ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗΣ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ

Π.Μ.Σ. ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗΣ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ

ΑΝΑΠΑΡΑΓΩΓΗ ΣΥΜΒΑΣΕΩΝ ΑΝΤΑΛΛΑΓΗΣ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ

ΚΑΛΛΙΒΩΚΑΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ - ΜΧΡΗ 1709

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ : ΕΠΙΚΟΥΡΟΣ ΚΑΘ. ΕΓΓΛΕΖΟΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗ : ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΣΚΙΑΔΟΠΟΥΛΟΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

ΕΠΙΚΟΥΡΟΣ ΚΑΘ. ΕΓΓΛΕΖΟΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ

ΕΠΙΚΟΥΡΟΣ ΚΑΘ. ΒΟΛΙΩΤΗΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ

ΠΕΙΡΑΙΑΣ – ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2019

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική αυτή έχει ως στόχο να μελετήσει και να συγκρίνει εμπειρικά τις διαφορετικές μεθόδους αποτίμησης των συμβάσεων ανταλλαγής διακύμανσης (ΣΑΔ) και μεταβλητότητας (ΣΑΜ). Αρχικά πραγματοποιείται ιστορική αναδρομή όλων των παραγώγων προϊόντων συμπεριλαμβανομένων και των ΣΑΔ και ΣΑΜ. Αυτά είναι χρηματοοικονομικά παράγωγα που χρησιμοποιούνται από επενδυτές για κερδοσκοπία ή αντιστάθμιση του κινδύνου της διακύμανσης των τιμών, αφού είναι τα μόνα συμβόλαια που εστιάζουν άμεσα στην μεταβλητότητα του υποκείμενου τίτλου. Στη συνέχεια ακολουθεί εκτενής περιγραφή των συμβάσεων αυτών μαζί με τους γενικούς τύπους αποτίμησής τους. Ειδικότερα, παρουσιάζονται τόσο οι διακριτές μέθοδοι αποτίμησης Derman, Trapezoidal και Simpson όσο και η συνεχής μέθοδος αποτίμησή τους. Επιπλέον πραγματοποιείται εμπειρική μελέτη με τη βοήθεια της υπολογιστικής γλώσσας προγραμματισμού ΜΑΤΛΑΒ ως προς την εκτίμηση της μεταβλητότητας με δεδομένα της αγοράς που έχουν συλλεγεί από τη βάση δεδομένων της Bloomberg. Τέλος πραγματοποιείται σύγκριση της κάθε μεθόδου ξεχωριστά χρησιμοποιώντας τις τιμές των δικαιωμάτων της αγοράς έναντι των τιμών των δικαιωμάτων που έχουν εκτιμηθεί, και εξάγονται συμπεράσματα ως προς την ακρίβειά τους.

Λέξεις κλειδιά: Συμβάσεις ανταλλαγής διακύμανσης, συμβάσεις ανταλλαγής μεταβλητότητας, μέθοδος Derman, μέθοδος Trapezoidal, μέθοδος Simpson, εμπειρική μελέτη, εκτίμηση παραμέτρων, προβλεπτική ικανότητα

Abstract

This thesis aims to study and compare empirically the various valuation methods of variance and volatility swaps. At the beginning, a historical review of derivative securities including volatility-variance swaps is presented. These are financial derivatives used by investors to speculate or hedge against the risk of price fluctuations, since they are the only contracts that focus directly on the volatility of the underline asset. Furthermore, a detailed description of these swaps follows together with their general valuation formula. In particular, both the discrete valuation methods of Derman, Trapezoidal, and Simpson and the continuous valuation method are presented. In addition, an empirical study is presented using the computational program of MATLAB with respect to estimating the volatility from market data that have been collected from the Bloomberg database. Finally, using option market prices, each method is compared separately against the option prices that have been estimated, leading to conclusions about their accuracy.

Key words: Variance swap, volatility swap, Derman method, Trapezoidal method, Simpson method, empirical study, parameter estimation, predictive capacity

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Συμβάσεις ανταλλαγής Διακύμανσης-Μεταβλητότητας

Αρχικά θα ορίσουμε την μεταβλητότητα ως την τυπική απόκλιση ανά μονάδα χρόνου της απόδοσης ενός υποκείμενου τίτλου π.χ. μετοχή. Είναι ευρέως αποδεκτό ως το μέτρο της αβεβαιότητας ή της επικινδυνότητας του υποκείμενου μέσου. Γενικά η μεταβλητότητα μπορεί να παραμένει σταθερή, να είναι ντετερμινιστική ή στοχαστική αλλά και να είναι μια ντετερμινιστική συνάρτηση της τιμής της μετοχής $\sigma_t=\sigma(t,S_t)$ οπότε και αναγνωρίζεται ως τοπική μεταβλητότητα (Dupire B, 1994).

Ο Wilmott πιο συγκεκριμένα διακρίνει τέσσερις βασικούς τύπους μεταβλητότητας παρόλο αυτά βέβαια στην πράξη δεν γίνεται διάκριση μεταξύ τους. Ο πρώτος τύπος είναι η μεταβλητότητα σ στην εξίσωση $dS_t=(r_t-d_t)S_tdt+\sigma_tS_tdW_t$ η οποία είναι ένα μέτρο της τυχαιότητας της απόδοσης των περιουσιακών στοιχείων και δεδομένου ότι υπάρχει σε κάθε χρονική στιγμή δεν έχει κανένα χρονοδιάγραμμα που να συνδέεται με αυτή. Η δεύτερη μορφή είναι η ιστορική μεταβλητότητα (πραγματοποιθείσα μεταβλητότητα) την οποία την μετράμε χρησιμοποιώντας παλαιότερα εμπειρικά στοιχεία. Πολύ σημαντική είναι η τεκμαρτή μεταβλητότητα η οποία υπολογίζεται βάση των εμπειρικών τιμών των δικαιωμάτων προαίρεσης. Τέλος ενδιαφέρον παρουσιάζει και η προθεσμιακή μεταβλητότητα που δείχνει τις αναμενόμενες μελλοντικές κινήσεις της τιμής της μετοχής στο πέρασμα του χρόνου (Wilmott P,1995).

Με βάση τα παραπάνω για να έχουν μια εικόνα για το επίπεδο της μελλοντική μεταβλητότητας-κινδύνου, οι επενδυτές έχουν κατασκευάσει διάφορα είδη παραγώγων μεταβλητότητας. Τα παράγωγα μεταβλητότητας είναι αξιόγραφα των οποίων η πληρωμή εξαρτάται εξολοκλήρου από την πραγματοποιθείσα διακύμανση ενός περιουσιακού στοιχείου ή ενός δείκτη απόδοσης ή γενικά του υποκείμενου τίτλου. Τα πιο σημαντικά από αυτά τα παράγωγα είναι οι συμφωνίες ανταλλαγής διακύμανσης και μεταβλητότητας (variance-volatility swaps).

Στη συγκεκριμένη διπλωματική εργασία θα προσπαθήσουμε να μελετήσουμε διάφορες πτυχές των συμβάσεων ανταλλαγής μεταβλητότητας και διακύμανσης όπως την τιμολόγηση και την αναπαραγωγή αυτών με διάφορους τρόπους σε διακριτή και συνεχή μορφή.

Γενικά ένα συμβόλαιο ανταλλαγής διακύμανσης πληρώνει στον αγοραστή τη διαφορά μεταξύ της πραγματοποιθείσας διακύμανσης και της διακύμανσης που έχει καθοριστεί από αρχικούς όρους του συμβολαίου. Αυτή η πληρωμή είναι μια κοίλη συνάρτηση της πραγματικής διακύμανσης, ενώ αντίθετα μια συμφωνίας ανταλλαγής μεταβλητότητας είναι μια γραμμική συνάρτηση της μεταβλητότητας που πραγματοποιείται. Η πραγματοποιθείσα διακύμανση που αναφέρουμε είναι πολύ σημαντική διότι παρέχει ένα σχετικά ακριβές μέτρο της μεταβλητότητας που είναι χρήσιμο για πολλούς σκοπούς, όπως για την πρόβλεψη της μεταβλητότητας αλλά και την αξιολόγηση των σχετικών προβλέψεων. Και οι δύο αυτοί τύποι των συμβάσεων ανταλλαγής εμπεριέχουν την μεταβλητότητα του υποκείμενου τίτλου για ένα ορισμένο χρονικό διάστημα και αποτελούν ουσιαστικά μέσα για την μέτρηση της έκθεσης στον κίνδυνο (Demeterfi et al., 1999).

Τα συμβόλαια ανταλλαγής μεταβλητότητας παρέχουν προστασία κατευθείαν πάνω στις αλλαγές της μεταβλητότητας και μόνο εκεί, σε αντίθεση με τα απλά δικαιώματα που αποτελούν επιλογές με τις οποίες η έκθεση μεταβλητότητας εξαρτάται από την τιμή του περιουσιακού στοιχείου. Έτσι ο συγκεκριμένος τύπος συμβολαίου μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη δημιουργία εικασιών σχετικά με το επίπεδο της μελλοντικής μεταβλητότητας, να συντελεί στην επένδυση μεταξύ πραγματοποιθείσας και τεκμαρτής μεταβλητότητας αλλά και να αντισταθμίζει την έκθεση στον κίνδυνο-μεταβλητότητα άλλων θέσεων (Δημητρόπουλος Α. Π, 1999).

Γενικά η πληρωμή ενός συμβολαίου ανταλλαγής μεταβλητότητας στη λήξη του (Payoff_T) ορίζεται σύμφωνα με τον τύπο:

$$\text{Κέρδος/Ζημία} = N(\sigma_R(S) - K_{vol})$$

Όπου $\sigma_R(S)$ ορίζεται η μεταβλητότητα του τίτλου κατά τη διάρκεια του συμβολαίου (σε ετήσια βάση), K η τιμή εξάσκησης και N το ονομαστικό ποσό του συμβολαίου. Για να το κατανοήσουμε καλύτερα ακολουθεί ένα πολύ απλό παράδειγμα.

Ας υποθέσουμε ότι δύο μεριές συμφώνησαν για τη συναλλαγή της μεταβλητότητας ενός συμβολαίου ανταλλαγής διακύμανσης εγγεγραμμένου στον δείκτη S&P500 με τιμή εξάσκησης K=20% και ονομαστικό ποσό N=100000$. Εάν η πραγματοποιθείσα τυπική απόκλιση κατά την περίοδο αυτή αποδεικνύεται ότι τελικά θα είναι 25% το κέρδος του συμβαλλόμενου ο οποίος λαμβάνει την μεταβλητότητα είναι 100000*(0.25-0.20)=5000$ ενώ εάν η τυπική απόκλιση ήταν 18% η ζημιά του θα ήταν 100000*(0.18-0.20)=-2000$ και αντίστοιχα η μεριά που πληρώνει τη μεταβλητότητα θα είχε κέρδος 2000$.

Σε αντίθεση μια συμφωνία ανταλλαγής διακύμανσης είναι ένα έξω-χρηματοοικονομικό παράγωγο που επιτρέπει την κερδοσκοπία ή την αντιστάθμιση των κινδύνων που συνδέονται με την αστάθεια που έχουν κάποια υποκείμενα προϊόντα, όπως μια συναλλαγματική ισοτιμία, ένα επιτόκιο ή ένας χρηματιστηριακός δείκτης. Ο ένας αντισυμβαλλόμενος θα καταβάλει ένα ποσό με βάση την πραγματοποιθείσα διακύμανση των μεταβολών των τιμών του υποκείμενου τίτλου, ενώ ο άλλος θα πληρώνει ένα σταθερό ποσό, το οποίο είναι η τιμή εξάσκησης που αναφέρεται στην αρχή της συμφωνίας. Έτσι λοιπόν το καθαρό ποσό πληρωμής θα είναι η διαφορά μεταξύ αυτών των δύο και θα πληρώνονται σε μετρητά κατά τη λήξη της συμφωνίας. Κάποιες πληρωμές μπορεί να γίνουν και στην πορεία από τον έναν ή τον άλλο ανάλογα με την εξέλιξη της συμφωνίας για να διατηρηθεί το περιθώριο που έχει συμφωνηθεί.

Συγκεκριμένα, η εξόφληση της ανταλλαγής διακύμανσης στην λήξη του ($Payoff_T$) ορίζεται ως εξής:

$$\text{Κέρδος/Ζημία}=N(\sigma^2_R(S)-K_{var})$$

Όπου $\sigma^2_R(S)$ είναι η πραγματοποιθείσα διακύμανση του τίτλου κατά τη διάρκεια ζωής του συμβολαίου [0,T], K_{var} η τιμή εξάσκησης της διακύμανσης και N το ονομαστικό ποσό του συμβολαίου. Ακολουθεί ένα παράδειγμα για να γίνει πιο εύκολα κατανοητό.

Υποθέτουμε ότι ένας επενδυτής θέλει να προστατευθεί από τις μεταβολές που μπορεί να παρουσιάσει τον επόμενο χρόνο η μεταβλητότητα του ΓΔ του χρηματιστήριου Αθηνών. Για το λόγο αυτό θα πάρει τη θέση αγοραστή σε μια συμφωνία ανταλλαγής διακύμανσης και θα λάβει τη διαφορά μεταξύ της τιμής που θα πραγματοποιηθεί στη λήξη του συμβολαίου και του τωρινού επίπεδου διακύμανσης που ορίζεται από την τιμή εξάσκησης πολλαπλασιασμένη από το ονομαστικό ποσό N. Ας πούμε ότι το ονομαστικό ποσό N=50000, η τιμή εξάσκησης με 15% και η πραγματοποιθείσα διακύμανση με 18%. Ο επενδυτής θα κερδίσει 50000*(0.18-0.15)=1500$.

1.2 Ορισμός-Ιστορική Αναδρομή

Στα χρηματοοικονομικά με τον όρο παράγωγα προϊόντα ονομάζουμε ένα συμβόλαιο, του οποίου η αξία εξαρτάται από την αξία κάποιου άλλου βασικότερου προϊόν (υποκείμενος τίτλος-underline asset). Ουσιαστικά πρόκειται για ένα αξιόγραφο του οποίου η τιμή καθορίζεται με άμεσο τρόπο από την τιμή του υποκείμενου τίτλου. Για να δημιουργηθεί ένα τέτοιο συμβόλαιο υπάρχουν 2 αντισυμβαλλόμενοι, ο ένας παίρνει τη θέση του αγοραστή (long position) και ο άλλος τη θέση του πωλητή (short position). Τα υποκείμενα προϊόντα από τα οποία δημιουργείται ένα παράγωγο μπορεί να είναι είτε προϊόντα που τίθενται υπό διαπραγμάτευση σε μια οργανωμένη δευτερογενή αγορά, όπως αυτή του χρηματιστηρίου (under the counter), είτε προϊόντα που δεν τίθενται υπό διαπραγμάτευση σε οργανωμένες αγορές (over the counter). Γενικά οι υποκείμενοι τίτλοι μπορεί να είναι σχεδόν οτιδήποτε από εμπορεύσιμες μετοχές, συναλλαγματικές ισοτιμίες, μέχρι μέτρηση θερμοκρασίας, αγροτικά προϊόντα (σιτάρι) και μέταλλα (χρυσός).

Σε αντίθεση με τις υποκείμενες αξίες, οι συμβάσεις των παραγώγων έχουν συνήθως περιορισμένη διάρκεια και πάντα συγκεκριμένες ημερομηνίες λήξης. Η χρήση τους στοχεύει:

- Στην αντιστάθμιση κινδύνου (hedging) από τη μεταβλητότητα των τιμών ή των επιτοκίων. Αυτό εξασφαλίζεται με τη λήψη κατάλληλης θέσης σε παράγωγο προϊόν, η οποία δημιουργεί αντίθετα αποτελέσματα από αυτά του υποκείμενου τίτλου, με αποτέλεσμα να μειώνει ως και να εξαλείφει τον κεφαλαιακό κίνδυνο για τον επενδυτή, ανεξάρτητα αν η αγορά κινείται καθοδικά ή ανοδικά. Με αυτό τον τρόπο οι επενδυτές δεν είναι αναγκασμένοι να ρευστοποιούν το χαρτοφυλάκιό τους, αλλά μπορούν να διατηρούν τις θέσεις τους έχοντας εξασφαλίσει το κεφάλαιό τους και κλειδώσει την απόδοσή τους ακόμη και σε περιόδους αβεβαιότητας για την πορεία της αγοράς.

- Σε οικονομικό κέρδος, όπως στην περίπτωση που ένας επενδυτής μπορεί να κερδίζει με την κατάλληλη στρατηγική ακόμα και όταν η αγορά είναι καθοδική (μέσω short selling).

- Σε εξισορροπητική κερδοσκοπία (arbitrage) όταν ο επενδυτής εκμεταλλεύεται την διαφορετικότητα των τιμών σε διαφορετικές αγορές και με κατάλληλες κινήσεις κερδίζει από την διαφορά αυτή.

Τα παράγωγα προϊόντα χωρίζονται στις εξής κατηγορίες: α) Τα προθεσμιακά συμβόλαια (forward contracts), β) Τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (future contracts), γ) Τα δικαιώματα προαίρεσης (options) και δ) Τα συμβόλαια ανταλλαγής (swaps).

Τα προθεσμιακά συμβόλαια αποτελούν την απλούστερη μορφή παραγώγων. Τέτοια συμβόλαια πραγματοποιούνται μεταξύ δύο αντισυμβαλλόμενων όπως για παράδειγμα μεταξύ δύο μεγάλων εταιριών ή μεταξύ ενός επενδυτή και μιας εταιρίας με αυτή τη συμφωνία τις περισσότερες φορές να πραγματοποιείται εκτός οργανωμένης αγοράς. Σύμφωνα με τους όρους του συμβολαίου αυτός που θα έχει τη θέση αγοράς συμφωνεί να αγοράσει μια ποσότητα ενός συγκεκριμένου αγαθού σε μια προκαθορισμένη τιμή και σε ένα προκαθορισμένο χρονικό σημείο στο μέλλον. Ο αντισυμβαλλόμενος που έχει πάρει τη θέση πωλητή είναι υποχρεωμένος να του πουλήσει τη συγκεκριμένη ποσότητα αγαθού στη συμφωνηθέντα τιμή και χρόνο.

Τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης μοιάζουν κατά κανόνα με τα προθεσμιακά συμβόλαια με τη μόνη διαφορά ότι πραγματοποιούνται σε κάποιο οργανωμένο χρηματιστήριο όπως για παράδειγμα το Χρηματιστήριο Παραγώγων Αθηνών και οι δύο αντισυμβαλλόμενοι δεν χρειάζεται να γνωρίζει καν ο ένας τον άλλο. Κατά συνέπεια τέτοια προϊόντα θεωρούνται τυποποιημένα εξαιτίας των προκαθορισμένων χαρακτηριστικών που έχει ορίσει το εκάστοτε χρηματιστήριο. Επιπλέον το χρηματιστήριο μπαίνει σαν εγγυητής για την εκπλήρωση των συμβολαίων. Οι δύο αντισυμβαλλόμενοι σε ένα τέτοιο συμβόλαιο οφείλουν να καταθέσουν ένα ποσό σε μορφή εγγύησης σε ένα συγκεκριμένο λογαριασμό περιθωρίου (margin account) που τους ανοίγει η χρηματιστηριακή τους. Ανάλογα με το ποιος από τους δύο κερδίζει από αυτή τη συμφωνία, ο αντισυμβαλλόμενος θα πρέπει να καταθέτει κάθε φορά στο λογαριασμό το ποσό που θα του επιδεικνύει ο εγγυητής.

Δικαίωμα προαίρεσης είναι ένα συμβόλαιο το οποίο όμως έχει μια πιο σύνθετη μορφή σε σχέση με τα προηγούμενα. Σε κάθε τέτοια συμφωνία ο αγοραστής έχει το δικαίωμα αλλά όχι την υποχρέωση να αγοράσει (ή να πουλήσει) από τον πωλητή του δικαιώματος μια προκαθορισμένη ποσότητα αγαθού, σε μια προκαθορισμένη ημερομηνία και σε μια προκαθορισμένη τιμή συναλλαγής. Ο πωλητής σε αντίθεση με τον αγοραστή είναι υποχρεωμένος να πουλήσει (ή να αγοράσει) τη συγκεκριμένη ποσότητα αγαθού αν ο αγοραστής επιλέξει να πραγματοποιηθεί η συναλλαγή. Η διαφορά αυτών των συμβολαίων σε σχέση με τα προηγούμενα είναι η τιμή τους. Επειδή εδώ έχουν το δικαίωμα να μην εξασκήσουν το συμβόλαιο αν αυτό δεν τους συμφέρει πια, η αξία που πληρώνεις για να φτιάξεις ένα τέτοιο συμβόλαιο είναι μεγαλύτερη από αυτή των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης.

Συμβόλαιο ανταλλαγής αποτελεί μια συμφωνία μεταξύ δύο συμβαλλόμενων για ανταλλαγή μελλοντικών χρηματοροών με τρόπο που έχουν προκαθορίσει μεταξύ τους. Τα χρηματικά ποσά που ανταλλάσσονται μπορεί να αναφέρονται σε διαφορετικά νομίσματα και σε σταθερά ποσά. Αλλιώς μπορεί ένα σταθερό ποσό να ανταλλάσσεται με ένα μεταβαλλόμενο, αβέβαιο ποσό ή το ποσό πληρωμής στο ένα νόμισμα να είναι σταθερό (fixed) και στο άλλο μεταβαλλόμενο (floating). Υπάρχουν πολλές διαφορετικές κατηγορίες swap, κάποιες από τις οποίες είναι:

- Συμβάσεις Ανταλλαγής Επιτοκίων (interest rate swap)
- Συμβάσεις Ανταλλαγής Νομισμάτων (currency swap)
- Συμβάσεις Ανταλλαγής Μετοχών (equity swap)
- Συμβάσεις Ανταλλαγής Εμπορευμάτων (commodities swap)

Οι σημαντικότεροι κίνδυνοι που αναλαμβάνουν οι επενδυτές όταν επιθυμούν τέτοιες συμβάσεις είναι ο κίνδυνος Υποκείμενου Μέσου, δηλαδή αυτός που προέρχεται από τις μεταβολές στην αξία του υποκείμενου τίτλου. Ο Πιστωτικός κίνδυνος Αντισυμβαλλομένου, ο οποίος προέρχεται από τη μη εκπλήρωση των συμβατικών υποχρεώσεων από τη μεριά του συμβαλλόμενου. Ο κίνδυνος Διακανονισμού, δηλαδή ο κίνδυνος να μην είναι δυνατή εγκαίρως η εκκαθάριση των προγραμματισμένων συναλλαγών. Για να αντιμετωπιστεί αυτή η ανασφάλεια όπως για παράδειγμα αυτή του πιστωτικού κινδύνου διαμεσολαβούν πιστωτικά ιδρύματα στις συμβάσεις ανταλλαγής. Η πιο απλή μορφή είναι το Plain Vanilla Interest Rate Swap, όπου ανταλλάσσονται ποσά που καθορίζονται από ένα σταθερό επιτόκιο και από ένα κυμαινόμενο επιτόκιο επί κάποιου ονομαστικού κεφαλαίου (Δημητρόπουλος Α. Παναγιώτης, 1999).

Ιστορικά η πρώτη αναφορά που έχει γίνει για την χρήση των παραγώγων είναι από τα ΄΄Πολιτικά του Αριστοτέλη΄΄ όπου ο Θαλής ο Μιλήσιος περίπου το 500 π.Χ. αναφέρεται να προβλέπει την αυξημένη σοδειά των ελιών του επόμενου έτους και έτσι αποφάσισε την αγορά του δικαιώματος χρήσης των ελαιοτριβείων. Η πρώτη απόπειρα όμως για οργανωμένη διαπραγμάτευση τέτοιων προϊόντων έγινε το 1688 στο χρηματιστήριο του Άμστερνταμ όταν ξεκίνησε η διαπραγμάτευση των πρώτων δικαιωμάτων προαίρεσης πάνω στο βολβό της τουλίπας. Βέβαια χρειάστηκαν αρκετά χρόνια μέχρι το 1973 να λειτουργήσει στο Σικάγο το πρώτο οργανωμένο χρηματιστήριο παραγώγων από το Chicago Board of Trades και το Chicago Mercantile Exchange. Από τότε η απελευθέρωση των αγορών συναλλάγματος, αλλά και η συμβολή των ακαδημαϊκών στην τιμολόγηση των παραγώγων κατόρθωσαν να αλλάξουν ριζικά το τοπίο και να διευρύνουν σημαντικά τη χρήση τους (Νικόλαος Ηρ. Γεωργιάδης, 1997). Ακολούθησαν στη συνέχεια τα χρηματιστήρια της Νέας Υόρκης, του Μόντρεαλ, του Τόκιο κ.α. Τα τελευταία 25 χρόνια οι αγορές χρηματιστηριακών παραγώγων σε ολόκληρο τον κόσμο γιγαντώθηκαν. Έτσι το 1999 ιδρύθηκε από το ελληνικό χρηματιστήριο η πρώτη οργανωμένη αγορά παραγώγων στην Ελλάδα, το Χρηματιστήριο Παραγώγων Αθήνας.

Πριν από 30 χρόνια η αγορά των παραγώγων ήταν μικρή και όχι και τόσο διαδεδομένη, από τότε όμως έχει μια τεράστια ανάπτυξη ιδιαίτερα την τελευταία δεκαετία και αυξάνεται σε ποσοστό που φτάνει το 24% κάθε χρόνο. Αυτή τη στιγμή η αγορά των παραγώγων (όσο είναι δυνατόν να μετρηθεί) βρίσκεται στην τάξη των $554 τρισεκατομμυρίων, δηλαδή 6 φορές πάνω από το παγκόσμιο ΑΕΠ. Από αυτά μόνο το 6-8% συναλλάσσεται σε οργανωμένη αγορά. Ενώ υπολογίζεται ότι το 95% των μεγαλύτερων εταιριών παγκοσμίως προσπαθούν να εξαλείψουν τον πιστωτικό τους κίνδυνο μέσω των παραγώγων.

Πιο συγκεκριμένα, η αγορά των συμβάσεων ανταλλαγής στην αρχική της μορφή εμφανίστηκε τον 16^{ο} αι. μ.Χ. κυρίως ως σύμβαση οικονομικής ανταλλαγής εμπορικών χρεών μεταξύ αλλοδαπών εμπόρων στα πλαίσια της αμοιβαίας διάθεσης επέκτασης της εμπορικής δραστηριότητας του ενός στη χώρα του άλλου. Τότε η αξία του swap έγκειται στην διευκόλυνση εδραίωσης του εμπορίου μεταξύ δύο κρατών με την αξιοποίηση του συγκριτικού πλεονεκτήματος που είχε ο κάθε έμπορος στην χώρα από όπου κατάγεται (για παράδειγμα καλύτερους όρους δανεισμού στην εγχώρια αγορά, εκμετάλλευση της φήμης του εκεί που ασκεί την επιχειρηματική του δραστηριότητα, κλπ.) (Χ. Ταρνανίδου, 1998).

Σε νεότερα χρόνια, στην Αγγλία υπήρξε σημαντική η διάδοση του λεγόμενου παράλληλου ή αμοιβαίου δανείου σε συνάλλαγμα (parallel or back-to-back loan), η κυβέρνηση της Βρετανίας το 1970 προέβη στην φορολόγηση εξαγωγής συναλλάγματος και πιο συγκεκριμένα στις επενδύσεις που γινόταν σε αγορές του δολαρίου των ΗΠΑ, προκειμένου να ενισχύσει την προστασία του συναλλαγματικού αποθέματος της χώρας. Το παράλληλο δάνειο αποτέλεσε τότε τον μηχανισμό παράκαμψης των φορολογικών ρυθμίσεων και εξοικονόμησης συναλλάγματος σε χαμηλότερο κόστος. Ήταν μια συναλλαγή που γίνονταν με τη μεσολάβηση της βρετανικής επενδυτικής εταιρίας (investment trust), η οποία αναλάμβανε για λογαριασμό των πελατών της, τη δανειοδότηση σε στερλίνες πολυεθνικών επιχειρήσεων των ΗΠΑ , μέσω των βρετανικών θυγατρικών εταιριών τους, έναντι παράλληλου δανείου από τις τελευταίες σε δολάρια.

Η αγορά των swaps με την σημερινή της μορφή πρωτοεμφανίστηκε το 1981 που έγινε για πρώτη φορά μια σύμβαση μεταξύ της IBM και της Παγκόσμιας Τράπεζας. Αναπτύχθηκαν τότε για να λύσουν τα προβλήματα που δημιουργούσαν τα δικαιώματα ανταπαίτησης και τα περίπλοκα δικαιολογητικά που ήταν απαραίτητα για τις χρηματοδοτήσεις από το εξωτερικό. Επίσης η φορολογία που υπήρχε στα γερμανικά και αμερικάνικα ομόλογα αποθάρρυνε τους επενδυτές από αυτές τις αγορές. Το ίδιο συνέβαινε και σε Βρετανία και Γαλλία, όπου οι έλεγχοι συναλλάγματος, έκαναν λιγότερη ελκυστική στους Βρετανούς και Γάλλους επενδυτές την αγορά ευρωομολόγων. Ακόμα και τα ξένα ελβετικά φράγκα (εκδιδόμενα από ξένους στην εγχώρια ελβετική αγορά) ήταν διαχωρισμένα από τις ευρωαγορές με κανόνες που εμπόδιζαν τις ξένες τράπεζες να κάνουν εγγραφές (underwriting). Τα swaps όμως παράλληλα με την φιλελευθεροποίηση, άνοιξαν τις αγορές της Ευρώπης στις παγκόσμιες κεφαλαιακές ροές. Έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε τα πρώτα swaps ως ένα μηχανισμό arbitrage, δηλαδή αξιοποίησης των διαφορετικών τιμών των ίδιων χρηματιστηριακών προϊόντων σε διαφορετικές αγορές (Στ. Θωμαδάκης, Μ. Ξανθάκης, 1989).

Τα τελευταία χρόνια έχουν ραγδαία ανάπτυξη και σε αυτό βοηθάει ότι δεν είναι τυποποιημένα συμβόλαια αλλά διαμορφώνονται ανάλογα με τις ανάγκες των αντισυμβαλλόμενων, για αυτό το λόγο κυρίως πρωταγωνιστούν στην έξω-χρηματιστηριακή αγορά. Επίσης λειτουργούν ως χρηματοοικονομικά μέσα μεταβολής των οικονομικών σχέσεων που αναπτύσσονται στις αγορές της βιομηχανίας, του εμπορίου και κυρίως στις τραπεζικές και χρηματοπιστωτικές αγορές, έτσι διαδραματίζουν σήμερα πρωταρχικό ρόλο στην παγκόσμια οικονομία. Η αγορά τους είναι μια από τις μεγαλύτερες στον κόσμο αφού χρησιμοποιούνται εύκολα για την καταπολέμηση του κινδύνου αλλά και για κερδοσκοπία. Είναι τα πιο διαδεδομένα ανάμεσα στην αγορά των παραγώγων αφού το 80% αυτής της αγοράς αποτελείται από τέτοιες συμβάσεις.

Μια παραλλαγή των ΣΑΔ που επιτρέπει στους επενδυτές να λαμβάνουν μια άποψη για τις μελλοντικές τιμές των ΣΑΔ είναι τα forward variance swap. Όπου αντί να ρισκάρουν στην διαφορά που θα έχει εκείνο το χρονικό διάστημα η διαφορά της πραγματοποιθείσας διακύμανσης από αυτή που έχει συμφωνηθεί. Σε αντίθεση με ένα ΣΑΔ στα forward variance swap το πρώτο σταθερό ποσό που ανταλλάσσετε γίνεται σε κάποια μελλοντική στιγμή που επενδυτές θέλουν να αντισταθμίσουν τον κίνδυνο της μεταβλητότητας ο οποίος προέρχεται από μια ποικιλία διαφορετικών εξωτικών δικαιωμάτων. Ουσιαστικά αυτές οι συμβάσεις χρησιμεύουν για καταστάσεις στις οποίες μια επιχείρηση πρέπει να αντισταθμίσει την έκθεση σε μεταβλητότητα η οποία προέρχεται από μια εξαγορά, συγχώνευση, ξεκίνημα μιας εταιρίας ή από άλλα εξωτικά δικαιώματα με σημαντική αναμενόμενη αλλαγή της μεταβλητότητας (G. Skiadopoulos, 2000).

Μια ακόμη χρησιμότητα που μπορεί να έχουν τα ΣΑΔ είναι για την πρόβλεψη της αγοράς του variance risk premium. Αυτή η αγορά μπορεί να μετρηθεί διακρίνοντας τον επενδυτικό ορίζοντα από τις ημερομηνίες λήξης των ΣΑΔ. Μπορούμε να παράγουμε το variance risk premium συλλέγοντας πολλά διαφορετικά ΣΑΔ και κάνοντας τεστ από διάφορα προβλεπτικά μοντέλα, αφού η σύνδεσή τους είναι ιδιαίτερα σημαντική (G.Skiadopoulos, 2015).

1.3 Το περιεχόμενο της διπλωματικής

΄΄The volatility of asset prices is an indispensable input in both pricing options and in risk management. Through the introduction of volatility derivatives, volatility is now, in effect, a tradable market instrument΄΄

-Broadie and Jain, 2008

Στα προηγούμενα κεφάλαια γνωρίσαμε αρχικά την έννοια της μεταβλητότητας, που υπάρχει, με ποιες μορφές και πως συνδέεται με το πρόβλημά μας. Είδαμε πως χωρίζεται σε κατηγορίες και πως την χρησιμοποιούν οι επενδυτές ανάλογα με τους σκοπούς που θέλουν να πετύχουν. Επίσης με μια πρώτη ματιά είδαμε πως οι συμβάσεις ανταλλαγής διακύμανσης είναι ένα μέτρο για την αντιμετώπιση της μεταβλητότητας εστιάζοντας απευθείας πάνω σε αυτή. Στο δεύτερο μέρος του αρχικού κεφαλαίου ταξιδέψαμε μέσω της ιστορικής αναδρομής στην αρχική μορφή των παραγώγων, πότε πρωτοεμφανίστηκαν και τι εξυπηρετούσαν τότε. Με κατεύθυνση το σήμερα είδαμε πότε ξεκίνησαν να υπάρχουν με τη σημερινή τους μορφή αλλά και πότε εμφανίστηκαν για πρώτη φορά τα συμβόλαια ανταλλαγής που μελετάμε σε αυτή τη διπλωματική.

Στο δεύτερο κεφάλαιο θα πραγματοποιήσουμε αρχικά μια εκτενής περιγραφή για την αναπαραγωγή συμβάσεων ανταλλαγής διακύμανσης και θα αποδείξουμε τους γενικούς τύπους των συμβάσεων ανταλλαγής διακύμανσης και μεταβλητότητας. Έπειτα θα δούμε ένα γενικό τύπο αποτίμησης σε συνεχή μορφή που θα μας βοηθήσει αργότερα να συγκρίνουμε τα αποτελέσματά μας στην εμπειρική ανάλυση. Στη συνέχεια του κεφαλαίου θα ασχοληθούμε με το βασικό μέρος της διπλωματικής που είναι η διακριτή αποτίμηση αυτών των συμβάσεων. Θα χωρίσουμε τις τρεις μεθόδους διακριτής αποτίμησης, (Derman, Trapezoidal, Simpson) θα αναλύσουμε και θα αποδείξουμε την κάθε μια χωριστά.

Στο τρίτο κεφάλαιο θα ακολουθήσει η αριθμητική-εμπειρική ανάλυση όπου θα χωριστεί σε δύο μέρη. Αρχικά θα φτιάξουμε δικά μας δικαιώματα αγοράς και πώλησης μέσω της μεθόδους Black & Scholes, θα βρούμε για κάθε διακριτή μέθοδο ξεχωριστά τις τιμές και θα τις συγκρίνουμε μια προς μια με την συνεχή μέθοδο αποτίμησης, όπου και ανάλογα θα βγάλουμε με μια πρώτη ματιά την καλύτερη μέθοδο. Στο δεύτερο μέρος του κεφαλαίου αρχικά θα κατεβάσουμε δεδομένα από την βάση δεδομένων Bloomberg και χρησιμοποιώντας τα δικαιώματα αγοράς και πώλησης και με τη βοήθεια του υπολογιστικού προγράμματος MATLAB θα εκτιμήσουμε τη μεταβλητότητα που υπάρχει σε αυτά. Έπειτα θα χρησιμοποιήσουμε αυτή τη μεταβλητότητα και θα βρούμε νέα δικαιώματα αγοράς και πώλησης. Έτσι θα έχουμε τα πραγματικά δεδομένα που έχουμε συλλέξει από την αγορά και τα αντίστοιχα δεδομένα που δημιουργήσαμε με την εκτιμώμενη μεταβλητότητα. Θα βρούμε ξεχωριστά για την κάθε μέθοδο την τιμή που θα έχει και με τα πραγματικά δεδομένα και με τα δεδομένα που εκτιμήσαμε και θα συγκρίνουμε ποια από τις τρεις μεθόδους έχει και το μικρότερο σφάλμα ώστε να καταλήξουμε στα αντίστοιχα συμπεράσματα.

Στο τέταρτο και τελευταίο κεφάλαιο θα παραθέσουμε τα συμπεράσματά μας για την καλύτερη μέθοδο ανάμεσα στις Derman, Trapezoidal και Simpson.

Τέλος θα ακολουθήσει η βιβλιογραφία και αμέσως μετά ένα παράρτημα με τους κώδικες του υπολογιστικού προγράμματος της MATLAB που χρησιμοποιήθηκαν για την εμπειρική μελέτη.

Κεφάλαιο 2

Μορφές Αναπαραγωγής Συμβάσεων Διακύμανσης

2.1 Συμβάσεις Ανταλλαγής

Παραδοσιακά, οι επενδυτές κερδίζουν από την έκθεση της αγοράς στις αλλαγές της μεταβλητότητας μέσω κάποιων κλασσικών δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης, παράγωγα τα όποια εξαρτώνται από τις τιμές του υποκείμενου τίτλου τους. Όμως ανταλλάσσοντας παράγωγα πάνω στη διακύμανση (variance) και στη μεταβλητότητα (volatility) οι επενδυτές μπορούν να δουν κατευθείαν την πραγματική διακύμανση που θα υπάρχει στο μέλλον. Τα πιο απλά τέτοια εργαλεία είναι οι Συμβάσεις Ανταλλαγής Διακύμανσης και Συμβάσεις Ανταλλαγής Μεταβλητότητας ή αλλιώς Variance και Volatility swaps.

Οι Συμβάσεις Ανταλλαγής Διακύμανσης (από εδώ και κάτω θα το συμβολίζουμε με Σ.Α.Δ.) είναι ουσιαστικά ένα συμβόλαιο στο μέλλον που απεικονίζει την τιμή της μεταβλητότητας. Παρόμοια και οι Συμβάσεις Ανταλλαγής Μεταβλητότητας (από εδώ και κάτω Σ.Α.Μ.) είναι ένα συμβόλαιο με μελλοντική λήξη που απεικονίζει την τιμή που θα έχει η διακύμανση τη συγκεκριμένη μελλοντική στιγμή. Και στις δύο αυτές περιπτώσεις, στην αρχή της συμφωνίας η τιμή εξάσκησης (strike price) επιλέγεται να είναι αυτή που θα κάνει το fair value του swap να είναι ίσο με το μηδέν. Αυτή η τιμή (strike price) τότε αναφέρεται και ως εξισορροπητική διακύμανση (fair volatility ή fair variance). Στη λήξη του αυτός που θα πάρει το μεταβαλλόμενο (floating) πρέπει να πληρώσει τη διαφορά της τιμής που θα έχει τότε η διακύμανση και της προ συμφωνηθείσας τιμής εξάσκησης που έγινε το συμβόλαιο, επί βεβαία το ποσό που έχει συμφωνηθεί στην αρχή ως ονομαστικό ποσό (notional amount).

Και τα δυο αυτά συμβόλαια ανταλλαγής (swaps) παρέχουν καθαρά και χωρίς ενδιάμεσες διαδικασίες την έκθεση στη διακύμανση αυτή καθαυτή, όχι όπως για παράδειγμα ένα vanilla option του οποίου η έκθεση στη διακύμανση έχει να κάνει και με την τιμή που έχει εκείνη τη στιγμή ο υποκείμενος τίτλος. Έτσι με αυτά τα συμβόλαια μπορεί ένας επενδυτής να τα χρησιμοποιήσει για να βγάλει κέρδος από τις μεταβολές της διακύμανσης, για να αλλάξει τη διαφορά (spread) μεταξύ της πραγματικής και της διακύμανσης που υποθέτει η αγορά ότι θα υπάρχει σε κάποιο χρονικό διάστημα, ή ακόμα το πιο σημαντικό να καλύψει τη θέση που έχει ανοίξει με άλλες επενδυτικές κινήσεις ή με άλλα παράγωγα.

Τα Σ.Α.Δ. είναι θεωρητικά πιο απλά από τα Σ.Α.Μ., μπορείς να καλυφθείς από μια θέση που έχεις ανοίξει αν απλά πάρεις μια ανάλογη θέση σε ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς ή πώλησης (με το κατάλληλο strike price βέβαια) μαζί με μια αντίστοιχη θέση πάνω στον υποκείμενο τίτλο. Αντίθετα τα Σ.Α.Μ. μπορούν να καλυφθούν μόνο από ένα χαρτοφυλάκιο που να περιέχει μέσα διάφορα συμβόλαια Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων με διαφορετικά χαρακτηριστικά το καθένα. Αυτό κάνει και τα πρώτα πολύ πιο διαδεδομένα στην αγορά. Το γεγονός όμως ότι και οι δύο αυτές κατηγορίες συμβολαίων μπορούν να καλυφθούν με κάποιες κινήσεις υποδηλώνει πόσο σημαντικά εργαλεία είναι για τους επενδυτές. Η τιμή τους μπορεί να υπολογιστεί από τις παρατηρήσεις στις τιμές τον Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων προαίρεσης που έχουν διαφορετικές τιμές εξάσκησης, υπολογίζοντας βέβαια πάντα και το χαμόγελο μεταβλητότητας (volatility smile) από κατασκευής τους (I. Martin, 2011).

Η αναπαραγωγή ενός Σ.Α.Μ. μπορεί να επιτευχθεί χρησιμοποιώντας ένα χαρτοφυλάκιο με δικαιώματα προαίρεσης τα οποία έχουν διαφορετικές τιμές εξάσκησης. Η κατασκευή αυτού του χαρτοφυλακίου μπορεί να κατανοηθεί ενστικτωδώς μέσω του Black-Scholes model – η ευαισθησία ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος στην διακύμανση του υποκείμενου τίτλου εξαρτάται από την τιμή του. Αυτή η ευαισθησία στην μεταβλητότητα της διακύμανσης (Vega) είναι μεγαλύτερη όταν η τιμή του υποκείμενου τίτλου πλησιάζει στην τιμή εξάσκησης και επίσης λειτουργεί με θετικό πρόσημο σε αυτό, δηλαδή όσο μεγαλώνει αυτή η ευαισθησία τόσο μεγαλώνει και η τιμή εξάσκησης.

Η ευαισθησία ως προς την διακύμανση ενός χαρτοφυλακίου με δικαιώματα προαίρεσης που αναπαραγάγει την απόδοση ενός Σ.Α.Δ. πρέπει να είναι ανεξάρτητο από τον υποκείμενο τίτλο. Για να επιτευχθεί αυτό, σε κάθε δικαίωμα ξεχωριστά πρέπει να βάλουμε βάρος ίσο με το αντίστροφο της τιμής εξάσκησης τετραγωνισμένη. Τώρα η έκθεση στην διακύμανση του χαρτοφυλακίου είναι κατά κύριο λόγο ανεξάρτητη από την τιμή του υποκείμενου τίτλου, εφόσον βέβαια και η πραγματική τιμή βρίσκεται μέσα στα όρια που έχουν θέσει εικονικά οι τιμές εξάσκησής μας. Έτσι όσο το κενό μεταξύ των τιμών μειώνεται και το όριό τους μεγαλώνει, η έκθεση της διακύμανσης γίνεται τελείως ανεξάρτητη από την τιμή του υποκείμενου τίτλου. Έτσι εμπειρικά βλέπουμε ότι ένα τέτοιο χαρτοφυλάκιο αναπαράγει την απόδοση ενός Σ.Α.Δ.(Bossu, Strasser and Guichard, 2005).

Γενικά το variance swap μοιάζει στην διαδικασία με το Απλό Συμβόλαιο (vanilla swap), ο ένας από τους δύο αντισυμβαλλόμενους θα πληρώσει ένας ποσό με βάση την πραγματική διακύμανση που έχει στην τιμή του ο υποκείμενος τίτλος. Ο άλλος θα πληρώσει ένα σταθερό ποσό (τιμή εξάσκησης για εμάς) που έχει συμφωνηθεί στην αρχή της σύμβασης. Συνήθως αυτή η τιμή ορίζεται ως εκείνο το ποσό που κάνει την καθαρή παρούσα αξία της απόδοσης ίση με το μηδέν. Στο τέλος του συμβολαίου το καθαρό κέρδος των συμβαλλόμενων θα είναι το θεωρητικό ποσό που έχουν συμφωνήσει πολλαπλασιασμένο με τη διαφορά της πραγματικής διακύμανσης και του σταθερού ποσού εξάσκησης που είχε συμφωνηθεί στην αρχή. Πολλές φορές λόγο κάποιων παραγόντων μπορεί να αποφασιστεί να επιμηκυνθεί η ζωή του συμβολαίου πέρα από την αρχική συμφωνία.

Το Σ.Α.Δ. σε μαθηματικούς όρους είναι, ο αριθμητικός μέσος των διαφορών από τη μέση τιμή τετραγωνισμένες. Η τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης είναι η τυπική απόκλιση. Οπότε η απόδοση στη λήξη (payout) του Σ.Α.Δ. θα είναι σίγουρα μεγαλύτερο από αυτό του Σ.Α.Μ.

Το Variance swap συνδέεται κατευθείαν με την διακύμανση του υποκείμενου τίτλου. Τα δικαιώματα προαίρεσης επίσης δίνουν την δυνατότητα στον επενδυτή να κερδίσει ή να καλύψει την διακύμανση των αγορών του, αλλά αυτά κουβαλάνε διαφορετικά ρίσκα αφού η τιμή τους εξαρτάται από πολλούς παράγοντες όπως τον χρόνο, την ημερομηνία που λήγει το συμβόλαιο και φυσικά τη διακύμανση που πιστεύει η αγορά ότι θα υπάρχει. Για αυτό το λόγο τα δικαιώματα προαίρεσης δεν ενδείκνυνται για τέτοιου είδους στρατηγικές. Τα Σ.Α.Δ. επίσης είναι πολύ πιο ακριβά αν αναλογιστεί κανείς ότι χρειάζονται πολλά δικαιώματα (άρα μεγαλύτερη τιμή) για την ίδια δουλειά.

Τρείς βασικές χρήσεις έχουν τα Σ.Α.Δ.: 1. Οι επενδυτές τα χρησιμοποιούν για να κερδοσκοπήσουν πάνω στην μελλοντική τιμή της διακύμανσης κάποιου προϊόντος, 2. Μπορούν οι επενδυτές να στοιχηματίσουν απλά και μόνο στη διαφορά που θα έχει η πραγματική διακύμανση με αυτή που είχε ορίσει η αγορά ότι θα είναι, 3. Οι επενδυτές τα χρησιμοποιούν ώστε να καλύψουν τη θέση που έχουν ανοίξει με άλλα συμβόλαια και κινδυνεύουν στην μεταβολή της διακύμανσης.

Αρχικά για να ορίσουμε τις Συμβάσεις Ανταλλαγής Διακύμανσης και Μεταβλητότητας θα πρέπει να κάνουμε κάποιες υποθέσεις. Πρώτα θα πρέπει να θεωρήσουμε ένα χρόνο που δεν μπορεί να υπάρξει εξισορροπητική κερδοσκοπία (arbitrage) και ορίζοντα T>0. Για να μας διευκολύνει θα υποθέσουμε μηδενικό επιτόκιο στον τίτλο μας B με τιμή ίση με 1 για όλες τις χρονικές στιγμές όπου θα το λέμε και ομόλογο ή μετρητά ανάλογα με την περίσταση.

Σε ένα φιλτραρισμένο χώρο πιθανοτήτων (Ω, F, $\{F_t\}$, P) που ικανοποιεί τις απλές καταστάσεις, υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα ισοδύναμο στοχαστικό μέτρο ***P*** τέτοιο ώστε η τιμή S του τίτλου να λύνει την εξίσωση:

$$dS_t = \sigma_t S_t dW_t, S_0 > 0 \qquad \text{(Υπόθεση W)}$$

για κάποια (F_t,***P***) κίνηση Brown W_t και για κάποιο μέτρο F_t προσαρμοσμένο στη διαδικασία σ_t που να ικανοποιεί

$$\int_0^T \sigma_t^2 dt \text{ το οποίο δεσμεύεται από κάποιο } m \in R \qquad \text{(Υπόθεση B)}$$

και

$$\sigma \text{ και } W \text{ είναι ανεξάρτητα} \qquad \text{(Υπόθεση I)}$$

έτσι αυτό το ***P*** είναι ένα μέτρο τιμολόγησης ουδέτερου ρίσκου που υπακούει στη ακόλουθη πρόταση: για όλα τα $p \in C$ και $t \leq T$, το πραγματικό μέρος του S_T^p στον χρόνο T έχει τιμή ίση με το πραγματικό μέρος του $E_t S_T^p$, όπου E_t περιγράφει την κατάσταση των ***P***-προσδοκιών όπως παρόμοια ισχύει και για τα φανταστικά μέρη. Θα δηλώνουμε τις λογαριθμικές αποδόσεις ως:

$$X_t = \log\left(\frac{S_t}{S_0}\right)$$

Όπου γράφουμε <X> για την τετραγωνική μεταβολή του X ή ισοδύναμα η πραγματοποιθέντα διακύμανση των αποδόσεων του S, κάτω από την υπόθεση (W),

$$\langle X \rangle_t = \int_0^t \sigma_u^2 du$$

Αυτές οι υποθέσεις είναι επαρκής για την μεθοδολογία που θα ακολουθήσουμε, αλλά όχι και απαραίτητες αφού ανάλογα με το που θέλουμε να καταλήξουμε θα γίνουν λιγότερο αυστηρές παρακάτω (Carr and Lee, 2008).

2.1.1. Συμβάσεις Ανταλλαγής Διακύμανσης

Πιο συγκεκριμένα για τα Σ.Α.Δ. η απόδοση V με τιμή εξάσκησης K και για παρατηρήσεις σε οποιοδήποτε χρόνο t_i με λήξη το χρόνο T είναι:

$$V(K,0) = u^2 \sum_{0<t_i\leq T}\left(\ln\frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}}\right)^2 - K^2 \qquad (1)$$

Όπου u συνήθως στην πράξη για να γίνει σε ετήσια δεδομένα είναι:

$u = 100\sqrt{(252/N)}$.

Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει κάποια πληρωμή μερίσματος στον τίτλο S, θα μπορούσε βέβαια να ήταν αποδεχτό αν οι λογαριθμικές αποδόσεις είχαν ήδη προσαρμοστεί και είχε μπει εκεί το μέρισμα.

Έστω τώρα ότι F(t,T) είναι η μελλοντική τιμή του τίτλου S στο χρόνο T. Όπου r είναι το επιτόκιο και q το μέρισμα σε συνεχή μορφή, $F(t,T) = S(t)e^{\int_t^T r(\tau)-q(\tau)d\tau}$. Υποθέτοντας ότι δεν υπάρχει ευκαιρία για εύκολο χωρίς ρίσκο κέρδος (no arbitrage) και δεν έχουμε άλματα στις αποδόσεις (no jumps), έτσι η διαδικασία F είναι μια στοχαστική διαδικασία martingale και ακολουθεί:

$$\frac{dF}{F} = \sigma(t, \dots)dW$$

Όπου η διακύμανση σ είναι ένας τυχαίος στοχαστικός όρος. Προσεγγιστικά αν έχουμε συνεχή διακύμανση αντί την διακριτή θα έχουμε:

$$\begin{aligned} V(0,T) &\approx u^2 E\left[\frac{1}{T}\int_0^T \sigma^2(t,\dots)dt\right] - K^2 \\ &= u^2 E\left[\frac{2}{T}\left(\int_0^T \frac{dF}{F} - \ln\frac{F(T,T)}{F(0,T)}\right)\right] - K^2 \\ &= u^2 E\left[-\frac{2}{T}\ln\frac{F(T,T)}{F(0,T)}\right] - K^2 \end{aligned} \tag{2}$$

Για να καταλήξουμε στο συμπέρασμά μας θα μας βοηθήσει μια εφαρμογή που υπάρχει στο Carr and Madan (2001). Θεωρούμε ένα μοντέλο μιας περιόδου όπου μπορούν να γίνουν επενδύσεις μόνο στην αρχή, δηλαδή στο χρόνο 0 και οι αποδόσεις τους θα πληρώνονται στο χρόνο 1. Υπάρχει ένα προϊόν χωρίς ρίσκο που αρχικά κοστίζει B_0 και πληρώνεται εξολοκλήρου στον χρόνο 1, θα το ονομάσουμε ομόλογο. Έστω ότι υπάρχει και μόνο ένα προϊόν με ρίσκο το οποίο κοστίζει S_0 και πληρώνει στο χρόνο 1 ένα τυχαίο ποσό ίσο με S, αυτό θα το ονομάσουμε μετοχή. Θα υποθέσουμε ότι υπάρχει αγορά για τα out-of-the-money Ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς και πώλησης για οποιαδήποτε τιμή εξάσκησης. Αν και αυτή η υπόθεση δεν μπορεί να γίνει στην πραγματικότητα μας βοηθάει ώστε να δούμε την φόρμουλα σε πολλές διακριτές στιγμές και να μην έχουμε το πρόβλημα της συνέχειας. Ακολουθώντας αυτή την υπόθεση βρισκόμαστε σε ένα κόσμο όπου οι επενδυτές μπορούν συνεχώς να κάνουν συναλλαγές, κάτι που στην πραγματική αγορά δεν γίνεται αφού υπάρχουν πολλά όμως περιορισμένα σε τιμές εξάσκησης δικαιώματα προαίρεσης.

Για αυτή την αγορά που υποθέσαμε είναι γνωστό από την αρχή ότι οι επενδυτές μπορούν να λάβουν οποιαδήποτε θέση σε μια ομαλή συνάρτηση της τιμής της μετοχής παίρνοντας μια θέση στον χρόνο 0 σε αυτές τις αγορές. Είναι επίσης γνωστό ότι υπάρχει μια κυνδινοουδέτερη πυκνότητα η οποία μπορεί να βρεθεί από τις τιμές των δικαιωμάτων προαίρεσης.

Δείξαμε οπότε ότι οποιαδήποτε συνεχή διαφορά διαφορετικών εξισώσεων, f(S), μιας τιμής μετοχής S, μπορεί να αντικατασταθεί από μια μοναδική θέση που να περιέχει $f(S_0)$-$f'(S_0)S_0$ ομόλογα, $f'(S_0)$ μετοχές και $f''(K)dK$ out-of-the-money δικαιώματα προαίρεσης όλων των τιμών εξάσκησης K (Carr and Madan, 2001):

$$\begin{aligned} f(S) &= \left[f(S_0) - f'(S_0)S_0 \right] + f'(S_0)S \\ &+ \int_0^{S_0} f''(K)(K-S)dK + \int_{S_0}^{\infty} f''(K)(S-K)dK \end{aligned} \tag{3}$$

Με αλλαγή μεταβλητής στην (3) όπου $f(S) \to \ln F(T,T)$ θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \ln F(T,T) &= \left[\ln F(0,T) - \frac{1}{F(0,T)} F(0,T) \right] + \frac{1}{F(0,T)} S \\ &+ \int_0^{F(0,T)} -\frac{1}{K^2}(K-S)dK + \int_{F(0,T)}^{\infty} -\frac{1}{K^2}(S-K)dK \end{aligned}$$

Θα κάνουμε μια διακριτοποίηση κατά Ito στο $dF = F\sigma(t)dW$ με $G = \ln F$ και θα έχουμε:

$$d\ln F = -\frac{\sigma^2(t)}{2}dt + \sigma(t)dW$$

Ολοκληρώνουμε στο (0,T) την παραπάνω εξίσωση:

$$\int_0^{T} d\ln F = \ln F(T,T) - \ln F(0,T) = \ln \frac{F(T,T)}{F(0,T)}$$

Και καταλήγουμε:

$$\int_0^{T} \sigma^2(t)dt = -2\ln \frac{F(T,T)}{F(0,T)} + 2\int_0^{T} \sigma(t)dW(t) \tag{4}$$

Η (2) με τη βοήθεια της (4) μπορεί να γραφτεί και ως:

$$\begin{aligned} V(0,T) &= u^2 E\left[\frac{1}{T}\int_0^{T} \sigma^2(t)dt \right] \\ &= \frac{u^2}{T} E\left[-2\ln\frac{F(T,T)}{F(0,T)} + 2\int_0^{T}\sigma(t)dW(t) \right] \\ &= \frac{u^2}{T} E\left[-2\ln\frac{F(T,T)}{F(0,T)} \right] \end{aligned} \tag{5}$$

Αφού ισχύει $\mathrm{E}\left[\int \sigma(t)dW(t)\right] = 0$ αφού ακολουθεί κανονική κατανομή (0,1) πάντα θα έχει μέση τιμή ίση με μηδέν.

Γενικά με τη βοήθεια δείκτριων συναρτήσεων θα καταλήξουμε στην λύση της εξίσωσης που θέλουμε.

$$\begin{aligned} f(S) &= f(F) + 1_{S>F}\int_F^S f'(u)\,du - 1_{S<F}\int_S^F f'(u)\,du \\ &= f(F) + 1_{S>F}\int_F^S \left[f'(F) + \int_F^u f''(u)\,du \right] du \\ &- 1_{S<F}\int_S^F \left[f'(F) - \int_u^F f''(u)\,du \right] du \end{aligned}$$

Βγάζοντας σταθερούς όρους έξω από τα ολοκληρώματα έχουμε:

$$f(S) = f(F) + f'(F)(S-F) + 1_{S>F}\int_F^S\int_u^S f''(u)\,du\,dv + 1_{S<F}\int_S^F\int_S^u f''(u)\,du\,dv$$

Αλλάζουμε τα όρια στα ολοκληρώματα για να φύγουν τα διπλά ολοκληρώματα και βγάζουμε και τις δείκτριες και καταλήγουμε:

$$\begin{aligned} f(F_T) &= f(F_0) + f'(F_0)(F_T - F_0) + 1_{F_T>F_0}\int_{F_0}^{F_T} f''(K)(F_T - K)\,dK + 1_{F_T<F_0}\int_{F_T}^{F_0} f''(K)(K - F_T dK) \\ &= f(F_T) + f'(F_0)(F_T - F_0) + \int_{F_0}^{\infty} f''(K)(F_T - K)^+\,dK + \int_0^{F_0} f''(K)(K - F_T)^+\,dK \end{aligned} \quad (6)$$

Στην (6) θέτουμε όπου $K - F_T = P(K,T)$ και $F_T - K = C(K,T)$.

Οπότε από την τελευταία σχέση με βάση την (4) μπορεί να γραφτεί:

$$\begin{aligned} &\left(\int_0^{F(0,T)} 2(\ln K)'' P(K,T)\,dK + \int_{F(0,T)}^{\infty} 2(\ln K)'' C(K,T)\,dK\right) \\ &= \left(\int_0^{F(0,T)} \frac{2}{K^2} P(K,T)\,dK + \int_{F(0,T)}^{\infty} \frac{2}{K^2} C(K,T)\,dK\right) \end{aligned}$$

Και με εφαρμογή αυτής φόρμουλας στην σχέση (1), προεξοφλώντας αντίστοιχα σε κάθε όρο, καταλήγουμε στην (7).

$$V(K,T) = u^2 DF(T)\left(\int_0^{F(0,T)} \frac{2}{K^2} P(K,T)\,dK + \int_{F(0,T)}^{+\infty} \frac{2}{K^2} C(K,T)\,dK\right) - DF(T)K^2 \quad (7)$$

όπου C(K,T) και P(K,T) είναι αντίστοιχα οι τιμές των δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης με τιμές εξάσκησης K και λήξη στο χρόνο T, ενώ ο DF(T) είναι ο προεξοφλητικός παράγοντας του χρόνου T που προέρχεται από την σχετική καμπύλη προεξόφλησης (Fabian Le Floc’h, 2017).

2.1.2. Συμβάσεις Ανταλλαγής Μεταβλητότητας

Για τα Σ.Α.Μ. η απόδοση V με τιμή εξάσκησης K και με λήξη το χρόνο T, είναι:

$$V_{vol}\left(K,0\right)=u\sqrt{\sum_{0<t_i\le T}\left(\ln\frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}}\right)^2}-K \tag{8}$$

Για να καταλήξουμε στην τιμολόγηση σε ένα χρόνο t>0 θα ακολουθήσουμε την παρακάτω διαδικασία. Έστω ότι το Σ.Α.Μ. κοστίζει $\sqrt{\langle X\rangle_T}$ μείον ένα συμφωνηθέν σταθερό ποσό, όπου για εμάς τώρα θα το θεωρήσουμε ίσο με το μηδέν.

Από το Carr and Lee (2008) έχουμε ως δεδομένο ότι η βασική συνθετική σύμβαση διακύμανσης μπορεί να μετατραπεί σε μια πολύ δυνατή συνθετική συσχέτιση μιας σύμβασης ανταλλαγής διακύμανσης (synthetic volatility swap-SVS), η οποία είναι πρώτης τάξης σε σχέση με την συσχέτιση. Οπότε για λόγους εξισορρόπησης του κινδύνου, χρειαζόμαστε εκτιμήσεις για όλες τις τιμές του t∈[0,T], έτσι ως σήμερα θα είναι μια οποιαδήποτε μέρα t εκτός από την αρχική ίση με το 0.

Για να τιμολογήσουμε το Volatility swap θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο που αναφέραμε SVS, για όλα τα t∈[0,T] θα έχουμε:

$$E_t\sqrt{\left\langle X\right\rangle_T}=E_tG_{SVS}\left(S_T,S_t,\left\langle X\right\rangle_t\right) \tag{9}$$

όπου,

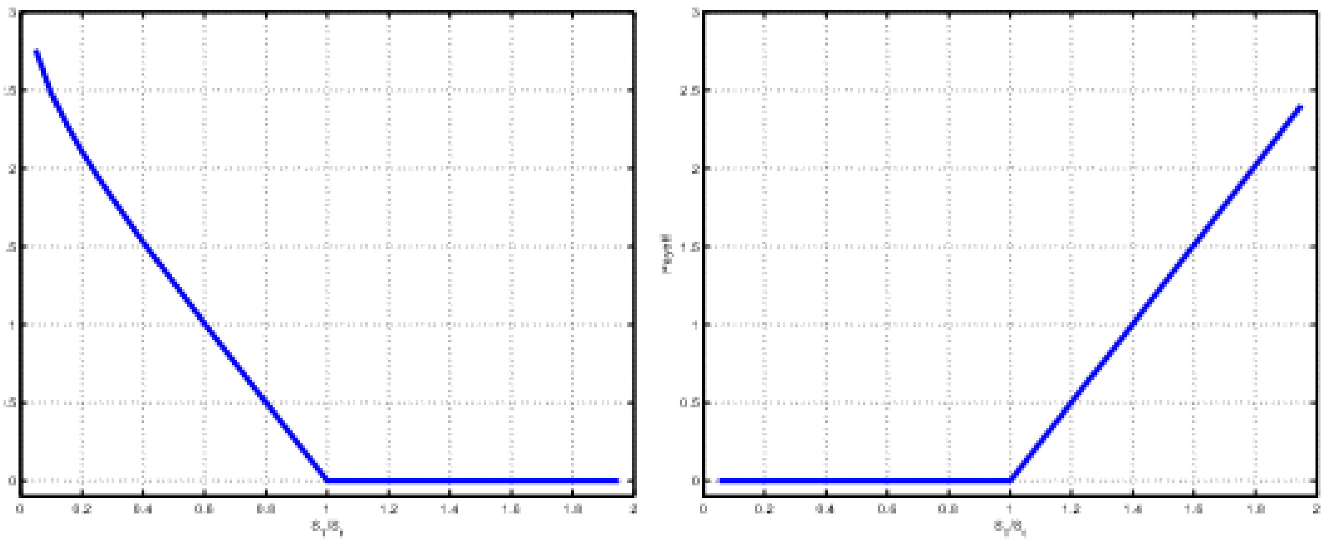
$$G_{SVS}\left(S,u,q\right)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\theta_+ +\frac{1-e^{-zq}\left(S/u\right)^{p_+}}{z^{3/2}}+\theta_-\frac{1-e^{-zq}\left(S/u\right)^{p_-}}{z^{3/2}}dz\,,$$

$$\theta_\pm=\theta_\pm\left(-z\right)=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2\sqrt{1-8z}}\,,\quad p_\pm=p_\pm\left(-z\right)=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{1-8z}$$

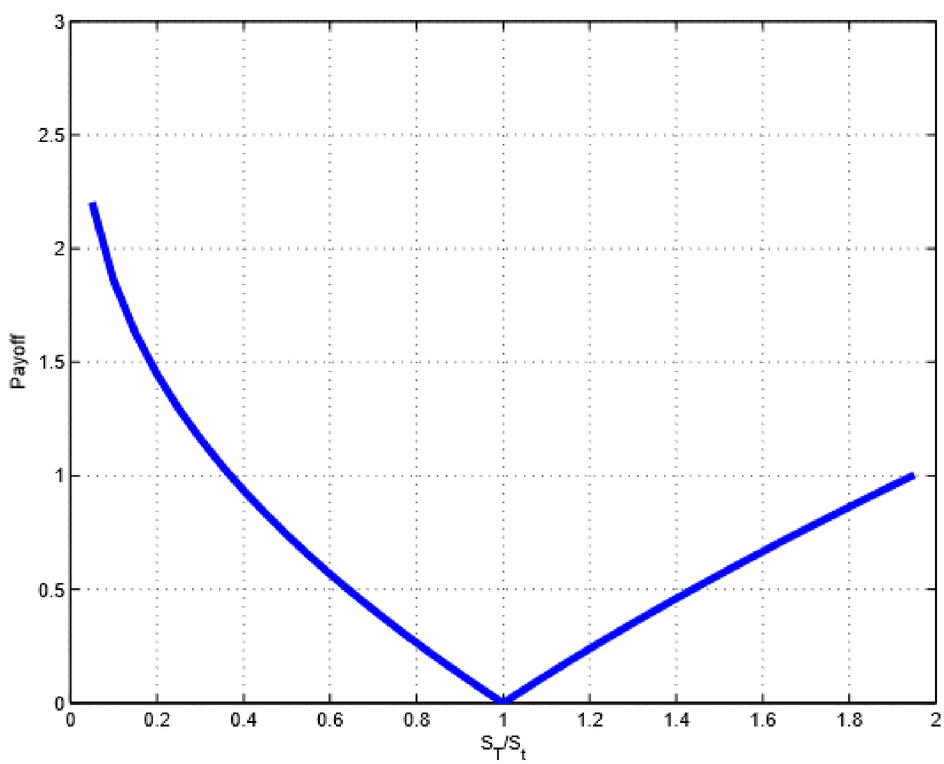
συγκεκριμένα αποδεικνύουμε την σύγκλιση και την ολοκληρωσιμότητα του G_{SVS}.

Για κάθε χρόνο t η εξίσωση της πληρωμής $F(S)=G_{SVS}(S, S_t, \langle X\rangle)$ είναι p-ουδέτερη.

Εικόνα1: Οι αποδόσεις των $g_-(S_t)$ και $g_+(S_t)$ = βασική συνθετική των Σ.Α.Δ., από Carr and Lee, 2008.



Εικόνα2: Η απόδοση του Gsvs(ST,St,0) της ισχυρής συσχέτισης των Σ.Α.Δ., από Carr and Lee, 2008.



Αρχικά όπου συναντάμε στην συνέχεια το SVS θα εννοούμε το μοντέλο της πολύ ισχυρής συσχέτισης, όχι της βασικής συνθετικής σύμβασης των ανταλλαγών διακύμανσης. Από τα σχήματα παραπάνω βλέπουμε ότι το SVS_t δεν είναι ένας απλός γραμμικός συνδυασμός των δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης της βασικής σύνθεσης, αφού υπάρχει μέσα το z ολοκλήρωμα και τα βάρη $\theta_{\pm}$ εξαρτώνται από το z. Όπως φαίνεται στο τρίτο διάγραμμα μοιάζει με straddle αλλά τα άκρα του είναι καμπυλωτά, όχι ευθεία. Έτσι λοιπόν και η εξίσωση πληρωμής $G_{SVS}(S,u,q)$ έχει την ακόλουθη ερμηνεία: το S είναι η τελική τιμή της μετοχής, το u αντιπροσωπεύει την τιμή εξάσκησης του καμπυλωτού straddle και το q ελέγχει την καμπυλότητα που μπορεί να έχει αυτό το straddle. Γενικά το u (strike) πρέπει να είναι at the money και το q πρέπει να επιλεγεί ανάλογα με το πόσο διακύμανση είναι ήδη συσσωρευμένη.

Σε γενικές γραμμές το SVS μπορεί να γραφτεί και σε όρους όπως οι εξισώσεις Bessel. Ας υποθέσουμε ότι το I_v υποδηλώνει την μορφοποιημένη εξίσωση Bessel τάξης v. Τότε:

$$E_0\sqrt{\langle X\rangle_T} = E_0\psi\left(S_T\right)$$

Όπου $\psi\left(S\right)=\varphi\left(\log\left(S/S_0\right)\right)$, όπου

$$\Phi\left(x\right)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{x/2}\left|xI_0\left(x/2\right)-xI_1\left(x/2\right)\right|$$

Και η πληρωμή είναι p-ουδέτερη (Carr and Lee, 2008).

Αντί τώρα να εκφράσουμε το SVS σαν μια εξίσωση πληρωμής, μπορούμε να την εκφράσουμε μέσω των πληρωμών των δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης. Η αρχική ($\langle X\rangle_T=0$) SVS αποσυντίθεται σε πληρωμές του:

$$\frac{\sqrt{\pi/2}}{S_0} \text{ straddles για } K=S_0 \qquad (10)$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{8K^3S_0}}\left[I_1\left(\log\sqrt{K/S_0}\right)-I_0\left(\log\sqrt{K/S_0}\right)\right]dK \text{ calls για } K>S_0 \qquad (11)$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{8K^3S_0}}\left[I_0\left(\log\sqrt{K/S_0}\right)-I_1\left(\log\sqrt{K/S_0}\right)\right]dK \text{ puts για } K<S_0 \qquad (12)$$

Έχοντας την αρχική πληρωμή του Σ.Α.Μ. για κάθε στιγμή μεγαλύτερη του μηδενός. Με τη βοήθεια του σχήματος και των (10), (11), (12), κάνοντας αντικατάσταση $S_0=F(0,T)$, $\log\sqrt{K/S_0}=k$ που θα είναι η τιμή εξάσκησης (strike price) τη στιγμή που θα θέλουμε να βρούμε την πληρωμή και πολλαπλασιάζοντας το DF(T) στο u για να βρεθούμε στη χρονική στιγμή που θέλουμε αλλά και στο K θα μας οδηγήσει μέσω της (8) στην πληρωμή του Σ.Α.Μ. που ισούται με (Fabian Le Floc'h, 2017):

$$V_{vol}(K,T) \approx uDF(T)\begin{pmatrix} -\int_0^{F(0,T)} \sqrt{\frac{\pi}{8K^3F}}\left[I_1(k)-I_0(k)\right]P(K,T)\,dK \\ +\int_{F(0,T)}^{+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{8K^3F}}\left[I_1(k)-I_0(k)\right]C(K,T)\,dK \\ +\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{C(F,T)+P(F,T)}{F(0,T)} \end{pmatrix} - DF(T)K \tag{13}$$

2.2 Συνεχής αναπαραγωγή

Στην πραγματικότητα, η αγορά συγκροτείται από διακριτές ομάδες δικαιωμάτων προαίρεσης με συγκεκριμένη χρονική διάρκεια λήξης. Για να βρούμε τις τιμές των παραγώγων αγοράς και πώλησης για οποιαδήποτε τιμή εξάσκησης, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε μια μέθοδο παρεμβολής της διακύμανσης. Κάποιες σύνηθες επιλογές είναι κυβική σφήνα (cubic spline), τυπικά στην διακύμανση εναντίον της log-moneyness συνδυασμένο με μια γραμμική συναγωγή όπως αναφέρεται στο Jiang and Tian (2007). Άλλη επιλογή είναι ένα παραμετρικό μοντέλο όπως είναι το SVI (Gatheral, 2004) ή κάποιες μεθόδους που έχουν μηδενικό κέρδος χωρίς την ανάληψη κάποιου ρίσκου όπως αυτή του Andreasen και Huge ενός βήματος εισαγωγή όπως το περιγράφουν στο Andreason and Huge (2010). Η ολοκλήρωση συγκλίνει πριν από το μηδέν στο K_{min} και πριν από το άπειρο στο K_{max}. Η παρούσα αξία του συμβολαίου μπορεί να υπολογιστεί από μια προσαρμογή του τετραγωνικού Gauss-Lobatto όπως είναι στα Espelid (2003) και Gander and Gautschi (2000).

Με τη βοήθεια της (7) θα πραγματοποιήσουμε μια αλλαγή μεταβλητής $y = \ln\frac{K}{F_0}$ και άρα $dy = \frac{1}{K}dK$, όπου $K = F_0e^y$ θα έχουμε:

$$V(K,T) = \frac{u^2}{T}B(0,T)\begin{bmatrix} \int_{-\infty}^{0} \frac{2}{F_0}e^{-y}P\left(F_0e^y,T\right)dy \\ +\int_0^{\infty} \frac{2}{F_0}e^{-y}C\left(F_0e^y,T\right)dy \end{bmatrix} - K^2 \tag{14}$$

Επίσης ισχύει από το μοντέλο Black & Scholes:

$$C\left(F_0e^y,T\right)=N\left(d_1\right)F_0-N\left(d_2\right)B\left(0,T\right)F_0e^y$$
$$P\left(F_0e^y,T\right)=N\left(-d_2\right)B\left(0,T\right)F_0e^y-N\left(-d_1\right)F_0$$

Με
$$d_1=\frac{1}{\sigma\sqrt{\mathrm{T}-\tau}}\left(\ln\left(\frac{F_0}{F_0e^y}\right)+\frac{\sigma^2}{2}\left(\mathrm{T}-t\right)\right) \qquad (15)$$
$$d_2=d_1-\sigma\sqrt{T-t}$$

Οι αρχικές τιμές των K_{min} και K_{max} μπορούν να υπολογιστούν αν υποθέσουμε ότι ο τίτλος μας συμπεριφέρεται σαν μια Γεωμετρική κίνηση Brown, οπότε:

$$K_{\min}=F\left(0,T\right)e^{\Phi^{-1}(\varepsilon)\sigma\sqrt{T}} \qquad (16)$$

$$K_{\max}=F\left(0,T\right)e^{-\Phi^{-1}(\varepsilon)\sigma\sqrt{T}} \qquad (17)$$

Όπου Φ^{-1} είναι τα αντίστροφα αποτελέσματα από τον πίνακα της κανονικής κατανομής, το ϵ είναι ένας αριθμός πολύ μικρός, για παράδειγμα ε=10^{-6} και το σ είναι η at the money implied volatility. Έτσι έχοντας υπολογίσει τα K_{min} και K_{max} χρησιμοποιούμε όλο και μικρότερα βήματα (κάνουμε δοκιμές με το ανάλογο n) ώστε να καταλήξουν τα διαστήματα $\left(\frac{K_{min}}{n+1},\frac{K_{min}}{n}\right)$ και $(nK_{max},(n+1)K_{max})$ μικρότερα από το ε που ορίσαμε.

Με την βοήθεια των εξισώσεων (14) για την αποτίμηση της γενικής φόρμουλας της συνεχής αναπαραγωγής, αλλά και της (15) για την εύρεση των d1,d2 καταλήγουμε στην ακόλουθη εξίσωση:

$$V\left(K,T\right)=\frac{2u^2B\left(0,T\right)}{T}\begin{bmatrix}\int_{y_{\min}}^{0}-e^{-y}\Phi\left(-d_1\left(y\right)\right)+\Phi\left(-d_2\left(y\right)\right)dy\\+\int_0^{y_{\max}}e^{-y}\Phi\left(d_1\left(y\right)\right)-\Phi\left(d_2\left(y\right)\right)dy\end{bmatrix}-B\left(0,T\right)K^2 \qquad (18)$$

Με $d_1\left(y\right)=\frac{1}{2}\sigma\left(y,T\right)\sqrt{T}-\frac{y}{\sigma\left(y,T\right)\sqrt{T}}$ και $d_2\left(y\right)=d_1\left(y\right)-\sigma\left(y,T\right)\sqrt{T}$.

Η παραπάνω μεθοδολογία είναι παρόμοια με αυτή που προτείνεται στο Jiang and Tian (2007), επίσης μια εναλλακτική προσέγγιση εξετάζεται και στο Fukasawa et al. (2011), παρόλο που η τεχνική τους έχει αρκετά χαρακτηριστικά για την σταθερότητα και είναι λίγο πιο πολύπλοκη στην πράξη καταλήγει σε τιμές πολύ κοντά σε αυτές που βρίσκουμε με πιο άμεσες διαδικασίες στην φόρμουλα του Carr-Madan που περιγράψαμε παραπάνω (Fabian Le Floc’h, 2017).

2.3 Διακριτή αναπαραγωγή

Γενικά ξέρουμε ότι η διακριτή απεικόνιση είναι πολύ πιο κοντά στην πραγματικότητα αφού στην αγορά υπάρχουν συγκεκριμένα δικαιώματα ανάλογα με την τιμή εξάσκησης που θέλουμε και επίσης είναι πεπερασμένα. Δεν είναι πραγματοποιήσιμη μια μορφή υπολογισμού τέτοιων συμβάσεων σε συνεχή μορφή. Οπότε χρησιμοποιούμε πολλές διακριτές τιμές ώστε μα φτάσουμε όσο πιο κοντά γίνεται σε μια συνεχή απεικόνιση. Θα ακολουθήσουν κάποιες μέθοδοι που μπορεί να γίνει η αποτίμηση ενός Σ.Α.Δ. σε διακριτή μορφή.

2.3.1 Μέθοδος Derman

Η ιδέα που παρουσιάστηκε στο Demeterfi et al. (1999) ήταν να προσεγγίσουν τη λογαριθμική απόδοση των συμβάσεων διακύμανσης με μια μερικώς γραμμική εξίσωση, όπου αυτές οι μερικώς γραμμικές εξισώσεις θα μπορούν κάθε φορά να γραφτούν σαν συνδυασμός από διαφορετικά δικαιώματα προαίρεσης (αγοράς και πώλησης), τα οποία θα έχουν όλες τις πιθανές τιμές εξάσκησης, αλλά και όλα τον ίδιο χρόνο μέχρι την λήξη τους Τ.

Σύμφωνα με το Demeterfi et al. (1999) υπάρχει μια μαθηματική ταυτότητα που υπαγορεύει την στρατηγική αποτίμησης για την διακύμανση η οποία είναι:

$$V = \frac{1}{T}\int_0^T \sigma^2 dt = \frac{2}{T}\left[\int_0^T \frac{dS_t}{S_t} - \log\frac{S_T}{S_0}\right] \tag{19}$$

Τώρα από την (19) μπορούμε να πάρουμε το αναμενόμενο ουδέτερο ρίσκο από το δεξί μέλος της εξίσωσης και να μας δώσει το κόστος της αναπαραγωγής απευθείας, δηλαδή:

$$\mathrm{K}_{\mathrm{var}} = \frac{2}{T} E\left[\int_0^T \frac{dS_t}{S_t} - \log\frac{S_T}{S_0}\right] \tag{20}$$

Η αναμενόμενη τιμή του πρώτου όρου της (20) μας δείχνει το κόστος της εξισορρόπησης και στον κόσμο ουδέτερου κινδύνου με ένα συνεχές επιτόκιο r_f θα ισχύει: $\frac{dS_t}{S_t} = r_f dt + \sigma(t\square\ldots) dZ$. Έτσι και για τον πρώτο όρο θα ισχύει:

$$\mathrm{E}\left[\int_0^T \frac{dS_t}{S_t}\right] = r_f T \tag{21}$$

Όπου αυτή η εξίσωση μας δείχνει ότι οι θέσεις που έχουμε πάρει στην μετοχή, αν τις διαμορφώνουμε συνεχώς ώστε να αξίζει 1$, έχει μελλοντική τιμή που αυξάνει συναρτήσει του r_f.

Εφόσον δεν υπάρχουν δραστήρια λογαριθμικά συμβόλαια για ανταλλαγή ο δεύτερος όρος της (15) θα πρέπει να προσδιορίζει την λογαριθμική απόδοση, σε όλα τα επίπεδα τιμών της μετοχής μέχρι τη λήξη τους, αποσυνθέτοντας το σχήμα τους σε γραμμικά καμπυλωτά συστατικά και μετά να αντιγράφει το καθένα από αυτά ξεχωριστά. Τα γραμμικά στοιχεία μπορούν να αντικατασταθούν με συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης πάνω στην μετοχή με λήξη τον χρόνο Τ. Τα υπόλοιπα καμπυλωτά στοιχεία αντιπροσωπεύουν τα τετραγωνικά ή τις υψηλότερες τάξης συνεισφορές και μπορούμε να τα αντικαταστήσουμε με συγκεκριμένα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης που έχουν όλα τις πιθανές τιμές εξάσκησης και ίδιο χρόνο λήξης και αυτά ίσο με Τ.

Οπότε θα χρειαστεί για πρακτικούς σκοπούς να αντιγράψουμε τις λογαριθμικές αποδόσεις με χρηματικά δικαιώματα προαίρεσης. Αυτό θα γίνει με συνδυασμό από out-of-the-money δικαιώματα αγοράς για υψηλές τιμές του υποκείμενου τίτλου και out-of-the-money δικαιώματα πώλησης για χαμηλές τιμές του τίτλου. Θα εισάγουμε μια καινούρια αυθαίρετη παράμετρο ίση με K_0 για να προσδιορίσουμε τα όρια μεταξύ των δικαιωμάτων προαίρεσης. Η λογαριθμική απόδοση οπότε θα μπορεί να γραφτεί ως:

$$\log\frac{S_T}{S_0} = \log\frac{S_T}{S_*} + \log\frac{S_*}{S_0} \tag{22}$$

Ο δεύτερος παράγοντας από το δεξί μέλος της (22), δηλαδή ο $\ln\frac{S_*}{F(0,T)}$ είναι συνεχής, ανεξάρτητα από την τελική τιμή που θα έχει ο υποκείμενος τίτλος στο τέλος αφού δεν περιέχει καθόλου το F(T,T), οπότε μόνο ο πρώτος όρος πρέπει να τροποποιηθεί.

Θα ακολουθήσουμε την παρακάτω μαθηματική ταυτότητα που ισχύει πάντα για όλες τις μελλοντικές τιμές F(T,T).

$$\begin{aligned} -\log\frac{S_T}{S_*} &= -\frac{S_T - S_*}{S_*} \quad \text{(Forward contract)} \\ &+\int_0^{S_*}\frac{1}{K^2}\max\left(K - S_T, 0\right)dK \quad \text{(Put Option)} \\ &+\int_{S_*}^{\infty}\frac{1}{K^2}\max\left(S_T - K, 0\right)dK \quad \text{(Call Option)} \end{aligned} \tag{23}$$

Η εξίσωση (23) αντιπροσωπεύει μια αποσύνθεση της λογαριθμικής απόδοσης ενός χαρτοφυλακίου που αποτελείτε από:

- Μια θέση short στο ($1/S_*$) μελλοντικό συμβόλαιο με strike S_*,
- Μια θέση long στο ($1/K^2$) δικαίωμα προαίρεσης put με strike K_*, που παίρνει όλες τις δυνατές τιμές από 0 έως S_*, και
- Μια παρόμοια θέση long στο ($1/K^2$) δικαίωμα προαίρεσης call με strike K_*, που παίρνει όλες τις δυνατές τιμές από S_* έως ∞.

Όλα τα συμβόλαια λήγουν στον χρόνο T και S_*=K_0. Έχοντας αυτά τώρα στο Demeterfi et al. (1999) πηγαίνει και δουλεύει κατευθείαν με τα payoff και έχει οπότε:

$$f(x) = \frac{x}{K_0} - 1 - \ln\left(\frac{x}{K_0}\right) \tag{24}$$

Γενικά μπορούμε να παραλείψουμε τον γραμμικό όρο αφού μπορεί κατευθείαν να αντικατασταθεί από τις μετοχές αλλά στο τέλος θα δούμε ότι οδηγεί σε παρόμοια αποτελέσματα λόγω συγραμμικότητας.

Για να βρούμε τώρα τη τιμή της μελλοντικής διακύμανσης θα κοιτάξουμε ξεχωριστά την τιμή για κάθε όρο στο δεξί μέλος της (20), χρησιμοποιώντας όμως τις εξισώσεις (21) και (23) θα μας δώσει:

$$K_{\text{var}} = \frac{2}{T}\left[\begin{array}{l} r_f T - \left(\frac{S_0}{S_*}e^{r_f T} - 1\right) - \log\frac{S_*}{S_0} \\ + e^{r_f T}\int_0^{S_*}\frac{1}{K^2}P(K)\,dK \\ + e^{r_f T}\int_{S_*}^{\infty}\frac{1}{K^2}C(K)\,dK \end{array}\right] \tag{25}$$

Όπου $P(K)$ και $C(K)$ αντίστοιχα αντιπροσωπεύουν την σημερινή αξία ενός δικαιώματος αγοράς και πώλησης με τιμή εξάσκησης ίσο με K. Αν χρησιμοποιήσουμε τις αξίες που έχουν στην αγορά αυτά τα δικαιώματα προαίρεσης θα μπορέσουμε να εκτιμήσουμε την σημερινή αξία που έχει στην αγορά η μελλοντική διακύμανση.

Θα παρουσιάσουμε ένα πρακτικό παράδειγμα για να καταλάβουμε πιο εύκολα πως τιμολογείτε ένα Σ.Α.Δ. με τη μέθοδο του Derman και να καταλήξουμε στον τελικό τύπο. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να τιμολογήσουμε μια σύμβαση ανταλλαγής στην πραγματική διακύμανση ημερήσιων αποδόσεων ενός υποθετικού δείκτη. Η δίκαιη αναγγελία της διακύμανσης αποδίδεται από το κόστος των στρατηγικών αναπαραγωγής που είπαμε παραπάνω. Αν θα μπορούσαμε να αγοράσουμε δικαιώματα προαίρεσης όλων των πιθανών τιμών εξάσκησης από μηδέν έως άπειρο η τιμή θα μας δίνονταν από την εξίσωση (20) αν βάζαμε απλά για $S_* = S_0$. Στην πράξη όμως μόνο κάποιο μέρος από αυτά τα δικαιώματα είναι διαθέσιμα και χρησιμοποιώντας την (25) για κάποιες τιμές εξάσκησης θα μας οδηγήσει σε λάθη. Για να αποφύγουμε αυτό το αδιέξοδο θα ακολουθήσουμε την παρακάτω διαδικασία.

Θα ξεκινήσουμε από τον ορισμό της ‘σωστής’ διακύμανσης που έχουμε στον τύπο (20), ο οποίος μπορεί να γραφτεί και ως:

$$K_{\text{var}} = \frac{2}{T} E\left[\int_0^T \frac{dS_t}{S_t} - \frac{S_T - S_*}{S_*} - \log\frac{S_*}{S_0} + \frac{S_T - S_*}{S_*} - \log\frac{S_T}{S_*} \right]$$

Βάζοντας μέσα την αναμενόμενη τιμή έχουμε:

$$K_{\text{var}} = \frac{2}{T}\left[r_f T - \left(\frac{S_0}{S_*} e^{r_f T} - 1 \right) - \log\frac{S_*}{S_0} \right] + e^{r_f T} \prod CP \qquad (26)$$

Όπου $\prod CP$ είναι η παρούσα αξία ενός χαρτοφυλάκιού με δικαιώματα προαίρεσης με αναμενόμενη απόδοση που δίνεται από $f\left(S_T\right) = \frac{2}{T}\left(\frac{S_T - S_*}{S_*} - \log\frac{S_T}{S_*} \right)$.

Ας υποθέσουμε ότι μπορούμε να ανταλλάξουμε δικαιώματα αγοράς με τιμές εξάσκησης K_{ic} όπως $K_0 = S_* < K_{1c} < K_{2c} < K_{3c} < \ldots$ και δικαιώματα πώλησης με τιμές εξάσκησης K_{ip} όπως $K_0 = S_* > K_{1p} > K_{2p} > K_{3p} > \ldots$

Οπότε και θα έχουμε:

$$\prod CP = \sum_i w\left(K_{ip}\right) P\left(S, K_{ip}\right) + \sum_i w\left(K_{ic}\right) C\left(S, K_{ic}\right) \qquad (27)$$

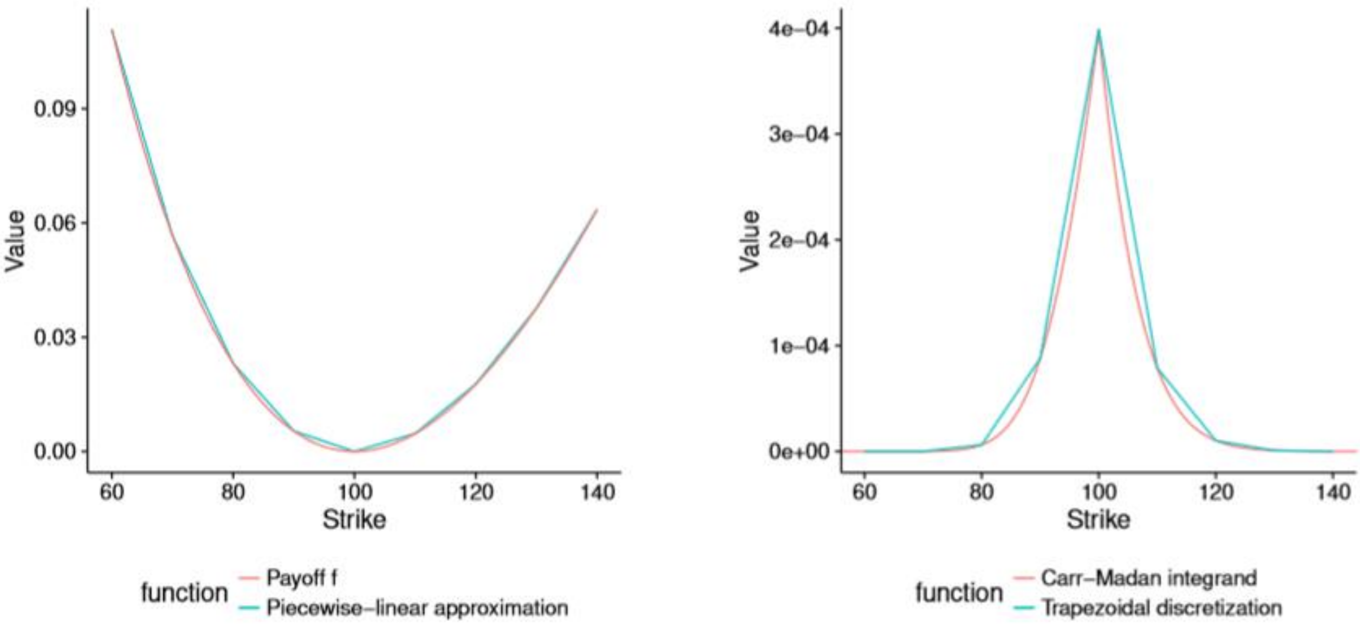
Επίσης στο σχήμα που ακολουθεί φαίνεται η απόδοση και η μερικώς γραμμική προσέγγιση που αναφέραμε παραπάνω.

Εικόνα3: Διαφορετικές αποτιμήσεις για τιμές εξάσκησης από 60-140 και F(0,T)=100.

(α) Η μέθοδος Derman: Η απόδοση της εξίσωσης (19) μαζί με την μερικώς γραμμική προσέγγιση.

(β) Η μέθοδος Τραπεζοειδών: Η ολοκληρωτέα εξίσωση (5) μαζί με την διακριτοποιημένη τραπεζοειδή.

Από Fabien Le Floc’h, 2017.



Η κλίση που έχει η συνάρτηση μας σε κάθε τμήμα της μας δίνει και το βάρος των δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης $w^c\left(K_i^c\right)$, $w^p\left(K_i^p\right)$ άρα μπορούμε να τα υπολογίσουμε και από τους παρακάτω τύπους:

$$
\begin{aligned}
w^c\left(K_0\right) &= \frac{f\left(K_1^c\right)-f\left(K_0\right)}{K_1^c-K_0} \\
w^c\left(K_i^c\right) &= \frac{f\left(K_{i+1}^c\right)-f\left(K_i^c\right)}{K_{i+1}^c-K_i^c}-\sum_{j=0}^{i-1} w^c\left(K_i^c\right) \\
w^p\left(K_0\right) &= -\frac{f\left(K_1^p\right)-f\left(K_0\right)}{K_1^p-K_0} \\
w^p\left(K_i^p\right) &= -\frac{f\left(K_{i+1}^p\right)-f\left(K_i^p\right)}{K_{i+1}^p-K_i^p}-\sum_{j=0}^{i-1} w^p\left(K_i^p\right)
\end{aligned} \tag{28}
$$

Οπότε με όλα αυτά καταλήγουμε στη τελική διακριτή φόρμουλα αποτίμησης με την μέθοδο Derman (Fabian Le Floc'h, 2017):

$$V(0,T) = u^2 \frac{2}{T}\left(1 - \frac{F(0,T)}{S} + \ln\frac{F(0,T)}{S}\right) + u^2 \frac{2}{T} DF(T)\left[\sum_{i=0}^{n} w^C\left(K_i^C\right) C\left(K_i^C, T\right) + \sum_{i=0}^{n} w^P\left(K_i^P\right) P\left(K_i^P, T\right)\right] \quad (29)$$

2.3.2 Μέθοδος Trapezoidal

Μια πρώτη ιδέα για τη συγκεκριμένη μέθοδο φαίνεται στο Britten-Jones and Neuberger (2000) όταν προσπάθησαν να βρουν ένα τρόπο να προβλέπουν την αναμενόμενη διακύμανση αφού τότε υπήρχε μεγάλη εξέλιξη στις συμβάσεις ανταλλαγής διακύμανσης και μεταβλητότητας.

Στον χρόνο 0 υπήρχε ένα μεγάλο σύνολο από Ευρωπαϊκά δικαιώματα προαίρεσης με λήξη τον χρόνο T. Γενικά για τιμές εξάσκησης K αυτά τα δικαιώματα συμβολίζονται με C(K,T) και P(K,T) αντίστοιχα για αγοράς και πώλησης δικαιωμάτων προαίρεσης. Στον κόσμο ουδέτερου κινδύνου, η τιμή ενός υποκείμενου τίτλου S_t θα ικανοποιεί την εξίσωση $dS = (r-q)Sdt + \sigma SdW$, όπου r το risk-free, q η απόδοση του μερίσματος, W_t μια διαδικασία Wiener και σ_t η στοχαστική διακύμανση ουδέτερου κινδύνου. Ενώ η διακύμανση του τίτλου σε όλο τον ορίζοντα του T προσδιορίζεται από την:

$$V_{0,T} = \int_0^T \sigma_t^2 dt$$

Με βάση τα παραπάνω βρήκαν ότι η κινδυνοουδέτερη αναμενόμενη μεταβλητότητα δίνεται από την παρακάτω εξίσωση των Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων προαίρεσης τα οποία είναι out-of-the-money:

$$E^Q\left[V_{0,T}\right] = 2e^{rt}\left[\int_0^{F_{0,T}} \frac{p(K,T)}{K^2} dK + \int_{F_{0,T}}^{\infty} \frac{c(K,T)}{K^2} dK\right] \quad (30)$$

Όπου $F_{0,T}$ είναι η μελλοντική τιμή οποιαδήποτε στιγμή από το χρόνο 0 έως T. Η βασική υπόθεση όμως για την (30) είναι ότι οι στοχαστικές διαδικασίες για την τιμή του υποκείμενου τίτλου και της διακύμανσης είναι συνεχείς. Η συγκεκριμένη έχει πολύ σωστά αποτελέσματα όταν στην αγορά υπάρχουν συνεχώς άλματα στη τιμή της μετοχής, στην πραγματικότητα όμως κάτι τέτοιο δεν ισχύει.

Έτσι ήρθαν οι Jiang and Tian (2007) να φτιάξουν μια διακριτή μορφή για τον υπολογισμό της διακύμανσης. Οπότε στον χρόνο 0, όπου υπάρχουν N διαθέσιμα out-of-the-money δικαιώματα προαίρεσης με λήξη τον χρόνο T έχουμε:

$$\sigma_{MF} = \sqrt{\frac{2}{T} e^{rt} \sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta K_i}{K_i^2} Q\left(K_i, T\right) - \frac{1}{T}\left[\frac{F_{0,T}}{K^*} - 1\right]^2} \tag{31}$$

Όπου K^* είναι η τιμή εξάσκησης που χρειάζεται για να επιλέξουμε δικαιώματα αγοράς και πώλησης, ενώ $Q\left(K_i, T\right)$ είναι ένα δικαίωμα αγοράς με τιμή εξάσκησης $K_i \geq K^*$ και ΔK_i ισούται με $\frac{K_{i+1} - K_{i-1}}{2}$.

Το πρόβλημα τώρα ήταν ότι το μοντέλο για να λειτουργεί χρειάζεται δικαιώματα προαίρεσης για όλες τις δυνατές τιμές εξάσκησης κάτι που στην πραγματικότητα δεν είναι εφικτό. Για αυτό το λόγο οι Jiang and Tian (2007) εκτίμησαν μια καμπύλη της διακύμανσης στον χρόνο που θέλουμε που να περιέχει όλα τα K. Με πρότυπο την πρακτική στρατηγική που ακολούθησε ο Malz (1997a,1997b), ο οποίος προσπάθησε να εκτιμήσει την καμπύλη της διακύμανσης σαν τετραγωνικές εξισώσεις δικαιωμάτων Δέλτα. Επιλέχθηκε ο τετραγωνικός προσδιορισμός γιατί ήταν η απλούστερη εξίσωση η οποία ακολουθεί τις βασικές ιδιότητες του χαμόγελου μεταβλητότητας (volatility smile).

Με την ίδια σκέψη θα ακολουθήσουμε τώρα την μέθοδο των Τραπεζοειδών, σαν ένα γενικό παράδειγμα θα χωρίσουμε το διάγραμμα της απόδοση της συνάρτησής μας (payoff f) σε πολλά τετράπλευρα κομμάτια και να επεξεργαστούμε το καθένα ξεχωριστά ώστε στο σύνολο να έχουμε μια καλή εκτίμηση της συνάρτησής μας. Οπότε αντί να εκτιμήσουμε την συνάρτηση όπως πριν σαν μια μερικώς γραμμική εξίσωση τώρα θα πάμε κατευθείαν να ενσωματώσουμε στην (7) τη μέθοδο των Τραπεζοειδών όπως έκαναν και στο Jiang and Tian (2007). Για να διευκολυνθούμε θα θεωρήσουμε ότι οι διαφορές των τιμών στα strike αυξανόμενα κατά ένα θα είναι ίσα με h, δηλαδή: $K_{i+1} - K_i = h$. Οπότε και θα έχουμε (Fabian Le Floc'h, 2017):

$$\begin{aligned} V(0,T) &= u^2 \frac{2}{T}\left(\ln \frac{F(0,T)}{K_0} \right) \\ &+ u^2 \frac{2h}{T} DF(T) \left(\frac{C(K_0,T)}{2K_0^2} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{C(K_i^c,T)}{(K_i^c)^2} + \frac{C(K_n^c,T)}{2(K_n^c)^2} \right) \\ &+ u^2 \frac{2h}{T} DF(T) \left(\frac{P(K_0,T)}{2K_0^2} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{P(K_i^p,T)}{(K_i^p)^2} + \frac{P(K_n^p,T)}{2(K_n^p)^2} \right) \end{aligned} \tag{32}$$

Όπου τα βάρη των call και put αντίστοιχα είναι:

$$w_i^c = u^2 \frac{2h}{T(K_i^c)^2} \text{ για i = 1, ..., n-1 και } w_0^c = u^2 \frac{h}{TK_0^2},\ w_n^c = u^2 \frac{h}{T(K_n^c)^2} \tag{33}$$

$$w_i^p = u^2 \frac{2h}{T(K_i^p)^2} \text{ για i=1, ..., n-1 και } w_0^p = u^2 \frac{h}{TK_0^2},\ w_n^p = u^2 \frac{h}{T(K_n^p)^2}.$$

2.3.3 Μέθοδος Simpson

Μπορούμε με παρόμοιο σκεπτικό αλλά με περισσότερο ακριβής τετραγωνισμούς να πάμε ακόμα πιο πέρα σε ακόμα καλύτερα αποτελέσματα από την προηγούμενη μέθοδο, ένας τέτοιος τρόπος είναι ο τετραγωνισμός του Simpson (Simpson’s quadrature). Ουσιαστικά είναι ένας παρόμοιος τρόπος με την προηγούμενη μέθοδο μόνο που προσεγγίζει λίγο καλύτερα το ζητούμενο.

Αν πάμε στην τελική σχέση της μέθοδο Trapezoidal θα πρέπει αρχικά να πάρουμε διαφορετικά βάρη για την πρώτη και την τελευταία σχέση και για τα δικαιώματα αγοράς αλλά και πώλησης, ώστε να μπορέσουμε μετά να τα φέρουμε όλα μαζί σε μια παρένθεση μετά την προεξόφληση. Τέλος κάθε φορά που το i γίνεται περιττός θα έχει το ίδιο βάρος με πριν ενώ για να έχουμε πιο ακριβή αποτελέσματα για κάθε i άρτιος αριθμός θα έχει το διπλάσιο βάρος.

Έτσι όπως παρουσιάζεται στο Fabien Le Floc’h (2017), αν υποθέσουμε ότι οι τιμές εξάσκησης είναι μεταξύ τους εξισορροπημένες με πλάτος h και το n είναι πάντα άρτιος αριθμός θα ισχύει:

$$V\left(0,T\right)=u^2\frac{2}{T}\left(\ln\frac{F\left(0,T\right)}{K_0}\right)$$
$$+u^2\frac{2h}{3T}DF\left(T\right)\left(\sum_{i=0}^{n}w_i\frac{C\left(K_i^c,T\right)}{\left(K_i^c\right)^2}+\sum_{i=0}^{n}w_i\frac{P\left(K_i^p,T\right)}{\left(K_i^p\right)^2}\right) \tag{34}$$

Με: $w_0=w_n=1$ και $w_{2i+1}=4$, $w_{2i}=2$. (35)

Παρόμοια μπορούμε να αλλάξουμε και την μέθοδο του Derman μετατοπίζοντας τα τμήματα στα μεσαία σημεία έχοντας έτσι πιο ακριβή τετραγωνισμούς.

Κεφάλαιο 3

Εμπειρική Ανάλυση

Η εμπειρική μελέτη όπως έχουμε αναφέρει και παραπάνω θα χωριστεί σε δυο σημεία. Αρχικά με τη βοήθεια του μοντέλου Black & Scholes θα τιμολογήσουμε κάποια δικαιώματα αγοράς και πώλησης, τα οποία θα τα χρησιμοποιήσουμε σε μια δική μας αριθμητική ανάλυση. Βάζοντάς τα στις τρεις μεθόδους αποτίμησης που μελετήσαμε για να τιμολογήσουμε ΣΑΔ, στις μεθόδους Derman, Trapezoidal και Simpson, θα συγκρίνουμε την κάθε μια ξεχωριστά με την συνεχή μέθοδο (Continuous) ώστε να μπορέσουμε με μια πρώτη ματιά να δούμε ποια μέθοδος είναι πιο κοντά στην συνεχή και οπότε καλύτερη από τις άλλες.

Σε δεύτερη φάση θα κατεβάσουμε δεδομένα για τον δείκτη S&P500 με δικαιώματα αγοράς και πώλησης. Θα υπολογίσουμε μέσω του υπολογιστικού προγράμματος MATLAB την παράμετρο για την διακύμανση που μας δίνει το καλύτερο ταίριασμα στις τιμές των μοντέλων με τις τιμές της αγοράς που έχουμε συλλέξει. Έπειτα θα ελέγξουμε τα μοντέλα με την εκτιμημένη παράμετρο σε σχέση με τιμές της αγοράς εντός του δείγματος για απλά δικαιώματα αγοράς και πώλησης αλλά και εκτός του δείγματος για μερικά ακόμη δικαιώματα που δεν πήραμε στις μετρήσεις μας. Τέλος θα βρούμε ποιο μοντέλο ταιριάζει καλύτερα στις πραγματικές τιμές σε κάθε περίπτωση και θα καταλήξουμε στα ανάλογα συμπεράσματα.

3.1 Μέθοδοι αναπαραγωγής στο μοντέλο B&S

Θα χρησιμοποιήσουμε το μοντέλο Black & Scholes με τη βοήθεια του υπολογιστικού προγράμματος της MATLAB για να βρούμε δικαιώματα αγοράς και πώλησης για το παράδειγμά μας.

Θεωρούμε δικαιώματα με τιμές εξάσκησης από 60 έως 140 με αύξηση 10 μονάδες, η τιμή του υποκείμενου τίτλου θα υποθέσουμε ότι είναι ίση με 100, η διάρκεια μέχρι τη λήξη ίση με 1 και δεν θα υπάρχει καθόλου επιτόκιο και μέρισμα. Για το παράδειγμά μας και τα at the money δικαιώματα θα συμπεριληφθούν στην αποτίμηση. Ακόμα και αν συμπεριλαμβάναμε το επιτόκιο ή αν αλλάζαμε την τιμή του υποκείμενου τίτλου δεν θα άλλαζε το τελικό μας συμπέρασμα.

Αρχικά θα χρησιμοποιήσουμε μια χαμηλή μεταβλητότητα ίση με 10%, έτσι ώστε το φάσμα των τιμών εξάσκησης να καλύπτει καλά την κατανομή του υποκείμενου τίτλου. Αμέσως μετά θα επαναλάβουμε τη διαδικασία με αυξημένη μεταβλητότητα για τις τιμές του υποκείμενου τίτλου.

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις 28 που μελετήσαμε παραπάνω βρίσκουμε τα βάρη που θα έχουν αντίστοιχα τα out of the money δικαιώματα για τη μέθοδο Derman, τα βάρη της Trapezoidal μεθόδου με τις εξισώσεις 33 και τέλος τα βάρη για τη μέθοδο Simpson με τις εξισώσεις 35. Τα αποτελέσματά μας βρίσκονται συγκεντρωτικά στον παρακάτω πίνακα.

Options	Τιμές εξάσκησης	Derman	Trapezoidal	Simpson
PUT	60	0	27.78	18.52
PUT	70	41.24	40.82	54.42
PUT	80	31.50	31.25	20.83
PUT	90	24.85	24.69	32.92
PUT	100	10.72	10	6.67
CALL	100	9.38	10	6.67
CALL	110	16.60	16.53	22.04
CALL	120	13.94	13.89	9.26
CALL	130	11.87	11.83	15.78
CALL	140	0	5.10	3.40

Πίνακας 1: Βάρος ανά δικαίωμα με τις τρείς μεθόδους

Παρατηρούμε ότι τα βάρη που βρήκαμε από τις μεθόδους Trapezoidal και Derman είναι αρκετά κοντά μεταξύ τους σε σχέση με τη μέθοδο Simpson, οπότε εκτιμούμε ότι οι τιμές αποτίμησης που θα δώσουν οι δύο αυτές μεθόδους θα είναι παρόμοιες σε σχέση με την τρίτη.

Έπειτα με την βοήθεια του υπολογιστικού προγράμματος MATLAB και με τον έτοιμο κώδικα blsprice που εμπεριέχετε στην MATLAB και τις αντίστοιχες τιμές που θεωρήσαμε στην αρχή του παραδείγματός μας θα βρούμε τα διαφορετικά δικαιώματα αγοράς και πώλησης για κάθε τιμή εξάσκησης. Έχοντας τώρα τα βάρη, τα δικαιώματα και τους τρείς κώδικες που δημιουργήσαμε και υπάρχουν στο τέλος (DermanMethod, TrapezoidalMethod, SimpsonMethod) αλλά και με τον κώδικα για την συνεχή αποτίμηση ContinuousMethod (κώδικας 1) θα τιμολογήσουμε τα ΣΑΜ με κάθε μέθοδο ξεχωριστά και τα αποτελέσματα εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα.

Μέθοδος	Price in Vol	Error
Continuous	10.0000	0.0000
Derman	10.8264	0.8264
Trapezoidal	10.7986	0.7986
Simpson	10.0055	0.0055

Πίνακας 2: Τιμές ΣΑΜ των μεθόδων με χαμηλή μεταβλητότητα (10%)

Από τον πίνακα 2 βλέπουμε ότι η μέθοδος Simpson είναι πιο κοντά από τις άλλες στην συνεχή μέθοδο, αφού έχει το μικρότερο σφάλμα από τις τρεις. Ουσιαστικά δηλαδή, η μέθοδος Simpson αντιγράφει πιο κοντά από όλες τις μεθόδους το volatility που ορίσαμε εμείς αφού στην ιδανική περίπτωση θα έπρεπε να είναι το fair value για κάθε ΣΑΔ και η διαφορά με το volatility να ήταν ίσο με μηδέν. Επίσης βλέπουμε ότι αν αυξήσουμε τις τιμές εξάσκησης η συγκεκριμένη μέθοδος συγκλίνει ακόμα πιο γρήγορα στις τιμές της συνεχής και από την μέθοδο Derman αλλά και από την Trapezoidal.

Στη συνέχεια με τα ίδια δεδομένα που υποθέσαμε παραπάνω αυξάνουμε μόνο τη μεταβλητότητα στο 40%, βρίσκουμε νέα δικαιώματα αγοράς και πώλησης και κάνουμε την ίδια διαδικασία χρησιμοποιώντας τους ίδιους κώδικες.

Μέθοδος	Price in Vol	Error
Continuous	40.00	0.00
Derman	36.51	3.49
Trapezoidal	37.32	2.68
Simpson	37.38	2.62

Πίνακας 3: Τιμές ΣΑΜ των μεθόδων με υψηλή μεταβλητότητα (40%)

Βλέπουμε ότι και στις τρεις μεθόδους τα αποτελέσματα δεν είναι τόσο καλά. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι υπάρχει μεγάλη μεταβλητότητα και το εύρος των τιμών εξάσκησης [60,140] είναι πολύ στενό για να αναπαράγει την λογαριθμική αποτίμηση σωστά, αφού αρκετό διάστημα από την κατανομή δεν υπολογίζεται, άρα είναι σαν κάποια στοιχεία να μην υπολογίζονται καθόλου και έτσι καμία από τις διακριτές μεθόδους αποτίμησης δεν δίνει σωστές τιμές. Για καλύτερα αποτελέσματα θα πρέπει να αυξήσουμε το εύρος των τιμών εξάσκησης αν θέλουμε να έχουμε μεγάλη μεταβλητότητα. Κάτι τέτοιο θα κάνουμε στην εμπειρική ανάλυση με πραγματικά δεδομένα που ακολουθεί με πολύ μεγαλύτερο εύρος τιμών.

3.2 Μέθοδοι αναπαραγωγής στο δείκτη S&P500

Αρχικά βρισκόμαστε στις 20 Ιανουαρίου 2019 και με τη βοήθεια της βάσης δεδομένων Bloomberg θα συλλέξουμε δεδομένα. Θέλουμε δικαιώματα αγοράς και πώλησης τα οποία θα λήγουν: 20 Ιανουαρίου 2020 (T=1), 19 Δεκεμβρίου 2019 (T=11/12), 19 Σεπτεμβρίου 2019 (T=8/12), 20 Ιουνίου 2019 (T=5/12), 20 Απριλίου 2019 (T=3/12), 20 Μαρτίου 2019 (T=2/12) και 20 Φεβρουαρίου 2019 (T=1/12). Για κάθε μια από αυτές τις διαφορετικές ημερομηνίες θα βρούμε δικαιώματα με διαφορετικές τιμές εξάσκησης. Η τιμή του δείκτη εκείνη τη στιγμή βρισκόταν στις 2670,2 μονάδες οπότε και εμείς θεωρήσαμε ως αρχική τιμή K_0=2700 και αλλάζοντας ανά 100 μονάδες και προς τα πάνω αλλά και προς τα κάτω πήραμε ένα εύρος τιμών [1900,3500]. Οπότε τα δεδομένα μας είναι 19 δικαιώματα αγοράς και 19 δικαιώματα πώλησης για κάθε μία από τις 7 παραπάνω ημερομηνίες που αναφέραμε.

Επίσης πρέπει να σημειωθεί ότι για την μελέτη μας χρησιμοποιήσαμε τα out of the money και τα at the money δικαιώματα αγοράς και πώλησης θεωρώντας την τιμή του υποκείμενου τίτλου στις 2700 μονάδες για την διαλογή αυτή. Ακόμα θα πρέπει να αναφέρουμε ότι η τιμή του Libor επιτοκίου το οποίο και χρησιμοποιήσαμε ήταν ίση με Libor=3.01%.

Θα ακολουθήσει η εκτίμηση της μεταβλητότητας, όπου και θα βρούμε με την εκτιμώμενη μεταβλητότητα νέα δικαιώματα, και η σύγκριση των μεθόδων.

3.2.1 Εκτίμηση παραμέτρων

Μια από τις πιο γνωστές διαδικασίες εκτίμησης υποθέτει πως αν έχουμε ένα μοντέλο και ένα σετ παραμέτρων για το συγκεκριμένο μοντέλο, μπορούμε να βρούμε τιμές των παραμέτρων, τέτοιες ώστε τα τετράγωνα των διαφορών από τις τιμές των δικαιωμάτων που εξάγονται από αυτό το μοντέλο με τις τιμές της αγοράς να έχουν την μικρότερη δυνατή τιμή. Μαθηματικά αυτό εκφράζεται ως:

$$\hat{\theta} = \arg\min \sum_{i=1}^{N} \left(f_i^{\alpha\gamma o\rho\acute{\alpha}\varsigma}\left(T_i, K_i\right) - f_i^{\mu o\nu\tau\acute{\varepsilon}\lambda o\upsilon}\left(\mathrm{T}_{i,} K_i\right)\right)^2$$

Όπου $\hat{\theta}$ είναι το σετ των παραμέτρων του εκάστοτε μοντέλου και με N συμβολίζουμε τον αριθμό των δικαιωμάτων. Στην μελέτη μας έχουμε συνολικά 18 δικαιώματα (9 at/out of the money αγοράς και 9 at/out of the money πώλησης), άρα N=18.

Έχουμε βρει τις τιμές των απλών δικαιωμάτων που έχουν διαμορφωθεί στην αγορά και θα χρησιμοποιήσουμε τον επαναληπτικό αλγόριθμο Levenberg-Marquardt με εφαρμογή στο υπολογιστικό πρόγραμμα MATLAB και την εντολή *lsqnonlin* για να βρούμε τις τιμές των παραμέτρων που ταιριάζουν καλύτερα στα μοντέλα για την εύρεση τιμής στα απλά δικαιώματα αγοράς και πώλησης. Έπειτα θα ελέγξουμε αν οι τιμές που θα μας δώσουν τα μοντέλα με τις εκτιμηθείσες τιμές είναι ορθές και θα δούμε την προβλεπτική ικανότητα των μοντέλων για κάποια δικαιώματα που δεν χρησιμοποιήσαμε στις εκτιμήσεις μας.

Η μέθοδος Levenberg-Marquardt είναι μια από τις πιο διαδεδομένες τεχνικές για να βρούμε καλές λύσεις σε μη-γραμμικά (least square curve fitting) προβλήματα. Οι περισσότεροι από αυτούς τους αριθμητικούς αλγορίθμους, όπως και ο αλγόριθμος ελαχιστοποίησης Levenberg-Marquardt είναι μια επαναληπτική διαδικασία. Για να ξεκινήσει μια ελαχιστοποίηση, ο χρήστης θα πρέπει να παρέχει μια αρχική πρόβλεψη για της παραμέτρους.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε N παρατηρήσεις y(i), όπου i=1,2,…,N και μια εξίσωση $g:R^n \to R$ με n: παραμέτρους x1,x2,…,xn, όπου N≥n.

Στην μελέτη μας οι N παρατηρήσεις είναι οι τιμές που έχουμε συλλέξει από τα δικαιώματα αγοράς και πώλησης της αγοράς. Υπολογίζουμε τις τιμές του μοντέλου μας $g\left(x; p_i\right) = \hat{y}_i$ και βρίσκουμε τα κατάλοιπα $r_i\left(x\right) := \hat{y}_i - y_i$. Συνεπώς βρίσκουμε το $R = \left(r_1, ..., r_N\right)^T$ το οποίο είναι το διάνυσμα διάστασης N των καταλοίπων. Τότε πρέπει να λύσουμε το παρακάτω πρόβλημα ελαχιστοποίησης.

$$\min_x f\left(x\right) := \frac{1}{2}\sum_i^N r_i\left(x\right)^2 = \frac{1}{2}R\left(x\right)^T R\left(x\right)$$

Οι Levenberg K.(1944) και Marquardt D.(1963) πρότειναν μια λύση του προβλήματος προσαρμογής της καμπύλης χρησιμοποιώντας έναν επαναληπτικό αλγόριθμο που συνδυάζει τη μέθοδο Steepest descent με την μέθοδο των Gauss-Newton.

Ο Levenberg προτείνει να υπολογίσουμε την κατεύθυνση d_k ως την λύση στην τροποποιημένη εξίσωση των Gauss-Newton που ακολουθεί.

$$\left(R'\left(x^k\right)^T R'\left(x^k\right)+\lambda_k I\right)d_k=-\left(R'\left(x^k\right)^T R\left(x^k\right)\right)$$

Όπου I είναι μοναδιαία μήτρα και $\lambda_k>0$ είναι μια παράμετρος απόσβεσης. Η μήτρα στο δεξί μέλος της εξίσωσης είναι θετικά ορισμένη, με αυτόν τον τρόπο η λύση d_k εγγυάται πως είναι μια δίκαιη κατεύθυνση για την συνάρτηση f για όλες τις θετικές παραμέτρους απόσβεσης. Για μικρές τιμές του λ_k η μέθοδος του Levenberg συμπεριφέρεται παρόμοια με την επανάληψη των Gauss-Newton και δείχνει ένα ρυθμό σύγκλισης των επικρατουσών x^k που είναι κοντά στο x^*. Για επαναλήψεις που γίνονται μακριά από το βέλτιστο η παράμετρος απόσβεσης είναι πολύ μεγάλη και η κατεύθυνση μπορεί να δοθεί με τη σχέση:

$$d_k\approx-\frac{1}{\lambda_k}\left(R'\left(x^k\right)^T R\left(x^k\right)\right)$$

Η επιλογή της παραμέτρου λ_k επηρεάζει το d_k καθώς επίσης και τη διάρκεια κάθε βήματος Levenberg-Marquardt. Από τη στιγμή που η επιλογή έχει άμεσο αντίκτυπο στην σταθερότητα της μεθόδου είναι πολύ σημαντικό πως θα ορίσουμε το λ_k και πως θα αναβαθμίζεται σε κάθε επανάληψη.

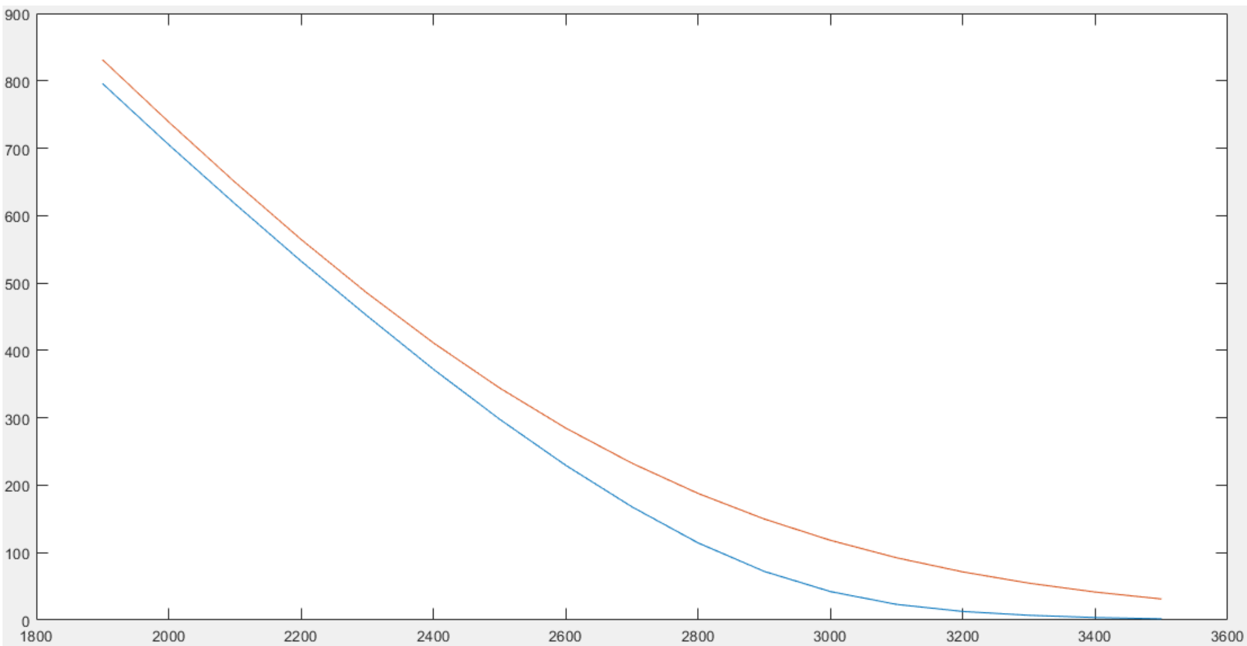
Μια σύνηθες επιλογή είναι: $\lambda_0:=\tau\max_i\left\{D_0\left(i,i\right)\right\}_{i=1,\dots,n}$

Η παράμετρος τ σχετίζεται με την αρχική πρόβλεψη αυτουνού που κατασκεύασε το μοντέλο για τις τιμές των παραμέτρων. Ακολουθώντας σε γενικό κανόνα την παραπάνω διαδικασία θα εκτιμήσουμε την παράμετρο που θέλουμε. Συνολικά η εκτίμηση έγινε για 126 παρατηρήσεις με δικαιώματα αγοράς και πώλησης τα οποία είναι at/out of the money και έχουν διαφορετικές τιμές εξάσκησης και διαφορετικούς χρόνους μέχρι την λήξη τους.

Το μοντέλο Black & Scholes έχει μόνο μια παράμετρο για εκτίμηση, την μεταβλητότητα που είναι και αυτό που θέλουμε εμείς. Με τη βοήθεια του υπολογιστικού προγράμματος MATLAB αναζητούμε αρχικά έναν κώδικα που να αποτυπώνει την γενική εξίσωση για την εύρεση τιμών στα δικαιώματα αγοράς και πώλησης, ο οποίος είναι ο έτοιμος κώδικας blsprice. Στην συνέχεια θα φτιάξουμε τις διαφορές με τις τιμές που θα βγάζει αυτός ο κώδικας και οι τιμές που έχουμε συλλέξει της αγοράς με την βοήθεια του κώδικα BSerrors (κώδικας 2). Τέλος στον κώδικα με ονομασία BSCalibration (κώδικας 3) θα εισάγουμε όλα τα δεδομένα και με την βοήθεια των προηγούμενων δυο και με την εντολή lsqnonlin θα καταλήξουμε στο συμπέρασμα που θέλουμε.

Έτσι με βάση τα παραπάνω η μέση τιμή για τις εκτιμήσεις των δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης τα οποία βρίσκονται at the money ή out of the money για όλες τις τιμές ληκτότητας που έχουμε είναι σ=0.19613.

Είναι φυσιολογικό το μοντέλο Back & Scholes να μην μπορεί να ταιριάξει απόλυτα με τις τιμές της αγοράς, μεγάλο ρόλο σε αυτό παίζει ότι το μοντέλο έχει μόνο μια μεταβλητή. Αυτό βέβαια δεν σημαίνει πως στην σταθερότητά του και τα αποτελέσματά του είναι λάθος. Φαίνεται αυτό και στο παρακάτω σχήμα στο οποίο συγκρίνουμε τις τιμές των δικαιωμάτων της αγοράς στο χρόνο T=1 με αυτές τις τιμές που υπολογίσαμε εμείς με την εκτιμώμενη μεταβλητότητα. Γραφικά διακρίνουμε ότι έχει ταιριάξει στην κίνηση των δικαιωμάτων και συμπεραίνουμε ότι το μοντέλο Black & Scholes μας δίνει πολύ καλές τιμές με την εκτιμώμενη μεταβλητότητα που βρήκαμε.



Γράφημα 1: Τιμές δικαιωμάτων αγοράς για T=1 σε σχέση με τις τιμές εξάσκησής τους. Με μπλε αυτά που πήραμε από την αγορά και με κόκκινο αυτά που εκτιμήσαμε εμείς.

Παρατηρούμε ότι οι τιμές είναι αρκετά κοντά οπότε θα μπορούσαμε να πούμε ότι έχουμε κάνει μια καλή εκτίμηση της μεταβλητότητας το οποίο οφείλεται στο γεγονός ότι έχουμε λάβει πολλές τιμές για διαφορετικές τιμές εξάσκησης. Παρόμοια αποτελέσματα έχουμε και για τις άλλες ημερομηνίες λήξεις των δικαιωμάτων.

Παρόλο που μια σχέση μπορεί να περιγράψει καλύτερα από την κίνηση τιμών μέσα στο δείγμα το οποίο έχει εκτιμηθεί δεν σημαίνει απαραίτητα ότι έχει και καλή προβλεπτική ικανότητα. Συνεπώς έχει πολύ μεγάλο ενδιαφέρον να ελέγξουμε πως συμπεριφέρεται το μοντέλο στην περιγραφή των τιμών εκτός του δείγματος εκτίμησης. Θα βρούμε τις τιμές για K=1700,1800,3600,3700 (τα οποία δεν έχουμε χρησιμοποιήσει στο δείγμα μας) με την εκτιμώμενη μεταβλητότητα και θα συγκρίνουμε με τις τιμές τις αγοράς. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για όλες τις τιμές ληκτότητας που έχουμε και τα αποτελέσματα φαίνονται παρακάτω.

K	T=1/12		T=2/12		T=3/12		T=5/12	
1700	1004.6	974.26	968.4	978.5	969.2	982.7	969.3	991.2
1800	901.5	874.51	868.4	879	920.1	883.5	871.8	892.48
3600	0.025	0.0002	0.05	0.007	0.001	0.128	0.25	1.59
3700	0.01	0.0001	0.05	0.002	0.001	0.047	0.2	0.846

K	T=8/12		T=11/12		T=1	
1700	973	1003.9	975.6	1016.9	980.1188	1021.3
1800	878.32	906.2873	882.4	920.7138	886.6	925.654
3600	0.65	8.104	1.325	18.9991	2.563	23.3475
3700	0.5	5.3209	0.95	13.7812	1.08	17.3228

Πίνακας 3:Σύγκριση τιμών αγοράς (στήλη αριστερά) με εκτιμώμενες (στήλη δεξιά) εκτός του δείγματος (out of sample).

Για τις παρατηρήσεις εκτός του δείγματος βλέπουμε ότι η εκτίμηση που έχουμε κάνει είναι καλή για τιμές που βρίσκονται κοντά στη σημερινή ημερομηνία. Όσο η ημερομηνία για τη λήξη του δικαιώματος μεγαλώνει τόσο και μεγαλύτερη απόκλιση υπάρχει μεταξύ των τιμών της αγοράς και των τιμών που βρήκαμε με την εκτιμώμενη μεταβλητότητα. Αυτό είναι κάτι που περιμέναμε αφού όσο μεγαλώνει το T υπάρχουν πολλές μεταβλητές που επηρεάζουν την τιμή όλο και περισσότερο. Εμείς με την εκτίμηση που κάναμε έχουμε εκτιμήσει μόνο την μεταβλητότητα έτσι δυσκολεύεται το μοντέλο μας να δώσει σωστές τιμές όσο πιο μακριά πηγαίνουμε στο χρόνο.

3.2.2 Σύγκριση μεθόδων

Υποθέτουμε ότι βρισκόμαστε 20 Ιανουαρίου 2019 και έχουμε δικαιώματα αγοράς και πώλησης με 7 διαφορετικές ημερομηνίες λήξης, για την κάθε μια από αυτές έχουμε τιμές δικαιωμάτων με εύρος σε τιμές εξάσκησης [1900,3500] και βήμα 100. Από αυτά σύμφωνα με τις μεθόδους που έχουμε θα χρησιμοποιήσουμε τα δικαιώματα αγοράς που βρίσκονται at the money και out of the money τα οποία είναι αυτά με τιμές εξάσκησης [2700,3500] ενώ με αντίστοιχο τρόπο τα δικαιώματα πώλησης που βρίσκονται at και out of the money δηλαδή με τιμές εξάσκησης [1900,2700]. Έπειτα θα χρησιμοποιούμε αυτά τα δικαιώματα στις μεθόδους μας

(Derman, Trapezoidal, Simpson) και θα βγάλουμε τις τιμές των συμβάσεων κατά παρόμοιο τρόπο και για τις 7 διαφορετικές ημερομηνίες.

Κατά αντιστοιχία με ακριβώς τον ίδιο τρόπο θα βρούμε τις τιμές των τριών μεθόδων με τα δικαιώματα που έχουμε εκτιμήσει παραπάνω. Θα εισάγουμε τα δικαιώματα στο υπολογιστικό πρόγραμμα MATLAB στον κώδικα DermanMethod (κώδικας 4) και θα βρούμε την τιμή του συμβολαίου με την μέθοδο του Derman, παρόμοια στον κώδικα TrapezoidalMethod (κώδικας 5) για να βρούμε την τιμή με τη μέθοδο Trapezoidal και τέλος θα κάνουμε το ίδιο με τον κώδικα SimpsonMethod (κώδικας 6) για να βρούμε την τιμή με την μέθοδο Simpson.

Έπειτα θα συγκρίνω τα αποτελέσματα της κάθε μεθόδου που βγάλαμε με τα εκτιμώμενα δικαιώματα με αυτά τα αποτελέσματα με τα δικαιώματα που πήραμε από την αγορά. Θα ελέγξω τη διαφορά μεταξύ αυτών και σε όποια μέθοδο έχω μικρότερη διαφορά κάθε φορά θα είναι και η καλύτερη ανάμεσα στις τρεις, θα γίνει η ίδια διαδικασία για όλες τις ημερομηνίες. Τα αποτελέσματα ανά ημερομηνία ακολουθούν στον παρακάτω πίνακα.

20.01.19	**Αγοράς**	**Εκτιμώμενα**	**Σφάλμα**	**Ακρίβεια**
T=1				
Derman	17,1025	18,6189	1,5164	*
Trapezoidal	17,4883	19,0045	1,5162	**
Simpson	17,2299	18,6614	1,4315	***
T=11/12				
Derman	17,3933	18,7344	1,3411	*
Trapezoidal	17,7603	19,0911	1,3308	**
Simpson	17,5131	18,7651	1,2520	***
T=8/12				
Derman	17,8499	19,0954	1,2455	*
Trapezoidal	18,1370	19,3445	1,2075	**
Simpson	17,9213	19,0637	1,1424	***
T=5/12				
Derman	18,2215	19,4471	1,2256	*
Trapezoidal	18,4103	19,5846	1,1743	**
Simpson	18,1960	19,3236	1,1276	***
T=3/12				
Derman	18,1591	19,7105	1,5514	*
Trapezoidal	18,2670	19,7783	1,5113	**
Simpson	17,9800	19,4761	1,4961	***
T=2/12				
Derman	17,4861	19,9283	2,4422	*
Trapezoidal	17,5502	19,9634	2,4132	***
Simpson	17,1395	19,5743	2,4339	**
T=1/12				

Derman	17,5366	20,5193	2,9827	*
Trapezoidal	17,5508	20,4848	2,9340	***
Simpson	16,8199	19,7940	2,9741	**

Πίνακας 4: Αποτελέσματα και σφάλματα για την κάθε μέθοδο στα διαφορετικά Τ.

Με μια γενική εικόνα βλέπουμε ότι η καλύτερη από τις διακριτές μεθόδους Derman, Trapezoidal και Simpson είναι η Simpson κάτι που συμφωνεί και με την αριθμητική ανάλυση που κάναμε στο προηγούμενο υποκεφάλαιο. Όταν βρισκόμαστε πολύ κοντά στην ημέρα που έγιναν οι εκτιμήσεις και οι τρεις μεθόδους δίνουν σχεδόν παρόμοια αποτελέσματα αφού οι διαφορές των σφαλμάτων εντοπίζονται από το δεύτερο δεκαδικό ψηφίο και μετά. Έτσι για Τ=1/12 και Τ=2/12 για πολύ λίγο βγαίνει ως καλύτερη μέθοδος η Trapezoidal και ακολουθεί η μέθοδος Simpson με πολύ μικρή διαφορά. Από εκεί και έπειτα για όλες τις άλλες ημερομηνίες η μέθοδος Simpson βγάζει τα καλύτερα αποτελέσματα από όλες και μάλιστα καθώς απομακρυνόμαστε στην ημερομηνία λήξης του δικαιώματος μας δίνει όλο και μικρότερα σφάλματα σε σχέση με τις άλλες δύο μεθόδους.

Σε όλες τις ημερομηνίες που έχουμε επιλέξει η μέθοδος Derman μας δίνει τα χειρότερα αποτελέσματα από τις τρεις μεθόδους. Είναι κάτι που περιμέναμε αφού σύμφωνα με το Fabien Le Floc'h 2017 η Trapezoidal μέθοδος ήρθε για να δώσει πιο ακριβή αποτελέσματα από την Derman. Έτσι ακολούθως δημιουργήθηκε και η μέθοδος Simpson που βασίστηκε στην Trapezoidal, παίρνει πιο ακριβή βάρη για τα δικαιώματα αγοράς και πώλησης και δίνει ακριβέστερα αποτελέσματα. Οπότε τα αποτελέσματά μας μπορούνε να επιβεβαιώσουν την θεωρία από το Fabian Le Floc'h 2017 και να καταλήξουμε ότι η Simpson είναι η καλύτερη από τις τρεις μεθόδους.

Κεφάλαιο 4

Συμπεράσματα

Την τελευταία εικοσαετία, οι Συμβάσεις Ανταλλαγής Διακύμανσης και Μεταβλητότητας έχουν εισέλθει για τα καλά στην οικονομική ζωή των εταιριών και των επενδυτών. Εξαιτίας των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών τους αλλά και της άμεσης αντιμετώπισης του κινδύνου που προκαλεί η μεταβλητότητα των τιμών, γίνεται ολοένα και πιο επιτακτική η ανάγκη για την καλύτερη αποτίμησή τους.

Πολλά μοντέλα έχουν κατασκευαστεί για αυτό το σκοπό. Σε αυτή τη διπλωματική παρουσιάσαμε τη μέθοδο αποτίμησης του Derman, την Trapezoidal αλλά και την μέθοδο του Simpson ως διακριτούς τρόπους αποτίμησης, ενώ εξετάσαμε και μια συνεχή μέθοδο αποτίμησης.

Μια διακριτή αποτίμηση μπορεί να βοηθήσει έναν επενδυτή να εκτιμήσει την αξία ενός συμβολαίου ανταλλαγής διακύμανσης μέσω διαφορετικών δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης. Είναι πολύ πιο εύχρηστη μέθοδος αφού έχοντας από την αγορά τα δικαιώματα μπορεί εύκολα να υπολογιστεί, αλλά είναι και πολύ πιο κοντά στην πραγματικότητα αφού μπορούμε να βρούμε μόνο διακριτές τιμές δικαιωμάτων προαίρεσης στην αγορά.

Στην εμπειρική μελέτη που πραγματοποιήσαμε κάναμε μια αριθμητική ανάλυση αποτιμώντας αρχικά τα ΣΑΔ με τις τρεις διακριτές μεθόδους και συγκρίναμε την κάθε μια με την συνεχή μέθοδο αποτίμησης. Είδαμε ότι η μέθοδος του Simpson έχει την μικρότερη απόκλιση από την συνεχή μέθοδο, που θεωρητικά είναι η ακριβέστερη, και καταλήξαμε ότι αυτή είναι και η καλύτερη μέθοδος.

Έπειτα στο δεύτερο στάδιο της εμπειρικής μελέτης συλλέξαμε δικαιώματα αγοράς και πώλησης από την αγορά και με τη βοήθεια του υπολογιστικού προγράμματος της MATLAB εκτιμήσαμε την παράμετρο της μεταβλητότητας. Χρησιμοποιώντας αυτές τις εκτιμήσεις δημιουργήσαμε νέα δικαιώματα προαίρεσης. Συγκρίναμε τα αποτελέσματα της μεθόδου του Derman που αποτιμήσαμε με τα δικαιώματα της αγοράς με αυτά που αποτιμήσαμε με τα εκτιμώμενα δικαιώματα. Κάναμε το ίδιο για όλες τις ημερομηνίες αλλά και για κάθε μέθοδο ξεχωριστά. Εύκολα καταλήξαμε ότι η μέθοδος του Derman είναι η χειρότερη από τις τρεις αφού για όλες τις ημερομηνίες έχει την μεγαλύτερη διαφορά, οπότε και την χειρότερη ακρίβεια. Από τις άλλες δύο μεθόδους πιο ακριβής είναι η Simpson αφού στις πέντε από τις επτά ημερομηνίες είναι αυτή που έχει μικρότερο σφάλμα και στις άλλες δύο και η Simpson και η Trapezoidal έχουν παρόμοιο σφάλμα.

Τα αποτελέσματα μας είναι αρκετά ικανοποιητικά όπως υποδηλώνουν και τα σχετικά σφάλματα, αφού η τιμές που εκτιμήσαμε είναι πολύ κοντά σε αυτές της αγοράς. Συμπεραίνουμε έτσι και από την αριθμητική ανάλυση και από την εμπειρική μελέτη ότι η πιο ακριβής μέθοδο για να υπολογίσουμε την τιμή ενός συμβολαίου ανταλλαγής διακύμανσης είναι η μέθοδος του Simpson.

Βιβλιογραφία

Άρθρα

- Black F. and Scholes M. “ The Pricing Of Options and Corporate Liabilities” Journal of Political Economy 81 (1973), 637-659

- Bossu S., Strasser E. and Guichard R., 2005, “*Just what you need to* know about Variance Swaps”, Equity Derivatives JPMorgan.

- Broadie, M., and A. Jain, 2008, “*The Effect of Jumps and Discrete Sampling on Volatility and Variance Swaps*,” International Journal of Theoretical and Applied Finance, Vol.11, No.8. 761-797.

- Carr P. and Lee R., 2007, “*Realized volatility and variance”,* Options via swaps, Risk 20:76-83

- Carr P. and Lee R., 2008, “*Robust Replication of Volatility Derivatives*”, Mathematics in Financial Working Paper Series, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University.

- Carr P. and Madan D., 2001, “*Optimal positioning in derivative securities*”, quantitative finance volume 1 (2001) 19-37 research paper institute of physics publishing.

- Carr P. and Lewis K., 2004, “*Corridor variance swaps”,* Risk magazine 17:67-72.

- Carr P. and Wu L., 2008, “*Variance Risk Premiums”,* The Author 2008. Published by Oxford University Press on behalf of The Society for Financial Studies.

- Demeterfi et al., 1999, “*More than you ever wanted to know about Volatility Swaps”*, Quantitative Strategies Research Notes, Goldman Sachs.

- Dupire B., 1993, “*Model art Risk*”, pp. 118-20

- Fabien Le Floc’h, 2017, “*Variance Swap Replication: Discrete or Continuous?”,* Numerical Analysis, TU Delft, 2628 Delft, The Netherlands;

Financial Engineering, Calypso Technology, 75002 Paris, France, Journal of Risk and Financial Management.

- Fukasawa, Masaaki, Isao Ishida, Nabil Maghrebi, Kosuke Oya, Masato Ubukata and Kazutoshi Yamazaki, 2011, "*Model-free implied volatility: from surface to index"*, International Journal of Theoretical and Applied Finance 14:433-63

- G. Skiadopoulos, 2010, "Volatility Smile Consistent Option Models: A Survey", International Journal of Theoretical and Applied Finance Vol. 4, No. 3 (2001) 403–437 c, World Scientific Publishing Company

- G. Skiadopoulos, E. Konstantinidi, 2015, "How does the market variance risk premium vary over time? Evidence from S&P 500 variance swap investment returns", Journal of Banking & Finance

- Jiang G. and Tian Y., 2003, "*Model-Free Implied Volatility and Its Information Content"*, Social Sciences and Humanity Research Council of Canada.

- Jiang G. and Tian Y., 2007, "*The information content of implied volatilities and model-free volatility expectations: Evidence from options written on individual stocks*", Department of Accounting and Finance, Management School, Lancaster University, Lancaster LA1 4YX, United Kingdom.

- Mark Britten-Jones and Anthony Neuberger, 2000, "*Option Prices, Implied Price Processes, and Stochastic Volatility*", The Journal of Finance, vol. lv, NO 2.

- Martin I., 2011, "*Simple Variance Swaps*", Working Paper 16884, national bureau of economic research 1050 Massachusetts Avenue Cambridge, MA 0213.

- Wilmott P., 1995, "*Volatility smiles revisited*". Derivatives Week 4 (38) p 8 (1995).

- Θωμαδάκης Στ., Ξανθάκης Μ., 1989, "*Νέα χρηματοοικονομικά εργαλεία – Εισαγωγή στις χρηματαγορές και κεφαλαιαγορές*" (Β' Μέρος), ΔΕΕΤ 1989, Γ' Τριμ., σελ. 5 επ.

Βιβλία

- John C. Hull (2009*) “Options, Futures and Other Derivatives”* 8th edition, Prentice Hall
- Kienitz J., Wetterau D. *“Financial Modelling, Theory, Implementation and Practice with MATLAB Source”* 2012,Pbl Wiley
- Δημητρόπουλος Α. Π., 1999, “*Τα παράγωγα στο ελληνικό χρηματιστήριο”*
- Ταρνανίδου Χ., 1998, “*Συμβάσεις Χρηματοοικονομικών Ανταλλαγών Swaps”*

Παράρτημα

Κώδικες MATLAB

Κώδικας 1: *Κώδικας (ContinuousMethod.m) για την αριθμητική αποτίμηση ΣΑΜ με τη συνεχή μέθοδο.*

```
function [Continuous] = ContinuousMethod(F,K,T,sigma,u)
syms y
Kmin=F*exp(2*sigma*sqrt(T));
Kmax=F*exp(-2*sigma*sqrt(T));
%υπολογισμός των ορίων
ymin=log(Kmin/F);
ymax=log(Kmax/F);
d1=sigma*sqrt(T)/2-y/sigma;
d2=d1-sigma*sqrt(T);
f1(y)=-exp(-y)*normcdf(-d1)+normcdf(-d2);
f2(y)=exp(-y)*normcdf(d1)-normcdf(d2);
%υπολογίζω τα ολοκληρώματα
int1=int(f1(y),y,ymin,0);
int2=int(f2(y),y,0,ymax);
Continuous=2*u^2/T+(int1+int2)-K^2;
end
```

Κώδικας 2: *Κώδικας (BSerrors.m) για την εύρεση διαφορών ανάμεσα στις τιμές της αγοράς και τις θεωρητικές τιμές*

```
function [BS_errors] = BSerrors( A )
%καλείται από το BSCalibration
%εύρεση διαφορών
global S0; %τρέχουσα τιμή
global strike; %strike price
global lrate; %επιτόκιο αγοράς libor
global TTM; %χρόνος για τη λήξη του δικαιώματος
global Cmktprice; %αγοραία τιμή δικαιώματος αγοράς
global Pmktprice; %αγοραία τιμή δικαιώματος πώλησης
global k; %βοηθητική μεταβλητή
BS_errors=zeros(1,7);
for j=1:7
       BS_errors(1,j)=Cmktprice(k,j)-
thBLSprice(S0(k,j),TTM(k,j),lrate(k,j),strike(k,j),A);
end

end
```

Κώδικας 3: *Κώδικας (BSCalibration.m) για την εύρεση της κατάλληλης μεταβλητότητας ως προς την ελαχιστοποίησης των διαφορών*

```
function [A,resnorm,residual,exitflag] = BSCalibration()
clear all
global S0; %τρέχουσα τιμή
global strike; %strike price
global lrate; %επιτόκιο αγοράς libor
global TTM; %χρόνος για τη λήξη του δικαιώματος
global Cmktprice; %αγοραία τιμή δικαιώματος αγοράς
global Pmktprice; %αγοραία τιμή δικαιώματος πώλησης
global k; %βοηθητική μεταβλητή
%φτιάχνω μηδενικούς πίνακες για να εισάγω τα δεδομένα από το excel
S0=zeros(9,7);
strike=zeros(9,7);
lrate=zeros(9,7);
TTM=zeros(9,7);
Cmktprice=zeros(9,7);
parameter=zeros(9,7);
res=zeros(9,7);
exit=zeros(9,7);
%εισαγωγή δεδομένων
S0=xlsread('data.xlsx','S0','K10:Q18');
strike=xlsread('data.xlsx','strike','B2:H10');
strike=flipud(strike);
lrate=xlsread('data.xlsx','lrate','K10:Q18');
TTM=xlsread('data.xlsx','TTM','B10:H18');
Cmktprice=xlsread('data.xlsx','mktprice(12.18)','K2:Q10');
Cmktprice=flipud(Cmktprice);
for i=1:9
    %θέτω αρχική τιμή στην παράμετρο που θέλω να εκτιμήσω
    A0=0.1;
    %θέτω τα όρια της άγνωστης παραμέτρου
    lb=[0];
    ub=[2];
    k=i;
    [A,resnorm,residual,exitflag] = lsqnonlin(@BSerrors,A0,lb,ub);
    parameter(i,:)=A;
    res(i)=resnorm;
    exit(i)=exitflag;
end

end
```

Κώδικας 4: *Κώδικας (DermanMethod.m) για την αποτίμηση ΣΑΜ με τη μέθοδο του Derman.*

```
function [Derman]=DermanMethod(S,K,T,r,u)
DF=exp(-r*T); %προεξοφλητικός παράγοντας
%φτιάχνω μηδενικούς πίνακες για να εισάγω τα δεδομένα από το excel
strikeC=zeros(9,1); %πίνακας με τις τιμές εξάσκησης για το call
strikeP=zeros(9,1); %πίνακας με τις τιμές εξάσκησης για το put
Cprice=zeros(9,1); %πίνακας με τις τιμές του call
Pprice=zeros(9,1); %πίνακας με τις τιμές του put
Wc=zeros(9,1); %πίνακας με τα βάρη για το call
Wp=zeros(9,1); %πίνακας με τα βάρη για το put
fc=zeros(9,1); %βοηθητική μεταβλητή από μέθοδο Derman για το call
fp=zeros(9,1); %βοηθητική μεταβλητή από μέθοδο Derman για το put
W=[0];
%εισαγωγή δεδομένων
strikeC=xlsread('data.xlsx','mktprice','A10:A18');
strikep=xlsread('data.xlsx','mktprice','A2:A10');
strikeP=flipud(strikep);
Cprice=xlsread('data.xlsx','mktprice(12.18)','H28:H36');
pprice=xlsread('data.xlsx','mktprice(12.18)','Q20:Q28');
Pprice=flipud(pprice);
fc=xlsread('data.xlsx','mktprice','I10:I18');
fp=xlsread('data.xlsx','mktprice','I2:I10');
fP=flipud(fp);
%τα πρώτα βάρη των options
Wc(1)=[fc(2)-fc(1)]/[strikeC(2)-strikeC(1)];
Wp(1)=-[fP(2)-fP(1)]/[strikeP(2)-strikeP(1)];
WcK=Wc(1);
WpK=Wp(1);
%υπολογισμός για τα βάρη των options
for i=1:7
    Wc(i+1)=[fc(i+2)-fc(i+1)]/[strikeC(i+2)-strikeC(i+1)]-WcK;
    WcK=WcK+Wc(i+1);
    Wp(i+1)=-[fP(i+2)-fP(i+1)]/[strikeP(i+2)-strikeP(i+1)]-WpK;
    WpK=WpK+Wp(i+1);
end
%υπολογισμός βάρη επί options
for i=1:9
    Wc(i)=Wc(i).*(u^2*2*DF/T);
    Wp(i)=Wp(i).*(u^2*2*DF/T);
end
PriceC=0;
PriceP=0;
for i=1:9
    PriceC=Wc(i)*Cprice(i)+PriceC;
    PriceP=Wp(i)*Pprice(i)+PriceP;
end
Derman=sqrt(PriceC+PriceP);
end
```

Κώδικας 5: *Κώδικας (TrapezoidalMethod.m) για την αποτίμηση ΣΑΜ με τη μέθοδο Trapezoidal.*

```
function [Trapezoidal]=TrapezoidalMethod(S,K,T,r,u,h)
DF=exp(-r*T); %προεξοφλητικός παράγοντας
%φτιάχνω μηδενικούς πίνακες για να εισάγω τα δεδομένα από το excel
strikeC=zeros(9,1); %πίνακας με τις τιμές εξάσκησης για το call
strikeP=zeros(9,1); %πίνακας με τις τιμές εξάσκησης για το put
Cprice=zeros(9,1); %πίνακας με τις τιμές του call
Pprice=zeros(9,1); %πίνακας με τις τιμές του put
Wc=zeros(9,1); %πίνακας με τα βάρη για το call
Wp=zeros(9,1); %πίνακας με τα βάρη για το put
W=[0];
%εισαγωγή δεδομένων
strikeC=xlsread('data.xlsx','mktprice','A10:A18');
strikep=xlsread('data.xlsx','mktprice','A2:A10');
strikeP=flipud(strikep);
Cprice=xlsread('data.xlsx','mktprice(12.18)','H28:H36');
pprice=xlsread('data.xlsx','mktprice(12.18)','Q20:Q28');
Pprice=flipud(pprice);
%τα πρώτα βάρη των options
Wc(1)=u^2*h/[T*strikeC(1)^2];
Wp(1)=u^2*h/[T*strikeP(1)^2];
%υπολογισμός για τα βάρη των options
for i=2:8
    Wc(i)=u^2*2*h/[T*strikeC(i)^2];
    Wp(i)=u^2*2*h/[T*strikeP(i)^2];
end
%τα τελευταία βάρη των options
Wc(9)=u^2*h/[T*strikeC(5)^2];
Wp(9)=u^2*h/[T*strikeP(5)^2];
%υπολογισμός βάρη επί options
PriceC=0;
PriceP=0;
for i=1:9
    PriceC=Wc(i)*Cprice(i)+PriceC;
    PriceP=Wp(i)*Pprice(i)+PriceP;
end
PRICE=PriceC+PriceP;
Trapezoidal=sqrt(PRICE);
end
```

Κώδικας 6: *Κώδικας (SimpsonMethod.m) για την αποτίμηση ΣΑΜ με τη μέθοδο του Simpson.*

```
function [Simpson]=SimpsonMethod(S,K,T,r,u,h)
DF=exp(-r*T); %προεξοφλητικός παράγοντας
%φτιάχνω μηδενικούς πίνακες για να εισάγω τα δεδομένα από το excel
strikeC=zeros(9,1); %πίνακας με τις τιμές εξάσκησης για το call
strikeP=zeros(9,1); %πίνακας με τις τιμές εξάσκησης για το put
Cprice=zeros(9,1); %πίνακας με τις τιμές του call
Pprice=zeros(9,1); %πίνακας με τις τιμές του put
Wc=zeros(9,1); %πίνακας με τα βάρη για το call
Wp=zeros(9,1); %πίνακας με τα βάρη για το put
W=[0];
%εισαγωγή δεδομένων
strikeC=xlsread('data.xlsx','mktprice','A10:A18');
strikep=xlsread('data.xlsx','mktprice','A2:A10');
strikeP=flipud(strikep);
Cprice=xlsread('data.xlsx','mktprice(12.18)','H28:H36');
pprice=xlsread('data.xlsx','mktprice(12.18)','Q20:Q28');
Pprice=flipud(pprice);
%τα πρώτα βάρη των options
Wc(1)=u^2*2*h*DF/(3*T*strikeC(1)^2);
Wp(1)=u^2*2*h*DF/(3*T*strikeP(1)^2);
%υπολογισμός για τα βάρη των options
for i=3:2:7
    Wc(i)=u^2*2*2*h*DF/(3*T*strikeC(i)^2);
    Wp(i)=u^2*2*2*h*DF/(3*T*strikeP(i)^2);
end
for i=2:2:8
    Wc(i)=u^2*2*4*h*DF/(3*T*strikeC(i)^2);
    Wp(i)=u^2*2*4*h*DF/(3*T*strikeP(i)^2);
end
%τα τελευταία βάρη των options
Wc(9)=u^2*2*h*DF/(3*T*strikeC(9)^2);
Wp(9)=u^2*2*h*DF/(3*T*strikeP(9)^2);
%υπολογισμός βάρη επί options
for i=1:9
    Wcp=Wc(dei)*Cprice(i)+Wp(i)*Pprice(i);
    W=W+Wcp
end
Simpson=sqrt(W);
end
```