ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΣΧΟΛΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

Ουδέτερες κινδύνου κατανομές πιθανότητας μεμειγμένων στοχαστικών διαδικασιών και εφαρμογές

Σπυρίδων Μ. Τζανίνης

Διδακτορική Διατριβή

που υποβλήθηκε στο
Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης
του Πανεπιστημίου Πειραιώς

Πειραιάς
Ιούλιος 2018

UNIVERSITY OF PIRAEUS

SCHOOL OF FINANCE
AND STATISTICS

DEPARTMENT OF STATISTICS
AND INSURANCE SCIENCE

Risk neutral probability distributions for mixed stochastic processes with applications

Spyridon M. Tzaninis

PhD Thesis

Submitted to the
Department of Statistics and Insurance Science
of the University of Piraeus

Piraeus
July 2018

Ήταν μακρύς ο δρόμος ως εδώ, δύσκολος δρόμος!
Τώρα είναι δικός σου αυτός ο δρόμος.
Τον κρατάς όπως κρατάς το χέρι του φίλου σου
και μετράς το σφυγμό του πάνω σε τούτο το σημάδι
που άφησαν οι χειροπέδες!
Κανονικός σφυγμός, σίγουρο χέρι.
Κανονικός σφυγμός, σίγουρος δρόμος!

Γιάννης Ρίτσος,
Το Καπνισμένο Τσουκάλι

Στον Δάσκαλό μου,

Στους Γονείς μου,

Στη Μαρία μου.

Ευχαριστίες

Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα αυτής της διδακτορικής διατριβής, Καθηγητή Νικόλαο Μαχαιρά, ο οποίος με στήριξε ηθικά και μαθηματικά, ακόμα και όταν όλα γύρω φαίνονταν σκοτεινά. Τόν ευχαριστώ ακόμα γιατί μου έδωσε την δυνατότητα να ασχοληθώ με ένα πολύ ενδιαφέρον και απαιτητικό θέμα. Τού είμαι επίσης ευγνώμων επειδή μου άνοιξε νέους ορίζοντες και με έμαθε να σκέφτομαι ορθολογικά.

Επιπλέον θα ήθελα να ευχαριστήσω τα άλλα δύο μέλη της τριμελούς επιτροπής μου, τον Αναπληρωτή Καθηγητή Κωνσταντίνο Πολίτη και τον Επίκουρο Καθηγητή Γεώργιο Ψαρράκο, καθώς και το πρώην μέλος αυτής, Επίκουρο Καθηγητή Δημήτριο Στέγγο. Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τον Καθηγητή Μάρκο Κούτρα, τον Καθηγητή Αριστείδη Σαπουνάκη, τον Αναπληρωτή Καθηγητή Κωνσταντίνο Γρυλλάκη και τον Επίκουρο Καθηγητή Νικόλαο Εγγλέζο, που μου έκαναν την τιμή να είναι στην επταμελή εξεταστική επιτροπή μου.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω από καρδιάς όλους όσους στάθηκαν δίπλα μου όλα αυτά τα χρόνια, στα καλά και στα άσχημα.

Περίληψη

Σε αυτή την διδακτορική διατριβή αποδεικνύεται αρχικά, κάτω από μία ασθενή υπόθεση, ότι μέσα στην κλάση των μεικτών ανανεωτικών διαδικασιών το βασικό πρόβλημα πότε κάθε διαδικασία Markov είναι μία μεικτή διαδικασία Poisson με παράμετρο μείξης μία τυχαία μεταβλητή έχει μία θετική λύση. Αυτό συνεπάγεται την ισοδυναμία των διαδικασιών Markov, των μεικτών διαδικασιών Poisson και των διαδικασιών που ικανοποιούν την πολυωνυμική ιδιότητα μέσα στην κλάση των μεικτών ανανεωτικών διαδικασιών. Μία δεύτερη συνέπεια του παραπάνω αποτελέσματος είναι η ισοδυναμία, κάτω από μία ασθενή συνθήκη, όλων των γνωστών σε εμάς ορισμών των μεικτών διαδικασιών Poisson.

Στη συνέχεια, γενικεύοντας ένα παλαιότερο αποτέλεσμα των Delbaen & Haezendonck [4] παρουσιάζουμε, για δοσμένη σύνθετη ανανεωτική διαδικασία S κάτω από ένα μέτρο πιθανότητας P, ένα χαρακτηρισμό όλων των μέτρων πιθανότητας Q επάνω στο πεδίο ορισμού του P, ώστε τα P και Q να είναι προοδευτικά ισοδύναμα και η S να παραμένει μία σύνθετη ανανεωτική διαδικασία κάτω από το Q. Ως συνέπεια αποδεικνύεται ότι κάθε σύνθετη ανανεωτική διαδικασία μπορεί να μετατραπεί σε μία σύνθετη διαδικασία Poisson μέσω μίας αλλαγής μέτρων, και παρουσιάζονται κάποιες εφαρμογές στις αρχές υπολογισμού ασφαλίστρου.

Τα παραπάνω αποτελέσματα γενικεύονται σε σύνθετες μεικτές ανανεωτικές διαδικασίες, που παρουσιάζουν μεγαλύτερο ενδιαφέρον, αφού αυτές αποτελούν τα υποδείγματα για την μελέτη ανομοιογενών χαρτοφυλακίων ασφαλιστικών εταιρειών. Το τελευταίο αποτέλεσμα έχει εφαρμογές στην τιμολόγηση ασφαλιστικών κινδύνων και γενικεύει το κύριο αποτέλεσμα της διδακτορικής διατριβής του Λυμπερόπουλου [1], Θεώρημα 7.2.9.

Abstract

In this PhD thesis we prove first, under a mild assumption, that within the class of mixed renewal processes the basic question when a Markov process is a mixed Poisson one with mixing parameter a random variable is answered to the positive. The latter implies the equivalence of the Markov processes, the mixed Poisson processes and the processes that satisfy the multinomial property, within the class of mixed renewal processes. A second consequence of the latter result is the equivalence, under a mild assumption, of all known to us definitions of the mixed Poisson processes.

Generalizing an earlier result of Delbaen & Haezendonck [4] we present, for a given compound renewal process S under a probability measure P, a characterization of all probability measures Q on the domain of P, such that P and Q are progressively equivalent and S remains a compound renewal process under Q. As a consequence, it is proven that every compound renewal process can be converted into a compound Poisson one under a change of measures, and some applications to premium calculation principles are presented.

The latter result is then generalized for the compound mixed renewal processes, which are of greater interest, since they are a proper model for studying inhomogeneous portfolios of insurance companies. This result has applications in pricing actuarial risks and generalizes the main result of Lyberopoulos PhD Thesis [1], Theorem 7.2.9.

Περιεχόμενα

Κατάλογος Συντομογραφιών

τ.μ. : Τυχαία μεταβλητή

τ.δ. : Τυχαίο διάνυσμα

σ.κ. : Συνάρτηση κατανομής πιθανότητας

σ.(π).π. : Συνάρτηση (πυκνότητας) πιθανότητας

σ.δ. : σ.δ.

μ.χ. : Μετρήσιμος χώρος

χ.π. : Χώρος Πιθανότητας

σ.β. : Σχεδόν βέβαια

σ.ο. : Σχεδόν όλα

φ.δ.π. : Φυσιολογική δεσμευμένη πιθανότητα

i.i.d. : Ισόνομες και ανεξάρτητες

βλ. : Βλέπε

συγκ. : Σύγκρινε

συμβ. : Συμβολικά

PP : Διαδικασία Poisson

CPP : Σύνθετη διαδικασία Poisson

MPP : Μεικτή διαδικασία Poisson

CMPP : Σύνθετη μεικτή διαδικασία Poisson

RP : Ανανεωτική διαδικασία

CRP : Σύνθετη ανανεωτική διαδικασία

MRP : Μεικτή ανανεωτική διαδικασία

CMRP : Σύνθετη μεικτή ανανεωτική διαδικασία

Εισαγωγή

Ένα βασικό αποτέλεσμα στα χρηματοοικονομικά μαθηματικά, που καλείται και *θεμελιώδες θεώρημα αποτίμησης περιουσιακών στοιχείων* (fundamental theorem of asset pricing) (FTAP για συντομία), είναι ότι για κάθε στοχαστική διαδικασία $U := \{U_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ η ύπαρξη ενός ουδέτερου κινδύνου μέτρου πιθανότητας (βλ. Ενότητα 4.3 για τον ορισμό) είναι *ουσιωδώς* ισοδύναμη με την έλλειψη ευκαιριών κερδοσκοπίας (arbitrage). Ξεκινώντας από την υπόθεση ότι η U δεν επιτρέπει ευκαιρίες κερδοσκοπίας, το θεώρημα μας επιτρέπει να αλλάξουμε το αρχικό μας μέτρο πιθανότητας P του υποκείμενου χώρου πιθανότητας (Ω, Σ, P) με ένα ισοδύναμο μέτρο Q έτσι ώστε η U να μετατρέπεται σε ένα martingale ως προς το Q.

Στα πλαίσια της κλασσικής Θεωρίας Κινδύνου το μοντέλο μίας σύνθετης διαδικασίας Poisson χρησιμοποιείται για να εκφράσει τον συνολικό κίνδυνο που αναλαμβάνει μία ασφαλιστική εταιρεία για μία χρονική περίοδο $\mathbb{T} := [0,T]$, $T > 0$. Δεδομένου ότι οι τεχνικές "αλλαγής πιθανοτήτων" ήταν γνωστές στους αναλογιστές από αρκετά παλιά (βλ. [5] σελ. 150), είναι αξιοπερίεργο ότι στο κομμάτι της Θεωρίας Κινδύνου, τεχνικές αλλαγής μέτρου με σκοπό την τιμολόγηση ασφαλιστικών κινδύνων δεν είχαν αναπτυχθεί μέχρι τα τέλη της δεκαετίας του 1980, όταν ο Sondermann [24] (1991), αλλά κυρίως οι Delbaen & Haezendonck [4] (1989) έθεσαν τις βάσεις για την χρηματοοικονομική αποτίμηση ασφαλιστικών κινδύνων.

Οι τελευταίοι συγγραφείς ξεκινούν από μία σύνθετη διαδικασία Poisson $S := \{S_t\}_{t\in[0,T]}$, η οποία αντιπροσωπεύει το συνολικό μέγεθος ζημιών ενός χαρτοφυλακίου ασφαλιστηρίων συμβολαίων που έχουν πληρωθεί μέχρι το χρόνο t, και υποθέτουν ότι σε κάθε χρονική στιγμή t η ασφαλιστική εταιρεία έχει τη δυνατότητα να πουλήσει τον υπολειπόμενο συνολικό κίνδυνο $S_T - S_t$ του χαρτοφυλακίου της για τη χρονική περίοδο $(t,T]$ για κάποιο ασφάλιστρο p_t. Τότε η διαδικασία U, δηλ. η αξία του χαρτοφυλακίου τη χρονική στιγμή $t \in [0,T]$, έχει την μορφή $U_t := p_t + S_t$. Οι Delbaen & Haezendonck επιχειρηματολογούν ότι η ρευστότητα της αγοράς συνεπάγεται την απουσία ευκαιριών κερδοσκοπίας. Ως συνέπεια του FTAP (βλ. Harrison & Kreps [12] (1979)), πρέπει να υπάρχει ένα *ουδέτερο κινδύνου μέτρο πιθανότητας* Q ώστε η U να είναι ένα martingale ως προς το Q. Επιπλέον, τεκμηριώνουν ότι τα ασφάλιστρα p_t $(0 \leqslant t \leqslant T)$ πρέπει να βρίσκονται σε μία ένα προς ένα αντιστοιχία με τα μέτρα ουδέτερου κινδύνου επάνω στην ελάχιστη σ-άλγεβρα που παράγεται από την S, καθώς και ότι πρέπει να είναι γραμμικές συναρτήσεις του χρόνου t, δηλαδή $p_t = p \cdot (T - t)$, όπου p είναι η πυκνότητα ασφαλίστρου. Ο παραπάνω συλλογισμός οδήγησε τους Delbaen & Haezendonck στο πρόβλημα του χαρακτηρισμού όλων των μέτρων πιθανότητας Q επάνω στη Σ, ώστε τα Q και P να είναι ισοδύναμα και η S να παραμένει μία σύνθετη διαδικασία Poisson ως προς το Q, το οποίο και έλυσαν (βλ. [4], Proposition 2.2).

Όμως, το μοντέλο της σύνθετης διαδικασίας Poisson χρησιμοποιείται περισσότερο για λόγους απλότητας, καθώς κυρίως το γεγονός της ύπαρξης εκθετικά κατανεμημένων ενδιάμεσων χρόνων καθιστά το μοντέλο θελκτικό από άποψη "υπολογιστικού" κόστους και πολυπλοκότητας. Δύο από τα σημαντικότερα προβλήματα ενός τέτοιου μοντέλου είναι ότι στην πράξη τα χαρτοφυλάκια είναι ανομοιογενή και η μεταβλητότητά τους, που εκφράζεται από τον λόγο της διακύμανσης προς τη μέση τιμή του πλήθους των κινδύνων, είναι συνήθως μεγαλύτερη της μονάδας. Είναι επομένως φυσιολογικό να αναζητηθούν μοντέλα που εκφράζουν με μεγαλύτερη ακρίβεια τον πραγματικό κόσμο.

Ένα τέτοιο μοντέλο είναι το ανανεωτικό μοντέλο (γνωστό και ως μοντέλο Sparre Andersen) στο οποίο οι ενδιάμεσοι χρόνοι παραμένουν ανεξάρτητοι και ισόνομοι, αλλά όχι κατ' ανάγκη εκθετικά κατανεμημένοι.

Όσον αφορά το πρόβλημα ομοιογένειας του χαρτοφυλακίου, αυτό λύνεται αν ερμηνεύσουμε το χαρτοφυλάκιο μας ως μία μείξη από μικρότερα ομοιογενή χαρτοφυλάκια. Τότε η απαριθμήτρια διαδικασία που περιγράφει το ανομοιογενές χαρτοφυλάκιο ορίζεται ως μία μείξη των απαριθμητριών διαδικασιών που περιγράφουν τα ομοιογενή χαρτοφυλάκια, ώστε η κατανομή μείξης να αναπαριστά τη δομή του ανομοιογενούς χαρτοφυλακίου.

Έτσι προκύπτει το παρακάτω πρόβλημα:

(Π) *Για δοσμένη σύνθετη μεικτή ανανεωτική διαδικασία S ως προς ένα μέτρο πιθανότητας P, να χαρακτηριστούν όλα τα μέτρα πιθανότητας Q, ώστε τα P και Q να είναι προοδευτικά ισοδύναμα και η S να παραμένει μία σύνθετη μεικτή ανανεωτική διαδικασία ως προς το Q,*

που είναι και το βασικό πρόβλημα της παρούσας διδακτορικής διατριβής.

Για την επίλυση του προβλήματος **(Π)** αρχικά αποδεικνύεται ένας τέτοιος χαρακτηρισμός για συνήθεις ανανεωτικές διαδικασίες (βλ. Θεώρημα 4.2.9) και στη συνέχεια το αποτέλεσμα αυτό επεκτείνεται για σύνθετες μεικτές ανανεωτικές διαδικασίες (βλ. Θεώρημα 5.3.5).

Επειδή στις μεθόδους αλλαγής μέτρου, όπως στο παραπάνω πρόβλημα, σημαντικό ρόλο παίζει η Μαρκοβιανή ιδιότητα (βλ. π.χ. [18], σελ. 88), στο Κεφάλαιο 2 αντιμετωπίζεται το πρόβλημα πότε μία μεικτή ανανεωτική διαδικασία έχει την ιδιότητα Markov. Πιο συγκεκριμένα στην Ενότητα 2.2, κάτω από ασθενείς συνθήκες μέσα στην κλάση των μεικτών ανανεωτικών διαδικασιών (συμβ. MRPs για συντομία), αποδεικνύεται η ισοδυναμία των διαδικασιών Markov με τις μεικτές διαδικασίες Poisson (συμβ. MPP για συντομία) και με τις διαδικασίες που ικανοποιούν την πολυωνυμική ιδιότητα (βλ. Πρόταση 2.2.7), αποτέλεσμα που γενικεύεται στο Θεώρημα 2.2.11 για την ευρύτερη κλάση των επεκταμένων MRPs (βλ. Ορισμό 2.2.2 (a)). Σε συγκεκριμένα παραδείγματα (βλ. Παραδείγματα 2.3.2) δείχνεται πως παράγεται η ιδιότητα Markov βάσει των αποτελεσμάτων του Κεφαλαίου 2.

Μία εφαρμογή των αποτελεσμάτων του Κεφαλαίου 2 αποτελούν εκείνα του Κεφαλαίου 3, όπου αποδεικνύεται ότι κάτω από ασθενείς συνθήκες που ισχύουν σε όλα τα προβλήματα των εφαρμοσμένων πιθανοτήτων, όλοι οι γνωστοί σε εμάς ορισμοί των MPPs είναι ισοδύναμοι (βλ. Θεωρήματα 3.1.6 και 3.1.7). Στο ίδιο κεφάλαιο δίνονται παραδείγματα *κανονικών* χώρων πιθανότητας όπου ισχύουν οι ισοδυναμίες των ορισμών (βλ. Παραδείγματα 3.2.1, 3.2.2 και 3.2.3), όπως και αντιπαραδείγματα μη τετριμμένων χώρων πιθανότητας όπου ένας χαρακτηρισμός μεικτών διαδικασιών Poisson μέσω φυσιολογικών δεσμευμένων πιθανοτήτων δεν ισχύει (βλ. Παραδείγματα 3.3.4 και 3.3.5).

Στο Κεφάλαιο 4 δίνεται μία θετική απάντηση στο πρόβλημα **(Π)** για σύνθετες ανανεωτικές διαδικασίες (βλ. Θεώρημα 4.2.9). Ως μία συνέπεια, αποδεικνύεται ότι οποιαδήποτε σύνθετη ανανεωτική διαδικασία μπορεί να αναχθεί σε μία σύνθετη διαδικασία Poisson μέσω της αλλαγής μέτρου (βλ. Πόρισμα 4.2.10) και δείχνεται πως αυτή η μέθοδος σχετίζεται με τις αρχές υπολογισμού ασφαλίστρου (βλ. Ενότητα 4.4).

Στο Κεφάλαιο 5, και πιο συγκεκριμένα στο Θεώρημα 5.3.5, παρουσιάζεται μία θετική απάντηση στο πρόβλημα **(Π)**. Ως συνέπεια της λύσης του **(Π)** προκύπτει ότι οποιαδήποτε σύνθετη μεικτή ανανεωτική διαδικασία μπορεί να αναχθεί σε μία σύνθετη μεικτή διαδικασία Poisson μέσω της αλλαγής μέτρου (βλ. Πόρισμα 5.3.8) και έτσι τα αποτελέσματα των Delbaen & Haezendonck [4], Proposition 2.2, και του Λυμπερόπουλου [1], Θεώρημα 7.2.9. Μία δεύτερη συνέπεια του Θεωρήματος 5.3.5 είναι η επιλογή μίας *κατάλληλης κανονικής διαδικασίας* που ικανοποιεί την ιδιότητα του *μη δωρεάν γεύματος με εξαφανιζόμενο κίνδυνο* (βλ. Πόρισμα 5.4.5), συνδέοντας έτσι το κύριο αποτέλεσμα της διδακτορικής διατριβής με μία από τις πιο βασικές έννοιες των Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών. Εφαρμογές στην τιμολόγηση ασφαλιστικών κινδύνων παρουσιάζονται στην Ενότητα 5.5.

Κεφάλαιο 1

Βασικές Έννοιες και Ορισμοί

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο παρουσιάζονται κάποιες εισαγωγικές έννοιες και κάποιοι βασικοί ορισμοί και συμβολισμοί που χρησιμοποιούνται για την παρούσα εργασία.

1.1 Βασικοί συμβολισμοί

Έστω Ω ένα σύνολο και $A \subseteq \Omega$. Με A^c θα συμβολίζεται το συμπλήρωμα $\Omega \backslash A$ του A, με χ_A θα συμβολίζεται η χαρακτηριστική (ή δείκτρια) συνάρτηση του A, ενώ με id_A θα συμβολίζεται η ταυτοτική απεικόνιση στο σύνολο A.

Για μία απεικόνιση $f : D \longmapsto E$ με R_f ή $f(D)$ θα συμβολίζεται το σύνολο $\{f(x) : x \in D\}$, και για κάθε σύνολο $A \subseteq D$ με $f \upharpoonright A$ θα συμβολίζεται ο περιορισμός της f στο A και με $f(A)$ το σύνολο $\{f(x) : x \in A\}$.

Με $\mathbb{N}$ συμβολίζεται το σύνολο όλων των φυσικών αριθμών και $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Με το σύμβολο $\mathbb{R}$ θα εννοούμε το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών, ενώ $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, και με $\mathbb{R}^d$ θα συμβολίζεται ο Ευκλείδειος χώρο διάστασης $d \in \mathbb{N}$.

1.2 Μετροθεωρητικές και Πιθανοθεωρητικές Έννοιες

1.2.1 Οικογένειες συνόλων

Μία οικογένεια $\mathcal{D}$ υποσυνόλων του Ω είναι μία κλάση Dynkin αν

(Dyn1) $\varnothing \in \mathcal{D}$.

(Dyn2) $\Omega \backslash A \in \mathcal{D}$ για κάθε $A \in \mathcal{D}$.

(Dyn3) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$ για κάθε ακολουθία $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ξένων ανά δύο στοιχείων της $\mathcal{D}$.

Έστω $\mathcal{G}$ μία οικογένεια υποσυνόλων του Ω. Η ελάχιστη σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω που περιέχει το $\mathcal{G}$ θα συμβολίζεται με $\sigma(\mathcal{G})$ και ονομάζεται η **σ-άλγεβρα η παραγόμενη από το** $\mathcal{G}$, ενώ το $\mathcal{G}$ ονομάζεται **γεννήτορας** της $\sigma(\mathcal{G})$. Μία σ-άλγεβρα Σ καλείται **αριθμήσιμα παραγόμενη** αν υπάρχει μία αριθμήσιμη οικογένεια $\mathcal{G}$ υποσυνόλων του Ω τέτοια ώστε $\Sigma = \sigma(\mathcal{G})$.

1.2.2 Χρήσιμες σ-άλγεβρες

Αν $\mathfrak{T}$ είναι μία τοπολογία στον Ω με $\mathfrak{B}(\Omega)$ θα συμβολίζεται η **Borel σ-άλγεβρα** στον Ω, δηλαδή η σ-άλγεβρα που παράγεται από την $\mathfrak{T}$. Με $\mathfrak{B} := \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, $\overline{\mathfrak{B}} := \mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}})$, $\mathfrak{B}_d := \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ και $\mathfrak{B}_{\mathbb{N}} := \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ θα συμβολίζονται οι Borel σ-άλγεβρες υποσυνόλων των συνόλων $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}$, $\mathbb{R}^d$ και $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ κάτω από τις κατάλληλες Ευκλείδειες τοπολογίες, αντίστοιχα. Ο περιορισμός του μέτρου του Lebesgue λ στη $\mathfrak{B}$ ή γενικότερα στη $\mathfrak{B}(A)$, όπου A είναι ένα οποιοδήποτε Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}$ θα συμβολίζεται και πάλι με λ.

Ένα ζευγάρι (Ω, Σ) όπου Ω είναι ένα οποιοδήποτε σύνολο και Σ είναι μία σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω ονομάζεται μετρήσιμος χώρος (μ.χ. για συντομία). Έστω (Ω, Σ) και (Υ, T) δύο μ.χ. και έστω $f : \Omega \longmapsto \Upsilon$ μία Σ-H-μετρήσιμη απεικόνιση από τον Ω στον Υ. Με $\sigma(f) := \{f^{-1}(B) : B \in H\}$ θα συμβολίζεται η σ-άλγεβρα που παράγεται από την f. Αν $\{f_i\}_{i\in I}$ είναι μία οικογένεια Σ-H-μετρήσιμων απεικονίσεων από τον Ω στον Υ, με $\sigma(\{f_i\}_{i\in I}) := \sigma\big(\bigcup_{i\in I} \sigma(f_i)\big)$ θα συμβολίζεται η σ-άλγεβρα που παράγεται από αυτή.

1.2.3 Χώροι πιθανότητας

Έστω (Ω, Σ, μ) ένας χώρος μέτρου. Το μ καλείται **μέτρο πιθανότητας** ή **πιθανότητα**, αν $\mu(\Omega) = 1$. Σε αυτή την περίπτωση η τριάδα (Ω, Σ, μ) ονομάζεται χώρος πιθανότητας (χ.π. για συντομία). Για τους ορισμούς των **πραγματικών τυχαίων μεταβλητών**, των **τυχαίων μεταβλητών** και των **τυχαίων διανυσμάτων** παραπέμπουμε στον Cohn [3], σελ. 308 και 318.

Ένα μέτρο πιθανότητας P ονομάζεται **τέλειο** αν για κάθε τυχαία μεταβλητή (τ.μ. για συντομία) X επάνω στον Ω υπάρχει ένα σύνολο Borel $B \subseteq R_X$ τέτοιο ώστε $P(X^{-1}(B)) = 1$.

Ένα σύνολο $N \in \Sigma$ με $P(N) = 0$ καλείται P-**μηδενικό σύνολο** και η οικογένεια όλων των P-μηδενικών συνόλων συμβολίζεται με Σ_0. Για κάθε δύο σύνολα $A, B \in \Sigma$ θα γράφουμε $A =_P B$ ή $A = B$ P-σ.β. αν $P(A \triangle B) = 0$. Για κάθε δύο Σ-H-μετρήσιμες απεικονίσεις $X, Y : \Omega \longmapsto \Upsilon$ θα γράφουμε $X = Y$ P-σ.β. αν $\{X \neq Y\} \in \Sigma_0$.

Με $\mathcal{L}^1(P)$ συμβολίζεται η οικογένεια όλων των πραγματικών συναρτήσεων στον Ω που είναι P-ολοκληρώσιμες. Συναρτήσεις που είναι P-σ.β. ίσες δεν ταυτίζονται. Αν X είναι μία Σ-H-μετρήσιμη απεικόνιση, με $\mathbb{E}_P[X|\mathcal{F}]$ συμβολίζεται η δεσμευμένη μέση τιμή του X ως προς το μέτρο P δοθείσης μίας σ-υποάλγεβρας $\mathcal{F}$ της Σ (βλ. [3], σελ 342 για τον ορισμό). Αν $X := \chi_E \in \mathcal{L}^1(P)$ με $E \in \Sigma$ θέτουμε $P(E \mid \mathcal{F}) := \mathbb{E}_P[\chi_E \mid \mathcal{F}]$.

1.2.4 Κατανομές πιθανότητας

Για μία οποιαδήποτε Σ-H-μετρήσιμη απεικόνιση $X : \Omega \longmapsto \Upsilon$ θέτουμε $H_X := \{B \subseteq \Upsilon : X^{-1}(B) \in \Sigma\}$. Τότε έχουμε ότι η H_X είναι μία σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Υ, ενώ προφανώς $H \subseteq H_X$. Με P_X συμβολίζουμε το **μέτρο εικόνα** $P \circ X^{-1}$ του P κάτω από την X, ή την **κατανομή** της X κάτω από το P. Ο περιορισμός του P_X στην H θα συμβολίζεται και πάλι με P_X. Μία κατανομή πιθανότητας ονομάζεται **εκφυλισμένη** (degenerate) αν υπάρχει $x \in \Upsilon$ τέτοιο ώστε $P_X(\{x\}) = 1$. Απο εδώ και κάτω θα γράφουμε $P_X = \mathbf{K}(\theta)$ εννοώντας ότι η X κατανέμεται σύμφωνα με την κατανομή πιθανότητας $\mathbf{K}(\theta)$, όπου $\theta \in \Psi$ και Ψ είναι ένας παραμετρικός χώρος.

1.2.5 Χώροι πιθανότητας γινόμενο

Με $(\Omega \times \Upsilon, \Sigma \otimes H, P \otimes Q)$ συμβολίζουμε τον χ.π. γινόμενο των χ.π. (Ω, Σ, P) και (Υ, H, Q), και με π_Ω και π_Υ συμβολίζουμε τις κανονικές προβολές από τον $\Omega \times \Upsilon$ στους Ω και Υ, αντίστοιχα.

Έστω I ένα μη κενό σύνολο δεικτών. Εάν $\{(\Omega_i, \Sigma_i, P_i)\}_{i\in I}$ είναι μία οικογένεια από χ.π., τότε για κάθε $\emptyset \neq J \subseteq I$ ο χ.π. γινόμενο $\bigotimes_{i\in J}(\Omega_i, \Sigma_i, P_i) := (\prod_{i\in J} \Omega_i, \otimes_{i\in J}\Sigma_i, \otimes_{i\in J}P_i)$ θα συμβολίζεται με $(\Omega_J, \Sigma_J, P_J)$ τον. Ιδιαιτέρως αν $(\Omega_i, \Sigma_i, P_i) = (\Omega, \Sigma, P)$ για κάθε $i \in I$ τότε με P_I θα συμβολίζεται το μέτρο πιθανότητας γινόμενο επάνω στο Ω^I και με Σ_I η σ-άλγεβρα γινόμενο πάνω στην οποία ορίζεται. Για οποιοδήποτε $\emptyset \neq J \subseteq I$ η κανονική προβολή του Ω^I επάνω στο Ω^J θα συμβολίζεται με π_J. Ιδιαιτέρως αν $J = \{j\}$ τότε για λόγους απλοποίησης γράφουμε $\pi_J = \pi_j$.

Κεφάλαιο 2

Χαρακτηρισμοί της Ιδιότητας Markov στην Κλάση των Μεικτών Ανανεωτικών Διαδικασιών

Για δοσμένο χ.π. $(\varOmega, \varSigma, P)$ σύμφωνα με τον Huang [11], Definition 3, μία μεικτή ανανεωτική στοχαστική διαδικασία (σ.δ. για συντομία) με παραμέτρους μείξης $\{P_{\widetilde{y}}\}_{\widetilde{y}\in\widetilde{\varUpsilon}}$ και ν (συμβ. P-HMRP$(\{P_{\widetilde{y}}\}_{\widetilde{y}\in\widetilde{\varUpsilon}}, \nu)$ για συντομία), όπου η $\{P_{\widetilde{y}}\}_{\widetilde{y}\in\widetilde{\varUpsilon}}$ είναι μία οικογένεια μέτρων πιθανότητας επάνω στην $\varSigma$ και το ν είναι ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στην $\sigma(\{P_{\bullet}(E) : E \in \varSigma\})$, είναι μία απαριθμήτρια σ.δ. $N := \{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$P\Big(\bigcap_{k=1}^{r}\{W_k \leqslant w_k\}\Big) = \int \prod_{k=1}^{r} P_{\widetilde{y}}(\{W_k \leqslant w_k\})\,\nu(d\widetilde{y}),$$

όπου $W := \{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι η σ.δ. των ενδιάμεσων χρόνων που επάγεται από την N. Στην ειδική περίπτωση $(P_{\widetilde{y}})_{W_n} = \mathbf{Exp}\,(\alpha(\widetilde{y}))$, όπου α είναι μία θετική μετρήσιμη συνάρτηση στον $\mathbb{R}$, μία P-HMRP$(\{P_{\widetilde{y}}\}_{\widetilde{y}\in\widetilde{\varUpsilon}}, \nu)$ είναι μία μεικτή σ.δ. Poisson με παραμέτρους μείξης την $\{P_{\widetilde{y}}\}_{\widetilde{y}\in\widetilde{\varUpsilon}}$ και το ν (συμβ. P-HMPP$(\{P_{\widetilde{y}}\}_{\widetilde{y}\in\widetilde{\varUpsilon}}, \nu)$ για συντομία).

Κάτω από την υπόθεση

$(\ast)$ Για ν-σχεδόν όλα τα $\widetilde{y} \in \widetilde{\varUpsilon}$, η συνάρτηση $F_{\widetilde{y}} : \mathbb{R}_+ \longmapsto [0,1]$, που ορίζεται ως $F_{\widetilde{y}}(t) := P_{\widetilde{y}}(\{W_n \leqslant t\})$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, είναι συνεχώς διαφορίσιμη στον $(0,\infty)$ με $0 < F'_{\widetilde{y}}(t) < C$ για κάθε $t > 0$, όπου C είναι μία θετική σταθερά, και η συνάρτηση $\alpha : \widetilde{\varUpsilon} \longmapsto (0,\infty)$ με $\alpha(\widetilde{y}) := \lim_{t\to 0} F'_{\widetilde{y}}(t)$ είναι μετρήσιμη,

ο Huang απέδειξε ως βασικό του αποτέλεσμα ότι μία P-HMRP$(\{P_{\widetilde{y}}\}_{\widetilde{y}\in\widetilde{\varUpsilon}}, \nu)$ έχει την ιδιότητα του Markov αν και μόνο αν είναι μία P-HMPP$(\{P_{\widetilde{y}}\}_{\widetilde{y}\in\widetilde{\varUpsilon}}, \nu)$ (βλ. [11], Theorem 3).

Ένας εναλλακτικός τρόπος έκφρασης των MRPs στον $(\varOmega, \varSigma, P)$, εντός της κλάσης των απαριθμητριών σ.δ., είναι να υποθέσουμε την ύπαρξη ενός τυχαίου διανύσματος (τ.δ. για συντομία) στον ίδιο χ.π., έτσι ώστε δεσμεύοντας ως προς αυτό η απαριθμήτρια σ.δ. να συμπεριφέρεται ως μία συνήθης ανανεωτική σ.δ. (βλ. Ορισμό 2.2.2 (b)).

Μία απαριθμήτρια σ.δ. N που είναι μία P-MRP$(\{P_{\widetilde{y}}\}_{\widetilde{y}\in\widetilde{\Upsilon}},\nu)$ είναι πάντα μία MRP σύμφωνα με τον Ορισμό 2.2.2 (b), ενώ ο αντίστροφος ισχυρισμός ισχύει μόνο κάτω από επιπλέον υποθέσεις (βλ. [16], Theorem 4.9).

Ειδική περίπτωση των MRPs με παράμετρο μείξης ένα τ.δ. είναι η μεικτή σ.δ. Poisson (MPP για συντομία) με παράμετρο μείξης μία πραγματική τ.μ. (συμβ. P-MPP(Θ) για συντομία) (βλ. Ορισμό 2.2.1). Αρχικά φαίνεται να μην υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ των P-HMPP$(\{P_{\widetilde{y}}\}_{\widetilde{y}\in\widetilde{\Upsilon}},\nu)$ και P-MPP(Θ). Αλλά κάτω από την ασθενή συνθήκη της ύπαρξης μίας κατάλληλης φυσιολογικής δεσμευμένης πιθανότητας μπορεί να αποδειχθεί ότι κάθε P-MPP(Θ) είναι μία P-HMPP$(\{P_{\widetilde{y}}\}_{\widetilde{y}\in\widetilde{\Upsilon}},\nu)$ (βλ. Πρόταση 3.1.2). Ο αντίστροφος ισχυρισμός δεν φαίνεται να ισχύει χωρίς επιπλέον υποθέσεις, καθώς δεν είναι γενικά εφικτό να βρεθεί, για δοσμένη P-HMPP$(\{P_{\widetilde{y}}\}_{\widetilde{y}\in\widetilde{\Upsilon}},\nu)$, μία πραγματική τ.μ. Θ με $P_\Theta = \nu$. Από την άλλη, υποθέτοντας την ύπαρξη μίας τέτοιας τ.μ. Θ δεν είναι γενικά εφικτό να κατασκευαστούν δεσμευμένες πιθανότητες $Q_{\widetilde{y}} := Q(\bullet \mid \Theta = \widetilde{y})$ επάνω στην Σ ώστε $Q_{\widetilde{y}} = P_{\widetilde{y}}$ για ν-σ.ο. τα $\widetilde{y} \in \widetilde{\Upsilon}$ με $\widetilde{\Upsilon} = R_\Theta$.

Ο παραπάνω συλλογισμός γεννά το ερώτημα αν το αποτέλεσμα του Huang μπορεί να αποδειχθεί για MRPs και MPPs με παράμετρο μείξης ένα τ.δ. και μία πραγματική τ.μ., αντίστοιχα, που είναι και το αντικείμενο μελέτης του παρόντος κεφαλαίου.

2.1 Βασικές Έννοιες

Αν (Ω,Σ) και (Υ,H) είναι δύο μ.χ., μία συνάρτηση k από τον $\Omega\times H$ στο $[0,1]$ είναι ένας **Σ-H-πυρήνας Markov** αν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

(k1) Η συνολοσυνάρτηση $B \longmapsto k(\omega,B)$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας στην H για κάθε σταθερό $\omega\in\Omega$.

(k2) Η συνάρτηση $\omega \longmapsto k(\omega,B)$ είναι Σ-μετρήσιμη για κάθε σταθερό $B\in H$.

Ιδιαιτέρως, αν X είναι μία πραγματική τυχαία μεταβλητή στον Ω και Θ είναι ένα d-διάστατο τ.δ. στον Ω, μία **υπό συνθήκη κατανομή του X δοθέντος του Θ** είναι ένας $\sigma(\Theta)$-$\mathfrak{B}$-πυρήνας Markov που συμβολίζεται με $P_{X|\Theta} := P_{X|\sigma(\Theta)}$ και για κάθε $B\in\mathfrak{B}$ ικανοποιεί τη συνθήκη

$$P_{X|\Theta}(\bullet,B) = P(X^{-1}(B)\mid\sigma(\Theta))(\bullet) \quad P\upharpoonright\sigma(\Theta)-\text{σ.β.}.$$

Προφανώς, για κάθε $\mathfrak{B}_d$-$\mathfrak{B}$-πυρήνα Markov k, η απεικόνιση $K(\Theta)$ από τον $\Omega\times\mathfrak{B}$ στο $[0,1]$ που ορίζεται ως

$$K(\Theta)(\omega,B) := (k(\bullet,B)\circ\Theta)(\omega) \quad \text{για κάθε } (\omega,B)\in\Omega\times\mathfrak{B}$$

είναι ένας $\sigma(\Theta)$-$\mathfrak{B}$-πυρήνας Markov. Επομένως, για $\theta = \Theta(\omega)$ με $\omega \in \Omega$ τα μέτρα πιθανότητας $k(\theta, \bullet)$ είναι κατανομές πιθανότητας στην $\mathfrak{B}$, και επομένως μπορούμε να γράφουμε $\mathbf{K}(\theta)(\bullet)$ αντί για $k(\theta, \bullet)$. Συνεπώς, σε αυτή τη περίπτωση η $K(\Theta)$ θα συμβολίζεται με $\mathbf{K}(\Theta)$.

Για κάθε πραγματικές τυχαίες μεταβλητές X και Y στον Ω θα λέμε ότι οι $P_{X|\Theta}$ και $P_{Y|\Theta}$ είναι $P \upharpoonright \sigma(\Theta)$-ισοδύναμες και θα γράφουμε $P_{X|\Theta} = P_{Y|\Theta}$ $P \upharpoonright \sigma(\Theta)$-σ.β., αν υπάρχει ένα P-μηδενικό σύνολο $M \in \sigma(\Theta)$ ώστε για κάθε $\omega \notin M$ και $B \in \mathfrak{B}$ ισχύει η ισότητα $P_{X|\Theta}(\omega, B) = P_{Y|\Theta}(\omega, B)$.

Ορισμός 2.1.1. Έστω (Ξ, Z, R) ένας χ.π.. Μία οικογένεια $\{P_\xi\}_{\xi\in\Xi}$ μέτρων πιθανότητας επάνω στην Σ είναι μία **φυσιολογική δεσμευμένη πιθανότητα** (regular conditional probability) (συμβ. φ.δ.π. για συντομία) του P επάνω στοr R αν

(d1) για κάθε $F \in \Sigma$ η απεικόνιση $\xi \longmapsto P_\xi(F)$ είναι Z-μετρήσιμη,

(d2) $\int P_\xi(F)\, R(d\xi) = P(F)$ για κάθε $F \in \Sigma$.

Εάν $f : \Omega \longmapsto \Xi$ είναι μία απεικόνιση με την ιδιότητα $P(f^{-1}(B)) = R(B)$ για κάθε $B \in Z$ (inverse-measure-preserving function), μία φ.δ.π. $\{P_\xi\}_{\xi\in\Xi}$ του P επάνω στο R ονομάζεται **συνεπής** (consistent) με την f εάν για κάθε $B \in Z$ η ισότητα $P_\xi(f^{-1}(B)) = 1$ ισχύει για R-σχεδόν όλα τα $\xi \in B$.

Παρατήρηση. Εάν η Σ είναι αριθμήσιμα παραγόμενη και το P είναι τέλειο, τότε πάντα υπάρχει μία φ.δ.π. $\{P_\xi\}_{\xi\in\Xi}$ του P επάνω στο R συνεπής με κάθε απεικόνιση f από τον Ω στον Ξ που διατηρεί τα μέτρα πιθανότητας υπό την προϋπόθεση ότι η Z είναι αριθμήσιμα παραγόμενη (βλ. [6], Theorems 6 και 3), κάτι που σημαίνει ότι στις περισσότερες περιπτώσεις που εμφανίζονται στις εφαρμογές (π.χ. Πολωνικοί χώροι) φ.δ. πιθανότητες συνεπείς με κάθε d-διάστατο τ.δ. Θ στον Ω που διατηρεί τα μέτρα πάντα υπάρχουν.

Έστω $\Theta : \Omega \longmapsto \mathbb{R}^d$ ένα τ.δ.. Μία οικογένεια $\{X_i\}_{i\in I}$ από πραγματικές τυχαίες μεταβλήτές X_i στον Ω είναι

- P-**υπό συνθήκη (στοχαστικά) ανεξάρτητη δοθέντος του** Θ, εάν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geqslant 2$ ισχύει

$$P\Big(\bigcap_{j=1}^{n}\{X_{i_j} \leqslant x_{i_j}\} \mid \sigma(\Theta)\Big) = \prod_{k=1}^{n} P(\{X_{i_j} \leqslant x_{i_j}\} \mid \sigma(\Theta)) \qquad P \upharpoonright \sigma(\Theta) - \text{σ.β.}$$

  οποτεδήποτε $i_1, \ldots, i_n$ είναι διακριτά στοιχεία του I και $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) \in \mathbb{R}^n$.

- P-**υπό συνθήκη ισόνομη δοθέντος του** Θ, αν

$$P\big(F \cap X_i^{-1}(B)\big) = P\big(F \cap X_j^{-1}(B)\big)$$

  οποτεδήποτε $i, j \in I$, $F \in \sigma(\Theta)$ και $B \in \mathfrak{B}$.

Για ό,τι ακολουθεί θα γράφουμε απλά "υπό συνθήκη" αντί για "υπό συνθήκη δοθέντος του Θ" για λόγους απλότητας.

Μία οικογένεια $N := \{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ τυχαίων μεταβλητών από τον (Ω, Σ) στον $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}})$ ονομάζεται **απαριθμήτρια σ.δ.** αν υπάρχει ένα P-μηδενικό σύνολο $\Omega_N \in \Sigma$ τέτοιο ώστε η σ.δ. N περιορισμένη στον $\Omega \backslash \Omega_N$ να παίρνει τιμές στο $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, να έχει δεξιά συνεχείς τροχιές, να παρουσιάζει άλματα μεγέθους (το πολύ) ένα, να είναι μηδέν στο $t = 0$ και να αυξάνει στο άπειρο. Με $T := \{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ θα συμβολίζεται η **σ.δ. άφιξης** και με $W := \{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ θα συμβολίζεται η **σ.δ. των ενδιάμεσων χρόνων** (βλ. π.χ. [19], Section 1.1, σελ. 6 για τους ορισμούς) που σχετίζονται με την N . Κάθε σ.δ. άφιξης επάγει μία απαριθμήτρια σ.δ. και αντιστρόφως (βλ. π.χ. [19], Theorem 2.1.1).

Για ό,τι ακολουθεί, εκτός και αν αναφέρεται διαφορετικά, (Ω, Σ, P) είναι ένας σταθερός αλλά τυχαίος χ.π., $(\Upsilon, H) := ((0,\infty), \mathfrak{B}(\Upsilon))$, $N := \{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία απαριθμήτρια σ.δ., $T := \{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ και $W := \{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι οι σχετιζόμενες με την N στοχαστικές διαδικασίες άφιξης και ενδιάμεσων χρόνων, αντίστοιχα, και χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε και υποθέτουμε ότι $\Omega_N = \emptyset$. Επιπλέον, το Θ είναι ένα d-διάστατο τ.δ. στον Ω με τιμές στο $D \in \mathfrak{B}_d$ $(d \in \mathbb{N})$ και η οικογένεια $\{P_\theta\}_{\theta\in D}$ μέτρων πιθανότητας είναι μία φ.δ.π. του P επάνω στο P_Θ συνεπής με το τ.δ. Θ.

2.2 Μεικτές Ανανεωτικές Διαδικασίες και Μαρκοβιανή Ιδιότητα

Στη παρούσα ενότητα παρουσιάζουμε το βασικό αποτέλεσμα του κεφαλαίου. Για το σκοπό αυτό θα ξεκινήσουμε με τους ακόλουθους ορισμούς, οι οποίοι παίζουν έναν ουσιαστικό ρόλο στην παρουσίαση των αποτελεσμάτων.

Ορισμός 2.2.1. Μία απαριθμήτρια σ.δ. N είναι μία **MPP με παράμετρο μείξης μία πραγματική τ.μ.** Θ ώστε $P_\Theta(\Upsilon) = 1$ (συμβ. P-MPP(Θ) για συντομία), εάν έχει P-υπό συνθήκη ανεξάρτητες και P-υπό συνθήκη στάσιμες προσαυξήσεις (βλ. π.χ. [19], Section 4.1, σελ. 86 για τον ορισμό) και η συνθήκη

$$\forall\, t \in \Upsilon \qquad [P_{N_t|\Theta} = \mathbf{P}(t\Theta) \quad P \upharpoonright \sigma(\Theta) - \text{σ.β.}]$$

ικανοποιείται (βλ. π.χ. [19], σελ. 87).

Ιδιαιτέρως, εάν υπάρχει ένα $\theta_0 \in \Upsilon$ με $P(\{\Theta = \theta_0\}) = 1$, τότε η N είναι μία *P-σ.δ. Poisson* (συμβ. P-PP(θ_0) για συντομία).

Φαίνεται φυσιολογικό να γενικεύσουμε την έννοια της MPP(Θ) μέσω του επόμενου ορισμού, προσθέτοντας στη δομική παράμετρο Θ ακόμη μία παράμετρο μείξης h. Σε αυτή τη περίπτωση οι προκύπτουσες **επεκταμένες MRPs** περιέχουν και τις διαδικασίες που μελετήθηκαν στο [14].

Ορισμοί 2.2.2. **(a)** Έστω $m \in \mathbb{N}$, $D \in \mathfrak{B}_d$ με $R_\Theta \subseteq D$, και έστω $h : D \longmapsto \mathbb{R}^m$ μία $\mathfrak{B}(D)$-$\mathfrak{B}_m$-μετρήσιμη συνάρτηση. Μία απαριθμήτρια σ.δ. N ονομάζεται **επεκταμένη MRP με παραμέτρους μείξης Θ και h και υπό συνθήκη κατανομή ενδιάμεσων χρόνων $\mathbf{K}(h(\Theta))$** (συμβ. P-eMRP($\mathbf{K}(h(\Theta))$) για συντομία) εάν η σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων W είναι P-υπό συνθήκη ανεξάρτητη και

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad [P_{W_n|\Theta} = \mathbf{K}\left(h(\Theta)\right) \qquad P \restriction \sigma(\Theta) - \sigma.\beta.].$$

(b) Αν $m = d$, μία επεκταμένη MRP με παραμέτρους μείξης Θ και $h = id_{\mathbb{R}^d}$ είναι μία **P-MRP με παράμετρο μείξης Θ και υπό συνθήκη κατανομή ενδιάμεσων χρόνων $\mathbf{K}(\Theta)$** (συμβ. P-MRP($\mathbf{K}(\Theta)$) για συντομία).

Ιδιαιτέρως, εάν υπάρχει ένα $\theta_0 \in \mathbb{R}^d$ με $P(\{\Theta = \theta_0\}) = 1$, τότε η N είναι μία *P-ανανεωτική σ.δ.* με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων $\mathbf{K}(\theta_0)$ (συμβ. P-RP($\mathbf{K}(\theta_0)$) για συντομία).

Πριν αποδείξουμε το βασικό αποτέλεσμα της παρούσας ενότητας χρειαζόμαστε το επόμενο βοηθητικό λήμμα.

Λήμμα 2.2.3. *Έστω D και h όπως στον Ορισμό 2.2.2 (a). Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $L_0 \in \mathfrak{B}(D)$ έτσι ώστε ο περιορισμός $h \restriction (D \backslash L_0)$ να είναι 1-1. Θέτουμε $\widetilde{\Theta} := h \circ \Theta$, $g := (h \restriction D \backslash L_0)^{-1} : h\left(D \backslash L_0\right) \longmapsto D \backslash L_0$, και $M := h(D \backslash L_0)$. Για κάθε $\widetilde{\theta} \in \mathbb{R}^m$ και $A \in \Sigma$ ορίζουμε*

$$Q_{\widetilde{\theta}}\left(A\right) := \begin{cases} (P_{\bullet}(A) \circ g)(\widetilde{\theta}) & \text{εάν } \widetilde{\theta} \in M; \\ P\left(A\right) & \text{εάν } \widetilde{\theta} \in \mathbb{R}^m \backslash M. \end{cases}$$

Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) Η οικογένεια $\{Q_{\widetilde{\theta}}\}_{\widetilde{\theta} \in \mathbb{R}^m}$ είναι μία φ.δ.π. του P επάνω στο $P_{\widetilde{\Theta}}$ συνεπής με την $\widetilde{\Theta}$.

(ii) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η ισοδυναμία

$$\forall\ \ \theta \in D \backslash L_0 \quad [(P_\theta)_{W_n} = \mathbf{K}\left(h(\theta)\right)] \Longleftrightarrow \forall\ \ \widetilde{\theta} \in M \quad [(Q_{\widetilde{\theta}})_{W_n} = \mathbf{K}(\widetilde{\theta})]$$

ικανοποιείται.

(iii) Για κάθε $\theta \in D \backslash L_0$ η σ.δ. W είναι P_θ-ανεξάρτητη αν και μόνο αν για κάθε $\widetilde{\theta} \in M$ είναι $Q_{\widetilde{\theta}}$-ανεξάρτητη.

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι $M \in \mathfrak{B}_m$ (βλ. π.χ. [3], Theorem 8.3.7), ότι η συνάρτηση g είναι $\mathfrak{B}(M)$-$\mathfrak{B}(D\backslash L_0)$-μετρήσιμη (βλ. π.χ. [3], Proposition 8.3.5), και ότι $P_{\widetilde{\Theta}}(M) = 1$.

(i) Προφανώς η $\{Q_{\widetilde{\theta}}\}_{\widetilde{\theta}\in\mathbb{R}^m}$ είναι μία οικογένεια μέτρων πιθανότητας επάνω στην Σ που ικανοποιεί τη συνθήκη (d1). Η συνθήκη (d2) έπεται από τη (d2) για την $\{P_\theta\}_{\theta\in D}$.

Για να δείξουμε ότι η $\{Q_{\widetilde{\theta}}\}_{\widetilde{\theta}\in\mathbb{R}^m}$ είναι συνεπής με την $\widetilde{\Theta}$, θεωρούμε τυχαία $A \in \Sigma$ και $B \in \mathfrak{B}_m$. Θέτοντας $E := h^{-1}(B)$ έχουμε

$$B \cap M =_{P_{\widetilde{\Theta}}} g^{-1}(E \cap (D\backslash L_0)). \tag{2.1}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
\int_B Q_{\widetilde{\theta}}(A)P_{\widetilde{\Theta}}(d\widetilde{\theta}) &= \int_{B\cap M} Q_{\widetilde{\theta}}(A)P_{\widetilde{\Theta}}(d\widetilde{\theta}) + \int_{B\cap(\mathbb{R}^m\backslash M)} Q_{\widetilde{\theta}}(A)P_{\widetilde{\Theta}}(d\widetilde{\theta}) \\
&\overset{(2.1)}{=} \int_{g^{-1}(E\cap(D\backslash L_0))} Q_{\widetilde{\theta}}(A)P_{\widetilde{\Theta}}(d\widetilde{\theta}) = \int_{E\cap(D\backslash L_0)} P_\theta(A)P_\Theta(d\theta) \\
&= P\left(A \cap \Theta^{-1}(E \cap (D\backslash L_0))\right) = P\left(A \cap (\widetilde{\Theta})^{-1}(B)\right),
\end{aligned}$$

όπου η πέμπτη ισότητα έπεται από τη συνέπεια της $\{P_\theta\}_{\theta\in D}$ με το Θ, ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη του (i).

(ii) Ας σταθεροποιήσουμε αυθαίρετα $n \in \mathbb{N}$ και $A \in \Sigma$ ώστε $A := W_n^{-1}(B)$ για $B \in \mathfrak{B}$. Υποθέτουμε ότι για όλα τα $\theta \in D\backslash L_0$ έχουμε $(P_\theta)_{W_n} = \mathbf{K}(h(\theta))$. Τότε, για κάθε $\widetilde{\theta} \in M$ έχουμε $g(\widetilde{\theta}) \in D\backslash L_0$, και άρα

$$(Q_{\widetilde{\theta}})_{W_n}(B) = P_{g(\widetilde{\theta})}(A) = \mathbf{K}(h(g(\widetilde{\theta})))(B) = \mathbf{K}(\widetilde{\theta})(B).$$

Για την απόδειξη του αντίστροφου ισχυρισμού, υποθέτουμε ότι για κάθε $\widetilde{\theta} \in M$ έχουμε ότι $(Q_{\widetilde{\theta}})_{W_n} = \mathbf{K}(\widetilde{\theta})$. Τότε, για κάθε $\theta \in D\backslash L_0$ έπεται ότι $g^{-1}(\theta) \in M$. Επομένως

$$(P_\theta)_{W_n}(B) = (P_\bullet(A) \circ g)(g^{-1}(\theta)) = Q_{g^{-1}(\theta)}(A) = \mathbf{K}(g^{-1}(\theta))(B) = \mathbf{K}(h(\theta))(B).$$

Ο ισχυρισμός (iii) αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο. □

Για να παρουσιάσουμε τα υπόλοιπα αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου χρειαζόμαστε τις παρακάτω έννοιες.

Ορισμοί 2.2.4. Μία απαριθμήτρια σ.δ. N θα λέμε ότι έχει την:

(a) P-**πολυωνυμική ιδιότητα**, εάν η συνθήκη

$$P\Big(\bigcap_{j=1}^r\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = \kappa_j\}\Big) = \frac{n!}{\prod_{j=1}^r \kappa_j!}\prod_{j=1}^r \Big(\frac{t_j - t_{j-1}}{t_r}\Big)^{\kappa_j} \cdot P(\{N_{t_r} = n\})$$

ικανοποιείται για κάθε $r \in \mathbb{N}$, $t_0, t_1, \ldots, t_r \in \mathbb{R}_+$ με $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_r$ και για όλα τα $\kappa_1, \cdots, \kappa_r \in \mathbb{N}_0$ με $n = \sum_{j=1}^{r} \kappa_j$ (βλ. π.χ. [20], page 2).

(b) P-**Μαρκοβιανή ιδιότητα**, ή θα λέμε ότι είναι μία P-**σ.δ. Markov**, εάν η συνθήκη

$$P\Big(\{N_{t_{r+1}} = n_{r+1}\} \mid \bigcap_{j=1}^{r} \{N_{t_j} = n_j\}\Big) = P\left(\{N_{t_{r+1}} = n_{r+1}\} \mid \{N_{t_r} = n_r\}\right)$$

ικανοποιείται για κάθε $r \in \mathbb{N}$, $t_1, \ldots, t_r, t_{r+1} \in (0, \infty)$, και $n_1, \ldots, n_r, n_{r+1} \in \mathbb{N}_0$ τέτοια ώστε $t_1 < \cdots < t_r < t_{r+1}$ και $P\big(\bigcap_{j=1}^{r} \{N_{t_j} = n_j\}\big) > 0$ (βλ. π.χ. [19], page 44).

Αν δεν προκαλείται σύγχυση, θα γράφουμε απλά "πολυωνυμική ιδιότητα", "Μαρκοβιανή ιδιότητα" και "σ.δ. Markov" αντί για "P-πολυωνυμική ιδιότητα", "P-Μαρκοβιανή ιδιότητα" και "P-σ.δ. Markov", αντίστοιχα.

Παρατήρηση 2.2.5. Το ακόλουθο αποτέλεσμα είναι γνωστό (βλ. π.χ. [11], Theorem 2) αλλά το γράφουμε ακριβώς στη μορφή που το χρειαζόμαστε.

Έστω $\theta \in \mathbb{R}^d$ σταθερό και έστω N μία P-RP($\mathbf{K}(\theta)$). Για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $F_\theta(t) := P(\{W_n \leqslant t\})$. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση F_θ είναι συνεχώς διαφορίσιμη στον $(0, \infty)$, ότι $0 < F'_\theta(t) < C$ για κάθε $t > 0$, όπου C είναι μία θετική σταθερά η οποία μπορεί να εξαρτάται από το θ, και ότι η $p_d(\theta) := \lim_{t \to 0} F'_\theta(t)$ είναι θετική. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Η N έχει την ιδιότητα του Markov.

(ii) Η N είναι μία P-PP($p_d(\theta)$).

Είναι γνωστό ότι εάν η N είναι μία P-MPP(Θ) τότε έχει την ιδιότητα του Markov. Ωστόσο, η τετριμμένη απαριθμήτρια σ.δ. N που ορίζεται ως $N_t := [t]$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, όπου με $[t]$ συμβολίζεται το ακέραιο μέρος της t, είναι μία ανανεωτική σ.δ. που ικανοποιεί την ιδιότητα του Markov χωρίς όμως να είναι μία σ.δ. Poisson. Το παραπάνω γεννά το ερώτημα:

Κάτω από ποιές συνθήκες μία P-MRP($\mathbf{K}(\Theta)$) που ικανοποιεί την ιδιότητα του Markov είναι μία P-MPP(Θ);

Κάτω από την ακόλουθη ασθενή συνθήκη το παραπάνω ερώτημα απαντάται θετικά στην Πρόταση 2.2.7.

Υπόθεση 2.2.6. Έστω D και h όπως στον Ορισμό 2.2.2 (a), έστω N μία P-eMRP($\mathbf{K}(h(\Theta))$) και έστω $\{P_\theta\}_{\theta \in D}$ μία φ.δ.π. του P επάνω στο P_Θ συνεπής με το Θ. Τότε, από το [16], Lemma 3.5, έπεται ότι υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $H_h \in \mathfrak{B}(D)$ ώστε

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \forall\, \theta \in D \setminus H_h \qquad [(P_\theta)_{W_n} = \mathbf{K}\,(h(\theta))]. \tag{2.2}$$

Σταθεροποιούμε ένα αυθαίρετο $\theta \in D$, και ορίζουμε τη συνάρτηση $F_{h(\theta)} : \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R}$ με τύπο

$$F_{h(\theta)}(t) := \begin{cases} P_\theta(\{W_n \leqslant t\}) & \text{εάν } \theta \in D \backslash H_h; \\ \alpha & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $n \in \mathbb{N}$, όπου α είναι μία σταθερά στο $(0,1)$.

Προφανώς, για κάθε $\theta \in D \backslash H_h$ η συνάρτηση $F_{h(\theta)}$ εξαρτάται από την κατανομή των W_n ως προς τα μέτρα P_θ και, λόγω της σχέσης (2.2), από την h. Θα λέμε ότι τα N, h και $\{P_\theta\}_{\theta \in D}$ ικανοποιούν τη συνθήκη 2.2.6, εάν υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $L_h := L_{h,N,\{P_\theta\}_{\theta \in D}}$ στην $\mathfrak{B}(D)$, που περιλαμβάνει το H_h, τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \notin L_h$ η συνάρτηση $F_{h(\theta)}$ να είναι συνεχώς διαφορίσιμη στον $(0,\infty)$, εάν υπάρχει μία συνάρτηση $C \in \mathcal{L}^1(P_{h(\Theta)})$ με $0 < F'_{h(\theta)}(t) < C(h(\theta))$ για κάθε $t > 0$, και εάν η συνάρτηση $p_h : D \backslash L_h \longmapsto \mathbb{R}$ που ορίζεται ως $p_h(\theta) := p_{h,d}(\theta) := \lim_{t \to 0} F'_{h(\theta)}(t)$ είναι θετική και 1-1.

Στην ειδική περίπτωση $D = \mathbb{R}^d$ και $h := id_{\mathbb{R}^d}$ γράφουμε για απλούστευση L, F_θ και p_d αντί των L_h, $F_{h(\theta)}$ και p_h, αντίστοιχα, και λέμε ότι τα N και $\{P_\theta\}_{\theta \in \mathbb{R}^d}$ ικανοποιούν την Υπόθεση 2.2.6.

Πρόταση 2.2.7. *Θεωρούμε τους ακόλουθους ισχυρισμούς:*

(i) Η N έχει την πολυωνυμική ιδιότητα.

(ii) Η N έχει την ιδιότητα του Markov.

(iii) Η N είναι μία P-MPP($\breve{\Theta}$).

Τότε (iii) $\Longrightarrow$ (i) $\Longrightarrow$ (ii).
Εάν η N είναι μία P-MRP($\mathbf{K}(\Theta)$) και η $\{P_\theta\}_{\theta \in \mathbb{R}^d}$ είναι μία φ.δ.π. του P επάνω στο P_Θ συνεπής με το Θ που ικανοποιεί την Υπόθεση 2.2.6, θέτουμε $\breve{\Theta}(\omega) := (p_d \circ \Theta)(\omega)$ εάν $\omega \in \Theta^{-1}(L^c)$, και συμβολίζουμε πάλι με $\breve{\Theta}$ οποιαδήποτε μετρήσιμη επέκταση της $\breve{\Theta}$ από το $\Theta^{-1}(L^c)$ στο Ω, τότε οι ισχυρισμοί (i) έως (iii) είναι όλοι ισοδύναμοι.

Απόδειξη. Η συνεπαγωγή (i) $\Longrightarrow$ (ii) προκύπτει μετά από κάποιους απλούς υπολογισμούς, ενώ η συνεπαγωγή (iii) $\Longrightarrow$ (i) είναι γνωστή για κάθε πραγματική τυχαία μεταβλητή στον Ω στη θέση της $\breve{\Theta}$ (βλ. π.χ. [19], Lemma 4.2.2).

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Έστω N μία P-MRP($\mathbf{K}(\Theta)$) η οποία έχει την ιδιότητα του Markov, ώστε τα N και $\{P_\theta\}_{\theta \in \mathbb{R}^d}$ να ικανοποιούν την Υπόθεση 2.2.6, και έστω $\breve{\Theta}$ όπως στην εκφώνηση της πρότασης.

(a) Υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $L_1 \in \mathfrak{B}_d$ ώστε η N να είναι μία P_θ-RP($\mathbf{K}(\theta)$) για κάθε $\theta \notin L_1$.

Πράγματι, αφού η N είναι μία P-MRP$(\mathbf{K}(\Theta))$ μπορούμε να εφαρμόσουμε το [16], Proposition 3.8, για να πάρουμε το (a).

(b) Για κάθε $t > 0$ και $n \in \mathbb{N}_0$ ισχύει ότι $P(\{N_t = n\}) > 0$.

Πράγματι, αρχικά παρατηρούμε ότι εφαρμόζοντας το [14], Lemma 3.5, για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ και για κάθε $t > 0$ έπεται ότι

$$P(\{N_t = n\}) = \mathbb{E}_{P_\Theta}\left[P_\bullet(\{N_t = n\})\right].$$

Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $t > 0$ και $n \in \mathbb{N}_0$ η συνθήκη $P_\theta(\{N_t = n\}) > 0$ ισχύει για P_Θ-σ.ο. τα $\theta \in \mathbb{R}^d$, κάτι που εύκολα μπορεί να αποδειχθεί με επαγωγή στο n.

(c) Για κάθε $s, t \in (0, \infty)$ με $s < t$ ισχύει η συνθήκη

$$P(\{N_s = N_t = 1\}) = -\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[\int_0^s G_\bullet(t-x)G'_\bullet(x)dx\right] > 0,$$

όπου $G_\theta(t) := 1 - F_\theta(t)$ για κάθε $\theta \in \mathbb{R}^d$.

Πράγματι, για κάθε $s, t \in (0, \infty)$ με $s < t$ έχουμε

$$\begin{aligned}
&P(\{N_s = N_t = 1\}) \\
&\quad = P(\{T_1 \leqslant s < t < T_2\}) \\
&\quad = P(\{W_1 \leqslant s\}) - P(\{W_1 \leqslant s, W_2 \leqslant t - W_1\}) \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^d \cap (L \cup L_1)^c}\left[\int_0^s f_\theta(x)dx - \int_0^s\int_0^{t-x} f_\theta(y)f_\theta(x)dydx\right] P_\Theta(d\theta) \\
&\quad = -\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[\int_0^s G_\bullet(t-x)G'_\bullet(x)dx\right],
\end{aligned}$$

όπου η τρίτη ισότητα έπεται από τα [14], Lemma 3.5, και το βήμα (a), και $f_\theta := F'_\theta$. Υποθέτουμε, αν είναι δυνατόν, ότι $P(\{N_s = N_t = 1\}) = 0$. Από την Υπόθεση 2.2.6, το τελευταίο είναι ισοδύναμο με το γεγονός ότι για κάθε $\theta \notin L \cup L_1$ και $x \in (0, s]$ ισχύει ότι $G_\theta(t - x) = 0$. Επομένως, έχουμε ότι $f_\theta(t - x) = 0$ για κάθε $x \in (0, s]$ που είναι αδύνατο σύμφωνα με την Υπόθεση 2.2.6.

Λόγω των (b) και (c) όλες οι υπό συνθήκη πιθανότητες που θεωρούμε στα επόμενα τρία βήματα της απόδειξης είναι καλά ορισμένες.

(d) Για κάθε $t, v > 0$ ισχύει ότι

$$\frac{\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[-G_\bullet(t+v)p_d(\bullet)\right]}{\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[G_\bullet(v)G'_\bullet(t)\right]} = \frac{\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[-G_\bullet(t)p_d(\bullet)\right]}{\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[G'_\bullet(t)\right]} = 1. \tag{2.3}$$

Πράγματι, για κάθε $0 < u < t$ και $v > 0$ από την ιδιότητα του Markov έχουμε ότι

$$P(\{N_{t-u} = N_t = N_{t+v} = 1\}) = P(\{N_{t+v} = 1\}|\{N_t = 1\})P(\{N_{t-u} = N_t = 1\})$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{P(\{N_{t-u} = N_{t+v} = 1\})}{P(\{N_{t-u} = N_t = 1\})} = \frac{A_1(t,v)}{B_1(t)},$$

όπου $A_1(t,v) := P(\{N_t = N_{t+v} = 1\})$ και $B_1(t) := P(\{N_t = 1\})$. Τότε, από το (c) έπεται ότι

$$\frac{\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[\int_0^{t-u} G_\bullet(t+v-x)G'_\bullet(x)dx\right]}{\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[\int_0^{t-u} G_\bullet(t-x)G'_\bullet(x)dx\right]} = \frac{A_1(t,v)}{B_1(t)}. \tag{2.4}$$

Προφανώς το δεξί μέλος της παραπάνω ισότητας είναι ανεξάρτητο του u, και άρα η παράγωγός του ως προς u πρέπει να είναι ίση με μηδέν. Επομένως, εξισώνοντας της παράγωγο ως προς u του αριστερού μέλους με το μηδέν και εφαρμόζοντας το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης έπεται ότι

$$\frac{\mathbb{E}_{P_\Theta}\Big[\int_0^{t-u} G_\bullet(t+v-x)G'_\bullet(x)dx\Big]}{\mathbb{E}_{P_\Theta}\Big[\int_0^{t-u} G_\bullet(t-x)G'_\bullet(x)dx\Big]} = \frac{\mathbb{E}_{P_\Theta}\Big[G_\bullet(u+v)G'_\bullet(t-u)\Big]}{\mathbb{E}_{P_\Theta}\Big[G_\bullet(u)G'_\bullet(t-u)\Big]}.$$

Προφανώς, αφού το αριστερό μέλος της (2.4) είναι ανεξάρτητο από το u, το ίδιο πρέπει να ισχύει και για το δεξί μέλος. Επομένως, αν στο δεξί μέλος πάρουμε $u \to 0$ και $u \to t$ από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης έχουμε ότι

$$\frac{\mathbb{E}_{P_\Theta}\Big[-G_\bullet(t+v)p_d(\bullet)\Big]}{\mathbb{E}_{P_\Theta}\Big[G_\bullet(v)G'_\bullet(t)\Big]} = \frac{\mathbb{E}_{P_\Theta}\Big[-G_\bullet(t)p_d(\bullet)\Big]}{\mathbb{E}_{P_\Theta}\Big[G'_\bullet(t)\Big]}. \tag{2.5}$$

Επιπλέον, αφού το δεξί μέλος της (2.5) είναι ανεξάρτητο από το v, η παράγωγός του ως προς το v πρέπει να είναι ίση με μηδέν. Άρα, εξισώνοντας την παράγωγο του αριστερού μέλους με το μηδέν και εφαρμόζοντας το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης έχουμε ότι

$$\frac{\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[-G_\bullet(t+v)p_d(\bullet)\right]}{\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[G_\bullet(v)G'_\bullet(t)\right]} = \frac{\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[-G'_\bullet(t+v)p_d(\bullet)\right]}{\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[G'_\bullet(v)G'_\bullet(t)\right]}.$$

Επομένως, για $v \to 0$ και από το το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης προκύπτει ότι

$$\frac{\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[-G_\bullet(t)p_d(\bullet)\right]}{\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[G'_\bullet(t)\right]} = \frac{\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[-G'_\bullet(t)p_d(\bullet)\right]}{\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[-p_d(\bullet)G'_\bullet(t)\right]} = 1;$$

που μαζί με την σχέση (2.5) μας δίνει

$$\frac{\mathbb{E}_{P_\Theta}\Big[-G_\bullet(t+v)p_d(\bullet)\Big]}{\mathbb{E}_{P_\Theta}\Big[G_\bullet(v)G'_\bullet(t)\Big]} = \frac{\mathbb{E}_{P_\Theta}\Big[-G_\bullet(t)p_d(\bullet)\Big]}{\mathbb{E}_{P_\Theta}\Big[G'_\bullet(t)\Big]} = 1.$$

(e) Για κάθε $t, v > 0$ ισχύει

$$\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[G_\bullet(t+v)\left(p_d(\bullet)\right)^2\right] = \mathbb{E}_{P_\Theta}\left[-G_\bullet(v)G'_\bullet(t)p_d(\bullet)\right]. \tag{2.6}$$

Πράγματι, για κάθε $0 < u < t$, $v > 0$ και $w > 0$ από την ιδιότητα του Markov έχουμε ότι

$$\frac{P(\{N_{t-u} = N_t = 1, N_{t+v} = N_{t+v+w} = 2)\}}{P(\{N_{t-u} = N_t = 1)\}} = \frac{A_2(t, v, w)}{B_2(t, v)},$$

όπου $A_2(t, v, w) = P(\{N_{t+v+w} = 2, N_{t+v} = 2\}) \cdot P(\{N_{t+v} = 2, N_t = 1\})$ και $B_2(t, v) = P(\{N_{t+v} = 2\}) \cdot P(\{N_t = 1\})$.

Επιπλέον, εργαζόμενοι όπως στην απόδειξη του βήματος (c) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} &P(\{N_{t-u} = N_t = 1, N_{t+v} = N_{t+v+w} = 2\}) \\ &= \mathbb{E}_{P_\Theta}\left[\int_0^{t-u} \int_{t-x}^{t+v-x} G_\bullet(t + v + w - x - y) G'_\bullet(y) G'_\bullet(x) dy dx\right], \end{aligned}$$

που μαζί με το (c) μας δίνει

$$\frac{\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[\int_0^{t-u} \int_{t-x}^{t+v-x} G_\bullet(t + v + w - x - y) G'_\bullet(y) G'_\bullet(x) dy dx\right]}{\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[\int_0^{t-u} G_\bullet(t - x) G'_\bullet(x) dx\right]} = -\frac{A_2(t, v, w)}{B_2(t, v)}.$$

Προφανώς το δεξί μέλος της παραπάνω ισότητας είναι ανεξάρτητο του u. Επομένως, η παράγωγός του ως προς το u πρέπει να είναι ίση με μηδέν. Επιπλέον, εξισώνοντας την παράγωγο του αριστερού μέλους με το μηδέν και εφαρμόζοντας το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης έχουμε

$$\begin{aligned} &\frac{\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[\int_0^{t-u} \int_{t-x}^{t+v-x} G_\bullet(t + v + w - x - y) G'_\bullet(y) G'_\bullet(x) dy dx\right]}{\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[\int_0^{t-u} G_\bullet(t - x) G'_\bullet(x) dx\right]} \\ &= \frac{\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[\int_u^{u+v} G_\bullet(u + v + w - y) G'_\bullet(y) G'_\bullet(t - u) dy\right]}{\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[G_\bullet(u) G'_\bullet(t - u)\right]}. \end{aligned}$$

Εργαζόμενοι τώρα με παρόμοιο τρόπο όπως και στο βήμα (d) προκύπτει ότι

$$\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[G'_\bullet(t + v) \left(p_d(\bullet)\right)^2\right] = \mathbb{E}_{P_\Theta}\left[-G'_\bullet(v) G'_\bullet(t) p_d(\bullet)\right].$$

Τέλος, ολοκληρώνοντας ως προς v έχουμε

$$\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[G_\bullet(t + v) \left(p_d(\bullet)\right)^2\right] = \mathbb{E}_{P_\Theta}\left[-G_\bullet(v) G'_\bullet(t) p_d(\bullet)\right].$$

(f) Για κάθε $t, v > 0$ ισχύει

$$\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[G_\bullet(t) G_\bullet(v) \left(p_d(\bullet)\right)^2\right] = \mathbb{E}_{P_\Theta}\left[-G_\bullet(v) G'_\bullet(t) p_d(\bullet)\right] \tag{2.7}$$

Πράγματι, για κάθε $0 < u < t$, $v > 0$ και $w > 0$ από την ιδιότητα του Markov έχουμε ότι

$$\frac{P(\{N_{t-u} = N_t = 1, N_{t+v} = 2, N_{t+v+w} = 3\})}{P(\{N_{t-u} = N_t = 1\})} = \frac{A_3(t, v, w)}{B_3(t, v)},$$

όπου $A_3(t,v,w) = P(\{N_{t+v+w} = 3, N_{t+v} = 2\}) \cdot P(\{N_{t+v} = 2, N_t = 1\})$ και $B_3(t,v) = P(\{N_{t+v} = 2\}) \cdot P(\{N_t = 1\})$.

Επιπλέον, εφαρμόζοντας το [14], Lemma 3.5, μαζί με το βήμα (a) μετά από κάποιες πράξεις, όπως και στην απόδειξη του (c), προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} &P(\{N_{t-u} = N_t = 1, N_{t+v} = 2, N_{t+v+w} = 3\}) \\ &= \mathbb{E}_{P_\Theta}\Big[\int_0^{t-u}\int_{t-x}^{t+v-x}\int_{t+v-x-y}^{t+v+w-x-y} G_\bullet(t+v+w-x-y-z) f_\bullet(z) f_\bullet(y) f_\bullet(x)\,dz\,dy\,dx\Big]. \end{aligned}$$

Το τελευταίο μαζί με το (c) μας δίνει

$$\frac{\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[\int_0^{t-u}\int_{t-x}^{t+v-x}\int_{t+v-x-y}^{t+v+w-x-y} G_\bullet(t+v+w-x-y-z) G'_\bullet(z) G'_\bullet(y) G'_\bullet(x)\,dz\,dy\,dx\right]}{\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[\int_0^{t-u} G_\bullet(t-x) G'_\bullet(x)\,dx\right]} = \frac{A_3(t,v,w)}{B_3(t,v)}.$$

Είναι προφανές ότι το δεξί μέλος της παραπάνω ισότητας είναι ανεξάρτητο του u. Επομένως, η παράγωγός του ως προς u πρέπει να είναι ίση με μηδέν, και άρα εξισώνοντας την παράγωγο του αριστερού μέλους με το μηδέν και εφαρμόζοντας το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης έχουμε

$$\begin{aligned} &\frac{\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[\int_0^{t-u}\int_{t-x}^{t+v-x}\int_{t+v-x-y}^{t+v+w-x-y} G_\bullet(t+v+w-x-y-z) f_\bullet(z) f_\bullet(y) f_\bullet(x)\,dz\,dy\,dx\right]}{\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[\int_0^{t-u} G_\bullet(t-x) G'_\bullet(x)\,dx\right]} \\ &= \frac{\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[\int_u^{u+v}\int_{u+v-y}^{u+v+w-y} G_\bullet(u+v+w-y-z) G'_\bullet(z) G'_\bullet(y) G'_\bullet(t-u)\,dz\,dy\right]}{\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[G_\bullet(u) G'_\bullet(t-u)\right]}. \end{aligned}$$

Αφού το αριστερό μέλος της τελευταίας ισότητας είναι ανεξάρτητο του u, το ίδιο πρέπει να ισχύει και για το δεξί μέλος. Συνεπώς, παίρνοντας στο δεξί μέλος $u \to 0$ και $u \to t$ από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης έπεται ότι

$$\frac{\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[-\int_t^{t+v}\int_{t+v-y}^{t+v+w-y} G_\bullet(t+v+w-y-z) G'_\bullet(z) G'_\bullet(y) p_d(\bullet)\,dz\,dy\right]}{\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[\int_0^{v}\int_{v-y}^{v+w-y} G_\bullet(v+w-y-z) G'_\bullet(z) G'_\bullet(y) G'_\bullet(t)\,dz\,dy\right]} = \frac{\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[-G_\bullet(t) p_d(\bullet)\right]}{\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[G'_\bullet(t)\right]}$$

Λαμβάνοντας υπόψιν την συνθήκη (2.3), η τελευταία ισότητα μπορεί να γραφεί ως

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[\int_0^{v}\int_{v-y}^{v+w-y} G_\bullet(v+w-y-z) G'_\bullet(z) G'_\bullet(y) G'_\bullet(t)\,dz\,dy\right] \\ &= \mathbb{E}_{P_\Theta}\left[-\int_t^{t+v}\int_{t+v-y}^{t+v+w-y} G_\bullet(t+v+w-y-z) G'_\bullet(z) G'_\bullet(y) p_d(\bullet)\,dz\,dy\right]. \end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας τώρα ως προς v και εφαρμόζοντας το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης έπεται ότι

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[\int_0^w G_\bullet(w-z)G'_\bullet(z)G'_\bullet(v)G'_\bullet(t)dz\right]\\&\quad=\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[-\int_0^w G_\bullet(w-z)G'_\bullet(z)G'_\bullet(t+v)p_d(\bullet)dz\right],\end{aligned}$$

ή ισοδύναμα αν θέσουμε $s:=w-z$ στο πρώτο ολοκλήρωμα έχουμε

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[\int_0^w G_\bullet(s)G'_\bullet(w-s)G'_\bullet(v)G'_\bullet(t)ds\right]\\&\quad=\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[-\int_0^w G_\bullet(w-z)G'_\bullet(z)G'_\bullet(t+v)p_d(\bullet)dz\right].\end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας τώρα ως προς w και εφαρμόζοντας το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης προκύπτει ότι

$$\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[-G_\bullet(w)p_d(\bullet)G'_\bullet(v)G'_\bullet(t)\right]=\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[-G'_\bullet(w)p_d(\bullet)G'_\bullet(t+v)\right].$$

Ολοκληρώνοντας τώρα ως προς t έχουμε

$$\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[-G_\bullet(t)G_\bullet(w)p_d(\bullet)G'_\bullet(v)\right]=\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[-G_\bullet(t+v)G'_\bullet(w)p_d(\bullet)\right].$$

Για $v\to 0$ από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης παίρνουμε ότι

$$\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[G_\bullet(t)G_\bullet(w)\left(p_d(\bullet)\right)^2\right]=\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[-G_\bullet(t)G'_\bullet(w)p_d(\bullet)\right].$$

Παίρνοντας τώρα $v\to t$, από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης έπεται ότι

$$\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[G_\bullet(v)G_\bullet(w)\left(p_d(\bullet)\right)^2\right]=\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[-G_\bullet(v)G'_\bullet(w)p_d(\bullet)\right].$$

Τέλος, αφήνοντας $w\to t$ και από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης έχουμε

$$\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[G_\bullet(t)G_\bullet(v)\left(p_d(\bullet)\right)^2\right]=\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[-G_\bullet(v)G'_\bullet(t)p_d(\bullet)\right].$$

(g) Για κάθε $t>0$ ισχύει

$$\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[\left(G'_\bullet(t)+p_d(\bullet)G_\bullet(t)\right)^2\right]=0. \tag{2.8}$$

Πράγματι, ας σταθεροποιήσουμε ένα αυθαίρετο $t>0$. Από τις σχέσεις (2.6) και (2.7) για $v\to t$ έχουμε

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[\left(G'_\bullet(t)+p_d(\bullet)G_\bullet(t)\right)^2\right]\\&\quad=\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[G'^2_\bullet(t)-G^2_\bullet(t)p_d(\bullet)^2-G_\bullet(2t)p_d(\bullet)^2+p_d(\bullet)^2G^2_\bullet(t)\right].\end{aligned}$$

Επομένως

$$\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[\left(G'_\bullet(t)+p_d(\bullet)G_\bullet(t)\right)^2\right]=\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[G'^2_\bullet(t)-G_\bullet(2t)p_d(\bullet)^2\right]. \tag{2.9}$$

Παραγωγίζοντας τη σχέση (2.3) ως προς v και εφαρμόζοντας το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης παίρνουμε

$$\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[-G'_\bullet(t+v)p_d(\bullet)\right]=\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[G'_\bullet(v)G'_\bullet(t)\right],$$

και άρα αφήνοντας $v\to t$ προκύπτει

$$\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[-G'_\bullet(2t)p_d(\bullet)\right]=\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[G'^2_\bullet(t)\right].$$

Επομένως η σχέση (2.9) γράφεται ως

$$\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[\left(G'_\bullet(t)+p_d(\bullet)G_\bullet(t)\right)^2\right]=\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[-G'_\bullet(2t)p_d(\bullet)-G_\bullet(2t)p_d(\bullet)^2\right]. \tag{2.10}$$

Παίρνοντας $v\to 0$ στην σχέση (2.6) έχουμε ότι

$$\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[G_\bullet(t)p_d(\bullet)^2\right]=\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[-G'_\bullet(t)p_d(\bullet)\right],$$

όπου αντικαθιστώντας το t με $2t$ έχουμε ότι

$$\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[G_\bullet(2t)p_d(\bullet)^2\right]=\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[-G'_\bullet(2t)p_d(\bullet)\right]. \tag{2.11}$$

Επομένως, από τις σχέσεις (2.10) και (2.11) έπεται ότι

$$\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[\left(G'_\bullet(t)+p_d(\bullet)G_\bullet(t)\right)^2\right]=0 \quad \text{για κάθε } \ t>0.$$

(h) Υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $L_2\in\mathfrak{B}_d$, που περιέχει το L, ώστε για κάθε $\theta\notin L_2$ η σ.δ. W να είναι P_θ-εκθετικά κατανεμημένη με παράμετρο $p_d(\theta)$.

Πράγματι, από το βήμα (g) προκύπτει ότι για κάθε $s\in\mathbb{Q}_+\setminus\{0\}$ υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $M_s\in\mathfrak{B}_d$, που περιέχει το L, ώστε για κάθε $\theta\notin M_s$ να ισχύει

$$G'_\theta(s)+p_d(\theta)G_\theta(s)=0. \tag{2.12}$$

Θέτουμε $L_2:=\bigcup_{s\in\mathbb{Q}_+\setminus\{0\}}M_s$ και υποθέτουμε ότι τα $t>0$ και $\theta\notin L_2$ είναι τυχαία. Υπάρχει μία ακολουθία $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στο $\mathbb{Q}_+\setminus\{0\}$ ώστε $t=\lim_{n\to\infty}s_n$. Εφαρμόζοντας την (2.12) έχουμε ότι $G'_\theta(s_n)=-p_d(\theta)G_\theta(s_n)$, κάτι που μαζί με την Υπόθεση 2.2.6 μας δίνει ότι $G'_\theta(t)=\lim_{n\to\infty}G'_\theta(s_n)=-p_d(\theta)G_\theta(t)$. Επομένως, $G_\theta(t)=e^{-p_d(\theta)t}$, ή $(P_\theta)_{W_n}=\mathbf{Exp}\,(p_d(\theta))$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

(i) Θέτουμε $L_*:=L_1\cup L_2$ και συμβολίζουμε πάλι με p_d τον περιορισμό της p_d στο L_*^c. Ορίζουμε $M_*:=p_d(L_*)$ και $r:=p_d^{-1}:p_d\left(L_*^c\right)\longmapsto L_*^c$, καθώς και την οικογένεια $\{Q_{\breve{\theta}}\}_{\breve{\theta}\in\mathbb{R}}$

όπως στο Λήμμα 2.2.3 (για $m = 1$, και p_d, r και L_* στη θέση των h, g και L_0, αντίστοιχα). Τότε, η οικογένεια $\{Q_{\breve{\theta}}\}_{\breve{\theta}\in\mathbb{R}}$ είναι μία φ.δ.π. του P επάνω στο $P_{\breve{\Theta}}$ συνεπής με την $\breve{\Theta}$, και για κάθε $\breve{\theta} \notin M_*$ η σ.δ. W είναι $Q_{\breve{\theta}}$-ανεξάρτητη και $(Q_{\breve{\theta}})_{W_n} = \mathbf{Exp}(\breve{\theta})$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Πράγματι, από το Λήμμα 2.2.3 η οικογένεια $\{Q_{\breve{\theta}}\}_{\breve{\theta}\in\mathbb{R}}$ είναι μία φ.δ.π. του P επάνω στο $P_{\breve{\Theta}}$ συνεπής με την $\breve{\Theta}$ και για κάθε $\breve{\theta} \notin M_*$ λαμβάνοντας υπόψιν τα βήματα (a) και (h) έχουμε ότι η W είναι $Q_{\breve{\theta}}$-ανεξάρτητη και $(Q_{\breve{\theta}})_{W_n} = \mathbf{Exp}(\breve{\theta})$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(j) Η N είναι μία MPP($\breve{\Theta}$).

Πράγματι, από το (i) έχουμε ότι για κάθε $\breve{\theta} \notin M_*$ η απαριθμήτρια σ.δ. N είναι μία $Q_{\breve{\theta}}$-PP($\breve{\theta}$) (βλ. π.χ. [19], Theorem 2.3.4). Επομένως, εφαρμόζοντας το [14], Proposition 4.4, προκύπτει ότι η N είναι μία MPP($\breve{\Theta}$). □

Παρατήρησεις 2.2.8. (a) Η Υπόθεση 2.2.6 είναι μία τροποποίηση της Υπόθεσης (∗) του Huang, καθώς εκεί γίνεται η ισχυρότερη υπόθεση $0 < F'_{h(\theta)}(t) < C$ για κάθε $t > 0$ και $\theta \notin L_h$, όπου η C είναι μία θετική σταθερά, αντί για την $0 < F'_{h(\theta)}(t) < C(h(\theta))$ για κάθε $t > 0$ και $\theta \notin L_h$ για $C \in \mathcal{L}^1(P_{h(\Theta)})$ όπως στην Υπόθεση 2.2.6.
(b) Η απόδειξη του βήματος (f) της Πρότασης 2.2.7 διαφέρει από εκείνη της συνθήκης (16) του Theorem 3 του Huang [11], καθώς το βρήκαμε αδύνατο να ακολουθήσουμε την πρόταση του Huang για το συγκεκριμένο βήμα. Πράγματι, ξεκινώντας από την πιθανότητα $P(\{N_{t-u} = N_t = 1, N_{t+v} = N_{t+v+w} = 2\})$, όπως προτείνει ο Huang, μπορούμε να αποδείξουμε μόνο τη συνθήκη (15) αντί για την συνθήκη (16) του Huang [11], όπως είδαμε και στο βήμα (e) της απόδειξης της Πρότασης 2.2.7.

Το παρακάτω αποτέλεσμα γενικεύει το Lemma 3.5 του [16].

Λήμμα 2.2.9. *Έστω D και h όπως στον Ορισμό 2.2.2 (a), και έστω $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία πραγματικών τ.μ.. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) $\exists\ L_3 \in \sigma(\Theta)_0\ \ \forall\ n \in \mathbb{N}\ [P_{X_n|\Theta} \upharpoonright \mathfrak{B} \times L_3^c = \mathbf{K}_n(h(\Theta)) \upharpoonright \mathfrak{B} \times L_3^c]$;

(ii) $\exists\ \widetilde{L}_3 \in \mathfrak{B}(D)_0\ \ \forall\ n \in \mathbb{N}\ \ \forall\ \theta \in D\setminus\widetilde{L}_3\ [(P_\theta)_{X_n} = \mathbf{K}_n(h(\theta))]$,

όπου $\sigma(\Theta)_0 := \{M \in \sigma(\Theta) : P(M) = 0\}$ *και* $\mathfrak{B}(D)_0 := \{\widetilde{M} \in \mathfrak{B}(D) : P_\Theta(\widetilde{M}) = 0\}$.

Απόδειξη. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα σύνολο $L_3 \in \sigma(\Theta)_0$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να ισχύει

$$P_{X_n|\Theta} \upharpoonright \mathfrak{B} \times L_3^c = \mathbf{K}_n(h(\Theta)) \upharpoonright \mathfrak{B} \times L_3^c.$$

Τότε, για κάθε σταθερά $n \in \mathbb{N}$, $F \in \mathfrak{B}_m$ και $B \in \mathfrak{B}$ έχουμε

$$\int_{\Theta^{-1}(F)} P_{X_n|\Theta}(B, \bullet)dP = \int_{\Theta^{-1}(F)} \mathbf{K}_n(h(\Theta))(B, \bullet)dP,$$

και λαμβάνοντας υπόψιν το [14], Lemma 3.5, προκύπτει ότι

$$\int_F (P_\theta)_{X_n}(B)P_\Theta(d\theta) = \int_F \mathbf{K}_n(h(\theta))(B)P_\Theta(d\theta)$$

Συνεπώς, υπάρχει ένα σύνολο $\widetilde{L}_{n,B} \in \mathfrak{B}(D)_0$ ώστε

$$(P_\theta)_{X_n}(B) = \mathbf{K}_n(h(\theta))(B) \qquad \text{για κάθε } \ \theta \in D\backslash\widetilde{L}_{n,B}. \tag{2.13}$$

Θέτουμε $\widetilde{L}_3 := \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{B\in\mathcal{G}_{\mathfrak{B}}}\widetilde{L}_{n,B}$, όπου $\mathcal{G}_{\mathfrak{B}}$ είναι ένας αριθμήσιμος γεννήτορας της $\mathfrak{B}$ ο οποίος είναι κλειστός ως προς τις πεπερασμένες τομές, και συμβολίζουμε με $\mathcal{D}$ την κλάση όλων των $B \in \mathfrak{B}$ ώστε η συνθήκη (2.13) να ικανοποιείται για κάθε $\theta \in D\backslash\widetilde{L}_3$ και $n \in \mathbb{N}$. Εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι $\mathcal{G}_{\mathfrak{B}} \subseteq \mathcal{D}$ και ότι η $\mathcal{D}$ είναι μία κλάση Dynkin, και άρα από το Θεώρημα A.1 έπεται ότι $\mathcal{D} = \mathfrak{B}$, ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη του (ii).
Χρησιμοποιώντας παρόμοια επιχειρήματα παίρνουμε την αντίστροφη συνεπαγωγή. □

Το αποτέλεσμα που ακολουθεί μας δείχνει πως, αλλάζοντας την παράμετρο μείξης, μπορούμε να μετατρέψουμε μία P-eMRP$(\mathbf{K}(h(\Theta)))$ σε μία P-MRP$(\mathbf{K}(\widetilde{\Theta}))$.

Λήμμα 2.2.10. *Έστω D και h όπως στον Ορισμό 2.2.2 (a) και έστω $\widetilde{\Theta} := h\circ\Theta$. Υποθέτουμε ότι η N είναι μία P-eMRP$(\mathbf{K}(h(\Theta)))$ στον (Ω,Σ,P). Τότε η N είναι μια P-MRP$(\mathbf{K}(\widetilde{\Theta}))$.*

Απόδειξη. Έστω $\{P_\theta\}_{\theta\in D}$, g και $\{Q_{\widetilde{\theta}}\}_{\widetilde{\theta}\in\mathbb{R}^m}$ όπως στο Λήμμα 2.2.3. Σύμφωνα με το Λήμμα 2.2.9, υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $\widetilde{L}_3 \in \mathfrak{B}(D)$ ώστε $(P_\theta)_{W_n} = \mathbf{K}(h(\theta))$ για κάθε $\theta \in D\backslash\widetilde{L}_3$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το $\widetilde{L}_3$ περιέχει το P_Θ-μηδενικό σύνολο L_0 του Λήμματος 2.2.3. Εφαρμόζοντας τώρα το Λήμμα 2.2.3, έπεται ότι η $\{Q_{\widetilde{\theta}}\}_{\widetilde{\theta}\in\mathbb{R}^m}$ είναι μία φ.δ.π. του P επάνω στο $P_{\widetilde{\Theta}}$ συνεπής με την $\widetilde{\Theta}$, και για κάθε $\widetilde{\theta} \in h(D\backslash\widetilde{L}_3)$ η σ.δ. W είναι $Q_{\widetilde{\theta}}$-ανεξάρτητη και $\left(Q_{\widetilde{\theta}}\right)_{W_n} = \mathbf{K}(\widetilde{\theta})$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αλλά το τελευταίο μαζί με το [16], Proposition 3.8, ολοκληρώνει την απόδειξη του λήμματος. □

Το ακόλουθο αποτέλεσμα γενικεύει την Πρόταση 2.2.7.

Θεώρημα 2.2.11. *Έστω D, h όπως στον Ορισμό 2.2.2 (a), έστω L_0 όπως στο Λήμμα 2.2.3, και έστω N μία P-eMRP$(\mathbf{K}(h(\Theta)))$ στον (Ω,Σ,P) που ικανοποιεί μαζί με τα h και $\{P_\theta\}_{\theta\in D}$ την Υπόθεση 2.2.6. Θέτουμε $O_h := L_0 \cup L_h$ και $\widehat{\Theta}(\omega) := (p_h\circ\Theta)(\omega)$ εάν $\omega \in \Theta^{-1}(D\backslash O_h)$, και συμβολίζουμε πάλι με $\widehat{\Theta}$ κάθε μετρήσιμη επέκταση της $\widehat{\Theta}$ από το $\Theta^{-1}(D\backslash O_h)$ στο Ω. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) Η N έχει την πολυωνυμική ιδιότητα.

(ii) Η N έχει την ιδιότητα του Markov.

(iii) Η N είναι μία MPP$(\widehat{\Theta})$.

Απόδειξη. Έστω $\widetilde{\Theta}$ και $\{Q_{\widetilde{\theta}}\}_{\widetilde{\theta}\in\mathbb{R}^m}$ όπως στο Λήμμα 2.2.3. Από το Λήμμα 2.2.10 έπεται ότι η σ.δ. N είναι μία MRP$(\mathbf{K}(\widetilde{\Theta}))$. Για κάθε $\widetilde{\theta}\in\mathbb{R}^m$ και $t\in\mathbb{R}_+$ θέτουμε $F_{\widetilde{\theta}}(t) := Q_{\widetilde{\theta}}(\{W_n \leqslant t\})$ για όλα τα $n\in\mathbb{N}$.

(a) Θέτουμε $V_h := h(D\backslash O_h)$. Τότε $P_{\widetilde{\Theta}}(V_h) = 1$ και για κάθε $\widetilde{\theta}\in V_h$ η συνάρτηση $F_{\widetilde{\theta}}$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο $(0,\infty)$ και $0 < F'_{\widetilde{\theta}}(t) < C(\widetilde{\theta})$ για κάθε $t > 0$.

Πράγματι, σύμφωνα με την Υπόθεση 2.2.6 υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $L_h \in \mathfrak{B}(D)$ ώστε για κάθε $\theta\in D\backslash L_h$ η συνάρτηση $F_{h(\theta)}$ να είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο $(0,\infty)$ και $0 < F'_{h(\theta)}(t) < C(h(\theta))$, και άρα το ίδιο ισχύει για κάθε $\theta\in D\backslash O_h$. Από το Λήμμα 2.2.3 για κάθε $\widetilde{\theta}\in V_h$ η συνθήκη $\left(Q_{\widetilde{\theta}}\right)_{W_n} = \mathbf{K}(\widetilde{\theta})$ ισχύει για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Τότε, για κάθε $\widetilde{\theta}\in V_h$ υπάρχει ακριβώς ένα $\theta\in D\backslash O_h$ ώστε $\widetilde{\theta} = h(\theta)$ και

$$F_{\widetilde{\theta}}(t) = \mathbf{K}(\widetilde{\theta})\left((-\infty,t]\right) = \mathbf{K}\left(h(\theta)\right)\left((-\infty,t]\right) = F_{h(\theta)}(t) \tag{2.14}$$

για κάθε $t\in\mathbb{R}_+$, ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη του (a).

(b) Η συνάρτηση $p_m : V_h \longmapsto \mathbb{R}$ που ορίζεται ως $p_m(\widetilde{\theta}) := \lim_{t\to 0} F'_{\widetilde{\theta}}(t)$ για κάθε $\widetilde{\theta}\in V_h$ είναι θετική και 1-1.

Πράγματι, αφού τα N, h και $\{P_\theta\}_{\theta\in D}$ ικανοποιούν την Υπόθεση 2.2.6, και λαμβάνοντας υπόψιν την συνθήκη (2.14) έχουμε ότι $p_m(\widetilde{\theta}) = \lim_{t\to 0} F'_{h(\theta)}(t) = p_h(\theta) > 0$.

Προφανώς, $\widehat{\Theta}(\omega) = (p_h\circ\Theta)(\omega) = (p_m\circ h\circ\Theta)(\omega) = (p_m\circ\widetilde{\Theta})(\omega)$ για κάθε $\omega\in\Theta^{-1}(D\backslash O_h)$, και λόγω των (a) και (b) προκύπτει ότι τα N και $\{Q_{\widetilde{\theta}}\}_{\widetilde{\theta}\in\mathbb{R}^m}$ ικανοποιούν την Υπόθεση 2.2.6. Επομένως, εφαρμόζοντας την Πρόταση 2.2.7 για $\widetilde{\Theta}$ και p_m στη θέση των Θ και p_d αντίστοιχα, έχουμε τη θέση του θεωρήματος. $\square$

Το ακόλουθο αποτέλεσμα φαίνεται να είναι ανεξάρτητου ενδιαφέροντος καθώς μας εγγυάται την διατήρηση τόσο της ιδιότητας του Markov όσο και της πολυωνυμικής ιδιότητας ως προς τις φ.δ.πιθανότητες $Q_{\widehat{\theta}}$.

Πόρισμα 2.2.12. *Έστω $\{P_\theta\}_{\theta\in D}$, h, N, $F_{h(\theta)}$, p_h και $\widehat{\Theta}$ όπως στο Θεώρημα 2.2.11. Σταθεροποιούμε ένα τυχαίο $A\in\Sigma$ και για κάθε $\widehat{\theta}\in\mathbb{R}$ θέτουμε*

$$Q_{\widehat{\theta}}(A) := \begin{cases} (P_\bullet(A)\circ p_h^{-1})(\widehat{\theta}) & \text{εάν } \widehat{\theta}\in p_h(D\backslash O_h); \\ P(A) & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Τότε η $\{Q_{\widehat{\theta}}\}_{\widehat{\theta}\in\mathbb{R}}$ είναι μία φ.δ.π. του P επάνω στο $P_{\widehat{\Theta}}$ συνεπής με την $\widehat{\Theta}$ και τα ακόλουθα είναι όλα ισοδύναμα:

(i) Η N έχει την ιδιότητα του Markov ως προς το μέτρο P.

(ii) Η N έχει την ιδιότητα του Markov ως προς τα μέτρα $Q_{\widehat{\theta}}$ για $P_{\widehat{\Theta}}$-σ.ο. τα $\widehat{\theta}\in\mathbb{R}$.

(iii) Η N έχει την πολυωνυμική ιδιότητα ως προς τα μέτρα $Q_{\widehat{\theta}}$ για $P_{\widehat{\Theta}}$-σ.ο. τα $\widehat{\theta}\in\mathbb{R}$.

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι από το Λήμμα 2.2.3 η οικογένεια $\{Q_{\widehat{\theta}}\}_{\widehat{\theta}\in\mathbb{R}}$ είναι μία φ.δ.π. του P επάνω στο $P_{\widehat{\Theta}}$ συνεπής με την $\widehat{\Theta}$.

$(i) \Longrightarrow (ii)$: Αφού η N είναι μία P-eMRP($\mathbf{K}(h(\Theta))$), από το Θεώρημα 2.2.11 έπεται ότι η N είναι μία P-MPP($\widehat{\Theta}$), και άρα λαμβάνοντας υπόψιν το [14], Proposition 4.4, η N είναι μία $Q_{\widehat{\theta}}$-PP($\widehat{\theta}$) για $P_{\widehat{\Theta}}$-σ.ο. τα $\widehat{\theta} \in \mathbb{R}$ και επομένως ικανοποιεί την ιδιότητα του Markov ως προς τα μέτρα $Q_{\widehat{\theta}}$ για $P_{\widehat{\Theta}}$-σ.ο. τα $\widehat{\theta} \in \mathbb{R}$.

$(ii) \Longrightarrow (i)$: Αφού η N είναι μία P-eMRP($\mathbf{K}(h(\Theta))$), από το Λήμμα 2.2.10 προκύπτει ότι η N είναι μία P-MRP($\mathbf{K}(\widetilde{\Theta})$). Σταθεροποιούμε ένα αυθαίρετο $A \in \Sigma$ και θέτουμε

$$Q_{\widetilde{\theta}}(A) := \begin{cases} (P_{\bullet}(A) \circ h^{-1})(\widetilde{\theta}) & \text{εάν } \widetilde{\theta} \in V_h \\ P(A) & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

όπου $\widetilde{\theta} := h(\theta)$. Από το Λήμμα 2.2.3 η οικογένεια $\{Q_{\widetilde{\theta}}\}_{\widetilde{\theta}\in\mathbb{R}}$ είναι μία φ.δ.π. του P επάνω στο $P_{\widetilde{\Theta}}$ συνεπής με την $\widetilde{\Theta}$. Εφαρμόζοντας τώρα το [16], Proposition 3.8, προκύπτει ότι υπάρχει ένα $P_{\widetilde{\Theta}}$-μηδενικό σύνολο $U \in \mathfrak{B}_m$ ώστε για κάθε $\widetilde{\theta} \notin U$ η σ.δ. N να είναι μία $Q_{\widetilde{\theta}}$-RP($\mathbf{K}(\widetilde{\theta})$). Για κάθε $\widehat{\theta} \in \mathbb{R}$ θέτουμε

$$R_{\widehat{\theta}}(A) = \begin{cases} Q_{\widetilde{\theta}}(A) & \text{εάν } \widehat{\theta} := p_m(\widetilde{\theta}) \in U_{h,m} := p_m(V_h \cup U^c) \\ P(A) & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Εφαρμόζοντας ξανά το Λήμμα 2.2.3 η οικογένεια $\{R_{\widehat{\theta}}\}_{\widehat{\theta}\in\mathbb{R}}$ είναι μία φ.δ.π. του P επάνω στο $P_{\widehat{\Theta}}$ συνεπής με την $\widehat{\Theta}$, και για κάθε $\widehat{\theta} = p_m(\widetilde{\theta}) \in U_{h,m}$ η σ.δ. W είναι $R_{\widehat{\theta}}$-ανεξάρτητη και $\mathbf{K}(\widehat{\theta}) = (R_{\widehat{\theta}})_{W_n} = (Q_{\widetilde{\theta}})_{W_n} = \mathbf{K}(\widetilde{\theta})$. Επομένως, έχουμε ότι για κάθε $\widehat{\theta} \in U_{h,m}$ η N είναι μία $R_{\widehat{\theta}}$-RP($\mathbf{K}(\widehat{\theta})$). Αλλά, αφού το $p_h(D \backslash O_h)$ περιέχεται στο $U_{h,m}$ έπεται ότι $R_{\widehat{\theta}}(A) = Q_{\widehat{\theta}}(A)$ για κάθε $\widehat{\theta} \in p_h(D \backslash O_h)$. Επομένως, από το [14], Proposition 4.4, έχουμε ότι η N είναι μία P-MPP($\widehat{\Theta}$), και άρα η N έχει την ιδιότητα του Markov ως προς το μέτρο P (cf. e.g. [19], Theorem 4.2.3).

$(ii) \Longrightarrow (iii)$: Αφού $(i) \Longleftrightarrow (ii)$, από το Θεώρημα 2.2.11 προκύπτει ότι ο ισχυρισμός (i) είναι ισοδύναμος με το ότι η N είναι μία P-MPP($\widehat{\Theta}$). Εφαρμόζοντας τώρα το [14], Proposition 4.4, έπεται ότι η N είναι μία $Q_{\widehat{\theta}}$-PP($\widehat{\theta}$) για $P_{\widehat{\Theta}}$-σ.ο. τα $\widehat{\theta} \in \mathbb{R}$, κάτι που συνεπάγεται τον ισχυρισμό (iii).

Η συνεπαγωγή $(iii) \Longrightarrow (ii)$ προκύπτει με έναν εύκολο υπολογισμό. □

Παρατήρησεις 2.2.13. (a) Η Υπόθεση 2.2.6, και πιο συγκεκριμένα το μέρος εκείνο που αφορά την διαφορισιμότητα των συναρτήσεων κατανομής των W_n ως προς τα P_{θ}, είναι ουσιώδης για την ισχύ της Πρότασης 2.2.7 και του Θεωρήματος 2.2.11.

Πράγματι, θεωρούμε την τετριμμένη απαριθμήτρια σ.δ. N που ορίζεται ως $N_t := [t]$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$. Εύκολα μπορεί να δειχθεί ότι για δοσμένο $\theta_0 > 0$ η N είναι μία P-RP($\mathbf{K}(\theta_0)$) με την ιδιότητα του Markov ώστε

$$\mathbf{K}(\theta_0)((-\infty,t]) := \begin{cases} 0 & \text{εάν } \ t<1; \\ 1 & \text{εάν } \ t \geqslant 1, \end{cases}$$

αλλά δεν είναι μια σ.δ. Poisson.

Για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$ ορίζουμε τη συνολοσυνάρτηση $P_\theta : \Sigma \longmapsto [0,1]$ με τύπο $P_\theta(A) := P(A)$ για κάθε $A \in \Sigma$. Εύκολα μπορεί να δει κάποιος ότι η οικογένεια $\{P_\theta\}_{\theta\in\mathbb{R}}$ είναι μία φ.δ.π. του P επάνω στο P_Θ συνεπής με κάθε πραγματική τ.μ. Θ ώστε $P_\Theta(\{\theta_0\}) = 1$, και ότι τα $\{P_\theta\}_{\theta\in\mathbb{R}}$ και N δεν ικανοποιούν την Υπόθεση 2.2.6.

(b) Ένας χαρακτηρισμός των MPPs με κατανομή μείξης U (βλ. Ορισμό 3.1.1 (d)) ως προς την πολυωνυμική ιδιότητα έχει γίνει χωρίς επιπλέον συνθήκες από τους Schmidt & Zocher [20], Theorem 4.2. Ένας τέτοιος χαρακτηρισμός δεν μπορεί να μεταφερθεί στις P-MPP(Θ) χωρίς επιπλέον υποθέσεις καθώς, γενικά δεν είναι εφικτό δοθείσης μία κατανομής U να βρεθεί μία πραγματική τ.μ. Θ στον Ω με $P_\Theta = U$, και μία φ.δ.π. του P επάνω στο U συνεπή με την Θ (συγκ. Zocher [27], σελ. 115). Ωστόσο, μία τέτοια ισοδυναμία γίνεται εφικτή κάτω από τις ουσιώδεις υποθέσεις της Πρότασης 2.2.7 και του Θεωρήματος 2.2.11. Επομένως, το (b) μαζί με το (a) γεννά το ακόλουθο

Ερώτημα 2.2.14. Είναι η υπόθεση της Πρότασης 2.2.7 και του Θεωρήματος 2.2.11 σχετικά με την ύπαρξη μίας φ.δ.π. του P επάνω στο P_Θ συνεπής με το Θ αναγκαία για την ισχύ των συμπερασμάτων τους ;

2.3 Παραδείγματα

Για ό,τι ακολουθεί στη παρούσα ενότητα, θέτουμε $\Omega := \Upsilon^{\mathbb{N}} \times G$ για $G \in \mathfrak{B}_d$ και $\Sigma := \mathfrak{B}(\Omega) = \mathfrak{B}(\Upsilon^{\mathbb{N}}) \otimes \mathfrak{B}(G)$ για λόγους απλούστευσης.

Αρχικά, περιγράφουμε μία μέθοδο κατασκευής μη παθολογικών χ.π. και επεκταμένων MRPs σε αυτόν με παραμέτρους μείξης Θ και h, γενικεύοντας έτσι το Example 5.5 από το [16].

Παράδειγμα 2.3.1. Έστω μ ένα αυθαίρετο μέτρο πιθανότητας επάνω στην $\mathfrak{B}(G)$ και έστω $Q_n(\theta)$ μέτρα πιθανότητας επάνω στην $\mathfrak{B}(\Upsilon)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε σταθερό $\theta \in G$, τα οποία είναι απόλυτα συνεχή ως προς το μέτρο του Lebesgue λ επάνω στην $\mathfrak{B}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μία μετρήσιμη απεικόνιση $h : G \longmapsto \mathbb{R}^m$ ώστε $Q_n(\theta) = \mathbf{K}(h(\theta))$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου για κάθε $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ η συνάρτηση $\mathbf{K}(h(\bullet))(B) : G \longmapsto \mathbb{R}$ είναι $\mathfrak{B}(G)$-μετρήσιμη και $\mathbf{K}(h(\theta))(\Upsilon) = 1$. Επομένως, υπάρχει ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας $\widetilde{P}_\theta := \otimes_{n\in\mathbb{N}} Q_n(\theta)$

επάνω στην $\mathfrak{B}(\Upsilon^{\mathbb{N}})$. Θέτουμε $P(E) := \int \widetilde{P}_\theta(E^\theta)\mu(d\theta)$ για κάθε $E \in \Sigma$, όπου $E^\theta := \{\omega \in \Omega : (\omega, \theta) \in E\}$ είναι η θ-τομή του E, και $P_\theta := \widetilde{P}_\theta \otimes \delta_\theta$ για κάθε $\theta \in G$, όπου δ_θ είναι το μέτρο του Dirac στο θ. Τότε το P είναι ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στη Σ και η $\{\widetilde{P}_\theta\}_{\theta\in G}$ είναι μία φ.δ.π. γινόμενο επάνω στην $\mathfrak{B}(\Upsilon^{\mathbb{N}})$ (βλ. [25], Definition 1.1 για τον ορισμό και τις ιδιότητές της). Επομένως, σύμφωνα με το [15], Proposition 2.5, η $\{P_\theta\}_{\theta\in G}$ είναι μία φ.δ.π. του P επάνω στο μ συνεπής με την π_G (συγκ. [16], Example 5.5).

Θέτοντας $\Theta := \pi_G$ έχουμε $P_\Theta = \mu$. Θέτουμε $W_n := \pi_n$, όπου π_n είναι η κανονική προβολή από τον Ω στον Υ, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $W := \{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Τότε η W είναι P_θ-ανεξάρτητη για κάθε $\theta \in G$, το οποίο μαζί με το [14], Lemma 4.1, μας δίνει ότι η W είναι P-υπό συνθήκη ανεξάρτητη. Επιπλέον, έχουμε ότι $(P_\theta)_{W_n} = Q_n(\theta) = \mathbf{K}(h(\theta))$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\theta \in G$. Το τελευταίο μαζί με το Λήμμα 2.2.9 μας δίνει ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η ισότητα $P_{W_n|\Theta} = \mathbf{K}(h(\Theta))$ ισχύει $P \upharpoonright \sigma(\Theta)$-σ.β.. Θέτουμε $T_n := \sum_{k=1}^{n} W_k$ για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ και $T := \{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, και έστω $N := \{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ η απαριθμήτρια σ.δ. που επάγεται από την T με $N_t := \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{T_n\leqslant t\}}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$. Συνεπώς, σύμφωνα με τον Ορισμό 2.2.2 (a), η N είναι μία P-eMRP$(\mathbf{K}(h(\Theta)))$.

Στα επόμενα παραδείγματα δείχνουμε ότι υπάρχουν μη παθολογικοί χ.π. που ικανοποιούν όλες τις υποθέσεις του Θεωρήματος 2.2.11, το οποίο μας επιτρέπει να εξετάσουμε αν μία P-eMRP$(\mathbf{K}(h(\Theta)))$ είναι μία διαδικασία Markov ή αν έχει την πολυωνυμική ιδιότητα.

Παραδείγματα 2.3.2. **(a)** Έστω $G := \Upsilon$, έστω $\mu := \mathbf{Ga}(\alpha, \beta)$, με $\alpha, \beta > 0$, ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στην $\mathfrak{B}(\Upsilon)$, και έστω $h : \Upsilon \longmapsto \mathbb{R}$ μία συνάρτηση που ορίζεται ως $h(\theta) := a\theta + b$ για κάθε $\theta > 0$, όπου $a > 0$ και $b \geqslant 0$ σταθερές. Σταθεροποιούμε ένα τυχαίο $\theta \in \Upsilon$ και ορίζουμε τα μέτρα πιθανότητας $Q_n(\theta)$ επάνω στην $\mathfrak{B}(\Upsilon)$ με $Q_n(\theta) := \mathbf{Exp}(h(\theta))$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από το Παράδειγμα 2.3.1 έπεται ότι υπάρχει μία απεικόνιση $\Theta := \pi_\Upsilon$, ένα μέτρο πιθανότητας P, μία φ.δ.π. $\{P_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ του P επάνω στο $P_\Theta = \mu$ συνεπής με την Θ, και μία απαριθμήτρια σ.δ. N που είναι μία P-eMRP$(\mathbf{K}(h(\Theta)))$ ώστε η επαγόμενη σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων W να ικανοποιεί τη συνθήκη $(P_\theta)_{W_n} = Q_n(\theta)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Ορίζουμε την απεικόνιση $C \in \mathcal{L}^1(P_{h(\Theta)})$ με τύπο $C(h(\theta)) := h(\theta)$ για κάθε $\theta \in \Upsilon$, και για κάθε σταθερό $\theta \in \Upsilon$ ορίζουμε την πυκνότητα $f_{h(\theta)} := F'_{h(\theta)}$ με τύπο $f_{h(\theta)}(t) := h(\theta) \cdot e^{-h(\theta)t}$ για κάθε $t > 0$. Προφανώς, για κάθε σταθερό $\theta \in \Upsilon$ η πυκνότητα $f_{h(\theta)}$ φράσεται από την $C(h(\theta))$, και η συνάρτηση $p_h : \Upsilon \longmapsto \mathbb{R}$ που ορίζεται ως $p_h(\theta) := \lim_{t\to 0} f_{h(\theta)}(t) = h(\theta)$ για κάθε $\theta \in \Upsilon$ είναι θετική και 1-1. Επομένως, τα $\{P_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$, N και h ικανοποιούν όλες τις υποθέσεις του Θεωρήματος 2.2.11.

Θέτουμε $\widehat{\Theta} := p_h \circ \Theta = h \circ \Theta = a\Theta + b$ και $Q_{\widehat{\theta}}(E) := \left(P_\bullet(E) \circ p_h^{-1}\right)(\widehat{\theta})$ για κάθε $\widehat{\theta} > b$ και $E \in \Sigma$. Αφού $p_h = h$ έπεται ότι $\widehat{\Theta} = \widetilde{\Theta}$ και $Q_{\widehat{\theta}} = Q_{\widetilde{\theta}}$ για κάθε $\widehat{\theta} = p_h(\theta) = h(\theta) = \widetilde{\theta}$, $\theta \in \Upsilon$.

Από το Λήμμα 2.2.3 έπεται ότι η $\{Q_{\widehat{\theta}}\}_{\widehat{\theta}>b}$ είναι μία φ.δ.π. του P επάνω στο $P_{\widehat{\Theta}}$ συνεπής με την $\widehat{\Theta}$, η συνθήκη $\left(Q_{\widehat{\theta}}\right)_{W_n} = \mathbf{Exp}(\widehat{\theta})$ ικανοποιείται για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\widehat{\theta} > b$, και η W

είναι $Q_{\widehat{\theta}}$-ανεξάρτητη. Από το τελευταίο προκύπτει ότι η N είναι μία $Q_{\widehat{\theta}}$-PP$(\widehat{\theta})$ για κάθε $\widehat{\theta} > b$ (βλ. π.χ. [19], Theorem 2.3.4). Επομένως, σύμφωνα με το [14], Proposition 4.4, έχουμε ότι η N είναι μία P-MPP$(\widehat{\Theta})$. Από το τελευταίο μαζί με το Θεώρημα 2.2.11, προκύπτει ότι η N ικανοποιεί κάθε έναν από τους ισοδύναμους ισχυρισμούς (i), (ii) και (iii) του Θεωρήματος 2.2.11.

(b) Έστω G και μ όπως στο (a) και έστω $h : \Upsilon \longmapsto \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $h(\theta) := \frac{1}{\theta}$ για κάθε $\theta \in \Upsilon$. Σταθεροποιούμε ένα τυχαίο $\theta \in \Upsilon$ και ορίζουμε τα μέτρα πιθανότητας $Q_n(\theta)$ επάνω στην $\mathfrak{B}(\Upsilon)$ με $Q_n(\theta) := \mathbf{Par}(h(\theta), 1)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από το Παράδειγμα 2.3.1 έπεται ότι υπάρχει μία απεικόνιση $\Theta := \pi_\Upsilon$, ένα μέτρο πιθανότητας P, μία φ.δ.π. $\{P_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ του P επάνω στο $P_\Theta = \mu$ συνεπής με την Θ, και μία απαριθμήτρια σ.δ. N που είναι μία P-eMRP$(\mathbf{K}(h(\Theta)))$ τέτοια ώστε η επαγόμενη σ.δ. των ενδιάμεσων χρόνων W να ικανοποιεί τη συνθήκη $(P_\theta)_{W_n} = Q_n(\theta)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Ορίζουμε την απεικόνιση $C \in \mathcal{L}^1(P_{h(\Theta)})$ με $C(h(\theta)) := \theta$ για κάθε $\theta \in \Upsilon$, και για κάθε σταθερό $\theta \in \Upsilon$ ορίζουμε την πυκνότητα $f_{h(\theta)} := F'_{h(\theta)}$ με $f_{h(\theta)}(t) := \theta \cdot \left(\frac{1/\theta}{1/\theta + t}\right)^2$ για κάθε $t > 0$. Προφανώς, για κάθε σταθερό $\theta \in \Upsilon$, η πυκνότητα $f_{h(\theta)}$ είναι φραγμένη από το $C(h(\theta))$, και η συνάρτηση $p_h : \Upsilon \longmapsto \mathbb{R}$ με $p_h(\theta) := \lim_{t\to 0} f_{h(\theta)}(t) = \theta$ για κάθε $\theta \in \Upsilon$, είναι θετική και 1-1. Επομένως τα $\{P_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$, N και h ικανοποιούν όλες τις υποθέσεις του Θεωρήματος 2.2.11.

Θέτουμε $\widehat{\Theta} := p_h \circ \Theta$ και $Q_{\widehat{\theta}}(E) := \left(P_\bullet(E) \circ p_h^{-1}\right)(\widehat{\theta})$ για κάθε $\widehat{\theta} > 0$ και $E \in \Sigma$. Αφού $p_h = id_\Upsilon$, έχουμε ότι $\widehat{\Theta} = \Theta$ και $Q_{\widehat{\theta}} = P_\theta$ για κάθε $\widehat{\theta} = \theta \in \Upsilon$.

Υποθέτουμε, αν είναι δυνατόν, ότι η N είναι μία σ.δ. Markov. Από το Θεώρημα 2.2.11 έπεται ότι η N είναι μία P-MPP$(\widehat{\Theta})$ ή ισοδύναμα ότι $(Q_{\widehat{\theta}})_{W_n} = \mathbf{Exp}(\widehat{\theta})$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και η W είναι $Q_{\widehat{\theta}}$-ανεξάρτητη για $P_{\widehat{\Theta}}$-σ.ο. τα $\widehat{\theta} > 0$ (βλ. [14], Propositions 4.4 και 4.5). Επιπλέον, αφού $P_\theta(E) = Q_{\widehat{\theta}}(E)$ για κάθε $E \in \Sigma$, προκύπτει ότι

$$\mathbf{Par}(h(\theta), 1) = (P_\theta)_{W_n} = (Q_{\widehat{\theta}})_{W_n} = \mathbf{Exp}(\theta),$$

που είναι αδύνατο.

Κεφάλαιο 3

Ισοδυναμία Ορισμών Μεικτών Διαδικασιών Poisson

Από όσο γνωρίζουμε, υπάρχουν έξι διαφορετικοί ορισμοί για τις MPPs. Ο πρώτος, μέσω διαδικασιών γεννήσεως, οφείλεται στον Lundberg, βλ. Ορισμό 3.1.1 (a), και είναι ο κλασσικός ορισμός που χρησιμοποιείται στη Θεωρία Κινδύνου, ενώ ο δεύτερος είναι εκείνος του Bühlmann, βλ. Ορισμό 3.1.1 (b). Ένας τρίτος ορισμός είναι εκείνος της *τυπικής MPP με παράμετρο μία θετική πραγματική τ.μ.* (βλ. π.χ. [10], Definition 4.3). Ένας ακόμα ορισμός είναι εκείνος των MPPs με παραμέτρους μείξης μία οικογένεια $\{P_{\tilde{y}}\}_{\tilde{y}\in\tilde{\Upsilon}}$ μέτρων πιθανότητας επάνω στη Σ και με ένα μέτρο πιθανότητας ν επάνω στη σ-άλγεβρα $\sigma(\{P_\bullet(E) : E \in \Sigma\})$ (συμβ. HMPP($\{P_{\tilde{y}}\}_{\tilde{y}\in\tilde{\Upsilon}}, \nu$) για συντομία) και οφείλεται στον Huang [11], βλ. Ορισμό 3.1.1 (c). Οι άλλοι δύο ορισμοί αναφέρονται στις περιπτώσεις μίας MPP(Θ) και μίας MPP με κατανομή μείξης U (MPP(U) για συντομία), βλ. Ορισμό 3.1.1 (d).

Η ισοδυναμία των ορισμών του Lundberg με εκείνον του Bühlmann οφείλεται στον P. Albrecht (βλ. [2], Satz 6), ενώ η ισοδυναμία των ορισμών της τυπικής MPP με παράμετρο μία θετική πραγματική τυχαία μεταβλητή και της MPP(Θ) οφείλεται στον R. F. Serfozo (βλ. [21], σελ. 290 μαζί με [22], Theorem 3.1).

Στο παρόν κεφάλαιο, πρώτα αποδεικνύουμε ότι μία MPP σύμφωνα με τον Bühlmann είναι ισοδύναμη με μία MPP(U), βλ. Πρόταση 3.1.4. Στη συνέχεια εξετάζουμε την ισοδυναμία των ορισμών των MPP(Θ), MPP(U) και HMPP($\{P_{\tilde{y}}\}_{\tilde{y}\in\tilde{\Upsilon}}, \nu$). Εύκολα κανείς μπορεί να δει ότι μία MPP(Θ) είναι πάντα μία MPP(U). Αντιθέτως, ο αντίστροφος ισχυρισμός δεν φαίνεται να είναι γενικά αληθής, καθώς δεν είναι πάντα εφικτό (δοθείσης μίας MPP(U)) να κατασκευαστεί μία πραγματική τυχαία μεταβλητή Θ ώστε $P_\Theta = U$, και μία φ.δ.π. του P επάνω στο U συνεπής με την Θ.

3.1 Η Ισοδυναμία των Ορισμών

Ένα ζευγάρι $(k,r) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{R}_+$ καλείται **αποδεκτό (admissible)** (βλ. [19], σελ. 45-46) εάν είτε $(k,r) = (0,0)$ είτε $(k,r) \in \mathbb{N}_0 \times \Upsilon$. Επιπλέον, αν $\mathcal{A}$ είναι το σύνολο που αποτελείται από όλα τα στοιχεία της μορφής $(k,n,r,t) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ ώστε το (k,r) να είναι αποδεκτό, $k \leqslant n$, και $r \leqslant t$, μία απεικόνιση $p : \mathcal{A} \longmapsto [0,1]$ είναι ένας **κανόνας μετάβασης (transition rule)** για την N αν ικανοποιεί τη σχέση $\sum_{n=k}^{\infty} p(k,n,r,t) \leqslant 1$ για κάθε αποδεκτό ζεύγος (k,r) και για κάθε $t \in [r,\infty)$ καθώς και

$$p(k,n,r,t) = P(\{N_t = n\} \mid \{N_r = k\})$$

για κάθε $(k,n,r,t) \in \mathcal{A}$ με $P(\{N_r = k\}) > 0$. Σε αυτή την περίπτωση οι $p_{k,n}(r,t) := p(k,n,r,t)$ ονομάζονται οι **πιθανότητες μετάβασης** της απαριθμήτριας σ.δ. N ως προς τον κανόνα μετάβασης p.

Ορισμοί 3.1.1. Μία απαριθμήτρια σ.δ. N είναι μία:
(a) διαδικασία γέννησης με εντάσεις μετάβασης (transition intensities) $q_n(t)$, αν είναι μία διαδικασία Markov με πιθανότητες μετάβασης $p_{m,n}(s,t)$, για $(m,n,s,t) \in \mathcal{A}$, και για κάθε $t > 0$ και $n, m \in \mathbb{N}$ ικανοποιεί τις συνθήκες

$$p_{m,n}(t,t+h) = \begin{cases} 1 - q_m(t) \cdot h + o(h) & \text{εάν} \;\; n = m; \\ q_m(t) \cdot h + o(h) & \text{εάν} \;\; n = m+1; \\ o(h) & \text{εάν} \;\; n > m+1, \end{cases} \tag{BP}$$

καθώς $h \downarrow 0$, όπου $0 \leqslant q_m(t) < \infty$, $q_m(t) := -q_{m,m}(t) = q_{m,m+1}(t)$ για κάθε $t > 0$ (σύγκρινε με [2], σελ. 241). Μία απαριθμήτρια σ.δ. N είναι μία **Lundberg-MPP με κατανομή μείξης** U επάνω στην $\mathfrak{B}(\Upsilon)$ (συμβ. P-LMPP(U) για συντομία), εάν η N είναι μία διαδικασία γέννησης που ικανοποιεί τη συνθήκη

$$P(\{N_t = n\}) = \int_0^\infty e^{-t\theta} \cdot \frac{(t\theta)^n}{n!} \, U(d\theta) \tag{3.1}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $t \in \mathbb{R}_+$ (βλ. π.χ. [2], σελ. 241).

(b) Bühlmann-MPP με κατανομή μείξης U επάνω στην $\mathfrak{B}(\Upsilon)$ (συμβ. P-BMPP(U) για συντομία), εάν υπάρχει μία οικογένεια μέτρων πιθανότητας $\{P_\theta\}_{\theta>0}$ ώστε η N να είναι μία P_θ-PP(θ) για κάθε $\theta > 0$ και να ισχύει

$$P(B) = \int_0^\infty P_\theta(B) \, U(d\theta) \quad \text{για κάθε} \quad B \in \Sigma$$

(βλ. π.χ. [2], page 241).

(c) MPP με παραμέτρους μείξης την οικογένεια $\{P_{\widetilde{y}}\}_{\widetilde{y}\in\widetilde{\Upsilon}}$ **και το** ν (συμβ. P-HMPP$(\{P_{\widetilde{y}}\}_{\widetilde{y}\in\widetilde{\Upsilon}},\nu)$ για συντομία, εάν για κάθε $r\in\mathbb{N}$ και για όλα τα $w_1,\ldots,w_r>0$ η συνθήκη

$$P\Big(\bigcap_{k=1}^{r}\{W_k\leqslant w_k\}\Big)=\int\prod_{k=1}^{r}P_{\widetilde{y}}(\{W_k\leqslant w_k\})\,\nu(d\widetilde{y})$$

να ισχύει, όπου $\{P_{\widetilde{y}}\}_{\widetilde{y}\in\widetilde{\Upsilon}}$ είναι μία οικογένεια μέτρων πιθανότητας επάνω στην Σ και το ν είναι ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στην $B(\Sigma):=B(\widetilde{\Upsilon},\Sigma):=\sigma(\{P_{\bullet}(E):E\in\Sigma\})$ ώστε η W να είναι $P_{\widetilde{y}}$-ανεξάρτητη και $(P_{\widetilde{y}})_{W_n}=\mathbf{Exp}\,(\alpha(\widetilde{y}))$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και για ν-σ.ο. τα $\widetilde{y}\in\widetilde{\Upsilon}$, όπου α είναι μία θετική μετρήσιμη συνάρτηση στον $\mathbb{R}$ (βλ. [11], σελ. 2).

(d) MPP με κατανομή μείξης U επάνω στην $\mathfrak{B}(\Upsilon)$ (συμβ. P-MPP(U) για συντομία) εάν η σχέση

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{r}\{N_{t_j}-N_{t_{j-1}}=\kappa_j\}\right)=\int_0^{\infty}\prod_{j=1}^{r}e^{-\theta(t_j-t_{j-1})}\cdot\frac{\big(\theta(t_j-t_{j-1})\big)^{\kappa_j}}{\kappa_j!}\,U(d\theta) \tag{3.2}$$

ικανοποιείται για κάθε $r\in\mathbb{N}$ και $t_0,t_1,\ldots,t_r\in\mathbb{R}_+$ με $0=t_0<t_1<\ldots<t_r$ και για κάθε $\kappa_j\in\mathbb{N}_0$, $j\in\{1,\ldots,r\}$ (βλ. π.χ. [20], σελ. 9).

Το πρώτο αποτέλεσμα της ενότητας δείχνει ότι κάτω από μία ασθενή συνθήκη κάθε P-MPP(Θ) είναι μία P-HMPP$(\{P_{\widetilde{y}}\}_{\widetilde{y}\in\widetilde{\Upsilon}},\nu)$.

Πρόταση 3.1.2. *Έστω Θ μία πραγματική τυχαία μεταβλητή ώστε η N να είναι μία P-MPP(Θ), και ας υποθέσουμε ότι η $\{R_\theta\}_{\theta\in\mathbb{R}}$ είναι μία φ.δ.π. του P επάνω στο P_Θ συνεπής με την Θ. Τότε η N είναι μία P-HMPP$(\{R_\theta\}_{\theta\in\mathbb{R}},P_\Theta)$.*

Απόδειξη. Για κάθε $r\in\mathbb{N}$ και για όλα τα $w_1,\ldots,w_r\in(0,\infty)$ έχουμε

$$\begin{aligned}P\left(\bigcap_{k=1}^{r}\{W_k\leqslant w_k\}\right)&=\int_\Omega P\left(\bigcap_{k=1}^{r}\{W_k\leqslant w_k\}\mid\Theta\right)dP\\&=\int_{(0,\infty)}R_\theta\left(\bigcap_{k=1}^{r}\{W_k\leqslant w_k\}\right)P_\Theta(d\theta)\\&=\int_{(0,\infty)}\prod_{k=1}^{r}(1-e^{-\theta w_k})\,P_\Theta(d\theta),\end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισότητα έπεται από το [14], Lemma 3.5, ενώ η τρίτη ισότητα έπεται από το [14], Proposition 4.4, μαζί με το [19], Theorem 2.3.4. □

Για να διατυπώσουμε το επόμενο αποτέλεσμα χρειαζόμαστε το ακόλουθο βοηθητικό λήμμα. Γι'αυτό το λόγο υπενθυμίζεται ότι μία απαριθμήτρια σ.δ. N ονομάζεται **φυσιολογική (regular)**, εάν υπάρχει ένας κανόνας μετάβασης p και μία ακολουθία $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συνεχών συναρτήσεων από τον $\mathbb{R}_+$ στον Υ ώστε για κάθε αποδεκτό ζευγάρι (n,t) να ισχύουν οι συνθήκες:

(r1) $P(\{N_t = n\}) > 0$,

(r2) η συνάρτηση $\mathbb{R}_+ \longmapsto [0,1] : h \longmapsto p_{n,n}(t, t+h)$ είναι συνεχής,

(r3) $\lim_{h\to 0} \frac{1-p_{n,n}(t,t+h)}{h} = q_n(t) = \lim_{h\to 0} \frac{p_{n,n+1}(t,t+h)}{h}$

(βλ. [19], σελ. 48).

Λήμμα 3.1.3. *Για μία απαριθμήτρια σ.δ. N τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

(i) η N είναι μία διαδικασία γεννήσεως με συνεχείς εντάσεις μετάβασης $q_n(t)$;

(ii) η N είναι μία φυσιολογική διαδικασία Markov.

Απόδειξη. $(i) \Longrightarrow (ii)$: Αφού η N είναι μία διαδικασία γέννησης έπεται ότι θα είναι μία διαδικασία Markov, και επομένως $P(\{N_t = n\}) > 0$ για κάθε αποδεκτό ζευγάρι (n, t). Για κάθε $(n, n, s, t) \in \mathcal{A}$ και $u > 0$, χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Chapman-Kolmogorov μαζί με τις συνθήκες (BP) έχουμε

$$\lim_{u\to 0^+} p_{n,n}(s, t+u) = \lim_{u\to 0^+} [p_{n,n}(s,t) \cdot p_{n,n}(t, t+u)] = p_{n,n}(s,t),$$

κάτι που αποδεικνύει τη δεξιά συνέχεια της συνάρτησης $t \longmapsto p_{n,n}(s,t)$. Πάλι από τις εξισώσεις Chapman-Kolmogorov έχουμε ότι

$$p_{n,n}(s,t) = p_{n,n}(s, t-u) \cdot p_{n,n}(t-u, t),$$

που μαζί με τις συνθήκες (BP) και την συνέχεια των $q_n(t)$ μας δίνει

$$\lim_{u\to 0^+} p_{n,n}(s, t-u) = \lim_{u\to 0^+} \frac{p_{n,n}(s,t)}{p_{n,n}(t-u,t)} = \frac{p_{n,n}(s,t)}{\lim_{u\to 0^+}[1 - q_n(t-u)\cdot u + o(u)]} = p_{n,n}(s,t),$$

αποδεικνύοντας έτσι και την αριστερή συνέχεια της συνάρτησης $t \longmapsto p_{n,n}(s,t)$. Επομένως, η συνάρτηση $t \longmapsto p_{n,n}(s,t)$ είναι συνεχής, και άρα η συνάρτηση $h \longmapsto p_{n,n}(t, t+h)$ είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $p_{n,n}(t, \bullet) : \mathbb{R}_+ \longmapsto [0,1]$ και $f : \Upsilon \longmapsto \mathbb{R}_+$ με $f(h) := t + h$ για κάθε $h > 0$. Απομένει να δείξουμε ότι ισχύει και η συνθήκη (r3), κάτι που έπεται άμεσα από τις συνθήκες (BP), αφού για $n = m$ και $n = m+1$ προκύπτει ότι $q_m(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1-p_{m,m}(t,t+h)}{h}$ και $q_m(t) = \lim_{h\to 0} \frac{p_{m,m+1}(t,t+h)}{h}$ αντίστοιχα, ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη του ισχυρισμού (ii).

$(ii) \Longrightarrow (i)$: Αφού η N είναι μία διαδικασία Markov, είναι αρκετό να δείξουμε ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες (BP). Είναι προφανές ότι οι πρώτες δύο συνθήκες είναι άμεση συνέπεια της συνθήκης (r3) και επομένως έχουμε μόνο να αποδείξουμε ότι ισχύει η σχέση $\lim_{h\to 0} p_{m,n}(t, t+h) = 0$ για κάθε $n > m+1$.

Πράγματι, αφού η N είναι μία διαδικασία Markov έπεται ότι $\sum_{n\in\mathbb{N}} p_{m,n}(t,t+h) = 1$ για κάθε σταθερό $m \in \mathbb{N}$ και άρα

$$\sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\{m,m+1\}} \frac{p_{m,n}(t,t+h)}{h} = \frac{1-p_{m,m}(t,t+h)}{h} - \frac{p_{m,m+1}(t,t+h)}{h}$$

δηλαδή

$$\sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\{m,m+1\}} \lim_{h\to 0} \frac{p_{m,n}(t,t+h)}{h} = 0$$

επομένως

$$\lim_{h\to 0} \frac{p_{m,n}(t,t+h)}{h} = 0 \quad \text{for any} \quad n \in \mathbb{N}\setminus\{m,m+1\}.$$

Συνεπώς, $p_{m,n}(t,t+h) = o(h)$ για κάθε $n > m+1$ καθώς $h \downarrow 0$, ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη του ισχυρισμού (i). □

Πρόταση 3.1.4. *Για μία απαριθμήτρια σ.δ. N τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) Υπάρχει μία κατανομή πιθανότητας U επάνω στην $\mathfrak{B}(\Upsilon)$ ώστε η N να είναι μία P-LMPP(U).

(ii) Υπάρχει μία οικογένεια μέτρων πιθανότητας $\{P_\theta\}_{\theta>0}$ επάνω στην Σ και μία κατανομή πιθανότητας U επάνω στην $\mathfrak{B}(\Upsilon)$ ώστε η N να είναι μία P-BMPP(U).

(iii) Υπάρχει μία κατανομή πιθανότητας U επάνω στην $\mathfrak{B}(\Upsilon)$ ώστε η N να είναι μία P-MPP(U).

Απόδειξη. Η ισοδυναμία των ισχυρισμών (i) και (ii) έπεται από το [2], Satz 6, ενώ η συνεπαγωγή $(ii) \Longrightarrow (iii)$ είναι άμεση.

$(iii) \Longrightarrow (i)$: Αφού η N είναι μία P-MPP(U) έπεται από το [27], Corollary 3.1.2 και Theorem 3.4.2, ότι η N είναι μία κανονική διαδικασία Markov, και άρα από το Λήμμα 3.1.3 θα είναι μία διαδικασία γεννήσεως. Επιπλέον, από τη συνθήκη (iii) έπεται άμεσα η συνθήκη (3.1) του Ορισμού 3.1.1 (a), ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη της πρότασης. □

Για το υπόλοιπο αυτού του κεφαλαίου, εκτός και αν αναφέρεται διαφορετικά, η Θ είναι μία θετική πραγματική τυχαία μεταβλητή στον Ω.

Υπόθεση 3.1.5. Για δοσμένη απαριθμήτρια σ.δ. N υπάρχει μία πραγματική τυχαία μεταβλητή Θ στον Ω και μία φ.δ.π. $\{P_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ του P επάνω στο P_Θ συνεπής με την Θ που ικανοποιεί μαζί με την N την Υπόθεση 2.2.6.

Θεώρημα 3.1.6. *Για μία απαριθμήτρια σ.δ. N θεωρούμε τους ακόλουθους ισχυρισμούς:*

(i) Υπάρχει μία πραγματική τυχαία μεταβλητή $\breve{\Theta}$ στον Ω ώστε η N να είναι μία P-MPP($\breve{\Theta}$).

(ii) Υπάρχει μία οικογένεια $\{P_{\widetilde{y}}\}_{\widetilde{y}\in\widetilde{\Upsilon}}$ μέτρων πιθανότητας επάνω στην Σ και ένα μέτρο πιθανότητας ν επάνω στην $B(\Sigma)$ ώστε η N να είναι μία P-HMPP($\{P_{\widetilde{y}}\}_{\widetilde{y}\in\widetilde{\Upsilon}}, \nu$).

(iii) Υπάρχει μία πραγματική τυχαία μεταβλητή $\breve{\Theta}$ στον Ω και μία φ.δ.π. $\{Q_{\breve{\theta}}\}_{\breve{\theta}\in\mathbb{R}}$ του P επάνω στο $P_{\breve{\Theta}}$ συνεπής με την $\breve{\Theta}$ ώστε η N να είναι μία $Q_{\breve{\theta}}$-PP($\breve{\theta}$) για $P_{\breve{\Theta}}$-σ.ο. τα $\breve{\theta}\in\mathbb{R}$.

(iv) Υπάρχει μία κατανομή πιθανότητας U επάνω στην $\mathfrak{B}(\Upsilon)$ ώστε η N να είναι μία P-MPP(U).

Τότε $(iii) \Longrightarrow (i) \Longrightarrow (iv) \Longrightarrow (ii)$.
Επιπλέον, αν το P είναι τέλειο και η Σ είναι αριθμήσιμα παραγόμενη τότε οι ισχυρισμοί (i) και (iii) είναι ισοδύναμοι.
Αν επιπλέον ισχύει η Υπόθεση 3.1.5, τότε όλοι οι ισχυρισμοί (i) έως (iv) είναι ισοδύναμοι.

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι η συνεπαγωγή $(iii) \Longrightarrow (i)$ είναι άμεση από το [14], Proposition 4.4, ενώ η συνεπαγωγή $(i) \Longrightarrow (iv)$ έπεται μετά από κάποιους εύκολους υπολογισμούς.

$(iv) \Longrightarrow (ii)$: Αν ισχύει ο ισχυρισμός (iv), από την Πρόταση 3.1.4 έπεται ότι η N είναι μία P-BMPP(U), και άρα υπάρχει μία οικογένεια μέτρων πιθανότητας $\{P_\theta\}_{\theta>0}$ επάνω στην Σ ώστε η N να είναι μία P_θ-PP(θ) για κάθε $\theta > 0$ και η $\{P_\theta\}_{\theta>0}$ να είναι μία φ.δ.π. του P επάνω στο P_Θ. Το τελευταίο μας δίνει ότι για κάθε $r\in\mathbb{N}$ και για όλα τα $w_1,\ldots,w_r > 0$ η συνθήκη

$$P\Big(\bigcap_{k=1}^{r}\{W_k \leqslant w_k\}\Big) = \int \prod_{k=1}^{r} P_\theta(\{W_k \leqslant w_k\})\, P_\Theta(d\theta)$$

ισχύει (βλ. π.χ. [19], Theorem 2.3.4). Θέτοντας $\nu := P_\Theta \upharpoonright B(\Sigma)$ προκύπτει ο ισχυρισμός (ii).

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το μέτρο P είναι τέλειο και ότι η Σ είναι αριθμήσιμα παραγόμενη. Σε αυτή την περίπτωση για κάθε πραγματική τυχαία μεταβλητή $\breve{\Theta}$ στον Ω υπάρχει πάντα μία φ.δ.π. $\{Q_{\breve{\theta}}\}_{\breve{\theta}\in\mathbb{R}}$ του P επάνω στο $P_{\breve{\Theta}}$ συνεπής με την $\breve{\Theta}$ (βλ. [6], Theorems 6 και 3). Επομένως, η ισοδυναμία $(i) \Longleftrightarrow (iii)$ έπεται από το [14], Proposition 4.4.

Υποθέτουμε επιπλέον ότι η Υπόθεση 3.1.5 ισχύει.

$(ii) \Longrightarrow (i)$: Αν ισχύει ο ισχυρισμός (ii) έπεται ότι η N είναι μία $P_{\widetilde{y}}$-PP($\alpha(\widetilde{y})$) για ν-σ.ο. τα $\widetilde{y}\in\widetilde{\Upsilon}$. Εφαρμόζοντας το [19], Lemma 2.3.1, συμπεραίνουμε ότι για ν-σ.ο. τα $\widetilde{y}\in\widetilde{\Upsilon}$ η ισότητα

$$P_{\widetilde{y}}\Big(\bigcap_{j=1}^{r}\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = n_j\}\Big) = \frac{n!}{\prod_{j=1}^{r} n_j!}\cdot\prod_{j=1}^{r}\Big(\frac{t_j - t_{j-1}}{t_r}\Big)^{n_j}\cdot P_{\widetilde{y}}(\{N_{t_r} = n\}) \tag{3.3}$$

ικανοποιείται για κάθε $r \in \mathbb{N}$, κάθε $t_0, t_1, \ldots, t_r \in \mathbb{R}_+$ με $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_r$ και κάθε $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}_0$ ώστε $\sum_{j=1}^{r} n_j = n$. Από την τελευταία σχέση έπεται για ν-σ.ο. τα $\widetilde{y} \in \widetilde{\Upsilon}$ ότι

$$P_{\widetilde{y}}(\{N_s = k\} \cap \{N_t - N_s = n - k\}) = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{s}{t}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-k} \cdot P_{\widetilde{y}}(\{N_t = n\}) \tag{3.4}$$

για κάθε $s, t \in (0, \infty)$ με $s < t$ και κάθε $k, n \in \mathbb{N}_0$ με $k \leqslant n$. Θέτοντας $\mathcal{F}_N := \sigma(\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+})$, $\mathcal{F}_W := \sigma(\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ και $\mathcal{F}_T := \sigma(\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}_0})$ έχουμε ότι $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_W = \mathcal{F}_N$ (βλ. π.χ. [19], Lemmas 1.1.1 και 2.1.3).

Ισχυρισμός. Η οικογένεια $\{P_{\widetilde{y}}\}_{\widetilde{y} \in \widetilde{\Upsilon}}$ μέτρων πιθανότητας είναι μία φ.δ.π. του $P \upharpoonright \mathcal{F}_N$ επάνω στο ν.

Απόδειξη. Αφού $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}_W$, αρκεί να δείξουμε ότι η $\{P_{\widetilde{y}}\}_{\widetilde{y} \in \widetilde{\Upsilon}}$ είναι μία φ.δ.π. του $P \upharpoonright \mathcal{F}_W$ επάνω στο ν.

Η ισχύς της (d1) είναι άμεση από τον Ορισμό 3.1.1 (c), αφού για κάθε $D \in \Sigma$ η απεικόνιση $\widetilde{y} \longmapsto P_{\widetilde{y}}(D)$ είναι $B(\Sigma)$-μετρήσιμη. Για να αποδείξουμε την (d2) για κάθε $E \in \mathcal{F}_W$ θέτουμε $\mathcal{G} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \sigma(W_n)$. Από τον Ορισμό 3.1.1 (c) έχουμε ότι η (d2) ικανοποιείται για κάθε $\{W_n \leqslant w_n\}$ όπου $w_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Έστω $\mathcal{G}_{\bigcap}$ ένας γεννήτορας της $\mathcal{F}_W$ που αποτελείται από την $\mathcal{G}$ και όλες τις πεπερασμένες τομές στοιχείων της $\mathcal{G}$ και θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{D} := \{E \in \mathcal{F}_W : P(E) = \int P_{\widetilde{y}}(E)\, \nu(d\widetilde{y})\}.$$

Εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι η οικογένεια $\mathcal{D}$ είναι μία κλάση Dynkin που περιέχει την $\mathcal{G}_{\bigcap}$. Επομένως, από το Θεώρημα Μονότονης Κλάσης έπεται ότι $\mathcal{D} = \mathcal{F}_W$, ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη του ισχυρισμού. □

Ας σταθεροποιήσουμε αυθαίρετα $r \in \mathbb{N}$, $t_0, t_1, \ldots, t_{r+1} \in \mathbb{R}_+$ με $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{r+1}$ και $n_0, n_1, \ldots, n_{r+1} \in \mathbb{N}_0$ με $0 = n_0 \leqslant n_1 \leqslant \cdots \leqslant n_{r+1}$. Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω ισχυρισμό και τις σχέσεις (3.3) και (3.4) και κάνοντας κάποιους απλούς υπολογισμούς έχουμε ότι

$$\begin{aligned} P(\bigcap_{j=1}^{r}\{N_{t_j} = n_j\}) \cdot P(\{N_{t_r} = n_r\} \cap \{N_{t_{r+1}} = n_{r+1}\}) \\ = P(\bigcap_{j=1}^{r+1}\{N_{t_j} = n_j\}) \cdot P(\{N_{t_r} = n_r\}), \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα ότι η N έχει την P-ιδιότητα του Markov, και άρα μαζί με την Υπόθεση 3.1.5 μπορούμε να εφαρμόσουμε την Πρόταση 2.2.7 για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη του (i), και του θεωρήματος. □

Θεώρημα 3.1.7. *Έστω N μία P-eMRP($\mathbf{K}(h(\Theta))$) και έστω $\{P_\theta\}_{\theta\in D}$ μία φ.δ.π. του P επάνω στο P_Θ συνεπής με την Θ και η οποία ικανοποιεί μαζί με την N και την h την Υπόθεση 2.2.6. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $L_0 \in \mathfrak{B}(D)$ ώστε η $h \restriction D \setminus L_0$ να είναι 1-1. Θέτουμε $O_h := L_0 \cup L_h$ και $\widehat{\Theta}(\omega) := (p_h \circ \Theta)(\omega)$ αν $\omega \in \Theta^{-1}(D \setminus O_h)$, όπου L_h και p_h είναι όπως στην Υπόθεση 2.2.6, και συμβολίζουμε πάλι με $\widehat{\Theta}$ οποιαδήποτε μετρήσιμη επέκταση της $\widehat{\Theta}$ από το $\Theta^{-1}(D \setminus O_h)$ στο Ω. Για κάθε σταθερό $A \in \Sigma$ θέτουμε*

$$Q_{\widehat{\theta}}(A) := \begin{cases} (P_{\bullet}(A) \circ p_h^{-1})(\widehat{\theta}) & \text{εάν } \widehat{\theta} \in p_h(D \setminus O_h); \\ P(A) & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Τότε η οικογένεια $\{Q_{\widehat{\theta}}\}_{\widehat{\theta}\in\mathbb{R}}$ είναι μία φ.δ.π. του P επάνω στο $P_{\widehat{\Theta}}$ συνεπής με την $\widehat{\Theta}$ και τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Η N είναι μία P-MPP($\widehat{\Theta}$).

(ii) Η N είναι μία P-HMPP($\{Q_{\widehat{\theta}}\}_{\widehat{\theta}\in\mathbb{R}}, P_{\widehat{\Theta}}$).

(iii) Η N είναι μία $Q_{\widehat{\theta}}$-PP($\widehat{\theta}$) για $P_{\widehat{\Theta}}$-σ.ο. τα $\widehat{\theta} \in \mathbb{R}$.

(iv) Η N είναι μία P-MPP($P_{\widehat{\Theta}}$).

Απόδειξη. Το γεγονός ότι η $\{Q_{\widehat{\theta}}\}_{\widehat{\theta}\in\mathbb{R}}$ είναι μία φ.δ.π. του P επάνω στο $P_{\widehat{\Theta}}$ συνεπής με την $\widehat{\Theta}$ είναι απόρροια του Λήμματος 2.2.3.

Η ισοδυναμία $(i) \Longleftrightarrow (iii)$ έπεται από το [14], Proposition 4.4.

$(i) \Longrightarrow (ii)$: Αφού ο ισχυρισμός (i) ισχύει και η $\{Q_{\widehat{\theta}}\}_{\widehat{\theta}\in\mathbb{R}}$ είναι μία φ.δ.π. του P επάνω στο $P_{\widehat{\Theta}}$ συνεπής με την $\widehat{\Theta}$, ο ισχυρισμός (ii) είναι συνέπεια της Πρότασης 3.1.2.

$(ii) \Longrightarrow (i)$: Αν ισχύει ο ισχυρισμός (ii), με παρόμοιο τρόπο με εκείνον στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.6, $(ii) \Longrightarrow (i)$, έπεται ότι η N έχει την P-ιδιότητα του Markov, και άρα από το Θεώρημα 2.2.11 έχουμε τον ισχυρισμό (i).

Η συνεπαγωγή $(i) \Longrightarrow (iv)$ έπεται μετά από έναν εύκολο υπολογισμό.

$(iv) \Longrightarrow (i)$: Εάν ισχύει ο ισχυρισμός (iv) τότε η N έχει την P-ιδιότητα του Markov (βλ. [20], Theorem 4.2). Άρα, από το Θεώρημα 2.2.11 ο ισχυρισμός (i) έπεται. □

Παρατηρήσεις 3.1.8. (a) Εάν οι υποθέσεις του Θεωρήματος 3.1.7 ικανοποιούνται και εάν ένας από τους ισχυρισμούς (i) εώς (iv) ισχύει, τότε υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $\widetilde{M}_3$ που περιέχει το O_h ώστε οι p_h και h να ταυτίζονται έξω από το $\widetilde{M}_3$.

Πράγματι, έστω $\{Q_{\widehat{\theta}}\}_{\widehat{\theta}\in\mathbb{R}}$ όπως στο Θεώρημα 3.1.7 και ας υποθέσουμε ότι ο ισχυρισμός (iii) ισχύει. Αμέσα έπεται ότι $(Q_{\widehat{\theta}})_{W_n} = \mathbf{Exp}(\widehat{\theta})$ και ότι η W είναι $Q_{\widehat{\theta}}$-ανεξάρτητη για κάθε

$\widehat{\theta} \in p_h(D \backslash O_h)$ (βλ. π.χ. [19], Theorem 2.3.4). Εφαρμόζοντας το Λήμμα 2.2.3 για $p_h(O_h)$ και p_h στη θέση των L_0 και h αντίστοιχα, έπεται ότι $(P_\theta)_{W_n} = \mathbf{Exp}(p_h(\theta))$ και ότι η W είναι P_θ-ανεξάρτητη για κάθε $\theta \in D \backslash O_h$. Αφού η N είναι μία P-eMRP$(\mathbf{K}(h(\Theta)))$, από το Λήμμα 2.2.9 έπεται ότι μπορούμε να βρούμε ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $\widetilde{L}_3 \in \mathfrak{B}(D)$ ώστε $(P_\theta)_{W_n} = \mathbf{K}(h(\theta))$ για κάθε $\theta \in D \backslash \widetilde{L}_3$ και $n \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $\widetilde{M}_3 := \widetilde{L}_3 \cup O_h$.

Ως συνέπεια, προκύπτει ότι για κάθε $\theta \in D \backslash \widetilde{M}_3$ και $\widehat{\theta} = p_h(\theta)$ οι συνθήκες

$$\mathbf{Exp}(\widehat{\theta}) = (Q_{\widehat{\theta}})_{W_n} = (P_\theta)_{W_n} = \mathbf{K}(h(\theta))$$

ισχύουν, και άρα $p_h(\theta) = h(\theta)$ για κάθε $\theta \in D \backslash \widetilde{M}_3$.

(b) Αξίζει να σημειωθεί ότι, αν όλοι οι ισχυρισμοί (i) εώς (iv) του Θεωρήματος 3.1.7 είναι ισοδύναμοι και ένας από αυτούς ισχύει, τότε οι υποθέσεις του θεωρήματος είναι αναγκαίες.

Πιο συγκεκριμένα, έστω h και L_0 όπως στο Θεώρημα 3.1.7 με $\mathbb{E}_P[h(\Theta)] < \infty$, έστω N μία απαριθμήτρια σ.δ. και $\widetilde{\Theta} := h \circ \Theta$. Από το (a) μπορούμε να πάρουμε h και $\widetilde{\Theta}$ στη θέση των p_h και $\widehat{\Theta}$ αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι οι ισχυρισμοί (i)-(iv) του Θεωρήματος 3.1.7 είναι ισοδύναμοι και ότι ένας από αυτούς ισχύει με $\widetilde{\Theta}$, h και L_0 στη θέση των $\widehat{\Theta}$, p_h και O_h, αντίστοιχα. Τότε η N είναι μία P-eMRP$(\mathbf{K}(h(\Theta)))$, και υπάρχει μία φ.δ.π. $\{P_\theta\}_{\theta \in D}$ του P επάνω στο P_Θ συνεπής με την Θ που ικανοποιεί μαζί με τις N και h την Υπόθεση 2.2.6.

Πράγματι, αφού ο ισχυρισμός (iii) ισχύει, υπάρχει μία φ.δ.π. $\{Q_{\widetilde{\theta}}\}_{\widetilde{\theta} \in \mathbb{R}}$ του P επάνω στο $P_{\widetilde{\Theta}}$ συνεπής με την $\widetilde{\Theta}$ ώστε η N να είναι μία PP$(\widetilde{\theta})$ ως προς το $Q_{\widetilde{\theta}}$ για κάθε $\widetilde{\theta} \in h(D \backslash L_0)$. Το τελευταίο όμως είναι ισοδύναμο με το γεγονός ότι $(Q_{\widetilde{\theta}})_{W_n} = \mathbf{Exp}(\widetilde{\theta})$ και ότι η W είναι $Q_{\widetilde{\theta}}$-ανεξάρτητη για κάθε $\widetilde{\theta} \in h(D \backslash L_0)$ (βλ. π.χ. [19], Theorem 2.3.4). Για κάθε $\theta \in D$ και $A \in \Sigma$ ορίζουμε

$$P_\theta(A) := \begin{cases} (Q_{\bullet}(A) \circ h)(\theta) & \text{εάν } \theta \in D \backslash L_0; \\ P(A) & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Από το Λήμμα 2.2.3 έπεται ότι η $\{P_\theta\}_{\theta \in D}$ είναι μία φ.δ.π. του P επάνω στο P_Θ συνεπής με την Θ καθώς και ότι $(P_\theta)_{W_n} = \mathbf{Exp}(h(\theta))$ και η W είναι P_θ-ανεξάρτητη για κάθε $\theta \in D \backslash L_0$. Εφαρμόζοντας τώρα το Λήμμα 2.2.9 μαζί με το [16], Lemma 3.6, έπεται ότι $P_{W_n|\Theta} = \mathbf{Exp}(h(\Theta))$ $P \upharpoonright \sigma(\Theta)$-σ.β. και ότι η W είναι P-υπό συνθήκη ανεξάρτητη, και επομένως η N είναι μία P-eMRP$(\mathbf{K}(h(\Theta)))$. Απομένει να δείξουμε ότι η $\{P_\theta\}_{\theta \in D}$ μαζί με τα N και h ικανοποιούν την Υπόθεση 2.2.6.

Πράγματι, για κάθε $\theta \in D \backslash L_0$, $t \in \mathbb{R}_+$ και $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $F_{h(\theta)}(t) := P_\theta(\{W_n \leqslant t\}) := 1 - e^{-h(\theta)t}$. Προφανώς η $F_{h(\theta)}$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη στον Υ. Ορίζουμε την απεικόνιση $C \in \mathcal{L}^1(P_{h(\Theta)})$ με $C(h(\theta)) := h(\theta)$ για κάθε $\theta \in D \backslash L_0$, και για κάθε σταθερό $\theta \in D \backslash L_0$ ορίζουμε την πυκνότητα $f_{h(\theta)} := F'_{h(\theta)}$ με $f_{h(\theta)}(t) := h(\theta) \cdot e^{-h(\theta)t}$ για κάθε $t > 0$. Ξεκάθαρα, για κάθε σταθερό $\theta \in D \backslash L_0$, η πυκνότητα $f_{h(\theta)}$ φράσεται από την $C(h(\theta))$, και η συνάρτηση

$\lim_{t\to 0} f_{h(\theta)}(t) = h(\theta)$ είναι θετική και αμφιμονοσήμαντη. Επομένως, η $\{P_\theta\}_{\theta\in D}$ μαζί με τα N και h ικανοποιούν την Υπόθεση 2.2.6.

3.2 Παραδείγματα

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζονται, ως ειδική περίπτωση του Παραδείγματος 2.3.1, κάποια παραδείγματα χ.π. που ικανοποιούν όλες τις υποθέσεις των Θεωρημάτων 3.1.6 και 3.1.7. Ιδιαιτέρως, και στα δύο πρώτα παραδείγματα κάθε ένας από τους ισχυρισμούς των Θεωρημάτων 3.1.6 και 3.1.7 ισχύει. Στο τελευταίο παράδειγμα της παρούσας ενότητας αποδεικνύεται ότι το μέρος της Υπόθεσης $(*)$ του Huang που αφορά στο γεγονός ότι η $F'_{\tilde{y}}$ είναι φραγμένη από μία σταθερά $C > 0$ δεν είναι αναγκαίο.

Στο πρώτο παράδειγμα η πραγματική τυχαία μεταβλητή $\widehat{\Theta}$ κατανέμεται σύμφωνα με την κατανομή γάμμα, μία συνήθης επιλογή στην Θεωρία Κινδύνου.

Παράδειγμα 3.2.1. Έστω $G := \varUpsilon$, έστω $\xi = \mathbf{IGa}(\alpha, \beta)$ με $\alpha, \beta > 0$ ένα μέτρο πιθανότητας στην $\mathfrak{B}(\varUpsilon)$ και έστω $h : \varUpsilon \longmapsto \mathbb{R}$ συνάρτηση με $h(\theta) := \frac{1}{\theta}$ για κάθε $\theta \in \varUpsilon$. Σταθεροποιούμε ένα αυθαίρετο $\theta \in \varUpsilon$ και ορίζουμε τα μέτρα πιθανότητας $Q_n(\theta)$ με $Q_n(\theta) := \mathbf{Exp}(h(\theta))$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω $(\varOmega, \varSigma, P)$, $\varTheta$, N, W και $\{P_\theta\}_{\theta\in\varUpsilon}$ όπως στο Παράδειγμα 2.3.1 με $G = \varUpsilon$ και ξ στη θέση του μ.

Ορίζουμε την απεικόνιση $C \in \mathcal{L}^1(P_{h(\varTheta)})$ με $C(h(\theta)) := h(\theta)$ για κάθε $\theta \in \varUpsilon$, και για κάθε σταθερό $\theta \in \varUpsilon$ ορίζουμε την πυκνότητα $f_{h(\theta)} := F'_{h(\theta)}$ με $f_{h(\theta)}(t) := h(\theta) \cdot e^{-h(\theta)t}$ για κάθε $t > 0$. Προφανώς για κάθε σταθερό $\theta \in \varUpsilon$, η πυκνότητα $f_{h(\theta)}$ φράσεται από την $C(h(\theta))$, και η συνάρτηση $p_h : \varUpsilon \longmapsto \varUpsilon$ που ορίζεται ως $p_h(\theta) := \lim_{t\to 0} f_{h(\theta)}(t) = h(\theta)$ για κάθε $\theta \in \varUpsilon$ είναι θετική και 1-1, και άρα τα $\{P_\theta\}_{\theta\in\varUpsilon}$, N και h ικανοποιούν την Υπόθεση 2.2.6.

Θέτουμε $\widehat{\varTheta} := h \circ \varTheta$ και $Q_{\widehat{\theta}}(E) := (P_\bullet(E) \circ h^{-1})(\widehat{\theta})$ για κάθε $\widehat{\theta} > 0$ και $E \in \varSigma$. Τότε, από το Λήμμα 2.2.3 έπεται ότι η οικογένεια $\{Q_{\widehat{\theta}}\}_{\widehat{\theta}>0}$ είναι μία φ.δ.π. του P επάνω στο $P_{\widehat{\varTheta}}$ συνεπής με την $\widehat{\varTheta}$, η συνθήκη $(Q_{\widehat{\theta}})_{W_n} = \mathbf{Exp}(\widehat{\theta})$ ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\widehat{\theta} > 0$, και η σ.δ. W είναι $Q_{\widehat{\theta}}$-ανεξάρτητη. Επομένως, από το [14], Proposition 4.4, έπεται ότι η N είναι μία P-MPP$(\widehat{\varTheta})$.

Προφανώς, όλες οι υποθέσεις των Θεωρημάτων 3.1.6 και 3.1.7 ικανοποιούνται και άρα το ίδιο ισχύει και με τα συμπεράσματά τους. Ιδιαιτέρως, κάθε ένας από τους ισχυρισμούς (i) έως (iv) ισχύει.

Στο επόμενο παράδειγμα η πραγματική τυχαία μεταβλητή $\widehat{\varTheta}$ κατανέμεται σύμφωνα με την λογαριθμο-κανονική κατανομή, μία συνήθης επιλογή στη Θεωρία Αξιοπιστίας.

Παράδειγμα 3.2.2. Έστω $G := \mathbb{R}$, έστω $\rho = \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$ με $(\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \varUpsilon$ ένα μέτρο πιθανότητας στην $\mathfrak{B}$ και έστω $h : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ συνάρτηση που ορίζεται ως $h(\theta) := e^\theta$ για κάθε

$\theta \in \mathbb{R}$. Σταθεροποιούμε ένα αυθαίρετο $\theta \in \mathbb{R}$ και ορίζουμε τα μέτρα πιθανότητας $Q_n(\theta)$ με $Q_n(\theta) := \mathbf{Exp}(h(\theta))$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω (Ω, Σ, P), Θ, N, W και $\{P_\theta\}_{\theta\in\mathbb{R}}$ όπως στο Παράδειγμα 2.3.1 με $G = \mathbb{R}$ και ρ στη θέση του μ.

Ορίζουμε την απεικόνιση $C \in \mathcal{L}^1(P_{h(\Theta)})$ με $C(h(\theta)) := h(\theta)$ για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$, και για κάθε σταθερό $\theta \in \mathbb{R}$ ορίζουμε την πυκνότητα $f_{h(\theta)} := F'_{h(\theta)}$ με $f_{h(\theta)}(t) := h(\theta) \cdot e^{-h(\theta)t}$ για κάθε $t > 0$. Προφανώς, για κάθε σταθερό $\theta \in \mathbb{R}$, η πυκνότητα $f_{h(\theta)}$ φράσεται από την $C(h(\theta))$, και η συνάρτηση $p_h : \mathbb{R} \longmapsto \Upsilon$ που ορίζεται ως $p_h(\theta) := \lim_{t\to 0} f_{h(\theta)}(t) = h(\theta)$ για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$, είναι θετική και αμφιμονοσήμαντη. Επομένως, τα $\{P_\theta\}_{\theta\in\mathbb{R}}$, N και h ικανοποιούν την Υπόθεση 2.2.6.

Θέτουμε $\widehat{\Theta} := h \circ \Theta$ και $Q_{\widehat{\theta}}(E) := (P_\bullet(E) \circ h^{-1})(\widehat{\theta})$ για κάθε $\widehat{\theta} > 0$ και $E \in \Sigma$. Με παρόμοιο τρόπο όπως στο Πράδειγμα 3.2.1 έπεται ότι υπάρχει μία MPP($\widehat{\Theta}$) για την οποία η $\widehat{\Theta}$ ακολουθεί την λογαριθμο-κανονική κατανομή, και ότι ικανοποιούνται όλες οι υποθέσεις του Θεωρήματος 3.1.7 και επομένως και τα συμπεράσματά του. Ιδιαιτέρως, όλοι οι ισχυρισμοί (i) έως (iv) ικανοποιούνται.

Παράδειγμα 3.2.3. Έστω G, μ, h και N όπως στο Παράδειγμα 2.3.2 (a). Από το Λήμμα 2.2.10 έπεται ότι η N είναι μία P-MRP($\mathbf{Exp}(\widetilde{\Theta})$). Το τελευταίο μαζί με το [16], Theorem 4.9, μας δίνει ότι η N είναι μία P-HMRP($\{Q_{\widetilde{\theta}}\}, P_{\widetilde{\Theta}}$).

Σύμφωνα με το Παράδειγμα 2.3.2 (a), τα N, h και $\{P_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ ικανοποιούν όλες τις υποθέσεις του Θεωρήματος 2.2.11, και επομένως και τα συμεπράσματά του. Ιδιαιτέρως η N είναι μία P-MPP($\widehat{\Theta}$), και επομένως και μία P-MPP($\widetilde{\Theta}$), καθώς $p_h = h$.

Υποθέτουμε ότι η N είναι μία P-HMPP($\{Q_{\widetilde{\theta}}\}, P_{\widetilde{\Theta}}$). Τότε για $P_{\widetilde{\Theta}}$-σ.ο. τα $\widetilde{\theta} > b$ έχουμε ότι $(Q_{\widetilde{\theta}})_{W_n} = \mathbf{Exp}(\widetilde{\theta})$. Αλλά αφού η N είναι μία P-MRP($\mathbf{Exp}(\widetilde{\Theta})$) από το [14], Lemma 4.1, έπεται ότι η W είναι $Q_{\widetilde{\theta}}$-ανεξάρτητη για $P_{\widetilde{\Theta}}$-σ.ο. τα $\widetilde{\theta} > b$. Επομένως η N είναι μία $Q_{\widetilde{\theta}}$-PP($\widetilde{\theta}$) (βλ. π.χ. [19], Theorem 2.3.4), και άρα η N είναι μία $Q_{\widetilde{\theta}}$-διαδικασία Markov (βλ. π.χ. [19], Corollary 3.1.2), ή ισοδύναμα η N είναι μία διαδικασία Markov ως προς το μέτρο P, βλ. Πόρισμα 2.2.12.

Για τον αντίστροφο ισχυρισμό του Theorem 3 από το [11], ας υποθέσουμε ότι η N είναι μία διαδικασία Markov ως προς το μέτρο P. Από το Θεώρημα 2.2.11 έπεται ότι η N είναι μία P-MPP($\widetilde{\Theta}$). Επομένως, κάνοντας χρήση της Πρότασης 3.1.2 προκύπτει ότι η N είναι μία P-HMPP($\{Q_{\widetilde{\theta}}\}, P_{\widetilde{\Theta}}$). Ως συνέπεια έχουμε ότι τα συμπεράσματα του [11], Theorem 3, ισχύουν.

Αλλά, αφού για κάθε $\widetilde{\theta} > b$ και $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $(Q_{\widetilde{\theta}})_{W_n} = \mathbf{Exp}(\widetilde{\theta})$, έπεται ότι δεν υπάρχει καμία θετική σταθερά C με $F'_{\widetilde{\theta}}(t) < C$ για κάθε $t > 0$ και $\widetilde{\theta} > b$. Επομένως, το μέρος της Υπόθεσης $(*)$ που αφορά στο ότι η $F'_{\widetilde{y}}$ είναι φραγμένη από μία σταθερά $C > 0$ δεν είναι αναγκαίο. Ιδιαιτέρως, στην παρούσα περίπτωση το θεώρημα του Huang δεν μπορεί να εφαρμοστεί.

3.3 Αντιπαραδείγματα

Τα αντιπαραδείγματα που παρουσιάζονται στην παρούσα ενότητα δείχνουν ότι υπάρχουν μη-παθολογικοί χ.π. και απαριθμήτριες σ.δ. σε αυτούς που ικανοποιούν τους ισχυρισμούς (i), (ii) και (iv) αλλά όχι τον ισχυρισμό (iii) των Θεωρημάτων 3.1.6 και 3.1.7.

Επιπλέον, οι υποθέσεις του Θεωρήματος 3.1.6, P τέλειο και Σ αριθμήσιμα παραγόμενη, δεν ικανοποιούνται, δείχνοντας με αυτόν τον τρόπο ότι δεν μπορούν να παραληφθούν για την ισοδυναμία των ισχυρισμών (i) και (iii). Τα ίδια παραδείγματα δείχνουν ότι η υπόθεση του Θεωρήματος 3.1.7 σχετικά με την ύπαρξη μίας φ.δ.π. συνεπούς με την Θ δεν ισχύει, και επομένως είναι αναγκαία για την ισοδυναμία του ισχυρισμού (iii) με κάποιο από τους ισχυρισμούς (i), (ii) και (iv).

Για να παρουσιάσουμε τα αντιπαραδείγματα χρειαζόμαστε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Λήμμα 3.3.1. *Έστω B ένα υποσύνολο του Ω με $P^*(B) = 1$ και $P_*(B) = 0$. Θέτουμε $\Sigma_b := \sigma(\Sigma \cup \{B\})$ και ορίζουμε $P_b : \Sigma_b \longmapsto [0,1]$ με $P_b(\widetilde{D}) := P^*(\widetilde{D} \cap B)$ για κάθε $\widetilde{D} \in \Sigma_b$. Τότε δεν υπάρχει κανένα d-διάστατο τ.δ. Ψ στον Ω έτσι ώστε να υπάρχει μία φ.δ.π. $\{P_{b,\psi}\}_{\psi\in\mathbb{R}^d}$ του P_b επάνω στο $(P_b)_\Psi$ συνεπής με το Ψ. Ιδιαιτέρως, αν η Σ είναι αριθμήσιμα παραγόμενη τότε το P_b δεν είναι τέλειο.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε, εάν είναι δυνατόν, ότι υπάρχει ένα d-διάστατο τυχαίο διάνυσμα Ψ στον Ω ώστε να υπάρχει μία φ.δ.π. $\{P_{b,\psi}\}_{\psi\in\mathbb{R}^d}$ του P_b επάνω στο $(P_b)_\Psi$ συνεπής με το Ψ. Για κάθε $\omega \in \Omega$ θέτουμε

$$Q_\omega(E) := (P_b)_{\Psi(\omega)}(E)$$

για κάθε $E \in \Sigma_b$.

Ισχυρισμός 1. Η οικογένεια $\{Q_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ είναι μία φ.δ.π.-υποάλγεβρα για το P_b επάνω στο $P_b \upharpoonright \mathcal{F}$ με $\mathcal{F} = \sigma(\Psi)$.

Απόδειξη. Για τον ορισμό μίας φ.δ.π.-υποάλγεβρα βλ. [6], Section 2. Προφανώς για κάθε σταθερό $\omega \in \Omega$ η συνολοσυνάρτηση Q_ω είναι ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στην Σ_b, και για κάθε σταθερό $F \in \mathcal{F}$ η συνάρτηση $\omega \longmapsto Q_\omega(F)$ είναι $\mathcal{F}$-μετρήσιμη. Επιπλέον, για κάθε $F \in \mathcal{F}$ και $E \in \Sigma_b$ έχουμε

$$\int_F Q_\omega(E)\, P_b(d\omega) = \int_F (P_b)_{\Psi(\omega)}(E)\, P_b(d\omega) = \int_F \mathbb{E}_{P_b}[\chi_E \mid \mathcal{F}](\omega)\, P_b(d\omega) = P_b(E \cap F) \quad (3.5)$$

όπου η δεύτερη ισότητα έπεται από το [14], Lemma 3.5 (i), μαζί με την υπόθεση ότι η $\{P_{b,\psi}\}_{\psi\in\mathbb{R}^d}$ είναι μία φ.δ.π. του P_b επάνω στο $(P_b)_\Psi$ συνεπής με το Ψ. Ως συνέπεια, έχουμε ότι η $\{Q_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ είναι μία φ.δ.π.-υποάλγεβρα του R επάνω στο $P_b \upharpoonright \mathcal{F}$, κάτι που ολοκληρώνει την απόδειξη του Ισχυρισμού 1. □

Ισχυρισμός 2. Υπάρχει ένα P-μηδενικό σύνολο $N \in \mathcal{F}$ ώστε για κάθε $A \in \mathcal{F}$ η συνθήκη $Q_\omega(A) = 1$ να ισχύει για κάθε $\omega \in N^c \cap A$.

Απόδειξη. Αφού η $\{P_{b,\psi}\}_{\psi\in\mathbb{R}^d}$ είναι μία φ.δ.π. του P_b επάνω στο $(P_b)_\Psi$ συνεπής με το Ψ έχουμε

$$\forall\, A \in \mathcal{F} \quad \exists\, N_A \in \mathcal{F}_0 \;\; \forall\, \omega \in A \cap N_A^c \qquad [Q_\omega(A) = 1], \tag{3.6}$$

όπου $\mathcal{F}_0$ είναι το σύνολο όλων των P-μηδενικών συνόλων στην $\mathcal{F}$. Παρατηρούμε ότι η $\mathcal{F}$ είναι αριθμήσιμα παραγόμενη αφού η $\mathfrak{B}_d$ είναι. Έστω $\mathcal{G}$ ένας αριθμήσιμος γεννήτορας της $\mathcal{F}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο $\mathcal{G}$ είναι κλειστός ως προς τις πεπερασμένες τομές. Αφού ο $\mathcal{G}$ είναι ένας αριθμήσιμος γεννήτορας της $\mathcal{F}$ η συνθήκη (3.6) μπορεί να γραφεί ως

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \;\; \forall\, A_n \in \mathcal{G} \quad \exists\, N_{A_n} \in \mathcal{F}_0 \;\; \forall\, \omega \in A_n \cap N_{A_n}^c \qquad [Q_\omega(A_n) = 1].$$

Επομένως, θέτοντας $N := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ έχουμε ότι $N \in \mathcal{F}$ με $P(N) = 0$. Ας συμβολίσουμε με $\mathcal{D}$ την οικογένεια όλων των συνόλων $A \in \mathcal{F}$ ώστε $Q_\omega(A) = 1$ για κάθε $\omega \in N^c \cap A$. Εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι η οικογένεια $\mathcal{D}$ είναι μία κλάση Dynkin, και άρα από το Θεώρημα Μονότονης Κλάσης ο ισχυρισμός έπεται. □

Από την συνθήκη (3.5) και την υπόθεσή μας ότι $P^*(B) = 1$, για κάθε $F \in \mathcal{F}$ έπεται ότι

$$\int_F Q_\omega(B)\, P_b(d\omega) = P_b(F \cap B) = P_b(F) = \int_F \chi_F(\omega)\, P_b(d\omega),$$

δηλαδή $P_b(D) = 0$, όπου $D := \{\omega \in \Omega : Q_\omega(B) \neq 1\}$.

Θέτουμε $E := D \cup N$. Για κάθε $\omega \in E^c$ έχουμε ότι $Q_\omega(\{\omega\}) = 1$ και $Q_\omega(B) = 1$. Επομένως $Q_\omega(B \cap \{\omega\}) = 1$, και άρα $B \cap \{\omega\} \neq \varnothing$ ή $\omega \in B$. Συνεπώς, έχουμε ότι $E^c \subseteq B$ ή ισοδύναμα ότι $B^c \subseteq E$, δηλαδή $1 = P^*(B^c) \leqslant P_b(E)$, και άρα $P_b(E) = 1$, άτοπο.

Ιδιαιτέρως, αν η Σ είναι αριθμήσιμα παραγόμενη τότε και η Σ_b είναι, και επομένως από το [6], Theorem 6, έπεται ότι το P_b δεν είναι τέλειο. □

Παρατήρηση 3.3.2. Έστω Ω ένας υπεραριθμήσιμος Πολωνικός χώρος και P ένα μη ατομικό μέτρο Borel επάνω στην $\Sigma := \mathfrak{B}(\Omega)$. Θα έπρεπε να είναι γνωστό ότι πάντα υπάρχει ένα σύνολο $B \subseteq \Omega$ με την ιδιότητα $P^*(B) = 1$ και $P_*(B) = 0$. Καθώς δεν κατέστη δυνατό όμως να το βρούμε στη βιβλιογραφία παρουσιάζουμε εδώ μία απόδειξη χάριν πληρότητας.

Έστω $(\Omega, \widehat{\Sigma}, \widehat{P})$ η πλήρωση του (Ω, Σ, P). Τότε ο $(\Omega, \widehat{\Sigma}, \widehat{P})$ είναι ισομορφικός με τον χ.π. του Lebesgue $([0,1], \mathcal{L}([0,1]), \lambda)$ (βλ. π.χ. [8], Corollary 344K). Από το [3], Proposition 1.4.11, υπάρχει ένα υποσύνολο $\widetilde{A}$ του $\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε κάθε Lebesgue μετρήσιμο σύνολο που περιέχεται στο $\widetilde{A}$ ή στο $\widetilde{A}^c$ να είναι ένα λ-μηδενικό σύνολο. Θέτουμε $A := [0,1] \cap \widetilde{A}$ και $A_1 := [0,1] \cap \widetilde{A}^c$.

Τα σύνολα A και A_1 δεν μπορούν να είναι ταυτόχρονα Lebesgue-μετρήσιμα αφού, εάν ήταν, θα είχαμε ότι $\lambda(A) = \lambda(A_1) = 0$, δηλαδή $0 = \lambda(A \cup A_1) = \lambda([0,1]) = 1$, που είναι άτοπο. Άρα, εάν το A δεν είναι Lebesgue-μετρήσιμο, συμπεραίνουμε ότι $\lambda_*(A) = 0$ και $\lambda^*(A) = 1$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι το A δεν είναι Lebesgue-μετρήσιμο. Επομένως, αν η $f : [0,1] \longmapsto \Omega$ είναι ένας ισομορφισμός μεταξύ του χ.π. του Lebesgue στο $[0,1]$ και του $(\Omega, \widehat{\Sigma}, \widehat{P})$, θέτοντας $B := f(A)$ έχουμε το ζητούμενο σύνολο.

Παρατήρηση 3.3.3. Έστω P, Θ και $\{P_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ όπως στο Παράδειγμα 3.2.1. Σταθεροποιούμε ένα τυχαίο $\theta \in \Upsilon$ και θέτουμε $\Sigma_0 := \{L \in \Sigma : P(L) = 0\}$ και $\Sigma_{0,\theta} := \{L \in \Sigma : P_\theta(L) = 0\}$.

(a) Αφού για κάθε σταθερό $E \in \widetilde{\Sigma}$ η συνάρτηση $\theta \longmapsto \widetilde{P}_\theta(E) := \otimes_{n\in\mathbb{N}}\mathbf{Exp}(h(\theta))(E)$ είναι συνεχής, εύκολα μπορούμε να δούμε ότι η ισότητα $\Sigma_0 = \Sigma_{0,\theta}$ συνεπάγεται ότι $P^*(B) = P_\theta^*(B) = 1$ και $P_*(B) = (P_\theta)_*(B) = 0$ για κάθε $\theta \in \Upsilon$. Επομένως, για κάθε σταθερό $\theta \in \Upsilon$ το μέτρο πιθανότητας P_θ μπορεί να επεκταθεί στο μέτρο πιθανότητας $P_{\theta,b} : \Sigma_b \longmapsto [0,1]$, το οποίο ορίζεται ως $P_{\theta,b}(\widetilde{D}) := P_\theta^*(\widetilde{D} \cap B)$ για κάθε $\widetilde{D} \in \Sigma_b$. Τότε, για κάθε σταθερό $D \in \Sigma_b$ η συνάρτηση $\theta \longmapsto P_{\theta,b}(\widetilde{D})$ είναι $\mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρήσιμη.

Πράγματι, αρχικά υπενθυμίζουμε ότι δύο μέτρα πιθανότητας P και Q σε έναν μ.χ. (Ω, Σ) είναι *ισοδύναμα* (συμβ. $Q \sim P$ για συντομία) (βλ. Ορισμό 4.1.2 (a)) αν έχουν τα ίδια μηδενικά σύνολα στην Σ, δηλ.

$$\{L \in \Sigma : P(N) = 0\} = \{L \in \Sigma : Q(N) = 0\}.$$

Ισχυρισμός 1. Για κάθε $\theta \in \Upsilon$ έχουμε ότι $P_\theta \sim P$.

Απόδειξη. Έστω $E \in \Sigma$ με $P(E) = 0$. Τότε

$$\begin{aligned} P(E) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \int \widetilde{P}_\theta(E^\theta)\,\mu(d\theta) = 0 \Longleftrightarrow \widetilde{P}_\theta(E^\theta) = 0 \quad \text{για κάθε } \theta \in \Upsilon \\ &\Longleftrightarrow \quad P_\theta(E) = 0 \quad \text{για κάθε } \theta \in \Upsilon, \end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισότητα έπεται από το γεγονός ότι για κάθε σταθερό $A \in \Sigma$ η απεικόνιση $\theta \longmapsto \widetilde{P}_\theta(A)$ είναι συνεχής. Άρα $P_\theta \sim P$ για κάθε $\theta \in \Upsilon$. □

Ισχυρισμός 2. Αν B είναι ένα υποσύνολο του Ω με $P^*(B) = 1$ και $P_*(B) = 0$ τότε, $P_\theta^*(B) = 1$ και $(P_\theta)_*(B) = 0$ για κάθε $\theta \in \Upsilon$

Απόδειξη. Θυμίζουμε ότι μία *P-μετρήσιμη καλύψη* ενός συνόλου $A \subseteq \Omega$ είναι ένα σύνολο $E \in \Sigma$ έτσι ώστε $A \subseteq E$ και $P(E) = P^*(A)$. Θεωρούμε ένα σύνολο $B \subseteq \Omega$ έτσι ώστε $P^*(B) = 1$ και $P_*(B) = 0$, και έστω B_1 μία P-μετρήσιμη καλύψη για το B. Υποθέτουμε επιπλέον ότι το σύνολο B_2 είναι μία P_θ-μετρήσιμη καλύψη γία το B. Εύκολα αποδεικνύεται ότι $P(B_2) = 1$.

Πράγματι, αφού $B \subseteq B_2$ προκύπτει ότι $1 = P^*(B) \leqslant P(B_2)$, και άρα $P(B_2) = 1$. Επομένως, $P(B_1 \cap B_2) = 1$ ή ισοδύναμα, από τον Ισχυρισμό 1, $P_\theta(B_1 \cap B_2) = 1$. Συνεπώς,

$$1 = P_\theta(B_1 \cap B_2) \leqslant P_\theta(B_2) = P^*_\theta(B),$$

όπου η τελευταία ισότητα έπεται από το γεγονός ότι το σύνολο B_2 είναι μία P_θ-μετρήσιμη καλύψη για το B. Δουλεύοντας με τον ίδιο τρόπο μπορεί να αποδειχθεί ότι $P^*_\theta(B^c) = 1$. Επιπλέον, αφού $P^*_\theta(B^c) = 1$ έπεται ότι

$$P^*_\theta(B^c) + (P_\theta)_*(B) = P(\Omega) = 1$$

και άρα $(P_\theta)_*(B) = 0$. □

Ισχυρισμός 3. Για κάθε σταθερό $\widetilde{D} \in \Sigma_b$ η συνάρτηση $\theta \longmapsto P_{\theta,b}(\widetilde{D})$ είναι $\mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρήσιμη.

Απόδειξη. Πράγματι, σταθεροποιούμε ένα τυχαίο $\widetilde{D} \in \Sigma_b$ και υποθέτουμε ότι το σύνολο D_2 είναι μία P_θ-μετρήσιμη κάλυψη για το $\widetilde{D} \cap B$. Αφού $P_{\theta,b}(\widetilde{D}) = P^*_\theta(\widetilde{D} \cap B) = P_\theta(D_2)$ και η συνάρτηση $\theta \longmapsto P_\theta(D_2)$ είναι $\mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρήσιμη έπεται ότι το ίδιο πρέπει να ισχύει και για τη συνάρτηση $\theta \longmapsto P_{\theta,b}(\widetilde{D})$. □

(b) Για κάθε $\theta \in \Upsilon$ ας είναι $\widehat{\Sigma}_\theta$ η πλήρωση της Σ ως προς το μέτρο P_θ. Επομένως $\widehat{\Sigma} = \widehat{\Sigma}_\theta$ για κάθε $\theta \in \Upsilon$. Άρα κάθε πλήρες μέτρο πιθανότητας $\widehat{P}_\theta$ ορίζεται στην $\widehat{\Sigma}$ και για κάθε $E \in \widehat{\Sigma}$ η συνάρτηση $\theta \longmapsto \widehat{P}_\theta(E)$ είναι $\mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρήσιμη.

Παράδειγμα 3.3.4. Έστω (Ω, Σ, P), N, Θ, h και $\widehat{\Theta}$ όπως στο Παράδειγμα 3.2.1. Τότε, όλες οι υποθέσεις των Θεωρημάτων 3.1.6 και 3.1.7 ικανοποιούνται, και επομένως η ισοδυναμία όλων των ισχυρισμών (ως προς το P) έπεται για κάθε ένα από τα δύο θεωρήματα. Ιδιαιτέρως υπενθυμίζουμε ότι κάθε ένας από τους ισχυρισμούς των δύο θεωρημάτων ισχύει.

Αφού ο (Ω, Σ, P) από την κατασκευή του είναι ένας υπεραριθμήσιμος μη ατομικός Πολωνικός χ.π., από την Παρατήρηση 3.3.2 έπεται ότι υπάρχει ένα σύνολο $B \subseteq \Omega$ ώστε $P^*(B) = 1$ και $P_*(B) = 0$. Επομένως, μπορούμε να ορίσουμε τα P_b και Σ_b όπως στο Λήμμα 3.3.1. Εύκολα μπορεί να δειχθεί ότι οι ισχυρισμοί (i) και (iv) των Θεωρημάτων 3.1.6 και 3.1.7 συνεχίζουν να ισχύουν ως προς το P_b, και λαμβάνοντας υπόψιν την Παρατήρηση 3.3.3 (a) το ίδιο ισχύει και για τον ισχυρισμό (ii). Ιδιαιτέρως, οι ισχυρισμοί (i), (ii) και (iv) του Θεωρήματος 3.1.7 είναι ισοδύναμοι ως προς το P_b.

Σύμφωνα με το Λήμμα 3.3.1, δεν υπάρχει καμία πραγματική τυχαία μεταβλητή Ψ στον Ω ώστε να υπάρχει μία φ.δ.π. $\{P_{b,\psi}\}_{\psi \in \mathbb{R}}$ του P_b επάνω στο $(P_b)_\Psi$ συνεπής με την Ψ, και άρα ο ισχυρισμός (iii) των Θεωρηματων 3.1.6 και 3.1.7 δεν ισχύει.

Από το Λήμμα 3.3.1 προκύπτει ότι ούτε το μέρος της Υπόθεσης 3.1.5 που αφορά την ύπαρξη μίας πραγματικής τυχαίας μεταβλητής Θ στον Ω και μίας φ.δ.π. του P_b επάνω στο

$(P_b)_\Theta$ συνεπούς με την Θ αλλά ούτε και η υπόθεση της τελειότητας του μέτρου του Θεωρήματος 3.1.6 για τον χ.π. (Ω, Σ_b, P_b) ισχύουν. Επομένως, και οι δύο υποθέσεις δεν είναι αναγκαίες για την ισοδυναμία $(i) \Longleftrightarrow (ii) \Longleftrightarrow (iv)$, ενώ η υπόθεση της τελειότητας του μέτρου για την ισοδυναμία $(i) \Longleftrightarrow (iii)$ τουλάχιστον δεν μπορεί να παραληφθεί.

Όσον αφορά το Θεώρημα 3.1.7, από το Λήμμα 3.3.1 έπεται ότι η υπόθεση της ύπαρξης μίας φ.δ.π. του P_b επάνω στο $(P_b)_\Theta$ συνεπούς με την Θ δεν είναι αναγκαία για την ισοδυναμία $(i) \Longleftrightarrow (ii) \Longleftrightarrow (iv)$, αλλά είναι αναγκαία για την ισοδυναμία $(i) \Longleftrightarrow (iii)$.

Παράδειγμα 3.3.5. Έστω (Ω, Σ, P), N, Θ, h και $\widehat{\Theta}$ όπως στο Παράδειγμα 3.2.1. Όλες οι υποθέσεις των Θεωρημάτων 3.1.6 και 3.1.7 ικανοποιούνται, και άρα η ισοδυναμία όλων των ισχυρισμών (ως προς το P) έπεται για κάθε ένα από τα δύο παραπάνω θεωρήματα. Ιδιαιτέρως, υπενθυμίζουμε ότι κάθε ένας από του ισχυρισμούς και των δύο θεωρημάτων ισχύει. Έστω $(\Omega, \widehat{\Sigma}, \widehat{P})$ η πλήρωση του (Ω, Σ, P). Εύκολα μπορεί να δειχθεί ότι οι ισχυρισμοί (i) και (iv) των Θεωρημάτων 3.1.6 και 3.1.7 συνεχίζουν να ισχύουν ως προς το $\widehat{P}$, και λαμβάνοντας υπόψιν την Παρατήρηση 3.3.3 (b) το ίδιο ισχύει και με τον ισχυρισμό (ii). Ιδιαιτέρως, οι ισχυρισμοί (i), (ii) και (iv) του Θεωρήματος 3.1.7 είναι ισοδύναμοι ως προς το $\widehat{P}$.

Αρχικά παρατηρούμε ότι το μέτρο πιθανότητας $\widehat{P}$ είναι τέλειο αφού το P είναι (βλ. π.χ. [9], Proposition 451G(c)(i)), αλλά η $\widehat{\Sigma}$ δεν είναι αριθμήσιμα παραγόμενη, και άρα η υπόθεση της αριθμήσιμα παραγόμενης σ-άλγεβρας του Θεωρήματος 3.1.6 δεν ικανοποιείται.

Ισχυρισμός. Δεν υπάρχει καμία πραγματική τυχαία μεταβλητή Ψ στον Ω ώστε να υπάρχει μία φ.δ.π. $\{Z_\psi\}_{\psi \in \mathbb{R}}$ του $\widehat{P}$ επάνω στο $\widehat{P}_\Psi$ συνεπής με την Ψ.

Απόδειξη. Υποθέτουμε, αν είναι δυνατόν, ότι υπάρχει μία πραγματική τυχαία μεταβλητή Ψ στον Ω ώστε να υπάρχει μία φ.δ.π. $\{Z_\psi\}_{\psi \in \mathbb{R}}$ του $\widehat{P}$ επάνω στο $\widehat{P}_\Psi$ συνεπής με την Ψ. Σταθεροποιούμε ένα τυχαίο $A \in \widehat{\Sigma}$ και ορίζουμε τη συνάρτηση $S_\bullet(A) : \Omega \longmapsto [0,1]$ με τύπο

$$(S_\bullet(A))(\omega) := S_\omega(A) := (Z_\bullet(A) \circ \Psi)(\omega) \;\; \text{για κάθε} \;\; \omega \in \Omega.$$

Χρησιμοποιώντας τα ίδια επιχειρήματα με την απόδειξη του Λήμματος 3.3.1 έπεται ότι η $\{S_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ είναι μία φ.δ.π.-υποάλγεβρα του $\widehat{P}$ επάνω στο $\widehat{P} \upharpoonright \sigma(\Psi)$. Αφού η $\sigma(\Psi)$ είναι αριθμήσιμα παραγόμενη, προκύπτει, όπως και στο Λήμμα 3.3.1, ότι υπάρχει ένα σύνολο $N \in \sigma(\Psi)$ με $P(N) = 0$ και ότι για κάθε $A \in \sigma(\Psi)$ η συνθήκη $S_\omega(A) = 1$ ισχύει για κάθε $\omega \in N^c \cap A$. Επιλέγουμε ένα σύνολο $D \subseteq N^c$ ώστε $D \notin \sigma(\Psi)$ αλλά $D \in \widehat{\Sigma}$. Μία τέτοια επιλογή είναι εφικτή, αφού η πληθικότητα της $\sigma(\Psi)$ είναι $\mathbf{c}$, όπου $\mathbf{c}$ η πληθικότητα του συνεχούς, ενώ η πληθικότητας της $\widehat{\Sigma}$ είναι $2^{\mathbf{c}}$. Τότε για κάθε $\omega \notin N$ έχουμε

$$1 = S_\omega(\{\omega\}) \leqslant S_\omega(D) \leqslant 1 \qquad \text{εάν} \quad \omega \in D$$

και

$$1 = S_\omega(\{\omega\}) \leqslant S_\omega(D^c) \leqslant 1 \qquad \text{εάν} \quad \omega \in D^c.$$

Επομένως, $D = N^c \cap \{\omega \in \Omega : S_\omega(D) = 1\} \in \sigma(\Psi)$, άτοπο. □

Ως συνέπεια, έπεται ότι ούτε η Υπόθεση 3.1.5 του Θεωρήματος 3.1.6 ούτε η υπόθεση της ύπαρξης μίας φ.δ.π. του Θεωρήματος 3.1.7 ισχύουν. Επιπλέον, από τον παραπάνω ισχυρισμό έπεται ότι ο ισχυρισμός (iii) των Θεωρημάτων 3.1.6 και 3.1.7 δεν ισχύει, και άρα η υπόθεση της αριθμήσιμα παραγόμενης σ-άλγεβρας Σ για την ισοδυναμία των (i) και (iii) δεν μπορεί να παραληφθεί.

Παρατήρηση 3.3.6. Τα δύο παραπάνω αντιπαραδείγματα απαντούν αρνητικά στο Ερώτημα 2.2.14, σχετικά με την αναγκαιότητα των υποθέσεων της ύπαρξης μίας φ.δ.π. του P επάνω στο P_Θ συνεπούς με την Θ της Πρότασης 2.2.7 και του Θεωρήματος 2.2.11.

Πράγματι, έστω $(\Omega, \widehat{\Sigma}, \widehat{P})$, N, h, Θ, $\widehat{\Theta}$ και $\{P_\theta\}_{\theta>0}$ όπως στο Παράδειγμα 3.3.5, και έστω $\{\widehat{P}_\theta\}_{\theta>0}$ όπως στην Παρατήρηση 3.3.3. Τότε, η N είναι μία $\widehat{P}$-eMRP($\mathbf{K}(h(\Theta))$) και σύμφωνα με τον ισχυρισμό του Παραδείγματος 3.3.5, η οικογένεια $\{\widehat{P}_\theta\}_{\theta>0}$ δεν μπορεί να είναι μία φ.δ.π. του $\widehat{P}$ επάνω στο $\widehat{P}_\Theta$ συνεπής με την Θ. Για μία απαριθμήτρια σ.δ. N τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(a) Η N είναι μία $\widehat{P}$-MPP($\widehat{\Theta}$).

(b) Η N έχει την $\widehat{P}$-πολυωνυμική ιδιότητα.

(c) Η N έχει την $\widehat{P}$-ιδιότητα του Markov.

$(a) \Longleftrightarrow (b)$: Η N είναι μία $\widehat{P}$-MPP($\widehat{\Theta}$) αν και μόνο αν είναι μία $\widehat{P}$-MPP($P_{\widehat{\Theta}}$) (βλ. Παράδειγμα 3.3.5) αν και μόνο αν έχει την $\widehat{P}$-πολυωνυμική ιδιότητα (βλ. [20], Theorem 4.2).

$(a) \Longleftrightarrow (c)$: Η N είναι μία $\widehat{P}$-MPP($\widehat{\Theta}$) αν και μόνο αν είναι μία $\widehat{P}$-HMPP($\{\widehat{P}_\theta\}_{\theta>0}, \nu$) (βλ. Παράδειγμα 3.3.5). Αλλά το τελευταίο, λόγω του [11], Theorem 3, είναι ισοδύναμο με την $\widehat{P}$-ιδιότητα του Markov για την N.

Επομένως, κατασκευάσαμε ένα χ.π. $(\Omega, \widehat{\Sigma}, \widehat{P})$, μία οικογένεια μέτρων πιθανότητας $\{\widehat{P}_\theta\}_{\theta>0}$ επάνω στην $\widehat{\Sigma}$, και μία απαριθμήτρια σ.δ. N που είναι μία $\widehat{P}$-eMRP($\mathbf{K}(h(\Theta))$) τέτοια ώστε τα συμπεράσματα του Θεωρήματος 2.2.11 να ισχύουν χωρίς η $\{\widehat{P}_\theta\}_{\theta>0}$ να είναι κατ' ανάγκην μία φ.δ.π. του $\widehat{P}$ επάνω στο $\widehat{P}_\Theta$ συνεπής με την Θ.

Κεφάλαιο 4

Μία τεχνική αλλαγής μέτρου για σύνθετες ανανεωτικές διαδικασίες

Στο παρόν κεφάλαιο επιλύεται το πρόβλημα **(Π)** της εισαγωγής για σύνθετες ανανεωτικές διαδικασίες.

Μία αναγκαία συνθήκη για τον ζητούμενο χαρακτηρισμό θα δούμε στην Ενότητα 4.1, Πρόταση 4.1.5. Η Πρόταση 4.1.5 μας δίνει τη δυνατότητα να χαρακτηρίσουμε και να υπολογίσουμε τις Radon-Nikodým παραγώγους dQ/dP για πολύ γνωστές περιπτώσεις στα ασφαλιστικά μαθηματικά. Στην Ενότητα 4.2, αφού παρουσιάσουμε μία κατασκευή για σύνθετες ανανεωτικές διαδικασίες, βλ. Λήμμα 4.2.5, θα αποδειχθεί ο επιθυμητός χαρακτηρισμός, βλ. Θεώρημα 4.2.9. Το βασικό αποτέλεσμα των Delbaen & Haezendonck [4], Proposition 2.2, προκύπτει ως ειδική περίπτωση του Θεωρήματος 4.2.9, βλ. Πόρισμα 4.2.11.

Στην Ενότητα 4.3 αποδεικνύεται ότι αν S είναι μία σύνθετη ανανεωτική σ.δ. ως προς το P η στοχαστική σ.δ. $Z = \{Z_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$, με $Z_t := S_t - t \cdot \mathbb{E}_P[S_1]$ για κάθε $t \geqslant 0$, είναι ένα martingale ως προς το P αν και μόνο αν η S είναι μία σύνθετη σ.δ. Poisson ως προς το P, βλ. Θεώρημα 4.3.1, αποδεικνύοντας με αυτό τον τρόπο ότι μία martingale-προσέγγιση στις αρχές υπολογισμού ασφαλίστρου στη περίπτωση των σύνθετων ανανεωτικών διαδικασιών οδηγεί απευθείας σε σύνθετες διαδικασίες Poisson.

4.1 Σύνθετες Ανανεωτικές Διαδικασίες και Προοδευτικά Ισοδύναμα Μέτρα

Έστω $X := \{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ μία ακολουθία πραγματικών τυχαίων μεταβλητών στον Ω και N μία απαριθμήτρια σ.δ.. Θα λέμε ότι το ζευγάρι (N, X) είναι μία **διαδικασία κινδύνου**, εάν η N

είναι μία απαριθμήτρια σ.δ., η X είναι P-i.i.d., και οι διαδικασίες N και X είναι P-ανεξάρτητες (βλ. [19], Chapter 6, Section 6.1). Σε αυτή την περίπτωση, η ακολουθία $X := \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ονομάζεται **σ.δ. μεγέθους απαιτήσεων**. Για κάθε $t \geqslant 0$ ορίζουμε

$$S_t := \begin{cases} \sum_{k=1}^{N_t} X_k & \text{if } t > 0; \\ 0 & \text{if } t = 0. \end{cases}$$

Η οικογένεια $S := \{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ πραγματικών τυχαίων μεταβλητών στον Ω ονομάζεται η **σ.δ. μεγέθους συνολικών απαιτήσεων που επάγεται από** τη διαδικασία κινδύνου (N, X).

Για ό,τι ακολουθεί, εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά, η $X := \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *είναι μία σ.δ. μεγέθους απαιτήσεων, ώστε* $P(\{X_1 > 0\}) = 1$, *και το ζευγάρι* (N, X) *είναι μία διαδικασία κινδύνου που επάγει μία σ.δ. μεγέθους συνολικών απαιτήσεων* $S := \{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. *Με* $\mathcal{F}^W := \{\mathcal{F}_n^W\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathcal{F}^X := \{\mathcal{F}_n^X\}_{n\in\mathbb{N}}$ *και* $\mathcal{F}^S := \{\mathcal{F}_t^S\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *θα συμβολίζονται οι κανονικές διυλίσεις των* W, X *και* S, *αντίστοιχα.*

Το επόμενο λήμμα παίζει ουσιαστικό ρόλο στις αποδείξεις αυτού αλλά και του επόμενου κεφαλαίου. Φαίνεται δε να είναι ένα αποτέλεσμα ξεχωριστού ενδιαφέροντος καθώς μας δίνει μία ξεκάθαρη εικόνα για τους γεννήτορες της σ-άλγεβρας $\mathcal{F}_t^S$.

Λήμμα 4.1.1. *Για κάθε* $t \geqslant 0$ *και* $n \in \mathbb{N}_0$ *ισχύει η σχέση*

$$\mathcal{F}_t^S \cap \{N_t = n\} = \sigma(\mathcal{F}_n^W \cup \mathcal{F}_n^X) \cap \{N_t = n\}$$

Απόδειξη. Ας σταθεροποιήσουμε αυθαίρετα $t \geqslant 0$ και $n \in \mathbb{N}_0$.

Προφανώς, για $n = 0$ έχουμε

$$\mathcal{F}_0^X = \mathcal{F}_0^W = \{\varnothing, \Omega\} \quad \text{και} \quad \mathcal{F}_t^S \cap \{N_t = 0\} = \{\varnothing, \Omega\} \cap \{N_t = 0\}.$$

Επομένως $\mathcal{F}_t^S \cap \{N_t = 0\} = \sigma(\mathcal{F}_0^W \cup \mathcal{F}_0^X) \cap \{N_t = 0\}$.

(a) Ισχύει ο εγκλεισμός $\sigma(\mathcal{F}_n^W \cup \mathcal{F}_n^X) \cap \{N_t = n\} \subseteq \mathcal{F}_t^S \cap \{N_t = n\}$.

Πράγματι, ας σταθεροποιήσουμε ένα τυχαίο $k \in \{1, \ldots, n\}$. Προφανώς η N_t είναι $\mathcal{F}_t^S$-μετρήσιμη και επομένως $\{T_k \leqslant t\} = \{N_t \geqslant k\} \in \mathcal{F}_t^S$. Άρα η τ.μ. T_k είναι $\mathcal{F}_t^S$-μετρήσιμη, δηλαδή είναι ένας χρόνος διακοπής για την $\mathcal{F}^S$. Ως συνέπεια έχουμε ότι $\mathcal{F}_n^W \cap \{N_t = n\} \subseteq \mathcal{F}_t^S \cap \{N_t = n\}$.

Για να ελέγξουμε την ισχύ του εγκλεισμού $\mathcal{F}_n^X \cap \{N_t = n\} \subseteq \mathcal{F}_t^S \cap \{N_t = n\}$, παρατηρούμε αρχικά ότι αφού η S_t είναι $\mathcal{F}_t^S$-μετρήσιμη με δεξιά συνεχείς τροχιές από το [13], Proposition 1.13, για παράδειγμα, έπεται ότι η S είναι προοδευτικά μετρήσιμη ως προς την $\mathcal{F}^S$ (βλ. π.χ.

[13], σελ. 4 για τον ορισμό), κάτι που σε συνδυασμό με το γεγονός ότι η T_k είναι ένας χρόνος διακοπής για την $\mathcal{F}^S$ μας δίνει την $\mathcal{F}^S_{T_k}$-μετρησιμότητα της S_{T_k}, όπου $\mathcal{F}^S_{T_k} := \{A \in \Sigma : A \cap \{T_k \leqslant v\} \in \mathcal{F}^S_v$ για κάθε $v \geqslant 0\}$ (βλ. π.χ. [13], Proposition 2.18). Αλλά από τη σχέση $T_{k-1} < T_k$ προκύπτει ότι $\mathcal{F}^S_{T_{k-1}} \subseteq \mathcal{F}^S_{T_k}$ (βλ. π.χ. [13], Lemma 2.15), και άρα η $S_{T_{k-1}}$ είναι $\mathcal{F}^S_{T_k}$-μετρήσιμη. Συνεπώς, η τ.μ. $X_k := S_{T_k} - S_{T_{k-1}}$ είναι $\mathcal{F}^S_{T_k}$-μετρήσιμη, δηλαδή

$$X_k^{-1}(B) \cap \{T_k \leqslant t\} \in \mathcal{F}^S_t \quad \text{για κάθε } B \in \mathfrak{B}(\Upsilon). \tag{4.1}$$

Από τη συνθήκη (4.1) προκύπτει ότι

$$X_k^{-1}(B) \cap \{N_t = n\} = X_k^{-1}(B) \cap \{T_k \leqslant t\} \cap \{N_t = n\} \in \mathcal{F}^S_t \quad \text{για κάθε } B \in \mathfrak{B}(\Upsilon),$$

συνεπώς $\mathcal{F}^X_n \cap \{N_t = n\} \subseteq \mathcal{F}^S_t \cap \{N_t = n\}$, ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη του (a).

(b) Ισχύει ο εγκλεισμός $\mathcal{F}^S_t \cap \{N_t = n\} \subseteq \sigma(\mathcal{F}^W_n \cup \mathcal{F}^X_n) \cap \{N_t = n\}$.

Πράγματι, αν $A \in \bigcup_{u \leqslant t} \sigma(S_u)$, υπάρχει ένας δείκτης $u \in [0, t]$ και ένα σύνολο $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ ώστε $A = S_u^{-1}(B) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}_0}(\{N_u = m\} \cap B_m)$, όπου $B_m := (\sum_{j=1}^m X_j)^{-1}(B) \in \mathcal{F}^X_m$ για κάθε $m \in \mathbb{N}_0$. Άρα

$$A \cap \{N_t = n\} = [(\bigcup_{m=0}^{n-1} \{N_u = m\} \cap B_m) \cap \{N_t = n\}] \cup (\{N_u = n\} \cap B_n \cap \{N_t = n\}).$$

Θέτοντας $C_n := \bigcup_{m=0}^{n-1}(\{N_u = m\} \cap B_m) \in \sigma(\mathcal{F}^W_n \cup \mathcal{F}^X_n)$ έχουμε $A \cap \{N_t = n\} = D_n \cap \{N_t = n\}$, όπου $D_n := C_n \cup (\{T_n \leqslant u\} \cap B_n) \in \sigma(\mathcal{F}^W_n \cup \mathcal{F}^X_n)$. Συνεπώς, $\bigcup_{u \leqslant t} \sigma(S_u) \cap \{N_t = n\} \subseteq \sigma(\mathcal{F}^W_n \cup \mathcal{F}^X_n) \cap \{N_t = n\}$, ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη του (b) και του λήμματος. □

Ορισμοί 4.1.2. Έστω $\mathcal{Z} := \{\mathcal{Z}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ μία διύλιση για τον (Ω, Σ) και Q ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στη Σ. Τα P και Q ονομάζονται:

(a) **Ισοδύναμα** επάνω στη Σ, εάν έχουν τα ίδια μηδενικά σύνολα στην Σ, συμβολισμός $P \sim Q$.

(b) **Προοδευτικά ισοδύναμα** (για την $\mathcal{Z}$), αν $P \upharpoonright \mathcal{Z}_t \sim Q \upharpoonright \mathcal{Z}_t$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$.

(c) **Κάθετα** επάνω στη Σ, εάν υπάρχει ένα σύνολο $A \in \Sigma$ ώστε $P(A) = Q(\Omega \setminus A) = 1$.

Πριν προχωρήσουμε στο βασικό αποτέλεσμα αυτής της ενότητας χρειαζόμαστε το ακόλουθο βοηθητικό λήμμα.

Λήμμα 4.1.3. *Έστω Q ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στη Σ.*

(a) *Αν η X είναι Q-i.i.d., και αν $Q_{X_1} \sim P_{X_1}$ και h είναι μία πραγματική ένα προς ένα $\mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρήσιμη συνάρτηση, τότε υπάρχει μία P_{X_1}-σ.β. μοναδική πραγματική $\mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρήσιμη συνάρτηση γ, ώστε* *(i)* $\mathbb{E}_P\left[h^{-1} \circ \gamma \circ X_1\right] = 1$

και

(ii) για όλα τα $n \in \mathbb{N}_0$ *και τα* $F \in \mathcal{F}_n^X$ *να ισχύει*

$$Q(F) = \mathbb{E}_P\big[\chi_F \cdot \prod_{j=1}^{n} (h^{-1} \circ \gamma \circ X_j)\big]. \tag{4.2}$$

(b) *Αν η* W *είναι* P*-i.i.d. και* Q*-i.i.d., και αν* $Q_{W_1} \sim P_{W_1}$*, υπάρχει μία* P_{W_1}*-σ.β. μοναδική θετική συνάρτηση* $r \in \mathcal{L}^1(P_{W_1})$ *ώστε όλα τα* $n \in \mathbb{N}_0$ *και τα* $E \in \mathcal{F}_n^W$ *να ισχύει*

$$Q(E) = \mathbb{E}_P\big[\chi_E \cdot \prod_{j=1}^{n} (r \circ W_j)\big]. \tag{4.3}$$

Απόδειξη. **(a)** Πρώτα παρατηρούμε ότι $h(\Upsilon) := \{h(y) : y \in \Upsilon\} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ (βλ. π.χ. [3], Theorem 8.3.7) και ότι η συνάρτηση h^{-1} είναι $\mathfrak{B}(h(\Upsilon))$-$\mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρήσιμη (βλ. π.χ. [3], Proposition 8.3.5). Αφού $P_{X_1} \sim Q_{X_1}$, από το Θεώρημα Radon-Nikodým υπάρχει μία P_{X_1}-σ.β. θετική Radon-Nikodým παράγωγος $f \in \mathcal{L}^1(P_{X_1})$ ώστε

$$Q_{X_1}(B) = \int_B f \, dP_{X_1} \quad \text{για κάθε } B \in \mathfrak{B}(\Upsilon). \tag{4.4}$$

Θέτουμε $\gamma := h \circ f$. Προφανώς η γ είναι μία $\mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρήσιμη συνάρτηση. Ένας απλός υπολογισμός μας δίνει τον ισχυρισμό (i).

Πράγματι,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_P\left[h^{-1} \circ \gamma \circ X_1\right] &= \int_\Omega h^{-1} \circ \gamma \circ X_1 \, dP = \int h^{-1} \circ (h \circ f) \circ X_1 \, dP \\
&= \int_\Omega (h^{-1} \circ h) \circ f \circ X_1 \, dP = \int_\Omega f \circ X_1 \, dP \\
&= \int_\Upsilon f(x) \, P_{X_1}(dx) = Q_{X_1}(\Upsilon) = 1.
\end{aligned}$$

(ii): Σταθεροποιούμε ένα αυθαίρετο $n \in \mathbb{N}_0$ και θεωρούμε την οικογένεια συνόλων

$$\mathcal{C}_n^X := \left\{ \bigcap_{j=1}^{n} F_j : F_j \in \sigma(X_j) \right\}.$$

Πολύ εύκολα μπορούμε να δούμε ότι για κάθε $F \in \mathcal{C}_n$ ικανοποιείται η συνθήκη (4.2).

Πράγματι, αν $F \in \mathcal{C}_n^X$, τότε υπάρχουν σύνολα $B_j \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ με $j \in \{1, \ldots, n\}$, ώστε $F = \bigcap_{j=1}^{n} X_j^{-1}(B_j)$. Άρα

$$\begin{aligned} Q(F) &= \int \chi_{\bigcap_{j=1}^n X_j^{-1}(B_j)}\, dQ = \int \prod_{j=1}^n \chi_{X_j^{-1}(B_j)}\, dQ = \prod_{j=1}^n \int \chi_{X_j^{-1}(B_j)}\, dQ \\ &= \prod_{j=1}^n Q_{X_j}(B_j) \stackrel{(4.4)}{=} \prod_{j=1}^n \int_{B_j} f\, dP_{X_j} \stackrel{\gamma=h\circ f}{=} \prod_{j=1}^n \int_{B_j} (h^{-1}\circ\gamma)\, dP_{X_j} \\ &= \prod_{j=1}^n \int_{X_j^{-1}(B_j)} (h^{-1}\circ\gamma\circ X_j)\, dP = \prod_{j=1}^n \int \chi_{X_j^{-1}(B_j)}\cdot(h^{-1}\circ\gamma\circ X_j)\, dP \\ &= \int \prod_{j=1}^n \chi_{X_j^{-1}(B_j)}\cdot(h^{-1}\circ\gamma\circ X_j)\, dP = \int \chi_{\bigcap_{j=1}^n X_j^{-1}(B_j)}\cdot \prod_{j=1}^n (h^{-1}\circ\gamma\circ X_j)\, dP \\ &= \int \chi_F \cdot \prod_{j=1}^n (h^{-1}\circ\gamma\circ X_j)\, dP = \mathbb{E}_P\big[\chi_F\cdot\prod_{j=1}^n (h^{-1}\circ\gamma\circ X_j)\big], \end{aligned}$$

όπου η δεύτερη και η τρίτη ισότητα, όπως και η τρίτη και η τέταρτη από το τέλος ισότητες, ισχύουν καθώς οι τυχαίες μεταβλητές $X_1,\ldots,X_n$ είναι ανεξάρτητες.

Ας θεωρήσουμε επιπλέον την οικογένεια συνόλων

$$\mathcal{D}_n^X := \Big\{F\in\mathcal{F}_n^X : Q(F) = \mathbb{E}_P\big[\chi_F\cdot\prod_{j=1}^n (h^{-1}\circ\gamma\circ X_j)\big] = \Big\}.$$

Εύκολα μπορεί να δει κάποιος ότι η $\mathcal{D}_n^X$ είναι μία κλάση Dynkin στον Ω.

Πράγματι,

(Dyn1) $\varnothing\in\mathcal{D}_n^X$ αφού

$$Q(\varnothing) = 0 = \mathbb{E}_P\big[\chi_\varnothing\cdot\prod_{j=1}^n (h^{-1}\circ\gamma\circ X_j)\big].$$

(Dyn2) Για κάθε $F\in\mathcal{D}_n^X$ ισχύει $\Omega\backslash F\in\mathcal{D}_n^X$.

Πράγματι, αρχικά παρατηρούμε ότι $\Omega\in\mathcal{D}_n^X$ αφού

$$Q(\Omega) = \prod_{j=1}^n \mathbb{E}_P[h^{-1}\circ\gamma\circ X_j] = \mathbb{E}_P\big[\prod_{j=1}^n (h^{-1}\circ\gamma\circ X_j)\big] = \mathbb{E}_P\big[\chi_\Omega\cdot\prod_{j=1}^n (h^{-1}\circ\gamma\circ X_j)\big]$$

όπου η πρώτη ισότητα είναι συνέπεια του Λήμματος 4.1.3 (i) και η δεύτερη προκύπτει από το γεγονός ότι οι τυχαίες μεταβλητές $X_1,\ldots,X_n$ είναι ανεξάρτητες. Συνεπώς

$$\begin{aligned} Q(\Omega\backslash F) &= Q(\Omega) - Q(F) \\ &= \mathbb{E}_P\big[\chi_\Omega\cdot\prod_{j=1}^n (h^{-1}\circ\gamma\circ X_j)\big] - \mathbb{E}_P\big[\chi_F\cdot\prod_{j=1}^n (h^{-1}\circ\gamma\circ X_j)\big] \\ &= \mathbb{E}_P\big[(\chi_\Omega - \chi_F)\cdot\prod_{j=1}^n (h^{-1}\circ\gamma\circ X_j)\big] \\ &= \mathbb{E}_P\big[\chi_{\Omega\backslash F}\cdot\prod_{j=1}^n (h^{-1}\circ\gamma\circ X_j)\big]. \end{aligned}$$

(Dyn3) Για κάθε ακολουθία $\{F_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ξένων ανά δύο συνόλων στην $\mathcal{D}_n^X$ ισχύει $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k \in \mathcal{D}_n^X$.

Πράγματι,

$$\begin{aligned} Q(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} Q(F_k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}_P\big[\chi_{F_k}\cdot\prod_{j=1}^{n}(h^{-1}\circ\gamma\circ X_j)\big] \\ &= \mathbb{E}_P\big[\sum_{k\in\mathbb{N}}\chi_{F_k}\cdot\prod_{j=1}^{n}(h^{-1}\circ\gamma\circ X_j)\big] \\ &= \mathbb{E}_P\big[\chi_{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k}\cdot\prod_{j=1}^{n}(h^{-1}\circ\gamma\circ X_j)\big]. \end{aligned}$$

Επομένως από τα (Dyn1), (Dyn2) and (Dyn3), έπεται ότι η $\mathcal{D}_n^X$ είναι μία κλάση Dynkin.

Θέτουμε $\widetilde{\mathcal{G}}_n^X := \mathcal{G}_n^X \cup \mathcal{C}_n^X$, όπου $\mathcal{G}_n^X := \bigcup_{j=1}^n \sigma(X_j)$. Αφού ο γεννήτορας $\widetilde{\mathcal{G}}_n^X$ είναι κλειστός ως προς τις πεπερασμένες τομές και $\widetilde{\mathcal{G}}_n^X \subseteq \mathcal{D}_n^X$, από το Θεώρημα A.1 προκύπτει ότι $\mathcal{F}_n^X = \mathcal{D}_n^X$, ολοκληρώνοντας με αυτό τον τρόπο την απόδειξη του (ii).

Χρησιμοποιώντας παρόμοια επιχειρήματα μπορούμε να αποδείξουμε το (b). □

Για να διατυπώσουμε το βασικό αποτέλεσμα αυτής της ενότητας υπενθυμίζουμε τις παρακάτω έννοιες.

Έστω $\mathcal{Z} := \{\mathcal{Z}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μία διύλιση για τον (Ω,Σ). Λέμε ότι η οικογένεια $\{Z_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ πραγματικών $\mathcal{Z}_t$-μετρήσιμων P-ολοκληρώσιμων συναρτήσεων Z_t $(t\geqslant 0)$ επάνω στον Ω είναι ένα **$(P,\mathcal{Z})$-martingale**, αν όποτε $s\leqslant t$ ισχύει η συνθήκη $\int_A Z_s\,dP = \int_A Z_t\,dP$ για όλα τα $A\in\mathcal{Z}_s$. Ένα $(P,\mathcal{Z})$-martingale $\{Z_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι **P-σ.β. θετικό** αν η Z_t είναι P-σ.β. θετική για κάθε $t\geqslant 0$.

Μία σ.δ. μεγέθους συνολικών απαιτήσεων S που επάγεται από μία P-διαδικασία κινδύνου (N,X) με την N να είναι μία P-RP$(\mathbf{K}(\theta))$ ονομάζεται **σύνθετη ανανεωτική σ.δ. με παραμέτρους $\mathbf{K}(\theta)$ και P_{X_1}** (συμβ. P-CRP$(\mathbf{K}(\theta),P_{X_1})$ για συντομία). Ιδιαιτέρως, αν η N είναι μία P-PP(θ) η σ.δ. μεγέθους συνολικών απαιτήσεων ονομάζεται **σύνθετη σ.δ. Poisson με παραμέτρους θ και P_{X_1}** (P-CPP(θ,P_{X_1}) για συντομία).

Σημειώνεται ότι αν η N είναι μία P-RP$(\mathbf{K}(\theta))$, τότε $\mathbb{E}_P[N_t]<\infty$ (βλ. π.χ. [23], Proposition 4, σελ. 101). Επομένως, από το [19], Corollary 2.1.5, έπεται ότι έχει μηδενική πιθανότητα έκρηξης, δηλ. $P(\{\sup_{n\in\mathbb{N}_0} T_n<\infty\})=0$.

Για ό,τι ακολουθεί θα συμβολίζουμε πάλι με $\mathbf{K}(\theta)$ τη συνάρτηση κατανομής πιθανότητας που επάγεται από την κατανομή πιθανότητας $\mathbf{K}(\theta)$.

Συμβολισμοί 4.1.4. (a) Έστω h μία συνάρτηση όπως στο Λήμμα 4.1.3. Η κλάση όλων των πραγματικών $\mathfrak{B}(\varUpsilon)$-μετρήσιμων συναρτήσεων γ ώστε $\mathbb{E}_P\left[h^{-1}\circ\gamma\circ X_1\right]=1$ θα συμβολίζεται με $\mathcal{F}_{P,h} := \mathcal{F}_{P,X_1,h}$.

(b) Με $\mathfrak{M}^k(D)$ $(k \in \mathbb{N})$ θα συμβολίζεται η κλάση όλων των $\mathfrak{B}(D)$-$\mathfrak{B}_k$-μετρήσιμων συναρτήσεων στο D. Για την ειδική περίπτωση $k = 1$ θα γράφουμε $\mathfrak{M}(D) := \mathfrak{M}^1(D)$. Με $\mathfrak{M}_+(D)$ θα συμβολίζεται η κλάση όλων των θετικών $\mathfrak{B}(D)$-μετρήσιμων συναρτήσεων στο D. Έστω $\theta \in D \subseteq \mathbb{R}^d$, θ σταθερό, τότε για κάθε $\rho \in \mathfrak{M}^k(D)$ η κλάση όλων των μέτρων πιθανότητας Q επάνω στη Σ ώστε $Q \upharpoonright \mathcal{F}_t^S \sim P \upharpoonright \mathcal{F}_t^S$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και η S να είναι μία Q-CRP$(\mathbf{K}(\rho(\theta)), Q_{X_1})$ θα συμβολίζεται με $\mathcal{M}_{S,\mathbf{K}(\rho(\theta))}$.

Για το υπόλοιπο του κεφαλαίου, εκτός και αν αναφέρεται διαφορετικά, η h είναι μία συνάρτηση όπως στο Λήμμα 4.1.3, και $P \in \mathcal{M}_{S,\mathbf{K}(\theta)}$ είναι το αρχικό μέτρο πιθανότητας ως προς το οποίο η S είναι μία P-CRP με παραμέτρους $\mathbf{K}(\theta)$ και P_{X_1}.

Για μία δοσμένη σ.δ. μεγέθους συνολικών απαιτήσεων S στον (Ω, Σ), προκειμένου να διερευνηθεί η ύπαρξη martingale-ισοδύναμων μέτρων πιθανότητας (βλ. Ενότητα 4.3), πρέπει κανείς να είναι σε θέση να χαρακτηρίσει τις Radon-Nikodým παραγώγους dQ/dP. Η παρακάτω πρόταση είναι μία αναγκαία συνθήκη για την απόδειξη του επιθυμητού χαρακτηρισμού, βλ. Θεώρημα 4.2.9.

Πρόταση 4.1.5. *Για δοσμένη $\rho \in \mathfrak{M}^k(D)$ έστω Q ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στη Σ ώστε η S να είναι μία Q-CRP$(\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta)), Q_{X_1})$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) $Q \upharpoonright \mathcal{F}_t^S \sim P \upharpoonright \mathcal{F}_t^S$ *για κάθε* $t \in \mathbb{R}_+$.

(ii) $Q_{X_1} \sim P_{X_1}$ *και* $Q_{W_1} \sim P_{W_1}$.

(iii) Υπάρχει μία P_{X_1}-σ.β. μοναδική συνάρτηση $\gamma \in \mathcal{F}_{P,h}$, τέτοια ώστε

$$Q(A) = \int_A \widetilde{M}_t^{(\gamma)}(\theta)\, dP \quad \text{για κάθε} \quad 0 \leqslant u \leqslant t \quad \text{και} \quad A \in \mathcal{F}_u^S, \tag{RRM}$$

με

$$\widetilde{M}_t^{(\gamma)}(\theta) := \Big[\prod_{j=1}^{N_t} (h^{-1} \circ \gamma \circ X_j) \cdot \frac{[\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))]'(W_j)}{[\mathbf{K}(\theta)]'(W_j)}\Big] \cdot \frac{1 - \mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))(t - T_{N_t})}{1 - \mathbf{K}(\theta)(t - T_{N_t})},$$

όπου η οικογένεια $\widetilde{M}^{(\gamma)}(\theta) := \{\widetilde{M}_t^{(\gamma)}(\theta)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ είναι ένα P-σ.β. θετικό $(P, \mathcal{F}^S)$-martingale που ικανοποιεί τη συνθήκη $\mathbb{E}_P[\widetilde{M}_t^{(\gamma)}(\theta)] = 1$ για κάθε $t \geqslant 0$.

Απόδειξη. Για όλη την απόδειξη σταθεροποιούμε ένα αυθαίρετο $t \geqslant 0$.

$(i) \Longrightarrow (ii)$: Έστω $Q \upharpoonright \mathcal{F}_t^S \sim P \upharpoonright \mathcal{F}_t^S$.

(a) Η τυχαία μεταβλητή X_1 είναι $\mathcal{F}_{T_1}^S$-μετρήσιμη, όπου $\mathcal{F}_{T_1}^S := \{A \in \Sigma : A \cap \{T_1 \leqslant v\} \in \mathcal{F}_v^S$ για κάθε $v \geqslant 0\}$ (βλ. π.χ. [13], Definition 2.12).

Πράγματι, αφού η S είναι $\mathcal{F}^S$-προσαρμοσμένη και δεξιά συνεχής, προκύπτει ότι είναι προοδευτικά μετρήσιμη ως προς την $\mathcal{F}^S$ (βλ. π.χ. [13], Proposition 1.13). Συνεπώς, αφού η T_1

είναι ένας χρόνος διακοπής για την $\mathcal{F}^S$, έπεται ότι η τυχαία μεταβλητή S_{T_1} είναι $\mathcal{F}^S_{T_1}$-μετρήσιμη (βλ. π.χ. [13], Proposition 2.18). Άρα η τυχαία μεταβλητή $X_1 = S_{T_1}$ είναι $\mathcal{F}^S_{T_1}$-μετρήσιμη.

(b) Ισχύει η συνθήκη $Q_{X_1} \sim P_{X_1}$.

Πράγματι, αφού από το (a) έχουμε ότι η τυχαία μεταβλητή X_1 είναι $\mathcal{F}^S_{T_1}$-μετρήσιμη έπεται ότι

$$X_1^{-1}(B) \cap \{T_1 \leqslant v\} \in \mathcal{F}^S_v \quad \text{για κάθε } B \in \mathfrak{B}(\Upsilon) \text{ και για κάθε } v \geqslant 0. \tag{4.5}$$

Επομένως $D_m(B) := X_1^{-1}(B) \cap \{T_1 \leqslant m\} \in \mathcal{F}^S_m$ για κάθε $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ και $m \in \mathbb{N}_0$. Προφανώς η ακολουθία $\{D_m(B)\}_{m\in\mathbb{N}_0}$ είναι αύξουσα και $\bigcup_{m\in\mathbb{N}_0} D_m(B) = X_1^{-1}(B)$ για κάθε $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$. Επομένως, για κάποιο σύνολο $B_0 \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ με $Q_{X_1}(B_0) = 0$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} Q_{X_1}(B_0) &= Q(X_1^{-1}(B_0)) = Q(\bigcup_{m\in\mathbb{N}_0} D_m(B_0)) = \lim_{m\to\infty} Q(D_m(B_0)) \\ &= \lim_{m\to\infty} P(D_m(B_0)) = P(\bigcup_{m\in\mathbb{N}_0} D_m(B_0)) = P(X_1^{-1}(B_0)), \end{aligned}$$

δηλαδή $P_{X_1}(B_0) = 0$. Αντικαθιστώντας το Q με το P παίρνουμε $Q_{X_1} \sim P_{X_1}$.

(c) Ισχύει η συνθήκη $Q_{W_1} \sim P_{W_1}$.

Για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό $Q_{W_1} \sim P_{W_1}$, αρχικά παρατηρούμε ότι από τη συνθήκη (4.5) για $B = \Upsilon$ προκύπτει ότι

$$X_1^{-1}(\Upsilon) \cap \{T_1 \leqslant v\} = \{W_1 \leqslant v\} \in \mathcal{F}^S_v \text{ για κάθε } v \geqslant 0,$$

δηλαδή η τυχαία μεταβλητή W_1 είναι $\mathcal{F}^S_v$-μετρήσιμη για κάθε $v \geqslant 0$. Άρα για κάποιο σύνολο $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ με $Q_{W_1}(B) = 0$, έχουμε ότι $P_{W_1}(B) = Q_{W_1}(B) = 0$. Αντικαθιστώντας το Q με το P παίρνουμε $Q_{W_1} \sim P_{W_1}$.

(ii) $\Longrightarrow$ *(iii)*: Έστω ότι $Q_{X_1} \sim P_{X_1}$ και $Q_{W_1} \sim P_{W_1}$, και έστω σταθερό αλλά τυχαίο $u \in [0, t]$.

(d) Για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ και $A \in \sigma(\mathcal{F}^W_n \cup \mathcal{F}^X_n) \cap \{W_{n+1} > u - T_n\}$ ισχύει η συνθήκη

$$Q(A) = \int \chi_A \cdot \Big[\prod_{j=1}^{n} (h^{-1} \circ \gamma \circ X_j) \cdot \frac{[\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))]'(W_j)}{[\mathbf{K}(\theta)]'(W_j)}\Big] \cdot \frac{Q(\{W_{n+1} > u - T_n\})}{P(\{W_{n+1} > u - T_n\})}\, dP. \tag{4.6}$$

Πράγματι, αρχικά παρατηρούμε ότι από την υπόθεση μας και το Λήμμα 4.1.3 προκύπτει ότι υπάρχει μία P_{X_1}-σ.β. μοναδική συνάρτηση $\gamma \in \mathcal{F}_{P,h}$ που ικανοποιεί τη σχέση (4.2) καθώς και μία P_{W_1}-σ.β. μοναδική θετική συνάρτηση r που ικανοποιεί τη σχέση (4.3). Σταθεροποιούμε ένα τυχαίο $n \in \mathbb{N}_0$ και θεωρούμε την οικογένεια συνόλων

$$\mathcal{C}_n := \mathcal{C}_{n,u} := \{[\bigcap_{j=1}^{n} (X_j^{-1}(F_j) \cap W_j^{-1}(E_j))] \cap \{W_{n+1} > u - T_n\} : F_j, E_j \in \mathfrak{B}(\Upsilon)\}.$$

Αρχικά θα δείξουμε ότι η συνθήκη (4.6) ικανοποιείται για κάθε στοιχείο της $\mathcal{C}_n$. Πράγματι, έστω $G \in \mathcal{C}_n$, τότε υπάρχουν σύνολα $F_j, E_j \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ για $j \in \{1, \ldots, n\}$, ώστε

$$G = [\bigcap_{j=1}^{n} X_j^{-1}(F_j) \cap W_j^{-1}(E_j)] \cap \{W_{n+1} > u - T_n\}.$$

Επομένως, από το Λήμμα 4.1.3 και το Θεώρημα του Fubini προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
Q(G) &= \int \chi_G \, dQ = \int \chi_{[\bigcap_{j=1}^{n} X_j^{-1}(F_j) \cap W_j^{-1}(E_j)] \cap \{W_{n+1} > u - T_n\}} \, dQ \\
&= \int \prod_{j=1}^{n} \left[\chi_{F_j}(x_j) \cdot \chi_{E_j}(w_j)\right] \cdot \chi_{(u-w,\infty)}(w_{n+1}) \\
&\qquad Q_{X_1,\ldots,X_n;W_1,\ldots W_n,W_{n+1}}(d(x_1, \ldots, x_n; w_1, \ldots, w_n, w_{n+1})) \\
&= [\int \prod_{j=1}^{n} \chi_{F_j}(x_j) \, Q_{X_1,\ldots,X_n}(d(x_1, \ldots, x_n))] \cdot \\
&\qquad \int [\prod_{j=1}^{n} \chi_{E_j}(w_j)] \cdot \chi_{(u-w,\infty)}(w_{n+1}) \, Q_{W_1,\ldots W_n,W_{n+1}}(d(w_1, \ldots, w_n, w_{n+1})) \\
&= [\int \prod_{j=1}^{n} \chi_{F_j}(x_j) \, Q_{X_1,\ldots,X_n}(d(x_1, \ldots, x_n))] \cdot \\
&\qquad \int [\prod_{j=1}^{n} \chi_{E_j}(w_j)] \cdot [\int \chi_{(u-w,\infty)}(w_{n+1}) \, Q_{W_{n+1}}(dw_{n+1})] \, Q_{W_1,\ldots W_n}(d(w_1, \ldots, w_n)) \\
&= [\int \prod_{j=1}^{n} \chi_{F_j}(x_j) \cdot (h^{-1} \circ \gamma)(x_j) \, P_{X_1,\ldots,X_n}(d(x_1, \ldots, x_n))] \cdot \\
&\qquad \int [\prod_{j=1}^{n} \chi_{E_j}(w_j) \cdot r(w_j)] \cdot Q(\{W_{n+1} > u - w\}) \, P_{W_1,\ldots W_n}(d(w_1, \ldots, w_n)),
\end{aligned}$$

όπου $w = \sum_{j=1}^{n} w_j$ και $r(w_j) = \frac{[\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))]'(w_j)}{[\mathbf{K}(\theta)]'(w_j)}$ για κάθε $j \in \{1, \ldots, n\}$. Χρησιμοποιώντας ξανά το Θεώρημα του Fubini έχουμε

$$\begin{aligned}
Q(G) &= \int [\prod_{j=1}^{n} \chi_{F_j}(x_j) \cdot \chi_{E_j}(w_j) \cdot (h^{-1} \circ \gamma)(x_j) \cdot r(w_j)] \cdot \\
&\qquad Q(\{W_{n+1} > u - w\}) \, P_{X_1,\ldots,X_n,W_1,\ldots W_n}(d(x_1, \ldots, x_n; w_1, \ldots, w_n)) \\
&= \int [\prod_{j=1}^{n} \chi_{F_j}(x_j) \cdot \chi_{E_j}(w_j) \cdot (h^{-1} \circ \gamma)(x_j) \cdot r(w_j)] \cdot \frac{Q(\{W_{n+1} > u - w\})}{P(\{W_{n+1} > u - w\})} \cdot \\
&\qquad P(\{W_{n+1} > u - w\}) \, P_{X_1,\ldots,X_n;W_1,\ldots W_n}(d(x_1, \ldots, x_n, w_1, \ldots, w_n)) \\
&= \int [\prod_{j=1}^{n} \chi_{F_j}(x_j,) \cdot \chi_{E_j}(w_j) \cdot (h^{-1} \circ \gamma)(x_j) \cdot r(w_j)] \cdot \frac{Q(\{W_{n+1} > u - w\})}{P(\{W_{n+1} > u - w\})} \cdot \\
&\qquad [\int \chi_{(u-w,\infty)}(w_{n+1}) \, P_{W_{n+1}}(dw_{n+1})] \, P_{X_1,\ldots,X_n;W_1,\ldots W_n}(d(x_1, \ldots, x_n; w_1, \ldots, w_n)) \\
&= \int [\prod_{j=1}^{n} \chi_{F_j}(x_j,) \cdot \chi_{E_j}(w_j) \cdot \chi_{(u-w,\infty)}(w_{n+1}) \cdot (h^{-1} \circ \gamma)(x_j) \cdot r(w_j)] \cdot \\
&\qquad \frac{Q(\{W_{n+1} > u - w\})}{P(\{W_{n+1} > u - w\})} \, P_{X_1,\ldots,X_n;W_1,\ldots W_n,W_{n+1}}(d(x_1, \ldots, x_n; w_1, \ldots, w_n, w_{n+1})).
\end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} Q(G) &= \int \chi_{[\bigcap_{j=1}^n X_j^{-1}(F_j)\cap W_j^{-1}(E_j)]\cap\{W_{n+1}>u-T_n\}} \cdot \Big[\prod_{j=1}^n (h^{-1}\circ\gamma\circ X_j)\cdot(r\circ W_j)\Big]\cdot \\ &\quad \frac{Q(\{W_{n+1}>u-T_n\})}{P(\{W_{n+1}>u-T_n\})}\,dP \\ &= \int \chi_G \cdot \Big[\prod_{j=1}^n (h^{-1}\circ\gamma\circ X_j)\cdot(r\circ W_j)\Big]\cdot \frac{Q(\{W_{n+1}>u-T_n\})}{P(\{W_{n+1}>u-T_n\})}\,dP, \end{aligned}$$

και επομένως (4.6) ισχύει για κάθε στοιχείο της $\mathcal{C}_n$.

Θεωρούμε την οικογένεια συνόλων

$$\mathcal{D}_n := \mathcal{D}_{n,u} := \{A \in \sigma(\mathcal{F}_n^W \cup \mathcal{F}_n^X) \cap \{W_{n+1} > u - T_n\} : A \text{ ικανοποιεί την } (4.6)\}.$$

Τότε η $\mathcal{D}_n$ είναι μία κλάση Dynkin στο $\{W_{n+1} > u - T_n\}$.

Πράγματι,

(Dyn1) προφανώς $\varnothing \in \mathcal{D}_n$ αφού

$$Q(\varnothing) = 0 = \int \chi_\varnothing \cdot \Big[\prod_{j=1}^n (h^{-1}\circ\gamma\circ X_j)\Big]\cdot(r\circ W_j)\cdot \frac{Q(\{W_{n+1}>u-T_n\})}{P(\{W_{n+1}>u-T_n\})}\,dP.$$

(Dyn2) Για κάθε $A \in \mathcal{D}_n$ ισχύει ότι $\{W_{n+1} > u - T_n\}\backslash A \in \mathcal{D}_n$.

Αρχικά παρατηρούμε ότι $\{W_{n+1} > u - T_n\} \in \mathcal{D}_n$ αφού

$$\{W_{n+1} > u - T_n\} = \Big[\bigcap_{j=1}^n \big(X_j^{-1}(\Upsilon)\cap W_j^{-1}(\Upsilon)\big)\Big] \cap \{W_{n+1} > u - T_n\} \in \mathcal{C}_n.$$

Τότε για κάθε $A \in \mathcal{D}_n$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} &Q(\{W_{n+1}>u-T_n\}\backslash A) \\ &= Q(\{W_{n+1}>u-T_n\}) - Q(A) \\ &= \int \chi_{\{W_{n+1}>u-T_n\}} \cdot \Big[\prod_{j=1}^n (h^{-1}\circ\gamma\circ X_j)\cdot(r\circ W_j)\Big]\cdot \frac{Q(\{W_{n+1}>u-T_n\})}{P(\{W_{n+1}>u-T_n\})}\,dP \\ &\quad - \int \chi_A \cdot \Big[\prod_{j=1}^n (h^{-1}\circ\gamma\circ X_j)\cdot(r\circ W_j)\Big]\cdot \frac{Q(\{W_{n+1}>u-T_n\})}{P(\{W_{n+1}>u-T_n\})}\,dP \\ &= \int \chi_{\{W_{n+1}>u-T_n\}\backslash A} \cdot \Big[\prod_{j=1}^n (h^{-1}\circ\gamma\circ X_j)\cdot(r\circ W_j)\Big]\cdot \frac{Q(\{W_{n+1}>u-T_n\})}{P(\{W_{n+1}>u-T_n\})}\,dP, \end{aligned}$$

δηλαδή $\{W_{n+1} > u - T_n\}\backslash A \in \mathcal{D}_n$.

(Dyn3) Για κάθε ακολουθία $\{A_m\}_{m\in\mathbb{N}_0}$ ξένων ανα δύο συνόλων της $\mathcal{D}_n$ ισχύει ότι $\bigcup_{m\in\mathbb{N}_0} A_m \in \mathcal{D}_n$.

Πράγματι, αν $\{A_m\}_{m\in\mathbb{N}_0}$ είναι μία ακολουθία ξένων ανα δύο συνόλων της $\mathcal{D}_n$ έπεται ότι

$$\begin{aligned} Q(\bigcup_{m\in\mathbb{N}_0} A_m) &= \sum_{m\in\mathbb{N}_0} Q(A_m) \\ &= \sum_{m\in\mathbb{N}_0} \int \chi_{A_m} \cdot [\prod_{j=1}^{n} (h^{-1}\circ\gamma\circ X_j)\cdot(r\circ W_j)] \cdot \frac{Q(\{W_{n+1} > u - T_n\})}{P(\{W_{n+1} > u - T_n\})}\, dP \\ &= \int \chi_{\bigcup_{m\in\mathbb{N}_0} A_m} \cdot [\prod_{j=1}^{n} (h^{-1}\circ\gamma\circ X_j)\cdot(r\circ W_j)] \cdot \frac{Q(\{W_{n+1} > u - T_n\})}{P(\{W_{n+1} > u - T_n\})}\, dP, \end{aligned}$$

δηλαδή $\bigcup_{m\in\mathbb{N}_0} A_m \in \mathcal{D}_n$.

Επομένως από τα (Dyn1), (Dyn2) και (Dyn3) προκύπτει ότι η οικογένεια συνόλων $\mathcal{D}_n$ είναι μία κλάση Dynkin.

Θέτουμε $\widetilde{\mathcal{G}}_n := \widetilde{\mathcal{G}}_{n,u} := \mathcal{G}_n \cup \mathcal{C}_n$, όπου $\mathcal{G}_n := \mathcal{G}_{n,u} := (\bigcup_{j=1}^{n} \sigma(W_j) \cup \bigcup_{j=1}^{n} \sigma(X_j)) \cap \{W_{n+1} > u - T_n\}$. Προφανώς $\widetilde{\mathcal{G}}_n \subseteq \mathcal{D}_n$, και καθώς η $\widetilde{\mathcal{G}}_n$ είναι κλειστή ως προς τις πεπερασμένες τομές από το Θεώρημα A.1 έπεται ότι $\sigma(\widetilde{\mathcal{G}}_n) = \sigma(\mathcal{F}_n^W \cup \mathcal{F}_n^X) \cap \{W_{n+1} > u - T_n\} = \mathcal{D}_n$, ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη του (d).

(e) Η οικογένεια $\widetilde{M}^{(\gamma)}(\theta)$ είναι ένα $(P, \mathcal{F}^S)$-martingale και για κάθε $A \in \mathcal{F}_u^S$ ισχύει η συνθήκη (RRM).

Πράγματι, έστω $A \in \mathcal{F}_u^S$. Από το Λήμμα 4.1.1, έπεται ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}_0$ υπάρχει ένα σύνολο $B_k \in \sigma(\mathcal{F}_k^W \cup \mathcal{F}_k^X)$ ώστε $A \cap \{N_u = k\} = B_k \cap \{N_u = k\}$. Επομένως, καθώς η N έχει μηδενική πιθανότητα έκρηξης προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} Q(A) &= \sum_{k=0}^{\infty} Q\left(A \cap \{N_u = k\}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} Q\left(B_k \cap \{N_u = k\}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} Q(B_k \cap \{T_k \leqslant u\} \cap \{W_{k+1} > u - T_k\}). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Αλλά, αφού $B_k \cap \{T_k \leqslant u\} \in \sigma(\mathcal{F}_k^W \cup \mathcal{F}_k^X)$, από τις σχέσεις (4.6) και (4.7) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} &Q(A) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}_P\Big[\chi_{B_k\cap\{T_k\leqslant u\}\cap\{W_{k+1}>u-T_k\}} \cdot [\prod_{j=1}^{k} (h^{-1}\circ\gamma\circ X_j)\cdot(r\circ W_j)] \cdot \frac{Q(\{W_{k+1} > u - T_k\})}{P(\{W_{k+1} > u - T_k\})}\Big] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}_P\Big[\chi_{A\cap\{N_u=k\}} \cdot [\prod_{j=1}^{N_u} (h^{-1}\circ\gamma\circ X_j)\cdot(r\circ W_j)] \cdot \frac{Q(\{W_{k+1} > u - T_k\})}{P(\{W_{k+1} > u - T_k\})}\Big] \\ &= \mathbb{E}_P\big[\chi_A \cdot \widetilde{M}_u^{(\gamma)}(\theta)\big]. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Επιπλέον, από τη σχέση (4.8) έπεται ότι

$$\int_A \widetilde{M}_u^{(\gamma)}(\theta)\, dP = \int_A \widetilde{M}_t^{(\gamma)}(\theta)\, dP \quad \text{για όλα τα} \quad 0 \leqslant u \leqslant t \quad \text{και} \quad A \in \mathcal{F}_u^S,$$

δηλαδή η οικογένεια $\widetilde{M}^{(\gamma)}(\theta)$ είναι ένα $(P, \mathcal{F}^S)$-martingale. Το τελευταίο μαζί με τη συνθήκη (4.8) αποδεικνύει την (RRM).

(f) Η οικογένεια $\widetilde{M}^{(\gamma)}(\theta)$ είναι P-σ.β. θετική και ικανοποιεί τη συνθήκη $\mathbb{E}_P[\widetilde{M}_t^{(\gamma)}(\theta)] = 1$.

Πράγματι, η συνθήκη (RRM) για $A = \Omega$ μας δίνει

$$\mathbb{E}_P[\widetilde{M}_t^{(\gamma)}(\theta)] = \int_\Omega \widetilde{M}_t^{(\gamma)}(\theta)\, dP = Q(\Omega) = 1.$$

Τέλος, είναι προφανές ότι $P(\{N_t = n\}) > 0$ και $Q(\{N_t = n\}) > 0$, κάτι που συνεπάγεται ότι $P(\{W_{n+1} > t - T_n\}) > 0$ και $Q(\{W_{n+1} > t - T_n\}) > 0$. Το τελευταίο μαζί με το γεγονός ότι οι συναρτήσεις $h^{-1} \circ \gamma$ και r είναι P_{X_1}- και P_{W_1}-σ.β. θετικές αντίστοιχα συνεπάγεται ότι $P(\{\widetilde{M}_t^{(\gamma)}(\theta) > 0\}) = 1$.

Ο ισχυρισμός $(iii) \Longrightarrow (i)$ είναι άμεσος. □

Η Πρόταση 4.1.5 μας επιτρέπει να υπολογίσουμε ακριβώς τις Radon-Nikodým παραγώγους για σημαντικές, για τα αναλογιστικά μαθηματικά, διαδικασίες κινδύνου.

Στο πρώτο παράδειγμα θεωρούμε την περίπτωση μίας σ.δ. Poisson, η οποία είναι η απλούστερη ανανεωτική σ.δ..

Παράδειγμα 4.1.6. Έστω $h := \ln$, $\theta \in D := \Upsilon$, και $P \in \mathcal{M}_{S,\mathbf{Exp}(\theta)}$ και $Q \in \mathcal{M}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\theta))}$ με ρ μία οποιαδήποτε συνάρτηση στην $\mathfrak{M}_+(\Upsilon)$. Από την Πρόταση 4.1.5 έπεται ότι υπάρχει μία P_{X_1}-σ.β. μοναδική συνάρτηση $\gamma \in \mathcal{F}_{P,\ln}$, που ορίζεται ως $\gamma := \ln f$, όπου f είναι μία Radon-Nikodým παράγωγος του Q_{X_1} ως προς το P_{X_1}, ώστε για κάθε $0 \leqslant u \leqslant t$ και για όλα τα $A \in \mathcal{F}_u^S$ να ισχύει

$$\begin{aligned} Q(A) &= \int_A e^{\sum_{j=1}^{N_t} \gamma(X_j)} \cdot \left[\prod_{j=1}^{N_t} \frac{\rho(\theta) \cdot e^{-\rho(\theta) \cdot W_j}}{\theta \cdot e^{-\theta \cdot W_j}}\right] \cdot \frac{e^{-\rho(\theta)\cdot(t - T_{N_t})}}{e^{-\theta\cdot(t-T_{N_t})}}\, dP \\ &= \int_A e^{\sum_{j=1}^{N_t} \gamma(X_j)} \cdot \left(\frac{\rho(\theta)}{\theta}\right)^{N_t} \cdot e^{-t\cdot(\rho(\theta)-\theta)}\, dP. \end{aligned}$$

Στο επόμενο παράδειγμα θεωρούμε μία ανανεωτική σ.δ. για την οποία οι ενδιάμεσοι χρόνοι κατανέμονται σύμφωνα με την γάμμα κατανομή.

Παράδειγμα 4.1.7. Ας υποθέσουμε ότι $h := \ln$, $\theta = (\xi_1, \kappa_1) \in D := \Upsilon^2$, $\rho \in \mathfrak{M}^2(D)$ με $\rho(\theta) = (\xi_2, \kappa_2)$, και έστω $P \in \mathcal{M}_{S,\mathbf{Ga}(\theta)}$ και $Q \in \mathcal{M}_{S,\mathbf{Ga}(\rho(\theta))}$. Από την Πρόταση 4.1.5 υπάρχει μία P_{X_1}-σ.β. μοναδική συνάρτηση $\gamma \in \mathcal{F}_{P,\ln}$ ώστε για κάθε $0 \leqslant u \leqslant t$ και $A \in \mathcal{F}_u^S$ να ισχύει

$$\begin{aligned} Q(A) & \\ &= \int_A e^{\sum_{j=1}^{N_t}\gamma(X_j)} \cdot \left[\prod_{j=1}^{N_t} \frac{\frac{\xi_2^{\kappa_2}}{\Gamma(\kappa_2)} \cdot W_j^{\kappa_2-1} \cdot e^{-\xi_2 \cdot W_j}}{\frac{\xi_1^{\kappa_1}}{\Gamma(\kappa_1)} \cdot W_j^{\kappa_1-1} \cdot e^{-\xi_1 \cdot W_j}}\right] \cdot \frac{e^{-\xi_2\cdot(t-T_{N_t})} \cdot \sum_{i=0}^{\kappa_2-1} \frac{\left(\xi_2\cdot(t-T_{N_t})\right)^i}{i!}}{e^{-\xi_1\cdot(t-T_{N_t})} \cdot \sum_{i=0}^{\kappa_1-1} \frac{\left(\xi_1\cdot(t-T_{N_t})\right)^i}{i!}}\, dP \\ &= \int_A e^{\sum_{j=1}^{N_t}\gamma(X_j)} \cdot \left(\frac{\xi_2^{\kappa_2}\cdot\Gamma(\kappa_1)}{\xi_1^{\kappa_1}\cdot\Gamma(\kappa_2)}\right)^{N_t} \cdot e^{-t\cdot(\xi_2-\xi_1)} \cdot \left[\prod_{j=1}^{N_t} W_j^{\kappa_2-\kappa_1}\right] \cdot \frac{\sum_{i=0}^{\kappa_2-1} \frac{\left(\xi_2\cdot(t-T_{N_t})\right)^i}{i!}}{\sum_{i=0}^{\kappa_1-1} \frac{\left(\xi_1\cdot(t-T_{N_t})\right)^i}{i!}}\, dP. \end{aligned}$$

4.2 Ένας Χαρακτηρισμός

Από την Πρόταση 4.1.5 γνωρίζουμε ότι κάτω από τις ασθενείς συνθήκες $Q_{X_1} \sim P_{X_1}$ και $Q_{W_1} \sim P_{W_1}$, τα μέτρα P και Q είναι ισοδύναμα επάνω σε κάθε σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_t^S$. Αρχικά θα δείξουμε ότι κάτι τέτοιο δεν ισχύει γενικά για την $\mathcal{F}_\infty^S$. Ας ξεκινήσουμε με ένα εύκολο αλλά πολύ χρήσιμο λήμμα.

Λήμμα 4.2.1. *Ισχύει ότι*

$$\mathcal{F}_\infty^S = \mathcal{F}_\infty^{(W,X)} := \sigma\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathcal{F}_n^W \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathcal{F}_n^X\right)$$

Απόδειξη. Για να δείξουμε τον εγκλεισμό $\mathcal{F}_\infty^S \subseteq \mathcal{F}_\infty^{(W,X)}$, παρατηρούμε ότι από το Λήμμα 4.1.1 για κάθε $t \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}_0$ και $A \in \mathcal{F}_t^S$ προκύπτει ότι $A \cap \{N_t = n\} \in \sigma(\mathcal{F}_n^W \cup \mathcal{F}_n^X) \cap \{N_t = n\}$. Αλλά, αφού $\sigma(\mathcal{F}_n^W \cup \mathcal{F}_n^X) \cap \{N_t = n\} \subseteq \sigma(\mathcal{F}_{n+1}^W \cup \mathcal{F}_n^X) \subseteq \mathcal{F}_\infty^{(X,W)}$, έχουμε $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0}(A \cap \{N_t = n\}) \in \mathcal{F}_\infty^{(W,X)}$. Επομένως $\mathcal{F}_t^S \subseteq \mathcal{F}_\infty^{(W,X)}$ για κάθε $t \geqslant 0$, και άρα $\mathcal{F}_\infty^S \subseteq \mathcal{F}_\infty^{(W,X)}$.

Για να εξετάσουμε τον αντίστροφο εγκλεισμό ας σταθεροποιήσουμε ένα αυθαίρετο $n \in \mathbb{N}_0$. Από τη συνθήκη (4.1) έπεται ότι $X_n^{-1}(B) \cap \{T_n \leqslant m\} \in \mathcal{F}_\infty^S$ για κάθε $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ και για κάθε $m \in \mathbb{N}_0$. Επομένως, $X_n^{-1}(B) = \bigcup_{m\in\mathbb{N}_0}(X_n^{-1}(B) \cap \{T_n \leqslant m\}) \in \mathcal{F}_\infty^S$, κάτι που συνεπάγεται την $\mathcal{F}_\infty^S$-μετρησιμότητα της X_n. Πάλι από τη συνθήκη (4.1) για $B = \Upsilon$ προκύπτει η $\mathcal{F}_t^S$-μετρησιμότητα της τυχαίας μεταβλητής T_n για κάθε $t \geqslant 0$, κάτι που συνεπάγεται την $\mathcal{F}_\infty^S$-μετρησιμότητα της W_n. Επομένως $\mathcal{F}_\infty^{(W,X)} \subseteq \mathcal{F}_\infty^S$. □

Λήμμα 4.2.2. *Έστω $Q \in \mathcal{M}_{S,\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))}$. Αν $P_{X_1} \neq Q_{X_1}$ ή $P_{W_1} \neq Q_{W_1}$ τότε τα P και Q είναι κάθετα επάνω στην $\mathcal{F}_\infty^S$.*

Απόδειξη. Έστω $P_{X_1} \neq Q_{X_1}$ και $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $P_{X_1}(B) < Q_{X_1}(B)$. Επομένως, υπάρχει ένα σημείο $c \in (0,1)$ ώστε $P_{X_1}(B) < c < Q_{X_1}(B)$.

Θέτουμε $E := \{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \chi_{\{X_k \in B\}} < c\}$. Από το Λήμμα 4.2.1 προκύπτει ότι $E \in \mathcal{F}_\infty^S$. Αλλά σύμφωνα με τον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών έχουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \chi_{\{X_k \in B\}} = P_{X_1}(B) \qquad P \upharpoonright \mathcal{F}_\infty^S\text{-σ.β.}$$

και

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \chi_{\{X_k \in B\}} = Q_{X_1}(B) \qquad Q \upharpoonright \mathcal{F}_\infty^S\text{-σ.β..}$$

Επομένως, συμπεραίνουμε ότι $P(E) = 1$ και $Q(E) = 0$, δηλαδή τα μέτρα P και Q είναι κάθετα επάνω στην $\mathcal{F}_\infty^S$. Με παρόμοιο τρόπο μπορεί να δειχθεί ότι αν υποθέσουμε πως $P_{W_1} \neq Q_{W_1}$, τότε πάλι τα μέτρα P και Q θα είναι κάθετα επάνω στην $\mathcal{F}_\infty^S$. □

Πρόταση 4.2.3. *Αν $Q \in \mathcal{M}_{S,\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))}$, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

(i) τα μέτρα P και Q είναι ισοδύναμα επάνω στην $\mathcal{F}_\infty^S$,

(ii) $P_{X_1} = Q_{X_1}$ και $P_{W_1} = Q_{W_1}$,

(iii) $P \upharpoonright \mathcal{F}_\infty^S = Q \upharpoonright \mathcal{F}_\infty^S$.

Απόδειξη. $(i) \Longrightarrow (ii)$: Υποθέτουμε, αν είναι δυνατόν, ότι $P_{X_1} \neq Q_{X_1}$. Από το Λήμμα 4.2.2 έπεται ότι τα P και Q είναι κάθετα επάνω στην $\mathcal{F}_\infty^S$, κάτι που είναι άτοπο. Επομένως, $P_{X_1} = Q_{X_1}$. Με όμοιο τρόπο μπορεί να δειχθεί ότι $P_{W_1} = Q_{W_1}$.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$: Η συνθήκη $P_{W_1} = Q_{W_1}$ συνεπάγεται ότι $P_{N_t} = Q_{N_t}$ για κάθε $t \geqslant 0$ (βλ. π.χ. [19], Lemma 2.1.2). Επιπλέον, αφού $P_{X_1} = Q_{X_1}$, έπεται ότι $P_{S_t} = Q_{S_t}$ για κάθε $t \geqslant 0$. Επομένως, τα μέτρα P και Q ταυτίζονται επάνω στην $\bigcup_{t\in\mathbb{R}_+} \mathcal{F}_t^S$. Συνεπώς, $P \upharpoonright \mathcal{F}_\infty^S = Q \upharpoonright \mathcal{F}_\infty^S$.
Ο ισχυρισμός $(iii) \Longrightarrow (i)$ είναι προφανής. □

Πρόταση 4.2.4. *Έστω $Q \in \mathcal{M}_{S,\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))}$. Αν $P \upharpoonright \mathcal{F}_\infty^S \neq Q \upharpoonright \mathcal{F}_\infty^S$, τότε τα μέτρα P και Q είναι κάθετα επάνω στην $\mathcal{F}_\infty^S$.*

Απόδειξη. Εάν $P \upharpoonright \mathcal{F}_\infty^S \neq Q \upharpoonright \mathcal{F}_\infty^S$, από τη Πρόταση 4.2.3 προκύπτει ότι $P_{X_1} \neq Q_{X_1}$ ή $P_{W_1} \neq Q_{W_1}$. Επομένως, από το Λήμμα 4.2.2 παίρνουμε το επιθυμητό συμπέρασμα. □

Πριν διατυπώσουμε το αντίστροφο της Πρότασης 4.1.5 (δηλαδή ότι για δοσμένη συνάρτηση $\gamma \in \mathcal{F}_{P,h}$ υπάρχει ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας $Q \in \mathcal{M}_{S,\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))}$) χρειαζόμαστε το παρακάτω αποτέλεσμα που αφορά τη κατασκευή *κανονικών* χ.π. και σύνθετων ανανεωτικών διαδικασιών σε αυτούς.

Για ό,τι ακολουθεί, θέτουμε $\widetilde{\Omega} := \Upsilon^{\mathbb{N}}$, $\widetilde{\Sigma} := \mathfrak{B}(\widetilde{\Omega}) = \mathfrak{B}(\Upsilon)_{\mathbb{N}}$, $\Omega := \widetilde{\Omega} \times \widetilde{\Omega}$ και $\Sigma := \widetilde{\Sigma} \otimes \widetilde{\Sigma}$ για λόγους απλότητας.

Λήμμα 4.2.5. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $\theta \in D \subseteq \mathbb{R}^d$, θ σταθερό, έστω $Q_n(\theta) := \mathbf{K}(\theta)$ και $R_n := R$ μέτρα πιθανότητας επάνω στην $\mathfrak{B}(\Upsilon)$, τα οποία είναι απολύτως συνεχή με το μέτρο του Lebesgue $\lambda \upharpoonright \mathfrak{B}(\Upsilon)$. Τότε υπάρχει ένα μέτρο πιθανότητας $P := \mathbf{K}(\theta)_{\mathbb{N}} \otimes R_{\mathbb{N}}$ επάνω στην Σ και*

(i) μία απαριθμήτρια σ.δ. N η οποία είναι P-$RP(\mathbf{K}(\theta))$, ώστε η επαγόμενη σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων W να ικανοποιεί τη σχέση $P_{W_n} = \mathbf{K}(\theta)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

(ii) μία σ.δ. μεγέθους απαιτήσεων X που ικανοποιεί τη συνθήκη $P_{X_n} = R$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και τέτοια ώστε το ζευγάρι (N, X) να είναι μία διαδικασία κινδύνου που επάγει μία σ.δ. μεγέθους συνολικών απαιτήσεων S η οποία είναι μία P-$CRP(\mathbf{K}(\theta), P_{X_1})$.

Απόδειξη. (i) Ας σταθεροποιήσουμε ένα $\theta \in D \subseteq \mathbb{R}^d$. Αφού τα $Q_n(\theta)$ είναι μέτρα πιθανότητας επάνω στην $\mathfrak{B}(\Upsilon)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έπεται ότι θα υπάρχει ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας γινόμενο $\widetilde{P} := \widetilde{P}(\theta) := \mathbf{K}(\theta)_{\mathbb{N}}$ επάνω στην $\widetilde{\Sigma}$. Επομένως, υπάρχει μία ακολουθία $\{\widetilde{W}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ από $\widetilde{P}$-ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές στον $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\Sigma})$ ώστε

$$\widetilde{W}_n(\widetilde{w}) = \widetilde{w}_n \quad \text{για κάθε} \quad \widetilde{w} := (\widetilde{w}_1, \ldots, \widetilde{w}_n, \ldots) \in \widetilde{\Omega} \quad \text{και} \quad n \in \mathbb{N}$$

με $\widetilde{P}_{\widetilde{W}_n} = \mathbf{K}(\theta)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε τα μέτρα πιθανότητας $R_{\mathbb{N}}$ και $P := \widetilde{P} \otimes R_{\mathbb{N}}$ επάνω στην $\widetilde{\Sigma}$ και Σ, αντίστοιχα, και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $W_n := \widetilde{W}_n \circ \pi_1$, όπου π_1 είναι η κανονική προβολή από τον Ω στον πρώτο παράγοντα $\widetilde{\Omega}$ του Ω, και $W := \{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Ισχυρισμός 1. Η ακολουθία W είναι P-ανεξάρτητη και ικανοποιεί τη συνθήκη $P_{W_n} = \mathbf{K}(\theta)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ και $B, E \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
P(W_n^{-1}(B) \cap W_m^{-1}(E)) &= P((\Upsilon^{\mathbb{N}} \times \Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B) \cap (\Upsilon^{\mathbb{N}} \times \Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{m\}} \times E)) \\
&= P(\Upsilon^{\mathbb{N}} \times [(\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B) \cap (\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{m\}} \times E]) \\
&= R_{\mathbb{N}}(\Upsilon^{\mathbb{N}}) \cdot \widetilde{P}((\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B) \cap (\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{m\}} \times E)) \\
&= \widetilde{P}((\widetilde{W}_n)^{-1}(B) \cap (\widetilde{W}_m)^{-1}(E)) \\
&= \widetilde{P}((\widetilde{W}_n)^{-1}(B)) \cdot \widetilde{P}((\widetilde{W}_m)^{-1}(E)) \\
&= P(W_n^{-1}(B)) \cdot P(W_m^{-1}(E)),
\end{aligned}$$

όπου η πέμπτη ισότητα έπεται από το γεγονός ότι η ακολουθία $\widetilde{W}$ είναι $\widetilde{P}$-ανεξάρτητη. Επιπλέον, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ έχουμε

$$P_{W_n}(B) = P(\pi_1^{-1}((\widetilde{W}_n)^{-1}(B)) = P_{\pi_1}((\widetilde{W}_n)^{-1}(B)) = \widetilde{P}((\widetilde{W}_n)^{-1}(B)) = \mathbf{K}(\theta)(B)$$

ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη του ισχυρισμού. □

Θέτουμε $T_n := \sum_{k=1}^{n} W_k$ για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ και $T := \{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, και έστω $N := \{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ η απαριθμήτρια σ.δ. που επάγεται από την T μέσω της σχέσης $N_t := \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{T_n \leqslant t\}}$ για κάθε $t \geqslant 0$. Επομένως, η N είναι μία P-RP($\mathbf{K}(\theta)$), ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη του (i).

(ii) Αφού η τριάδα $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\Sigma}, R_{\mathbb{N}})$ είναι ένα χ.π. γινόμενο, έπεται ότι υπάρχει μία ακολουθία $\widetilde{X} := \{\widetilde{X}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ από $R_{\mathbb{N}}$-ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές στον $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\Sigma})$ ώστε

$$\widetilde{X}_n(\widetilde{x}) = \widetilde{x}_n \quad \text{για κάθε} \quad \widetilde{x} := (\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n, \ldots) \in \widetilde{\Omega} \quad \text{και} \quad n \in \mathbb{N}$$

με $(R_{\mathbb{N}})_{\widetilde{X}_n} = R$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $X_n := \widetilde{X}_n \circ \pi_2$, όπου π_2 είναι η κανονική προβολή από τον Ω στον δεύτερο παράγοντα $\widetilde{\Omega}$ του Ω, και $X := \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Ισχυρισμός 2. Το ζευγάρι (N, X) είναι μία διαδικασία κινδύνου.

Απόδειξη. Αφού ήδη έχουμε δείξει ότι η N είναι μία απαριθμήτρια σ.δ., αρκεί να δείξουμε ότι η X είναι P-ανεξάρτητη και ισόνομη, και ότι οι N και X είναι P-ανεξάρτητες.

(a) Η ακολουθία X είναι P-ανεξάρτητη και ικανοποιεί τη συνθήκη $P_{X_n}(B) = R(B)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Πράγματι, για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ και $B, E \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
P(X_n^{-1}(B) \cap X_m^{-1}(E)) &= P((\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B \times \Upsilon^{\mathbb{N}}) \cap (\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{m\}} \times E \times \Upsilon^{\mathbb{N}})) \\
&= P([(\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B) \cap (\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{m\}} \times E)] \times \Upsilon^{\mathbb{N}}) \\
&= R_{\mathbb{N}}((\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B) \cap (\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{m\}} \times E)) \cdot \widetilde{P}(\Upsilon) \\
&= R_{\mathbb{N}}((\widetilde{X}_n)^{-1}(B) \cap (\widetilde{X}_m)^{-1}(E)) \\
&= R_{\mathbb{N}}((\widetilde{X}_n)^{-1}(B)) \cdot R_{\mathbb{N}}((\widetilde{X}_m)^{-1}(E)) \\
&= P(X_n^{-1}(B)) \cdot P(X_m^{-1}(E)),
\end{aligned}$$

όπου η πέμπτη ισότητα έπεται από το γεγονός ότι η $\widetilde{X}$ είναι $R_{\mathbb{N}}$-ανεξάρτητη. Επιπλέον, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ έπεται ότι

$$P_{X_n}(B) = P(\pi_2^{-1}((\widetilde{X}_n)^{-1}(B))) = P_{\pi_2}((\widetilde{X}_n)^{-1}(B)) = R_{\mathbb{N}}((\widetilde{X}_n)^{-1}(B)) = R(B)$$

ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη του (a).

(b) Οι διαδικασίες N και X είναι P-ανεξάρτητες.

Αρχικά παρατηρούμε πως είναι αρκετό να αποδείξουμε ότι οι W και X είναι P-ανεξάρτητες.

Για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ και $B, E \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
P(X_n^{-1}(B) \cap W_m^{-1}(E)) &= P((\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B \times \Upsilon^{\mathbb{N}}) \cap (\Upsilon^{\mathbb{N}} \times \Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{m\}} \times E)) \\
&= P([(\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B) \times \Upsilon^{\mathbb{N}}] \cap (\Upsilon^{\mathbb{N}} \times (\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{m\}} \times E))) \\
&= P((\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B) \times (\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{m\}} \times E)) \\
&= R_{\mathbb{N}}(\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B) \cdot \widetilde{P}(\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{m\}} \times E) \\
&= R_{\mathbb{N}}((\widetilde{X}_n)^{-1}(B)) \cdot \widetilde{P}((\widetilde{W}_m)^{-1}(E)) \\
&= P(X_n^{-1}(B)) \cdot P(W_m^{-1}(E)),
\end{aligned}$$

ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη του (b).

Από τα (a) και (b) έπεται ο παραπάνω ισχυρισμός. □

Θέτοντας $S_t := \sum_{n=0}^{N_t} X_n$ για κάθε $t \geqslant 0$, έχουμε ότι η $S := \{S_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ είναι μία σ.δ. μεγέθους συνολικών απαιτήσεων που επάγεται από τη διαδικασία κινδύνου (N, X). Επομένως η S είναι μία P-CRP$(\mathbf{K}(\theta), P_{X_1})$, ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη του λήμματος. □

Παρατήρησεις 4.2.6. **(a)** Από τα Λήμματα 4.2.1 και 4.2.5, έχουμε ότι $\Sigma = \mathcal{F}_\infty^{(W,X)} = \mathcal{F}_\infty^S$.
(b) Αν στο Λήμμα 4.2.5 απαιτούσαμε επιπλέον να ισχύει η συνθήκη $\int_\Upsilon x^\ell \, R(dx) < \infty$ τότε το μέτρο P που κατασκευάσαμε θα είχε την επιπλέον ιδιότητα $\mathbb{E}_P[X_1^\ell] < \infty$ για $\ell = 1, 2$.

Συμβολισμοί 4.2.7. Έστω ότι οι $\mathbf{K}(\theta)$ και $\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))$ είναι κατανομές πιθανότητας στην $\mathfrak{B}(\Upsilon)$, ώστε οι επαγόμενες συναρτήσεις κατανομής να είναι συνεχώς διαφορίσιμες, με θετικές παραγώγους $[\mathbf{K}(\theta)]'$ και $[\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))]'$ στον Υ. Για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ η κλάση των λόγων πιθανοφάνειας $g_n := g_{\theta,\rho,n} : \Upsilon^{n+1} \longmapsto \Upsilon$ με

$$g_n(w_1, \ldots, w_n, t) := \Big[\prod_{j=1}^{n} \frac{[\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))]'(w_j)}{[\mathbf{K}(\theta)]'(w_j)}\Big] \cdot \frac{1 - \mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))(t - w)}{1 - \mathbf{K}(\theta)(t - w)} \quad \text{για κάθε } (w_1, \ldots, w_n, t) \in \Upsilon^{n+1},$$

όπου $w := \sum_{j=1}^n w_j$, θα συμβολίζεται με $\mathcal{G}_{n,\theta,\rho}$. Με $\mathcal{G}_{\theta,\rho}$ θα συμβολίζεται το σύνολο $\{g = \{g_n\}_{n \in \mathbb{N}_0} : g_n \in \mathcal{G}_{n,\theta,\rho} \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}_0\}$ όλων των των ακολουθιών στοιχείων της $\mathcal{G}_{n,\theta,\rho}$.

Για ό,τι ακολουθεί $\mathbf{K}(\theta)$, $\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))$ και $g \in \mathcal{G}_{\theta,\rho}$ είναι όπως στους Συμβολισμούς 4.2.7, και P, S είναι όπως στο Λήμμα 4.2.5.

Πρόταση 4.2.8. *Αν $\gamma \in \mathcal{F}_{P,h}$, τότε για κάθε $0 \leqslant u \leqslant t$ και $A \in \mathcal{F}_u^S$ η συνθήκη*

$$Q(A) = \int_A \Big[\prod_{j=1}^{N_t} (h^{-1} \circ \gamma \circ X_j)\Big] \cdot g_{N_t}(W_1, \ldots, W_{N_t}, t) \, dP$$

ορίζει ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας $Q \in \mathcal{M}_{S,\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))}$.

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε ένα αυθαίρετο $t \geqslant 0$.

(a) Η συνολοσυνάρτηση $\breve{Q}_n(\theta) : \mathfrak{B}(\Upsilon) \longmapsto \mathbb{R}$ με τύπο $\breve{Q}_n(\theta)(B_1) := \mathbb{E}_P[\chi_{W_1^{-1}(B_1)} \cdot (\frac{[\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))]'}{[\mathbf{K}(\theta)]'} \circ W_1)]$ για κάθε $B_1 \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στην $\mathfrak{B}(\Upsilon)$ που ικανοποιεί τη συνθήκη $\breve{Q}_n(\theta)(B_1) = \mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))(B_1)$ για κάθε $B_1 \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$.

Προφανώς η $\breve{Q}_n(\theta)$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στη $\mathfrak{B}(\Upsilon)$, αφού

($\mu 1$) $\breve{Q}_n(\theta)(\varnothing) = \mathbb{E}_P[\chi_\varnothing \cdot (\frac{[\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))]'}{[\mathbf{K}(\theta)]'} \circ W_1)] = 0$,

($\mu 2$) αν $\{B_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ είναι μία ακολουθία ξένων συνόλων στην $\mathfrak{B}(\Upsilon)$, έπεται ότι

$$\begin{aligned} Q_n(\theta)(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k) &= \mathbb{E}_P\left[\chi_{W_1^{-1}(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k)} \cdot (\frac{[\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))]'}{[\mathbf{K}(\theta)]'} \circ W_1)\right] \\ &= \mathbb{E}_P\left[\sum_{k\in\mathbb{N}} \chi_{W_1^{-1}(B_k)} \cdot (\frac{[\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))]'}{[\mathbf{K}(\theta)]'} \circ W_1)\right] \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}_P\left[\chi_{W_1^{-1}(B_k)} \cdot (\frac{[\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))]'}{[\mathbf{K}(\theta)]'} \circ W_1)\right] \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} Q_n(\theta)(B_k), \end{aligned}$$

($\mu 3$) $\breve{Q}_n(\theta)(\Upsilon) = 1$, αφού

$$\begin{aligned} \breve{Q}_n(\theta)(\Upsilon) &= \mathbb{E}_P\left[\chi_{W_1^{-1}(\Upsilon)} \cdot (\frac{[\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))]'}{[\mathbf{K}(\theta)]'} \circ W_1)\right] = \mathbb{E}_P\left[\chi_\Omega \cdot (\frac{[\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))]'}{[\mathbf{K}(\theta)]'} \circ W_1)\right] \\ &= \int_\Omega \frac{[\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))]'}{[\mathbf{K}(\theta)]'} \circ W_1 \, dP = \int_\Upsilon \frac{[\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))]'(w_1)}{[\mathbf{K}(\theta)]'(w_1)} P_{W_1}(dw_1) \\ &= \int_\Upsilon \mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))(dw_1) = 1 \end{aligned}$$

Για να δείξουμε τη συνθήκη $\breve{Q}_n(\theta)(B_1) = \mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))(B_1)$ για κάθε $B_1 \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$, θεωρούμε αρχικά την οικογένεια συνόλων $\mathcal{C}^W := \{(0, w] : w \in \Upsilon\}$. Είναι εύκολο να δούμε ότι κάθε στοιχείο της $\mathcal{C}^W$ ικανοποιεί τη συνθήκη $\breve{Q}_n(\theta)((0, w]) = \mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))(w)$ για κάθε $w \geqslant 0$.

Πράγματι, για κάθε $w \in \Upsilon$ έπεται ότι

$$\begin{aligned} \breve{Q}_n(\theta)((0, w]) &= \mathbb{E}_P[\chi_{\{W_1 \leqslant w\}} \cdot (\frac{[\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))]'}{[\mathbf{K}(\theta)]'} \circ W_1)] = \mathbb{E}_P[(\chi_{(0,w]} \circ W_1) \cdot (\frac{[\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))]'}{[\mathbf{K}(\theta)]'} \circ W_1)] \\ &= \int (\chi_{(0,w]} \circ W_1) \cdot (\frac{[\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))]'}{[\mathbf{K}(\theta)]'} \circ W_1) \, dP = \int [\chi_{(0,w]} \cdot \frac{[\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))]'}{[\mathbf{K}(\theta)]'}] \circ W_1 \, dP \\ &= \int \chi_{(0,w]}(w_1) \cdot \frac{[\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))]'(w_1)}{[\mathbf{K}(\theta)]'(w_1)} P_{W_1}(dw_1) = \int \chi_{(0,w]}(w_1) \cdot \mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))(dw_1) \\ &= \mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))(w). \end{aligned}$$

Επιπλέον, η οικογένεια συνόλων

$$\mathcal{D}^W := \{B \in \mathfrak{B}(\Upsilon) : \breve{Q}_n(\theta)(B) = \mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))(B)\}$$

είναι μία κλάση Dynkin στον Υ. Πράγματι,

(Dyn1) $\varnothing \in \mathcal{D}^W$, καθώς $\breve{Q}_n(\theta)(\varnothing) = 0 = \mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))(\varnothing)$.

(Dyn2) Για κάθε $B_1 \in \mathcal{D}^W$ έχουμε ότι $\Upsilon \backslash B \in \mathcal{D}^W$.

Αφού $\breve{Q}_n(\theta)(\Upsilon) = 1 = \mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))(\Upsilon)$ έπεται ότι

$$\breve{Q}_n(\theta)(\Upsilon \backslash B) = 1 - \breve{Q}_n(\theta)(B) = 1 - \mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))(B) = \mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))(\Upsilon \backslash B).$$

(Dyn3) Για κάθε ακολουθία $\{B_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ξένων ανά δύο στοιχείων της $\mathcal{D}^W$ έχουμε ότι $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k \in \mathcal{D}^W$.

Πράγματι,

$$\breve{Q}_n(\theta)(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \breve{Q}_n(\theta)(B_k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))(B_k) = \mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k).$$

Επιπλέον, αφού $\mathcal{C}^W \subseteq \mathcal{D}^W$, και η $\mathcal{C}^W$ είναι κλειστή ως προς τις πεπερασμένες τομές από το Θεώρημα A.1 έπεται ότι $\mathfrak{B}(\Upsilon) = \sigma(\mathcal{C}^W) \subseteq \mathcal{D}^W \subseteq \mathfrak{B}(\Upsilon)$, δηλαδή $\mathcal{D}^W = \mathfrak{B}(\Upsilon)$, ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη του (a).

(b) Η συνολοσυνάρτηση $\breve{R} : \mathfrak{B}(\Upsilon) \longmapsto \mathbb{R}$ με τύπο $\breve{R}(B_2) := \mathbb{E}_P[\chi_{X_1^{-1}(B_2)} \cdot (h^{-1} \circ \gamma \circ X_1)]$ για κάθε $B_2 \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας στην επάνω $\mathfrak{B}(\Upsilon)$.

Πράγματι,

(μ1) $\breve{R}(\varnothing) = \mathbb{E}_P\left[\chi_{X_1^{-1}(\varnothing)} \cdot (h^{-1} \circ \gamma \circ X_1)\right] = 0.$

(μ2) Αν $\{B_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ είναι μία οικογένεια ξένων συνόλων στη $\mathfrak{B}(\Upsilon)$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\breve{R}(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k) &= \mathbb{E}_P\big[\chi_{X_1^{-1}(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k)} \cdot (h^{-1} \circ \gamma \circ X_1)\big] \\
&= \mathbb{E}_P\big[\sum_{k\in\mathbb{N}} \chi_{X_1^{-1}(B_k)} \cdot (h^{-1} \circ \gamma \circ X_1)\big] \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}_P\big[\chi_{X_1^{-1}(B_k)} \cdot (h^{-1} \circ \gamma \circ X_1)\big] \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} \breve{R}(B_k)
\end{aligned}$$

Επιπλέον, $\breve{R}(\Upsilon) = \mathbb{E}_P[\chi_{X_1^{-1}(\Upsilon)} \cdot (h^{-1} \circ \gamma \circ X_1)] = \mathbb{E}_P[h^{-1} \circ \gamma \circ X_1] = 1$, όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από το Λήμμα 4.1.3 (a) (ii), ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη του (b).

(c) Υπάρχει ένα μέτρο πιθανότητας $\breve{Q}$ επάνω στην Σ ώστε η S να είναι μία $\breve{Q}$-CRP με παραμέτρους $(\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))$ και $\breve{Q}_{X_1} = \breve{R}$.

Πράγματι, αφού $\breve{Q}_n(\theta)$ και $\breve{R}$ είναι μέτρα πιθανότητας επάνω στην $\mathfrak{B}(\Upsilon)$, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Λήμμα 4.2.5 με $\breve{Q}_n(\theta)$ και $\breve{R}$ στη θέση των $Q_n(\theta)$ και R για να κατασκευάσουμε ένα μέτρο πιθανότητας $\breve{Q}$ επάνω στην Σ ώστε η S να είναι μία $\breve{Q}$-CRP$(\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta)), \breve{Q}_{X_1})$ και $\breve{Q}_{X_1} = \breve{R}$.

(d) Τα μέτρα $\breve{Q}$ και Q συμπίπτουν επάνω στη Σ.

Από τον ορισμό των $\breve{R}$ και $\breve{Q}_n(\theta)$ έπεται ότι $\breve{Q}_{X_1} \sim P_{X_1}$ και $\breve{Q}_{W_1} \sim P_{W_1}$, αντίστοιχα. Επομένως, από τη Πρόταση 4.1.5, έπεται ότι $\breve{Q} \upharpoonright \mathcal{F}_t^S \sim P \upharpoonright \mathcal{F}_t^S$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, ή ισοδύναμα

$$\breve{Q}(A) = \int_A \Big[\prod_{j=1}^{N_t} (h^{-1} \circ \gamma \circ X_j)\Big] \cdot g_{N_t}(W_1, \ldots, W_{N_t}, t)\, dP \quad \text{για κάθε} \quad 0 \leqslant u \leqslant t \quad \text{και} \quad A \in \mathcal{F}_u^S.$$

Επομένως, $Q \upharpoonright \mathcal{F}_u^S = \breve{Q} \upharpoonright \mathcal{F}_u^S$ για κάθε $u \in \mathbb{R}_+$. Άρα $Q \upharpoonright \breve{\Sigma} = \breve{Q} \upharpoonright \breve{\Sigma}$, όπου $\breve{\Sigma} := \bigcup_{u \in \mathbb{R}_+} \mathcal{F}_u^S$, δηλαδή η συνολοσυνάρτηση Q είναι σ-προσθετική επάνω στην $\breve{\Sigma}$ και επομένως το $\breve{Q}$ είναι η μοναδική επέκταση του Q επάνω στην $\Sigma = \sigma(\breve{\Sigma})$. □

Το ακόλουθο αποτέλεσμα είναι ο ζητούμενος χαρακτηριμός.

Θεώρημα 4.2.9. *Για δοσμένη $\rho \in \mathfrak{M}^k(D)$ ισχύουν τα ακόλουθα*

(i) για κάθε $Q \in \mathcal{M}_{S,\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))}$ υπάρχει μία P_{X_1}-σ.β. μοναδική συνάρτηση $\gamma \in \mathcal{F}_{P,h}$ που ικανοποιεί τη συνθήκη (RRM),

(ii) αντιστρόφως, για κάθε συνάρτηση $\gamma \in \mathcal{F}_{P,h}$ υπάρχει ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας $Q \in \mathcal{M}_{S,\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))}$ που ικανοποιεί τη συνθήκη (RRM).

Η απόδειξη του θεωρήματος είναι άμεση συνέπεια των Προτάσεων 4.1.5 και 4.2.8..

Για ό,τι ακολουθεί, θα συμβολίζουμε με $\widetilde{\mathcal{F}}_{P,\theta}$ την κλάση όλων των πραγματικών $\mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρήσιμων συναρτήσεων β_θ, ώστε $\beta_\theta := \gamma + \alpha_\theta$, όπου $\gamma \in \mathcal{F}_{P,\ln}$ και $\alpha \in \mathfrak{M}(D)$.

Το ακόλουθο αποτέλεσμα μας επιτρέπει να μετατρέψουμε κάθε σύνθετη ανανεωτική σ.δ. σε μία σύνθετη σ.δ. Poisson μέσω αλλαγής μέτρου.

Πόρισμα 4.2.10. *Ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) Για κάθε ζευγάρι $(\rho, Q) \in \mathfrak{M}_+(D) \times \mathcal{M}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\theta))}$ υπάρχει μία P_{X_1}-σ.β. μοναδική συνάρτηση $\beta_\theta \in \widetilde{\mathcal{F}}_{P,\theta}$ που ικανοποιεί μαζί με την ρ και το Q τις συνθήκες

$$\alpha_x = \ln \rho(x) - \ln \mathbb{E}_P[N_1] \quad \text{για κάθε} \quad x \in D \tag{$*$}$$

και

$$Q(A) = \int_A \widetilde{M}_t^{(\beta)}(\theta)\,dP \quad \text{για κάθε} \quad 0 \leqslant u \leqslant t \quad \text{και} \quad A \in \mathcal{F}_u^S, \tag{RPM}$$

με $\widetilde{M}_t^{(\beta)}(\theta) := \frac{e^{\sum_{j=1}^{N_t}\beta_\theta(X_j) - t\cdot\rho(\theta)}\cdot(\mathbb{E}_P[N_1])^{N_t}}{[\prod_{j=1}^{N_t}[\mathbf{K}(\theta)]'(W_j)]\cdot(1-\mathbf{K}(\theta))(t-T_{N_t})}$.

(ii) *Αντιστρόφως, για κάθε συνάρτηση* $\beta_\theta \in \widetilde{\mathcal{F}}_{P,\theta}$ *υπάρχει ένα μοναδικό ζευγάρι* $(\rho, Q) \in \mathfrak{M}_+(D) \times \mathcal{M}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\theta))}$ *που ικανοποιεί μαζί με την* β_θ *τις συνθήκες* $(*)$ *και* (RPM).

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε ένα αυθαίρετο $t \geqslant 0$.

(i) Κάτω από τις υποθέσεις του ισχυρισμού (i), σύμφωνα με το Θεώρημα 4.2.9 (i) υπάρχει μία P_{X_1}-σ.β. μοναδική συνάρτηση $\gamma \in \mathcal{F}_{P,\ln}$ με τύπο $\gamma := \ln f$, όπου f είναι μία Radon-Nikodým παράγωγος του Q_{X_1} ως προς το P_{X_1}, ώστε

$$Q(A) = \int_A \frac{e^{\sum_{j=1}^{N_t}\gamma(X_j)} \cdot e^{-t\rho(\theta)} \cdot (\rho(\theta))^{N_t}}{\prod_{j=1}^{N_t}[\mathbf{K}(\theta)]'(W_j) \cdot (1-\mathbf{K}(\theta))(t-T_{N_t})}\,dP \tag{4.9}$$

για κάθε $0 \leqslant u \leqslant t$ και $A \in \mathcal{F}_u^S$. Ορίζουμε την πραγματική $\mathfrak{B}(D)$-μετρήσιμη συνάρτηση α με τύπο $\alpha_x := \ln\rho(x) - \ln\mathbb{E}_P[N_1]$ για κάθε $x \in D$, και θέτουμε $\beta_\theta := \gamma + \alpha_\theta$. Τότε $\beta_\theta \in \widetilde{\mathcal{F}}_{P,\theta}$ και η συνθήκη $(*)$ ικανοποιείται. Το τελευταίο μαζί με τη συνθήκη (4.9) μας δίνει την (RPM).

(ii) Θεωρούμε την συνάρτηση $\beta_\theta \in \widetilde{\mathcal{F}}_{P,\theta}$ και ορίζουμε την $\rho \in \mathfrak{M}_+(D)$ με τύπο $\rho(x) := e^{\alpha_x} \cdot \mathbb{E}_P[N_1]$ για κάθε $x \in D$. Εφαρμόζοντας τώρα το Θεώρημα 4.2.9 (ii) για τη συνάρτηση $\gamma = \beta_\theta - \alpha_\theta$, έπεται ότι υπάρχει ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας $Q \in \mathcal{M}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\theta))}$ που ικανοποιεί τη συνθήκη (RRM) ή ισοδύναμα τη συνθήκη (RPM). □

Το πόρισμα που ακολουθεί είναι το βασικό αποτέλεσμα των Delbaen & Haezendonck [4], Proposition 2.2.

Πόρισμα 4.2.11. *Αν* $D := \Upsilon$ *και* $P \in \mathcal{M}_{S,\mathbf{Exp}(\theta)}$ *ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) *Για κάθε ζευγάρι* $(\rho, Q) \in \mathfrak{M}_+(\Upsilon) \times \mathcal{M}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\theta))}$ *υπάρχει μία* P_{X_1}*-σ.β. μοναδική συνάρτηση* $\beta_\theta \in \widetilde{\mathcal{F}}_{P,\theta}$ *που ικανοποιεί μαζί με την* ρ *και το* Q *τις συνθήκες*

$$Q(A) = \int_A \widetilde{m}_t^{(\beta)}(\theta)\,dP \quad \text{για κάθε} \quad 0 \leqslant u \leqslant t \quad \text{και} \quad A \in \mathcal{F}_u^S, \tag{PPM}$$

με $\widetilde{m}_t^{(\beta)}(\theta) := e^{\sum_{j=1}^{N_t}\beta_\theta(X_j) - t\theta\cdot\left(\mathbb{E}_P\left[e^{\beta_\theta(X_1)}\right]-1\right)}$.

(ii) *Αντιστρόφως, για κάθε συνάρτηση* $\beta_\theta \in \widetilde{\mathcal{F}}_{P,\theta}$ *υπάρχει ένα μοναδικό ζευγάρι* $(\rho, Q) \in \mathfrak{M}_+(\Upsilon) \times \mathcal{M}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\theta))}$ *που ικανοποιεί μαζί με την* β_θ *τις συνθήκες* $(*)$ *και* (PPM).

Στην απόδειξη του Πορίσματος 4.2.11 χρησιμοποιούνται τα ίδια επιχειρήματα με την απόδειξη του Πορίσματος 4.2.10, με μοναδική διαφορά ότι $\mathbf{K}(\theta) = \mathbf{Exp}(\theta)$.

Παρατήρηση 4.2.12. Το Θεώρημα 4.2.9 συνεχίζει να ισχύει αν αντικαταστήσουμε τις κλάσεις $\mathcal{M}_{S,\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))}$ και $\mathcal{F}_{P,h}$, με τις υποκλάσεις τους $\mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))} := \{Q \in \mathcal{M}_{S,\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta)} : \mathbb{E}_Q[X_1^{\ell}] < \infty\}$ και $\mathcal{F}^{\ell}_{P,h} := \{\gamma \in \mathcal{F}_{P,h} : \mathbb{E}_P[X_1^{\ell} \cdot (h^{-1} \circ \gamma \circ X_1)] < \infty\}$ για $\ell = 1, 2$, αντίστοιχα. Ως συνέπεια, τα Πορίσματα 4.2.10 και 4.2.11 παραμένουν εν ισχύ αν αντικαταστήσουμε τις κλάσεις $\mathcal{M}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\theta))}$ και $\widetilde{\mathcal{F}}_{P,\theta}$, με τις $\mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\theta))}$ και $\widetilde{\mathcal{F}}^{\ell}_{P,\theta} := \{\beta_\theta = \gamma + \alpha_\theta : \gamma \in \mathcal{F}^{\ell}_{P,h}$ και $\alpha \in \mathfrak{M}(D)\}$ για $\ell = 1, 2$, αντίστοιχα.

Στο παράδειγμα που ακολουθεί παρουσιάζεται μία εφαρμογή του Πορίσματος 4.2.10.

Παράδειγμα 4.2.13. Έστω $t \geqslant 0$, t σταθερό, έστω $\theta := (a, 2) \in D := \varUpsilon^2$, και $P \in \mathcal{M}_{S,\mathbf{Ga}(\theta)}$ έτσι ώστε $P_{X_1} = \mathbf{Ga}(\eta)$ για $\eta := (b, 2) \in \varUpsilon^2$. Μετά από κάποιους υπολογισμούς προκύπτει ότι $\mathbb{E}_P[N_t] = \frac{at}{2} - \frac{1-e^{-2at}}{4}$.

Πράγματι, αφού για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $n \in \mathbb{N}$ ισχύει η ταυτότητα $\{N_t = n\} = \{T_n \leqslant t\} \setminus \{T_{n+1} \leqslant t\}$ (βλ. π.χ. [19], Lemma 2.1.2) προκύπτει ότι

$$\mathbb{E}_P[N_t] = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P(\{N_t = n\}) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \mathbf{K}^{*n}(\theta)(t) - \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \mathbf{K}^{*(n+1)}(\theta)(t),$$

όπου $\mathbf{K}^{*n}(\theta)$ είναι η n-οστή συνέλιξη του $\mathbf{K}(\theta)$ (βλ. π.χ. [23], Definition 17, σελ. 108). Παραγωγίζοντας ως προς t παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathbb{E}_P[N_t] &= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{K}^{*n}(\theta)(t) - \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{K}^{*(n+1)}(\theta)(t) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \frac{a^{2n}}{(2n-1)!} \cdot t^{2n-1} \cdot e^{-at} - \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \frac{a^{2n+2}}{(2n+1)!} \cdot t^{2n+1} \cdot e^{-at} \\
&= e^{-at} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \frac{a^{2n}}{(2n-1)!} \cdot t^{2n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \frac{a^{2n+2}}{(2n+1)!} \cdot t^{2n+1} \right) \\
&= e^{-at} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1} \cdot a^{2n+2}}{(2n+1)!} = a \cdot e^{-at} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(at)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= a \cdot e^{-at} \cdot \sinh(at).
\end{aligned}$$

Επομένως, για κάθε $t > 0$ έχουμε

$$\mathbb{E}_P[N_t] = \int_0^t a \cdot e^{-as} \cdot \sinh(as)\, \lambda(ds) = \int_0^t a \cdot e^{-as} \cdot \frac{e^{as} - e^{-as}}{2}\, \lambda(ds) = \int_0^t a \cdot \frac{1 - e^{-2as}}{2}\, \lambda(ds),$$

δηλαδή $\mathbb{E}_P[N_t] = \frac{at}{2} - \frac{1-e^{-2at}}{4}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$.

Θεωρούμε το ζευγάρι $(\rho, Q) \in \mathfrak{M}_+(D) \times \mathcal{M}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\theta))}$ με $Q_{X_1} = \mathbf{Exp}(\zeta)$, όπου ζ είναι μία θετική πραγματική σταθερά. Από το Πόρισμα 4.2.11 (i), έπεται ότι υπάρχει μία P_{X_1}-σ.β. μοναδική συνάρτηση $\beta_\theta := \gamma + \alpha_\theta \in \widetilde{\mathcal{F}}_{P,\theta}$, με $\gamma(x) = \ln \frac{\zeta \cdot e^{-\zeta \cdot x}}{b^2 \cdot x \cdot e^{-b \cdot x}}$ για κάθε $x \in \varUpsilon$ και

$\alpha_\theta = \ln\rho(\theta) - \ln\mathbb{E}_P[N_1]$, που ικανοποιεί μαζί με την ρ και το Q τις συνθήκες ($*$) και

$$Q(A) = \int_A \frac{e^{\sum_{j=1}^{N_t}\beta_\theta(X_j) - t\cdot\rho(\theta)} \cdot (\mathbb{E}_P[N_1])^{N_t}}{e^{-at}\cdot a^{2N_t}\cdot\prod_{j=1}^{N_t} W_j \cdot (1 + a\cdot(t - T_{N_t}))}\, dP \tag{4.10}$$

για κάθε $0 \leqslant u \leqslant t$ και $A \in \mathcal{F}_u^S$.

Αντιστρόφως, έστω ζ όπως παραπάνω και έστω $\beta_\theta := \gamma + \alpha_\theta$ μία $\mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρήσιμη συνάρτηση, με $\gamma(x) := \ln\frac{\zeta\cdot e^{-\zeta\cdot x}}{b^2\cdot x\cdot e^{-b\cdot x}}$ για κάθε $x \in \Upsilon$ και $\alpha \in \mathfrak{M}(D)$. Άμεσα προκύπτει ότι $\mathbb{E}_P[e^{\gamma(X_1)}] = 1$, και επομένως $\gamma \in \mathcal{F}_{P,\ln}$. Άρα $\beta_\theta \in \widetilde{\mathcal{F}}_{P,\theta}$. Θέτοντας $\rho(x) := e^{\alpha_x}\cdot\mathbb{E}_P[N_1]$ για κάθε $x \in D$, έχουμε ότι $\rho \in \mathfrak{M}_+(D)$ και ότι η συνθήκη ($*$) ικανοποιείται. Επομένως, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Πόρισμα 4.2.10 (ii) για να βρούμε ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας $Q \in \mathcal{M}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\theta))}$ που να ικανοποιεί μαζί με τη ρ και τη β_θ τη συνθήκη (4.10) και

$$Q_{X_1}(B) = \mathbb{E}_P[\chi_{X_1^{-1}(B)}\cdot e^{\gamma(X_1)}] = \int_B \zeta\cdot e^{-\zeta\cdot x}\,\lambda(dx) \text{ για κάθε } B \in \mathfrak{B}(\Upsilon),$$

δηλαδή $Q_{X_1} = \mathbf{Exp}(\zeta)$.

4.3 Σύνθετες Ανανεωτικές Διαδικασίες και Martingales

Σε αυτή την ενότητα θα δείξουμε ότι, σε μία αγορά ελεύθερη κερδοσκοπίας, μία martingale προσέγγιση στις αρχές υπολογισμού ασφαλίστρου οδηγεί στην περίπτωση των CRPs σε CPPs, επιτρέποντας μας έτσι να έχουμε μία μέθοδο για την εύρεση (προοδευτικά) ισοδύναμων martingale μέτρων για τη σ.δ. $Z := \{S_t - t\cdot\mathbb{E}_P[S_1]\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Αρχικά, παρατηρούμε ότι για ένα μέτρο $P \in \mathcal{M}^1_{S,\mathbf{K}(\theta)}$ η Z είναι μία καλά ορισμένη σ.δ. με πραγματικές τιμές, αφού για κάθε ανανεωτική σ.δ. N έχουμε ότι $\mathbb{E}_P[N_t] < \infty$ για κάθε $t \geqslant 0$ (βλ. π.χ. [23], Proposition 4, σελ. 101) και $X_1 \in \mathcal{L}^1(P)$.

Για να παρουσιαστούν τα αποτελέσματα αυτής της ενότητας υπενθυμίζουμε τις ακόλουθες έννοιες. Έστω $\mathcal{Z} := \{\mathcal{Z}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μία διύλιση για τον (Ω,Σ). Για μία δοσμένη πραγματική σ.δ. $Y := \{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ στον (Ω,Σ) ένα μέτρο πιθανότητας Q επάνω στη Σ καλείται **martingale μέτρο για την** Y, αν η Y είναι ένα $(Q,\mathcal{Z})$-martingale. Η κλάση όλων των μέτρων πιθανότητας Q έτσι ώστε $Q \upharpoonright \mathcal{Z}_t \sim P \upharpoonright \mathcal{Z}_t$ και η Y να είναι ένα $(Q,\mathcal{Z})$-martingale θα συμβολίζεται με $\mathbb{M}(Y) := \mathbb{M}_P(Y)$. Τα στοιχεία του $\mathbb{M}(Y)$ καλούνται **προοδευτικά ισοδύναμα martingale μέτρα** (ως προς τη Y). Θα λέμε ότι η σ.δ. Y ικανοποιεί τη συνθήκη (PEMM) εάν $\mathbb{M}(Y) \neq \emptyset$. Επιπλέον, έστω $T > 0, \mathbb{T} := [0,T], R_T := R \upharpoonright \mathcal{Z}_T$, όπου R είναι ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στη Σ, $Y_\mathbb{T} := \{Y_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ και $\mathcal{Z}_\mathbb{T} := \{\mathcal{Z}_t\}_{t\in\mathbb{T}}$. Με $\mathbb{M}^e(Y_\mathbb{T})$ θα συμβολίζεται η κλάση όλων των μέτρων πιθανότητας Q_T επάνω στην $\mathcal{Z}_T$ έτσι ώστε $Q_T \sim P_T$ και η $Y_{\mathbb{T}}$ να είναι ένα $(Q_T, \mathcal{Z}_{\mathbb{T}})$-martingale. Τα στοιχεία της κλάσης $\mathbb{M}^e(Y_{\mathbb{T}})$ καλούνται **ισοδύναμα martingale μέτρα** ή **ουδέτερα κινδύνου μέτρα πιθανότητας** (risk neutral probability measures) (ως προς τη $Y_{\mathbb{T}}$). Θα λέμε ότι η σ.δ. $Y_{\mathbb{T}}$ ικανοποιεί τη συνθήκη (EMM) εάν $\mathbb{M}^e(Y_{\mathbb{T}}) \neq \emptyset$.

Θεώρημα 4.3.1. *Έστω $\theta \in \Upsilon$ σταθερό αλλά τυχαίο και έστω $Z := \{S_t - t \cdot \mathbb{E}_P[S_1]\}_{t \in \mathbb{R}_+}$. Θεωρούμε τους ακόλουθους ισχυρισμούς:*

(i) Το P είναι ένα martingale μέτρο για την Z.

(ii) $P \in \mathcal{M}^1_{S,\mathbf{Exp}(\theta)}$.

(iii) Το P είναι ένα martingale μέτρο για την Z που ικανοποιεί τη συνθήκη $Z_t \in \mathcal{L}^2(P)$ για κάθε $t \geqslant 0$.

(iv) $P \in \mathcal{M}^2_{S,\mathbf{Exp}(\theta)}$.

Οι ισχυρισμοί (i) και (ii) καθώς και οι ισχυρισμοί (iii) και (iv) είναι ισοδύναμοι. Επιπλέον, αν $X_1 \in \mathcal{L}^2(P)$ τότε όλοι οι ισχυρισμοί (i) έως (iv) είναι ισοδύναμοι.

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε ένα αυθαίρετο $t \geqslant 0$.

$(i) \Longrightarrow (ii)$: Αφού η Z είναι ένα $(P, \mathcal{F}^S)$-martingale έπεται ότι $\mathbb{E}_P[Z_t] = \mathbb{E}_P[Z_1] = 0$, δηλαδή $\mathbb{E}_P[S_t] = t \cdot \mathbb{E}_P[S_1]$, ή ισοδύναμα $\mathbb{E}_P[N_t] = t \cdot \mathbb{E}_P[N_1]$. Προφανώς έχουμε ότι $\mathbb{E}_P[N_t] > 0$, αφού $P(\{N_t = n\} > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$, και άρα $\mathbb{E}_P[N_1] \in \Upsilon$.

Ισχυρισμός. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(a) Η N είναι μία P-PP(θ).

(b) $\mathbb{E}_P[N_t] = t\theta$.

Απόδειξη. Ο ισχυρισμός $(a) \Longrightarrow (b)$ είναι άμεσος.

$(b) \Longrightarrow (a)$: Για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό θυμίζουμε ότι η **ανανεωτική συνάρτηση που σχετίζεται με μία κατανομή** (renewal function associated with the distribution) $\mathbf{K}(\theta)$ ορίζεται ως

$$U(u) := \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{K}^{*n}(\theta)(u) \quad \text{για κάθε } u \in \mathbb{R}.$$

Προφανώς $U(u) = 1 + \mathbb{E}_P[N_u]$ για κάθε $u \geqslant 0$. Αν υποθέσουμε ότι $\mathbb{E}_P[N_t] = t\theta$ τότε έπεται ότι $U(t) = 1 + t\theta$, και άρα ο μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes $\widehat{U}(s)$ της $U(t)$ θα είναι

$$\widehat{U}(s) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-s \cdot u}\, dU(u) = e^{-s \cdot 0} \cdot U(0) + \int_0^{\infty} \theta e^{-s \cdot u}\, du = \frac{s+\theta}{s} \quad \text{για κάθε } s \geqslant 0,$$

όπου η δεύτερη ισότητα έπεται καθώς το $\int_{\mathbb{R}_+} e^{-s \cdot u}\, dU(u)$ είναι ένα ολοκλήρωμα Riemman-Stieltjes, η U έχει μία πυκνότητα για $u > 0$, $U(u) = 0$ για $u < 0$, και έχει ένα άλμα μεγέθους 1 στο $u = 0$ (βλ. π.χ. [23], σελ. 108-109). Συνεπώς

$$\widehat{\mathbf{K}}(\theta)(s) = \frac{\widehat{U}(s) - 1}{\widehat{U}(s)} = \frac{\theta}{\theta + s} \quad \text{for any} \;\; s \geqslant 0,$$

όπου με $\widehat{\mathbf{K}}(\theta)$ δηλώνεται ο μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes της κατανομής της W_n για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (βλ. π.χ [23], Proposition 20, σελ 109). Επομένως $P_{W_n} = \mathbf{Exp}(\theta)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αλλά, αφού η W είναι και P-ανεξάρτητη, προκύπτει ότι η N είναι μία P-PP(θ) (βλ. π.χ. [19], Theorem 2.3.4). □

Θέτοντας $\theta := \mathbb{E}_P[N_1] \in \Upsilon$ έπεται ότι $\mathbb{E}_P[N_t] = t \cdot \mathbb{E}_P[N_1] = t\theta$, και άρα σύμφωνα με τον παραπάνω ισχυρισμό η N είναι μία P-PP(θ). Συνεπώς, η S είναι μία P-CPP(θ, P_{X_1}).

$(ii) \Longrightarrow (i)$: Αφού $P \in \mathcal{M}^1_{S,\mathbf{Exp}(\theta)}$, έπεται ότι η σ.δ. μεγέθους συνολικών απαιτήσεων S έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις (βλ. π.χ. [19], Theorem 5.1.3), και $\mathbb{E}_P[S_t] < \infty$, αφού $X_1 \in \mathcal{L}^1(P)$. Άρα, για κάθε $u \in [0, t]$ και κάθε $A \in \mathcal{F}^S_u$ έπεται ότι

$$\int_A (S_t - \mathbb{E}_P[S_t]) - (S_u - \mathbb{E}_P[S_u])\, dP = \int_\Omega \chi_A\, dP \cdot \int_\Omega ((S_t - S_u) - \mathbb{E}_P[S_t - S_u])\, dP = 0,$$

δηλαδή η σ.δ. $\{S_t - \mathbb{E}_P[S_t]\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ είναι ένα $(P, \mathcal{F}^S)$-martingale. Αλλά, αφού

$$\mathbb{E}_P[S_t] = \mathbb{E}_P[N_t] \cdot \mathbb{E}_P[X_1] = t\theta \cdot \mathbb{E}_P[X_1] = t \cdot \mathbb{E}_P[N_1] \cdot \mathbb{E}_P[X_1] = t \cdot \mathbb{E}_P[S_1]$$

ο ισχυρισμός (i) έπεται.

$(iii) \Longrightarrow (iv)$: Αφού η Z είναι ένα $(P, \mathcal{F}^S)$-martingale έπεται από την ισοδυναμία των ισχυρισμών (i) και (ii) ότι $P \in \mathcal{M}^1_{S,\mathbf{Exp}(\theta)}$. Αλλά, αφού $Z_t \in \mathcal{L}^2(P)$ έχουμε ότι $Var_P[Z_t] = \mathbb{E}_P[N_t] \cdot Var_P[X_1] + Var_P[N_t] \cdot \mathbb{E}^2_P[X_1] < \infty$, όπου με Var_P συμβολίζεται η διασπορά ως προς το μέτρο P. Επομένως, $Var_P[X_1] < \infty$, και άρα ο ισχυρισμός (iv) έπεται.

$(iv) \Longrightarrow (iii)$: Αφού $P \in \mathcal{M}^2_{S,\mathbf{Exp}(\theta)}$ και $\mathcal{M}^2_{S,\mathbf{Exp}(\theta)} \subseteq \mathcal{M}^1_{S,\mathbf{Exp}(\theta)}$, έπεται ξανά από την ισοδυναμία των ισχυρισμών (i) και (ii) ότι η Z είναι ένα $(P, \mathcal{F}^S)$-martingale. Αλλά $Var_P[Z_t] = Var_P[S_t] = \mathbb{E}_P[N_t] \cdot Var_P[X_1] + Var_P[N_t] \cdot \mathbb{E}^2_P[X_1] < \infty$, όπου η ανισότητα έπεται από το γεγονός ότι $P \in \mathcal{M}^2_{S,\mathbf{Exp}(\theta)}$. Άρα $V_t \in \mathcal{L}^2(P)$, και επομένως ο ισχυρισμός (iii) έπεται.

Επιπλέον, αν υποθέσουμε ότι ισχύει ο ισχυρισμός (ii) και ότι $X_1 \in \mathcal{L}^2(P)$, τότε ο ισχυρισμός (iv) έπεται άμεσα, και άρα όλοι οι ισχυρισμοί (i) έως (iv) είναι ισοδύναμοι. □

Παρατήρηση 4.3.2. **(a)** Το παραπάνω αποτέλεσμα μαζί με το Πόρισμα 4.2.11 μας δίνει τη δυνατότητα να βρούμε προοδευτικά ισοδύναμα martingale μέτρα.

Πράγματι, αν $\beta_\theta \in \widetilde{\mathcal{F}}^{\ell}_{P,\theta}$ για $\ell = 1,2$, σύμφωνα με το Πόρισμα 4.2.11 (ii), υπάρχει ένα μοναδικό ζευγάρι $(\rho, Q) \in \mathfrak{M}_+(D) \times \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\theta))}$, με το μέτρο Q να είναι, σύμφωνα με το Θεώρημα 4.3.1, ένα προοδευτικά ισοδύναμο martingale μέτρο για την Z.

(b) Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.3.1, το μέτρο Q που εμφανίζεται στο Παράδειγμα 4.2.13 είναι ένα προοδευτικά ισοδύναμο martingale μέτρο για την Z.

Πόρισμα 4.3.3. *Έστω $P \in \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{K}(\theta)}$ για $\ell = 1,2$. Για κάθε συνάρτηση $\beta_\theta \in \widetilde{\mathcal{F}}^{\ell}_{P,\theta}$ ορίζουμε τη σ.δ. $V := \{V_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ με τύπο $V_t := S_t - t\cdot\mathbb{E}_P[N_1]\cdot\mathbb{E}_P[X_1\cdot e^{\beta_\theta(X_1)}]$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$. Τότε υπάρχει ένα μοναδικό ζευγάρι $(\rho, Q) \in \mathfrak{M}_+(D) \times \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\theta))}$ που ικανοποιεί τις συνθήκες $(*)$ και (RPM), τέτοιο ώστε η σ.δ. V να είναι ένα $(Q, \mathcal{F}^S)$-martingale.*

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε $\ell = 1,2$. Από το Πόρισμα 4.2.10 (ii) μαζί με την Παρατήρηση 4.2.12 έπεται ότι υπάρχει ένα μοναδικό ζευγάρι $(\rho, Q) \in \mathfrak{M}_+(D) \times \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\theta))}$ που ικανοποιεί τις συνθήκες $(*)$ και (RPM). Επομένως, από το Θεώρημα 4.3.1 προκύπτει ότι η σ.δ. $\{S_t - t\cdot\rho(\theta)\cdot\mathbb{E}_Q[X_1]\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ένα $(Q, \mathcal{F}^S)$-martingale. Το τελευταίο μαζί με τη συνθήκη $(*)$ και το Λήμμα 4.1.3 (a) μας δίνει ισοδύναμα ότι η σ.δ. V είναι ένα $(Q, \mathcal{F}^S)$-martingale, αφού για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ ισχύει ότι

$$V_t = S_t - t\cdot\mathbb{E}_P[N_1]\cdot e^{\alpha_\theta}\cdot\mathbb{E}_P[X_1\cdot e^{\gamma(X_1)}] = S_t - t\cdot\rho(\theta)\cdot\mathbb{E}_Q[X_1],$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη του πορίσματος. □

Άμεση συνέπεια του παραπάνω πορίσματος είναι ότι $\mathbb{M}(V) \neq \emptyset$, δηλαδή η σ.δ. V ικανοποιεί τη συνθήκη (PEMM). Το τελευταίο αποτέλεσμα αυτής της ενότητας συνδέει άμεσα τα παραπάνω αποτελέσματα με τα Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά, μέσω της έννοια του *μη δωρεάν γεύματος με εξαφανιζόμενο κίνδυνο* (συμβ. (NFLVR) για συντομία) (βλ. [5], Definition 8.1.2).

Πόρισμα 4.3.4. *Έστω $P \in \mathcal{M}^{2}_{S,\mathbf{K}(\theta)}$. Για κάθε $\beta_\theta \in \widetilde{\mathcal{F}}^{2}_{P,\theta}$ υπάρχει ένα μοναδικό ζευγάρι $(\rho, Q) \in \mathfrak{M}_+(D) \times \mathcal{M}^{2}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\theta))}$ έτσι ώστε η σ.δ. $V_{\mathbb{T}} := \{V_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ να ικανοποιεί τη συνθήκη (NFLVR).*

Απόδειξη. Από το Πόρισμα 4.2.10 (ii) έπεται ότι για δοσμένη $\beta_\theta \in \widetilde{\mathcal{F}}^{2}_{P,\theta}$ υπάρχει ένα μοναδικό ζευγάρι $(\rho, Q) \in \mathfrak{M}_+(D) \times \mathcal{M}^{2}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\theta))}$. Επομένως από το Θεώρημα 4.3.1 έπεται ότι για κάθε $T > 0$ η διαδικασία τιμών $V_{\mathbb{T}}$ είναι ένα $(Q_T, \mathcal{F}^S_{\mathbb{T}})$-martingale, και άρα ένα $(Q_T, \mathcal{F}^S_{\mathbb{T}})$-ημί-martingale (βλ. π.χ. [26], Definition 7.1.1). Αφού όμως $Q_T \sim P_T$, από το τελευταίο έπεται ότι η $V_{\mathbb{T}}$ θα είναι επίσης ένα $(P_T, \mathcal{F}_{\mathbb{T}})$-ημί-martingale (βλ. π.χ. [26], Theorem 10.1.8).

Καθώς όμως η σ.δ. V ικανοποιεί τη συνθήκη (PEMM), έπεται ότι η $Y_{\mathbb{T}}$ θα ικανοποιεί τη συνθήκη (EMM). Επομένως, εφαρμόζοντας το FTAP των Delbaen & Schachermayer για μη

φραγμένες σ.δ. [5], Theorem 14.1.1, προκύπτει ότι η σ.δ. $V_{\mathbb{T}}$ ικανοποιεί τη συνθήκη (NFLVR).
□

Παρατήρηση 4.3.5. Είναι γνωστό ότι το FTAP των Delbaen & Schachermayer χρησιμοποιεί τις *συνήθεις συνθήκες* (usual conditions) του P.A. Meyer (βλ. π.χ. [26], Definition 2.1.5). Οι συνθήκες αυτές παίζουν ουσιαστικό ρόλο στον ορισμό του στοχαστικού ολοκληρώματος ως προς ένα (ημί-)martingale. Όμως, όπως αποδεικνύεται στο [26], σελ. 22-23 και σελ. 150, το στοχαστικό ολοκλήρωμα ορίζεται για οποιοδήποτε ημί-martingale χωρίς τις συνήθεις συνθήκες. Επίσης είναι γνωστό, ότι για οποιονδήποτε χ.π. (Ω, Σ, P) ισχύει $L^{\infty}(P) = L^{\infty}(\widehat{P})$, όπου $\widehat{P}$ είναι η κατά Καραθεοδωρή πλήρωση του P. Ως συνέπεια, ισχύει η *εύκολη* κατεύθυνση του FTAP των Delbaen & Schachermayer (δηλ. (EMM) $\Longrightarrow$ (NFLVR)) χωρίς τις συνήθεις συνθήκες.

4.4 Εφαρμογές στις Αρχές Υπολογισμού Ασφαλίστρου

Έχουμε δει ότι το αρχικό μέτρο πιθανότητας P μπορεί να αντικατασταθεί από ένα άλλο μέτρο πιθανότητας Q, ώστε τα P και Q να είναι προοδευτικά ισοδύναμα και η S να μετατρέπεται σε μία σύνθετη σ.δ. Poisson ως προς το μέτρο Q. Η βασική ιδέα είναι να ορίσουμε ένα μέτρο πιθανότητας Q, έτσι ώστε να δίνουμε μεγαλύτερο "βάρος" σε μη ευνοϊκά γεγονότα. Πιο συγκεκριμένα το Q πρέπει να ορισθεί με τέτοιο τρόπο ώστε $\mathbb{E}_P[S_t] < \mathbb{E}_Q[S_t] < \infty$. Ο παραπάνω συλλογισμός οδήγησε τους Delbaen, F. & Haezendonck, J. στον ακόλουθο ορισμό για τις αρχές υπολογισμού ασφαλίστρου.

Ορισμός 4.4.1. Μία **αρχή υπολογισμού ασφαλίστρου** (συμβ. PCP για συντομία) είναι ένα μέτρο πιθανότητας Q επάνω στην Σ ώστε

(i) $Q \upharpoonright \mathcal{F}_t^S \sim P \upharpoonright \mathcal{F}_t^S$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$,

(ii) S είναι μία Q-σύνθετη σ.δ. Poisson,

(iii) $\mathbb{E}_Q[X_1] < \infty$.

Από το Πόρισμα 4.2.10 και την Παρατήρηση 4.2.12 έπεται ότι δοσμένα $P \in \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{K}(\theta)}$ και $\beta_\theta \in \widetilde{\mathcal{F}}^{\ell}_{P,\theta}$ υπάρχουν $\mathfrak{B}(D)$-$\mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρήσιμες συναρτήσεις ρ και μέτρα πιθανότητας $Q \in \mathcal{M}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\theta))}$ τα οποία είναι PCPs.

Εύκολα μπορεί να δειχθεί ότι $\mathbb{E}_Q[X_1] = \mathbb{E}_P[X_1 \cdot e^{\gamma(X_1)}]$. Επομένως, λαμβάνοντας υπόψιν τη συνθήκη (*), η αντίστοιχη πυκνότητα ασφαλίστρου $p(Q) := \mathbb{E}_Q[S_1]$ θα είναι

$$p(Q) = \mathbb{E}_P[N_1] \cdot e^{\alpha_\theta} \cdot \mathbb{E}_P[X_1 \cdot e^{\gamma(X_1)}] = \mathbb{E}_P[N_1] \cdot \mathbb{E}_P[X_1 \cdot e^{\beta_\theta(X_1)}].$$

Στα παραδείγματα 4.4.2 έως 4.4.5 που ακολουθούν, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 4.2.9 και το Πόρισμα 4.2.10, δείχνουμε πως μπορούμε να κατασκευάσουμε αρχές υπολογισμού ασφαλίστρου Q που να ικανοποιούν την επιθυμητή συνθήκη $\mathbb{E}_P[S_t] < \mathbb{E}_Q[S_t] < \infty$ για κάθε $t > 0$.

Παράδειγμα 4.4.2. Έστω P όπως στο Παράδειγμα 4.2.13. Θεωρούμε την πραγματική συνάρτηση $\beta_\theta := \gamma + \alpha_\theta$, με $\gamma(x) := \ln \frac{\mathbb{E}_P[X_1]}{2c} - \ln x + \frac{2(c-1)}{c\mathbb{E}_P[X_1]} \cdot x$ για κάθε $x \in \Upsilon$ όπου $c > 2$ μία πραγματική σταθερά, και $\alpha_\theta := \ln \frac{a}{2\mathbb{E}_P[N_1]}$. Εύκολα μπορεί να δει κάποιος ότι $\mathbb{E}_P[e^{\gamma(X_1)}] = 1$ και $\mathbb{E}_P[X_1^2 \cdot e^{\gamma(X_1)}] = 2 \cdot \left(\frac{c}{b}\right)^2 < \infty$, δηλαδή $\gamma \in \mathcal{F}^\ell_{P,\ln}$ για $\ell = 1, 2$, και άρα $\beta_\theta \in \widetilde{\mathcal{F}}^\ell_{P,\theta}$. Επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε το Πόρισμα 4.2.10 (ii), για να βρούμε ένα μοναδικό ζευγάρι $(\rho, Q) \in \mathfrak{M}_+(D) \times \mathcal{M}^\ell_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\theta))}$ που ικανοποιεί τις συνθήκες (RPM) και $(*)$ και το Q να είναι μία αρχή υπολογισμού ασφαλίστρου. Ιδιαιτέρως, από την συνθήκη $(*)$ έπεται ότι $\rho(\theta) = \frac{a}{2}$, ενώ το Λήμμα 4.1.3 (a) μας δίνει ότι

$$Q_{X_1}(B) = \mathbb{E}_P[\chi_{X_1^{-1}(B)} \cdot e^{\gamma(X_1)}] = \int_B \frac{b}{c} \cdot e^{-\frac{b}{c}\cdot x}\, \lambda(dx) \text{ για κάθε } B \in \mathfrak{B}(\Upsilon),$$

δηλαδή $Q_{X_1} = \mathbf{Exp}(\frac{b}{c})$. Το τελευταίο μας δίνει ότι $\mathbb{E}_Q[X_1] = \frac{c}{b} > \frac{2}{b} = \mathbb{E}_P[X_1]$, κάτι που μαζί με τη σχέση $\mathbb{E}_Q[N_t] = \frac{at}{2} > \frac{at}{2} - \frac{1-e^{-2at}}{4} = \mathbb{E}_P[N_t]$ για κάθε $t > 0$, μας δίνει τελικά την επιθυμητή σχέση $\mathbb{E}_P[S_t] < \mathbb{E}_Q[S_t] < \infty$ για κάθε $t > 0$.

Παράδειγμα 4.4.3. Έστω $\theta := (a, 2) \in D := \Upsilon^2$ και έστω $P \in \mathcal{M}^\ell_{S,\mathbf{Ga}(\theta)}$ με $P_{X_1} = \mathbf{Exp}(\eta)$ με $\eta \in \Upsilon$, για $\ell = 1, 2$. Θεωρούμε την πραγματική συνάρτηση $\beta_\theta := \gamma + \alpha_\theta$, με $\gamma(x) := \ln(1 - c \cdot \mathbb{E}_P[X_1]) + c \cdot x$ για κάθε $x \in \Upsilon$, όπου $c < \eta$ μία θετική σταθερά, και $\alpha_\theta := \ln \frac{a}{2\mathbb{E}_P[N_1]}$. Εύκολα μπορεί να δει κάποιος ότι $\mathbb{E}_P[e^{\gamma(X_1)}] = 1$ και $\mathbb{E}_P[X_1^2 \cdot e^{\gamma(X_1)}] = \frac{2}{(\eta-c)^2} < \infty$, δηλαδή $\gamma \in \mathcal{F}^\ell_{P,\ln}$, δηλαδή $\beta_\theta \in \widetilde{\mathcal{F}}^\ell_{P,\theta}$ για $\ell = 1, 2$. Συνεπώς, από το Πόρισμα 4.2.10 (ii), υπάρχει ένα μοναδικό ζευγάρι $(\rho, Q) \in \mathfrak{M}_+(D) \times \mathcal{M}^\ell_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\theta))}$ που ικανοποιεί τις συνθήκες (RPM) και $(*)$ και το Q να είναι μία αρχή υπολογισμού ασφαλίστρου. Ιδιαιτέρως, από την συνθήκη $(*)$ έπεται ότι $\rho(\theta) = \frac{a}{2}$, ενώ από το Λήμμα 4.1.3 (a) προκύπτει ότι

$$Q_{X_1}(B) = \mathbb{E}_P[\chi_{X_1^{-1}(B)} \cdot e^{\gamma(X_1)}] = \int_B (\eta - c) \cdot e^{-(\eta-c)\cdot x}\, \lambda(dx) \text{ για κάθε } B \in \mathfrak{B}(\Upsilon),$$

δηλαδή $Q_{X_1} = \mathbf{Exp}(\eta - c)$. Επομένως, $\mathbb{E}_Q[X_1] = \frac{1}{\eta-c} > \frac{1}{\eta} = \mathbb{E}_P[X_1]$, και αφού $\mathbb{E}_Q[N_t] \geqslant \mathbb{E}_P[N_t]$ για κάθε $t \geqslant 0$ (βλ. Παράδειγμα 4.2.12), τελικά προκύπτει ότι $\mathbb{E}_P[S_t] < \mathbb{E}_Q[S_t] < \infty$ για κάθε $t > 0$.

Στο επόμενο παράδειγμα δείχνουμε πως μπορούμε να λάβουμε την αρχή του Esscher με εφαρμογή του Πορίσματος 4.2.10 (ii).

Παράδειγμα 4.4.4. Έστω $\theta := (a,2) \in D := \Upsilon^2$ και έστω $P \in \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{Ga}(\theta)}$ με $P_{X_1} = \mathbf{Ga}(\eta)$ με $\eta := (b,c) \in \Upsilon^2$, για $\ell = 1,2$. Θεωρούμε την πραγματική συνάρτηση $\beta_\theta := \gamma + \alpha_\theta$, με $\gamma(x) := d \cdot x - \ln \mathbb{E}_P[e^{d \cdot X_1}]$ για κάθε $x \in \Upsilon$, όπου $d < b$ μία θετική σταθερά, και $\alpha_\theta := \ln \frac{a}{2\mathbb{E}_P[N_1]}$. Εύκολα μπορεί να δει κάποιος ότι $\mathbb{E}_P[e^{\gamma(X_1)}] = 1$ και $\mathbb{E}_P[X_1^2 \cdot e^{\gamma(X_1)}] = \frac{c \cdot (c+1)}{(b-d)^2} < \infty$, δηλαδή $\gamma \in \mathcal{F}^{\ell}_{P,\ln}$. Επομένως $\beta_\theta \in \widetilde{\mathcal{F}}^{\ell}_{P,\theta}$ για $\ell = 1,2$. Συνεπώς, από το Πόρισμα 4.2.10 (ii), υπάρχει ένα μοναδικό ζευγάρι $(\rho, Q) \in \mathfrak{M}_+(D) \times \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\theta))}$ που ικανοποιεί τις συνθήκες (RPM) και $(*)$ και το Q να είναι μία αρχή υπολογισμού ασφαλίστρου. Ιδιαιτέρως, από την συνθήκη $(*)$ έπεται ότι $\rho(\theta) = \frac{a}{2}$, ενώ από το Λήμμα 4.1.3 (a) προκύπτει ότι

$$Q_{X_1}(B) = \mathbb{E}_P[\chi_{X_1^{-1}(B)} \cdot e^{\gamma(X_1)}] = \int_B \frac{(b-d)^c}{\Gamma(c)} \cdot x^{c-1} \cdot e^{-(b-d)\cdot x}\, \lambda(dx) \text{ για κάθε } B \in \mathfrak{B}(\Upsilon),$$

δηλαδή $Q_{X_1} = \mathbf{Ga}(\widetilde{\eta})$, όπου $\widetilde{\eta} := (b-d, c) \in \Upsilon^2$, και

$$\mathbb{E}_Q[X_1] = \frac{\mathbb{E}_P[X_1 \cdot e^{d \cdot X_1}]}{\mathbb{E}_P[e^{d \cdot X_1}]} = \frac{c}{b-d} > \frac{c}{b} = \mathbb{E}_P[X_1].$$

Αλλά, αφού σύμφωνα με το Παράδειγμα 4.2.12 έχουμε ότι $\mathbb{E}_Q[N_t] > \mathbb{E}_P[N_t]$ για κάθε $t > 0$, έπεται ότι $\mathbb{E}_P[S_t] < \mathbb{E}_Q[S_t] < \infty$ για κάθε $t > 0$.

Στο τελευταίο παράδειγμα κατασκευάζουμε μία αρχή υπολογισμού ασφαλίστρου Q ώστε $Q \in \mathcal{M}^1_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\theta))}$ αλλά $Q \notin \mathcal{M}^2_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\theta))}$.

Παράδειγμα 4.4.5. Έστω $\theta \in D := \Upsilon$ και $\rho := id_D$, και ας υποθέσουμε ότι $P \in \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{Exp}(\theta)}$ για $\ell = 1,2$, με $P_{X_1} = \mathbf{Exp}(\eta)$ με $\eta \in \Upsilon$. Ορίζουμε την πραγματική συνάρτηση γ με τύπο

$$\gamma(x) := \ln \frac{2c^2}{\mathbb{E}_P[X_1]} - 3\ln\left(\frac{c}{\mathbb{E}_P[X_1]} + x\right) + \frac{x}{\mathbb{E}_P[X_1]} \quad \text{για κάθε} \quad x \in \Upsilon$$

με $c > 1/\eta^2$ πραγματική σταθερά. Εύκολα αποδεικνύεται ότι $\mathbb{E}_P[e^{\gamma(X_1)}] = 1$, $\mathbb{E}_P[X_1 \cdot e^{\gamma(X_1)}] = c \cdot \eta$ και $\mathbb{E}_P[X_1^2 \cdot e^{\gamma(X_1)}] = \infty$, δηλαδή $\gamma \in \mathcal{F}^1_{P,\ln}$ αλλά $\gamma \notin \mathcal{F}^2_{P,\ln}$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 4.2.9 (ii), υπάρχει ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας $Q \in \mathcal{M}^1_{S,\mathbf{Exp}(\theta)}$, που είναι μία αρχή υπολογισμού ασφαλίστρου, και ικανοποιεί τη συνθήκη (RRM). Επιπλέον, από το Λήμμα 4.1.3 (a), έχουμε

$$Q_{X_1}(B) = \mathbb{E}_P[\chi_{X_1^{-1}(B)} \cdot e^{\gamma(X_1)}] = \int_B \frac{2}{c\eta} \left(\frac{c\eta}{c\eta + x}\right)^3 \lambda(dx) \text{ για κάθε } B \in \mathfrak{B}(\Upsilon),$$

δηλαδή $Q_{X_1} = \mathbf{Par}(c\eta, 2)$. Άρα $Q \in \mathcal{M}^1_{S,\mathbf{Exp}(\theta)}$ και $Q \notin \mathcal{M}^2_{S,\mathbf{Exp}(\theta)}$. Προφανώς $\mathbb{E}_Q[X_1] = c\eta > \frac{1}{\eta} = \mathbb{E}_P[X_1]$, κάτι που σε συνδυασμό με τη σχέση $\mathbb{E}_Q[N_t] = \mathbb{E}_P[N_t]$ για κάθε $t > 0$, μας δίνει $\mathbb{E}_P[S_t] < \mathbb{E}_Q[S_t] < \infty$ για κάθε $t > 0$.

Κεφάλαιο 5

Ουδέτερες Κινδύνου Κατανομές Πιθανότητας για Σύνθετες Μεικτές Ανανεωτικές Διαδικασίες

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζεται μία λύση του κεντρικού προβλήματος (**Π**).

Στην Ενότητα 5.1 αποδεικνύεται η μία κατεύθυνση του ζητούμενου χαρακτηρισμού, βλ. Πρόταση 5.1.4. Στην Ενότητα 5.2 δίνεται ένας χαρακτηρισμός των σύνθετων μεικτών ανανεωτικών διαδικασιών μέσω φ.δ. πιθανοτήτων, βλ Πρόταση 5.2.1. Στην Ενότητα 5.3 αποδεικνύεται ο ζητούμενος χαρακτηρισμός, βλ. Θεώρημα 5.3.5. Στις Ενότητες 5.4 και 5.5 παρουσιάζονται εφαρμογές στα Χρηματοοικονομικά και Αναλογιστικά Μαθηματικά.

5.1 Σύνθετες Μεικτές Ανανεωτικές Διαδικασίες και Παράγωγοι Radon-Nikodým

Για όλο το κεφάλαιο, εκτός και αν αναφέρεται διαφορετικά, υποθέτουμε ότι η πιθανότητα έκρηξης της N είναι ίση με μηδέν, δηλ. $P(\{\sup_{n\in\mathbb{N}_0} T_n < \infty\}) = 0$. Επιπλέον, το Θ είναι ένα d-διάστατο τυχαίο διάνυσμα στον Ω με τιμές στο D, ενώ με $\mathcal{F} := \{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ θα συμβολίζεται η διύλιση που παράγεται από την $\mathcal{F}^S$ και τη σ-άλγεβρα $\sigma(\Theta)$. Τέλος, υποθέτουμε ότι για κάθε σταθερό $\omega \in \Omega$ η συνολοσυνάρτηση $Q_{\bullet|\Theta}(\omega) := Q(\bullet \mid \sigma(\Theta))(\omega)$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στη Σ, όπου $Q(\bullet \mid \sigma(\Theta))(\bullet) : \Sigma \times \Omega \longmapsto [0,1]$ είναι μία υπό συνθήκη πιθανότητα δοθείσης της $\sigma(\Theta)$.

Προκειμένου να αποδείξουμε το κύριο αποτέλεσμα αυτής της ενότητας χρειαζόμαστε τα παρακάτω βοηθητικά λήμματα

Λήμμα 5.1.1. *Εάν η W είναι P- και Q-υπο συνθήκη i.i.d., $Q_\Theta \sim P_\Theta$ και $Q_{W_1} \sim P_{W_1}$, τότε υπάρχει ένα P-μηδενικό σύνολο $M \in \sigma(\Theta)$ έτσι ώστε για κάθε $\omega \notin M$ να υπάρχει μία $P_{W_1}(\bullet \mid \Theta(\omega))$-σ.β. μοναδική θετική συνάρτηση $r_{\Theta(\omega)} \in \mathcal{L}^1(P_{W_1}(\bullet \mid \Theta(\omega)))$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ και $E \in \mathcal{F}_n^W$ να ισχύει*

$$Q(E \mid \Theta) \upharpoonright M^c = \mathbb{E}_P\big[\chi_E \cdot \prod_{j=1}^{n} (r_\Theta \circ W_j) \mid \Theta\big] \upharpoonright M^c. \tag{5.1}$$

Απόδειξη. Αφού $Q_{W_1} \sim P_{W_1}$, έπεται εύκολα ότι για κάθε $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ υπάρχει ένα P-μηδενικό σύνολο $M_B \in \sigma(\Theta)$ έτσι ώστε για κάθε $\omega \notin M_B$ να ικανοποιείται η συνθήκη

$$Q_{W_1}(B \mid \Theta(\omega)) \Longleftrightarrow P_{W_1}(B \mid \Theta(\omega)). \tag{5.2}$$

Καθώς όμως η $\mathfrak{B}(\Upsilon)$ είναι αριθμήσιμα παραγόμενη, χρησιμοποιώντας ένα επιχείρημα μονότονης κλάσης μπορούμε να βρούμε ένα P-μηδενικό σύνολο $M \in \sigma(\Theta)$, έτσι ώστε για κάθε $\omega \notin M$ και $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ να ισχύει η συνθήκη (5.2).

Σταθεροποιούμε ένα αυθαίρετο $\omega \notin M$. Από το Θεώρημα Radon-Nikodým έπεται ότι υπάρχει μία $P_{W_1}(\bullet \mid \Theta(\omega))$-σ.β. θετική Radon-Nikodým παράγωγος $r_{\Theta(\omega)}(\bullet) \in \mathcal{L}^1(P_{W_1}(\bullet \mid \Theta(\omega)))$ ώστε

$$Q_{W_1}(B \mid \Theta(\omega)) = \int_B r_{\Theta(\omega)}(w_1)\, P_{W_1}(dw_1|\Theta(\omega)) \quad \text{για κάθε } B \in \mathfrak{B}(\Upsilon). \tag{5.3}$$

Σταθεροποιούμε ένα αυθαίρετο $n \in \mathbb{N}_0$ και θέτουμε

$$\mathcal{C}_n^W := \left\{ \bigcap_{j=1}^{n} E_j : E_j \in \sigma(W_j) \right\}.$$

Τότε, η σχέση (5.1) ικανοποιείται για κάθε $E \in \mathcal{C}_n^W$.

Πράγματι, έστω $E \in \mathcal{C}_n^W$, τότε υπάρχουν σύνολα $B_j \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ με $j \in \{1, \ldots, n\}$ ώστε $E = \bigcap_{j=1}^n W_j^{-1}(B_j)$. Άρα

$$\begin{aligned}
Q(E \mid \Theta)(\omega) &= Q\left(\bigcap_{j=1}^{n} W_j^{-1}(B_j) \mid \Theta\right)(\omega) = \prod_{j=1}^{n} Q(W_j^{-1}(B_j) \mid \Theta)(\omega) = \prod_{j=1}^{n} Q_{W_j}(B_j \mid \Theta(\omega)) \\
&\overset{(5.3)}{=} \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}_{P_{W_j}}[\chi_{B_j} \cdot r_{\Theta(\omega)} \mid \Theta(\omega)] = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}_P[\chi_{W_j^{-1}(B_j)} \cdot (r_\Theta \circ W_j) \mid \Theta](\omega) \\
&= \mathbb{E}_P[\chi_{\bigcap_{j=1}^n W_j^{-1}(B_j)} \cdot \prod_{j=1}^{n} (r_\Theta \circ W_j) \mid \Theta](\omega) \\
&= \mathbb{E}_P[\chi_E \cdot \prod_{j=1}^{n} (r_\Theta \circ W_j) \mid \Theta](\omega),
\end{aligned}$$

όπου η δεύτερη και έκτη ισότητα έπονται από το γεγονός ότι οι τυχαίες μεταβλητές $W_1, \ldots, W_n$ είναι Q- και P-υπό συνθήκη ανεξάρτητες.

Θεωρούμε την οικογένεια συνόλων

$$\mathcal{D}_n^W := \left\{ F \in \mathcal{F}_n^W : Q(F \mid \Theta)(\omega) = \mathbb{E}_P\big[\chi_F \cdot \prod_{j=1}^{n} (r_\Theta \circ W_j) \mid \Theta\big](\omega) \right\}.$$

Τότε η οικογένεια $\mathcal{D}_n^W$ είναι μία κλάση Dynkin στον Ω.

Πράγματι,

(Dyn1) $\varnothing \in \mathcal{D}_n^W$ αφού

$$Q(\varnothing \mid \Theta)(\omega) = 0 = \mathbb{E}_P[\chi_\varnothing \cdot \prod_{j=1}^{n} (r_\Theta \circ W_j) \mid \Theta](\omega).$$

(Dyn2) Για κάθε $F \in \mathcal{D}_n^W$ έχουμε ότι $\Omega \setminus F \in \mathcal{D}_n^W$.

Πράγματι, αρχικά παρατηρούμε ότι $\Omega \in \mathcal{D}_n^W$ αφού $\Omega \in \mathcal{C}_n^W$. Επομένως

$$\begin{aligned} Q(\Omega \setminus F \mid \Theta)(\omega) &= Q(\Omega \mid \Theta)(\omega) - Q(F \mid F)(\omega) \\ &= \mathbb{E}_P[\chi_\Omega \cdot \prod_{j=1}^{n} (r_\Theta \circ W_j) \mid \Theta](\omega) - \mathbb{E}_P[\chi_F \cdot \prod_{j=1}^{n} (r_\Theta \circ W_j) \mid \Theta](\omega) \\ &= \mathbb{E}_P[(\chi_\Omega - \chi_F) \cdot \prod_{j=1}^{n} (r_\Theta \circ W_j) \mid \Theta](\omega) \\ &= \mathbb{E}_P[\chi_{\Omega \setminus F} \cdot \prod_{j=1}^{n} (r_\Theta \circ W_j) \mid \Theta](\omega). \end{aligned}$$

(Dyn3) Για κάθε ακολουθία $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ξένων ανά δύο στοιχείων της $\mathcal{D}_n^W$ ισχύει ότι $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \in \mathcal{D}_n^W$.

Πράγματι,

$$\begin{aligned} Q(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \mid \Theta)(\omega) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} Q(F_n \mid \Theta)(\omega) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}_P[\chi_{F_n} \cdot \prod_{j=1}^{n} (r_\Theta \circ W_j) \mid \Theta](\omega) \\ &= \mathbb{E}_P[\sum_{n \in \mathbb{N}} \chi_{F_n} \cdot \prod_{j=1}^{n} (r_\Theta \circ W_j) \mid \Theta](\omega) \\ &= \mathbb{E}_P[\chi_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n} \cdot \prod_{j=1}^{n} (r_\Theta \circ W_j) \mid \Theta](\omega). \end{aligned}$$

Επομένως, από τα (Dyn1), (Dyn2) και (Dyn3) προκύπτει ότι η $\mathcal{D}_n^W$ είναι μία κλάση Dynkin.

Θέτουμε $\widetilde{\mathcal{G}}_n^W := \mathcal{G}_n^W \cup \mathcal{C}_n^W$, όπου $\mathcal{G}_n^W := \bigcup_{j=1}^n \sigma(W_j)$. Αφού $\mathcal{F}_n^W = \sigma(\mathcal{G}_n^W) \subseteq \sigma(\widetilde{\mathcal{G}}_n^W) \subseteq \mathcal{F}_n^W$ έχουμε ότι $\sigma(\widetilde{\mathcal{G}}_n^W) = \mathcal{F}_n^W$, και καθώς η $\widetilde{\mathcal{G}}_n^W$ είναι κλειστή ως προς τις πεπερασμένες τομές μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα A.1 για να πάρουμε $\mathcal{F}_n^W = \mathcal{D}_n^W$, ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη του λήμματος. □

Μία σ.δ. μεγέθους συνολικών απαιτήσεων S που επάγεται από μία P-διαδικασία κινδύνου (N, X), ώστε η N να είναι μία P-MRP($\mathbf{K}(\Theta)$) καλείται **σύνθετη μεικτή ανανεωτική σ.δ. με παραμέτρους $\mathbf{K}(\Theta)$ και** P_{X_1} (συμβ. P-CMRP($\mathbf{K}(\Theta), P_{X_1}$) για συντομία).

Για ό,τι ακολουθεί θα συμβολίζουμε πάλι με $\mathbf{K}(\Theta)$ την υπό συνθήκη συνάρτηση κατανομής που επάγεται από την υπό συνθήκη κατανομή πιθανότητας $\mathbf{K}(\Theta)$.

Οι παρακάτω δύο συνθήκες θα φανούν χρήσιμες για όλα τα αποτελέσματα του παρόντος κεφαλαίου

(a1) Το ζευγάρι (W, X) είναι P-υπό συνθήκη ανεξάρτητες.

(a2) Το τυχαίο διάνυσμα Θ και η σ.δ. X είναι P-ανεξάρτητα.

Στη συνέχεια, όποτε οι συνθήκες (a1) και (a2) ισχύουν θα λέμε ότι η τετράδα (P, W, X, Θ) ή (εάν δεν δημιουργείται σύγχυση) το μέτρο πιθανότητας P ικανοποιεί τις (a1) και (a2), αντίστοιχα.

Συμβολισμοί 5.1.2. **(a)** Η κλάση όλων των πραγματικών συναρτήσεων ξ στο D με $P_\Theta(\{\xi > 0\}) = 1$ και $\mathbb{E}_P[\xi(\Theta)] = 1$ θα συμβολίζεται με $\mathcal{R}_+(D) := \mathcal{R}_+(D, \mathfrak{B}(D), P_\Theta)$.

(b) Για κάθε $\rho \in \mathfrak{M}^k(D)$ η κλάση όλων των μέτρων πιθανότητας Q επάνω στη Σ ώστε $Q \upharpoonright \mathcal{F}_t \sim P \upharpoonright \mathcal{F}_t$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, η S να είναι μία Q-CMRP($\mathbf{K}(\rho(\Theta)), Q_{X_1}$) και που ικανοποιούν τις (a1) και (a2), θα συμβολίζεται με $\mathcal{M}_{S,\mathbf{K}(\rho(\Theta))} := \mathcal{M}_{S,\mathbf{K}(\rho(\Theta)),P,X_1}$. Στην ειδική περίπτωση $d = k$ και $\rho := id_D$ θα γράφουμε $\mathcal{M}_{S,\mathbf{K}(\Theta)} := \mathcal{M}_{S,\mathbf{K}(\rho(\Theta))}$ για λόγους απλότητας.

Από εδώ και κάτω, εκτός και αν αναφέρεται διαφορετικά, η συνάρτηση h είναι όπως στο Λήμμα 4.1.3 (a), και το μέτρο $P \in \mathcal{M}_{S,\mathbf{K}(\Theta)}$ είναι το αρχικό μέτρο πιθανότητας κάτω από το οποίο η S είναι μία CMRP με παραμέτρους $\mathbf{K}(\Theta)$ και P_{X_1}.

Λήμμα 5.1.3. *Για δοσμένο $\rho \in \mathfrak{M}^k(D)$, εάν $Q \in \mathcal{M}_{S,\mathbf{\Lambda}(\rho(\Theta))}$, υπάρχει μία P_{X_1}-σ.β. μοναδική συνάρτηση $\gamma \in \mathcal{F}_{P,h}$ και ένα P-μηδενικό σύνολο $U_1 \in \sigma(\Theta)$ ώστε για κάθε $0 \leqslant u \leqslant t$ και $A \in \mathcal{F}_u^S$*

$$Q(A \mid \Theta) \upharpoonright U_1^c = \mathbb{E}_P[\chi_A \cdot \widetilde{M}_u^{(\gamma)}(\Theta) \mid \Theta] \upharpoonright U_1^c, \tag{RRM_Θ}$$

όπου $\widetilde{M}_u^{(\gamma)}(\Theta) := \left[\prod_{j=1}^{N_u} (h^{-1} \circ \gamma)(X_j) \cdot \frac{[\mathbf{\Lambda}(\rho(\Theta))]'(W_j)}{[\mathbf{K}(\Theta)]'(W_j)}\right] \cdot \frac{1-\mathbf{\Lambda}(\rho(\Theta))(u-T_{N_u})}{1-\mathbf{K}(\Theta)(u-T_{N_u})}$.

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε ένα αυθαίρετο $t \in \mathbb{R}_+$ και θεωρούμε $u \in [0, t]$.

(a) Ισχύουν οι συνθήκες $Q_\Theta \sim P_\Theta$, $Q_{W_1} \sim P_{W_1}$ και $Q_{X_1} \sim P_{X_1}$.

Πράγματι, αφού από την υπόθεσή μας έχουμε ότι $Q \upharpoonright \mathcal{F}_t \sim P \upharpoonright \mathcal{F}_t$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, οι συνθήκες $Q_\Theta \sim P_\Theta$ και $Q_{W_1} \sim P_{W_1}$ έπονται άμεσα αφού $\sigma(\Theta) \subseteq \mathcal{F}_t$ και $\mathcal{F}_t^S \subseteq \mathcal{F}_t$, αντίστοιχα. Επιπλέον, η συνθήκη $Q_{X_1} \sim P_{X_1}$ έπεται άμεσα από την Πρόταση 4.1.5 καθώς $\mathcal{F}_t^S \subseteq \mathcal{F}_t$.

(b) Υπάρχει ένα P-μηδενικό σύνολο $M \in \sigma(\Theta)$ έτσι ώστε για κάθε $\omega \notin M$ να υπάρχει μία $P_{W_1}(\bullet \mid \Theta(\omega))$-σ.β. μοναδική θετική συνάρτηση $r_{\Theta(\omega)} \in \mathcal{L}^1(P_{W_1}(\bullet \mid \Theta(\omega)))$ που να ικανοποιεί τη συνθήκη (5.1).

Το (b) έπεται άμεσα από το βήμα (a) και το Λήμμα 5.1.1.

(c) Υπάρχει μία P_{X_1}-σ.β. μοναδική συνάρτηση $\gamma \in \mathcal{F}_{P,h}$ έτσι ώστε για κάθε $F \in \mathcal{F}_n^X$ να ισχύει η συνθήκη

$$Q(F) = \mathbb{E}_P[\chi_F \cdot \prod_{j=1}^{n} (h^{-1} \circ \gamma \circ X_j)]. \tag{5.4}$$

Το (c) έπεται άμεσα από το βήμα (a) και το Λήμμα 4.1.3 (a).

(d) Υπάρχει ένα P-μηδενικό σύνολο $U_1 \in \sigma(\Theta)$ που περιέχει το P-μηδενικό σύνολο M έτσι ώστε για κάθε $E \in \sigma(\mathcal{F}_n^W \cup \mathcal{F}_n^X) \cap \{W_{n+1} > u - T_n\}$ και $\omega \notin U_1$ να ικανοποιείται η συνθήκη

$$Q(E \mid \Theta)(\omega) = \mathbb{E}_P\left[\chi_E \cdot \Big[\prod_{j=1}^{n} (h^{-1} \circ \gamma \circ X_j) \cdot (r_\Theta \circ W_j)\Big] \cdot \frac{Q(\{W_{n+1} > u - T_n\} \mid \Theta)}{P(\{W_{n+1} > u - T_n\} \mid \Theta)} \mid \Theta\right](\omega)$$

Πράγματι, σταθεροποιούμε τυχαία $\omega \notin M$ και $n_0 \in \mathbb{N}_0$. Θέτοντας $V := \bigcap_{j=1}^{n}(X_j^{-1}(F_j) \cap W_j^{-1}(E_j)) \cap \{W_{n+1} > t - T_n\}$ με $F_j, E_j \in \mathfrak{B}(\varUpsilon)$ για $j \in \{1, \ldots, n_0\}$ για κάθε $G \in \sigma(\Theta)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
&\int_G Q(V \mid \Theta)(\omega)\, dQ \\
&= \int_G \mathbb{E}_Q[\chi_{\bigcap_{j=1}^{n_0}(X_j^{-1}(F_j) \cap W_j^{-1}(E_j)) \cap \{W_{n_0+1} > u - T_{n_0}\}} \mid \Theta](\omega)\, dQ \\
&= \int_G \mathbb{E}_Q[\chi_{\bigcap_{j=1}^{n_0} X_j^{-1}(F_j)} \mid \Theta](\omega) \cdot \mathbb{E}_Q[\chi_{\bigcap_{j=1}^{n_0} W_j^{-1}(E_j) \cap \{W_{n_0+1} > u - T_{n_0}\}} \mid \Theta](\omega)\, dQ \\
&= \mathbb{E}_Q[\chi_{\bigcap_{j=1}^{n_0} X_j^{-1}(F_j)}] \cdot \\
&\quad \int_G \Big[\int \prod_{j=1}^{n_0} \chi_{E_j}(w_j) \cdot \chi_{(u-w,\infty)}(w_{n_0+1})\, Q_{W_1|\Theta,\ldots W_{n_0}|\Theta, W_{n_0+1}|\Theta}(d(w_1, \ldots, w_{n_0}, w_{n_0+1})|\Theta(\omega))\Big]\, dQ,
\end{aligned}$$

με $w = \sum_{j=1}^{n_0} w_j$, όπου η τρίτη και τέταρτη ισότητα προκύπτουν από τις συνθήκες (a1) και (a2) αντίστοιχα. Αφού όμως η W είναι P-υπό συνθήκη ανεξάρτητη, από το Θεώρημα Fubini έχουμε

$$
\begin{aligned}
&\int_G Q(V \mid \Theta)(\omega)\, dQ \\
&= \mathbb{E}_Q[\chi_{\bigcap_{j=1}^{n_0} X_j^{-1}(F_j)}] \cdot \int_G \Big[\int \prod_{j=1}^{n_0} \chi_{E_j}(w_j) \cdot \\
&\quad \big[\int \chi_{(u-w,\infty)}(w_{n_0+1})\, Q_{W_{n_0+1}|\Theta}(dw_{n_0+1}|\Theta(\omega)) \big]\, Q_{W_1|\Theta,\ldots W_{n_0}|\Theta}(d(w_1,\ldots,w_{n_0}|\Theta(\omega)) \Big]\, dQ \\
&= \mathbb{E}_Q[\chi_{\bigcap_{j=1}^{n_0} X_j^{-1}(F_j)}] \cdot \int_G \Big[\int \prod_{j=1}^{n_0} \chi_{E_j}(w_j) \cdot Q(\{W_{n_0+1} > u-w\}|\Theta)(\omega) \\
&\quad Q_{W_1|\Theta,\ldots W_{n_0}|\Theta}(d(w_1,\ldots,w_{n_0})|\Theta(\omega)) \Big]\, dQ \\
&= \mathbb{E}_Q[\chi_{\bigcap_{j=1}^{n_0} X_j^{-1}(F_j)}] \cdot \int_G \Big[\int \prod_{j=1}^{n_0} \chi_{E_j}(w_j) \cdot \frac{Q(\{W_{n_0+1} > u-w\}|\Theta)(\omega)}{P(\{W_{n_0+1} > u-w\}|\Theta)(\omega)} \cdot \\
&\quad P(\{W_{n_0+1} > u-w\}|\Theta)(\omega)\, Q_{W_1|\Theta,\ldots W_{n_0}|\Theta}(d(w_1,\ldots,w_{n_0})|\Theta(\omega)) \Big]\, dQ.
\end{aligned}
$$

Το τελευταίο μαζί με τα βήματα (b) και (c) μας δίνει

$$
\begin{aligned}
&\int_G Q(V \mid \Theta)(\omega)\, dQ \\
&= \mathbb{E}_P[\chi_{\bigcap_{j=1}^{n_0} X_j^{-1}(F_j)} \cdot \prod_{j=1}^{n_0}(h^{-1}\circ\gamma\circ X_j)] \cdot \int_G \Big[\int \prod_{j=1}^{n_0} \chi_{E_j}(w_j) \cdot (r_{\Theta(\omega)} \circ w_j) \cdot \\
&\quad \frac{Q(\{W_{n_0+1} > u-w\}|\Theta)(\omega)}{P(\{W_{n_0+1} > u-w\}|\Theta)(\omega)} \cdot \mathbb{E}_P[\chi_{\{W_{n_0+1}>u-w\}}|\Theta(\omega)]\, P_{W_1|\Theta,\ldots W_{n_0}|\Theta}(d(w_1,\ldots,w_{n_0})|\Theta(\omega)) \Big]\, dQ,
\end{aligned}
$$

όπου $r_{\Theta(\omega)}(w_j) = \frac{[\mathbf{\Lambda}(\rho(\Theta(\omega)))]'(w_j)}{[\mathbf{K}(\Theta(\omega))]'(w_j)}$. Χρησιμοποιώντας ξανά το Θεώρημα Fubini έπεται ότι

$$
\begin{aligned}
&\int_G Q(V \mid \Theta)(\omega)\, dQ \\
&= \mathbb{E}_P[\chi_{\bigcap_{j=1}^{n_0} X_j^{-1}(F_j)} \cdot \prod_{j=1}^{n_0}(h^{-1}\circ\gamma\circ X_j)] \cdot \int_G \Big[\int \prod_{j=1}^{n_0} \chi_{E_j}(w_j) \cdot \chi_{\{W_{n_0+1}>u-w\}}(r_{\Theta(\omega)} \circ w_j) \cdot \\
&\quad \frac{Q(\{W_{n_0+1} > u-w\}|\Theta)(\omega)}{P(\{W_{n_0+1} > u-w\}|\Theta)(\omega)}\, P_{W_1|\Theta,\ldots W_{n_0}|\Theta, W_{n_0+1}|\Theta}(d(w_1,\ldots,w_{n_0})|\Theta(\omega)) \Big]\, dQ \\
&= \mathbb{E}_P[\chi_{\bigcap_{j=1}^{n_0} X_j^{-1}(F_j)} \cdot \prod_{j=1}^{n_0}(h^{-1}\circ\gamma\circ X_j)] \cdot \\
&\quad \int_G \mathbb{E}_P[\chi_{\bigcap_{j=1}^{n_0} W_j^{-1}(E_j)\cap\{W_{n_0+1}>u-T_{n_0}\}} \prod_{j=1}^{n_0}(r_\Theta \circ W_j) \mid \Theta](\omega) \cdot \frac{Q(\{W_{n_0+1} > u-T_{n_0}\} \mid \Theta)(\omega)}{P(\{W_{n_0+1} > u-T_{n_0}\} \mid \Theta)(\omega)}\, dQ \\
&= \int_G \mathbb{E}_P\left[\chi_V \cdot \Big[\prod_{j=1}^{n_0}(h^{-1}\circ\gamma\circ X_j)\cdot(r_\Theta \circ W_j) \Big] \cdot \frac{Q(\{W_{n_0+1} > u-T_{n_0}\} \mid \Theta)}{P(\{W_{n_0+1} > u-T_{n_0}\} \mid \Theta)} \mid \Theta \right](\omega)\, dQ,
\end{aligned}
$$

όπου η τέταρτη ισότητα προκύπτει από τις συνθήκες (a1) και (a2) καθώς και από το γεγονός ότι οι υπό συνθήκη πιθανότητες $P(\{W_{n_0+1} > u - T_{n_0}\} \mid \Theta)$ και $Q(\{W_{n_0+1} > u - T_{n_0}\} \mid \Theta)$ είναι $\sigma(\Theta)$-μετρήσιμες συναρτήσεις. Επομένως, υπάρχει ένα Q-μηδενικό σύνολο $U_V \in \sigma(\Theta)$

έτσι ώστε για κάθε $\omega \notin U_V$ να ισχύει η συνθήκη

$$Q(V \mid \Theta)(\omega) = \mathbb{E}_P \left[\chi_V \cdot \Big[\prod_{j=1}^{n_0} (h^{-1} \circ \gamma \circ X_j) \cdot (r_\Theta \circ W_j) \Big] \cdot \frac{Q(\{W_{n_0+1} > u - T_{n_0}\} \mid \Theta)}{P(\{W_{n_0+1} > u - T_{n_0}\} \mid \Theta)} \mid \Theta \right] (\omega)$$

Αφού όμως $Q \restriction \sigma(\Theta) \sim P \restriction \sigma(\Theta)$ και η $\sigma(\mathcal{F}_n^W \cup \mathcal{F}_n^X) \cap \{W_{n+1} > u - T_n\}$ είναι αριθμήσιμα παραγόμενη χρησιμοποιώντας ένα επιχείρημα μονότονης κλάσης μπορούμε να βρούμε ένα P-μηδενικό σύνολο $U_1 := \bigcup_{V \in \mathcal{G}} U_V \in \sigma(\Theta)$, όπου $\mathcal{G}$ είναι ένας αριθμήσιμος γεννήτορας της $\sigma(\mathcal{F}_n^W \cup \mathcal{F}_n^X) \cap \{W_{n+1} > u - T_n\}$ που είναι κλειστός ως προς τις πεπερασμένες τομές, έτσι ώστε για κάθε $\omega \notin U_1$ να ισχύει

$$\begin{aligned} &Q(V \mid \Theta)(\omega) \\ &= \mathbb{E}_P \left[\chi_V \cdot \Big[\prod_{j=1}^{n} (h^{-1} \circ \gamma \circ X_j) \cdot (r_\Theta \circ W_j) \Big] \cdot \frac{Q(\{W_{n+1} > u - T_n\} \mid \Theta)}{P(\{W_{n+1} > u - T_n\} \mid \Theta)} \mid \Theta \right] (\omega). \end{aligned} \tag{5.5}$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $M \subseteq U_1$. Χρησιμοποιώντας ένα επιχείρημα μονότονης κλάσης, παρόμοιο με εκείνο που χρησιμοποιήθηκε στο βήμα (d) της απόδειξης της Πρότασης 4.1.4, μπορεί να αποδειχθεί ότι η σχέση (5.5) συνεχίζει να ισχύει για κάθε $E \in \sigma(\mathcal{F}_n^W \cup \mathcal{F}_n^X) \cap \{W_{n+1} > u - T_n\}$ ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη του (d).

(e) Για κάθε $\omega \notin U_1$ και για όλα τα $0 \leqslant u \leqslant t$ και $A \in \mathcal{F}_u^S$ η σχέση (RRM_Θ) ικανοποιείται.

Πράγματι, σταθεροποιούμε ένα αυθαίρετο $\omega \notin U_1$. Τότε για κάθε $A \in \mathcal{F}_u^S$, από το Λήμμα 4.1.1 έπεται ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ υπάρχει ένα σύνολο $B_n \in \sigma(\mathcal{F}_n^W \cup \mathcal{F}_n^X)$ τέτοιο ώστε $A \cap \{N_u = n\} = B_n \cap \{N_u = n\}$. Άρα

$$\begin{aligned} Q(A \mid \Theta)(\omega) &= \sum_{n=0}^{\infty} Q\left(A \cap \{N_u = n\} \mid \Theta\right)(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} Q\left(B_n \cap \{N_u = n\} \mid \Theta\right)(\omega) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} Q(B_n \cap \{T_n \leqslant u\} \cap \{W_{n+1} > u - T_n\} \mid \Theta)(\omega). \end{aligned}$$

Καθώς όμως $B_n \cap \{T_n \leqslant u\} \in \sigma(\mathcal{F}_n^W \cup \mathcal{F}_n^X)$, από το βήμα (d) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} &Q(A \mid \Theta)(\omega) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}_P \left[\chi_{B_k \cap \{T_k \leqslant u\} \cap \{W_{k+1} > u - T_k\}} \cdot \left[\prod_{j=1}^{k} (h^{-1} \circ \gamma \circ X_j) \cdot (r_\Theta \circ W_j) \right] \cdot \frac{Q(\{W_{k+1} > u - T_k\} \mid \Theta)}{P(\{W_{k+1} > u - T_k\} \mid \Theta)} \middle| \Theta \right] (\omega) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}_P \left[\chi_{A \cap \{N_u = k\}} \cdot \left[\prod_{j=1}^{N_u} (h^{-1} \circ \gamma \circ X_j) \cdot (r_\Theta \circ W_j) \right] \cdot \frac{Q(\{W_{k+1} > u - T_k\} \mid \Theta)}{P(\{W_{k+1} > u - T_k\} \mid \Theta)} \middle| \Theta \right] (\omega) \\ &= \mathbb{E}_P \left[\chi_A \cdot \widetilde{M}_u^{(\gamma)}(\Theta) \mid \Theta \right] (\omega), \end{aligned}$$

αποδεικνύοντας έτσι τη συνθήκη (RRM_Θ). □

Η επόμενη πρόταση γενικεύει την Πρόταση 4.1.5 για σύνθετες μεικτές ανανεωτικές σ.δ..

Πρόταση 5.1.4. *Για δοσμένη $\rho \in \mathfrak{M}^k(D)$ έστω Q ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στη Σ που ικανοποιεί τις συνθήκες (a1), (a2) και τέτοιο ώστε η S να είναι μία Q-CMRP$(\mathbf{\Lambda}(\rho(\Theta), Q_{X_1})$. Τότε τα ακόλουθα είναι όλα ισοδύναμα:*

(i) $Q \upharpoonright \mathcal{F}_t \sim P \upharpoonright \mathcal{F}_t$ *για κάθε* $t \in \mathbb{R}_+$.

(ii) $Q_{X_1} \sim P_{X_1}$, $Q_{W_1} \sim P_{W_1}$ *και* $Q_\Theta \sim P_\Theta$.

(iii) Υπάρχει ένα ουσιωδώς μοναδικό ζευγάρι $(\gamma, \xi) \in \mathcal{F}_{P,h} \times \mathcal{R}_+(D)$, *όπου* ξ *είναι μία παράγωγος Radon-Nikodým του* Q_Θ *ως προς το* P_Θ, *έτσι ώστε*

$$Q(A) = \int_A M_t^{(\gamma)}(\Theta)\, dP \quad \textit{for all } 0 \leqslant u \leqslant t \textit{ and } A \in \mathcal{F}_u, \qquad (RRM_\xi)$$

όπου

$$M_t^{(\gamma)}(\Theta) := \xi(\Theta) \cdot \widetilde{M}_t^{(\gamma)}(\Theta),$$

και η οικογένεια $M^{(\gamma)}(\Theta) := \{M_t^{(\gamma)}(\Theta)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ *είναι ένα* P-*σ.β. θετικό* $(P, \mathcal{F})$-*martingale που ικανοποιεί τη συνθήκη* $\mathbb{E}_P[M_t^{(\gamma)}(\Theta)] = 1$ *για κάθε* $t \geqslant 0$.

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε ένα αυθαίρετο $t \geqslant 0$ και έστω $u \in [0, t]$. Η συνεπαγωγή $(i) \Longrightarrow (ii)$ έπεται άμεσα από την απόδειξη του Λήμματος 5.1.3.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$: Αφού $Q_\Theta \sim P_\Theta$ από το Θεώρημα Radon-Nikodým έπεται ότι υπάρχει μία P_Θ-σ.β. θετική Radon-Nikodým παράγωγος $\xi \in \mathcal{R}_+(D)$. Επιπλέον, αφού $Q_{X_1} \sim P_{X_1}$, από το Λήμμα 4.1.3 (a) έπεται ότι υπάρχει μία P_{X_1}-σ.β. μοναδική θετική συνάρτηση $\gamma \in \mathcal{F}_{P,h}$ που ικανοποιεί τη συνθήκη (5.4).

(a) Θεωρούμε την οικογένεια συνόλων

$$\mathcal{G}_u := \{\bigcap_{k=1}^m A_k : A_k \in \mathcal{F}_u^S \cup \sigma(\Theta),\ m \in \mathbb{N}\}.$$

Τότε για κάθε $G \in \mathcal{G}_u$ ισχύει η σχέση

$$Q(G) = \int_G M_u^{(\gamma)}(\Theta)\, dP.$$

Πράγματι, αν $G \in \mathcal{G}_u$ τότε υπάρχει ένας φυσικός αριθμός $m \in \mathbb{N}$ και μία πεπερασμένη ακολουθία $\{A_k\}_{k \in \{1,\ldots,m\}}$ στην $\mathcal{F}_u^S \cup \sigma(\Theta)$ έτσι ώστε $G = \bigcap_{k=1}^m A_k$. Θέτοντας

$$I_\Theta := \{k \in \{1, \ldots, m\} : A_k \in \sigma(\Theta)\} \quad \text{και} \quad I_H := \{k \in \{1, \ldots, m\} : A_k \in \mathcal{F}_u^S \backslash \sigma(\Theta)\}$$

έπεται ότι $I_\Theta \cup I_H = \{1, \ldots, m\}$, $\bigcap_{k\in I_\Theta} A_k \in \sigma(\Theta)$ και $\bigcap_{k\in I_H} A_k \in \mathcal{F}_u^S$. Αλλά, αφού $\bigcap_{k\in I_\Theta} A_k \in \sigma(\Theta)$ έπεται ότι υπάρχει ένα σύνολο $F \in \mathfrak{B}(D)$ έτσι ώστε $\bigcap_{k\in I_\Theta} A_k = \Theta^{-1}(F)$, και άρα

$$\begin{aligned}
Q(G) &= \int Q(G \mid \Theta)\, dQ = \int \mathbb{E}_Q[\chi_G \mid \Theta]\, dQ = \int \mathbb{E}_Q[\chi_{(\bigcap_{k\in I_\Theta} A_k)\cap(\bigcap_{k\in I_H} A_k)} \mid \Theta]\, dQ \\
&= \int \mathbb{E}_Q[\chi_{\Theta^{-1}(F)} \cdot \chi_{\bigcap_{k\in I_H} A_k} \mid \Theta]\, dQ = \int \chi_{\Theta^{-1}(F)} \cdot Q(\bigcap_{k\in I_H} A_k \mid \Theta)\, dQ \\
&= \int_{\Theta^{-1}(F)} \mathbb{E}_P[\chi_{\bigcap_{k\in I_H} A_k} \cdot \widetilde{M}_u^{(\gamma)}(\Theta) \mid \Theta]\, dQ \\
&= \int_{\Theta^{-1}(F)} \mathbb{E}_P[\chi_{\bigcap_{k\in I_H} A_k} \cdot \widetilde{M}_u^{(\gamma)}(\Theta) \mid \Theta] \cdot \xi(\Theta)\, dP \\
&= \int_{\Theta^{-1}(F)} \chi_{\bigcap_{k\in I_H} A_k} \cdot \xi(\Theta) \cdot \widetilde{M}_u^{(\gamma)}(\Theta)\, dP \\
&= \int_G M_u^{(\gamma)}(\Theta)\, dP,
\end{aligned}$$

όπου η έκτη ισότητα έπεται από το Λήμμα 5.1.3 αφού $\bigcap_{k\in I_H} A_k \in \mathcal{F}_u^S$. Επομένως $G \in \mathcal{D}_u$, ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη του (a).

(b) Η οικογένεια συνόλων

$$\mathcal{D}_u := \{A \in \mathcal{F}_u : Q(A) = \int_A M_u^{(\gamma)}(\Theta)\, dP\}$$

είναι μία κλάση Dynkin που περιέχει την $\mathcal{G}_u$.

Πράγματι,

(Dyn1) Προφανώς $\varnothing \in \mathcal{D}_u$ καθώς

$$Q(\varnothing) = 0 = \int_\varnothing M_u^{(\gamma)}(\Theta)\, dP$$

(Dyn2) Για κάθε $A \in \mathcal{D}_u$ έχουμε ότι $A^c \in \mathcal{D}_u$.

Πράγματι, αρχικά παρατηρούμε ότι $\Omega \in \mathcal{D}_u$ αφού $\Omega \in \mathcal{F}_u^S \subseteq \mathcal{F}_u$. Επομένως

$$\begin{aligned}
Q(\Omega \setminus A) &= Q(\Omega) - Q(A) = \int_\Omega M_u^{(\gamma)}(\Theta)\, dP - \int_A M_u^{(\gamma)}(\Theta)\, dP \\
&= \int (\chi_\Omega - \chi_A) \cdot M_u^{(\gamma)}(\Theta)\, dP = \int_{\Omega\setminus A} M_u^{(\gamma)}(\Theta)\, dP.
\end{aligned}$$

(Dyn3) Για κάθε ακολουθία $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ξένων ανα δύο στοιχείων της $\mathcal{D}_u$ έχουμε ότι $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{D}_u$.

Πράγματι,

$$\begin{aligned} Q(\biguplus_{n\in\mathbb{N}} A_n) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} Q(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{A_n} M_u^{(\gamma)}(\Theta)\,dP \\ &= \int \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{A_n} \cdot M_u^{(\gamma)}(\Theta)\,dP = \int_{\biguplus_{n\in\mathbb{N}} A_n} M_u^{(\gamma)}(\Theta)\,dP. \end{aligned}$$

Επομένως, από τα (Dyn1), (Dyn2) και (Dyn3) έπεται ότι η $\mathcal{D}_u$ είναι μία κλάση Dynkin. Ο εγκλεισμός $\mathcal{G}_u \subseteq \mathcal{D}_u$ είναι άμεση συνέπεια του (a).

(c) Η οικογενεια $M^{(\gamma)}(\Theta)$ είναι ένα $(P,\mathcal{F})$-martingale και για κάθε $A \in \mathcal{F}_u$ ισχύει η συνθήκη (RRM_ξ).

Πράγματι, καθώς η $\mathcal{D}_u$ είναι μία κλάση Dynkin που περιέχει την οικογένεια $\mathcal{G}_u$, και η $\mathcal{G}_u$ είναι κλειστή ως προς τις πεπερασμένες τομές, από το Θεώρημα A.1 έπεται ότι $\mathcal{D}_u = \mathcal{F}_u$ και

$$Q(A) = \int_A M_u^{(\gamma)}(\Theta)\,dP \quad \text{για κάθε } \; 0 \leqslant u \leqslant t \text{ και } A \in \mathcal{F}_u. \tag{5.6}$$

Επομένως

$$\int_A M_u^{(\gamma)}(\Theta)\,dP = \int_A M_t^{(\gamma)}(\Theta)\,dP \quad \text{για κάθε } \; 0 \leqslant u \leqslant t \text{ and } A \in \mathcal{F}_u;$$

δηλαδή η οικογένεια $M^{(\gamma)}(\Theta)$ είναι ένα $(P,\mathcal{F})$-martingale. Το τελευταίο μαζί με τη σχέση (5.6) αποδεικνύει τη συνθήκη (RRM_ξ).

(d) Η οικογενεια $M^{(\gamma)}(\Theta)$ είναι P-σ.β. θετική και ικανοποιεί τη συνθήκη $\mathbb{E}_P[M_t^{(\gamma)}(\Theta)] = 1$.

Πράγματι, από τη συνθήκη (RRM_ξ) για $A = \Omega$ έχουμε

$$\mathbb{E}_P[M_t^{(\gamma)}(\Theta)] = \int_\Omega M_t^{(\gamma)}(\Theta)\,dP = Q(\Omega) = 1.$$

Επιπλέον, εύκολα μπορούμε να δούμε ότι οι $P(\{W_{n+1} > u - T_n\} \mid \Theta)$ και $Q(\{W_{n+1} > u - T_n\} \mid \Theta)$ είναι $P \restriction \sigma(\Theta)$-σ.β. θετικές. Το τελευταίο μαζί με το γεγονός ότι οι συναρτήσεις ξ, $h^{-1} \circ \gamma$ και r_Θ είναι P_Θ-, P_{X_1}- και $P_{W_1|\Theta}(\bullet \mid \Theta(\omega))$-σ.β. θετικές, αντίστοιχα, αποδεικνύει ότι $P(\{M_t^{(\gamma)}(\Theta) > 0\} = 1$.

Η συνεπαγωγή $(iii) \Longrightarrow (i)$ είναι άμεση. □

Η Πρόταση 5.1.4 μας επιτρέπει να υπολογίσουμε παραγώγους Radon-Nikodým για διάφορες περιπτώσεις που παρουσιάζονται στις εφαρμογές.

Στο παράδειγμα που ακολουθεί θεωρούμε μία P-MPP(Θ). Μία κλασσική επιλογή για την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής Θ στη Θεωρία Κινδύνου είναι εκείνη της κατανομής γάμμα. Σε αυτή την περίπτωση μία μεικτή σ.δ. Poisson καλείται διαδικασία Pólya-Lundberg (βλ. π.χ. [19], σελ. 100 για τον ορισμό και τις βασικές ιδιότητες).

Παράδειγμα 5.1.5. Έστω $D := \Upsilon$, $\rho \in \mathfrak{M}_+(\Upsilon)$ με τύπο $\rho(x) := 1/x$, $h := \ln$, $\Theta : \Omega \longmapsto \Upsilon$ μια πραγματική τ.μ., και έστω $P \in \mathcal{M}_{S,\mathbf{Exp}(\Theta)}$ και $Q \in \mathcal{M}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\Theta))}$ με $P_\Theta = \mathbf{Ga}(b_1, a_1)$ και $Q_\Theta = \mathbf{IGa}(b_2, a_2)$, όπου $a_1, a_2, b_1, b_2 > 0$ πραγματικές σταθερές.

Από την Πρόταση 5.1.4 έπεται ότι υπάρχει ένα ουσιωδώς μοναδικό ζευγάρι $(\gamma, \xi) \in \mathcal{F}_{P,\ln} \times \mathcal{R}_+(\Upsilon)$ με

$$\gamma(x) := \ln f(x) \quad \text{για κάθε} \quad x \in \Upsilon,$$

όπου f είναι μία Radon-Nikodým παράγωγος του Q_{X_1} ως προς το P_{X_1}, και

$$\xi(\theta) := \frac{b_2^{a_2}}{b_1^{a_1}} \cdot \frac{\Gamma(a_1)}{\Gamma(a_2)} \cdot \frac{e^{b_1\theta - b_2/\theta}}{\theta^{a_1+a_2}} \quad \text{για κάθε} \quad \theta \in \Upsilon,$$

ώστε να ισχύει

$$Q(A) = \int_A M_t^{(\gamma)}(\Theta)\, dP \quad \text{για κάθε } 0 \leqslant u \leqslant t \text{ και } A \in \mathcal{F}_u,$$

όπου $M_t^{(\gamma)}(\Theta) := \xi(\Theta) \cdot e^{\sum_{j=1}^{N_t} \gamma(X_j)} \cdot \left(\frac{\rho(\Theta)}{\Theta}\right)^{N_t} \cdot e^{-t(\rho(\Theta)-\Theta)}$.

5.2 Φυσιολογικές Δεσμευμένες Πιθανότητες και Σύνθετες Μεικτές Ανανεωτικές Διαδικασίες

Αφού στον ορισμό των CMRPs εμπλέκεται η έννοια της δέσμευσης είναι φυσικό οι φ.δ. πιθανότητες να παίζουν ένα σημαντικό ρόλο στη δομή τους. Στα πλαίσια αυτά δίνουμε ένα χαρακτηρισμό των CMRPs μέσω φ.δ. πιθανοτήτων.

Πρόταση 5.2.1. *Εάν το μέτρο P ικανοποιεί τις συνθήκες (a1) και (a2) τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) η S είναι μία P-CMRP$(\mathbf{K}(\Theta), P_{X_1})$.

(ii) Υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $M_1 \in \mathfrak{B}(D)$ ώστε η S να είναι μία P_θ-CRP$(\mathbf{K}(\theta), (P_\theta)_{X_1})$ για κάθε $\theta \notin M_1$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η S είναι μία P-CMRP$(\mathbf{K}(\Theta), P_{X_1})$. Το τελευταίο είναι ισοδύναμο με το ότι το ζευγάρι (N, X) είναι μία P-διαδικασία κινδύνου και ότι η N είναι μία P-MRP$(\mathbf{K}(\Theta))$. Αλλά από τα [1], Λήμμα 6.2.1, και [16], Proposition 3.8, ισοδύναμα έχουμε ότι υπάρχουν δύο P_Θ-μηδενικά σύνολα $\widetilde{M}_1, \widetilde{M}_2 \in \mathfrak{B}(D)$ έτσι ώστε το ζευγάρι (N, X) να είναι μία P_θ-διαδικασία κινδύνου για κάθε $\theta \notin \widetilde{M}_1$ και η σ.δ. N να είναι μία P_θ-RP$(\mathbf{K}(\theta))$ για κάθε $\theta \notin \widetilde{M}_2$. Θέτοντας $M_1 := \widetilde{M}_1 \cup \widetilde{M}_2$ προκύπτει ότι η S είναι μία P_θ-CRP$(\mathbf{K}(\theta), (P_\theta)_{X_1})$ για κάθε $\theta \notin M_1$. □

Παρατήρησεις 5.2.2. **(a)** Έστω ότι υπάρχει μία φ.δ.π. $\{P_\theta\}_{\theta\in D}$ του P επάνω στο P_Θ συνεπής με τη Θ. Εάν η Σ είναι αριθμήσιμα παραγόμενη υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $M_P \in \mathfrak{B}(D)$ ώστε

$$P_\theta(A) = P(A|\{\Theta = \theta\}) \quad \text{for all } A \in \Sigma \text{ για κάθε } \theta \notin M_P \tag{5.7}$$

Πράγματι, για κάθε $A \in \Sigma$ και $B \in \mathfrak{B}(D)$ εφαρμόζοντας το [14], Lemma 3.5 (ii), έχουμε ότι

$$\int_B P_\theta(A)\, P_\Theta(d\theta) = \int_{\Theta^{-1}(B)} P(A \mid \Theta)\, dP = \int_B P(A \mid \{\Theta = \theta\})\, P_\Theta(d\theta).$$

Επομένως υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $M_A \in \mathfrak{B}(D)$ έτσι ώστε η συνθήκη (5.7) να ισχύει για κάθε $\theta \notin M_A$. Αλλά αφού η Σ είναι αριθμήσιμα παραγόμενη, χρησιμοποιώντας ένα επιχείρημα μονότονης κλάσης μπορούμε να βρούμε ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $M_P := \bigcup\{M_A : A \in \mathcal{G}_\Sigma\} \in \mathfrak{B}(D)$, όπου $\mathcal{G}_\Sigma$ είναι ένας αριθμήσιμος γεννήτορας της Σ, έτσι ώστε η συνθήκη (5.7) να ισχύει για κάθε $\theta \notin M_P$.

(b) Στην Πρόταση 5.1.4 και κάτω από την επιπλέον υπόθεση της ύπαρξης δύο φ.δ. πιθανότητες $\{P_\theta\}_{\theta\in D}$ και $\{Q_\theta\}_{\theta\in D}$ του P επάνω στο P_Θ και του Q επάνω στο Q_Θ, αντίστοιχα, συνεπείς με το Θ, ο ακόλουθος ισχυρισμός μπορεί να προστεθεί στην Πρόταση 5.1.4.

(iv) Υπάρχει μία P_{X_1}-σ.β. μοναδική συνάρτηση $\gamma \in \mathcal{F}_{P,h}$ και ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $\check{L} \in \mathfrak{B}(D)$ έτσι ώστε για κάθε $\theta \notin \check{L}$ να ισχύει η συνθήκη

$$Q_\theta(A) = \int_A \widetilde{M}_t^{(\gamma)}(\theta)\, dP_\theta \quad \textit{για κάθε } 0 \leqslant u \leqslant t \textit{ και } A \in \mathcal{F}_u \tag{RRM_θ}$$

όπου η οικογένεια $\{\widetilde{M}_t^{(\gamma)}(\theta)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ένα $(P_\theta, \mathcal{F})$-martingale για κάθε $\theta \notin \check{L}$ με την ιδιότητα $\mathbb{E}_{P_\theta}[\widetilde{M}_t^{(\gamma)}(\theta)] = 1$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και κάθε $\theta \notin \check{L}$.

Πράγματι, είναι αρκετό να αποδείξουμε ότι $(i) \iff (iv)$. Υποθέτουμε αρχικά ότι ισχύει ο ισχυρισμός (i). Από την Πρόταση 5.1.4 (ii) έπεται ότι $Q_{X_1} \sim P_{X_1}$, $Q_\Theta \sim P_\Theta$ και $Q_{W_1} \sim P_{W_1}$. Εφαρμόζοντας την Πρόταση 5.2.1 και λαμβάνοντας υπόψιν ότι $Q_\Theta \sim P_\Theta$ προκύπτει ότι υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $\check{L}_1 \in \mathfrak{B}(D)$ έτσι ώστε η S να είναι μία P_θ-CRP$(\mathbf{K}(\theta), (P_\theta)_{X_1})$ και μία Q_θ-CRP$(\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta)), (Q_\theta)_{X_1})$, αντίστοιχα, για κάθε $\theta \notin \check{L}_1$.

Υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $\check{L}_2 \in \mathfrak{B}(D)$ έτσι ώστε $(P_\theta)_{X_1} = P_{X_1}$ και $(Q_\theta)_{X_1} = Q_{X_1}$ για κάθε $\theta \notin \check{L}_2$.

Πράγματι για κάθε $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ και $E \in \mathfrak{B}(D)$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\int_E P_\theta(X_1^{-1}(B))\, P_\Theta(d\theta) &= \int_{\Theta^{-1}(E)} P(X_1^{-1}(B) \mid \Theta)\, dP \\
&= \int_{\Theta^{-1}(E)} P(X_1^{-1}(B))\, dP \\
&= \int_E P(X_1^{-1}(B))\, P_\Theta(d\theta),
\end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα έπεται από το [14], Lemma 3.5 (ii), ενώ η δεύτερη προκύπτει από τη συνθήκη (a2). Άρα υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $M_B \in \mathfrak{B}(D)$ ώστε $P_{X_1}(B) = (P_\theta)_{X_1}(B)$ για κάθε $\theta \notin M_B$. Αλλά καθώς η $\mathfrak{B}(\Upsilon)$ είναι αριθμήσιμα παραγόμενη χρησιμοποιώντας ένα επιχείρημα μονότονης κλάσης έπεται ότι υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $\widetilde{M}_P \in \mathfrak{B}(D)$ έτσι ώστε $P_{X_1} = (P_\theta)_{X_1}$ για κάθε $\theta \notin \widetilde{M}_P$.

Χρησιμοποιώντας παρόμοια επιχειρήματα μπορεί να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένα Q_Θ-μηδενικό σύνολο $\widetilde{M}_Q \in \mathfrak{B}(D)$ ώστε να ισχύει η ισότητα $Q_{X_1} = (Q_\theta)_{X_1}$ για κάθε $\theta \notin \widetilde{M}_Q$. Αλλά αφού $Q_\Theta \sim P_\Theta$ έχουμε ότι $P_{X_1} = (P_\theta)_{X_1}$ και $Q_{X_1} = (Q_\theta)_{X_1}$ για κάθε $\theta \notin \check{L}_2 := \widetilde{M}_P \cup \widetilde{M}_Q$. Τέλος, αφού $Q_{X_1} \sim P_{X_1}$ έπεται άμεσα ότι $(Q_\theta)_{X_1} \sim (P_\theta)_{X_1}$ για κάθε $\theta \notin \check{L}_2$.

Επιπλέον αφού $Q_{W_1} \sim P_{W_1}$ και $Q_\Theta \sim P_\Theta$ έχουμε ότι υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $\check{L}_3 \in \mathfrak{B}(D)$ ώστε $(Q_\theta)_{W_1} \sim (P_\theta)_{W_1}$ για κάθε $\theta \notin \check{L}_3$. Θέτουμε $\check{L} := \check{L}_1 \cup \check{L}_2 \cup \check{L}_3$. Εφαρμόζοντας τώρα την Πρόταση 4.1.5 έπεται ότι υπάρχει μία P_{X_1}-σ.β. μοναδική συνάρτηση $\gamma \in \mathcal{F}_{P,h}$ ώστε

$$Q_\theta(A) = \int_A \widetilde{M}_t^{(\gamma)}(\theta)\, dP_\theta \quad \text{για κάθε } 0 \leqslant u \leqslant t \text{ και } A \in \mathcal{F}_u^S$$

για κάθε $\theta \notin \check{L}$. Χρησιμοποιώντας ένα ακόμα επιχείρημα μονότονης κλάσης, παρόμοιο με εκείνο που χρησιμοποιήθηκε στην απόδειξη της Πρότασης 5.1.4, ο ισχυρισμός (iv) έπεται.

Αντιστρόφως, αν υποθέσουμε ότι ισχύει ο ισχυρισμός (iv) έχουμε ότι $Q_\theta \upharpoonright F_t \sim P_\theta \upharpoonright \mathcal{F}_t$ για κάθε $\theta \notin \check{L}$ και $t \in \mathbb{R}_+$. Αλλά αφού οι $\{P_\theta\}_{\theta \in D}$ και $\{Q_\theta\}_{\theta \in D}$ είναι φ.δ. πιθανότητες του P επάνω στο P_Θ και του Q επάνω στο Q_Θ, αντίστοιχα, συνεπείς με το Θ, ο ισχυριμός (i) έπεται.

Γνωρίζουμε από την Πρόταση 5.1.4 ότι κάτω από τις ασθενείς συνθήκες $Q_{X_1} \sim P_{X_1}$, $Q_\Theta \sim P_\Theta$ και $Q_{W_1} \sim P_{W_1}$ τα μέτρα πιθανότητας P και Q είναι ισοδύναμα σε κάθε σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_t$. Στο αποτέλεσμα που ακολουθεί θα δείξουμε ότι κάτι τέτοιο δεν ισχύει γενικά για την $\mathcal{F}_\infty := \sigma(\mathcal{F}_\infty^S \cup \sigma(\Theta))$.

Πρόταση 5.2.3. *Έστω $Q \in \mathcal{M}_{S,\mathbf{\Lambda}(\rho(\Theta))}$ και έστω $\{P_\theta\}_{\theta \in D}$ και $\{Q_\theta\}_{\theta \in D}$ δύο φ.δ. πιθανότητες του P επάνω στο P_Θ και του Q επάνω στο Q_Θ, αντίστοιχα, συνεπείς με το Θ. Εάν $P_\theta \neq Q_\theta$ για P_Θ-σ.ο. τα $\theta \in D$ τότε τα μέτρα P και Q είναι κάθετα επάνω στην $\mathcal{F}_\infty$.*

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε ένα αυθαίρετο $t \geqslant 0$. Αφού $Q \in \mathcal{M}_{S,\mathbf{\Lambda}(\rho(\Theta))}$ από τη Παρατήρηση 5.2.2 (b) έπεται ότι υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $\check{L} \in \mathfrak{B}(D)$ έτσι ώστε $Q_\theta \upharpoonright F_t \sim P_\theta \upharpoonright \mathcal{F}_t$ για κάθε $\theta \notin \check{L}$ και $t \in \mathbb{R}_+$. Υποθέτουμε τώρα ότι $P_\theta \neq Q_\theta$ για κάθε $\theta \notin \check{L}$. Από το τελευταίο, μαζί με την Πρόταση 5.2.1 και την Πρόταση 4.2.4, έπεται ότι $P_\theta \upharpoonright \mathcal{F}_\infty^S \perp Q_\theta \upharpoonright \mathcal{F}_\infty^S$ για κάθε $\theta \notin \check{L}$. Αλλά καθώς $\mathcal{F}_\infty^S \subseteq \mathcal{F}_\infty$ έχουμε ότι $P_\theta \upharpoonright \mathcal{F}_\infty \perp Q_\theta \upharpoonright \mathcal{F}_\infty$ για κάθε $\theta \notin \check{L}$, δηλαδή υπάρχει ένα σύνολο $A \in \mathcal{F}_\infty$ έτσι ώστε $P_\theta(A) = Q_\theta(\Omega \setminus A) = 1$. Συνεπώς

$$P(A \cap \Theta^{-1}(D)) = \int_D P_\theta(A)\, P_\Theta(d\theta) = 1 \quad \text{και} \quad Q(A \cap \Theta^{-1}(D)) = \int_D Q_\theta(A)\, Q_\Theta(d\theta) = 0,$$

δηλαδή μέτρα P και Q είναι κάθετα επάνω στην $\mathcal{F}_\infty$. □

5.3 Μία Λύση του Κεντρικού Προβλήματος

Πριν διατυπώσουμε το αντίστροφο της Πρότασης 5.1.4 χρειάζεται να αποδείξουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα που αφορά τη κατασκευή σύνθετων μεικτών ανανεωτικών διαδικασιών.

Για ό,τι ακολουθεί θέτουμε $\widetilde{\Omega} := \Upsilon^{\mathbb{N}} \times \Upsilon^{\mathbb{N}}$, $\widetilde{\Sigma} := \mathfrak{B}(\widetilde{\Omega}) = \mathfrak{B}(\Upsilon)_{\mathbb{N}} \otimes \mathfrak{B}(\Upsilon)_{\mathbb{N}}$, $\Omega := \widetilde{\Omega} \times D$ *και* $\Sigma := \widetilde{\Sigma} \otimes \mathfrak{B}(D)$ *για λόγους απλότητας.*

Λήμμα 5.3.1. *Έστω μ ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στην $\mathfrak{B}(D)$, και για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε σταθερό $\theta \in D$ έστω $Q_n(\theta) := \mathbf{K}(\theta)$ και $R_n := R$ μέτρα πιθανότητας επάνω στην $\mathfrak{B}(\Upsilon)$, τα οποία είναι απόλυτα συνεχή ως προς το μέτρο του Lebesgue $\lambda \upharpoonright \mathfrak{B}(\Upsilon)$, όπου για κάθε σταθερό $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ η συνάρτηση $\theta \longmapsto \mathbf{K}(\theta)(B)$ είναι $\mathfrak{B}(D)$-μετρήσιμη. Τότε υπάρχουν:*

(i) μία οικογένεια $\{P_\theta\}_{\theta \in D}$ μέτρων πιθανότητας $P_\theta := \mathbf{K}(\theta)_{\mathbb{N}} \otimes R_{\mathbb{N}} \otimes \delta_\theta$ επάνω στη Σ, όπου δ_θ είναι το μέτρο Dirac επάνω στην $\mathfrak{B}(D)$ στο σημείο θ, και ένα μέτρο πιθανότητας P επάνω στη Σ έτσι ώστε η $\{P_\theta\}_{\theta \in D}$ να είναι μία φ.δ.π. του P επάνω στο μ συνεπής με την $\Theta := \pi_D$, όπου π_D είναι η κανονική προβολή από τον Ω στο D, και $P_\Theta = \mu$;

(ii) μία απαριθμήτρια σ.δ. N η οποία είναι μία P-MRP($\mathbf{K}(\Theta)$), οι ενδιάμεσοι χρόνοι W της οποίας ικανοποιούν τη συνθήκη $(P_\theta)_{W_n} = Q_n(\theta)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$;

(iii) μία σ.δ. μεγέθους απαιτήσεων X η οποία είναι P-ανεξάρτητη της Θ, ικανοποιεί τη συνθήκη $P_{X_n} = R$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και τέτοια ώστε το ζευγάρι (N, X) να είναι μία P-διαδικασία κινδύνου που επάγει μία σ.δ. μεγέθους συνολικών απαιτήσεων S η οποία είναι μία P-CMRP με παραμέτρους $\mathbf{K}(\Theta)$ και P_{X_1}.

Επιπλέον το μέτρο P ικανοποιεί τη συνθήκη (a1).

Απόδειξη. (i): Για κάθε σταθερό $\theta \in D$, θεωρούμε τον χ.π. γινόμενο $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\Sigma}, \widetilde{P}_\theta)$ που κατασκευάστηκε στο Λήμμα 4.2.5 με $\widetilde{P}_\theta := (\otimes_{n \in \mathbb{N}} Q_n(\theta)) \otimes R_{\mathbb{N}}$. Αφού από την υπόθεσή μας για κάθε σταθερό $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ κάθε συνάρτηση $\theta \longmapsto Q_n(\theta)(B)$ είναι $\mathfrak{B}(D)$-μετρήσιμη, χρησιμοποιώντας ένα επιχείρημα μονότονης κλάσης έπεται ότι το ίδιο ισχύει και για τη συνάρτηση $\theta \longmapsto \widetilde{P}_\theta(F)$ για κάθε σταθερό $F \in \widetilde{\Sigma}$. Ορίζουμε τη συνολοσυνάρτηση $\widetilde{P} : \widetilde{\Sigma} \longmapsto \mathbb{R}$ με τύπο

$$\widetilde{P}(F) := \int \widetilde{P}_\theta(F)\, \mu(d\theta) \quad \text{για κάθε} \quad F \in \widetilde{\Sigma}.$$

Τότε η $\widetilde{P}$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στην $\widetilde{\Sigma}$ και η $\{\widetilde{P}_\theta\}_{\theta \in D}$ είναι μία φ.δ.π. του $\widetilde{P}$ επάνω στο μ. Θέτουμε $P(E) := \int \widetilde{P}_\theta(E^\theta)\, \mu(d\theta)$ για κάθε $E \in \Sigma$, όπου $E^\theta := \left\{\widetilde{\omega} \in \widetilde{\Omega} : (\widetilde{\omega}, \theta) \in E\right\}$.

Εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι το P είναι ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στην Σ έτσι ώστε η $\{\widetilde{P}_\theta\}_{\theta\in D}$ να είναι μία φ.δ.π.-γινόμενο επάνω στην $\widetilde{\Sigma}$ για το P ως προς το μ (βλ. [25], Definition 1.1, για τον ορισμό της και τις ιδιότητές της). Για κάθε $\theta \in D$ θέτουμε $P_\theta := \widetilde{P}_\theta \otimes \delta_\theta$. Προφανώς για κάθε $\theta \in D$ η P_θ είναι ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στην Σ. Επομένως, μπορούμε να εφαρμόσουμε το [14], Lemma 2.4, για να πάρουμε ότι η $\{P_\theta\}_{\theta\in D}$ είναι μία φ.δ.π. του P επάνω στο μ συνεπής με την π_D. Θέτοντας $\Theta := \pi_D$ έχουμε ότι $P_\Theta = \mu$, ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη του (i).

(ii) Καθώς ο $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\Sigma}, \widetilde{P}_\theta)$ είναι ένας χ.π. γινόμενο, η ακολουθία $\{\widetilde{W}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ των τυχαίων μεταβλητών στον $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\Sigma})$ που ορίζεται από τη σχέση

$$\widetilde{W}_n(\widetilde{\omega}) := p_n \circ p_{\widetilde{\Omega}\Upsilon^{\mathbb{N}}} \quad \text{για κάθε} \quad \widetilde{\omega} \in \widetilde{\Omega} \quad \text{και} \quad n \in \mathbb{N},$$

όπου p_n είναι η κανονική προβολή από τον $\Upsilon^{\mathbb{N}}$ στον Υ και $p_{\widetilde{\Omega}\Upsilon^{\mathbb{N}}}$ είναι η κανονική προβολή από τον $\widetilde{\Omega}$ στον $\Upsilon^{\mathbb{N}}$, είναι $\widetilde{P}_\theta$-ανεξάρτητη και ικανοποιεί τη συνθήκη $(\widetilde{P}_\theta)_{\widetilde{W}_n} = \mathbf{K}(\theta)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $W_n := \widetilde{W}_n \circ p_{\Omega\widetilde{\Omega}}$ και $W := \{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, όπου $p_{\Omega\widetilde{\Omega}}$ είναι η κανονική προβολή από τον Ω στον $\widetilde{\Omega}$.

Ισχυρισμός 1. Για κάθε $\theta \in D$ η οικογένεια W είναι P_θ-i.i.d. με $(P_\theta)_{W_n} = \mathbf{K}(\theta)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε ένα αυθαίρετο $\theta \in D$. Για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ και $B, E \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ έπεται ότι

$$\begin{aligned}
P_\theta(W_n^{-1}(B) \cap W_m^{-1}(E)) &= P_\theta((\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B \times \Upsilon^{\mathbb{N}} \times D) \cap (\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{m\}} \times E \times \Upsilon^{\mathbb{N}} \times D)) \\
&= (\widetilde{P}_\theta \otimes \delta_\theta)([(\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B \times \Upsilon^{\mathbb{N}}) \cap (\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{m\}} \times E \times \Upsilon^{\mathbb{N}})] \times D) \\
&= \widetilde{P}_\theta((\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B \times \Upsilon^{\mathbb{N}}) \cap (\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{m\}} \times E \times \Upsilon^{\mathbb{N}})) \cdot \delta_\theta(D) \\
&= \widetilde{P}_\theta\left(\left((\widetilde{W}_n)^{-1}(B) \cap (\widetilde{W}_m)^{-1}(E)\right) \times \Upsilon^{\mathbb{N}}\right) \\
&= \widetilde{P}_\theta((\widetilde{W}_n)^{-1}(B)) \cdot \widetilde{P}_\theta((\widetilde{W}_m)^{-1}(E)) \\
&= P_\theta(W_n^{-1}(B)) \cdot P_\theta(W_m^{-1}(E)),
\end{aligned}$$

όπου η πέμπτη ισότητα έπεται από το γεγονός ότι η $\widetilde{W}$ είναι $\widetilde{P}_\theta$-ανεξάρτητη (βλ. επίσης την απόδειξη του Ισχυρισμού 1 στο Λήμμα 4.2.5). Επομένως η W είναι P_θ-ανεξάρτητη. Επιπλέον έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
(P_\theta)_{W_n}(B) &= P_\theta(W_n^{-1}(B)) = P_\theta(\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B \times \Upsilon^{\mathbb{N}} \times D) \\
&= (\widetilde{P}_\theta \otimes \delta_\theta)(\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B \times \Upsilon^{\mathbb{N}} \times D) \\
&= \widetilde{P}_\theta(\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B \times \Upsilon^{\mathbb{N}}) \\
&= (\widetilde{P}_\theta)_{\widetilde{W}_n}(B) = \mathbf{K}(\theta)(B),
\end{aligned}$$

δηλαδή $(P_\theta)_{W_n} = \mathbf{K}(\theta)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ολοκληρώνοντας με αυτόν τον τρόπο την απόδειξη του ισχυρισμού. $\square$

Αφού η W είναι P_θ-ανεξάρτητη για κάθε $\theta \in D$ από [14], Lemma 4.1, έπεται ότι η W θα είναι και P-υπό συνθήκη ανεξάρτητη. Επιπλέον αφού για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\theta \in D$ ισχύει η συνθήκη $(P_\theta)_{W_n} = \mathbf{K}(\theta)$ από το Λήμμα 2.2.9 (ii) έπεται ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θα ισχύει η ισότητα $P_{W_n|\Theta} = \mathbf{K}(\Theta)\ P \restriction \sigma(\Theta)$-σ.β.. Θέτουμε $T_n := \sum_{k=1}^{n} W_k$ για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ και $T := \{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, και έστω $N := \{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ η απαριθμήτρια σ.δ. που επάγεται από την T μέσω της σχέσης $N_t := \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{T_n \leqslant t\}}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$. Επομένως η απαριθμήτρια σ.δ. N είναι μία P-MRP$(\mathbf{K}(\Theta))$, ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη του (ii).

(iii) Χρησιμοποιώντας παρόμοια επιχειρήματα με εκείνα του (ii), έπεται η ακολουθία $\{\widetilde{X}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ τυχαίων μεταβλητών επάνω στον $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\Sigma})$ ώστε

$$\widetilde{X}_n(\widetilde{\omega}) := q_n \circ q_{\widetilde{\Omega}\Upsilon^N} \quad \text{για κάθε} \quad \widetilde{\omega} \in \widetilde{\Omega} \quad \text{και} \quad n \in \mathbb{N},$$

όπου q_n είναι η κανονική προβολή από τον $\Upsilon^{\mathbb{N}}$ στον Υ και $q_{\widetilde{\Omega}\Upsilon^{\mathbb{N}}}$ είναι η κανονική προβολή από τον $\widetilde{\Omega}$ στον $\Upsilon^{\mathbb{N}}$, είναι $\widetilde{P}_\theta$-ανεξάρτητη και ικανοποιεί τη συνθήκη $(R_{\mathbb{N}})_{\widetilde{X}_n} = R$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $X_n := \widetilde{X}_n \circ q_{\Omega\widetilde{\Omega}}$ και $X := \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, όπου $q_{\Omega\widetilde{\Omega}}$ είναι η κανονική προβολή από τον Ω στον $\widetilde{\Omega}$.

Ισχυρισμός 2. Το ζευγάρι (N, X) είναι μία P-διαδικασία κινδύνου.

Απόδειξη. Αφού η N είναι μία απαριθμήτρια σ.δ. από το (ii) αρκεί να αποδείξουμε ότι η X είναι P-i.i.d. και ότι οι στοχαστικές διαδικασίες N και X είναι P-ανεξάρτητες.

(a) Η ακολουθία X είναι P-ανεξάρτητη και ικανοποιεί τη συνθήκη $P_{X_n}(B) = R(B)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Πράγματι, για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ και $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ έπεται ότι

$$\begin{aligned}
P(X_n^{-1}(B_1) \cap X_m^{-1}(B_2)) &= P((\Upsilon^{\mathbb{N}} \times \Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B_1 \times D) \cap (\Upsilon^{\mathbb{N}} \times \Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{m\}} \times B_2 \times D)) \\
&= P([\Upsilon^{\mathbb{N}} \times ((\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B_1) \cap (\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{m\}} \times B_2))] \times D) \\
&= \int \widetilde{P}_\theta(([\Upsilon^{\mathbb{N}} \times ((\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B_1) \cap (\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{m\}} \times B_2))] \times D)^\theta)\, P_\Theta(d\theta) \\
&= \int_D R_{\mathbb{N}}((\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B_1) \cap (\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{m\}} \times B_2))\, P_\Theta(d\theta) \\
&= R_{\mathbb{N}}((\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B_1) \cap (\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{m\}} \times B_2)) \\
&= P(X_n^{-1}(B_1)) \cdot P(X_m^{-1}(B_2)),
\end{aligned}$$

όπου η έκτη ισότητα έπεται από το γεγονός ότι η ακολουθία $\widetilde{X}$ είναι $R_{\mathbb{N}}$-ανεξάρτητη. Επιπλέον, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ έπεται ότι

$$\begin{aligned} P_{X_n}(B) &= P(X_n^{-1}(B)) = P(\Upsilon^{\mathbb{N}} \times \Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B \times D) \\ &= \int \widetilde{P}_\theta((\Upsilon^{\mathbb{N}} \times \Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B \times D)^\theta)\, P_\Theta(d\theta) \\ &= \int_D \widetilde{P}_\theta(\Upsilon^{\mathbb{N}} \times \Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B)\, P_\Theta(d\theta) \\ &= \int_D R_n(B)\, P_\Theta(d\theta) = R_n(B) \cdot \int_D P_\Theta(d\theta). \end{aligned}$$

Άρα $P_{X_n}(B) = R_n(B) = R(B)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη του (a).

(b) Οι σ.δ. N και X είναι P-ανεξάρτητες.

Αρχικά παρατηρούμε πως αρκεί να αποδείξουμε ότι οι σ.δ. W και X είναι P-ανεξάρτητες. Για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ και $B, \widetilde{B} \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} P(X_n^{-1}(B) \cap W_m^{-1}(\widetilde{B})) &= P((\Upsilon^{\mathbb{N}} \times \Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B \times D) \cap (\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{m\}} \times \widetilde{B} \times \Upsilon^{\mathbb{N}} \times D)) \\ &= P([(\Upsilon^{\mathbb{N}} \times \Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B) \cap (\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{m\}} \times \widetilde{B} \times \Upsilon^{\mathbb{N}})] \times D) \\ &= \int \widetilde{P}_\theta(([(\Upsilon^{\mathbb{N}} \times \Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B) \cap (\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{m\}} \times \widetilde{B} \times \Upsilon^{\mathbb{N}})] \times D)^\theta)\, P_\Theta(d\theta) \\ &= \int_D \widetilde{P}_\theta((\Upsilon^{\mathbb{N}} \times \Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B) \cap (\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{m\}} \times \widetilde{B} \times \Upsilon^{\mathbb{N}}))\, P_\Theta(d\theta) \\ &= \int_D \widetilde{P}_\theta(\Upsilon^{\mathbb{N}} \times \Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B) \cdot \widetilde{P}_\theta(\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{m\}} \times \widetilde{B} \times \Upsilon^{\mathbb{N}})\, P_\Theta(d\theta) \\ &= R_n(B) \cdot \int_D \mathbf{K}(\theta)(\widetilde{B})\, P_\Theta(d\theta) \\ &= P(X_n^{-1}(B)) \cdot P(W_m^{-1}(\widetilde{B})), \end{aligned}$$

όπου η πέμπτη ισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι οι $\widetilde{W}$ και $\widetilde{X}$ είναι $\widetilde{P}_\theta$-ανεξάρτητες για κάθε $\theta \in D$, ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη του (b).

Λαμβάνοντας υπόψιν τα (a) και (b) έχουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα. □

Ισχυρισμός 3. Η σ.δ. X και το τ.δ. Θ είναι P-ανεξάρτητα.

Απόδειξη. Πράγματι, για κάθε $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$, $\widetilde{B} \in \mathfrak{B}(D)$ και $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} P(X_n^{-1}(B) \cap \Theta^{-1}(\widetilde{B})) &= P((\Upsilon^{\mathbb{N}} \times \Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B \times \mathbb{R}^d) \cap (\Upsilon^{\mathbb{N}} \times \Upsilon^{\mathbb{N}} \times \widetilde{B})) \\ &= P(\Upsilon^{\mathbb{N}} \times \Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B \times \widetilde{B}) \\ &= \int \widetilde{P}_\theta((\Upsilon^{\mathbb{N}} \times \Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B \times \widetilde{B})^\theta)\, P_\Theta(d\theta) \\ &= \int_{\widetilde{B}} \widetilde{P}_\theta(\Upsilon^{\mathbb{N}} \times \Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B)\, P_\Theta(d\theta) \\ &= R_n(B) \cdot \int_E P_\Theta(d\theta) = P(X_n^{-1}(B)) \cdot P(\Theta^{-1}(\widetilde{B})). \end{aligned}$$

Άρα η X και το Θ είναι P-ανεξάρτητα, αποδεικνύοντας έτσι το ζητούμενο. □

Θέτοντας $S_t := \sum_{n=0}^{N_t} X_n$ για κάθε $t \geqslant 0$ και $S := \{S_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ προκύπτει άμεσα ότι η S είναι μία P-CMRP με παραμέτρους $\mathbf{K}(\Theta)$ και P_{X_1} που επάγεται από την P-διαδικασία κινδύνου (N, X).

Επιπλέον, το μέτρο P που κατασκευάστηκε στο (i) ικανοποιεί την συνθήκη (a1). Για να αποδείξουμε το τελευταίο χρειαζόμαστε τον ακόλουθο ισχυρισμό

Ισχυρισμός 4. Οι στοχαστικές διαδικασίες W και X είναι P-υπό συνθήκη ανεξάρτητες αν και μόνο αν υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $\widetilde{M}_P \in \mathfrak{B}(D)$ έτσι ώστε οι W και X να είναι P_θ-ανεξάρτητες για κάθε $\theta \notin \widetilde{M}_P$.

Απόδειξη. Πράγματι, ας υποθέτουμε ότι οι W και X είναι P-υπό συνθήκη ανεξάρτητες. Τότε για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ και $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ έχουμε ότι

$$P(W_n^{-1}(B_1) \cap X_m^{-1}(B_2) \mid \Theta) = P(W_n^{-1}(B_1) \mid \Theta) \cdot P(X_m^{-1}(B_2) \mid \Theta)$$

ή ισοδύναμα για κάθε $F \in \mathfrak{B}(D)$

$$\int_{\Theta^{-1}(F)} P(W_n^{-1}(B_1) \cap X_m^{-1}(B_2) \mid \Theta)\, dP = \int_{\Theta^{-1}(F)} P(W_n^{-1}(B_1) \mid \Theta) \cdot P(X_m^{-1}(B_2) \mid \Theta)\, dP.$$

Εφαρμόζοντας τώρα το [14], Lemma 3.5 (ii), ισοδύναμα έχουμε ότι

$$\int_{\Theta^{-1}(F)} P_\bullet(W_n^{-1}(B_1) \cap X_m^{-1}(B_2)) \circ \Theta\, dP = \int_{\Theta^{-1}(F)} [P_\bullet(W_n^{-1}(B_1)) \circ \Theta] \cdot [P_\bullet(X_m^{-1}(B_2)) \circ \Theta]\, dP$$

ή ισοδύναμα

$$\int_{\Theta^{-1}(F)} P_\theta(W_n^{-1}(B_1) \cap X_m^{-1}(B_2))\, P_\Theta(d\theta) = \int_{\Theta^{-1}(F)} P_\theta(W_n^{-1}(B_1)) \cdot P_\theta(X_m^{-1}(B_2))\, P_\Theta(d\theta).$$

Το τελευταίο είναι ισοδύναμο με την ύπαρξη ενός P_Θ-μηδενικού συνόλου $M_{B_1,B_2} \in \mathfrak{B}(D)$ έτσι ώστε

$$P_\theta(W_n^{-1}(B_1) \cap X_m^{-1}(B_2)) = P_\theta(W_n^{-1}(B_1)) \cdot P_\theta(X_m^{-1}(B_2)) \quad \text{για κάθε} \quad \theta \notin M_{B_1,B_2}.$$

Καθώς όμως η $\mathfrak{B}(\Upsilon)$ είναι αριθμήσιμα παραγόμενη χρησιμοποιώντας ένα επιχείρημα μονότονης κλάσης μπορούμε να βρούμε ένα καθολικό P_Θ-μηδενικό σύνολο $\widetilde{M}_P \in \mathfrak{B}(D)$ έτσι ώστε οι W και X να είναι P_θ-ανεξάρτητες για κάθε $\theta \notin \widetilde{M}_P$. □

Επομένως για να δείξουμε ότι το μέτρο P ικανοποιεί τη συνθήκη (a1) αρκεί να αποδείξουμε ότι οι W και X είναι P_θ-ανεξάρτητες.

Πράγματι για κάθε σταθερό $\theta \in D$, για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ και $\widetilde{B}_1, \widetilde{B}_2 \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
P_\theta(W_n^{-1}(\widetilde{B}_1) \cap X_m^{-1}(\widetilde{B}_2)) &= P_\theta((\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times \widetilde{B}_1 \times \Upsilon^{\mathbb{N}} \times D) \cap (\Upsilon^{\mathbb{N}} \times \Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{m\}} \times \widetilde{B}_2 \times D)) \\
&= P_\theta([(\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times \widetilde{B}_1 \times \Upsilon^{\mathbb{N}}) \cap (\Upsilon^{\mathbb{N}} \times \Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{m\}} \times \widetilde{B}_2)] \times D) \\
&= (\widetilde{P}_\theta \otimes \delta_\theta)([(\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times \widetilde{B}_1 \times \Upsilon^{\mathbb{N}}) \cap (\Upsilon^{\mathbb{N}} \times \Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{m\}} \times \widetilde{B}_2)] \times D) \\
&= \widetilde{P}_\theta((\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times \widetilde{B}_1 \times \Upsilon^{\mathbb{N}}) \cap (\Upsilon^{\mathbb{N}} \times \Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{m\}} \times \widetilde{B}_2)) \cdot \delta_\theta(D) \\
&= \widetilde{P}_\theta(\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times \widetilde{B}_1 \times \Upsilon^{\mathbb{N}}) \cdot \widetilde{P}_\theta(\Upsilon^{\mathbb{N}} \times \Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{m\}} \times \widetilde{B}_2) \\
&= [\widetilde{P}_\theta(\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times \widetilde{B}_1 \times \Upsilon^{\mathbb{N}}) \cdot \delta_\theta(D)] \cdot [\widetilde{P}_\theta(\Upsilon^{\mathbb{N}} \times \Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{m\}} \times \widetilde{B}_2) \cdot \delta_\theta(D)] \\
&= P_\theta(W_n^{-1}(\widetilde{B}_1)) \cdot P_\theta(X_m^{-1}(\widetilde{B}_2)),
\end{aligned}$$

όπου η πέμπτη ισότητα ισχύει αφού οι ακολουθίες $\widetilde{W}$ και $\widetilde{X}$ είναι $\widetilde{P}_\theta$-ανεξάρτητες για κάθε $\theta \in D$. Επομένως οι σ.δ. W και X είναι P_θ-ανεξάρτητες για κάθε $\theta \in D$, και άρα σύμφωνα με τον Ισχυρισμό 4 θα είναι και P-υπό συνθήκη ανεξάρτητες, ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη του λήμματος. □

Παρατήρησεις 5.3.2. **(a)** Προφανώς αν στην παραπάνω κατασκευή πάρουμε $\mu(B) := \delta_{\theta_0}(B)$ για κάθε $B \in \mathfrak{B}(D)$ και για κάποιο $\theta_0 \in D$ έχουμε σαν ειδική περίπτωση το Λήμμα 4.2.5. Σε αυτήν τη περίπτωση ο χ.π. (Ω, Σ, P) που κατασκευάσαμε μετατρέπεται στον χ.π. γινόμενο $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\Sigma}, \widetilde{P}_{\theta_0})$, και η απαριθμήτρια σ.δ. N γίνεται μία P-RP$(\mathbf{K}(\theta_0))$. Επομένως η αντίστοιχη σ.δ. μεγέθους συνολικών απαιτήσεων είναι μία P-CRP με παραμέτρους $\mathbf{K}(\theta_0)$ και P_{X_1}.

(b) Το μέτρο πιθανότητας που κατασκευάστηκε στο Λήμμα 5.3.1 είναι ένα στοιχείο της κλάσης $\mathcal{M}_{S,\mathbf{K}(\Theta)}$. Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι η κατανομή πιθανότητας R ικανοποιεί την ιδιότητα $\int_\Upsilon x^\ell \, R(dx) < \infty$ για $\ell = 1, 2$ τότε για το μέτρο P θα ισχύει ότι $\mathbb{E}_P[X_1^\ell] < \infty$ για $\ell = 1, 2$.

(c) Από το Λήμμα 5.3.1 και την Παρατήρηση 4.2.6 (a) έπεται ότι $\Sigma = \mathcal{F}_\infty^{(W,X,\Theta)} = \mathcal{F}_\infty$.

Συμβολισμοί 5.3.3. Για δοσμένο $\rho \in \mathfrak{M}^k(D)$, έστω $\theta \in D$ και έστω $\mathbf{K}(\theta)$ και $\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))$ κατανομές πιθανότητας επάνω στην $\mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιες ώστε οι επαγώμενες συναρτήσεις κατανομής να είναι συνεχώς διαφορίσιμες με θετικές παραγώγους $[\mathbf{K}(\theta)]'$ και $[\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))]'$ στον Υ. Για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ η κλάση όλων των λόγων πιθανοφάνειας $g_n := g_{\rho,n} : \Upsilon^{n+1} \times D \longmapsto \Upsilon$ που ορίζονται ως

$$g_n(w_1, \ldots, w_n, t, \theta) := \Big[\prod_{j=1}^{n} \frac{[\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))]'(w_j)}{[\mathbf{K}(\theta)]'(w_j)}\Big] \cdot \frac{1 - \mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))(t-w)}{1 - \mathbf{K}(\theta)(t-w)}$$

για κάθε $(w_1, \ldots, w_n, t, \theta) \in \Upsilon^{n+1} \times D$, όπου $w := \sum_{j=1}^n w_j$, θα συμβολίζεται με $\mathcal{G}_{n,\rho}$. Με $\mathcal{G}_\rho$ θα συμβολίζεται το σύνολο $\{g = \{g_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} : g_n \in \mathcal{G}_{n,\rho}$ for any $n \in \mathbb{N}_0\}$ όλων των ακολουθιών στοιχείων της $\mathcal{G}_{n,\rho}$.

Για ό,τι ακολουθεί τα $\mathbf{K}(\theta)$, $\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))$ και $g \in \mathcal{G}_\rho$ είναι όπως και στους Συμβολισμούς 5.3.3, και τα P, Θ, $\{P_\theta\}_{\theta\in D}$ και S είναι όπως στο Λήμμα 5.3.1.

Πρόταση 5.3.4. *Για δοσμένο* $\rho \in \mathfrak{M}^k(D)$, *έστω* $(\gamma, \xi) \in \mathcal{F}_{P,h} \times \mathcal{R}_+(D)$. *Τότε για κάθε* $0 \leqslant u \leqslant t$ *και για όλα τα* $A \in \mathcal{F}_u$ *η συνθήκη*

$$Q(A) = \int_A \xi(\Theta) \cdot \left[\prod_{j=1}^{N_t} (h^{-1} \circ \gamma \circ X_j) \right] \cdot g(W_1, \ldots, W_{N_t}, t, \Theta) \, dP$$

ορίζει ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας $Q \in \mathcal{M}_{S, \mathbf{\Lambda}(\rho(\Theta))}$.

Απόδειξη. Ας σταθεροποιήσουμε κάποια $t \in \mathbb{R}_+$ και $\theta \in D$. Ορίζουμε τις συνολοσυναρτήσεις $\breve{\mu} : \mathfrak{B}(D) \longmapsto \mathbb{R}$ και $\breve{Q}_n(\theta), \breve{R} : \mathfrak{B}(\Upsilon) \longmapsto \mathbb{R}$ με τύπο $\breve{\mu}(B_1) := \mathbb{E}_P[\chi_{\Theta^{-1}(B_1)} \cdot \xi(\Theta)]$, $\breve{Q}_n(\theta)(B_2) := \mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_{W_1^{-1}(B_2)} \cdot (\frac{[\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))]'}{[\mathbf{K}(\theta)]'} \circ W_1)]$ και $\breve{R}(B_3) := \mathbb{E}_P[\chi_{X_1^{-1}(B_3)} \cdot (h^{-1} \circ \gamma \circ X_1)]$ για κάθε $B_1 \in \mathfrak{B}(D)$ και $B_2, B_3 \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$, αντίστοιχα. Προφανώς η $\breve{\mu}$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στην $\mathfrak{B}(D)$ αφού από την υπόθεσή μας έχουμε ότι $\mathbb{E}_P[\xi(\Theta)] = 1$. Επιπλέον από την απόδειξη της Πρότασης 4.2.8, και πιο συγκεκριμένα τα βήματα (a) και (b), προκύπτει ότι η $\breve{Q}_n(\theta)$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας στη $\mathfrak{B}(\Upsilon)$ με την ιδιότητα $\breve{Q}_n(\theta) = \mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))$, καθώς και ότι η $\breve{R}$ επίσης ένα μέτρο πιθανότητας.

Επομένως, εφαρμόζοντας το Λήμμα 5.3.1 για $\breve{\mu}$, $\breve{Q}_n(\theta)$ και $\breve{R}$ στη θέση των μ, $Q_n(\theta)$ και R, αντίστοιχα, μπορούμε να κατασκευάσουμε μία οικογένεια $\{\breve{Q}_\theta\}_{\theta \in D}$ μέτρων πιθανότητας επάνω στην Σ με $\breve{Q}_\theta := \mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))_{\mathbb{N}} \otimes \breve{R}_{\mathbb{N}} \otimes \delta_\theta$, και ένα μέτρο πιθανότητας $\breve{Q}$ επάνω στην Σ που ικανοποιεί τις συνθήκες (a1) και (a2), τέτοιο ώστε η $\{\breve{Q}_\theta\}_{\theta \in D}$ να είναι μία φ.δ.π. του $\breve{Q}$ επάνω στο $\breve{Q}_\Theta = \breve{\mu}$ συνεπής με το Θ και η S να είναι μία $\breve{Q}$-CMRP με παραμέτρους $\mathbf{\Lambda}(\rho(\Theta))$ και $\breve{Q}_{X_1} = \breve{R}$. Από το τελευταίο, μαζί με τους ορισμούς των $\breve{\mu}$, $\breve{R}$ και $\breve{Q}_n(\theta)$, προκύπτει ότι $\breve{Q}_\Theta \sim P_\Theta$, $\breve{Q}_{X_1} \sim P_{X_1}$ και $(\breve{Q}_\theta)_{W_1} \sim (P_\theta)_{W_1}$ για κάθε $\theta \in D$. Αλλά αφού $(\breve{Q}_\theta)_{W_1} \sim (P_\theta)_{W_1}$ για κάθε $\theta \in D$ και οι $\{P_\theta\}_{\theta \in D}$ και $\{\breve{Q}_\theta\}_{\theta \in D}$ είναι φ.δ. πιθανότητες του P επάνω στο P_Θ και του $\breve{Q}$ επάνω στο $\breve{Q}_\Theta$, αντίστοιχα, συνεπείς με το Θ, έχουμε ότι $\breve{Q}_{W_1} \sim P_{W_1}$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, μπορούμε να εφαρμόσουμε την Πρόταση 5.1.4 για να πάρουμε ότι $\breve{Q} \upharpoonright \mathcal{F}_t \sim P \upharpoonright \mathcal{F}_t$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, ή ισοδύναμα ότι

$$\breve{Q}(A) = \int_A \xi(\Theta) \cdot \prod_{j=1}^{N_t} (h^{-1} \circ \gamma \circ X_j) \cdot g(W_1, \ldots, W_{N_t}, t, \Theta) \, dP$$

για κάθε $0 \leqslant u \leqslant t$ και $A \in \mathcal{F}_u$. Επομένως $Q \upharpoonright \mathcal{F}_u = \breve{Q} \upharpoonright \mathcal{F}_u$ για κάθε $u \in \mathbb{R}_+$ και άρα $Q \upharpoonright \breve{\Sigma} = \breve{Q} \upharpoonright \breve{\Sigma}$, όπου $\breve{\Sigma} := \bigcup_{u \in \mathbb{R}_+} \mathcal{F}_u$. Από το τελευταίο προκύπτει ότι η Q είναι σ-προσθετική επάνω στην $\breve{\Sigma}$ και ότι το $\breve{Q}$ είναι η μοναδική επέκταση της Q επάνω στην $\Sigma = \sigma(\breve{\Sigma})$, ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη της πρότασης. □

Το ακόλουθο αποτέλεσμα αποτελεί την λύση του κεντρικού προβλήματος της διδακτορικής διατριβής. Η απόδειξή του είναι άμεση συνέπεια των Προτάσεων 5.1.4 και 5.3.4.

Θεώρημα 5.3.5. *Έστω* $\rho \in \mathfrak{M}^k(D)$. *Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) Για κάθε $Q \in \mathcal{M}_{S,\mathbf{\Lambda}(\rho(\Theta))}$ *υπάρχει ένα ουσιωδώς μοναδικό ζευγάρι* $(\gamma, \xi) \in \mathcal{F}_{P,h} \times \mathcal{R}_+(D)$*, όπου η* ξ *είναι μία παράγωγος Radon-Nikodým του* Q_Θ *ως προς το* P_Θ*, που ικανοποιεί τη συνθήκη* (RRM_ξ)*.*

(ii) Αντιστρόφως, για κάθε ζευγάρι $(\gamma, \xi) \in \mathcal{F}_{P,h} \times \mathcal{R}_+(D)$ *υπάρχει ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας* $Q \in \mathcal{M}_{S,\mathbf{\Lambda}(\rho(\Theta))}$ *που ικανοποιεί τη συνθήκη* (RRM_ξ)*.*

Παρατήρηση 5.3.6. Αν υποθέσουμε ότι η κατανομή του Θ ως προς το P είναι εκφυλισμένη σε κάποιο $\theta_0 \in D$, τότε το Θεώρημα 4.2.9 είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 5.3.5.

Πράγματι, έστω ότι το μ είναι ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στην $\mathfrak{B}(D)$ έτσι ώστε $\mu(B) := \delta_{\theta_0}(B)$ για κάθε $B \in \mathfrak{B}(D)$ και για κάποιο σταθερό $\theta_0 \in D$. Σύμφωνα με την Παρατήρηση 5.3.2 (a) μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα χ.π. (Ω, Σ, P) έτσι ώστε $P_\Theta(\{\theta_0\}) = 1$ και $P \in \mathcal{M}_{S,\mathbf{K}(\Theta)}$. Αν θεωρήσουμε ένα μέτρο πιθανότητας $Q \in \mathcal{M}_{S,\mathbf{\Lambda}(\rho(\Theta))}$, σύμφωνα με την Πρόταση 5.1.4 (ii) έχουμε ότι $Q_\Theta \sim P_\Theta$ και άρα $Q_\Theta(\{\theta_0\}) = 1$. Επομένως, χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\Theta(\omega) = \theta_0$ για κάθε $\omega \in \Omega$. Συνεπώς, έχουμε ότι $\sigma(\Theta) = \{\varnothing, \Omega\}$ και άρα $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^S$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $\mathcal{F}_\infty = \mathcal{F}_\infty^S$. Επιπλέον, σε αυτή την περίπτωση η συνθήκη (RRM_ξ) μετατρέπεται στην συνθήκη (RRM). Εφαρμόζοντας τώρα το Θεώρημα 5.3.5 για την εκφυλισμένη τυχαία μεταβλητή Θ έχουμε το Θεώρημα 4.2.9.

Συμβολισμοί 5.3.7. Με $\widetilde{\mathcal{F}}_{P,\Theta} := \widetilde{\mathcal{F}}_{P,\Theta,X_1}$ θα συμβολίζεται η κλάση όλων των πραγματικών $\mathfrak{B}(\Upsilon \times D)$-μετρήσιμων συναρτήσεων β στον $\Upsilon \times D$ με τύπο $\beta(x, \theta) := \gamma(x) + \alpha(\theta)$ για κάθε $x \in \Upsilon$ και $\theta \in D$, όπου $\gamma \in \mathcal{F}_{P,\ln}$ και $\alpha \in \mathfrak{M}(D)$.

Το επόμενο πόρισμα μας επιτρέπει να μετατρέψουμε μία οποιαδήποτε σύνθετη μεικτή ανανεωτική διαδιακασία σε μία σύνθετη μεικτή σ.δ. Poisson μέσω αλλαγής μέτρου.

Πόρισμα 5.3.8. *Ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) Για κάθε ζευγάρι $(\rho, Q) \in \mathfrak{M}_+(D) \times \mathcal{M}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\Theta))}$ *υπάρχει ένα ουσιωδώς μοναδικό ζευγάρι* $(\beta, \xi) \in \widetilde{\mathcal{F}}_{P,\Theta} \times \mathcal{R}_+(D)$ *με την* ξ *να είναι μία παράγωγος Radon-Nikodým του* Q_Θ *ως προς το* P_Θ *έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες*

$$\rho(\Theta) = \mathbb{E}_P[N_1 \mid \Theta] \cdot e^{\alpha(\Theta)} \tag{$**$}$$

και

$$Q(A) = \int_A M_t^{(\beta)}(\Theta)\, dP \quad \text{για κάθε } 0 \leqslant u \leqslant t \text{ και } A \in \mathcal{F}_u, \tag{RPM_ξ}$$

όπου $M_t^{(\beta)}(\Theta) := \xi(\Theta) \cdot \frac{e^{\sum_{j=1}^{N_t} \beta(X_j,\Theta) - t\cdot\rho(\Theta)} \cdot (\mathbb{E}_P[N_1|\Theta])^{N_t}}{\prod_{j=1}^{N_t} [\mathbf{K}(\Theta)]'(W_j) \cdot (1-\mathbf{K}(\Theta))(t-T_{N_t})}$.

(ii) Αντιστρόφως, για κάθε ζευγάρι $(\beta, \xi) \in \widetilde{\mathcal{F}}_{P,\Theta} \times \mathcal{R}_+(D)$ *υπάρχει ένα μοναδικό ζευγάρι* $(\rho, Q) \in \mathfrak{M}_+(D) \times \mathcal{M}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\Theta))}$ *που ικανοποιεί τις συνθήκες* ($**$) *και* (RPM_ξ)*.*

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε ένα τυχαίο $t \in \mathbb{R}_+$.

(i) Κάτω από τις υποθέσεις του (i) από το Θεώρημα 5.3.5 (i) έπεται ότι υπάρχει ένα ουσιωδώς μοναδικό ζευγάρι $(\gamma, \xi) \in \mathcal{F}_{P,\ln} \times \mathcal{R}_+(D)$, με $\gamma := \ln f$, όπου f είναι μία παράγωγος Radon-Nikodým του Q_{X_1} ως προς το P_{X_1}, και ξ μία παράγωγος Radon-Nikodým του Q_Θ ως προς το P_Θ, τέτοια ώστε

$$Q(A) = \int_A \xi(\Theta) \cdot \frac{e^{\sum_{j=1}^{N_t} \gamma(X_j)} \cdot e^{-t\rho(\Theta)} \cdot \rho(\Theta)^{N_t}}{\prod_{j=1}^{N_t} [\mathbf{K}(\Theta)]'(W_j) \cdot (1 - \mathbf{K}(\Theta))(t - T_{N_t})} \, dP \tag{5.8}$$

για κάθε $0 \leqslant u \leqslant t$ και $A \in \mathcal{F}_u$. Θεωρούμε την $\alpha \in \mathfrak{M}(D)$ με τύπο $\alpha(\theta) := \ln \rho(\theta) - \ln \mathbb{E}_P[N_1 \mid \{\Theta = \theta\}]$ για κάθε $\theta \in D$, και ορίζουμε την συνάρτηση $\beta := \gamma + \alpha$. Προφανώς, $\beta \in \widetilde{\mathcal{F}}_{P,\Theta}$ και η συνθήκη $(**)$ ικανοποιείται. Το τελευταίο μαζί με τη συνθήκη (5.8) αποδεικνύει τη συνθήκη (RPM_ξ).

(ii) Θεωρούμε το ζευγάρι $(\beta, \xi) \in \widetilde{\mathcal{F}}_{P,\Theta} \times \mathcal{R}_+(D)$ και ορίζουμε την $\rho \in \mathfrak{M}_+(D)$ με τύπο $\rho(\theta) := e^{\alpha(\theta)} \cdot \mathbb{E}_P[N_1 \mid \{\Theta = \theta\}]$ για κάθε $\theta \in D$. Εφαρμόζοντας τώρα το Θεώρημα 5.3.5 (ii) για τη συνάρτηση $\gamma = \beta - \alpha$ λαμβάνουμε ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας $Q \in \mathcal{M}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\Theta))}$ που ικανοποιεί τη συνθήκη (RRM_ξ) ή ισοδύναμα την (RPM_ξ). □

Πόρισμα 5.3.9. *Έστω $D := \Upsilon$ και $P \in \mathcal{M}_{S,\mathbf{Exp}(\Theta)}$. Ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) Για κάθε ζευγάρι $(\rho, Q) \in \mathfrak{M}_+(\Upsilon) \times \mathcal{M}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\Theta))}$ υπάρχει ένα ουσιωδώς μοναδικό ζευγάρι $(\beta, \xi) \in \widetilde{\mathcal{F}}_{P,\Theta} \times \mathcal{R}_+(\Upsilon)$ με την ξ να είναι μία παράγωγος Radon-Nikodým του Q_Θ ως προς το P_Θ έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες $(**)$ και

$$Q(A) = \int_A m_t^\beta(\Theta) \, dP \quad \text{για κάθε } 0 \leqslant u \leqslant t \text{ και } A \in \mathcal{F}_u, \tag{PPM_ξ}$$

όπου $m_t^\beta(\Theta) := \xi(\Theta) \cdot e^{\sum_{j=1}^{N_t} \beta(X_j, \Theta) - t \cdot (\rho(\Theta) - \Theta)}$.

(ii) Αντιστρόφως, για κάθε ζευγάρι $(\beta, \xi) \in \widetilde{\mathcal{F}}_{P,\Theta} \times \mathcal{R}_+(\Upsilon)$ υπάρχει ένα μοναδικό ζευγάρι $(\rho, Q) \in \mathfrak{M}_+(\Upsilon) \times \mathcal{M}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\Theta))}$ που ικανοποιεί τις συνθήκες $(**)$ και (PPM_ξ).

Η απόδειξη του Πορίσματος 5.3.9 έπεται με όμοιο τρόπο όπως η απόδειξη του Πορίσματος 5.3.8 με μόνη διαφορά ότι $\mathbf{K}(\Theta) = \mathbf{Exp}(\Theta)$.

Παρατήρησεις 5.3.10. (a) Το Πόρισμα 5.3.9 είναι το βασικό αποτέλεσμα του Λυμπερόπουλου [1] , Θεώρημα 7.3.9.

(b) Εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι το Θεώρημα 5.3.5 συνεχίζει να ισχύει αν οι κλάσεις $\mathcal{M}_{S,\mathbf{\Lambda}(\rho(\Theta))}$ και $\mathcal{F}_{P,h}$ αντικατασταθούν από τις υποκλάσεις τους $\mathcal{M}^\ell_{S,\mathbf{\Lambda}(\rho(\Theta))} := \{Q \in \mathcal{M}_{S,\mathbf{\Lambda}(\rho(\Theta))} : \mathbb{E}_Q[X_1^\ell] < \infty\}$ και $\mathcal{F}^\ell_{P,h}$ για $\ell = 1, 2$, αντίστοιχα. Επιπλέον, τα Πορίσματα 5.3.8 και 5.3.9

εξακολουθούν να ισχύουν εάν αντικαταστήσουμε τις κλάσεις $\mathcal{M}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\Theta))}$ και $\widetilde{\mathcal{F}}_{P,\Theta}$ με τις $\mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\Theta))}$ και $\widetilde{\mathcal{F}}^{\ell}_{P,\Theta} := \{\beta = \gamma + \alpha : \gamma \in \mathcal{F}^{\ell}_{P,h}$ και $\alpha \in \mathfrak{M}(D)\}$ για $\ell = 1, 2$, αντίστοιχα.

(c) Και στους δύο ισχυρισμούς (i) και (ii) του Πορίσματος 5.3.8 θα μπορούσε να προστεθεί το ακόλουθο συμπερασμα

Υπάρχει μία ουσιωδώς μοναδική φ.δ.π. $\{Q_\theta\}_{\theta\in D}$ του Q επάνω στο Q_Θ συνεπής με το Θ και ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $\check{L} \in \mathfrak{B}(D)$, έτσι ώστε για κάθε $\theta \notin \check{L}$ να ικανοποιείται η συνθήκη

$$Q_\theta(A) = \int_A \widetilde{M}^{(\beta)}_t(\theta)\, dP_\theta \quad \textit{για κάθε } 0 \leqslant u \leqslant t \textit{ και } A \in \mathcal{F}_u, \tag{RPM_θ}$$

όπου

$$\widetilde{M}^{(\beta)}_t(\theta) := \frac{e^{\sum_{j=1}^{N_t}\beta(X_j,\theta) - t\cdot\rho(\theta)} \cdot (\mathbb{E}_{P_\theta}[N_1])^{N_t}}{\prod_{j=1}^{N_t}[\mathbf{K}(\theta)]'(W_j)\cdot(1-\mathbf{K}(\theta))(t - T_{N_t})}.$$

(d) Και στους δύο ισχυρισμούς (i) και (ii) του Πορίσματος 5.3.9 θα μπορούσε να προστεθεί το ακόλουθο συμπερασμα

Υπάρχει μία ουσιωδώς μοναδική φ.δ.π. $\{Q_\theta\}_{\theta\in D}$ του Q επάνω στο Q_Θ συνεπής με την Θ και ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $\check{L} \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$, έτσι ώστε για κάθε $\theta \notin \check{L}$ να ικανοποιείται η συνθήκη

$$Q_\theta(A) = \int_A \widetilde{m}^{\beta}_t(\theta)\, dP_\theta \quad \textit{για κάθε } 0 \leqslant u \leqslant t \textit{ και } A \in \mathcal{F}_u, \tag{PPM_θ}$$

όπου

$$\widetilde{m}^{\beta}_t(\theta) := e^{\sum_{j=1}^{N_t}\beta(X_j,\theta) - t\cdot(\rho(\theta)-\theta)}.$$

Σταθεροποιούμε ένα $\ell = 1, 2$. Για δοσμένο $\rho \in \mathfrak{M}_+(D)$ ορίζουμε την κλάση $\mathcal{M}^{*,\ell}_{S,\mathbf{\Lambda}(\rho(\Theta))}$ όλων των μέτρων πιθανότητας $Q \in \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{\Lambda}(\rho(\Theta))}$ έτσι ώστε $\mathbb{E}_Q[N_1 \mid \Theta] \in \mathcal{L}^{\ell}(Q)$, και για δοσμένη $\beta \in \widetilde{\mathcal{F}}^{\ell}_{P,\Theta}$ θα συμβολίζουμε με $\mathcal{R}^{*,\ell}_+(D) := \mathcal{R}^{*,\ell}_{+,\beta}(D)$ την κλάση όλων των $\xi \in \mathcal{R}_+(D)$ έτσι ώστε $\xi(\Theta)\cdot(e^{\alpha(\Theta)}\cdot\mathbb{E}_P[N_1 \mid \Theta])^{\ell} \in \mathcal{L}^1(P)$. Προφανώς ισχύουν οι εγκλεισμοί $\mathcal{M}^{*,\ell}_{S,\mathbf{\Lambda}(\rho(\Theta))} \subseteq \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{\Lambda}(\rho(\Theta))} \subseteq \mathcal{M}_{S,\mathbf{\Lambda}(\rho(\Theta))}$ και $\mathcal{R}^{*,\ell}_+(D) \subseteq \mathcal{R}_+(D)$.

Οι δύο νέες κλάσεις που ορίσαμε πιο πάνω θα μας φανούν χρήσιμες για τις εφαρμογές στα χρηματοοικονομικά που θα παρουσιαστούν στις δύο επόμενες ενότητες. Αρχικά, στο επόμενο αποτέλεσμα δίνουμε ένα χαρακτηρισμό όλων των στοιχείων της κλάσης $\mathcal{M}^{*,\ell}_{S,\mathbf{\Lambda}(\rho(\Theta))}$ ως προς τα στοιχεία της $\widetilde{\mathcal{F}}^{\ell}_{P,\Theta} \times \mathcal{R}^{*,\ell}_+(D)$.

Πόρισμα 5.3.11. *Έστω $P \in \mathcal{M}^{*,\ell}_{S,\mathbf{K}(\Theta)}$ για $\ell = 1, 2$. Ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) Για κάθε ζευγάρι $(\rho, Q) \in \mathfrak{M}_+(D) \times \mathcal{M}^{*,\ell}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\Theta))}$ υπάρχει ένα ουσιωδώς μοναδικό ζευγάρι $(\beta, \xi) \in \widetilde{\mathcal{F}}^{\ell}_{P,\Theta} \times \mathcal{R}^{*,\ell}_+(D)$ με την ξ να είναι μία παράγωγος Radon-Nikodým του Q_Θ ως προς το P_Θ που ικανοποιεί τις συνθήκες $(**)$ και (RPM_ξ), μία ουσιωδώς μοναδική φ.δ.π. $\{Q_\theta\}_{\theta\in D}$ του Q επάνω στο Q_Θ συνεπής με το Θ και ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $\check{L} \in \mathfrak{B}(D)$ έτσι ώστε $Q_\theta \in \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\theta))}$ για κάθε $\theta \notin \check{L}$.

(ii) *Αντιστρόφως, για κάθε ζευγάρι* $(\beta,\xi) \in \widetilde{\mathcal{F}}^{\ell}_{P,\Theta} \times \mathcal{R}^{*,\ell}_{+}(D)$ *υπάρχει ένα μοναδικό ζευγάρι* $(\rho, Q) \in \mathfrak{M}_{+}(D) \times \mathcal{M}^{*,\ell}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\Theta))}$ *που ικανοποιεί τις συνθήκες* $(**)$ *και* (RPM_{ξ}), *μία ουσιωδώς μοναδική φ.δ.π.* $\{Q_\theta\}_{\theta\in D}$ *του* Q *επάνω στο* Q_Θ *συνεπής με το* Θ *και ένα* P_Θ*-μηδενικό σύνολο* $\check{L} \in \mathfrak{B}(D)$ *έτσι ώστε* $Q_\theta \in \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\theta))}$.

Απόδειξη. (i) Θεωρούμε το ζευγάρι $(\rho, Q) \in \mathfrak{M}_{+}(D) \times \mathcal{M}^{*,\ell}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\Theta))}$ για $\ell = 1, 2$. Αφού $\mathcal{M}^{*,\ell}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\Theta))} \subseteq \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\Theta))}$ από το Πόρισμα 5.3.8 (i) και την Παρατήρηση 5.3.10 (c) έπεται ότι υπάρχει ένα ουσιωδώς μοναδικό ζευγάρι $(\beta,\xi) \in \widetilde{\mathcal{F}}^{\ell}_{P,\Theta} \times \mathcal{R}_{+}(D)$ με την ξ να είναι μία παράγωγος Radon-Nikodým του Q_Θ ως προς το P_Θ που ικανοποιεί τις συνθήκες $(**)$ και (RPM_{ξ}), μία ουσιωδώς μοναδική φ.δ.π. $\{Q_\theta\}_{\theta\in D}$ του Q επάνω στο Q_Θ συνεπής με το Θ και ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $\check{L} \in \mathfrak{B}(D)$ έτσι ώστε $Q_\theta \in \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\theta))}$ για κάθε $\theta \notin \check{L}$. Καθώς όμως $Q \in \mathcal{M}^{*,\ell}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\Theta))}$ έχουμε ότι $\mathbb{E}^{\ell}_{Q}[N_1 \mid \Theta] \in \mathcal{L}^1(Q)$ και άρα $\xi(\Theta)\cdot(e^{\alpha(\Theta)}\cdot\mathbb{E}_P[N_1\mid\Theta])^{\ell} \in \mathcal{L}^1(P)$, δηλαδή $(\beta,\xi) \in \widetilde{\mathcal{F}}^{\ell}_{P,\Theta} \times \mathcal{R}^{*,\ell}_{+}(D)$, ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη του (i).

(ii) Έστω $(\beta,\xi) \in \widetilde{\mathcal{F}}^{\ell}_{P,\Theta} \times \mathcal{R}^{*,\ell}_{+}(D)$ για $\ell = 1, 2$. Αφού όμως $\widetilde{\mathcal{F}}^{\ell}_{P,\Theta} \subseteq \widetilde{\mathcal{F}}_{P,\Theta}$ και $\mathcal{R}^{*,\ell}_{+}(D) \subseteq \mathcal{R}_{+}(D)$, από το Πόρισμα 5.3.8 (ii) μαζί με την Παρατήρηση 5.3.10 (c) έπεται ότι υπάρχει ένα μοναδικό ζευγάρι $(\rho, Q) \in \mathfrak{M}_{+}(D) \times \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\Theta))}$ που ικανοποιεί τις συνθήκες $(**)$ και (RPM_{ξ}), μία ουσιωδώς μοναδική φ.δ.π. $\{Q_\theta\}_{\theta\in D}$ του Q επάνω στο Q_Θ συνεπής με το Θ και ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $\check{L} \in \mathfrak{B}(D)$ έτσι ώστε $Q_\theta \in \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\theta))}$ για κάθε $\theta \notin \check{L}$. Επιπλέον, αφού $(\beta,\xi) \in \widetilde{\mathcal{F}}^{\ell}_{P,\Theta} \times \mathcal{R}^{*,\ell}_{+}(D)$ έπεται ότι $\xi(\Theta)\cdot(e^{\alpha(\Theta)}\cdot\mathbb{E}_P[N_1\mid\Theta])^{\ell} \in \mathcal{L}^1(P)$ και άρα $\mathbb{E}^{\ell}_{Q}[N_1 \mid \Theta] \in \mathcal{L}^1(Q)$, δηλαδή $(\rho, Q) \in \mathfrak{M}_{+}(D) \times \mathcal{M}^{*,\ell}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\Theta))}$, ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη του (ii). $\square$

Στα παραδείγματα που ακολουθούν, δείχνουμε πως ξεκινώντας από ένα δοσμένο ζευγάρι $(\beta,\xi) \in \widetilde{\mathcal{F}}_{P,\Theta} \times \mathcal{R}_{+}(D)$ μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα μοναδικό ζευγάρι $(\rho, Q) \in \mathfrak{M}_{+}(D) \times \mathcal{M}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\Theta))}$, μετατρέποντας μία σύνθετη μεικτή ανανεωτική σ.δ. S σε μία σύνθετη μεικτή σ.δ. Poisson.

Στο πρώτο παράδειγμα δείχνουμε πώς μπορούμε να βρούμε ένα μέτρο πιθανότητας Q έτσι ώστε η S να μετατρέπεται σε μία σύνθετη διαδικασία Pólya-Lundberg.

Παράδειγμα 5.3.12. Έστω $D := \Upsilon$, και έστω Θ μία θετική τυχαία μεταβλητή με $P_\Theta << \lambda \upharpoonright \mathfrak{B}(\Upsilon)$ και έστω $g : \Upsilon \longmapsto \Upsilon$ μία συνάρτηση πυκνότητας της Θ. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\xi \in \mathfrak{M}_{+}(\Upsilon)$ με τύπο

$$\xi(\theta) := \frac{b^a\cdot\theta^{a-1}\cdot e^{-b\cdot\theta}}{\Gamma(a)\cdot g(\theta)} \quad \text{για κάθε} \quad \theta \in \Upsilon,$$

όπου a, b θετικές πραγματικές σταθερές. Εύκολα αποδεικνύεται ότι $\mathbb{E}_P[\xi(\Theta)] = 1$ και άρα $\xi \in \mathcal{R}_{+}(\Upsilon)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\beta(x,\theta) := \gamma(x) + \ln\frac{\theta}{\mathbb{E}_P[N_1 \mid \{\Theta = \theta\}]} \quad \text{for any} \quad (x,\theta) \in \Upsilon^2$$

όπου $\gamma \in \mathcal{F}_{P,\ln}$. Προφανώς $\beta \in \widetilde{\mathcal{F}}_{P,\Theta}$. Επομένως, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Πόρισμα 5.3.9 για να βρούμε ένα μοναδικό ζευγάρι $(\rho, Q) \in \mathfrak{M}_+(\Upsilon) \times \mathcal{M}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\Theta))}$ που να ικανοποιεί τις συνθήκες $(**)$ και (RPM_ξ). Ιδιαιτέρως, από τη συνθήκη $(**)$ προκύπτει ότι $\rho = id_\Upsilon$, καθώς και

$$Q_\Theta(B) = \mathbb{E}_P[\chi_{\Theta^{-1}(B)} \cdot \xi(\Theta)] = \int_B \frac{b^a}{\Gamma(a)} \cdot \theta^{a-1} \cdot e^{-b\theta}\, \lambda(d\theta) \quad \text{για κάθε } B \in \mathfrak{B}(\Upsilon).$$

Επομένως η τυχαία μεταβλητή Θ ικανοποιεί τη συνθήκη $Q_\Theta = \mathbf{Ga}(b, a)$ και άρα η S είναι μία σύνθετη διαδικασία Pólya-Lundberg.

Στο επόμενο παράδειγμα δείχνουμε πώς μπορούμε να πάρουμε ένα μέτρο Q έτσι ώστε η S να είναι μία σύνθετη διαδικασία Poisson-Lognormal.

Παράδειγμα 5.3.13. Έστω $D := \mathbb{R}$, και έστω Θ μία πραγματική τυχαία μεταβλητή με $P_\Theta << \lambda$ και έστω $g : \mathbb{R} \longmapsto \Upsilon$ μία συνάρτηση πυκνότητας της Θ. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\xi \in \mathfrak{M}_+(\mathbb{R})$ με τύπο

$$\xi(\theta) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma \cdot g(\theta)} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\cdot(\theta-\mu)^2} \quad \text{για κάθε } \theta \in \mathbb{R},$$

όπου $\mu \in \mathbb{R}$ και $\sigma \in \Upsilon$ πραγματικές σταθερές. Εύκολα βλέπουμε ότι $\xi \in \mathcal{R}_+(\mathbb{R})$ αφού $\mathbb{E}_P[\xi(\Theta)] = 1$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\beta(x, \theta) := \gamma(x) + \ln \frac{e^\theta}{\mathbb{E}_P[N_1 \mid \{\Theta = \theta\}]} \quad \text{for any} \quad (x, \theta) \in \Upsilon \times \mathbb{R}$$

όπου $\gamma \in \mathcal{F}_{P,\ln}$. Προφανώς $\beta \in \widetilde{\mathcal{F}}_{P,\Theta}$. Επομένως, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Πόρισμα 5.3.9 για να βρούμε ένα μοναδικό ζευγάρι $(\rho, Q) \in \mathfrak{M}_+(\Upsilon) \times \mathcal{M}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\Theta))}$ που να ικανοποιεί τις συνθήκες $(**)$ και (RPM_ξ). Ιδιαιτέρως, από τη συνθήκη $(**)$ προκύπτει ότι $\rho(\theta) = e^\theta$ για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$, καθώς και

$$Q_\Theta(B) = \mathbb{E}_P[\chi_{\Theta^{-1}(B)} \cdot \xi(\Theta)] = \int_B \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\cdot(\theta-\mu)^2}\, \lambda(d\theta) \quad \text{για κάθε } B \in \mathfrak{B}.$$

Επομένως η τυχαία μεταβλητή Θ ικανοποιεί τη συνθήκη $Q_\Theta = \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$ και άρα $Q_{\rho(\Theta)} = \mathbf{LN}(\mu, \sigma^2)$, δηλαδή η S είναι μία σύνθετη διαδικασία Poisson-Lognormal.

Στο τελευταίο παράδειγμα αυτής της ενότητας δείχνουμε πώς μπορούμε να μετατρέψουμε μία σύνθετη μεικτή ανανεωτική σ.δ. σε μία σύνθετη διαδικασία Poisson-Beta process μέσω αλλαγής μέτρου.

Παράδειγμα 5.3.14. Έστω $D := \Upsilon^2$, και έστω Θ ένα διδιάστατο τυχαίο διάνυσμα με $\Theta(\omega) = (\Theta_1(\omega), \Theta_2(\omega))$, όπου Θ_1 και Θ_2 είναι δύο θετικές πραγματικές τυχαίες μεταβλητές στον Ω. Υποθέτουμε επιπλέον ότι $P_\Theta << \lambda \upharpoonright \mathfrak{B}(\Upsilon^2)$ και έστω $g : \Upsilon^2 \longmapsto \Upsilon$ μία συνάρτηση πυκνότητας του Θ. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\xi \in \mathfrak{M}_+(\Upsilon^2)$ με τύπο

$$\xi(\theta) := \xi(\theta_1, \theta_2) := \frac{a^{b_1+b_2} \cdot \theta_1^{b_1-1} \cdot \theta_2^{b_2-1}}{\Gamma(b_1) \cdot \Gamma(b_2) \cdot g_\Theta(\theta_1, \theta_2)} \cdot e^{-a(\theta_1+\theta_2)} \quad \text{για κάθε } (\theta_1, \theta_2) \in \Upsilon^2$$

όπου $a, b_1, b_2 \in \Upsilon$ πραγματικές σταθερές. Εύκολα αποδεικνύεται ότι $\mathbb{E}_P[\xi(\Theta)] = 1$, και επομένως $\xi \in \mathcal{R}_+(\Upsilon^2)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\beta(x, \theta) := \gamma(x) + \ln \frac{\theta_1}{(\theta_1 + \theta_2) \cdot \mathbb{E}_P[N_1 \mid \{\Theta = \theta\}]} \quad \text{για κάθε} \quad (x, \theta) \in \Upsilon \times \Upsilon^2$$

με $\gamma \in \mathcal{F}_{P,\ln}$. Προφανώς $\beta \in \widetilde{\mathcal{F}}_{P,\Theta}$, και άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε το Πόρισμα 5.3.9 για να πάρουμε ένα μοναδικό ζευγάρι $(\rho, Q) \in \mathfrak{M}_+(\Upsilon) \times \mathcal{M}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\Theta))}$ που να ικανοποιεί τις συνθήκες $(**)$ και (RPM_ξ). Ιδιαιτέρως, από την συνθήκη $(*)$ έπεται ότι $\rho(\theta) = \rho(\theta_1, \theta_2) = \frac{\theta_1}{\theta_1+\theta_2}$ για κάθε $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \Upsilon^2$ καθώς και ότι $Q_\Theta(B) = (Q_{\Theta_1} \otimes Q_{\Theta_2})(B)$ για κάθε $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon^2)$ με $Q_{\Theta_1} = \mathbf{Ga}(a, b_1)$ και $Q_{\Theta_2} = \mathbf{Ga}(a, b_2)$. Επομένως, $Q_{\rho(\Theta)} = \mathbf{Be}(b_1, b_2)$ και το συμπερασμα έπεται.

5.4 Σύνθετες Μεικτές Ανανεωτικές Διαδικασίες και Martingales

Στην παρούσα ενότητα αρχικά αποδεικνύεται ότι στα πλαίσια των σύνθετων μεικτών ανανεωτικών σ.δ., η φυσιολογική σ.δ. $\{S_t - pt\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, όπου $p > 0$ είναι η ένταση ασφαλίστρου, δεν μπορεί να ικανοποιεί τη συνθήκη (PEMM). Χρησιμοποιώντας όμως τα αποτελέσματα της Ενότητας 5.3 είμαστε σε θέση να βρούμε δύο *κανονικές* σ.δ. που ικανοποιούν τη συνθήκη (PEMM) και ως εκ τούτου τη συνθήκη (NFLVR). Επιπλέον, αποδεικνύεται ότι μία martingale προσέγγιση στην τιμολόγηση ασφαλιστικών κινδύνων (αρχές υπολογισμού ασφαλίστρου) οδηγεί στην περίπτωση των σύνθετων μεικτών ανανεωτικών σ.δ., στις σύνθετες μεικτές σ.δ. Poisson, προσφέροντας έτσι μία μεθοδολογία για την τιμολόγηση ασφαλιστικών κινδύνων.

Θεώρημα 5.4.1. *Έστω $P \in \mathcal{M}_{S,\mathbf{K}(\Theta)}$, όπου Θ είναι μία πραγματική θετική τ.μ., και έστω $Z := \{Z_t\}_{t\in\mathbb{R}_+} := \{S_t - t \cdot \mathbb{E}_P[S_1]\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Για $\ell = 1, 2$ τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) Η σ.δ. Z είναι ένα $(P, \mathcal{F})$-martingale που ικανοποιεί για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ τη συνθήκη $Z_t \in \mathcal{L}^\ell(P)$.

(ii) Η τ.μ. Θ είναι εκφυλισμένο στο θ_0 για κάποιο $\theta_0 > 0$ και $P \in \mathcal{M}^\ell_{S,\mathbf{Exp}(\theta_0)}$.

Απόδειξη. Η συνεπαγωγή $(ii) \Longrightarrow (i)$ είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 4.3.1.

$(i) \Longrightarrow (ii)$: Σταθεροποιούμε ένα $t \in \mathbb{R}_+$ και θεωρούμε $u \in [0,t]$. Αφού η σ.δ. V είναι ένα $(P,\mathcal{F})$-martingale έπεται ότι

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_P[S_t - S_u \mid \varTheta] &= \mathbb{E}_P\big[\mathbb{E}_P[S_t - S_u \mid \mathcal{F}_u] \mid \varTheta\big] \\ &= \mathbb{E}_P\big[\mathbb{E}_P[S_t - t\cdot\mathbb{E}_P[S_1] - S_u - u\cdot\mathbb{E}_P[S_1] + (t-u)\cdot\mathbb{E}_P[S_1] \mid \mathcal{F}_u] \mid \varTheta\big] \\ &= \mathbb{E}_P\big[\mathbb{E}_P[(t-u)\cdot\mathbb{E}_P[S_1] \mid \mathcal{F}_u] \mid \varTheta\big] = (t-u)\cdot\mathbb{E}_P[S_1], \end{aligned}$$

όπου όλες οι ισότητες ισχύουν $P \upharpoonright \mathcal{F}_u$-σ.β., και η πρώτη ισότητα έπεται από το γεγονός ότι $\sigma(\varTheta) \subseteq \mathcal{F}_t$. Επομένως, $\mathbb{E}_P[S_t - S_u \mid \varTheta] = (t-u)\cdot\mathbb{E}_P[N_1]\cdot\mathbb{E}_P[X_1]$. Επιπλέον, αφού $P \in \mathcal{M}_{S,\mathbf{K}(\varTheta)}$ προκύπτει $\mathbb{E}_P[S_t - S_u \mid \varTheta] = \mathbb{E}_P[N_t - N_u \mid \varTheta]\cdot\mathbb{E}_P[X_1]$, και επομένως

$$\mathbb{E}_P[N_t - N_u \mid \varTheta] = (t-u)\cdot\mathbb{E}_P[N_1].$$

Το τελευταίο για $u = 0$ μας δίνει ότι $\mathbb{E}_P[N_t \mid \varTheta] = t\cdot\mathbb{E}_P[N_1]$, δηλαδη η $\varTheta$ εκφυλίζεται σε κάποιο $\theta_0 \in \varUpsilon$. Επομένως $P \in \mathcal{M}_{S,\mathbf{K}(\theta_0)}$. Καθώς όμως $Z_t \in \mathcal{L}^\ell(P)$ για $\ell = 1,2$, προκύπτει ότι $P \in \mathcal{M}^\ell_{S,\mathbf{K}(\theta_0)}$. Επομένως, χρησιμοποιώντας τα επιχειρήματα της απόδειξης του Θεωρήματος 4.3.1, $(i) \Longrightarrow (ii)$, έχουμε ότι $P \in \mathcal{M}^\ell_{S,\mathbf{Exp}(\theta_0)}$ για $\ell = 1,2$, ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη του θεωρήματος. □

Παρατήρηση 5.4.2. Η διαδικασία τιμών Z δεν ικανοποιεί τη συνθήκη (PEMM).

Πράγματι, έστω $P \in \mathcal{M}^{*,\ell}_{S,\mathbf{K}(\varTheta)}$ για $\ell = 1,2$ και υποθέτουμε, αν είναι δυνατόν, ότι η συνθήκη (PEMM) ικανοποιείται, δηλαδή $\mathbb{M}(Z) \neq \varnothing$. Επομένως, υπάρχει ένα μέτρο πιθανότητας $Q \in \mathbb{M}(Z)$ με $Q \upharpoonright \mathcal{F}_t \sim P \upharpoonright \mathcal{F}_t$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και τέτοιο ώστε $Q \in \mathcal{M}^\ell_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\theta_0))}$ για κάποιο $\theta_0 \in D$. Άρα από την Πρόταση 5.1.4 έπεται ότι $Q_\varTheta \sim P_\varTheta$. Αλλά καθώς $Q_\varTheta = \delta_{\theta_0}$ έχουμε ότι $\delta_{\theta_0}(\mathbb{R}\setminus\{\theta_0\}) = 0 = P_\varTheta(\{\theta_0\})$, δηλαδή τα μέτρα $Q_\varTheta$ και $P_\varTheta$ είναι κάθετα, κάτι που είναι αδύνατο. Επομένως $\mathbb{M}(Z) = \varnothing$.

Η Παρατήρηση 5.4.2 γεννά το ερώτημα της εύρεσης μίας *φυσιολογικής* σ.δ. που να ικανοποιεί την ιδιότητα (PEMM). Μία απάντηση στο ερώτημα αυτό δίνεται από το επόμενο θεώρημα και το πόρισμά του.

Θεώρημα 5.4.3. *Έστω $P \in \mathcal{M}_{S,\mathbf{K}(\varTheta)}$, όπου $\varTheta$ μία πραγματική τ.μ.. Για $\ell = 1,2$ και τις σ.δ. $Z(\varTheta) := \{Z_t(\varTheta)\}_{t\in\mathbb{R}_+} := \{S_t - t\cdot\mathbb{E}_P[S_1 \mid \varTheta]\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και $Z(\theta) := \{Z_t(\theta)\}_{t\in\mathbb{R}_+} := \{S_t - t\cdot\mathbb{E}_{P_\theta}[S_1]\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ θεωρούμε τους ακόλουθους ισχυρισμούς:*

(i) Η σ.δ. $Z(\varTheta)$ είναι ένα $(P,\mathcal{F})$-martingale που ικανοποιεί $t \in \mathbb{R}_+$ τη συνθήκη $Z_t(\varTheta) \in \mathcal{L}^\ell(P)$.

(ii) $P \in \mathcal{M}^{*,\ell}_{S,\mathbf{Exp}(\varTheta)}$.

(iii) Υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $\widetilde{L} \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ έτσι ώστε $P_\theta \in \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{Exp}(\theta)}$ για κάθε $\theta \notin \widetilde{L}$.

(iv) Υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $\widetilde{L} \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ έτσι ώστε για κάθε $\theta \notin \widetilde{L}$ η σ.δ. $Z(\theta)$ να είναι ένα $(P_\theta, \mathcal{F})$-martingale που ικανοποιεί τη συνθήκη $Z_t(\theta) \in \mathcal{L}^{\ell}(P_\theta)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $\theta \notin \widetilde{L}$.

Τότε $(i) \Longleftrightarrow (ii)$ και $(iii) \Longleftrightarrow (iv)$.

Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι $\mathbb{E}_P[N_1 \mid \Theta] \in \mathcal{L}^{\ell}(P)$, τότε όλοι οι ισχυρισμοί (i) εώς (iv) είναι ισοδύναμοι.

Απόδειξη. Έστω $\ell = 1, 2$ και $t \in \mathbb{R}_+$ σταθερό. Η ισοδυναμία των ισχυρισμών (iii) και (iv) έπεται άμεσα από το Θεώρημα 4.3.1, ενώ η συνεπαγωγή $(ii) \Longrightarrow (i)$ προκύπτει από το [17], Proposition 5.1 (ii), μαζί με την υπόθεση $\Theta, X_1 \in \mathcal{L}^{\ell}(P)$.

$(i) \Longrightarrow (ii)$: Αρχικά παρατηρούμε ότι αφού $P \in \mathcal{M}_{S,\mathbf{K}(\Theta)}$, από τη Πρόταση 5.2.1 προκύπτει ότι υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $M_1 \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ έτσι ώστε $P_\theta \in \mathcal{M}_{S,\mathbf{K}(\theta)}$ για κάθε $\theta \notin M_1$. Αφού η σ.δ. $Z(\Theta)$ είναι ένα $(P, \mathcal{F})$-martingale εύκολα μπορούμε να δούμε ότι $\mathbb{E}_P[Z_t(\Theta)] = 0$, και άρα $\mathbb{E}_P[S_t \mid \Theta] = \mathbb{E}_P[S_1 \mid \Theta] \cdot t$, ή ισοδύναμα ότι $\mathbb{E}_P[N_t \mid \Theta] = \mathbb{E}_P[N_1 \mid \Theta] \cdot t$. Από το [14], Lemma 3.5 (i), έπεται ότι υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $M_2 \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ έτσι ώστε $\mathbb{E}_{P_\theta}[N_t] = \mathbb{E}_{P_\theta}[N_1] \cdot t$ για κάθε $\theta \notin M_2$. Θέτουμε $\widetilde{L} := M_1 \cup M_2$. Χρησιμοποιώντας τώρα τα επιχειρήματα της απόδειξης του Θεωρήματος 4.3.1 έχουμε ότι $P_\theta \in \mathcal{M}_{S,\mathbf{Exp}(\theta)}$ για κάθε $\theta \notin \widetilde{L}$ ή ισοδύναμα ότι $P \in \mathcal{M}_{S,\mathbf{Exp}(\Theta)}$. Καθώς όμως $Z_t(\Theta) \in \mathcal{L}^{\ell}(P)$, προκύπτει άμεσα η P-ολοκληρωσιμότητα των Θ^{ℓ} και X_1^{ℓ}, και άρα $P \in \mathcal{M}^{*,\ell}_{S,\mathbf{Exp}(\Theta)}$.

Υποθέτουμε επιπλέον τώρα ότι $\mathbb{E}^{\ell}_P[N_1 \mid \Theta] \in \mathcal{L}^1(P)$.

$(ii) \Longleftrightarrow (iii)$: Έστω $P_\theta \in \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{Exp}(\theta)}$ για κάθε $\theta \notin \widetilde{L}$. Από τη Πρόταση 5.2.1 μαζί με την Παρατήρηση 5.2.2 (b) λαμβάνουμε ισοδύναμα ότι $P \in \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{Exp}(\Theta)}$. Καθώς όμως $\mathbb{E}_P[N_1 \mid \Theta] \in \mathcal{L}^{\ell}(P)$, από το [14], Lemma 3.5 (i), έχουμε ισοδύναμα ότι $\mathbb{E}_{P_\theta}[N_1] \in \mathcal{L}^{\ell}(P_\Theta)$ για κάθε $\theta \notin \widetilde{L}$, ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη. □

Πόρισμα 5.4.4. *Έστω $P \in \mathcal{M}^{*,\ell}_{S,\mathbf{K}(\theta)}$ για $\ell = 1, 2$. Για κάθε συνάρτηση $\beta \in \widetilde{\mathcal{F}}^{\ell}_{P,\Theta}$ θέτουμε*

$$V(\Theta) := \{V_t(\Theta)\}_{t\in\mathbb{R}_+} := \{S_t - t \cdot \mathbb{E}_P[N_1 \mid \Theta] \cdot \mathbb{E}_P[X_1 \cdot e^{\beta(X_1,\Theta)} \mid \Theta]\}_{t\in\mathbb{R}_+}$$

και

$$V(\theta) := \{V_t(\theta)\}_{t\in\mathbb{R}_+} := \{S_t - t \cdot \mathbb{E}_{P_\theta}[N_1] \cdot \mathbb{E}_{P_\theta}[X_1 \cdot e^{\beta(X_1,\theta)}]\}_{t\in\mathbb{R}_+}.$$

Τότε για κάθε $\xi \in \mathcal{R}^{*,\ell}_{+}(D)$ υπάρχει ένα μοναδικό ζευγάρι $(\rho, Q) \in \mathfrak{M}_+(D) \times \mathcal{M}^{*,\ell}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\Theta))}$, μία ουσιωδώς μοναδική φ.δ.π. $\{Q_\theta\}_{\theta\in D}$ του Q επάνω στο Q_Θ συνεπής με το Θ και ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $\check{L} \in \mathfrak{B}(D)$, έτσι ώστε τα ακόλουθα να είναι ισοδύναμα:

(i) *Η σ.δ. $V(\Theta)$ είναι ένα $(Q,\mathcal{F})$-martingale που ικανοποιεί τη συνθήκη $V_t(\Theta) \in \mathcal{L}^\ell(Q)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$.*

(ii) *Για κάθε $\theta \notin \check{L}$ η σ.δ. $V(\theta)$ να είναι $(Q_\theta,\mathcal{F})$-martingale που ικανοποιεί τη συνθήκη $V_t(\theta) \in \mathcal{L}^\ell(Q_\theta)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $\theta \notin \check{L}$.*

Απόδειξη. Από το Πόρισμα 5.3.11 *(ii)* έπεται ότι υπάρχει ένα μοναδικό ζευγάρι $(\rho, Q) \in \mathfrak{M}_+(D) \times \mathcal{M}^{*,\ell}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\Theta))}$, μία ουσιωδώς μοναδική φ.δ.π. $\{Q_\theta\}_{\theta\in D}$ του Q επάνω στο Q_Θ συνεπής με το Θ, και ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $\check{L} \in \mathfrak{B}(D)$, έτσι ώστε $Q_\theta \in \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{Exp}(\theta)}$ για κάθε $\theta \notin \check{L}$ και να ικανοποιούνται οι συνθήκες $(**)$, (RPM_ξ) και (RPM_θ) για όλα τα $0 \leqslant u \leqslant t$ και $A \in \mathcal{F}_u$ και για κάθε $\theta \notin \check{L}$. Αλλά

$$V_t(\Theta) = S_t - t\cdot \mathbb{E}_P[N_1 \mid \Theta]\cdot \mathbb{E}_P[X_1\cdot e^{\gamma(X_1)+\alpha(\Theta)} \mid \Theta] = S_t - t\cdot \mathbb{E}_Q[S_1 \mid \Theta] \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R}_+$$

και

$$V_t(\theta) = S_t - t\cdot \mathbb{E}_{P_\theta}[N_1]\cdot \mathbb{E}_{P_\theta}[X_1\cdot e^{\gamma(X_1)+\alpha(\theta)}] = S_t - t\cdot \mathbb{E}_{Q_\theta}[S_1] \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R}_+ \quad \text{και } \theta \notin \check{L},$$

και άρα εφαρμόζοντας τώρα το Θεώρημα 5.4.3 ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

Άμεση συνέπεια του παραπάνω πορίσματος είναι ότι $\mathbb{M}(V(\Theta)) \neq \varnothing$ και $\mathbb{M}(V(\theta)) \neq \varnothing$ για κάθε $\theta \notin \check{L}$, δηλαδή και οι δύο σ.δ. $V(\Theta)$ και $V(\theta)$ ικανοποιούν τη συνθήκη (PEMM). Επιπλέον, έχουμε ότι $\mathbb{M}(V(\Theta)) \neq \varnothing$ αν και μόνο αν $\mathbb{M}(V(\theta)) \neq \varnothing$ για κάθε $\theta \notin \check{L}$. Το τελευταίο μας δείχνει ότι η $V(\Theta)$ είναι η πιό *φυσιολογική* σ.δ. που μπορούμε να θεωρήσουμε στον (Ω, Σ, P).

Στο τελευταίο αποτέλεσμα αυτής της ενότητας αποδεικνύεται ότι και οι δύο σ.δ. που θεωρήθηκαν στο Πόρισμα 5.4.4 ικανοποιούν τη συνθήκη (NFLVR).

Πόρισμα 5.4.5. *Έστω $P \in \mathcal{M}^{*,2}_{S,\mathbf{K}(\Theta)}$. Για κάθε ζευγάρι $(\beta,\xi) \in \widetilde{\mathcal{F}}^2_{P,\Theta} \times \mathcal{R}^{*,2}_+(D)$ υπάρχει ένα μοναδικό ζευγάρι $(\rho, Q) \in \mathfrak{M}_+(D) \times \mathcal{M}^{*,2}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\Theta))}$, μία ουσιωδώς μοναδική φ.δ.π. $\{Q_\theta\}_{\theta\in D}$ του Q επάνω στο Q_Θ συνεπής με το Θ και ένα μηδενικό σύνολο $\check{L} \in \mathfrak{B}(D)$ έτσι ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) *Η σ.δ. $V_{\mathbb{T}}(\Theta) := \{V_t(\Theta)\}_{t\in\mathbb{T}}$ ικανοποιεί τη συνθήκη (NFLVR).*

(ii) *Για κάθε $\theta \notin \check{L}$ η σ.δ. $V_{\mathbb{T}}(\theta) := \{V_t(\theta)\}_{t\in\mathbb{T}}$ ικανοποιεί τη συνθήκη (NFLVR).*

Απόδειξη. *(i)* Από το Πόρισμα 5.3.11 *(ii)*, για δοσμένο ζευγάρι $(\beta,\xi) \in \widetilde{\mathcal{F}}^2_{P,\Theta} \times \mathcal{R}^{*,2}_+(D)$ υπάρχει ένα μοναδικό ζευγάρι $(\rho, Q) \in \mathfrak{M}_+(D) \times \mathcal{M}^{*,2}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\Theta))}$. Επομένως από το Πόρισμα 5.4.4 συμπεραίνουμε ότι για κάθε $T > 0$ η σ.δ. $V_{\mathbb{T}}(\Theta)$ είναι ένα $(Q_T, \mathcal{F}_{\mathbb{T}})$-martingale, και άρα ένα $(Q_T, \mathcal{F}_{\mathbb{T}})$-ημί-martingale (βλ. π.χ. [26], Definition 7.1.1). Από το τελευταίο προκύπτει ότι η $V_{\mathbb{T}}$ είναι επίσης ένα $(P_T, \mathcal{F}_{\mathbb{T}})$-ημί-martingale, καθώς $P_T \sim Q_T$ (βλ. π.χ. [26], Theorem 10.1.8).

Αφού όμως η σ.δ. $V(\Theta)$ ικανοποιεί τη συνθήκη (PEMM) προκύπτει ότι η σ.δ. $V_{\mathbb{T}}(\Theta)$ θα ικανοποιεί τη συνθήκη (EMM). Επομένως, από το FTAP των Delbaen & Schachermayer για μη φραγμένες σ.δ. [5], Theorem 14.1.1, έπεται ότι η $V_{\mathbb{T}}(\Theta)$ θα ικανοποιεί τη συνθήκη (NFLVR).

(ii) Από το Πόρισμα 5.3.11 *(ii)*, για δοσμένο ζευγάρι $(\beta, \xi) \in \widetilde{\mathcal{F}}^2_{P,\Theta} \times \mathcal{R}^{*,2}_{+}(D)$ υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $\check{L} \in \mathfrak{B}(D)$ και μία ουσιωδώς μοναδική φ.δ.π. $\{Q_\theta\}_{\theta \in D}$ του Q επάνω στο Q_Θ συνεπής με το Θ έτσι ώστε για κάθε $\theta \notin \check{L}$ να ισχύει $(\rho, Q_\theta) \in \mathfrak{M}_{+}(D) \times \mathcal{M}^2_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\theta))}$. Εφαρμόζοντας τώρα το Πόρισμα 4.3.4 έπεται ότι για κάθε $\theta \notin \check{L}$ η σ.δ. $V_{\mathbb{T}}(\theta)$ ικανοποιεί τη συνθήκη (NFLVR). □

5.5 Εφαρμογές στην Τιμολόγηση Ασφαλιστικών Κινδύνων

Σκοπός αυτής της ενότητας είναι να συνδέσει τα θεωρητικά αποτελέσματα της Ενότητας 5.3 με τη τιμολόγηση ασφαλιστικών κινδύνων (αρχές υπολογισμού ασφαλίστρου).

Στα πλαίσια της κλασσικής Θεωρίας Κινδύνου το μοντέλο μίας σύνθετης σ.δ. Poisson S χρησιμοποιείται για να εκφράσει τον (πραγματικό ή τον υποκειμενικό) συνολικό κίνδυνο που αναλαμβάνει μία ασφαλιστική εταιρία για μία χρονική περίοδο $\mathbb{T} := [0, T]$, $T > 0$. Στα πλαίσια μίας ελεύθερης κερδοσκοπίας αγοράς και σύμφωνα με την *χρηματοοικονομική τιμολόγηση της ασφάλισης*, που εισήχθη από τους Delbaen & Haezendonck στο [4], η ιδέα είναι να ορίσουμε ένα νέο μέτρο Q έτσι ώστε να δίνεται μεγαλύτερο βάρος σε λιγότερο επιθυμητά αποτελέσματα. Πιο συγκεκριμένα, το μέτρο Q πρέπει να ορισθεί με τέτοιο τρόπο ώστε η ένταση ασφαλίστρου $p(Q) := \mathbb{E}_Q[S_1]$ να είναι πεπερασμένη και να περιέχει το *περιθώριο ασφαλείας*, δηλαδή $p(P) < p(Q) < \infty$ ή

$$\mathbb{E}_P[S_t] < \mathbb{E}_Q[S_t] \quad \text{για κάθε} \quad t > 0. \tag{5.9}$$

Για περισσότερες λεπτομέρειες βλ. [4], σελ. 269-271. Στην περίπτωση των σύνθετων μεικτών ανανεωτικών διαδικασιών, μία PCP θα μπορούσε να ορισθεί ως ένα μέτρο πιθανότητας Q επάνω στην $\varSigma := \mathcal{F}_\infty$ έτσι ώστε $Q \in \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\theta_0))}$ για $\theta_0 \in \varUpsilon$ (συγκ. με τον Ορισμό 4.4.1). Εδώ αξίζει να παρατηρηθεί ότι σε σχέση με τον Ορισμό 4.4.1 η κλάση όλων των PCPs είναι διευρυμένη, αφού $\varSigma = \mathcal{F}_\infty \supseteq \mathcal{F}^S_\infty$.

Σύμφωνα όμως με τον ορισμό που δόθηκε για τις PCPs ένα μέτρο $Q \in \mathcal{M}^{*,\ell}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\Theta))}$ δεν μπορεί να είναι μία PCP αφού, σύμφωνα με την Παρατήρηση 5.4.2, η τ.μ. Θ δεν μπορεί να είναι εκφυλισμένη. Παρ' όλα αυτά, τα Πορίσματα 5.3.11 και 5.4.4 μας δίνουν τη δυνατότητα να κατασκευάσουμε μία οικογένεια $\{Q_\theta\}_{\theta\in D}$ μέτρων πιθανότητας που είναι μία φ.δ.π. του Q επάνω στο Q_Θ συνεπής με το Θ, και τέτοια ώστε το μέτρο Q_θ να είναι μία PCP για P_Θ-σ.ο. τα $\theta \in D$. Επομένως φαίνεται φυσιολογικό να ονομάσουμε κάθε μέτρο πιθανότητας $Q \in \mathcal{M}^{*,\ell}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\Theta))}$ μία **μεικτή PCP**.

Παρατήρηση 5.5.1. Για $\ell = 1,2$ έστω $P \in \mathcal{M}^{*,\ell}_{S,\mathbf{K}(\Theta)}$ με την επιπλέον ιδιότητα $\mathbb{E}_P[N_t \mid \Theta] \in \mathcal{L}^1(P)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, και $Q \in \mathcal{M}^{*,\ell}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\Theta))}$. Αν $\{P_\theta\}_{\theta\in D}$ και $\{Q_\theta\}_{\theta\in D}$ είναι δύο φ.δ.πιθανότητες του P επάνω στο P_Θ και του Q επάνω στο Q_Θ, αντίστοιχα, συνεπείς με το Θ, με την ιδιότητα $\mathbb{E}_{P_\theta}[S_t] < \mathbb{E}_{Q_\theta}[S_t]$ για κάθε $t > 0$ και για P_Θ-σ.ο. τα $\theta \in D$ και αν $\xi(\theta) > 1$ για P_Θ-σ.ο. τα $\theta \in D$ τότε ισχύει η επιθυμητή ανισότητα $\mathbb{E}_P[S_t] < \mathbb{E}_Q[S_t]$ για κάθε $t > 0$.

Πράγματι, αφού $\{P_\theta\}_{\theta\in D}$ και $\{Q_\theta\}_{\theta\in D}$ είναι δύο φ.δ.πιθανότητες του P επάνω στο P_Θ και του Q επάνω στο Q_Θ, αντίστοιχα, συνεπείς με το Θ έχουμε ότι

$$\mathbb{E}_Q[S_t] = \int_\Omega \mathbb{E}_Q[S_t \mid \Theta]\, dQ = \int_D \mathbb{E}_{Q_\theta}[S_t]\, Q_\Theta(d\theta) \geqslant \int_D \mathbb{E}_{P_\theta}[S_t]\cdot \xi(\theta)\, P_\Theta(d\theta) \geqslant \mathbb{E}_P[S_t],$$

όπου η δεύτερη ισότητα έπεται από το [14], Lemma 3.5 (ii), ενώ η τελευταία ανισότητα έπεται από το γεγονός ότι $\xi(\theta) > 1$ για P_Θ-σ.ο. τα $\theta \in D$.

Στα τρία παραδείγματα που ακολουθούν με τη βοήθεια του Πορίσματος 5.3.11 δείχνουμε πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε μεικτές PCPs που ικανοποιούν τόσο την ιδιότητα $\mathbb{E}_P[S_t] < \mathbb{E}_Q[S_t]$ για κάθε $t > 0$ όσο και την ιδιότητα $\mathbb{E}_{P_\theta}[S_t] < \mathbb{E}_{Q_\theta}[S_t]$ για P_Θ-σ.ο. τα $\theta \in D$ και για κάθε $t > 0$.

Παράδειγμα 5.5.2. Σταθεροποιούμε $\ell = 1,2$. Έστω $D := \Upsilon^2$ και $\Theta : \Omega \longmapsto D$ ένα διδιάστατο τυχαίο διάνυσμα με $\Theta(\omega) = (\Theta_1(\omega), \Theta_2(\omega))$, όπου Θ_1 και Θ_2 είναι δύο P-ολοκληρώσιμες θετικές τυχαίες μεταβλητές στον Ω, και έστω $P \in \mathcal{M}^{*,\ell}_{S,\mathbf{K}(\Theta)}$ για $\ell = 1,2$, με

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+ \quad \mathbf{K}(\Theta)(t) := \frac{1}{2}\cdot \Theta_1 \cdot e^{-t\Theta_1} + \frac{1}{2}\cdot \Theta_2 \cdot e^{-t\Theta_2} \quad P \restriction \sigma(\Theta)\text{-σ.β..}$$

και

$$P_{X_1} = \mathbf{Ga}(\eta) \quad \text{με} \quad \eta = (\zeta, 2) \in \Upsilon^2$$

Επιπλέον, υποθέτουμε ότι το P_Θ είναι απόλυτα συνεχές ως προς το μέτρο του Lebesgue $\lambda \restriction \mathfrak{B}(D)$ και έστω $f_\Theta : D \longmapsto \Upsilon$ μία συνάρτηση πυκνότητας του Θ, και έστω $\{P_\theta\}_{\theta\in D}$ μία φ.δ.π. του P επάνω στο P_Θ συνεπής με το Θ. Θεωρούμε την πραγματική συνάρτηση $\beta := \gamma + \alpha$ στον $\Upsilon \times D$ με τύπο

$$\beta(x,\theta) := \ln \frac{\mathbb{E}_P[X_1]}{2c} - \ln x + \frac{2(c-1)}{c\cdot \mathbb{E}_P[X_1]}\cdot x + \ln \frac{\theta_1 + \theta_2}{2\cdot \mathbb{E}_P[N_1 \mid \{\Theta = \theta\}]} \quad \text{για κάθε} \quad (x,\theta) \in \Upsilon \times D$$

όπου $c > 2$ μία πραγματική σταθερά. Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι $\mathbb{E}_P[e^{\gamma(X_1)}] = 1$ και $\mathbb{E}_P[X_1^2 \cdot e^{\gamma(X_1)}] = 2 \cdot \left(\frac{c}{\zeta}\right)^2 < \infty$, δηλαδή $\gamma \in \mathcal{F}^{\ell}_{P,\ln}$, και άρα $\beta \in \widetilde{\mathcal{F}}^{\ell}_{P,\Theta}$. Έστω $\xi \in \mathfrak{M}_+(D)$ με τύπο

$$\xi(\theta) := \xi(\theta_1, \theta_2) := \frac{b_1 \cdot b_2}{f_\Theta(\theta)} \cdot e^{-b_1\theta_1 - b_2\theta_2} \quad \text{για κάθε } \theta \in D$$

όπου $b_1, b_2 \in \Upsilon$ είναι πραγματικές σταθερές. Προφανώς $\xi \in \mathcal{R}_+(D)$, αφού $\mathbb{E}_P[\xi(\Theta)] = 1$, και επομένως από το Πόρισμα 5.3.8 υπάρχει ένα μοναδικό ζευγάρι $(\rho, Q) \in \mathfrak{M}_+(D) \times \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\Theta))}$ που ικανοποιεί τις συνθήκες ($**$) και (RPM_ξ). Ιδιαιτέρως, από τη συνθήκη ($**$) έχουμε ότι $\rho(\theta) = \rho(\theta_1, \theta_2) = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$ για κάθε $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in D$, καθώς και

$$Q_\Theta(B) = \mathbb{E}_P[\chi_{\Theta^{-1}(B)} \cdot \xi(\Theta)] = \int_B b_1 \cdot b_2 \cdot e^{-b_1\theta_1 - b_2\theta_2}\, \lambda(d\theta_2)\, \lambda(d\theta_1) \quad \text{για κάθε } B \in \mathfrak{B}(D).$$

Επιπλέον, από το Λήμμα 4.1.3 (a), έχουμε

$$Q_{X_1}(\widetilde{B}) = \mathbb{E}_P[\chi_{X_1^{-1}(\widetilde{B})} \cdot e^{\gamma(X_1)}] = \int_{\widetilde{B}} \frac{\zeta}{c} \cdot e^{-\frac{\zeta}{c}\cdot x}\, \lambda(dx) \quad \text{για κάθε } \widetilde{B} \in \mathfrak{B}(\Upsilon),$$

δηλαδή $Q_{X_1} = \mathbf{Exp}(\frac{\zeta}{c})$. Καθώς όμως $\xi(\Theta) \cdot \big(\rho(\Theta)\big)^\ell \in \mathcal{L}^1(P)$ έπεται ότι $\xi \in \mathcal{R}^{*,\ell}_+(D)$, και άρα $(\rho, Q) \in \mathfrak{M}_+(D) \times \mathcal{M}^{*,\ell}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\Theta))}$. Επομένως, από το Πόρισμα 5.3.11, υπάρχει μία οικογένεια μέτρων πιθανότητας $\{Q_\theta\}_{\theta\in D}$ που ικανοποιεί τη συνθήκη (RPM_θ) και τέτοια ώστε κάθε μέτρο Q_θ να είναι μία PCP για P_Θ-σ.ο. τα $\theta \in D$. Επίσης από την Παρατήρηση 5.2.2 (b) προκύπτει ότι $(Q_\theta)_{X_1} = Q_{X_1}$ για P_Θ-σ.ο. τα $\theta \in D$.

Μετά από κάποιους υπολογισμούς έχουμε ότι

$$\mathbb{E}_{P_\theta}[N_t] = \frac{2 \cdot \theta_1 \cdot \theta_2}{\theta_1 + \theta_2} \cdot t + \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{\theta_2 + \theta_1}\right)^2 \cdot (1 - e^{-\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\cdot t})$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και για P_Θ-σ.ο. τα $\theta \in D$.

Πράγματι, αφού η $\{P_\theta\}_{\theta\in D}$ είναι μία φ.δ.π. του P επάνω στο P_Θ συνεπής με το Θ από το [16], Proposition 3.8, έχουμε ότι η N είναι μία P_θ-RP$(\mathbf{K}(\theta))$ για P_Θ-σ.ο. τα $\theta \in D$. Επομένως,

$$\forall\, s \in \mathbb{R}_+ \quad \widehat{\mathbf{K}}(\theta)(s) = \frac{\theta_1}{2} \cdot \frac{1}{s + \theta_1} + \frac{\theta_2}{2} \cdot \frac{1}{s + \theta_2} \quad \text{για } P_\Theta\text{-σ.ο. τα } \theta \in D,$$

όπου $\widehat{\mathbf{K}}(\theta)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes της $\mathbf{K}(\theta)$. Θέτοντας $c(t,\theta) := \mathbb{E}_{P_\theta}[N_t]$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ έχουμε ότι

$$\forall\, s \in \mathbb{R}_+ \quad \widehat{c}(s,\theta) = \frac{\widehat{\mathbf{K}}(\theta)(s)}{s(1 - \widehat{\mathbf{K}}(\theta)(s))} = \frac{s(\theta_1 + \theta_2) + 2\theta_1\theta_2}{s^2(2s + \theta_1 + \theta_2)} \quad \text{για } P_\Theta\text{-σ.ο. τα } \theta \in D.$$

Το τελευταίο μετά από κάποιες πράξεις μας δίνει

$$\forall\, s \in \mathbb{R}_+ \quad \widehat{c}(s,\theta) = \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{\theta_1 + \theta_2}\right)^2 \cdot \frac{1}{s} + \frac{2\theta_1\theta_2}{\theta_1 + \theta_2} \cdot \frac{1}{s^2} - \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{\theta_1 + \theta_2}\right)^2 \cdot \frac{1}{s + \frac{\theta_1+\theta_2}{2}} \quad \text{για } P_\Theta\text{-σ.ο. τα } \theta \in D.$$

Άρα παίρνοντας το αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace-Stieltjes προκύπτει ότι

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+ \quad \mathbb{E}_{P_\theta}[N_t] = \frac{2\theta_1\theta_2}{\theta_1+\theta_2}\cdot t + \left(\frac{\theta_2-\theta_1}{\theta_1+\theta_2}\right)^2 \cdot (1-e^{-\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\cdot t}) \quad \text{για } P_\Theta\text{-σ.ο. τα } \theta \in D.$$

Από την τελευταία ισότητα και λαμβάνοντας υπόψιν την ανισότητα $1-e^{-x} \leqslant x$ για κάθε $x \in (-1,\infty)$, έπεται ότι $\mathbb{E}_{P_\theta}[N_t] \leqslant \mathbb{E}_{Q_\theta}[N_t]$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και για P_Θ-σ.ο. τα $\theta \in D$.

Πράγματι, για P_Θ-σ.ο. τα $\theta \in D$ και για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{P_\theta}[N_t] &= \frac{2\cdot\theta_1\cdot\theta_2}{\theta_1+\theta_2}\cdot t + \left(\frac{\theta_2-\theta_1}{\theta_1+\theta_2}\right)^2 \cdot (1-e^{-\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\cdot t}) \\
&\leqslant \frac{2\cdot\theta_1\cdot\theta_2}{\theta_1+\theta_2}\cdot t + \left(\frac{\theta_2-\theta_1}{\theta_1+\theta_2}\right)^2 \cdot \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\cdot t \\
&= \frac{2\cdot\theta_1\cdot\theta_2}{\theta_1+\theta_2}\cdot t + \frac{(\theta_2-\theta_1)^2}{2\cdot(\theta_1+\theta_2)}\cdot t = \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\cdot t \\
&= \mathbb{E}_{Q_\theta}[N_t].
\end{aligned}$$

Καθώς όμως έχουμε ότι $\mathbb{E}_{Q_\theta}[X_1] = \frac{c}{\zeta_1} > \frac{2}{\zeta_1} = \mathbb{E}_{P_\theta}[X_1]$ για P_Θ-σ.ο. τα $\theta \in D$, τελικά προκύπτει ότι $\mathbb{E}_{P_\theta}[S_t] < \mathbb{E}_{Q_\theta}[S_t]$ για P_Θ-σ.ο. τα $\theta \in D$ και για κάθε $t > 0$. Αν υποθέσουμε επιπλέον ότι $\xi(\theta) > 1$ για P_Θ-σ.ο. τα $\theta \in D$ τότε είναι προφανές ότι η επιθυμητή συνθήκη (5.9) έπεται.

Παράδειγμα 5.5.3. Σταθεροποιούμε $\ell = 1,2$. Έστω $D := \Upsilon$ και Θ μία θετική τυχαία μεταβλητή, και έστω $P \in \mathcal{M}^{*,\ell}_{S,\mathbf{Ga}(\Theta,2)}$ έτσι ώστε

$$P_{X_1} = \mathbf{Exp}(\eta) \quad \text{με} \quad \eta \in \Upsilon \quad \text{και} \quad P_\Theta = \mathbf{Ga}(b_1,a_1) \quad \text{με} \quad a_1,b_1 \in \Upsilon.$$

Ορίζουμε την πραγματική συνάρτηση $\beta := \gamma + \alpha$ στον $\Upsilon \times D$ με τύπο

$$\beta(x,\theta) := \ln(1-c\cdot\mathbb{E}_P[X_1]) + c\cdot x + \ln\frac{\theta}{2\mathbb{E}_P[N_1 \mid \{\Theta=\theta\}]} \quad \text{για κάθε} \quad (x,\theta) \in \Upsilon \times D$$

όπου $c < \eta$ μία θετική σταθερά. Μετά από κάποιους απλούς υπολογισμούς έχουμε ότι $\mathbb{E}_P[e^{\gamma(X_1)}] = 1$ και $\mathbb{E}_P[X_1^2\cdot e^{\gamma(X_1)}] = \frac{2}{(\eta-c)^2} < \infty$, δηλαδή $\gamma \in \mathcal{F}^\ell_{P,\ln}$, και επομένως $\beta \in \widetilde{\mathcal{F}}^\ell_{P,\Theta}$. Θεωρώντας την $\xi \in \mathfrak{M}_+(D)$ με τύπο

$$\xi(\theta) := \frac{\Gamma(a_1)b_2^{a_2}}{\Gamma(a_2)b_1^{a_1}}\cdot\theta^{a_2-a_1}\cdot e^{-(b_2-b_1)\theta} \quad \text{για κάθε } \theta \in D$$

όπου $a_2, b_2 \in \Upsilon$ είναι πραγματικές σταθερές, έχουμε ότι $\mathbb{E}_P[\xi(\Theta)] = 1$, και επομένως $\xi \in \mathcal{R}_+(D)$. Εφαρμόζοντας το Πόρισμα 5.3.8 λαμβάνουμε ένα μοναδικό ζευγάρι $(\rho,Q) \in \mathfrak{M}_+(D) \times \mathcal{M}^\ell_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\Theta))}$ που ικανοποιεί τις συνθήκες ($**$) και (RPM_ξ). Ιδιαιτέρως, από την συνθήκη ($**$) προκύπτει ότι $\rho(\theta) = \frac{\theta}{2}$ για κάθε $\theta \in D$, καθώς και ότι

$$Q_\Theta(B_1) = \mathbb{E}_P[\chi_{\Theta^{-1}(B_1)}\cdot\xi(\Theta)] = \int_{B_1}\frac{b_2^{a_2}\theta^{a_2-1}}{\Gamma(a_2)}\cdot e^{-b_2\theta}\,\lambda(d\theta) \quad \text{για κάθε } B_1 \in \mathfrak{B}(D).$$

Επιπλέον, από το Λήμμα 4.1.3 (a), έχουμε

$$Q_{X_1}(B_2) = \mathbb{E}_P[\chi_{X_1^{-1}(B_2)} \cdot e^{\gamma(X_1)}] = \int_{B_2} (\eta - c) \cdot e^{-(\eta-c)\cdot x}\, \lambda(dx) \quad \text{για κάθε } B_2 \in \mathfrak{B}(\Upsilon),$$

δηλαδή $Q_{X_1} = \mathbf{Exp}(\eta - c)$. Καθώς όμως $\xi(\Theta) \cdot \big(\rho(\Theta)\big)^{\ell} \in \mathcal{L}^1(P)$ προκύπτει ότι $\xi \in \mathcal{R}_{+}^{*,\ell}(D)$. Επομένως $(\rho, Q) \in \mathfrak{M}_{+}(D) \times \mathcal{M}^{*,\ell}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\Theta))}$, και άρα σύμφωνα με το Πόρισμα 5.3.11 υπάρχει μία οικογένεια μέτρων πιθανότητας $\{Q_\theta\}_{\theta \in D}$ που ικανοποιεί τη συνθήκη (RPM_θ) και τέτοια ώστε κάθε μέτρο Q_θ να είναι μία PCP για P_Θ-σ.ο. τα $\theta \in D$. Επίσης από την Παρατήρηση 5.2.2 (b) προκύπτει ότι $(Q_\theta)_{X_1} = Q_{X_1}$ για P_Θ-σ.ο. τα $\theta \in D$. Επιπλέον, αφού η $\{P_\theta\}_{\theta\in D}$ είναι μία φ.δ.π. του P επάνω στο P_Θ συνεπής με το Θ, από το [16], Proposition 3.8, έχουμε ότι η N είναι μία P_θ-RP($\mathbf{Ga}(\theta, 2)$) για P_Θ-σ.ο. τα $\theta \in D$, και άρα από το Παράδειγμα 4.2.13 έχουμε ότι

$$\mathbb{E}_{P_\theta}[N_t] = \frac{t\theta}{2} - \frac{1 - e^{-2t\theta}}{4} \leqslant \frac{t\theta}{2} = \mathbb{E}_{Q_\theta}[N_t]$$

για P_Θ-σ.ο. τα $\theta \in D$ και για κάθε $t \geqslant 0$. Το τελευταίο μαζί με το γεγονός ότι $\mathbb{E}_{Q_\theta}[X_1] = \frac{1}{\eta - c} > \frac{1}{\eta} = \mathbb{E}_{P_\theta}[X_1]$ για P_Θ-σ.ο. τα $\theta \in D$ μας δίνει ότι $\mathbb{E}_{P_\theta}[S_t] < \mathbb{E}_{Q_\theta}[S_t]$ για P_Θ-σ.ο. τα $\theta \in D$ και για κάθε $t > 0$. Ας υποθέσουμε επιπλέον ότι $(a_1, b_1) = (3, 4)$ και $(a_2, b_2) = (5, 2)$. Επομένως, για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ έχουμε ότι

$$\mathbb{E}_P[N_t] = \mathbb{E}_P\big[\mathbb{E}_P[N_t \mid \Theta]\big] = \mathbb{E}_{P_\Theta}\big[\mathbb{E}_{P_\theta}[N_t]\big] = \frac{3t}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{4}{4 + 2t}\right)^3,$$

και

$$\mathbb{E}_Q[N_t] = \mathbb{E}_Q\big[\mathbb{E}_Q[N_t \mid \Theta]\big] = \mathbb{E}_{Q_\Theta}\big[\mathbb{E}_{Q_\theta}[N_t]\big] = \frac{5t}{2}$$

όπου και στις δύο περιπτώσεις η δεύτερη ισότητα έπεται από το [14], Lemma 3.5 (i). Άρα $\mathbb{E}_P[N_t] \leqslant \mathbb{E}_Q[N_t]$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$. Το τελευταίο μαζί με το γεγονός ότι $\mathbb{E}_P[X_1] = \mathbb{E}_{P_\theta}[X_1]$ και $\mathbb{E}_Q[X_1] = \mathbb{E}_{Q_\theta}[X_1]$ για P_Θ-σ.ο. τα $\theta \in D$ μας δίνει την επιθυμητή συνθήκη (5.9).

Παράδειγμα 5.5.4. Σταθεροποιούμε $\ell = 1, 2$. Έστω $D := (0, 1)$ και Θ μία θετική τυχαία μεταβλητή, και έστω $P \in \mathcal{M}^{*,\ell}_{S,\mathbf{Exp}(\Theta)}$ έτσι ώστε

$$P_{X_1} = \mathbf{Par}(2, 3) \quad \text{με} \quad \text{και} \quad P_\Theta = \mathbf{Be}(2, 3).$$

Ορίζουμε την πραγματική συνάρτηση $\beta := \gamma + \alpha$ στον $\Upsilon \times D$ με τύπο

$$\beta(x, \theta) := \ln \frac{4 \cdot 7^4}{3 \cdot 2^3} - 5 \cdot \ln(7 + x) + 4 \cdot \ln(2 + x) \quad \text{για κάθε} \quad (x, \theta) \in \Upsilon \times D$$

Μετά από κάποιους απλούς υπολογισμούς έχουμε ότι $\mathbb{E}_P[e^{\gamma(X_1)}] = 1$ και $\mathbb{E}_P[X_1^2 \cdot e^{\gamma(X_1)}] = \frac{49}{3} < \infty$, δηλαδή $\gamma \in \mathcal{F}^{\ell}_{P,\ln}$, και επομένως $\beta \in \widetilde{\mathcal{F}}^{\ell}_{P,\Theta}$. Θεωρούμε την $\xi \in \mathfrak{M}_+(D)$ με τύπο

$$\xi(\theta) := \frac{\theta}{1 - \theta} \quad \text{για κάθε } \theta \in D.$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι $\mathbb{E}_P[\xi(\Theta)] = 1$, δηλαδή $\xi \in \mathcal{R}_+(D)$. Εφαρμόζοντας το Πόρισμα 5.3.8 λαμβάνουμε ένα μοναδικό ζευγάρι $(\rho, Q) \in \mathfrak{M}_+(D) \times \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\Theta))}$ που ικανοποιεί τις συνθήκες $(**)$ και (RPM_ξ). Ιδιαιτέρως, από την συνθήκη $(**)$ προκύπτει ότι $\rho(\theta) = \theta$ για κάθε $\theta \in D$. Επιπλέον, από το Λήμμα 4.1.3 (a), έχουμε

$$Q_{X_1}(B) = \mathbb{E}_P[\chi_{X_1^{-1}(B)} \cdot e^{\gamma(X_1)}] = \int_B \frac{4}{7} \cdot \left(\frac{7}{7+x}\right)^5 \lambda(dx) \quad \text{για κάθε } B \in \mathfrak{B}(\Upsilon),$$

δηλαδή $Q_{X_1} = \mathbf{Par}(7,4)$. Καθώς όμως $\xi(\Theta) \cdot \Theta^{\ell} \in \mathcal{L}^1(P)$ προκύπτει ότι $\xi \in \mathcal{R}^{*,\ell}_+(D)$, και άρα $(\rho, Q) \in \mathfrak{M}_+(D) \times \mathcal{M}^{*,\ell}_{S,\mathbf{Exp}(\Theta)}$. Επιπλέον, για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ έχουμε ότι

$$\mathbb{E}_P[N_t] = t \cdot \mathbb{E}_P[\Theta] = \frac{2t}{5}$$

και

$$\mathbb{E}_Q[N_t] = t \cdot \mathbb{E}_Q[\Theta] = t \cdot \mathbb{E}_P[\xi(\Theta) \cdot \Theta] = \frac{3t}{5},$$

δηλαδή $\mathbb{E}_P[N_t] < \mathbb{E}_Q[N_t]$ για κάθε $t > 0$, κάτι που σε συνδυασμό με τη συνθήκη $\mathbb{E}_P[X_1] = 1 < \frac{7}{3} = \mathbb{E}_Q[X_1]$, μας δίνει την επιθυμητή σχέση (5.9).

Παραρτήματα

Παράρτημα A

Στοιχεία Θεωρίας Μέτρου

Στο παράρτημα αυτό αναφέρονται, για λόγους πληρότητας, κάποιες βασικές έννοιες της Θεωρίας Μέτρου που χρειαζόμαστε στα πλαίσια αυτής της διατριβής.

Θεώρημα A.1. (Το Θεώρημα της Μονότονης Κλάσης) Έστω Ω ένα σύνολο και $\mathcal{D}$ μία κλάση Dynkin υποσυνόλων του Ω. Υποθέτουμε ότι η οικογένεια $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{D}$ είναικλειστή ως προς τις πεπερασμένες τομές. Τότε η $\mathcal{D}$ περιέχει τη $\sigma(\mathcal{G})$.

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [7], 136B.

Θεώρημα A.2. (Το Θεώρημα Radon-Nikodým) Έστω (Ω, Σ) μ.χ. και έστω μ και ν δύο μέτρα πιθανότητας επάνω στην Σ. Εάν το ν είναι απόλυτα συνεχές ως προς το μ, τότε υπάρχει μία Σ-μετρήσιμη συνάρτηση $g : \Omega \longmapsto [0, +\infty)$ έτσι ώστε

$$\nu(A) = \int_A g\, d\mu \quad \text{για κάθε} \quad A \in \Sigma.$$

Η συνάρτηση g είναι μ-σ.β. μοναδική.

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [3], Theorem 4.2.2.

Ορισμός A.3. Έστω (Ω, Σ, P) και (Υ, T, Q) δύο χ.π. και $\mathcal{G} := \{A \times B : A \in \Sigma, B \in T\}$.

(a) Η οικογένεια $\Sigma \otimes T := \sigma(\mathcal{G})$ ονομάζεται η **σ-άλγεβρα γινόμενο** της Σ και T.

(b) Για κάθε $E \subseteq \Omega \times \Upsilon$, και $x \in \Omega$ και $y \in \Upsilon$ αυθαίρετα αλλά σταθερά, τα σύνολα

$$E_x := \{\bar{y} \in \Upsilon : (x, \bar{y}) \in E\}$$

και

$$E^y := \{\bar{x} \in \Omega : (\bar{x}, y) \in E\}$$

ονομάζονται η **x-τομή** και η **y-τομή** (x-section and y-section) του E, αντίστοιχα.

(c) Αν η $f : \Omega \times \Upsilon \longmapsto \mathbb{R}$ είναι οποιαδήποτε συνάρτηση και τα $x \in \Omega$ και $y \in \Upsilon$ είναι αυθαίρετα αλλά σταθερά, τότε οι συναρτήσεις

$$f_x : \Upsilon \longmapsto \mathbb{R} : \bar{y} \longmapsto f_x(\bar{y}) := f(x, \bar{y})$$

και

$$f^y : \Omega \longmapsto \mathbb{R} : \bar{x} \longmapsto f^y(\bar{x}) := f(\bar{x}, y)$$

ονομάζονται η **x-τομή** της f και η **y-τομή** της f, αντίστοιχα.

Λήμμα A.4. Έστω (Ω, Σ) και (Υ, T) μετρήσιμοι χώροι. Τότε ισχύει:

(i) Για κάθε $E \in \Sigma \otimes T$ και για κάθε $x \in \Omega$ και $y \in \Upsilon$ έχουμε $E_x \in T$ και $E^y \in \Sigma$.

(ii) Για κάθε $\Sigma \otimes T$- μετρήσιμη συνάρτηση $f : \Omega \times \Upsilon \longmapsto \mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \Omega$ και $y \in \Upsilon$ οι συναρτήσεις $f_x : \Upsilon \longmapsto \mathbb{R}$ και $f^y : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ είναι T- και Σ- μετρήσιμες, αντίστοιχα.

Θεώρημα A.5. (Fubini για δείκτριες συναρτήσεις) Έστω (Ω, Σ, P) και (Υ, T, Q) χ.π., και $E \in \Sigma \otimes T$ αυθαίρετο αλλά σταθερό. Τότε η συνάρτηση $Q(E_\bullet) : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ με $x \longmapsto Q(E_x)$ είναι Σ-μετρήσιμη και η συνάρτηση $P(E^\bullet) : \Upsilon \longmapsto \mathbb{R}$ με $y \longmapsto P(E^y)$ είναι T-μετρήσιμη και ισχύει

$$\int_\Omega Q(E_x)P(dx) = \int_\Upsilon P(E^y)Q(dy). \tag{A.1}$$

Θεώρημα A.6. (Ύπαρξη και μοναδικότητα του μέτρου γινόμενο) Έστω (Ω, Σ, P) και (Υ, T, Q) χ.π. Τότε υπάρχει ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας $P \otimes Q : \Sigma \otimes T \longmapsto [0, 1]$ ώστε

$$(P \otimes Q)(A \times B) = P(A)Q(B)$$

για κάθε $A \in \Sigma$ και $B \in T$. Το μέτρο $P \otimes Q$ ονομάζεται το **μέτρο γινόμενο** των P και Q, Επιπλέον, για κάθε $E \in \Sigma \otimes T$ ισχύει

$$(P \otimes Q)(E) = \int_\Omega Q(E_x)P(dx) = \int_\Upsilon P(E^y)Q(dy).$$

Για τις αποδείξεις των τριών τελευταίων αποτελεσμάτων βλ. π.χ. [3], Theorem 5.1.3.

Θεώρημα A.7. (Fubini για μη αρνητικές συναρτήσεις) Έστω (Ω, Σ, P) και (Υ, T, Q) χ.π.. Για κάθε $f : \Omega \times \Upsilon \longmapsto [0, \infty]$ $\Sigma \otimes T - \mathfrak{B}([0, \infty])$-μετρήσιμη συνάρτηση θέτουμε

$$\varphi_f : \Omega \longmapsto [0, \infty] \quad \text{με} \quad \varphi_f(x) := \int_\Upsilon f_x(y)Q(dy)$$

και

$$\psi_f : \Upsilon \longmapsto [0, \infty] \quad \text{με} \quad \psi_f(y) := \int_\Omega f^y(x)Q(dx).$$

Τότε η φ_f είναι $\Sigma - \mathfrak{B}([0,\infty])$-μετρήσιμη, η η ψ_f είναι $T - \mathfrak{B}([0,\infty])$-μετρήσιμη και ισχύει

$$\int_{\Omega\times\Upsilon} f dP \otimes Q = \int_{\Omega} \varphi_f dP = \int_{\Upsilon} \psi_f dQ$$

δηλαδή

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\times\Upsilon} f d(P\otimes Q) &= \int_{\Omega}\int_{\Upsilon} f(x,y)Q(dy)P(dx)\\ &= \int_{\Upsilon}\int_{\Omega} f(x,y)P(dx)Q(dy)\end{aligned}$$

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [3], Proposition 5.2.1.

Θεώρημα A.8. (Fubini) Έστω (Ω,Σ,P) και (Υ,T,Q) χ.π. και $f : \Omega\times\Upsilon \longmapsto \overline{\mathbb{R}}$ me $f \in \mathcal{L}^1(P\otimes Q)$. Τότε

(i)

$$f_x \in \mathcal{L}^1(Q), \quad \text{για} \quad P - \sigma.o \quad \text{τα} \quad x\in\Omega$$

και

$$f^y \in \mathcal{L}^1(P), \quad \text{για} \quad Q - \sigma.o \quad \text{τα} \quad y\in\Upsilon,$$

(ii) οι συναρτήσεις $\varphi_f : \Omega \longmapsto \overline{\mathbb{R}}$ με

$$\varphi_f(x) := \begin{cases}\int_{\Upsilon} f_x(y)Q(dy), & \text{αν} \quad f_x \in \mathcal{L}^1(Q)\\ 0, & \text{διαφορετικά,}\end{cases}$$

και $\psi_f : \Upsilon \longmapsto \overline{\mathbb{R}}$ με

$$\psi_f(y) := \begin{cases}\int_{\Omega} f^y(x)P(dx), & \text{αν} \quad f^y \in \mathcal{L}^1(P)\\ 0, & \text{διαφορετικά}\end{cases}$$

ανήκουν στον $\mathcal{L}^1(P)$ και $\mathcal{L}^1(Q)$, αντίστοιχα,

(iii) ισχύει

$$\int_{\Omega\times\Upsilon} f d(P\otimes Q) = \int_{\Omega} \varphi_f dP = \int_{\Upsilon} \psi_f dQ$$

δηλαδή

$$\int_{\Omega\times\Upsilon} f d(P\otimes Q) = \int_{\Omega}\int_{\Upsilon} f(x,y)Q(dy)P(dx) = \int_{\Upsilon}\int_{\Omega} f(x,y)P(dx)Q(dy)$$

όπου θέτουμε

$$\int_{\Upsilon} f(x,y)Q(dy) = 0, \quad \text{αν} \quad f_x \notin \mathcal{L}^1(Q)$$

και

$$\int_{\Omega} f(x,y)P(dx) = 0, \quad \text{αν} \quad f^y \notin \mathcal{L}^1(P).$$

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [3], Theorem 5.2.2.

Παράρτημα Β

Στοιχεία Θεωρίας Πιθανοτήτων

Στο παράρτημα αυτό αναφέρονται, για λόγους πληρότητας, κάποιες βασικές έννοιες της Θεωρίας Πιθανοτήτων καθώς και οι κατανομές που χρησιμοποιούνται στα πλαίσια αυτής της διατριβής.

Ένα μέτρο πιθανότητας $Q : \mathfrak{B}_n \longrightarrow [0,1]$ ονομάζεται **κατανομή**. Στην συνέχεια του παρόντος παραρτήματος θεωρούμε μόνο κατανομές με πεδίο ορισμού το $\mathfrak{B}$.

Ορισμός B.1. Μία κατανομή $Q : \mathfrak{B} \longmapsto [0,1]$ ονομάζεται:

(i) **Εκφυλισμένη** (degenerate), αν υπάρχει $y \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $Q(\{y\}) = 1$.

(ii) **Διακριτή**, αν υπάρχει ένα αριθμήσιμο σύνολο $S \in \mathfrak{B}$ που ικανοποιεί την $Q[S] = 1$. Αν $Q[\mathbb{N}_0] = 1$, τότε η Q είναι απόλυτα συνεχής ως προς το μέτρο απαρίθμισης $\boldsymbol{\xi}$ στο $\mathbb{N}_0$.

(iii) **Συνεχής**, αν είναι απόλυτα συνεχής ως προς το μέτρο Lebesgue λ στον $\mathbb{R}$.

Για $y \in \mathbb{R}$, η **κατανομή Dirac** δ_y ορίζεται να είναι η (εκφυλισμένη) κατανομή Q που ικανοποιεί την

$$Q(\{y\}) = 1.$$

Λόγω του ιδιαίτερου ρόλου της κατανομής Dirac, όλες οι παραμετρικές κλάσεις των κατανομών που μελετούνται παρακάτω ορίζονται ως μη-εκφυλισμένες κατανομές.

Η κατανομή Poisson

Ορισμός B.2. Για $\alpha \in (0,\infty)$, η **κατανομή Poisson** (συμβ. $\mathbf{P}(\alpha)$) ορίζεται να είναι η κατανομή Q που για κάθε $x \in \mathbb{N}_0$ ικανοποιεί την σχέση

$$Q[\{x\}] = e^{-\alpha} \cdot \frac{\alpha^x}{x!}.$$

Βασικά μεγέθη κατανομής:

- Μέση τιμή:
$$\mathbb{E}[Q] = \alpha$$
- Διακύμανση:
$$Var[Q] = \alpha$$

Η κατανομή γάμμα

Ορισμός B.3. Για $\alpha, \beta \in (0, \infty)$, η **κατανομή γάμμα** (συμβ. $\mathbf{Ga}(\alpha, \beta)$) ορίζεται να είναι η κατανομή

$$Q(B) := \int_B \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} \cdot x^{\beta-1} \cdot e^{-\alpha x} \cdot \chi_{(0,\infty)}(x)\, \lambda(dx) \quad \text{για κάθε} \quad B \in \mathfrak{B},$$

όπου

$$\Gamma(\beta) := \int_0^\infty x^{\beta-1} \cdot e^{-x}\, dx \quad \text{για κάθε} \quad \beta \in (0, \infty).$$

Βασικά μεγέθη κατανομής:

- Μέση τιμή:
$$\mathbb{E}[Q] = \frac{\beta}{\alpha}$$
- Διακύμανση:
$$Var[Q] = \frac{\beta}{\alpha^2}$$

Ειδική περίπτωση: Η **εκθετική κατανομή** $\mathbf{Exp}(\alpha) := \mathbf{Ga}(\alpha, 1)$.

Η αντίστροφη κατανομή γάμμα

Ορισμός B.4. Για $\alpha, \beta \in (0, \infty)$, η **αντίστροφη κατανομή γάμμα** (συμβ. $\mathbf{IGa}(\alpha, \beta)$) ορίζεται να είναι η κατανομή

$$Q(B) := \int_B \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} \cdot x^{-\beta-1} \cdot e^{-\alpha/x} \cdot \chi_{(0,\infty)}(x)\, \lambda(dx) \quad \text{για κάθε} \quad B \in \mathfrak{B}.$$

Η κατανομή βήτα

Ορισμός B.5. Για $\alpha, \beta \in (0, \infty)$, η **κατανομή βήτα** (συμβ. $\mathbf{Be}(\alpha, \beta)$) ορίζεται να είναι η κατανομή

$$Q(E) := \int \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot (1-x)^{\beta-1} \cdot \chi_{(0,1)}(x)\, \lambda(dx) \quad \text{για κάθε} \quad E \in \mathfrak{B},$$

όπου

$$B(\alpha, \beta) := \frac{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}.$$

Βασικά μεγέθη κατανομής:

- Μέση τιμή:
$$\mathbb{E}[Q] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$
- Διακύμανση:
$$Var[Q] = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

Ειδική περίπτωση: **Η ομοιόμορφη κατανομή** $\mathbf{U}(0,1) := \mathbf{Be}(1,1)$.

Η κανονική κατανομή

Ορισμός Β.6. Για $(\mu,\sigma) \in \mathbb{R}\times(0,\infty)$, η **κανονική κατανομή** (συμβ. $\mathbf{N}(\mu,\sigma^2)$) ορίζεται να είναι η κατανομή

$$Q(B) := \int_B \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \chi_{\mathbb{R}}(x)\,\lambda(dx) \quad \text{για κάθε } B \in \mathfrak{B}$$

Η λογαριθμο-κανονική κατανομή

Ορισμός Β.7. Για $(\mu,\sigma) \in \mathbb{R}\times(0,\infty)$, η **λογαριθμο-κανονική κατανομή** (συμβ. $\mathbf{LN}(\mu,\sigma^2)$) ορίζεται να είναι η κατανομή

$$Q(B) := \int_B \frac{1}{x\cdot\sigma\cdot\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \chi_{(0,\infty)}(x)\,\lambda(dx) \quad \text{για κάθε } B \in \mathfrak{B}$$

Η κατανομή Pareto

Ορισμός Β.8. Για $\alpha,\beta \in (0,\infty)$, η **κατανομή Pareto** (συμβ. $\mathbf{Par}(\alpha,\beta)$) ορίζεται να είναι η κατανομή

$$Q(B) := \int_B \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{\alpha+x}\right)^{\beta+1} \chi_{(0,\infty)}(x)\,\lambda(dx) \quad \text{για κάθε } B \in \mathfrak{B}.$$

Βιβλιογραφία

[1] Λυμπερόπουλος, Δ. Π. : *Martingale - Ισοδύναμες Κατανομές Πιθανότητας με Εφαρμογές στις Αρχές Υπολογισμού Ασφαλίστρου*, Διδακτορική Διατριβή, Τμήμα Στατιστικής & Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς. (2013).

[2] Albrecht, P. : *Über einige Eigenshaften des gemischten Poissonprozesses*, Mitt. Ver. Schweiz. Vers. Math. **81**, (1981), 241–250.

[3] Cohn, D.L. : *Measure Theory 2nd edition*, Birkhäuser Advanced Texts. (2013)

[4] Delbaen, F. and Haezendonck, J. : *A martingale approach to premium calculation principles in an arbitrage free market*, Insur. Math. Econ., **8**(4), (1989), 269-277.

[5] Delbaen, F. and Schachermayer, W. : *The Mathematics of Arbitrage*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg. (2006)

[6] Faden, A. M. : *The existence of regular conditional probabilities: Necessary and sufficient conditions*, Ann. Probab. **13**, (1985), 288–298.

[7] Fremlin, D.H. : *Measure Theory, Vol. 1.* Torres Fremlin (Ed.). (2003)

[8] Fremlin, D. H. : *Measure Theory, Vol. 3.* Torres Fremlin (Ed.). (2003)

[9] Fremlin, D. H. : *Measure Theory, Vol. 4.* Torres Fremlin (Ed.). (2003)

[10] Grandell, J. : *Mixed Poisson Processes*, Chapman & Hall. (1997)

[11] Huang, W. J. : *On the Characterization of Point Processes with the Exchangeable and Markov Properties*, Sankhyā **52**A, (1990), 16–27.

[12] Harisson, J.M. and Kreps, D.M. : *Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets*, J. Econ. Theory **20**, (1979), 381-408.

[13] Karatzas, I. and Shreve, S. : *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag New York. (1998)

[14] Lyberopoulos, D. P. and Macheras, N. D. : *Some characterizations of mixed Poisson processes*, Sankhyā, **74**A, (2012), 57–79.

[15] Lyberopoulos, D. P. and Macheras, N. D. : *A construction of mixed Poisson Processes via Disintegrations*, Math. Slovaca **63**, (2013), 167–182.

[16] Lyberopoulos, D. P. and Macheras, N. D. : *Some characterizations of mixed renewal processes*, arXiv:1205.4441v4, (2014), 1–25.

[17] Lyberopoulos, D. P. and Macheras, N. D. : *A characterization of martingale-equivalent compound mixed Poisson processes*, preprint of 2018

[18] Ng, A. C. Y. and Yang, H. : *Lundberg-Type Bounds for the Joint Distribution of Surplus Immediately Before and at Ruin Under the Sparre Andersen Model*, NAAJ, **9**(2), (2013), 85–99.

[19] Schmidt, K. D. : *Lectures on Risk Theory*, B.G. Teubner, Stuttgart. (1996)

[20] Schmidt, K. D. and Zocher, M. : *Claim Number Processes having the Multinomial Property*, (2003), 1–10.

`http://www.math.tu-dresden.de/sto/schmidt/dsvm/dsvm2003-1.pdf`

[21] Serfozo, R. F. : *Conditional Poisson Processes*, J. Appl. Probab., **9**, (1972), 288–302.

[22] Serfozo, R. F. : *Processes with Conditional Stationary Independent Increments*, J. Appl. Probab., **9**, (1972), 303–315.

[23] Serfozo, R. : *Basics of applied stochastic processes*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg. (2009)

[24] Sondermann, D. : *Reinsurance in arbitrage-free markets*, Insur. Math. Econ., **10**(3), (1991), 191–202.

[25] Strauss, W., Macheras, N.D. and Musiał, K. : Splitting of liftings in products of probability spaces, Ann. Probab. **32**, (2004), 2389–2408.

[26] von Weizsäcker, H. and Winkler, G. : *Stochastic Integrals: An Introduction*, Vieweg+Teubner Verlag. (1990)

[27] Zocher, M. : *Multivariate Mixed Poisson Processes*, Doctoral Thesis, Dresden University of Technology. (2005)

`http://webdoc.sub.gwdg.de/ebook/dissts/Dresden/Zocher2005.pdf`

Ερευνητικές Εργασίες που Προέκυψαν από τη Διδακτορική Διατριβή

Δημοσιευμένες Εργασίες

(E1) Macheras, N. D. and Tzaninis, S. M. : *Some Characterizations for Markov Processes as Mixed Renewal Processes*, to appear in Math. Slo. (2017), pp 1–23.

(E2) Lyberopoulos, D. P., Macheras, N. D. and Tzaninis, S. M. : *On the Equivalence of Various Definitions of Mixed Poisson Processes*, to appear in Math. Slo. (2018), pp 1–20.

Εργασίες υπό κρίση

(E3) Macheras, N. D. and Tzaninis, S. M. : *Change of Measures for Compound Renewal Processes with Applications to Premium Calculation Principles* (2018), pp 1–20. Available at `arXiv:1707.02149v2`.

Εργασίες υπό προετοιμασία

(E4) Macheras, N. D. and Tzaninis, S. M. : *Change of Measures for Compound Mixed Renewal Processes with Applications.*

(E5) Macheras, N. D. and Tzaninis, S. M. : *No Free Lunch with Vanishing Risk and Mixed Premium Calculation principles.*

Ανακοινώσεις σε Συνέδρια Αποτελεσμάτων της Διδακτορικής Διατριβής

Πανελλήνια Συνέδρια

(ΕΣ1) Μαχαιράς, Ν. Δ. & **Τζανίνης, Σ. Μ.** : *Το πρόβλημα της αναγωγής μεμειγμένων ανανεωτικών διαδικασιών σε μεμειγμένες Poisson και συνέπειες μίας λύσης του.*
26ο Πανελλήνιο Συνέδριο Ε.Σ.Ι, Πειραιάς, 8–12 Μαΐου 2013.

(ΕΣ2) Μαχαιράς, Ν. Δ. & **Τζανίνης, Σ. Μ.** : *Χαρακτηρισμοί μεικτών ανανεωτικών διαδικασιών με την Μαρκοβιανή ιδιότητα.*
27ο Πανελλήνιο Συνέδριο Ε.Σ.Ι, Θεσσαλονίκη, 23–26 Απριλίου 2014.

(ΕΣ3) Λυμπερόπουλος, Δ. Π., Μαχαιράς, Ν. Δ. & **Τζανίνης, Σ. Μ.** : *Ισοδυναμία ορισμών μεικτών στοχαστικών διαδικασιών Poisson.*
28ο Πανελλήνιο Συνέδριο Ε.Σ.Ι, Αθήνα, 15–18 Απριλίου 2015.

(ΕΣ4) Macheras, N. D. & **Tzaninis, S. M.** : *The problem of the preservation of the distribution of a compound mixed renewal process under a change of measure.*
29ο Πανελλήνιο Συνέδριο Ε.Σ.Ι, Θεσσαλονίκη–Νάουσα, 4–7 Μαΐου 2016.

(ΕΣ5) Μαχαιράς, Ν. Δ. & **Τζανίνης, Σ. Μ.** : *Αλλαγή μέτρου για σύνθετες ανανεωτικές διαδικασίες με εφάρμογες στις αρχές υπολογισμού ασφαλίστρου.*
30ο Πανελλήνιο Συνέδρειο Ε.Σ.Ι, Πύλα, Κύπρος, 20–22 Απριλίου 2017.

(ΕΣ6) Μαχαιράς, Ν. Δ. & **Τζανίνης, Σ. Μ.** : *Μία τεχνική αλλαγής μέτρου για μεικτές σύνθετες ανανεωτικές διαδικασίες.*
31ο Πανελλήνιο Συνέδρειο Ε.Σ.Ι, Λαμία, 4–6 Μαΐου 2018.

Διεθνή Συνέδρια

(ΔΣ1) Macheras, N. D. & **Tzaninis, S. M.** : *Some characterizations for mixed Poisson processes in terms of the Markov and the multinomial property.*
29th European Meeting of Statisticians, Budapest, July 20 – 25, 2013.

(ΔΣ2) Macheras, N. D. & **Tzaninis, S. M.** : *When a Markov mixed renewal process is a mixed Poisson one?*
11th International Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics, Vilnius, June 30 – July 4, 2014

(ΔΣ3) Macheras, N. D. & **Tzaninis, S. M.** : *The problem of the preservation of the distribution of a compound mixed renewal process under a change of measure.*
17th International Summer Conference on Probability and Statistics, Pomorie, Bulgaria, June 25 – July 1, 2016.

(ΔΣ4) Macheras, N. D. & **Tzaninis, S. M.** : *Change of Measures for Compound Renewal Processes with Applications to Premium Calculation Principles.*
21st International Congress on Insurance: Mathematics and Economics, Vienna, Austria, July 2 – 5, 2017.

(ΔΣ5) Macheras, N. D. & **Tzaninis, S. M.** : *Change of Measure for Compound Mixed Renewal Processes with Applications to Premium Calculation Principles.*
10th Conference in Actuarial Science & Finance, Samos, May 30 – June 3, 2018.

(ΔΣ6) Macheras, N. D. & **Tzaninis, S. M.** : *Change of Measure for Compound Renewal Processes with Applications to Premium Calculation Principles.*
First Congress of Greek Mathematicians, Athens, June 25–30, 2018.

Ευρετήριο Συγγραφέων

Ευρετήριο Όρων

Ευρετήριο Συμβόλων