ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

UNIVERSITY OF PIRAEUS

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΠΛΕΟΝΑΣΜΑΤΟΣ ΜΕ ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΗ ΕΞΑΡΤΗΣΗ

ΠΑΝΑΓΙΩΤΑΚΟΥ Γ. ΜΑΡΙΑ-ΧΡΙΣΤΙΝΑ

ΠΕΙΡΑΙΑΣ

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2017

Η παρούσα διπλωματική εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη Γ.Σ.Ε.Σ. του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμόν …….. συνεδρίαση του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τριμελής επιτροπή:

1. Αναπληρωτής Καθηγητής, Χατζηκωνσταντινίδης Ευστάθιος (Επιβλέπων)
2. Καθηγητής, Μαχαιράς Νικόλαος
3. Επίκουρος Καθηγητής, Σεβρόγλου Βασίλειος

Διπλωματική εργασία που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURNCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN

ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

STOHASTIC SURPLUS PROCESSES UNDER MARKOVIAN DEPENDENCE

PANAGIOTAKOU G. MARIA-CHRISTINA

PIRAEUS NOVEMBER 2017

The committee consists of:

1. Associate Professor , Chadjikonstantinidis Efstathios (Supervisor)
2. Professor, Macheras Nikolaos
3. Assistant Professor, Sevroglou Vasilios

Diploma thesis submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus as part of the requirements for obtaining the Postgraduate Diploma of Specialization in Actuarial Science and Risk Management.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Κατ’ αρχήν θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Χατζηκωνσταντινίδη Ευστάθιο, Αναπληρωτή Καθηγητή του τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς για την καθοδήγηση, το χρόνο και την πολύτιμη συνεισφορά του για την ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας.

Ακόμη, ευχαριστώ θερμά τα άλλα δύο μέλη της επιτροπής κ. Μαχαιρά Νικόλαο, Καθηγητή του τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς και τον κ. Σεβρόγλου Βασίλειο, Επίκουρο Καθηγητή του τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς για όλες τις εύστοχες και ουσιαστικές παρατηρήσεις τους.

Τέλος, ιδιαίτερα μεγάλο ευχαριστώ και ευγνωμοσύνη στους γονείς μου, τη μητέρα μου Δέσποινα και τον πατέρα μου Γεώργιο, οι οποίοι στέκονται δίπλα μου σε κάθε νέα αρχή και με παροτρύνουν να προχωράω και να εξελίσσομαι.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Παρατηρώντας τις εμφανίσεις των ζημιών και των αντίστοιχων αποζημιώσεων σε μία ασφαλιστική εταιρία γίνεται σαφές ότι οι εξελίξεις στο οικονομικό και πολιτικό περιβάλλον, ακόμη και οι καιρικές εναλλαγές διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο αφού επηρεάζουν τα ως άνω μεγέθη σε μεγάλο βαθμό.

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να μελετήσει τις στοχαστικές διαδικασίες πλεονάσματος σε χαρτοφυλάκια κινδύνων σε Μαρκοβιανό περιβάλλον. Ειδικότερα, θα δούμε πως οι στοχαστικές διαδικασίες αντανακλούν καλύτερα την πραγματικότητα σε σχέση με το κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων.

Επιπροσθέτως, θα αναφερθούμε ιδιαιτέρως σε ορισμένα μέτρα κινδύνου όπως η πιθανότητα χρεοκοπίας και η πιθανότητα μη χρεοκοπίας ή αλλιώς επιβίωσης, το έλλειμμα κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας αλλά και πριν από αυτή καθώς επίσης και σχέσεις που συνδέουν τα μεγέθη αυτά μέσω της συνάρτησης των Gerber- Shiu.

Τέλος, θα μελετηθούν τα αναμενόμενα μερίσματα και η αναμενόμενη παρούσα αξία αυτών, όταν υπάρχει στρατηγική καταβολής σταθερού μερίσματος.

SUMMARY

Observing the occurrences of losses and corresponding indemnities to an insurance company, it is clear that developments in the economic and political environment, even weather variations, play an important role, since they affect the above figures to a large extent.

The purpose of this paper is to study stochastic surplus processes in risk portfolios in a Markov environment. In particular, we will see how the stochastic processes better reflect reality in relation to the classic model of Risk Theory.

In addition, we will refer in particular to certain risk measures such as the probability of bankruptcy and the probability of non-bankruptcy or survival, the deficit at the time of and before the bankruptcy, as well as relations linking these sizes through the Gerber-Shiu function .

Finally, the expected dividends and their expected present value will be studied when there is a fixed dividend strategy.

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

Το κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου

1.1 Η στοχαστική διαδικασία του πλήθους των κινδύνων

Το βασικό πρόβλημα που διακρίνει μια επιχείρηση είναι ο προσδιορισμός των εσόδων σε σχέση με τα έξοδά της. Έτσι, το μέγεθος που χρειάζεται να υπολογιστεί με ακρίβεια είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας, δηλαδή η πιθανότητα ύπαρξης ελλείμματος. Προκειμένου να μοντελοποιήσουμε το πλεόνασμα ή το εν λόγω έλλειμμα πρέπει σαφώς να ορίσουμε το πλήθος των κινδύνων τους οποίους καλείται να αντιμετωπίσει και να καλύψει μια ασφαλιστική.
Έστω $\{N(t)\}_0^\infty$ μια στοχαστική διαδικασία που καταγράφει το πλήθος των ανωτέρω κινδύνων στο διάστημα $[0,t]$. Η $N(t)\}_0^\infty$ είναι μια απαριθμήτρια συνάρτηση και ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 1.1: Μια στοχαστική διαδικασία $\{N(t)\}_0^\infty$ ονομάζεται απαριθμήτρια διαδικασία αν και μόνο αν:

- $N(t) > 0$, $N(0) = 0$
- Η $N(t)$ διακριτή τυχαία μεταβλητή
- Αν ισχύει ότι $s < t$, τότε $N(s) < N(t)$

Οι απαιτήσεις παρουσιάζονται στο περιβάλλον μιας επιχείρησης σε διάφορες χρονικές στιγμές. Έστω λοιπόν μια ακολουθία $\{T_k : k = 1,2,\ldots\}$ που περιγράφει τους ενδιάμεσους χρόνους μεταξύ δύο διαδοχικών απαιτήσεων και ορίζεται ως:

Ορισμός 1.2: Ορίζουμε την ακολουθία $\{T_k : k = 1,2,\ldots\}$ όπου

$$T_1 = W_1 \quad , \quad T_2 = W_2 - W_1 \quad , \quad \ldots \quad , \quad T_k = W_k - W_{k-1}$$

Οι μεταβλητές T_k ονομάζονται ενδιάμεσοι χρόνοι ή χρόνοι αναμονής, ενώ W_k είναι οι χρόνοι άφιξης των απαιτήσεων.

Ανάλογα με την κατανομή που ακολουθούν οι ενδιάμεσοι χρόνοι προκύπτει και διαφορετική στοχαστική ανέλιξη. Στην ειδική περίπτωση της κατανομής Poisson, υποθέτουμε ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν την εκθετική κατανομή. Ο ορισμός για τη στοχαστική ανέλιξη μιας διαδικασίας Poissonείναι:

Ορισμός 1.3:Μία απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη $\{ N_t : t \geq 0\}$ λέγεται ανέλιξη Poisson όταν ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

i) $N(0) = 0$
ii) Σε ένα πολύ μικρό χρονικό διάσημα h μπορεί να συμβεί το πολύ ένα γεγονός και η πιθανότητα να συμβεί αυτό το γεγονός είναι ανάλογη με το μήκος του διαστήματος. Δηλαδή,

$$P(N(t+h)=n+k \mid N(t)=n)=\begin{cases}1-\lambda h+o(h)\,, & k=0\\ h+o(h)\,, & k=1\\ o(h)\,, & k\geq 2\end{cases}$$

Όπου $o(h)$ είναι μια ποσότητα που συγκλίνει στο μηδέν πιο γρήγορα από το h καθώς $h \to 0$. Δηλαδή δεν μπορούμε να έχουμε ταυτόχρονα γεγονότα.

iii) Για κάθε $t < s$, η τυχαία μεταβλητή $N(s)-N(t)$ είναι ανεξάρτητη της μεταβλητής $N(t)$. Δηλαδή η διαδικασία έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις.

Σημειώνουμε ότι μία ανέλιξη Poisson όπως και κάθε απαριθμήτρια ανέλιξη , ορίζει μια ακολουθία από τυχαίες μεταβλητές $W_1, W_2, \dots$ που λέγεται ακολουθία των χρόνων άφιξης κάποιου γεγονότος με τον ακόλουθο τρόπο:

$$W_1 = min\{t : N(t)=1\} \quad , \dots , \quad W_k = min\{t : N(t)=k\}$$

Οι ιδιότητες μιας στοχαστικής ανέλιξης Poisson είναι:

- Για κάθε σταθερό t, $N(t) \sim P(\lambda t)$, δηλαδή η τυχαία μεταβλητή $N(t)$ ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λt. Γενικά, αυτή την κατανομή ακολουθεί η μεταβλητή $N(t+s)-N(s)$ για κάθε $s>0$.
- Για κάθε $i \neq j$ οι μεταβλητές T_i, T_j είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και η καθεμία ακολουθεί την $E\kappa\theta(\lambda)$.

Σε μία ανέλιξη Poisson ο χρόνος W_K μέχρι να συμβεί το k-γεγονός μπορεί να γραφεί στη μορφή $W_K = \sum_{i=1}^{k} T_i$ και εφόσον το άθροισμα ανεξάρτητων εκθετικών ακολουθεί την κατανομή Γάμμα έχουμε ότι $W_K \sim Ga(k, \lambda)$.

Ορισμός 1.4: Μη ομογενή ανέλιξη Poisson έχουμε όταν ισχύουν η ιδιότητες (i) και (iii) αλλά η (ii) πλέον τροποποιείται αφού εμπλέκεται ο παράγοντας του χρόνου ως εξής:

$$P(N(t+h)=n+k \mid N(t)=n) = \begin{cases}1-\lambda(t)h+o(h)\,, & k=0\\ \lambda(t)h+o(h)\,, & k=1\\ o(h)\,, & k\geq 2\end{cases}$$

1.2 Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος

Θέλοντας να μοντελοποιήσουμε ένα χαρτοφυλάκιο σε μια ασφαλιστική εταιρία πρέπει όπως αναφέραμε να παρακολουθήσουμε την πορεία δύο βασικών μεγεθών που την αφορούν:

1. Τα έσοδα της και
2. Τα έξοδα της

Προκειμένου να γίνει αυτό ορίζουμε μια στοχαστική διαδικασία $U(t)$ που συμβολίζει το πλεόνασμα ή αλλιώς την ανέλιξη του πλεονάσματος του χαρτοφυλακίου μας στο χρονικό διάστημα $[0, t]$. Σημειώνουμε εδώ ότι $U(0) = u \geq 0$ είναι το αρχικό αποθεματικό ,δηλαδή το αρχικό κεφάλαιο που υποχρεούται να κατέχει η ασφαλιστική.

Επομένως έχουμε

$$U(t) = u + P(t) - S(t)$$

όπου

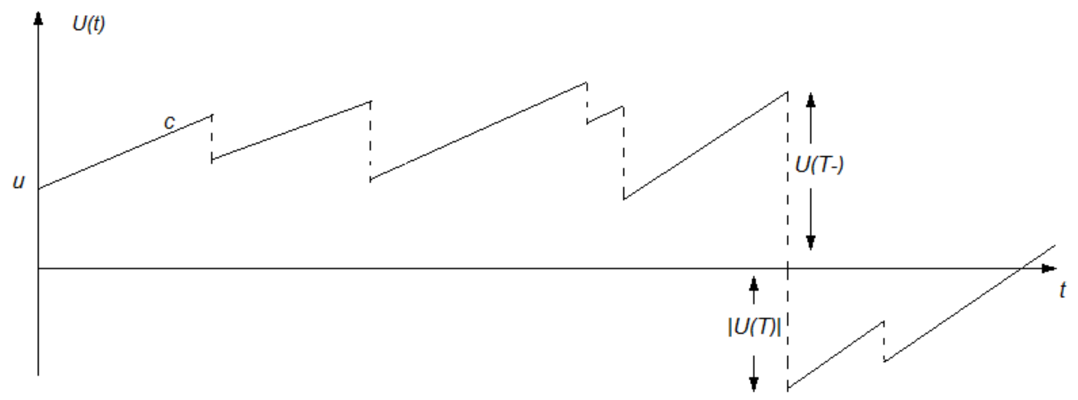
- $u + P(t) = u + ct$ είναι τα έσοδα της ασφαλιστικής από την καταβολή των ασφαλίστρων σε αυτήν και δεν είναι στοχαστικά (δηλαδή τυχαία) αλλά μια γραμμική συνάρτηση του χρόνου, επομένως δεν υπάρχει βεβαιότητα ως προς τα έσοδα
- c είναι ο σταθερός ρυθμός είσπραξης των ασφαλίστρων ανά μονάδα χρόνου
- $S(t)$ είναι τα έξοδα της επιχείρησης από απαιτήσεις εξαιτίας εμφάνισης ζημιών στο διάστημα $[0, t]$ που ορίζονται από τη σύνθετη ανέλιξη:

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N(t)} Xi\,, & N(t) \geq 1 \\ 0\,, & N(t) = 0 \end{cases}$$

με $\{N(t): t \geq 0\}$ συμβολίζουμε όπως αναφέραμε μια ανέλιξη Poisson που δηλώνει το πλήθος των αποζημιώσεων στο διάστημα $[0, t]$, ενώ X_i είναι το αντίστοιχο μέγεθος των αποζημιώσεων.

Σχηματικά, η ανέλιξη πλεονάσματος έχει ανοδική κατεύθυνση λόγω της είσπραξης του ασφαλίστρου.
Αξίζει να αναφέρουμε ότι η θετική κλίση της ευθείας που παριστάνει την ανέλιξη πλεονάσματος είναι ίση σε μέγεθος με το ασφάλιστρο c.
Τα σημεία ασυνέχειας (σημεία τα οποία απεικονίζονται με άλμα προς τα κάτω) είναι εκείνα στα οποία εμφανίζονται οι απαιτήσεις και το ύψος των αλμάτων είναι ίσο με το μέγεθος της αντίστοιχης αποζημίωσης.
Η προς τα κάτω τάση των τιμών του πλεονάσματος στις χρονικές στιγμές άφιξης των ζημιών υποδεικνύει μια επισφαλή επιχείρηση ή ένα επισφαλή χαρτοφυλάκιο.

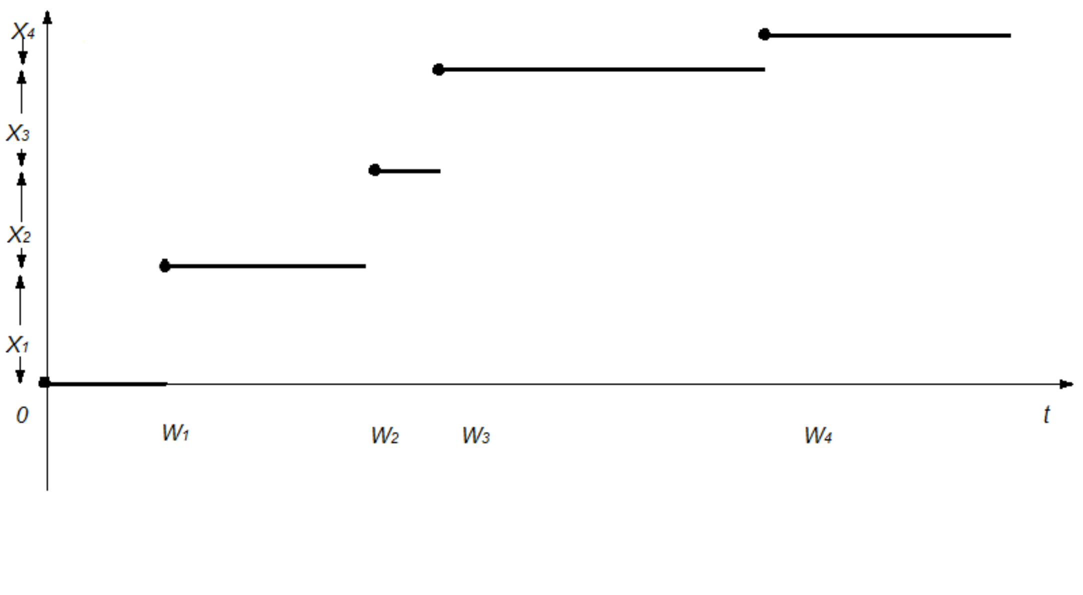
ΣΧΗΜΑ 1.1 Στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος



Ακόμη, αναφέραμε ότι η $\{S(t): t \geq 0\}$ είναι μια σύνθετη ανέλιξη Poisson, αφού αποτελείται από άθροισμα μεταβλητών που ακολουθούν την Poisson.
Για τα μεγέθη $U(T-)$ και $|U(T)|$ που παρουσιάζονται στο σχήμα , θα μιλήσουμε στη συνέχεια.

Χρήσιμο όμως, είναι να δούμε σχηματικά και τις αποζημιώσεις στην εξέλιξη του χρόνου.

ΣΧΗΜΑ 1.2 Διαδικασία αποζημιώσεων



Οι μεταβλητές X_i δηλώνουν όπως αναφέραμε το μέγεθος των αποζημιώσεων και είναι ανεξάρτητες και ισόνομες , καθώς επίσης και ανεξάρτητες με τον αριθμό των αποζημιώσεων $N(t)$.

Τα W_i υποδηλώνουν τις χρονικές στιγμές επέλευσης ζημιογόνων γεγονότων.

Μια θεμελιώδης υπόθεση που κάνουμε στο κλασικό μοντέλο είναι η συνθήκη του καθαρού κέρδους δηλαδή ότι πρέπει να ισχύει

$$c > \lambda\mu_1$$

όπου λείναι η ένταση της ανέλιξης Poisson και μ_1 η ροπή 1ης τάξης της συνάρτησης κατανομής F των αποζημιώσεων X_i γύρω από το μηδέν.

Η σχέση αυτή μας εξασφαλίζει ότι τα έσοδα της εταιρίας είναι μεγαλύτερα από τα έξοδα στη μονάδα του χρόνου και επομένως η χρεοκοπία δεν είναι βέβαιη.

1.3 Η συνάρτηση των Gerber-Shiu

Το 1998 οι Gerber και Shiu [7] μελέτησαν μία συνάρτηση η οποία και αποτελεί μία σημαντική γενίκευση της πιθανότητας χρεοκοπίας.

Η ελλειμματική συνάρτηση ποινής εισήχθη για πρώτη φορά το 1998 από τους Gerberκαι Shiu και απαντάται στο ανανεωτικό μοντέλο χρεοκοπίας **.**

Πριν δώσουμε τον ορισμό της συνάρτησης Gerber-Shiu θα ορίσουμε κάποια βασικά μεγέθη του κλασικού μοντέλου χρεοκοπίας.

Ορισμός 1.5: Η χρονική στιγμή κατά την οποία το πλεόνασμα γίνεται αρνητικό για πρώτη φορά καλείται χρόνος χρεοκοπίας και δίνεται από τη σχέση:

$$T = \begin{cases} \inf\{t: U(t) < 0\} \\ \infty \ , \ \alpha\nu U(T) > 0 \ \forall t \end{cases}$$

Είναι λοιπόν προφανές ότι ο χρόνος χρεοκοπίας είναι μια ελλειμματική τυχαία μεταβλητή εφόσον με θετική πιθανότητα λαμβάνει την τιμή άπειρο .

Επομένως ισχύει ότι $P\ (T = \infty\ ) = P\ (\ U(t)\ > 0\ , \forall t)$**.** Στη συνέχεια ορίζουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας.

Ορισμός 1.6:Η πιθανότητα χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό $u > 0$ δίνεται ως

$$\psi(u) = P[U(t) < 0 \ \gamma\iota\alpha\kappa\acute{\alpha}\pi o\iota o t > 0 \big| \, U(0) = u]$$

Εδώ βλέπουμε και τη χρησιμότητα της συνθήκης του καθαρού κέρδους αφού αν δεν ίσχυε ότι $c > \lambda\mu_1$ τότε $\psi(u) = 1\ , \forall u \geq 0$, δηλαδή η χρεοκοπία θα ήταν βέβαιη**.**

Η ψ είναι φθίνουσα συνάρτηση του u και ισχύει ότι $\lim_{u\to\infty} \psi(u) = 0$ και αύξουσα συνάρτηση ως προς t.

Ο όρος χρεοκοπία χρησιμοποιείται σαν όρος φερεγγυότητας. Δηλαδή, η εταιρία δεν χρεοκόπει, ούτε καν σταματάει τη λειτουργία της**.**

Ορισμός 1.7 : Μπορούμε ακόμη να ορίσουμε την πιθανότητα μη χρεοκοπίας ως $\delta(u) = 1 - \psi(u)\ ,\ u \geq 0$, η οποία είναι αύξουσα και δεξιά συνεχής δηλαδή μπορεί να θεωρηθεί μια αθροιστική συνάρτηση κατανομής. Ακόμη, ισχύει ότι $\lim_{u\to\infty} \delta(u) = 1$.

Η $\delta(u)$ είναι μια μεικτή κατανομή αφού $\delta(0) > 0$, δηλαδή η πιθανότητα μη χρεοκοπίας με μηδενικό αρχικό αποθεματικό είναι θετική, ενώ η $\delta(u)$ είναι συνεχής στο $(0, \infty)$.

Δύο ακόμη μεγέθη που θα χρησιμοποιήσουμε είναι το πλεόνασμα ακριβώς πριν τη στιγμή χρεοκοπίας καθώς και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας εάν επέλθει.

Το έλλειμμα ακριβώς πριν τη στιγμή χρεοκοπίας συμβολίζεται με $U(T-)$,ενώ εκείνο κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας με $\big|U(T)\big|$ που μπαίνει σε απόλυτο επειδή η τιμή $U(T)$ είναι αρνητική (εφόσον έχουμε χρεοκοπία - βλ. σχήμα 1.1). Επομένως $-U(t)$ είναι το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το μηδέν όταν επέλθει χρεοκοπία.

Έτσι, μπορούμε πλέον να ορίσουμε την συνάρτηση Gerber –Shiu, μια πολύ βασική συνάρτηση για τη θεωρία κινδύνου που αποτελεί εφαλτήριο για πλήθος άλλων μελετών και ευρημάτων:

Ορισμός 1.8: Έστω $w(x,y)$ μία μη αρνητική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ και έστω $\sigma \geq 0$. Θεωρούμε τη διαδικασία πλεονάσματος $\{U(t): t \geq 0\}$ σε ένα κλασικό μοντέλο και συμβολίζουμε με $U(T-)$ το πλεόνασμα αμέσως πριν τη στιγμή χρεοκοπίας και $|U(T)|$ το έλλειμμα κατά απόλυτη τιμή τη στιγμή της χρεοκοπίας. Η συνάρτηση

$$\varphi_\delta(u) = E[e^{-\delta t} w(U(T-), |U(T)|) I(T < \infty) | U(0) = u]$$

ονομάζεται συνάρτηση των Gerber-Shiu.

Συνήθως στο συμβολισμό το δ στην $\varphi_\delta(u)$ παραλείπεται.

Το δ είναι μια παράμετρος θετική ή ίση με το μηδέν και μπορεί να ερμηνευθεί ως μεταβλητή ενός μετασχηματισμού Laplace ή ως ένταση επιτοκίου ή σαν συντελεστής προεξόφλησης.

Η $I(\cdot)$ είναι η δείκτρια συνάρτηση δηλ.

$$I(T < \infty) = \begin{cases} 1, \text{αν συμβεί χρεοκοπία} \\ 0, \text{αν δεν συμβεί χρεοκοπία} \end{cases}$$

Η $w(U(T-), |U(T)|)$ καλείται συνάρτηση ποινής και είναι μη αρνητική συνάρτηση των $U(T-)$ και $|U(T)|$ που όπως είδαμε είναι το έλλειμμα πριν και κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας αντίστοιχα. Η τυχαία μεταβλητή αυτή δηλώνει το χρηματικό ποσό που θα πληρώσει ο ασφαλιστής τη στιγμή χρεοκοπίας αν συμβεί σε κάποια χρονική στιγμή T. Η $U(0) = u$ είναι η δέσμευση ως προς το αρχικό αποθεματικό με $u \geq 0$.

Προφανώς ισχύει ότι:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y,t|u)\, dx\, dy\, dt = P(T < \infty | U(0) = u) = \psi(u)$$

που είναι μια ελλειμματική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

Ακόμη,

$$\varphi(u) = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\delta t} f(x,y,t|u)\, dx\, dy\, dt$$

Έτσι,

- Για $\delta = 0$ και $w(x,y) = 1$ έχουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας:
$$\varphi(u) = E[I(T < \infty) | U(0) = u] = P(T < \infty) | U(0) = u) = \psi(u)$$

- Για $w(x,y) = 1$ έχουμε
$$\varphi(u) = E[e^{-\delta t} I(T < \infty | U(0) = u]$$
δηλαδή τον μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας εάν αυτή επέλθει.

- Για $\mathrm{w}(x_1, x_2) = I(x_1 \leq x) I(x_2 \leq y)$ έχουμε:
$\varphi(u) = F_\delta(x, y|u)$,που είναι η προ εξοφλημένη από κοινού συνάρτηση κατανομής των $U(T-)$ και $|U(T)|$ από την οποία για $\delta = 0$ παίρνουμε την από κοινού συνάρτηση κατανομής.

- Για $w(x_1, x_2) = I(x_1 \leq x)$ παίρνουμε την $\varphi(\mathrm{u}) = h_\delta(x|u)$ δηλαδή την προ εξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της U(T-).

- Για $w(x_1, x_2) = I(x_2 \leq y)$ παίρνουμε $\varphi(\mathrm{u}) = g_\delta \langle y|u \rangle$ δηλαδή την προ εξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $|U(T)|$.

- Για $\delta > 0$, $w(x_1, x_2) = {x_1}^k {x_2}^n$ παίρνουμε τη ροπή k-τάξης και n-τάξης των μεταβλητών $U(T-)$ και $|U(T)|$ αντίστοιχα:
$$\varphi(u) = E[e^{-\delta t} \big(U(T-)\big)^k \big(\ |U(T)| \ \big)^n I(T < \infty)]$$
Ενώ για $\delta = 0$ την αντίστοιχη προεξοφλημένη μέση τιμή με τον όρο $e^{-\delta t}$ να παραλείπεται.

- Για $\delta > 0$, $w(x_1, x_2) = {x_1}^k$ παίρνουμε τη ροπή k-τάξης της μεταβλητής $U(T-)$
$$\varphi(u) = E[e^{-\delta t} \big(U(T-)\big)^k I(T < \infty)]$$

- Για $\delta > 0$, $w(x_1, x_2) = {x_2}^n$ παίρνουμε τη ροπή n-τάξης της μεταβλητής $|U(T)|$:
$$\varphi(u) = E[e^{-\delta t} (|U(T)|)^n I(T < \infty)]$$

- Για $w(x_1, x_2) = e^{-(s x_1 + t x_2)}$ παίρνουμε τον από κοινού μετασχηματισμό Laplace των μεταβλητών $U(T-)$ και $|U(T)|$:
$$\varphi(u) = E[e^{-\delta t} e^{-sU(T-) - t|U(T)|} I(T < \infty)]$$
Ενώ για $\delta = 0$ την αντίστοιχη προεξοφλημένη μέση τιμή με τον όρο $e^{-\delta t}$ να παραλείπεται.

- Για $w(x_1, x_2) = e^{-s x_1}$ παίρνουμε τον μετασχηματισμό Laplace της μεταβλητής $U(T-)$:
$$\varphi(u) = E[e^{-\delta t} e^{-sU(T-)} I(T < \infty)]$$

- Για $w(x_1, x_2) = e^{-t x_2}$ παίρνουμε τον μετασχηματισμό Laplace της μεταβλητής $|U(T)|$:
$$\varphi(u) = E[e^{-\delta t} e^{-t|U(T)|} I(T < \infty)]$$

Και πλήθος άλλων περιπτώσεων (βλέπε [3]).

Πρωταρχικός σκοπός μας είναι η εύρεση της πιθανότητας χρεοκοπίας $\psi(u)$ για τις διάφορες τιμές που μπορεί να λάβει η συνάρτηση ποινής $w(x_1, x_2)$. Προκειμένου να υπολογίσουμε την $\psi(u)$ μπορούμε να ακολουθήσουμε την εξής διαδικασία.

- Βήμα πρώτο: Εύρεση της ολοκληροδιαφορικής εξίσωσης που ικανοποιεί η $\varphi(u)$.

Δεσμεύοντας ως προς τον χρόνο t και το μέγεθος X της πρώτης απαίτησης (δηλαδή $T_1 = t$ και $X_{1=}x$)απότο νόμο ολικής πιθανότητας έχουμε

$$\varphi(u) = \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi\langle u|t,x\rangle f_{x_1}(x) f_{T_1}(t)dxdt = \int_0^\infty \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\varphi\langle u|t,x\rangle f(x)dxdt = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\{\int_0^\infty \varphi\langle u|t,x\rangle f(x)dx\}dt (1.1)$$

Για τη χρονική στιγμή tπου εμφανίζεται η πρώτη απαίτηση έχουμε ότι $U(t) = u + ct - X$. Τότε αν:

$$\begin{cases} 0 \le X \le u + ct \quad , \delta\varepsilon\nu \;\; \varepsilon\mu\varphi\alpha\nu\acute{\iota}\zeta\varepsilon\tau\alpha\iota \;\; \chi\rho\varepsilon o\kappa o\pi\acute{\iota}\alpha \\ X > u + ct \quad , \varepsilon\mu\varphi\alpha\nu\acute{\iota}\zeta\varepsilon\tau\alpha\iota\, \chi\rho\varepsilon o\kappa o\pi\acute{\iota}\alpha \quad \delta\eta\lambda.\; I(T < \infty) \end{cases}$$

Στην πρώτη περίπτωση τη χρονική στιγμή tη διαδικασία ανανεώνεται με νέο κεφάλαιο το $u + ct - X$. Αν όμως επέλθει χρεοκοπία τότε $U(T-) = u + ct$, ενώ $|U(T)| = X - u - ct$

Επομένως, συνεχίζοντας την (1.1) και διαχωρίζοντας σε περίπτωση χρεοκοπίας και μη προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\{\int_0^{u+ct} e^{-\delta t}\varphi(u + ct - x)f(x)dx \\ &\quad + \int_{u+ct}^\infty e^{-\delta t} w(u + ct, x - u - ct)f(x)dx\}dt \\ &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\{\int_0^{u+ct} \varphi(u + ct - x)f(x)dx \\ &\quad + \int_{u+ct}^\infty w(u + ct, x - u - ct)f(x)dx\}dt \quad (1.2) \end{aligned}$$

Οπότε στην περίπτωση όπου $\delta = 0$ και $w(x, y) = 1$ που όπως είδαμε πιο πάνω ισχύει ότι $\varphi(u) = \psi(u)$ από (1.2) είναι:

$$\psi(u) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\{\int_0^{u+ct} \psi(u + ct - x)f(x)dx + \bar{F}(u + ct)\}dt$$

Αν τώρα θέσουμε $s = u + ct \Leftrightarrow t = \frac{s-u}{c}$ και $dt = \frac{ds}{c}$ με $0 \le t \le \infty \Leftrightarrow u \le s \le \infty$ και αντικαταστήσουμε στην (1.2) :

$$\varphi(u) = \lambda \int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \int_0^s \varphi(s-x) f(x) dx \frac{ds}{c} + \lambda \int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \int_s^\infty w(s, x-s) f(x) dx \frac{ds}{c}$$

Θέτοντας,

$$\gamma(x) = \int_x^\infty w(x, y-x) f(y) dy$$

προκύπτει σε συνέχεια από τα παραπάνω:

$$c\varphi(u) = \lambda \int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \int_0^s \varphi(s-x) f(x) dx ds + \lambda \int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \gamma(s) ds \qquad (1.3)$$

Παραγωγίζοντας την (1.3) ως προς u:

- Έστω

$$g(u,s) = e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \int_0^s \varphi(s-x) f(x) dx$$

Τότε

$$\frac{d}{du} \int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \int_0^s \varphi(s-x) f(x) dx\, ds = \frac{d}{du} \int_u^\infty \mathrm{g(u,s)ds}$$

$$= -g(u,u) + \int_u^\infty \frac{\partial g(u,s)}{\partial u} ds = -\int_0^u \varphi(u-x) f(x) dx + \frac{(\lambda+\delta)}{c} \int_u^\infty g(u,s) ds$$

- Έστω

$$g(u,s) = e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \gamma(s)$$

Τότε

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{du}} \int_{\mathrm{u}}^\infty \mathrm{e}^{-\frac{(\lambda+\delta)(\mathrm{s-u})}{\mathrm{c}}} \gamma(\mathrm{s}) \mathrm{ds} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{du}} \int_{\mathrm{u}}^\infty \mathrm{g(u,s)ds}$$

$$= -g(u,u) + \int_u^\infty \frac{\partial g(u,s)}{\partial u} ds = -\gamma(u) + \frac{(\lambda+\delta)}{c} \int_u^\infty g(u,s) ds$$

Τότε η σχέση (1.3) μας δίνει:

$$c\varphi'(u) = \lambda\{-\int_0^u \varphi(u-x)f(x)dx + \frac{(\lambda+\delta)}{c}\int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}}\int_0^s \varphi(s-x)f(x)dxds$$

$$+\lambda\{-\gamma(u) + \int_u^\infty \mathrm{e}^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}}\gamma(s)ds\} \overset{(1.3)}{\Longleftrightarrow}$$

$$c\varphi'(u) = -\lambda\{\int_0^u \varphi(u-x)f(x)dx + \gamma(u)\} + \frac{\lambda+\delta}{c}c\varphi(u)$$

Άρα

$$c\varphi'(u) = (\lambda+\delta)\varphi(u) - \lambda\int_0^u \varphi(u-x)f(x)dx - \lambda\gamma(u) \quad (1.4)$$

Η (1.4) είναι η ολοκληροδιαφορική εξίσωση που ικανοποιεί η $\varphi(u)$.

Όπως αναφέραμε παραπάνω για $\delta = 0$ και $w(x,y) = 1$ είναι $\varphi(u) = \psi(u)$ αλλά και

$$\gamma(u) = \int_u^\infty f(y)dy = \bar{F}(u)$$

- Βήμα δεύτερο: Για τη λύση της ολοκληροδιαφορικής εξίσωσης παίρνουμε τον μετασχηματισμό Laplace στη σχέση (1.4) προκειμένου να βρούμε τον μετασχηματισμό Laplace της $\varphi(u)$. Εργαζόμαστε ως εξής. Έστω οι μετασχηματισμοί Laplaceτης κατανομής των ζημιών και της συνάρτησης $\gamma(x)$ που είδαμε προηγουμένως

$$\hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx \ , \qquad \hat{\gamma}(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\gamma(x)dx$$

$$\int_0^\infty e^{-sx}\varphi'(x)dx = e^{-sx}\varphi(x)\,\Big|_0^\infty - \int_0^\infty (e^{-sx})'\varphi(x)dx = -\varphi(0) + \int_0^\infty s\,e^{-sx}\varphi(x)dx$$
$$= s\hat{\varphi}(s) - \varphi(0)$$

Παίρνοντας μετασχηματισμό Laplace στην εξίσωση (1.4) και βάσει της τελευταίας σχέσης προκύπτει

$c[s\hat{\varphi}(s) - \varphi(0)] = (\lambda + \delta)\hat{\varphi}(s) - \lambda\hat{\varphi}(s)\hat{f}(s) - \lambda\hat{\gamma}(s) \Leftrightarrow \{cs - (\lambda + \delta) + \lambda\hat{f}(s)\}\hat{\varphi}(s) = c\varphi(0) - \lambda\hat{\gamma}(s)$

$\Leftrightarrow \hat{\varphi}(s) = \frac{c\varphi(0) - \lambda\hat{\gamma}(s)}{cs - (\lambda+\delta) + \lambda\hat{f}(s)}$ (1.5) Laplace transformation για την $\varphi(u)$

Ή

$$\hat{\varphi}(s) = \frac{\lambda\hat{\gamma}(s) - c\varphi(0)}{\lambda + \delta - cs - \lambda\hat{f}(s)} \text{ (1.5 α)}$$

- Βήμα τρίτο: Συνήθως η εξίσωση της $\hat{\varphi}(s)$ είναι πηλίκο πολυωνύμων ως προς s. Στο βήμα αυτό βρίσκουμε τις ρίζες του παρονομαστή γενικά στο μιγαδικό επίπεδο, οι οποίες έχουν πραγματικό θετικό μέρος και όπως θα δούμε αργότερα παίζουν σημαντικό ρόλο στον υπολογισμό της $\varphi(u)$. Επειδή ισχύει ότι $\hat{\varphi}(s) < \infty$ οι ρίζες που θα βρούμε αποτελούν από κοινού ρίζες αριθμητή και παρονομαστή. Έτσι, παραγοντοποιούμε αριθμητή και παρονομαστή με τις κοινές ρίζες και ο $\hat{\varphi}(s)$ είναι και πάλι πηλίκο πολυωνύμων αλλά πλέον μικρότερου βαθμού.

Ας εξετάσουμε τον παρονομαστή της σχέσης (15α). Προκειμένου να γίνει αυτό ορίζουμε μερικά βασικά μεγέθη.

Ορισμός 1.8: Ο συντελεστής ασφαλείας θ ορίζεται ως

$$\theta = \frac{c}{\lambda\mu_1} - 1, \qquad 0 < \theta < 1$$

Όσο μεγαλώνει ο συντελεστής ασφαλείας , τόσο μικραίνει η πιθανότητα χρεοκοπίας. Όμως, δεν πρέπει να είναι ιδιαίτερα υψηλός διότι κάτι τέτοιο θα μεγάλωνε το ασφάλιστρο και η επιχείρηση δεν θα καθίστατο ανταγωνιστική προς άλλες εταιρίες.

Διαισθητικά αντιλαμβανόμαστε ότι ο συντελεστής ασφάλειας θ εκφράζει πόσο μεγαλύτερα είναι τα έσοδα της εταιρίας από τα έξοδά της κατά μέσο όρο σε ένα χαρτοφυλάκιο , δηλαδή μπορούμε να πούμε ότι εκφράζει το αναμενόμενο ποσοστό κέρδους του ασφαλιστή. Στην πράξη θεωρούμε ότι το θ μπορεί να καθοριστεί με ακρίβεια από τον ασφαλιστή και ότι η μέση τιμή της κατανομής που απαιτείται για την εύρεση του είναι γνωστή , είτε μπορεί να εκτιμηθεί.

Από την παραπάνω σχέση έχουμε ότι: $c = (1+\theta)\lambda E(x),\ \theta > 0$

Ο παρονομαστής της σχέσης (15α) αν εξισωθεί με το μηδέν ονομάζεται εξίσωση Lundberg. Δηλαδή

$\lambda + \delta - cs - \lambda\hat{f}(s) = 0$ (1.6)

Όπου συμβολίζουμε με$l(s) = \lambda + \delta - cs$ και $l(s) = \lambda\hat{f}(s)$.

Είναι $l(0) = \lambda + \delta \ \kappa\alpha\iota \ \lambda\hat{f}(0) = \lambda \ \Rightarrow l(0) \geq \lambda\hat{f}(0)$, με την $l(s)$ να έχει αρνητική κλίση και την $\lambda\hat{f}(s)$ να είναι φθίνουσα ως προς s.

Επομένως, η εξίσωση Lundberg έχει μοναδική θετική ρίζα $\rho > 0$. Για $\delta = 0$, έχουμε $\rho = 0$, ενώ η συνάρτηση $\rho(\delta)$ είναι αύξουσα. Ακόμη ισχύει: $\lim_{\delta\to 0}\rho(0) = 0$

Ορισμός 1.9 : Ο συντελεστής προσαρμογής R ορίζεται ως η θετική λύση της εξίσωσης

$$1 + (1+\theta)E(X)r = M_X(r)$$

Με $M_X(r) = E(e^{rX})$ τη ροπογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής X του ύψους των αποζημιώσεων. Η ένταση ασφαλίστρου $c = (1+\theta)\lambda E(X) \Rightarrow 1 + \frac{c}{\lambda}r = M_x(r) \Rightarrow \lambda + cr = \lambda M_x(r)$, για $r = -s$, $s > 0$ μας δίνει ότι $\lambda - cs = \lambda M_x(-s) \Rightarrow \lambda - cs = \lambda\hat{f}(s)$

Επομένως, παρατηρούμε ότι για $\delta = 0$ ο παρονομαστής της εξίσωσης (1.5 α) μας δίνει την εξίσωση Lundberg.

Η (1.5) μπορεί να γραφεί στη μορφή: $\hat{\varphi}(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$, επειδή όπως αναφέραμε $\hat{\varphi}(s) < \infty$ και $B(\rho) = 0$ λόγω της εξίσωσης Lundberg, έπεται ότι $A(\rho) = 0$, γιατί αν ίσχυε ότι $A(\rho) \neq 0$, τότε θα ήταν $\hat{\varphi}(s) = \infty$, το οποίο είναι άτοπο.

Έχουμε λοιπόν:

$$B(s) = B(s) - B(\rho) = cs - (\lambda+\delta) + \lambda\hat{f}(s) - [c\rho - (\lambda+\delta) + \lambda\hat{f}(\rho)]$$
$$= c(s-\rho) - \lambda\big[\hat{f}(\rho) - \hat{f}(s)\big] = (s-\rho)[c - \lambda\frac{\hat{f}(\rho) - \hat{f}(s)}{s-\rho}]$$

Και $A(\rho) = 0 \Rightarrow c\varphi(0) = \lambda\hat{\gamma}(\rho)$. Άρα,

$$c\varphi(0) - \lambda\hat{\gamma}(s) = \lambda\hat{\gamma}(\rho) - \lambda\hat{\gamma}(s) = \lambda(s-\rho)\frac{\hat{\gamma}(\rho) - \hat{\gamma}(s)}{s-\rho}$$

Τότε η (1.5) γράφεται:

$$\hat{\varphi}(s) = \frac{\lambda(s-\rho)\frac{\hat{\gamma}(\rho)-\hat{\gamma}(s)}{s-\rho}}{(s-\rho)[c - \lambda\frac{\hat{f}(\rho)-\hat{f}(s)}{s-\rho}]} \qquad (1.7)$$

- Βήμα τέταρτο: Εύρεση του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplaceτης $\hat{\varphi}(s)$ που μας οδηγεί στη εύρεση της $\varphi(u)$.

Ορισμός 1.10 (Dickson-Hipp) [5] Για μια δοθείσα ολοκληρώσιμη συνάρτηση f και για $r \in \mathbb{R}$ ορίζουμε τον συντελεστή Dickson-Hipp ως

$$T_r f(x) = \int_x^{\infty} e^{-r(y-x)} f(y)dy$$

για τον οποίο ισχύουν ότι $T_r f(0) = \hat{f}(r)$, $T_0 f(x) = \bar{\bar{F}}(x)$,

$$T_r \hat{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} T_r f(x)dx = \int_0^{\infty} e^{-sx} \int_x^{\infty} e^{-r(y-x)} f(y)dy$$

Για $0 \leq x < \infty$, $x \leq y < \infty \Rightarrow 0 \leq y < \infty$, $0 \leq x < y$

με αλλαγή ορίων ολοκλήρωσης προκύπτει:

$$\begin{aligned} T_r \hat{f}(s) &= \int_0^{\infty} (\int_0^{y} e^{-sx} e^{-r(y-x)} f(y)dx)dy \\ &= \int_0^{\infty} e^{-ry} f(y)(\int_0^{y} e^{(r-s)x} dx)dy \\ &= \int_0^{\infty} e^{-ry} f(y) \frac{e^{-(r-s)y} - 1}{r-s} dy \\ &= \frac{1}{r-s} \{\int_0^{\infty} e^{-sy} f(y)dy - \int_0^{\infty} e^{-ry} f(y)dy\} = \frac{\hat{f}(s) - \hat{f}(r)}{r-s} \end{aligned}$$

Άρα η (1.7) γράφεται

$$\hat{\varphi}(s) = \frac{\lambda T_\rho \hat{\gamma}(s)}{c - \lambda T_\rho \hat{f}(s)} \qquad (1.8)$$

Η εξίσωση (1.8) μας δίνει $c\widehat{\varphi}(s) = \lambda \widehat{\varphi}(s) T_\rho \widehat{f}(s) + \lambda T_\rho \hat{\gamma}(s)$ από την οποία παίρνοντας αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace καταλήγουμε στην:

$$\varphi(u) = \frac{\lambda}{c} \int_0^{u} \varphi(u-x) T_\rho f(x)dx + \frac{\lambda}{c} T_\rho \gamma(u) , \qquad u \geq 0$$

Γενικά, για οποιαδήποτε συνάρτηση ποινής $w(x,y)$και για οποιαδήποτε κατανομή ακολουθούν τα ύψη ατομικής ζημιάς X, είναι αρκετά δύσκολο έως και αδύνατον να υπολογίσουμε τον αναλυτικό τύπο της $\varphi(u)$ (δηλαδή τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της $\varphi(u)$). Μπορούμε όμως να βρούμε αναλυτικούς τύπους υπολογισμού της $\varphi(u)$ για μια ευρεία οικογένεια κατανομών του ύψους ατομικής ζημιάς X που χρησιμοποιούνται στην πράξη. Συγκεκριμένα, αν θεωρήσουμε ότι η τ.μ X ανήκει στη ρητή οικογένεια και ότι ο μετασχηματισμός Laplace της $\varphi(u)$, δηλαδή ο $\hat{\varphi}(s)$ είναι ρητή συνάρτηση που εξαρτάται από τον μετασχηματισμό Laplace της X, έπεται ότι ο $\hat{\varphi}(s)$ είναι τελικά μια ρητή συνάρτηση που συνήθως ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος του βαθμού του παρονομαστή. Έτσι, εφαρμόζοντας τεχνική μερικών κλασμάτων μπορούμε εύκολα να βρούμε τον μετασχηματισμό Laplace $\hat{\varphi}(s)$ και στη συνέχεια τη $\varphi(u)$.

Ισοδύναμα, μπορούμε να εργαστούμε με άλλον τρόπο προκειμένου να βρούμε τη $\varphi(u)$ χωρίς απαραίτητα να πρέπει να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace. Έχοντας βρει τον μετασχηματισμό Laplace στο τρίτο βήμα της μεθοδολογίας που αναλύσαμε, βρίσκουμε την ανανεωτική εξίσωση που ικανοποιεί η $\varphi(u)$ και συγκεκριμένα την γράφουμε σε καταλληλότερη μορφή ώστε η $\varphi(u)$ να ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση. Η λύση της εξίσωσης αυτής μπορεί να βρεθεί μέσω της κατανομής μιας κατάλληλης σύνθετης γεωμετρικής τ.μ. έτσι, ο υπολογισμός της $\varphi(u)$ πλέον ανάγεται στον υπολογισμό της κατανομής που ακολουθεί μια σύνθετη γεωμετρική κατανομή. Αυτή η κατανομή μπορεί να βρεθεί μέσω μετασχηματισμού Laplace όταν η κατανομή της ατομικής ζημιάς X ανήκει στη ρητή οικογένεια κατανομών, μέσω της τεχνικής των μερικών κλασμάτων. Αυτός ο τρόπος που αναλύσαμε έχει κάποια πλεονεκτήματα σε σχέση με τον τρόπο που εμπεριέχει τον υπολογισμό του αντιστρόφου μετασχηματισμού Laplace διότι μας δίνει τη δυνατότητα να παρατηρούμε ορισμένες δομικές ιδιότητες που ικανοποιεί η $\varphi(u)$ και επιπλέον μπορούμε να βρούμε και ασυμπτωτικά αποτελέσματα για αυτή.

1.4 Μελέτη της συνάρτησης Gerber-Shiu

Στην παράγραφο αυτή θα εφαρμόσουμε τα βήματα που αναπτύξαμε για τον υπολογισμό της $\varphi(u)$. Αρχικά, στο παρακάτω θεώρημα [3] δίνεται η ολοκληροδιαφορική εξίσωση που ικανοποιεί η $\varphi(u)$ για το κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.1: *Η συνάρτηση Gerber-Shiu ικανοποιεί την ολοκληροδιαφορική εξίσωση*

$$c\varphi'(u) = (\lambda + \delta)\varphi(u) - \lambda \int_0^u \varphi(u - x) f(x)dx - \lambda\gamma(u) \quad (1.9)$$

Όπου

$$\gamma(u) = \int_u^\infty w(u, x - u) f(x)dx$$

Απόδειξη: Δεσμεύοντας ως προς τον χρόνο t και το μέγεθος X της πρώτης απαίτησης (δηλαδή $T_1 = t$ και $X_{1=}x$)

από νόμο ολικής πιθανότητας έχουμε:

$$\varphi(u) = \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi\langle u|t,x\rangle f_{x_1}(x) f_{T_1}(t)dxdt = \int_0^\infty \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\varphi\langle u|t,x\rangle f(x)dxdt = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\{\int_0^\infty \varphi\langle u|t,x\rangle f(x)dx\}dt \quad (1.10)$$

Για τη χρονική στιγμή tπου εμφανίζεται η πρώτη απαίτηση έχουμε ότι

$U(t) = u + ct - X.$ Τότε αν:

$$\begin{cases} 0 \le X \le u + ct & ,\delta\varepsilon\nu\ \varepsilon\mu\varphi\alpha\nu\acute{\iota}\zeta\varepsilon\tau\alpha\iota\ \chi\rho\varepsilon o\kappa o\pi\acute{\iota}\alpha \\ X > u + ct & ,\varepsilon\mu\varphi\alpha\nu\acute{\iota}\zeta\varepsilon\tau\alpha\iota\ \chi\rho\varepsilon o\kappa o\pi\acute{\iota}\alpha\quad \delta\eta\lambda.\ I(T < \infty) \end{cases}$$

Στην πρώτη περίπτωση τη χρονική στιγμή tη διαδικασία ανανεώνεται με αρχικό κεφάλαιο πια το $u + ct - X$.

Αν όμως επέλθει χρεοκοπία τότε $U(T-) = u + ct$ ενώ $|U(T)| = X - u - ct$

Επομένως, συνεχίζοντας την (1.10) και διαχωρίζοντας σε περίπτωση χρεοκοπίας και μη προκύπτει ότι:

$$\varphi(u)=\int_0^{\infty}\lambda e^{-\lambda t}\{\int_0^{u+ct}e^{-\delta t}\varphi(u+ct-x)f(x)dx$$
$$+\int_{u+ct}^{\infty}e^{-\delta t}w(u+ct,x-u-ct)f(x)dx\}dt$$
$$=\int_0^{\infty}\lambda e^{-\lambda t}\{\int_0^{u+ct}\varphi(u+ct-x)f(x)dx$$
$$+\int_{u+ct}^{\infty}w(u+ct,x-u-ct)f(x)dx\}dt \quad (1.11)$$

Οπότε στην περίπτωση όπου $\delta = 0$ και $w(x, y) = 1$ που όπως είδαμε πιο πάνω ισχύει ότι $\varphi(u) = \psi(u)$ από (3) είναι:

$$\psi(u)=\int_0^{\infty}\lambda e^{-\lambda t}\{\int_0^{u+ct}\psi(u+ct-x)f(x)dx+\bar{F}(u+ct)\}dt$$

Αν τώρα θέσουμε $s = u + ct \Leftrightarrow t = \frac{s-u}{c}$ και $dt = \frac{ds}{c}$ με $0 \le t \le \infty \Leftrightarrow u \le s \le \infty$ και αντικαταστήσουμε στην (3) :

$$\varphi(u)=\lambda\int_u^{\infty}e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}}\int_0^{s}\varphi(s-x)f(x)dx\frac{ds}{c}$$
$$+\lambda\int_u^{\infty}e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}}\int_s^{\infty}w(s,x-s)f(x)dx\frac{ds}{c}$$

Θέτοντας,

$$\gamma(x)=\int_x^{\infty}w(x,y-x)f(y)dy$$

προκύπτει σε συνέχεια από τα παραπάνω:

$$c\varphi(u)=\lambda\int_u^{\infty}e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}}\int_0^{s}\varphi(s-x)f(x)dxds+\lambda\int_u^{\infty}e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}}\gamma(s)ds \quad (1.12)$$

Παραγωγίζοντας την (1.12) ως προς u:

- Έστω

$$g(u,s)=e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}}\int_0^{s}\varphi(s-x)f(x)dx$$

Τότε

$$\frac{d}{du}\int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}}\int_0^s \varphi(s-x)f(x)dx\,ds = \frac{d}{du}\int_u^\infty \mathrm{g(u,s)ds}$$

$$= -g(u,u)+\int_u^\infty \frac{\partial g(u,s)}{\partial u}ds = -\int_0^u \varphi(u-x)f(x)dx+\frac{(\lambda+\delta)}{c}\int_u^\infty g(u,s)ds$$

- Έστω

$$g(u,s)=e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}}\gamma(s)$$

Τότε

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{du}}\int_{\mathrm{u}}^\infty \mathrm{e}^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}}\gamma(\mathrm{s})\mathrm{ds}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{du}}\int_{\mathrm{u}}^\infty \mathrm{g(u,s)ds}$$

$$= -g(u,u)+\int_u^\infty \frac{\partial g(u,s)}{\partial u}ds = -\gamma(u)+\frac{(\lambda+\delta)}{c}\int_u^\infty g(u,s)ds$$

Τότε η σχέση (1.12) μας δίνει:

$$c\varphi'(u) = \lambda\{-\int_0^u \varphi(u-x)f(x)dx + \frac{(\lambda+\delta)}{c}\int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}}\int_0^s \varphi(s-x)f(x)dxds$$

$$+\lambda\{-\gamma(u)+\int_u^\infty \mathrm{e}^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}}\gamma(s)ds\} \overset{(1.12)}{\Longleftrightarrow}$$

$$c\varphi'(u) = -\lambda\{\int_0^u \varphi(u-x)f(x)dx+\gamma(u)\}+\frac{\lambda+\delta}{c}c\varphi(u)$$

Άρα

$$c\varphi'(u) = (\lambda+\delta)\varphi(u)-\lambda\int_0^u \varphi(u-x)f(x)dx-\lambda\gamma(u) \quad (1.13)$$

Η (1.13) είναι η ολοκληροδιαφορική εξίσωση που ικανοποιεί η $\varphi(u)$.

Ακολουθώντας τη μεθοδολογία που περιγράψαμε καταλήγουμε στη σχέση

$$\hat{\varphi}(s) = \frac{\lambda(s-\rho)\frac{\hat{\gamma}(\rho)-\hat{\gamma}(s)}{s-\rho}}{(s-\rho)[c-\lambda\frac{\hat{f}(\rho)-\hat{f}(s)}{s-\rho}]}$$

όπως είχαμε βρει και στην πρώτη μεθοδολογία.

Για τον υπολογισμό του μετασχηματισμού Laplace $\hat{\varphi}(s)$ που δίνεται στην (15α), σημαντικό ρόλο παίζει η εύρεση των ριζών του παρονομαστή, που έχουν θετικό πραγματικό μέρος. Προς τούτο αναφέρουμε το επόμενο θεώρημα και το αμέσως επόμενο λήμμα.

Αρχικά θα χρειαστούμε τον ορισμό των martingale.

Ορισμός 1.11: Μια στοχαστική διαδικασία $\{X(t)\}_0^\infty$ ονομάζεται martingale αν ισχύουν τα παρακάτω:

i) $\mathbb{E}(|X(t)| < \infty\,, \forall t \geq 0$
ii) Η $X(t)$ είναι $\mathcal{F}_t$ μετρήσιμη, $\forall t \geq 0$
iii) $\mathbb{E}(X(t)|\mathcal{F}_s) = X(s), \forall s, t \geq 0$ με $t \geq s$

Όπου $\mathcal{F}_s$ είναι το σύνολο που περιέχει όλη την πληροφορία της στοχαστικής διαδικασίας $\{X(t)\}_0^\infty$ μέχρι τη χρονική στιγμή s.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.2: *Για $s \in \mathbb{C}$ και $\delta \geq 0$ η θεμελιώδης γενικευμένη εξίσωση Lundberg δίνεται από τη σχέση:*

$$\lambda + \delta - cs - \lambda\hat{f}(s) = 0$$

Απόδειξη (από σημειώσεις κου Χατζηκωνσταντινίδη): Προκειμένου να πάρουμε τη γενικευμένη εξίσωση Lundberg θα εμφυτεύσουμε στη διαδικασία πλεονάσματος $U(t)$ μια αντίστοιχη διακριτή διαδικασία πλεονάσματος. Έστω λοιπόν

$$\tau_\kappa = \sum_{i=1}^{k} W_i$$

Ο χρόνος άφιξης του k-ζημιογόνου ενδεχομένου, με $\tau_0 = 0.$ Έστω $U(0) = u$ και για $k = 1,2,3, \ldots$ έχουμε

$$U(k) = U(\tau_\kappa) = u + c\tau_\kappa - \sum_{j=1}^{N(\tau_\kappa)} X_j$$

το πλεόνασμα αμέσως μετά την εμφάνιση του k-ζημιογόνου ενδεχομένου. Τότε,

$$U(k) = u + c\sum_{j=1}^{k} W_I - \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{N(W_I)} X_j = u + \sum_{i=1}^{k}(c - \sum_{j=1}^{N(W_I)} X_j)$$

Έστω ακόμη ότι υπάρχει ένας αριθμός s τέτοιος ώστε η ακολουθία των τυχαίων μεταβλητών

$\{e^{-\delta\tau_k + sU(k)}\}_{k=0}^\infty$ να είναι ένα martingale ως προς την $\mathcal{F}_\kappa = \sigma(W_i, X_i\, :\, 1 \leq i \leq k)$ με $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Τότε επειδή $k < k + 1$ ισχύει ότι

$$E[e^{-\delta\tau_{k+1}+sU(k+1)}|\mathcal{F}_k] = e^{-\delta\tau_k+sU(k)} \quad (1.14)$$

Τότε η τελευταία σχέση γίνεται

$$e^{-\delta(\tau_{k+1}-W_{k+1})+s[U(k+1)-(cW_{k+1}-X_1)]} = e^{-\delta\tau_k+sU(k)}$$

και επειδή οι τυχαίες μεταβλητές $\{W_i\}_0^\infty$ είναι ισόνομες μεταξύ τους, έχουμε από την (1.14) :

$$1 = E\left[e^{-\delta W_i+s(cW_1-X_1)}\right] = E\left[e^{-(\delta-cs)W_i}\right]E[e^{-sX_i}] = \hat{f}_{w_1}(\delta-cs)\hat{f}(s) \quad (1.15)$$

Όπου $\hat{f}_{w_1}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f_{W_1}(x)dx$, με $f_{W_1}(x)$ τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής W_1. Επειδή όπως έχουμε αναφέρει $W_1 \sim Exp(\lambda)$ ισχύει ότι $\hat{f}_{W_1} = \frac{\lambda}{\lambda+s}$.

Επομένως, η εξίσωση (1.15) πλέον γράφεται :

$$\frac{\lambda}{\lambda+\delta-cs}\hat{f}(s) = 1$$

Ή

$$\lambda+\delta-cs-\lambda\hat{f}(s) = 1$$

Λήμμα 1.1: Για τη γενικευμένη θεμελιώδης εξίσωση Lundberg ισχύουν ότι

(i) Για $\delta > 0$, έχει ακριβώς μία ρίζα ,έστω την $\rho = \rho(\delta)$ στο θετικό μιγαδικό ημιεπίπεδο.

(ii) Για $\delta \to 0^+$ έχει ακριβώς μια ρίζα , το μηδέν στο θετικό μιγαδκό ημιεπίπεδο.

Στη συνέχεια θα δώσουμε ένα παράδειγμα υπολογισμού του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace της $\hat{\varphi}(s)$ που μας οδηγεί στην εύρεση της $\varphi(u)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω ότι για την τυχαία μεταβλητή του ύψους των αποζημιώσεων ισχύει ότι $X \sim Exp(\beta)$. Επομένως, ο μετασχηματισμός Laplace αυτής είναι $\hat{f}(s) = \frac{\beta}{\beta+s}$. Ακόμη, $\bar{F}(x) = e^{-\beta x}$ και $f_e(x) = \frac{\bar{F}(x)}{E(x)} = \frac{e^{-\beta x}}{\frac{1}{\beta}} = \beta e^{-\beta x}$.

Για $\delta = 0$ και $w(x,y) = 1$ ισχύει ότι $\hat{\varphi}_0(s) = \hat{\psi}(s)$, όπου $\hat{\varphi}_0(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\psi(x)dx$ ο μετασχηματισμός Laplace της πιθανότητας χρεοκοπίας.

Η $\psi(u)$ είναι η δεξιά ουρά μιας σύνθετης γεωμετρικής –εκθετικής κατανομής .Επειδή $\widehat{\bar{F}_e}(s) = \frac{1-\hat{f}_e(s)}{s}$ τότε:

$$\hat{\psi}(s) = \frac{\frac{1}{1+\theta}\widehat{\bar{F}_e}(s)}{1-\frac{1}{1+\theta}\hat{f}_e(s)} = \frac{\frac{1}{1+\theta}[1-\hat{f}_e(s)]}{s[1-\frac{1}{1+\theta}\hat{f}_e(s)]} = \frac{\frac{1}{1+\theta}[1-\frac{\beta}{\beta+s}]}{s[1-\frac{1}{1+\theta}\frac{\beta}{\beta+s}]} = \frac{\frac{1}{1+\theta}\frac{s}{\beta+s}}{s\frac{(1+\theta)(\beta+s)-\beta}{(\beta+s)(1+\theta)}} = \frac{\frac{1}{1+\theta}}{\frac{\theta\beta+(1+\theta)s}{1+\theta}}$$

$$= \frac{1}{\theta\beta+(1+\theta)s} = \frac{\frac{1}{1+\theta}}{\frac{\theta\beta+s}{1+\theta}}$$

Επομένως παίρνοντας αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace καταλήγουμε στο ότι για ύψη ζημιών που ακολουθούν την εκθετική κατανομή, η πιθανότητα χρεοκοπίας δίνεται από τη σχέση

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\theta}e^{-\frac{\beta\theta}{1+\theta}} \quad , \qquad u \geq 0$$

Όπου θ είναι το περιθώριο ασφαλείας που δόθηκε στον ορισμό 1.8 και β είναι η παράμετρος της εκθετικής κατανομής.

Στη συνέχεια θα ακολουθήσουμε τη δεύτερη μεθοδολογία για την εύρεση της $\varphi(u)$. Προκειμένου να γίνει αυτό, δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.12: Μία ανανεωτική ανέλιξη $\{N(t), t \geq 0\}$ είναι μια απαριθμήτρια ανέλιξη στην οποία οι ενδιάμεσοι χρόνοι είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την ίδια κατανομή (όχι απαραίτητα την εκθετική).

Η τυχαία μεταβλητή $N(t)$ παριστάνει τον αριθμό των ανανεώσεων στο διάστημα $[0, t]$ και ορίζεται από τη σχέση $N(t) = max\,\{n\colon\ Yn \leq t\}$

Γενικότερα, μια εξίσωση της μορφής

$$Z(t) = g(t) + \varphi \int_0^t Z(t-x)dF(x)$$

καλείται εξίσωση ανανεωτικού τύπου όπου φ σταθερά με $0 < \varphi < 1$, g είναι μια φραγμένη συνάρτηση ,F είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής και Z η άγνωστη συνάρτηση.

- Όταν $\varphi = 1$ έχουμε τις κανονικές ή μη ελλειμματικές εξισώσεις ανανεωτικού τύπου.
- Όταν $\varphi < 1$ έχουμε τις ελλειμματικές εξισώσεις ανανεωτικού τύπου.

Απόδειξη [11]: Θεωρούμε ένα απειροστό διάστημα $(0, dt)$. Ακόμη, θεωρούμε μια ολοκληροδιαφορική εξίσωση γενικότερης μορφής

$$\varphi(u) = \frac{1}{1+\beta}\int_0^u \varphi(u-x)dG(x) + \frac{1}{1+\beta}H(u)$$

Με $\beta > 0$, $G(x) = 1 - \bar{G}(x)$ μια συνάρτηση κατανομής με $G(0) = 0$ και $H(u)$ μια συνεχή συνάρτηση για $u \geq 0$.

Ορίζουμε τη σύνθετη γεωμετρική κατανομή ως:

$$\bar{\bar{K}}(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta}{1+\beta}\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^n \bar{G}^{*n}(x)\,, \qquad u \geq 0$$

Όπου $\bar{G}^{*n}(x)$ είναι η δεξιά ουρά της ν-οστής συνέλιξης της $G(u)$.

Η λύση της γενικευμένης μορφής της ολοκληροδιαφορικής εξίσωσης μπορεί να γραφεί ως

$$\varphi(u) = \frac{1}{\beta}\int_0^u H(u-x)dK(x) + \frac{1}{1+\beta}H(u)$$

Αν η $H(u)$ είναι διαφορική τότε η $\varphi(u)$ συναρτήσει της $\bar{K}(u)$ εκφράζεται ως

$$\varphi(u) = -\frac{1}{\beta}\int_0^u \bar{K}(u-x)H'(x)dx + \frac{1}{\beta}H(u)\ , \qquad u \geq 0$$

Έστω λοιπόν $\hat{g}(s) = \int_0^\infty e^{-su}dG(u)$ ο μετασχηματισμός Laplace της $G(x)$,

$\hat{K}(s) = K(0) + \int_0^\infty e^{-su}dK(u) = \frac{\beta}{1+\beta-\hat{g}(s)}$ ο μετασχηματισμός Laplace της $K(x)$,

$\hat{\varphi}(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\varphi(u)du$ ο μετασχηματισμός Laplaceτης $\varphi(u)$ και

$\hat{H}(s) = \int_0^\infty e^{-sx}H(u)du$ ο μετασχηματισμός Laplaceτης $H(u)$.

Τότε η $\varphi(u) = \frac{1}{1+\beta}\int_0^u \varphi(u-x)dG(x) + \frac{1}{1+\beta}H(u)$ γράφεται

$$\hat{\varphi}(s) = \frac{\hat{H}(s)}{1+\beta-\hat{g}(s)} = \frac{1}{\beta}\hat{H}(s)\hat{K}(s)$$

Αντιστρέφοντας τον μετασχηματισμό Laplace στην παραπάνω εξίσωση παίρνουμε τη σχέση
$\varphi(u) = -\frac{1}{\beta}\int_0^u \bar{K}(u-x)H'(x)dx + \frac{1}{\beta}H(u)\ ,\ u \geq 0$ ■

Δίνουμε πάλι το παράδειγμα όπου $X \sim Exp(\beta)$.
Έστω λοιπόν $f(x) = \beta e^{-\beta x}, \beta, x > 0$. Τότε $\bar{F}(x) = e^{-\beta x}$ και

$$T_\rho \bar{F}(x) = \int_x^\infty e^{-\rho(y-x)}\,\bar{F}(y)dy = e^{\rho x}\int_x^\infty e^{-\rho y}\,e^{-\beta y}dy$$

$$= e^{\rho x}\int_x^\infty e^{-(\beta+\rho)y}dy = e^{\rho x}\frac{1}{\beta+\rho}e^{-(\beta+\rho)x} = \frac{e^{-\beta x}}{\beta+\rho}$$

$$\hat{\bar{F}}(\rho) = \int_0^\infty e^{-\rho y}\bar{F}(y)dy = \int_0^\infty e^{-\rho y}\,e^{-\beta y}dy = \frac{1}{\beta+\rho}$$

Άρα

$$\bar{G}_\delta(x) = \frac{T_\rho \bar{F}(x)}{\hat{\bar{F}}(\rho)} = \frac{\frac{e^{-\beta x}}{\beta+\rho}}{\frac{1}{\beta+\rho}} = e^{-\beta x}$$

$$\Rightarrow 1+\theta = \frac{(1+\theta)(\beta+\rho)}{\beta} \Rightarrow \theta = \frac{(1+\theta)(\beta+\rho)}{\beta} - 1 = \frac{\beta+\rho+\theta(\beta+\rho)-\beta}{\beta}$$

$$= \frac{\rho+\theta(\beta+\rho)}{\beta} \Rightarrow \frac{\beta\theta}{1+\theta} = \frac{\rho+\theta(\beta+\rho)}{\frac{(1+\theta)(\beta+\rho)}{\beta}} = \frac{\beta[\rho+\theta(\beta+\rho)]}{(1+\theta)(\beta+\rho)}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{K}_\delta(u) = \frac{\beta}{(1+\theta)(\beta+\rho)} e^{-\frac{\beta[\rho+\theta(\beta+\rho)]}{(1+\theta)(\beta+\rho)}u}$$

Για $\delta = 0 \Rightarrow \rho = 0 \Rightarrow \overline{K}_0(u) = \psi(u)$

Οπότε

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\theta} e^{-\frac{\beta\theta}{1+\theta}u}$$

Αναφέρουμε σε αυτό το σημείο ότι $K_\delta(u)$ είναι η δεξιά ουρά της σύνθετης γεωμετρικής με παράμετρο $\frac{\theta}{1+\theta}$, που αναφέραμε στη δεύτερη μεθοδολογία και το αντίστοιχο μέγεθος ατομικής ζημιάς έχει όπως αναφέραμε στην αρχή του παραδείγματος την εκθετική κατανομή με παράμετρο β.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

Το Markov-modulatedμοντέλο της θεωρίας κινδύνου

2.1 Περιγραφή του μοντέλου

Το κυρίως αντικείμενο της θεωρίας χρεοκοπίας είναι ο υπολογισμός ακριβείς τύπων ή προσεγγιστικών εκτιμήσεων για την πιθανότητα χρεοκοπίας.

Το Μαρκοβιανό μοντέλο χρεοκοπίας, εισήχθη για πρώτη φορά σαν έννοια από τον Jenssen το 1980 [9] και αργότερα από τον Reinhard το 1984 [20]. Μετέπειτα αρκετοί ασχολήθηκαν με την μελέτη του μοντέλου όπως ο Asmussen (1989) [4], Rolski (1989) [21], Grandell (1991) [8], Snoussi (2002) [22] κ.α.

Κύριο χαρακτηριστικό του μοντέλου Markovείναι η ύπαρξη μιας εξωτερικής περιβαλλοντικής κατάστασης, η οποία μπορεί να αφορά τις καιρικές συνθήκες, το πολιτικό περιβάλλον, το οικονομικό περιβάλλον ή οποιονδήποτε άλλο εξωτερικό παράγοντα.
Το αρχικό κίνητρο της εισαγωγής του Μαρκοβιανού μοντέλου ήταν η ευελιξία που προσέφερε στο κλασικό μοντέλο. Τα παραδείγματα που συνήθως χρησιμοποιούνται είναι καιρικά φαινόμενα και ξεσπάσματα επιδημιών, ακόμη και αν η εποχικότητα παίζει κάποιο ρόλο και πιθανότατα δεν μπορεί να μοντελοποιηθεί από ένα μοντέλο Markov.

Οι Zhu και Yang το 2007 αναφέρθηκαν σε καταστάσεις περιβαλλοντικής διαδικασίας ως οικονομικές συνθήκες ή πολιτικές αλλαγές. Όμως, οι υποθέσεις με τη συχνότητα και το ύψος των ζημιών μέσω εξωτερικών παραγόντων είναι θεωρητικά εισηγμένες στο κλασικό μοντέλο.

Βασική υπόθεση του μαρκοβιανού μοντέλου είναι ότι ο χρόνος μεταξύ των απαιτήσεων, το ύψος των ζημιών και το ασφάλιστρο επηρεάζονται από μια εξωτερική μαρκοβιανή διαδικασία. Η αρχική κατάσταση στην οποία βρίσκεται το μοντέλο μπορεί να υπολογιστεί βάσει ενός συστήματος μετασχηματισμών Laplace για πιθανότητες μη χρεοκοπίας (πιθανότητες επιβίωσης).
Στην περίπτωση όπου έχουμε μόνο δύο καταστάσεις, μπορούμε να υπολογίσουμε ακριβείς τύπους για τις πιθανότητες μη χρεοκοπίας δεδομένου ότι το αρχικό αποθεματικό είναι μηδενικό ή όταν οι κατανομές και των δύο μεγεθών της ζημιάς ανήκουν στη ρητή οικογένεια κατανομών. Ακόμη, υποθέτουμε ότι μόνο οι Poisson αφίξεις απαιτήσεων και οι κατανομές αυτών ποικίλλουν στο χρόνο ανάλογα με αυτή την εξωτερική διαδικασία.

Ορισμός 2.1: Έστω (Ω, A, P) ένας πλήρης χώρος πιθανοτήτων. Θυμίζουμε σε αυτό το σημείο ότι ένας χώρος (Ω, A, P) ονομάζεται πλήρης εάν $\forall\ N \in A$ με $P(N) = 0$ ισχύει ότι $\forall\ B \in N$ ισχύει ότι $B \subseteq A$ δηλαδή $P(B) = 0$. Θεωρούμε ένα μοντέλο χρεοκοπίας σε συνεχή χρόνο και ορίζουμε ως

$$\{I(t); t \geq 0\}$$

την εξωτερική διαδικασία περιβάλλοντος, η οποία επηρεάζει τη συχνότητα των ζημιών, την κατανομή των αποζημιώσεων και το ύψος των ασφαλίστρων. Ακόμη, υποθέτουμε ότι η $\{I(t); t \geq 0\}$ είναι ομογενής, αμείωτη (irreducible, δηλαδή το πεδίο ορισμού της αλυσίδας

Markov αποτελείται από μία ισοδύναμη κλάση) και επαναλαμβανόμενη διαδικασία Markov με πεπερασμένο πεδίο ορισμού $I = \{1,2, \dots m\}$.

Για την $\{I(t); t \geq 0\}$, συμβολίζουμε με $\Lambda = (\alpha_{i,j})_{i,j=1}^{m}$ όπου $\alpha_{i,i} \coloneqq -a_i$, $i \in \{1,2, \dots m\}$, τον πίνακα έντασης της στοχαστικής διαδικασίας $\{I(t); t \geq 0\}$.

Η πιθανότητα μετάβασης της ενσωματωμένης αλυσίδας Markov από μία κατάσταση σε μία άλλη δίνεται από τη σχέση:

$$P = [p_{ij}] \ , \ p_{ij} = \begin{cases} 0 \ , \ i = j \\ \frac{a_{ij}}{a_i} \ , \ i \neq j \end{cases} , \qquad i, j \in I \quad (2.1)$$

Επιπροσθέτως, υποθέτουμε ότι στο χρόνο t οι απαιτήσεις συμβαίνουν σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με συνεχή ένταση $\lambda_i \in \mathcal{R}^+$ και $I(t) = i$ να είναι η κατάσταση στην οποία βρίσκεται το περιβάλλον τη χρονική στιγμή t. Η αντίστοιχη κατανομή του ύψους των απαιτήσεων είναι $F_i(x)$, με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_i(x)$ και πεπερασμένο μέσο μ_i , $i \in I$.

Στις υποθέσεις μας συμπεριλαμβάνουμε ότι τα ασφάλιστρα εισπράττονται συνεχώς με θετικό ρυθμό c_i σε κάθε χρονικό διάστημα, όσο η εξωτερική κατάσταση παραμένει στην φάση i.
Θα συμβολίζουμε με W_n τον χρόνο άφιξης της n-οστής απαίτησης και X_nτο αντίστοιχο ύψος αυτής. Η διαφορά $T_n = W_n - W_{n-1}$ είναι ο ενδιάμεσος χρόνο μεταξύ δύο απαιτήσεων, της $n - 1$ και της n , με $W_0 = X_0 = T_0 = 0$.

Ας συμβολίσουμε ακόμη με J_n την κατάσταση της διαδικασίας I, κατά την άφιξη της n-οστής ζημιάς, δηλαδή $J_n = I(W_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Ορισμός 2.2: Έχει αποδειχθεί (Reinhard 1984, [20]) ότι όταν μια αλυσίδα Markov είναι αμείωτη και απεριοδική (υπό την προϋπόθεση όμως ότι $m < \infty$), τότε η μοναδική στατική κατανομή πιθανότητας $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_m)$ δίνεται από τη σχέση

$$\pi_i = \frac{\frac{\lambda_i \eta_i}{a_i}}{\sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k \eta_k}{a_k}} \ , \qquad i \in I \qquad (2.2)$$

όπου $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_m)$ είναι η μοναδική στατική κατανομή πιθανότητας της ενσωματωμένης αλυσίδας Markov της διαδικασίας I με πιθανότητες μετάβασης όπως δόθηκαν παραπάνω από τη σχέση (2.1).

Υποθέτουμε ότι οι ακολουθίες των τυχαίων μεταβλητών $\{X_n\}_{n\geq 0}$ του ύψους των ζημιών και $\{T_n\}_{n\geq 0}$ του ενδιαμέσου χρόνου μεταξύ των απαιτήσεων είναι ανεξάρτητες, δεδομένης της εξωτερικής κατάστασης $\{I(t); t \geq 0\}$.

Ορισμός 2.3: Η συνάρτηση

$$N(t) = \sup\{n \in \mathbb{N} | \sum_{i=1}^{n} T_i \leq t\}$$

αντιπροσωπεύει το πλήθος των απαιτήσεων που έχουν επέλθει ως το χρόνο t. Η στοχαστική διαδικασία $\{N(t); t \geq 0\}$ ονομάζεται Markov-διαμορφωμένη διαδικασία Poisson, η οποία είναι μια ειδική περίπτωση της διαδικασίας Cox. Μπορεί να θεωρηθεί ακόμη, ως μια διαδικασία Poissonμε παραμέτρους τροποποιημένες σύμφωνα με τις μεταβάσεις της εξωτερικής περιβαλλοντικής διαδικασίας.

Η αντίστοιχη διαδικασία πλεονάσματος δίνεται κατά τα γνωστά από τη σχέση

$$\boldsymbol{U}(t) = u + P(t) - \sum_{n=1}^{N(t)} X_n , \qquad t \geq 0 \qquad (2.3)$$

Όπου $P(t)$ είναι το συνολικό εισπραχθέν ασφάλιστρο στο διάστημα (0,t] και $u \geq 0$ το αρχικό αποθεματικό.

Συμβολίζουμε με U_n το χρόνο της n-οστής μετάβασης της εξωτερικής κατάστασης και I_n την κατάσταση του περιβάλλοντος μετά την n-οστής μετάβαση.

Το 1984 ο Reinhard [20] έδειξε ότι

$$P(t) = \sum_{k=1}^{N_e(t)} c_{I_{k-1}}(U_k - U_{k-1}) + c_{I_{N_e(t)}}(t - T_{N_e(t)}) , \qquad t \geq 0 \quad (2.4)$$

όπου $N_e(t) = \sup\{n \in \mathbb{N}: U_n \leq t\}$ και T ο χρόνος χρεοκοπίας όπως τον έχουμε ορίσει.

2.2 Η πιθανότητα χρεοκοπίας

Ορισμός 2.4: Λαμβάνοντας υπόψη τον ορισμό του χρόνου χρεοκοπίας, το γεγονός ότι η αρχική κατάσταση του περιβάλλοντος είναι η i και ότι το αρχικό αποθεματικό είναι u, ορίζουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας για το Markov-modulated μοντέλο της θεωρίας κινδύνου ως:

$$\psi_i(u) = P[T < \infty | U(0) = u, I(0) = i] , \qquad i \in I , u \geq 0$$

Ενώ η πιθανότητα χρεοκοπίας για το σύνολο των mπιθανών καταστάσεων είναι

$$\psi(u) = \sum_{k=1}^{m} \pi_i \, \psi_i(u), \qquad u \geq 0$$

Όπου π_i είναι η στάσιμη πιθανότητα όπως ορίσθηκε από τη σχέση (2.2).

Τέλος, υποθέτουμε ότι η κατάσταση φόρτωσης είναι

$$d = \sum_{i=1}^{m} \pi_i (\frac{c_i}{\lambda_i} - \mu_i) > 0$$

για γνωστό π_i όπως ορίσθηκε στη σχέση (2.2).

Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace ο Reinhard (1984) [20] κατέληξε στο παρακάτω σύστημα ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων για την πιθανότητα μη χρεοκοπίας $\delta_i(u)$, $i = 1, \dots, m$:

$$c_i \delta_\iota'(u) = (\lambda_i + \alpha_i)\delta_i(u) - \lambda_i \int_{0-}^{u} \delta_i(u-x) d\, F_i(x) \\ - a_i \sum_{k=1}^{m} p_{ik} \, \delta_k(u) , \qquad u \geq 0 \quad , (2.5)$$

η οποία έχει μοναδική λύση $\delta(\infty) = 1,\ i \in I$.Ολοκληρώνοντας την (2.5) έχουμε :

$$c_i \delta_\iota(u) = c_i \delta_\iota(0) \\ + \lambda_i \int_0^t \delta_i(t-y)[1 - F_i(y)]dy + a_i \int_0^t [\delta_i(u) - \sum_{k=1}^{m} p_{ik} \, \delta_k(u)]du \quad , \\ \iota \in I, t \geq 0 \qquad (2.6)$$

το οποίο είναι ένα σύστημα εξισώσεων που για t τείνει στο άπειρο:

Για $t \to \infty$ και διαιρώντας κάθε μέλος με το ασφάλιστρο c_i από τη (2.6) παίρνουμε ότι

$$1 = \delta_\iota(0) + \frac{\lambda_i}{c_i} \int_0^\infty 1[[1 - F_i(y)]dy + \frac{a_i}{c_i} \int_0^\infty [\,\delta_i(u) - \sum_{k=1}^{m} p_{ik} \, \delta_k(u)]du$$

$$\xLeftrightarrow{\int_0^\infty 1[[1-F_i(y)]dy=\mu_i}$$

$$\delta_\iota(0) = 1 - \frac{\lambda_i\mu_i}{c_i} - \frac{a_i}{c_i}\int_0^\infty [\,\delta_i(u) - \sum_{k=1}^{m} p_{ik}\,\delta_k(u)]du \qquad (2.7)$$

που δεν δίνει συγκεκριμένη τιμή στις πιθανότητες $\delta_\iota(0)$ όπως στο κλασσικό μοντέλο όπου $m = 1$.

Προκειμένου να λύσουμε το σύστημα (2.6) θα εφαρμόσουμε μετασχηματισμούς Laplace. Ορίζουμε λοιπόν το μετασχηματισμό Laplace της πιθανότητας μη χρεοκοπίας ως:

$$\hat{\delta}_i(s) = \int_0^\infty e^{-su}\,\delta_i(u)du\,, \qquad i\ \in I$$

και της πυκνότητας πιθανότητας του ύψους των απαιτήσεων

$$\widehat{f}_i(u) = \int_0^\infty e^{-su}\,f_i(u)du\,, \qquad i \in I$$

Έτσι η (2.6) διαιρώντας και τα δύο μέλη με c_i γίνεται:

$$\hat{\delta}_i(s) = \delta_\iota(0) + \frac{\lambda_i}{c_i}\int_0^t \hat{\delta}_i(s-y)\hat{\bar{F}}(s)ds + \frac{a_i}{c_i}\int_0^t [\hat{\delta}_i(s) - \sum_{k=1}^{m} p_{ik}\,\hat{\delta}_k(s)]\,ds \iff$$

$$\delta_\iota(0) = \widehat{\delta_\iota}(s) - \frac{\lambda_i}{c_i}\int_0^t \hat{\delta}_i(s-y)\hat{\bar{F}}(s)ds - \frac{a_i}{c_i}\int_0^t [\hat{\delta}_i(s) - \sum_{k=1}^{m} p_{ik}\,\hat{\delta}_k(s)]\,ds \iff$$

$$\delta_\iota(0) = \left[s - \tfrac{\lambda_i + a_i}{c_i} + \tfrac{\lambda_i}{c_i}\hat{f}_i(s)\right]\widehat{\delta_\iota}(s) + \tfrac{a_i}{c_i}\textstyle\sum_{k=1}^{m} p_{ik}\,\hat{f}_i(s)\,, \ \ i \in I$$

Ή σε μορφή πίνακα $\delta(0) = A(s)\hat{\delta}(s)$ (2.8) , όπου

$$A(s) = \begin{bmatrix} s - \dfrac{\lambda_1(1-\hat{f}_1(s)) + \alpha_1}{c_1} & \ddots & s - \dfrac{\lambda_m(1-\hat{f}_m(s)) + \alpha_m}{c_m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{a_1}{c_1} & \ddots & \dfrac{a_m}{c_m} \end{bmatrix} P$$

και $\hat{\delta}(s) = [\hat{\delta}_1(s), \dots, \hat{\delta}_m(s)]^{\,T}$,$\delta(0) = [\delta_1(0), \dots, \delta_m(0)]^{\,T}$,

$P = [p_{ij}]$, $p_{ij} = \begin{cases} 0 & ,i = j \\ \frac{a_{ij}}{a_i} & ,i \neq j \end{cases}$ $,i,j\ \in I$ όπως είδαμε στη (2.1) ,με $p_{ii} = 0$, $i \in I$

Τότε η $\hat{\delta}(s)$ μπορεί να επιλυθεί από τη σχέση (2.8) ως

$$\hat{\delta}(s) = \frac{\delta(0)}{A(s)}$$

με τη διακρίνουσα του πίνακα $A(s)$ να είναι η $det[A(s)] = 0$ (2.10) και να αποτελεί τη χαρακτηριστική εξίσωση της (2.8).

Πιο συγκεκριμένα, για ένα μοντέλο δύο καταστάσεων (m=2) βρίσκοντας αναλυτικά τις ρίζες της εξίσωσης (2.10), ο μετασχηματισμός Laplace της πιθανότητας μη χρεοκοπίας μπορεί να αντιστραφεί για συγκεκριμένους τύπους κατανομής των απαιτήσεων, δίνοντας μας έτσι ακριβείς εκφράσεις για την πιθανότητα με χρεοκοπίας.

Στο μοντέλο δύο καταστάσεων μπορούμε γενικά να προσδιορίσουμε τη μία κατάσταση ως «φυσιολογική» και την άλλη ως «μη φυσιολογική» ή ως «περίοδο υψηλής συχνότητας» , εν αντιθέσει με την «περίοδο χαμηλής συχνότητας» αν αναφερόμαστε σε καιρικά φαινόμενα για παράδειγμα κοκ.

Από τη σχέση (2.2) βλέπουμε ότι πλέον η πιθανότητα μετάβασης από τη μία στην άλλη κατάσταση διαμορφώνεται ως:

$$\pi_i = \frac{\frac{\lambda_i}{a_i}}{\frac{\lambda_1}{a_1} + \frac{\lambda_2}{a_2}} \quad , \qquad i = 1.2$$

Ενώ η κατάσταση φόρτωσης

$$d = \frac{\frac{\lambda_1}{a_1}\left(\frac{c_1}{\lambda_1} - \mu_1\right) + \frac{\lambda_2}{a_2}\left(\frac{c_2}{\lambda_2} - \mu_2\right)}{\frac{\lambda_1}{a_1} + \frac{\lambda_2}{a_2}} > 0 \qquad (2.11)$$

Σε αυτή την περίπτωση, ο πίνακας (2.9) παίρνει την πιο απλή μορφή:

$$A(s) = \begin{bmatrix} s - \frac{\lambda_1 + a_1}{c_1} + \frac{\lambda_1}{c_1}\widehat{f}_i(s) & \frac{a_1}{c_1} \\ \frac{a_2}{c_2} & s - \frac{\lambda_2 + a_2}{c_2} + \frac{\lambda_2}{c_2}\widehat{f}_2(s) \end{bmatrix}$$

Και η χαρακτηριστική εξίσωση (2.10) , δηλαδή η ορίζουσα του πίνακα $A(s)$ είναι:

$$det[A(s)] = Q(s) := \left[s - \frac{\lambda_1(1 - \widehat{f}_1(s) +}{c_1} + \frac{\lambda_1}{c_1}\widehat{f}_1(s)\right]\left[s - \frac{\lambda_2(1 - \widehat{f}_2(s) +}{c_2} + \frac{\lambda_2}{c_2}\widehat{f}_2(s)\right]$$
$$= \frac{a_1 \alpha_2}{c_1 c_2} \quad (2.12)$$

Σημειώνοντας ότι η $s = 0$ είναι μία ρίζα της πιο πάνω εξίσωσης όπως είχαμε αναφέρει και στη σχέση (2.10).

Αποδεικνύεται από το θεώρημα που ακολουθεί ότι η ως άνω εξίσωση έχει μοναδική θετική ρίζα η οποία έχει πρωταρχικό ρόλο στην εύρεση της πιθανότητας μη χρεοκοπίας $\delta_\iota(u)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.1: (Theorem 1 [14]) Η χαρακτηριστική εξίσωση

$$Q(s) := \left[s - \frac{\lambda_1 + a_1}{c_1} + \frac{\lambda_1}{c_1}\widehat{f}_1(s)\right]\left[s - \frac{\lambda_2 + \alpha_2}{c_2} + \frac{\lambda_2}{c_2}\widehat{f}_2(s)\right] = \frac{a_1\alpha_2}{c_1 c_2}$$

Έχει ακριβώς μία θετική ρίζα , έστω ρ, στο θετικό ημιάξονα.

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι $Q_\delta(0) = \frac{(a_1+\delta)(a_2+\delta)}{c_1c_2} > \frac{a_1\alpha_2}{c_1c_2}$, $Q_\delta(\infty) = \infty$ και ότι η $Q_\delta(s) = 0$ έχει δύο ρίζες. Επομένως η χαρακτηριστική εξίσωση έχει τουλάχιστον δύο ρίζες. Ακόμη $|Q_\delta(s)| \geq \frac{(a_1+\delta)(a_2+\delta)}{c_1c_2} > \frac{a_1\alpha_2}{c_1c_2}$. Άρα το πλήθος των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι ίσο με το πλήθος των ριζών της $Q_\delta(s) = 0$, δηλαδή δύο ρίζες έστω τις $\rho_1(\delta), \rho_2(\delta)$. Αφού όμως η $s = 0$ είναι μία ρίζα, τότε η χαρακτηριστική εξίσωση έχει ακριβώς μία θετική πραγματική ρίζα. ■

Η σχέση (2.8) υποδεικνύει ότι σε μορφή πινάκων έχουμε:

$$\begin{bmatrix} s - \frac{\lambda_1 + a_1}{c_1} + \frac{\lambda_1}{c_1}\widehat{f}_\iota(s) & \frac{a_1}{c_1} \\ \frac{a_2}{c_2} & s - \frac{\lambda_2 + a_2}{c_2} + \frac{\lambda_2}{c_2}\widehat{f}_2(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\delta}_1(s) \\ \hat{\delta}_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1(0) \\ \delta_2(0) \end{bmatrix}$$

Ή

$$\begin{cases} \widehat{\delta}_1(s) = \dfrac{\delta_1(0)\left[s - \frac{\lambda_2+a_2}{c_2} + \frac{\lambda_2}{c_2}\widehat{f}_2(s)\right] - \delta_2(0)\frac{a_1}{c_1}}{Q(s) - \frac{a_1\alpha_2}{c_1c_2}} \\ \widehat{\delta}_2(s) = \dfrac{\delta_2(0)\left[s - \frac{\lambda_1+a_1}{c_1} + \frac{\lambda_1}{c_1}\widehat{f}_1(s)\right] - \delta_1(0)\frac{a_2}{c_2}}{Q(s) - \frac{a_1\alpha_2}{c_1c_2}} \end{cases} \quad (2.13)$$

Από τη στιγμή όμως που οι $\hat{\delta}_1(s)$ και $\hat{\delta}_2(s)$ είναι πεπερασμένες για κάθε s, με $\Re(s) \geq 0$ και $Q(\rho) = \frac{a_1\alpha_2}{c_1c_2}$, προκύπτει ότι οι αριθμητές της (2.13) ισούνται με μηδέν, δηλαδή για $s = \rho$:

$$\delta_1(0)\left[\rho - \frac{\lambda_2 + \alpha_2}{c_2} + \frac{\lambda_2}{c_2}\hat{f}_2(\rho)\right] = \delta_2(0)\frac{\alpha_1}{c_1} \qquad (2.14)$$

Τότε, η (2.13) γράφεται ως εξής:

$$\begin{cases} \hat{\delta}_1(s) = \dfrac{\delta_1(0)\left[s - \frac{\lambda_2+a_2}{c_2} + \frac{\lambda_2}{c_2}\hat{f}_2(s)\right] - \rho + \frac{\lambda_2+\alpha_2}{c_2} - \frac{\lambda_2}{c_2}\hat{f}_2(\rho)]}{Q(s) - \frac{a_1\alpha_2}{c_1c_2}} \\ \hat{\delta}_2(s) = \dfrac{\delta_2(0)\left[s - \frac{\lambda_1+a_1}{c_1} + \frac{\lambda_1}{c_1}\hat{f}_1(s)\right] - \rho + \frac{\lambda_2+\alpha_2}{c_2} - \frac{\lambda_2}{c_2}\hat{f}_1(\rho)]}{Q(s) - \frac{a_1\alpha_2}{c_1c_2}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \hat{\delta}_1(s) = \dfrac{\delta_1(0)[(s-\rho) + \frac{\lambda_2}{c_2}(\hat{f}_2(s) - \hat{f}_2(\rho))}{Q(s) - \frac{a_1\alpha_2}{c_1c_2}} \\ \hat{\delta}_2(s) = \dfrac{\delta_2(0)[(s-\rho) + \frac{\lambda_1}{c_1}(\hat{f}_1(s) - \hat{f}_1(\rho))}{Q(s) - \frac{a_1\alpha_2}{c_1c_2}} \end{cases} \qquad (2.15)$$

Ενώ η σχέση (2.7) που θυμίζουμε ότι είναι η

$$\delta_\iota(0) = 1 - \frac{\lambda_i\mu_i}{c_i} - \frac{a_i}{c_i}\int_0^\infty [\,\delta_i(u) - \sum_{k=1}^{m} p_{ik}\,\delta_k(u)]du$$

μας δίνει ότι

$$\frac{\alpha_2}{c_2}\delta_1(0) + \frac{\alpha_1}{c_1}\delta_2(0) = \frac{\alpha_1}{c_1}\left(1 - \frac{\lambda_2\mu_2}{c_2}\right) + \frac{\alpha_2}{c_2}\left(1 - \frac{\lambda_1\mu_1}{c_1}\right) \qquad (2.16)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (2.14) και (2.16) καταλήγουμε στο παρακάτω αποτέλεσμα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.2 (Theorem 2 [14]): Για ένα μοντέλο κινδύνου της μορφής

$$\boldsymbol{U}(t) = u + P(t) - \sum_{n=1}^{N(t)} X_n \,, \qquad t \geq 0$$

Όταν $m = 2$ και $d > 0$, οι πιθανότητες μη χρεοκοπίας όταν το αρχικό αποθεματικό είναι μηδέν δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{cases} \delta_1(0) = \dfrac{\frac{\alpha_1}{c_1}\left(1 - \frac{\lambda_2\mu_2}{c_2}\right) + \frac{\alpha_2}{c_2}\left(1 - \frac{\lambda_1\mu_1}{c_1}\right)}{\rho - \frac{\lambda_2}{c_2}\left[1 - \hat{f}_2(\rho)\right]} \\ \delta_2(0) = \dfrac{\frac{\alpha_1}{c_1}\left(1 - \frac{\lambda_2\mu_2}{c_2}\right) + \frac{\alpha_2}{c_2}\left(1 - \frac{\lambda_1\mu_1}{c_1}\right)}{\rho - \frac{\lambda_1}{c_1}\left[1 - \hat{f}_1(\rho)\right]} \end{cases} \tag{2.17}$$

Υποθέτουμε σε αυτό το σημείο ότι οι πυκνότητες f_1, f_2 των αποζημιώσεων ανήκουν στη ρητή K_n οικογένεια κατανομών, $n \in \mathbb{N}^+$. Τότε οι μετασχηματισμοί Laplace αυτών είναι:

$$\hat{f}_1(s) = \frac{p_{k-1}(s)}{p_k(s)} \quad , \quad \hat{f}_2(s) = \frac{q_{l-1}(s)}{q_l(s)} \quad , \qquad k, l \in \mathbb{N}^+$$

Όπου τα $p_{k-1}(s)$ και $q_{l-1}(s)$ είναι πολυώνυμα $\kappa - 1$ και $l - 1$ βαθμού ή λιγότερου αντίστοιχα και τα $p_k(s)$ και $q_l(s)$ είναι πολυώνυμα k και l βαθμού αντίστοιχα, με μόνο μία αρνητική ρίζα, ικανοποιώντας τις εξισώσεις $p_{k-1}(0) = p_k(0)$ και $q_{l-1}(0) = q_l(0)$,

Αυτή η γενική κλάση κατανομών συμπεριλαμβάνει σαν ειδικές περιπτώσεις τις κατανομές Erlang, Coxian, Phase-type κατανομές καθώς και μίξεις αυτών.

Φαίνεται ότι οι εξισώσεις στη σχέση (2.15) μπορούν να μετατραπούν σε ισοδύναμες εκφράσεις πολλαπλασιάζοντας και τους δύο αριθμητές και παρονομαστές με $p_k(s)\, q_l(s)$. Δηλαδή:

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_1(s) &= \frac{\delta_1(0)(s-\rho)p_k(s)\{q_l(s) + \frac{\lambda_2}{c_2 q_l(\rho)}[\frac{q_{l-1}(s)q_l(\rho) - q_{l-1}(\rho)q_l(s)}{s-\rho}]}{p_k(s)q_l(s)[Q(s) - \frac{a_1 a_2}{c_1 c_2}]} \\ &= \frac{\delta_1(0)(s-\rho)p_k(s)\{q_l(s) + \frac{\lambda_2}{c_2}\left(q_{l-1}[s,\rho] - \frac{q_{l-1}(\rho)}{q_l(\rho)}q_l[s,\rho]\right)\}}{p_k(s)q_l(s)[Q(s) - \frac{a_1 a_2}{c_1 c_2}]} \end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_2(s) &= \frac{\delta_2(0)(s-\rho)q_l(s)\{p_k(s) + \frac{\lambda_1}{c_1 p_k(\rho)}[\frac{p_{k-1}(s)p_k(\rho) - p_{k-1}(\rho)p_k(s)}{s-\rho}]}{p_k(s)q_l(s)[Q(s) - \frac{a_1 a_2}{c_1 c_2}]} \\ &= \frac{\delta_1(0)(s-\rho)q_l(s)\{p_k(s) + \frac{\lambda_1}{c_1}\left(p_{k-1}[s,\rho] - \frac{p_{k-1}(\rho)}{p_k(\rho)}p_k[s,\rho]\right)\}}{p_k(s)q_l(s)[Q(s) - \frac{a_1 a_2}{c_1 c_2}]} \end{aligned} \tag{2.20}$$

Όπου $p_{k-1}[s,\rho] \coloneqq \frac{p_{k-1}(s)-p_{k-1}(\rho)}{s-\rho}$ είναι ένα πολυώνυμο $\kappa - 2$ βαθμούως προς ρ και τα $p_k[s,\rho], q_{l-1}[s,\rho], q_l[s,\rho]$ ορίζονται παρομοίως.

Είναι προφανές ότι και οι δύο αριθμητές των σχέσεων (2.19) και (2.20) είναι πολυώνυμα $k + l + 1$ βαθμού.

Για απλότητα θεωρούμε ότι ο κοινός παρονομαστής των παραπάνω σχέσεων είναι ο D_{k+l+2} και επομένως είναι πολυώνυμο $k + l + 2$ βαθμού. Τότε, η εξίσωση $D_{k+l+2}(s) = 0$ έχει ως:

$$D_{k+l+2}(s) = 0 \Leftrightarrow p_k(s)q_l(s)\left[Q(s) - \frac{a_1a_2}{c_1c_2}\right] = 0 \Leftrightarrow p_k(s)q_l(s)Q(s) - p_k(s)q_l(s)\frac{a_1a_2}{c_1c_2} = 0$$

Θυμίζουμε ότι η $Q(s)$ δίνεται εξ' ορισμού από τη διακρίνουσα του πίνακα $A(s)$ που είδαμε παραπάνω και είναι η

$$Q(s) \coloneqq \left[s - \frac{\lambda_1 + a_1}{c_1} + \frac{\lambda_1}{c_1}\hat{f}_1(s)\right]\left[s - \frac{\lambda_2 + \alpha_2}{c_2} + \frac{\lambda_2}{c_2}\hat{f}_2(s)\right] = \frac{a_1\alpha_2}{c_1c_2}$$

Άρα συνεχίζοντας έχουμε,

$$p_k(s)q_l(s)\left[s - \frac{\lambda_1 + a_1}{c_1} + \frac{\lambda_1}{c_1}\hat{f}_1(s)\right]\left[s - \frac{\lambda_2 + \alpha_2}{c_2} + \frac{\lambda_2}{c_2}\hat{f}_2(s)\right] - p_k(s)q_l(s)\frac{a_1a_2}{c_1c_2} = 0$$

Όμως όπως αναφέραμε $\hat{f}_1(s)p_k(s) = p_{k-1}(s)$ και $\hat{f}_2(s)q_l(s) = q_{l-1}(s)$, άρα τελικά καταλήγουμε στη σχέση

$$\left[\left(s - \frac{\lambda_1 + \alpha_1}{c_1}\right)p_k(s) + \frac{\lambda_1}{c_1}p_{k-1}(s)\right]\left[\left(s - \frac{\lambda_2 + \alpha_2}{c_2}\right)q_l(s) + \frac{\lambda_2}{c_2}q_{l-1}(s)\right] - \frac{a_1a_2}{c_1c_2}p_k(s)q_l(s) = 0 \qquad (2.21)$$

Η ανωτέρω είναι μια εξίσωση με $k + l + 2$ ρίζες. Σημειώνουμε ότι δύο εκ των ριζών είναι η $s = 0$ και $s = \rho$. Τότε:

$$D_{k+l+2}(s) = s(s-\rho)\prod_{i=1}^{k+l}(s + R_i)$$

Επισημαίνεται ότι όλα τα R_i έχουν θετικό πραγματικό μέρος από τη στιγμή που είναι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης (2.12).

Επομένως, οι σχέσεις (2.19) και (2.20) μπορούν να απλοποιηθούν ως εξής:

$$\begin{cases} \hat{\delta}_1(s) = \dfrac{\delta_1(0)(s-\rho)p_k(s)\{q_l(s) + \frac{\lambda_2}{c_2}\left(q_{l-1}[s,\rho] - \frac{q_{l-1}(\rho)}{q_l(\rho)}q_l[s,\rho]\right)\}}{s(s-\rho)\prod_{i=1}^{k+l}(s+R_i)} = \dfrac{\delta_1(0)g_{k+l}(s)}{s\prod_{i=1}^{k+l}(s+R_i)} \\ \hat{\delta}_2(s) = \dfrac{\delta_2(0)(s-\rho)q_l(s)\{p_k(s) + \frac{\lambda_1}{c_1}\left(p_{k-1}[s,\rho] - \frac{p_{k-1}(\rho)}{p_k(\rho)}p_k[s,\rho]\right)\}}{s(s-\rho)\prod_{i=1}^{k+l}(s+R_i)} = \dfrac{\delta_2(0)h_{k+l}(s)}{s\prod_{i=1}^{k+l}(s+R_i)} \end{cases}$$

Όπου $g_{k+l}(s)$ και $h_{k+l}(s)$ είναι απλά σύντομοι συμβολισμοί των παραπάνω, δηλαδή:

$$g_{k+l}(s) = p_k(s)\{q_l(s) + \frac{\lambda_2}{c_2}\left(q_{l-1}[s,\rho] - \frac{q_{l-1}(\rho)}{q_l(\rho)} q_l[s,\rho]\right)\}$$

$$h_{k+l}(s) = q_l(s)\{p_k(s) + \frac{\lambda_1}{c_1}\left(p_{k-1}[s,\rho] - \frac{p_{k-1}(\rho)}{p_k(\rho)} p_k[s,\rho]\right)\}$$

Τότε, αν R_i , $\iota = 1,2,\ldots,k+l$ είναι διακριτοί αριθμοί υποθέτουμε με χρήση μερικών κλασμάτων ότι

$\hat{\delta}_1(s) = \delta_1(0)\left[\frac{g_0}{s} + \sum_{i=1}^{k+l}\frac{g_i}{s+R_i}\right]$και $\hat{\delta}_2(s) = \delta_2(0)\left[\frac{h_0}{s} + \sum_{i=1}^{k+l}\frac{h_i}{s+R_i}\right]$

Και επομένως αντιστρέφοντας τους μετασχηματισμούς Laplace παίρνουμε τις παρακάτω σχέσεις αφού μπορούμε να χειριστούμε τα επιμέρους μέλη σαν μετασχηματισμούς Laplace εκθετικών κατανομών.

$$\delta_1(u) = \delta_1(0)\left[g(0) + \sum_{i=1}^{k+l} g_i\, e^{-R_i u}\right] \quad (2.22)$$

$$\delta_2(u) = \delta_2(0)\left[h(0) + \sum_{i=1}^{k+l} h_i\, e^{-R_i u}\right] \quad (2.23)$$

Όπου $g(0) = \frac{g_{k+l}(0)}{\prod_{i=1}^{k+l} R_i}$ και $h(0) = \frac{h_{k+l}(0)}{\prod_{i=1}^{k+l} R_i}$.

Ακόμη,

$g_i = \frac{-g_{k+l}(-R_i)}{R_i \prod_{j=1,j\neq i}^{k+l}(R_j - R_i)}$ και $h_i = \frac{-h_{k+l}(-R_i)}{R_i \prod_{j=1,j\neq i}^{k+l}(R_j - R_i)}$ (2.24) με $i = 1,2,\ldots,k+l$

Από τις (2.22) και (2.23) αυτομάτως παίρνουμε ότι $g(0) = \frac{1}{\delta_1(0)}$, $h(0) = \frac{1}{\delta_2(0)}$, αφού $\lim_{u\to\infty} \delta_i(u) = 1$, $i = 1,2$ και $\sum_{i=1}^{k+l} g_i = 1$, $\sum_{i=1}^{k+l} h_i = 1$

Συνοψίζοντας όλα τα παραπάνω προκύπτει το εξής θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.3 (Theorem 3 [14]) : Για μοντέλα κινδύνου της μορφής

$$\boldsymbol{U}(t) = u + P(t) - \sum_{n=1}^{N(t)} X_n$$

όταν $m = 2$ $και$ $d > 0$, αν η κατανομή των αποζημιώσεων είναι της μορφής

$$\hat{f}_1(s) = \frac{p_{k-1}(s)}{p_k(s)} \quad , \quad \hat{f}_2(s) = \frac{q_{l-1}(s)}{q_l(s)} \quad , \qquad k, l \in \mathbb{N}^+$$

όπου τα $p_{k-1}(s)$, $q_{l-1}(s)$,$p_k(s)$,$q_l(s)$ είναι πολυώνυμα $k-1$,$l-1$, k και l βαθμού αντίστοιχα και αν η χαρακτηριστική εξίσωση

$$\left[\left(s - \frac{\lambda_1 + \alpha_1}{c_1}\right) p_k(s) + \frac{\lambda_1}{c_1} p_{k-1}(s)\right]\left[\left(s - \frac{\lambda_2 + \alpha_2}{c_2}\right) q_l(s) + \frac{\lambda_2}{c_2} q_{l-1}(s)\right] - \frac{a_1 a_2}{c_1 c_2} p_k(s) q_l(s) = 0$$

έχει $k + l$ το πλήθος διακριτές ρίζες έστω $-R_1, -R_2, \dots, -R_{k+l}$ με αρνητικά πραγματικά μέρη, τότε οι πιθανότητες μη χρεοκοπίας δίνονται από:

$$\delta_1(u) = 1 + \delta_1(0) \sum_{i=1}^{k+l} g_i \, e^{-R_i u}$$

$$\delta_2(u) = 1 + \delta_2(0) \sum_{i=1}^{k+l} h_i \, e^{-R_i u}$$

Με τα $\delta_1(0)$, $\delta_2(0)$ $και$ g_i , h_i όπως έχουν δοθεί.

Σαν σημείωση αναφέρουμε ότι αν κάποια από τα R_i είναι σε σύνθετη μορφή, τότε οι πιθανότητες μη χρεοκοπίας ίσως περιέχουν τριγωνομετρικές εξισώσεις .

2.3 Το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας

Διατηρώντας όλες τις υποθέσεις που αναφέραμε στην αρχή του κεφαλαίου θα εξετάσουμε στην παράγραφο αυτή το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας.

Ορισμός 2.5: Για το Markov-modulated μοντέλο της θεωρίας κινδύνου το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας ορίζεται ως:

$$\Psi_i(y;u) = P\{T < \infty, U(T) < -y | U(0) = u, I(0) = i\}, \qquad i \in I, u \geq 0 \quad (2.24)$$

Δηλαδή, η πιθανότητα να επέλθει χρεοκοπία και όταν αυτή συμβεί το αποθεματικό να είναι ίσο με $-y$ ή αλλιώς το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας να είναι ίσο με y, δεδομένου του αρχικού αποθεματικού u και της αρχικής κατάστασης της εξωτερικής διαδικασίας $i \in I$.

Το συνολικό έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας επομένως δίνεται από το άθροισμα

$$\Psi(y;u) = \sum_{k=1}^{m} \pi_i \Psi_i(y;u), u \geq 0$$

Όπου $\pi_i, i \in I$ είναι η στάσιμη πιθανότητα όπως ορίσθηκε στην προηγούμενη παράγραφο.

Θέτοντας $y = 0$ στην σχέση (2.24) λαμβάνουμε ότι

$$\Psi_i(u) = \Psi_i(0;u) = P\{T < \infty | U(0) = u, I(0) = i\}, \qquad i \in I, u \geq 0$$

δηλαδή την πιθανότητα χρεοκοπίας στην κατάσταση i, δεδομένου του αρχικού αποθεματικού u και της αρχικής κατάστασης της εξωτερικής διαδικασίας $i \in I$.

Επίσης, από τη σχέση

$$G_i(y;u) = P\{T < \infty, U(T) \geq -y | U(0) = u, I(0) = i\} = \Psi_i(u) - \Psi_i(y;u), \quad i \in I, u \geq 0$$

μπορούμε να υπολογίσουμε τις πιθανότητες $G_i(y;u)$ και τις αντίστοιχες πυκνότητες παίρνοντας μερικές παραγώγους ως προς y.

Το σύστημα των ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων που αντιπροσωπεύει τις πιθανότητες ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας είναι:

$$\begin{aligned} c_i \frac{\partial}{\partial u} \Psi_i(y;u) = (\lambda_i + a_i)\Psi_i(y;u) \\ - \lambda_i [\int_{0-}^{u} \Psi_i(y; u-x) dF_i(x) + \bar{F}_i(u+y) \\ - a_i \sum_{k=1}^{m} p_{ik} \Psi_k(y;u) \qquad , i \in I, u, y \geq 0 \quad , (2.26) \end{aligned}$$

Η εξίσωση αυτή έχει μοναδική ρίζα $\Psi_i(y;\infty) = 0$ για $i \in I$,$y \in \mathbb{R}^+$και με $\bar{F_i} = 1 - F_i$ συμβολίζεται η δεξιά ουρά της κατανομής του ύψους των απαιτήσεων.

Ολοκληρώνοντας τη σχέση (2.26) από μηδέν έως t ως προς u έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
c_i\Psi_i(y;t) = c_i\Psi_i(y;0) \\
&+ \lambda_i\int_0^t \Psi_i(y;t-u)\overline{F}_i(u)du - \lambda_i\int_0^t \overline{F}_i(u+y)du \\
&+ a_i\int_0^t \left[\Psi_i(y;u) - \sum_{k=1}^{m} p_{ik}\Psi_k(y;u)\right]du\,,\ i \in I, u, y \geq 0 \quad (2.27)
\end{aligned}
$$

Όπου στην περίπτωση του κλασικού μοντέλου (m=1) είναι η γνωστή ανανεωτική σχέση του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας .

Τείνοντας το t στο άπειρο και διαιρώντας με c_i και τα δύο μέλη, η σχέση (2.27) για $y \in \mathbb{R}^+$ και $i \in I$ δίνει:

$$\Psi_i(y;0) = \frac{\lambda_i}{c_i}\int_{\upsilon}^{\infty} \overline{F}_i(u)du - \frac{a_i}{c_i}\int_0^{\infty} [\Psi_i(y;u) - \sum_{k=1}^{m} p_{ik}\Psi_k(y;u)]du$$

όπου στην περίπτωση του κλασικού μοντέλου (m=1) έδινε:

$$\Psi_i(y;0) = \frac{\lambda}{c}\int_y^{\infty} \breve{F}(u)du\ , \qquad y \geq 0$$

Με τη βοήθεια μετασχηματισμών Laplace για το σύστημα των εξισώσεων του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας $\Psi_i(y;u)$ ως προς u ορίζουμε τον μετασχηματισμό Laplace του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας όταν η εξωτερική διαδικασία βρίσκεται στην αρχική κατάσταση i ως

$$\widehat{\Psi}_i(s;y) = \int_0^{\infty} e^{-su}\Psi_i(y;u)du\,, \qquad s \in \mathbb{C}, y \geq 0$$

και τον μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας του ύψους των αποζημιώσεων όταν η εξωτερική διαδικασία βρίσκεται στην αρχική κατάσταση i ως

$$\hat{f}_i(s) = \int_0^{\infty} e^{-su}f_i(u)du\ , \qquad s \in \mathbb{C}$$

Επεκτείνοντας τον ορισμό 1.10 για τον συντελεστή Dickson και Hipp, για δύο αριθμούς r_1 και $r_2 \in \mathbb{C}$ προκύπτει ότι

$$T_{r_1}T_{r_2}f(y) = T_{r_2}T_{r_1}f(y) = \frac{T_{r_1}f(y) - T_{r_2}f(y)}{r_2 - r_1}\ , \qquad r_1 \neq r_2 \in \mathbb{C}\,, y \geq 0$$

Ενώ όταν $r_1 = r_2 = r \in \mathbb{C}$, τότε

$$T_rT_rf(y)=\lim_{s\to r}\frac{T_rf(y)-T_sf(y)}{s-r}=\int_y^{\infty} e^{-r(x-y)}(x-y)f(x)dx\ ,\ y\geq 0$$

Παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace και στα δύο μέλη της σχέσης (2.27) έχουμε:

$$c_i\widehat{\Psi}_i(s;y)=c_i\frac{\Psi_i(y;0)}{s}+\lambda_i\widehat{\Psi}_i(s;y)\left[\frac{1-\widehat{f}_i(s)}{s}\right]$$
$$-\lambda_i\int_0^{\infty} e^{-st}[\int_0^{t}\widehat{F}_i(u+y)du]dt+a_i\,[\frac{\widehat{\Psi}_i(s;y)}{s}$$
$$-\sum_{k=1}^{m}p_{ik}\frac{\widehat{\Psi}_k(s;y)}{s}]\quad (2.28)$$

Ο όρος $\int_0^{\infty} e^{-st}[\int_0^{t}\breve{F}(u+y)du]dt$ με τη χρήση του συντελεστή Dickson και Hipp που αναφέραμε γίνεται

$$\int_0^{\infty} e^{-st}[\int_0^{t}\widehat{F}_i(u+y)du]dt=\frac{1}{s}\int_0^{\infty} e^{-st}\,\widehat{F}_i(t+y)dt$$
$$=\frac{1}{s}[\widehat{F}_i(t+y)\frac{e^{-st}}{-s}]_0^{\infty}-\frac{1}{s}\int_0^{\infty} e^{-st}\,f_i(t+y)dt)$$
$$=\frac{1}{s}\left[0-\frac{\widehat{F}_i(y)}{-s}-\frac{1}{s}\int_y^{\infty} e^{-s(t-y)}\,f_i(t)dt\right)=\frac{1}{s}\left[\frac{T_0f_i(y)-T_sf_i(y)}{s}\right]$$
$$=\frac{T_sT_0f_i(y)}{s}$$

Έτσι η (2.28) διαιρώντας και τα δύο μέλη με c_i, πολλαπλασιάζοντας με s και αντικαθιστώντας τον όρο που αναλύσαμε αμέσως πριν έχουμε:

$$s\widehat{\Psi}_i(s;y)=\Psi_i(y;0)+\frac{\lambda_i}{c_i}\widehat{\Psi}_i(s;y)-\frac{\lambda_i}{c_i}\widehat{\Psi}_i(s;y)\widehat{f}_i(s)-\frac{\lambda_i}{c_i}T_sT_0f_i(y)+\frac{a_i}{c_i}\widehat{\Psi}_i(s;y)$$
$$-\frac{a_i}{c_i}\sum_{k=1}^{m}p_{ik}\frac{\widehat{\Psi}_k(s;y)}{s}]\quad\Leftrightarrow$$

$$\left[s-\frac{\lambda_i+a_i}{c_i}+\frac{\lambda_i}{c_i}\widehat{f}_i(s)\right]\widehat{\Psi}_i(s;y)+\frac{a_i}{c_i}\sum_{k=1}^{m}p_{ik}\frac{\widehat{\Psi}_k(s;y)}{s}]=\Psi_i(y;0)-\frac{\lambda_i}{c_i}T_sT_0f_i(y)$$

Ή σε μορφή πίνακα

$$A(s)\widehat{\Psi}_i(s;y)=B(s;y)\ ,\qquad s\in\mathbb{C}$$

Όπου $A(s)$ η χαρακτηριστική εξίσωση με $det|A(s)|=0\ ,\ s\in\mathbb{C}$ και

$$A(s) = \begin{pmatrix} s - \frac{\lambda_1(1-\hat{f}_i(s)) + a_i}{c_i} & \ddots & s - \frac{\lambda_m(1-\hat{f}_m(s)) + a_m}{c_m} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{a_1}{c_1} & \ddots & \frac{a_m}{c_m} \end{pmatrix} P$$

Και

$$B(s;y) = \left(\Psi_1(y;0)\frac{\lambda_1}{c_1}T_sT_0f_1(y), \dots, \Psi_m(y;0)\frac{\lambda_m}{c_m}T_sT_0f_m(y)\right)$$

Επίσης $\widehat{\Psi}_i(s;y) = \left(\widehat{\Psi}_1(s;y), \dots, \widehat{\Psi}_m(s;y)\right)$ και P η πιθανότητα μετάβασης όπως ορίσθηκε στην αρχή του κεφαλαίου.

Επομένως ο μετασχηματισμός Laplace του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας μπορεί να βρεθεί από τη σχέση

$$\widehat{\Psi}_i(s;y) = \frac{B(s;y)}{A(s)}, \qquad y \geq 0$$

Πιο συγκεκριμένα, για ένα μοντέλο δύο καταστάσεων (m=2) η πιθανότητα μετάβασης για την εξωτερική στοχαστική διαδικασία $\{I(t); t \geq 0\}$ παίρνει τη μορφή

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Που όπως είπαμε μπορεί να μεταφραστεί ως κατάσταση «φυσιολογικού» ή υψηλής συχνότητας» , έναντι «μη φυσιολογικού» ή «χαμηλής συχνότητας».

Η κατανομή πιθανότητας π_i για το μοντέλο δύο καταστάσεων διαμορφώνεται σε

$$\pi_i = \frac{\frac{\lambda_1}{\alpha_1}}{\frac{\lambda_1}{\alpha_1} + \frac{\lambda_2}{\alpha_2}}, \qquad i = 1,2$$

Και η διαδικασία φόρτωσης

$$d = \frac{\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\left(\frac{c_1}{\lambda_1} - \mu_1\right) + \frac{\lambda_2}{\alpha_2}\left(\frac{c_2}{\lambda_2} - \mu_2\right)}{\frac{\lambda_1}{\alpha_1} + \frac{\lambda_2}{\alpha_2}}$$

Τότε ο πίνακας $A(s)$ γίνεται

$$A(s) = \begin{pmatrix} s - \frac{\lambda_1 + a_1}{c_1} + \frac{\lambda_1}{c_1}\hat{f}_1(s) & \frac{a_1}{c_1} \\ \frac{a_2}{c_2} & s - \frac{\lambda_2 + a_2}{c_2} + \frac{\lambda_2}{c_2}\hat{f}_2(s) \end{pmatrix}, \qquad s \in \mathbb{C}$$

Και η χαρακτηριστική εξίσωση $|A(s)| = 0$ παίρνει τη μορφή

$$Q(s) \coloneqq \left[s - \frac{\lambda_1 + a_1}{c_1} + \frac{\lambda_1}{c_1}\widehat{f}_1(s)\right]\left[s - \frac{\lambda_2 + a_2}{c_2} + \frac{\lambda_2}{c_2}\widehat{f}_2(s)\right] = \frac{a_1}{c_1}\frac{a_2}{c_2}$$

Που όπως αναφέραμε και σε προηγούμενη παράγραφο έχει μοναδική θετική ρίζα στο θετικό ημιάξονα.

Ας δούμε τώρα πως διαμορφώνονται οι πιθανότητες ελλείμματος όταν το αρχικό αποθεματικό είναι μηδέν.

Από τη μορφή πινάκων $A(s)\widehat{\Psi}_i(s;y) = B(s;y)$, $s \in \mathbb{C}$, με αντικατάσταση παίρνουμε

$$\begin{bmatrix} s - \dfrac{\lambda_1 + a_1}{c_1} + \dfrac{\lambda_1}{c_1}\widehat{f}_\iota(s) & \dfrac{a_1}{c_1} \\ \dfrac{a_2}{c_2} & s - \dfrac{\lambda_2 + a_2}{c_2} + \dfrac{\lambda_2}{c_2}\widehat{f}_2(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\Psi}_1(s;y) \\ \widehat{\Psi}_{2i}(s;y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_1(y;0) - \frac{\lambda_1}{c_1} T_s T_0 f_1(y) \\ \Psi_2(y;0) - \frac{\lambda_2}{c_2} T_s T_0 f_2(y) \end{bmatrix}$$

Ή ισοδύναμα για $y \geq 0$

$$\begin{cases} \widehat{\Psi}_1(y;s) = \dfrac{\left[\Psi_1(y;0) - \frac{\lambda_1}{c_1}T_sT_0f_1(y)\right]\left[s - \frac{\lambda_2 + a_2}{c_2} + \frac{\lambda_2}{c_2}\widehat{f}_2(s)\right] - \left[\Psi_2(y;0) - \frac{\lambda_2}{c_2}T_sT_0f_2(y)\right]\frac{a_1}{c_1}}{Q(s) - \frac{a_1}{c_1}\frac{a_2}{c_2}} \\ \widehat{\Psi}_2(y;s) = \dfrac{\left[\Psi_2(y;0) - \frac{\lambda_2}{c_2}T_sT_0f_2(y)\right]\left[s - \frac{\lambda_1 + a_1}{c_1} + \frac{\lambda_1}{c_1}\widehat{f}_1(s)\right] - \left[\Psi_1(y;0) - \frac{\lambda_1}{c_1}T_sT_0f_1(y)\right]\frac{a_2}{c_2}}{Q(s) - \frac{a_1}{c_1}\frac{a_2}{c_2}} \end{cases} \tag{2.29}$$

Από τη στιγμή όμως που οι $\Psi_1(y;s)$ και $\Psi_2(y;s)$ είναι πεπερασμένες για κάθε s, με $\Re(s) \geq 0$ και $Q(\rho) = \frac{a_1\alpha_2}{c_1c_2}$, έχουμε ότι οι αριθμητές είναι μηδέν, δηλαδή, όταν $s = \rho$:

$$\left[\Psi_1(y;0) - \frac{\lambda_1}{c_1}T_sT_0f_1(y)\right]\left[\rho - \frac{\lambda_2 + a_2}{c_2} + \frac{\lambda_2}{c_2}\widehat{f}_2(\rho)\right] = \left[\Psi_2(y;0) - \frac{\lambda_2}{c_2}T_sT_0f_2(y)\right]\frac{a_1}{c_1} \quad , \qquad y \geq 0 \tag{2.30}$$

Από τη σχέση

$$\Psi_i(y;0) = \frac{\lambda_i}{c_i}\int_y^\infty \bar{F}_i(u)du - \frac{a_i}{c_i}\int_0^\infty [\Psi_i(y;u) - \sum_{k=1}^m p_{ik}\Psi_k(y;u)]du \tag{2.31}$$

Που είδαμε λίγο πιο πάνω για το μοντέλο δύο καταστάσεων προκύπτει ότι

$$\frac{a_2}{c_2}\Psi_1(y;0) + \frac{a_1}{c_1}\Psi_2(y;0) = \frac{\lambda_1\alpha_2}{c_1c_2}\int_y^\infty \bar{F}_1(u)du + \frac{\lambda_2\alpha_1}{c_1c_2}\int_y^\infty \bar{F}_2(u)du \tag{2.32}$$

Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι η παραπάνω εξίσωση είναι συνεχής υπό την προϋπόθεση ότι και οι δύο αριθμητές της (2.30) ισούνται με μηδέν όταν $s = 0$.

Έτσι λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (2.31) και (2.32) καταλήγουμε στο παρακάτω θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.4 (Theorem 1 [12]): Για ένα μοντέλο κινδύνου της μορφής

$$\boldsymbol{U}(t) = u + P(t) - \sum_{n=1}^{N(t)} X_n, \qquad t \geq 0$$

Όταν $m = 2$ και $d > 0$, οι πιθανότητες του ελλείμματος τη στιγμής της χρεοκοπίας όταν το αρχικό αποθεματικό είναι μηδέν δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{cases} \Psi_1(y;0) = \dfrac{\lambda_1}{c_1} T_\rho T_0 f_1(y) + \dfrac{\frac{\lambda_2 \alpha_1}{c_1 c_2}\left[\int_y^\infty \bar{F}_2(u)du - T_\rho T_0 f_2(y)\right] + \frac{\lambda_1 \alpha_2}{c_1 c_2}\left[\int_y^\infty \bar{F}_1(u)du - T_\rho T_0 f_1(y)\right.}{\rho - \frac{\lambda_2}{c_2}\left[1 - \widehat{f_2}(\rho)\right]} \\ \Psi_2(y;0) = \dfrac{\lambda_2}{c_2} T_\rho T_0 f_2(y) + \dfrac{\frac{\lambda_2 \alpha_1}{c_1 c_2}\left[\int_y^\infty \bar{F}_2(u)du - T_\rho T_0 f_2(y)\right] + \frac{\lambda_1 \alpha_2}{c_1 c_2}\left[\int_y^\infty \bar{F}_1(u)du - T_\rho T_0 f_1(y)\right.}{\rho - \frac{\lambda_1}{c_1}\left[1 - \widehat{f_1}(\rho)\right]} \end{cases}$$

Με $y \geq 0$ και ρ τη μοναδική θετική ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης.

Η ανάλυση των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης

$$Q(s) \coloneqq \left[s - \frac{\lambda_1 + a_1}{c_1} + \frac{\lambda_1}{c_1}\widehat{f}_1(s)\right]\left[s - \frac{\lambda_2 + a_2}{c_2} + \frac{\lambda_2}{c_2}\widehat{f}_2(s)\right] = \frac{a_1}{c_1}\frac{a_2}{c_2}$$

Μπορεί να μας δώσει αναλυτικές εκφράσεις για το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας στην κατάσταση 1 και 2, αντιστρέφοντας τους μετασχηματισμούς Laplace των $\Psi_1(y;u)$ και $\Psi_2(y;u)$ για συγκεκριμένες κατανομές του μεγέθους των απαιτήσεων.

Έτσι, αν συμβολίσουμε με $n_1(s;y)$και $n_2(s;y)$ τους αριθμητές της (2.29), υπό την προϋπόθεση ότι η $s = 0$ και η $s = \rho$ είναι ρίζες των $n_1(s;y)$ και $n_2(s;y)$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned} n_1(s;y) &= s(s-\rho)m_1(s;y) \\ &= s(s-\rho)\frac{\lambda_2}{c_2}\left[\Psi_1(y;0) - \frac{\lambda_1}{c_1}T_\rho T_0 f_1(y)\right] T_s T_\rho T_0 f_2(0) \\ &+ \frac{\lambda_2 \alpha_1}{c_1 c_2} T_s T_\rho T_0 T_0 f_2(y) + \frac{\lambda_1 \alpha_2}{c_1 c_2} T_s T_\rho T_0 T_0 f_1(y) + \frac{\lambda_1}{c_1}[1 \\ &- \frac{\lambda_2}{c_2} T_s T_0 f_2(0)] T_s T_\rho T_0 f_1(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_2(s;y) &= s(s-\rho)m_2(s;y) \\ &= s(s-\rho)\frac{\lambda_1}{c_1}\left[\Psi_2(y;0) - \frac{\lambda_2}{c_2}T_\rho T_0 f_2(y)\right] T_s T_\rho T_0 f_1(0) \\ &+ \frac{\lambda_1 \alpha_2}{c_1 c_2} T_s T_\rho T_0 T_0 f_1(y) + \frac{\lambda_2 \alpha_1}{c_1 c_2} T_s T_\rho T_0 T_0 f_2(y) + \frac{\lambda_2}{c_2}[1 \\ &- \frac{\lambda_1}{c_1} T_s T_0 f_1(y)] T_s T_\rho T_0 f_2(y) \end{aligned}$$

Όπου $T_s T_\rho T_0 f_i(y) = \frac{T_\rho T_0 f_i(y) - T_s T_0 f_i(y)}{s-\rho}$, $i = 1,2$

Έτσι οι μετασχηματισμοί Laplace των ελλειμμάτων τη στιγμή της χρεοκοπίας γίνονται

$$\begin{cases} \widehat{\Psi}_1(y;s) = \dfrac{s(s-\rho)m_1(s;y)}{Q(s) - \frac{a_1}{c_1}\frac{a_2}{c_2}} \\ \widehat{\Psi}_2(y;s) = \dfrac{s(s-\rho)m_2(s;y)}{Q(s) - \frac{a_1}{c_1}\frac{a_2}{c_2}} \end{cases}, \qquad s \in \mathbb{C}, y \geq 0$$

Αν σε αυτό το σημείο υποθέσουμε ότι η κατανομή των f_1, f_2 των αποζημιώσεων ανήκουν στη ρητή K_n οικογένεια κατανομών, $n \in \mathbb{N}^+$. Τότε οι μετασχηματισμοί Laplace αυτών είναι:

$$\hat{f}_1(s) = \frac{p_{k-1}(s)}{p_k(s)} \quad , \quad \hat{f}_2(s) = \frac{q_{l-1}(s)}{q_l(s)} \quad , \qquad k, l \in \mathbb{N}^+$$

Όπου τα $p_{k-1}(s)$ και $q_{l-1}(s)$ είναι πολυώνυμα $\kappa - 1$ και $l - 1$ βαθμού ή λιγότερου αντίστοιχα και τα $p_k(s)$ και $q_l(s)$ είναι πολυώνυμα kκαι l βαθμού αντίστοιχα, με μόνο μία αρνητική ρίζα, ικανοποιώντας τις εξισώσεις $p_{k-1}(0) = p_k(0)$ και $q_{l-1}(0) = q_l(0)$,

Οπότε πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη του παραπάνω συστήματος με $p_k(s)q_l(s)$ προκύπτει

$$\begin{cases} \widehat{\Psi}_1(y;s) = \dfrac{s(s-\rho)m_1(s;y)p_k(s)q_l(s)}{[Q(s) - \frac{a_1}{c_1}\frac{a_2}{c_2}]p_k(s)q_l(s)} \\ \widehat{\Psi}_2(y;s) = \dfrac{s(s-\rho)m_2(s;y)p_k(s)q_l(s)}{[Q(s) - \frac{a_1}{c_1}\frac{a_2}{c_2}]p_k(s)q_l(s)} \end{cases}, \qquad s \in \mathbb{C}, y \geq 0$$

Έτσι, καταλήγουμε στο παρακάτω θεώρημα:

ΘΕΩΡΜΑ 2.5 (Theorem 2 [12]: Στο μοντέλο δύο καταστάσεων (m=2) και για $d > 0$ αν οι κατανομές των αποζημιώσεων ανήκουν στη ρητή οικογένεια τότε οι πιθανότητες του ελλείμματος τη στιγμή χρεοκοπίας δίνονται από τις σχέσεις:

$$\Psi_1(y;u) = \frac{\lambda_2}{c_2}\left[\Psi_1(y;0) - \frac{\lambda_1}{c_1}T_\rho T_0 f_1(y)\right]\sum_{j=1}^{k+l} g_{1j}e^{-R_j u} + \frac{\lambda_1}{c_1}\frac{a_2}{c_2}[\,T_\rho T_0 T_0 f_1(y+u)$$

$$+\sum_{j=1}^{k+l} g_j\, e^{-R_j u} T_\rho T_0 T_0 f_1(y+u)]$$

$$+\frac{\lambda_2}{c_1}\frac{a_1}{c_2}\left[T_\rho T_0 T_0 f_2(y+u) + \sum_{j=1}^{k+l} g_j\, e^{-R_j u} T_\rho T_0 T_0 f_2(y+u)\right]$$

$$+\frac{\lambda_1}{c_1}]T_\rho T_0 f_1(y+u) + \frac{\lambda_1}{c_1}\sum_{j=1}^{k+l} h_{1j}\, e^{-R_j u} T_\rho T_0 T_0 f_1(y+u)$$

$$\Psi_2(y;u) = \frac{\lambda_1}{c_1}\left[\Psi_2(y;0) - \frac{\lambda_2}{c_2}]T_\rho T_0 f_2(y)\right]\sum_{j=1}^{k+l} g_{2j}e^{-R_j u} + \frac{\lambda_1}{c_1}\frac{a_2}{c_2}[\,T_\rho T_0 T_0 f_1(y+u)$$

$$+\sum_{j=1}^{k+l} g_j\, e^{-R_j u} T_\rho T_0 T_0 f_1(y+u)]$$

$$+\frac{\lambda_2}{c_1}\frac{a_1}{c_2}\left[T_\rho T_0 T_0 f_2(y+u) + \sum_{j=1}^{k+l} g_j\, e^{-R_j u} T_\rho T_0 T_0 f_2(y+u)\right]$$

$$+\frac{\lambda_2}{c_2}]T_\rho T_0 f_2(y+u) + \frac{\lambda_2}{c_2}\sum_{j=1}^{k+l} h_{2j}\, e^{-R_j u} T_\rho T_0 T_0 f_2(y+u)$$

Όπου

$g_{1j} = \frac{g_1(-R_j)}{\prod_{v=1}^{k+l}(R_v - R_j)}$, $h_{1j} = \frac{h_1(-R_j)}{\prod_{v=1}^{k+l}(R_v - R_j)}$, $g_j = \frac{p_k(-R_j)q_l(-R_j)}{\prod_{v=1}^{k+l}(R_v - R_j)}$

Και αντίστοιχα για τα g_{2j}, h_{2j} για $j = 1,2,\dots,k+l$

$g_i(s) = \{[T_s T_\rho T_0 f_{\theta_i}(0)]q_l(s)\}p_k(s), i = 1,2$ όπου $\theta_1 = 2$ και $\theta_2 = 1$

$h_i(s) = \left\{1 - \frac{\lambda_{\theta_i}}{c_{\theta_i}}[T_s T_\rho T_0 f_{\theta_i}(0)]\right\} q_l(s)p_k(s),\ i = 1,2$

2.4 Η συνάρτηση των Gerber-Shiu στο Markov modulated μοντέλο

Υποθέτουμε έναν πλήρη χώρο πιθανοτήτων (Ω, F, P)για το μοντέλο χρεοκοπίας με την προσθήκη της μαρκοβιανής εξωτερικής κατάστασης.

Ας υποθέσουμε επίσης $\{U(t)_1\}, \{U(t)_2\}, \dots, \{U(t)_m\}$ είναι m ανεξάρτητες σύνθετες Poisson διαδικασίες κινδύνου που ορίζονται ως:

$$U(t)_i = c_i t - \sum_{k=1}^{N(t)} Z_k^i$$

όπου $c_i > 0$ υποδηλώνει το εισερχόμενο ασφάλιστρο, $\{N(t)\}$ είναι μια διαδικασία Poisson που έχει παράμετρο $\beta_i > 0$ και $\{Z_k^i\}$ είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών οι οποίες ακολουθούν μία κατανομή F_i με μέσο μ_i. Υποθέτουμε ακόμη ότι η πυκνότητα των F_i είναι f_i και ο αντίστοιχος μετασχηματισμός Laplace αυτής $\hat{f}_i(s)$.

Η διαδικασίας πλεονάσματος σε αυτό το σημείο θεωρούμε ότι είναι:

$$U_i = u + \sum_{i=1}^{m} \int_0^t J(I(s) = i)\, dU(s)_i$$

Με $J(A)$ τη δείκτρια συνάρτηση του ενδεχομένου Α και $\{I(t)\,, t \geq 0\}$ μία ομογενή συνεχής αλυσίδα Markov η οποία λαμβάνει τιμές στο πεπερασμένο χώρο $I = \{1,2, \dots, m\}$ με ένταση $\Lambda = (a_{ij})$ η οποία είναι αμείωτη με κατανομή πιθανότητας $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_m)$.

Έτσι, η διαδικασία $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ καθορίζεται από τις παραμέτρους $\Lambda,\ p_i,\ \beta_i,\ \iota = 1, \dots, m$.

Είναι εύκολο να δούμε ότι $\lim_{t \to \infty} \frac{U(t)}{t} = \sum_{i=1}^{n} \pi_i (c_\iota - \lambda_i \mu_i)$. Από τα παραπάνω, η συνθήκη του θετικού αναμενόμενου κέρδους είναι:

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i (c_\iota - \lambda_i \mu_i) \geq 0$$

Ορισμός 2.6: Η αναμενόμενη συνάρτηση ποινής σε ένα μαρκοβιανό μοντέλο χρεοκοπίας προσδιορίζεται από τη σχέση

$$\varphi_i(u) = E_i[e^{-\delta t} w(U(T-), |U(T)|) J(T < \infty) | U(0) = u]$$

για την οποία ισχύουν ότι είχαμε αναφέρει στο πρώτο κεφάλαιο.

Λαμβάνοντας ως δεδομένο ότι $c_i = 1$ για το ασφάλιστρο οι Ng και Yang (2006) [18] δημιούργησαν ένα σύστημα ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων που ικανοποιεί η συνάρτηση των Gerber-Shiu. Έτσι, λαμβάνουμε το ακόλουθο θεώρημα

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.6 (Theorem 3.1 [23]): Έστω

$$w_i(u) = \int_u^{\infty} w(u, z-u) F_i(dz)$$

Και

$$\widehat{w}_i(s) = \int_0^{\infty} e^{-su}\, w_i(u) du$$

Ο μετασχηματισμός Laplace αυτής. Τότε η $\varphi_i(u)$ ικανοποιεί τη σχέση

$$(\beta_i + \delta)\varphi_i(u) - \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\varphi_j(u)$$
$$= c_i {\varphi'}_i(u) + \beta_i [\int_0^u \varphi_i(u-z) \int_u^{\infty} w(u, z-u) F_i(dz) + w_i(u)]$$

και ο μετασχηματισμός Laplace αυτής ικανοποιεί τη σχέση

$$\left[c_i(s) + \beta_i \hat{f}_i(s) - (\beta_i + \delta)\right]\hat{\varphi}_i(s) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\hat{\varphi}_j(u) = c_i\varphi_i(0) - \beta_i\, \widehat{w}_i(s) \quad (2.33)$$

Πριν προχωρήσουμε ορίζουμε τα εξής:

$$P(s) = (c_i s - (f_i + \delta))_{diag} \ \ , F(s) = (\beta_i \hat{f}_i(s))_{diag}$$

$$\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)^T \quad , \qquad c = (c_1, \dots, c_m)^T$$

$$A_\delta(s) = P(s) + F(s) + \Lambda \quad , \qquad \widehat{w}(s) = \ (\widehat{w}_1(s), \dots, \widehat{w}_m(s))^T$$

$$\varphi(0) = (\varphi_1(0), \dots, \varphi_m(0))^T$$

όπου με A^T δηλώνουμε τον αντίστροφο πίνακα ενός πίνακα A. Έτσι, η (2.33) μπορεί να ξαναγραφεί σε μορφή πίνακα ως:

$$A_\delta(s)\hat{\varphi}(s) = c \circ \varphi(0) - \beta \circ \widehat{w}(s)$$

Όπου με " ° " υποδηλώνουμε τον πίνακα A ° B δηλαδή τον (α_{ij}, b_{ij}), των πινάκων $m \times n$ διαστάσεων $A = (\alpha_{ij})$ και $F = (f_{ij})$.

Προκειμένου τώρα να βρούμε μια αρχική τιμή για την συνάρτηση των Gerber-Shiu, εξαιρετικά χρήσιμο είναι το παρακάτω θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.7 (Theorem 3.2 [23]: Αν $\delta > 0$, η $|A_\delta(s)| = 0$ έχει ακριβώς m ρίζες $s_1, \dots, s_m$.

Απόδειξη: Ας θεωρήσουμε ότι C_δ είναι ένας κύκλος με $s_0 = (M_\delta, 0)$ το κέντρο του και $M_\delta = \frac{max_i(\beta_i+\delta-a_{ij})}{c_i}$ η ακτίνα του. Ακόμη,

$$A_\delta(s,u) = C(s) + u(F(s) + \Lambda)$$

Με $\overline{C_\delta}$ συμβολίζουμε τώρα την περιοχή $\{s: Re(s) \geq 0, |s - M_\delta| \geq M_\delta$. Καταρχήν, αποδεικνύουμε ότι για $0 \leq u \leq 1$:

$$|A_\delta(s,u)| \neq 0 \ , \qquad \text{για } s \in \bar{C}_\delta$$

Στο σημείο αυτό αρκεί να δείξουμε ότι ο πίνακας $A_\delta(s,u)$ είναι αυστηρά διαγώνιος για $0 \leq u \leq 1$. Στην ουσία για $s \in \bar{C}_\delta$

$$\begin{aligned}\left|c_i(s) + u\big(\beta_i\hat{f}_i(s) + \alpha_{ii}\big) - (\beta_i + \delta)\right| &\geq \left|c_i(s) - (\beta_i + \delta - u\alpha_{ii}) - u\beta_i\hat{f}_i(s)\right| \\ &\geq |c_i(s) - c_i s_0| - |c_i s_0 - (\beta_i + \delta - u\alpha_{ii})| - \beta_i \geq \delta - u\alpha_{ii} > -u\alpha_{ii} \\ &= u\sum_{j\neq i}\alpha_{ij}\end{aligned}$$

Εν τέλει$|A_\delta(s,u)| \neq 0 \ για\ s\epsilon\bar{C}_\delta$.■

Εφόσον η $|A_\delta(s)| = 0$ έχει m ρίζες με θετικό πραγματικό μέρος μπορούμε να ορίσουμε διανύσματα $\overrightarrow{k_\iota}$, $i = 1, \dots, m$ που να ικανοποιούν την $A_\delta(s_I)^T\overrightarrow{k_\iota} = 0$. Τότε

$$0 = \hat{\varphi}(s_i)^T {A_\delta}^T(s_i)\overrightarrow{k_\iota} = (c \circ \varphi(0) - \beta \circ \widehat{w}(s_i))^T\overrightarrow{k_\iota}$$

Από τα παραπάνω παίρνουμε m γραμμικές εξισώσεις για την $\varphi_i(0)$, $i = 1, \dots, m$

$$\sum_{j=1}^{m} k_{ij}c_j\varphi_j(0) = \sum_{j=1}^{m} k_{ij}\,\beta_j\widehat{w}_j(s_i) \ , \qquad i = 1, \dots, m \qquad (2.34)$$

και καταλήγουμε στην παρακάτω πρόταση.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.1 (Proposition 2.1 [23]): Ας υποθέσουμε ότι $K = \left(k_{ij}\right) \in R^{mxm}$ και ας υποθέσουμε επίσης ότι με K_{li} δηλώνουμε το μικρότερο από τα K ως προς τη γραμμή l και τη στήλη j. Τότε

$$\varphi_i(0) = \frac{1}{c_i|K|}\sum_{l=1}^{m}(-1)^{i+l}|K_{li}|\sum_{j=1}^{m}K_{lj}\beta_j\,\widehat{w}_j(s_l) \ , \qquad i = 1, \dots, m$$

Η εξίσωση (2.34) μπορεί να γραφεί σε μορφή πίνακα:

$$Kc \circ \varphi(0) = (\sum_{j=1}^{m} k_1\,\beta_j\widehat{w}_j(s_1) \quad \ddots \quad \sum_{j=1}^{m} k_{mj}\,\beta_j\widehat{w}_j(s_m))$$

Μια εφαρμογή του κανόνα Cramer

$$\varphi_i(0) = \frac{1}{c_i|K|}\begin{bmatrix} k_{11} \dots k_{1,i-1}, & \sum_{j=1}^{m} k_{1j}\,\beta_j \widehat{w}_j(s_1), & k_{1,i+1} \cdots & k_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{m1} \dots k_{m,i-1}, & \sum_{j=1}^{m} k_{1j}\,\beta_j \widehat{w}_j(s_m) & k_{m,i+1} \cdots & k_{mm} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Επεκτείνοντας τον αριθμητή της i-στήλης, προκύπτει το ζητούμενο αποτέλεσμα.■

Ας συμβολίσουμε με $f_i(y_1, y_2, t|u)$ την από κοινού πυκνότητα των τυχαίων μεταβλητών του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη στιγμή χρεοκοπίας, του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας και του χρόνου χρεοκοπίας $U(T-)\,, |U(T)|\; \kappa\alpha\iota\; T$ με αρχικό αποθεματικό $U(0) = u$ και αρχική κατάσταση της εξωτερικής διαδικασίας $I_0 = i$ δηλαδή:

$$\varphi_i(u) = \int_{y_1=0}^{\infty}\int_{y_2=0}^{\infty}\int_{t=0}^{\infty} w(y_1, y_2) e^{-\delta t} f_i(y_1, y_2, t|u)\, dt\, dy_2\, dy_1$$

Η ελλειμματική από κοινού πυκνότητα πιθανότητας για το χρόνο χρεοκοπίας είναι:

$$f_i(y_1, y_2|u) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-\delta t} f_i(y_1, y_2, t|u)\, dt$$

Κατά συνέπεια από τα παραπάνω, οι πυκνότητες $f_i(y)$ των απαιτήσεων είναι συνεχείς και

$$f_i(y_1, y_2|0) = \frac{1}{c_i|K|}\sum_{l=1}^{m}(-1)^{i+l}|K_{li}|\sum_{j=1}^{m} k_{lj}\beta_j e^{-s_l y_1} f_j(\,y_1 + y_2)\;, \qquad i = 1, \dots, m$$

Επιλέγουμε τη συνάρτηση $w(x_1, x_2)$, με$x_1 = y_1\;, x_2 = y_2$.Τότε,

$$\widehat{w}_i(s) = e^{-s y_1} f_i(y_1 + y_2)$$

Επομένως, υποθέτουμε την ελλειμματική οριακή συνάρτηση πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία ως

$$f_i(y_1|0) = \int_0^{\infty} f_i(y_1, y_2|0)\, d\,y_2 = \frac{1}{c_i|K|}\sum_{l=1}^{m}(-1)^{i+l}|K_{li}|\sum_{j=1}^{m} k_{lj}\beta_j e^{-s_l y_1}(1 - F_j(y_1))$$

Και την οριακή συνάρτηση του πλεονάσματος τη στιγμή χρεοκοπίας ως

$$f_i(y_2|0) = \int_0^{\infty} f_i(y_1, y_2|0)\, d\,y_1 = \frac{1}{c_i|K|}\sum_{l=1}^{m}(-1)^{i+l}|K_{li}|\sum_{j=1}^{m} k_{lj}\beta_j e^{-s_l y_2} f_j(z)\, dz$$

Για $s \in \{s: |A_\delta(s)| = 0\}$ παίρνουμε τον μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης Gerber-Shiu:

$$\hat{\varphi}(s) = A_\delta(s)^{-1}\big(c \circ \varphi(0) - \beta \circ \hat{w}(s)\big)$$

Από τη σχέση μεταξύ των πινάκων που είδαμε προηγουμένως:

$$A_\delta(s)\hat{\varphi}(s) = p \circ \varphi(0) - \beta \circ \hat{w}(s)$$

Όπου η $\varphi(0)$ δίνεται από την σχέση της πρότασης 2.1

$$\varphi_i(0) = \frac{1}{c_i|K|}\sum_{l=1}^{m}(-1)^{i+l}|K_{li}|\sum_{j=1}^{m}K_{lj}\beta_j\,\hat{w}_j(s_l)\ , \qquad i = 1, \dots, m$$

Συγκεκριμένα, για ένα μοντέλο που αποτελείται από δύο μόνο καταστάσεις ($m = 2$), ο πίνακας για την ένταση της εξωτερικής διαδικασίας γίνεται:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -\alpha_2 \end{pmatrix}$$

ενώ ο πίνακας $A_\delta(s)$ γίνεται

$$A_\delta(s) = \begin{pmatrix} c_1 s + \beta_1\hat{f}_1(s) - (\beta_1 + \alpha_1 + \delta) & \alpha_1 \\ \alpha_2 & c_2 s + \beta_2\hat{f}_2(s) - (\beta_2 + \alpha_2 + \delta) \end{pmatrix}$$

Ως αποτέλεσμα η σχέση $A_\delta(s)\hat{\varphi}(s) = p \circ \varphi(0) - \beta \circ \hat{w}(s)$ διαμορφώνεται σε

$$\begin{cases} \big[c_1 s + \beta_1\hat{f}_1(s) - (\beta_1 + \alpha_1 + \delta)\big]\hat{\varphi}_1(s) + \alpha_1\hat{\varphi}_2(s) = c_1\varphi_1(0) - \beta_1\hat{w}_1(s) \\ \big[c_2 s + \beta_2\hat{f}_2(s) - (\beta_2 + \alpha_2 + \delta)\big]\hat{\varphi}_2(s) + \alpha_2\hat{\varphi}_1(s) = c_2\varphi_2(0) - \beta_2\hat{w}_2(s) \end{cases}$$

Ή εναλλακτικά (σχέση 2.35):

$$\begin{cases} \hat{\varphi}_1(s) = \dfrac{\big[c_1\varphi_1(0) - \beta_1\hat{w}_1(s)\big[c_2 s + \beta_2\hat{f}_2(s) - (\beta_2 + \alpha_2 + \delta)\big] - \alpha_1\big[c_2\varphi_2(0) - \beta_2\hat{w}_2(s)\big]}{|A_\delta(s)|} \\ \hat{\varphi}_2(s) = \dfrac{\big[c_2\varphi_2(0) - \beta_2\hat{w}_2(s)\big]\big[c_1 s + \beta_1\hat{f}_1(s) - (\beta_1 + \alpha_1 + \delta)\big] - \alpha_2\big[c_1\varphi_1(0) - \beta_1\hat{w}_1(s)\big]}{|A_\delta(s)|} \end{cases}$$

Όπως ξέρουμε ήδη, η $|A_\delta(s)| = 0$ έχει δύο θετικές ρίζες έστω τις r_1 και r_2 .Όταν $s = r_1, r_2$ και οι δύο αριθμητές της πιο πάνω σχέσης μηδενίζονται επομένως

$$\begin{cases} c_1\varphi_1(0) - \beta_1\hat{w}_1(s_1)\big[c_2 s_1 + \beta_2\hat{f}_2(s_1) - (\beta_2 + \alpha_2 + \delta)\big] = \alpha_1\big[c_2\varphi_2(0) - \beta_2\hat{w}_2(s_1)\big] \\ c_2\varphi_2(0) - \beta_2\hat{w}_2(s_2)\big[c_2 s_2 + \beta_1\hat{f}_1(s_2) - (\beta_1 + \alpha_1 + \delta)\big] = \alpha_2\big[c_1\varphi_1(0) - \beta_1\hat{w}_1(s_2)\big] \end{cases}$$

Με τη βοήθεια του συντελεστή Dickson-Hipp που αναφέραμε σε προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι ισχύουν οι εκφράσεις $T_r f(0) = \hat{f}(r)$ και

$$T_{r_1}T_{r_2}f(y) = T_{r_2}T_{r_1}f(y) = \frac{T_{r_1}f(y) - T_{r_2}f(y)}{r_2 - r_1} \quad , \qquad r_1 \neq r_2 \ \in \mathbb{C}\,, y \geq 0$$

Άρα, για ένα μοντέλο δύο καταστάσεων η συνάρτηση των Gerber-Shiu όταν το αρχικό αποθεματικό είναι μηδέν δίνεται από τις σχέσεις

$$\begin{cases} \varphi_1(0) = \dfrac{t_1(s_1)}{r_1[\beta_2 T_{s_1}T_{s_2}f_2(0) - r_2]} \\ \varphi_2(0) = \dfrac{t_2(s_2)}{r_2[\beta_1 T_{s_1}T_{s_2}f_1(0) - r_1]} \end{cases} \qquad (2.36)$$

όπου

$$\begin{aligned} t_1(s_1) = \beta_1\big[c_1 s T_s T_{s_2} w_1(0) - c_1 \widehat{w}_1(s_2) - (\beta_1 + a_1 + \delta) T_s T_{s_2} w_1(0)\big] \\ + \beta_1\beta_2\big[\hat{f}_1(s) T_s T_{s_2} w_1(0) + \widehat{w}_1(s_2) T_s T_{s_2} f_1(0)\big] - a_1\beta_1 T_s T_{s_2} w_1(0) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} t_2(s_2) = \beta_2\big[c_2 s T_s T_{s_2} w_2(0) - c_2 \widehat{w}_2(s_2) - (\beta_2 + a_2 + \delta) T_s T_{s_2} w_2(0)\big] \\ + \beta_1\beta_2\big[\hat{f}_2(s) T_s T_{s_2} w_2(0) + \widehat{w}_2(s_2) T_s T_{s_2} f_2(0)\big] - a_2\beta_2 T_s T_{s_2} w_2(0) \end{aligned}$$

Ας δούμε τώρα τη συμπεριφορά της συνάρτησης των Gerber-Shiu όταν η κατανομή των αποζημιώσεων ανήκει στην $K_n, n \in N^+$ οικογένεια κατανομών, δηλαδή έχουν πυκνότητα της μορφής

$$\hat{f}_1(s) = \frac{p_{k-1}(s)}{p_k(s)} \quad , \quad \hat{f}_2(s) = \frac{q_{l-1}(s)}{q_l(s)} \,, \qquad k, l \ \in \ \mathbb{N}^+$$

Όπου τα $p_{k-1}(s)$ και $q_{l-1}(s)$ είναι πολυώνυμα $\kappa - 1$ και $l - 1$ βαθμού ή λιγότερου αντίστοιχα και τα $p_k(s)$ και $q_l(s)$ είναι πολυώνυμα kκαι l βαθμού αντίστοιχα, με μόνο αρνητικές ρίζες, ικανοποιώντας τις εξισώσεις $p_{k-1}(0) = p_k(0)$ και $q_{l-1}(0) = q_l(0)$,

Αυτή η γενική κλάση κατανομών συμπεριλαμβάνει σαν ειδικές περιπτώσεις τις: Erlang, Coxian, Phase-typeκατανομές καθώς και μίξεις αυτών.

Έτσι λοιπόν η $|A_\delta(s)|$ μπορεί να γραφεί στη μορφήτης σχέσης (2.35) :

$$|A_\delta(s)| = \frac{[\beta_1 p_{k-1} + (c_1 s - \beta_1 - a_1 - \delta) p_k(s)]\big[\beta_2 q_{l-1} + (c_2 s - \beta_2 - a_2 - \delta) q_l(s)\big] - a_1 a_2 p_k(s) q_l(s)}{p_k(s) q_l(s)}$$

Χάριν απλότητας υποδηλώνουμε με $\rho_1\rho_2 D_{k+l+2}$ τον αριθμητή της (2.35) , που είναι πολυώνυμο $k + l + 2$ βαθμού. Δηλαδή η εξίσωση $D_{k+l+2} = 0$ έχει $k + l + 2$ το πλήθος ρίζες. Προφανώς δύο εξ αυτών είναι οι r_1, r_2. Όλες οι παραπάνω ρίζες μπορούν να γραφούν ως

$$D_{k+l+2}(s) = (s-r_1)(s-r_2)\prod_{i=1}^{k+l}(s+R_i) = (s-r_1)(s-r_2)D_{k+l}(s)$$

Επισημαίνεται ότι όλα τα R_i έχουν θετικό πραγματικό μέρος από τη στιγμή που είναι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης $|A_\delta(s)| = 0$.

Έτσι με βάση το θεώρημα 2.6 η χαρακτηριστική εξίσωση παίρνει τη μορφή :

$$|A_\delta(s)| = \frac{c_1c_2(s-r_1)(s-r_2)\prod_{i=1}^{k+l}(s+R_i)}{p_k(s)q_l(s)}$$

Ας ορίσουμε ακόμη την $h_{k+l-1} = p_k(s)q_l(s) - \prod_{i=1}^{k+l}(s+R_i)$, η οποία είναι πολυώνυμο $k+l-1$ βαθμού. Τότε διαιρώντας και τα δύο μέλη με $\prod_{i=1}^{k+l}(s+R_i)$ παίρνουμε

$$\frac{h_{k+l-1}}{\prod_{i=1}^{k+l}(s+R_i)} = \frac{p_k(s)q_l(s)}{\prod_{i=1}^{k+l}(s+R_i)} - 1 \Leftrightarrow \frac{p_k(s)q_l(s)}{\prod_{i=1}^{k+l}(s+R_i)} = 1 + \sum_{i=1}^{k+l}\frac{h_i}{(s+R_i)}$$

Όπου με h_i εν συντομία δηλώνουμε ότι $\frac{h_{k+l-1}(-R_i)}{\prod_{i=1}^{k+l}(R_j-R_i)}$ (2.37). Καταλήγουμε λοιπόν στο εξής θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.8 (Theorem 4.1 [23]):Στο μοντέλο δύο καταστάσεων όταν η κατανομή του μεγέθους των απαιτήσεων ανήκει στην K_n οικογένεια και η $D_{k+l+2}(s)$ έχει $k+l$ το πλήθος ρίζες, έστω $-r_1, \dots, -r_{k+l}$ με αρνητικά πραγματικά μέρη , τότε η συνάρτηση των Gerber-Shiu δίνεται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned}\varphi_1(u) = \beta_1c_2T_{s_2}w_1(u) &- \beta_1\beta_2T_{s_1}f_2T_{s_2}w_1(u) \\ &+ \beta_1\left(\beta_2 + a_2 + \delta - c_2s_1 - \beta_2\hat{f}_2(s_1)\right)T_{s_1}T_{s_2}w_1(u) \\ &- \beta_2\left(\beta_1\widehat{w}_1(s_2) - c_1\varphi_1(0)T_{s_1}T_{s_2}f_2(u) + a_1\beta_2T_{s_1}T_{s_2}w_2(u)\right]\Bigg[1 \\ &+ \sum_{i=1}^{k+l}h_i\,e^{-R_i(u)}\Bigg]/c_1c_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2(u) = \beta_2c_1T_{s_2}w_2(u) &- \beta_1\beta_2T_{s_1}f_2T_{s_2}w_2(u) \\ &+ \beta_2\left(\beta_1 + a_1 + \delta - c_1s_1 - \beta_2\hat{f}_1(s_1)\right)T_{s_1}T_{s_2}w_2(u) \\ &- \beta_1\left(\beta_2\widehat{w}_2(s_2) - c_2\varphi_2(0)T_{s_1}T_{s_2}f_1(u) + a_2\beta_1T_{s_1}T_{s_2}w_1(u)\right]\Bigg[1 \\ &+ \sum_{i=1}^{k+l}h_i\,e^{-R_i(u)}\Bigg]/c_1c_2\end{aligned}$$

Με τα $\varphi_1(0), \varphi_2(0)$ και h_i να δίνονται από τις σχέσεις (2.36) και (2.37)

2.5 Αριθμητικά παραδείγματα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Έστω ένα μοντέλο που αποτελείται από δύο μόνο καταστάσεις. Θα ξεκινήσουμε με την απλή περίπτωση όπου η κάθε μια εκ των δύο κατανομών του ύψους των απαιτήσεων ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παραμέτρους α , β και μέσους $\mu_1 = \frac{1}{\alpha}$ και $\mu_2 = \frac{1}{\beta}$ αντίστοιχα.

Έτσι, υποθέτουμε ότι

$$f_1(x) = \alpha e^{-\alpha x}\ ,\ \ \alpha, x \geq 0$$

$$f_2(x) = \beta e^{-\beta x}\ ,\ \ \beta, x \geq 0$$

Οι μετασχηματισμοί Laplace για τις δύο πυκνότητες είναι:

$$\widehat{f_1}(s) = \frac{\alpha}{s+\alpha}\ \ ,\widehat{f_2}(s) = \frac{\beta}{s+\beta}$$

που σημαίνει ότι για κατανομές που ανήκουν στην ρητή οικογένεια , δηλαδή για $\hat{f_1}(s) = \frac{p_{k-1}(s)}{p_k(s)}$, $\hat{f_2}(s) = \frac{q_{l-1}(s)}{q_l(s)}$, $k, l \in \mathbb{N}^+$,ισχύει ότι ι$p_0(s) = \alpha$ και

$p_1(s) = s + \alpha$, καθώς επίσης και $q_0(s) = \beta$, $q_1(s) = s + \beta$.

Για να βρούμε τις πιθανότητες μη χρεοκοπίας όπως είδαμε στην παράγραφο 2.3 θα πρέπει να ακολουθήσουμε τα εξής βήματα :

Βήμα 1ο: Εύρεση των πιθανοτήτων μη χρεοκοπίας όταν το αρχικό αποθεματικό είναι μηδέν. Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.17) έχουμε ότι

$$\delta_1(0) = \frac{\frac{\alpha_1}{c_1}\left(1 - \frac{\lambda_2}{\beta c_2}\right) + \frac{\alpha_2}{c_2}(1 - \frac{\lambda_1}{\alpha c_1})}{\rho - \frac{\lambda_2}{c_2}[1 - \frac{\beta}{\rho+\beta}]}$$

$$\delta_2(0) = \frac{\frac{\alpha_1}{c_1}\left(1 - \frac{\lambda_2}{\beta c_2}\right) + \frac{\alpha_2}{c_2}(1 - \frac{\lambda_1}{\alpha c_1})}{\rho - \frac{\lambda_1}{c_1}[1 - \frac{\alpha}{\rho+\alpha}]}$$

Όπου ρ είναι η θετική ρίζα της εξίσωσης:

$$Q(s) = \left[s - \frac{\lambda_1 + \alpha_1}{c_1} + \frac{\lambda_1}{c_1}\frac{\alpha}{s+\alpha}\right]\left[s - \frac{\lambda_2 + \alpha_2}{c_2} + \frac{\lambda_2}{c_2}\frac{\beta}{s+\beta}\right] = \frac{\alpha_1\alpha_2}{c_1c_2}$$

Το οποίο είναι ισοδύναμο με την εξίσωση $D_4(s) = 0$, όπου $k + l + 2 = 1 + 1 + 2 = 4$. Έτσι,

$$D_4(s) = \left[\left(s - \frac{\lambda_1 + \alpha_1}{c_1}\right)(s+\alpha) + \frac{\lambda_1}{c_1}\alpha\right]\left[\left(s - \frac{\lambda_2 + \alpha_2}{c_2}\right)(s+\beta) + \frac{\lambda_2}{c_2}\beta\right]$$
$$- \frac{\alpha_1\alpha_2}{c_1c_2}(s+\alpha)(s+\beta)$$
$$= s^4 + \left(\alpha + \beta - \frac{\lambda_1 + \alpha_1}{c_1} - \frac{\lambda_2 + \alpha_2}{c_2}\right)s^3$$
$$+ \left[\left(\alpha - \frac{\lambda_1 + \alpha_1}{c_1}\right)\left(\beta - \frac{\lambda_2 + \alpha_2}{c_2}\right) - \frac{\alpha_1}{c_1}\alpha - \frac{\alpha_2}{c_2}\beta - \frac{\alpha_1\alpha_2}{c_1c_2}\right]s^2$$
$$- \left[\frac{\alpha_1}{c_1}\alpha\left(\beta - \frac{\lambda_2}{c_2}\right) + \frac{\alpha_2}{c_2}\beta\left(\alpha - \frac{\lambda_1}{c_1}\right)\right]s = 0$$

Η $D_4(s) = 0$ έχει 4 ρίζες τις $s = 0$, $s = \rho$, $s = -R_1$ $\,και\,$ $s = -R_2$.

Βήμα 2ο: Εύρεση των εξισώσεων $g_2(s)$ και $h_2(s)$:

$$g_2(s) = (s+\alpha)\{(s+\beta) - \frac{\lambda_2}{c_2}(\frac{\beta}{\beta+\rho})\}$$

$$h_2(s) = (s+\beta)\{(s+\alpha) - \frac{\lambda_1}{c_1}(\frac{\alpha}{\alpha+\rho})\}$$

Επισημαίνουμε ότι έγινε χρήση των σχέσεων

$$g_{k+l}(s) = p_k(s)\left\{q_l(s) + \frac{\lambda_2}{c_2}\left(q_{l-1}[s,\rho] - \frac{q_{l-1}(\rho)}{q_l(\rho)}q_l[s,\rho]\right)\right\}$$

$$h_{k+l}(s) = q_l(s)\{p_k(s) + \frac{\lambda_1}{c_1}\left(p_{k-1}[s,\rho] - \frac{p_{k-1}(\rho)}{p_k(\rho)}p_k[s,\rho]\right)\}$$

Όπου $q_l[s,\rho] = \frac{q_l(s)-q_l(\rho)}{s-\rho} = \frac{(\beta+s)-(\beta+\rho)}{s-\rho} = 1$ και

$q_{l-1}[s,\rho] = \frac{q_{l-1}(s)-q_{l-1}(\rho)}{s-\rho} = \frac{\beta-\beta}{s-\rho} = 0$ και αντίστοιχα για τα $p_l[s,\rho]$, $p_{l-1}[s,\rho]$

Επιπλέον,

$$g_1 = \frac{(R_1 - a)\{(\beta - R_1) - \frac{\lambda_2}{c_2}(\frac{\beta}{\beta+\rho})\}}{R_1(R_2 - R_1)} \quad , g_2 = \frac{(R_2 - \alpha)\{(\beta - R_2) - \frac{\lambda_2}{c_2}(\frac{\beta}{\beta+\rho})\}}{R_2(R_1 - R_2)}$$

$$h_1 = \frac{(R_1 - \beta)\{(\alpha - R_1) - \frac{\lambda_1}{c_1}(\frac{\alpha}{\alpha+\rho})\}}{R_1(R_2 - R_1)} \quad , h_2 = \frac{(R_2 - \beta)\{(\alpha - R_2) - \frac{\lambda_1}{c_1}(\frac{\alpha}{\alpha+\rho})\}}{R_2(R_1 - R_2)}$$

Βήμα 3ο :Όπως προκύπτει από τα ανωτέρω οι πιθανότητες μη χρεοκοπίας είναι

$$\begin{cases}\delta_1(u) = 1 + \delta_1(0)[g_1 e^{-R_1(u)} + g_2 e^{-R_2(u)}] \\ \delta_2(u) = 1 + \delta_2(0)[h_1 e^{-R_1(u)} + h_2 e^{-R_2(u)}]\end{cases} , \quad u \geq 0$$

Με τις $\delta_1(0)$ και $\delta_2(0)$ να δίνονται από τις προαναφερθείσες σχέσεις.Αν τώρα θέσουμε $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, c_1 = c_2 = c$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ και $\gamma = \frac{1}{\mu} - \frac{\lambda}{c}$ τότε είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η $-R_1 = -\gamma$ είναι μία ρίζα της εξίσωσης $D_4(s)$ που είδαμε πιο πάνω, ενώ η ρ και η $-R_2$ είναι οι άλλες δύο ρίζες της εξίσωσης

$$s^2 + \left(\gamma - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{c}\right)s - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{c\mu} = 0$$

Από τα παραπάνω μπορεί να εξαχθεί ότι $\delta_1(0)g_1 = \delta_2(0)h_1 = -\frac{\lambda\mu}{c}$ και $g_2 = h_2 = 0$ γεγονός που μας υποδεικνύει ότι

$$\delta_1(u) = \delta_2(u) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c} e^{-\gamma u}, \quad u \geq 0$$

Όπου οι πανομοιότυπες εξισώσεις $\delta_1(u)$, $\delta_2(u)$ είναι οι πιθανότητες μη χρεοκοπίας του κλασικού Poisson μοντέλου χρεοκοπίας με ύψη ζημιών εκθετικά κατανεμημένα, όπως και αναμένουμε.

Αν τώρα θελήσουμε να βρούμε το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας στην περίπτωση των δύο εκθετικών κατανομών χρησιμοποιούμε τις σχέσεις

$$\begin{cases}\Psi_1(y;0) = \frac{\lambda_1}{c_1} T_\rho T_0 f_1(y) + \frac{\frac{\lambda_2\alpha_1}{c_1c_2}[\int_y^\infty \bar{F}_2(u)du - T_\rho T_0 f_2(y)] + \frac{\lambda_1\alpha_2}{c_1c_2}[\int_y^\infty \bar{F}_1(u)du - T_\rho T_0 f_1(y)}{\rho - \frac{\lambda_2}{c_2}\left[1 - \hat{f}_2(\rho)\right]} \\ \Psi_2(y;0) = \frac{\lambda_2}{c_2} T_\rho T_0 f_2(y) + \frac{\frac{\lambda_2\alpha_1}{c_1c_2}[\int_y^\infty \bar{F}_2(u)du - T_\rho T_0 f_2(y)] + \frac{\lambda_1\alpha_2}{c_1c_2}[\int_y^\infty \bar{F}_1(u)du - T_\rho T_0 f_1(y)}{\rho - \frac{\lambda_1}{c_1}\left[1 - \hat{f}_1(\rho)\right]}\end{cases}$$

Στις οποίες καταλήξαμε στην παράγραφο 2.3 και κάνοντας τις απαραίτητες αντικαταστάσεις σύμφωνα με τις κατανομές του παραδείγματος μας έχουμε:

$$\Psi_1(y;0) = \frac{\lambda_1}{c_1}\frac{1}{(\rho+\alpha)} e^{-y\alpha} + \frac{\frac{\lambda_2\alpha_1}{c_1c_2}\frac{1}{\beta(\rho+\beta)} e^{-y\beta} + \frac{\lambda_1\alpha_2}{c_1c_2}\frac{1}{\alpha(\rho+\alpha)} e^{-y\alpha}}{1 - \frac{\lambda_2}{c_2}\frac{1}{(\rho+\beta)}}, \qquad y \geq 0$$

$$\Psi_2(y;0) = \frac{\lambda_2}{c_2}\frac{1}{(\rho+\beta)}e^{-y\beta} + \frac{\frac{\lambda_1\alpha_2}{c_1c_2}\frac{1}{\alpha(\rho+\alpha)}e^{-y\alpha} + \frac{\lambda_2\alpha_1}{c_1c_2}\frac{1}{\beta(\rho+\beta)}e^{-y\beta}}{1-\frac{\lambda_1}{c_1}\frac{1}{(\rho+\alpha)}}, \qquad y \geq 0$$

Όπου όπως και παραπάνω με ρ συμβολίζεται η ρίζα της εξίσωσης $Q(s)$.

Έτσι έχουμε $g_1 = \frac{s+a}{\rho+\beta}$, $g_2 = \frac{s+\beta}{\rho+\alpha}$, $h_1 = \left(s+\beta-\frac{\lambda_2}{c_2}\right)(s+a)$,

$h_2 = \left(s+a-\frac{\lambda_1}{c_1}\right)(s+\beta)$. Με $g_{1j} = \frac{-R_j+a}{(-1)^j(R_1-R_2)(\rho+\beta)}$, $g_{2j} = \frac{-R_j+\beta}{(-1)^j(R_1-R_2)(\rho+\alpha)}$

$h_{1j} = \frac{\left(-R_j+\beta-\frac{\lambda_2}{c_2}\right)(-R_j+\alpha)}{(-1)^j(R_1-R_2)}$, $h_{2j} = \frac{\left(-R_j+a-\frac{\lambda_1}{c_1}\right)(-R_j+\beta)}{(-1)^j(R_1-R_2)}$,$g_j = \frac{(-R_j+\beta)(-R_j+\alpha)}{(-1)^j(R_1-R_2)}$, $j = 1,2$

Άρα οι πιθανότητες που μας δίνουν το έλλειμμα κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας για το μοντέλο δύο καταστάσεων είναι

$$\begin{aligned}\Psi_1(y;u) = {} & \left[\Psi_1(y;0) - \frac{\lambda_1}{c_1}\frac{1}{(\rho+a)}e^{-ay}\right]\sum_{j=1}^{2} g_{1j}e^{-R_ju} + \frac{\lambda_1}{c_1}\frac{1}{(\rho+\alpha)}e^{-(y+u)a} \\ & + \frac{\lambda_1}{c_1}\frac{1}{(\rho+a)}e^{-ay}\sum_{j=1}^{2}\left[h_{1j} + \frac{a_2}{\alpha c_2}g_j\right]\frac{e^{-\alpha u} - e^{-uR_j}}{(R_j - a)} \\ & + \frac{\lambda_1}{c_1}\frac{a_2}{c_2}\frac{1}{\alpha(\rho+\alpha)}e^{-(y+u)a} + \frac{\lambda_2 a_1}{c_1c_2}\frac{1}{\beta(\rho+\beta)}e^{-(y+u)\beta} \\ & + \frac{e^{-\beta y}}{\beta(\rho+\beta)}\sum_{j=1}^{2}\frac{g_j\left[e^{-\beta u} - e^{-R_ju}\right]}{(R_j-\beta)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_2(y;u) = {} & \left[\Psi_2(y;0) - \frac{\lambda_2}{c_2}\frac{1}{(\rho+\beta)}e^{-\beta y}\right]\sum_{j=1}^{2} g_{2j}e^{-R_ju} + \frac{\lambda_1}{c_2}\frac{1}{(\rho+\beta)}e^{-(y+u)\beta} \\ & + \frac{\lambda_2}{c_2}\frac{1}{(\rho+\beta)}e^{-\beta y}\sum_{j=1}^{2}\left[h_{2j} + \frac{a_1}{\beta c_1}g_j\right]\frac{e^{-\beta u} - e^{-uR_j}}{(R_j - \beta)} \\ & + \frac{\lambda_2}{c_1}\frac{a_1}{c_2}\frac{1}{\beta(\rho+\beta)}e^{-(y+u)\beta} + \frac{\lambda_1 a_2}{c_1c_2}\frac{1}{\alpha(\rho+\alpha)}e^{-(y+u)\alpha} \\ & + \frac{e^{-\alpha y}}{\alpha(\rho+\alpha)}\sum_{j=1}^{2}\frac{g_j\left[e^{-\alpha u} - e^{-R_ju}\right]}{(R_j-\alpha)}\end{aligned}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Στην περίπτωση όπου τα ύψη ζημιών ακολουθούν την κατανομή Erlang(2,1/β) και μία Εκθετική(α) κατανομή οι πιθανότητες μη χρεοκοπίας δίδονται ως εξής:

Έχουμε $f_1(x) = \frac{x}{\beta^2} e^{-\frac{x}{\beta}}$ και $f_2(x) = \alpha e^{-\alpha x},\ x \geq 0$,με $\mu_1 = 2\beta$ και $\mu_2 = \frac{1}{a}$

Ο μετασχηματισμός Laplace των $f_1(x)$ και $f_2(x)$ είναι

$$\hat{f}_1(s) = \frac{p_1(s)}{p_2(s)} = \frac{\frac{1}{\beta^2}}{(s+\frac{1}{\beta})^2} \text{ και } \hat{f}_2(s) = \frac{q_0(s)}{q_1(s)} = \frac{a}{s+a}$$

Τότε η εξίσωση

$$\left[\left(s - \frac{\lambda_1 + \alpha_1}{c_1}\right) p_k(s) + \frac{\lambda_1}{c_1} p_{k-1}(s)\right]\left[\left(s - \frac{\lambda_2 + \alpha_2}{c_2}\right) q_l(s) + \frac{\lambda_2}{c_2} q_{l-1}(s)\right] - \frac{a_1 a_2}{c_1 c_2} p_k(s) q_l(s) = 0$$

Αναδιαμορφώνεται ως

$$D_5(s) = \left[\left(s - \frac{\lambda_1 + \alpha_1}{c_1}\right)(s + \frac{1}{\beta})^2 + \frac{\lambda_1}{c_1 \beta^2}\right]\left[\left(s - \frac{\lambda_2 + \alpha_2}{c_2}\right)(s+a) + \frac{\lambda_2}{c_2}\alpha\right] - \frac{a_1 a_2}{c_1 c_2}\left(s + \frac{1}{\beta}\right)^2 (s+a) = 0$$

και έχει ακριβώς 5 ρίζες τις: $0,\ \rho, -R_i\ ,\ i = 1,2,3$

Τότε, έχουμε

$$\begin{cases} \delta_1(0) = \dfrac{\frac{\alpha_1}{c_1}\left(1 - \frac{\lambda_2}{\alpha c_2}\right) + \frac{\alpha_2}{c_2}\left(1 - \frac{\lambda_1 2\beta}{c_1}\right)}{\rho - \frac{\lambda_2}{c_2}[1 - \frac{a}{a+\rho}]} \\ \delta_2(0) = \dfrac{\frac{\alpha_1}{c_1}\left(1 - \frac{\lambda_2}{\alpha c_2}\right) + \frac{\alpha_2}{c_2}\left(1 - \frac{\lambda_1 2\beta}{c_1}\right)}{\rho - \frac{\lambda_1}{c_1}[1 - \frac{\frac{1}{\beta^2}}{(\rho+\frac{1}{\beta})^2}]} \end{cases}$$

Και οι μετασχηματισμοί Laplace

$$\hat{\delta}_1(s) = \frac{\delta_1(0)(s-\rho)\left(s + \frac{1}{\beta}\right)^2 \{s + a + \frac{\lambda_2}{c_2(\rho+a)}\left[\frac{\alpha(\rho+a) - \alpha(s+a)}{s-\rho}\right]\}}{(a+s)(s+\frac{1}{\beta})^2[Q(s) - \frac{a_1 a_2}{c_1 c_2}]}$$

$$\hat{\delta}_2(s) = \frac{\delta_2(0)(s-\rho)(s+a)\{\left(s+\frac{1}{\beta}\right)^2 + \frac{\lambda_1}{c_1\left(\rho+\frac{1}{\beta}\right)^2}[\frac{\frac{1}{\beta^2}\left(\rho+\frac{1}{\beta}\right)^2 - \frac{1}{\beta^2}\left(s+\frac{1}{\beta}\right)^2}{s-\rho}]}{(a+s)(s+\frac{1}{\beta})^2[Q(s)-\frac{a_1a_2}{c_1c_2}]}$$

Επίσης,

$$g_3(s) = (s+\frac{1}{\beta})^2\{(s+\alpha) - \frac{\lambda_2}{c_2}(\frac{\alpha}{\alpha+\rho})\}$$

$$h_3(s) = (s+\alpha)\{(s+\frac{1}{\beta})^2 - \frac{\lambda_1}{c_1}\frac{\frac{1}{\beta^2}}{\left(\rho+\frac{1}{\beta}\right)^2}(s+\rho+\frac{2}{\beta})\}$$

Άρα,

$$g_1 = \frac{-(R_1+\frac{1}{\beta})^2\left\{(R_1+\alpha)-\frac{\lambda_2}{c_2}\left(\frac{\alpha}{\alpha+\rho}\right)\right\}}{R_1\prod_{j=1,}^{3}(R_j-R_i)} \quad , \quad g_2 = \frac{-(R_2+\frac{1}{\beta})^2\left\{(R_2+\alpha)-\frac{\lambda_2}{c_2}\left(\frac{\alpha}{\alpha+\rho}\right)\right\}}{R_2\prod_{j=1,}^{3}(R_j-R_i)}$$

$$g_3 = \frac{-(R_3+\frac{1}{\beta})^2\{(R_3+\alpha)-\frac{\lambda_2}{c_2}(\frac{\alpha}{\alpha+\rho})\}}{R_3\prod_{j=1,}^{3}(R_j-R_i)} \quad , \quad h_1 = \frac{-(R_1+\alpha)\{(R_1+\frac{1}{\beta})^2-\frac{\lambda_1}{c_1}\frac{\frac{1}{\beta^2}}{\left(\rho+\frac{1}{\beta}\right)^2}(R_1+\rho+\frac{2}{\beta})\}}{R_1\prod_{j=1,}^{3}(R_j-R_i)}$$

$$h_2 = \frac{-(R_1+\alpha)\{(R_2+\frac{1}{\beta})^2-\frac{\lambda_1}{c_1}\frac{\frac{1}{\beta^2}}{\left(\rho+\frac{1}{\beta}\right)^2}(R_2+\rho+\frac{2}{\beta})\}}{R_1\prod_{j=1,}^{3}(R_j-R_i)} \, , \; h_3 = \frac{-(R_3+\alpha)\{(R_3+\frac{1}{\beta})^2-\frac{\lambda_1}{c_1}\frac{\frac{1}{\beta^2}}{\left(\rho+\frac{1}{\beta}\right)^2}(R_3+\rho+\frac{2}{\beta})\}}{R_3\prod_{j=1,}^{3}(R_j-R_i)}$$

Οι πιθανότητες μη χρεοκοπίας είναι

$$\begin{cases} \delta_1(u) = 1 + \delta_1(0)[g_1e^{-R_1(u)} + g_2e^{-R_2(u)} + g_3e^{-R_3(u)}] \\ \delta_2(u) = 1 + \delta_2(0)[h_1e^{-R_1(u)} + h_2e^{-R_2(u)} + h_3e^{-R_3(u)}] \end{cases}$$

Αν τώρα θελήσουμε να βρούμε το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας στην περίπτωση μίας Erlang και μίας εκθετικής κατανομής ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

$$\begin{cases} \Psi_1(y;0) = \dfrac{\lambda_1}{c_1} T_\rho T_0 f_1(y) + \dfrac{\frac{\lambda_2 \alpha_1}{c_1 c_2}\left[\int_y^\infty \bar{F}_2(u)du - T_\rho T_0 f_2(y)\right] + \frac{\lambda_1 \alpha_2}{c_1 c_2}\left[\int_y^\infty \bar{F}_1(u)du - T_\rho T_0 f_1(y)\right]}{\rho - \frac{\lambda_2}{c_2}\left[1 - \widehat{f_2}(\rho)\right]} \\ \Psi_2(y;0) = \dfrac{\lambda_2}{c_2} T_\rho T_0 f_2(y) + \dfrac{\frac{\lambda_2 \alpha_1}{c_1 c_2}\left[\int_y^\infty \bar{F}_2(u)du - T_\rho T_0 f_2(y)\right] + \frac{\lambda_1 \alpha_2}{c_1 c_2}\left[\int_y^\infty \bar{F}_1(u)du - T_\rho T_0 f_1(y)\right]}{\rho - \frac{\lambda_1}{c_1}\left[1 - \widehat{f_1}(\rho)\right]} \end{cases}$$

Στις οποίες καταλήξαμε στην παράγραφο 2.3 και κάνοντας τις απαραίτητες αντικαταστάσεις σύμφωνα με τις κατανομές του παραδείγματος μας έχουμε:

$$\Psi_1(y;0) = \frac{\lambda_1}{c_1} \frac{(\frac{y}{\beta}+1)e^{-\frac{y}{\beta}}}{\rho} + \frac{\left[y\left(s+\frac{1}{\beta}\right)+1\right]e^{-\frac{y}{\beta}}}{\beta^2 s(s+\frac{1}{\beta})^2}$$

$$+ \frac{\frac{\lambda_2 \alpha_1}{c_1 c_2}\left(\frac{e^{-ay}}{a} - \frac{e^{-ay}}{\rho+\alpha}\right) + \frac{\lambda_1 \alpha_2}{c_1 c_2}\left[e^{-\frac{y}{\beta}}(2\beta + y) - \frac{\left(\frac{y}{\beta}+1\right)e^{-\frac{y}{\beta}}}{\rho}\right]}{\rho - \frac{\lambda_2}{c_2}\frac{1}{(\rho+\alpha)}} \quad , \qquad y \geq 0$$

Η εύρεση του ολοκληρώματος της δεξιάς ουράς της Erlang έγινε με τη χρήση του πακέτου Mathematica.

$$\Psi_2(y;0) = \frac{\lambda_2}{c_2}\frac{1}{(\rho+\alpha)}e^{-y\alpha} + \frac{\frac{\lambda_1 \alpha_2}{c_1 c_2}\frac{2\beta}{2\beta+\rho}e^{-\frac{y}{2\beta}} + \frac{\lambda_2 \alpha_1}{c_1 c_2}\frac{1}{\alpha\rho+1}e^{-y\alpha}}{1 - \frac{\lambda_1}{c_1}\frac{1}{(\rho+\alpha)}} \quad , \qquad y \geq 0$$

Έτσι έχουμε $g_{ij} = \frac{g_i(-R_j)}{\prod_{v=1}^{3}(R_v - R_j)}$,όπου $g_j = \frac{\left[\frac{1}{(-R_j+\beta)}\right]^2 \frac{1}{-R_j+\alpha}}{\prod_{v=1}^{3}(R_v - R_j)}$, $j = 1,2,3$

$h_{ij} = \frac{h_i(-R_j)}{\prod_{v=1}^{3}(R_v - R_j)}$, όπου $h_1 = \left\{1 - \frac{1-\lambda_2}{c_2}\left[\frac{\frac{\alpha}{\alpha+s} - 1}{s}\right]\right\}\left(s + \frac{1}{\beta}\right)^2 (s+a)$

Και $h_2 = \left\{1 - \frac{1-\lambda_1}{c_1}\left[\frac{\frac{\frac{1}{\beta^2}}{(s+\frac{1}{\beta})^2} - 1}{s}\right]\right\}\left(s + \frac{1}{\beta}\right)^2 (s+a)$

Και τελικά οι πιθανότητες χρεοκοπίας είναι

$$\Psi_1(y;u)=\frac{\lambda_2}{c_2}\left[\Psi_1(y;0)-\frac{\lambda_1}{c_1}\frac{\left(\frac{y}{\beta}+1\right)e^{-\frac{y}{\beta}}}{\rho}-\frac{[y\left(s+\frac{1}{\beta}\right)+1]e^{-\frac{y}{\beta}}}{\beta^2 s(s+\frac{1}{\beta})^2}\right]\sum_{j=1}^{3}g_{1j}e^{-R_j u}$$

$$+\frac{\lambda_1}{c_1}\frac{a_2}{c_2}[\frac{\left(\frac{y+u}{\beta}+1\right)e^{-\frac{y+u}{\beta}}}{\rho}-\frac{[(y+u)\left(s+\frac{1}{\beta}\right)+1]e^{-\frac{y+u}{\beta}}}{\beta^2 s(s+\frac{1}{\beta})^2})$$

$$+\sum_{j=1}^{3}g_j\,e^{-R_j u}\,\frac{\left(\frac{y+u}{\beta}+1\right)e^{-\frac{y+u}{\beta}}}{\rho}-\frac{[(y+u)\left(s+\frac{1}{\beta}\right)+1]e^{-\frac{y+u}{\beta}}}{\beta^2 s(s+\frac{1}{\beta})^2}]$$

$$+\frac{\lambda_2}{c_1}\frac{a_1}{c_2}\left[\frac{1}{(\rho+\alpha)}e^{-(y+u)a}+\sum_{j=1}^{3}g_j\,e^{-R_j u}\,\frac{1}{(\rho+\alpha)}e^{-(y+u)a}\right]$$

$$+\frac{\lambda_1}{c_1}\frac{\left(\frac{y}{\beta}+1\right)e^{-\frac{y}{\beta}}}{\rho}-\frac{[y\left(s+\frac{1}{\beta}\right)+1]e^{-\frac{y}{\beta}}}{\beta^2 s(s+\frac{1}{\beta})^2}$$

$$+\frac{\lambda_1}{c_1}\sum_{j=1}^{3}h_{1j}\,e^{-R_j u}\frac{1}{2}\frac{(\frac{y+u}{\beta}+1)e^{-\frac{y+u}{\beta}}}{\rho}\frac{\left(\frac{y+u}{\beta}+1\right)e^{-\frac{y+u}{\beta}}}{\rho}$$

$$-\frac{[(y+u)\left(s+\frac{1}{\beta}\right)+1]e^{-\frac{y+u}{\beta}}}{\beta^2 s(s+\frac{1}{\beta})^2}$$

$$\Psi_2(y;u)=\frac{\lambda_1}{c_1}\left[\Psi_2(y;0)-\frac{\lambda_2}{c_2}\frac{1}{(\rho+a)}e^{-ay}\right]\sum_{j=1}^{3}g_{2j}e^{-R_j u}+\frac{\lambda_1}{c_1}\frac{a_2}{c_2}[\frac{\left(\frac{y+u}{\beta}+1\right)e^{-\frac{y+u}{\beta}}}{\rho}$$

$$-\frac{\left[(y+u)\left(s+\frac{1}{\beta}\right)+1\right]e^{-\frac{y+u}{\beta}}}{\beta^2 s\left(s+\frac{1}{\beta}\right)^2}])+\sum_{j=1}^{k+l}g_j\,e^{-R_j u}\,\frac{\left(\frac{y+u}{\beta}+1\right)e^{-\frac{y+u}{\beta}}}{\rho}$$

$$-\frac{[(y+u)\left(s+\frac{1}{\beta}\right)+1]e^{-\frac{y+u}{\beta}}}{\beta^2 s(s+\frac{1}{\beta})^2}]$$

$$+\frac{\lambda_2}{c_1}\frac{a_1}{c_2}\left[\frac{1}{(\rho+\alpha)}e^{-(y+u)a}+\sum_{j=1}^{3}g_j\,e^{-R_j u}\,\frac{1}{(\rho+\alpha)}e^{-(y+u)a}\right]$$

$$+\frac{\lambda_2}{c_2}\frac{1}{(\rho+\alpha)}e^{-(y+u)a}+\frac{\lambda_2}{c_2}\sum_{j=1}^{k+l}h_{2j}\,e^{-R_j u}\,\frac{1}{(\rho+\alpha)}e^{-(y+u)a}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

Ανάλυση της συνάρτησης Gerber-Shiu στο Markov-modulated μοντέλο της θεωρίας κινδύνου

3.1 Εισαγωγή στο μοντέλο

Σε αυτό το κεφάλαιο γίνεται ανάλυση της αναμενόμενης συνάρτησης ποινής σε ένα Markov modulated μοντέλο κινδύνου στο οποίο η ένταση των Poisson αφίξεων των απαιτήσεων και η κατανομή των απαιτήσεων ποικίλει στο χρόνο αναλόγως της κατάστασης στην οπαία βρίσκεται η εξωτερική διαδικασία $\{I(t); t \geq 0\}$.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει το μοντέλο προσφέρει μια ευελιξία ως προς τις αφίξεις αφού μπορεί να τις μεταφράσει ως υψηλής ή χαμηλής συχνότητας.

Το μοντέλο (βλέπε κεφάλαιο 2, παράγραφο 2.1) αποτελεί γενίκευση του κλασικού μοντέλου Poisson και είναι ιδιαίτερα χρήσιμο για τη μελέτη περιοδικότητας καιρικών φαινομένων, περιοδικότητας οικονομικών συνθηκών για ασφαλιστικά χαρτοφυλάκια καθώς και περιοδικότητας επιδημιών και ακραίων μεταβολών σε ασφαλιστικά χαρτοφυλάκια υγείας.

Υποθέτουμε ότι η μαρκοβιανή διαδικασία $\{I(t); t \geq 0\}$ είναι μια ομογενής και αμείωτη με χώρο καταστάσεων $I = \{1,2, \dots m\}$. Δηλώνουμε με $\Lambda = (\alpha_{i,j})_{i,j=1}^{m} όπου$
$\alpha_{i,i} \coloneqq -a_i$, $i \in \{1,2, \dots m\}$, τον πίνακα έντασης της στοχαστικής διαδικασίας $\{I(t); t \geq 0\}$ και $\pi = \pi_1, \dots, \pi_m$ τις πιθανότητες μετάβασης.
Ακόμη $N(t)$ είναι η διαδικασία που απαριθμεί τις απαιτήσεις στο διάστημα (0,t].

Τότε, αν $I(s) = i$ για κάθε s σε ένα μικρό διάστημα (t, t+h] , $h \to 0$, το πλήθος των απαιτήσεων $N(t+h) - N(t)$ είναι Poisson κατανεμημένο με παράμετρο $\lambda_i > 0$ και ισχύει ότι

$$P(N(t+h) = n+1 | N(t) = n, I(s) = i \,, για\; t < s < t+h) = \lambda_\iota h + o(h)$$

Ακόμη, η διαδικασία $\{N(t); t \geq 0\}$λέγεται Markov modulated Poisson διαδικασία.

Επίσης υποθέτουμε ότι δεδομένης της κατάστασης $I(t) = i$, το ύψος των ζημιών έχει κατανομή $F_i(x)$ και πυκνότητα $f_i(x)$, με μέσο μ_i , $i \in E$ και ότι τα ασφάλιστρα εισπράττονται συνεχώς με σταθερό ρυθμό c.

Η διαδικασία πλεονάσματος δίνεται από τη σχέση

$$U(t) = u + ct - \sum_{n=1}^{N(t)} X_n \;, \qquad t \geq 0$$

Όπου κατά τα γνωστά u είναι το αρχικό αποθεματικό και X_n το ύψος της n-οστής ζημιάς. Η διαδικασία φόρτωσης είναι

$$\sum_{i=1}^{m} \pi_i(c - \lambda_i \mu_i) > 0$$

Ο χρόνος χρεοκοπίας ορίζεται κατά τα γνωστά και με $w(x, y)$ συμβολίζουμε τη συνάρτηση ποινής. Για $\delta \geq 0$, $u \geq 0$ και $i, j \in I$ ορίζουμε την αναμενόμενη συνάρτηση ποινής (ή συνάρτηση των Gerber-Shiu) όταν η απαίτηση συμβεί κατά την κατάσταση j, δεδομένου ότι η αρχική κατάσταση είναι η i, ως

$$\varphi_{i,j}(u) = \mathbb{E}_i[e^{-\delta t} w(U(T -), |U(T)| J(T < \infty), I(T) = j | U(0) = u]$$

Τότε συνολικά, για την αρχική κατάσταση i έχουμε

$$\varphi_i(u) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_{i,j}(u) \, , u \geq 0, \qquad i \in I$$

Πιο συγκεκριμένα όταν $\delta = 0$ και $w(x, y) = 1$ η συνάρτηση των Gerber-Shiu απλοποιείται στην πιθανότητα χρεοκοπίας, όταν η απαίτηση προκαλείται στην κατάσταση j, με δεδομένο το αρχικό αποθεματικό:

$$\Psi_{i,j}(u) = P(T < \infty, I(T) = j | U(0) = u) \, , \qquad i, j \in I$$

Δηλαδή

$$\Psi_i(u) = \sum_{j=1}^{m} \Psi_{i,j}(u) \, , u \geq 0, \qquad i \in I$$

είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας όταν η αρχική κατάσταση της εξωτερικής διαδικασίας είναι i. Θυμίζουμε ότι $\delta_i(u) = 1 - \Psi_i(u)$ είναι η πιθανότητα μη χρεοκοπίας όταν η αρχική κατάσταση της εξωτερικής διαδικασίας είναι i.

3.2 Ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις για τη συνάρτηση Gerber-Shiu

Κάνοντας χρήση των ίδιων ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων με το κεφάλαιο 2, τις επεκτείνουμε για την περίπτωση όπου η αρχική κατάσταση της διαδικασίας είναι i, ενώ η στιγμή της απαίτησης j. Έτσι έχουμε το σύστημα ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων που ικανοποιεί η συνάρτηση Gerber-Shiu

$$c\varphi'_{i,i}(u) = (\lambda_i + \delta)\varphi_{i,i}(u) - \lambda_i[\int_0^u \varphi_{i,i}(u-x)f_i(x)d\,x + \int_u^\infty w(u, x-u)f_i(x)dx] - \sum_{k=1}^{m} p_{i,k}\,\varphi_{k,i}(u), \qquad u \geq 0 \quad (3.1)$$

Ενώ για $i \neq j$

$$c\varphi'_{i,j}(u) = (\lambda_i + \delta)\varphi_{i,j}(u) - \lambda_i[\int_0^u \varphi_{i,j}(u-x)f_i(x)d\,x - \sum_{k=1}^{m} p_{i,k}\,\varphi_{k,j}(u) \quad (3.2)$$

Παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace στις σχέσεις (3.1) και (3.2) και διαιρώντας με c προκύπτει ότι

$$s\hat{\varphi}_{i,j}(s) = \frac{(\lambda_i + \delta)}{c}\hat{\varphi}_{i,j}(s) - \frac{\lambda_i}{c}\hat{\varphi}_{i,j}(s)\hat{f}_i(s) - \frac{1}{c}\sum_{k=1}^{m} p_{i,k}\,\hat{\varphi}_{k,j}(u) + \varphi_{i,j}(0) - \frac{\lambda_i}{c}\widehat{w}_i(s)I(i=j) \Leftrightarrow$$

$$[s - \frac{(\lambda_i + \delta)}{c} + \frac{\lambda_i}{c}\hat{f}_i(s)]\hat{\varphi}_{i,j}(s) + \frac{1}{c}\sum_{k=1}^{m} p_{i,k}\,\hat{\varphi}_{k,j}(u) = \varphi_{i,j}(0) - \frac{\lambda_i}{c}\widehat{w}_i(s)I(i=j) \quad (3.3)$$

Όπου $w_i(s) = \int_u^\infty w(u, x-u)f_i(x)dx]$

Ή σε μορφή πίνακα

$$A(s)\widehat{\boldsymbol{\varphi}}(s) = \boldsymbol{\varphi}(0) - \widehat{w}(s) \Leftrightarrow \widehat{\boldsymbol{\varphi}}(s) = \frac{\boldsymbol{\varphi}(0) - \widehat{w}(s)}{A(s)} = \frac{A^*(s)\boldsymbol{\varphi}(0) - A^*(s)\widehat{w}(s)}{\det[A(s)]}$$

Όπου με $A^*(s)$συμβολίζεται ο adjoint πίνακας του πίνακα $A(s)$ και $\boldsymbol{\varphi}(u) = (\boldsymbol{\varphi_{i,j}}(u))_{\boldsymbol{i,j=1}}^{\boldsymbol{m}}$

Η χαρακτηριστική συνάρτηση $\det[A(s)] = 0$ έχει ακριβώς m το πλήθος ρίζες με θετικό πραγματικό μέρος που παίζουν σημαντικό ρόλο στην εύρεση της πιθανότητας μη χρεοκοπίας με μηδενικό αρχικό αποθεματικό $\varphi_{i,j}(0)$. Θα συμβολίσουμε αυτές τις ρίζες με $\rho_1, \dots, \rho_m$.

Ακόμη, ορίζουμε τις διαιρεμένες διαφορές ενός πίνακα έστω $B(s)$ ως προς κάποιους αριθμούς $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ ως κάτωθι:

$B[\varepsilon_1, s] = \frac{B(s)-B(\varepsilon_1)}{s-\varepsilon_1}$, $B[\varepsilon_1, \varepsilon_2, s] = \frac{B(\varepsilon_1,s)-B(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}{s-\varepsilon_2}$, $B[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, s] = \frac{B(\varepsilon_1,\varepsilon_2,s)-B(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)}{s-\varepsilon_3}$

κ.ο.κ

Για τις αντίστοιχες διαφορές της συνάρτησης Gerber-Shiu χρησιμοποιείται η παρακάτω φόρμουλα για την n-1 διαφορά

$$B[\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n] = \sum_{j=1}^{n} \frac{B(\varepsilon_j)}{\prod_{i=1, i\neq j}^{n}(\varepsilon_i - \varepsilon_j)}$$

Για διακριτούς αριθμούς $\rho_1, \dots, \rho_m$ έχουμε:

$$\boldsymbol{\varphi}(0)A^*(\rho_i) = \widehat{w}(\rho_i)\widehat{w}(\rho_i), \qquad i = 1, .., m$$

Ή

$$\boldsymbol{\varphi}(0)A^*(\rho_1, \rho_2) = (A * \widehat{w})(\rho_1, \rho_2)$$

Όπου $(A * \widehat{w})(\rho_1, \rho_2)$ είναι η διαιρεμένη διαφορά των πινάκων $A'(s)$ και $\widehat{w}(s)$ ως προς ρ_1, ρ_2 .

Δηλαδή $(A * \widehat{w})(\rho_1, \rho_2) = \widehat{w}(\rho_1, \rho_2)A^*(\rho_i) + \widehat{w}(\rho_2)A^*(\rho_1, \rho_2)$, $i = 1, \dots, m$

Αναδρομικά καταλήγουμε

$$\boldsymbol{\varphi}(0)A^*(\rho_1, \dots, \rho_m) = (A * \widehat{w})(\rho_1, \dots, \rho_m), \qquad i = 1, \dots, m$$

Με $(A * \widehat{w})(\rho_1, \dots, \rho_m) = \sum_{i=1}^{m} \widehat{w}(\rho_1, \dots, \rho_i)\, A^*(\rho_i, \dots, \rho_m)$

Εν τέλει καταλήγουμε στην εξής σχέση για την αρχική τιμή της $\boldsymbol{\varphi}(0)$

$$\boldsymbol{\varphi}(0) = \frac{(A * \widehat{w})(\rho_1, \dots, \rho_m)}{A^*(\rho_1, \dots, \rho_m)} \quad (3.4)$$

Πιο συγκεκριμένα σε ένα μοντέλο που αποτελείται από δύο μόνο καταστάσεις ο πίνακας $A(s)$ παίρνει την μορφή

$$A(s) = \begin{pmatrix} s - \frac{\alpha_1 + \delta}{c} - \frac{\lambda_1}{c}[1 - \hat{f}_1(s)] & \frac{\alpha_1}{c} \\ \frac{\alpha_2}{c} & s - \frac{\alpha_2 + \delta}{c} - \frac{\lambda_2}{c}[1 - \hat{f}_2(s)] \end{pmatrix}$$

Ο οποίος έχει ως adjoint τον πίνακα

$$A^*(s) = \begin{pmatrix} s - \frac{\alpha_2 + \delta}{c} - \frac{\lambda_2}{c}[1 - \hat{f}_2(s)] & -\frac{\alpha_1}{c} \\ -\frac{\alpha_2}{c} & s - \frac{\alpha_1 + \delta}{c} - \frac{\lambda_1}{c}[1 - \hat{f}_1(s)] \end{pmatrix}$$

Και η σχέση (3.4) στο μοντέλο δύο καταστάσεων γίνεται

$$\boldsymbol{\varphi}(0) = \frac{A^*(\rho_2)\widehat{w}(\rho_1,\rho_2)}{A^*(\rho_1,\rho_2)} + \widehat{w}(\rho_1) \quad (3.5)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1}{c}\widehat{w}_1(\rho_1) & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2}{c}\widehat{w}_2(\rho_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\frac{\lambda_1}{c}\left[s_2(\rho_2)-\frac{a_2}{c}\right]\widehat{w}_1[\rho_1,\rho_2]}{1+\frac{\lambda_2}{c}\hat{f}_2[\rho_1,\rho_2]} & -\frac{\frac{a_1\lambda_2}{c^2}\widehat{w}_2[\rho_1,\rho_2]}{1+\frac{\lambda_2}{c}[\rho_1,\rho_2]} \\ -\frac{\frac{a_2\lambda_1}{c^2}\widehat{w}_1[\rho_1,\rho_2]}{1+\frac{\lambda_1}{c}[\rho_1,\rho_2]} & \frac{\frac{\lambda_2}{c}\left[s_1(\rho_2)-\frac{a_1}{c}\right]\widehat{w}_2[\rho_1,\rho_2]}{1+\frac{\lambda_1}{c}\hat{f}_1[\rho_1,\rho_2]} \end{pmatrix}$$

Όπου $S_i(s) = s - \frac{\delta}{c} - \frac{\lambda_i}{c}\left(1-\hat{f}_i(s)\right),\ i = 1,2$

Αν τώρα υποθέσουμε ότι $w(x,y) = 1$ και $\delta = 0$, έχουμε $\rho_1 = \rho$, $\rho_2 = \rho$, $w_i = \overline{F_i}$ και $\varphi_{i,j}(u) = \Psi_{i,j}(u)$ για $i = 1,2$. Έτσι, έχουμε την περίπτωση της πιθανότητας χρεοκοπίας όταν το αρχικό αποθεματικό είναι μηδενικό που υπολογίζεται από τη σχέση

$$\Psi(0) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1}{c}\widehat{w}_1(\rho_1) & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2}{c}\widehat{w}_2(\rho_1) \end{pmatrix} - \frac{1}{c^2\rho} \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1\alpha_2[\widehat{w}_1(\rho)-\mu_1]}{1-\frac{\lambda_2}{c}\widehat{w}_2(\rho)} & \frac{\lambda_2\alpha_1[\widehat{w}_2(\rho)-\mu_2]}{1-\frac{\lambda_2}{c}\widehat{w}_2(\rho)} \\ \frac{\lambda_1\alpha_2[\widehat{w}_1(\rho)-\mu_1]}{1-\frac{\lambda_1}{c}\widehat{w}_1(\rho)} & \frac{\lambda_2\alpha_1[\widehat{w}_2(\rho)-\mu_2]}{1-\frac{\lambda_1}{c}\widehat{w}_1(\rho)} \end{pmatrix}$$

Όπου $\Psi(0) = (\Psi_{i,j}(0))_{i,j=1}^2$ και $\widehat{w}_i(\rho) = \frac{[1-\hat{f}_i(\rho)]}{\rho}$, $i = 1,2$

Εφαρμόζοντας διαδοχικά τις μερικές διαφορές στην εξίσωση $\widehat{\boldsymbol{\varphi}}(s) = \frac{A^*(s)\delta(0)-A^*(s)\widehat{w}(s)}{\det[A(s)]}$ που είδαμε προηγουμένως καταλήγουμε στην εξής σχέση για το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης Gerber-Shiu

$$\widehat{\boldsymbol{\varphi}}(s) = \frac{\prod_{i=1}^m (s-\rho_i)}{\det[A(s)]}\left[A^*[\rho_1,\ldots,\rho_m,s]\boldsymbol{\varphi}(0) - (A^*\widehat{w})[\rho_1,\ldots,\rho_m,s]\right]$$

Όπου $(A^*\widehat{w})[\rho_1,\ldots,\rho_m,s] = A^*[\rho_1,\ldots,\rho_m,s]\widehat{w}(s) + \sum_{i=1}^m A^*[\rho_1,\ldots,\rho_i]\,\widehat{w}(\rho_1,\ldots,\rho_m,s)$

Έτσι, ο μετασχηματισμός Laplace μπορεί να γραφεί ως

$$\widehat{\boldsymbol{\varphi}}(s) = \frac{\prod_{i=1}^m (s-\rho_i)}{\det[A(s)]}\left[A^*[\rho_1,\ldots,\rho_m,s]\big(\boldsymbol{\varphi}(0)-\widehat{w}(s)\big) - \sum_{i=1}^{m} A^*[\rho_1,\ldots,\rho_i]\widehat{w}(\rho_1,\ldots,\rho_m,s)\right]$$

Αν τώρα υποθέσουμε ότι η κατανομή του ύψους των ζημιών ανήκει στη ρητή οικογένεια, δηλαδή ισχύει ότι

$$\hat{f}_i(s) = \frac{p_{k_i-1}^{(i)}(s)}{q_{k_i}^{(i)}(s)} \quad , \qquad k_i \in \mathbb{N}, i \in I$$

Όπου $q_{k_i}^{(i)}$ είναι ένα πολυώνυμο k_i βαθμού και $p_{k_{i-1}}^{(i)}$είναι ένα πολυώνυμο $k_i - 1$ βαθμού ή λιγότερο. Επίσης ικανοποιείται η εξίσωση $p_{k_{i-1}}^{(i)}(0) = q_{k_i}^{(i)}(0)$. Ακόμη η εξίσωση $q_{k_i}^{(i)}(s) = 0$ έχει ρίζες με αρνητικά πραγματικά μέρη.

Πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή με $\prod_{i=1}^{m} q_{k_i}^{(i)}(s)$ στην τελευταία σχέση που είδαμε για τον μετασχηματισμό Laplace έχουμε ότι

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}}(s) = \frac{\prod_{i=1}^{m}(s-\rho_i)}{\det[A(s)]\prod_{i=1}^{m} q_{k_i}^{(i)}(s)}\{\left[A^*[\rho_1, \dots, \rho_m, s]\prod_{i=1}^{m} q_{k_i}^{(i)}(s)\left(\boldsymbol{\varphi}(0) - \hat{w}(s)\right)\right.$$
$$\left. - \prod_{i=1}^{m} q_{k_i}^{(i)}(s) \sum_{i=1}^{m} A^*[\rho_1, \dots, \rho_i]\hat{w}(\rho_1, \dots, \rho_m, s)\right]\}$$

Υπό την προϋπόθεση ότι η $det[A(s)] = 0$ έχει m το πλήθος ρίζες, έστω $\rho_1, \dots, \rho_m$ και $D(s) = \det[A(s)]\prod_{i=1}^{m} q_{k_i}^{(i)}(s)$, η $D(s) = 0$ έχει $m + \sum_{\iota=1}^{m} k_i$ ρίζες , δηλαδή:

$$D(s) = \prod_{i=1}^{m}(s-\rho_i)\prod_{i=1}^{K_m}(s+R_i\ )$$

Με $K_m = \sum_{\iota=1}^{m} k_i$, άρα ανωτέρω εξίσωση μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}}(s) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{m}(s+R_i)}\{\left[A^*[\rho_1, \dots, \rho_m, s]\prod_{i=1}^{m} q_{k_i}^{(i)}(s)\left(\boldsymbol{\varphi}(0) - \hat{w}(s)\right)\right.$$
$$\left. - \prod_{i=1}^{m} q_{k_i}^{(i)}(s) \sum_{i=1}^{m} A^*[\rho_1, \dots, \rho_i]\hat{w}(\rho_1, \dots, \rho_m, s)\right]\}$$

Όπου κάθε ένα από τα R_i , $i = 1, \dots, m$ έχει θετικό μέρος. Τα στοιχεία του πίνακα $A^*[\rho_1, \dots, \rho_i]\prod_{i=1}^{m} q_{k_i}^{(i)}(s)$ είναι πολυώνυμα .

Μέσω του συντελεστή Dickson-Hipp (βλέπε ορισμό 1.10), θα βρούμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace για τη συνάρτηση Gerber-Shiu, γεγονός που μας οδηγεί στην εύρεση της.

Έτσι έχουμε έναν πίνακα έστω B(r) του οποίου τα στοιχεία είναι ενσωματωμένες συναρτήσεις του y. Έτσι η σύνθεση των παραγόντων T_r θυμίζουμε ότι είναι η

$$T_{r_1}T_{r_2}B(y) = T_{r_2}T_{r_1}B(y) = \frac{T_{r_1}B(y) - T_{r_2}B(y)}{r_2 - r_1} \quad , \qquad r_1 \neq r_2 \in \mathbb{C}, y \geq 0$$

Επομένως, μεταξύ του συντελεστή T_r και των μερικών διαφορών ισχύει η σχέση

$$\left(\prod_{i=1}^{m} T_{r_i}\right) B(0) = (-1)^{m-1} \hat{B}[r_1, \dots, r_m]$$

Ακόμη βάσει ορισμού ισχύει ότι

$$T_s T_r B(0) = \int_0^\infty e^{-sx} [T_r B(x)] dx$$

Το οποίο σημαίνει ότι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace του πίνακα $T_s T_r B(0)$ είναι ο $T_r B(x)$.

Γενικά, για τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace ισχύει ότι

$$\mathcal{L}^{-1}[T_s \left(\prod_{i=1}^{m} T_{r_i}\right) B(0) = \prod_{i=1}^{m} T_{r_i} B(x)$$

Επομένως βάσει των προαναφερθέντων , μέσω αντιστροφής του μετασχηματισμού η συνάρτηση Gerber-Shiu είναι

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}(u) = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{m-1} A^*[\rho_1, \dots, \rho_i] \left(\prod_{k=i}^{m} T_{\rho_\kappa}\right) w(u) \\ + \sum_{l=1}^{k_m} \{ e^{-R_l u} M^{(l)} \delta(0) - e^{-R_l u} * [\omega(u) \\ - n_i \sum_{i=1}^{m} (-1)^{m-1} A^*[\rho_1, \dots, \rho_i] \left(\prod_{k=i}^{m} T_{\rho_\kappa}\right) w(u)]\}\end{aligned}$$

Όπου $M^{(l)} = \frac{A^*[\rho_1, \dots, \rho_m, -R_l] \prod_{i=1}^{m} q_{k_i}^{(i)}(-R_l)}{\prod_{\nu=1, \nu \neq l}^{m} (R_\nu - R_l)}$ είναι ο πίνακας συντελεστών για $l = 1,2, \dots, K_m$ και $n_i = \frac{\prod_{i=1}^{m} q_{k_i}^{(i)}(-R_l)}{\prod_{\nu=1, \nu \neq l}^{m} (R_\nu - R_l)}$

3.3 Το μέγιστο πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία – Η μέγιστη ένταση ζημιάς

Για $b > u \geq 0$ ορίζουμε την

$\xi_{i,j}(u;b) = \mathbb{P}_i(\sup U(t) < b, T < \infty, I(T) = j | U(0) = u)$, $0 \leq t \leq T$, $i, j \epsilon I$

να είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό u, χωρίς το πλεόνασμα να φτάσει ένα επίπεδο (έστω b), εάν η χρεοκοπίας συμβεί λόγω απαίτησης στην κατάσταση j, με δεδομένο ότι η αρχική κατάσταση είναι η i.

Εναλλακτικά , μπορούμε να αναφέρουμε ότι η πιο πάνω πιθανότητα είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας που αφορά την κατάσταση της εξωτερικής διαδικασίας j, με αρχική κατάσταση την i, με την ταυτόχρονη παρουσίας ενός επιπέδουb.

Προφανώς ισχύει ότι $\xi_{ij}(u;b) = 0$, για $b \leq u$.
Τότε η

$$\xi_i(u;b) = \sum_{j=1}^{m} \xi_{ij}(u;b), \qquad i \epsilon I$$

είναι η συνολική πιθανότητα χρεοκοπίας στην κατάσταση i όταν το πλεόνασμα δεν υπερβαίνει το επίπεδο b, με αρχικό αποθεματικό u και αρχική κατάσταση την i.

Για $0 \leq u \leq b$ και $i, j \epsilon E$ ορίζουμε την $\chi_{ij}(u;b)$ ως την πιθανότητα όπου το αποθεματικό φτάνει ως το επίπεδο b ενώ βρίσκεται στην κατάσταση j, με αρχικό αποθεματικό u (το οποίο δεν έχει πέσει κάτω από το μηδέν αρχικώς) και αρχική κατάσταση i.

Προφανώς ισχύει ότι $\chi_{i,j}(b;b) = I(i = j)$, $i.j \in I$.

Τότε η $\chi_i(u;b) = \sum_{j=1}^{m} \chi_{ij}(u;b)$, $i \epsilon I$ είναι η πιθανότητα η διαδικασία πλεονάσματος να φτάσει στο επίπεδο b ξεκινώντας από μία κατάστασηiκαι έχοντας αρχικό αποθεματικό u, χωρίς να έχει προηγουμένως διέλθει κάτω από το μηδέν.

Τελικά, είτε συμβεί η χρεοκοπία με το αποθεματικό να έχει φτάσει στο b, είτε να μην το έχει φτάσει έχουμε:

$$\chi_i(u;b) = 1 - \xi_i(u;b) , \qquad \text{για } i \epsilon I$$

Υποθέτουμε ότι $\chi(u;b) = (\chi_{i,j}(u;b))_{i,j=1}^{m}$.

Σύμφωνα με τους Li και Lu [15] ισχύει ότι $\chi(u;b) = v(u)[v(b)]^{-1}$, $0 \leq u \leq b$

Όπου $v(u) = (v_{i,j}(u)_{i,j=1}^{m}$είναι ένας $m \; x \; m$ διαστάσεων πίνακας και $v_{i,j}(u)$ είναι η λύση του παρακάτω συστήματος ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων:

$$cv'_{i,j}(u) = \lambda_i v_{i,j}(u) - \lambda_i \int_0^u v_{i,j}(u-x) f_i(x) dx - \sum_{k=1}^{m} \alpha_{i,k} v_{k,j}(u)$$

Με οριακές συνθήκες: $v_{i,j}(0) = I(i = j)$, για i, $j \epsilon$ I

Είτε κάνοντας την υπόθεση ότι το πλεόνασμα περνά, είτε ότι δεν περνά το επίπεδο $b\ (> u)$ πριν την επέλευση χρεοκοπίας έχουμε ότι:

$$\psi_{i,j}(u) = \xi_{i,j}(u;b) + \sum_{k=1}^{m} \chi_{i,k}(u;b)\psi_{k,j}(b) \quad , \qquad i,j \in I$$

Ή με τη μορφή πίνακα:

$$\Psi(u) = \xi(u;b) + \chi(u;b)\Psi(b) \qquad (3.5)$$

Στην παραπάνω σχέση αναφέρουμε ότι $\xi(u;b) = (\xi_{i,j}(u;b)_{i,j=1}^{m}$ και $\xi(b;b) = 0,$

όπου 0 είναι ο $m\ x\ m$ μηδενικός πίνακας. Συγκεκριμένα, όταν $m = 1$, το μοντέλο απλοποιείται στο κλασικό μοντέλο κινδύνου και από τη στιγμή που $\chi(u;b) = 1 - \xi_i(u;b)$ η σχέση (3.5) μας δίνει:

$$\xi(u;b) = \frac{\psi(u) - \psi(b)}{1 - \psi(b)} \ , \qquad 0 \leq u \leq b$$

Ακόμη, μια βασική υπόθεση είναι ότι η διαδικασία πλεονάσματος συνεχίζει ακόμη και αν η χρεοκοπία επέλθει και θεωρούμε τη μέγιστη ζημιά του ασφαλιστή από τη στιγμή της χρεοκοπίας έως τη στιγμή που το αποθεματικό επιστρέφει στο μηδέν. Δεδομένης της συνθήκης καθαρού κέρδους είναι βέβαιο ότι κάτι τέτοιο θα συμβεί μετά τη χρεοκοπία.

Όσον αφορά στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας χρεοκοπίας ο Picard (1994) [19] έδωσε μια αναλυτική έκφραση για την κατανομή της μέγιστης ζημιάς μέσω της πιθανότητας χρεοκοπίας. Οι Li και Dickson το (2006) [10] μελέτησαν την κατανομή της μέγιστης ζημίας για το μοντέλο του Andersen για Erlang κατανεμημένους χρόνους αφίξεως.

Ορίζουμε για $u \geq 0$ τον χρόνο $\tilde{T}$ ως τη χρονική στιγμή που το πλεόνασμα διέρχεται από το μηδέν για πρώτη φορά μετά τη χρεοκοπία, δηλαδή:

$$\tilde{T} = \inf\{t: t > T, U(t) \geq 0\}$$

και με $M_u = \sup\{|U(t)|, T \leq t \leq \tilde{T}\}$ τη μέγιστη ζημιά. Ακόμη,

$$H_{i,j}(z;u) = \mathbb{P}_i(M_u \leq z, T < \infty, I(t) = j)\ , \qquad z \geq 0, i,j\ \in I$$

είναι η συνάρτηση κατανομής της μέγιστης ζημιάς, αν η χρεοκοπία συμβεί από μία απαίτηση στην κατάσταση j, δεδομένου ότι η αρχική κατάσταση ήταν η i και

$$H_i(z;u) = \sum_{j=1}^{m} H_{i,j}(z;u) \ , \qquad i \in\ I$$

είναι η κατανομή της συνολικής μέγιστης ζημιάς με δεδομένο ότι η διαδικασία ξεκινά από την κατάσταση i.

Αν η διαδικασία πλεονάσματος έχει ένα αρχικό αποθεματικό u και μια αρχική κατάσταση i, τότε η μέγιστη ζημιά δεν θα είναι παραπάνω από z αν η χρεοκοπία συμβεί (από μια απαίτηση στην κατάσταση j) , με έλλειμμα $y \leq z$ και αν το πλεόνασμα δεν πέσει κάτω από το $-z$ από το επίπεδο $-y$.

Η πιθανότητα του ενδεχομένου που περιγράψαμε είναι η $\chi_j(z-y;z)$,αφού η προσέγγιση του μηδενός από το επίπεδο $-y$ χωρίς την υποχώρηση κάτω από το $-z$ είναι ισοδύναμο με την άφιξη στο σημείο z από το σημείο $z-y$ χωρίς την υποχώρηση κάτω από το μηδέν. Άρα,

$$H_i(z;u) = \int_0^z g_{i,j}(u;y)\chi_j(z-y;z)dy$$

όπου

$$g_{i,j}(u;y) = \frac{\partial G_{i,j}(u;y)}{\partial y}$$

με

$$G_{i,j}(u;y) = \mathbb{P}_i(T<\infty, I(T)=j, |U(t)| \leq y) \ , \qquad u,y \geq 0 \, , i,j \in I$$

να είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας που συμβαίνει από μία απαίτηση στην κατάσταση j και το έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία να είναι το πολύ ίσο με y, δεδομένου ότι η αρχική κατάσταση είναι η i. Τότε,

$$H_i(z;u) = \sum_{j=1}^{m} H_{i,j}(z;u) = \int_0^z \sum_{j=1}^{m} g_{i,j}(u;y)\chi_j(z-y;z)dy$$

Ή με τη μορφή πίνακα:

$$H(z;u) = \int_0^z g(u;y)\,\chi(z-y;z)\,1\,dy \qquad (3.6)$$

Όπου $H(z;u) = (H_1(z;u), \dots, H_m(z;u))^T$ είναι ένα $m\ x\ 1$ διάνυσμα ,

$g(u;y) = g_{i,j}(u;y)_{i,j=1}^{m}$ είναι ένας $m\ x\ m$ πίνακας και $1 = (1,1,\dots,1)^T$ είναι ένα $m\ x\ 1$ διάνυσμα.

Για το κλασικό μοντέλο ($m=1$) , ο Picard το 1994 [19] έδειξε ότι το ολοκλήρωμα στη σχέση (3.6) μπορεί να εκφραστεί με όρους της πιθανότητας χρεοκοπίας. Σκοπός είναι να εκφράσουμε το ολοκλήρωμα της σχέσης (3.6) για $m \epsilon \mathbb{N}^+$. Για να το καταφέρουμε αυτό πρέπει να εκφράσουμε τη $\chi(u; b)$ με όρους της $\psi(u)$.

Έστω $\overline{\Psi}(u) = (\overline{\Psi}_{i,j}(u))_{i,j=1}^m = \boldsymbol{I} - \psi(u)$, με $\boldsymbol{I}$ τον ταυτοτικό $m\ x\ m$ πίνακα.

Θέτοντας $\delta = 0$και $w(x, y) = 1$ στις σχέσεις

$$c\varphi'_{i,i}(u) = (\lambda_i + \delta)\varphi_{i,i}(u) - \lambda_i[\int_0^u \varphi_{i,i}(u - x)f_i(x)dx + w_i(u) - \sum_{k=1}^m a_{i,k}\varphi_{k,i}(u)\ , \quad i \neq j$$

$$c\varphi'_{i,j}(u) = (\lambda_i + \delta)\varphi_{i,j}(u) - \lambda_i[\int_0^u \varphi_{i,j}(u - x)f_i(x)dx - \sum_{k=1}^m a_{i,k}\varphi_{k,j}(u)$$

Με $w_i(u) = \int_u^\infty w(u, x - u)f_i(x)dx$.Έχουμε για $i, j \epsilon I$:

$$c\overline{\Psi'}_{i,j}(u) = \lambda_i\overline{\Psi}_{i,j}(u) - \lambda_i \int_0^u \overline{\Psi}_{i,j}(u - x)f_i(x)dx - \sum_{k=1}^m a_{i,k}\overline{\Psi}_{k,j}(u) + a_{i,j} \qquad (3.7)$$

Ας συμβολίσουμε τώρα με $\widehat{\overline{\Psi}}_{i,j}(s) = \int_0^\infty e^{-su}\overline{\Psi}_{i,j}(u)du$ τον μετασχηματισμό Laplace της $\overline{\Psi}_{i,j}(u)$.

Παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplaceκαι στα δύο μέλη της (3.7) για $i, j \epsilon I$ καταλήγουμε στο ότι

$$\left[s - \frac{\lambda_i}{c}\left(1 - \widehat{f}_i(s)\right)\right]\widehat{\overline{\Psi}}_{i,j}(s) + \frac{1}{c}\sum_{k=1}^m a_{i,k}\widehat{\overline{\Psi}}_{k,j}(s) = \overline{\Psi}_{i,j}(0) + \frac{a_{i,j}}{cs} \, (3.8)$$

Ή με τη μορφή πίνακα:

$$A(s)\widehat{\overline{\Psi}}(s) = \overline{\Psi}(0) + \frac{\Lambda}{cs}$$

Όπου Λ είναι ο πίνακας έντασης της εξωτερικής στοχαστικής διαδικασίας.

Όπου $\widehat{\overline{\Psi}}(s) = (\widehat{\overline{\Psi}}_{i,j}(s))_{i,j=1}^m$ και ο $A(s)$ όπως έχει ορισθεί ,για $\delta = 0$. Επειδή $\chi(u; b) = v(u)[v(b)]^{-1}$ με$\hat{v}(s) = (\hat{v}_{i,j}(s))_{i,j=1}^m = [A(s)]^{-1}$, αν λύσουμε ως προς $\widehat{\overline{\Psi}}(s)$ έχουμε

$$\widehat{\overline{\Psi}}(s) = \hat{v}(s)\overline{\Psi}(0) + \frac{\hat{v}(s)}{s}\frac{\Lambda}{c} \qquad (3.8)$$

Με αντιστροφή της σχέσης (3.8) λαμβάνουμε :

$$\overline{\Psi}(u) = v(u)\overline{\Psi}(0) + (\int_0^u v(x)dx)\frac{\Lambda}{c} \qquad (3.9)$$

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της σχέσης (3.9) ως προς uκαι διαιρώντας με $\overline{\Psi}(0)$ έχουμε για τον πίνακα $v(u)$:

$$v'(u) + v(u)\frac{\Lambda[\overline{\Psi}(0)]^{-1}}{c} = \overline{\Psi}'(u)[\overline{\Psi}(0)]^{-1}\ , \qquad u \geq 0$$

Με οριακή συνθήκη $v(0) = 1$.

Λύνοντας λαμβάνουμε:

$$v(u) = \overline{\Psi}(u)[\overline{\Psi}(0)]^{-1} - \int_0^u \overline{\Psi}(x)[\overline{\Psi}(0)]^{-1}\frac{\Lambda[\overline{\Psi}(0)]^{-1}}{c}e^{-\frac{\Lambda[\overline{\Psi}(0)]^{-1}}{c}(u-x)}dx \quad (3.10)$$

Για ευκολία θα θεωρήσουμε ότι $\widetilde{\Psi}(u) = \overline{\Psi}(u)[\overline{\Psi}(0)]^{-1}$ και $\Delta = (\frac{\Lambda}{c})[\overline{\Psi}(0)]^{-1}$

Τότε η σχέση (3.10) μας δίνει ότι

$$H(z;u) = \int_0^z g(u,y)v(z-y)[v(z)]^{-1}\mathbf{1}dy = \int_0^z g(u,y)\,\widetilde{\Psi}(z-y)[v(z)]^{-1}\mathbf{1}dy$$

$$-\int_0^z g(u,y)\left(\int_0^{z-y}\widetilde{\Psi}(z-y-x)\,\Delta e^{-\Delta x}dx\right)dy[v(z)]^{-1}\mathbf{1}$$

$$= \int_0^z g(u,y)\widetilde{\Psi}(z-y)dy[v(z)]^{-1}\mathbf{1}$$

$$-\int_0^z(\int_0^{z-x} g(u,y)\widetilde{\Psi}(z-y-x)dy)\Delta e^{-\Delta x}dx[v(z)]^{-1}\mathbf{1}$$

Όπως και στο κλασικό μοντέλο (δηλαδή όταν $m = 1$), έτσι και εδώ η $H(z;u)$ εξαρτάται μόνο από την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$.

Στο κλασικό μοντέλο ισχύει ότι $\Lambda = 0\ \ \kappa\alpha\iota\ \Delta = 0$. Τότε η $H(z;u)$ απλοποιείται ως

$$H(z;u) = [\overline{\Psi}(u+z) - \overline{\Psi}(u)][\Psi^{-}(z)]^{-1}$$

3.4 Η κατανομή των μερισμάτων

Σε αυτήν την παράγραφο θα εξετάσουμε την κατανομή των μερισμάτων για μια μαρκοβιανή αλυσίδα της θεωρίας χρεοκοπίας. Η διαδικασία πλεονάσματος πλέον τροποποιείται κατά τρόπο που να εμπεριέχει ένα φράγμα σχετικά με την πληρωμή των μερισμάτων . Συγκεκριμένα όταν το πλεόνασμα ξεπερνά ένα επίπεδο ας το συμβολίσουμε με b(το οποίο θα θεωρήσουμε ότι ξεπερνά η είναι τουλάχιστον ίσο με το αρχικό αποθεματικό uτης διαδικασίας πλεονάσματος), τότε τα μερίσματα καταβάλλονται συνεχώς , έτσι που το πλεόνασμα να παραμένει στο ύψος b μέχρι να επέλθει κάποια ζημιά.

Θα συμβολίσουμε λοιπόν με $U_b(t)$ τη διαδικασία πλεονάσματος που περιγράψαμε παραπάνω. Κατά τα γνωστά έχουμε ότι $U_b(0) = u$. Ορίζουμε ακόμη με $T_{u,b} = \inf\{t \geq 0: U_b(t) < 0\}$ τον αντίστοιχο χρόνο χρεοκοπίας .

Κατά τα γνωστά με δ συμβολίζουμε την ένταση του επιτοκίου και με

$$D_{u,b} = \int_0^{T_{u,b}} e^{-\delta t} dD(t) \ , \qquad 0 \leq u \leq b$$

Την παρούσα αξία όλων των μερισμάτων που έχουν καταβληθεί μέχρι τη στιγμή της χρεοκοπίας, δεδομένου του αρχικού αποθεματικού u και $D(t)$ είναι το σύνολο των μερισμάτων που καταβλήθηκαν ως τη χρονική στιγμή t.

Ακόμη θα ορίσουμε την αναμενόμενη παρούσα αξία των καταβληθέντων μερισμάτων πριν τη χρεοκοπίας, αν αυτή συμβεί από μία ζημιά στην κατάσταση j ως:

$$V_{i,j}(u;b) = \mathbb{E}_i\left[D_{u,b}J\big(I(T_{u,b} = j)\big)\right] \ , \qquad 0 \leq u \leq b \ , i,j \ \in I$$

Τότε $V_i(u;b) = \sum_{j=1}^{m} V_{i,j}(u;b)$, $0 \leq u \leq b$ είναι η συνολική αναμενόμενη παρούσα αξία των μερισμάτων που έχουν πληρωθεί έως τη στιγμή της χρεοκοπίας με αρχική κατάσταση της εξωτερικής διαδικασίας περιβάλλοντος i.

Έστω τώρα ένας πίνακας $m \ x \ m$ διαστάσεων $V(u;b) = (V_{i,j}(u;b))_{i,j=1}^{m}$. Οι Li και Lu (2007) [13] απέδειξαν ότι

$$V(u;b) = \frac{v_\delta(u)}{v'_\delta(b)} \quad , \qquad 0 \leq u \leq b$$

Όπου $v_\delta(u) = (v_{i,j}(u;b))_{i,j=1}^{m}$ είναι ένας πίνακας $m \ x \ m$ διαστάσεων που ικανοποιεί το σύστημα ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων

$$cv'_{i,j}(u;\delta) = (\lambda_i + \delta)v_{i,j}(u;\delta) - \lambda_i \int_0^u v_{i,j}(u-x;\delta) f_i(x)dx - \sum_{k=1}^{m} a_{i,k} \, v_{k,j}(u;\delta)$$

Με οριακή συνθήκη την $v_{i,j}(0;\delta) = I(i=j)$, $i,j \ \in I$

Για την τροποποιημένη πλέον διαδικασία πλεονάσματος $\{U_b(t); t \geq 0\}$ αναφέρουμε την αναμενόμενη συνάρτηση ποινής τη στιγμή της χρεοκοπίας στην κατάσταση j, δεδομένου του αρχικού αποθεματικού και της αρχικής κατάστασης της διαδικασίας, την οποία συμβολίζουμε με $\varphi_{i,J}(u; b)$, $0 \leq u \leq b, i, j \in I$. Ακόμη, η αναμενόμενη συνάρτηση ποινής (συνάρτηση των Gerber-Shiu) με τις παραπάνω υποθέσεις ενεργές είναι:

$$\varphi_i(u; b) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_{i,j}(u; b), u \geq 0 , \qquad i \in I$$

Κατά τα γνωστά όταν $\delta = 0$ και $w(x, y) = 1$, η $\varphi_{i,j}(u; b)$απλοποιείται στη γνωστή πιθανότητα χρεοκοπίας :

$$\psi_{i,j}(u; b) = \mathbb{P}_i(T_{u,b} < \infty, I(T_{u,b}) = j | U_b(0) = u) , \qquad i, j \in I$$

Και η συνολική πιθανότητα χρεοκοπίας υπολογίζεται από το άθροισμα των επιμέρους πιθανοτήτων για όλες τις καταστάσεις με αρχική την κατάσταση iδηλαδή:

$$\psi_i(u; b) = \sum_{j=1}^{m} \psi_{i,j}(u; b) , \quad i \in I$$

Προκειμένου, λοιπόν, να συνυπολογίσουμε στη συνάρτηση ποινής την καταβολή μερισμάτων ορίζουμε ως τ_b τη χρονική στιγμή κατά την οποία το πλεόνασμα για πρώτη φορά φτάνει το κατώφλι b (θυμίζουμε ότι είναι ένα όριο τουλάχιστον ίσο του αρχικού αποθεματικού) και για $\delta > 0$ θα ορίσουμε την αναμενόμενη μέση τιμή μιας νομισματικής μονάδας πληρωτέας τη στιγμή που το πλεόνασμα φτάνει το όριο b στην κατάσταση j, χωρίς να επέλθει χρεοκοπία με αρχικό αποθεματικό uκαι αρχική κατάσταση i :

$$L_{i,j}(u; b) = \mathbb{E}_i[e^{-\delta t} J(\tau_b < T_{u,b} , I(\tau_b) = j | U_b(0) = u] \;,\; 0 \leq u \leq b \;,\; i, j \in I$$

Εναλλακτικά, μπορεί να θεωρηθεί ως μετασχηματισμός Laplace της χρονικής στιγμής άφιξης του πλεονάσματος στο κατώφλι b.

Η συνάρτηση $L_{i,j}(u; b)$ ικανοποιεί το σύστημα ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων

$$cL'_{i,j}(u; \delta) = (\lambda_i + \delta)L_{i,j}(u; \delta) - \lambda_i \int_0^u L_{i,j}(u - x; \delta) f_i(x) dx - \sum_{k=1}^{m} a_{i,k} \, L_{k,j}(u; \delta)$$

Με οριακή συνθήκη $L_{i,j}(b; b) = I(i = j)$. Έστω $L(u; b) = (L_{i,j}(u; b))_{i,j=1}^{m}$ ένας πίνακας $m \; x \; m$ διαστάσεων.

Ακολούθως αφού όπως είδαμε $L(b; b) = I$ έχουμε

$$L(u; b) = v_\delta(u) L(0; b) = \frac{v_\delta(u)}{v'_\delta(b)}$$

Κάνοντας χρήση των ίδιων υποθέσεων καταλήγουμε για $0 \leq u \leq b$

$$\varphi_{i,j}(u; b) - \varphi_{i,j}(u) = \sum_{k-1}^{m} L_{i,k}(u; b)[\varphi_{i,j}(b; b) - \varphi_{i,j}(b)]$$

Με οριακή συνθήκη $\varphi'_{i,j}(b-;b) = 0$, $i,j \in I$. Με τη μορφή πινάκων η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\boldsymbol{\varphi}(u;b) - \boldsymbol{\varphi}(u) = L(u;b)[\boldsymbol{\varphi}(b;b) - \boldsymbol{\varphi}(b)]$$

Και οριακή συνθήκη $\boldsymbol{\varphi}'(b-;b) = \mathbf{0}$. Όπου $\boldsymbol{\varphi}(u;b) = (\boldsymbol{\varphi}_{i,j}(u;b))_{i,j=1}^{m}$, $\boldsymbol{\varphi}'(b-;b) = (\boldsymbol{\varphi}'_{i,j}(b-;b))_{i,j=1}^{m}$ και $\mathbf{0}$ ο μηδενικός πίνακας διαστάσεων $m\ x\ m$.Τότε με τη μορφή πινάκων μπορούμε να ισχυριστούμε ότι

$$\boldsymbol{\varphi}(b;b) - \boldsymbol{\varphi}(b) = -\frac{\boldsymbol{\varphi}'(b)}{L'(b;b)} = -\boldsymbol{\varphi}'(b)\frac{v_\delta(b)}{v'(b)}$$

Έτσι, σε μορφή πινάκων η συνάρτηση ποινής των μερισμάτων παίρνει την κάτωθι μορφή

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}(u;b) = \boldsymbol{\varphi}(u) - \frac{L(u;b)v_\delta(b)\boldsymbol{\varphi}'(b)}{v'_\delta(b)} &= \boldsymbol{\varphi}(u) - \frac{v_\delta(u)v_\delta(b)\boldsymbol{\varphi}'(b)}{v_\delta(b)v'_\delta(b)} \\ = \boldsymbol{\varphi}(u) - V(u;b)\boldsymbol{\varphi}'(b)\ , &\qquad 0 \le u \le b\end{aligned}$$

Ενώ η πιθανότητα χρεοκοπίας με τη μορφή πίνακα είναι

$$\psi(u;b) = \psi(u) - V(u;b)\psi'(b)\ , \qquad 0 \le u \le b$$

Η παραπάνω εξίσωση μας δείχνει ότι η χρεοκοπία είναι βέβαιη όταν υπάρχει η στρατηγική μερισμάτων που καταβάλλονται όταν το πλεόνασμα υπερβεί ένα κατώφλι. Πιο συγκεκριμένα, για $\varphi_i(u;b) = 0$, $i \in I$και $0 \le u \le b$ ας υποθέσουμε τους πίνακες $\varphi(u) = (\varphi_1(u), \dots, \varphi_m(u))^T$ και $\varphi(u;b) = (\varphi_1(u;b), \dots, \varphi_m(u;b))^T$ να είναι πίνακες στήλες $m\ x\ 1$ διαστάσεων. Τότε

$$\varphi(u;b) = \mathbf{1} - \psi(u;b)1 = \mathbf{1} - \psi(u)\mathbf{1} + V(u;b)\psi'(u)\mathbf{1} = \varphi(u) - V(u;b)\psi'(u) \qquad (3.11)$$

$$0 \le u \le b$$

Οι Li και Lu (2005) [15] έδειξαν ότι η $\varphi_i(u)$, $i \in I$ ικανοποιεί το παρακάτω σύστημα ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων

$$c\varphi'_i(u;\delta) = \lambda_i\varphi_i(u) - \lambda_i\int_0^u \varphi_i(u-x;\delta)f_i(x)dx - \sum_{k=1}^{m} a_{i,k}\,\varphi_k(u)$$

Οι λύσεις αυτού του συστήματος προσδιορίζονται μοναδικά από τις αρχικές συνθήκες της $\varphi_i(u)$, $i \in I$. Ακόμη από το σύστημα ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων που είδαμε λίγο πριν για την $v_\delta(u)$ καταλήγουμε στο ότι η εξίσωση $\sum_{j=1}^{m} v_{i,j}(u)\varphi_j(0)$ έχει τις ίδιες αρχικές τιμές με την $\varphi_i(u)$ και για $\delta = 0$ έχουμε ότι $\varphi_i(u) = \sum_{j=1}^{m} v_{i,j}(u)\varphi_j(0)$.Τελικά η (3.11) παίρνει την πιο απλή μορφή

$$\varphi(u;b) = v_0(u)\varphi(0) - V(u;b)v'_0(b)\varphi(0) = v_0(u)\varphi(0) - \frac{v_0(u)v'_0(b)\varphi(0)}{v'_0(b)} = \mathbf{0}$$

$$0 \le u \le b$$

Όπου $\mathbf{0}$ είναι ένας μηδενικός πίνακας στήλη $m\ x\ \ 1$ διαστάσεων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

Το μαρκοβιανό μοντέλο χρεοκοπίας με στρατηγική κατανομής μερίσματος

4.1 Η παρούσα αξία των καταβληθέντων μερισμάτων

Για την παρούσα αξία των καταβληθέντων μερισμάτων ως τη στιγμή χρεοκοπίας , την οποία θυμίζουμε ότι στην προηγούμενη παράγραφο συμβολίσαμε με $V_i(u;b)$, έχουμε τις εξής τέσσερεις περιπτώσεις για ένα διάστημα [0,h], [βλέπε 17]:

1. Δεν υπάρχει καμία απαίτηση και καμία μεταβολή στην εξωτερική διαδικασία
2. Συμβαίνει μία απαίτηση η οποία μπορεί να συνεπάγεται ή μη την χρεοκοπία
3. Η κατάσταση της εξωτερικής διαδικασίας μεταβάλλεται στο διάστημα [0,h]
4. Δύο ή περισσότερες απαιτήσεις συμβαίνουν στο χρονικό διάστημα [0,h]

Επομένως έχουμε ότι

$$V_i(u;b) = (1-\alpha_i h - \lambda_i h)e^{-\delta h}V_i(u+c_i h;b) + \lambda_i h e^{-\delta h}\int_0^{u+c_i h} V_i(u+c_i h - x;b)dF_i(x) + \alpha_i h e^{-\delta h}\sum_{k=1}^{m} p_{ik}V_k(u+c_i h;b) + o(h)\,, \qquad 0 \le u \le b\,, i \in I$$

όπου υπενθυμίζουμε ότι α_i , $i \in I$ είναι το περιεχόμενο του πίνακα έντασης Λ της εξωτερικής διαδικασίας , h είναι το μήκος του χρονικού υπό μελέτη διαστήματος, δ είναι η ένταση ανατοκισμού, λ_i είναι η ένταση της διαδικασίας Poisson, p_{ik} , $i,k \in I$ είναι οι πιθανότητες μετάβασης από μία κατάσταση σε μια άλλη για όλες τις δυνατές καταστάσεις.

Επίσης $\frac{o(h)}{h} \to 0$ όταν $h \to 0$και εφόσον ισχύει ότι $e^{-\delta h} = 1 - \delta h + o(h)$ έχουμε

$$V_i(u;b) = (1-(\alpha_i + \lambda_i + \delta)h)V_i(u+c_i h;b) + \lambda_i h\int_0^{u+c_i h} V_i(u+c_i h - x;b)dF_i(x) + \alpha_i h\sum_{k=1}^{m} p_{ik}V_k(u+c_i h;b) + o(h)\,, \quad 0 \le u \le b\,, i \in I$$

Ενώ για $0 \le u \le b$ η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως

$$\frac{V_i(u+c_i h;b) - V_i(u;b)}{h} = (\alpha_i + \lambda_i + \delta)V_i(u+c_i h;b) - \lambda_i \int_0^{u+c_i h} V_i(u+c_i h - x;b)dF_i(x) - \alpha_i \sum_{k=1}^{m} p_{ik}V_k(u+c_i h;b) + \frac{o(h)}{h}\,, \quad i \in I$$

Για $h \to 0$ η παραπάνω σχέση μας δίνει ένα σύστημα ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων που ικανοποιεί την $V_i(u;b)$ και είναι το

$$cV_i'(u;\delta) = (\alpha_i + \lambda_i + \delta)V_i(u;b) - \lambda_i \int_0^u V_i(u-x;b)f_i(x)dF_i(x) - \alpha_i \sum_{k=1}^m p_{i,k} V_k(u;b),$$

$$0 \le u \le b\,, i \in I$$

Στην περίπτωση που το αρχικό αποθεματικό υσυμπίπτει με το κατώφλι b η σχέση που εκφράζει την παρούσα αξία των αναμενόμενων καταβληθέντων μερισμάτων ως το χρόνο χρεοκοπίας διαμορφώνεται σε

$$\begin{aligned} V_i(b;b) = (1 - \alpha_i h - \lambda_i h)[e^{-\delta h}V_i(b;b) + c_i \int_0^h e^{-\delta s}ds] \\ + \lambda_i h e^{-\delta h}[\int_0^b V_i(b-x;b)dF_i(x) + \int_0^h c_i e^{-\delta s}ds] + \alpha_i h e^{-\delta h}[\sum_{k=1}^m p_{ik}V_k(b;b) \\ + \int_0^h c_i e^{-\delta s}ds] + o(h), \qquad i \in I \end{aligned}$$

Έτσι, καταλήγουμε ότι για $i \in I$:

$$(\alpha_i + \lambda_i + \delta)V_i(b;b) - \lambda_i \int_0^b V_i(b-x;b)dF_i(x) - \alpha_i \sum_{k=1}^m p_{i,k} V_k(b;b) = c_i$$

Εάν τώρα συμβολίσουμε με $v_i(u)$, $0 \le u < \infty$, $i \in I$ τις λύσεις των ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων έχουμε ότι

$$cv_i'(u) = (\alpha_i + \lambda_i + \delta)v_i(u) - \lambda_i \int_0^u v_i(u-x)dF_i(x) - \alpha_i \sum_{k=1}^m p_{i,k}\, v_k(u) \ , i \in I \quad (4.1)$$

οι οποίες είναι μοναδικά ορισμένες βάσει της αρχικής συνθήκης της $v_i(0), i \in I$. Συγκεκριμένα για $j \in I$ ορίζουμε τις μερικές λύσεις $v_{1,j}(u), v_{2,j}(u), \dots, v_{m,j}(u)$ της ως άνω σχέσης με αρχικές συνθήκες

$$v_{i,j}(0) = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$$

Τότε η μορφή των γενικών λύσεων της σχέσης (4.1) είναι

$$v_i(u) = \sum_{j=1}^m a_j\, v_{i,j}(u)\,, \qquad i \in I$$

Όπου τα $a_1, a_2, \dots, a_m$ είναι οποιοιδήποτε πραγματικοί αριθμοί.

Θα αναλύσουμε τώρα την υψηλότερη τιμή της παρούσας αξίας των καταβληθέντων μερισμάτων μέχρι τη στιγμή της χρεοκοπίας. Για το λόγο αυτό ορίζουμε τη στιγμιαία γεννήτρια συνάρτηση $M_i(u, y; b)$της $D_{u,b}$ λαμβάνοντας υπόψη ότι το αρχικό αποθεματικό είναι u και η αρχική κατάσταση περιβάλλοντος i :

$$M_i(u, y; b) = E[e^{yD_{u,b}}|U(0) = u, I(0) = i] \,, \quad 0 \leq u \leq b \,, i \in I$$

Με το y να είναι ορισμένο κατά τρόπο που να υπάρχει η συνάρτηση.

Πιο αναλυτικά για ένα μικρό χρονικό διάστημα $[0, h]$:

$$\begin{aligned} M_i(u, y; b) = E[e^{yD_{u,b}}|U(0) = u, I(0) = i] &= (1 - \alpha_i h - \lambda_i h) M_i\left(u + c_i h, e^{-\delta h} y; b\right) \\ &= \lambda_i h \left[\int_0^{u+c_i h} M_i\left(u + c_i h - x, e^{-\delta h} y; b\right) dF_i(x) + \bar{F}_i(u + c_i h) \right] \\ &= a_i h \sum_{k=1}^{m} p_{ik} M_k\left(u + c_i h - x, e^{-\delta h} y; b\right) + o(h) \,, \qquad 0 \leq u \leq b \,, i \in I \end{aligned}$$

Όπου κατά τα γνωστά με $\bar{F}$ συμβολίζεται η δεξιά ουρά της συνάρτησης F. Με τη βοήθεια της σειράς Taylor οδηγούμαστε στο ότι

$$M_i\left(u + c_i h, e^{-\delta h} y; b\right) = M_i(u, y; b) + c_i h \frac{\partial M_i(u, y; b)}{\partial u} - \delta y h \frac{\partial M_i(u, y; b)}{\partial u} + o(h) \quad (4.2)$$

Υποκαθιστώντας την σχέση (4.2) στην αναλυτική σχέση που εκφράζει την $M_i(u, y; b)$, εάν διαιρέσουμε με h και αν $h \to 0$ τότε

$$\begin{aligned} c_i \frac{\partial M_i(u, y; b)}{\partial u} &- \delta y \frac{\partial M_i(u, y; b)}{\partial u} - (\lambda_i + \alpha_i) M_i(u, y; b) \\ &+ \lambda_i \left[\int_0^u M_i(u - x, y; b) dF_i(x) + \bar{F}_i(u) \right] + \alpha_i \sum_{k=1}^{m} p_{ik} \, M_k(u, y; b) = 0 \quad (4.3) \end{aligned}$$

$$, 0 \leq u \leq b \,, i \in I$$

Και στην περίπτωση όπου $b = u$:

$$\begin{aligned} M_i(b, y; b) &= (1 - \alpha_i h - \lambda_i h) e^{yhc_i} M_i\left(b, e^{-\delta h} y; b\right) \\ &= \lambda_i h e^{yhc_i} \left[\int_0^b M_i\left(b - x, e^{-\delta h} y; b\right) dF_i(x) + \bar{F}_i(b) \right] \\ &= a_i h e^{yhc_i} \sum_{k=1}^{m} p_{ik} M_k\left(b, e^{-\delta h} y; b\right) + o(h) \,, \qquad i \in I \end{aligned}$$

Ακόμη με τη βοήθεια της σειράς Taylor έχουμε ότι

$$\delta y \frac{\partial M_i(u,y;b)}{\partial u} + (\lambda_i + \alpha_i + c_i y) M_i(b,y;b)$$
$$= \lambda_i \left[\int_0^b M_i(b-x,y;b)\, dF_i(x) + \bar{F}_i(b) \right] + a_i \sum_{k=1}^{m} p_{ik} M_k(b,y;b) = 0$$

Επίσης για $0 \leq u \leq b$ και για $i = 1,2, \dots, m$ ορίζουμε την n-οστή γεννήτρια της $D_{u,b}$ ως:

$$V_{i,n}(u;b) = E[D_{u,b}^n | I(0) = i]\,, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Με $V_{i,0}(u;b) = 1$ και $V_{i,1}(u;b) = V_i(u;b)$. Αντικαθιστώντας την $M_i(u,y;b) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{y^n}{n!})\, M_{i,n}(u;b)$ στην (4.3) και συγκρίνοντας το συντελεστή της y^n οδηγούμαστε στο ακόλουθο σύστημα ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων:

$$cV_{i,n}'(u) = (\alpha_i + \lambda_i + n\delta) V_{i,n}(u;b) - \lambda_i \int_0^u V_{i,n}(u-x;b) dF_i(x) - \alpha_i \sum_{k=1}^{m} p_{i,k}\, V_{k,n}(u) \quad ,$$

$$0 \leq u \leq b\,, i \in I$$

4.2 Ο χρόνος και η πιθανότητα άφιξης στο κατώφλι μερισμάτων

Σε αυτήν την παράγραφο θα υπολογίσουμε το χρόνο που απαιτείται έως ότου η διαδικασία πλεονάσματος να φτάσει το κατώφλι b από το αρχικό αποθεματικό u χωρίς να έχει συμβεί χρεοκοπίας μέχρι τότε. Συμβολίζουμε λοιπόν ως τ_b τη χρονική στιγμή κατά την οποία για πρώτη φορά το πλεόνασμα φτάνει το κατώφλι bχωρίς να έχει επέλθει χρεοκοπία. Έτσι, για $\delta > 0$ ορίζουμε την αναμενόμενη παρούσα αξία μίας νομισματικής μονάδας πληρωτέας τη χρονική στιγμή τ_b, δεδομένου του αρχικού αποθεματικού και της αρχικής κατάστασης ως:

$$\mathcal{L}_i(u;b) = E[e^{-\delta\tau_b}|U(0) = u, I(0) = i] ,0 \leq u \leq b\, , \qquad i \in I$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να θεωρήσουμε την ως άνω ως μετασχηματισμό Laplaceτης τυχαίας μεταβλητής τ_b ως προς την παράμετρο δ.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.1(Theorem 1 [17]): Η $\mathcal{L}_i(u;b)$ ικανοποιεί το σύστημα ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων

$$c\mathcal{L}_i'(u) = (\alpha_i + \lambda_i + \delta)\mathcal{L}_i(u;b) - \lambda_i \int_0^u \mathcal{L}_i(u-x;b)dF_i(x) - \alpha_i \sum_{k=1}^m p_{i,k}\,\mathcal{L}_k(u;b) \quad ,$$

$$0 \leq u \leq b\, , i \in I$$

Με οριακή συνθήκη την $\mathcal{L}_i(b;b) = 1\, ,\ i \in I$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ : Η οριακή συνθήκη $\mathcal{L}_i(b;b) = 1\, , i \in I$ ισχύει διότι $\tau_b = 0$ και $E[e^{-\delta\tau_b}|U(0) = u, I(0) = i] = 1$ για $u = b$. ■

Οι λύσεις του ολοκληροδιαφορικού συστήματος

$$c\mathcal{L}_i'(u) = (\alpha_i + \lambda_i + n\delta)\mathcal{L}_i(u;b) - \lambda_i \int_0^u \mathcal{L}_i(u-x;b)dF_i(x) - \alpha_i \sum_{k=1}^m p_{i,k}\,\mathcal{L}_k(u;b) \quad ,$$

Είναι

$$\mathcal{L}_i(u;b) = \sum_{j=1}^m e_j(b)\, v_{i,j}(u) \;\; ,0 \leq u \leq b\, , \qquad i \in I$$

Όπου $e_1(b), e_2(b), \ldots, e_m(b)$είναι οι λύσεις του $\sum_{j=1}^m e_j(b)\, v_{i,j}(b) = 1\ ,\ i \in I$

Για $b > u \geq 0$ ορίζουμε την πιθανότητα η χρεοκοπία να επέλθει από το αρχικό αποθεματικό uχωρίς η διαδικασία πλεονάσματος να φτάσει το όριο b, δεδομένου ότι η αρχική κατάσταση της εξωτερικής διαδικασίας είναι i ως

$$\xi_i(u;b) = P\{\sup_{0\leq t\leq T_\infty} U(t) < b, T_\infty < \infty | U(0) = u, I(0) = i\} \;\; , \qquad i \in I$$

Όπου με T_∞ εδώ συμβολίζουμε το χρόνο χρεοκοπίας όπως είχε ορισθεί στην αρχή της παρούσας εργασίας, δηλαδή χωρίς την παρουσία φράγματος. Προφανώς, ισχύει ότι $\xi_i(u;b) = 0 \quad , b \leq u.$

Ακόμη, ορίζουμε την πιθανότητα το αποθεματικό να φτάσει στο κατώφλι μερισμάτων b ενώ έχει ξεκινήσει από το uχωρίς όμως να πέσει κάτω από το μηδέν ως

$$\chi_i(u;b) = 1 - \xi_i(u;b) \ , i \in I$$

Αφού η χρεοκοπία εν τέλει θα συμβεί, είτε το αποθεματικό φτάσει το όριο b, είτε όχι.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.2 (Theorem 2 [17]): Η $\chi_i(u;b)$ ικανοποιεί το σύστημα ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων

$$c\chi_i'(u) = (\alpha_i + \lambda_i)\chi_i(u;b) - \lambda_i \int_0^u \chi_i(u-x;b)dF_i(x) - \alpha_i \sum_{k=1}^m p_{i,k}\,\chi_k(u;b) \quad ,$$

με οριακή συνθήκη $\chi_i(b;b) = 1.$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ : Για μία μικρή θετική τιμή $h > 0$, έχουμε για $b > u \geq 0$

$$\chi_i(u;b) = (1 - \alpha_i h - \lambda_i h)\chi_i(u + c_i h;b) = \lambda_i h \left[\int_0^{u+c_i h} \chi_i(u + c_i h - x;b)\,dF_i(x) \right]$$
$$= a_i h \sum_{k=1}^m p_{ik}\chi_k(u + c_i h;b) + o(h) \quad , \qquad i \in I$$

Αφαιρώντας την $\chi_i(u;b)$ και από τα δύο μέλη , διαιρώντας με h και αν $h \to 0$ αποδεικνύεται. Όσον αφορά την οριακή συνθήκη έγκειται από το γεγονός ότι το πλεόνασμα γίνεται b από την αρχή χωρίς να συμβεί χρεοκοπία αφού έχουμε υποθέσει ότι $u = b.$■

Ας συμβολίσουμε με $v_{i,j}^0(b)$τις λύσεις των ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων της (4.1) με $\delta = 0$. Τότε $\chi_i(u;b) = \sum_{j=1}^m h_j(b)v_{i,j}^0(b) \ , 0 \leq u \leq b \ , i \in I$, όπου $h_1(b), \dots, h_m(b)$ είναι οι λύσεις του συστήματος εξισώσεων $\sum_{j=1}^m h_j(b)v_{i,j}^0(b) = 1 \ , \ i \in I$

Χαρακτηριστικά αναφέρουμε ότι στο κλασικό μοντέλο χρεοκοπίας ($m = 1$), οι Dickson και Gray (1984) [5] απέδειξαν ότι η πιθανότητα $\chi_i(u;b)$ υπολογίζεται από τη σχέση

$$\chi_i(u;b) = \frac{1 - \psi(u)}{1 - \psi(b)} \ , \qquad 0 \leq u \leq b$$

Με $\psi(u)$ την πιθανότητα χρεοκοπίας στο κλασικό μοντέλο. Ακόμη, η κατανομή των συνολικών μερισμάτων είναι μίξη της εκφυλισμένης κατανομής στο μηδέν και μιας εκθετικής κατανομής με μέσο $V(b;b)$ και βάρη $p = 1 - \chi_i(u;b)$ και $q = \chi_i(u;b)$.

Προκειμένου σε αυτό το σημείο να βρεθούν οι λύσεις της $v_{i,j}(u)$ θα χρησιμοποιήσουμε τους μετασχηματισμούς Laplace $\hat{v}_{i,j}$ και $\hat{f}_i$. Εξ ορισμού λοιπόν

$\hat{v}_{i,j}(s) = \int_0^\infty e^{-su} v_{i,j}(u)du$και $\hat{f}_i(s) = \int_0^\infty e^{-su} f_i(x)dx$, $i, j \in I$

Λαμβάνοντας μετασχηματισμούς Laplace και στα δύο μέλη της (4.1) έχουμε

$$\left[s - \frac{\lambda_i + a_i}{c_i} + \frac{\lambda_i}{c_i}\hat{f}_i(s)\right]\hat{v}_{i,j}(s) + \frac{a_i}{c_i}\sum_{k=1}^{m} p_{ik} v_{k,j}(s) = v_{i,j}(0) \quad , \qquad i, j \in I$$

Με $v_{i,j}(0) = I(i = j)$, όπου $I(\cdot)$ είναι μια δείκτρια συνάρτηση ενός πίνακα

$$A(s)\hat{v}(s) = I$$

Με $A(s) = \left[s - \frac{\lambda_1[1-\hat{f}_1(s)]+\alpha_1}{c_1} \ddots \ s - \frac{\lambda_m[1-\hat{f}_m(s)]+\alpha_m}{c_m}\right] + \left[\frac{a_1}{c_1} \ddots \frac{a_m}{c_m}\right] Q$,
$\hat{v}(s) = (\hat{v}_{i,j}(s))_{i,j=1}^{m}$, I είναι ένας πίνακας $m\ x\ m$ διαστάσεων και $Q = (p_{i,j})_{i,j=1}^{m}$ είναι ο πίνακας μετάβασης όπως έχει ήδη ορισθεί. , με $p_{ii} = 0$, $i \in I$

Τότε, η $\hat{v}(s)$ μπορεί να λυθεί ως $\hat{v}(s) = \frac{1}{A(s)}$.

Πιο συγκεκριμένα, για ένα μοντέλο που αποτελείται από δύο μόνο καταστάσεις, θα βρούμε αναλυτικές εκφράσεις για τις μερικές λύσεις $v_{1,1}(u), v_{2,1}(u), v_{1,2}(u), v_{2,2}(u)$. Η πιθανότητα κατανομής π_i γίνεται πλέον

$$\pi_i = \frac{\frac{\lambda_i}{a_i}}{\frac{\lambda_1}{a_1} + \frac{\lambda_2}{a_2}} \quad , \qquad i = 1{,}2$$

Ενώ η θετική κατάσταση φόρτωσης

$$d = \frac{\frac{\lambda_1}{a_1}\left(\frac{c_1}{\lambda_1} - \mu_1\right) + \frac{\lambda_2}{a_2}\left(\frac{c_1}{\lambda_2} - \mu_2\right)}{\frac{\lambda_1}{a_1} + \frac{\lambda_2}{a_2}} > 0$$

Για περαιτέρω κατανόηση θα δώσουμε ένα παράδειγμα που αφορά δύο εκθετικές κατανομές. Έστω λοιπόν δύο εκθετικές κατανομές με παραμέτρους α και β. Οι μετασχηματισμοί Laplace αυτών κατά τα γνωστά είναι

$\hat{f}_1(s) = \frac{\alpha}{\alpha+s}$ και $\hat{f}_2(s) = \frac{\beta}{\beta+s}$ με $\alpha, \beta > 0$. Τότε ο πίνακας A(s) που είδαμε νωρίτερα γίνεται

$$A(s) = \begin{bmatrix} s - \frac{\lambda_1 + \alpha_1 + \delta}{c_1} + \frac{\lambda_1 \alpha}{c_1(s + a)} & \frac{a_1}{c_1} \\ \frac{a_2}{c_2} & s - \frac{\lambda_2 + \alpha_2 + \delta}{c_2} + \frac{\lambda_2 \beta}{c_2(s + \beta)} \end{bmatrix}$$

Χάριν ευκολίας όπως και σε προηγούμενο κεφάλαιο θα συμβολίσουμε με

$$Q_\delta(s) := \left[s - \frac{\lambda_1 + \alpha_1 + \delta}{c_1} + \frac{\lambda_1 \alpha}{c_1(s+a)}\right] [s - \frac{\lambda_2 + \alpha_2 + \delta}{c_2} + \frac{\lambda_1 \beta}{c_1(s+\beta)}]$$

Τότε οι μετασχηματισμοί Laplaceτων τεσσάρων συναρτήσεων που αναζητούμε έχουν ως εξής:

$$\hat{v}_{1,1}(s) = \frac{\left[\left(s - \frac{\lambda_2+\alpha_2+\delta}{c_2}\right)(s+\beta) + \frac{\lambda_2\beta}{c_2}\right](s+a)}{\left[Q_\delta(s) - \frac{a_1}{c_1}\frac{a_2}{c_2}\right](s+\beta)(s+a)}$$

$$\hat{v}_{1,2}(s) = -\frac{a_1(s+\beta)(s+a)}{c_1\left[Q_\delta(s) - \frac{a_1}{c_1}\frac{a_2}{c_2}\right](s+\beta)(s+a)}$$

$$\hat{v}_{2,1}(s) = -\frac{a_2(s+\beta)(s+a)}{c_2\left[Q_\delta(s) - \frac{a_1}{c_1}\frac{a_2}{c_2}\right](s+\beta)(s+a)}$$

$$\hat{v}_{2,2}(s) = \frac{\left[\left(s - \frac{\lambda_1+\alpha_1+\delta}{c_1}\right)(s+\alpha) + \frac{\lambda_1\alpha}{c_1}\right](s+\beta)}{\left[Q_\delta(s) - \frac{a_1}{c_1}\frac{a_2}{c_2}\right](s+\beta)(s+a)}$$

Παρατηρούμε ότι το κοινό μέρος του παρονομαστή των τεσσάρων εξισώσεων είναι πολυώνυμο τετάρτου βαθμού με λύσεις έστω τις R_1, R_2, R_3, R_4. Έτσι, αντιστρέφοντας του μετασχηματισμούς Laplace παίρνουμε ότι

$$v_{i,j}(u) = \sum_{k=1}^{4} r_{i,j,k} e^{R_k u} \ , \qquad i,j = 1,2$$

Με $r_{1,1,k} = \frac{\left[\left(R_k - \frac{\lambda_2+\alpha_2+\delta}{c_2}\right)(R_k+\beta) + \frac{\lambda_2\beta}{c_2}\right](R_k+\alpha)}{\prod_{l=1,l\neq k}^{4}(R_k - R_l)}$, $r_{2,2,k} = \frac{\left[\left(R_k - \frac{\lambda_1+\alpha_1+\delta}{c_1}\right)(R_k+a) + \frac{\lambda_1 a}{c_1}\right](R_k+\beta)}{\prod_{l=1,l\neq k}^{4}(R_k - R_l)}$

$r_{1,2,k} = -\frac{\alpha_1(R_k+\alpha)(R_k+\beta)}{c_1\prod_{l=1,l\neq k}^{4}(R_k - R_l)}$, $r_{2,1,k} = -\frac{\alpha_2(R_k+\alpha)(R_k+\beta)}{c_2\prod_{l=1,l\neq k}^{4}(R_k - R_l)}$

Έτσι, πλέον μπορούμε να υπολογίσουμε την αναμενόμενη μέση τιμή των συνολικών μερισμάτων μέχρι τη χρεοκοπία, ξεκινώντας από μία κατάσταση ίως

$$V_i(u;b) = \sum_{j=1}^{2} a_j(b)\{\sum_{k=1}^{4} r_{i,j,k} e^{R_k u}\} \ , \qquad 0 \leq u \leq b \, , i = 1,2$$

Όπου $a_j(b)$, $j = 1,2$ είναι οι λύσεις του συστήματος

$$\sum_{j=1}^{2} a_j(b)\{\sum_{k=1}^{4} r_{i,j,k} e^{R_k u}\} = 1 \ , \qquad i = 1,2$$

4.3 Η συνάρτηση Gerber-Shiu υπό την ύπαρξη μερίσματος

Θεωρούμε ένα μοντέλο χρεοκοπίας σε συνεχή χρόνο και ορίζουμε ως $\{I(t); t \geq 0\}$ την εξωτερική διαδικασία περιβάλλοντος. Υποθέτουμε ότι η $\{I(t); t \geq 0\}$ είναι ομογενής, αμείωτη και επαναλαμβανόμενη διαδικασία Markov με πεπερασμένο πεδίο ορισμού $I = \{1,2, \dots m\}$.

Ακόμη, συμβολίζουμε με $\Lambda = (\alpha_{i,j})_{i,j=1}^{m}$ όπου $\alpha_{i,i} \coloneqq -\alpha_i \ , i \ \in \{1,2, \dots m\}$, την ένταση του πίνακα $\{I(t); t \geq 0\}$ και με $N(t)$ συμβολίζεται το πλήθος των ζημιών που συμβαίνουν στο χρονικό διάστημα $(0, t]$.

Αν $I(s) = i$ για όλα τα s σε ένα μικρό διάστημα της μορφής $(t, t + h]$, τότε ο αριθμός των απαιτήσεων σε αυτό το διάστημα είναι $N(t + h) - N(t)$ και ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda_i > 0$, ενώ η κατανομή των αποζημιώσεων συμβολίζεται με F_i και η συνάρτηση πιθανότητας τους με f_i και μέσο μ_i , $i \in I$.

Ακόμη, υποθέτουμε ότι το ασφάλιστρο εισπράττεται συνεχώς με σταθερό ρυθμό c_1.Η διαδικασία πλεονάσματος $\{U(t); t \geq 0\}$ κατά τα γνωστά μας δίνεται από τη σχέση:

$$U(t) = u + c_1 t - \sum_{n=1}^{N(t)} X_n \ , \qquad t \geq 0$$

Με $u \geq 0$ το αρχικό αποθεματικό και X_n το ύψος της n-οστης ζημιάς.

Στην παρούσα παράγραφο θεωρούμε ότι αυτή η διαδικασία μεταβάλλεται βάσει της πληρωμής των μερισμάτων. Ας συμβολίσουμε λοιπόν με d $(0 \leq d \leq c_1)$ τον ρυθμό του μερίσματος.

Όταν το πλεόνασμα ξεπερνά το κατώφλι b $(\geq u)$, τότε τα μερίσματα πληρώνονται συνεχώς με ρυθμό $d.$ Έτσι, το καθαρό ασφάλιστρο μετά την απόδοση μερίσματος είναι $c_1 - d = c_2$.

Συμβολίζουμε τώρα με $\{U_b(t); t \geq 0\}$ τη διαδικασία πλεονάσματος με αρχικό αποθεματικό $U_b(0) = u$ με την στρατηγική κατανομής μερίσματος που περιγράψαμε. Τότε:

$$U_b(t) = u + \int_0^t c[U_b(s)]ds - \sum_{n=1}^{N(t)} X_n \, , \qquad t \geq 0 \qquad (4.4)$$

Όπου $c(y) = c_1, 0 \leq y < b$ ή $c(y) = c_2, y > b$.

Επιπροσθέτως, αναφέρουμε ότι $\sum_{i=1}^{m} \pi_i(c_2 - \lambda_i \, \mu_i) > 0$, έτσι που η φόρτωση να είναι θετική και η πιθανότητα χρεοκοπίας μη βέβαιη (συνθήκη καθαρού κέρδους) , όπου $\vec{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_m)$ είναι η στάσιμη κατανομή της $\{I(t); t \geq 0\}$.

Θέτουμε ως $T_b = \inf\{t \geq 0: U_b(t) < 0\}$ τον χρόνο χρεοκοπίας και $w(x, y)$, $x, y \geq 0$ μία μη αρνητική συνάρτηση ποινής.

Χάριν ευκολίας δηλώνουμε $\mathbb{P}_i(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot \ | I(0) = i)$. Επίσης έστω $\delta \geq 0$ η ένταση επιτοκίου της εκτίμησης. Για $i \ \in I$ ορίζουμε την

$$\mathbb{E}_i[e^{-\delta T_b}w(U_b(T_b -), |U_b(T_b)|)J(T_b < \infty)|U_b(0) = u]$$

$$= \begin{cases} \varphi_{i1}(u;b), & 0 \le u < b \\ \varphi_{i2}(u;b), & b < u < \infty \end{cases} \qquad (4.5)$$

να είναι η αναμενόμενη συνάρτηση ποινής της χρεοκοπίας, δεδομένου αρχικού αποθεματικού u και αρχικής εξωτερικής κατάστασης την $i \in I$, όπου $U_b(T_b -)$ είναι το πλεόνασμα πριν την επέλευση χρεοκοπίας , $|U_b(T_b)|$ το έλλειμμα μετά τη χρεοκοπία και $J(\cdot)$ η δείκτρια συνάρτηση.

Συγκεκριμένα για $\delta = 0$ και $w(x,y) = 1$ η σχέση (4.5) απλοποιείται στην πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi_i(u;b)$:

$$\psi_i(u;b) = \mathbb{P}_i\{T_b < \infty \Big| U_b(0) = u\} = \begin{cases} \psi_{i1}(u;b), & 0 \le u < b \\ \psi_{i2}(u;b), & b < u < \infty \end{cases}, \qquad i \in I$$

Σε αυτό το σημείο θα αναλύσουμε κάποια αποτελέσματα της διαδικασίας πλεονάσματος χωρίς να λάβουμε υπόψη την απόδοση μερίσματος.

Αναφέρουμε λοιπόν κατά τα γνωστά ως $T = \inf\{t \ge 0 : U(t) < 0\}$, το χρόνο χρεοκοπίας και για $\delta \ge 0$ έχουμε

$$\varphi_i(u) = \mathbb{E}_i[e^{-\delta T}w(U_b(T -), |U(T)|)J(T < \infty)|U(0) = u], \qquad u \ge 0, i \in I$$

την αναμενόμενη συνάρτηση ποινής (Gerber-Shiu), με αρχικό αποθεματικό u και αρχική κατάσταση i.

Ακόμη, $\vec{\varphi}(u) = (\varphi_1(u), \dots, \varphi_m(u))^T$, όπου το T συμβολίζει τη μετάθεση.

Μια ολοκληροδιαφορική εξίσωση για την $\vec{\varphi}(u)$ σε μορφή πίνακα δίνεται ως:

$$\vec{\varphi}'(u) = P_{c_1}\vec{\varphi}(u) + \int_0^u G_{c_1}\,\vec{\varphi}(u-t)dt + \vec{\zeta}_1(u)\ , \qquad 0 \le u < \infty \quad (4.6)$$

Με $P_{c_1} = \frac{[diag(\lambda_1+\delta, \dots, \lambda_m+\delta) - \Lambda]}{c_1}$ και$G_{c_1}(t) = \frac{-diag(\lambda_1 f_1(t), \dots, \lambda_m f_m(t))}{c_1}$

να είναι πίνακες $m\ x\ m$ διαστάσεων ,

$$\vec{\zeta}_1(u) = \int_u^\infty w(u, t-u)G_{c_1}(t)\vec{1}dt\ , \qquad 0 \le u < \infty$$

ένα διάνυσμα m διαστάσεων και $\vec{1} = (1,1,\dots,1)$ ένα $m\ x\ 1$ διάνυσμα-στήλη.

Η ολοκληροδιαφορική εξίσωση που ικανοποιεί η σχέση (4.6) είναι η

$$\vec{\varphi}'(u) = P_{c_1}\vec{\varphi}(u) + \int_0^u G_{c_1}(t)\vec{\varphi}(u-t)\,dt\ , \qquad 0 \le u < \infty \quad (4.7)$$

Λήμμα 4.1 (Lemma 1 [16]): Έστω $\nu(u) = (\nu_{i,j})_{i,j=1}^{m}$, $0 \le u \le \infty$ ένας πίνακας διαστάσεων $m \; x \; m$ του οποίου οι στήλες αποτελούν λύση της (4.7) με $\nu(u) = I$ τον ταυτοτικό πίνακα $m \; x \; m$. Η λύση της (4.6) είναι:

$$\vec{\varphi}(u) = \nu(u)\vec{\varphi}(0) + \int_0^u \nu(u-t)\,\vec{\zeta}_1(t)dt\,, \qquad 0 \le u < \infty \quad (4.8)$$

Εφαρμόζουμε μετασχηματισμό Laplace για να βρούμε τη μερική λύση της (4.7) που ικανοποιεί την

$$\nu'(u) = P_{c_1}\nu(u) + \int_0^u G_{c_1}(t)\nu(u-t)\;, \qquad 0 \le u < \infty \quad (4.9)$$

Με $\nu(0) = I$. Ας συμβολίσουμε με $\hat{\nu}(s) = (\hat{\nu}_{i,j})_{i,j=1}^{m}$ και $\hat{\nu}(s) = \int_0^\infty e^{-su}\nu_{i,j}(u)du$ τους μετασχηματισμούς Laplace των δύο μελών της σχέσης (4.9) και $\nu(0) = I$. Τότε,

$$\hat{\nu}(s) = [sI - P_{c_1} - \hat{G}_{c_1}(s)]^{-1}, \hat{G}_{c_1}(s) = \frac{-diag(\lambda_1\hat{f}_1(s),\ldots,\lambda_m\hat{f}_m(s)}{c_1}$$

$$\hat{f}_i(s) = \int_0^\infty e^{-su}f_i(x)dx$$

Ως εκ τούτου, η μερική λύση της (4.7) είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace του αντίστροφου πίνακα της $A_{c_1}(s) = sI - P_{c_1} - \hat{G}_{c_1}(s)$ που είναι

$$\nu(u) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\left[A_{c_1}(s)\right]^{-1}\right\}, \;\; 0 \le u < \infty \qquad (4.10)$$

Η εξίσωση $\det[A_{c_1}(s)]$ καλείται χαρακτηριστική συνάρτηση ή γενικευμένη εξίσωση Lundberg για την διαδικασία πλεονάσματος.

Μπορούμε να δείξουμε ότι η σχέση (4.10) έχει ακριβώς m το πλήθος ρίζες με πραγματικό μέρος κάτι που παίζει σημαντικό ρόλο στον καθορισμό της αρχικής τιμής του $\vec{\varphi}(0)$. Για το λόγο αυτό μια έκφραση για τη $\nu_{i,j}(u)$ μπορεί να αποκτηθεί μέσω μερικών συναρτήσεων της $\hat{\nu}_{i,j}(s)$.

Εισάγουμε σε αυτό το σημείο τον δείκτη T_r για μια ενσωματωμένη συνάρτηση πραγματικών αριθμών ως προς έναν αριθμό r ($\Re(r) \ge 0$). Για έναν πίνακα $B(y)$ με κάθε στοιχείο να είναι μία ενσωματωμένη συνάρτηση του y χρησιμοποιούμε τον συντελεστή Dickson-Hipp

$$T_rB(y) = \int_y^\infty e^{-r(x-y)}B(x)dx\;, \qquad r \in \mathbb{C}, y \ge 0$$

Η σύνθεση των παραγόντων μπορεί να ανακτηθεί αναδρομικά. Για παράδειγμα:

$$T_{r_1}T_{r_2}B(y) = T_{r_2}T_{r_1}B(y) = \frac{T_{r_1}B(y) - T_{r_2}B(y)}{r_2 - r_1}\;\;, \qquad r_1 \ne r_2 \in \mathbb{C}, y \ge 0$$

Στη συνέχεια επεκτείνουμε τον ορισμό των διαφορών των μερισμάτων. Για τον πίνακα $B(s)$ ορίζουμε τις διαφορές μερισμάτων ως προς $r_1, r_2, \ldots$ ως ακολούθως:

$B[r_1, s] = \frac{B(s)-B(r_1)}{s-r_1}$, $B[r_1, r_2, s] = \frac{B[r_1,s]-B[r_1,r_2]}{s-r_2}$

Μια εναλλακτική φόρμουλα για την $k-1$ διαφορά επίσης δίνεται από:

$$B[r_1, r_2, \ldots, r_k] = \sum_{j=1}^{k} \frac{B(r_j)}{\prod_{l=1, l\neq j}^{k}(r_j - r_l)} \qquad (4.11)$$

Στη συνέχεια θα αναλύσουμε ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις για τη συνάρτηση ποινής με αρχικό αποθεματικό πάνω ή κάτω από ένα επίπεδο b.

Για $0 \leq u \leq b$:

$$\begin{aligned}(\lambda_i + \delta)\varphi_{i1}(u; b) &= c_1 \varphi'_{i1}(u; b) + \sum_{k=1}^{m} a_{i,k}\, \varphi_{k1}(u; b) \\ &+ \lambda_i [\int_0^u \varphi_{i1}(u - x; b) dF_i(x) \\ &+ \int_u^\infty w(u, x-u) dF_i(x)], \qquad i \in I \quad (4.12)\end{aligned}$$

Και για $b < u < \infty$:

$$\begin{aligned}(\lambda_i + \delta)\varphi_{i2}(u; b) &= c_2 \varphi'_{i2}(u; b) + \sum_{k=1}^{m} a_{i,k}\, \varphi_{k2}(u; b) + \lambda_i \int_0^{u-b} \varphi_{i2}(u - x; b) dF_i(x) \\ &+ \lambda_i [\int_{u-b}^{u} \varphi_{i1}(u - x; b) dF_i(x) + \int_u^\infty w(u, x-u) dF_i(x)], \qquad i \in I \quad (4.13)\end{aligned}$$

Οι ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις (4.12) και (4.13) μπορούν να γραφούν και σε μορφή πίνακα. Ας συμβολίσουμε με $\vec{\varphi}_j(u; b) = (\varphi_{1j}(u; b), \ldots, \varphi_{mj}(u; b))^T$, $j = 1,2$.

Τότε τα διανύσματα της συνάρτησης ποινής $\vec{\varphi}_1(u; b)$ και $\vec{\varphi}_2(u; b)$ ικανοποιούν τις ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις (σύστημα (4.14)):

$$\begin{cases} \vec{\varphi}'_1(u;b) = P_{c_1}\vec{\varphi}_1(u;b) + \int_0^u G_{c_1}(t)\vec{\varphi}_1(u-t;b)dt + \vec{\zeta}_1(u) \ , \qquad 0 \le u \le b \\ \vec{\varphi}'_2(u;b) = P_{c_2}\vec{\varphi}_2(u;b) + \int_0^{u-b} G_{c_2}(t)\vec{\varphi}_2(u-t;b)dt + \int_{u-b}^{u} G_{c_2}(t)\,\vec{\varphi}_1(u-t;b)dt + \vec{\zeta}_2(u) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad , b < u < \infty \end{cases}$$

Όπου οι $m\ x\ m$ πίνακες P_{c_2} , $G_{c_2}(t)$ και το διάνυσμα $\vec{\zeta}_2(u)$ έχουν την ίδια δομή με τα P_{c_1} , $G_{c_1}(t)$ και $\vec{\zeta}_1(u)$ με αντικατάσταση του c_1 από το c_2. Η συνθήκη συνέχειας για τα $\vec{\varphi}_1(u;b)$ και $\vec{\varphi}_2(u;b)$είναι $\vec{\varphi}_1(b-;b) = \vec{\varphi}_2(b+;b)$.

Σύμφωνα με το λήμμα 4.1 , λαμβάνουμε αναλυτικές εκφράσεις για τη συνάρτηση ποινής $\vec{\varphi}_1(u;b)$, από την οποία αποκτάται μια σχέση μεταξύ των συνάρτησεων $\vec{\varphi}_1(u;b)$ και $\vec{\varphi}(u;b)$. Προφανώς,, η συνάρτηση διάνυσμα $\vec{\varphi}_1(u;b)$ για $0 \le u \le b$ όπως αναφέρθηκε στη σχέση 4.14 ικανοποιεί μία μη ομογενή ολοκληροδιαφορική εξίσωση. Επομένως, αυτομάτως έχουμε ότι

$$\vec{\varphi}_1(u;b) = v(u)\vec{\varphi}_1(0;b) + \int_0^u v(u-t)\vec{\zeta}_1(t)\ dt\,, \qquad 0 \le u \le b \quad (4.15)$$

όπου ο πίνακας $v(u)$ δίνεται από τη σχέση (4.10) που είδαμε παραπάνω. Περιορίζοντας τη συνάρτηση για την $\vec{\varphi}(u;b)$ της σχέσης (4.8) που είδαμε προηγουμένως παρατηρείται ότι το διάνυσμα $\vec{\varphi}_1(u;b)$ μπορεί να γραφεί τώρα ως

$$\vec{\varphi}_1(u;b) = \vec{\varphi}(u) + v(u)[\vec{\varphi}_1(0;b) - \vec{\varphi}_1(0)] = \vec{\varphi}(u) + v(u)\vec{\kappa}(b), \\ 0 \le u \le b \quad (4.16)$$

Όπου ο συντελεστής $\vec{\kappa}(b)$ υπολογίζεται από τη σχέση

$$\vec{\kappa}(b) = -\frac{1}{U(b)}[A^*_{c_2}[\rho_1,\dots,\rho_m]\vec{\varphi}(b) \\ + \sum_{i=1}^{m} A^*_{c_2}[\rho_1,\dots,\rho_i] \sum_{i=1}^{m} \frac{T_{\rho_j}G_{c_2} * \vec{\varphi}(b) + T_{\rho_j}\vec{\zeta}_2(b)}{\Delta_{i,j}}]$$

Όπου $A_{c_2}(s) = sI - P_{c_2} - \hat{G}_{c_2}$,$A^*_{c_2}(s)$ είναι ο adjiont πίνακας της $A_{c_2}(s)$, $\rho_1,\dots,\rho_m$ είναι οι θετικές ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης $\det[A_{c_2}(s)] = 0$, $\vec{\zeta}_2(b) = \int_b^\infty w(u,t-u)G_{c_2}(t)\vec{1}dt$, $0 \le u \le \infty$, $\Delta_{i,j} = \prod_{i=1,i\neq j}^{m}(\rho_j - \rho_i)$ και

$$U(b) = \sum_{\iota=1}^{\mu} A^*_{c_2}[\rho_1,\dots,\rho_i] \sum_{i=1}^{m} \frac{T_{\rho_j}G_{c_2} * v(b)}{\Delta_{i,j}} + A^*_{c_2}[\rho_1,\dots,\rho_i]\, v(b)$$

Επισημαίνουμε ότι στη σχέση (4.16) η αναμενόμενη συνάρτηση ποινής $\vec{\varphi}_1(u;b)$ για το τροποποιημένο μαρκοβιανό μοντέλο με στρατηγική μερίσματος μπορεί να εκφραστεί ως το άθροισμα της αναμενόμενης συνάρτησης ποινής $\vec{\varphi}(u)$ που εκφράζει τη διαδικασία χωρίς τη στρατηγική μερισμάτων και ενός δείκτη που είναι προϊόν της $v(u)$ (συναρτήσει του u) και της $\vec{\kappa}(b)$, ενός δείκτη συναρτήσει του b.

Στην περίπτωση του κλασικού μοντέλου η συνάρτηση ποινής είναι στη μορφή

$$\varphi_1(u;b) = \varphi(u) + v(u)\kappa(b)\,, \qquad 0 \le u \le b$$

Με $\varphi(u)$ να είναι η συνάρτηση ποινής για το κλασικό μοντέλο, με ασφάλιστρο c και η συνάρτηση v να ικανοποιεί την ολοκληροδιαφορική εξίσωση της σχέσεως 4.9.

Για να καταλήξουμε σε αναλυτικές εκφράσεις για την $\vec{\varphi}_2(u;b)$ πρέπει να βρούμε μία ισοδύναμη έκφραση της. Για το λόγο αυτό υποθέτουμε ότι για $b < u < \infty$ έχουμε $y = u - b$, $\varphi_i(y;b) = \varphi_{i2}(y+b;b)$και $\vec{\varphi}(y;b) = (\varphi_1(y;b), \dots, \varphi_m(y;b))^T$για $y > 0$. Μπορούμε να ξαναγράψουμε τη σχέση 4.14 ως

$$\vec{\varphi}'(y;b) = P_{c_2}\vec{\varphi}(y;b) + \int_0^y G_{c_2}(t)\,\vec{\varphi}(y-t;b)dt + \vec{\eta}(y;b)\,, \qquad y > 0$$

Με αρχική συνθήκη $\vec{\varphi}(0;b) = \vec{\varphi}_2(b+;b) = \vec{\varphi}_1(b-;b)$ και $\vec{\eta}(y;b)$ ένας m-διάστατος παράγοντας που ορίζεται ως

$$\vec{\eta}(y;b) = \int_y^{y+b} G_{c_2}(t)\vec{\varphi}_1(y+b-t;b)dt + \vec{\zeta}_2(y+b)\,, \quad y > 0$$

Με τη βοήθεια του λήμματος 4.1, σε αναλογία μπορούμε να ισχυριστούμε ότι

$$\vec{\varphi}(y;b) = w(y)\vec{\varphi}(0;b) + \int_0^y w(y-t)\vec{\eta}(t;b)dt\,, \qquad y > 0$$

Ή $\vec{\varphi}_2(u;b) = w(u-b)\vec{\varphi}_2(b;b) + \int_0^{u-b} w(u-b-t)\vec{\eta}(t;b)dt\,,\ u > b$

Όπου $w(y) = (w_{i,j}(y))_{i,j=1}^m$είναι ένας $m\ x\ m$ πίνακας που ικανοποιεί την

$$w'(y) = P_{c_2}w(y) + \int_0^y G_{c_2}(t)w(y-t)dt\,, \qquad y \ge 0$$

Με $w(0) = I$ και ομοίως με τη σχέση 4.10 έχει μπορεί να εκφραστεί μέσω αντιστρόφου μετασχηματισμού Laplace ως

$$w(y) = \mathcal{L}^{-1}\{[sI - P_{c_2} - P_{c_2}(s)]^{-1}\}\,,\ \ y \ge 0 \quad (4.17)$$

Και καταλήγουμε στο εξής θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.1 (Theorem 1 [16]: Οι αναλυτικές εκφράσεις για τη συνάρτηση ποινής $\vec{\varphi}_1(u;b)$ και $\vec{\varphi}_2(u;b)$ εκφράζονται ως εξής:

i. Η συνάρτηση ποινής $\vec{\varphi}(u)$ για τη διαδικασία πλεονάσματος $U(t) = u + c_1 t - \sum_{n=1}^{N(t)} X_n\ ,\ t \ge 0$, χωρίς την ύπαρξη μερισμάτων είναι

$$\vec{\varphi}(u) = v(u)\vec{\varphi}(0) + \int_0^u v(u-t)\vec{\zeta}_1(t)dt\,, \qquad 0 \le u \le \infty$$

Με τον πίνακα $v(u)$ να δίνεται από τη σχέση (4.10) και $\vec{\varphi}(0) = -\{A^*_{c_1}[\rho_1, \dots, \rho_m]\}^{-1}[\sum_{i=1}^{m} A^*_{c_1}[\rho_1, \dots, \rho_m] \sum_{j=1}^{m} \frac{T_{\rho_j}\vec{\zeta}_1(b)}{P_{i,j}}]$ όπου $\rho_1, \dots, \rho_m$ είναι θετικές ρίζες της $\det[A_{C_1}(s)] = \det[sI - P_{C_1} - \hat{G}_{c_1}(s)] = 0$ και $P_{i,j} = \prod_{l=i,l\neq j}^{m}(\rho_j - \rho_l)\,,\ \ i,j\ \in I$

Η συνάρτηση ποινής $\vec{\varphi}_1(u;b), 0 \le u \le b$ για τη διαδικασία πλεονάσματος κάτω από την προϋπόθεση ύπαρξης μερισμάτων είναι

$$\vec{\varphi}_1(u;b) = v(u)\vec{\varphi}_1(0;b) + \int_0^u v(u-t)\vec{\zeta}_1(t)dt = \vec{\varphi}(u) + v(u)\vec{\kappa}(b)\,, \qquad 0 \le u \le b$$

ii. Η συνάρτηση ποινής $\vec{\varphi}_2(u;b),\ b \le u \le \infty$ για τη διαδικασία πλεονάσματος κάτω από την προϋπόθεση ύπαρξης μερισμάτων είναι

$$\vec{\varphi}_2(u;b) = w(u-b)\vec{\varphi}_2(b;b) + \int_0^{u-b} w(u-b-t)\vec{\eta}(t;b)dt\,, \qquad u > b$$

Όπου ο πίνακας $w(u)$ υπολογίζεται βάσει της σχέσης (4.17) και $\vec{\varphi}_2(b;b) = \vec{\varphi}_1(b;b)$.

4.4 Η καταβολή των μερισμάτων

Για την τροποποιημένη διαδικασία πλεονάσματος που περιγράφαμε στην αρχή του κεφαλαίου, λαμβάνοντας ως αρχή ότι $U_b(0) = u$ και $\delta > 0$, ορίζουμε την ν-οστή ροπή της αναμενόμενης παρούσας αξίας των μερισμάτων που καταβάλλονταιως

$$V_i^{[n]}(u;b) = E_i\left[D_{u,b}^n\right] = \begin{cases} V_{i1}^{[n]}(u;b) & ,0 \leq u < b \\ V_{i2}^{[n]}(u;b) & ,b < u < \infty \end{cases} , \qquad i \in I, n \in \mathbb{N}$$

Με $V_i^{[0]}(u;b) = 1$ και $V_i^{[1]}(u;b) = V_i(u;b)$. Με τη βοήθεια της έκφρασης $M_i(u,y;b) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n!} V_i^{[n]}(u;b)$ λαμβάνουμε το κάτωθι σύστημα ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων

$$c_1 \frac{ðV_{i1}^{[n]}(u;b)}{ðu} - (\lambda_I + n\delta)V_{i1}^{[n]}(u;b) + \lambda_I \int_0^u V_{i1}^{[n]}(u-x;b)dF_i(x) + \sum_{k=1}^{m} a_{i,k}V_{k1}^{[n]}(u;b) = 0 \quad (4.18)$$

Ενώ για $b < u < \infty$

$$c_2 \frac{ðV_{i2}^{[n]}(u;b)}{ðu} - (\lambda_I + n\delta)V_{i2}^{[n]}(u;b) + n(c_1 - c_2)V_{i2}^{[n]}(u;b) + \sum_{k=1}^{m} a_{i,k}V_{k2}^{[n]}(u;b) + \lambda_I[\int_0^{u-b} V_{i2}^{[n]}(u-x;b)dF_i(x) + \int_{u-b}^{u} V_{i1}^{[n]}(u-x;b)dF_i(x) = 0 \quad (4.19)$$

Αξίζει να σημειώσουμε ότι η ν-οστή ροπή της αναμενόμενης αξίας των καταβληθέντων μερισμάτων ως προς u δεν είναι συνεχής στο επίπεδο$u = b$. Για την ακρίβεια, από τις εξισώσεις (4.18) και (4.19) λαμβάνουμε ότι

$$c_1 \left.\frac{ðV_{i1}^{[n]}(u;b)}{ðu}\right|_{u=b-} = c_2 \left.\frac{ðV_{i2}^{[n]}(u;b)}{ðu}\right|_{u=b+} + n(c_1 - c_2)V_{i2}^{[n-1]}(b+;b)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.2 (Theorem 2 [16] : Οι αναλυτικές εκφράσεις για τις $\vec{V}_1^{[n]}(u;b)$ και $\vec{V}_2^{[n]}(u;b)$ με αρχικές τιμές $\vec{V}_2^{[0]}(u;b) = \vec{1}$, μπορούν να υπολογισθούν ως εξής

i) Η ν-οστή ροπή της $\vec{V}_1^{[n]}(u;b)$

$$\vec{V}_1^{[n]}(u;b) = v_n(u)\vec{V}_1^{[n]}(0;b)\,, \qquad 0 \leq u \leq b$$

Όπου $v_n(u) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\left[sI - P_{c_1,n} - \widehat{G}_{c_2}(s)\right]^{-1}\right\}, u > 0$ και $\vec{V}_1^{[n]}(0;b) =$
$\frac{1}{U_n(b)}\frac{n(c_1-c_2)}{c_2}\sum_{i-1}^{m} A_{c_2}^{*}\left[\rho_1^{[n]}, \dots, \rho_i^{[n]}\right]\sum_{j=1}^{m}\frac{T_{\rho_j^{[n]}}\vec{V}_2^{[n-1]}(b;b)}{\Delta_{i,j}^{[n]}}$

Όπου $U_n(b) = A_{c_2}^{*}\left[\rho_1^{[n]}, \dots, \rho_i^{[n]}\right]v_n(b) + \sum_{j1}^{m} A_{c_2,n}^{*}\left[\rho_1^{[n]}, \dots, \rho_i^{[n]}\right]\sum_{j1}^{m}\frac{T_{\rho_j^n}\widehat{G}_{c_2}(s)*v_n(b)}{\Delta_{i,j}^{[n]}}$

ii) Η ν-οστή ροπή της $\vec{V}_2^{[n]}(u;b)$ είναι

$$\vec{V}_2^{[n]}(u;b) = w_n(u-b)\vec{V}_2^{[n]}(b;b) + \int_0^{u-b} w_n(u-b-t)\vec{\xi}_n(t;b)dt\,, \qquad b < u < \infty$$

Όπου $w_n(u) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\left[sI - P_{c_1,n} - \widehat{G}_{c_2}(s)\right]^{-1}\right\}, u > 0,\ \vec{V}_2^{[n]}(b;b) = \vec{V}_1^{[n]}(b;b)$ και
$\vec{\xi}_n(y;b) = -\frac{n(c_1-c_2)}{c_2}\vec{V}_2^{[n-1]}(y+b;b) + \int_y^{y+b}\widehat{G}_{c_2}(t)\,\vec{V}_1^{[n]}(y+b-t;b)dt$

Επομένως μπορούμε να καταλήξουμε στο παρακάτω λήμμα για τις εκφράσεις $\vec{V}_1(u;b)$ και $\vec{V}_2(u;b)$.

ΛΗΜΜΑ 4.1 (Corollary 1 [16]: Οι υπολογιστικές εκφράσεις για τις αναμενόμενες παρούσες αξίες $\vec{V}_1(u;b)$ και $\vec{V}_2(u;b)$ είναι

i) Η αναμενόμενη παρούσα αξία των συνολικών καταβληθέντων μερισμάτων μέχρι τη στιγμή χρεοκοπίας όταν $0 \le u < b$ είναι

$$\vec{V}_1(u;b) = v(u)\vec{V}_1(0;b)\,, \qquad 0 \le u < b$$

Με $\vec{V}_1(0;b) = \frac{1}{U_n(b)}\frac{(c_1-c_2)}{c_2}\sum_{i-1}^{m} A_{c_2}^{*}\left[\rho_1^{[n]}, \dots, \rho_i^{[n]}\right]\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\rho_j\Delta_{i,j}}\vec{1}$

ii) Η αναμενόμενη παρούσα αξία των συνολικών καταβληθέντων μερισμάτων μέχρι τη στιγμή χρεοκοπίας όταν $b \le u < \infty$ είναι

$$\vec{V}_2(u;b) = w(u-b)\vec{V}_2(b;b) + \int_0^{u-b} w(u-b-t)\vec{\xi}(t;b)dt\,, \qquad b \le u < \infty$$

Με $\vec{\xi}(y;b) = -\frac{(c_1-c_2)}{c_2}\vec{1} + \int_y^{y+b}\widehat{G}_{c_2}(t)\,\vec{V}_1(y+b-t;b)dt$και $\vec{V}_1(u;b) = \vec{V}_2(u;b)$

Θα κλείσουμε την παρούσα εργασία με ένα παράδειγμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Θεωρούμε ένα μοντέλο δύο καταστάσεων με καταβολή μερίσματος. Ακόμη θεωρούμε την εξωτερική διαδικασία $\{I(t); t \geq 0\}$ η οποία μπορούμε να υποθέσουμε ότι περιγράφει δύο καταστάσεις έστω «φυσιολογικός κίνδυνος» και «μη φυσιολογικός κίνδυνος».

Έχοντας δύο εκθετικές κατανομές f_1 και f_2 με παραμέτρους α και β, οι μετασχηματισμοί Laplace δίνονται από τις σχέσεις

$\hat{f}_1(s) = \frac{a}{a+s}$, $a > 0$ και $\hat{f}_2(s) = \frac{\beta}{\beta+s}$, $\beta > 0$

Η αναλυτική έκφραση για τη συνάρτηση $v(u)$όπως είδαμε και στη σχέση 4.10 είναι

$$v_{i,j}(u) = \sum_{k=1}^{4} r_{i,j,k} e^{R_k u}\ , \quad i,j = 1,2$$

Όπου R_k , $k = 1,2,3,4$ είναι οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης $\det[A_{c_1}(s)] = 0$όπου $\det[A_{c_1}(s)] = \det[sI - P_{c_1} - \hat{G}_{c_1}(s)] = 0$ και $P_{c_1} = \frac{[diag(\lambda_1+\delta,\dots,\lambda_m+\delta) - \Lambda]}{c_1}$, $G_{c_1}(t) = \frac{-diag(\lambda_1 f_1(t),\dots,\lambda_m f_m(t))}{c_1}$, Ι ένας $m\ x\ m$ ταυτοτικός πίνακας όπως έχουν δηλωθεί σε προηγούμενη παράγραφο. Τα $r_{i,j,k}$ δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{pmatrix} r_{1,1,k} & r_{1,2,k} \\ r_{2,1,kk} & r_{2,2,k} \end{pmatrix} = \frac{(R_\mathrm{k} + \alpha)(R_\mathrm{k} + \beta)}{\prod_{l=1,l\neq k}^{4}(R_\mathrm{k} - R_\mathrm{l})} \mathrm{A}^*_{\mathrm{c}_1}(R_\mathrm{k})\ , \qquad k = 1,2,3,4$$

Θυμίζουμε ότι με A^* είναι adjiont πίνακας του πίνακα A.

Δίνοντας συγκριμένες τιμές στις παραμέτρους μας παίρνουμε πιο αναλυτικά αποτελέσματα. Έστω λοιπόν $c_1 = 110$ το αρχικό εισπραχθέν ασφάλιστρο, $d = 10$ ο ρυθμός καταβολής των μερισμάτων και συμπερασματικά $c_2 = 100$ το καθαρό ασφάλιστρο. Έστω ακόμη $\lambda_1 = 100$, $\lambda_2 = 40$ οι παράμετροι των Poisson, $\alpha = 1$, $\beta = \frac{1}{2}$ οι παράμετροι των εκθετικών, $\alpha_1 = \frac{1}{4}$ και $\alpha_2 = \frac{3}{4}$ οι εντάσεις της εξωτερικής διαδικασίας. Οι τέσσερεις ρίζες της $\det[A_{c_1}(s)] = 0$ είναι οι $0, 0{,}03911, -0{,}10215, -0{,}15514$ και της $\det[A_{c_2}(s)] = 0$ είναι $0, 0{,}06597, -0{,}03011, -0{,}12586$ και βρέθηκαν υπό την προϋπόθεση ότι $\delta = 0$ και $w(x,y) = 1$ στην προκειμένη διαδικασία χρεοκοπίας. Μέσω της σχέσης (3.4) του κεφαλαίου 3 παίρνουμε για την αρχική τιμή για τις πιθανότητες μη χρεοκοπίας οι οποίες είναι $\vec{\varphi}(0) = (0.90262\ , 0{,}74669)^T$ και για $u \geq 0$ έχουμε

$$\begin{pmatrix} v_{1,1}(u) \\ v_{1,2}(u) \\ v_{2,1}(u) \\ v_{2,2}(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.5 & -0.29699 & -7.2889 & 3.08589 \\ 1.83333 & 0.41473 & -1.06177 & -1.1863 \\ 5.5 & 1.24419 & -3.18531 & -3.55889 \\ 1.83333 & -1.73746 & -0.464 & 1.36813 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-0.15514u} \\ e^{-0.10215u} \\ e^{0.39111u} \end{pmatrix}$$

Και για $b = 30$

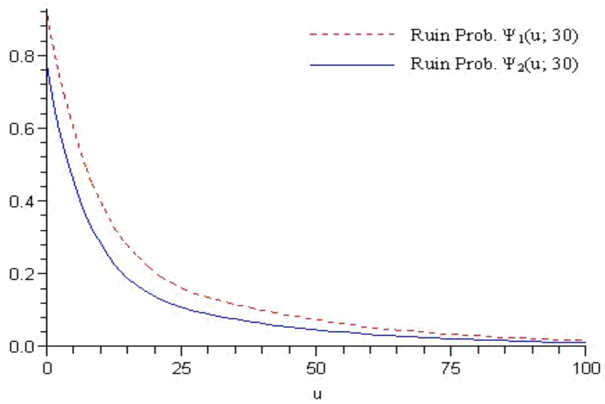
$$\vec{\Psi}(u) = \begin{pmatrix} -.07614 & 0.97876 \\ 0.31896 & 0.4272 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-0.15514u} \\ e^{-0.10215u} \end{pmatrix}, \qquad u \geq 0$$

$$\vec{\Psi}_1(u) = \begin{pmatrix} 0.08345 & -0.07066 & 0.89474 & 000378 \\ 0.08345 & 0.29602 & 0.39101 & -0.00436 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-0.15514u} \\ e^{-0.10215u} \\ e^{0.39111u} \end{pmatrix},$$

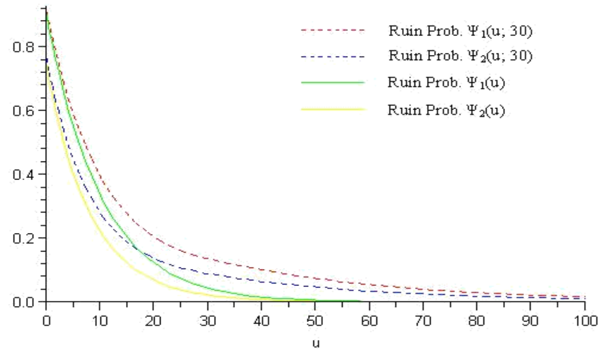
$$0 \leq u \leq 30$$

$$\vec{\Psi}_2(u) = \begin{pmatrix} 0.33921 & -0.03035 \\ 0.21239 & 0.18962 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-0.03011u} \\ e^{-0.12586u} \end{pmatrix}, \qquad u > 30$$

Σχηματικά οι πιθανότητες χρεοκοπίας υπό την καταβολή μερίσματος φαίνονται παρακάτω.



Ενώ το επόμενο σχήμα παριστά τη σύγκριση μεταξύ των πιθανοτήτων χρεοκοπίας με και χωρίς την ύπαρξη των μερισμάτων.



Όπως μπορούμε να φανταστούμε και με την απλή λογική οι πιθανότητες χρεοκοπίας είναι μικρότερες όταν δεν υπάρχει καταβολή μερισμάτων και όσο το αποθεματικό αυξάνεται.

Όσον αφορά την αναμενόμενη παρούσα αξία των μερισμάτων θέτοντας $\delta = 0{,}1$ και διατηρώντας το κατώφλι $b = 30$, οι τέσσερεις ρίζες της $\det\left[A_{c_1}(s)\right] = 0$ είναι $0{,}00617$, $0{,}04318$, $-0{,}10874$, $-0{,}15697$ και της $\det\left[A_{c_2}(s)\right] = 0$ είναι $0{,}01304$, $0{,}07252$, $-0{,}04537$, $-0{,}1282$. έτσι, έχουμε ότι

$$\vec{V}_1(u;30) = \begin{pmatrix} -67.029 & 6.386 & 67.459 & 0.612 \\ -29.669 & -25.620 & 76.78 & -0.637 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-0.10874u} \\ e^{-0.15697u} \\ e^{-0.00617u} \\ e^{0.04318u} \end{pmatrix}, \qquad 0 \le u < 30$$

$$\vec{V}_2(u;30) = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -75.124 & 7.273 \\ -40.384 & -44.659 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-0.04537u} \\ e^{-0.1282u} \end{pmatrix} \quad , \qquad u \ge 30$$

Η σχέση μεταξύ αποθεματικού και αναμενόμενης παρούσας αξίας συνολικών μερισμάτων είναι ανάλογη αφού όσο μεγαλύτερο είναι το αποθεματικό, τόσο μεγαλύτερη και αναμενόμενη παρούσα αξία.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Πολίτης Κ. : «ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΛΛΟΓΙΚΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ» Εκδόσεις Σταμούλη, 2012
2. Πολίτης Κ. (Πανεπιστημιακές Σημειώσεις στο μάθημα «Θεωρία Κινδύνων ΙΙ» του ΠΜΣ «Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου)
3. Χατζηκωνσταντινίδης Ε. (Πανεπιστημιακές Σημειώσεις στο κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Χρεοκοπίας)
4. Asmussen S. : «Risk theory in a Markovian environment», Scandinavian Actuarial Journal , Issue 2, p .69-100, 1989
5. Dickson D.C.M. and Gray J.: «Approximations to ruin probability in the presence of an upper absorbing barrier», Scandinavian Actuarial Journal, Issue 2, p. 105-115, 1984
6. Dickson D.C.M. and Hipp C. «On the time to ruin for Erlang(2) risk processes», Insurance: Mathematics and Economics, Vol. 29, Issue 3, p. 333-344, 2001
7. Gerber H.U. and Shiu E.S.W. : «On the time vale of run», North American Actuarial Journal, Vol.2, Issue 1, pp. 48-78 , 1998
8. Grandell J.: «Aspects of Risk Theory», Springer, New York, 1991
9. Jensen J. : « Some transient results on the M/SM/I special semi-Markov model in risk and queuing theories», Astin Bulletin 11, p. 41-51 , 1980
10. Li S. and Dickson D.C.M.: «The maximum surplus before ruin in an Erlang(n) risk process and related problems», Insurance: Mathematics and Economics 38, p. 529-539, 2006
11. Lin X,S. and Willmot G.E: «Analysis of a defective renewal equation arising in ruin theory» , Insurance: Mathematics and Economics 25 , p.63-84 ,1999
12. Lu Y. : «On the severity of ruin in a Markov-modulated risk model», Scandinavian Actuarial journal, Issue 4, p. 183-202 , 2006
13. Lu Y. and Li S: « Moments of the Dividend Payments and related problems in a Markov-modulated risk model», North American Actuarial Journal, Volume 11, Issue 2, 2007
14. Lu Y. and Li S. : « On the probability of ruin in a Markov-modulated risk model» , Insurance : Mathematics and Economics 37, p. 522-532, 2005
15. Lu Y. and Li S: «The decomposition of the discounted penalty functions and dividends-penalty identity in a Markov-modulated risk model», Astin Bulletin 38, Issue 1, p. 53-71, 2008
16. Lu Y. and Li S: «The Markovian regime-switching risk model with a threshold dividend strategy», Insurance: Mathematics and Economics, Volume 44, Issue 2, p. 296-303, 2009
17. Lu Y. and Li S: «Some Optimal Dividend Problems in a Markov-modulated Risk Model» , www.unimelb.edu.au
18. Ng A.C.Y. and Yang H.: «On the joint distribution of surplus before and after ruin under a Markovian regime switching model», Stohastic Processes and their Applications 116, p. 244-266 , 2006
19. Picard P.: «On some measures of the severity of ruin in the classical Poisson model», Insurance: Mathematics and Economics 14, p. 107-115, 1994

20. Reinhard J.M.: «On a class of semi-Markov risk models obtained as classical risk models in a Markovian environment», Astin Bulletin 14, p. 23-43, 1984
21. Rolski T.: «Queues with nonstationary inputs», Springer , Volume 5, Issue 1-3, p. 113-129, 1989
22. Snoussi M.: «The severity of ruin in Markov-modulated risk models», Schweiz , Aktuarver Mitt 1, p.31-43, 2002
23. Zhang X.: «On the ruin problem in a Markov-modulated risk model», Methodology and Computing in Applied Probability, Volume 10, p. 225-238, 2006