

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ



ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΚΑΙ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ
ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ

Εμπειρική διερεύνηση του Κινδύνου των αποδόσεων μετοχών
εταιρειών του δείκτη NASDAQ με τη μέθοδο VaR

ΠΑΠΠΑΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ

Επιβλέπων Καθηγητής: Καθηγητής Αγιακλόγλου Χρήστος

Διπλωματική Εργασία υποβληθείσα στο Τμήμα Οικονομικής Επιστήμης του
Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση
Μεταπτυχιακού Διπλώματος στην Οικονομική και Επιχειρησιακή Στρατηγική

ΠΕΙΡΑΙΑΣ 2017

UNIVERSITY OF PIRAEUS
DEPARTMENT OF ECONOMICS



MSc PROGRAM IN ECONOMIC AND BUSINESS
STRATEGY

Empirical evaluation of Risk for NASDAQ stock returns with
the VaR method

PAPPAS VASILEIOS

Supervisor: Professor Agiakloglou Christos

Master thesis submitted to the Department of Economics of the University of Piraeus
in partial fulfillment of the requirements for the MSc Diploma in Economic and
Business Strategy

PIRAEUS 2017

Ευχαριστίες

Για την εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον Καθηγητή Αγιακλόγλου Χ. για τη πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγηση του καθ' όλη τη διάρκεια συγγραφής της μελέτης αυτής. Ευχαριστώ την οικογένεια μου που στάθηκε δίπλα μου με υπομονή και με κάθε κόστος σε κάθε μου επιλογή. Επιπλέον, ευχαριστώ και αφιερώνω τη μελέτη αυτή στη σύζυγο μου Ελένη, η οποία αποτέλεσε επί σειρά ετών πηγή έμπνευσης, υπομονής, σοφίας και εργατικότητας στη ζωή μου. Τέλος, ευχαριστώ τον Θεό για τη δύναμη, την υγεία, την υπομονή και τη σοφία που μου χάριζε όλα αυτά τα χρόνια.

Περίληψη

Η παρούσα μελέτη επικεντρώνεται στην έννοια του κινδύνου και στην εμπειρική εκτίμηση αυτού με την εφαρμογή της μεθόδου Value at Risk (VaR). Η μέθοδος αυτή εκτιμά τη μέγιστη αναμενόμενη απώλεια που μπορεί να εμφανίσει μια επένδυση για δεδομένο χρονικό διάστημα και επίπεδο εμπιστοσύνης. Η εκτίμηση της Αξίας σε Κίνδυνο επιτυγχάνεται συνδυάζοντας την ανάλυση χρονοσειρών με αυτοπαλίνδρομα υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικότητας (GARCH) υποδείγματα. Στην εργασία αυτή, εκτιμάται εμπειρικά η Αξία σε Κίνδυνο για τις λογαριθμικές αποδόσεις τεσσάρων μετοχών του δείκτη NASDAQ.

Λέξεις-κλειδιά

Αξία σε Κίνδυνο (Value at Risk), Ανάλυση χρονοσειρών, ARCH υποδείγματα, GARCH υποδείγματα

Summary

This thesis develops the main concept of Risk and focuses on its empirical evaluation through the Value at Risk method. This statistical technique estimates the maximum loss that may appear in an investment, for a given time period, at a given confidence level. The Value at Risk estimation is accomplished by combining time series analysis and generalized autoregressive conditional heteroscedastic (GARCH) models. In this thesis, VaR method is applied to log returns of four stock prices of NASDAQ index.

Key-words

Value at Risk, Time series analysis, ARCH models, GARCH models

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες.....	2
Περίληψη.....	3
Summary.....	4
Κατάσταση Πινάκων.....	6
Κατάσταση Διαγραμμάτων.....	7
Κεφάλαιο 1: Η έννοια του Κινδύνου	
1.1 Εισαγωγή.....	8
1.2 Είδη Κινδύνου.....	9
1.3 Μέθοδοι αποτίμησης Κινδύνου.....	16
1.4 Αξία σε Κίνδυνο.....	17
1.5 Εξέλιξη της VaR.....	21
1.6 Μέθοδοι υπολογισμού της VaR.....	23
1.6.1 Δέλτα-κανονική μέθοδος Προσομοίωσης.....	24
1.6.2 Μέθοδος Ιστορικής Προσομοίωσης.....	28
1.6.3 Μέθοδος Προσομοίωσης Monte Carlo.....	30
1.7 Πλεονεκτήματα-Μειονεκτήματα της VaR.....	31
1.8 Ανακεφαλαίωση.....	34
Κεφάλαιο 2: Ανάλυση Χρονοσειρών	
2.1 Εισαγωγή.....	36
2.2 Χαρακτηριστικά χρονοσειρών.....	37
2.3 Στάσιμες στοχαστικές διαδικασίες.....	41
2.3.1 Αυτοπαλίνδρομα Υποδείγματα AR(p).....	43
2.3.2 Υποδείγματα κινητού μέσου MA(q).....	54
2.3.3 Μεικτά αυτοπαλίνδρομα – κινητού μέσου υποδείγματα ARMA(p, q).....	59
2.3.4 Υποδείγματα ετεροσκεδαστικότητας ARCH – GARCH.....	63
2.4 Ανακεφαλαίωση.....	68
Κεφάλαιο 3: Παρουσίαση και ανάλυση των αποτελεσμάτων αποτίμησης του Κινδύνου στις αποδόσεις μετοχών του δείκτη NASDAQ	
3.1 Εισαγωγή.....	70
3.2 Παρουσίαση εταιρειών.....	70
3.3 Στατιστικά στοιχεία των αποδόσεων.....	73
3.4 Προσδιορισμός υποδείματος ARIMA(p,d,q) - GARCH(m,s).....	79
3.5 Εκτίμηση του Κινδύνου.....	80
3.6 Έλεγχος Back-testing.....	81
3.7 Ανακεφαλαίωση.....	83
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	85

Κατάσταση Πινάκων

Πίνακας 3.1: Περιγραφικά στατιστικά στοιχεία των αποδόσεων των μετοχών.....	75
Πίνακας 3.2: Έλεγχοι Jarque-Bera και Phillips-Perron.....	78
Πίνακας 3.3: Συντελεστές των υποδειγμάτων GARCH(m,s).....	79
Πίνακας 3.4: Εκτιμήσεις της VaR.....	80
Πίνακας 3.5: Έλεγχοι Kuries για επίπεδα εμπιστοσύνης 95% και 99%.....	83

Κατάσταση Διαγραμμάτων

Διάγραμμα 1.1: Σύγκριση της κατανομής που ακολουθούν οι ημερήσιες αποδόσεις χρεογράφου, με την κανονική κατανομή.....	18
Διάγραμμα 3.1: Εξέλιξη τιμών κλεισίματος και αποδόσεων των μετοχών των Intel, eBay, American Airlines και Apple.....	74
Διάγραμμα 3.2: Θηκογράμματα των αποδόσεων των Intel, Apple, American Airlines και eBay.....	76
Διάγραμμα 3.3: Ιστογράμματα και Q-Q διαγράμματα των αποδόσεων των Μετοχών.....	77

Κεφάλαιο 1: Η έννοια του Κινδύνου

1.1 Εισαγωγή

Ο κίνδυνος (risk) αποτελεί για πολλά χρόνια βασικό συστατικό κάθε οικονομίας, αλλά και κάθε επενδυτικής δραστηριότητας, ανεξαρτήτως τομέα ή κλάδου. Ένας γενικά αποδεκτός ορισμός για την έννοια του κινδύνου δεν είναι δυνατό να υπάρξει, ωστόσο η έννοια αυτή χρησιμοποιείται για να περιγράψει οποιαδήποτε κατάσταση που εμπεριέχει αβεβαιότητα σχετικά με το αποτέλεσμα που θα εμφανισθεί. Η αβεβαιότητα ως μέγεθος είναι μη μετρήσιμη, ενώ τα αποτελέσματα της δύσκολα μπορούν να ερμηνευτούν αξιόπιστα. Αντίθετα, ο κίνδυνος, αν και άρρηκτα συνδεδεμένος με την έννοια της αβεβαιότητας, αποτελεί μετρήσιμο μέγεθος και εκτιμάται με τη χρήση των σωστών εργαλείων.

Η έννοια του κινδύνου εμφανίζεται σε κάθε επένδυση και μεταφράζεται ως η πιθανότητα δημιουργίας μιας δυσμενούς κατάστασης για τον επενδυτή, ενώ μπορεί να μετρηθεί εξετάζοντας τη μεταβλητότητα και τη τυπική απόκλιση των αποδόσεων. Η έννοια του κινδύνου είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με τις λειτουργίες κάθε οργανισμού. Για ορισμένους, όμως, οργανισμούς, όπως τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα, η διαχείριση του κινδύνου είναι εξαιρετικά σημαντική και πραγματοποιείται με τους κατάλληλους τρόπους, ώστε να μη προκύψουν περαιτέρω προβλήματα. Η διοίκηση κινδύνου (Risk Management) αποτελεί πλέον απαραίτητη λειτουργία για ένα χρηματοπιστωτικό ίδρυμα. Οι αλλαγές στις εξωτερικές συνθήκες, όπως οι πολιτικές και οικονομικές συνθήκες ορισμένων κρατών, η ραγδαία ανάπτυξη της τεχνολογίας αλλά και οι φόβοι για ξέσπασμα πολεμικών συρράξεων οδηγούν σταδιακά στην αύξηση κάθε είδους κινδύνου που συνεπάγεται. Κίνδυνος, διαφορετικής βαρύτητας αλλά εξίσου σημαντικός, εμφανίζεται αντίστοιχα και από τις εσωτερικές συνθήκες, οι οποίες αφορούν εσωτερικές λειτουργίες των επιχειρήσεων.

Στο παρόν κεφάλαιο θα αναλυθεί εκτενώς η έννοια του κινδύνου, τα είδη κινδύνου που αντιμετωπίζουν οι οργανισμοί, αλλά και οι τρόποι διαχείρισής του. Θα εξεταστεί η **αξία σε κίνδυνο** (Value at Risk - VaR) ως εργαλείο μέτρησης του κινδύνου, θα αναλυθούν οι εφαρμογές του, η εξέλιξη του, οι παράγοντες που το επηρεάζουν, αλλά και οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του. Οι

μέθοδοι που θα παρουσιασθούν είναι (α) η Δέλτα κανονική, (β) η ιστορική προσομοίωση και (γ) η μέθοδος Monte Carlo.

1.2 Είδη Κινδύνου

Η δυσκολία που παρουσιάζει ο κίνδυνος, αλλά και οι παγίδες τις οποίες κρύβει, αναφέρονται αφενός στο μη αναμενόμενο αποτέλεσμα που θα προκύψει, αφετέρου στη μέτρηση του με τον κατάλληλο, κάθε φορά, τρόπο και στη διαχείριση του με τρόπο που ενδεχομένως να αλλοιώσει το αρχικό αποτέλεσμα. Επιπλέον, σημαντικό παράγοντα στη μέτρηση του κινδύνου αποτελεί η εκτίμηση της σημαντικότητας του, δηλαδή σε τι βαθμό μπορεί ο κίνδυνος να επηρεάσει το αποτέλεσμα. Ο κίνδυνος, όπως αναλύεται στις επόμενες παραγράφους, παρουσιάζει αρκετά είδη ανάλογα με το περιβάλλον στο οποίο αναπτύσσεται. Ωστόσο, υφίσταται ένας πρώτος διαχωρισμός ανάμεσα στον επιχειρησιακό, μη επιχειρησιακό και χρηματοοικονομικό κίνδυνο.

Ορίζεται ως **επιχειρησιακός κίνδυνος** ο κίνδυνος, τον έλεγχο του οποίου έχει μια επιχείρηση και τον προκαλεί με σκοπό το δικό της όφελος έναντι των ανταγωνιστών της. Ο κίνδυνος αυτός προκαλείται με τρόπο ώστε η επιχείρηση να αυξήσει την αξία της σε σχέση με τους ανταγωνιστές της και να αποκτήσει ανταγωνιστικό πλεονέκτημα έναντι αυτών. Στις περισσότερες των περιπτώσεων οι επιχειρήσεις επιδιώκουν αυτή την έκθεση στον κίνδυνο με σκοπό να δημιουργήσουν συνθήκες ανάπτυξης.

Αντίθετα, ο κίνδυνος που δεν μπορεί να ελεγχθεί από τις επιχειρήσεις και προέρχεται από εξωγενείς παράγοντες, τους οποίους οι επιχειρήσεις δεν ελέγχουν, καλείται **μη επιχειρησιακός**. Τέτοιοι κίνδυνοι μπορούν σε μικρό χρονικό διάστημα να αποφέρουν αρνητικά αποτελέσματα, δύσκολα αντιμετώπισιμα, αλλά μπορεί εξίσου να δημιουργήσουν νέες ευκαιρίες, που σε κάθε άλλη περίπτωση δεν θα μπορούσαν να υπάρχουν.

Στη τρίτη κατηγορία βρίσκεται ο **χρηματοοικονομικός κίνδυνος**, ο οποίος αναφέρεται στους κινδύνους που γεννούν οι χρηματοοικονομικές αγορές, κυρίως μέσω των διακυμάνσεων των επιτοκίων. Η αλληλεξάρτηση των επιχειρήσεων με τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα βρίσκεται σε τέτοιο βαθμό, όπου οι πρώτες θα πρέπει να

είναι σε θέση να διαχειριστούν όλους τους κινδύνους που εμπίπτουν σε αυτή τη κατηγορία.

Η αντιμετώπιση του κινδύνου μπορεί να γίνει σε θεωρητική βάση με τα σχετικά μοντέλα, τα οποία δεν είναι σε θέση να ποσοτικοποιήσουν τις μεταβλητές, αλλά περιορίζονται στην ερμηνεία τους. Σε πρακτική βάση, υπάρχουν τρόποι που δίνουν πιο απτά αποτελέσματα, εύκολα ποσοτικοποιήσιμα που προσεγγίζουν σε μεγάλο βαθμό το τι θα συμβεί. Ένας τρόπος είναι τα στατιστικά μοντέλα, τα οποία μπορούν να ποσοτικοποιήσουν τον κίνδυνο μέσω στατιστικών και μαθηματικών μεθόδων. Αντίστοιχα, χρησιμοποιούνται στοχαστικά μοντέλα για μια διαφορετική προσέγγιση τους κινδύνου, τα οποία όμως υπολείπονται σε αξιοπιστία, συγκρίνοντας τα με τα στατιστικά. Ένας τελευταίος τρόπος είναι και ο συνδυασμός των στατιστικών με τα αντίστοιχα στοχαστικά μοντέλα μέσα από σενάρια, όπου τα στοχαστικά μοντέλα εξετάζονται με τη βοήθεια των μεταβλητών των στατιστικών μοντέλων.

Σε πρακτικό επίπεδο, οι επιχειρήσεις λαμβάνουν οικονομικά μέτρα προκειμένου να αποφύγουν τον κίνδυνο ή καλύτερα προκειμένου να αντιμετωπιστεί αποτελεσματικά ο όποιος κίνδυνος. Με τα μέτρα αυτά, εξασφαλίζονται ουσιαστικά μεγέθη όπως τα πάγια, η ρευστότητα ή τα αποθεματικά των επιχειρήσεων. Παράλληλα μέτρα, τεχνικής φύσεως, επίσης λαμβάνονται για την αντιμετώπιση κινδύνων που αφορούν τον μηχανολογικό εξοπλισμό, τη συντήρηση και επισκευή αυτού, τα συστήματα που περιλαμβάνει και άλλα. Εξίσου σημαντικό είναι να λαμβάνονται μέτρα για τη διασφάλιση των διοικητικών λειτουργιών των επιχειρήσεων απέναντι στους σχετικούς κινδύνους. Γίνεται πλέον σαφές ότι το Risk Management αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι των επιχειρήσεων, καθώς λειτουργεί ως τρόπος επιβίωσης απέναντι στις απειλές που γεννώνται από μεταβολές στο περιβάλλον των επιχειρήσεων.

Στη συνέχεια, παρουσιάζονται και αναλύονται τα είδη κινδύνου, τα οποία εξαρτώνται, τις περισσότερες φορές, από τη χρήση, το γεγονός και τα στοιχεία που αφορούν. Ο κίνδυνος ενδεχομένως να συνδέεται με τη κερδοσκοπία και να υπάρχει πιθανότητα είτε κέρδους είτε ζημίας, ενδεχομένως να είναι καθαρός κίνδυνος όπου αναφέρεται αποκλειστικά στη πιθανότητα να προκύψει ζημία ή ακόμα να χωρίζεται σε συστηματικό και αντίστοιχα μη συστηματικό κίνδυνο. Ο συστηματικός κίνδυνος αναφέρεται στον κίνδυνο της αγοράς, ο οποίος επηρεάζει ολόκληρη την οικονομία,

ενώ αντίθετα ο μη συστηματικός κίνδυνος δύναται, με κατάλληλη διαχείριση, να αποκλειστεί. Συγκεκριμένα, τα είδη κινδύνων που θα αναλυθούν παρακάτω είναι (α) ο κίνδυνος της αγοράς, (β) ο πιστωτικός κίνδυνος, (γ) ο κίνδυνος ρευστότητας, (δ) ο λειτουργικός κίνδυνος, (ε) ο κρατικός κίνδυνος, (στ) ο οικονομικός κίνδυνος, (ζ) ο πολιτικός κίνδυνος και (η) ο νομοθετικός κίνδυνος (legislative risk).

(α) Κίνδυνος της αγοράς

Ο κίνδυνος της αγοράς (market/systematic risk) προκαλείται από τη μεταβλητότητα των τιμών στα μεγέθη της αγοράς, ενώ όταν εκφράζεται σε νομισματικούς όρους και σχετίζεται με τη μεταβλητότητα των αποδόσεων αναφέρεται ως «απόλυτος κίνδυνος». Επιπλέον, όταν υπολογίζεται σε σύγκριση με τις αποκλίσεις ενός δείκτη, ο κίνδυνος αυτός αναφέρεται και ως «σχετικός κίνδυνος». Το συγκεκριμένο είδος κινδύνου είναι ιδιαίτερα σημαντικό και χρήζει ιδιαίτερης προσοχής για τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα, καθώς συνδέεται άμεσα με τις συναλλαγές και τις δανειακές συμβάσεις τους (Bessis, 2002).

Τα μεγέθη που σχετίζονται με τον κίνδυνο της αγοράς είναι οι πρώτες ύλες και τα αποθέματα. Οι αυξομειώσεις στις τιμές των πρώτων υλών, των εμπορευμάτων αλλά και των αποθεμάτων, όπως το πετρέλαιο, είναι συχνές στην οικονομία και έχουν σημαντικές επιπτώσεις στα κόστη των επιχειρήσεων. Άλλα μεγέθη που σχετίζονται με τον κίνδυνο της αγοράς είναι οι μετοχές και οι χρηματιστηριακοί δείκτες, για τα οποία γίνονται εκτιμήσεις και προβλέψεις για τη πορεία τους, αλλά η έκθεση τους σε άλλες μεταβολές δημιουργεί σημαντικά προβλήματα. Επιπλέον, ο κίνδυνος της αγοράς περιλαμβάνει και τους κινδύνους των συναλλαγματικών ισοτιμιών. Σημαντικές μεταβολές και διακυμάνσεις στις συναλλαγματικές ισοτιμίες δύναται να δημιουργήσουν αστάθειες σε μια επιχείρηση, κυρίως όταν οι οικονομικές καταστάσεις περιλαμβάνουν στοιχεία σε ξένο νόμισμα. Ο συναλλαγματικός κίνδυνος που καλείται να αντιμετωπίσει μια επιχείρηση επηρεάζει άμεσα την οικονομική της θέση και έμμεσα την ανταγωνιστικότητα της, καθώς την καθιστά πιο ακριβή σε σύγκριση με τους ανταγωνιστές, οι οποίοι δεν είναι εκτεθειμένοι σε συναλλαγματικό κίνδυνο (Bessis, 2002).

Ο κίνδυνος που σχετίζεται με τις μεταβολές της τιμής του επιτοκίου αποτελεί υποσύνολο του κινδύνου της αγοράς. Η μεταβολή στη τιμή του επιτοκίου επηρεάζει

τις επιχειρήσεις τόσο όταν βρίσκονται στη θέση του δανειστή όσο και του δανειζόμενου, καθώς και στις δυο περιπτώσεις μπορεί να προκληθούν προβλήματα χρέωσης υψηλότερων επιτοκίων, αδυναμίας αποπληρωμής δανείων ή λήψης μικρότερων δανείων.

Όλα τα προαναφερόμενα στοιχεία συγκροτούν τον άμεσο κίνδυνο της αγοράς, διότι η ποσοτικοποίησή του γίνεται μέσω γραμμικών μεταβλητών, μερικοί εκ των οποίων είναι οι δείκτες δέλτα (delta index), οι οποίοι μετρούν τον κίνδυνο για τα δικαιώματα και οι δείκτες βήτα (beta index) αντίστοιχα για τις μετοχές. Από την άλλη πλευρά, ο έμμεσος κίνδυνος της αγοράς αφορά τους μη γραμμικούς συνδυασμούς, με χαρακτηριστικό παράδειγμα τη κυρτότητα που μετρά τον κίνδυνο για τα επιτόκια.

(β) Πιστωτικός κίνδυνος

Ο πιστωτικός κίνδυνος (credit risk) αναφέρεται αποκλειστικά στον κίνδυνο που αντιμετωπίζουν τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα όταν υφίστανται δυσκολίες στην αποπληρωμή δανείων ή μέρους αυτών, από τη πλευρά των δανειζόμενων ή γενικότερα, όταν ο δανειζόμενος αδυνατεί να ανταποκριθεί στις συμφωνίες που έχει συνάψει με τις τράπεζες. Μάλιστα, το φαινόμενο αυτό παρατηρείται έντονα στη χώρα μας τα τελευταία χρόνια κατά τη περίοδο της ύφεσης με τη χαρακτηριστική ονομασία «κόκκινα δάνεια».

Αντικειμενικά, όλα τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα είναι εκτεθειμένα στον πιστωτικό κίνδυνο, καθώς όλα θα εμφανίσουν κεφαλαιακές απώλειες σε περίπτωση που τα συμβαλλόμενα μέρη αδυνατούν να αποπληρώσουν τα χρέη τους. Παράλληλα, όμως, οι τράπεζες αντιμετωπίζουν και τον κίνδυνο της μη φερεγγυότητας, κυρίως στις περιπτώσεις των κρατικών δανείων και της αποπληρωμής δημοσίου χρέους όπου η έκθεση στον κίνδυνο είναι υψηλή.

Ο πιστωτικός κίνδυνος θεωρείται πλέον δεδομένος και συχνά εμφανιζόμενος, με αποτέλεσμα οι τράπεζες να δίνουν μεγάλη βαρύτητα στην ενίσχυση τους απέναντι του. Οι τράπεζες αντιμετωπίζουν τον πιστωτικό κίνδυνο με σωστή και αξιόπιστη αξιολόγηση των υποψήφιων δανειζόμενων μέσα από ποσοτικά και ποιοτικά μεγέθη. Η αξιολόγηση αυτή περιλαμβάνει βασικά οικονομικά κριτήρια, καθώς επίσης τις εγγυήσεις που δίνονται και την ανάλυση δεικτών που φανερώνουν τη συμπεριφορά και την αξιοπιστία του υποψήφιου δανειολήπτη. Μάλιστα, τα τελευταία χρόνια της

ύφεσης οι αξιολογήσεις αυτές έχουν γίνει εξαιρετικά αυστηρές, καθώς οι τράπεζες καλούνται να αντιμετωπίσουν την ήδη υπάρχουσα κατάσταση των «κόκκινων δανείων», ενώ παράλληλα πρέπει να εξασφαλίσουν τη θέση τους για τα μελλοντικά δάνεια (Bessis, 2002 και Jorion, 2007).

Χαρακτηριστικά παραδείγματα πιστωτικού κινδύνου αποτελούν τα ομόλογα, τα δάνεια και τα παράγωγα. Σε όλα αυτά τα μεγέθη ο κίνδυνος ποσοτικοποιείται, ενώ ο τρόπος διαχείρισης του είναι διαφορετικός ανά περίπτωση με σκοπό τη μικρότερη δυνατή έκθεση στον κίνδυνο.

Η ιδιαίτερα αυξημένη αβεβαιότητα που επικρατεί στις αγορές οδήγησε τους τραπεζικούς οργανισμούς στη συνεργασία με τρίτες επιχειρήσεις, οι οποίες αναλαμβάνουν εξ' ολοκλήρου την αξιολόγηση των υποψήφιων δανειοληπτών για λογαριασμό του εκάστοτε δανειοδότη. Τα κριτήρια που εξετάζονται στις εν λόγω αξιολογήσεις αντικατοπτρίζουν τη πιστοληπτική και συναλλαγματική ικανότητα των δανειοληπτών και σχηματίζεται κατά αυτό τον τρόπο μια ολοκληρωμένη άποψη για την αξιοπιστία τους. Αποτέλεσμα της αξιολόγησης είναι η βαθμολόγηση του υποψήφιου δανειολήπτη σε κατάλληλη κλίμακα, ώστε να ληφθεί η τελική απόφαση για τη ολοκλήρωση ή όχι της συνεργασίας (Bessis, 2002 και Jorion, 2007).

(γ) Κίνδυνος ρευστότητας

Ο κίνδυνος ρευστότητας (liquidity risk) εμφανίζεται στις επιχειρήσεις όταν παρατηρούνται μεγάλες διαφορές στα μεγέθη των στοιχείων που συγκροτούν το ενεργητικό και στα αντίστοιχα στοιχεία που αποτελούν το παθητικό. Ουσιαστικά, ο κίνδυνος γεννάται όταν μια επιχείρηση αδυνατεί να βρει νέα κεφάλαια ή όταν αδυνατεί να ρευστοποιήσει τα στοιχεία του ενεργητικού της, ώστε να μπορέσει να ανταποκριθεί στις υποχρεώσεις της και σε άμεσο χρόνο.

Άλλη πηγή κινδύνου αποτελεί και η εμφάνιση ελλείμματος κεφαλαίου, όταν τα περιουσιακά στοιχεία που κατέχει μια επιχείρηση είναι χαμηλότερα σε αξία σε σχέση με τις βραχυπρόθεσμες και μακροπρόθεσμες υποχρεώσεις της. Επομένως, παρουσιάζεται αδυναμία κάλυψης των υποχρεώσεων, η οποία με τη σειρά της δημιουργεί τον κίνδυνο ρευστότητας. Σε τέτοιες περιπτώσεις, προκειμένου η επιχείρηση να μπορέσει να ανταποκριθεί στις υποχρεώσεις της, θα επιχειρήσει να

ρευστοποιήσει τα στοιχεία του ενεργητικού ή μέρος αυτού ή εναλλακτικά θα καταφύγει σε αίτηση δανείου για να καλύψει τις οφειλές της.

(δ) Λειτουργικός κίνδυνος

Κάθε είδος κινδύνου είναι είτε άμεσα είτε έμμεσα εξαρτώμενο από παράγοντες της αγοράς, οι οποίοι προκαλούν μη αναμενόμενους κινδύνους. Ο λειτουργικός κίνδυνος (operational risk) αναφέρεται στο σύνολο των κινδύνων που μπορούν να προκύψουν έπειτα από λάθη που λαμβάνουν χώρα στο εσωτερικό περιβάλλον των επιχειρήσεων και πιο συγκεκριμένα στη παραγωγική διαδικασία. Συνήθως, υπεύθυνος για τα λάθη αυτά είναι ο ανθρώπινος και ο τεχνολογικός παράγοντας. Ο ανθρώπινος παράγοντας περιλαμβάνει λάθη σε διοικητικά θέματα ή στις εργασιακές σχέσεις, λάθη στη παραγωγική διαδικασία λόγω μη σωστού ή ελλιπούς ελέγχου στις επιμέρους διαδικασίες και γενικότερα δυσλειτουργίες που οφείλονται στον άνθρωπο. Αντίστοιχα, τα τεχνολογικά λάθη δημιουργούνται από προβλήματα σε συστήματα απαραίτητα για τη λειτουργία της επιχείρησης και έχουν, κατά κύριο λόγο, τεχνικό χαρακτήρα. Ο λειτουργικός κίνδυνος μπορεί να περιοριστεί σε χαμηλά επίπεδα ή να αποφευχθεί, όταν γίνεται σωστός και συστηματικός έλεγχος σε όλα τα στάδια της παραγωγικής διαδικασίας, ώστε να μειώνεται η έκθεση στον κίνδυνο.

(ε) Κρατικός κίνδυνος

Ο κρατικός κίνδυνος (country risk) σχετίζεται με τις συνθήκες που επικρατούν σε κάθε κράτος ξεχωριστά, ενώ συνήθως αναφέρεται και ως μια «συλλογή κινδύνων» που περιλαμβάνει περαιτέρω κινδύνους, όπως ο πολιτικός κίνδυνος, συναλλαγματικός κίνδυνος, οικονομικός κίνδυνος και κίνδυνος περιορισμού κεφαλαίου. Ο βαθμός έκθεσης στον κίνδυνο αυτό είναι διαφορετικός και εξαρτάται από το εκάστοτε κράτος και τις συνθήκες που αντιμετωπίζει, είτε αυτές είναι οικονομικές είτε πολιτικές. Οι συνθήκες αυτές καθορίζουν τη μελλοντική θέση που θα έχει το κάθε κράτος, τις προοπτικές να εμφανίσει η οικονομία του ύφεση ή ανάπτυξη και τις προοπτικές για εισροές ξένων επενδύσεων. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι ΗΠΑ παρουσιάζουν διαχρονικά το χαμηλότερο κρατικό κίνδυνο, με αποτέλεσμα τα περισσότερα κράτη παγκοσμίως να χρησιμοποιούν τον κίνδυνο αυτό ως μέτρο σύγκρισης για τον δικό τους.

στ) Οικονομικός κίνδυνος

Ο οικονομικός κίνδυνος (economic risk) συνδέεται άμεσα με τις μεταβολές και τις διακυμάνσεις που παρουσιάζουν ορισμένα μεγέθη της οικονομίας, όπως οι μισθολογικές συνθήκες, ο ρυθμός ανάπτυξης αυτής και ο πληθωρισμός, τα οποία μεγέθη επηρεάζουν κατά πολύ τα κόστη των επιχειρήσεων και κατά συνέπεια τη κερδοφορία τους. Επομένως, ο οικονομικός κίνδυνος επηρεάζει άμεσα τη λειτουργία και τη πορεία των επιχειρήσεων μέσα στην οικονομία και απασχολεί ιδιαίτερα τις ξένες επενδύσεις.

(ζ) Πολιτικός κίνδυνος

Πολλές φορές, οι πολιτικές εξελίξεις σε μια κρατική οικονομία ή ακόμα και σε ευρύτερες οικονομίες όπως η Ευρωζώνη παίζουν σημαντικό ρόλο στη διαμόρφωση της συμπεριφοράς των επιχειρήσεων και γενικότερα στη ροή της οικονομίας. Οι πολιτικές εξελίξεις ως συνιστώσες του πολιτικού κινδύνου (political risk) ενδεχομένως να αφορούν εκλογικές διαδικασίες, πολιτικές διαμάχες, πολιτικές συρράξεις και διπλωματικές σχέσεις, παύση πληρωμών από την επιχειρηματική κοινότητα προς προμηθευτές του εξωτερικού ή ακόμα και αλλαγή κυβερνητικού σχήματος. Τα γεγονότα αυτά και αντίστοιχες καταστάσεις έχουν άμεσες συνέπειες στην οικονομία και στα μεγέθη της όπως τα επιτόκια, οι συναλλαγματικές ισοτιμίες ή οι περιορισμοί στις εισαγωγές και εξαγωγές (embargo).

(η) Νομοθετικός κίνδυνος

Ο επιχειρηματικός ιστός, σε παγκόσμιο επίπεδο, υφίσταται και λειτουργεί κάτω από συγκεκριμένους κανόνες, κανονισμούς και νομοθεσίες. Τα στοιχεία αυτά, τα οποία και συγκροτούν τον νομοθετικό κίνδυνο (legislative risk), επηρεάζουν τις λογιστικές καταστάσεις, τα ισχύοντα λογιστικά πρότυπα, τις φορολογικές μεταρρυθμίσεις των επιχειρήσεων ή ακόμα το ισχύον καθεστώς για τις επιχειρήσεις που έχουν εισαχθεί σε χρηματιστήρια αξιών, τους περιορισμούς για τις συγχωνεύσεις ή τις εξαγορές και γενικότερα τη νομική υπόσταση των επιχειρήσεων.

1.3 Μέθοδοι αποτίμησης Κινδύνου

Υπάρχουν αρκετές μέθοδοι εκτίμησης και ποσοτικοποίησης του κινδύνου, οι οποίες διαφέρουν μεταξύ τους, παρουσιάζουν ξεχωριστά χαρακτηριστικά και κάθε μέθοδος οδηγεί με διαφορετικό τρόπο στην τελική εκτίμηση του κινδύνου. Οι κυριότερες εξ' αυτών παρουσιάζονται παρακάτω.

Μια βασική μέθοδος, η ανάλυση διάρκειας, αναφέρεται κυρίως στον κίνδυνο που σχετίζεται με τα επιτόκια και τις διακυμάνσεις που αυτά παρουσιάζουν. Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιεί όλες τις εισροές και εκροές των απαιτήσεων μιας επιχείρησης μέχρι τη λήξη τους και κατόπιν υπολογίζεται η διαφορά αυτών λαμβάνοντας υπόψη τις διακυμάνσεις των παραγόντων που τις επηρεάζουν. Βασικός σκοπός της μεθόδου είναι ο υπολογισμός της ευαισθησίας των διαφόρων στοιχείων στις μεταβολές των επιτοκίων σε συνάρτηση με τη διάρκεια που έχουν. Πρακτικά, μεγαλύτερη διάρκεια μιας απαίτησης συνεπάγεται μεγαλύτερη ευαισθησία στις διακυμάνσεις των επιτοκίων και η ποσοτικοποίηση της ευαισθησίας αυτής οδηγεί στην εκτίμηση του κινδύνου.

Η στατιστική ανάλυση ως μέθοδος εκτίμησης χρησιμοποιείται συχνά για τη ποσοτικοποίηση του κινδύνου, καθώς εφαρμόζεται σε κάθε είδος κινδύνου χωρίς περιορισμούς. Η μέθοδος αυτή κατασκευάζει μια μετρήσιμη σχέση μεταξύ των εσόδων ή εξόδων μιας μεταβλητής, όπως παραδείγματος χάριν μια επένδυσης και των παραγόντων των οποίων οι μεταβολές επηρεάζουν τα στοιχεία αυτά. Με τη σχέση αυτή προσδιορίζονται οι μεταβολές των εισροών ή εκροών των στοιχείων και κατ' επέκταση το μέγεθος του οικονομικού κινδύνου.

Επιπλέον, η ανάλυση κενού αποτελεί μια μέθοδο άμεσα σχετιζόμενη με τον κίνδυνο από τις μεταβολές των επιτοκίων. Αρχικά, επιλέγεται μια συγκεκριμένη χρονική περίοδος, συνήθως ένα έτος. Στη συνέχεια, υπολογίζεται το πόσο θα μεταβληθούν οι εισροές και εκροές από τόκους από τη διακύμανση των επιτοκίων μέσα στο χρονικό διάστημα που μελετάται. Η τελική διαφορά ανάμεσα σ' αυτές τις χρηματοροές αποτελεί και το κενό το οποίο προσδιορίζει το μέγεθος του κινδύνου.

Μια επιπλέον διαδικασία, αυτή της ανάλυσης σεναρίων, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση κάθε είδους χρηματοοικονομικού κινδύνου. Η

διαδικασία αυτή περιλαμβάνει τη κατασκευή διαφόρων σεναρίων για τα κέρδη ή τις απώλειες που πιθανόν να προκύψουν από τις μεταβολές των παραγόντων που επηρεάζουν τα έσοδα ή τα έξοδα μιας επιχείρησης.

Τέλος, η αξία σε κίνδυνο (Value at Risk), η οποία αποτελεί το επίκεντρο της παρούσας εργασίας, περιλαμβάνει το σύνολο των στατιστικών εργαλείων και των κατάλληλων μαθηματικών μοντέλων, με τα οποία μπορεί ένας οργανισμός να υπολογίσει τις μέγιστες απώλειες του σε μια δεδομένη χρονική περίοδο, με ένα προκαθορισμένο βαθμό εμπιστοσύνης για τη πρόβλεψη.

1.4 Αξία σε Κίνδυνο

Με βάση την έως τώρα ανάλυση του κινδύνου, γίνεται αντιληπτό ότι η μέτρηση και ο έλεγχος του αποτελούν διαδικασίες σημαντικές και παράλληλα πολύπλοκες, πλην όμως απαραίτητες για τον προσδιορισμό του προς όφελος των επιχειρήσεων. Όσον αφορά τον χρηματοοικονομικό κίνδυνο, δεν είναι εύκολο να προσδιοριστεί σωστά τις περισσότερες φορές, καθώς τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα δεν είναι πάντοτε σε θέση να τον αναγνωρίσουν και να τον εκτιμήσουν σωστά. Ακόμα και αν εντοπιστεί ο κίνδυνος, τα πορίσματα από την εκτίμηση του ενδεχομένως να επηρεάσουν τα τελικά αποτελέσματα (Jorion, 2007). Οι αστάθειες, οι οποίες παρατηρούνται τα τελευταία χρόνια, στη παγκόσμια οικονομία δημιούργησαν την ανάγκη ανάπτυξης μέτρων για τη ποσοτικοποίηση του κινδύνου. Το Risk Management εξέλιξε διάφορα μοντέλα, όπως η Value at Risk ή VaR, όπου ο κίνδυνος παρουσιάζεται σε αριθμούς.

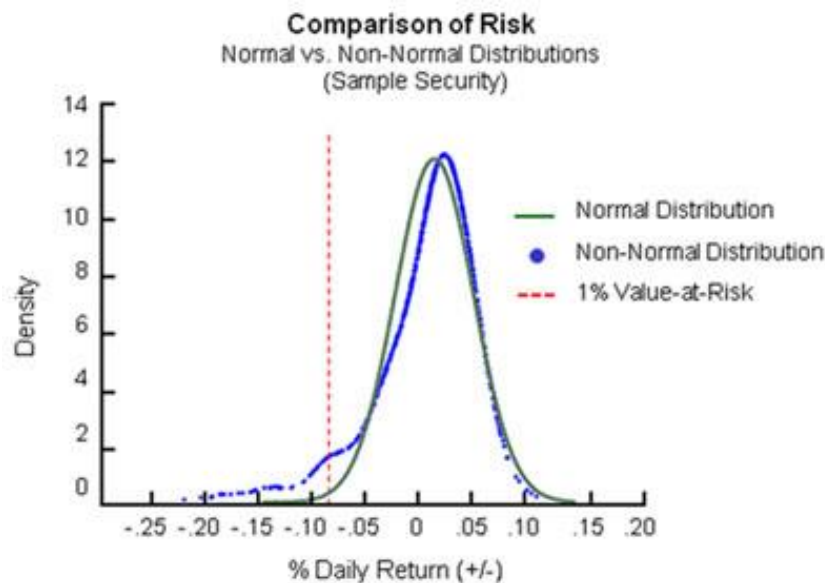
Η αξία σε κίνδυνο ορίζεται ως η μέγιστη αναμενόμενη απώλεια - σε κανονικές συνθήκες αγοράς και για καθορισμένο επίπεδο εμπιστοσύνης – στη τιμή μιας αξίας ή ενός χαρτοφυλακίου αξιών που μπορεί να πραγματοποιηθεί σε ένα ορισμένο χρονικό διάστημα. Στη πραγματικότητα, η VaR αποτελεί μια μέτρηση εκφρασμένη σε ποσοστά για την πιθανές απώλειες και για μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο που επιθυμεί να εξετάσει ο εκάστοτε οργανισμός. Η VaR δεν έχει μονάδες μέτρησης με αποτέλεσμα οι εκτιμήσεις που παρέχει να είναι εύκολα ερμηνεύσιμες. Η μέθοδος αυτή προσφέρει την μέγιστη απώλεια, δεδομένου ενός επιπέδου εμπιστοσύνης ή, πιο συγκεκριμένα, ανάλογα το επίπεδο εμπιστοσύνης που θα επιλεγθεί, οι απώλειες που θα προκύψουν δεν θα υπερβαίνουν τα ποσοστά που έχουν υπολογισθεί μέσω VaR.

Με τον τρόπο αυτό, ο οργανισμός μπορεί να αναλαμβάνει το ρίσκο, εφόσον γνωρίζει τις μέγιστες απώλειες που θα αντιμετωπίσει. Αξίζει να αναφερθεί ότι η VaR δεν πρέπει να ερμηνεύεται ως η χειρότερη πιθανή ζημιά που μπορεί να συναντήσει ένας οργανισμός καθώς ζημιές ίσες με το μέγεθος της VaR μπορούν να προκύψουν περισσότερες από μια φορές το χρόνο (Terpezan - Tabara, 2008).

Σύμφωνα με τον Tsay (2005), τη χρονική περίοδο t και για πιθανότητα p η αξία σε κίνδυνο για τις επόμενες L χρονικές περιόδους ορίζεται ως :

$$p = P[\Delta V(L) \leq \text{VaR}] = F_L(\text{VaR})$$

όπου $\Delta V(L)$ η μεταβολή στην αξία ενός περιουσιακού στοιχείου για το χρονικό διάστημα $(t, t + L)$ και F_L η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της $\Delta V(L)$.



Διάγραμμα 1.1: Σύγκριση της κατανομής που ακολουθούν οι ημερήσιες αποδόσεις χρεογράφου, με την κανονική κατανομή (Πηγή: <https://www.forbes.com/2010/06/08/value-at-risk-intelligent-investing-asset-allocation.html>)

Στο Διάγραμμα 1.1 απεικονίζεται ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα εφαρμογής της VaR. Στο διάγραμμα, η καμπύλη με πράσινο χρώμα αντιστοιχεί στη κανονική κατανομή, η καμπύλη με το μπλε χρώμα αντιστοιχεί στη μη κανονική κατανομή και η διακεκομμένη κόκκινη γραμμή αντιστοιχεί στην εκτίμηση της VaR με διάστημα εμπιστοσύνης 99%. Στον οριζόντιο άξονα φαίνεται η υπό εξέταση μεταβλητή, στη συγκεκριμένη περίπτωση η ημερήσια πρόβλεψη για την απόδοση ενός χρεογράφου. Η αβεβαιότητα που υπάρχει σε καθημερινή βάση είναι μεγάλη, ειδικά για τα

χρηματοπιστωτικά ιδρύματα. Με την εφαρμογή της VaR, σε τέτοιες περιπτώσεις, εξετάζεται ο κίνδυνος σε ημερήσια βάση με σκοπό την καλύτερη διαχείριση του. Ωστόσο, δεν είναι απαραίτητο η εκτίμηση να γίνεται αποκλειστικά με ημερήσια δεδομένα. Η κάθε περίπτωση που εξετάζεται έχει και διαφορετικά χαρακτηριστικά, τα οποία απαιτούν διαφορετικές χρονικές περιόδους μελέτης και ανάλυσης. Τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα υπολογίζουν τον κίνδυνο σε βραχυπρόθεσμο ορίζοντα, συνήθως ημερήσια, εξασφαλίζοντας τη πιθανότητα μικρότερων απωλειών.

Η VaR είναι μια μέθοδος που μπορεί να εκτιμήσει τη χειρότερη δυνατή απώλεια που ενδεχομένως να έχει μια δραστηριότητα, με ένα δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης και σε ένα δεδομένο χρονικό διάστημα. Συγκεκριμένα, το επίπεδο εμπιστοσύνης κατέχει σημαντική θέση στην εκτίμηση του κινδύνου, καθώς καθορίζει το ποσοστό αυτού που ερμηνεύεται. Αν, παραδείγματος χάριν, το επίπεδο εμπιστοσύνης είναι $\alpha = 0,05$ ή 5%, τότε η VaR δίνει ερμηνεία για το $1 - \alpha = 0,95$ ή 95% διάστημα εμπιστοσύνης. Αν και το διάστημα εμπιστοσύνης που χρησιμοποιείται δεν είναι ποτέ το απόλυτο, δηλαδή το 100%, τα διαστήματα που χρησιμοποιούνται πιο συχνά είναι τα 95% και 99% αντίστοιχα. Τα διαστήματα αυτά προτιμούνται περισσότερο, καθώς όσο μικρότερο επιλέγεται ένα διάστημα τόσο αυξάνεται η αβεβαιότητα, ενώ όσο αυξάνεται το διάστημα εμπιστοσύνης τόσο πιο ακριβής είναι η εκτίμηση. Τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα επιλέγουν συνήθως διάστημα εμπιστοσύνης 99% καθώς το θεωρούν πιο ασφαλές.

Σε κάθε κατανομή υπάρχουν ακραία σημεία τα οποία την καθορίζουν όπως το πλάτος και το εύρος της. Όλα όμως εξαρτώνται κάθε φορά από την κατανομή που ερμηνεύει η VaR. Από την κατανομή προκύπτουν οι ακραίες παρατηρήσεις, ποια είναι ακριβώς τα ακραία σημεία, τι περιέχεται μέσα στη κατανομή, ώστε να γίνει η σωστή εκτίμηση. Πρακτικά, η κατανομή που χρησιμοποιείται πιο συχνά είναι η κανονική κατανομή, η οποία έχει συγκεκριμένα χαρακτηριστικά που τις δίνουν κάποια πλεονεκτήματα έναντι των άλλων (Bessis, 2002 και Jorion, 2007).

Η σωστή εκτίμηση της VaR στηρίζεται σε τρεις παραμέτρους: (α) στη χρονική περίοδο, (β) στο επίπεδο εμπιστοσύνης και (γ) στο χρονικό παράθυρο (ή παράθυρο δεδομένων). Κάθε ένας από αυτούς τους παράγοντες είναι εξίσου σημαντικός και τα αποτελέσματα των εκτιμήσεων εξαρτώνται άμεσα από τη σωστή διαχείριση τους. (Bessis, 2002 και Jorion, 2007).

Η χρονική περίοδος για την οποία γίνεται η εκτίμηση επιλέγεται βάσει της δομής του εξεταζόμενου χαρτοφυλακίου, της ταχύτητας ρευστοποίησης των στοιχείων, των θέσεων που κατέχει η επιχείρηση, αλλά και της ίδιας της επιχείρησης, καθώς, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, για τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα επιλέγεται η ημερήσια βάση, ενώ άλλοι οργανισμοί επιλέγουν μεγαλύτερα χρονικά διαστήματα. Το επίπεδο εμπιστοσύνης που επιλέγεται μπορεί να είναι είτε 90% είτε 95% είτε 99% και εξαρτάται από το είδος κινδύνου που επιθυμεί να εξετάσει ένας οργανισμός. Όσο υψηλότερο είναι το επίπεδο εμπιστοσύνης, τόσο μικρότερη είναι η πιθανότητα η εκτίμηση της VaR να είναι λανθασμένη. Το χρονικό παράθυρο ή παράθυρο δεδομένων αναφέρεται στο χρονικό διάστημα που τα δεδομένα του δείγματος καλύπτουν. Όσο μεγαλύτερο επιλέγεται το χρονικό παράθυρο τόσο μεγαλύτερη η αξιοπιστία της εκτίμησης, ωστόσο ένα μεγάλο χρονικό παράθυρο συνεπάγεται και αλλαγές στη συμπεριφορά των χρονοσειρών. Επομένως, πρέπει να επιλέγεται εκείνο το χρονικό παράθυρο, ώστε ο κίνδυνος να εκτιμάται σωστά (Bessis, 2002 και Jorion, 2007).

Όπως κάθε υπόδειγμα, έτσι και η VaR, πρέπει να λαμβάνει υπόψη της ορισμένες υποθέσεις οι οποίες καθιστούν τα αποτελέσματα της αξιόπιστα. Οι υποθέσεις αυτές αφορούν:

- Τη κατανομή που ακολουθούν οι μεταβολές των τιμών.
- Την έκταση κατά την οποία η παρούσα μεταβολή στη τιμή ενός περιουσιακού στοιχείου συσχετίζεται με τις παρελθούσες μεταβολές αυτής.
- Την αλληλοσυσχέτιση μεταξύ δύο ή περισσότερων διαφορετικών μετατοπίσεων των τιμών.
- Την έκταση κατά την οποία τα χαρακτηριστικά του μέσου και της μέσης απόκλισης τετραγώνου παραμένουν σταθερά στο χρόνο.
- Τη χρονολογική σειρά στοιχείων στην οποία εφαρμόζονται αυτές.

Επομένως, η VaR μέθοδος αποτελεί ένα χρήσιμο εργαλείο για τη μέτρηση των αναμενόμενων απωλειών που θα αντιμετωπίσει ένας οργανισμός για ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα. Έχοντας μελετήσει τη δομή ενός χαρτοφυλακίου, η μέθοδος λαμβάνει ως εισροή τις τιμές της αγοράς, χρησιμοποιεί τα κατάλληλα στατιστικά μοντέλα για τη περιγραφή των υπό εξέταση παραμέτρων και αξιολογεί τα εργαλεία υπολογισμού ώστε να προκύψει το τελικό αποτέλεσμα.

Η εκτίμηση της μεθόδου περιλαμβάνει τη χρήση στατιστικών εργαλείων, τα οποία αναλόγως το διάστημα εμπιστοσύνης που επιλέγεται και τη χρονική περίοδο που εξετάζεται, προκύπτει η επιθυμητή εκτίμηση για τις μέγιστες απώλειες. Θα πρέπει πάντα να λαμβάνεται υπόψη ότι πρόκειται για μια εκτίμηση, καθώς η VaR αποτελεί μια τυχαία μεταβλητή με αποτέλεσμα να υπάρχει η πιθανότητα να προκύψει διαφορετικό αποτέλεσμα. Ωστόσο, το διάστημα εμπιστοσύνης, όπως αυτό επιλέγεται, εκφράζει την αξιοπιστία της εκτίμησης.

1.5 Η εξέλιξη της VaR

Η ευρεία χρήση της VaR οφείλεται, κατά βάση, στον τρόπο με τον οποίο ερμηνεύονται τα αποτελέσματα της. Η βασική ιδέα πάνω στην οποία στηρίζεται η VaR δεν είναι καινούρια. Αντιθέτως, υιοθετήθηκε ευρέως για την εκτίμηση του κινδύνου αγοράς στα επενδυτικά χαρτοφυλάκια μετά την κατάρρευση των χρηματαγορών το 1987, η οποία και δημιούργησε σοβαρές αμφιβολίες σε επαγγελματίες του κλάδου και ακαδημαϊκούς για την ικανότητα επιβίωσης των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων.

Ήδη το 1945 ο Leavens θα διατυπώσει ένα ποσοτικό παράδειγμα, το οποίο πιθανώς να αποτελεί το πρώτο μέτρο VaR που έχει ιστορικά δημοσιευθεί. Ο Leavens υπέθεσε ένα χαρτοφυλάκιο αποτελούμενο από 10 ομόλογα, τα οποία στη λήξη τους είτε θα πληρώσουν την ονομαστική τους αξία είτε θα κριθούν ανεπίδεκτα εισπράξεως και η αξία τους θα είναι μηδενική. Επομένως, στη λήξη η αξία του χαρτοφυλακίου θα ακολουθεί ουσιαστικά τη διωνυμική κατανομή. Ο Leavens δεν αναγνώρισε κάποιο μέτρο εκτίμησης κινδύνου. Ωστόσο, ανέφερε συνεχώς τη «διαφορά ανάμεσα στις πιθανές απώλειες και τα πιθανά κέρδη» έχοντας, κατά πάσα πιθανότητα, κατά νου τη τυπική απόκλιση της αξίας του χαρτοφυλακίου.

Λίγα χρόνια αργότερα, το 1952, οι Markowitz και Roy θα δημοσιεύσουν ορισμένες μεθοδολογίες και μέτρα εκτίμησης του κινδύνου. Βασικός στόχος και των δύο υπήρξε η ανάπτυξη μεθοδολογιών επιλογής «βέλτιστων» χαρτοφυλακίων, δηλαδή για δεδομένο επίπεδο κινδύνου να εμφανίζουν τη μέγιστη αναμενόμενη απόδοση ή για δεδομένο επίπεδο αναμενόμενης απόδοσης να χαρακτηρίζονται από τον ελάχιστο κίνδυνο. Κινούμενοι προς αυτή τη κατεύθυνση, ο καθένας πρότεινε διαφορετικά μέτρα εκτίμησης τα οποία λάμβαναν υπόψη τις συνδιακυμάνσεις μεταξύ

των παραγόντων από τους οποίους προκύπτουν τα διάφορα είδη κινδύνου. Ο Markowitz χρησιμοποίησε τη διακύμανση ως μέτρο εκτίμησης, ενώ ο Roy προσπάθησε να προσδιορίσει τη πιθανότητα η αξία ενός χαρτοφυλακίου να μειωθεί κάτω από ένα συγκεκριμένο ανεκτό όριο.¹ Οι Schrock (1971) και Dusak (1972) περιέγραψαν μια μεθοδολογία VaR για την εκτίμηση κινδύνου σε χαρτοφυλάκια παραγώγων, ενώ ο Lietaer (1971) πρότεινε μια εφαρμοσμένη μεθοδολογία για την εκτίμηση του συναλλαγματικού κινδύνου, η οποία ενδεχομένως να είναι η πρώτη φορά που χρησιμοποιήθηκε η μεθοδολογία Monte Carlo.

Έκτοτε, η τεχνολογική πρόοδος και οι εξελίξεις των αγορών οδήγησαν στην ανάπτυξη περισσότερο εφαρμοσμένων μεθοδολογιών VaR, καθώς η έλλειψη υπολογιστικών πόρων επέτρεπε μέχρι τότε μόνο τη θεωρητική προσέγγιση αυτών. Τη δεκαετία του 70' οι τεχνικές VaR εφαρμόστηκαν και σε στοιχεία του ενεργητικού πέραν των χρεογράφων, ενώ είχαν ήδη εξελιχθεί τα μέσα για την εφαρμογή των τεχνικών αυτών.

Ένα παράδειγμα εφαρμογής της Value at Risk σε στοιχεία εκτός μετοχών αποτελεί η προσπάθεια του Kenneth Garbade (1986), ο οποίος εφάρμοσε VaR σε χαρτοφυλάκια ομολόγων. Συγκεκριμένα, τα μέτρα εκτίμησης που πρότεινε βασίζονταν στη σχέση μεταξύ των μεταβολών στη τιμή ενός ομολόγου και των μεταβολών στην απόδοση του.

Σημαντική στην εξέλιξη της VaR ήταν και η συμβολή του Wilson (1993) με τη προσπάθεια του να ενσωματώσει τη λεπτοκύρτωση και τη πολυσυγγραμμικότητα στην εκτίμηση του κινδύνου. Τη μεγαλύτερη συμβολή στην ανάπτυξη και διάδοση των μεθοδολογιών VaR, είχε η δημοσίευση των μεθοδολογιών VaR από την JP Morgan και η ελεύθερη πρόσβαση που παρείχε στο κοινό σε υπηρεσίες εκτίμησης κινδύνου. Η εν λόγω εταιρία δημοσίευσε σειρά από άρθρα σχετικά με τεχνικές λεπτομέρειες που αφορούν στη Value at Risk όπως: “Stress Testing Value-at-Risk”, “Risk Metrics - Technical Document”, “Value-at-Risk: An Overview of analytical VaR”, “An Overview of Value-at-Risk: Part II - Historical Simulations VaR”, “An Overview of

¹ Η τεχνική αυτή αναφέρεται στη διεθνή βιβλιογραφία ως “Shortfall Risk Measure”. Για εκτενή αναφορά, βλ. “Shortfall as a risk measure: properties, optimization and applications, Dimitris Bertsimas, Geoffrey J. Lauprete, Alexander Samarov, (2004).

Value-at-Risk: Part III – Monte Carlo Simulations VaR” και “Back Testing Value-at-Risk”.

1.6 Μέθοδοι υπολογισμού της VaR

Κύριος σκοπός των μεθόδων υπολογισμού της VaR είναι να δημιουργήσουν τα κατάλληλα μοντέλα για την ερμηνεία των δεδομένων της υπό εξέταση μεταβλητής. Παρά τη σπουδαιότητα της VaR ως μέτρο εκτίμησης του κινδύνου, θα πρέπει να καταστεί σαφές ότι αποτελεί μια στατιστική εκτίμηση βασισμένη σε ιστορικά δεδομένα. Αποτελεί, ουσιαστικά, μια πρόβλεψη η οποία εκ φύσεως δεν δύναται να καθοριστεί με ακρίβεια μέσα σε επίπεδο εμπιστοσύνης 100%.

Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της VaR είναι:²

1. **Υπόδειγμα ιστορικών τιμών (historical price modelling).** Σύμφωνα με το συγκεκριμένο υπόδειγμα, επιχειρείται η κατασκευή μιας κατανομής των αποδόσεων ενός χαρτοφυλακίου από μία σειρά μεταβολών των αξιών του, μια χρονολογική σειρά, ουσιαστικά, των αγοραίων τιμών των στοιχείων που συνθέτουν το χαρτοφυλάκιο όπως μετοχές, συναλλαγματικές ισοτιμίες, επιτόκια, κατά την αρχή και το τέλος ενός συγκεκριμένου χρονικού ορίζοντα. Δοθείσης αυτής της κατανομής, είναι δυνατό να υπολογιστεί η μέγιστη ζημία του χαρτοφυλακίου μέσα σε ένα συγκεκριμένο διάστημα εμπιστοσύνης για μια δεδομένη χρονική περίοδο.
2. **Μέθοδος εκτιμηθείσας διακύμανσης-συνδιακύμανσης.** Η μέθοδος αυτή αναφέρεται στη δημιουργία ενός πίνακα που περιλαμβάνει μία σειρά ιστορικών στοιχείων διακύμανσης και συνδιακύμανσης πάνω σε απλουστευμένα χρηματοοικονομικά εργαλεία και στη μετέπειτα αναγωγή τους στα στοιχεία που συνθέτουν ένα χαρτοφυλάκιο.³ Οι συνολικές χρηματοροές οποιουδήποτε χαρτοφυλακίου, γραμμικές ή μη, δύναται να μετατραπούν σε ταμειακές ροές μηδενικού τοκομεριδίου (παρούσας αξίας) για απλά εργαλεία και σε ποσά ισοδύναμα του «δέλτα» (delta) για παράγωγα εργαλεία μέσα από μια διαδικασία που καλείται «χαρτογράφηση χρηματικών ροών» (cash flow

² Για μια συνοπτική παρουσίαση και εμπειρική εφαρμογή των μεθόδων υπολογισμού της VaR, βλ. Duffie and Pan (1997).

³ Για την ανάλυση των πινάκων συνδιακύμανσης που χρησιμοποιούνται στον υπολογισμό της VaR, βλ. Alexander και Leight (1997).

mapping). Η διαδικασία αυτή αποτελεί έναν τρόπο τυποποίησης των χρηματικών ροών των περισσότερων χαρτοφυλακίων, με στόχο τη διευκόλυνση της διαδικασίας υπολογισμού της VaR. Ο διαχωρισμός των κινδύνων που χαρακτηρίζουν τις χρηματοροές του χαρτοφυλακίου σε τυποποιημένα χρονικά διαστήματα λήξης, διευκολύνει τον υπολογισμό της VaR του συνολικού χαρτοφυλακίου, μέσα από τη χρήση των στοιχείων της διακύμανσης και της συσχέτισης των συγκεκριμένων χρονικών διαστημάτων λήξης.

3. **Monte Carlo προσομοίωση.** Η προσομοίωση Monte Carlo χρησιμοποιεί τυχαίες αγοραίες τιμές των βασικών εργαλείων για να κατασκευαστεί μια κατανομή των αποδόσεων χαρτοφυλακίου αντί των αποδόσεων. Η συγκεκριμένη μέθοδος προσφέρει μια εκτίμηση κινδύνου για πολύπλοκα χαρτοφυλάκια, τα οποία χαρακτηρίζονται από υψηλές τιμές του «γάμα» και σημαντική κυρτότητα (Rissin, 1997). Η εκτίμηση του κινδύνου ενός χαρτοφυλακίου γίνεται με τη τυχαία κατασκευή ενός ιστογράμματος των πιθανών κερδών ή ζημιών που θα σημειώσει μέσα σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα. Για την επιλογή των τιμών που χρησιμοποιούνται στους υπολογισμούς επιλέγεται ένας συνδυασμός της τεκμαρτής και της ιστορικής μεταβλητότητας.
4. **Ανάλυση “stress”.** Η συγκεκριμένη ανάλυση προτάθηκε από το G30 ως επιπρόσθετο εργαλείο των μεθόδων που στηρίζονται στην εκτίμηση της VaR. Για την ανάλυση αυτή, δημιουργείται μια σειρά από σενάρια τιμών για την μελέτη της απόδοσης ενός χαρτοφυλακίου, αντί της χρήσης ιστορικών τιμών ή τυχαίων τιμών.

1.6.1 Δέλτα-κανονική μέθοδος προσομοίωσης

Η δέλτα-κανονική μέθοδος αποτελεί μια υποκατηγορία της μεθόδου διακύμανσης-συνδιακύμανσης, η οποία στηρίζεται στην υπόθεση ότι οι αποδόσεις, στο σύνολο τους, ακολουθούν κανονική κατανομή με μέσο όρο μηδέν και διακύμανση η οποία υπολογίζεται από τις διακυμάνσεις-συνδιακυμάνσεις των στοιχείων του χαρτοφυλακίου.

Η μέθοδος αυτή αποτελεί έναν εύκολο και απλουστευμένο τρόπο υπολογισμού της VaR μέσα από τον πίνακα διακύμανσης-συνδιακύμανσης με βασικές, ωστόσο, προϋποθέσεις την σταθερότητα των τιμών των επιτοκίων, τη μη μεταβολή της αξίας

του χαρτοφυλακίου και τη σταθερότητα της αγοράς. Καταστάσεις όπου επικρατεί αδυναμία ή δυσκολία ρευστοποίησης, όπου οι μεταβολές των τιμών είναι μεγάλες και απότομες ή ακόμα και σε περιόδους κρίσης, η συγκεκριμένη μέθοδος δεν μπορεί να εκτιμήσει τον κίνδυνο. Τέτοιες καταστάσεις μελετώνται καλύτερα με την ανάλυση “stress”.

Η συγκεκριμένη μέθοδος ενδείκνυται για τον υπολογισμό της VaR χαρτοφυλακίων, αποτελούμενα από στοιχεία τα οποία είναι γραμμικοί συνδυασμοί μεταβλητών, των οποίων οι κατανομές βρίσκονται πολύ κοντά στην κανονική κατανομή. Σε αντίθετη περίπτωση, αυτή των μη-γραμμικών συνδυασμών ή μη-κανονικών κατανομών, η εκτίμηση της μεθόδου δεν είναι αξιόπιστη και προτιμάται η μέθοδος Monte Carlo. Το βασικό πρόβλημα με τους μη-γραμμικούς συνδυασμούς έγκειται στο ότι δεν υπάρχει ανάλογη μεταβολή, δηλαδή, αν μεταβληθεί κατά μια μονάδα η τιμή του μη-γραμμικού συνδυασμού (για παράδειγμα, των δικαιωμάτων), ο κίνδυνος του χαρτοφυλακίου δεν μεταβάλλεται ανάλογα.

Υποθέτουμε ότι ο παράγοντας του κινδύνου προέρχεται από τις τιμές των στοιχείων ενός χαρτοφυλακίου. Η παρούσα απόδοση του χαρτοφυλακίου δηλώνεται ως p και θεωρείται γνωστή. Η μελλοντική απόδοση του χαρτοφυλακίου (ή προβλεπόμενη απόδοση) θεωρείται άγνωστη και αποτελεί τυχαία μεταβλητή, η οποία δηλώνεται ως P . Για τον υπολογισμό της VaR, πρέπει να εκτιμηθεί η κατανομή της P . Η δέλτα-κανονική μέθοδος υποθέτει τη τυποποιημένη κανονική κατανομή, με αποτέλεσμα να επιλέγεται η κανονική κατανομή για την P . Επομένως, το πρόβλημα εκτίμησης μιας κατανομής περιορίζεται στην εκτίμηση των απαραίτητων παραμέτρων για την κανονική κατανομή, μ_P και σ_P . Επίσης, δηλώνεται ως R το N -διάστατο διάνυσμα το οποίο περιλαμβάνει τις τιμές των στοιχείων του χαρτοφυλακίου (τις τιμές των μετοχών). Βάσει ιστορικών δεδομένων μπορούμε να χαρακτηρίσουμε τη κατανομή του R .

Βασικό μέλημα είναι να μετατραπεί αυτός ο χαρακτηρισμός του R σε έναν χαρακτηρισμό της P . Η μετατροπή αυτή επιτυγχάνεται μέσα από τη συνάρτηση χαρτογράφησης χαρτοφυλακίου. Η μελλοντική αξία του χαρτοφυλακίου μπορεί να εκφραστεί σε όρους του R χρησιμοποιώντας μια συνάρτηση θ , η οποία ονομάζεται συνάρτηση χαρτογράφησης χαρτοφυλακίου. Η συνάρτηση αυτή χαρτογραφεί τον N -διάστατο χώρο των αποδόσεων των στοιχείων στον μονοδιάστατο χώρο της

μελλοντικής αξίας του χαρτοφυλακίου, όπου το N αναφέρεται στον αριθμό των στοιχείων που έχουν επιλεγεί. Επομένως:

$$P = \theta(R)$$

Η προηγούμενη σχέση αναφέρεται και ως χαρτογράφηση χαρτοφυλακίου. Από τη στιγμή που το R περιλαμβάνει τις τιμές των μετοχών ενός χαρτοφυλακίου, η συγκεκριμένη χαρτογράφηση απλουστεύεται. Επομένως, χρειαζόμαστε να εφαρμόσουμε τη συνάρτηση θ στην κατανομή της R ώστε να προκύψει η κατανομή της P .

Η συνάρτηση θ είναι γραμμική πολυωνυμική και η μεταβλητή P ακολουθεί κανονική κατανομή με αποτέλεσμα να προκύπτουν εύκολα οι μ_P και σ_P για το χαρτοφυλάκιο. Με βάση την υπόθεση ότι το R περιλαμβάνει τις τιμές ενός συνόλου μετοχών, ο κίνδυνος του χαρτοφυλακίου υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\sigma_P = \sqrt{hCh^T} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N h_i h_j \sigma_{ij}} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N h_i h_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j}$$

όπου,

h_i, h_j : το ποσοστό συμμετοχής του i (αντίστοιχα j) στοιχείου στο χαρτοφυλάκιο για $i, j = 1, \dots, N$

σ_i, σ_j : η μεταβλητότητα της απόδοσης του i (αντίστοιχα j) στοιχείου για $i, j = 1, \dots, N$ και

ρ_{ij} : το $N \times N$ διάνυσμα των συντελεστών συσχέτισης για $i, j = 1, \dots, N$

και ο υπολογισμός των h_i, h_j προκύπτει από τη λύση του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού:

$$\text{Min: } \sigma_P^2 = \text{Var}(R_P) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N h_i \sigma_{ij} h_j = hCh^T$$

με τον περιορισμό:

$$\sum_{i=1}^N h_i = 1, h_i \geq 0 \forall i = 1, \dots, N$$

Το αποτέλεσμα της διαδικασίας χαρτογράφησης στη δέλτα- κανονική μέθοδο είναι η εφαρμογή μιας συνάρτησης χαρτογράφησης θ σε ένα κανονικό διάνυσμα R . Το διάνυσμα P που θα προκύψει διατηρεί τις αρχικές διαστάσεις και, εφόσον το R είναι κανονικό, το P θα ακολουθεί κανονική κατανομή. Η συμπερασματική διαδικασία δέχεται ως είσοδο το διάνυσμα R των ιστορικών αποδόσεων. Εφ' όσον οι αποδόσεις των μετοχών ακολουθούν κανονική κατανομή, ένας γραμμικός συνδυασμός αυτών θα ακολουθεί επίσης κανονική κατανομή.

Η διαδικασία μετασχηματισμού για τον χαρακτηρισμό της κατανομής της R συνδυάζει τα αποτελέσματα της διαδικασίας χαρτογράφησης και τη συμπερασματική διαδικασία και τις χρησιμοποιεί για τον χαρακτηρισμό της κατανομής της P . Στη μέθοδο αυτή, η διαδικασία μετασχηματισμού οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η P ακολουθεί κανονική κατανομή. Βάσει αυτού και της παρούσας αξίας του χαρτοφυλακίου p , η διαδικασία μετασχηματισμού προσδιορίζει τη τιμή της VaR. Δεδομένου ότι η P ακολουθεί κανονική κατανομή, η VaR για μια πιθανότητα p^* υπολογίζεται:

$$\text{VaR}(p^*) = Z_{1-p^*} \sigma_P + (p - \mu_P)$$

Σε μικρό χρονικό ορίζοντα, παραδείγματος χάριν μια ημέρα, είναι λογική η υπόθεση ότι η προβλεπόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου ισούται με τη παρούσα απόδοση. Σε τέτοιες περιπτώσεις η VaR υπολογίζεται από την απλουστευμένη παραπάνω σχέση ως:

$$\text{VaR}(p^*) = Z_{1-p^*} \sigma_P$$

Πλεονεκτήματα

Η δέλτα-κανονική μέθοδος είναι εύκολη στην εφαρμογή καθώς περιλαμβάνει έναν απλό πολλαπλασιασμό πινάκων. Επιπλέον, είναι υπολογιστικά γρήγορη, ακόμα και όταν έχει να υπολογίσει μεγάλο πλήθος στοιχείων αφού αντικαθιστά κάθε επενδυτική θέση με την γραμμική της έκθεση. Χαρτοφυλάκια τα οποία είναι γραμμικοί συνδυασμοί παραγόντων κινδύνου που ακολουθούν κανονική κατανομή,

ακολουθούν, επίσης, κανονική κατανομή. Ακόμα, όπως προκύπτει και από την παραπάνω ανάλυση, μοναδικά προ απαιτούμενα της μεθόδου είναι οι ιστορικές αγοραίες τιμές και η έκθεση των παρουσών θέσεων στον κίνδυνο. Σε πολλές περιπτώσεις, η δέλτα-κανονική μέθοδος παρέχει επαρκή εκτίμηση του κινδύνου. Ως παραμετρική μέθοδος, η VaR εύκολα επιδέχεται περαιτέρω ανάλυση, καθώς οι μετρήσεις για τον αρχικό (marginal) και τον σταδιακό (incremental) κίνδυνο αποτελούν υποπροϊόντα του υπολογισμού της VaR. Πέραν των όσων αναφέρθηκαν, η μέθοδος είναι ιδιαίτερη σημαντική καθώς αντικατοπτρίζει την αρχή της «χαρτογράφησης» στο Risk Management.

Μειονεκτήματα

Ένα βασικό μειονέκτημα της μεθόδου αποτελεί η ύπαρξη παχιών ουρών των κατανομών που ακολουθούν οι αποδόσεις των περισσότερων στοιχείων. Αυτές οι παχιές ουρές δημιουργούν πρόβλημα στις εκτιμήσεις, καθώς η VaR επιχειρεί να ερμηνεύσει τη συμπεριφορά της απόδοσης του χαρτοφυλακίου στην αριστερή ουρά της κατανομής. Σε τέτοιες περιπτώσεις, ένα μοντέλο που βασίζεται στη κανονική κατανομή θα υποτιμήσει την αναλογία των ακραίων τιμών, άρα και τη πραγματική VaR.

Ένα επιπλέον μειονέκτημα είναι το γεγονός ότι η δέλτα-κανονική μέθοδος εκτιμά ανεπαρκώς τον κίνδυνο των μη γραμμικών στοιχείων, όπως για παράδειγμα τα δικαιώματα προαίρεσης. Η δέλτα-κανονική VaR δεν είναι σε θέση να κατανοήσει την ασυμμετρία στις κατανομές τέτοιων στοιχείων.

1.6.2 Μέθοδος Ιστορικής Προσομοίωσης

Η μέθοδος ιστορικής προσομοίωσης αποτελεί μια δημοφιλή μέθοδο εκτίμησης της VaR. Χρησιμοποιεί τα ιστορικά δεδομένα ως οδηγό για το τι πιθανόν να συμβεί στο μέλλον. Εφαρμόζονται τα πρόσφατα ποσοστά συμμετοχής στις ιστορικές αποδόσεις ανατρέχοντας στο παρελθόν, παραδείγματος χάριν στις τελευταίες 100 ημέρες. Αυτά τα ποσοστά συμμετοχής υπολογίζονται με τη χρήση τυποποιημένων μαθηματικών μεθόδων βελτιστοποίησης. Η μελλοντική απόδοση του χαρτοφυλακίου, αποτελούμενο από N στοιχεία, δίνεται από τη σχέση:

$$R_p = \sum_{i=1}^N h_i R_i$$

Με τον τρόπο αυτό, προκύπτει η κατανομή των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου. Οι αποδόσεις αυτές τοποθετούνται σε αύξουσα διάταξη και, ανάλογα με το επίπεδο εμπιστοσύνης που θα επιλεγεί, επιλέγεται το σχετικό ποσοστημόριο της κατανομής. Η διαδικασία αυτή έχει σαν εκτίμηση την 1-day VaR με τη μέθοδο ιστορικής προσομοίωσης.

Επιπλέον, αξιοποιώντας τις ιστορικές αποδόσεις των στοιχείων και τα ποσοστά συμμετοχής αυτών στο χαρτοφυλάκιο, υπάρχει η δυνατότητα να παρασκευασθούν υποθετικά χαρτοφυλάκια. Η προσέγγιση αυτή αναφέρεται ως “bootstrapping” και δεν είναι μοναδική, καθώς έχουν προταθεί διαδικασίες κατασκευής μελλοντικών σεναρίων για μεταβλητές της αγοράς, οι οποίες διαδικασίες βασίζονται στις παρούσες αξίες (Jorion, 2007).

Όπως και με τη δέλτα-κανονική μέθοδο, η διαδικασία υπολογισμού της VaR περιλαμβάνει τον υπολογισμό της μέσης απόδοσης, της τυπικής απόκλισης, του πίνακα συνδιακύμανσης των αποδόσεων και των ποσοστών συμμετοχής των στοιχείων στο χαρτοφυλάκιο. Η συμμετοχή των στοιχείων στο χαρτοφυλάκιο υπολογίζεται μέσα από το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού. όπως αυτό παρουσιάστηκε παραπάνω και τα αποτελέσματα εφαρμόζονται στις αποδόσεις μέσα από τη σχέση:

$$R_p(t) = \sum_{i=1}^N h_i(t) R_i$$

όπου η μεταβλητή t αναφέρεται στο χρονικό παράθυρο που έχει επιλεγεί, παραδείγματος χάριν για $t = 1, \dots, 100$ έχουν επιλεγεί οι πρώτες 100 ημέρες από το δείγμα, ενώ το διάνυσμα $R_p(t)$ θα περιλαμβάνει τις t ημερήσιες αποδόσεις υπολογισμένο για κάθε χρονικό διάστημα. Στη συνέχεια, οι αποδόσεις τοποθετούνται σε αύξουσα διάταξη και επιλέγεται το ποσοστημόριο της κατανομής ανάλογα με το εκάστοτε επίπεδο εμπιστοσύνης.

Πλεονεκτήματα

Η μέθοδος ιστορικής προσομοίωσης είναι σχετικά απλή στην εφαρμογή, αν τα δεδομένα είναι εύκολα διαθέσιμα για την εκτίμηση της VaR. Η συγκεκριμένη μέθοδος αποδέχεται τη μη-γραμμικότητα και τη μη-κανονική κατανομή καθώς στηρίζεται στις πραγματικές τιμές των στοιχείων. Επιπλέον, δεν βασίζεται στη στοχαστική δομή των αγορών ή σε συγκεκριμένες υποθέσεις σχετικά με τα μοντέλα αποτίμησης. Το γεγονός ότι δεν βασίζεται στα μοντέλα αποτίμησης, την απαλλάσσει από τον κίνδυνο τα μοντέλα αυτά να είναι λανθασμένα (Hull, 2002).

Μειονεκτήματα

Η ιστορική προσομοίωση προϋποθέτει τη διαθεσιμότητα επαρκών ιστορικών δεδομένων για τις τιμές των στοιχείων του χαρτοφυλακίου. Αυτός ο περιορισμός αποτελεί ένα σημαντικό μειονέκτημα, καθώς ορισμένα στοιχεία ενδέχεται να έχουν μικρό παρελθόν ή και καθόλου σε ορισμένες περιπτώσεις. Επιπλέον, η βασική υπόθεση της μεθόδου, ότι το παρελθόν αντιπροσωπεύει το άμεσο μέλλον, δεν είναι πάντα σωστή, ενώ η μέθοδος εύκολα γίνεται βραδυκίνητη όταν εφαρμόζεται σε χαρτοφυλάκια με πολύπλοκες δομές και με μεγάλο αριθμό στοιχείων.

1.6.3 Μέθοδος Προσομοίωσης Monte Carlo

Η μέθοδος προσομοίωσης Monte Carlo μπορεί να περιγραφεί σε δύο βήματα. Στο πρώτο βήμα, καθορίζεται μια στοχαστική διαδικασία για τις χρηματοοικονομικές μεταβλητές. Στο δεύτερο βήμα, προσομοιώνονται πλασματικές ακολουθίες για τις τιμές των χρηματοοικονομικών μεταβλητών που υπάρχει ενδιαφέρον. Τα αποτελέσματα αυτών των «ψεύδο» διαδικασιών χρησιμοποιούνται στη συνέχεια ώστε να συνταχθεί η κατανομή των αποδόσεων, μέσα από την οποία εκτιμάται η VaR.

Πλεονεκτήματα

Η συγκεκριμένη μέθοδος μπορεί να ενσωματώσει μη-γραμμικές θέσεις, μη-κανονικές κατανομές, υπονοούμενες παραμέτρους ακόμα και υποτιθέμενα σενάρια. Επιπλέον, το γεγονός ότι δεν βασίζεται σε ιστορικά δεδομένα αλλά στα τυχαία αποτελέσματα, προσδίδει αξιοπιστία στη μέθοδο καθώς καταφέρνει να ενσωματώσει την αβεβαιότητα στο σύνολο της.

Μειονεκτήματα

Το μεγαλύτερο μειονέκτημα της μεθόδου προσομοίωσης Monte Carlo, είναι ο υπολογιστικός της χρόνος. Αν, για παράδειγμα, από ένα χαρτοφυλάκιο 1000 στοιχείων, προσομοιωθούν 1000 τυχαίες δειγματικές ακολουθίες για το κάθε στοιχείο, θα χρειαστούν 1 εκατομμύριο υπολογισμοί. Επιπλέον, αν η αποτίμηση των στοιχείων σε ένα δεδομένο χρονικό διάστημα, περιλαμβάνει περαιτέρω προσομοίωση, τότε η μέθοδος απαιτεί προσομοιώσεις εντός άλλων προσομοιώσεων με αποτέλεσμα οι απαιτήσεις σε δεδομένα και εξοπλισμό, να είναι υψηλότερες συγκριτικά με τις υπόλοιπες προσεγγιστικές μεθόδους.

Η μέθοδος προσομοίωσης Monte Carlo, αποτελεί την ακριβότερη, στην εφαρμογή, μέθοδο εκτίμησης του κινδύνου σε όρους υποδομής συστημάτων. Μία πιθανή αδυναμία της μεθόδου είναι το γεγονός ότι είναι επιρρεπής στον κίνδυνο τα μοντέλα στα οποία εφαρμόζεται να είναι λανθασμένα. Τέλος, τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων θα πρέπει να συνοδεύονται από μια ανάλυση ευαισθησίας για να εξετάζεται κατά πόσο αυτά διαφοροποιούνται όταν τα μοντέλα υφίστανται αλλαγές.

1.7 Πλεονεκτήματα-Μειονεκτήματα της VaR

Η εκτίμηση της VaR ως εργαλείο μέτρησης του κινδύνου χρησιμοποιείται ευρύτατα από εμπορικές ή επενδυτικές τράπεζες, ασφαλιστικές εταιρίες, ακόμα και από επιχειρήσεις εκτός του χρηματοοικονομικού κλάδου, οι οποίες έχουν στη κατοχή τους χαρτοφυλάκια περιουσιακών στοιχείων που περιλαμβάνουν, μετοχές, ομόλογα, συνάλλαγμα και παράγωγα προϊόντα. Η VaR προσφέρει σε κάθε έναν από τους παραπάνω οργανισμούς μια εκτίμηση σχετικά με τις μέγιστες απώλειες που αναμένουν να εμφανίσουν τα χαρτοφυλάκια τους για μία συγκεκριμένη χρονική περίοδο βοηθώντας τους να επιλέξουν τον τρόπο με τον οποίο θα ανακαταλείμουν τα ποσοστά συμμετοχής των περιουσιακών στοιχείων στα χαρτοφυλάκια τους με σκοπό την επίτευξη ενός επιθυμητού επιπέδου κινδύνου.

Ορισμένα από τα πλεονεκτήματα που προσφέρει η VaR είναι:

1. **Διαχείριση πληροφόρησης.** Οι πληροφορίες που παρέχει η συγκεκριμένη προσέγγιση χαρακτηρίζονται από σαφήνεια και απλότητα, ενώ

χρησιμοποιούνται από στελέχη εταιριών, ρυθμιστικές αρχές, καθώς και από εσωτερικούς και εξωτερικούς ελεγκτές.

2. **Καθορισμός ορίων διαπραγμάτευσης.** Τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα είναι σε θέση να καθορίζουν όρια στις διαπραγματεύσεις συναλλάγματος, χρεογράφων ή και στην οριοθέτηση θέσεων, σε όρους VaR. Επιπρόσθετα, η χρήση της VaR επιτρέπει τη σύγκριση θέσεων σε διαφορετικές αγορές ή διαφορετικών προϊόντων σε καθορισμένη χρονική βάση.
3. **Μελέτη της σχέσης κινδύνου-απόδοσης** ενός οποιουδήποτε χαρτοφυλακίου με βάση έναν δείκτη αναφοράς. Εκτιμώντας τη VaR ενός δείκτη από τα συστατικά του μέρη, καθίσταται δυνατή η σύγκριση της με τη VaR ενός οποιουδήποτε χαρτοφυλακίου.
4. **Κατανομή πόρων.** Με βάση τα αποτελέσματα της VaR και τον τρόπο με τον οποίο αυτά ερμηνεύονται, οι επενδυτές αλλά και κάθε άμεσα ενδιαφερόμενος είναι σε θέση να λάβουν καλύτερες αποφάσεις σχετικά με τις επενδυτικές τους στρατηγικές ή τη διαχείριση του κινδύνου, επιτυγχάνοντας τη βέλτιστη απόδοση για τα χαρτοφυλάκια που διαχειρίζονται.
5. **Εναρμόνιση με τις αποφάσεις των ρυθμιστικών αρχών.** Τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα και οι οργανισμοί γενικότερα θα πρέπει να εναρμονίσουν τις πρακτικές τους με τις απαιτήσεις κεφαλαιακής επάρκειας αλλά και τη δημοσιοποίηση των κινδύνων που αντιλαμβάνονται, όπως ορίζεται από τις ρυθμιστικές αρχές. Η ανάλυση και η πληροφορία που παρέχει η VaR αποτελεί βοήθημα προς αυτή τη κατεύθυνση.

Ωστόσο, η μεθοδολογία Value at Risk εμφανίζει και κάποια μειονεκτήματα ή αδυναμίες, ενώ η λανθασμένη χρήση της μπορεί να οδηγήσει τον ενδιαφερόμενο σε αναποτελεσματικές αποφάσεις διαχείρισης του κινδύνου. Η κατάσταση αυτή μπορεί να προκληθεί είτε από λάθος υπολογισμό της VaR, είτε γιατί, ενώ έχει υπολογισθεί με τον σωστό τρόπο, δεν σχετίζεται με τους πραγματικούς στόχους του εκάστοτε οργανισμού για τη διαχείριση κινδύνου (Beder, 1995, Culp, 1998). Μερικά από τα μειονεκτήματα της VaR είναι:

1. **Κατάλληλότητα.** Υπάρχουν αρκετά ερωτηματικά αναφορικά με το ποια είναι η πλέον κατάλληλη μέθοδος για την εκτίμηση της διακύμανσης της απόδοσης μιας μετοχής ή ενός χαρτοφυλακίου περιουσιακών στοιχείων. Μια μέθοδος που χρησιμοποιείται είναι αυτή της σταθερής μεταβλητότητας (Constant Volatility Method), για την οποία όμως εμπειρικές έρευνες έχουν δείξει μια αστάθεια της διακύμανσης από ημέρα σε ημέρα και μια μεταβολή της κατά τη διάρκεια του χρόνου. Η μεταβολή της διακύμανσης από ημέρα σε ημέρα (time varying-volatility) συνεπάγεται και τη μεταβολή των αποδόσεων των στοιχείων ενός χαρτοφυλακίου. Η λύση στο πρόβλημα αυτό ήρθε από την έρευνα του Bollerslev (1986, 1990) ως γενίκευση της έρευνας του Engle (1982). Η τεχνική της μεταβαλλόμενης στο χρόνο διακύμανσης του Bollerslev, η οποία ονομάστηκε “Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity”, κοινώς «μέθοδος GARCH», δίνει τη δυνατότητα να εκτιμηθεί η διακύμανση της απόδοσης στον χρόνο t χρησιμοποιώντας τη διακύμανση στο χρόνο $t - 1$ και το τετράγωνο της αξίας της απόδοσης στον χρόνο $t - 1$ ⁴.
2. **Υποεκτιμημένα αποτελέσματα.** Υπάρχει το ενδεχόμενο η VaR να προσφέρει υποεκτιμημένα αποτελέσματα, κυρίως όταν οι αποδόσεις ενός στοιχείου ή ακόμα και του χαρτοφυλακίου μεταβληθούν κατά μη προβλέψιμο τρόπο λόγω δομικών αλλαγών των υποκείμενων οικονομιών.
3. **Υποεκτιμημένες απώλειες.** Η κεντρική φιλοσοφία της VaR στηρίζεται στον υπολογισμό των μέγιστων απωλειών που ενδέχεται να έχει ένας οργανισμός μια δεδομένη χρονική περίοδο, κατά τη διάρκεια ενός συγκεκριμένου χρονικού ορίζοντα. Οι απώλειες υπολογίζονται βάσει της υπόθεσης ότι τα περιουσιακά στοιχεία μπορούν να πωληθούν στις τρέχουσες αγοραίες τιμές. Ωστόσο, στη περίπτωση που το χαρτοφυλάκιο περιλαμβάνει σε μεγάλο βαθμό μη ρευστοποιήσιμα στοιχεία, η VaR ενδεχομένως να υποεκτιμήσει τις πραγματικές απώλειες αφού τα στοιχεία ίσως χρειαστεί να πωληθούν με έκπτωση.
4. **Μεταχείριση πιστωτικού κινδύνου.** Ένα τελευταίο μειονέκτημα της VaR είναι ότι οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για την αξιολόγηση των στοιχείων ενός χαρτοφυλακίου ίσως δεν μεταχειρίζονται κατάλληλα τον πιστωτικό

⁴ Μια εξελιγμένη τεχνική, η οποία συνδέεται άμεσα με τη μέθοδο GARCH, είναι η Risk Metrics TM της JP Morgan. Ωστόσο, οι δύο αυτές μέθοδοι εμφανίζουν τρωτά σημεία όταν παρατηρούνται ασυμμετρικές κινήσεις της διακύμανσης σε σχέση με τις παρελθοντικές αποδόσεις των στοιχείων ενός χαρτοφυλακίου. Για το λόγο αυτό, αναπτύχθηκαν μέθοδοι εκτίμησης των ασυμμετρικών διακυμάνσεων (asymmetric volatilities) όπως η EGARCH από τον Daniel Nelson (1991).

κίνδυνο. Η αδυναμία αυτή βρίσκεται κυρίως σε χαρτοφυλάκια παραγώγων, όπου τόσο η μεθοδολογία Black-Scholes (1973) για τον υπολογισμό των παραγόντων κινδύνου όσο και η μέθοδος προσομοίωσης Monte Carlo υποθέτουν την απουσία πιστωτικού κινδύνου των παραγώγων. Σε ορισμένες περιπτώσεις, ο πιστωτικός κίνδυνος ίσως είναι περιορισμένος και να αγνοείται, σε γενικές γραμμές ωστόσο η ανάλυση του πιστωτικού κινδύνου πρέπει να συμπεριλαμβάνεται στις μεθοδολογίες υπολογισμού της VaR.

Με βάση τα παραπάνω, συμπεραίνουμε ότι η VaR αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο μέτρησης του κινδύνου, πλην όμως παρουσιάζει μειονεκτήματα τα οποία επιβάλλουν την ορθή και προσεκτική χρήση της στον κλάδο του Risk Management. Τα πλεονεκτήματα τα οποία προσφέρει η VaR παρέχουν επιπλέον πληροφόρηση για τη σωστή διαχείριση του κινδύνου, ωστόσο η VaR σε καμία περίπτωση δεν μπορεί να εξαλείψει τον επενδυτικό κίνδυνο.

1.8 Ανακεφαλαίωση

Στο κεφάλαιο αυτό έγινε μια εκτενής παρουσίαση του κινδύνου (risk) ως συστατικό κάθε επενδυτικής ενέργειας και κάθε αγοράς, ενώ παράλληλα αναγνωρίστηκαν και αναλύθηκαν τα είδη του κινδύνου που παρουσιάζονται. Στη συνέχεια, αναλύθηκε η διαχείριση του κινδύνου, η τακτική ουσιαστικά των οργανισμών και χρηματοοικονομικών ιδρυμάτων που επιλέγεται ώστε να αντιμετωπίζεται ο κίνδυνος σε κάθε του μορφή και με σκοπό την εξασφάλιση της μικρότερης έκθεσης σε αυτόν.

Παρουσιάστηκαν διάφορες μεθοδολογίες μέτρησης του κινδύνου, οι οποίες επιλέγονται από τις επιχειρήσεις με σκοπό τον εντοπισμό του κινδύνου και την ασφάλιση της θέσης τους απέναντι του. Από τις μεθοδολογίες αυτές ξεχώρισε μια σημαντική μέθοδος, η Value at Risk (VaR), η οποία θα χρησιμοποιηθεί στη πορεία της εργασίας για την εκτίμηση του κινδύνου στο Κεφάλαιο 3. Αναφορικά με τη Value at Risk, παρουσιάστηκε η δομή της μεθόδου, η ιστορική της εξέλιξη, τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της, οι παράγοντες που την επηρεάζουν και οι προϋποθέσεις που θέτει για την ολοκληρωμένη εφαρμογή της, ενώ αναπτύχθηκαν και οι σημαντικότερες τεχνικές υπολογισμού της.

Τέλος, η ανάλυση των κυριότερων τεχνικών εκτίμησης του κινδύνου, της δέλτα κανονικής μεθόδου, της ιστορικής μεθόδου προσομοίωσης και της προσομοίωσης Monte Carlo, μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι κάθε μια από αυτές έχει συγκεκριμένα χαρακτηριστικά και πλεονεκτήματα ώστε να ξεχωρίζουν και είναι στη κρίση του εκάστοτε αναλυτή αλλά και στην αναγκαιότητα ποια θα προτιμήσει για την εκτίμηση του κινδύνου.

Κεφάλαιο 2: Ανάλυση Χρονοσειρών

2.1 Εισαγωγή

Η στατιστική ανάλυση εφαρμόζεται στα διάφορα υποδείγματα με τη χρήση παρατηρήσεων, ιστορικών δεδομένων, για τις οποίες υπάρχει πολλές φορές η απαίτηση να έχουν ανεξάρτητη συμπεριφορά, ώστε να προκύπτουν πιο αξιόπιστα αποτελέσματα. Μέρος των παρατηρήσεων αποτελούν και οι **χρονοσειρές**, όπου αποτελούν ακολουθίες χρονικά εξαρτώμενων παρατηρήσεων, συνήθως για ίσα χρονικά διαστήματα.

Ως χρονολογική σειρά ή χρονοσειρά ορίζεται ένα δείγμα y_1, y_2, \dots, y_T , όπου ο δείκτης T παριστάνει ισαπέχοντα χρονικά σημεία ή χρονικά διαστήματα. Οι παρατηρήσεις y_1, y_2, \dots, y_T αποτελούν τις συγκεκριμένες τιμές των τυχαίων μεταβλητών Y_1, Y_2, \dots, Y_T οι οποίες με τη σειρά τους αποτελούν υποσύνολο μιας άπειρης ακολουθίας τυχαίων μεταβλητών. Η άπειρη αυτή ακολουθία συμβολίζεται ως $\{Y_T\}$ και ονομάζεται **στοχαστική διαδικασία**. Οι παρατηρήσεις y_1, y_2, \dots, y_T αναφέρονται στην έννοια του δείγματος, ενώ οι τυχαίες μεταβλητές Y_1, Y_2, \dots, Y_T αναφέρονται αντίστοιχα στην έννοια του πληθυσμού.

Οι κατάλληλες τεχνικές για τη μελέτη τέτοιων παρατηρήσεων, οι οποίες είναι σε θέση να δώσουν στους αναλυτές χρήσιμες πληροφορίες και αξιόπιστα αποτελέσματα, έχουν σαν κύριο συστατικό τους την ανάλυση χρονοσειρών. Οι τεχνικές αυτές αναπτύχθηκαν, μεταξύ άλλων, και για να καλύψουν την ανάγκη της οικονομετρίας για έγκυρες προβλέψεις των οικονομετρικών φαινομένων.

Η ανάλυση χρονοσειρών (timeseries analysis) είναι το πεδίο έρευνας που μελετά συστήματα, διαδικασίες, πρότυπα και σήματα που ακολουθούν χρονική εξέλιξη. Στόχος της ανάλυσης χρονοσειρών είναι αφενός να μελετήσει τη φύση ενός φαινομένου που αναπαρίσταται από μια ακολουθία παρατηρήσεων, αφετέρου να προβλέψει τη μελλοντική εξέλιξη του φαινομένου, δηλαδή τις μελλοντικές τιμές της ακολουθίας παρατηρήσεων. Η ανάλυση χρονολογικών σειρών περιλαμβάνει τρία βασικά στάδια: την περιγραφή των δεδομένων, την ανάλυση αυτών και τη πρόβλεψη. Το πρώτο στάδιο αφορά τη περιγραφή των δεδομένων μέσα από ποικιλία γραφημάτων, το στάδιο της ανάλυσης περιλαμβάνει όλα εκείνα τα μοντέλα που

μπορούν να δώσουν ποσοτικά αποτελέσματα και, τέλος, η πρόβλεψη που δίνει εκτιμήσεις για τις μελλοντικές τιμές που μπορούν να λάβουν οι μεταβλητές που μελετούνται. Στα υποδείγματα χρονοσειρών, η τρέχουσα τιμή μιας οικονομικής τυχαίας μεταβλητής Y εκφράζεται ως συνάρτηση των προηγούμενων τιμών της, ενώ σε ένα υπόδειγμα παλινδρόμησης, η τυχαία μεταβλητή Y αποτελεί συνάρτηση k -ερμηνευτικών μεταβλητών.

Στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιασθούν τα βασικά υποδείγματα για την ανάλυση χρονοσειρών και τα χαρακτηριστικά αυτών. Συγκεκριμένα, θα αναλυθούν τα υποδείγματα AR, MA, ARMA, ARCH και GARCH, οι ιδιότητες αυτών, οι μορφές που λαμβάνουν τα μοντέλα αυτά ανάλογα τη κάθε περίπτωση, καθώς και η μεθοδολογίες πρόβλεψης των μελλοντικών τιμών.

2.2 Χαρακτηριστικά χρονοσειρών

Μια χρονοσειρά αποτελείται από μια σειρά παρατηρήσεων που ακολουθεί μια εξέλιξη στο χρόνο, μια χρονικά εξαρτώμενη ακολουθία από τιμές. Η πορεία της μέσα στο χρόνο συνήθως είναι ανεξάρτητη από αυτή που ακολουθεί μια άλλη χρονοσειρά και εξαρτάται από τους παράγοντες που την επηρεάζουν. Βασικό στοιχείο στην ανάλυση μιας χρονοσειράς είναι η ύπαρξη ίσων χρονικών διαστημάτων ανάμεσα στις παρατηρήσεις, ούτως ώστε το δείγμα να μη παρουσιάζει προβλήματα. Το σταθερό αυτό χρονικό διάστημα διαφέρει από ανάλυση σε ανάλυση και η επιλογή του εξαρτάται από το μέγεθος του δείγματος, τα χαρακτηριστικά αυτού και την εκάστοτε ανάλυση που επιλέγεται.

Μία στοχαστική διαδικασία μπορεί να περιγραφεί από μια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(y_1, y_2, \dots, y_T)$, η οποία, αν ήταν γνωστή, η πρόβλεψη των μελλοντικών της τιμών θα ήταν εξαιρετικά απλή υπόθεση. Στη πραγματικότητα, κάθε άλλο παρά γνωστή είναι η συνάρτηση αυτή, όπως και κάθε απλούστευση της. Σκοπός της ανάλυσης χρονοσειρών είναι η διατύπωση υποδειγμάτων που να μπορούν να περιγράψουν το μηχανισμό της στοχαστικής διαδικασίας από την οποία προέρχεται η συγκεκριμένη σειρά.

Μέσα από τη χρονοσειρά ερμηνεύεται η συμπεριφορά της μεταβλητής στο χρόνο, καθώς επίσης και η σχέση ανάμεσα σε μια παρατήρηση στο χρονικό σημείο t

και σε μια παρελθοντική παρατήρηση, εν αντιθέσει με άλλα υποδείγματα, τα οποία ερμηνεύουν τις σχέσεις ανάμεσα στις υπό μελέτη μεταβλητές. Στις παραγράφους που ακολουθούν, αναλύονται τα κύρια χαρακτηριστικά των χρονοσειρών, η **στασιμότητα** και η **αυτοσυσχέτιση**.

Στασιμότητα

Μια στοχαστική διαδικασία καλείται **αυστηρώς στάσιμη** (strictly stationary) όταν οι ιδιότητες της δεν επηρεάζονται από μια αλλαγή στην αρχή μέτρησης του χρόνου. Ο ορισμός αυτός συνεπάγεται ότι η συνδυασμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, με αρχή το χρονικό σημείο t , $f(y_t, y_{t+1}, \dots, y_{t+T})$, είναι ακριβώς η ίδια με τη συνδυασμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας με αρχή το χρονικό σημείο s , $f(y_{t+s}, y_{t+s+1}, \dots, y_{t+s+T})$.

Η παράμετρος s παριστάνει μια αυθαίρετη μετακίνηση κατά μήκος του άξονα του χρόνου, είτε προς τα εμπρός είτε προς τα πίσω. Επομένως, το πρόσημο της ενδέχεται να είναι είτε θετικό είτε αρνητικό.

Μία στοχαστική διαδικασία καλείται **στάσιμη** ή **ασθενώς στάσιμη** (stationary or weakly stationary) όταν ο μέσος και η διακύμανση της δεν μεταβάλλονται διαχρονικά και η συνδιακύμανση των τιμών της εξαρτάται μόνο από τις χρονικές υστερήσεις και όχι από καθαυτό το χρονικό σημείο στο οποίο υπολογίζεται (δεύτερης τάξης στασιμότητα).

Συνεπώς, για μια στάσιμη χρονοσειρά, θα ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

- $E(Y_t) = \mu$, ανεξάρτητος του t
- $V(Y_t) = E[(Y_t - \mu)^2] = \sigma^2$, ανεξάρτητη του t
- $Cov(Y_t, Y_{t-s}) = E[(Y_t - \mu)(Y_{t-s} - \mu)] = Cov(Y_{t+m}, Y_{t+m-s}) = \gamma_s$, ανεξάρτητη του t

όπου γ_s η συνδιακύμανση σε s χρονικές υστερήσεις.

Η συνδιακύμανση $Cov(Y_t, Y_{t-s})$ αναφέρεται και ως αυτοσυνδιακύμανση (autocovariance), καθώς οι παρατηρήσεις Y_t και Y_{t-s} αποτελούν παρατηρήσεις της ίδιας μεταβλητής, οι οποίες απέχουν χρονικά μεταξύ τους κατά s . Προφανώς, επιλέγοντας $s = 0$:

$$\gamma_0 = Cov(Y_t, Y_t) = E[(Y_t - \mu)(Y_t - \mu)] = E[(Y_t - \mu)^2] = \sigma^2$$

Η ύπαρξη της στασιμότητας κρίνεται απαραίτητη σε πολλές περιπτώσεις, καθώς μέσα από αυτή την ιδιότητα των στοχαστικών διαδικασιών προκύπτουν αξιόπιστα και εύκολα ερμηνεύσιμα αποτελέσματα. Στην περίπτωση μιας στάσιμης χρονοσειράς, η επίδραση από μια μεταβολή μιας σημαντικής μεταβλητής θα είναι αμελητέα, καθώς ο μέσος όρος και η διακύμανση διατηρούνται σταθερά και η όποια μεταβολή θα μεταφέρεται στις επόμενες χρονικές περιόδους με επίσης αμελητέα επίδραση. Αντίθετα, σε μια μη-στάσιμη χρονοσειρά η επίδραση μιας απότομης μεταβολής θα επηρεάσει κατά πολύ το αποτέλεσμα περιορίζοντας με τον τρόπο αυτό τη δυνατότητα εκτίμησης και πρόβλεψης. Τέλος, η ιδιότητα της στασιμότητας εξασφαλίζει την ερμηνεία των ελέγχων υποθέσεων για τις κατανομές Fisher-Snedecor και Student.

Αυτοσυσχέτιση

Η αυτοσυσχέτιση (autocorrelation) αποτελεί φαινόμενο που εμφανίζεται κατά κύριο λόγο στις χρονολογικές σειρές, καθώς υπάρχει συνήθως ένας βαθμός συσχέτισης των παρατηρήσεων με τις αντίστοιχες παρατηρήσεις των προηγούμενων περιόδων. Οι λόγοι εμφάνισης αυτού του φαινομένου είναι συνήθως η παράλειψη σημαντικών ανεξάρτητων μεταβλητών από ένα υπόδειγμα, η λανθασμένη αλγεβρική μορφή ενός υποδείγματος, αλλά και η εξάρτηση των παρατηρήσεων από χρονικές υστερήσεις.

Από τη θεωρία πιθανοτήτων ορίζεται ως συντελεστής συσχέτισης δύο τυχαίων μεταβλητών ο λόγος της συνδιακύμανσης προς το γινόμενο των τετραγωνικών ριζών των διακυμάνσεων αυτών. Θεωρώντας μια χρονολογική σειρά $\{Y_t\}$ και εφαρμόζοντας τον παραπάνω ορισμό, ο **συντελεστής αυτοσυσχέτισης** μεταξύ δύο παρατηρήσεων της χρονοσειράς που απέχουν μεταξύ τους s χρονικές περιόδους ορίζεται ως:

$$\rho_s = \frac{\text{Cov}(Y_t, Y_{t-s})}{\sqrt{V(Y_t) \cdot V(Y_{t-s})}} = \frac{\gamma_s}{\gamma_0}$$

ενώ η **συνάρτηση αυτοσυσχέτισης (autocorrelation function-ACF)** του δείγματος είναι η ακόλουθη:

$$r_s = \frac{\sum_{t=1}^T (Y_t - \bar{Y})(Y_{t-s} - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^T (Y_t - \bar{Y})^2}$$

Ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης παρέχει ένα μέτρο για τον βαθμό της σχέσης μεταξύ των παρατηρήσεων. Μάλιστα, είναι απαλλαγμένος από τις μονάδες των μεταβλητών, καθώς δεν εξαρτάται από το t , παρά μόνο από την υστέρηση s . Με τον τρόπο αυτό, μπορούμε να απαντήσουμε εάν η σχέση μεταξύ των παρατηρήσεων είναι ισχυρή ή ασθενής. Εύκολα αποδεικνύεται ότι:

$$-1 \leq \rho_s \leq 1$$

Συγκεκριμένα:

- αν $\rho_s = -1$ ή $\rho_s = 1$, υπάρχει η μέγιστη δυνατή αυτοσυσχέτιση,
- αν $\rho_s > 0$, υπάρχει θετική αυτοσυσχέτιση, η οποία είναι τόσο πιο ισχυρή όσο πιο κοντά βρίσκεται ο συντελεστής στο 1,
- αν $\rho_s < 0$, υπάρχει αρνητική αυτοσυσχέτιση, η οποία είναι τόσο πιο ισχυρή όσο πιο κοντά βρίσκεται ο συντελεστής στο -1,
- αν $\rho_s = 0$, δεν υπάρχει καμία αυτοσυσχέτιση.

Στην ανάλυση χρονοσειρών, η σημασία της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης είναι πολύ μεγάλη, καθώς παρουσιάζει τόσο το βαθμό όσο και τη χρονική διάρκεια της «μνήμης» της στοχαστικής διαδικασίας. Σημειώνεται ότι για μεγάλες τιμές του s υπάρχει το πρόβλημα ότι συγκεντρώνονται πολλοί λίγοι όροι, με αποτέλεσμα η αυτοσυσχέτιση να έχει μεγάλο στατιστικό σφάλμα.

2.3 Στάσιμες στοχαστικές διαδικασίες

Κάθε στάσιμη στοχαστική διαδικασία δύναται να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός μιας ακολουθίας ασυσχέτιστων τυχαίων μεταβλητών. Ένας τέτοιος γραμμικός συνδυασμός είναι επίσης γνωστός και ως **γραμμικό φίλτρο** (linear filter).

Δοθείσας μίας όχι υποχρεωτικά αυστηρώς στάσιμης στοχαστικής διαδικασίας $\{Y_t\}$ με μέσο μ , το γραμμικό φίλτρο θα μπορούσε να διατυπωθεί ως εξής:

$$Y_t - \mu = \varepsilon_t + \Psi_1 \varepsilon_{t-1} + \Psi_2 \varepsilon_{t-2} + \dots \quad (2.1)$$

όπου οι συντελεστές Ψ_i είναι γνωστοί και ως συντελεστές στάθμισης με το πλήθος τους να είναι πεπερασμένο ή άπειρο. Στη περίπτωση που το πλήθος των συντελεστών είναι άπειρο, ισχύει η υπόθεση ότι το άθροισμα τους συγκλίνει απολύτως, δηλαδή:

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\Psi_i| < \infty$$

Θέτοντας ως $\Psi_0 = 1$, η σχέση (2.1) παίρνει τη μορφή:

$$Y_t - \mu = \sum_{i=0}^{\infty} \Psi_i \varepsilon_{t-i}$$

Υποθέτουμε ότι η ακολουθία $\{\varepsilon_t\}$ για $t = 1, 2, \dots$ είναι μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών για την οποία ισχύουν οι εξής προϋποθέσεις:

α) $E(\varepsilon_t) = 0, \forall t = 1, 2, \dots$

β) $V(\varepsilon_t) = \sigma^2, \forall t = 1, 2, \dots$

γ) $Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-s}) = 0, \forall t = 1, 2, \dots, \forall s \neq 0$

Μια τέτοια ακολουθία, για την οποία ισχύουν οι παραπάνω προϋποθέσεις, καλείται **διαδικασία λευκού θορύβου** ή απλά **λευκός θόρυβος** (white noise process).

Χρησιμοποιώντας τη σχέση 2.1, προκύπτει:

$$\gamma_0 = V(Y_t) = E[(Y_t - \mu)^2] = E(\varepsilon_1 + \Psi_1 \varepsilon_{t-1} + \Psi_2 \varepsilon_{t-2} + \dots) =$$

$$= E(\varepsilon_t^2) + \Psi_1^2 E(\varepsilon_{t-1}^2) + \Psi_2^2 E(\varepsilon_{t-2}^2) + \dots$$

Σύμφωνα με τις υποθέσεις που ισχύουν για τον λευκό θόρυβο, η προηγούμενη σχέση παίρνει τη μορφή:

$$\gamma_0 = \sigma^2 + \Psi_1^2 \sigma^2 + \Psi_2^2 \sigma^2 + \dots = \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \Psi_i^2 \quad (2.2)$$

Επιπλέον, για τη συνδιακύμανση και με τη χρήση των υποθέσεων του λευκού θορύβου προκύπτει:

$$\begin{aligned} \gamma_s &= E[(Y_t - \mu)(Y_{t-s} - \mu)] = \\ &= E[(\varepsilon_t + \Psi_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \Psi_s \varepsilon_{t-s} + \Psi_{s+1} \varepsilon_{t-s-1}) \times \\ &\quad (\varepsilon_{t-s} + \Psi_1 \varepsilon_{t-s-1} + \dots + \Psi_s \varepsilon_{t-s-s} + \Psi_{s+1} \varepsilon_{t-s-s-1})] = \\ &= E(\Psi_s \varepsilon_{t-s}^2) + E(\Psi_1 \Psi_2 \varepsilon_{t-s-1}^2) + \dots = \\ &= \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \Psi_i \Psi_{i+s} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Από τη διατύπωση του συντελεστή αυτοσυσχέτισης και με τη χρήση των σχέσεων 2.2 και 2.3, προκύπτει:

$$\rho_s = \frac{\gamma_s}{\gamma_0} = \frac{\sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \Psi_i \Psi_{i+s}}{\sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \Psi_i^2}$$

Από την τελευταία διατύπωση για τον συντελεστή αυτοσυσχέτισης είναι φανερό ότι αν το άθροισμα των συντελεστών στάθμισης δεν συγκλίνει, η διακύμανση θα τείνει στο άπειρο και ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης θα τείνει στο μηδέν. Αντίθετα, αν η χρονοσειρά είναι στάσιμη, το άθροισμα των συντελεστών στάθμισης θα συγκλίνει απολύτως και η διακύμανση θα είναι πεπερασμένη.

Η εξίσωση του γραμμικού φίλτρου, όπως αυτή περιγράφεται με τη σχέση (2.1), αποτελεί μια γενική μορφή, από την οποία προκύπτουν τα διάφορα στοχαστικά υποδείγματα χρονοσειρών. Τα υποδείγματα αυτά προκύπτουν με εφαρμογή διαφόρων υποθέσεων σχετικά με τους συντελεστές στάθμισης. Στις επόμενες παραγράφους και στα πλαίσια την ανάλυσης χρονολογικών σειρών, θα παρουσιασθούν τα

αυτοπαλίνδρομα υποδείγματα, τα υποδείγματα κινητών μέσων, τα μεικτά υποδείγματα και τα υποδείγματα ετεροσκεδαστικότητας.

2.3.1 Αυτοπαλίνδρομα Υποδείγματα AR(p)

Η γενική μορφή ενός αυτοπαλίνδρομου (autoregressive) υποδείματος p τάξεως ή πιο απλά ενός AR(p), είναι:

$$Y_t = a_0 + a_1 Y_{t-1} + a_2 Y_{t-2} + \dots + a_p Y_{t-p} + \varepsilon_t \quad (2.4)$$

όπου η τάξη p αναφέρεται στο μήκος της χρονικής υστέρησης και ο όρος σφάλματος ε_t θεωρείται ότι είναι λευκός θόρυβος. Η μορφή ενός AR(p) υποδείματος παραπέμπει σε ένα υπόδειγμα παλινδρόμησης με τις ερμηνευτικές μεταβλητές να είναι οι τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής Y_t με p χρονικές υστερήσεις. Από τη μορφή του υποδείματος είναι προφανής ο λόγος για τον οποίο καλείται «αυτοπαλίνδρομο».

AR(1) υποδείγματα

Επιλέγοντας $p = 1$, προκύπτει το αυτοπαλίνδρομο υπόδειγμα πρώτης τάξεως ή απλούστερα AR(1), με γενική μορφή:

$$Y_t = a_0 + a_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2.5)$$

Αν δεχθούμε την υπόθεση ότι είτε ο μέσος είναι μηδέν είτε ότι οι μεταβλητές εκφράζονται ως αποκλίσεις από τον μέσο, η σχέση (2.5) λαμβάνει τη μορφή:

$$y_t = a_1 y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2.6)$$

όπου, $y_t = Y_t - \bar{Y}_t$ και $y_{t-1} = Y_{t-1} - \bar{Y}_{t-1}$

Από τη σχέση (2.5), παίρνοντας τη μέση τιμή, αποδεικνύεται η ακόλουθη ιδιότητα για τον μέσο μ :

$$E(Y_t) = E(a_0 + a_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t) \Leftrightarrow$$

$$\mu = a_0 + a_1 \mu \Leftrightarrow$$

$$\mu = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}$$

Υψώνοντας και τα δύο μέλη της σχέσης (2.6) στο τετράγωνο και λαμβάνοντας τις μέσες τιμές, αποδεικνύεται η ιδιότητα για τη διακύμανση:

$$E(y_t^2) = E[(a_1 y_{t-1} + \varepsilon_t)^2] \Leftrightarrow$$

$$V(y_t) = a_1^2 V(y_{t-1}) + \sigma^2 \Leftrightarrow$$

$$V(y_t)(1 - a_1^2) = \sigma^2 \Leftrightarrow$$

$$V(y_t) = \gamma_0 = \frac{1}{1 - a_1^2} \sigma^2$$

καθώς, $E(y_{t-1} \varepsilon_t) = 0$ αφού η y_{t-1} εξαρτάται αποκλειστικά από τον λευκό θόρυβο ε_{t-1} και $E(y_t^2) = E(y_{t-1}^2) = V(y_t)$.

Από τη σχέση (2.6), πολλαπλασιάζοντας τα δυο μέλη της με την y_{t-s} και λαμβάνοντας τις μέσες τιμές, αποδεικνύεται η ακόλουθη ιδιότητα για τη συνδιακύμανση γ_s :

$$y_t y_{t-s} = a_1 y_{t-1} y_{t-s} + \varepsilon_t y_{t-s} \Leftrightarrow$$

$$E(y_t y_{t-s}) = E(a_1 y_{t-1} y_{t-s} + \varepsilon_t y_{t-s}) \Leftrightarrow$$

$$E(y_t y_{t-s}) = a_1 E(y_{t-1} y_{t-s}) \Leftrightarrow$$

$$\gamma_s = a_1 \gamma_{s-1}, \quad s > 0$$

Με βάση τη τελευταία σχέση, εύκολα προκύπτει ότι:

$$\gamma_1 = a_1 \gamma_0$$

$$\gamma_2 = a_1 \gamma_1 = a_1^2 \gamma_0$$

$$\gamma_3 = a_1 \gamma_2 = a_1^3 \gamma_0$$

και γενικά:

$$\gamma_s = \alpha_1^s \gamma_0$$

Τέλος, κάνοντας χρήση των παραπάνω ιδιοτήτων, για τον συντελεστή αυτοσυσχέτισης εύκολα προκύπτει η ακόλουθη ιδιότητα:

$$\rho_s = \frac{\gamma_s}{\gamma_0} = \alpha_1^s$$

Μια χρονολογική σειρά, η οποία ακολουθεί ένα AR(1) υπόδειγμα, θα είναι στάσιμη όταν η διακύμανση γ_0 θα είναι ένας σταθερός θετικός αριθμός. Από την παραπάνω ιδιότητα της διακύμανσης εύκολα αποδεικνύεται ότι πρέπει να ισχύει $|\alpha_1| < 1$. Αν $\alpha_1 > 1$, η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης φθίνει γεωμετρικά και τείνει να μηδενιστεί καθώς το s αυξάνει. Αντίθετα, αν $\alpha_1 < -1$, η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης θα τείνει επίσης στο μηδέν, αλλά αυτή τη φορά με εναλλασσόμενο πρόσημο.

AR(2) υποδείγματα

Επιλέγοντας $p = 2$, προκύπτει το αυτοπαλίνδρομο υπόδειγμα δευτέρας τάξεως ή απλούστερα AR(2) υπόδειγμα με γενική μορφή:

$$Y_t = a_0 + a_1 Y_{t-1} + a_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t \quad (2.7)$$

ή βάσει αντίστοιχων υποθέσεων με αυτές που έγιναν παραπάνω για το AR(1) υπόδειγμα:

$$y_t = a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \varepsilon_t \quad (2.8)$$

Από τη σχέση (2.7), λαμβάνοντας τις μέσες τιμές, προκύπτει η ακόλουθη ιδιότητα για τον μέσο:

$$E(Y_t) = E(a_0) + a_1 E(Y_{t-1}) + a_2 E(Y_{t-2}) + E(\varepsilon_t) \Leftrightarrow$$

$$\mu = \alpha_0 + \alpha_1 \mu + \alpha_2 \mu \Leftrightarrow$$

$$\mu = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \alpha_2}$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της σχέσης (2.8) με y_t και λαμβάνοντας τις μέσες τιμές, προκύπτει η ιδιότητα για τη διακύμανση:

$$y_t^2 = a_1 y_t y_{t-1} + a_2 y_t y_{t-2} + \varepsilon_t y_t \Leftrightarrow$$

$$E(y_t^2) = a_1 E(y_t y_{t-1}) + a_2 E(y_t y_{t-2}) + E(\varepsilon_t y_t) \Leftrightarrow$$

$$\gamma_0 = a_1 \gamma_1 + a_2 \gamma_2 + E[(a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \varepsilon_t) \varepsilon_t] \Leftrightarrow$$

$$\gamma_0 = a_1 \gamma_1 + a_2 \gamma_2 + \sigma^2 \Leftrightarrow$$

$$\gamma_0 = \frac{1 - \alpha_2}{(1 + \alpha_2)(1 - a_1 - a_2)(1 + a_1 - a_2)} \sigma^2$$

Αντίστοιχα, πολλαπλασιάζοντας την ίδια σχέση με y_{t-s} και λαμβάνοντας τις μέσες τιμές, προκύπτει η ακόλουθη ιδιότητα για τη συνδιακύμανση:

$$y_t y_{t-s} = a_1 y_{t-1} y_{t-s} + a_2 y_{t-2} y_{t-s} + \varepsilon_t y_{t-s} \Leftrightarrow$$

$$E(y_t y_{t-s}) = a_1 E(y_{t-1} y_{t-s}) + a_2 E(y_{t-2} y_{t-s}) + E(\varepsilon_t y_{t-s}) \Leftrightarrow$$

$$\gamma_s = a_1 \gamma_{s-1} + a_2 \gamma_{s-2}$$

Από τη τελευταία σχέση για τη συνδιακύμανση, διαιρώντας και τα δύο μέλη με τη διακύμανση γ_0 , προκύπτει η ακόλουθη ιδιότητα για τον συντελεστή αυτοσυσχέτισης:

$$\frac{\gamma_s}{\gamma_0} = \alpha_1 \frac{\gamma_{s-1}}{\gamma_0} + \alpha_2 \frac{\gamma_{s-2}}{\gamma_0} \Leftrightarrow$$

$$\rho_s = \alpha_1 \rho_{s-1} + \alpha_2 \rho_{s-2} \quad (2.9)$$

Μια χρονολογική σειρά που ακολουθεί ένα υπόδειγμα AR(2), θα είναι στάσιμη όταν η διακύμανση γ_0 είναι ένας σταθερός θετικός αριθμός. Για να ισχύει αυτή η προϋπόθεση, θα πρέπει να ισχύουν οι ακόλουθες ανισώσεις:

$$1 - \alpha_2 > 0$$

$$1 + \alpha_2 > 0$$

$$1 - \alpha_1 - \alpha_2 > 0$$

$$1 + \alpha_1 - \alpha_2 > 0$$

Από τη συναλήθευση των προηγούμενων ανισώσεων, οι προϋποθέσεις για να είναι μια χρονοσειρά AR(2) στάσιμη είναι:

$$-1 < \alpha_2 < 1$$

$$\alpha_2 + \alpha_1 < 1$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 < 1$$

Από τη σχέση (2.9) για τις αυτοσυσχετίσεις ρ_s , επιλέγοντας για $s = 1, 2$, προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 \rho_1 \\ \rho_2 &= \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \end{aligned} \right\}$$

καθώς $\rho_0 = 1$ και $\rho_{-s} = \rho_s, \forall s > 0$. Οι δύο αυτές εξισώσεις είναι γνωστές και ως εξισώσεις Yule-Walker και αποτελούν στην ουσία ένα σύστημα εξισώσεων. Επιλύοντας το σύστημα, αν οι τιμές των συντελεστών α_1 και α_2 είναι γνωστές, προκύπτουν οι τιμές για τις αυτοσυσχετίσεις ρ_1 και ρ_2 :

$$\rho_1 = \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_2}$$

$$\rho_2 = \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2 - \alpha_2^2}{1 - \alpha_2}$$

Η συνάρτηση αυτοσυσχετίσης (ACF) μιας στοχαστικής διαδικασίας AR(2) θα τείνει προς το μηδέν καθώς αυξάνεται η χρονική υστέρηση s . Οι αυτοσυσχετίσεις ρ_s για $s > 2$ μπορούν να υπολογιστούν από τη σχέση (2.9) εφόσον είναι γνωστές οι αυτοσυσχετίσεις ρ_1 και ρ_2 από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων Yule-Walker.

AR(p) υποδείγματα

Για το γενικευμένο αυτοπαλίνδρομο υπόδειγμα p τάξεως AR(p), η μορφή του δίνεται από τη σχέση (2.4) ή δεχόμενοι ότι οι μεταβλητές εκφράζονται ως αποκλίσεις από τον μέσο, η μορφή του AR(p) δίνεται από τη σχέση:

$$y_t = a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \dots + a_p y_{t-p} + \varepsilon_t \quad (2.10)$$

Παίρνοντας τις μέσες τιμές και για τα δύο μέλη της σχέσης (2.4), προκύπτει η ιδιότητα για τον μέσο μ :

$$E(Y_t) = a_0 + a_1 E(Y_{t-1}) + a_2 E(Y_{t-2}) + \dots + a_p E(Y_{t-p}) + E(\varepsilon_t) \Leftrightarrow$$

$$\mu = a_0 + a_1 \mu + a_2 \mu + \dots + a_p \mu \Leftrightarrow$$

$$\mu = \frac{a_0}{1 - a_1 - a_2 - \dots - a_p}$$

Στη σχέση (2.10), πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της με y_t και λαμβάνοντας τις μέσες τιμές, προκύπτει η ιδιότητα για τη διακύμανση γ_0 :

$$y_t = a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \dots + a_p y_{t-p} + \varepsilon_t \Leftrightarrow$$

$$y_t^2 = a_1 y_t y_{t-1} + a_2 y_t y_{t-2} + \dots + a_p y_t y_{t-p} + y_t \varepsilon_t \Leftrightarrow$$

$$E(y_t^2) = a_1 E(y_t y_{t-1}) + a_2 E(y_t y_{t-2}) + \dots + a_p E(y_t y_{t-p}) + E(y_t \varepsilon_t) \Leftrightarrow$$

$$\gamma_0 = a_1 \gamma_1 + a_2 \gamma_2 + \dots + a_p \gamma_p + \sigma^2 \Leftrightarrow$$

$$\gamma_0 = \sigma^2 + \sum_{i=1}^p a_i \gamma_i$$

$$\gamma_0 = \frac{1}{1 - a_1 \rho_1 - a_2 \rho_2 - \dots - a_p \rho_p} \sigma^2$$

Από τη σχέση (2.10), πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της με y_{t-s} και λαμβάνοντας τις μέσες τιμές, προκύπτει η ιδιότητα για τη συνδιακύμανση:

$$y_t = a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \dots + a_p y_{t-p} + \varepsilon_t \Leftrightarrow$$

$$y_t y_{t-s} = a_1 y_{t-1} y_{t-s} + a_2 y_{t-2} y_{t-s} + \dots + a_p y_{t-p} y_{t-s} + \varepsilon_t y_{t-s} \Leftrightarrow$$

$$E(y_t y_{t-s}) = a_1 E(y_{t-1} y_{t-s}) + a_2 E(y_{t-2} y_{t-s}) + \dots + a_p E(y_{t-p} y_{t-s}) \Leftrightarrow$$

$$\gamma_s = a_1 \gamma_{s-1} + a_2 \gamma_{s-2} + \dots + a_p \gamma_{s-p}$$

$$\gamma_s = \sum_{i=1}^p a_i \gamma_{s-i}$$

Από τη τελευταία σχέση για τη συνδιακύμανση, διαιρώντας και τα δύο μέλη της με γ_0 , προκύπτει η ιδιότητα για τον συντελεστή αυτοσυσχέτισης ρ_s :

$$\gamma_s = a_1 \gamma_{s-1} + a_2 \gamma_{s-2} + \dots + a_p \gamma_{s-p} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\gamma_s}{\gamma_0} = \alpha_1 \frac{\gamma_{s-1}}{\gamma_0} + \alpha_2 \frac{\gamma_{s-2}}{\gamma_0} + \dots + \alpha_p \frac{\gamma_{s-p}}{\gamma_0} \Leftrightarrow$$

$$\rho_s = a_1 \rho_{s-1} + a_2 \rho_{s-2} + \dots + a_p \rho_{s-p} \Leftrightarrow$$

$$\rho_s = \sum_{i=1}^p a_i \rho_{s-i}$$

Από τη τελευταία σχέση για τον συντελεστή αυτοσυσχέτισης και επιλέγοντας $s = 1, 2, \dots, p$, προκύπτουν οι p εξισώσεις Yule-Walker:

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 \rho_1 + \alpha_3 \rho_2 + \dots + \alpha_p \rho_{p-1} \\ \rho_2 &= \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \rho_1 + \dots + \alpha_p \rho_{p-2} \\ \cdot & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \rho_p &= \alpha_1 \rho_{p-1} + \alpha_2 \rho_{p-2} + \alpha_3 \rho_{p-3} + \dots + \alpha_p \end{aligned} \right\}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις αποτελούν ένα σύστημα p εξισώσεων, η λύση του οποίου δίνει τις τιμές των αυτοσυσχετίσεων ρ_p στη περίπτωση που οι συντελεστές αυτοπαλινδρόμησης $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, p$, είναι γνωστοί. Χρησιμοποιώντας άλγεβρα πινάκων, το προηγούμενο σύστημα εξισώσεων παίρνει τη μορφή:

$$R = PA$$

όπου:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_p \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & \dots & \rho_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \text{ και } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{bmatrix}$$

Αν οι αυτοσυσχετίσεις $\rho_i, i = 1, 2, \dots, p$ είναι γνωστές, τότε οι συντελεστές παλινδρόμησης $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, p$ θα δίνονται από τη σχέση:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{R}$$

Όλες οι αυτοπαλίνδρομες διαδικασίες έχουν συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης οι οποίες φθίνουν καθώς η χρονική υστέρηση s αυξάνει, με αποτέλεσμα να είναι πολλές φορές δύσκολο να υπολογισθεί η τάξη του υποδείγματος βάσει της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης. Ένα κριτήριο για τον σκοπό αυτό είναι η **συνάρτηση μερικής αυτοσυσχέτισης** (partial autocorrelation function). Η μερική αυτοσυσχέτιση ανάμεσα στις μεταβλητές Y_t και Y_{t-s} αναφέρεται στη μεταξύ του συσχέτιση όταν έχουν αφαιρεθεί οι γραμμικές επιδράσεις των ενδιάμεσων μεταβλητών $Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-(s-1)}$. Αν ο συντελεστής μερικής αυτοσυσχέτισης s τάξεως παρασταθεί με ρ_{ss} , $s = 1, 2, \dots$, τότε αυτός θα αποτελεί ουσιαστικά τον συντελεστή της μεταβλητής y_{t-s} στο μοντέλο παλινδρόμησης:

$$y_t = \rho_{1s}y_{t-1} + \rho_{2s}y_{t-2} + \dots + \rho_{ss}y_{t-s} + \varepsilon_t$$

Οι συντελεστές μερικής αυτοσυσχέτισης ρ_{ss} προκύπτουν από διαδοχικές παλινδρομήσεις ανάμεσα στις μεταβλητές y_t και y_{t-s} για $s = 1, 2, \dots$. Κάλλιστα μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των συντελεστών ρ_s με βάση τις εξισώσεις Yule-Walker μέσω της ακόλουθης σχέσης:

$$\rho_s = \rho_{1s}\rho_{s-1} + \rho_{2s}\rho_{s-2} + \dots + \rho_{ss}\rho_{s-p}$$

Για $s = 1, 2, \dots, p$, προκύπτει ένα σύστημα p εξισώσεων, η λύση του οποίου μας δίνει τους συντελεστές μερικής αυτοσυσχέτισης $\rho_{11}, \rho_{22}, \dots, \rho_{ss}$. Προφανώς, για μια αυτοπαλίνδρομη διαδικασία p τάξεως η συνάρτησης μερικής αυτοσυσχέτισης λαμβάνει μηδενική τιμή για $s > p$. Συγκεκριμένα, ισχύει:

Για την AR(1) διαδικασία: $\rho_{11} = \rho_1 = \alpha_1$

$$\rho_{ss} = 0, s > 1$$

Για την AR(2) διαδικασία: $\rho_{11} = \rho_1$

$$\rho_{22} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1}$$

$$\rho_{ss} = 0, s > 2$$

Για μια AR(p) διαδικασία: $\rho_{11} = \rho_1$

$$\rho_{22} \neq 0$$

⋮

$$\rho_{pp} \neq 0$$

$$\rho_{ss} = 0, s > p$$

Πρακτικά, τόσο οι πραγματικές μερικές αυτοσυσχετίσεις ρ_{ss} όσο και οι αυτοσυσχετίσεις ρ_s δεν είναι γνωστές με αποτέλεσμα να χρησιμοποιούνται οι αντίστοιχες εκτιμήσεις τους από το δείγμα. Βάσει των εκτιμήσεων αυτών, μπορεί να γίνει έλεγχος σημαντικότητας για τις παραμέτρους του πληθυσμού. Για μεγάλες τιμές του T , οι εκτιμήσεις $\hat{\rho}_s$ των αυτοσυσχετίσεων ακολουθούν κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά $\frac{1}{T}$. Ομοίως, οι εκτιμήσεις $\hat{\rho}_{ss}$ των μερικών αυτοσυσχετίσεων ακολουθούν κανονική κατανομή με τις ίδιες παραμέτρους, για χρονικές υστερήσεις s μεγαλύτερες από την τάξη p της αυτοπαλίνδρομης διαδικασίας.

Ο έλεγχος σημαντικότητας για τον συντελεστή ρ_s περιλαμβάνει τον έλεγχο της υπόθεσης:

$$H_0: \rho_s = 0$$

$$H_1: \rho_s \neq 0$$

και πραγματοποιείται με τη βοήθεια της στατιστικής: $t_s = \frac{\hat{\rho}_s}{\sqrt{\frac{1}{T}}} = \hat{\rho}_s \sqrt{T}$.

Για δεδομένο επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 5\%$, η υπόθεση H_0 απορρίπτεται έναντι της εναλλακτικής H_1 , όταν $|t_s| > 2$. Για το ίδιο επίπεδο σημαντικότητας α , προκύπτει το $1 - \alpha = 95\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για τον συντελεστή ρ_s :

$$\hat{\rho}_s - \frac{2}{\sqrt{T}} \leq \rho_s \leq \hat{\rho}_s + \frac{2}{\sqrt{T}}$$

Κατά αντίστοιχο τρόπο, με δεδομένο επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 5\%$, ο συντελεστής μερικής αυτοσυσχέτισης ρ_{ss} είναι στατιστικά σημαντικός, όταν:

$$|t_{ss}| > 2 \Leftrightarrow |\hat{\rho}_{ss}\sqrt{T}| > 2$$

Με τη βοήθεια του ελέγχου στατιστικής σημαντικότητας για τους συντελεστές ρ_{ss} , μπορεί να προσδιορισθεί η τάξη p μιας αυτοπαλίνδρομης διαδικασίας. Η τάξη που θα επιλεγεί αντιστοιχεί στη τιμή εκείνη του s_* για την οποία ο συντελεστής $\rho_{s_*s_*}$ είναι στατιστικά σημαντικός και για κάθε $s > s_*$ θα ισχύει $|t_{ss}| < 2$. Παραδείγματος χάριν, αν ο συντελεστής ρ_{22} είναι στατιστικά σημαντικός ενώ ο ρ_{33} δεν είναι, επιλέγεται ως τάξη του υποδείγματος, $p = 2$.

Όταν η τάξη p ενός AR(p) υποδείγματος είναι γνωστή, η εκτίμηση των παραμέτρων του προκύπτει από τη σχέση $A = P^{-1}R$ αντικαθιστώντας τις αυτοσυσχετίσεις ρ_s με τις εκτιμήσεις $\hat{\rho}_s$ που προκύπτουν από το δείγμα. Οι εκτιμήσεις $\hat{\rho}_s$ υπολογίζονται από τη σχέση:

$$\hat{\rho}_s = \frac{\sum_{t=1}^T (Y_t - \bar{Y})(Y_{t-s} - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^T (Y_t - \bar{Y})^2}$$

και με τη μεθοδολογία αυτή προκύπτουν οι εκτιμητές των παραμέτρων α_p του υποδείγματος.

Ένας επιπλέον τρόπος για τον υπολογισμό των εκτιμητών των παραμέτρων α_p είναι η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων. Οι εκτιμητές που προκύπτουν μέσα από τη συγκεκριμένη μεθοδολογία είναι συνεπείς και ακολουθούν προσεγγιστικά την κανονική κατανομή, ιδιότητες που συναντάμε στους εκτιμητές μεγάλων δειγμάτων. Η μεθοδολογία αυτή εφαρμόζεται εύκολα καθώς το αυτοπαλίνδρομο υπόδειγμα AR(p) στη γενικευμένη του μορφή αποτελεί ένα γραμμικό υπόδειγμα με p ανεξάρτητες

στοχαστικές μεταβλητές. Συγκεκριμένα, για ένα δείγμα μεγέθους T προκύπτει το ακόλουθο σύστημα $T - p$ εξισώσεων:

$$\left. \begin{aligned} Y_{p+1} &= a_0 + a_1 Y_p + a_2 Y_{p-1} + \dots + a_p Y_1 + \varepsilon_{p+1} \\ Y_{p+2} &= a_0 + a_1 Y_{p+1} + a_2 Y_p + \dots + a_p Y_2 + \varepsilon_{p+2} \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ Y_T &= a_0 + a_1 Y_{T-1} + a_2 Y_{T-2} + \dots + a_p Y_{T-p} + \varepsilon_T \end{aligned} \right\}$$

Με τη χρήση πινάκων, το παραπάνω σύστημα μπορεί να γραφτεί στην απλουστευμένη μορφή:

$$Y = Xa + \varepsilon$$

όπου:

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{p+1} \\ Y_{p+2} \\ \vdots \\ Y_T \end{bmatrix}, a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 1 & Y_p & Y_{p-1} & \dots & Y_1 \\ 1 & Y_{p+1} & Y_p & \dots & Y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & Y_T & Y_{T-1} & \dots & Y_{T-p} \end{bmatrix} \text{ και } \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{p+1} \\ \varepsilon_{p+2} \\ \vdots \\ \varepsilon_T \end{bmatrix}$$

Το διάνυσμα των εκτιμητών \hat{a}_p , όπως προκύπτει από τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, δίνεται από τη σχέση:

$$\hat{a} = (X'X)^{-1}X'Y$$

ενώ ο πίνακας διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων για τους εκτιμητές υπολογίζεται από τη σχέση:

$$S_{\hat{a}\hat{a}} = s^2(X'X)^{-1}$$

όπου:

$$s^2 = \frac{(Y - X\hat{a})'(Y - X\hat{a})}{T - p - (p + 1)}$$

2.3.2 Υποδείγματα κινητού μέσου MA(q)

Η γενική μορφή ενός υποδείγματος κινητού μέσου (moving average) τάξης q ή απλούστερα $MA(q)$ είναι:

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (2.11)$$

όπου η τάξη q αναφέρεται στο μήκος της υστέρησης της μεταβλητής, για την οποία υποθέτουμε ότι είναι λευκός θόρυβος. Ο όρος «κινητός μέσος» αναφέρεται στο γεγονός ότι η εξαρτημένη μεταβλητή Y_t εμφανίζεται ως ένα σταθμισμένο άθροισμα των τιμών της ε_t .

MA(1) υποδείγματα

Επιλέγοντας $q = 1$, προκύπτει το υπόδειγμα κινητού μέσου πρώτης τάξεως ή MA(1) με γενική μορφή:

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} \quad (2.12)$$

Από τη σχέση (2.12), παίρνοντας τη μέση τιμή, αποδεικνύεται η ακόλουθη ιδιότητα για τον μέσο μ :

$$E(Y_t) = E(\mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}) \Leftrightarrow$$

$$E(Y_t) = \mu + E(\varepsilon_t) + \theta_1 E(\varepsilon_{t-1}) \Leftrightarrow$$

$$E(Y_t) = \mu$$

Από τη σχέση (2.12), αφαιρώντας τον μέσο μ και από τα δύο μέλη της ισότητας, υψώνοντας τα στο τετράγωνο και λαμβάνοντας τις μέσες τιμές, προκύπτει η ακόλουθη ιδιότητα για τη διακύμανση:

$$E[(Y_t - \mu)^2] = E[(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1})^2] \Leftrightarrow$$

$$\gamma_0 = E(\varepsilon_t)^2 - 2\theta_1 E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}) + \theta_1^2 E(\varepsilon_{t-1})^2 \Leftrightarrow$$

$$\gamma_0 = (1 + \theta_1^2)\sigma^2$$

Χρησιμοποιώντας τη διατύπωση της συνδιακύμανσης γ_s και με αντικατάσταση της σχέσης (2.12), προκύπτει η ακόλουθη ιδιότητα:

$$\gamma_s = \text{Cov}(Y_t, Y_{t-s}) = E[(Y_t - \mu)(Y_{t-s} - \mu)] \Leftrightarrow$$

$$\gamma_s = E[(\varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-s} + \varepsilon_{t-s-1})] \Leftrightarrow$$

$$\gamma_s = E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-s}) + \theta_1 E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-s-1}) + \theta_1 E(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-s}) + \theta_1^2 E(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-s-1}) \Leftrightarrow$$

$$\gamma_s = \begin{cases} \theta_1 E(\varepsilon_{t-1}^2) = \theta_1 \sigma^2, & s = 1 \\ 0 & , \quad s > 1 \end{cases}$$

Με τη χρήση των παραπάνω ιδιοτήτων, προκύπτει για τον συντελεστή αυτοσυσχέτισης η ακόλουθη ιδιότητα:

$$\rho_s = \frac{\gamma_s}{\gamma_0} = \begin{cases} \frac{\theta_1}{1 + \theta_1^2}, & s = 1 \\ 0 & , \quad s > 1 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι για περισσότερες από μια χρονικές υστερήσεις ($s > 1$), οι συνδιακυμάνσεις και, κατά συνέπεια, οι αυτοσυσχετίσεις είναι μηδενικές. Σε όρους ανάλυσης, αυτό σημαίνει ότι μια οποιαδήποτε παρατήρηση της Y_t συσχετίζεται με την αμέσως προηγούμενη παρατήρηση Y_{t-1} ή την αμέσως επόμενη Y_{t+1} αλλά δεν συσχετίζεται με καμία άλλη.

MA(2) υποδείγματα

Επιλέγοντας $q = 2$, προκύπτει το υπόδειγμα κινητού μέσου δευτέρας τάξεως ή MA(2) με γενική μορφή:

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} \quad (2.13)$$

Από τη σχέση (2.13) και εργαζόμενοι με ανάλογο τρόπο, όπως στα υποδείγματα MA(1), προκύπτει η ιδιότητα για τον μέσο:

$$E(Y_t) = E(\mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2}) \Leftrightarrow$$

$$E(Y_t) = \mu + E(\varepsilon_t) + \theta_1 E(\varepsilon_{t-1}) + \theta_2 E(\varepsilon_{t-2}) \Leftrightarrow$$

$$E(Y_t) = \mu$$

Από τη σχέση (2.13), αφαιρώντας τον μέσο μ και από τα δύο μέλη της ισότητας, υψώνοντας τα στο τετράγωνο και λαμβάνοντας τις μέσες τιμές, προκύπτει η ιδιότητα για τη διακύμανση:

$$\begin{aligned} E[(Y_t - \mu)^2] &= E[(\varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2})^2] \Leftrightarrow \\ \gamma_0 &= E(\varepsilon_t^2) + \theta_1^2 E(\varepsilon_{t-1}^2) + \theta_2^2 E(\varepsilon_{t-2}^2) + 2\theta_1 E(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_t) + 2\theta_2 E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-2}) + \\ &\quad + 2\theta_1 \theta_2 E(\varepsilon_{t-2} \varepsilon_{t-1}) \Leftrightarrow \\ \gamma_0 &= \sigma^2 + \theta_1^2 \sigma^2 + \theta_2^2 \sigma^2 = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2) \sigma^2 \end{aligned}$$

Από τη διατύπωση της συνδιακύμανσης και με αντικατάσταση της σχέσης (2.13), προκύπτει η ακόλουθη ιδιότητα:

$$\begin{aligned} \gamma_s &= Cov(Y_t, Y_{t-s}) = E[(Y_t - \mu)(Y_{t-s} - \mu)] \Leftrightarrow \\ \gamma_s &= E[(\varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t-s} + \theta_1 \varepsilon_{t-s-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-s-2})] \Leftrightarrow \\ \gamma_s &= E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-s}) + \theta_1 E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-s-1}) + \theta_2 E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-s-2}) + \theta_1 E(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-s}) + \\ &\quad + \theta_1^2 E(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-s-1}) + \theta_1 \theta_2 E(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-s-2}) + \theta_2 E(\varepsilon_{t-2} \varepsilon_{t-s}) + \\ &\quad + \theta_1 \theta_2 E(\varepsilon_{t-2} \varepsilon_{t-s-1}) + \theta_2^2 E(\varepsilon_{t-2} \varepsilon_{t-s-2}) \Leftrightarrow \\ \gamma_s &= \begin{cases} (\theta_1 + \theta_1 \theta_2) \sigma^2, & s = 1 \\ \theta_2 \sigma^2, & s = 2 \\ 0, & s > 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Με απλή εφαρμογή των προηγούμενων ιδιοτήτων, προκύπτει για τον συντελεστή συσχέτισης η ακόλουθη ιδιότητα:

$$\rho_s = \frac{\gamma_s}{\gamma_0} = \begin{cases} \frac{\theta_1 + \theta_1 \theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}, & s = 1 \\ \frac{\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}, & s = 2 \\ 0, & s > 2 \end{cases}$$

Όπως και στη περίπτωση των υποδειγμάτων πρώτης τάξεως, κατά αντιστοιχία και στα MA(2) υποδείγματα, οι συνδιακυμάνσεις και οι αυτοσυσχετίσεις λαμβάνουν μηδενικές τιμές για $s > 2$. Επομένως, μια παρατήρηση της Y_t θα εμφανίζει συσχέτιση

με τις παρατηρήσεις $Y_{t\pm 1}$ και $Y_{t\pm 2}$, ενώ με τις υπόλοιπες η συσχέτιση θα είναι μηδενική.

Υπάρχουν περιπτώσεις όπου ένα υπόδειγμα κινητού μέσου μπορεί να εκφραστεί, υπό συγκεκριμένες προϋποθέσεις, ως ένα αυτοπαλίνδρομο υπόδειγμα. Αυτό συμβαίνει όταν μια MA διαδικασία είναι **αντιστρέψιμη** ή **χαρακτηρίζεται από αντιστρεψιμότητα**, δηλαδή όταν δύναται να διατυπωθεί ως μία αυτοπαλίνδρομη διαδικασία $AR(\infty)$ με άπειρους όρους. Ουσιαστικά, οι συνθήκες αντιστρεψιμότητας είναι οι συνθήκες στασιμότητας για τα αυτοπαλίνδρομα υποδείγματα. Συγκεκριμένα, μια διαδικασία $MA(1)$ είναι αντιστρέψιμη όταν $|\theta_1| < 1$, ενώ μια διαδικασία $MA(2)$ χαρακτηρίζεται από αντιστρεψιμότητα όταν $\theta_1 + \theta_2 < 1$ και $|\theta_2| < 1$.

MA(q) υποδείγματα

Για το γενικευμένο υπόδειγμα κινητού μέσου q τάξεως $MA(q)$, η μορφή του δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q} = \mu + \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t-i} \quad (2.14)$$

Από τη σχέση (2.14) και λαμβάνοντας τις μέσες τιμές και για τα δύο μέλη της ισότητας, εύκολα προκύπτει η ιδιότητα για τον μέσο:

$$E(Y_t) = E(\mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}) = \mu$$

Με μεθοδολογία παρόμοια με αυτή που αναπτύχθηκε στα απλουστευμένα υποδείγματα $MA(1)$, $MA(2)$ και με τη χρήση των ιδιοτήτων της μέσης τιμής, προκύπτει για τη διακύμανση γ_0 η ιδιότητα:

$$\gamma_0 = E[(Y_t - \mu)^2] = E[(\varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q})^2] \Leftrightarrow$$

$$\gamma_0 = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2) \sigma^2 = \sigma^2 \sum_{i=0}^q \theta_i^2, \text{ με } \theta_0 = 1$$

Από τη διατύπωση της συνδιακύμανσης γ_s και με αντικατάσταση της σχέσης (2.14) προκύπτει η ιδιότητα:

$$\gamma_s = Cov(Y_t, Y_{t-s}) = E[(Y_t - \mu)(Y_{t-s} - \mu)] \Leftrightarrow$$

$$\gamma_s = E[(\varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q})(\varepsilon_{t-s} + \theta_1 \varepsilon_{t-s-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-s-q})] \Leftrightarrow$$

$$\gamma_s = \begin{cases} \sigma^2 \sum_{i=0}^{q-s} \theta_i \theta_{i+s}, & s < q \\ 0, & s > q \end{cases}$$

Με εφαρμογή των προηγούμενων ιδιοτήτων, προκύπτει η ιδιότητα για τον συντελεστή συσχέτισης:

$$\rho_s = \frac{\gamma_s}{\gamma_0} = \begin{cases} \frac{\sum_{i=0}^{q-s} \theta_i \theta_{i+s}}{\sum_{i=0}^q \theta_i^2}, & s < q \\ 0, & s > q \end{cases}$$

με $\theta_0 = 1$.

Εύκολα διαπιστώνεται από τις δύο τελευταίες ιδιότητες ότι οι συνδιακυμάνσεις και, κατά συνέπεια, οι αυτοσυσχετίσεις είναι μηδενικές, όταν ο αριθμός των χρονικών υστερήσεων είναι μεγαλύτερος από την τάξη q ($s > q$). Όπως αναφέρθηκε και στην προηγούμενη ανάλυση των απλουστευμένων υποδειγμάτων MA(1), MA(2), έτσι και στη περίπτωση του γενικευμένου υποδείγματος MA(q), μια παρατήρηση Y_t θα εμφανίζει συσχέτιση με τις παρατηρήσεις $Y_{t \pm q}$ και για $s > q$ κάθε συσχέτιση θα είναι μηδενική. Στο σημείο αυτό, παρατηρούμε ότι, ενώ η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης μιας AR(p) διαδικασίας μπορεί να εκτείνεται στο άπειρο, η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης μιας MA(q) διαδικασίας μηδενίζεται μετά από q υστερήσεις. Αυτό όμως δεν συμβαίνει και σε επίπεδο συναρτήσεων μερικής αυτοσυσχέτισης, καθώς, ενώ η συνάρτηση μερικής αυτοσυσχέτισης μιας AR(p) διαδικασίας τερματίζεται μετά από q υστερήσεις, η συνάρτηση μερικής αυτοσυσχέτισης μιας MA(q) διαδικασίας τείνει στο άπειρο καθώς αυξάνονται οι χρονικές υστερήσεις s .

Η τάξη q του υποδείγματος μπορεί να προσδιοριστεί με τη βοήθεια της δειγματικής συνάρτησης αυτοσυσχέτισης, όπως και στη περίπτωση των αυτοπαλίνδρομων διαδικασιών. Από τη προηγηθείσα ανάλυση, είναι γνωστό ότι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης μιας MA(q) διαδικασίας μηδενίζεται μετά από q υστερήσεις. Επομένως, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα οι αυτοσυσχετίσεις θα είναι στατιστικά σημαντικές για $s \leq q$, οπότε και επιλέγεται η τάξη q , ενώ αντίστοιχα για υστερήσεις $s > q$ δεν θα είναι σημαντικές.

Αφού καθοριστεί η τάξη της διαδικασίας, οι παράμετροι του υποδείγματος μπορούν να εκτιμηθούν με τον ίδιο τρόπο που εκτιμήθηκαν και οι παράμετροι μιας AR(p) διαδικασίας. Η εκτίμηση των παραμέτρων γίνεται μέσω της σχέσης $A = P^{-1}R$, αντικαθιστώντας τις αυτοσυσχετίσεις ρ_s με τις δειγματικές εκτιμήσεις $\hat{\rho}_s$, όπως αυτές θα έχουν υπολογισθεί από τη σχέση:

$$\hat{\rho}_s = \frac{\sum_{t=1}^T (Y_t - \bar{Y})(Y_{t-s} - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^T (Y_t - \bar{Y})^2}$$

Σε αντίθεση με τα αυτοπαλίνδρομα υποδείγματα, η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση των παραμέτρων ενός υποδείγματος MA, καθώς η προς ελαχιστοποίηση συνάρτηση:

$$\sum_{t=1}^T \varepsilon_t^2 = \sum_{t=1}^T (Y_t - \mu - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q})^2$$

δεν είναι γραμμική ως προς τις παραμέτρους. Για την εκτίμηση των παραμέτρων απαιτείται η χρήση διαφόρων μη γραμμικών μεθόδων, η ανάλυση των οποίων βρίσκεται εκτός του εύρους της παρούσας εργασίας.

2.3.3 Μεικτά αυτοπαλίνδρομα – κινητού μέσου υποδείγματα ARMA(p, q)

Η γενική μορφή ενός αυτοπαλίνδρομου p τάξης - κινητού μέσου q τάξης υποδείγματος ή απλούστερα ARMA(p,q) είναι:

$$Y_t = a_0 + a_1 Y_{t-1} + a_2 Y_{t-2} + \dots + a_p Y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

$$Y_t = a_0 + \varepsilon_t + \sum_{i=1}^p a_i Y_{t-i} + \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t-i} \quad (2.15)$$

Με μια παρατήρηση της σχέσης (2.15), τα υποδείγματα ARMA(p,q) αποτελούν ένα συνδυασμό p αυτοπαλίνδρομων και q κινητού μέσου όρων. Συνεπώς, ένα αποκλειστικά αυτοπαλίνδρομο υπόδειγμα ή ένα αποκλειστικά υπόδειγμα κινητού μέσου θεωρούνται ειδικές περιπτώσεις μιας ARMA στοχαστικής διαδικασίας. Ουσιαστικά, θα ισχύουν τα εξής:

AR(p) = ARMA(p,0) και

$$MA(q) = ARMA(0,q)$$

ARMA(1,1) υποδείγματα

Η πιο απλή μορφή μιας ARMA(p,q) διαδικασίας είναι το υπόδειγμα ARMA(1,1). Η σχέση που περιγράφει τη δομή των υποδειγμάτων αυτών, προκύπτει εύκολα από τη σχέση (2.15) επιλέγοντας $p = q = 1$. Συγκεκριμένα:

$$Y_t = a_0 + a_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} \quad (2.16)$$

Δεχόμενοι την υπόθεση ότι ο μέσος είναι μηδενικός ή ότι οι μεταβλητές εκφράζονται ως αποκλίσεις από τον μέσο, η σχέση (2.16) παίρνει τη μορφή:

$$y_t = a_1 y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} \quad (2.17)$$

Το υπόδειγμα αυτό μπορεί να γραφεί ως μια MA στοχαστική διαδικασία, αλλά και ως μια αυτοπαλίνδρομη διαδικασία με άπειρους όρους AR(∞). Πράγματι, από τη σχέση (2.16), λαμβάνοντας διαδοχικά άπειρες χρονικές υστερήσεις και αντικαθιστώντας στην αρχική σχέση τις Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots , καταλήγουμε στη μορφή:

$$Y_t = a_0 \sum_{i=0}^{\infty} a_1^i + \varepsilon_t + \sum_{i=0}^{\infty} a_1^i (a_1 + \theta_1) \varepsilon_{t-1-i} \quad (2.18)$$

Για να είναι στάσιμη αυτή η χρονοσειρά, πρέπει το άθροισμα $\sum_{i=0}^{\infty} a_1^i (a_1 + \theta_1)$ να συγκλίνει ή πιο απλά, να ισχύει ο περιορισμός, $|a_1| < 1$. Βάσει αυτού, εξασφαλίζεται η στασιμότητα της διαδικασίας και η σχέση (2.18) παίρνει τη μορφή:

$$Y_t = \frac{a_0}{1 - a_1} + \varepsilon_t + \sum_{i=0}^{\infty} a_1^i (a_1 + \theta_1) \varepsilon_{t-1-i}$$

αφού η σειρά $\sum_{i=0}^{\infty} a_1^i$ αποτελεί άθροισμα όρων φθίνουσας γεωμετρικής προόδου και ισχύει $\sum_{i=0}^{\infty} a_1^i = \frac{1}{1 - a_1}$.

Η τελευταία αυτή μορφή αποτελεί μια MA διαδικασία απείρων όρων, η οποία θα μπορούσε να προσεγγιστεί με πεπερασμένο αριθμό όρων, δεδομένου ότι η σημασία των συντελεστών είναι φθίνουσα. Αυτό σημαίνει ότι από κάποιο σημείο και έπειτα οι όροι θα μπορούσαν να παραλειφθούν. Όπως φαίνεται και από τη προηγούμενη ανάλυση, για τη προσέγγιση μιας ARMA(1,1) διαδικασίας απαιτείται

μια υψηλής τάξεως MA διαδικασία. Επομένως, είναι προφανής η οικονομία που επιτυγχάνεται με τη χρήση των μεικτών υποδειγμάτων, καθώς το ARMA(1,1) υπόδειγμα περιλαμβάνει μόνο δύο συντελεστές.

Αντίστοιχα, η προσέγγιση ενός ARMA(1,1) υποδείγματος μέσω μιας AR(∞) στοχαστικής διαδικασίας γίνεται με διαδοχικές αντικαταστάσεις των όρων σφάλματος $\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots$ στη σχέση (2.16). Έτσι, προκύπτει η ακόλουθη σχέση:

$$Y_t = \frac{\alpha_0}{1 - \theta_1} + \varepsilon_t + \sum_{i=0}^{\infty} \theta_1^i (\alpha_1 + \theta_1) Y_{t-1-i}$$

Για να εξασφαλιστεί η αντιστρεψιμότητα της χρονοσειράς αυτής, πρέπει να ισχύει $|\theta_1| < 1$. Όπως και στη προσέγγιση με το απείρων όρων MA υπόδειγμα, έτσι και σε αυτή την περίπτωση επιτυγχάνεται οικονομία στους συντελεστές με τη χρήση της ARMA(1,1) διαδικασίας.

Μέσω της σχέσης (2.16), λαμβάνοντας τις μέσες τιμές και για τα δύο μέλη, προκύπτει η ιδιότητα για το μέσο:

$$E(Y_t) = \alpha_0 + \alpha_1 E(Y_{t-1}) + E(\varepsilon_t) + \theta_1 E(\varepsilon_{t-1}) \Leftrightarrow$$

$$\mu = \alpha_0 + \alpha_1 \mu \Leftrightarrow$$

$$\mu = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}$$

Υψώνοντας και τα δύο μέλη της σχέσης (2.17) στο τετράγωνο και λαμβάνοντας τις μέσες τιμές αποδεικνύεται η ιδιότητα για τη διακύμανση :

$$E(y_t^2) = E[(\alpha_1 y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1})^2] \Leftrightarrow$$

$$V(y_t) = \gamma_0 = \alpha_1^2 \gamma_0 + \sigma^2 + \theta_1^2 \sigma^2 + 2\alpha_1 \theta_1 \sigma^2 \Leftrightarrow$$

$$\gamma_0 = \frac{1 + \theta_1^2 + 2\alpha_1 \theta_1}{1 - \alpha_1^2} \sigma^2$$

Χρησιμοποιώντας τη διατύπωση της συνδιακύμανσης γ_5 και με αντικατάσταση της σχέσης (2.17), προκύπτουν η ακόλουθη ιδιότητα:

$$\gamma_s = \text{Cov}(y_s, y_{s-1}) = E[(y_s - \mu)(y_{s-1} - \mu)] \Leftrightarrow$$

$$\gamma_s = E[(a_1 y_{s-1} + \varepsilon_s + \theta_1 \varepsilon_{s-1})(a_1 y_{s-2} + \varepsilon_{s-1} + \theta_1 \varepsilon_{s-2})]$$

$$\gamma_s = \begin{cases} \alpha_1 \gamma_0 + \theta_1 \sigma^2, & s = 1 \\ \alpha_1 \gamma_{s-1}, & s > 1 \end{cases}$$

Με εφαρμογή των προηγούμενων ιδιοτήτων, προκύπτει η ιδιότητα για τον συντελεστή συσχέτισης:

$$\rho_s = \frac{\gamma_s}{\gamma_0} = \frac{\gamma_{s-1}}{\gamma_0} \alpha_1 = \begin{cases} \frac{(a_1 + \theta_1)(1 + \alpha_1 \theta_1)}{1 + \theta_1^2 + 2\alpha_1 \theta_1}, & s = 1 \\ \alpha_1 \rho_{s-1}, & s > 1 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι στη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης υπεισέρχεται ο συντελεστής θ_1 από την MA(1) διαδικασία, αλλά μόνο για την αυτοσυσχέτιση πρώτης τάξης ρ_1 . Οι υπόλοιπες αυτοσυσχετίσεις εξαρτώνται αποκλειστικά από το αυτοπαλίνδρομο μέρος. Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης για την ARMA(1,1) διαδικασία φθίνει γεωμετρικά καθώς αυξάνονται οι χρονικές υστερήσεις s , με τη διαφορά ότι η μείωση αρχίζει από το ρ_1 και όχι από το $\rho_0 = 1$ όπως συμβαίνει στην AR(1). Η συνάρτηση μερικής αυτοσυσχέτισης για την ARMA(1,1) διαδικασία φθίνει γεωμετρικά όπως στην περίπτωση μιας MA(1) διαδικασίας.

ARMA(p,q) υποδείγματα

Η γενική μορφή ενός γενικού μεικτού ARMA(p,q) υποδείγματος δίνεται από τη σχέση:

$$Y_t = a_0 + a_1 Y_{t-1} + a_2 Y_{t-2} + \dots + a_p Y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

Οι πρώτες q αυτοσυσχετίσεις για χρονικές υστερήσεις $s \leq q$, εξαρτώνται τόσο από τους συντελεστές $a_i, i = 1, 2, \dots, q$, του AR υποδείγματος, όσο και από τους συντελεστές $\theta_i, i = 1, 2, \dots, p$ του MA υποδείγματος. Για χρονικές υστερήσεις $s > q$, οι αυτοσυνδιακυμάνσεις και οι αυτοσυσχετίσεις ταυτίζονται με αυτές μιας AR(p) διαδικασίας και επομένως θα δίνονται από τις σχέσεις:

$$\gamma_s = \alpha_1 \gamma_{s-1} + \alpha_2 \gamma_{s-2} + \dots + \alpha_p \gamma_{s-p} = \sum_{i=1}^p \alpha_i \gamma_{s-i}, s > q$$

$$\rho_s = \alpha_1 \rho_{s-1} + \alpha_2 \rho_{s-2} + \dots + \alpha_p \rho_{s-p} = \sum_{i=1}^p \alpha_i \rho_{s-i}, s > q$$

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης μιας ARMA(p, q) διαδικασίας είναι φθίνουσα και η συμπεριφορά της ταυτίζεται με αυτή μιας αυτοπαλίνδρομης διαδικασίας p τάξεως. Παράλληλα, η συνάρτηση μερικής αυτοσυσχέτισης είναι επίσης φθίνουσα και συμπεριφέρεται όπως αυτή μιας στοχαστικής διαδικασίας κινητού μέσου q τάξεως, για χρονικές υστερήσεις $s > q - p$.

Για την εκτίμηση των παραμέτρων ενός ARMA(p,q) υποδείγματος δύναται να εφαρμοστούν οι ίδιες τεχνικές που χρησιμοποιούνται και για την εκτίμηση των παραμέτρων ενός MA(q) υποδείγματος. Δηλαδή, μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι σχέσεις που συνδέουν τις αυτοσυσχετίσεις με τις παραμέτρους του υποδείγματος, αλλά υπάρχει και η δυνατότητα εφαρμογής μη γραμμικών μεθόδων εκτίμησης. Η χρήση μη γραμμικών μεθόδων προϋποθέτει το υπόδειγμα να είναι μη γραμμικό ως προς τις παραμέτρους.

2.3.4 Υποδείγματα ετεροσκεδαστικότητας ARCH – GARCH

Η έως τώρα ανάλυση για τις αυτοπαλίνδρομες, κινητού μέσου και μεικτές στοχαστικές διαδικασίες βασίστηκε στη υπόθεση ότι η διακύμανση των υπό μελέτη τυχαίων μεταβλητών διατηρείται σταθερή στο χρόνο. Όταν η υπόθεση αυτή παύει να ισχύει, υπεισέρχεται το πρόβλημα της **ετεροσκεδαστικότητας** (heteroscedasticity). Μία πρώτη προσπάθεια εκτίμησης συναντάται από τον Engle (1982) μέσω των ARCH υποδειγμάτων, ενώ αργότερα ο Bollerslev (1986) εισήγαγε τα γενικευμένα ετεροσκεδαστικά υποδείγματα GARCH.

ARCH υποδείγματα

Στα αυτοπαλίνδρομα υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικότητας (AutoRegressive Conditionally Heteroscedasticity) ή απλούστερα ARCH υποδείγματα, η διακύμανση

του τρέχοντος σφάλματος θεωρείται ως συνάρτηση των διακυμάνσεων των όρων σφάλματος των προηγούμενων χρονικών περιόδων. Αν ε_t ο όρος σφάλματος μιας ARCH διαδικασίας, τότε θα ισχύει:

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t \quad (2.19)$$

όπου η τυχαία μεταβλητή z_t είναι λευκός θόρυβος και σ_t είναι η χρονικά εξαρτημένη τυπική απόκλιση. Για την υπό συνθήκη διακύμανση σ_t^2 , ισχύει:

$$\sigma_t^2 = a_0 + a_1 \varepsilon_{t-1}^2 + a_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \dots + a_q \varepsilon_{t-q}^2$$

όπου $a_0 > 0$ και $a_i \geq 0, i > 0$.

ARCH(1) υποδείγματα

Επιλέγοντας για $q = 1$, προκύπτει η απλούστερη μορφή ARCH(1), για την οποία, η συνάρτηση της υπό συνθήκης διακύμανσης διατυπώνεται μέσω της σχέσης:

$$\sigma_t^2 = a_0 + a_1 \varepsilon_{t-1}^2 \quad (2.20)$$

με $a_0 > 0$ και $a_1 \geq 0$.

Από τη σχέση (2.19), λαμβάνοντας τη μέση τιμή και με τη χρήση της σχέσης (2.20), προκύπτει η ακόλουθη ιδιότητα για την αναμενόμενη τιμή του ε_t :

$$E(\varepsilon_t) = E(\sigma_t z_t) = E(z_t \sqrt{a_0 + a_1 \varepsilon_{t-1}^2}) \Leftrightarrow$$

$$E(\varepsilon_t) = E(z_t) E\left(\sqrt{a_0 + a_1 \varepsilon_{t-1}^2}\right) = 0$$

αφού η μεταβλητή z_t είναι λευκός θόρυβος.

Από τις σχέσεις (2.19) και (2.20) και εφαρμόζοντας τον ορισμό της διακύμανσης, προκύπτει η ακόλουθη ιδιότητα για την υπό συνθήκη διακύμανση του όρου σφάλματος ε_t :

$$V(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = E(\sigma_t^2 z_t^2) = E(z_t^2) E(a_0 + a_1 \varepsilon_{t-1}^2) \Leftrightarrow$$

$$V(\varepsilon_t) = a_0 + a_1 E(\varepsilon_{t-1}^2) = a_0 + a_1 V(\varepsilon_t) \Leftrightarrow$$

$$V(\varepsilon_t) = \frac{a_0}{1 - a_1}, 0 \leq a_1 < 1$$

ARCH(2) υποδείγματα

Για $q = 2$ προκύπτει η μορφή του ARCH(2) υποδείγματος με τη σχέση (2.19) να εξακολουθεί να το χαρακτηρίζει και τη συνάρτηση της υπό συνθήκης διακύμανσης να δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma_t^2 = a_0 + a_1 \varepsilon_{t-1}^2 + a_2 \varepsilon_{t-2}^2 \quad (2.21)$$

με $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 \geq 0$ και $\alpha_2 \geq 0$.

Ακολουθώντας τα ίδια βήματα όπως και πριν, αποδεικνύεται η ακόλουθη ιδιότητα για την αναμενόμενη τιμή του όρου σφάλματος ε_t :

$$E(\varepsilon_t) = E(\sigma_t z_t) = E(z_t \sqrt{a_0 + a_1 \varepsilon_{t-1}^2 + a_2 \varepsilon_{t-2}^2}) \Leftrightarrow$$

$$E(\varepsilon_t) = E(z_t) E\left(\sqrt{a_0 + a_1 \varepsilon_{t-1}^2 + a_2 \varepsilon_{t-2}^2}\right) = 0$$

Αντίστοιχα, για την υπό συνθήκη διακύμανση του όρου ε_t , ισχύει η ακόλουθη ιδιότητα:

$$V(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = E(\sigma_t^2 z_t^2) = E(z_t^2) E(a_0 + a_1 \varepsilon_{t-1}^2 + a_2 \varepsilon_{t-2}^2) \Leftrightarrow$$

$$V(\varepsilon_t) = a_0 + a_1 E(\varepsilon_{t-1}^2) + a_2 E(\varepsilon_{t-2}^2) = a_0 + (a_1 + a_2) V(\varepsilon_t) \Leftrightarrow$$

$$V(\varepsilon_t) = \frac{a_0}{1 - a_1 - a_2}, 0 \leq a_1 + a_2 < 1$$

ARCH(q) υποδείγματα

Για τη γενικευμένη μορφή των ARCH υποδειγμάτων, η σχέση (2.19) εξακολουθεί να θεωρείται δεδομένη και για την υπό συνθήκη διακύμανση ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\sigma_t^2 = a_0 + a_1 \varepsilon_{t-1}^2 + a_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \dots + a_q \varepsilon_{t-q}^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q a_i \varepsilon_{t-i}^2$$

όπου $\alpha_0 > 0$ και $\alpha_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, q$.

Όπως και στα απλουστευμένα προηγούμενα ετεροσκεδαστικά υποδείγματα, έτσι και στο γενικευμένο υπόδειγμα αποδεικνύεται εύκολα οι ακόλουθες ιδιότητες για την αναμενόμενη τιμή του όρου ε_t αλλά και για την υπό συνθήκη διακύμανση του. Συγκεκριμένα ισχύουν:

$$E(\varepsilon_t) = 0$$

$$V(\varepsilon_t) = \frac{a_0}{1 - a_1 - a_2 - \dots - a_q}, \sum_{i=1}^q a_i > 0$$

Για τον προσδιορισμό της ύπαρξης ενός ARCH υποδείματος απαιτείται μια σειρά διαδικασιών αποτελούμενη από τρία βασικά βήματα (Αγιακλόγλου - Μπένος, 2007). Το πρώτο βήμα περιλαμβάνει μια παλινδρόμηση με εφαρμογή της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων από την οποία προκύπτουν τα κατάλοιπα ε_t . Η σχέση που διέπει τα κατάλοιπα είναι η ακόλουθη:

$$\varepsilon_t^2 = a_0 + a_1 \varepsilon_{t-1}^2 + u_t$$

Το επόμενο βήμα περιλαμβάνει την εκτίμηση των συντελεστών α_0 και α_1 με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, ενώ το τελευταίο βήμα περιλαμβάνει τον έλεγχο υποθέσεων για τον συντελεστή α_1 :

$$H_0: \alpha_1 = 0$$

$$H_1: \alpha_1 \neq 0$$

Ο έλεγχος υποθέσεων γίνεται με τη μέθοδο $LM = nR^2 \sim X^2$, όπου αποδεχόμαστε την υπόθεση H_0 αν $LM \leq X_{1,\alpha}^2$. Αν το υπόδειγμα που έχει επιλεγθεί περιέχει q όρους, δηλαδή η σχέση για τα κατάλοιπα να είναι της μορφής:

$$\varepsilon_t^2 = a_0 + a_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + a_q \varepsilon_{t-q}^2 + u_t$$

τότε ο έλεγχος υποθέσεων που θα εφαρμοσθεί, θα είναι ο ακόλουθος:

$$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_q = 0$$

$$H_1: \text{τουλάχιστον ένα } \alpha_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, q$$

Όπως και στο απλούστερο υπόδειγμα, έτσι και στο υπόδειγμα q όρων αποδεχόμαστε την H_0 όταν $LM < X_{q,a}^2$. Ουσιαστικά και στους δύο παραπάνω ελέγχους η αποδοχή της υπόθεσης H_0 σημαίνει ότι υπάρχει ομοιοσκεδαστικότητα ή δεν υπάρχει διαδικασία ARCH.

GARCH(p,q) υποδείγματα

Το γενικευμένο αυτοπαλίνδρομο, υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικότητας (Generalised AutoRegressive Conditionally Heteroscedasticity) ή πιο απλά, GARCH υπόδειγμα, αποτελεί τη γενίκευση ενός ARCH μοντέλου. Η επέκταση αυτή περιλαμβάνει την προσθήκη των χρονικών υστερήσεων των υπό συνθήκη διακυμάνσεων με αποτέλεσμα να περιορίζεται η χρήση μεγάλης τάξεως ARCH υποδειγμάτων. Η συνάρτηση της υπό συνθήκης διακύμανσης δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\sigma_t^2 = a_0 + a_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + a_p \varepsilon_{t-p}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \dots + \beta_q \sigma_{t-q}^2$$

όπου $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$ και $\beta_j \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, p$, $j = 1, 2, \dots, q$ και με τη στασιμότητα της διαδικασίας να εξασφαλίζεται όταν ισχύει:

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1$$

GARCH(1,1) υποδείγματα

Επιλέγοντας $p = q = 1$, προκύπτει το πιο απλό υπόδειγμα GARCH(1,1) το οποίο περιλαμβάνει μια χρονική υστέρηση του τετραγωνισμένου όρου σφάλματος και μια χρονική υστέρηση στην υπό συνθήκη διακύμανση. Για τον διαταρακτικό όρο ε_t ισχύει η σχέση που παρουσιάστηκε στην ανάλυση των ARCH υποδειγμάτων, ενώ συνάρτηση της διακύμανσης δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma_t^2 = a_0 + a_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \quad (2.22)$$

Αν αντικατασταθούν στη σχέση (2.22) διαδοχικά οι χρονικές υστερήσεις των υπό συνθήκη διακυμάνσεων, η προηγούμενη σχέση μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$\sigma_t^2 = \frac{a_0}{1 - \beta_1} + \alpha_1 (\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \varepsilon_{t-2}^2 + \beta_1^2 \varepsilon_{t-3}^2 + \dots)$$

όπου φαίνεται ότι η διακύμανση στη τρέχουσα χρονική περίοδο εξαρτάται από της τιμές των διαταρακτικών όρων των προηγούμενων περιόδων.

Για την υπό συνθήκη διακύμανση του ε_t θα ισχύει η ακόλουθη ιδιότητα:

$$V(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = \frac{a_0}{1 - a_1 - \beta_1}$$

όπου που πρέπει να ισχύει $a_1 + \beta_1 < 1$ για να εξασφαλιστεί η στασιμότητα της στοχαστικής διαδικασίας. Σημειωτέον, τόσο στο απλουστευμένο GARCH(1,1) όσο και στο γενικευμένο υπόδειγμα, όταν το άθροισμα των συντελεστών πλησιάζει τη μονάδα, η αστάθεια του υποδείγματος είναι μεγάλη και σε μακροχρόνια περίοδο.

2.4 Ανακεφαλαίωση

Η έννοια των χρονοσειρών κατέχει μια ξεχωριστή και σημαντική θέση στον κλάδο της οικονομετρίας. Μέσω των χρονολογικών σειρών εξετάζονται πολλά δεδομένα παρατηρώντας τη σημασία του χρόνου μέσα στην ανάλυση, ανάλογα με τις τάσεις που δημιουργούνται. Κάθε εξεταζόμενη περίπτωση και κάθε ανάλυση είναι διαφορετική και εμφανίζει διαφορετικά χαρακτηριστικά εξαιτίας της διαφορετικότητας των δεδομένων και της δομής των υπό μελέτη μεταβλητών. Το σημαντικό είναι πάντα να υπάρχει σταθερή διακύμανση στα μοντέλα ώστε να μη δημιουργούνται προβλήματα αστάθειας και μη αξιοπιστίας.

Γεγονός είναι πως κάθε φορά απαιτείται σωστός έλεγχος και προσδιορισμός του κατάλληλου υποδείγματος για ύπαρξη ή όχι προβλημάτων, δεδομένου ότι η ανάλυση χρονοσειρών πρέπει να είναι απαλλαγμένη από την αστάθεια και τις λανθασμένες εκτιμήσεις. Η σημασία του ελέγχου αυτού γίνεται εύκολα κατανοητή στις περιπτώσεις όπου εξετάζεται το πρόβλημα της ετεροσκεδαστικότητας και η χρήση ξεχωριστών υποδειγμάτων κρίνεται απαραίτητη.

Στο κεφάλαιο αυτό εξετάστηκαν βασικά υποδείγματα όπως τα $AR(q)$, $MA(p)$, $ARMA(p,q)$, $ARCH(p)$ και το γενικευμένο μοντέλο $GARCH(p,q)$. Για όλα τα υποδείγματα προσδιορίστηκαν οι βασικές ιδιότητες, η μορφή του μοντέλου όπως και τα δομικά χαρακτηριστικά τους. Τέλος, για την επιλογή του κατάλληλου υποδείγματος θεωρείται σημαντικό να συνυπολογίζονται όλα τα χαρακτηριστικά και τις τάσεις που παρουσιάζουν τα δεδομένα ώστε η εκτίμηση να είναι ολοκληρωμένη.

Κεφάλαιο 3: Παρουσίαση και ανάλυση των αποτελεσμάτων αποτίμησης του κινδύνου στις αποδόσεις μετοχών του δείκτη NASDAQ

3.1 Εισαγωγή

Βασικό πυλώνα μιας οικονομετρικής ανάλυσης αποτελεί η παρουσίαση και μια πρώτη ανάλυση των δεδομένων πάνω στα οποία θα εφαρμοστούν οι μεθοδολογίες που απαιτούνται για τον υπολογισμό της VaR. Τα δεδομένα της παρούσας ανάλυσης αποτελούν χρονολογικές σειρές και αναφέρονται στις ημερήσιες λογαριθμικές αποδόσεις των τιμών κλεισίματος των μετοχών 4 εταιριών, η διαπραγμάτευση των οποίων λαμβάνει χώρα στο χρηματιστήριο NASDAQ της Νέας Υόρκης. Συγκεκριμένα, οι παρατηρήσεις αφορούν τις τιμές κλεισίματος των μετοχών της Apple, Intel, eBay και American Airlines και καλύπτουν την πενταετία 2010 – 2015. Τα αρχικά δεδομένα έχουν εξαχθεί από την ιστοσελίδα <https://finance.yahoo.com> και επεξεργάστηκαν εν συνεχεία με την γλώσσα προγραμματισμού R.

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται αναφορά στη μεθοδολογία μέσω της οποίας τα ακατέργαστα δεδομένα κατασκευάζουν τις χρονοσειρές των αποδόσεων ενώ παράλληλα παρουσιάζονται τα κυριότερα περιγραφικά χαρακτηριστικά αυτών. Επιπλέον, με τη χρήση του ελέγχου Anderson Darling, εξετάζεται η ιδιότητα της κανονικότητας των αποδόσεων των μετοχών, ανάλυση της οποίας έχει προηγηθεί στο Κεφάλαιο 2. Τέλος, μέσω των στατιστικών ελέγχων ADF και Phillips Perron εξετάζεται η στασιμότητα των χρονοσειρών, ιδιότητα η οποία είναι εξαιρετικά σημαντική για τη πορεία την οικονομετρικής ανάλυσης που ακολουθεί.

3.2 Παρουσίαση εταιρειών

Η επιλογή των εταιριών για τις οποίες εκτιμήθηκε η αξία σε κίνδυνο έγινε κατά κύριο λόγο με γνώμονα την αναγνωρισιμότητα τους στη παγκόσμια αγορά αλλά και τη συνεισφορά τους στη κεφαλαιοποίηση του δείκτη. Οι συγκεκριμένες εταιρίες κατέχουν κυρίαρχες θέσεις τόσο στους κλάδους στους οποίους δραστηριοποιούνται όσο και στην οικονομία των ΗΠΑ. Ως προς τη παρουσία τους στον δείκτη NASDAQ, οι τέσσερις υπό ανάλυση επιχειρήσεις διατηρούν μεσοσταθμικά το 9,5% της

κεφαλαιοποίησης του δείκτη στο σύνολο των 2906 ενεργών εταιριών που συμμετέχουν στον δείκτη.

eBay Inc

Η eBay Inc. διαχειρίζεται εμπορικές πλατφόρμες, μέσω των οποίων συνδέονται παγκοσμίως διάφοροι αγοραστές και πωλητές και αποτελεί μια από τις ηγέτιδες επιχειρήσεις στον κλάδο της. Αυτές οι πλατφόρμες εμπορικών συναλλαγών παρέχουν τα απαραίτητα εργαλεία στους πωλητές ώστε να οργανώσουν τα εμπορεύματα τους προς διάθεση και αντίστοιχα στους υποψήφιους αγοραστές ώστε να πραγματοποιήσουν τις αγορές τους σε πραγματικό χρόνο. Οι πιο γνωστές από αυτές είναι η διάσημη ηλεκτρονική πλατφόρμα ebay.com, εφαρμογές αυτής στα κινητά τηλέφωνα, αλλά και οι StunHub και Ticketbis με τις τελευταίες να περιορίζονται στις αγοραπωλησίες εισιτηρίων για εκδηλώσεις και αθλητικά δρώμενα. Επιπλέον, η εταιρία διαχειρίζεται πλατφόρμες μικρότερης κλίμακας όπως η mobile.de, Kijiji, Gumtree, Marktplaats και eBay Kleinanzeigen οι οποίες δραστηριοποιούνται σε επίπεδο τοπικών κοινωνιών. Η eBay Inc. ιδρύθηκε το 1995 από τον Pierre Omidyar και έχει διατηρεί την έδρα της στο San Jose της California.

Intel Corp.

Η Intel Corporation δραστηριοποιείται στο σχεδιασμό, στη κατασκευή και στη πώληση επεξεργαστών ηλεκτρονικών υπολογιστών, δικτύων και πλατφορμών επικοινωνίας. Η δραστηριότητα της βασίζεται κυρίως τους τομείς κατασκευής μικροεπεξεργαστών H/Y (Client Computing Group), κατασκευής επεξεργαστών για διακομιστές και δίκτυα (Data Center Group), στο σχεδιασμό και υλοποίηση ηλεκτρονικών πλατφορμών για εμπορικές και βιομηχανικές λύσεις (Internet Of Things Group). Επιπλέον, δραστηριοποιείται στη παρασκευή συσκευών μνήμης για H/Y (Non-Volatile Memory Solutions Group), στο σχεδιασμό λογισμικού προστασίας από ψηφιακούς ιούς (Intel Security Group) αλλά και στη κατασκευή τσιπ ημιαγωγών (Programmable Solutions Group). Το 85% των εσόδων της προέρχεται από τους τομείς του Client Computing και Data Center, ενώ αποτελεί και τον βασικό προμηθευτή κατασκευαστών υπολογιστικών συστημάτων όπως η Apple, Lenovo, Dell και Hewlett-Packard. Η Intel ιδρύθηκε το 1968 από τους πρωτοπόρους στον

τομέα των ημιαγωγών, Robert Noyce και Gordon Moore, ενώ διατηρεί την έδρα της στη Santa Clara της California.

Apple Inc.

Η Apple Inc. αποτελεί μια Αμερικανική πολυεθνική εταιρία τεχνολογίας με βασικές δραστηριότητες τον σχεδιασμό, την ανάπτυξη και τη πώληση καταναλωτικών ηλεκτρονικών ειδών, λογισμικών, διαδικτυακών υπηρεσιών και Η/Υ. Τα πιο γνωστά από τα προϊόντα της είναι οι προσωπικοί υπολογιστές Macintosh, το λειτουργικό σύστημα Mac OS X, η φορητή συσκευή αναπαραγωγής πολυμέσων iPod, οι συσκευές κινητής τηλεφωνίας iPhone και οι υπολογιστές ταμπλέτες iPad. Η εν λόγω εταιρία έγινε ευρέως γνωστή εισάγοντας στην αγορά τον πρώτο ολοκληρωμένο προσωπικό υπολογιστή Apple I, όπως και τον διάδοχο του, Apple II, ο οποίος περιελάμβανε το πρώτο πρόγραμμα υπολογιστικού φύλλου VisiCalc. Στην Apple αναγνωρίζονται επίσης και άλλες πρωτοποριακές τεχνολογικές εφαρμογές, όπως ο πρώτος εμπορικός υπολογιστής με γραφικό περιβάλλον εργασίας, Lisa και ο προσωπικός υπολογιστής Macintosh που επαναπροσδιόρισε τη διεπαφή ανθρώπου και μηχανής. Η Apple ιδρύθηκε το 1976 από τους Steve Jobs, Steve Wozniak και Ronald Wayne και διατηρεί την έδρα της στο Cupertino της California.

American Airlines

Η American Airlines είναι από τις κυριότερες Αμερικάνικες εταιρίες αερογραμμών και η μεγαλύτερη παγκοσμίως σε μέγεθος στόλου αεροσκαφών, σε έσοδα αλλά και σε εξυπηρετούμενους προορισμούς ανά τον κόσμο. Με 6.700 πτήσεις ημερησίως και 350 προορισμούς σε περισσότερες από 50 χώρες, η εν λόγω εταιρία δραστηριοποιείται μέσω των κόμβων της στις πόλεις Dallas, Charlotte, Chicago, Philadelphia, Miami, Phoenix, Washington DC, Los Angeles και New York των ΗΠΑ, διακινώντας κατά μέσο όρο 140.000 επιβάτες ημερησίως. Η American Airlines αποτελεί ιδρυτικό μέλος της Oneworld Alliance, ενός εκ των τριών μεγαλύτερων συνεργιών παγκοσμίως, ενώ συνεργάζεται στη υπερατλαντική αγορά με εταιρίες όπως η British Airways, Iberia και Finnair, αλλά και στην αγορά πέραν του ειρηνικού ωκεανού με τις εταιρίες Japan Airlines και Cathay Pacific. Επίσης, η περιφερειακή της δραστηριότητα εξυπηρετείται από μικρότερους θυγατρικούς αερομεταφορείς υπό την ονομασία American Eagle. Η εταιρία συγκροτήθηκε το 1930 έπειτα από τη

συνένωση των δύο αεροπορικών οργανισμών Robertson Aircraft Corporation και Colonial Air Transport υπό την ονομασία American Airways. Η εταιρία διατήρησε την ονομασία αυτή μέχρι το 1934, οπότε λόγω νομοθεσιών και αναδιοργάνωσης του αμερικανικού κλάδου αεροπλοΐας μετονομάστηκε σε American Airlines με έδρα το Fort Worth στο Texas.

3.3 Στατιστικά στοιχεία των αποδόσεων

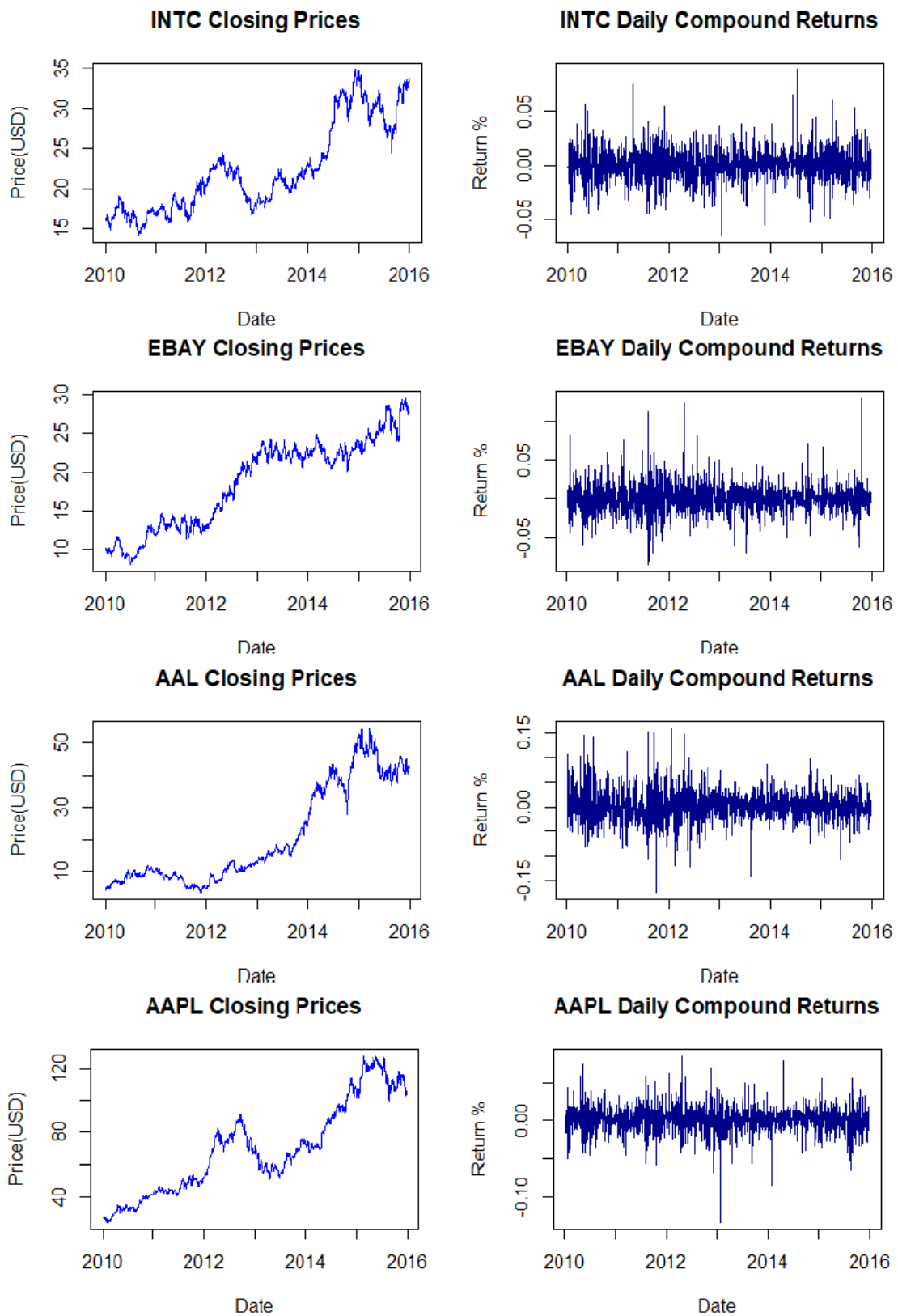
Τα δεδομένα που συνελέγησαν για τη παρούσα εργασία αφορούν τις ημερήσιες τιμές κλεισίματος (adjusted close) των μετοχών των Intel, eBay, Apple και American Airlines που διαπραγματεύονται στο χρηματιστήριο NASDAQ για το χρονικό διάστημα 2010-2015. Οι τιμές αυτές χρησιμοποιήθηκαν εν συνεχεία για να εξαχθούν οι ημερήσιες λογαριθμικές αποδόσεις (daily compound returns) ως προσεγγιστική έκφραση των αποδόσεων. Συγκεκριμένα, η απόδοση (R_t) μιας μετοχής τη χρονική στιγμή t , δίνεται από τη σχέση:

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

όπου P_t η τιμή της μετοχής τη περίοδο t και P_{t-1} αντίστοιχα η τιμή της μετοχής τη περίοδο $t - 1$ και εκφράζει τη ποσοστιαία μεταβολή της τιμής μιας μετοχής για μία χρονική περίοδο. Οι λογαριθμικές αποδόσεις προσδιορίζονται ως ο λογάριθμος του λόγου των τιμών της μετοχής, δηλαδή:

$$X_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1}) \quad (3.1)$$

Για μικρές αποδόσεις, τα δύο αυτά μέτρα που χρησιμοποιούνται ευρέως στη χρηματοοικονομική επιστήμη, συγκλίνουν. Αντίθετα, στη περίπτωση όπου οι αποδόσεις δεν είναι μικρές, τότε η λογαριθμική απόδοση προσεγγίζει ικανοποιητικά την τιμή της R_t . Πρακτικά, για τη περιγραφή μιας μετοχής προτιμάται η μελέτη της χρονοσειράς των αποδόσεων αυτής αντί της χρονοσειράς των τιμών κλεισίματος της. Η απλούστευση αυτή παρέχει αρκετά πλεονεκτήματα στην ανάλυση χρονοσειρών καθώς η λογαριθμική απόδοση είναι αριθμός ανεξάρτητος από μονάδες μέτρησης, γεγονός που της δίνει την ευκολία της συγκρισιμότητας. Επιπλέον, η λογαριθμική απόδοση βοηθά σημαντικά στην εξομάλυνση οικονομετρικών προβλημάτων, όπως η αυτοσυσχέτιση, η ετεροσκεδαστικότητα, η μη-κανονικότητα και η μη-στασιμότητα.



Διάγραμμα 3.1: Εξέλιξη τιμών κλεισίματος και αποδόσεων των μετοχών των Intel, eBay, American Airlines και Apple

Στο Διάγραμμα 3.1 παρουσιάζονται για κάθε μετοχή η εξέλιξη της τιμής κλεισίματος της όπως επίσης και η εξέλιξη των αποδόσεων της για το χρονικό διάστημα 2010-2015. Όπως φαίνεται, και οι τέσσερις μετοχές διατηρούν ανοδική πορεία στο εν λόγω χρονικό διάστημα. Συγκεκριμένα, από το 2010 έως και το 2012 οι τιμές των μετοχών των Intel, eBay και Apple καταγράφουν ανοδική πορεία με τις δύο πρώτες να παρουσιάζουν έντονη μεταβλητότητα. Αντίθετα, στο συγκεκριμένο χρονικό διάστημα η τιμή της μετοχής της American Airlines κατέγραψε ανοδική πορεία έως και το 2011, ενώ στη συνέχεια σημείωσε πτώση ακόμα και σε επίπεδα χαμηλότερα από τη τιμή με την οποία εκκίνησε το 2010. Από το 2012 έως και το 2014, οι τιμές των eBay και American Airlines καταγράφουν ανοδική πορεία, ενώ για το ίδιο χρονικό διάστημα οι αντίστοιχες τιμές των Intel και Apple θα βρεθούν και αυτές σε υψηλότερα επίπεδα περνώντας όμως μια περίοδο έντονης μεταβλητότητας. Τέλος, για το διάστημα 2014-2015 η ανοδική πορεία είναι χαρακτηριστική και για τις τέσσερις μετοχές με τη παρουσία ωστόσο έντονων μεταβολών των τιμών.

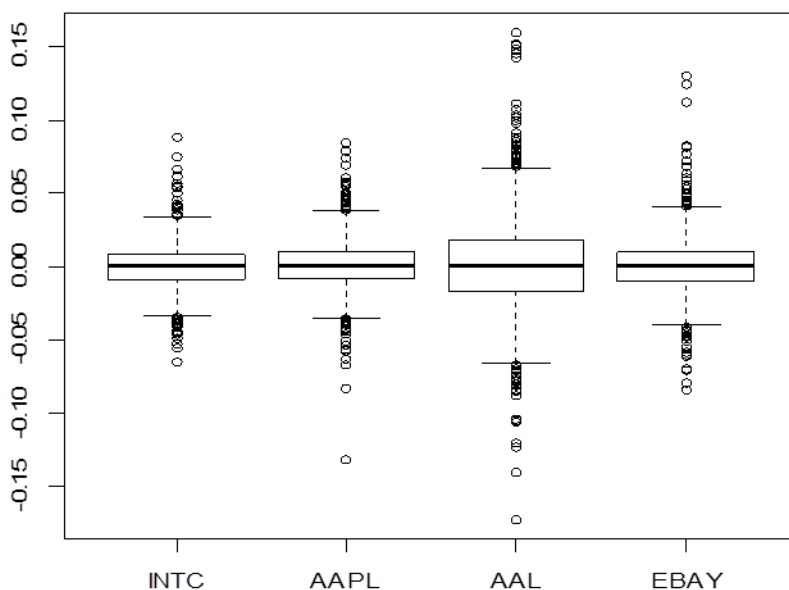
Πίνακας 3.1: Περιγραφικά στατιστικά στοιχεία των αποδόσεων των μετοχών

Stock	Observations	Max	Min	Mean	St. Dev	Kurtosis	Skewness
INTC	1508	0,0887	-0,0651	0,0005	0,0148	5,4108	0,1604
AAPL	1508	0,0850	-0,1319	0,0009	0,0168	7,6530	-0,2775
AAL	1508	0,1597	-0,1722	0,0012	0,0316	6,0944	0,2585
EBAY	1508	0,1303	-0,0836	0,0007	0,0185	8,2225	0,5704

Στον Πίνακα 3.1 παρουσιάζονται τα κυριότερα περιγραφικά στατιστικά στοιχεία για τις αποδόσεις των τεσσάρων μετοχών. Όπως γίνεται εύκολα αντιληπτό, οι αποδόσεις και των τεσσάρων μετοχών έχουν μηδενική μέση τιμή τόσο ουσιαστικά όσο και στατιστικά καθώς οι τυπικές αποκλίσεις τους είναι υψηλές. Η διαπίστωση αυτή σημαίνει ότι οποιαδήποτε αναφορά στην έννοια της ημερήσιας απόδοσης δεν θα είχε πραγματική αλλά ούτε και στατιστική ερμηνεία.

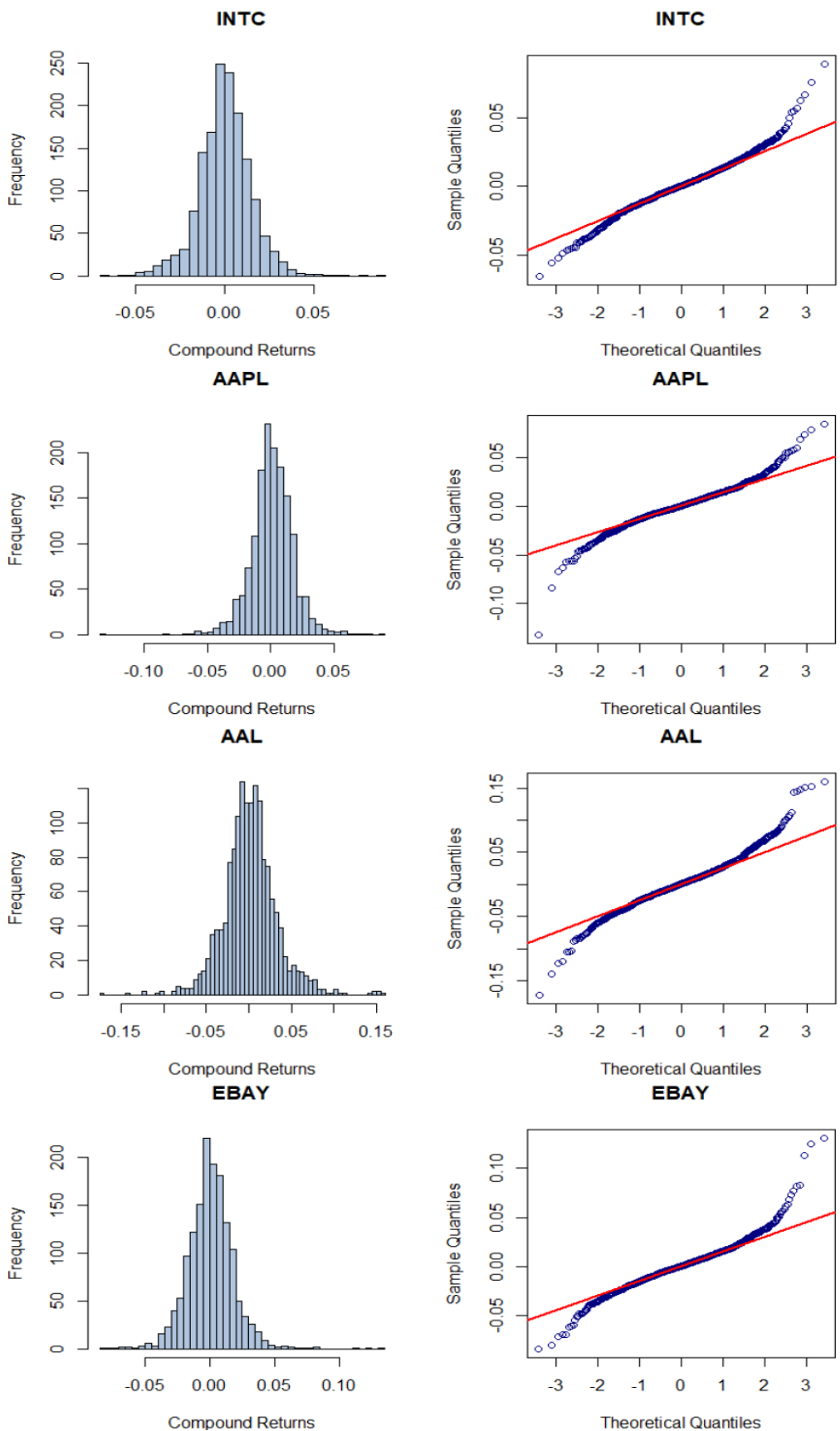
Στο Διάγραμμα 3.2 παρουσιάζονται γραφικά τα κύρια περιγραφικά χαρακτηριστικά των αποδόσεων των μετοχών όπου τα δεδομένα του Πίνακα 3.1 γίνονται πιο εύκολα αντιληπτά. Οι οριακές τιμές και για τις τέσσερις μετοχές είναι σχεδόν ίδιες, με εξαίρεση αυτές της American Airlines, ενώ το 50% των

παρατηρήσεων βρίσκεται σε μια περιοχή γύρω από το μηδέν. Παρατηρείται επίσης ότι το μικρότερο εύρος τιμών εμφανίζεται στη περίπτωση της Intel, η μικρότερη απόδοση ανήκει στη American Airlines, ενώ η τελευταία παρουσιάζει και τη μέγιστη απόδοση που ξεπερνά το 15%. Τέλος, μέσω των θηκογραμμάτων και συγκεκριμένα από τις θέσεις των Q_1 και Q_3 ως προς τη διάμεσο, παρατηρείται μια σχετική συμμετρία ενώ και οι τέσσερις μετοχές παρουσιάζουν ακραίες τιμές (outliers) γεγονός το οποίο υποδηλώνει έντονες μεταβολές στις τιμές των μετοχών στο παρελθόν.



Διάγραμμα 3.2: Θηκογράμματα των αποδόσεων των Intel, Apple, American Airlines και eBay

Στο Διάγραμμα 3.3 που ακολουθεί, παρουσιάζονται τα ιστογράμματα και τα Κανονικά Q-Q διαγράμματα των λογαριθμικών αποδόσεων των τεσσάρων μετοχών. Παρατηρούμε ότι και στις τέσσερις περιπτώσεις, οι κατανομές είναι λεπτόκυρτες, συμπέρασμα το οποίο επαληθεύεται εύκολα από τις τιμές των συντελεστών κύρτωσης Pearson, στον Πίνακα 3.1, οι οποίες είναι αρκετά μεγαλύτερες του συντελεστή κύρτωσης της Κανονικής κατανομής. Επιπλέον, καμία από τις κατανομές δεν παρουσιάζει συμμετρία. Συγκεκριμένα, οι αποδόσεις της Apple παρουσιάζουν αρνητική ασυμμετρία, ενώ οι αποδόσεις των eBay, American Airlines και Intel αντίστοιχα θετική. Τέλος, η παρουσία αρκετών απομακρυσμένων τιμών είτε στις δεξιές είτε στις αριστερές ουρές των κατανομών, υποδηλώνει έντονη μεταβολές στις τιμές των μετοχών.



Διάγραμμα 3.3: Ιστογράμματα και Q-Q διαγράμματα των αποδόσεων των μετοχών

Από τα διαγράμματα συμπεραίνουμε ότι οι κατανομές των λογαριθμικών αποδόσεων εμφανίζουν βαριές (heavy tails) δεξιές και αριστερές ουρές, γεγονός το οποίο επιβεβαιώνεται από τους υψηλούς συντελεστές κύρτωσης για το σύνολο των τεσσάρων μετοχών. Οι βαριές ουρές συναντώνται συχνά στην ανάλυση δεδομένων οικονομικού τύπου και οφείλονται στις ακραίες θετικές ή αρνητικές τιμές των αποδόσεων, προερχόμενες από απότομες αυξομειώσεις στις τιμές κλεισίματος των μετοχών.. Οι καμπύλες που σχηματίζουν τα σημεία στα Q-Q διαγράμματα υποδηλώνουν ότι τα δεδομένα μας εμφανίζουν περισσότερες ακραίες τιμές από ότι θα εμφάνιζαν αν προέρχονταν πραγματικά από τη Κανονική κατανομή.

Στη συνέχεια, οι χρονοσειρές των λογαριθμικών αποδόσεων των μετοχών ελέγχθηκαν ως προς τη κανονικότητα και τη στασιμότητα τους. Για τη κανονικότητα των αποδόσεων χρησιμοποιήθηκε ο έλεγχος Jarque-Bera ενώ για την ιδιότητα της στασιμότητας των χρονοσειρών χρησιμοποιήθηκε ο έλεγχος Phillips-Perron. Τα αποτελέσματα και των δύο ελέγχων παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.2.

Πίνακας 3.2 : Έλεγχοι Jarque-Bera και Phillips-Perron

Stock	Jarque-Bera		Phillips-Perron	
	Statistic	p-value	Statistic	p-value
INTC	371,7	< 0,01	-39,482	< 0,01
AAPL	1379,7	< 0,01	-38,153	< 0,01
AAL	618,5	< 0,01	-38,761	< 0,01
EBAY	1795,5	< 0,01	-40,568	< 0,01

Από τα αποτελέσματα των ελέγχων παρατηρούμε ότι όλες οι αποδόσεις δεν κατανέμονται κανονικά, δεδομένων των μηδενικών $p - values$. Το συμπέρασμα αυτό συμβαδίζει απόλυτα με τις εκτιμήσεις που προηγήθηκαν από τη μελέτη των ιστογραμμάτων αλλά και των Κανονικών Q-Q διαγραμμάτων. Σύμφωνα με τις τιμές των $p - values$ για τους ελέγχους Phillips-Perron διαπιστώνεται ότι, για το σύνολο των χρονοσειρών των αποδόσεων, η υπόθεση της ύπαρξης μοναδιαίας ρίζας απορρίπτεται. Επομένως, οι χρονοσειρές των αποδόσεων των υπό εξέταση μετοχών είναι στάσιμες.

3.4 Προσδιορισμός υποδείγματος ARIMA(p,d,q) - GARCH(m,s)

Για την εκτίμηση της αξίας σε κίνδυνο απαιτείται αρχικά ο προσδιορισμός των υποδειγμάτων που ακολουθούν οι χρονοσειρές των αποδόσεων μέσα από την οικογένεια υποδειγμάτων ARIMA(p,d,q) - GARCH(m,s). Για το σύνολο των αποδόσεων των μετοχών εκτιμήθηκαν τα υποδείγματα ARIMA(p,d,q) για όλους τους συνδυασμούς $p + q < 5$ χρησιμοποιώντας τη μέθοδο μεγίστης πιθανοφάνειας (MLE). Για τις αποδόσεις των μετοχών των American Airlines και eBay καταλληλότερο κρίθηκε το υπόδειγμα ARIMA(1,0,1) ενώ για τις αποδόσεις των Intel και Apple καταλληλότερο κρίθηκε το υπόδειγμα τυχαίου περιπάτου ή απλούστερα ARIMA(0,0,0). Η επιλογή των υποδειγμάτων έγινε με βάση την ελάχιστη τιμή του πληροφοριακού κριτηρίου AIC (Akaike Information Criterion).

Μετά τον προσδιορισμό των ARIMA υποδειγμάτων, ακολούθησε η εξαγωγή των καταλοίπων των αποδόσεων. Στη συνέχεια, ακολούθησε ο έλεγχος Ljung-Box για την αυτοσυσχέτιση των τετραγώνων των καταλοίπων. Για το σύνολο των τεσσάρων μετοχών, οι τιμές των p - values είναι μηδενικές, με αποτέλεσμα να απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση της μη-αυτοσυσχέτισης των τετραγώνων των καταλοίπων. Στο επόμενο στάδιο της ανάλυσης προσδιορίστηκαν τα κατάλληλα υποδείγματα GARCH(m,s) που ακολουθούν τα τετράγωνα των καταλοίπων, οι συντελεστές των οποίων παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.3.

Πίνακας 3.3: Συντελεστές των υποδειγμάτων GARCH(m,s)

Stock	α_1	β_1
INTC	0,041117 (15,69)	0,904703 (152,35)
AAPL	0,091432 (3,93)	0,836138 (22,58)
AAL	0,023701 (9,75)	0,968764 (829,33)
EBAY	0,036284 (13,15)	0,935371 (176,39)

Η επιλογή των υποδειγμάτων έγινε βάσει της ελάχιστης τιμής του πληροφοριακού κριτηρίου BIC (Bayesian Information Criterion). Για το σύνολο των τεσσάρων χρονοσειρών, καταλληλότερο κρίθηκε το υπόδειγμα GARCH(1,1). Στον

Πίνακα 3.3, πέραν των συντελεστών των υποδειγμάτων, παρατίθενται και οι τιμές της στατιστικής συνάρτησης t για κάθε εκτιμώμενο συντελεστή. Από τις τιμές των στατιστικών t γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι στο σύνολο τους οι συντελεστές των υποδειγμάτων είναι στατιστικά σημαντικοί. Επιπλέον, παρατηρούμε για κάθε μετοχή πως το άθροισμα των συντελεστών πλησιάζει τη μονάδα επιβεβαιώνοντας με τον τρόπο αυτό τη στασιμότητα των στοχαστικών διαδικασιών.

3.5 Εκτίμηση του Κινδύνου

Η εκτίμηση της VaR για το σύνολο των αποδόσεων των τεσσάρων μετοχών προσδιορίζεται από τη σχέση:

$$\hat{Y}_{t+1} - F(a)\hat{\sigma}_{t+1}$$

όπου η μεταβλητή \hat{Y}_{t+1} αποτελεί τη προβλεπόμενη μέση τιμή της χρονοσειράς για την επόμενη περίοδο και $\hat{\sigma}_{t+1}$ η πρόβλεψη της υπό συνθήκη διακύμανσης της χρονοσειράς. Η ποσότητα $F(a)$ εξαρτάται από τη κατανομή και το επίπεδο σημαντικότητας που επιλέγεται για την εκτίμηση της VaR. Για την τυπική Κανονική κατανομή και για επίπεδο σημαντικότητας 95%, η τιμή της $F(a)$ είναι 1,64 ενώ αντίστοιχα για επίπεδο σημαντικότητας 99% η τιμή της είναι 2,32. Δεδομένου ότι η μεταβλητή Y_t εκφράζει την απόδοση της μετοχής και η μέση τιμή της απόδοσης είναι μηδενική για το σύνολο των μετοχών, προκύπτει ότι $\hat{Y}_{t+1} = 0$.

Πίνακας 3.4: Εκτιμήσεις της VaR

Stock	VaR 95%	VaR 99%
INTC	-0,0242	-0,0350
AAPL	-0,0267	-0,0378
AAL	-0,0317	-0,0457
EBAY	-0,0337	-0,0473

Στον Πίνακα 3.4 παρουσιάζονται οι εκτιμήσεις του κινδύνου για τις αποδόσεις των τεσσάρων υπό εξέταση μετοχών του δείκτη NASDAQ έπειτα από την εφαρμογή του GARCH(1,1) υποδείγματος και για επίπεδα σημαντικότητας 95% και 99%

αντίστοιχα. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του Πίνακα 3.4, για ε.σ. 95% η VaR κυμαίνεται από -2,42% έως και -3,37% με τη χαμηλότερη εκτίμηση κινδύνου να αποδίδεται στην Intel και την υψηλότερη στην eBay. Επιπλέον, οι εκτιμήσεις της VaR για τις αποδόσεις των μετοχών των Intel και Apple είναι μικρότερες του -3% ενώ για τις μετοχές των American Airlines και eBay είναι μεγαλύτερες του -3%. Αντίστοιχα για επίπεδο σημαντικότητας 99%, η εκτίμηση της VaR λαμβάνει εύρος από -3,5% έως και -4,73% ενώ όπως φαίνεται και από τα αποτελέσματα του Πίνακα 3.4, εκτιμήσεις της VaR είναι μεγαλύτερες από αυτές σε επίπεδο 95%. Όπως στο πρώτο επίπεδο σημαντικότητας έτσι και σε αυτό του 99%, η ελάχιστη εκτίμηση της VaR ανήκει στην Intel και η μέγιστη εκτίμηση στην eBay. Επίσης, οι εκτιμήσεις για τις μετοχές των Intel και Apple βρίσκονται κάτω του -4% ενώ οι αντίστοιχες για τις American Airlines και eBay βρίσκονται άνω του -4%.

3.6 Έλεγχος Back-testing

Υπάρχουν διάφορα μοντέλα για την εκτίμηση της αξίας σε κίνδυνο τα οποία όμως είναι χρήσιμα μόνο αν προβλέπουν σωστά το μέγεθος των ενδεχόμενων ζημιών. Επομένως, η εφαρμογή των μοντέλων αυτών για την εκτίμηση της VaR απαιτεί στη συνέχεια και μια διαδικασία επικύρωσης. Η διαδικασία που χρησιμοποιείται για τον έλεγχο της αξιοπιστίας των οικονομετρικών μοντέλων ονομάζεται Back-testing.

Σύμφωνα με τη J.P. Morgan (1999), ο έλεγχος Back-testing αποτελεί ένα πλαίσιο το οποίο επικυρώνει ότι οι ζημιές που τελικά πραγματοποιούνται βρίσκονται εντός των προκαθορισμένων ορίων της VaR κατά την εκτίμηση της. Κατά τη διαδικασία αυτή γίνεται σύγκριση των ιστορικών εκτιμήσεων της VaR με τις αντίστοιχες ζημιές που παρατηρήθηκαν μέσα στο ίδιο χρονικό διάστημα. Αναλόγως με τον έλεγχο αλλά και το επίπεδο εμπιστοσύνης που επιλέγονται, χρησιμοποιούνται οι κατάλληλες στατιστικές υποθέσεις για τον έλεγχο της αξιοπιστίας των μοντέλων.

Η σωστή διαχείριση του χρηματοοικονομικού κινδύνου επιβάλλει τη χρήση της διαδικασίας Back-testing καθώς δίνεται η δυνατότητα ελέγχου του πραγματικού επιπέδου εμπιστοσύνης της εκτιμώμενης αξίας σε κίνδυνο. Αν διαπιστωθεί ότι η εκτιμώμενη VaR δεν χαρακτηρίζεται από το επίπεδο εμπιστοσύνης για το οποίο είχε εκτιμηθεί, τότε κρίνεται απαραίτητη η επανεξέταση του μοντέλου εκτίμησης της VaR όπως επίσης και των υποθέσεων βάσει των οποίων επιλέχθηκε. Οι κυριότεροι έλεγχοι

Back-testing που εφαρμόζονται στις οικονομετρικές αναλύσεις είναι αυτοί των Kupiec, Christoffersen και Haas με τις σημαντικές διαφορές μεταξύ τους να συγκεντρώνονται γύρω από τον τρόπο που μελετούν τις εμφανίσεις και τη συχνότητα των παραβιάσεων της VaR. Για τις ανάγκες της παρούσας εργασίας χρησιμοποιήθηκε ο έλεγχος Kupiec.

Ο έλεγχος Kupiec πραγματοποιείται χρησιμοποιώντας το λόγο πιθανοφάνειας (log-likelihood ratio) που ανέπτυξε ο Kupiec (1995) και αφορά τον έλεγχο κάλυψης «ανεύ όρων» (Unconditional Coverage Testing). Πρώτο στάδιο της διαδικασίας αυτής αποτελεί η καταγραφή των περιπτώσεων υπέρβασης (exceedances). Έστω N το πλήθος των περιπτώσεων στις οποίες η απόδοση της μετοχής ήταν μικρότερη από την εκτιμηθείσα VaR και T το χρονικό διάστημα στο οποίο εξετάζεται η απόδοση της μετοχής. Τότε ο αριθμός των υπερβάσεων ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή, $N \sim B(T, p)$ όπου p το επίπεδο εμπιστοσύνης. Εξετάζοντας τον ρυθμό αποτυχίας $\frac{N}{T}$, ο έλεγχος λαμβάνει τη μορφή:

$$H_0: \frac{N}{T} = p$$

$$H_1: \frac{N}{T} \neq p$$

και διεξάγεται με τον υπολογισμό του λόγου πιθανοφάνειας μέσα από τη σχέση:

$$LR_{uc} = -2 \ln[(1 - p)^{T-N} p^N] + 2 \ln \left[\left(1 - \frac{N}{T}\right)^{T-N} \left(\frac{N}{T}\right)^N \right]$$

Υπό τη μηδενική υπόθεση H_0 ότι το μοντέλο που έχει επιλεγεί για την εκτίμηση της VaR είναι ορθό, ο λόγος πιθανοφάνειας ακολουθεί ασυμπτωτικά τη χ^2 κατανομή με έναν βαθμό ελευθερίας. Στη περίπτωση όπου η τιμή της στατιστικής LR_{uc} υπερβαίνει τη κρίσιμη τιμή LR_{crit} της χ^2 , για συγκεκριμένο επίπεδο εμπιστοσύνης, η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται και συνεπώς το επιλεγθέν μοντέλο θεωρείται ανακριβές.

Στον Πίνακα 3.5 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των ελέγχων Kupiec για την εγκυρότητα των υποδειγμάτων που χρησιμοποιήθηκαν για την εκτίμηση της VaR. Οι έλεγχοι πραγματοποιήθηκαν για επίπεδα εμπιστοσύνης 95% και 99 % αντίστοιχα ενώ το χρονικό διάστημα που επιλέχθηκε είναι το ίδιο που χρησιμοποιήθηκε καθ' όλη

τη προηγηθείσα ανάλυση. Στον Πίνακα 3.5 παρουσιάζονται με κόκκινο χρώμα οι τιμές της LR_{uc} που αντιστοιχούν στα απορριπτέα υποδείγματα, για συγκεκριμένο επίπεδο εμπιστοσύνης.

Πίνακας 3.5: Έλεγχοι Kupiec για επίπεδα εμπιστοσύνης 95% και 99%

Stock	Confidence Level 95%		Confidence Level 99%	
	LR_{uc}	LR_{crit}	LR_{uc}	LR_{crit}
INTC	2,647	3,841	14,195	6,635
AAPL	4,364	3,841	22,829	6,635
AAL	0,642	3,841	6,120	6,635
EBAY	0,193	3,841	9,817	6,635

Όπως γίνεται αντιληπτό, για επίπεδο εμπιστοσύνης 95% οι τιμές του λόγου πιθανοφάνειας για τις μετοχές Intel, American Airlines και eBay είναι μικρότερες από τη κρίσιμη τιμή $LR_{crit} = 3,841$ της χ^2 και μόνο η τιμή της LR_{uc} για τη μετοχή της Apple είναι μεγαλύτερη. Συνεπώς, ο έλεγχος δεν απορρίπτει τη μηδενική υπόθεση για τις μετοχές Intel, American Airlines και eBay και τα μοντέλα τα οποία χρησιμοποιήθηκαν για τις μετοχές αυτές είναι αξιόπιστα. Αντίθετα, ο έλεγχος για τη μετοχή της Apple απορρίπτει τη μηδενική υπόθεση και ως εκ τούτου το μοντέλο για τη μετοχή αυτή δεν μπορεί να θεωρηθεί αξιόπιστο. Για επίπεδο εμπιστοσύνης 99%, τα αποτελέσματα των ελέγχων είναι διαφορετικά καθώς καμία τιμή του λόγου πιθανοφάνειας δεν είναι μικρότερη της κρίσιμης τιμής $LR_{crit} = 6,635$ με αποτέλεσμα να απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση για κάθε μετοχή. Ως εκ τούτου, σε επίπεδο εμπιστοσύνης 99% κανένα μοντέλο δεν μπορεί να θεωρηθεί αξιόπιστο.

3.7 Ανακεφαλαίωση

Στο κεφάλαιο αυτό έγινε εκτίμηση της αξίας σε κίνδυνο για τις αποδόσεις των τεσσάρων μετοχών του δείκτη NASDAQ με εφαρμογή των κατάλληλων υποδειγμάτων ARIMA(p,d,q) - GARCH(m,s), όπως αυτά επιλέχθηκαν μέσω του κριτηρίου AIC. Για τη στατιστική ανάλυση που πραγματοποιήθηκε χρησιμοποιήθηκαν 1508 ιστορικές τιμές κλεισίματος για τις μετοχές Apple, Intel, American Airlines και eBay οι οποίες επεξεργάστηκαν με τη βοήθεια του προγραμματιστικού πακέτου R.

Πρώτο και βασικό βήμα της στατιστικής ανάλυσης αποτέλεσε η εξαγωγή των περιγραφικών χαρακτηριστικών των αποδόσεων όπου και προέκυψαν τα πρώτα συμπεράσματα για τη μη κανονικότητα αλλά και για την μηδενική μέση τιμή αυτών. Στη συνέχεια, οι χρονοσειρές των αποδόσεων εξετάστηκαν ως προς τη κανονικότητα τους με τον έλεγχο των Jarque-Bera να απορρίπτει την υπόθεση ότι οι αποδόσεις ακολουθούν τη Κανονική κατανομή. Για την ιδιότητα της στασιμότητας των χρονοσειρών χρησιμοποιήθηκε ο έλεγχος Phillips-Perron από όπου προέκυψε ότι και οι τέσσερις εξεταζόμενες χρονοσειρές είναι στάσιμες. Επόμενο και σημαντικό βήμα για την εκτίμηση της VaR αποτέλεσε ο προσδιορισμός των κατάλληλων υποδειγμάτων ARIMA(p,d,q) - GARCH(m,s) καθώς και των συντελεστών αυτών. Δεδομένων των τιμών των συντελεστών και με τη χρήση των κατάλληλων σχέσεων εκτιμήθηκε η αξία σε κίνδυνο για τις αποδόσεις των τεσσάρων μετοχών σε επίπεδα σημαντικότητας 95% και 99% αντίστοιχα. Τέλος, πραγματοποιήθηκε ο έλεγχος Kupiec για την αξιοπιστία των οικονομετρικών μοντέλων μέσω των οποίων εκτιμήθηκε η VaR. Τα αποτελέσματα του ελέγχου έδειξαν ότι η αξιοπιστία για τη πλειοψηφία των μοντέλων επιτυγχάνεται σε επίπεδο σημαντικότητας 95% σε αντίθεση με το αντίστοιχο 99% όπου κανένα μοντέλο δεν θεωρήθηκε αξιόπιστο.

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Alexander, C., Leigh, C. (1997). “*On the Covariance Matrices used in VAR Models*”, *Journal of Derivatives* 4, pp. 50-62

Beder, T. (1995). “*VAR: Seductive but Dangerous*”, *Financial Analysts Journal* (Sept/Oct), pp. 12-24.

Bessis, J. (2002). “*Risk Management in Banking*”, 2nd Edition, Wiley

Black, F., Scholes, M.,(1973). “*The Pricing of Options and Corporate Liabilities*”, *Journal of Political Economy* 81, pp. 637-59.

Bollerslev, T. (1986). “*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*”, *Journal of Econometrics* 31, pp. 307-27.

Bollerslev, T. (1990). “*Modelling the Coherence in Short-Run Nominal Exchange Rates: A Multivariate Generalized ARCH Model*”, *Review of Economics and Statistics* 78, pp. 498-505.

Culp, C., Miller, C. and A. Neves (1998). “*Value at Risk: Uses and Abuses*”, *Journal of Applied Corporate Finance* 10 (Winter), pp. 26-38.

Duffie, D., and J. Pan. (1997), “*An Overview of Value at Risk*”, *Journal of Derivatives* 4, 7-49

Dusak, Katherine (1973). “*Futures trading and investor returns: an investigation of commodity market risk premiums*”, *Journal of Political Economy*, 81, 1387-1406.

Engle, R. F. (1982). "*Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the variance of U.K. Inflation*", *Econometrica* 50, pp. 987-1008.

Garbade, Kenneth D. (1986). "*Assessing risk and capital adequacy for Treasury securities*", *Topics in Money and Securities Markets*, 22, New York: Bankers Trust.

Hendricks, D. (1996). "*Evaluation of Value at Risk Models using Historical Data*", *Federal Reserve Bank of New York Economic Policy Review* (April).

Hull, J.C. (2002). "*Options futures and other Derivatives*", 5th Edition, Prentice Hall

Jorion, Ph. (2007), "*Value-at-Risk: the Benchmark for Controlling Market Risk*", 3rd Edition, McGraw-Hill Professional Book Group.

Leavens, Dickson H. (1945). "*Diversification of investments, Trust and Estates*", 80 (5), 469-473

Lietaer, Bernard A. (1971). "*Financial Management of Foreign Exchange: An Operational Technique to Reduce Risk*", Cambridge: MIT Press.

Markowitz, Harry M. (1952). "*Portfolio Selection*", *Journal of Finance*, 7 (1), 77-91.

Nelson, D.B. (1991). "*Conditional Heteroskedasticity in asset returns: A New Approach*", *Econometrica* 59, pp. 347-70.

Rissin, D. (1997). "*Monte Carlo and VAR calculations*", *Derivatives Strategy* 2 (February).

Roy, Arthur D. (1952). "*Safety first and the holding of assets*", *Econometrica*, 20 (3), 431-449.

Schrock, Nichols W. (1971). “*The theory of asset choice: simultaneous holding of short and long positions in the futures market*”, *Journal of Political Economics*, 79, 270-293.

Terpezan-Tabara, O. A. (2008). “*The Importance of Value at Risk Method in the Management of Banking Risk*”, 4th International Conference of ASECU: “Development Cooperation and Competitiveness”, Bucharest, Romania, 22-24

Tsay, R. S. (2005). “*Analysis of Financial Time Series (Second Edition)*”, New Jersey: Wiley Interscience

Wilson, Thomas (1993). “*Infinite wisdom*”, *Risk*, 6 (6), 37-45.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ

Αγιακλόγλου, Χ., Μπένος, Θ. (2007), Εισαγωγή στην Οικονομετρική Ανάλυση Τόμος Β', Β' Έκδοση, Εκδόσεις Μπένου, Αθήνα

Δεληγιώργης, Γ. (2003), Διαχείριση Κινδύνου Με Τη Μέθοδο VaR, Πανεπιστήμιο Πειραιά.

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗ

<https://finance.yahoo.com/>

<http://www.nasdaq.com/>

<https://cran.r-project.org/web/packages/rugarch/rugarch.pdf>

<https://www.wikipedia.org/>