ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής

Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

<u>Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών</u>

«Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου»

«Στοχαστική Μεταβλητότητα Κάλυψης Έναντι Ζημίας μέσω Δικαιωμάτων Προαίρεσης»

Αλεξόπουλος Γ. Χρήστος

Πειραιάς, Ιούλιος 2018

UNIVERSITY OF PIRAEUS

School of Finance and Statistics

Department of Statistics and Actuarial Science

Master of Science

“Actuarial Science and Risk Management”

“Option Hedging with Stochastic Volatility”

Alexopoulos G. Christos

Piraeus, July 2018

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον κύριο Βασίλειο Σεβρόγλου, Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς, για την πολύ σημαντική υποστήριξη, καθοδήγηση, βοήθεια και υπομονή του καθ’ όλη τη διάρκεια υλοποίησης της παρούσας εργασίας.

Παράλληλα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Διευθυντή του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών της Αναλογιστικής Επιστήμης και Διοικητικής Κινδύνου, κύριο Ευστάθιο Χατζηκωνσταντινίδη, Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς, καθώς και τον κύριο Μαχαιρά, Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης και την Αναπληρώτρια Καθηγήτρια κυρία Βερροπούλου του ιδίου Τμήματος, για την συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή.

Τέλος, δεν θα μπορούσα να μην ευχαριστήσω τους γονείς μου, Γεώργιο και Μαρία, και την αγαπημένη μου αδελφή Ασπασία-Μαρία, όπως επίσης και την αγαπημένη μου Δέσποινα για την άνευ όρων συμπαράσταση και υποστήριξη, τόσο υλική όσο και ψυχολογική, καθ’ όλη τη διάρκεια των ακαδημαϊκών μου σπουδών.

Περίληψη

Στην εργασία αυτή, και στο πλαίσιο του στοχαστικού περιβάλλοντος, θα μελετήσουμε τη μεταβλητότητα μέσω του μοντέλου των Black και Scholes. Θα θεωρήσουμε τη μεταβλητότητα σαν μια συνάρτηση δύο μεταβλητών: 1) του λόγου της τιμής άσκησης ενός Δικαιώματος Προαίρεσης προς την αξία του υποκειμένου περιουσιακού στοιχείου, και 2) της στιγμιαίας μεταβλητότητας του υποκειμένου στοιχείου. Θα δούμε ότι οι συνηθέστερες μέθοδοι αντιστάθμισης ζημίας, που απορρέουν από το μοντέλο των Black και Scholes, μπορούν να οδηγήσουν σε ανεπαρκή κάλυψη μιας θέσης. Θα δούμε ότι η παρατήρηση αυτή σχετίζεται με το λεγόμενο "*smile effect*", το οποίο έχει αποδειχθεί ότι είναι άμεσο επακόλουθο της στοχαστικής φύσης της μεταβλητότητας ενός περιουσιακού στοιχείου. Η εξάρτησή της ντετερμινιστικά από τη διαδικασία που χαρακτηρίζει τη μεταβλητότητα ενός υποκειμένου στοιχείου υποδεικνύει ότι η επαγόμενη μεταβλητότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί με ασφάλεια για την εκτίμηση των παραμέτρων που μας ενδιαφέρουν. Η στατιστική επεξεργασία της διαδικασίας αυτής (και η εκτίμηση των παραμέτρων που μας ενδιαφέρουν) εμφανίζει ισχυρή συνέπεια, καθώς και ασυμπτωτική κανονικότητα.

Abstract

In this paper, we will study the parameter known as the Black and Scholes implied volatility as a function of two variables: 1) the ratio of the exercise price of an option to that option's underlying asset price, and 2) the instantaneous value of the underlying asset's volatility. We will show that the most commonly used hedging methods, those arising from the Black and Scholes model, can lead to inefficient hedging of one's position. We will see that this observation is related to the so called '*smile effect*', which has been proved to be a direct aftereffect of the stochastic nature of an underlying asset's volatility. Its deterministic dependence on the underlying asset's volatility process dictates that implied volatility can safely be used for the estimation of the parameters we are interested in. Statistical processing of this process (followed by estimation of its parameters) happens to show strong consistency, as well as asymptotic normality.

Εισαγωγή

Το κλασσικό μοντέλο των Black και Scholes (1973) βασίζεται στην παραδοχή ότι η αξία ενός υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου περιγράφεται από μια διαδικασία διάχυσης και ότι έχει σταθερή μεταβλητότητα. Και, παρόλο που πολλές εμπειρικές αναλύσεις δεν αποδέχονται την παραδοχή αυτή, το μοντέλο χρησιμοποιείται κατά κόρον στον επενδυτικό κόσμο για την ανάλυση Δικαιωμάτων Προαίρεσης και την αντιστάθμιση του κινδύνου που συνδέεται με αυτά. Η συνήθης διαδικασία περιλαμβάνει την παρακολούθηση της τιμής στην οποία πωλείται αυτή τη στιγμή ένα δεδομένο Δικαίωμα στην αγορά, και, γνωρίζοντας ήδη τα επιμέρους στοιχεία του, την αντιστροφή του μοντέλου, το οποίο λύνεται ως προς τη «μεταβλητότητα». Πρόκειται για τη λεγόμενη «επαγόμενη μεταβλητότητα». Η τιμή της δεν είναι η πραγματική μεταβλητότητα, αλλά η αίσθηση της αγοράς για τη μεταβλητότητα του εν λόγω υποκειμένου στοιχείου.

Προσπαθώντας να αναλύσουμε την ποιότητα της αντιστάθμισης που υπόσχεται το μοντέλο των Black και Scholes, είναι θεμιτό να ξεκινήσουμε στο διακριτό πλαίσιο του χρόνου. Στο πλαίσιο αυτό, συναντούμε τα μοντέλα ARCH – GARCH (Engle, 1982[12]), τα οποία φαίνεται να συμφωνούν με τα ιστορικά δεδομένα των αξιών του υποκειμένου στοιχείου, αλλά δεν περιλαμβάνουν τον επιπλέον κίνδυνο που προκύπτει από την επένδυση σε Δικαιώματα για το στοιχείο αυτό. Έτσι, περιγράφουν μια αγορά όπου τα Δικαιώματα δεν αποφέρουν κέρδος, οπότε και δεν έχουν λόγο ύπαρξης. Επίσης, συναντούμε τα μοντέλα μεταπήδησης καταστάσεων (Hamilton, 1989[17]) και τα μοντέλα στοχαστικής διακύμανσης (Harvey, Ruiz, Shephard, 1994[19]), όπου οι αλλαγές στη μεταβλητότητα περιγράφονται από Μαρκοβιανές στοχαστικές διαδικασίες.

Στην εργασία αυτή, θα θεωρήσουμε πως οι διαφορετικές αξίες του υποκείμενου στοιχείου περιγράφονται από το μοντέλο στοχαστικής μεταβλητότητας των Hull και White (1987)[22] και Scott (1987)[28], καθώς αυτό δρα κατά μία έννοια ως ένα όριο σε συνεχή χρόνο των διακριτού χρόνου μοντέλων ARCH και στοχαστικής διακύμανσης που προαναφέρθηκαν, και φαίνεται να μπορεί να προσεγγίσει την πραγματικότητα.

Αρχικά, θα αναλύσουμε την επαγόμενη μεταβλητότητα μέσω του μοντέλου των Black και Scholes για μια δεδομένη πραγματική μεταβλητότητα που καταλήγουμε να παρατηρήσουμε. Θα δούμε ότι η αντιστάθμιση μέσω Black και Scholes, μπορεί να οδηγήσει σε υπό του δέοντος αντιστάθμιση έναντι *in the money* Δικαιωμάτων, και σε υπέρ του δέοντος αντιστάθμιση έναντι *out of the money* Δικαιωμάτων. Επίσης, θα προσπαθήσουμε να εξηγήσουμε το λεγόμενο «*smile effect*», την U μορφής γραφική παράσταση της επαγόμενης μεταβλητότητας ως προς την *in/out of the money* κατάσταση του Δικαιώματος, η οποία παρουσιάζει ελάχιστο στην *at the money* κατάσταση.

Παλαιότερες έρευνες έχουν ασχοληθεί με το πρόβλημα της χαρτογράφησης της μεταβλητότητας υποκείμενων στοιχείων (Scott 1987[28], Hansen 1982[18], Duffie και Singleton 1989[11], Gouriéroux, Monfort και Renault 1993[16], Gallant και Tauchen 1994[15]). Η προσέγγισή τους, όμως, στο πρόβλημα έγινε με ανάλυση ιστορικών αξιών του υποκείμενου στοιχείου. Άξια αναφοράς είναι η ανάλυση των Heynen, Kemna και Vorst (1991)[21] που προσέγγιζε το ζήτημα χρησιμοποιώντας Δικαιώματα βραχέως διάρκειας και κοντά στην at the money κατάσταση, καθώς και των Engle και Mustafa (1992)[13] που προσπάθησαν να εκτιμήσουν τη διαδικασία της μεταβλητότητας, παρατηρώντας τη σύγκλιση ενός διακριτού Γενικευμένου μοντέλου ARCH προς το συνεχές του χρόνου, καθώς το διάστημα μεταξύ παρατηρήσεων τείνει προς το μηδέν. Και οι μέθοδοι αυτές, όμως, υπόκεινται στον κίνδυνο μεροληψίας και εξακολουθεί να μη χρησιμοποιείται η πληρότητα της διαθέσιμης πληροφορίας για τα υποκείμενα στοιχεία και τα Δικαιώματα αυτών.

Για το λόγο αυτό, στην εργασία αυτή θα επικεντρωθούμε στην επαγόμενη μεταβλητότητα, την οποία βλέπουμε σαν συνάρτηση της σ, η οποία σ είναι ένα-προς-ένα συνάρτηση μιας διαδικασίας *Ornstein-Uhlenbeck*. Θα δούμε ότι, παρακολουθώντας την τιμή ενός Δικαιώματος σε μια δεδομένη στιγμή, βλέπουμε εμμέσως την τιμή της διαδικασίας της μεταβλητότητας του υποκειμένου τη στιγμή αυτή. Λόγω αυτού, θα προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε μία μέθοδο εκτίμησης χρησιμοποιώντας την επαγόμενη μεταβλητότητα.

Η εργασίας μας διαρθρώνεται ως εξής. Το πρώτο Κεφάλαιο παρουσιάζει τα παράγωγα χρηματιστηριακά προϊόντα και τις βασικότερες κατηγορίες τους, δίνοντας έμφαση στα Δικαιώματα Προαίρεσης. Το δεύτερο Κεφάλαιο περιλαμβάνει το γνωστικό υπόβαθρο στις στοχαστικές διαδικασίες που είναι απαραίτητο για την κατανόηση της μεθόδου. Τέλος, το τρίτο Κεφάλαιο εμβαθύνει στην τιμολόγηση των Δικαιωμάτων Προαίρεσης στα πλαίσια του στοχαστικού περιβάλλοντος.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 1

Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα

Τα Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα, που αποτελούν στο σύνολό τους τη Δευτερογενή Αγορά, είναι συμβόλαια που συνάπτονται μεταξύ δύο ενδιαφερομένων πλευρών. Πρόκειται για αμοιβαίες συμφωνίες για την αγοραπωλησία ενός υποκείμενου στοιχείου, σε συγκεκριμένη τιμή και σε συγκεκριμένο χρόνο. Σε αντίθεση με τις μετοχές, τα ομόλογα και τα εμπορεύματα, τα προϊόντα δηλαδή που απαρτίζουν ως επί το πλείστον την Πρωτογενή Αγορά, τα Παράγωγα λαμβάνουν την αξία τους μέσω άλλων υποκείμενων στοιχείων. Τα υποκείμενα στοιχεία αυτά τις περισσότερες φορές είναι προϊόντα της Πρωτογενούς Αγοράς ή της Αγοράς Συναλλαγμάτων.

Ο λόγος για τον οποίο χρησιμοποιούμε τα Παράγωγα είναι ότι μπορούμε να εξασφαλίσουμε το κόστος μιας συναλλαγής που γνωρίζουμε ότι θα χρειαστεί να πραγματοποιήσουμε στο μέλλον, αποκλείοντας έτσι την πιθανότητα να πληρώσουμε περισσότερα, στην περίπτωση που αυξηθεί για εμάς το κόστος της εν λόγω συναλλαγής στο μέλλον. Ως άμεσο και αναπόφευκτο επακόλουθο αυτού, λαμβάνουμε επίσης τον κίνδυνο να μειωθεί το κόστος της εν λόγω συναλλαγής στο μέλλον, οπότε βάσει της συμφωνίας αυτής είμαστε αναγκασμένοι να πληρώσουμε περισσότερα από όσα θα πληρώναμε, αν δεν την είχαμε συνάψει. Για το λόγο αυτό, η Αγορά των Παραγώγων θεωρείται ότι ανήκει στην κατηγορία των *zero-sum games*, όπου πάντα ο ένας από τους δύο εμπλεκόμενους καταλήγει να κερδίσει λιγότερα (ή να πληρώσει περισσότερα) από όσα θα μπορούσε κανονικά, ενώ ο άλλος καταλήγει να κερδίσει περισσότερα (ή να πληρώσει λιγότερα) από όσα θα μπορούσε κανονικά.

1.1 Προθεσμιακά Συμβόλαια

[2,32]Στην πρώτη κατηγορία των Παραγώγων έχουμε τα προϊόντα που ονομάζουμε *Προθεσμιακά Συμβόλαια* ή *Forwards*. Θεωρούνται η πιο απλή μορφή των παραγώγων από άποψη των όρων της συμφωνίας. Εκδίδονται κυρίως για τη Συναλλαγματική Αγορά, την Αγορά Εμπορευμάτων και Ενέργειας, αλλά και την Αγορά χρήματος, δηλαδή τη Δανειοληψία.

Το Προθεσμιακό Συμβόλαιο είναι η συμφωνία μεταξύ δύο ενδιαφερομένων πλευρών, βάσει της οποίας η μία πλευρά είναι υποχρεωμένη να αγοράσει και η άλλη πλευρά είναι υποχρεωμένη να πουλήσει το συμπεριλαμβανόμενο στη συμφωνία υποκείμενο στοιχείο σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή στο μέλλον, αλλά στην τιμή που αυτό κοστίζει κατά τη σύναψη της συμφωνίας. Η πλευρά που υποχρεούται να αγοράσει λέμε ότι έχει τη *long* θέση στο Συμβόλαιο, ενώ η πλευρά που υποχρεούται να πουλήσει έχει τη *short* θέση.

Ας δούμε ένα παράδειγμα σύναψης Προθεσμιακού Συμβολαίου για το συναλλαγματικό κομμάτι μιας αγοράς. Ας υποθέσουμε ότι η εταιρία Α, που κατασκευάζει ηλεκτρονικές συσκευές και εδρεύει στην Αμερική, γνωρίζει ότι χρειάζεται να αγοράσει σε ένα χρόνο από σήμερα 50.000 ηλεκτρονικές πλακέτες. Μετά από μια έρευνα αγοράς, βρίσκει ότι τη συμφέρει να τις αγοράσει από την εταιρία Β, που κατασκευάζει ηλεκτρονικές πλακέτες και εδρεύει στην Ιαπωνία, καθώς έχει την πιο συμφέρουσα τιμή στην αγορά, 500 ιαπωνικά Γιεν για κάθε πλακέτα. Είναι γνωστό, επίσης, ότι η ισοτιμία Γιεν/Δολαρίου σήμερα είναι 500 Γιεν/Δολάριο. Επομένως, το συνολικό κόστος για την εταιρία Α είναι 25.000.000 ιαπωνικά Γιεν, ή 50.000 αμερικανικά Δολάρια. Όμως, η εταιρία Α περιμένει ότι σε ένα χρόνο από σήμερα το Γιεν θα ανέβει έναντι του Δολαρίου, οπότε, αν η αγορά αυτή πραγματοποιηθεί σε ένα χρόνο, θα της κοστίσει τελικά περισσότερα από 50.000 Δολάρια. Γι' αυτό, προτίθεται να συνάψει ένα Προθεσμιακό Συμβόλαιο με την εταιρία Β, για την αγορά 50.000 πλακετών σε ένα χρόνο από σήμερα, στην τιμή του 1 αμερικανικού Δολαρίου για κάθε πλακέτα. Η εταιρία Β, που περιμένει ότι σε ένα χρόνο από σήμερα το Γιεν θα πέσει έναντι του Δολαρίου, συμφωνεί στη σύναψη της συμφωνίας, ώστε να κερδίσει περισσότερα από όσα θα κέρδιζε, αν έκανε την πώληση σε ένα χρόνο από σήμερα.

Οι εξισώσεις που δείχνουν το κέρδος ή τη ζημία για την καθεμία από τις δύο εμπλεκόμενες πλευρές είναι οι

(1.1.1.) $$P_{Fwd,Long} = S - K$$

(1.1.2.) $$P_{Fwd,Short} = K - S.$$

Ο συμβολισμός P προκύπτει από το payoff, δηλαδή την αποζημίωση. Οπότε, $P_{Fwd,Long}$ είναι η αποζημίωση της πλευράς που είναι long στο Προθεσμιακό Συμβόλαιο και $P_{Fwd,Short}$ είναι η αποζημίωση της πλευράς που είναι short. S είναι η τιμή της αγοράς την κάθε χρονική στιγμή (Spot Price), ενώ με K συμβολίζουμε την τιμή που αναγράφεται συγκεκριμένα στο Προθεσμιακό Συμβόλαιο. Επομένως στο παραπάνω παράδειγμα, αν μετά από ένα χρόνο το Γιεν ανέβαινε έναντι του Δολαρίου, το κόστος της αγοράς θα υπερέβαινε τα 50.000 Δολάρια για την εταιρία Α, καθώς η τιμή της αγοράς θα ήταν μεγαλύτερη από τη προσυμφωνημένη, ή διαφορετικά θα ίσχυε $S > K$. Οπότε, η αποζημίωση της Α θα είχε θετικό πρόσημο, ενώ της Β αρνητικό. Στην περίπτωση που το Γιεν έπεφτε έναντι του Δολαρίου, θα ίσχυε $S < K$, οπότε οι δύο αποζημιώσεις θα είχαν αντίθετα πρόσημα.

Γίνεται προφανής, λοιπόν, και από τις δύο εξισώσεις αλλά και από το παράδειγμα, ο χαρακτήρας *zero-sum game* του παραγώγου, καθώς μόνο μία από τις δύο εταιρίες θα καταλήξει να «κερδίσει» από αυτή τη συναλλαγή και το κέρδος της αυτό θα προκύψει από τη ζημία της άλλης πλευράς.

Στη Δευτερογενή Αγορά υπάρχει επίσης το ενδεχόμενο ο ένας εκ των δύο εμπλεκομένων να αθετήσει την υποχρέωσή του (είτε να αγοράσει είτε να πουλήσει), αν δεν μπορεί να ανταποκριθεί οικονομικά σε αυτή. Για την αποφυγή του ενδεχομένου αυτού, συνήθως τα Προθεσμιακά Συμβόλαια περιλαμβάνουν και κάποια εγγύηση σε μορφή χρήματος ή εμπορεύσιμων χρεογράφων, τα οποία μπορεί να κρατήσει η μία πλευρά σε περίπτωση αθέτησης της άλλης, ώστε να καλύψει τη ζημία που θα είχε αν αγόραζε ή πουλούσε (ανάλογα τη θέση της στο Συμβόλαιο) με την τρέχουσα τιμή της αγοράς.

1.2 Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης

[1,32]Στη συνέχεια, συναντάμε μια άλλη κατηγορία Παραγώγων, τα προϊόντα που ονομάζουμε *Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης* (ΣΜΕ) ή *Futures*. Θεωρούνται και αυτά μια από τις απλές κατηγορίες των Παραγώγων και, όπως και τα Προθεσμιακά Συμβόλαια που είδαμε στην προηγούμενη Ενότητα, εκδίδονται ως επί το πλείστον για την Αγορά Εμπορευμάτων, αλλά και για την Αγορά Χρηματιστηριακών Δεικτών, Συναλλάγματος ή Επιτοκίων. Παρόλα αυτά, παρουσιάζουν σημαντικές διαφορές συγκριτικά με τα Προθεσμιακά Συμβόλαια.

Ένα Συμβόλαιο Μελλοντικής Εκπλήρωσης (ΣΜΕ) είναι μία συμφωνία για αγορά ή πώληση ενός εμπορεύσιμου αγαθού, όπως το σιτάρι ή το καλαμπόκι, ή ενός άλλου χρηματοοικονομικού προϊόντος, σε συγκεκριμένη ποσότητα και ποιότητα, σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή στο μέλλον και σε συγκεκριμένη τοποθεσία, στην οποία θα πραγματοποιηθεί η παράδοσή του. Η μόνη μεταβλητή παράμετρος του Συμβολαίου είναι η τιμή αγοράς ή πώλησης, η οποία συμφωνείται κατά τη σύναψη του ΣΜΕ. Η αναγραφόμενη τιμή δεν είναι υποχρεωτικό να συμπίπτει με την αγοραία τιμή του συγκεκριμένου προϊόντος. Ανάλογα με το προϊόν που αναγράφεται στο ΣΜΕ, το «κλείσιμο» κατά την ημερομηνία λήξης διευθετείται είτε με φυσική παράδοση στη αναγραφόμενη τοποθεσία, είτε με χρηματική εξόφληση. Όπως και στα Προθεσμιακά Συμβόλαια, η πλευρά που έχει αγοράσει το ΣΜΕ λέμε ότι είναι long, ενώ η πλευρά που το έχει πουλήσει λέμε ότι είναι short.

Είναι σημαντικό στο σημείο αυτό να παρατηρηθεί ότι τα Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης είναι αυτούσια εμπορεύσιμα χρηματοοικονομικά προϊόντα. Λόγω αυτού, μπορεί κάποιος να έχει long θέση σε ένα ΣΜΕ χωρίς απαραίτητα να προτίθεται ο ίδιος να αγοράσει το προϊόν που αναγράφεται, όπως επίσης κάποιος μπορεί να έχει short θέση χωρίς να έχει αναγκαστικά στην κατοχή του το προϊόν. Επομένως, τα ΣΜΕ διαφέρουν σε αυτό το σημείο από τα Προθεσμιακά Συμβόλαια, στα οποία οι δύο πλευρές που συμφώνησαν για μια μελλοντική συναλλαγή, υποχρεούνται και να τη διεκπεραιώσουν μεταξύ τους. Επίσης, δεν είναι υποχρεωτικό η παράδοση του προϊόντος να γίνει από τον αρχικό πωλητή του συμβολαίου στον αρχικό αγοραστή αυτού. Με άλλα λόγια, ο αγοραστής ενός ΣΜΕ για έναν τόνο σιτάρι σε ένα χρόνο από σήμερα δεν ενδιαφέρεται για το αν το σιτάρι θα προέλθει από τον παραγωγό που πούλησε το συγκεκριμένο ΣΜΕ αρχικά ή από κάποιον άλλο. Κατ' επακόλουθο, ο πωλητής του ΣΜΕ δεν ενδιαφέρεται για το ποιος θα αγοράσει τελικά την ποσότητα σιταριού σε ένα χρόνο. Το σημαντικό στο είδος αυτής της συναλλαγής είναι η κάθε πλευρά που έχει ανοιχτή θέση να εκπληρώσει τις υποχρεώσεις της βάσει του συμβολαίου.

Μια από τις χρησιμότητες της εμπορευσιμότητας των ΣΜΕ είναι ότι κάποιος που έχει ανοιχτή θέση σε ένα συμβόλαιο έχει τη δυνατότητα, αν το κρίνει ο ίδιος ωφέλιμο, να την κλείσει. Αυτό μπορεί να γίνει προχωρώντας σε νέο άνοιγμα θέσης, αντίθετης με την αρχική. Οπότε, αν κάποιος έχει αρχικά long θέση, μπορεί να την κλείσει προχωρώντας σε πώληση του συγκεκριμένου συμβολαίου σε κάποιον άλλο ενδιαφερόμενο.

Για να γίνει περισσότερο κατανοητή η χρησιμότητα αυτή, ας υποθέσουμε ότι ένας επιχειρηματίας αγοράζει ένα ΣΜΕ για ένα συγκεκριμένο προϊόν για παραλαβή σε ένα χρόνο από σήμερα, καθώς γνωρίζει ότι σε ένα χρόνο από σήμερα θα χρειαστεί το συγκεκριμένο προϊόν, στη συγκεκριμένη ποσότητα και ποιότητα, αλλά εκτιμά ότι σε ένα χρόνο από σήμερα το κόστος του προϊόντος θα είναι υψηλότερο από όσο δύναται ή προτίθεται να πληρώσει ο ίδιος. Στο χρονικό διάστημα που ακολουθεί την αγορά του ΣΜΕ, ο αγοραστής παρακολουθεί τις διακυμάνσεις τις αγοραίας τιμής του συγκεκριμένου προϊόντος και παρατηρεί μια καθοδική σε γενικές γραμμές τάση. Αν με το πέρας της ημερομηνίας λήξης του συμβολαίου ο επιχειρηματίας έχει παραμείνει σε long θέση, οφείλει να αγοράσει το προϊόν στη συγκεκριμένη ποσότητα και συμφωνηθείσα τιμή. Οπότε, αν με το πέρας της ημερομηνίας, το προϊόν πωλείται στην Αγορά σε τιμή χαμηλότερη αυτής που αναγράφεται στο συμβόλαιο, ο επιχειρηματίας τελικά οφείλει να πληρώσει περισσότερα από όσα θα πλήρωνε αγοράζοντας το προϊόν απευθείας από την Αγορά. Αν λοιπόν, παρατηρήσει πτωτική τάση στην τιμή του προϊόντος πριν τη λήξη του Συμβολαίου, μπορεί να κλείσει τη θέση του, βγαίνοντας short, πουλώντας το δηλαδή, σε κάποιον που προτίθεται να το αγοράσει.

Ένα άλλο χαρακτηριστικό των Συμβολαίων Μελλοντικής Εκπλήρωσης είναι το γεγονός ότι ο εκάστοτε αγοραστής δεν έρχεται σε επαφή με τον εκάστοτε πωλητή Συμβολαίου. Αυτό μπορεί να οδηγήσει σε αθέτηση των υποχρεώσεων κάποιου εκ των δύο, σε περίπτωση, για παράδειγμα, που πτωχεύσει. Για το λόγο αυτό, στην Αγορά των Παραγώγων αυτών, υπάρχει και μία τρίτη πλευρά. Η πλευρά αυτή εισέρχεται ενδιάμεσα στους αγοραστές και τους πωλητές τέτοιων Συμβολαίων. Είναι γνωστή σαν *Clearing House* και η λειτουργία της είναι να αναλαμβάνει το ρόλο του αγοραστή απέναντι στους πωλητές, και ταυτόχρονα το ρόλο του πωλητή απέναντι στους αγοραστές. Επομένως, και ο πωλητής, αλλά και ο αγοραστής του ΣΜΕ συναλλάσσονται με το Clearing House, και όχι άμεσα μεταξύ τους. Ο ρόλος του είναι πολύ σημαντικός, καθώς έτσι διασφαλίζεται το ορθό κλείσιμο του συνόλου των ανοιχτών θέσεων κατά τη λήξη του εκάστοτε ΣΜΕ. Οπότε η παρουσία του τελικά διασφαλίζει ότι ο κάθε αγοραστής θα λάβει το προϊόν που χρειάζεται, στην ποσότητα και ποιότητα που το χρειάζεται, καθώς και ότι ο κάθε πωλητής θα παραδώσει το προϊόν, υπό τις προϋποθέσεις που υποχρεούται από το συμβόλαιο.

1.3 Συμβάσεις Ανταλλαγής

[3]Μία ακόμη κατηγορία Παραγώγων είναι οι Συμβάσεις Ανταλλαγής (ΣΑ) ή Swaps. Πρόκειται για συμβόλαια που συνάπτονται μεταξύ δύο ενδιαφερομένων, κατά τα οποία συμφωνείται και από τις δύο πλευρές η αμοιβαία ανταλλαγή χρηματοροών για ένα επίσης συμφωνημένο χρονικό διάστημα. Διακρίνονται κυρίως στις εξής κατηγορίες:

1. Συμβάσεις Ανταλλαγής Επιτοκίων (ΣΑΕ) ή Interest Rate Swaps
2. Συμβάσεις Ανταλλαγής Συναλλάγματος (ΣΑΣ) ή Cross-Currency Swaps
3. Συμβάσεις Ανταλλαγής Κινδύνου Αθέτησης (ΣΑΚΑ) ή Credit Default Swaps

1.3.1 Συμβάσεις Ανταλλαγής Επιτοκίων

[3]Μία Σύμβαση Ανταλλαγής Επιτοκίων είναι ένα συμβόλαιο που συνάπτεται μεταξύ δύο πλευρών, βάσει του οποίου η μία πλευρά πληρώνει σταθερό επιτόκιο στην άλλη και λαμβάνει κυμαινόμενο, ενώ η άλλη πλευρά πληρώνει στην πρώτη κυμαινόμενο και λαμβάνει σταθερό. Η πλευρά που πληρώνει σταθερό επιτόκιο και λαμβάνει κυμαινόμενο λέμε ότι έχει τη *long* θέση στη Σύμβαση, ενώ η πλευρά που πληρώνει κυμαινόμενο και λαμβάνει σταθερό έχει τη *short* θέση. Η ανταλλαγή, εν τέλει, γίνεται με τη μορφή χρηματοροών, και όχι επιτοκίων, για το λόγο αυτό στα χαρακτηριστικά της Σύμβασης αναγράφεται και ένα Ονομαστικό Κεφάλαιο. Το Κεφάλαιο αυτό δε θα καταλήξει να καταβληθεί σε κάποια από τις δύο πλευρές από την άλλη· χρησιμεύει μόνο για τον υπολογισμό των χρηματοροών που η κάθε πλευρά οφείλει να πληρώσει ή αναμένει να λάβει.

Το σταθερό επιτόκιο δεν αλλάζει καθ' όλη τη διάρκεια ισχύος της Σύμβασης και συμφωνείται από τις δύο πλευρές κατά τη σύναψή της με τέτοιο τρόπο, ώστε να αντικατοπτρίζει το αναμενόμενο και από τις δύο πλευρές μέσο όρο των τιμών που θα λάβει το κυμαινόμενο επιτόκιο για το διάστημα ισχύος της Σύμβασης. Έτσι, και οι δύο πλευρές ξεκινούν στο συμβόλαιο επί ίσοις όροις. Το κυμαινόμενο επιτόκιο, συνήθως, καθορίζεται από έναν ευρέως χρησιμοποιούμενο δείκτη, όπως το LIBOR (London Interbank Offered Rate), το EURIBOR ή κάποιον άλλο δείκτη.

Μία Σύμβαση Ανταλλαγής Επιτοκίων, επίσης, καθορίζεται και για ποιο χρονικό διάστημα θα ισχύει. Οι πιο συνηθισμένες διάρκειες στις ΣΑΕ είναι τα 5 και τα 10 έτη, αλλά μπορούν να ισχύουν και για οποιοδήποτε άλλο χρονικό διάστημα. Μέσα στο διάστημα αυτό, τις περισσότερες φορές το πλήθος και η συχνότητα των πληρωμών της μίας πλευράς δε συμπίπτουν με της άλλης. Συνηθίζεται, ειδικά στις αμερικανικές Συμβάσεις, η πλευρά που πληρώνει σταθερό επιτόκιο να πραγματοποιεί δύο πληρωμές ετησίως, η καθεμία ανά εξάμηνο, ενώ η πλευρά που πληρώνει κυμαινόμενο να πραγματοποιεί τέσσερις πληρωμές ετησίως, η καθεμία ανά τρίμηνο.

Όπως προαναφέραμε, στη Σύμβαση αναγράφονται το σταθερό επιτόκιο, στο οποίο συμφώνησαν οι πλευρές, καθώς και ο δείκτης που θα χρησιμοποιηθεί για το κυμαινόμενο επιτόκιο. Παρόλα αυτά, η μορφή των δύο αυτών επιτοκίων είναι ετήσια. Λόγω του ότι οι πληρωμές συνήθως γίνονται περισσότερες από μία φορές μέσα σε ένα έτος, χρειάζεται να υπολογισθούν τα πραγματικά επιτόκια, με βάση τα οποία θα υπολογιστεί η εκάστοτε πληρωμή. Αυτό επιτυγχάνεται με τη βοήθεια ενός πολλαπλασιαστή γνωστού ως *accrual factor*. Ο παράγοντας αυτός πολλαπλασιάζεται με το αναγραφόμενο επιτόκιο, ώστε να μας δώσει το πραγματικό επιτόκιο, με το οποίο θα υπολογιστεί η καταβολή. Εν συνεχεία, το πραγματικό επιτόκιο πρέπει να πολλαπλασιαστεί με στο αναγραφόμενο Ονομαστικό Κεφάλαιο, για να λάβουμε, τελικά, το χρηματικό ποσό που οφείλουμε προς την άλλη πλευρά. Για το σταθερό επιτόκιο, ο *accrual factor* είναι γνωστός με το συμβολισμό 30/360, υπονοώντας ότι θεωρούμε πως ο κάθε μήνας του έτους έχει ακριβώς 30 ημέρες, οπότε για πληρωμές ανά εξάμηνο, έχουμε (6*30)/360=0.5. Για το κυμαινόμενο επιτόκιο, ο πολλαπλασιαστής είναι γνωστός ως Actual/360, Act/360 ή απλώς A/360 και υπολογίζεται ως:

$$\frac{\pi\rho\alpha\gamma\mu\alpha\tau\iota\kappa o\ \ \pi\lambda\eta\theta o\varsigma\ \eta\mu\varepsilon\rho\omega\nu\ \ \mu\varepsilon\tau\alpha\xi\upsilon\ \delta\upsilon o\ \delta\iota\alpha\delta o\chi\iota\kappa\omega\nu\ \ \pi\lambda\eta\rho\omega\mu\omega\nu}{360} \tag{1.3.1.1}$$

Έτσι, αν για παράδειγμα το διάστημα μεταξύ δύο πληρωμών κυμαινομένου είναι 91 ημέρες, ο accrual factor για το κυμαινόμενο θα είναι 91/360≅0.25278.

Μετά τον υπολογισμό του πολλαπλασιαστή αυτού, μπορεί να υπολογισθεί το πραγματικό σταθερό επιτόκιο. Για το κυμαινόμενο, ωστόσο, χρειάζεται πρώτα να βρεθεί το LIBOR της αντίστοιχης περιόδου. Ο δείκτης LIBOR αποδίδει διαφορετικά επιτόκια, ανάλογα τη χρονική περίοδο και το Νόμισμα. Έτσι, έχουμε το USD LIBOR για το αμερικανικό Δολάριο, το CHF LIBOR για το ελβετικό Φράγκο, το EUR LIBOR για το Ευρώ, το GBP LIBOR για τη βρετανική Λίρα και το JPY LIBOR για το Ιαπωνικό Γιεν. Επίσης, ανάλογα με τη χρονική περίοδο, έχουμε το LIBOR της μίας νύχτας, το LIBOR εβδομάδας, μηνός, διμήνου, τριμήνου, εξαμήνου, και το ετήσιο LIBOR. Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί πως για πληρωμές κυμαινομένου χρησιμοποιείται το LIBOR της προηγούμενης περιόδου, καθώς το πραγματικό δεν έχει «σχηματιστεί» ακόμη.

Το τελευταίο βήμα στον υπολογισμό είναι ο πολλαπλασιασμός του πραγματικού πλέον επιτοκίου με το Ονομαστικό Κεφάλαιο, ώστε να υπολογισθεί η πληρωμή που οφείλεται από την κάθε πλευρά.

Γίνεται προφανές ότι, στα πλαίσια της Σύμβασης αυτής, το κέρδος της οποιασδήποτε εκ των δύο πλευρών προέρχεται από τη ζημία της άλλης, καθώς αν το κυμαινόμενο καταλήξει να αυξηθεί έναντι του συμφωνημένου σταθερού επιτοκίου, η long θέση λαμβάνει από τη short θέση περισσότερα από όσα πληρώνει σε αυτή, ενώ αντίστοιχα αν το κυμαινόμενο μειωθεί έναντι του σταθερού, η short θέση είναι αυτή που βγαίνει κερδισμένη.

1.3.2 Συμβάσεις Ανταλλαγής Συναλλάγματος

[3]Οι Συμβάσεις Ανταλλαγής Συναλλάγματος έχουν, στο μεγαλύτερο ποσοστό τους, τα ίδια χαρακτηριστικά με τις Συμβάσεις Ανταλλαγής Επιτοκίων. Διαφέρουν στο γεγονός ότι, ενώ στις ΣΑΕ το Ονομαστικό Κεφάλαιο (και επομένως και οι χρηματοροές) μετράται στο ίδιο Νόμισμα και από τις δύο πλευρές, στις ΣΑΣ η κάθε πλευρά το μετρά σε διαφορετικό Νόμισμα. Για παράδειγμα, η πλευρά Α ενός τέτοιου Σύμβασης, μπορεί να συμφωνήσει να πληρώνει σταθερό επιτόκιο επί ενός Ονομαστικού Κεφαλαίου 10 εκατομμυρίων αμερικανικών Δολαρίων, ενώ η πλευρά Β να συμφωνήσει να πληρώνει κυμαινόμενο επί

Ονομαστικού Κεφαλαίου ίσης αξίας, αλλά σε ελβετικά Φράγκα. Επομένως, στον υπολογισμό του κέρδους και της ζημίας της κάθε πλευράς προστίθεται και ο παράγοντας της ισοτιμίας.

Εκτός, όμως, από την ομοιότητα με τις ΣΑΕ, όπου ανταλλάσσονται σταθερό επιτόκιο με κυμαινόμενο, οι Συμβάσεις Ανταλλαγής Συναλλάγματος μπορούν να συναφθούν και για ανταλλαγές σταθερού με σταθερό. Σε αυτό το είδος των ΣΑΣ, ο μοναδικός παράγοντας που καθορίζει το ποια θα είναι η κερδισμένη πλευρά και ποια η ζημιωμένη είναι η ισοτιμία μεταξύ των δύο Νομισμάτων, και το πώς αυτή διαφοροποιείται κατά τη χρονική διάρκεια ισχύος της Σύμβασης. Το είδος αυτό θυμίζει στη δομή του τα Προθεσμιακά Συμβόλαια Συναλλάγματος.

1.3.3 Συμβάσεις Ανταλλαγής Κινδύνου Αθέτησης

[3]Όπως συμβαίνει και με τις προηγούμενες δύο κατηγορίες, η Σύμβαση Ανταλλαγής Κινδύνου Αθέτησης είναι ένα συμβόλαιο που συνάπτεται μεταξύ δύο πλευρών. Η μία πλευρά συμφωνεί να πραγματοποιεί πληρωμές σταθερού ποσού και σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές προς την άλλη, και η δεύτερη πλευρά συμφωνεί να αποπληρώσει το σύνολο (ή ένα μέρος) δεδομένου χρέους που έχει αναλάβει η πρώτη, το οποίο βασίζεται σε ένα συγκεκριμένο περιουσιακό στοιχείο, σε περίπτωση που η πρώτη προκαλέσει πιστωτικό γεγονός.

Πιστωτικό γεγονός ονομάζεται η κατάσταση αδυναμίας της αποπληρωμής ενός χρέους λόγω πτώχευσης αυτού που έχει το αναλάβει.

Η πλευρά που πληρώνει τις σταθερές πληρωμές ονομάζεται Αγοραστής Προστασίας (Protection Buyer), ενώ η πλευρά που πραγματοποιεί την αποπληρωμή του συνόλου ή μέρους του χρέους της άλλης σε περίπτωση αθέτησης ονομάζεται Πωλητής Προστασίας (Protection Seller). Οι σταθερές πληρωμές του Αγοραστή υπολογίζονται με τέτοιο τρόπο, ώστε να αντικατοπτρίζουν την πιθανότητα αναγκαιότητας αποπληρωμής του χρέους από τον Πωλητή, ή διαφορετικά, την Πιθανότητα Αθέτησης του Αγοραστή, όπως επίσης και το προς καταβολή χρηματικό ποσό που καλείται να εξοφλήσει ο Πωλητής. Όσο μεγαλύτερη είναι η Πιθανότητα Αθέτησης, τόσο αυξάνεται και το ύψος των σταθερών πληρωμών.

Επίσης, όπως συμβαίνει και στις προηγούμενες δύο κατηγορίες Συμβάσεων, στο συμβόλαιο αναφέρεται η συχνότητα των σταθερών πληρωμών, καθώς και το Ονομαστικό Κεφάλαιο. Το Ονομαστικό Κεφάλαιο χρησιμοποιείται στον υπολογισμό των σταθερών πληρωμών του Αγοραστή Προστασίας, αλλά και στον υπολογισμό του ποσού που πληρώνει τελικά ο Πωλητής σε περίπτωση αθέτησης. Ο τρόπος υπολογισμού του ποσού αυτού, βασίζεται σε μία παράμετρο που λέγεται Ποσοστό Ανάκτησης (Recovery Rate). Το Ποσοστό Ανάκτησης είναι η μείωση που έχει υποστεί η αξία του Περιουσιακού Στοιχείου Αναφοράς της Σύμβασης μετά το Πιστωτικό Γεγονός συγκριτικά με την αξία που έχει κατά τη σύναψη της Σύμβασης. Ο Πωλητής τελικά θα πληρώσει:

(1.3.3.1) $$Ονομαστικό\ Κεφάλαιο \times (100\% - Ποσοστό\ Ανάκτησης)$$

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι ο Α είναι μια επιχείρηση που έχει εκδώσει ένα 5-ετές εταιρικό ομόλογο αξίας 10.000.000€, με ονομαστικό επιτόκιο 5% και μηδενικά κουπόνια κατά τη διάρκεια της 5-ετίας. Αυτό σημαίνει ότι η Α οφείλει να πληρώσει με το πέρας της 5-ετίας:

(1.3.3.2) $$10.000.000(1 + 5\%) = 10.500.000€.$$

Αν η εταιρία Α πτωχεύσει μέσα στην επόμενη 5-ετία, δε θα είναι σε θέση να αποπληρώσει το ομόλογο αυτό. Για το λόγο αυτό, η Α μπορεί να γίνει Αγοραστής Προστασίας σε μια ΣΑΚΑ με Ονομαστικό Κεφάλαιο 10.000.000€ και διάρκεια 5 έτη. Έτσι, συμφωνεί να πραγματοποιεί εξαμηνιαίες πληρωμές προς τον Πωλητή Προστασίας με σταθερό ονομαστικό επιτόκιο, έστω 5%, το οποίο αντικατοπτρίζει την εκτίμηση της Αγοράς για την πιθανότητα αθέτησης της Α. Καθεμιά από τις εξαμηνιαίες πληρωμές της Α προς τον Πωλητή Προστασίας υπολογίζεται ως:

(1.3.3.3) $$10.000.000 \times 5\% \times \left(6 \times \frac{30}{360}\right) = 250.000€ \text{ ανά εξάμηνο.}$$

Για Ποσοστό Ανάκτησης 40%, σε περίπτωση Πιστωτικού γεγονότος της εταιρίας Α, ο Πωλητής Προστασίας οφείλει να αποπληρώσει το 60% του Ονομαστικού Κεφαλαίου σε μία εφάπαξ πληρωμή αξίας:

(1.3.3.4) $$10.000.000 \times (100\% - 40\%) = 6.000.000€.$$

Τις περισσότερες φορές, με την εμφάνιση Πιστωτικού γεγονότος του Αγοραστή, λύεται η ισχύς της Σύμβασης, οπότε σταματούν και οι χρηματοροές προς τον Πωλητή. Προφανώς, ο Αγοραστής βρίσκεται σε μειονεκτική θέση αν τελικά καταφέρει να αποπληρώσει ο ίδιος το χρέος του. Για το λόγο αυτό, αν η εκτίμηση που έχει είναι ότι δε θα αθετήσει την υποχρέωσή του προς το χρέος του, μπορεί να γίνει ο ίδιος Πωλητής Προστασίας σε μια Σύμβαση με κάποιον τρίτο. Με τον τρόπο αυτό, καταφέρνει να πραγματοποιεί τις σταθερές πληρωμές του προς τον αρχικό Πωλητή μέσω των χρηματοροών που λαμβάνει από τη δεύτερη Σύμβαση.

Αντίστοιχα, ο Πωλητής Προστασίας βρίσκεται σε μειονεκτική θέση αν τελικά ο Αγοραστής προκαλέσει Πιστωτικό γεγονός. Για το λόγο αυτό, μπορεί ο ίδιος να γίνει Αγοραστής σε μια δεύτερη ΣΑΚΑ, αν μετά από επανεκτίμηση θεωρεί ότι η Πιθανότητα Αθέτησης του Αγοραστή έχει αυξηθεί. Με αυτό τον τρόπο, επιτυγχάνει την αποφυγή αποπληρωμής του χρέους του αρχικού Αγοραστή, καθώς αυτό θα αποπληρωθεί από τον Πωλητή της δεύτερης ΣΑΚΑ, με «αντάλλαγμα» μέρος των σταθερών χρηματοροών που λαμβάνει από τον αρχικό Αγοραστή. Γίνεται, λοιπόν, σαφές ότι το συγκεκριμένο είδος Συμβάσεων Ανταλλαγής είναι εμπορεύσιμο, χωρίς να χρειάζεται ένας εν δυνάμει Αγοραστής να κατέχει κάποιο χρέος, έναντι του οποίου προσπαθεί να ασφαλιστεί ή ένας εν δυνάμει Πωλητής να δύναται ο ίδιος να αποπληρώσει το ύψος του χρέους που αναλαμβάνει να ασφαλίσει.

1.4 Δικαιώματα Προαίρεσης

[4]Η τελευταία από τις βασικότερες κατηγορίες Παραγώγων που θα μελετήσουμε είναι τα λεγόμενα Δικαιώματα Προαίρεσης (Options). Τα Δικαιώματα Προαίρεσης είναι συμβόλαια που συνάπτονται μεταξύ δύο ενδιαφερομένων πλευρών, όπως συμβαίνει και με τις προαναφερθείσες κατηγορίες Παραγώγων. Η πλευρά που αγοράζει το Δικαίωμα έχει τη *long* θέση σε αυτό, ενώ η πλευρά που πουλά ή εκδίδει, όπως λέμε, το Δικαίωμα κατέχει τη *short* θέση. Έχουν συγκεκριμένες διαφορές συγκριτικά με τα προηγούμενα είδη Παραγώγων, η πιο σημαντική εκ των οποίων είναι το ότι η long θέση ενός Δικαιώματος κατέχει το δικαίωμα, αλλά όχι την υποχρέωση, να πραγματοποιήσει συναλλαγή με τη short θέση. Η δε short θέση έχει την υποχρέωση να εμπλακεί σε συναλλαγή με τη long θέση, αν και εφόσον η long θέση αποφασίσει να ασκήσει το δικαίωμά της.

Τα Δικαιώματα Προαίρεσης, εκτός των δύο πλευρών, του υποκειμένου περιουσιακού στοιχείου και κάποιων επιπλέον χαρακτηριστικών που θα δούμε ακολούθως στην Ενότητα αυτή, χαρακτηρίζονται και από την ημερομηνία Άσκησης, η οποία είναι ταυτόχρονα και η ημερομηνία λήξης τους σαν συμβόλαια. Βάσει αυτής, τα Δικαιώματα διαχωρίζονται σε δύο κατηγορίες:

1) Δικαιώματα Ευρωπαϊκού Τύπου: στα Δικαιώματα Ευρωπαϊκού Τύπου, η συναλλαγή μεταξύ long και short θέσης μπορεί να πραγματοποιηθεί αυστηρά μόνο κατά την ημερομηνία Άσκησης, αν τελικά πραγματοποιηθεί.
2) Δικαιώματα Αμερικανικού Τύπου: στα Δικαιώματα Αμερικανικού Τύπου, η συναλλαγή μπορεί να πραγματοποιηθεί οποιαδήποτε χρονική στιγμή από την ημερομηνίας έναρξής τους έως την ημερομηνία Άσκησης, αλλά όχι μετά από αυτή. Προφανώς, η χρονική στιγμή που τελικά πραγματοποιείται η συναλλαγή σηματοδοτεί και τη λήξη της ισχύος του Δικαιώματος.

Όπως ήδη αναφέρθηκε, τα Δικαιώματα είναι συμβόλαια που προσδίδουν στη long θέση το δικαίωμα, αλλά όχι την υποχρέωση, να πραγματοποιήσει μια συναλλαγή με τη short θέση. Ανάλογα με το είδος της συναλλαγής αυτής, συναντούμε τα Δικαιώματα Αγοράς και τα Δικαιώματα Πώλησης.

1.4.1 Δικαιώματα Αγοράς

[4]Στη μία εκ των δύο υποκατηγοριών, ένα Δικαίωμα Αγοράς προσδίδει στη long θέση το δικαίωμα να αγοράσει από τη short θέση το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο που αναφέρεται στο συμβόλαιο, σε μια τιμή που οι δύο θέσεις έχουν συμφωνήσει. Το στοιχείο αυτό μπορεί να είναι μια Μετοχή, ένα Ομόλογο ή μια χρηματοροή από ένα Νόμισμα σε ένα άλλο, με προκαθορισμένη ισοτιμία μεταξύ τους.

Τα χαρακτηριστικά ενός Δικαιώματος Αγοράς είναι τα κάτωθι:

- Οι δύο πλευρές που συνάπτουν μεταξύ τους το συμβόλαιο
- Το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο βάσει του οποίου θα πραγματοποιηθεί η συναλλαγή μεταξύ των δύο πλευρών
- Η Ημερομηνία Άσκησης του Δικαιώματος
- Η Τιμή Άσκησης του Δικαιώματος, έναντι της οποίας η long θέση θα αγοράσει το υποκείμενο στοιχείο από τη short θέση, αν αποφασίσει να ασκήσει το δικαίωμά της εντός της προθεσμίας
- Το Ασφάλιστρο ή Τιμή του Δικαιώματος, την οποία πληρώνει η long θέση στη short θέση εφάπαξ κατά τη σύναψη του συμβολαίου. Το Ασφάλιστρο είναι επί της ουσίας το «κόστος» της long θέσης για την απόκτηση του δικαιώματος να αγοράσει σε συγκεκριμένη τιμή.

Η Ημερομηνία Άσκησης του Δικαιώματος Αγοράς συμβολίζεται με T, η Τιμή Άσκησης με K και το Ασφάλιστρο με c_0. Επίσης, συμβολίζουμε με S_T την αξία του υποκείμενου στοιχείου κατά την Ημερομηνία Άσκησης του Δικαιώματος. Ακόμη, για τον υπολογισμό των χρηματοροών μεταξύ των δύο πλευρών, και κατά συνέπεια του κέρδους ή της ζημίας της καθεμίας, εισάγουμε τις έννοιες της Απόδοσης (Payoff) και του Κέρδους (P&L). Τόσο η Απόδοση, όσο και το Κέρδος είναι διαφορετικά για την κάθε πλευρά, έτσι θα τα αναλύσουμε ξεχωριστά.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.4.1.1 Ας υποθέσουμε ότι η πλευρά Α κατέχει τη long θέση σε ένα Δικαίωμα Αγοράς Ευρωπαϊκού Τύπου που συνάπτεται την 1η Αυγούστου μεταξύ αυτής και της πλευράς Β, η οποία κατέχει τη short θέση. Το προς αναφορά περιουσιακό στοιχείο είναι μια μετοχή μιας πολυεθνικής εταιρίας. Η ημερομηνία άσκησης του Δικαιώματος, T, ορίζεται ως η 1η Δεκεμβρίου του ίδιου έτους, κατά την οποία η πλευρά Α έχει το δικαίωμα να αγοράσει από τη Β τη συγκεκριμένη μετοχή έναντι 30€. Επίσης, η πλευρά Α πληρώνει κατά την αγορά του Δικαιώματος στην Β το ποσό των 5€. Καθότι το Δικαίωμα είναι Ευρωπαϊκού Τύπου, η εξάσκησή του μπορεί να γίνει αυστηρά μόνο την 1η Δεκεμβρίου, οπότε και θα πραγματοποιηθεί, αν η πλευρά Α επωφελείται.

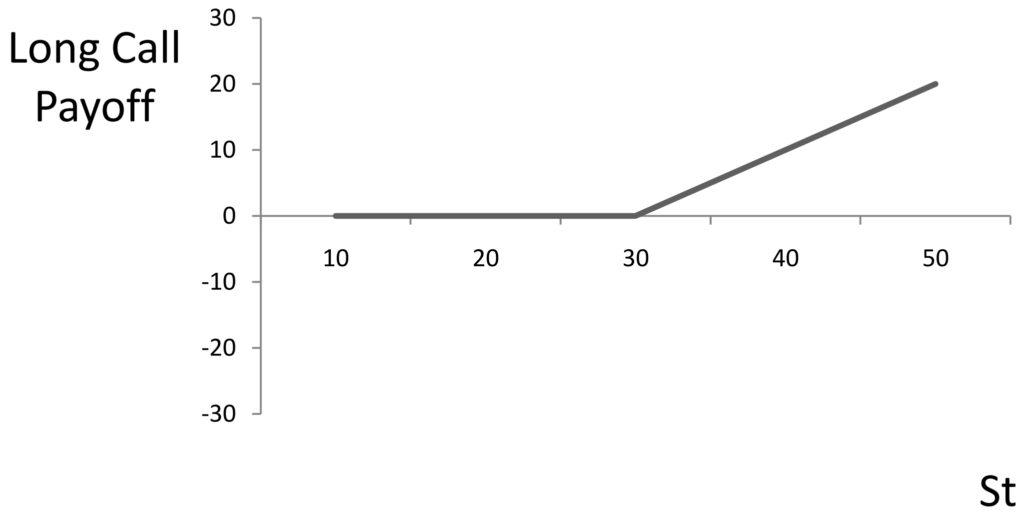
Κατά την 1η Δεκεμβρίου, ένα από δύο πιθανά ενδεχόμενα μπορεί να συμβεί: Είτε $S_T > K$ είτε $S_T \leq K$, όπου $K = 30€$.

- Αν $S_T > K$, τότε η long θέση μπορεί, εξασκώντας το Δικαίωμα, να πληρώσει λιγότερα για την απόκτηση της μετοχής, και στη συνέχεια να την πουλήσει στην Αγορά για περισσότερα, οπότε η απόφαση να εξασκήσει το Δικαίωμα της επιφέρει θετική Απόδοση.
- Αν $S_T \leq K$, τότε η long θέση δεν επωφελείται από την άσκηση του Δικαιώματος, καθώς είτε θα πληρώσει περισσότερα για να αποκτήσει μια μετοχή που μπορεί να πωληθεί στην Αγορά για λιγότερα, είτε θα πληρώσει το ίδιο ποσό με αυτό που θα λάβει από την πώληση της μετοχής στην Αγορά. Επομένως, η long θέση δε θα εξασκήσει το Δικαίωμα, καθώς η περίπτωση αυτή της αποφέρει μηδενική Απόδοση.

Επομένως, η Απόδοση ενός Δικαιώματος για τη long θέση μπορεί να περιγραφεί από την:

$$(1.4.1.1) \qquad Long\ Call\ Payoff = max\{S_T - K, 0\}$$

και μπορεί να είναι είτε θετική είτε μηδενική, όπως φαίνεται και στο γράφημα που ακολουθεί.



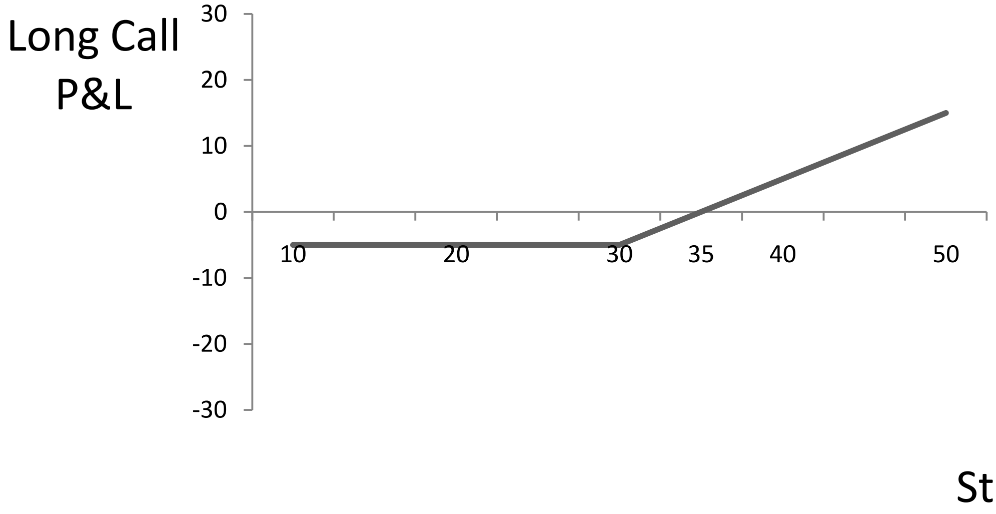
Γράφημα 1.4.1.1

Για τον υπολογισμό του Κέρδους που επιφέρει στη long θέση η εξάσκηση του Δικαιώματος, πρέπει να συνυπολογίσουμε και το Ασφάλιστρο που καταβλήθηκε κατά τη σύναψη. Η εξίσωση που περιγράφει το Κέρδος για τη long θέση είναι η:

(1.4.1.2) $$Long\ Call\ P\&L = max\{S_T - K, 0\} - c_0.$$

Από την (1.4.1.2) βλέπουμε ότι το Κέρδος για τη long θέση μπορεί να πάρει θετική, μηδενική, αλλά και αρνητική τιμή. Επίσης, παρατηρούμε ότι ακόμα και αν η εξάσκηση του Δικαιώματος επιφέρει θετική Απόδοση, το Κέρδος δύναται να είναι μηδενικό ή και αρνητικό, αν $S_T - K < c_0$.

Στο γράφημα 1.4.1.2 φαίνεται σχηματικά το Κέρδος της long θέσης για τις διάφορες τιμές που μπορεί να έχει η μετοχή κατά την Ημερομηνία Άσκησης του Δικαιώματος.



Γράφημα 1.4.1.2

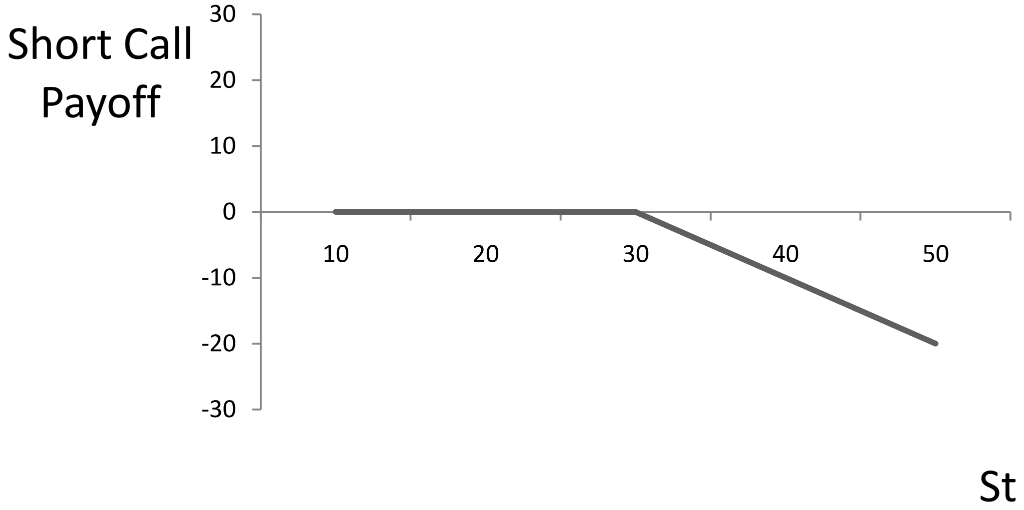
Για τη short θέση, η Απόδοση και το Κέρδος έχουν διαφορετικά χαρακτηριστικά γνωρίσματα, στην περίπτωση που η long θέση αποφασίσει να εξασκήσει το Δικαίωμα. Συνεχίζοντας το Παράδειγμα 1.4.1.1,

- Αν $S_T > K$, τότε η short θέση οφείλει να πουλήσει στη long θέση τη μετοχή έναντι K, αφού την προμηθευτεί αρχικά από την Αγορά με κόστος S_T, επομένως η εξάσκηση του Δικαιώματος επιφέρει αρνητική Απόδοση σε αυτή.
- Αν $S_T \leq K$, τότε η long θέση δεν επωφελείται από την άσκηση του δικαιώματός της, και με τη μη εξάσκηση αυτού, η short θέση έχει τελικά μηδενική Απόδοση, καθώς δεν πραγματοποιείται κάποια συναλλαγή.

Επομένως, για τη short θέση, η Απόδοση μπορεί να είναι είτε αρνητική είτε μηδενική. Η εξίσωση που την περιγράφει είναι η:

(1.4.1.3) $$Short\ Call\ Payoff = min\{K - S_T, 0\}.$$

Και σχηματικά,



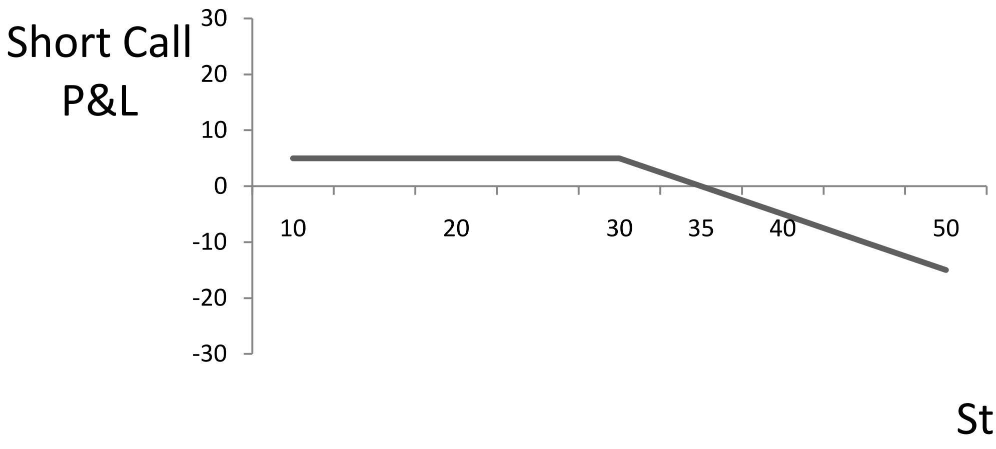
Γράφημα 1.4.1.3

Ενώ φαίνεται πως δεν υπάρχει όφελος για κάποιον να αναλάβει τη short θέση σε ένα Δικαίωμα Αγοράς, θα δούμε πως, όπως για τη long, έτσι και για τη short θέση, το Κέρδος μπορεί να είναι αρνητικό, μηδενικό αλλά και θετικό, καθώς ρόλο παίζει και το Ασφάλιστρο που καταβάλλεται αρχικά.

Η εξίσωση που περιγράφει το Κέρδος της short θέσης είναι η εξής:

(1.4.1.4) $$Short\ Call\ P\&L = min\{K - S_T, 0\} + c_0$$

ενώ το γράφημα αυτής είναι το:



Γράφημα 1.4.1.4

Όπως φαίνεται και στο γράφημα, η short θέση σε ένα Δικαίωμα Αγοράς βγαίνει κερδισμένη έναντι της long θέσης, για οποιαδήποτε τιμή της S_T που ικανοποιεί την ανισότητα

(1.4.1.5) $$K - S_T + c_0 \geq 0,$$

δεδομένου ότι η long θέση δε θα εξασκήσει το Δικαίωμά της για οποιαδήποτε $S_T \leq K$.

1.4.2 Δικαιώματα Πώλησης

[4]Το δεύτερο είδος των Δικαιωμάτων Προαίρεσης είναι τα Δικαιώματα Πώλησης. Η δομή τους είναι ίδια με τη δομή των Δικαιωμάτων Αγοράς, με τη διαφορά ότι η long θέση πλέον αγοράζει το δικαίωμα να πουλήσει το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο στην Τιμή Άσκησης. Τα χαρακτηριστικά ενός Δικαιώματος Πώλησης είναι επίσης όμοια με αυτά των Δικαιωμάτων Αγοράς: με T συμβολίζεται η Ημερομηνία Άσκησης του Δικαιώματος, με K η Τιμή Άσκησης, ενώ με p_0 συμβολίζουμε το Ασφάλιστρο ή Τιμή του Δικαιώματος Πώλησης, για την αποφυγή σύγχυσης μεταξύ των δύο ειδών Δικαιωμάτων. Παρόλα

αυτά, και το p_0 λειτουργεί με τον ίδιο τρόπο που λειτουργεί και το c_0. Επίσης, το Δικαίωμα που αγοράζει η long θέση παραμένει δικαίωμα, και όχι υποχρέωση, ενώ και στα Δικαιώματα Πώλησης η short θέση οφείλει να πραγματοποιήσει την αγορά από τη long θέση, αν η long θέση αποφασίσει να εξασκήσει το δικαίωμά της εμπρόθεσμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.4.2.1 Προσαρμόζοντας το Παράδειγμα 1.4.1.1 της προηγούμενης Ενότητας στα καινούργια δεδομένα, υποθέτουμε ότι η Α πλευρά αγοράζει από τη Β ένα Δικαίωμα Πώλησης Ευρωπαϊκού Τύπου, που της επιτρέπει να πουλήσει τη μετοχή στη Β την 1η Δεκεμβρίου του ίδιου έτους στην τιμή $K = 30€$. Η αγορά του γίνεται έναντι Ασφαλίστρου $p_0 = 5€$.

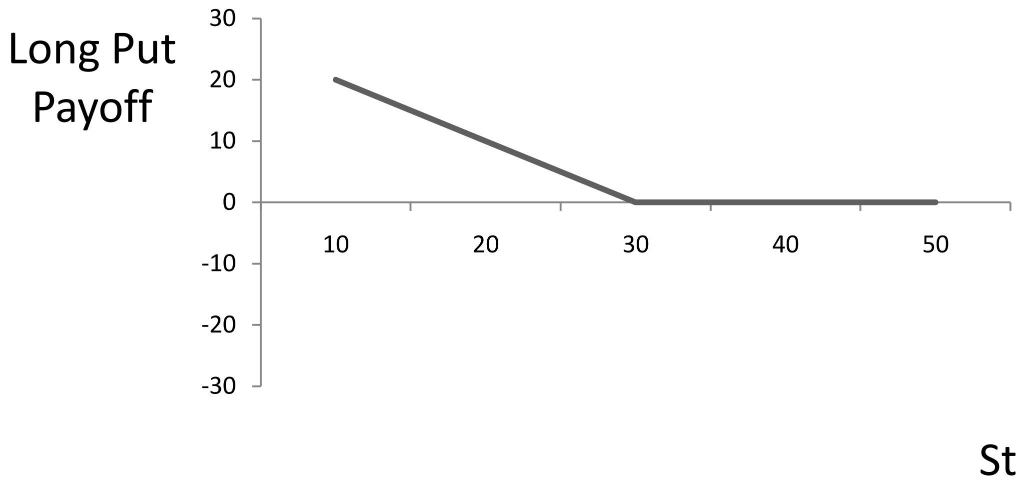
Τα δύο ενδεχόμενα για τη long θέση του Δικαιώματος είναι τώρα τα εξής:

- Αν $S_T \geq K$, τότε η long θέση δεν επωφελείται από την άσκηση του Δικαιώματος, διότι είτε θα πληρώσει περισσότερα για να αποκτήσει τη μετοχή, την οποία θα πουλήσει για λιγότερα μέσω του Δικαιώματος, είτε θα πληρώσει το ίδιο ποσό για την απόκτηση της μετοχής με το ποσό που θα λάβει από την πώλησή της στη short θέση. Επομένως, η εξάσκηση του Δικαιώματος επιφέρει στη long θέση είτε αρνητική είτε μηδενική Απόδοση.
- Αν $S_T < K$, τότε η long θέση μπορεί να αποκτήσει τη μετοχή από την Αγορά, πληρώνοντας λιγότερα, και στη συνέχεια να την πουλήσει στην πλευρά Β για περισσότερα, οπότε επωφελείται από την εξάσκηση του Δικαιώματος. Επομένως, η Απόδοση για τη long θέση θα είναι θετική.

Η εξίσωση που μπορεί να περιγράψει την Απόδοση της long θέσης στο Δικαίωμα Πώλησης είναι η:

(1.4.2.1) $$Long\ Put\ Payoff = max\{K - S_T, 0\}$$

η οποία για το Παράδειγμα 1.4.2.1 φαίνεται και σχηματικά στο ακόλουθο γράφημα:

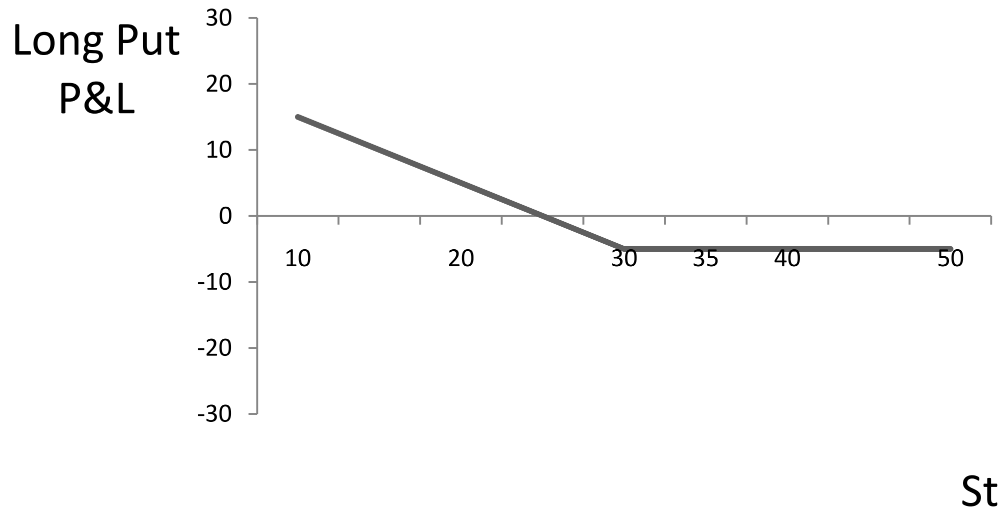


Γράφημα 1.4.2.1

Για τον υπολογισμό του Κέρδους της long θέσης σε ένα Δικαίωμα Πώλησης, όπως συμβαίνει και στα Δικαιώματα Αγοράς, συμβάλλει η τιμή p_0 του Δικαιώματος. Η εξίσωση που αποδίδει το Κέρδος για τη long θέση είναι η παρακάτω:

(1.4.2.2) $$Long\ Put\ P\&L = max\{K - S_T, 0\} - p_0.$$

Στο ακόλουθο γράφημα φαίνεται το Κέρδος της long θέσης για τις διάφορες τιμές που μπορεί να έχει η S_T.



Γράφημα 1.4.2.2

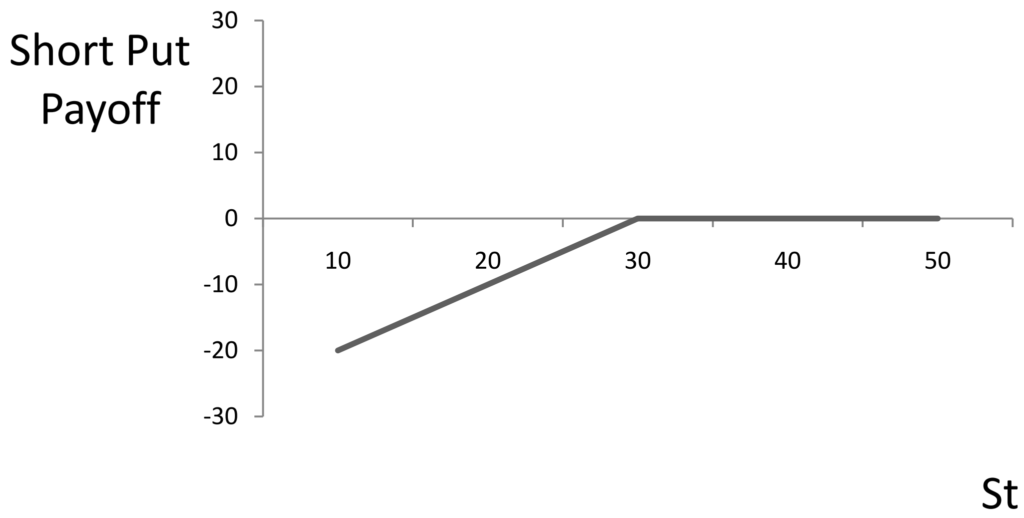
Αναφορικά με τη short θέση ενός Δικαιώματος Πώλησης, η άσκηση του Δικαιώματος έχει επίδραση αντίθετη με αυτή που έχει για τη long θέση, όπως παρατηρήσαμε και στην περίπτωση των Δικαιωμάτων Αγοράς. Συγκεκριμένα,

- Αν $S_T \geq K$, τότε η long θέση δεν επωφελείται από την άσκηση του Δικαιώματος, οπότε η μη εξάσκησή του αποφέρει μηδενική Απόδοση στη short θέση, καθώς δεν πραγματοποιείται κάποια συναλλαγή.
- Αν $S_T < K$, τότε η long θέση θα εξασκήσει το Δικαίωμα Πώλησης, και κατά συνέπεια η short θέση οφείλει να αγοράσει το υποκείμενο στοιχείο καταβάλλοντας περισσότερα, ενώ μετά μπορεί να το πουλήσει στην Αγορά, γνωρίζοντας ότι θα λάβει λιγότερα. Συνεπώς, η Απόδοση για τη short θέση θα έχει αρνητικό πρόσημο.

Άρα, και στα Δικαιώματα Πώλησης, η Απόδοση για τη short θέση δύναται να είναι είτε μηδενική είτε αρνητική. Η Απόδοσή της υπολογίζεται με τη βοήθεια της:

(1.4.2.3) $$Short\ Put\ Payoff = min\{S_T - K, 0\}.$$

Μετά από εφαρμογή της στο παραπάνω Παράδειγμα, βλέπουμε σχηματικά ότι

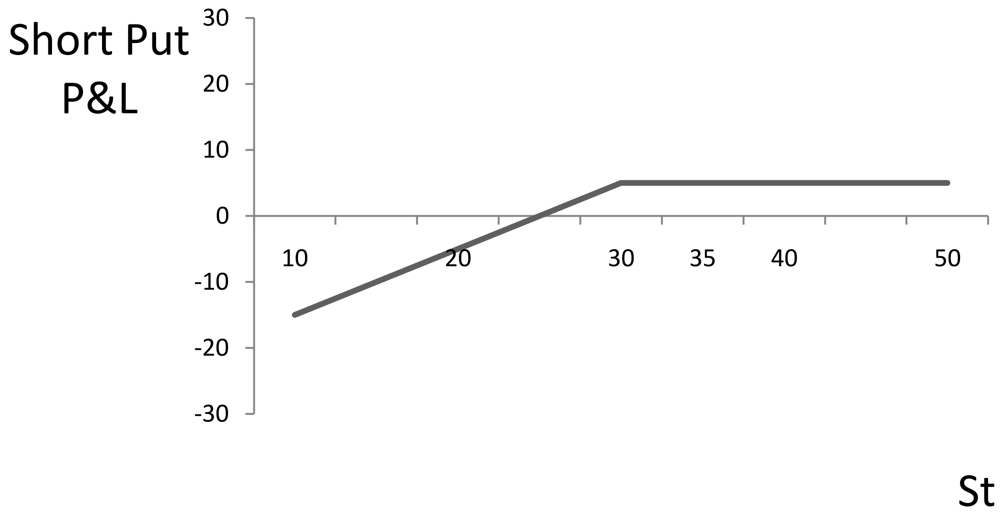


Γράφημα 1.4.2.3

Συμπεριλαμβάνοντας και την τιμή p_0 του Δικαιώματος, είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε το Κέρδος για τη short θέση. Η επόμενη εξίσωση περιγράφει το Κέρδος της ως εξής:

(1.4.2.4) $$Short\ Put\ P\&L = min\{S_T - K, 0\} + p_0$$

και εφαρμόζοντάς τη για να υπολογίσουμε το Κέρδος της στο Παράδειγμα, βλέπουμε διαγραμματικά ότι:



Γράφημα 1.4.2.4

Συμπερασματικά, αξίζει να σημειωθεί ότι στο σύνολο της Ενότητας γίνεται εμφανής ο χαρακτήρας zero-sum game των Δικαιωμάτων Προαίρεσης, όπως είδαμε ότι συμβαίνει και με τις υπόλοιπες τρεις βασικές κατηγορίες των Παραγώγων. Επίσης, σε αντίθεση με τα Προθεσμιακά Συμβόλαια, τα Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης και τις Συμβάσεις Ανταλλαγής, τα Δικαιώματα Προαίρεσης είναι η μόνη κατηγορία Παραγώγων όπου η μία εκ των δύο πλευρών κατέχει το δικαίωμα αλλά όχι την υποχρέωση να πραγματοποιήσει συναλλαγή με την άλλη. Για το δικαίωμα αυτό, καταβάλλει αντίτιμο στην άλλη πλευρά με την έναρξη ισχύος του συμβολαίου, κάτι που δε συμβαίνει σε καμία άλλη κατηγορία των Παραγώγων.

Στο επόμενο Κεφάλαιο, θα κάνουμε μια εισαγωγή στις Στοχαστικές Διαδικασίες, ώστε να βοηθήσουμε τον αναγνώστη να κατανοήσει τις έννοιες και τους συλλογισμούς που αναλύονται στο τρίτο και τελευταίο Κεφάλαιο αυτής της Εργασίας.

Κεφάλαιο 2

Εισαγωγή στις Στοχαστικές Διαδικασίες

Από τη Θεωρία Πιθανοτήτων γνωρίζουμε ότι μία τυχαία μεταβλητή X είναι μια συνάρτηση, που αντιστοιχίζει έναν αριθμό $X(\omega)$ σε κάθε αποτέλεσμα ω ενός τυχαίου πειράματος, το οποίο ορίζεται σε ένα χώρο πιθανοτήτων *(Ω,$\mathfrak{I}$,P)*. Μια στοχαστική διαδικασία $\{\mathrm{X}_t(\omega),\ t \in T\}$ είναι μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών X_t, ορισμένη σε έναν κοινό χώρο πιθανοτήτων *(Ω,$\mathfrak{I}$,P)*, όπου καθεμιά από τις X_t έχει σαν παράμετρο τη μεταβλητή t (χρόνος). Έτσι, η συνάρτηση $\mathrm{X}_t(\omega)$ αντιστοιχίζει έναν αριθμό $X(\omega)$ σε κάθε αποτέλεσμα $\omega \in \Omega$ του τυχαίου πειράματος που πραγματοποιήθηκε τη χρονική στιγμή t. Μια στοχαστική διαδικασία μπορεί να είναι *συνεχούς* ή *διακριτού χρόνου*, ανάλογα με το αν το σύνολο T είναι ο άξονας των πραγματικών ή των ακεραίων αντιστοίχως. Επιπλέον, η διαδικασία $X_t(\omega)$ λέγεται *διακεκριμένης κατάστασης* αν οι τιμές της είναι αριθμήσιμες, ενώ διαφορετικά λέγεται *συνεχούς κατάστασης*. Για δεδομένο αποτέλεσμα ω, η $\mathrm{X}_t(\omega) = \mathrm{X}_t$ είναι μια συνάρτηση του χρόνου, ενώ για δεδομένη χρονική στιγμή t, η $\mathrm{X}_t(\omega) = X(\omega)$ είναι μια τυχαία μεταβλητή. Συνήθως, τη συμβολίζουμε απλώς ως X_t ή $X(t)$, καθώς το ω παραλείπεται. Η Θεωρία των Στοχαστικών Διαδικασιών μας βοηθά στην ανάλυση και περιγραφή τυχαίων φαινομένων που εξελίσσονται στο χρόνο, όπως συμβαίνει σε πολλά φυσικά συστήματα, κάτι στο οποίο δε φαίνεται να είναι επαρκώς αποτελεσματική η χρήση της Θεωρίας των Τυχαίων Μεταβλητών.

2.1 Τυχαίος Περίπατος

[5,33,34]Ας υποθέσουμε το εξής πείραμα: ρίχνουμε ένα νόμισμα και αν το αποτέλεσμα είναι κορώνα (κ) τότε κάνουμε ένα βήμα εμπρός, ενώ αν είναι γράμματα (γ) κάνουμε ένα βήμα πίσω. Έστω $P(\kappa) = p$ η πιθανότητα να έρθει κορώνα και $P(t) = q = 1 - p$ η πιθανότητα να έρθουν γράμματα. Τότε, η τυχαία μεταβλητή:

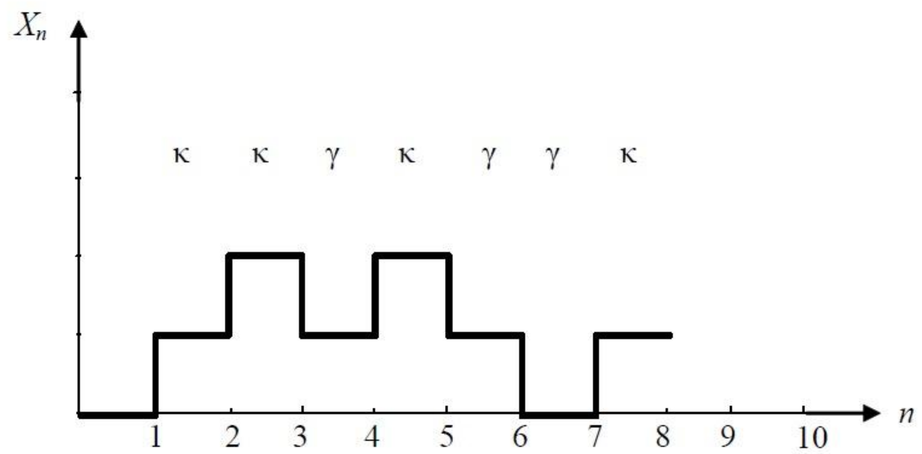
(2.1.1)
$$Z_n = \begin{cases} +m, & \alpha\nu\ \varphi\acute{\varepsilon}\rho\alpha\mu\varepsilon\ \kappa o\rho\acute{\omega}\nu\alpha \\ -m, & \alpha\nu\ \varphi\acute{\varepsilon}\rho\alpha\mu\varepsilon\ \gamma\rho\acute{\alpha}\mu\mu\alpha\tau\alpha \end{cases}$$

όπου $n = 1,2,\ldots$, είναι οι διακεκριμένες στιγμές των ρίψεων, αποδίδει τη μετατόπισή μας μετά από μία δεδομένη ρίψη, και m είναι η απόσταση που διανύουμε με κάθε εμπρός ή πίσω βήμα. Και αν υποθέσουμε ότι ξεκινήσαμε από τη θέση 0, η τυχαία μεταβλητή:

(2.1.2)
$$R_n = R_0 + \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

όπου $R_0 = 0$, αποδίδει τη θέση μας κατά τη χρονική στιγμή n, ή διαφορετικά μετά από n επαναλήψεις του πειράματος. Η στοχαστική διαδικασία $\{R_n, n \geq 1\}$ ονομάζεται *Απλός Τυχαίος Περίπατος*.

Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται σχηματικά μία εκ των πιθανών μετατοπίσεων μετά από οκτώ επαναλήψεις του πειράματος



Διάγραμμα 2.1.1

Οι κανόνες του πειράματος που υποθέσαμε επιβάλλουν περιορισμό στην εκάστοτε πιθανή μας μετάβαση, η οποία εξαρτάται από το αποτέλεσμα της εκάστοτε ρίψης του νομίσματος. Αν δεν επιβάλλεται κάποιος περιορισμός, ο Τυχαίος Περίπατος καλείται *ελεύθερος*. Για παράδειγμα, η μεταβολή της τιμής μιας μετοχής κάθε χρονική στιγμή δύναται να οδηγεί είτε σε αύξηση είτε σε μείωση, και η διαφορά μεταξύ δύο διαδοχικών τιμών δύναται να είναι οσοδήποτε μεγάλη.

Στην περίπτωση που οι κανόνες του πειράματος καθορίζουν μία θέση ή περισσότερες θέσεις, από τις οποίες μπορούμε να μεταβούμε προς συγκεκριμένη κατεύθυνση ή θέση, η διαδικασία λέγεται *Τυχαίος Περίπατος με Φράγμα(τα) Ανακλάσεως*. Για παράδειγμα, αν ο Περίπατος περιγράφει το ύψος στο οποίο βρίσκεται ένας ορειβάτης που διασχίζει μια ανεξερεύνητη κορυφογραμμή, όταν φτάσει σε μία από τις κορυφές μπορεί να μεταβεί μόνο σε θέση χαμηλότερου υψομέτρου. Οι κατά τόπους κορυφές που θα συναντήσει τελικά ο ορειβάτης θα αποτελέσουν το σύνολο των Φραγμάτων Ανακλάσεως του Τυχαίου Περιπάτου.

Ακόμη, το πείραμα ενδέχεται να διακόπτεται όταν φτάσουμε σε μία ή περισσότερες συγκεκριμένες θέσεις. Σε αυτή την περίπτωση, η διαδικασία ονομάζεται *Τυχαίος Περίπατος με Φράγμα(τα) Απορρόφησης*. Η διαδικασία, για παράδειγμα, που περιγράφει το χρηματικό υπόλοιπο του παίκτη ενός τυχερού παιχνιδιού, στο οποίο πρέπει να στοιχηματίσει ένα συγκεκριμένο ποσό κάθε φορά για να συμμετάσχει, σταματά αναγκαστικά όταν ο παίκτης καταλήξει με μηδενικό υπόλοιπο, καθώς αδυνατεί να στοιχηματίσει για το επόμενο παιχνίδι.

Η χαρακτηριστική συνάρτηση της Z_n είναι η

(2.1.3) $$\Phi_{Z_n}(\omega) = E(e^{i\omega Z_n}) = pe^{i\omega m} + qe^{-i\omega m}$$

Γνωρίζουμε ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση του αθροίσματος ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών είναι ίση με το γινόμενο των χαρακτηριστικών συναρτήσεων της καθεμιάς τυχαίας μεταβλητής.

Συνεπώς, από τη (2.1.2) λαμβάνουμε ότι

(2.1.4) $$\Phi_{R_n}(\omega) = (pe^{i\omega m} + qe^{-i\omega m})^n$$

όπου $i^2 = 1$. Αν υποθέσουμε ότι στο παραπάνω πείραμα χρησιμοποιούμε αμερόληπτο νόμισμα, τότε θα ισχύει ότι $p = q = 0.5$. Οπότε, (2.1.5) $$\Phi_{R_n}(\omega) = (0.5e^{i\omega} + 0.5e^{-i\omega})^n$$

Από το Θεώρημα των Ροπών έχουμε ότι:

(2.1.6) $$E(R_n) = \frac{1}{i}\Phi'_{R_n}(0) = 0 \quad \text{και}$$

(2.1.7) $$Var(R_n) = E(R_n^2) - [E(R_n)]^2 = \frac{1}{i^2}\Phi''_{R_n}(0) = nm^2.$$

Αν θεωρήσουμε ότι οποιεσδήποτε δύο διαδοχικές χρονικές στιγμές απέχουν μεταξύ τους κατά Δt, τότε για οποιαδήποτε χρονική στιγμή t θα ισχύει ότι $n = t/\Delta t$. Συνεπώς, η (2.1.5) γίνεται:

(2.1.8) $$\Phi_{R_n}(\omega) = (0.5e^{i\omega m} + 0.5e^{-i\omega m})^{t/\Delta t}$$

ενώ η (2.1.7) γίνεται:

(2.1.9) $$Var(R_n) = E(R_n^2) - [E(R_n)]^2 = \frac{1}{i^2}\Phi''_{R_n}(0) = \frac{tm^2}{\Delta t}.$$

Τώρα, για μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή t, θα μελετήσουμε τον τυχαίο περίπατο στο πλαίσιο του συνεχούς χρόνου. Πιο συγκεκριμένα, θα δοκιμάσουμε να υπολογίσουμε το όριο του τυχαίου περιπάτου για $\Delta t \to 0$. Το όριο αυτό θα ορίσει μια νέα διαδικασία, την $W_t \triangleq \lim_{\Delta t \to 0} W_n$.

Παρόλα αυτά, η προσέγγιση του συνεχούς χρόνου, χωρίς παράλληλα να διαχειριστούμε καταλλήλως την απόσταση m που διανύουμε με κάθε βήμα, θα μας οδηγήσει σε μια διαδικασία με άπειρη μεταβλητότητα. Για να αποφύγουμε κάτι τέτοιο, θα χρειαστεί να θεωρήσουμε ότι καθώς το $\Delta t \to 0$, το $m \to 0$ επίσης και με την ίδια ταχύτητα. Επιπρόσθετα, για να επιτύχουμε πεπερασμένη μεταβλητότητα για κάθε χρονική στιγμή t, θα θεωρήσουμε ότι $m^2 = \sigma^2 \Delta t \Rightarrow m = \sigma\sqrt{\Delta t}$. Παίρνοντας λοιπόν το όριο της (2.1.5) έχουμε ότι:

(2.1.10) $$\Phi_{W_t}(\omega) = \lim_{\Delta t \to 0} \Phi_{R_n}(\omega) = $$
$$= \lim_{\Delta t \to 0}\left(0.5e^{i\omega\sigma\sqrt{\Delta t}} + 0.5e^{-i\omega\sigma\sqrt{\Delta t}}\right)^{t/\Delta t}$$

Λογαριθμίζοντας κατά μέλη, η εξίσωση γίνεται:

(2.1.11) $$\ln\left[\Phi_{W_t}(\omega)\right] = \ln\left[\lim_{\Delta t \to 0}\left(0.5e^{i\omega\sigma\sqrt{\Delta t}} + 0.5e^{-i\omega\sigma\sqrt{\Delta t}}\right)^{t/\Delta t}\right]$$

ή διαφορετικά

(2.1.12) $$\ln\left[\Phi_{W_t}(\omega)\right] = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\ln\left[\left(0.5e^{i\omega\sigma\sqrt{\Delta t}} + 0.5e^{-i\omega\sigma\sqrt{\Delta t}}\right)^{t/\Delta t}\right]\right)$$

και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των λογαρίθμων

(2.1.13) $$\ln\left[\Phi_{W_t}(\omega)\right] = t\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\ln\left[0.5e^{i\omega\sigma\sqrt{\Delta t}}+0.5e^{-i\omega\sigma\sqrt{\Delta t}}\right]}{\Delta t}.$$

Στο δεύτερο μέλος, ο αριθμητής και ο παρονομαστής του ορίου τείνουν στο 0 για $\Delta t \to 0$, οπότε εφαρμόζοντας τον κανόνα de L’ Hospital παίρνουμε ότι:

(2.1.14) $$\ln\left[\Phi_{W_t}(\omega)\right] = -\frac{1}{2}\omega\sigma t\lim_{\Delta t \to 0}\frac{tan\left(\omega\sigma\sqrt{\Delta t}\right)}{\sqrt{\Delta t}}.$$

Γενικά είναι γνωστό ότι $\lim_{x \to 0}\frac{tan\,(ax)}{x} = a$, επομένως

(2.1.15) $$\ln\left[\Phi_{W_t}(\omega)\right] = -\frac{1}{2}\omega^2\sigma^2 t \;\Rightarrow\; \Phi_{W_t}(\omega) = e^{-\frac{1}{2}\omega^2\sigma^2 t}.$$

Η (2.1.15) είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση μιας κανονικής διαδικασίας με Μέση Τιμή 0 και Διακύμανση $\sigma^2 t$. Τα επιμέρους τμήματα ενός τυχαίου περιπάτου είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, συνεπώς υπό τη σκοπιά του συνεχούς προσεγγίζει μια διαδικασία Wiener, ή όπως είναι αλλιώς γνωστή, μια Κίνηση Brown, την οποία θα μελετήσουμε στην επόμενη ενότητα.

2.2 Κίνηση Brown

[6,35,36]Σε αντίθεση με τα μόρια ενός στερεού υλικού, τα οποία κατέχουν συγκεκριμένη θέση αναφορικά με τη συνολική μάζα του υλικού, τα μόρια ενός υγρού υλικού κινούνται συνεχώς στο χρόνο, λόγω του ότι συνεχώς συγκρούονται με άλλα γειτονικά μόρια. Η κίνηση που πραγματοποιεί οποιοδήποτε μόριο του υγρού ονομάζεται Κίνηση Brown. Πρόκειται για μία τυχαία κίνηση, με την έννοια ότι η θέση του κάθε μορίου δεν εξαρτάται από τη θέση που κατείχε προηγουμένως, καθώς θεωρητικά δύναται να συγκρουστεί με οποιοδήποτε από τα γειτονικά με αυτό μόρια.

Έστω W_t η μετατόπιση του μορίου κατά τη χρονική στιγμή t και ότι $W_0 = 0$. Τότε, η μετατόπιση που υφίσταται το μόριο στο χρονικό διάστημα (t, τ) μπορεί να οφείλεται σε σύγκρουση με οποιοδήποτε συνδυασμό γειτονικών μορίων, οπότε, βάσει του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος, η $W_\tau - W_t$ είναι μια στοχαστική διαδικασία με κανονική κατανομή. Ακόμη, επειδή τα μόρια κατανέμονται ομοιόμορφα στην ποσότητα του υγρού, και η $W_{\tau+h} - W_{t+h}$ έχει κανονική κατανομή. Λόγω της τυχαιότητας της μετατόπισης του κάθε μορίου στο υγρό μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η διαδικασία αυτή αποτελείται από ανεξάρτητα μεταξύ τους τμήματα.

Η στοχαστική διαδικασία που περιγράφει μια Κίνηση Brown ονομάζεται διαδικασία Wiener.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.2.1 *Μια στοχαστική διαδικασία* W_t *ονομάζεται αμετάβλητη αν και μόνο αν* $W_t \cong W_{t+h}, \quad \forall h.$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.2.2 Μια στοχαστική διαδικασία $\{W_t, t \geq 0\}$ είναι διαδικασία Wiener αν:

1) *αποτελείται από ανεξάρτητα και αμετάβλητα τμήματα*
2) *έχει κανονική κατανομή* $\forall t \geq 0$
3) $E(W_t) = 0, \ \forall t \geq 0$
4) $P(W_0 = 0) = 1.$

Παρατηρούμε ότι

(2.2.1) $$Var(W_t) = Var(W_t - W_0) = Var(W_{t+\tau} - W_\tau)$$

(2.2.2) $$Var(W_\tau) = Var(W_\tau - W_0)$$

καθώς $W_t = W_t - W_0$ με πιθανότητα 1 και $(W_t - W_0) \cong (W_{t+\tau} - W_\tau)$. Από τις (2.2.1) και (2.2.2) έχουμε ότι:

(2.2.3) $Var(W_t) + Var(W_\tau) = Var(W_{t+\tau} - W_\tau) + Var(W_\tau - W_0)$.

Οι $(W_t - W_0)$ και $(W_{t+\tau} - W_\tau)$ είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες και ασυσχέτιστες, επομένως βάσει των ιδιοτήτων των ασυσχέτιστων μεταξύ τους διαδικασιών παίρνουμε ότι

$$Var(W_t) + Var(W_\tau) = Var(W_{t+\tau} - W_\tau + W_\tau - W_0) \Rightarrow$$

(2.2.4) $\Rightarrow Var(W_t) + Var(W_\tau) = Var(W_{t+\tau})$

Η (2.2.4) είναι της μορφής $f(t_1 + t_2) = f(t_1) + f(t_2)$, με $f(t), t \geq 0$. Η μοναδική κατηγορία συναρτήσεων που μπορούν να ικανοποιήσουν αυτή τη συνθήκη είναι οι συναρτήσεις της μορφής $f(t) = \sigma^2 t,\ \forall t \geq 0$, με $\sigma \in R$. Η (2.2.4) συνεπάγεται ότι:

(2.2.5) $$Var(W_{t+\tau} - W_\tau) = Var(W_{t+\tau}) - Var(W_\tau).$$

Αν θέσουμε $s = t + \tau$, τότε η (2.2.5) γίνεται:

$$Var(W_s - W_\tau) = Var(W_s) - Var(W_\tau) = \sigma^2 s - \sigma^2 \tau \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Var(W_s - W_\tau) = \sigma^2 (s - \tau)$$

και γενικότερα

(2.2.6) $Var(W_s - W_\tau) = \sigma^2 |s - \tau|$, όπου $t > \tau$ ή $t \leq \tau$.
Η ποσότητα σ^2 λέγεται παράμετρος μεταβλητότητας.

2.3 Αριθμητική Κίνηση Brown

Σε μια Στοχαστική Διαδικασία Wiener, ή Κίνηση Brown, έστω $W(t)$, η διαφορά $dW(t)$ έχει μηδενική Μέση Τιμή και Διασπορά ίση με τη μονάδα. Γενικεύοντας τη δομή αυτή για διαφορές με μη μηδενική Μέση Τιμή και μια αυθαίρετη Διασπορά, μπορούμε να ορίσουμε μια νέα Στοχαστική Διαδικασία, την $X(t)$ ως εξής:

(2.3.1) $$X(t+h) - X(t) = \alpha h + \sigma\sqrt{h}Y(t+h).$$

Η $Y(t)$ είναι μία Τυχαία Μεταβλητή από τη Διωνυμική Κατανομή. Θα ονομάσουμε *όρο μετατόπισης* ή *drift* την ποσότητα αh, ενώ ο παράγοντας $\sigma\sqrt{h}$ θα λέγεται στο εξής *θόρυβος* (noise). Θεωρούμε $T > 0$, και στη συνέχεια διαιρούμε το κλειστό διάστημα $[0, T]$ σε n υποδιαστήματα με τέτοιο τρόπο, ώστε καθένα από αυτά να έχει μήκος h ίσο με T/n. Τότε,

(2.3.2) $$\begin{aligned} X(T) - X(0) &= \sum_{i=1}^{n}\left(a\frac{T}{n} + sY(ih)\sqrt{\frac{T}{n}}\right) \\ &= \alpha T + \sigma\left(\sqrt{T}\sum_{i=1}^{n}\frac{Y(ih)}{\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

Σύμφωνα με το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα, η $\sqrt{T}\sum_{i=1}^{n}\frac{Y(ih)}{\sqrt{n}}$ τείνει να προέρχεται από μια Κανονική Κατανομή, με μηδενική Μέση Τιμή και Διασπορά ίση με T. Επομένως, μπορούμε ασφαλώς να πούμε ότι

(2.3.3) $$X(T) - X(0) = \alpha T + \sigma W(t),$$

όπου η Διαδικασία $W(t)$ είναι μια Στοχαστική Διαδικασία Wiener. Η (2.3.3) μπορεί να μετατραπεί στη στοχαστική διαφορική της μορφή:

(2.3.4) $$dX(t) = \alpha dt + \sigma dW(t).$$

Μια Στοχαστική Διαδικασία $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση (2.3.4) λέγεται Αριθμητική Κίνηση Brown. Σε μια Αριθμητική Κίνηση Brown ισχύει ότι:

(2.3.5) $$E[X(t) - X(0)] = \alpha t \text{ και}$$

(2.3.6) $$Var[X(t) - X(0)] = Var[\alpha t + \sigma W(t)] = \sigma^2 t.$$

Η παράμετρος α ονομάζεται *στιγμιαία Μέση Τιμή ανά μονάδα χρόνου* ή *παράγοντας μετατόπισης* (drift factor) και η παράμετρος σ ονομάζεται στιγμιαία Διασπορά ανά μονάδα χρόνου.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η διαδικασία $X(t) - X(0)$ κατανέμεται ομοιόμορφα με Μέση Τιμή αt και Διασπορά $\sigma^2 t$, οπότε η $X(t)$ κατανέμεται επίσης ομοιόμορφα, και με Μέση Τιμή $X(0) + \alpha t$ και Διασπορά $\alpha^2 t$. Ακόμη, παρατηρούμε ότι ο τυχαίος όρος $dW(t)$ πολλαπλασιάζεται με μια ποσότητα που μας επιτρέπει να αλλάζουμε τη Διασπορά. Επιπροσθέτως, έχει σημασία ο όρος αdt, η μη τυχαιότητα του οποίου αποτελεί κάτι καινούργιο σαν παρουσία στη Διαδικασία. Επί της ουσίας, προσθέτοντας με αdt είναι σαν να προσθέτουμε α στην $X(0)$, αλλά ανά μονάδα χρόνου.

2.4 Η διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck

Κατά τη διαδικασία τιμολόγησης υλικών αγαθών, παρατηρείται η τάση οι τιμές τους να επανέρχονται στον Μέσο Όρο. Πιο συγκεκριμένα, αν μια τιμή ξεκινά από τη Μέση Τιμή και μεταβάλλεται είτε προς τα πάνω είτε προς τα κάτω, τότε, μακροπρόθεσμα, θα καταλήξει να επανέλθει στη Μέση Τιμή από την οποία ξεκίνησε. Το συγκεκριμένο μοντέλο επαναφοράς στη Μέση Τιμή είναι περισσότερο λογικό από την πλευρά της Οικονομίας από την Αριθμητική Κίνηση Brown που μόλις μελετήσαμε.

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.3.4) της προηγούμενης Ενότητας, αλλά παραλλάσσοντας το drift term, μπορούμε να λάβουμε την:

(2.4.1) $$dX(t) = \lambda[\alpha + X(t)]dt + \sigma dW(t).$$

Εδώ, το α είναι επί της ουσίας η Μέση Τιμή, στην οποία τείνει να επανέλθει η $X(t)$, το σ είναι ο παράγοντας μεταβλητότητας, το λ είναι η ταχύτητα επαναφοράς προς τη Μέση Τιμή, και, όπως και πριν, η $W(t)$ είναι μια Στοχαστική Διαδικασία Wiener. Η διαδικασία της (2.4.1) ονομάζεται Στοχαστική Διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck.

Θα προσπαθήσουμε να επιλύσουμε τη σχέση (2.4.1). Αν θεωρήσουμε την υποθετική τυχαία μεταβλητή $Y(t) = X(t) - a$, τότε η (2.4.1) λαμβάνει την εξής διαφορική μορφή:

(2.4.2) $$dY(t) = -\lambda Y(t)dt + \sigma dW(t)$$

ή διαφορετικά

(2.4.3) $$dY(t) + \lambda Y(t)dt = \sigma dW(t).$$

Η (2.4.3) μπορεί να γραφεί και ως:

(2.4.4) $$d\left[e^{\lambda t}Y(t)\right] = e^{\lambda t}\sigma dW(t).$$

Παραγωγίζοντας την τελευταία από O ως t, έχουμε ότι:

(2.4.5) $$e^{\lambda t}Y(t) - Y(0) = \int_0^t e^{\lambda s} dW(s),$$

ή εναλλακτικά,

(2.4.6) $$Y(t) = e^{-\lambda t}Y(0) + \sigma \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} dW(s).$$

Τελικά, αντικαθιστώντας την $Y(t)$ και λύνοντας ως προς $X(t)$, βρίσκουμε ότι:

(2.4.7) $$X(t) = X(0)e^{-\lambda t} + \alpha\left(1 - e^{-\lambda t}\right) + \sigma \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} dW(s).$$

2.5 Γεωμετρική Κίνηση Brown

Η Αριθμητική Κίνηση Brown έχει αρκετά μειονεκτήματα. Ένα εξ αυτών είναι ότι μπορεί να είναι αρνητική, συνεπώς δεν εξυπηρετεί στην περιγραφή των τιμών μιας μετοχής, οι οποίες είναι πάντοτε μη αρνητικές. Επίσης, η Μέση Τιμή και η Διακύμανση της Αριθμητικής Κίνησης Brown είναι ανεξάρτητες της τιμής της μετοχής. Στην πραγματικότητα, κάθε φορά που μεταβάλλεται η τιμή μιας μετοχής περιμένουμε να δούμε ανάλογη μεταβολή και στην αναμενόμενη αξία αλλά και την τυπική απόκλιση του νομίσματος. Τα σημεία αυτά, καθώς και κάποια ακόμα, μπορούν να αποφευχθούν με τη χρήση της Γεωμετρικής Κίνησης Brown, την οποία θα μελετήσουμε στην Ενότητα αυτή.

Όταν ο drift factor και η μεταβλητότητα είναι συναρτήσεις της $X(t)$, όπου η $X(t)$ είναι μια Αριθμητική Κίνηση Brown, τότε η στοχαστική διαφορική μορφή:

$$dX(t) = \alpha\big(X(t)\big)dt + \sigma\big(X(t)\big)dW(t) \tag{2.5.1}$$

ονομάζεται Διαδικασία Itô, όπου η $W(t)$ είναι Κίνηση Brown. Πιο συγκεκριμένα, αν $\alpha\big(X(t)\big) = \alpha X(t)$ και $\sigma\big(X(t)\big) = \sigma X(t)$, τότε η (2.5.1) γράφεται ως:

$$dX(t) = \alpha X(t)dt + \sigma X(t)dW(t) \tag{2.5.2}$$

ή εναλλακτικά ως:

$$\frac{dX(t)}{X(t)} = \alpha dt + \sigma dW(t). \tag{2.5.3}$$

Η (2.5.3) είναι γνωστή και ως γεωμετρική Κίνηση Brown. Παρατηρούμε ότι η (2.5.3) υποδηλώνει πως οι ποσοστιαίες μεταβολές στην αξία του υποκειμένου κατανέμονται κανονικά με στιγμιαία Μέση Τιμή α και Διακύμανση σ^2. Επομένως, η στιγμιαία Μέση Τιμή της γεωμετρικής Κίνησης Brown $\frac{dX(t)}{X(t)} = 0.265dt + 0.346dW(t)$ είναι η $\alpha = 0.265$, ενώ η στιγμιαία της Διακύμανση είναι $\sigma^2 = 0.346^2 = 0.119716$.

Για μια αυθαίρετη αρχική τιμή $X(0)$, η σχέση (2.5.3) λαμβάνει την αναλυτική μορφή:

(2.5.4) $$X(t) = X(0)e^{(\alpha-0.5\sigma^2)t+\sigma\sqrt{t}W}$$

όπου η W είναι μια τυχαία μεταβλητή που κατανέμεται κανονικά με Μέση Τιμή 0 και Διακύμανση 1. Συνεχίζοντας, μπορούμε να γράψουμε:

(2.5.5) $$X(t) = X(0)e^{(\alpha-0.5\sigma^2)t+\sigma W(t)}$$

όπου η $W(t)$ είναι μια τυχαία μεταβλητή που κατανέμεται κανονικά με παραμέτρους 0 και t. Η $X(t)$, παρόλα αυτά, είναι εκθετική, οπότε δεν κατανέμεται κανονικά, αλλά ακολουθεί λογαριθμοκανονική κατανομή με $E\big(X(t)\big) = X(0)e^{\alpha t}$ και $Var\big(X(t)\big) = e^{2\alpha t}X(0)^2\big(e^{\sigma^2 t} - 1\big)$. Κατά συνέπεια, η $ln\big(X(t)\big)$ ακολουθεί κανονική κατανομή με Μέση Τιμή $E\big(X(t)\big) = ln\big(X(0)\big) + (\alpha - 0.5\sigma^2)t$ και Διασπορά $Var\big(X(t)\big) = \sigma^2 t$.

Καταφαίνεται, λοιπόν, ότι αν μια τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί γεωμετρική Κίνηση Brown, ο λογάριθμός της ακολουθεί αριθμητική Κίνηση Brown, ή διαφορετικά

(2.5.6) $$d[lnX(t)] = (\alpha - 0.5\sigma^2)dt + \sigma dW(t).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.5.1 Έστω ότι η τιμή μιας μετοχής ακολουθεί μια γεωμετρική Κίνηση Brown με drift rate και ποσοστό Διακύμανσης 10% και 9% ετησίως αντίστοιχα. Η σημερινή αξία της μετοχής είναι 100 ν.μ. (νομισματικές μονάδες). Θέλουμε να βρούμε την πιθανότητα η μετοχή να αξίζει πάνω από 200 ν.μ. σε δύο χρόνια από σήμερα.

Χρειάζεται να υπολογίσουμε την πιθανότητα $P(S(2) > 200)$, ή διαφορετικά την $P\left(ln\left(\frac{S(2)}{S(0)}\right) > ln2\right)$.

Ωστόσο, η $ln\left(\frac{S(2)}{S(0)}\right)$ κατανέμεται κανονικά, και η Μέση Τιμή της είναι $(\alpha - 0.5\sigma^2)t = [0.10 - 0.5(0.09)] \times 2 = 0.11$, ενώ η Διακύμανσή της $\sigma^2 t = 0.09 \times 2 = 0.18$. Για το λόγο αυτό,

(2.5.7) $P(S(2) > 200) = P\left(Z > \frac{\ln 2 - 0.11}{\sqrt{0.18}}\right) = 1 - N(1.37) = 0.085.$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.5.1 Έστω γεωμετρική Κίνηση Brown με drift factor 0.10. Για $h = \frac{1}{365}$, δίνεται ότι ο λόγος του θορύβου προς το drift είναι ίσος με 22.926. Να βρεθεί η τυπική απόκλιση σ.

Από τα δεδομένα που έχουμε, ισχύει ότι $\frac{\sigma\sqrt{h}}{\alpha h} = 22.926$. Επομένως,

(2.5.8) $$\frac{\sigma}{0.10\sqrt{\frac{1}{365}}} = 22.926 \Rightarrow \sigma = 0.12.$$

Κεφάλαιο 3

Τιμολόγηση Δικαιωμάτων Προαίρεσης σε Στοχαστικό Περιβάλλον

Μας ενδιαφέρουν τα Δικαιώματα Προαίρεσης Ευρωπαϊκού τύπου πάνω σε ένα περιουσιακό στοιχείο, το οποίο τιμολογείται από μία διαδικασία διάχυσης, έστω την $\{S_t\,,\ t \geq 0\}$.

3.1 Το Μαθηματικό Μοντέλο

[27]Υποθέτουμε ότι η αγορά διέπεται από συνεχείς και χωρίς κόστος συναλλαγές, αλλά και ότι είναι δίκαιη, υπό την έννοια ότι δεν υπάρχει δυνατότητα για κερδοσκοπία. Η διαδικασία $\{r_t\,,\ t \geq 0\}$ του επιτοκίου είναι ντετερμινιστική, όμως ενδέχεται να εξαρτάται από το χρόνο. Έστω ότι η $B(t,T) = exp\{-\int_t^T r_u du\}$ χαρακτηρίζει την αξία κατά τη χρονική στιγμή t ενός ομολόγου με αγοραστική αξία που μειώθηκε κατά μία μονάδα, το οποίο λήγει τη χρονική στιγμή T.

Η διαδικασία που παράγει τις τιμές προέρχεται από έναν χώρο πιθανοτήτων (Ω, $\mathcal{F}$, P), ο οποίος είναι ο θεμελιώδης χώρος της διαδικασίας S της αξίας του περιουσιακού στοιχείου και περιγράφεται από τις

(3.1.1) $$\frac{dS_t}{S_t} = \mu(t,\ S_t,\ Y_t)\,dt + \sigma_t\,dW_t^S,$$

$$\sigma_t^2 = f(Y_t),$$

(3.1.2) $$dY_t = \alpha(t,\ Y_t)\,dt + b(t,\ Y_t)\,dW_t^\sigma,$$

όπου η $(W_t)_{t\geq 0} = (W_t^S,\ W_t^\sigma)'_{t\geq 0}$ είναι μία κλασσική δισδιάστατη κίνηση Brown, ορισμένη στον (Ω, $\mathcal{F}$, P) και η $f = (f_t)_{t\geq 0}$ είναι η βάσει του P αύξηση του φιλτραρίσματος που προκαλείται από την W_t. Υποθέτουμε ότι οι συντελεστές της δισδιάστατης διαδικασίας διάχυσης, που περιγράφεται από τις (3.1.1) και (3.1.2), ικανοποιούν τα συνήθη κριτήρια επάρκειας για την ύπαρξη μοναδικής και ισχυρής Μαρκοβιανής λύσης. Συγκεκριμένα, προβαίνουμε στην ακόλουθη υπόθεση για τη συνάρτηση μεταβλητότητας $f(\cdot)$.

ΥΠΟΘΕΣΗ 3.1.1. *Η συνάρτηση μεταβλητότητας $f(\cdot)$ είναι ένα-προς-ένα, θετική και φραγμένη.*

Για τεχνικούς λόγους, τους οποίους θα συναντήσουμε στο πρόβλημα τιμολόγησης, η διαδικασία των (3.1.1) και (3.1.2) μοντελοποιείται ως μία αυτόνομη διάχυση. Επιπροσθέτως, υποθέτουμε ότι είναι εξωγενής, αν και η πλειονότητα των διαθέσιμων εμπειρικών παρατηρήσεων υποδηλώνει την ύπαρξη «μόχλευσης», κάτι που παρατηρήθηκε πρώτα από τον Black (1976)[8], λόγω αρνητικής συσχέτισης μεταξύ αλλαγών στις τιμές των μετοχών και στη μεταβλητότητα αυτών. Τα αποτελέσματα της εργασίας αυτής συγκεκριμενοποιούνται στο μοντέλο με ασυσχέτιστους κινδύνους, με την έννοια ότι οι W^S και W^σ είναι ανεξάρτητες.

Ακολούθως, θα παρουσιάσουμε εν συντομία το μοντέλο τιμολόγησης Δικαιωμάτων Προαίρεσης των Hull και White. Έστω $\{C_t,\ 0 \leq t \leq T\}$ η διαδικασία για την αξία ενός Ευρωπαϊκού Δικαιώματος αγοράς ενός περιουσιακού στοιχείου S με τιμή άσκησης K και λήξη στη χρονική στιγμή T. Εισάγουμε τη μεταβλητή:

(3.1.3) $$x_t = ln\left(\frac{S_t}{K \cdot B(t,T)}\right)$$

όπου η $B(t,T)$ είναι η αξία του ομολόγου τη στιγμή t. Μέσω της μεταβλητής αυτής, ένα Δικαίωμα Αγοράς είναι “in-the-money” όταν $x_t > 0$, “out-of-the-money” όταν $x_t < 0$ και “at-the-money” όταν $x_t = 0$.

Είναι γνωστό ότι η παραδοχή "no-free-lunch" ισοδυναμεί με την ύπαρξη μίας κατανομής πιθανότητας Q στο χώρο $(\Omega, \mathcal{F})$, ίσης με P, υπό την οποία οι διαδικασίες των προεξοφλημένων τιμών είναι διαδικασίες martingales. Μια τέτοια πιθανότητα ονομάζεται *ισοδύναμο μέτρο martingale* και είναι μοναδική αν και μόνο αν η αγορά είναι πλήρης.

Ας οριοθετήσουμε όμως αρχικά το σύνολο των ισοδύναμων μέτρων martingales μέσα στην πρακτικά μη-πλήρη αγορά. Από την ολοκληρωτική μορφή που προκύπτει από την παρουσίαση των martingales (Karatzas και Shreve, 1988[24]), η θετικού προσήμου διαδικασία πυκνότητας οποιουδήποτε μέτρου πιθανότητας Q ισοδύναμου με P μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$M_t = \exp\left(-\int_0^t \lambda_u^S \, dW_u^S - \frac{1}{2}\int_0^t \lambda_u^{S^2} du - \int_0^t \lambda_u^\sigma \, dW_u^\sigma - \frac{1}{2}\int_0^t \lambda_u^{\sigma^2} du\right), \tag{3.1.4}$$

όπου οι διαδικασίες λ^S και λ^σ είναι προσαρμοσμένες στο φιλτράρισμα $\{\mathcal{F}_t\}$ και ικανοποιούν τις συνθήκες ολοκλήρωσης $\int_0^T \lambda_u^{S^2} du < \infty$ και $\int_0^T \lambda_u^{\sigma^2} du < \infty$. Βάσει του θεωρήματος Girsanov, η διαδικασία $\widetilde{W} = (\widetilde{W}^S, \, \widetilde{W}^\sigma)'$ που ορίζεται από τις

$$\widetilde{W}_t^S = W_t^S + \int_0^t \lambda_u^S \, du \quad \text{και} \quad \widetilde{W}_t^\sigma = W_t^\sigma + \int_0^t \lambda_u^\sigma \, du \tag{3.1.5}$$

είναι μία δισδιάστατη κίνηση Brown υπό την Q. Η δυναμική της αξίας του περιουσιακού στοιχείου υπό την Q λαμβάνεται άμεσα από τις (3.1.1) - (3.1.2) και από την (3.1.5). Γίνεται τότε προφανές ότι η διαδικασία $\{S_t \, B(0, \, t), \; 0 \le t \le T\}$ της προεξοφλημένης αξίας είναι μια Q-martingale διαδικασία αν και μόνο αν

$$\lambda_t^S = \frac{\mu(t, \; S_t, \; Y_t - r_t)}{\sigma_t}, \qquad 0 \le t \le T. \tag{3.1.6}$$

Καθώς το S είναι το μοναδικό περιουσιακό στοιχείο, η διαδικασία λ^σ δεν είναι δεδομένη. Η διαδικασία λ^S που ορίζεται από τη σχέση

(3.1.6) ονομάζεται *ασφάλιστρο κινδύνου περιουσιακού στοιχείου*. Κατ' αναλογία, κάθε διαδικασία λ^σ που ικανοποιεί την αναγκαία συνθήκη ολοκληρωσιμότητας μπορεί να θεωρηθεί ως ένα *ασφάλιστρο κινδύνου μεταβλητότητας*. Με άλλα λόγια, για κάθε διαδικασία λ^σ ενός ασφαλίστρου κινδύνου μεταβλητότητας, η πιθανότητα $Q(\lambda^\sigma)$ που ορίζεται από τη διαδικασία πυκνότητας M, όπως αυτή φαίνεται στην (3.1.4), είναι ένα ισοδύναμο μέτρο martingale.

Το σύνολο των τιμών βέβαιου κέρδους του Ευρωπαϊκού τύπου Δικαιώματος Προαίρεσης είναι επακόλουθο, ως συνήθως, της ιδιότητας martingale της προεξοφλημένης αξίας αυτού υπό οποιοδήποτε ισοδύναμο μέτρο martingale. Έτσι, για κάθε διαδικασία λ^σ του ασφαλίστρου κινδύνου μεταβλητότητας, η

$$C_t^{\lambda^\sigma} = B(t,T)E_t^{Q(\lambda^\sigma)}[max(0, S_T - K)], \quad 0 \leq t \leq T \tag{3.1.7}$$

είναι μία αποδεκτή διαδικασία αξιών του Ευρωπαϊκού τύπου Δικαιώματος· εδώ, η ποσότητα $E_t^Q(\cdot) = E^Q(\cdot\,|\,\mathcal{F}_t)$ αποτελεί τον τελεστή της υπό όρους προσδοκίας δοθέντος $\mathcal{F}_t$, όταν η δυναμική των αξιών του Δικαιώματος καθορίζεται από την Q.

Το μοντέλο των Hull και White εξαρτάται από την ακόλουθη υπόθεση, η οποία περιορίζει το σύνολο των ισοδύναμων μέτρων martingales.

ΥΠΟΘΕΣΗ 3.1.2. *Το ασφάλιστρο κινδύνου μεταβλητότητας εξαρτάται μόνο από την παρούσα αξία της διαδικασίας μεταβλητότητας:*

$$\lambda_t^\sigma = \lambda_t^\sigma(t, Y_t), \quad \forall t \in [0, T].$$

Επιπλέον, η ποσότητα $b(\cdot\,,\,\cdot)\lambda^\sigma(\cdot\,,\,\cdot)$ *ικανοποιεί γραμμική ανάπτυξη και τις προϋποθέσεις Lipschitz ομοιόμορφα στο* t.

Η υπόθεση 3.1.2, στα πλαίσια του μοντέλου (3.1.1)-(3.1.2), εμφανίζει μια συνέπεια με ένα μοντέλο διαχρονικής προσθετικής ισορροπίας, όπου οι προτιμήσεις των παραμέτρων περιγράφονται από τις συναρτήσεις χρησιμότητας της Σ.Σ.Α.Κ. (Σταθερής Σχετικής Αποστροφής

Κινδύνου) (βλ. *He and Pagès 1993*[20] και *Pham and Touzi 1996*[26]). Εξασφαλίζει ότι η $Q(\lambda^{\sigma})$ - κατανομή της ποσότητας $ln(S_T/S_t)$, υπό προϋποθέσεις πάνω στην $\mathcal{F}_t$ και στην τροχιά της μεταβλητότητας $\{\sigma_t,\ 0 \leq t \leq T\}$, είναι κανονική με μέσο $\int_t^T r_u du - \frac{1}{2}\int_t^T \sigma_u^2 du$ και διακύμανση $\int_t^T \sigma_u^2 du$. Μπορούμε συνεπώς να υπολογίσουμε την αναμενόμενη τιμή στη σχέση (3.1.7), υπό προϋποθέσεις στην τροχιά της μεταβλητότητας, και έχουμε:

(3.1.8) $$C_t^{\lambda^{\sigma}} = S_t\left\{E_t^{Q(\lambda^{\sigma})}\left[\Phi\left(\frac{x_t}{U_{t,T}} + \frac{U_{t,T}}{2}\right)\right] - e^{-x_t}E_t^{Q(\lambda^{\sigma})}\left[\Phi\left(\frac{x_t}{U_{t,T}} + \frac{U_{t,T}}{2}\right)\right]\right\},$$

όπου $\Phi(u) = (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{u} e^{-t^2/2}dt$ είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής $\mathcal{N}(0,1)$, και $U_{t,T} = \sqrt{\int_t^T \sigma_u^2 du}$. Η ακόλουθη υπόθεση αναδεικνύει μια ενδιαφέρουσα και παράξενη περίπτωση.

ΥΠΟΘΕΣΗ 3.1.3. *Ο κίνδυνος μεταβλητότητας είναι μη αντισταθμισμένος· δηλ.* $\lambda^{\sigma} \equiv 0$.

Η υπόθεση αυτή αντιμετωπίζει τη μεταβλητότητα σαν ένα μη εμπορεύσιμο κίνδυνο ο οποίος μπορεί να εκμηδενίζεται, και κατά συνέπεια δεν τιμολογείται· οι *Pham and Touzi (1996)*[26] έδειξαν ότι η υπόθεση αυτή είναι συνεπής με μία διαχρονική προσθετική ισορροπία με λογαριθμικές προτιμήσεις. Οι *Föllmer and Schweizer (1992)*[14] ερμηνεύουν αυτή την υπόθεση μέσω ενός ισοδύναμου μέτρου martingale, το οποίο προσεγγίζει κατά μία έννοια την P (από την άποψη της σχετικής εντροπίας). Παρόλα αυτά, μια τέτοια υπόθεση δύναται να κατακριθεί από μια εμπειρική οπτική γωνία (βλέπε τη συζήτηση πάνω στους καθοριστικούς παράγοντες της ισορροπίας στο ασφάλιστρο για τον κίνδυνο μεταβλητότητας του *Wiggins 1987*[31]). Υπό την υπόθεση 3.1.3, η κατανομή πιθανότητας του $U_{t,T}$ είναι η ίδια υπό τις P και Q, και το ασφάλιστρο του Δικαιώματος Προαίρεσης μειώνεται στο

$$(3.1.9) \quad C_t^0 = S_t \left\{ E_t^P \left[\Phi\left(\frac{x_t}{U_{t,T}} + \frac{U_{t,T}}{2} \right) \right] - e^{-x_t} E_t^P \left[\Phi\left(\frac{x_t}{U_{t,T}} + \frac{U_{t,T}}{2} \right) \right] \right\}.$$

Όπως και να έχει, η επιλογή της διαδικασίας λ^σ του ασφαλίστρου του Δικαιώματος Προαίρεσης, και κατά συνέπεια και το ισοδύναμο μέτρο martingale $Q(\lambda^\sigma)$, δεν έχει σημασία αν ισχύει η Υπόθεση 3.1.3. Το αποτέλεσμα της Ενότητας 3.1 θα αποδειχθεί για κάθε επιτρεπτή τιμή βέβαιου κέρδους που λαμβάνεται από ένα ασφάλιστρο κινδύνου μεταβλητότητας, το οποίο ικανοποιεί την Υπόθεση 3.1.2.

3.2 Ανάλυση της Επαγόμενης Μεταβλητότητας

[27]Λόγω του Μαρκοβιανού στοιχείου της διαδικασίας (S, σ), η τιμή του Δικαιώματος Προαίρεσης στην (3.1.8) εξαρτάται μόνο από την αξία που έχει το υποκείμενο στοιχείο την εκάστοτε χρονική στιγμή και τη μεταβλητότητα αυτής. Επίσης, κάτω από ήπια ικανοποιημένες συνθήκες για τους συντελεστές των (3.1.1) – (3.1.2), η μέσω των Hull και White τιμή του Δικαιώματος είναι μία $C^{1,2}([0,T], R_+^* \times R_+^*)$ συνάρτηση των (t, s, σ). Ένας προφανής τρόπος να επιλύσουμε το πρόβλημα αντιστάθμισης εδώ είναι να καλύψουμε ένα δεδομένο Δικαίωμα τιμής C_t^1 κατά Δ_t^* μονάδες του υποκείμενου στοιχείου και κατά Σ_t^* μονάδες ενός οποιουδήποτε άλλου Δικαιώματος με τιμή C_t^2. Οι ποσότητες Δ_t^* και Σ_t^* είναι η λύση του συστήματος:

(3.2.1)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial C_t^1}{\partial S_t} - \Delta_t^* - \Sigma_t^* \dfrac{\partial C_t^2}{\partial S_t} = 0, \\ \\ \dfrac{\partial C_t^1}{\partial \sigma_t} - \Sigma_t^* \dfrac{\partial C_t^2}{\partial \sigma_t} = 0. \end{cases}$$

Η προσέγγιση αυτή είναι γνωστή και ως στρατηγική αντιστάθμισης Δέλτα-Σίγμα (Scott, 1991[29]). Η Εργασία των Bajeux και Rochet (1992)[7] πάνω στη γενική διαδικασία διάχυσης δείχνει ότι οποιοδήποτε Δικαίωμα Προαίρεσης Ευρωπαϊκού τύπου συμπληρώνει την αγορά, δηλαδή, $\partial C_t^2/\partial \sigma_t \neq 0,\ 0 \leq t \leq T$ (Υπόθεση 3.1.2). Αυτό υποδηλώνει την ύπαρξη μοναδικής λύσης για το πρόβλημα (3.2.1).

Στην πράξη, οι εμπορευόμενοι Δικαιώματα Προαίρεσης συνήθως επικεντρώνονται στον κίνδυνο που προκύπτει από τις μεταβολές της τιμής του υποκειμένου και ακολουθούν την ελλιπή στρατηγική αντιστάθμισης $\Sigma_t = 0 \ \mathit{και}\ \Delta_t = \partial C_t^1/\partial S_t$. Σύμφωνα με την Υπόθεση 3.1.2, το παραπάνω μπορεί να γραφεί και ως:

(3.2.2) $$\Delta_t(x_t, \sigma_t) = E_t^Q\left[\Phi\left(\frac{x_t}{U_{t,T}} + \frac{U_{t,T}}{2}\right)\right],$$

όπου για συμβολική ευκολία δε σημειώνεται η εξάρτηση του ισοδύναμου μέτρου martingale από τη διαδικασία λ^{σ} του ασφαλίστρου για τον κίνδυνο μεταβλητότητας. Παρόλα αυτά, το μοντέλο που χρησιμοποιείται ως επί το πλείστον από εμπορευόμενους για την τιμολόγηση Δικαιωμάτων είναι αυτό των Black και Scholes, το οποίο θεωρεί μια συνεχή διαδικασία μεταβλητότητας, έτσι ώστε $U_{t,T} = \sigma\sqrt{T-t} = \sigma\sqrt{t}$, και οι τύποι τιμολόγησης και αντιστάθμισης να καταλήγουν αντίστοιχα στους

(3.2.3) $$C_t^{BS} = S_t\left[\Phi\left(\frac{x_t}{\sigma\sqrt{\tau}} + \frac{\sigma\sqrt{\tau}}{2}\right) - e^{-x_t}\Phi\left(\frac{x_t}{\sigma\sqrt{\tau}} - \frac{\sigma\sqrt{\tau}}{2}\right)\right], \text{ και}$$

(3.2.4) $$\Delta_t^{BS}(x_t, \sigma) = \Phi\left(\frac{x_t}{\sigma\sqrt{\tau}} + \frac{\sigma\sqrt{\tau}}{2}\right).$$

Εμπειρικά ευρήματα απορρίπτουν σημαντικά την υπόθεση της συνέχειας της μεταβλητότητας και οι εμπορευόμενοι Δικαιώματα βλέπουν από ιστορικά δεδομένα ότι η αντιστάθμιση που υπολογίζεται δεν καταφέρνει να καλύψει τελικά έναντι του πραγματικού κινδύνου. Αυτό που συνήθως γίνεται για να λυθεί το πρόβλημα αυτό της αντιστάθμισης είναι η χρήση της *επαγόμενης μέσω Black και Scholes μεταβλητότητας*, η οποία ορίζεται ως η τιμή του σ που καταφέρνει να εξισώσει το αποτέλεσμα του μοντέλου στην παρατηρηθείσα τιμή του Δικαιώματος στην αγορά. Η ιδέα αυτή της επαγόμενης μεταβλητότητας παρουσιάστηκε αρχικά από τους Latane και Rendleman (1976)[25], και είναι ευρέως γνωστό ότι μπορεί να βελτιώσει την αντιστάθμιση που προσφέρει το μοντέλο των Black και Scholes. Και παρόλο που ταυτόχρονη χρήση του μοντέλου και ενός στοχαστικού χαρακτήρα για τη μεταβλητότητα δεν ευσταθεί, πολλοί συγγραφείς έχουν παρατηρήσει ότι η επαγόμενη μεταβλητότητα μπορεί να προβλέψει μελλοντικές τιμές της μεταβλητότητας καλύτερα από δεδομένα πραγματικών μεταβλητοτήτων του κοντινού παρελθόντος (Chiras και Manaster, 1978[9] ή Jarrow και Wiggins, 1989[23]).

Θα θεωρήσουμε ότι οι παρατηρηθείσες τιμές των Δικαιωμάτων δίνονται από τον τύπο (3.1.9) των Hull και White. Με τον τρόπο αυτό, καταλήγουμε με έναν σαφή και ακριβή ορισμό για την επαγόμενη μέσω Black και Scholes μεταβλητότητα ως τη μοναδική λύση της

$$(3.2.5) \quad H_t(x,\sigma) = H_t^{BS}\left(x, \sigma^i(x,\sigma)\right), \quad (t,x,\sigma) \in [0,T] \times R_+^* \times R_+^*,$$

όπου $H_t(x_t,\sigma_t) = C_t/S_t$ και $H_t^{BS}(x_t,\sigma) = C_t^{BS}/S_t$, έτσι ώστε με πολλαπλασιασμό του δεύτερου μέλους με S_t, η τελευταία εξίσωση ορίζει την επαγόμενη μεταβλητότητα ως την παράμετρο που εξισώνει την τιμή του Δικαιώματος που βρίσκουμε μέσω Black και Scholes με αυτή που βρίσκουμε μέσω Hull και White.

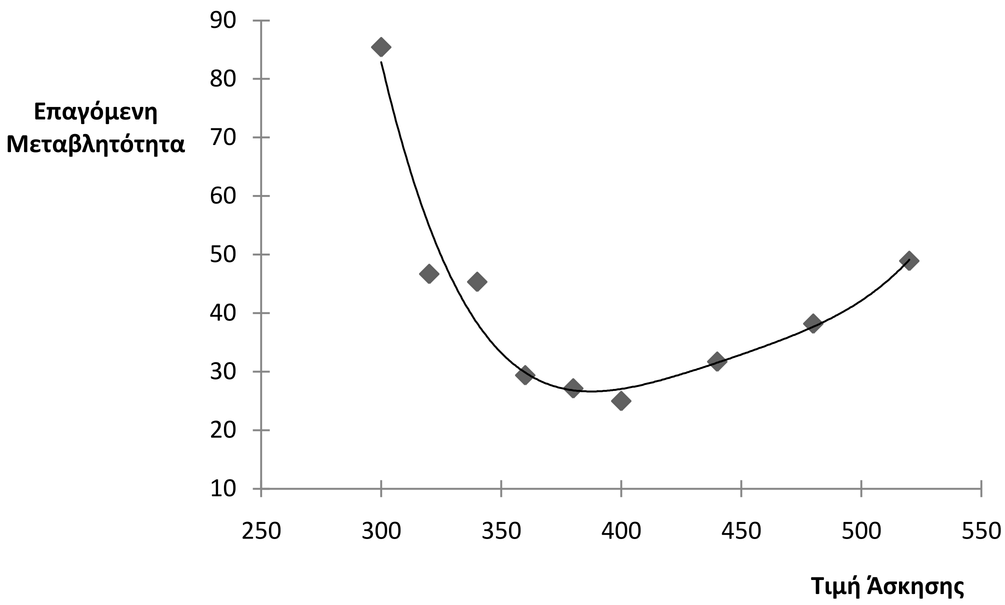
Ακολούθως, θα μελετήσουμε την επαγόμενη μέσω Black και Scholes μεταβλητότητα ως μια συνάρτηση της τιμής άσκησης του Δικαιώματος Προαίρεσης, με σκοπό να παρουσιάσουμε μια επεξήγηση για το εμπειρικό φαινόμενο *smile effect.*

Με τον όρο *smile effect*, αναφερόμαστε στον τρόπο με τον οποίο επηρεάζεται η επαγόμενη μεταβλητότητα από αλλαγές στην τιμή άσκησης του Δικαιώματος. Υποθέτοντας ότι έχουμε ένα συγκεκριμένο υποκείμενο στοιχείο, οι επαγόμενες μεταβλητότητες που μας δίνει το μοντέλο των Black και Scholes για Δικαιώματα που λήγουν την ίδια χρονική στιγμή, αλλά έχουν διαφορετικές τιμές άσκησης, παρουσιάζουν μία συγκεκριμένη μορφή: η γραφική παράσταση των επαγόμενων μεταβλητοτήτων ως προς τις διαφορετικές τιμές άσκησης των Δικαιωμάτων (διατεταγμένες σε αύξουσα σειρά) είναι μια καμπύλη με σχήμα U, με το ελάχιστο να αντιστοιχεί στο Δικαίωμα με τιμή άσκησης ίση με την αξία του υποκειμένου, ή διαφορετικά, στο Δικαίωμα που βρίσκεται σε *at-the-money* κατάσταση.

Για την καλύτερη κατανόηση του φαινομένου, φέρουμε σαν παράδειγμα τη μετοχή «Paribas» του γαλλικού Χρηματιστηρίου και τα Δικαιώματα επ’ αυτής, όπως παρατηρήθηκαν την 11η Φεβρουαρίου του 1992. Η αγοραστική της αξίας την 11η Φεβρουαρίου ήταν 386.40 γαλλικά φράγκα.

Τιμή Άσκησης	300	320	340	360	380	400	440	480	520
Επαγόμενη Μεταβλητότητα	85.43	46.70	45.35	29.40	27.16	25.00	31.72	38.21	48.93

Διάγραμμα 3.2.1



Γράφημα 3.2.1

Όπως φαίνεται και στο διάγραμμα, όσο αυξάνεται η τιμή άσκησης η επαγόμενη μεταβλητότητα μειώνεται, φτάνει σε ελάχιστο για at-the-money Δικαίωμα, και από εκεί ξεκινά να αυξάνεται.

Η ακόλουθη Πρόταση πηγάζει από τον ορισμό της επαγόμενης μεταβλητότητας και μας επιτρέπει να μελετήσουμε περιοριστικά τη σ^i ως συνάρτηση της τιμής άσκησης, είτε για την *in-the-money* $(x \geq 0)$, είτε για την *out-of-the-money* $(x \leq 0)$ κατάσταση.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.2.1. *Για οποιαδήποτε επιλογή* $(t, \sigma) \in [0, T] \times R_+^*$, *η Black και Scholes επαγόμενη μεταβλητότητα* $\sigma_t^i(\cdot, \sigma)$ *είναι άρτια συνάρτηση, δηλαδή*

$$\forall x \in R, \qquad \sigma_t^i(x, \sigma) = \sigma_t^i(-x, \sigma).$$

Τέλος, καθότι στην Εργασία αυτή θα εξετάσουμε και την ακρίβεια της στρατηγικής αντιστάθμισης με τη βοήθεια της επαγόμενης μεταβλητότητας, θα χρειαστεί να ορίσουμε και ένα δεύτερο είδος επαγόμενης μεταβλητότητας:

$$\sigma_t^h(x_t,\sigma_t) = \frac{1}{\sqrt{\tau}}\left\{\Phi^{-1}E_t^Q\Phi\left(\frac{x_t}{U_{t,T}} + \frac{U_{t,T}}{2}\right) + \sqrt{\Phi^{-1}E_t^Q\Phi\left(\frac{x_t}{U_{t,T}} + \frac{U_{t,T}}{2}\right)^2 - 2x}\right\}, \tag{3.2.6}$$

όπου $\Phi^{-1}E_t^Q\Phi(\cdot) = \Phi^{-1}\{E_t^Q[\Phi(\cdot)]\}$. Την παράμετρο $\sigma_t^h(x,\sigma)$ θα την ονομάσουμε *μεταβλητότητα αντιστάθμισης*, καθώς ικανοποιεί τη σχέση

$$\Delta_t(x,\sigma) = \Delta_t^{BS}[x,\sigma_t^h(x,\sigma)],\ \ 0 \le t < T,\ \ (x,\sigma) \in R \times R_+^*. \tag{3.2.7}$$

Σε αντίθεση με την επαγόμενη μεταβλητότητα, η μεταβλητότητα αντιστάθμισης δεν είναι παρατηρήσιμη και, λόγω αυτού, βρίσκεται προσεγγιστικά μέσω της επαγόμενης μεταβλητότητας των Black και Scholes.

3.3 Το Smile Effect και η Μεροληψία της Αντιστάθμισης

[27]Στην ενότητα αυτή δε θα χρησιμοποιήσουμε τους δείκτες t και T για συμβολική ευκολία. Με τον όρο Μεροληψία Αντιστάθμισης εννοούμε τη διαφορά μεταξύ του Δ που προκύπτει από την επαγόμενη μέσω Black και Scholes μεταβλητότητα και του Δ που προκύπτει μέσω Hull και White, ή διαφορετικά: $\Delta_t^{BS}\left(x, \sigma^i(x,\sigma)\right) - \Delta_t(x,\sigma)$. Για να μπορέσουμε να βρούμε το πρόσημο της ποσότητας αυτής, θα προχωρήσουμε σε σύγκριση των δύο διαφορετικών ειδών μεταβλητότητας που είδαμε στην προηγούμενη ενότητα.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.3.1. *Για κάθε* $x \geq 0$ *και* $\sigma > 0$ *έχουμε ότι:*

(3.3.1) $$\sigma^h(-x,\sigma) \leq \sigma^i(-x,\sigma) = \sigma^i(x,\sigma) \leq \sigma^h(x,\sigma)$$

και για την περίπτωση Δικαιώματος που είναι «at-the-money», έχουμε ότι $\sigma^h(0,\sigma) = \sigma^i(0,\sigma)$.

Από την Πρόταση 3.3.1, τα δύο διαφορετικά είδη επαγόμενης μεταβλητότητας συμπίπτουν στην περίπτωση που το Δικαίωμα βρίσκεται σε κατάσταση *at-the-money*. Παρόλα αυτά, ακόμα και στην περίπτωση αυτή, οι δύο επαγόμενες μεταβλητότητες δεν ισούνται με την πραγματική τιμή της μεταβλητότητας του υποκειμένου.

Το πρώτο μας κύριο αποτέλεσμα εξετάζει την ακρίβεια της προσέγγισης της ποσότητας Δ_t μέσω της ποσότητας Δ_t^{BS}.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.3.1. *Για οποιοδήποτε ισοδύναμο μέτρο πιθανότητας martingale, το οποίο ικανοποιεί την Υπόθεση 3.1.2, έχουμε ότι για κάθε* $x \geq 0$ *και* $\sigma > 0$*:*

(3.3.2) $$\Delta^{BS}\left(x, \sigma^i(x,\sigma)\right) \leq \Delta(x,\sigma),$$

(3.3.3) $$\Delta^{BS}\left(-x, \sigma^i(x,\sigma)\right) \geq \Delta(-x,\sigma),$$

(3.3.4) $$\Delta^{BS}\left(0, \sigma^i(0,\sigma)\right) = \Delta(0,\sigma).$$

Απόδειξη. Η ανισότητα (3.3.3) προκύπτει απευθείας από την Πρόταση 3.3.1, καθώς η συνάρτηση $\sigma \to \Phi(-x/\sigma + \sigma/2)$ είναι αύξουσα.

Για να αποδείξουμε την ανισότητα (3.3.2) θα θεωρήσουμε δύο περιπτώσεις:

Περίπτωση Α: Αν ισχύει ότι $\sigma^i(x,\sigma) \geq \sqrt{2x/\tau}$, τότε η (3.3.2) προκύπτει σαν επακόλουθο του ότι η $\sigma \to \Phi(x/\sigma + \sigma/2)$ είναι αύξουσα.

Περίπτωση Β: Αν ισχύει ότι $\sigma^i(x,\sigma) < \sqrt{2x/\tau}$, τότε η (3.3.2) προκύπτει από την Πρόταση 3.3.1 και το ότι η συνάρτηση $\sigma \to \Phi(x/\sigma + \sigma/2)$ είναι φθίνουσα στο Σύνολο Τιμών $\{-\infty, 2x/\tau]$.

Έτσι, αφού $\Delta^{BS}\left(x, \sigma^h(x,\sigma)\right) - \Delta^{BS}\left(-x, \sigma^h(x,\sigma)\right) = h_{x,\sigma}\left(\sigma^h(-x,\sigma)\right)$ και $h_{x,\sigma}\left(\sigma^h(-x,\sigma)\right) \geq 0$, καταλήγουμε ότι ισχύει η ανισότητα $\Delta^{BS}\left(x, \sigma^i(x,\sigma)\right) \leq \Delta^{BS}\left(x, \sigma^h(x,\sigma)\right)$.

Η ισότητα (3.3.4) είναι άμεσο επακόλουθο των (3.3.2) και (3.3.3) για την ειδική περίπτωση μηδενικής διαφοράς μεταξύ της τιμής του Δικαιώματος και της τιμής του υποκειμένου. □

Το παραπάνω Θεώρημα καταδεικνύει ότι:

(i) Στην περίπτωση ενός Δικαιώματος που βρίσκεται σε κατάσταση *in-the-money*, η χρήση της επαγόμενης μεταβλητότητας των Black και Scholes έχει σαν αποτέλεσμα υπό του δέοντος αντιστάθμιση του κινδύνου.

(ii) Στην περίπτωση Δικαιώματος σε κατάσταση *out-of-the-money*, η χρήση της επαγόμενης μεταβλητότητας οδηγεί σε υπέρ του δέοντος αντιστάθμιση.

(iii) Στην περίπτωση *at-the-money* Δικαιώματος, η αντιστάθμιση που προτείνεται από το μοντέλο Black και Scholes οδηγεί σε μία επαρκώς αλλά όχι υπερβολικά καλυμμένη θέση.

Τέλος, το επόμενο Θεώρημα δείχνει ότι η εμπειρική παρατήρηση, βάσει της οποίας η επαγόμενη μεταβλητότητα σαν συνάρτηση της τιμής άσκησης του Δικαιώματος είναι μια καμπύλη με σχήμα U, εξηγείται απόλυτα από το μοντέλο στοχαστικής μεταβλητότητας των Hull και White. Επίσης, στην απόδειξη του Θεωρήματος υποφαίνεται ο λογικός σύνδεσμος μεταξύ του *smile effect* και της μεροληψίας της αντιστάθμισης.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.3.2. *Για οποιοδήποτε ισοδύναμο μέτρο πιθανότητας martingale, το οποίο ικανοποιεί την Υπόθεση 3.1.2 και για οποιοδήποτε* $\sigma > 0$*, η επαγόμενη μέσω Black και Scholes μεταβλητότητα, ως συνάρτηση της τιμής άσκησης του Δικαιώματος, είναι συνεχώς διαφορίσιμη και μειώνεται όσο πηγαίνουμε προς την in-the-money κατάσταση, ενώ αυξάνεται όσο πηγαίνουμε προς την out-of-the-money κατάσταση. Συμβολικά,*

$$\forall x > 0, \qquad \frac{\partial \sigma^i(x,\sigma)}{\partial K} = \frac{\partial \sigma^i(x,\sigma)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial K} \leq 0,$$

$$\forall x < 0, \qquad \frac{\partial \sigma^i(x,\sigma)}{\partial K} = \frac{\partial \sigma^i(x,\sigma)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial K} \geq 0,$$

$$\left[\frac{\partial \sigma^i(x,\sigma)}{\partial x}\right]_{x=0} = 0.$$

Απόδειξη. Η επαγόμενη μέσω Black και Scholes μεταβλητότητα ορίζεται από την εξίσωση $H(x,\sigma) = H^{BS}\left(x, \sigma^i(x,\sigma)\right)$. Παραγωγίζοντας ως προς x παίρνουμε ότι

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x,\sigma) = \frac{\partial H^{BS}}{\partial x}\left(x, \sigma^i(x,\sigma)\right) + \frac{\partial H^{BS}}{\partial x}\left(x, \sigma^i(x,\sigma)\right)\frac{\partial \sigma^i(x,\sigma)}{\partial x}, \tag{3.3.5}$$

το οποίο μπορεί να γραφεί και ως

$$\frac{\partial H^{BS}}{\partial x}\left(x, \sigma^i(x,\sigma)\right)\frac{\partial \sigma^i(x,\sigma)}{\partial x} = \Delta(x,\sigma) - \Delta^{BS}\left(x, \sigma^i(x,\sigma)\right). \tag{3.3.6}$$

Έτσι, αυτό που χρειάζεται να αποδείξουμε προκύπτει από το Θεώρημα 3.3.1 και από την αύξηση που διέπει τη φύση του μοντέλου των Black και Scholes σε σχέση με την παράμετρο της μεταβλητότητας. □

Συνεπώς, ένα μοντέλο στοχαστικής μεταβλητότητας με ασυσχέτιστους κινδύνους αναγκαστικά δημιουργεί το *smile effect*. Αν η καμπύλη είναι αντεστραμμένη, όπως μερικές φορές παρατηρείται, τότε το μοντέλο που περιγράφει τη δυναμική της μεταβλητότητας δεν ανήκει στην κατηγορία που καθορίζουν οι (3.1.1) – (3.1.2). Το Θεώρημα 3.3.2 επεξηγεί θεωρητικά κάποιες προγενέστερες μελέτες πάνω στα μοντέλα στοχαστικής μεταβλητότητας. Οι Dehapiot και Manchet (1989)[10] θεώρησαν ότι η διαδικασία της μεταβλητότητας ακολουθεί μια κατανομή Bernoulli. Καθώς υπολόγιζαν την τιμή του Δικαιώματος έχοντας δώσει συγκεκριμένες τιμές στις παραμέτρους, παρατήρησαν το σχήμα U που προέκυπτε κάθε φορά για διαφορετικές τιμές της τιμής άσκησης. Επίσης, οι Stein και Stein (1991)[30] υπολόγισαν τον τύπο της τιμολόγησης Δικαιωμάτων (3.1.9), με τη στοχαστική μεταβλητότητα να ακολουθεί μια Ornstein-Uhlenbeck διαδικασία, χρησιμοποιώντας αριθμητικές μεθόδους, και παρατήρησαν και αυτοί ότι οι τιμές που έβρισκαν σχημάτιζαν την εικόνα που παρουσιάζει το *smile effect*. Παρόλα αυτά, λόγω του ότι η διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck λαμβάνει και αρνητικές τιμές, το Θεώρημα 3.3.2 δεν μπορεί να εφαρμοστεί στο πλαίσιο ανάλυσης των Stein και Stein[30].

Αξίζει να σημειωθεί ότι το Θεώρημα 3.3.2 προσπαθεί να επεξηγήσει το φαινόμενο *smile effect* μόνο κατευθυντικά. Δε γίνεται προσπάθεια να εξακριβωθεί το κατά πόσο το μέγεθος του φαινομένου είναι αυτό που έχει παρατηρηθεί εμπειρικά. Ακόμη, δε γίνεται προσπάθεια να συγκρίνουμε την εν λόγω επεξήγηση του φαινομένου με άλλες επεξηγήσεις που του έχουν αποδοθεί.

3.4 Συμπεράσματα

Το Κεφάλαιο 3 μας βοηθά να κατανοήσουμε καλύτερα την Επαγόμενη Μεταβλητότητα του μοντέλου των Black και Scholes, η οποία χρησιμοποιείται για τη βελτίωση της κάλυψης έναντι ζημίας που υπόσχεται το μοντέλο. Υποθέτοντας ότι η διαδικασία των τιμών του υποκείμενου στοιχείου προέρχεται από ένα μοντέλο στοχαστικής μεταβλητότητας με ασυσχέτιστους μεταξύ τους κινδύνους (Hull και White, 1987[22]), η Επαγόμενη Μεταβλητότητα του μοντέλου Black και Scholes έχει τη μορφή συνάρτησης της λογαριθμικής απόκλισης της τιμής του υποκείμενου στοιχείου προς την προεξοφλημένη τιμή άσκησης του Δικαιώματος x και την παρούσα τιμή της διαδικασίας της μεταβλητότητας. Οι παραλλαγές της Επαγόμενης Μεταβλητότητας αναφορικά με την x μπορούν να επεξηγήσουν το φαινόμενο smile effect, το οποίο σχετίζεται με κάποια σημαντικά αποτελέσματα της μεροληψίας της αντιστάθμισης. Έπειτα, μελετήσαμε την Απόλυτη Μεταβλητότητα ως μία συνάρτηση της υλοποίησης της διαδικασίας της λανθάνουσας μεταβλητότητας και καταλήξαμε με μία συνεπή επαναληπτική μέθοδο για την εκτίμηση των παραμέτρων της διαδικασίας της μεταβλητότητας μέσω δοθέντων Επαγόμενων Μεταβλητοτήτων. Σε αντίθεση με συνήθεις μεθοδολογίες που βασίζονται σε δεδομένα τιμών του υποκείμενου στοιχείου, η εν λόγω μέθοδος είναι αποτελεσματική για κάθε σφάλμα προσδιορισμού του όρου μετατόπισης μ.

Παρόλα αυτά, η μελέτη μας έχει κάποιους σημαντικούς περιορισμούς. Πρώτον, η μέθοδος που προτείνεται δίνει αποτελέσματα αν υποθέσουμε ότι οι κίνδυνοι του μοντέλου που παράγει τις τιμές του υποκείμενου στοιχείου είναι ασυσχέτιστοι μεταξύ τους. Υπάρχουν εμπειρικά ευρήματα που υποδηλώνουν μια αρνητική συσχέτιση μεταξύ της τιμής ενός υποκείμενου στοιχείου και της μεταβλητότητας αυτής. Δοκιμές, όμως, με συσχετισμένους μεταξύ τους κινδύνους δεν αποφέρουν συνεπή αποτελέσματα. Δεύτερον, σε αντίθεση με προηγούμενες μελέτες που βασίζονται σε δεδομένα τιμών του υποκείμενου στοιχείου, η παρούσα μέθοδος βασίζεται σε επαγόμενες μεταβλητότητες από το μοντέλο των Black και Scholes. Συνεπώς, θα ήταν ενδιαφέρον να προκύψει μία μεθοδολογία που να χρησιμοποιεί τη συνολική παρεχόμενη πληροφορία.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Α. Βιβλία

[1] Butcher K. and Williams L., "Futures Made Simple", 2013

[2] Durbin M., "All about derivatives" (all about series) Paperback, 2010

[3] Flavell R.A., "Swaps and Other Derivatives", 2nd Edition, 2002

[4] Gottesman A., "Derivatives Essentials: An Introduction to Forwards, Futures, Options and Swaps", 2016

[5] Lawler G.F. and Limic V., "Random Walk: A Modern Introduction", 2010

[6] Schilling R.L., Partzsch L. and Bottcher B., "Brownian Motion: An Introduction to Stochastic Process", 2012

Β. Εργασίες

[7] Bajeux-Besnainou I.G. and Rochet J.C., "Dynamic spanning: Are options an Appropriate Instrument?", Math. Finance, vol. 6, 1-16, 1992

[8] Black F., "The Dividend Puzzle", The Journal of Portfolio Management, vol. 2, issue 2, 5-8, 1976

[9] Chiras D.P. and Manaster S., "The Information Content of Option Prices and a Test of Market Efficiency", J. Financial Econ., vol. 6, 213-234, 1978

[10] Dehapiot T. and Manchet S., "Modèle de Volatilité Aléatoire et Prix des Options", Rev. Assoc. Française Finance, vol. 10, issue 2, 7-25, 1989

[11] Duffie D. and Singleton K.J., "Simulated Moments Estimation of Markov Models of Asset Prices", Technical Working Paper No 87, National Bureau of Economic Research, Cambridge, 11-39, 1989

[12] Engle R.F., "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of UK Inflation", Econometrica, vol. 50, 987-1008, 1982

[13] Engle R.F. and Mustafa C., "Implied ARCH Models from Options Prices", Journal of Econometrics, vol. 52, 289-331, 1992
[14] Főllmer H. and Schweizer M., "Hedging of Contingent Claims under Incomplete Information", in Applied Stochastic Analysis, eds. M.H.A. Davis and R.J. Elliott Stochastics Monographs, vol. 5, New York: Gordon and Breach, 389-414, 1992
[15] Gallant A.R. and Tauchen G., "Which Moments to Match?", Economet. Theory, 1994
[16] Gouriéroux C., Monfort A. and Renault E., "Indirect Inference", Journal of Applied Econometrics, vol. 8, Supplement: Special Issue on Econometric Inference Using Simulation Techniques, 85-118, 1993
[17] Hamilton J., "A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle", Econometrica, vol. 57, issue 2, 357-384, 1989
[18] Hansen L.P., "Large Sample Properties of Generalized Method of Moments Estimators", Econometrica, vol. 50, No 4, 1029-1054, 1982
[19] Harvey A., Ruiz E. and Shephard N., "Multivariate Stochastic Variance Models", Review of Economic Studies, vol. 61, No 2, issue 207, 247-264, 1994
[20] He H. and Pagès H., "Labor income, borrowing constraints, and equilibrium asset prices", Economic Theory, vol.3, issue 4, 663-696, 1993
[21] Heynen R., Kemna A. and Vorst T., "Analysis of the Term Structure of Implied Volatility", Journal of Financial Quantitative Analysis, vol. 29, No 1, 31-56, 1991
[22] Hull J. and White A., "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities", Journal of Finance, vol. 3, 281-300, 1987
[23] Jarrow R. and Wiggins J.B, "Option Pricing and Implicit Volatility", J. Econ. Surv., vol. 3, No 1, 59-81, 1989
[24] Karatzas I. and Shreve S.E., "Brownian Motion and Stochastic Calculus", New York: Springer-Verlag, 1988
[25] Latane H.A. and Rendleman R.J., "Standard Deviations of Stock Price Ratios Implied in Option Prices", Journal of Finance, vol. 31, issue 2, 369-381, 1976
[26] Pham H. and Touzi N., "Intertemporal Equilibrium Risk Premia in a Stochastic Volatility Model", Mathematical Finance, vol. 6, issue 2, 215-236, 1996
[27] Renault E. and Touzi N., "Option Hedging and Implied Volatilities in a Stochastic Volatility Model", Mathematical Finance, vol. 6, No 3, 279-302, 1996

[28] Scott L., "Option Pricing When the Variance Changes Randomly: Theory, Estimation and Application", Journal of Financial Quantitative Analysis, vol. 22, 419-438, 1987
[29] Scott L., "Random Variance Option Pricing", Adv. Futures Options Res., vol. 5, 113-135, 1991
[30] Stein E.M. and Stein J.C., "Stock Price Distribution with Stochastic Volatility: An Analytic Approach", Review of Financial Studies, vol. 4, issue 4, 727-752, 1991
[31] Wiggins J.B., "Option Values under Stochastic Volatility: Theory and Empirical Estimates", Journal of Financial Economics, vol. 19, issue 2, 351-372, 1987

Γ. Σημειώσεις

[32] Γκλεζάκος Μ., «Θεωρία Επενδύσεων και Διοίκηση Χαρτοφυλακίου», 2012
[33] Κοκολάκης Γ.Ε., Σημειώσεις Στοχαστικών Ανελίξεων, 2008
[34] Μαχαιράς Ν.Δ., «Σημειώσεις Στοχαστικής Ανάλυσης», 2006
[35] Μαχαιράς Ν.Δ., «Στοχαστικές Διαδικασίες στα Χρηματοοικονομικά και τον Αναλογισμό», 2014
[36] Φίλης Ι., «Στοχαστικές Διαδικασίες», 2006