ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΣΧΟΛΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Αλλαγή μέτρου για σύνθετες μεικτές ανανεωτικές διαδικασίες με εφαρμογές στις αρχές υπολογισμού ασφαλίστρου

Ηλιοπούλου Χριστίνα-Στέλλα

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Πειραιάς
Ιούλιος 2018

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΣΧΟΛΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Αλλαγή μέτρου για σύνθετες μεικτές ανανεωτικές διαδικασίες με εφαρμογές στις αρχές υπολογισμού ασφαλίστρου

Ηλιοπούλου Χριστίνα-Στέλλα

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Πειραιάς
Ιούλιος 2018

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ'αριθμ / συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Καθηγητής Νικόλαος Μαχαιράς (Επιβλέπων)
- Αναπλ. Καθηγητής Κωνσταντίνος Πολίτης
- Αναπλ. Καθηγητής Βασίλειος Σεβρόγλου

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS
SCHOOL OF FINANCE AND STATISTICS
DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

Change of measure for compound mixed renewal processes with applications to premium calculation principles

by
Christina-Stella Iliopoulou

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management.

Piraeus, Greece
July 2018

Περίληψη

Για δοσμένη σύνθετη ανανεωτική διαδικασία S κάτω από ένα μέτρο πιθανότητας P παρουσιάζεται ένας χαρακτηρισμός όλων των μέτρων πιθανότητας Q επάνω στο πεδίο ορισμού του P, ώστε τα P και Q να είναι προοδευτικά ισοδύναμα και η S να παραμένει μία σύνθετη ανανεωτική διαδικασία κάτω από το Q. Ως συνέπεια αποδεικνύεται, ότι κάθε σύνθετη ανανεωτική διαδικασία μπορεί να μετατραπεί σε μία σύνθετη *Poisson* μέσω μιας αλλαγής μέτρων, και παρουσιάζονται κάποιες εφαρμογές στις αρχές υπολογισμού ασφαλίστρου.

Τα παραπάνω αποτελέσματα γενικεύονται στις σύνθετες μεικτές ανανεωτικές διαδικασίες. Τα αποτελέσματα αυτά γενικεύουν προηγούμενα αποτελέσματα των *Delbaen* & *Haezendonck* [10] και του Λυμπερόπουλου Δ.Π. [2].

Abstract

For a given compound renewal process S under a probability measure P, a characterization at all probability measures Q on the domain of P such that P and Q are progressively equivalent and S is a compound renewal process under Q is presented. As a consequence, it is proven that any compound renewal process can be converted into a compound Poisson one through a change of measure, and some applications to premium calculation principles are presented. A special instance of the above result is the main result of *Delbaen* & *Haezendonck* [10].

A generalization of the above results is proven for compound mixed renewal processes, extending in this way the main result of Lyberopoulos D.P. [2].

Περιεχόμενα

Κατάλογος Συντομογραφιών

τ.μ.	: Τυχαία μεταβλητή
σ.(π).π.	: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας
σ.κ.	: Συνάρτηση κατανομής πιθανότητας
σ.δ	: Στοχαστική διαδικασία
μ.χ.	: Μετρήσιμος χώρος
χ.π.	: Χώρος Πιθανότητας
χ.σ.	: Χαρακτηριστική συνάρτηση
σ.β.	: Σχεδόν βέβαια
σ.ο.	: Σχεδόν όλα
κ.δ.π	: Κανονική δεσμευμένη πιθανότητα
φ.δ.π.	: Φυσιολογική δεσμευμένη πιθανότητα
i.i.d	: Ισοκατανεμημένες και ανεξάρτητες
πρβλ.	: Παράβαλε
MPP	: Μεικτή διαδικασία Poisson
CMPP	: Σύνθετη Μεικτής Poisson
CRP	: Σύνθετη ανανεωτική διαδικασία
CMRP	: Σύνθετη Μεικτή ανανεωτική διαδικασία

Εισαγωγή

Είναι γνωστό ότι στην Κλασική Θεωρία Κινδύνου χρησιμοποιείται η σ.δ. Poisson. Όμως η διαδικασία Poisson στην πράξη δεν είναι τόσο χρήσιμη αφού στα χαρτοφυλάκια μεγάλων ασφαλιστικών εταιρειών τα ασφάλιστρα για μεγάλους πληθυσμούς δεν είναι σταθερά. Για το λόγο αυτό πιο χρήσιμες είναι οι σ.δ. όπου τα ασφάλιστρα παίρνουν τιμές από μία τ.μ.. Τέτοιες σ.δ. είναι οι σύνθετες μεικτές διαδικασίες Poisson και πιό γενικά οι σύνθετες μεικτές ανανεωτικές διαδικασίες.

Όταν έχουμε μία σ.δ. κάτω απο ένα μέτρο P πολλές φορές είναι χρήσιμο να αλλάξουμε το μέτρο P με ένα μέτρο Q έτσι ώστε η διαδικασία μας να έχει γενικά καλύτερες ιδιότητες ως προς το νέο μέτρο. Στην παρούσα εργασία γίνεται μία συστηματική μελέτη τέτοιων αλλαγών μέτρων για τις σύνθετες ανανεωτικές διαδικασίες και στην συνέχεια για τις σύνθετες μεικτές ανανεωτικές διαδικασίες.

Πιό συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 1 δίνονται κάποιες βασικές έννοιες και ορισμοί που είναι απαραίτητοι για την ανάπτυξη των επόμενων Κεφαλαίων. Στα Κεφάλαια 2 και 3 αναφερόμαστε σε βασικά αποτελέσματα της Κλασικής Θεωρίας Κινδύνου και των σύνθετων μεικτών διαδικασιών Poisson. Στο κεφάλαιο 4 θα δούμε ότι οποιαδήποτε σύνθετη ανανεωτική διαδικασία μέσω αλλαγής μέτρου μετατρέπεται σε σύνθετη διαδικασία Poisson και σε τι μας χρησιμεύει αυτό στις αρχές υπολογισμού ασφαλίστρων. Πιό συγκεκριμένα παρουσιάζεται μία λύση του παρακάτω προβλήματος:

(Π) *Δοσμένης μιας σύνθετης ανανεωτικής διαδικασίας κάτω από το μέτρο πιθανότητας P, να βρεθεί ένας χαρακτηρισμός όλων των μέτρων πιθανοτήτας Q, έτσι ώστε τα P και Q να είναι προοδευτικά ισοδύναμα και η S να παραμένει μια σύνθετη ανανεωτική διαδικασία κάτω από το Q.*

Η ευθεία κατεύθυνση ενός τέτοιου χαρακτηρισμού δίνεται στην Πρόταση 4.1.8, που μας δίνει την δυνατότητα χαρακτηρισμού και υπολογισμού παραγώγων Radon-Nikodým για ενδιαφέρουσες περιπτώσεις στα ασφαλιστικά μαθηματικά (βλ. Παραδείγματα 4.1.9 και 4.1.10). Η αντίστροφη κατεύθυνση δίνεται στην Ένοτητα 4.2, Πρόταση 4.2.8 και ο επιθυμητός χαρακτηρισμός είναι το Θεώρημα 4.2.9. Ως συνέπεια του Θεωρήματος 4.2.9 αποδεικνύεται στο Πόρισμα

4.2.10, ότι οποιαδήποτε σύνθετη ανανεωτική διαδικασία μπορεί να μετατραπεί σε μία σύνθετη ανανεωτική διαδικασία Poisson μέσω της αλλαγής μέτρου επιλέγοντας την σωστή παράγωγο Radon-Nikodým.

Το κύριο αποτέλεσμα των *Delbaen & Haezendonck* [10], Proposition 2.2 προκύπτει ως μία ειδική περίπτωση του Θεωρήματος 4.2.9 με μία απλοποιημένη απόδειξη βλ. Πόρισμα 4.2.11 και την Παρατήρηση που ακολουθεί. Στην ενότητα 4.3 αποδεικνύεται ότι, δοσμένης μιας σύνθετης ανανεωτικής διαδικασίας S κάτω από το P η διαδικασία $V := \{S_t - t\mathbb{E}_P[S_1]\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι *martingale* κάτω από το P εάν και μόνο αν η S είναι μια σύνθετη διαδικασία *Poisson* κάτω από το P, βλ. Θεώρημα 4.3.2, που δείχνει με αυτό τον τρόπο, ότι οι μεθοδολογίες μέσω των martingales για τις αρχές υπολογισμού ασφαλίστρου οδηγούν άμεσα στην περίπτωση των σύνθετων ανανεωτικών διαδικασιών σε σύνθετες διαδικασίες *Poisson*. Στην Ενότητα 4.4 δίνονται εφαρμογές των αποτελεσμάτων των προηγούμενων ενοτήτων στις αρχές υπολογισμού ασφαλίστρων, βλ. παραδείγματα 4.4.2, 4.4.3 και 4.4.4.

Στο τελευταίο Κεφάλαιο 5 γενικεύοντας τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 4 για σύνθετες μεικτές ανανεωτικές διαδικασίες. Αφού στον ορισμό των σύνθετων μεικτών ανανεωτικών διαδικασιών εμπλέκεται η έννοια της δέσμευσης, είναι φυσικό οι φυσιολογικές δεσμευμένες πιθανότητες (φ.δ.π. για συντομία) να παίζουν ένα σημαντικό ρόλο στη μελέτη μας. Γι' αυτό στην Ενότητα 5.1 αναφέρουμε τον Ορισμό της φ.δ.π. (βλ. Ορισμό 5.1.1) και στην Ενότητα 5.2. δίνουμε ένα χαρακτηρισμό των σύνθετων μεικτών ανανεωτικών διαδικασιών μέσω των φ.δ.π. (βλ. Πρόταση 5.2.6). Το κύριο αποτέλεσμα του Κεφαλαίου 5 και της όλης εργασίας είναι το Θεώρημα 5.3.6 που λύνει το πρόβλημα (Π) για σύνθετες μεικτές ανανεωτικές διαδικασίες. Ειδική περίπτωση του Θεωρήματος 5.3.6 είναι το κύριο αποτέλεσμα της [2], Θεώρημα 7.2.9 του Λυμπερόπουλου. Τέλος δίνονται Εφαρμογές του Θεωρήματος 5.3.6 στις αρχές υπολογισμού ασφαλίστρων (βλ Παράδειγμα 5.5.2). Τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 5 περιέχονται στην Διδακτορική Διατριβή του Σ.Μ. Τζανίνη [7].

Κεφάλαιο 1

Βασικές Έννοιες και Ορισμοί

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο παρουσιάζονται εισαγωγικές έννοιες και ορισμοί που θα χρησιμοποιηθούν στην παρούσα εργασία. Συμβολίζουμε με: $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, ...\}$ το σύνολο των φυσικών αριθμών, με $\mathbb{Z}$ το σύνολο των ακεραίων αριθμών, με $\mathbb{Q}$ το σύνολο των ρητών αριθμών και με $\mathbb{R}$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Χρησιμοποιούνται επίσης τα εξής σύμβολα: $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $\mathbb{Q}^* := \mathbb{Q}\backslash\{0\}$, $\mathbb{R}^* := \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\}$ και $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Όμοια ορίζονται και τα σύνολα: $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Z}_+^*$ και $\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{Q}_+^*$. Ακόμη, με $\mathbb{N}_n$ συμβολίζουμε το σύνολο $\{0, \ldots, n\} \subseteq \mathbb{N}$, με $\mathbb{N}_n^*$ το σύνολο $\{1, \ldots, n\} \subseteq \mathbb{N}$ και τέλος με $\mathbb{R}^d$ συμβολίζεται ο Ευκλείδειος χώρος διάστασης $d \in \mathbb{N}$. Έστω Ω σύνολο και $A, B \subseteq \Omega$. Τότε με A^c ή $\Omega\backslash A := \{x \in \Omega : x \notin A\}$ συμβολίζεται το **συμπλήρωμα του A** (σε σχέση με το Ω) και με $A \uplus B$ συμβολίζεται η **ένωση δύο ξένων μεταξύ τους συνόλων** A και B και με $\biguplus_{i \in I} A_i$ συμβολίζεται η **ένωση μιας οικογένειας** $\{A_i\}_{i \in I} (I \neq \emptyset)$ ξένων ανά δύο υποσυνόλων του Ω.

Για κάθε $A \subseteq \Omega$ με χ_A συμβολίζουμε τη **δείκτρια συνάρτηση** του συνόλου A. Η ταυτοτική συνάρτηση από το Ω στον εαυτό του συμβολίζεται με id_Ω. Για μία απεικόνιση $f : D \longmapsto E$ με R_f ή με $f(D)$ συμβολίζεται το **σύνολο τιμών** της f, δηλ. το σύνολο $\{f(x) : x \in D\}$ και για ένα σύνολο $A \subseteq D$ με $f \upharpoonright A$ συμβολίζεται ο **περιορισμός** της f στο A, ενώ με $f(A)$ συμβολίζεται το σύνολο $\{f(x) : x \in A\}$. Αν $\mathcal{G}$ είναι σύστημα υποσυνόλων του Ω, τότε η ελάχιστη σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω που περιέχει το $\mathcal{G}$, συμβολίζεται με $\sigma(\mathcal{G})$ και ονομάζεται η **σ-άλγεβρα η παραγόμενη από το** $\mathcal{G}$, ενώ το $\mathcal{G}$ ονομάζεται **ένας γεννήτορας της** $\sigma(\mathcal{G})$. Μια σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$, είναι **αριθμήσιμα παραγόμενη** εάν υπάρχει μια αριθμήσιμη οικογένεια $\mathcal{G}$ υποσυνόλων του Ω για την οποία ισχύει $\mathcal{F}=\sigma(\mathcal{G})$. Τέλος, η ελάχιστη σ-άλγεβρα υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ (ή του $\mathbb{R}^n$) που παράγεται από όλα τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ (ή του $\mathbb{R}^n$), ονομάζεται η **Borel σ-άλγεβρα** στο $\mathbb{R}$ (ή στο $\mathbb{R}^n$) και συμβολίζεται με $\mathfrak{B} := \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ (ή $\mathfrak{B}_n := \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$). Τα στοιχεία μιας Borel σ-άλγεβρας, ονομάζονται **σύνολα Borel**. Γενικότερα, αν $\mathfrak{J}$ είναι μια τοπολογία επάνω στο Ω, τότε γράφουμε $\mathfrak{B}(\Omega)$ για την **σ-άλγεβρα Borel** του Ω, δηλαδή για την σ-άλγεβρα του Ω που παράγεται απο την $\mathfrak{J}$.

Στη συνέχεια, και εφόσον δε δηλώνεται διαφορετικά, η τριάδα (Ω, Σ, P) είναι ένας **χώρος πιθανότητας** *(χ.π. για συντομία) και το ζευγάρι (Υ, H) είναι ένας* **μετρήσιμος χώρος** *(μ.χ. για συντομία). Κάθε Σ-H-***μετρήσιμη απεικόνιση** *ονομάζεται και* **τυχαία μεταβλητή** *(τ.μ. για συντομία).*

Με Σ_0 συμβολίζουμε το σύνολο όλων των στοιχείων $N \in \Sigma$ ώστε $P(N) = 0$. Για τ.μ. $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ γράφουμε $X = Y$ $P-$σχεδόν βέβαια ($P - \sigma$.β. για συντομία), αν $\{X \neq Y\} \in \Sigma_0$.

Μία τ.μ. $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ονομάζεται **ολοκληρώσιμη** ως προς το μέτρο P αν και μόνο αν $\int |f| dP < \infty$. Με $\mathcal{L}^1(P)$ ($\mathcal{L}^1_+(P)$ αντίστοιχα) συμβολίζεται το σύνολο όλων των ολοκληρώσιμων (αντίστοιχα μη αρνητικών ολοκληρώσιμων) συναρτήσεων $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Ακόμη με $\mathcal{L}^2(P)$ συμβολίζεται το σύνολο όλων των **τετραγωνικά ολοκληρώσιμων** συναρτήσεων (δηλαδή όλων των $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ώστε $\int |f|^2 dP < \infty -$ συναρτήσεων).

Έστω Υ ένα μη κενό σύνολο. Με π_Ω και π_Υ συμβολίζονται οι **κανονικές προβολές** από το $\Omega \times \Upsilon$ στο Ω και Υ αντίστοιχα.

Έστω $X \in \mathcal{L}^1(P)$ και $\mathcal{F}$ μία $\sigma-$υποάλγεβρα του Σ. Κάθε συνάρτηση $Y \in \mathcal{L}^1(P|\mathcal{F})$ που ικανοποιεί για κάθε $A \in \mathcal{F}$ την ισότητα $\int_A X dP = \int_A Y dP$, ονομάζεται **μία εκδοχή της δεσμευμένης μέσης τιμής της X δοθείσης της $\mathcal{F}$** και συμβολίζεται με $\mathbb{E}_P[X|\mathcal{F}]$. Για $X := \chi_E \in \mathcal{L}^1(P)$ με $E \in \Sigma$ θέτουμε $P(E|\mathcal{F}) := \mathbb{E}_P[\chi_E|\mathcal{F}]$.

Έστω (Ω,Σ) και (Υ,H) μ.χ.. Για κάθε συνάρτηση $X : \Omega \to \Upsilon$ θέτουμε

$$\sigma(X) := X^{-1}(H) := \{X^{-1}(B) : B \in H\}.$$

Τότε, η $\sigma(X)$ είναι μια σ-άλγεβρα στο Ω που ονομάζεται η **σ-άλγεβρα στο Ω η παραγόμενη από την** X. Αν επι πλέον η X είναι $\Sigma - H-$μετρήσιμη τότε ισχύει $\sigma(X) \subseteq \Sigma$.

Γενικότερα, για μια οικογένεια $\{X_i\}_{i \in I}$ συναρτήσεων $X_i : \Omega \to \Upsilon$, ορίζουμε:

$$\sigma\left(\{X_i\}_{i \in I}\right) := \sigma\left(\bigcup_{i \in I} \sigma(X_i)\right).$$

Η $\sigma\left(\{X_i\}_{i \in I}\right)$ ονομάζεται η σ-άλγεβρα η παραγόμενη από την οικογένεια $\{X_i\}_{i \in I}$.

Μία συνάρτηση $k : H \times \Omega \to \mathbb{R}$ είναι ένας $H - \Sigma -$**Μαρκοβιανός πυρήνας** (Markov kernel) όταν ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες:

($k1$) Η συνολοσυνάρτηση $k(\bullet,\omega)$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας στην H για κάθε σταθερό $\omega \in \Omega$.

($k2$) Η συνάρτηση $\omega \longmapsto k(B,\omega)$ είναι $\Sigma-$μετρήσιμη για οποιοδήποτε σταθερό $B \in H$.

Ένας $H-\Sigma-$**Μαρκοβιανός πυρήνας** ονομάζεται επίσης **τυχαίο μέτρο** (βλ. π.χ. [15], σελ. 83).

Έστω $\Sigma - H-$μετρήσιμη απεικόνιση $X : \Omega \to \Upsilon$ και μία $\sigma-$υποάλγεβρα $\mathcal{F}$ της Σ. Η **δεσμευμένη κατανομή της** X **επάνω στην** $\mathcal{F}$ είναι ένας $H-\mathcal{F}-$Μαρκοβιανός πυρήνας k, που ικανοποιεί για κάθε $B \in H$ τη συνθήκη

$$k(B,\bullet) = P(X^{-1}(B)|\mathcal{F})(\bullet) \quad P \upharpoonright \mathcal{F} - \sigma.\beta.$$

Ένας τέτοιος Μαρκοβιανός πυρήνας k θα συμβολίζεται με $P_{X|\mathcal{F}}$. Ιδιαιτέρως, αν ο (Ξ,Ζ) είναι ένας μ.χ., Θ μια Σ-Ζ-μετρήσιμη απεικόνιση απο το Ω στο Ξ και $\mathcal{F} := \sigma(\Theta)$, τότε για κάθε Η-Ζ-Μαρκοβιανό πυρήνα k, η απεικόνιση $\mathrm{K}(\Theta) : H \times \Omega \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από τη σχέση

$$K(\Theta)(B,\omega) := (k(B,\bullet) \circ \Theta(\omega) \quad \text{για κάθε} \quad B \in H \quad \text{και} \quad \omega \in \Omega$$

είναι ένας $H - \sigma(\Theta)-$Μαρκοβιανός πυρήνας. Ιδιαιτέρως, για $(\Upsilon, H) = (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ τα σχετικά μέτρα πιθανότητας $k(\bullet,\theta)$ για $\theta = \Theta(\omega)$ με $\omega \in \Omega$ είναι κατανομές στην $\mathfrak{B}$ και έτσι μπορούμε να γράφουμε $\mathbf{K}(\theta)(\bullet)$ αντί για $k(\bullet,\theta)$. Αντίστοιχα, τη περίπτωση του $K(\Theta)$ τη συμβολίζουμε με $\mathbf{K}(\Theta)$. Για ένα d-διάστατο τυχαίο διάνυσμα $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $P_X := \mathbf{K}(\theta)$ εννοώντας, οτι το X ακολουθεί την κατανομή $\mathbf{K}(\theta)$ με $\theta \in \mathbb{R}^d$. Με $\boldsymbol{Ga}(a,b)$, όπου $a, b > 0$, συμβολίζουμε την κατανομή γάμμα (βλ. π.χ. [23], σελ.180). Ιδιαιτέρως, με $\boldsymbol{Exp}(a) := \boldsymbol{Ga}(a,1)$ συμβολίζουμε την εκθετική κατανομή (βλ. π.χ. [23], σελ.180).

Για οποιαδήποτε $\sigma-$υποάλγεβρα $\mathcal{F}$ της Σ, θα λέμε ότι δύο $H-\mathcal{F}-$Μαρκοβιανοί πυρήνες k_i, για $i \in \{1,2\}$, είναι $P \upharpoonright \mathcal{F} -$ **ισοδύναμοι** και γράφουμε $k_1 = k_2 \quad P \upharpoonright \mathcal{F} - \sigma.\beta.$, αν υπάρχει $P-$μηδενικό σύνολο $N \in \mathcal{F}$ τέτοιο ώστε $k_1(B,\omega) = k_2(B,\omega)$ για κάθε $B \in H$ και $\omega \notin N$.

Μια οικογένεια $\{\Sigma_i\}_{i \in I}$ $\sigma-$υποαλγεβρών της Σ ονομάζεται ***P*-υπό συνθήκη ανεξάρτητη** επάνω στη σ-υποάλγεβρα $\mathcal{F} \subseteq \Sigma$, αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geqslant 2$ έχουμε:

$$P(E_1 \cap \cdots \cap E_n|\mathcal{F}) = \prod_{j=1}^{n} P(E_j|\mathcal{F}) \quad P \upharpoonright \mathcal{F} - \sigma.\beta.$$

για κάθε $j \leqslant n$ και για κάθε $E_j \in \Sigma_{i_j}$ όπου τα $i_1, \ldots, i_n$ είναι διακριτά στοιχεία του I.

Μια οικογένεια $X := \{X_i\}_{i \in I}$ με $I \neq \varnothing$ $\Sigma - H-$μετρήσιμων απεικονίσεων $X_i : \Omega \to \Upsilon$ ονομάζεται **στοχαστική διαδικασία** (σ.δ. για συντομία). Κάθε $\Sigma - H-$μετρήσιμη απεικόνιση απο το Ω στο Υ ονομάζεται και **τυχαία μεταβλητή** (τ.μ. για συντομία).

Μια σ.δ. $X := \{X_i\}_{i\in I}$ $\Sigma - H-$μετρήσιμων απεικονήσεων από το Ω στο Υ είναι:

- ***P*-υπο συνθήκη ανεξάρτητη** επάνω στη σ-υποάλγεβρα $\mathcal{F}$ της Σ, αν η οικογένεια $\sigma(\{\mathrm{X}_i\})_{i\in I}$ είναι P-υπο συνθήκη ανεξάρτητη επάνω στην $\mathcal{F}$ και
- ***P*-υπο συνθήκη ισόνομη** επάνω στη σ-υποάλγεβρα $\mathcal{F}$ της Σ, αν

$$P(F \cap X_i^{-1}(B)) = P((F \cap X_j^{-1}(B)), \quad \text{για όλα τα} \quad i, j \in I, F \in \mathcal{F} \quad \text{και } \mathrm{B} \in \mathrm{H}.$$

Μία $\sigma.\delta.$ $\{X_i\}_{i\in I}$ ονομάζεται **ανεξάρτητη** μιας οικογένειας $\{\Sigma_j\}_{j\in J}$ σ-υποαλγεβρών της Σ, όπου J, $I \neq \varnothing$ αν για κάθε πεπερασμένο αριθμό τ.μ. $X_{i_1}, \ldots, X_{i_m}$ και σ-υποαλγεβρών $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$ της Σ $(m, n \in \mathbb{N})$, οι σ-υποάλγεβρες $\sigma(X_{i_1}), \ldots, \sigma(X_{i_m}), \Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$ είναι ανεξάρτητες.

Έστω $\{\mathrm{X}_t\}_{t\in I}$ μια $\sigma.\delta.$ με πραγματικές τ.μ. X_t και με ολικά διατεταγμένο σύνολο δεικτών I έτσι ώστε για κάθε $t \in I$ το σύνολο τιμών R_{X_t} της X_t να είναι αριθμήσιμο σύνολο. Η $\{\mathrm{X}_t\}_{t\in I}$ ονομάζεται **Μαρκοβιανή *σ.δ.*** ή ***σ.δ.* Markov** ή θα λέμε ότι ικανοποιεί την **Μαρκοβιανή ιδιότητα**, εάν ισχύει

$$P\left(\{X_{t_{n+1}} = x_{n+1}\}\middle|\bigcap_{j=1}^{n}\{X_{t_j} = x_j\}\right) = P(X_{t_{n+1}} = x_{n+1}|X_{t_n} = x_n)$$

για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \cdots, t_{n+1} \in I$ με $t_1 < \cdots < t_{n+1}$ και $x_j \in R_{X_{t_j}}$ για κάθε $j \in \{1, \ldots, n+1\}$ ώστε $P\left[\bigcap_{j=1}^{n}\{X_{t_j} = x_j\}\right] > 0$.

Για κάθε ενδεχόμενο $\mathrm{B} \in \Sigma$ τέτοιο ώστε $P(B) \neq 0$ και τ.μ. $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, το ολοκλήρωμα της τυχαίας μεταβλητής X ως προς τη δεσμευμένη πιθανότητα P_B συμβολίζεται με

$$\mathbb{E}_B[X] := \mathbb{E}[X|B] := \int_B X dP_B$$

και ονομάζεται η **δεσμευμένη μέση τιμή της τ.μ. X δοθέντος του ενδεχομένου B**.

Έστω I ένα μη κενό, μερικά διατεταγμένο σύνολο δεικτών. Μια οικογένεια $\{\Sigma_j\}_{j\in I}$ σ-υποαλγεβρών της Σ ονομάζεται **διύλιση** (filtration) αν για κάθε $j, k \in I$ με $j < k$ ισχύει $\Sigma_j \subseteq \Sigma_k$.

Μία $\sigma.\delta.$ $\{X_j\}_{j\in I}$ λέμε ότι είναι **προσαρμοσμένη σε μία διύλιση** $\{\Sigma_j\}_{j\in I}$ αν για κάθε $j \in I$ η τ.μ. X_j είναι Σ_j -μετρήσιμη.

Η οικογένοια $\mathcal{F}^X := \{\mathcal{F}_j^X\}_{j\in I}$ με $\mathcal{F}_j^X := \sigma(\{X_k\}_{k\leqslant j})$ για κάθε $j \in I$, ονομάζεται η **κανονική διύλιση** για την $X := \{X_j\}_{j\in I}$. Προφανώς, κάθε $\sigma.\delta.$ $\{X_j\}_{j\in I}$ είναι προσαρμοσμένη στη κανονική της διύλιση.

Έστω $\mathcal{Z} := \{\mathcal{Z}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μία διύλιση για τον μ.χ. (Ω, Σ). Μία $\sigma.\delta.$ $\{Z_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ πραγματικών τ.μ. ονομάζεται ένα **martingale ως προς τη διύλιση** $\{\mathcal{Z}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ή ένα $\{\mathcal{Z}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$- **martingale** αν ισχύουν τα εξής:

$(m1)$ H $\{Z_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι προσαρμοσμένη στη διύλιση $\{\mathcal{Z}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$,

$(m2)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, η $Z_t \in \mathcal{L}^1(P)$,

$(m3)$ για κάθε $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s \leqslant t$ ισχύει $\mathbb{E}[Z_t|\mathcal{Z}_s] = Z_s \quad P \restriction \mathcal{Z}_s - \sigma.\beta..$

Η οικογένεια $\{Z_t\}_{t\in\mathbb{R}+}$ έιναι ένα P-σ.β. θετικό $(P, \mathcal{Z})$**-martingale**, εάν η Z_t είναι P-σ.β. θετική για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$.

Μια διαδικασία $\{X_t\}_{t\in I}$ ονομάζεται **συνεχής κατά πιθανότητα από δεξιά** αν για $\tau \downarrow t$ ισχύει $X_\tau \longrightarrow X_t$ κατά πιθανότητα.

Κεφάλαιο 2

Επισκόπηση Στοιχείων της Κλασσικής Θεωρίας Κινδύνου

Το κεφάλαιο που ακολουθεί αναφέρεται σε βασικές έννοιες και αποτελέσματα της Θεωρίας Κινδύνου. Θα παρουσιαστούν ιδιότητες των *σ.δ.* άφιξης των απαιτήσεων και του αριθμού των απαιτήσεων καθώς και κάποια βασικά αποτελέσματα σχετικά με τη διαδικασία Poisson, που αποτελεί τη βάση για τη κατανόηση της μεικτής διαδικασίας Poisson.

2.1 Η Σ.Δ. Άφιξης των Απαιτήσεων

Στην παρακάτω ενότητα αναφέρονται ορισμοί και λήμματα που αφορούν τη στοχαστική διαδικασία άφιξης απαιτήσεων και τη στοχαστική διαδικασία ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων.

Ορισμός 2.1.1. Η ακολουθία πραγματικών τ.μ. $T := \{T_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ ονομάζεται ***σ.δ.* άφιξης απαιτήσεων** ή ***σ.δ.* άφιξης**, εάν υπάρχει σύνολο μηδενικής πιθανότητας $\Omega_T \in \Sigma$ τέτοιο ώστε, για όλα τα $\omega \in \Omega \setminus \Omega_T$ να ισχύουν τα εξής:

- $T_0(\omega) = 0$, και
- $T_{n-1}(\omega) < T_n(\omega)$, για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Άμεσα προκύπτει πως για όλα τα $\omega \in \Omega \setminus \Omega_T$ και $n \in \mathbb{N}$, ισχύει $T_n(\omega) > 0$. Το P-μηδενικό σύνολο Ω_T ονομάζεται **P-μηδενικό σύνολο εξαίρεσης** της στοχαστικής διαδικασίας T άφιξης των απαιτήσεων.

Ορισμός 2.1.2. Έστω T *σ.δ.* άφιξης απαιτήσεων. Με $W := \{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, όπου $W_n := T_n - T_{n-1}$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, συμβολίζουμε τη ***σ.δ.* ενδιάμεσων χρόνων άφιξης απαιτήσεων ή *σ.δ.* ενδιάμεσων χρόνων άφιξης.**

Από τους δύο παραπάνω ορισμούς, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, προκύπτουν τα εξής:

- $W_n(\omega) > 0$ για κάθε $\omega \in \Omega \backslash \Omega_T$,
- $\mathbb{E}[W_n] > 0$

καθώς και η σχέση:

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} W_k. \tag{2.1}$$

Απο εδώ και κάτω, και αν δε δηλώνεται διαφορετικά, θεωρούμε τη T ως μια σταθερή σ.δ. άφιξης, και τη W ως τη σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης την επαγόμενη από τη σ.δ. T. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε επίσης πως το P-μηδενικό σύνολο εξαίρεσης της σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων είναι το κενό σύνολο $\Omega_T := \emptyset \in \Sigma$.

Εφόσον $W_n := T_n - T_{n-1}$ και $T_n = \sum_{k=1}^{n} W_k$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ είναι εμφανές πως η σ.δ. άφιξης, και η σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης, αλληλοκαθορίζονται. Ιδιαιτέρως, έχουμε το παρακάτω προφανές αλλά χρήσιμο αποτέλεσμα. (βλ. π.χ. [23], Lemma 1.1.1).

Λήμμα 2.1.3. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύουν τα εξής:*

$$\sigma(\{T_k\}_{k \in \mathbb{N}_n}) = \sigma(\{W_k\}_{k \in \mathbb{N}_n^*}) \tag{2.2}$$

Για την απόδειξη (βλ. [1], Λήμμα 3.2.3).

Γίνεται φανερό ότι η γνώση που έχουμε για τους χρόνους άφιξης των απαιτήσεων από τη T_n, είναι ίδια με τη πληροφορία που είναι διαθέσιμη από τη γνώση των ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων, δηλαδή τη W_n.

Ορισμός 2.1.4. Το ενδεχόμενο $\{\sup_{n \in \mathbb{N}} T_n < \infty\}$ ονομάζεται **έκρηξη** (explosion).

Λήμμα 2.1.5. *Αν $\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[T_n] < \infty$, τότε η πιθανότητα της έκρηξης ισούται με ένα.*

Πόρισμα 2.1.6. *Αν $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[W_n] < \infty$, τότε η πιθανότητα της έκρηξης ισούται με ένα.*

Για την απόδειξη των δύο παραπάνω αποτελεσμάτων βλ. π.χ. [1], Λήμμα 3.2.6 και Πόρισμα 3.2.7.

Το λήμμα που ακολουθεί βοηθάει για την καλύτερη κατανόηση της σχέσης που υπάρχει μεταξύ του $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ και $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Λήμμα 2.1.7. *Έστω $\theta \in (0, \infty)$. Αν η σ.δ. $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ανεξάρτητη, τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) $P_{W_n} = \mathbf{Exp}(\theta)$ *για όλα τα* $n \in \mathbb{N}$ *και*

(ii) $P_{T_n} = \mathbf{Ga}(n, \theta)$ *για όλα τα* $n \in \mathbb{N}$.

Στην περίπτωση αυτή, $\mathbb{E}[W_n] = 1/\theta$ *και* $\mathbb{E}[T_n] = n/\theta$ *για όλα τα* $n \in \mathbb{N}$*, και επιπρόσθετα, η πιθανότητα της έκρηξης ισούται με μηδέν.*

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [23], Lemma 1.2.2.

2.2 Η Σ.Δ. Αριθμού των Απαιτήσεων

Αρχικά θα παρουσιαστεί η διαδικασία απαιτήσεων και πώς η *σ.δ.* απαιτήσεων και *σ.δ.* άφιξης απαιτήσεων ορίζει η μία την άλλη. Στη συνέχεια θα δειχθεί μια σύνδεση μεταξύ τών βασικών υποθέσεων που σχετίζονται με την κατανομή του αριθμού των απαιτήσεων και την κατανομή των χρόνων άφιξης. Τέλος, θα αποδείξουμε το κύριο αποτέλεσμα αυτής της ενότητας που χαρακτηρίζει την (ομογενή) *σ.δ.* Poisson μέσω της *σ.δ.* των ενδιάμεσων χρόνων και μιας ιδιότητας των martingales.

Ορισμός 2.2.1. Μια οικογένεια $N := \{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ τυχαίων μεταβλητών $\{N_t : \varOmega \longmapsto \overline{\mathbb{R}}\}$ ονομάζεται ***σ.δ.* του αριθμού των απαιτήσεων** (claim number process) ή **απαριθμήτρια *σ.δ.*** (counting process), αν υπάρχει ένα σύνολο μηδενικής πιθανότητας $\varOmega_N \in \varSigma$, τέτοιο ώστε για όλα τα $\omega \in \varOmega \setminus \varOmega_N$ να ισχύουν τα εξής:

(*n*1) $N_0(\omega) = 0$,

(*n*2) $N_t(\omega) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, για όλα τα $t \in (0, \infty)$,

(*n*3) $N_t(\omega) = \inf_{s\in(t,\infty)} N_s(\omega)$, για όλα τα $t \in \mathbb{R}_+$,

(*n*4) $\sup_{s\in[0,t)} N_s(\omega) \leqslant N_t(\omega) \leqslant \sup_{s\in[0,t)} N_s(\omega) + 1$, για όλα τα $t \in \mathbb{R}_+$ και

(*n*5) $\sup_{t\in\mathbb{R}_+} N_t(\omega) = \infty$.

Το P-μηδενικό σύνολο $\varOmega_N$, ονομάζεται **P-μηδενικό σύνολο εξαίρεσης της απαριθμήτριας *σ.δ.*** (exceptional P-null set) N.

Ερμηνεύοντας τον παραπάνω ορισμό, μπορούμε να θεωρήσουμε πως

- Η τ.μ. N_t δηλώνει το πλήθος των απαιτήσεων που εμφανίζονται στο διάστημα $(0, t]$,
- Όλες οι τροχιές της N, ξεκινούν από το μηδέν και είναι δεξιά συνεχείς, στα σημεία ασυνέχειας, το άλμα είναι ύψους ένα, και τέλος τείνουν στο άπειρο.

Το ακόλουθο θεώρημα δείχνει πως κάθε *σ.δ.* άφιξης απαιτήσεων παράγει μία απαριθμήτρια *σ.δ.* και αντίστροφα.

Θεώρημα 2.2.2. *Αν $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ μία σ.δ. άφιξης απαιτήσεων και για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $\omega \in \Omega$, θέτουμε*

$$N_t(\omega) := \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{T_n \leqslant t\}}(\omega) \tag{2.3}$$

τότε για την $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ισχύουν τα εξής:

1. *Η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία απαριθμήτρια σ.δ. τέτοια ώστε $\Omega_N = \Omega_T$, και*

2. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ και $\omega \in \Omega \backslash \Omega_T$ ισχύει*

$$T_n(\omega) = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ | N_t(\omega) = n\}. \tag{2.4}$$

Θεώρημα 2.2.3. *Αν $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι η απαριθμήτρια σ.δ. και για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ και $\omega \in \Omega$, θέτουμε*

$$T_n(\omega) := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ | N_t(\omega) = n\} \tag{2.5}$$

τότε για την $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ισχύουν τα εξής:

1. *Η $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι μια σ.δ. άφιξης απαιτήσεων τέτοια ώστε $\Omega_T = \Omega_N$, και*

2. *Για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $\omega \in \Omega \backslash \Omega_N$ ισχύει*

$$N_t(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{T_n \leqslant t\}}(\omega). \tag{2.6}$$

Για την απόδειξη των δύο παραπάνω θεωρημάτων βλ. π.χ. [1] Θεώρημα 3.3.2, Θεώρημα 3.2.3 αντίστοιχα.

Για το υπόλοιπο της εργασίας:

- *Η $N := \{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, είναι μια σταθερή, αλλά αυθαίρετη απαριθμήτρια σ.δ. .*

- *Η $T := \{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, η σ.δ. άφιξης που παράγεται από την N.*

- *Η $W := \{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, η σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων.*

- *Το P-μηδενικό σύνολο εξαίρεσης της απαριθμήτριας σ.δ. ότι είναι το κενό σύνολο, δηλαδή ισχύει $\Omega_N = \emptyset$.*

Λήμμα 2.2.4. *Για κάθε* $n \in \mathbb{N}_0$ *και* $t \in \mathbb{R}_+$ *ισχύουν:*

(a) $\{N_t \geqslant n\} = \{T_n \leqslant t\}$ *και*

(b) $\{N_t = n\} = \{T_n \leqslant t\} \setminus \{T_{n+1} \leqslant t\} = \{T_n \leqslant t < T_{n+1}\}$.

Το ακόλουθο λήμμα εκφράζει με ένα ιδιαίτερα περιεκτικό τρόπο, το γεγονός πως η απαριθμήτρια *σ.δ.* και η *σ.δ.* άφιξης απαιτήσεων παρέχουν την ίδια πληροφορία.

Λήμμα 2.2.5. *Ισχύει ότι:*

$$\sigma(\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}) = \sigma(\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}) \tag{2.7}$$

Στο σημείο αυτό θα γίνει σύνδεση της πιθανότητας έκρηξης με τη *σ.δ.* του αριθμού απαιτήσεων ως εξής:

Λήμμα 2.2.6. *Ισχύει ότι:*

$$P[\{\sup_{n \in \mathbb{N}} T_n < \infty\}] = P\left[\bigcup_{t \in \mathbb{N}} \{N_t = \infty\}\right] = P\left[\bigcup_{t \in (0,\infty)} \{N_t = \infty\}\right]. \tag{2.8}$$

Για μία αναλυτική απόδειξη των παραπάνω Λημμάτων βλ. [1], Λήμμα 3.3.6 και Λήμμα 3.3.4 αντίστοιχα.

Στο σημείο αυτό θα οριστεί η έννοια της προσαύξησης του αριθμού των απαιτήσεων σε διάστημα $(s, t]$.

- Για $s, t \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $s \leqslant t$, η **προσαύξηση** της απαριθμήτριας *σ.δ.* $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ στο διάστημα $(s, t]$, ορίζεται από τη σχέση:

$$N_t - N_s := \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{s < T_n \leqslant t\}}. \tag{2.9}$$

Επειδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$, με $N_0 = 0$ και $T_n > 0$, η σχέση (2.9), συμφωνεί με τον τρόπο που ορίσαμε τη τ.μ. N_t στο Θεώρημα 2.2.2.

2.3 Η Διαδικασία Poisson

Ορισμός 2.3.1. Η απαριθμήτρια $\sigma.\delta.$ $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, ονομάζεται **(ομογενής) διαδικασία Poisson με παράμετρο** $\theta \in (0,\infty)$, όταν έχει ανεξάρτητες και ισόνομες προσαυξήσεις τέτοιες ώστε για κάθε $t \in (0,\infty)$ να ισχύει $P_{N_t} = \mathbf{P}(\theta t)$.

Ένα συμπέρασμα που προκύπτει είναι πως μια απαριθμήτρια $\sigma.\delta.$ με ανεξάρτητες προσαυξήσεις, έχει και στάσιμες προσαυξήσεις, αν για κάθε $t, h \in \mathbb{R}_+$ ισχύει $P_{N_{t+h}-N_t} = P_{N_h}$ (βλ. π.χ. [1], Λήμμα A.1.3).

Ορισμός 2.3.2. Μια απαριθμήτρια $\sigma.\delta.$ $\{\widetilde{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια **τυπική διαδικασία Poisson**, αν για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, η $\widetilde{N}_t$ ακολουθεί την Poisson με παράμετρο ένα.

Λήμμα 2.3.3. (Πολυωνυμικό Κριτήριο) *Έστω $\alpha \in (0,\infty)$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(*a*) *Για κάθε $t \in (0,\infty)$ η απαριθμήτρια $\sigma.\delta.$ $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ικανοποιεί τη σχέση*

$$P_{N_t} = \mathbf{P}(\alpha t),$$

και για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $t_0, t_1, ..., t_m \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$, και για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ και $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{N}_0$ τέτοια ώστε το $\sum_{j=1}^m k_j = n$ ισχύει

$$P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = k_j\}\middle|\{N_{t_m} = n\}\right] = \frac{n!}{\prod_{j=1}^m k_j!} \cdot \prod_{j=1}^{m}\left(\frac{t_j - t_{j-1}}{t_m}\right)^{k_j}.$$

(*b*) *Η απαριθμήτρια $\sigma.\delta.$ $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια $\sigma.\delta.$ Poisson με παράμετρο α.*

Για μια αναλυτική απόδειξη του πορίσματος βλ. [4], Λήμμα 2.3.3.

Λήμμα 2.3.4. *Έστω $\theta \in (0,\infty)$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

1. $P_{T_n} = \mathbf{Ga}(n,\theta)$, *για όλα τα* $n \in \mathbb{N}$

2. $P_{N_t} = \mathbf{P}(\theta t)$, *για όλα τα* $t \in (0,\infty)$.

Στη περίπτωση αυτή, για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $\mathbb{E}[T_n] = n/\theta$ και για όλα τα $t \in (0,\infty)$ ισχύει $\mathbb{E}[N_t] = \theta t$.

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [23], Lemma 2.2.1.

Θεώρημα 2.3.5. *Έστω $\theta \in (0,\infty)$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Η σ.δ. W ενδιάμεσων χρόνων άφιξης είναι ανεξάρτητη και ικανοποιεί τη συνθήκη $P_{W_n} = \mathbf{Exp}(a)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

2. *Η απαριθμήτρια σ.δ. N είναι μια διαδικασία Poisson με παράμετρο θ.*

3. *Η απαριθμήτρια σ.δ. N έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις και ικανοποιεί τη συνθήκη $\mathbb{E}[N_t] = \theta t$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$.*

4. *Η σ.δ. $\{N_t - \theta t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ένα $\mathcal{F}^N-$martingale.*

Για μια αναλυτική απόδειξη του θεωρήματος βλ. [1], Θεώρημα 4.2.4.

2.4 Διαδικασίες συνολικών απαιτήσεων

Στο κεφάλαιο αυτό, θεωρούμε μια απαριθμήτρια *σ.δ.* N και T τη *σ.δ.* άφιξης των απαιτήσεων που εξαρτάται από την απαριθμήτρια *σ.δ.* . Υποθέτουμε ότι το μηδενικό σύνολο εξαίρεσης είναι το κενό και ότι η πιθανότητα έκρηξης είναι ίση με μηδέν.
Επιπλέον, θεωρούμε την ακολουθία $X := \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ τ.μ. $X_n : \Omega \longmapsto (0, \infty)$. Για $t \in \mathbb{R}_+$, ισχύει

$$S_t := \sum_{k=1}^{N_t} X_k = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{\{N_t=n\}} \sum_{k=1}^{n} X_k, \tag{2.10}$$

με $S_0 := 0$, όπου

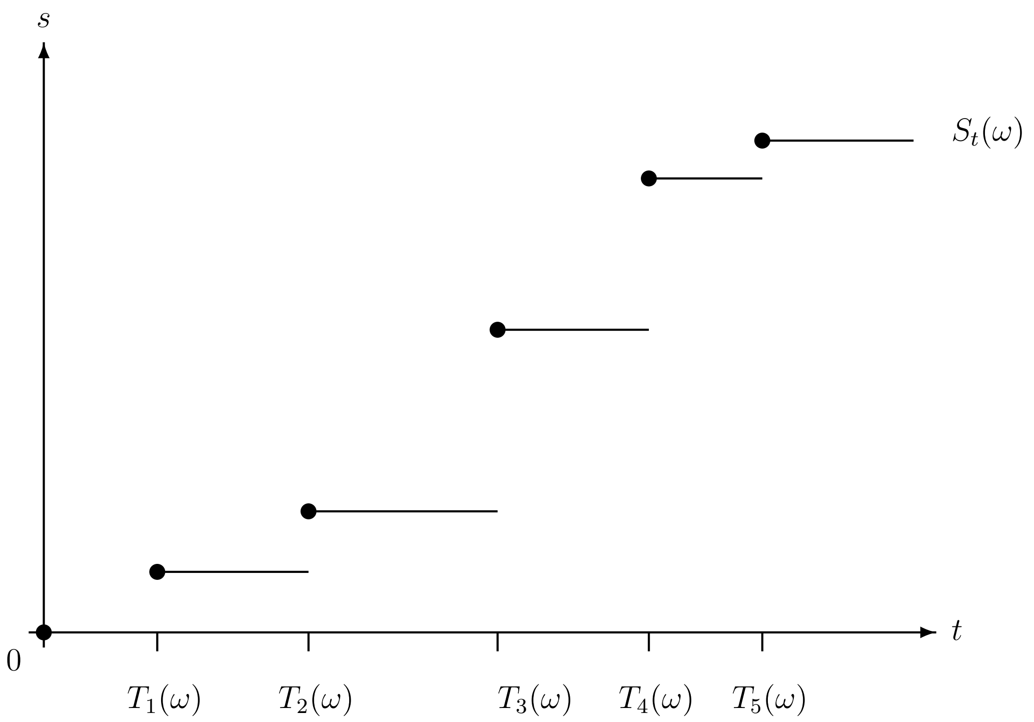
- X_n είναι το μέγεθος ή το ποσό της $n-$οστής απαίτησης.
- S_t είναι το μέγεθος των συνολικών απαιτήσεων που έχουν συμβεί σε χρόνο t.

Πράγματι, έστω $t \geqslant 0$ και $\omega \in \Omega$. Τότε υπάρχει ακριβώς ένα $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο, ώστε $\omega \in \{N_t = n_0\}$, δηλαδή τέτοιο ώστε $N_t(\omega) = n_0$. Επομένως ισχύει

$$\sum_{n=0}^{\infty} \chi_{\{N_t=n\}}(\omega) \sum_{k=1}^{n} X_k(\omega) = \chi_{\{N_t=n_0\}}(\omega) \sum_{k=1}^{n_0} X_k(\omega) = \sum_{k=1}^{n_0} X_k(\omega) = \sum_{k=1}^{N_t} X_k(\omega).$$

Η ακολουθία X ονομάζεται **η σ.δ. του μεγέθους των απαιτήσεων**, ενώ η οικογένεια $S := \{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ονομάζεται **η σ.δ. των συνολικών απαιτήσεων**, που παράγεται απο την *σ.δ.* του αριθμού απαιτήσεων και της *σ.δ.* του μεγέθους των απαιτήσεων. Το ζευγάρι (N, X) ονομάζεται μια **διαδικασία κινδύνου**, αν η N είναι μία απαριθμήτρια διαδικασία, η X είναι $P - i.i.d.$ και οι *σ.δ.* N και X είναι P-ανεξάρτητες.

Για το υπόλοιπο του κεφαλαίου, θεωρούμε ότι η ακολουθία X είναι i.i.d. και ότι οι σ.δ. N και X είναι ανεξάρτητες.



Τα παρακάτω αποτελέσματα του παρόντος κεφαλαίου αναφέρονται στο βιβλίο [23] του Klaus D. Schmidt.

Λήμμα 2.4.1. *Για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $B \in \mathfrak{B}$ ισχύει*

$$P[\{S_t \in B\}] = \sum_{n=0}^{\infty} P[\{N_t = n\}] P\left[\left\{\sum_{k=1}^{n} X_k \in B\right\}\right]. \tag{2.11}$$

Για μια αναλυτική απόδειξη του Λήμματος 2.4.1 βλ. [5], Λήμμα 4.1.

Για $s, t \in \mathbb{R}_+$, με $s \leqslant t$, για τις προσαυξήσεις της σ.δ. $\{S_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ των συνολικών απαιτήσεων στο διάστημα $(s, t]$ ισχύει

$$S_t - S_s = \sum_{k=N_s+1}^{N_t} X_k. \tag{2.12}$$

με $S_0 = 0$. Πράγματι, από τον ορισμό της S_t ισχύει ότι:

$$S_t - S_s = \sum_{k=1}^{N_t} X_k - \sum_{k=1}^{N_s} X_k = \sum_{k=N_s+1}^{N_t} X_k.$$

Σύμφωνα με τον ορισμό της S_t, ισχύει ότι:

$$S_t(\omega) = (S_t - S_s)(\omega) + S_s(\omega),$$

ακόμα και όταν το $S_s(\omega)$ απειρίζεται. Για την *σ.δ.* των συνολικών απαιτήσεων, οι ιδιότητες των ανεξάρτητων ή στάσιμων προσαυξήσεων ορίζονται με τον ίδιο τρόπο όπως και στην *σ.δ.* του αριθμού των απαιτήσεων.

Θεώρημα 2.4.2. *Αν η απαριθμήτρια σ.δ. έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις, τότε και η σ.δ. των συνολικών απαιτήσεων έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις.*

Για μια αναλυτική απόδειξη του Θεωρήματος 2.4.2 βλ. [5], Θεώρημα 4.1.3.

Θεώρημα 2.4.3. *Αν η απαριθμήτρια σ.δ. έχει στάσιμες ανεξάρτητες προσαυξήσεις, τότε και η σ.δ. των συνολικών απαιτήσεων έχει στάσιμες ανεξάρτητες προσαυξήσεις.*

Για μια αναλυτική απόδειξη του Θεωρήματος 2.4.3 βλ. [5], Θεώρημα 4.1.4.

2.5 Σύνθετες Κατανομές

Στο παρόν κεφάλαιο θα μελετήσουμε τον τρόπο υπολογισμού της κατανομής του συνολικού μεγέθους των απαιτήσεων S_t σε χρόνο t.
Θεωρούμε μία τυχαία μεταβλητή N που ικανοποιεί την συνθήκη $P_N[\mathbb{N}_0] = 1$ και ορίζουμε

$$S := \sum_{k=1}^{N} X_k. \tag{2.13}$$

Οι τυχαίες μεταβλητές N και S θα αναφέρονται πάλι ως η απαριθμήτρια *σ.δ.* και η *σ.δ.* των συνολικών απαιτήσεων αντίστοιχα.
Θεωρούμε επιπλέον ότι οι τ.μ. N και $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ανεξάρτητες και υποθέτουμε ότι η ακολουθία $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι *i.i.d.*. Στην περίπτωση αυτή η κατανομή P_S των συνολικών απαιτήσεων ονομάζεται **σύνθετη κατανομή** και συμβολίζεται με

$$\mathbf{C}(P_N, P_X)$$

. Οι σύνθετες κατανομες συνήθως προσδιορίζονται απο την κατανομή της απαριθμήτριας *σ.δ.* . Για παράδειγμα, αν η P_N ακολουθεί την κατανομή *Poisson*, τότε και η $\mathbf{C}(P_N, P_X)$ ονομάζεται **σύνθετη κατανομή Poisson**.
Το επόμενο αποτέλεσμα είναι μια αναδιατύπωση του Λήμματος 2.4.1

Λήμμα 2.5.1. *Για κάθε $B \in \mathfrak{B}$ ισχύει*

$$P_S[B] = \sum_{n=0}^{\infty} P_N[\{n\}] P_X^{*n}[B]. \tag{2.14}$$

Σε μερικές περιπτώσεις είναι πιο εύκολο να χρησιμοποιείται η χαρακτηριστική συνάρτηση της κατανομής των συνολικών απαιτήσεων.

Λήμμα 2.5.2. *Η χαρακτηριστική συνάρτηση της S ικανοποιεί τη σχέση*

$$\varphi_S(z) = m_N(\varphi_X(z)) \tag{2.15}$$

ενώ η πιθανογεννήτρια συνάρτηση ικανοποιεί τη σχέση

$$m_S(z) = m_N(m_X(z)).$$

Για μια αναλυτική απόδειξη του Λήμματος 2.5.2 βλ. [5], Λήμμα 4.22.

Πόρισμα 2.5.3. *Αν $P_N = \mathbf{P}(\alpha)$, τότε η χαρακτηριστική συνάρτηση της S ικανοποιεί την*

$$\varphi_S(z) = e^{\alpha(\varphi_X(z)-1)}. \tag{2.16}$$

Αν η κατανομή του αριθμού των απαιτήσεων ακολουθεί μια κατανομή *Bernoulli* ή μια λογαριθμική κατανομή, τότε ο υπολογισμός τησ σύνθετης κατανομής *Poisson* μπορεί να απλοποιηθεί σύμφωνα με τα παρακάτω Πορίσματα.

Πόρισμα 2.5.4. *Για κάθε $\alpha \in (0,\infty)$ και $\eta \in (0,1)$, ισχύει ότι*

$$\mathbf{C}(\mathbf{P}(\alpha), \mathbf{B}(\eta)) = \mathbf{P}(\alpha\eta). \tag{2.17}$$

Πόρισμα 2.5.5. *Για κάθε $\alpha \in (0,\infty)$ και $\eta \in (0,1)$, ισχύει ότι*

$$\mathbf{C}(\mathbf{P}(\alpha), \mathbf{Log}(\eta)) = \mathbf{NB}\left(\frac{\alpha}{|\log(1-\eta)|}, 1-\eta\right). \tag{2.18}$$

Λήμμα 2.5.6. (Οι ταυτότητες του Wald) *Υποθέτουμε ότι $\mathbb{E}[N] < \infty$ και $\mathbb{E}[X] < \infty$. Τότε για την μέση τιμή και την διακύμανση της S ισχύει*

$$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[X] \tag{2.19}$$

και

$$\mathbb{V}ar[S] = \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{V}ar[X] + \mathbb{V}ar[N] \cdot \mathbb{E}[X]^2 \tag{2.20}$$

Για την υπόλοιπη εργασία, εκτός αν αναφέρεται κάτι διαφορετικό, $\Upsilon := (0,\infty)$, $(\Upsilon, H) := (\Upsilon, \mathfrak{B}(\Upsilon))$, $X := \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια σ.δ. μεγέθους απαιτήσεων, και $X_1 \in \mathcal{L}^1(P)$ και το ζεύγος (N, X) είναι μια σ.δ. κινδύνου από την οποία επάγεται η σ.δ. $S := \{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ συνολικών απαιτήσεων.

Κεφάλαιο 3

Μεικτές απαριθμήτριες στοχαστικές διαδικασίες

Το μοντέλο της διαδικασίας Poisson στην κλασική Θεωρία Κινδύνου χρησιμοποιείται περισσότερο για λόγους απλότητας, καθώς κυρίως το γεγονός της ύπαρξης εκθετικά κατανεμμημένων ενδιάμεσων χρόνων καθιστά το μοντέλο θελκτικό από άποψη "υπολογιστικού" κόστους και πολυπλοκότητας. Δύο από τα σημαντικότερα προβλήματα ενός τέτοιου μοντέλου είναι ότι στην πράξη τα χαρτοφυλάκια είναι ανομοιογενή και η μεταβλητότητά τους, που εκφράζεται από τον λόγο της διακύμανσης προς τη μέση τιμή του πλήθους των κινδύνων, είναι συνήθως μεγαλύτερη της μονάδας. Είναι επομένως φυσιολογικό να αναζητηθούν μοντέλα που εκφράζουν με μεγαλύτερη ακρίβεια τον πραγματικό κόσμο.

Ένα τέτοιο μοντέλο είναι το ανανεωτικό (γνωστό και ως μοντέλο Sparre Andersen), στο οποίο οι ενδιάμεσοι χρόνοι παραμένουν ανεξάρτητοι και ισόνομοι, αλλά όχι κατ΄ ανάγκη εκθετικά κατανεμημένοι.

Όσον αφορά το πρόβλημα ομοιογένειας του χαρτοφυλακίου αυτό λύνεται, αν ερμηνεύσουμε το χαρτοφυλάκιο μας ως μία μείξη από μικρότερα ομοιογενή χαρτοφυλάκια. Τότε η απαριθμήτρια διαδικασία που περιγράφει το ανομοιογενές χαρτοφυλάκιο ορίζεται ως μία μείξη των απαριθμητριών διαδικασιών που περιγράφουν τα ομοιογενή χαρτοφυλάκια, ώστε η κατανομή μείξης να αναπαριστά τη δομή του ανομοιογενούς χαρτοφυλακίου.

3.1 Το υπόδειγμα

Ορισμός 3.1.1. *Η απαριθμήτρια σ.δ. N έχει:*

- ***υπό συνθήκη ανεξάρτητες προσαυξήσεις*** *ως προς το Θ, αν για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $t_0, t_1, ..., t_m \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$, οι προσαυξήσεις $\{N_{t_j} -$*

$N_{t_{j-1}}\}_{j\in(1,\dots,m)}$ *είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητες ως προς το Θ, και έχει*

- ***υπό συνθήκη στάσιμες προσαυξήσεις*** *ως προς το Θ, αν για κάθε* $m \in \mathbb{N}$ *και* $t_0, t_1, \dots, t_m, h \in \mathbb{R}_+$ *τέτοια ώστε* $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$*, οι προσαυξήσεις* $\{N_{t_{j+h}} - N_{t_{j-1+h}}\}_{j\in(1,\dots,m)}$ *έχουν την ίδια υπό σύνθηκη κατανόμη ως προς το Θ, με τις* $\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}}\}_{j\in\{1,\dots,m\}}$.

Άμεσα προκύπτει πως μια απαριθμήτρια σ.δ. με υπό συνθήκη ανεξάρτητες προσαυξήσεις ως προς Θ, έχει και υπό συνθήκη στάσιμες προσαυξήσεις ως προς Θ αν και μόνο αν η $P_{N_{t+h}-N_t}|_\Theta = P_{N_h}|_\Theta$, $P|\sigma(\Theta) - \sigma.\beta.$ για όλα τα $t, h \in \mathbb{R}_+$.

Για την απόδειξη χρησιμοποιούνται παρόμοια επιχειρήματα με εκείνα της απόδειξης του Λήμματος Α 1.3 του [1] Λυμπερόπουλος Δ.Π. (2006),

Λήμμα 3.1.2. *Αν μια απαριθμήτρια σ.δ. έχει υπό συνθήκη στάσιμες προσαυξήσεις ως προς Θ, τότε έχει και στάσιμες προσαυξήσεις.*

Για την απόδειξη του παρακάτω Λήμματος βλέπε π.χ. [23] Schmidt, Lemma 4.1.1. Αντίθετα το ερώτημα αν η απαριθμήτρια σ.δ. με υπό συνθήκη ανεξάρτητες προσαυξήσεις ως προς το Θ μπορεί να έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις, γενικά έχει αρνητική απάντηση όπως θα το δούμε παρακάτω.

Το λήμμα που ακολουθεί προκύπτει άμεσα απο τις ιδιότητες της υπό συνθήκη αναμενόμενης τιμής.

Λήμμα 3.1.3. *Αν η απαριθμήτρια σ.δ.* $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *έχει πεπερασμένες μέσες τιμές, τότε*

$$\mathbb{E}[N_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(N_t|\Theta)]$$

$$\mathbb{V}ar[N_t] = \mathbb{E}[\mathbb{V}ar(N_t|\Theta)] + \mathbb{V}ar[\mathbb{E}(N_t|\Theta)]$$

για όλα τα $t \in \mathbb{R}_+$.

3.2 Η μεικτή στοχαστική διαδικασία Poisson με παράμετρο μείξης

Ορισμός 3.2.1. Η απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ονομάζεται **μεικτή στοχαστική διαδικασία Poisson** με παράμετρο Θ(P-MPP(Θ)για συντομία), εάν

- Θ είναι μια τ.μ. για την οποία ισχύει $P_\Theta[(0,\infty)]$, και

- $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει υπό συνθήκη στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις ως προς το Θ, έτσι ώστε για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ να ισχύει η σχέση $P_{N_t|\Theta} = P(t\Theta)$, $P|(\sigma\Theta)$-σ.β.

Ιδιαιτέρως, αν η κατανομή της Θ είναι εκφυλισμένη στο $\theta_0 > 0$(δηλαδή $P_\Theta(\{\theta_0\})$), τότε η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια P-σ.δ. Poisson με παράμετρο θ_0.

Λήμμα 3.2.2. *Αν η απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, είναι μια P-MPP($\Theta$), τότε έχει στάσιμες προσαυξήσεις και ικανοποιεί την σχέση:*

$$P[\{N_t\}] > 0,$$

για όλα τα $t \in (0, \infty)$ και για $n \in \mathbb{N}_0$.

Για μία αναλυτική απόδειξη του Λήμματος 3.2.2 (βλ. π.χ. [4], Λήμμα 4.1.4).

Θεώρημα 3.2.3. *Αν η απαριθμήτρια σ.δ. είναι μια P-MPP(Θ), τότε είναι και διαδικασία Markov.*

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [23], Theorem 4.2.3.

Λήμμα 3.2.4. *Αν η απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, είναι μια P-MPP($\Theta$), τέτοια ώστε η $\mathbb{E}[\Theta] < \infty$, τότε για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ ισχύει :*

$$\mathbb{E}[N_t] = t \cdot \mathbb{E}[\Theta]$$

και

$$\mathbb{V}ar[N_t] = t \cdot \mathbb{E}[\Theta] + t^2 \cdot \mathbb{V}ar[\Theta].$$

Ιδιαιτέρως η πιθανότητα έκρηξης ισούται με μηδέν.

Για την απόδειξη βλ. [23], Lemma 4.2.5.

Έτσι, αν η απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, είναι μια P-MPP($\Theta$) έτσι ώστε η κατανομή της Θ να είναι μη εκφυλισμένη και να έχει πεπερασμένη μέση τιμή, τότε, για όλα τα $t \in (0, \infty)$, ισχύει ότι $\mathbb{V}ar(N_t) > \mathbb{E}(N_t)$.

Κεφάλαιο 4

Ένας χαρακτηρισμός των martingale-ισοδύναμων σύνθετων ανανεωτικών διαδικασιών

Ένα βασικό αποτέλεσμα των χρηματοοικονομικών μαθηματικών (ονομάζόμενο το *θεμελιώδες θεώρημα τιμολόγησης περιουσιακών στοιχείων*) είναι, ότι για κάθε *σ.δ.* U:=$\{U_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ η ύπαρξη ενός *martingale*-ισοδύναμου μέτρου είναι *ουσιαστικά* ισοδύναμη με την απουσία ευκαιριών κερδοσκοπίας. Ξεκινώντας από την οικονομικά ουσιαστική υπόθεση ότι η U δεν επιτρέπει κερδοσκοπία, το θεώρημα επιτρέπει το μέτρο πιθανότητας P του υποκείμενου χώρου πιθανότητας (Ω,Σ,P) να αντικατασταθεί από ένα ισοδύναμο μέτρο πιθανότητας Q έτσι ώστε η διαδικασία U να γίνει *martingale* κάτω απο το νέο μέτρο. Ιδιαίτερα, το πρόβλημα της δίκαιης τιμολόγησης ενδεχόμενων απαιτήσεων, με την ονομασία "αρχή της ισοδυναμίας", μια πρόκληση για την αναλογιστική αρχή, ανάγεται στο προσδιορισμό των αναμενόμενων τιμών σε σχέση με το μέτρο Q και μπορεί επίσης να θεωρηθεί ως αποτέλεσμα της αποστροφής έναντι του κινδύνου, αποδίδοντας περισσότερο βάρος σε δυσμενή γεγονότα και λιγότερο βάρος σε πιο ευνοϊκά γεγονότα.

Οι θεμελιώδεις εργασίες για την τιμολόγηση των ασφαλίσεων οφείλονται στους $Sonde-rmann$ [26] (1991) και στον *Delbaen & Haezendonck* [10] (1989). Οι τελευταίοι συγγραφείς ξεκινούν από την υποκείμενη σύνθετη διαδικασία *Poisson* S:=$\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ που αντιπροσωπεύει το συνολικό ποσό απαιτήσεων ενός χαρτοφυλακίου μιας ασφαλιστικής εταιρίας, που έχει καταβληθεί μέχρι το χρόνο t και υποθέτουν ότι για κάθε χρονική στιγμή t η ασφαλιστική εταιρεία μπορεί να πουλήσει το υπόλοιπο ποσό $S_T - S_t$ αυτού του χαρτοφυλακίου κατά την περίοδο (t, T) για κάποιο ασφάλιστρο p_t. Η υποκείμενη διαδικασία U, δηλαδή η αξία του χαρτοφυλακίου απαιτήσεων κατά τη χρονική στιγμή $t \in [0, T]$ έχει τη μορφή $U_t := p_t + S_t$.

Οι *Delbaen & Haezendonck* υποστηρίζουν ότι η ρευστότητα της αγοράς θα πρέπει να συνεπάγεται την απουσία ευκαιριών κερδοσκοπίας. Ως συνέπεια του θεμελιώδους θεωρήματος της τιμολόγησης περιουσιακών στοιχείων (βλ. [14] Harrison & Kreps (1979)), θα πρέπει ένα *ουδέτερου κινδύνου μέτρο πιθανότητας* ή ισοδύναμα ένα *martingale ισοδύναμο μέτρο πιθανότητας* Q έτσι ώστε η U να είναι *martingale* ως προς το Q. Επιπλέον, επιχειρηματολογούν ότι τα ασφάλιστρα p_t $(0 \leqslant t \leqslant T)$ θα πρέπει να είναι σε ένα προς ένα αντιστοιχία με τα μέτρα ουδέτερου κινδύνου επάνω στη διύλιση $\mathcal{F}_T^S := \sigma(\{S_t\}_{0 \leqslant t \leqslant T})$ και θα πρέπει να πληρούν την συνθήκη $p_t = p \cdot (T - t)$, όπου το p είναι η πυκνότητα του ασφαλίστρου. Σημειώνουμε ότι, λόγω της δομής άλματος μιας σύνθετης διαδικασίας *Poisson*, υπάρχουν πολλά τέτοια μέτρα κινδύνου, έτσι ώστε η τιμολόγηση να συνδέεται άμεσα με μια στάση προς τον κίνδυνο. Η παραπάνω θεώρηση οδήγησε τους *Delbaen & Haezendonck* στο ακόλουθο βασικό πρόβλημα.

Δοσμένης μιας σύνθετης διαδικασίας Poisson S κάτω από το μέτρο πιθανότητας P, να χαρακτηριστούν όλα τα μέτρα πιθανοτήτας Q, έτσι ώστε το Q να είναι ισοδύναμο με το P και η S να παραμένει μια σύνθετη διαδικασία Poisson κάτω από το Q.

Οι *Delbaen & Haezendonck* έλυσαν αυτό πρόβλημα στην εργασία [10], Proposition 2.2.

Από το παραπάνω πρόβλημα προκύπτει φυσιολογικά το πρόβλημα (Π) της εισαγωγής, με την επίλυση του οποίου ασχολούμαστε στο παρόν κεφάλαιο.

Τα αποτελέσματα του παρόντος Κεφαλαίου έχουν αποδειχθεί στην εργασία [19].

4.1 Σύνθετες ανανεωτικές διαδικασίες και προοδευτικά ισοδύναμα μέτρα

Έστω $\mathcal{F}^X := \{\mathcal{F}_n^X\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\mathcal{F}^W := \{\mathcal{F}_n^W\}_{n \in \mathbb{N}}$ και $\mathcal{F}^S := \{\mathcal{F}_t^S\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ οι κανονικές διυλίσεις των διαδικασιών $X := \{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, W, S αντίστοιχα.

Λήμμα 4.1.1. *Θεωρούμε $t \geqslant 0$ και ορίζουμε την οικογένεια*

$$\mathcal{A}_t := \{\bigcup_{k=0}^{\infty} \{N_t = k\} \cap A_k : \forall k \geqslant 0 \ A_k \in \sigma(\{W_1, ..., W_k; X_1, ..., X_k\})\} \tag{4.1}$$

Τότε η $\mathcal{A}_t$ και η $\mathcal{F}_t^S$ είναι ίσες.

Απόδειξη. Γνωρίζοντας οτι $\mathcal{F}_t^S = \sigma(\mathcal{A}_t)$ αρκεί να δείξουμε οτι η $\mathcal{A}_t$ είναι μια $\sigma-$άλγεβρα. Πράγματι, το κενό σύνολο ανήκει στην $\mathcal{A}_t$, αφού

$$\varnothing = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} \{N_t = k\} \cap \varnothing \ \text{ με } \varnothing \in \sigma(\{W_1, ..., W_k; X_1, ..., X_k\}).$$

Έστω

$$A = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{N_t = k\} \cap A_k, \tag{4.2}$$

όπου $A_k \in \sigma(\{W_1, ..., W_k; X_1, ..., X_k\})$ για κάθε $k \in \mathbb{N}_0$, είναι ένα σύνολο μέσα στην $\mathcal{A}_t$.

Θα δείξουμε ότι $A^c \in \mathcal{A}_t$. Πράγματι, έστω $B := \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}_0} (\{N_t = \ell\} \cap A_\ell^c) \in \mathcal{A}_t$ όπου $A_\ell \in \sigma(\{W_1, ..., W_\ell; X_1, ..., X_\ell\})$.

Για να δείξω ότι $B = A^c$ αρκεί να δείξω ότι $A \cap B = \varnothing$ και $A \cup B = \Omega$.

Πράγματι,

$$\begin{aligned}
A \cap B &= A \cap (\bigcup_{\ell \in \mathbb{N}_0} (\{N_t = \ell\} \cap A_\ell^c) \\
&= (\bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} (\{N_t = k\} \cap A_k)) \cap (\bigcup_{\ell \in \mathbb{N}_0} (\{N_t = \ell\} \cap A_\ell^c)) \\
&= \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}_0} (\{N_t = k\} \cap A_\ell \cap \{N_t = \ell\} \cap A_\ell^c \\
&= \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}_0} (\{N_t = k\} \cap A_k \cap A_\ell^c) \\
&= \varnothing
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
A \cup B &= A \cup (\bigcup_{\ell \in \mathbb{N}_0} (\{N_t = \ell\} \cap A_\ell^c) \\
&= (\bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} (\{N_t = k\} \cap A_k)) \cup (\bigcup_{\ell \in \mathbb{N}_0} (\{N_t = \ell\} \cap A_\ell^c)) \\
&= \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}_0} (\{N_t = k\} \cap A_\ell) \cup (\{N_t = \ell\} \cap A_\ell^c) \supseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} (\{N_t = k\} \cap (A_k \cup A_k^c)) \\
&= \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} \{N_t = k\} \\
&= \Omega
\end{aligned}$$

Άρα $\Omega = A \cup B$.

Υποθέτοντας οτι η $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ είναι ακολουθία στην $\mathcal{A}_t$ με

$$A_n = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} \{N_t = k\} \cap A_k^n \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \text{όπου } A_k^n \in \sigma(\{W_1, ..., W_k; X_1, ..., X_k\})$$

έχουμε

$$\begin{aligned}\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} A_n &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0}\left[\bigcup_{k\in\mathbb{N}_0}(\{N_t=k\}\cap A_k^n)\right]\\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0}\bigcup_{k\in\mathbb{N}_0}(\{N_t=k\}\cap A_k^n)\\ &= \bigcup_{k\in\mathbb{N}_0}\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0}(\{N_t=k\}\cap A_k^n)\\ &= \bigcup_{k\in\mathbb{N}_0}\left[\{N_t=k\}\cap\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0}A_k^n\right)\right]\in\mathcal{A}_t\end{aligned}$$

$$\text{όπου} \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} A_k^n \in \sigma(\{W_1,...,W_k;X_1,...,X_k\}).$$

$$\text{Άρα} \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} A_k^n \in \mathcal{A}_t.$$

□

Λήμμα 4.1.2. *Για κάθε $t\in\mathbb{R}_+$ και $n\in\mathbb{N}_0$ ισχύει*

$$\mathcal{F}_t^S\cap\{N_t=n\}=\sigma(\mathcal{F}_n^X\cup\mathcal{F}_n^W)\cap\{N_t=n\}. \tag{4.3}$$

Απόδειξη. Έστω ένα αυθαίρετο $t\geqslant 0$ και $n\in\mathbb{N}_0$. Αφου ισχύει η συνθήκη $\sigma(\mathcal{F}_n^X\cup\mathcal{F}_n^W)\cap\{N_t=n\}\subseteq\mathcal{F}_t^S\cap\{N_t=n\}$, πρέπει να αποδείξουμε μόνο τον αντίστροφο εγκλεισμό. Έστω $A\in\bigcup_{u\leqslant t}\sigma(S_u)$. Τότε υπάρχει ένα $u\in[0,t]$ και ένα σύνολο $B\in\mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε $A=S_u^{-1}(B)=\bigcup_{k\in\mathbb{N}_0}(\{N_u=k\}\cap B_k)$, όπου $B_k:=(\sum_{j=1}^k X_j)^{-1}(B)\in\mathcal{F}_k^X$, για κάθε $k\in\mathbb{N}_0$. Επομένως,

$$A\cap\{N_t=n\}=[(\bigcup_{k=0}^{n-1}\{N_u=k\}\cap B_k)\cap\{N_t=n\}]\cup(\{N_u=n\}\cap B_n\cap\{N_t=n\}).$$

Θέτοντας $C_n:=\bigcup_{k=0}^{n-1}(\{N_u=k\}\cap B_k)\in\sigma(\mathcal{F}_n^X\cup\mathcal{F}_n^W)$ λαμβάνουμε ότι

$$A\cap\{N_t=n\}=D_n\cap\{N_t=n\},$$

όπου $D_n:=C_n\cup(\{T_n\leqslant u\}\cap B_n)\in\sigma(\mathcal{F}_n^X\cup\mathcal{F}_n^W)$. Κατά συνέπεια, ισχύει $\bigcup_{u\leqslant t}\sigma(S_u)\cap\{N_t=n\}\subseteq\sigma(\mathcal{F}_n^X\cup\mathcal{F}_n^W)\cap\{N_t=n\}$ δηλαδή $\mathcal{F}_t^S\cap\{N_t=n\}\subseteq\sigma(\mathcal{F}_n^X\cup\mathcal{F}_n^W)\cap\{N_t=n\}$. □

Ορισμός 4.1.3. Έστω Q ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στη Σ. Τότε το P και το Q είναι

(a) ισοδύναμα επάνω στη Σ, εάν έχουν τα ίδια μηδενικά σύνολα στη Σ, συμβολισμός $P\sim Q$,

(b) προοδευτικά ισοδύναμα (για την $\mathcal{F}^S$), εάν για κάθε $t \in R_+$ έχουν τα ίδια μηδενικά σύνολα στην $\mathcal{F}^S_t$, συμβολισμός $P \overset{\text{pr}}{\sim} Q$,

(c) ιδιάζοντα ή κάθετα (singular) επάνω στη Σ, εάν υπάρχει ένα σύνολο $A \in \Sigma$ τέτοιο ώστε $P(A) = Q(\Omega \backslash A) = 1$, συμβολισμός $P \perp Q$.

Λήμμα 4.1.4. **(a)** *Έστω ότι η X είναι $Q - i.i.d.$, $Q_{X_1} \sim P_{X_1}$ και έστω h να είναι μία πραγματική συνάρτηση, που είναι ένα προς ένα και $\mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρήσιμη. Τότε υπάρχει μία P_{X_1}-σ.β. μοναδική, $\mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρήσιμη συνάρτηση γ έτσι ώστε*

(i) $\mathbb{E}_P\left[h^{-1} \circ \gamma \circ X_1\right] = 1$,

(ii) για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για ολα τα $A \in \mathcal{F}^X_n$ ισχύει η συνθήκη

$$Q(A) = \mathbb{E}_P\left[\chi_A \cdot \prod_{j=1}^{n} (h^{-1} \circ \gamma \circ X_j)\right]. \tag{4.4}$$

(b) *Έστω ότι η W είναι $P - i.i.d.$ και $Q - i.i.d.$, και $Q_{W_1} \sim P_{W_1}$. Τότε υπάρχει μία P_{W_1}-σ.β. μοναδική θετική συνάρτηση $r \in \mathcal{L}^1_+(P_{W_1})$ έτσι ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για όλα τα $D \in \mathcal{F}^W_n$ να ισχύει η συνθήκη*

$$Q(D) = \mathbb{E}_P\left[\chi_D \cdot \prod_{j=1}^{n} (r \circ W_j)\right]. \tag{4.5}$$

Απόδειξη. **(a)** Αρχικά σημειώνουμε ότι $h(\Upsilon) \in \mathfrak{B}$ (βλ. π.χ. [9] Θεώρημα 8.3.7) και οτι η συνάρτηση h^{-1} είναι $\mathfrak{B}(h(\Upsilon))$-$\mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρήσιμη (βλ. π.χ. [9] Πρόταση 8.3.5). Αφού ισχύει $P_{X_1} \sim Q_{X_1}$ απο το Θεώρημα Radon-Nikodým υπάρχει μία P_{X_1}-σ.β. μοναδική θετική συνάρτηση $f \in \mathcal{L}^1(P_{X_1})$ έτσι ώστε

$$Q_{X_1}(B) = \int_B f\, dP_{X_1} \quad \text{για κάθε } B \in \mathfrak{B}(\Upsilon).$$

Θέτουμε $\gamma := h \circ f$. Προφανώς η γ είναι μια Borel μετρήσιμη συνάρτηση.

Η σχέση (i) αποδεικνύεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_P\left[h^{-1} \circ \gamma \circ X_1\right] &= \int_\Omega h^{-1} \circ \gamma \circ X_1 dP \\
&= \int_\Omega h^{-1} \circ h \circ f \circ X_1 dP \\
&= \int_\Omega f \circ X_1 dP \\
&= \int_\Upsilon f P_{X_1} = Q_{X_1}(\Upsilon) = 1.
\end{aligned}$$

(ii): Έστω $n \in \mathbb{N}$ σταθερό αλλά αυθαίρετο και έστω η οικογένεια

$$\mathcal{C}_n^X := \left\{ \bigcap_{j=1}^n A_j : A_j \in \sigma(X_j) \right\}.$$

(a1) Ένας εύκολος υπολογισμός δείχνει οτι κάθε $A \in \mathcal{C}_n^X$ ικανοποιεί την συνθήκη (3.3).

Πράγματι, έστω $A \in \mathcal{C}_n^X$. Τότε υπάρχουν $A_j \in \sigma(X_j)$ ώστε $A = \bigcap_{j=1}^n A_j$, δηλαδή υπάρχουν $B_j \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ ώστε $A_j = X_j^{-1}(B_j)$ και $A = \bigcap_{j=1}^n X_j^{-1}(B_j)$.

Επομένως,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_P\left[\chi_A \cdot \prod_{j=1}^n (h^{-1} \circ \gamma \circ X_j)\right] &= \int_A \prod_{j=1}^n (h^{-1} \circ \gamma \circ X_j) dP = \int_A \prod_{j=1}^n (h^{-1} \circ h \circ f \circ X_j) dP \\
&= \int_A \prod_{j=1}^n (f \circ X_j) dP = \int_\Omega \chi_A \prod_{j=1}^n (f \circ X_j) dP \\
&= \int_\Omega \prod_{j=1}^n \chi_{X_j^{-1}(B_j)} \cdot (f \circ X_j) dP = \prod_{j=1}^n \int_\Omega \chi_{X_j^{-1}(B_j)} \cdot (f \circ X_j) dP \\
&= \prod_{j=1}^n \int_{X_j^{-1}(B_j)} (f \circ X_j) dP = \prod_{j=1}^n \int_{B_j} f \cdot dP_{X_j} = \prod_{j=1}^n Q_{X_j}(B_j) \\
&= \prod_{j=1}^n Q_(X_j^{-1}(B_j)) = Q\left(\bigcap_{j=1}^n X_j^{-1}(B_j)\right) = Q(A),
\end{aligned}$$

όπου η έκτη και η δέκατη ισότητα είναι συνέπεια της P-ανεξαρτησίας της $\sigma.\delta.$ X.

(a2) Ορίζουμε την οικογένεια των συνόλων

$$\mathcal{D}_n^X := \left\{ E \in \mathcal{F}_n^X : Q(E) = \mathbb{E}_P\left[\chi_E \cdot \prod_{j=1}^n (h^{-1} \circ \gamma \circ X_j)\right] \right\}.$$

Η οικογένεια των συνόλων $\mathcal{D}_n^X$ είναι μία κλάση Dynkin στον Ω.

Πράγματι,

(Dyn1) $\varnothing \in \mathcal{D}_n^X$ αφού

$$Q(\varnothing) = 0 = \mathbb{E}_P\left[\chi_\varnothing \cdot \prod_{j=1}^n (h^{-1} \circ \gamma \circ X_j)\right].$$

(Dyn2) Για κάθε $E \in \mathcal{D}_n^X$, έχουμε ότι $\Omega \setminus E \in \mathcal{D}_n^X$.

Πράγματι, σημειώνουμε ότι $\Omega \in \mathcal{D}_n^X$ αφού

$$Q(\Omega) = \prod_{j=1}^n \mathbb{E}_P[h^{-1} \circ \gamma \circ X_j] = \mathbb{E}_P\left[\prod_{j=1}^n (h^{-1} \circ \gamma \circ X_j)\right] = \mathbb{E}_P\left[\chi_\Omega \cdot \prod_{j=1}^n (h^{-1} \circ \gamma \circ X_j)\right]$$

όπου η πρώτη ισότητα προκύπτει απο το Λήμμα 4.1.4 (i) και η δεύτερη ισότητα προκύπτει απο το γεγονός ότι X_j είναι ανεξάρτητα. Ως συνέπεια παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} Q(\Omega \setminus E) &= Q(\Omega) - Q(E) \\ &= \mathbb{E}_P\left[\chi_\Omega \cdot \prod_{j=1}^n (h^{-1} \circ \gamma \circ X_j)\right] - \mathbb{E}_P\left[\chi_E \cdot \prod_{j=1}^n (h^{-1} \circ \gamma \circ X_j)\right] \\ &= \mathbb{E}_P\left[(\chi_\Omega - \chi_E) \cdot \prod_{j=1}^n (h^{-1} \circ \gamma \circ X_j)\right] \\ &= \mathbb{E}_P\left[\chi_{\Omega \setminus E} \cdot \prod_{j=1}^n (h^{-1} \circ \gamma \circ X_j)\right]. \end{aligned}$$

(Dyn3) Για κάθε ακολουθία $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ανά δύο ξένα μεταξύ τους σύνολα μέσα στην $\mathcal{D}_n^X$ έχουμε $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{D}_n^X$.

Πράγματι,

$$\begin{aligned} Q(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} Q(E_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}_P\left[\chi_{E_n} \cdot \prod_{j=1}^n (h^{-1} \circ \gamma \circ X_j)\right] \\ &= \mathbb{E}_P\left[\sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{E_n} \cdot \prod_{j=1}^n (h^{-1} \circ \gamma \circ X_j)\right] \\ &= \mathbb{E}_P\left[\chi_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n} \cdot \prod_{j=1}^n (h^{-1} \circ \gamma \circ X_j)\right]. \end{aligned}$$

Επομένως, απο τις (Dyn1), (Dyn2) και (Dyn3), προκύπτει ότι η $\mathcal{D}_n^X$ είναι κλάση Dynkin.

(a3) Θέτουμε $\widetilde{\mathcal{G}}_n^X := \mathcal{G}_n^X \cup \mathcal{C}_n^X$, όπου $\mathcal{G}_n^X := \bigcup_{j=1}^n \sigma(X_j)$. Τότε $\mathcal{F}_n^X = \mathcal{D}_n^X$.

Πράγματι, έχουμε ότι $\mathcal{F}_n^X = \sigma(\mathcal{G}_n^X) \subseteq \sigma(\widetilde{\mathcal{G}}_n^X) \subseteq \mathcal{F}_n^X$, ως εκ τούτου $\sigma(\widetilde{\mathcal{G}}_n^X) = \mathcal{F}_n^X$. Το τελευταίο μαζί με το γεγονός ότι ο γενήτορας $\widetilde{\mathcal{G}}_n^X$ είναι κλειστός ως προς τις πεπερασμένες τομές, μας επιτρέπουν να εφαρμόσουμε το Θεώρημα της Μονότονης κλάσης (βλ. Θεώρημα A.2.4) για να πάρουμε $\mathcal{F}_n^X = \mathcal{D}_n^X$, επομένως ισχύει το (ii).

(b) Σημειώνουμε ότι αφού $P_{W_1} \sim Q_{W_1}$ απο το Θεώρημα Radon-Nikodým υπάρχει μία συνάρτηση $r \in \mathcal{L}_+^1(P_{W_1})$ τέτοια ώστε

$$Q_{W_1}(D) = \int_D r\, dP_{W_1} \quad \text{για κάθε } D \in \mathfrak{B}(\Upsilon). \tag{4.6}$$

Έστω ένα αυθαίρετο αλλά σταθερό $n \in \mathbb{N}_0$.

(b1) Θέτουμε

$$\mathcal{C}_n^W := \left\{\bigcap_{j=1}^n D_j : D_j \in \sigma(W_j)\right\}.$$

Τότε για κάθε $D \in \mathcal{C}_n^W$ ισχύει η συνθήκη (4.5).

Πράγματι, έστω $D \in \mathcal{C}_n^W$, τότε υπάρχει ένα $F_j \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ με $j \in \{1, \ldots, n\}$ τέτοιο ώστε $D = \bigcap_{j=1}^n W_j^{-1}(F_j)$. Επομένως,

$$\begin{aligned}
Q(D) &= \int \chi_{\bigcap_{j=1}^n W_j^{-1}(F_j)}\, dQ = \int \prod_{j=1}^n \chi_{W_j^{-1}(F_j)}\, dQ \\
&= \prod_{j=1}^n \int \chi_{W_j^{-1}(F_j)}\, dQ = \prod_{j=1}^n Q_{W_j}(F_j) \\
&\overset{(4.6)}{=} \prod_{j=1}^n \int_{F_j} r\, dP_{W_j} = \prod_{j=1}^n \int_{W_j^{-1}(F_j)} r \circ W_j\, dP \\
&= \prod_{j=1}^n \int \chi_{W_j^{-1}(F_j)} \cdot (r \circ W_j)\, dP = \int \prod_{j=1}^n \chi_{W_j^{-1}(F_j)} \cdot (r \circ X_j)\, dP \\
&= \int \chi_{\bigcap_{j=1}^n W_j^{-1}(F_j)} \cdot \prod_{j=1}^n (r \circ W_j)\, dP = \int \chi_D \cdot \prod_{j=1}^n (r \circ X_j)\, dP \\
&= \mathbb{E}_P\left[\chi_D \cdot \prod_{j=1}^n (r \circ W_j)\right],
\end{aligned}$$

όπου η τρίτη και η όγδοη ισότητα προκύπτουν απο το γεγονός ότι οι τυχαίες μεταβλητές $W_1, ..., W_n$ είναι ανεξάρτητες.

(b2) Ορίζουμε την οικογένεια των συνόλων

$$\mathcal{D}_n^W := \left\{ V \in \mathcal{F}_n^W : Q(V) = \mathbb{E}_P\left[\chi_V \cdot \prod_{j=1}^n (r \circ W_j)\right] \right\}.$$

Η οικογένεια των συνόλων $\mathcal{D}_n^W$ είναι μία κλάση Dynkin στον $\varOmega$.

Πράγματι,

(Dyn1) $\varnothing \in \mathcal{D}_n^W$ αφού

$$Q(\varnothing) = 0 = \mathbb{E}_P\left[\chi_\varnothing \cdot \prod_{j=1}^n (r \circ W_j)\right].$$

(Dyn2) Για κάθε $V \in \mathcal{D}_n^W$, έχουμε ότι $\varOmega \backslash V \in \mathcal{D}_n^W$.

Πράγματι, σημειώνουμε ότι $\varOmega \in \mathcal{D}_n^W$ λόγω της (b1), αφού $\varOmega \in \mathcal{C}_n^W$. Επομένως,

$$\begin{aligned}
Q(\varOmega \backslash V) &= Q(\varOmega) - Q(V) = \mathbb{E}_P\left[\chi_\varOmega \cdot \prod_{j=1}^n (r \circ W_j)\right] - \mathbb{E}_P\left[\chi_V \cdot \prod_{j=1}^n (r \circ W_j)\right] \\
&= \mathbb{E}_P\left[(\chi_\varOmega - \chi_V) \cdot \prod_{j=1}^n (r \circ W_j)\right] = \mathbb{E}_P\left[\chi_{\varOmega \backslash V} \cdot \prod_{j=1}^n (r \circ W_j)\right].
\end{aligned}$$

(Dyn3) Για κάθε ακολουθία $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ανά δύο ξένων μεταξύ τους συνόλων στην $\mathcal{D}_n^W$ έχουμε ότι $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n \in \mathcal{D}_n^W$.

Πράγματι,

$$\begin{aligned} Q(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} Q(V_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}_P\left[\chi_{V_n}\cdot\prod_{j=1}^n (r\circ W_j)\right] \\ &= \mathbb{E}_P\left[\sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{V_n}\cdot\prod_{j=1}^n (r\circ W_j)\right] \\ &= \mathbb{E}_P\left[\chi_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n}\cdot\prod_{j=1}^n (r\circ W_j)\right]. \end{aligned}$$

Έτσι, λαμβάνοντας υπόψιν τις (Dyn1), (Dyn2) και (Dyn3), προκύπτει ότι η $\mathcal{D}_n^W$ είναι μία Dynkin κλάση.

(b3) Θέτουμε $\widetilde{\mathcal{G}}_n^W := \mathcal{G}_n^W \cup \mathcal{C}_n^W$, όπου $\mathcal{G}_n^W := \bigcup_{j=1}^n \sigma(W_j)$. Τότε $\mathcal{F}_n^W = \mathcal{D}_n^W$.

Πράγματι, έχουμε ότι $\mathcal{F}_n^W = \sigma(\mathcal{G}_n^W) \subseteq \sigma(\widetilde{\mathcal{G}}_n^W) \subseteq \mathcal{F}_n^W$, ως εκ τούτου $\sigma(\widetilde{\mathcal{G}}_n^W) = \mathcal{F}_n^W$. Το τελευταίο μαζί με το γεγονός ότι η οικογένεια $\widetilde{\mathcal{G}}_n^W$ είναι κλειστή ως προς τις πεπερασμένες τομές μας επιτρέπουν να εφαρμόσουμε το Θεώρημα της Μονότονης κλάσης (βλ. Θεώρημα A.2.4) και να πάρουμε $\mathcal{F}_n^W = \mathcal{D}_n^W$. Έτσι προκύπτει ο ισχυρισμός (b). □

Συμβολισμός 4.1.5. Έστω h μία συνάρτηση όπως στο Λήμμα 3.1.3. Η κλάση όλων των πραγματικών $\mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρήσιμων συναρτήσεων γ έτσι ώστε $\mathbb{E}_P[h^{-1}\circ\gamma\circ X_1] = 1$ θα συμβολίζεται με $\mathcal{F}_{P,h}^1 := \mathcal{F}_{P,X_1,h}^1$. Επιπλέον, η κλάση όλων των πραγματικών $\mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρήσιμων συναρτήσεων $\gamma\in\mathcal{F}_{P,h}^1$ που ικανοποιούν την συνθήκη $\mathbb{E}_P[X_1^2\cdot(h^{-1}\circ\gamma\circ X_1)] < \infty$ θα συμβολίζεται με $\mathcal{F}_{P,h}^2 := \mathcal{F}_{P,X_1,h}^2$.

Ορισμός 4.1.6. Μία απαριθμήτρια διαδικασία N ονομάζεται **ανανεωτική διαδικασία με παράμετρο $\theta\in D\subseteq\mathbb{R}^d$ και με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων** (interarrival time distribution) $\mathbf{K}(\theta)$ (γράφουμε P-RP($\mathbf{K}(\theta)$) για συντομία), εάν η επαγόμενη διαδικασία άφιξης W είναι P-ανεξάρτητη και

$$\forall\, n\in\mathbb{N} \qquad P_{W_n} = \mathbf{K}(\theta) : \mathfrak{B}(\Upsilon) \longmapsto [0,1].$$

Ιδιαιτέρως, εάν υπάρχει ένα $\theta\in\Upsilon$ και $\mathbf{K}(\theta) = \mathbf{Exp}(\theta)$ τότε η P-RP($\mathbf{K}(\theta)$) γίνεται P-PP(θ) (βλ. Ορισμός 2.3.1).

Μια διαδικασία συνολικών απαιτήσεων S επαγόμενη απο μια διαδικασία κινδύνου (N, X) με το N να είναι μία P-RP($\mathbf{K}(\theta)$) ονομάζεται **σύνθετη ανανεωτική διαδικασία με παραμέτρους $\mathbf{K}(\theta)$ και P_{X_1}** (γράφουμε P-CRP($\mathbf{K}(\theta), P_{X_1}$) για συντομία). Ιδιαιτέρως, εάν η N είναι μία $P-PP(\theta)$ η διαδικασία S των συνολικών απαιτήσεων ονομάζεται **σύνθετη διαδικασία Poisson με παραμέτρους θ και P_{X_1}** (γράφουμε P-CPP(θ, P_{X_1}) για συντομία).

Σημειώνουμε, οτι εάν η N είναι μια P-RP$(\mathbf{K}(\theta))$, τότε ισχύει $\mathbb{E}_P[N_t] < \infty$ (βλ. π.χ. [13], Θεώρημα 3.1) οπότε σύμφωνα με το [23], Πόρισμα 2.1.5, έχει μηδενική πιθανότητα έκρηξης.

Από εδώ και κάτω συμβολίζουμε πάλι με $\mathbf{K}(\theta)$ τη συνάρτηση κατανομής που επάγεται απο την κατανομή πιθανότητας $\mathbf{K}(\theta)$.

Συμβολισμός 4.1.7. Ας θεωρήσουμε ένα αυθαίρετο αλλά σταθερό $\theta \in D \subseteq \mathbb{R}^d$ και $\rho : D \longmapsto \mathbb{R}^k$ μία $\mathfrak{B}(D)$-$\mathfrak{B}_k$-μετρήσιμη συνάρτηση ($d, k \in \mathbb{N}$). Η κλάση όλων των μέτρων πιθανότητας Q επάνω στη Σ ετσι ώστε $Q \overset{pr}{\sim} P$ και η S να είναι μία Q-CRP$(\mathbf{K}(\rho(\theta)), Q_{X_1})$ θα συμβολίζεται με $\mathcal{M}^1_{S,\mathbf{K}(\rho(\theta))} := \mathcal{M}^1_{S,\mathrm{CRP}(\mathbf{K}(\rho(\theta))}$. Επιπλέον, η κλάση όλων των μέτρων πιθανότητας $Q \in \mathcal{M}^1_{S,\mathbf{K}(\rho(\theta))}$ έτσι ώστε $\mathbb{E}_Q[X_1^2] < \infty$ θα συμβολίζεται με $\mathcal{M}^2_{S,\mathbf{K}(\rho(\theta))}$. Στην ειδική περίπτωση που το $d = k$ και $\rho := id_D$ γράφουμε $\mathcal{M}^\ell_{S,\mathbf{K}(\theta)} := \mathcal{M}^\ell_{S,\mathbf{K}(\rho(\theta))}$ για $\ell = 1, 2$, για απλοποίηση.

Από εδώ και κάτω, αν δεν αναφέρεται κάτι διαφορετικό, η h είναι μία συνάρτηση όπως στο Λήμμα 3.1.4, τα D, θ και ρ είναι όπως στον Συμβολισμό 4.1.7, και το $P \in \mathcal{M}^\ell_{S,\mathbf{K}(\theta),P_{X_1}}$ για $\ell = 1, 2$ είναι το αρχικό μέτρο πιθανότητας κάτω απο το οποίο η S είναι μία CRP με παραμέτρους $\mathbf{K}(\theta)$ και P_{X_1}.

Για μία διαδικασία συνολικών απαιτήσεων S στον (Ω, Σ), προκειμένου να διερευνηθεί η *ύπαρξη Ισοδύναμων Martingale μέτρων* (βλ. Κεφάλαιο 4), πρέπει κανείς να είναι σε θέση να χαρακτηρίσει τις Radon-Nikodým παραγώγους dQ/dP.

Πρόταση 4.1.8. *Έστω $Q \in \mathcal{M}^\ell_{S,\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))}$ για $\ell = 1, 2$. Τότε τα ακόλουθα είναι όλα ισοδύναμα:*

(i) $Q \overset{pr}{\sim} P$

(ii) $Q_{X_1} \sim P_{X_1}$ *και* $Q_{W_1} \sim P_{W_1}$

(iii) υπάρχει μία P_{X_1}-a.s. μοναδική συνάρτηση $\gamma \in \mathcal{F}^\ell_{P,h}$ τέτοια ώστε για όλα τα $t \geqslant 0$, για κάθε $u \in [0, t]$ και για όλα τα $A \in \mathcal{F}^S_u$

$$Q(A) = \int_A M_t^{(\gamma)}(\theta)\, dP, \tag{RRM}$$

όπου

$$M_t^{(\gamma)}(\theta) := \prod_{j=1}^{N_t} (h^{-1} \circ \gamma)(X_j) \cdot \frac{d\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))(W_j)}{d\mathbf{K}(\theta)(W_j)} \cdot \frac{1 - \mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))(t - T_{N_t})}{1 - \mathbf{K}(\theta)(t - T_{N_t})},$$

και $\{M_t^{(\gamma)}(\theta)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ είναι P-σ.β. θετικό $(P, \mathcal{F}^S)$-martingale που ικανοποιεί τη συνθήκη $\mathbb{E}_P[M_t^{(\gamma)}(\theta)] = 1$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$.

Απόδειξη. Επιλέγουμε ένα αυθαίρετο, αλλά σταθερό $t \geqslant 0$.

$(i) \Longrightarrow (ii)$: Ας υποθέσουμε ότι $Q \overset{pr}{\sim} P$. Τότε η σχέση $Q_{X_1} \sim P_{X_1}$ προκύπτει από το [10], Λήμμα 2.1. Για να δείξουμε τον ισχυρισμό $Q_{W_1} \sim P_{W_1}$, σημειώνουμε ότι λαμβάνοντας υπόψη τη σ-άλγεβρα $\mathcal{F}^S_{T_1} := \{A \in \Sigma : A \cap \{T_1 \leqslant v\} \in \mathcal{F}^S_v$ για κάθε $v \in \mathbb{R}_+\}$ (βλ. π.χ. [16], Ορισμός 2.12), η τυχαία μεταβλητή $X_1 = S_{T_1}$ είναι $\mathcal{F}^S_{T_1}$-μετρήσιμη (βλ. π.χ. [16], Προτάσεις 1.13 και 2.18), ως εκ τούτου $\{W_1 \leqslant v\} = X_1^{-1}(\Upsilon) \cap \{T_1 \leqslant v\} \in \mathcal{F}^S_v$ για κάθε $v \geqslant 0$, δηλαδή η τυχαία μεταβλητή W_1 είναι $\mathcal{F}^S_v$-μετρήσιμη για οποιαδήποτε $v \geqslant 0$. Έστω $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ με $Q_{W_1}(B) = 0$. Από την $Q \overset{pr}{\sim} P$ παίρνουμε ότι $Q_{W_1}(B) = P_{W_1}(B)$, ως εκ τούτου $P_{W_1}(B) = 0$. Αντικαθιστώντας το Q με το P οδηγούμαστε ότι το $Q_{W_1} \sim P_{W_1}$.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$: Ας υποθέσουμε ότι $Q_{X_1} \sim P_{X_1}$, $Q_{W_1} \sim P_{W_1}$ και $\ell = 1$.

Έστω $t \geqslant 0$, $u \in [0, t]$ και $A \in \mathcal{F}^S_u$. Από το Λήμμα 4.1.2 προκύπτει ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ υπάρχει ένα σύνολο $B_n \in \sigma(\mathcal{F}^X_n \cup \mathcal{F}^W_n)$ τέτοιο ώστε $A \cap \{N_u = n\} = B_n \cap \{N_u = n\}$. Έτσι

$$\begin{aligned} Q(A) &= \sum_{n=0}^{\infty} Q\left(A \cap \{N_u = n\}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} Q\left(B_n \cap \{N_u = n\}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} Q(B_n \cap \{T_n \leqslant u\} \cap \{W_{n+1} > u - T_n\}). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Σταθεροποιούμε ένα αυθαίρετο $n \in \mathbb{N}_0$ και θεωρούμε την οικογένεια των συνόλων

$$\mathcal{C}_n := \mathcal{C}_{n,t} := \{[\bigcap_{j=1}^{n}(X_j^{-1}(F_j) \cap W_j^{-1}(D_j))] \cap \{W_{n+1} > t - T_n\} : F_j, D_j \in \mathfrak{B}(\Upsilon)\}.$$

Κάθε σύνολο $E \in \mathcal{C}_n$ ικανοποιεί την συνθήκη

$$Q(E) = \int \chi_E \cdot \prod_{j=1}^{n}(h^{-1} \circ \gamma)(X_j) \cdot \frac{[\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))(W_j)]'}{[\mathbf{K}(\rho(\theta))(W_j)]'} \cdot \frac{Q(\{W_{n+1} > t - T_n\})}{P(\{W_{n+1} > t - T_n\})}\, dP. \tag{4.8}$$

Πράγματι, έστω $E \in \mathcal{C}_n$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Fubini παίρνουμε

$$\begin{aligned} Q(E) &= \int [\int \prod_{j=1}^{n} \chi_{F_j}(x_j)\, Q_{X_1,\ldots,X_n}(dx_1, \ldots, dx_n)] \cdot \prod_{j=1}^{n} \chi_{D_j}(w_j) \cdot \\ &\qquad [\int \chi_{(t-w,\infty)}(u)\, Q_{W_{n+1}}(du)]\, Q_{W_1,\ldots,W_n}(dw_1, \ldots, dw_n) \\ &= \int [\int \prod_{j=1}^{n} \chi_{F_j}(x_j)\, Q_{X_1,\ldots,X_n}(dx_1, \ldots, dx_n)] \cdot \prod_{j=1}^{n} \chi_{D_j}(w_j) \cdot \\ &\qquad Q(\{W_{n+1} > t - w\})\, Q_{W_1,\ldots,W_n}(dw_1, \ldots, dw_n), \end{aligned}$$

όπου $w = \sum_{j=1}^{n} w_j$. Εφαρμόζοντας τώρα το Λήμμα 4.1.4 και το Θεώρημα Fubini παίρνουμε

$$\begin{aligned} Q(E) &= \int [\int \prod_{j=1}^{n} \chi_{F_j}(x_j) \cdot (h^{-1} \circ \gamma)(x_j)\, P_{X_1,\ldots,X_n}(dx_1, \ldots, dx_n)] \cdot \prod_{j=1}^{n} \chi_{D_k}(w_k) \cdot \\ &\qquad Q(\{W_{n+1} > t - w\}) \cdot r(w_j)\, P_{W_1,\ldots,W_n}(dw_1, \ldots, dw_n), \end{aligned}$$

όπου $r(w_j) := \frac{d\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))(w_j)}{d\mathbf{K}(\rho(\theta))(w_j)}$ για κάθε $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Χρησιμοποιώντας για άλλη μια φορά το Θεώρημα του Fubini, παίρνουμε

$$\begin{aligned} Q(E) &= \int \chi_{\bigcap_{j=1}^{n}(F_j \cap D_j)}(x_1, \ldots, x_n, w_1, \ldots, w_n) \cdot \prod_{j=1}^{n} (h^{-1} \circ \gamma)(x_j) \cdot r(w_j) \cdot \\ &\quad \frac{Q(\{W_{n+1} > t - w\})}{P(\{W_{n+1} > t - w\})} \cdot P(\{W_{n+1} > t - w\}) \\ &\quad P_{X_1,\ldots,X_n,W_1,\ldots W_n}(dx_1, \ldots, dx_n, dw_1, \ldots, dw_n) \\ &= \int \chi_E \cdot \prod_{j=1}^{n} (h^{-1} \circ \gamma)(X_j) \cdot r(W_j) \cdot \frac{Q(\{W_{n+1} > t - T_n\})}{P(\{W_{n+1} > t - T_n\})} \, dP, \end{aligned}$$

Επομένως το $E \in \mathcal{C}_n$ ικανοποιεί τη συνθήκη (4.8) . Συμβολίζουμε με $\mathcal{D}_n$ την οικογένεια όλων των συνόλων στη $\sigma(\mathcal{F}_n^X \cup \mathcal{F}_n^W) \cap \{W_{n+1} > t - T_n\}$ ικανοποιεί την συνθήκη (4.8), και έστω $\widetilde{\mathcal{G}}_n := \widetilde{\mathcal{G}}_{n,t} := \mathcal{G}_n \cup \mathcal{C}_n$, όπου $\mathcal{G}_n := \mathcal{G}_{n,t} := [\bigcup_{j=1}^{n}(\sigma(X_j) \cup \sigma(W_j))] \cap \{W_{n+1} > t - T_n\}$. Η $\mathcal{D}_n$ είναι μία κλάση Dynkin που περιέχει την $\widetilde{\mathcal{G}}_n$.

Πράγματι,

(Dyn1) Προφανώς $\emptyset \in \mathcal{D}_n$ αφού

$$Q(\emptyset) = 0 = \int \chi_\emptyset \cdot \prod_{j=1}^{n} (h^{-1} \circ \gamma)(X_j) \cdot r(W_j) \cdot \frac{Q(\{W_{n+1} > t - T_n\})}{P(\{W_{n+1} > t - T_n\})} \, dP.$$

(Dyn2) Για κάθε $E \in \mathcal{D}_n$ έχουμε ότι $\{W_{n+1} > t - T_n\} \setminus E \in \mathcal{D}_n$.

Πράγματι, σημειώνουμε ότι $\{W_{n+1} > t - T_n\} \in \mathcal{D}_n$ αφού

$$\{W_{n+1} > t - T_n\} = (\bigcap_{j=1}^{n} X_j^{-1}(\Upsilon)) \cap (\bigcap_{j=1}^{n} W_j^{-1}(\Upsilon)) \cap \{W_{n+1} > t - T_n\} \in \mathcal{C}_n$$

η συνθήκη (4.8) ισχύει για $\{W_{n+1} > t - T_n\}$. Έστω τώρα E ένα σύνολο στην $\mathcal{D}_n$. Παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} &Q(\{W_{n+1} > t - T_n\} \setminus E) \\ &= Q(\{W_{n+1} > t - T_n\}) - Q(E) \\ &= \int \chi_{\{W_{n+1} > t - T_n\}} \cdot \prod_{j=1}^{n} (h^{-1} \circ \gamma)(X_j) \cdot r(W_j) \cdot \frac{Q(\{W_{n+1} > t - T_n\})}{P(\{W_{n+1} > t - T_n\})} \, dP \\ &\quad - \int \chi_E \cdot \prod_{j=1}^{n} (h^{-1} \circ \gamma)(X_j) \cdot r(W_j) \cdot \frac{Q(\{W_{n+1} > t - T_n\})}{P(\{W_{n+1} > t - T_n\})} \, dP \\ &= \int \chi_{\{W_{n+1} > t - T_n\} \setminus E} \cdot \prod_{j=1}^{n} (h^{-1} \circ \gamma)(X_j) \cdot r(W_j) \cdot \frac{Q(\{W_{n+1} > t - T_n\})}{P(\{W_{n+1} > t - T_n\})} \, dP, \end{aligned}$$

ως εκ τούτου $\{W_{n+1} > t - T_n\} \setminus E \in \mathcal{D}_n$.

(Dyn3) Για κάθε ακολουθία $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ ανά δύο ξένα μεταξύ τους σύνολα στην $\mathcal{D}_n$ έχουμε ότι $\bigcup_{k\in\mathbb{N}_0} E_k \in \mathcal{D}_n$.

Πράγματι,

$$\begin{aligned} Q(\bigcup_{k\in\mathbb{N}_0} E_k) &= \sum_{n\in\mathbb{N}_0} Q(E_k) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \int \chi_{E_k} \cdot \prod_{j=1}^{n} (h^{-1}\circ\gamma)(X_j)\cdot r(W_j)\cdot \frac{Q(\{W_{n+1} > t - T_n\})}{P(\{W_{n+1} > t - T_n\})}\, dP \\ &= \int \chi_{\bigcup_{k\in\mathbb{N}_0} E_k} \cdot \prod_{j=1}^{n} (h^{-1}\circ\gamma)(X_j)\cdot r(W_j)\cdot \frac{Q(\{W_{n+1} > t - T_n\})}{P(\{W_{n+1} > t - T_n\})}\, dP, \end{aligned}$$

ως εκ τούτου $\bigcup_{k\in\mathbb{N}_0} E_k \in \mathcal{D}_n$.

Επομένως D_n είναι κλάση Dynkin στον $\{W_{n+1} > t - T_n\}$.

Άρα από το Θεώρημα Μονοτόνης κλάσης (βλ. Θεώρημα A.2.4) παίρνουμε ότι $\mathcal{D}_n = \sigma(\mathcal{F}_n^X \cup \mathcal{F}_n^W) \cap \{W_{n+1} > t - T_n\}$.

Αφού $B_n \cap \{T_n \leqslant u\} \cap \{W_{n+1} > u - T_n\} \in \sigma(\mathcal{F}_n^X \cup \mathcal{F}_n^W) \cap \{W_{n+1} > u - T_n\}$, λαμβάνοντας υπόψη τις συνθήκες (4.8), και (4.7) παίρνουμε

$$\begin{aligned} &Q(A) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_P\left[\chi_{B_n\cap\{T_n\leqslant u\}\cap\{W_{n+1}>u-T_n\}} \cdot \prod_{j=1}^{n} (h^{-1}\circ\gamma)(X_j)\cdot r(W_j)\cdot \frac{Q(\{W_{n+1} > u - T_n\})}{P(\{W_{n+1} > u - T_n\})}\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_P\left[\chi_{A\cap\{N_u=n\}} \cdot \prod_{j=1}^{N_u} (h^{-1}\circ\gamma)(X_j)\cdot r(W_j)\cdot \frac{Q(\{W_{n+1} > u - T_n\})}{P(\{W_{n+1} > u - T_n\})}\right] \\ &= \mathbb{E}_P\left[\chi_A \cdot M_u^{(\gamma)}(\theta)\right]. \end{aligned}$$

Επομένως ισχύει η συνθήκη (RRM) για κάθε $u \in [0, t]$.

Μένει να δείξουμε ότι η διαδικασία $\{M_t^{(\gamma)}(\theta)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ένα P-σ.β. θετικό $(P, \mathcal{F}^S)$-martingale που ικανοποιεί τη συνθήκη $\mathbb{E}_P[M_t^{(\gamma)}(\theta)] = 1$.

Πράγματι, απο την συνθήκη (RRM) για κάθε $u \in [0, t]$ και $A \in \mathcal{F}_u^S \subseteq \mathcal{F}_t^S$ προκύπτει ότι

$$\int_A M_u^{(\gamma)}(\theta)\, dP = \int_A M_t^{(\gamma)}(\theta)\, dP,$$

επομένως $\{M_t^{(\gamma)}(\theta)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ένα $(P, \mathcal{F}^S)$-martingale. Επιπλέον, απο την συνθήκη (RRM) για $A = \Omega$ λαμβάνουμε ότι

$$\mathbb{E}_P[M_t^{(\gamma)}(\theta)] = \int_\Omega M_t^{(\gamma)}(\theta)\, dP = Q(\Omega) = 1.$$

Τελικά βλέπουμε ότι $P(\{N_t = n\}) > 0$ και $Q(\{N_t = n\}) > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$. Άρα οι πιθανότητες $P(\{W_{n+1} > t - T_n\}) = P(\{T_{n+1} > t\})$ και $Q(\{W_{n+1} > t - T_n\}) = P(\{T_{n+1} > t\})$ είναι θετικές για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$. Επομένως, λαμβάνοντας υπόψην και το γεγονός ότι οι f και r είναι και οι δύο αυστηρά θετικές συναρτήσεις πυκνότητας, έχουμε πως $P(\{M_t^{(\gamma)}(\theta) > 0\}) = 1$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $\ell = 2$. Αφού $\mathcal{M}^2_{S,\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))} \subseteq \mathcal{M}^1_{S,\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))}$, προκύπτει όπως παραπάνω ότι για κάθε μέτρο πιθανότητας $Q \in \mathcal{M}^2_{S,\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))}$ υπάρχει μία P_{X_1}-σ.β. μοναδική συνάρτηση $\gamma \in \mathcal{F}^1_{P,h}$ που ικανοποιεί την συνθήκη (RRM). Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι $\mathbb{E}_P\left[X_1^2 \cdot (h^{-1} \circ \gamma \circ X_1)\right] < \infty$.

Πράγματι,

$$\mathbb{E}_P\left[X_1^2 \cdot (h^{-1} \circ \gamma \circ X_1)\right] = \int_\Upsilon x^2 \cdot (h^{-1} \circ \gamma)(x) P_{X_1}(dx) = \int_\Upsilon x^2\, Q_{X_1}(dx) < \infty$$

όπου η δεύτερη ισότητα απορρέει από το γεγονός ότι $\frac{dQ_{X_1}}{dP_{X_1}} = h^{-1} \circ \gamma$ και η ανισότητα προκύπτει από την παραδοχή ότι $Q \in \mathcal{M}^2_{S,\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))}$.

Η συνεπαγωγή *(iii)*$\Longrightarrow$*(i)* είναι άμεση. □

Η Πρόταση 4.1.8 μας επιτρέπει να υπολογίζουμε ακριβώς τις παραγώγους Radon-Nikodým για τις σημαντικότερες διαδικασίες κινδύνου που χρησιμοποιούνται στην ασφάλιση.

Στο πρώτο παράδειγμα εξετάζουμε την περίπτωση της διαδικασίας Poisson, η οποία είναι η απλούστερη από τις ανανεωτικές διαδικασίες.

Παράδειγμα 4.1.9. Έστω $h := \ln$, $\theta \in D := \Upsilon$, έστω $\rho : D \longmapsto D$ είναι μία $\mathfrak{B}(D)$-$\mathfrak{B}(D)$-μετρήσιμη συνάρτηση, και έστω $Q \in \mathcal{M}^\ell_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\theta))}$ για $\ell = 1, 2$. Από την Πρόταση 3.1.8 προκύπτει ότι υπάρχει μία P_{X_1}-σ.β. μοναδική συνάρτηση $\gamma \in \mathcal{F}^\ell_{P,\ln}$, ώστε για κάθε $t \geqslant 0$, $u \in [0, t]$ και $A \in \mathcal{F}^S_u$ να ισχύει

$$\begin{aligned}
Q(A) &= \int_A e^{\sum_{j=1}^{N_t} \gamma(X_j)} \cdot \prod_{j=1}^{N_t} r(W_j) \cdot \frac{e^{-\rho(\theta)\cdot(t-T_{N_t})}}{e^{-\theta\cdot(t-T_{N_t})}}\, dP \\
&= \int_A e^{\sum_{j=1}^{N_t} \gamma(X_j)} \cdot \prod_{j=1}^{N_t} \frac{\rho(\theta)\cdot e^{-\rho(\theta)\cdot W_j}}{\theta \cdot e^{-\theta\cdot W_j}} \cdot \frac{e^{-\rho(\theta)\cdot(t-T_{N_t})}}{e^{-\theta\cdot(t-T_{N_t})}}\, dP \\
&= \int_A e^{\sum_{j=1}^{N_t} \gamma(X_j)} \cdot \left(\frac{\rho(\theta)}{\theta}\right)^{N_t} \cdot e^{-(\rho(\theta)-\theta)\cdot\sum_{j=1}^{N_t} W_j} \cdot e^{-(t-T_{N_t})\cdot(\rho(\theta)-\theta)}\, dP \\
&= \int_A e^{\sum_{j=1}^{N_t} \gamma(X_j)} \cdot \left(\frac{\rho(\theta)}{\theta}\right)^{N_t} \cdot e^{-(\rho(\theta)-\theta)\cdot T_{N_t}} \cdot e^{-(t-T_{N_t})\cdot(\rho(\theta)-\theta)}\, dP \\
&= \int_A e^{\sum_{j=1}^{N_t} \gamma(X_j)} \cdot \left(\frac{\rho(\theta)}{\theta}\right)^{N_t} \cdot e^{-t\cdot(\rho(\theta)-\theta)}\, dP.
\end{aligned}$$

Στο επόμενο παράδειγμα εξετάζουμε μια ανανεωτική διαδικασία με ενδιάμεσους χρόνους που ακολουθούν την κατανομή Γάμμα.

Παράδειγμα 4.1.10. Έστω $h := \ln$, $D := \Upsilon \times \mathbb{N}$, $\theta = (\xi_1, \kappa_1) \in D$, έστω $\rho : D \longmapsto D$ μία $\mathfrak{B}(D)$-$\mathfrak{B}(D)$-μετρήσιμη συνάρτηση, με $\rho(\theta) = (\xi_2, \kappa_2) \in D$, και έστω $P \in \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{Ga}(\theta),P_{X_1}}$ και $Q \in \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{Ga}(\rho(\theta))}$ για $\ell = 1, 2$.
Εφαρμόζοντας τώρα την Πρόταση 3.1.8 προκύπτει ότι υπάρχει μία P_{X_1}-σ.β. μοναδική συνάρτηση $\gamma \in \mathcal{F}^{\ell}_{P,\ln}$, που ορίζεται με τη σχέση $\gamma := \ln f$, όπου f είναι το παράγωγο Radon-Nikodým Q_{X_1} σε σχέση με το P_{X_1} έτσι ώστε για οποιοδήποτε $u \in [0, t]$ και $A \in \mathcal{F}^S_u$ να ισχύει

$$\begin{aligned}
&Q(A)\\
&= \int_A e^{\sum_{j=1}^{N_t}\gamma(X_j)} \cdot \prod_{j=1}^{N_t} r(W_j) \cdot \frac{e^{-\xi_2\cdot(t-T_{N_t})}\cdot\sum_{j=1}^{\kappa_2-1}\frac{\left(\xi_2\cdot(t-T_{N_t})\right)^j}{j!}}{e^{-\xi_1\cdot(t-T_{N_t})}\cdot\sum_{j=1}^{\kappa_1-1}\frac{\left(\xi_1\cdot(t-T_{N_t})\right)^j}{j!}}\,dP\\
&= \int_A e^{\sum_{j=1}^{N_t}\gamma(X_j)} \cdot \prod_{j=1}^{N_t} \frac{\frac{\xi_2^{\kappa_2}}{\Gamma(\kappa_2)}\cdot W_j^{\kappa_2-1}\cdot e^{-\xi_2\cdot W_j}}{\frac{\xi_1^{\kappa_1}}{\Gamma(\kappa_1)}\cdot W_j^{\kappa_1-1}\cdot e^{-\xi_1\cdot W_j}} \cdot \frac{e^{-\xi_2\cdot(t-T_{N_t})}\cdot\sum_{j=1}^{\kappa_2-1}\frac{\left(\xi_2\cdot(t-T_{N_t})\right)^j}{j!}}{e^{-\xi_1\cdot(t-T_{N_t})}\cdot\sum_{j=1}^{\kappa_1-1}\frac{\left(\xi_1\cdot(t-T_{N_t})\right)^j}{j!}}\,dP\\
&= \int_A e^{\sum_{j=1}^{N_t}\gamma(X_j)} \cdot \left(\frac{\xi_2^{\kappa_2}}{\xi_1^{\kappa_1}}\right)^{N_t} \cdot \left(\frac{\Gamma(\kappa_2)}{\Gamma(\kappa_1)}\right)^{N_t} \cdot \prod_{j=1}^{N_t} W_j^{\kappa_2-\kappa_1} \cdot e^{-(\xi_2-\xi_1)\cdot\sum_{j=1}^{N_t} W_j}\\
&\quad \cdot e^{-(\xi_2-\xi_1)\cdot(t-T_{N_t})} \cdot \frac{\sum_{j=1}^{\kappa_2-1}\frac{\left(\xi_2\cdot(t-T_{N_t})\right)^j}{j!}}{\sum_{j=1}^{\kappa_1-1}\frac{\left(\xi_1\cdot(t-T_{N_t})\right)^j}{j!}}\,dP\\
&= \int_A e^{\sum_{j=1}^{N_t}\gamma(X_j)} \cdot \left(\frac{\xi_2^{\kappa_2}}{\xi_1^{\kappa_1}}\right)^{N_t} \cdot e^{-t\cdot(\xi_2-\xi_1)} \cdot \left(\frac{\Gamma(\kappa_2)}{\Gamma(\kappa_1)}\right)^{N_t} \cdot \prod_{j=1}^{N_t} W_j^{\kappa_2-\kappa_1} \cdot \frac{\sum_{j=1}^{\kappa_2-1}\frac{\left(\xi_2\cdot(t-T_{N_t})\right)^j}{j!}}{\sum_{j=1}^{\kappa_1-1}\frac{\left(\xi_1\cdot(t-T_{N_t})\right)^j}{j!}}\,dP.
\end{aligned}$$

4.2 Ο Χαρακτηρισμός

Γνωρίζουμε από την Πρόταση 3.1.7 ότι κάτω από τις ασθενείς συνθήκες $Q_{X_1} \sim P_{X_1}$ και $Q_{W_1} \sim P_{W_1}$, τα μέτρα P και Q είναι ισοδύναμα επάνω στη σ-άλγεβρα $\mathcal{F}^S_t$ για κάθε $t \geqslant 0$. Πρώτα αποδεικνύουμε ότι αυτό το αποτέλεσμα δεν ισχύει εν γένει για την $\mathcal{F}^S_\infty$. Ας ξεκινήσουμε με ένα εύκολο αλλά χρήσιμο Λήμμα.

Λήμμα 4.2.1. *Ισχύει οτι*

$$\mathcal{F}^S_\infty = \mathcal{F}^{(W,X)}_\infty := \sigma\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0}\mathcal{F}^W_n \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0}\mathcal{F}^X_n\right).$$

Απόδειξη. Για να δείξουμε τη σχέση $\mathcal{F}_\infty^S \subseteq \mathcal{F}_\infty^{(W,X)}$, θυμίζουμε ότι σύμφωνα με το Λήμμα 3.1.2 για κάθε $t \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}_0$ και $A \in \mathcal{F}_F^S$ έχουμε ότι

$$A \cap \{N_t = n\} \in \sigma(\mathcal{F}_n^W \cup \mathcal{F}_n^X) \cap \{N_t = n\}.$$

Όμως αφού $\sigma(\mathcal{F}_n^W \cup \mathcal{F}_n^X) \subseteq \mathcal{F}_\infty^{(W,X)}$, λαμβάνοντας υπόψη ότι η πιθανότητα έκρηξης είναι μηδέν παίρνουμε

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} (A \cap \{N_t = n\}) \in \mathcal{F}_\infty^{(W,X)}.$$

Άρα $\mathcal{F}_t^S \subseteq \mathcal{F}_\infty^{(W,X)}$ για κάθε $t \geqslant 0$, επομένως $\mathcal{F}_\infty^S \subseteq \mathcal{F}_\infty^{(W,X)}$.

Για να ελέγξουμε την ισχύ της αντίστροφης σχέσης $\mathcal{F}_\infty^{(W,X)} \subseteq \mathcal{F}_\infty^S$, σταθεροποιούμε ένα αυθαίρετο $n \in \mathbb{N}_0$. Απο τη συνθήκη (4.3) του Λήμματος 4.1.2 έχουμε, ότι

$$X_n^{-1}(B) \cap \{T_n \leqslant \ell\} \in \mathcal{F}_\infty^S \text{ για κάθε } B \in \mathfrak{B}(\Upsilon) \text{ και για κάθε } \ell \in \mathbb{N}_0. \tag{4.9}$$

επομένως,

$$X_n^{-1}(B) = \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}_0} (X_n^{-1}(B) \cap \{T_n \leqslant \ell\}) \in \mathcal{F}_\infty^S,$$

δηλαδή η X_n είναι $\mathcal{F}_\infty^S$-μετρήσιμη. Απο την τελευταία σχέση μαζί με το γεγονός ότι η T_n είναι $\mathcal{F}_\infty^S$-μετρησιμη προκύπτει ότι $\mathcal{F}_\infty^{(W,X)} \subseteq \mathcal{F}_\infty^S$. □

Λήμμα 4.2.2. *Έστω $Q \in \mathcal{M}^\ell_{S,\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))}$ για $\ell = 1, 2$. Εάν $P_{X_1} \neq Q_{X_1}$ ή $P_{W_1} \neq Q_{W_1}$ τότε το P και το Q είναι κάθετα επάνω στην $\mathcal{F}_\infty^S$.*

Απόδειξη. Έστω $P_{X_1} \neq Q_{X_1}$ και έστω $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $P_{X_1}(B) < Q_{X_1}(B)$, άρα υπάρχει ένα $a \in (0,1)$ με $P_{X_1}(B) < a < Q_{X_1}(B)$. Θέτουμε $E := \{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \chi_{\{X_k \in B\}} < a\}$. Τότε από το Λήμμα 4.2.1 προκύπτει ότι $E \in \mathcal{F}_\infty^S$.

Σύμφωνα με τον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \chi_{\{X_k \in B\}} = P_{X_1}(B) \qquad P \upharpoonright \mathcal{F}_\infty^S\text{-σ.β.}$$

και

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \chi_{\{X_k \in B\}} = Q_{X_1}(B) \qquad Q \upharpoonright \mathcal{F}_\infty^S\text{-σ.β..}$$

Επομένως, συμπεραίνουμε ότι $P(E) = 1$ και $Q(E) = 0$, δηλαδή τα P και Q είναι κάθετα επάνω στην $\mathcal{F}_\infty^S$. Με τον ίδιο τρόπο μπορεί να αποδειχθεί ότι $P_{W_1} \neq Q_{W_1}$ συνεπάγεται $P \upharpoonright \mathcal{F}_\infty^S \perp Q \upharpoonright \mathcal{F}_\infty^S$. □

Πρόταση 4.2.3. *Έστω $Q \in \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))}$ για $\ell = 1, 2$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) Τα μέτρα P και Q είναι ισοδύναμα στην $\mathcal{F}^S_\infty$,

(ii) $P_{X_1} = Q_{X_1}$ και $P_{W_1} = Q_{W_1}$,

(iii) $P \upharpoonright \mathcal{F}^S_\infty = Q \upharpoonright \mathcal{F}^S_\infty$.

Απόδειξη. (i)$\Longrightarrow$(ii) Υποθέτουμε, ότι $P_{X_1} \neq Q_{X_1}$. Τότε απο το Λήμμα 4.2.2 προκύπτει ότι το P και Q είναι κάθετα στην $\mathcal{F}^S_\infty$. Άτοπο, αφού τα P και Q είναι ισοδύναμα επάνω στην $\mathcal{F}^S_\infty$. Επομένως, $P_{X_1} = Q_{X_1}$. Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι $P_{W_1} = Q_{W_1}$.
(ii)$\Longrightarrow$(iii) Απο την συνθήκη $P_{W_1} = Q_{W_1}$ συνεπάγεται ότι $P_{N_t} = Q_{N_t}$ για κάθε $t \geqslant 0$ (βλ. π.χ. [23] Lemma 2.1.2). Αλλά το τελευταίο μαζί με το γεγονός ότι $P_{X_1} = Q_{X_1}$ συνεπάγεται ότι $P_{S_t} = Q_{S_t}$ για κάθε $t \geqslant 0$, επομένως τα μέτρα P και Q συμπίπτουν στον $\bigcup_{t \in \mathbb{R}_+} \mathcal{F}^S_t$. Συνεπώς, $P \upharpoonright \mathcal{F}^S_\infty = Q \upharpoonright \mathcal{F}^S_\infty$.
(iii)$\Longrightarrow$(i) Είναι προφανές. □

Πρόταση 4.2.4. *Έστω $Q \in \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))}$ για $\ell = 1, 2$. Εάν $P \upharpoonright \mathcal{F}^S_\infty \neq Q \upharpoonright \mathcal{F}^S_\infty$ τότε τα P και Q είναι κάθετα επάνω στη σ-άλγεβρα $\mathcal{F}^S_\infty$.*

Απόδειξη. Άν $P \upharpoonright \mathcal{F}^S_\infty \neq Q \upharpoonright \mathcal{F}^S_\infty$ τότε απο την Πρόταση 4.2.3 έχουμε ότι $P_{X_1} \neq Q_{X_1}$ ή $P_{W_1} \neq Q_{W_1}$, επομένως σύμφωνα με το Λήμμα 4.2.2 αποδεικνύεται το συμπέρασμα της πρότασης. □

Πριν διατυπώσουμε το αντίστροφο της Πρότασης 4.1.8 (δηλ. ότι για μια δοσμένη συνάρτηση $\gamma \in \mathcal{F}^{\ell}_{P,h}$ για $\ell = 1, 2$ υπάρχει ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας $Q \in \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))}$) πρεπει να αποδείξουμε το ακόλουθο αποτελέσματα που αφορά στην κατασκευή σύνθετων ανανεωτικών διαδικασιών. Για το σκοπό αυτό, υπενθυμίζουμε τους ακόλουθους συμβολισμούς σχετικά με τους χώρους πιθανότητας.

Με $(\varOmega \times \varUpsilon, \varSigma \otimes H, P \otimes Q)$ συμβολίζεται το γινόμενο των χώρων πιθανότητας $(\varOmega, \varSigma, P)$ και $(\varUpsilon, H, Q)$. Εάν $(\varOmega, \varSigma, P)$ είναι χώρος πιθανότητας και I είναι είναι ένα αυθαίρετο μη-κενό σύνολο, γράφουμε P_I για το μέτρο γινόμενο πάνω στον $\varOmega^I$ με πεδίο ορισμού την σ-άλγεβρα γινόμενο $\varSigma_I$.

Απο εδώ και κάτω, θέτουμε $\widetilde{\varOmega} := \varUpsilon^{\mathbb{N}}$, $\widetilde{\varSigma} := \mathfrak{B}(\widetilde{\varOmega}) = \mathfrak{B}(\varUpsilon)_{\mathbb{N}}$, $\varOmega := \widetilde{\varOmega} \times \widetilde{\varOmega}$ και $\varSigma := \widetilde{\varSigma} \times \widetilde{\varSigma}$ για απλοποίηση.

Το ακόλουθο αποτέλεσμα μας δίνει τη δυνατότητα να κατασκευάσουμε κανονικούς χώρους πιθανοτήτων επάνω στους οποίους επιτρέπεται να ορίσουμε σύνθετες ανανεωτικές διαδικασίες.

Λήμμα 4.2.5. *Για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε σταθερό $\theta \in D \subseteq \mathbb{R}^d$ έστω $Q_n(\theta) := \boldsymbol{K}(\theta)$ και $R_n := R$ μέτρα πιθανοτήτων στον $\mathfrak{B}(\varUpsilon)$, που είναι απολύτως συνεχή ως προς το μέτρο*

Lebesgue $\lambda \upharpoonright \mathfrak{B}(\Upsilon)$. *Τότε, υπάρχει ένα μέτρο πιθανότητας* $P := \boldsymbol{K}(\theta)_{\mathbb{N}} \otimes R_{\mathbb{N}}$ *πάνω στην* Σ *και*

(i) μια απαριθμήτρια διαδικασία N *που είναι* $P - RP(\boldsymbol{K}(\theta))$,

(ii) μια διαδικασία μεγέθους των απαιτήσεων X *που ικανοποιεί την συνθήκη* $P_{X_n} = R$ *για όλα τα* $n \in \mathbb{N}$, *και έτσι ώστε η* (N, X) *να είναι μια διαδικασία κινδύνου που παράγει μία διαδικασία συνολικών απαιτήσεων* S *που είναι* $P - CRP(\boldsymbol{K}(\theta), P_{X_1})$.

Απόδειξη. (i) : Έστω ένα αυθαίρετο $\theta \in D \subseteq \mathbb{R}^d$. Αφού τα $Q_n(\theta)$ είναι μέτρα πιθανότητας που ορίζονται στον $\mathfrak{B}(\Upsilon)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, προκύπτει ότι υπάρχει ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας $\widetilde{P} := \widetilde{P}(\theta) := \boldsymbol{K}(\theta)_{\mathbb{N}}$. Στη συνέχεια, προκύπτει ότι υπάρχει μια ακολουθία $\{\widetilde{W}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ από $\widetilde{P}$-ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές στον $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\Sigma})$ τέτοιες ώστε

$$\widetilde{W}_n(\widetilde{\omega}) = \widetilde{\omega}_n \quad \text{για κάθε} \quad \widetilde{\omega} = (\widetilde{\omega}_1, ..., \widetilde{\omega}_n, ...) \in \widetilde{\Omega} \quad \text{και} \quad n \in \mathbb{N}$$

ικανοποιώντας την

$$\widetilde{P}_{\widetilde{W}_n} = Q_n(\theta) = \mathbf{K}(\theta) \quad \text{για όλα τα } n \in \mathbb{N}.$$

Ορίζοντας τα μέτρα πιθανότητας $R_{\mathbb{N}}$ επάνω στη $\widetilde{\Sigma}$ και $P := \widetilde{P} \otimes R_{\mathbb{N}}$ στον Σ, και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το σύνολο $W_n := \widetilde{W}_n \circ \pi_1$ όπου π_1 είναι η κανονική προβολή απο το Ω στον πρώτο παράγοντα $\widetilde{\Omega}$ του Ω και $W := \{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Τότε η W είναι P-ανεξάρτητη και $P_{W_n} = \boldsymbol{K}(\theta)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Θέτουμε $T_n := \sum_{k=1}^{n} W_k$ για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ και $T := \{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, και έστω $N := \{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να είναι μία απαριθμήτρια διαδικασία επαγόμενη απο την T μέσω του $N_t := \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{T_n \leqslant t\}}$ για όλα τα $t \geqslant 0$. Συνεπώς, σύμφωνα με τον Ορισμό 4.1.6, η απαριθμήτρια διαδικασία N είναι ένα P-RP$(\boldsymbol{K}(\theta))$, επομένως ισχύει ο ισχυρισμός (i).

(ii) : Αφού ο $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\Sigma}, R_{\mathbb{N}})$ είναι ένας χώρος πιθανότητας γινόμενο προκύπτει ότι υπάρχει μια ακολουθία $\widetilde{X} := \{\widetilde{X}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ από $R_{\mathbb{N}}$-ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές επάνω στον $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\Sigma})$ τέτοιες ώστε

$$\widetilde{X}_n(\widetilde{x}) = \widetilde{x}_n \quad \text{για κάθε} \quad \widetilde{x} = (\widetilde{x}_1, ..., \widetilde{x}_n, ...) \in \widetilde{\Omega} \quad \text{και} \quad n \in \mathbb{N}$$

ικανοποιώντας τη σχέση

$$(R_{\mathbb{N}})_{\widetilde{X}_n} = R \quad \text{για όλα τα } n \in \mathbb{N}.$$

Θέτουμε $X_n := \widetilde{X}_n \circ \pi_2$, όπου π_2 είναι η κανονική προβολή από το Ω στον δεύτερο παράγοντα του $\widetilde{\Omega}$. Με εύκολους υπολογισμούς μπορεί να αποδειχθεί ότι (N, X) είναι μια διαδικασία κινδύνου.

Θέτοντας $S_t := \sum_{n=0}^{N_t} X_n$ για όλα τα $t \geqslant 0$, παίρνουμε ότι η $S := \{S_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ είναι η διαδικασία των συνολικών απαιτήσεων που προκύπτει από τη διαδικασία κινδύνου (N, X), επομένως η S είναι μία P-CRP$(\boldsymbol{K}(\theta), P_{X_1})$. $\square$

Παρατήρηση 4.2.6. Σύμφωνα με τα Λήμματα 4.2.1 και 4.2.5 έχουμε $\Sigma = \mathcal{F}_\infty^{(W,X)} = \mathcal{F}_\infty^S$.

Συμβολισμοί 4.2.7. Έστω $\boldsymbol{K}(\theta)$ και $\boldsymbol{\Lambda}(\theta)$ κατανομές πιθανοτήτων στον $\mathfrak{B}(\Upsilon)$ έτσι ώστε οι επαγόμενες συναρτήσεις κατανομών να είναι συνεχώς διαφοροποιήσιμες με θετικές παραγώγους $[\boldsymbol{K}(\theta)]'$ και $[\boldsymbol{\Lambda}(\rho(\theta))]'$ επάνω στο Υ. Για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ η κλάση όλων των λόγων πιθανότητας $g_n := g_{\theta,\rho,n} : \Upsilon^{n+1} \longmapsto \Upsilon$ που ορίζονται απο τον τύπο

$$g(w_1, \ldots, w_n, t) := \prod_{j=1}^{n} \frac{[\boldsymbol{\Lambda}(\rho(\theta))]'(w_j)}{[\boldsymbol{K}(\theta)]'(w_j)} \cdot \frac{1 - \boldsymbol{\Lambda}(\rho(\theta))(t - w)}{1 - \mathbf{K}(\theta)(t - w)} \quad \text{για κάθε } (w_1, \ldots, w_n, t) \in \Upsilon^{n+1},$$

όπου $w := \sum_{j=1}^{n} w_j$, θα συμβολίζεται με $\mathcal{G}_{n,\theta,\rho}$. Με $\mathcal{G}_{\theta,\rho}$ συμβολίζουμε το σύνολο $\{g = \{g_n\}_{n \in \mathbb{N}_0} : g_n \in \mathcal{G}_{n,\theta,\rho}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}_0\}$ όλων των ακολουθιών των στοιχείων του $\mathcal{G}_{n,\theta,\rho}$.

Απο εδώ και κάτω $\boldsymbol{K}(\theta)$, $\boldsymbol{\Lambda}(\theta)$ και $g \in \mathcal{G}_{\theta,\rho}$ θα είναι όπως στους Συμβολισμούς 4.2.7, και P, S θα είναι όπως στο Λήμμα 4.2.5.

Πρόταση 4.2.8. *Έστω $\gamma \in \mathcal{F}_{P,h}^{\ell}$ για $\ell = 1, 2$. Τότε για όλα τα $0 \leqslant u \leqslant t$, και για όλα τα $A \in \mathcal{F}_u^S$ η συνθήκη*

$$Q(A) = \int_A [\prod_{j=1}^{N_t} (h^{-1} \circ \gamma \circ X_j)] \cdot g_{N_t}(W_1, \ldots, W_{N_t}, t)\, dP \tag{RRM}$$

καθορίζει ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας $Q \in \mathcal{M}_{S,\boldsymbol{\Lambda}(\rho(\theta))}^{\ell}$.

Απόδειξη. Έστω $t \geqslant 0$ και $\ell = 1$. Ορίζουμε τις συνολο-συναρτήσεις $\breve{Q}_n(\theta), \breve{R}_1 : \mathfrak{B}(\Upsilon) \longmapsto \mathbb{R}$ μέσω των τύπων $\breve{Q}_n(\theta)(B_1) := \mathbb{E}_P[\chi_{W_1^{-1}(B_1)} \cdot (\frac{[\boldsymbol{\Lambda}(\rho(\theta))]'}{[\mathbf{K}(\theta)]'} \circ W_1)]$ και $\breve{R}_1(B_2) := \mathbb{E}_P[\chi_{X_1^{-1}(B_2)} \cdot (h^{-1} \circ \gamma \circ X_1)]$ για κάθε $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$, αντίστοιχα.

(a) Η συνολο-συναρτηση $\breve{Q}_n(\theta)$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας στον $\mathfrak{B}(\Upsilon)$ που ικανοποιεί την συνθήκη $\breve{Q}_n(\theta)(B) = \boldsymbol{\Lambda}(\rho(\theta))(B)$ για κάθε $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$.

(a1) Η συνολο-συναρτηση $\breve{Q}_n(\theta)$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας στον $\mathfrak{B}(\Upsilon)$.

Πράγματι,

(μ1) $\breve{Q}_n(\theta)(\varnothing) = \mathbb{E}_P[\chi_\varnothing \cdot (\frac{d\boldsymbol{\Lambda}(\rho(\theta))}{d\mathbf{K}(\theta)} \circ W_1)] = 0$

(μ2) Έστω $\{B_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ είναι μιά ακολουθία ανά δύο ξένων στοιχείων της $\mathfrak{B}(\Upsilon)$, θέλουμε να δείξουμε ότι $Q_n(\theta)(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k) = \sum_{n \in \mathbb{N}} Q_n(\theta)(B_k)$.

$$\begin{aligned}
Q_n(\theta)(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k) &= \mathbb{E}_P\left[\chi_{W_1^{-1}(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k)}\cdot(\frac{d\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))}{d\mathbf{K}(\theta)}\circ W_1)\right]\\
&= \mathbb{E}_P\left[\sum_{k\in\mathbb{N}}\chi_{W_1^{-1}(B_k)}\cdot(\frac{d\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))}{d\mathbf{K}(\theta)}\circ W_1)\right]\\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}}\mathbb{E}_P\left[\chi_{W_1^{-1}(B_k)}\cdot(\frac{d\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))}{d\mathbf{K}(\theta)}\circ W_1)\right]\\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} Q_n(\theta)(B_k)
\end{aligned}$$

(μ3) $\breve{Q}_n(\theta)(\Upsilon) = 1$. Πράγματι

$$\begin{aligned}
\breve{Q}_n(\theta)(\Upsilon) &= \mathbb{E}_P\left[\chi_{W_1^{-1}(\Upsilon)}\cdot(\frac{d\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))}{d\mathbf{K}(\theta)}\circ W_1)\right]\\
&= \mathbb{E}_P\left[\chi_{\Omega}\cdot(\frac{d\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))}{d\mathbf{K}(\theta)}\circ W_1)\right]\\
&= \int_\Omega \frac{d\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))}{d\mathbf{K}(\theta)}\circ W_1\, dP\\
&= \int_\Upsilon \frac{d\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))(w_1)}{d\mathbf{K}(\theta)(w_1)}\, P_{W_1}(dw_1)\\
&= \int_\Upsilon d\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))(w_1) = 1
\end{aligned}$$

(a2) Ισχύει η συνθήκη $\breve{Q}_n(\theta)(B) = \mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))(B)$ για κάθε $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$.

(a2.1) Θέτουμε $\mathcal{C}^W := \{(0,w] : w \in \Upsilon\}$. Σαφώς κάθε στοιχείο της $\mathcal{C}^W$ ικανοποιεί την συνθήκη $\breve{Q}_n(\theta)((0,w]) = \mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))(w)$.

Πράγματι. έστω $w \in \Upsilon$. Τότε παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\breve{Q}_n(\theta)((0,w]) &= \mathbb{E}_P[\chi_{\{W_1\leqslant w\}}\cdot(\frac{d\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))}{d\mathbf{K}(\theta)}\circ W_1)] = \mathbb{E}_P[(\chi_{(0,w]}\circ W_1)\cdot(\frac{d\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))}{d\mathbf{K}(\theta)}\circ W_1)]\\
&= \int(\chi_{(0,w]}\circ W_1)\cdot(\frac{d\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))}{d\mathbf{K}(\theta)}\circ W_1)\, dP = \int[\chi_{(0,w]}\cdot\frac{d\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))}{d\mathbf{K}(\theta)}]\circ W_1\, dP\\
&= \int \chi_{(0,w]}(w_1)\cdot\frac{d\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))(w_1)}{d\mathbf{K}(\theta)(w_1)}\, P_{W_1}(dt) = \int \chi_{(0,w]}(w_1)\cdot d\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))(w_1).
\end{aligned}$$

Ως εκ τούτου για κάθε $w \in \Upsilon$ παίρνουμε $\breve{Q}_{W_1}((0,w]) = \mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))(w)$.

(a2.2) Για κάθε $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ η συνθήκη $\breve{Q}_n(\theta)(B) = \mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))(B)$ ισχύει.

Πράγματι, θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{D}^W := \{B \in \mathfrak{B}(\Upsilon) : \breve{Q}_n(\theta)(B) = \mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))(B)\}.$$

Τότε $\mathcal{D}^W$ είναι μία κλάση Dynkin.

(Dyn1) Προφανώς $\emptyset \in \mathcal{D}^W$, αφού $\breve{Q}_n(\theta)(\emptyset) = 0 = \mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))(\emptyset)$.

(Dyn2) Για κάθε $B \in \mathcal{D}^W$ έχουμε ότι $\Upsilon \backslash B \in \mathcal{D}^W$.

Πράγματι, αφού $\breve{Q}_n(\theta)(\Upsilon) = 1 = \mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))(\Upsilon)$ παίρνουμε ότι

$$\breve{Q}_n(\theta)(\Upsilon \backslash B) = 1 - \breve{Q}_n(\theta)(B) = 1 - \mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))(B) = \mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))(\Upsilon \backslash B)$$

(Dyn3) Για κάθε ακολουθία $\{B_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ανά δύο ξένων μεταξύ τους στην $\mathcal{D}^W$ έχουμε $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k \in \mathcal{D}^W$.

Πράγματι,

$$\breve{Q}_n(\theta)(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \breve{Q}_n(\theta)(B_k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))(B_k) = \mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k).$$

Επομένως η $\mathcal{D}^W$ είναι μία κλάση Dynkin. Επιπλέον, αφού $\mathcal{C}^W \subseteq \mathcal{D}^W$ και $\mathcal{C}^W$ είναι κλειστό κάτω από τις πεπερασμένες τομές απο το Θεώρημα της Μονότονης κλάσης (βλ. Θεώρημα A.2.4) προκύπτει ότι $\mathfrak{B}(\Upsilon) = \sigma(\mathcal{C}^W) \subseteq \mathcal{D}^W \subseteq \mathfrak{B}(\Upsilon)$, ως εκ τούτου $\mathcal{D}^W = \mathfrak{B}(\Upsilon)$.

(b) Η συνολο-συνάρτηση $\breve{R}_1$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας στην $\mathfrak{B}(\Upsilon)$ και υπάρχει ένα μέτρο πιθανότητας $\breve{Q}$ στον (Ω, Σ) τέτοιο ώστε το S είναι $\breve{Q}$-CRP$(\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta)), \breve{Q}_{X_1})$ και $\breve{Q}_{X_1} = \breve{R}_1$.

Πράγματι,

(μ1) $R_1(\emptyset) = \mathbb{E}_P\left[\chi_{X_1^{-1}(\emptyset)} \cdot (h^{-1} \circ \gamma \circ X_1)\right] = 0$

(μ2) Έστω $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μιά ακολουθία ανά δύο ξένων στοιχείων της $\mathfrak{B}(\Upsilon)$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $R_1(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} R_1(B_n)$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} R_1(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) &= \mathbb{E}_P\left[\chi_{X_1^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n)} \cdot (h^{-1} \circ \gamma \circ X_1)\right] \\ &= \mathbb{E}_P\left[\sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{X_1^{-1}(B_n)} \cdot (h^{-1} \circ \gamma \circ X_1)\right] \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}_P\left[\chi_{X_1^{-1}(B_n)} \cdot (h^{-1} \circ \gamma \circ X_1)\right] = \sum_{n\in\mathbb{N}} R_1(B_n). \end{aligned}$$

Επιπλέον, $\breve{R}_1(\Upsilon) = \mathbb{E}_P[\chi_{X_1^{-1}(\Upsilon)} \cdot (h^{-1} \circ \gamma \circ X_1)] = \mathbb{E}_P[h^{-1} \circ \gamma \circ X_1] = 1$, όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει απο το Λήμμα 4.4 (a) (*ii*), ως εκ τούτου $\breve{R}_1$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας $\mathfrak{B}(\Upsilon)$. Επομένως, αφού $\breve{Q}_n(\theta)$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας στο $\mathfrak{B}(\Upsilon)$ απο το (a), μπορούμε να εφαρμόσουμε το Λήμμα 4.2.5 με $\breve{Q}_n(\theta)$ και $\breve{R}_1$ στη θέση του $Q_n(\theta)$ και R_1 αντίστοιχα, για να κατασκευάσουμε ένα μέτρο πιθανότητας $\breve{Q}$ επάνω στη Σ έτσι ώστε η S να είναι $\breve{Q}$-CRP$(\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta)), \breve{Q}_{X_1})$ και $\breve{Q}_{X_1} = \breve{R}_1$.

Ισχυρισμός. Για κάθε $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ ισχύει η συνθήκη

$$\breve{Q}_{X_1}(B) = \int_B (h^{-1} \circ \gamma)\, dP_{X_1}. \tag{4.10}$$

Απόδειξη. Θέτουμε $\mathcal{C}^X := \{(0, x] : x \in \Upsilon\}$. Σαφώς κάθε στοιχείο της $\mathcal{C}^X$ ικανοποιεί την συνθήκη (4.10).

Πράγματι, έστω $x \in \Upsilon$. Τότε

$$\begin{aligned}
\breve{Q}_{X_1}((0,x]) &= \mathbb{E}_P[\chi_{\{X_1 \leqslant x\}} \cdot (h^{-1} \circ \gamma)(X_1)] \\
&= \mathbb{E}_P[(\chi_{(0,x]} \circ X_1) \cdot ((h^{-1} \circ \gamma) \circ X_1)] \\
&= \int (\chi_{(0,x]} \circ X_1) \cdot ((h^{-1} \circ \gamma) \circ X_1)\, dP \\
&= \int [\chi_{(0,x]} \cdot (h^{-1} \circ \gamma)] \circ X_1\, dP \\
&= \int \chi_{(0,x]}(x_1) \cdot (h^{-1} \circ \gamma)(t)\, P_{X_1}(x_1).
\end{aligned}$$

Ως εκ τούτου για κάθε $x \in \Upsilon$ παίρνουμε ότι $\breve{Q}_{X_1}((0,x]) = \int_0^x (h^{-1} \circ \gamma)(x_1)\, P_{X_1}(dx_1)$. □

Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{D}^X := \{B \in \mathfrak{B}(\Upsilon) : \breve{Q}_{X_1}(B) = \int_B (h^{-1} \circ \gamma)(x_1)\, P_{X_1}(dx_1)\}.$$

Τότε $\mathcal{D}^X$ είναι μία κλάση Dynkin.

(Dyn1) Προφανώς $\varnothing \in \mathcal{D}^X$, αφού $\breve{Q}_{X_1}(\varnothing) = 0 = \int_\varnothing (h^{-1} \circ \gamma)(x_1)\, P_{X_1}(dx_1)$.

(Dyn2) Για κάθε $B \in \mathcal{D}^X$ έχουμε ότι $\Upsilon \setminus B \in \mathcal{D}^X$.

Πράγματι, σημειώνουμε ότι $\Upsilon \in \mathcal{D}^X$, αφού

$$\begin{aligned}
\breve{Q}_{X_1}(\Upsilon) &= \breve{Q}_{X_1}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (0,n]) = \lim_{n \to \infty} \breve{Q}_{X_1}((0,n]) \\
&= \lim_{n \to \infty} \int_0^n (h^{-1} \circ \gamma)(x_1)\, P_{X_1}(dx_1) = \int_\Upsilon (h^{-1} \circ \gamma)(x_1)\, P_{X_1}(dx_1).
\end{aligned}$$

Έστω τώρα $B \in \mathcal{D}^X$. Παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}\breve{Q}_{X_1}(\Upsilon\setminus B) &= \breve{Q}_{X_1}(\Upsilon) - \breve{Q}_{X_1}(B)\\ &= \int_{\Upsilon}(h^{-1}\circ\gamma)(x_1)\,P_{X_1}(dx_1) - \int_B (h^{-1}\circ\gamma)(x_1)\,P_{X_1}(dx_1)\\ &= \int_{\Upsilon\setminus B}(h^{-1}\circ\gamma)(x_1)\,P_{X_1}(dx_1).\end{aligned}$$

(Dyn3) Για κάθε ακολουθία $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ανά δύο ξένων μεταξύ τους συνόλων στην $\mathcal{D}^X$ έχουμε $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{D}^X$.

Πράγματι,

$$\begin{aligned}\breve{Q}_{X_1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) &= \sum_{n\in\mathbb{N}}\breve{Q}_{X_1}(B_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\int_{B_n}(h^{-1}\circ\gamma)(x_1)\,P_{X_1}(dx_1)\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}}\int \chi_{B_n}\cdot(h^{-1}\circ\gamma)(x_1)\,P_{X_1}(dx_1)\\ &= \int\sum_{n\in\mathbb{N}}\chi_{B_n}\cdot(h^{-1}\circ\gamma)(x_1)\,P_{X_1}(dx_1)\\ &= \int \chi_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n}\cdot(h^{-1}\circ\gamma)(x_1)\,P_{X_1}(dx_1)\\ &= \int_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n}(h^{-1}\circ\gamma)(x_1)\,P_{X_1}(dx_1).\end{aligned}$$

Επομένως, η $\mathcal{D}^X$ είναι μία κλάση Dynkin. Επιπλέον, αφού $\mathcal{C}^X \subseteq \mathcal{D}^X$ και η $\mathcal{C}^X$ είναι κλειστή ως προς τις πεπερασμένες τομές απο το Θεώρημα της Μονότονης κλάσης (βλ. Θεώρημα A.2.4) προκύπτει ότι $\mathfrak{B}(\Upsilon) = \sigma(\mathcal{C}^X) \subseteq \mathcal{D}^X \subseteq \mathfrak{B}(\Upsilon)$, ως εκ τούτου $\mathcal{D}^X = \mathfrak{B}(\Upsilon)$. $\square$

(c) Οι συνολο-συναρτήσεις Q και $\breve{Q}$ συμπίπτουν επάνω στη Σ.

Πράγματι, αφού $\breve{Q}_{W_1} \sim P_{W_1}$ απο την κατασκεή του $\breve{Q}_{W_1}$, και $\breve{Q}_{X_1} \sim P_{X_1}$ απο τον παραπάνω ισχύρισμο, εφαρμόζοντας την Πρόταση 5.2.5 παίρνουμε ότι $\breve{Q} \overset{pr}{\sim} P$, ή ισοδύναμα ότι για κάθε $u \in [0,t]$ και $A \in \mathcal{F}^S_u$

$$\breve{Q}(A) = \int_A \prod_{j=1}^{N_t}(h^{-1}\circ\gamma\circ X_j)\cdot g(W_1,\ldots,W_{N_t},t)\,dP.$$

Ετσι $Q \upharpoonright \mathcal{F}^S_u = \breve{Q} \upharpoonright \mathcal{F}^S_u$ για όλα τα $u \in \mathbb{R}_+$, επομένως $Q \upharpoonright \breve{\Sigma} = \breve{Q} \upharpoonright \breve{\Sigma}$ όπου $\breve{\Sigma} := \bigcup_{u\in\mathbb{R}_+}\mathcal{F}^S_u$. Κατά συνέπεια, το Q είναι σ-προσθετικό επάνω στη $\breve{\Sigma}$ και έτσι το $\breve{Q}$ είναι η μοναδική επέκταση του Q επάνω στη σ-άλγεβρα $\Sigma = \sigma(\breve{\Sigma})$.

Έστω τώρα $\ell = 2$. Αφού $\mathcal{F}^2_{P,h} \subseteq \mathcal{F}^1_{P,h}$ προκύπτει όπως παραπάνω ότι για κάθε συνάρτηση $\gamma \in \mathcal{F}^2_{P,h}$ υπάρχει μια μοναδική πιθανότητα $Q \in \mathcal{M}^1_{S,\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))}$ που ικανοποιεί την (RRM), επομένως αρκεί να δείξουμε ότι $\mathbb{E}_Q[X_1^2] < \infty$.

Πράγματι,

$$\mathbb{E}_Q[X_1^2] = \int_{\Upsilon} x^2 Q_{X_1}(dx) = \int_{\Upsilon} x^2 \cdot (h^{-1} \circ \gamma)\, P_{X_1}(dx) < \infty,$$

όπου η δεύτερη ισότητα απορρέει από το γεγονός ότι $h^{-1} \circ \gamma$ είναι μία Radon-Nikodým παράγωγος του Q_{X_1} ως προς το P_{X_1} και η ανισότητα προκύπτει από την παραδοχή μας ότι $\gamma \in \mathcal{F}^2_{P,h}$. □

Θεώρημα 4.2.9. *Έστω $\ell = 1, 2$. Ισχύουν τα εξής*

(i) για κάθε $Q \in \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))}$ υπάρχει μία P_{X_1}-σ.β. μοναδική συνάρτηση $\gamma \in \mathcal{F}^{\ell}_{P,h}$ που ικανοποιεί την (RRM),

(ii) αντιστρόφως, για κάθε συνάρτηση $\gamma \in \mathcal{F}^{\ell}_{P,h}$ υπάρχει ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας $Q \in \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))}$ που ικανοποιεί την συνθήκη (RRM).

Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια των Προτάσεων 4.1.8 και 4.2.8.

Για να διατυπώσουμε το επόμενο αποτέλεσμα, συμβολίζουμε με $\widetilde{\mathcal{F}}^{\ell}_{P,\theta}$ για $\ell = 1, 2$ την κλάση όλων των πραγματικών $\mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρήσιμων συναρτήσεων β_θ τέτοιο ώστε $\beta_\theta = \gamma + \alpha_\theta$, όπου $\gamma \in \mathcal{F}^{\ell}_{P,\ln}$ και α είναι μία πραγματική $\mathfrak{B}(D)$-μετρήσιμη συνάρτηση.

Το ακόλουθο αποτέλεσμα μας επιτρέπει να μετατρέψουμε οποιαδήποτε σύνθετη ανανεωτική διαδικασία σε μια σύνθετη διαδικασία Poisson μέσω μιας αλλαγής μέτρων.

Πόρισμα 4.2.10. *Έστω $\ell = 1, 2$. Τότε ισχύει:*

(i) για κάθε $\mathfrak{B}(D) - \mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρήσιμη, συνάρτηση ϱ και για κάθε μέτρο πιθανότητας $Q \in \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\theta))}$ υπάρχει μία P_{X_1}-σ.β. μοναδική συνάρτηση $\beta_\theta \in \widetilde{\mathcal{F}}^{\ell}_{P,\theta}$ που ικανοποιεί μαζί με τη ϱ και το Q τις συνθήκες

$$a_x = ln\rho(x) - ln\mathbb{E}_P[N_1], \quad \textit{για κάθε } x \in D \tag{*}$$

και

$$Q(A) = \int_A M_t^{(\beta)}(\theta)\, dP, \quad \textit{για κάθε } 0 \leqslant u \leqslant t \ \textit{ και } A \in \mathcal{F}^S_u \tag{RPM}$$

όπου $M_t^{(\beta)}(\theta) := e^{\sum_{j=1}^{N_t} \beta_\theta(X_j) - t\cdot\rho(\theta)} \cdot \frac{\mathbb{E}_P[N_1]^{N_t}}{\prod_{j=1}^{N_t}[\mathbf{K}(\theta)]'(W_j)\cdot(1-\mathbf{K}(\theta))(t-T_{N_t})}$,

(ii) αντιστρόφως, για κάθε συνάρτηση $\beta_\theta \in \widetilde{\mathcal{F}}^{\ell}_{P,\theta}$ υπάρχει μία μοναδική $\mathfrak{B}(D) - \mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρήσιμη συνάρτηση ϱ και ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας $Q \in \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\theta))}$ που ικανοποιεί μαζί με τη β_θ τις συνθήκες (RPM) *και* (*).

Απόδειξη. Έστω $t \geqslant 0$ αυθαίρετο αλλά σταθερό.

(i) : Έστω ρ όπως παραπάνω και έστω $Q \in \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\theta))}$ για $\ell = 1,2$. Απο το Θεώρημα 4.2.9 (i) υπάρχει μία P_{X_1}-σ.β. μοναδική συνάρτηση $\gamma \in \mathcal{F}^{\ell}_{P,\ln}$ ώστε $\gamma := \ln f$, όπου f είναι μία Radon-Nikodým παράγωγος του Q_{X_1} σε σχέση με P_{X_1}, ώστε να ικανοποιείται η σχέση

$$Q(A) = \int_A e^{\sum_{j=1}^{N_t}\gamma(X_j)} \cdot \frac{e^{-t\rho(\theta)} \cdot \rho(\theta)^{N_t}}{\prod_{j=1}^{N_t}[\mathbf{K}(\theta)]'(W_j) \cdot (1-\mathbf{K}(\theta))(t-T_{N_t})}\, dP \tag{4.11}$$

για κάθε $0 \leqslant u \leqslant t$ και $A \in \mathcal{F}^S_u$. Ορίζουμε την πραγματική $\mathfrak{B}(D)$-μετρήσιμη συνάρτηση α μέσω του τύπου $\alpha_x := ln\rho(x) - ln\mathbb{E}_P[N_1]$ για κάθε $x \in D$, και θέτουμε $\beta_\theta := \gamma + \alpha_\theta$. Τότε προκύπτει ότι $\beta_\theta \in \widetilde{\mathcal{F}}^{\ell}_{P,\theta}$ και ότι ισχύει η συνθήκη (*). Από το τελευταίο μαζί με την συνθήκη (4.11) προκύπτει η (RPM).

(ii) : Έστω $\beta_\theta = \gamma + \alpha_\theta \in \widetilde{\mathcal{F}}^{\ell}_{P,\theta}$ και $\ell = 1,2$ και ορίζουμε την $\mathfrak{B}(D) - \mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρήσιμη συνάρτηση ρ μέσω του τύπου $\rho(x) := e^{\alpha_x} \cdot \mathbb{E}_P[N_1]$ για κάθε $x \in D$. Απο το Θεώρημα 4.2.9 (ii) υπάρχει ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας $Q \in \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\theta))}$ που ικανοποιεί την συνθήκη (RRM). Αλλά για την συνάρτηση $\gamma = \beta_\theta - \alpha_\theta$ η συνθήκη (RRM) είναι ισοδύναμη με (RPM).
□

Πόρισμα 4.2.11. *Έστω $D := \Upsilon$, και έστω $P \in \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{Exp}(\theta)}$ για $\ell = 1,2$. Ισχύουν τα εξής:*

(i) για κάθε $\mathfrak{B}(D) - \mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρήσιμη συνάρτηση ϱ και για κάθε μέτρο πιθανότητας $Q \in \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\theta))}$ υπάρχει μια P_{X_1}-σ.β. μοναδική συνάρτηση $\beta_\theta \in \widetilde{\mathcal{F}}^{\ell}_{P,\theta}$ που ικανοποιεί μαζί με τη ϱ και το Q τις συνθήκες (*) και

$$Q(A) = \int_A m_t^{(\beta)}(\theta)\, dP, \ \ \textit{για όλα τα } 0 \leqslant u \leqslant t \ \textit{ και } \ A \in \mathcal{F}^S_u \tag{PPM}$$

όπου $m_t^{(\beta)}(\theta) := e^{\sum_{j=1}^{N_t}\beta_\theta(X_j) - t\theta\cdot\left(\mathbb{E}_P\left[e^{\beta_\theta(X_1)}\right]-1\right)}$,

(ii) αντιστρόφως, για κάθε συνάρτηση $\beta_\theta \in \widetilde{\mathcal{F}}^{\ell}_{P,\theta}$ υπάρχει μία μοναδική $\mathfrak{B}(D) - \mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρήσιμη συνάρτηση ϱ και ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας $Q \in \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\theta))}$ που ικανοποιούν μαζί με τη β_θ τις συνθήκες (*) και (PPM).

Απόδειξη. Έστω $t \geqslant 0$.

(i): Έστω ρ όπως προηγουμένως και έστω $Q \in \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{Exp}(\theta)}$ για $\ell = 1,2$. Απο το Θεώρημα 4.2.9 υπάρχει μια P_{X_1}-σ.β. μοναδική συνάρτηση $\gamma \in \mathcal{F}^{\ell}_{P,\ln}$ τέτοια ώστε να ισχύει η συνθήκη RRM. Το παραπάνω μαζί με το Παράδειγμα 4.1.9 μας δίνουν

$$Q(A) = \int_A e^{\sum_{j=1}^{N_t}\gamma(X_j)} \cdot \left(\frac{\rho(\theta)}{\theta}\right)^{N_t} \cdot e^{-(\rho(\theta)-\theta)t}\, dP \ \text{ για όλα τα } 0 \leqslant u \leqslant t \ \text{ και } \ A \in \mathcal{F}^S_u. \tag{4.12}$$

Ορίζοντας την πραγματική $\mathfrak{B}(D)$-μετρήσιμη συνάστηση α μέσω του $\alpha_x := ln\rho(x) - ln\theta$ για όλα τα $x \in D$ και θέτουμε $\beta_\theta := \gamma + \alpha_\theta$. Τότε προκύπτει ότι $\beta_\theta \in \mathcal{F}^\ell_{P,\theta}$ και ισχύει η συνθήκη (*). Το τελευταίο μαζί με την συνθήκη (4.12) συνεπάγεται την (PPM).

(ii): Έστω $\beta_\theta = \gamma + \alpha_\theta \in \widetilde{\mathcal{F}}^\ell_{P,\theta}$ για $\ell = 1, 2$ και ορίζουμε την $\mathfrak{B}(D) - \mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρήσιμη συνάρτηση ρ μέσω του τύπου $\rho(x) := e^{\alpha_x} \cdot \mathbb{E}_P[N_1]$ για κάθε $x \in D$. Απο το Θεώρημα 4.2.9 (ii) υπάρχει ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας $Q \in \mathcal{M}^\ell_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\theta))}$ που ικανοποεί την συνθήκη (RRM). Αλλά για την συνάρτηση $\gamma = \beta_\theta - \alpha_\theta$ η συνθήκη (RRM) ισοδυναμεί με την (PPM).
□

Παρατήρηση. Η ειδική περίπτωση του Πορίσματος 4.2.11 για $\ell = 1$ είναι το κύριο αποτέλεσμα των Delbaen & Haezendonck [10], Πρόταση 2.2.

Παράδειγμα 4.2.12. Έστω $t \geqslant 0$, $\theta := (\xi_1, 2), \eta := (\zeta_1, 2) \in D := \Upsilon \times \mathbb{N}$ και έστω $P \in \mathcal{M}^\ell_{S,\mathbf{Ga}(\theta),\mathbf{Ga}(\eta)}$ για $\ell = 1, 2$. Εφαρμόζοντας τους κατάλληλους υπολογισμούς μπορεί να αποδειχθεί ότι $\mathbb{E}_P[N_t] = \frac{t\xi_1}{2} - \frac{1-e^{-2t\xi_1}}{4}$. Υποθέτουμε ότι η ρ είναι $\mathfrak{B}(D) - \mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρήσιμη συνάρτηση και η $Q \in \mathcal{M}^\ell_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\theta)),\mathbf{Exp}(\zeta_2)}$ όπου η ζ_2 μια θετική πραγματική σταθερά. Σύμφωνα με το Πόρισμα 4.2.10, υπάρχει μία P_{X_1}-σ.β. μοναδική συνάρτηση $\beta_\theta := \gamma + \alpha_\theta \in \widetilde{\mathcal{F}}^\ell_{P,\theta}$, όπου $\gamma(x) := \ln \frac{\zeta_2 \cdot e^{-\zeta_2 \cdot x}}{\zeta_1^2 \cdot x \cdot e^{-\zeta_1 \cdot x}}$ για κάθε $x \in \Upsilon$ και $\alpha_\theta = ln\rho(\theta) - ln\mathbb{E}_P[N_1]$, ικανοποιώντας μαζί με την ρ τις συνθήκες (*) και

$$Q(A) = \int_A e^{\sum_{j=1}^{N_t} \beta_\theta(X_j) - t\rho(\theta)} \cdot \frac{\mathbb{E}_P[N_1])^{N_t}}{e^{-t\xi_1} \cdot \xi_1^{2N_t} \cdot \prod_{j=1}^{N_t} W_j \cdot (1 + \xi_1 \cdot (t - T_{N_t}))} dP \tag{4.13}$$

για κάθε $0 \leqslant u \leqslant t$ και $A \in \mathcal{F}^S_u$.

Αντιστρόφως, έστω ζ_2 όπως παραπάνω και θεωρούμε την συνάρτηση $\beta_\theta := \gamma + \alpha_\theta$, όπου $\gamma(x) := \ln \frac{\zeta_2 \cdot e^{-\zeta_2 \cdot x}}{\zeta_1^2 \cdot x \cdot e^{-\zeta_1 \cdot x}}$ για κάθε $x \in \Upsilon$ και η α είναι πραγματική $\mathfrak{B}(D)$-μετρήσιμη συνάρτηση. Εύκολα αποδεικνύεται ότι $\mathbb{E}_P[e^{\gamma(X_1)}] = 1$ και $\mathbb{E}_P[X_1 \cdot e^{\gamma(X_1)}] = \frac{\zeta_2^2}{2} < \infty$, συνεπώς ότι η $\gamma \in \mathcal{F}^\ell_P$. Ως εκ τούτου $\beta_\theta \in \widetilde{\mathcal{F}}^\ell_{P,\theta}$ για $\ell = 1, 2$. Θέτοντας $\rho(x) := e^a_x \cdot \mathbb{E}_P[N_1]$ για κάθε $x \in D$ παίρνουμε ότι η ρ είναι μία $\mathfrak{B}(D) - \mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρήσιμη συνάρτηση που ικανοποιεί την (*). Έτσι, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Πόρισμα 4.2.10 (ii) για να βρούμε ένα μοναδικό μοναδικό μέτρο πιθανότητας $Q \in \mathcal{M}^\ell_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\theta))}$ που να ικανοποιεί τη συνθήκη (4.13). Μετά την εφαρμογή του Λήμματος 4.1.4 (α) παίρνουμε ότι

$$Q_{X_1}(B) = \mathbb{E}_P[\chi_{X_1^{-1}(B)} \cdot e^{\gamma(X_1)}] = \int_B \zeta_2 \cdot e^{-\zeta_2 \cdot x} \, \lambda(dx) \text{ για κάθε } B \in \mathfrak{B}(\Upsilon),$$

από το οποίο προκύπτει ότι $Q_{X_1} = \mathbf{Exp}(\zeta_2)$ ως εκ τούτου $Q \in \mathcal{M}^\ell_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\theta)),\mathbf{Exp}(\zeta_2)}$.

4.3 Σύνθετες ανανεωτικές διαδικασίες και martingales

Σε αυτή την ενότητα δείχνουμε ότι σε μια αγορά χωρίς κερδοσκοπία, μια προσέγγιση μέσω martingales στις αρχές υπολογισμού των ασφαλίστρων οδηγεί στην περίπτωση των σύνθετων ανανεωτικών διαδικασιών σε σύνθετες διαδικασίες Poisson, παρέχοντας έτσι έναν τρόπο να βρεθούν (προοδευτικά) ισοδύναμα martingale-μέτρα για τη διαδικασία $V := \{S_t - t \cdot \mathbb{E}_P[S_1]\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Σημειώνουμε ότι η V είναι μια καλά καθορισμένη πραγματική στοχαστική διαδικασία αφού για οποιαδήποτε ανανεωτική διαδικασία N έχουμε ότι $\mathbb{E}_P[N_t] < \infty$ για κάθε $t \geqslant 0$ (π.χ. βλ. [24], Πρόταση 4 σελ. 101) και $X_1 \in \mathcal{L}^1(P)$.

Ορισμός 4.3.1. Έστω Q ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στη Σ και έστω $Z := \{Z_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μια διαδικασία για τον Ω. Τότε το Q λέγεται ότι είναι

(a) ένα **martingale-μέτρο για την** Z, εάν Z είναι $(Q, \mathcal{F}^S)$-martingale,

(b) ένα **ισοδύναμο** (αντίστοιχα **προοδευτικά ισοδύναμο**) **martingale-μέτρο** για την Z εάν

(em1) $Q \sim P$ (αντίστοιχα $Q \overset{pr}{\sim} P$),

(em2) η διαδικασία Z είναι $(Q, \mathcal{F}^S)$-martingale.

Τα ισοδύναμα martingale-μέτρα ονομάζονται και **ουδέτερα κινδύνου μέτρα** (risk neutral measures).

Θεώρημα 4.3.2. *Έστω $\theta \in \Upsilon$ σταθερός αλλά αυθαίρετος αριθμός και έστω $V := \{S_t - t \cdot \mathbb{E}_P[S_1]\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Θεωρούμε τους ακόλουθους ισχυρισμούς:*

(i) *P είναι martingale μέτρο για την V,*

(ii) $P \in \mathcal{M}^1_{S,\mathbf{Exp}(\theta)}$,

(iii) *P είναι martingale μέτρο για την V που ικανοποιεί την συνθήκη $V_t \in \mathcal{L}^2(P)$ για κάθε $t \geqslant 0$,*

(iv) $P \in \mathcal{M}^2_{S,\mathbf{Exp}(\theta)}$.

Τότε οι ισχυρισμοί (i) και (ii) καθώς και ισχυρισμοί (iii) και (iv) είναι ισοδύναμοι. Επιπλέον, εάν $X_1 \in \mathcal{L}^2(P)$ τότε όλοι οι ισχυρισμοί (i) έως (iv) είναι ισοδύναμοι.

Απόδειξη. Έστω $t \geqslant 0$ αυθαίρετο αλλά σταθερό. $(i) \Longrightarrow (ii)$: Αφού η V είναι $(P, \mathcal{F}^S)$-martingale για την V, έχουμε ότι $E_P[V_t] = E_P[V_1] = 0$ από το οποίο προκύπτει ότι $\mathbb{E}_P[S_t] = \mathbb{E}_P[S_1] \cdot t$ ή ισοδύναμα ότι $\mathbb{E}_P[N_t] = \mathbb{E}_P[N_1] \cdot t$. Προφανώς, $\mathbb{E}_P[N_t] > 0$, αφού $P(\{N_t = n\} > 0$ και $n \in \mathbb{N}_0$, ως εκ τούτου $\mathbb{E}_P[N_1] \in \Upsilon$.

Ισχυρισμός. *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(a) N *is a* P-$PP(\theta)$

(b) $\mathbb{E}_P[N_t] = t \cdot \theta$.

Απόδειξη. Η συνεπαγωγή $(a) \Longrightarrow (b)$ είναι άμεση.

$(b) \Longrightarrow (a)$: Για να αποδείξουμε αυτή τη συνεπαγωγή ας θυμηθούμε ότι η **ανανεωτική συνάρτηση που αντιστοιχεί στην κατανομή** $\boldsymbol{K}(\theta)$ είναι ορισμένη απο τον τύπο

$$U(u) := \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{K}^{*n}(\theta)(u) \text{ για κάθε } u \in \mathbb{R}$$

όπου $\mathbf{K}^{*n}(\theta)$ είναι η n-οστή συνέλιξη της $\boldsymbol{K}(\theta)$ (βλ. Ορισμός B.2.14). Προφανώς, $U(u) = 1 + \mathbb{E}_P[N_u]$ για κάθε $u \geqslant 0$. Υποθέτοντας ότι $\mathbb{E}_P[N_t] = t\theta$ λαμβάνουμε ότι $U(t) = 1 + \theta t$. Επομένως ο μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes $\widehat{U}(s)$ της $U(t)$ δίνεται από τον τύπο

$$\widehat{U}(s) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-s \cdot u}\, dU(u) = e^{-s \cdot 0} \cdot U(0) + \int_0^{\infty} \theta e^{-s \cdot u} du = \frac{s + \theta}{s} \text{ για κάθε } s \geqslant 0,$$

όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι $\int_{\mathbb{R}_+} e^{-s \cdot u}\, dU(u)$ είναι ένα Riemman-Stieltjes ολοκλήρωμα και η U έχει μία πυκνότητα για $u > 0, U(u) = 0$, για $u < 0$ και έχει ένα μοναδιαίο άλμα στο $u = 0$ (π.χ. βλ. [24], σελ. 108-109). Τότε προκύπτει οτι

$$\widehat{\mathbf{K}}(\theta)(s) = \frac{\widehat{U}(s) - 1}{\widehat{U}(s)} = \frac{\theta}{\theta + s} \text{ για κάθε } s \geqslant 0,$$

όπου με $\widehat{\mathbf{K}}(\theta)$ συμβολίζεται ο μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes της κατανομής του W_n για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (π.χ. βλ. [24], Πρόταση 20). Ως εκ τούτου $P_{W_1} = \mathbf{Exp}(\theta)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αλλά αφού η W είναι P-ανεξάρτητη, έπεται ότι η N είναι $P - PP(\theta)$ (βλ. [23], Θεώρημα 2.3.4). □

Θέτοντας $\theta := \mathbb{E}_P[N_1] \in \Upsilon$ παίρνουμε ότι $\mathbb{E}_P[N_t] = t \cdot \mathbb{E}_P[N_1] = t\theta$. Άρα σύμφωνα με τον παραπάνω ισχυρισμό προκύπτει η (ii).

$(ii) \Longrightarrow (i)$: Αφού $P \in \mathcal{M}^1_{S,\mathbf{Exp}(\theta)}$, η διαδικασία συνολικών απαιτήσεων S έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις (βλ. π.χ. [23], Θεώρημα 5.1.3). Επομένως, για κάθε $u \in [0, t]$ και κάθε $A \in \mathcal{F}^S_u$ παίρνουμε ότι

$$\int_A (S_t - \mathbb{E}_P[S_t]) - (S_u - \mathbb{E}_P[S_u])dP = \int_{\Omega} \chi_A dP \cdot \int_{\Omega} ((S_t - S_u) - \mathbb{E}_P[S_t - S_u])dP = 0.$$

Άρα η διαδικασία $\{S_t - \mathbb{E}_P[S_t]\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι $(P, \mathcal{F}^S)$-martingale. Αλλά αφού $\mathbb{E}_P[S_t] = t \cdot \mathbb{E}_P[S_1]$, προκύπτει η (i).

$(iii) \implies (iv)$: Αφού η V είναι $(P, \mathcal{F}^S)$-martingale έπεται από την ισοδυναμία των ισχυρισμών (i) και (ii) ότι $P \in \mathcal{M}^1_{S,\mathbf{Exp}(\theta)}$. Επιπλέον, αφού η $V_t \in \mathcal{L}^2(P)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ λαμβάνουμε ότι $Var_P[V_t] = \mathbb{E}_P[N_t]Var_P[X_1] + Var_P[N_t]\mathbb{E}^2_P[X_1] < \infty$, όπου με Var_P συμβολίζεται η διακύμανση κάτω απο το μέτρο P. Ως εκ τούτου $Var_P[X_1] < \infty$, συνεπώς ισχύει η (iv).

$(iv) \implies (iii)$: Αφού $P \in \mathcal{M}^2_{S,\mathbf{Exp}(\theta)}$ και $\mathcal{M}^2_{S,\mathbf{Exp}(\theta)} \subseteq \mathcal{M}^1_{S,\mathbf{Exp}(\theta)}$ και πάλι από την ισοδυναμία των ισχυρισμών (i) και (ii) έπεται ότι η V είναι $(P, \mathcal{F}^S)$-martingale. Επιπλέον, $Var_P[V_t] = Var_P[S_t] = \mathbb{E}_P[N_t]Var_P[X_1] + Var_P[N_t]\mathbb{E}^2_P[X_1] < \infty$, όπου η ανισότητα έπεται από γεγονός ότι $P \in \mathcal{M}^2_{S,\mathbf{Exp}(\theta)}$. Επομένως $V_t \in \mathcal{L}^2(P)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, δηλ. να ισχύει η (iii).

Τελικά, α υποθέσουμε ότι $X_1 \in \mathcal{L}^2(P)$ παίρνουμε ότι $P \in \mathcal{M}^2_{S,\mathbf{Exp}(\theta)}$ και έτσι προκύπτει η ισοδυναμία όλων των ισχυρισμών (i)-(iv). □

Παρατηρήσεις 4.3.3. **(a)** Το παραπάνω αποτέλεσμα μαζί με το Πόρισμα 4.2.10 μας επιτρέπει να βρίσκουμε προοδευτικά ισοδύναμα martingale μέτρα για CRPs.

Πράγματι, έστω S και V όπως στο Θεώρημα 4.3.2. Ας υποθέσουμε ότι $\beta_\theta \in \mathcal{F}^\ell_{P,\ln}$ για $\ell = 1, 2$. Τότε για κάθε $\ell = 1, 2$ σύμφωνα με το Πόρισμα 4.2.10 υπάρχει ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας $Q \in \mathcal{M}^\ell_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\theta))}$ που σύμφωνα με το Θεώρημα 4.3.2 είναι ένα προοδευτικά ισοδύναμο martingale μέτρο για την V.

(b) Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.3.2 το μέτρο Q που εμφανίζεται στο Παράδειγμα 4.2.12 είναι ένα προοδευτικά ισοδύναμο μέτρο martingale για τον V.

4.4 Εφαρμογές στις αρχές υπολογισμού ασφαλίστρου

Έχουμε δει ότι το αρχικό μέτρο πιθανότητας P μπορεί να αντικατασταθεί από ένα άλλο μέτρο πιθανότητας Q έτσι ώστε τα P και Q να είναι προοδευτικά ισοδύναμα και η S να μετατραπεί σε μια σύνθετη διαδικασία Poisson υπό Q. Η ιδέα είναι να ορίσουμε ένα μέτρο πιθανότητας Q για να δώσουμε περισσότερο βάρος σε λιγότερο ευνοϊκά ενδεχόμενα. Πιο συγκεκριμένα, το Q πρέπει να οριστεί με τέτοιο τρόπο ώστε $\mathbb{E}_P[S_t] < \mathbb{E}_Q[S_t] < \infty$. Αυτό οδηγεί στον ακόλουθο ορισμό της αρχής υπολογισμού ασφαλίστρων.

Ορισμός 4.4.1. (Delbaen, F. & Haezendonck, J. [10], Ορισμός 3.1) Μία **αρχή του υπολογισμού ασφαλίστρων** είναι ένα μέτρο πιθανότητας Q επάνω στη Σ τέτοιο ώστε

(i) $Q \overset{pr}{\sim} P$,

(ii) η S να είναι Q-σύνθετη διαδικασία Poisson,

(iii) $\mathbb{E}_Q[X_1] < \infty$.

Έστω $\theta \in D \subseteq \mathbb{R}^d$, $P \in \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{K}(\theta)}$ για $\ell = 1,2$, και έστω $\beta_\theta \in \widetilde{\mathcal{F}}^{\ell}_{P,\theta}$, ρ και Q να είναι όπως στο Πόρισμα 4.2.10 (ii). Η αντίστοιχη πυκνότητα ασφαλίστρου $p(Q) := \mathbb{E}_Q[S_1]$ δίνεται από τον τύπο

$$p(Q) = \mathbb{E}_P[N_1] \cdot \mathbb{E}_P[X_1 e^{\beta_\theta(X_1)}].$$

Πράγματι, αφού $\alpha_\theta = \ln \rho(\theta) - \ln \mathbb{E}_P[N_1]$ εύκολα έπεται ότι $\rho(\theta) = \mathbb{E}_Q[N_1] = \mathbb{E}_P[N_1]\, e^{\alpha_\theta}$. Επιπλέον,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_Q[X_1] &= \int_\Upsilon x\, Q_{X_1}(dx) = \int_\Upsilon x\, f(x)\, P_{X_1}(dx) \\ &= \int_\Upsilon x\, e^{\gamma(x)}\, P_{X_1}(dx) = \int_\Omega X_1\, e^{\gamma(X_1)}\, dP \\ &= \mathbb{E}_P[X_1\, e^{\gamma(X_1)}]. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Ως εκ τούτου

$$p(Q) = \mathbb{E}_Q[N_1]\, \mathbb{E}_Q[X_1] = \mathbb{E}_P[N_1]\, e^{\alpha_\theta}\, \mathbb{E}_P[X_1\, e^{\gamma(X_1)}] = \mathbb{E}_P[N_1]\, \mathbb{E}_P[X_1 e^{\beta_\theta(X_1)}].$$

Το τελευταίο συνεπάγεται ότι $p(Q) > \mathbb{E}_P[S_1]$ εάν και μόνο εάν $\beta_\theta(X_1) > 1$ P-σ.β..

Στα επόμενα Παραδείγματα 4.4.2 έως 4.4.4, εφαρμόζοντας τα Πορίσματα 4.2.10 και 4.2.11, δείχνουμε πώς να κατασκευάσουμε τις αρχές υπολογισμού ασφαλίστρου Q, ξεκινώντας από μια ανανεωτική διαδικασία κάτω από το P, ικανοποιώντας την επιθυμητή ιδιότητα $\mathbb{E}_P[S_t] < \mathbb{E}_Q[S_t] < \infty$ για κάθε $t > 0$.

Παράδειγμα 4.4.2. Έστω $D := \Upsilon \times \mathbb{N}$, $\theta := (\xi_1, 2)$, $\eta := (\zeta_1, 2) \in D$, έστω $P \in \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{Ga}(\theta),\mathbf{Ga}(\eta)}$ για $\ell = 1,2$. Θεωρώντας την πραγματική συνάρτηση $\beta_\theta := \gamma + \alpha_\theta$, με $\gamma(x) := \ln \frac{\mathbb{E}_P[X_1]}{2c} - \ln x + \frac{2(c-1)}{c\mathbb{E}_P[X_1]} \cdot x$ για κάθε $x \in \Upsilon$ με $c > 2$ μια πραγματική σταθερά και $\alpha_\theta := \ln \frac{\xi_1}{2\mathbb{E}_P[N_1]}$. Μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι $\mathbb{E}_P[e^{\gamma(X_1)}] = 1$ και $\mathbb{E}_P[X_1^2 \cdot e^{\gamma(X_1)}] = \frac{2c^2}{\zeta_1} < \infty$, άρα $\gamma \in \mathcal{F}^{\ell}_{P,\ln}$, επομένως $\beta_\theta \in \widetilde{\mathcal{F}}^{\ell}_{P,\theta}$ για $\ell = 1,2$.

Πράγματι,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_P[e^{\gamma(X_1)}] &= \mathbb{E}_P\left[\frac{\mathbb{E}_P[X_1]}{2c}\cdot\frac{1}{X_1}\cdot e^{\frac{2(c-1)}{c\mathbb{E}_P[X_1]}\cdot X_1}\right]\\
&= \int_{\Omega}\frac{\mathbb{E}_P[X_1]}{2c}\cdot\frac{1}{X_1}\cdot e^{\frac{2(c-1)}{c\mathbb{E}_P[X_1]}\cdot X_1}\,dP\\
&= \frac{\mathbb{E}_P[X_1]}{2c}\cdot\int_0^\infty\frac{1}{x}\cdot e^{\frac{2(c-1)}{c\mathbb{E}_P[X_1]}\cdot x}\,P_{X_1}(dx)\\
&= \frac{\mathbb{E}_P[X_1]}{2c}\cdot\int_0^\infty\frac{1}{x}\cdot e^{\frac{2(c-1)}{c\mathbb{E}_P[X_1]}\cdot x}\cdot\zeta_1^2\cdot x\cdot e^{-\zeta_1\cdot x}\,dx\\
&= \frac{\mathbb{E}_P[X_1]}{2c}\cdot\int_0^\infty e^{\frac{2(c-1)}{c\cdot\frac{2}{\zeta_1}}\cdot x}\cdot\zeta_1^2\cdot e^{-\zeta_1 x}\,\lambda(dx)\\
&= \frac{\mathbb{E}_P[X_1]}{2c}\cdot\zeta_1^2\cdot\int_0^\infty e^{\zeta_1\cdot x-\frac{\zeta_1}{c}\cdot x-\zeta_1\cdot x}\,\lambda(dx)\\
&= \frac{\mathbb{E}_P[X_1]}{2c}\cdot\zeta_1^2\cdot\int_0^\infty e^{-\frac{\zeta_1}{c}\cdot x}\,\lambda(dx)=\frac{\frac{2}{\zeta_1}}{2c}\cdot\zeta_1^2\cdot\frac{c}{\zeta_1}=1.
\end{aligned}$$

Ως εκ τούτου $\gamma\in\mathcal{F}^1_{P,\ln}$. Επιπλέον,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_P\left[X_1^2\cdot e^{\gamma(X_1)}\right] &= \mathbb{E}_P\left[X_1^2\cdot\frac{\mathbb{E}_P[X_1]}{2c}\cdot\frac{1}{X_1}\cdot e^{\frac{2(c-1)}{c\mathbb{E}_P[X_1]}\cdot X_1}\right]\\
&= \int_{\Omega}X_1\cdot\frac{\mathbb{E}_P[X_1]}{2c}\cdot e^{\frac{2(c-1)}{c\mathbb{E}_P[X_1]}\cdot X_1}\,dP\\
&= \frac{\mathbb{E}_P[X_1]}{2c}\cdot\int_0^\infty x\cdot e^{\frac{2(c-1)}{c\mathbb{E}_P[X_1]}\cdot x}\,P_{X_1}(dx)\\
&= \frac{\mathbb{E}_P[X_1]}{2c}\cdot\int_0^\infty x\cdot e^{\frac{2(c-1)}{c\mathbb{E}_P[X_1]}\cdot x}\,P_{X_1}(dx)\\
&= \frac{\mathbb{E}_P[X_1]}{2c}\cdot\int_0^\infty x\cdot e^{\frac{2(c-1)}{c\mathbb{E}_P[X_1]}\cdot x}\cdot\zeta_1^2\cdot x\cdot e^{-\zeta_1\cdot x}\,\lambda(dx)\\
&= \frac{\mathbb{E}_P[X_1]}{2c}\cdot\zeta_1^2\cdot\int_0^\infty x^2\cdot e^{\zeta_1\cdot x-\frac{\zeta_1}{c}\cdot x-\zeta_1\cdot x}\,\lambda(dx)\\
&= \frac{\mathbb{E}_P[X_1]}{2c}\cdot\zeta_1^2\cdot\int_0^\infty x^2\cdot e^{-\frac{\zeta_1}{c}\cdot x}\,\lambda(dx)=\frac{2c^2}{\zeta_1^2}<\infty,
\end{aligned}$$

ως εκ τούτου $\gamma\in\mathcal{F}^2_{P,\ln}$.

Ορίζουμε την $\mathfrak{B}(D)-\mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρήσιμη συνάρτηση ρ από $\rho(x):=e^{\alpha_x}\cdot\mathbb{E}_P[N_1]$. Στη συνέχεια, λόγω του Πορίσματος 4.2.10 υπάρχει ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας $Q\in\mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{Exp}(\theta)}$ το οποίο είναι μια αρχή υπολογισμού ασφαλίστρου που ικανοποιεί τις συνθήκες (RPM) και (*) και

$$Q_{X_1}(B)=\mathbb{E}_P[\chi_{X_1^{-1}(B)}\cdot e^{\gamma(X_1)}]=\int_B\frac{\zeta_1}{c}\cdot e^{-\frac{\zeta_1}{c}\cdot x}\,\lambda(dx)\ \text{για κάθε}\ B\in\mathfrak{B}(\Upsilon).$$

Το τελευταίο συνεπάγεται ότι $Q_{X_1} = \mathbf{Exp}(\frac{\zeta_1}{c})$, επομένως $Q \in \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\theta)),\mathbf{Exp}(\frac{\zeta_1}{c})}$ και $\mathbb{E}_Q[X_1] = \frac{c}{\zeta_1} > \frac{2}{\zeta_1} = \mathbb{E}_P[X_1]$. Αφού απο το Παράδειγμα 4.2.12 έχουμε ότι $\mathbb{E}_Q[N_t] \geqslant \mathbb{E}_P[N_t]$ για κάθε $t \geqslant 0$ λαμβάνουμε ότι $\mathbb{E}_P[S_t] < \mathbb{E}_Q[S_t] < \infty$ για κάθε $t > 0$.

Παράδειγμα 4.4.3. Έστω $D := \varUpsilon \times \mathbb{N}$, $\theta := (\xi_1, 2) \in D$, $\eta \in \varUpsilon$, και έστω $P \in \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{Ga}(\theta),\mathbf{Exp}(\eta)}$ για $\ell = 1, 2$. Ας θεωρήσουμε την πραγματική συνάρτηση $\beta_\theta := \gamma + \alpha_\theta$ με $\gamma(x) := \ln(1 - c \cdot \mathbb{E}_P[X_1]) + c \cdot x$ για κάθε $x \in \varUpsilon$ με $c < \eta$ μία θετική σταθερά, και $\alpha_\theta := \ln \frac{\xi_1}{2\mathbb{E}_P[N_1]}$. Μπορεί να αποδειχθεί ότι $\mathbb{E}_P[e^{\gamma(X_1)}] = 1$ και $\mathbb{E}_P[X_1^2 \cdot e^{\gamma(X_1)}] = \frac{2}{(\eta-c)^2} < \infty$, άρα $\gamma \in \mathcal{F}^{\ell}_{P,\ln}$, ως εκ τούτου $\beta_\theta \in \widetilde{\mathcal{F}}^{\ell}_{P,\theta}$ για $\ell = 1, 2$.

Πράγματι,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_P[e^{\gamma(X_1)}] &= \mathbb{E}_P\left[(1 - c \cdot \mathbb{E}_P[X_1]) \cdot e^{c \cdot X_1}\right] = (1 - c \cdot \mathbb{E}_P[X_1]) \cdot \int_\Omega e^{c \cdot X_1}\, dP \\
&= (1 - c \cdot \mathbb{E}_P[X_1]) \cdot \int_0^\infty e^{c \cdot x}\, P_{X_1}(dx) \\
&= (1 - c \cdot \mathbb{E}_P[X_1]) \cdot \int_0^\infty e^{c \cdot x} \cdot \eta \cdot e^{-\eta \cdot x}\, \lambda(dx) \\
&= (1 - c \cdot \mathbb{E}_P[X_1]) \cdot \int_0^\infty \eta \cdot e^{-(\eta - c) \cdot x}\, \lambda(dx) \\
&= \frac{\eta - c}{\eta} \cdot \int_0^\infty \eta \cdot e^{-(\eta - c) \cdot x}\, \lambda(dx) \\
&= \frac{\eta - c}{\eta} \cdot \frac{\eta}{\eta - c} = 1,
\end{aligned}$$

ως εκ τούτου $\gamma \in \mathcal{F}^1_{P,\ln}$. Επιπλέον,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_P\left[X_1^2 \cdot e^{\gamma(X_1)}\right] &= \mathbb{E}_P\left[X_1^2 \cdot (1 - c \cdot \mathbb{E}_P[X_1]) \cdot e^{c \cdot X_1}\right] \\
&= \int_\Omega X_1^2 \cdot (1 - c \cdot \mathbb{E}_P[X_1]) \cdot e^{c \cdot X_1}\, dP \\
&= (1 - c \cdot \mathbb{E}_P[X_1]) \cdot \int_0^\infty x^2 \cdot e^{c \cdot x}\, P_{X_1}(dx) \\
&= (1 - c \cdot \mathbb{E}_P[X_1]) \cdot \int_0^\infty x^2 \cdot e^{c \cdot x} \cdot \eta \cdot e^{-\eta \cdot x}\, \lambda(dx) \\
&= (1 - c \cdot \mathbb{E}_P[X_1]) \cdot \int_0^\infty x^2 \cdot \eta \cdot e^{-(\eta - c) \cdot x}\, \lambda(dx) \\
&= (1 - \frac{c}{\eta}) \cdot \eta \cdot \frac{2}{(\eta - c)^3} = \frac{2}{(\eta - c)^2} < \infty,
\end{aligned}$$

ως εκ τούτου $\gamma \in \mathcal{F}^2_{P,\ln}$.

Ορίζουμε την $\mathfrak{B}(D) - \mathfrak{B}(\varUpsilon)$-μετρήσιμη συνάρτηση ρ από $\rho(x) := e^{\alpha_x} \cdot \mathbb{E}_P[N_1]$. Επομένως, λόγω του Πορίσματος 4.2.10 (ii) υπάρχει ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας $Q \in \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{Exp}(\theta)}$ που είναι μιά αρχή υπολογισμού ασφαλίστρου, και ικανοποιεί τις συνθήκες (RPM) και (*) και

$$Q_{X_1}(B) = \mathbb{E}_P[\chi_{X_1^{-1}(B)} \cdot e^{\gamma(X_1)}] = \int_B (\eta - c) \cdot e^{-(\eta-c)\cdot x}\, \lambda(dx) \text{ για κάθε } B \in \mathfrak{B}(\Upsilon).$$

Το τελευταίο συνεπάγεται ότι $Q_{X_1} = \mathbf{Exp}(\eta - c)$, επομένως $Q \in \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\theta)),\mathbf{Exp}(\eta-c)}$. Άρα $\mathbb{E}_Q[X_1] = \frac{1}{\eta-c} > \frac{1}{\eta} = \mathbb{E}_P[X_1]$, και απο το Παράδειγμα 4.2.12 έχουμε ότι $\mathbb{E}_Q[N_t] \geqslant \mathbb{E}_P[N_t]$ για κάθε $t \geqslant 0$ λαμβάνουμε ότι $\mathbb{E}_P[S_t] < \mathbb{E}_Q[S_t] < \infty$ για κάθε $t > 0$.

Παράδειγμα 4.4.4. Έστω $\theta, \eta \in D := \Upsilon$, $\rho := id_D$, και έστω $P \in \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{Exp}(\theta),\mathbf{Exp}(\eta)}$ για $\ell = 1, 2$. Ας θεωρήσουμε την πραγματική συνάρτηση $\beta_\theta := \gamma + \alpha_\theta$ on Υ, με

$$\gamma(x) := \ln \frac{2c^2}{\mathbb{E}_P[X_1]} - 3\ln\left(\frac{c}{\mathbb{E}_P[X_1]} + x\right) + \frac{x}{\mathbb{E}_P[X_1]} \quad \text{για κάθε} \quad x \in \Upsilon$$

με $c > 1/\eta^2$ μιά πραγματική σταθερά. Μπορεί να δειχθεί ότι $\mathbb{E}_P[e^{\gamma(X_1)}] = 1$ και $\mathbb{E}_P[X_1^2 \cdot e^{\gamma(X_1)}] = \infty$, άρα ότι $\gamma \in \mathcal{F}^1_{P,\ln}$ αλλά $\gamma \notin \mathcal{F}^2_{P,\ln}$.

Πράγματι,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_P[e^{\gamma(X_1)}] &= \mathbb{E}_P\left[\frac{2c^2}{\mathbb{E}_P[X_1]} \cdot \left(\frac{c}{\mathbb{E}_P[X_1]} + X_1\right)^{-3} \cdot e^{\frac{X_1}{\mathbb{E}_P[X_1]}}\right] \\
&= \frac{2c^2}{\mathbb{E}_P[X_1]} \cdot \int_\Omega \left(\frac{c}{\mathbb{E}_P[X_1]} + X_1\right)^{-3} \cdot e^{\frac{X_1}{\mathbb{E}_P[X_1]}}\, dP \\
&= \frac{2c^2}{\mathbb{E}_P[X_1]} \cdot \int_0^\infty \left(\frac{c}{\mathbb{E}_P[X_1]} + x\right)^{-3} \cdot e^{\frac{x}{\mathbb{E}_P[X_1]}}\, P_{X_1}(dx) \\
&= \frac{2c^2}{\mathbb{E}_P[X_1]} \cdot \int_0^\infty \left(\frac{c}{\mathbb{E}_P[X_1]} + x\right)^{-3} \cdot e^{\frac{x}{\mathbb{E}_P[X_1]}} \cdot \eta \cdot e^{-\eta\cdot x}\, \lambda(dx) \\
&= \frac{2c^2}{\mathbb{E}_P[X_1]} \cdot \int_0^\infty \left(\frac{c}{\mathbb{E}_P[X_1]} + x\right)^{-3} \cdot e^{\frac{x}{\mathbb{E}_P[X_1]}} \cdot \frac{1}{\mathbb{E}_P[X_1]} \cdot e^{-\frac{x}{\mathbb{E}_P[X_1]}}\, \lambda(dx) \\
&= \int_0^\infty \frac{2c^2}{\mathbb{E}_P^2[X_1]} \cdot \frac{1}{(\frac{c}{\mathbb{E}_P[X_1]} + x)^3}\, \lambda(dx) = 1,
\end{aligned}$$

ως εκ τούτου $\gamma \in \mathcal{F}^1_{P,\ln}$. Επιπλέον,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_P\left[X_1^2 \cdot e^{\gamma(X_1)}\right] &= \mathbb{E}_P\left[X_1^2 \cdot \frac{2c^2}{\mathbb{E}_P[X_1]} \cdot \left(\frac{c}{\mathbb{E}_P[X_1]} + X_1\right)^{-3} \cdot e^{\frac{X_1}{\mathbb{E}_P[X_1]}}\right] \\
&= \frac{2c^2}{\mathbb{E}_P[X_1]} \cdot \int_\Omega X_1^2 \cdot \left(\frac{c}{\mathbb{E}_P[X_1]} + X_1\right)^{-3} \cdot e^{\frac{X_1}{\mathbb{E}_P[X_1]}}\, dP \\
&= \frac{2c^2}{\mathbb{E}_P[X_1]} \cdot \int_0^\infty x^2 \cdot \left(\frac{c}{\mathbb{E}_P[X_1]} + x\right)^{-3} \cdot e^{\frac{x}{\mathbb{E}_P[X_1]}}\, P_{X_1}(dx) \\
&= \frac{2c^2}{\mathbb{E}_P[X_1]} \cdot \int_0^\infty x^2 \cdot \left(\frac{c}{\mathbb{E}_P[X_1]} + x\right)^{-3} \cdot e^{\frac{x}{\mathbb{E}_P[X_1]}} \cdot \eta \cdot e^{-\eta \cdot x}\, \lambda(dx) \\
&= \frac{2c^2}{\mathbb{E}_P[X_1]} \cdot \int_0^\infty x^2 \cdot \left(\frac{c}{\mathbb{E}_P[X_1]} + x\right)^{-3} \cdot e^{\frac{x}{\mathbb{E}_P[X_1]}} \cdot \frac{1}{\mathbb{E}_P[X_1]} \cdot e^{-\frac{x}{\mathbb{E}_P[X_1]}}\, \lambda(dx) \\
&= \frac{2c^2}{\mathbb{E}_P^2[X_1]} \cdot \int_0^\infty \frac{x^2}{(\frac{c}{\mathbb{E}_P[X_1]} + x)^3}\, \lambda(dx) \\
&= \frac{2c^2}{\mathbb{E}_P^2[X_1]} \cdot \int_0^\infty x^2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(\frac{c}{\mathbb{E}_P[X_1]} + x)^2}\right)'\, \lambda(dx) \\
&= \frac{2c^2}{\mathbb{E}_P^2[X_1]} \cdot \left[-\frac{x^2}{2(\frac{c}{\mathbb{E}_P[X_1]} + x)^2}\right]_0^\infty + \frac{2c^2}{\mathbb{E}_P^2[X_1]} \cdot \int_0^\infty x \cdot \frac{1}{(\frac{c}{\mathbb{E}_P[X_1]} + x)^2}\, \lambda(dx) \\
&= \frac{2c^2}{\mathbb{E}_P^2[X_1]} \cdot \left[-\frac{x^2}{2(\frac{c}{\mathbb{E}_P[X_1]} + x)^2}\right]_0^\infty + \frac{2c^2}{\mathbb{E}_P^2[X_1]} \cdot \int_0^\infty x \cdot \left(-\frac{1}{\frac{c}{\mathbb{E}_P[X_1]} + x}\right)'\, \lambda(dx) \\
&= \frac{2c^2}{\mathbb{E}_P^2[X_1]} \cdot \left[-\frac{x^2}{2(\frac{c}{\mathbb{E}_P[X_1]} + x)^2}\right]_0^\infty + \frac{2c^2}{\mathbb{E}_P^2[X_1]} \cdot \left[-\frac{x}{\frac{c}{\mathbb{E}_P[X_1]} + x}\right]_0^\infty \\
&\quad + \frac{2c^2}{\mathbb{E}_P^2[X_1]} \cdot \int_0^\infty \frac{1}{\frac{c}{\mathbb{E}_P[X_1]} + x}\, \lambda(dx) \\
&= \frac{2c^2}{\mathbb{E}_P^2[X_1]} \cdot \left[-\frac{x^2}{2(\frac{c}{\mathbb{E}_P[X_1]} + x)^2}\right]_0^\infty + \frac{2c^2}{\mathbb{E}_P^2[X_1]} \cdot \left[-\frac{x}{\frac{c}{\mathbb{E}_P[X_1]} + x}\right]_0^\infty \\
&\quad + \frac{2c^2}{\mathbb{E}_P^2[X_1]} \cdot \left[\ln(\frac{c}{\mathbb{E}_P[X_1]} + x)\right]_0^\infty = \infty,
\end{aligned}$$

ως εκ τούτου $\gamma \notin \mathcal{F}^2_{P,\ln}$.

Εφαρμόζοντας το Πόρισμα 4.2.11 παίρνουμε ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας $Q \in \mathcal{M}^1_{S,\mathbf{Exp}(\theta)}$ που είναι μιά αρχή υπολογισμού ασφαλίστρου, και ικανοποιεί την συνθήκη (RPM) και

$$Q_{X_1}(B) = \mathbb{E}_P[\chi_{X_1^{-1}(B)} \cdot e^{\gamma(X_1)}] = \int_B \frac{2}{c\eta} \left(\frac{c\eta}{c\eta + x}\right)^3 \lambda(dx) \text{ για κάθε } B \in \mathfrak{B}(\Upsilon).$$

Το τελευταίο συνεπάγεται ότι $Q_{X_1} = \mathbf{Par}(2, c\eta)$ (βλ. π.χ. [23], σελ. 180, για τον ορισμό της Pareto κατανομής) και ως εκ τούτου $Q \in \mathcal{M}^1_{S,\mathbf{Exp}(\theta),\mathbf{Par}(2,c\eta)}$. Προφανώς, $\mathbb{E}_Q[X_1] = c\eta > \frac{1}{\eta} =$

$\mathbb{E}_P[X_1]$, συνεπάγεται μαζί με $\mathbb{E}_Q[N_t] = \mathbb{E}_P[N_t]$ ότι για κάθε $t > 0$, ότι $\mathbb{E}_P[S_t] < \mathbb{E}_Q[S_t] < \infty$ για κάθε $t > 0$.

Κεφάλαιο 5

Αλλαγή μέτρων για σύνθετες μεικτές ανανεωτικές διαδικασίες με εφαρμογές

Στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζεται μία λύση του προβλήματος (Π) για την γενοκότερη περίπτωση των *σύνθετων μεικτών ανανεωτικών διαδικασιών*.

5.1 Βασικές έννοιες και ορισμοί

Ορισμός 5.1.1. Έστω Q να είναι ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στην H. Μία οικογένεια $\{P_y\}_{y\in\Upsilon}$ μέτρων πιθανοτήτων στον Σ ονομάζεται **φυσιολογικές δεσμευμένες πιθανότητες** (regular conditional probability) (φ.δ.π. για συντομία) του P πάνω από το Q εάν

(d1) για κάθε $D \in \Sigma$ η απεικόνιση $y \longmapsto P_y(D)$ είναι H-μετρήσιμη,

(d2) $\int P_y(D)Q(dy) = P(D)$ για κάθε $D \in \Sigma$.

Εάν $f : \Omega \longrightarrow \Upsilon$ είναι μία αντίστροφη-μετρήσιμη-διατηρίσιμη συνάρτηση (δηλαδή $P(f^{-1}(B)) = Q(B)$ για κάθε $B \in H$), φ.δ.π. $\{P_y\}_{y\in\Upsilon}$ του P πάνω απο το Q ονομάζεται **συνεπής** (consistent) με f εάν, για κάθε $B \in H$, ισχύει η ισότητα $P_y(f^{-1}(B)) = 1$ για Q-σχεδόν όλα τα $y \in B$.

Παρατήρηση. Εάν η Σ είναι αριθμήσιμα παραγόμενη και το P είναι τέλειο (perfect) (βλ. [11], σελ. 291 για τον ορισμό), τότε πάντα υπάρχει μία φ.δ.π. $\{P_y\}_{y\in\Upsilon}$ του P πάνω απο το Q συμβατή με οποιαδήποτε μετρήσιμη συνάρτηση f απο Ω στο Υ, ώστε $P \circ f^{-1} = Q$, υπό την προϋπόθεση ότι η H είναι αριθμήσιμα παραγόμενη (βλ. [11], Theorems 6 και 3). Επομένως, στις περισσότερες περιπτώσεις που εμφανίζονται σε εφαρμογές (π.χ. πολωνικοί χώροι) οι φ.δ.π. όπως παραπάνω υπάρχουν πάντα.

Από εδώ και κάτω, εκτός αν ορίζεται διαφορετικά, $(\Xi, Z) := (D, \mathfrak{B}(D))$*, όπου* $D \subseteq \mathbb{R}^d$ *(*$d \in \mathbb{N}$*),* Θ *είναι μία* d*-διάστατο τυχαίο διάνυσμα στον* Ω *με τιμές στις* D*, και* $\{P_\theta\}_{\theta \in D}$ *είναι φ.δ.π. του* P *επάνω στο* P_Θ *συνεπής με το* Θ *. Τέλος, θα σημειώσουμε ότι* $\mathcal{F}^{(S,\Theta)} := \{\mathcal{F}_t^{(S,\Theta)}\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ *η διύλιση παραγόμενη απο την* $\mathcal{F}^S$ *και* $\sigma(\Theta)$*.*

5.2 Σύνθετες μεικτές ανανεωτικές διαδικασίες και προοδευτικά ισοδύναμα μέτρα

Ορισμός 5.2.1. Μία απαριθμήτρια *σ.δ.* N ονομάζεται P-**μεικτή ανανεωτική διαδικασία με παραμέτρους μείξης** Θ **και υπό συνθήκη κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων** $\mathbf{K}(\Theta)$ (mixed renewal process with mixing parameter Θ and interarrival time conditional distribution $\mathbf{K}(\Theta)$), (γράφουμε P-MRP($\mathbf{K}(\Theta)$) για συντομία), εάν η επαγόμενη διαδικασία ενδιάμεσων χρόνων W είναι P-υπό συνθήκη ανεξάρτητη και

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad [P_{W_n|\Theta} = \mathbf{K}(\Theta) \quad \mathbf{P} \restriction \sigma(\Theta)\text{-σ.β.}].$$

Ειδικότερα, εάν η κατανομή του Θ είναι εκφυλισμένη σε κάποιο σημείο $\theta_0 \in D$, τότε η απαριθμήτρια σ.δ. N γίνεται P-*ανανεωτική διαδικασία με κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων* $\mathbf{K}(\theta_0)$ (γράφουμε P-RP($\mathbf{K}(\theta_0)$) για συντομία).

Αναλόγως, μιά διαδικασία των συνολικών απαιτήσεων S που επάγεται από μία P-διαδικασία κινδύνου (N, X) τέτοια ώστε η N να είναι P-MRP($\mathbf{K}(\Theta)$) καλείται **σύνθετη μεικτή ανανεωτική διαδικασία** (P-CMRP για συντομία) **με παραμέτρους** $\mathbf{K}(\Theta)$ **και** P_{X_1}. Ειδικότερα, εάν η κατανομή του Θ είναι εκφυλισμένη στο $\theta_0 \in D$ τότε η S καλείται **σύνθετη ανανεωτική διαδικασία**, (compound renewal process) (P-CRP για συντομία) **με παραμέτρους** $\mathbf{K}(\theta_0)$ **και** P_{X_1} (P-CRP($\mathbf{K}(\theta_0), P_{X_1}$) για συντομία). Επίσης, στην ειδική περίπτωση $\mathbf{K}(\Theta) = \mathbf{Exp}(\Theta)$ η S είναι μία P-σύνθετη μεικτή διαδικασία Poisson με παράμετρο Θ.

Απο εδώ και κάτω συμβολίζουμε πάλι με $\mathbf{K}(\Theta)$ *και* $\mathbf{K}(\theta)$ *τη δευσμευμένη συνάρτηση κατανομής και τη συνάρτηση κατανομής που επάγεται απο τη δεσμευμένη* $\mathbf{K}(\Theta)$ *κατανομή πιθανότητας και την κατανομή πιθανότητας* $\mathbf{K}(\theta)$*, αντίστοιχα.*

Οι παρακάτω υποθέσεις θα είναι χρήσιμες για τις έρευνες μας.

Υποθέσεις 5.2.2. **(a1)** Το ζευγάρι (W, X) είναι P-υπό συνθήκη ανεξάρτητο,

(a2) το τυχαίο διάνυσμα Θ και η διαδικασία X είναι P-ανεξάρτητα.

Κάθε φορά που οι υποθέσεις (α1) και (α2) είναι αληθείς, θα γράφουμε ότι οι τριάδες (W, X, P), και (Θ, X, P) ικανοποιούν τις Υποθέσεις 5.2.2, ή αν δεν υπάρχει πρόβλημα σύγχυσης το P ικανοποιεί τις (a1), (a2), αντίστοιχα.

Πρόταση 5.2.3. *Εάν το P ικανοποιεί τις Υποθέσεις 5.2.2, η διαδικασία S είναι μία P-CMRP$(\mathbf{K}(\Theta), P_{X_1})$ εάν και μόνο εάν υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $M_* \in \mathfrak{B}(D)$ τέτοιο ώστε S να είναι P_θ-CRP$(\mathbf{K}(\theta), (P_\theta)_{X_1})$ για κάθε $\theta \notin M_*$.*

Απόδειξη. Έστω ότι η S είναι μία P-CMRP$(\mathbf{K}(\Theta), P_{X_1})$. Τότε το ζευγάρι (N, X) είναι μία P-διαδικασία κινδύνου και η N είναι μία P-MRP$(\mathbf{K}(\Theta))$. Σύμφωνα με τις [2], Θεώρημα 2.6, και [18], Proposition 3.8, παίρνουμε ισοδύναμα δύο P_Θ-μηδενικά σύνολα $M_1, M_2 \in \mathfrak{B}(D)$ τέτοια ώστε το ζευγάρι (N, X) να είναι μία P_θ-διαδικασία κινδύνου για κάθε $\theta \notin M_1$, και για κάθε $\theta \notin M_2$ η διαδικασία N είναι P_θ-RP$(\mathbf{K}(\theta))$. Θέτοντας $M_* := M_1 \cup M_2$ παίρνουμε ισοδύναμα οτι η S είναι P_θ-CRP$(\mathbf{K}(\theta), (P_\theta)_{X_1})$ για κάθε $\theta \notin M_*$. □

Συμβολισμοί 5.2.4. **(a)** Έστω h μία πραγματική, ένα προς ένα, $\mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρήσιμη συνάρτηση. Η κλάση όλων των πραγματικών $\mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρήσιμων συναρτήσεων γ ώστε $\mathbb{E}_P\left[h^{-1} \circ \gamma \circ X_1\right] = 1$ θα συμβολίζεται με $\mathcal{F}^1_{P,h} := \mathcal{F}^1_{P,X_1,h}$. Η κλάση όλων των συναρτήσεων $\gamma \in \mathcal{F}^1_{P,h}$ που ικανοποιούν τη συνθήκη $\mathbb{E}_P\left[X_1^2 \cdot (h^{-1} \circ \gamma \circ X_1)\right] < \infty$ θα συμβολίζεται με $\mathcal{F}^2_{P,h} := \mathcal{F}^2_{P,X_1,h}$.

(b) Έστω ρ $\mathfrak{B}(D)$-$\mathfrak{B}_k$-μετρήσιμη συνάρτηση ($k \in \mathbb{N}$). Η κλάση όλων των μέτρων πιθανοτήτων Q πάνω στη Σ που ικανοποιούν τις Υποθέσεις 5.2.2 και έτσι ώστε $Q \overset{pr}{\sim} P$ και η S να είναι Q-CMRP με παραμέτρους $\mathbf{K}(\rho(\Theta))$ και Q_{X_1} θα συμβολίζεται με $\mathcal{M}^1_{S,\mathbf{K}(\rho(\Theta))}$. Επιπλέον, η κλάση όλων των μέτρων πιθανοτήτων $Q \in \mathcal{M}^1_{S,\mathbf{K}(\rho(\Theta))}$ τέτοια ώστε $\mathbb{E}_Q[X_1^2] < \infty$ θα συμβολίζεται με $\mathcal{M}^2_{S,\mathbf{K}(\rho(\Theta))}$. Στην ειδική περίπτωση $d = k$ και $\rho := id_D$ γράφουμε $\mathcal{M}^\ell_{S,\mathbf{K}(\Theta)} := \mathcal{M}^\ell_{S,\mathbf{K}(\rho(\Theta))}$ για $\ell = 1, 2$, για απλοποίηση.

Απο εδώ και κάτω, εκτός και αν αναφέρουμε κάτι διαφορετικό, οι συναρτήσεις h, ρ είναι όπως στον Συμβολισμό 5.2.4, και το $P \in \mathcal{M}^\ell_{S,\mathbf{K}(\theta)}$ για $\ell = 1, 2$ είναι το αρχικό μέτρο πιθανότητας κάτω απο το οποίο η S είναι CMRP με παραμέτρους $\mathbf{K}(\Theta)$ και P_{X_1}.

Για δοσμένη διαδικασία των συνολικών απαιτήσεων S επάνω στον (Ω, Σ), για να διερευνήσουμε την ύπαρξη οτων προοδευτικών ισοδύναμων martingale μέτρων(βλ. Ενότητα 5.4), θα πρέπει να μπορούμε να χαρακτηρίσουμε τις Radon-Nikodým παραγώγους dQ/dP. Γι'αυτό τον σκοπό θυμίζουμε την παρακάτω έννοια.

Έστω $\mathcal{Z} := \{\mathcal{Z}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ μία διύληση για τον μ.χ. (Ω, Σ). Λέμε ότι η οικογένεια $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ των πραγματικών $\mathcal{Z}_t$-μετρήσιμων P-ολοκληρώσιμων συναρτήσεων Z_t $(t \geqslant 0)$ επάνω στον Ω είναι $(P, \mathcal{Z})$-**martingale** εάν για οποιαδήποτε $s \leqslant t$ ισχύει η συνθήκη $\int_A Z_s \, dP = \int_A Z_t \, dP$ για όλα τα $A \in \mathcal{Z}_s$. Ένα $(P, \mathcal{Z})$-martingale $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ είναι P-σ.β. θετικό εάν η Z_t είναι P-σ.β. θετική για κάθε $t \geqslant 0$.

Πρόταση 5.2.5. *Έστω $Q \in \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{\Lambda}(\rho(\Theta))}$ για $\ell = 1, 2$, και έστω $\{Q_\theta\}_{\theta\in D}$ είναι μία φ.δ.π. του Q επάνω στο Q_Θ συνεπής με το Θ . Τότε τα ακόλουθα είναι όλα ισοδύναμα:*

(i) $Q \overset{pr}{\sim} P$,

(ii) $Q_{X_1} \sim P_{X_1}$, $Q_{W_1} \sim P_{W_1}$ *και* $Q_\Theta \sim P_\Theta$,

(iii) υπάρχει μία P_{X_1}-σ.β. μοναδική συνάρτηση $\gamma \in \mathcal{F}^{\ell}_{P,h}$ και μία P_Θ-σ.β. μοναδική θετική Radon-Nikodým παράγωγος ξ του Q_Θ ως προς το P_Θ που ικανοποιεί μαζί με την γ την συνθήκη

$$Q(A) = \int_A M_t^{(\gamma)}(\Theta)\, dP \quad \text{για κάθε } 0 \leqslant u \leqslant t \text{ και } A \in \mathcal{F}_u^{(S,\Theta)}, \qquad (RRM_\xi)$$

με

$$M_t^{(\gamma)}(\Theta) := \xi(\Theta)\widetilde{M}_t^{(\gamma)}(\Theta),$$

όπου $\xi \in \mathcal{L}^1(P_\Theta)$ είναι μία Radon-Nikodým παράγωγος του Q_Θ ως προς το P_Θ και

$$\widetilde{M}_t^{(\gamma)}(\Theta) := \left[\prod_{j=1}^{N_t} (h^{-1}\circ\gamma)(X_j)\cdot\frac{[\mathbf{\Lambda}(\rho(\Theta))]'(W_j)}{[\mathbf{K}(\Theta)]'(W_j)}\right]\cdot\frac{1-\mathbf{\Lambda}(\rho(\Theta))(t-T_{N_t})}{1-\mathbf{K}(\Theta)(t-T_{N_t})},$$

και $\{M_t^{(\gamma)}(\Theta)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι P-σ.β. θετικό $(P, \mathcal{F}^{(S,\Theta)})$-martingale που ικανοποιεί την συνθήκη $\mathbb{E}_P[M_t^{(\gamma)}(\Theta)] = 1$ για όλα τα $t \geqslant 0$.

Απόδειξη. Έστω οποιοδήποτε $t \geqslant 0$.

$(i) \Longrightarrow (ii)$: Σημειώνουμε ότι αφού $\mathcal{F}_t^S \subseteq \mathcal{F}_t^{(S,\Theta)}$ η συνθήκη $Q_{X_1} \sim P_{X_1}$ προκύπτει άμεσα απο την [10], Lemma 2.1, ενώ η συνθήκη $Q_{W_1} \sim P_{W_1}$ προκύπτει απο την Πρόταση 4.1.8. Επιπλέον, αφού $\sigma(\Theta) \subseteq \mathcal{F}_t^{(S,\Theta)}$ και $Q \overset{pr}{\sim} P$ λαμβάνουμε εύκολα ότι $Q_\Theta \sim P_\Theta$.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$: **(a)** Για $\ell = 1, 2$ υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $L_0 \in \mathfrak{B}(D)$ τέτοιο ώστε $P_\theta \in \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{K}(\theta)}$ και $Q_\theta \in \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))}$ για κάθε $\theta \notin L_0$.

Έστω ότι $\ell = 1$. Σύμφωνα με το Λήμμα 5.2.3 υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $M_* \in \mathfrak{B}(D)$ τέτοιο ώστε η S να είναι P_θ-CRP με παραμέτρους $\mathbf{K}(\theta)$ και $(P_\theta)_{X_1}$ για κάθε $\theta \notin M_*$, άρα $P_\theta \in \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{K}(\theta)}$ για κάθε $\theta \notin M_*$, αφού η συνθήκη $P_\theta \overset{pr}{\sim} P_\theta$ για την $\mathcal{F}_t^S$ είναι προφανής. Αφού η S είναι Q-CMRP με παραμέτρους $\mathbf{\Lambda}(\rho(\Theta))$ και Q_{X_1} εφαρμόζοντας πάλι το Λήμμα 5.2.3 παίρνουμε ένα Q_Θ-μηδενικό σύνολο $\widetilde{M}_* \in \mathfrak{B}(D)$ τέτοιο ώστε η S να είναι Q_θ-CRP με παραμέτρους $\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))$ και $(Q_\theta)_{X_1}$ για κάθε $\theta \notin \widetilde{M}_*$. Θέτουμε $M := M_* \cup \widetilde{M}_*$. Θα πρέπει να δείξουμε ότι $Q_\theta \overset{pr}{\sim} P_\theta$ για την $\mathcal{F}_t^S$ για κάθε $\theta \notin M$. Γι'αυτό τον σκοπό, έστω $A \in \mathcal{F}_t^S \subseteq \mathcal{F}_t^{(S,\Theta)}$ τέτοιο ώστε $P_\theta(A) = 0$. Αφού η $\{P_\theta\}_{\theta\in D}$ είναι μία φ.δ.π. του P επάνω στο P_Θ συνεπής με το Θ συμπεραίνουμε ότι $P(A \cap \Theta^{-1}(D)) = 0$, άρα $Q(A \cap \Theta^{-1}(D)) = 0$, αφού το $Q \overset{pr}{\sim} P$ για την $\mathcal{F}_t^{(S,\Theta)}$. Από το τελευταίο προκύπτει

$$Q(A \cap \Theta^{-1}(D)) = 0 = \int_D Q_\theta(A)\, Q_\Theta(d\theta),$$

επομένως υπάρχει ένα Q_Θ-μηδενικό σύνολο $\widetilde{V} \in \mathfrak{B}(D)$ τέτοιο ώστε $Q_\theta(A) = 0$ για κάθε $\theta \notin \widetilde{V}$. Έστω τώρα $\widetilde{A} \in \mathcal{F}_t^S \subseteq \mathcal{F}_t^{(S,\Theta)}$ τέτοιο ώστε $Q_\theta(\widetilde{A}) = 0$. Εφαρμόζοντας παρόμοια επιχειρήματα όπως απο πάνω παίρνουμε ότι P_Θ-μηδενικό σύνολο $V \in \mathfrak{B}(D)$ τέτοιο ώστε $P_\theta(\widetilde{A}) = 0$ για κάθε $\theta \notin V$. Έστω $\widetilde{L}_0 := M \cup V \cup \widetilde{V} \in \mathfrak{B}(D)$. Αλλά αφού $Q_\Theta \sim P_\Theta$, παίρνουμε ότι $\widetilde{L}_0$ είναι P_Θ-μηδενικό σύνολο, άρα $P_\theta \in \mathcal{M}^1_{S,\mathbf{K}(\theta),(P_\theta)X_1)}$ και $Q_\theta \in \mathcal{M}^1_{S,\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta)),(Q_\theta)X_1)}$ για κάθε $\theta \notin \widetilde{L}_0$.

Υποθέτουμε ότι $\ell = 2$. Αφού $\mathcal{M}^2_{S,\mathbf{K}(\Theta),P_{X_1}} \subseteq \mathcal{M}^1_{S,\mathbf{K}(\Theta),P_{X_1}}$, πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο V_1 τέτοιο ώστε $\mathbb{E}_{P_\theta}[X_1] < \infty$.

Πράγματι,

$$\int_D \mathbb{E}_{P_\theta}[X_1^2]\, P_\Theta(d\theta) = \mathbb{E}_P[X_1^2] < \infty,$$

όπου η ισότητα προκύπτει απο την [17], Lemma 2.5, και η ανισότητα προκύπτει απο την υπόθεση ότι $P \in \mathcal{M}^2_{S,\mathbf{K}(\Theta),P_{X_1}}$. Από το τελευταίο προκύπτει ότι υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $V_1 \in \mathfrak{B}(D)$ τέτοιο ώστε $\mathbb{E}_{P_\theta}[X_1^2] < \infty$ για κάθε $\theta \notin V_1$. Αντικαθιστώντας το P με Q προκύπτει ότι υπάρχει ένα Q_Θ-μηδενικό σύνολο $\widetilde{V}_1 \in \mathfrak{B}(D)$ τέτοιο ώστε $\mathbb{E}_{Q_\theta}[X_1^2] < \infty$ για κάθε $\theta \notin \widetilde{V}_1$.

Θέτουμε $L_0 := \widetilde{L}_0 \cup V_1 \cup \widetilde{V}_1 \in \mathfrak{B}(D)$. Αλλά αφού $Q_\Theta \sim P_\Theta$ παίρνουμε ότι το L_0 είναι ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο αποδεικνύοντας έτσι το (a).

(b) Υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $L_1 \in \mathfrak{B}(D)$ τέτοιο ώστε $P_{X_1} = (P_\theta)_{X_1}$, $Q_{X_1} = (Q_\theta)_{X_1}$ και $(Q_\theta)_{X_1} \sim (P_\theta)_{X_1}$ για κάθε $\theta \notin L_1$.

Πράγματι, για κάθε $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ και $E \in \mathfrak{B}(D)$ παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_E P_\theta(X_1^{-1}(B))\, P_\Theta(d\theta) &= \int_{\Theta^{-1}(E)} P(X_1^{-1}(B) \mid \Theta)\, dP \\ &= \int_{\Theta^{-1}(E)} P(X_1^{-1}(B))\, dP \\ &= \int_E P(X_1^{-1}(B))\, P_\Theta(d\theta),\end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα προκύπτει απο την [17], Lemma 3.5 (ii), και η δεύτερη προκύπτει απο τον Υπόθεση (a2). Ως εκ τούτου υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $L_B \in \mathfrak{B}(D)$ τέτοιο ώστε $P_{X_1}(B) = (P_\theta)_{X_1}(B)$ για κάθε $\theta \notin L_B$. Αφού η $\mathfrak{B}(D)$ είναι αριθμήσιμα παραγόμενη, εφαρμόζοντας ένα επιχείρημα της μονότονης κλάσης μπορούμε να βρούμε ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $L_* \in \mathfrak{B}(D)$ τέτοιο ώστε $P_{X_1} = (P_\theta)_{X_1}$ για κάθε $\theta \notin L_*$.

Πράγματι, έστω $\mathcal{G} := \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ ένας γεννήτορας του $\mathfrak{B}(\Upsilon)$, ο οποίος είναι κλειστός ως προς τις πεπερασμένες τομές. Τότε παίρνουμε ότι για κάθε $B_n \in \mathcal{G}$ υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $\widetilde{L}_n \in \mathfrak{B}(D)$ τέτοιο ώστε $P_{X_1}(B_n) = (P_\theta)_{X_1}(B_n)$ για κάθε $\theta \notin L_n$. Θέτουμε $L_* := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n$. Τότε το L_* είναι ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο στη $\mathfrak{B}(D)$. Για αυθαίρετο αλλά σταθερό $\theta \notin L_*$, ορίζουμε την οικογένεια

$$\mathcal{D}_\theta := \{B \in \mathfrak{B}(\Upsilon) : P_{X_1}(B) = (P_\theta)_{X_1}(B)\}.$$

Η οικογένεια $\mathcal{D}_\theta$ είναι μία κλάση Dynkin.

Πράγματι,

(Dyn1) $\varnothing \in \mathcal{D}_\theta$ αφού $P_{X_1}(\varnothing) = 0 = (P_\theta)_{X_1}(\varnothing)$.

(Dyn2) Για κάθε $B \in \mathcal{D}_\theta$ έχουμε ότι $\Upsilon \backslash B \in \mathcal{D}_\theta$.

Πράγματι, σημειώνουμε ότι $\Upsilon \in \mathcal{D}_\theta$ αφού $Q_{X_1}(\Upsilon) = 1 = (Q_\theta)_{X_1}(\Upsilon)$. Έστω τώρα B ένα σύνολο στο $\mathcal{D}_\theta$. Τότε παίρνουμε ότι

$$(P_\theta)_{X_1}(\Upsilon \backslash B) = 1 - (P_\theta)_{X_1}(B) = 1 - P_{X_1}(B) = P_{X_1}(\Upsilon \backslash B),$$

άρα $\Upsilon \backslash B \in \mathcal{D}_\theta$.

(Dyn3) Για κάθε ακολουθία $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία ανα δύο ξένων συνόλων στην $\mathcal{D}_\theta$ έχουμε ότι $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{D}_\theta$.

Πράγματι, έστω $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία ανά δύο ξένων συνόλων στην $\mathcal{D}_\theta$. Τότε

$$(P_\theta)_{X_1}(\biguplus_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (P_\theta)_{X_1}(B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P_{X_1}(B_n) = P_{X_1}(\biguplus_{n\in\mathbb{N}} B_n),$$

άρα $\biguplus_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{D}_\theta$.

Έτσι η $\mathcal{D}_\theta$ είναι μία κλάση Dynkin. Επιπλέον, αφού $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{D}_\theta$ και η οικογένεια $\mathcal{G}$ είναι κλειστή κάτω απο τις πεπερασμένες τομές, από το Θεώρημα της Μονότονης κλάσης (βλ. Θεώρημα A.2.4) προκύπτει ότι $\mathfrak{B}(\Upsilon) \subseteq \sigma(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{D}_\theta \subseteq \mathfrak{B}(\Upsilon)$, άρα $\mathcal{D}_\theta = \mathfrak{B}(\Upsilon)$.

Εφαρμόζοντας παρόμοιους υπολογισμούς, μπορούμε να αποδείξουμε ότι υπάρχει ένα Q_Θ-μηδενικό σύνολο $\widetilde{L}_* \in \mathfrak{B}(D)$ τέτοιο ώστε $Q_{X_1} = (Q_\theta)_{X_1}$ για κάθε $\theta \notin \widetilde{L}_*$. Αλλά αφού $Q_\Theta \sim P_\Theta$ παίρνουμε ότι το $\widetilde{L}_*$ είναι επίσης ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο, συμπεραίνοντας ότι το σύνολο $L_1 := L_* \cup \widetilde{L}_*$ είναι ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο. Αφού $Q_{X_1} \sim P_{X_1}$ παίρνουμε άμεσα ότι $(Q_\theta)_{X_1} \sim (P_\theta)_{X_1}$ για κάθε $\theta \notin L_1$.

Πράγματι, έστω $\theta \notin L_1$ και έστω $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ με $(P_\theta)_{X_1}(B) = 0$. Τότε

$$0 = (P_\theta)_{X_1}(B) = P_{X_1}(B) = Q_{X_1}(B) = (Q_\theta)_{X_1}(B).$$

Αντικαθιστώντας το P_θ με Q_θ οδηγούμαστε στο $(Q_\theta)_{X_1} \sim (P_\theta)_{X_1}$ για κάθε $\theta \notin L_1$.

(c) Υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $L_2 \in \mathfrak{B}(D)$ τέτοιο ώστε $(Q_\theta)_{W_1} \sim (P_\theta)_{W_1}$ για κάθε $\theta \notin L_2$.

Πράγματι, θεωρούμε ότι υπάρχει ένα σύνολο $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε $(P_\theta)_{W_1}(B) = 0$. Αφού $\{P_\theta\}_{\theta \in D}$ είναι μία φ.δ.π. του P επάνω στο P_Θ συνεπής με το Θ παίρνουμε ότι $P(W_1^{-1}(B) \cap \Theta^{-1}(D)) = 0$, άρα $Q(W_1^{-1}(B) \cap \Theta^{-1}(D)) = 0$. Το τελευταίο συνεπάγεται ότι

$$Q(W_1^{-1}(B) \cap \Theta^{-1}(D)) = 0 = \int_D Q_\theta(W_1^{-1}(B))\, Q_\Theta(d\theta),$$

επομένως υπάρχει ένα Q_Θ-μηδενικό σύνολο $\widetilde{L}_{**} \in \mathfrak{B}(D)$ τέτοιο ώστε $(Q_\theta)_{W_1}(B) = 0$ για κάθε $\theta \notin \widetilde{L}_{**}$. Ας υποθέσουμε τώρα την ύπαρξη ενός συνόλου $\widetilde{B} \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ τέτοιο ώστε $(Q_\theta)_{W_1}(\widetilde{B}) = 0$. Εφαρμόζοντας παρόμοια επιχειρήματα όπως παραπάνω, παίρνουμε ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $L_{**} \in \mathfrak{B}(D)$ τέτοιο ώστε $(P_\theta)_{W_1}(\widetilde{B}) = 0$ για κάθε $\theta \notin L_{**}$. Αφού $Q_\Theta \sim P_\Theta$ θέτοντας $L_2 := L_{**} \cup \widetilde{L}_{**} \in \mathfrak{B}(D)$ λαμβάνουμε το επιθυμητό μηδενικό σύνολο.

(d) Υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $U \in \mathfrak{B}(D)$ ώστε για κάθε $\theta \notin U$ να υπάρχει μία P_{X_1}-σ.β. μοναδική συνάρτηση $\gamma_\theta \in \mathcal{F}^\ell_{P_\theta,h}$ που ικανοποιεί την

$$Q_\theta(A) = \int_A \widetilde{M}_t^{(\gamma_\theta)}(\theta)\, dP_\theta \quad \text{για όλα τα } u \in [0,t] \text{ και } A \in \mathcal{F}^S_u, \tag{M_θ}$$

όπου

$$\widetilde{M}_t^{(\gamma_\theta)}(\theta) := \left[\prod_{j=1}^{N_t} (h^{-1} \circ \gamma_\theta)(X_j) \cdot \frac{[\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))]'(W_j)}{[\mathbf{K}(\theta)]'(W_j)}\right] \cdot \frac{1 - \mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))(t - T_{N_t})}{1 - \mathbf{K}(\theta)(t - T_{N_t})},$$

και $\{\widetilde{M}_t^{(\gamma_\theta)}(\theta)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ είναι P_θ-σ.β. θετικό $(P_\theta, \mathcal{F}^S)$-martingale που ικανοποιεί την συνθήκη $\mathbb{E}_{P_\theta}[\widetilde{M}_t^{(\gamma_\theta)}(\theta)] = 1$.

Πράγματι, απο τα (a), (b) και (c) υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $U := L_0 \cup L_1 \cup L_2 \in \mathfrak{B}(D)$ ώστε $P_\theta \in \mathcal{M}^\ell_{S,\mathbf{K}(\theta),(P_\theta)X_1}$, $Q_\theta \in \mathcal{M}^\ell_{S,\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta)),(Q_\theta)X_1}$ και $(Q_\theta)_{X_1} \sim (P_\theta)_{X_1}$. Επομένως σύμφωνα με την Πρόταση 4.1.8 για κάθε $\theta \notin U$ υπάρχει μία P_{X_1}-σ.β. μοναδική συνάρτηση $\gamma_\theta \in \mathcal{F}^l_{P_\theta,h}$ που ικανοποιεί την (M_θ).

(e) Για κάθε $\theta \notin U$ η συνάρτηση γ_θ είναι ανεξάρτητη του θ.

Πράγματι, έστω $\theta \notin U$ και έστω γ_θ είναι όπως στο (d). Σύμφωνα με την Πρόταση 4.1.8, $\gamma_\theta = h \circ f_\theta$, όπου f_θ είναι μία Radon-Nikodým παράγωγος του $(Q_\theta)_{X_1}$ ως προς το $(P_\theta)_{X_1}$. Αλλά σύμφωνα με το (b) έχουμε ότι $(P_\theta)_{X_1} = P_{X_1}$ και $(Q_\theta)_{X_1} = Q_{X_1}$ για κάθε $\theta \notin U$, άρα η f_θ είναι ανεξάρτητη του θ, επομένως η γ_θ είναι ανεξάρτητη του θ. Θα συμβολίζουμε την γ_θ με γ και την f_θ με f για κάθε $\theta \notin U$.

(f) Για όλα τα $u \in [0,t]$ και $A \in \mathcal{F}^{(S,\Theta)}_u$ ισχύει η συνθήκη (RRM_ξ).

Αρχικά, πρέπει να δείξουμε την συνθήκη (RRM_ξ) για τους γεννήτορες του $\mathcal{F}^{(S,\Theta)}$.

Πράγματι, για κάθε $u \in [0,t]$ έστω $A \in \mathcal{F}^S_u$. Θέτουμε $\mu := P \circ (id_\Omega, \Theta)^{-1} : \Sigma \otimes \mathfrak{B}(D) \longmapsto [0,1]$ και ορίζουμε την απεικόνιση $v : \Omega \times D \longmapsto \mathbb{R}$ μέσω του τύπου

$$v(\omega,\theta) := \chi_A(\omega) \cdot (\widetilde{M}^{\gamma}_t(\theta))(\omega) \cdot \xi(\theta) \text{ για κάθε ζεύγος } (\omega,\theta) \in \Omega \times D,$$

όπου,

$$(\widetilde{M}^{(\gamma)}_t(\theta))(\omega) :=$$
$$\left(\left[\prod_{j=1}^{N_t(\bullet)} (h^{-1} \circ \gamma \circ X_j)(\bullet) \cdot \frac{[\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))]'(W_j(\bullet))}{[\mathbf{K}(\theta)]'(W_j(\bullet))} \right] \cdot \frac{1 - \mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))(t - T_{N_t(\bullet)}(\bullet))}{1 - \mathbf{K}(\theta)(t - T_{N_t(\bullet)}(\bullet))} \right)(\omega).$$

Τότε

$$(v \circ (id_\Omega, \Theta))(\omega) = v(\omega, \Theta(\omega)) = \chi_A(\omega) \cdot \left(\widetilde{M}^{(\gamma)}_t(\Theta(\omega))\right)(\omega) \cdot \xi(\Theta(\omega)),$$

όπου,

$$\widetilde{M}^{(\gamma)}_t(\Theta)(\omega) := \left(\widetilde{M}^{(\gamma)}_t(\Theta(\omega))\right)(\omega)$$
$$:= \left(\left[\prod_{j=1}^{N_t(\bullet)} (h^{-1} \circ \gamma \circ X_j)(\bullet) \cdot \frac{[\mathbf{\Lambda}(\rho(\Theta(\bullet)))]'(W_j(\bullet))}{[\mathbf{K}(\Theta(\bullet))]'(W_j(\bullet))} \right] \cdot \frac{1 - \mathbf{\Lambda}(\rho(\Theta(\bullet)))(t - T_{N_t(\bullet)}(\bullet))}{1 - \mathbf{K}(\Theta(\bullet))(t - T_{N_t(\bullet)}(\bullet))} \right)(\omega).$$

Αρχικά, θα δείξουμε ότι $v \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Αφού η $\{P_\theta\}_{\theta \in D}$ είναι φ.δ.π. του P επάνω στο P_Θ συνεπής με το Θ , εφαρμόζοντας την [17], Proposition 2.7, παίρνουμε ότι η $\{P_\theta\}_{\theta \in D}$ είναι μία φ.δ.π.-γινόμενο επάνω στη Σ για μ ως προς το P_Θ. Επομένως,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega \times D} v\, d\mu &= \int_D \int_\Omega v^\theta\, dP_\theta\, P_\Theta(d\theta) = \int_D \int_\Omega \chi_A \cdot \widetilde{M}^{(\gamma)}_t(\theta) \cdot \xi(\theta)\, dP_\theta\, P_\Theta(d\theta) \\
&= \int_D \mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_A \cdot \widetilde{M}^{(\gamma)}_t(\theta)] \cdot \xi(\theta)\, P_\Theta(d\theta) = \int_D \mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_A \cdot \widetilde{M}^{(\gamma)}_t(\theta)]\, Q_\Theta(d\theta) \\
&\leqslant \int_D \mathbb{E}_{P_\theta}[\widetilde{M}^{(\gamma)}_t(\theta)]\, Q_\Theta(d\theta) = \int_D Q_\Theta(d\theta) = 1,
\end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα προκύπτει απο την [17], Remarks 2.4 (c), και η προτελευταία ισότητα προκύπτει απο το (d). Επομένως, εφαρμόζοντας την [17], Propotion 3.8 (ii), για την v στην θέση της u και για $g := v \circ (id_\Omega, \Theta)$ παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
Q(A) &= \int Q_\theta(A)\, Q_\Theta(d\theta) = \int \int \chi_A \cdot \widetilde{M}^{(\gamma)}_t(\theta)\, dP_\theta\, Q_\Theta(d\theta) \\
&= \int \mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_A \cdot \widetilde{M}^{(\gamma)}_t(\theta)] \cdot \xi(\theta)\, P_\Theta(d\theta) = \int_A \xi(\Theta) \cdot \widetilde{M}^{(\gamma)}_t(\Theta)\, dP,
\end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει απο το (d).

Συνεπώς ισχύει η συνθήκη (RRM_ξ) ισχύει για κάθε $u \in [0,t]$ και $A \in \mathcal{F}_u^S$.

Έστω τώρα $E \in \sigma(\Theta)$. Τότε, υπάρχει ένα σύνολο $B \in \mathfrak{B}(D)$ τέτοιο ώστε $E := \Theta^{-1}(B)$ και

$$\begin{aligned} Q(E) &= Q(\Theta^{-1}(B)) = Q_\Theta(B) = \int_B \xi(\theta)\, P_\Theta(d\theta) \\ &= \int_E \xi(\Theta) \cdot \widetilde{M}_0^{(\gamma)}(\Theta)\, dP, \end{aligned}$$

δηλαδή ισχύει η συνθήκη (RRM_ξ) επάνω στη $\sigma(\Theta)$.

Για οποιοδήποτε $u \in [0,t]$ θεωρούμε τις οικογένειες των συνόλων

$$\mathcal{D}_u := \{A \in \mathcal{F}_u^{(S,\Theta)} : Q(A) = \int_A M_t^{(\gamma)}(\Theta)\, dP\}$$

και

$$\mathcal{G}_u := \{\bigcap_{k=1}^m A_k : A_k \in \mathcal{F}_u^S \cup \sigma(\Theta),\, m \in \mathbb{N}\}.$$

Ισχυρισμός 1. Ισχύει ο εγκλεισμός $\mathcal{G}_u \subseteq \mathcal{D}_u$.

Απόδειξη. Πράγματι, έστω το $G \in \mathcal{G}_u$. Τότε υπάρχει ένα $m \in \mathbb{N}$ και μία πεπερασμένη ακολουθία $\{A_k\}_{k\in\{1,\ldots,m\}}$ στην $\mathcal{F}_u^S \cup \sigma(\Theta)$ έτσι ώστε $G = \bigcap_{k=1}^m A_k$. Θέτοντας

$$I_\Theta := \{k \in \{1,\ldots,m\} : A_k \in \sigma(\Theta)\} \quad \text{και} \quad I_H := \{k \in \{1,\ldots,m\} : A_k \in \mathcal{F}_u^S \setminus \sigma(\Theta)\}$$

παίρνουμε $I_\Theta \cup I_H = \{1,\ldots,m\}$, $\bigcap_{k\in I_\Theta} A_k \in \sigma(\Theta)$ και $\bigcap_{k\in I_H} A_k \in \mathcal{F}_u^S$. Ορίζουμε την απεικόνιση $\widetilde{v} : \Omega \times D \longmapsto \mathbb{R}$ ώστε

$$\widetilde{v}(\omega,\theta) := \chi_{\bigcap_{k\in I_H} A_k}(\omega) \cdot (\widetilde{M}_t^\gamma(\theta))(\omega) \cdot \xi(\theta) \text{ για κάθε ζεύγος } (\omega,\theta) \in \Omega \times D.$$

Τότε,

$$(\widetilde{v} \circ (id_\Omega, \Theta))(\omega) = \widetilde{v}(\omega, \Theta(\omega)) = \chi_{\bigcap_{k\in I_H} A_k}(\omega) \cdot \left(\widetilde{M}_t^{(\gamma)}(\Theta(\omega))\right)(\omega) \cdot \xi(\Theta(\omega)).$$

Αρχικά, θα δείξουμε ότι $\widetilde{v} \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Αφού η $\{P_\theta\}_{\theta\in D}$ είναι μία φ.δ.π. του P επάνω στο P_Θ συνεπής με το Θ, εφαρμόζοντας την [17], Proposition 2.7, παίρνουμε ότι η $\{P_\theta\}_{\theta\in D}$ είναι φ.δ.π.-γινόμενο επάνω στη Σ για το μ ως προς το P_Θ. Επομένως,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega\times D} \widetilde{v}\, d\mu &= \int_D \int_\Omega \widetilde{v}^\theta\, dP_\theta\, P_\Theta(d\theta) = \int_D \int_\Omega \chi_{\bigcap_{k\in I_H} A_k} \cdot \widetilde{M}_t^{(\gamma)}(\theta) \cdot \xi(\theta)\, dP_\theta\, P_\Theta(d\theta) \\ &= \int_D \mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_{\bigcap_{k\in I_H} A_k} \cdot \widetilde{M}_t^{(\gamma)}(\theta)] \cdot \xi(\theta)\, P_\Theta(d\theta) \\ &= \int_D \mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_{\bigcap_{k\in I_H} A_k} \cdot \widetilde{M}_t^{(\gamma)}(\theta)]\, Q_\Theta(d\theta) \\ &\leqslant \int_D \mathbb{E}_{P_\theta}[\widetilde{M}_t^{(\gamma)}(\theta)]\, Q_\Theta(d\theta) = \int_D Q_\Theta(d\theta) = 1, \end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα προκύπτει απο την [17], Remarks 2.4 (c), και η προτελευταία ισότητα από το (d). Ώς εκ τούτου $\widetilde{v} \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Αφού $\bigcap_{k\in I_\Theta} A_k \in \sigma(\Theta)$, υπάρχει ένα σύνολο $F \in \mathfrak{B}(D)$ τέτοιο ώστε $\bigcap_{k\in I_\Theta} A_k = \Theta^{-1}(F)$. Άρα

$$
\begin{aligned}
Q(G) &= Q\big((\bigcap_{k\in I_\Theta} A_k) \cap (\bigcap_{k\in I_H} A_k)\big) = Q\big(\Theta^{-1}(F) \cap (\bigcap_{k\in I_H} A_k)\big) \\
&= \int_F Q_\theta(\bigcap_{k\in I_H} A_k)\, Q_\Theta(d\theta) = \int_F \int_{\bigcap_{k\in I_H} A_k} \widetilde{M}_t^{(\gamma)}(\theta)\, dP_\theta\, Q_\Theta(d\theta) \\
&= \int_F \mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_{\bigcap_{k\in I_H} A_k} \cdot \widetilde{M}_t^{(\gamma)}(\theta)] \cdot \xi(\theta)\, P_\Theta(d\theta) \\
&= \int_{\Theta^{-1}(F)} \chi_{\bigcap_{k\in I_H} A_k} \cdot \widetilde{M}_t^{(\gamma)}(\Theta) \cdot \xi(\Theta)\, dP \\
&= \int_G \xi(\Theta) \cdot \widetilde{M}_t^{(\gamma)}(\Theta)\, dP \\
&= \int_G M_t^{(\gamma)}(\Theta) dP,
\end{aligned}
$$

όπου η τέταρτη ισότητα προκύπτει απο το (d) αφού $\bigcap_{k\in I_H} A_k \in \mathcal{F}_u^S$, ενώ η έκτη προκύπτει απο την [17], Proposition 3.8 (ii), για $\widetilde{v}$ στην θέση της u και $g := \widetilde{v} \circ (id_\Omega \times \Theta)$. Ως εκ τούτου $G \in \mathcal{D}_u$. □

Ισχυρισμός 2. Η οικογένεια $\mathcal{D}_u$ είναι μία Dynkin κλάση.

Απόδειξη. Πράγματι,

(Dyn1) Προφανώς $\varnothing \in \mathcal{D}_u$ αφού $\varnothing \in \mathcal{F}_u^S \subseteq \mathcal{F}_u^{(S,\Theta)}$.

(Dyn2) Για κάθε $A \in \mathcal{D}_u$ έχουμε ότι $A^c \in \mathcal{D}_u$.

Πράγματι, αρχικά σημειώνουμε ότι $\Omega \in \mathcal{D}_u$ αφού $\Omega \in \mathcal{F}_u^S \subseteq \mathcal{F}_u^{(S,\Theta)}$. Επομένως

$$
\begin{aligned}
Q(\Omega\backslash A) &= Q(\Omega) - Q(A) = \int_\Omega M_t^{(\gamma)}(\Theta)\, dP - \int_A M_t^{(\gamma)}(\Theta)\, dP \\
&= \int (\chi_\Omega - \chi_A) \cdot M_t^{(\gamma)}(\Theta)\, dP = \int_{\Omega\backslash A} M_t^{(\gamma)}(\Theta)\, dP.
\end{aligned}
$$

(Dyn3) Για κάθε ακολουθία $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ανά δύο ξένων μεταξύ τους συνόλων στην $\mathcal{D}_u$ έχουμε ότι $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{D}_u$.

Πράγματι,

$$
\begin{aligned}
Q(\biguplus_{n\in\mathbb{N}} A_n) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} Q(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{A_n} M_t^{(\gamma)}(\Theta)\, dP \\
&= \int \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{A_n} \cdot M_t^{(\gamma)}(\Theta)\, dP \\
&= \int_{\biguplus_{n\in\mathbb{N}} A_n} M_t^{(\gamma)}(\Theta)\, dP.
\end{aligned}
$$

Επομένως λαμβάνοντας υπόψη τις (Dyn1), (Dyn2) και (Dyn3) συμπεραίνουμε ότι η $\mathcal{D}_u$ είναι κλάση Dynkin. □

Άρα, αφού η $\mathcal{D}_u$ είναι μία κλάση Dynkin που περιέχει την $\mathcal{G}_u$, και η $\mathcal{G}_u$ είναι κλειστή ως προς τις πεπερασμένες τομές απο το Θεώρημα της Μονότονης κλάσης (βλ. Θεώρημα A.2.4) τότε προκύπτει $\mathcal{F}_u^{(S,\Theta)} \subseteq \sigma(\mathcal{G}_u) \subseteq D_u \subseteq \mathcal{F}_u^{(S,\Theta)}$, άρα $D_u = \mathcal{F}_u^{(S,\Theta)}$.

(g) Η διαδικασία $M_t^{(\gamma)}(\Theta)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι P-σ.β. θετικό $(P, \mathcal{F}^{(S,\Theta)})$-martingale που ικανοποιεί την συνθήκη $\mathbb{E}_P[M_t^{(\gamma)}(\Theta)] = 1$.

Πράγματι, απο την συνθήκη (RRM_ξ) για κάθε $u \in [0,t]$ και $A \in \mathcal{F}_u^{(S,\Theta)} \subseteq \mathcal{F}_t^{(S,\Theta)}$ παίρνουμε ότι

$$\int_A M_u^{(\gamma)}(\Theta)\, dP = \int_A M_t^{(\gamma)}(\Theta)\, dP.$$

Ώς εκ τούτου η οικογένεια $\{M_t^{(\gamma)}(\Theta)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι $(P, \mathcal{F}^{(S,\Theta)})$-martingale. Επιπλέον, πάλι απο την συνθήκη (RRM_ξ) για $A = \Omega$ παίρνουμε ότι

$$\mathbb{E}_P[M_t^{(\gamma)}(\Theta)] = \int_\Omega M_t^{(\gamma)}(\Theta)\, dP = Q(\Omega) = 1.$$

Επιπλέον, έχουμε

$$P(\{M_t^{(\gamma)}(\Theta) > 0\}) = \int P\theta(\{\xi(0)\widetilde{M}_t^{(\gamma)}(\Theta) > 0\})\, P_\Theta(d\theta) = 1,$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει απο το βήμα (d) και απο το γεγονός, ότι η ξ είναι P_Θ-σ.β. θετική. Άρα αφού η ξ είναι P_Θ-σ.β. θετική, προκύπτει ότι η συνεπαγωγή *(iii)⟹(i)* είναι άμεση. □

Η Πρόταση 5.2.5 μας επιτρέπει να υπολογίσουμε Radon-Nikodým παραγώγουςγια διάφορες επιλογές που εμφανίζονται στις εφαρμογές.

Στο πρώτο παράδειγμα θεωρούμε μία μεικτή διαδικασία Poisson (βλ. π.χ. [23], σελίδα 87 για τον ορισμό). Μία επιλογή για την κατανομή του Θ στην Θεωρία Κινδύνου είναι η Gamma κατανομή. Στην περίπτωση μιας μεικτής διαδικασίας Poisson αυτή η διαδικασία καλείται Pólya-Lundberg διαδικασία (βλ. π.χ. [23], σελίδα 100 για τον ορισμό). Για να παρουσιάσουμε το πρώτο μας παράδειγμα ας θυμηθούμε την αντίστροφη συνάρτηση κατανιμής Gamma με παραμέτρους $a, b \in \Upsilon$ (γράφουμε $\mathbf{IG}(b,a)$ για συντομία), δηλαδή

$$\mathbf{IG}(b,a)(B) := \int_B \frac{b^a}{\Gamma(a)} \cdot x^{-(a-1)} \cdot e^{-b/x}\, \lambda(dx) \quad \text{για κάθε } B \in \mathfrak{B}(\Upsilon).$$

Παράδειγμα 5.2.6. Παίρνουμε $h := \ln$, $\Theta : \Omega \longmapsto D := \Upsilon$, $P \in \mathcal{M}^\ell_{S,\mathbf{Exp}(\Theta),P_{X_1}}$ και $Q \in \mathcal{M}^\ell_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\Theta)),Q_{X_1}}$ για $\ell = 1, 2$, όπου ρ είναι $\mathfrak{B}(D)$-$\mathfrak{B}(D)$-μετρήσιμη συνάρτηση ώστε $\rho(x) := 1/x$ για κάθε $x \in D$. Επιπλέον θεωρούμε ότι $P_\Theta = \mathbf{Ga}(b_1, a_1)$ και $Q_\Theta = \mathbf{IGa}(b_2, a_2)$ με $a_1, a_2, b_1, b_2 > 0$. Σημειώνουμε ότι είναι εύκολο να αποδείξουμε $Q_{\rho(\Theta)} = \mathbf{Ga}(b_2, a_2)$.

Πράγματι, συμβολίζουμε με F_Θ και $F_\rho(\Theta)$ τις επαγόμενες από τις P_Θ και $Q_\rho(\Theta)$ σ.κ., αντίστοιχα. Έτσι, για κάθε $x \in \Upsilon$ παίρνουμε ότι

$$F_{\rho(\Theta)}(x) = P(\{\rho(\Theta) \leqslant x\}) = P(\{\frac{1}{\Theta} \leqslant x\}) = P(\{\Theta \geqslant \frac{1}{x}\}) = 1 - F_\Theta(1/x).$$

Παραγωγίζοντας ως προς x έχουμε

$$f_{\rho(\Theta)}(x) = -f_\Theta(x) \cdot (-\frac{1}{x^2}) = \frac{b_2^{a_2}}{\Gamma(a_2)} \cdot (\frac{1}{x})^{-(a_2-1)} \cdot e^{-b_2 x} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{b_2^{a_2}}{\Gamma(a)} \cdot x^{a_2-1} \cdot e^{-b_2 x},$$

δηλαδή $Q_{\rho(\Theta)} = \mathbf{Ga}(b_2, a_2)$.

Απο την Πρόταση 5.2.5 υπάρχει μία P_{X_1}-σ.β. μοναδική συνάρτηση $\gamma \in \mathcal{F}^{\ell}_{P,\ln}$ τέτοια ώστε

$$Q(A) = \int_A M_t^{(\gamma)}(\Theta)\, dP \quad \text{για κάθε } 0 \leqslant u \leqslant t \text{ και } A \in \mathcal{F}_u^{(S,\Theta)},$$

όπου $M_t^{(\gamma)}(\Theta) := \xi(\Theta) \cdot e^{\sum_{j=1}^{N_t} \gamma(X_j)} \cdot \left(\frac{\rho(\Theta)}{\Theta}\right)^{N_t} \cdot e^{-t(\rho(\Theta)-\Theta)}$ και $\xi(\Theta) := \frac{b_2^{a_2}}{b_1^{a_1}} \cdot \frac{\Gamma(a_1)}{\Gamma(a_2)} \cdot \frac{e^{b_1\Theta - b_2/\Theta}}{\Theta^{a_1+a_2}}$.

Μια άλλη επιλογή στις εφαρμογές για τη κατανομή της δομικής παραμέτρου είναι η γενικευμένη αντίστροφη κατανομή Gauss με παραμέτρους $a, b > 0$ και $p \in \mathbb{R}$ (γράφουμε $\mathbf{GIG}(a, b, p)$ για συντομία), δηλαδή

$$\mathbf{GIG}(a, b, p)(B) := \int_B \frac{a^{-p} \cdot t^{p-1} \cdot e^{-\frac{t^2+a^2}{2b\cdot t}}}{2 \cdot K_p(a \cdot b^{-1})} \lambda(dt) \ \text{ για κάθε } \ B \in \mathfrak{B}(\Upsilon),$$

όπου

$$K_p(x) := \frac{1}{2} \cdot \int_\Upsilon y^{p-1} \cdot e^{\frac{x\cdot(y+y^{-1})}{2}}\, dy \quad \text{για κάθε } \ x \in \Upsilon.$$

5.3 Ο Χαρακτηρισμός

Ξέρουμε από την Πρόταση 5.2.5 κάτω απο τις συνθήκες $Q_{X_1} \sim P_{X_1}$, $Q_{W_1} \sim P_{W_1}$ και $Q_\Theta \sim P_\Theta$, τα μέτρα P και Q είναι ισοδύναμα σε κάθε σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_t^{(S,\Theta)}$. Πρώτα θα δείξουμε ότι αυτό το αποτέλεσμα, δεν ισχύει γενικά για $\mathcal{F}_\infty^{(S,\Theta)}$, όπως δείχνει η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 5.3.1. *Έστω $Q \in \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{\Lambda}(\rho(\Theta))}$ για $\ell = 1, 2$, και έστω $\{Q_\theta\}_{\theta \in D}$ είναι μία φ.δ.π. του Q επάνω στο Q_Θ συνεπής με το Θ . Εάν $P_\theta \neq Q_\theta$ για P_Θ-a.a. $\theta \in D$ τότε τα P και Q είναι κάθετα επάνω στην $\mathcal{F}_\infty^{(S,\Theta)}$.*

Απόδειξη. Αφού $P \in \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{K}(\Theta),P_{X_1}}$ και $Q \in \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{\Lambda}(\rho(\Theta)),Q_{X_1}}$ για $\ell = 1, 2$, τότε απο την Πρόταση 5.2.5 έχουμε $Q_\Theta \sim P_\Theta$ άρα, σύμφωνα με το (a) της απόδειξης της Πρότασης 5.2.5, ότι υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $L_0 \in \mathfrak{B}(D)$ τέτοιο ώστε $P_\theta \in \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{K}(\theta),(P_\theta)_{X_1}}$ και $Q_\theta \in \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta)),(Q_\theta)_{X_1}}$ για κάθε $\theta \notin L_0$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $P_\theta \neq Q_\theta$ για κάθε $\theta \notin L_0$. Εφαρμόζοντας την Πρόταση 4.2.4, παίρνουμε ότι $P_\theta \upharpoonright \mathcal{F}_\infty^S \perp Q_\theta \upharpoonright \mathcal{F}_\infty^S$ για κάθε $\theta \notin L_0$. Αλλά αφού $\mathcal{F}_\infty^S \subseteq \mathcal{F}_\infty^{(S,\Theta)}$ παίρνουμε ότι $P_\theta \upharpoonright \mathcal{F}_\infty^{(S,\Theta)} \perp Q_\theta \upharpoonright \mathcal{F}_\infty^{(S,\Theta)}$ για κάθε $\theta \notin L_0$, εννοώντας ότι υπάρχει ένα σύνολο $A \in \mathcal{F}_\infty^{(S,\Theta)}$ τέτοιο ώστε $P_\theta(A) = Q_\theta(\Omega \setminus A) = 1$. Επομένως,

$$P(A \cap \Theta^{-1}(D)) = \int_D P_\theta(A)\, P_\Theta(d\theta) = 1$$

και

$$Q(A \cap \Theta^{-1}(D)) = \int_D Q_\theta(A)\, Q_\Theta(d\theta) = 0,$$

εννοώντας ότι τα P και Q είναι κάθετα στο $\mathcal{F}_\infty^{(S,\Theta)}$. □

Πρίν διατυπώσουμε το αντίστροφο της Πρότασης 5.2.5 (δηλ. ότι για δοσμένη συνάρτηση $\gamma \in \mathcal{F}_{P,h}^\ell$ για $\ell = 1, 2$, υπάρχει ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας $Q \in \mathcal{M}_{S,\mathbf{\Lambda}(\rho(\Theta))}^\ell$) πρέπει να αποδείξουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα λαμβάνοντας υπόψιν την κατασκευή της σύνθετης μεικτής ανανεωτικής διαδικασίας. Γι'αυτό τον σκοπό παραθέτουμε τους παρακάτω συμβολισμούς για τα γινόμενα χ.π..

Με $(\Omega \times \Xi, \Sigma \otimes H, P \otimes R)$ συμβολίζουμε τον χ.π. γινόμενο των χ.π. (Ω, Σ, P) και (Ξ, H, R). Εάν I είναι αυθαίρετο μη-κενό σύνολο δεικτών, γράφουμε P_I για το μέτρο γινόμενο επάνω στο Ω^I και Σ_I για το πεδίο ορισμού του.

Απο εδώ και κάτω, θέτουμε $\widetilde{\Omega} := \Upsilon^{\mathbb{N}} \times \Upsilon^{\mathbb{N}}$, $\widetilde{\Sigma} := \mathfrak{B}(\widetilde{\Omega}) = \mathfrak{B}(\Upsilon)_{\mathbb{N}} \otimes \mathfrak{B}(\Upsilon)_{\mathbb{N}}$, $\Omega := \widetilde{\Omega} \times D$ *και* $\Sigma := \widetilde{\Sigma} \otimes \mathfrak{B}(D)$ *για απλοποίηση.*

Το ακόλουθο αποτέλεσμα μας δίνει την δυνατότητα να κατασκευάσουμε *κανονικούς χώρους πιθανότητας* μέσω σύνθετων μεικτών ανανεωτικών διαδικασιών.

Λήμμα 5.3.2. *Έστω μ να είναι ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στην $\mathfrak{B}(D)$, και για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $\theta \in D$ έστω $Q_n(\theta) := \mathbf{K}(\theta)$ και $R_n := R$ μέτρα πιθανότητας επάνω στην $\mathfrak{B}(\Upsilon)$, τα οποία είναι απόλυτα συνεχή ως προς το μέτρο Lebesgue $\lambda \upharpoonright \mathfrak{B}(\Upsilon)$, όπου για κάθε $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ η συνάρτηση $\theta \longmapsto \mathbf{K}(\theta)(B)$ είναι $\mathfrak{B}(D)$-μετρήσιμη. Τότε υπάρχει:*

(i) μία οικογένεια $\{P_\theta\}_{\theta \in D}$ μέτρων πιθανότητας $P_\theta := \mathbf{K}(\theta)_{\mathbb{N}} \otimes R_{\mathbb{N}} \otimes \delta_\theta$ επάνω στη Σ, όπου δ_θ είναι το μέτρο Dirac επάνω στη $\mathfrak{B}(D)$ συγκεντρωμένο στο θ, ένα μέτρο πιθανότητας P επάνω στη Σ τέτοιο, ώστε η $\{P_\theta\}_{\theta \in D}$ να είναι μια φ.δ.π. του P πάνω στο μ συνεπής με το $\Theta := \pi_D$, όπου π_D είναι η κανονική προβολή απο το Ω στο D, και $P_\Theta = \mu$,

(ii) μία απαριθμήτρια σ.δ. N που είναι P-MRP($\mathbf{K}(\Theta)$), ώστε η αντίστοιχη διαδικασία των ενδιάμεσων χρόνων W να ικανοποιεί την συνθήκη $(P_\theta)_{W_n} = Q_n(\theta)$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$,

(iii) *μία σ.δ. μεγέθους απαιτήσεων X που είναι P-ανεξάρτητη του Θ, και ικανοποεί την συνθήκη $P_{X_n} = R$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, και έτσι ωστε η (N, X) να είναι P-διαδικασία κινδύνου που επάγει την σ.δ. συνολικών απαιτήσεων S που είναι P-CMRP με παραμέτρους $\mathbf{K}(\Theta)$ και P_{X_1}.*

Επιπλέον, $P \in \mathcal{M}^1_{S,\mathbf{K}(\Theta)}$. Εάν, επιπλέον $\int_\Upsilon x^2\, R(dx) < \infty$ τότε $P \in \mathcal{M}^2_{S,\mathbf{K}(\Theta)}$.

Απόδειξη. *(i)*: Για δοσμένο $\theta \in D$, θεωρούμε τον χ.π. γινόμενο $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\Sigma}, \widetilde{P}_\theta)$ κατασκευασμένο όπως στο Λήμμα 4.2.5, όπου $\widetilde{P}_\theta := (\otimes_{n\in\mathbb{N}} Q_n(\theta)) \otimes R_{\mathbb{N}}$. Αφού απο την υπόθεση, ότι για κάθε $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ κάθε συνάρτηση $\theta \longmapsto Q_n(\theta)(B)$ είναι $\mathfrak{B}(D)$-μετρήσιμη, με ένα επιχείρημα μονότονης κλάσης προκύπτει ότι το ίδιο ισχύει για την συνάρτηση $\theta \longmapsto \widetilde{P}_\theta(F)$ για κάθε σταθερό $F \in \widetilde{\Sigma}$. Ορίζουμε την συνολο-συνάρτηση $\widetilde{P} : \widetilde{\Sigma} \longmapsto \mathbb{R}$ ώστε

$$\widetilde{P}(F) := \int \widetilde{P}_\theta(F)\, \mu(d\theta) \quad \text{για όλα} \quad F \in \widetilde{\Sigma}.$$

Τότε το $\widetilde{P}$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στη $\widetilde{\Sigma}$ και η $\{\widetilde{P}_\theta\}_{\theta\in D}$ είναι φ.δ.π. του $\widetilde{P}$ επάνω στο μ. Θέτουμε $P(E) := \int \widetilde{P}_\theta(E^\theta)\, \mu(d\theta)$ για κάθε $E \in \Sigma$, όπου $E^\theta := \left\{\widetilde{\omega} \in \widetilde{\Omega} : (\widetilde{\omega}, \theta) \in E\right\}$ είναι μία θ-τομή του E. Εύκολα βλέπουμε οτι η P είναι ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στη Σ τέτοιο ώστε η $\{\widetilde{P}_\theta\}_{\theta\in D}$ να είναι μία φ.δ.π.-γινόμενο επάνω στη $\widetilde{\Sigma}$ για την P ως προς το μ (βλ. [27], Ορισμός 1.1). Για κάθε $\theta \in D$ θέτουμε $P_\theta := \widetilde{P}_\theta \otimes \delta_\theta$, όπου δ_θ είναι το μέτρο Dirac στο θ. Προφανώς, η P_θ είναι ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στην Σ για κάθε $\theta \in D$. Επομένως, μπορούμε να εφαρμόσουμε την [17], Lemma 2.4, για να πάρουμε ότι η $\{P_\theta\}_{\theta\in D}$ είναι μία φ.δ.π. του P επάνω στο μ συνεπής με την π_D, όπου π_D είναι η κανονική προβολή του Ω στο D. Θέτοντας $\Theta := \pi_D$ έχουμε $P_\Theta = \mu$, έχουμε την απόδειξη του ισχυρισμού *(i)*.

Πράγματι, για κάθε $B \in \mathfrak{B}(D)$ παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} P_\Theta(B) &= P(\Theta^{-1}(B)) = P(\pi_D^{-1}(B)) = P(\widetilde{\Omega} \times B) \\ &= \int \widetilde{P}_\theta((\widetilde{\Omega} \times B)^\theta)\, \mu(d\theta) = \int_B \widetilde{P}_\theta(\widetilde{\Omega})\, \mu(d\theta) \\ &= \int_B \mu(d\theta) = \mu(B). \end{aligned}$$

(ii): Αφού η τριάδα $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\Sigma}, \widetilde{P}_\theta)$ είναι ένας χ.π. γινόμενο υπάρχει μία ακολουθία $\{\widetilde{W}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ από $\widetilde{P}_\theta$-ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές επάνω στον $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\Sigma})$ τέτοιες ώστε

$$\widetilde{W}_n(\widetilde{\omega}) = p_n \circ p_{\widetilde{\Omega}\Upsilon^N} \quad \text{για κάθε} \quad \widetilde{\omega} \in \widetilde{\Omega} \quad \text{και} \quad n \in \mathbb{N},$$

όπου p_n είναι η κανονική προβολή από το $\Upsilon^{\mathbb{N}}$ στο Υ και $p_{\widetilde{\Omega}\Upsilon^{\mathbb{N}}}$ είναι η κανονική προβολή από το $\widetilde{\Omega}$ στον $\Upsilon^{\mathbb{N}}$, ικανοποιώντας τη σχέση $(\widetilde{P}_\theta)_{\widetilde{W}_n} = \mathbf{K}(\theta)$ για όλα $n \in \mathbb{N}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$

θέτουμε $W_n := \widetilde{W}_n \circ p_{\widetilde{\Omega}}$ και $W := \{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, όπου $p_{\widetilde{\Omega}}$ είναι η κανονική προβολή από το Ω στο $\widetilde{\Omega}$.

Ισχυρισμός 1. Για όλα τα $\theta \in D$ η διαδικασία W είναι P_θ-ανεξάρτητα και $(P_\theta)_{W_n} = \mathbf{K}(\theta)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Έστω $\theta \in D$, αυθαίρετο αλλά σταθερό $n, m \in \mathbb{N}$ και $B, E \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$. Τότε

$$\begin{aligned}
P_\theta(W_n^{-1}(B) \cap W_m^{-1}(E)) &= P_\theta((\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B \times \Upsilon^{\mathbb{N}} \times D) \cap (\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{m\}} \times E \times \Upsilon^{\mathbb{N}} \times D)) \\
&= (\widetilde{P}_\theta \otimes \delta_\theta)([(\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B \times \Upsilon^{\mathbb{N}}) \cap (\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{m\}} \times E \times \Upsilon^{\mathbb{N}})] \times D) \\
&= \widetilde{P}_\theta((\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B \times \Upsilon^{\mathbb{N}}) \cap (\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{m\}} \times E \times \Upsilon^{\mathbb{N}})) \cdot \delta_\theta(D) \\
&= \widetilde{P}_\theta\left(\left((\widetilde{W}_n)^{-1}(B) \cap (\widetilde{W}_m)^{-1}(E)\right) \times \Upsilon^{\mathbb{N}}\right) \\
&= \widetilde{P}_\theta((\widetilde{W}_n)^{-1}(B)) \cdot \widetilde{P}_\theta((\widetilde{W}_m)^{-1}(E)) \\
&= P_\theta(W_n^{-1}(B)) \cdot P_\theta(W_m^{-1}(E)),
\end{aligned}$$

όπου η πέμπτη ισότητα προκύπτει απο το γεγονός ότι η $\widetilde{W}$ είναι $\widetilde{P}_\theta$-ανεξάρτητη, ως εκ τούτου η W είναι P_θ-ανεξάρτητη. Επιπλέον

$$\begin{aligned}
(P_\theta)_{W_n}(B) &= P_\theta(W_n^{-1}(B)) = P_\theta(\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B \times \Upsilon^{\mathbb{N}} \times D) \\
&= (\widetilde{P}_\theta \otimes \delta_\theta)(\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B \times \Upsilon^{\mathbb{N}} \times D) \\
&= \widetilde{P}_\theta(\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B \times \Upsilon^{\mathbb{N}}) \\
&= (\widetilde{P}_\theta)_{\widetilde{W}_n}(B) = \mathbf{K}(\theta)(B),
\end{aligned}$$

ως εκ τούτου $(P_\theta)_{W_n} = \mathbf{K}(\theta)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. □

Αλλά αφού, σύμφωνα με τον ισχυρισμό 1 η W είναι P_θ-ανεξάρτητη για όλα τα $\theta \in D$, απο την [17], Lemma 4.1, προκύπτει ότι η W είναι P-υπό συνθήκη ανεξάρτητη. Επιπλέον, αφού για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και $\theta \in D$ ισχύει η συνθήκη $(P_\theta)_{W_n} = \mathbf{K}(\theta)$, από την [20], Lemma 2.4, παίρνουμε ότι για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ την ισότητα $P_{W_n|\Theta} = \mathbf{K}(\Theta)\quad P \upharpoonright \sigma(\Theta)$-σ.β.. Θέτουμε $T_n := \sum_{k=1}^n W_k$ για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ και $T := \{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, και έστω $N := \{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ η απαριθμήτρια σ.δ. που επάγεται από την T μέσω του $N_t := \sum_{n=1}^\infty \chi_{\{T_n \leqslant t\}}$ για όλα τα $t \in \mathbb{R}_+$. Επομένως, η απαριθμήτρια σ.δ. N είναι P-MRP$(\mathbf{K}(\Theta))$.

(iii): Εφαρμόζοντας παρόμοιους συλλογισμούς όπως στο (ii), προκύπτει ότι υπάρχει μια ακολουθία $\{\widetilde{X}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ από $\widetilde{P}_\theta$-ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές επάνω στον μ.χ. $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\Sigma})$ τέτοιες ώστε

$$\widetilde{X}_n(\widetilde{\omega}) = q_n \circ q_{\widetilde{\Omega}\Upsilon^N} \quad \text{για κάθε} \quad \widetilde{\omega} \in \widetilde{\Omega} \quad \text{και} \quad n \in \mathbb{N},$$

όπου q_n είναι η κανονική προβολή από το $\Upsilon^{\mathbb{N}}$ στο Υ και $q_{\widetilde{\Omega}\Upsilon^{\mathbb{N}}}$ είναι η κανονική προβολή από $\widetilde{\Omega}$ στο $\Upsilon^{\mathbb{N}}$, που ικανοποιούν τη σχέση $(R_{\mathbb{N}})_{\widetilde{X}_n} = R$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $X_n := \widetilde{X}_n \circ q_{\Omega\widetilde{\Omega}}$ και $X := \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, όπου $q_{\Omega\widetilde{\Omega}}$ είναι η κανονική προβολή από το Ω στο $\widetilde{\Omega}$.

Ισχυρισμός 2. Το ζευγάρι (N, X) είναι μία διαδικασία κινδύνου.

Απόδειξη. Αφού σύμφωνα με το (ii) η οικογένεια N των τυχαίων μεταβλητών είναι μία απαριθμήτρια σ.δ. πρέπει μόνο να δείξουμε ότι το X είναι μία P-i.i.d. ακολουθια, και ότι τα N και X είναι P-ανεξάρτητα.

(a) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει η συνθήκη $P_{X_n} = R$.

Πράγματι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ έχουμε

$$\begin{aligned} P_{X_n}(B) &= P(X_n^{-1}(B)) = P(\Upsilon^{\mathbb{N}} \times \Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B \times D) \\ &= \int \widetilde{P}_\theta((\Upsilon^{\mathbb{N}} \times \Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B \times D)^\theta)\, P_\Theta(d\theta) \\ &= \int_D \widetilde{P}_\theta(\Upsilon^{\mathbb{N}} \times \Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B)\, P_\Theta(d\theta) \\ &= \int_D R_n(B)\, P_\Theta(d\theta) = R_n(B) \cdot \int_D P_\Theta(d\theta), \end{aligned}$$

ως εκ τούτου $P_{X_n}(B) = R_n(B) = R(B)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(b) Η οικογένεια X είναι P-ανεξάρτητη.

Πράγματι, για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ και $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$

$$\begin{aligned} P(X_n^{-1}(B_1) \cap X_m^{-1}(B_2)) &= P((\Upsilon^{\mathbb{N}} \times \Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B_1 \times D) \cap (\Upsilon^{\mathbb{N}} \times \Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{m\}} \times B_2 \times D)) \\ &= P([\Upsilon^{\mathbb{N}} \times ((\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B_1) \cap (\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{m\}} \times B_2))] \times D) \\ &= \int \widetilde{P}_\theta(([\Upsilon^{\mathbb{N}} \times ((\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B_1) \cap (\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{m\}} \times B_2))] \times D)^\theta)\, P_\Theta(d\theta) \\ &= \int_D R_{\mathbb{N}}((\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B_1) \cap (\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{m\}} \times B_2))\, P_\Theta(d\theta) \\ &= R_{\mathbb{N}}((\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B_1) \cap (\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{m\}} \times B_2)) \\ &= R_n(B_1) \cdot R_m(B_2) = P(X_n^{-1}(B_1)) \cdot P(X_m^{-1}(B_2)), \end{aligned}$$

όπου η έκτη ισότητα προκύπτει απο το γεγονός ότι η $\widetilde{X}$ είναι $R_{\mathbb{N}}$-ανεξάρτητη, ως εκ τούτου ισχύει το (b).

(c) Οι διαδικασίες N και X είναι P-ανεξάρτητες.

Πράγματι, σημειώστε πρώτα ότι αρκεί να αποδείξουμε ότι οι W και X είναι P-ανεξάρτητες.

Για το σκοπό αυτό για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ και $B, \widetilde{B} \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
P(X_n^{-1}(B) \cap W_m^{-1}(\widetilde{B})) &= P((\Upsilon^{\mathbb{N}} \times \Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B \times D) \cap (\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{m\}} \times \widetilde{B} \times \Upsilon^{\mathbb{N}} \times D)) \\
&= P([(\Upsilon^{\mathbb{N}} \times \Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B) \cap (\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{m\}} \times \widetilde{B} \times \Upsilon^{\mathbb{N}})] \times D) \\
&= \int \widetilde{P}_\theta(([(\Upsilon^{\mathbb{N}} \times \Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B) \cap (\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{m\}} \times \widetilde{B} \times \Upsilon^{\mathbb{N}})] \times D)^\theta)\, P_\Theta(d\theta) \\
&= \int_D \widetilde{P}_\theta((\Upsilon^{\mathbb{N}} \times \Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B) \cap (\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{m\}} \times \widetilde{B} \times \Upsilon^{\mathbb{N}}))\, P_\Theta(d\theta) \\
&= \int_D \widetilde{P}_\theta(\Upsilon^{\mathbb{N}} \times \Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B) \cdot \widetilde{P}_\theta(\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{m\}} \times \widetilde{B} \times \Upsilon^{\mathbb{N}})\, P_\Theta(d\theta) \\
&= R_n(B) \cdot \int_D \mathbf{K}(\theta)(\widetilde{B})\, P_\Theta(d\theta) \\
&= P(X_n^{-1}(B)) \cdot P(W_m^{-1}(\widetilde{B})),
\end{aligned}$$

όπου η πέμπτη ισότητα προκύπτει απο το γεγονός ότι οι $\widetilde{W}$ και $\widetilde{X}$ είναι $\widetilde{P}_\theta$-ανεξάρτητες για κάθε $\theta \in D$, ως εκ τούτου πρικύπτει το (c).

Από τα (a), (b) και (c) προκύπτει ο Ισχυρισμός 2. □

Ισχυρισμός 3. Η διαδικασία X και το τυχαίο διάνυσμα Θ είναι P-ανεξάρτητα.

Απόδειξη. Για κάθε $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$, $\widetilde{B} \in \mathfrak{B}(D)$ και $n \in \mathbb{N}$ παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
P(X_n^{-1}(B) \cap \Theta^{-1}(\widetilde{B})) &= P((\Upsilon^{\mathbb{N}} \times \Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B \times \mathbb{R}^d) \cap (\Upsilon^{\mathbb{N}} \times \Upsilon^{\mathbb{N}} \times \widetilde{B})) \\
&= P(\Upsilon^{\mathbb{N}} \times \Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B \times \widetilde{B}) \\
&= \int \widetilde{P}_\theta((\Upsilon^{\mathbb{N}} \times \Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B \times \widetilde{B})^\theta)\, P_\Theta(d\theta) \\
&= \int_{\widetilde{B}} \widetilde{P}_\theta(\Upsilon^{\mathbb{N}} \times \Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B)\, P_\Theta(d\theta) \\
&= R_n(B) \cdot \int_E P_\Theta(d\theta) = P(X_n^{-1}(B)) \cdot P(\Theta^{-1}(\widetilde{B}));
\end{aligned}$$

ως εκ τούτου οι X και Θ είναι P-ανεξάρτητες. □

Θέτοντας $S_t := \sum_{n=0}^{N_t} X_n$ για όλα τα $t \geqslant 0$ και $S := \{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, παίρνουμε ότι η S είναι P-CMRP με παραμέτρους $\mathbf{K}(\Theta)$ και P_{X_1} που επάγεται απο την P-διαδικασία κινδύνου (N, X).

Επιπλέον, αφού η S είναι P-CMRP με παραμέτρους $\mathbf{K}(\Theta)$ και P_{X_1}, για να αποδείξουμε ότι $P \in \mathcal{M}^1_{S,\mathbf{K}(\Theta),P_{X_1}}$ αρκεί να αποδείξουμε ότι το P ικανοποιεί τις συνθήκες (a1) και (a2) των Υποθέσεων 5.2.2.

Ισχυρισμός 4. Ισχύει η υπόθεση (a1).

Απόδειξη. **(a)** Οι διαδικασίες W και X είναι P-υπό συνθήκη ανεξάρτητες σε σχέση με το Θ εάν και μόνο εάν είναι P_θ-ανεξάρτητες για κάθε $\theta \in D$.

Πράγματι, υποθέτουμε ότι οι W και X είναι P-υπό συνθήκη ανεξάρτητες ως προς το Θ. Κατά συνέπεια, για οποιαδήποτε $n, m \in \mathbb{N}$ και $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ παίρνουμε

$$P(W_n^{-1}(B_1) \cap X_m^{-1}(B_2) \mid \Theta) = P(W_n^{-1}(B_1) \mid \Theta) \cdot P(X_m^{-1}(B_2) \mid \Theta),$$

ισοδύναμα για κάθε $F \in \mathfrak{B}(D)$ παίρνουμε

$$\int_{\Theta^{-1}(F)} P(W_n^{-1}(B_1) \cap X_m^{-1}(B_2) \mid \Theta)\, dP = \int_{\Theta^{-1}(F)} P(W_n^{-1}(B_1) \mid \Theta) \cdot P(X_m^{-1}(B_2) \mid \Theta)\, dP.$$

Εφαρμόζοντας τώρα το [17], Lemma 3.5 (ii), ισοδύναμα παίρνουμε

$$\int_{\Theta^{-1}(F)} P_\bullet(W_n^{-1}(B_1) \cap X_m^{-1}(B_2)) \circ \Theta\, dP = \int_{\Theta^{-1}(F)} [P_\bullet(W_n^{-1}(B_1)) \circ \Theta] \cdot [P_\bullet(X_m^{-1}(B_2)) \circ \Theta]\, dP$$

ή ισοδύναμα

$$\int_{\Theta^{-1}(F)} P_\theta(W_n^{-1}(B_1) \cap X_m^{-1}(B_2))\, P_\Theta(d\theta) = \int_{\Theta^{-1}(F)} P_\theta(W_n^{-1}(B_1)) \cdot P_\theta(X_m^{-1}(B_2))\, P_\Theta(d\theta).$$

Το τελευταίο ισοδυναμεί με

$$P_\theta(W_n^{-1}(B_1) \cap X_m^{-1}(B_2)) = P_\theta(W_n^{-1}(B_1)) \cdot P_\theta(X_m^{-1}(B_2));$$

άρα οι W και X είναι P_θ-ανεξάρτητες για κάθε $\theta \in D$.

(b) Οι διαδικασίες W και X είναι P_θ-ανεξάρτητες για κάθε $\theta \in D$.

Πράγματι, έστω $\theta \in D$ σταθερό αλλά αυθαίρετο. Τότε για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ και $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
P_\theta(W_n^{-1}(B_1) \cap X_m^{-1}(B_2)) &= P_\theta((\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B_1 \times \Upsilon^{\mathbb{N}} \times D) \cap (\Upsilon^{\mathbb{N}} \times \Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{m\}} \times B_2 \times D)) \\
&= P_\theta([(\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B_1 \times \Upsilon^{\mathbb{N}}) \cap (\Upsilon^{\mathbb{N}} \times \Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{m\}} \times B_2)] \times D) \\
&= (\widetilde{P}_\theta \otimes \delta_\theta)([(\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B_1 \times \Upsilon^{\mathbb{N}}) \cap (\Upsilon^{\mathbb{N}} \times \Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{m\}} \times B_2)] \times D) \\
&= \widetilde{P}_\theta((\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B_1 \times \Upsilon^{\mathbb{N}}) \cap (\Upsilon^{\mathbb{N}} \times \Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{m\}} \times B_2)) \cdot \delta_\theta(D) \\
&= \widetilde{P}_\theta(\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B_1 \times \Upsilon^{\mathbb{N}}) \cdot \widetilde{P}_\theta(\Upsilon^{\mathbb{N}} \times \Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{m\}} \times B_2) \\
&= [\widetilde{P}_\theta(\Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{n\}} \times B_1 \times \Upsilon^{\mathbb{N}}) \cdot \delta_\theta(D)] \cdot [\widetilde{P}_\theta(\Upsilon^{\mathbb{N}} \times \Upsilon^{\mathbb{N}\setminus\{m\}} \times B_2) \cdot \delta_\theta(D)] \\
&= P_\theta(W_n^{-1}(B_1)) \cdot P_\theta(X_m^{-1}(B_2)),
\end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει απο το γεγονός ότι οι $\widetilde{W}$ και $\widetilde{X}$ είναι $\widetilde{P}_\theta$-ανεξάρτητες για κάθε $\theta \in D$, ως εκ τούτου οι W και X είναι P_θ-ανεξάρτητες για κάθε $\theta \in D$.

Από τα (a) και (b) προκύπτει ο Ισχυρισμός 4. □

Από τον Ισχυρισμό 4 προκύπτει ότι η P ικανοποιεί την συνθήκη (a1). Επομένως $P \in \mathcal{M}^1_{S,\mathbf{K}(\Theta)}$. Αν επιπλέον υποθέσουμε η συνθήκη $\int_\Upsilon x^2\, R(dx) < \infty$ το μέτρο $P \in \mathcal{M}^1_{S,\mathbf{K}(\Theta)}$ ικανοποιεί την πρόσθετη ιδιότητα $\mathbb{E}_P[X_1^2] < \infty$, ως εκ τούτου $P \in \mathcal{M}^2_{S,\mathbf{K}(\Theta)}$. □

Παρατηρήσεις 5.3.3. (i) Σαφώς, αν στην παραπάνω κατασκευή πάρουμε $\mu(B) := \delta_{\theta_0}(B)$ για κάθε $B \in \mathfrak{B}(D)$ και για μερικά $\theta_0 \in D$ λαμβάνουμε ως ειδική περίπτωση το Λήμμα 4.2.5. Σε αυτή την περίπτωση ο κατασκευασμένος χώρος πιθανότητας $(\varOmega, \varSigma, P)$ ανάγεται στον χ.π. γινόμενο $(\widetilde{\varOmega}, \widetilde{\varSigma}, \widetilde{P}_{\theta_0})$, και η απαριθμήτρια σ.δ. N γίνεται P-RP$(\mathbf{K}(\theta_0))$. Συνεπώς, η σ.δ. των συνολικών απαιτήσεων που κατασκευάστηκε είναι μία P-CRP με παραμέτρους $\mathbf{K}(\theta_0)$ και P_{X_1}.

(ii) Σύμφωνα με το Λήμμα 5.3.2 έχουμε $\varSigma = \mathcal{F}_\infty^{(W,X,\varTheta)} = \mathcal{F}_\infty^{(S,\varTheta)}$.

Συμβολισμοί 5.3.4. Έστω $\theta \in D$ και έστω $\mathbf{K}(\theta)$ και $\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))$ οι κατανομές πιθανοτήτων επάνω στην $\mathfrak{B}(\varUpsilon)$ έτσι ώστε οι επαγόμενες συναρτήσεις κατανομής να είναι συνεχώς διαφορίσιμες με θετικές παραγώγους $[\mathbf{K}(\theta)]'$ και $[\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))]'$ επάνω στο $\varUpsilon$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ η κλάση όλων των συναρτήσεων $g_n := g_{\rho,n} : \varUpsilon^{n+1} \times D \longmapsto \varUpsilon$ ορίζεται από τον τύπο

$$g_n(w_1, \ldots, w_n, t, \theta) := \Big[\prod_{j=1}^{n} \frac{[\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))]'(w_j)}{[\mathbf{K}(\theta)]'(w_j)}\Big] \cdot \frac{1 - \mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))(t-w)}{1 - \mathbf{K}(\theta)(t-w)}$$

για κάθε $(w_1, \ldots, w_n, t, \theta) \in \varUpsilon^{n+1} \times D$, όπου $w := \sum_{j=1}^{n} w_j$, συμβολίζουμε με $\mathcal{G}_{n,\rho}$. Ο συμβολισμός $\mathcal{G}_\rho$ είναι για το σύνολο $\{g = \{g_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} : g_n \in \mathcal{G}_{n,\rho}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}_0\}$ όλων των ακολουθιών των στοιχείων του $\mathcal{G}_{n,\rho}$.

Απο εδώ και κάτω $\mathbf{K}(\theta)$, $\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))$ και $g \in \mathcal{G}_\rho$ είναι όπως στον Συμβολισμό 5.3.4, και P, $\varTheta$ και S είναι όπως στο Λήμμα 5.3.2.

Πρόταση 5.3.5. *Έστω $\gamma \in \mathcal{F}_{P,h}^{\ell}$ για $\ell = 1, 2$ και έστω ξ είναι $P_\varTheta$-σ.β. θετική συνάρτηση τέτοια ώστε $\mathbb{E}_P[\xi(\varTheta)] = 1$. Τότε για κάθε $0 \leqslant u \leqslant t$ και για όλα τα $A \in \mathcal{F}_u^{(S,\varTheta)}$ η συνθήκη*

$$Q(A) = \int_A \xi(\varTheta) \cdot \left[\prod_{j=1}^{N_t} (h^{-1} \circ \gamma \circ X_j)\right] \cdot g(W_1, \ldots, W_{N_t}, t, \varTheta)\, dP$$

καθορίζει ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας $Q \in \mathcal{M}_{S,\mathbf{\Lambda}(\rho(\varTheta))}^{\ell}$.

Απόδειξη. 'Εστω $t \in \mathbb{R}_+$ και $\theta \in D$ και υποθέτουμε ότι $\ell = 1$. Ορίζουμε την συνολοσυνάρτηση $\breve{\mu} : \mathfrak{B}(D) \longmapsto \mathbb{R}$ και $\breve{Q}_n(\theta), \breve{R} : \mathfrak{B}(\varUpsilon) \longmapsto \mathbb{R}$ ώστε

$$\breve{\mu}(B_1) := \mathbb{E}_P[\chi_{\varTheta^{-1}(B_1)} \cdot \xi(\varTheta)],$$

$$\breve{Q}_n(\theta)(B_2) := \mathbb{E}_{P_\theta}[\chi_{W_1^{-1}(B_2)} \cdot (\frac{[\mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))]'}{[\mathbf{K}(\theta)]'} \circ W_1)]$$

και

$$\breve{R}(B_3) := \mathbb{E}_P[\chi_{X_1^{-1}(B_3)} \cdot (h^{-1} \circ \gamma \circ X_1)]$$

για κάθε $B_1 \in \mathfrak{B}(D)$ και $B_2, B_3 \in \mathfrak{B}(\varUpsilon)$, αντίστοιχα. Σαφώς η $\breve{\mu}$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στη $\mathfrak{B}(D)$ αφού από την υπόθεση έχουμε $\mathbb{E}_P[\xi(\varTheta)] = 1$. Επιπλέον, με ένα επιχείρημα μονότονης κλάσης μπορεί να αποδειχθεί ότι $\breve{Q}_n(\theta) = \mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))$, ενώ από το Λήμμα 4.1.4 (i), προκύπτει ότι το $\breve{R}$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας. Έτσι, εφαρμόζοντας το Λήμμα 5.3.2 για τα $\breve{\mu}$, $\breve{Q}_n(\theta)$ και $\breve{R}$ στην θέση του μ, $Q_n(\theta)$ και R, αντίστοιχα, μπορούμε να κατασκευάσουμε μία οικογένεια $\{\breve{Q}_\theta\}_{\theta\in D}$ μέτρων πιθανότήτας $\breve{Q}_\theta := \mathbf{\Lambda}(\rho(\theta))_{\mathbb{N}} \otimes \breve{R}_{\mathbb{N}} \otimes \delta_\theta$ επάνω στη Σ, ένα μέτρο πιθανότητας $\breve{Q}$ επάνω στη Σ που ικανοποιεί τις υποθέσεις (a1) και (a2) και έτσι ώστε η $\{\breve{Q}_\theta\}_{\theta\in D}$ να είναι μία φ.δ.π. του $\breve{Q}$ πάνω στο $\breve{Q}_\Theta = \mu$ και η S να είναι μία $\breve{Q}$-CMRP με παραμέτρους $\mathbf{\Lambda}(\rho(\Theta))$ και $\breve{Q}_{X_1} = \breve{R}$. Από το τελευταίο μαζί με τους ορισμούς του $\breve{\mu}$, $\breve{R}$ και $\breve{Q}_n(\theta)$ προκύπτει ότι $\breve{Q}_\Theta \sim P_\Theta$, $\breve{Q}_{X_1} \sim P_{X_1}$ και $(\breve{Q}_\theta)_{W_1} \sim (P_\theta)_{W_1}$ για κάθε $\theta \in D$. Αλλά αφού $(\breve{Q}_\theta)_{W_1} \sim (P_\theta)_{W_1}$ για κάθε $\theta \in D$ εύκολα προκύπτει ότι $\breve{Q}_{W_1} \sim P_{W_1}$. Εφαρμόζοντας τώρα την Πρόταση 5.2.5 παίρνουμε ότι $\breve{Q} \overset{pr}{\sim} P$, άρα $Q \in \mathcal{M}^1_{S,\mathbf{\Lambda}(\rho(\Theta)),Q_{X_1}}$, ή ισοδύναμα

$$\breve{Q}(A) = \int_A \xi(\Theta) \cdot \prod_{j=1}^{N_t} (h^{-1} \circ \gamma \circ X_j) \cdot g(W_1, \ldots, W_{N_t}, t, \Theta)\, dP$$

για όλα τα $0 \leqslant u \leqslant t$ και $A \in \mathcal{F}_u^{(S,\Theta)}$. Έτσι $Q \upharpoonright \mathcal{F}_u^{(S,\Theta)} = \breve{Q} \upharpoonright \mathcal{F}_u^{(S,\Theta)}$ για όλα τα $u \in \mathbb{R}_+$, επομένως $Q \upharpoonright \breve{\Sigma} = \breve{Q} \upharpoonright \breve{\Sigma}$, όπου $\breve{\Sigma} := \bigcup_{u\in\mathbb{R}_+} \mathcal{F}_u^{(S,\Theta)}$, άρα το Q είναι σ-προσθετικό επάνω στη $\breve{\Sigma}$ και το $\breve{Q}$ είναι η μοναδική επέκταση του Q επάνω στη $\Sigma = \sigma(\breve{\Sigma})$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $\ell = 2$. Αφού $\mathcal{F}^2_{P,h} \subseteq \mathcal{F}^1_{P,h}$ προκύπτει όπως παραπάνω για κάθε συνάρτηση $\gamma \in \mathcal{F}^2_{P,h}$ υπάρχει μια μοναδική πιθανότητα $Q \in \mathcal{M}^1_{S,\mathbf{\Lambda}(\rho(\Theta)),Q_{X_1}}$ που ικανοποιεί την συνθήκη (RRM_ξ). Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι $\mathbb{E}_Q[X_1^2] < \infty$, το οποίο ισχύει αφού

$$\mathbb{E}_Q[X_1^2] = \int_\Upsilon x^2 \cdot (h^{-1} \circ \gamma)(x)\, P_{X_1}(dx) < \infty,$$

όπου η ισότητα απορρέει από το γεγονός ότι η συνάρτηση $h^{-1} \circ \gamma$ είναι Radon-Nikodým παράγωγος του Q_{X_1} σε σχέση με P_{X_1} και η ανισότητα προκύπτει από την παραδοχή μας ότι $\gamma \in \mathcal{F}^2_{P,h}$. □

Το ακόλουθο αποτέλεσμα είναι ο επιθυμητός χαρακτηρισμός. Η απόδειξη της είναι άμεση συνέπεια των Προτάσεων 5.2.5 και 5.3.5.

Θεώρημα 5.3.6. *Έστω $\ell = 1, 2$. Ισχύει:*

(i) για κάθε $Q \in \mathcal{M}^\ell_{S,\mathbf{\Lambda}(\rho(\Theta))}$ υπάρχει μία P_Θ-σ.β. μοναδική θετική Radon-Nikodým παράγωγος ξ του Q_Θ ως προς το P_Θ, και μία P_{X_1}-σ.β. μοναδική συνάρτηση $\gamma \in \mathcal{F}^\ell_{P,h}$, που ικανοποιεί την συνθήκη (RRM_ξ),

(ii) αντιστρόφως, για οποιοδήποτε συνάρτηση $\gamma \in \mathcal{F}^\ell_{P,h}$, και για κάθε P_Θ-σ.β. θετική συνάρτηση ξ με $\mathbb{E}_P[\xi(\Theta)] = 1$ υπάρχει ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας $Q \in \mathcal{M}^\ell_{S,\mathbf{\Lambda}(\rho(\Theta))}$ που ικανοποιεί την συνθήκη (RRM_ξ).

Παρατήρηση 5.3.7. Το Θεώρημα 4.2.9 είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 5.3.6 εάν η κατανομή του Θ υπό P είναι εκφυλισμένο σε μερικά $\theta_0 \in D$.

Πράγματι, υποθέτουμε ότι μ είναι ένα μέτρο πιθανότητας $\mathfrak{B}(D)$ τέτοιο ώστε $\mu(B) := \delta_{\theta_0}(B)$ για κάθε $B \in \mathfrak{B}(D)$ και για σταθερό $\theta_0 \in D$. Σύμφωνα με την Παρατήρηση 5.3.3 μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα χώρο πιθανότητας (Ω, Σ, P) ώστε $P_\Theta(\{\theta_0\}) = 1$ και $P \in \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{K}(\Theta),P_{X_1}}$ για $\ell = 1, 2$. Σαφώς, αν θεωρήσουμε ένα μέτρο πιθανότητας $Q \in \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{\Lambda}(\rho(\Theta))}$, τότε σύμφωνα με την Πρόταση 5.2.5 (ii) παίρνουμε ότι $Q_\Theta \sim P_\Theta$, άρα $Q_\Theta(\{\theta_0\}) = 1$. Επομένως χωρις βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\Theta(\omega) = \theta_0$ για κάθε $\omega \in \Omega$. Συνεπώς, παίρνουμε $\sigma(\Theta) = \{\varnothing, \Omega\}$ και $\mathcal{F}^{(S,\Theta)}_t = \mathcal{F}^S_t$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, ως εκ τούτου $\mathcal{F}^{(S,\Theta)}_\infty = \mathcal{F}^S_\infty$. Επιπλέον, σημειώστε ότι σε αυτή την περίπτωση η συνθήκη (RRM_ξ) ανάγεται στη συνθήκη M_{θ_0}. Εφαρμόζοντας τώρα το Θεώρημα 5.3.6 για μία εκφυλισμένη P_Θ παίρνουμε το Θεώρημα 4.2.9.

Συμβολισμοί 5.3.8. Για κάθε $\ell = 1, 2$, συμβολίζουμε με $\widetilde{\mathcal{F}}^{\ell}_{P,\Theta} := \widetilde{\mathcal{F}}^{\ell}_{P,\Theta,X_1}$ τη κλάση όλων των πραγματικών $\mathfrak{B}(\Upsilon \times D)$-μετρήσιμων συναρτήσεων β επάνω στο $\Upsilon \times D$ ώστε $\beta(x, \theta) := \gamma(x) + \alpha(\theta)$ για κάθε $x \in \Upsilon$ και $\theta \in D$, όπου $\gamma \in \mathcal{F}^{\ell}_{P,\ln}$ και α είναι μία $\mathfrak{B}(D)$-μετρήσιμη συνάρτηση στο D.

Πόρισμα 5.3.9. *Έστω $\ell = 1, 2$. Ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) για κάθε $\mathfrak{B}(D)$-$\mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρήσιμη συνάρτηση ρ και για κάθε μέτρο πιθανότητας $Q \in \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\Theta))}$ υπάρχει μία P_Θ-σ.β. μοναδική θετική Radon-Nikodým παράγωγος ξ του Q_Θ ως προς το P_Θ και μία $P_{(X_1,\Theta)}$-σ.β.μοναδική συνάρτηση $\beta \in \widetilde{\mathcal{F}}^{\ell}_{P,\Theta}$ που ικανοποιούν μαζί με τα ρ και Q τις συνθήκες

$$\alpha(x) = \ln \rho(x) - \ln \mathbb{E}_{P_x}[N_1] \quad \text{για όλα τα } x \in D \tag{5.1}$$

και

$$Q(A) = \int_A \xi(\Theta) \cdot \widetilde{M}^{(\beta)}_t(\Theta)\, dP \quad \text{για κάθε } 0 \leqslant u \leqslant t \text{ και } A \in \mathcal{F}^{(S,\Theta)}_u, \tag{RPM_ξ}$$

όπου $\widetilde{M}^{(\beta)}_t(\Theta) := \frac{e^{\sum_{j=1}^{N_t} \beta(X_j,\Theta) - t\cdot\rho(\Theta)} \cdot (\mathbb{E}_P[N_1|\Theta])^{N_t}}{\prod_{j=1}^{N_t}[\mathbf{K}(\Theta)]'(W_j)\cdot(1-\mathbf{K}(\Theta))(t-T_{N_t})}$,

(ii) αντιστόφως, για οποιαδήποτε συνάρτηση $\beta \in \widetilde{\mathcal{F}}^{\ell}_{P,\Theta}$ και κάθε P_Θ-σ.β. θετική συνάρτηση ξ με $\mathbb{E}_P[\xi(\Theta)] = 1$ υπάρχει μία μοναδική $\mathfrak{B}(D)$-$\mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρήσιμη συνάρτηση ρ και μοναδικό μέτρο πιθανότητας $Q \in \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\Theta)),Q_{X_1}}$ ικανοποιώντας μαζί με β και ξ τις συνθήκες (5.1) και (RPM_ξ).

Απόδειξη. Έστω $t \in \mathbb{R}_+$ αυθαίρετο.

(i): Σύμφωνα με τις υποθέσεις της (i), από το Θεώρημα 5.3.6 (i) προκύπτει ότι υπάρχει μία P_{X_1}-σ.β. μοναδική συνάρτηση $\gamma \in \mathcal{F}^{\ell}_{P,\ln}$, ώστε $\gamma := \ln f$, όπου f είναι η Radon-Nikodým παράγωγος του Q_{X_1} ως προς το P_{X_1}, και P_{Θ}-σ.β. μοναδική θετική Radon-Nikodým παράγωγος ξ του Q_{Θ} ως προς το P_{Θ} ώστε

$$Q(A) = \int_A \xi(\Theta) \cdot \frac{e^{\sum_{j=1}^{N_t} \gamma(X_j)} \cdot e^{-t\rho(\Theta)} \cdot \rho(\Theta)^{N_t}}{\prod_{j=1}^{N_t} [\mathbf{K}(\Theta)]'(W_j) \cdot (1 - \mathbf{K}(\Theta))(t - T_{N_t})} \, dP \tag{5.2}$$

για όλα τα $0 \leqslant u \leqslant t$ και $A \in \mathcal{F}_u^{(S,\Theta)}$. Έστω α μία πραγματική $\mathfrak{B}(D)$-μετρήσιμη συνάρτηση με $\alpha(\theta) := \ln \rho(\theta) - \ln \mathbb{E}_{P_\theta}[N_1]$ για κάθε $\theta \in D$, και θέτουμε $\beta := \gamma + \alpha$. Ως εκ τούτου $\beta \in \widetilde{\mathcal{F}}^{\ell}_{P,\Theta}$ και ισχύει η συνθήκη (5.1). Η τελευταία, μαζί με την συνθήκη (5.2) συνεπάγεται την συνθήκη (RPM_ξ).

(ii): Έστω $\beta := \gamma + \alpha \in \widetilde{\mathcal{F}}^{\ell}_{P,\Theta}$ για $\ell = 1, 2$ και έστω ξ είναι μία P_{Θ}-σ.β. θετική συνάρτηση τέτοια ώστε $\mathbb{E}_P[\xi(\Theta)] = 1$. Ορίζουμε την $\mathfrak{B}(D)$-$\mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρήσιμη συνάρτηση ρ μέσω του τύπου $\rho(\theta) := e^{\alpha(\theta)} \cdot \mathbb{E}_{P_\theta}[N_1]$ για κάθε $\theta \in D$. Το τελευταίο μαζί με την [17], Lemma 3.5, συνεπάγεται ότι $\rho(\Theta) = e^{\alpha(\Theta)} \cdot \mathbb{E}_P[N_1|\Theta]$ $P \restriction \sigma(\Theta)$-a.s.. Εφαρμόζοντας τώρα το Θεώρημα 5.3.6 (ii) για την συνάρτηση $\gamma = \beta - \alpha$ παίρνουμε το μοναδικό μέτρο πιθανότητας $Q \in \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\Theta)),Q_{X_1}}$ που ικανοποιεί την (RRM_ξ) ή την ισοδύναμη συνθήκη (RPM_ξ). □

Πόρισμα 5.3.10. *Έστω $D := \Upsilon$ και έστω $P \in \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{Exp}(\Theta),P_{X_1}}$ για $\ell = 1, 2$. Ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) για κάθε $\mathfrak{B}(D)$-$\mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρήσιμη συνάρτηση ρ, και για κάθε μέτρο πιθανότητας $Q \in \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\Theta))}$, υπάρχει μία P_{Θ}-σ.β. μοναδική θετική Radon-Nikodým παράγωγος ξ του Q_{Θ} ως προς το P_{Θ}, και μία $P_{(X_1,\Theta)}$-σ.β. μοναδική συνάρτηση $\beta \in \widetilde{\mathcal{F}}^{\ell}_{P,\Theta}$ ικανοποιώντας μαζί με ρ και Q τις συνθήκες (5.1) και

$$Q(A) = \int_A \xi(\Theta) \cdot m_t^{\beta}(\Theta) \, dP \quad \text{για κάθε } 0 \leqslant u \leqslant t \text{ και } A \in \mathcal{F}_u^{(S,\Theta)}, \tag{PPM_ξ}$$

όπου $m_t^{\beta}(\Theta) := e^{\sum_{j=1}^{N_t} \beta(X_j,\Theta) - t \cdot (\rho(\Theta) - \Theta)}$,

(ii) αντίστροφα, για κάθε συνάρτηση $\beta \in \widetilde{\mathcal{F}}^{\ell}_{P,\Theta}$ και για κάθε P_{Θ}-σ.β. θετική συνάρτηση ξ με $\mathbb{E}_P[\xi(\Theta)] = 1$ υπάρχει μία μοναδική $\mathfrak{B}(D)$-$\mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρήσιμη συνάρτηση ρ και μοναδικό μέτρο πιθανότητας $Q \in \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\Theta))}$ ικανοποιώντας μαζί με β και ξ τις συνθήκες (5.1) και (PPM_ξ).

Η απόδειξη του Πορίσματος 5.3.10 προκύπτει με τον ίδιο τρόπο όπως η απόδειξη του Πορίσματος 5.3.9, πρέπει μόνο να αντικαταστήσουμε $\mathbf{K}(\Theta)$ με $\mathbf{Exp}(\Theta)$.

Σημείωση: Η ειδική περίπτωση του Πορίσματος 5.3.10 για $\ell = 1$ είναι το κύριο αποτέλεσμα της [2], Θεώρημα 4.8.

Στο ακόλουθο παράδειγμα, δείχνουμε πώς ξεκινώντας από κάποιες συγκεκριμένες συναρτήσεις β και ξ, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα μέτρο πιθανότητας $Q \in \widetilde{\mathcal{M}}^{\ell}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\Theta))}$, μετατρέποντας μια σύνθετη μεικτή ανανεωτική διαδικασία S σε μία σύνθετη μεικτή Poisson, πιο συγκεκριμένα σε ένα σύνθετο Pólya-Lundberg.

Παράδειγμα 5.3.11. Παίρνουμε $D := \Upsilon$, και έστω $\Theta \in \mathcal{L}^1(P)$ μια θετική τυχαία μεταβλητή κατανεμημένη σύμφωνα με κάποιο νόμο $\mathbf{G}$. Επιπλέον, θεωρούμε ότι η $\mathbf{G}$ είναι απολύτως συνεχής ως προς το $\lambda \upharpoonright \mathfrak{B}(\Upsilon)$ και ότι η επαγόμενη συνάρτηση κατανομής είναι μία συνεχώς διαφορήσιμη με θετική παράγωγο g στο Υ. Ορίζουμε την $\mathfrak{B}(\Upsilon)$-$\mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρήσιμη συνάρτηση ξ ώστε $\xi(\theta) := \frac{b^a\cdot\theta^{a-1}\cdot e^{-b\cdot\theta}}{\Gamma(a)\cdot g(\theta)}$ για κάθε $\theta \in \Upsilon$. Εφαρμόζοντας την [17], Lemma 3.5, παίρνουμε ότι $\xi(\Theta) = \frac{b^a\cdot\Theta^{a-1}\cdot e^{-b\cdot\Theta}}{\Gamma(a)\cdot g(\Theta)}$ $P \upharpoonright \sigma(\Theta)$-σ.β.. Σαφώς, $\mathbb{E}_P[\xi(\Theta)] = 1$. Θεωρούμε την συνάρτηση $\beta(x,\theta) := \gamma(x) + \ln\frac{\theta}{\mathbb{E}_{P_\theta}[N_1]}$ για κάθε $x \in \Upsilon$ και $\theta \in \Upsilon$, με $\gamma \in \mathcal{F}^{\ell}_{P,\ln}$ για $\ell = 1,2$ και $\alpha(\theta) := \ln\frac{\theta}{\mathbb{E}_{P_\theta}[N_1]}$ για κάθε $\theta \in \Upsilon$. Σαφώς, $\beta \in \widetilde{\mathcal{F}}^{\ell}_{P,\Theta}$ για $\ell = 1,2$. Ορίζουμε την $\mathfrak{B}(\Upsilon)$-$\mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρήσιμη συνάρτηση ρ, ώστε $\rho(\theta) := e^{\alpha(\theta)}\cdot\mathbb{E}_{P_\theta}[N_1] = \theta$ για κάθε $\theta \in \Upsilon$. Ως εκ τούτου, σύμφωνα με την [17], Lemma 3.5, $\rho(\Theta) = \Theta$ $P \upharpoonright \sigma(\Theta)$-σ.β.. Εφαρμόζοντας τώρα το Πόρισμα 5.3.9 παίρνουμε ότι υπάρχει ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας $Q \in \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{Exp}(\Theta)}$ που ικανοποιεί την (RPM_ξ) και

$$Q_\Theta(B) = \mathbb{E}_P[\chi_{\Theta^{-1}(B)}\cdot\xi(\Theta)] = \int_B \frac{b^a\theta^{a-1}}{\Gamma(a)}\cdot e^{-b\theta}\,\lambda(d\theta) \quad \text{για κάθε } B \in \mathfrak{B}(\Upsilon).$$

Άρα η τυχαία μεταβλητή Θ ικανοποιεί την συνθήκη $Q_\Theta = \mathbf{Ga}(b,a)$. Κατά συνέπεια, η διαδικασία S είναι Pólya-Lundberg.

Το παρακάτω παράδειγμα δείχνει πως παίρνουμε ένα μέτρο πιθανότητας Q τέτοιο ώστε S να είναι σύνθετη Poisson-Lognormal διαδικασία. Ας θυμηθούμε την log-Normal κατανομή με παραμέτρους $a \in \mathbb{R}$ και $b \in \Upsilon$ ($\mathbf{LN}(a,b)$ για συντομία), δηλαδή

$$\mathbf{LN}(a,b)(B) := \int_B \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot b\cdot x}\, e^{-\frac{(\ln x - a)^2}{2b^2}}\,\lambda(dx) \ \text{ για κάθε } \ B \in \mathfrak{B}.$$

Παράδειγμα 5.3.12. Έστω $D := \mathbb{R}$, έστω $\rho : \mathbb{R} \longmapsto \Upsilon$ $\mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρήσιμη συνάρτηση, και έστω $P \in \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{K}(\Theta),P_{X_1}}$ για $\ell = 1,2$, όπου $\Theta : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ είναι μία τυχαία μεταβλητή, και υποθέτουμε ότι η κατανομή πιθανότητας P_Θ είναι απολύτως συνεχής ως προς το $\lambda \upharpoonright \mathfrak{B}$. Συμβολίζουμε με $g_\Theta : \mathbb{R} \longmapsto \Upsilon$ τη συνάρτηση πυκνότητας του Θ και έστω $\xi : \mathbb{R} \longmapsto \Upsilon$ μια συνάρτηση που ορίζεται μέσω του

$$\xi(\theta) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\cdot g_\Theta(\theta)}\cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\cdot(\theta-\mu)^2} \quad \text{για κάθε } \theta \in \mathbb{R}$$

όπου $\mu \in \mathbb{R}$ και $\sigma \in \Upsilon$ είναι σταθερές σταθερές. Ορίζουμε επίσης την τυχαία μεταβλητή

$$\xi(\Theta) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma \cdot g_\Theta(\Theta)} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\cdot(\Theta-\mu)^2}.$$

Σαφώς, $\mathbb{E}_P[\xi(\Theta)] = 1$. Θεωρούμε την συνάρτηση $\beta := \gamma + \alpha$ επάνω στο $\Upsilon \times \mathbb{R}$, με $\gamma \in \mathcal{F}^\ell_{P,\ln}$ και $\alpha(\theta) := \theta - \ln \mathbb{E}_{P_\theta}[N_1]$ για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$. Σαφώς, $\beta \in \widetilde{\mathcal{F}}^\ell_{P,\Theta}$. Εφαρμόζοντας το Πόρισμα 5.3.9 παίρνουμε ότι $\rho(\theta) = e^\theta$ για κάθε $\theta \in D$, και ότι υπάρχει ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας $Q \in \mathcal{M}^\ell_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\Theta))}$ που ικανοποιεί (RPM_ξ) και

$$Q_\Theta(B) = \mathbb{E}_P[\chi_{\Theta^{-1}(B)} \cdot \xi(\Theta)] = \int_B \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\cdot(\theta-\mu)^2}\,\lambda(d\theta) \quad \text{για κάθε } B \in \mathfrak{B},$$

επομένως η τυχαία μεταβλητή Θ ικανοποιεί την συνθήκη $Q_\Theta = \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$. Συνεπώς, $Q_{\rho(\Theta)} = \mathbf{LN}(\mu, \sigma^2)$ και η διαδικασία S είναι σύνθετη Poisson-Lognormal.

5.4 Σύνθετες μεικτές ανανεωτικές διαδικασίες και Martingales

Σε αυτή την ενότητα δείχνουμε ότι σε μία αγορά χωρίς κερδοσκοπία μια μελέτη μέσω martingale στις αρχές υπολογισμού των ασφαλίστρων οδηγεί στην περίπτωση σύνθετων μεικτών ανανεωτικών διαδικασιών σε σύνθετες μεικτές διαδικασίες Poisson, δημιουργώντας έτσι μια μέθοδο για την εξεύρεση (προοδευτικά) ισοδύναμων μέτρων martingale για τη διαδικασία $V^\Theta := \{S_t - \mathbb{E}_P[S_1 \mid \Theta] \cdot t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Σημειώνουμε ότι η V^Θ είναι καλά ορισμένη πραγματική σ.δ. δεδομένου ότι για κάθε μεικτή ανανεωτική διαδικασία N έχουμε $\mathbb{E}_P[N_t] < \infty$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ (βλ. π.χ. [13], Θεώρημα 3.1) και $X_1 \in \mathcal{L}^1(P)$.

Ορισμός 5.4.1. Έστω Q να είναι ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στη Σ και έστω $V := \{V_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μία διαδικασία επάνω στο Ω. Τότε το Q λέμε ότι είναι

(a) ένα **martingale μέτρο για την** V εάν η Vείναι $(Q, \mathcal{F}^S)$-martingale,

(b) ένα **ισοδύναμο** (resp. **προοδευτικά ισοδύναμο**) **martingale μέτρο** για την V εάν

(em1) $Q \sim P$ (resp. $Q \overset{pr}{\sim} P$),

(em2) η διαδικασία V είναι $(Q, \mathcal{F}^S)$-martingale.

Θεώρημα 5.4.2. *Έστω $P \in \mathcal{M}^1_{S,\mathbf{K}(\Theta)}$, και έστω $V^\Theta := \{V^\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+} := \{S_t - t\cdot\mathbb{E}_P[S_1 \mid \Theta]\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και $V^\theta := \{V^\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+} := \{S_t - t \cdot \mathbb{E}_{P_\theta}[S_1]\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Τα ακόλουθα είναι όλα ισοδύναμα* *(i)* V^{Θ} *είναι* $(P, \mathcal{F}^{(S,\Theta)})$*-martingale,*

(ii) $P \in \mathcal{M}^1_{S,\mathbf{Exp}(\Theta)}$*,*

(iii) $P_\theta \in \mathcal{M}^1_{S,\mathbf{Exp}(\theta)}$ *για* P_Θ*-σ.π.* $\theta \in \Upsilon$*,*

(iv) V^{θ} *είναι* $(P_\theta, \mathcal{F}^{(S,\Theta)})$*-martingale για* P_Θ*-σ.π.* $\theta \in \Upsilon$*.*

Απόδειξη. Η ισοδυναμία των ισχυρισμών (ii) και (iii) είναι άμεση από την [18], Proposition 3.8, και το βήμα (b) απο την απόδειξη της Πρότασης 5.2.5, ενώ η ισοδυναμία των ισχυρισμών (iii) και (iv) προκύπτουν απο το Θεώρημα 4.3.2.

$(i) \Longrightarrow (ii)$: Αφού η V^{Θ} είναι $(P, \mathcal{F}^{(S,\Theta)})$-martingale είναι εύκολο να δειχθεί ότι $\mathbb{E}_P[V_t^{\Theta}] = 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, άρα $\mathbb{E}_P[S_t \mid \Theta] = \mathbb{E}_P[S_1 \mid \Theta] \cdot t$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, ή ισοδύναμα $\mathbb{E}_P[N_t \mid \Theta] = \mathbb{E}_P[N_1 \mid \Theta] \cdot t$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$. Εφαρμόζοντας τώρα [17], Lemma 2.5 (i), παίρνουμε ότι $\mathbb{E}_{P_\theta}[N_t] = \mathbb{E}_{P_\theta}[N_1] \cdot t$ για P_Θ-σ.π. $\theta \in \Upsilon$. Αλλά αφού η N είναι P_θ-MRP$(\mathbf{K}(\theta))$ για P_Θ-σ.π. $\theta \in \Upsilon$ (βλ. [18], Proposition 3.8) που ικανοποιεί την συνθήκη $\mathbb{E}_{P_\theta}[N_t] = \mathbb{E}_{P_\theta}[N_1] \cdot t$ για P_Θ-σ.π. $\theta \in \Upsilon$, παίρνουμε ότι η N είναι P_θ-PP(θ) για P_Θ-σ.π. $\theta \in \Upsilon$ (βλ. απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.2). Ως εκ τούτου $P_\theta \in \mathcal{M}^1_{S,\mathbf{Exp}(\theta)}$ για P_Θ-σ.π. $\theta \in \Upsilon$ ή ισοδύναμα $P \in \mathcal{M}^1_{S,\mathbf{Exp}(\Theta)}$.

$(ii) \Longrightarrow (i)$: Αφού οι ισχυρισμοί (ii) και (iv) είναι ισοδύναμοι παίρνουμε ότι η V^{θ} είναι $(P_\theta, \mathcal{F}^{(S,\Theta)})$-martingale για P_Θ-σ.π. $\theta \in \Upsilon$. Εφαρμόζοντας τώρα την [17], Lemma 3.6, παίρνουμε το (i). □

Θεώρημα 5.4.3. *Έστω* $P \in \mathcal{M}^1_{S,\mathbf{Exp}(\Theta)}$*, και έστω* $V := \{V_t\}_{t\in\mathbb{R}_+} := \{S_t - t \cdot \mathbb{E}_P[S_1]\}_{t\in\mathbb{R}_+}$*. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

(i) η V *είναι* $(P, \mathcal{F}^{(S,\Theta)})$*-martingale,*

(ii) η Θ *είναι εκφυλισμένη.*

Απόδειξη. $(i) \Longrightarrow (ii)$: Αφού η V είναι $(P, \mathcal{F}^{(S,\Theta)})$-martingale, για κάθε $t \geqslant u \geqslant 0$ παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_P[S_t - S_u \mid \Theta] &= \mathbb{E}_P[\mathbb{E}_P[S_t - S_u \mid \mathcal{F}_u^{(S,\Theta)}] \mid \Theta] \\
&= \mathbb{E}_P[\mathbb{E}_P[S_t - t \cdot \mathbb{E}_P[S_1] - S_u - u \cdot \mathbb{E}_P[S_1] + (t-u) \cdot \mathbb{E}_P[S_1] \mid \mathcal{F}_u^{(S,\Theta)}] \mid \Theta] \\
&= \mathbb{E}_P[\mathbb{E}_P[(t-u) \cdot \mathbb{E}_P[S_1] \mid \mathcal{F}_u^{(S,\Theta)}] \mid \Theta] = (t-u) \cdot \mathbb{E}_P[S_1],
\end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα προκύπτει απο το γεγονός ότι $\sigma(\Theta) \subseteq \mathcal{F}_t^{(S,\Theta)}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, ως εκ τούτου $\mathbb{E}_P[S_t - S_u \mid \Theta] = (t-u) \cdot \mathbb{E}_P[N_1] \cdot \mathbb{E}_P[X_1]$. Επιπλέον, αφού η S είναι μία P-CMPP(Θ, P_{X_1}) προκύπτει ότι $\mathbb{E}_P[S_t - S_u \mid \Theta] = (t-u) \cdot \Theta \cdot \mathbb{E}_P[X_1]$. Έτσι, παίρνουμε ότι

$(t-u) \cdot \mathbb{E}_P[N_1] \cdot \mathbb{E}_P[X_1] = (t-u) \cdot \Theta \cdot \mathbb{E}_P[X_1]$ ή ισοδύναμα ότι $\Theta = \mathbb{E}_P[N_1] \in \Upsilon$ έτσι προκύπτει το (ii).

$(ii) \Longrightarrow (i)$: Σαφώς, εάν Θ είναι μία εκφυλισμένη, η S είναι σύνθετη Poisson. Εφαρμόζοντας τώρα το Θεώρημα 4.3.2 προκύπτει το (i). $\square$

5.5 Εφαρμογές στις αρχές υπολογισμού ασφαλίστρου

Έστω $P \in \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{K}(\Theta)}$ για $\ell = 1, 2$. Έχουμε δει ότι αυτό το μέτρο πιθανότητας P μπορεί να αντικατασταθεί από ένα άλλο μέτρο πιθανότητας Q τέτοιο ώστε P και Q είναι προοδευτικά ισοδύναμα και η S να μετατρέπεται σε σύνθετη μεικτή διαδικασία Poisson κάτω απο το Q. Η ιδέα είναι να ορίσουμε ένα μέτρο πιθανότητας Q προκειμένου να δοθεί μεγαλύτερο βάρος σε λιγότερο ευνοϊκά γεγονότα. Αυτό οδηγεί στον ακόλουθο ορισμό των αρχών υπολογισμού του ασφαλίστρου.

Ορισμός 5.5.1. (Delbaen, F. & Haezendonck, J. [10], Definition 3.1) **Μία αρχή υπολογισμού ασφαλίστρου** (premium calculation principle) είναι μέτρο πιθανότητας Q επάνω στη Σ τέτοιο ώστε

(i) $Q \overset{pr}{\sim} P$,

(ii) η S να είναι Q-σύνθετη μεικτή διαδικασία Poisson,

(iii) $\mathbb{E}_Q[X_1] < \infty$.

Σαφώς, ο παραπάνω ορισμός αποκλείει το μέτρο πιθανότητας Q που συζητήθηκε παραπάνω, καθώς αυτό θα σήμαινε στην περίπτωση μας ότι η τυχαία μεταβλητή Θ θα πρέπει να εκφυλιστεί. Αλλά λαμβάνοντας υπόψη το Λήμμα 5.2.3, έπεται ότι μπορούμε να αποκτήσουμε μια ολόκληρη οικογένεια $\{Q_\theta\}_{\theta \in D}$ των μέτρων πιθανοτήτων που είναι αρχές υπολογισμού των ασφαλίστρων. Πιο συγκεκριμένα, το Q πρέπει να οριστεί με τέτοιο τρόπο όπου $\mathbb{E}_{P_\theta}[S_t] \leqslant \mathbb{E}_{Q_\theta}[S_t]$ για κάθε $t \geqslant 0$ και για P_Θ-σ.π. $\theta \in D$, όπου $\{P_\theta\}_{\theta \in D}$ είναι μία φ.δ.π. του P επάνω στο P_Θ συνεπής με το Θ .

Ας θεωρήσουμε, ότι έχουμε κατασκευάσει ένα μέτρο πιθανότητας $Q \in \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\Theta))}$ για $\ell = 1, 2$, και έστω $\{Q_\theta\}_{\theta \in D}$ μια οικογένεια των αρχών υπολογισμού των ασφαλίστρων. Η αντίστοιχη πυκνότητα ασφαλίστρου $p(Q_\theta) := E_{Q_\theta}[S_1]$ για Q_Θ-σ.π. $\theta \in D$ δίνεται από $p(Q_\theta) = \mathbb{E}_{P_\theta}[N_1] \cdot \mathbb{E}_{P_\theta}[X_1 \cdot e^{\beta(X_1,\theta)}]$ για P_Θ-σ.π. $\theta \in D$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_P[S_t] &= \mathbb{E}_P\left[\mathbb{E}_P[S_t \mid \Theta]\right] = \int_\Omega \mathbb{E}_P[S_t \mid \Theta]\, dP = \int_\Omega \mathbb{E}_{P_\bullet}[S_t] \circ \Theta\, dP \\
&= \int_D \mathbb{E}_{P_\theta}[S_t]\, P_\Theta(d\theta) \leqslant \int_D \frac{\mathbb{E}_{Q_\theta}[S_t]}{\xi(\theta)}\, Q_\Theta(d\theta) \\
&= \int_D \frac{\mathbb{E}_{Q_\theta}[N_t] \cdot \mathbb{E}_{Q_\theta}[X_1]}{\xi(\theta)}\, Q_\Theta(d\theta) = \mathbb{E}_Q[X_1] \cdot \int_D \frac{\mathbb{E}_{Q_\theta}[N_t]}{\xi(\theta)}\, Q_\Theta(d\theta) \\
&= \mathbb{E}_Q[X_1] \cdot \mathbb{E}_Q\left[\frac{\mathbb{E}_Q[N_t \mid \Theta]}{\xi(\Theta)}\right] = \mathbb{E}_Q[X_1] \cdot \mathbb{E}_Q\left[\frac{\rho(\Theta)}{\xi(\Theta)}\right] \cdot t
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 5.5.2. Έστω $D := \Upsilon^2$ και $\Theta : \Omega \longmapsto D$ ένα 2-διάστατο τυχαίο διάνυσμα που ορίζεται μέσω του $\Theta(\omega) = (\Theta_1(\omega), \Theta_2(\omega))$, όπου Θ_1 και Θ_2 είναι θετικές τυχαίες μεταβλητές επάνω στο Ω, έστω $\eta = (2, \zeta_1) \in \mathbb{N} \times \Upsilon$, και έστω $P \in \mathcal{M}^\ell_{S,\mathbf{K}(\Theta),\mathbf{Ga}(\eta)}$ για $\ell = 1, 2$ τέτοιο ώστε

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+ \quad \mathbf{K}(\Theta)(t) := \frac{1}{2} \cdot \Theta_1 \cdot e^{-t\Theta_1} + \frac{1}{2} \cdot \Theta_2 \cdot e^{-t\Theta_2} \quad P \upharpoonright \sigma(\Theta)\text{-σ.β..}$$

Επιπλέον, θεωρούμε ότι το P_Θ είναι απόλυτα συνεχές ως προς το $\lambda \upharpoonright \mathfrak{B}(D)$ και συμβολίζουμε με $f_\Theta : D \longmapsto \Upsilon$ την αντίστοιχη συνάρτηση πυκνότητας, και έστω $\{P_\theta\}_{\theta \in D}$ να είναι μία φ.δ.π. του P επάνω στο P_Θ συνεπής με το Θ .

Έστω $\xi : D \longmapsto \Upsilon$ μία συνάρτηση που ορίζεται μέσω του

$$\xi(\theta) := \xi(\theta_1, \theta_2) := \frac{b_1 \cdot b_2}{f_\Theta(\theta)} \cdot e^{-b_1\theta_1 - b_2\theta_2} \quad \text{για κάθε } \theta \in D$$

όπου $b_1, b_2 \in \Upsilon$ είναι σταθερές σταθερές, και θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή

$$\xi(\Theta) := \xi(\Theta_1, \Theta_2) := \frac{b_1 \cdot b_2}{f_\Theta(\Theta)} \cdot e^{-b_1\Theta_1 - b_2\Theta_2}.$$

Σαφώς $\mathbb{E}_P[\xi(\Theta)] = 1$.

Θεωρούμε την πραγματική συνάρτηση $\beta := \gamma + \alpha$ επάνω στο $\Upsilon \times D$, με $\gamma(x) := \ln \frac{\mathbb{E}_P[X_1]}{2c} - \ln x + \frac{2(c-1)}{c\mathbb{E}_P[X_1]} \cdot x$ για κάθε $x \in \Upsilon$ με $c > 2$ μια πραγματική σταθερά και $\alpha(\theta) := \ln \frac{\theta_1 + \theta_2}{2\mathbb{E}_{P_\theta}[N_1]}$ για P_Θ-σ.π. $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in D$.

Εφαρμόζοντας τυπικούς υπολογισμούς παίρνουμε ότι $\mathbb{E}_P[e^{\gamma(X_1)}] = 1$ και $\mathbb{E}_P[X_1^2 \cdot e^{\gamma(X_1)}] = \frac{2c^2}{\zeta_1} < \infty$ άρα $\gamma \in \mathcal{F}^\ell_{P,\ln}$, ως εκ τούτου $\beta_\theta \in \widetilde{\mathcal{F}}^\ell_{P,\theta}$. Εφαρμόζοντας τώρα το Πόρισμα 5.3.9 παίρνουμε ότι ότι υπάρχει μια μοναδική $\mathfrak{B}(D)$-$\mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρήσιμη συνάρτηση $\rho : D \longmapsto \Upsilon$ τέτοια ώστε $\rho(\theta) := \mathbb{E}_{P_\theta}[N_1] \cdot e^{\alpha(\theta)} = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$ και $\rho(\Theta) := \frac{\Theta_1 + \Theta_2}{2}$, ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας $Q \in \mathcal{M}^\ell_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\Theta))}$ που ικανοποιεί την συνθήκη (RPM_ξ), και μια ουσιαστικά μοναδική οικογένεια αρχών υπολογισμού ασφαλίστρων $Q_\theta \in \mathcal{M}^\ell_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\theta)),}$ για P_Θ-σ.π. $\theta \in D$ τέτοια ώστε για κάθε $u \in [0, t]$ και $A \in \mathcal{F}^S_u$

$$Q_\theta(A) = \int_A e^{\sum_{j=1}^{N_t} \beta(X_j,\theta) - t \cdot e^{\alpha(\theta)} \cdot \mathbb{E}_{P_\theta}[N_1]} \cdot \frac{(t \cdot \mathbb{E}_{P_\theta}[N_1])^{N_t} / N_t!}{\mathbf{K}^{*N_t}(\theta)(t) - \mathbf{K}^{*(N_t+1)}(\theta)(t)}\, dP_\theta.$$

για P_Θ-σ.π. $\theta \in D$. Επιπλέον, για κάθε $B \in \mathfrak{B}(D)$ παίρνουμε

$$Q_\Theta(B) = \mathbb{E}_P[\chi_{\Theta^{-1}(B)} \cdot \xi(\Theta)] = \int_B b_1 \cdot b_2 \cdot e^{-b_1\theta_1 - b_2\theta_2}\, \lambda(d\theta_2)\, \lambda(d\theta_1)$$

ενώ, για P_Θ-σ.π. $\theta \in D$ ακαι για κάθε $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ παίρνουμε

$$Q_{X_1}(B) = (Q_\theta)_{X_1}(B) = \mathbb{E}_P[\chi_{X_1^{-1}(B)} \cdot e^{\gamma(X_1)}] = \int_B \frac{\zeta_1}{c} \cdot e^{-\frac{\zeta_1}{c}\cdot x}\, \lambda(dx).$$

Το τελευταίο αυτό συνεπάγεται ότι $Q_{X_1} = \mathbf{Exp}(\frac{\zeta_1}{c})$, ως εκ τούτου $Q \in \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\Theta)),\mathbf{Exp}(\frac{\zeta_1}{c})}$ και $Q_\theta \in \mathcal{M}^{\ell}_{S,\mathbf{Exp}(\rho(\theta)),\mathbf{Exp}(\frac{\zeta_1}{c})}$ για P_Θ-σ.π. $\theta \in D$.

Εφαρμόζοντας τυπικούς υπολογισμούς παίρνουμε ότι

$$\mathbb{E}_{P_\theta}[N_t] = \frac{2 \cdot \theta_1 \cdot \theta_2}{\theta_1 + \theta_2} \cdot t + \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{\theta_1 + \theta_2}\right)^2 \cdot (1 - e^{-\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\cdot t}) \leqslant \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \cdot t = \mathbb{E}_{Q_\theta}[N_t]$$

για κάθε P_Θ-σ.π. $\theta \in D$ και για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, όπου η ανισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι $1 - e^{-x} \leqslant x$ για κάθε $x \in (-1, \infty)$. Το τελευταίο, μαζί με το γεγονός ότι $\mathbb{E}_{Q_\theta}[X_1] = \frac{c}{\zeta_1} > \frac{2}{\zeta_1} = \mathbb{E}_{P_\theta}[X_1]$ για P_Θ-σ.π. $\theta \in D$, συνεπάγεται ότι $\mathbb{E}_{Q_\theta}[S_t] \geqslant \mathbb{E}_{P_\theta}[S_t]$ για P_Θ-σ.π. $\theta \in D$ και για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$.

Παραρτήματα

Παράρτημα A

Στοιχεία Θεωρίας Μέτρου

Στο παράρτημα αυτό αναφέρονται βασικές έννοιες της θεωρίας μέτρου που χρειαζόμαστε στην μελέτη των κατανομών Hofmann. Για τις έννοιες που δεν αναφέρονται εδώ, παραπέμπουμε στο [3], Κεφάλαια 1 και 2.

A.1 Χρήσιμες έννοιες και ορισμοί

Ορισμός A.1.1. Έστω Ω οποιοδήποτε σύνολο. Μία οικογένεια $\mathcal{A}$ υποσυνόλων του Ω ονομάζεται **άλγεβρα** στο Ω, αν

(i) $\Omega \in \mathcal{A}$

(ii) $\forall A \in \mathcal{A}$, $A^c \in \mathcal{A}$

(iii) $\forall A, B \in \mathcal{A}$, $A \cup B \in \mathcal{A}$.

Ορισμός A.1.2. Έστω (Ω, Σ, P) και (Υ, T, Q) δύο χ.π. και $\mathcal{G} := \{A \times B : \ A \in \Sigma, \ B \in T\}$.

(a) Η οικογένεια $\Sigma \otimes T := \sigma(\mathcal{G})$ ονομάζεται η **σ-άλγεβρα γινόμενο** της Σ και T.

(b) Για κάθε $E \subseteq \Omega \times \Upsilon$, και $x \in \Omega$ και $y \in \Upsilon$ αυθαίρετα αλλά σταθερά, τα σύνολα

$$E_x := \{\bar{y} \in \Upsilon : (x, \bar{y}) \in E\}$$

και

$$E^y := \{\bar{x} \in \Omega : (\bar{x}, y) \in E\}$$

ονομάζονται η **x-τομή** και η **y-τομή** (x-section and y-section) του E, αντίστοιχα.

(c) Αν η $f : \Omega \times \Upsilon \longmapsto \mathbb{R}$ είναι οποιαδήποτε συνάρτηση και τα $x \in \Omega$ και $y \in \Upsilon$ είναι αυθαίρετα αλλά σταθερά, τότε οι συναρτήσεις

$$f_x : \Upsilon \longmapsto \mathbb{R} : \bar{y} \longmapsto f_x(\bar{y}) := f(x, \bar{y})$$

και

$$f^y : \Omega \longmapsto \mathbb{R} : \bar{x} \longmapsto f^y(\bar{x}) := f(\bar{x}, y)$$

ονομάζονται η **x-τομή** της f και η **y-τομή** της f, αντίστοιχα.

Λήμμα A.1.3. *Έστω (Ω, Σ) και (Υ, T) μετρήσιμοι χώροι. Τότε ισχύει:*

1. *Για κάθε $E \in \Sigma \otimes T$ και για κάθε $x \in \Omega$ και $y \in \Upsilon$ έχουμε $E_x \in T$ και $E^y \in \Sigma$.*

2. *Για κάθε $\Sigma \otimes T$- μετρήσιμη συνάρτηση $f : \Omega \times \Upsilon \longmapsto \mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \Omega$ και $y \in \Upsilon$ οι συναρτήσεις $f_x : \Upsilon \longmapsto \mathbb{R}$ και $f^y : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ είναι T- και Σ- μετρήσιμες, αντίστοιχα.*

Θεώρημα A.1.4. *(Fubini για δείκτριες συναρτήσεις) Έστω (Ω, Σ, P) και (Υ, T, Q) χ.π., και $E \in \Sigma \otimes T$ αυθαίρετο αλλά σταθερό. Τότε η συνάρτηση $Q(E_\bullet) : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ με $x \longmapsto Q(E_x)$ είναι Σ-μετρήσιμη και η συνάρτηση $P(E^\bullet) : \Upsilon \longmapsto \mathbb{R}$ με $y \longmapsto P(E^y)$ είναι T-μετρήσιμη και ισχύει*

$$\int_\Omega Q(E_x)P(dx) = \int_\Upsilon P(E^y)Q(dy). \tag{A.1}$$

Θεώρημα A.1.5. *(Ύπαρξη και μοναδικότητα του μέτρου γινόμενο) Έστω (Ω, Σ, P) και (Υ, T, Q) χ.π. Τότε υπάρχει ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας $P \otimes Q : \ \Sigma \otimes T \longmapsto [0, 1]$ ώστε*

$$(P \otimes Q)(A \times B) = P(A)Q(B)$$

για κάθε $A \in \Sigma$ και $B \in T$. Το μέτρο $P \otimes Q$ ονομάζεται το **μέτρο γινόμενο** *των P και Q, Επιπλέον, για κάθε $E \in \Sigma \otimes T$ ισχύει*

$$(P \otimes Q)(E) = \int_\Omega Q(E_x)P(dx) = \int_\Upsilon P(E^y)Q(dy).$$

Για τις αποδείξεις των τριών τελευταίων αποτελεσμάτων βλ. π.χ. [9], Θεώρημα 5.1.3.

Θεώρημα A.1.6. *(Fubini για μη αρνητικές συναρτήσεις) Έστω (Ω, Σ, P) και (Υ, T, Q) χ.π.. Για κάθε $f : \Omega \times \Upsilon \longmapsto [0, \infty] \quad \Sigma \otimes T - \mathfrak{B}([0, \infty])$-μετρήσιμη συνάρτηση θέτουμε*

$$\varphi_f : \Omega \longmapsto [0, \infty] \quad \text{με} \quad \varphi_f(x) := \int_\Upsilon f_x(y)Q(dy)$$

και

$$\psi_f : \Upsilon \longmapsto [0, \infty] \quad \text{με} \quad \psi_f(y) := \int_\Omega f^y(x)Q(dx).$$

Τότε η φ_f *είναι* $\Sigma - \mathfrak{B}([0,\infty])$*-μετρήσιμη, η η* ψ_f *είναι* $T - \mathfrak{B}([0,\infty])$*-μετρήσιμη και ισχύει*

$$\int_{\Omega\times\Upsilon} f dP \otimes Q = \int_{\Omega} \varphi_f dP = \int_{\Upsilon} \psi_f dQ$$

δηλαδή

Για την απόδειξη βλ. [9], Proposition 5.2.1.

Θεώρημα Α.1.7. *(Fubini) Έστω* (Ω,Σ,P) *και* (Υ,T,Q) *χ.π. και* $f : \Omega\times\Upsilon \longmapsto \overline{\mathbb{R}}$ *me* $f \in \mathcal{L}^1(P\otimes Q)$*. Τότε*

1.
$$f_x \in \mathcal{L}^1(Q), \quad \text{για} \quad P-\sigma.o. \quad \text{τα} \quad x\in\Omega$$
και
$$f^y \in \mathcal{L}^1(P), \quad \text{για} \quad Q-\sigma.o. \quad \text{τα} \quad y\in\Upsilon,$$

2. *οι συναρτήσεις* $\varphi_f : \Omega \longmapsto \overline{\mathbb{R}}$ *με* $\varphi_f(x) := \begin{cases} \int_\Upsilon f_x(y)Q(dy), & \text{αν} \quad f_x \in \mathcal{L}^1(Q) \\ 0, & \text{αλλιώς}, \end{cases}$ *και* $\psi_f : \Upsilon \longmapsto \overline{\mathbb{R}}$ *με* $\psi_f(y) := \begin{cases} \int_\Omega f^y(x)P(dx), & \text{αν} \quad f^y \in \mathcal{L}^1(P) \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$ *ανήκουν στον* $\mathcal{L}^1(P)$ *και* $\mathcal{L}^1(Q)$*, αντίστοιχα,*

3. *ισχύει*
$$\int_{\Omega\times\Upsilon} f d(P\otimes Q) = \int_{\Omega} \varphi_f dP = \int_{\Upsilon} \psi_f dQ$$
δηλαδή
$$\begin{aligned} \int_{\Omega\times\Upsilon} f d(P\otimes Q) &= \int_\Omega \int_\Upsilon f(x,y)Q(dy)P(dx) \\ &= \int_\Upsilon \int_\Omega f(x,y)P(dx)Q(dy) \end{aligned}$$
όπου θέτουμε
$$\int_\Upsilon f(x,y)Q(dy) = 0, \quad \text{αν} \quad f_x \notin \mathcal{L}^1(Q)$$
και
$$\int_\Omega f(x,y)P(dx) = 0, \quad \text{αν} \quad f^y \notin \mathcal{L}^1(P).$$

Για την απόδειξη βλ. [9] Θεώρημα 5.2.2.

A.2 Το Θεώρημα Μονότονης Κλάσης

Λήμμα A.2.1. *(βλ. π.χ. Fremlin [12],Lemma 136A). Έστω Ω ένα σύνολο και $\mathcal{D}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του Ω. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) **(Dyn1)** $\Omega \in \mathcal{D}$
(Dyn2) $B\backslash A \in \mathcal{D}$, *για* $A, B \in \mathcal{D}$ *και* $A \subseteq B$
(Dyn3) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$, *για κάθε αύξουσα ακολουθία* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *υποσυνόλων στο* $\mathcal{D}$.

(ii) **(Dyn1)** $\varnothing \in \mathcal{D}$
(Dyn2) $\Omega\backslash A \in \mathcal{D}$, *για κάθε* $A \in \mathcal{D}$
(Dyn3) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$, *για κάθε ακολουθία* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ξένων ανά δύο υποσυνόλων στο* $\mathcal{D}$.

Ορισμός A.2.2. Εάν ένα σύνολο $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ικανοποιεί τις συνθήκες (i) ή (ii) του Λήμματος A.2.1 τότε λέγεται ***κλάση Dynkin*** υποσυνόλων του Ω.

Παραδείγματα A.2.3. **(a)** Ας υποθέσουμε ότι το περιεχόμενο μ του δακτύλιου $\mathbb{R}$ στον Ω είναι πεπερασμένο, αυτό είναι, $\mu(A) < +\infty$ για κάθε $A \in \mathbb{R}$. Η σ-πεπεραστικότητα του μ είναι το ισοδύναμο της ύπαρξης ενός διαδοχικού καλύμματος (A_n) του Ω με τα σύνολα $A_n \in \mathbb{R}$. Αλλά η τελευταία προϋπόθεση δεν ισχύει αυτόματα, όπως φαίνεται στο παράδειγμα $\Omega \neq \varnothing, \mathbb{R} := \{\varnothing\}$.

Γενικά, η σ-πεπεραστικότητα του μ του δακτύλιου $\mathbb{R}$ είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη ακολουθίας (A'_n) των συνόλων στο $\mathbb{R}$ με $\mu(A'_n) < +\infty$ για όλα τα n και $A'_n \uparrow \Omega$. Στην πραγματικότητα, εάν το (A_n) είναι απλώς ένα κάλυμμα του Ω των συνόλων στο $\mathbb{R}$ έχοντας πεπερασμένο μ-μέτρο, τότε τα σύνολα $A'_n := A_1 \cup ... \cup A_n, n \in \mathbb{N}$, παρέχει μια ακολουθία του επιθυμητού είδους.

(b) Η πρόβλεψη Lebesgue στο $\mathbb{R}^d$ είναι σ-πεπερασμένη (καθώς και πεπερασμένη). Αν υποδηλώσουμε με n το σημείο στο $\mathbb{R}^d$ των οποίων οι συντεταγμένες είναι όλες ίσες με n τότε, $I_n := [-n, n]$ είναι ένα διάστημα από $\Phi^d, \lambda^d(I_n) < +\infty (n \in \mathbb{N})$, και $I_n \uparrow \mathbb{R}^d$.

Θεώρημα Μονότονης Κλάσης A.2.4. *(βλ. π.χ. Fremlin [12], 136B). Έστω Ω ένα σύνολο και $\mathcal{D}$ μία κλάση Dynkin υποσυνόλων του Ω. Υποθέτουμε ότι το σύνολο $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{D}$ είναι τέτοιο, ώστε $I \cap J \in \mathcal{I}$ για όλα τα $I, J \in \mathcal{I}$. Τότε η $\mathcal{D}$ περιέχει την $\sigma(\mathcal{I})$.*

Απόδειξη Αυτό που πρέπει να αποδειχθεί είναι ότι κάθε σύστημα Dynkin $\mathcal{D}$ που είναι κλειστό κάτω από πεπερασμένες διασταυρώσεις είναι μια σ-άλγεβρα. Σύμφωνα με την (i) (Dyn2) έχουμε, $A\backslash B = A\backslash(A \cap B) \in \mathcal{D}$ όταν τα $A, B \in \mathcal{D}$. Αφού $(A\backslash B) \cap B = \varnothing$ και $A \cup B = (A\backslash B) \cup B$, η οικογένεια $\mathcal{D}$ περιέχει την ένωση οποιωνδήποτε δύο, επομένως την ένωση οποιωνδήποτε πεπερασμένων από τα στοιχεία της. Για οποιαδήποτε ακολουθία $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων της $\mathcal{D}$, έχουμε

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} (D'_{n+1} \backslash D'_n)$$

όπου $D'_0 := \emptyset$ και $D'_n := D_1 \cup ... \cup D_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τα σύνολα $D'_{n+1} \backslash D'_n$ είναι ξένα μεταξύ τους χάρη στο (i) (Dyn2) και ανήκουν στην $\mathcal{D}$. Σύμφωνα με το (ii) (Dyn3) τότε η ένωση των συνόλων D_n είναι στοιχείο της $\mathcal{D}$. □

Παρατήρηση A.2.5. Η ονομασία κλάση Dynkin ή σύστημα Dynkin έχει προταθεί απο τον H. Bauer (βλ. [8]) προς τιμήν του E.B. Dynkin (1924-2014), ο οποίος χρησιμοποιεί αυτή την έννοια με την ονομασία λ-σύστημα στο βιβλίο του για στοχαστικές διαδικασίες (1959). Αυτά τα συστήματα συνόλων είχαν ήδη χρησιμοποιηθεί από τον W. Sierpinski (βλ. [25], σελ. 710-714).

Πόρισμα A.2.6. *(βλ. π.χ. Fremlin [12],Corallary 136C). Έστω Ω ένα σύνολο και μ,ν δύο μέτρα στο Ω με πεδία ορισμού τις σ-άλγεβρες Σ και T αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι $\mu(\Omega)=\nu(\Omega) < \infty$ και ότι η οικογένεια $\mathcal{I} \subseteq \Sigma \cap T$ είναι κλειστή ως προς τις πεπερασμένες τομές, ώστε $\mu(I)=\nu(I)$ για κάθε $I \in \mathcal{I}$. Τότε*
$\mu|\sigma(\mathcal{I}) = \nu|\sigma(\mathcal{I})$.

Πόρισμα A.2.7. *(βλ. π.χ. Fremlin [12],Corallary 136D). Έστω μ και ν δύο μέτρα στον $\mathbb{R}^d$, όπου $d \geqslant 1$, ώστε να ορίζονται και να συμπίπτουν επάνω σε όλα τα διαστήματα της μορφής*

$$(-\infty, a] = \{x : x \leqslant a\} = \{(x_1, ..., x_d) : x_i \leqslant a_i, \forall i \leqslant d\}$$

για $a := (a_1, ..., a_d) \in \mathbb{R}^d$. Υποθέτουμε ότι $\mu(\mathbb{R}^d) < \infty$. Τότε τα μ και ν συμπίπτουν επάνω στην $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$.

Θεώρημα A.2.8. *(βλ. π.χ. Fremlin [12],Theorem 136E). Έστω ένα σύνολο Ω και $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα υποσυνόλων του Ω. Υποθέτουμε $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ είναι μία οικογένεια συνόλων τέτοια ώστε*

- *(α) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{E}$ για κάθε αύξουσα ακολουθία $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στην $\mathcal{E}$,*
- *(β) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{E}$ για κάθε φθίνουσα ακολουθία $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στην $\mathcal{E}$,*
- *(γ) $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}$.*

Τότε η $\mathcal{E}$ περιέχει την σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω που παράγεται απο την $\mathcal{A}$.

Σημειώσεις και Σχόλια A.2.9. (α) Τα Θεωρήματα A.2.4 και A.2.8 σχετίζονται με το ερώτημα : αν $\mathcal{I}$ είναι μία οικογένεια υποσυνόλων ενός συνόλου Ω, τί πράξεις πρέπει να κάνουμε για να χτίσουμε την σ-άλγεβρα που παράγεται απο το $\mathcal{I}$; Για αυθαίρετο $\mathcal{I}$, χρειάζονται τα συμπληρώματα και οι ενώσεις ακολουθιών. Τα παραπάνω Θεωρήματα μας λένε οτι, αν το $\mathcal{I}$ έχει μία κάποια (αλγεβρική) δομή, τότε μπορούμε να χτίσουμε την $\sigma(\mathcal{I})$ με λιγότερες πράξεις, π.χ. αν το $\mathcal{I}$ είναι μια άλγεβρα υποσυνόλων τότε οι μονοτονικές ενώσεις και τομές είναι αρκετές.

(β) Το Θεώρημα Α.2.8 υπάρχει σε μία παρόμοια μορφή στον J. von Neumann [21] σελ. 87 Theorem 10.1.3. Ο A. Rosenthal ([22] σελ.970-971) χρησιμοποιεί διάφορους δυνατούς ορισμούς των συνόλων Borel και παρατηρεί ότι ο H. Lebesgue είχε ήδη αποδείξει μία μορφή του Θεωρήματος Α.2.8 για $\Omega = \mathbb{R}^d$ και $\mathcal{I}_d$ την οικογένεια των ανοικτών υποσυνόλων του $\Omega = \mathbb{R}^d$, το 1905.

Για αναλυτικές αποδείξεις του Παραρτήματος Α.2 βλ. [6], Παράρτημα Β΄.

Παράρτημα B

Στοιχεία Θεωρίας Πιθανοτήτων

Στο παράρτημα αυτό δίνονται ορισμένοι βασικοί ορισμοί της Θεωρίας Πιθανοτήτων καθώς και οι κατανομές πιθανότητας που αναφέρθηκαν στην παρούσα εργασία.

B.1 Χρήσιμοι Ορισμοί

Ορισμός B.1.1. Η συνάρτηση $\Gamma : (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$ που δίνεται από την

$$\Gamma(\gamma) := \int_0^\infty e^{-x} x^{\gamma-1} dx$$

ονομάζεται **συνάρτηση Γάμμα**.

Η συνάρτηση Γάμμα έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

$$\begin{aligned} \Gamma(1/2) &= \sqrt{\pi} \\ \Gamma(1) &= 1 \\ \Gamma(\gamma+1) &= \gamma\Gamma(\gamma) \end{aligned}$$

Επιπλέον για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ ισχύει

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{B.1}$$

Δηλαδή, οι τιμές της Γάμμα για $n \in \mathbb{N}_0$, αντιστοιχούν σε παραγωντικά.

Ορισμός B.1.2. Η συνάρτηση $B : (0, \infty) \times (0, \infty)$ που δίνεται από την

$$B(\alpha, \beta) := \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx$$

ονομάζεται **συνάρτηση Βήτα**.

Η θεμελιώδης ταυτότητα για την συνάρτηση Βήτα είναι

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

από την οποία συμπεραίνουμε ότι όλες οι ιδιότητες της συνάρτησης Βήτα εξαρτώνται απο την συνάρτηση Γαμμα.

Ορισμός Β.1.3. Για $\alpha \in \mathbb{R}$ και $m \in \mathbb{N}_0$ ο γενικευμένος διωνυμικός συντελεστής ορίζεται να είναι

$$\binom{\alpha}{m} := \prod_{j=0}^{m-1} \frac{a-j}{m-j}. \tag{B.2}$$

Πόρισμα Β.1.4. *Για $\alpha \in (0, \infty)$ και $m \in \mathbb{N}_0$, από τις ιδιότητες της συνάρτησης Γάμμα ισχύει*

$$\binom{a+m-1}{m} = \frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(a)m!} \tag{B.3}$$

Απόδειξη. Για $\alpha \in (0, \infty)$ και $m \in \mathbb{N}_0$ ισχύει

$$\begin{aligned}
\binom{a+m-1}{m} &= \prod_{j=0}^{m-1} \frac{a+m-1-j}{m-j} = \frac{a(a+1)(a+2)\dots(a+m-1)}{1\cdot 2\cdots m} \\
&= \frac{1\cdot 2\cdots(a-1)\cdot a\cdot(a+1)\dots(a+m-1)}{1\cdot 2\cdots(a-1)\cdot m!} = \frac{(a+m-1)!}{(a-1)!\cdot m!} \\
&= \frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(a)m!}.
\end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα είναι συνέπεια του ορισμού του διωνυμικου συντελεστή και η τελευταία απο την ιδιότητα (Β.1) της συνάρτησης Γάμμα. □

Ορισμός Β.1.5. Έστω (Ω, Σ, P) ένας χ.π. Για μια πραγματική τ.μ X: $\Omega \to \mathbb{R}$ η συνολοσυνάρτηση $P_X : \mathfrak{B} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$P_X(B) := P(X^{-1}(B)) \quad \text{για κάθε} \quad B \in \mathfrak{B}$$

είναι ένα μέτρο πιθανότητας και ονομάζεται **κατανομή πιθανότητας της τ.μ. X**. Μάλιστα, αν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $P_X(\{x\}) = 1$, τότε η P_X ονομάζεται **εκφυλισμένη κατανομή (πιθανότητας)** (degenerate (probability) distribution).

Η P_X (αντίστοιχα η πραγματική τ.μ. X) παράγει την **συνάρτηση κατανομής** (*σ.κ.*) $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ **της τ.μ.** X, που ορίζεται από τον τύπο:

$$F_X(x) := P_X((-\infty, x]) = P(X \leqslant x) \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Από Πρόταση 1.4.9, [3], αποδεικνύεται πως η F_X είναι πράγματι *σ.κ.* Αξίζει να σημειωθεί επίσης πως η *σ.κ.* F_X μιας τ.μ. Χ ικανοποιεί τη σχέση:

$$P_X(B) = P(X \in B) = \lambda_{F_X}(B) \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}, B \in \mathfrak{B}.$$

όπου $\lambda_{F_X}(B)$ είναι μέτρο Lebesgue-Stieltjes που επάγεται από την F_X (βλ. π.χ [3], Πρόταση 1.4.10).

Μια (σ.κ.) $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ονομάζεται:

- **Διακριτή** αν και μόνο αν είναι της μορφής

$$F(x) = \sum_{k \in K : k \leqslant x} f(k) \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}$$

  για κάποιο αριθμήσιμο σύνολο $K \subseteq \mathbb{R}$ και για κάποια Borel μετρήσιμη συνάρτηση $f : K \to \mathbb{R}_+$. Η f ονομάζεται με τη σειρά της **συνάρτηση πιθανότητας** (σ.π.) της F.

- **Συνεχής** αν η F είναι συνεχής συνάρτηση.

- **Απόλυτα Συνεχής** αν είναι της μορφής:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R},$$

  για κάποια Borel μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ με την ιδιότητα $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$. Η f ονομάζεται με τη σειρά της **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας** (σ.π.π.).

Προφανώς, αν η τ.μ. X είναι απόλυτα συνεχής, τότε θα είναι και συνεχής. Επειδή στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε μόνο με (διακριτές και) απόλυτα συνεχείς τ.μ., στο εξής γράφοντας συνεχής τ.μ. θα εννοούμε απόλυτα συνεχής τ.μ. Επίσης θα λέμε ότι η τ.μ. X με σύνολο τιμών R_X ακολουθεί την κατανομή $\mathbf{K}(\theta)$ με παραμετρικό διάνυσμα $\theta := (\theta_1, \ldots, \theta_m) \in \Theta$, όπου $m \in \mathbb{N}$ και $\Theta \subseteq \mathbb{R}^m$, και θα συμβολίζουμε για το αντίστοιχο μέτρο πιθανότητας $P_X = \mathbf{K}(\theta)$ αν και μόνο αν

$$P_X(B) = \int_B f_X(x)\chi_{R_X} d\nu(x) = \int_{B \cap R_X} f_X(x) d\nu(x) \quad \text{για κάθε} \quad B \in \mathfrak{B}$$

όπου f_X η αντίστοιχη σ.(π.)π., και ν το αριθμητικό μέτρο επάνω στο $\mathbb{N}_0$ ή το μέτρο του Lebesgue λ επάνω στο $\mathbb{R}$ ανάλογα με το αν η τ.μ. X είναι συνεχής ή διακριτή.
Αν η τ.μ. X είναι διακριτή, τότε το ολοκλήρωμα γίνεται άθροισμα ή σειρά, ανάλογα με το αν το R_X είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο, αντίστοιχα.

Ορισμός Β.1.6. Για μια τ.μ. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ το ολοκλήρωμα

$$\mathbb{E}_P[X] := \int X dP = \int_\Omega X(\omega)P(d\omega) = \int_\Omega X(\omega)dP(\omega)$$

ονομάζεται η **μέση τιμή** ή **αναμενόμενη τιμή** ή **μαθηματική ελπίδα** της τ.μ. X. Για λόγους απλοποίησης μπορούμε να γράψουμε $\mathbb{E}[X]$ αντί $\mathbb{E}_P[X]$. Ειδικά αν η τ.μ. $X \in \mathcal{L}^1(P)$ τότε η $\mathbb{E}[X] \in \mathbb{R}$, και είναι ένας αριθμός.

Ορισμός Β.1.7. Έστω (Ω, Σ, P) και (Υ, T, Q) χ.π. Ένα $R \subseteq \Omega \times \Upsilon$ ονομάζεται **μετρήσιμο ορθογώνιο του** $\Omega \times \Upsilon$ αν γράφεται $R = A \times B$, όπου $A \in \Sigma$ και $B \in T$. Επιπρόσθετα, η σ-άλγεβρα που παράγεται από την οικογένεια των μετρήσιμων ορθογωνίων λέγεται **σ-άλγεβρα γινόμενο** των Σ και T και συμβολίζεται με $\Sigma \otimes T$.

Έστω επίσης ο χ.π. $(\Omega \times \Upsilon, \Sigma \otimes T, \rho)$. Το μέτρο ρ ονομάζεται **μέτρο γινόμενο των** P **και** Q και συμβολίζεται με $P \otimes Q$, αν και μόνο αν για κάθε $A \in \Sigma$ και $B \in T$ ικανοποιεί την ιδιότητα $\rho(A \times B) = P(A)Q(B)$. Η τριάδα $(\Omega \times \Upsilon, \Sigma \otimes T, P \otimes Q)$ ονομάζεται **χ.π. γινόμενο**.

Ορισμός Β.1.8. Εάν I είναι ένα οποιοδήποτε μή κενό σύνολο δεικτών, και $\{\Omega_i, \Sigma_i, P_i\}_{i\in I}$ είναι μια οικογένεια χ.π., τότε για κάθε $\varnothing \neq J \subseteq I$ συμβολίζουμε με $(\Omega_J, \Sigma_J, P_J)$ τον χ.π. γινόμενο $\otimes_{i\in J}(\Omega_i, \Sigma_i, P_i) := (\prod_{i\in J} \Omega_i \otimes_{i\in J} \Sigma_i \otimes_{i\in J} P_i)$. Αν (Ω, Σ, P) είναι ένας χ.π. συμβολίζουμε με P^I την **πιθανότητα γινόμενο** στον Ω^I και με Σ^I το πεδίο ορισμού του P^I.

Ορισμοί Β.1.9. Τα ενδεχόμενα $A_1, \ldots, A_n \in \Sigma \quad (n \in \mathbb{N}_0 : n \geqslant 2)$ ονομάζονται **ανεξάρτητα** αν και μόνο αν $P\left(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^k P(A_{i_j})$ για κάθε $1 \leqslant i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_k \leqslant n$ και για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Ομοίως, οι τ.μ. $X_1, \ldots, X_n : \Omega \to \mathbb{R} \quad (n \in \mathbb{N}_0 : n \geqslant 2)$ ονομάζονται **ανεξάρτητες** αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}_n}$ πραγματικών αριθμών, τα ενδεχόμενα $\{X_k \leqslant \alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}_n}$ είναι ανεξάρτητα. Ισοδύναμα, οι τ.μ. $X_1, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $\{B_k\}_{k\in\mathbb{N}_n}$ στοιχείων της $\mathfrak{B}$ τα ενδεχόμενα $\{X_k \in B_k\}_{k\in\mathbb{N}_n}$ είναι ανεξάρτητα (βλ. π.χ.[3], Παρατήρηση 3.2.5 (b)). Ακόμη πιο γενικά, μια άπειρη οικογένεια τ.μ. ονομάζεται **ανεξάρτητη** αν και μόνο αν κάθε πεπερασμένη υποοικογένειά της είναι ανεξάρτητη.

Οι σ-υποάλγεβρες $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n \quad (n \in \mathbb{N}_0 : n \geqslant 2)$ της Σ ονομάζονται **ανεξάρτητες** αν και μόνο αν για κάθε $k \in \mathbb{N}_n$ και για κάθε $A_k \in \Sigma_k$ τα $A_1, \ldots, A_n$ είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα. Γενικότερα, μια άπειρη οικογένεια σ-υποαλγεβρών της Σ ονομάζεται **οικογένεια ανεξάρτητων σ-υποαλγεβρών της** Σ αν και μόνο αν οποιεσδήποτε πεπερασμένες στο πλήθος από αυτές, είναι ανεξάρτητες.

Ορισμοί Β.1.10. Μια σ.δ. $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$:

- Είναι μια ***σ.δ.* ανεξάρτητων προσαυξήσεων** ή έχει **ανεξάρτητες προσαυξήσεις** αν και μόνο αν για κάθε $m \in \mathbb{N}$, $t_0, t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$ ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ οι **προσαυξήσεις** $X_{t_j} - X_{t_{j-1}}$ $(j \in \mathbb{N}_m)$ είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες.

- Είναι μια ***σ.δ.* στάσιμων προσαυξήσεων** ή έχει **στάσιμες προσαυξήσεις** αν και μόνο αν για κάθε $m \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{R}_+$ και $t_0, t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $0 = t_0 <$

$t_1 < \cdots < t_m$ η οικογένεια των προσαυξήσεων $\{X_{t_j+h} - X_{t_{j-1}+h}\}_{j \in \mathbb{N}_m}$, έχει την ίδια κατανομή με την $\{X_{t_j} - X_{t_{j-1}}\}_{j \in \mathbb{N}_m}$.

Συμβολίζουμε με $\boldsymbol{\xi} : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ **το μέτρο απαρίθμησης** που συγκεντρώνεται στο $\mathbb{N}_0$, και με $\boldsymbol{\lambda} : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ **το μέτρο Lebesgue**. Τα μέτρα αυτά είναι σ-πεπερασμένα, και τα πιο σημαντικά μέτρα πιθανότητας με πεδίο ορισμού την $\mathfrak{B}$ είναι απόλυτα συνεχή με τα $\boldsymbol{\xi}$ και $\boldsymbol{\lambda}$.
Για $n \in \mathbb{N}_0$, συμβολίζουμε με $\boldsymbol{\lambda}^n : \mathfrak{B}_n \longrightarrow \mathbb{R}$ το n-διάστατο μέτρο Lebesgue.

B.2 Γενικές έννοιες στις κατανομές

Ένα μέτρο πιθανότητας $Q : \mathfrak{B}_n \longrightarrow [0,1]$ ονομάζεται **κατανομή** (distribution).
Μια κατανομή ονομάζεται **εκφυλισμένη** (degenerate) αν υπάρχει $y \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε

$$Q(\{y\}) = 1.$$

Στην συνέχεια του παρόντος παραρτήματος θεωρούμε μόνο κατανομές με πεδίο ορισμού το $\mathfrak{B}$.

Για $y \in \mathbb{R}$, η **κατανομή Dirac** δ_y ορίζεται να είναι η (εκφυλισμένη) κατανομή Q που ικανοποιεί την

$$Q(\{y\}) = 1.$$

Λόγω του ιδιαίτερου ρόλου της κατανομής Dirac, όλες οι παραμετρικές κλάσεις των κατανομών που μελετούνται παρακάτω ορίζονται ως μη-εκφυλισμένες κατανομές.

Θεωρούμε τις κατανομές $Q, R : \mathfrak{B} \longrightarrow [0,1]$.

Μέση Τιμή και Ροπές ανώτερης τάξης

Ορισμός B.2.1. Αν

$$\min\left\{\int_{(-\infty,0]} (-x)Q(dx), \int_{\mathbb{R}_+} xQ(dx)\right\} < \infty,$$

τότε **η μέση τιμή** της Q υπάρχει και ορίζεται από την σχέση

$$E[Q] := \int_{\mathbb{R}} xQ(dx).$$

Αν

$$\max\left\{\int_{(-\infty,0]} (-x)Q(dx), \int_{\mathbb{R}_+} xQ(dx)\right\} < \infty,$$

ή ισοδύναμα

$$\int_{\mathbb{R}} |x|Q(dx) < \infty$$

τότε η μέση τιμή της Q υπάρχει και ονομάζεται **πεπερασμένη μέση τιμή**.

Ορισμός B.2.2. Αν για κάποιο $n \in \mathbb{N}_0$ ισχύει

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^n Q(dx) < \infty,$$

τότε λέμε ότι η Q έχει **πεπερασμένη ροπή τάξης n** ή έχει **n−οστή ροπή** που ορίζεται από την σχέση

$$E[Q^n] = \int_{\mathbb{R}} x^n Q(dx).$$

Η κατανομή Q λέμε ότι έχει πεπερασμένες ροπές τάξης k αν η ανισότητα

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^n Q(dx) < \infty$$

ισχύει για όλα τα $n \in \mathbb{N}_0$.
Αποδεικνύεται εύκολα ότι αν η Q έχει πεπερασμένη ροπή τάξης n, τότε έχει πεπερασμένη ροπή τάξης k για όλα τα $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Διακύμανση και Συντελεστής μεταβλητότητας

Ορισμός B.2.3. Αν η Q έχει πεπερασμένη μέση τιμή, τότε **η διακύμανση** της Q ορίζεται να είναι

$$Var[Q] := \int_{\mathbb{R}} (x - E[Q])^2 Q(dx).$$

Προφανώς ισχύει

$$Var[Q] = E[Q^2] - E[Q]^2.$$

Ορισμός B.2.4. Αν για την Q ισχύει ότι $Q[\mathbb{R}_+ = 1$ και $E[Q] \in (0, \infty)$,τότε **ο συντελεστής μεταβλητότητας** της Q ορίζεται από την σχέση

$$v[Q] := \frac{\sqrt{Var[Q]}}{E[Q]}.$$

Χαρακτηριστική συνάρτηση

Ορισμός B.2.5. Η χαρακτηριστική συνάρτηση ή **ο μετασχηματισμός Fourier** της κατανομής Q ορίζεται ως η συνάρτηση $\varphi_Q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ που δίνεται από την

$$\varphi_Q(z) := \int_{\mathbb{R}} e^{izx} Q(dx)$$

με $\varphi_Q(0) = 1$.

Ένα αποτέλεσμα των μετασχηματισμών Fourier είναι ότι η κατανομή Q είναι μονοσήμαντα ορισμένη απο την χαρακτηριστική της συνάρτηση φ_Q.

Ροπογεννήτρια συνάρτηση

Ορισμός Β.2.6. Η ροπογεννήτρια συνάρτηση της κατανομής Q ορίζεται ως η συνάρτηση $M_Q : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty]$ που δίνεται από την

$$M_Q(z) := \int_{\mathbb{R}} e^{zx} Q(dx)$$

με $M_Q(0) = 1$.

Αν η ροπογεννήτρια συνάρτηση της Q είναι πεπερασμένη σε μια περιοχή γύρω από το μηδέν, τότε η Q έχει πεπερασμένες ροπές κάθε τάξης και για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ ισχύει

$$\frac{d^n M_Q}{dz^n}(0) = \int_{\mathbb{R}} x^n Q(dx). \tag{B.4}$$

Πιθανογεννήτρια συνάρτηση

Ορισμός Β.2.7. Αν $Q[\mathbb{N}_0] = 1$ τότε **η πιθανογεννήτρια συνάρτηση** της κατανομής Q ορίζεται ως η συνάρτηση $m_Q : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ που δίνεται από την

$$\begin{aligned} m_Q(z) &:= \int_{\mathbb{R}} z^x Q(dx) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n Q[\{n\}]. \end{aligned}$$

Επειδή για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ ισχύει

$$\frac{1}{n!} \frac{d^n m_Q}{dz^n}(0) = Q[\{n\}], \tag{B.5}$$

η κατανομή Q είναι μονοσήμαντα ορισμένη απο την πιθανογεννήτρια συνάρτησή της m_Q.

Πρόταση Β.2.8. *Έστω ότι $Q[\mathbb{N}_0] = 1$. Τότε οι δύο πρώτες ροπές της κατανομής Q υπολογίζονται άμεσα από την πιθανογεννήτρια συνάρτηση σύμφωνα με τις σχέσεις*

$$E[Q] = \frac{d}{dz} m_Q(z) \bigg|_{z=1} \tag{B.6}$$

$$E[Q^2] = \frac{d^2}{dz^2} m_Q(z) \bigg|_{z=1} + \frac{d}{dz} m_Q(z) \bigg|_{z=1} \tag{B.7}$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με τον Ορισμό Β.2.7 ισχύει

$$m_Q(z) = \int_{\mathbb{R}} z^x Q(dx)$$

επομένως αν παραγωγίσουμε ως προς z θα ισχύει

$$\frac{d}{dz} m_Q(z) = \int_{\mathbb{R}} x z^{x-1} Q(dx)$$

άρα για $z = 1$ θα έχουμε ότι

$$\frac{d}{dz} m_Q(z)\bigg|_{z=1} = \int_{\mathbb{R}} x Q(dx) = E[Q].$$

Αν βρούμε και την δεύτερη παράγωγο της πιθανογεννήτριας συνάρτησης ως προς z θα ισχύει

$$\frac{d^2}{dz^2} m_Q(z) = \int_{\mathbb{R}} x(x-1) z^{x-2} Q(dx)$$

άρα για $z = 1$ θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dz^2} m_Q(z)\bigg|_{z=1} &= \int_{\mathbb{R}} x(x-1) Q(dx) \\
&= \int_{\mathbb{R}} x^2 Q(dx) - \int_{\mathbb{R}} x Q(dx) \\
&= E[Q^2] - E[Q]
\end{aligned}$$

επομένως για την δεύτερη ροπή θα ισχύει

$$\begin{aligned}
E[Q^2] &= \frac{d^2}{dz^2} m_Q(z)\bigg|_{z=1} + E[Q] \\
&= \frac{d^2}{dz^2} m_Q(z)\bigg|_{z=1} + \frac{d}{dz} m_Q(z)\bigg|_{z=1}
\end{aligned}$$

□

Συνέλιξη

Ορισμός B.2.9. Αν η $+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι μια απεικόνιση με $+(x, y) := x + y$, τότε η

$$Q * R := (Q \otimes R)_+$$

είναι μια κατανομή, η οποία ονομάζεται η **συνέλιξη** των Q και R, όπου Q και R είναι κατανομές επάνω στη $\mathfrak{B}$.

Οι παρακάτω δύο προτάσεις είναι άμεσες συνέπειες του Ορισμού B.2.9 και του Θεωρήματος Fubini για μέτρα (βλ. Θεώρημα A.1.5).

Πρόταση B.2.10. *Η ισότητα*

$$(Q * R)(B) = \int_{\mathbb{R}} Q(B - y) R(dy)$$

ισχύει για κάθε $B \in \mathfrak{B}$. Ιδιαιτέρως ισχύει

$$(Q * \delta_y)(B) = (\delta_y * Q)(B) = Q(B - y)$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}$ και $b \in \mathfrak{B}$.

Απόδειξη. Έστω $B \in \mathfrak{B}$. Τότε

$$\begin{aligned}(Q * R)(B) &= (Q \otimes R)_+(B) \\ &:= (Q \otimes R)(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \in B\}) \\ &= \int_{\mathbb{R}} Q(\{x \in \mathbb{R} : x \in B - y\})R(dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}} Q(B-y)R(dy),\end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισότητα είναι συνέπεια του Θεωρήματος Α.1.5.

Ιδιαιτέρώς για οποιαδήποτε $y \in \mathbb{R}$ και $B \in \mathfrak{B}$ έχουμε:

$$\begin{aligned}(Q * \delta_y)(B) &= (\delta_y * Q)(B) \\ &= (Q \otimes \delta_y)_+(B) \\ &= Q \otimes \delta_y(\{(x,\bar{y}) \in \mathbb{R}^2 : x + \bar{y} \in B\}) \\ &= \int_{\mathbb{R}} Q(B-\bar{y})\delta_y(d\bar{y}) \\ &= Q(B-y),\end{aligned}$$

όπου η πρώτη και η τέταρτη ισότητα είναι συνέπεια του Θεωρήματος Α.1.5. □

Πρόταση Β.2.11. *Η συνέλιξη ικανοποιεί τις ισότητες*

$$Q * R = R * Q$$

$$\varphi_{Q*R} = \varphi_Q \cdot \varphi_R$$

$$M_{Q*R} = M_Q \cdot M_R$$

Αν $Q[\mathbb{N}_0] = 1 = R[\mathbb{N}_0]$, *τότε ισχύει*

$$m_{Q*R} = m_Q \cdot m_R.$$

Πρόταση Β.2.12. *Αν οι κατανομές* Q *και* R *έχουν πεπερασμένη μέση τιμή τότε ισχύει*

$$E[Q * R] = E[Q] + E[R]$$

και αν επιπλέον έχουν και πεπερασμένες δεύτερες ροπές τότε

$$Var[Q * R] = Var[Q] + Var[R].$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με την Πρόταση Β.2.12 για την ροπογεννήτρια της $Q * R$ ισχύει $M_{Q*R} = M_Q \cdot M_R$. Επιπλέον από την Β.4 ισχύει ότι

$$E[Q * R] = \frac{dM_{Q*R}}{dz}(0), \quad \mathbb{E}[(Q * R)^2] = \frac{d^2 M_{Q*R}}{dz^2}(0).$$

Επομένως θα ισχύει

$$M'_{Q*R}(z) = \Big(M_Q(z) \cdot M_R(z)\Big)' = M'_Q(z)M_R(z) + M_Q(z)M'_R(z)$$
$$M''_{Q*R}(z) = \Big(M_Q(z) \cdot M_R(z)\Big)'' = M''_Q(z)M_R(z) + 2M'_Q(z)M'_R(z) + M_Q(z)M''_R(z)$$

και άρα θα ισχύει

$$E[Q * R] = M'_{Q*R}(0) = E[Q] + E[R]$$
$$\mathbb{E}[(Q * R)^2] = M''_{Q*R}(0)E[Q^2] + 2E[Q]E[R] + E[R^2].$$

Επομένως για την διακύμανση θα ισχύει

$$\begin{aligned} Var[Q * R] &= \mathbb{E}[(Q * R)^2] - E[Q * R]^2 \\ &= E[Q^2] + 2E[Q]E[R] + E[R^2] - E[Q]^2 - 2E[Q]E[R] - E[R]^2 \\ &= E[Q^2] - E[Q]^2 + E[R^2] - E[R]^2 \\ &= Var[Q] + Var[R] \end{aligned}$$

□

Πρόταση B.2.13. *Αν* $Q = \int f\, d\nu$ *και* $R = \int g\, d\nu$ *για* $\nu \in \{\xi, \lambda\}$, *τότε* $Q * R = \int f * g\, d\nu$, *όπου η απεικόνιση* $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *ορίζεται*

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y)\nu(dy).$$

Απόδειξη. Από την Πρόταση B.2.10, για κάθε $B \in \mathfrak{B}$ θα ισχύει

$$\begin{aligned} [Q * R](B) &= \int_{\mathbb{R}} Q[B - y]R(dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{B-y} f(x)\nu(dx)\ g(y)\nu(dy) \end{aligned}$$

□

Ορισμός B.2.14. Για $n \in \mathbb{N}_0$, η ***n*-οστή συνέλιξη** της Q όριζεται από την σχέση

$$Q^{*n} := \begin{cases} \delta_0, & \text{αν } n = 0 \\ Q * Q^{*(n-1)}, & \text{αν } n \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

Αν η $Q = \int f\, d\nu$, για $\nu \in \{\xi, \lambda\}$, τότε η συνάρτηση πιθανότητας της Q^{*n} ως προς το μέτρο ν συμβολίζεται f^{*n}.

B.3 Διακριτές κατανομές

Ορισμός B.3.1. Μια κατανομή $Q : \mathfrak{B} \longrightarrow [0,1]$ ονομάζεται **διακριτή**, αν υπάρχει ένα αριθμήσιμο σύνολο $S \in \mathfrak{B}$ που ικανιποιεί την $Q[S] = 1$. Αν $Q[\mathbb{N}_0] = 1$, τότε η Q είναι απόλυτα συνεχής ως προς το μέτρο απαρίθμισης $\boldsymbol{\xi}$.

Η διωνυμική κατανομή

Ορισμός B.3.2. Για $m \in \mathbb{N}_0$ και $\theta \in (0,1)$, η **διωνυμική κατανομή** $\mathbf{B}(m,\theta)$ ορίζεται να είναι η κατανομή Q που για κάθε $x \in \{0,1,\ldots,m\}$ ικανοποιεί την σχέση

$$Q[\{x\}] = \binom{m}{x}\theta^x(1-\theta)^{m-x}.$$

Βασικά μεγέθη κατανομής:

- Μέση τιμή:
$$E[Q] = m\theta$$
- Διακύμανση:
$$Var[Q] = m\theta(1-\theta)$$
- Χαρακτηριστική συνάρτηση:
$$\varphi_Q(z) = \big((1-\theta) + \theta e^{iz}\big)^m$$
- Ροπογεννήτρια συνάρτηση:
$$M_Q(z) = ((1-\theta) + \theta e^z)^m$$
- Πιθανογεννήτρια συνάρτηση:
$$m_Q(z) = ((1-\theta) + \theta z)^m$$

Ειδική περίπτωση: **Η κατανομή Bernoulli** με $\mathbf{B}(\theta) := \mathbf{B}(1,\theta)$

Η αρνητική διωνυμική κατανομή

Ορισμός B.3.3. Για $\alpha \in (0,\infty)$ και $\theta \in (0,1)$, **η αρνητική διωνυμική κατανομή** $\mathbf{NB}(\alpha,\theta)$ ορίζεται να είναι η κατανομή Q που για κάθε $x \in \mathbb{N}_0$ ικανοποιεί την σχέση

$$Q[\{x\}] = \binom{\alpha+x-1}{x}\theta^\alpha(1-\theta)^x.$$

Βασικά μεγέθη κατανομής:

- Μέση τιμή:
$$E[Q] = \alpha\frac{1-\theta}{\theta}$$
- Διακύμανση:
$$Var[Q] = \alpha\frac{1-\theta}{\theta^2}$$
- Χαρακτηριστική συνάρτηση:
$$\varphi_Q(z) = \left(\frac{\theta}{1-(1-\theta)e^{iz}}\right)^{\alpha}$$
- Ροπογεννήτρια συνάρτηση:
$$M_Q(z) = \left(\frac{\theta}{1-(1-\theta)e^{z}}\right)^{\alpha} \quad \forall z \in (-\infty, -\ln(1-\theta))$$
- Πιθανογεννήτρια συνάρτηση:
$$m_Q(z) = \left(\frac{\theta}{1-(1-\theta)z}\right)^{\alpha}$$

Ειδική περίπτωση: **Η κατανομή Pascal** με $\mathbf{NB}(m,\theta)$ για $m \in \mathbb{N}_0$.

Η κατανομή Poisson

Ορισμός Β.3.4. Για $\alpha \in (0,\infty)$, **η κατανομή Poisson** $\mathbf{P}(\alpha)$ ορίζεται να είναι η κατανομή Q που για κάθε $x \in \mathbb{N}_0$ ικανοποιεί την σχέση
$$Q[\{x\}] = e^{-\alpha}\frac{\alpha^x}{x!}.$$

Βασικά μεγέθη κατανομής:

- Μέση τιμή:
$$E[Q] = \alpha$$
- Διακύμανση:
$$Var[Q] = \alpha$$
- Χαρακτηριστική συνάρτηση:
$$\varphi_Q(z) = e^{\alpha(e^{iz}-1)}$$
- Ροπογεννήτρια συνάρτηση:
$$M_Q(z) = e^{\alpha(e^{z}-1)}$$

- Πιθανογεννήτρια συνάρτηση:

$$m_Q(z) = e^{\alpha(z-1)}$$

Η κατανομή Delaporte

Ορισμός B.3.5. Για $\alpha, \beta \in (0, \infty)$ και $\theta \in (0, 1)$, **η κατανομή Delaporte** $\mathbf{Del}(\alpha, \beta, \theta)$ ορίζεται να είναι η κατανομή

$$Q := \mathbf{P}(\alpha) * \mathbf{NB}(\beta, \theta).$$

Η γεωμετρική κατανομή

Ορισμός B.3.6. Για $m \in \mathbb{N}_0$ και $\theta \in (0, 1)$, **η γεωμετρική κατανομή** $\mathbf{Geo}(m, \theta)$ ορίζεται να είναι η κατανομή

$$Q := \boldsymbol{\delta}_m * \mathbf{NB}(m, \theta).$$

Ειδική περίπτωση: **Η μονο-παραμετρική γεωμετρική κατανομή** με $\mathbf{Geo}(\theta) := \mathbf{Geo}(1, \theta)$

Η λογαριθμική κατανομή

Ορισμός B.3.7. Για $\theta \in (0, 1)$, **η λογαριθμική κατανομή** $\mathbf{Log}(\theta)$ ορίζεται να είναι η κατανομή Q που για κάθε $x \in \mathbb{N}_0$ ικανοποιεί την σχέση

$$Q[\{x\}] = \frac{1}{|\ln(1-\theta)|}\frac{\theta^x}{x}.$$

Βασικά μεγέθη κατανομής:

- Μέση τιμή:

$$E[Q] = \frac{1}{|\ln(1-\theta)|}\frac{\theta}{1-\theta}$$

- Διακύμανση:

$$Var[Q] = \frac{|\ln(1-\theta)| - \theta}{|\ln(1-\theta)|^2}\frac{\theta}{(1-\theta)^2}$$

- Χαρακτηριστική συνάρτηση:

$$\varphi_Q(z) = \frac{\ln(1-\theta e^{iz})}{\ln(1-\theta)}$$

- Ροπογεννήτρια συνάρτηση:

$$M_Q(z) = \frac{\ln(1-\theta e^{z})}{\ln(1-\theta)}, \quad \forall z \in (-\infty, -\ln(\theta))$$

- Πιθανογεννήτρια συνάρτηση:

$$m_Q(z) = \frac{\ln(1-\theta z)}{\ln(1-\theta)}$$

B.4 Συνεχείς κατανομές

Ορισμός B.4.1. Μια κατανομή $Q : \mathfrak{B} \longrightarrow [0,1]$ ονομάζεται **συνεχής**, αν είναι απόλυτα συνεχής ως προς το μέτρο Lebesgue $\boldsymbol{\lambda}$.

Η κατανομή Βήτα

Ορισμός B.4.2. Για $\alpha, \beta \in (0,\infty)$, **η κατανομή Βήτα** $\mathbf{Be}(\alpha,\beta)$ ορίζεται να είναι η κατανομή

$$Q := \int \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\chi_{(0,1)}(x)\boldsymbol{\lambda}(dx).$$

Βασικά μεγέθη κατανομής:

- Μέση τιμή:
$$E[Q] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$
- Διακύμανση:
$$Var[Q] = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

Ειδική περίπτωση: **Η ομοιόμορφη κατανομή** $\mathbf{U}(0,1) := \mathbf{Be}(1,1)$.

Η κατανομή Γάμμα (Δύο παραμέτρων)

Ορισμός B.4.3. Για $\alpha, \beta \in (0,\infty)$, **η κατανομή Γάμμα** $\mathbf{Ga}(\alpha,\beta)$ ορίζεται να είναι η κατανομή

$$Q := \int \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} e^{-\alpha x} x^{\beta-1}\chi_{(0,\infty)}(x)\boldsymbol{\lambda}(dx).$$

Βασικά μεγέθη κατανομής:

- Μέση τιμή:
$$E[Q] = \frac{\beta}{\alpha}$$
- Διακύμανση:
$$Var[Q] = \frac{\beta}{\alpha^2}$$
- Χαρακτηριστική συνάρτηση:
$$\varphi_Q(z) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - iz}\right)^\beta$$
- Ροπογεννήτρια συνάρτηση:
$$M_Q(z) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - z}\right)^\beta \quad \forall z \in (-\infty, \alpha)$$

Ειδικές περιπτώσεις:

- **Η κατανομή Erlang** $\mathbf{Ga}(\alpha, m)$, με $m \in \mathbb{N}_0$.
- **Η εκθετική κατανομή** $\mathbf{Exp}(\alpha) := \mathbf{Ga}(\alpha, 1)$.
- **Η χ^2 κατανομή** $\chi^2_m := \mathbf{Ga}(\frac{1}{2}, \frac{m}{2})$, με $m \in \mathbb{N}_0$.

Η κατανομή Γάμμα (Τριών παραμέτρων)

Ορισμός Β.4.4. Για $\alpha, \beta \in (0, \infty)$ και $\gamma \in \mathbb{R}$, **η κατανομή Γάμμα** $\mathbf{Ga}(\alpha, \beta, \gamma)$ ορίζεται να είναι η κατανομή

$$Q := \boldsymbol{\delta}_\gamma * \mathbf{Ga}(\alpha, \beta).$$

Ειδική περίπτωση: Η κατανομή Γάμμα με δυο παραμέτρους $\mathbf{Ga}(\alpha, \beta) = \mathbf{Ga}(\alpha, \beta, 0)$.

Η κατανομή Pareto

Ορισμός Β.4.5. Για $\alpha, \beta \in (0, \infty)$, **η κατανομή Pareto** $\mathbf{Par}(\alpha, \beta)$ ορίζεται να είναι η κατανομή

$$Q := \int \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{\alpha}{\alpha + x} \right)^{\beta+1} \chi_{0,\infty}(x) \boldsymbol{\lambda}(dx).$$

Βιβλιογραφία

[1] Λυμπερόπουλος, Δ.Π. : *Martingales στη Θεωρία Κινδύνου με Εφαρμογές στα Χρηματοοικονομικά*, Διπλωματική Εργασία, Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Τμήμα Στατιστικής & Ασφαλιστικής Έπιστήμης, ΜΕΣ (2006).

[2] Λυμπερόπουλος, Δ.Π. : *Martingale-ισοδύναμες κατανομές πιθανότητας με εφαρμογές στις αρχές υπολογισμού ασφαλίστρου*, Διδακτορική Διατριβή, Τμήμα Στατιστικής & Ασφαλιστικής Έπιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς (2013).

[3] Μαχαιράς, Ν.Δ. : *Σημειώσεις Στοχαστικής Ανάλυσης*, Πειραιάς (2006).

[4] Μπότση, Α. : *Μελέτη Στοχαστικών Διαδικασιών με Υποσηνθήκη Στάσιμες και Ανεξάρτητες Προσαυξήσεις και Εφαρμογές στα Χρηματοοικονομικά*, Διπλωματική Εργασία, Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Τμήμα Στατιστικής & Ασφαλιστικής Έπιστήμης, ΜΕΣ (2013).

[5] Παππά, Ε. : *Στοχαστικές Διαδικασίες με υπο συνθήκη στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις και εφαρμογές*, Διπλωματική Εργασία, Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Τμήμα Στατιστικής & Ασφαλιστικής Έπιστήμης, ΜΑΕ (2017).

[6] Τζανίνης, Σ.Μ. : *Μεμειγμένες Ανανεωτικές Στοχαστικές Διαδικασίες με Εφαρμογές στα Αναλογιστικά Υποδείγματα*, Διπλωματική Εργασία, Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Τμήμα Στατιστικής & Ασφαλιστικής Έπιστήμης, ΜΑΕ (2012).

[7] Τζανίνης, Σ.Μ. : *Ουδέτερες κινδύνου κατανομές πιθανότητας μεμειγμένων στοχαστικών διαδικασιών και εφαρμογές*, Διδακτορική Διατριβή, Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς, (2018).

[8] Bauer, H. : *Measure and Integration Theory*, de Gruyter, Studies in Math. 26 (2001).

[9] Cohn, D.L. : *Measure Theory 2nd edition*, Birkhauser Advanced Texts (2013).

[10] Delbaen, F. and Haezendonck, J. : *A martingale approach to premium calcu- lation principles in an arbitrage free market*, Insurance: Mathematics and Economics Volume 8, Issue 4, 269-277 (1989)

[11] Faden, A.M. : The existence of regular conditional probabilities: Necessary and sufficient conditions, *Ann. Probab.* **13** (No. 1), 288-298.(1985)

[12] Fremlin, D.H. : *Measure Theory, Vol. 1*, Torres Fremlin (Ed.) (2003).

[13] Gut, A. : *Stopped Random Walks: Limit Theorems and Applications*, Springer- Verlag New York (2009).

[14] Harisson, J.M. and Kreps, D.M. : *Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets*, Journal of Economic Theory 20, 381-408 (1979).

[15] Kallenberg, O. : *Probability Symmetries and Invariance Principles*, Springer (2005).

[16] Karatzas, I. and Shreve, S. : *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag New York, (1998).

[17] Lyberopoulos, D.P. and Macheras, N.D. : *Some characterizations of mixed Poisson processes*, Sankhya, Volume 74, Series A, Pt. 1, pp. 57-79 (2012).

[18] Lyberopoulos, D.P. and Macheras, N.D. : *Some characterizations and a construction of mixed renewal processes*, arXiv:submit/0478158 [math. PR] 20 May 2012.

[19] Macheras, N.D. and Tzaninis S.M : *Change a measures for compound renewal processes with applications to premium calculation principles*, arXiv:1707.02149v1 [math. PR] 7 Jul 2017.

[20] Macheras, N.D. and Tzaninis S.M : *Some characterizations for Markov processes as mixed renewal processes*, to appear in Math Slovaca.

[21] Von Neuman, J. : *Functional operators*, Vol I: Measures and Integrals, Princeton, N.J, Princeton Univ. Press (1950).

[22] Rosenthal, A. : *Neuere Untersuchunejen uber Funktionen reeller Veranderliehen*, Encyklopadie der Mathematischen Wissenschaften II,3, Art. II C9. Leipzig-Berlin:B.G Teubner (1924).

[23] Schmidt, K.D. : *Lectures on Risk Theory*, B.G. Teubner, Stuttgart (1996).

[24] Serfozo, R. : *Basics of applied stochastic processes*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2009).

[25] Sierpinski, W. : *Euvres choisis,Tome II*, Warszawa, PWN-Editions Scienti
ques de Palague (1975).

[26] Sondermann, D. : *Reinsurance in arbitrage-free markets*, Insurance: Mathematics and Economics Volume 10, Issue 3, 191-202 (1991).

[27] Strauss, W., Macheras, N.D. and Musial, K. : *Splitting of liftings in products of probability spaces*, Ann. Probab. **32**, (2004), 2389–2408.

Ευρετήριο Όρων

Ευρετήριο Συμβόλων