ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου με ρευστοποιημένα αποθεματικά, επενδύσεις και μερίσματα

ΣΑΒΙΝΑ Ι. ΣΚΛΗΡΟΥ

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος στην Αναλογιστική Επιστήμη και την Διοικητική Κινδύνου.

Πειραιάς

Νοέμβριος 2018

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. .... συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Αναπληρωτής Καθηγητής Ε. Χατζηκωνσταντινίδης (Επιβλέπων)
- Καθηγητής Μ. Νεκτάριος
- Επίκουρος Καθηγητής Γ. Τζαβελάς

Η έγκριση της Διπλωματική Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

The classical risk model with liquid reserves, credit interest rate and threshold dividends

SAVINA I. SKLIROU

MSc Dissertation submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Actuarial Science and Risk Management

November 2018

Στους γονείς μου

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον καθηγητή κ. Ευστάθιο Χατζηκωνσταντινίδη, επιβλέποντά μου στην παρούσα διπλωματική εργασία, για την αμέριστη υπομονή και κατανόηση τις οποίες επέδειξε, την καίρια καθοδήγησή και την πλέον παραγωγική συνεργασία μας. Αποτέλεσμα όλων αυτών είναι η ολοκλήρωση και παρουσίαση της εργασίας μου.

Θα ήθελα ακόμη να ευχαριστήσω τους καθηγητές κ. Μιλτιάδη Νεκτάριο και κ. Γεώργιο Τζαβελά για τη συμμετοχή τους στην παρουσίαση και την αξιολόγηση της διπλωματικής εργασίας.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω από καρδιάς την οικογένειά μου και ιδιαιτέρως τους γονείς μου, τόσο για την ηθική όσο και για την οικονομική στήριξή τους στην προσπάθεια κατάκτησης της γνώσης με απώτερο στόχο ένα καλύτερο μέλλον.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η μελέτη διαφόρων μέτρων χρεοκοπίας καθώς και του είδους της κατανομής των μερισμάτων που καταβάλλονται στους δικαιούχους στη στοχαστική διαδικασία που υπάρχει σύνδεση μεταξύ των ενδιάμεσων χρόνων εμφάνισης των κινδύνων και των αντίστοιχων μεγεθών των απαιτουμένων αποζημιώσεων.

Στο κεφάλαιο 1 περιγράφεται αναλυτικά το κλασσικού μοντέλο της θεωρίας κινδύνου και παρουσιάζονται κάποια σημαντικά αποτελέσματα για την προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu για μοντέλο αυτό. Στη συνέχεια δίνεται εκτενής περιγραφή του γενικευμένου Erlang ανανεωτικού μοντέλου κινδύνου, του οποίου ειδική περίπτωση αποτελεί το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου.

Στο Κεφάλαιο 2 προστίθεται η στρατηγική σταθερού μερίσματος και παρουσιάζονται αναλυτικά αποτελέσματα για τη συνάρτηση των Gerber-Shiu και των ροπών των προεξοφλημένων μερισμάτων κάτω από την ύπαρξη της στρατηγικής αυτής τόσο για το κλασσικό μοντέλο όσο και για το γενικευμένο Erlang ανανεωτικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου.

Στο κεφάλαιο 3 τροποποιούμε το μοντέλο πλεονάσματος Poisson για έναν ασφαλιστή συμπεριλαμβάνοντας τα ρευστοποιημένα αποθέματα και τους τόκους του πλεονάσματος. Στη συνέχεια μελετάμε την πιθανότητας χρεοκοπίας και άλλες ποσότητες που σχετίζονται με τη χρεοκοπία στην τροποποιημένη σύνθετη Poisson διαδικασία πλεονάσματος μέσω της συνάρτησης των Gerber-Shiu και αναλύουμε τις επιπτώσεις του τόκου και των ρευστοποιημένων αποθεμάτων στην πιθανότητα χρεοκοπίας, στο έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας και σε άλλες ποσότητες που σχετίζονται με τη χρεοκοπία.

Το κεφάλαιο 4 περιλαμβάνει ρευστοποιημένα αποθέματα, τόκους και μερίσματα στη σύνθετη διαδικασία πλεονάσματος Poisson. Στη συνέχεια θα συζητηθούν οι αλληλεπιδράσεις του επιπέδου ρευστότητας, του επιτοκίου, του επιπέδου κατωφλίου και του ποσοστού μερίσματος στο προτεινόμενο μοντέλο κινδύνου μελετώντας την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής και η αναμενόμενη παρούσα αξία των μερισμάτων που καταβάλλονται έως τη στιγμή της χρεοκοπίας.

Στο κεφάλαιο 5 θεωρούμε ένα μοντέλο χρεοκοπίας όπου η διαδικασία του πλεονάσματος μιας ασφαλιστικής εταιρίας είναι κατασκευασμένη έτσι ώστε μέρος του τρέχοντος πλεονάσματος να διατηρείται διαθέσιμο ανά πάσα στιγμή και το υπόλοιπο μέρος να επενδύεται μέσω της συνάρτησης των Gerber-Shiu.

ABSTRACT

The aim of this diploma thesis is to study various ruin measures as well as the type of dividend distribution paid to beneficiaries in the stochastic process that links between the intermediate times of risk exposure and the corresponding amounts of compensation required.

Chapter 1 describes in detail the classic model of risk theory and presents some significant results for the Gerber-Shiu penalized penalty function for this model. An extensive description of the generalized Erlang Renewable Risk Model is given below, a special case of which is the classic model of risk theory.

Chapter 2 adds the fixed dividend strategy and presents analytical results for the Gerber-Shiu function and the discounted dividend moments under this strategy for both the classic model and the generalized Erlang Renewable Model of Risk Theory.

In Chapter 3 we modify the Poisson surplus model for an insurer by including liquidated stocks and surplus interest. We then study the probability of ruin and other ruin-related amounts in the modified Poisson surplus process through the Gerber-Shiu function and analyze the impact of interest and liquidity reserves on the probability of ruin, the deficit at the time of ruin and other amounts associated with ruin.

Chapter 4 includes liquid reserves, interest and dividends in the Poisson surplus composite process. Thereafter, liquidity, interest rate, threshold, and dividend rate interactions will be discussed in the proposed risk model by considering the expected discounted penalty function and the expected present value of the dividends paid up to the time of the ruin.

In chapter 5 we consider a ruin model where the surplus of an insurance company is built so that part of the current surplus is kept available at all times and the remaining part is invested through the Gerber-Shiu function.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κατάλογος Σχημάτων

Επεξηγήσεις Συμβολισμών

τ.μ.	τυχαία μεταβλητή
σ.π.π.	συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας
σ.κ.	συνάρτηση κατανομής
$\mathbb{N}$	σύνολο των φυσικών αριθμών
$\mathbb{R}$	σύνολο των πραγματικών αριθμών
$\Re(x)$	πραγματικό μέρος του μιγαδικού αριθμού x
$*$	τελεστής συνέλιξης μεταξύ πραγματικών συναρτήσεων
$I(A)$	δείκτρια συνάρτηση του συνόλου A
$a \wedge b$	το ελάχιστο των a και b
$f^{(k)}(x)$	παράγωγος k τάξης της πραγματικής συνάρτηση $f(x)$
$\frac{\partial}{\partial u}$	τελεστής παραγώγισης ως προς u
$\mathbb{C}$	σύνολο των μιγαδικών αριθμών

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Το κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου

1.1. Εισαγωγή

Η θεωρία χρεοκοπίας είναι ένας από τους σημαντικότερους κλάδους της Θεωρίας Κινδύνου, η οποία έχει ως αντικείμενο μελέτης τις μεταβολές των εσόδων, των εξόδων και τη σχέση μεταξύ αυτών στο πέρασμα του χρόνου για ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο. Ο όρος «κίνδυνος» χρησιμοποιείται για να περιγράψει την ενδεχόμενη οικονομική ζημιά του χαρτοφυλακίου μιας ασφαλιστικής εταιρίας ή μιας ατομικής απαίτησης.

Η διασφάλιση επαρκών αποθεματικών, τα οποία ενδέχεται να καλύψουν πιθανές υποχρεώσεις προς τρίτους ή αναπάντεχες ζημιές, συμβάλλει σημαντικά στην ομαλή λειτουργία μιας ασφαλιστικής επιχείρησης. Στη θεωρία χρεοκοπίας τα αποθεματικά αναφέρονται και ως πλεόνασμα με στόχο τον ευκολότερο προσδιορισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας.

Η πιθανότητα χρεοκοπίας αποτελεί την κεντρική έννοια της Θεωρίας Κινδύνου. Ο όρος «χρεοκοπία» δεν είναι κυριολεκτικός, δηλαδή δεν περιγράφει κάποιο είδος πτώχευσης, αλλά χρησιμοποιείται ως μέτρο της φερεγγυότητας και της αξιοπιστίας ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου. Ουσιαστικά η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι η πιθανότητα μη επάρκειας των αποθεματικών για την κάλυψη των συνολικών απαιτήσεων της ασφαλιστικής επιχείρησης.

Η δημοσίευση της διδακτορικής διατριβής του Σουηδού αναλογιστή Filip Lundberg το 1903 με τίτλο «Approximerad fremställning au sannolikheets functionen» αποτέλεσε θεμέλιο λίθο για την ανάπτυξη της θεωρίας κινδύνου. Ιδιαίτερα σημαντική ήταν η συμβολή του Σουηδού στατιστικού και αναλογιστή Harald Cramér, ο οποίος βασιζόμενος στη διδακτορική διατριβή του Lundberg ενσωμάτωσε στη θεωρία κινδύνου τη θεωρία των στοχαστικών διαδικασιών. Αποτέλεσμα της συνεισφοράς των δυο επιστημόνων είναι η δημιουργία του πρώτου μοντέλου που περιγράφει την εξέλιξη του πλεονάσματος στο χρόνο και ονομάστηκε κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου ή μοντέλο των Cramér- Lundberg. Βασικό χαρακτηριστικό του μοντέλου αυτού είναι ότι το πλήθος των ζημιών ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου περιγράφεται από τη στοχαστική διαδικασία Poisson. Γενίκευση του μοντέλου αυτού αποτελεί το ανανεωτικό μοντέλο του Sparre Andersen το οποίο εισήχθη το 1957, όταν ο Νορβηγός Sparre Andersen παρουσίασε την εργασία του με τίτλο «On the collective theory of risk in case of contagion between the claims», στην οποία υπέθεσε ότι ο αριθμός των κινδύνων σε ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο περιγράφεται από μια ανανεωτική στοχαστική διαδικασία.

Το 1998 οι Gerber-Shiu, μοντελοποιώντας σε μια συνάρτηση τις μεταβλητές του χρόνου χρεοκοπίας, του ελλείματος ακριβώς μετά τη χρεοκοπία και του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία, κατάφεραν να εισάγουν την προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής, η μελέτης της οποίας δίνει σημαντικά αποτελέσματα για μεγέθη της Θεωρίας Κινδύνων.

1.2. Η στοχαστική διαδικασία του αριθμού των κινδύνων

Η μοντελοποίηση του πλεονάσματος ενός χαρτοφυλακίου προϋποθέτει σε πρώτο στάδιο τον προσδιορισμό του πλήθους των κινδύνων που διατρέχει.

Ορισμός 1.1. *Έστω* $\{N(t): t \geq 0\}$ *η στοχαστική διαδικασία (ή ανέλιξη) η οποία εκφράζει τον αριθμό των κινδύνων που εμφανίζονται στο διάστημα* $[0,t]$. *Τότε η* $\{N(t): t \geq 0\}$ *ονομάζεται απαριθμήτρια στοχαστική διαδικασία αν και μόνο αν:*

- $N(t) > 0$ *, με* $N(0) = 0$
- $N(t)$ *είναι διακριτή*
- *Αν* $s \leq t$ *τότε* $N(s) \leq N(t)$ *και η τυχαία μεταβλητή* $N(t) - N(s)$ *ισούται με το πλήθος των ενδεχομένων στο διάστημα* $(s,t]$.

Η ανέλιξη Poisson είναι μια απαριθμήτρια ανέλιξη, δηλαδή μια ανέλιξη που είναι μη φθίνουσα (με πιθανότητα 1) και παίρνει ακέραιες και θετικές τιμές.

Ορισμός 1.2. *Μία απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη* $\{N(t): t \geq 0\}$ *λέγεται ανέλιξη Poisson όταν ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:*

- $N(0) = 0$.
- *Σε ένα πολύ μικρό διάστημα h μπορεί να συμβεί το πολύ ένα γεγονός και η πιθανότητα να συμβεί αυτό το γεγονός είναι ανάλογη με το μήκος του διαστήματος. Δηλαδή:*

$$P(N(t+h) = n+k \mid N(t) = n) = \begin{cases} \lambda h + o(h), & k = 1 \\ 1 - \lambda h + o(h), & k = 2 \\ o(h), & k \geq 2 \end{cases} \tag{1.1}$$

- *Για κάθε* $t < s$ *, η τ.μ.* $N(s) - N(t)$ *είναι ανεξάρτητη της μεταβλητής* $N(t)$.

Μια γενίκευση της ανέλιξης Poisson είναι η ανανεωτική ανέλιξη.

Ορισμός 1.3. *Μια ανανεωτική ανέλιξη* $\{N(t): t \geq 0\}$ *είναι μια απαριθμήτρια ανέλιξη στην οποία οι ενδιάμεσοι χρόνοι (χρόνοι αναμονής) είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την ίδια κατανομή (όχι απαραίτητα την εκθετική).*

1.3. Η στοχαστική διαδικασία των συνολικών αποζημιώσεων

Μια ασφαλιστική εταιρία υποχρεούται όχι μόνο να κατέχει αναλυτικά στοιχεία για το ύψος των συνολικών αποζημιώσεων που ενδέχεται να καταβάλει σε κάθε χρονική στιγμή, αλλά και αποζημιώνει τους ασφαλισμένους κατά την έλευση της ζημιάς. Οι συνολικές αποζημιώσεις είναι άρρηκτα συνδεδεμένες τόσο με το πλήθος των ζημιών που εμφανίζονται σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα όσο και με το μέγεθος αυτών.

Ορισμός 1.4. *Έστω* $S(t)$ *η στοχαστική διαδικασία των συνολικών αποζημιώσεων που καταβάλλονται μέχρι το χρόνο* t *και* $\{X_i\}_{i\geq 1}^{\infty}$ *μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. , με την τ.μ.* X_i *να περιγράφει το μέγεθος της* $i-$*οστής ζημιάς. Το μέγεθος των συνολικών αποζημιώσεων που καταβάλλονται μέχρι το χρόνο* t *θα είναι:*

$$S(t) = X_1 + X_2 + \ldots + X_{N(t)}$$

ή ισοδύναμα

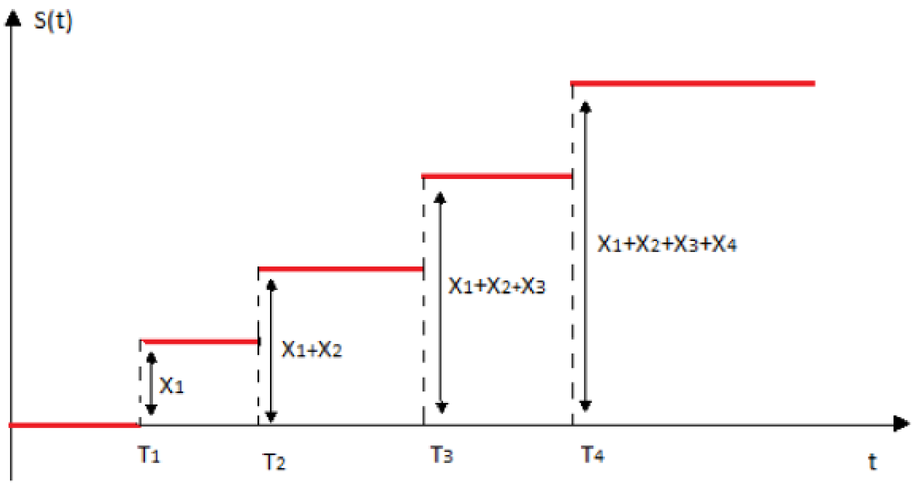
$$S(t) = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, N(t) > 0 \\ 0, \qquad N(t) = 0 \end{Bmatrix}$$

Ορισμός 1.5. *Έστω* $\{W_n, n \geq 1\}$ *μια ακολουθία τ.μ. που εκφράζει τους ενδιάμεσους χρόνους άφιξης των ζημιογόνων ενδεχομένων και το χρόνο επέλευσης του οστού ζημιογόνου ενδεχομένου. Σύμφωνα με τα ανωτέρω θα ισχύει ότι:*

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} W_i$$

Έστω επίσης $N(t) = \sup\{n : T_n < t\}$ *η στοχαστική διαδικασία του πλήθους των ζημιογόνων ενδεχομένων που εμφανίζονται στο διάστημα* $[0, t]$.

Θεωρούμε ότι οι $\{W_n, n \geq 1\}$ και $\{X_n, n \geq 1\}$ είναι ανεξάρτητες ακολουθίες οι οποίες αποτελούνται από ισόνομες, ανεξάρτητες και θετικά ορισμένες τ.μ..



Σχήμα 1.1. Η στοχαστική διαδικασία των συνολικών αποζημιώσεων $S(t)$ [1]

Στο παραπάνω σχήμα απεικονίζεται η στοχαστική διαδικασία των συνολικών αποζημιώσεων. Με μια πρώτη ματιά διακρίνουμε ότι η $S(t)$ τις χρονικές στιγμές επέλευσης της ζημιάς η παρουσιάζει άλματα προς τα πάνω αντίστοιχα με το μέγεθος της ζημιάς.

[1] Διπλωματική Εργασία της Κασσανή Σ. Αικατερίνης (Πειραιάς 2016) με θέμα «Στοχαστικές διαδικασίες πλεονάσματος με εξάρτηση και στρατηγικές μερισμάτων »

1.4. Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος για το κλασσικό μοντέλο

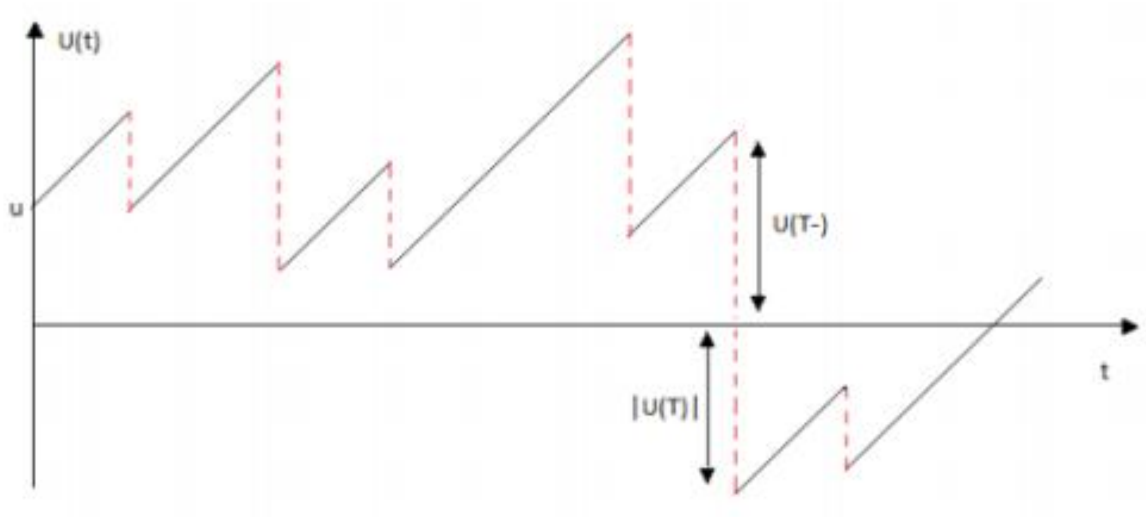
Το δεύτερο στάδιο για τη μοντελοποίηση του πλεονάσματος είναι η μοντελοποίηση των αποθεματικών της ασφαλιστικής επιχείρησης. Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος αποδίδει κάθε χρονική στιγμή την τιμή του πλεονάσματος. Το πλεόνασμα, σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή, εξαρτάται από το αρχικό αποθεματικό, το ποσό των ασφαλίστρων που έχουν εισπραχτεί και το ποσό των αποζημιώσεων που έχουν καταβληθεί μέχρι εκείνη τη χρονική στιγμή. Το πλεόνασμα κάθε χρονική στιγμή αποτελεί τη διαφορά μεταξύ των εσόδων και των εξόδων. Το αρχικό αποθεματικό όπως και τα ασφάλιστρα που έχουν εισπραχθεί αποτελούν τα έσοδα μιας ασφαλιστικής εταιρείας, ενώ ως έξοδα θεωρούνται οι αποζημιώσεις που οφείλει να καταβάλει στους ασφαλισμένους.

Ορισμός 1.6. *Ως διαδικασία πλεονάσματος* $\{U(t): t \geq 0\}$ *ορίζεται η στοχαστική ανέλιξη*

$$U(t) = u + \underset{έσοδα}{P(t)} - \underset{έξοδα}{S(t)}, \tag{1.2}$$

όπου u *είναι το αποθεματικό που διαθέτει η εταιρία για το συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο,* $P(t)$ *το συνολικό ασφάλιστρο στο διάστημα* $[0,t]$ *και* $S(t)$ *η σύνθετη ανέλιξη για τις συνολικές αποζημιώσεις στο ίδιο διάστημα. Το* $U(t)$ *καλείται αποθεματικό ή πλεόνασμα τη χρονική στιγμή* t*, ενώ το* $U(0) = u$ *λέγεται αρχικό αποθεματικό ή αρχικό πλεόνασμα.*

Θεωρούμε ότι ο ρυθμός είσπραξης των ασφαλίστρων είναι σταθερός. Η P(t) είναι μια αύξουσα γραμμική συνάρτηση της μορφής $P(t) = ct$, όπου c είναι η ένταση ασφαλίστρου



Σχήμα 1.2. Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος $U(t)$ [2]

Οι δειγματοσυναρτήσεις της $U(t)$ εμφανίζουν άλματα προς τα κάτω τις χρονικές στιγμές $T_1, T_2, \ldots$ επέλευσης των ζημιών. Τα άλματα αυτά είναι του ίδιου μεγέθους με τα αντίστοιχα άλματα της S(t). Για το λόγο αυτό, η δειγματοσυνάρτηση της S(t) έχει σταθερή τιμή σε κάθε διάστημα $(T_i, T_i + 1)$ ενώ η $U(t)$ είναι ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ δυο διαδοχικών χρόνων T_i με θετική κλίση ίση με c.

Από τον Ορισμό 1.6, γίνεται αντιληπτό ότι η διαδικασία πλεονάσματος κατά τις χρονικές στιγμές T_i μπορεί να γίνει αρνητική. Το ενδεχόμενο αυτό ονομάζεται χρεοκοπία και η πιθανότητα αυτού του ενδεχομένου πιθανότητα χρεοκοπίας.

[2] Διπλωματική Εργασία της Μωραΐτου Ιωάννας (Πειραιάς 2018) με θέμα «Μοντέλα χρεοκοπίας με στρατηγικές μερισμάτων»

1.5. Υποθέσεις του κλασσικού μοντέλου

Στο κλασσικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου θεωρούμε ότι τα ασφάλιστρα που εισπράττονται αποτελούν τα μόνα έσοδα της ασφαλιστικής εταιρείας. Επίσης, υποθέτουμε ότι τα μόνα έξοδά της είναι οι αποζημιώσεις που οφείλει να καταβάλλει η εταιρεία στους δικαιούχους σε περίπτωση επέλευσης του κινδύνου.

Ορισμός 1.7. *Αν ισχύουν οι ακόλουθες υποθέσεις:*

- $P(t) = ct$ *για κάποιο* $c > 0$*, δηλαδή η* $P(t)$ *είναι μια γραμμική συνάρτηση*
- *Η απαριθμήτρια ζημιών* $\{N(t) : t \geq 0\}$ *είναι μια ανέλιξη Poisson με σταθερή ένταση λ, η οποία εκφράζει τον αναμενόμενο αριθμό άφιξης ζημιών στη μονάδα του χρόνου, έτσι ώστε η ανέλιξη* $\{S(t) : t \geq 0\}$ *των συνολικών απαιτήσεων να είναι μια σύνθετη ανέλιξη Poisson,*
- *Οι στοχαστικές διαδικασίες* $\{X_n : n \geq 1\}$ *και* $N(t)$ *είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους,*
- *Οι τυχαίες μεταβλητές* $(X_1, X_2, ..., X_n)$ *με* $n = 1, 2, ...$ *είναι ανεξάρτητες και ισόνομες μεταξύ τους και έχουν από κοινού συνάρτηση κατανομής*

  $$F(x) = \int_0^x f(y)dy$$

  και συνάρτηση δεξιάς ουράς

  $$\bar{F}(x) = 1 - F(x) = \int_x^\infty f(y)dy$$

  όπου $f(x) = \Pr(X = x)$

  Το αναμενόμενο μέγεθος ζημιάς μ είναι ίσο με

  $$\mu_1 = E(X) = \int_0^\infty x\, f(x)dx = \int_0^\infty \bar{F}(x)dx$$

Η συνάρτηση κατανομής των κλιμακωτών υψών $f_e(y)$ *ισούται με*

$$f_e(y) = \frac{\bar{F}(y)}{\mu_1}$$

Η κατανομή ισορροπίας ή κατανομή των κλιμακωτών υψών $F_e(y)$ *ισούται με*

$$F_e(y) = \frac{1}{\mu_1}\int_0^y \bar{F}(y)dy$$

- *Τα αναμενόμενα έξοδα της επιχείρησης να μην υπερβαίνουν τα έσοδά της. Ουσιαστικά σε κάθε χρονική στιγμή θα πρέπει τα ασφάλιστρα που εισπράττονται να είναι μεγαλύτερα κατά μέσο όρο από τις αποζημιώσεις που καταβάλλονται προς τους ασφαλισμένους. Δηλαδή να ισχύει η συνθήκη*:

$$ct > E(S(t))$$

$$\leftrightarrow ct > E(N(t))E(X)$$

$$\leftrightarrow ct > \lambda t \mu_1$$

$$\boxed{c > \lambda\mu_1 \quad (\text{συνθήκη καθαρού κέρδους})}$$

τότε ορίζουμε το ***κλασικό μοντέλο*** *της θεωρίας κινδύνου.*

Ορισμός 1.8. *Το περιθώριο ασφαλείας ή συντελεστής ασφαλείας* θ *ορίζεται από την παρακάτω σχέση:*

$$\theta = \frac{c}{\lambda \mu_1} - 1,\ 0 < \theta < 1$$

Είναι προφανές από τη συνθήκη του καθαρού κέρδους ότι το θ παίρνει θετικές τιμές. Το περιθώριο ασφαλείας αποτελεί ένα ποσοτικό μέτρο έκφρασης του αναμενόμενου ποσοστού κέρδους μίας ασφαλιστικής επιχείρησης και εκφράζει πόσο μεγαλύτερα είναι κατά μέσο όρο τα έσοδα της ασφαλιστικής εταιρείας από τα έξοδα της. Το θ παίρνει συνήθως τιμές στο διάστημα (0,1) προκειμένου το χαρτοφυλάκιο να είναι ανταγωνιστικό. Σε περίπτωση που το θ πάρει αρνητική τιμή η χρεοκοπία είναι βέβαιη.

Από την παραπάνω σχέση, λύνοντας ως προς c προκύπτει ότι:

$$c = (1+\theta)\lambda \mu_1$$

το οποίο ονομάζεται και επιβαρυμένο ασφάλιστρο.

1.6. Μέτρα χρεοκοπίας

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται μια σειρά τυχαίων μεταβλητών, οι οποίες διευκολύνουν την ανάλυση και ταυτόχρονα παίζουν κυρίαρχο ρόλο στην εμφάνιση ή μη χρεοκοπίας.

Ορισμός 1.9. *Ο χρόνος της χρεοκοπίας, δηλαδή ο χρόνος κατά τον οποίο για πρώτη φορά η διαδικασία πλεονάσματος γίνεται αρνητική συμβολίζεται με T και ορίζεται ως εξής:*

$$T = \inf\left\{t : U(t) < 0 \middle| U(0) = u\right\}$$

Ορισμός 1.10. *Για* $u \geq 0$ *η πιθανότητα χρεοκοπίας συμβολίζεται με* $\psi(u)$ *και ορίζεται ως εξής:*

$$\psi(u) = \Pr(T < \infty \mid U(0) = u) = \Pr(U(T) < 0 \mid U(0) = u)$$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς το αρχικό αποθεματικό, δηλαδή ισχύει ότι:

$$\lim_{u \to \infty} \psi(u) = 0$$

Ορισμός 1.11. *Για* $u \geq 0$ *η πιθανότητα μη χρεοκοπίας συμβολίζεται με* $\delta(u) = 1 - \psi(u)$ *και ορίζεται ως εξής:*

$$\delta(u) = \Pr(T = \infty \mid U(0) = u) = \Pr(U(t) \geq 0 \ \textit{για κάθε} \ t \geq 0)$$

Η πιθανότητα μη χρεοκοπίας είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς το αρχικό αποθεματικό, δηλαδή ισχύει ότι:

$$\lim_{u \to \infty} \delta(u) = 1$$

Ορισμός 1.12. *Το έλλειμα τη στιγμή της χρεοκοπίας συμβολίζεται με* $|U(T)|$ *και εκφράζει το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το μηδέν τη χρονική στιγμή εμφάνισης της χρεοκοπίας.*

Ορισμός 1.13. *Το πλεόνασμα λίγο πριν τη χρεοκοπία συμβολίζεται με* $U(T-)$ *και ορίζεται ως εξής:*

$$U(T-) = \lim_{t \to T-} U(t)$$

Το $U(T-)$ εκφράζει το μέγεθος του πλεονάσματος λίγο πριν τη χρονική στιγμή της καταβολής της ασφαλιστικής αποζημίωσης η οποία οδηγεί σε χρεοκοπία και παίρνει αυστηρά θετικές τιμές.

Η μελέτη των τ.μ. $|U(T)|$ και $U(T-)$ οδηγεί σε εκτενέστερη πληροφόρηση περί της διαδικασίας πλεονάσματος $U(t)$, σε σύγκριση με τη μελέτη της τυχαίας μεταβλητής T.

Ορισμός 1.14. *Το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό u συμβολίζεται με* L_1 *και εκφράζει την κατ' απόλυτη τιμή πτώση του πλεονάσματος, λαμβάνοντας αυστηρά θετικές τιμές.*

Στην περίπτωση όπου δεν υπάρχει πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό ισχύει ότι $L_1 = 0$.

Έστω ότι η πρώτη πτώση του πλεονάσματος κάτω από την τιμή u συμβαίνει τη χρονική στιγμή t_1 και το πλεόνασμα αυτή τη χρονική στιγμή είναι $u_1 = U(t_1)$. Τότε:

$$L_1 = u - u_1$$

Κατά αντιστοιχία με την L_1, *μια τ.μ.* L_2 θα δίνει την πρώτη πτώση του πλεονάσματος κάτω από την τιμή u_1. Η πιθανότητα εμφάνισης πτώσης στο πλεόνασμα κάτω από το u_1 ισούται με $\psi(0)$, ενώ όταν το πλεόνασμα πέσει για πρώτη φορά κάτω από το u_1, δηλαδή πάρει την τιμή u_2, η τ.μ. L_2 θα ισούται με:

$$L_2 = u_1 - u_2$$

Με τον ίδιο τρόπο ορίζεται επαγωγικά μια ακολουθία $L_1, L_2, L_3, \ldots$

Η ακολουθία αυτή είναι πεπερασμένη καθώς οι τιμές της είναι μηδενικές από κάποιο σημείο και έπειτα, δηλαδή ισχύει $L_j = 0 \;\; \gamma\iota\alpha \;\; j = i, i+1, \ldots$

Οι τ.μ. $L_i, \gamma\iota\alpha \;\; i = 1, 2, \ldots$ ονομάζονται κλιμακωτά ύψη και εκφράζουν τη σταδιακή πτώση του πλεονάσματος από την τιμή του αρχικού αποθεματικού μέχρι τη στιγμή της χρεοκοπίας . Σε περίπτωση μη χρεοκοπίας, οι τ.μ. εκφράζουν τη σταδιακή πτώση του πλεονάσματος από την τιμή του αρχικού αποθεματικού μέχρι την ελάχιστη τιμή που παίρνει η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος.

Έστω τώρα η διακριτή τ.μ. Κ η οποία εκφράζει το πλήθος των κλιμακωτών υψών και ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή. Δηλαδή ισχύει ότι:

$$\Pr(K = k) = \left[\psi(0)\right]^k \delta(0) = \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^k \frac{\theta}{1+\theta}, \; k = 0, 1, 2, \ldots$$

Στο κλασικό μοντέλο θεωρούμε τη σύνθετη τ.μ.

$$L = \begin{cases} 0, \alpha\nu \;\; K = 0 \\ L_1 + L_2 + \ldots + L_k, \alpha\nu \;\; K \geq 1 \end{cases}$$

όπου οι μεταβλητές $L_1, L_2, \ldots$ είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες και ισόνομες και ανεξάρτητες της τ.μ. K, η οποία ονομάζεται **μέγιστη σωρευτική απώλεια**.

Η μέγιστη σωρευτική απώλεια L παριστάνει τη συνολική πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό. Η τ.μ. L, είναι μικτού τύπου με μάζα πιθανότητας στο μηδέν και ακολουθεί την σύνθετη γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $\frac{\theta}{1+\theta}$.

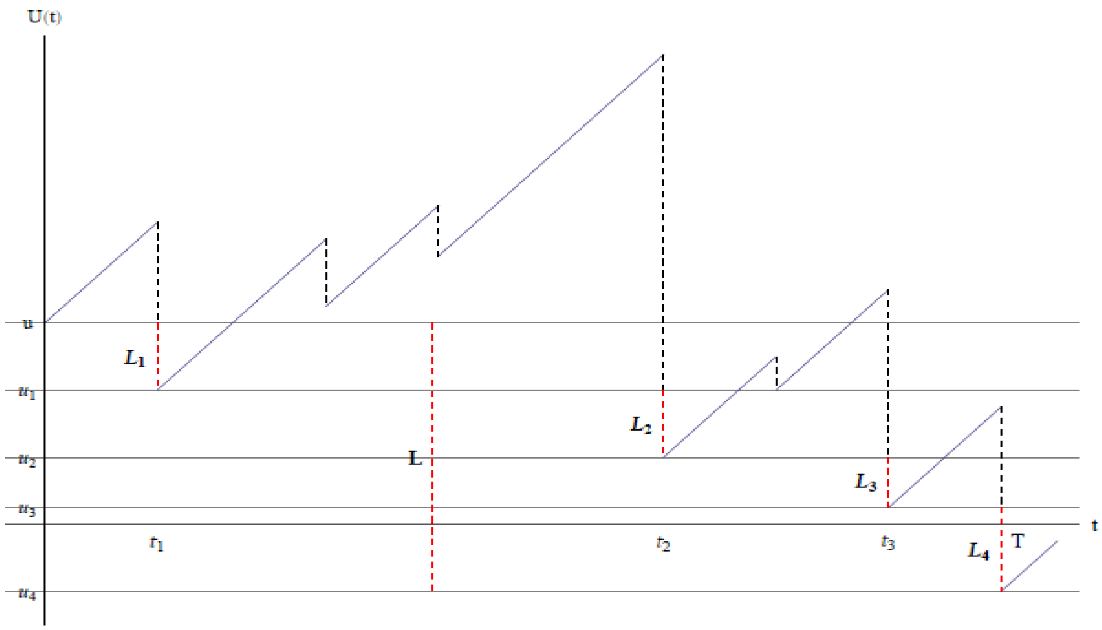
Η πιθανότητα η L να πάρει την τιμή μηδέν είναι:

$$\Pr(L=0)=\Pr(K=0)=\delta(0)$$

Έστω $u>0$. Η ποσότητα $\Pr(L>u)$ εκφράζει την πιθανότητα η συνολική πτώση του πλεονάσματος να υπερβαίνει μια σταθερή τιμή u, δηλαδή την πιθανότητα χρεοκοπίας όταν το αρχικό αποθεματικό είναι u. Επομένως ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\Pr(L>u)=\psi(u)$$

$$\Pr(L\le u)=\delta(u)$$



Σχήμα 1.3. Γραφική παράσταση των μεταβλητών L_i και της μέγιστης σωρευτικής απώλειας L στην ανέλιξη πλεονάσματος.[3]

[3] Εισαγωγή στη Θεωρία Συλλογικού Κινδύνου, Κ. Πολίτης , Εκδόσεις Αθ. Σταμούλης

Ορισμός 1.15. *Ο συντελεστής προσαρμογής συμβολίζεται με R και ορίζεται ως η μικρότερη θετική ρίζα της εξίσωσης:*

$$1+(1+\theta)E(X)r = M_X(r) \tag{1.3}$$

όπου θ το περιθώριο ασφαλείας και $M_X(r)$ η ροπογεννήτρια συνάρτηση της τ.μ. X, δηλαδή του ύψους των αποζημιώσεων, η οποία υπολογίζεται ως εξής:

$$M_X(r) = E(e^{rX}) = \int_0^\infty e^{rX} f(x)\,dx \tag{1.4}$$

Η σχέση (1.3) ονομάζεται **εξίσωση του Lundberg** ή εξίσωση του συντελεστή προσαρμογής, από τη λύση της οποίας προκύπτει το πολύ μία θετική ρίζα, η οποία είναι η τιμή του συντελεστή προσαρμογής R.

Σημείωση 1.1. *Η ύπαρξη και ο υπολογισμός του συντελεστή προσαρμογής εξαρτάται άμεσα από τη ροπογεννήτρια συνάρτηση του ύψους των αποζημιώσεων. Από τη θεωρία πιθανοτήτων είναι γνωστό ότι η ροπογεννήτρια είναι μια κυρτή συνάρτηση, συγκεκριμένα είναι αρχικά φθίνουσα και μετά αύξουσα με τις ακόλουθες ιδιότητες:*

$$\lim_{r\to 0} M(r) = 1$$

$$\lim_{r\to \infty} M(r) = \infty$$

Ο συντελεστής προσαρμογής δεν υπάρχει στις περιπτώσεις που η ροπογεννήτρια $M_X(r)$ απειρίζεται για κάθε $r>0$, δηλαδή σε κατανομές με βαριά ουρά όπως είναι η Pareto, η Weibull και η Λογαριθμοκανονική.

Ανισότητα Lundberg

Μια από τις σπουδαιότερες ιδιότητες του συντελεστή προσαρμογής στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου, είναι το ότι παρέχει ένα άνω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας, γνωστό και ως ανισότητα του Lundberg. Η ανισότητα αυτή χρησιμοποιείται για την εξέταση της αλληλεπίδρασης μεταξύ του αρχικού αποθεματικού και του περιθωρίου ασφαλείας, δυο παραμέτρων υπό τον έλεγχο μιας ασφαλιστικής επιχείρησης.

Θεώρημα 1.1. *Έστω ότι υπάρχει ο συντελεστής προσαρμογής* και έστω *το αρχικό αποθεματικό* $u \geq 0$ *, τότε ένα άνω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας δίνεται από τη σχέση:*

$$\psi(u) \leq e^{-Ru} \qquad (1.5)$$

Το παραπάνω θεώρημα απαιτεί την ύπαρξη του συντελεστή προσαρμογής R και συνεπακόλουθα την ύπαρξη της $M_X(t)$. Σε περιπτώσεις όπου δεν ορίζεται η ροπογεννήτρια χρησιμοποιούνται ασυμπτωτικές προσεγγίσεις για την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$.

Παρατήρηση 1.1. Από τη σχέση (1.5.) εύκολα διακρίνεται ότι για μία δεδομένη τιμή του συντελεστή προσαρμογής , το αρχικό αποθεματικό είναι αντιστρόφως ανάλογο με την πιθανότητα χρεοκοπίας. Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι όσο αυξάνεται το αρχικό αποθεματικό τόσο μειώνεται η πιθανότητα χρεοκοπίας.

Ασυμπτωτικός τύπος των Cramer-Lundberg

Στο κλασσικό μοντέλο ο ασυμπτωτικός τύπος των Cramer-Lundberg θεωρείται αρκετά σημαντικός καθώς αποδίδει την ασυμπτωτική συμπεριφορά της πιθανότητας χρεοκοπίας στις περιπτώσεις όπου το αρχικό αποθεματικό παίρνει πολύ μεγάλες τιμές (τείνει στο άπειρο).

Με την προϋπόθεση ότι ισχύει:

$$\int_0^\infty x e^{Rx} \overline{F}(x) dx < \infty$$

η πιθανότητα χρεοκοπίας στο κλασικό πρότυπο ικανοποιεί τη σχέση

$$\psi(u) \sim Ce^{-Ru} \quad \text{καθώς } u \to \infty$$

το οποίο σημαίνει ότι

$$\lim_{u \to \infty} \frac{\psi(u)}{e^{-Ru}} = C$$

όπου η σταθερά $C > 0$ υπολογίζεται από τον τύπο:

$$C = \frac{\theta \mu_1}{R \int_0^\infty x e^{Rx} \overline{F}(x) dx}$$

Η συνάρτηση Ce^{-Ru} αποτελεί την ασυμπτωτική προσέγγιση της πιθανότητας χρεοκοπίας και συμβολίζεται με $\psi_{CL}(u)$

Θεμελιώδης εξίσωση του Lundberg

Ως θεμελιώδης εξίσωση του Lundberg ορίζεται η εξίσωση της μορφής:

$$cs + \lambda \hat{f}(s) - (\lambda + \delta) = 0 \tag{1.6}$$

όπου $\hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-sy} f(y)\, dy$ ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$.

Παρατήρηση 1.2

- Για $\delta > 0$ και ανεξάρτητα από το πρόσημο του περιθωρίου ασφαλείας, η εξίσωση αυτή έχει μια θετική ρίζα, έστω $\rho = \rho(\delta)$
- Για $\delta = 0$ και $\theta < 0$ οι ρίζες της (1.6) είναι θετικές
- Για $\delta = 0$ και $\theta > 0$ οι ρίζες της (1.6) είναι ίσες με το μηδέν

1.7. Η συνάρτηση των Gerber-Shiu για το κλασσικό μοντέλο

Στα τέλη του 20ου αιώνα και συγκεκριμένα το 1998, οι Gerber και Shiu δημοσίευσαν μία εργασία με τίτλο "On the time value of ruin" στην οποία κατάφεραν να μοντελοποιήσουν τις τυχαίες μεταβλητές $|U(T)|$, $U(T-)$ και τον χρόνο χρεοκοπίας T, σε μία μόνο συνάρτηση, που ονομάζεται αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής. Με τη βοήθεια της συνάρτησης αυτής διεξήχθη ταυτόχρονη μελέτη διαφόρων μέτρων κινδύνου, τα οποία πριν μπορούσαν να εξεταστούν μόνο ξεχωριστά.

Ορισμός 1.16. *Για* $u \geq 0$*,* $\delta \geq 0$ *η συνάρτηση των Gerber-Shiu συμβολίζεται με* $m_\delta(u)$ *και ορίζεται από την παρακάτω σχέση:*

$$m_\delta(u) = m(u) = E\left[e^{-\delta T} w\left(U(T-), |U(T)|\right) I(T<\infty) \middle| U(0) = u\right] \tag{1.7}$$

όπου

δ : η ένταση ανατοκισμού,

$w : [0,\infty) \times (0,\infty) \to [0,\infty)$ μία διδιάστατη συνάρτηση στο $\mathbb{R}^2$ που ονομάζεται συνάρτηση ποινής,

$U(T-)$: το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία,

$|U(T)|$: το έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία

$I(T<\infty)$: η δείκτρια συνάρτηση του ενδεχομένου εμφάνισης ή μη χρεοκοπίας, με

$$I(T<\infty) = \begin{cases} 1, \ \text{συμβαίνει χρεοκοπία} \\ 0, \ \text{δε συμβαίνει χρεοκοπία} \end{cases}$$

Προφανώς ισχύει ότι:

$$m_\delta(u) = m(u) = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\delta T} w\left(x, y\right) f\left(x, y, t \middle| u\right) dt\, dx\, dy$$

Η παράμετρος $\delta \geq 0$ μπορεί να ερμηνευτεί είτε ως μεταβλητή ενός μετασχηματισμού Laplace είτε ως ένταση επιτοκίου (ή παράγοντας προεξόφλησης). Πράγματι, ορίζουμε τη συνάρτηση:

$$f(x, y|u) = \int_0^\infty e^{-\delta t} f(x, y, t|u)\, dt$$

όπου για λόγους απλότητας δεν προβάλλεται η εξάρτησή της από το δ.

Η $m(u)$ είναι μια γενική συνάρτηση, με την έννοια ότι περιέχει ως ειδικές περιπτώσεις αρκετά από τα μέτρα κινδύνου, τα οποία είναι άρρηκτα συνδεδεμένα με την πιθανότητα χρεοκοπίας. Αναλυτικότερα ισχύουν τα παρακάτω:

- Για $\delta = 0,\ w\left(x, y\right) = 1$ είναι:

$$\begin{aligned} m(u) &= E\left[I(T < \infty) \middle| U(0) = u \right] \\ &= \Pr(T < \infty | U(0) = u) \\ &= \psi(u) \end{aligned}$$

- Για $\delta > 0,\ w\left(x, y\right) = 1$ είναι:

$$m(u) = E\left[e^{-\delta T} I(T < \infty) \middle| U(0) = u \right]$$

Άρα $m(u)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας (δοθέντος ότι εμφανίζεται χρεοκοπία)

- Για $\delta > 0$, $w(x,y) = I\left(x_1 = x\right) I\left(x_2 = y\right)$ είναι:

  $m(u) = f\left(x_1, x_2 \left| u\right.\right) = E\left\{e^{-\delta T} \mathrm{I}\left(U(T-) = x_1, \left|U(T)\right| = x_2\right) I(T < \infty) \left| U(0) = u\right.\right\}$

  όπου $f\left(x_1, x_2 \left| u\right.\right)$ η προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των τ.μ. $U(T-)$ και $\left|U(T)\right|$

- Για $\delta > 0$, $w(x,y) = I\left(x \le x_1\right) I\left(y \le x_2\right)$ είναι:

  $m(u) = F_\delta\left(x_1, x_2 \left| u\right.\right) = E\left\{e^{-\delta T} \mathrm{I}\left(U(T-) \le x_1, \left|U(T)\right| \le x_2\right) I(T < \infty) \left| U(0) = u\right.\right\}$

  όπου $F_\delta\left(x_1, x_2 \left| u\right.\right)$ η προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση κατανομής των τ.μ. $U(T-)$ και $\left|U(T)\right|$, από την οποία θέτοντας $\delta = 0$ προκύπτει η από κοινού συνάρτηση κατανομής αυτών.

- Για $\delta > 0$, $w(x,y) = I\left(x = x_1\right)$ είναι:

  $$m(u) = h_\delta\left(x_1 \left| u\right.\right) = E\left\{e^{-\delta T} \mathrm{I}\left(U(T-) = x_1\right) I(T < \infty) \left| U(0) = u\right.\right\}$$

  όπου $h_\delta\left(x \left| u\right.\right)$ η προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $U(T-)$

- Για $\delta > 0$, $w(x,y) = I\left(y = x_2\right)$ είναι:

  $$m(u) = g_\delta\left(y \left| u\right.\right) = E\left\{e^{-\delta T} \mathrm{I}\left(\left|U(T)\right| = x_2\right) I(T < \infty) \left| U(0) = u\right.\right\}$$

  όπου $h_\delta\left(x \left| u\right.\right)$ η προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $\left|U(T)\right|$

- Για $\delta > 0,\ w(x,y) = x_1^k$ είναι:

$$m(u) = E\left\{e^{-\delta T}\left|U(T)\right|^k I(T<\infty)\middle|U(0)=u\right\}$$

όπου $E\left\{e^{-\delta T}\left|U(T)\right|^k I(T<\infty)\middle|U(0)=u\right\}$ η προεξοφλημένη ροπή k-τάξης της τ.μ. $\left|U(T)\right|$

- Για $\delta > 0,\ w(x,y) = x_2^k$ είναι:

$$m(u) = E\left\{e^{-\delta T}U(T-)^k I(T<\infty)\middle|U(0)=u\right\}$$

όπου $E\left\{e^{-\delta T}U(T-)^k I(T<\infty)\middle|U(0)=u\right\}$ η προεξοφλημένη ροπή k-τάξης της τ.μ. $U(T-)$

Η μελέτη της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής στο κλασσικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου από τους Gerber και Shiu κατέδειξε ότι η $m(u)$ ικανοποιεί μια ολοκληρο-διαφορική εξίσωση τύπου Voltera, η λύση της οποίας γίνεται με τη βοήθεια των μετασχηματισμών Laplace, αποδεικνύοντας ότι η $m(u)$ ικανοποιεί μία ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση. Η γενική λύση της παραπάνω ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης, για μεγέθη ζημιών ελεύθερα κατανομής, δόθηκε το 1999 από τους Lin και Willmot σε όρους της ουράς μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής.

Θεώρημα 1.2. *Η συνάρτηση* $m(u)$ *των Gerber και Shiu ικανοποιεί την ακόλουθη ολοκληρο-διαφορική εξίσωση:*

$$m'(u) = \frac{\lambda+\delta}{c} m(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u m(u-x) f(x)dx - \frac{\lambda}{c}\gamma(u),\ u \ge 0 \quad (1.8)$$

όπου $\gamma(u) = \int_u^{\infty} w(u, x-u)\, f(x)\, dx$

Παρατήρηση 1.3. *Για* $\delta > 0,\ w(x,y) = 1$ *η συνάρτηση* $m(u)$ *των Gerber και Shiu ισούται με την πιθανότητα χρεοκοπίας* $m(u)$ *και επομένως ισχύουν τα ακόλουθα:*

Πόρισμα 1.1. *Η πιθανότητα χρεοκοπίας* $\psi(u)$ *ικανοποιεί την ακόλουθη ολοκληρο-διαφορική εξίσωση:*

$$\psi'(u) = \frac{\lambda}{c}\psi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \psi(u-x) f(x)dx - \frac{\lambda}{c}\bar{F}(u) \quad (1.9)$$

όπου $\bar{F}(u) = 1 - F(u) = \int_u^{\infty} f(x)\, dx$

Παρατήρηση 1.4. *Από το παραπάνω πόρισμα έπεται ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι η δεξιά ουρά μιας σύνθετης Γεωμετρικής κατανομής.*

Αναλυτικότερα ισχύει ότι $\psi(u) = \Pr(L \le u)$

όπου $L = L_1 + L_2 + ... + L_K$ και $K \sim Geo\left(\frac{1}{1+\theta}\right)$

και οι τ.μ. $L_1, L_2, ..., L_K$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_e(x)$.

Η λύση της ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (1.8), προϋποθέτει ότι η $m(u)$ ικανοποιεί μία ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση.

Ορισμός 1.17. *Μια εξίσωση που είναι της μορφής*

$$\varphi(u) = \lambda \int_0^u \varphi(u-x)\, dG(x) + g(u),\ u \geq 0$$

ονομάζεται ***ανανεωτική εξίσωση*** *ή εξίσωση ανανεωτικού τύπου,*

όπου:

- λ μια σταθερά έτσι ώστε $0 < \lambda \leq 1$
- g μια φραγμένη συνάρτηση
- G μια αθροιστική συνάρτηση κατανομής
- φ η άγνωστη συνάρτηση

Οι ανανεωτικές εξισώσεις διακρίνονται σε:

- ελλειμματικές (ελαττωματικές), όταν $0 < \lambda \leq 1$
- κανονικές ή μη ελλειμματικές όταν στην εξίσωση η σταθερά λ ισούται με τη μονάδα.

Θεώρημα 1.3. *Η συνάρτηση* $m(u)$ *για* $u \ge 0$ *ικανοποιεί την παρακάτω ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση:*

$$m(u) = \frac{1}{1+\xi_\delta}\int_0^u m(u-x)g(x)dx + \frac{1}{1+\xi_\delta}H_\delta(u),\ u \ge 0 \qquad (1.10)$$

όπου:

- $\xi_\delta = \dfrac{(1+\theta)E(X)}{\int_0^\infty e^{-\rho y}\bar{F}(y)dy}$
- $\rho = \rho(\delta)$
- $g(x) = G'(x)$, με $G(x) = 1 - \bar{G}(x) = 1 - \dfrac{\bar{F}(x) - e^{-\rho x}\int_x^\infty e^{-\rho y} f(y)\,dy}{\rho\int_0^\infty e^{-\rho y}\bar{F}(y)\,dy}$
- $H(u) = \dfrac{e^{\rho u}\int_u^\infty e^{-\rho x}\int_x^\infty w(x, y-x)\, f(y)dy}{\int_0^\infty e^{-\rho y}\bar{F}(y)\,dy}$

Έστω η συνάρτησης κατανομής $K_\delta(u) = 1 - \bar{K}_\delta(u)$, με

$$K_\delta(u) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\xi_\delta}{1+\xi_\delta}\left(\frac{1}{1+\xi_\delta}\right) G_\delta^{*n}(u),\ u \ge 0 \qquad (1.11)$$

και

$$\bar{K}_\delta(u) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\xi_\delta}{1+\xi_\delta}\left(\frac{1}{1+\xi_\delta}\right) \bar{G}_\delta^{*n}(u),\ u \ge 0 \qquad (1.12)$$

όπου:

$G_\delta^{*n}(u)$ η n-οστή συνέλιξη της σ.κ. της $G(x)$

$\bar{G}_\delta^{*n}(u)$ η n-οστή συνέλιξη της σ.κ. της $\bar{G}(x)$

Παρατήρηση 1.5. *Η* $\bar{K}_{\delta}(u)$ *είναι η συνάρτηση δεξιάς ουράς μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής. Αναλυτικότερα, ισχύει:*

$$\bar{K}(u) = \Pr(L_1 + L_2 + \ldots + L_M > u)$$

όπου η τ.μ. $\mathrm{M} \sim Geo\left(\frac{\xi_\delta}{1+\xi_\delta}\right)$, δηλαδή ισχύει ότι:

$$\Pr(\mathrm{M} = n) = \frac{\xi_\delta}{1+\xi_\delta}\left(\frac{1}{1+\xi_\delta}\right)^n, n = 1, 2, \ldots$$

και οι τ.μ L_i είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με τη συνάρτηση κατανομής $G(x)$

Θεώρημα 1.4. *Η λύση της ανανεωτικής εξίσωσης (1.10) προκύπτει από την ακόλουθη συνάρτηση:*

$$m(u) = \frac{1}{\xi_\delta}\int_0^u H(u-x)dK(u) + \frac{1}{1+\xi_\delta}H(u)$$

ή

$$m(u) = -\frac{1}{\xi_\delta}\int_0^u \bar{K}(u-x)dH(u) - \frac{H(0)}{\xi_\delta}\bar{K}(u) + \frac{1}{\xi_\delta}H(u),\ u \geq 0$$

Αν η συνάρτηση $H(u)$ είναι διαφορίσιμη τότε ισχύει ότι:

$$m(u) = -\frac{1}{\xi_\delta}\int_0^u \bar{K}(u-x)H'(u)du - \frac{H(0)}{\xi_\delta}\bar{K}(u) + \frac{1}{\xi_\delta}H(u),\ u \geq 0$$

1.8. Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος για το γενικευμένο Erlang ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου

Το μεγαλύτερο μέρος της βιβλιογραφίας στη θεωρία κινδύνου επικεντρώνεται στο κλασσικό μοντέλο, όπου οι απαιτήσεις προκύπτουν σύμφωνα με τη διαδικασία Poisson. Ο Andersen (1957) θεώρησε ότι οι απαιτήσεις μπορούν να προκύψουν και από μία γενικότερη ανανεωτική διαδικασία και προχώρησε στην εξαγωγή ολοκληρωτικής εξίσωσης για την αντίστοιχη πιθανότητα χρεοκοπίας. Ο υπολογισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας στο ανανεωτικό μοντέλο έγινε από τον Malinovskii (1998). Ωστόσο, ο υπολογισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας επιτυγχάνεται δοθέντων συγκεκριμένων μορφών της κατανομής των αποζημιώσεων, $f(x)$. Αρκετοί συγγραφείς, έχοντας ως στόχο την εξαγωγή αναλυτικών αποτελεσμάτων για οποιαδήποτε κατανομή των αποζημιώσεων, προχωρούν στην υπόθεση συγκεκριμένων μορφών της κατανομής των ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των ζημιών, $f_w(t)$. Μία από τις ευρέως χρησιμοποιούμενες υποθέσεις στη θεωρία κινδύνου είναι η κατανομή των αποζημιώσεων να ακολουθεί την Erlang ή γενικευμένη Erlang. Σε αυτή την περίπτωση το μοντέλο κινδύνου που προκύπτει ονομάζεται ανανεωτικό μοντέλο με Erlang ή γενικευμένους Erlang ενδιάμεσους χρόνους αντίστοιχα.

Στο ανανεωτικό μοντέλο θεωρείται ότι η $\{N(t), t \geq 0\}$ είναι μια ανανεωτική στοχαστική διαδικασία. Στην παρούσα ενότητα η διαδικασία πλεονάσματος ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου ορίζεται από τη σχέση (1.2) και οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης είναι μία ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. που ακολουθούν τη γενικευμένη Erlang κατανομή. Σε αυτή την περίπτωση η διαδικασία κινδύνου ονομάζεται γενικευμένη Erlang διαδικασία κινδύνου.

Ορισμός 1.18. *Έστω* $\{Z_i, 1 \le i \le n\}$ *μια ακολουθία ανεξάρτητων εκθετικών τ.μ. με παραμέτρους* $\lambda_i, i = 1, 2, ..., n$. *Τότε η κατανομή της συνέλιξης των τ.μ.* Z_i, *έστω* $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$, *ονομάζεται γενικευμένη Erlang κατανομή.*

Στην περίπτωση αυτή, η σ.π.π της τ.μ. $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$ *δίνεται από τη σχέση:*

$$f_{\sigma_n}(t) = \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1, i \neq j}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_j - \lambda_i} \right) \lambda_i e^{-\lambda_i t}, t \ge 0, \lambda_i > 0$$

και ο μετασχηματισμός Laplace της θα είναι ίσος με:

$$\hat{f}_{\sigma_n}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f_w(t)\, dt = E\left(e^{-sW}\right) = \frac{\prod_{i=1}^{n} \lambda_i}{\prod_{i=1}^{n} (\lambda_i + s)}, \; s \ge 0 \qquad (1.13)$$

Παρατήρηση 1.6. Λαμβάνοντας υπόψη όσα ειπώθηκαν παραπάνω, εύκολα διακρίνεται ότι η γενικευμένη Erlang κατανομή αποτελεί γενίκευση της κατανομής Erlang.

- Θέτοντας $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = \lambda$ προκύπτει η κατανομή Erlang με παραμέτρους n και λ
- Θέτοντας $n = 1$ και $\lambda_1 = \lambda$ προκύπτει η Εκθετική κατανομή με παράμετρο λ

1.9. Η συνάρτηση των Gerber - Shiu για τη γενικεύμενη Erlang διαδικασία κινδύνου

Στις αρχές του 21ου αιώνα και συγκεκριμένα το 2005, οι Gerber-Shiu έδειξαν ότι η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής για τη γενικευμένη Erlang διαδικασία κινδύνου ικανοποιεί μια ολοκληρο-διαφορική εξίσωση όπως δίνεται στο θεώρημα που ακολουθεί.

Θεώρημα 1.5. *Για* $u \geq 0$, *η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής* $\varphi(u)$ *ικανοποιεί την ολοκληρο-διαφορική εξίσωση:*

$$\prod_{j=1}^{n}\left(\lambda_j + \delta - c\frac{\partial}{\partial u}\right)m(u) - \prod_{j=1}^{n}{}_j\int_0^u m(u-x)\,f(x)\,dx - \prod_{j=1}^{n}\lambda_j w(u) = 0 \qquad (1.14)$$

όπου

$$w(u) = \int_u^\infty w(u, x-u)\ f(x)\,dx = \int_0^\infty w(u,x)\ f(x+u)\,dx \qquad (1.15)$$

Πόρισμα 1.2. *Για* $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \lambda$ *η εξίσωση* (1.14) *γίνεται:*

$$\left(\lambda + \delta - c\frac{\partial}{\partial u}\right)^n m(u) - \lambda^n \int_0^u m(u-x)f(x)dx - \lambda^n w(u) = 0 \qquad (1.16)$$

όπου η εξίσωση (1.16) είναι η ολοκληρο-διαφορική εξίσωση για το ανανεωτικό μοντέλο με Erlang(n,λ) ενδιάμεσους χρόνους άφιξης.

Πόρισμα 1.3. *Για* $n=1,\ \lambda_1 = \lambda$ *η εξίσωση* (1.14) *γίνεται:*

$$c\,m'(u) - (\delta+\lambda)m(u) + \lambda\int_0^u m(u-x)f(x)dx + \lambda w(u) = 0 \qquad (1.17)$$

όπου η εξίσωση (1.17) είναι η ολοκληρο-διαφορική εξίσωση για το κλασικό μοντέλο.

Η λύση της ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (1.14) προϋποθέτει τη χρήση ενός ευρέως γνωστού εργαλείου της θεωρία των διαφορικών εξισώσεων, του μετασχηματισμού Laplace.

Για $\Re(s) \geq 0$ οι μετασχηματισμοί Laplace των συναρτήσεων $m(u), f(u)$ και $w(u)$ θα δίνονται από τις αντίστοιχες ακόλουθες σχέσεις:

- $\hat{m}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} m(x) dx$
- $\hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx$
- $\hat{w}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} w(x) dx$

Θεώρημα 1.6. *Για* $s \in \mathbb{C}$ *και* $\delta \geq 0$ ***η θεμελιώδης γενικευμένη εξίσωση του Lundberg*** *δίνεται από την ακόλουθη σχέση:*

$$\tilde{\gamma}(s) - \prod_{j=1}^{n} \lambda_j \hat{f}(s) = 0 \tag{1.18}$$

όπου $\tilde{\gamma}(s) = \prod_{j=1}^{n} \left(\lambda_j + \delta - cs \right)$

Πόρισμα 1.4. *Για* $n = 1, \lambda_1 = \lambda$ *η εξίσωση* (1.18) *γίνεται:*

$$\delta + \lambda - cs = \hat{f}(s) \tag{1.19}$$

που είναι η θεμελιώδης εξίσωση του Lundberg για το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου.

Στον υπολογισμό της συνάρτησης Gerber-Shiu κυρίαρχο ρόλο κατέχει η λύση της εξίσωσης (1.18) , η οποία δίνεται από το Λήμμα που ακολουθεί.

Λήμμα 1.1.

α. Για $\Re(s)\geq 0,\delta>0$ η *θεμελιώδης γενικευμένη εξίσωση του Lundberg, έχει n ακριβώς ρίζες στο θετικό μιγαδικό ημιεπίπεδο.*

β. Για $\Re(s)\geq 0$ και $\delta\to 0^{+}$ η *θεμελιώδης γενικευμένη εξίσωση του Lundberg, έχει ακριβώς μια ρίζα, το 0 και n-1 ρίζες στο θετικό μιγαδικό ημιεπίπεδο.*

Απόδειξη. Gerber και Shiu (2005), Albrecher και Boxma (2005)

Έστω $r_i(\delta)\equiv r_i,\ \Re\left(r_i(0)\right)>0,\ i=1,2,\ldots,n$ οι θετικές ρίζες της εξίσωσης (1.17), όπου $r_i, i=1,2,\ldots,n$ διαφορετικές μεταξύ τους.

Με τη χρήση μετασχηματισμών Laplace και στα δύο μέλη της ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (1.14) και του Λήμματος 1.1, ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης των Gerber-Shiu δίνεται από το θεώρημα που ακολουθεί.

Θεώρημα 1.7. Για $\Re(s)\geq 0$, ο μετασχηματισμός Laplace της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\hat{m}(s)=\frac{\prod_{j=1}^{n}\lambda_j\hat{w}(s)-q(s)}{\tilde{\gamma}(s)-\prod_{j=1}^{n}\lambda_j\hat{f}(s)} \tag{1.20}$$

όπου $q(s)=\sum_{j=1}^{n}\hat{w}(r_j)\prod_{k=1,k\neq j}^{n}\frac{s-r_k}{r_j-r_k}$ και r_i, με $\Re(r_i)>0,\ i=1,2,..,n$, οι ρίζες της εξίσωσης (1.18)

Απόδειξη. Gerber και Shiu (2005)

Λόγω του ότι η αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace της σχέσης (1.20), είναι δύσκολο να υπολογισθεί, για *τον* υπολογισμό της συνάρτησης Gerber-Shiu θα δειχθεί αρχικά ότι η $m(u)$ ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση και στη συνέχεια θα βρεθεί η λύση αυτής. Για το σκοπό αυτό, κρίνεται απαραίτητη η χρήση των τελεστών T_r.

Ορισμός 1.19. *Έστω* $f(x)$ *μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε για* $\Re(r_i) \geq 0$ *και* $x \geq 0$ *ο τελεστής* T_r *ορίζεται ως εξής*:

$$T_r f(x) = \int_x^\infty e^{-r(u-x)} f(u)\,du = \int_0^\infty e^{-ru} f(u+x)\,du$$

Ιδιότητες των τελεστών T_r

1. $T_r f(0) = \int_0^\infty e^{-ru} f(u)\,du = \hat{f}(r)$

2. $T_{r_1} T_{r_2} f(x) = T_{r_2} T_{r_1} f(x) = \dfrac{T_{r_1} f(x) - T_{r_2} f(x)}{r_2 - r_1}, r_1 \neq r_2 \in \mathbb{C}$

3. $\dfrac{d}{dx} T_r f(x) = r\,T_r f(x) - f(x)$

   $\dfrac{d}{dx} T_{r_1} T_{r_2} f(x) = -\sum_{k=1}^{2} \dfrac{r_k\, T_{r_k} f(x)}{r_2'(r_k)},\ r_2(s) = (s - r_1)(s - r_2)$

4. $T_r \hat{f}(s) = \dfrac{\hat{f}(s) - \hat{f}(r)}{r - s}, r \neq s \in \mathbb{C}$

5. $T_r \hat{f}(s) = \left(\widehat{T_r f}\right)(s) = T_s T_r f(0)$

6. $s\hat{f}(s) - r\hat{f}(r) = (s - r)\left[-sT_r \hat{f}(s) - \hat{f}(r)\right]$

7. $\hat{f}_1(s)\hat{f}_2(s)-\hat{f}_1(r)\hat{f}_2(r)=-(s-r)\left[\hat{f}_1(s)T_{r_2}\hat{f}_2(s)+T_{r_1}\hat{f}_1(s)\hat{f}_2(s)\right]$

για κάθε $s\neq r$ και για f_1, f_2 δυο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις

8. αν $r_1, r_2, \ldots, r_k$ είναι διαφορετικοί μεταξύ τους πραγματικοί ή μιγαδικοί αριθμοί, τότε:

$$T_{r_1}T_{r_2}\ldots T_{r_k}=(-1)^{k-1}\sum_{j=1}^{k}\frac{T_{r_j}f(x)}{\tau_k'(r_j)},\ \tau(s)=\prod_{j=1}^{k}(s-r_j)$$

$$T_{s_1}T_{r_1}T_{r_2}\ldots T_{r_k}f(0)=(-1)^k\left(\frac{\hat{f}(s)}{\tau_k(s)}-\sum_{j=1}^{k}\frac{\hat{f}(r_j)}{(s-r_j)\tau_k'(r_j)}\right)$$

Επιπλέον, αν η $f(x)$ είναι η σ.π.π. και $F(x)$ η σ.κ. της τ.μ. X, με $F(x)=1-\bar{F}(x)$ τότε ισχύουν και οι εξής ιδιότητες:

9. $T_0T_r f(x)=\int_x^{\infty}T_r f(u)\,du=\dfrac{\bar{F}(x)-T_r f(x)}{r}=T_r\bar{F}(x)$

10. $\int_0^{u}T_r f(x+y)dx=T_r\bar{F}(y)-T_r\bar{F}(y+u)$

11. $\int_0^{\infty}T_{r_1}T_{r_2}f(x)\,dx=\dfrac{1}{r_2-r_1}\left(\dfrac{1-\hat{f}(r_1)}{r_1}-\dfrac{1-\hat{f}(r_2)}{r_2}\right)$

12. $\int_0^{\infty}\left(T_{r_1}f*T_{r_2}f\right)(x)\,dx=\dfrac{\left(1-\hat{f}(r_1)\right)\left(1-\hat{f}(r_2)\right)}{r_1r_2}$

Απόδειξη. Lin και Willmot (1999), Dickson και Hipp (2001), Li και Carrido (2004a).

Θεώρημα 1.8. *Για $\Re(s) \geq 0$, ο μετασχηματισμός Laplace της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής δίνεται από τη σχέση:*

$$m(u) = \frac{\hat{G}(s)}{1-\hat{n}(s)} \tag{1.21}$$

όπου:

$$\hat{G}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} G(x)\, dx = \frac{\prod_{j=1}^{n} \lambda_j}{c^n} T_s \left(\prod_{j=1}^{n} T_{r_j} w \right)(0)$$

$$\hat{n}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} n(x)\, dx = \frac{\prod_{j=1}^{n} \lambda_j}{c^n} T_s \left(\prod_{j=1}^{n} T_{r_j} f \right)(0)$$

με $r_i,\ \Re(r_i) > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$ οι ρίζες της εξίσωσης (1.18).

Απόδειξη. Li (2003), Θεώρημα 2.

Θεώρημα 1.9. *Για $u \geq 0$, η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής ικανοποιεί την παρακάτω ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση:*

$$m(u) = \int_0^u m(u-x) n(x) dx + G(u) = \frac{1}{1+\xi} \int_0^u m(u-x) z(x) dx + \frac{1}{1+\xi} H(u) \tag{1.22}$$

όπου:

- $n(x) = \dfrac{\prod_{j=1}^{n} \lambda_j}{c^n} \left(\prod_{j=1}^{n} T_r f \right)(x)$

- $G(x) = \dfrac{\prod_{j=1}^{n} \lambda_j}{c^n} \left(\prod_{j=1}^{n} T_{r_j} w \right)(x)$

- ξ τέτοιο ώστε $\dfrac{1}{1+\xi}=\int\limits_0^\infty n(x)dx=1-\dfrac{\prod\limits_{j=1}^{n}\left(\lambda_j+\delta\right)-\prod\limits_{j=1}^{n}\lambda_j}{c^n\prod\limits_{j=1}^{n}r_j}<1$

- $r_i,\ \Re(r_i)>0,\ \ i=1,2,\ldots,n$ οι ρίζες της εξίσωσης (1.18)

- $H(x)=(1+\xi)G(x)$

- $z(x)=(1+\xi)\,n(x)$, όπου $z(x)$ είναι η σ.π.π της κατανομής

$$Z(u)=\frac{\int\limits_0^u n(y)dy}{\int\limits_0^\infty n(y)dy}$$

Αν $\delta\to 0^+$, τότε $\xi\to\xi_0$, τέτοιο ώστε να ισχύει ότι: $\dfrac{1}{1+\xi_0}=1-\dfrac{\theta\prod\limits_{j=1}^{n}\lambda_{jm}}{c^n\prod\limits_{j=1}^{n-1}r_j(0)}<1$

δεδομένου ότι το περιθώριο ασφαλείας θ είναι θετικό.

Απόδειξη. Li (2003)

Πόρισμα 1.5. *Για $n=1$ και $\lambda_1=\lambda$, η ανανεωτική ελλειματική εξίσωση (1.22) γίνεται:*

$$m(u)=\int\limits_0^u m(u-x)n(x)dx+G(u)=\frac{1}{1+\xi}\int\limits_0^u m(u-x)z(x)dx+\frac{1}{1+\xi}H(u)\quad(1.23)$$

που είναι η ανανεωτική ελλειματική εξίσωση του κλασικού μοντέλου της θεωρίας κινδύνου, όπου:

- $n(x)=\dfrac{\lambda}{c}T_r f(x)$

- $G(x)=\dfrac{\lambda}{c}T_r w(x)$

- ξ τέτοιο ώστε να ισχύει: $\frac{1}{1+\xi}=\int_0^\infty n(x)dx = 1-\frac{\delta}{cr}<1$

- $r,\ \Re(r)>0,$ η ρίζα της εξίσωσης (1.19)

- $H(x)=(1+\xi)G(x)$

- $z(x)=(1+\xi)\,n(x)$, όπου $z(x)$ είναι η σ.π.π της κατανομής

$$Z(u)=\frac{\int_0^u n(y)dy}{\int_0^\infty n(y)dy}$$

Αν $\delta \to 0^+$, τότε $\xi \to \xi_0$, τέτοιο ώστε να ισχύει ότι: $\frac{1}{1+\xi_0}=1-\frac{1}{cr'(0)}<1$

Η λύση της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης (1.22) προκύπτει μέσω της δεξιάς ουράς μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής.

Για $u \ge 0$, έστω $K(u)$ η σ.κ. της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής με $K(u)=1-\bar{K}(u)$ όπου:

$$\bar{K}(u)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi}{1+\xi}\left(\frac{1}{1+\xi}\right)^n \bar{N}^{*n}(u),\ u\ge 0$$

με $\bar{N}^{*n}(u)$ η n-οστή συνέλιξη της δεξιάς ουράς $\bar{N}(u)=1-N(u)=\int_u^\infty n(y)dy$

Θεώρημα 1.10. *Για* $u \geq 0$, *η λύση της ανανεωτικής ελλειματικής εξίσωσης (1.22) δίνεται από την παρακάτω σχέση:*

$$m(u) = \frac{1}{\xi}\int_0^u H(u-x)dK(x) + \frac{1}{1+\xi}H(u) \tag{1.24}$$

ή ισοδύναμα

$$m(u) = -\frac{1}{\xi}\int_0^u \bar{K}(u-x)dH(x) - \frac{H(0)}{\xi}\bar{K}(u) + \frac{1}{\xi}H(u) \tag{1.25}$$

ή ισοδύναμα

$$m(u) = \frac{1}{\xi}\int_0^u (1-\bar{K}(u-x)\,dH(x)) + \frac{H(0)}{\xi}(1-\bar{K}(u)) \tag{1.26}$$

Απόδειξη. Lin και Willmot (1999).

Από τις παραπάνω σχέσεις και τον τύπο της $H(u)$ είναι φανερό ότι για τη λύση της $\varphi(u)$ απαραίτητη προϋπόθεση είναι ο υπολογισμός της δεξιάς ουράς της $K(u)$. Το 1999, Οι Lin και Willmot απέδειξαν ότι η ουρά της βοηθητικής σύνθετης γεωμετρικής κατανομής ικανοποιεί την ακόλουθη ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση:

$$\bar{K}(u) = \frac{1}{1+\xi}\int_0^u \bar{K}(u-x)z(x)dx + \frac{1}{1+\xi}\bar{Z}(u),\ u \geq 0 \tag{1.27}$$

όπου $\bar{Z}(u) = 1 - Z(u) = \int_u^\infty z(y)dy$

Επιπλέον, θέτοντας $w(x,y)=1$, προκύπτουν τα ακόλουθα:

- η συνάρτηση $m(u)$ των Gerber-Shiu ισούται με το μεταχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας, δηλαδή:

$$m(u)=E\left[e^{-\delta T}I(T<\infty)\middle|U(0)=u\right]$$

- με τη χρήση της 9ης ιδιότητας των τελεστών T_r, η $H(u)$ γίνεται:

$$H(u)=(1+\xi)\frac{\prod_{j=1}^{n}\lambda_j}{c^n}\left(\prod_{j=1}^{n}T_{r_j}\bar{Z}\right)(u)$$

και συνεπώς η σχέση (1.23) μορφοποιείται ως εξής:

$$m(u)=\frac{1}{1+\xi}\int_0^u m(u-x)\,z(x)dx+\frac{1}{1+\xi}\bar{Z}(u),\ u\geq 0 \qquad (1.28)$$

Παρατήρηση 1.7. Συγκρίνοντας τις εξισώσεις (1.27) και (1.28) είναι εύκολο να διακρίνουμε ότι η δεξιά ουρά της σύνθετης βοηθητικής γεωμετρικής κατανομής είναι ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας Τ.

Θεώρημα 1.11. *Για $u\geq 0$, ισχύει η παρακάτω σχέση:*

$$\bar{K}(u)=E\left[e^{-\delta T}I(T<\infty)\middle|U(0)=u\right]=m(u) \qquad (1.29)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τα θεωρήματα (1.10) και (1.11), γίνεται αντιληπτό ότι αν η $m(u)$ είναι γνωστή και υπολογισθεί η $H(u)$ για διάφορες τιμές της συνάρτησης ποινής $w(x,y)$, μπορούν να βρεθούν τα μέτρα κινδύνου, που αναφέρθηκαν στην αντίστοιχη ενότητα.

Συνεπώς, ο προσδιορισμός διαφόρων μέτρων κινδύνου είναι άρρηκτα συνδεδεμένος με τον υπολογισμό της συνάρτησης $m(u)$, η οποία υπολογίζεται μέσω των μετασχηματισμών Laplace.

Για $w(x,y)=1$, η σχέση (1.21) γίνεται:

$$\hat{m}(s)=\frac{\hat{G}(s)\prod_{j=1}^{n}\left(r_j-s\right)}{\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\lambda_j+\delta}{c}-s\right)-\prod_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j}{c^n}\hat{f}(s)} \tag{1.30}$$

χρησιμοποιώντας την ακόλουθη σχέση:

$$1-\hat{n}(s)=\frac{\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\lambda_j+\delta}{c}-s\right)-\prod_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j}{c^n}\hat{f}(s)}{\prod_{j=1}^{n}\left(r_j-s\right)}, s\neq r,\ j=1,2,\ldots,n$$

η οποία αποδεικνύεται χρησιμοποιώντας το Λήμμα 1.1. και τις ιδιότητες των τελεστών T_r (βλ. Lin (2003) Θέωρημα 2)

Επίσης, για $w(x,y)=1$και με τη χρήση της ιδιότητας 5 των τελεστών T_r, η συνάρτηση $\hat{G}(s)$ ισούται με:

$$\hat{G}(s)=\frac{\prod_{j=1}^{n}\lambda_j}{c^n}T_sT_{r_1}\ldots T_{r_n}f(0)=\frac{\prod_{j=1}^{n}\lambda_j}{c^n}\cdot\frac{T_0T_{r_1}\ldots T_{r_n}f(0)}{s}$$

$$=\frac{\hat{n}(0)-\hat{n}(s)}{s}=\frac{1}{s}\left(\frac{\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\lambda_j+\delta}{c}-s\right)-\prod_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j}{c^n}\hat{f}(s)}{\prod_{j=1}^{n}\left(r_j-s\right)}-\frac{\xi}{1+\xi}\right) \tag{1.30}$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (1.30) στην (1.29) προκύπτει η εξής σχέση:

$$\hat{m}(s)=\frac{\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\lambda_j+\delta}{c}-s\right)-\prod_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j}{c^n}\hat{f}(s)-\frac{\xi}{1+\xi}\prod_{j=1}^{n}\left(r_j-s\right)}{s\left[\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\lambda_j+\delta}{c}-s\right)-\prod_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j}{c^n}\hat{f}(s)\right]} \tag{1.31}$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της σχέσης (1.31) αντιστρέφεται μόνο σε ορισμένες περιπτώσεις. Μία από αυτές είναι όταν η $\hat{m}(s)$ έχει πολυωνυμική μορφή, δηλαδή όταν η $\hat{f}(s)$ έχει πολυωνυμική μορφή. Για το λόγο αυτό, επιλέγουμε την $f(x)$ να ανήκει στην κλασματική οικογένεια κατανομών.

Ορισμός 1.20. *Η τ.μ. X με σ.π.π. $f(x)$, ανήκει στην κλασματική οικογένεια κατανομών $\Re_f$, αν ο μετασχηματισμός Laplace $\hat{f}(s)$, γράφεται ως πηλίκο δυο πολυωνύμων*

$$\hat{f}(s)=\frac{Q_{m-1}(s)}{Q_m(s)}, \text{με } Q_m(0)=Q_{m-1}(0), \Re(s)\in\left(h_x,\infty\right) \tag{1.32}$$

όπου $m\in\mathbb{N}^+$, $\inf\left\{s\in\mathbb{R}: E\left(e^{-sX}\right)<\infty\right\}$ και $Q_m(s), Q_{m-1}(s)$ είναι πολυώνυμα m βαθμού και $\deg\left(Q_{m-1}(s)\right)\leq m-1$ αντίστοιχα.

Έστω ότι η κατανομή των ζημιών ανήκει στην κλασματική οικογένεια κατανομών, δηλαδή ο μετασχηματισμός Laplace δίνεται από τη σχέση (1.32).

Έστω ακόμη το ακόλουθο πολυώνυμο, το οποίο είναι $m+n$ βαθμού

$$B_{m,n}(s)=\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\lambda_j+\delta}{c}-s\right)Q_m(s)-\prod_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j}{c}Q_{m-1}(s) \tag{1.33}$$

τότε ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας $m_{\delta T}(u)=\bar{K}(u)$, δίνεται από το θεώρημα που ακολουθεί.

Θεώρημα 1.12. *Εάν ο μετασχηματισμός Laplace της σ.π.π. του μεγέθους των ζημιών έχει τη μορφή της σχέσης (1.32), τότε ισχύει ότι:*

$$\hat{m}_{\delta T}(s)=\frac{B_{m-1}(s)}{\prod_{i=1}^{m}\left(s+R_i\right)}$$

όπου

$$B_{m-1}(s)=\frac{1}{s}\left(\prod_{i=1}^{m}\left(s+R_i\right)-\frac{\xi}{1+\xi}Q_m(s)\right), \text{ με } \xi \text{ (βλ. Θεώρημα 1.9)}$$

$-R_i$ *όλες οι ρίζες της εξίσωσης* $B_{m,n}(s)=0$, *με* $\Re(R_i)>0, i=1,2,\ldots,m$

Αν $-R_i, i=1,2,\ldots,m$ *είναι διαφορετικές μεταξύ τους, τότε:*

$$\hat{m}_{\delta T}(s)=\sum_{i=1}^{m}\frac{a_i}{s+R_i}$$

και

$$m_{\delta T}(u)=\sum_{i=1}^{m}a_i\, e^{-R_i u}, u\geq 0$$

με

$$a_i=\frac{\prod_{i=1}^{m}R_i}{R_i\prod_{j=1, j\neq i}^{m}\left(R_j-R_i\right)}\cdot\frac{Q_m(-R_i)}{Q_m(0)},\ i=1,2,\ldots,m$$

Παρατήρηση 1.8. *Από το Θεώρημα 1.12. άμεσα υπολογίζεται η πιθανότητα χρεοκοπίας, εφόσον ισχύει ότι:*

$$\psi(u)=\lim_{\delta\to 0}m_{\delta T}(u)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Το κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου με την ύπαρξη σταθερών στρατηγικών μερισμάτων

2.1. Εισαγωγή

Μια επέκταση του κλασσικού μοντέλου της θεωρίας κινδύνου, αποτελεί η ύπαρξη στρατηγικής σταθερού μερίσματος, η οποία αφορά στη χορήγηση μερισμάτων από την ασφαλιστική εταιρία καθώς μεταβάλλεται το ασφαλιστικό της χαρτοφυλάκιο.

Αξιοσημείωτο είναι το ενδιαφέρον αρκετών ερευνητών για τη στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος με στρατηγική μερίσματος. Αναλυτικότερα, οι ερευνητές Lin –Willmot (2003) μελέτησαν τη στρατηγική ενός σταθερού ορίου μερίσματος, οι Lin – Pavlova (2005) τη στρατηγική μερίσματος κατωφλιού και οι Zhang-Yang (2008) τη στρατηγική απόδοσης πολλαπλών μερισμάτων.

Η στρατηγική σταθερού μερίσματος αρχικά προτάθηκε από τον De Finetti (1957) και αφορούσε το διωνυμικό μοντέλο. Σύμφωνα με αυτή, σε περίπτωση που η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος υπερβεί ένα κατώφλι, επιστρέφεται μέρισμα στους δικαιούχους, συνήθως με τη μορφή έκπτωσης στα ασφάλιστρα του επόμενου έτους.

Η στρατηγική σταθερού ορίου μερίσματος προϋποθέτει την ύπαρξη ενός σταθερού οριζόντιου ορίου, το οποίο συμβολίζεται με b και είναι μεγαλύτερο από το αρχικό αποθεματικό u, δηλαδή ισχύει ότι $b > u$. Σε περίπτωση που το πλεόνασμα υπερβεί το σταθερό όριο b, αποδίδονται μερίσματα με σταθερό και συνεχή ρυθμό, ίσο με το ρυθμό είσπραξης ασφαλίστρων c.

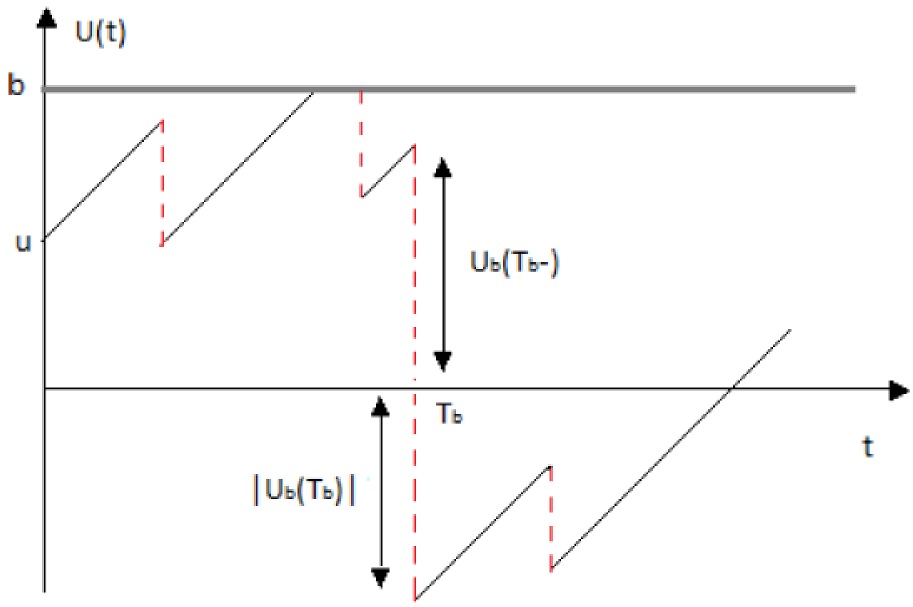
2.2. Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος με την ύπαρξη σταθερών στρατηγικών μερισμάτων

Ορισμός 2.1 *Έστω* $U_b(t)$ *η στοχαστική ανέλιξη πλεονάσματος με αρχικό αποθεματικό* $U_b(0)=u$ *κάτω από την ύπαρξη στρατηγικής μερίσματος. Επομένως, το πλεόνασμα* $U_b(t)$ *δεν ξεπερνάει το όριο b και μπορεί να εκφραστεί ως εξής:*

$$U_b(t)=\begin{cases} u+ct-S(t),\ U_b(t)<b \\ u-S(t),\ U_b(t)=b \end{cases}$$

ή ισοδύναμα

$$dU_b(t)=\begin{cases} cdt-dS(t),\ U_b(t)<b \\ -dS(t),\ U_b(t)=b \end{cases}$$



Σχήμα 2.1 Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος $U_b(t)$ με την ύπαρξη στρατηγικής σταθερού μερίσματος. [4]

[4] Διπλωματική Εργασία της Κασσανή Σ. Αικατερίνης (Πειραιάς 2016) με θέμα «Στοχαστικές διαδικασίες πλεονάσματος με εξάρτηση και στρατηγικές μερισμάτων »

Έστω T_b, ο χρόνος χρεοκοπίας με την ύπαρξη σταθερού μερίσματος, δηλαδή ο χρόνος όπου το πλεόνασμα γίνεται για πρώτη φορά αρνητικό με:

$$T_b = \inf\left\{t \geq 0 : U_b(t) < 0\right\},\ u \leq b$$

Έστω επίσης $U_b(T_b-)$ το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία και $\left|U_b(T_b)\right|$ το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας. Η ειδική περίπτωση όπου $b = \infty$ αναφέρεται στην κλασσική θεωρία χρεοκοπίας.

Η πιθανότητα χρεοκοπίας ορίζεται ως εξής:

$$\psi_b(u) = \Pr(T_b < \infty) = \Pr\left(U_b(t) < 0\right),\ u \leq b$$

2.3. Η συνάρτηση των Gerber-Shiu υπό την ύπαρξη στρατηγικής σταθερού μερίσματος

Ορισμός 2.2. *Για* $\delta \geq 0$ *και* $u \leq b$*, η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu ορίζεται ως εξής:*

$$m_b(u) = E\left\{e^{-\delta T_b} w\left(U_b(T_b -), \left|U_b(T_b)\right|\right) I\left(T_b < \infty\right) \middle| U_b(0) = u\right\},\ u \leq b \tag{2.1}$$

όπου:

δ η ένταση ανατοκισμού

$0 \leq w(x, y) < \infty$ μια διδιάστατη συνάρτηση στο $\mathbb{R}^2$

$I(T < \infty)$: η δείκτρια συνάρτηση του ενδεχομένου εμφάνισης ή μη χρεοκοπίας, με:

$$I(T_b < \infty) = \begin{Bmatrix} 1,\ T_b < \infty \\ 0,\ \textit{διαφορετικά} \end{Bmatrix}$$

Μέσω της συνάρτησης $m(u;b)$ είναι εύκολο να διεξαχθούν αποτελέσματα για τις από κοινού και τις περιθώριες συναρτήσεις των τ.μ. T_b, $U_b(T_b -)$, και $\left|U_b(T_b)\right|$. Για διάφορες τιμές της συνάρτησης ποινής και με βάση τον ορισμό της ισχύουν τα παρακάτω:

- Για $\delta = 0,\ w(x, y) = 1$ προκύπτει η πιθανότητα χρεοκοπίας:

$$\psi_b(u) = E\left\{I(T_b < \infty) \middle| U_b(0) = u\right\} = \Pr\left(T_b < \infty \middle| U_b(0)\right)$$

- Για $\delta > 0,\ w(x, y) = 1$ προκύπτει ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας:

$$m_{T_b}(u;b) = E\left\{e^{-\delta T_b} I(T_b < \infty) \middle| U_b(0) = u\right\}$$

- Για $\delta > 0,\ w(x, y) = I(x = x_1) I(y = x_2)$ προκύπτει η προεξοφλημένη από κοινού σ.π.π. των τ.μ. $U_b(T_b-)$ και $|U_b(T_b)|$:

$$f(x_1, x_2 | u) = E\left\{e^{-\delta T_b} \mathrm{I}\left(U_b(T_b-) = x_1, |U_b(T_b)| = x_2\right) I(T_b < \infty) \middle| U_b(0) = u\right\}$$

- Για $\delta > 0,\ w(x, y) = I(x \le x_1) I(y \le x_2)$ προκύπτει η προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση κατανομής των τ.μ. $U_b(T_b-)$ και $|U_b(T_b)|$:

$$F(x_1, x_2 | u) = E\left\{e^{-\delta T_b} \mathrm{I}\left(U(T_b-) \le x_1, |U(T_b)| \le x_2\right) I(T_b < \infty) \middle| U_b(0) = u\right\}$$

  από την οποία θέτοντας $\delta = 0$ προκύπτει η από κοινού συνάρτηση κατανομής αυτών.

- Για $\delta > 0,\ w(x, y) = I(x = x_1)$ προκύπτει η προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $U(T_b-)$:

$$h(x_1 | u) = E\left\{e^{-\delta T_b} \mathrm{I}\left(U_b(T_b-) = x_1\right) I(T_b < \infty) \middle| U_b(0) = u\right\}$$

- Για $\delta > 0,\ w(x, y) = I(y = x_2)$ προκύπτει η προεξοφλημένη συνάρτηση π πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $|U_b(T_b)|$:

$$g(x_2 | u) = E\left\{e^{-\delta T_b} \mathrm{I}\left(|U_b(T_b)| = x_2\right) I(T_b < \infty) \middle| U_b(0) = u\right\}$$

- Για $\delta > 0,\ w(x, y) = x_1^k$ προκύπτει η προεξοφλημένη ροπή k-τάξης της τ.μ. $|U_b(T_b)|$:

$$E\left\{e^{-\delta T_b} |U_b(T_b)|^k I(T_b < \infty) \middle| U_b(0) = u\right\}$$

- Για $\delta > 0,\ w(x,y) = x_2^k$ προκύπτει η προεξοφλημένη ροπή k-τάξης της τ.μ $U_b(T_b-)$:

$$E\left\{e^{-\delta T_b} U_b(T_b-)^k I(T_b < \infty) \middle| U_b(0) = u\right\}$$

Παρατήρηση 2.1. *Από τον ορισμό της διαδικασίας πλεονάσματος $U_b(t)$ εύκολα διακρίνεται ότι η $U_b(t)$ αφορά μία ειδική περίπτωση της διαδικασίας πλεονάσματος χωρίς την ύπαρξη στρατηγικής μερίσματος.*

Για $b \to \infty$ ισχύει ότι:

$$\lim_{b\to\infty} U_b(t) = U(t) \Rightarrow \lim_{b\to\infty} m_b(t) = m(u)$$

Έστω η συνάρτηση των Gerber-Shiu $m_b(u)$, η οποία ικανοποιεί την ακόλουθη ολοκληρο-διαφορική εξίσωση:

$$m_b'(u) = \frac{\lambda}{c}\int_0^u m_b(u-y) f(x)dx + \frac{\lambda+\delta}{c} m_b(u) - \frac{\lambda}{c} z(u),\ 0 \le u \le b \qquad (2.2)$$

με οριακή συνθήκη: $m_b'(b) = 0$ (2.3)

Αξιοσημείωτο είναι ότι στη σχέση (2.2) η εξίσωση αυτή καθαυτή δε συμπεριλαμβάνει το κατώφλι b. Επομένως, η συνάρτηση των Gerber και Shiu για όλες τις θετικές τιμές του b, συμπεριλαμβανομένης της περίπτωσης όπου $b = \infty$, ικανοποιεί τη σχέση (2.2). Η μόνη διαφορά μεταξύ αυτών των δυο διαφορετικών συναρτήσεων είναι η οριακή συνθήκη που ορίστηκε ανωτέρω.

Λήμμα 2.1. Έστω ότι η *διαφορίσιμη συνάρτηση* $\varphi(u)$ *ικανοποιεί την ολοκληρο-διαφορική εξίσωση που ακολουθεί:*

$$\varphi'(u) = a\varphi(u) + \beta\int_0^u \varphi(u-x)h(x)dx + \gamma w(u),\ u \geq 0 \qquad (2.4)$$

όπου a, β, γ *σταθερές ανεξάρτητες της μεταβλητής* u *και* h, w *γνωστές συναρτήσεις και βασική υπόθεση ότι οι συναρτήσεις* m, h, w *έχουν πεπερασμένους μετασχηματισμούς Laplace.*

Τότε η γενική λύση της εξίσωσης (2.4) δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\varphi(u) = \varphi(0) + \upsilon(u) + \gamma\int_0^\infty \upsilon(u-x)w(x)dx,\ u \geq 0 \qquad (2.5)$$

όπου η συνάρτηση $\upsilon(u)$ ικανοποιεί την ακόλουθη ολοκληρο-διαφορική εξίσωση:

$$\upsilon'(u) = a\upsilon(u) + \beta\int_0^u \upsilon(u-x)f(x)dx,\ u \geq 0$$

η οποία είναι η αντίστοιχη ομοιογενής της (2.4) με $\upsilon(0) = 1$ (2.6)

Παρατήρηση 2.2. *Η συνάρτηση των Gerber-Shiu για το κλασσικό μοντέλο χωρίς την ύπαρξη στρατηγικής σταθερού μερίσματος είναι της μορφής (2.4) του Λήμματος 2.1.*

Έστω $\upsilon(u)$ η συνάρτηση που ικανοποιεί την αντίστοιχη ομογενή εξίσωση της ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (1.8), δηλαδή θεωρείται ότι η $\upsilon(u)$ ικανοποιεί την ακόλουθη σχέση:

$$\upsilon'(u) = \frac{\lambda+\delta}{c}\upsilon(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \upsilon(u-x)\, f(x)dx,\ u \geq 0 \tag{2.7}$$

με $\upsilon(0) = 1$.

Πόρισμα 2.1. *Η γενική λύση της ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (1.8) δίνεται από την ακόλουθη σχέση:*

$$m(u) = m(0)\upsilon(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \upsilon(u-x)z(x)dx,\ u \geq 0 \tag{2.8}$$

όπου η $\upsilon(u)$ ικανοποιεί τη σχέση (2.7) με $\upsilon(0) = 1$.

Στη συνέχεια, εύκολα διακρίνεται ότι η συνάρτηση των Gerber-Shiu για το κλασσικό μοντέλο υπό την ύπαρξη στρατηγικής σταθερού μερίσματος είναι της μορφής (2.4) όπως φαίνεται στο Λήμμα 2.1. Επομένως, κάνοντας χρήση του Λήμματος 2.1 προκύπτει το πόρισμα που ακολουθεί.

Πόρισμα 2.2. *Η γενική λύση της ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (2.2) δίνεται από τη σχέση:*

$$m_b(u) = m_b(0)\upsilon(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \upsilon(u-x)\, z\left(x\right)dx,\ u \geq 0 \tag{2.9}$$

όπου η $\upsilon(u)$ ικανοποιεί τη σχέση (2.7) με $\upsilon(0) = 1$.

Κάνοντας χρήση των Πορισμάτων 2.1 και 2.2 προκύπτει η γενική λύση της $m_b(u)$ μέσω της $m(u)$ όπως δίνεται από την πρόταση που έπεται.

Πρόταση 2.1. *Η γενική λύση της ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (2.2) με οριακή συνθήκη τη σχέση (2.3) δίνεται από τη σχέση που ακολουθεί:*

$$m_b(u) = m(u) + k(b)\,\upsilon(u),\ 0 \le u \le b \tag{2.10}$$

όπου η σταθερά $k(b)$ δίνεται από τη σχέση:

$$k(b) = -\frac{m'(b)}{\upsilon'(b)} \tag{2.11}$$

Απόδειξη.

Αφαιρώντας τις σχέσεις (2.8), (2.9) κατά μέλη, προκύπτει η ακόλουθη σχέση:

$$m_b(u) - m(u) = \lfloor m_b(0) - m(0) \rfloor \upsilon(u),\ 0 \le u \le b$$

ή ισοδύναμα

$$m_b(u) = m(u) + k(b)\,\upsilon(u),\ 0 \le u \le b \tag{2.12}$$

όπου $k(b) = \lfloor m_b(0) - m(0) \rfloor$

Παραγωγίζοντας τη (2.12) ως προς u και θέτοντας $u = b$ προκύπτει ότι:

$$m_b'(b) = m'(b) + k(b)\,\upsilon'(b)$$

Χρησιμοποιώντας τη (2.3), δηλαδή ότι $\varphi_b'(b) = 0$ προκύπτει ότι $k(b) = -\dfrac{m'(b)}{\upsilon'(b)}$

οπότε με αντικατάσταση στην (2.12) προκύπτει η ζητούμενη σχέση (2.10).

2.4. Η κατανομή των καταβαλλόμενων μερισμάτων

Η ενότητα αυτή περιλαμβάνει τόσο τα καταβαλλόμενα μερίσματα που δίνονται πριν το χρόνο χρεοκοπίας, όσο και χρήσιμα αποτελέσματα για την κατανομή της παρούσας αξίας των μερισμάτων.

Οι ροπές της παρούσας αξίας των μερισμάτων

Έστω D_u η τ.μ. που εκφράζει την παρούσα αξία των μερισμάτων που καταβάλλονται στους δικαιούχους μέχρι τη στιγμή έλευσης της χρεοκοπίας.

Έστω επίσης $V_n(u;b) = E\left[D_u^n\right]$, όπου $V_0(u;b) = E\left[D_u^0\right] = 1$

Το πρώτο βήμα είναι η εύρεση μιας ολοκληρο- διαφορικής εξίσωσης για τη $V_n(u;b)$ και μία οριακή συνθήκη. Στη συνέχεια, θα δοθούν αναλυτικά αποτελέσματα για την περίπτωση στην οποία οι ατομικές απαιτήσεις ακολουθούν την εκθετική κατανομή και θα υπολογισθεί η αναμενόμενη τιμή της παρούσας αξίας των μερισμάτων (δηλαδή η περίπτωση όπου $n = 1$.

Θεώρημα 2.1. *Για* $n = 1,2,..$ *η* $V_n(u;b)$ *ικανοποιεί την ολοκληρο-διαφορική εξίσωση:*

$$V_n'(u;b) = \frac{\lambda + n\delta}{c} V_n(u;b) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u V_n(u-y;b)\, f(y)dy,\ 0 \le u \le b \tag{2.13}$$

με οριακή συνθήκη:

$$V_n'(u;b)\Big|_{u=b} = nV_{n-1}(b;b) \tag{2.14}$$

Εφαρμογή 2.1. *Έστω* X *η τ.μ. που εκφράζει το μέγεθος της απαίτησης, με* $X \sim Exp(a)$, *όπου* $a>0$ *και* $f(x)=ae^{-ax}$, $F(x)=1-e^{-ax}$ η αντίστοιχη σ.π.π. και σ.κ της X .

Τότε, η συνάρτηση (2.13) παίρνει την εξής μορφή:

$$V_n'(u;b)=\frac{\lambda+n\delta}{c}V_n(u;b)-\frac{\lambda}{c}\int_0^u ae^{-ax}V_n(u-x;b)\,dx$$

$$=\frac{\lambda+n\delta}{c}V_n(u;b)-\frac{\lambda a}{c}\int_0^u e^{-a(u-x)}V_n(x;b)\,dx$$

$$=\frac{\lambda+n\delta}{c}V_n(u;b)-\frac{\lambda a}{c}e^{-au}\int_0^u e^{ax}V_n(x;b)\,dx \tag{2.15}$$

Παραγωγίζοντας τη σχέση (2.15) ως προς u προκύπτει:

$$V_n''(u;b)=\frac{\lambda+n\delta}{c}V_n'(u;b)-\frac{\lambda a}{c}\left(-a\right)e^{-au}\int_0^u e^{ax}V_n(x;b)\,dx-\frac{\lambda a}{c}e^{-au}e^{au}V_n(u;b)$$

$$=\frac{\lambda+n\delta}{c}V_n'(u;b)+\frac{\lambda a^2}{c}e^{-au}\int_0^u e^{ax}V_n(x;b)\,dx-\frac{\lambda a}{c}V_n(u;b) \tag{2.16}$$

Αντικαθιστώντας στη (2.16) τη σχέση (2.15) προκύπτει ότι:

$$V_n''(u;b)+\left(a-\frac{\lambda+n\delta}{c}\right)V_n'(u;b)-\frac{an\delta}{c}V_n(u;b)=0$$

Σύμφωνα με τους Gerber και Shiu (1998), όταν η κατανομή του μεγέθους των ατομικών απαιτήσεων είναι η Εκθετική, από τη γενικευμένη εξίσωση του Lundberg ισχύει ότι:

$$s^2+\left(a-\frac{\lambda+n\delta}{c}\right)s-\frac{an\delta}{c}=0 \tag{2.17}$$

από την οποία προκύπτει:

$$V_n(u;b) = k_{1,n}e^{\rho_{1,n}u} + k_{2,n}e^{\rho_{2,n}u} \tag{2.18}$$

όπου $\rho_{1,n}, \rho_{2,n}$ οι ρίζες της εξίσωσης (2.17).

Έπειτα, αντικαθιστώντας στη σχέση (2.13) τη σχέση (2.18), χρησιμοποιώντας όπου $f(x) = ae^{-ax}$ και παραγωγίζοντας ως προς u προκύπτει η ακόλουθη σχέση:

$$\frac{k_{1,n}}{k_{2,n}} = -\frac{a+\rho_{1,n}}{a+\rho_{2,n}}$$

Επομένως ισχύει ότι:

$$V_n(u;b) = \frac{k_{1,n}}{a+\rho_{1,n}}\left[\left(a+\rho_{1,n}\right)e^{\rho_{1,n}u} - \left(a+\rho_{2,n}\right)e^{\rho_{2,n}u}\right]$$

με οριακή συνθήκη:

$$V_n'(u;b)\big|_{u=b} = nV_{n-1}(b;b) = \frac{k_{1,n}}{a+\rho_{1,n}}\left[\left(a+\rho_{1,n}\right)\rho_{1,n}e^{\rho_{1,n}b} - \left(a+\rho_{2,n}\right)\rho_{2,n}e^{\rho_{2,n}b}\right]$$

Τελικά, προκύπτει η ακόλουθη σχέση:

$$\boxed{V_n'(u;b)\big|_{u=b} = nV_{n-1}(b;b)\ \frac{\left(a+\rho_{1,n}\right)e^{\rho_{1,n}u} - \left(a+\rho_{2,n}\right)e^{\rho_{2,n}u}}{\left(a+\rho_{1,n}\right)\rho_{1,n}e^{\rho_{1,n}u} - \left(a+\rho_{2,n}\right)\rho_{2,n}e^{\rho_{2,n}u}}} \tag{2.19}$$

Η αναμενόμενη τιμή της παρούσας αξίας των μερισμάτων

Η τιμή της παρούσας αξίας των μερισμάτων προκύπτει θέτοντας $n=1$ και συμβολίζεται με: $V_1(u;b)=V(u;b)$.

Πόρισμα 2.3. Η συνάρτηση $V(u;b)$ *ικανοποιεί την ακόλουθη ολοκληρο-διαφορική εξίσωση:*

$$V'(u;b)=\frac{\lambda+\delta}{c}V(u;b)-\frac{\lambda}{c}\int_0^u V(u-y;b)\, f(y)dy,\ 0\le u\le b \tag{2.20}$$

με οριακή συνθήκη

$$V'(u;b)\big|_{u=b}=1 \tag{2.21}$$

Για τον υπολογισμό της γενικής λύσης της ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (2.20) χρησιμοποιείται το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.2. *Για τη συνάρτηση* $V(u;b)$ *ισχύει ότι*

$$V(u;b)=\frac{\upsilon(u)}{\upsilon'(b)},\ 0\le u\le b$$

όπου $\upsilon(u)=\dfrac{1-\psi(u)}{1-\psi(0)}e^{\rho u}, u\ge 0$ και $\psi(u)$ η πιθανότητα χρεοκοπίας

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.1. και θέτοντας όπου:

$m(u)=V(u;b), a=\dfrac{\lambda+\delta}{c}, \beta=-\dfrac{\lambda}{c}, h(y)=f(y)$ και $\gamma=0$ προκύπτει ότι η γενική λύση της ολοκληρο- διαφορικής εξίσωσης (2.4) είναι η εξής:

$$\varphi(u)=\varphi(0)\upsilon(u),\ u\geq 0 \tag{2.22}$$

Η σχέση (2.22) ισχύει για κάθε $u\geq 0$ επομένως θα ισχύει και για $u\in[0,b]$, επομένως ισχύει ότι:

$$V(u;b)=V(0;b)\upsilon(u),\ 0\leq u\leq b \tag{2.23}$$

όπου $\upsilon(u)=\dfrac{1-\psi(u)}{1-\psi(0)}e^{\rho u}, u\geq 0$

Παραγωγίζοντας τη σχέση (2.23) και θέτοντας $u=b$ προκύπτει ότι:

$$V'(u;b)\big|_{u=b}=V(0;b)\upsilon'(u)$$

Τέλος, λόγω της οριακής συνθήκης (2.21) έπεται ότι

$$V(0;b)=\frac{1}{\upsilon'(b)}$$

και αντικαθιστώντας το στη σχέση (2.23) προκύπτει το ζητούμενο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Το κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου με ρευστοποιημένα αποθεματικά και επενδύσεις

3.1. Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό προσεγγίζεται μια μορφή του κλασικού μοντέλου, σύμφωνα με την οποία η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος τροποποιείται εφόσον συμπεριλαμβάνει ρευστοποιημένα αποθέματα και επενδύσεις. Συγκεκριμένα διακρίνονται οι εξής περιπτώσεις:

- όταν το πλεόνασμα είναι κάτω από ένα προκαθορισμένο επίπεδο, το πλεόνασμα κρατείται ως ρευστοποιημένο απόθεμα, το οποίο δε φέρει τόκο.
- όταν το πλεόνασμα φτάσει και υπερβεί το προκαθορισμένο επίπεδο, η υπέρβασή του θα επιφέρει τόκο με σταθερό ρυθμό.
- όταν το προκαθορισμένο επίπεδο τείνει στο άπειρο, τότε η τροποποιημένη διαδικασία πλεονάσματος, μετατρέπεται στο κλασικό μοντέλο της σύνθετης Poisson διαδικασίας.
- όταν το προκαθορισμένο επίπεδο γίνει μηδέν, τότε η τροποποιημένη διαδικασία πλεονάσματος, μετατρέπεται στο κλασικό μοντέλο της σύνθετης Poisson διαδικασίας με τόκο.

Η μελέτη της πιθανότητας χρεοκοπίας για την τροποποιημένη διαδικασία πλεονάσματος επιτυγχάνεται μέσω της συνάρτησης των Gerber-Shiu. Αρχικά, ορίζεται ένα σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων για τη συνάρτηση των Gerber-Shiu. Στη συνέχεια, λύνοντας το σύστημα αυτό, οδηγούμαστε στη γενική λύση της εξίσωσης. Έπειτα προκύπτουν οι ακριβείς λύσεις για τη συνάρτηση των Gerber-Shiu στις περιπτώσεις όπου το αρχικό πλεόνασμα τίθεται ίσο με το επίπεδο του ρευστοποιημένου αποθέματος ή με το μηδέν. Αυτές οι λύσεις αποτελούν το κλειδί για την ακριβή λύση της συνάρτησης Gerber-Shiu σε γενικές περιπτώσεις.

3.2. Η τροποποιημένη στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος με την ύπαρξη ρευστοποιημένων αποθεματικών και επενδύσεων.

Έστω η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος $U(t)$ στην οποία θεωρείται ότι $U(0)=u,\ u\geq 0$.

Έστω επίσης $N(t)$ ο αριθμός των ζημιών που προκλήθηκαν στο χρονικό διάστημα $\left(0,t\right]$ και $\{N(t),\ t\geq 0\}$ η ομογενής διαδικασία Poisson με πυκνότητα $\lambda>0$.

Το μέγεθος της n-οστης ζημιάς συμβολίζεται με Y_n , όπου $\{\mathrm{Y}_n,\ n\geq 1\}$ μια ακολουθία μη αρνητικών ισόνομων τ.μ. με συνάρτηση κατανομής $P(x)=1-\overline{P}(x),\ P(0)=0$ και μέση τιμή $\mu=\int_0^\infty \overline{P}(x)dx>0$.

Επιπλέον, υποτίθεται ότι οι διαδικασίες $\{\mathrm{Y}_n,\ n\geq 1\}$ και $\{N(t),\ t\geq 0\}$ είναι ανεξάρτητες και ότι ο ασφαλιστής λαμβάνει συνεχώς ασφάλιστρα με σταθερό ρυθμό $c>0$.

Έστω $Z(t)=\sum_{n=1}^{N(t)} Y_n$ το συνολικό μέγεθος ζημιών στο χρόνο t, τότε το πλεόνασμα τη χρονική στιγμή t θα ισούται με:

$$u+ct-Z(t) \tag{3.1}$$

Αν το συνολικό πλεόνασμα λαμβάνει τόκο με επιτόκιο r τέτοιο ώστε: $e^r-1>0 \leftrightarrow r>0$, τότε το πλεόνασμα τη χρονική στιγμή t θα ισούται με:

$$ue^{rt}+c\overline{s}_{\overline{t|}}-\int_0^t e^{r(t-x)}dZ(x) \tag{3.2}$$

όπου $\overline{s}_{\overline{t|}}=\frac{e^{rt}-1}{r}$ η συσσωρευμένη αξία κατά τη χρονική στιγμή t μιας επενδυμένης μετοχής στο χρόνο μηδέν.

Το μοντέλο πλεονάσματος της σχέσης (3.1) αποτελεί το κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου χωρίς επένδυση. Το μοντέλο της σχέσης (3.2) είναι ένα μοντέλο της θεωρίας κινδύνου με τόκο, στο οποίο όλα τα θετικά πλεονάσματα επενδύονται με μηδενικό κίνδυνο στην αγορά.

Για να προσαρμοστεί ένα μοντέλο πλεονάσματος πιο κοντά στην πραγματικότητα, χρησιμοποιείται η ιδέα των Embrechts και Schmidli (1994), οι οποίοι υπέθεσαν ότι μια ασφαλιστική επιχείρηση δύναται να επενδύσει μόνο σε περίπτωση που το πλεόνασμά της φτάσει και υπερβεί ένα συγκεκριμένο επίπεδο $\Delta \geq 0$, η υπέρβαση του οποίου θα επιφέρει τόκο με επιτόκιο r. Όσον αφορά το πλεόνασμα που δεν φτάνει το προκαθορισμένο επίπεδο $\Delta \geq 0$, κρατείται ως ρευστοποιημένο απόθεμα που δεν επιφέρει τόκο.

Έστω $U(t)$ το πλεόνασμα της ασφαλιστικής επιχείρησης στο χρόνο t με το ρευστοποιημένο επίπεδο αποθέματος $\Delta \geq 0$ και το επιτόκιο r.

Τότε, η διαδικασία πλεονάσματος $\{U(t),\ t \geq 0\}$ ικανοποιεί τις ακόλουθες στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις:

$$\begin{Bmatrix} dU(t) = cdt + rU(t)dt - dZ(t), & U(t) \geq \Delta \\ dU(t) = cdt - dZ(t), & U(t) < \Delta \end{Bmatrix} \tag{3.3}$$

με $U(0) = u$.

Μαθηματικά, τα μοντέλα των σχέσεων (3.1) και (3.2) αποτελούν τις ειδικές περιπτώσεις του μοντέλου (3.3) στις περιπτώσεις όπου $\Delta = \infty$ και $\Delta = 0$ αντίστοιχα.

Επιπλέον το μοντέλο της σχέσης (3.3) μπορεί να ερμηνευτεί ως ακολούθως:

Ας υποθέσουμε ότι μια ασφαλιστική αποταμιεύει όλο το θετικό πλεόνασμά της σε ένα τραπεζικό λογαριασμό. Ο λογαριασμός αυτός επιφέρει τόκο στην περίπτωση όπου το πλεόνασμα φτάσει ή υπερβεί το προκαθορισμένο επίπεδο $\Delta \geq 0$, $\Delta \geq 0$, η υπέρβαση του οποίου θα επιφέρει τόκο με επιτόκιο r.

Στη συνέχεια, μελετάται η πιθανότητα χρεοκοπίας και άλλες ποσότητες σχετικά με τη χρεοκοπία στο μοντέλο (3.3) και αναλύεται η επίδραση του τόκου και των ρευστοποιημένων αποθεμάτων στις ποσότητες αυτές.

Η προαναφερθείσα διαδικασία προϋποθέτει τον προσδιορισμό της συνάρτησης των Gerber-Shiu για το μοντέλο (3.3), ως εξής:

$$m(u) = E\left[e^{-\delta T} w\left(U(T-), |U(T)|\right) I\left(T < \infty\right) \middle| U(0) = u \right] \tag{3.4}$$

όπου:

T : ο χρόνος χρεοκοπίας, όπου $T = \begin{Bmatrix} \min\{t : U(t) < 0\} \\ \infty,\ U(t) \geq 0 \end{Bmatrix} \text{για κάθε } t \geq 0$

$|U(T)|$: το έλλειμα τη στιγμή της χρεοκοπίας

$U(T-)$: το πλεόνασμα λίγο πριν τη χρεοκοπία

δ : η ένταση ανατοκισμού

$w : [0,\infty) \times (0,\infty) \to [0,\infty)$ μία διδιάστατη συνάρτηση στο $\mathbb{R}^2$ που ονομάζεται συνάρτηση ποινής

$I(T < \infty)$: η δείκτρια συνάρτηση του ενδεχομένου εμφάνισης ή μη χρεοκοπίας, με

$$I(T < \infty) = \begin{Bmatrix} 1,\ \text{συμβαίνει χρεοκοπία} \\ 0,\ \text{δε συμβαίνει χρεοκοπία} \end{Bmatrix}$$

3.3. Ολοκληρωτικές εξισώσεις και γενικές λύσεις

Αρχικά αξίζει να σημειωθεί ότι η συνάρτηση των Gerber-Shiu λαμβάνει διαφορετική τιμή όταν $u \geq \Delta$ από την περίπτωση όπου $u < \Delta$.

Στην πρώτη περίπτωση, όπου $u \geq \Delta$, η διαδικασία πλεονάσματος ξεκινά με έσοδα από τόκους και γίνεται καμπύλη μέχρι να επέλθει η επόμενη απαίτηση. Σε αντίθετη περίπτωση, δηλαδή όταν $u < \Delta$, η διαδικασία πλεονάσματος ξεκινά χωρίς επενδύσεις, που σημαίνει ότι το πλεόνασμα αυξάνεται γραμμικά με ρυθμό c. Καθώς το πλεόνασμα συσσωρεύεται στο επίπεδο Δ, η διαδικασία του πλεονάσματος μετατρέπεται σε καμπύλη που αντικατοπτρίζει τα έσοδα από τόκους επί της υπέρβασης του πλεονάσματος πάνω από το επίπεδο.

Έτσι, διακρίνουμε τις δύο περιπτώσεις:

$$m(u) = \begin{cases} m_1(u), \alpha\nu \ u \geq \Delta \\ m_2(u), \alpha\nu \ 0 \leq u < \Delta \end{cases}$$

Πράγματι, αποδεικνύεται ότι οι $m_1(u)$ και $m_2(u)$ ικανοποιούν διαφορετικές ολοκληρωτικές και ολοκληρο-διαφορικές εξισώσεις.

Μια κοινή τεχνική που χρησιμοποιείται στη θεωρία χρεοκοπίας για την εύρεση ολοκληρωτικών εξισώσεων προυποθέτει ότι οι ποσότητες που σχετίζονται με τη χρεοκοπία πρέπει να εξαρτώνται από τη στιγμή έλευσής της και από το μέγεθος της πρώτης απαίτησης και οι εξισώσεις αυτές να είναι βασισμένες στην ανανεωτική διαδικασία πλεονάσματος. Στο μοντέλο κινδύνου (3.3), η χρεοκοπία μπορεί να συμβεί μόνο όταν συμβαίνει μια απαίτηση. Η διαδικασία πλεονάσματος είναι αναγεννημένη στα χρονικά σημεία των απαιτήσεων. Επιπλέον, το επίπεδο ρευστοποιημένου αποθέματος δημιουργεί ένα σημείο αναφοράς για διαφορετικά σενάρια όπου η διαδικασία πλεονάσματος μπορεί να αναγεννηθεί με ή χωρίς επένδυση.

Στην περίπτωση όπου $u \geq \Delta$, διακρίνονται τα εξής σενάρια:

1. Αν το μέγεθος της απαίτησης είναι μικρότερο της ποσότητας $(u-\Delta)e^{rt}+c\overline{s}_{\overline{t}|}$, τότε η διαδικασία πλεονάσματος κατέρρευσε μόνο σε ένα σημείο με ένα νέο αρχικό πλεόνασμα που παραμένει πάνω από το επίπεδο Δ
2. Αν το μέγεθος της απαίτησης είναι μεταξύ των ποσοτήτων $(u-\Delta)e^{rt}+c\overline{s}_{\overline{t}|}$ και $(u-\Delta)e^{rt}+c\overline{s}_{\overline{t}|}+\Delta$, τότε η χρεοκοπία δεν έχει συμβεί αλλά η διαδικασία πλεονάσματος θα ξεκινήσει ξανά χωρίς επενδύσεις
3. Αν το μέγεθος της απαίτησης είναι μεγαλύτερο της ποσότητας $(u-\Delta)e^{rt}+c\overline{s}_{\overline{t}|}+\Delta$, τότε έχει επέλθει η χρεοκοπία και ασκείται ποινή.

Έτσι, θέτοντας τη συνάρτηση:

$$h_1(t)=(u-\Delta)e^{rt}+c\overline{s}_{\overline{t}|}+\Delta$$

και λαμβάνοντας υπόψη τη στιγμή και το μέγεθος της πρώτης απαίτησης προκύπτει η εξής ολοκληρωτική εξίσωση:

$$\begin{aligned} m_1(u) = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \Bigg[& \int_0^{h_1(t)-\Delta} e^{-\delta t} m_1(h_1(t)-y)\,dP(y) \\ & + \int_{h_1(t)-\Delta}^{h_1(t)} e^{-\delta t} m_2(h_2(t)-y)\,dP(y) \\ & + \int_{h_1(t)}^{\infty} e^{-\delta t} w(h_1(t), y-h_1(t))\,dP(y) \Bigg] dt \end{aligned} \tag{3.5}$$

Έστω $t_0 = \frac{\Delta - u}{c}$ η στιγμή όπου το πλεόνασμα φτάνει το επίπεδο Δ, δεδομένου ότι δεν έχει επέλθει απαίτηση πριν από τη χρονική στιγμή αυτή.

Στην περίπτωση όπου $u < \Delta$ και όταν η πρώτη απαίτηση επέλθει πριν τη χρονική στιγμή t_0, διακρίνονται τα εξής σενάρια:

1. Αν το μέγεθος της απαίτησης είναι μικρότερο της ποσότητας $u + ct$, τότε η χρεοκοπία δεν έχει συμβεί αλλά η διαδικασία πλεονάσματος θα ξεκινήσει ξανά χωρίς επενδύσεις
2. Αν το μέγεθος της απαίτησης είναι μεγαλύτερο της ποσότητας $u + ct$, τότε έχει επέλθει η χρεοκοπία

Στην περίπτωση όπου $u < \Delta$ και όταν η πρώτη απαίτηση επέλθει μετά τη χρονική στιγμή t_0, διακρίνονται τα εξής σενάρια:

1. Αν το μέγεθος της απαίτησης είναι μικρότερο της ποσότητας $c\bar{s}_{\overline{t-t_0}|}$, τότε το πλεόνασμα παραμένει με επενδύσεις
2. Αν το μέγεθος της απαίτησης είναι μεταξύ των ποσοτήτων $c\bar{s}_{\overline{t-t_0}|}$ και $c\bar{s}_{\overline{t-t_0}|} + \Delta$, τότε δεν έχει επέλθει η χρεοκοπία αλλά το πλεόνασμα μειώνεται στην περίπτωση χωρίς επενδύσεις
3. Αν το μέγεθος της απαίτησης είναι μεγαλύτερο της ποσότητας $c\bar{s}_{\overline{t-t_0}|} + \Delta$, τότε έχει επέλθει χρεοκοπία

Έτσι, θέτοντας τη συνάρτηση:

$$h_2(t) = c\bar{s}_{\overline{t-t_0}|} + \Delta$$

και λαμβάνοντας υπόψη τη στιγμή και το μέγεθος της πρώτης απαίτησης προκύπτει η εξής ολοκληρωτική εξίσωση:

$$m_2(u)=\int_0^{t_0}\lambda e^{-\lambda t}\left[\int_0^{u+ct} e^{-\delta t} m_2(u+ct-y)dP(y)\right.$$

$$+\int_{u+ct}^{\infty} e^{-\delta t} w(u+ct, y-u-ct)\, dP(y)\Big]dt$$

$$+\int_{t_0}^{\infty}\lambda e^{-\lambda t}\left[\int_0^{h_2(t)-\Delta} e^{-\delta t} m_2(h_2(t)-y)dP(y)\right.$$

$$+\int_{h_2(t)-\Delta}^{h_2(t)} e^{-\delta t} m_2(h_2(t)-y)dP(y)$$

$$+\int_{h_2(t)}^{\infty} e^{-\delta t} w(h_2(t), y-h_2(t))\, dP(y)\Big]dt \qquad (3.6)$$

Στη συνέχεια, ορίζεται η συνάρτηση $H(x)$, με $x \geq 0$ ως εξής:

$$H(x)=\int_x^{\infty} w(x, y-x)dP(y) \qquad (3.7)$$

η οποία αποτελεί την αναμενόμενη ποινή όταν επέλθει η χρεοκοπία και πλεόνασμα ακριβώς πριν τη χρεοκοπία είναι ίσο με x.

Έστω η συνάρτηση $\gamma(x)$, όπου:

$$\gamma(x)=\int_{x-\Delta}^{x} m_2(x-y)dP(y)+H(x),\ x \geq \Delta \qquad (3.8)$$

Συνεπώς, μέσω των συναρτήσεων $H(x)$, $\gamma(x)$ και των σχέσεων (3.5) και (3.6) προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις:

Για $u \geq \Delta$:

$$m_1(u)=\int_0^{\infty}\lambda e^{-(\lambda+\delta)t}\left[\int_0^{h_1(t)-\Delta} m_1(h_1(t)-y)dP(y)+\gamma(h_1(t))\right]dt \qquad (3.9)$$

Για $0 \leq u < \Delta$:

$$m_2(u) = \int_0^{t_0} \lambda e^{-(\lambda+\delta)t} \left[\int_0^{u+ct} m_2(u+ct-y)dP(y) + H(u+ct) \right] dt$$

$$+\int_{t_0}^{\infty} \lambda e^{-(\lambda+\delta)t} \left[\int_0^{h_2(t)-\Delta} m_2(h_2(t)-y)dP(y) + \gamma(h_2(t)) \right] dt \qquad (3.10)$$

Θέτοντας $x = h_1(t)$ στην εξίσωση (3.9) και παρατηρώντας ότι ισχύει $dx = e^{rt}\left(r\left(u-\Delta\right)+c\right)dt = r\left(\left(x-\Delta\right)+c\right)dt$, προκύπτει για $u \geq \Delta$:

$$m_1(u) = \lambda\left(r\left(u-\Delta\right)+c\right)^{\frac{\lambda+\delta}{r}} \int_u^{\infty} \left(r\left(x-\Delta\right)+c\right)^{-1-\frac{\lambda+\delta}{r}}$$

$$\times \left[\int_0^{x-\Delta} m_1\left(x-y\right)dP(y) + \gamma\left(x\right) \right] dx \qquad (3.11)$$

Όσον αφορά την εξίσωση (3.10), θέτοντας $x = u+ct$ στο πρώτο ολοκλήρωμα με $dx = cdt$ και $x = h_2(t)$ στο δεύτερο ολοκλήρωμα και παρατηρώντας ότι ισχύει $dx = ce^{r(t-t_0)}dt = r\left(\left(x-\Delta\right)+c\right)dt$, προκύπτει για $0 \leq u < \Delta$:

$$m_2(u) = \frac{\lambda}{c} e^{\frac{(\lambda+\delta)u}{c}} \int_u^{\Delta} e^{\frac{(\lambda+\delta)x}{c}} \left[\int_0^{x} m_2\left(x-y\right)dP(y) + \gamma\left(x\right) \right] dx$$

$$+\lambda c^{\frac{\lambda+\delta}{r}} e^{-\frac{\left(\lambda+\delta\right)\left(\Delta-u\right)}{c}} \int_{\Delta}^{\infty} \left(r\left(x-\Delta\right)+c\right)^{-1-\frac{\lambda+\delta}{r}}$$

$$\times \left[\int_0^{x-\Delta} m_1\left(x-y\right)dP\left(y\right) + \gamma\left(x\right) \right] dx \qquad (3.12)$$

Θεώρημα 3.1. *Για* $u \geq \Delta$ η $m_1(u)$ *ικανοποιεί την ακόλουθη ολοκληρο-διαφορική εξίσωση:*

$$m_1'(u) = \frac{\lambda+\delta}{r(u-\Delta)+c} m_1(u) - \frac{\lambda}{r(u-\Delta)+c}\left[\int_0^{u-\Delta} m_1(u-y)dP(y) + \gamma(u)\right] \qquad (3.13)$$

και για $0 \leq u < \Delta$, η $m_2(u)$ *ικανοποιεί την ακόλουθη ολοκληρο-διαφορική εξίσωση:*

$$m_2'(u) = \frac{\lambda+\delta}{c} m_2(u) - \frac{\lambda}{c}\left[\int_0^{u} m_2(u-y)dP(y) + H(u)\right] \qquad (3.14)$$

Εύκολα παρατηρείται ότι αν θέσουμε $u = \Delta$ στις εξισώσεις (3.13) και (3.14) προκύπτει ότι:

$$m_1(\Delta) = m_2(\Delta) \qquad (3.15)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι η ολοκληρο-διαφορική εξίσωση (3.14) για τη $m_2(u)$ είναι ανεξάρτητη της $m_1(u)$. Ωστόσο, η λύση της $\varphi_2(u)$ υπόκειται στην οριακή συνθήκη της εξίσωσης (3.15), στην οποία εμπλέκεται και η $m_1(u)$.

Αντικαθιστώντας στη σχέση (3.13) όπου u το t, προκύπτει για $t \geq \Delta$:

$$\left(r(t-\Delta)+c\right)m_1'(t) = (\lambda+\delta)m_1(t) - \lambda\left[\int_0^{t-\Delta} m_1(t-y)dP(y) + \gamma(t)\right]$$

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση αυτή από το Δ έως το u ως προς t, για $u \geq \Delta$ έπεται:

$$\left(r(u-\Delta)+c\right)m_1(u) - cm_1(\Delta) - r\int_\Delta^u m_1(t)\,dt$$

$$= (\lambda+\delta)\int_\Delta^u m_1(t)dt - \lambda\left[\int_\Delta^u \int_0^{t-\Delta} m_1(t-y)dP(y)dt + \int_\Delta^u \gamma(t)dt\right]$$

$$= (\lambda+\delta)\int_\Delta^u m_1(t)dt - \lambda\left[\int_\Delta^u P(u-y)m_1(y)dy + \int_\Delta^u \gamma(t)dt\right]$$

το οποίο σημαίνει ότι για $u \geq \Delta$ ισχύει ότι:

$$m_1(u) = l_1(u) + \int_{\Delta}^{u} k\left(u,t\right) m_1(t)dt \tag{3.16}$$

όπου:

$$l_1(u) = \frac{cm_1(u)}{r(u-\Delta)+c} - \frac{\lambda}{r(u-\Delta)+c}\int_{\Delta}^{u} \gamma(t)dt \tag{3.17}$$

και

$$k\left(u,t\right) = \frac{r+\delta+\lambda\overline{P}(u-t)}{r(u-\Delta)+c}$$

Η ολοκληρωτική εξίσωση (3.16) ανήκει στο δεύτερο είδος της εξίσωσης Volterra. Αξιοσημείωτο είναι ότι η όταν η $P(x)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση κατανομής, η $l_1(u)$ είναι συνεχής για $u \geq \Delta$, ενώ η $k\left(u,t\right)$ είναι συνεχής για $\Delta \leq t \leq u$.

Θεώρημα 3.2. *Όταν η $P(x)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση κατανομής, η μοναδική λύση της $\varphi_1(u)$*, για $u \geq \Delta$, *εκφράζεται ως:*

$$m_1(u) = l_1(u) + \int_{\Delta}^{u} K(u,s) l_1(s) ds \tag{3.18}$$

όπου:

$$K(u,s) = \sum_{m=1}^{\infty} k_m(u,s),\ \Delta \leq s < u$$

$$k_m(u,s) = \int_{s}^{u} k(u,t) k_{m-1}(t,s)dt,\ m = 2,3,\dots ,\ \Delta \leq s < u$$

με $k_1(u,s) = k\left(u,s\right)$

Επιπλέον, εύκολα παρατηρείται ότι η συνάρτηση $l_1(u)$ εξαρτάται από τις $m_1(\Delta)$ και $\gamma(u)$, συνεπώς και από την $m_2(u)$. Έτσι, αφού προσδιοριστούν οι $m_1(\Delta)$ και $m_2(u)$, η ακριβής λύση για τη $m_1(u)$ δίνεται από την εξίσωση 3.18.

Για την εύρεση της γενικής λύσης για τη $m_2(u)$, αντικαθιστούμε το u με x στην εξίσωση 3.14 και στη συνέχεια ολοκληρώνουμε ως προς x και τα δυο μέλη της εξίσωσης από το 0 έως το u.

Έτσι, για $0 \le u < \Delta$ προκύπτει ότι:

$$m_2(u) - m_2(0) = \frac{\lambda+\delta}{c}\int_0^u m_2(x)dx - \frac{\lambda}{c}\left[\int_0^u\int_0^x m_2(x-y)dP(y)dx + \int_0^u H(x)dx\right]$$

$$= \frac{\lambda+\delta}{c}\int_0^u m_2(x)dx - \frac{\lambda}{c}\left[\int_0^u P(y)\, m_2(x-y)dy + \int_0^u H(x)dx\right]$$

Δηλαδή, για $0 \le u < \Delta$ μπορεί να γραφεί:

$$m_2(u) = l_2(u) + \int_0^u v(u,t)\, m_2(t)dt \tag{3.19}$$

όπου

$$l_2(u) = m_2(0) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u H(y)dy \tag{3.20}$$

$$v(u,t) = \frac{\lambda}{c}\bar{P}(u-t) + \frac{\delta}{c}$$

Η ολοκληρωτική εξίσωση (3.19) ανήκει στο δεύτερο είδος της εξίσωσης Volterra. Αξιοσημείωτο είναι ότι η όταν η $P(x)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση κατανομής, η $l_2(u)$

είναι συνεχής για $0 \le u < \Delta$, ενώ η $v(u,t)$ είναι συνεχής για $0 \le t \le u < \Delta$.

Θεώρημα 3.3. *Όταν η $P(x)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση κατανομής, η μοναδική λύση της $m_2(u)$*, για $0 \le u < \Delta$, *εκφράζεται ως:*

$$m_2(u) = l_2(u) + \int_0^u V(u,s) l_2(s) ds \tag{3.21}$$

όπου:

$$V(u,s) = \sum_{m=1}^{\infty} v_m(u,s),\ 0 \le s < u$$

$$v_m(u,s) = \int_s^u v(u,t) v_{m-1}(t,s) dt,\ m = 2,3,\ldots,\ 0 \le s < u$$

με $v_1(u,s) = v(u,s)$

Αξίζει να σημειωθεί ότι η εξίσωση (3.20) για την $l_2(u)$ περιλαμβάνει μία μόνο άγνωστη σταθερά, τη $m_2(0)$. Ωστόσο, παρατηρείται ότι αν θέσουμε $u = \Delta$ στην εξίσωση (3.21) και χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (3.19) και (3.15) προκύπτει ότι:

$$m_1(\Delta) = \mathrm{m}_2(0) - \frac{\lambda}{c} \int_0^{\Delta} H(y) dy + m_2(0) \int_0^{\Delta} V(\Delta,s) ds - \frac{\lambda}{c} \int_0^{\Delta} V(\Delta,s) \int_0^{s} H(y) dy ds$$

από το οποίο προκύπτει ότι:

$$m_2(0) = \frac{m_1(\Delta) + \frac{\lambda}{c} \int_0^{\Delta} H(y) dy + \frac{\lambda}{c} \int_0^{\Delta} V(\Delta,s) \int_0^{s} H(y) dy ds}{1 + \int_0^{\Delta} V(\Delta,s) ds} \tag{3.22}$$

Άρα, η ακριβής λύση της $m_2(u)$ προκύπτει από την (3.21) όταν η $m_1(u)$ είναι γνωστή. Επιπλέον, η λύση της (3.18) για τη $m_1(u)$ εξαρτάται από τις $m_1(\Delta)$ και $m_2(u)$. Ωστόσο, όταν αντικαθιστούμε τη γενική λύση της 3.21 στην εξίσωση (3.18), η λύση της (3.18) εξαρτάται μόνο από μία άγνωστη σταθερά, τη $m_1(\Delta)$. Επομένως η λύση της $m_1(\Delta)$ είναι το κλειδί για την απόκτηση των ακριβών λύσεων των $m_1(u)$ και $m_2(u)$.

3.4. Ακριβείς λύσεις των ποσοτήτων $m_1(\Delta)$ και $m_2(0)$ για γενικά μεγέθη αποζημιώσεων

Μπορούμε να αντλήσουμε τις ακριβείς λύσεις των $m_1(\Delta)$ και $m_2(0)$ στην περίπτωση όπου $\delta = 0$. Αυτή η περίπτωση περιλαμβάνει πολλές σημαντικές συναρτήσεις όπως η πιθανότητα χρεοκοπίας, η συνάρτηση κατανομής του ελλείμματος πριν τη χρεοκοπία, το πλεόνασμα λίγο πριν τη χρεοκοπία και το μέγεθος της απαίτησης που προκαλεί χρεοκοπία.

Έτσι, θέτοντας $\delta = 0,\ x = u - \Delta$ και $\Phi(x) = m_1(x+\Delta)$ στην εξίσωση (3.16), για $x \geq 0$ προκύπτει:

$$\Phi(\mathrm{x}) = \frac{c\Phi(0)}{rx+c} - \frac{\lambda}{rx+c}\int_0^x \gamma(t+\Delta)dt + \int_0^x k^*(x,t)\Phi(t)dt \qquad (3.23)$$

όπου

$$k^*(x,t) = k\left(x+\Delta, t+\Delta\right) = \frac{r + \lambda\overline{\mathrm{P}}(\mathrm{x\text{-}t})}{rx+c}$$

Η εξίσωση 3.26 είναι η ίδια με την εξίσωση 2.6 (Cai and Dickson 2002), αν θέσουμε $\gamma(t+\Delta) = A(t)$ και αντί για r έχουμε δ.

Έστω ότι:

$$\tilde{\gamma}(t) = \int_\Delta^\infty e^{-tx}\gamma(x)dx \qquad (3.24)$$

$$\tilde{p}_1(t) = \int_0^\infty e^{-tx}dP_1(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty e^{-tx}\overline{P}(x)dx \qquad (3.25)$$

Έτσι, από τις εξισώσεις (3.8) και (3.9) των Cai and Dickson (2002) προκύπτει:

$$\Phi(0)=\frac{\lambda m_A\int_0^\infty \beta(\mathrm{rt})\exp\left(-ct+\lambda\mu\int_0^t \varphi_1(rs)ds\right)dt}{c\int_0^\infty \exp\left(-ct+\lambda\mu\int_0^t \varphi_1(rs)ds\right)dt}$$

όπου

$$m_A=\int_0^\infty \gamma\left(t+\Delta\right)dt$$

$$\beta\left(t\right)=\frac{1}{m_A}\int_0^\infty e^{-tx}\gamma\left(x+\Delta\right)dx=\frac{e^{t\Delta}\,\tilde{\gamma}\left(t\right)}{m_A}$$

$$\varphi_1(t)=\int_0^\infty e^{-tx}dP_1(x)=\tilde{p}_1(t)$$

Θέτοντας $m_1\left(\Delta\right)=\Phi\left(0\right)$ προκύπτει ότι:

$$m_1\left(\Delta\right)=\frac{\lambda\int_0^\infty \tilde{\gamma}\left(rt\right)\exp\left(-ct+rt\Delta+\lambda\mu\int_0^t \hat{p}_1(rs)ds\right)dt}{c\int_0^\infty \exp\left(-ct+\lambda\mu\int_0^t \hat{p}_1(rs)ds\right)dt} \tag{3.26}$$

Παρατηρείται ότι, θέτοντας $\delta=0$, η ολοκληρωτική εξίσωση (3.19) μετατρέπεται σε μια ελλειματική ανανεωτική εξίσωση, δηλαδή για $0\le u<\Delta$:

$$m_2\left(u\right)=l_2\left(u\right)+\frac{\lambda\mu}{c}\int_0^u m_2\left(u-y\right)dP_1\left(y\right) \tag{3.27}$$

όπου:

$P_1(y)=\frac{1}{\mu}\int_0^y \bar{P}(x)dx$ είναι η συνάρτηση κατανομής ισορροπίας της κατανομής P .

Έτσι, από το θεώρημα 3.5.1 του Resnick (2002), η μοναδική λύση της εξίσωσης (3.27) για τη $m_2(u)$, για $0\le u<\Delta$, δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$m_2(u)=\int_0^u l_2(u-y)dG(y) \tag{3.28}$$

όπου

$$G(y)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n P_1^{*n}(y) \tag{3.29}$$

είναι μια περιορισμένη συνεχής αυξανόμενη συνάρτηση και P_1^{*n} η n-οστή συνέλιξη της κατανομής P_1 με τον εαυτό της.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η ποσότητα $\left(1-\frac{\lambda\mu}{c}\right)G(x)$ είναι η συνάρτηση κατανομής μιας σύνθετης γεωμετρικής.

Επισημαίνεται ότι, το ολοκλήρωμα της σχέσης (3.28) ως προς $G(y)$ ορίζεται στο διάστημα $[0,u]$.

Από τις σχέσεις (3.15), (3.20) και (3.28) προκύπτει ότι:

$$m_1(\Delta)=\left(\int_0^{\Delta} m_2(0)-\frac{\lambda}{c}\int_0^{\Delta-x} H(y)dy\right)dG(x)$$

Ως εκ τούτου,

$$m_2(0)=\frac{m_1(\Delta)+\frac{\lambda}{c}\int_0^{\Delta}\int_0^{\Delta-x}H(y)dy\,dG(x)}{G(\Delta)} \tag{3.30}$$

Επομένως, η ακριβής λύση για τη $m_2(u)$ είναι διαθέσιμη από την εξίσωση (3.28) μόνο όταν η $m_1(u)$ είναι γνωστή.

Ας σημειωθεί ότι η συνάρτηση $\tilde{\gamma}(t)$ στην εξίσωση (3.26) περιλαμβάνει τη συνάρτηση $m_2(t)$, η οποία εξαρτάται από το $m_1(\Delta)$. Ως εκ τούτου, μπορούμε να αντικαταστήσουμε το $\tilde{\gamma}(t)$ με μια έκφραση που περιλαμβάνει το $m_1(\Delta)$ στην εξίσωση (3.26) και να οδηγηθούμε στην ακριβή λύση για το $m_1(\Delta)$ ως ακολούθως:

Μέσω των σχέσεων (3.8) και (3.24) έχουμε ότι:

$$\tilde{\gamma}(s)=\int_{\Delta}^{\infty}e^{-sx}\int_{x-\Delta}^{x}m_2(x-y)dP(y)dx+\tilde{H}(s) \tag{3.31}$$

$$\tilde{H}(s)=\int_{\Delta}^{\infty}e^{-sx}H(x)dx \tag{3.32}$$

Από τις σχέσεις (3.28) και (2.20), για $0\le u<\Delta$, προκύπτει ότι:

$$m_2(u)=m_2(0)G(u)-B(u) \tag{3.33}$$

όπου

$$B(u)=\frac{\lambda}{c}\int_0^{u}\int_0^{u-y}H(x)dx\,dG(y) \tag{3.34}$$

Συνεπώς, από τις σχέσεις (3.31) , (3.33) και (3.30) προκύπτει ότι:

$$\tilde{\gamma}(s)=m_2(0)\int_{\Delta}^{\infty}e^{-sx}\int_{x-\Delta}^{x}G(x-y)dP(y)dx$$

$$-\int_{\Delta}^{\infty}e^{-sx}\int_{x-\Delta}^{x}B(x-y)dP(y)dx+\tilde{H}(s)$$

$$=m_1(\Delta)a(s)+b(s) \tag{3.35}$$

όπου:

$$a(s)=\frac{\int_{\Delta}^{\infty}e^{-sx}\int_{x-\Delta}^{x}G(x-y)dP(y)dx}{G(\Delta)} \tag{3.36}$$

$$b(s)=\frac{\frac{\lambda}{c}\int_{0}^{\Delta}\int_{0}^{\Delta-x}H(y)dydG(x)\int_{\Delta}^{\infty}e^{-sx}\int_{x-\Delta}^{x}G(x-y)dP(y)dx}{G(\Delta)}$$

$$-\int_{\Delta}^{\infty}e^{-sx}\int_{x-\Delta}^{x}\mathrm{B}(x-y)dP(y)dx+\tilde{H}(s) \tag{3.37}$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (3.35) στην (3.26) προκύπτει ότι:

$$m_1(\Delta)=\frac{\lambda\int_0^{\infty}m_1(\Delta)a(rt)+b(rt)\exp\left(-ct+rt\Delta+\lambda\mu\int_0^t\hat{p}_1(rs)ds\right)dt}{c\int_0^{\infty}\exp\left(-ct+\lambda\mu\int_0^t\hat{p}_1(rs)ds\right)dt}$$

Η επίλυση της παραπάνω εξίσωσης δίνει την ακριβή λύση για τη $m_1(\Delta)$. Τότε, η ακριβής λύση για τη $m_2(0)$ προκύπτει από την εξίσωση 3.30.

Θεώρημα 3.4. *Έστω* $\delta=0$*, τότε*

$$m_1(\Delta)=\frac{\lambda\int_0^{\infty}b(rt)\exp\left(-ct+rt\Delta+\lambda\mu\int_0^t\hat{p}_1(rs)ds\right)dt}{\int_0^{\infty}\left(c-\lambda a(rt)e^{rt\Delta}\right)\exp\left(-ct+\lambda\mu\int_0^t\hat{p}_1(rs)ds\right)dt} \tag{3.38}$$

$$m_2(0)=\frac{\lambda\int_0^{\infty}b(rt)\exp\left(-ct+rt\Delta+\lambda\mu\int_0^t\hat{p}_1(rs)ds\right)dt}{G(\Delta)\int_0^{\infty}\left(c-\lambda a(rt)e^{rt\Delta}\right)\exp\left(-ct+\lambda\mu\int_0^t\hat{p}_1(rs)ds\right)dt}$$

$$+\frac{\frac{\lambda}{c}\int_0^{\Delta}\int_0^{\Delta-x} H(y)dydG(x)}{G(\Delta)} \tag{3.39}$$

με $a(s), b(s)$ συναρτήσεις που δίνονται από τις σχέσεις (3.36) και (3.37) αντίστοιχα.

Οι δύο ακριβείς λύσεις είναι χρήσιμες όταν καθορίζουμε τις ακριβείς λύσεις για τη συνάρτηση Gerber-Shiu, οι οποίες προκύπτουν από τις γενικές της λύσεις.

3.5. Ακριβής λύση της μη προεξοφλημένης συνάρτησης των Gerber-Shiu με εκθετικά μεγέθη αποζημιώσεων

Υποθέτουμε ότι $P(x)=1-e^{-\beta x}, x>0, \beta>0$, δηλαδή ότι η κατανομή του μεγέθους των αποζημιώσεων P είναι η Εκθετική με μέση τιμή $\mu=\frac{1}{\beta}$.

Ενόψει της σχέσης (3.8) και της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της εκθετικής κατανομής, για $u \geq \Delta$, η σχέση (3.13) γίνεται:

$$\beta\lambda e^{-\beta u}\left(\int_{\Delta}^{u} m_1(x)e^{\beta x}dx+\int_{0}^{\Delta} m_2(x)e^{\beta x}dx+\right)=(\lambda+\delta)m_1(u)-(r(u-\Delta)+c)m_1'(u)-\lambda H(u)$$

Διαφορίζοντας την ανωτέρω εξίσωση ως προς u, για $u \geq \Delta$, προκύπτει ότι:

$$(r(u-\Delta)+c)m_1''(u)+(\beta r(u-\Delta)+r-\lambda-\delta+\beta)m_1'(u)-\beta\delta m_1(u)$$

$$=-\lambda(H'(u)+\beta H(u)) \tag{3.40}$$

Ομοίως, η εξίσωση (3.14), για $0 \leq u < \Delta$, γίνεται:

$$\frac{\lambda}{c}e^{-\beta u}\int_0^u \beta e^{\beta y}m_2(y)dy=\frac{\lambda+\delta}{c}m_2(u)-m_2'(u)-\frac{\lambda}{c}H(u)$$

Διαφορίζοντας την ανωτέρω εξίσωση ως προς u, για $0 \leq u < \Delta$, προκύπτει ότι:

$$m_2''(u)+\frac{c\beta-\lambda-\delta}{c}m_2'(u)-\frac{\delta\beta}{c}m_2(u)=-\frac{\lambda}{c}(H'(u)+\beta H(u)) \tag{3.41}$$

Οι γενικές λύσεις για τις διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης (3.40) και (3.41) είναι και οι δύο διαθέσιμες. Ωστόσο, οι ακριβείς λύσεις για τις εξισώσεις αυτές μπορούν να καθοριστούν μόνο όταν οι οριακές τιμές των $m_1(\Delta)$ και $m_2(0)$ είναι γνωστές. Ως εκ τούτου, στην περίπτωση όπου $\delta = 0$ ή , οι ακριβείς λύσεις για τις $m_1(u)$, $m_2(u)$ βασίζονται στις γενικές λύσεις αυτών και στο θεώρημα 3.1.

Έστω $\delta = 0$, τότε οι εξισώσεις (3.40) και (3.41), για $u \geq \Delta$, γίνεται:

$$m_1''(u) + f(u) m_1'(u) = h(u) \tag{3.42}$$

και για $0 \leq u < \Delta$

$$m_2''(u) + \frac{c\beta - \lambda}{c} m_2'(u) = l(u) \tag{3.43}$$

όπου

$$f(u) = \beta + \frac{r - \lambda}{r(u - \Delta) + c}$$

$$h(u) = \frac{-\lambda\left(H'(u) + \beta H(u)\right)}{r(u - \Delta) + c} \tag{3.44}$$

$$l(u) = \frac{-\lambda\left(H'(u) + \beta H(u)\right)}{r(u - \Delta) + c} \tag{3.45}$$

Από τον τύπο 2.1.9.3 στη σελίδα 212 των Polyanin και Zaitsev (1995), γνωρίζουμε ότι οι γενικές λύσεις για τις εξισώσεις 3.42 και 3.43, δίνονται από τους παρακάτω τύπους:

Για $u \geq \Delta$:

$$m_1(u) = C_1 + \int_{\Delta}^{\infty} e^{-F(x)} \left(C_2 + \int_{\Delta}^{x} e^{F(t)} h(t)\, dt \right) dx \tag{3.46}$$

Για $0 \le u < \Delta$:

$$m_2(u) = C_3 + \int_0^u e^{-S(x)} \left(C_4 + \int_0^x e^{S(t)} l(t)\,dt \right) dx \qquad (3.47)$$

όπου C_1, C_2, C_3, C_4 αυθαίρετες σταθερές.

$$F(x) = \int_x^\Delta f(y)dy = \beta(x-\Delta) + \left(1 - \frac{\lambda}{r}\right) \ln\left(1 + \frac{r(x-\Delta)}{c}\right) \qquad (3.48)$$

$$S(x) = \int_0^x \frac{c\beta - \lambda}{c} dy = \left(\beta - \frac{\lambda}{c}\right) x \qquad (3.49)$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.1 και τις γενικές λύσεις των εξισώσεων (3.46) και (3.47), προκύπτουν οι ακριβείς λύσεις για $m_1(u)$ και $m_2(u)$. Αρχικά, θέτοντας $u = \Delta$ στην εξίσωση (3.46), προκύπτει άμεσα ότι:

$$C_1 = m_1(\Delta) \qquad (3.50)$$

Επιπλέον, έστω ότι $u \to \infty$ στην εξίσωση (3.46) , τότε προφανώς $m_1(\infty) = 0$, οπότε προκύπτει ότι:

$$C_2 = \frac{-m_1(\Delta) - \int_\Delta^\infty e^{-F(x)} \int_\Delta^x e^{F(t)} h(t)\,dt\,dx}{\int_\Delta^\infty e^{-F(x)} dx} \qquad (3.51)$$

Για τον υπολογισμό των C_3 και C_4 , θέτουμε $u = 0$ στην εξίσωση (3.47) και έχουμε ότι:

$$C_3 = m_2(0) \qquad (3.52)$$

Τότε, από τις εξισώσεις (3.15), (3.47) και (3.52) λύνοντας ως προς C_4 προκύπτει ότι:

$$C_4 = \frac{m_1(\Delta) - m_2(0) - \int_0^\Delta e^{-S(x)} \int_0^x e^{S(t)} l(t)\,dt\,dx}{\int_0^\Delta e^{-S(x)} dx} \qquad (3.53)$$

Επομένως, οι ακριβείς λύσεις για τις $m_1(u)$ και $m_2(u)$ προέρχονται από τις γενικές λύσεις των εξισώσεων (3.46) και (3.47) και τους τύπους (3.50 - 3.53).

Θεώρημα 3.5. *Έστω* $\delta=0$ *και* $P(x)$ *η συνάρτηση κατανομής μιας Εκθετικής με μέση τιμή* $\frac{1}{\beta}$. *Τότε, για* $u \geq \Delta$, *ισχύει ότι:*

$$m_1(u) = m_1(\Delta) - \frac{m_1(\Delta) + \int_{\Delta}^{\infty} e^{-F(x)} \int_{\Delta}^{x} e^{F(t)} h(t)\, dt dx}{\int_{\Delta}^{\infty} e^{-F(x)} dx} \int_{\Delta}^{u} e^{-F(x)} dx$$

$$+\int_{\Delta}^{u} e^{-F(x)} \int_{\Delta}^{x} e^{F(t)} h(t)\, dt dx \qquad (3.54)$$

και για $0 \leq u < \Delta$:

$$m_2(u) = m_2(0) + \frac{m_1(\Delta) - m_2(0) - \int_{0}^{\Delta} e^{-\left(\beta - \frac{\lambda}{c}\right)x} \int_{0}^{x} e^{\left(\beta - \frac{\lambda}{c}\right)t} l(t)\, dt dx}{1 - e^{-\left(\beta - \frac{\lambda}{c}\right)\Delta}} \left(1 - e^{-\left(\beta - \frac{\lambda}{c}\right)u}\right)$$

$$+\int_{0}^{u} e^{-\left(\beta - \frac{\lambda}{c}\right)x} \int_{0}^{x} e^{\left(\beta - \frac{\lambda}{c}\right)t} l(t)\, dt dx \qquad (3.55)$$

όπου οι ποσότητες $m_1(\Delta)$ και $m_2(0)$ δίνονται από το θεώρημα 3.1.

Πιθανότητα Χρεοκοπίας

Στην περίπτωση όπου το μέγεθος των απαιτήσεων ακολουθεί την Εκθετική κατανομή, η πιθανότητα χρεοκοπίας δηλώνεται ως: $\psi(u) = \Pr\{T < \infty | U(0) = u\}$. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.5, προκύπτει η ρητή λύση για την $\psi(u)$. Μέσω της λύσης αυτής, παρατηρείται ότι η συνάρτηση $H(x)$ που ορίζεται στην εξίσωση (3.7) μετατρέπεται σε $H(x) = \bar{P}(x) = e^{-\beta x}, x > 0$, η οποία, μαζί με τις εξισώσεις. (3.44) και (3.45) συνεπάγεται ότι $h(u) = 0$ και $l(u) = 0$. Επιπλέον, από τις εξισώσεις (3.29), (3.25), (3.32), (3.34), (3.36) και (3.37) καταλήγουμε στις παρακάτω σχέσεις:

$$G(y) = \frac{1}{1-\frac{\lambda}{c\beta}}\left(1-\frac{\lambda}{c\beta}e^{-\frac{\lambda}{c\beta}y}\right),\ y \geq 0 \tag{3.56}$$

$$\hat{p}_1(s) = \frac{\beta}{\beta+s} \tag{3.57}$$

$$\tilde{H}(s) = \frac{1}{\beta+s}e^{-(\beta+s)\Delta} \tag{3.58}$$

$$B(y) = \frac{\lambda}{c\beta-\lambda} - \frac{\lambda}{c\beta-\lambda}e^{-\left(\beta-\frac{\lambda}{c}\right)y},\ y \geq 0 \tag{3.59}$$

$$a(s) = \frac{c\beta e^{-(\beta+s)\Delta}\left(e^{\beta\Delta} - e^{\frac{\lambda\Delta}{c}}\right)}{(\beta+s)\left[c\beta - \lambda e^{-\left(\beta-\frac{\lambda}{c}\right)\Delta}\right]} \tag{3.60}$$

$$b(s) = \frac{(\lambda\text{-}\beta c)e^{-(\beta+s)\Delta}}{(\beta+s)\left[\lambda e^{-\beta\Delta} - \beta c e^{-\frac{\lambda\Delta}{c}}\right]} \tag{3.61}$$

Έτσι, από τις εξισώσεις (3.38) και (3.39), προκύπτουν οι $\psi(\Delta)$ και $\psi(0)$ αντίστοιχα. Ως εκ τούτου, από το Θεώρημα 3.5, δίνεται η ακριβής λύση για την πιθανότητα χρεοκοπίας με εκθετικά μεγέθη αποζημιώσεων στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 3.6. *Έστω $P(x)$ η συνάρτηση κατανομής της Εκθετικής με μέση τιμή $\frac{1}{\beta}$*

Τότε, η πιθανότητα χρεοκοπίας στο μοντέλο κινδύνου (3.3) ,για $u \geq \Delta$, δίνεται από τον τύπο:

$$\psi(u) = \frac{\psi(\Delta)\int_u^\infty \left(1 + r\frac{(x-\Delta)}{c}\right)^{-1+\frac{\lambda}{r}} e^{-\beta(x-\Delta)}dx}{\int_\Delta^\infty \left(1 + r\frac{(x-\Delta)}{c}\right)^{-1+\frac{\lambda}{r}} e^{-\beta(x-\Delta)}dx} \tag{3.62}$$

και για $0 \leq u < \Delta$:

$$\psi(u) = \frac{\psi(\Delta) - \psi(0)e^{-\left(\beta-\frac{\lambda}{c}\right)\Delta}}{1 - e^{-\left(\beta-\frac{\lambda}{c}\right)\Delta}} + \frac{\psi(0) - \psi(\Delta)}{1 - e^{-\left(\beta-\frac{\lambda}{c}\right)\Delta}} e^{-\left(\beta-\frac{\lambda}{c}\right)u} \tag{3.63}$$

όπου

$$\psi(\Delta) = \frac{\lambda(\beta c - \lambda)e^{-\left(\beta-\frac{\lambda}{c}\right)\Delta}\int_\Delta^\infty \left(1 + r\frac{(x-\Delta)}{c}\right)^{\frac{\lambda}{r-1}} e^{-\beta(x-\Delta)}dx}{\lambda(\beta c - \lambda)e^{-\left(\beta-\frac{\lambda}{c}\right)\Delta}\int_\Delta^\infty \left(1 + r\frac{(x-\Delta)}{c}\right)^{\frac{\lambda}{r-1}} e^{-\beta(x-\Delta)}dx + c\left[\beta c - \lambda e^{-\left(\beta-\frac{\lambda}{c}\right)\Delta}\right]}$$

$$\psi(0) = \frac{\beta c - \lambda}{\beta c - \lambda e^{-\left(\beta-\frac{\lambda}{c}\right)\Delta}}\psi(\Delta) + \frac{\lambda}{\beta c - \lambda e^{-\left(\beta-\frac{\lambda}{c}\right)\Delta}}\left(1 - e^{-\left(\beta-\frac{\lambda}{c}\right)\Delta}\right)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι:

- Για $\Delta=\infty\left(\Delta\to\infty\right)$ η σχέση (3.63) ,για $u\geq 0$,γίνεται:

$$\psi\left(u\right)=\psi\left(0\right)e^{-\left(\beta-\frac{\lambda}{c}\right)u}=\frac{\lambda}{c\beta}e^{-\left(\beta-\frac{\lambda}{c}\right)u} \tag{3.64}$$

δηλαδή, η $\psi\left(u\right)$ είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας του κλασικού μοντέλου (3.1).

- Για $\Delta=0$ η σχέση (3.63) ,για $u\geq 0$,γίνεται:

$$\psi\left(u\right)=\frac{\lambda}{c\beta}\frac{\int_{u}^{\infty}\left(1+\frac{rx}{c}\right)^{\frac{\lambda}{r-1}}e^{-\beta x}dx}{\int_{0}^{\infty}\left(1+\frac{rx}{c}\right)^{\frac{\lambda}{r}}e^{-\beta x}dx} \tag{3.65}$$

δηλαδή, η $\psi\left(u\right)$ είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας του μοντέλου (3.2).

- Για $\Delta>0$, η πιθανότητα χρεοκοπίας δίνεται από τις σχέσεις (3.62) και (3.63)

- Η σχέση (3.65) είναι παρόμοια με εκείνη της σελίδας 136 του Gerber (1979), δηλαδή, για $u\geq 0$ είναι:

$$\psi\left(u\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{\lambda}{r},u\beta+\frac{c\beta}{r}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{r},\frac{c\beta}{r}\right)+\frac{r}{\lambda}\left(\frac{c\beta}{r}\right)^{\frac{\lambda}{r}}e^{-\frac{c\beta}{r}}} \tag{3.66}$$

όπου $\Gamma\left(a,z\right)=\int_{z}^{\infty}y^{a-1}e^{-y}dy,\ a>0,\ z\geq 0$ είναι η ατελής συνάρτηση Γάμμα.

Κατανομή του ελλείματος τη στιγμή της χρεοκοπίας

Έστω $w(x,y)=I(y\le z)$, $z\ge 0$. Τότε, η συνάρτηση Gerber - Shiu $m(u)=m(u,z)$, που ορίστηκε στη σχέση (3.4) μετατρέπεται σε μια ελλειματική κατανομή του ελλείματος τη στιγμή της χρεοκοπίας, δεδομένου ότι το αρχικό αποθετικό είναι u. Ορίζουμε την ελλειματική κατανομή του ελλείματος τη στιγμή της χρεοκοπίας με τα εκθετικά μεγέθη αποζημιώσεων ως εξής:

$$G(u,z)=\Pr\left\{\left|U(T)\right|\le z, T<\infty \middle| U(0)=u\right\} \tag{3.67}$$

Σε αυτή την περίπτωση εύκολα αποδεικνύεται ότι $H(u)=\left(1-e^{-\beta z}\right)e^{\beta u}$, από το οποίο προκύπτει ότι $h(u)=0$ και $l(u)=0$. Προκειμένου να εφαρμοστούν οι τύποι του θεωρήματος 3.5, προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$G(y)=\frac{1}{1-\frac{\lambda}{c\beta}}\left(1-\frac{\lambda}{c\beta}e^{-\left(\beta-\frac{\lambda}{c}\right)y}\right),\ y\ge 0 \tag{3.68}$$

$$\hat{p}_1(s)=\frac{\beta}{\beta+s} \tag{3.69}$$

$$\tilde{H}(s)=\frac{1-e^{-\beta z}}{\beta+s}e^{-(\beta+s)\Delta} \tag{3.70}$$

$$B(y)=\left(1-e^{-\beta z}\right)\left(\frac{\lambda}{c\beta-\lambda}-\frac{\lambda}{c\beta-\lambda}e^{-\left(\beta-\frac{\lambda}{c}\right)y}\right),\ y\ge 0 \tag{3.71}$$

$$a(s)=\frac{c\beta e^{-(\beta+s)\Delta}\left(e^{\beta\Delta}-e^{\frac{\lambda\Delta}{c}}\right)}{(\beta+s)\left[c\beta-\lambda e^{-\left(\beta-\frac{\lambda}{c}\right)\Delta}\right]} \tag{3.72}$$

$$b(s)=\left(1-e^{-\beta z}\right)\frac{(\lambda-\beta c)e^{-(\beta+s)\Delta}}{(\beta+s)\left[\lambda e^{-\beta\Delta}-\beta c e^{-\frac{\lambda\Delta}{c}}\right]} \tag{3.73}$$

Παρατήρηση 3.1. *Αξίζει να αναφερθεί ότι οι παραπάνω συναρτήσεις των* $G(y)$, $\hat{p}_1(s)$ *και* $a(s)$ *είναι οι ίδιες με τις σχέσεις (3.56), (3.57) και (3.60) αντίστοιχα που αφορούν στην πιθανότητα χρεοκοπίας. Παράλληλα, παρατηρείται ότι οι ποσότητες* $\tilde{H}(s), B(y)$ και $b(s)$ είναι ίσες με τις αντίστοιχες σχέσεις για την *πιθανότητα χρεοκοπίας, πολλαπλασιαζόμενες όμως με τη σταθερά* $\left(1-e^{-\beta z}\right)$.

Θεώρημα 3.7. *Έστω* $P(x)$ *η συνάρτηση κατανομής της Εκθετικής με μέση τιμή* $\dfrac{1}{\beta}$

Τότε, η $G(u,z)$, *δηλαδή η ελλειματική συνάρτηση κατανομής του ελλείματος τη στιγμή της χρεοκοπίας στο μοντέλο κινδύνου (3.3) , για* $u \geq \Delta$, *δίνεται από τον τύπο:*

$$G(u,z)=\frac{m_1(\Delta,z)\int_u^{\infty}\left(1+\frac{r(x-\Delta)}{c}\right)^{-1+\frac{\lambda}{r}}e^{-\beta(x-\Delta)}dx}{\int_{\Delta}^{\infty}\left(1+\frac{r(x-\Delta)}{c}\right)^{-1+\frac{\lambda}{r}}e^{-\beta(x-\Delta)}dx} \tag{3.74}$$

και για $0 \leq u < \Delta$:

$$G(u,z)=\frac{m_1(\Delta,z)-m_2(0,z)e^{-\left(\beta-\frac{\lambda}{c}\right)\Delta}}{1-e^{-\left(\beta-\frac{\lambda}{c}\right)\Delta}}+\frac{m_2(0,z)-m_1(\Delta,z)}{1-e^{-\left(\beta-\frac{\lambda}{c}\right)\Delta}}e^{-\left(\beta-\frac{\lambda}{c}\right)u} \tag{3.75}$$

όπου $m_1(\Delta,z), m_2(0,z)$ δίνονται από τις σχέσεις (3.38) και (3.39) αντιστοίχως, δοθέντων των εξισώσεων (3.68) – (3.73).

Από το θεώρημα 3.4 εύκολα διακρίνεται ότι:

$$m_1(\Delta, z) = \left(1 - e^{-\beta z}\right)\psi(\Delta)$$

και

$$m_2(0, z) = \left(1 - e^{-\beta z}\right)\psi(0)$$

Έτσι, από τα θεωρήματα 3.6 και 3.7 καταλήγουμε ότι:

$$G(u, z) = \left(1 - e^{-\beta z}\right)\psi(u),\ u \geq 0 \tag{3.76}$$

όπου η σχέση (3.76) είναι ίδια με εκείνη στο σύνθετο κλασικό μοντέλο κινδύνου.

3.6. Ακριβής λύση της πιθανότητας χρεοκοπίας στην περίπτωση όπου τα μεγέθη των αποζημιώσεων ακολουθούν την κατανομή Erlang (2,κ)

Σε αυτή την ενότητα, υποτίθεται ότι η κατανομή του μεγέθους των αποζημιώσεων P είναι η Erlang (2,κ), με $P(y)=1-e^{-\kappa y}-\kappa y e^{-\kappa y},\ y>0,\ \kappa>0$. Στην περίπτωση όπου το μέγεθος των απαιτήσεων ακολουθεί την Εκθετική κατανομή, η πιθανότητα χρεοκοπίας δηλώνεται ως: $\varphi(u)=\Pr\{T<\infty | U(0)=u\}$.

Ένα βασικό στοιχείο για τον προσδιορισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας είναι η οριακή τιμή $\varphi(\Delta)$ που δίνεται στο Θεώρημα 3.4. Οι βοηθητικές λειτουργίες συναρτήσεις που απαιτούνται στο θεώρημα είναι απλοποιημένες ως εξής:

$$G(y)=\frac{1}{1-\frac{2\lambda}{\kappa c}}\left[1-\frac{(\kappa+s_1)^2 s_2}{\kappa^2(s_2-s_1)}e^{s_1 u}-\frac{(\kappa+s_2)^2 s_1}{\kappa^2(s_1-s_2)}e^{s_2 u}\right] \tag{3.77}$$

$$\hat{p}_1(s)=\frac{1}{2}\left(\frac{\kappa}{\kappa+s}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\kappa}{\kappa+s}\right)^2 \tag{3.78}$$

$$\tilde{H}(s)=\frac{\kappa\Delta s+s+2\kappa+\kappa^2\Delta}{(\kappa+s)^2}e^{-(\kappa+s)\Delta} \tag{3.79}$$

$$B(u)=\frac{2\lambda}{\kappa c-2\lambda}+\frac{2\lambda\kappa+\lambda s_1}{c(s_1-s_2)s_1}e^{s_1 u}+\frac{2\lambda\kappa+\lambda s_2}{c(s_2-s_1)s_2}e^{s_2 u} \tag{3.80}$$

Έτσι, οι συναρτήσεις $a(s)$ και $b(s)$ που ορίζονται στις εξισώσεις 3.36 και 3.37 προκύπτουν από τις εξισώσεις (3.77)-(3.80) και συνεπώς η $\varphi(\Delta)$ προκύπτει από την εξίσωση (3.38) στο Θεώρημα 3.4.

Με τη βοήθεια της σχέσης (3.40), για $u\geq\Delta$, θα προκύψει ότι:

$$\left[r(u-\Delta)+c\right]\varphi'''(u)+\left[2r-\lambda+2\kappa r(u-\Delta)+2\kappa c\right]\varphi''(u)$$
$$+\left[2\kappa(r-\lambda)+\kappa^2 r(u-\Delta)+\kappa^2 c\right]\varphi'(u)=0$$

Έστω $z = u - \Delta + \frac{c}{r}$ και $\varphi'(u) = e^{-\kappa z} g(z)$. Τότε, η $g(z)$ ικανοποιεί την ακόλουθη σχέση:

$$rz\left[g''(z) - 2\kappa g'(z) + \kappa^2 g(z)\right] + \left[2\kappa rz + 2r - \lambda\right]\left[g'(z) - g(z)\right]$$

$$+\left[2\kappa(r-\lambda) + \kappa^2 rz\right] g(z) = 0$$

πράγμα που σημαίνει ότι:

$$rzg''(z) + (2r - \lambda) g'(z) - \lambda\kappa g(z) = 0$$

Θέτοντας όπου $z = \frac{rt^2}{4\lambda\kappa}$ και $g(z) = t^{\frac{\lambda}{r-1}} h(t)$ παίρνουμε ότι:

$$g'(z) = \frac{2\lambda\kappa}{r}\left(\frac{\lambda}{r} - 1\right) t^{\frac{\lambda}{r-3}} h(t) + \frac{2\lambda\kappa}{r} t^{\frac{\lambda}{r-2}} h'(t)$$

και

$$g''(z) = \frac{4\lambda^2\kappa^2}{r^2 t^2}\left[\left(\frac{\lambda}{r} - 1\right)\left(\frac{\lambda}{r} - 3\right) t^{\frac{\lambda}{r-3}} h(t) + \left(\frac{2\lambda}{r} - 3\right) t^{\frac{\lambda}{r-2}} h'(t) + t^{\frac{\lambda}{r-1}} h''(t)\right]$$

όπου οι διαφορικές λαμβάνονται αναφορικά με τις μεταβλητές στις αντίστοιχες παρενθέσεις. Έτσι φθάνουμε στην ακόλουθη τροποποιημένη διαφορική εξίσωση του Bessel:

$$h''(t) + \frac{1}{t} h(t) - \left[1 + \frac{\left(\frac{\lambda}{r-1}\right)^2}{t^2}\right] h(t) = 0$$

η οποία έχει δύο ανεξάρτητες λύσεις, έστω $I_{\frac{\lambda}{r-1}}(t)$ και $K_{\frac{\lambda}{r-1}}(t)$, τις τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel της πρώτης και της δεύτερης τάξης αντίστοιχα.

Για κάθε πραγματικό αριθμό ν, οι τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel μπορούν να υπολογιστούν ως εξής:

$$I_\nu(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(t/2\right)^{2k+\nu}}{k!\Gamma(k+\nu+1)}$$

$$K_\nu(t)=\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{I_{-\nu}(t)-I_\nu(t)}{\sin\nu\pi}$$

Επομένως επιστρέφοντας στις αρχικές μεταβλητές, παραλείποντας σταθερούς συντελεστές και θεωρώντας ότι $\lim_{u\to\infty}\varphi(u)=0$, η γενική λύση για τη $\varphi(u)$ είναι η εξής:

$$\varphi(u)=D_1Z_1(u)+D_2Z_2(u),\ u\geq\Delta \tag{3.81}$$

όπου:

D_1, D_2 αυθαίρετες σταθερές

$$Z_1(u)=\int_u^{\infty}e^{-\kappa y}\left(y-\Delta+\frac{c}{r}\right)^{\frac{\lambda}{2r}-\frac{1}{2}}I_{\frac{\lambda}{r-1}}\left[\frac{2}{r}\sqrt{\lambda\kappa\left(r(y-\Delta)+c\right)}\right]dy$$

$$Z_2(u)=\int_u^{\infty}e^{-\kappa y}\left(y-\Delta+\frac{c}{r}\right)^{\frac{\lambda}{2r}-\frac{1}{2}}K_{\frac{\lambda}{r-1}}\left[\frac{2}{r}\sqrt{\lambda\kappa\left(r(y-\Delta)+c\right)}\right]dy$$

Ομοίως, μπορεί να αποδειχθεί ότι, για $0\leq u<\Delta$, η $\varphi(u)$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση 3ης τάξης που ακολουθεί:

$$c\varphi'''(u)+(2\kappa c-\lambda)\varphi''(u)+\left(\kappa^2c-2\lambda\kappa\right)\varphi'(u)=0,\ 0\leq u<\Delta$$

από την οποία απορρέει η γενική λύση της $\varphi(u)$:

$$\varphi(u)=D_3+D_4e^{s_1u}+D_5e^{s_2u},\ 0\leq u<\Delta \tag{3.82}$$

όπου:

D_3 , D_4 , D_5 αυθαίρετες σταθερές

$$s_1 = \frac{(\lambda - 2\kappa c) + \sqrt{\lambda^2 + 4\lambda\kappa c}}{2c}$$

$$s_2 = \frac{(\lambda - 2\kappa c) - \sqrt{\lambda^2 + 4\lambda\kappa c}}{2c}$$

Για να βρεθεί η ακριβής λύση της $\varphi(u)$, απαραίτητη προϋπόθεση είναι να οριστούν οι σταθερές D_1 , D_2 , D_3 , D_4 , D_5 των εξισώσεων (3.81) και (3.82).

Αξίζει να σημειωθεί ότι η τιμή του $\varphi(\Delta)$ καθορίζεται με την αντικατάσταση των σχέσεων (3.77)-(3.80) στην εξίσωση (3.38) του Θεωρήματος 3.4.
Η συμβολή της συνεχούς συνθήκης $\varphi(\Delta+) = \varphi(\Delta-) = \varphi(\Delta)$ και της συνθήκης $\varphi'(\Delta+) = \varphi'(\Delta-)$ οδηγεί στις ακόλουθες τρεις εξισώσεις για τις σταθερές:

$$D_1 Z_1(\Delta) + D_2 Z_2(\Delta) = \varphi(\Delta) \tag{3.83}$$

$$D_3 + D_4 e^{s_1\Delta} + D_5 e^{s_2\Delta} = \varphi(\Delta) \tag{3.84}$$

$$D_1 Z_1'(\Delta) + D_2 Z_2'(\Delta) = D_4 s_1 e^{s_1\Delta} + s_2 D_5 e^{s_2\Delta} \tag{3.85}$$

Επιπλέον, αντικαθιστώντας την εξίσωση (3.81) για $m_2(u)$ στην εξίσωση (3.14) και εξισώνοντας όλους τους όρους που περιλαμβάνουν $ue^{-\kappa u}$ και $e^{-\kappa u}$ με το μηδέν, προκύπτει ότι:

$$D_3 + D_4\left(\frac{\kappa}{\kappa + s_1}\right) + D_5\left(\frac{\kappa}{\kappa + s_2}\right) = 1 \tag{3.86}$$

$$D_3 + D_4\left(\frac{\kappa}{\kappa + s_1}\right)^2 + D_5\left(\frac{\kappa}{\kappa + s_2}\right)^2 = 1 \tag{3.87}$$

Λύνοντας τις πέντε γραμμικές εξισώσεις (3.83)-(3.87), μπορούμε να προσδιορίσουμε τις σταθερές D_1 , D_2 , D_3 , D_4 , D_5 και να οδηγηθούμε στην ακριβή λύση για τη $\varphi(u)$.

Θεώρημα 3.8. *Έστω $P(x)$ η συνάρτηση κατανομής της Erlan με μέση τιμή $\frac{2}{\kappa}$. Τότε, η πιθανότητα χρεοκοπίας δίνεται ως εξής:*

$$\varphi(u) = D_1 Z_1(u) + D_2 Z_2(u),\ u \geq \Delta$$

$$\varphi(u) = D_3 + D_4\, e^{s_1 u} + D_5\, e^{s_2 u},\ 0 \leq u < \Delta$$

όπου:

$$D_1 = \frac{s_1 e^{s_1\Delta} Z_2(\Delta) D_4 + s_2 e^{s_2\Delta} Z_2(\Delta) D_5 - \varphi(\Delta) Z_2'(\Delta)}{Z_2(\Delta) Z_1'(\Delta) - Z_1(\Delta) Z_2'(\Delta)}$$

$$D_2 = \frac{s_1 e^{s_1\Delta} Z_1(\Delta) D_4 + s_2 e^{s_2\Delta} Z_1(\Delta) D_5 - \varphi(\Delta) Z_1'(\Delta)}{Z_1(\Delta) Z_2'(\Delta) - Z_1'(\Delta) Z_2(\Delta)}$$

$$D_3 = 1 - D_4\left(\frac{\kappa}{\kappa + s_1}\right) - D_5\left(\frac{\kappa}{\kappa + s_2}\right)$$

$$D_4 = \frac{\left[1 - \varphi(\Delta)\right] \kappa s_2 (\kappa + s_1)^2}{\kappa^3 s_2 - \kappa s_2 e^{s_1\Delta} (\kappa + s_1)^2 - \kappa^3 s_1 - \kappa s_1 e^{s_2\Delta} (\kappa + s_2)^2}$$

$$D_5 = \frac{\left[1 - \varphi(\Delta)\right] \kappa s_1 (\kappa + s_2)^2}{\kappa^3 s_1 - \kappa s_1 e^{s_2\Delta} (\kappa + s_2)^2 - \kappa^3 s_2 - \kappa s_2 e^{s_1\Delta} (\kappa + s_1)^2}$$

και

η $\varphi(\Delta)$ προκύπτει αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (3.83)-(3.87) στην εξίσωση (3.38) του θεωρήματος 3.4.

3.7. Η επίδραση των ρευστοποιημένων αποθεμάτων και των επενδύσεων στην πιθανότητα χρεοκοπίας

Για να απεικονιστούν τα αποτελέσματα που προέκυψαν στις προηγούμενες ενότητες και να αποδειχθεί η επίδραση των ρευστοποιημένων αποθεμάτων και των επενδύσεων στη συνάρτηση Gerber-Shiu, χρησιμοποιούμε τα θεωρήματα 3.6 και 3.8 για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων χρεοκοπίας με εκθετικά και Erlang (2,κ) μεγέθη αποζημιώσεων για διαφορετικές τιμές των δ και Δ. Μας ενδιαφέρει επίσης να συγκρίνουμε τις πιθανότητες χρεοκοπίας των Erlang (2,κ) μεγεθών αποζημιώσεων με εκείνες των εκθετικών.

Για να επιτευχθεί αυτό, ορίσαμε τις παραμέτρους του μοντέλου ως $c=2.2$, λ=1 και $\mu=2$. Έτσι, η παράμετρος β της εκθετικής κατανομής είναι $\beta=0.5$ και η παράμετρος κ για την κατανομή Erlang (2,κ) είναι $\kappa=1$. Με τις παραμέτρους που ορίστηκαν, διαπιστώνεται ότι η εκθετική κατανομή του μεγέθους των αποζημιώσεων έχει την ίδια μέση τιμή με την Erlang κατανομή του μεγέθους των αποζημιώσεων .

Χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 3.6 για να υπολογίσουμε τις πιθανότητες χρεοκοπίας $\psi(0), \psi(15)$ και $\psi(30)$ με διαφορετικές τιμές του επιτοκίου r και του επιπέδου Δ των ρευστοποιημένων αποθεματικών για τα εκθετικά μεγέθη απαιτήσεων. Τα αποτελέσματα δίδονται στους Πίνακες 3.1-3.3. Επιπλέον, χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 3.8 για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων χρεοκοπίας $\varphi(0), \varphi(15)$ και $\varphi(30)$ για τα Erlang (2) κατανομής μεγέθη απαιτήσεων, με τις ίδιες τιμές για το r και το Δ όπως στα εκθετικά μεγέθη απαιτήσεων. Οι αντίστοιχες πιθανότητες χρεοκοπίας βρίσκονται στους Πίνακες 3.1-3.3 με μπλε χρώμα.
Όπως αναμενόταν, οι πίνακες δείχνουν ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας μειώνεται όσο αυξάνεται το επιτόκιο r, ενώ η πιθανότητα χρεοκοπίας αυξάνεται καθώς αυξάνεται το επίπεδο Δ των ρευστοποιημένων αποθεματικών.

Συγκεκριμένα, στον Πίνακα 1, όταν $\Delta \to \infty$, οι πιθανότητες χρεοκοπίας με εκθετικά και Erlang κατανομής μεγέθη απαιτήσεων, τείνουν στην πιθανότητα χρεοκοπίας με μηδενικό αρχικό αποθεματικό του κλασικού μοντέλου κινδύνου σύνθετης Poisson κατανομής, το οποίο είναι $\frac{\lambda\mu}{c} = 0.90909$.

Επιπλέον, από τους τρεις πίνακες, διακρίνεται ότι για $u = 0$, οι πιθανότητες χρεοκοπίας με εκθετικά μεγέθη απαιτήσεων είναι μικρότερες από εκείνες με τα Erlang μεγέθη απαιτήσεων.

Ενώ, για $u = 15$ και $u = 30$, οι πιθανότητες χρεοκοπίας με τα εκθετικά μεγέθη απαιτήσεων είναι μεγαλύτερες από εκείνες με τα Erlang μεγέθη απαιτήσεων.

Στην πραγματικότητα, μπορούμε να αποδείξουμε ότι αν $\kappa > \beta$, τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$ με εκθετικές αποζημιώσεις και η πιθανότητα χρεοκοπίας $\varphi(u)$ με Erlang κατανομή αποζημιώσεων ικανοποιούν την ακόλουθη σχέση:

$$\lim_{u \to \infty} \frac{\varphi(u)}{\psi(u)} = 0$$

Έτσι, για μεγάλες τιμές του αποθεματικού u, ισχύει ότι $\psi(u) > \varphi(u)$ αν $\kappa > \beta$. Για να αποδειχθεί αυτό θεωρούμε ότι $\lim_{x \to \infty} \frac{a(x)}{b(x)} = 1$, εφόσον $a(x) \sim b(x)$. Είναι ευρέως γνωστό ότι η τροποποιημένη συνάρτηση του Bessel $I_{\nu}(x)$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$I_{\nu}(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \tag{3.88}$$

η οποία είναι ανεξάρτητη του ν. Έτσι, ισχύει ότι:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{K_{\nu}(x)}{I_{\nu}(x)} = 0 \tag{3.89}$$

Ως εκ τούτου, είναι εύκολο να διακρίνουμε από τις σχέσεις (3.81), (3.88), (3.89) και το νόμο του l'Hopital ότι:

$$\varphi(u) \sim D_1^* \int_u^{\infty} e^{-\kappa y} \left(y - \Delta + \frac{c}{r} \right)^{\frac{\lambda}{2r} - \frac{1}{2}} \frac{\exp\left\{ \frac{2}{r} \sqrt{\lambda \kappa \left(r (y - \Delta) + c \right)} \right\}}{\sqrt{\frac{4\pi}{r} \sqrt{\lambda \kappa \left(r (y - \Delta) + c \right)}}} dy \qquad (3.90)$$

όπου

$$D_1^* = \frac{D_1}{\sqrt{\frac{4\pi}{r} \sqrt{\lambda \kappa r}}}$$

Επομένως, από τις σχέσεις (3.90), (3.62), και το νόμο του l'Hopital, επιτυγχάνουμε την εξής ισότητα:

$$\lim_{u \to \infty} \frac{\varphi(u)}{\psi(u)} = D \lim_{u \to \infty} \left(r (u - \Delta) + c \right)^{-\frac{\lambda}{2r} + \frac{1}{4}}$$

$$\times \exp\left\{ -(\kappa - \beta) u + \frac{2}{r} \sqrt{\lambda \kappa \left(r (u - \Delta) + c \right)} \right\} \qquad (3.91)$$

για κάποια σταθερά D.

Προφανώς, όταν $\kappa > \beta$, το όριο στην εξίσωση (3.91) είναι μηδέν. Επιπλέον, όταν $\kappa \le \beta$ το όριο στην εξίσωση (3.91) είναι ∞. Έτσι, για μεγάλες τιμές του u, ισχύει ότι $\psi(u) > \varphi(u)$ αν $\kappa > \beta$.

	$r=0.01$	$r=0.02$	$r=0.04$	$r=0.06$	$r=0.08$	$r=0.10$
$\Delta=0$	0.86389 0.87167	0.83902 0.84999	0.80448 0.81930	0.77894 0.79627	0.75816 0.77734	0.74042 0.76106
$\Delta=1$	0.86683 0.87471	0.84435 0.85551	0.81399 0.82917	0.79217 0.81003	0.77477 0.79467	0.76019 0.78172
$\Delta=10$	0.88481 0.89201	0.87439 0.88438	0.86234 0.87553	0.85485 0.87002	0.84945 0.86607	0.84528 0.86301
$\Delta=20$	0.89505 0.90057	0.88976 0.89718	0.88411 0.89353	0.88082 0.89140	0.87855 0.88993	0.87685 0.88882
$\Delta=30$	0.90065 0.90466	0.89770 0.90300	0.89468 0.90127	0.89298 0.90029	0.89183 0.89962	0.89097 0.89912
$\Delta=50$	0.90587 0.90783	0.90482 0.90738	0.90379 0.90693	0.90322 0.90667	0.90284 0.90650	0.90257 0.90637
$\Delta=100$	0.90877 0.90903	0.90867 0.90901	0.90857 0.90899	0.90852 0.90898	0.90848 0.90897	0.90846 0.90897
$\Delta=200$	0.90909 0.90909	0.90909 0.90909	0.90909 0.90909	0.90908 0.90909	0.90908 0.90909	0.90908 0.90909
$\Delta=\infty$	0.90909	0.90909	0.90909	0.90909	0.90909	0.90909

Πίνακας 3.1. Η επίδραση των r και Δ στις ποσότητες $\psi(0)$, $\varphi(0)$ [5]

[5] The Compound Poisson Surplus Model with Interest and Liquid Reserves: Analysis of the Gerber – Shiu Discounted Penalty Function, Jun Cai ▪ Runhuan Feng ▪ Gordon E. Willmot (2007)

	$r=0.01$	$r=0.02$	$r=0.04$	$r=0.06$	$r=0.08$	$r=0.10$
$\Delta=0$	0.24836 0.18050	0.16617 0.11079	0.08950 0.05121	0.05480 0.02739	0.03631 0.01605	0.02545 0.01005
$\Delta=1$	0.25500 0.18706	0.17426 0.11824	0.09714 0.05741	0.06111 0.03196	0.04138 0.01936	0.02952 0.01247
$\Delta=10$	0.31818 0.25094	0.25937 0.20121	0.19426 0.14649	0.15611 0.11489	0.13022 0.09375	0.11128 0.07852
$\Delta=20$	0.37627 0.30739	0.34483 0.28380	0.31126 0.25838	0.29172 0.24353	0.27824 0.23328	0.26812 0.22558
$\Delta=30$	0.40958 0.33591	0.39205 0.32434	0.37408 0.31229	0.36396 0.30544	0.35712 0.30079	0.35206 0.29733
$\Delta=50$	0.44058 0.35800	0.43436 0.35487	0.42820 0.35168	0.42483 0.34990	0.42260 0.34871	0.42096 0.34783
$\Delta=100$	0.45781 0.36636	0.45722 0.36622	0.45664 0.36607	0.45633 0.36599	0.45612 0.36594	0.45597 0.36590
$\Delta=200$	0.45970 0.36676	0.45970 0.36676	0.45970 0.36676	0.45969 0.36676	0.45969 0.36676	0.45968 0.36676
$\Delta=\infty$	0.45972 0.36676	0.45972 0.36676	0.45972 0.36676	0.45972 0.36676	0.45972 0.36676	0.45972 0.36676

Πίνακας 3.2. Η επίδραση των r και Δ στις ποσότητες $\psi(15)$, $\varphi(15)$[6]

[6] The Compound Poisson Surplus Model with Interest and Liquid Reserves: Analysis of the Gerber – Shiu Discounted Penalty Function, Jun Cai ▪ Runhuan Feng ▪ Gordon E. Willmot (2007)

	$r=0.01$	$r=0.02$	$r=0.04$	$r=0.06$	$r=0.08$	$r=0.10$
$\Delta=0$	0.05119 0.02281	0.01857 0.00611	0.00407 0.00080	0.00130 0.00016	0.00052 0.00004	0.00025 0.00002
$\Delta=1$	0.05370 0.02439	0.02018 0.00688	0.00465 0.00097	0.00154 0.00021	0.00063 0.00006	0.00031 0.00002
$\Delta=10$	0.08169 0.04349	0.04208 0.01923	0.01556 0.00545	0.00724 0.00201	0.00387 0.00088	0.00228 0.00043
$\Delta=20$	0.12142 0.07367	0.08415 0.04881	0.04975 0.02663	0.03335 0.01662	0.02394 0.01118	0.01800 0.00791
$\Delta=30$	0.16124 0.10475	0.13635 0.08915	0.11082 0.07291	0.09644 0.06367	0.08672 0.05740	0.07953 0.05274
$\Delta=50$	0.20529 0.13453	0.19644 0.13030	0.18770 0.12601	0.18292 0.12361	0.17974 0.12201	0.17741 0.12082
$\Delta=100$	0.22977 0.14580	0.22892 0.14561	0.22810 0.14541	0.22765 0.14531	0.22736 0.14523	0.22715 0.14518
$\Delta=200$	0.23245 0.14634	0.23244 0.14634	0.23243 0.14634	0.23243 0.14634	0.23243 0.14634	0.23242 0.14634
$\Delta=\infty$	0.23248 0.14634	0.23248 0.14634	0.23248 0.14634	0.23248 0.14634	0.23248 0.14634	0.23248 0.14634

Πίνακας 3.3. Η επίδραση των r και Δ στις ποσότητες $\psi(30)$, $\varphi(30)$[7]

[7] The Compound Poisson Surplus Model with Interest and Liquid Reserves: Analysis of the Gerber – Shiu Discounted Penalty Function, Jun Cai ▪ Runhuan Feng ▪ Gordon E. Willmot (2007)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Το κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου με ρευστοποιημένα αποθεματικά, επενδύσεις και μερίσματα

4.1. Εισαγωγή

Το κεφάλαιο αυτό περιλαμβάνει ρευστοποιημένα αποθέματα, επενδύσεις και μερίσματα στο μοντέλο πλεονάσματος Poisson. Όταν το πλεόνασμα του ασφαλιστή είναι κάτω από ένα ορισμένο επίπεδο, κρατείται ως ρευστοποιημένο απόθεμα. Καθώς το πλεόνασμα φτάνει το προκαθορισμένο επίπεδο, η υπέρβασή του θα επιφέρει τόκο με σταθερό ρυθμό. Σε περίπτωση που το πλεόνασμα εξακολουθεί να ξεπερνά ένα υψηλότερο επίπεδο, η υπέρβασή του από αυτό το υψηλότερο επίπεδο θα καταβληθεί ως μερίσματα στους μετόχους του ασφαλιστή με σταθερό επιτόκιο μερισμάτων ή με τη στρατηγική μερίσματος κατωφλίου. Τα χαμηλότερα και τα υψηλότερα επίπεδα ονομάζονται επίπεδο ρευστοποιημένου αποθέματος και επίπεδο κατωφλίου, αντίστοιχα. Ουσιαστικά, θα εξεταστούν οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ του επιπέδου του ρευστοποιημένου αποθέματος, του επιτοκίου, του επιπέδου κατωφλίου και του επιτοκίου των μερισμάτων στο προτεινόμενο μοντέλο κινδύνου μελετώντας την αναμενόμενη προεξοφλητική συνάρτηση ποινής και την αναμενόμενη παρούσα αξία των μερισμάτων που πληρώθηκαν μέχρι τη στιγμή της χρεοκοπίας.

Σε πρόσφατη μελέτη της θεωρίας κινδύνου, το κλασικό μοντέλο πλεονάσματος της σύνθετης Poisson έχει τροποποιηθεί για να συμπεριλάβει διάφορους οικονομικούς και χρηματοοικονομικούς παράγοντες όπως τόκοι, μερίσματα κ.ο.κ. Οι Sundt και Teugels (1995) μελέτησαν την πιθανότητα χρεοκοπίας στο μοντέλο πλεονάσματος της σύνθετης Poisson με τόκο, στο οποίο υποτίθεται ότι ένας ασφαλιστής θα επενδύσει όλο το θετικό του πλεόνασμα σε μια χρηματοοικονομική αγορά και μπορεί να λάβει τόκους από αυτό.

Στην πράξη, ένας ασφαλιστής δεν επενδύει όλο το θετικό του πλεόνασμα καθώς μπορεί να οφείλει να κρατήσει μέρος του θετικού πλεονάσματος του ως ρευστοποιημένο απόθεμα. Από την άλλη πλευρά, ακόμη και αν ένας ασφαλιστής επενδύσει όλο το θετικό του πλεόνασμα σε ένα ακίνδυνο περιουσιακό στοιχείο (π.χ. έναν τραπεζικό λογαριασμό), σε ορισμένες περιπτώσεις τραπεζικών λογαριασμών, μόνο η υπέρβαση του πλεονάσματος σε ένα ορισμένο επίπεδο μπορεί να επιφέρει τόκο.

Με σκοπό τη δημιουργία ενός πιο ευέλικτου και ελκυστικού μοντέλου, οι Embrechts και Schmidli (1994) πρότειναν ένα γενικό μοντέλο κινδύνου με ένα καθορισμένο επίπεδο ρευστοποιημένου αποθέματος, στο οποίο ένας ασφαλιστής μπορεί είτε να επενδύσει όταν το πλεόνασμα του υπερβαίνει το επίπεδο αυτό, είτε να δανειστεί χρήματα εάν το πλεόνασμα είναι αρνητικό ή ο ασφαλιστής βρίσκεται σε έλλειμμα.

Το 2007, ο Cai et al βασιζόμενος στους Embrechts και Schmidli, θεώρησε ένα ειδικότερο μοντέλο το οποίο προϋποθέτει τα εξής:

- Όταν το πλεόνασμα ενός ασφαλιστή είναι κάτω από ένα ορισμένο επίπεδο $\Delta \geq 0$, διατηρείται ως ρευστοποιημένο απόθεμα.
- Καθώς το πλεόνασμα φτάνει στο επίπεδο Δ, η υπέρβασή του πάνω από το επίπεδο αυτό επιφέρει τόκο με ένταση τόκου r ή σταθερό επιτόκιο $\frac{e^r - 1}{r}$.

Στη συνέχεια, η διαδικασία πλεονάσματος $\{U(t), t \geq 0\}$ της σύνθετης Poisson με το επίπεδο ρευστοποιημένου αποθέματος Δ και την ένταση τόκου r ικανοποιεί τις ακόλουθες στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις:

$$\begin{cases} dU(t) = cdt + rU(t)dt - dZ(t), & U(t) \geq \Delta \\ dU(t) = cdt - dZ(t), & U(t) < \Delta \end{cases} \tag{4.1}$$

με $U(0) = u$.

Στην ενότητα αυτή, θεωρούμε ένα γενικότερο μοντέλο που ενσωματώνει την έννοια της στρατηγικής σταθερού μερίσματος (κατωφλίου). Με βάση το μοντέλο (4.1), υποθέτουμε ότι εάν το πλεόνασμα συνεχίζει να υπερβαίνει ένα υψηλότερο επίπεδο $b \geq \Delta$, η υπέρβασή του πάνω από το b θα καταβληθεί ως μερίσματα στους μετόχους του ασφαλιστή με σταθερό επιτόκιο μερίσματος $a \geq 0$ και δεν θα επιφέρει τόκο στο πλεόνασμα.

Αξίζει να σημειωθεί ότι κάτω από τις ανωτέρω υποθέσεις, η ποσότητα $c + r(b - D)$ είναι το μέγιστο επιτόκιο μερίσματος για τον ασφαλιστή. Ως εκ τούτου, ισχύει ότι:

$$0 \leq \alpha \leq c + r(b - D)$$

Μια τέτοια πολιτική πληρωμής μερισμάτων ονομάζεται στρατηγική κατωφλίου. Συγκεκριμένα, όταν $\alpha = c + r(b - D)$, η στρατηγική κατωφλίου μετατρέπεται στη στρατηγική μερίσματος και το σύνολο του πλεονάσματος πάνω από το επίπεδο b θα καταβληθεί ως μερίσματα στους δικαιούχους.

Έτσι, η σύνθετη Poisson διαδικασία πλεονάσματος $\{U(t),\, t \geq 0\}$ με το επίπεδο ρευστοποιημένου αποθέματος Δ, την ένταση τόκου r, το επίπεδο μερίσματος b και το επιτόκιο μερίσματος a, ικανοποιεί τις ακόλουθες στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις:

$$\left\{\begin{array}{ll} dU(t) = cdt + r\left(b - \Delta\right)dt - adt - dZ(t), & U(t) \geq b \\ dU(t) = cdt + r\left(U\left(t\right) - \Delta\right)dt - dZ(t), & \Delta \leq U(t) < b \\ dU(t) = cdt - dZ(t), & 0 \leq U(t) < \Delta \end{array}\right\} \tag{4.2}$$

με $U(0) = u$.

Το προτεινόμενο μοντέλο κινδύνου (4.2) περιλαμβάνει πολλά μοντέλα κινδύνου ως ειδικές περιπτώσεις. Ενδεικτικά αναφέρονται οι εξής:

1. αν $\Delta=0$ και $b \to \infty$, το μοντέλο (4.2) μετατρέπεται στο μοντέλο πλεονάσματος της Poisson με τόκο, που συζητήθηκε από τους Sundt και Teugels (1995), Cai και Dickson (2002) και πολλούς άλλους
2. αν $\Delta=b$, το μοντέλο (4.2) μετατρέπεται στο μοντέλο πλεονάσματος της σύνθετης Poisson με στρατηγική κατωφλίου, που μελετήθηκε από τους Lin και Pavlova (2006) και τους Gerber και Shiu (2006).
3. αν $\Delta=b$ και $a=c+r(b-D)$, το μοντέλο (4.2) μετατρέπεται στο μοντέλο πλεονάσματος της σύνθετης Poisson με στρατηγική μερίσματος, που μελετήθηκε από τον Lin et al. (2003).
4. αν $\Delta=0$ και $a=c+r(b-D)$, το μοντέλο (4.2) μετατρέπεται στο μοντέλο πλεονάσματος της σύνθετης Poisson με τόκο και στρατηγική μερίσματος, που μελετήθηκε από τον Yuen et al. (2007).

Απώτερος στόχος του κεφαλαίου είναι η μελέτη των αλληλεπιδράσεων του επιπέδου ρευστοποιημένου αποθέματος Δ, της έντασης τόκου r, του επιπέδου μερίσματος b και του επιτοκίου μερίσματος a στο μοντέλο (4.2) εξετάζοντας την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής και την αναμενόμενη παρούσα αξία των μερισμάτων που καταβλήθηκαν μέχρι τη χρεοκοπία.

Ορίζουμε την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu στο μοντέλο (4.2) ως εξής:

$$m(u;\mathbf{b}) = E\left[e^{-\delta T} w\big(U(T-),|U(T)|\big) I\big(T<\infty\big) \big| U(0)=u\right] \tag{4.3}$$

όπου:

$w(x, y),\ x \geq 0,\ y > 0$, μια μη αρνητική συνάρτηση που αντιπροσωπεύει την ποινή λόγω χρεοκοπίας

$\delta \geq 0$ η μεταβλητή του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας T ή η ένταση επιτοκίου που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της παρούσας αξίας της ποινής (η τιμή του δ μπορεί να είναι διαφορετική από την τιμή του r)

$I(A)$ η δείκτρια συνάρτηση ενός συνόλου A.

Το διάνυσμα $\mathbf{b}=(\Delta, b)$ παρατίθεται ως μεταβλητή της συνάρτησης Gerber-Shiu για να υπογραμμιστεί ότι η συνάρτηση εξαρτάται από το επίπεδο ρευστοποιημένου αποθέματος Δ και το επίπεδο κατωφλίου b.

Επιπλέον, ορίζουμε την αναμενόμενη παρούσα αξία των καταβληθέντων μερισμάτων μέχρι τη στιγμή της χρεοκοπίας στο μοντέλο (4.2) με $V(u;\mathbf{b})$, το οποίο μπορεί να εκφραστεί ως

$$V(u;\mathbf{b}) = E\left[e^{-\delta T} l(U(t))dt \middle| U(0) = u\right] \tag{4.4}$$

όπου:

$\delta > 0$ η ένταση επιτοκίου ίση με εκείνη της σχέσης (4.3)

$l(x)$ μια μη αρνητική συνάρτηση που καθορίζει την πληρωμή μερισμάτων ως συνάρτηση του τρέχοντος επιπέδου πλεονάσματος x

Στο μοντέλο (4.2), εύκολα διακρίνεται ότι:

$$l(u) = \begin{cases} a, & u \geq b \\ 0, & u < b \end{cases}$$

Υπάρχει μια ενδιαφέρουσα σχέση μεταξύ της συνάρτησης των Gerber-Shiu και της αναμενόμενης παρούσας αξίας των μερισμάτων που καταβλήθηκαν μέχρι τη στιγμή της χρεοκοπίας σε ορισμένα μοντέλα κινδύνου. Μια τέτοια σύνδεση ονομάζεται ταυτότητα μερισμάτων-ποινής, η οποία δείχνει ότι η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής σε ένα μοντέλο με μερίσματα είναι ίση με το γραμμικό συνδυασμό της αναμενόμενης παρούσας αξίας των καταβληθέντων μερισμάτων μέχρι τη στιγμή της χρεοκοπίας στο μοντέλο και της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής στο αντίστοιχο μοντέλο χωρίς μερίσματα.

Ο Gerber et al (2006) απέδειξε ότι οι ταυτότητες μερισμάτων-ποινής λαμβάνονται για ορισμένες Μαρκοβιανές διαδικασίες κινδύνου υπό τη στρατηγική μερίσματος. Σε αυτή την εργασία, θα δείξουμε ότι οι ταυτότητες μερισμάτων-ποινής μπορούν επίσης να ληφθούν για τη στρατηγική κατωφλίου με ρευστοποιημένα αποθέματα και τόκους.

4.2. Λύσεις για τη συνάρτηση των Gerber-Shiu

Εύκολα διακρίνεται ότι η συνάρτηση Gerber-Shiu $m(u;\mathbf{b})$ ικανοποιεί διαφορετικές ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις όταν το αρχικό πλεόνασμα u ανήκει σε καθένα από τα διαστήματα $[b,\infty)$, $[\Delta,b)$ και $[0,\Delta)$. Έτσι, αντιμετωπίζουμε τη συνάρτηση $m(u;\mathbf{b})$ ως κατακερματισμένη συνάρτηση του αρχικού πλεονάσματος u με την ακόλουθη μορφή:

$$m(u;\mathbf{b}) = \begin{cases} m_3(u;\mathbf{b}),\ u \geq b \\ m_2(u;\mathbf{b}),\ \Delta \leq u < b \\ m_1(u;\mathbf{b}),\ 0 \leq u < \Delta \end{cases} \tag{4.5}$$

Θεώρημα 4.1. *Η συνάρτηση $m(u;\mathbf{b})$ στο μοντέλο (4.2) ικανοποιεί το ακόλουθο σύστημα ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων:*

$$m_3'(u;\mathbf{b}) = \frac{\lambda+\delta}{\tilde{c}} m_3(u;\mathbf{b}) - \frac{\lambda}{\tilde{c}} \left[\int_0^{u-b} m_3(u-y;\mathbf{b})dP(y) + \int_{u-b}^{u-\Delta} m_2(u-y;\mathbf{b})dP(y) \right.$$

$$\left. + \int_{u-\Delta}^{u} m_1(u-y;\mathbf{b})dP(y) + \zeta(u) \right],\ u \geq b \tag{4.6}$$

$$m_2'(u;\mathbf{b}) = \frac{\lambda+\delta}{r(u-\Delta)+c} m_2(u;\mathbf{b}) - \frac{\lambda}{r(u-\Delta)+c} \left[\int_0^{u-\Delta} m_2(u-y;\mathbf{b})dP(y) \right.$$

$$\left. + \int_{u-\Delta}^{u} m_1(u-y;\mathbf{b})dP(y) + \zeta(u) \right],\ \Delta \leq u < b \tag{4.7}$$

$$m_1'(u;\mathbf{b}) = \frac{\lambda+\delta}{c} m_1(u;\mathbf{b}) - \frac{\lambda}{c} \left[\int_0^{u} m_1(u-y;\mathbf{b})dP(y) + \zeta(u) \right],\ 0 \leq u < \Delta \tag{4.8}$$

όπου**:**

$$\tilde{c} = c + r(b-D) - a$$

$$\zeta(u) = \int_u^{\infty} w(u, y-u)dP(y)$$

Απόδειξη.

Στην περίπτωση που $u \geq b$, λαμβάνοντας υπόψη το χρόνο και το μέγεθος της πρώτης απαίτησης και εφαρμόζοντας το νόμο της ολικής πιθανότητας προκύπτει ότι:

$$m_3(u;\mathbf{b}) = \int_u^{\infty} \lambda e^{-(\lambda+\delta)\,t} \gamma_3(u + \tilde{c}t;\mathbf{b})\,dt,\ u \geq b \qquad (4.9)$$

όπου:

$$\gamma_3(u;\mathbf{b}) = \int_0^{u-b} m_3(u-y;\mathbf{b})\,dP(y) + \int_{u-b}^{u-\Delta} m_2(u-y;\mathbf{b})\,dP(y) + \int_{u-b}^{u} m_1(u-y;\mathbf{b})\,dP(y) + \zeta(u),\ u \geq b$$

Θέτοντας $x = u + \tilde{c}t$ στη σχέση (4.9) και κατόπιν παραγωγίζοντας ως προς u προκύπτει η σχέση (4.6).

Στην περίπτωση που $\Delta \leq u < b$:

έστω t_2 ο χρόνος χτυπήματος του επιπέδου κατωφλίου b, εάν το χτύπημα προκύψει πριν από την άφιξη της απαίτησης και

$h_2(t)$ το συσσωρευμένο πλεόνασμα στο χρόνο t με $t \leq t_2$. Τότε:

$$t_2 = \frac{1}{r}\ln\frac{r(b-\Delta)+c}{r(u-\Delta)+c}$$

$$h_2(t) = \Delta + (u-\Delta)e^{rt} + c\bar{s}_{\overline{t|}}^{(r)}$$

όπου: $\bar{s}_{\overline{t|}}^{(r)} = \dfrac{e^{rt}-1}{r}$

Λαμβάνοντας υπόψη το χρόνο και το μέγεθος της πρώτης απαίτησης προκύπτει:

$$m_2(u;\mathbf{b}) = \int_0^{t_2} \lambda e^{-(\lambda+\delta)\,t} \gamma_2(h_2(t);\mathbf{b})\,dt + \int_{t_2}^{\infty} \lambda e^{-(\lambda+\delta)\,t} \gamma_3(b + \tilde{c}(t-t_2);\mathbf{b})\,dt \qquad (4.10)$$

όπου

$$\gamma_2(u;\mathbf{b})=\int_0^{u-\Delta} m_2(u-y;\mathbf{b})dP(y)+\int_{u-\Delta}^{u} m_1(u-y;\mathbf{b})dP(y)+\zeta(u)$$

Θέτοντας $x=h_2(t)$ στο πρώτο ολοκλήρωμα και $x=b+\tilde{c}(t-t_2)$ στο δεύτερο ολοκλήρωμα της σχέσης (4.10) και κατόπιν παραγωγίζοντας ως προς u προκύπτει η σχέση (4.7).

Στην περίπτωση που $0\le u<\Delta$:

έστω t_0 ο χρόνος χτυπήματος του επιπέδου κατωφλίου Δ, εάν το χτύπημα προκύψει πριν από την άφιξη της απαίτησης

t_2 ο χρόνος χτυπήματος του επιπέδου κατωφλίου b, εάν το χτύπημα προκύψει πριν από την άφιξη της απαίτησης και

$h_1(t)$ το συσσωρευμένο πλεόνασμα στο χρόνο t με $t_0\le t\le t_1$. Τότε:

$$t_0=\frac{\Delta-u}{c}$$

$$t_1=\frac{\Delta-u}{c}+\frac{\ln\left\{\dfrac{r(b-\Delta)+c}{c}\right\}}{r}$$

$$h_2(t)=\Delta+c\bar{s}_{\overline{t-t_0}|}^{(r)}$$

Επομένως, ομοίως με τη σχέση (4.10), λαμβάνοντας υπόψη το χρόνο και το μέγεθος της πρώτης απαίτησης και στη συνέχεια αλλάζοντας τις μεταβλητές, προκύπτει η (4.8).

Από τη σχέση (4.5) το σύστημα των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων του θεωρήματος (4.1) μπορεί να μετατραπεί ως εξής:

$$m'(u;\mathbf{b})=\frac{\lambda+\delta}{\tilde{c}}m(u;\mathbf{b})-\frac{\lambda}{\tilde{c}}\left[\int_0^u m(u-y;\mathbf{b})dP(y)+\zeta(u)\right],\ u\geq b \tag{4.11}$$

$$m'(u;\mathbf{b})=\frac{\lambda+\delta}{r(u-\Delta)+c}m(u;\mathbf{b})-\frac{\lambda}{r(u-\Delta)+c}\left[\int_0^u m(u-y;\mathbf{b})dP(y)+\zeta(u)\right],\ \Delta\leq u<b \tag{4.12}$$

$$m'(u;\mathbf{b})=\frac{\lambda+\delta}{c}m(u;\mathbf{b})-\frac{\lambda}{c}\left[\int_0^u m(u-y;\mathbf{b})dP(y)+\zeta(u)\right],\ 0\leq u<\Delta$$

(4.13)

Η λύση της $m(u;\mathbf{b})$ από το σύστημα των μη ομογενών ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων (4.11)-(4.13) προκύπτει επιλύοντας αρχικά τις εξισώσεις (4.12) και (4.13).

Λήμμα 4.1. *Η σημαντική λύση της ομογενούς ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης*

$$v_1'(u)=\frac{\lambda+\delta}{c}v_1(u)-\frac{\lambda}{c}\int_0^u v_1(u-y)dP(y),\ u\geq 0 \tag{4.14}$$

δίνεται από την εξίσωση

$$v_1(u)=\kappa_1\left[1-\psi(u)\right]e^{\rho_1 u},\ u\geq 0 \tag{4.15}$$

όπου $\kappa_1\neq 0$ *μια αυθαίρετη σταθερά και* $\psi(u)$ *η λύση της παρακάτω ανανεωτικής εξίσωσης:*

$$\psi'(u)=\frac{\lambda}{\hat{c}}\int_0^u\left[1-\psi(u-y)\right]d\hat{P}(y)-\frac{\lambda}{\hat{c}}\left[1-\psi(u)\right],\ u\geq 0$$

με $\hat{c}=\dfrac{c}{\tilde{p}(\rho_1)}$, $d\hat{P}(y)=e^{-\rho_1 y}dP(y)$ *και* ρ_1 *η μη αρνητική ρίζα της θεμελιώδους εξίσωσης του Lundberg:*

$$cs+\lambda\tilde{p}(s)-(\lambda+\delta)=0$$

Απόδειξη. Bühlmann (1970, Section 6.4.9).

Λήμμα 4.2. *Η σημαντική λύση της ομογενούς ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης*

$$v_2'(u)=\frac{\lambda+\delta}{r(u-\Delta)+c}v_2(u)-\frac{\lambda}{r(u-\Delta)+c}\int_0^u v_2(u-y)dP(y),\ \Delta\le u<b \qquad (4.16)$$

δίνεται από την εξίσωση

$$v_2(u)=l(u)+\int_0^u K(u,s)l(s)ds,\ u\ge\Delta \qquad (4.17)$$

όπου

$$l(u)=\frac{\kappa_2}{r(u-\Delta)+c} \qquad (4.18)$$

$$K(u,s)=\sum_{m=1}^{\infty}k_m(u,s),\ 0\le s<u$$

$$k_m(u,s)=\int_s^u k(u,t)k_{m-1}(t,s)dt,\ m=2,3,\ldots,\ 0\le s<u$$

με $\kappa_2\ne 0$ *μια αυθαίρετη σταθερά και*

$$k_1(u,s)=k(u,s)=\frac{r+\delta+\lambda\bar{P}(u-s)}{r(u-\Delta)+c}$$

Απόδειξη. Cai and Dickson (2002) Section 2

Επιπλέον, εύκολα αποδεικνύεται ότι η ολοκληρο-διαφορική εξίσωση (4.11) μετατρέπεται σε μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση υπό ορισμένες συνθήκες.
Στο σημείο αυτό, υπενθυμίζουμε ότι ο μετασχηματισμός Dickson-Hipp για μια μη αρνητική συνάρτηση f οριζεται ως:

$$\mathcal{T}_s f(u)=e^{su}\int_u^{\infty}e^{-sy}f(y)dy,\ u\ge 0,\ s\ge 0$$

με την προϋπόθεση ότι $\mathcal{T}_s f(u)<\infty,\ u\ge 0,\ s\ge 0$

Επίσης, συμβολίζουμε με $\tilde{f}$ το μετασχηματισμό Laplace μιας μη αρνητικής συνάρτησης f και θεωρούμε ότι $A(x)*B(x)$ είναι η συνέλιξη των $A(x)$ και $B(x)$ που ορίζεται ως:

$$A(x)*B(x)=\int_0^x A(x)B(x-y)dy$$

Σημειώνεται ότι για κάθε οριοθετημένη μη αρνητική συνάρτηση, ο μετασχηματισμός Dickson-Hipp και ο μετασχηματισμός Laplace πάντα υπάρχουν. Περισσότερες ιδιότητες του Dickson-Hipp μετασχηματισμού μπορούν να βρεθούν στους Li και Garrido (2004) και στους Gerber and Shiu (2005).

Λήμμα 4.3. *Αν η συνάρτηση είναι οριοθετημένη, τότε η ολοκληρο-διαφορική εξίσωση (4.11) μπορεί να εκφραστεί ως:*

$$m(u;\mathbf{b})=\frac{\lambda}{\tilde{c}}\int_0^u m(u-y;\mathbf{b})\mathcal{T}_\rho p(y)dy+\frac{\lambda}{\tilde{c}}\mathcal{T}_\rho\zeta(u),\ u\geq b \tag{4.19}$$

όπου ρ η μη αρνητική ρίζα της θεμελιώδους εξίσωσης του Lundberg:

$$\frac{\lambda}{\tilde{c}}\tilde{p}(s)=\frac{\lambda+\delta}{\tilde{c}}-s \tag{4.20}$$

Απόδειξη. Gerber and Shiu (1998).

Επιπλέον, δηλώνουμε τη συνάρτηση Gerber-Shiu του μοντέλου (4.1) με $m(u;\Delta)$.

Ας σημειωθεί ότι η $m(u;\Delta)$ είναι μια ειδική περίπτωση της $m(u;\mathbf{b})$ όταν $b\to\infty$ και οι λύσεις για τη $m(u;\Delta)$ προκύπτουν από τους Cai et al (2007). Η ολοκληρο-διαφορική εξίσωση για τη $m(u;\Delta)$ εκφράζεται συναρτήσει του $m(u;\mathbf{b})$ ως εξής:

$$m(u;\Delta)=\begin{cases} m_2(u;\Delta),\ u\leq\Delta \\ m_1(u;\Delta),\ 0\leq u<\Delta \end{cases}$$

Θεώρημα 4.2. *Η συνάρτηση των Gerber-Shiu του μοντέλου (4.2) μπορεί να εκφραστεί αναλυτικά ως:*

$$m_1(u;\mathbf{b}) = m_1(u;\Delta) + \eta_1 v_1(u),\ 0 \le u < \Delta$$

$$m_2(u;\mathbf{b}) = m_2(u;\Delta) + \eta_2 v_2(u),\ \Delta \le u < b$$

$$m_3(u;\mathbf{b}) = \frac{\tilde{c}}{\tilde{c}-\lambda}\int_0^{u-b} h(u-y)dG(y) + h(u),\ u \ge b$$

όπου οι συναρτήσεις $v_1(u)$ και $v_2(u)$ δίνονται στις σχέσεις (4.15), (4.17) αντίστοιχα και οι σταθερές η_1 και η_2 δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\eta_2 = \frac{\int_0^{b-\Delta} m_2(b-y;\Delta)g(y)dy + \int_{b-\Delta}^{b} m_1(b-y;\Delta)g(y)dy + \frac{\lambda}{\tilde{c}}\mathcal{T}_\rho\zeta(b) - m_2(b;\Delta)}{v_2(b) - \int_0^{b-\Delta} v_2(b-y)g(y)dy - \left(\frac{v_2(\Delta)}{v_1(\Delta)}\right)\int_{b-\Delta}^{b} v_1(b-y)g(y)dy} \tag{4.21}$$

$$\eta_1 = \frac{v_2(\Delta)}{v_1(\Delta)}\eta_2 \tag{4.22}$$

με

$$g(y) = \frac{\lambda}{\tilde{c}}\mathcal{T}_\rho p(y)$$

$$h(y) = \int_{u-b}^{u-\Delta} m_2(u-y;\mathbf{b})g(y)dy + \int_{u-\Delta}^{u} m_1(u-y;\mathbf{b})g(y)dy + \frac{\lambda}{\tilde{c}}\mathcal{T}_\rho\zeta(u)$$

$$\bar{G}(y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\tilde{c}}\right)\left(\frac{\lambda}{\tilde{c}}\right)^n \left\{\mathcal{T}_\rho\bar{P}\right\}^{*n}(y) \tag{4.23}$$

όπου ρ η μοναδική μη αρνητική ρίζα της εξίσωσης του Lundberg (4.20) και οι συναρτήσεις $m_1(u;\Delta)$ και $m_2(u;\Delta)$ δίνονται από τις σχέσεις (2.14) και (2.17) of του Cai et al (2007).

Απόδειξη.

Από τη θεωρία των ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων είναι γνωστό ότι εκτός από οριακούς περιορισμούς, κάθε λύση σε μια μη ομοιογενή ολοκληρο-διαφορική εξίσωση είναι ένας γραμμικός συνδυασμός μιας μη τετριμμένης συγκεκριμένης λύσης στην εξίσωση και μιας θεμελιώδους λύσης στην αντίστοιχη ομοιογενή ολοκληρο-διαφορική εξίσωση. Στη συνέχεια, οι οριακές συνθήκες που επιβάλλονται στην ολοκληρο-διαφορική εξίσωση καθορίζουν μια μοναδική λύση. Επομένως, έχουμε ότι:

$$m_1(u;\mathbf{b}) = m_1(u;\Delta) + \eta_1 v_1(u),\ 0 \le u < \Delta \tag{4.24}$$

όπου η_1 μια σταθερά που προσδιορίζεται και $v_1(u)$ ποσότητα που δίνεται από τη σχέση (4.15).

Ομοίως:

$$m_2(u;\mathbf{b}) = m_2(u;\Delta) + \eta_2 v_2(u),\ \Delta \le u < b \tag{4.25}$$

όπου η_2 μια σταθερά που προσδιορίζεται και $v_2(u)$ ποσότητα που δίνεται από τη σχέση (4.17).

Επιπλέον, από το Λήμμα 4.3 η ποσότητα $m_3(u;\mathbf{b})$ μπορεί να γραφεί ως:

$$m_3(u;\mathbf{b}) = \int_0^{u-b} m_3(u-y)\, g(y)\, dy + h(u),\ u \ge b \tag{4.26}$$

Μετατρέπουμε τη $m_3(u;\mathbf{b})$ σε μια ανανεωτική εξίσωση με ένα μετασχηματισμό μετατόπισης και ως εκ τούτου προκύπτει ότι:

$$m_3(u;\mathbf{b}) = \frac{\tilde{c}}{\tilde{c}-\lambda} \int_0^{u-b} h(u-y)\, dG(y) + h(u),\ u \ge b$$

Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη, πρέπει να προσδιορίσουμε τις σταθερές η_1 και η_2 στις σχέσεις (4.24) και (4.25) αντίστοιχα.

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, η λύση σε μια ολοκληρο-διαφορική εξίσωση καθορίζεται με μοναδικό τρόπο από μια οριακή συνθήκη.

Θέτοντας $u=b$ στην (4.6) και $u \to b$ στην (4.7), προκύπτει ότι:

$$m_2\left(b;\mathbf{b}\right)=m_3\left(b;\mathbf{b}\right) \tag{4.27}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (4.24), (4,26) και (4.27) προκύπτει:

$$m_2\left(\Delta;\mathbf{b}\right)+\eta_2 v_2\left(b\right)=\int_0^{b-\Delta} m_2\left(b-y;\Delta\right)g\left(y\right)dy+\eta_2\int_0^{b-\Delta} v_2\left(b-y\right)g\left(y\right)dy$$

$$+\int_{b-\Delta}^{b} m_1\left(b-y;\Delta\right)g\left(y\right)dy+\eta_1\int_{b-\Delta}^{b} v_1\left(b-y\right)g\left(y\right)dy+\frac{\lambda}{\tilde{c}}\mathcal{T}_\rho\zeta\left(b\right) \tag{4.28}$$

Θέτοντας $u=\Delta$ στην (4.7) και $u \to \Delta$ στην (4.8), προκύπτει ότι:

$$m_2\left(\Delta;\mathbf{b}\right)=m_3\left(\Delta;\mathbf{b}\right) \tag{4.29}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (4.24), (4,26), (4.29) και την προϋπόθεση συνέχειας ότι $m_1\left(\Delta;\Delta\right) = m_2\left(\Delta;\Delta\right)$ προκύπτει:

$$\eta_1 v_1\left(\Delta\right)=\eta_2 v_2\left(\Delta\right) \tag{4.30}$$

Λύνοντας τις σχέσεις (4.28) και (4.30) για τις η_1,η_2 προκύπτουν οι σχέσεις (4.21) και (4.22).

Παρατήρηση 4.1. *Μπορούμε να δούμε από την (4.21) ότι ο παρονομαστής του η_2 περιέχει τον κοινό παράγοντα κ_2, ο οποίος απαλείφεται με τον ίδιο παράγοντα κ_2 στο $v_2\left(u\right)$ όπως φαίνεται στη σχέση (4.17). Ομοίως, η ποσότητα $v_1\left(u\right)$ και ο παρονομαστής του η_1 μοιράζονται τον κοινό παράγοντα κ_1, ο οποίος απαλείφεται χωρίς να χρειάζεται να προσδιοριστεί. Επομένως κάθε στοιχείο της $m\left(u;b\right)$ έχει εκφραστεί ρητά στο Θεώρημα 4.2.*

4.3. Λύσεις για τα μερίσματα που καταβλήθηκαν μέχρι να επέλθει η χρεοκοπία

Στη μελέτη των στρατηγικών μερίσματος και κατωφλίου για τις πληρωμές μερισμάτων, η αναμενόμενη παρούσα αξία των μερισμάτων που καταβλήθηκαν μέχρι τη στιγμή της χρεοκοπίας έχει αντλήσει αναζωπυρωμένο ενδιαφέρον για την πρόσφατη βιβλιογραφία. Ο Gerber και ο Shiu (2006) δίνουν μια περιεκτική συζήτηση για τις στρατηγικές μερισμάτων στο σύνθετο μοντέλο πλεονάσματος Poisson με στρατηγικές κατωφλίου και μερίσματος. Θα ακολουθήσουμε την προσέγγιση των πιθανοτήτων η οποία χρησιμοποιήθηκε πρώτη φορά για τα μερίσματα που καταβλήθηκαν μέχρι τη στιγμή της χρεοκοπίας από τον Bühlmann (1970).

Δεδομένου ότι τα μερίσματα που καταβάλλονται μέχρι τη χρεοκοπία εξαρτώνται από το αρχικό πλεόνασμα u και ομοίως από τη $m(u;\mathbf{b})$, γράφουμε τη $V(u;\mathbf{b})$ ως:

$$V(u;\mathbf{b})=\begin{cases} V_3(u;\mathbf{b}),\ u\geq b \\ V_2(u;\mathbf{b}),\ \Delta\leq u<b \\ V_1(u;\mathbf{b}),\ 0\leq u<\Delta \end{cases}$$

Θεώρημα 4.3. *Τα μερίσματα που έχουν πληρωθεί μέχρι τη στιγμή της χρεοκοπίας στο μοντέλο (4.2) ικανοποιούν τις ακόλουθες σχέσεις:*

$$V_3'(u;\mathbf{b})=\frac{\lambda+\delta}{\tilde{c}}V_3(u;\mathbf{b})-\frac{\lambda}{\tilde{c}}\int_0^{u-b}V_3(u-y;\mathbf{b})dP(y)$$

$$-\frac{\lambda}{\tilde{c}}\int_{u-b}^{u-\Delta}V_2(u-y;\mathbf{b})dP(y)-\frac{\lambda}{\tilde{c}}\int_{u-\Delta}^{u}V_1(u-y;\mathbf{b})dP(y)-\frac{a}{\tilde{c}},\ u\geq b \tag{4.32}$$

$$V_2'(u;\mathbf{b})=\frac{\lambda+\delta}{r(u-\Delta)+c}V_2(u;\mathbf{b})-\frac{\lambda}{r(u-\Delta)+c}\int_0^{u-\Delta}V_2(u-y;\mathbf{b})dP(y)$$

$$-\frac{\lambda}{r(u-\Delta)+c}\int_{u-\Delta}^{u}V_1(u-y;\mathbf{b})dP(y),\ \Delta\leq u<b \tag{4.33}$$

$$V_1'(u;\mathbf{b})=\frac{\lambda+\delta}{c}V_1(u;\mathbf{b})-\frac{\lambda}{c}\int_0^{u}V_1(u-y;\mathbf{b})dP(y),\ 0\leq u<\Delta \tag{4.34}$$

Απόδειξη.

Στην περίπτωση όπου $u \geq b$, τα μερίσματα αρχίζουν να πληρώνονται αμέσως. Ως εκ τούτου, στο τέλος ενός σύντομου χρονικού διαστήματος μήκους t, ανεξάρτητα από το τι συμβαίνει, υπάρχουν πάντα εγγυημένες προεξοφλημένες μερισματικές πληρωμές ίσες με $a\,\bar{a}_{\overline{t|}}^{(\delta)}$, όπου $\bar{a}_{\overline{t|}}^{(\delta)} = \dfrac{1-e^{-\delta t}}{\delta}$.

Δεδομένου ότι ο χρόνος άφιξης ακολουθεί την εκθετική κατανομή, λέμε ότι με πιθανότητα $1-\lambda t$, δεν θα υπάρχει καμία απαίτηση μέσα στο μικρό διάστημα παρατήρησης t, στην περίπτωση όπου το πλεόνασμα αυξάνεται με γραμμικό ρυθμό $u+ct$. Διαφορετικά, το πλεόνασμα πέφτει σε διαφορετικά τμήματα ανάλογα με το μέγεθος της πρώτης απαίτησης. Έτσι, ισχύει ότι:

$$V_3(u;\mathbf{b}) = a\,\bar{a}_{\overline{t|}}^{(\delta)} + (1-\lambda t)e^{-\delta t}V_3(u+\tilde{c}t;\mathbf{b}) + \lambda t e^{-\delta t}\xi_3(u+\tilde{c}t;\mathbf{b}) + o(t)$$

όπου:

$$\xi_3(u) = \int_0^{u-b} V_3(u-y;\mathbf{b})\,dP(y) + \int_{u-b}^{u-\Delta} V_2(u-y;\mathbf{b})\,dP(y) + \int_{u-\Delta}^{u} V_1(u-y;\mathbf{b})\,dP(y)$$

Αντικαθιστούμε το $e^{-\delta t}$ με $1-\delta t+o(t)$, το $\bar{a}_{\overline{t|}}^{(\delta)}$ με $t+o(t)$ και αναδιατάσσουμε την εξίσωση. Στη συνέχεια, διαιρώντας και τις δύο πλευρές με ct και θεωρώντας $t \to 0$ οδηγούμαστε στη σχέση (4.32).

Στην περίπτωση όπου $\Delta \leq u < b$, σε σύντομο χρονικό διάστημα μήκους t, η διαδικασία του πλεονάσματος παραμένει εντός του δεύτερου τομέα όπου συγκεντρώνονται τόκοι. Μια από τις τέσσερις περιπτώσεις θα εμφανιστεί. Αρχικά, με πιθανότητα $1-\lambda t$, δεν υπάρχει καμία απαίτηση και το πλεόνασμα αυξάνεται με ρυθμό $\Delta + (u-\Delta)e^{rt} + c\bar{s}_{\overline{t|}}^{(r)}$.

Μια ζημιά από την οποία το πλεόνασμα μπορεί να μειωθεί σε $\Delta+(u-\Delta)e^{rt}+c\overline{s}_{\overline{t}|}^{(r)}-y$ μπορεί να συμβεί με πιθανότητα λt και η νέα θέση της διαδικασίας είναι είτε στον πρώτο είτε στο δεύτερο τομέα. Τέλος, κάθε απαίτηση με μέγεθος μεγαλύτερο από $\Delta+(u-\Delta)e^{rt}+c\overline{s}_{\overline{t}|}^{(r)}$ χρεοκοπεί τη διαδικασία πλεονάσματος, περίπτωση στην οποία δεν έχει καταβληθεί μέρισμα.

Επιπλέον, υπάρχει μια αμελητέα πιθανότητα να επέλθουν περισσότερες από μία απαιτήσεις και ως εκ τούτου, υποδηλώνεται με όρους $o(t)$. Έτσι, μεταφράζοντας σε μαθηματικούς όρους από το νόμο της ολικής πιθανότητας, έχουμε:

$$\begin{aligned}V_2(u;\mathbf{b}) &= (1-\lambda t)e^{-\delta t}V_2\left(\Delta+(u-\Delta)e^{rt}+c\overline{s}_{\overline{t}|}^{(r)};\mathbf{b}\right)\\ &+\lambda t e^{-\delta t}\int_0^{u-\Delta} V_2\left(\Delta+(u-\Delta)e^{rt}+c\overline{s}_{\overline{t}|}^{(r)}-y;\mathbf{b}\right)dP(y)\\ &+\lambda t e^{-\delta t}\int_{u-\Delta}^{u} V_1\left(\Delta+(u-\Delta)e^{rt}+c\overline{s}_{\overline{t}|}^{(r)}-y;\mathbf{b}\right)dP(y)+o(t)\end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε το $e^{-\delta t}$ με $1-\delta t+o(t)$, το $\Delta+(u-\Delta)e^{rt}+c\overline{s}_{\overline{t}|}^{(r)}$ με $u+\left[r(u-\Delta)+c\right]t+o(t)$ και αναδιατάσσουμε την εξίσωση. Στη συνέχεια, διαιρώντας και τις δύο πλευρές με $\left[r(u-\Delta)+c\right]t$ και θεωρώντας $t\to 0$ οδηγούμαστε στη σχέση (4.33).

Ομοίως, στην περίπτωση $0\le u<\Delta$, σε σύντομο χρονικό διάστημα μήκους t, από το νόμο της ολικής πιθανότητας, έχουμε:

$$V_2(u;\mathbf{b})=(1-\lambda t)e^{-\delta t}V_1(u+\tilde{c}t;\mathbf{b})+\lambda t\int_0^{u+\tilde{c}t} V_1(u+\tilde{c}t-y;\mathbf{b})dP(y)+o(t)$$

Αναδιατάσσοντας την εξίσωση και στη συνέχεια, διαιρώντας και τις δύο πλευρές με ct και θεωρώντας $t\to 0$ οδηγούμαστε στη σχέση (4.34).

Με τη χρήση της σχέσης (3.31), το σύστημα των εξισώσεων (3.32) – (3.34) μπορεί να γραφεί:

$$V'(u;\mathbf{b}) = \frac{\lambda+\delta}{\tilde{c}} V(u;\mathbf{b}) - \frac{\lambda}{\tilde{c}} \int_0^u V(u-y;\mathbf{b}) dP(y) - \frac{a}{\tilde{c}},\ u \geq b \tag{4.35}$$

$$V'(u;\mathbf{b}) = \frac{\lambda+\delta}{r(u-\Delta)+c} V(u;\mathbf{b}) - \frac{\lambda}{r(u-\Delta)+c} \int_0^u V(u-y;\mathbf{b}) dP(y),\ \Delta \leq u < b \tag{4.36}$$

$$V'(u;\mathbf{b}) = \frac{\lambda+\delta}{c} V(u;\mathbf{b}) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u V(u-y;\mathbf{b}) dP(y),\ 0 \leq u < \Delta \tag{4.37}$$

Θεώρημα 4.4. *Η ολοκληρο-διαφορική εξίσωση της σχέσης (4.35) μπορεί να εκφραστεί ως:*

$$V(u;\mathbf{b}) = \frac{\lambda}{\tilde{c}} \int_0^u V(u-y;\mathbf{b}) \mathcal{T}_\rho p(y) dy + \frac{\lambda}{\tilde{c}p},\ u \geq b \tag{4.38}$$

όπου ρ η μοναδική θετική ρίζα της εξίσωσης του Lundberg (4.20)

Απόδειξη.

Επειδή ισχύει ότι

$$V(u;\mathbf{b}) = E\left[\int_0^T e^{-\delta t} l(U(t)) dt \middle| U(0)=u\right] \leq E\left[a\int_0^T e^{-\delta t} dt \middle| U(0)=u\right] = \frac{a}{\delta} E\left[1-e^{-\delta t} \middle| U(0)=u\right] \leq \frac{a}{\delta}$$

πρέπει να έχουμε ότι $\mathcal{T}_s V(u;\mathbf{b}) \leq \frac{a}{s\delta} < \infty,\ s>0$, που με τη σειρά του συνεπάγεται ότι $\mathcal{T}_s\{V * p\}(u;\mathbf{b}) < \infty$.

Στη συνέχεια, η απόδειξη ακολουθεί το Λήμμα 4.3, αντικαθιστώντας τη $m(u)$ με $V(u;\mathbf{b})$ και επαναπροσδιορίζοντας τη $\zeta(u) = \frac{a}{\lambda}$.

Επομένως, $\mathcal{T}_\rho \zeta(u) = \frac{a}{\lambda\rho}$. Συνδέοντάς το με τη σχέση (4.19) λαμβάνουμε την επιθυμητή εξίσωση.

Θεώρημα 4.5. *Τα μερίσματα που έχουν καταβληθεί μέχρι τη στιγμή της χρεοκοπίας στο μοντέλο (4.2) μπορούν να εκφραστούν ρητά ως:*

$$V_1(u;\mathbf{b}) = d_1 v_1,\ 0 \le u < \Delta \tag{4.39}$$

$$V_2(u;\mathbf{b}) = d_2 v_2,\ \Delta \le u < b \tag{4.40}$$

$$V_3(u;\mathbf{b}) = \frac{\lambda}{\tilde{c}-\lambda}\int_0^{u-b} f(u-y)\,dG(y) + f(y),\ u \ge b \tag{4.41}$$

όπου

οι ποσότητες v_1, v_2 δίνονται από τις σχέσεις (4.15) και (4.17) αντίστοιχα

η συνάρτηση $G(y)$ ορίζεται από τη σχέση (4.23)

$$d_1 = \frac{a v_2(\Delta)}{\tilde{c}\rho\xi(\Delta)} \tag{4.42}$$

$$d_2 = \frac{a v_1(\Delta)}{\tilde{c}\rho\xi(\Delta)} \tag{4.43}$$

$$\xi(\Delta) = v_1(\Delta)v_2(b) - v_1(\Delta)\int_0^{b-\Delta} v_2(b-y)g(y)\,dy - v_2(\Delta)\int_{b-\Delta}^{b} v_1(b-y)g(y)\,dy$$

$$f(y) = \int_{u-b}^{u-\Delta} V_2(u-y;\mathbf{b})g(y)\,dy + \int_{u-\Delta}^{u} V_1(u-y;\mathbf{b})g(y)\,dy + \frac{a}{\tilde{c}\rho}$$

Απόδειξη.

Ομοίως με την (4.6), η εξίσωση (4.32) μπορεί να γραφτεί ως μια ανανεωτική εξίσωση της μορφής:

$$V_3(u;\mathbf{b}) = \int_0^{u-b} V_3(u-y;\mathbf{b})g(y)\,dy + f(y),\ u \ge b$$

Έτσι, η λύση για την $V_3(u;\mathbf{b})$ δίνεται από την εξίσωση (4.41).

- Αν θέσουμε στην (4.32) και στην (4.33), προκύπτει η πρώτη οριακή συνθήκη:

$$V_2(b;\mathbf{b}) = V_3(b;\mathbf{b}) \tag{4.44}$$

- Αν θέσουμε $u=\Delta$ στην (4.33) και $u\to\Delta$ στην (4.34), προκύπτει η δεύτερη οριακή συνθήκη:

$$V_1(\Delta;\mathbf{b})=V_2(\Delta;\mathbf{b}) \tag{4.45}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (4.38), (4.39), (4.40) και (4.44) προκύπτει ότι:

$$d_2 v_2(b)=d_2\int_0^{b-\Delta} v_2(b-y)g(y)dy+d_1\int_{b-\Delta}^{b} v_1(b-y)g(y)dy+\frac{a}{\tilde{c}\rho}$$

Επίσης, από τις σχέσεις (4.38), (4.39) και (4.45) προκύπτει ότι:

$$d_1 v_1(\Delta)=d_2 v_2(\Delta)$$

Λύνοντας τις γραμμικές εξισώσεις ως προς d_1 και d_2 προκύπτουν οι σχέσεις (4.42) και (4.43).

4.4. Ταυτότητες μερισμάτων ποινής

Η ταυτότητα μερίσματος ποινής είναι μια αναπαράσταση που εξηγεί ότι η διαφορά της αναμενόμενης προεξοφλημένης ποινής σε ένα μοντέλο με ή χωρίς μερίσματα οφείλεται στα αναμενόμενα προεξοφλημένα μερίσματα που καταβλήθηκαν μέχρι τη χρεοκοπία. Ο Gerber et al (2006) έδειξε ότι η ταυτότητα ισχύει για ορισμένες Μαρκοβιανές διαδικασίες κινδύνου υπό τη στρατηγική σταθερού μερίσματος. Σε αυτήν την ενότητα, δείχνουμε ότι η ταυτότητα εξακολουθεί να ισχύει για τη διαδικασία κινδύνου (4.2) στο πλαίσιο της στρατηγικής κατωφλίου.

Θεώρημα 4.6. *Οι ταυτότητες μερισμάτων ποινής στο μοντέλο (4.2) δίνονται από τις σχέσεις:*

$$m_2(u;\mathbf{b}) = m_2(u;\Delta) + D_2 V_2(u;\mathbf{b}),\ \Delta \le u < b \tag{4.46}$$

$$m_1(u;\mathbf{b}) = m_1(u;\Delta) + D_1 V_1(u;\mathbf{b}),\ 0 \le u < \Delta \tag{4.47}$$

όπου:

$$D_2 = \frac{\tilde{c}\rho}{a}\left[\int_0^{b-\Delta} m_2(b-y;\Delta)g(y)dy + \int_{b-\Delta}^{b} m_1(b-y;\Delta)g(y)dy + \frac{\lambda}{\tilde{c}}\mathcal{T}_\rho\zeta(b) - m_2(b;\Delta)\right]$$

$$D_1 = \frac{m_2(\Delta;\mathbf{b}) - m_1(\Delta;\Delta)}{V_1(\Delta;\mathbf{b})}$$

Απόδειξη.

Η ταυτότητα (4.46) μπορεί να προκύψει από τη σύγκριση των σχέσεων (4.21) και (4.33). Από τις σχέσεις (4.24) και (4.29) ισχύει:

$$\eta_1 = \frac{m_2(\Delta;\mathbf{b}) - m_1(\Delta;\Delta)}{v_1(\Delta)}$$

Έτσι η ποσότητα $m_1(u;\mathbf{b})$ μπορεί να γραφεί ως:

$$m_1(u;\mathbf{b}) = m_1(u;\Delta) + \frac{m_2(\Delta;\mathbf{b}) - m_1(\Delta;\Delta)}{v_1(\Delta)} v_1(u),\ 0 \le u < \Delta$$

Θεωρώντας ότι $u \to \Delta$ στη σχέση (4.39), προκύπτει ότι:

$$d_1 = \frac{V_1(\Delta;\mathbf{b})}{v_1(\Delta)}$$

Και συνεπώς:

$$V_1(u;\mathbf{b}) = \frac{V_1(\Delta;\mathbf{b})}{v_1(\Delta)} v_1(u),\ 0 \le u < \Delta \tag{4.48}$$

Ως εκ τούτου, καταλήγουμε στην ταυτότητα (4.47)

Για το υπόλοιπο της ενότητας αυτής, εστιάζουμε την προσοχή μας σε μια ειδική περίπτωση του μοντέλου (4.2), δηλαδή όταν $a = c + r(b - D)$ ή ισοδύναμα $c = 0$. Αυτή η ειδική περίπτωση είναι το μοντέλο πλεονάσματος της σύνθετης Poisson, με επίπεδο ρευστοποιημένου αποθέματος Δ, ένταση τόκου r και μια στρατηγική σταθερού μερίσματος με όριο μερίσματος b. Σε αυτή την περίπτωση, μόλις το πλεόνασμα φθάνει στο b, τυχόν επιπλέον κέρδη θα καταβληθούν ως μερίσματα και το πλεόνασμα παραμένει στο όριο έως ότου υπάρξει απαίτηση.

Στη συνέχεια, η δυναμική αυτού του μοντέλου μετατρέπεται σε:

$$\left\{\begin{array}{ll} dU(t) = -dZ(t), & U(t) = b \\ dU(t) = cdt + r\left(U\left(t\right) - \Delta\right)dt - dZ(t), & \Delta \leq U(t) < b \\ dU(t) = cdt - dZ(t), & 0 \leq U(t) < \Delta \end{array}\right\} \tag{4.49}$$

με $U(0) = u$.

Υπό τη στρατηγική αυτή, δηλώνουμε το διάνυσμα (Δ, b) ως $\mathbf{b_0}$ για να το ξεχωρίσουμε από το $\mathbf{b}$ που χρησιμοποιείται στη στρατηγική μερίσματος κατωφλίου.

Επομένως, η συνάρτηση των Gerber-Shiu για το μοντέλο (4.49) ορίζεται ως:

$$m\left(u;\mathbf{b_0}\right) = \begin{cases} m_3\left(u;\mathbf{b_0}\right), \ u \geq b \\ m_2\left(u;\mathbf{b_0}\right), \ \Delta \leq u < b \\ m_1\left(u;\mathbf{b_0}\right), \ 0 \leq u < \Delta \end{cases}$$

Αντίστοιχα, τα μερίσματα που καταβλήθηκαν μέχρι τη χρεοκοπία στο μοντέλο (4.49) μπορούν να οριστούν ως:

$$V\left(u;\mathbf{b_0}\right) = \begin{cases} u - b + V_2\left(u;\mathbf{b_0}\right), & u \geq b \\ V_2\left(u;\mathbf{b_0}\right), & \Delta \leq u < b \\ V_1\left(u;\mathbf{b_0}\right), & 0 \leq u < \Delta \end{cases}$$

Θεώρημα 4.7. *Η ταυτότητα μερίσματος ποινής του μοντέλου (4.49) δίνεται από τον τύπο:*

$$m_2\left(u;\mathbf{b_0}\right) = m_2\left(u;\Delta\right) - m_2'\left(b;\Delta\right)V_2\left(u;\mathbf{b_0}\right), \ \Delta \leq u < b \tag{4.50}$$

Απόδειξη.

Για $\Delta \le u < b$ οι σχέσεις (4.12) και (4.36) μετατρέπονται αντιστοίχως σε:

$$m'(u;\mathbf{b_0}) = \frac{\lambda+\delta}{r(u-\Delta)+c} m(u;\mathbf{b_0}) - \frac{\lambda}{r(u-\Delta)+c}\left[\int_0^u m(u-y;\mathbf{b_0})dP(y) + \zeta(u)\right] \quad (4.51)$$

και

$$V'(u;\mathbf{b_0}) = \frac{\lambda+\delta}{r(u-\Delta)+c} V(u;\mathbf{b_0}) - \frac{\lambda}{r(u-\Delta)+c}\int_0^u V(u-y;\mathbf{b_0})dP(y) \quad (4.52)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι η σχέση (4.52) έχει τον ίδιο τύπο με την αντίστοιχη ομοιογενή ολοκληρο-διαφορική εξίσωση για την (4.51). Ως εκ τούτου, η $V_2(u;\mathbf{b_0})$ είναι μια θεμελιώδης λύση για τη $m_2(u;\mathbf{b_0})$. Με άλλα λόγια, πρέπει να υπάρχει μια σταθερά ε τέτοια ώστε:

$$m_2(u;\mathbf{b_0}) = m_2(u;\Delta) + \varepsilon V_2(u;\mathbf{b_0}) \quad (4.53)$$

Στη συνέχεια, θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε τη σταθερά ε.

Θέτοντας $\mathbf{b} = \mathbf{b_0}$, $u = b$ και $\tilde{c} = 0$ στη σχέση (4.10) και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

$\gamma_3(b;\mathbf{b_0}) = \gamma_2(b;\mathbf{b_0})$ προκύπτει ότι:

$$m_2(b;\mathbf{b_0}) = \frac{\lambda}{\lambda+\delta}\gamma_2(b;\mathbf{b_0}) \quad (4.54)$$

Αντικαθιστώντας την (4.53) στην (4.7) όπου $\mathbf{b} = \mathbf{b_0}$ και $u = b$, τότε λαμβάνουμε:

$$m_2'(b;\mathbf{b_0}) = 0 \quad (4.55)$$

Συνδέοντας την (4.55) με την (4.53), καταλήγουμε ότι:

$$\varepsilon = -\frac{m_2'(b;\Delta)}{V_2'(b;\mathbf{b_0})}$$

που σημαίνει ότι:

$$m_2(u;\mathbf{b_0}) = m_2(u;\Delta) - \frac{m_2'(b;\Delta)}{V_2'(b;\mathbf{b_0})} V_2(b;\mathbf{b_0}),\ \Delta \le u < b \qquad (4.56)$$

Για να χρησιμοποιηθεί η ταυτότητα, θα πρέπει να καθοριστεί η ποσότητα $V_2'(b;\mathbf{b_0})$.

Για να επιτευχθεί αυτό, συγκρίνοντας τη σχέση (4.16) με την (4.52) διακρίνουμε ότι:

$$V(u;\mathbf{b_0}) = av_2(u),\ \Delta \le u < b$$

όπου η άγνωστη σταθερά a είναι διαφορετική από τη d_2.

Υποθέτουμε ξανά ότι τη στιγμή της πρώτης απαίτησης είναι $u = b$ από το νόμο της ολικής πιθανότητας. Υπάρχουν δύο μέρη που συμβάλλουν στην καταβολή των συνολικών μερισμάτων.

Το πρώτο μέρος είναι τα αναμενόμενα προεξοφλημένα μερίσματα που έχουν καταβληθεί μέχρι τη στιγμή της πρώτης απαίτησης, η οποία εκφράζεται ως:

$$\int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{t} \left[c + r(b-\Delta)\right] e^{-\delta s} ds dt = \frac{r(b-\Delta)+c}{\lambda+\delta}$$

όπου η ποσότητα $c + r(b-\Delta)$ είναι το στιγμιαίο ποσοστό καταβολής σταθερού μερίσματος όπως παρατηρήθηκε από το σύστημα (4.2).

Όπως ορίζεται στο (4.4), τα μερίσματα ανά πάσα στιγμή προεξοφλούνται με σταθερή δύναμη δ.

Το δεύτερο μέρος είναι το αναμενόμενο μελλοντικό προεξοφλημένο μέρισμα στο χρόνο έναρξης, καθώς το πλεόνασμα θα μπορούσε επίσης να φτάσει κάτω από το όριο, το οποίο είναι ίσο με:

$$\int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} e^{-\delta t} \int_0^{b} V(b-y;\mathbf{b_0})\,dP(y)\,dt = \frac{\lambda}{\lambda+\delta}\int_0^{b} V(b-y;\mathbf{b_0})\,dP(y)$$

Επομένως, πρέπει να έχουμε την οριακή συνθήκη:

$$V(b;\mathbf{b_0}) = \frac{r(b-\Delta)+c}{\lambda+\delta} + \frac{\lambda}{\lambda+\delta}\int_0^{b} V(b-y;\mathbf{b_0})\,dP(y)$$

Θέτοντας $V(u;b) = av_2(u)$ προκύπτει ότι:

$$a = \frac{r(b-\Delta)+c}{(\lambda+\delta)v_2(b) - \lambda\int_0^{b} v_2(b-y)\,dP(y)} = \frac{1}{v_2'(b)}$$

Επομένως:

$$V_2(u;\mathbf{b_0}) = V(u;\mathbf{b_0}) = \frac{v_2'(u)}{v_2(b)},\ \Delta \le u < b \tag{4.57}$$

Ας σημειωθεί ότι διαφορίζοντας την (4.57) ως προς u και θέτοντας $u = b$, προκύπτει η ακόλουθη οριακή συνθήκη:

$$V_2'(b;\mathbf{b_0}) = 1 \tag{4.58}$$

Ενόψει των (4.56) και (4.58) καταλήγουμε στην ταυτότητα του μερίσματος ποινής (4.50) για τη στρατηγική σταθερού μερίσματος.

Παρατήρηση 4.2. *Αν θέσουμε* $\Delta = b$, το μοντέλο (4.49) *δεν παράγει τόκο. Ως εκ τούτου το μοντέλο (4.5) μετατρέπεται ακριβώς στην ταυτότητα μερίσματος ποινής (9) του Gerber et al. (2006).*

4.5. Ακριβείς λύσεις και αριθμητική ανάλυση

Σε αυτή την ενότητα, θα επεξηγηθούν τα αποτελέσματα των προηγούμενων ενοτήτων υπολογίζοντας την πιθανότητα χρεοκοπίας του μοντέλου (4.2) και θα συζητηθούν οι επιπτώσεις των παραμέτρων του μοντέλου στην πιθανότητα χρεοκοπίας με αριθμητικά παραδείγματα. Δηλώνουμε τις πιθανότητες της τελικής επιβίωσης και της χρεοκοπίας στο μοντέλο (4.2) με $\varphi(u;\mathbf{b})$ και $\psi(u;\mathbf{b})$ αντίστοιχα, και γράφουμε:

$$\varphi(u;\mathbf{b}) = 1-\psi(u;\mathbf{b}) = P\{T=\infty | U(0)=u\}$$

$$= \begin{cases} \varphi_3(u;\mathbf{b}) = 1-\psi_3(u;\mathbf{b}), \; u \geq b \\ \varphi_2(u;\mathbf{b}) = 1-\psi_2(u;\mathbf{b}), \; \Delta \leq u < b \\ \varphi_1(u;\mathbf{b}) = 1-\psi_1(u;\mathbf{b}), \; 0 \leq u < \Delta \end{cases}$$

Το πλεονέκτημα της ανάλυσης της πιθανότητας τελικής επιβίωσης έγκειται στο γεγονός ότι η πιθανότητα τελικής επιβίωσης ικανοποιεί ομοιογενείς εξισώσεις, οι οποίες είναι πιο εύκολες στο χειρισμό από τις αντίστοιχες μη ομοιογενείς.

Θεώρημα 4.8. *Υποθέτουμε ότι* $\tilde{c} > \lambda\beta$. *Αν τα μεγέθη των αποζημιώσεων έχουν από κοινού συνάρτηση κατανομής την εκθετική με μέση τιμή* $\frac{1}{\beta}$, *τότε η πιθανότητα τελικής επιβίωσης στο μοντέλο (4.2) δίνεται για* $u \geq b,\ \Delta \leq u < b$ *και* $0 \leq u < \Delta$ *αντίστοιχα:*

$$\varphi_3(u;\mathbf{b}) = 1-\psi_3(b;\mathbf{b})e^{-\left(\beta-\frac{\lambda}{c}\right)(u-b)}$$

$$\varphi_2(u;\mathbf{b}) = \varphi_2(\Delta;\mathbf{b})\left[1+\frac{\lambda(\beta c-\lambda)e^{-\left(\beta-\frac{\lambda}{c}\right)\Delta}}{c\left[\beta c-\lambda e^{-\left(\beta-\frac{\lambda}{c}\right)\Delta}\right]}\int_{\Delta}^{u}\left[1+\frac{r(x-\Delta)}{c}\right]^{\frac{\lambda}{r-1}}e^{-(x-\Delta)}dx\right]$$

$$\varphi_1(u;\mathbf{b}) = \frac{\varphi_2(\Delta;\mathbf{b})}{\beta c - \lambda e^{-\left(\beta-\frac{\lambda}{c}\right)\Delta}}\left[\beta c - \lambda e^{-\left(\beta-\frac{\lambda}{c}\right)u}\right]$$

όπου:

$$\varphi_2(\Delta;\mathbf{b}) = \frac{\beta\tilde{c} - \lambda}{\beta\tilde{c}K_1 - \lambda K_2}$$

$$\psi_3(b;\mathbf{b}) = \frac{\lambda}{\beta\tilde{c}} - \frac{\lambda}{\beta\tilde{c}}K_2\varphi_2(\Delta;\mathbf{b})$$

$$K_1 = 1 + \frac{\lambda(\beta c - \lambda)e^{-\left(\beta-\frac{\lambda}{c}\right)\Delta}}{c\left[\beta c - \lambda e^{-\left(\beta-\frac{\lambda}{c}\right)\Delta}\right]}\int_0^{b-\Delta}\left[1+\frac{r(x-\Delta)}{c}\right]^{\frac{\lambda}{r-1}}e^{-\beta x}dx$$

$$K_2 = K_1 - e^{-\beta(b-\Delta)} + \frac{\lambda(\beta c - \lambda)e^{\frac{\lambda\Delta}{c}-\beta b}}{c\left[\beta c - \lambda e^{-\left(\beta-\frac{\lambda}{c}\right)\Delta}\right]}\int_0^{b-\Delta}\left[1+\frac{r(x-\Delta)}{c}\right]^{\frac{\lambda}{r-1}}dx + \frac{\beta c\left[e^{-\beta(b-\Delta)} - e^{\frac{\lambda\Delta}{c}-\beta b}\right]}{\beta c - \lambda e^{-\left(\beta-\frac{\lambda}{c}\right)\Delta}}$$

Απόδειξη.

Όταν $P(y) = 1 - e^{\beta y}$, δεδομένου ότι η $\psi_3(b;\mathbf{b})$ ικανοποιεί την εξίσωση (4.6), παίρνοντας παράγωγο στην εξίσωση (4.6) και χρησιμοποιώντας τη σχέση $\varphi_3(u;\mathbf{b}) = 1 - \psi_3(b;\mathbf{b})$ βλέπουμε ότι η $\varphi_3(u;\mathbf{b})$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης:

$$\tilde{c}\varphi_3''(u;\mathbf{b}) + (\beta\tilde{c} - \lambda)\varphi_3'(u;\mathbf{b}) = 0,\ u \ge b$$

η οποία έχει γενική λύση:

$$\varphi_3(u;\mathbf{b}) = C_5 + C_6\, e^{-\left(\beta-\frac{\lambda}{\tilde{c}}\right)(u-b)},\ u \ge b$$

Δεδομένου ότι $\tilde{c} > \lambda\beta$, έχουμε ότι $\lim_{u\to\infty}\varphi(u;\mathbf{b}) = 1$, πράγμα που σημαίνει ότι $C_5 = 1$. Επομένως, $C_6 = -\psi_3(b;\mathbf{b})$.

Είναι εύκολο να δούμε από τις σχέσεις (4.36), (4.7) και από την $\varphi_2(u;\mathbf{b}) = 1 - \psi_2(b;\mathbf{b})$, ότι η γενική λύση της $\varphi_2(u;\mathbf{b})$ είναι η ίδια με εκείνη της $V_2(u;\mathbf{b_0})$ αλλά με διαφορετικούς συντελεστές, και συγκεκριμένα:

$$\varphi_2(u;\mathbf{b}) = C_3 + C_4 \int_u^{\Delta} \left[1 + r\frac{(x-\Delta)}{c} \right]^{\frac{\lambda}{r-1}} e^{-\beta(x-\Delta)} dx,\ \Delta \le u < b$$

με τον περιορισμό ότι:

$$\frac{C_3}{C_4} = \frac{c\left[\beta c - \lambda e^{-\left(\beta - \frac{\lambda}{c}\right)\Delta}\right]}{\lambda(\beta c - \lambda) e^{-\left(\beta - \frac{\lambda}{c}\right)\Delta}}$$

Παρατηρείται ότι $C_3 = \varphi_2(\Delta;\mathbf{b})$.

Ομοίως, βλέπουμε ότι η γενική λύση για τη $\varphi_1(u;\mathbf{b})$ είναι η ίδια με εκείνη της $V_1(u;\mathbf{b_0})$, και συγκεκριμένα:

$$\varphi_1(u;\mathbf{b}) = C_1 + C_2\, e^{-\left(\beta - \frac{\lambda}{c}\right)(u-b)},\ 0 \le u < \Delta$$

με τον περιορισμό ότι:

$$\frac{C_1}{C_2} = -\frac{\beta c}{\lambda}$$

Από τη συνθήκη συνέχειας $\varphi_1(\Delta;\mathbf{b}) = \varphi_2(\Delta;\mathbf{b})$ προκύπτει ότι:

$$C_2 = -\frac{\lambda C_3}{\beta c - \lambda e^{-\left(\beta - \frac{\lambda}{c}\right)\Delta}}$$

Επομένως έχουμε μόνο δύο άγνωστες σταθερές C_3 και C_6 που πρέπει να προσδιοριστούν. Η πρώτη γραμμική εξίσωση που συνδέει αυτές τις δύο σταθερές είναι η συνθήκη συνέχειας $\varphi_2(b;\mathbf{b}) = \varphi_3(b;\mathbf{b})$ και η δεύτερη γραμμική εξίσωση προέρχεται από τη σχέση (4.6), θέτοντας $u = b$ και από τη σχέση $\varphi_3(u;\mathbf{b}) = 1 - \psi_3(b;\mathbf{b})$, δηλαδή:

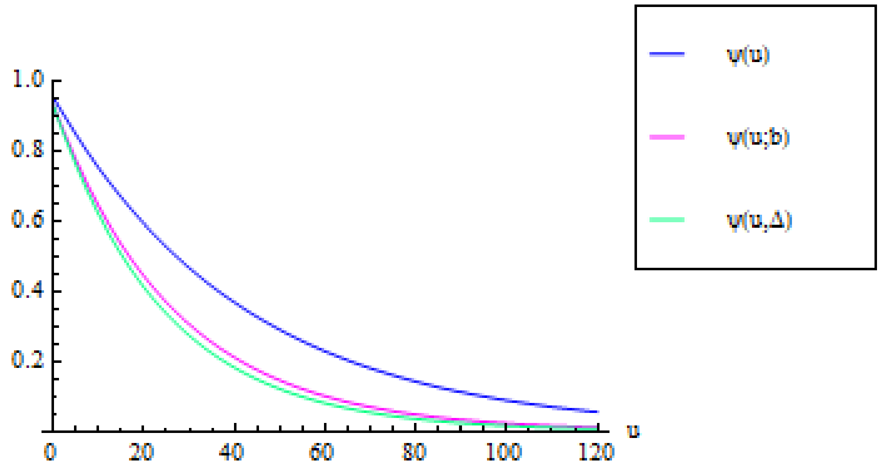
$$\varphi_3'(b;\mathbf{b}) = \frac{\lambda}{\tilde{c}}\varphi_3(b;\mathbf{b}) - \frac{\lambda}{\tilde{c}}\left[\int_0^{b-\Delta}\varphi_2(b-y;\mathbf{b})dP(y) + \int_{b-\Delta}^{b}\varphi_1(b-y;\mathbf{b})dP(y)\right]$$

Λύνοντας τις γραμμικές εξισώσεις για τις σταθερές C_3 και C_6 προκύπτουν οι επιθυμητές λύσεις.

Στο τέλος αυτής της ενότητας, χρησιμοποιούμε ένα αριθμητικό παράδειγμα για να συγκρίνουμε τις πιθανότητες της τελικής χρεοκοπίας, $\psi(u), \psi(u;\Delta)$ και $\psi(u;\mathbf{b})$, στο μοντέλο της σύνθετης Poisson και στα μοντέλα (4.1) και (4.2), αντίστοιχα.

Σε αυτό το παράδειγμα, υποθέτουμε ότι $r = 0.01,\ \beta = 0.5,\ \lambda = 1,\ c = 2.1,\ a = 0.45,\ \Delta = 60$ και $b = 100$.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η συνθήκη καθαρού κέρδους $c > \frac{\lambda}{\beta}$ ικανοποιείται για το κλασικό μοντέλο της σύνθετης Poisson, ενώ ταυτόχρονα ικανοποιείται και η συνθήκη $\tilde{c} > \frac{\lambda}{\beta}$ για το μοντέλο (4.2). Τα αριθμητικά αποτελέσματα εμφανίζονται στο σχήμα 4.1. που ακολουθεί.



Σχήμα 4.1. Οι πιθανότητες ολικής χρεοκοπίας $\psi(u)$, $\psi(u;\Delta)$ και $\psi(u;\mathbf{b})$ [8]

Όπως ήταν αναμενόμενο, η πιθανότητα τελικής χρεοκοπίας στο μοντέλο με επένδυση, $\psi(u;\Delta)$ είναι μικρότερη από την πιθανότητα τελικής χρεοκοπίας στο κλασικό μοντέλο χωρίς επένδυση, $\psi(u)$. Δεδομένου ότι το μοντέλο (4.2) θέτει ένα ανώτατο όριο στην επένδυση, αναμένεται ότι η $\psi(u;\mathbf{b})$ είναι μεγαλύτερη από την $\psi(u;\Delta)$ στο μοντέλο (4.1) το οποίο δεν έχει κανένα περιορισμό με επενδύσεις. Ωστόσο, δεν είναι αλήθεια ότι η πιθανότητα τελικής χρεοκοπίας στο κλασικό μοντέλο χωρίς επένδυση, $\psi(u)$, είναι πάντα μεγαλύτερη από την πιθανότητα τελικής χρεοκοπίας του μοντέλου με επένδυση και μέρισμα, $\psi(u;\mathbf{b})$, αν και το αριθμητικό παράδειγμα δείχνει αυτό το γεγονός. Στην πραγματικότητα, $\psi(u;\mathbf{b})=1$ όταν $a\in\left[c+r(b-D)-\frac{\lambda}{\beta},\ c+r(b-D)\right]$, καθώς η συνθήκη ασφαλείας $\tilde{c}>\frac{\lambda}{\beta}$ δεν ικανοποιείται. Περαιτέρω αριθμητικές δοκιμές επιβεβαιώνουν την προσδοκία μας ότι η $\psi(u;\mathbf{b})$ προσεγγίζει την $\psi(u;\Delta)$ καθώς το όριο του μερίσματος b γίνεται όλο και μεγαλύτερο.

[8] Analysis of the Compound Poisson Surplus Model with Liquid Reserves, Interest and Dividends, Jun Cai ▪ Runhuan Feng ▪ Gordon E. Willmot (2007)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Η συμπεριφορά του τόκου στο μοντέλο πλεονάσματος με ρευστοποιημένα αποθεματικά

5.1. Εισαγωγή

Το Γραφείο Επιθεωρητών Χρηματοπιστωτικών Ιδρυμάτων (Office of Superintendent of Financial Institutions - OSFI) στον Καναδά έχει εκδώσει ελάχιστο απαιτούμενο κεφάλαιο και πλεόνασμα (Minimum Continuing Capital and Surplus Requirements - MCCSR), τα οποία ισχύουν για την προστασία των αντισυμβαλλομένων εξασφαλίζοντας ότι οι ασφαλιστικές εταιρείες διατηρούν επαρκή επίπεδα κεφαλαίου, ενώ το υπόλοιπο πλεόνασμα του ασφαλιστή μπορεί να επενδυθεί σε μια ανταγωνιστική παγκόσμια αγορά. Στο κεφάλαιο αυτό, σκοπεύουμε να διαμορφώσουμε αυτές τις απαιτήσεις. Ωστόσο, δεν είναι δυνατή η πλήρης εφαρμογή των MCCSR λόγω της μεγάλης πολυπλοκότητάς τους. Για το λόγο αυτό, εφαρμόζουμε μερικές βασικές ιδέες από το MCCSR για την κατασκευή της διαδικασίας πλεονάσματος.

Στόχος του κεφαλαίου είναι η μελέτη της συνάρτησης των Gerber – Shiu, δηλαδή της αναμενόμενης αξίας της προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής τη στιγμή της χρεοκοπίας υπό μια συγκεκριμένη διαδικασία πλεονάσματος. Αυτό επιτυγχάνεται συμπληρώνοντας το έργο των Cai και Dickson (2002), Cai (2007), Yang et al (2008), Cai et al (2009a) και Cai et al (2009b) όπου ο τόκος ενσωματώνεται στις συγκεκριμένες διαδικασίες πλεονάσματος.

5.2. Περιγραφή του μοντέλου

Ας υποθέσουμε ότι τα μεγέθη των απαιτήσεων $\{Y_1, Y_2, Y_3, \ldots\}$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες θετικές τυχαίες μεταβλητές με από κοινού αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F(y),\ y>0$ με $F(0)=0$ και μετασχηματισμό Laplace-Stieltjies $\tilde{f}(s)=\int_0^\infty e^{-sy}\,dF(y)$.

Έστω ότι η διαδικασία του αριθμού των απαιτήσεων {N (t) | t ≥ 0} είναι μια ομοιογενής διαδικασία Poisson με παράμετρο $\lambda>0$, η οποία είναι ανεξάρτητη από τις $\{Y_1, Y_2, Y_3, \ldots\}$ και $\{V_1, V_2, V_3, \ldots\}$ είναι ο χρόνος των αντίστοιχων περιστατικών. Υποθέτουμε ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι $\{V_1, V_2-V_1, V_3-V_2, \ldots\}$, είναι ισόνομες εκθετικές τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή $\frac{1}{\lambda}$ και ανεξάρτητες από τα μεγέθη των αποζημιώσεων.

Ορίζουμε επίσης την διαδικασία των αθροιστικών αποζημιώσεων

$$\left\{S(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \,\middle|\, t\geq 0\right\}$$

να είναι το άθροισμα όλων των απαιτήσεων μέχρι το χρόνο t με την προϋπόθεση ότι $S(t)=0$ αν $N(t)=0$

Τελικά, υποθέτουμε ότι το αρχικό πλεόνασμα θα είναι $u\geq 0$ και η σταθερή ένταση ασφαλίστρου θα είναι $c>\lambda E[Y_1]$

Σκοπεύουμε να διατηρήσουμε μέρος της διαφοράς μεταξύ των ασφαλίστρων και των απαιτήσεων, έστω $a\in[0,1]$, η οποία διατίθεται ανά πάσα στιγμή και επενδύει το υπόλοιπο μέρος με ένταση τόκου $r>0$. Η διαδικασία πλεονάσματος $\{U(t)\,|\,t\geq 0\}$ ορίζεται στη συνέχεια ως:

$$U(t)=a\left[ct-S(t)\right]+e^{rt}\left\{u+(1-a)\left[c\int_0^t e^{-rs}ds-\sum_{j=1}^{N(t)} e^{-rV_j}Y_j\right]\right\} \tag{5.1}$$

Παρατήρηση 5.1. *Αξίζει να σημειωθεί ότι η ένταση τόκου* $r > 0$ *εξαρτάται από την επιλογή της επένδυσης της ασφαλιστικής εταιρείας. Ο κίνδυνος που επιτρέπεται από το MCCSR εξαρτάται από τον τύπο του ασφαλιστικού προϊόντος και το βαθμό πιστωτικής αξίας που επιθυμεί η εταιρεία να διατηρήσει. Όσον αφορά την ένταση επιτοκίου* δ *που εμφανίζεται στη συνάρτηση των Gerber-Shiu , ορίζεται όταν και αν η εταιρεία χρεοκοπήσει. Επίσης, για να αποκτήσουμε μερικές ποσότητες που περιέχουν τόκο, ως ειδικές περιπτώσεις της συνάρτησης Gerber-Shiu , μπορούμε να σταθεροποιήσουμε το* δ *σε μια συγκεκριμένη τιμή ή να την αντιμετωπίσουμε ως μεταβλητή ενός μετασχηματισμού Laplace. Είναι τότε μαθηματικά βολικό να έχουμε τις ποσότητες* r *και* δ *ως δύο ξεχωριστές παραμέτρους.*

5.3. Ολοκληρο-διαφορική εξίσωση για τη συνάρτηση των Gerber-Shiu

Σε αυτή την ενότητα λαμβάνουμε μια εξίσωση που ικανοποιείται από τη συνάρτηση Gerber-Shiu. Δεδομένου ότι η συνάρτηση που μας ενδιαφέρει περιλαμβάνει τόσο το σύμβολο του ολοκληρώματος όσο και της παραγώγου, η ταυτότητα που αποκτάμε ονομάζεται ολοκληρο-διαφορική εξίσωση. Όπως είναι φυσικό, μπορούν να χρησιμοποιηθούν αριθμητικές προσεγγίσεις για την επίλυση της εξίσωσης αυτής.

Θεώρημα 5.1. Υπό τη διαδικασία πλεονάσματος $U(t)$, η οποία διέπεται από την ταυτότητα (5.1), η συνάρτηση των Gerber-Shiu $m(u)$ ικανοποιεί την ακόλουθη ολοκληρο-διαφορική εξίσωση:

$$m'(u)=\frac{\lambda+\delta}{c+ru}m(u)-\frac{\lambda}{c+ru}\left[\int_0^u m(u-y)dF(y)+\int_u^\infty w(u,y-u)dF(y)\right],\ u\geq 0 \qquad (5.2)$$

Απόδειξη.

Ας υποθέσουμε ότι t είναι η στιγμή της 1ης απαίτησης και y το μέγεθός της. Τότε, η διαδικασία πλεονάσματος $U(t)$ διαμορφώνεται ως εξής:

$$U(t)=act+e^{rt}u+\frac{(1-a)c}{r}\left(e^{rt}-1\right)-y=\sigma(t;u)-y$$

όπου

$$\sigma(t;u)=act+e^{rt}u+\frac{(1-a)c}{r}\left(e^{rt}-1\right)$$

Έστω $\Delta > 0$ ένας αρκετά μικρός αριθμός και θεωρούμε το διάστημα $[0,\Delta)$. Δηλώνουμε με $m(u \mid E)$ την ποσότητα

$$E\left\{e^{-\delta T} w\left(U(T-),|U(t)|\right) I\left(T<\infty\right)|U(0)=u,E\right\}$$

όπου το E είναι ένα γεγονός.

Δεδομένου ότι το ο αριθμός των απαιτήσεων στο διάστημα $[0,\Delta)$ ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda\Delta$ και η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων είναι η εκθετική κατανομή με ιδιότητα έλλειψης μνήμης, με την προϋπόθεση ότι ο αριθμός των αποζημιώσεων ανήκει στο διάστημα $[0,\Delta)$, εφαρμόζοντας θεώρημα ολικής πιθανότητας, μπορούμε να ξαναγράψουμε την προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής Gerber-Shiu ως:

$$m(u)=(1-\lambda\Delta)e^{-\delta\Delta}m\left(u \,\middle|\, no\ claims\ in\left[0,\Delta\right)\right)+\lambda\Delta e^{-\delta\Delta}m\left(u \,\middle|\, one\ claim\ in\left[0,\Delta\right)\right)+o(\Delta)$$

Στην περίπτωση που δεν υπάρχουν απαιτήσεις στο διάστημα $[0,\Delta)$, το πλεόνασμα στο χρόνο Δ είναι $\sigma(\Delta;u)$. Όταν εμφανίζεται μια απαίτηση μεγέθους y στο διάστημα $[0,\Delta)$, τότε υπάρχουν δύο πιθανά σενάρια:

1. η απαίτηση αυτή είναι μικρότερη από το συσσωρευμένο κεφάλαιο και η διαδικασία του πλεονάσματος αρχίζει με ένα νέο αρχικό πλεόνασμα ίσο με $\sigma(\Delta;u)-y$.
2. ή το ποσό απαίτησης οδηγεί σε χρεοκοπία με ποινή $w\left[\sigma(\Delta;u),\, \sigma(\Delta;\, u)-y\right]$.

Μπορούμε τότε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας για όλες τα πιθανά μεγέθη y και να προκύψει ότι:

$$m(u) = (1-\lambda\Delta)e^{-\delta\Delta} m\left[\sigma(\Delta;u)\right]$$

$$+\lambda\Delta e^{-\delta\Delta}\left\{\int_0^{\sigma(\Delta;u)} m\left[\sigma(\Delta;u)-y\right]dF(y)\right.$$

$$\left.+\int_{\sigma(\Delta;u)}^{\infty} w\left[\sigma(\Delta;u),\, \sigma(\Delta;u)-y\right]dF(y)\right\} + o(\Delta) \qquad (5.3)$$

Χρησιμοποιώντας την επέκταση του Taylor, η $m\left[\sigma(\Delta;u)\right]$ παρουσιάζεται ως:

$$m\left[\sigma(\Delta;u)\right] = m(u) + m'(u)\left[\sigma(\Delta;u)-u\right] + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{m^{(n)}(u)}{n!}\left[\sigma(\Delta;u)-u\right]^n$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τη σχέση (5.3), προκύπτει ότι:

$$m(u) = (1-\lambda\Delta)e^{-\delta\Delta}\left\{m(u) + m'(u)\left[\sigma(\Delta;u)-u\right] + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{m^{(n)}(u)}{n!}\left[\sigma(\Delta;u)-u\right]^n\right\}$$

$$+\lambda\Delta e^{-\delta\Delta}\left\{\int_0^{\sigma(\Delta;u)} m\left[\sigma(\Delta;u)-y\right]dF(y) + \int_{\sigma(\Delta;u)}^{\infty} w\left[\sigma(\Delta;u),\, \sigma(\Delta;u)-y\right]dF(y)\right\} + o(\Delta)$$

Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο αριστερό μέλος και στη συνέχεια παραγωγίζουμε ως προς Δ, οπότε προκύπτει ότι:

$$\frac{1-e^{-\delta\Delta}+\lambda\Delta e^{-\delta\Delta}}{\Delta}m(u) - \frac{1-e^{-\delta\Delta}\left[\sigma(\Delta;u)-u\right]}{\Delta}m'(u) - \frac{(1-\lambda\Delta)e^{-\delta\Delta}}{\Delta}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{m^{(n)}(u)}{n!}\left[\sigma(\Delta;u)-u\right]^n$$

$$\lambda e^{-\delta\Delta}\left\{\int_0^{\sigma(\Delta;u)} m\left[\sigma(\Delta;u)-y\right]dF(y) + \int_{\sigma(\Delta;u)}^{\infty} w\left[\sigma(\Delta;u),\, \sigma(\Delta;u)-y\right]dF(y)\right\} - \frac{o(\Delta)}{\Delta} = 0$$

Εφαρμόζοντας το νόμο του L'Hôpital στην ανωτέρω εξίσωση, για $\Delta \to 0$ προκύπτει ότι:

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1-e^{\delta\Delta}+\lambda\Delta e^{-\delta\Delta}}{\Delta}=\lim_{\Delta\to 0}\left(\delta e^{-\delta\Delta}+\lambda e^{-\delta\Delta}-\lambda\delta\Delta e^{-\delta\Delta}\right)=\lambda+\delta$$

$$\lim_{\Delta\to 0}\sigma(\Delta;u)=\lim_{\Delta\to 0}\left[ac\Delta+ue^{r\Delta}+\frac{(1-a)c}{r}\left(e^{r\Delta}-1\right)\right]=u$$

$$\lim_{\Delta\to 0}\left[\sigma(\Delta;u)-u\right]^{n}=\lim_{\Delta\to 0}\frac{\left[ac\Delta+ue^{r\Delta}+\frac{(1-a)c}{r}\left(e^{r\Delta}-1\right)-u\right]^{n}}{\Delta}$$

$$=\lim_{\Delta\to 0}\left\{n\left[ac\Delta+ue^{r\Delta}+\frac{(1-a)c}{r}\left(e^{r\Delta}-1\right)-u\right]^{n-1}\left[ac+ure^{r\Delta}+(1-a)ce^{r\Delta}\right]\right\}=\begin{cases}c+ur, & n=1\\ 0, & n=2,3,4,\ldots\end{cases}$$

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{o(\Delta)}{\Delta}=0$$

Ως εκ τούτου, η εξίσωση (5.3) γίνεται:

$$(\lambda+\delta)m(u)-(c+ru)m'(u)-\lambda\int_{0}^{u}m(u-y)dF(y)-\lambda\int_{u}^{\infty}w(u,y-u)dF(y)=0 \qquad (5.4)$$

η οποία είναι η ζητούμενη ολοκληρο-διαφορική εξίσωση για τη συνάρτηση των Gerber-Shiu.

Παρατήρηση 5.2. *Αξίζει να σημειωθεί ότι η ολοκληρο-διαφορική εξίσωση που ικανοποιείται από τη συνάρτηση των Gerber- Shiu δεν εξαρτάται από την επιλογή του α, όπου α το ποσοστό της διαφοράς μεταξύ των ασφαλίστρων και των απαιτήσεων που πρέπει να τηρούνται διαθέσιμες ανά πάσα στιγμή. Αυτή είναι μια αξιοσημείωτη διαφορά από τα μοντέλα χρεοκοπίας που προτείνονται από τον Cai et al. (2009a) και Cai et al. (2009b), όπου όλες οι εκφράσεις εξαρτώνται από το επίπεδο κατωφλίου.*

Οι Cai και Dickson (2002) συζητούν την περίπτωση όταν το α είναι ίσο με το 0, το οποίο ερμηνεύεται ως επένδυση ολόκληρου του ποσού του πλεονάσματος με συγκεκριμένη ένταση τόκου και η ολοκληρο-διαφορική εξίσωση (2.2) που προέκυψε που προέκυψε από την εργασία τους είναι ακριβώς η ίδια με την εξίσωση που λαμβάνεται στο Θεώρημα 5.1.

Σε αντίθεση με τα προηγούμενα μοντέλα χρεοκοπίας που οδηγούν σε ολοκληρο-διαφορικές εξισώσεις που ικανοποιούνται από την προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής, η ταυτότητα (5.2) που προκύπτει από το Θεώρημα 5.1 είναι γραμμική, αλλά με μη σταθερούς συντελεστές. Είναι ακριβώς ο όρος $c+ru$ στη σχέση (5.4) που οδηγεί σε επιπλοκές. Για να επιτευχθεί ένα ρητό αποτέλεσμα, κάποιος πρέπει να επιβάλει επιπλέον υποθέσεις σχετικά με την ένταση τόκου δ, τη συνάρτηση ποινής w ή την κατανομή του μεγέθους των αποζημιώσεων. Για παράδειγμα, η πιο γενική ακριβής λύση για την (5.2) εμφανίζεται στην εργασία των Cai και Dickson (2002), όπου το δ είναι μηδέν. Λιγότερο γενικό είναι το αποτέλεσμα του θεωρήματος 5.1 του Cai (2007), όπου μαζί με την παραδοχή ότι $\delta=0$ ο συγγραφέας θεωρεί εκθετικές αποζημιώσεις. Στη συνέχεια συνάγει μια ρητή έκφραση της συνάρτησης Gerber-Shiu. Το λιγότερο γενικό αποτέλεσμα εμφανίζεται στο Yang et al. (2008), όπου χρησιμοποιούνται οι προηγούμενες δύο παραδοχές και υποθέτουμε ότι η συνάρτηση ποινής εξαρτάται μόνο από το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας.

Στην επόμενη ενότητα, προτείνεται μια εναλλακτική έκφραση της ολοκληρο-διαφορικής εξίσωσης (5.2), η οποία είναι μια πρώτης τάξης μη ομοιογενής διαφορική εξίσωση που ικανοποιείται από το μετασχηματισμό Laplace της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής.

5.4. Ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης των Gerber-Shiu

Οι Cai και Dickson (2002) παρουσιάζουν την εξίσωση (5.2) ως μια ολοκληρωτική εξίσωση τύπου Volterra στην προσπάθειά τους να τη λύσουν. Κατά συνέπεια, για την ακριβή λύση θα πρέπει να καθορίσουν την τιμή της συνάρτησης Gerber-Shiu με μηδενικό αρχικό πλεόνασμα.

Σε αυτή την ενότητα προσπαθούμε να μελετήσουμε τη συμπεριφορά της Gerber-Shiu συνάρτησης μέσω του μετασχηματισμού Laplace. Εφόσον πρόκειται για συνεχείς ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, το αντίστροφο του μετασχηματισμού Laplace είναι μοναδικό. Ως αποτέλεσμα, η ακριβής έκφραση για το μετασχηματισμό Laplace μιας τέτοιας συνάρτησης αποδίδει μια ρητή έκφραση για τη συνάρτηση που μετασχηματίστηκε, εφόσον έχει βρεθεί τρόπος αντιστροφής του μετασχηματισμού Laplace. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο οι μετασχηματισμοί Laplace συχνά χαρακτηρίζονται για μοντέλα χρεοκοπίας που αναλύονται στην αναλογιστική βιβλιογραφία.

Οι ερευνητές είτε προσπαθούν να αντιστρέψουν το μετασχηματισμό Laplace και να συμπεράνουν μια έκφραση της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής, είτε να εφαρμόσουν μια αριθμητικό μέθοδο αντιστροφής. Όπως θα δούμε αργότερα, καμία από αυτές τις δύο προσεγγίσεις δεν είναι δυνατές στο μοντέλο που μελετάται. Έτσι, πρέπει να καταφύγουμε σε αριθμητικές μεθόδους που είναι διαθέσιμες για μη ομοιογενείς γραμμικές συνήθεις διαφορικές εξισώσεις.

Ορίζουμε με $\tilde{m}(s)=\int_0^\infty e^{-su}m(u)\,du$ το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης των Gerber-Shiu.

Ορίζουμε επίσης τη συνάρτηση $\zeta(u)=\int_u^\infty w(u,y-u)\,dF(y)$ και τον αντίστοιχο μετασχηματισμό Laplace της $\tilde{\zeta}(s)=\int_0^\infty e^{-su}\zeta(u)\,du$.

Θεώρημα 5.2. *Ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης των Gerber-Shiu ικανοποιεί την ακόλουθη εξίσωση:*

$$\tilde{m}'(s) = g(s)\tilde{m}(s) + h(s) \tag{5.5}$$

όπου

$$g(s) = \frac{1}{rs}\left[cs - r - \lambda - \delta + \lambda \tilde{f}(s)\right]$$

και

$$h(s) = \frac{\lambda}{rs}\tilde{\zeta}(s) - \frac{c}{rs}m(0)$$

Απόδειξη.

Από το θεώρημα 5.1 έχουμε ότι:

$$m'(u) = \frac{\lambda+\delta}{c+ru}m(u) - \frac{\lambda}{c+ru}\left[\int_0^u m(u-y)dF(y) + \zeta(u)\right], u \geq 0$$

Παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace-Stieltjies στην ανωτέρω εξίσωση και αναδιατάσσοντας την, προκύπτει ότι:

$$\int_0^\infty e^{-su}(c+ru)m'(u)du = (\lambda+\delta)\int_0^\infty e^{-su}m(u)du - \lambda\int_0^\infty\int_0^u e^{-su}m(u-y)dF(y)du - \lambda\int_0^\infty e^{-su}\zeta(u)du$$

Στη συνέχεια, ξαναγράφουμε την παραπάνω εξίσωση ως:

$$c\int_0^\infty e^{-su}m'(u)du + r\int_0^\infty e^{-su}um'(u)du = (\lambda+\delta)\tilde{m}(s) - \lambda\int_0^\infty\int_y^\infty e^{-su}m(u-y)du\, dF(y) - \lambda\tilde{\zeta}(s)$$

Πραγματοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση στο αριστερό μέλος της ανωτέρω εξίσωσης προκύπτει ότι:

$$c\int_0^\infty e^{-su}m'(u)du + r\int_0^\infty e^{-su}u\,m'(u)du = c\left[e^{-su}m(u)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty se^{-su}m(u)du\right] + r\left[e^{-su}u\,m(u) - \int_0^\infty\left(e^{-su} - sue^{-su}\right)m(u)du\right]$$

$$=c\left[s\tilde{m}(s)-m(0)\right]+r\left[-\tilde{m}(s)-s\,\tilde{m}'(s)\right]$$

$$=(cs-r)\tilde{m}(s)-cm(0)-rs\tilde{m}'(s)$$

Επομένως, η εξίσωση γίνεται:

$$(cs-r)\tilde{m}(s)-cm(0)-rs\tilde{m}'(s)=(\lambda+\delta)\tilde{m}(s)-\lambda\int_0^\infty\int_y^\infty e^{-su}m(u-y)du\;dF(y)-\lambda\tilde{\zeta}(s)$$

$$=(\lambda+\delta)\tilde{m}(s)-\lambda\tilde{m}(s)\,\tilde{f}(s)-\lambda\tilde{\zeta}(s)$$

Τελικά ισχύει ότι:

$$\tilde{m}'(s)=\frac{1}{rs}\left[cs-r-\lambda-\delta+\lambda\tilde{f}(s)\right]\tilde{m}(s)+\frac{\lambda}{rs}\tilde{\zeta}(s)-\frac{c}{rs}m(0)$$

όπως απαιτείται.

Παρατήρηση 5.3. *Σε αντίθεση με το κλασσικό μοντέλο Poisson, η* $s=0$ *δεν είναι ρίζα της συνάρτησης* $cs+\lambda\tilde{f}(s)-(\lambda+\delta+r)$ *ακόμα και όταν* $\delta=0$, *εκτός αν* $r=0$ *επίσης. Έτσι, αρκεί να εξετάσουμε μόνο την περίπτωση* $s>0$.

Παρατήρηση 5.4. *Η υψηλότερη παράγωγος του μετασχηματισμού Laplace στην εξίσωση (5.5) είναι η πρώτη παράγωγος. Επίσης, περιέχει έναν όρο* h *που δεν περιέχει* $\tilde{m}$. *Αυτό καθιστά την εξίσωση μη ομοιογενή ως προς* $\tilde{m}$. *Με άλλα λόγια, έχουμε πάρει μια γραμμική μη ομοιογενή πρώτης τάξης διαφορική εξίσωση που ικανοποιείται από το μετασχηματισμό Laplace της Gerber-Shiu συνάρτησης.*

Είμαστε σε θέση να λύσουμε αυτή τη συνήθη διαφορική εξίσωση μέσω βασικών τεχνικών. Συγκεκριμένα,

$$\tilde{m}(s) = m_0 \exp\left[\int_{s_0}^{s} g(\xi)d\xi\right] + \int_{s_0}^{s} h(x)\exp\left[\int_{x}^{s} g(\xi)d\xi\right]dx \tag{5.6}$$

όπου $s_0 > 0$ είναι μια σταθερά τέτοια ώστε να ισχύει $m_0 = \tilde{m}(s_0)$, που είναι γνωστή ποσότητα.

Επίσης είναι γνωστό ότι όταν $s_0 \to \infty$ η $\tilde{m}(s)$ τείνει στο μηδέν. Αυτός είναι ο λόγος που θέτουμε $s_0 = \infty$ και $m(0)$.

Στη συνέχεια, πρέπει να επαληθεύσουμε εάν συγκλίνει ή όχι η ποσότητα $\left[\int_{s_0}^{s} g(\xi)d\xi\right]$ όταν $s_0 \to \infty$.

$$\int_{s_0}^{s} g(\xi)d\xi = -\int_{s}^{\infty} g(\xi)d\xi = -\int_{s}^{\infty} \frac{1}{r\xi}\left[c\xi - r - \lambda - \delta + \lambda\tilde{f}(\xi)\right]d\xi$$

$$= -\int_{s}^{\infty}\left[\frac{c}{r} - \frac{1}{r\xi}(r+\lambda+\delta) + \frac{\lambda}{r}\frac{\tilde{f}(\xi)}{\xi}\right]d\xi$$

$$= -\left[\frac{c}{r}\xi - \frac{(r+\lambda+\delta)}{r}\log\xi\right]\Bigg|_{s}^{+\infty} - \frac{\lambda}{r}\int_{s}^{\infty}\frac{\tilde{f}(\xi)}{\xi}d\xi$$

Διαπιστώνουμε ότι ο πρώτος όρος της εξίσωσης στη δεξιά πλευρά συγκλίνει στο $-\infty$. Τότε, πρέπει να ελέγξουμε πώς συμπεριφέρεται ο δεύτερος όρος. Ξεκινάμε εφαρμόζοντας το Θεώρημα 1-11 του Spiegel (1965):

$$\int_{s}^{\infty}\frac{\tilde{f}(\xi)}{\xi}d\xi = \int_{s}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} e^{-\xi y}F(y)dyd\xi = \int_{0}^{+\infty} e^{-\xi y}F(y)\int_{s}^{+\infty} e^{-y}F(y)d\xi dy = \int_{s}^{+\infty} e^{-sy}\frac{F(y)}{y}dy$$

Και οι δύο αναπαραστάσεις του ολοκληρώματος $\int_{s}^{\infty}\frac{\tilde{f}(\xi)}{\xi}d\xi=\int_{s}^{+\infty}e^{-sy}\frac{F(y)}{y}dy$ είναι δύσκολο να δοκιμαστούν για σύγκλιση, εκτός αν η συνάρτηση κατανομής του μεγέθους των απαιτήσεων F είναι γνωστή. Όσο το πρόβλημα μας αφορά, όμως, αρκεί να γνωρίζουμε ότι οι δυο αναπαραστάσεις συγκλίνουν είτε σε θετική πεπερασμένη τιμή είτε στο άπειρο. Ως αποτέλεσμα αυτού, ολόκληρο το ολοκλήρωμα αποκλίνει από το $-\infty$ και η ποσότητα $\exp\left[\int_{\infty}^{s}g(\xi)d\xi\right]$ συγκλίνει στο 0. Έτσι, ο πρώτος όρος στη δεξιά πλευρά της εξίσωσης (5.6), δηλαδή, ο $m_0\exp\left[\int_{s_0}^{s}g(\xi)d\xi\right]$, είναι 0.

Έτσι, η εξίσωση (5.6) μετατρέπεται σε:

$$\tilde{m}(s)=\int_{s_0}^{s}h(x)\exp\left[\int_{x}^{s}g(\xi)d\xi\right]dx \tag{5.7}$$

Τώρα θέλουμε να εξετάσουμε το δεύτερο μέρος της εξίσωσης (5.6), δηλαδή τη δεξιά πλευρά της (5.7). Ωστόσο, είναι δύσκολο να διευκρινιστούν οι ιδιότητες της σύγκλισής του, επειδή το ολοκλήρωμα καθίσταται σύνθετο μετά την επέκταση. Εξάλλου, περιλαμβάνει την ποσότητα $m(0)$, η οποία πρέπει να διευκρινιστεί. Οι Cai και Dickson (2002) κατάφεραν να το πράξουν μόνο στην περίπτωση μη προεξόφλησης όπου το $\delta=0$.

Επομένως, φαίνεται ότι οι αριθμητικές προσεγγίσεις για την επίλυση της εξίσωσης (5.5) μπορεί να είναι καταλληλότερες.

5.5. Εκθετικές Αποζημιώσεις

Σε αυτή την ενότητα, παράγουμε μια ακριβή έκφραση για τη συνάρτηση Gerber-Shiu όταν τα μεγέθη των απαιτήσεων κατανέμονται εκθετικά χωρίς άλλους περιορισμούς. Αξίζει να σημειωθεί ότι στις εργασίες των Cai (2007), Yang et al. (2008), Cai et al (2009a) και Cai et al (2009b) θεωρείται η υπόθεση με εκθετικά μεγέθη απαιτήσεων, αλλά περιορίζονται στην περίπτωση χωρίς προεξόφληση, δηλαδή όταν $\delta = 0$. Επιπλέον, ο Yang et al (2008) επιβάλλει περαιτέρω ότι η συνάρτηση ποινής εξαρτάται αποκλειστικά από το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας.

Συνεχίζουμε επαναλαμβάνοντας την ολοκληρο-διαφορική εξίσωση για τη Gerber-Shiu συνάρτηση ως:

$$\left(c + ru\right)m'\left(u\right) - (\lambda + \delta)m\left(u\right) = -\lambda\left[A\left(m(u)\right) = \zeta(u)\right] \tag{5.8}$$

όπου

$$A\left(m(u)\right) = \int_0^u m(u-y)dF(y)$$

και τα μεγέθη των αποζημιώσεων $\{Y_1, Y_2, Y_3, \ldots\}$ είναι ανεξάρτητες, ισόνομες και εκθετικά κατανεμημένες τ.μ. , με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f\left(y\right) = \beta e^{-\beta y}$, $y > 0$.

Λήμμα 5.1. *Όταν τα μεγέθη των αποζημιώσεων κατανέμονται εκθετικά, τότε:*

$$\frac{d}{du}A\left(m(u)\right) = \beta\left(m(u)\right) - \beta A\left(m(u)\right)$$

Απόδειξη.

Αλλάζοντας τις μεταβλητές προκύπτει ότι:

$$A\left(m(u)\right)=\int_0^u m(u-y)\,f(u-y)dy=\int_0^u m(y)e^{-\beta(u-y)}dy$$

Έπειτα, διαφορίζοντας την ανωτέρω εξίσωση ως προς u προκύπτει ότι:

$$\frac{d}{du}A\left(m(u)\right)=\beta\left(m(u)\right)+\int_0^u\left[m(y)e^{-\beta(u-y)}dy\right]$$

$$=\beta\left(m(u)\right)-\beta\int_0^u m(y)e^{-\beta(u-y)}dy$$

$$=\beta\left(m(u)\right)-\beta A\left(m(u)\right)$$

όπου προκύπτει το ζητούμενο.

Τώρα μετατρέπουμε την ολοκληρο-διαφορική εξίσωση (5.8) σε μια δεύτερης τάξης μη ομοιογενής διαφορική εξίσωση. Για το σκοπό αυτό, διαφορίζουμε πρώτα την εξίσωση (5.8) και προκύπτει ότι:

$$\left(c+ru\right)m''\left(u\right)+(r+\lambda+\delta)m'\left(u\right)=\lambda\left[\frac{d}{du}A\left(m(u)\right)+\zeta'(u)\right] \tag{5.9}$$

Στη συνέχεια, πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση (5.8) με β, οπότε γίνεται:

$$\beta\left(c+ru\right)m''\left(u\right)-\beta(\lambda+\delta)m'\left(u\right)=-\lambda\beta\left[A\left(m(u)\right)+\zeta(u)\right] \tag{5.10}$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις (5.9) και (5.10) και χρησιμοποιώντας το Λήμμα 5.1, αποκτάμε

$$\left(c+ru\right)m''\left(u\right)+\left[r-\lambda-\delta+\beta\left(c+ru\right)\right]m'\left(u\right)-\beta\delta m\left(u\right)=\lambda\left[\zeta'(u)+\beta\zeta(u)\right] \tag{5.11}$$

Θεώρημα 5.3. *Όταν τα μεγέθη των αποζημιώσεων κατανέμονται εκθετικά με μέση τιμή* $\frac{1}{\beta}$*, τότε η συνάρτηση των Gerber – Shiu έχει την ακόλουθη μορφή:*

$$m(u) = \left[\kappa_1 + C_1\left(-\beta u - \beta c/r\right)\right] y_1\left(-\beta u - \beta c/r\right) + \left[\kappa_2 + C_2\left(-\beta u - \beta c/r\right)\right] y_2\left(-\beta u - \beta c/r\right)$$

όπου κ_1, κ_2 τυχαίες σταθερές

$$y_1(x) = \begin{cases} \Phi\left(-\frac{\lambda}{r}, 1 - \frac{\lambda+\delta}{r}; x\right), & \frac{\lambda+\delta}{r} \neq 1, 2, \dots. \\ x^{\frac{\lambda+\delta}{r}} \Phi\left(\frac{\lambda}{r}, 1 + \frac{\lambda+\delta}{r}; x\right), & \frac{\lambda+\delta}{r} = 1, 2, \dots. \end{cases} \tag{5.12}$$

$$y_2(x) = \begin{cases} \Psi\left(-\frac{\lambda}{r}, 1 - \frac{\lambda+\delta}{r}; x\right), & \frac{\lambda+\delta}{r} \neq 1, 2, \dots. \\ x^{\frac{\lambda+\delta}{r}} \Psi\left(\frac{\lambda}{r}, 1 + \frac{\lambda+\delta}{r}; x\right), & \frac{\lambda+\delta}{r} = 1, 2, \dots. \end{cases} \tag{5.13}$$

$$\Phi(a, b; x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{(k)} x^k}{b^{(k)} k!}, \quad \text{και } a^{(k)} = a(a+1)\dots(a+k-1), \tag{5.14}$$

$$\Psi(a, b; x) = \frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(a-b+1)} \Phi(a, b; x) + \frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(a)} \Phi(a-b+1, 2-b; x) \tag{5.15}$$

$$C_1 = k_1 \int_0^x y_1^{-2}(v) v^{-1+\frac{\lambda+\delta}{r}} e^v dv \tag{5.16}$$

$$C_2 = k_2 \int_0^x y_2^{-2}(v) v^{-1+\frac{\lambda+\delta}{r}} e^v dv + \int_0^x \left[y_2^{-2}(z) z^{-1+\frac{\lambda+\delta}{r}} e^z \int_0^z \eta(v) y_2(v) v^{-1+\frac{\lambda+\delta}{r}} e^{-v} dv \right] dz \tag{5.17}$$

$$\eta(x) = \frac{\lambda}{r\beta} \left[\zeta'\left(-\frac{1}{\beta}x - \frac{c}{r}\right) + \beta\zeta\left(-\frac{1}{\beta}x - \frac{c}{r}\right) \right] \tag{5.18}$$

και k_1, k_2 τυχαίες σταθερές

Απόδειξη.

Στόχος μας είναι να κάνουμε κάποιες αντικαταστάσεις προκειμένου η εξίσωση (5.11) να έχει απλούστερη μορφή. Ας θεωρήσουμε x τέτοιο ώστε να ισχύει

$$ru + c = -\frac{r}{\beta}x$$

και $y(x)$ τέτοιο ώστε

$$m(u) = m\left(-\frac{1}{\beta}x - \frac{c}{r}\right) = y(x)$$

Όπως γνωρίζουμε $m'(u) = -\beta y(x)$ και $m''(u) = \beta^2 y''(x)$. Τότε η εξίσωση (5.11) γίνεται:

$$-r\beta y''(x) - [r - \lambda - \delta - rx]\beta y'(x) - \beta\delta y(x) = -\lambda\left[\zeta'\left(-\frac{1}{\beta}x - \frac{c}{r}\right) + \beta\zeta\left(-\frac{1}{\beta}x - \frac{c}{r}\right)\right]$$

Διαιρώντας με $-r\beta$, η παραπάνω εξίσωση απλοποιείται ως εξής:

$$xy''(x) + \left[1 - \frac{\lambda+\delta}{r} - x\right]y'(x) + \frac{\delta}{r}y(x) = h(x) \qquad (5.19)$$

Για να επιλύσουμε την παραπάνω μη ομοιογενή διαφορική εξίσωση, πρέπει να λύσουμε πρώτα την αντίστοιχη ομοιογενή εξίσωση, δηλαδή την:

$$xy''(x) + \left[1 - \frac{\lambda+\delta}{r} - x\right]y'(x) + \frac{\delta}{r}y(x) = 0 \qquad (5.20)$$

Η λύση της εξίσωση (5.20) παρέχεται από τους Polyanin και Zaitsev (2003) και περιγράφεται ως ***η εκφυλισμένη υπεργεωμετρική εξίσωση***. Αναφέρεται ως:

$$y_h(x) = \kappa_1 y_1(x) + \kappa_2 y_2(x)$$

όπου κ_1, κ_2 τυχαίες σταθερές, οι οποίες μπορούν να υπολογιστούν με οριακές συνθήκες και $y_1(x)$, $y_2(x)$ δίνονται από τις σχέσεις (5.12) και (5.13) αντίστοιχα.

Οι Polyanin και Zaitsev (2003) δηλώνουν επίσης ότι η γενική λύση στη μη ομοιογενή διαφορική εξίσωση είναι το άθροισμα της γενικής λύσης στην αντίστοιχη ομοιογενή εξίσωση και της οποιαδήποτε συγκεκριμένης λύσης της μη ομοιογενούς εξίσωσης. Στην περίπτωση που εξετάζουμε, η μορφή της μη ομοιογενούς εξίσωσης (5.19) είναι η εξής:

$$y_p(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$$

Τώρα, αντικαθιστούμε την $y(x)$ με $y_p(x)$ στην εξίσωση (5.19), όπου προκύπτει ότι:

$$x\,y_1(x)C_1''(x) + \left[2xy_1'(x) + \left(1 - \frac{\lambda+\delta}{r} - x\right)y_1(x)\right]C_1'(x) +$$

$$x\,y_2(x)C_2''(x)\left[2xy_2'(x) + \left(1 - \frac{\lambda+\delta}{r} - x\right)y_2(x)\right]C_2'(x) = \eta(x)$$

Δεδομένου ότι χρειαζόμαστε μόνο μία συγκεκριμένη λύση για τα μη ομοιογενή διαφορική εξίσωση, μπορεί να βρούμε ειδικές συναρτήσεις για τις C_1 και C_2 προκειμένου να ισχύει η παραπάνω εξίσωση. Ένας τρόπος να επιτευχθεί αυτό χωρίς απώλειες της γενικότητας είναι υποθέτοντας ότι:

$$x\,y_1(x)C_1''(x) + \left[2xy_1'(x) + \left(1 - \frac{\lambda+\delta}{r} - x\right)y_1(x)\right]C_1'(x) = 0$$

και

$$x\,y_2(x)C_2''(x)\left[2xy_2'(x) + \left(1 - \frac{\lambda+\delta}{r} - x\right)y_2(x)\right]C_2'(x) = \eta(x)$$

Μπορούμε να λύσουμε τις παραπάνω γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης ως προς $C_1'(x)$ και $C_2'(x)$, με:

$$C_1'(x) = C_0 \exp\left[\int_{x_0}^{x}\left(-\frac{2xy_2'(x)+\left(1-\frac{\lambda+\delta}{r}\right)y_2(x)}{xy_2(x)}\right)dx\right]$$

$$= C_0 \exp\left[-2\ln\left(y_2(x)\right)-\left(1-\frac{\lambda+\delta}{r}\right)\ln x + x + l\right]$$

$$= k_1 y_1^{-2}(v)\, v^{-1+\frac{\lambda+\delta}{r}} e^{v}$$

όπου η $C_1'(x)$ περνά μέσα από κάποιο σημείο (x_0, C_0), και l κάποια σταθερά που υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα.

Έτσι, η εξίσωση (5.16) αντιπροσωπεύει τη λύση για τη $C_1(x)$ και ομοίως μπορούμε να επιβεβαιώσουμε τη λύση της $C_2(x)$, δηλαδή την εξίσωση (5.17).

Ως εκ τούτου, η γενική λύση για τη μη ομοιογενή διαφορική εξίσωση (5.19) έχει τη μορφή:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

όπως απαιτείται

5.6. Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό μελετάμε την εξέλιξη του πλεονάσματος μιας ασφαλιστικής εταιρείας που επενδύει ένα ποσοστό $(1-a)$ του τρέχοντος πλεονάσματος σε κίνδυνο άνευ κινδύνου περιουσιακό στοιχείο που παρέχει απόδοση με ένταση τόκου r. Το υπόλοιπο ποσοστό a του πλεονάσματος της εταιρείας διατίθεται σε ρευστοποιημένα αποθεματικά που δεν παρέχουν τόκο.

Ωστόσο, υψηλότερα αποθέματα ρευστότητας συνδέονται με υψηλότερη πιστοληπτική ικανότητα. Αυτό είναι το κίνητρο για την εταιρεία να αποφύγει να ορίσει a σε πολύ μικρή τιμή, ή με άλλα λόγια, να επενδύσει σχεδόν εξ ολοκλήρου το πλεόνασμα.

Στο πλαίσιο αυτής της ρύθμισης, είναι φυσικό να ερωτηθεί ποια είναι η κατάλληλη ισορροπία μεταξύ επενδύσεων και ρευστοποιημένων αποθεματικών. Η απάντηση παρέχεται από την τιμή του a, η οποία εξαρτάται από την ευαισθησία της εταιρείας στον κίνδυνο. Ειδικότερα, κάποιος πρέπει να γνωρίζει πόσο υψηλή πιθανότητα χρεοκοπίας ή έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας ο ασφαλιστής είναι πρόθυμος να ανεχθεί. Αυτές οι δύο ποσότητες και διάφορα άλλα μέτρα για την επικινδυνότητα της επιχείρησης είναι ειδικές περιπτώσεις της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής που συζητείται σε αυτή την εργασία.

Από την ανάλυσή μας φαίνεται ότι αν η ασφαλιστική εταιρεία διατηρεί ορισμένο ποσοστό $a>0$ του τρέχοντος πλεονάσματος της ως ρευστοποιημένα αποθεματικά και επενδύει το υπόλοιπο, ή η εταιρεία επενδύει το συνολικό της πλεόνασμα $(a=0)$, η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής ικανοποιεί την ίδια ολοκληρο-διαφορική εξίσωση. Η εξάρτηση από το a μπορεί να είναι σχετική με τις αρχικές συνθήκες. Αυτό με τη σειρά του σημαίνει ότι οι ποσότητες που μας ενδιαφέρουν και προκύπτουν από τη συνάρτηση των Gerber-Shiu εξαρτώνται επίσης από το a μόνο μέσω ορισμένων αρχικών τιμών. Ειδικότερα, η πιθανότητα η ενδεχόμενη χρεοκοπία και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας, τα οποία αναφέρονται παραπάνω, σχετίζονται με το a μέσω αυτών των αρχικών συνθηκών.

Κατά συνέπεια, είναι σημαντικό να διευκρινιστεί τόσο η μορφή της συνάρτησης Gerber-Shiu όσο και οι σχετικές αρχικές συνθήκες. Όσον αφορά την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής, προτείνονται δύο στρατηγικές λύσεις. Όσον αφορά τις αρχικές συνθήκες, οι Cai και Dickson (2002) παρέχουν μερική απάντηση. Δηλαδή, όταν η ένταση τόκου δ είναι μηδέν, το $m(0)$ καθορίζεται και μπορεί να χρησιμεύσει ως αρχική συνθήκη.

Δεδομένου ότι δεν υπάρχει ακριβής λύση στην προαναφερόμενη ολοκληρο-διαφορική εξίσωση που να ικανοποιείται από τη συνάρτηση Gerber-Shiu στην αναλογιστική βιβλιογραφία, η πρώτη μας στρατηγική λύσης είναι μέσω των μετασχηματισμών Laplace. Αυτό οδηγεί σε μια απλή γραμμική διαφορική εξίσωση που μπορεί να λυθεί ρητά για συγκεκριμένες περιπτώσεις της συνάρτησης ποινής, αρκεί να οριστεί μια αρχική συνθήκη. Συγκεκριμένα, αυτή μπορεί να είναι η $m(0)$ όταν $\delta=0$.

Η δεύτερη στρατηγική λύσης σχετίζεται με την περίπτωση που οι αποζημιώσεις είναι εκθετικά κατανεμημένες. Συνάγουμε μια ρητή μορφή της συνάρτησης Gerber-Shiu χωρίς να επιβάλλονται πρόσθετοι περιορισμοί στις παραμέτρους του μοντέλου. Το τελευταίο είναι μια αξιοσημείωτη βελτίωση έναντι των σχετικών αποτελεσμάτων στην τρέχουσα αναλογιστική βιβλιογραφία.

Τέλος, εύκολα διακρίνεται ότι, παρόλο που έχουμε οδηγηθεί σε μια ρητή έκφραση της συνάρτησης των Gerber-Shiu όταν οι απαιτήσεις έχουν εκθετική κατανομή, είναι πιο πρακτικό να εξαχθεί η τιμή της $m(u)$ για ένα συγκεκριμένο αρχικό κεφάλαιο u αριθμητικά μέσω του μετασχηματισμού Laplace $\tilde{m}(s)$ στην εξίσωση (5.7).

Βιβλιογραφία

Ελληνική

- Πολίτης, Κ. (2012). Εισαγωγή στη Θεωρία Συλλογικού Κινδύνου. Εκδόσεις Αθ. Σταμούλης.
- Πολίτης, Κ. (2015). Θεωρία Χρεοκοπίας, Πανεπιστημιακές Σημειώσεις, Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.
- Χατζηκωνσταντινίδης Ε. (2015). Θεωρία Κινδύνου, Πανεπιστημιακές Σημειώσεις, Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.
- Διπλωματική Εργασία της Κασσανή Σ. Αικατερίνης (Πειραιάς 2016) με θέμα «Στοχαστικές διαδικασίες πλεονάσματος με εξάρτηση και στρατηγικές μερισμάτων».
- Διπλωματική Εργασία της Μωραΐτου Ιωάννας (Πειραιάς 2018) με θέμα «Μοντέλα χρεοκοπίας με στρατηγικές μερισμάτων».

Ξένη

- L. C. Andrews, Special Functions for Engineers and Applied Mathematicians. Macmillan: New York, 1984.
- J. Cai, “Ruin probabilities and penalty functions with stochastic rates of interest,” StochasticProcesses and Their Applications vol. 112 pp. 53–78, 2004.
- J. Cai, and D. C. M. Dickson, “On the expected discounted penalty function at ruin of a surplus process with interest,” Insurance: Mathematics and Economics vol. 30 pp. 389–404, 2002.
- P. Embrechts, and H. Schmidli, “Ruin estimation for a general insurance risk model,” Advances in Applied Probability vol. 26 pp. 404–422, 1994.
- H. U. Gerber, An Introduction to Mathematical Risk Theory. S. S. Heubner Foundation Monograph Series 8: Philadelphia, 1979.
- H. U. Gerber, and E. S.W. Shiu, “The joint distribution of the time of ruin, the surplus immediately before ruin, and the deficit at ruin,” Insurance: Mathematics and Economics vol. 21 pp. 129–137, 1997.
- H. U. Gerber, and E. S.W. Shiu, “On the time value of ruin,” North American Actuarial Journal vol.2 no. 1 pp. 48–78, 1998.

- BÜHLMANN, H. (1970) *Mathematical Methods in Risk Theory*. Springer-Verlag.
- CAI, J. and DICKSON, D.C.M. (2002) On the expected discounted penalty function at ruin of a surplus process with interest, *Insurance: Mathematics and Economics* **30**: 389-404.
- EMBRECHTS, P. and SCHMIDLI, H. (1994) Ruin estimation for a general insurance risk model, *Advances in Applied Probability* **26**: 404-422.
- GERBER, H.U., LIN, X.S. and YANG, H. (2006) A note on the dividend-penalty identity and the optimal dividend barrier, *ASTIN Bulletin* **36(2)**: 489-503.
- GERBER, H.U. and SHIU, E.S.W. (1998) On the time value of ruin, *North American Actuarial Journal* **2(1)**: 48-78.
- GERBER, H.U. and SHIU, E.S.W. (2005) The time value of ruin in a Sparre Andersen model, *North American Actuarial Journal* **9(2)**: 49-84.
- GERBER, H.U. and SHIU, E.S.W. (2006) On optimal dividend strategies in the compound Poisson model, *North American Actuarial Journal* **10(2)**: 76-93.
- LI, S. and GARRIDO, J. (2004) On ruin for the Erlang(n) risk process, *Insurance: Mathematics and Economics* **34**: 391-408.
- LIN, X.S. and PAVLOVA, K.P. (2006) The compound Poisson risk model with a threshold dividend strategy, *Insurance: Mathematics and Economics* **38**: 57-80.
- LIN, X.S., WILLMOT, G.E. and DREKIC, S. (2003) The classical risk model with a constant dividend barrier: analysis of the Gerber-Shiu discounted penalty function, *Insurance: Mathematics and Economics* **33**: 551-566.
- LIN, X.S. and SENDOVA, K.P. (2007) The compound Poisson risk model with multiple thresholds, *Insurance: Mathematics and Economics*, **42(2)**: 617-627.
- LINZ, P. (1985) *Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations*. Studies 7, SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia.
- SUNDT, B. and TEUGELS, J.L. (1995) Ruin estimates under interest force, *Insurance: Mathematicsand Economics* **16**: 7-22.

- YUEN, K.C., WANG, G. and WAI, K.L. (2007) The Gerber-Shiu expected discounted penalty function for risk processes with interest and a constant dividend barrier, *Insurance Mathematics and Economics* **40(11)**: 104-112.
- Cai, J (2007) On the Time Value of Absolute Ruin with Debit Interest, *Advances in Applied Probability*, 39: 343–359.
- Cai, J and DCM Dickson (2002) On the Expected Discounted Penalty Function at Ruin of a Surplus Process with Interest, *Insurance: Mathematics and Economics*, 30: 389–404.
- Cai, J, R Feng, and GE Willmot (2009a) Analysis of the Compound Poisson Surplus Model with Liquid Reserves, Interest and Dividends, *ASTIN Bulletin*, 39(1): 225–247.
- Cai, J, R Feng, and GE Willmot (2009b) The Compound Poisson Surplus Model with Interest and Liquid Reserves: Analysis of the Gerber-Shiu Discounted Penalty Function, *Methodology and Computing in Applied Probability*, 11: 401–423.
- Gerber, HU and ESW Shiu (1998) On the Time Value of Ruin, *North American Actuarial Journal*, 2: 48–78.
- Lin, XS, GE Willmot, and S Drekic (2003) The Classical Risk Model with a Constant Dividend Barrier: Analysis of the Gerber-Shiu discounted penalty function, *Insurance: Mathematics and Economics,* 33: 551–566.
- Mitric, I-R, KP Sendova, and CC-L Tsai (2010) On a Multi-Threshold Compound Poisson Process Perturbed by Diffusion, *Statistics and Probability Letters*, 80: 366– 375.
- Petrovski, IG (1966) *Ordinary Differential Equations,* New York: Dover Publications.
- Polyanin, AD and VF Zaitsev (2003) *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations* (2nd), Boca-Raton: Chapman and Hall/CRC.
- Spiegel, MR (1965) *Theory and Problems of Laplace Transforms,* New York: Schaum Publishing.
- Yang, H, Z Zhang, and C Lan (2008) On the Time Value of Absolute Ruin for a Multi-Layer Compound Poisson Model under Interest Force, *Statistics and Probability Letters*, 78: 1835–1845.