ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Αποτίμηση της αξίας ενός χαρτοφυλακίου συμβάσεων ανταλλαγής πιστωτικού κινδύνου (CDS) μέσω προσομοίωσης.

Ναυσικά Μπέρκου

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική.

Πειραιάς,
Νοέμβριος 2018

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS
AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN
APPLIED STATISTICS

Monte Carlo Valuation of Basket Default Swaps

BY

Nafsika Berkou

MSc Dissertation

Submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Applied Statistics

Piraeus, Greece

November 2018

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ'αριθμ. …….. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- κ. Μπούτσικας Μιχαήλ (Επιβλέπων)
- κ. Κούτρας Μάρκος
- κ. Αντζουλάκος Δημήτριος

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

Στη μητέρα μου Κατερίνα,

για ό,τι μου προσέφερε όλα αυτά τα χρόνια.

Ευχαριστίες

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Μιχαήλ Μπούτσικα για την πολύτιμη βοήθεια που προσέφερε για την συγγραφή της παρούσας εργασίας. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια και τους συγγενείς μου, που χάρη στη συνεχή στήριξή τους, με βοήθησαν να φέρω εις πέρας τις Μεταπτυχιακές μου σπουδές.

Περίληψη

Η προστασία από τον πιστωτικό κίνδυνο αποτελεί μια από τις μεγαλύτερες προκλήσεις σε παγκόσμιο επίπεδο, όσο αφορά τη χρηματοπιστωτική αγορά. Για την αντιμετώπιση της πρόκλησης αυτής, τις τελευταίες δεκαετίες δημιουργήθηκαν οι συμβάσεις ανταλλαγής πιστωτικού κινδύνου (Credit Default Swaps), η κατηγοριοποίηση των οποίων είναι ευρεία. Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η περιγραφή της δομής και των βασικών χαρακτηριστικών των συμβάσεων CDS και κυρίως των χαρτοφυλακίων συμβάσεων ανταλλαγής πιστωτικού κινδύνου (Basket Credit Default Swaps), έχοντας ως τελικό στόχο τόσο την ακριβή, όσο και την προσεγγιστική τιμολόγηση τους μέσω της Monte Carlo προσομοίωσης. Η τιμολόγηση των συμβάσεων CDS στηρίζεται σε διάφορα μοντέλα αποτίμησης, λόγω της ευρείας διάδοσής τους. Στην εργασία παρουσιάζεται το μοντέλο αποτίμησης μειωμένης προσέγγισης (reduced form model) το οποίο αναπτύχθηκε από τους D. O'Kane & S. Turnbull (2003), τόσο για τις απλές συμβάσεις CDS, όσο και για τις συμβάσεις basket CDS. Στα πλαίσια της εργασίας αρχικά υλοποιείται το ακριβές μοντέλο αποτίμησης των O'Kane & Turnbull για τις απλές συμβάσεις CDS εφαρμόζοντας υποθετικά δεδομένα με το υπολογιστικό πακέτο Wolfram Mathematica. Επίσης, παρουσιάζεται και μια προσεγγιστική μέθοδος τιμολόγησης των συμβάσεων basket CDS ομοιογενούς απώλειας μέσω Monte Carlo προσομοίωσης, εφαρμόζοντας και πάλι υποθετικά δεδομένα, μέσω του Wolfram Mathematica.

Abstract

Protection against credit risk is one of the biggest challenges in the global financial market. In order to address this challenge, various types of Credit Default Swaps have been created over the last decades. The purpose of this MSc thesis is to describe the structure and main characteristics of CDS contracts and especially of Basket Credit Default Swaps., and to present and implement (via appropriate software) widely used exact and approximate pricing methods. More specifically, the reduced form model developed by D. O'Kane & S. Turnbull (2003) is presented for the pricing of simple CDS and CDS basket contracts. Moreover, appropriate Monte Carlo simulation methods are described for the approximate pricing of homogenous loss basket CDS contracts. All numerical examples and algorithms were implemented via Wolfram Mathematica software.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΚΟΝΕΣ

ΠΙΝΑΚΕΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

1.1 Η αρχή και εξέλιξη των CDS

Η εξάπλωση της παγκόσμιας οικονομικής ύφεσης, ύστερα από την πτώχευση του αμερικανικού κολοσσού χρηματοπιστωτικών υπηρεσιών Lehmann Brothers το Σεπτέμβριο του 2008, έφερε στο προσκήνιο τις συμβάσεις ανταλλαγής πιστωτικού κινδύνου (**C**redit **D**efault **S**waps). Ωστόσο, οι συμβάσεις αυτές ή εναλλακτικά CDS΄s όπως είναι παγκοσμίως διαδεδομένα, είχαν κάνει ήδη την εμφάνισή τους από τις αρχές της δεκαετίας του 1990, με τις πρώτες συναλλαγές να γίνονται από την Bankers Trust το 1991. Άρρηκτα συνδεδεμένη με τη δημιουργία της σύγχρονης μορφής των CDS είναι το επενδυτικό τραπεζικό ίδρυμα JP Morgan & Co. Η ιδέα της δημιουργίας των CDS οφείλεται ουσιαστικά σε μία ομάδα τραπεζιτών της JP Morgan & Co, όπου με πρωτοστάτες την Blythe Master και τον Bill Demchak, έκαναν πώληση του πιστωτικού κινδύνου (στην Ευρωπαϊκή Τράπεζα Ανασυγκρότησης και Ανάπτυξης) ενός ανοιχτού δανείου ύψους 4,8 δις $, που παρείχε η JP Morgan & Co στην εταιρεία πετρελαιοειδών Exxon, η οποία αντιμετώπιζε σοβαρή απειλή ύψους 5 δις $ για την καταβολή αποζημιώσεων λόγω της πετρελαιοκηλίδας που προκάλεσε τάνκερ της στην Αλάσκα, καταφέρνοντας με αυτόν τον τρόπο να μειώσει τα αποθεματικά που έπρεπε να διακρατεί σε περίπτωση πιθανής χρεοκοπίας της Exxon (πηγή: Wikipedia).

Η εξελιγμένη μορφή των CDS παρουσιάστηκε το 1997 όταν η JP Morgan & Co δημιούργησε ένα καινοτόμο προϊόν, ονόματι "**BISTRO**" (**B**road **I**ndex **S**ecured **T**rust **O**ffering), το οποίο είναι πρόδρομος των εξασφαλισμένων ομολόγων χρέους (**C**ollaterized **D**ebt **O**bligations, **CDO's**), για τα οποία θα γίνει αναφορά σε επόμενο κεφάλαιο. Το BISTRO στην ουσία χρησιμοποιεί CDS με σκοπό να βελτιώσει τον ισολογισμό μίας τράπεζας. Το προτέρημα του BISTRO, ήταν ο διαχωρισμός του πιστωτικού κινδύνου σε μικρότερα κομμάτια με στόχο την καλύτερη αφομοίωση από το επενδυτικό κοινό.

Απόρροια όλων των παραπάνω, ήταν τα CDS να καθίστανται ως τα πιο γνωστά και διαδεδομένα πιστωτικά παράγωγα για τη μεταφορά και αντιστάθμιση πιστωτικού κινδύνου, αν αναλογιστεί κανείς ότι μέχρι το τέλος του 2007 η αγορά των CDS είχε ονομαστική αξία 62,2 τρις $, ενώ το 2001 ονομαστική αξία τους δεν ξεπερνούσε τα 919 δις $ ("Chart; ISDA Market Survey; Notional amounts outstanding at year-end, all surveyed contracts, April 2010). Για να γίνει κατανοητό το μέγεθος του ποσού αυτού, αξίζει να σημειωθεί ότι το παγκόσμιο Α.Ε.Π. το 2007 ήταν 57,8 τρις $.

Για την αναφορά που έγινε παραπάνω στα πιστωτικά παράγωγα και στον πιστωτικό κίνδυνο, θα ακολουθήσουν ενότητες που θα εξηγούν λεπτομερώς τις έννοιες αυτές, για την καλύτερη κατανόηση της δομής και της σύνθεσης των CDS.

1.2 Πιστωτικά παράγωγα

Τα πιστωτικά παράγωγα ορίζονται ως διμερείς χρηματοοικονομικές συμβάσεις σχεδιασμένες με τέτοιο τρόπο ώστε να αντιμετωπίζουν τον πιστωτικό κίνδυνο και να τον μεταφέρουν μεταξύ δύο αντισυμβαλλομένων. Το αντισυμβαλλόμενο μέρος που επιδιώκει την προστασία από τον πιστωτικό κίνδυνο ονομάζεται ***αγοραστής προστασίας (protection buyer)***, ενώ το αντισυμβαλλόμενο μέρος που ουσιαστικά αγοράζει τον πιστωτικό κίνδυνο ονομάζεται ***πωλητής προστασίας (protection seller).***

Υπάρχει πληθώρα κατηγοριών πιστωτικών παραγώγων, οι βασικότερες εκ των οποίων είναι οι παρακάτω (βλ. Geoff Chaplin, 2008):

- **Συμβάσεις ανταλλαγής κινδύνου αθέτησης** (**C**redit **D**efault **S**wap - **CDS):** είναι μία σύμβαση ανταλλαγής στην οποία ο αγοραστής της προστασίας πραγματοποιεί σειρά πληρωμών προς τον αντισυμβαλλόμενο πωλητή (ως ασφάλιστρο) και σε αντάλλαγμα δέχεται εφάπαξ πληρωμή σε περίπτωση που λάβει χώρα κάποιο πιστωτικό γεγονός. Όπως έχει ήδη αναφερθεί τα CDS είναι τα πιο διαδεδομένα πιστωτικά παράγωγα και καταλαμβάνουν το μεγαλύτερο μερίδιο στη αγορά των πιστωτικών παραγώγων.
- **Συμβάσεις ανταλλαγής κινδύνου αθέτησης επί ενός χαρτοφυλακίου (Basket Of Default Swap΄s - Basket of CDS΄s):** πρόκειται για μία σύμβαση ανταλλαγής η οποία περιλαμβάνει δύο ή περισσότερες οντότητες αναφοράς και στην οποία αγοραστής της προστασίας πραγματοποιεί σειρά πληρωμών προς τον αντισυμβαλλόμενο πωλητή (ως ασφάλιστρο) και σε αντάλλαγμα δέχεται εφάπαξ πληρωμή σε περίπτωση που λάβει χώρα κάποιο πιστωτικό γεγονός στην οντότητα αναφοράς που αναφέρεται στο συμβόλαιο. Τα basket CDS χωρίζονται σε υποκατηγορίες οι οποίες θα αναλυθούν λεπτομερώς σε επόμενο κεφάλαιο.
- **Συμβάσεις ανταλλαγής κινδύνου αθέτησης επί δεικτών (index CDS΄s):** τα CDS δεικτών περιλαμβάνουν συμβόλαια που δημιουργούνται από ένα σύνολο CDS πολλών οντοτήτων αναφοράς. Στα συμβόλαια αυτά κάθε οντότητα διακατέχει το ίδιο ποσοστό ονομαστικής αξίας. Το ποσό του ασφαλίστρου αυξάνεται, όσο η τιμή του δείκτη ανεβαίνει καθώς αυξάνεται και η πιθανότητα χρεοκοπίας των οντοτήτων αναφοράς.
- **Εγγυημένες δανειακές υποχρεώσεις (Collaterized Debt Obligations - CDO΄s):** πρόκειται για ένα δομημένο χρηματοοικονομικό προϊόν το οποίο αποτελείται από ένα σύνολο δανειακών συμβάσεων που μεταβιβάζονται σε μια νομική οντότητα ειδικού σκοπού (special purpose entity), η οποία στη συνέχεια εκδίδει τίτλους με διαφορετική προτεραιότητα αποζημίωσης σε περίπτωση αδυναμίας τήρησης των υποχρεώσεων.
- **Πιστωτικά συνδεδεμένα χρεόγραφα (Credit-Linked Notes - CLN):** ένα πιστωτικό συνδεδεμένο χρεόγραφο απαρτίζεται κατά κύριο λόγο από ένα χρεόγραφο (συνήθως ομόλογο ή δάνειο) μέσα στο οποίο είναι ενσωματωμένο ένα CDS. Είναι διαρθρωμένο ως ασφάλεια η οποία επιτρέπει στον εκδότη του να μεταφέρει ένα συγκεκριμένο είδος πιστωτικού κινδύνου στους επενδυτές. Ο εκδότης του CLN, σε περίπτωση που συμβεί ένα πιστωτικό γεγονός, δεν είναι υποχρεωμένος να εξοφλήσει την οφειλή του απέναντι στους επενδυτές, ενώ οι επενδυτές δέχονται εφάπαξ πληρωμή εκτός κι αν η οντότητα αναφοράς χρεοκοπήσει ή

κηρύξει πτώχευση. Στην περίπτωση αυτή, οι επενδυτές λαμβάνουν μόνο ένα ποσό ίσο με το ποσοστό ανάκτησης που ορίζεται από το συμβόλαιο.

- **Ανταλλαγές συνολικών αποδόσεων (Total Return Swaps):** πρόκειται για μία σύμβαση μεταξύ δύο αντισυμβαλλομένων, οι οποίοι ανταλλάσσουν μεταξύ τους τις συνολικές αποδόσεις ενός υποκειμένου αναφοράς (συνήθως είναι συνήθως δείκτης μετοχών, δάνεια ή ομόλογα). Μέσω τον συνολικών αυτών αποδόσεων, μεταφέρεται και ο πιστωτικός κίνδυνος μεταξύ των δύο αντισυμβαλλομένων.
- **Ανταλλαγές συμβάσεων ενεργητικού (Asset Swaps):** μια ανταλλαγή συμβάσεων ενεργητικού επιτρέπει σε έναν επενδυτή να αγοράζει ένα ομόλογο σταθερού επιτοκίου και στη συνέχεια να αντισταθμίζει τον κίνδυνο επιτοκίου με την εναλλαγή των σταθερών πληρωμών σε κυμαινόμενες. Με τον τρόπο αυτό ο επενδυτής διατηρεί τον πιστωτικό κίνδυνο στο ομολογιακό σταθερό επιτόκιο και κερδίζει αντίστοιχη απόδοση. Στην ουσία, μία ανταλλαγή ενεργητικού είναι η ανταλλαγή μιας σταθερής επένδυσης (για παράδειγμα ένα ομολογιακό δάνειο με εγγυημένες πληρωμές τοκομεριδίων), για μια κυμαινόμενη επένδυση (για παράδειγμα ένα δείκτη μετοχών).

Προτού γίνει κατάληξη στην αποκλειστική μελέτη και αποτίμηση των CDS και των Basket of CDS΄s θα ήταν συνετό να αναλυθεί ο όρος ΄΄πιστωτικός κίνδυνος΄΄ , αλλά και το πότε επέρχεται ένα πιστωτικό γεγονός, δηλαδή πότε ενεργοποιείται η πληρωμή της σύμβασης.

1.3 Πιστωτικός κίνδυνος

Ο πιστωτικός κίνδυνος αποτελεί μία από τις πολλές κατηγορίες κινδύνου που θα πρέπει να αντιμετωπίσουν οι επενδυτές, οι εταιρείες και οι χρηματοπιστωτικοί οργανισμοί ως αποτέλεσμα των δραστηριοτήτων τους. Ο πιστωτικός κίνδυνος έχει να κάνει με τον κίνδυνο απώλειας χρηματικής αμοιβής που αναλαμβάνουν οι επενδυτές και οι χρηματοπιστωτικοί οργανισμοί, στην περίπτωση που ο δανειζόμενος αδυνατεί να εκπληρώσει τις χρηματοοικονομικές του υποχρεώσεις έναντι του χρηματοπιστωτικού οργανισμού ή του επενδυτή.

Ο πιστωτικός κίνδυνος αποτελείται από τρείς επιμέρους κατηγορίες κινδύνου (πηγή: Investopedia):

- Τον **κίνδυνο αθέτησης συμφωνίας** (default risk), όπου ο ένας αντισυμβαλλόμενος δεν είναι σε θέση να ικανοποιήσει τους όρους που έχει αναλάβει, όσον αφορά την έγκαιρη αποπληρωμή ολόκληρου του ποσού της οικονομικής υποχρέωσης.
- Τον **κίνδυνο υποβάθμισης** (downgrade risk), ο οποίος αναφέρεται σε μία πιθανή υποβάθμιση της πιστοληπτικής ικανότητας της επιχείρησης ή της χώρας, από τους διάφορους οίκους αξιολόγησης.
- Τον **κίνδυνο πιστωτικού περιθωρίου** (credit spread risk), ο οποίος προκύπτει λόγω πιθανών αλλαγών στα πιστωτικά περιθώρια (spreads) και αντικατοπτρίζει την ανασφάλεια που υπάρχει στην αγορά το συγκεκριμένο χρονικό διάστημα.

1.4 Πιστωτικό γεγονός

Μία από τις σημαντικότερες έννοιες που αφορούν τη μελέτη των πιστωτικών παραγώγων είναι αυτή του πιστωτικού γεγονότος, δηλαδή το πότε επέρχεται η αποζημίωση του αγοραστή της οικονομικής σύμβασης από τον πωλητή της. Ο μοναδικός οργανισμός ο οποίος είναι σε θέση να κηρύξει ένα πιστωτικό γεγονός είναι ο Διεθνής Οργανισμός Ανταλλαγών και Παραγώγων (**I**nternational **S**waps and **D**erivatives **A**ssociation - **ISDA**), ο οποίος ιδρύθηκε το 1985 με σκοπό να ελέγχει τις εξωχρηματιστηριακές (over the counter-OTC) συναλλαγές παραγώγων και σήμερα αποτελεί τον μεγαλύτερο παγκόσμιο οργανισμό χρηματοοικονομικών συναλλαγών, απαριθμώντας παραπάνω από 820 μέλη σε 57 χώρες. Ο ISDA έχει εκδώσει δύο φορές ορισμούς σχετικά με το τι μπορεί να θεωρηθεί πιστωτικό γεγονός. Οι πρώτοι ορισμοί εκδόθηκαν το 1999, ενώ η αναθεωρημένη μορφή τους εκδόθηκε το 2003.

Ως πιστωτικά γεγονότα ορίζονται κατά τον ISDA τα ακόλουθα έξη συμβάντα:

- **Χρεοκοπία (Bankruptcy):** ορίζεται η κατάσταση στην οποία το συμβαλλόμενο μέρος, συνήθως επιχείρηση ή κράτος, καθίσταται αφερέγγυο ή αδυνατεί να πληρώσει τα χρέη του με συνέπεια την απώλεια ελέγχου της διαχείρισης των περιουσιακών στοιχείων του.
- **Πρόωρη Υποχρέωση (Obligation Acceleration):** αυτό το συμβάν καλύπτει την κατάσταση στην οποία επιταχύνεται η υποχρέωση οφειλής πριν από τον προκαθορισμένο χρόνο λήξης της, εξαιτίας του γεγονότος ότι ήδη έχει αθετήσει την εκπλήρωση των υποχρεώσεών προς τους πιστωτές της. Θεωρείται ότι το πιστωτικό γεγονός επέρχεται όταν ξεπερνιέται ένα ελάχιστο ΄΄κατώφλι΄΄ του ποσού πληρωμής.
- **Αθέτηση Υποχρέωσης (Obligation Default):** καλύπτει την κατάσταση στην οποία η σχετική υποχρέωση μπορεί να κηρυχθεί οφειλόμενη πριν από την ημερομηνία λήξης της και από τον ίδιο τον οφειλέτη. Η μόνη διαφορά με την πρόωρη υποχρέωση είναι ότι στην πρόωρη υποχρέωση υπάρχει όντως αδυναμία για την αποπληρωμή των χρεών, ενώ στην αθέτηση υποχρέωσης ο οφειλέτης έχει τη δυνατότητα αναγγελίας αδυναμίας πληρωμής των χρεών.
- **Αδυναμία Πληρωμής (Failure to pay):** αυτό το συμβάν καλύπτει την αποτυχία της οντότητας αναφοράς να καταβάλλει τις οφειλές της λόγω έλλειψης ρευστότητας. Είναι συνηθισμένο πριν την ενεργοποίηση του γεγονότος να γίνεται πρώτα ένας διακανονισμός ή να δίνεται μία επιπλέον προθεσμία αποπληρωμής ως περίοδος χάριτος.
- **Άρνηση Αναγνώρισης Οφειλών (Repudiation/Moratorium):** αφορά την περίπτωση κατά την οποία η οντότητα αναφοράς αποποιείται ή αμφισβητεί το κύρος της σχετικής οικονομικής υποχρέωσης που έχει αναλάβει να εκπληρώσει.
- **Αναδιάρθρωση (Restructuring):** αφορά την περίπτωση κατά την οποία οι όροι της υποχρέωσης τροποποιούνται με τέτοιο τρόπο, έτσι ώστε οι νέοι όροι να είναι λιγότερο ευνοϊκοί για τους κατόχους της, προκειμένου να βελτιωθεί η ρευστότητά της. Οι όροι που μπορούν να αλλάξουν περιλαμβάνουν μία ή περισσότερες από τις παρακάτω περιπτώσεις: i) μείωση του επιτοκίου, ii) αναδιάρθρωση του χρονοδιαγράμματος της κύριας αποπληρωμής (π.χ. επιμήκυνση του χρόνου της λήξης της υποχρέωσης), iii) μείωση του κεφαλαίου, iv) αλλαγή στη σειρά προτεραιότητας των πληρωμών.

Η αναδιάρθρωση αποτελεί το πλέον αμφισβητούμενο πιστωτικό γεγονός ιδιαίτερα για τους συμμετέχοντες στην αγορά των CDS΄s καθώς λαμβάνοντας υπόψη τον αρχικό ορισμό, ένα χρηματοπιστωτικό ίδρυμα (π.χ. τράπεζα) θα μπορούσε να αγοράσει ένα CDS για κάποιον ο οποίος έχει δανειστεί από αυτή και δυσκολεύεται να την αποπληρώσει και στη συνέχεια να προτείνει στο δανειζόμενο αναδιάρθρωση του χρέους του με όρους ευνοϊκότερους για εκείνη. Για να αποφευχθούν τέτοια περιστατικά, ο ISDA το 2001 τροποποίησε τον αρχικό ορισμό, αναγνωρίζοντας την αναδιάρθρωση ως πιστωτικό γεγονός όταν: 1) υπάρχουν παραπάνω από τρεις κάτοχοι στην υποχρέωση αναφοράς, 2) η αναδιάρθρωση να ισχύει για μεγαλύτερο μέρος από τα δύο τρίτα των συνολικών υποχρεώσεων που σχηματίζουν τα CDS.

Οι τροποποιήσεις αυτές ωστόσο δεν κάλυψαν πλήρως τον καθορισμό του πιστωτικού γεγονότος, με συνέπεια το 2003 ο ISDA να εκδώσει αναθεωρημένους ορισμούς για την ερμηνεία του πιστωτικού γεγονότος, Η σημαντικότερη αλλαγή αφορά τον ορισμό της αναδιάρθρωσης περικλείοντας τέσσερις διαφορετικές επιλογές για αυτή, οι οποίες είναι οι ακόλουθες:

1. Συναλλαγή χωρίς αναδιάρθρωση
2. Συναλλαγή με πλήρη αναδιάρθρωση χωρίς τροποποιήσεις
3. Συναλλαγή με πλήρη αναδιάρθρωση με τροποποιήσεις
4. Συναλλαγή με αναδιάρθρωση με τροποποιήσεις υπό προϋποθέσεις

Σε περίπτωση που επέλθει ένα πιστωτικό γεγονός, ξεκινάει ο διακανονισμός της σύμβασης για την αποπληρωμή της υποχρέωσης. Τα είδη του διακανονισμού είναι δύο και προσυμφωνείται από τους δύο αντισυμβαλλομένους πιο από τα δύο είδη διακανονισμού θα ακολουθηθεί σε περίπτωση πιστωτικού γεγονότος. Αυτά είναι (βλ.: Mounfield C.C., 2009):

- **Φυσικός Διακανονισμός (Physical Settlement):** Κατά τον Φυσικό Διακανονισμό, ο πωλητής της ασφάλειας πληρώνει στον αγοραστή ένα ποσό ίσο με την ονομαστική αξία του υποκείμενου τίτλου αναφοράς, ενώ ο αγοραστής της προστασίας οφείλει να παραδώσει στον πωλητή της προστασίας τον τίτλο αναφοράς (π.χ. τίτλο ομολόγου).
- **Χρηματικός Διακανονισμός (Cash Settlement):** Κατά τον ταμειακό διακανονισμό, ο πωλητής προστασίας καταβάλλει στον αγοραστή ένα ποσό ίσο με τη διαφορά μεταξύ της ονομαστικής αξίας του τίτλου αναφοράς και της τελικής αξίας μετά το πιστωτικό γεγονός, ενώ ο αγοραστής της προστασίας δεν οφείλει να παραδώσει στον πωλητή της προστασίας τον τίτλο αναφοράς (π.χ. τίτλο ομολόγου).

Ο χρηματικός διακανονισμός είναι σπάνιος σε μια σύμβαση CDS. Προσφέρεται μερικές φορές ως εναλλακτική λύση, εάν η φυσική διευθέτηση είναι αδύνατη για κάποιο λόγο (όπως η αδυναμία μεταφοράς χρέους λόγω ενός πρόσφατου νομικού περιορισμού).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Η λειτουργία των Credit Default Swaps

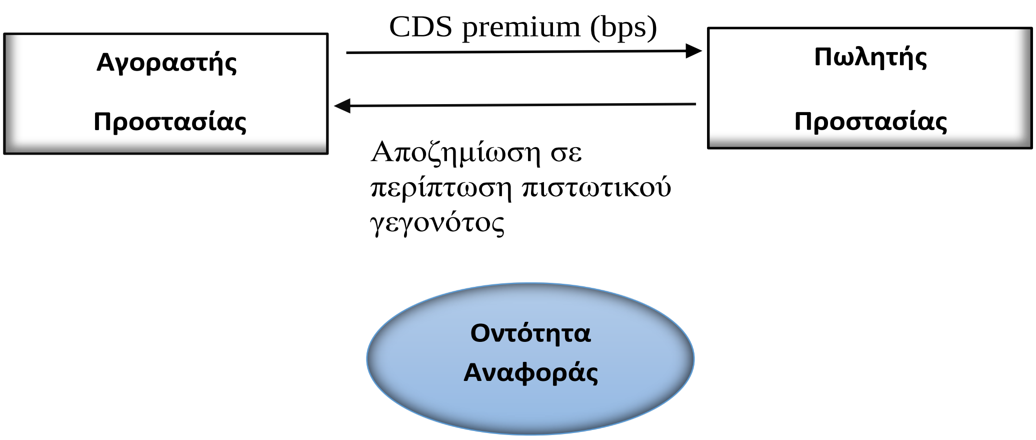
Από το σημείο αυτό και έπειτα θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με τη μελέτη και την τιμολόγηση των CDS και κυρίως των CDS επί ενός χαρτοφυλακίου (Basket of CDS΄s). Αρχικά θα γίνει αναφορά στα είδη και τη χρήση των CDS, τα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματά τους και τέλος θα παρουσιαστούν μέθοδοι τιμολόγησης τους.

2.1 Τα είδη των CDS

Η κατηγοριοποίηση των CDS ποικίλει ανάλογα την βιβλιογραφία που εξετάζεται κάθε φορά. Τα κυριότερα είδη αναλύονται λεπτομερώς παρακάτω (βλ. Meissner, 2005):

- **Απλό CDS (plain vanilla / single-name CDS):** αποτελεί την απλούστερη μορφή των CDS. Πρόκειται ουσιαστικά για μία χρηματοοικονομική σύμβαση μεταξύ δύο αντισυμβαλλομένων, του αγοραστή και του πωλητή της προστασίας. Ο αγοραστής της προστασίας καταβάλλει περιοδικά ένα ποσό ως ασφάλιστρο[1] (CDS premium), για ένα προκαθορισμένο αριθμό ετών (ωρίμανση του CDS), στον πωλητή της προστασίας. Ο πωλητής της προστασίας από την άλλη, είναι υποχρεωμένος σε περίπτωση που επέλθει ένα πιστωτικό γεγονός (credit event) στην οντότητα αναφοράς (reference entity)-η οποία δεν αποτελεί συμβαλλόμενο μέρος- να καταβάλλει ένα ποσό στον αγοραστή της προστασίας ως αποζημίωση (default payment).

Εικόνα 2.1: Η δομή του απλού CDS



[1] Εκφράζοντας το ετήσιο ύψος του CDS premium ως ποσοστό επί της ονομαστικής αξίας της σύμβασης, λαμβάνουμε το spread του CDS, το οποίο είναι εκφρασμένο σε μονάδες βάσης (basis points-bps). Η μία μονάδα βάσης αντιστοιχεί σε επιτόκιο 0,01%.

Όπως γίνεται αντιληπτό και από την Εικόνα 2.1 μία σύμβαση ενός CDS αποτελείται από δύο σκέλη συναλλαγών:

- Το ***σταθερό σκέλος (fixed leg ή premium leg)***, το οποίο αναφέρεται στις πληρωμές του ασφαλίστρου που γίνονται από τον αγοραστή της προστασίας σε τακτά χρονικά διαστήματα (συνήθως σε τριμηνιαία βάση), προς τον πωλητή της προστασίας. Αυτές οι πληρωμές γίνονται μέχρι να επέλθει ένα πιστωτικό γεγονός ή μέχρι την καθορισμένη διάρκεια λήξης της σύμβασης εάν δεν επέλθει πιστωτικό γεγονός νωρίτερα. Το σταθερό σκέλος υπολογίζεται ως το γινόμενο της ονομαστικής αξίας της συναλλαγής (notional amount) επί τις μονάδες βάσης (bps) που έχουν καθοριστεί ετησίως. Για παράδειγμα, αν η ονομαστική αξία είναι €10 εκ. και το CDS premium 150 bps, τότε ο αγοραστής προστασίας καταβάλλει κάθε τρίμηνο στον πωλητή της προστασίας: $10.000.000€ \times 1{,}5\% \times 0{,}25 = 37.500€$ (ο συντελεστής 0.25 χρησιμοποιείται διότι έχουμε 4 πληρωμές ασφαλίστρου κάθε έτος).
- Το ***κυμαινόμενο ή ενδεχόμενο σκέλος (floating leg ή protection leg ή contingent leg),*** το οποίο αναφέρεται στην αποζημίωση του αγοραστή της προστασίας σε περίπτωση που επέλθει κάποιο πιστωτικό γεγονός. Η αποζημίωση ενεργοποιείται μόνο όταν επέλθει πιστωτικό γεγονός. Τότε, το συμβόλαιο λήγει και η πληρωμή των ασφαλίστρων σταματά, εκτός του τελευταίου που αφορά το χρονικό διάστημα μεταξύ της τελευταίας πληρωμής και της ημερομηνίας που επήλθε το πιστωτικό γεγονός (*δεδουλευμένη ή συσσωρευμένη δόση-accrued payment)*. Για παράδειγμα, αν η ονομαστική αξία είναι €10 εκ. και ποσοστό ανάκτησης[2] σε περίπτωση αθέτησης ισούται με 40% (δηλαδή το ποσό ανάκτησης που λαμβάνει ο αγοραστής της προστασίας, για κάθε 100 € της ονομαστικής αξίας ισούται με 40 €), τότε σε περίπτωση που επέλθει πιστωτικό γεγονός ο πωλητής της προστασίας οφείλει να καταβάλει στον αγοραστή της προστασίας το ποσό των $(100\% - 40\%) \times 10.000.000€ = 6.000.000€$.

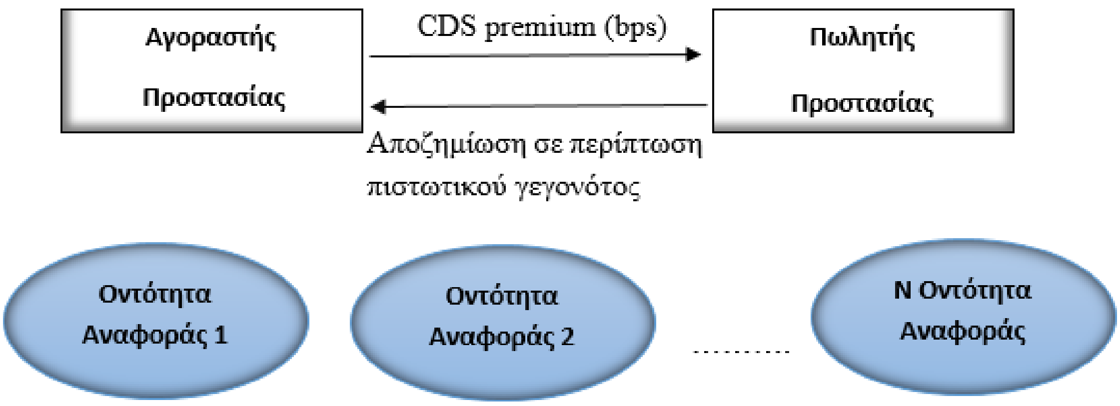
- **CDS Χαρτοφυλακίου (Basket CDS / multi-name CDS):** Όπως αναφέρθηκε παραπάνω το απλό CDS αναφέρεται σε μία οντότητα αναφοράς. Η μόνη διαφορά που υπάρχει στο CDS χαρτοφυλακίου σε σχέση με το απλό CDS είναι ότι αναφέρεται σε δύο ή περισσότερες οντότητες αναφοράς. Μεγάλο ρόλο σε ένα CDS Χαρτοφυλακίου παίζει η συσχέτιση που υπάρχει ανάμεσα στις οντότητες αναφοράς που υπάρχουν σε αυτό. Είναι προφανές ότι το CDS premium που καταβάλει ο αγοραστής, θα είναι μεγαλύτερο, όταν οι οντότητες αναφοράς παρουσιάζουν σχετικά μικρή συσχέτιση μεταξύ τους, καθώς τότε αυξάνεται η πιθανότητα αθέτησης (default probability) των υποχρεώσεων, ενώ ισχύει και το αντίστροφο. Τα basket CDS χωρίζονται σε τρεις υποκατηγορίες οι οποίες είναι οι ακόλουθες:
  - ***Ν-οστή Αθέτηση Σύμβασης CDS (Nth-to-default (NtD) CDS):*** Το συμβόλαιο ενεργοποιείται όταν επέλθει πιστωτικό γεγονός στη Ν-οστή οντότητα αναφοράς και ο

[2] Το ποσοστό ανάκτησης είναι ο βαθμός στον οποίο μπορούν να ανακτηθούν οι τόκοι και οι δεδουλευμένοι τόκοι σε χρεωστικό τίτλο σε αθέτηση, εκφραζόμενος ως ποσοστό της ονομαστικής αξίας του τίτλου. Το ποσοστό ανάκτησης επιτρέπει να εκτιμηθεί η ζημία που θα προέκυπτε σε περίπτωση αθέτησης, η οποία υπολογίζεται ως (1 - ποσοστό ανάκτησης)

πωλητής της προστασίας είναι υποχρεωμένος να αποζημιώσει τον αγοραστή, ενώ δεν έχει αυτή την υποχρέωση σε περίπτωση που υπάρξει πιστωτικό γεγονός για τις πρώτες N-1 οντότητες αναφοράς. Εφόσον καταβληθεί η αποζημίωση από τον αγοραστή για τη N-οστή οντότητα αναφοράς, το συμβόλαιο τερματίζεται και δεν υπάρχουν αποζημιώσεις για πιθανά πιστωτικά γεγονότα που υπάρχει περίπτωση να ακολουθήσουν στις εναπομείνασες οντότητες αναφοράς. Το πιο σύνηθες συμβόλαιο στην κατηγορία αυτή είναι το first-to-default CDS. Στην περίπτωση αυτή, ο πωλητής της προστασίας αποζημιώνει τον αγοραστή μόλις επέλθει πιστωτικό γεγονός σε μία ακριβώς οντότητα, ενώ αν υπάρξουν πιστωτικά γεγονότα και σε περισσότερες οντότητες δε δίνεται αποζημίωση στον αγοραστή καθώς το συμβόλαιο έχει ήδη τερματιστεί.

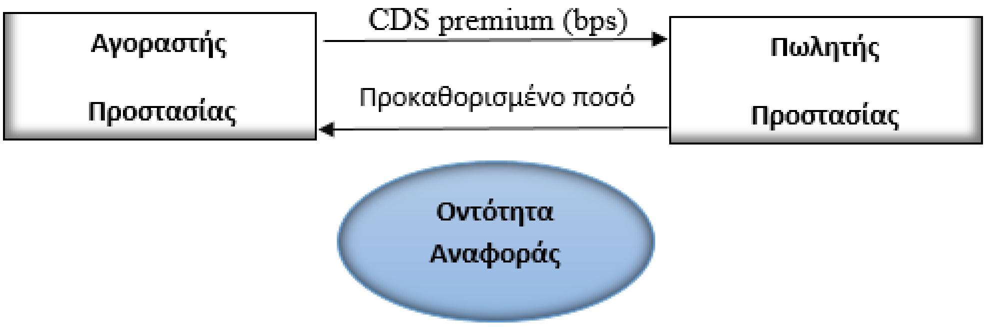
- ***Υποδεέστερο CDS χαρτοφυλακίου (subordinate basket CDS):*** Σε αυτή την υποκατηγορία των basket CDS συναντώνται δύο περιορισμοί. Ο πρώτος συνδέεται με τη μέγιστη αποζημίωση που δίνεται για κάθε οντότητα αναφοράς στην οποία έχει επέλθει πιστωτικό γεγονός, ενώ ο δεύτερος αφορά το μέγιστο συνολικό κέρδος πάνω από το περιεχόμενο ανταλλαγής για όλες τις αθετήσεις πληρωμής από τις οντότητες αναφοράς.
- ***Ανώτερο CDS χαρτοφυλακίου (senior basket CDS):*** Σε αυτή την υποκατηγορία των basket CDS υπάρχει ανώτατο όριο αποπληρωμής για κάθε οντότητα αναφοράς, με την προϋπόθεση ότι η πληρωμή πραγματοποιείται μόνο όταν ξεπεραστεί ένα προκαθορισμένο όριο.

Εικόνα 2.2: Η δομή του basket CDS



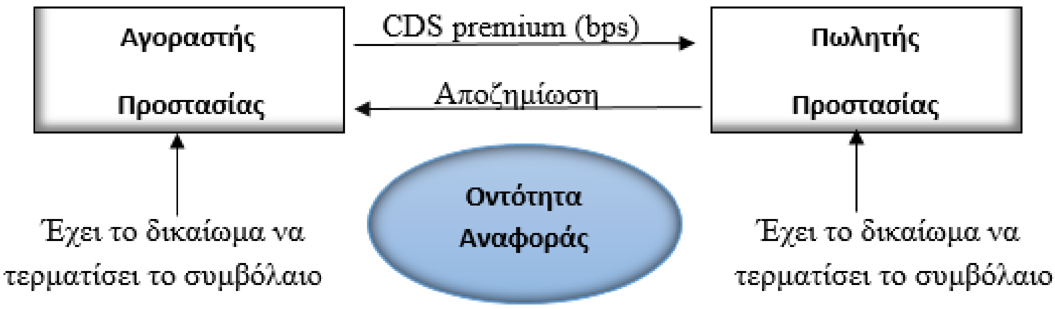
- **Δυαδικό CDS (Binary CDS ή Digital CDS):** Έχει παρόμοια δομή με το απλό CDS, με τη μόνη διαφορά ότι στο δυαδικό CDS το ποσό της αποζημίωσης του αγοραστή της προστασίας είναι σταθερό και προκαθορισμένο κατά τη σύναψη του συμβολαίου. Επομένως, σε περίπτωση αθέτησης ο πωλητής της προστασίας καταβάλλει στον αγοραστή το προκαθορισμένο ποσό, χωρίς να χρειάζεται να υπολογιστεί η αξία του συμβολαίου μετά την πυροδότηση του πιστωτικού γεγονότος, όπως γίνεται στο απλό CDS.

Εικόνα 2.3: Η δομή του δυαδικού CDS



- **Ακυρώσιμο CDS (Cancelable CDS):** Αποτελείται από ένα Credit Default Swap (CDS) και ένα δικαίωμα προαίρεσης επί ενός συμβολαίου CDS [3] (CDS option). Το ακυρώσιμο CDS χαρακτηρίζεται από το δικαίωμα που δίνεται τόσο στον αγοραστή της προστασίας, όσο και στον πωλητή, να τερματίσουν το συμβόλαιο οποιαδήποτε χρονική στιγμή θελήσουν πριν από τη λήξη του. Εάν το συμβόλαιο ακυρωθεί από τον αγοραστή, τότε ονομάζεται callable CDS, ενώ όταν η ακύρωση γίνεται από τον πωλητή, ονομάζεται putable CDS.

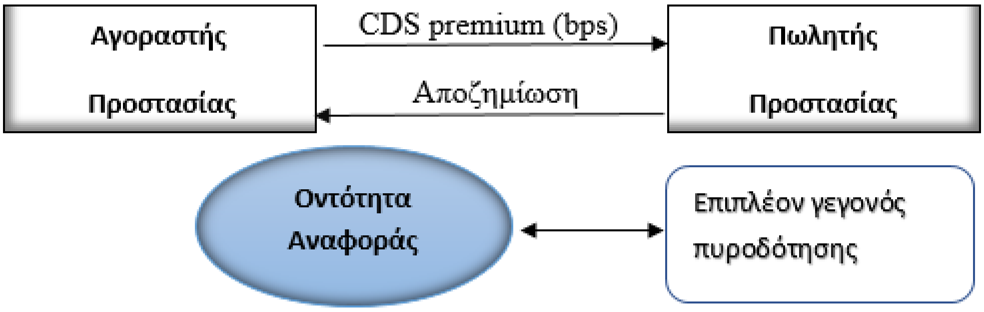
Εικόνα 2.4: Η δομή του ακυρώσιμου CDS



- **Ενδεχόμενο CDS (Contingent CDS):** Για την αποζημίωση του αγοραστή της προστασίας από τον πωλητή, απαιτείται εκτός από την πυροδότηση ενός πιστωτικού γεγονότος και η έλευση επιπλέον ενός γεγονότος, το οποίο μπορεί να είναι για παράδειγμα, ένα πιστωτικό γεγονός που συμβαίνει σε μια άλλη οντότητα αναφοράς ή η χρεοκοπία μιας άλλης χρηματοπιστωτικής συναλλαγής. Είναι λογικό πως αυτού του είδους τα CDS έχουν χαμηλότερο ασφάλιστρο από τα απλά CDS, καθώς παρέχεται μικρότερη προστασία στον αγοραστή σε σχέση με το απλό CDS.

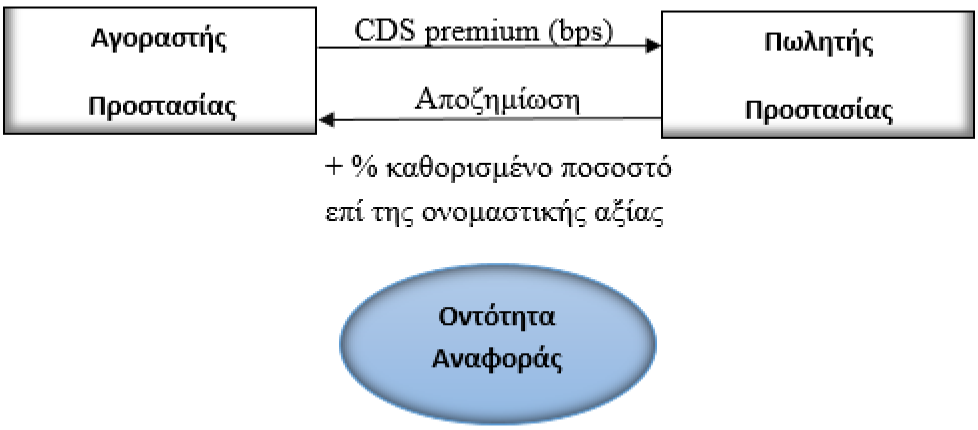
[3] Ένα δικαίωμα προαίρεσης επί ενός συμβολαίου CDS (CDS option) είναι το δικαίωμα που έχει κάποιος να αγοράσει ή να πουλήσει ένα CDS μιας συγκεκριμένης οντότητας αναφοράς σε μια συγκεκριμένη μελλοντική χρονική στιγμή.

Εικόνα 2.5: Η δομή του ενδεχόμενου CDS



- **CDS με μόχλευση (Levereged CDS):** Στα CDS με μόχλευση στην προκαθορισμένη αποζημίωση του αγοραστή από τον πωλητή της προστασίας προστίθεται ένα επιπλέον καθορισμένο ποσοστό επί τοις εκατό της ονομαστικής αξίας του συμβολαίου. Τα Levereged CDS έχουν υψηλότερο ασφάλιστρο από τα απλά CDS και προτιμώνται από τους αγοραστές προστασίας κυρίως για λόγους κερδοσκοπίας.

Εικόνα 2.6: Η δομή του CDS με μόχλευση



2.2 Η χρήση των CDS

Όπως αναφέρθηκε και στο πρώτο κεφάλαιο τα CDS είναι τα πλέον γνωστά είδη πιστωτικών παραγώγων, καταλαμβάνοντας σημαντικό μερίδιο τόσο στην αγορά των πιστωτικών παραγώγων, όσο και στην εξωχρηματιστηριακή αγορά. Οι κύριοι λόγοι χρήσης των CDS και των πιστωτικών παραγώγων γενικότερα είναι για (πηγή: Wikipedia):

- Αντιστάθμιση κινδύνου (Hedging)
- Κερδοσκοπία (Speculation)
- Εξισορροπητική Κερδοσκοπία (Arbitrage)

Αντιστάθμιση κινδύνου (Hedging)

Η αντιστάθμιση κινδύνου αποτελεί και το βασικό λόγο δημιουργίας των CDS, καθώς χρησιμοποιούνται συχνά για τη διαχείριση του κινδύνου αθέτησης που απορρέει από την κατοχή ενός χρέους. Μία τράπεζα για παράδειγμα, έχει τη δυνατότητα να αντισταθμίσει τον πιστωτικό κίνδυνο απέναντι σε ένα δανειολήπτη, ο οποίος είναι πιθανό να χρεοκοπήσει, συνάπτοντας μία σύμβαση ανταλλαγής πιστωτικού κινδύνου λαμβάνοντας τη θέση του αγοραστή της προστασίας. Στην περίπτωση που ο δανειολήπτης χρεοκοπήσει ή δεν είναι σε θέση να αποπληρώσει το χρέος του, η τράπεζα θα έχει αντισταθμίσει τις απώλειές της από την αθέτηση του χρέους, καθώς θα έχει λάβει την αποζημίωση από τη σύμβαση.

Ο κίνδυνος συγκέντρωσης ενός συνόλου δανείων (χαρτοφυλάκιο δανείων) μίας τράπεζας από ένα συγκεκριμένο δανειολήπτη, αποτελεί επίσης ένα είδος αντιστάθμισης. Η αγορά ενός CDS προσφέρει στην τράπεζα τη διασπορά (diversification) του κινδύνου, χωρίς να υπάρχουν συνέπειες στο χαρτοφυλάκιο των δανείων της.

Κερδοσκοπία (Speculation)

Με την κερδοσκοπία οι επενδυτές αναλαμβάνουν μεγαλύτερο πιστωτικό κίνδυνο, ευελπιστώντας ότι θα οδηγηθούν σε μεγαλύτερα κέρδη, σε αντίθεση με την αντιστάθμιση όπου προσπαθούν να μειώσουν τον κίνδυνο που διαχειρίζονται. Πιο συγκεκριμένα, οι κερδοσκόποι επενδυτές στρέφουν την προσοχή τους στις μεταβολές των αποδοσιακών διαφορών (spreads) των συμβάσεων. Εάν ο επενδυτής θεωρεί ότι τα spreads είναι αυξημένα ή μειωμένα σε σχέση με τις αποδόσεις των αντίστοιχων ομολόγων, προσπαθεί να κερδοσκοπήσει κάνοντας συναλλαγές με συμβάσεις ανταλλαγής πιστωτικού κινδύνου, ομολόγων και συμβάσεις ανταλλαγής επιτοκίων.

Για την απολαβή κερδών οι επενδυτές έχουν επίσης τη δυνατότητα να κερδοσκοπήσουν πάνω στην πιστοληπτική ικανότητα μίας χώρας ή μίας εταιρείας, εάν ληφθεί υπόψη το γεγονός ότι όσο μεγαλύτερη πιστοληπτική ικανότητα κατέχει τόσο μειώνονται οι αποδοσιακές διαφορές (spreads), ενώ αυξάνονται με την εξασθένησή της. Οι κερδοσκόποι επενδυτές μπορούν επομένως, να λάβουν θέση αγοραστή προστασίας σε μία σύμβαση CDS για να αποκομίσουν κέρδη από μία πιθανή χρεοκοπία του κράτους ή της εταιρείας, εάν προβλέπουν ότι η πιστοληπτική ικανότητα θα μειωθεί. Αντιθέτως μπορούν να λάβουν θέση πωλητή προστασίας αν κρίνουν ότι η πιστοληπτική ικανότητα θα ενισχυθεί.

Εξισορροπητική Κερδοσκοπία (Arbitrage)

Με την εξισορροπητική κερδοσκοπία οι επενδυτές δεν αναμένουν κέρδος αναλαμβάνοντας ρίσκο, όπως οι κερδοσκόποι, αλλά προσπαθούν να εντοπίσουν πρόσκαιρες ανισορροπίες της αγοράς και να τις εκμεταλλευτούν αποκομίζοντας σίγουρο κέρδος χωρίς να αναλάβουν ρίσκο (βλ. π.χ. Μ. Μπούτσικας, 2005). Στην αγορά των συμβάσεων ανταλλαγής πιστωτικού κινδύνου η τεχνική αυτή βασίζεται στην αντίστροφη σχέση που παρουσιάζουν η αγοραία τιμή μίας μετοχής και η αποδοσιακή διαφορά (spread) ενός CDS. Για παράδειγμα, εάν η τιμή της μετοχής μειώνεται και η τιμή του spread του CDS δεν αρχίζει να αυξάνεται ταυτόχρονα, ένας ορθολογικός επενδυτής θα αγοράσει τη μετοχή και ταυτόχρονα θα λάβει θέση αγοραστή προστασίας σε μία σύμβαση CDS. Με τον τρόπο αυτό, εφόσον υπήρξε καθυστέρηση στην αύξηση της τιμής των spread του CDS, ο επενδυτής θα έχει σίγουρο κέρδος στην τιμή του ασφαλίστρου αφού δεν θα έχουν προλάβει να ενσωματωθούν οι αλλαγές που επέφεραν μείωση στην τιμή της μετοχής.

2.3 Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα της χρήσης των CDS

Η ραγδαία αύξηση της αγοράς των CDS, αλλά και η διάδοσή τους σε παγκόσμιο επίπεδο, οφείλεται στην πληθώρα των πλεονεκτημάτων από την οποία διακατέχονται, χωρίς αυτό να συνεπάγεται τη μη ύπαρξη μειονεκτημάτων στη χρήση τους.

Γίνεται αντιληπτό από την ανάλυση που έχει προηγηθεί ότι το κυριότερο-και πλέον αποδεκτό από τους συμμετέχοντες στην αγορά των πιστωτικών παραγώγων- πλεονέκτημα των CDS είναι η αντιστάθμιση και η διαφοροποίηση του πιστωτικού κινδύνου. Το CDS επιτρέπει σε μία τράπεζα για παράδειγμα, να αντισταθμίσει μέρος της πιστωτικής της έκθεσης αγοράζοντας πιστωτική προστασία μέσω ενός CDS. Πριν τη δημιουργία και την ευρεία διάδοση των CDS η διαχείριση του πιστωτικού κινδύνου των τραπεζών ήταν λιγότερο ευέλικτη, καθιστώντας πιο δύσκολη και δαπανηρή τη διαχείριση των ανεξόφλητων δανείων από συγκεκριμένους οφειλέτες. Επίσης η χρήση των CDS οδήγησε στην προώθηση της ρευστότητας της αγοράς καθώς η εξαγορά τους γίνεται με πολύ χαμηλότερο αντίτιμο, σε σχέση με παρόμοια χαρτοφυλάκια παραγώγων. Η μεγαλύτερη ρευστότητα της αγοράς έχει να κάνει επίσης και με το γεγονός ότι οι συμβάσεις CDS επιτρέπουν στις τράπεζες να δανείζουν αναλαμβάνοντας χαμηλότερο πιστωτικό κίνδυνο με συνέπεια να αυξάνεται αυτόματα η ρευστότητα των συναλλαγών στον τραπεζικό κλάδο και στην αγορά πιστωτικών παραγώγων γενικότερα. Το τρίτο πλεονέκτημα της χρήσης των CDS απορρέει από την ανανεωμένη μορφή της αγοράς και τον τρόπο με τον οποίο αυτή προέκυψε, εξαιτίας της τυποποίησης που επήλθε στις συμβάσεις των CDS μέσω του Διεθνή Οργανισμού Ανταλλαγών και Παραγώγων (ISDA). Η εξέλιξη της τυποποιημένης νομικής τεκμηρίωσης των συμβάσεων και η συνεχής εποπτεία από τον ISDA, οδήγησαν στην ανάπτυξη και εξέλιξη της αγοράς των πιστωτικών παραγώγων και συνέβαλλε αποτελεσματικά στη μείωση του νομικού κινδύνου, ο οποίος συνιστά την αβεβαιότητα που σχετίζεται με τους όρους της σύμβασης.

Ένα τελευταίο πλεονέκτημα των CDS, αφορά τη συνεχή πληροφόρηση και ενημέρωση που παρέχουν στην αγορά σχετικά με τον πιστωτικό κίνδυνο. Πριν την εισαγωγή των CDS στην αγορά των πιστωτικών παραγώγων, οι πιο διαδεδομένες προσεγγίσεις για τη μέτρηση του πιστωτικού κινδύνου βασιζόταν είτε σε αξιολογήσεις πιστοληπτικής ικανότητας από διάφορους οίκους αξιολόγησης, είτε στα λεγόμενα πιστωτικά περιθώρια (credit spreads), όπου μετρούσαν τον πιστωτικό κίνδυνο ως τη διαφορά του επιτοκίου μηδενικού κινδύνου (risk free rate) από την παρατηρούμενη απόδοση ομολόγων. Εφόσον η τιμολόγηση των CDS είναι γνωστή και διατίθεται στην αγορά, παρέχεται μια επιπλέον πηγή πληροφόρησης που συνδέεται τόσο με την αγορά, όσο και με τις επιχειρήσεις και οδηγεί στην ακριβή αποτίμηση του πιστωτικού κινδύνου.

Ωστόσο, με την εμφάνιση της χρηματοπιστωτικής κρίσης το 2008, τα μειονεκτήματα και οι κίνδυνοι της χρήσης των CDS έγιναν εμφανείς και συνοδεύτηκαν από μία δημόσια κατακραυγή που κατηγορούσε την αγορά των CDS ως κύριο ένοχο για την επιδείνωση της κρίσης. Υπάρχουν ισχυρισμοί ότι επισπεύστηκε η χρεοκοπία εταιριών ύψιστης σημασίας για την παγκόσμια αγορά, όπως της Lehmann Brothers και της AIG για κερδοσκοπικούς λόγους. Από αυτή την μερίδα των επικριτών, θεωρείται ότι η χρήση των CDS ξεφεύγει από τη χρήση τους για αντιστάθμιση του πιστωτικού κινδύνου, αλλά υποστηρίζουν ότι χρησιμοποιούνται για κερδοσκοπικούς λόγους που είναι ικανοί να οδηγήσουν μία χώρα ή μια εταιρεία σε πτώχευση, ανάλογα με τα συμφέροντα των κερδοσκόπων επενδυτών. Προτείνουν, λοιπόν, για την αποφυγή τέτοιων καταστάσεων τη λήψη περιοριστικών μέτρων ως προς τη χρήση τους ή ακόμα και την απαγόρευση συγκεκριμένων CDS, των λεγόμενων «γυμνών» CDS (naked CDS)[4]. Τέλος, οι επικριτές των CDS υποστηρίζουν κατά κύριο λόγο ότι η αγορά των CDS χαρακτηρίζεται από αδιαφάνεια, καθώς οι συμβάσεις είναι δομημένες ως εξωχρηματιστηριακά παράγωγα (over the counter-OTC) με συνέπεια η διαπραγμάτευσή τους να γίνεται ιδιωτικά και οι λεπτομέρειές τους συχνά να μη γνωστοποιούνται, οδηγώντας σε αδυναμία λεπτομερούς εκτίμησης των κινδύνων της πιστωτικής προστασίας.

Καταλήγοντας, ο διαχωρισμός των πλεονεκτημάτων και των μειονεκτημάτων και η σύγκρισή τους αποτελεί ένα καθαρά υποκειμενικό ζήτημα και εξαρτάται από την οπτική γωνία που το βλέπει κάθε επενδυτής και τη χρήση για την οποία θέλει να χρησιμοποιήσει τα CDS. Το μόνο σίγουρο είναι ότι για την ομαλή ροή και εκτίμηση των κινδύνων της χρήσης των CDS, είναι απαραίτητη η ύπαρξη ενός κατάλληλου ρυθμιστικού υπόβαθρου όπου θα κατέχει την εποπτεία των συναλλαγών τους.

2.4 Μοντέλα αποτίμησης του πιστωτικού κινδύνου

Προτού προχωρήσουμε στην ανάλυση του μοντέλου αποτίμησης των απλών Συμβάσεων Ανταλλαγής Πιστωτικού Κινδύνου, είναι αναγκαίο να καθοριστεί αρχικά ένα πλαίσιο μοντελοποίησης και τιμολόγησης του πιστωτικού κινδύνου καθώς αποτελεί βάση για την τιμολόγηση των πιστωτικών παραγώγων. Γενικά, για τη μοντελοποίηση του πιστωτικού κινδύνου υπάρχουν δύο διαφορετικές προσεγγίσεις: τα **δομικά ή διαρθρωτικά μοντέλα (Structural Models)** και τα **μοντέλα μειωμένης προσέγγισης (Reduced form Models)**. Στην παρούσα εργασία, θα δοθεί περισσότερη έμφαση στα μοντέλα μειωμένης προσέγγισης και συγκεκριμένα στο μοντέλο ρυθμού κινδύνου (hazard rate model).

<u>Δομικά ή διαρθρωτικά μοντέλα (Structural Models)</u>

Τα δομικά μοντέλα εκτιμούν τον πιστωτικό κίνδυνο αναλύοντας την κεφαλαιακή δομή της εταιρείας. Οι θεωρητικές βάσεις προέρχονται από τους Black & Scholes το 1973, ενώ ο Robert Merton το 1974 δημιούργησε το πρώτο δομικό υπόδειγμα. Η κύρια ιδέα, η οποία είναι κοινή σε όλα τα μοντέλα δομικού τύπου, είναι ότι μία εταιρεία εκδηλώνει αθέτηση των

[4] Τα «γυμνά» CDS (naked CDS) είναι συμβάσεις, όπου ο αγοραστής της προστασίας δεν είναι κάτοχος του υποκείμενου τίτλου αναφοράς.

υποχρεώσεών της όταν η αξία του ενεργητικού της (ή των περιουσιακών στοιχείων της) είναι ανεπαρκής για την κάλυψη των χρεών της. Άρα, όσο μειώνεται η αξία του ενεργητικού της, τόσο το δομικό μοντέλο προβλέπει ότι η χρεοκοπία της εταιρείας είναι πιο πιθανή. Η αθέτηση των υποχρεώσεων αποτελεί δηλαδή μία ενδογενή μεταβλητή για το μοντέλο. Εξαιτίας αυτού, τα υποδείγματα αυτά είναι γνωστά και ως firm-value models. Στα δομικά υποδείγματα έχει αποδειχθεί ότι η πιθανότητα εκδήλωσης αθέτησης μπορεί να μοντελοποιηθεί ως ένα δικαίωμα προαίρεσης (option) και για το λόγο αυτό μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι ίδιες μέθοδοι για την αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης και για την τιμολόγηση εταιρικών χρεογράφων. Ουσιαστικά, τα δομικά υποδείγματα αναλύουν σε ποιο βαθμό τα εταιρικά ομόλογα πρέπει να διαπραγματεύονται με βάση την εσωτερική διάρθρωση της εταιρείας. Με αυτό τον τρόπο παρέχονται και περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τον τρόπο αντιστάθμισης του κινδύνου αθέτησης, εφόσον είναι γνωστό μέρος της εσωτερικής δομής της εταιρείας. Ωστόσο, αν και το μοντέλο του Merton συνδέεται κυρίως με την πρόβλεψη της πιθανότητας εκδήλωσης αθέτησης, αναλύοντας την κεφαλαιακή δομή της εταιρείας, η πρακτική εφαρμογή του είναι αρκετά περιορισμένη.

Μοντέλα μειωμένης προσέγγισης (Reduced form Models)

Τα μοντέλα μειωμένης προσέγγισης είναι αυτά που κατά κόρον χρησιμοποιούνται για την αποτίμηση πιστωτικών παραγώγων. Αναπτύχθηκαν σχετικά πρόσφατα από τους Jarrow-Turnbull (1995) και Duffie-Singleton (1999). Τα μοντέλα αυτά, θεωρούν ότι η αθέτηση υποχρεώσεων μίας εταιρίας, αποτελεί εξωγενή μεταβλητή, αγνοώντας τις αιτίες από τις οποίες προήλθε και την εσωτερική δομή της εταιρείας, σε αντίθεση με τα δομικά μοντέλα. Η κύρια διαφοροποίησή τους από τα δομικά μοντέλα έγκειται στη μέθοδο μοντελοποίησης της χρονικής στιγμής που λαμβάνει χώρα το πιστωτικό γεγονός. Τα μοντέλα μειωμένης προσέγγισης μοντελοποιούν τη διαδικασία του πιστωτικού γεγονότος, γνωρίζοντας την πιθανότητα να λάβει χώρα το συγκεκριμένο γεγονός, ενώ η χρονική στιγμή έλευσης του γεγονότος είναι τυχαία. Δηλαδή, ενώ για τα δομικά μοντέλα (τα οποία βασίζονται στη σφαιρική και λεπτομερή γνώση εσωτερικών πληροφοριών της εταιρείας), το πιστωτικό γεγονός είναι προβλέψιμο, για τα μοντέλα μειωμένης προσέγγισης (τα οποία βασίζονται σε πληροφορίες που παρέχονται από την αγορά), το πιστωτικό γεγονός θεωρείται τυχαίο. Επιπλέον λόγω της γνώσης των τιμών της αγοράς είναι εφικτό να υπολογιστεί η πιθανότητα εκδήλωσης αθέτησης της εταιρείας.

Ένα από τα πιο χρήσιμα και πλέον χρησιμοποιούμενα μοντέλα μειωμένης προσέγγισης, είναι το μοντέλο που βασίζεται στη μοντελοποίηση του χρόνου αθέτησης ως τον πρώτο χρόνο (γεγονός) άφιξης τ μίας διαδικασίας Poisson, γνωστό και ως **μοντέλο βασισμένο στο ρυθμό κινδύνου (hazard rate model).** Ο ρυθμός κινδύνου (hazard rate), δηλώνει την πιθανότητα πιστωτικής αθέτησης μίας εταιρείας κάποια χρονική στιγμή, δεδομένου ότι έχει επιβιώσει μέχρι τότε. Ο μαθηματικός ορισμός του κίνδυνου αθέτησης, ο οποίος συμβολίζεται με $h(t)$είναι ο εξής:

$$\lim_{dt \to 0} \frac{1}{dt} \Pr[\tau \leq t + dt | \tau > t] = h(t)$$

Εάν υποθέσουμε ότι η ένταση (intensity) ή εναλλακτικά ο ρυθμός κινδύνου (hazard rate) της διαδικασίας δίνεται ως $h(t) = h > 0$ (δηλαδή είναι ομοιογενής, μη εξαρτώμενος από το χρόνο), τότε η πιθανότητα να υπάρξει αθέτηση στο χρονικό διάστημα $[t, t + dt]$, όπου το dt είναι αρκετά μικρό, είναι περίπου $h \cdot dt$. Η πιθανότητα επιβίωσης μέχρι τη χρονική στιγμή t είναι:

$$S(t) = e^{-ht}$$

Γενικά, η πιθανότητα επιβίωσης σε ένα χρονικό διάστημα [t,T] δίνεται από τον τύπο:

$$S(t) = e^{-h(T-t)}$$

και η πιθανότητα αθέτησης από τον τύπο:

$$Q(t, T) = 1 - S(t, T).$$

Θεωρώντας τώρα το ρυθμό κινδύνου ως μία ντετερμινιστική συνάρτηση του χρόνου[5], $h \rightarrow h(t) > 0$, η διαδικασία μετατρέπεται σε μία ανομοιογενή διαδικασία Poisson. Η πιθανότητα επιβίωσης από το χρόνο $t = 0$ έως το χρόνο T είναι:

$$S(0, T) = \exp\left(-\int_0^T h(t)\, dt\right),$$

ενώ είναι δυνατός και ο υπολογισμός της *πυκνότητας πιθανότητας του χρόνου αθέτησης*, δεδομένου ότι δεν υπήρξε αθέτηση στο χρονικό διάστημα [0,T] ως εξής:

$$f_\tau(T) = h(T) \cdot \exp\left(-\int_0^T h(t)\, dt\right)$$

Αν η διαδικασία γενικευθεί, υποθέτοντας ότι ο ρυθμός κινδύνου $h(t)$ μοντελοποιείται με μία στοχαστική διαδικασία, το μοντέλο γίνεται πιο ρεαλιστικό καθώς ο ρυθμός κινδύνου μεταβάλλεται με την πάροδο του χρόνου, αφού οι συνθήκες της αγοράς αλλάζουν συνεχώς. Λαμβάνοντας υπόψη ότι το $h(t)$ είναι στοχαστικό, η διαδικασία Poisson είναι γνωστή και ως διαδικασία *Cox*. Σε αυτή την περίπτωση η πιθανότητα επιβίωσης στο χρονικό διάστημα $[0, T]$ δίνεται ως:

$$S(0, T) = \mathbb{E}[e^{-\int_0^T h(t)dt}].$$

Τέλος, στα πλαίσια του μοντέλου ρυθμού κινδύνου, γίνεται η αποτίμηση ενός ομολόγου μηδενικού κουπονιού, το οποίο πληρώνει τον πιστωτή 1$ τη χρονική στιγμή T, εκτός αν υπάρξει χρεοκοπία του εκδότη και τότε το χρεόγραφο θα έχει μηδενική αξία (δηλαδή μηδενικό ποσοστό ανάκτησης). Η τιμή ενός τέτοιου ομολόγου δίνεται από τον τύπο:

$$\bar{B}(0, T) = \mathbb{E}[\exp\left(-\int_0^T r(t)dt\right) \cdot I_{\tau > T}]$$

[5] Ως άμεση συνέπεια αυτής της υπόθεσης, ο ρυθμός κινδύνου θα είναι ανεξάρτητος των επιτοκίων και των ποσοστών ανάκτησης.

, όπου $r(t)$ είναι το επιτόκιο άνευ κινδύνου (risk free rate) και ο όρος $I_{\tau>T}$ είναι δείκτρια συνάρτηση η οποία ορίζεται ως:

$$I_{\tau>T} = \begin{cases} 1, εάν\ \tau > T \Leftrightarrow το\ ομόλογο\ δεν\ έχει\ εκδηλώσει\ αθέτηση\ μέχρι\ το\ χρόνο\ T \\ 0, εάν\ \tau \leq T \Leftrightarrow το\ ομόλογο\ έχει\ εκδηλώσει\ αθέτηση\ πριν\ το\ χρόνο\ T. \end{cases}$$

Εάν υποτεθεί ότι ο ρυθμός κινδύνου αποτελεί μία ντετερμινιστική διαδικασία (δηλαδή θα είναι ανεξάρτητος και από τα επιτόκια), τότε ο υπολογισμός της τιμής του ομολόγου μπορεί να διαχωριστεί ως:

$$\bar{B}(0,T) = \mathbb{E}\left[exp\left(-\int_0^T r(t)dt\right)\right] \cdot P[\tau > T] = B(0,T) \cdot S(0,T),$$

όπου $B(0,T) = exp\left(-\int_0^T r(t)dt\right)$ είναι η τιμή του ομολόγου χωρίς κίνδυνο αθέτησης.

Δηλαδή, η τιμή του ομολόγου είναι ίση με τη αναμενόμενη τιμή (κάτω από ένα μέτρο ουδετέρου κινδύνου) του γινομένου της αντίστοιχης τιμής του ομολόγου χωρίς κίνδυνο αθέτησης και της ουδέτερης κινδύνου πιθανότητας επιβίωσης στο χρονικό διάστημα $[0,T]$.

2.5 Τιμολόγηση του απλού CDS

Για την τιμολόγηση του απλού CDS στο πλαίσιο του μοντέλου αποτίμησης ρυθμού κινδύνου που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα, θα χρησιμοποιηθεί το μοντέλο που αναπτύχθηκε από τους D. O'Kane και S. Turnbull το 2003. Μια παρουσίαση της αποτίμησης ενός απλού CDS έχει γίνει στο παρελθόν και από την Δ. Παππά (2016).

Αρχικά πρέπει να γίνουν κάποιες βασικές υποθέσεις που αφορούν το μοντέλο. Θεωρούμε ότι τα πιστωτικά γεγονότα, τα επιτόκια και τα ποσοστά ανάκτησης είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Επίσης, δεδομένου ότι για την αγορά μιας σύμβασης CDS δεν απαιτείται κάποιο κόστος, η αρχική αξία του CDS είναι μηδενική. Επιπλέον, χάριν ευκολίας, υποθέτουμε ότι η ονομαστική αξία της σύμβασης CDS είναι ίση με 1\$. Τέλος, για την αποτίμηση της σύμβασης χρειάζεται να καθοριστεί και ο χρόνος στον οποίο γίνεται. Ορίζεται ως μονάδα μέτρησης του χρόνου να είναι το έτος και ο χρόνος t μεταξύ δύο ημερομηνιών d_1 (θα είναι η ημερομηνία έναρξης της ισχύος της σύμβασης) και d_2 (θα είναι η ημερομηνία αποτίμησης της σύμβασης) δίνεται ως:

$$t = \frac{DayDiff(d_1, d_2)}{Days\ in\ year}$$

όπου, η συνιστώσα $DayDiff(d_1, d_2)$ είναι μία συνάρτηση που επιστρέφει το πλήθος τον ημερολογιακών ημερών μεταξύ των d_1 και d_2. Ο παρονομαστής αναφέρεται στο πλήθος των ημερών σε ένα έτος.

Για τους σκοπούς της αποτίμησης της σύμβασης ενός απλού CDS απαιτείται ο καθορισμός και η επεξήγηση των παρακάτω συμβολισμών:

- t: η χρονική στιγμή της αποτίμησης της σύμβασης CDS, όπου για $t = 0$ έχουμε την χρονική στιγμή έναρξης της σύμβασης
- τ: η χρονική στιγμή χρεοκοπίας της οντότητας αναφοράς
- T: η χρονική στιγμή λήξης της προστασίας
- T_j: οι ημερομηνίες πληρωμής των ασφαλίστρων από τον αγοραστή στον πωλητή της προστασίας, για $j = 1, \dots, N$. Θέτουμε ως $T_0 = t$ και $T_N = T$.
- $\Delta(T_{j-1}, T_j)$: το κλάσμα το οποίο έχει ως αριθμητή τη διαφορά των ημερών μεταξύ των ημερομηνιών πληρωμής των ασφαλίστρων T_{j-1} και T_j και ως παρονομαστή το 360
- $Z(t,T)$: ο προεξοφλητικός παράγοντας Libor για την προεξόφληση μελλοντικών ταμειακών ροών τη χρονική στιγμή t
- $S(t,T)$: η πιθανότητα επιβίωσης της οντότητας αναφοράς από το χρόνο t στο χρόνο T
- $\delta(t,T)$: το αναμενόμενο ποσοστό ανάκτησης του οφειλέτη, για τον προσδιορισμό του μεγέθους της αποζημίωσης του αγοραστή. Συνήθως υποθέτουμε ότι το ποσοστό ανάκτησης είναι σταθερό, δηλαδή $\delta(t,T) = \delta$ και υπολογίζεται ως ποσοστό επί τοις εκατό της ονομαστικής αξίας της σύμβασης
- S_0 : είναι το σταθερό spread της σύμβασης που πραγματεύεται σε χρόνο $t = 0$ και ωριμάζει κατά τη λήξη T της σύμβασης.

Η αποτίμηση της σύμβασης ενός απλού CDS βασίζεται στην αποτίμηση των δύο επιμέρους σκελών από τα οποία αποτελείται. Αυτά είναι το σταθερό σκέλος (premium leg) και του κυμαινόμενου ή ενδεχόμενου σκέλους (floating leg or protection leg or contingent leg).

Αποτίμηση του σταθερού σκέλους (Premium leg) σε ημερομηνία πληρωμής ασφαλίστρου

Το σταθερό σκέλος αναφέρεται στις πληρωμές του ασφαλίστρου που καταβάλλονται από τον αγοραστή στον πωλητή της προστασίας σε προκαθορισμένα χρονικά διαστήματα, με σκοπό την προστασία του από τον πιστωτικό κίνδυνο. Για την αποτίμηση του Premium leg θα γίνει αρχικά η υπόθεση ότι η τιμολόγηση γίνεται σε μια ημερομηνία πληρωμής ασφαλίστρου. Η αξία του Premium leg δύναται να διασπαστεί σε δύο συνιστώσες. Η πρώτη αποτελείται από τις προκαθορισμένες πληρωμές του ασφαλίστρου σε συγκεκριμένες ημερομηνίες, δεδομένου ότι η οντότητα αναφοράς έχει επιβιώσει μέχρι τις ημερομηνίες πληρωμής του ασφαλίστρου. Η δεύτερη συνιστώσα συνδέεται με την έλευση ενός πιστωτικού γεγονότος και αφορά την πληρωμή ασφαλίστρου που έχει συσσωρευτεί από την τελευταία ημερομηνία καταβολής έως τη χρονική στιγμή που επέρχεται το πιστωτικό γεγονός.

- Η προκαθορισμένη πληρωμή των ασφαλίστρων δίνεται από τον υπολογισμό των αναμενομένων ταμειακών ροών ως εξής:

$$V_{Fee}(t) = \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{N} S_0 \cdot \Delta(T_{j-1}, T_j) \cdot Z(t, T_j) \cdot I_{T_j<\tau}\right]$$

Θεωρείται ότι η προσδοκία είναι υπολογισμένη βάσει κατάλληλου μέτρου ουδέτερης πιθανότητας. Κάθε μία πληρωμή ασφαλίστρου, προεξοφλείται με τον κατάλληλο προεξοφλητικό παράγοντα $Z(t, T_j)$ και σταθμίζεται με τη δείκτρια συνάρτηση $I_{T_j<\tau}$. Η δείκτρια συνάρτηση $I_{T_j<\tau}$ αντιπροσωπεύει την πιθανότητα πραγματοποίησης της πληρωμής κατά τη χρονική στιγμή T_j (ή αντιστρόφως ότι έχει επέλθει χρεοκοπία της οντότητας αναφοράς πριν από τη χρονική στιγμή T_j και δεν υπάρχει πληρωμή).

Για να υπολογιστεί αυτή η αναμενόμενη τιμή, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, χρειάζεται να υποθέσουμε ότι τα επιτόκια και τα πιστωτικά γεγονότα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, επιτρέποντας με αυτό τον τρόπο να διαχωριστούν οι υπολογισμοί των αναμένόμενων τιμών. Σύμφωνα με αυτές τις υποθέσεις οι προκαθορισμένες πληρωμές υπολογίζονται να είναι:

$$V_{Fee}(t) = S_0 \cdot \sum_{j=1}^{N} \Delta(T_{j-1}, T_j) \cdot Z(t, T_j) \cdot S(t, T_j)$$

Δηλαδή, η προκαθορισμένη πληρωμή των ασφαλίστρων καθορίζεται ως το άθροισμα των πληρωμών ασφαλίστρου $S_0 \cdot \Delta(T_{j-1}, T_j)$, οι οποίες είναι σταθμισμένες με την πιθανότητα επιβίωσης των ημερομηνιών πληρωμής, προεξοφλημένες στη παρούσα χρονική στιγμή που γίνεται η αποτίμηση, έχοντας χρησιμοποιήσει το επιτόκιο άνευ κινδύνου.

- Για τον υπολογισμό της δεύτερης συνιστώσας του Premium leg, η οποία αφορά τα *συσσωρευμένα ασφάλιστρα (accrued payments)* από την τελευταία ημερομηνία καταβολής ασφαλίστρου μέχρι τη χρονική στιγμή της αθέτησης $\tau \in [T_{j-1}, T_j]$, ενδείκνυται να χρησιμοποιείται ο ακόλουθος τύπος:

$$V_{Accrued}(t) = \sum_{j=1}^{N} S_0 \cdot \Delta(T_{j-1}, T_j) \cdot E\left[Z(t, \tau) \cdot \frac{\tau - T_{j-1}}{T_j - T_{j-1}} \cdot I_{T_{j-1} \le \tau \le T_j}\right],$$

όπου εάν αναλυθεί η αναμενόμενη τιμή, έχουμε: [6]

$$V_{Accrued}(t) = \sum_{j=1}^{N} S_0 \cdot \Delta\left(T_{j-1}, T_j\right) \cdot \int_{T_{j-1}}^{T_j} Z(t,u) \cdot \frac{u - T_{j-1}}{T_j - T_{j-1}} \cdot h(u) \cdot e^{-\int_0^u h(s)ds}\, du$$

Το ολοκλήρωμα γίνεται να υπολογιστεί με κατάλληλες αριθμητικές μεθόδους. Παρατηρώντας ότι εάν ένα πιστωτικό γεγονός συμβεί μεταξύ δύο ημερομηνιών καταβολής ασφαλίστρων, ο μέσος όρος δεδουλευμένων ασφαλίστρων ισούται προσεγγιστικά με το μισό του συνολικού ποσού ασφαλίστρων που πρόκειται να καταβληθεί στο τέλος της περιόδου. Οπότε, μία κατά προσέγγιση τιμή για το συσσωρευμένο ασφάλιστρο δίνεται από τον τύπο:

$$V_{Accrued}(t) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^{N} S_0 \cdot \Delta\left(T_{j-1}, T_j\right) \cdot Z\left(t, T_j\right) \cdot \left[S\left(t, T_{j-1}\right) - S\left(t, T_j\right)\right] =$$

$$= \frac{S_0}{2} \cdot \sum_{j=1}^{N} \Delta\left(T_{j-1}, T_j\right) \cdot Z\left(t, T_j\right) \cdot \left[S\left(t, T_{j-1}\right) - S\left(t, T_j\right)\right]$$

Έχοντας λάβει υπόψη τον υπολογισμό και των δύο συνιστωσών από τις οποίες αποτελείται το Premium leg, η συνολική παρούσα αξία του δίνεται από:

$$\begin{aligned} PV_{\text{Premium leg}}(t) &= V_{Fee}(t) + V_{Accrued}(t) \\ &= S_0 \cdot \sum_{j=1}^{N} \Delta\left(T_{j-1}, T_j\right) \cdot Z\left(t, T_j\right) \cdot S\left(t, T_j\right) \\ &+ \frac{S_0}{2} \cdot \sum_{j=1}^{N} \Delta\left(T_{j-1}, T_j\right) \cdot Z\left(t, T_j\right) \cdot \left[S\left(t, T_{j-1}\right) - S\left(t, T_j\right)\right] \\ &= S_0 \cdot RPV01(t, T), \end{aligned}$$

όπου:

$$RPV01(t,T) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^{N} \Delta\left(T_{j-1}, T_j\right) \cdot Z\left(t, T_j\right) \cdot \left[S\left(t, T_{j-1}\right) + S\left(t, T_j\right)\right],$$

Είναι η αναμενόμενη παρούσα αξία 1 μονάδας βάσης[7] (bps) που καταβάλλεται για το Premium leg είτε μέχρι να συμβεί κάποιο πιστωτικό γεγονός, είτε μέχρι τη χρονική στιγμή λήξης της σύμβασης, ανάλογα με το πιο από τα δύο ενδεχόμενα θα συμβεί πρώτο.

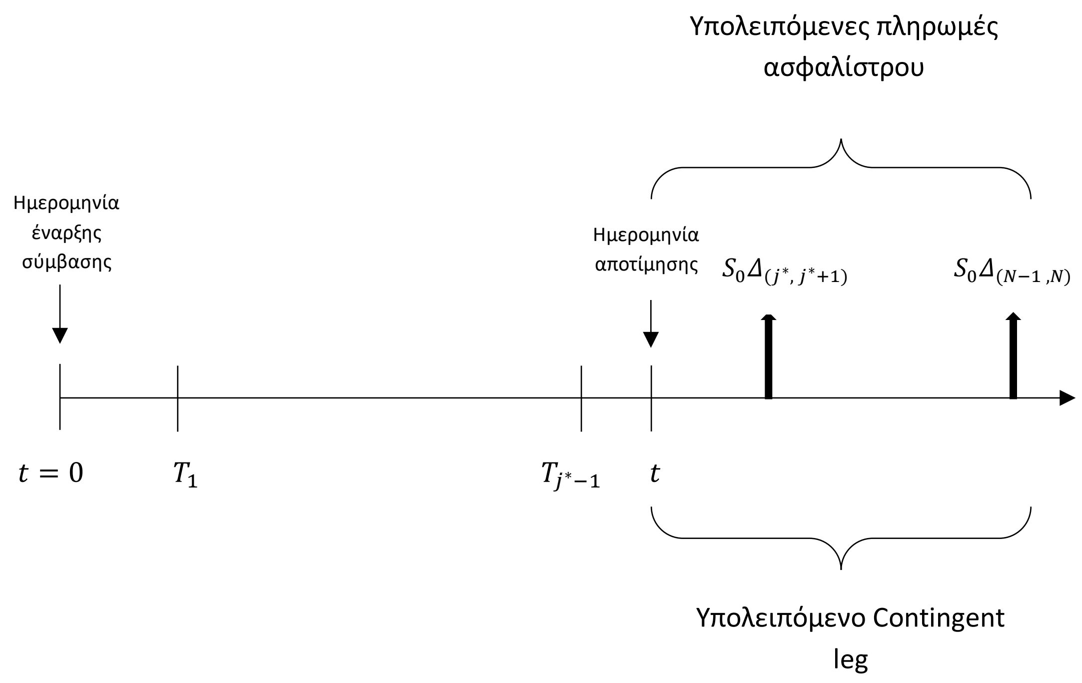
[6] Χρησιμοποιήθηκε ολοκλήρωμα, διότι η αθέτηση μπορεί να λάβει χώρα οποιαδήποτε χρονική στιγμή ανάμεσα σε περιόδους καταβολής ασφαλίστρων.

[7] Αναφέρεται και ως risky present value 1 bps, εξ'ου και ο συμβολισμός RPV01.

Αποτίμηση του σταθερού σκέλους (Premium leg) μεταξύ ημερομηνιών πληρωμής ασφαλίστρου

Ωστόσο, επειδή έχει γίνει η υπόθεση ότι η ημερομηνία αποτίμησης συμπίπτει με μία ημερομηνία πληρωμής ασφαλίστρων και η παραπάνω εξίσωση που δίνει την παρούσα αξία του Premium leg λαμβάνει υπόψη της την αξία των συσσωρευμένων ασφαλίστρων κατά την χρονική στιγμή της αθέτησης, έχουμε ως αποτέλεσμα ότι το συσσωρευμένο ασφάλιστρο είναι μηδενικό κατά την ημερομηνία της αποτίμησης. Παρόλα αυτά κάτι τέτοιο δεν ισχύει όταν η αποτίμηση γίνεται μεταξύ δύο ημερομηνιών πληρωμής ασφαλίστρων, όπως φαίνεται και στην παρακάτω εικόνα. Εάν θεωρήσουμε ως T_{j^*} το χρόνο που γίνεται η πρώτη καταβολή ασφαλίστρου μετά τη σημερινή ημερομηνία αποτίμησης t, τότε η παρούσα αξία του Premium leg θα δίνεται από την εξίσωση:

$$\begin{aligned} PV_{Premium\ leg}(t) &= S_0 \cdot \int_t^{T_{j^*}} \Delta\left(T_{j^*-1}, s\right) \cdot Z(t,s) \cdot \left(-dS(t,s)\right) \\ &+ S_0 \cdot \sum_{j=j^*+1}^{N} \int_{T_{j-1}}^{T_j} \Delta\left(T_{j-1}, s\right) \cdot Z(t,s) \cdot \left(-dS(t,s)\right) \\ &+ S_0 \cdot \sum_{j=j^*}^{N} \Delta\left(T_{j-1}, T_j\right) \cdot Z\left(t, T_j\right) \cdot S\left(t, T_j\right) \end{aligned}$$



Χρησιμοποιώντας και πάλι κατάλληλες προσεγγιστικές εκφράσεις, θα έχουμε ότι η παρούσα αξία του Premium leg θα είναι προσεγγιστικά:

$$\begin{aligned} PV_{Premium\ leg}(t) &= S_0 \cdot \Delta\left(T_{j^*-1}, t\right) \cdot Z\left(t, T_{j^*}\right) \cdot \left(1 - S\left(t, T_{j^*}\right)\right) \\ &+ \frac{S_0}{2} \cdot \Delta\left(t, T_{j^*}\right) \cdot Z\left(t, T_{j^*}\right) \cdot \left(1 - S\left(t, T_{j^*}\right)\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+S_0 \cdot \Delta(T_{j^*-1}, T_{j^*}) \cdot Z(t, T_{j^*}) \cdot S(t, T_{j^*}) \\
&+\frac{S_0}{2} \cdot \sum_{j=j^*+1}^{N} \Delta(T_{j-1}, T_j) \cdot Z(t, T_j) \cdot \left[S(t, T_{j-1}) + S(t, T_j)\right] \\
&= S_0 \cdot RPV01(t, T),
\end{aligned}
$$

Ο πρώτος όρος στην παραπάνω εξίσωση αναφέρεται στην πληρωμή του μέρους του ασφαλίστρου που έχει συσσωρευτεί κατά το χρονικό διάστημα μεταξύ της προηγούμενης ημερομηνίας πληρωμής ασφαλίστρου και της ημερομηνίας αποτίμησης. Αυτό πληρώνεται ολόκληρο εάν υπάρχει. Ο δεύτερος όρος είναι η αναμενόμενη παρούσα αξία του ασφαλίστρου που υπολογίζεται από την ημερομηνία αποτίμησης μέχρι την επόμενη ημερομηνία πληρωμής ασφαλίστρου. Όπως έχει αναφερθεί και παραπάνω, υποθέτουμε πως εάν συμβεί κάποιο πιστωτικό γεγονός κατά τη διάρκεια μίας περιόδου, κατά μέσο όρο συμβαίνει στα μισά της περιόδου, οπότε καταβάλλεται το μισό ποσό του ασφαλίστρου. Ο τρίτος όρος είναι το πλήρες ασφάλιστρο που καταβάλλεται, εφόσον δεν υπάρχει πιστωτικό γεγονός πριν από την επόμενη ημερομηνία πληρωμής ασφαλίστρου. Ο τέταρτος και τελευταίος όρος αντιπροσωπεύει τις υπολειπόμενες πληρωμές ασφαλίστρου, μέχρι την ημερομηνία λήξης της σύμβασης ή μέχρι τη στιγμή που θα επέλθει κάποιο πιστωτικό γεγονός (ανάλογα ποιο από τα δύο θα συμβεί πρώτο).

Τέλος, είναι κατανοητό ότι στην παραπάνω εξίσωση η $RPV01(t, T)$ είναι ίση με:

$$
\begin{aligned}
RPV01(t, T) = {} & \Delta(T_{j^*-1}, t) \cdot Z(t, T_{j^*}) \cdot \left(1 - S(t, T_{j^*})\right) \\
&+\frac{1}{2} \cdot \Delta(t, T_{j^*}) \cdot Z(t, T_{j^*}) \cdot \left(1 - S(t, T_{j^*})\right) \\
&+\Delta(T_{j^*-1}, T_{j^*}) \cdot Z(t, T_{j^*}) \cdot S(t, T_{j^*}) \\
&+\frac{1}{2} \cdot \sum_{j=j^*+1}^{N} \Delta(T_{j-1}, T_j) \cdot Z(t, T_j) \cdot \left[S(t, T_{j-1}) + S(t, T_j)\right].
\end{aligned}
$$

<u>Αποτίμηση του κυμαινόμενου ή ενδεχόμενου σκέλους (Floating/Protection leg or Contingent leg)</u>

Το κυμαινόμενο ή ενδεχόμενο σκέλος αναφέρεται στην αποζημίωση του αγοραστή της προστασίας από τον πωλητή σε περίπτωση που λάβει χώρα κάποιο πιστωτικό γεγονός. Για να υπολογιστεί η αξία του, λαμβάνεται υπόψη το γεγονός ότι η οντότητα αναφοράς μπορεί να προβεί σε αθέτηση οποτεδήποτε κατά τη διάρκεια της σύμβασης. Λόγω το ότι η πληρωμή του ποσού αποζημίωσης δεν είναι δεδομένη, για τον υπολογισμό της αναμενόμενης αξίας του υποθέτουμε ότι το κυμαινόμενο σκέλος, τα επιτόκια και η χρονική στιγμή της αθέτησης είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα. Επιπλέον, η πιθανότητα επιβίωσης του οφειλέτη, από το χρόνο t έως το χρόνο x είναι : $S(t, x)$. Σε ένα απειροστό χρονικό διάστημα Δx η πιθανότητα αθέτησης είναι $h(x) \cdot \Delta x$. Η πιθανότητα αθέτησης στο χρονικό διάστημα $[x, x + \Delta x]$, δεδομένου ότι η οντότητα αναφοράς έχει επιβιώσει μέχρι το χρόνο t, δίνεται από:

$$P_{Def}(x, x+\Delta x|t) = P(x < \tau \leq x + \Delta x|\tau > t) = S(t,x) - S(t, x+\Delta x) \approx S(t,x)h(x)\Delta x$$

Έχοντας τις παραπάνω υποθέσεις έχουμε ότι η ενδεχόμενη πληρωμή, προεξοφλημένη στο χρόνο t είναι:

$$Z(t,x) \cdot (1-\delta) \cdot P_{Def}(x, x+\Delta x|t).$$

Για ολόκληρη τη χρονική περίοδο της σύμβασης, δηλαδή από t ως T, η συνολική ενδεχόμενη πληρωμή υπολογίζεται ως το ολοκλήρωμα όλων αυτών των απειροελάχιστων πληρωμών για τη χρονική διάρκεια $[t,T]$. Επομένως έχουμε ότι:

$$PV_{Contigent\ leg}(t) = (1-\delta)\int_t^T Z(t,x)P_{Def}(x, x+dx|t) = (1-\delta)\int_t^T Z(t,x)S(t,x)h(x)dx$$

Μπορούμε τώρα, διακριτοποιώντας το χρονικό διάστημα (t,T) (κατά τους χρόνους καταβολής ασφαλίστρων), να προσεγγίσουμε το παραπάνω ολοκλήρωμα από το ακόλουθο άθροισμα (ουσιαστικά θεωρούμε ότι η $Z(t,s) \approx Z(t,T_j)$ σε κάθε διάστημα $[T_{j-1}, T_j]$):

$$\begin{aligned} PV_{Contigent\ leg}(t) &= (1-\delta)\sum_{j=1}^{N}\int_{T_{j-1}}^{T_j} Z(t,x)S(t,x)h(x)dx \\ &\approx (1-\delta)\sum_{j=1}^{N} Z(t,T_j)\int_{T_{j-1}}^{T_j} S(t,x)h(x)dx \\ &= (1-\delta)\cdot\sum_{j=1}^{N} Z(t,T_j)\cdot\left[S(t,T_{j-1}) - S(t,T_j)\right]. \end{aligned}$$

<u>Υπολογισμός του spread της αγοράς (Breakeven Spread)</u>

Το spread της αγοράς ενός CDS είναι το spread που καταβάλλεται για τη σύναψη μίας νέας σύμβασης. Η ιδέα για τον υπολογισμό του βασίζεται στις συμβάσεις ανταλλαγής επιτοκίων, οι οποίες συνάπτονται με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε τα οικονομικά οφέλη και των δύο μερών που συναλλάσσονται να είναι ίσα κατά την έναρξη της σύμβασης. Εάν δε συνέβαινε κάτι τέτοιο δε θα υπήρχε κίνητρο για τους αντισυμβαλλομένους να λάβουν αντίθετες θέσεις. Ομοίως για τις συμβάσεις CDS, δεδομένου ότι δεν υπάρχει αρχικό κόστος για τη σύναψή τους, κατά την έναρξη της σύμβασης η αξία του συμβολαίου είναι μηδενική. Δηλαδή, η παρούσα αξία του σταθερού σκέλους είναι ίση με την παρούσα αξία του ενδεχόμενου σκέλους, για $t=0$. Επομένως, εάν εξισωθούν οι σχέσεις που ορίζουν την παρούσα αξία του σταθερού και του ενδεχόμενου σκέλους κατά την έναρξη της ισχύος της σύμβασης, έχουμε ότι:

$$S_0 \cdot RPV01(0,T) = (1-\delta) \cdot \sum_{j=1}^{N} Z(0,T_j) \cdot [S(0,T_{j-1}) - S(0,T_j)].$$

Τελικά, το spread της αγοράς μπορεί να καθοριστεί από την παραπάνω εξίσωση και είναι:

$$S_0 = \frac{(1-\delta) \cdot \sum_{j=1}^{N} Z(0,T_j) \cdot [S(0,T_{j-1}) - S(0,T_j)]}{RPV01(0,T)}$$

Τρέχουσα αξία (mark-to-market) μίας σύμβασης CDS

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, οι συμβάσεις CDS έχουν μηδενική παρούσα αξία κατά την έναρξή τους. Μετά την έναρξη της σύμβασης, οι τιμές των ασφαλίστρων στην αγορά μεταβάλλονται, αντανακλώντας τις αλλαγές που επέρχονται στην πιστωτική ικανότητα και τη γενική δυναμική της αγοράς. Η τρέχουσα αξία (market-to-market) μιας σύμβασης CDS, εκφράζει το ποσό που λαμβάνει ή που υποχρεούται να πληρώσει ο αγοραστής της προστασίας (αναλόγως αν η τιμή είναι θετική ή αρνητική αντίστοιχα), εάν ρευστοποιηθεί η σύμβαση. Η τρέχουσα αξία (market-to-market) μιας σύμβασης CDS, ονομαστικής αξίας 1$, στο χρόνο t δίνεται από τον τύπο (O’Kane D. (2001)):

$$MtM(t) = [s(t,T) - s(0,T)] \cdot RPV01(t,T),$$

όπου $s(t,T)$ είναι το τρέχον spread της αγοράς και $s(0,T)$ είναι το spread της αγοράς κατά τη χρονική στιγμή που συνάπτεται η σύμβαση, δηλαδή είναι το S_0.

Εάν το πιστωτικό περιθώριο (credit spread) δε μεταβάλλεται με το χρόνο, τότε η τρέχουσα αξία θα είναι $MtM(t) = 0$ για κάθε χρονική στιγμή. Δηλαδή, αν η αντίληψη της αγοράς για την πιθανότητα αθέτησης του οφειλέτη δεν αλλάζει με την πάροδο του χρόνου, τότε δεν υπάρχει μεταβολή στην αγοραία αξία της προστασίας, όπως είναι αναμενόμενο.

Το πιστωτικό τρίγωνο (the credit triangle)

Με ορισμένες απλουστευτικές υποθέσεις, υπάρχει μία εξαιρετικά χρήσιμη σχέση μεταξύ του πιστωτικού περιθωρίου, του βαθμού κινδύνου και του ποσοστού ανάκτησης ενός οφειλέτη. Γνωρίζουμε ότι ο πωλητής πληρώνει στον αγοραστή της προστασίας ένα ποσό ίσο με $1-\delta$ (εάν υποθέσουμε ότι η ονομαστική αξία της σύμβασης CDS είναι ίση με 1$), κατά τη χρονική στιγμή της έλευσης του πιστωτικού γεγονότος, εάν αυτή λάβει χώρα πριν από τη λήξη της σύμβασης. Ας γίνει η υπόθεση, πως ο αγοραστής της προστασίας καταβάλλει περιοδικά στον πωλητή της προστασίας ένα ασφάλιστρο ή spread S, μέχρι τη λήξη T της σύμβασης ή μέχρι να συμβεί κάποιο πιστωτικό γεγονός, ανάλογα ποιο από τα δύο θα συμβεί πρώτο. Γνωρίζουμε ότι η αξία της σύμβασης CDS κατά την έναρξή της είναι μηδενική, δηλαδή:

$$PV_{Premium\ leg}(0,T) = PV_{Contingent\ leg}(0,T)$$

Αν υποθέσουμε ότι: οι πληρωμές των ασφαλίστρων καταβάλλονται σε συνεχή χρόνο, τότε μεταξύ του διαστήματος $[t, t+dt]$ θα υπάρχει μία καταβολή ασφαλίστρου, ύψους $S \times dt$. Εάν προεξοφλήσουμε την πληρωμή αυτή και ολοκληρώσουμε για όλη τη διάρκεια της σύμβασης, για το Premium leg θα έχουμε:

$$PV_{Premium\ leg}(0,T) = S \cdot \int_0^T Z(0,t) \cdot S(0,t)dt$$

Επίσης, εάν θεωρηθεί ότι ο ρυθμός κινδύνου είναι σταθερός, τότε για το Contingent leg θα έχουμε:

$$PV_{Contigent\ leg}(0,T) = (1-\delta) \cdot \int_0^T Z(0,t) \cdot h \cdot S(0,t)dt$$

Επομένως, οδηγούμαστε στην ακόλουθη εξίσωση:

$$S \cdot \int_0^T Z(0,t) \cdot S(0,t)dt = (1-\delta) \cdot h \cdot \int_0^T Z(0,t) \cdot S(0,t)dt\,,$$

από όπου προκύπτει άμεσα η σχέση:

$$S = (1-\delta) \cdot h,$$

η οποία ονομάζεται πιστωτικό τρίγωνο (credit triangle), επειδή η γνώση οποιονδήποτε δύο μεταβλητών, οδηγεί στην εύρεση της τρίτης.

Εφαρμογή

Για την κατανόηση της τιμολόγησης ενός απλού CDS, θα χρησιμοποιηθεί ένα τεχνητό αριθμητικό παράδειγμα για το οποίο οι υπολογισμοί θα γίνουν με το πρόγραμμα Wolfram Mathematica (ο αναγνώστης παραπέμπεται στο σύγγραμμα των D.O'Kane και S.Turnbull (2003) για τη μελέτη ενός παρόμοιου παραδείγματος). Στην εφαρμογή, όπως φαίνεται και στον πίνακα 2.5.1, δίνεται το επιτόκιο Libor από 1 έως και 5 έτη και οι τιμές των spreads της αγοράς οι οποίες αυξάνονται από έτος σε έτος. Το επιτόκιο ανάκτησης ορίζεται να είναι 40%.

Πίνακας 2.5.1

Επιτόκια Libor (%)	$1Y$	2,05	**Default Swap Spreads (bp)**	$1Y$	$120bp$
	$2Y$	2,23		$2Y$	$133bp$
	$3Y$	2,72		$3Y$	$148bp$
	$4Y$	3,08		$4Y$	$162bp$

$5Y$	$3{,}25$	$5Y$	$180bp$
		Επιτόκιο Ανάκτησης	40%

Επίσης, στον επόμενο πίνακα 2.5.2, δίνονται:

1. η ονομαστική αξία της σύμβασης, η οποία είναι 10.000.000\$
2. το spread της σύμβασης, που είναι $200bp$
3. η ημερομηνία έναρξης και λήξης της σύμβασης, οι οποίες είναι 20 Δεκεμβρίου 2016 και 20 Μαρτίου 2022, αντίστοιχα
4. η συχνότητα καταβολής των ασφαλίστρων, η οποία είναι τριμηνιαία

Πίνακας $\mathbf{2.5.2}$

Ονομαστική αξία	10.000.000\$
Spread σύμβασης	$200bp$
Ημερομηνία έναρξης	20 Δεκεμβρίου 2016
Ημερομηνία λήξης	20 Μαρτίου 2022
Συχνότητα καταβολής ασφαλίστρου	Τριμηνιαία

Η ημερομηνία αποτίμησης είναι η 19η Δεκεμβρίου 2017. Θα υποθέσουμε ότι οι πληρωμές των ασφαλίστρων γίνονται κάθε 90 ημέρες, δηλαδή η καταμέτρηση των ημερών σε ετήσια βάση θα είναι ίση με: $\Delta(T_{j-1}, T_j) = \frac{90}{360} = 0{,}25$. Οι χρηματοροές των ασφαλίστρων σε \$, θα είναι $S_0 \cdot \Delta(T_{j-1}, T_j) \cdot 10.000.000\$ = 200 \cdot 0{,}01\% \cdot 0{,}25 \cdot 10.000.000\$ = 50.000\$$.[8]

Το επόμενο βήμα για την τιμολόγηση της σύμβασης CDS είναι η κατασκευή της καμπύλης επιβίωσης και η βαθμονόμησή της (calibration) στα δοθέντα ετήσια spreads της αγοράς. Για την κατασκευή της καμπύλης επιβίωσης χρησιμοποιείται μία επαναληπτική μέθοδος, η οποία στη βιβλιογραφία συνήθως καλείται bootstrap (χωρίς να έχει σχέση με τη γνωστή στατιστική μέθοδο bootstrap), μέσω της οποίας θα βρεθούν οι πιθανότητες επιβίωσης για το $1o, 2o, 3o, 4o$ και $5o$ έτος καθώς και οι αντίστοιχοι ρυθμοί κινδύνου (hazard rates). Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τη μέθοδο αυτή, ο αναγνώστης παραπέμπεται στο

[8] Πολλαπλασιάζουμε με το 0,01% , διότι το spread της σύμβασης είναι υπολογισμένο σε μονάδες βάσης (bp) και όπως έχει αναφερθεί και στο 1ο κεφάλαιο, μία μονάδα βάσης αντιστοιχεί σε επιτόκιο 0,01%

βιβλίο του D.O’Kane (2008). Τα βήματα για την κατασκευή ενός αλγορίθμου που θα δίνει τα ζητούμενα αποτελέσματα είναι τα εξής:

ΒΗΜΑ 1) Ορίζουμε σε διανύσματα τα ετήσια επιτόκια Libor, τα ετήσια CDS spreads της αγοράς και το ποσοστό ανάκτησης δ. Δημιουργούμε ένα διάνυσμα Δ το οποίο ουσιαστικά αναφέρεται στο πόσο απέχουν διαδοχικά μεταξύ τους το $1o, 2o, 3o, 4o$ και $5o$ έτος, ένα κενό πίνακα h ο οποίος αναφέρεται στους ετήσιους ρυθμούς κινδύνου και ένα διάνυσμα S το οποίο αναφέρεται στις πιθανότητες επιβίωσης κατά την ημερομηνία αποτίμησης, καθώς και για το $1o, 2o, 3o, 4o$ και $5o$ έτος.

ΒΗΜΑ 2) Θέτουμε ως Z τον πίνακα για τον προεξοφλητικό παράγοντα Libor, για το $1o$ έως και το $5o$ έτος.

ΒΗΜΑ 3) Για το πρώτο έτος: θέτουμε ως $ES = PV_{Premium\ leg} - PV_{Contingent\ leg}$ και στη συνέχεια θέτοντας τη διαφορά αυτή ίση με 0 , λύνουμε την εξίσωση ως προς τη βαθμονομημένη πιθανότητα επιβίωσης, $S(1)$, του πρώτου έτους. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται για το $2o, 3o, 4o$ και $5o$ έτος, βρίσκοντας σε κάθε επανάληψη τη βαθμονομημένη πιθανότητα επιβίωσης για κάθε έτος, $S(2), \ldots, S(5)$, (όπου σε κάθε επανάληψη χρησιμοποιούμε τις πιθανότητες επιβίωσης που έχουμε βρει στα προηγούμενα βήματα).

ΒΗΜΑ 4) Θέτουμε $h(i) = -\,log\left(\frac{S(i)}{S(i-1)}\right)/\Delta(i),\ i = 1,2, \ldots, 5$, βρίσκοντας με αυτό τον τρόπο τους βαθμονομημένους ρυθμούς κινδύνου για κάθε ένα από τα 5 έτη.

Ο κώδικας και τα αποτελέσματα του αλγορίθμου στο Mathematica δίνονται ακολούθως:

(Στον κώδικα το $S(i)$ δίνεται από το $S[[i+1]], i = 0,1,2, \ldots, 5$, $S(0) = 1$):

```
Libor = {2.05, 2.23, 2.72, 3.08, 3.25}/100;
Spread = {0.0120, 0.0133, 0.0148, 0.0162, 0.0180}; δ=0.4;
Δ={1,1,1,1,1};h=Table[0,{i,1,5}];
Z=Table[Exp[-Libor[[i]]*Sum[Δ[[j]],{j,1,i}]],{i,1,5}];
S={1,x,x,x,x,x};
Do[
ES=Spread[[k]]/2*Sum[Δ[[j]]*Z[[j]]*(S[[j]]+S[[j+1]]),{j,1,k}]-
(1-δ)*Sum[Z[[j]]*(S[[j]]-S[[j+1]]),{j,1,k}];
 S[[k+1]]=x/.Solve[EQ==0,x][[1]];
 ,{k,1,5}]
Print["Calibrated Survival Probabilities = ",S]
Do[h[[i]]=-Log[S[[i+1]]/S[[i]]]/Δ[[i]],{i,1,5}]
Print["Calibrated hazard rates = ", h]
Calibrated Survival Probabilities =
{1,0.980198,0.956535,0.928147,0.896222,0.857315}
Calibrated hazard rates =
{0.0200007,0.0244372,0.030127,0.0350026,0.0443823}
```

Στη συνέχεια για την τιμολόγηση του CDS χρειάζεται να υπολογιστούν οι πιθανότητες επιβίωσης και ο προεξοφλητικός παράγοντας Libor για κάθε ημερομηνία πληρωμής ασφαλίστρου. Τα βήματα του αλγορίθμου για την εύρεση των παραπάνω τιμών είναι τα ακόλουθα:

ΒΗΜΑ 1) Θέτουμε ως $Z(0) = 1$ την τιμή του προεξοφλητικού παράγοντα Libor κατά τη χρονική στιγμή της αποτίμησης και δημιουργούμε δύο κενές λίστες, τις SP και LD.

ΒΗΜΑ 2) Για κάθε ημερομηνία πληρωμής ασφαλίστρου από την ημερομηνία αποτίμησης μέχρι τη λήξη της σύμβασης, δηλαδή για t από 0,25 έως 4,25 με βήμα 0,25 , επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία εύρεσης της πιθανότητας επιβίωσης και του προεξοφλητικού παράγοντα Libor. Θέτουμε ως $[t]$ το ακέραιο μέρος του χρόνου t και η πιθανότητα επιβίωσης δίνεται ως:

$$SP_t = S([t] + 1) \cdot e^{-h \cdot ([t]+1) \cdot (t-[t])},$$

ενώ ο προεξοφλητικός παράγοντας Libor υπολογίζεται μέσω της γραμμικής παρεμβολής ως εξής:

$$LD_t = Z([t]) + \big(Z([t] + 1) - Z([t])\big) \cdot (t - [t]).$$

Ο κώδικας και τα αποτελέσματα του αλγορίθμου στο Mathematica δίνονται ακολούθως:

```
Z[[0]]=1;j=0;SP={};LD={};
Do[y=Floor[t];
 SP0=S[[y+1]]*Exp[-h[[y+1]]*(t-y)];(*Survival Probabil-
ity*)
 LD0=Z[[y]]+(Z[[y+1]]-Z[[y]])*(t-y);(*Libor Discount Fac-
tor*)
 AppendTo[SP,SP0];AppendTo[LD,LD0];
 Print[{t,SP0,LD0}]
 ,{t,0.25,4.25,0.25}]
SP[[0]] = 1;

{0.25,0.995012,0.994927}
{0.5,0.99005,0.989854}
{0.75,0.985111,0.984782}
{1.,0.980198,0.979709}
{1.25,0.974228,0.973877}
{1.5,0.968294,0.968044}
{1.75,0.962397,0.962212}
{2.,0.956535,0.95638}
{2.25,0.949358,0.947695}
{2.5,0.942234,0.93901}
{2.75,0.935164,0.930325}
{3.,0.928147,0.921641}
{3.25,0.920061,0.912252}
{3.5,0.912045,0.902864}
{3.75,0.904099,0.893475}
{4.,0.896222,0.884087}
{4.25,0.886333,0.875569}
```

Για κάθε ημερομηνία πληρωμής ασφαλίστρου βρέθηκαν οι πιθανότητες επιβίωσης. οι οποίες δίνονται στη δεύτερη στήλη παραπάνω καθώς και οι προεξοφλητικοί παράγοντες Libor, οι οποίοι δίνονται στην τρίτη στήλη. Μέχρι στιγμής έχουν προκύψει κάποια αποτελέσματα τα οποία είναι άξια αναφοράς. Αρχικά, αξίζει να παρατηρηθεί ότι η αύξηση των τιμών των spread της αγοράς έχει ως συνέπεια την αύξηση του ρυθμού κινδύνου (hazard rate) με την πάροδο του χρόνου. Επίσης, αν λάβουμε υπόψη το γεγονός ότι το spread της σύμβασης έχει καθοριστεί στα $200bp$, τότε γίνεται κατανοητό ότι η αξία της σύμβασης έχει μειωθεί, καθώς η αγορά είναι πρόθυμη να πληρώσει στο $1o$ έτος μετά τη σύναψη της σύμβασης $120bp$, στο $2o$ έτος $133bp$, στο $3o$ έτος $148bp$, στο $4o$ έτος $162bp$ και στο $5o$ έτος $180bp$. Αυτό σημαίνει πως η αντίληψη των επενδυτών, η οποία αντικατοπτρίζεται από τα δεδομένα της αγοράς, έχει βελτιωθεί για την οντότητα αναφοράς που πραγματεύεται η σύμβαση CDS.

Τέλος, η τιμολόγηση της σύμβασης CDS ολοκληρώνεται με την εύρεση της παρούσας αξίας του Contingent leg, της $RPV01$, του Breakeven spread καθώς και της τρέχουσας αξίας mark-to-market. Τα αποτελέσματα αυτά τα βρίσκουμε ακολουθώντας τα βήματα του παρακάτω αλγορίθμου:

ΒΗΜΑ 1) Θέτουμε ως n το μέγεθος της λίστας SP, η οποία περιλαμβάνει τις πιθανότητες επιβίωσης για κάθε ημερομηνία πληρωμής ασφαλίστρου.

ΒΗΜΑ 2) Θέτουμε ως $PV_{Contingent\ leg} = (1-\delta) \cdot \sum_1^n LD(i) \cdot \big(SP(i-1) - SP(i)\big)$.

ΒΗΜΑ 3) Θέτουμε ως $RPV01 = \frac{1}{2} \cdot \sum_1^n 0{,}25 \cdot LD(i) \cdot \big(SP(i-1) - SP(i)\big)$.

ΒΗΜΑ 4) Θέτουμε ως $S_0 = \frac{PV_{Contingent\ leg}}{RPV01}$, το breakeven spread.

ΒΗΜΑ 5) Θέτουμε ως $MtM = 10.000.000 \cdot (S_0 - 0{,}02) \cdot RPV01$ την τρέχουσα αξία της σύμβασης CDS.

Ο κώδικας και τα αποτελέσματα του αλγορίθμου στο Mathematica δίνονται ακολούθως:

```
n=Length[SP];
PVcl=(1-δ)*Sum[LD[[i]]*(SP[[i-1]]-SP[[i]]),{i,1,n}];
RPV01=Sum[0.25*LD[[i]]*(SP[[i-1]]+SP[[i]])/2,{i,1,n}];
S0=PVcl/RPV01;
MtM=10000000*(S0-0.02)*RPV01;
Print["PV of Contingent leg is = ",PVcl]
Print["RPV01 is = ",RPV01]
Print["Breakeven Spread = ",S0]
Print["Mark to Market =", MtM]

PV of Contingent leg is = 0.0637574
RPV01 is = 3.80734
Breakeven Spread = 0.0167459
Mark to Market =-123893.
```

Όσο αφορά τα αποτελέσματα της τιμολόγησης, η παρούσα αξία του Contingent leg είναι ίση με: $\mathrm{PV}_{\mathrm{Contigent\ leg}} = 0.0637574$. Η αποζημίωση που αναμένεται να καταβάλλει ο πωλητής της προστασίας στον αγοραστή της προστασίας είναι ίση με την παρούσα αξία του Contingent leg επί την ονομαστική αξία του συμβολαίου. Δηλαδή, στο παράδειγμα θα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}\text{Αναμενόμενο Ποσό Αποζημίωσης} &= \text{PV}_{\text{Contigent leg}} \times \text{Ονομαστική αξία σύμβασης} \\ &= 0{,}0637574 \ \times 10.000.000\$ \\ &= 637.574\$\end{aligned}$$

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι η RPV01, δηλαδή η αναμενόμενη παρούσα αξία 1 μονάδας βάσης (bp) που καταβάλλεται για το Premium leg είτε μέχρι να συμβεί κάποιο πιστωτικό γεγονός, είτε μέχρι τη χρονική στιγμή λήξης της σύμβασης, ανάλογα με το πιο από τα δύο ενδεχόμενα θα συμβεί πρώτο είναι ίση με $\text{RPV01} = 3{,}80734$. Είναι γνωστό ότι η RPV01 εκφράζει την έννοια του κινδύνου, επειδή αναφέρεται στην παρούσα αξία μιας αβέβαιης σειράς πληρωμών ασφαλίστρων, οι οποίες εξαρτώνται από το αν θα λάβει χώρα κάποιο πιστωτικό γεγονός ή όχι. Συγκεκριμένα στο παράδειγμα είδαμε ότι η $\text{RPV01} = 3{,}80734$,δηλαδή ο αγοραστής της προστασίας της παρούσας σύμβασης θα πρέπει να καταβάλλει $3{,}80734\$$ για κάθε 1 μονάδα βάσης (bp) του εκτιμώμενου spread της αγοράς.

Σχετικά με το breakeven spread ή spread της αγοράς, γνωρίζουμε ότι πρόκειται ουσιαστικά για το ασφάλιστρο που τιμολογείται μία νέα σύμβαση CDS, κατά την ημερομηνία αποτίμησης. Δεδομένου ότι δεν υπάρχει αρχικό κόστος για τη σύναψη του νέου συμβολαίου, η αξία του συμβολαίου είναι μηδενική κατά την έναρξη της νέας σύμβασης. Δηλαδή, η παρούσα αξία του σταθερού σκέλους είναι ίση με την παρούσα αξία του ενδεχόμενου σκέλους. Στο δοθέν παράδειγμα το breakeven spread ή spread της αγοράς είναι ίσο με 167,459bp. Όπως είναι αναμενόμενο η τιμή του breakeven spread είναι ανάμεσα από τα spread της αγοράς για 4 και για 5 χρόνια (162bp και 180bp αντίστοιχα). Καθώς η ημερομηνία έναρξης της νέας σύμβασης είναι η 19η Δεκεμβρίου 2017 και η ημερομηνία λήξης της παραμένει η 20η Μαρτίου 2022, είναι φυσιολογικό το breakeven spread να είναι πιο κοντά στα 162bp, δηλαδή πιο κοντά στο spread της αγοράς για 4 χρόνια, καθώς η νέα σύμβαση έχει διάρκεια 4 έτη και 3 μήνες.

Τέλος, έχει υπολογιστεί η τρέχουσα αξία (mark-to-market) της σύμβασης, η οποία εκφράζει το ποσό που λαμβάνει ή που υποχρεούται να πληρώσει ο αγοραστής της προστασίας (αναλόγως αν η τιμή είναι θετική ή αρνητική αντίστοιχα), εάν ρευστοποιηθεί η σύμβαση. Η τρέχουσα αξία (market-to-market) μιας σύμβασης CDS, ονομαστικής αξίας 1$, στο χρόνο t δίνεται από τον τύπο :

$$\text{MtM}(t) = [s(t,T) - s(0,T)] \cdot \text{RPV01}(t,T),$$

όπου $s(t,T)$ είναι το τρέχον spread της αγοράς και $s(0,T)$ είναι το spread της αγοράς κατά τη χρονική στιγμή που συνάπτεται η σύμβαση. Επομένως η τρέχουσα αξία (mark-to-market) της σύμβασης θα είναι:

$$\text{Τρέχουσα αξία} = 10.000.000\$ \times (167{,}459 - 200) \times 0{,}01\% \times 3{,}80734 = -123.893\$$$

Επειδή, η τιμή ρευστοποίησης είναι αρνητική, έπεται ότι ο αγοραστής της προστασίας υποχρεούται να πληρώσει 123.893$ προκειμένου να κλείσει τη θέση του.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Χαρτοφυλάκια συμβάσεων ανταλλαγής πιστωτικού κινδύνου (Basket Credit Default Swaps)

3.1 Εισαγωγή στα Basket Credit Default Swaps

Τα CDS χαρτοφυλακίου άρχισαν να εμπορεύονται στην αγορά των πιστωτικών παραγώγων στα τέλη της δεκαετίας του 1990. Σύμφωνα με την έκθεση της British Bankers Association το 2006 (Barrett, Ewan, BBA Credit Derivatives Report, 2006), τα CDS χαρτοφυλακίου αποτελούν περίπου το 1,8% της αγοράς των πιστωτικών παραγώγων. Τα τελευταία χρόνια, ωστόσο, η αγορά των basket CDS έχει υποστεί συρρίκνωση, καθώς όλο και περισσότεροι επενδυτές στέφουν το ενδιαφέρον τους στα συνθετικά προϊόντα εξασφαλισμένων ομολόγων χρέους (synthetic CDO products). Παρόλα αυτά, τα CDS χαρτοφυλακίου συνεχίζουν να κατέχουν σημαντικό ρόλο στην αγορά των πιστωτικών παραγώγων, χάρη στα μοναδικά χαρακτηριστικά και τα πλεονεκτήματα που έχουν.

Τα basket CDS, αλλά και τα συνθετικά CDO's, ανήκουν σε μία κατηγορία πιστωτικών παραγώγων η οποία συνδέεται με τη συσχέτιση πιστωτικής αθέτησης (credit default correlation) μεταξύ διάφορων οντοτήτων αναφοράς. Όταν γίνεται λόγος για συσχέτιση πιστωτικής αθέτησης, εννοείται η συσχέτιση μεταξύ δύο ή περισσότερων οντοτήτων αναφοράς που αθετούν παράλληλα τις υποχρεώσεις τους, με μία πιθανότητα που είναι μεγαλύτερη, από ότι εάν ήταν ανεξάρτητες. Στο παρόν κεφάλαιο θα γίνει περιγραφή των μηχανισμών των κύριων προϊόντων συσχέτισης πιστωτικής αθέτησης, τα οποία είναι τα basket CDS.

3.2 Οι μηχανισμοί των basket CDS

Οι συμβάσεις ανταλλαγής πιστωτικού κινδύνου επί ενός χαρτοφυλακίου (basket of CDS's) είναι παρόμοιες με τις απλές συμβάσεις ανταλλαγής πιστωτικού κινδύνου (vanilla CDS). Η μόνη διαφορά μεταξύ τους έγκειται στο γεγονός ότι το basket CDS αναφέρεται σε δύο ή περισσότερες οντότητες αναφοράς, ενώ το απλό CDS αναφέρεται σε μία μόνο οντότητα αναφοράς. Στην παρούσα εργασία θα γίνει εκτενής ανάλυση της κύριας κατηγορίας των basket CDS, η οποία είναι η $\mathrm{n}-$οστή αθέτηση σύμβασης (nth-to-default (nTD) CDS). Αυτό το συμβόλαιο ενεργοποιείται όταν επέλθει πιστωτικό γεγονός στη $\mathrm{n}-$οστή οντότητα αναφοράς. Τότε, ο πωλητής της προστασίας υποχρεούται να αποζημιώσει τον αγοραστή της προστασίας, ενώ δεν έχει αυτή την υποχρέωση εάν υπάρξουν πιστωτικά γεγονότα για τις πρώτες $\mathrm{n}-1$ οντότητες αναφοράς. Συνήθως το πλήθος των οντοτήτων αναφοράς σε μία σύμβαση basket CDS κυμαίνεται από $\mathrm{N}=5$ έως $\mathrm{N}=10$. Εάν το $\mathrm{n}=1$, δηλαδή το συμβόλαιο ενεργοποιείται όταν επέλθει πιστωτικό γεγονός σε μία οντότητα αναφοράς, τότε το συμβόλαιο καλείται first-to-default (FTD) basket και είναι το πιο σύνηθες συμβόλαιο που συναντάται στα basket CDS's. Αν το $\mathrm{n}=2$, τότε το συμβόλαιο καλείται second-to-default

(STD), κ.ο.κ. Το σύνολο των οντοτήτων αναφοράς σε ένα basket CDS επιλέγεται κατά τη σύναψη του συμβολαίου και παραμένει σταθερό καθ' όλη τη διάρκειά του. Η μόνη εξαίρεση αφορά οντότητες αναφοράς στο καλάθι οι οποίες συγχωνεύονται και τότε μία νέα οντότητα αναφοράς μπορεί να εισαχθεί στο καλάθι.

Όπως και το απλό CDS έτσι και το basket CDS αποτελείται από δύο σκέλη συναλλαγών: το σταθερό σκέλος (fixed leg ή premium leg) και το κυμαινόμενο ή ενδεχόμενο σκέλος (floating leg ή protection leg ή contingent leg). Το σταθερό σκέλος, το οποίο αναφέρεται στις πληρωμές του ασφαλίστρου από τον αγοραστή της προστασίας στον πωλητή της, καταβάλλεται συνήθως σε τριμηνιαία βάση μέχρι τη λήξη T της σύμβασης ή μέχρι τη χρονική στιγμή που επέρχεται το $n -$ οστό πιστωτικό γεγονός, όποιο από τα δύο συμβεί πρώτο. Το σταθερό spread της nth-to-default σύμβασης χαρτοφυλακίου ορίζεται ως S_n.

Όσο αφορά το ενδεχόμενο σκέλος, το οποίο αναφέρεται στην αποζημίωση για το nth-to-default basket από τον πωλητή της προστασίας στον αγοραστή της, ενεργοποιείται μετά την έλευση του $n -$ οστού πιστωτικού συμβάντος, υπό τον όρο ότι επέρχεται πριν από τη λήξη T της σύμβασης. Επίσης, οι N οντότητες αναφοράς στο καλάθι θα συμβολίζονται με $i = 1,2,\dots,N$ και ορίζεται ως $i(n)$ η $n -$ οστή οντότητα αναφοράς, η οποία αθετεί τις υποχρεώσεις της. Υποθέτοντας ότι η ονομαστική αξία της σύμβασης είναι 1$, το μέγεθος της αποζημίωσης μετά το $n -$ οστό πιστωτικό γεγονός θα είναι ίσο με $\left(1 - \delta_{i(n)}\right)$, όπου το $\delta_{i(n)}$ είναι η αναμενόμενη τιμή του ποσοστού ανάκτησης που σχετίζεται με την $i(n)$ οντότητα αναφοράς. Ακολουθεί ένα τεχνητό παράδειγμα για την καλύτερη κατανόηση των μηχανισμών του basket CDS.

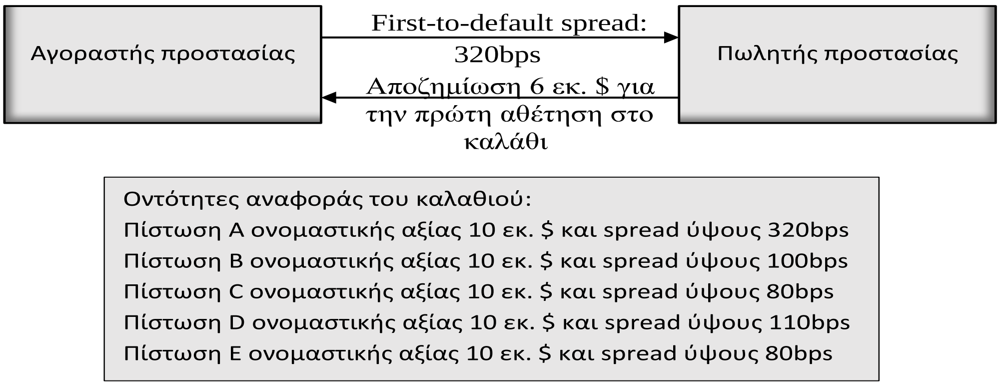
Παράδειγμα:

Ας υποθέσουμε ότι συνάπτεται μία 5-ετής σύμβαση ενός first-to-default basket CDS, η οποία αποτελείται από 5 οντότητες αναφοράς. Η ονομαστική αξία της σύμβασης είναι 10.000.000$ και όλες οι οντότητες αναφοράς έχουν το ίδιο ποσοστό ανάκτησης, ίσο με 40%.[9]

Στην παρακάτω εικόνα δίνονται τα επιμέρους 5-ετή CDS spreads, ξεχωριστά για κάθε μία οντότητα αναφοράς στο καλάθι.

[9] Τα καλάθια στα οποία όλες οι οντότητες αναφοράς έχουν το ίδιο ποσοστό ανάκτησης δ, ονομάζονται καλάθια ομοιογενούς απώλειας (homogenous loss baskets),ενώ τα καλάθια στα οποία οι οντότητες αναφοράς έχουν διαφορετικό ποσοστό ανάκτησης ονομάζονται καλάθια ανομοιογενούς απώλειας (inhomogenous loss baskets)

Εικόνα 3.1



Παρατηρούμε ότι το spread του first-to-default basket είναι τρεις φορές μεγαλύτερο από το μέσο spread των οντοτήτων αναφοράς που υπάρχουν στο καλάθι. Αυτό οφείλεται στο γεγονός πως η πιθανότητα να επέλθει ένα πιστωτικό γεγονός εντός αυτού του χαρτοφυλακίου είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα να επέλθει πιστωτικό γεγονός σε μία μόνο οντότητα αναφοράς ξεχωριστά. Επομένως, ο αγοραστής της προστασίας είναι διατεθειμένος να καταβάλλει μεγαλύτερο spread για το χαρτοφυλάκιο, σε σχέση με το spread για κάθε σύμβαση CDS για κάθε οντότητας και μάλιστα μεγαλύτερο από το μέγιστό τους. Όμως επειδή δεν προστατεύεται για όλες τις οντότητες αναφοράς, αλλά μόνο για μία (εφόσον η σύμβαση αφορά first-to-default basket), το spread της σύμβασης θα είναι μικρότερο από το άθροισμα των spread των συμβάσεων CDS όλων των οντοτήτων αναφοράς που υπάρχουν στο καλάθι. Δηλαδή, ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\max(\text{CDS spread ξεχωριστά}) \leq \text{first} - \text{to} - \text{default spread} \leq$$
$$\leq \sum (\text{CDS spread ξεχωριστά})$$

Το spread μιας σύμβασης basket CDS εξαρτάται από το είδος της σύμβασης που συνάπτεται κάθε φορά. Εάν η σύναψη αφορά μία first-to-default (FTD) σύμβαση, το spread θα είναι μεγαλύτερο από το αντίστοιχο spread μίας σύμβασης second-to-default (STD) με τις ίδιες οντότητες αναφοράς. Παρομοίως, το spread μιας σύμβασης STD θα είναι μεγαλύτερο από το αντίστοιχο spread μίας σύμβασης third-to-default, κ.ο.κ. Δηλαδή, στις nth-to-default συμβάσεις, όσο αυξάνεται το n τόσο τα spread των αντίστοιχων συμβάσεων μειώνονται, υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχουν οι ίδιες οντότητες αναφοράς σε κάθε μία από τις συμβάσεις. Η συνέπεια αυτή δεν οφείλεται στο γεγονός ότι το καλάθι έχει αυξήσει το μέγεθος του πιστωτικού κινδύνου στον οποίο εκτίθεται ο επενδυτής, αλλά οφείλεται στο γεγονός ότι η πιθανότητα να συμβούν $n + 1$ αθετήσεις στο καλάθι, πρέπει να είναι ίση ή μικρότερη από την πιθανότητα να συμβούν n αθετήσεις. Προφανώς, η πιθανότητα να υπάρξουν n αθετήσεις στο καλάθι, στα πλαίσια της ωρίμανσης της σύμβασης, εξαρτάται από την τάση των οντοτήτων αναφοράς να αθετούν ταυτόχρονα τις υποχρεώσεις τους. Με άλλα λόγια, η πιθανότητα να υπάρξουν n αθετήσεις στο καλάθι συνδέεται με την εξάρτηση των αθετήσεων των οντοτήτων αναφοράς του καλαθιού. Στη συνέχεια, θα εξεταστεί η επίδραση που έχει η εξάρτηση των αθετήσεων των οντοτήτων αναφοράς μίας σύμβασης basket CDS, στην πιθανότητα ενεργοποίησης της σύμβασης.

3.3 Basket CDS και εξάρτηση αθετήσεων των οντοτήτων αναφοράς

Για να γίνει κατανοητή η σχέση μεταξύ της πιθανότητας ενεργοποίησης των συμβάσεων basket CDS και της εξάρτησης των αθετήσεων των οντοτήτων αναφοράς από τις οποίες αποτελείται η σύμβαση, θα ξεκινήσουμε θεωρώντας μία σύμβαση η οποία αποτελείται από δύο οντότητες αναφοράς, έστω A και B. Συμβολίζουμε τους χρόνους αθέτησης των οντοτήτων αναφοράς A και B, ως τ_A και τ_B αντίστοιχα και ορίζουμε τις πιθανότητες αθέτησής τους καθ' όλη τη διάρκεια της σύμβασης ως εξής:

$$P_A(T) = \mathbb{E}\left[I_{\tau_A \le T}\right] = 1 - S_A(T) \text{ και}$$
$$P_B(T) = \mathbb{E}\left[I_{\tau_B \le T}\right] = 1 - S_B(T),$$

όπου $S_A(T) = S_A(0,T)$ είναι η πιθανότητα επιβίωσης της οντότητας αναφοράς A από το χρόνο 0 στο χρόνο T, $S_B(T) = S_B(0,T)$ είναι η πιθανότητα επιβίωσης της οντότητας αναφοράς B από το χρόνο 0 στο χρόνο T. Οι δύο αυτές πιθανότητες μπορούν να εξαχθούν από τις τιμές των spread της αγοράς των CDS, μέσω της μεθόδου bootstrap. Επίσης ορίζουμε την πιθανότητα κοινής αθέτησης των οντοτήτων αναφοράς A και B ως εξής:

$$P_{AB}(T) = \mathbb{E}\left[I_{\tau_A \le T}\, I_{\tau_B \le T}\right]$$

Αυτή είναι η πιθανότητα όπου και η οντότητα αναφοράς A και η οντότητα αναφοράς B αθετούν τις υποχρεώσεις τους πριν από τη λήξη T της σύμβασης. Εάν ορίσουμε ως $S_{AB}(T)$ την πιθανότητα να επιβιώσουν και οι δύο οντότητες αναφοράς μέχρι τη λήξη T της σύμβασης, τότε θα ισχύει η ακόλουθη σχέση:

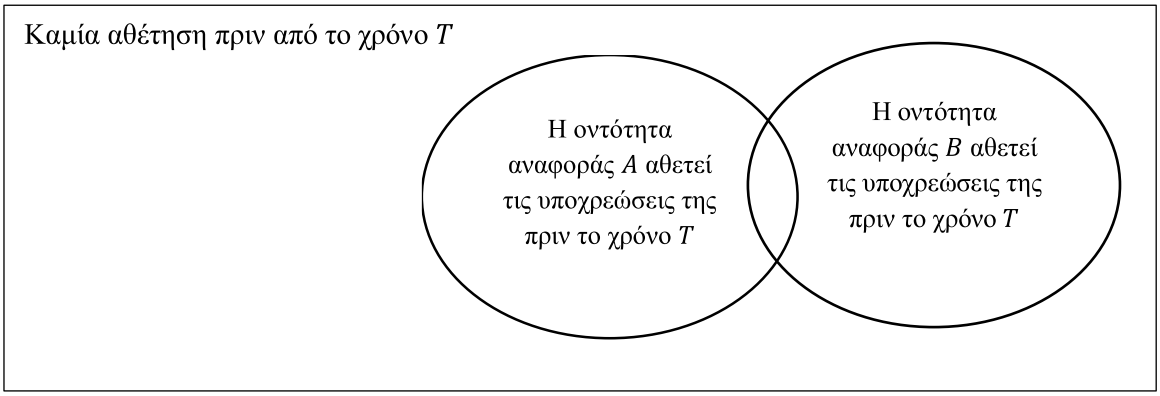
$$S_{AB}(T) = 1 - P_A(T) - P_B(T) + P_{AB}(T) = \mathbb{E}\left[I_{\tau_A > T}\, I_{\tau_B > T}\right]$$

Η first-to-default σύμβαση CDS ενεργοποιείται όταν υπάρξει μία τουλάχιστον αθέτηση, από τις οντότητες αναφοράς που υπάρχουν στο καλάθι, πριν από τη λήξη T της σύμβασης. Η πιθανότητα αυτή δίνεται από τον τύπο:

$$P_{FTD}(T) = 1 - \mathbb{E}\left[I_{\tau_A > T}\, I_{\tau_B > T}\right] = P_A(T) + P_B(T) - P_{AB}(T)$$

Όπως φαίνεται και από το παρακάτω διάγραμμα Venn, η πιθανότητα υπάρξει μία τουλάχιστον αθέτηση, από τις οντότητες αναφοράς που υπάρχουν στο καλάθι δίνεται, από την πιθανότητα της ένωσης των δύο συνόλων του διαγράμματος.

Εικόνα 3.2



Παρομοίως η second-to-default σύμβαση ενεργοποιείται όταν υπάρχουν δύο τουλάχιστον αθετήσεις οντοτήτων αναφοράς στο καλάθι, πριν από τη λήξη T της σύμβασης. Στο παράδειγμα, η πιθανότητα αυτή θα είναι ίση με:

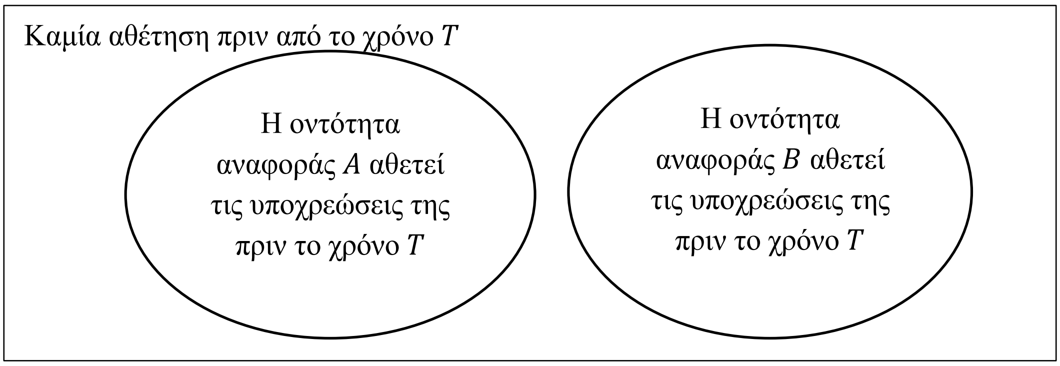
$$\mathrm{P_{STD}(T) = P_{AB}(T)},$$

δηλαδή είναι ίση με την πιθανότητα της τομής των δύο παραπάνω συνόλων της εικόνας.

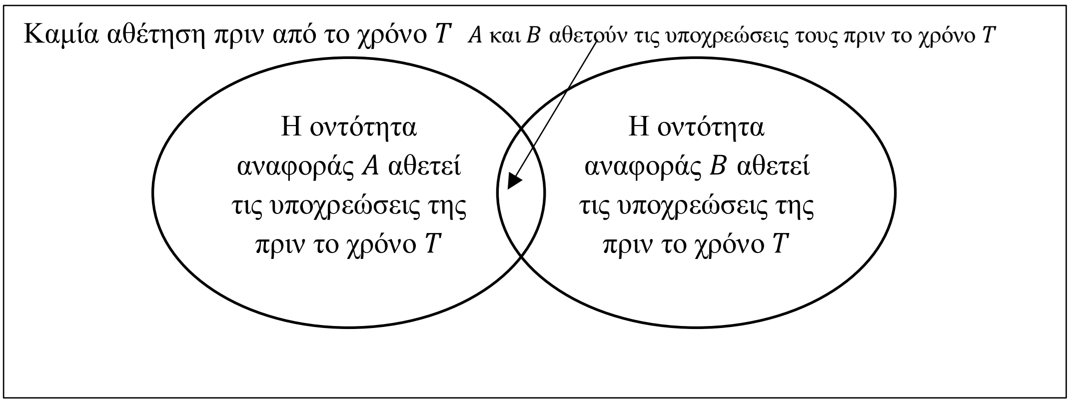
Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, τόσο η $\mathrm{P_A(T)}$ όσο και η $\mathrm{P_B(T)}$ μπορούν να προσδιοριστούν από τις τιμές των spread της αγοράς των CDS. Ωστόσο, τα spreads των FTD και STD συμβάσεων εκτίθενται στην κοινή πιθανότητα αθέτησης $\mathrm{P_{AB}(T)}$. Είναι σαφές λοιπόν, ότι η πιθανότητα ενεργοποίησης μιας σύμβασης basket CDS, θα είναι συνάρτηση του βαθμού εξάρτησης μεταξύ των οντοτήτων αναφοράς του καλαθιού. Ως εκ τούτου, θεωρούμε τρεις σημαντικές περιπτώσεις εξάρτησης μεταξύ των οντοτήτων αναφοράς A και B, οι οποίες παρουσιάζονται στην παρακάτω εικόνα με τη μορφή διαγράμματος Venn:

Εικόνα 3.3: Περιπτώσεις εξάρτησης μεταξύ οντοτήτων αναφοράς.

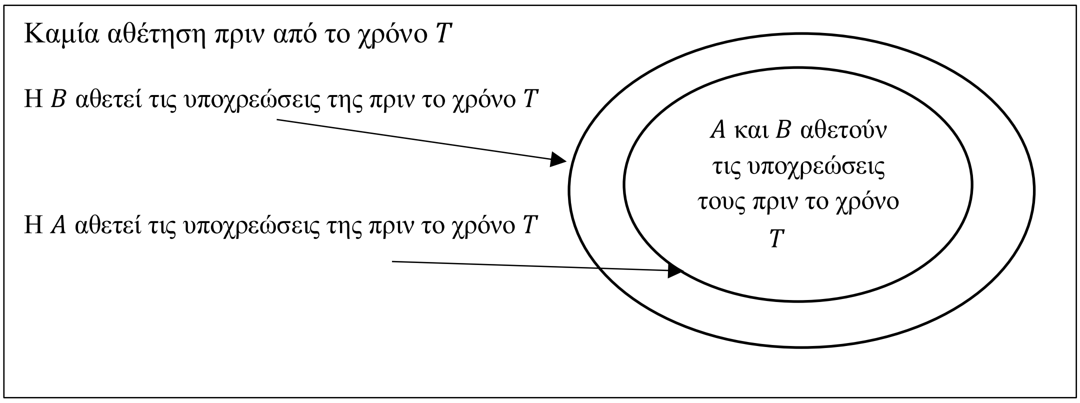
1η Περίπτωση: Αρνητική εξάρτηση



$2^η$ Περίπτωση: Ανεξαρτησία



$3^η$ Περίπτωση: Θετική εξάρτηση



1) <u>Αρνητική εξάρτηση:</u> Αυτή η περίπτωση θα ισχύει όταν η πιθανότητα κοινής αθέτησης των οντοτήτων αναφοράς Α και Β, είναι ίση με:

$$P_{AB}(T) = \max[P_A(T) + P_B(T) - 1{,}0]$$

Εάν υποθέσουμε ότι οι αθετήσεις των οντοτήτων αναφοράς Α και Β είναι αμοιβαίως αποκλειόμενα ενδεχόμενα, δηλαδή ισχύει $P_{AB}(T) = 0$ και $P_A(T) + P_B(T) < 1$, τότε οι πιθανότητες ενεργοποίησης των FTD και STD συμβάσεων θα είναι:

$$P_{FTD}(T) = P_A(T) + P_B(T) - P_{AB}(T) = P_A(T) + P_B(T) \text{ και}$$

$$P_{STD}(T) = P_{AB}(T) = 0$$

Εάν ισχύει ότι $P_A(T) + P_B(T) \geq 1$, τότε οι αθετήσεις των οντοτήτων αναφοράς Α και Β δε θα είναι αμοιβαίως αποκλειόμενα ενδεχόμενα και επίσης θα ισχύει ότι η πιθανότητα να συμβεί τουλάχιστον μία αθέτηση πριν το χρόνο λήξης Τ της σύβασης θα είναι ίση με 1. Δηλαδή, θα ισχύει ότι:

$$P_{FTD}(T) = 1 \Rightarrow P_A(T) + P_B(T) - P_{AB}(T) = 1$$

$$\Rightarrow P_{AB}(T) = P_A(T) + P_B(T) - 1$$

Επομένως η πιθανότητα ενεργοποίησης της STD σύμβασης θα είναι:

$$P_{STD}(T) = P_{AB}(T) = P_A(T) + P_B(T) - 1$$

2) Ανεξαρτησία: Σε αυτή την περίπτωση η πιθανότητα κοινής αθέτησης των οντοτήτων αναφοράς A και B είναι ίση με $P_{AB}(T) = P_A(T) \cdot P_B(T)$. Οι πιθανότητες ενεργοποίησης των FTD και STD συμβάσεων θα είναι:

$$P_{FTD}(T) = P_A(T) + P_B(T) - P_{AB}(T) = P_A(T) + P_B(T) - P_A(T) \cdot P_B(T) \text{ και}$$

$$P_{STD}(T) = P_{AB}(T) = P_A(T) \cdot P_B(T)$$

3) Θετική εξάρτηση: Στην περίπτωση αυτή, όπως προκύπτει και από το διάγραμμα Venn, θα ισχύει ότι η πιθανότητα κοινής αθέτησης των οντοτήτων αναφοράς A και B θα είναι ίση με: $P_{AB}(T) = \min[P_A(T), P_B(T)]$. Δηλαδή, κάθε φορά που η οντότητα αναφοράς με την καλύτερη πιστοληπτική ικανότητα αθετεί τις υποχρεώσεις της, τότε και η οντότητα αναφοράς με τη χαμηλότερη πιστοληπτική ικανότητα θα αθετεί τις υποχρεώσεις της. Επομένως, οι πιθανότητες ενεργοποίησης των FTD και STD συμβάσεων θα είναι:

$$P_{FTD}(T) = P_A(T) + P_B(T) - P_{AB}(T) = \max[P_A(T), P_B(T)] \text{ και}$$

$$P_{STD}(T) = P_{AB}(T) = \min[P_A(T), P_B(T)].$$

Για να υπολογιστεί η αναμενόμενη απώλεια, σε κάθε μία από τις περιπτώσεις, απλά πολλαπλασιάζουμε την πιθανότητα ενεργοποίησης του καλαθιού που έχουμε με την αντίστοιχη αναμενόμενη ζημία, η οποία είτε είναι $(1 - \delta_A)$ είτε $(1 - \delta_B)$, αναλόγως με το ποια είναι η $n -$ οστή οντότητα αναφοράς που αθετεί τις υποχρεώσεις της.

Από την παραπάνω ανάλυση μπορούν να εξαχθούν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- Η πιθανότητα ενεργοποίησης ενός FTD basket μειώνεται όσο αυξάνεται η εξάρτηση μεταξύ των οντοτήτων αναφοράς που υπάρχουν στο καλάθι, από $P_A(T) + P_B(T)$, σε $\max[P_A(T), P_B(T)]$
- Η πιθανότητα ενεργοποίησης ενός STD basket αυξάνεται όσο αυξάνεται η εξάρτηση μεταξύ των οντοτήτων αναφοράς που υπάρχουν στο καλάθι, από 0, σε $\min[P_A(T), P_B(T)]$.

Στη συνέχεια, θα ασχοληθούμε με την εύρεση των spreads των basket CDS για τις παραπάνω περιπτώσεις που εξετάσαμε. Ωστόσο, για να συμβεί αυτό, θα πρέπει να αρχικά να διαμορφωθούν οι πιθανότητες ενεργοποίησης λαμβάνοντας υπόψιν τις χρημοτοροές που αφορούν το σκέλος προστασίας και το ενδεχόμενο σκέλος. Για την επίτευξη αυτού του σκοπού, είναι σκόπιμη η εισαγωγή της συνάρτησης επιβίωσης καθώς και της καμπύλης επιβίωσης του καλαθιού.

3.4 Συνάρτηση και καμπύλη επιβίωσης ενός Basket CDS

Για την τιμολόγηση ενός nth-to-default basket ομοιογενούς απώλειας, θα ξεκινήσουμε ορίζοντας μία διαδικασία $n(t)$, η οποία θα μετράει τον αριθμό των αθετήσεων που έχουν συμβεί σε ένα καλάθι το οποίο περιέχει N οντότητες αναφοράς, από τη χρονική στιγμή έναρξης της σύμβασης έως τη χρονική στιγμή t. Στην περίπτωση του nth-to-default basket, η πιθανότητα ενεργοποίησης της σύμβασης, από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή λήξης T, θα είναι ίση με την πιθανότητα να αθετήσουν τις υποχρεώσεις τους τουλάχιστον n οντότητες αναφοράς στο καλάθι. Δηλαδή, η πιθανότητα ενεργοποίησης θα είναι:

$$P(n(T) > n) = 1 - P(n(T) < n),$$

όπου $P(n(T) < n)$ είναι η συνάρτηση επιβίωσης του basket CDS. Η καμπύλη επιβίωσης (survival curve) του basket CDS είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης επιβίωσης $P(n(T) < n)$ συναρτήσει του t, η οποία είναι μία φθίνουσα συνάρτηση.

Έχοντας ορίσει τη συνάρτηση και την καμπύλη επιβίωσης του nth-to-default basket CDS, είμαστε πλέον σε θέση να δώσουμε τον γενικό τύπο για την παρούσα αξία του σταθερού, αλλά και του ενδεχόμενου σκέλους της σύμβασης. Στο παρόν κεφάλαιο θα δοθούν οι γενικοί τύποι, ενώ στο επόμενο κεφάλαιο θα δοθούν αναλυτικότεροι τύποι καθώς θα υπάρχει συγκεκριμένη μοντελοποίηση για τη συνάρτηση επιβίωσης.

Ορίζουμε ως:

- S_n: το σταθερό spread της nth-to-default σύμβασης χαρτοφυλακίου
- $t = 0$: η χρονική στιγμή έναρξης της σύμβασης, η οποία είναι και η χρονική στιγμή της αποτίμησης
- T: η χρονική στιγμή λήξης της προστασίας
- T_j: οι ημερομηνίες πληρωμής των ασφαλίστρων από τον αγοραστή στον πωλητή της προστασίας, για $j = 1, \dots, N_T$. Θέτουμε ως $T_0 = 0$ και $T_N = T$.
- $\Delta(T_{j-1}, T_j)$: το κλάσμα το οποίο έχει ως αριθμητή τη διαφορά των ημερών μεταξύ των ημερομηνιών πληρωμής των ασφαλίστρων T_{j-1} και T_j και ως παρονομαστή το 360
- $Z(0, T)$: ο προεξοφλητικός παράγοντας Libor για την προεξόφληση μελλοντικών ταμειακών ροών τη χρονική στιγμή 0

➢ Όπως στην απλή σύμβαση CDS, έτσι και σε μία σύμβαση basket CDS η προκαθορισμένη πληρωμή των ασφαλίστρων δίνεται από τον υπολογισμό των αναμενόμενων ταμειακών ροών ως εξής:

$$V_{Fee}(0,T) = \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{N_T} S_n \cdot \Delta(T_{j-1}, T_j) \cdot Z(0, T_j) \cdot I_{T_j<\tau}\right]$$

Θεωρείται ότι η προσδοκία είναι υπολογισμένη βάσει κατάλληλου μέτρου ουδέτερης πιθανότητας. Κάθε μία πληρωμή ασφαλίστρου, προεξοφλείται με τον κατάλληλο προεξοφλητικό παράγοντα $Z(0, T_j)$ και σταθμίζεται με τη δείκτρια συνάρτηση $I_{T_j<\tau}$. Η δείκτρια συνάρτηση $I_{T_j<\tau}$ αντιπροσωπεύει το ενδεχόμενο πραγματοποίησης της πληρωμής κατά τη χρονική στιγμή T_j , η οποία δίνεται από την τιμή της συνάρτησης επιβίωσης τη χρονική στιγμή T_j, δηλαδή $P(n(T_j) < n)$. Για να υπολογιστεί αυτή η αναμενόμενη τιμή, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, χρειάζεται να υποθέσουμε ότι τα επιτόκια και τα πιστωτικά γεγονότα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, επιτρέποντας με αυτό τον τρόπο να διαχωριστούν οι υπολογισμοί των αναμενόμενων τιμών. Σύμφωνα με αυτές τις υποθέσεις οι προκαθορισμένες πληρωμές υπολογίζονται να είναι:

$$V_{Fee}(0,T) = S_n \cdot \sum_{j=1}^{N_T} \Delta(T_{j-1}, T_j) \cdot Z(0, T_j) \cdot P(n(T_j) < n)$$

Δηλαδή, η προκαθορισμένη πληρωμή των ασφαλίστρων καθορίζεται ως το άθροισμα των πληρωμών ασφαλίστρου $S_n \cdot \Delta(T_{j-1}, T_j)$, οι οποίες είναι σταθμισμένες με την πιθανότητα επιβίωσης των ημερομηνιών πληρωμής, προεξοφλημένες στη παρούσα χρονική στιγμή που γίνεται η αποτίμηση, έχοντας χρησιμοποιήσει το επιτόκιο άνευ κινδύνου.

- Για τον υπολογισμό της δεύτερης συνιστώσας του Premium leg, η οποία αφορά τα συσσωρευμένα ασφάλιστρα (accrued payments) από την τελευταία ημερομηνία καταβολής ασφαλίστρου μέχρι τη χρονική στιγμή της αθέτησης $\tau \in [T_{j-1}, T_j]$, θα χρησιμοποιηθεί ο ανάλογος τύπος που εφαρμόστηκε και στην απλή σύμβαση CDS:

$$V_{Accrued}(0,T) = \frac{S_n}{2} \cdot \sum_{j=1}^{N} \Delta(T_{j-1}, T_j) \cdot Z(0, T_j) \cdot [P(n(T_{j-1}) < n) - P(n(T_j) < n)]$$

Έχοντας λάβει υπόψη τον υπολογισμό και των δύο συνιστωσών από τις οποίες αποτελείται το Premium leg, η συνολική παρούσα αξία του δίνεται από:

$$\begin{aligned}
&PV_{Premium\ leg}(0,T) = V_{Fee}(0,T) + V_{Accrued}(0,T) \\
&= S_n \cdot \sum_{j=1}^{N_T} \Delta(T_{j-1}, T_j) \cdot Z(0, T_j) \cdot\ P(n(T_j) < n) + \\
&+ \frac{S_n}{2} \cdot \sum_{j=1}^{N_T} \Delta(T_{j-1}, T_j) \cdot Z(0, T_j) \cdot [P(n(T_{j-1}) < n) - P(n(T_j) < n)] \\
&= S_n \cdot RPV01(0,T),
\end{aligned}$$

όπου:

$$\mathrm{RPV01}(0,T) = \frac{1}{2}\cdot\sum_{j=1}^{N}\Delta(T_{j-1},T_j)\cdot Z(0,T_j)\cdot\left[P\left(n(T_{j-1})<n\right)+P\left(n(T_j)<n\right)\right].$$

- Για την παρούσα αξία του ενδεχόμενου σκέλους θα χρησιμοποιηθεί ο παρακάτω γενικός τύπος που εφαρμόστηκε και στην απλή σύμβαση CDS:

$$PV_{\text{Contigent leg}}(0,T) = (1-\delta)\int_0^T Z(0,s)\cdot\left(-dP(n(s)<n)\right).$$

Ο λόγος που δόθηκαν οι γενικοί τύποι της παρούσας αξίας του σταθερού και του ενδεχόμενου σκέλους, είναι για να καταφέρουμε να υπολογίσουμε τα spreads των basket CDS για κάθε μία από τις περιπτώσεις εξάρτησης αθετήσεων των οντοτήτων αναφοράς, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

3.5 Basket Spreads και εξάρτηση αθετήσεων των οντοτήτων αναφοράς

Ας υποθέσουμε ξανά ότι η σύμβαση, ωρίμανσης T, αποτελείται από δύο οντότητες αναφοράς Α και Β οι οποίες έχουν το ίδιο ποσοστό ανάκτησης δ. Επίσης θα θεωρήσουμε και ξεχωριστά δύο απλές συμβάσεις CDS, ωρίμανσης T, όπου η μία θα αποτελείται από την οντότητα αναφοράς Α και η άλλη από την οντότητα αναφοράς B. Οι δύο αυτές απλές συμβάσεις θα έχουν το ίδιο ποσοστό ανάκτησης δ και s_A, s_B είναι τα σταθερά spread των επιμέρους απλών συμβάσεων για την οντότητα αναφοράς Α και Β αντίστοιχα, που πραγματεύονται σε χρόνο $t = 0$ και ωριμάζουν κατά τη λήξη Τ της καθεμίας σύμβασης.

Γνωρίζουμε ότι το breakeven spread των απλών συμβάσεων CDS υπολογίζεται εάν εξισωθούν οι σχέσεις που ορίζουν την παρούσα αξία του σταθερού και του ενδεχόμενου σκέλους κατά την έναρξη της ισχύος της σύμβασης, δηλαδή για $t = 0$. Επομένως για την απλή σύμβαση CDS που αποτελείται από την οντότητα αναφοράς Α έχουμε ότι:

$$(1-\delta)\cdot\int_0^T Z(0,s)\cdot dS_A(s) + s_A(0,T)\cdot \mathrm{RPV01}_A(0,T) = 0 \qquad (1)$$

ενώ για την απλή σύμβαση CDS που αποτελείται από την οντότητα αναφοράς Β:

$$(1-\delta)\cdot\int_0^T Z(0,s)\cdot dS_B(s) + s_B(0,T)\cdot \mathrm{RPV01}_B(0,T) = 0. \qquad (2)$$

Παρομοίως τα breakeven spreads για τα first-to-default και second-to-default baskets υπολογίζονται μέσω των παρακάτω τύπων, όπου για λόγους απλότητας θεωρούμε

$$S^n(t) = P(n(t) < n),$$

και τότε έχουμε:

$$(1-\delta)\int_0^T Z(0,s)\cdot dS^1(s) + \frac{S_1(0,T)}{2}\cdot\sum_{j=1}^{N_T}\Delta\left(T_{j-1},T_j\right)\cdot Z\left(0,T_j\right)\cdot\left[S^1\left(T_{j-1}\right)+S^1\left(T_j\right)\right] = 0 \quad (3)$$

και

$$(1-\delta)\int_0^T Z(0,s)\cdot dS^2(s) + \frac{S_2(0,T)}{2}\cdot\sum_{j=1}^{N_T}\Delta\left(T_{j-1},T_j\right)\cdot Z\left(0,T_j\right)\cdot\left[S^2\left(T_{j-1}\right)+S^2\left(T_j\right)\right] = 0 \quad (4),$$

αντίστοιχα. Ας επανεξετάσουμε τώρα τα όρια εξάρτησης που συζητήσαμε νωρίτερα.

- Αρνητική εξάρτηση: Εάν υποθέσουμε ότι οι αθετήσεις των οντοτήτων αναφοράς A και B είναι αμοιβαίως αποκλειόμενα ενδεχόμενα, δηλαδή ισχύει:

$$P_{AB}(T) = 0 \text{ και}$$

$$P_A(T) + P_B(T) < 1 \Rightarrow S_A(t) + S_B(t) \geq 1,$$

τότε οι πιθανότητες ενεργοποίησης των FTD και STD συμβάσεων θα είναι:

$$P_{FTD}(T) = P_A(T) + P_B(T) - P_{AB}(T) = P_A(T) + P_B(T) \text{ και}$$

$$P_{STD}(T) = P_{AB}(T) = 0.$$

Επομένως, θα ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} S^1(t) &= P(n(t) < 1) = 1 - P_{FTD}(T) = 1 - \left(P_A(T) + P_B(T)\right) \\ &= 1 - \left(1 - S_A(t) + 1 - S_B(t)\right) \\ &= S_A(t) + S_B(t) - 1 \qquad (5) \end{aligned}$$

και

$$S^2(t) = P(n(t) < 2) = 1 - P_{STD}(T) = 1 - 0 = 1 \qquad (6)$$

Για την εύρεση του FTD spread αντικαθιστώντας τη σχέση (5) στην εξίσωση (3) έχουμε ότι:

$$(1-\delta)\int_0^T Z(0,s)\cdot d[S_A(s) + S_B(s) - 1] +$$

$$+\frac{S_1(0,T)}{2}\cdot\sum_{j=1}^{N_T}\Delta\left(T_{j-1},T_j\right)\cdot Z\left(0,T_j\right)\cdot\left[S_A\left(T_{j-1}\right)+S_B\left(T_{j-1}\right)-1+S_A\left(T_j\right)+S_B\left(T_j\right)-1\right]$$
$$=0,$$

από όπου προκύπτει ότι:

$$(1-\delta)\int_0^T Z(0,s)\cdot dS_A(s)+(1-\delta)\int_0^T Z(0,s)\cdot dS_B(s)+$$
$$+\frac{S_1(0,T)}{2}\cdot\sum_{j=1}^{N_T}\Delta\left(T_{j-1},T_j\right)\cdot Z\left(0,T_j\right)\cdot\left(S_A\left(T_{j-1}\right)+S_A\left(T_j\right)\right)+$$
$$+\frac{S_1(0,T)}{2}\cdot\sum_{j=1}^{N_T}\Delta\left(T_{j-1},T_j\right)\cdot Z\left(0,T_j\right)\cdot\left(S_B\left(T_{j-1}\right)+S_B\left(T_j\right)\right)-$$
$$-S_1(0,T)\sum_{j=1}^{N_T}\Delta\left(T_{j-1},T_j\right)\cdot Z\left(0,T_j\right)=0$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1) και (2) στην παραπάνω εξίσωση έχουμε ότι:

$$-s_A(0,T)\cdot RPV01_A(0,T)-s_B(0,T)\cdot RPV01_B(0,T)+$$
$$+S_1(0,T)\cdot RPV01_A(0,T)+S_1(0,T)\cdot RPV01_B(0,T)-$$
$$-PV01(0,T)=0$$

και επομένως

$$S_1(0,T)=\frac{s_A(0,T)\cdot RPV01_A(0,T)+s_B(0,T)\cdot RPV01_B(0,T)}{RPV01_A(0,T)+RPV01_B(0,T)-PV01(0,T)},$$

όπου το $PV01(0,T)=\sum_{j=1}^{N_T}\Delta\left(T_{j-1},T_j\right)\cdot Z\left(0,T_j\right)$ είναι το risk-free Libor.

Παρομοίως για την εύρεση του STD spread επειδή $S^2(t)=1$, θα έχουμε ότι $dS^2(t)=0$, επομένως αντικαθιστώντας στη σχέση (4) θα έχουμε ότι:

$$S_2(0,T)=0.$$

Αυτό αντικατοπτρίζει το γεγονός ότι στην περίπτωση ελάχιστης εξάρτησης, δεν μπορεί ποτέ να υπάρξουν δύο αθετήσεις πριν από τη λήξη T της σύμβασης και επομένως το καλάθι STD δεν ενεργοποιείται ποτέ.

- <u>Ανεξαρτησία:</u> Στη περίπτωση της ανεξαρτησίας ισχύει ότι οι πιθανότητες ενεργοποίησης των FTD και STD συμβάσεων θα είναι:

$$P_{FTD}(T)=P_A(T)+P_B(T)-P_A(T)\cdot P_B(T)\text{ και}$$

$$P_{STD}(T)=P_A(T)\cdot P_B(T).$$

Επομένως, θα ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} S^1(t) &= P(n(t) < 1) = 1 - P_{FTD}(T) \\ &= 1 - \big(P_A(T) + P_B(T) - P_A(T)\cdot P_B(T)\big) \\ &= 1 - \Big(1 - S_A(t) + 1 - S_B(t) - \big(1 - S_A(t)\big)\cdot\big(1 - S_B(t)\big)\Big) \\ &= S_A(t)\cdot S_B(t) \qquad (7) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} S^2(t) &= P(n(t) < 2) = 1 - P_{STD}(T) = 1 - P_A(T)\cdot P_B(T) \\ &= 1 - \Big(\big(1 - S_A(t)\big)\cdot\big(1 - S_B(t)\big)\Big) \\ &= S_A(t) + S_B(t) - S_A(t)\cdot S_B(t) \qquad (8) \end{aligned}$$

Για την εύρεση του FTD spread αντικαθιστώντας τη σχέση (7) στην εξίσωση (3) δεν προκύπτει κάποια ακριβής σχέση μεταξύ των spreads. Το μόνο που μπορούμε να γράψουμε κατά προσέγγιση είναι :

$$S_1(0,T) \simeq s_A(0,T) + s_B(0,T)$$

Παρομοίως για το STD spread δεν υπάρχει κάποια ακριβής σχέση που να το συνδέει με τα spreads των δύο απλών συμβάσεων CDS. Μία κατά προσέγγιση τιμή του STD spread είναι η ακόλουθη:

$$S_2(0,T) \simeq \frac{P_A(T)\cdot P_B(T)\cdot(1-\delta)}{T}$$

- Θετική εξάρτηση: Στη περίπτωση της μέγιστης εξάρτησης ισχύει ότι οι πιθανότητες ενεργοποίησης των FTD και STD συμβάσεων θα είναι:

$$P_{FTD}(T) = \max\big(P_A(T), P_B(T)\big) \text{ και}$$

$$P_{STD}(T) = \min\big(P_A(T), P_B(T)\big).$$

Επομένως, θα ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} S^1(t) &= P(n(t) < 1) = 1 - P_{FTD}(T) = 1 - \max\big(P_A(T), P_B(T)\big) \\ &= 1 - \max\big(1 - S_A(t), 1 - S_B(t)\big) \\ &= \min\big(S_A(t), S_B(t)\big) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} S^2(t) &= P(n(t) < 2) = 1 - P_{STD}(T) = 1 - \min\big(P_A(T), P_B(T)\big) \\ &= 1 - \min\big(1 - S_A(t), 1 - S_B(t)\big) \\ &= \max\big(S_A(t), S_B(t)\big). \end{aligned}$$

Επομένως, εάν υποθέσουμε ότι ισχύει $\mathrm{S_A(t) \geq S_B(t)}$ για κάθε $\mathrm{t \in [0,T]}$, τότε προφανώς το spread της σύμβασης CDS της B οντότητας αναφοράς, θα είναι υψηλότερο από το αντίστοιχο spread της σύμβασης CDS της A οντότητας αναφοράς, εφόσον η οντότητα αναφοράς B έχει χαμηλότερη πιθανότητα επιβίωσης από την οντότητα αναφοράς A, για κάθε $\mathrm{t \in [0,T]}$.

Για την εύρεση του FTD spread, όταν $\mathrm{S_A(t) \geq S_B(t)}$ (κατά τη μέγιστη εξάρτηση) θα έχουμε ότι $\mathrm{S^1(t) = \min\left(S_A(t), S_B(t)\right) = S_B(t)}$ και επομένως το FTD spread θα είναι ίδιο με το spread του απλού CDS της οντότητας B, δηλαδή:

$$\mathrm{S_1(0,T) = s_B(0,T)}$$

Παρομοίως ακολουθώντας την ίδια διαδικασία για την εύρεση του STD spread, θα έχουμε

$$\mathrm{S_2(0,T) = s_A(0,T).}$$

Τέλος, αν λάβουμε υπόψη μας και την περίπτωση όπου ισχύει $\mathrm{S_A(t) \leq S_B(t)}$ για κάθε $\mathrm{t \in [0,T]}$, τότε προφανώς το spread της σύμβασης CDS της A οντότητας αναφοράς, θα είναι υψηλότερο από το αντίστοιχο spread της σύμβασης CDS της B οντότητας αναφοράς, εφόσον η οντότητα αναφοράς A έχει χαμηλότερη πιθανότητα επιβίωσης από την οντότητα αναφοράς B, για κάθε $t \in [0,T]$. Χρησιμοποιώντας τις ανάλογες σχέσεις θα οδηγηθούμε στα ακόλουθα αποτελέσματα για το FTD και STD spread:

$$\mathrm{S_1(0,T) = s_A(0,T)} \text{ και } \mathrm{S_2(0,T) = s_B(0,T)}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα μπορούμε να δούμε τελικώς, ότι τα FTD και STD spreads (είτε ισχύει $S_A(t) \geq S_B(t)$, είτε $S_A(t) \leq S_B(t)$ για κάθε $t \in [0,T]$) όταν υπάρχει μέγιστη εξάρτηση μεταξύ των οντοτήτων αναφοράς, είναι:

$$\mathrm{S_1(0,T) = \max\left(s_A(0,T), s_B(0,T)\right)} \text{ και}$$

$$\mathrm{S_2(0,T) = \min\left(s_A(0,T), s_B(0,T)\right)}, \text{ αντίστοιχα.}$$

Από την ανάλυση που έγινε σε αυτή την ενότητα προκύπτουν τα ακόλουθα δύο σημαντικά συμπεράσματα:

- Το FTD spread μιας σύμβασης basket CDS μειώνεται, όσο αυξάνεται η εξάρτηση των αθετήσεων μεταξύ των οντοτήτων αναφοράς. Αυτό έχει ως συνέπεια ένας επενδυτής ο οποίος έχει πουλήσει (λαμβάνει θέση short) μία FTD σύμβαση στην οποία ήταν πωλητής προστασίας, να βλέπει την αξία της θέσης του να αυξάνεται, όταν η εξάρτηση των αθετήσεων μεταξύ των οντοτήτων αναφοράς αυξάνεται.
- Το STD spread μιας σύμβασης basket CDS αυξάνεται, όσο αυξάνεται η εξάρτηση των αθετήσεων μεταξύ των οντοτήτων αναφοράς. Αυτό έχει ως συνέπεια ένας επενδυτής ο οποίος έχει πουλήσει (λαμβάνει θέση short) μία STD σύμβαση στην οποία ήταν πωλητής προστασίας, να βλέπει την αξία της θέσης του να μειώνεται, όταν η εξάρτηση των αθετήσεων μεταξύ των οντοτήτων αναφοράς αυξάνεται.

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάστηκαν οι κύριες λειτουργίες και οι μηχανισμοί των Basket Credit Default Swaps. Επίσης, δόθηκαν συγκεκριμένες περιπτώσεις για την εξάρτηση των αθετήσεων των οντοτήτων αναφοράς και πως αυτές επηρεάζουν τα spreads των συμβάσεων basket CDS. Ωστόσο, οι διαδικασίες αυτές πραγματοποιήθηκαν χωρίς να γίνει αναφορά σε συγκεκριμένα μοντέλα τιμολόγησης, παρά μόνο σε γενικούς τύπους όπου η πιθανότητα επιβίωσης του καλαθιού δεν είναι μοντελοποιημένη. Στο επόμενο κεφάλαιο θα γίνει εκτενής αναφορά σε μοντέλα τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την αναλυτική τιμολόγηση των basket CDS.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Το μοντέλο λανθάνουσας μεταβλητής του Gauss-Ακριβής τιμολόγηση των Basket Credit Default Swaps

Στο παρόν κεφάλαιο θα γίνει η εισαγωγή και την περιγραφή του μοντέλου λανθάνουσας μεταβλητής του Gauss (Gaussian latent variable model), το οποίο αποτελεί το πρότυπο μοντέλο για την τιμολόγηση και τη διαχείριση κινδύνου των περισσότερων προϊόντων συσχέτισης πιστωτικής αθέτησης και κυρίως των basket CDS. Σκοπός του κεφαλαίου είναι η ανάλυση του μοντέλου και η κατανόηση της ευελιξίας που παρέχει στην ακριβή τιμολόγηση των συμβάσεων, καθώς και στην προσομοίωση των χρόνων αθέτησης των οντοτήτων αναφοράς.

4.1 Περιγραφή του μοντέλου λανθάνουσας μεταβλητής

Αρχικά, θα θεωρήσουμε μία τυχαία μεταβλητή A_i για την i οντότητα αναφοράς, η οποία προέρχεται από την τυπική κανονική κατανομή, δηλ. $A_i \sim N(0,1)$. Όπως αναφέρθηκε και στο 2ο κεφάλαιο, στα δομικά ή διαρθρωτικά μοντέλα με τα οποία ασχολήθηκαν οι Black, Scholes και Merton, θεωρείται ότι μία αθέτηση λαμβάνει χώρα πριν από το χρόνο λήξης T της σύμβασης, εάν η αξία του ενεργητικού της οντότητας αναφοράς που μας ενδιαφέρει είναι ανεπαρκής για την κάλυψη των υποχρεώσεών της. Εάν θεωρήσουμε ότι η τυχαία μεταβλητή A_i παριστάνει το ενεργητικό και έστω $C_i(T)$ είναι το χρονικά εξαρτώμενο όριο, κάτω από το οποίο η οντότητα αναφοράς αθετεί τις υποχρεώσεις της, μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα η i οντότητα αναφοράς να αθετήσει τις υποχρεώσεις της πριν το χρόνο T, ως εξής:

$$P(\tau_i \leq T) = P\big(A_i \leq C_i(T)\big) = 1 - S_i(T),$$

όπου, $S_i(T)$ είναι η πιθανότητα επιβίωσης της $i - o\sigma\tau\acute{\eta}\varsigma$ οντότητας αναφοράς μέχρι το χρόνο T, η οποία δίνεται από την αγορά των CDS.

Εφόσον, $A_i \sim N(0,1)$, έπεται ότι:

$$P\big(A_i \leq C_i(T)\big) = \Phi\big(C_i(T)\big),$$

όπου $\Phi(\cdot)$ είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της κανονικής κατανομής. Ως αποτέλεσμα, έχουμε ότι το μοντέλο αυτό μπορεί να βαθμονομηθεί στην καμπύλη επιβίωσης της $i - o\sigma\tau\acute{\eta}\varsigma$ οντότητας αναφοράς, θέτοντας:

$$\Phi\big(C_i(T)\big) = 1 - S_i(T),$$

δηλαδή,

$$C_i(T) = \Phi^{-1}\big(1 - S_i(T)\big).$$

Η A_i, ωστόσο, είναι μία τυχαία μεταβλητή, η οποία δεν είναι παρατηρήσιμη, για το λόγο αυτό το ονομάζεται λανθάνουσα (latent). Με τη γνώση της τιμής της τυχαίας μεταβλητής A_i, μπορεί στη συνέχεια να υπολογιστεί εύκολα και η χρονική στιγμή αθέτησης της $i - o\sigma\tau\acute{\eta}\varsigma$ οντότητας αναφοράς. Δηλαδή, έχοντας ότι η i οντότητα αναφοράς αθετεί τις υποχρεώσεις της όταν $C_i(T) = A_i$, έχουμε ότι:

$$S_i(\tau_i) = 1 - \Phi\big(C_i(\tau_i)\big) = 1 - \Phi(A_i)$$

και άρα:

$$\tau_i = S_i^{-1}\big(1 - \Phi(A_i)\big).$$

Παρόλα αυτά για να γίνει η τιμολόγηση της σύμβασης basket CDS, η οποία αποτελείται από συσχετισμένες οντότητες αναφοράς, χρειάζεται να επεκτείνουμε το παραπάνω μοντέλο, θεωρώντας για κάθε μία από τις N οντότητες αναφοράς του καλαθιού, τις αντίστοιχες τυχαίες μεταβλητές A_i, $i = 1, \ldots, N$.

Ωστόσο, θέλουμε να ληφθεί υπόψη και η συσχέτιση των αθετήσεων μεταξύ των οντοτήτων αναφοράς, θεωρώντας τις τυχαίες μεταβλητές A_i και A_j για $i = 1, \ldots, N,\ j = 1, \ldots, N$ και $i \neq j$. Ο απλούστερος τρόπος για να επιτευχθεί αυτό είναι μέσω ενός μοντέλου ενός παράγοντα. Καθορίζουμε μία δομή συσχέτισης των τ.μ. A_i, μέσω ενός παράγοντα Z, θεωρώντας:

$$A_i = \beta_i \cdot Z + \sqrt{1 - {\beta_i}^2} \cdot \varepsilon_i$$

όπου Z είναι ο παράγοντας της αγοράς, ο οποίος επηρεάζει τις οντότητες οι οποίες υπάρχουν στο καλάθι και ε_i είναι οι συγκεκριμένοι ιδιοσυγκρασιακοί παράγοντες κάθε μιας οντότητας ξεχωριστά. Θεωρούμε ότι ο παράγοντας Z της αγοράς και οι ιδιοσυγκρασιακοί παράγοντες (ή κίνδυνοι) ε_i , είναι ανεξάρτητοι και ότι ακολουθούν τυπική κανονική κατανομή, δηλ. $Z \sim N(0,1)$ και $\varepsilon_i \sim N(0,1)$. Μέσω αυτών των υποθέσεων διασφαλίζεται ότι $A_i \sim N(0,1)$.

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, μία οντότητα αναφοράς αθετεί τις υποχρεώσεις της εάν $A_i \leq C_i(T)$. Δηλαδή, η πραγματοποίηση της αθέτησης εξαρτάται τόσο από τον παράγοντα Z της αγοράς, όσο και από τους ιδιοσυγκρασιακούς κινδύνους ε_i.

Η αθέτηση της $i - o\sigma\tau\acute{\eta}\varsigma$ οντότητας αναφοράς, συνεπώς, μπορεί είτε να προκληθεί λόγω υψηλής και αρνητικής τιμής του παράγοντα Z, είτε λόγω υψηλής και αρνητικής τιμής του ιδιοσυγκρασιακού παράγοντα ε_i, είτε λόγω υψηλής και αρνητικής τιμής τόσο του παράγοντα Z, όσο και του ιδιοσυγκρασιακού παράγοντα ε_i, ταυτόχρονα.

Εάν η αθέτηση της $i - o\sigma\tau\acute{\eta}\varsigma$ οντότητας αναφοράς επέρχεται λόγω του ότι ο παράγοντας Z της αγοράς έχει λάβει μεγάλη αρνητική τιμή, τότε είναι αναμενόμενο ότι και οι υπόλοιπες οντότητες αναφοράς που υπάρχουν στο χαρτοφυλάκιο είναι περισσότερο πιθανό να αθετήσουν τις υποχρεώσεις της, αφού ο παράγοντας Z της αγοράς είναι κοινός για τις πιστώσεις του χαρτοφυλακίου. Εάν είναι ο ιδιοσυγκρασιακός παράγοντας ε_i που προκαλεί την αθέτηση, τότε δεν είναι ιδιαίτερα πιθανό να αθετήσουν και οι υπόλοιπες οντότητες αναφοράς του χαρτοφυλακίου τις υποχρεώσεις τους, επειδή η συγκεκριμένη αθέτηση είναι ανεξάρτητη από τις υπόλοιπες, λόγω του γεγονότος ότι προήλθε εξαιτίας του ο ιδιοσυγκρασιακού παράγοντα ε_i.

Το αν η πραγματοποίηση της αθέτησης προκαλείται λόγω του παράγοντα Z της αγοράς ή λόγω του ιδιοσυγκρασιακού παράγοντα ε_i εξαρτάται επίσης και από την τιμή του β_i. Μία υψηλότερη τιμή του β_i κάνει περισσότερο πιθανό το γεγονός η αθέτηση της $i-οστής$ οντότητας αναφοράς να προκαλείται λόγω του παράγοντα Z της αγοράς, πάρα λόγω του ιδιοσυγκρασιακού παράγοντα ε_i.

<u>Συσχέτιση και εξάρτηση</u>

Σε μία σύμβαση basket CDS, όπως είναι γνωστό, οι αθετήσεις των οντοτήτων αναφοράς είναι συσχετισμένες. Μέσω του μοντέλου ενός παράγοντα που παρουσιάστηκε παραπάνω, η συσχέτιση δύο οντοτήτων αναφοράς i και j μπορεί να δοθεί χρησιμοποιώντας τις τ.μ. A_i και A_j, μέσω του τύπου:

$$\rho_{ij} = \frac{\mathbb{E}[A_i \cdot A_j] - \mathbb{E}[A_i] \cdot \mathbb{E}[A_j]}{\sqrt{\left(\mathbb{E}[{A_i}^2] - \mathbb{E}[A_i]^2\right) \cdot \left(\mathbb{E}[{A_i}^2] - \mathbb{E}[A_i]^2\right)}} = \beta_i \cdot \beta_j.$$

Η τιμή αυτής της συσχέτισης των οντοτήτων αναφοράς i και j, έχει σημαντική επίδραση στην τάση τους να αθετούν από κοινού τις υποχρεώσεις τους, λαμβάνοντας υπόψη και την μεταξύ τους εξάρτηση.

Εάν υποθέσουμε ότι έχουμε δύο οντότητες αναφοράς i και j οι οποίες αθετούν τις υποχρεώσεις τους πριν το χρόνο T, θα ισχύει ότι: $A_i \leq C_i(T)$ και $A_j \leq C_j(T)$. Εφόσον οι τ.μ. A_i και A_j ακολουθούν τυπική κανονική κατανομή, μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα της κοινής τους αθέτησης πριν το χρόνο T, σε όρους της διδιάστατης κανονικής συνάρτησης κατανομής, ως εξής:

$$P_{ij}(T) = \Phi\big(C_i(T), C_j(T), \rho_{ij}\big).$$

Αν εξετάσουμε για παράδειγμα την περίπτωση της ανεξαρτησίας των οντοτήτων αναφοράς, έχουμε ότι $\beta_i = \beta_j = 0$ (έχουν μείνει δηλαδή μόνο οι ιδιοσυγκρασιακοί παράγοντες για κάθε τ.μ. A_i και A_j) και $\rho_{ij} = 0$. Τότε, θα έχουμε ότι:

$$P_{ij}(T) = \Phi\big(C_i(T)\big) \cdot \Phi\left(C_j(T)\right) = \big(1 - S_i(T)\big) \cdot \left(1 - S_j(T)\right).$$

Είναι προφανές ότι το μοντέλο αυτό είναι σε θέση να χειριστεί το πλήρες εύρος της εξάρτησης των οντοτήτων αναφοράς, μεταβάλλοντας τη συσχέτισή τους από -100% έως $+100\%$.

Ρυθμοί κινδύνου υπό δέσμευση (Conditional hazard rates)

Στο μοντέλο το οποίο περιεγράφηκε στην προηγούμενη ενότητα, μπορούν να χρησιμοποιηθούν δεσμευμένοι ρυθμοί κινδύνου για κάθε οντότητα αναφοράς ως προς παράγοντα Z της αγοράς. Δηλαδή, έχοντας ότι μία οντότητα αναφοράς αθετεί τις υποχρεώσεις της πριν το χρόνο T, εάν:

$$A_i = \beta_i \cdot Z + \sqrt{1-{\beta_i}^2} \cdot \varepsilon_i \leq C_i(T),$$

ή διαφορετικά εάν:

$$\varepsilon_i \leq \frac{C_i(T) - \beta_i \cdot Z}{\sqrt{1-{\beta_i}^2}},$$

με $\varepsilon_i \sim N(0,1)$ και δεσμεύοντας ως προς τον παράγοντα Z της αγοράς, η πιθανότητα να αθετήσει τις υποχρεώσεις της η i οντότητας αναφοράς θα είναι ίση με:

$$P_i(T|Z) = 1 - S_i(T|Z) = \Phi\left(\frac{C_i(T) - \beta_i \cdot Z}{\sqrt{1-{\beta_i}^2}}\right).$$

Υποθέτοντας για λόγους ευκολίας ένα δεσμευμένο και ντετερμινιστικό ρυθμό κινδύνου, δηλαδή, $S_i(T|Z) = exp\big(-\lambda_i(T|Z)\big)$, θα έχουμε ότι:

$$\lambda_i(T|Z) = -\frac{1}{T} \cdot ln\left(\Phi\left(\frac{\beta_i \cdot Z - C_i(T)}{\sqrt{1-{\beta_i}^2}}\right)\right).$$

Δεσμευμένη ανεξαρτησία

Ένα από τα κυριότερα προβλήματα της χρήσης του μοντέλου ενός παράγοντα, είναι ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη δεσμευμένη ανεξαρτησία για να επιταχύνουμε τον υπολογισμό της κατανομής των ζημιών του χαρτοφυλακίου. Η κατανομή των ζημιών του χαρτοφυλακίου είναι απαραίτητη για την τιμολόγηση των περισσότερων προϊόντων συσχέτισης. Εάν δεσμεύσουμε ως προς τον παράγοντα Z της αγοράς, όλες οι οντότητες αναφοράς του χαρτοφυλακίου θα είναι ανεξάρτητες και τότε ο υπολογισμός της δεσμευμένης κατανομής των ζημιών του χαρτοφυλακίου είναι αρκετά απλοποιημένος. Εφόσον μας δίνεται η δεσμευμένη κατανομή των ζημιών για κάθε τιμή του παράγοντα Z της αγοράς, είναι εφικτό να υπολογίσουμε τη μη δεσμευμένη κατανομή των ζημιών του χαρτοφυλακίου, ολοκληρώνοντας ως προς την πυκνότητα του παράγοντα Z. Δηλαδή, εάν συμβολίσουμε με $f\big(L(T)\big)$ την πυκνότητα κατανομής των ζημιών και με $f\big(L(T|Z)\big)$ τη δεσμευμένη πυκνότητα κατανομής των ζημιών του χαρτοφυλακίου θα έχουμε ότι:

$$f\big(L(T)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\big(L(T|Z)\big) \cdot \varphi(Z) \cdot dZ.$$

4.2 Προσομοίωση των χρόνων αθέτησης των οντοτήτων αναφοράς

Όπως αναφέρθηκε και στην προηγούμενη ενότητα, ένα από τα βασικά οφέλη της χρήσης του μοντέλου ενός παράγοντα είναι ότι χρησιμοποιώντας τη δεσμευμένη ανεξαρτησία, ο αριθμητικός υπολογισμός της κατανομής των ζημιών του χαρτοφυλακίου είναι ταχύτερος. Παρόλα αυτά σε κάποιες περιπτώσεις, κυρίως στα second-to-default (και μεγαλύτερου βαθμού) καλάθια ανομοιογενούς απώλειας, είναι προτιμότερο να χρησιμοποιείται η μέθοδος της προσομοίωσης Monte Carlo για την τιμολόγησή τους. Με την τιμολόγηση των basket CDS θα ασχοληθούμε στην επόμενη ενότητα. Στην παρούσα ενότητα, στόχος είναι να γίνει κατανοητό πως γίνεται να προσομοιωθούν οι χρόνοι αθέτησης του μοντέλου ενός παράγοντα που αναλύθηκε σε αυτό το κεφάλαιο, ώστε να καταλήξουμε στην τιμολόγηση των basket CDS.

Γενικότερα, μπορούμε να τιμολογήσουμε ένα χρεόγραφο (security) του οποίου η αξία είναι συνάρτηση της κοινής κατανομής των χρόνων αθέτησης, μέσω της προσομοίωσης Monte Carlo χρησιμοποιώντας τον τύπο:

$$V = \lim_{p\to\infty} \frac{1}{P} \cdot \sum_{i=1}^{P} V_p(\{\tau^p\}),$$

όπου P είναι ο αριθμός των τυχαίων δοκιμών και $V_p(\{\tau^p\})$ είναι η παρούσα αξία του χρεογράφου ως συνάρτηση των χρόνων αθέτησης στην $p - o\sigma\tau$ή δοκιμή της Monte Carlo προσομοίωσης. Οι πραγματοποιήσεις των χρόνων αθέτησης $\{\tau^p\}$ αντλούνται από την κοινή κατανομή των χρόνων αθέτησης, που υποδηλώνεται από το μοντέλο. Επίσης, ο αριθμός P των τυχαίων δοκιμών πρέπει να είναι αρκετά μεγάλος ώστε να παρέχει την απαιτούμενη ακρίβεια. Καθώς το τυπικό σφάλμα της εκτίμησης της τιμής που δίνεται μέσω της Monte Carlo προσομοίωσης μπορεί να είναι έως και $O\left(1/\sqrt{P}\right)$, είναι σημαντικό να χρησιμοποιηθεί μια γεννήτρια ψευδοτυχαίων αριθμών από την κανονική κατανομή (συνήθως χρησιμοποιείται η μέθοδος Box-Muller, περισσότερες πληροφορίες για τη μέθοδο παρουσιάζονται στο κεφάλαιο 5).

Για την προσομοίωση των χρόνων αθέτησης ακολουθείται ο παρακάτω αλγόριθμος:

1) Υπολογίζουμε $C_i(T) = \Phi^{-1}\left(1 - S_i(T)\right)$ για όλες τις οντότητες αναφοράς για $i = 1, \dots, N_C$.
2) Παράγουμε $p = 1, \dots, P$ ανεξάρτητους τυχαίους αριθμούς Z^p, από την κανονική κατανομή μέσω της μεθόδου Box-Muller και $P \cdot N_C$ ανεξάρτητους και τυχαίους αριθμούς από την κανονική κατανομή μέσω της μεθόδου Box-Muller για τους ιδιοσυγκρασιακούς παράγοντες ε_i^p.
3) Υπολογίζουμε $P \cdot N_C$ τιμές της τ.μ. A_i^p, χρησιμοποιώντας τον τύπο:

$$A_i^p = \beta_i \cdot Z^p + \sqrt{1 - {\beta_i}^2} \cdot \varepsilon_i^p.$$

4) Υπολογίζουμε συνολικά $P \cdot N_C$ τιμές u_i^p, χρησιμοποιώντας τον τύπο:
$$u_i^p = 1 - \Phi(A_i^p).$$
5) Για κάθε οντότητα αναφοράς $i = 1, \dots, N_C$ και κάθε δοκιμή $p = 1, \dots, P$, υπολογίζουμε τους χρόνους αθέτησης:
$$\tau_i^p = S_i^{-1}(u_i^p).$$

Έχοντας αναλύσει όλα τα καίρια σημεία του μοντέλου λανθάνουσας μεταβλητής του Gauss είναι πλέον εφικτό να προβούμε στην ακριβή τιμολόγηση των συμβάσεων basket CDS.

4.3 Μοντελοποίηση και ακριβής τιμολόγηση των συμβάσεων basket CDS

Για την τιμολόγηση των basket CDS, είναι απαραίτητο να ληφθεί υπόψιν εάν το καλάθι είναι ομοιογενούς απώλειας (homogenous loss basket) ή εάν το καλάθι είναι ανομοιογενούς απώλειας (inhomogenous loss basket). Ο διαχωρισμός αυτός έχει να κάνει με την μοντελοποίηση και δεν έχει κάποια σχέση με τους όρους του συμβολαίου. Όπως αναφέρθηκε και σε προηγούμενο κεφάλαιο, στα καλάθια ομοιογενούς απώλειας, υποθέτουμε ότι για κάθε μία από τις $i = 1, \dots, N_C$ οντότητες αναφοράς που υπάρχουν σε αυτό, το ποσοστό ανάκτησης είναι το ίδιο για όλες και ίσο με δ. Εάν ορίσουμε, δηλαδή, την απώλεια στο καλάθι μετά από ένα πιστωτικό γεγονός για την οντότητα αναφοράς i, ως $L_i = 1 - \delta_i$, τότε σε ένα καλάθι ομοιογενούς απώλειας ισχύει ότι: $L_i = L, \ \forall\, i = 1, \dots, N_C$. Στα καλάθια ανομοιογενούς απώλειας το ποσοστό ανάκτησης δεν είναι το ίδιο για όλες τις οντότητες αναφοράς. Ένα παράδειγμα καλαθιού ανομοιογενούς απώλειας, είναι όταν μία από τις οντότητες αναφοράς στο καλάθι έχει υποβαθμιστεί από κάποιον οίκο αξιολόγησης και διαπραγματεύεται στην αγορά με πολύ υψηλό spread, χωρίς όμως να έχει υποστεί κάποιο πιστωτικό γεγονός.

Στην ενότητα αυτή, θα παρουσιαστεί η ακριβής τιμολόγηση των first-to-default baskets ομοιογενούς απώλειας. Για την ακριβή τιμολόγηση των second-to-default baskets ομοιογενούς αλλά και για την ακριβή τιμολόγηση συμβάσεων ανομοιογενούς απώλειας ακολουθείται μια αρκετά πιο σύνθετη διαδικασία, η υλοποίηση της οποίας ξεφεύγει από τους σκοπούς της παρούσας εργασίας. Ωστόσο στο επόμενο κεφάλαιο όπου θα χρησιμοποιηθεί η Monte Carlo προσομοίωση για την τιμολόγηση των συμβάσεων CDS, θα παρουσιαστεί τόσο η τιμολόγηση για τις first-to-default συμβάσεις ομοιογενούς απώλειας, όσο και για συμβάσεις second-to-default (και υψηλότερου βαθμού) ομοιογενούς απώλειας.

Ακριβής τιμολόγηση first-to-default baskets ομοιογενούς απώλειας

Για την ακριβή τιμολόγηση των FTD baskets ομοιογενούς απώλειας χρειάζεται να δημιουργηθεί η κατάλληλη καμπύλη επιβίωσης, χρησιμοποιώντας τη διαδικασία $n(t)$, η οποία μετράει τον αριθμό των αθετήσεων που έχουν συμβεί σε ένα καλάθι το οποίο περιέχει

N οντότητες αναφοράς, από τη χρονική στιγμή έναρξης της σύμβασης έως τη χρονική στιγμή t. Στην περίπτωση του FTD basket, η πιθανότητα να μην ενεργοποιηθεί η σύμβαση πριν τη χρονική στιγμή t, θα είναι ίση με την πιθανότητα να μην αθετήσει καμία από τις οντότητες αναφοράς τις υποχρεώσεις της. Δηλαδή,

$$P(n(t)=0)=1-P(n(t)>0).$$

Για την τιμολόγηση θα χρησιμοποιηθούν οι τύποι της ενότητας 3.4, όπου είχαμε ότι η συνολική παρούσα αξία του Premium leg δίνεται ως:

$$PV_{Premium\ leg}(0,T)=\frac{S_1}{2}\cdot\sum_{j=1}^{N_T}\Delta\left(T_{j-1},T_j\right)\cdot Z\left(0,T_j\right)\cdot\left[P\left(n\left(T_{j-1}\right)=0\right)+P\left(n\left(T_j\right)=0\right)\right],$$

όπου S_1 είναι το σταθερό spread της FTD σύμβασης χαρτοφυλακίου και $j=1,\dots,N_T$ είναι οι ημερομηνίες πληρωμής των ασφαλίστρων.

Παρομοίως, η παρούσα αξία του Contingent leg είναι:

$$\mathrm{PV_{Contigent\ leg}(0,T)=(1-\delta)\int_0^T Z(0,s)\cdot\left(-dP(n(s)=0)\right).}$$

Η πιθανότητα επιβίωσης είναι η πιθανότητα η σύμβαση να μην έχει ενεργοποιηθεί πριν το χρόνο t, δηλ. $P(n(t)=0)$. Επομένως, ορίζουμε την καμπύλη επιβίωσης του καλαθιού ως:

$$P(n(t)=0)=P\left(\tau_1>t,\tau_2>t\,,\dots.,\tau_{N_C}>t\,\right),$$

δηλαδή, καμία από τις N_C οντότητες αναφοράς να μην έχει αθετήσει τις υποχρεώσεις της πριν τη χρονική στιγμή t.

Χρησιμοποιώντας το μοντέλο λανθάνουσας μεταβλητής ενός παράγοντα, μπορούμε να γράψουμε αυτή την πιθανότητα επιβίωσης, δεσμεύοντας ως προς τον παράγοντα Z της αγοράς. Εφόσον οι οντότητες αναφοράς είναι ανεξάρτητες, η δεσμευμένη πιθανότητα επιβίωσης του καλαθιού είναι το γινόμενο των επιμέρους δεσμευμένων πιθανοτήτων επιβίωσης των N_C οντοτήτων αναφοράς, δηλαδή:

$$P(n(t)=0|Z)=\prod_{i=1}^{N_C}\left(1-P(A_i\le C_i(T)|Z)\right).$$

Η μη δεσμευμένη πιθανότητα επιβίωσης του FTD basket CDS μπορεί να υπολογιστεί ολοκληρώνοντας πάνω από την κατανομή του παράγοντα Z της αγοράς. Έχουμε, δηλαδή:

$$P(n(t)=0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(z)\cdot\left[\prod_{i=1}^{N_C}\left(1-P(A_i\le C_i(t)|z)\right)\right]\cdot dz.\ (1)$$

Σύμφωνα με την πρώτη ενότητα του κεφαλαίου αυτού, η πιθανότητα επιβίωσης μίας οντότητας αναφοράς μέχρι το χρόνο t, εξαρτάται από την τιμή του παράγοντα Z της αγοράς και μπορεί να γραφεί χρησιμοποιώντας όρους της αθροιστικής συνάρτησης της κανονικής κατανομής $\Phi(x)$, ως εξής:

$$P\big((A_i > C_i(t)|Z)\big) = P\left(\varepsilon_i > \frac{C_i(t) - \beta_i \cdot Z}{\sqrt{1 - {\beta_i}^2}}\right) = \Phi\left(\frac{\beta_i \cdot Z - C_i(t)}{\sqrt{1 - {\beta_i}^2}}\right).$$

Τελικά, η καμπύλη επιβίωσης του FTD basket χρησιμοποιώντας τους παραπάνω τύπους θα δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$P(n(t) = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(z) \cdot \left[\prod_{i=1}^{N_C} \Phi\left(\frac{\beta_i \cdot z - C_i(t)}{\sqrt{1 - {\beta_i}^2}}\right)\right] \cdot dz.$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί με τον απλό κανόνα του τραπεζίου ή χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Gaussian quadrature.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5
Προσομοίωση Monte Carlo - Τιμολόγηση first-to-default Swap (και υψηλότερου βαθμού) ομοιογενούς απώλειας

Στο τελευταίο αυτό κεφάλαιο θα γίνει αρχικά μία συνοπτική παρουσίαση της μεθόδου προσομοίωσης Monte Carlo και στη συνέχεια θα παρουσιαστούν τα βήματα για την τιμολόγηση μίας first-to-default σύμβασης CDS ομοιογενούς απώλειας, καθώς και γενικότερα μιας k-to-default σύμβασης CDS ομοιογενούς απώλειας μέσω Monte Carlo προσομοίωσης καθώς και οι αντίστοιχοι κώδικες μέσω του Mathematica.

5.1 Η μέθοδος προσομοίωσης Monte Carlo

Η μέθοδος προσομοίωσης Monte Carlo αποτελεί μία από τις σημαντικότερες μεθόδους εμπειρικής μελέτης και κυρίως χρησιμοποιείται για τη μελέτη στοχαστικών φαινομένων. Παρουσιάστηκε για πρώτη φορά το 1949 από τους N.Metropolis και S.Ulam μέσω του άρθρου τους "The Monte Carlo Method" το οποίο δημοσιεύτηκε στο περιοδικό «Journal of the American Statistical Association». Η ονομασία Monte Carlo λήφθηκε από το γνωστό καζίνο του Monaco και προέκυψε λόγω της συσχέτισης που έχει η μέθοδος με την τυχαιότητα και τα τυχερά παιχνίδια. Η χρήση της μεθόδου προσομοίωσης Monte Carlo έχει αναπτυχθεί ταχύτατα τις τελευταίες δεκαετίες σε πληθώρα επιστημονικών τομέων, όπως τα χρηματοοικονομικά, η στατιστική, η μηχανική κλπ.

Η μέθοδος ολοκλήρωσης Monte Carlo στηρίζεται στο νόμο των μεγάλων αριθμών και έχει ως στόχο την εκτίμηση της μέσης τιμής μιας τυχαίας μεταβλητής X, μέσω του υπολογισμού της μέσης τιμής n τυχαίων αριθμών, οι οποίοι έχουν παραχθεί μέσω ανεξάρτητων μεταξύ τους επαναλήψεων. Παρακάτω παρατίθεται ο αλγόριθμος της μεθόδου:

ΒΗΜΑ 1) Παράγουμε $n \in \mathbb{N}$ τυχαίες μεταβλητές $X_i, i = 1,2, \dots ,n$, ανεξάρτητες μεταξύ τους και ισόνομες με μια τυχαία μεταβλητή X.

ΒΗΜΑ 2) Εκτιμούμε τη μέση τιμή $E(X)$ από τον αριθμητικό μέσο όρο $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Όσο μεγαλύτερο είναι το πλήθος των επαναλήψεων, τόσο καλύτερη θα είναι και η εκτίμηση της μέσης τιμής της τυχαίας μεταβλητής X, καθώς η τυχαία μεταβλητή $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ θα έχει μικρότερη διασπορά.

Για την εφαρμογή κάθε είδους προσομοίωσης είναι απαραίτητο ως πρώτο βήμα η παραγωγή τυχαίων αριθμών (καθώς η μέθοδος εφαρμόζεται σε στοχαστικά φαινόμενα τα οποία επηρεάζονται από μεταβλητές των οποίων η τιμή δεν είναι γνωστή). Η επίτευξη της παραγωγής μιας ακολουθίας πραγματικά τυχαίων αριθμών είναι γενικά δύσκολη, για παράδειγμα μπορούν να χρησιμοποιηθούν διάφορες φυσικές διαδικασίες όπως η ρίψη ζαριών. Οι διαδικασίες αυτές όμως, όταν επιθυμείται η παραγωγή μιας μεγάλης ακολουθίας τυχαίων αριθμών είναι μη αποδοτικές. Λόγω της δυσχέρειας αυτής, έχουν αναπτυχθεί μέθοδοι οι οποίες παράγουν (ψευδο)τυχαίους αριθμούς μέσω ηλεκτρονικών υπολογιστών. Οι αριθμοί αυτοί παράγονται από αναδρομικούς αλγόριθμους και επομένως βασίζονται σε μία ντετερμινιστική διαδικασία και για αυτό αποκαλούνται ψευδοτυχαίοι αριθμοί.

Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας για την παραγωγή τυχαίων αριθμών θα γίνει αναφορά σε μία από τις γνωστότερες μεθόδους, η οποία είναι η μέθοδος της Αντιστροφής (ή αντίστροφου Μετασχηματισμού). Για την παρουσίαση της μεθόδου της Αντιστροφής είναι χρήσιμο να δοθεί αρχικά ο ορισμός της γενικευμένης αντιστρόφου μιας συνάρτησης κατανομής.

Ορισμός: *Έστω $F(x)$ μια αθροιστική συνάρτηση κατανομής, η* (γενικευμένη) *αντίστροφη συνάρτηση F^{-1} ορίζεται ως*

$$F^{-1}(u) = \inf F^{-1}([u,1]) = \inf \{x: F(x) \in [u,1]\}, u \in [0,1].$$

<u>Μέθοδος της αντιστροφής σε Διακριτές Κατανομές</u>

Η συνάρτηση πιθανότητας η οποία προσδιορίζει την κατανομή μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής X είναι η ακόλουθη:

$$p_j = P(X = x_j), j = 0,1,2, \dots, \textstyle\sum_j p_j = 1$$

Η παραγωγή τυχαίων αριθμών από την κατανομή της διακριτής κατανομής X, στηρίζεται σε τυχαίους αριθμούς οι οποίοι προέρχονται από την ομοιόμορφη διακριτή κατανομή στο διάστημα $(0,1)$, θέτοντας

$$X = F^{-1}(U) = \begin{cases} x_0, 0 \le U \le p_0 \\ x_1, p_0 \le U \le p_0 + p_1 \\ \dots \\ x_j, \sum_{i=0}^{j-1} p_i \le U \le \sum_{i=0}^{j} p_i \\ \dots \end{cases}$$

Ο γενικός αλγόριθμος για την παραγωγή τυχαίων αριθμών μέσω της μεθόδου της Αντιστροφής για διακριτές κατανομές είναι ο ακόλουθος:

Αλγόριθμος μεθόδου της Αντιστροφής για διακριτές κατανομές

ΒΗΜΑ 1) Παράγουμε έναν τυχαίο αριθμό $U \sim U(0,1)$

ΒΗΜΑ 2) Αν $U < p_0$, τότε θέτουμε $X = x_0$, και η διαδικασία σταματάει, αλλιώς συνεχίζουμε με το επόμενο βήμα

ΒΗΜΑ 3) $U < p_0 + p_1$, τότε θέτουμε $X = x_1$, και η διαδικασία σταματάει, αλλιώς συνεχίζουμε με το επόμενο βήμα κ.ο.κ.

Μέθοδος της αντιστροφής σε Συνεχείς Κατανομές

Η συνάρτηση κατανομής η οποία προσδιορίζει την κατανομή μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X είναι η ακόλουθη:

$$F_X(x) = P(X \leq x), x \in \mathbb{R},$$

ενώ η αντίστοιχη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι:

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x), x \in \mathbb{R}$$

Στην περίπτωση όπου η F είναι αντιστρέψιμη (π.χ συνεχής και γνησίως αύξουσα), τότε ο παραπάνω ορισμός της γενικευμένης αντιστρόφου συμπίπτει με την κλασσική αντίστροφη τιμή της συνάρτησης F στο u.

Συνεπώς, η μέθοδος της αντιστροφής για την παραγωγή τυχαίων αριθμών από μια κατανομή με συνάρτηση κατανομής F περιγράφεται από τον επόμενο γενικό αλγόριθμο.

Αλγόριθμος μεθόδου της Αντιστροφής

ΒΗΜΑ 1) Παράγουμε έναν τυχαίο αριθμό $U \sim U(0,1)$

ΒΗΜΑ 2) Θέτουμε $X = F^{-1}(U)$

Είναι κατανοητό ότι σε πολλές περιπτώσεις όπου η συναρτήσεις κατανομών είναι πεπλεγμένης μορφής (ή στις διακριτές περιπτώσεις) δεν είναι εύκολο να βρεθεί άμεσα η γενικευμένη αντίστροφη $F^{-1}(U)$. Ωστόσο αυτές οι περιπτώσεις ξεφεύγουν από τους σκοπούς της παρούσας εργασίας και ο αναγνώστης παραπέμπεται για περισσότερες πληροφορίες στα ακόλουθα: Μ. Μπούτσικας (2004), και N. Chan, & H. Wong (2015).

5.2 Τιμολόγηση μίας first-to-default (και υψηλότερου βαθμού) σύμβασης CDS ομοιογενούς απώλειας μέσω Monte Carlo προσομοίωσης

Αρχικά θα παρουσιαστεί η τιμολόγηση μίας first-to-default σύμβασης CDS ομοιογενούς απώλειας η οποία αποτελείται από 5 οντότητες αναφοράς, οι οποίες είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Στην εφαρμογή, όπως φαίνεται και στον πίνακα 5.2.1, δίνεται το επιτόκιο Libor από 1 έως και 3 έτη και οι τιμές των spreads της αγοράς για κάθε μία από τις οντότητες αναφοράς οι οποίες αυξάνονται από έτος σε έτος. Το επιτόκιο ανάκτησης ορίζεται να είναι 40% για όλες τις οντότητες αναφοράς (καλάθι ομοιογενούς απώλειας).

Πίνακας 5.2.1

Default Swap Spreads (bp)		1st entity	2nd entity	3rd entity	4th entity	5th entity
	$1Y$	$195bp$	$165bp$	$180bp$	$200bp$	$250bp$
	$2Y$	$230bp$	$205bp$	$210bp$	$225bp$	$260bp$
	$3Y$	$285bp$	$260bp$	$260bp$	$275bp$	$295bp$
	Επιτόκιο Ανάκτησης	40%	40%	40%	40%	40%

Επιτόκια Libor (%)		
	$1Y$	$3{,}5$
	$2Y$	$4{,}2$
	$3Y$	$5{,}1$

Επίσης, στον επόμενο Πίνακα 5.2.2, δίνονται:

1. η ονομαστική αξία της σύμβασης, η οποία είναι $10.000.000\$$
2. η ημερομηνία έναρξης και λήξης της σύμβασης, οι οποίες είναι 1 Δεκεμβρίου 2018 και 1 Μαρτίου 2021, αντίστοιχα
3. η συχνότητα καταβολής των ασφαλίστρων, η οποία είναι τριμηνιαία

Πίνακας $\mathbf{5.2.2}$

Ονομαστική αξία	$10.000.000\$$
Ημερομηνία έναρξης	1 Δεκεμβρίου 2018
Ημερομηνία λήξης	1 Μαρτίου 2021
Συχνότητα καταβολής ασφαλίστρου	Τριμηνιαία

Η ημερομηνία αποτίμησης είναι η 19η Δεκεμβρίου 2018. Το επόμενο βήμα για την τιμολόγηση της σύμβασης CDS είναι η κατασκευή της καμπύλης επιβίωσης για κάθε μία οντότητα αναφοράς και η βαθμονόμησή της (calibration) στα δοθέντα ετήσια spreads της αγοράς. Για την κατασκευή της καμπύλης επιβίωσης για κάθε μία οντότητα αναφοράς χρησιμοποιείται και πάλι η επαναληπτική μέθοδος, bootstrap η οποία χρησιμοποιήθηκε και στην τιμολόγηση του απλού CDS), μέσω της οποίας θα βρεθούν οι πιθανότητες επιβίωσης για το $1o, 2o$ και για το $3o$ έτος καθώς και οι αντίστοιχοι ρυθμοί κινδύνου (hazard rates) για κάθε οντότητα αναφοράς. Τα βήματα για την κατασκευή ενός αλγορίθμου που θα δίνει τα ζητούμενα αποτελέσματα είναι τα εξής:

ΒΗΜΑ 1) Ορίζουμε σε διανύσματα τα ετήσια επιτόκια Libor, τα ετήσια CDS spreads της αγοράς και το ποσοστό ανάκτησης δ. Δημιουργούμε ένα διάνυσμα Δ το οποίο ουσιαστικά αναφέρεται στο πόσο απέχουν διαδοχικά μεταξύ τους το $1o, 2o$ και $3o$ έτος, ένα κενό πίνακα h ο οποίος αναφέρεται στους ετήσιους ρυθμούς κινδύνου και ένα διάνυσμα S το οποίο αναφέρεται στις πιθανότητες επιβίωσης κατά την ημερομηνία αποτίμησης, καθώς και για το $1o, 2o, 3o, 4o$ και $5o$ έτος.

ΒΗΜΑ 2) Θέτουμε ως Z τον πίνακα για τον προεξοφλητικό παράγοντα Libor, για το $1o$ έως και το $3o$ έτος.

ΒΗΜΑ 3) Για το πρώτο έτος: θέτουμε ως $ES = PV_{Premium\ leg} - PV_{Contingent\ leg}$ και στη συνέχεια θέτοντας τη διαφορά αυτή ίση με 0, λύνουμε την εξίσωση ως προς τη βαθμονομημένη πιθανότητα επιβίωσης, $S(1)$, του πρώτου έτους. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται για το $2o, 3o, 4o$ και $5o$ έτος, βρίσκοντας σε κάθε επανάληψη τη βαθμονομημένη πιθανότητα επιβίωσης για κάθε έτος, $S(2), \dots, S(3)$, (όπου σε κάθε επανάληψη χρησιμοποιούμε τις πιθανότητες επιβίωσης που έχουμε βρει στα προηγούμενα βήματα).

ΒΗΜΑ 4) Θέτουμε $h(i) = -log\left(\frac{S(i)}{S(i-1)}\right)/\Delta(i)$, $i = 1,2, \dots, 3$, βρίσκοντας με αυτό τον τρόπο τους βαθμονομημένους ρυθμούς κινδύνου για κάθε ένα από τα 3 έτη.

Ο κώδικας και τα αποτελέσματα του αλγορίθμου στο Mathematica δίνονται ακολούθως:

(Στον κώδικα το $S(i)$ δίνεται από το $S[[i+1]], i = 0,1,2, \dots, 3$, $S(0) = 1$):

```
Libor={3.5,4.2,5.1}/100;
Spread1={0.0195,0.0230,0.0285};
Spread2={0.0165,0.0205,0.0260};
Spread3={0.0180,0.0210,0.0260};
Spread4={0.0200,0.0225,0.0275};
Spread5={0.0250,0.0260,0.0295};
δ=0.4;
Δ={1,1,1};
h1=Table[0,{i,1,3}];
h2=Table[0,{i,1,3}];
h3=Table[0,{i,1,3}];
h4=Table[0,{i,1,3}];
h5=Table[0,{i,1,3}];
Z=Table[Exp[-Libor[[i]]*Sum[Δ[[j]],{j,1,i}]],{i,1,3}];
S1={1,x,x,x};
S2={1,y,y,y};
S3={1,z,z,z};
S4={1,c,c,c};
S5={1,m,m,m};
Do[
 EQ1=Spread1[[k]]/2*Sum[Δ[[j]]*Z[[j]]*(S1[[j]]+S1[[j+1]]),{j,1,k}]-(1-
δ)*Sum[Z[[j]]*(S1[[j]]-S1[[j+1]]),{j,1,k}];
 S1[[k+1]]=x/.Solve[EQ1==0,x][[1]];
 EQ2=Spread2[[k]]/2*Sum[Δ[[j]]*Z[[j]]*(S2[[j]]+S2[[j+1]]),{j,1,k}]-(1-
δ)*Sum[Z[[j]]*(S2[[j]]-S2[[j+1]]),{j,1,k}];
```

```
 S2[[k+1]]=y/.Solve[EQ2==0,y][[1]];
 EQ3=Spread3[[k]]/2*Sum[Δ[[j]]*Z[[j]]*(S3[[j]]+S3[[j+1]]),{j,1,k}]-(1-δ)*Sum[Z[[j]]*(S3[[j]]-S3[[j+1]]),{j,1,k}];
 S3[[k+1]]=z/.Solve[EQ3==0,z][[1]];
 EQ4=Spread4[[k]]/2*Sum[Δ[[j]]*Z[[j]]*(S4[[j]]+S4[[j+1]]),{j,1,k}]-(1-δ)*Sum[Z[[j]]*(S4[[j]]-S4[[j+1]]),{j,1,k}];
 S4[[k+1]]=c/.Solve[EQ4==0,c][[1]];
 EQ5=Spread5[[k]]/2*Sum[Δ[[j]]*Z[[j]]*(S5[[j]]+S5[[j+1]]),{j,1,k}]-(1-δ)*Sum[Z[[j]]*(S5[[j]]-S5[[j+1]]),{j,1,k}];
 S5[[k+1]]=m/.Solve[EQ5==0,m][[1]];
 ,{k,1,3}]
Print["Calibrated Survival Probabilities for the first entity= ",S1]
Print["Calibrated Survival Probabilities for the second entity= ",S2]
Print["Calibrated Survival Probabilities for the third entity= ",S3]
Print["Calibrated Survival Probabilities for the fourth entity= ",S4]
Print["Calibrated Survival Probabilities for the fifth entity= ",S5]
Do[h1[[i]]=-Log[S1[[i+1]]/S1[[i]]]/Δ[[i]],{i,1,3}]
Do[h2[[i]]=-Log[S2[[i+1]]/S2[[i]]]/Δ[[i]],{i,1,3}]
Do[h3[[i]]=-Log[S3[[i+1]]/S3[[i]]]/Δ[[i]],{i,1,3}]
Do[h4[[i]]=-Log[S4[[i+1]]/S4[[i]]]/Δ[[i]],{i,1,3}]
Do[h5[[i]]=-Log[S5[[i+1]]/S5[[i]]]/Δ[[i]],{i,1,3}]
Print["Calibrated hazard rates for the first entity = ",h1]
Print["Calibrated hazard rates for the second entity = ",h2]
Print["Calibrated hazard rates for the third entity = ",h3]
Print["Calibrated hazard rates for the fourth entity = ",h4]
Print["Calibrated hazard rates for the fifth entity = ",h5]

Calibrated Survival Probabilities for the first entity=
{1,0.96802,0.925695,0.863747}
Calibrated Survival Probabilities for the second entity=
{1,0.972873,0.933401,0.87469}
Calibrated Survival Probabilities for the third entity=
{1,0.970443,0.931977,0.875093}
Calibrated Survival Probabilities for the fourth entity=
{1,0.967213,0.927385,0.868547}
Calibrated Survival Probabilities for the fifth entity=
{1,0.959184,0.916822,0.860829}
Calibrated hazard rates for the first entity =
{0.0325029,0.0447074,0.0692656}
Calibrated hazard rates for the second entity =
{0.0275017,0.0414187,0.0649658}
Calibrated hazard rates for the third entity =
{0.0300023,0.0404444,0.0629787}
Calibrated hazard rates for the fourth entity =
{0.0333364,0.0420498,0.0655473}
Calibrated hazard rates for the fifth entity =
{0.0416727,0.045169,0.0630176}
```

Στη συνέχεια για την τιμολόγηση της σύμβασης CDS χρειάζεται να υπολογιστούν οι πιθανότητες επιβίωσης και ο προεξοφλητικός παράγοντας Libor για κάθε ημερομηνία πληρωμής ασφαλίστρου. Τα βήματα του αλγορίθμου για την εύρεση των παραπάνω τιμών είναι τα ακόλουθα:

ΒΗΜΑ 1) Θέτουμε ως $Z(0) = 1$ την τιμή του προεξοφλητικού παράγοντα Libor κατά τη χρονική στιγμή της αποτίμησης και δημιουργούμε δύο κενές λίστες, τις SP και LD.

ΒΗΜΑ 2) Για κάθε ημερομηνία πληρωμής ασφαλίστρου από την ημερομηνία αποτίμησης μέχρι τη λήξη της σύμβασης, δηλαδή για t από 0,25 έως 2,25 με βήμα 0,25 , επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία εύρεσης της πιθανότητας επιβίωσης και του προεξοφλητικού παράγοντα Libor. Θέτουμε ως $[t]$ το ακέραιο μέρος του χρόνου t και η πιθανότητα επιβίωσης δίνεται ως:

$$SP_t = S([t]+1)\cdot e^{-h\cdot([t]+1)\cdot(t-[t])},$$

ενώ ο προεξοφλητικός παράγοντας Libor υπολογίζεται μέσω της γραμμικής παρεμβολής ως εξής:

$$LD_t = Z([t]) + \big(Z([t]+1) - Z([t])\big)\cdot(t-[t]).$$

Ο κώδικας και τα αποτελέσματα του αλγορίθμου στο Mathematica δίνονται ακολούθως:

```
Z[[0]]=1;j=0;SP={};LD={};
Do[w=Floor[t];
 SP1=S1[[w+1]]*Exp[-h1[[w+1]]*(t-w)];(*Survival
Probability for the first entity *)
 SP2=S2[[w+1]]*Exp[-h2[[w+1]]*(t-w)];(*Survival
Probability for the second entity *)
 SP3=S3[[w+1]]*Exp[-h3[[w+1]]*(t-w)];(*Survival
Probability for the third entity *)
 SP4=S4[[w+1]]*Exp[-h4[[w+1]]*(t-w)];(*Survival
Probability for the fourth entity *)
 SP5=S5[[w+1]]*Exp[-h5[[w+1]]*(t-w)];(*Survival
Probability for the fifth entity *)
 LD0=Z[[w]]+(Z[[w+1]]-Z[[w]])*(t-w);(*Libor Discount
Factor*)
 AppendTo[SP,SP1];
 AppendTo[SP,SP2];
 AppendTo[SP,SP3];
 AppendTo[SP,SP4];
 AppendTo[SP,SP5];
 AppendTo[LD,LD0];
 Print[{t,SP1,SP2,SP3, SP4, SP5,LD0}]
 ,{t,0.25,2.25,0.25}]
SP[[0]] = 1;

{0.25,0.991907,0.993148,0.992527,0.991701,0.989636,0.991401}
{0.5,0.98388,0.986343,0.985111,0.98347,0.979379,0.982803}
{0.75,0.975918,0.979585,0.97775,0.975308,0.969229,0.974204}
{1.,0.96802,0.972873,0.970443,0.967213,0.959184,0.965605}
{1.25,0.95726,0.962851,0.960681,0.957099,0.948413,0.954062}
{1.5,0.946621,0.952933,0.951016,0.94709,0.937764,0.942518}
{1.75,0.9361,0.943116,0.941449,0.937186,0.927234,0.930975}
{2.,0.925695,0.933401,0.931977,0.927385,0.916822,0.919431}
{2.25,0.909803,0.918364,0.917419,0.912312,0.902491,0.904106}
```

Για κάθε ημερομηνία πληρωμής ασφαλίστρου βρέθηκαν οι πιθανότητες επιβίωσης για κάθε οντότητα αναφοράς οι οποίες δίνονται από δεύτερη στήλη έως και την έκτη παραπάνω καθώς και οι προεξοφλητικοί παράγοντες Libor, οι οποίοι δίνονται στην έβδομη στήλη. Αρχικά, αξίζει να παρατηρηθεί ότι η αύξηση των τιμών των spread της αγοράς έχει ως συνέπεια την αύξηση του ρυθμού κινδύνου (hazard rate) με την πάροδο του χρόνου για κάθε μία από τις οντότητες αναφοράς.

Η τιμολόγηση της σύμβασης first-to-default basket CDS συνεχίζεται με την εύρεση των χρονικών στιγμών όπου αθετεί η πρώτη οντότητα αναφοράς (καθώς η σύμβαση είναι first to default) και εν συνεχεία ολοκληρώνεται με την εύρεση της παρούσας αξίας του Premium leg, του Contingent leg καθώς και του Breakeven spread.

Για να προχωρήσουμε στη συνέχεια της τιμολόγησης είναι αναγκαίο να παρουσιαστεί η παραγωγή των χρόνων αθέτησης των 5 οντοτήτων αναφοράς.

Παραγωγή χρόνων αθέτησης μίας οντότητας αναφοράς μέσω προσομοίωσης

Στην παρούσα εφαρμογή, γνωρίζουμε ότι η διάρκεια της σύμβασης είναι 3 έτη. Έστω ότι ονομάζουμε με t_1 τη χρονική στιγμή της λήξης του πρώτου έτους, με t_2 τη χρονική στιγμή της λήξης του δεύτερου έτους και με t_3 τη χρονική στιγμή της λήξης του τρίτου έτους, όπου είναι και η χρονική στιγμή όπου λήγει η σύμβαση first-to-default basket CDS.

Σκοπός είναι να παράγουμε τυχαίους αριθμούς (χρόνοι αποτυχίας) Tαπό μία κατανομή η οποία γνωρίζουμε ότι έχει σταθερούς ρυθμούς κινδύνου (hazard rates) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ στα χρονικά διαστήματα $[0, t_1), [t_1, t_2), [t_2, t_3)$ αντίστοιχα (ο αντίστοιχος υπολογισμός έχει γίνει στην αρχή της παρούσας ενότητας), ενώ μετά το t_3 δεν γνωρίζουμε την μορφή της συνάρτησης κατανομής. Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να παράγουμε το χρόνο T αν αυτός είναι μικρότερος του t_3, διαφορετικά θα επιστρέφεται μία τιμή π.χ. η t_3 υποδηλώνοντας ότι ο χρόνος T είναι $\geq t_3$ (δεν υπάρχει πρόβλημα για την ανάλυσή μας διότι σε αυτή την περίπτωση δεν χρειαζόμαστε την τιμή του χρόνου, χρειάζεται μόνο να γνωρίζουμε ότι δεν υπάρχει αθέτηση στο χρονικό διάστημα $[0, t_3)$).

Δοθέντος ότι οι ρυθμοί κινδύνου παραμένουν σταθεροί στα χρονικά διαστήματα $[0, t_1), [t_1, t_2), [t_2, t_3)$, δηλαδή:

$$h(t) = \begin{cases} \lambda_1, & t \in [0, t_1) \\ \lambda_2, & t \in [t_1, t_2) \\ \lambda_3, & t \in [t_2, t_3) \end{cases},$$

τότε η κατανομή της συνάρτησης επιβίωσης δίνεται ως:

$$Q(t) = e^{-\int_0^t \lambda(s)ds} = \begin{cases} e^{-\lambda_1 t}, & t \in [0, t_1) \\ e^{-\lambda_1 t_1 - \lambda_2 (t - t_1)}, & t \in [t_1, t_2) \\ e^{-\lambda_1 t_1 - \lambda_2 (t_2 - t_1) - \lambda_3 (t - t_2)}, & t \in [t_2, t_3) \end{cases},$$

και επομένως η συνάρτηση κατανομής του χρόνου αθέτησης T για $t \in [0, t_3)$ θα είναι:

$$F(t) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda(s)ds} = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda_1 t}, & t \in [0, t_1) \\ 1 - e^{-\lambda_1 t_1 - \lambda_2 (t - t_1)}, & t \in [t_1, t_2) \\ 1 - e^{-\lambda_1 t_1 - \lambda_2 (t_2 - t_1) - \lambda_3 (t - t_2)}, & t \in [t_2, t_3\,) \end{cases}$$

Η F αλλάζει τύπο στα σημεία t_1, t_2, t_3 με αντίστοιχες τιμές:

$F(t_1) = 1 - e^{-\lambda_1 t_1}$, $F(t_2) = 1 - e^{-\lambda_1 t_1 - \lambda_2 (t_2 - t_1)}$, $F(t_3) = 1 - e^{-\lambda_1 t_1 - \lambda_2 (t_2 - t_1) - \lambda_3 (t_3 - t_2)}$

με $0 < F(t_1) < F(t_2) < F(t_3) < 1$.

Στο σημείο αυτό θα εφαρμοστεί η μέθοδος της αντιστροφής για τη συνάρτηση F. Λύνουμε την εξίσωση $F(t) = u$ (η οποία είναι αντιστρέψιμη) ως προς t, δηλαδή:

- Για τον πρώτο κλάδο της συνάρτησης:

$$F(t) = u \Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda_1 t} = u \Leftrightarrow e^{-\lambda_1 t} = 1 - u$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{1}{\lambda_1}\ln(1 - u)\,, \qquad u \in (0, F(t_1)]$$

- Για τον δεύτερο κλάδο της συνάρτησης:

$$F(t) = u \Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda_1 t_1 - \lambda_2 (t - t_1)} = u \Leftrightarrow e^{-\lambda_1 t_1 - \lambda_2 (t - t_1)} = 1 - u \Leftrightarrow$$

$$-\lambda_1 t_1 - \lambda_2 (t - t_1) = \ln(1 - u)$$

$$\Leftrightarrow t = t_1 - \frac{1}{\lambda_2}(\ln(1 - u) + \lambda_1 t_1), \qquad u \in (F(t_1), F(t_2)]$$

- Και τέλος για τον τρίτο κλάδο της συνάρτησης:

$$F(t) = u \Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda_1 t_1 - \lambda_2 (t_2 - t_1) - \lambda_3 (t - t_2)} = u \Leftrightarrow \; e^{-\lambda_1 t_1 - \lambda_2 (t_2 - t_1) - \lambda_3 (t - t_2)} = 1 - u$$

$$-\lambda_1 t_1 - \lambda_2 (t_2 - t_1) - \lambda_3 (t - t_2) = \ln(1 - u) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = t_2 - \frac{1}{\lambda_3}\big(\ln(1 - u) + \lambda_1 t_1 + \lambda_2 (t_2 - t_1)\big), \qquad u \in (F(t_2), F(t_3)]$$

Επομένως, συνολικά ισχύει ότι:

$$t = F^{-1}(u) = \begin{cases} -\frac{1}{\lambda_1}\ln(1 - u)\,, & u \in (0, F(t_1)] \\ t_1 - \frac{1}{\lambda_2}(\ln(1 - u) + \lambda_1 t_1), & u \in (F(t_1), F(t_2)] \\ t_2 - \frac{1}{\lambda_3}\big(\ln(1 - u) + \lambda_1 t_1 + \lambda_2 (t_2 - t_1)\big), & u \in (F(t_2), F(t_3)] \end{cases},$$

ενώ αν $u \geq F(t_3)$ τότε ο χρόνος αθέτησης είναι μεγαλύτερος ή ίσος του t_3 και συμφωνούμε να τον θέτουμε π.χ. t_3 (ή οτιδήποτε άλλο μας βολεύει, αρκεί να θεωρούμε σε αυτή την περίπτωση ότι δεν υπάρχει αθέτηση στο χρονικό διάστημα που μας ενδιαφέρει). Επομένως τελικά παράγουμε $U \sim (0,1)$ και θέτουμε $T = F^{-1}(U)$ όπως παραπάνω.

Ο κώδικας που υλοποιεί την παραπάνω διαδικασία είναι ο ακόλουθος. Έχουμε λάβει $t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 3$, έτη αλλά αν η ημερομηνία αποτίμησης είναι π.χ. 6 μήνες (0.5 έτη) μετά την έναρξη της σύμβασης τότε μπορούμε να θέσουμε $t_1 = 0.5, t_2 = 1.5, t_3 = 2.5$. Παράγονται $n = 10^2$ χρόνοι αθέτησης (σε έτη) αλλά αυτό μπορεί να αυξηθεί κατά πολύ.

```
λ1 = h1[[1]]; λ2 = h1[[2]]; λ3 = h1[[3]];
t1 = 1; t2 = 2; t3 = 3;
F1 = 1 - Exp[-λ1*t1];
F2 = 1 - Exp[-λ1*t1 - λ2 (t2 - t1)];
F3 = 1 - Exp[-λ1*t1 - λ2 (t2 - t1) - λ3 (t3 - t2)];
n = 10^2; TT = Table[0, {n}]; k = 0;
Do[
 U = RandomReal[]; T = t3;
 If[U <= F1, T = -1/λ1*Log[1 - U]];
 If[F1 < U && U <= F2, T = t1 - 1/λ2*(Log[1 - U] + λ1*t1)];
 If[F2 < U && U <= F3,
  T = t2 - 1/λ3*(Log[1 - U] + λ1*t1 + λ2*(t2 - t1))];
 TT[[i]] = T;
 If[T < t3, k++];
 , {i, 1, n}]
Print["Default times = ", TT]
j = 0; DT = Table[0, {k}]; Do[
 If[TT[[i]] < t3, j++; DT[[j]] = TT[[i]]], {i, 1, n}];
Print["Default percentage ", N[k/n]]

{0.25,0.991907,0.993148,0.992527,0.991701,0.989636,0.991401}
{0.5,0.98388,0.986343,0.985111,0.98347,0.979379,0.982803}
{0.75,0.975918,0.979585,0.97775,0.975308,0.969229,0.974204}
{1.,0.96802,0.972873,0.970443,0.967213,0.959184,0.965605}
{1.25,0.95726,0.962851,0.960681,0.957099,0.948413,0.954062}
{1.5,0.946621,0.952933,0.951016,0.94709,0.937764,0.942518}
{1.75,0.9361,0.943116,0.941449,0.937186,0.927234,0.930975}
{2.,0.925695,0.933401,0.931977,0.927385,0.916822,0.919431}
{2.25,0.909803,0.918364,0.917419,0.912312,0.902491,0.904106}
```

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να παράγουμε τους χρόνους αθέτησης για 5 οντότητες αναφοράς και να πάρουμε μετά τον ελάχιστο χρόνο αθέτησης για τη τιμολόγηση του first-to-default swap.

Έχοντας παράξει τον ελάχιστο χρόνο αθέτησης για 5 οντότητες αναφοράς το επόμενο βήμα είναι ο υπολογισμός των συνολικών premiums που πληρώθηκαν καθώς και η αποπληρωμή για κάθε έναν από τους $n = 10^2$ χρόνους αθέτησης (σε έτη) και τέλος ο υπολογισμός των αντίστοιχων μέσων, ώστε να υπολογιστεί τελικά το Breakeven spread όπου θα είναι η διαίρεση των μέσων συνολικών premiums με τη μέση συνολική αποπληρωμή.

Τα βήματα του αλγορίθμου για την εύρεση των παραπάνω τιμών είναι τα ακόλουθα:

ΒΗΜΑ 1) Θέτουμε $\lambda_{ij} = h_j$ τους ρυθμούς κινδύνου για κάθε μία από τις $j = 1, \dots, 5$ οντότητες αναφοράς για κάθε ένα από τα $i = 1,2,3$ έτη

ΒΗΜΑ 2) Θέτουμε F_{ij} τις συναρτήσεις κατανομής των χρόνων αθέτησης T για κάθε μία από τις $j = 1, \ldots, 5$ οντότητες αναφοράς για κάθε ένα από τα $i = 1,2,3$ έτη (με τους αντίστοιχους τύπους που δόθηκαν παραπάνω για κάθε για $t \in [0, t_3)$)

```
λ11=h1[[1]];λ21=h1[[2]];λ31=h1[[3]];t1=1;t2=2;t3=3;
λ12=h2[[1]];λ22=h2[[2]];λ32=h2[[3]];
λ13=h3[[1]];λ23=h3[[2]];λ33=h3[[3]];
λ14=h4[[1]];λ24=h4[[2]];λ34=h4[[3]];
λ15=h5[[1]];λ25=h5[[2]];λ35=h5[[3]];

F11=1-Exp[-λ11*t1];
F21=1-Exp[-λ11*t1-λ21 (t2-t1)];
F31=1-Exp[-λ11*t1-λ21 (t2-t1)-λ31 (t3-t2)];

F12=1-Exp[-λ12*t1];
F22=1-Exp[-λ12*t1-λ22 (t2-t1)];
F32=1-Exp[-λ12*t1-λ22 (t2-t1)-λ32 (t3-t2)];

F13=1-Exp[-λ13*t1];
F23=1-Exp[-λ13*t1-λ23 (t2-t1)];
F33=1-Exp[-λ13*t1-λ23 (t2-t1)-λ33 (t3-t2)];

F14=1-Exp[-λ14*t1];
F24=1-Exp[-λ14*t1-λ24 (t2-t1)];
F34=1-Exp[-λ14*t1-λ24 (t2-t1)-λ34 (t3-t2)];

F15=1-Exp[-λ15*t1];
F25=1-Exp[-λ15*t1-λ25 (t2-t1)];
F35=1-Exp[-λ15*t1-λ25 (t2-t1)-λ35 (t3-t2)];
```

ΒΗΜΑ 3) Θέτουμε $n = 100$ (το οποίο μπορεί να αυξηθεί) χρόνους αθέτησης (σε έτη) και τους δημιουργούμε τους κενούς πίνακες TT, PremiumLeg και ContingentLeg , όπου θα υπολογίζονται οι χρόνοι αθέτησης και τα αντίστοιχα PremiumLeg και ContingentLeg για κάθε χρόνο αθέτησης. Επίσης, θέτουμε $k = 0$ μία μεταβλητή η οποία θα μετράει πόσοι από τους χρόνους αθέτησης είναι μικρότεροι από τη χρονική διάρκεια της σύμβασης

ΒΗΜΑ 4) Ξεκινάμε μία επαναληπτική διαδικασία για κάθε $n = 1, \ldots, 100,$ όπου για κάθε μία από τις οντότητες αναφοράς παράγουμε $U \sim (0,1)$, θέτουμε $T_i = F^{-1}(U)$, σύμφωνα με τους τύπους που δόθηκαν αναλυτικά παραπάνω και υπολογίζουμε τον ελάχιστο από τους χρόνους αθέτησης των 5 οντοτήτων, ως $T = Min[T1, T2, T3, T4, T5]$ και προσμετράμε πόσοι από τους χρόνους T είναι μικρότεροι από τη χρονική διάρκεια της σύμβασης. Θέτουμε στον πίνακα TT τον ελάχιστο χρόνο αθέτησης T και τέλος για κάθε τρίμηνο μέχρι τη λήξη της σύμβασης υπολογίζουμε τα premium legs και τα Contingent legs μέσω των τύπων:

$$\text{PremiumLeg} = \sum_{t=0}^{t_3-\frac{1}{4}} I[t<T]\cdot(1/4)\cdot e^{-\text{Libor(t)}},$$

με βήμα $\frac{1}{4}$ εφόσον η καταβολή είναι τριμηνιαία και

$$\text{ContigentLeg} = e^{-\text{Libor(t)}},$$

εάν έχει ενεργοποιηθεί η σύμβαση, δηλαδή εάν ο χρόνος αθέτησης είναι μικρότερος του t_3

ΒΗΜΑ 5) Υπολογίζουμε τη πιθανότητα να υπάρξει τουλάχιστον μία αθέτηση κατά τη διάρκεια της σύμβασης καταμετρώντας πόσοι από τους χρόνους αθέτησης είναι μικρότεροι από τη χρονική διάρκεια της σύμβασης και διαιρώντας με το n.

ΒΗΜΑ 6) Υπολογίζουμε το μέσο Premium και Contingent leg

ΒΗΜΑ 7) Υπολογίζουμε το Breakeven spread ως το πηλίκο των μέσων Premium και Contingent leg.

Ο κώδικας και τα αποτελέσματα του αλγορίθμου στο Mathematica δίνονται ακολούθως:

```
n=10^2;TT=Table[0,{n}];k=0;
PremiumLeg=Table[0,{n}];ContingentLeg=Table[0,{n}];
Do[U=RandomReal[];T1=t3;
 If[U<=F11,T1=-1/λ11*Log[1-U]];
 If[F11<U&&U<=F21,T1=t1-1/λ21*(Log[1-U]+λ11*t1)];
 If[F21<U&&U<=F31,T1=t2-1/λ31*(Log[1-U]+λ11*t1+λ21*(t2-t1))];
 U=RandomReal[];T2=t3;
 If[U<=F12,T2=-1/λ12*Log[1-U]];
 If[F12<U&&U<=F22,T2=t1-1/λ22*(Log[1-U]+λ12*t1)];
 If[F22<U&&U<=F32,T2=t2-1/λ32*(Log[1-U]+λ12*t1+λ22*(t2-t1))];
 U=RandomReal[];T3=t3;
 If[U<=F13,T3=-1/λ13*Log[1-U]];
 If[F13<U&&U<=F23,T3=t1-1/λ23*(Log[1-U]+λ13*t1)];
 If[F23<U&&U<=F33,T3=t2-1/λ33*(Log[1-U]+λ13*t1+λ23*(t2-t1))];
 U=RandomReal[];T4=t3;
 If[U<=F14,T4=-1/λ14*Log[1-U]];
 If[F14<U&&U<=F24,T4=t1-1/λ24*(Log[1-U]+λ14*t1)];
 If[F24<U&&U<=F34,T4=t2-1/λ34*(Log[1-U]+λ14*t1+λ24*(t2-t1))];
 U=RandomReal[];T5=t3;
 If[U<=F15,T5=-1/λ15*Log[1-U]];
 If[F15<U&&U<=F25,T5=t1-1/λ25*(Log[1-U]+λ15*t1)];
 If[F25<U&&U<=F35,T5=t2-1/λ35*(Log[1-U]+λ15*t1+λ25*(t2-t1))];

T=Min[T1,T2,T3,T4,T5];

TT[[i]]=T;If[T<t3,k++];

PremiumLeg[[i]]=Sum[Boole[t<T]*(1/4)*Exp[-Libor[[Floor[t]+1]]],{t,0,t3-
1/4,1/4}];

ContingentLeg[[i]]=0;If[T<t3,ContingentLeg[[i]]=Exp[-
Libor[[Floor[T]+1]]]];
```

```
,{i,1,n}]

Print["Default times = ",TT]
j=0;DT=Table[0,{k}];Do[If[TT[[i]]<t3,j++;DT[[j]]=TT[[i]]],{i,1,n}];
Print["At least one Default percentage ",N[k/n]];
Print["Total premiums paid = ",PremiumLeg]
Print["Payment = ",(1-δ)*ContingentLeg]

PVcl=Mean[(1-δ)*ContingentLeg];
RPV01=Mean[PremiumLeg];
S0=PVcl/RPV01;

Print["PV of Contingent leg is = ",PVcl]
Print["RPV01 is  = ",RPV01]
Print["Breakeven Spread = ",S0*10000]

Default times =
{0.86748,0.742129,2.95087,2.04581,2.43071,1.8932,2.04823,3,3,3,0.542164,1.
00235,3,3,3,3,3,3,3,3,2.31614,3,3,3,3,3,1.9834,3,3,0.519437,3,0.144223,3,2
.62211,3,2.33293,3,1.15908,3,2.06574,3,1.29875,3,3,2.75974,0.102509,3,3,3,
3,1.76835,3,3,3,3,3,3,0.687015,3,3,3,0.723594,1.04946,3,1.89585,0.242034,1
.35848,0.0348246,1.74404,1.71299,3,0.796763,3,3,3,3,1.12766,0.650237,2.536
11,3,3,3,1.25495,3,2.08355,0.844326,3,3,0.293783,3,3,0.715056,0.297142,3,3
,1.53122,2.07121,3,0.889205,3}

At least one Default percentage 0.43

Total premiums paid =
{0.965605,0.724204,2.87475,2.16204,2.39961,1.92448,2.16204,2.87475,2.87475
,2.87475,0.724204,1.20532,2.87475,2.87475,2.87475,2.87475,2.87475,2.87475,
2.87475,2.87475,2.39961,2.87475,2.87475,2.87475,2.87475,2.87475,1.92448,2.
87475,2.87475,0.724204,2.87475,0.241401,2.87475,2.63718,2.87475,2.39961,2.
87475,1.20532,2.87475,2.16204,2.87475,1.44504,2.87475,2.87475,2.87475,0.24
1401,2.87475,2.87475,2.87475,2.87475,1.92448,2.87475,2.87475,2.87475,2.874
75,2.87475,2.87475,0.724204,2.87475,2.87475,2.87475,0.724204,1.20532,2.874
75,1.92448,0.241401,1.44504,0.241401,1.68476,1.68476,2.87475,0.965605,2.87
475,2.87475,2.87475,2.87475,1.20532,0.724204,2.63718,2.87475,2.87475,2.874
75,1.44504,2.87475,2.16204,0.965605,2.87475,2.87475,0.482803,2.87475,2.874
75,0.724204,0.482803,2.87475,2.87475,1.68476,2.16204,2.87475,0.965605,2.87
475}

Payment =
{0.579363,0.579363,0.570167,0.570167,0.570167,0.575322,0.570167,0.,0.,0.,0
.579363,0.575322,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.,0.570167,0.,0.,0.,0.,0.,0.575322,
0.,0.,0.579363,0.,0.579363,0.,0.570167,0.,0.570167,0.,0.575322,0.,0.570167
,0.,0.575322,0.,0.,0.570167,0.579363,0.,0.,0.,0.,0.575322,0.,0.,0.,0.,0.,0
.,0.579363,0.,0.,0.,0.579363,0.575322,0.,0.575322,0.579363,0.575322,0.5793
63,0.575322,0.575322,0.,0.579363,0.,0.,0.,0.,0.575322,0.579363,0.570167,0.
,0.,0.,0.575322,0.,0.570167,0.579363,0.,0.,0.579363,0.,0.,0.579363,0.57936
3,0.,0.,0.575322,0.570167,0.,0.579363,0.}

PV of Contingent leg is = 0.247457

RPV01 is = 2.25666
Breakeven Spread = 1096.56
```

Όσο αφορά τα αποτελέσματα της τιμολόγησης, η παρούσα αξία του Contingent leg είναι ίση με: $\mathrm{PV}_{\text{Contigent leg}} = 0{,}247457$. Η αποζημίωση που αναμένεται να καταβάλλει ο πωλητής της προστασίας στον αγοραστή της προστασίας είναι ίση με την παρούσα αξία του Contingent leg επί την ονομαστική αξία του συμβολαίου. Δηλαδή, στο παράδειγμα θα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}\text{Αναμενόμενο Ποσό Αποζημίωσης} &= \mathrm{PV}_{\text{Contigent leg}} \times \text{Ονομαστική αξία σύμβασης} \\ &= 0{,}247457 \times 10.000.000\$ = 2.474.570\$\end{aligned}$$

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι η RPV01, δηλαδή η αναμενόμενη παρούσα αξία 1 μονάδας βάσης (bp) που καταβάλλεται για το Premium leg είτε μέχρι να συμβεί κάποιο πιστωτικό γεγονός, είτε μέχρι τη χρονική στιγμή λήξης της σύμβασης, ανάλογα με το πιο από τα δύο ενδεχόμενα θα συμβεί πρώτο είναι ίση με $\mathrm{RPV01} = 2{,}25666$. Είναι γνωστό ότι η RPV01 εκφράζει την έννοια του κινδύνου, επειδή αναφέρεται στην παρούσα αξία μιας αβέβαιης σειράς πληρωμών ασφαλίστρων, οι οποίες εξαρτώνται από το αν θα λάβει χώρα κάποιο πιστωτικό γεγονός ή όχι. Συγκεκριμένα στο παράδειγμα είδαμε ότι η $\mathrm{RPV01} = 2{,}25666$, δηλαδή ο αγοραστής της προστασίας της παρούσας σύμβασης θα πρέπει να καταβάλλει 2,25666 \$ για κάθε 1 μονάδα βάσης (bp) του εκτιμώμενου spread της αγοράς.

Σχετικά με το breakeven spread, γνωρίζουμε ότι πρόκειται ουσιαστικά για το ασφάλιστρο που τιμολογείται μία νέα σύμβαση CDS, κατά την ημερομηνία αποτίμησης. Δεδομένου ότι δεν υπάρχει αρχικό κόστος για τη σύναψη του νέου συμβολαίου, η αξία του συμβολαίου είναι μηδενική κατά την έναρξη της νέας σύμβασης. Δηλαδή, η παρούσα αξία του σταθερού σκέλους είναι ίση με την παρούσα αξία του ενδεχόμενου σκέλους. Στο δοθέν παράδειγμα το breakeven spread είναι ίσο με $1096.56\mathrm{bp}$. Ο λόγος που το breakeven spread είναι τόσο υψηλό, έχει να κάνει με το γεγονός ότι η σύμβαση είναι first-to-default με αρκετά υψηλά hazard rates για κάθε μία από τις οντότητες αναφοράς και τη πιθανότητα να υπάρξει τουλάχιστον μία αθέτηση κατά τη διάρκεια της σύμβασης η οποία όπως παρατηρούμε είναι ίση με 43%.

Στην περίπτωση που θέλουμε να τιμολογήσουμε μέσω Monte Carlo προσομοίωσης τη μία σύμβαση με τα παραπάνω χαρακτηριστικά, αλλά να είναι second-to-default (ή third- to-default κ.ο.κ.), το μόνο που πρέπει να αλλαχθεί στον κώδικα είναι η εντολή:

```
T=Min[T1,T2,T3,T4,T5]
```

η οποία πρέπει να μετατραπεί σε

```
T=Sort[{T1, T2, T3, T4, T5}][[2]],
```

έτσι ώστε να βρίσκεται ο χρόνος όπου αθετεί η $2^{η}$ οντότητα αναφοράς (δεδομένου ότι έχει αθετήσει ήδη μία οντότητα). Αντίστοιχη αλλαγή γίνεται εάν θέλουμε να τιμολογήσουμε μία third-to-default σύμβαση κ.ο.κ.

Τα αποτελέσματα που παράγονται για τις παραπάνω συμβάσεις (first έως και fifth-to default), αυξάνοντας και το πλήθος n των χρόνων αθετήσεων από 10^2 σε 10^4 φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 5.2.3

Είδος σύμβασης	At least i defaults percentage	PV of Contin-gent leg	RPV01	Breakeven spread
1st to default	0,5055	0,290457	2.23893	1297,3
2nd to default	0,1309	0,0748984	2,78304	269,124
3rd to default	0,0181	0,010342	2,86576	36,0883
4th to default	0,0014	0,000799265	2,87399	2,78103
5th to default	0,0001	0,0000570167	2,87475	0,198336

Όπως φαίνεται στον παραπάνω πίνακα το breakeven spread μειώνεται όσο το είδος της σύμβασης μεταβάλλεται από first-to-default σε fifth-to-default. Η συνέπεια αυτή δεν οφείλεται στο γεγονός ότι το καλάθι έχει αυξήσει το μέγεθος του πιστωτικού κινδύνου στον οποίο εκτίθεται ο επενδυτής, αλλά στο γεγονός ότι η πιθανότητα να συμβούν ν+1 αθετήσεις στο καλάθι, είναι μικρότερη από την πιθανότητα να συμβούν ν αθετήσεις.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ξένη:

[1] Barrett R., Ewan J. (2006). *BBA Credit Derivatives Report 2006*, British Bankers' Association

[2] Chan N., Wong H. (2015). *Simulation Techniques in Financial Risk Management,* Wiley

[3] Duffie D., Singleton K. (1999). *Modelling Term-Structures of Defaultable Bonds*, Stanford University

[4] Geoff Chaplin (2008). *Credit Derivatives: Trading, Investing and Risk Management*, Second Edition, John Wiley & Sons

[5] ISDA (2003). *ISDA Credit Derivatives Definitions*. International Swaps and Derivatives Association

[6] Jarrow A. Robert, Turnbull M. Stuart (1995). *Pricing Derivatives on Financial Securities Subject to Credit Risk*, Journal of Finance

[7] Meissner Gunter (2005). *Credit Derivatives: Application, Pricing and Risk Management,* Blackwell Publishing

[8] Metropolis N., Ulam S. (1949). *The Monte Carlo Method*, Journal of the American Statistical Association, Vol. 44, pp. 335-341

[9] Mounfield C.C (2009). *Synthetic CDOs: Modelling, Valuation and Risk Management,* Cambridge University Press

[10] O'Kane Dominic (2001). *Credit Derivatives Explained: Market, Products and Regulations*, Lehman Brothers: Structured Credit Research

[11] O'Kane Dominic & Turnbull Stuart (2003). *Valuation of Credit Default Swaps*, Lehman Brothers Quantitative Credit Research

[12] O'Kane Dominic (2008). *Modelling single-name and multi-name Credit Derivatives*, John Wiley & Sons

Ελληνική

[1] Μπούτσικας Μ. (2004). *Μέθοδοι Προσομοίωσης και υπολογιστικές στατιστικές τεχνικές*, Πανεπιστημιακές Σημειώσεις, Πανεπιστήμιο Πειραιά

[2] Μπούτσικας Μ. (2005-2007). *Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα,* Πανεπιστημιακές Σημειώσεις, Πανεπιστήμιο Πειραιά

[3] Παππά Δ. (2016) *Αποτίμηση Συμβάσεων Ανταλλαγής Πιστωτικού Κινδύνου*. Διπλωματική εργασία. Πανεπιστήμιο Πειραιώς.