

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ**



**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ  
ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ  
ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ**

---

**ΜΕΛΕΤΗ ΤΩΝ ΕΜΦΑΝΙΣΕΩΝ ΜΕΓΑΛΩΝ  
ΑΠΟΖΗΜΙΩΣΕΩΝ ΜΕΣΩ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ  
ΑΚΡΑΙΩΝ ΤΙΜΩΝ, ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΙΣ  
ΑΝΤΑΣΦΑΛΙΣΕΙΣ**

---

**Αντώνιος Ι. Σαρηκώστας**

Διπλωματική εργασία

που υποβλήθηκε στο τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Πειραιάς

Οκτώβριος 2018

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. .... Συνεδρίαση του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της επιτροπής ήταν:

- Μιχαήλ Μπούτσικας (Επιβλέπων)
- Γεώργιος Πιτσέλης
- Κωνσταντίνος Πολίτης

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.

**UNIVERSITY OF PIRAEUS**



**DEPARTMENT OF STATISTICS  
AND INSURANCE SCIENCE**

**POSTGRADUATE PROGRAM IN  
ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT**

---

**A STUDY OF APPEARANCES OF LARGE  
CLAIMS VIA EXTREME VALUE THEORY,  
WITH APPLICATIONS IN REINSURANCE**

---

By

**Antonios I. Sarikostas**

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the  
University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the  
degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management

Piraeus, Greece

October 2018

## Ευχαριστίες

Η παρούσα εργασία εκπονήθηκε με σκοπό την επιτυχή ολοκλήρωση του μεταπτυχιακού προγράμματος «Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου». Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Μπούτσικα Μιχαήλ για την καθοδήγηση και κατανόηση του. Καθώς με την παρούσα διπλωματική εργασία η σταδιοδρομία μου στο Πανεπιστήμιο Πειραιώς, τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, έρχεται στο πέρας της, θα ήθελα να ευχαριστήσω επίσης τον Επίκουρο Καθηγητή κ. Πιτσέλη Γεώργιο για την πάντα προθυμία του να μεταλαμπαδεύσει γνώση, την οικογένεια μου για την στήριξή της καθ' όλη την διάρκεια των σπουδών μου, την αγαπημένη μου Σωτηρία. Τέλος, ευχαριστώ τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Πολίτη Κωνσταντίνο για τις γνώσεις του και την συμμετοχή του στην τριμελή εξεταστική επιτροπή.

## Περίληψη

Ως Ακραία, ορίζονται τα γεγονότα εκείνα, τα οποία συμβαίνουν σπάνια, δηλαδή με μικρή πιθανότητα εμφάνισης, και η σφοδρότητά τους είναι ισχυρή. Σύμφωνα με την Θεωρία Ακραίων Τιμών αυτά τα ακραία συμβάντα, πρέπει να μελετηθούν ξεχωριστά από το σύνολο των δεδομένων, ούτως ώστε να εξαχθούν συμπεράσματα για την συμπεριφορά τους, τα οποία θα συμβάλλουν στην εύρεση τρόπων αντιμετώπισης, ώστε να ομαλοποιηθούν οι επικείμενες συνέπειες σε περίπτωση επέλευσης ενός Ακραίου γεγονότος. Ένας από τους κλάδους που έχει εφαρμογή η Θεωρία ακραίων τιμών είναι η ασφαλιστική αγορά, καθώς ένα χαρτοφυλάκιο μπορεί να πληγεί από Ακραία ζημιές, γεννώντας την ανάγκη αντιμετώπισής τους. Στην Αναλογιστική Επιστήμη, η ανασφάλιση εφαρμόζεται από τις ασφαλιστικές εταιρίες κατά την Διαχείριση Κινδύνου ως ένα μέτρο αντιμετώπισης του κινδύνου. Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η σύνδεση της Θεωρίας Ακραίων Τιμών με την Αντασφάλιση, καθώς μελετώντας και ερμηνεύοντας κατάλληλα τα αποτελέσματα των Ακραίων ζημιών μέσω της Θεωρίας Ακραίων τιμών, μία ασφαλιστική εταιρία έχει την δυνατότητα να ενεργοποιήσει κάποια αντασφαλιστική σύμβαση, καταβάλλοντας το αντίστοιχο ασφάλιστρο. Θα γίνει παρουσίαση των κατηγοριών της αντασφάλισης και της Θεωρίας Ακραίων Τιμών μέσω των μεθόδων «Μέγιστα Υποπεριόδων» και «Υπερβάσεις Πάνω από ένα Κατώφλι» και εν συνέχεια, θα τεθεί με απλό και κατανοητό τρόπο η εφαρμογή της τομής τους, μέσω αριθμητικού παραδείγματος.

## Abstract

As extreme, can be considered the events, which are rare and intense (i.e. appear with very small probability and their occurrence may have high impact in the model we study). According to Extreme Value Theory these extreme events should be studied separately from the entire dataset in order to extract useful results about their behavior. These results will help us find ways to deal with (i.e. to normalize) the impending consequences in case an extreme event occurs. One of numerous fields in which Extreme Value Theory (EVT) can be applied, is insurance risk models, where e.g. we may consider an insurance portfolio which could be hit by the occurrence of very large (i.e. extreme) claims. In actuarial practice, reinsurance is used by insurance companies as a measure of the risk management process. The purpose of this thesis is to connect the Extreme Value Theory and the concept of Reinsurance. By studying and interpreting appropriately the results of extreme losses through Extreme Value Theory, an insurance company could arrange a reinsurance contract by estimating the corresponding premium. Initially we present several types of Reinsurance contracts and then we offer an introduction to the “Block Maxima” and “Peaks Over Threshold” (POT) methods in a simple and comprehensible way through a numeric example. In the final chapter we exploit specific results of extreme value theory in order to study the problem of pricing a non-proportional reinsurance contract.

# Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή.....	1
2. Αντασφάλιση.....	3
2.1 Εισαγωγή.....	3
2.2 Σκοπός και Αποτελέσματα της Αντασφάλισης.....	4
2.3 Αντασφάλιση και Φερεγγυότητα II (Solvency II).....	5
2.4 Είδη Αντασφάλισης.....	7
2.4.1 Προαιρετική Αντασφάλιση (Facultative Reinsurance).....	7
2.4.2 Συμβατική Αντασφάλιση (Treaty Reinsurance).....	7
2.4.2.1 Αναλογική Αντασφάλιση (Proportional Reinsurance).....	7
2.4.2.2 Μη Αναλογική Αντασφάλιση (Non-Proportional Reinsurance).....	14
3. Θεωρία Ακραίων Τιμών.....	16
3.1 Εισαγωγή.....	16
3.2 Περιοχές έλξης.....	19
3.2.1 Περιοχή Έλξης της $\Phi\alpha$ (Frechet).....	20
3.2.2 Περιοχή Έλξης της $\Psi\alpha$ (Weibull).....	21
3.2.3 Περιοχή Έλξης της $\Delta$ (Gumbel).....	21
4. Μέθοδοι και Τεχνικές Ανάλυσης Ακραίων Τιμών.....	22
4.1 Μέθοδος Μεγίστων Υποπεριόδων - Block Maxima.....	25
4.1.1 Κατανομή των Block Maxima – Γενικευμένη Κατανομή Ακραίων Τιμών Generalized Extreme Value Distribution (GEV).....	26
4.1.2 Εκτίμηση των Παραμέτρων της GEV.....	29
4.1.3 Στάθμη Απόδοσης $Z_p$ (return level).....	32
4.1.4 Έλεγχος καλής προσαρμογής των δεδομένων στην GEV.....	35
4.2 Μέθοδος Υπερβάσεων πάνω από ένα Κατώφλι – POT (Peaks over Threshold).....	36
4.2.1 Γενικευμένη κατανομή Pareto (Generalized Pareto Distribution -GPD).....	38
4.2.2 Η επιλογή του βέλτιστου κατωφλίου $u$ .....	40
4.2.3 Εκτίμηση των Παραμέτρων της GPD.....	44
4.2.4 Εκτίμηση της στάθμης απόδοσης (return level) για $m$ παρατηρήσεις.....	47
4.2.5 Έλεγχος καλής προσαρμογής των δεδομένων στην GPD.....	49
5. Εφαρμογή Μεθόδου POT στην αντασφάλιση.....	53
5.1 Μη-αναλογική αντασφαλιστική σύμβαση υπερβάλλουσας ζημιάς (excess of loss treaty).....	53

5.2 Εφαρμογή Μη-αναλογική αντασφαλιστική σύμβαση υπερβάλλουσας ζημιάς (excess of loss treaty).....	55
Συμπεράσματα.....	57
Βιβλιογραφία.....	59



# 1. Εισαγωγή

Η Θεωρία Ακραίων Τιμών (Extreme Value Theory – EVT), έχει αναπτυχθεί γύρω από την μελέτη και ανάλυση των ακραίων παρατηρήσεων. Χρησιμοποιείται για την κατανόηση της εμφάνισης ακραίων παρατηρήσεων, π.χ. ακραίων καιρικών φαινομένων, γεωφυσικών φαινομένων, αλλά και οικονομικών μεγεθών και εφαρμόζεται τόσο σε υδρολογία, γεωλογία, σεισμολογία όσο και σε χρηματοοικονομικά και την ασφαλιστική επιστήμη.

Ενδεικτικά, το Νοέμβριο 2017 ο σεισμός στα σύνορα του Ιράν – Ιράκ ήταν εντάσεως 7,3 βαθμούς της κλίμακας Ρίχτερ, έχοντας μεγάλες καταστροφικές συνέπειες. Την ίδια χρονική περίοδο και σύμφωνα με μετρήσεις που έγιναν στην περιοχή της Μάνδρας, την ημέρα της καταστροφής η βροχόπτωση ήταν 120-140 χιλιοστά ανά ώρα, και συνέβαλε στο αποτέλεσμα το 80% της δόμησης να χρήζει αποζημίωση.

Σύμφωνα με την Θεωρία Ακραίων Τιμών, οι ακραίες παρατηρήσεις διαχωρίζονται από το σύνολο των δεδομένων και μελετώνται ξεχωριστά, ούτως ώστε να εξαχθούν χρήσιμα συμπεράσματα για τις οικονομικές ή μη, επιπτώσεις σε περίπτωση επέλευσής τους.

Στο δεύτερο Κεφάλαιο θα δοθεί ο ορισμός της ανασφάλισης και οι λόγοι που χρησιμοποιείται από τις ασφαλιστικές εταιρίες ως ένα μέτρο αντιμετώπισης κινδύνου. Θα γίνει εκτενής αναφορά στα είδη ανασφάλισης, που χωρίζονται σε δύο βασικές κατηγορίες, αναλογική και μη – αναλογική ανασφάλιση. Πιο συγκεκριμένα θα αναφερθούμε σε ανασφαλιστικές συμβάσεις Σταθερού Ποσού (Quota Share), Πλεονάζοντος Μεριδίου (Surplus Share), Υπερβάλλουσας Ζημιάς (Excess of Loss) και Σύμβαση Περιορισμού Ζημιάς (Stop Loss) και θα δοθούν αριθμητικά παραδείγματα.

Στο τρίτο Κεφάλαιο γίνεται εισαγωγή στην Θεωρία Ακραίων Τιμών (Extreme Value Theory – EVT), παρουσιάζοντας το Θεμελιώδες Θεώρημα Fisher – Tippett και αναφέροντας τις περιοχές έλξης των Κατανομών Τυπικών Ακροτάτων. Εν συνέχεια, αναλύονται οι δύο βασικές μέθοδοι που χρησιμοποιούνται ευρέως, η μέθοδος Μεγίστων Υποπεριόδων (Block Maxima) και η μέθοδος Υπερβάσεων Πάνω από ένα Κατώφλι (Peaks Over Threshold – POT), επικεντρώνοντας την έρευνα στην δεύτερη κατά σειρά μέθοδο.

Σύμφωνα με την μέθοδο Μεγίστων Υποπεριόδων τα δεδομένα χωρίζονται σε υποπεριόδους από τις οποίες συλλέγονται για την έρευνα οι μέγιστες παρατηρήσεις. Αποδεικνύεται ότι, υπό συγκεκριμένες γενικές συνθήκες, οι παρατηρήσεις αυτές έχουν καλή προσαρμογή στην Γενικευμένη Κατανομή Ακραίων Τιμών (Generalized Extreme Value Distribution – GEV). Εκτιμώνται οι ε.μ.π. των παραμέτρων και υπολογίζεται η στάθμη απόδοσης.

Στην μέθοδο Υπερβάσεων πάνω από ένα Κατώφλι επιλέγονται ως ακραίες οι παρατηρήσεις οι οποίες ξεπερνούν το κατώφλι, έστω  $u$ . Παρατηρούμε ότι επιλέγοντας κατάλληλα το κατώφλι  $u$ , οι επιλεγμένες ακραίες παρατηρήσεις ακολουθούν την Γενικευμένη Κατανομή Pareto (Generalized Pareto Distribution). Όπως θα αναλύσουμε, καλύτερο κατώφλι είναι το μικρότερο δυνατό, κάτω από το οποίο η Γενικευμένη Κατανομή Pareto προσαρμόζεται ικανοποιητικά στις ακραίες παρατηρήσεις. Εκτιμούμε τις παραμέτρους με τη μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας και υπολογίζουμε την πιθανότητα μία ζημιά να ξεπεράσει μία συγκεκριμένη τιμή, καθώς και την στάθμη απόδοσης, έτσι ώστε μία ασφαλιστική εταιρία να αξιολογήσει τον κίνδυνο και να προβεί στην σύναψη κατάλληλης αντασφαλιστικής σύμβασης.

Στο τέταρτο κεφάλαιο, θα γίνει η σύνδεση της αντασφάλισης, όπως αυτή θα ορισθεί στο δεύτερο Κεφάλαιο, και της μεθόδου Υπερβάσεων πάνω από ένα Κατώφλι, η οποία βασίζεται στην Θεωρία Ακραίων Τιμών. Θα γίνει εφαρμογή των αποτελεσμάτων που βρέθηκαν στο τρίτο Κεφάλαιο, σύμφωνα με τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν, και θα προταθούν στην ασφαλιστική εταιρία αντασφαλιστικές συμβάσεις και θα υπολογιστεί το καθαρό ασφάλιστρο μίας περιόδου. Κάνοντας σύγκριση των αντασφαλιστικών προϊόντων η ασφαλιστική εταιρία μπορεί να επιλέξει ανάλογα με το προφίλ κινδύνου και τις ανάγκες της.

## 2. Αντασφάλιση

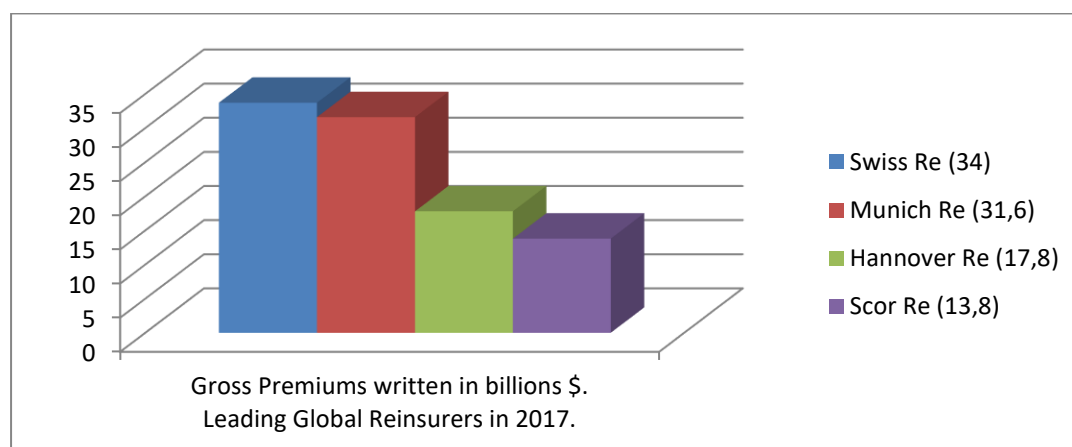
### 2.1 Εισαγωγή

Ο κίνδυνος ορίζεται ως η αβεβαιότητα αναφορικά με την πιθανότητα επέλευσης ενός ζημιογόνου ενδεχομένου. Η ασφάλιση είναι η μέθοδος με την οποία φυσικά και νομικά πρόσωπα μεταβιβάζουν στις ασφαλιστικές εταιρίες τους καθημερινούς κινδύνους που αντιμετωπίζουν, ώστε η επέλευση ενός αβέβαιου ζημιογόνου γεγονότος να έχει τις λιγότερες δυνατές αρνητικές επιπτώσεις.

Όπως οι πελάτες των ασφαλιστικών εταιριών (ασφαλιζόμενοι) ενεργοποιούν ασφαλιστήρια συμβόλαια για να προστατευτούν από την αβεβαιότητα, έτσι γεννιέται η ανάγκη με την σειρά τους οι ασφαλιστικές εταιρίες να αναζητούν ασφάλιση έναντι των κινδύνων που έχουν αναλάβει. Για να καλύψουν αυτή την ανάγκη οι ασφαλιστικές εταιρίες θα χρησιμοποιήσουν το “εργαλείο” της αντασφάλισης. Η αντασφάλιση είναι μία συμφωνία μεταξύ δύο ή περισσότερων μερών. Από την μία πλευρά είναι ο ασφαλιστής, ονομαζόμενος και ως πρωτασφαλιστής ή αντασφαλισμένος ή εκχωρητής (ceding company or cedent), ο οποίος θα μεταβιβάσει ή ακόμα καλύτερα, θα εκχωρήσει κομμάτι του κινδύνου. Από την άλλη μεριά είναι ο/οι αντασφαλιστής/ες (reinsurer), ο/οι οποίος/οι αναλαμβάνει ένα μερίδιο των απαιτήσεων που θα προκύψουν από τους εκχωρούμενους κινδύνους. Με την πληρωμή του ασφαλιστρού από τον ασφαλιστή που αγοράζει την αντασφάλιση, γίνεται η επιβεβαίωση αυτής της συμφωνίας. (π.χ. βλέπε Strain, Robert W, (1980)).

Πωλητές των ασφαλιστικών προϊόντων μπορεί να είναι είτε πολυεθνικές αντασφαλιστικές εταιρίες με κύρια δραστηριότητα την πώληση αυτών των ασφαλιστικών προϊόντων, είτε μεγάλες ασφαλιστικές εταιρίες.

Οι μεγαλύτεροι αντασφαλιστικοί οργανισμοί στην Ευρώπη που τυγχάνει να είναι και παγκοσμίως είναι οι Swiss Reinsurance Company Ltd., Hannover Rueck S.E., Munich Reinsurance Company, SCOR S.E. των οποίων τα μικτά εγγεγραμμένα ασφάλιστρα για το έτος 2017 εμφανίζονται στο παρακάτω Γράφημα 1.



Γράφημα 1. Μεγαλύτεροι Αντασφαλιστικοί οργανισμοί

## 2.2 Σκοπός και Αποτελέσματα της Αντασφάλισης

- Επιμερισμός του κινδύνου και απορρόφηση κραδασμών συστήματος

Μία ασφαλιστική εταιρία εκχωρώντας μέρος του κινδύνου χρησιμοποιώντας την αντασφάλιση, διαμοιράζει τον κίνδυνο στο ασφαλιστικό σύστημα κάνοντάς το πιο σταθερό και ευέλικτο. Επιμερίζοντας έναν κίνδυνο, κατά συνέπεια και μία ενδεχόμενη μελλοντική ζημιά, κάνει την διαχείρισή του ευκολότερη έχοντας ως αποτέλεσμα την ταχύτερη και αποτελεσματικότερη απορρόφηση του κινδύνου.

- Αύξηση της Ικανότητας Ασφάλισης

Ας αναλογιστούμε μία καινούργια μικρή ασφαλιστική εταιρία που μόλις ξεκίνησε την δραστηριότητά της. Όπως είναι λογικό, χωρίς την αντασφάλιση δεν θα είχε την δυνατότητα να αναλάβει “μεγάλους” κινδύνους. Εν’ αντιθέσει, με την μέθοδο της αντασφάλισης της δίνεται η δυνατότητα να αναλαμβάνει αυτούς τους κινδύνους (μέρος αυτών), διογκώνοντας την φίρμα της εταιρίας και την θέση της στην ασφαλιστική αγορά δίχως να θέτει σε κίνδυνο την ομαλή διεξαγωγή της λειτουργίας της ενισχύοντας παράλληλα και τον ανταγωνισμό.

- Ενίσχυση Καινοτομίας

Σε μία συμφωνία αντασφάλισης ο εκχωρητής και η αντασφαλίστρια εταιρία θα έρθουν σε επαφή, αναπτύσσοντας μία σχέση κατά την οποία θα ανταλλάξουν πληροφορίες, δεδομένα και τρόπους αντιμετώπισης κινδύνων. Μία τέτοια συνεργασία ενισχύει την καινοτομία των εμπλεκομένων κατά συνέπεια την καινοτομία και την απόδοση της ασφαλιστικής αγοράς.

- Ισορροπία Χαρτοφυλακίου

Η ασφαλιστική εταιρία χρησιμοποιώντας συγκεκριμένες πρακτικές αντασφάλισης μπορεί να βελτιώσει την ισορροπία του χαρτοφυλακίου της. Έχει την επιλογή να αποφασίσει ποιούς κινδύνους και πάνω από ποιο ποσό, θα εκχωρήσει για αντασφάλιση και ποιούς θα κρατήσει εξ’ ολοκλήρου. Είναι επιθυμητό να μην παραχωρήσει ασφαλίστρα για κινδύνους που μπορεί να διαχειριστεί, ενώ να αντασφαλιστεί για τους υπόλοιπους ιδιαίτερους κινδύνους επιτυχαίνοντας ταυτόχρονα τόσο την ομοιογένεια του χαρτοφυλακίου, όσο και την μικρότερη μεταβλητότητα των απαιτήσεων που απορρέουν από το χαρτοφυλάκιο.

- Η σταθεροποίηση των αποτελεσμάτων

Με την χρήση της αντασφάλισης, η ασφαλιστική εταιρία μπορεί να προκαθορίσει τις μέγιστες δυνατές απώλειες, καθώς μπορεί να ορίζει το ανώτατο όριο ευθύνης με τις μέγιστες δυνατές ζημίες. Ορίζοντας το μέγιστο όριο ευθύνης η ασφαλιστική εταιρία

ελαχιστοποιεί την διακύμανση των απωλειών και επιτυγχάνει την σταθερότητα των αποτελεσμάτων.

- Ενίσχυση Φερεγγυότητας του Αντασφαλιζόμενου

Η φερεγγυότητα μίας ασφαλιστικής εταιρίας είναι ένας τρόπος για την αξιολόγηση της ευρωστίας της. Χρησιμοποιώντας την αντασφάλιση και εκχωρώντας μέρος του κινδύνου, αλλά και μέρος ασφαλίσεων, μία ασφαλιστική εταιρία ενισχύει την φερεγγυότητά της, καθώς μειώνεται η έκθεση της στον κίνδυνο.

## 2.3 Αντασφάλιση και Φερεγγυότητα II (Solvency II)

Ένας σημαντικός λόγος που η αντασφάλιση εμφανίζει ραγδαία ανάπτυξη τα τελευταία χρόνια είναι η εφαρμογή του κανονισμού «Φερεγγυότητα II» (Solvency II).

Εν συντομία υπό την οδηγία «Φερεγγυότητα II» γίνεται επαναξιολόγηση της φερεγγυότητας των ασφαλιστικών εταιριών με σκοπό την

- Κατάλληλη προστασία των ασφαλισμένων
- Χρηματοπιστωτική σταθερότητα
- Παγίωση δίκαιων και σταθερών αγορών
- Ενίσχυση της ανταγωνιστικότητας των Ευρωπαϊκών ασφαλιστικών εταιριών σε διεθνές επίπεδο

Η «Φερεγγυότητα II» βασίστηκε στο αντίστοιχο πλαίσιο που αφορά την κεφαλαιακή επάρκεια των Τραπεζικών ιδρυμάτων, την «Βασιλεία II» (Basel II) και υιοθέτησε την μέθοδο των «3 πυλώνων» (3 Tiers), ήτοι

- I. Ποσοτικές Απαιτήσεις: Κατά τον Πυλώνα 1 γίνεται η αποτίμηση Ενεργητικού Παθητικού και ο υπολογισμός των Επενδύσεων, των Ιδίων Κεφαλαίων, των Τεχνικών Αποθεμάτων (Technical Provisions) και των Κεφαλαιακών Απαιτήσεων MCR (Minimum Capital Requirements) και SCR (Solvency Capital Requirements)
- II. Ποιοτικές Απαιτήσεις και Διαδικασία Εποπτικής Αξιολόγησης: Στον Πυλώνα 2 λαμβάνει χώρα η αξιολόγηση για την επάρκεια των κεφαλαίων φερεγγυότητας, τόσο από την εσωτερική αξιολόγηση της ασφαλιστικής εταιρίας μέσω της Εσωτερικής Εκτίμησης Κινδύνων Φερεγγυότητας – ORSA (Own Risk Solvency Assessments), όσο και από την εποπτική αρχή η οποία θα αποφανθεί για τη έγκριση των εσωτερικών μοντέλων υπολογισμού του SCR, εάν δεν έχει γίνει χρήση της τυποποιημένης μεθόδου (Standard Approach)
- III. Δημοσιοποίηση και Αναφορά: Οι ασφαλιστικές εταιρίες υποβάλλουν στην εποπτική αρχή όλη την αναγκαία πληροφόρηση με σκοπό να αξιολογηθεί η κατάσταση της ασφαλιστικής εταιρίας ώστε να ληφθούν οι κατάλληλες αποφά-

σεις<sup>1</sup> και εν συνεχεία γίνεται η δημοσιοποίηση των αποτελεσμάτων στο ευρύ κοινό.

Συνεπώς υπό καθεστώς Solvency II, οι ασφαλιστικές εταιρίες είναι υποχρεωμένες να παρακρατούν κεφάλαια ανάλογα με τους κινδύνους που έχουν αναλάβει, με σκοπό τόσο την ενίσχυση της φερεγγυότητας τους όσο και την σταθερότητα της ασφαλιστικής αγοράς και του χρηματοπιστωτικού συστήματος.

Οι Κεφαλαιακές Απαιτήσεις Φερεγγυότητας SCR είναι μία προοπτικά υπολογιζόμενη συνολική απαίτηση η οποία λαμβάνει υπόψη την καθαρή επίπτωση όλων των τεχνικών μείωσης κινδύνου. Μία εξαιρετικά σημαντική και συνήθης στρατηγική είναι η Αντασφάλιση. Αντισταθμίζοντας την ανασφάλιση μία ασφαλιστική εταιρία επιτυγχάνει την μείωση των απαραίτητων κεφαλαιακών απαιτήσεων SCR.

Όπως αναφέραμε παραπάνω, για τον επιμερισμό του κινδύνου συνηθίζεται οι αντασφαλιστικές συμβάσεις να πραγματοποιούνται μεταξύ αντασφαλιζόμενου και πολλών αντασφαλιστικών εταιριών. Στην συνέχεια παρατίθεται ο Πίνακας 1, σύμφωνα με την Fitch Ratings (Global Reinsurance guide), στον οποίο εμφανίζονται τα απαιτούμενα κεφάλαια που πρέπει να διατηρεί μία ασφαλιστική εταιρία σύμφωνα με την «φερεγγυότητα II» ανάλογα με τις αντασφαλιστικές συμβάσεις που έχει στην κατοχή της, για την αντιμετώπιση του κινδύνου χρεοκοπίας της αντασφαλιστικής εταιρίας (τα ποσά του πίνακα είναι σε ευρώ και αντιστοιχούν στην περίπτωση που η αναμενόμενη ζημία σε περίπτωση χρεοκοπίας είναι 1,250 ευρώ).

#### Counterparty Default Capital Required by Rating and No. of Reinsurers

Reinsurer Credit Rating	Number of Reinsurers				
	1	2	3	4	5
AAA	8	7	6	6	6
AA	19	16	15	14	14
A	42	35	32	31	30
BBB	92	77	71	68	66
BB	340	284	263	252	245
B	625	523	483	462	448

Πίνακας 1. Capital Required

Όπως γίνεται εύκολα αντιληπτό, τα απαιτούμενα κεφάλαια είναι ευθέως ανάλογα τόσο με το πλήθος των αντασφαλιστικών εταιριών που χρησιμοποιεί μία ασφαλιστική εταιρία, όσο και την αξιολόγηση αυτών (Credit Rating) από τους οίκους αξιολόγησης

<sup>1</sup> Οι τρεις πιθανές αποφάσεις είναι: Συμμόρφωση με τον κανονισμό , Σχέδιο ανάκαμψης , Ανάκληση Άδειας Λειτουργίας

πιστοληπτικής ικανότητας (Credit Rating Agencies)<sup>2</sup>. Όσο περισσότεροι ανασφαλιστές τόσο το καλύτερο. Όσο καλύτερη η αξιολόγηση του ανασφαλιστή, τόσο λιγότερα κεφάλαια απαιτούνται.

## 2.4 Είδη Αντασφάλισης

### 2.4.1 Προαιρετική Αντασφάλιση (Facultative Reinsurance)

Η Προαιρετική Αντασφάλιση βασίζεται στην μέθοδο προσφοράς και αποδοχής κατά την οποία ο ανασφαλιστής, ελέγχοντας όλα τα διαθέσιμα στοιχεία και αξιολογώντας τον κίνδυνο, διατηρεί το δικαίωμα να δεχθεί ή να απορρίψει κάθε κίνδυνο που του προσφέρεται από τον ασφαλιστή. Η προαιρετική αντασφάλιση μπορεί να είναι αναλογική ή μη αναλογική και έχει εφαρμογή για κινδύνους ιδιαίτερης επικινδυνότητας. Συνήθως χρησιμοποιείται είτε για την αντιμετώπιση ενός ιδιαίτερου κινδύνου ο οποίος δεν καλύπτεται καθόλου από άλλες αντασφαλιστικές συμβάσεις, είτε λειτουργεί συμπληρωματικά για την κάλυψη ζημιών που ξεπερνούν τα προκαθορισμένα ποσά που παρέχονται με άλλες συμβάσεις.

### 2.4.2 Συμβατική Αντασφάλιση (Treaty Reinsurance)

Κατά την συμβατική αντασφάλιση ο ασφαλιστής και ο ανασφαλιστής συζητούν, διαπραγματεύονται και υπογράφουν τους όρους της σύμβασης υπό τους οποίους ο ανασφαλιστής καλύπτει ένα καθορισμένο μερίδιο όλων των ασφαλιστηρίων συμβολαίων που εκδίδει η εκχωρούσα εταιρεία τα οποία καθορίζονται στην σύμβαση (π.χ. βλέπε Cass, Kensicki, Gary, Reinarz, (1997)). Στην περίπτωση που η σύμβαση υποχρεώνει τον ανασφαλιστή να δεχθεί όλους τους κινδύνους που έχει αναλάβει ο ασφαλιστής και εκχωρήθηκαν στην σύμβαση ονομάζεται Υποχρεωτική (Obligatory). Στην περίπτωση που επιτρέπει στον ασφαλιστή να επιλέξει τους κινδύνους που επιθυμεί να παραχωρήσει, ενώ ο ανασφαλιστής υποχρεούται να αποδεχθεί τους εν λόγω κινδύνους τότε καλείται Προαιρετική-Υποχρεωτική (Facultative-Obligatory).

#### 2.4.2.1 Αναλογική Αντασφάλιση (Proportional Reinsurance)

Αναλογική αντασφάλιση ορίζεται το είδος αντασφάλισης κατά το οποίο η εκχώρηση του κινδύνου, ο καταμερισμός του ασφαλιστρού και η καταβολή της αποζημίωσης σε περίπτωση που επέλθει ο κίνδυνος, υπολογίζονται κατά την ίδια αναλογία. Στην αναλογική αντασφάλιση, ο ανασφαλιστής (Y) καλείται να αναλάβει ένα προσυμφωνημένο ποσοστό του κινδύνου, το υπόλοιπο το αναλαμβάνει ο ασφαλιστής (X). Ένα τέτοιου είδους ασφάλισης μπορεί να θεωρηθεί και η συνασφάλιση (Coinsurance) κατά την οποία η ηγέτιδα εταιρία (Leader) αναλαμβάνει το μεγαλύτερο ποσοστό του κινδύνου και οι συνασφαλιστές (Followers) ακολουθούν τους όρους που έχει ορίσει η ηγέτιδα εταιρία. Σε περίπτωση που έχουμε ίδια αναλογία σε όλες τις καλύψεις ονομάζε-

<sup>2</sup> Οι οίκοι αξιολόγησης διαβαθμίζουν τις ασφαλιστικές εταιρίες σε κατηγορίες ανάλογα με την πιστοληπτική τους ικανότητα. Γνωστότεροι αυτών Moody's, η Standard & Poor's (S&P) και η Fitch

ται αντασφάλιση Σταθερού Ποσοστού (Quota Share). Εάν η αναλογία, σχετικά με κάθε κάλυψη που ορίζεται και παρέχεται στο ασφαλιστήριο συμβόλαιο, διαφέρει, ονομάζεται Αντασφάλιση Υπερβάλλοντος Κεφαλαίου ή Αντασφάλιση Πλεονάζοντος Μεριδίου (Surplus Share).

### 1. Αναφορικά με την αντασφάλιση Σταθερού Ποσοστού

Η αντασφάλισης Σταθερού Ποσοστού είναι μία σύμβαση αντασφάλισης κατά την οποία ο εκχωρητής παραχωρεί ένα προκαθορισμένο ποσοστό, ίδιο για όλους τους κινδύνους που έχει αναλάβει, και ο αντασφαλιστής υποχρεούται να αναλάβει αυτό το ποσοστό.

**Αριθμητικό Παράδειγμα:** Η ασφαλιστική εταιρία ( $X$ ) εκχωρεί μέρος του κινδύνου με αντασφάλιση κατ' αναλογία για 60% στην αντασφαλιστική εταιρία ( $Y$ ). Θεωρώντας ότι το συνολικό ανώτατο όριο ευθύνης για τον συγκεκριμένο κίνδυνο είναι 500,000€ και το rate της ασφάλισης 0.3% ας εξετάσουμε (α) πώς μοιράζονται τα ασφάλιστρα, (β) πώς αποζημιώνεται μία ζημιά 100,000€, (γ) πώς αποζημιώνεται μία ζημιά 300,000€, (δ) πώς αποζημιώνεται μία ζημιά 600,000€

α) Συνολικά ασφάλιστρα  $\Pi = \frac{3}{1,000} \cdot 500,000\text{€} = 1,500\text{€}$

Αναλογικά με το μέρος του κινδύνου που έχουν αναλάβει ο ασφαλιστής θα καρπωθεί

$$\Pi(X) = 0.4 \cdot 1,500\text{€} = 600\text{€}$$

και αντίστοιχα ο αντασφαλιστής

$$\Pi(Y) = 0.6 \cdot 1,500\text{€} = 900\text{€}.$$

β) Ο ασφαλιστής ( $X$ ) καταβάλει αποζημίωση

$$C(X) = 0.4 \cdot 100,000\text{€} = 40,000\text{€} ,$$

ενώ ο αντασφαλιστής ( $Y$ )

$$C(Y) = 0.6 \cdot 100,000\text{€} = 60,000\text{€} .$$

γ) Ο ασφαλιστής ( $X$ ) καταβάλει αποζημίωση

$$C(X) = 0.4 \cdot 300,000\text{€} = 120,000\text{€} ,$$

ενώ ο αντασφαλιστής ( $Y$ )

$$C(Y) = 0.6 \cdot 300,000\text{€} = 180,000\text{€} .$$

δ) Το μέγιστο όριο ευθύνης της ασφάλισης είναι 500,000€ συνεπώς,

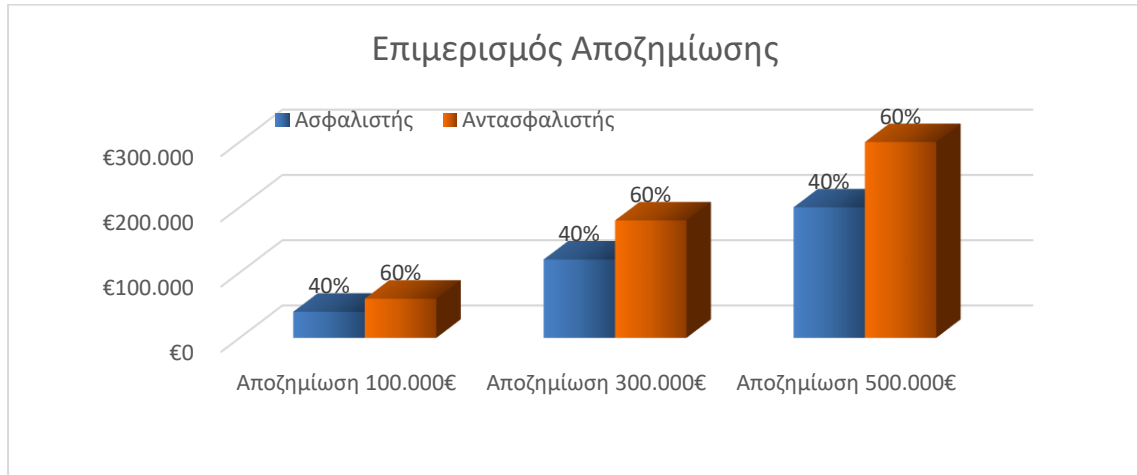
$$C(X) = 0.4 \cdot 500,000\text{€} = 200,000\text{€}$$



και

$$C(Y) = 0.6 \cdot 500,000\text{€} = 300,000\text{€} .$$

Στο Γράφημα 2 που ακολουθεί εμφανίζονται τα ποσά αποζημίωσης της ασφαλιστικής και της αντασφαλιστικής εταιρίας για τις ζημιές που προέκυψαν με την μέθοδο της αντασφάλισης Σταθερού Ποσοστού.



Γράφημα 2. Quota Share

Χρησιμοποιώντας την αντασφάλιση Σταθερού Ποσοστού μία ασφαλιστική εταιρία καταφέρνει να αναλαμβάνει κινδύνους τους οποίους δεν θα μπορούσε να αναλάβει μόνη της, καθώς θα ανέβαζε τον κίνδυνο συγκέντρωσης και όχι μόνο, αυξάνοντας έτσι το χαρτοφυλάκιο της.

Σε κάθε περίπτωση όμως, με αυτό τον τρόπο ο εκχωρητής δεν βελτιώνει την ισορροπία του χαρτοφυλακίου του, καθώς το μέγεθος των κινδύνων που διατηρεί δεν είναι ομοιογενές διότι κρατά ένα σταθερό ποσοστό όλων των κινδύνων, που είναι διαφορετικών μεγεθών.

Επιπλέον, οφείλουμε να τονίσουμε πως ο κίνδυνος εκχωρείται και διαμοιράζεται αναλογικά ανεξαρτήτως του ύψους της ζημιάς. Μια τεράστια ζημιά θα έχει εξίσου δυσάρεστες οικονομικές συνέπειες. Αυτός ο τρόπος αντασφάλισης δεν προβλέπεται για την αντιμετώπιση μεγάλων, πόσο μάλλον καταστροφικών ζημιών, καθώς δεν υπάρχει ανώτατο όριο ευθύνης.

## 2. Αναφορικά με την αντασφάλιση Πλεονάζοντος Μεριδίου

Η Αντασφάλιση Υπερβάλλοντος Κεφαλαίου ή αντασφάλισης Πλεονάζοντος Μεριδίου (Surplus Share) είναι μία συμβατική αντασφάλιση κατά την οποία ο ασφαλιστής επιλέγει το όριο ίδιας κράτησης (retention limit), το ποσό που αναλαμβάνει ο ασφαλιστής, και το υπερβάλλον ποσό (surplus), το ποσό που καλείται να αναλάβει ο αντασφαλιστής, το εκχωρεί στον αντασφαλιστή. Ουσιαστικά η αντασφάλισης Πλεονάζο-

ντος Μεριδίου είναι μία μεταβλητή quota share σύμβαση, κατά την οποία το ποσοστό εκχώρησης (μερίδιο του αντασφαλιστή) αυξάνεται όσο αυξάνεται το μέγεθος του κινδύνου. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η έκθεση του εκχωρητή στον κίνδυνο να μην ξεπερνά κάποιο ποσό, το όριο ιδίας κράτησης. Η αντασφαλιστική εταιρία αναλαμβάνει κινδύνους πάνω από μία “γραμμή” (line) και το ανώτατο όριο ευθύνης είναι πολλαπλάσιο του ορίου ιδίας κράτησης και ονομάζεται επίπεδο κάλυψης (lines of cover).

Εάν ορίσουμε μέγιστο όριο ιδίας κράτησης  $R$  και το επίπεδο κάλυψης  $L$  τότε η συνολική αποζημίωση θα είναι

$$T = (1 + L) \cdot R ,$$

όπου ο ασφαλιστής καλείται να αποζημιώσει το όριο ιδίας κράτησης  $R$  και η αντασφαλιστική εταιρία  $L$  επίπεδα κάλυψης αυτού του ορίου ( $L \cdot R$ ). Στην περίπτωση που η αποζημίωση είναι  $t \leq T$ , και καθώς το επίπεδο κάλυψης δεν μεταβάλλεται, τότε το όριο ιδίας κράτησης θα είναι  $r \leq R$ .

Υπάρχει η δυνατότητα ο ασφαλιστής να συνάψει δύο συμβάσεις αντασφάλισης υπερβάλλοντος Κεφαλαίου με σκοπό να προστατευτεί από μεγάλες ζημιές. Η αντασφάλιση πρώτου επιπέδου ονομάζεται (First Surplus Treaty) και η σύμβαση δευτέρου επιπέδου (Second Surplus Treaty). Και οι δύο συμβάσεις βασίζονται στο ίδιο όριο ιδίας κράτησης του ασφαλιστή και το κόστος της ζημιάς κατανέμεται σύμφωνα με την αναλογία που έχουν προκαθοριστεί της μορφής  $1:L1:L2$ , όπου  $L1$  το επίπεδο κάλυψης της αντασφάλισης πρώτου επιπέδου και  $L2$  το επίπεδο κάλυψης της αντασφάλισης δευτέρου επιπέδου.

Το πλεονέκτημα σε τέτοιου είδους αντασφαλιστικές συμβάσεις είναι το γεγονός ότι η αντασφάλιση Πλεονάζοντος Μεριδίου εφαρμόζεται για κάθε κίνδυνο ξεχωριστά και έχει ως αποτέλεσμα ο ασφαλιστής να μπορεί να εφαρμόσει την σύμβαση για κινδύνους στους οποίους η διασπορά των ζημιών είναι μεγάλη.

Ο υπολογισμός του ορίου ιδίας κράτησης και η αναλογία του εκχωρούμενου ποσού, θα προκύψει είτε χρησιμοποιώντας ως οδηγό το συνολικό ασφαλιζόμενο κεφάλαιο είτε την Μέγιστη Αναμενόμενη Ζημιά (Expected Maximum Loss). Παραδείγματος χάριν αν ένας όμιλος εταιριών έχει ασφαλίσει ολόκληρες τις εγκαταστάσεις του ανά την Ελλάδα, είναι απίθανο μία πλημμύρα να πλήξει όλη την ασφαλιζόμενη περιουσία. Συνεπώς σε αυτή την περίπτωση η αντασφάλιση Υπερβάλλοντος Κεφαλαίου για τον κίνδυνο της πλημμύρας θα βασιστεί στη μέγιστη αναμενόμενη ζημιά, η οποία θα είναι το πολύ ίση με το ασφαλιζόμενο κεφάλαιομίας εγκατάστασης και όχι του συνολικού ασφαλιζόμενου κεφαλαίου.

Στα παραδείγματα που ακολουθούν γίνεται σαφής ο τρόπος που λειτουργεί η αντασφάλιση Υπερβάλλοντος Κεφαλαίου και ο λόγος που η αντασφάλιση βοηθάει τις ασφαλιστικές εταιρίες να περιορίζουν τις απώλειες τους ως αντάλλαγμα την μεταβίβαση μέρος του ασφαλιστρού.

**Αριθμητικό Παράδειγμα:** Η ασφαλιστική εταιρία ( $X$ ) αναλαμβάνει έναν κίνδυνο με ανώτατο όριο ευθύνης 500,000€. Με σκοπό να εκχωρήσει μέρος του κινδύνου, για μία συγκεκριμένη κάλυψη, συνάπτει σύμβαση Πλεονάζουσας αντασφάλισης με την αντασφαλιστική εταιρία ( $Y$ ). Το όριο ίδιας κράτησης της ασφαλιστικής εταιρίας είναι 50,000€. Επιπροσθέτως, η σύμβαση αναφέρει ότι η αντασφαλιστική εταιρία αναλαμβάνει 9 τμήματα πλέον του ορίου ίδιας κράτησης. Καθώς ο ασφαλιζόμενος πληρώνει 1,500€ ετήσια ασφάλιστρα για την κάλυψη αυτή, ας εξετάσουμε πώς αποζημιώνεται σε μία ενδεχόμενη ζημιά (α) 20,000€, (β) 100,000€, (γ) 300,000€, (δ) 600,000€.

α) Η αποζημίωση καταβάλλεται εξ' ολοκλήρου από τον ασφαλιστή

$$C(X) = 20,000\text{€ και } C(Y) = 0 .$$

β) Ο ασφαλιστής ( $X$ ) καταβάλει αποζημίωση

$$C(X) = 50,000\text{€} ,$$

ενώ ο αντασφαλιστής ( $Y$ )

$$C(Y) = 100,000 - 50,000\text{€} = 50,000\text{€} ,$$

καταβάλει το ύψος της ζημιάς αφαιρώντας το όριο ίδιας κράτησης.

γ) Ομοίως ο ασφαλιστής ( $X$ ) καταβάλει αποζημίωση

$$C(X) = 50,000\text{€} ,$$

ενώ ο αντασφαλιστής ( $Y$ )

$$C(Y) = 300,000 - 50,000\text{€} = 250,000\text{€} .$$

δ) Καθώς υπάρχει ανώτατο όριο ευθύνης ο ασφαλιστής ( $X$ ) καταβάλει αποζημίωση

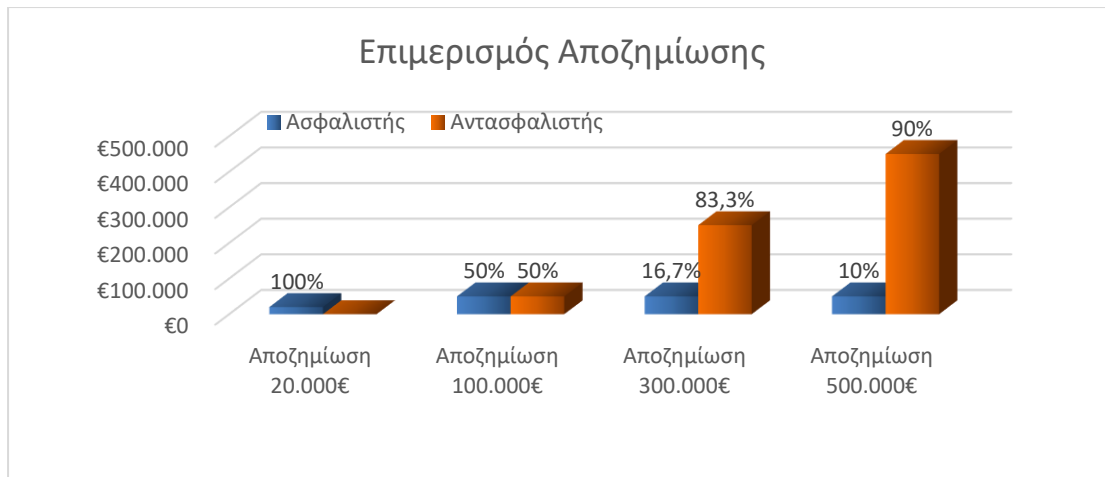
$$C(X) = 50,000\text{€}$$

και ο αντασφαλιστής ( $Y$ ) καλείται να καταβάλει

$$C(Y) = 500,000 - 50,000\text{€} = 450,000\text{€} .$$

Στην πράξη δεν έχει ιδιαίτερη εφαρμογή μία τέτοια υπόθεση καθώς θα ήταν ορθότερο η κάλυψη να παρέχεται για το 100% του κεφαλαίου. Για το λόγο αυτό, υπάρχει η δυνατότητα της προαιρετικής αντασφάλισης με τον αντασφαλιστή ( $Z$ ). Κάτω από αυτό το σενάριο ο ασφαλιστής ( $X$ ) θα παρέχει 50,000€ ο αντασφαλιστής ( $Y$ ) 450,000€ και ο αντασφαλιστής ( $Z$ ) με προαιρετική αντασφάλιση 100,000€.

Στο Γράφημα 3 που ακολουθεί εμφανίζονται τα ποσά αποζημίωσης της ασφαλιστικής και της αντασφαλιστικής εταιρίας, για τις ζημιές που προέκυψαν με την μέθοδο της αντασφάλισης Πλεονάζοντος Μεριδίου.



Γράφημα 3. Surplus Share

Καθώς η αντασφάλιση Πλεονάζοντος Μεριδίου είναι μία σύμβαση η οποία δεν έχει εφαρμογή τόσο σε ατομικό επίπεδο αλλά ισχύει για ολόκληρο το χαρτοφυλάκιο, ως υποθέσουμε τα κάτωθι ώστε να γίνει περισσότερο κατανοητή η χρήση αυτής της μεθόδου.

**Αριθμητικό Παράδειγμα:** Η ασφαλιστική εταιρία (X) συνάπτει σύμβαση αντασφάλισης Υπερβάλλοντος Κεφαλαίου 5 «γραμμών» με την αντασφαλιστική εταιρία (Y) για τους κινδύνους πυρκαγιάς που απορρέουν από ένα χαρτοφυλάκιο. Το όριο ίδιας κράτησης είναι 100,000€ και η μέγιστη κάλυψη που παρέχει η αντασφαλιστική εταιρία είναι 500,000€. Στον Πίνακα 2 που ακολουθεί, εμφανίζεται το σενάριο στο οποίο εκχωρούνται οι κίνδυνοι ενός χαρτοφυλακίου με αντασφάλιση Πλεονάζοντος Μεριδίου και οι ζημιές που προέκυψαν.

### Σενάριο Αντασφάλισης Πλεονάζοντος Μεριδίου

(τα ποσά σε χιλ. €)

Α-σφαλιστήριο Συμβόλαιο	Συνολικό Ασφ. Κεφ.	Παρακρατιθέν Ασφ. Κεφ.	Εκχωρούμενο Ασφ. Κεφ.	Ποσοστό Εκχώρησης	Ζημιά-Αποζημίωση	Παρακρατηθείσα Ζημιά	Εκχωρηθείσα Ζημιά
1	50	50	0	0%	40	40	0
2	120	100	20	16,6%	60	50	10
3	120	100	20	16,6%	120	100	20
4	250	100	150	60%	100	40	60
5	250	100	150	60%	250	100	150
6	400	100	300	75%	300	75	225
7	600	100	500	83,3%	600	100	500
8	800	100+200	500	62,5%	200	75	125
9	800	100+200	500	62,5%	800	100+200	500
10	1.000	100+400	500	50%	1.000	100+400	500

Πίνακας 2. Surplus Share

Για ασφαλιζόμενα κεφάλαια μικρότερα από 100,000€ ο αντασφαλιστής δεν έχει καμία υποχρέωση να αποζημιώσει. Για ασφαλιζόμενα κεφάλαια μεταξύ 100,000€ και 600,000€ ο αντασφαλιστής αποζημιώνει αναλογικά με αναλογία 1:5. Τέλος, για ζημιές η οποίες υπερβαίνουν τις 600,000€ ο αντασφαλιστής αποζημιώνει μέχρι το ανώτατο όριο ευθύνης, ήτοι 500,000€, το υπερβάλλον ποσό καλείται να το καταβάλει ο ασφαλιστής. Επιπλέον, αξίζει να σημειωθεί ότι για τα ποσά άνω των 600,000€ ο ασφαλιστής μπορεί να υπογράψει σύμβαση αντασφάλισης δευτέρου επιπέδου με αντασφαλιστική εταιρία (Ζ). Στο Γράφημα 4 που ακολουθεί, εμφανίζονται τα ποσά αποζημίωσης της ασφαλιστικής και της αντασφαλιστικής εταιρίας για τις ζημιές που προέκυψαν με την μέθοδο της αντασφάλισης Πλεονάζοντος Μεριδίου κάτω από το σενάριο του χαρτοφυλακίου 10 συμβολαίων.



Γράφημα 4. Surplus Share

Όπως είθισται, η αντασφάλιση Πλεονάζοντος Μεριδίου χρησιμοποιείται για σύνολο χαρτοφυλακίου και μεγάλους κινδύνους, ενώ δεν έχει εφαρμογή σε ατομικό επίπεδο. Όπως γίνεται εύκολα αντιληπτό και από τους παραπάνω πίνακες/γραφήματα<sup>3</sup> η αντασφάλιση Πλεονάζοντος Μεριδίου είναι προτιμότερη από την αντασφάλιση Σταθερού Ποσοστού καθώς περιορίζει την ζημία συγκεκριμένων κινδύνων αλλά έχει δυσκολότερη διαχείριση καθώς πρέπει να γίνει επιμερισμός και εκτενέστερη καταγραφή των εκχωρούμενων κινδύνων. Παρόλα ταύτα κρίνεται ακατάλληλη για τεράστιες καλύψεις αστικής - περιβαλλοντολογικής ευθύνης και ανεπαρκής για τεράστιες απώλειες καταστροφικών φυσικών φαινομένων.

<sup>3</sup> Βλέπε Γράφημα3, Πίνακα2 και Γράφημα4.

#### 2.4.2.2 Μη Αναλογική Αντασφάλιση (Non-Proportional Reinsurance)

Με την μη αναλογική αντασφάλιση ο αντασφαλιστής καλείται να αποζημιώσει μόνο στις περιπτώσεις κατά τις οποίες η ζημιά, ή ακόμα καλύτερα το σύνολο των απαιτήσεων, ξεπερνούν ένα “κατώφλι” το οποίο καλείται “retention” ή “priority” σε ελεύθερη μετάφραση “κράτηση” ή “προτεραιότητα”.

Οι κύριοι τύποι της μη αναλογικής αντασφάλισης είναι της Υπερβάλλουσας Ζημιάς (Excess of Loss) και η σύμβαση Περιορισμού Ζημιάς (Stop Loss).

- Κατά την αντασφάλιση Περιορισμού Ζημιάς σε περίπτωση που το συνολικό μέγεθος των ζημιών δεν θα ξεπεράσει ένα συγκεκριμένο προκαθορισμένο ποσοστό των ετήσιων ασφαλίσεων, ο αντασφαλιστής δεν έχει καμία συμβατική υποχρέωση να παρέχει αποζημίωση. Το υπερβάλλον ποσό μπορεί να είναι κάποιο ποσοστό, όπως ο λόγος Πληρωθείσες αποζημιώσεις / Εγγεγραμμένα ασφαλίστερα. Μια τέτοια κάλυψη μπορεί να είναι της μορφής: για ένα ημερολογιακό έτος (12 μήνες) παρέχεται κάλυψη για ποσό που υπερβαίνει το 90% του δείκτη ζημιών (claim ratio) και μέχρι ποσοστό ίσο με 140%.

Η αντασφάλιση Υπερβάλλουσας Ζημιάς συναντάται σε τρεις βασικές μορφές: Αντασφάλιση Υπερβάλλουσας Ζημιάς ενός συνολικού κινδύνου (Risk Excess of Loss), Καταστροφική Αντασφάλιση Υπερβάλλουσας Ζημιάς (Catastrophe Excess of Loss), Αντασφάλιση ποσού Υπερβάλλουσας Ζημιάς σε συνολικές Ζημιές (Aggregate Excess of Loss)

- Αντασφάλιση Υπερβάλλουσας Ζημιάς ενός συνολικού κινδύνου, θα χρησιμοποιηθεί στην περίπτωση που η ασφαλιστική εταιρία θέλει κάλυψη για έναν συγκεκριμένο κίνδυνο αθροιστικά για το σύνολο των ζημιών. Παραδείγματος χάριν μια αντασφαλιστική σύμβαση μπορεί να είναι της μορφής: Η αντασφαλιστρια (Y) αναλαμβάνει κινδύνους που απορρέουν από το χαρτοφυλάκιο της ασφαλίτριας (X) λόγω τρομοκρατικών ενεργειών για ποσό (a) άνω των 10,000,000€, και προαιρετικά ως το ποσό (β) 20,000,000€. Σε περίπτωση που οι συνολικές απαιτήσεις της ασφαλιστικής εταιρίας υπολείπονται το ποσό (a) η αντασφαλιστική εταιρία δεν θα καταβάλει αποζημίωση, ενώ αν οι συνολικές απαιτήσεις λόγω τρομοκρατικών ενεργειών υπερβούν το “κατώφλι” (a), θα καταβάλλει αποζημίωση στην ασφαλιστική εταιρία το υπερβάλλον ποσό, ήτοι, ζημιά μείον το κατώφλι και μέχρι το ποσό (β).
- Αντασφάλιση ποσού Υπερβάλλουσας Ζημιάς σε συνολικές Ζημιές, θα χρησιμοποιηθεί στην περίπτωση που η ασφαλιστική εταιρία αναζητά κάλυψη αποκλειστικά και μόνο για απαιτήσεις που θα προκύψουν από ένα γεγονός το οποίο θα γεννήσει μεγάλες-πολλαπλές απαιτήσεις. Πολλές φορές σε ασφαλιστήρια συμβόλαια του κλάδου πυρός ή ασφαλιστήρια συμβόλαια τεχνικών ασφαλίσεων (μηχανικών βλαβών) που περιέχουν καλύψεις στοιχείων της φύσης, υπάρχει ο όρος των 72 ωρών (72-hours clause). Με τον όρο των 72 ωρών διευκρινίζεται στα ασφαλιστήρια συμβόλαια ότι κάθε ζημιά από σεισμό,

πλημμύρες, θύελλες, καταιγίδες, και άλλα φυσικά φαινόμενα θα αποτελεί μία ξεχωριστή αποζημίωση με την προϋπόθεση ότι εάν συμβούν περισσότερες από μία ζημιές εντός περιόδου 72 ωρών οι ζημιές αυτές θα θεωρηθούν ως μία ζημιά. Ο ρόλος της ανασφάλισης ποσού Υπερβάλλουσας Ζημιάς σε συνολικές Ζημιές είναι σημαντικός, καθώς η ασφαλιστική εταιρία μπορεί να καλυφθεί για ζημιές οι οποίες θα δημιουργήσουν αθροιστικά τεράστιες ζημιές με ανυπολόγιστες οικονομικές απώλειες.

Παραδείγματος χάριν, αν αναλογιστούμε τι απαιτήσεις θα δημιουργούσε η πτώση ενός αεροσκάφους σε ένα εμπορικό κέντρο, μία πυρκαγιά η οποία πήρε ανεξέλεγκτη έκταση σε μία δασώδη αλλά πυκνοκατοικημένη περιοχή.

- Καταστροφική Ανασφάλιση Υπερβάλλουσας Ζημιάς (Catastrophe Excess of Loss), θα χρησιμοποιηθεί για την κάλυψη ενός καταστροφικού γεγονότος του οποίου η εμφάνιση θα έχει καταστροφικές συνέπειες στην ασφαλιστική εταιρία. Τέτοια καταστροφικά γεγονότα μπορούν να θεωρηθούν κυρίως φυσικά φαινόμενα όπως σεισμός, πλημμύρες-τσουνάμι, ανεμοθύελλα- τυφώνες, παγετός-ξηρασία-βροχόπτωση.

Ολοκληρώνοντας, η μη αναλογική ανασφάλιση έχει σημαντικά πλεονεκτήματα. Δίνει την δυνατότητα σε μια ασφαλιστική εταιρία να αναλαμβάνει κινδύνους για τους οποίους διαφορετικά θα χρειαζόταν επιπλέον κεφάλαια. Χρησιμοποιώντας τους τρόπους ανασφάλισης Υπερβάλλουσας Ζημιάς ενός συνολικού κινδύνου, Καταστροφική Ανασφάλιση Υπερβάλλουσας Ζημιάς, Ανασφάλιση ποσού Υπερβάλλουσας Ζημιάς σε συνολικές Ζημιές εξαλείφει τον κίνδυνο σχηματισμού αναγκαστικού περιθωρίου φερεγγυότητας. Επιπροσθέτως, μετριάζει την έκθεση στον κίνδυνο, γνωρίζοντας εκ των προτέρων το μέγιστο ποσό που μπορεί να χρειαστεί να καταβάλει.

Το ερώτημα που δημιουργείται είναι με ποια συχνότητα θα ενεργοποιείται ένα τέτοιο ασφαλιστικό πρόγραμμα ανάλογα το ύψος της υπερβάλλουσας ζημιάς.

Καθώς πρόκειται για ανασφάλιση με ακριβό ασφάλιστρο πιο πρέπει να είναι το κατώφλι-όριο ίδιας κράτησης-Excess of Loss σε μια τέτοιου είδους ανασφάλιση, ώστε το προϊόν να είναι ανταγωνιστικό (κόστος) αλλά ταυτόχρονα να είναι ελκυστικό προς την ασφαλιστική εταιρία.

Ερωτήματα τέτοιου σκοπού θα αναλύσουμε στην παρούσα εργασία και την βοήθεια της θεωρίας Ακραίων Τιμών, ειδικότερα κάτω από την μέθοδο POT (Peaks over Threshold) και την GPD (Generalized Pareto Distribution) (π.χ. βλ. Reiss and Thomas (2007))

## 3. Θεωρία Ακραίων Τιμών

### 3.1 Εισαγωγή

Όπως είναι λογικό μία ασφαλιστική εταιρία θα έχει ζημίες για τους κινδύνους που έχει αναλάβει. Ας υποθέσουμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές  $X_i$  δηλώνουν τις (ημερήσιες) απώλειες – αποζημιώσεις από το σύνολο ενός χαρτοφυλακίου οι οποίες είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες και δεν εμφανίζουν κάποια σχετική περιοδικότητα. Όταν θα προκύψει μία ζημιά, θα ανοίξει ένας φάκελος ζημιάς. Το προς αποζημίωση ποσό το οποίο θα υποχρεωθεί τελικά να καταβληθεί από την ασφαλιστική εταιρία συνήθως διαφέρει από το ποσό της απαίτησης του πελάτη και το ποσό της ζημιάς. Ο λόγος που συμβαίνει αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι θα πραγματοποιηθεί πραγματογνωμοσύνη, θα ελεγχθούν οι όροι του συμβολαίου και θα αφαιρεθούν τυχόν απαλλαγές. Για την οικονομία όμως της εργασίας θα θεωρήσουμε ότι οι παρατηρήσεις αφορούν τα προς αποζημίωση ποσά και καταβάλλονται άμεσα χωρίς να υπολογίσουμε εξέλιξη ζημιάς (δικαστήρια, αντιδικίες, αναβίωση ζημιάς κτλ)

Αν λοιπόν  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  ένα τυχαίο δείγμα  $n$  ανεξάρτητων και ισόνομων (συμβ. iid) τυχαίων μεταβλητών  $X_i$ , η ασφαλιστική εταιρία θέλει να ασχοληθεί με τις μεγάλες αποζημιώσεις ώστε με την βοήθεια της θεωρίας ακραίων τιμών να μπορέσει να κατανοήσει μελετήσει και ερμηνεύσει τις ιδιότητές τους.

Συνεπώς, συμβολίζουμε με  $X_{(1)}, X_{(2)}, X_{(3)}, \dots, X_{(n)}$  το διατεταγμένο δείγμα  $n$  ανεξάρτητων και ισόνομων (συμβ. iid) τυχαίων μεταβλητών  $X_i$ , η  $X_{(1)}$  είναι η ελάχιστη παρατήρηση και αντίστοιχα η  $X_{(n)}$  την οποία θα συμβολίσουμε με  $M_n$  θα αντιστοιχεί στην μέγιστη παρατήρηση.

Η συνάρτηση κατανομής της μέγιστης παρατήρησης

$$M_n = X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

είναι,

$$\begin{aligned} F_{M_n}(x) &= P(M_n \leq x) = P(\max\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \leq x) \\ &= P(X_1 \leq x, X_2 \leq x, \dots, X_n \leq x) \\ &= \prod_{i=1}^n P(X_i \leq x) = F(x)^n \end{aligned}$$

όπου  $F$  είναι η συνάρτηση κατανομής των  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Όπως είναι λογικό μπορούν να βγουν συμπεράσματα και για την ελάχιστη παρατήρηση καθώς συνδέεται άμεσα με την μέγιστη με τον τύπο:

$$\min\{X_1, X_2, X_3, \dots, X_n\} = -\max\{-X_1, -X_2, -X_3, \dots, -X_n\}.$$

Αφού η  $F(x)$  είναι άγνωστη τότε και η σ.κ. της μέγιστης παρατήρησης  $F_{M_n}(x)$  θα είναι άγνωστη. Θα προσπαθήσουμε να προσεγγίσουμε την κατανομή της  $F_{M_n}(x)$ ,



κατά συνέπεια και την συμπεριφορά αυτής χρησιμοποιώντας τον νόμο των μεγάλων αριθμών (NMA). Όσο το  $n$  μεγαλώνει και τείνει προς το άπειρο,  $n \rightarrow \infty$  η  $F_{M_n}(x)$  εκφυλίζεται, δηλαδή

$$F_{M_n}(x) = P(M_n \leq x) = F(x)^n \rightarrow \begin{cases} 0, & x < x_F \\ 1, & x > x_F \end{cases},$$

όπου με  $x_F$  συμβολίζεται το δεξιό άκρο του στηρίγματος της  $F$ ,  $x_F = \sup\{x \in R: F(x) < 1\}$ . Παρατηρούμε όμως ότι το παραπάνω δεν μπορεί να αξιοποιηθεί ως προσέγγιση της κατανομής της μέγιστης παρατήρησης. Για το λόγο αυτό θα αναζητήσουμε προσέγγιση μέσω της ιδέα που χρησιμοποιείται κατά το κεντρικό οριακό θεώρημα. Παρόμοια με τον νόμο των μεγάλων αριθμών (NMA), το κεντρικό οριακό θεώρημα (ΚΟΘ) καθορίζει ότι ο δειγματικός μέσος  $\bar{X}$  συγκλίνει στο πληθυσμιακό μέσο  $\mu$  με κάποια ταχύτητα σύγκλισης, συγκεκριμένα

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

Έτσι, με τον ίδιο τρόπο «κανονικοποιώντας» το  $M_n$  με κατάλληλες ακολουθίες  $(d_n)$ ,  $(c_n)$  μπορεί να συγκλίνει κατά κατανομή σε μία μη-εκφυλισμένη κατανομή  $G$ , δηλαδή

$$\frac{M_n - d_n}{c_n} \xrightarrow{d} G$$

Για να φτάσουμε σε ένα τέτοιο αποτέλεσμα ξεκινάμε εξετάζοντας ποιες κατανομές μπορούν να εμφανιστούν στην θέση της  $G$ . Ένα σχετικό αποτέλεσμα δίνεται στην συνέχεια. Καλούμε Max-Stable οποιαδήποτε (μη-εκφυλισμένη) κατανομή η οποία έχει την παρακάτω ιδιότητα (πρόκειται για ισότητα κατά κατανομή).

$$M_n = \max\{X_1, X_2, X_3, \dots, X_n\} \stackrel{\text{def}}{=} c_n X + d_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

**Θεώρημα 1.** Η κλάση των Max-Stable (μέγιστο ευσταθή) κατανομών, συμπίπτει με την κλάση των μη-εκφυλισμένων κατανομών που μπορούν να προκύψουν ως όριο ενός κανονικοποιημένου μεγίστου (MD), δηλαδή  $\text{Max - Stable} \equiv \text{MD}$ ,

Αυτό είναι ένα μεγάλο εύρημα για την θεωρία ακραίων τιμών καθώς, ενώ

$$\frac{M_n - d_n}{c_n} \xrightarrow{d} G$$

«κανονικοποιώντας» με  $\tilde{c}_n = \frac{c_n}{n}$  και  $\tilde{d}_n = d_n - d \frac{c_n}{n}$ ,  $d \in R$  παρατηρούμε ότι

$$\frac{M_n - \tilde{d}_n}{\tilde{c}_n} = \frac{M_n - d_n + d \frac{c_n}{n}}{\frac{c_n}{n}} = c \frac{M_n - d_n}{c_n} + d \xrightarrow{d} G'$$

Επομένως αν ένα «κανονικοποιημένο» μέγιστο  $M_n$  συγκλίνει σε μία κατανομή  $G$  τότε με διαφορετική «κανονικοποίηση» θα συγκλίνει σε μία κατανομή  $G'$  η οποία όμως θα είναι του ίδιου τύπου με την  $G$ . Οι ακολουθίες  $(d_n)$ ,  $(c_n)$  δεν είναι μοναδικές και μπορούν να καταλήξουν σε άλλη οριακή κατανομή αλλά οι κατανομές αυτές θα είναι πάντα ίδιου τύπου. Σημειώνεται ότι δύο  $X, Y$  (αντ. κατανομές) είναι του ίδιου τύπου αν  $Y \stackrel{d}{=} cX + d$  για κάποια  $c, d$ . (δηλαδή θα διαφέρουν μόνο κατά παράμετρο θέσης και παράμετρο κλίμακας)

Αποδεικνύεται λοιπόν το ακόλουθο θεμελιώδες αποτέλεσμα.

**Θεώρημα 2. (Fisher – Tippett 1928).** Έστω  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ανεξάρτητες και ισόνομες (iid) τυχαίες μεταβλητές. Αν υπάρχουν ακολουθίες  $d_n \in \mathbb{R}, c_n > 0$  και μία μη-εκφυλισμένη κατανομή  $G$  ώστε

$$\frac{M_n - d_n}{c_n} = \frac{\max\{X_1, X_2, \dots, X_n\} - d_n}{c_n} \xrightarrow{d} G$$

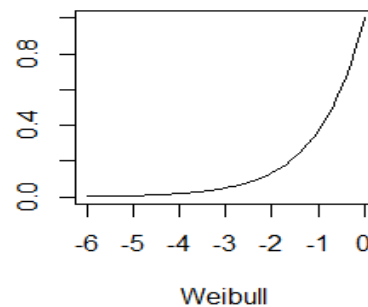
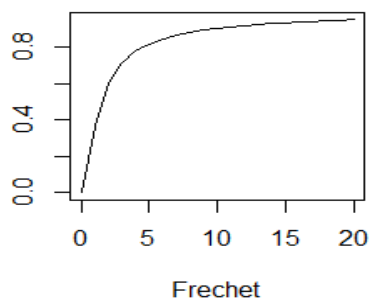
Τότε η  $G$  θα είναι ίδιου τύπου με μία από τις ακόλουθες κατανομές:

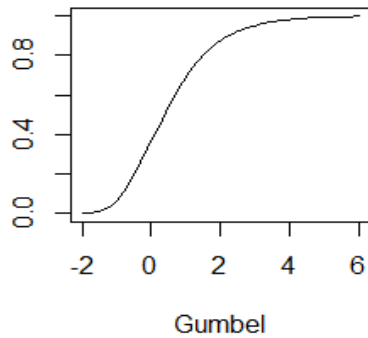
$$\text{Frechet: } \Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ e^{-x^{-\alpha}} & , x > 0 \end{cases}, \alpha > 0$$

$$\text{Weibull: } \Psi_\alpha(x) = \begin{cases} e^{-(-x)^\alpha} & , x \leq 0 \\ 1 & , x > 0 \end{cases}, \alpha > 0$$

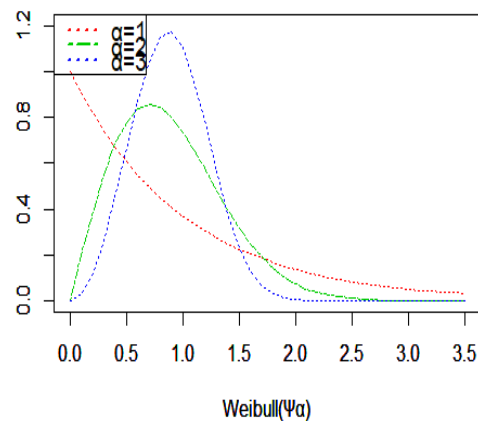
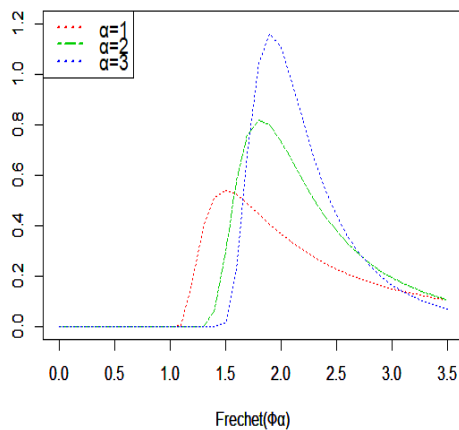
$$\text{Gumbel: } \Lambda(x) = e^{-e^{-x}}, x \in \mathbb{R}$$

Στα παρακάτω γραφήματα παρουσιάζεται η μορφή της σ.κ. των τριών παραπάνω κατανομών ακροτάτων ( $a = 2$ )





Οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας της Frechet και της Weibull για διάφορες τιμές των παραμέτρων δίνονται στα ακόλουθα γραφήματα (το δεξιό γράφημα παρουσιάζει την γνωστή κατανομή Weibull ενώ στο θεώρημα Fisher-Tippett αναφέρεται η αντεστραμμένη Weibull)



Ενδιαφέρον παρουσιάζει ότι

$$X \sim \Lambda \leftrightarrow e^{X/a} \sim \Phi_a \quad \text{ή} \quad X \sim \Phi_a \leftrightarrow \ln X^a \sim \Lambda \leftrightarrow -X^{-1} \sim \Psi_a$$

### 3.2 Περιοχές έλξης

Μία θετική συνάρτηση  $h$  στο  $(0, \infty)$  καλείται ομαλής κύμανσης (regularly varying) στο  $\infty$  με δείκτη  $\alpha$  (συμβ.  $h \in \mathfrak{R}^\alpha$ ) αν

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(tx)}{h(x)} = t^\alpha, \quad t \geq 0.$$

Αν  $\alpha = 0$  τότε καλείται βραδείας κύμανσης (slowly varying)

Αν  $a = -\infty$  δηλαδή το παραπάνω όριο είναι  $\begin{cases} \infty, & \text{αν } t \in (0,1) \\ 0, & \text{αν } t \in (1, \infty) \end{cases}$ , τότε καλείται ταχέως κύμανσης (rapidly varying).

Επιπλέον, κάθε  $h \in \mathfrak{R}^a$ ,  $a \in R$  γράφεται και με την μορφή  $h(x) = x^a L(x)$  όπου  $L$  κατάλληλη συνάρτηση βραδεία κύμανσης.

Μία τυχαία μεταβλητή  $X$  θα λέγαμε ότι ανήκει στην περιοχή έλξης μίας κατανομής ακροτάτων  $G$ , συμβολικά  $X, F \in MDA(G)$ , αν υπάρχουν ακολουθίες  $d_n \in R, c_n > 0$  έτσι ώστε

$$\frac{M_n - d_n}{c_n} \xrightarrow{d} G.$$

Δύο σ.κ.  $F, G$  έχουν ισοδύναμη ουρά αν  $x_F = x_G$  και για κάποιο  $c > 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow x_F} \frac{\bar{F}(x)}{\bar{G}(x)} = c$$

Το ενδιαφέρον συμπέρασμα σε αυτό είναι ότι αν δύο συναρτήσεις κατανομής έχουν ισοδύναμη ουρά τότε ανήκουν και στην ίδια περιοχή έλξης μίας κατανομής ακροτάτων, χρησιμοποιώντας τις ίδιες ακολουθίες  $(d_n), (c_n)$ .

### 3.2.1 Περιοχή Έλξης της $\Phi_\alpha$ (Frechet)

Αρχικά εξετάζουμε αν η συνάρτηση επιβίωσης (ουρά) της Frechet είναι ομαλής κύμανσης,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{\Phi}_\alpha(tx)}{\bar{\Phi}_\alpha(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{(-tx)^{-a}}}{1 - e^{-x^{-a}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[-a(tx)^{-a-1}t]e^{(-tx)^{-a}}}{(-ax^{-a-1})e^{-x^{-a}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{t^{-a}e^{(-tx)^{-a}}}{e^{-x^{-a}}} = t^{-a} \end{aligned}$$

Άρα η Frechet έχει ουρά που είναι συνάρτηση ομαλής κύμανσης με δείκτη  $-a$ . Η περιοχή έλξης της κατανομής Frechet αποδεικνύεται ότι αποτελείται από όλες τις κατανομές με ουρά ομαλής κύμανσης με δείκτη  $-a$ . Συνεπώς οι κατανομές  $F \in MDA(\Phi_\alpha)$  αν και μόνο αν  $x_F = \infty$  και  $\bar{F} \in \mathfrak{R}_{-a}, a > 0$ .

Επιπλέον αν  $F \in MDA(\Phi_\alpha)$ , τότε

$$\frac{M_n}{c_n} \xrightarrow{d} \Phi_\alpha,$$

με ακολουθίες κανονικοποίησης

$$c_n = F^{\leftarrow}(1 - n^{-1}) \text{ και } d_n = 0, \text{ όπου } F^{\leftarrow}(t) = \min\{x: f(x) \in t[0,1]\}.$$

Αποδεικνύεται ότι αν  $F$  μία απόλυτα συνεχής συνάρτηση κατανομής (σ.κ.) με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.)  $f$  και

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf(x)}{\bar{F}(x)} = \alpha > 0 ,$$

τότε η  $F \in MDA(\Phi_\alpha)$ . Στην  $MDA(\Phi_\alpha)$  ανήκουν οι γνωστές κατανομές Pareto, Cauchy, Log-gamma, t-student.

### 3.2.2 Περιοχή Έλξης της $\Psi_\alpha$ (Weibull)

Αποδεικνύεται ότι μία κατανομή  $F \in MDA(\Psi_\alpha)$  αν και μόνο αν

$$x_F < \infty \text{ και } \bar{F}(x_F - x^{-1}) \in \mathfrak{R}_{-a}, a > 0.$$

Ενδιαφέρον αποτελεί το γεγονός ότι η  $\Psi_\alpha$  συνδέεται με την  $\Phi_\alpha$  ως ακολούθως:

$$\bar{\Phi}_\alpha(x) = \bar{\Psi}_\alpha(0 - x^{-1}) = \bar{\Psi}_\alpha(x_F - x^{-1}) \text{ καθώς το } x_F \text{ της } \Psi_\alpha \text{ είναι } 0 (x_F = 0) .$$

Επιπλέον αν  $F \in MDA(\Psi_\alpha)$ , τότε

$$\frac{M_n - x_F}{c_n} \xrightarrow{d} \Psi ,$$

με ακολουθίες κανονικοποίησης

$$c_n = x_F - F^{\leftarrow}(1 - n^{-1}) \text{ και } d_n = x_F , \text{ όπου } F^{\leftarrow}(t) = \min\{x: f(x) \in t[0,1]\} .$$

Αποδεικνύεται ότι αν  $F$  είναι μία απόλυτα συνεχής συνάρτηση κατανομής (σ.κ.) με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.)  $f$  και

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x_F - x)f(x)}{\bar{F}(x)} = a > 0 ,$$

τότε η  $F \in MDA(\Psi_\alpha)$ . Στην  $MDA(\Psi_\alpha)$  ανήκουν οι γνωστές κατανομές Ομοιόμορφη, Beta.

### 3.2.3 Περιοχή Έλξης της $\Lambda$ (Gumbel)

Αρχικά παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{\Lambda}(x)}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-e^{-x}}}{e^{-x}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-y}}{y} = 1 .$$

Επομένως η συνάρτηση  $\bar{\Lambda}$  είναι ταχείας κύμανσης και επίσης ισχύει ότι

$$\bar{\Lambda}(x) = c(x) \cdot e^{-x} , \text{ όπου η } c(x) \rightarrow 1 \text{ όταν } x \rightarrow \infty .$$

Η συνάρτηση κατανομής  $F$  με  $x_F \leq \infty \in MDA(\Lambda)$  αν και μόνο αν μπορεί να αναπαραστεί ως

$$\bar{F}(x) = c(x) \cdot e^{-\int_z^x \frac{g(t)}{a(t)} dt}, \quad z < x < x_F$$

για κάποιο  $z < x_F$ , όπου  $c, g$  είναι μετρήσιμες συναρτήσεις με,

$c(x) \rightarrow c(0) > 0, g(x) \rightarrow 1$  όταν  $x \uparrow x_F$  και  $a(\cdot)$  μία θετική, απόλυτα συνεχής συνάρτηση με πυκνότητα  $a'$  και  $\lim_{x \uparrow x_F} a'(x) = 0$ .

Επιπλέον αν  $F \in MDA(\Lambda)$  και ικανοποιώντας την παραπάνω αναπαράσταση, τότε

$$\frac{M_n - d_n}{c_n} \xrightarrow{d} \Lambda,$$

με ακολουθίες κανονικοποίησης

$$c_n = a(d_n) \quad \text{και} \quad d_n = F^{\leftarrow}(1 - n^{-1}), \quad \text{όπου} \quad F^{\leftarrow}(t) = \min\{x: f(x) \in t[0,1]\}.$$

Ανάλογα με την κατανομή που προέρχονται τα δεδομένα και τις κατάλληλες ορισθείσες σταθερές κανονικοποίησης, μπορούν να αποδειχθούν οι οριακές κατανομές ακροτάτων καθώς επίσης να βρεθούν οι αντίστοιχες περιοχές έλξης (MDA) τους. Τα όσα αναφέρονται έως αυτό το σημείο παρατίθενται συγκεντρωτικά στο παρακάτω Πίνακα 3 (Boutsikas M.V. (2008)).

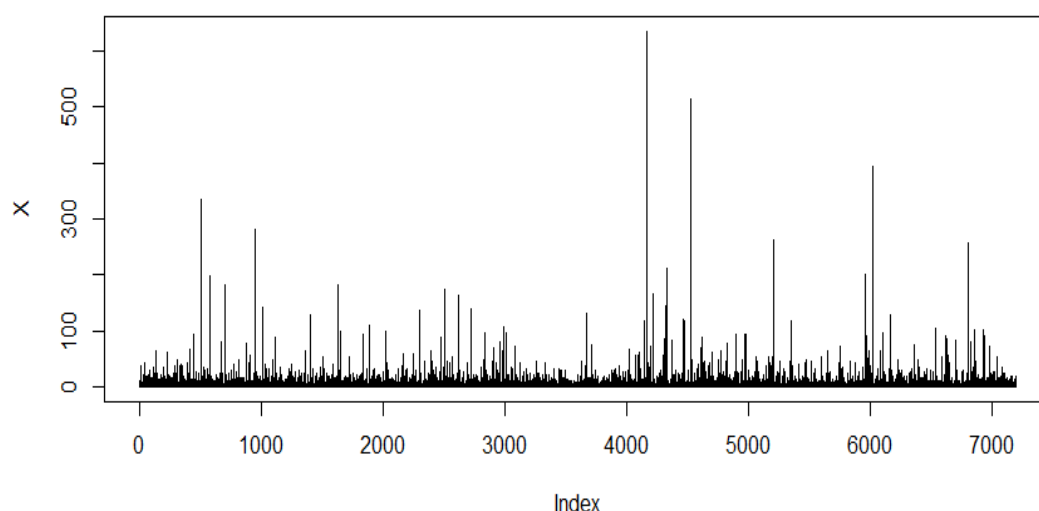
Κατανομή Ακροτάτων	Weibull	Gumbel	Frechet
Συνάρτηση Κατανομής	$\Psi_\alpha(x) = e^{-(-x)^\alpha},$ $x \leq 0, \alpha > 0$	$\Lambda(x) = e^{-e^{-x}}, x \in R$	$\Phi_\alpha(x) = e^{-x^{-\alpha}},$ $x > 0, \alpha > 0$
Περιοχή Έλξης (MDA)	$x_F < \infty$  $\bar{F}(x_F - x^{-1}) = x^{-\alpha}L(x)$ $\in \mathfrak{R}_{-\alpha}$ $(L \in \mathfrak{R}_0)$	$x_F \leq \infty$  $\bar{F}(x) = c(x)e^{-\int_z^x \frac{g(t)}{a(t)} dt},$ $z < x < x_F$ $c(x) \rightarrow c(0) > 0,$ $g(x) \rightarrow 1, a'(x) \rightarrow 0, \text{όταν } x \uparrow x_F$	$x_F = \infty$  $\bar{F}(x) = x^{-\alpha}L(x)$ $\in \mathfrak{R}_{-\alpha}$ $(L \in \mathfrak{R}_0)$
Σταθερές Κανονικοποίησης	$c_n = x_F - F^{\leftarrow}(1 - n^{-1})$ $d_n = x_F$	$c_n = a(d_n),$ $d_n = F^{\leftarrow}(1 - n^{-1})$	$c_n = F^{\leftarrow}(1 - n^{-1}),$ $d_n = 0$
Παραδείγματα	<i>Uniform, Beta</i>	<i>Exponential, Weibull, Gamma, Normal, Lognormal</i>	<i>Cauchy, Pareto, Burr, t-student, Log-gamma</i>

Πίνακας 3. Κατανομές Ακροτάτων

## 4. Μέθοδοι και Τεχνικές Ανάλυσης Ακραίων Τιμών

Για την μελέτη ακραίων παρατηρήσεων παρουσιάζει ενδιαφέρον ο τρόπος με τον οποίο θα γίνει ο διαχωρισμός μεταξύ απλών «συνηθισμένων» παρατηρήσεων και ακραίων παρατηρήσεων. Δηλαδή είναι μείζονος σημασίας εάν μία ζημιά θα θεωρηθεί ακραία ή όχι. Μία πρώτη σκέψη για αυτό τον διαχωρισμό, είναι λαμβάνοντας τις μέγιστες ζημιές κάποιων υποπεριόδων, ενώ ένας εναλλακτικός τρόπος είναι να θεωρήσουμε ακραίες, όλες τις ζημιές εκείνες οι οποίες θα ξεπεράσουν κάποιο όριο. Όπως είναι λογικό, ανάλογα με τον τρόπο συλλογής των ακραίων τιμών και το μοντέλο που θα υιοθετηθεί και θα εξεταστεί, ενδεχομένως να έχουμε και διαφορετικά αποτελέσματα. Θα διαπιστώσουμε πως η οριακή κατανομή, η οποία θα εκφράζει καλύτερα τις ακραίες τιμές, εξαρτάται από την μέθοδο που χρησιμοποιήθηκε για την επιλογή και την ανάλυση των ακραίων ζημιών. Πιο αναλυτικά θα εξετάσουμε τις δύο περισσότερο διαδεδομένες μεθόδους, Μέθοδος Μεγίστων Υποπεριόδων (Block Maxima) και Μέθοδος Υπερβάσεων πάνω από ένα Κατώφλι (Peaks Over Threshold - POT), δίνοντας μεγαλύτερη έμφαση στην κατά σειρά δεύτερη.

Για την μελέτη και την ανάλυση θα υποθέσουμε ότι έχουμε παρατηρήσεις οι οποίες παρουσιάζουν τις ημερήσιες ζημιές-αποζημιώσεις που προέκυψαν από ένα χαρτοφυλάκιο της ασφαλιστικής εταιρίας Α για 20 ημερολογιακά έτη, 1990-2010. Τα προσομοιωμένα δεδομένα είναι 7,200 το πλήθος<sup>4</sup> και η μία μονάδα αντιστοιχεί σε 10,000 ευρώ. Υποθέτουμε ότι, στο ραβδόγραμμα που ακολουθεί, έχουν καταγραφεί οι ημερήσιες ζημιές ενός χαρτοφυλακίου περιουσίας.



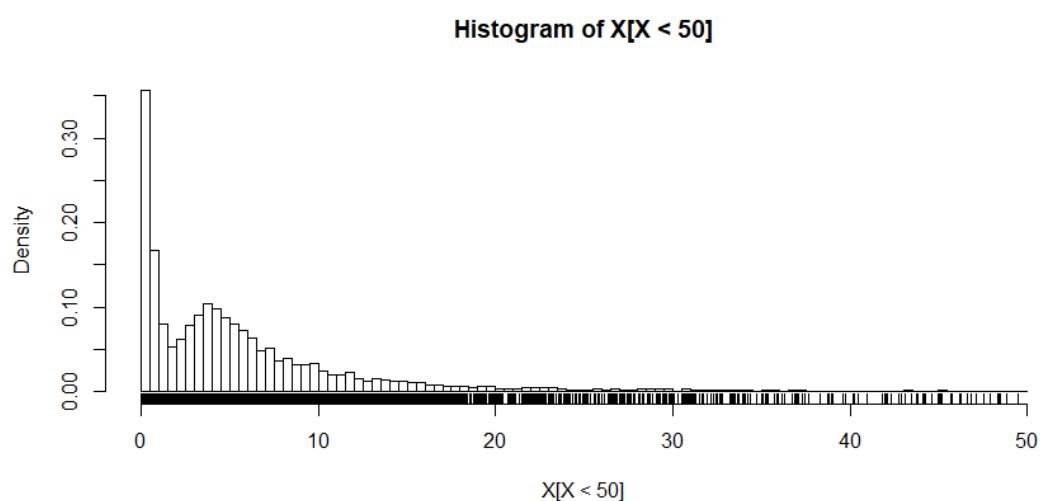
<sup>4</sup> Θα θεωρηθεί ότι κάθε μήνας έχει 30 ημέρες, άρα συνολικά 360 ημέρες ανά έτος.

Με περιγραφικά στοιχεία:

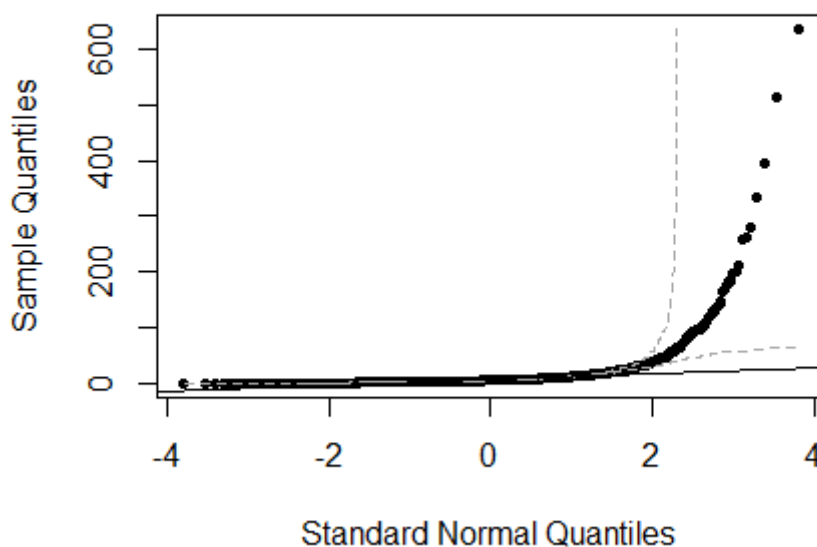
Min.	1st Quarter	Median	Mean	3rd Quarter	Max.
0.0001	0.9439	4.1074	7.3641	7.9393	635.7513

Σύμφωνα και με τα περιγραφικά στοιχεία του δείγματος παρατηρούμε ότι η μέση τιμή είναι 7.3641 και ενώ το 75% των παρατηρήσεων έχουν τιμή μικρότερη από 7.9393

Ένα ιστόγραμμα των παραπάνω παρατηρήσεων (έχουν χρησιμοποιηθεί μόνο οι παρατηρήσεις μέχρι την τιμή 50) δίνεται στο ακόλουθο σχήμα



Επίσης ένα Q-Q Plot ως προς την κανονική κατανομή είναι





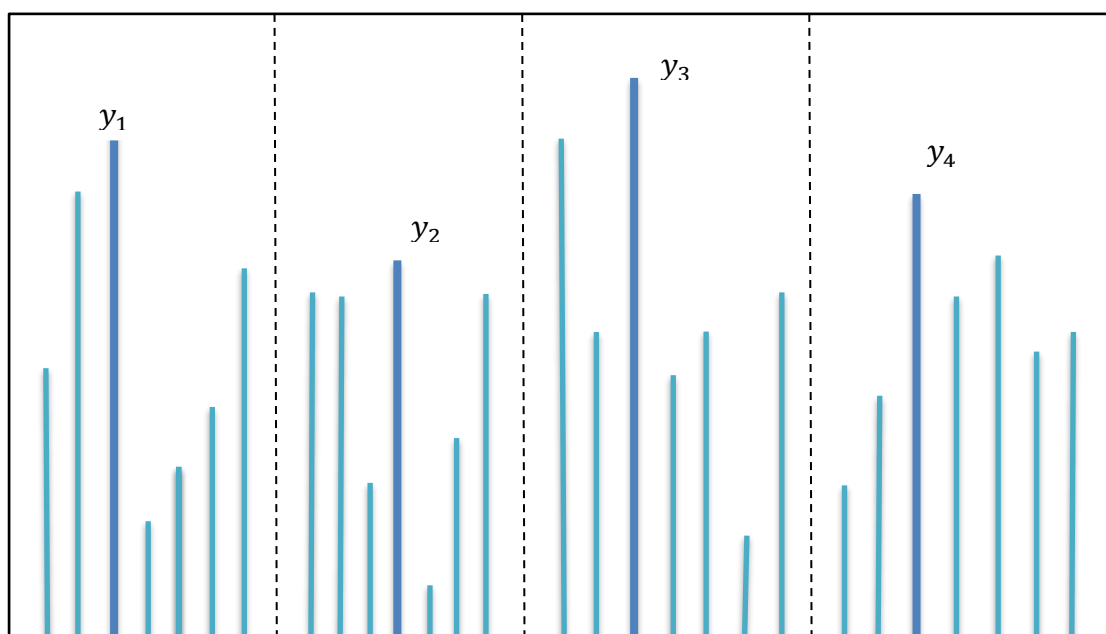
Παρατηρούμε από τα παραπάνω σχήματα ότι οι παρατηρήσεις προέρχονται από μια κατανομή με αρκετά βαρύτερη ουρά από την κανονική. Υπάρχουν λοιπόν κάποιες ζημιές οι οποίες ξεχωρίζουν και θα πρέπει να αντιμετωπιστούν διαφορετικά από τις υπόλοιπες χρησιμοποιώντας την θεωρία Ακραίων τιμών και τις μεθόδους που ακολουθούν.

#### 4.1 Μέθοδος Μεγίστων Υποπεριόδων - Block Maxima

Στην Μέθοδο Μεγίστων Υποπεριόδων το τυχαίο δείγμα των συνολικών απαιτήσεων επιμερίζεται σε υποσύνολα μικρότερων χρονικών διαστημάτων και περιγράφεται ως  $X_1, X_2, \dots, X_m$ , όπου  $m = n \cdot k$ . Κάθε υποπερίοδος (*Block*) έχει συνολικά  $n$  παρατηρήσεις και συμβολίζεται με  $k$ . Η επιλογή των υποπεριόδων θα πρέπει να πραγματοποιηθεί προσεκτικά καθώς, υποπερίοδοι και συνολικές παρατηρήσεις  $n$  εντός της κάθε υποπεριόδου, είναι αντιστρόφως ανάλογα ποσά. Αύξηση του ενός, θα επιφέρει μείωση του άλλου. Μεγαλύτερο πλήθος των δεδομένων εντός των υποπεριόδων, οδηγεί σε ακριβέστερη προσέγγιση των κατανομής των μεγίστων, ενώ περισσότερες υποπερίοδοι έχουν ως αποτέλεσμα περισσότερες ακραίες παρατηρήσεις. Το μέγιστο της εκάστοτε υποπεριόδου (*Maxima*) συμβολίζεται με  $Y_i$ .

$$Y_i = M_n^{(i)} = \max\{X_{(i-1)n+1}, X_{(i-1)n+2}, \dots, X_{(i-1)n+n}\}, i = 1, 2, \dots, k$$

Οι μέγιστες παρατηρήσεις  $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$ , των  $k$  υποπεριόδων καλούνται Block Maxima και είναι οι ακραίες τιμές του δείγματος που θα μελετηθούν.



Σχήμα 1. Block Maxima

Σχηματικά η μέθοδος αναλύεται στο απλουστευμένο σχήμα 1, στο οποίο ο αριθμός των υποπεριόδων είναι  $k = 4$ , κάθε μία από τις τέσσερις υποπεριόδους απαριθμεί  $n = 7$  παρατηρήσεις.

#### 4.1.1 Κατανομή των Block Maxima – Γενικευμένη Κατανομή Ακραίων Τιμών Generalized Extreme Value Distribution (GEV)

Εάν το  $n$  είναι αρκετά μεγάλο μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα Block Maxima ακολουθούν προσεγγιστικά μία από τις οριακές κατανομές

$$\Psi_\alpha(\text{Weibull}), \quad \Phi_\alpha(\text{Frechet}), \quad \Lambda(\text{Gumbel}),$$

ανάλογα με την συμπεριφορά της δεξιάς ουράς της  $F$  και σε ποια περιοχή έλξης (MDA) ανήκουν οι αρχικές παρατηρήσεις, όπως αναλύσαμε στην αρχή του κεφαλαίου. Σύμφωνα με τους von Mises(1936) και Jenkinson(1955) αυτές οι τρεις ασυμπτωτικές κατανομές μπορούν να ενοποιηθούν σε μία οικογένεια κατανομών με τρεις παραμέτρους ( $\mu, \sigma, \xi$ ) η οποία καλείται Γενικευμένη Κατανομή Ακραίων Τιμών, Generalized Extreme Value Distribution (GEV). Έτσι επαναδιατυπώνοντας το θεώρημα Fisher-Tippett (βλέπε θεώρημα 2 σελ. 10)

**Θεώρημα 3.** Έστω  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ανεξάρτητες και ισόνομες (iid) τυχαίες μεταβλητές. Αν υπάρχουν ακολουθίες  $d_n \in R, c_n > 0$  και μία μη-εκφυλισμένη κατανομή  $G$  ώστε

$$\frac{M_n - d_n}{c_n} = \frac{\max\{X_1, X_2, \dots, X_n\} - d_n}{c_n} \xrightarrow{d} G.$$

Τότε η  $G$  θα είναι της μορφής

$$G(x; \mu, \sigma, \xi) = e^{-\left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}}, \quad x: 1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma} > 0.$$

Όπου  $\mu \in R, \sigma > 0$ .

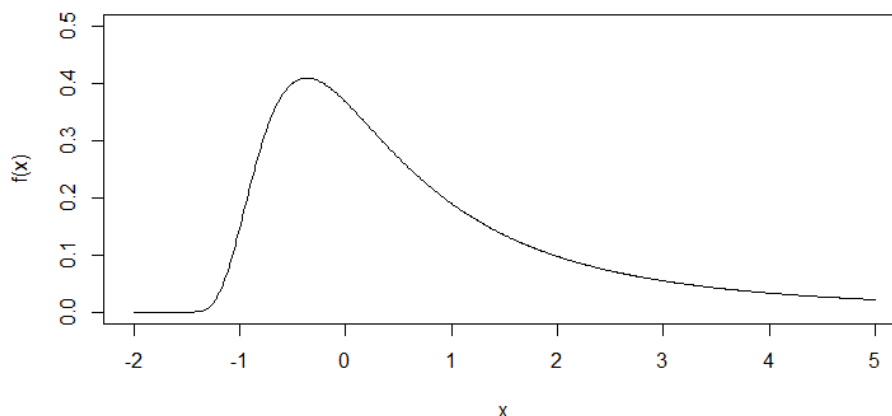
Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της GEV είναι,

$$\begin{aligned} g(x; \mu, \sigma, \xi) &= (G(x; \mu, \sigma, \xi))' = \left(e^{-\left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}}\right)' \\ &= \frac{1}{\sigma} \left(1 + \xi \frac{(x - \mu)}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi} - 1} e^{\left(1 + \xi \frac{(x - \mu)}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}}. \end{aligned}$$

Η παράμετρος  $\xi$  είναι η παράμετρος σχήματος (shape), και οι παράμετροι  $\mu$  και  $\sigma$  είναι οι παράμετροι θέσης (location) και κλίμακας (scale) αντίστοιχα.

Το γράφημα της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της Γενικευμένης Κατανομής Ακραίων Τιμών για  $\xi = 0.5$ , όταν  $\mu = 0$  και  $\sigma = 1$ , είναι το ακόλουθο.

GEV Density ( $\xi=0.5$ )



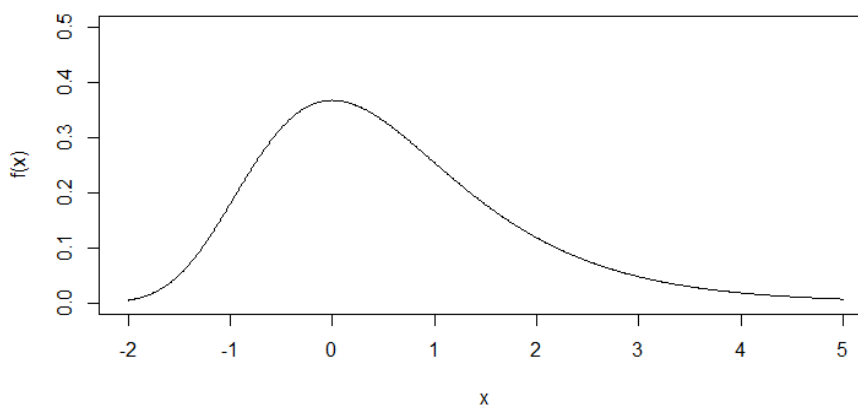
Επιπλέον παρατηρούμε ότι ανάλογα με την τιμή της παραμέτρου  $\xi$  και ορίζοντας καταλλήλως τις παραμέτρους  $\mu$  και  $\sigma$ , προκύπτουν οι γνωστές οριακές κατανομές.

- Για  $\xi \rightarrow 0$  προκύπτει κατανομή μεγίστων τύπου I –  $\Lambda$  (*Gumbel*)

ορίζοντας  $\sigma = c, \mu = d$ , έχουμε

$$G(x) = e^{-\left(1+\xi\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}} \xrightarrow{\xi \rightarrow 0} e^{-e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}} = \Lambda\left(\frac{x-d}{c}\right).$$

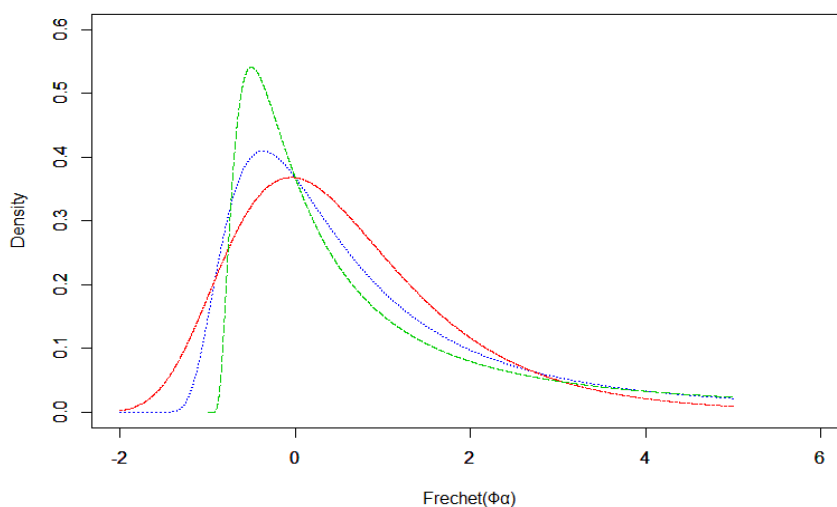
GEV Density ( $\xi=0$ )



- Για  $\xi > 0 = 1/a$  προκύπτει κατανομή μεγίστων τύπου II –  $\Phi_a$  (*Frechet*)

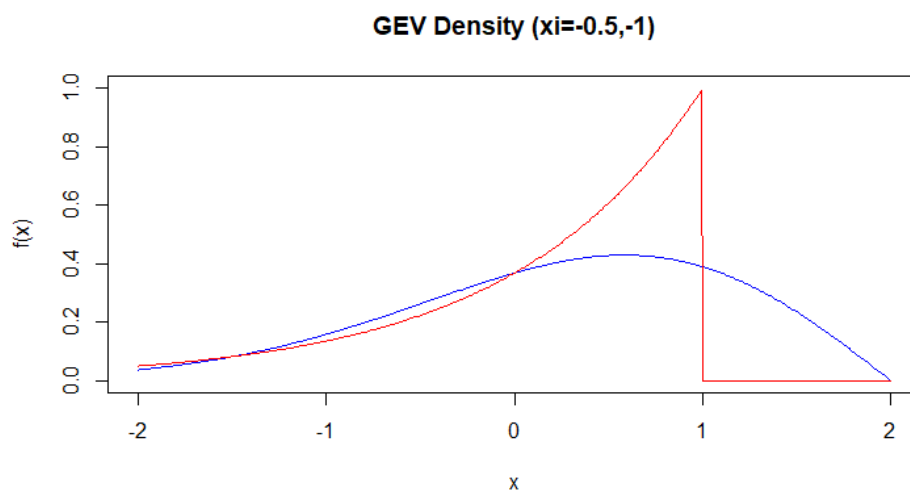
ορίζοντας  $\sigma = c/a, \mu = c + d$ , έχουμε

$$G(x) = e^{-\left(1+\xi\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}} = e^{-\left(\frac{x-d}{c}\right)^{-a}} = \Phi_a\left(\frac{x-d}{c}\right).$$



- Για  $\xi < 0 = -1/a$  προκύπτει κατανομή μεγίστων τύπου III -  $\Psi_\alpha$  (Weibull) ορίζοντας,  $\sigma = c/a, \mu = -c + d$  έχουμε

$$G(x) = e^{-\left(1 + \xi \frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}} = e^{-\left(\frac{x-d}{c}\right)^{-a}} = \Psi_\alpha\left(\frac{x-d}{c}\right).$$



Συνεπώς, με την μέθοδο Block Maxima και όταν  $n \rightarrow \infty$ , η κατανομή των μεγίστων ζημιών θα ανήκει στην οικογένεια GEV με κάποιες παραμέτρους  $\xi, \mu, \sigma$ . Η εκτίμηση αυτών των παραμέτρων παρουσιάζει ιδιαίτερη βαρύτητα καθώς διαφορετικές τιμές των παραμέτρων συνεπάγονται και διαφορετική συμπεριφορά των δεδομένων. Στην συνέχεια θα μπορούν να γίνουν έλεγχοι των ακραίων ζημιών, έλεγχος καλής προσαρμογής των εκτιμώμενων παραμέτρων, με σκοπό την εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων. Ένα τέτοιο συμπέρασμα για μία ασφαλιστική εταιρία είναι η ανάγκη ή όχι ενεργοποίησης αντισταθμιστικής κάλυψης.

#### 4.1.2 Εκτίμηση των Παραμέτρων της GEV

Η εκτίμηση των παραμέτρων μπορεί να γίνει με διάφορες μεθόδους όπως, με την μέθοδο των ροπών, με την μέθοδο μεγίστης πιθανοφάνειας, μέσω κατάλληλων γραφημάτων (Q-Q plots), μέσω συναρτήσεων διατεταγμένων παρατηρήσεων. Θα εκτιμήσουμε τις παραμέτρους της GEV με την πλέον διαδεδομένη μέθοδο μεγίστης πιθανοφάνειας, η οποία έχει καλές ιδιότητες σύγκλισης και συνήθως είναι απλούστερη από άλλες μεθόδους. Με την μέθοδο μεγίστης πιθανοφάνειας εξάγονται για μεγάλο δείγμα εκτιμήτριες (ε.μ.π.) με μικρή διασπορά, εκτιμήτριες ελαχίστης διασποράς, που η κατανομή τους είναι ασυμπτωτικά κανονική, συγκεκριμένα πολυδιάστατη κανονική.

Έστω  $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$  τα Block Maxima  $\sim GEV$  με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$\begin{aligned} g(Y; \mu, \sigma, \xi) &= (G(Y; \mu, \sigma, \xi))' = \left( e^{-\left(1 + \xi \frac{Y - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}} \right)' \\ &= \frac{1}{\sigma} \left( 1 + \xi \frac{(x - \mu)}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi} - 1} e^{\left(1 + \xi \frac{(Y_i - \mu)}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}} I(y; \mu, \sigma, \xi) \end{aligned}$$

Η δείκτρια συνάρτηση

$$I(y; \mu, \sigma, \xi) = \begin{cases} 1, & 1 + \xi \frac{Y - \mu}{\sigma} > 0 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας (log-likelihood) για  $\xi \neq 0$

$$\begin{aligned} L(\mu, \sigma, \xi) &= \prod_{i=1}^k (G(Y_i; \mu, \sigma, \xi))' = \prod_{i=1}^k g(Y_i; \mu, \sigma, \xi) \\ &= \prod_{i=1}^k \frac{1}{\sigma} \left( 1 + \xi \frac{(Y_i - \mu)}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi} - 1} e^{\left(1 + \xi \frac{(Y_i - \mu)}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}} I(y; \mu, \sigma, \xi) \\ &= \frac{1}{\sigma^k} \left[ \prod_{i=1}^k \left( 1 + \xi \frac{(Y_i - \mu)}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi} - 1} \right] e^{-\sum_{i=1}^k \left(1 + \xi \frac{(Y_i - \mu)}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}} \left[ \prod_{i=1}^k I(y; \mu, \sigma, \xi) \right] \end{aligned}$$

Η λογαριθμική συνάρτηση πιθανοφάνειας

$$\begin{aligned} l(\mu, \sigma, \xi) &= \ln L(\mu, \sigma, \xi) = \ln \prod_{i=1}^k (G(Y_i; \mu, \sigma, \xi))' \\ &= \ln \left\{ \frac{1}{\sigma^k} \left[ \prod_{i=1}^k \left( 1 + \xi \frac{(Y_i - \mu)}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi} - 1} \right] \left[ \prod_{i=1}^k I(y_i; \mu, \sigma, \xi) \right] e^{-\sum_{i=1}^k \left(1 + \xi \frac{(Y_i - \mu)}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}} \right\} \\ &= \ln \frac{1}{\sigma^k} + \ln \prod_{i=1}^k \left( 1 + \xi \frac{(Y_i - \mu)}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi} - 1} + \ln e^{-\sum_{i=1}^k \left(1 + \xi \frac{(Y_i - \mu)}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}} + \ln \prod_{i=1}^k I(y_i; \mu, \sigma, \xi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \ln \sigma^{-k} + \sum_{i=1}^k \ln \left( 1 + \xi \frac{(Y_i - \mu)}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}-1} - \sum_{i=1}^k \left( 1 + \xi \frac{(Y_i - \mu)}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}} + \sum_{i=1}^k \ln I(y_i; \mu, \sigma, \xi) \\
&= -k \ln \sigma - \left( \frac{1}{\xi} + 1 \right) \sum_{i=1}^k \ln \left( 1 + \xi \frac{(Y_i - \mu)}{\sigma} \right) - \sum_{i=1}^k \left( 1 + \xi \frac{(Y_i - \mu)}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}} + \sum_{i=1}^k \ln I(y_i; \mu, \sigma, \xi)
\end{aligned}$$

όπου,

$$\sum_{i=1}^k \ln I(y_i; \mu, \sigma, \xi) = \begin{cases} 0, & 1 + \frac{\xi(y-\mu)}{\sigma} > 0 \\ -\infty, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Αντίστοιχα για  $\xi = 0$ ,

$$l(\mu, \sigma, 0) = \ln L(\mu, \sigma, 0) = -k \ln \sigma - \sum_{i=1}^k \frac{(Y_i - \mu)}{\sigma} - \sum_{i=1}^k e^{-\frac{Y_i - \mu}{\sigma}}.$$

Οι τιμές των  $\mu, \sigma, \xi$  που μεγιστοποιούν την συνάρτηση πιθανοφάνειας  $l(\mu, \sigma, \xi)$  είναι οι εκτιμήτριες μεγίστης πιθανοφάνειας (ε.μ.π.)  $\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\xi}$ , πάντα υπό τους περιορισμούς,

$$\mu > 0 \text{ και } 1 + \xi \frac{Y_i - \mu}{\sigma} > 0, \quad \forall i$$

Δεδομένου ότι δεν υπάρχει αναλυτική μορφή για τις ε.μ.π., ο τρόπος με τον οποίο θα βρεθούν οι τιμές που μεγιστοποιούν την  $l(\mu, \sigma, \xi)$  είναι μέσω αριθμητικών μεθόδων βελτιστοποίησης, όπως η μέθοδος Newton-Raphson.

Οι  $\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\xi}$  θα ακολουθούν ασυμπτωτικά μία πολυδιάστατη κανονική με μέση τιμή  $(\mu, \sigma, \xi)^T$  και πίνακα διασποράς, τον αντίστροφο του πίνακα πληροφορίας, ο οποίος εκτιμάται από τον

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 l(\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\xi})}{\partial \mu^2} & \frac{\partial^2 l(\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\xi})}{\partial \mu \partial \sigma} & \frac{\partial^2 l(\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\xi})}{\partial \mu \partial \xi} \\ \frac{\partial^2 l(\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\xi})}{\partial \sigma \partial \mu} & \frac{\partial^2 l(\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\xi})}{\partial \sigma^2} & \frac{\partial^2 l(\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\xi})}{\partial \sigma \partial \xi} \\ \frac{\partial^2 l(\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\xi})}{\partial \xi \partial \mu} & \frac{\partial^2 l(\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\xi})}{\partial \xi \partial \sigma} & \frac{\partial^2 l(\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\xi})}{\partial \xi^2} \end{pmatrix}$$

Αν  $s_{i,i}$  είναι το  $i$ -διαγώνιο στοιχείο του  $\hat{I}^{-1}$  ισχύει ότι οι ε.μ.π. των παραμέτρων  $\mu, \sigma, \xi$

$$\hat{\mu} \sim N(\tilde{\sigma}, s_{1,1}), \quad \hat{\sigma} \sim N(\tilde{\sigma}, s_{2,2}), \quad \hat{\xi} \sim N(\tilde{\sigma}, s_{3,3}),$$

από όπου προκύπτουν τα προσεγγιστικά διαστήματα εμπιστοσύνης συντελεστή  $1 - \alpha$  για τις παραμέτρους  $\mu, \sigma, \xi$

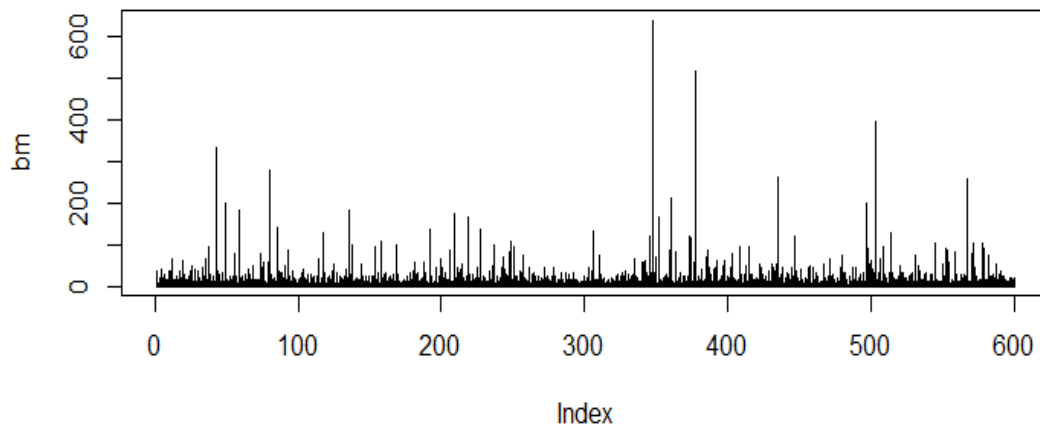
$$(\hat{\mu} \pm \sqrt{s_{1,1}}z_{\alpha/2}) , (\hat{\sigma} \pm \sqrt{s_{2,2}}z_{\alpha/2}) \text{ και } (\hat{\xi} \pm \sqrt{s_{3,3}}z_{\alpha/2}) \text{ αντίστοιχα}$$

Προκειμένου να μπορέσουμε να κατανοήσουμε την συμπεριφορά των Block Maxima, ήτοι των μέγιστων ζημιών που προέκυψαν από τα δεδομένα μας, θα υπολογίσουμε τις ε.μ.π. των παραμέτρων μορφής, θέσης και κλίμακας της GEV, ώστε να εμφανιστεί η μορφή της κατανομής που τα περιγράφει καλύτερα.

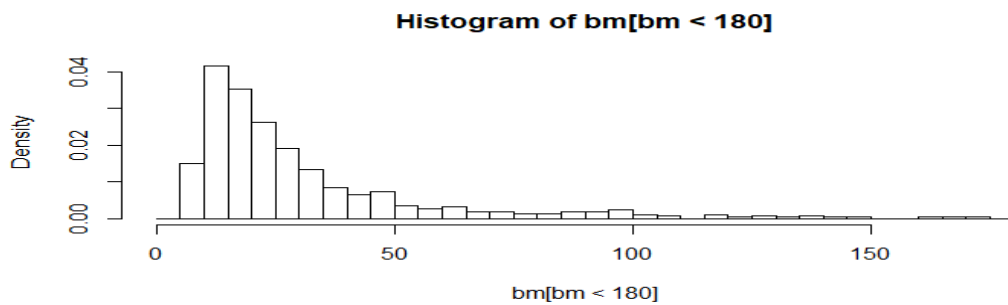
Οι εκτιμήτριες μέγιστης πιθανοφάνειας για τις παραμέτρους  $\mu, \sigma, \xi$  της GEV από τα δεδομένα που περιγράφονται στην αρχή του κεφαλαίου είναι (χρησιμοποιώντας  $k = 600$  blocks των  $n = 12$  παρατηρήσεων το καθένα)

$$(\hat{\mu} = 17.4467252, \hat{\sigma} = 10.7104413, \hat{\xi} = 0.5796253),$$

Με τυπικές αποκλίσεις 0.49678923, 0.50436057, 0.04147453 αντίστοιχα. Τα block maxima που χρησιμοποιήθηκαν φαίνονται στο ακόλουθο γράφημα:



με αντίστοιχο ιστόγραμμα



Τα αντίστοιχα διαστήματα εμπιστοσύνης συντελεστή  $1 - \alpha = 95\%$

$$\text{Για την παράμετρο } \mu \text{ [16.47302 18.42043]}$$

Για την παράμετρο  $\sigma$  [9.721895 11.698988]

Για την παράμετρο  $\xi$  [0.4983352 0.6609154]

Ο κώδικας R που χρησιμοποιήθηκε για τις εκτιμήσεις και τα παραπάνω σχήματα είναι (πακέτο `ismev`)

```
> k=600; m=floor(n/k); bm<-rep(0,k)
> for(i in 1:k){bm[i]<-max(X[(i-1)*m+1:(i*m)])}
> plot(bm,type="h")
> hist(bm[bm<180],seq(0,180,5), prob=TRUE);
> plot(bm,type="h")
> a<-gev.fit(bm)
```

```
$conv
[1] 0
$nlh
[1] 2569.867
$mle
[1] 17.4467252 10.7104413 0.5796253
$se
[1] 0.49678923 0.50436057 0.04147453
```

Ο κώδικας R για τον υπολογισμό των διαστημάτων εμπιστοσύνης των παραμέτρων είναι:

```
> mu<-a$mle[1];sigma<-a$mle[2];xi<-a$mle[3]
> mu.se<-a$se[1];sigma.se<-a$se[2];xi.se<-a$se[3]
> c(mu-mu.se*1.96,mu+mu.se*1.96)
[1] 16.47302 18.42043

> c(sigma-sigma.se*1.96,sigma+sigma.se*1.96)
[1] 9.721895 11.698988

> c(xi-xi.se*1.96,xi+xi.se*1.96)
[1] 0.4983352 0.6609154
```

### 4.1.3 Στάθμη Απόδοσης $Z_p$ (return level)

Ένα μέγεθος που παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον στην θεωρία ακραίων τιμών είναι η στάθμη απόδοσης  $z_p$  (*return level*). Είναι πολύ σημαντικό μία ασφαλιστική εταιρία να γνωρίζει με τι πιθανότητα μία ζημιά θα ξεπεράσει ένα συγκεκριμένο κατώφλι ώστε να καταστρώσει το στρατηγικό της σχεδιασμό.

Η στάθμη απόδοσης ορίζεται ως το κατώφλι  $z_p$  το οποίο δεν υπερβαίνει καμία παρατήρηση  $X_i$  για μια χρονική περίοδο (block) με πιθανότητα  $1 - p$ , κατά συνέπεια δεν το υπερβαίνει ούτε το αντίστοιχο Block maximum  $M_n$ .



Εναλλακτικά, αν θεωρήσουμε ως  $T$  το πλήθος των blocks μέχρι να υπάρξει κάποια παρατήρηση  $X$ , η οποία θα υπερβεί το κατώφλι  $z_p$ ,  $X > z_p$ , τότε η τ.μ.  $T$  ακολουθεί Γεωμετρική Κατανομή με πιθανότητα επιτυχίας  $p$ . Συνεπώς,  $E(T) = 1/p$  χρονικές περιόδους.

Ένας δεύτερος ορισμός αναφέρει: Το κατώφλι  $z_p$  το οποίο υπερβαίνουν τα block maxima κατά μέσο όρο κάθε  $1/p$  χρονικές περιόδους, καλείται άνω όριο απόδοσης ή στάθμη απόδοσης (return level) για  $p$  χρονικές περιόδους απόδοσης (return period).

Η στάθμη απόδοσης  $z_p$ , ουσιαστικά μπορεί να αποτυπωθεί με δύο διαφορετικές ερμηνείες οι οποίες συμβάλλουν στο τελικό αποτέλεσμα της εκτίμησης της στάθμης απόδοσης (π.χ. βλ. Omey, Mallor and Nualart (2009))

i) Αριθμός συμβάντων: Ο μέσος αριθμός συμβάντων (ζημιές που ξεπερνούν το κατώφλι  $z_p$ ) που πραγματοποιούνται κάθε  $1/p$  χρονικές περιόδους είναι ένα.

ii) Χρόνος αναμονής: Ο μέσος χρόνος αναμονής μέχρι την επόμενη εμφάνιση του συμβάντος (κάποια ζημιά να ξεπεράσει το κατώφλι  $z_p$ ) είναι  $1/p$  χρονικές περιόδους.

Ως αποτέλεσμα αυτών, καθώς το block size  $n \rightarrow \infty$ ,

$$P(M_n \leq z_p) = G(z_p) = 1 - p .$$

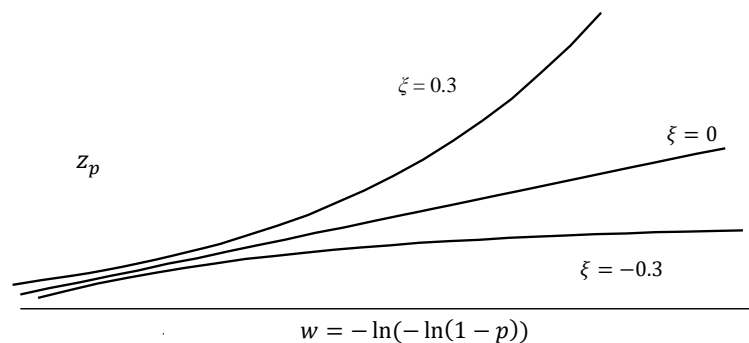
Κατά συνέπεια η στάθμη απόδοσης  $z_p$  για  $1/p$  χρονικές περιόδους,

$$z_p = G^{-1}(1 - p) = \begin{cases} \mu - \frac{\sigma}{\xi} (1 - (-\ln(1 - p))^{-\xi}), & \xi \neq 0 \\ \mu - \sigma \ln(-\ln(1 - p)), & \xi = 0 \end{cases} .$$

Θέτοντας  $w = -\ln(-\ln(1 - p))$  προκύπτει,

$$z_{p(w)} = \begin{cases} \mu - \frac{\sigma}{\xi} (1 - e^{\xi w}), & \xi \neq 0 \\ \mu + \sigma w, & \xi = 0 \end{cases} ,$$

όπου  $\mu, \sigma, \xi$ , οι παράμετροι της κατανομής GEV που ακολουθούν τα block maxima.



Όπως φαίνεται από το γράφημα στάθμης απόδοσης (return level plot) παρατηρούμε ότι όταν  $\xi > 0$  η  $z_{p(w)}$  είναι αύξουσα κυρτή συνάρτηση του  $w$ , όταν  $\xi < 0$  η  $z_{p(w)}$

είναι κοίλη συνάρτηση του  $w$ , ενώ όταν  $\xi = 0$  η  $z_{p(w)}$  είναι γραμμικά αύξουσα συνάρτηση του  $w$ .

Εφόσον έχουν βρεθεί οι εκτιμήτριες  $\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\xi}$ , για τις παραμέτρους  $\mu, \sigma, \xi$ , μπορεί να προκύψει εκτίμηση και για την στάθμη απόδοσης αντικαθιστώντας τις παραμέτρους με τις αντίστοιχες ε.μ.π.

$$\hat{z}_{p(w)} = \begin{cases} \hat{\mu} - \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} (1 - e^{\hat{\xi} w_p}), & \hat{\xi} \neq 0 \\ \hat{\mu} + \hat{\sigma} w_p, & \hat{\xi} = 0 \end{cases}$$

Διάστημα εμπιστοσύνης  $z_p$ .

Για την κατασκευή ενός διαστήματος εμπιστοσύνης (δ.ε.) για την στάθμη απόδοσης  $z_p$  χρησιμοποιείται η profile Deviance Function  $D_p(z_p)$ . Ουσιαστικά, γίνεται μία νέα παραμετροποίηση, υπό την οποία η  $z_p$  είναι μια από τις νέες παραμέτρους της GEV.

$$z_p = \mu - \frac{\sigma}{\xi} (1 - (-\ln(1-p))^{-\xi}) \rightarrow \mu = z_p + \frac{\sigma}{\xi} (1 - (-\ln(1-p))^{-\xi}).$$

Θεωρώντας  $l'(z_p, \sigma, \xi)$  την νέα πιθανοφάνεια, τότε ισχύει,

$$D_p(z_p) = 2 \left( l'(\hat{z}_p, \hat{\sigma}, \hat{\xi}) - \max_{\sigma, \xi} l'(z_p, \sigma, \xi) \right) \sim \chi_1^2.$$

Ένα δ.ε. συντελεστή  $1 - \alpha$  για την  $D_p(z_p)$  είναι το σύνολο

$$\{z_p : D_p(z_p) \leq \chi_1^2(\alpha)\}.$$

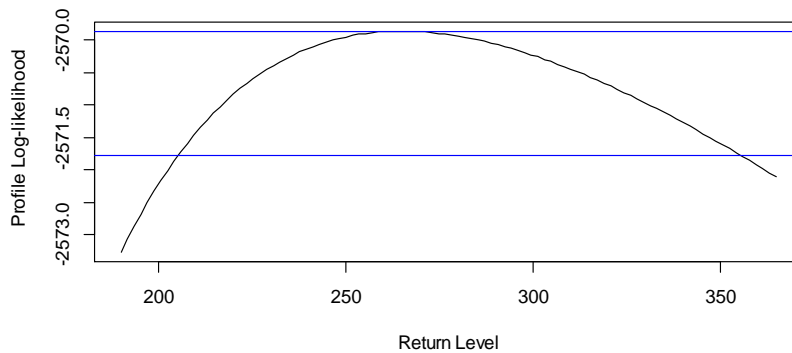
Για την κατασκευή του γραφήματος ενώνεται η συνάρτηση  $D_p(z_p)$  με την οριζόντια γραμμή που έχει τεταγμένη  $\chi_1^2(\alpha)$ . Το διάστημα εμπιστοσύνης είναι τα σημεία τομής.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η εκτίμηση για την στάθμη απόδοσης είναι

$$\hat{z}_{1/100} = 264.8247$$

Ουσιαστικά με την στάθμη απόδοσης εκτιμούμε ότι ένα block maxima υπερβαίνει την τιμή 264.8247 με πιθανότητα  $p = 1/100$ . Μία διαφορετική ερμηνεία αναφέρει ότι ένα block maxima υπερβαίνει την τιμή 264.8247 κατά μέσο όρο κάθε 100 χρονικές περιόδους- blocks των 12 ημερών, δηλαδή κάθε 1,200 ημέρες ( $100 \cdot 12 = 1,200$ ).

Η τιμή για την στάθμη απόδοσης  $z_p$  σύμφωνα με διάστημα εμπιστοσύνης συντελεστού  $1 - \alpha = 95\%$  όπως αυτό που προκύπτει από την profile Deviance Function, όπως αυτό εμφανίζεται και στο αντίστοιχο γράφημα που ακολουθεί κυμαίνεται μεταξύ 210 και 360.



Ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε στην R είναι

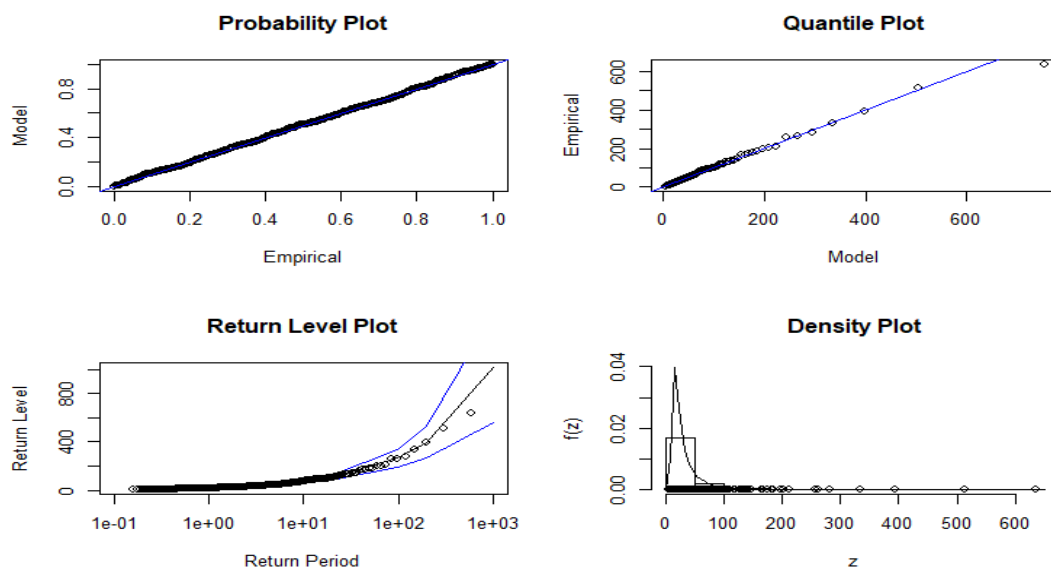
```
> BL=100; p=1/BL; w=-log(-log(1-p));
> zp<-mu-sigma/xi*(1-exp(xi*w));
> print(zp)
[1] 264.8247
```

Και για το γράφημα η εντολή

```
> gev.prof(a, 1/p, zp-75, zp+100);
```

#### 4.1.4 Έλεγχος καλής προσαρμογής των δεδομένων στην GEV

Για τον έλεγχο καλής προσαρμογής της GEV στα block maxima, κατασκευάζουμε τα γραφήματα Probability plot και Quantile plot των δεδομένων με την θεωρητική κατανομή καθώς επίσης γράφημα στάθμης απόδοσης  $z_p$  για διάφορες τιμές του  $1/p$  και ιστόγραμμα των block maxima μαζί με την σ.π.π. της GEV.



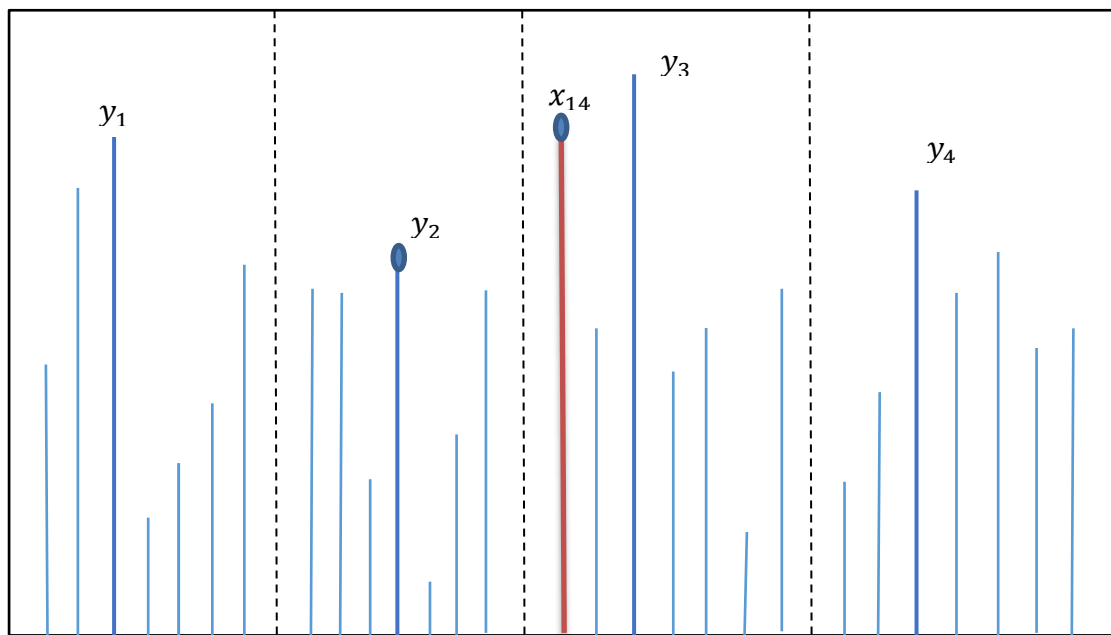
Χρησιμοποιώντας στην R την εντολή

```
> gev.diag(a)
```

Όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε τα Block Maxima έχουν καλή προσαρμογή στην κατανομή GEV( $\hat{\mu} = 17.4467252$  ,  $\hat{\sigma} = 10.7104413$ ,  $\hat{\xi} = 0.5796253$ )

## 4.2 Μέθοδος Υπερβάσεων πάνω από ένα Κατώφλι – POT (Peaks over Threshold)

Αναλύοντας την μέθοδο Block-Maxima προηγουμένως, χωρίσαμε το σύνολο των ζημιών  $m$  σε  $k$  το πλήθος  $n$ -άδες  $X_1, X_2, \dots, X_{m=nk}$ , και ασχοληθήκαμε με τα μέγιστα αυτών  $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$ . Με αυτόν τον τρόπο δειγματοληψίας ακραίων τιμών, μεγάλες ζημιές που θα έδιναν πιο αντιπροσωπευτικά αποτελέσματα, ενδεχομένως να συνέπιπταν εντός ενός block με συνέπεια να αποκλείονταν από την ανάλυση.

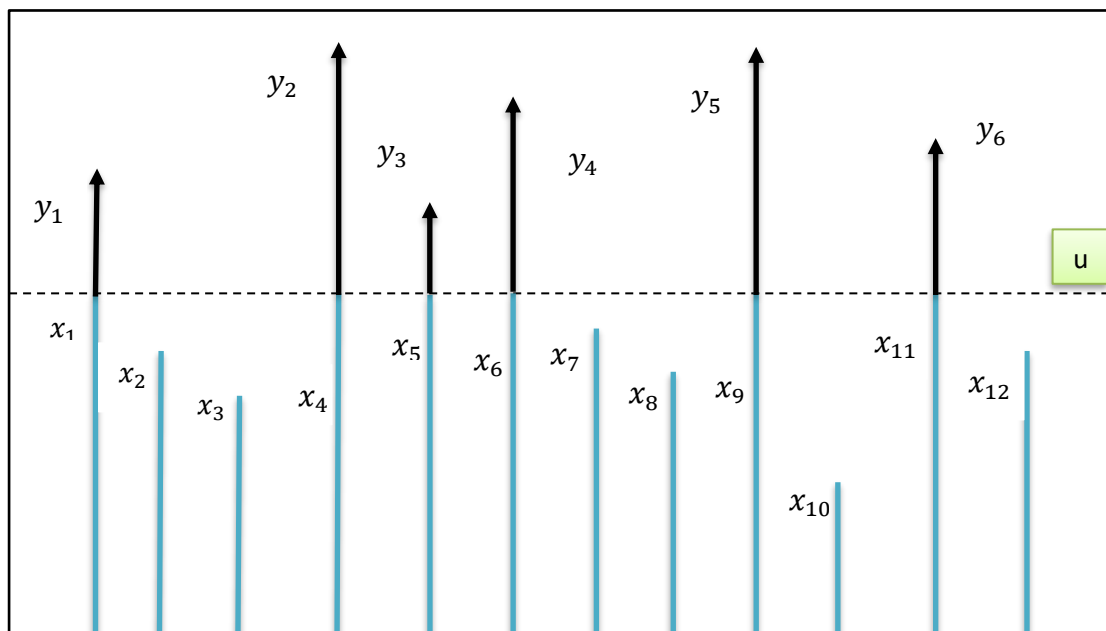


Σχήμα 2. Επιλογή ακραίων παρατηρήσεων με τη μέθοδο Block Maxima

Πράγματι, παρατηρούμε στο Σχήμα 2, ότι οι δύο μεγαλύτερες ζημιές του τρίτου block, είναι οι δύο μεγαλύτερες σε όλο το δείγμα. Το παράδοξο με την μέθοδο Block-Maxima είναι ότι η παρατήρηση  $y_2$  θεωρήθηκε ακραία ενώ παρατήρηση  $x_{14}$  η σφοδρότητα της οποίας είναι ισχυρή, όχι.

Για την αποφυγή παρόμοιων καταστάσεων, έχει μεγάλη απήχηση η μέθοδος Υπερβάσεων Πάνω από ένα Κατώφλι – POT (Peaks over Threshold), η οποία βασίζεται στις τιμές των  $X_i$  οι οποίες υπερβαίνουν ένα συγκεκριμένο όριο (Gilli and Kellezi, (2006)). Στην μέθοδο POT θα συμπεριληφθούν και θα αναλυθούν όλες οι παρατηρήσεις, ακόμα και αυτές που βρίσκονται κοντά σε μέγιστες τιμές, ανεξαρτήτως πότε συ-

νέβησαν χρονικά, αρκεί να υπερβαίνουν ένα κατώφλι, έστω  $u$ . Ουσιαστικά μας ενδιαφέρουν οι ζημιές στις οποίες ισχύει:  $X_i > u$  και σχηματικά μπορούν να αναπαρασταθούν ως ακολούθως.



Σχήμα 3. Peaks over Threshold

Οι τ.μ.  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , αναπαριστούν τα συνολικά δεδομένα των ζημιών που προκύπτουν από ένα χαρτοφυλάκιο. Οι υπερβάσεις (excesses) των ζημιών που ξεπερνούν το κατώφλι  $u$ , θα περιγράφονται από τις τ.μ.  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_u}$ . Οι τ.μ.  $X_1, X_2, \dots, X_{n_u}$ , είναι οι μεταβλητές εκείνες οι οποίες ξεπερνούν το κατώφλι  $u$ ,  $X > u$  και ονομάζονται υπερβολές (exceedances).

Για τις υπερβάσεις μπορούμε να πούμε ότι,

$$(Y_j = X_j - u | X_j > u), \text{ όπου } j = 1, 2, \dots, n_u$$

Όπως γίνεται εύκολα αντιληπτό από το Σχήμα 3, με αυτό τον τρόπο δειγματοληψίας των ακραίων παρατηρήσεων, επιλέγονται οι ζημιές πάνω από κάποιο ορισμένο κατώφλι  $u$ . Για το παράδειγμά μας, επιλέγοντας κατάλληλα το κατώφλι  $u$  μπορούν να συμπεριληφθούν και οι τρεις παρατηρήσεις. Αν το κατώφλι οριστεί υψηλότερα, θα απορριφθεί πρώτα η τρίτη κατά σειρά μεγαλύτερη παρατήρηση και στην συνέχεια οι υπόλοιπες. Στην μέθοδο POT η επιλογή του κατωφλιού  $u$  είναι ιδιαίτερα σημαντική καθώς μη σωστός ορισμός μπορεί να επιφέρει αποτυχία της μεθόδου. Εάν το κατώφλι  $u$  είναι μικρό υπάρχει κίνδυνος η συνάρτηση κατανομής των ακραίων ζημιών να μην προσεγγίζει την επιθυμητή κατανομή. Εν αντιθέσει, αν το κατώφλι  $u$  είναι αρκετά

υψηλό, οι υπερβολές,  $X_i > u$ , δεν θα είναι αρκετές ώστε να προχωρήσει η ανάλυση και να εξαχθούν χρήσιμα συμπεράσματα.

Η καταλληλότερη κατανομή η οποία εμφανίζει την καλύτερη προσαρμογή στα δεδομένα, στην οποία βασίζεται η POT μέθοδος, είναι η Γενικευμένη κατανομή Pareto (Generalized Pareto Distribution -GPD)

#### 4.2.1 Γενικευμένη κατανομή Pareto (Generalized Pareto Distribution - GPD)

Για την μελέτη της τ.μ. των υπερβάσεων  $Y_i$  η συνάρτηση κατανομής της είναι

$$\begin{aligned} F_u(y) &= P(X - u \leq y | X > u) = P(X \leq y + u | X > u) \\ &= 1 - \frac{P(X \leq u + y)}{P(X \leq u)} = 1 - \frac{1 - F_x(u + y)}{1 - F_x(u)}, y > 0. \end{aligned}$$

Στην θεωρία ακραίων τιμών όπως έχει προαναφερθεί, μας ενδιαφέρει η μελέτη των ακραίων παρατηρήσεων. Επικεντρώνοντας την έρευνα στην μορφή της δεξιάς ουράς της πραγματικής κατανομής των δεδομένων, σπανίως θα οδηγηθούμε σε ασφαλείς προβλέψεις. Θα πρέπει να διερευνηθεί κατά πόσο υπάρχουν οριακές κατανομές οι οποίες δεν εξαρτώνται από την αρχική κατανομή των συνολικών δεδομένων αλλά αποκλειστικά στις υπερβάσεις. Στο θεώρημα που ακολουθεί εμφανίζεται αυτό το εύρημα.

**Θεώρημα 4.** Έστω  $X_1, X_2, \dots, X_n$  μία ακολουθία από ανεξάρτητες τ.μ. με κοινή σ.κ.  $F$  για την οποία ισχύει ότι η κατανομή του κανονικοποιημένου μεγίστου συγκλίνει στην κατανομή  $GEV$ . Θεωρούμε επίσης ότι το  $n$  είναι αρκετά μεγάλο ώστε

$$P(M_n \leq x) \approx G(x; \mu, \sigma, \xi),$$

Όπου  $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$  και  $G$  η σ.κ. της  $GEV$  με παραμέτρους  $\mu, \sigma, \xi$ . Τότε για αρκετά μεγάλο  $u$ , θα ισχύει ότι

$$F_u(y) = P(X - u \leq y | X > u) \approx H(y; \tilde{\sigma}, \xi) = 1 - \left(1 + \frac{\xi y}{\tilde{\sigma}}\right)^{-\frac{1}{\xi}},$$

για  $y > 0$ , με  $1 + \frac{\xi y}{\tilde{\sigma}} > 0$ , όπου  $X \sim F$  και  $\tilde{\sigma} = \sigma + \xi(u - \mu)$ .

**Απόδειξη:** Χρησιμοποιώντας ότι  $P(M_n \leq x) \approx G(x; \mu, \sigma, \xi)$  και καθώς έχουμε υποθέσει ότι οι ζημιές είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, από το γνωστό αποτέλεσμα  $P(M_n \leq x) = F(x)^n$  έχουμε:

$$F(x)^n \approx G(x; \mu, \sigma, \xi) \Rightarrow \ln F(x)^n \approx \ln G(x; \mu, \sigma, \xi) \Rightarrow n \ln F(x) \approx \ln G(x; \mu, \sigma, \xi).$$

Επιπλέον,

Καθώς  $x^{-1} \ln(1-x) \rightarrow -1$  όταν  $x \rightarrow 0$  και αν το  $u$  οριστεί αρκετά μεγάλο μπορούμε τελικά να ισχυριστούμε ότι

$$(1 - F_x(u))^{-1} \ln F_x(u) \approx -1 \Rightarrow \ln F_x(u) \approx -(1 - F_x(u)).$$

Άρα,

$$1 - F_x(u) \approx -\frac{1}{n} \ln G(u; \mu, \sigma, \xi).$$

Συνεπώς  $\forall y > 0$ , ισχύει αντίστοιχα

$$1 - F_x(u + y) \approx -\frac{1}{n} \ln G(u + y; \mu, \sigma, \xi).$$

Άρα, για  $1 + \xi \frac{(u-\mu)}{\sigma} > 0$ ,  $1 + \xi \frac{(u+y-\mu)}{\sigma} > 0$  έχουμε

$$\frac{1 + \xi \frac{(u + y - \mu)}{\sigma}}{1 + \xi \frac{(u - \mu)}{\sigma}} > 0.$$

Το οποίο συνεπάγεται ότι θα ισχύει επίσης

$$\begin{aligned} F_u(y) &= 1 - \frac{1 - F_x(u + y)}{1 - F_x(u)} = 1 - \frac{-\frac{1}{n} \ln G(u + y; \mu, \sigma, \xi)}{-\frac{1}{n} \ln G(u; \mu, \sigma, \xi)} = 1 - \frac{\ln G(u + y; \mu, \sigma, \xi)}{\ln G(u; \mu, \sigma, \xi)} \\ &= 1 - \frac{\left(1 + \xi \frac{(u + y - \mu)}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}}{\left(1 + \xi \frac{(u - \mu)}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}} = 1 - \left(\frac{\sigma + \xi u + \xi y - \xi \mu}{\sigma + \xi u - \xi \mu}\right)^{-\frac{1}{\xi}} \\ &= 1 - \left(1 + \frac{\xi y}{\sigma + \xi(u - \mu)}\right)^{-\frac{1}{\xi}} = 1 - \left(1 + \frac{\xi y}{\tilde{\sigma}}\right)^{-\frac{1}{\xi}} \end{aligned}$$

Κατά συνέπεια,

$$F_u(y) \approx H(y; \tilde{\sigma}, \xi) = 1 - \left(1 + \frac{\xi y}{\tilde{\sigma}}\right)^{-\frac{1}{\xi}}, \xi \neq 0$$

και,

$$F_u(y) \approx H(y; \tilde{\sigma}, 0) = 1 - \exp\left(-\frac{y}{\tilde{\sigma}}\right), \xi = 0.$$

Η κατανομή  $H(y; \tilde{\sigma}, \xi)$ , καλείται Γενικευμένη Κατανομή Pareto (Generalized Pareto Distribution - GPD) με παράμετρο σχήματος  $\xi$  και παράμετρο κλίμακας  $\tilde{\sigma}$  και έχει μέση τιμή

$$E[H(y; \tilde{\sigma}, \xi)] = \frac{\tilde{\sigma}}{1 - \xi}$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι υπάρχει σύνδεση μεταξύ της GEV και της GPD. Εάν τα Block Maxima ακολουθούν μία  $GEV(\mu, \sigma, \xi)$ , τότε οι αντίστοιχες υπερβάσεις πάνω από ένα ιδιαίτερα υψηλό κατώφλι με την μέθοδο POT, θα ακολουθούν την αντίστοιχη  $GPD(\tilde{\sigma}, \xi)$ . Η παράμετρος σχήματος  $\xi$  της κατανομής GPD είναι ακριβώς ίδια με εκείνη της αντίστοιχης κατανομής GEV.

#### 4.2.2 Η επιλογή του βέλτιστου κατώφλιου $u$

Για την εκτίμηση των παραμέτρων της GPD θα πρέπει πρώτα να έχουμε ορίσει το κατώφλι  $u$ . Η σωστή επιλογή του κατώφλιου  $u$  όπως έχουμε αναφέρει είναι μείζονος σημασίας και πρέπει να γίνει συνετά. Το κατώφλι  $u$  θα πρέπει να είναι αρκετά μεγάλο ώστε η  $F_u$  να προσεγγίζεται ικανοποιητικά από την GPD, αλλά ταυτοχρόνως, να είναι όσο το δυνατόν μικρότερο ώστε να υπάρχουν αρκετές παρατηρήσεις που θα το ξεπερνούν,  $X_i > u$ . Κατά συνέπεια θα πρέπει να βρεθεί η χρυσή τομή αυτών των δύο. Ουσιαστικά, ως κατώφλι  $u$  πρέπει να επιλεγεί το μικρότερο, για το οποίο ισχύει:

$$F_u \approx GPD .$$

- **1<sup>η</sup> μέθοδος επιλογής (Mean residual life plot)**

Σε συνέχεια των όσων αναφέρονται στην αρχή αυτής της ενότητας θεωρούμε το  $u_0$  κατώφλι για το οποίο ισχύει όντως  $F_{u_0} \approx GPD$ . Για κάθε κατώφλι  $u > u_0$ , όπως είναι λογικό θα ισχύει  $F_u \approx GPD$ . Αν λοιπόν το  $u_0$  είναι το μικρότερο  $u$  για ο οποίο επαληθεύεται η σχέση  $F_u \approx GPD$ , τότε η δεσμευμένη μέση τιμή  $E(X - u | X > u)$ , η οποία προκύπτει από την ισότητα των μέσων τιμών, θα πρέπει να είναι γραμμική συνάρτηση του  $u$ ,  $\forall u > u_0$ . Η συγκεκριμένη δεσμευμένη μέση τιμή ονομάζεται μέση υπερβάλλουσα συνάρτηση (mean excess function), (π.χ. βλ. Coles (2001)).

$$e(u) = E(X - u | X > u) = \frac{\tilde{\sigma}}{1 - \xi} = \frac{\sigma + \xi(u - \mu)}{1 - \xi}, u > u_0 .$$

Μία εκτίμηση της  $e(u)$  είναι η δειγματική μέση τιμή των υπερβάσεων  $Y_i$ , οι ζημιές των οποίων η σφοδρότητα είναι μεγαλύτερη από το κατώφλι  $u$  μείον το κατώφλι αυτό, η οποία καλείται εμπειρική μέση υπερβάλλουσα συνάρτηση (empirical mean excess function),



$$\hat{e}(u) = \frac{1}{n_u} \sum_{i: X_i > u} (X_i - u),$$

όπου  $n_u$  το πλήθος των υπερβάσεων.

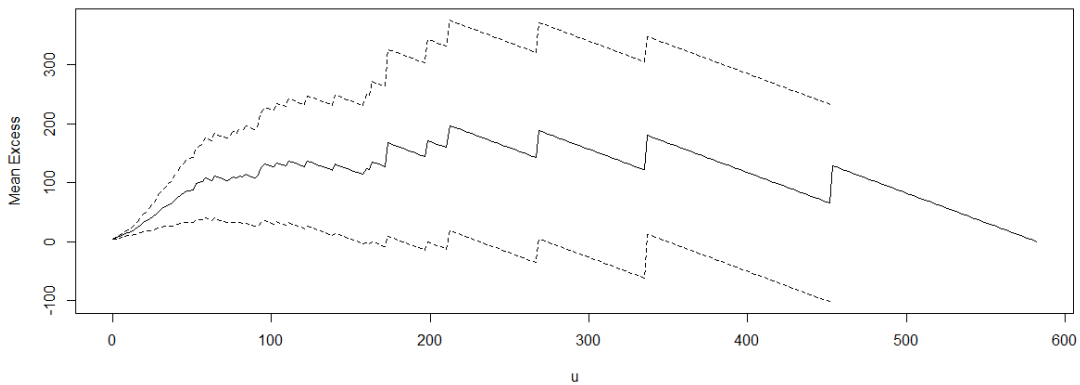
Σύμφωνα με την υπόθεση αυτή και ενώνοντας τα σημεία

$$\{(u, \hat{e}(u)) : x_{(1)} < u < x_{(n_u)}\},$$

προκύπτει το γράφημα υπολειπόμενης ζωής (mean residual life plot) το οποίο εμφανίζει την μέση υπερβάλλουσα τιμή (mean excess) και ένα διάστημα εμπιστοσύνης ανάλογα με τον ορισμό του κατώφλιού  $u$ . Καθώς το γράφημα θα είναι γραμμικό για  $u > u_0$  μία απόφαση για την επιλογή είναι το σημείο στο οποίο το γράφημα παύει να είναι γραμμικό.

Κάνοντας χρήση στην R της εντολής

```
> mrl.plot(X, conf = 0.99, nint = 300)
```



Σύμφωνα με το mean residual life plot παρατηρούμε ότι κατάλληλο κατώφλι εμφανίζεται να είναι γύρω στην τιμή 10 αλλά χωρίς να είναι ένα ασφαλές συμπέρασμα.

- **2<sup>η</sup> μέθοδος επιλογής (Modified scale plot)**

Μία εναλλακτική μέθοδος για την επιλογή του ιδανικού κατώφλιού  $u$  είναι εκτιμώντας τις παραμέτρους  $\tilde{\sigma}, \xi$  για διάφορες τιμές του  $u$ . Αν επιλεγεί κατώφλι  $u_0$  για το οποίο ισχύει  $F_{u_0} \approx GPD$  τότε για οποιοσδήποτε  $u_1 > u_0$  θα ισχύει επίσης  $F_{u_1} \approx GPD$ . Με αυτή την αλλαγή του κατώφλιού, η εκτίμηση για το  $\xi$  δεν θα επηρεαστεί,

$$\xi_1 = \xi_0,$$

ενώ η εκτίμηση του  $\tilde{\sigma} = \sigma + \xi(u - \mu)$  θα μεταβάλλεται γραμμικά ως προς το  $u$ ,

$$\tilde{\sigma}_1 = \tilde{\sigma}_0 + \xi_0 - (u_1 - u_0).$$

Για τον σχεδιασμό των γραφημάτων επιλέγονται τα σημεία,

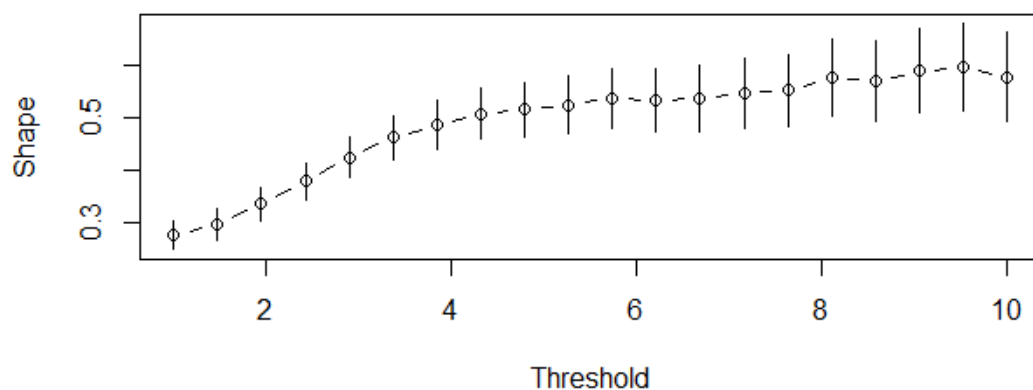
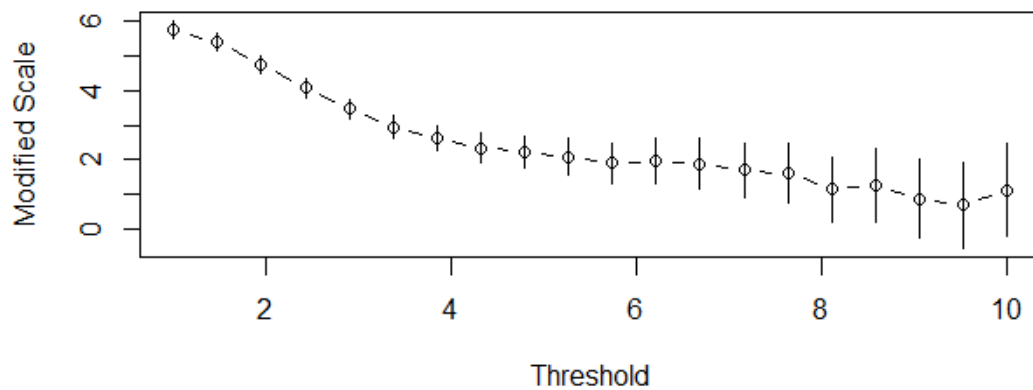
$$\{(\mu_1, \tilde{\sigma}^*): \mu_1 < x_{(n_{u_1})}\} \text{ και } \{(\mu_1, \xi_1): \mu_1 < x_{(n_{u_1})}\} \text{ αντίστοιχα,}$$

όπου  $\tilde{\sigma}^* = \tilde{\sigma}_1 - \xi_1 \mu_1$

Από τα γραφήματα που παρουσιάζουν την παράμετρο σχήματος  $\xi$  και την τροποποιημένη παράμετρο κλίμακας  $\tilde{\sigma}^*$  μπορεί να επιλεγεί το κατάλληλο κατώφλι που ικανοποιεί τα απαιτούμενα ώστε  $F_u \approx GPD$ .

Κάνοντας χρήση του κώδικα στην R

```
> gpd.fitrange(X, 1, 10, nint=20)
```



Όπως είναι φανερό από το γράφημα που εμφανίζει την παράμετρο  $\xi$  και την τροποποιημένη παράμετρο  $\tilde{\sigma}^*$  το κατώφλι  $u$  αρχίζει να σταθεροποιείται στην θέση  $u = 8$ . Συνεπώς το μικρότερο κατώφλι που μπορεί να ορισθεί ώστε τα δεδομένα να επιλεγούν με τέτοιο τρόπο ώστε να προσαρμόζονται κατάλληλα στην κατανομή GDP φαίνεται να είναι  $u = 8$ .

- **3<sup>η</sup> μέθοδος επιλογής (L- Method plot)**

Για τον υπολογισμό του κατάλληλου κατωφλιού  $u$  χρήσιμες εμφανίζονται οι L-ροπές (L-moments). Οι L-ροπές είναι μία ακολουθία γραμμικών συνδυασμών, ανάλογες των τυποποιημένων στιγμών, οι οποίες χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό ποσοτήτων ανάλογων με την μέση τιμή, τυπική απόκλιση, λοξότητα και κύρτωση οι οποίες ονομάζονται L-μέση τιμή (L-mean), L-κλίμακα (L-scale), L-λοξότητα (L-skewness) and L-κύρτωση (L-kurtosis) αντίστοιχα.

Ορίζουμε ότι,

$$b_0 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j$$

$$b_r = \frac{1}{n} \sum_{j=r+1}^n \left( \frac{(j-1)(j-2) \dots (j-r)}{(n-1)(n-2) \dots (n-r)} \right) X_j, \quad r = 1, 2, \dots$$

L-kurtosis:  $\tau_3 = 6b_2 - 6b_1 + b_0$ .

L-skewness:  $\tau_4 = 20b_3 - 30b_2 + 12b_1 - b_0$ .

Για την GPD, τα  $\ell_3$  και  $\ell_4$  συνδέονται από την σχέση,

$$\tau_4 = \tau_3 \frac{1+5\tau_3}{(5+\tau_3)}.$$

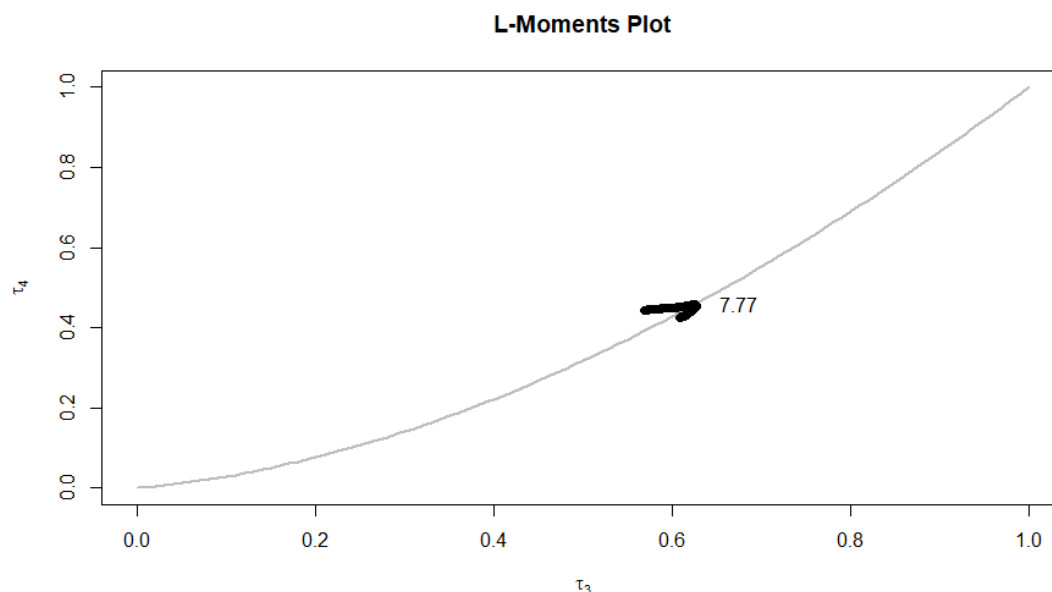
Το γράφημα L-ροπών (L-moment plot) προκύπτει από τα σημεία που ορίζονται ως

$$\{(\tau_{3n_u}, \tau_{4n_u}) : u \leq x_{(n_u)}\},$$

όπου  $\tau_{3n_u}, \tau_{4n_u}$  είναι οι εκτιμήσεις των συντελεστών L-κύρτωσης και L-λοξότητας αντίστοιχα, οι οποίες βασίζονται στις υπερβάσεις οι οποίες ξεπερνούν το κατώφλι  $u$ . Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο το  $u$  είναι αποδεικτό αν το γράφημα των παραπάνω σημείων «συμφωνεί» με την καμπύλη που ορίζεται από την παραπάνω σχέση του  $\tau_4$  με το  $\tau_3$ .

Κάνοντας εφαρμογή του κάτωθι κώδικα στην R, αφού πρώτα έχει φορτωθεί το πακέτο “POT”, λαμβάνουμε το αντίστοιχο γράφημα. Το αποτέλεσμα για την εκτίμηση του κατωφλιού  $u$  μέσω της μεθόδου των εκτιμήσεων των L-ροπών, προκύπτει από την τιμή που εμφανίζεται εκεί όπου τα σημεία τέμνουν την καμπύλη.

```
> lmomplot(X, u.range = c(0.9, quantile(X, probs = 0.9)),
identify = TRUE)
```



Για περισσότερες πληροφορίες για την μέθοδο L-ροπών βλέπε Hosking, and Wallis, (1997).

### 4.2.3 Εκτίμηση των Παραμέτρων της GPD

Θεωρούμε τις τ.μ.  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_u}$ , οι οποίες εκφράζουν τις υπερβάσεις των ζημιών  $X_i$  πάνω από ένα κατώφλι, έστω  $u$ .

$$\{Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_u}\} =_d \{X_i - u | X_i > u\},$$

όπως είναι γνωστό οι υπερβάσεις  $Y_i$  ακολουθούν προσεγγιστικά την Γενικευμένη Κατανομή Pareto με παραμέτρους  $\xi, \tilde{\sigma}$ , οι οποίες θα εκτιμηθούν με την μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας. (π.χ. βλ. Giles., Feng and Godwin, (2011))

Η συνάρτηση πυκνότητας της GPD είναι,

$$h(y; \tilde{\sigma}, \xi) = [H(y; \tilde{\sigma}, \xi)]' = \left[ 1 - \left( 1 + \frac{\xi y}{\tilde{\sigma}} \right)^{-\frac{1}{\xi}} \right]' = \frac{1}{\tilde{\sigma}} \left( 1 + \frac{\xi y}{\tilde{\sigma}} \right)^{-\frac{1}{\xi}-1} \cdot I(y; \tilde{\sigma}, \xi), y > 0$$

Η δείκτρια συνάρτηση

$$I(y; \tilde{\sigma}, \xi) = \begin{cases} 1, & 1 + \frac{\xi y}{\tilde{\sigma}} > 0 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας (log-likelihood) για  $\xi \neq 0$  είναι

$$\begin{aligned}
L(\tilde{\sigma}, \xi) &= \prod_{i=1}^{n_u} (H(Y_i; \tilde{\sigma}, \xi))' = \prod_{i=1}^{n_u} h(Y_i; \tilde{\sigma}, \xi) = \prod_{i=1}^{n_u} \frac{1}{\tilde{\sigma}} \left(1 + \frac{\xi y_i}{\tilde{\sigma}}\right)^{-\frac{1}{\xi}-1} \cdot I(y_i; \tilde{\sigma}, \xi) \\
&= \frac{1}{\tilde{\sigma}^{n_u}} \left[ \prod_{i=1}^{n_u} \left(1 + \frac{\xi y_i}{\tilde{\sigma}}\right)^{-\frac{1}{\xi}-1} \right] \left[ \prod_{i=1}^{n_u} I(y_i; \tilde{\sigma}, \xi) \right]
\end{aligned}$$

Η λογαριθμική συνάρτηση πιθανοφάνειας θα είναι

$$\begin{aligned}
l(\tilde{\sigma}, \xi) &= \ln L(\tilde{\sigma}, \xi) = \ln \prod_{i=1}^{n_u} (H(Y_i; \tilde{\sigma}, \xi))' \\
&= \ln \frac{1}{\tilde{\sigma}^{n_u}} \left[ \prod_{i=1}^{n_u} \left(1 + \frac{\xi y_i}{\tilde{\sigma}}\right)^{-\frac{1}{\xi}-1} \right] \left[ \prod_{i=1}^{n_u} I(y_i; \tilde{\sigma}, \xi) \right] \\
&= \ln \tilde{\sigma}^{-n_u} + \sum_{i=1}^{n_u} \ln \left(1 + \frac{\xi y_i}{\tilde{\sigma}}\right)^{-\frac{1}{\xi}-1} + \sum_{i=1}^{n_u} \ln I(y_i; \tilde{\sigma}, \xi) \\
&= -n_u \ln \tilde{\sigma} - \left(\frac{1}{\xi} + 1\right) \sum_{i=1}^{n_u} \ln \left(1 + \frac{\xi y_i}{\tilde{\sigma}}\right) + \sum_{i=1}^{n_u} \ln I(y_i; \tilde{\sigma}, \xi)
\end{aligned}$$

όπου,

$$\sum_{i=1}^{n_u} \ln I(Y_i; \tilde{\sigma}, \xi) = \begin{cases} 0, & 1 + \frac{\xi y}{\tilde{\sigma}} > 0 \\ -\infty, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Στην περίπτωση που  $\xi = 0$ , η λογαριθμική συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι

$$\begin{aligned}
l(\tilde{\sigma}, 0) &= \ln L(\tilde{\sigma}, 0) = \ln \prod_{i=1}^{n_u} h(Y_i; \tilde{\sigma}, 0) = \ln \prod_{i=1}^{n_u} \frac{1}{\tilde{\sigma}} e^{-\frac{y_i}{\tilde{\sigma}}} \\
&= \ln \left( \frac{1}{\tilde{\sigma}^{n_u}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n_u} y_i}{\tilde{\sigma}}} \right) = \ln \tilde{\sigma}^{-n_u} + \ln e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n_u} y_i}{\tilde{\sigma}}} \\
&= -n_u \ln \tilde{\sigma} - \frac{\sum_{i=1}^{n_u} Y_i}{\tilde{\sigma}}
\end{aligned}$$

με

$$\frac{\partial l(\tilde{\sigma}, 0)}{\partial \tilde{\sigma}} = -\frac{n_u}{\tilde{\sigma}} + \frac{\sum_{i=1}^{n_u} Y_i}{\tilde{\sigma}^2}$$

Θέτοντας την πρώτη μερική παράγωγο ίση με μηδέν προκύπτει ότι η εκτιμήτρια μεγίστης πιθανοφάνειας  $\hat{\tilde{\sigma}}$  για την παράμετρο  $\tilde{\sigma}$  είναι

$$\frac{\partial l(\tilde{\sigma}, 0)}{\partial \tilde{\sigma}} = -\frac{n_u}{\tilde{\sigma}} + \frac{\sum_{i=1}^{n_u} Y_i}{\tilde{\sigma}^2} = 0 \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n_u} Y_i}{\tilde{\sigma}^2} = \frac{n_u}{\tilde{\sigma}} \Rightarrow \hat{\sigma} = \frac{\sum_{i=1}^{n_u} Y_i}{n_u} = \bar{Y}_{n_u}$$

καθώς  $\frac{\partial^2 l(\tilde{\sigma}, 0)}{\partial \tilde{\sigma}^2} < 0$ .

Στην γενικότερη μορφή όπου  $\xi \neq 0$ , δεν υπάρχει αναλυτική έκφραση για τους ε.μ.π. των παραμέτρων  $\tilde{\sigma}, \xi$  και οι τιμές που μεγιστοποιούν την  $l(\tilde{\sigma}, \xi)$  θα βρεθούν χρησιμοποιώντας ξανά αριθμητικές μεθόδους βελτιστοποίησης όπως μέθοδος Newton-Raphson. Σύμφωνα με την μέθοδο και των ιδιοτήτων των ε.μ.π., οι  $\hat{\sigma}, \hat{\xi}$  θα ακολουθούν μία πολυδιάστατη κανονική με μέση τιμή  $(\tilde{\sigma}, \xi)^T$  και πίνακα διασποράς, τον αντίστροφο του πίνακα πληροφορίας ο οποίος εκτιμάται από τον

$$\hat{I} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 l}{\partial \tilde{\sigma}^2}(\hat{\sigma}, \hat{\xi}) & \frac{\partial^2 l}{\partial \tilde{\sigma} \partial \xi}(\hat{\sigma}, \hat{\xi}) \\ \frac{\partial^2 l}{\partial \xi \partial \tilde{\sigma}}(\hat{\sigma}, \hat{\xi}) & \frac{\partial^2 l}{\partial \xi^2}(\hat{\sigma}, \hat{\xi}) \end{pmatrix}$$

Αν  $s_{i,i}$  είναι το  $i$ -διαγώνιο στοιχείο του  $\hat{I}^{-1}$  ισχύει ότι οι ε.μ.π. των παραμέτρων  $\tilde{\sigma}, \xi$

$$\hat{\sigma} \sim N(\tilde{\sigma}, s_{2,2}) \quad , \quad \hat{\xi} \sim N(\tilde{\xi}, s_{3,3}),$$

από όπου προκύπτουν τα προσεγγιστικά διαστήματα εμπιστοσύνης συντελεστή  $1 - \alpha$  για τις παραμέτρους  $\tilde{\sigma}, \xi$

$$(\hat{\sigma} \pm \sqrt{s_{2,2}} z_{\alpha/2}) \text{ και } (\hat{\xi} \pm \sqrt{s_{3,3}} z_{\alpha/2}) \text{ αντίστοιχα}$$

Για την εκτίμηση των παραμέτρων της POT θα χρησιμοποιήσουμε ως κατώφλι το μικρότερο δυνατό  $u = 8$ , ώστε τα δεδομένα να ακολουθούν την Γενικευμένη Κατανομή Pareto.

Οι εκτιμήτριες μέγιστης πιθανοφάνειας για τις παραμέτρους  $\tilde{\sigma}, \xi$  της GPD χρησιμοποιώντας ως κατώφλι  $u = 8$  και ουσιαστικά επιλέγοντας το 28,20833% των παρατηρήσεων είναι

$$\hat{\sigma} = 5.7873126, \quad \hat{\xi} = 0.5711007,$$

Με τυπικές αποκλίσεις 0.12617311, 0.03209705 αντίστοιχα.

Τα αντίστοιχα διαστήματα εμπιστοσύνης συντελεστή  $1 - \alpha = 95\%$

$$\text{Για την παράμετρο } \tilde{\sigma} \text{ [3.122660, 3.617259]}$$

$$\text{Για την παράμετρο } \xi \text{ [0.4987317, 0.6434697]}$$

Ο κώδικας R που χρησιμοποιήθηκε για τις εκτιμήσεις και τα παραπάνω είναι (πακέτο ismen)

```

> gpd.fitrange(X,1,7,nint=20)
> mrl.plot(X, conf = 0.99, nint = 300)
> u<-3
> pot<-gpd.fit(X,u,ncpy<-m)

```

```

$`threshold`
[1] 8
$`nexc`
[1] 1779
$conver
[1] 0
$`nllh`
[1] 5917.993
$mle
[1] 5.7873126 0.5711007
$rate
[1] 0.2470833
$se
[1] 0.24156565 0.03692296

```

Ο κώδικας R για τον υπολογισμό των διαστημάτων εμπιστοσύνης των παραμέτρων είναι:

```

> sigma2<-pot$mle[1];xi2<-pot$mle[2];
> sigma2.se<-pot$se[1];xi2.se<-pot$se[2];
> c(sigma2-sigma2.se*1.96,sigma2+sigma2.se*1.96)
[1] 5.313844 6.260781

> c(xi2-xi2.se*1.96,xi2+xi2.se*1.96)
[1] 0.4987317 0.6434697

```

#### 4.2.4 Εκτίμηση της στάθμης απόδοσης (return level) για m παρατηρήσεις.

Έχοντας διαλέξει τις ακραίες παρατηρήσεις μέσω της μεθόδου POT, αποφασίζοντας κατάλληλα το κατώφλι  $u$ , έγινε εκτίμηση των παραμέτρων της κατανομής GPD.

Για τον υπολογισμό αυτού του μέτρου κινδύνου και την εκτίμηση της στάθμης απόδοσης  $x_m$  θα στηριχθούμε στο γεγονός ότι  $\forall x > u$  ισχύει,

$$P(X > x | X > u) \approx H(x - u) = \left(1 + \xi \frac{x-u}{\bar{\sigma}}\right)^{-\frac{1}{\xi}},$$

επομένως,

$$P(X > x) \approx P(X > u) \left(1 + \xi \frac{x-u}{\bar{\sigma}}\right)^{-\frac{1}{\xi}}.$$

Αντικαθιστώντας όπου  $x \rightarrow x_m$  πάντοτε  $x_m > u$  και καθώς έχουμε ορίσει ότι

$$P(X > x_m) = \frac{1}{m} .$$

Για  $\xi \neq 0$  προκύπτει,

$$P(X > x_m) \approx P(X > u) \left(1 + \xi \frac{x_m - u}{\tilde{\sigma}}\right)^{-\frac{1}{\xi}},$$

από όπου έχουμε

$$\left(\frac{1}{m}\right)^{-\xi} \approx [P(X > u)]^{-\xi} \left(1 + \xi \frac{x_m - u}{\tilde{\sigma}}\right)$$

και άρα

$$[mP(X > u)]^\xi \approx \left(1 + \xi \frac{x_m - u}{\tilde{\sigma}}\right).$$

Λύνοντας ως προς  $x_m$  προκύπτει ότι

$$x_m \approx u + \frac{\tilde{\sigma}}{\xi} \left([mP(X > u)]^\xi - 1\right) \Rightarrow \hat{x}_m \approx u + \frac{\hat{\tilde{\sigma}}}{\xi} \left(\left[m \frac{n_u}{n}\right]^\xi - 1\right).$$

Αντίστοιχα για  $\xi = 0$

$$\hat{x}_m \approx u + \hat{\sigma} \ln \left(m \frac{n_u}{n}\right).$$

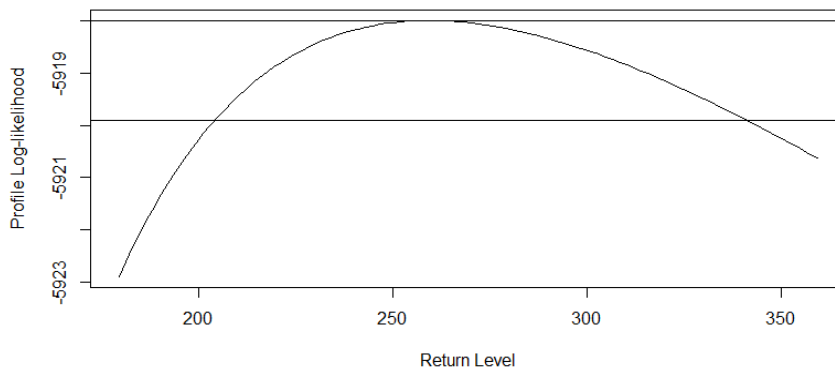
Όπως και στην μέθοδο Block maxima για τον υπολογισμό του  $x_m$  θα χρησιμοποιήσουμε την profile Deviance Function  $D_p(x_m)$  με μία νέα παραμετροποίηση.

Σύμφωνα με τα παραπάνω η εκτίμηση για την στάθμη απόδοσης είναι

$$\hat{x}_m = 259.4071 .$$

Ουσιαστικά με την στάθμη απόδοσης εκτιμούμε ότι μία παρατήρηση υπερβαίνει την τιμή 259.4071 με πιθανότητα  $p = 1/100$ . Μία διαφορετική ερμηνεία αναφέρει ότι μία παρατήρηση υπερβαίνει την τιμή 259.4071 κατά μέσο όρο κάθε 100 χρονικές περιόδους.

Η τιμή για την στάθμη απόδοσης  $x_m$  σύμφωνα με διάστημα εμπιστοσύνης συντελεστή  $1 - \alpha = 95\%$  όπως αυτό που προκύπτει από την profile Deviance Function, όπως αυτό εμφανίζεται και στο αντίστοιχο γράφημα που ακολουθεί κυμαίνεται μεταξύ 205 και 340.





Ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε στην R είναι

```
> sigma2<-pot$mle[1];xi2<-pot$mle[2];k<-pot$nexc
> p1<-p/m; xm<-u+sigma2/xi2*(((1/p1)*k/n)^xi2-1)
> print(xm)
[1] 259.4071
```

Και για το γράφημα η εντολή

```
> gpd.prof(pot, 1/p, xm-40, xm+50, npx<-m)
```

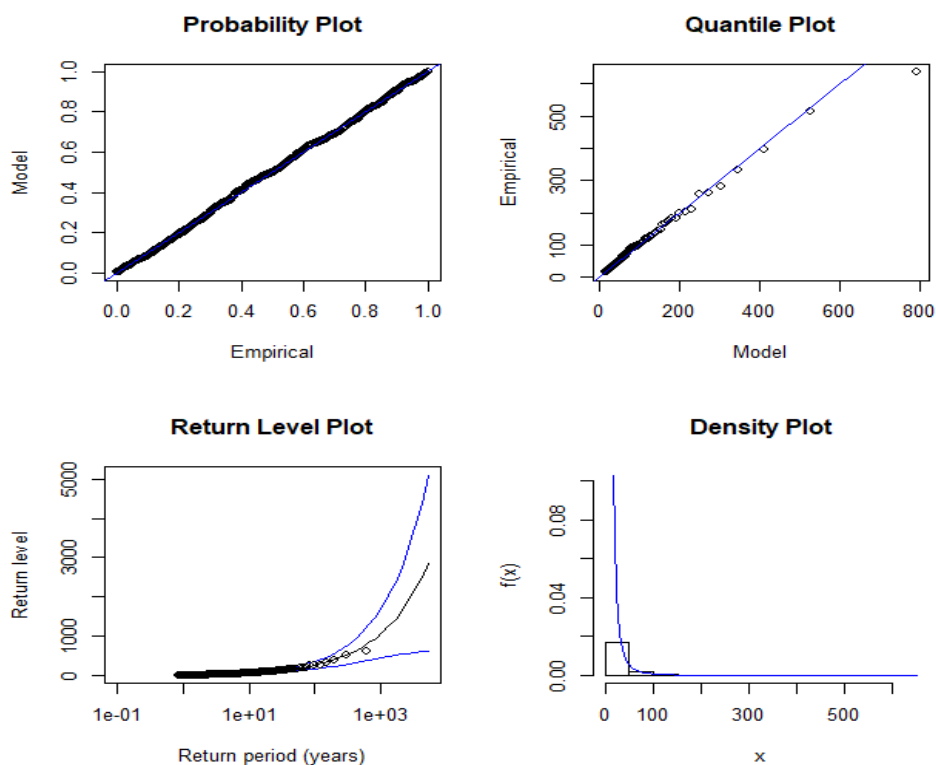
#### 4.2.5 Έλεγχος καλής προσαρμογής των δεδομένων στην GPD

Για τον έλεγχο καλή προσαρμογής της GPD στα δεδομένα, με την εντολή

```
> gpd.diag(pot)
```

λαμβάνουμε τα γραφήματα Probability plot και Quantile plot των δεδομένων με την θεωρητική κατανομή καθώς επίσης γράφημα στάθμης απόδοσης  $x_m$  για διάφορες τιμές του  $1/p$  και ιστόγραμμα των παρατηρήσεων πάνω από το κατώφλι  $u$  μαζί με την σ.π.π. της GPD.

$u = 8$



Παρατηρούμε ότι, τα δεδομένα έχουν καλή προσαρμογή στην GPD επιλέγοντας ως κατώφλι την τιμή  $u = 8$ . Δίνοντας έμφαση στο Probability Plot μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι τα δεδομένα είναι πάνω στην γραμμή, αλλά επειδή οι παρατηρήσεις είναι πάρα πολλές είναι δύσκολο να διακρίνουμε που ακριβώς “πέφτουν”. Σε κάθε περίπτωση είναι πάρα πολύ κοντά. Σύμφωνα με το Quantile Plot είναι ξεκάθαρο ότι η

$GPD(\hat{\sigma} = 5.7873126, \hat{\xi} = 0.5711007)$  έχει σχεδόν άριστη προσαρμογή. Η μοναδική παρατήρηση που αποκλίνει σημαντικά από την ευθεία, είναι η μέγιστη παρατήρηση από ολόκληρο το δείγμα.

Αντίστοιχα εφαρμόζοντας στα δεδομένα ως κατώφλι  $u = 15$ , σύμφωνα με το οποίο χρησιμοποιούνται 701 παρατηρήσεις ως ακραίες, το 9,736111% των συνολικών παρατηρήσεων, παίρνουμε διαφορετικές εκτιμήσεις για τις παραμέτρους του μοντέλου, μαζί με τις αντίστοιχες τυπικές αποκλίσεις. Όπως ήταν αναμενόμενο, ορίζοντας το κατώφλι υψηλότερα και πάλι οι υπερβάσεις θα ακολουθούν GPD καθώς το δείγμα αποτελείται από ακόμα πιο ακραίες παρατηρήσεις, ενώ το πλήθος που χρησιμοποιείται για τον έλεγχο είναι ακόμα μεγάλο.

Οι εκτιμήτριες μέγιστης πιθανοφάνειας

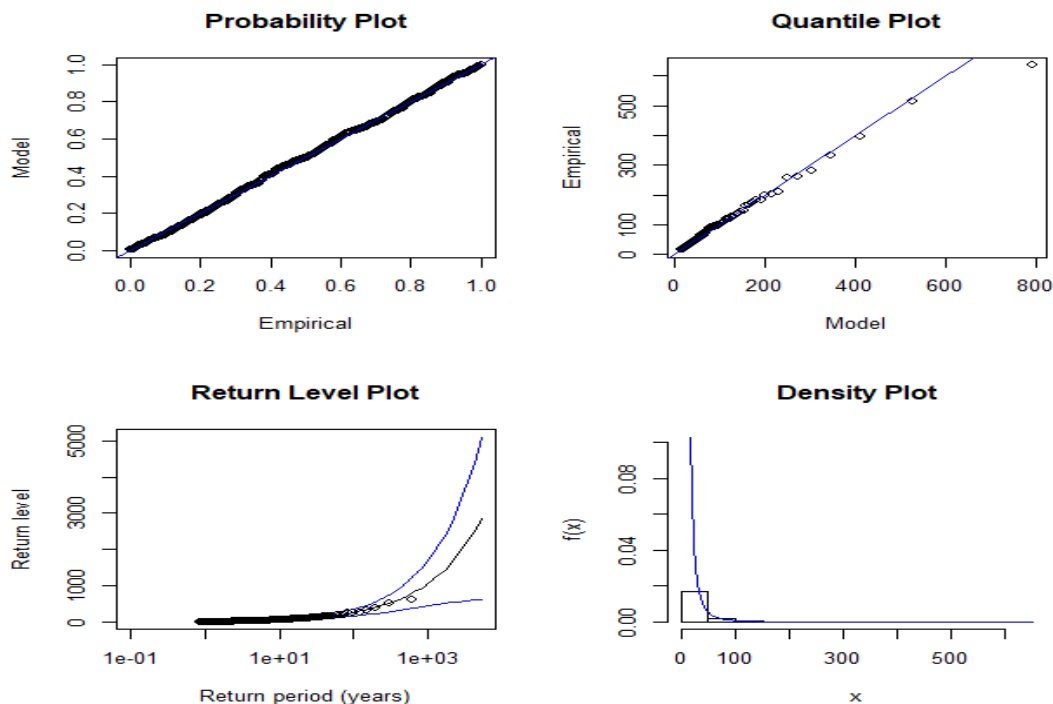
```

$`threshold`
[1] 15
$`nexc`
[1] 701
$conv
[1] 0
$`nllh`
[1] 2708.373
$mle
[1] 9.6936262 0.5920898
$rate
[1] 0.09736111
$se
[1] 0.66361212 0.06130581

```

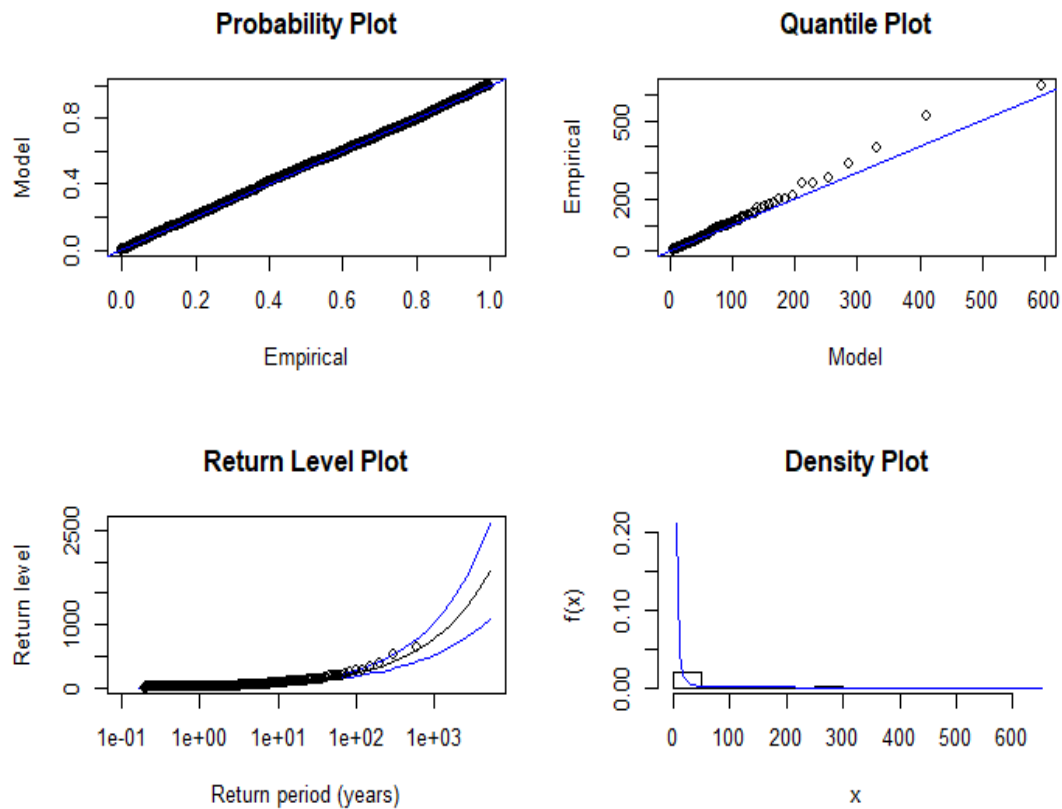
Και το αντίστοιχα γραφήματα για  $u = 15$ .

**$u = 15$**



Εν αντίθεση, παρατηρούμε ότι οριοθετώντας τις τιμές για το κατώφλι  $u$ , όλο και μικρότερες, η GPD δεν εφαρμόζεται κατάλληλα στα δεδομένα. Σύμφωνα και με τα κάτωθι γραφήματα, εμφανίζονται κατά σειρά τα διαγνωστικά γραφήματα καλής προσαρμογής, για τις τιμές  $u = 5$ ,  $u = 3$ ,  $u = 1$ .

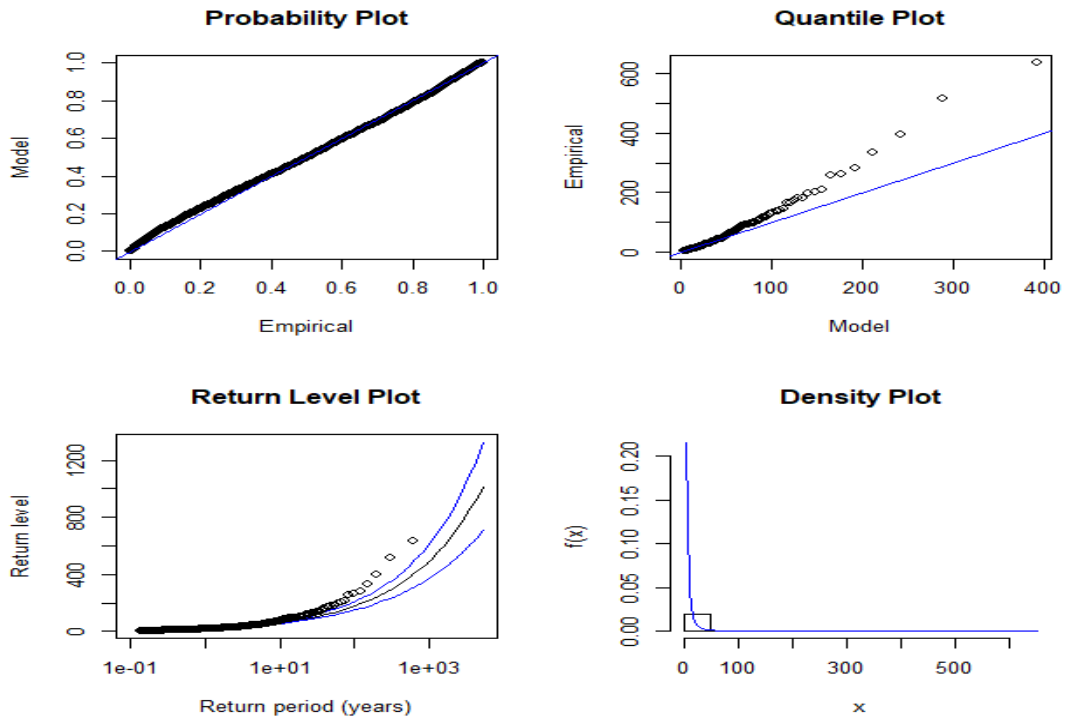
$u = 5$



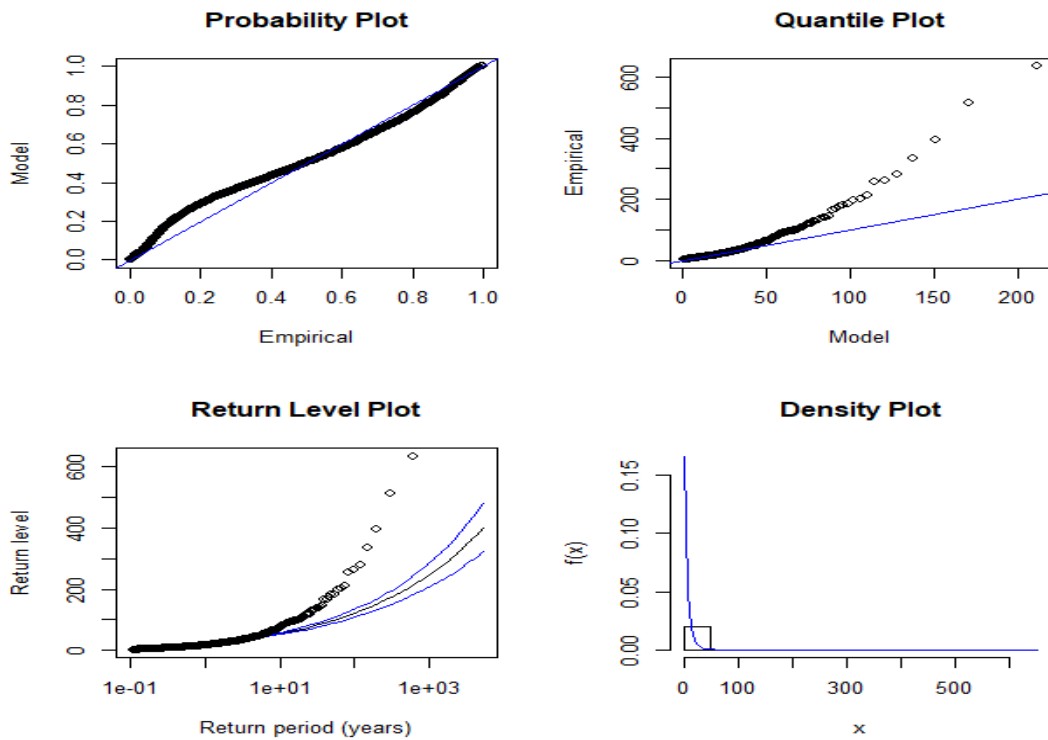
Επιλέγοντας ως κατώφλι,  $u = 5$  μπορούμε να διαπιστώσουμε ήδη από το Quantile Plot ότι τα πραγματικά δεδομένα του μοντέλου δεν ταυτίζονται από τα εμπειρικά. Μειώνοντας το κατώφλι  $u$ , εκτιμούμε ότι τα γραφήματα θα είναι περισσότερο κατατοπιστικά και η αναμενόμενη μη καλή προσαρμογή του μοντέλου θα είναι εμφανής.

Πράγματι, στα αποτελέσματα που ακολουθούν για  $u = 3$  και  $u = 1$ , όπου ουσιαστικά επιλέγονται όλες οι ζημιές που είναι μεγαλύτερες από  $u$ , επιλέγεται ένα μεγάλο ποσοστό των αρχικών συνολικών παρατηρήσεων, η GPD δεν έχει καθόλου καλή προσαρμογή στα δεδομένα.

$u = 3$



$u = 1$

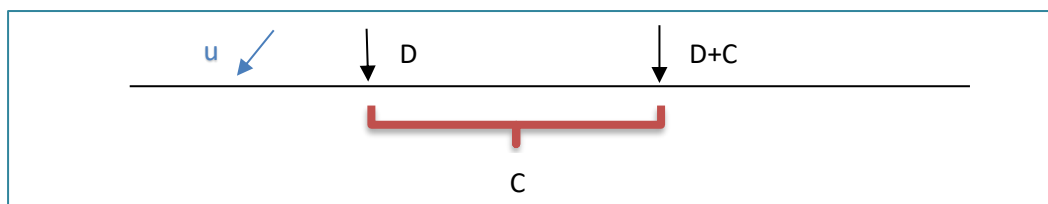


## 5. Εφαρμογή Μεθόδου ΡΟΤ στην αντασφάλιση

Για την ανάγκη αντιμετώπισης του κινδύνου, όπως αυτή προκύπτει από το δεύτερο κεφάλαιο, η ασφαλιστική εταιρία ( $X$ ) σκέφτεται να ενεργοποιήσει μία αντασφαλιστική σύμβαση, βασισόμενη στην θεωρία ακραίων τιμών και την μέθοδο ΡΟΤ, όπως αυτή παρουσιάζεται στο τρίτο και τέταρτο κεφάλαιο.

### 5.1 Μη-αναλογική αντασφαλιστική σύμβαση υπερβάλλουσας ζημιάς (excess of loss treaty)

Μία από τις εναλλακτικές που εξετάζεται από την ασφαλιστική εταιρία ( $X$ ), είναι μία μη αναλογική αντασφαλιστική σύμβαση υπερβάλλουσας ζημιάς (excess of loss treaty) με την αντασφαλίστρια εταιρία, έστω ( $Y$ ). Σύμφωνα με την εν λόγω σύμβαση, ορίζεται ως απαλλαγή καταβολής ασφαλίματος από την αντασφαλίστρια εταιρία  $D$  (deductible), καθώς επίσης και ανώτατο όριο ευθύνης της αντασφαλίστριας εταιρίας, πάνω από την απαλλαγή  $D$ , ίσο με  $C$  (upper limit cover). Οι υποθέσεις εμφανίζονται και στην κάτωθι αναπαράσταση.



Όπως είναι λογικό, οι ασφαλιζόμενοι έχουν εκχωρήσει τον κίνδυνο Πυρός-Σεισμού και συμπληρωματικών κινδύνων στην ασφαλιστική εταιρία ( $X$ ) (Direct Insurer). Κατά συνέπεια, θα πρέπει σε κάθε περίπτωση, ανεξαρτήτως του ύψους της ζημιάς, να καταβάλλεται ολόκληρη η αποζημίωση η οποία θα προκύψει από το χαρτοφυλάκιο κινδύνου, ανεξαρτήτως τι κομμάτι του κινδύνου έχει η αντασφαλίστρια εταιρία ( $Y$ ) (Reinsurer).

Πράγματι, ισχύει ότι:

- Όταν η ζημιά ( $L$ ) (Loss) είναι μικρότερη από την απαλλαγή,  $L < D$ , η ασφαλιστική εταιρία ( $X$ ) πληρώνει ολόκληρη την ζημιά και η αντασφαλίστρια εταιρία ( $Y$ ) μηδέν.
- Όταν η ζημιά ( $L$ ) είναι μεταξύ της απαλλαγής και το άθροισμα του ανώτατου ορίου ευθύνης της αντασφαλίστριας εταιρίας και της απαλλαγής,  $D < L < D + C$ , η ασφαλιστική εταιρία ( $X$ ) πληρώνει την απαλλαγή και η αντασφαλίστρια εταιρία ( $Y$ ) καταβάλλει  $L - D$ .
- Όταν η ζημιά ( $L$ ) είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα του ανώτατου ορίου ευθύνης της αντασφαλίστριας εταιρίας ( $Y$ ) και της απαλλαγής,  $L > D + C$ , η αντασφαλίστρια εταιρία ( $Y$ ) πληρώνει το ανώτατο όριο ευθύνης της  $C$ , ενώ η ασφαλιστική εταιρία ( $X$ ) το υπόλοιπο  $L - C$ .

Ακολουθεί μία απεικόνιση των όσων περιγράφονται,

$$L_Y \begin{cases} 0, L < D \\ L - D, D < L < C + D \\ D + C - D = C, L > C + D \end{cases} + L_X \begin{cases} L, L < D \\ D, D < L < C + D \\ L - C, L > C + D \end{cases} = L_T \begin{cases} L, L < D \\ L, D < L < C + D \\ L, L > C + D \end{cases}$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, παρατηρούμε ότι σε κάθε περίπτωση η αποζημίωση που καταβάλλεται στους ασφαλιζόμενους είναι  $(L)$ .

$$L = L_{Total} = L_{Y-Reinsurer} + L_{X-Direct} .$$

Σε αυτό το σημείο, μας ενδιαφέρει να δούμε την αντασφαλιστική σύμβαση από την πλευρά της αντασφαλιστικής εταιρίας  $(Y)$ . Θα επικεντρωθούμε στις απώλειες της αντασφαλιστικής εταιρίας  $(Y)$  με σκοπό να εκτιμηθεί η αναμενόμενη απώλεια καθώς επίσης να βρεθεί ένα δίκαιο ασφάλιστρο για την παροχή της συγκεκριμένης αντασφαλιστικής κάλυψης.

Οι απώλειες της αντασφαλιστικής εταιρίας  $(Y)$  μπορούν να τεθούν με την ακόλουθη έκφραση.

$$L_Y = L_{Reinsurer} = (L - D)_+ - [L - (C + D)]_+ .$$

Η μέση τιμή της απώλειας της αντασφαλιστικής εταιρίας  $(Y)$

$$E[L_Y] = 0 + \int_D^{D+C} (L - D) \cdot f(l) dl + C \cdot P(L > C + D) .$$

Σε αυτό το σημείο θα υπενθυμίσουμε ότι, σύμφωνα με την μέθοδο POT εφόσον επιλέξουμε ως ακραίες όλες τις παρατηρήσεις εκείνες οι οποίες ξεπερνούν ένα σωστά ορισμένο κατώφλι  $u$ , τότε θα ακολουθούν GPD. Αξίζει να σημειωθεί ότι η απαλλαγή της αντασφαλιστικής εταιρίας  $D$ , ορίζεται πάντα μεγαλύτερη από το κατώφλι  $u$ , δηλαδή  $D > u$ , διαφορετικά η ανάλυση μέσω της GPD δεν έχει βάση. Επομένως μπορούμε προσεγγιστικά να θεωρήσουμε ότι η υπέρβαση  $W = L - u$ , δεδομένου ότι  $L > u$ , θα ακολουθεί την GPD. Αξιοποιώντας όλα τα παραπάνω τελικά έχουμε ότι η μέση τιμή της απώλειας της αντασφαλιστικής εταιρίας  $(Y)$  δεδομένου ότι μία ζημιά θα ξεπεράσει το κατώφλι  $u$ :

$$\begin{aligned} E[L_Y | L > u] &= E(L_Y I(L \leq D) | L > u) + E(L_Y I(D < L \leq D + C) | L > u) \\ &\quad + E(L_Y I(D + C < L) | L > u) \\ &= 0 + E((L - D) I(D < L \leq D + C) | L > u) \\ &\quad + E(C \cdot I(D + C < L) | L > u) \\ &= 0 + E((W + u - D) I(D - u < W \leq D + C - u) | L > u) \\ &\quad + E(C \cdot I(D + C - u < W) | L > u) \\ &= 0 + \int_{D-u}^{D+C-u} (w + u - D) \cdot f_{W|L>u}(w) dw \\ &\quad + CP(W > C + D - u | L > u) \end{aligned}$$

και επειδή, όπως αναφέραμε παραπάνω, η τ.μ.  $W = L - u$ , δεδομένου ότι  $L > u$ , ακολουθεί την GPD, (Charpentier (2014)), κατά συνέπεια έχουμε,

$$E[L_Y | L > u] = \int_{D-u}^{D+C-u} (w + u - D) \cdot h_{\tilde{\sigma}, \tilde{\xi}}(w) dw + C \left( 1 - H_{\tilde{\sigma}, \tilde{\xi}}(C + D - u) \right),$$

όπου  $h_{\tilde{\sigma}, \tilde{\xi}}(w)$  και  $H_{\tilde{\sigma}, \tilde{\xi}}(w)$  η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και η συνάρτηση κατανομής αντίστοιχα, της Γενικευμένης Κατανομής Pareto με παραμέτρους  $\tilde{\sigma}, \tilde{\xi}$  οι οποίες μπορούν να εκτιμηθούν από τις ε.μ.π. θεωρώντας τελικά ότι

$$W = L - u | L > u \sim GPD(\hat{\tilde{\sigma}}, \hat{\tilde{\xi}}).$$

Επομένως, είναι εύκολο να εκτιμήσουμε το δίκαιο καθαρό ασφάλιστρο (Net Premium) έστω  $N$ , το οποίο θα πρέπει να καρπωθεί η αντασφαλιστρια εταιρία ( $Y$ ) για παροχή αντασφάλισης μίας περιόδου:

$$N = E(L_Y) = P(L > u) \cdot E[(L_Y | L > u)].$$

Η πιθανότητα  $P(L > u)$  εκτιμάται από το ποσοστό των παρατηρήσεων που βρέθηκαν πάνω από το κατώφλι  $u$ . Άρα,

$$\begin{aligned} \hat{N} &= \frac{n_u}{n} \left( \int_{D-u}^{D+C-u} (w + u - D) \cdot h_{\hat{\tilde{\sigma}}, \hat{\tilde{\xi}}}(w) dw + C \left( 1 - H_{\hat{\tilde{\sigma}}, \hat{\tilde{\xi}}}(C + D - u) \right) \right) \\ &= \frac{n_u}{n} \left( \int_{D-u}^{D+C-u} (w + u - D) \frac{\left( 1 + \hat{\tilde{\xi}} \frac{w}{\hat{\tilde{\sigma}}} \right)^{-\frac{1}{\hat{\tilde{\xi}}}-1}}{\hat{\tilde{\sigma}}} dw + C \left( 1 + \hat{\tilde{\xi}} \frac{C + D - u}{\hat{\tilde{\sigma}}} \right)^{-\frac{1}{\hat{\tilde{\xi}}}} \right). \end{aligned}$$

## 5.2 Εφαρμογή Μη-αναλογική αντασφαλιστική σύμβαση υπερβάλλουσας ζημιάς (excess of loss treaty)

Λαμβάνοντας υπόψη όλα τα παραπάνω, η ασφαλιστική εταιρία ( $X$ ), έχει την δυνατότητα να ενεργοποιήσει την αντασφαλιστική σύμβαση, σύμφωνα με τις ανάγκες της, ορίζοντας κατάλληλα την τιμές  $D, C$ . Έχοντας επιλέξει το όριο ίδιας κράτησης  $D$  της ασφαλιστικής εταιρίας ( $X$ ) και το ανώτατο όριο ευθύνης  $C$  της αντασφαλιστικής εταιρίας ( $Y$ ), κατά συνέπεια το μέρος του κινδύνου που έχει εκχωρήσει στην αντασφαλιστρια εταιρία ( $Y$ ), θα αναγκαστεί να καταβάλλει και το αντίστοιχο ασφάλιστρο.

Στον Πίνακα 5 που ακολουθεί, έχουν οριστεί οι τιμές της απαλλαγής, της ανώτατης κάλυψης της αντασφαλιστικής εταιρίας κατά συνέπεια και το άθροισμα αυτών, σύμφωνα με τα οποία έχουν υπολογιστεί η εκτιμώμενη απώλεια της αντασφαλιστικής εταιρίας ( $Y$ ) και η δίκαιη τιμή του καθαρού ασφάλιστρου.

Σύμβαση υπερβάλλουσας ζημιάς (excess of loss treaty) (τα ποσά σε 10.000 €)				
Deductible ( $D$ )	Upper limit Cover ( $C$ )	Upper limit ( $D + C$ )	Expected Loss $E[(L_Y L > u)]$	One Period Net Premium ( $\hat{N}$ )
10	20	30	6.114386	1.510763
10	40	50	7.842606	1.937777
20	40	60	4.047703	1.00012
20	80	100	5.12447	1.266171
50	50	100	1.563682	0.3863598
50	150	200	2.518278	0.6222246

Πίνακας 5. Εκτίμηση Ασφαλίστρου

Συνεπώς η αντασφαλιστική εταιρία για την περίπτωση όπου το όριο ίδιας κράτησης  $D = 10$  και  $C = 20$  έχει όριο ευθύνης μεταξύ

$$D = 10 \text{ και } D + C = 10 + 20 = 30 ,$$

με ανώτατο όριο κάλυψης

$$C = D + C - D = 20 .$$

Η εκτιμώμενη απώλεια που θα έχει δεδομένου ότι μία ζημιά θα υπερβεί το κατώφλι  $u = 8$

$$E[(L_Y|L >)] \approx 6.114386 .$$

Και το καθαρό ασφαλιστρο μίας περιόδου που ισχύει για τη διάθεση αυτού του αντασφαλιστικού προϊόντος εκτιμάται

$$\hat{N} = 1.510763 .$$

Ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε στην R για τον υπολογισμό των αποτελεσμάτων

```
> #one period premium for reinsurance with deductible =d
, cover =c, upper limit = d+c.
> d=10;c=20;up<-d+c;
> c1=d-u;c2=up-u;
> g=function(x) { (x-c1) * (1+x*xi2/sigma2) ^ (-1-1/xi2) /sigma2}
> ExpLy=(integrate(g,c1,c2)$value+(c2-c1) * (1+c2*xi2/sigma2) ^ (-
1/xi2))
> ExpLy
[1] 6.114386

> premium=ExpLy*pot$nexc/n
> premium
[1] 1.510763
```

Με αυτό τον τρόπο αντασφάλισης, η ασφαλιστική εταιρία ( $X$ ) καλύπτεται για ζημιές οι οποίες, ναι μεν είναι ακραίες, αλλά το υπερβάλλον ποσό, πέραν του ορίου  $C +$



$D$ , καλείται να το καταβάλει, δεδομένου ότι η αντασφαλιστική εταιρία ( $Y$ ), έχει ανώτατο όριο κάλυψης  $C$ . Παραδείγματος χάρη, στην περίπτωση όπου το όριο ίδιας κράτησης είναι  $D = 20$  και το ανώτατο όριο ευθύνης  $C = 40$ , μία ζημιά σφοδρότητας  $L = 200$ , γεννά απαίτηση αποζημίωσης από την ασφαλιστική εταιρία ( $X$ ) ίση με

$$L_{X-Direct} = D + L - C = 20 + 200 - 40 = 180 .$$

Για περεταίρω κάλυψη η ασφαλιστική εταιρία ( $X$ ) έχει την δυνατότητα είτε να υπογράψει σύμβαση αντασφάλισης δευτέρου επιπέδου με αντασφαλιστική εταιρία ( $Z$ ), όπως είχε αναφερθεί και στο δεύτερο Κεφάλαιο, είτε να θέσει το όριο κάλυψης  $C$ , της αντασφαλιστικής εταιρίας ( $Y$ ) πολύ υψηλά.

Για αυτό τον λόγο, ας υποθέσουμε ότι η ασφαλιστική εταιρία ( $X$ ) επιθυμεί να διατηρήσει μόνο το όριο ίδιας κράτησης  $D$ , εκχωρώντας το υπερβάλλον ποσό . Θα θέσουμε το ανώτατο όριο ευθύνης  $C$  της αντασφαλιστικής εταιρίας ( $Y$ ), πλέον του ορίου ίδιας κράτησης  $D$ , σε υπερβολικής σφοδρότητας ζημιάς, τέτοια ώστε,  $C \rightarrow \infty$ .

Ορίζοντας το όριο ίδιας κράτησης π.χ.  $C = 10,000$ , πρακτικά  $C \rightarrow \infty$ , εκτιμάται ότι το καθαρό ασφάλιστρο μίας περιόδου είναι ( $D = 100,200,300$ )

$$\hat{N}_{100} = 0.9556634, \hat{N}_{200} = 0.3336461 \text{ και } \hat{N}_{300} = 0.2420204, \text{ αντίστοιχα}$$

Εφαρμόζοντας αυτή την πρακτική αντασφάλισης, η ασφαλιστική δεν θα επηρεαστεί καθόλου από μία ζημιά  $L = 200$  όπως προηγουμένως καθώς η ευθύνη της ασφαλιστικής εταιρίας ( $X$ ) περιορίζεται στο όριο ίδιας κράτησης  $D$ .

## Συμπεράσματα

Ο λόγος ύπαρξης της ανασφάλισης είναι η αντιμετώπιση του ενδεχομένου εμφάνισης ακραίων ζημιών, το οικονομικό αποτέλεσμα των οποίων, πιθανώς να επιφέρει καταστροφικές συνέπειες για μία ασφαλιστική εταιρία.

Για την μελέτη αυτών, βασιστήκαμε στη θεωρία ακραίων τιμών (EVT) η οποία είναι η πλέον διαδεδομένη θεωρία για την μελέτη των ακραίων παρατηρήσεων. Στο πλαίσιο αυτό αναλύθηκαν οι μέθοδοι Block Maxima και POT, όπου ορίζοντας τον τρόπο δειγματοληψίας, θέτοντας προϋποθέσεις, υπολογίζοντας παραμέτρους και διάφορα μεγέθη, ερμηνεύτηκε η συμπεριφορά των ακραίων τιμών.

Συγκεκριμένα, κάνοντας χρήση της μεθόδου POT, καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι επιλέγοντας κατάλληλο κατώφλι  $u$ , οι παρατηρήσεις που ξεπερνούν αυτό το κατώφλι, ακολουθούν προσεγγιστικά την *GPD* με παραμέτρους οι οποίες εκτιμήθηκαν σύμφωνα με την μέθοδο μεγίστης πιθανοφάνειας.

Ένα από τα μέτρα αντιμετώπισης κινδύνων που μπορεί να χρησιμοποιήσει μία ασφαλιστική εταιρία είναι η ενεργοποίηση ενός ανασφαλιστικού προγράμματος. Αξιολογώντας τους κινδύνους που έχει αναλάβει μπορεί να εφαρμόσει ένα μοντέλο, βασισμένο στην μέθοδο POT, το οποίο θα αντανakλά στις ανάγκες της. Ανάλογα λοιπόν με την πολιτική αντιμετώπισης των κινδύνων που έχει επιλέξει μια ασφαλιστική εταιρία, έχει την δυνατότητα να επιλέξει από μία πληθώρα, αναλογικών και μη αναλογικών, ανασφαλιστικών συμβάσεων. Εφόσον αποφασίσει ποιο είναι το πρόγραμμα που της ταιριάζει, πρέπει πλέον να αποφασίσει σχετικά με το μέρος του κινδύνου που θα διαχειριστεί η ίδια και το μέρος του κινδύνου που θα εκχωρήσει στην ανασφαλιστική εταιρία, καταβάλλοντας το αντίστοιχο τίμημα, το ασφάλιστρο.

Στην παρούσα εργασία, χρησιμοποιώντας το υποθετικό σενάριο με τις ημερήσιες ζημιές που προέκυψαν από το χαρτοφυλάκιο πυρός της ασφαλιστικής εταιρίας ( $X$ ), κάνοντας την σχετική έρευνα, συμπεράναμε ότι με την μέθοδο POT η *GPD* έχει καλή προσαρμογή στα δεδομένα. Οι ανασφαλιστικές συμβάσεις που μελετήθηκαν και προτάθηκαν στην ασφαλιστική εταιρία είναι μία excess of loss με ανώτατο όριο ευθύνης από την ανασφαλιστική εταιρία, καθώς επίσης και μία excess of loss δίχως ανώτατο όριο ευθύνης. Η κάθε ασφαλιστική σύμβαση έχει τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της. Η πρώτη, με ανώτατο όριο ευθύνης της ανασφαλιστικής εταιρίας, είναι περισσότερο προσιτή λόγω κόστος ασφαλίστρου. Ενεργοποιώντας την δεύτερη, δίχως ανώτατο όριο ευθύνης της ανασφαλιστικής εταιρίας, η ασφαλιστική εταιρία περιορίζει την επίπτωση μίας ζημιάς έως το ποσό την απαλλαγής που ορίζει η ανασφαλιστική σύμβαση.

## Βιβλιογραφία

- Boutsikas, M., *Σημειώσεις διαλέξεων στη «Θεωρία ακραίων τιμών»*, 2008.
- Cass, R. M., Kensicki, R. P., Gary, S. P., Reinartz, C. R., *Reinsurance Practices (2nd ed.)*, Malvern, PA: Insurance Institute of America, 1997.
- Charpentier, A., *Computational Actuarial Science With R*. Boca Raton, FL, 2014.
- Coles, S., *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values*. Springer-Verlag, London, 2001.
- Fisher, R.A. and Tippett, L.H., *Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. In Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1928.
- Giles, D. E., Feng, H. and Godwin, R. T., *Bias-corrected maximum likelihood estimation of the parameters of the generalized Pareto distribution*. Econometrics Working Paper 1105, Department of Economics, University of Victoria, 2011.
- Gilli, M., Kellezi, E., *An Application of Extreme Value Theory for Measuring Financial Risk*, Computational Economics, Vol.27, N.1, 2006.
- Hosking, J. R. M. and Wallis, J. R., *Regional Frequency Analysis*. Cambridge University Press, 1997.
- Jenkinson, A. F., *The Frequency Distribution of the Annual Maximum (or Minimum) Values of Meteorological Elements*. Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society 8, 1955.
- Omev, E., Mallor, F., Nualart, E., *An introduction to statistical modelling of extreme values Application to calculate extreme wind speeds*, HUB RESEARCH PAPER 2009/36.
- Reiss, R. D., Thomas, M., *Statistical Analysis of Extreme Values, with applications to Insurance, Finance, Hydrology and other Fields*. Birkhäuser, 2007.
- Strain, Robert W., *Reinsurance*, New York: The College of Insurance, 1980.

## Διαδίκτυο

- [https://www.intelligentinsurer.com/media/project\\_ii/document/global-reinsurance-guide-2017.pdf](https://www.intelligentinsurer.com/media/project_ii/document/global-reinsurance-guide-2017.pdf)