525	.9530	.9410	.9868	.9869	.9868	.9869	.9868

Πίνακας 4.7: Ισχύς του ελέγχου ίσων ουρών, του αμερόληπτου ελέγχου και του ελέγχου λόγου πιθανοφανειών για συγκεκριμένα μεγέθη δείγματος. Με έντονη γραφή συμβολίζεται η μέγιστη ισχύς.

$n_1 = 2, n_2 = 3$						$n_1 = 4, n_2 = 7$					
	ΕΙΟ		ΑΕ		ΕΛΠ	ΕΙΟ		ΑΕ		ΕΛΠ	
$1 - \alpha$	R_1	R_2	R_1	R_2		R_1	R_2	R_1	R_2		
90%	26.802	26.802	20.884	20.884	19.256	3.985	3.964	3.745	3.727	3.553	
95%	54.623	54.623	41.680	41.768	36.322	5.468	5.437	5.137	5.109	4.858	
99%	272.280	272.280	205.980	205.980	160.690	10.300	10.240	9.612	9.552	8.998	
$n_1 = 6, n_2 = 12$						$n_1 = 10, n_2 = 10$					
	ΕΙΟ		ΑΕ		ΕΛΠ	ΕΙΟ		ΑΕ		ΕΛΠ	
$1 - \alpha$	R_1	R_2	R_1	R_2		R_1	R_2	R_1	R_2		
90%	2.415	2.417	2.332	2.327	2.225	1.923	1.921	1.923	1.921	1.924	
95%	3.136	3.128	3.022	3.014	2.880	2.401	2.398	2.403	2.401	2.402	
99%	5.073	5.058	4.871	4.857	4.628	3.547	3.542	3.548	3.544	3.551	

Πίνακας 4.8: Αναμενόμενο μήκος των διαστημάτων εμπιστοσύνης για τον λόγο σ_1/σ_2 που βασίζονται στις R_1, R_2 για διάφορα μεγέθη δείγματος. Με έντονη γραφή συμβολίζεται το διάστημα με το ελάχιστο αναμενόμενο μήκος. (ΕΙΟ: έλεγχος ίσων ουρών, ΑΕ: αμερόληπτος έλεγχος, ΕΛΠ: έλεγχος λόγου πιθανοφανειών)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Σύνοψη – Μελλοντικές κατευθύνσεις

Σύνοψη

Το αντικείμενο της διδακτορικής διατριβής είναι η συμπερασματολογία για τις παραμέτρους της κατανομής Laplace. Ειδικότερα, κατασκευάζονται ακριβείς έλεγχοι και ακριβή διαστήματα εμπιστοσύνης ώστε να γίνει σύγκριση των παραμέτρων θέσης και κλίμακας της κατανομής. Αρχικά, στο Κεφάλαιο 1 γίνεται αναφορά στους ήδη υπάρχοντες ελέγχους οι οποίοι αφορούν την κανονική κατανομή λόγω της ομοιότητας της κατανομής Laplace με την κανονική κατανομή. Επίσης, γίνεται ανασκόπηση της βιβλιογραφίας που συνδέεται με την κατανομή Laplace και αφορά είτε ακριβή, είτε ασυμπτωτική συμπερασματολογία καθώς και λογοκριμένες και μη παρατηρήσεις.

Στη συνέχεια, στο Κεφάλαιο 2 γίνεται παρουσίαση της κατανομής καθώς και των ιδιοτήτων αυτής. Αναφέρονται γνωστά αποτελέσματα που αφορούν γενικά διατεταγμένες παρατηρήσεις και ειδικότερα διατεταγμένες παρατηρήσεις οι οποίες προέρχονται από κάποια αρχική κατανομή καθώς και από την εκθετική κατανομή. Επί πλέον, δίνονται νέα αποτελέσματα που αφορούν διατεταγμένες παρατηρήσεις που ακολουθούν την κατανομή Laplace (Λήμμα 2.3) τα οποία μας βοήθησαν να υπολογίσουμε ακριβείς κατανομές στατιστικών συναρτήσεων οι οποίες αναφέρονται στα επόμενα κεφάλαια. Τέλος, γίνεται αναφορά στους κλασσικούς εκτιμητές των παραμέτρων της κατανομής και στον υπολογισμό τους.

Στο Κεφάλαιο 3 κατασκευάζονται ακριβείς έλεγχοι για τη σύγκριση των παραμέτρων θέσης δύο κατανομών Laplace με κοινή παράμετρο κλίμακας βασιζόμενοι σε αντίστοιχα ανεξάρτητα δείγματα. Οι έλεγχοι που συζητώνται είναι ο έλεγχος λόγου πιθανοφανειών και οι έλεγχοι που βασίζονται στην τυποποιημένη διαφορά των BLUE των παραμέτρων. Βασιζόμενοι στα Λήμματα 2.3 και 3.1 βρίσκουμε σε κλειστή μορφή την συνάρτηση κατανομής των στατιστικών συναρτήσεων υπό τη μηδενική υπόθεση. Στη συνέχεια υπολογίζουμε κλασσικά ποσοστιαία σημεία, ενώ συζητάμε και για ακριβή διαστήματα εμπιστοσύνης

για τη διαφορά των παραμέτρων θέσης. Από την αριθμητική σύγκριση των ελέγχων ως προς την ισχύ τους προέκυψε ότι κανένας έλεγχος δεν είναι ομοιόμορφα ισχυρότατος. Πιο συγκεκριμένα, για μικρές τιμές της απόλυτης τιμής της διαφοράς των παραμέτρων θέσης φαίνεται να είναι ισχυρότερος ο έλεγχος λόγου πιθανοφανειών ενώ για μεγάλες τιμές ισχύει το αντίθετο. Επί πλέον, συγκρίναμε τα αντίστοιχα διαστήματα εμπιστοσύνης βασιζόμενοι στα αναμενόμενα μήκη τους. Όπως και με την ισχύ ομοίως κι εδώ δεν υπάρχει ομοιόμορφα μικρότερο διάστημα για όλα τα μεγέθη δείγματος και τα επίπεδα σημαντικότητας.

Στο Κεφάλαιο 4 κατασκευάζονται ακριβείς έλεγχοι για τη σύγκριση των παραμέτρων κλίμακας δύο κατανομών Laplace βασιζόμενοι σε αντίστοιχα ανεξάρτητα δείγματα. Οι έλεγχοι που συζητώνται είναι ο έλεγχος λόγου πιθανοφανειών και οι έλεγχοι που βασίζονται είτε στον λόγο των ΕΜΠ είτε στον λόγο των BLUE των παραμέτρων. Υπολογίζουμε όπως και στο Κεφάλαιο 3 την συνάρτηση κατανομής των στατιστικών συναρτήσεων υπό τη μηδενική υπόθεση και στη συνέχεια υπολογίζουμε διάφορα ποσοστιαία σημεία. Συνεχίζουμε κατασκευάζοντας αριθμητικά αμερόληπτους ελέγχους και αμερόληπτα διαστήματα εμπιστοσύνης για τον λόγο των παραμέτρων κλίμακας. Όπως και με τις παραμέτρους θέσης ομοίως και για τις παραμέτρους κλίμακας από την αριθμητική σύγκριση των ελέγχων ως προς την ισχύ τους προέκυψε ότι κανένας έλεγχος δεν είναι ομοιόμορφα ισχυρότατος. Για μικρές τιμές του λόγου των παραμέτρων και ειδικότερα για τιμές μικρότερες της μονάδας, ο έλεγχος λόγου πιθανοφανειών έχει μεγαλύτερη ισχύ από τους υπόλοιπους ελέγχους, ενώ για τιμές μεγαλύτερες της μονάδας φαίνεται να είναι ισχυρότερος ο έλεγχος που βασίζεται στον λόγο των BLUE των παραμέτρων. Όπως και με την ισχύ ομοίως κι εδώ το μικρότερο διάστημα είναι αυτό που προκύπτει από τον έλεγχο λόγου πιθανοφανειών.

Μελλοντικές κατευθύνσεις

Μελετώντας διάφορες εργασίες που αφορούσαν στην κατανομή Laplace αλλά βασίζονταν σε λογοκριμένες παρατηρήσεις μου δόθηκε το έναυσμα για να ασχοληθώ με τη σύγκριση των παραμέτρων θέσης δύο κατανομών Laplace υπό λογοκρισία τύπου II.

Έστω

$$X = (X_1, \dots, X_{n_1}), Y = (Y_1, \dots, Y_{n_2}), \quad n_1, n_2 \geq 2, \quad (5.1)$$

δύο ανεξάρτητα τυχαία δείγματα από τις κατανομές $\mathcal{L}(\mu_1, \sigma)$, $\mathcal{L}(\mu_2, \sigma)$, αντίστοιχα, και

$$X_{r_1+1:n_1} < \dots < X_{n_1-s_1:n_1}, \quad Y_{r_2+1:n_2} < \dots < Y_{n_2-s_2:n_2}$$

οι αντίστοιχες παρατηρήσεις που έχουν υποστεί λογοκρισία τύπου II. Θεωρούμε το πρόβλημα ελέγχου

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad \text{κατά} \quad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2.$$

Για να γίνει ένας τέτοιος έλεγχος μπορούμε να βασιστούμε είτε στους ΕΜΠ, είτε στους BLUE των παραμέτρων. Ανάλογα με τους ελέγχους για τη διαφορά των παραμέτρων θέσης για τα πλήρη δείγματα που είδαμε στο Κεφάλαιο 3 θεωρούμε τις ακόλουθες στατιστικές συναρτήσεις

$$T_2 := \frac{\tilde{\mu}_1 - \tilde{\mu}_2}{\tilde{\sigma}} \quad \text{και} \quad T_4 := \frac{\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2}{\hat{\sigma}}. \quad (5.2)$$

Κατανοούμε ότι αρχικά χρειαζόμαστε τους ΕΜΠ των παραμέτρων μ_1, μ_2 και σ βασιζόμενοι σε δείγματα που έχουν υποστεί λογοκρισία τύπου II. Υπό την H_1 η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι

$$\begin{aligned} L(\mu_1, \mu_2, \sigma | X, Y) &\propto \{F_1(X_{r_1+1:n_1})\}^{r_1} \prod_{i=r_1+1}^{n_1-s_1} f_1(X_{i:n_1}) \{1 - F_1(X_{n_1-s_1:n_1})\}^{s_1} \times \\ &\quad \{F_2(Y_{r_2+1:n_2})\}^{r_2} \prod_{i=r_2+1}^{n_2-s_2} f_2(Y_{i:n_2}) \{1 - F_2(X_{n_2-s_2:n_2})\}^{s_2} \\ &\quad (\text{όπου } f_1, F_1, f_2, F_2 \text{ οι συναρτήσεις πυκνότητας και κατανομής} \\ &\quad \text{των } \mathcal{L}(\mu_1, \sigma), \mathcal{L}(\mu_2, \sigma), \text{ αντίστοιχα}) \\ &= L_1(\mu_1, \sigma | X) L_2(\mu_2, \sigma | Y), \end{aligned} \quad (5.3)$$

όπου

$$L_1(\mu_1, \sigma | X) \propto \begin{cases} \frac{1}{2^{n_1-r_1} \sigma^{n_1-r_1-s_1}} \left\{ 1 - \frac{1}{2} e^{-(X_{r_1+1:n_1} - \mu_1)/\sigma} \right\}^{r_1} e^{-\{\sum_{i=r_1+1}^{n_1-s_1} (X_{i:n_1} - \mu_1) + s_1 (X_{n_1-s_1:n_1} - \mu_1)\}/\sigma}, & \mu_1 \leq X_{r_1+1:n_1} \\ \frac{1}{2^{n_1} \sigma^{n_1-r_1-s_1}} e^{r_1 (X_{r_1+1:n_1} - \mu_1) - \sum_{i=r_1+1}^{n_1-s_1} |X_{i:n_1} - \mu_1| - s_1 (X_{n_1-s_1:n_1} - \mu_1)}/\sigma, & X_{r_1+1:n_1} < \mu_1 \leq X_{n_1-s_1:n_1} \\ \frac{1}{2^{n_1-s_1} \sigma^{n_1-r_1-s_1}} e^{r_1 (X_{r_1+1:n_1} - \mu_1) + \sum_{i=r_1+1}^{n_1-s_1} (X_{i:n_1} - \mu_1)}/\sigma \left\{ 1 - \frac{1}{2} e^{(X_{n_1-s_1:n_1} - \mu_1)/\sigma} \right\}^{s_1}, & \mu_1 > X_{n_1-s_1:n_1} \end{cases}$$

και

$$L_2(\mu_2, \sigma | Y) \propto \begin{cases} \frac{1}{2^{n_2-r_2} \sigma^{n_2-r_2-s_2}} \left\{ 1 - \frac{1}{2} e^{-(Y_{r_2+1:n_2} - \mu_2)/\sigma} \right\}^{r_2} e^{-\{\sum_{i=r_2+1}^{n_2-s_2} (Y_{i:n_2} - \mu_2) + s_2 (Y_{n_2-s_2:n_2} - \mu_2)\}/\sigma}, & \mu_2 \leq Y_{r_2+1:n_2} \\ \frac{1}{2^{n_2} \sigma^{n_2-r_2-s_2}} e^{r_2 (Y_{r_2+1:n_2} - \mu_2) - \sum_{i=r_2+1}^{n_2-s_2} |Y_{i:n_2} - \mu_2| - s_2 (Y_{n_2-s_2:n_2} - \mu_2)}/\sigma, & Y_{r_2+1:n_2} < \mu_2 \leq Y_{n_2-s_2:n_2} \\ \frac{1}{2^{n_2-s_2} \sigma^{n_2-r_2-s_2}} e^{r_2 (Y_{r_2+1:n_2} - \mu_2) + \sum_{i=r_2+1}^{n_2-s_2} (Y_{i:n_2} - \mu_2)}/\sigma \left\{ 1 - \frac{1}{2} e^{(Y_{n_2-s_2:n_2} - \mu_2)/\sigma} \right\}^{s_2}, & \mu_2 > Y_{n_2-s_2:n_2}. \end{cases}$$

Οι Balakrishnan και Cutler (1995) θεώρησαν τις λογοκριμένες παρατηρήσεις για ένα δείγμα

$$X_{r+1:n} < \cdots < X_{n-s:n}$$

και βρήκαν ότι οι ΕΜΠ των παραμέτρων μ, σ είναι οι εξής:

- Αν $\max(r, s) < m$, όπου $m = [(n + 1)/2]$ τότε οι ΕΜΠ του μ, σ είναι

$$\hat{\mu} = \begin{cases} X_{m:n}, & n = 2m - 1 \\ \frac{1}{2}(X_{m:n} + X_{m+1:n}), & n = 2m \end{cases}$$

και

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{n - r - s} \left\{ \sum_{i=m+1}^{n-s} X_{i:n} + sX_{n-s:n} - rX_{r+1:n} - \sum_{i=r+1}^{[n/2]} X_{i:n} \right\}.$$

- Αν $s \geq m$ τότε οι ΕΜΠ του σ, μ είναι

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{n - r - s} \left\{ \sum_{i=r+1}^{n-s} (X_{n-s:n} - X_{i:n}) + r(X_{n-s:n} - X_{r+1:n}) \right\}$$

και

$$\hat{\mu} = X_{n-s:n} + \hat{\sigma} \log \left(\frac{n/2}{n-s} \right).$$

- Αν $r \geq m$ τότε οι ΕΜΠ του σ, μ είναι

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{n - r - s} \left\{ \sum_{i=r+1}^{n-s} (X_{i:n} - X_{r+1:n}) + s(X_{n-s:n} - X_{r+1:n}) \right\}$$

και

$$\hat{\mu} = X_{r+1:n} + \hat{\sigma} \log \left(\frac{n-r}{n/2} \right).$$

Έστω $n^* = n_1 + n_2 - r_1 - r_2 - s_1 - s_2$ το πλήθος των μη λογοκριμένων παρατηρήσεων και στα δύο δείγματα. Εργαζόμενοι ανάλογα με τους Balakrishnan and Cutler (1995), μπορεί να δειχθεί ότι οι ΕΜΠ των παραμέτρων στην (5.3) είναι οι ακόλουθοι:

- Αν $\max(r_1, s_1) < m_1$ και $\max(r_2, s_2) < m_2$ όπου $m_i = [(n_i + 1)/2]$, $i = 1, 2$ τότε οι ΕΜΠ του μ_1, μ_2, σ είναι, αντίστοιχα,

$$\hat{\mu}_1 = \text{οποιαδήποτε διάμεσος των } X,$$

$$\hat{\mu}_2 = \text{οποιαδήποτε διάμεσος των } Y,$$

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{n^*} \left\{ \sum_{i=m_1+1}^{n_1-s_1} X_{i:n_1} + s_1 X_{n_1-s_1:n_1} - r_1 X_{r_1+1:n_1} - \sum_{i=r_1+1}^{[n_1/2]} X_{i:n_1} + \sum_{i=m_2+1}^{n_2-s_2} Y_{i:n_2} + s_2 Y_{n_2-s_2:n_2} - r_2 Y_{r_2+1:n_2} - \sum_{i=r_2+1}^{[n_2/2]} Y_{i:n_2} \right\}$$

- Αν $\max(r_1, s_1) < m_1$, $s_2 \geq m_2$ τότε οι ΕΜΠ του μ_1, μ_2, σ είναι

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_1 &= \text{οποιαδήποτε διάμεσος των } X, \\ \hat{\mu}_2 &= Y_{n_2-s_2:n_2} + \hat{\sigma} \log\left(\frac{n_2/2}{n_2-s_2}\right), \\ \hat{\sigma} &= \frac{1}{n^*} \left\{ \sum_{i=m_1+1}^{n_1-s_1} X_{i:n_1} + s_1 X_{n_1-s_1:n_1} - r_1 X_{r_1+1:n_1} - \sum_{i=r_1+1}^{\lfloor n_1/2 \rfloor} X_{i:n_1} + \right. \\ &\quad \left. \sum_{i=r_2+1}^{n_2-s_2} (Y_{n_2-s_2:n_2} - Y_{i:n_2}) + r_2 (Y_{n_2-s_2:n_2} - Y_{r_2+1:n_2}) \right\}\end{aligned}$$

- Αν $\max(r_1, s_1) < m_1$, $r_2 \geq m_2$ τότε οι ΕΜΠ του μ_1, μ_2, σ είναι

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_1 &= \text{οποιαδήποτε διάμεσος των } X, \\ \hat{\mu}_2 &= Y_{r_2+1:n_2} + \hat{\sigma} \log\left(\frac{n_2-r_2}{n_2/2}\right) \\ \hat{\sigma} &= \frac{1}{n^*} \left\{ \sum_{i=m_1+1}^{n_1-s_1} X_{i:n_1} + s_1 X_{n_1-s_1:n_1} - r_1 X_{r_1+1:n_1} - \sum_{i=r_1+1}^{\lfloor n_1/2 \rfloor} X_{i:n_1} + \right. \\ &\quad \left. \sum_{i=r_2+1}^{n_2-s_2} (Y_{i:n_2} - Y_{r_2+1:n_2}) + s_2 (Y_{n_2-s_2:n_2} - Y_{r_2+1:n_2}) \right\}\end{aligned}$$

- Αν $s_1 \geq m_1$, $s_2 \geq m_2$ τότε οι ΕΜΠ του μ_1, μ_2, σ είναι

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_1 &= X_{n_1-s_1:n_1} + \hat{\sigma} \log\left(\frac{n_1/2}{n_1-s_1}\right), \\ \hat{\mu}_2 &= Y_{n_2-s_2:n_2} + \hat{\sigma} \log\left(\frac{n_2/2}{n_2-s_2}\right), \\ \hat{\sigma} &= \frac{1}{n^*} \left\{ \sum_{i=r_1+1}^{n_1-s_1} (X_{n_1-s_1:n_1} - X_{i:n_1}) + r_1 (X_{n_1-s_1:n_1} - X_{r_1+1:n_1}) + \right. \\ &\quad \left. \sum_{i=r_2+1}^{n_2-s_2} (Y_{n_2-s_2:n_2} - Y_{i:n_2}) + r_2 (Y_{n_2-s_2:n_2} - Y_{r_2+1:n_2}) \right\}\end{aligned}$$

- Αν $s_1 \geq m_1$, $r_2 \geq m_2$ τότε οι ΕΜΠ του μ_1, μ_2, σ είναι

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_1 &= X_{n_1-s_1:n_1} + \hat{\sigma} \log\left(\frac{n_1/2}{n_1-s_1}\right), \\ \hat{\mu}_2 &= Y_{r_2+1:n_2} + \hat{\sigma} \log\left(\frac{n_2-r_2}{n_2/2}\right), \\ \hat{\sigma} &= \frac{1}{n^*} \left\{ \sum_{i=r_1+1}^{n_1-s_1} (X_{n_1-s_1:n_1} - X_{i:n_1}) + r_1 (X_{n_1-s_1:n_1} - X_{r_1+1:n_1}) + \right. \\ &\quad \left. \sum_{i=r_2+1}^{n_2-s_2} (Y_{i:n_2} - Y_{r_2+1:n_2}) + s_2 (Y_{n_2-s_2:n_2} - Y_{r_2+1:n_2}) \right\}\end{aligned}$$

- Αν $s_1 \geq m_1$, $\max(r_2, s_2) < m_2$ τότε οι ΕΜΠ του μ_1, μ_2, σ είναι

$$\hat{\mu}_1 = X_{n_1-s_1:n_1} + \hat{\sigma} \log\left(\frac{n_1/2}{n_1-s_1}\right),$$

$$\hat{\mu}_2 = \text{οποιαδήποτε διάμεσος των } Y,$$

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{n^*} \left\{ \sum_{i=r_1+1}^{n_1-s_1} (X_{n_1-s_1:n_1} - X_{i:n_1}) + r_1(X_{n_1-s_1:n_1} - X_{r_1+1:n_1}) + \sum_{i=m_2+1}^{n_2-s_2} Y_{i:n_2} + s_2 Y_{n_2-s_2:n_2} - r_2 Y_{r_2+1:n_2} - \sum_{i=r_2+1}^{\lfloor n_2/2 \rfloor} Y_{i:n_2} \right\}$$

- Αν $r_1 \geq m_1$, $s_2 \geq m_2$ τότε οι ΕΜΠ του μ_1, μ_2, σ είναι

$$\hat{\mu}_1 = X_{r_1+1:n_1} + \hat{\sigma} \log\left(\frac{n_1-r_1}{n_1/2}\right),$$

$$\hat{\mu}_2 = Y_{n_2-s_2:n_2} + \hat{\sigma} \log\left(\frac{n_2/2}{n_2-s_2}\right),$$

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{n^*} \left\{ \sum_{i=r_1+1}^{n_1-s_1} (X_{i:n_1} - X_{r_1+1:n_1}) + s_1(X_{n_1-s_1:n_1} - X_{r_1+1:n_1}) + \sum_{i=r_2+1}^{n_2-s_2} (Y_{n_2-s_2:n_2} - Y_{i:n_2}) + r_2(Y_{n_2-s_2:n_2} - Y_{r_2+1:n_2}) \right\}$$

- Αν $r_1 \geq m_1$, $r_2 \geq m_2$ τότε οι ΕΜΠ του μ_1, μ_2, σ είναι

$$\hat{\mu}_1 = X_{r_1+1:n_1} + \hat{\sigma} \log\left(\frac{n_1-r_1}{n_1/2}\right),$$

$$\hat{\mu}_2 = Y_{r_2+1:n_2} + \hat{\sigma} \log\left(\frac{n_2-s_2}{n_2/2}\right),$$

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{n^*} \left\{ \sum_{i=r_1+1}^{n_1-s_1} (X_{i:n_1} - X_{r_1+1:n_1}) + s_1(X_{n_1-s_1:n_1} - X_{r_1+1:n_1}) + \sum_{i=r_2+1}^{n_2-s_2} (Y_{i:n_2} - Y_{r_2+1:n_2}) + s_2(Y_{n_2-s_2:n_2} - Y_{r_2+1:n_2}) \right\}$$

- Αν $r_1 \geq m_1$, $\max(r_2, s_2) < m_2$ τότε οι ΕΜΠ του μ_1, μ_2, σ είναι

$$\hat{\mu}_1 = X_{r_1+1:n_1} + \hat{\sigma} \log\left(\frac{n_1-r_1}{n_1/2}\right),$$

$$\hat{\mu}_2 = \text{οποιαδήποτε διάμεσος των } Y,$$

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{n^*} \left\{ \sum_{i=r_1+1}^{n_1-s_1} (X_{i:n_1} - X_{r_1+1:n_1}) + s_1(X_{n_1-s_1:n_1} - X_{r_1+1:n_1}) + \sum_{i=m_2+1}^{n_2-s_2} Y_{i:n_2} + s_2 Y_{n_2-s_2:n_2} - r_2 Y_{r_2+1:n_2} - \sum_{i=r_2+1}^{\lfloor n_2/2 \rfloor} Y_{i:n_2} \right\}.$$

Συνεπώς, αφού και οι ΕΜΠ και οι BLUE των παραμέτρων μ_1, μ_2, σ εκφράζονται ως γραμμικοί συνδυασμοί των διατεταγμένων παρατηρήσεων η μορφή των στατιστικών συναρτήσεων T_2, T_4 είναι η εξής

$$T_j = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i X_{i:n_1} - \sum_{i=1}^{n_2} \gamma_i Y_{i:n_2}}{\sum_{i=1}^{n_1} \beta_i X_{i:n_1} + \sum_{i=1}^{n_2} \delta_i Y_{i:n_2}}, \quad j = 2, 4$$

όπου $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ είναι κατάλληλες σταθερές.

Η δεξιά ουρά της ακριβούς κατανομής της T_j , $j = 2, 4$ εκφράζεται, όπως και στο Θεώρημα 3.2, ως

$$P(T_j > x) = \frac{1}{2^n} \sum_{d_1=0}^{n_1} \sum_{d_2=0}^{n_2} \binom{n_1}{d_1} \binom{n_2}{d_2} P(T_j > x | d_1, d_2), \quad j = 2, 4.$$

Επομένως, αφού έχουμε στην διάθεσή μας την ακριβή κατανομή των T_2, T_4 μπορούμε να υπολογίσουμε και τα αντίστοιχα ποσοστιαία σημεία.

Υπό την H_0 η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι

$$\begin{aligned} L(\mu, \mu, \sigma | X, Y) &\propto \{F(X_{r_1+1:n_1})\}^{r_1} \prod_{i=r_1+1}^{n_1-s_1} f(X_{i:n_1}) \{1 - F(X_{n_1-s_1:n_1})\}^{s_1} \times \\ &\quad \{F(Y_{r_2+1:n_2})\}^{r_2} \prod_{i=r_2+1}^{n_2-s_2} f(Y_{i:n_2}) \{1 - F(X_{n_2-s_2:n_2})\}^{s_2} \\ &\quad (\text{όπου } f, F \text{ οι συναρτήσεις πυκνότητας και κατανομής} \\ &\quad \text{της } \mathcal{L}(\mu, \sigma) \\ &= L_1(\mu, \sigma | X) L_2(\mu, \sigma | Y), \end{aligned} \tag{5.4}$$

όπου

$$L_1(\mu, \sigma | X) \propto \begin{cases} \frac{1}{2^{n_1-r_1} \sigma^{n_1-r_1-s_1}} \left\{1 - \frac{1}{2} e^{-(X_{r_1+1:n_1}-\mu)/\sigma}\right\} r_1 e^{-\left\{\sum_{i=r_1+1}^{n_1-s_1} (X_{i:n_1}-\mu) + s_1 (X_{n_1-s_1:n_1}-\mu)\right\}/\sigma}, & \mu \leq X_{r_1+1:n_1} \\ \frac{1}{2^{n_1} \sigma^{n_1-r_1-s_1}} e^{\left\{r_1 (X_{r_1+1:n_1}-\mu) - \sum_{i=r_1+1}^{n_1-s_1} |X_{i:n_1}-\mu| - s_1 (X_{n_1-s_1:n_1}-\mu)\right\}/\sigma}, & X_{r_1+1:n_1} < \mu \leq X_{n_1-s_1:n_1} \\ \frac{1}{2^{n_1-s_1} \sigma^{n_1-r_1-s_1}} e^{\left\{r_1 (X_{r_1+1:n_1}-\mu) + \sum_{i=r_1+1}^{n_1-s_1} (X_{i:n_1}-\mu)\right\}/\sigma} \left\{1 - \frac{1}{2} e^{(X_{n_1-s_1:n_1}-\mu)/\sigma}\right\}^{s_1}, & \mu > X_{n_1-s_1:n_1} \end{cases}$$

και

$$L_2(\mu, \sigma | Y) \propto \begin{cases} \frac{1}{2^{n_2-r_2} \sigma^{n_2-r_2-s_2}} \left\{1 - \frac{1}{2} e^{-(Y_{r_2+1:n_2}-\mu)/\sigma}\right\} r_2 e^{-\left\{\sum_{i=r_2+1}^{n_2-s_2} (Y_{i:n_2}-\mu) + s_2 (Y_{n_2-s_2:n_2}-\mu)\right\}/\sigma}, & \mu \leq Y_{r_2+1:n_2} \\ \frac{1}{2^{n_2} \sigma^{n_2-r_2-s_2}} e^{\left\{r_2 (Y_{r_2+1:n_2}-\mu) - \sum_{i=r_2+1}^{n_2-s_2} |Y_{i:n_2}-\mu| - s_2 (Y_{n_2-s_2:n_2}-\mu)\right\}/\sigma}, & Y_{r_2+1:n_2} < \mu \leq Y_{n_2-s_2:n_2} \\ \frac{1}{2^{n_2-s_2} \sigma^{n_2-r_2-s_2}} e^{\left\{r_2 (Y_{r_2+1:n_2}-\mu) + \sum_{i=r_2+1}^{n_2-s_2} (Y_{i:n_2}-\mu)\right\}/\sigma} \left\{1 - \frac{1}{2} e^{(Y_{n_2-s_2:n_2}-\mu)/\sigma}\right\}^{s_2}, & \mu > Y_{n_2-s_2:n_2}. \end{cases}$$

Από την (5.4) έχουμε ότι ο λογάριθμος της $L(\mu, \mu, \sigma|X, Y)$ είναι

$$\log L(\mu, \mu, \sigma|X, Y) = \log L_1(\mu, \sigma|X) + \log L_2(\mu, \sigma|Y)$$

Για το πρόβλημα της εύρεσης των ΕΜΠ των παραμέτρων υπό την H_0 θα κάνουμε μια σύντομη περιγραφή παρακάτω. Θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε την $\log L$, η οποία είναι συνάρτηση δύο μεταβλητών, ως προς μ και σ . Το πρόβλημα θα το αναγάγουμε όπως και στην απόδειξη του Λήμματος 2.4 στη μελέτη συναρτήσεων μιας μεταβλητής μέσω κατάτμησης της πιθανοφάνειας. Θεωρούμε σταθερό $\sigma > 0$. Για να μεγιστοποιήσουμε την $\log L$ ως προς μ αρχικά την παραγωγίζουμε και έπειτα από πράξεις έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mu} \log L(\mu, \mu, \sigma|X, Y) &= \frac{\partial}{\partial \mu} \log L_1(\mu, \sigma|X) + \frac{\partial}{\partial \mu} \log L_2(\mu, \sigma|Y) \Rightarrow \\ \sigma \frac{\partial}{\partial \mu} \log L(\mu, \mu, \sigma|X, Y) &= \left[n_1 - r_1 - \frac{r_1}{2e^{\frac{X_{r_1+1:n_1} - \mu}{\sigma}} - 1} \right] I_{(\mu \leq X_{r_1+1:n_1})} + (n_1 - 2i) I_{(X_{i:n_1} < \mu \leq X_{i+1:n_1})} + \\ &\quad \left[- (n_1 - s_1) + \frac{s_1}{2e^{\frac{\mu - X_{n_1-s_1:n_1}}{\sigma}} - 1} \right] I_{(\mu > X_{n_1-s_1:n_1})} + \\ &\quad \left[n_2 - r_2 - \frac{r_2}{2e^{\frac{Y_{r_2+1:n_2} - \mu}{\sigma}} - 1} \right] I_{(\mu \leq Y_{r_2+1:n_2})} + (n_2 - 2j) I_{(Y_{j:n_2} < \mu \leq Y_{j+1:n_2})} + \\ &\quad \left[- (n_2 - s_2) + \frac{s_2}{2e^{\frac{\mu - Y_{n_2-s_2:n_2}}{\sigma}} - 1} \right] I_{(\mu > Y_{n_2-s_2:n_2})}. \end{aligned}$$

Συνεπώς, για την εύρεση του ΕΜΠ του μ πρέπει να μελετηθούν οι εξής περιπτώσεις

$$\mu \leq X_{r_1+1:n_1}, \mu \leq Y_{r_2+1:n_2}$$

$$X_{i:n_1} < \mu \leq X_{i+1:n_1}, \mu \leq Y_{r_2+1:n_2} \text{ και } Y_{j:n_2} < \mu \leq Y_{j+1:n_2}, \mu \leq X_{r_1+1:n_1}$$

$$X_{n_1-s_1:n_1} < \mu \leq Y_{r_2+1:n_2}, Y_{n_2-s_2:n_2} < \mu \leq X_{r_1+1:n_1}$$

$$X_{i:n_1} < \mu \leq X_{i+1:n_1} \text{ και } Y_{j:n_2} < \mu \leq Y_{j+1:n_2}$$

$$\mu > X_{n_1-s_1:n_1}, Y_{j:n_2} < \mu \leq Y_{j+1:n_2} \text{ και } \mu > Y_{n_2-s_2:n_2}, X_{i:n_1} < \mu \leq X_{i+1:n_1}$$

$$\mu > X_{n_1-s_1:n_1}, \mu > Y_{n_2-s_2:n_2}.$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις προαναφερθείσες περιπτώσεις κατανοούμε πως θα πρέπει να μελετήσουμε λεπτομερώς τα διαστήματα στα οποία ανήκει η παράμετρος ώστε να μεγιστοποιήσουμε το $\log L$ ως προς μ . Οι δυσκολίες που προκύπτουν κατά τη διάρκεια αυτής της μελέτης αφορούν τόσο σε κάποιους περιορισμούς οι οποίοι πρέπει να ισχύουν ώστε να εξασφαλίζεται η ύπαρξη μεγίστου όσο και στη διάταξη των παρατηρήσεων δεδομένου του ότι το μ είναι παράμετρος της κατανομής και των X και των Y . Όλα αυτά αποτελούν αντικείμενο περαιτέρω διερεύνησης ώστε να ολοκληρωθεί η συγκεκριμένη έρευνα.

A Συμμετρία των κατανομών των T_2, T_3

Σε αυτήν την ενότητα θα δείξουμε ότι η κατανομή του

$$T_j = \frac{\tilde{\mu}_1 - \tilde{\mu}_2}{c_1\tilde{\sigma}_1 + c_2\tilde{\sigma}_2} = \frac{\tilde{\mu}_1(X) - \tilde{\mu}_2(Y)}{c_1\tilde{\sigma}_1(X) + c_2\tilde{\sigma}_2(Y)},$$

με $c_1 = n_1/n$, $c_2 = n_2/n$ για $j = 2$, $c_1 = c_1^*$, $c_2 = c_2^*$ για $j = 3$ και $\tilde{\mu}_1(X) = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i X_{i:n_1}$, $\tilde{\mu}_2(Y) = \sum_{i=1}^{n_2} \gamma_i Y_{i:n_2}$, $\tilde{\sigma}_1(X) = \sum_{i=1}^{n_1} \beta_i X_{i:n_1}$, $\tilde{\sigma}_2(Y) = \sum_{i=1}^{n_2} \delta_i Y_{i:n_2}$ είναι συμμετρική ως προς $\mu_1 - \mu_2$. Σε ό,τι ακολουθεί θα θεωρήσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Ως εκ τούτου θα δείξουμε ότι τα

$$\frac{\tilde{\mu}_1(X) - \tilde{\mu}_2(Y)}{c_1\tilde{\sigma}_1(X) + c_2\tilde{\sigma}_2(Y)} \quad \text{και} \quad -\frac{\tilde{\mu}_1(X) - \tilde{\mu}_2(Y)}{c_1\tilde{\sigma}_1(X) + c_2\tilde{\sigma}_2(Y)},$$

έχουν την ίδια κατανομή.

Λόγω της συμμετρίας της $\mathcal{L}(0, \sigma)$ ισχύει $(X_{1:n_1}, \dots, X_{n_1:n_1}) \stackrel{d}{=} (-X_{1:n_1}, \dots, -X_{n_1:n_1})$ και $(Y_{1:n_2}, \dots, Y_{n_2:n_2}) \stackrel{d}{=} (-Y_{1:n_2}, \dots, -Y_{n_2:n_2})$. Επίσης για τους συντελεστές των BLUE ισχύει $\alpha_i = \alpha_{n_1-i+1}$, $\beta_i = -\beta_{n_1-i+1}$, $i = 1, \dots, [(n_1+1)/2]$ και $\gamma_i = \gamma_{n_2-i+1}$, $\delta_i = -\delta_{n_2-i+1}$, $i = 1, \dots, [(n_2+1)/2]$. Επομένως, προκύπτει ότι $\tilde{\sigma}_1(X) = \tilde{\sigma}_1(-X)$, $\tilde{\sigma}_2(Y) = \tilde{\sigma}_2(-Y)$ και

$$\begin{aligned} -\frac{\tilde{\mu}_1(X) - \tilde{\mu}_2(Y)}{c_1\tilde{\sigma}_1(X) + c_2\tilde{\sigma}_2(Y)} &= \frac{\sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i(-X_{i:n_1}) - \sum_{i=1}^{n_2} \gamma_i(-Y_{i:n_2})}{c_1\tilde{\sigma}_1(-X) + c_2\tilde{\sigma}_2(-Y)} \\ &\stackrel{d}{=} \frac{\sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i X_{i:n_1} - \sum_{i=1}^{n_2} \gamma_i Y_{i:n_2}}{c_1\tilde{\sigma}_1(X) + c_2\tilde{\sigma}_2(Y)} = \frac{\tilde{\mu}_1(X) - \tilde{\mu}_2(Y)}{c_1\tilde{\sigma}_1(X) + c_2\tilde{\sigma}_2(Y)}. \end{aligned}$$

B Η Εικασία 4.1

Σε αυτήν την ενότητα θα συζητήσουμε την Εικασία 4.1. Ο τρόπος με τον οποίο θα προσεγγίσουμε την απόδειξη της ξεκινάει από κάποια λήμματα που απέδειξαν οι Plioroulos and Kourouklis (2000). Το Λήμμα B.1 εξασφαλίζει ότι αν ισχύει η ιδιότητα του μονότονου λόγου πιθανοφαινιών για την κατανομή του λόγου $\hat{\sigma}_1/\hat{\sigma}_2$ (ή $\tilde{\sigma}_1/\tilde{\sigma}_2$) τότε ισχύει και η Εικασία 4.1.

Επομένως, η απόδειξη της εικασίας ανάγεται στην απόδειξη της ιδιότητας του μονότονου λόγου πιθανοφανειών για την κατανομή του λόγου $\hat{\sigma}_1/\hat{\sigma}_2$ (ή $\tilde{\sigma}_1/\tilde{\sigma}_2$).

Λήμμα B.1. (Πιορoulos and Kourouklis, 2000) *Εστω h μια συνάρτηση πυκνότητας ορισμένη στο $(0, \infty)$ με $h(x) > 0, \forall x > 0$ και τέτοια ώστε ο λόγος $h(c_1x)/h(c_2x)$ να είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση του x για $0 < c_1 < c_2$. Τότε η $h(x)$ είναι συνεχής στο $(0, \infty)$, η $xh(x)$ είναι μονοκόρυφη και $\lim_{x \downarrow 0} xh(x) = \lim_{x \uparrow \infty} xh(x) = 0$.*

Το ακόλουθο λήμμα εξασφαλίζει ότι η ιδιότητα ισχύει αν οι κατανομές των $\hat{\sigma}_1$ και $\hat{\sigma}_2$ (ή των $\tilde{\sigma}_1$ και $\tilde{\sigma}_2$) έχουν την ιδιότητα του μονότονου λόγου πιθανοφανειών.

Λήμμα B.2. (Πιορoulos and Kourouklis, 2000) *Εστω Y_1, Y_2 ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με πυκνότητες h_1 και h_2 , αντίστοιχα, ορισμένες στο $(0, \infty)$. Υποθέτουμε ότι ο λόγος $h_i(c_1x)/h_i(c_2x), i = 1, 2$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση του x για $0 < c_1 < c_2$. Τότε αν h η συνάρτηση πυκνότητας του λόγου Y_1/Y_2 ο λόγος $h(c_1x)/h(c_2x)$ είναι επίσης γνησίως αύξουσα συνάρτηση του x για $0 < c_1 < c_2$.*

Σε αυτό το σημείο σημειώνουμε ότι οι κατανομές των $\hat{\sigma}_1$ και $\hat{\sigma}_2$ (ή των $\tilde{\sigma}_1$ και $\tilde{\sigma}_2$) έχουν την ίδια μορφή. Άρα η απόδειξη της εικασίας ανάγεται στην απόδειξη του ότι η κατανομή του $\hat{\sigma}_1$ έχει την ιδιότητα του μονότονου λόγου πιθανοφανειών. Όπως θα δούμε παρακάτω το αποτέλεσμα αυτό έχει αποδειχθεί αναλυτικά μόνο για $n_1 = 2$ και $n_1 = 3$ και μάλιστα για γενικότερες στατιστικές συναρτήσεις. Για μεγαλύτερο μέγεθος δείγματος η μορφή της πυκνότητας είναι εξαιρετικά πολύπλοκη και δεν έχει δοθεί μέχρι στιγμής μια γενική απόδειξη. Ωστόσο χρησιμοποιώντας τη διαδικασία που θα περιγραφεί στη συνέχεια, η ιδιότητα έχει αποδειχθεί μέσω του Mathematica για μεγέθη δείγματος μέχρι και 10 (αλλά δεν υπάρχει καμμία αμφιβολία ότι ισχύει και για μεγαλύτερα μεγέθη δείγματος).

Εστω X_1, \dots, X_n ένα τυχαίο δείγμα από την κατανομή $\mathcal{L}(\mu, \sigma)$ και έστω $W = \sum_{i=1}^n c_i X_{i:n}$ με τα c_1, \dots, c_n να ικανοποιούν τις σχέσεις $\sum_{j=1}^n c_j = 0$ και $\sum_{j=i}^n c_j \geq 0$ για $i = 2, \dots, n$. Η συνθήκη αυτή είναι ικανή και αναγκαία για να είναι η W θετική με πιθανότητα ένα. Για να το δούμε αυτό ας παρατηρήσουμε ότι

$$W = \sum_{i=1}^n c_i X_{i:n} = \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=i}^n c_j \right\} (X_{i:n} - X_{i-1:n})$$

όπου $X_{0:n} \equiv 0$ και ότι το τυχαίο διάνυσμα $(X_{1:n}, X_{2:n} - X_{1:n}, \dots, X_{n:n} - X_{n-1:n})$ μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή στο $\mathbb{R} \times (0, \infty)^{n-1}$. Η κατανομή του W δεν εξαρτάται από το μ επειδή είναι παράμετρος θέσης και ισχύει $\sum_{i=1}^n c_i = 0$. Να σημειωθεί επίσης ότι οι εκτιμητές $\hat{\sigma}_1$ και $\tilde{\sigma}_1$ έχουν τη μορφή της W .

Έστω f η συνάρτηση πυκνότητας του λόγου W/σ . Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή D που ισούται με το πλήθος των X_i που είναι μικρότερα ή ίσα του μ . Τότε η κατανομή του W/σ δίνεται από την σχέση

$$f(x) = \sum_{d=0}^n \frac{1}{2^n} \binom{n}{d} f(x|d) = \sum_{d=0}^n \frac{1}{2^n} \binom{n}{d} \sum_{a=1}^p \sum_{j=1}^{\gamma_a} \psi_{j,a}(\gamma, \lambda) \frac{\lambda_a^j x^{j-1} e^{-x\lambda_a}}{(j-1)!} \quad (\text{B.1})$$

με τις εκφράσεις των $f(x|d)$ να προκύπτουν από το Λήμμα 3.1. Παρατηρούμε ότι η $f(x)$ είναι απείρως παραγωγίσιμη.

Λήμμα Β.3. Έστω $0 < c_1 < c_2$. Τότε ο λόγος $f(c_1x)/f(c_2x)$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση του $x > 0$ αν και μόνον αν η $-xf'(x)/f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση.

Απόδειξη. Είναι

$$\begin{aligned} \left(\frac{f(c_1x)}{f(c_2x)} \right)' &= \frac{c_1 f'(c_1x) f(c_2x) - c_2 f(c_1x) f'(c_2x)}{(f(c_2x))^2} > 0 \Leftrightarrow \\ c_1 f'(c_1x) f(c_2x) > c_2 f(c_1x) f'(c_2x) > 0 &\Leftrightarrow -\frac{c_1 x f'(c_1x)}{f(c_1x)} < -\frac{c_2 x f'(c_2x)}{f(c_2x)}. \end{aligned}$$

□

Παραγωγίζοντας την $-xf'(x)/f(x)$ βλέπουμε ότι είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση του x αν και μόνον αν

$$\left(\frac{-xf'(x)}{f(x)} \right)' = \frac{xf'^2(x) - f'(x)f(x) - xf''(x)f(x)}{f^2(x)} \propto xf'^2(x) - f'(x)f(x) - xf''(x)f(x) > 0.$$

Έστω

$$g(x) = xf'^2(x) - f'(x)f(x) - xf''(x)f(x), \quad x > 0. \quad (\text{B.2})$$

Για $n = 2$, η συνάρτηση πυκνότητας του λόγου W/σ δίνεται από

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{d=0}^2 \frac{1}{2^2} \binom{2}{d} \sum_{a=1}^p \sum_{j=1}^{\gamma_a} \psi_{j,a}(\gamma, \lambda) \frac{\lambda_a^j x^{j-1} e^{-x\lambda_a}}{(j-1)!} \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{c} e^{-x/c} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{c^2} x e^{-x/c} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{c} e^{-x/c} \\ &= \frac{1}{2c^2} (c+x) e^{-x/c}, \end{aligned}$$

όπου $c > 0$. Τότε $f'(x) = -\frac{1}{2c^3} x e^{-x/c}$, $f''(x) = \frac{1}{2c^4} (-c+x) e^{-x/c}$ και

$$g(x) = xf'^2(x) - f'(x)f(x) - xf''(x)f(x) = \frac{1}{4c^5} (2c+x) e^{-x/c} > 0, \quad \forall x > 0.$$

Επομένως, για $n = 2$ η $f(x)$ έχει την ιδιότητα του μονότονου λόγου πιθανοφανειών.

Δυστυχώς, για $n \geq 3$ η g δεν έχει τόσο απλή μορφή. (Την έκφρασή της για $n = 3$ θα τη δούμε σε λίγο.) Επομένως πρέπει να βρούμε έναν εναλλακτικό τρόπο ώστε να δείξουμε ότι $g(x) > 0$. Προφανώς, μια συνθήκη που μας το εξασφαλίζει είναι το να ισχύει $g(0) = 0$ και $g'(x) > 0, \forall x > 0$.

Λήμμα Β.4. Έστω X, Y ανεξάρτητες μη αρνητικές απολύτως συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με συναρτήσεις πυκνότητας f_X, f_Y , αντίστοιχα. Αν τουλάχιστον μία εκ των δύο έχει φραγμένη συνάρτηση πυκνότητας τότε ισχύει ότι $f_{X+Y}(0) = 0$.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι η τυχαία μεταβλητή X έχει φραγμένη συνάρτηση πυκνότητας και ισχύει $f_X(x) \leq c, \forall x \geq 0$. Τότε $\forall s > 0$

$$f_{X+Y}(s) = \int_0^s f_X(s-t)f_Y(t)dt \leq c \int_0^s f_Y(t)dt = cF_Y(s)$$

και παίρνοντας $s \downarrow 0$ προκύπτει το αποτέλεσμα μια και $F_Y(0) = 0$. □

Το Λήμμα Β.4 προφανώς επεκτείνεται και σε άθροισμα περισσότερων από δύο τυχαίων μεταβλητών. Ως εκ τούτου μια και για $n \geq 3$ οι δεσμευμένες πυκνότητες $f(x|d)$ στην (Β.1) είναι οι πυκνότητες αθροισμάτων ανεξάρτητων εκθετικών τυχαίων μεταβλητών (δες Λήμμα 2.3), ισχύει $f(0|d) = 0$ για $d = 0, \dots, n$ και επομένως $f(0) = 0$. Αυτό συνεπάγεται αμέσως ότι

$$g(0) = 0 \quad \text{για } n \geq 3,$$

δεδομένου και του ότι όλες οι παράγωγοι της f είναι πεπερασμένες.

Θεωρούμε την εξής ακολουθία συναρτήσεων

$$g_0(x) = g(x), \quad G_j(x) = e^{\kappa_j x} g_{j-1}(x), \quad g_j(x) = G_j'(x), \quad j = 1, 2, \dots$$

όπου κ_j κατάλληλες σταθερές.

Λήμμα Β.5. Αν υπάρχει J τέτοιο ώστε $g_j(0) \geq 0, \forall j < J$ και $g_J(x) > 0, \forall x > 0$ τότε $g(x) > 0$.

Απόδειξη. Αν $g_J(x) > 0, \forall x > 0$, τότε η $G_J(x) = e^{\kappa_J x} g_{J-1}(x)$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση του x . Επομένως,

$$G_J(x) > G_J(0) \Rightarrow e^{\kappa_J x} g_{J-1}(x) > g_{J-1}(0) \geq 0$$

και συνεπώς $g_{J-1}(x) > 0$. Πηγαίνοντας προς τα πίσω προκύπτει ότι $g_0(x) = g(x) > 0, \forall x > 0$. □

B. Η Εικασία 4.1

Δεδομένης της μορφής της $g(x)$ μπορεί να διαπιστώσει κανείς ότι

$$g_0(x) = \sum_{i=1}^{r_0} p_i(x)e^{-\omega_i x},$$

όπου $p_i(x)$ είναι ένα πολυώνυμο ως προς x , τα ω_i είναι θετικές σταθερές και το r_0 είναι κάποιος θετικός ακέραιος. Προφανώς την ίδια μορφή έχει κάθε μία από τις $g_j(x)$ λόγω της κατασκευής τους. Για να αποδειχθεί το ζητούμενο ακολουθούμε την εξής διαδικασία.

Έστω $\kappa_1 = \max\{\omega_1, \dots, \omega_{r_0}\}$ και ας θεωρήσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\kappa_1 = \omega_1$. Τότε,

$$G_1(x) = e^{\kappa_1 x} g_0(x) = p_1(x) + \sum_{i=2}^{r_0} p_i(x)e^{(\omega_1 - \omega_i)x}$$

Αν s_1 ο βαθμός του πολυωνύμου p_1 τότε θέτουμε $\kappa_2 = \dots = \kappa_{s_1+1} = 0$ και παραγωγίζουμε την $G_1(x)$ έως ότου να εξαφανιστεί το πολυώνυμο. Τότε έχουμε φτάσει στην

$$g_{s_1+1}(x) = \sum_{i=2}^{r_0} q_i(x)e^{(\omega_1 - \omega_i)x},$$

όπου $q_i(x)$ κάποια (άλλα) πολυώνυμα. Θέτουμε τώρα $\kappa_{s_1+2} = \max\{\omega_2 - \omega_1, \dots, \omega_{r_0} - \omega_1\}$. Θεωρώντας χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\kappa_{s_1+2} = \omega_2 - \omega_1$ παίρνουμε

$$G_{s_1+2}(x) = e^{\kappa_{s_1+2} x} g_{s_1+1}(x) = q_2(x) + \sum_{i=3}^{r_0} q_i(x)e^{(\omega_2 - \omega_i)x}$$

και επαναλαμβάνουμε τα προηγούμενα βήματα. Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να καταλήξουμε σε μία G_J η οποία έχει όλους τους συντελεστές των πολυωνύμων μη αρνητικούς.

Αυτό που συμβαίνει είναι το εξής: Για οποιοδήποτε $n \geq 3$ και οποιαδήποτε c_1, \dots, c_n που ικανοποιούν την $\sum_{j=1}^n c_j = 0$ και $\sum_{j=i}^n c_j \geq 0$ για $i = 2, \dots, n$ έχουμε πειραματιστεί (και έχουμε πειραματιστεί με πολλά) ισχύει $g_j(0) \geq 0, \forall j < J$. Πιστεύουμε ότι αυτό ισχύει γενικά αν και δεν έχουμε γενική απόδειξη, επειδή οι συναρτήσεις είναι αρκετά πολύπλοκες (δείτε την περίπτωση $n = 3$ παρακάτω). Αν δεχθούμε ότι αυτός ο ισχυρισμός είναι αληθής, από το Λήμμα B.5 προκύπτει ότι $g(x) > 0$.

Ας δούμε την περίπτωση $n = 3$. Τότε έχουμε $W = c_1 X_{1:3} + c_2 X_{2:3} + c_3 X_{3:3}$ με $c_1 + c_2 + c_3 = 0$. Προκειμένου η W να είναι θετική με πιθανότητα ένα θα πρέπει $c_1 \leq 0$ και $c_3 \geq 0$ χωρίς να είναι και τα δύο μηδέν. Για να το δούμε αυτό ας θέσουμε $c_2 = -c_1 - c_3$ ώστε να πάρουμε

$$W = c_1 X_{1:3} + (-c_1 - c_3) X_{2:3} + c_3 X_{3:3} = -c_1 (X_{2:3} - X_{1:3}) + c_3 (X_{3:3} - X_{2:3}).$$

Ο ισχυρισμός για τα c_1, c_3 δικαιολογείται από το γεγονός ότι οι διαφορές $X_{2:3} - X_{1:3}$ και $X_{3:3} - X_{2:3}$ μπορούν να πάρουν οποιοσδήποτε τιμές στο $(0, \infty)$.

Στη συνέχεια θα θεωρήσουμε την περίπτωση όπου $c_1 < 0$ και $c_3 > 0$ (η διαδικασία εφαρμόζεται και όταν κάποιο από τα δύο ισούται με μηδέν και μάλιστα τα βήματα απλοποιούνται πολύ). Λόγω της συμμετρίας της κατανομής αρκεί να μελετήσουμε μόνο την περίπτωση $c_3 \geq -c_1$. Επίσης, μια και η κατανομή της W θα έχει την ιδιότητα του μονότονου λόγου πιθανοφαινιών αν και μόνον αν έχει την ιδιότητα η αW για οποιοδήποτε $\alpha > 0$, μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να θέσουμε $c_3 = 1$. Ως εκ τούτου, θέτοντας $c_1 = c$ για απλότητα στους συμβολισμούς, θεωρούμε στη συνέχεια την $W = cX_{1:3} - (1+c)X_{2:3} + X_{3:3}$ με $-1 \leq c \leq 0$.

Η συνάρτηση πυκνότητας του λόγου W/σ είναι

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{d=0}^3 \frac{1}{2^3} \binom{3}{d} \sum_{a=1}^p \sum_{j=1}^{\gamma_a} \psi_{j,a}(\gamma, \lambda) \frac{\lambda_a^j x^{j-1} e^{-x\lambda_a}}{(j-1)!} \\ &= \frac{1}{8} \left(-\frac{2}{c+2} e^{2x/c} + \frac{2}{c+2} e^{-x} \right) + \\ &\quad \frac{3}{8} \left(-\frac{2}{c+1} e^{x/c} + \frac{2}{c+2} e^{2x/c} + \frac{2}{(c+1)(c+2)} e^{-x} \right) + \\ &\quad \frac{3}{8} \left(-\frac{2c}{(c+1)(2c+1)} e^{x/c} - \frac{2}{2c+1} e^{-2x} + \frac{2}{c+1} e^{-x} \right) + \\ &\quad \frac{1}{8} \left(-\frac{2}{2c+1} e^{x/c} + \frac{2}{2c+1} e^{-2x} \right) \\ &= \frac{1}{2(c+1)(2c+1)(c+2)} \left\{ (2c+1)(2c+5)e^{-x} - (c+2)(5c+2)e^{x/c} \right. \\ &\quad \left. + (c+1)(2c+1)e^{2x/c} - (c+1)(c+2)e^{-2x} \right\}. \end{aligned}$$

Τότε, η $g(x)$ είναι

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{4(c+1)^2(2c+1)^2(c+2)^2} \\ &\quad \left\{ -\frac{2(c+1)^2(2c+1)^2}{c} e^{4x/c} + 2(c+1)^2(c+2)(2c+1) \right. \\ &\quad \left[2\left(\frac{2}{c} + \frac{1}{c^2} + 1\right)x + \frac{1}{c} - 1 \right] e^{2(\frac{1}{c}-1)x} + 2(c+1)^2(c+2)^2 e^{-4x} \\ &\quad + (c+2)(5c+2)(c+1)(2c+1) \left(\frac{1}{c^2}x + \frac{3}{c} \right) e^{3x/c} \\ &\quad - (2c+1)^2(c+1)(2c+5) \left[\left(\frac{4}{c} + \frac{4}{c^2} + 1 \right)x + \frac{2}{c} - 1 \right] e^{(\frac{2}{c}-1)x} \\ &\quad - (c+1)(c+2)^2(5c+2) \left[\left(\frac{4}{c} + \frac{1}{c^2} + 4 \right)x + \frac{1}{c} - 2 \right] e^{(\frac{1}{c}-2)x} \\ &\quad \left. + (2c+1)(2c+5)(c+1)(c+2) \left(x-3 \right) e^{-3x} - \frac{(c+2)^2(5c+2)^2}{c} e^{2x/c} \right\} \end{aligned}$$

$$+ (2c + 1)(2c + 5)(c + 2)(5c + 2) \left[\left(\frac{2}{c} + \frac{1}{c^2} + 1 \right) x + \frac{1}{c} - 1 \right] e^{\left(\frac{1}{c}-1\right)x} \\ 2(c + 1)^2(c + 2)^2 e^{-4x} + (2c + 1)^2(2c + 5)^2 e^{-2x} \}. \quad (\text{B.3})$$

Συνεπώς για $n = 3$ η $g(x) = g_0(x)$ είναι της μορφής

$$g_0(x) = \sum_{i=1}^{10} p_i(x) e^{-\omega_i x},$$

όπου $(\omega_1, \dots, \omega_{10}) = (4, 2, -4/c, -2/c, 3, -3/c, 1 - 1/c, 2 - 1/c, 1 - 2/c, 2(1 - 1/c))$. Για να ακολουθήσουμε την διαδικασία που περιγράψαμε παραπάνω θα πρέπει να διατάξουμε τα ω_i . Η διάταξή τους εξαρτάται από το αν το c ανήκει σε κάποιο από τα ακόλουθα διαστήματα.

$$(-1, -3/4), (-3/4, -2/3), (-2/3, -1/2), (-1/2, -1/3), (-1/3, 0).$$

Επίσης, όταν το c ισούται με κάποιο άκρο των παραπάνω διαστημάτων τότε στην πραγματικότητα δεν υπάρχουν δέκα διαφορετικά ω_i αλλά λιγότερα. Εν κατακλείδι υπάρχουν δώδεκα διαφορετικές περιπτώσεις που θα πρέπει να θεωρήσουμε. Στη συνέχεια θα δείξουμε αναλυτικά την διαδικασία μόνο για την περίπτωση $-1 < c < -3/4$. Στις υπόλοιπες περιπτώσεις το αποτέλεσμα προκύπτει με παρόμοιο τρόπο. Ωστόσο, στο τέλος της ενότητας παραθέτουμε πίνακες (Πίνακες 2 έως 8) οι οποίοι περιέχουν τα ω_i και κ_i που προκύπτουν εφαρμόζοντας την διαδικασία που ακολουθεί σε όλες τις περιπτώσεις που δεν περιγράφονται αναλυτικά.

Έστω $-1 < c < -3/4$. Διατάσσουμε τα ω_i και θέτουμε $\kappa_1 = \max\{\omega_1, \dots, \omega_{10}\} = -4/c$, $G_1(x) = e^{\kappa_1 x} g_0(x)$ και

$$g_1(x) = G_1'(x) = \left\{ e^{-4x/c} g_0(x) \right\}' \\ = \frac{1}{4(c + 1)^2(2c + 1)^2(c + 2)^2} \\ \left\{ - \frac{8(c + 1)^3(c + 2)(2c + 1)}{c^3} [c^2(x - 1) + x + 2cx] e^{-2(1+\frac{1}{c})x} \right. \\ \left. - \frac{8(c + 1)^3(c + 2)^2}{c} e^{-4(1+\frac{1}{c})x} - \frac{(c + 1)(c + 2)(2c + 1)(5c + 2)}{c^3} (2c + x) e^{-x/c} \right. \\ \left. + \frac{(c + 1)(c + 2)(2c + 1)^2(2c + 5)}{c^3} [c^2(x - 2) + 4x + 4cx] e^{-(1+\frac{2}{c})x} \right. \\ \left. + \frac{(c + 2)^2(5c^2 + 7c + 2)}{c^3} [8c^3(x - 1) + 3x + 4c^2(5x - 2) + 2c(7x + 1)] e^{-(2+\frac{3}{c})x} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{10 + 39c + 49c^2 + 24c^3 + 4c^4}{c} [4(x-3) + c(3x-10)] e^{-(3+\frac{4}{c})x} \\
 & + \frac{2(c+2)^2(5c+2)^2}{c^2} e^{-2x/c} - \frac{(c+2)(2c+1)(2c+5)(5c+2)}{c^3} [c^3(x-2) + 3x \\
 & + c^2(5x-4) + c(7x+2)] e^{-(1+\frac{3}{c})x} - \frac{2(c+2)(2c+1)^2(2c+5)^2}{c} e^{-2(1+\frac{2}{c})x} \}.
 \end{aligned}$$

Έπειτα από πράξεις προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
 g_1(0) &= \frac{1}{4(c+1)^2(2c+1)^2(c+2)^2} \\
 & \left\{ \frac{8(c+1)^3(c+2)(2c+1)}{c} - \frac{8(c+1)^3(c+2)^2}{c} - \frac{2(c+1)(c+2)(2c+1)(5c+2)}{c^2} \right. \\
 & - \frac{2(c+1)(c+2)(2c+1)^2(2c+5)}{c} + \frac{(c+2)^2(5c^2+7c+2)}{c^2} (-8c^2-8c+2) \\
 & + \frac{10+39c+49c^2+24c^3+4c^4}{c} (12+10c) + \frac{2(c+2)^2(5c+2)^2}{c^2} \\
 & \left. - \frac{(c+2)(2c+1)(2c+5)(5c+2)}{c^2} (-2c^2-4c+2) - \frac{2(c+2)(2c+1)^2(2c+5)^2}{c} \right\} \\
 & = \dots = 0.
 \end{aligned}$$

Συνεπώς, συνεχίζουμε αναζητώντας το μέγιστο των ω_i ($= \omega_i - \kappa_1$) τα οποία για ευκολία θα τα συμβολίσουμε πάλι με ω_i . Εφ' όσον $(\omega_1, \dots, \omega_9) = (4(1+1/c), 2(1+2/c), 2/c, 3+4/c, 1/c, 1+3/c, 2+3/c, 1+2/c, 2(1+1/c))$ θέτουμε $\kappa_2 = \max\{\omega_1, \dots, \omega_9\} = 2(1+1/c)$, $G_2(x) = e^{\kappa_2 x} g_1(x)$ και

$$\begin{aligned}
 g_2(x) = G_2'(x) &= \left\{ e^{2(1+\frac{1}{c})x} g_1(x) \right\}' = \frac{1}{4(c+1)^2(2c+1)^2(c+2)^2} \\
 & \left\{ - \frac{8(c+1)^5(c+2)(2c+1)}{c^3} + \frac{16(c+1)^4(c+2)^2}{c^2} e^{-2(1+\frac{1}{c})x} \right. \\
 & - \frac{(4+24c+49c^2+39c^3+10c^4)}{c^4} [4c^2+x+c(2x+3)] e^{(2+\frac{1}{c})x} \\
 & + \frac{(2c+1)^2(10+19c+11c^2+2c^3)}{c^3} [c^2(x-1)+4(x+1)+4c(x+1)] e^x \\
 & + \frac{(c+1)(c+2)^2(5c+2)}{c^4} [c+8c^4+c^2(-20x+22)+c^3(-8x+28)-3x-14cx] e^{-x/c} \\
 & + \frac{10+39c+49c^2+24c^3+4c^4}{c^2} [8(x-3)+c^2(3x-13)+2c(5x-18)] e^{-(1+\frac{2}{c})x} \\
 & \left. + \frac{4(c+2)^2(5c+2)^2}{c^2} e^{2x} - \frac{(20+108c+185c^2+108c^3+20c^4)}{c^4} \right\}
 \end{aligned}$$

B. Η Εικασία 4.1

$$\left\{ [c + c^4(x-1) - 3x - 4cx + c^2(2x+13) + c^3(4x+3)]e^{(1-\frac{1}{c})x} + \frac{4(c+2)(2c+1)^2(2c+5)^2}{c^2} e^{-2x/c} \right\}$$

Έπειτα από πράξεις προκύπτει ότι $g_2(0) = 0$ και η διαδικασία συνεχίζεται. Σε αυτό το σημείο βλέπουμε ότι το πρώτο πολυώνυμο δεν έχει εξαιρεθεί συνεπώς θέτουμε $\kappa_3 = 0$, $G_3(x) = g_2(x)$ και ξαναπαραγωγίζουμε. Οπότε,

$$\begin{aligned} g_3(x) = G_3'(x) &= \frac{1}{4(c+1)^2(2c+1)^2(c+2)^2} \\ &\left\{ -\frac{32(c+1)^5(c+2)^2}{c^3} e^{-2(1+\frac{1}{c})x} - \frac{(2c+1)^2(4+16c+17c^2+5c^3)}{c^5} [4c^2+x+ \right. \\ &2c(x+2)] e^{(2+\frac{1}{c})x} + \frac{(2c+1)^2(10+19c+11c^2+2c^3)}{c^3} [c^2x+4(x+2)+4c(x+2)]e^x \\ &- \frac{(c+1)(c+2)^2(5c+2)}{c^5} [16c^4+c(-14x+4)-8c^3(x-6)-3x-4c^2(5x-9)]e^{-x/c} \\ &- \frac{(c+2)^2(5+17c+16c^2+4c^3)}{c^3} [10c(x-4)+8(x-3)+c^2(3x-16)]e^{-(1+\frac{2}{c})x} \\ &+ \frac{8(c+2)^2(5c+2)^2}{c^2} e^{2x} - \frac{-20-88c-77c^2+77c^3+88c^4+20c^5}{c^5} \\ &[-4c(x-1)-3x+c^4x+4c^3(x+2)+2c^2(x+10)]e^{(1-\frac{1}{c})x} \\ &\left. - \frac{8(c+2)(2c+1)^2(2c+5)^2}{c^3} e^{-2x/c} \right\}. \end{aligned}$$

Έπειτα από πράξεις προκύπτει ότι

$$g_3(0) = \frac{2c^2 - c + 2}{c^4}.$$

Για να συνεχιστεί η διαδικασία πρέπει να ελέγξουμε αν $g_3(0) \geq 0$. Η διακρίνουσα του τριωνύμου $2c^2 - c + 2$ είναι αρνητική επομένως το τριώνυμο είναι θετικό πράγμα που συνεπάγεται ότι $g_3(0) > 0$ και η διαδικασία συνεχίζεται κανονικά.

Αναζητούμε το μέγιστο των νέων $\omega_i (= \omega_i - \kappa_2)$. Εφ' όσον $(\omega_1, \dots, \omega_8) = (-2, 2/c, 2(1+1/c), 1/c, -1, -2-1/c, -1+1/c, 1+2/c)$ θέτουμε $\kappa_4 = \max\{\omega_1, \dots, \omega_8\} = 2(1+1/c)$, $G_4(x) = e^{\kappa_4 x} g_3(x)$ και

$$\begin{aligned} g_4(x) = G_4'(x) &= \left\{ e^{2(1+\frac{1}{c})x} g_3(x) \right\}' = \frac{1}{4(c+1)^2(2c+1)^2(c+2)^2} \\ &\left\{ -\frac{(2c+1)^2(4+16c+17c^2+5c^3)}{c^6} [16c^3+3x+c^2(8x+30)+c(10x+13)] e^{(4+\frac{3}{c})x} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{(2c+1)^2(10+19c+11c^2+2c^3)}{c^4} [8(x+2) + 14c^2(x+2) + c^3(3x+1) + \\
 & 4c(5x+11)] e^{(3+\frac{2}{c})x} - \frac{(c+2)^2(2+11c+19c^2+10c^3)}{c^6} \\
 & [c+16c^4+c^3(-8x+44) - 3x - 14cx - 4c^2(5x-7)] e^{(2+\frac{1}{c})x} \\
 & - \frac{(c+2)^2(5+17c+16c^2+4c^3)}{c^3} [10c(x-3) + 8(x-2) + c^2(3x-13)] e^x \\
 & + \frac{16(c+2)^2(5c+2)^2(2c+1)}{c^3} e^{2(2+\frac{1}{c})x} - \frac{-20-88c-77c^2+77c^3+88c^4+20c^5}{c^6} \\
 & [c+c^2(-10x+28) - 3x - 13cx + 10c^3(x+7) + c^5(3x+1) + c^4(13x+28)] e^{(3+\frac{1}{c})x} \\
 & - \frac{16(c+2)(2c+1)^2(2c+5)^2}{c^3} e^{2x} \}.
 \end{aligned}$$

Έπειτα από πράξεις προκύπτει ότι

$$g_4(0) = \frac{-10 + 69c - 69c^2 + 10c^3}{4c^5}.$$

Για να συνεχιστεί η διαδικασία πρέπει να ελέγξουμε αν $g_4(0) \geq 0$. Εφ' όσον $c < 0$, ο παρονομαστής του κλάσματος είναι αρνητικός οπότε αρκεί να δείξουμε ότι ο αριθμητής είναι μη θετικός. Έστω

$$h(c) = -10 + 69c - 69c^2 + 10c^3$$

με

$$h'(c) = 69 - 138c + 30c^2.$$

Οι ρίζες της h' είναι (περίπου) 0.57 και 4.03.¹ Επομένως, $h'(c) > 0$ στο διάστημα $(-1, -3/4)$ (μια και είναι ολόκληρο εκτός των ριζών). Αυτό σημαίνει ότι η h είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-1, -3/4)$. Επί πλέον, εφ' όσον $h(-1) = -158$ και $h(-3/4) = -3353/32$ προκύπτει ότι $h(c) < 0$ και $g_4(0) > 0$.

Αναζητούμε το μέγιστο των νέων ω_i ($= \omega_i - \kappa_4$). Εφ' όσον $(\omega_1, \dots, \omega_7) = (-2(2+1/c), -2, -2-1/c, -3-2/c, -4-3/c, -3-1/c, -1)$ θέτουμε $\kappa_5 = \max\{\omega_1, \dots, \omega_7\} = -4-3/c$, $G_5(x) = e^{\kappa_5 x} g_4(x)$ και

$$g_5(x) = G_5'(x) = \left\{ e^{-(4+\frac{3}{c})x} g_4(x) \right\}' = \frac{1}{4(c+1)^2(2c+1)^2(c+2)^2}$$

¹Εδώ και σε ό,τι ακολουθεί, οι ρίζες των τριωνύμων παρουσιάζονται στρογγυλοποιημένες σε δύο δεκαδικά ψηφία μια και αυτό που μας ενδιαφέρει δεν είναι οι ακριβείς τιμές τους αλλά η θέση τους σε σχέση με το διάστημα $(-1, -3/4)$.

B. Η Εικασία 4.1

$$\left\{ -\frac{(2c+1)^3(4c+3)(4+16c+17c^2+5c^3)}{c^6} - \frac{(2c+1)^2(10+19c+11c^2+2c^3)}{c^5} \right. \\ [8(x+2) + c^4(3x-2) + 4c(7x+13) + c^3(17x+15) + c^2(34x+52)]e^{-(1+\frac{1}{c})x} \\ + \frac{(c+2)^2(2+11c+19c^2+10c^3)}{c^7} [32c^5 + c^2(-68x+72) + c^3(-56x+164) + \\ c(-34x+5) - 16c^4(x-8) - 6x]e^{-2(1+\frac{1}{c})x} + \frac{(c+2)^2(5+17c+16c^2+4c^3)}{c^4} \\ [24(x-2) + c^3(9x-42) + 2c(27x-73) + c^2(39x-139)]e^{-3(1+\frac{1}{c})x} \\ - \frac{16(c+2)^2(5c+2)^2(2c+1)}{c^4} e^{-x/c} + \frac{-20-88c-77c^2+77c^3+88c^4+20c^5}{c^7} \\ [c^2(-33x+70) + c(-29x+5) - 6x + c^6(3x-2) + 2c^3(5x+89) + 4c^4(9x+29) + \\ \left. c^5(19x+17)]e^{-(1+\frac{2}{c})x} + \frac{16(c+2)(2c+1)^2(2c+5)^2(2c+3)}{c^4} e^{-(2+\frac{3}{c})x} \right\}.$$

Έπειτα από πράξεις προκύπτει ότι

$$g_5(0) = -\frac{18+199c-399c^2+22c^3+48c^4}{4c^6}.$$

Για να συνεχιστεί η διαδικασία πρέπει να ελέγξουμε αν $g_5(0) \geq 0$. Ο παρονομαστής του κλάσματος είναι θετικός οπότε αρκεί να δείξουμε ότι ο αριθμητής είναι μη θετικός. Έστω

$$h(c) = 18 + 199c - 399c^2 + 22c^3 + 48c^4$$

με

$$h'(c) = 199 - 798c + 66c^2 + 192c^3$$

και

$$h''(c) = -798 + 132c + 576c^2.$$

Οι ρίζες της h'' είναι (περίπου) -1.30 και 1.07 . Επομένως, η h'' είναι αρνητική στο διάστημα $(-1, -3/4)$ (αφού αυτό περιέχεται εξ ολοκλήρου μεταξύ των δύο ριζών). Αυτό σημαίνει ότι η h' είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, -3/4)$. Επί πλέον, αφού $h'(-1) = 871$ και $h'(-3/4) = 6029/8$ προκύπτει ότι $h'(c) > 0$. Συνεπώς η h είναι γνησίως αύξουσα και εφ' όσον $h(-1) = -554$ και $h(-3/4) = -11193/32$ προκύπτει ότι $h(c) < 0$ και $g_5(0) > 0$.

Σε αυτό το σημείο βλέπουμε ότι το πρώτο πολυώνυμο δεν έχει εξαλειφθεί συνεπώς θέτουμε $\kappa_6 = 0$, $G_6(x) = g_5(x)$ και ξαναπαραγωγίζουμε. Οπότε,

$$g_6(x) = G_6'(x) = \frac{1}{4(c+1)^2(2c+1)^2(c+2)^2}$$

$$\left\{ \frac{(c+1)^2(2c+1)^2(10+9c+2c^2)}{c^6} [8(x+2) + c^4(3x-5) + 4c(7x+11) + c^3(17x+1) + c^2(34x+32)] e^{-(1+\frac{1}{c})x} - \frac{4(c+1)^2(c+2)^2(2+9c+10c^2)}{c^8} [16c^5 + c^2(-34x+43) + c^3(-28x+92) + c(-17x+4) + c^4(-8x+68) - 3x] e^{-2(1+\frac{1}{c})x} - \frac{3(c+2)^2(c+1)^2(5+12c+4c^2)}{c^5} [9c^3(x-5) + 24(x-2) + 2c(27x-77) + c^2(39x-149)] e^{-3(1+\frac{1}{c})x} + \frac{16(c+2)^2(5c+2)^2(2c+1)}{c^5} e^{-x/c} - \frac{(c+2)^2(-10-39c-19c^2+48c^3+20c^4)}{c^8} [c^2(-33x+83) + c(-29x+8) - 6x + c^6(3x-5) + 2c^3(5x+94) + 2c^4(18x+53) + c^5(19x+4)] e^{-(1+\frac{2}{c})x} - \frac{16(c+2)(2c+1)^2(2c+5)^2(2c+3)^2}{c^5} e^{-(2+\frac{3}{c})x} \right\}.$$

Έπειτα από πράξεις προκύπτει ότι

$$g_6(0) = \frac{48 + 342c - 1529c^2 - 202c^3 + 519c^4 + 150c^5}{4c^7}.$$

Για να συνεχιστεί η διαδικασία πρέπει να ελέγξουμε αν $g_6(0) \geq 0$. Εφ' όσον $c < 0$, ο παρονομαστής του κλάσματος είναι αρνητικός οπότε αρκεί να δείξουμε ότι ο αριθμητής είναι μη θετικός. Έστω

$$h(c) = 48 + 342c - 1529c^2 - 202c^3 + 519c^4 + 150c^5$$

με

$$h'(c) = 342 - 3058c - 606c^2 + 2076c^3 + 750c^4,$$

$$h''(c) = -3058 - 1212c + 6228c^2 + 3000c^3$$

και

$$h^{(3)}(c) = 12(-101 + 1038c + 750c^2).$$

Οι ρίζες της $h^{(3)}$ είναι (περίπου) -1.48 και 0.09 . Επομένως, η $h^{(3)}$ είναι αρνητική στο διάστημα $(-1, -3/4)$ (αφού αυτό περιέχεται εξ ολοκλήρου μεταξύ των δύο ριζών). Αυτό σημαίνει ότι η h'' είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, -3/4)$. Επί πλέον, αφού $h''(-1) = 1382$ και $h''(-3/4) = 709/8$ προκύπτει ότι $h''(c) > 0$. Αυτό σημαίνει ότι η h' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-1, -3/4)$. Επί πλέον, αφού $h'(-1) = 1468$ και

B. Η Εικασία 4.1

$h'(-3/4) = 211983/128$ προκύπτει ότι $h'(c) > 0$. Συνεπώς η h είναι γνησίως αύξουσα και εφ' όσον $h(-1) = -1252$ και $h(-3/4) = -437619/512$ προκύπτει ότι $h(c) < 0$ και $g_6(0) > 0$.

Αναζητούμε το μέγιστο των νέων $\omega_i (= \omega_i - \kappa_5)$. Εφ' όσον $(\omega_1, \dots, \omega_6) = (1/c, 2+3/c, 2(1+1/c), 1+1/c, 1+2/c, 3(1+1/c))$ θέτουμε $\kappa_7 = \max\{\omega_1, \dots, \omega_6\} = 1+1/c$, $G_7(x) = e^{\kappa_7 x} g_6(x)$ και

$$g_7(x) = G_7'(x) = \left\{ e^{(1+\frac{1}{c})x} g_6(x) \right\}' = \frac{1}{4(c+1)^2(2c+1)^2(c+2)^2} \left\{ \frac{(c+1)^3(c+2)^3(2c+1)^2(2c+5)(3c+2)}{c^6} + \frac{4(c+1)^3(c+2)^2(2+9c+10c^2)}{c^9} \right. \\ \left. [16c^5 + c^2(-34x+57) + c(-17x+7) + c^4(-8x+76) - 28c^3(x-4) - 3x]e^{-(1+\frac{1}{c})x} \right. \\ \left. + \frac{3(c+2)^2(c+1)^3(5+12c+4c^2)}{c^6} [48(x-2) + 9c^3(2x-11) + 4c(27x-83) + \right. \\ \left. c^2(78x-328)]e^{-2(1+\frac{1}{c})x} + \frac{16(c+2)^2(5c+2)^2(2c+1)}{c^5} e^x \right. \\ \left. - \frac{(c+2)^2(-10-39c-19c^2+48c^3+20c^4)}{c^9} [3c^7 + c^5(-19x+32) - 3c^6(x-8) + \right. \\ \left. 6x - 12c^4(3x+8) - c^3(10x+221) + c(29x-14) + c^2(33x-112)]e^{-x/c} \right. \\ \left. + \frac{16(c+2)^2(2c+1)^2(2c+5)^2(2c+3)^2}{c^6} e^{-(1+\frac{2}{c})x} \right\}.$$

Έπειτα από πράξεις προκύπτει ότι

$$g_7(0) = -\frac{84 + 286c - 3664c^2 - 67c^3 + 3058c^4 + 1789c^5 + 306c^6}{4c^8}.$$

Για να συνεχιστεί η διαδικασία πρέπει να ελέγξουμε αν $g_7(0) \geq 0$. Ο παρονομαστής του κλάσματος είναι θετικός οπότε αρκεί να δείξουμε ότι ο αριθμητής είναι μη θετικός. Έστω

$$h(c) = 84 + 286c - 3664c^2 - 67c^3 + 3058c^4 + 1789c^5 + 306c^6$$

με

$$h'(c) = 286 - 7328c - 201c^2 + 12232c^3 + 8945c^4 + 1836c^5,$$

$$h''(c) = -7328 - 402c + 36696c^2 + 35780c^3 + 9180c^4,$$

$$h^{(3)}(c) = -402 + 73392c + 107340c^2 + 36720c^3$$

και

$$h^{(4)}(c) = 24(3058 + 8945c + 4590c^2).$$

Οι ρίζες της $h^{(4)}$ είναι (περίπου) -1.51 και -0.44 . Επομένως, η $h^{(4)}$ είναι αρνητική στο διάστημα $(-1, -3/4)$ (αφού αυτό περιέχεται εξ ολοκλήρου μεταξύ των δύο ριζών). Αυτό σημαίνει ότι η $h^{(3)}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, -3/4)$. Επί πλέον, αφού $h^{(3)}(-1) = -3174$ και $h^{(3)}(-3/4) = -21117/2$ προκύπτει ότι $h^{(3)}(c) < 0$. Αυτό σημαίνει ότι η h'' είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, -3/4)$. Επί πλέον, αφού $h''(-1) = 3170$ και $h''(-3/4) = 91195/64$ προκύπτει ότι $h''(c) > 0$. Αυτό σημαίνει ότι η h' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-1, -3/4)$. Επί πλέον, αφού $h'(-1) = 2290$ και $h'(-3/4) = 23225/8$ προκύπτει ότι $h'(c) > 0$. Συνεπώς η h είναι γνησίως αύξουσα και εφ' όσον $h(-1) = -2224$ και $h(-3/4) = -3206637/2048$ προκύπτει ότι $h(c) < 0$ και $g_7(0) > 0$.

Σε αυτό το σημείο βλέπουμε ότι το πρώτο πολυώνυμο δεν έχει εξαλειφθεί συνεπώς θέτουμε $\kappa_8 = 0$, $G_8(x) = g_7(x)$ και ξαναπαραγωγίζουμε. Οπότε,

$$g_8(x) = G_8'(x) = \frac{1}{4(c+1)^2(2c+1)^2(c+2)^2} \left\{ -\frac{4(c+1)^4(c+2)^2(2+9c+10c^2)}{c^{10}} [16c^5 + c^2(-34x+71) + c(-17x+10) + c^4(-8x+84) - 3x - 4c^3(7x-33)] e^{-(1+\frac{1}{c})x} - \frac{12(c+2)^2(c+1)^4(5+12c+4c^2)}{c^7} [9c^3(x-6) + 24(x-2) + 2c(27x-89) + c^2(39x-179)] e^{-2(1+\frac{1}{c})x} + \frac{16(c+2)^2(5c+2)^2(2c+1)}{c^5} e^x + \frac{(c+2)^2(-10-39c-19c^2+48c^3+20c^4)}{c^{10}} [6c^7 + c^5(-19x+68) + c^6(-3x+43) + 6x - 2c^3(5x+127) + 3c^2(11x-47) - 2c^4(18x+43) + c(29x-20)] e^{-x/c} - \frac{16(c+2)^3(2c+1)^2(2c+5)^2(2c+3)^2}{c^7} e^{-(1+\frac{2}{c})x} \right\}.$$

Έπειτα από πράξεις προκύπτει ότι

$$g_8(0) = \frac{120 + 222c - 6997c^2 + 1293c^3 + 13075c^4 + 12117c^5 + 4610c^6 + 648c^7}{4c^9}.$$

Για να συνεχιστεί η διαδικασία πρέπει να ελέγξουμε αν $g_8(0) \geq 0$. Εφ' όσον $c < 0$, ο παρονομαστής του κλάσματος είναι αρνητικός οπότε αρκεί να δείξουμε ότι ο αριθμητής είναι μη θετικός. Έστω

$$h(c) = 120 + 222c - 6997c^2 + 1293c^3 + 13075c^4 + 12117c^5 + 4610c^6 + 648c^7$$

με

B. Η Εικασία 4.1

$$h'(c) = 222 - 13994c + 3879c^2 + 52300c^3 + 60585c^4 + 27660c^5 + 4536c^6,$$

$$h''(c) = -13994 + 7758c + 156900c^2 + 242340c^3 + 138300c^4 + 27216c^5,$$

$$h^{(3)}(c) = 7758 + 313800c + 727020c^2 + 553200c^3 + 136080c^4,$$

$$h^{(4)}(c) = 313800 + 1454040c + 1659600c^2 + 544320c^3$$

και

$$h^{(5)}(c) = 360(4039 + 9220c + 4536c^2).$$

Οι ρίζες της $h^{(5)}$ είναι (περίπου) -1.39 και -0.64 . Επομένως, η $h^{(5)}$ είναι αρνητική στο διάστημα $(-1, -3/4)$ (αφού αυτό περιέχεται εξ ολοκλήρου μεταξύ των δύο ριζών). Αυτό σημαίνει ότι η $h^{(4)}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, -3/4)$. Επί πλέον, αφού $h^{(4)}(-1) = -24960$ και $h^{(4)}(-3/4) = -72840$ προκύπτει ότι $h^{(4)}(c) < 0$. Αυτό σημαίνει ότι η $h^{(3)}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, -3/4)$. Επί πλέον, $h^{(3)}(-1) = 3858$ και $h^{(3)}(-3/4) = -143487/16$ δηλαδή η $h^{(3)}(c)$ αλλάζει πρόσημο. Επομένως, η h'' είναι αύξουσα στο -1 και φθίνουσα στο $-3/4$. Όμως $h''(-1) = 3892$ και $h''(-3/4) = 56113/16$ οπότε προκύπτει ότι $h''(c) > 0$. Αυτό σημαίνει ότι η h' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-1, -3/4)$. Επί πλέον, αφού $h'(-1) = 3256$ και $h'(-3/4) = 2175135/512$ προκύπτει ότι $h'(c) > 0$. Συνεπώς η h είναι γνησίως αύξουσα και εφ' όσον $h(-1) = -3472$ και $h(-3/4) = -648249/256$ προκύπτει ότι $h(c) < 0$ και $g_8(0) > 0$.

Αναζητούμε το μέγιστο των νέων $\omega_i (= \omega_i - \kappa_7)$. Εφ' όσον $(\omega_1, \dots, \omega_5) = (-1, 1 + 2/c, 1 + 1/c, 1/c, 2(1 + 1/c))$ θέτουμε $\kappa_7 = \max\{\omega_1, \dots, \omega_5\} = 1 + 1/c$, $G_9(x) = e^{k_8 x} g_8(x)$ και

$$g_9(x) = G_9'(x) = \left\{ e^{(1+\frac{1}{c})x} g_8(x) \right\}' = \frac{1}{4(c+1)^2(2c+1)^2(c+2)^2} \left\{ \frac{4(c+1)^5(c+2)^2(5c+2)(2c+3)(2c+1)^3}{c^{10}} + \frac{12(c+2)^2(c+1)^5(5+12c+4c^2)}{c^8} \right. \\ \left. [9c^3(x-7) + 24(x-2) + c^2(39x-209) + c(54x-202)] e^{-(1+\frac{1}{c})x} \right. \\ \left. + \frac{16(c+2)^2(5c+2)^2(2c+1)^2}{c^6} e^{(2+\frac{1}{c})x} + \frac{(c+2)^2(-10-39c-19c^2+48c^3+20c^4)}{c^{10}} \right. \\ \left. [6c^7 + c^5(-19x+49) + c^6(-3x+40) + 6(x+1) - 2c^3(5x+132) + 3c^2(11x-36) - \right. \\ \left. 2c^4(18x+61) + c(292x+9)] e^x + \frac{16(c+2)^3(2c+1)^2(2c+5)^2(2c+3)^2}{c^8} e^{-x/c} \right\}.$$

Έπειτα από πράξεις προκύπτει ότι

$$g_9(0) = -\frac{36 - 232c - 6135c^2 + 10393c^3 + 31425c^4 + 35421c^5 + 20750c^6 + 6258c^7 + 756c^8}{4c^{10}}$$

Για να συνεχιστεί η διαδικασία πρέπει να ελέγξουμε αν $g_9(0) \geq 0$. Ο παρονομαστής του κλάσματος είναι θετικός οπότε αρκεί να δείξουμε ότι ο αριθμητής είναι μη θετικός. Έστω

$$h(c) = 36 - 232c - 6135c^2 + 10393c^3 + 31425c^4 + 35421c^5 + 20750c^6 + 6258c^7 + 756c^8$$

με

$$h'(c) = -232 - 12270c + 31179c^2 + 125700c^3 + 177105c^4 + 124500c^5 + 43806c^6 + 6048c^7,$$

$$h''(c) = 6(-2045 + 10393c + 62850c^2 + 118070c^3 + 103750c^4 + 43806c^5 + 7056c^6),$$

$$h^{(3)}(c) = 6(10393 + 125700c + 354210c^2 + 415000c^3 + 219030c^4 + 42336c^5),$$

$$h^{(4)}(c) = 360(2095 + 11807c + 20750c^2 + 14602c^3 + 3528c^4)$$

$$h^{(5)}(c) = 360(11807 + 41500c + 43806c^2 + 14112c^3)$$

και

$$h^{(6)}(c) = 360(41500 + 87612c + 42336c^2).$$

Οι ρίζες της $h^{(6)}$ είναι (περίπου) -1.34 και -0.73 . Επομένως η $h^{(6)}$ είναι αρνητική στο διάστημα $(-1, -3/4)$ (αφού αυτό περιέχεται εξ ολοκλήρου μεταξύ των δύο ριζών). Αυτό σημαίνει ότι η $h^{(5)}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, -3/4)$. Επί πλέον, $h^{(5)}(-1) = 360$ και $h^{(5)}(-3/4) = -227025$ δηλαδή η $h^{(5)}(c)$ αλλάζει πρόσημο. Επομένως, η $h^{(4)}(c)$ είναι αύξουσα στο -1 και φθίνουσα στο $-3/4$. Όμως $h^{(4)}(-1) = -12960$ και $h^{(4)}(-3/4) = -95265/2$ και συνεπώς δε μπορούμε να αποφανθούμε άμεσα για το πρόσημο της. Θα δείξουμε ότι στο σημείο στο οποίο παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο διάστημα $(-1, -3/4)$ είναι αρνητική. Έστω c_1 αυτό το σημείο. Αφού πρόκειται για τοπικό μέγιστο της $h^{(4)}$ θα ισχύει $h^{(5)}(c_1) = 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h_1(c) = 4h^{(4)}(c) - ch^{(5)}(c) = 360(8380 + 35421c + 41500c^2 + 14602c^3)$$

με

$$h_1'(c) = 360(35421 + 83000c + 43806c^2).$$

Αφού οι ρίζες της h_1' είναι (περίπου) -1.25 και -0.65 προκύπτει ότι η $h_1'(c)$ είναι αρνητική στο διάστημα $(-1, -3/4)$ (αφού αυτό περιέχεται εξ ολοκλήρου μεταξύ των δύο ριζών). Αυτό σημαίνει ότι η $h_1(c)$ είναι γνησίως φθίνουσα. Αφού τώρα $h_1(-1) = -51480$ και $h_1(-3/4) = -1443195/4$, έχουμε $h_1(c) < 0$ στο διάστημα $(-1, -3/4)$. Επομένως, $h_1(c_1) = 4h^{(4)}(c_1) - c_1h^{(5)}(c_1) = 4h^{(4)}(c_1) < 0$ που συνεπάγεται ότι $h^{(4)}(c) < 0$. Αυτό σημαίνει ότι

B. Η Εικασία 4.1

η $h^{(3)}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, -3/4)$. Επί πλέον, $h^{(3)}(-1) = 3582$ και $h^{(3)}(-3/4) = -177051/64$ δηλαδή η $h^{(3)}(c)$ αλλάζει πρόσημο. Επομένως, η h'' είναι αύξουσα στο -1 και φθίνουσα στο $-3/4$. Όμως $h''(-1) = -3948$ και $h''(-3/4) = -936669/256$ και συνεπώς δε μπορούμε να αποφανθούμε άμεσα για το πρόσημο της. Θα δείξουμε ότι στο σημείο στο οποίο παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο διάστημα $(-1, -3/4)$ είναι αρνητική. Έστω c_2 αυτό το σημείο. Αφού πρόκειται για τοπικό μέγιστο της h'' θα ισχύει $h^{(3)}(c_2) = 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h_2(c) = 6h''(c) - ch^{(3)}(c) = 6(-12270 + 51965c + 251400c^2 + 354210c^3 + 207500c^4 + 43806c^5)$$

με

$$h_2'(c) = 6(51965 + 502800c + 1062630c^2 + 830000c^3 + 219030c^4),$$

$$h_2''(c) = 6(502800 + 2125260c + 2490000c^2 + 876120c^3)$$

και

$$h_2^{(3)}(c) = 6(2125260 + 4980000c + 2628360c^2).$$

Αφού οι ρίζες της $h_2^{(3)}$ είναι (περίπου) -1.25 και -0.65 προκύπτει ότι η $h_2^{(3)}(c)$ είναι αρνητική στο διάστημα $(-1, -3/4)$ (αφού αυτό περιέχεται εξ ολοκλήρου μεταξύ των δύο ριζών). Αυτό σημαίνει ότι η $h_2''(c)$ είναι γνησίως φθίνουσα. Αφού τώρα $h_2''(-1) = -51480$ και $h_2''(-3/4) = -1443195/4$ έχουμε $h_2''(c) < 0$ στο διάστημα $(-1, -3/4)$. Αυτό σημαίνει ότι η $h_2'(c)$ είναι γνησίως φθίνουσα. Επί πλέον, $h_2'(-1) = 4950$ και $h_2'(-3/4) = -3171615/64$ δηλαδή η $h_2'(c)$ αλλάζει πρόσημο. Επομένως, η $h_2(c)$ είναι αύξουσα στο -1 και φθίνουσα στο $-3/4$. Όμως $h_2(-1) = -20106$ και $h_2(-3/4) = -6151167/256$ και συνεπώς δε μπορούμε να αποφανθούμε άμεσα για το πρόσημο της. Θα δείξουμε ότι στο σημείο στο οποίο παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο διάστημα $(-1, -3/4)$ είναι αρνητική. Έστω c_3 αυτό το σημείο. Αφού πρόκειται για τοπικό μέγιστο της $h_2(c)$ θα ισχύει $h_2'(c_3) = 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h_3(c) = 5h_2(c) - ch_2'(c) = 60(-6135 + 20786c + 75420c^2 + 70842c^3 + 20750c^4)$$

με

$$h_3'(c) = 60(20786 + 150840c + 212526c^2 + 83000c^3)$$

και

$$h_3''(c) = 60(150840 + 425052c + 249000c^2).$$

Αφού οι ρίζες της h_3'' είναι (περίπου) -1.20 και -0.55 προκύπτει ότι η $h_3''(c)$ είναι αρνητική στο διάστημα $(-1, -3/4)$ (αφού αυτό περιέχεται εξ ολοκλήρου μεταξύ των δύο ριζών).

Αυτό σημαίνει ότι η $h'_3(c)$ είναι γνησίως φθίνουσα. Επί πλέον, αφού $h'_3(-1) = -31680$ και $h'_3(-3/4) = -468825$ προκύπτει ότι $h'_3(c) < 0$. Επομένως, η $h_3(c)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, -3/4)$. Αφού τώρα $h_3(-1) = -95580$ και $h_3(-3/4) = -5033835/32$ έχουμε $h_3(c) < 0$ στο διάστημα $(-1, -3/4)$. Επομένως, $h_3(c_3) = 5h_2(c_3) - c_3h'_2(c_3) = 5h_2(c_3) < 0$ που συνεπάγεται ότι $h_2(c) < 0$ στο διάστημα $(-1, -3/4)$. Άρα $h_2(c_2) = 6h''(c_2) - c_2h^{(3)}(c_2) = 6h''(c_2) < 0$ που συνεπάγεται ότι $h''(c) < 0$. Αυτό σημαίνει ότι η h' είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, -3/4)$. Επί πλέον, αφού $h'(-1) = 7880$ και $h'(-3/4) = 14255947/2048$ προκύπτει ότι $h'(c) > 0$. Συνεπώς η h είναι γνησίως αύξουσα και εφ' όσον $h(-1) = -5008$ και $h(-3/4) = -51684801/16384$ προκύπτει ότι $h(c) < 0$ και $g_9(0) > 0$.

Σε αυτό το σημείο βλέπουμε ότι το πρώτο πολυώνυμο δεν έχει εξαλειφθεί συνεπώς θέτουμε $\kappa_{10} = 0$, $G_{10}(x) = g_9(x)$ και ξαναπαραγωγίζουμε. Οπότε,

$$g_{10}(x) = G'_{10}(x) = \frac{1}{4(c+1)^2(2c+1)^2(c+2)^2} \left\{ -\frac{12(c+2)^2(c+1)^6(5+12c+4c^2)}{c^9} [9c^3(x-8) + 24(x-2) + c^2(39x-239) + c(54x-226)]e^{-(1+\frac{1}{c})x} + \frac{16(c+2)^2(5c+2)^2(2c+1)^3}{c^7} e^{(2+\frac{1}{c})x} + \frac{(c+2)^2(-10-39c-19c^2+48c^3+20c^4)}{c^{10}} [6c^7 + c^5(-19x+30) + c^6(-3x+37) + 6(x+2) - 2c^3(5x+137) - 2c^4(18x+79) + c(29x+38) + c^2(33x-75)]e^x - \frac{16(c+2)^3(2c+1)^2(2c+5)^2(2c+3)^2}{c^9} e^{-x/c} \right\}.$$

Έπειτα από πράξεις προκύπτει ότι

$$g_{10}(0) = \frac{-120 - 4448c + 17280c^2 + 52035c^3 + 78057c^4 + 64899c^5 + 31319c^6 + 8082c^7 + 864c^8}{4c^{10}}$$

Για να συνεχιστεί η διαδικασία πρέπει να ελέγξουμε αν $g_{10}(0) \geq 0$. Ο παρονομαστής του κλάσματος είναι θετικός οπότε αρκεί να δείξουμε ότι ο αριθμητής είναι μη αρνητικός. Έστω

$$h(c) = -120 - 4448c + 17280c^2 + 52035c^3 + 78057c^4 + 64899c^5 + 31319c^6 + 8082c^7 + 864c^8$$

με

$$h'(c) = -4448 + 34560c + 156105c^2 + 312228c^3 + 324495c^4 + 187914c^5 + 56574c^6 + 6912c^7,$$

$$h''(c) = 6(5760 + 52035c + 156114c^2 + 216330c^3 + 156595c^4 + 56574c^5 + 8064c^6),$$

B. Η Εικασία 4.1

$$h^{(3)}(c) = 6(52035 + 312228c + 648990c^2 + 626380c^3 + 282870c^4 + 48384c^5),$$

$$h^{(4)}(c) = 72(26019 + 108165c + 156595c^2 + 94290c^3 + 20160c^4),$$

$$h^{(5)}(c) = 72(108165 + 313190c + 282870c^2 + 80640c^3)$$

και

$$h^{(6)}(c) = 72(313190 + 565740c + 241920c^2).$$

Αφού οι ρίζες της $h^{(6)}$ είναι -1.4387 και -0.8998 , έχουμε $h^{(6)}(c) \leq 0$ για $c \in (-1, -0.8998]$ και $h^{(6)}(c) > 0$ για $c \in (-0.8998, -3/4)$. Επειδή $h^{(5)}(-1) = -201240$ και $h^{(5)}(-3/4) = -117585$ συμπεραίνουμε ότι $h^{(5)}(c) < 0$ στο διάστημα $(-1, -3/4)$ πράγμα που σημαίνει ότι η $h^{(4)}$ είναι γνησίως φθίνουσα. Επί πλέον, $h^{(4)}(-1) = 22968$ και $h^{(4)}(-3/4) = -120933/4$ δηλαδή η $h^{(4)}(c)$ αλλάζει πρόσημο. Επομένως, η $h^{(3)}(c)$ είναι αύξουσα στο -1 και φθίνουσα στο $-3/4$. Όμως $h^{(3)}(-1) = -18582$ και $h^{(3)}(-3/4) = -1272231/64$ και συνεπώς δε μπορούμε να αποφανθούμε άμεσα για το πρόσημο της. Θα δείξουμε ότι στο σημείο στο οποίο παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο διάστημα $(-1, -3/4)$ είναι αρνητική. Έστω c_1 αυτό το σημείο. Αφού πρόκειται για τοπικό μέγιστο της $h^{(3)}$ θα ισχύει $h^{(4)}(c_1) = 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h_1(c) = 5h^{(3)}(c) - ch^{(4)}(c) = 6(260175 + 1248912c + 1946970c^2 + 1252760c^3 + 282870c^4)$$

με

$$h_1'(c) = 6(1248912 + 3893940c + 3758280c^2 + 1131480c^3)$$

και

$$h_1''(c) = 6(3893940 + 7516560c + 3394440c^2).$$

Αφού οι ρίζες της h_1'' είναι -1.3877 και -0.8266 , έχουμε $h_1''(c) \leq 0$ για $c \in (-1, -0.8266]$ και $h_1''(c) > 0$ για $c \in (-0.8266, -3/4)$, πράγμα που σημαίνει ότι η $h_1'(c)$ είναι πρώτα φθίνουσα και μετά αύξουσα. Επειδή $h_1'(-1) = -109368$ και $h_1'(-3/4) = -836487/4$ συμπεραίνουμε ότι $h_1'(c) < 0$ στο διάστημα $(-1, -3/4)$. Αυτό σημαίνει ότι η $h_1(c)$ είναι γνησίως φθίνουσα. Αφού τώρα $h_1(-1) = -69942$ και $h_1(-3/4) = -7812351/64$ έχουμε $h_1(c) < 0$ στο διάστημα $(-1, -3/4)$. Επομένως, $h_1(c_1) = 5h^{(3)}(c_1) - c_1h^{(4)}(c_1) = 5h^{(3)}(c_1) < 0$ που συνεπάγεται ότι $h^{(3)}(c) < 0$. Αυτό σημαίνει ότι η h'' είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, -3/4)$. Επί πλέον, αφού $h''(-1) = 9564$ και $h''(-3/4) = 1292139/256$ προκύπτει ότι $h''(c) > 0$. Αυτό σημαίνει ότι η h' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-1, -3/4)$. Επί πλέον, αφού $h'(-1) = -8888$ και $h'(-3/4) = -14447485/2048$ προκύπτει ότι $h'(c) < 0$. Συνεπώς η h είναι

γνησίως φθίνουσα και εφ' όσον $h(-1) = 6832$ και $h(-3/4) = 39832863/8192$ προκύπτει ότι $h(c) > 0$ και $g_{10}(0) > 0$.

Αναζητούμε το μέγιστο των νέων ω_i ($= \omega_i - \kappa_9$). Εφ' όσον $(\omega_1, \dots, \omega_4) = (-2 - 1/c, 1/c, -1, 1 + 1/c)$ θέτουμε $\kappa_{11} = \max\{\omega_1, \dots, \omega_4\} = 1 + 1/c$, $G_{11}(x) = e^{\kappa_{11}x} g_{10}(x)$ και

$$g_{11}(x) = G'_{11}(x) = \left\{ e^{(1+\frac{1}{c})x} g_{10}(x) \right\}' = \frac{1}{4(c+1)^2(2c+1)^2(c+2)^2} \\ \left\{ -\frac{36(c+2)^3(c+1)^7(3c+4)(5+12c+4c^2)}{c^9} \right. \\ + \frac{16(c+2)^2(5c+2)^2(2c+1)^3(3c+2)}{c^8} e^{(3+\frac{2}{c})x} \\ + \frac{(c+2)^2(-10-39c-19c^2+48c^3+20c^4)}{c^{11}} [12c^8 + c^6(-41x+78) + c^7(-6x+77) + \\ 6(x+2) - 7c^5(13x+46) - 4c^4(14x+179) + c(41x+68) + c^3(56x-391) + \\ \left. c^2(91x+30)] e^{(2+\frac{1}{c})x} - \frac{16(c+2)^3(2c+1)^2(2c+5)^2(2c+3)^2}{c^9} e^x \right\}.$$

Έπειτα από πράξεις προκύπτει ότι

$$g_{11}(0) = -\frac{1}{4c^{11}}(120 + 428c + 7692c^2 + 7788c^3 + 18113c^4 + 16797c^5 + \\ 16797c^5 + 11595c^6 + 4511c^7 + 1056c^8 + 108c^9).$$

Για να συνεχιστεί η διαδικασία πρέπει να ελέγξουμε αν $g_{11}(0) \geq 0$. Εφ' όσον $c < 0$, ο παρονομαστής του κλάσματος είναι αρνητικός οπότε αρκεί να δείξουμε ότι η παράσταση εντός της παρένθεσης είναι μη θετική. Έστω

$$h(c) = 120 + 428c + 7692c^2 + 7788c^3 + 18113c^4 + 16797c^5 + 11595c^6 + 4511c^7 + 1056c^8 + 108c^9$$

με

$$h'(c) = 428 + 15384c + 23364c^2 + 72452c^3 + 83985c^4 + 69570c^5 + 31577c^6 + 8448c^7 + 972c^8,$$

$$h''(c) = 15384 + 46728c + 217356c^2 + 335940c^3 + 347850c^4 + 189462c^5 + 59136c^6 + 7776c^7,$$

$$h^{(3)}(c) = 46728 + 434712c + 1007820c^2 + 1391400c^3 + 947310c^4 + 354816c^5 + 54432c^6,$$

$$h^{(4)}(c) = 434712 + 2015640c + 4174200c^2 + 3789240c^3 + 1774080c^4 + 326592c^5,$$

$$h^{(5)}(c) = 2015640 + 8348400c + 11367720c^2 + 7096320c^3 + 1632960c^4$$

B. Η Εικασία 4.1

$$h^{(6)}(c) = 8348400 + 22735440c + 21288960c^2 + 6531840c^3$$

και

$$h^{(7)}(c) = 22735440 + 42577920c + 19595520c^2.$$

Αφού οι ρίζες της $h^{(7)}$ είναι -1.2281 και -0.9447 , έχουμε $h^{(7)}(c) \leq 0$ για $c \in (-1, -0.9447]$ και $h^{(7)}(c) > 0$ για $c \in (-0.9447, -3/4)$, πράγμα που σημαίνει ότι η $h^{(6)}$ είναι πρώτα φθίνουσα και μετά αύξουσα. Όμως $h^{(6)}(-1) = 370080$ και $h^{(6)}(-3/4) = 516240$ και συνεπώς δε μπορούμε να αποφανθούμε άμεσα για το πρόσημο της. Θα δείξουμε ότι στο σημείο στο οποίο παίρνει την ελάχιστη τιμή της στο διάστημα $(-1, -3/4)$ είναι θετική. Έστω c_1 αυτό το σημείο. Αφού πρόκειται για τοπικό ελάχιστο της $h^{(6)}$ θα ισχύει $h^{(7)}(c_1) = 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h_1(c) = 3h^{(6)}(c) - ch^{(7)}(c) = 720(34785 + 63154c + 29568c^2)$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι αρνητική, οπότε το τριώνυμο είναι θετικό δηλαδή $h_1(c) > 0$ στο διάστημα $(-1, -3/4)$. Επομένως, $h_1(c_1) = 3h^{(6)}(c_1) - c_1h^{(7)}(c_1) = 3h^{(6)}(c_1) > 0$ που συνεπάγεται ότι $h^{(6)}(c) > 0$. Αυτό σημαίνει ότι η $h^{(5)}$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-1, -3/4)$. Επί πλέον, αφού $h^{(5)}(-1) = -428400$ και $h^{(5)}(-3/4) = -1313595/4$ προκύπτει ότι $h^{(5)}(c) < 0$. Αυτό σημαίνει ότι η $h^{(4)}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, -3/4)$. Επίσης, αφού $h^{(4)}(-1) = 251520$ και $h^{(4)}(-3/4) = 2499393/16$ προκύπτει ότι $h^{(4)}(c) > 0$. Αυτό σημαίνει ότι η $h^{(3)}$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-1, -3/4)$. Επί πλέον, αφού $h^{(3)}(-1) = -124638$ και $h^{(3)}(-3/4) = -2373795/32$ προκύπτει ότι $h^{(3)}(c) < 0$. Αυτό σημαίνει ότι η h'' είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, -3/4)$. Επί πλέον, αφού $h''(-1) = 59820$ και $h''(-3/4) = 9078969/256$ προκύπτει ότι $h''(c) > 0$. Αυτό σημαίνει ότι η h' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-1, -3/4)$. Επί πλέον, αφού $h'(-1) = -25528$ και $h'(-3/4) = -227404681/16384$ προκύπτει ότι $h'(c) < 0$. Συνεπώς η h είναι γνησίως φθίνουσα και εφ' όσον $h(-1) = 8944$ και $h(-3/4) = 271605579/65536$ προκύπτει ότι $h(c) > 0$ και $g_{11}(0) > 0$.

Σε αυτό το σημείο βλέπουμε ότι το πρώτο πολυώνυμο δεν έχει εξαλειφθεί συνεπώς θέτουμε $\kappa_{12} = 0$, $G_{12}(x) = g_{11}(x)$ και ξαναπαραγωγίζουμε. Οπότε,

$$g_{12}(x) = G'_{12}(x) = \frac{1}{4(c+1)^2(2c+1)^2(c+2)^2} \left\{ \frac{16(c+2)^2(5c+2)^2(2c+1)^3(3c+2)^2}{c^9} e^{(3+\frac{2}{c})x} + \frac{(c+2)^2(2c+1)^2}{c^{12}} [12c^8 + c^6(-41x+59) + c^7(-6x+74) + 6(x+2) - 2c^4(28x+363) + c(41x+74) + c^3(56x-358) + c^2(91x+59) - c^5(91x+358)] e^{(2+\frac{1}{c})x} \right.$$

$$- \frac{16(c+2)^3(2c+1)^2(2c+5)^2(2c+3)^2}{c^9} e^x \}.$$

Έπειτα από πράξεις προκύπτει ότι

$$g_{12}(0) = \frac{1}{4c^{12}}(-120 - 728c - 192c^2 - 1847c^3 + 3409c^4 - 3409c^5 + 1847c^6 + 192c^7 + 728c^8 + 120c^9)$$

Για να συνεχιστεί η διαδικασία πρέπει να ελέγξουμε αν $g_{12}(0) \geq 0$. Εφ' όσον ο παρονομαστής του κλάσματος είναι πάντα θετικός αρκεί να δείξουμε ότι η παράσταση εντός της παρένθεσης είναι μη αρνητική. Έστω

$$h(c) = -120 - 728c - 192c^2 - 1847c^3 + 3409c^4 - 3409c^5 + 1847c^6 + 192c^7 + 728c^8 + 120c^9$$

με

$$h'(c) = -728 - 384c - 5541c^2 + 13636c^3 - 17045c^4 + 11082c^5 + 1344c^6 + 5824c^7 + 1080c^8,$$

$$h''(c) = -384 - 11082c + 40908c^2 - 68180c^3 + 55410c^4 + 8064c^5 + 40768c^6 + 8640c^7,$$

$$h^{(3)}(c) = -11082 + 81816c - 204540c^2 + 221640c^3 + 40320c^4 + 244608c^5 + 60480c^6,$$

$$h^{(4)}(c) = 81816 - 409080c + 664920c^2 + 161280c^3 + 1223040c^4 + 362880c^5,$$

$$h^{(5)}(c) = -409080 + 1329840c + 483840c^2 + 4892160c^3 + 1814400c^4$$

$$h^{(6)}(c) = 1329840 + 967680c + 14676480c^2 + 7257600c^3$$

και

$$h^{(7)}(c) = 967680 + 29352960c + 21772800c^2.$$

Οι ρίζες της $h^{(7)}$ είναι (περίπου) -1.31 και -0.03 . Επομένως, η $h^{(7)}$ είναι αρνητική στο διάστημα $(-1, -3/4)$ (αφού αυτό περιέχεται εξ ολοκλήρου μεταξύ των δύο ριζών). Αυτό σημαίνει ότι η $h^{(6)}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, -3/4)$. Επί πλέον, αφού $h^{(6)}(-1) = 360$ και $h^{(6)}(-3/4) = 5797800$ προκύπτει ότι $h^{(6)}(c) > 0$. Αυτό σημαίνει ότι η $h^{(5)}$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-1, -3/4)$. Επί πλέον, αφού $h^{(5)}(-1) = -4332840$ και $h^{(5)}(-3/4) = -5248185/2$ προκύπτει ότι $h^{(5)}(c) < 0$. Αυτό σημαίνει ότι η $h^{(4)}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, -3/4)$. Επί πλέον, αφού $h^{(4)}(-1) = 1854696$ και $h^{(4)}(-3/4) = 7963743/8$ προκύπτει ότι $h^{(4)}(c) > 0$. Αυτό σημαίνει ότι η $h^{(3)}$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-1, -3/4)$. Επί πλέον, αφού $h^{(3)}(-1) = -662886$ και $h^{(3)}(-3/4) = -20193735/64$

B. Η Εικασία 4.1

προκύπτει ότι $h^{(3)}(c) < 0$. Επομένως, η h'' είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, -3/4)$. Επί πλέον, αφού $h''(-1) = 199260$ και $h''(-3/4) = 20844201/256$ προκύπτει ότι $h''(c) > 0$. Αυτό σημαίνει ότι η h' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-1, -3/4)$. Επί πλέον, αφού $h'(-1) = -51048$ και $h'(-3/4) = -145510729/8192$ προκύπτει ότι $h'(c) < 0$. Συνεπώς η h είναι γνησίως φθίνουσα και εφ' όσον $h(-1) = 11344$ και $h(-3/4) = 109830903/32768$ προκύπτει ότι $h(c) > 0$ και $g_{12}(0) > 0$.

Αναζητούμε το μέγιστο των νέων ω_i ($= \omega_i - \kappa_{11}$). Εφ' όσον $(\omega_1, \dots, \omega_3) = (-3 - 2/c, -1, -2 - 1/c)$ θέτουμε $\kappa_{13} = \max\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} = -3 - 2/c$, $G_{13}(x) = e^{\kappa_{13}x} g_{12}(x)$ και

$$g_{13}(x) = G'_{13}(x) = \left\{ e^{-(3+\frac{2}{c})x} g_{12}(x) \right\}' = \frac{1}{4(c+1)^2(2c+1)^2(c+2)^2} \left\{ -\frac{(c+2)^2(2c+1)^2(10-29c+29c^3+10c^4)}{c^{13}} [12c^8 + c^6(-41x+94) + c^7(-6x+80) + 6(x+2) - 2c^4(28x+363) + c(41x+68) + c^3(56x-414) + c^2(91x+24) - c^5(91x+302)] e^{-(1+\frac{1}{c})x} + \frac{32(c+1)(c+2)^3(2c+1)^2(2c+5)^2(2c+3)^2}{c^{10}} e^{-2(1+\frac{1}{c})x} \right\}.$$

Έπειτα από πράξεις προκύπτει ότι

$$g_{13}(0) = \frac{1}{2c^{13}} (60 + 394c + 258c^2 + 4394c^3 + 6435c^4 + 8683c^5 + 7997c^6 + 2355c^7 - 662c^8 - 454c^9 - 60c^{10}).$$

Για να συνεχιστεί η διαδικασία πρέπει να ελέγξουμε αν $g_{13}(0) \geq 0$. Εφ' όσον $c < 0$ ο παρονομαστής είναι αρνητικός οπότε αρκεί να δείξουμε ότι η παράσταση εντός της παρένθεσης είναι μη θετική. Έστω

$$h(c) = 600 + 394c + 258c^2 + 4394c^3 + 6435c^4 + 8683c^5 + 7997c^6 + 2355c^7 - 662c^8 - 454c^9 - 60c^{10}$$

με

$$h'(c) = 394 + 516c + 13182c^2 + 25740c^3 + 43415c^4 + 47982c^5 + 16485c^6 - 5296c^7 - 4086c^8 - 600c^9,$$

$$h''(c) = 516 + 26364c + 77220c^2 + 173660c^3 + 239910c^4 + 98910c^5 - 37072c^6 - 32688c^7 - 5400c^8,$$

$$h^{(3)}(c) = 26364 + 154440c + 520980c^2 + 959640c^3 + 494550c^4 - 222432c^5 - 228816c^6 - 43200c^7,$$

$$h^{(4)}(c) = 154440 + 1041960c + 2878920c^2 + 1978200c^3 - 1112160c^4 - 1372896c^5 - 302400c^6,$$

$$h^{(5)}(c) = 1041960 + 5757840c + 5934600c^2 - 4448640c^3 - 6864480c^4 - 1814400c^5,$$

$$h^{(6)}(c) = 5757840 + 11869200c - 13345920c^2 - 27457920c^3 - 9072000c^4,$$

$$h^{(7)}(c) = 11869200 - 26691840c - 82373760c^2 - 36288000c^3$$

και

$$h^{(8)}(c) = -26691840 - 164747520c - 108864000c^2.$$

Οι ρίζες της $h^{(8)}$ είναι (περίπου) -1.33 και -0.18 . Επομένως, η $h^{(8)}$ είναι αρνητική στο διάστημα $(-1, -3/4)$ (αφού αυτό περιέχεται εξ ολοκλήρου μεταξύ των δύο ριζών). Αυτό σημαίνει ότι η $h^{(7)}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, -3/4)$. Επί πλέον, $h^{(7)}(-1) = -7524720$ και $h^{(7)}(-3/4) = 861840$ δηλαδή η $h^{(7)}(c)$ αλλάζει πρόσημο. Επομένως, η $h^{(6)}(c)$ είναι πρώτα φθίνουσα και μετά αύξουσα. Όμως $h^{(6)}(-1) = -1071360$ και $h^{(6)}(-3/4) = -3875535/2$ οπότε προκύπτει ότι $h^{(6)}(c) < 0$. Αυτό σημαίνει ότι η $h^{(5)}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, -3/4)$. Επί πλέον, αφού $h^{(5)}(-1) = 617280$ και $h^{(5)}(-3/4) = 788655/4$ προκύπτει ότι $h^{(5)}(c) > 0$. Αυτό σημαίνει ότι η $h^{(4)}$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-1, -3/4)$. Επί πλέον, $h^{(4)}(-1) = -28464$ και $h^{(4)}(-3/4) = 4984893/64$ δηλαδή η $h^{(4)}(c)$ αλλάζει πρόσημο. Επομένως, η $h^{(3)}(c)$ είναι πρώτα φθίνουσα και μετά αύξουσα. Όμως $h^{(3)}(-1) = -35370$ και $h^{(3)}(-3/4) = -3450603/128$ οπότε προκύπτει ότι $h^{(3)}(c) < 0$. Αυτό σημαίνει ότι η h'' είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, -3/4)$. Επί πλέον, αφού $h''(-1) = 8928$ και $h''(-3/4) = 4737813/8192$ προκύπτει ότι $h''(c) > 0$. Αυτό σημαίνει ότι η h' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-1, -3/4)$. Επί πλέον, αφού $h'(-1) = 1048$ και $h'(-3/4) = 35883127/16384$ προκύπτει ότι $h'(c) > 0$. Συνεπώς η h είναι γνησίως αύξουσα και εφ' όσον $h(-1) = -1344$ και $h(-3/4) = -234661245/262144$ προκύπτει ότι $h(c) < 0$ και $g_{13}(0) > 0$.

Αναζητούμε το μέγιστο των νέων $\omega_i (= \omega_i - \kappa_{13})$. Εφ' όσον $(\omega_1, \omega_2) = (2(1 + 1/c), 1 + 1/c)$ θέτουμε $\kappa_{14} = \max\{\omega_1, \omega_2\} = 1 + 1/c$, $G_{14}(x) = e^{\kappa_{14}x} g_{13}(x)$ και

$$g_{14}(x) = G'_{14}(x) = \left\{ e^{(1+\frac{1}{c})x} g_{13}(x) \right\}' = \frac{1}{4(c+1)^2(2c+1)^2(c+2)^2} \left\{ \frac{(c-1)^2(c+1)^3(c+2)^3(2c+1)^3(10+29c+10c^2)(3+10c+3c^2)}{c^{13}} - \frac{32(c+1)^2(c+2)^3(2c+1)^2(2c+5)^2(2c+3)^2}{c^{11}} e^{-(1+\frac{1}{c})x} \right\}.$$

Έπειτα από πράξεις προκύπτει ότι

$$g_{14}(0) = \frac{c+2}{4c^{13}} (130 + 217c - 6753c^2 - 15414c^3 - 12992c^4 - 4603c^5 - 89c^6 + 344c^7 + 60c^8)$$

B. Η Εικασία 4.1

Για να συνεχιστεί η διαδικασία πρέπει να ελέγξουμε αν $g_{14}(0) \geq 0$. Αφού $-1 < c < -3/4$ είναι σαφές ότι ο αριθμητής του κλάσματος είναι θετικός ενώ ο παρονομαστής αρνητικός. Συνεπώς, αρκεί να δείξουμε ότι η παράσταση εντός της παρένθεσης είναι μη θετική. Έστω

$$h(c) = 130 + 217c - 6753c^2 - 15414c^3 - 12992c^4 - 4603c^5 - 89c^6 + 344c^7 + 60c^8$$

με

$$h'(c) = 217 - 13506c - 46242c^2 - 51968c^3 - 23015c^4 - 534c^5 + 2408c^6 + 480c^7,$$

$$h''(c) = -13506 - 92484c - 155904c^2 - 92060c^3 - 2670c^4 + 14448c^5 + 3360c^6,$$

$$h^{(3)}(c) = -92484 - 311808c - 276180c^2 - 10680c^3 + 72240c^4 + 20160c^5,$$

$$h^{(4)}(c) = -311808 - 552360c - 32040c^2 + 288960c^3 + 100800c^4,$$

$$h^{(5)}(c) = -552360 - 64080c + 866880c^2 + 403200c^3$$

και

$$h^{(6)}(c) = -64080 + 1733760c + 1209600c^2.$$

Οι ρίζες της $h^{(6)}$ είναι (περίπου) -1.47 και 0.04 . Επομένως, η $h^{(6)}$ είναι αρνητική στο διάστημα $(-1, -3/4)$ (αφού αυτό περιέχεται εξ ολοκλήρου μεταξύ των δύο ριζών). Αυτό σημαίνει ότι η $h^{(5)}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, -3/4)$. Επί πλέον, αφού $h^{(5)}(-1) = -24600$ και $h^{(5)}(-3/4) = -186780$ προκύπτει ότι $h^{(5)}(c) < 0$. Αυτό σημαίνει ότι η $h^{(4)}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, -3/4)$. Επί πλέον, $h^{(4)}(-1) = 20352$ και $h^{(4)}(-3/4) = -22287/4$ δηλαδή η $h^{(4)}(c)$ αλλάζει πρόσημο. Επομένως, η $h^{(3)}(c)$ είναι πρώτα αύξουσα και μετά φθίνουσα. Όμως $h^{(3)}(-1) = 5904$ και $h^{(3)}(-3/4) = 17199/2$ οπότε προκύπτει ότι $h^{(3)}(c) > 0$. Αυτό σημαίνει ότι η h'' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-1, -3/4)$. Επί πλέον, αφού $h''(-1) = 1376$ και $h''(-3/4) = 53175/16$ προκύπτει ότι $h''(c) > 0$. Αυτό σημαίνει ότι η h' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-1, -3/4)$. Επί πλέον, αφού $h'(-1) = -1104$ και $h'(-3/4) = -272125/512$ προκύπτει ότι $h'(c) < 0$. Συνεπώς η h είναι γνησίως φθίνουσα και εφ' όσον $h(-1) = -288$ και $h(-3/4) = -8236557/16384$ προκύπτει ότι $h(c) < 0$ και $g_{14}(0) > 0$.

Σε αυτό το σημείο βλέπουμε ότι το πρώτο πολυώνυμο δεν έχει εξαλειφθεί συνεπώς θέτουμε $\kappa_{15} = 0$, $G_{15}(x) = g_{14}(x)$ και ξαναπαραγωγίζουμε. Οπότε,

$$g_{15}(x) = G'_{15}(x) = \frac{1}{4(c+1)^2(2c+1)^2(c+2)^2}$$

$$\left\{ \frac{32(c+1)^3(c+2)^3(2c+1)^2(2c+5)^2(2c+3)^2}{c^{12}} e^{-(1+\frac{1}{c})x} \right\}.$$

Έπειτα από πράξεις προκύπτει ότι

$$g_{15}(0) = \frac{8(c+1)(c+2)(2c+3)^2(2c+5)^2}{c^{12}} > 0.$$

Τελικά, θέτουμε $\kappa_{16} = \omega_1 = 1 + 1/c$, $G_{16}(x) = e^{\kappa_{16}x} g_{15}(x)$ με

$$G_{16}(x) = \frac{32(c+1)^3(c+2)^3(2c+1)^2(2c+5)^2(2c+3)^2}{c^{12}}$$

και η διαδικασία σταματά δεδομένου του ότι η $G_{16}(x)$ είναι θετική.

Επομένως, στην περίπτωση όπου $n = 3$ και $-1 < c < -3/4$ η κατανομή της W έχει την ιδιότητα του μονότονου λόγου πιθανοφανειών.

Οι πίνακες που ακολουθούν περιέχουν τα εκάστοτε ω_i και κ_i που προέκυψαν εφαρμόζοντας την προηγούμενη διαδικασία σε όλες τις περιπτώσεις που δεν δείξαμε. Για πληρότητα παρατίθεται και ο πίνακας στην περίπτωση όπου $-1 < c < -3/4$ που αναλύθηκε διεξοδικώς.

κ	$\omega - \kappa$									
0	$-4/c$	$2(1-1/c)$	4	$-3/c$	$1-2/c$	$2-1/c$	3	$-2/c$	$1-1/c$	2
$-4/c$	$2(1+1/c)$	$4(1+1/c)$	$1/c$	$1+2/c$	$2+3/c$	$3+4/c$	$2/c$	$1+3/c$	$2(1+2/c)$	
$2(1+1/c)$	$2(1+1/c)$	$-(2+1/c)$	-1	$1/c$	$1+2/c$	-2	$-(1-1/c)$	$2/c$		
$2(1+1/c)$	$-(4+3/c)$	$-(3+2/c)$	$-(2+1/c)$	-1	$-2(2+1/c)$	$-(3+1/c)$	-2			
$-(4+3/c)$	$1+1/c$	$2(1+1/c)$	$3(1+1/c)$	$1/c$	$1+2/c$	$2+3/c$				
$1+1/c$	$1+1/c$	$2(1+1/c)$	-1	$1/c$	$1+2/c$					
$1+1/c$	$1+1/c$	$-(2+1/c)$	-1	$1/c$						
$1+1/c$	$-(3+2/c)$	$-(2+1/c)$	-1							
$-(3+2/c)$	$1+1/c$	$2(1+1/c)$								
$1+1/c$	$1+1/c$									
$1+1/c$										

Πίνακας 1: Τιμές των κ και $\omega - \kappa$ για $c \in (-1, -3/4)$.

B. Η Εικασία 4.1

$-3/4 < c < -2/3$										
κ	$\omega - \kappa$									
0	4	2	$-4/c$	$-2/c$	3	$-3/c$	$1 - 1/c$	$2 - 1/c$	$1 - 2/c$	$2(1 - 1/c)$
$-4/c$	$4(1 + 1/c)$	$2(1 + 2/c)$	$2/c$	$3 + 4/c$	$1/c$	$1 + 3/c$	$2 + 3/c$	$1 + 2/c$	$2(1 + 1/c)$	
$2(1 + 1/c)$	$2(1 + 1/c)$	$2/c$	-2	$1 + 2/c$	$-(2 + 1/c)$	$-(1 - 1/c)$	$1/c$	-1		
$-(2 + 1/c)$	$4 + 3/c$	$2 + 3/c$	$1/c$	$3(1 + /c)$	$1 + 2/c$	$2(1 + 1/c)$	$1 + 1/c$			
$4 + 3/c$	-2	$-2(2 + 1/c)$	-1	$-(3 + 1/c)$	$-(2 + 1/c)$	$-(3 + 2/c)$				
$-(3 + 2/c)$	$1 + 2/c$	-1	$2(1 + 1/c)$	$1/c$	$1 + 1/c$					
$1 + 1/c$	$1/c$	$-(2 + 1/c)$	$1 + 1/c$	-1						
$1 + 1/c$	-1	$-(3 + 2/c)$	$-(2 + 1/c)$							
$-(3 + 2/c)$	$2(1 + 1/c)$	$1 + 1/c$								
$1 + 1/c$	$1 + 1/c$									
$1 + 1/c$										
$-2/3 < c < -1/2$										
κ	$\omega - \kappa$									
0	4	2	$-4/c$	$-2/c$	3	$-3/c$	$1 - 1/c$	$2 - 1/c$	$1 - 2/c$	$2(1 - 1/c)$
$-4/c$	$4(1 + 1/c)$	$2(1 + 2/c)$	$2/c$	$3 + 4/c$	$1/c$	$1 + 3/c$	$2 + 3/c$	$1 + 2/c$	$2(1 + 1/c)$	
$2(1 + 1/c)$	$2(1 + 1/c)$	$2/c$	-2	$1 + 2/c$	$-(2 + 1/c)$	$-(1 - 1/c)$	$1/c$	-1		
$-(2 + 1/c)$	$4 + 3/c$	$2 + 3/c$	$1/c$	$3(1 + /c)$	$1 + 2/c$	$2(1 + 1/c)$	$1 + 1/c$			
$1 + 1/c$	$3 + 2/c$	$1 + 2/c$	-1	$2(1 + 1/c)$	$1/c$	$1 + 1/c$				
$3 + 2/c$	-2	$-2(2 + 1/c)$	-1	$-(3 + 1/c)$	$-(2 + 1/c)$					
$-(2 + 1/c)$	$1/c$	$-(2 + 1/c)$	$1 + 1/c$	-1						
$-(2 + 1/c)$	$2(1 + 1/c)$	$3 + 2/c$	$1 + 1/c$							
$3 + 2/c$	-1	$-(2 + 1/c)$								
$-(2 + 1/c)$	$1 + 1/c$									
$1 + 1/c$										

Πίνακας 2: Τιμές των κ και $\omega - \kappa$ για $c \in (-3/4, -2/3)$ και $c \in (-2/3, -1/2)$.

$-1/2 < c < -1/3$										
κ	$\omega - \kappa$									
0	4	2	$-4/c$	$-2/c$	3	$-3/c$	$1 - 1/c$	$2 - 1/c$	$1 - 2/c$	$2(1 - 1/c)$
$-4/c$	$4(1 + 1/c)$	$2(1 + 2/c)$	$2/c$	$3 + 4/c$	$1/c$	$1 + 3/c$	$2 + 3/c$	$1 + 2/c$	$2(1 + 1/c)$	
$1/c$	$4 + 3/c$	$2 + 3/c$	$1/c$	$3(1 + 1/c)$	$1 + 2/c$	$2(1 + 1/c)$	$1 + 1/c$	$2 + 1/c$		
$2 + 1/c$	$2(1 + 1/c)$	$2/c$	-2	$1 + 2/c$	$-(1 - 1/c)$	$1/c$	-1			
-1	$3 + 2/c$	$1 + 2/c$	-1	$2(1 + 1/c)$	$1/c$	$1 + 1/c$				
-1	$2(2 + 1/c)$	$2(1 + 1/c)$	$3 + 2/c$	$1 + 1/c$	$2 + 1/c$					
$2 + 1/c$	$2 + 1/c$	$1/c$	$1 + 1/c$	-1						
$2 + 1/c$	-2	-1	$-(3 + 1/c)$							
$-(3 + 1/c)$	$1 + 1/c$	$2 + 1/c$								
$2 + 1/c$	-1									
-1										
$-1/3 < c < 0$										
κ	$\omega - \kappa$									
0	4	2	$-4/c$	$-2/c$	3	$-3/c$	$1 - 1/c$	$2 - 1/c$	$1 - 2/c$	$2(1 - 1/c)$
$-4/c$	$4(1 + 1/c)$	$2(1 + 2/c)$	$2/c$	$3 + 4/c$	$1/c$	$1 + 3/c$	$2 + 3/c$	$1 + 2/c$	$2(1 + 1/c)$	
$1/c$	$4 + 3/c$	$2 + 3/c$	$1/c$	$3(1 + 1/c)$	$1 + 2/c$	$2(1 + 1/c)$	$1 + 1/c$	$2 + 1/c$		
$2 + 1/c$	$2(1 + 1/c)$	$2/c$	-2	$1 + 2/c$	$-(1 - 1/c)$	$1/c$	-1			
-1	$3 + 2/c$	$1 + 2/c$	-1	$2(1 + 1/c)$	$1/c$	$1 + 1/c$				
-1	$2(2 + 1/c)$	$2(1 + 1/c)$	$3 + 2/c$	$1 + 1/c$	$2 + 1/c$					
$2 + 1/c$	$2 + 1/c$	$1/c$	$1 + 1/c$	-1						
-1	$3 + 1/c$	$1 + 1/c$	$2 + 1/c$							
$3 + 1/c$	-2	-1								
-1	-1									
-1										

Πίνακας 3: Τιμές των κ και $\omega - \kappa$ για $c \in (-1/2, -1/3)$ και $c \in (-1/3, 0)$.

κ	$\omega - \kappa$		
0	4	3	2
4	-1	-2	
-1	-1		
-1			

Πίνακας 4: Τιμές των κ και $\omega - \kappa$ για $c = 0$ ή -1 .

κ	$\omega - \kappa$								
0	16/3	14/3	4	11/3	10/3	3	8/3	7/3	2
16/3	-2/3	-4/3	-5/3	-2	-7/3	-8/3	-3	-10/3	
-2/3	-2/3	-1	-4/3	-5/3	-2	-7/3	-8/3		
-2/3	-1/3	-2/3	-1	-4/3	-5/3	-2			
-1/3	-1/3	-2/3	-1	-4/3	-5/3				
-1/3	-1/3	-2/3	-1	-4/3					
-1/3	-1/3	-2/3	-1						
-1/3	-1/3	-2/3							
-1/3	-1/3								
-1/3									

Πίνακας 5: Τιμές των κ και $\omega - \kappa$ για $c = -3/4$.

κ	$\omega - \kappa$							
0	6	5	9/2	4	7/2	3	5/2	2
6	-1	-3/2	-2	-5/2	-3	-7/2	-4	
-1	-1/2	-1	-3/2	-2	-5/2	-3		
-1/2	-1/2	-1	-3/2	-2	-5/2			
-1/2	-1/2	-1	-3/2	-2				
-1/2	-1/2	-1	-3/2					
-1/2	-1/2	-1						
-1/2	-1/2							
-1/2								

Πίνακας 6: Τιμές των κ και $\omega - \kappa$ για $c = -2/3$.

κ	$\omega - \kappa$					
0	8	6	5	4	3	2
8	-2	-3	-4	-5	-6	
-2	-1	-2	-3	-4		
-1	-1	-2	-3			
-1	-1	-2				
-1	-1					
-1						

Πίνακας 7: Τιμές των κ και $\omega - \kappa$ για $c = -1/2$.

κ	$\omega - \kappa$								
0	12	9	8	7	6	5	4	3	2
12	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	
-3	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7		
-1	-1	-2	-3	-4	-5	-6			
-1	-1	-2	-3	-4	-5				
-1	-1	-2	-3	-4					
-1	-1	-2	-3						
-1	-1	-2							
-1	-1								
-1									

Πίνακας 8: Τιμές των κ και $\omega - \kappa$ για $c = -1/3$.

- Agosti, E., Camerota, G. (1965). Some effects of hypnotic suggestion on respiratory function, *International Journal of Clinical and Experimental Hypnosis*, 13, 149–156.
- Amari, S.V., Misra, R.B. (1997). Closed-form expressions for distribution of sum of exponential random variables, *IEEE Transactions on Reliability*, 46, 519–522.
- Arnold, B.C., Balakrishnan, N., Nagaraja, H.N. (2008). *A First Course in Order Statistics*, Classic Edition, SIAM, Philadelphia.
- Bain, L.T., Engelhardt, M. (1973). Interval estimation for the two-parameter double exponential distribution, *Technometrics*, 15, 875–887.
- Balakrishnan, N., Chandramouleeswaran, M.P. (1996). Reliability estimation and tolerance limits for Laplace distribution based on censored samples, *Microelectronics Reliability*, 36, 375–378.
- Balakrishnan, N., Cutler, C.D. (1995). Maximum likelihood estimation of Laplace parameters based on type-II censored samples, in: Nagaraja, H.N., Sen, P.K., Morrison, D.F. *Statistical Theory and Applications: Papers in Honor of Herbert A. David* (Springer, New York), 145–151.
- Cheney, W., Kincaid, D. (2008) *Numerical Mathematics and Computing, 6th Edition*. Brooks/Cole: Cengage Learning, Florence, Kentucky.
- Childs, A., Balakrishnan, N. (1996). Conditional inference procedures for the Laplace distribution based on Type-II right censored samples, *Statistics and Probability Letters*, 31, 31–39.
- Childs, A., Balakrishnan, N. (2000). Conditional inference procedures for the Laplace distribution when the observed samples are progressively censored, *Metrika*, 52, 253–265.
- Crum, W.L. (1923). The use of median in determining seasonal variation, *Journal of the American Statistical Association*, 18, 607–614.
- Grice, J.V., Bain, L.J., Engelhardt, M. (1978). Comparison of conditional and unconditional confidence intervals for the double exponential distribution, *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 7, 515–524.

- Govindarajulu, Z. (1966). Best linear unbiased estimates under symmetric censoring of the parameters of double exponential population, *Journal of the American Statistical Association*, 61, 248–258.
- Iliopoulos, G., Balakrishnan, N. (2009). Conditional independence of blocked ordered data, *Statistics and Probability Letters*, 79, 1008–1015.
- Iliopoulos, G., Balakrishnan, N. (2011). Exact likelihood inference for Laplace distribution based on type-II censored samples, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 141, 1224–1239.
- Iliopoulos, G., Kourouklis, S. (2000). Interval estimation for the ratio of scale parameters and for ordered scale parameters, *Statistics and Decisions*, 18, 169–184.
- Iliopoulos, G., MirMostafae S.M.T.K. (2014). Exact prediction intervals for order statistics from the Laplace distribution based on the maximum likelihood estimators, *Statistics*, 48, 575–592.
- Jasiulewicz, H., Kordecki, W. (2003). Convolutions of Erlang and of Pascal distributions with applications to reliability, *Demonstratio Mathematica*, 36, 231–238.
- Johnson, N.L., Kotz, S., and Balakrishnan, N. (1995). *Continuous Univariate Distributions*, Vol. 2, Second edition, John Wiley and Sons, New York.
- Kappenman, R.F., (1975). Conditional confidence intervals for double exponential distribution parameters, *Technometrics*, 17, 233–235.
- Keynes, J.M., (1911). The Principal averages and the laws of error which lead to them, *Journal of the Royal Statistical Society*, 74, 322–331.
- Kotz, S., Kozubowski, T.J., Podgórski, K. (2001). *The Laplace Distribution and Generalizations*, Birkhäuser, Boston.
- Lehmann, E.L., D’Abrera, H.J.M. (1975). *Nonparametrics. Statistical Methods based on ranks.*, Holden- Day, Inc., San Francisco.
- Liu, K., Zhu, X., Balakrishnan, N., (2018). Exact inference for Laplace distribution under progressive Type-II censoring based on BLUEs, *Metrika*, 81, 211–227.
- Lloyd, E.H. (1952). Least-squares estimation of location and scale parameters using order statistics, *Biometrika*, 39, 88–95.
- Nelson, W. (1982) *Applied Life Data Analysis*, Wiley, New York.
- Robert, C.P., Casella, G. (2004). *Monte Carlo Statistical Methods*, Springer, New York.

- Wilson, E.B., (1923). First and second laws of error, *Journal of the American Statistical Association*, 18, 841–851.
- Su., F., Balakrishnan, N., Zhu, X. (2018). Exact likelihood-based point and interval estimation for lifetime characteristics of Laplace distribution based on hybrid type-I and type-II censored data, *Trends and Perspectives in Linear Statistical Inference*, 203–239.
- Tafiadi, M., Piiopoulos, G. (2017). Exact inference for the difference of Laplace location parameters, *Metrika*, 80, 829–861.
- Ταφιάδη, Μ., Ηλιόπουλος, Γ. (2017). Ακριβείς έλεγχοι για τον λόγο των παραμέτρων κλίμακας δύο κατανομών Laplace, *Πρακτικά 30^{ου} Πανελληνίου Συνεδρίου Στατιστικής*, 70–79.