ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΠΜΣ "ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ"
Msc in Actuarial Science and Risk Management

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Collective risk model : The multivariate case

ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΛΟΥΜΕΝΟΣ

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Επιβλέπων μέλος ΔΕΠ
Αντζουλάκος Δημήτριος

Συμβουλευτική επιτροπή
Μ. Μπούτσικας, Επικ. Καθηγητής
Γ. Ψαρράκος, Επικ. Καθηγητής

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου που με στήριξαν σε όλη αυτή την προσπάθεια ολοκλήρωσης του μεταπτυχιακού κύκλου σπουδών, γιατί ήταν μία δύσκολη περίοδος και χωρίς τη στήριξή τους θα ήταν πολύ πιο δύσκολα για μένα. Επίσης, θα ήθελα να πω ένα μεγάλο ευχαριστώ στον αναπληρωτή καθηγητή Αντζουλάκο Δημήτριο, ειδικότερα όσον αφορά την πολύτιμη βοήθειά του στην ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας, όπως και τους επιβλέπων Μπούτσικα Μιχαήλ και Ψαρράκο Γεώργιο. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους διδάσκωντες είτε μέλη ΔΕΠ είτε εξωτερικούς, αφού ο καθένας ξεχωριστά είχε κάτι να μας δώσει είτε σε θεωρητικό είτε σε εμπειρικό υπόβαθρο.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στα σύγχρονα πλαίσια της θεωρίας κινδύνου και της θεωρίας χρεοκοπίας, η ανάλυση και περιγραφή της κατανομής πιθανότητας, που ακολουθεί ο αριθμός των αποζημιώσεων μέχρι τη στιγμή που θα συμβεί η χρεοκοπία ή μέχρι κάποια άλλη συγκεκριμένη χρονική στιγμή, μπορεί να παίξει σημαντικό ρόλο όσον αφορά στη μελέτη ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου κινδύνων, σε μία δεδομένη χρονική περίοδο εξέλιξής του. Προφανώς, επειδή υπάρχουν πάρα πολλές επιλογές για την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής που δηλώνει τον αριθμό των αποζημιώσεων, στην παρούσα διπλωματική χρησιμοποιούμε κάποιες οικογένειες κατανομών για την τυχαία μεταβλητή που χαρακτηρίζονται από μία συγκεκριμένη ιδιότητα. Στην παρούσα διπλωματική εργασία, θα μας απασχολήσει η περίπτωση που η τυχαία μεταβλητή ανήκει στην οικογένεια κατανομών Panjer, στη συνέχεια θα κάνουμε μία εκτενέστερη μελέτη σε ορισμένες ειδικές περιπτώσεις και, τέλος, βλέπουμε και την αντίστοιχη εκδοχή της Vernic.

Μέχρι το 1981, οι αναλυτές - αναλογιστές χρησιμοποιούσαν τη βασική μέθοδο υπολογισμού (παραλείπεται, αφού είναι μία ξεπερασμένη και χρονοβόρα διαδικασία) της κατανομής των συνολικών ζημιών για το μοντέλο συλλογικού κινδύνου. Το 1981 ο Harry Panjer δημοσίευσε μία εργασία του στο διεθνές αναλογιστικό περιοδικό ASTIN BULLETIN (Actuarial Studies In Non- Life Insurance), όπου έδωσε τον αναδρομικό υπολογισμό της συνάρτησης πιθανότητας των συνολικών ζημιών ενός χαρτοφυλακίου για διακριτά ύψη ζημιών, θεωρώντας ότι η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής ανήκει σε μια ευρεία οικογένεια (κλάση) κατανομών. Από τότε και ύστερα, η προσπάθεια αρκετών ερευνητών επικεντρώθηκε στο να θεωρούμε ότι η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής ικανοποιεί κάποια αναδρομική σχέση που χαρακτηρίζει μια ευρεία οικογένεια κατανομών, και με βάση αυτή τη σχέση να υπολογίζουμε αναδρομικά τη συνάρτηση πιθανότητας/πυκνότητας των συνολικών ζημιών ενός χαρτοφυλακίου.

Σε κάθε περίπτωση πάντως, η παρούσα διπλωματική εργασία, δεν θα ασχοληθεί ιδιαίτερα με όλο το φάσμα των αναδρομικών σχέσεων που έχουν προταθεί για τον

αριθμό των αποζημιώσεων, αφού εξετάζεται κυρίως η περίπτωση της αναδρομικής σχέσης του Panjer και κάποιες επεκτάσεις της.

Σε αυτή την εργασία θα αναφερθούμε στο συλλογικό πρότυπο της θεωρίας κινδύνου, όπου το σύνολο των αποζημιώσεων περιγράφεται από τη σχέση $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$, η τυχαία μεταβλητή N δηλώνει το πλήθος των απαιτήσεων και η τυχαία μεταβλητή X_i δηλώνει το μέγεθος της i αποζημίωσης ($i = 1,2,\ldots$). Στη βιβλιογραφία έχουν προταθεί πολυδιάστατες γενικεύσεις του παραπάνω μοντέλου είτε της μορφής

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X}_2 + \cdots + \boldsymbol{X}_N, \quad \boldsymbol{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \ldots, X_{im}),$$

είτε της μορφής

$$\boldsymbol{S} = (S_1, S_2, \ldots, S_m), \quad S_i = X_{i1} + X_{i2} + \cdots + X_{iN_i}.$$

Στόχος της διπλωματικής είναι η μελέτη των δύο παραπάνω γενικεύσεων καθώς επίσης και η παρουσίαση και ανάλυση πρακτικών περιπτώσεων, με έμφαση στη δισδιάστατη περίπτωση. Αρχικά, θα αναφερθούμε στην μονοδιάστατη περίπτωση, ώστε να μπορέσει να γίνει προοδευτικά η σύνδεση και να κατανοήσει με ευκολία ο αναγνώστης τη γενίκευση σε περισσότερες διαστάσεις. Στο πρώτο κεφάλαιο, λοιπόν, παρουσιάζουμε τον αναδρομικό τύπο του Panjer για τον υπολογισμό της κατανομής των συνολικών απαιτήσεων, καθώς και ορισμένες ειδικές περιπτώσεις, στη μονοδιάστατη περίπτωση. Στη συνέχεια, κάνουμε μία επισκόπηση στη δισδιάστατη περίπτωση της αναδρομικής σχέσης του Panjer μέσω τριών βασικών μοντέλων και της εκδοχής της Vernic, όπου θα γίνει μία εκτενέστερη αναφορά και έρευνα, και στο τελευταίο κεφάλαιο θα εκθέσουμε τη επέκταση της αναδρομικής σχέσης του Panjer στη πολυδιάστατη περίπτωση, που όπως και στη δισδιάστατη, θα αναφερθούμε στην κλάση κατανομών του Panjer, θα δούμε κάποιες ειδικές περιπτώσεις και την εκδοχή της Vernic.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΕΣ ΣΥΝΘΕΤΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

1.1 Εισαγωγή

Οι σύνθετες κατανομές, όπως η σύνθετη κατανομή Poisson, η σύνθετη αρνητική διωνυμική, κ.ά., χρησιμοποιούνται εκτενώς στη Θεωρία Κινδύνου, για να μοντελοποιήσουν την κατανομή των συνολικών αποζημιώσεων που εμφανίστηκαν σε μία συγκεκριμένη περίοδο. Η συνήθης μέθοδος υπολογισμού της συνάρτησης πιθανότητας/πυκνότητας και της συνάρτησης κατανομής απαιτεί τον υπολογισμό συνελίξεων. Όταν ο αναμενόμενος αριθμός των απαιτήσεων είναι μεγάλος, αυτός ο υπολογισμός είναι ιδιαίτερα χρονοβόρος ακόμα και με τη χρήση σύγχρονων μέσων.

Σε αυτό το εισαγωγικό κεφάλαιο, θα ασχοληθούμε με τον αναδρομικό τύπο του Panjer για τον υπολογισμό της κατανομής των συνολικών απαιτήσεων ο οποίος δεν χρησιμοποιεί συνελίξεις. Αυτό μπορεί να περιορίσει αρκετά τον αριθμό των απαιτούμενων υπολογισμών.

Το μοντέλο συλλογικού κινδύνου που περιγράφεται από τη σχέση

$$S = \begin{cases} X_1 + X_2 + \cdots + X_N, & N = 1,2,\ldots \\ 0, & N = 0 \end{cases}$$

(οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \ldots$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες από την τυχαία μεταβλητή N)έχουμε ότι:

– η τυχαία μεταβλητή X_i παριστάνει το ύψος της i ατομικής ζημιάς,

– η τυχαία μεταβλητή S παριστάνει το ύψος της συνολικής ζημιάς , και

– η τυχαία μεταβλητή N παριστάνει το πλήθους των ζημιών (κινδύνων) ή και απαιτήσεων.

Μια υπόθεση που θα κάνουμε στη συνέχεια είναι ότι τα ύψη των ατομικών ζημιών περιγράφονται από διακριτές τυχαίες μεταβλητές, με αποτέλεσμα η τυχαία μεταβλητή S να είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή. Φυσικά τα αποτελέσματα που θα παρουσιαστούν σε αυτή την περίπτωση μπορούν να εφαρμοστούν και σε συνεχείς τυχαίες μεταβλητές για το ύψος των αποζημιώσεων αφού πρώτα διακριτοποιηθούν.

Θα χρησιμοποιήσουμε τους ακόλουθους συμβολισμούς:

– $F(x) = Pr(X \leq x)$ η συνάρτηση κατανομής της X,

– $f(x) = P(X = x)$ η συνάρτηση πιθανότητας της X,

– $G(x) = Pr(S \leq x)$ η συνάρτηση κατανομής της S,

– $g(x) = P(S = x)$ η συνάρτηση πιθανότητας τηςS,

– $p_n = p(n) = P(N = n), n = 0,1, \dots$, η συνάρτηση πιθανότητας της N,

– $M_Z(t) = E(e^{tZ})$ η ροπογεννήτρια συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής Z, και

– $P_Z(u) = E(u^Z)$ η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής Z,

Για την τυχαία μεταβλητή S είναι γνωστά τα ακόλουθα βασικά αποτελέσματα

$$E(S) = E(N)E(X),$$

$$Var(S) = E(N)Var(X) + Var(N)E^2(X),$$

$$P_S(u) = P_N\big(P_X(u)\big),$$

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n F^{*n}(x), \quad x \geq 0,$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n f^{*n}(x), \quad x \geq 0,$$

$$g(0) = \begin{cases} p_0, & f(0) = 0 \\ P_N\big(f(0)\big), & f(0) \neq 0. \end{cases}$$

1.2 Η κλάση κατανομών $R(a, b, 0)$

Θεωρούμε την οικογένεια κατανομών του αριθμού N των απαιτήσεων ($R_N = \{0,1,2, \dots\}$) που ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$p_n = P(N = n) = \left(a + \frac{b}{n}\right) p_{n-1}, \quad n = 1,2, \tag{1.2.1}$$

όπου a και b κατάλληλες σταθερές (φυσικά $p_n = 0$ για $n < 0$).

Η κλάση των παραπάνω κατανομών συμβολίζεται με $R(a, b, 0)$ και ο παραπάνω αναδρομικός τύπος είναι γνωστός ως ο αναδρομικός τύπος του Panjer και μελετήθηκε από τον Panjer (1981). Μέλη αυτής της οικογένειας των κατανομών είναι οι ακόλουθες.

– **Η κατανομή Poisson**

Τα βασικά χαρακτηριστικά της κατανομής Poisson με παράμετρο λ, $\lambda > 0$ (συμβολισμός $P(\lambda)$) είναι τα εξής:

- Συνάρτηση πιθανότητας: $p_n = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}, \quad n = 0,1,\dots$.
- Αναδρομική σχέση: $p_n = \left(\frac{\lambda}{n}\right)p_{n-1}$ με αρχική συνθήκη $p_0 = e^{-\lambda}$.
- Κλάση: $R(0,\ \lambda,\ 0)$.

– **Η διωνυμική κατανομή**

Τα βασικά χαρακτηριστικά της διωνυμικής κατανομής με παραμέτρους m και p, όπου $m = 1,2,\dots$ και $0 < p < 1$ (συμβολισμός $B(m,p)$) είναι τα εξής:

- Συνάρτηση πιθανότητας: $p_n = \binom{m}{n} p^n(1-p)^{m-n},\ n = 0,1,\dots,m.$
- Αναδρομική σχέση: $p_n = \left(-\frac{p}{1-p} + \frac{(m+1)p}{n(1-p)}\right)p_{n-1}$ με αρχική συνθήκη $p_0 = (1-p)^m$.
- Κλάση: $R(-\frac{p}{1-p},\ \frac{(m+1)p}{1-p},\ 0)$.

– **Η αρνητική διωνυμική κατανομή**

Τα χαρακτηριστικά της αρνητικής διωνυμικής κατανομής με παραμέτρους r και p, όπου $r > 0$ και $0 < p < 1$ (συμβολισμός $NB(r,p)$) είναι τα εξής:

- Συνάρτηση πιθανότητας: $p_n = \binom{r+n-1}{n}(1-p)^n p^r,\ n = 0,1,\dots$.
- Αναδρομική σχέση: $p_n = \left((1-p) + \frac{(r-1)(1-p)}{n}\right)p_{n-1}$ με αρχική συνθήκη $p_0 = p^r$.
- Κλάση: $R(1-p,\ (r-1)(1-p),\ 0)$.

– **Η γεωμετρική κατανομή**

Τα χαρακτηριστικά της γεωμετρικής κατανομής με παράμετρο p, όπου $0 < p < 1$ (συμβολισμός $G(p)$) είναι τα εξής:

- Συνάρτηση πιθανότητας: $(1-p)^n p,\ n = 0,1,\dots$.
- Αναδρομική σχέση: $p_n = (1-p)\,p_{n-1}$ με αρχική συνθήκη $p_0 = p$.

- Κλάση: $R(1-p,\ 0,\ 0)$.

Οι Sundt και Jewell (1981) έδειξαν ότι οι παραπάνω κατανομές αποτελούν τα μοναδικά μέλη της οικογένειας $R(a,b,0)$. Πράγματι έχουμε τα ακόλουθα για κάθε κατανομή.

✓ $\boldsymbol{P(\lambda)}$

Έστω $a=0$. Τότε, $b=\lambda>0$ και από την (1.2.1) προκύπτει ότι

$$p_n = \frac{\lambda}{n} p_{n-1}, \qquad n=1,2,\dots$$

Έτσι παίρνουμε διαδοχικά

$$p_1 = \frac{\lambda}{1} p_0$$

$$p_2 = \frac{\lambda}{2} p_1$$

$$\vdots$$

$$p_n = \frac{\lambda}{n} p_{n-1}.$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη, προκύπτει ότι

$$p_n = \frac{\lambda^n}{n!} p_0, \qquad n=0,1,\dots$$

Από την τελευταία σχέση, αθροίζοντας για όλες τις δυνατές τιμές *n*, παίρνουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \quad \Rightarrow \quad 1 = p_0 e^{\lambda} \quad \Rightarrow \quad p_0 = e^{-\lambda}.$$

Επομένως

$$p_n = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}, \qquad n=0,1,\dots$$

δηλαδή $N \sim P(\lambda)$. ■

✓ $\boldsymbol{B(m,p)}$

Έστω $a < 0$. Τότε, επειδή είναι $a + b > 0$, θα πρέπει να ισχύει ότι $b > a$. Επομένως, θα πρέπει να υπάρχει θετικός ακέραιος αριθμός m, τέτοιος ώστε

$$a + \frac{b}{m+1} = 0$$

έτσι ώστε να αποφευχθεί η περίπτωση $p_{m+1} < 0$. Πράγματι, επειδή καθώς αυξάνει η τιμή του n, ο λόγος b/n φθίνει και για κάποια τιμή του n, έστω τη $n = m + 1$, η τιμή του $\alpha + b/n$ θα γίνει ίση ακριβώς με το μηδέν, επειδή $a < 0$. Τότε, από τη σχέση (1.2.1) προκύπτει ότι

$$p_n = \left(a + \frac{b}{n}\right) p_{n-1}\,, \qquad n = 1, 2, \dots, m$$

επειδή

$$p_{m+1} = \left(a + \frac{b}{m+1}\right) p_m = 0 \cdot p_m = 0 \ ,$$

και συνεπώς θα είναι $p_n = 0$, για κάθε $n \geq m + 1$, λόγω της (1.2.1).

Επειδή λοιπόν είναι $b = -a(m + 1)$, έπεται από την (1.2.1) ότι για $n = 1, 2, \dots, m$, έχουμε ότι

$$p_n = \frac{an + b}{n} p_{n-1} = \frac{an - a(m+1)}{n} p_{n-1} = \frac{m - (n-1)}{n} (-a) p_{n-1}\,.$$

Από αυτή τη σχέση, διαδοχικά παίρνουμε

$$p_1 = \frac{m}{1}(-a)p_0$$

$$p_2 = \frac{m-1}{2}(-a)p_1$$

.

.

.

$$p_n = \frac{m-n+1}{n}(-a)p_{n-1}.$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις, για $n = 1, 2, \dots, m$, παίρνουμε ότι

$$p_n = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}(-a)^n p_0$$

$$= \frac{(m-n)!\,(m-n+1)(m-n+2)\dots(m-1)m}{(m-n)!\,n!}(-a)^n p_0$$

$$= \frac{m!}{n!\,(m-n)!}(-a)^n p_0$$

$$= \binom{m}{n}(-a)^n p_0 \ .$$

Επειδή $\sum_{n=0}^{m} p_n = 1$, έπεται ότι

$$\sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n}(-a)^n p_0 = 1 \,,$$

δηλαδή

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}(-a)^n} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}(-a)^n\, 1^{m-n}} = \frac{1}{(1-a)^m}\,.$$

Άρα

$$p_n = \binom{m}{n}\left(-\frac{a}{1-a}\right)^n\left(1-\frac{a}{1-a}\right)^{n-m} \ , \ \ n = 1, 2, \dots, m\,,$$

δηλαδή, $N{\sim}B(m,p)$ όπου $p = -\frac{a}{1-a}$. ■

✓ $\boldsymbol{NB(r,p)}$

Έστω $a > 0$. Τότε αφού

$$P_N'(u) = \frac{a+b}{1-au}P_N(u)\,,$$

(για την απόδειξη δείτε Λήμμα 1.2.1 παρακάτω) έπεται ότι

$$\int_u^1 \frac{P_N'(t)}{P_N(t)}dt = (a+b)\int_u^1 \frac{1}{1-at}dt$$

ή

$$lnP_N(t)\Big|_{t=u}^{t=1} = -\frac{a+b}{a}\ln(1-at)\Big|_{t=u}^{t=1},$$

ή

$$lnP_N(1) - lnP_N(u) = -\frac{a+b}{a}[\ln(1-a) - \ln(1-au)]\,,$$

κι επειδή $P_N(1) = 1$, οπότε $lnP_N(1) = 0$, παίρνουμε ότι

$$lnP_N(u) = \frac{a+b}{a} ln\left(\frac{1-a}{1-au}\right) = ln\left(\frac{1-a}{1-au}\right)^{\frac{a+b}{a}} .$$

Επομένως, η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής *N*, είναι

$$P_N(u) = \left(\frac{1-a}{1-au}\right)^{\frac{a+b}{a}} .$$

Έστω ότι είναι $a > 0$. Τότε, επειδή $a + b > 0$ ή $b > -a$, είναι προφανές ότι

$$a + \frac{b}{n} > a - \frac{a}{n} = a\frac{n-1}{n} \geq \frac{n-1}{n} \quad , \qquad n \geq 2 .$$

Από την τελευταία σχέση μπορεί να διαπιστωθεί ότι

$$p_n > \frac{n-1}{n} p_{n-1}, \quad n \geq 2$$

και παίρνουμε διαδοχικά

$$p_2 > \frac{1}{2} p_1 \quad , p_3 > \frac{2}{3} p_2, \dots \ , p_n > \frac{n-1}{n} p_{n-1} .$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις, παίρνουμε ότι

$$p_n > \frac{1}{n} p_1, \qquad n = 2, 3, \dots$$

Από την τελευταία σχέση, αθροίζοντας ως προς *n*, παίρνουμε

$$\sum_{n=2}^{\infty} p_n = p_1 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$$

και προσθέτοντας και στα δύο μέλη το p_1, έχουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = p_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} .$$

Όμως, ισχύει ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$, άρα

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n > +\infty$$

που είναι άτοπο. Επομένως, δεν μπορεί να ισχύει $a \geq 1$.

Άρα, αν $a > 0$, τότε υποχρεωτικά πρέπει να ισχύει $0 < a < 1$.

Έστω, τώρα, $a = q$, και $q = 1 - p$, οπότε ισχύει $0 < p < 1$. Επίσης, έστω $\frac{a+b}{a} = r > 0$, οπότε είναι $b = (r-1)a = (r-1)q$. Τότε

$$P_N(u) = \left(\frac{p}{1-qu}\right)^r$$

δηλαδή $N \sim NB(r,p)$. ■

- ✓ $\boldsymbol{G(p)}$

Για $r = 1$ η προηγούμενη περίπτωση δίνει $b = 0$ και $N \sim NB(1,p)$, δηλαδή $N \sim G(p)$. ■

<u>Παρατήρηση</u>

Από τις τέσσερις παραπάνω περιπτώσεις, λόγω της ιδιαιτερότητάς της, έχει παραλειφθεί η εκφυλισμένη κατανομή στο σημείο μηδέν, για την οποία έχουμε

– $p_n = \begin{cases} 0\ , & n = 0 \\ 1\ , & n > 0 \end{cases}$

– $a = -b$

Πράγματι, έστω $a + b = 0$. Τότε είναι $p_1 = 0$, οπότε από την (1.2.1) έπεται ότι θα ισχύει $p_n = 0$ για κάθε $n \geq 2$. Επειδή, τώρα, είναι $p_n = 0$ για κάθε $n \geq 1$ και $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$, έπεται ότι $p_0 = 1$, δηλαδή $P(N = 0) = 1$. Άρα, η τυχαία μεταβλητή N έχει την εκφυλισμένη κατανομή το σημείο μηδέν. ■

<u>Λήμμα 1.2.1</u>

Αν η τυχαία μεταβλητή N ικανοποιεί την αναδρομική σχέση (1.2.1), τότε η πιθανογεννήτρια συνάρτησή της $P_N(u)$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$P_N'(u) = \frac{a+b}{1-au} P_N(u)\,. \tag{1.2.2}$$

<u>Απόδειξη</u>

Αφού

$$P_N(u) = E(u^N) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n u^n\,,$$

παραγωγίζοντας ως προς u και χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.2.1), παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
P_N'(u) = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n u^{n-1} &= \sum_{n=1}^{\infty} n\left(a+\frac{b}{n}\right) p_{n-1} u^{n-1} \\
&= a\sum_{n=1}^{\infty} n p_{n-1} u^{n-1} + b\sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1} u^{n-1} \\
&= \ a\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) p_n u^n + b\sum_{n=0}^{\infty} p_n u^n \\
&= \ a\sum_{n=1}^{\infty} n p_n u^n + \ a\sum_{n=0}^{\infty} p_n u^n + b\sum_{n=0}^{\infty} p_n u^n \\
&= au\sum_{n=1}^{\infty} n p_n u^{n-1} + (a+b)\sum_{n=0}^{\infty} p_n u^n \\
&= auP_N'(u) + (a+b)P_N(u)\,.
\end{aligned}
$$

Επομένως

$$
(1-au)P_N'(u) = (a+b)P_N(u)\,,
$$

δηλαδή

$$
P_N'(u) = \frac{a+b}{1-au} P_N(u)\,.
$$

Η σχέση που θέλαμε να αποδείξουμε. ■

1.3 Ο αναδρομικός τύπος του Panjer

Στο ακόλουθο Θεώρημα δίνεται ο αναδρομικός τύπος του Panjer για τον υπολογισμό της συνάρτησης πιθανότητας $g(x)$ των συνολικών αποζημιώσεων.

<u>Θεώρημα 1.3.1</u>

Έστω

$$
S = \begin{cases} X_1 + X_2 + \cdots + X_N, & N = 1,2,\ldots \\ \\ 0, & N = 0. \end{cases}
$$

Αν η X είναι μια μη αρνητική ακέραια τυχαία μεταβλητή, δηλαδή $R_X = \{0, 1, 2, \ldots\}$, με συνάρτηση πιθανότητας $f(x) = P(X = x)$ και η τυχαία μεταβλητή N ικανοποιεί την αναδρομική σχέση (1.2.1), τότε η $g(x) = \ P(S = x)$ ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$
g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-af(0)}\displaystyle\sum_{y=1}^{x}\left(a+b\frac{y}{x}\right)f(y)g(x-y), & x=1,2,\dots \\ \\ P_N\big(f(0)\big) & x=0.\end{cases} \tag{1.3.1}
$$

<u>Απόδειξη</u>

Αρχικά, για την πιθανογεννήτρια συνάρτηση $P_S(u)$ της τυχαίας μεταβλητής S, ξέρουμε ότι

$$P_S(u)=P_N\big(P_X(u)\big)$$

και παραγωγίζοντας παίρνουμε

$$P_S'(u)=P_X'(u)P_N'\big(P_X(u)\big).$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.2.2) παίρνουμε

$$P_N'\big(P_X(u)\big)=\frac{a+b}{1-aP_X(u)}P_N\big(P_X(u)\big)=\frac{a+b}{1-aP_X(u)}P_S(u)\,.$$

Επομένως

$$P_S'(u)=\frac{a+b}{1-aP_X(u)}P_X'(u)P_S(u)\,,$$

ή

$$[1-aP_X(u)]P_S'(u)=(a+b)P_X'(u)P_S(u)\,,$$

ή

$$P_S'(u)=aP_X(u)P_S'(u)+(a+b)P_X'(u)P_S(u)\,,$$

ή

$$uP_S'(u)=aP_X(u)[uP_S'(u)]+(a+b)[uP_X'(u)]P_S(u) \tag{$*$}$$

που είναι η διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί η $P_S(u)$. Στη συνέχεια θα λύσουμε την παραπάνω διαφορική εξίσωση αναπτύσσοντας σε σειρές δυνάμεων του u^x τις πιθανογεννήτριες συναρτήσεις και τις παραγώγους τους, που εμπλέκονται στην παραπάνω εξίσωση. Έτσι λοιπόν, έχουμε

$$P_X(u)=\sum_{x=0}^{\infty}f(x)u^x,\qquad P_S(u)=\sum_{x=0}^{\infty}g(x)u^x\ ,$$

και

$$uP_X'(u) = \sum_{x=1}^{\infty} xf(x)u^x \;, \qquad uP_S'(u) = \sum_{x=1}^{\infty} xg(x)u^x \;.$$

Τότε, παίρνουμε

$$\begin{aligned} P_X(u)[uP_S'(u)] &= \left(\sum_{x=0}^{\infty} f(x)u^x\right)\left(\sum_{x=1}^{\infty} xg(x)u^x\right) \\ &= \sum_{x=1}^{\infty}\left(\sum_{y=0}^{x-1} f(y)(x-y)g(x-y)\right), \end{aligned}$$

και

$$[uP_X'(u)]P_S(u) = \sum_{x=1}^{\infty}\left(\sum_{y=1}^{x} yf(y)g(x-y)\right).$$

Αντικαθιστώντας τώρα τις παραπάνω σχέσεις στην $(*)$, έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^{\infty} xg(x)u^x &= a\sum_{x=1}^{\infty}\left(\sum_{y=0}^{x-1}(x-y)f(y)g(x-y)\right)u^x \\ &\quad + (a+b)\sum_{x=1}^{\infty}\left(\sum_{y=1}^{x} yf(y)g(x-y)\right)u^x \,, \end{aligned}$$

οπότε, εξισώνοντας τους συντελεστές του u^x και στα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης, έπεται ότι, για $x = 1, 2, \ldots$, ισχύει

$$xg(x) = a\sum_{y=0}^{x-1}(x-y)f(y)g(x-y) + (a+b)\sum_{y=1}^{x} yf(y)g(x-y) \,.$$

Τέλος, λύνοντας την παραπάνω εξίσωση ως προς $g(x)$ παίρνουμε

$$xg(x) = axf(0)g(x) + a\sum_{y=1}^{x-1}(x-y)f(y)g(x-y) + (a+b)\sum_{y=1}^{x} yf(y)g(x-y) \,,$$

από την οποία προκύπτει άμεσα ότι

$$[1 - af(0)]xg(x) = a\sum_{y=1}^{x}(x-y)f(y)g(x-y) + (a+b)\sum_{y=1}^{x}yf(y)g(x-y)$$
$$= \sum_{y=1}^{x}[a(x-y)+(a+b)y]f(y)g(x-y)$$
$$= \sum_{y=1}^{x}(ax-by)f(y)g(x-y) \ ,$$

που είναι η ζητούμενη αναδρομική σχέση (1.3.1). ■

1.4 Ειδικές περιπτώσεις του αναδρομικού τύπου του Panjer

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 1.3.1, για τις κατανομές που ικανοποιούν τη σχέση (1.2.1) παίρνουμε τα παρακάτω πορίσματα.

Πόρισμα 1.4.1

Αν η τυχαία μεταβλητή $N \sim P(\lambda)$, $\lambda > 0$, δηλαδή

$$p_n = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \ , \qquad n = 0, 1, \ldots$$

τότε η $g(x) = P(S = x)$ ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{x}\displaystyle\sum_{y=1}^{x} yf(y)g(x-y), & x = 1,2,\ldots \\ e^{\lambda[f(0)-1]}, & x = 0 \end{cases}$$

Απόδειξη

Προκύπτει με εφαρμογή του Θεωρήματος 1.4.1 για $a = 0$, $b = \lambda$ και το γεγονός ότι $P_N(u) = e^{\lambda[u-1]}$. ■

Πόρισμα 1.4.2

Αν η τυχαία μεταβλητή $N \sim B(m, p)$, $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, δηλαδή

$$p_n = \binom{m}{n} p^n (1-p)^{m-n}, \qquad n = 0,1,\ldots,m$$

τότε η $g(x) = P(S = x)$ ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{p}{q-pf(0)}\displaystyle\sum_{y=1}^{x}\left\{(m+1)\frac{y}{x}-1\right\}f(y)g(x-y), & x=1,2,\dots\\ \\ \big(q+pf(0)\big)^m & x=0.\end{cases}$$

Απόδειξη

Προκύπτει με εφαρμογή του Θεωρήματος 1.4.1 για $a=-p/(1-p)$, $b=(m+1)\,p/(1-p)$ και το γεγονός ότι $P_N(u)=(q+pu)^m$. ■

Παρατήρηση

Για $m=1$, έχουμε την ειδική περίπτωση όπου η τυχαία μεταβλητή $N\sim Bernoulli(p)$, $0<p<1$, που ικανοποιεί τη σχέση (1.2.1) για $a=-\frac{p}{q}$ και $b=\frac{2q}{p}$. Επομένως, η αναδρομική σχέση που ικανοποιεί η $g(x)$ όταν η τυχαία μεταβλητή S έχει τη σύνθετη Bernoulli κατανομή, προκύπτει άμεσα από το παραπάνω Πόρισμα 1.4.2, για $m=1$.

Πόρισμα 1.4.3

Αν η τυχαία μεταβλητή $N\sim NB(r,p), r>0$, $0<p<1$, $q=1-p$, δηλαδή

$$p_n=\binom{r+n-1}{n}p^r(1-p)^n\ ,\qquad n=0,1,\dots$$

τότε η $g(x)=P(S=x)$, ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{q}{1-qf(0)}\displaystyle\sum_{y=1}^{x}\left\{(r-1)\frac{y}{x}+1\right\}f(y)g(x-y), & x=1,2,\dots\\ \\ \left(\dfrac{p}{1-qf(0)}\right)^r & x=0.\end{cases}$$

Απόδειξη

Προκύπτει με εφαρμογή του Θεωρήματος 1.4.1 για $a=q$, $b=(r-1)q$ και το γεγονός ότι $P_N(u)=\left(\frac{p}{1-qu}\right)^r$. ■

Πόρισμα 1.4.4

Αν η τυχαία μεταβλητή $N\sim G(p), 0<p<1$, $q=1-p$, δηλαδή

$$p_n=p(1-p)^n\ ,\qquad n=0,1,\dots$$

τότε η $g(x)=P(S=x)$, ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$
g(x) = \begin{cases} \dfrac{q}{1-qf(0)} \displaystyle\sum_{y=1}^{x} f(y) g(x-y), & x = 1, 2, \dots \\ \\ \dfrac{p}{1-qf(0)} & x = 0. \end{cases}
$$

<u>Απόδειξη</u>

Προκύπτει από το προηγούμενο πόρισμα για $r = 1$. ■

<u>Σχόλιο</u>

Ο αναδρομικός τύπος της σύνθετης κατανομής Poisson δόθηκε για πρώτη φορά από τον Adelson (1966).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΕΣ ΣΥΝΘΕΤΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

2.1 Το γενικό μοντέλο

Ο Hesselager (1996) μελέτησε τη δισδιάστατη σύνθετη διακριτή τυχαία μεταβλητή (X, Y) όπου:

- $X = \begin{cases} U_1 + U_2 + \cdots + U_N, & N = 1,2,\dots \\ 0, & N = 0 \end{cases}$
- $Y = \begin{cases} V_1 + V_2 + \cdots + V_M, & M = 1,2,\dots \\ 0, & M = 0 \end{cases}$
- η τυχαία μεταβλητή N (M) δηλώνει τον αριθμό των απαιτήσεων που εμφανίζονται στο πρώτο (δεύτερο) χαρτοφυλάκιο, και η τυχαία μεταβλητή U_i (V_j) συμβολίζει το μέγεθος της i-οστής (j-οστής) απαίτησης στο πρώτο (δεύτερο) χαρτοφυλάκιο.
- η δισδιάστατη διακριτή τυχαία μεταβλητή (N, M) είναι ορισμένη στους μη αρνητικούς ακέραιους και έχει από κοινού συνάρτηση πιθανότητας που δίνεται από τον τύπο

$$p(n, m) = P(N = n, M = m), \quad n,\ m = 0, 1, \dots \tag{2.1.1}$$

- οι τυχαίες μεταβλητές $U_1, U_2, \dots$ είναι ανεξάρτητες, ισόνομες και ανεξάρτητες από την τυχαία μεταβλητή N, με συνάρτηση πιθανότητας

$$f_1(u) = P(U_i = u), \quad u = 0, 1, \dots$$

- οι τυχαίες μεταβλητές $V_1, V_2, \dots$ είναι ανεξάρτητες, ισόνομες και ανεξάρτητες από την τυχαία μεταβλητή M με συνάρτηση πιθανότητας

$$f_2(v) = P\big(V_j = v\big), \quad v = 0, 1, \dots$$

- οι τυχαίες μεταβλητές $U_i,\ V_j \quad (i, j \geq 1)$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και ανεξάρτητες από τη δισδιάστατη τυχαία μεταβλητή (N, M),
- η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας της (σύνθετη) δισδιάστατης διακριτής τυχαίας μεταβλητής (X, Y) δίνεται από τον τύπο

$$P(X = x, Y = y) = g(x, y) =$$
$$= \sum_{n,m=0}^{\infty} p(n,m) f_1^{*n}(x) f_2^{*m}(y)\,, \qquad x,\ y = 0, 1, \dots \qquad (2.1.2)$$

– η περιθώρια κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από τον τύπο
$$g(x) = \sum_{y=0}^{\infty} g(x, y), \qquad x = 0, 1, \dots$$
– η περιθώρια κατανομή της τυχαίας μεταβλητής N δίνεται από τον τύπο
$$p(n) = \sum_{m=0}^{\infty} p(n, m), \qquad n = 0, 1, \dots$$
– η δεσμευμένη κατανομή της Y δοθέντος ότι $X = x$ δίνεται από τον τύπο
$$g(y|x) = P(Y = y|X = x) = \frac{g(x, y)}{g(x)}, \qquad y = 0, 1, \dots.$$
– η δεσμευμένη κατανομή της M δοθέντος ότι $N = n$ δίνεται από τον τύπο
$$p(m|n) = P(M = m|N = n) = \frac{p(n, m)}{p(n)}, \qquad m = 0, 1, \dots.$$

Ενδιαφέρον παρουσιάζουν στην πράξη αναδρομικές σχέσεις υπολογισμού της δεσμευμένης κατανομής της Y δοθέντος ότι $X = x$, $g(y|x)$, σε προβλήματα πρόβλεψης. Οι αναδρομικές σχέσεις που θα αναπτυχθούν στη συνέχεια είναι χρήσιμες προς αυτήν την κατεύθυνση, αλλά αν κάποιος ενδιαφέρεται μόνο για την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $X + Y$ τότε υπάρχουν και άλλοι τρόποι υπολογισμού της χωρίς τη χρήση των αναδρομικών σχέσεων για τη $g(x, y)$.

Για την κατανομή της δισδιάστατης διακριτής τυχαίας μεταβλητή (N, M) ο Hesselager (1996) θεώρησε τα ακόλουθα τρία βασικά μοντέλα.

Μοντέλο Α: Αν θέσουμε $K = N + M$ τότε $(N|K = k) \sim Binomial(k, \rho_1)$ και $K \sim R_1(a, b)$.

Μοντέλο Β: Έχουμε ότι $N = Z_0 + Z_1$ και $M = Z_0 + Z_2$, όπου Z_0, Z_1 και Z_2 είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και $Z_j \sim R_1(a_j,\ b_j)$ για $j = 0, 1, 2$.

Μοντέλο Γ: Οι τυχαίες μεταβλητές N, M είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητες δοθέντος ότι $\Theta = \vartheta$ και ακολουθούν κατανομές Poisson με παραμέτρους $\vartheta\lambda_1$ και $\vartheta\lambda_2$, αντίστοιχα. Η παράμετρος Θ έχει συνάρτηση πυκνότητας $u(\vartheta)$ *που* ικανοποιεί τη σχέση
$$\frac{d}{d\vartheta} \log u(\vartheta) = \frac{\sum_{i=0}^{k}\ b_i \vartheta^i}{\sum_{i=0}^{k}\ a_i \vartheta^i}.$$

Σημειώνουμε ότι για μια τυχαία μεταβλητή *K*, γράφουμε ότι $K{\sim}R_1(a,b)$, όταν η συνάρτηση πιθανότητας $q(k)=P(K=k)$ της τυχαίας μεταβλητής *K*, ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$q(k)=\left(a+\frac{b}{k}\right)q(k-1), \quad k\geq 1\,, \tag{2.1.3}$$

για κάποιες σταθερές *a* και *b*.

Για μια (σύνθετη) τυχαία μεταβλητή *X* όπου η κατανομή του πλήθους των ζημιών ανήκει στην κλάση $R_1(a,b)$ και έχει συνάρτηση πιθανότητας *f* για το ύψος (μέγεθος) των ζημιών ορισμένη στους μη αρνητικούς ακέραιους, υπενθυμίζουμε ότι η συνάρτηση πιθανότητας της *X* μπορεί να υπολογιστεί από την ακόλουθη αναδρομική σχέση του Panjer

$$g(x)=\frac{1}{1-af(0)}\sum_{u=1}^{x}\left(a+b\frac{u}{x}\right)f(u)g(x-u)\,, \quad x>0. \tag{2.1.4}$$

2.2 Η δισδιάστατη εκδοχή της αναδρομικής σχέσης του Panjer – Το Μοντέλο Α

Σύμφωνα με την προηγούμενη παράγραφο, στο Μοντέλο Α υποθέτουμε ότι για $K=N+M$ ισχύει ότι $(N|K=k){\sim}Binomial(k,\rho_1)$ και $K{\sim}R_1(a,b)$. Το συγκεκριμένο Μοντέλο Α έχει την ακόλουθη φυσική ερμηνεία: Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή *K* δηλώνει το συνολικό αριθμό των απαιτήσεων που υφίστανται σε μια συγκεκριμένη περίοδο έκθεσης. Έστω $W_i,\ i=1,2,\dots,K$, ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που είναι ανεξάρτητες και από την K, όπου η τυχαία μεταβλητή W_i δηλώνει το χρόνο αναμονής μέχρι τη γνωστοποίηση της i απαίτησης. Τότε ο αριθμός των αναφερόμενων (*N*) και των εκκρεμών (*M*) απαιτήσεων τη χρονική στιγμή *τ*, είναι

$$N=\sum_{i=1}^{K}I(W_i\leq\tau)\,, \quad M=\sum_{i=1}^{K}I(W_i>\tau)\,,$$

με $\rho_1=P(W_i\leq\tau)$.

Υπό το Μοντέλο Α, έχουμε ότι η δεσμευμένη κατανομή του *N* δοθέντος του *K* είναι η διωνυμική κατανομή, δηλαδή

$$P(N=n|K=k)=\binom{k}{n}\rho_1^n\rho_2^{k-n} \tag{2.2.1}$$

όπου $\rho_1+\rho_2=1$ και $K{\sim}R_1(a,b)$

Στο ακόλουθο λήμμα δίνεται μια σχέση που ικανοποιεί η από κοινού πιθανογεννήτρια συνάρτηση της δισδιάστατης τυχαίας μεταβλητής (N, M).

<u>Λήμμα 2.2.1</u>

Η από κοινού πιθανογεννήτρια συνάρτηση $\varphi(s,t)$ της δισδιάστατης τυχαίας μεταβλητής (N, M) ικανοποιεί τη σχέση

$$\varphi(s,t) = \psi(\rho_1 s + \rho_2 t)$$

όπου $\psi(\cdot)$ είναι η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητή $K = N + M$.

<u>Απόδειξη:</u>

Έστω

$$\varphi(s,t) = E[s^N t^M] = \sum_{n,m\geq 0} p(n,m)\, s^n t^m$$

η από κοινού πιθανογεννήτρια συνάρτηση της δισδιάστατης τυχαίας μεταβλητής (N, M), και έστω

$$\psi(s) = E(s^K) = \sum_{k\geq 0} P(K = k)\, s^k$$

η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητή $K = N + M$. Από τη σχέση (2.2.1) παίρνουμε

$$\varphi(s,t) = E\big[E[s^N t^M | K]\big] = E\left[t^K E\left[(s/t)^N \,|K\right]\right]$$
$$= E\left[t^K (\rho_1 (s/t) + \rho_2)^K\right] = \psi(\rho_1 s + \rho_2 t)$$

όπου κάναμε χρήση του γεγονότος ότι η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της διωνυμικής κατανομής $Binomial(n,p)$ είναι $((1-p)+pz)^n$. ■

Στο ακόλουθο θεώρημα δίνονται δύο αναδρομικές σχέσεις για τον υπολογισμό της από κοινού συνάρτηση πιθανότητας της δισδιάστατης διακριτής τυχαίας μεταβλητής (N, M).

<u>Θεώρημα 2.2.1</u>

Υπό το Μοντέλο Α έχουμε

$$p(n,m) = \rho_1 \left(a + \frac{b}{n}\right) p(n-1,m) + a\rho_2 p(n,m-1), \quad n \geq 1$$

$$p(n,m) = \rho_2 \left(a + \frac{b}{m}\right) p(n,m-1) + a\rho_1 p(n-1,m), \quad m \geq 1$$

όπου $p(n,-1) = p(-1,m) = 0$.

Απόδειξη:

Όταν $K \sim R_1(a,b)$ έχουμε ότι η πιθανογεννήτρια συνάρτηση $\psi(s) = E(s^K)$ ικανοποιεί την σχέση

$$(1-as)\psi'(s) = (a+b)\psi(s) \tag{2.2.2}$$

(βλ., π.χ., Hess et al. (2002)). Παραγωγίζοντας τη σχέση (2.2.2) ως προς *s*, παίρνουμε

$$(1 - a\rho_1 s - a\rho_2 t)\frac{d}{ds}\varphi(s,t) = (a+b)\rho_1\varphi(s,t).$$

Αντικαθιστώντας τη $\varphi(s,t)$ στην παραπάνω εξίσωση με

$$\varphi(s,t) = \sum_{n,m\geq 0} p(n,m)\, s^n t^m$$

και εξισώνοντας τους συντελεστές των δυνάμεων $s^{n-1}t^m$ για $n \geq 1$, παίρνουμε

$$np(n,m) - a\rho_1(n-1)p(n-1,m) - a\rho_2 np(n,m-1) = (a+b)\rho_1 p(n-1,m).$$

Λύνοντας ως προς $p(n,m)$ καταλήγουμε στην πρώτη σχέση. Ομοίως αποδεικνύεται και η δεύτερη αναδρομική σχέση. ■

Στο ακόλουθο θεώρημα δίνονται δύο αναδρομικές σχέσεις για τον υπολογισμό της από κοινού συνάρτησης πιθανότητας της δισδιάστατης σύνθετης διακριτής τυχαίας μεταβλητής (X,Y).

Θεώρημα 2.2.2

Υπό το Μοντέλο Α έχουμε

$$g(0,0) = \psi\big(\rho_1 f_1(0) + \rho_2 f_2(0)\big) \tag{2.2.3}$$

όπου $\psi(\cdot)$ είναι η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής *K*.

Για $x \geq 1$, έχουμε

$$g(x,y) = \rho_1 \sum_{u=0}^{x}\left(a + \frac{bu}{x}\right) f_1(u) g(x-u,y) + a\,\rho_2 \sum_{v=0}^{y} f_2(v) g(x,y-v), \tag{2.2.4}$$

και για $y \geq 1$, έχουμε

$$g(x,y) = \rho_2 \sum_{v=0}^{y}\left(a + \frac{bv}{y}\right) f_2(v) g(x,y-v) + a\,\rho_1 \sum_{u=0}^{x} f_1(u) g(x-u,y). \tag{2.2.5}$$

Απόδειξη:

Η αρχική πιθανότητα είναι

$$g(0,0) = \sum_{n,m=0}^{\infty} p(n,m) f_1^{*n}(0) f_2^{*m}(0) = \sum_{n,m=0}^{\infty} p(n,m)[f_1(0)]^n [f_2(0)]^m$$

$$= \varphi\big(f_1(0), f_2(0)\big) = \psi\big(\rho_1 f_1(0) + \rho_2 f_2(0)\big)$$

λόγω του Λήμματος 2.1, και έτσι αποδεικνύεται η σχέση (2.2.3).

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα

$$\frac{1}{n+i} f^{*(n+i)}(x) = \sum_{u=1}^{x} \frac{u}{ix} f^{*i}(u) f^{*n}(u)$$

(βλ., π.χ., Schröter (1990)) για $i = 1$ έχουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{n} p(n-1,m) f_1^{*n}(x)\, f_2^{*m}(y) =$$

$$= \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} p(n,m) f_1^{*(n+1)}(x) f_2^{*m}(y) = \sum_{u=1}^{x} \frac{u}{x} f_1(u) g(x-u,y)\,.$$

Έτσι για $x \geq 1$, από το Θεώρημα 2.2.1, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} g(x,y) &= \sum_n \sum_m p(n,m) f_1^{*n}(x) f_2^{*m}(y) \\ &= \sum_n \sum_m \left[\rho_1 \left(a + \frac{b}{n}\right) p(n-1,m) + a\rho_2 p(n,m-1)\right] f_1^{*n}(x) f_2^{*m}(y) \\ &= \rho_1 \sum_{u=0}^{x} \left(a + \frac{bu}{x}\right) f_1(u) g(x-u,y) + \rho_2 a \sum_{v=0}^{y} f_2(v) g(x,y-v) \end{aligned}$$

που αποδεικνύει τη σχέση (2.2.4). Ομοίως αποδεικνύεται και η αναδρομική σχέση (2.2.5) του θεωρήματος. ■

Παρατήρηση:

– Αθροίζοντας τη σχέση (2.2.4), για $y \geq 0$ παίρνουμε τον αναδρομικό τύπο του Panjer (σχέση (2.1.4)) και επομένως η σχέση (2.2.4) (όπως και η σχέση (2.2.5)) μπορεί να θεωρηθεί σαν μια δισδιάστατη εκδοχή του αναδρομικού τύπου του Panjer.

Το Θεώρημα 2.2.1 μπορεί να χρησιμοποιηθεί, για να βρεθούν οι περιθώριες και δεσμευμένες κατανομές του ζεύγους (N, M).

Θεώρημα 2.2.3

Υπό το μοντέλο Α έχουμε

$$N \sim R_1\left(a\frac{\rho_1}{1-a\rho_2}, b\frac{\rho_1}{1-a\rho_2}\right), \quad M \sim R_1\left(a\frac{\rho_2}{1-a\rho_1}, b\frac{\rho_2}{1-a\rho_1}\right)$$

$$(M|N=n) \sim R_1(a\rho_2, (b+an)\rho_2), \quad (N|M=m) \sim R_1(a\rho_1, (b+am)\rho_1).$$

Απόδειξη:

Αθροίζοντας τη πρώτη σχέση του Θεωρήματος 2.2.1 για $m \geq 0$, παίρνουμε

$$p(n) = \frac{\rho_1}{1-a\rho_2}\left(a+\frac{b}{n}\right)p(n-1)\,, \quad n \geq 1$$

που αποδεικνύει τον ισχυρισμό για την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής N.

Για την δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας $p(m|n) = P(M=m|N=n)$, παρατηρούμε από τη δεύτερη σχέση του Θεωρήματος 2.2.1, ότι

$$\frac{p(m|n)}{p(m-1|n)} = \frac{p(n,m)}{p(n,m-1)} = \rho_2\left(a+\frac{b}{m}\right) + a\rho_1\frac{p(n-1,m)}{p(n,m-1)}\,, \quad m \geq 1.$$

Αφού

$$\begin{aligned} p(n,m) &= P(N=n, M=m) = P(N=n, N+M=n+m) \\ &= P(N=n|N+M=n+m)P(N+M=n+m) \\ &= \binom{n+m}{n}\rho_1^n\rho_2^m\, q(n+m) \end{aligned}$$

όπου q είναι η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής K, έχουμε

$$\frac{p(n-1,m)}{p(n,m-1)} = \frac{n}{m}\frac{\rho_2}{\rho_1}.$$

Έτσι

$$\frac{p(m|n)}{p(m-1|n)} = \rho_2\left(a+\frac{b}{m}\right) + a\rho_2\frac{n}{m} = a\rho_2 + \left(\frac{b+an}{m}\right)\rho_2, \quad m \geq 1$$

που αποδεικνύει τον ισχυρισμό για τη δεσμευμένη κατανομή $(M|N=n)$. Παρομοίως αποδεικνύονται και τα άλλα δύο αποτελέσματα. ■

Παρατήρηση

– Η κλάση R_1 περιλαμβάνει τη διωνυμική κατανομή (για $a < 0$), την κατανομή Poisson (για $a = 0$), και την αρνητκή διωνυμική κατανομή (για $0 < a < 1$). Από το Θεώρημα 2.2.3 φαίνεται ότι οι περιθώριες και οι υπό συνθήκες κατανομές είναι διωνυμική ή Poisson ή αρνητική διωνυμική όταν η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής K είναι διωνυμική ή Poisson ή αρνητική διωνυμική, αντίστοιχα. Ειδικότερα, οι τυχαίες μεταβλητές N και M είναι ανεξάρτητες στη περίπτωση της Poisson ($a = 0$).

Από τα Θεωρήματα 2.2.2 και 2.2.3, προκύπτει ότι η περιθώρια κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X και η δεσμευμένη κατανομή της $(Y|N = n)$ μπορούν να υπολογιστούν με τη χρήση του αναδρομικού τύπου του Panjer. Πράγματι, από το Θεώρημα 2.2.2 προκύπτει η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 2.2.1

Για $x \geq 1$, έχουμε

$$P(X = x) = \frac{1}{1 - \frac{a\rho_1}{1 - a\rho_2} f_1(0)} \sum_{u=1}^{x} \left[\frac{\rho_1}{1 - a\rho_2}\left(a + b\frac{u}{x}\right) f_1(u)\right] P(X = x - u)\,,$$

με αρχική συνθήκη $P(X = 0) = \psi(\rho_1 f_1(0) + \rho_2)$, και για $y \geq 1$, έχουμε

$$P(Y = y) = \frac{1}{1 - \frac{a\rho_2}{1 - a\rho_1} f_2(0)} \sum_{v=1}^{y} \left[\frac{\rho_2}{1 - a\rho_1}\left(a + b\frac{v}{y}\right) f_2(v)\right] P(Y = y - v)\,,$$

με αρχική συνθήκη $P(Y = 0) = \psi(\rho_1 + \rho_2 f_2(0))$.

Απόδειξη:

Αφού

$$X = \begin{cases} U_1 + U_2 + \cdots + U_N, & N = 1,2,\ldots \\ 0, & N = 0 \end{cases}$$

έχουμε ότι οι πιθανογεννήτριες συναρτήσεις $\psi_X(z)$, $\psi_N(z)$ και $\psi_U(z)$ των τυχαίων μεταβλητών X, N και U αντίστοιχα, ικανοποιούν τη σχέση

$$\psi_X(z) = \psi_N(\psi_U(z)).$$

Αφού

$$P(X = 0) = \psi_X(0) = \psi_N(\psi_U(0)) = \psi_N(f_1(0))$$

και (δείτε Λήμμα 2.2.1)

$$\psi_N(z) = \varphi(z,1) = \psi(\rho_1 z + \rho_2)$$

προκύπτει άμεσα ότι $P(X=0) = \psi(\rho_1 f_1(0) + \rho_2)$. Η αναδρομική σχέση για τον υπολογισμό της συνάρτησης πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X προκύπτει άμεσα με εφαρμογή της σχέσης (2.1.4) αφού (δείτε Θεώρημα 2.2.3)

$$N \sim R_1\left(a\frac{\rho_1}{1-a\rho_2}, b\frac{\rho_1}{1-a\rho_2}\right).$$

Ομοίως, αποδεικνύεται και το δεύτερο σκέλος της πρότασης. ■

Ας θεωρήσουμε τώρα τις δεσμευμένες ροπές

$$\mu_{l,x} = E(Y^l|X=x) = \sum_{y=0}^{\infty} y^l g(y|x)$$

και τις βοηθητικές συναρτήσεις

$$\tilde{\mu}_{l,x} = g(x)\mu_{l,x}.$$

Τότε έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

<u>Θεώρημα 2.2.4</u>

Για $e_j = \sum_{v=0}^{\infty} v^j f_2(v)$ έχουμε ότι

$$(1-a\rho_1)\tilde{\mu}_{l,x} = a\rho_1 \sum_{u=0}^{x} f_1(u)\,\tilde{\mu}_{l,x-u} + a\rho_2 \sum_{i=0}^{l-1} c(l,i)\tilde{\mu}_{i,x} e_{l-i}, \qquad (2.2.6)$$

όπου $c(l,i) = a\binom{l}{i} + b\binom{l-1}{i}$.

<u>Απόδειξη:</u>

$$\tilde{\mu}_{l,x} = \sum_{y=1}^{\infty} y^l g(x,y)$$

$$= \rho_2 \sum_{y=1}^{\infty}\sum_{v=0}^{y}(ay^l + bvy^{l-1})f_2(v)g(x,y-v) + a\rho_1 \sum_{y=1}^{\infty}\sum_{u=0}^{x} f_1(u)y^l g(x-u,y)$$

$$= \rho_2 \sum_{y=1}^{\infty}\sum_{v=0}^{y}(a(y+v)^l + bv(y+v)^{l-1})f_2(v)g(x,y-v) + a\rho_1 \sum_{u=0}^{x} f_1(u)\tilde{\mu}_{l,x-u}$$

$$= \rho_2 \sum_{i=0}^{l}\binom{l}{i}\tilde{\mu}_{i,x}e_{l-i} + \rho_2 b \sum_{i=0}^{l-1}\binom{l-1}{i}\tilde{\mu}_{i,x}e_{l-i} + a\rho_1 \sum_{u=0}^{x} f_1(u)\tilde{\mu}_{l,x-u}$$

■

Από τη στιγμή που μπορούμε με το παραπάνω θεώρημα να υπολογίσουμε αναδρομικά την ποσότητα $\tilde{\mu}_{l,x}$ και να υπολογίσουμε την περιθώρια συνάρτηση πιθανότητας $g(x)$ της τυχαίας μεταβλητής X με την αναδρομική σχέση του Panjer, επιπλέον, μπορούμε να βρούμε τις δεσμευμένες ροπές

$$\mu_{l,x} = E(Y^l|X = x) = \frac{\tilde{\mu}_{l,x}}{g(x)}.$$

Επίσης, αφού $E(Y^l) = \sum_x \tilde{\mu}_{l,x}$, έχουμε ότι

$$E(Y^l) = \frac{a\rho_2}{1-a}\sum_{i=0}^{l-1} c(l,i)E\left(Y^i\right) e_{l-i}\,,$$

η οποία είναι η αναδρομική σχέση του De Pril (1986) για τον υπολογισμό ροπών σύνθετων κατανομών όταν $M{\sim}R_1(a\frac{\rho_2}{1-\rho_1}, b\frac{\rho_2}{1-\rho_1})$.

2.3 Η δισδιάστατη εκδοχή της αναδρομικής σχέσης του Panjer – Το Μοντέλο Β

Σύμφωνα με την Παράγραφο 2.1, στο Μοντέλο Β υποθέτουμε ότι $N = Z_0 + Z_1$ και $M = Z_0 + Z_2$, όπου Z_0, Z_1 και Z_2 είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και $Z_j{\sim}R_1(a_j,\, b_j)$ για $j = 0, 1, 2$. Το Μοντέλο Β αποτελεί ένα κλασσικό τρόπο κατασκευής δισδιάστατων κατανομών (βλ. Kocherlakota et al. (1992)), όπου είναι χρήσιμο στη θεωρία κινδύνου όταν δύο χαρτοφυλάκια επηρεάζονται από τα ίδια ενδεχόμενα. Εμφανίζεται στην περίπτωση που έχουμε τυχαίες μεταβλητές R_1 και R_2 που δηλώνουν τον αριθμό των ενδεχομένων που προκαλούν απαιτήσεις στο χαρτοφυλάκιο 1 και 2, αντίστοιχα, και R_0 συμβολίζει τον αριθμό των ενδεχομένων που προκαλούν απαιτήσεις και στα δύο χαρτοφυλάκια. Τότε η τυχαία μεταβλητή $N = R_0 + R_1$ και η τυχαία μεταβλητή $M = R_0 + R_2$ δηλώνουν το συνολικό αριθμό των ενδεχομένων που προκαλούν απαιτήσεις στα χαρτοφυλάκια 1 και 2, αντίστοιχα.

Στην περίπτωση που οι τυχαίες μεταβλητές Z_0, Z_1 και Z_2 είναι ανεξάρτητες κατανομές Poisson με παραμέτρους λ_0, λ_1 και λ_2 αντίστοιχα, ο Teicher (1954) (βλ. επίσης Johnson and Kotz (1969), σελ. 298) έδειξε ότι η δισδιάστατη κατανομή Poisson του ζεύγους (N, M) ικανοποιεί τις παρακάτω αναδρομικές σχέσεις

$$np(n,m) = \lambda_1 p(n-1,m) + \lambda_0 p(n-1,m-1),$$

$$np(n,m) = \lambda_2 p(n,m-1) + \lambda_0 p(n-1,m-1).$$

Από τη στιγμή που η δισδιάστατη κατανομή Poisson παρουσιάστηκε σαν μια ειδική περίπτωση του Μοντέλου Β για $a_j = 0$ και $b_j = \lambda_j$, τότε το ακόλουθο Θεώρημα μπορούμε να το δούμε σαν μία γενίκευση του αποτελέσματος του Teicher (1954).

Θεώρημα 2.3.1

Υπό το μοντέλο Β έχουμε

$$p(n,m) = \left(a_0 + \frac{b_0}{n}\right) p(n-1,m-1) + \left(a_1 + \frac{b_1}{n}\right) p(n-1,m) - \left(a_0 a_1 + \frac{a_1 b_0 + b_1 a_0}{n}\right) p(n-2,m-1), \qquad n \geq 1, \tag{2.3.1}$$

$$p(n,m) = \left(a_0 + \frac{b_0}{m}\right) p(n-1,m-1) + \left(a_2 + \frac{b_2}{m}\right) p(n,m-1) - \left(a_0 a_2 + \frac{a_2 b_0 + b_2 a_0}{m}\right) p(n-1,m-2), \qquad m \geq 1, \tag{2.3.2}$$

όπου $p(0,0) = \pi_0 \pi_1 \pi_2$, $\pi_j = P(Z_j = 0)$, και $p(n,m) = 0$ όταν $n < 0$ ή $m < 0$.

Απόδειξη:

Η πιθανογεννήτρια συνάρτηση του ζεύγους (N, M) σε αυτή την περίπτωση είναι

$$\varphi(s,t) = E[s^N t^M] = E[(st)^{Z_0} s^{Z_1} t^{Z_2}] = \psi_0(st)\psi_1(s)\psi_2(t) \tag{2.3.3}$$

όπου ψ_j δηλώνει τη πιθανογεννήτρια των τυχαίων μεταβλητών $Z_j \sim R_1(a_j,\, b_j)$, $j = 0,1,2$. Παραγωγίζοντας τη σχέση (2.3.3) ως προς s και κάνοντας χρήση της σχέσης (2.2.2), παίρνουμε

$$(1 - a_1 s - a_0 st + a_0 a_1 t s^2) \frac{d}{ds} \varphi(s,t) = [t(1 - a_1 s)(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)(1 - a_0 st)] \varphi(s,t).$$

Αντικαθιστώντας τη $\varphi(s,t)$ στην παραπάνω εξίσωση με

$$\varphi(s,t) = \sum_{n,m \geq 0} p(n,m)\, s^n t^m$$

και εξισώνοντας τους συντελεστές των δυνάμεων $s^{n-1} t^m$ για $n \geq 1$ παίρνουμε

$$np(n,m) - a_1(n-1)p(n-1,m) - a_0(n-1)p(n-1,m-1) + a_0 a_1 (n-2) p(n-2,m-1)$$

$$= (a_1 + b_1) p(n-1,m) + (a_0 + b_0) p(n-1,m-1) - [a_1(a_0 + b_0) + a_0(a_1 + b_1)] p(n-2,m-1).$$

Λύνοντας ως προς $p(n,m)$ καταλήγουμε στην πρώτη σχέση. Ομοίως αποδεικνύεται και η δεύτερη αναδρομική σχέση. ■

Παρατήρηση

– Από την απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.1 προκύπτει ότι η σχέση (2.3.1) το μόνο που απαιτεί είναι ότι οι τυχαίες μεταβλητές Z_0 και Z_1 ανήκουν στην κλάση του R_1. Αν οι πιθανότητες $p(0,m)$ είναι γνωστές για $m = 0, 1, ...$, τότε η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας $p(n,m)$ μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση (2.3.1), ακόμη και όταν η τυχαία μεταβλητή Z_2 δεν ανήκει στην κλάση R_1. Παρόμοια παρατήρηση ισχύει και στην περίπτωση που η τυχαία μεταβλητή Z_1 δεν ανήκει στην κλάση R_1.

Στο ακόλουθο θεώρημα δίνονται δύο αναδρομικές σχέσεις για τον υπολογισμό της από κοινού συνάρτησης πιθανότητας της δισδιάστατης σύνθετης διακριτής τυχαίας μεταβλητής (X, Y).

Θεώρημα 2.3.2

Υπό το Μοντέλο Β έχουμε

$$g(0,0) = \psi_0\big(f_1(0)f_2(0)\big)\psi_1\big(f_1(0)\big)\psi_2\big(f_2(0)\big) \tag{2.3.4}$$

όπου ψ_j είναι η ροπογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής Z_j, $j = 0, 1, 2$.

Για $x \geq 1$, έχουμε

$$\begin{aligned} g(x,y) = {} & \sum_{u=0}^{x}\left(a_1 + \frac{b_1 u}{x}\right) f_1(u) g(x-u, y) \\ & + \sum_{u=0}^{x}\sum_{v=0}^{y}\left(a_0 + \frac{b_0 u}{x}\right) f_1(u) f_2(v) g(x-u, y-v) \\ & - \sum_{u=0}^{x}\sum_{v=0}^{y}\left(a_0 a_1 + \frac{(a_0 b_1 + b_0 a_1)u}{2x}\right) f_1^{*2}(u) f_2(v) g(x-u, y-v), \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

και για $y \geq 1$, έχουμε

$$
\begin{aligned}
g(x,y) = &\sum_{v=0}^{y}\left(a_2+\frac{b_2 v}{x}\right) f_2(v) g(x,y-v) \\
&+\sum_{v=0}^{y}\sum_{u=0}^{x}\left(a_0+\frac{b_0 v}{y}\right) f_2(v) f_1(u) g(x-u,y-v) \\
&-\sum_{v=0}^{y}\sum_{u=0}^{x}\left(a_0 a_2+\frac{(a_0 b_2+b_0 a_2)v}{2y}\right) f_2^{*2}(v) f_1(u) g(x-u,y-v).
\end{aligned} \tag{2.3.6}
$$

<u>**Απόδειξη:**</u>

Η αρχική πιθανότητα είναι

$$
g(0,0)=\sum_{n,m=0}^{\infty} p(n,m) f_1(0)^n f_2(0)^m \;=\varphi\big(f_1(0),f_2(0)\big)
$$

όπου $\varphi(s,t)$ είναι η πιθανογεννήτρια συνάρτηση του ζεύγους (N,M). Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.3.3) παίρνουμε

$$
g(0,0)=\psi_0\big(f_1(0)f_2(0)\big)\psi_1\big(f_1(0)\big)\psi_2\big(f_2(0)\big).
$$

Για $x \geq 1$, από το Θεώρημα 2.3.1, παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
g(x,y) &= \sum_{n}\sum_{m} p(n,m) f_1^{*n}(x) f_2^{*m}(y) \\
&= \sum_{n}\sum_{m}\left[\left(a_0+\frac{b_0}{n}\right)p(n-1,m-1)+\left(a_1+\frac{b_1}{n}\right)p(n-1,m)\right. \\
&\quad \left. -\left(a_0 a_1+\frac{a_1 b_0+b_1 a_0}{n}\right)p(n-2,m-1)\right] f_1^{*n}(x) f_2^{*m}(y).
\end{aligned}
$$

Συνεπώς, χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.3.1) παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
g(x,y) = &\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left(a_0+\frac{b_0}{n+1}\right)p(n,m) f_1^{*(n+1)}(x) f_2^{*(m+1)}(y) \\
&+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left(a_1+\frac{b_1}{n+1}\right)p(n,m) f_1^{*(n+1)}(x) f_2^{*m}(y) \\
&+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left(a_0 a_1+\frac{a_1 b_0+b_1 a_0}{n+2}\right)p(n,m) f_1^{*(n+2)}(x) f_2^{*(m+1)}(y).
\end{aligned}
$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις

$$f^{*(r+1)}(w) = \sum_{u=0}^{w} f(u)\, f^{*r}(w-u)$$

$$f^{*(r+2)}(w) = \sum_{u=0}^{w} f^{*2}(u) f^{*r}\,(w-u)$$

και αντικαθιστώντας στον παραπάνω τύπο για τη $g(x,y)$ προκύπτει άμεσα η σχέση (2.3.5). Με παρόμοιο τρόπο προκύπτει και η σχέση (2.3.6). ■

<u>Παρατήρηση</u>

- Η σχέση (2.3.5) προήλθε από τη (2.3.1). Επομένως, ακολουθώντας τις παρατηρήσεις που γίνανε προηγουμένως έχουμε ότι η $g(x,y)$ μπορεί να υπολογιστεί αναδρομικά από τη σχέση (2.3.5), όταν το $g(0,y)$ είναι γνωστό για $y = 0, 1, \dots,$ ακόμη και στη περίπτωση που το Z_2 δεν ανήκει στην κλάση R_1. Παρόμοια παρατήρηση ισχύει και για τη σχέση (2.3.6).

Για τη δισδιάστατη κατανομή Poisson, δηλαδή για $a_j = 0$ και $b_j = \lambda_j$, ο αναδρομικός τύπος του Θεωρήματος 2.3.2 απλοποιείται σημαντικά. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε

$$\begin{aligned} g(x,y) &= \frac{\lambda_1}{x}\sum_{u=1}^{x} u f_1(u) g(x-u,y) \\ &\quad + \frac{\lambda_0}{x}\sum_{u=1}^{x}\sum_{v=0}^{y} u f_1(u) f_2(v) g(x-u,y-v), \qquad x \geq 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x,y) &= \frac{\lambda_2}{y}\sum_{v=0}^{y} v f_2(v) g(x,y-v) \\ &\quad + \frac{\lambda_0}{y}\sum_{v=0}^{y}\sum_{u=0}^{x} v f_2(v) f_1(u) g(x-u,y-v), \qquad y \geq 1. \end{aligned}$$

Ο Sundt (1992) θεώρησε την κλάση των κατανομών R_k, η οποία ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$q(n) = \sum_{i=1}^{k}\left(a_i + \frac{b_i}{n}\right) q(n-i) \qquad (2.3.7)$$

για κατάλληλες σταθερές a_i και b_i, $i = 1,2,\dots,k$. Ο Sundt (1992) απέδειξε ότι αν $q_1 \in R_k$, $q_2 \in R_l$, τότε η συνέλιξη $q_1 * q_2$ ανήκει στην κλάση R_{k+l}. Από αυτή την ιδιότητα προκύπτει ότι οι περιθώριες κατανομές των *N* και *M* ανήκουν στην κλάση R_2.

Πιο συγκεκριμένα, από το Πόρισμα 4 του Sundt (1992), προκύπτει ότι αν $N \sim R_1(a_1, b_1)$ και $M \sim R_1(a_2, b_2)$, τότε η συνέλιξή τους $(N * M) \sim R_2\big[(a_1 + a_2, -a_1 a_2), \big(b_1 + b_2, -(a_1 b_2 + a_2 b_1)\big)\big]$.

Έτσι από το Θεώρημα 9 του Sundt (1992), προκύπτει ότι για $x \geq 1$ και

$$[(a_1', a_2'), (b_1', b_2')] = \big[(a_0 + a_1, -a_0 a_1), \big(b_0 + b_1, -(a_0 b_1 + a_1 b_0)\big)\big]$$

έχουμε

$$g(x) = P(X = x) = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^{2} a_i' [f_1(0)]^i} \sum_{u=1}^{x} g(x-u) \sum_{i=1}^{2} \left(a_i' + \frac{b_i'}{i} \frac{u}{x} \right) f_1^{*i}(u)$$

με αρχική συνθήκη $P(X = 0) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) [f_1(0)]^n$.

Από το ίδιο θεώρημα προκύπτει ότι για $y \geq 1$ και

$$[(a_1^*, a_2^*), (b_1^*, b_2^*)] = \big[(a_0 + a_2, -a_0 a_2), \big(b_0 + b_2, -(a_0 b_2 + a_1 b_0)\big)\big]$$

έχουμε

$$g(y) = P(Y = y) = \frac{1}{1 - \sum_{j=1}^{2} a_j^* [f_2(0)]^j} \sum_{v=1}^{y} g(y-v) \sum_{j=1}^{2} \left(a_j^* + \frac{b_j^*}{j} \frac{v}{y} \right) f_2^{*j}(v)$$

με αρχική συνθήκη $P(Y = 0) = \sum_{m=0}^{\infty} p(m) [f_2(0)]^m$.

Προφανώς στους παραπάνω τύπους για το $g(x)$ και το $g(y)$ μπορούμε να καταλήξουμε και από το Θεώρημα 2.3.2, χρησιμοποιώντας κατάλληλα αθροίσματα.

<u>Θεώρημα 2.3.3</u>

Υπό το μοντέλο Α έχουμε ότι για

$$c_j(l, i) = a_j \binom{l}{i} + b_j \binom{l-1}{i}, \quad j = 0, 2 \ ,$$

και

$$d(l, i) = a_0 c_2(l, i) + a_2 c_0(l, i) \ ,$$

έχουμε ότι για $l \geq 1$

$$
\begin{aligned}
(1-a_2)\big(1-a_0f_1(0)\big)\tilde{\mu}_{l,x} \\
&= \sum_{i=0}^{l-1} c_2(l,i)\tilde{\mu}_{i,x} \\
&+ a_0(1-a_2)\sum_{u=1}^{x} f_1(u)\tilde{\mu}_{l,x-u} \\
&+ \sum_{u=0}^{x} f_1(u)\sum_{i=0}^{l-1}\tilde{\mu}_{i,x-u}\left[c_{0(l,i)}e_{l-i}-\frac{1}{2}d(l,i)e_{l-i}^{*2}\right],
\end{aligned}
$$

όπου $e_j=\sum_{v=0}^{\infty} v^j f_2(v)$ και $e_j^{*2}=\sum_{v=0}^{\infty} v^j f_2^{*2}(v)$.

<u>Απόδειξη</u>

Πολλαπλασιάζουμε τη σχέση (2.3.6) με y^l και αθροίζουμε για όλα τα y. Για $l\geq 1$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mu}_{l,x} = \sum_{y=1}^{\infty} y^l g(x,y) \\
&= \sum_{v,y=0}^{\infty}\left[a_2(y+v)^l+b_2v(v+y)^{l-1}\right]f_2(v)g(x,y) \\
&+ \sum_{u=0}^{x}\sum_{v,y=0}^{\infty}\left[a_0(y+v)^l+b_0v(v+y)^{l-1}\right]f_1(u)f_2(v)g(x-u,y) \\
&- a_0a_2\sum_{u=0}^{x}\sum_{v,y=0}^{\infty}(y+v)^l f_2^{*2}(v)f_1(u)g(x-u,y) \\
&- \frac{b_0a_2+b_2a_0}{2}\sum_{u=0}^{x}\sum_{v,y=0}^{\infty} v(y+v)^{l-1}f_2^{*2}(v)f_1(u)g(x-u,y) \\
&= a_2\sum_{i=0}^{l}\binom{l}{i}\tilde{\mu}_{i,x}e_{l-i}+b_2\sum_{i=0}^{l-1}\binom{l-1}{i}\tilde{\mu}_{i,x}e_{l-i} \\
&+ \sum_{u=o}^{x} f_1(u)\left[a_0\sum_{i=0}^{l}\binom{l}{i}\tilde{\mu}_{i,x-u}e_{l-i}+b_0\sum_{i=0}^{l-1}\binom{l-1}{i}\tilde{\mu}_{i,x-u}e_{l-i}\right] \\
&- a_0a_2\sum_{u=0}^{x} f_1(u)\sum_{i=0}^{l}\binom{l}{i}\tilde{\mu}_{i,x-u}e_{l-i}^{*2} \\
&- \frac{b_0a_2+b_2a_0}{2}\sum_{u=0}^{x} f_1(u)\sum_{i=0}^{l-1}\binom{l-1}{i}\tilde{\mu}_{i,x-u}e_{l-i}^{*2}
\end{aligned}
$$

$$= a_2\tilde{\mu}_{l,x} + \sum_{i=0}^{l-1} c_2(l,i)\tilde{\mu}_{i,x}e_{l-i} + a_0(1-a_2)\sum_{u=0}^{x} f_1(u)\tilde{\mu}_{i,x-u}$$
$$+ \sum_{u=0}^{x} f_1(u)\sum_{i=0}^{l-1}\tilde{\mu}_{i,x-u}\left[c_0(l,i)e_{l-i} - \frac{1}{2}d(l,i)e_{l-i}^{*2}\right],$$

και με αναδιάταξη των όρων προκύπτει το αποτέλεσμα. ■

<u>**Παρατήρηση**</u>

– Η αναδρομική σχέση του Θεωρήματος 2.3.3 προέκυψε από τη σχέση (2.3.6), και, ακολουθώντας τις παρατηρήσεις που έχουμε ήδη κάνει, ισχύει και στην περίπτωση που η τυχαία μεταβλητή Z_1 δεν ανήκει στην κλάση R_1.

2.4 Η δισδιάστατη εκδοχή της αναδρομικής σχέσης του Panjer – Το Μοντέλο Γ

Στο Μοντέλο Γ οι τυχαίες μεταβλητές N, M είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητες δοθέντος ότι $\Theta = \vartheta$ και ακολουθούν κατανομές Poisson με παραμέτρους $\vartheta\lambda_1$ και $\vartheta\lambda_2$, αντίστοιχα. Έστω λοιπόν

$$P(N=n, M=m) = p_\vartheta(n,m) = e^{-\vartheta\lambda_1}\frac{(\vartheta\lambda_1)^n}{n!}e^{-\vartheta\lambda_2}\frac{(\vartheta\lambda_2)^m}{m!}. \qquad (2.4.1)$$

Η παράμετρος $\Theta \in [\sigma_1, \sigma_2]$, $0 \le \sigma_1 < \sigma_2 \le \infty$, και έχει συνάρτηση πυκνότητας $u(\vartheta)$ *που* ικανοποιεί τη σχέση

$$\frac{d}{d\vartheta}\log u(\vartheta) = \frac{\sum_{i=0}^{k} a_i\vartheta^i}{\sum_{i=0}^{k} b_i\vartheta^i}, \qquad (2.4.2)$$

για κατάλληλες σταθερές a_i και b_i, και

$$\sum_{i=0}^{k} b_i\,\vartheta^i u(\vartheta) \to 0,\ \ \vartheta \to \sigma_1, \sigma_2. \qquad (2.4.3)$$

Έστω $g_\vartheta(x,y)$ η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας της δισδιάστατης τυχαίας μεταβλητής (X,Y) δοθέντος ότι $\Theta = \vartheta$. Τότε

$$g_\vartheta(x,y) = \sum_{n,m=0}^{\infty} p_\vartheta(n,m) f_1^{*n}(x)\,f_2^{*m} = g_\vartheta^{(1)}(x)g_\vartheta^{(2)}(y), \qquad (2.4.4)$$

όπου

$$g_{\vartheta}^{(j)}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\vartheta\lambda_j}\frac{\left(\vartheta\lambda_j\right)^n}{n!}f_j^{*n}(t), \qquad j=1,2\,.$$

Η συνάρτηση $g_{\vartheta}^{(1)}(x)$ ($g_{\vartheta}^{(2)}(y)$) είναι η δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας της X (Y) δοθέντος ότι $\Theta=\vartheta$.

Εισάγοντας τις ακόλουθες βοηθητικές συναρτήσεις

$$h_i(x,y)=\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\vartheta^i g_{\vartheta}(x,y)\,u(\vartheta)d\vartheta\,, \tag{2.4.5}$$

έχουμε ότι $g(x,y)=h_0(x,y)$.

Στο ακόλουθο θεώρημα δίνουμε μια αναδρομική σχέση για τη βοηθητική συνάρτηση $h_i(x,y)$, και ως εκ τούτου για τη συνάρτηση πιθανότητας $g(x,y)$.

Θεώρημα 2.4.1

Υπό το Μοντέλο Γ έχουμε

$$h_i(0,0)=\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\vartheta^i e^{-\lambda(1-\tilde{f}(0))\vartheta}u(\vartheta)d\vartheta\,, \tag{2.4.6}$$

όπου $\lambda=\lambda_1+\lambda_2$, και $\tilde{f}(0)=\frac{\lambda_1 f_1(0)+\lambda_2 f_2(0)}{\lambda_1+\lambda_2}$. Για $i=0,1,\dots,k-1$, έχουμε ότι για $x\geq 1$

$$h_i(x,y)=\lambda_1\sum_{u=1}^{x}\frac{u}{x}f_1(u)h_{i+1}(x-u,y), \tag{2.4.7}$$

και για $y\geq 1$

$$h_i(x,y)=\lambda_2\sum_{v=1}^{y}\frac{v}{y}f_2(v)h_{i+1}(x,y-v), \tag{2.4.8}$$

και

$$\begin{aligned}c_k h_k(x,y)=\lambda_1\sum_{u=1}^{x}f_1(u)\sum_{i=0}^{k}b_i h_i(x-u,y)+\lambda_2\sum_{v=1}^{y}f_2(v)\sum_{i=0}^{k}b_i h_i(x,y-v)\\ +\sum_{i=0}^{k-1}h_i(x,y)[(i+1)b_{i+1}-c_i]\,,\end{aligned} \tag{2.4.9}$$

όπου $c_i=\lambda\left(1-\tilde{f}(0)\right)b_i-a_i$.

Απόδειξη:

Εφόσον $g_\vartheta^{(j)}(\cdot)$ είναι μία σύνθετη κατανομή Poisson με παράμετρο $\vartheta\lambda_j$, τότε $g_\vartheta^{(j)}(0) = e^{-\vartheta\lambda_j\left(1-f_j(0)\right)}$, και $g_\vartheta(0,0) = g_\vartheta^{(1)}(0)g_\vartheta^{(2)}(0) = e^{-\vartheta\lambda\left(1-\tilde{f}(0)\right)}$, όπου λ και $\tilde{f}(0)$ όπως έχουν δοθεί. Επομένως, η σχέση (2.4.6) προκύπτει από την (2.4.5).

Η δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας $g_\theta^{(j)}(x)$ ικανοποιεί την αναδρομική σχέση του Panjer, δηλαδή

$$g_\vartheta^{(j)}(z) = \vartheta\lambda_j \sum_{u=1}^{z} \frac{u}{z} f_j(u)\, g_\vartheta^{(j)}(z-u)\,, \quad z \geq 1, \qquad j = 1, 2\,,$$

και από τη σχέση (2.4.4) παίρνουμε

$$\begin{aligned} g_\vartheta(x,y) &= g_\vartheta^{(2)}(y)\theta\lambda_1 \sum_{u=1}^{x} \frac{u}{x} f_1(u) g_\vartheta^{(1)}(x-u) \\ &= \vartheta\lambda_1 \sum_{u=1}^{x} \frac{u}{x} f_1(u) g_\vartheta(x-u,y), \quad x \geq 1. \end{aligned}$$

Με τον ίδιο τρόπο παίρνουμε επίσης

$$g_\vartheta(x,y) = \vartheta\lambda_2 \sum_{v=1}^{y} \frac{v}{y} f_2(v) g_\vartheta(x, y-v), \quad y \geq 1\,.$$

Πολλαπλασιάζοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις με $\vartheta^i u(\vartheta)$, και ολοκληρώνοντας ως προς ϑ προκύπτουν οι σχέσεις (2.4.7) και (2.4.8).

Παραγωγίζοντας τη σχέση (2.4.1) ως προς ϑ παίρνουμε

$$\frac{d}{d\theta} p_\vartheta(n,m) = \lambda_1 p_\vartheta(n-1,m) + \lambda_2 p_\vartheta(n,m-1) - \lambda p_\vartheta(n,m)\,. \qquad (2.4.10)$$

Σύμφωνα με τη σχέση (2.4.2), ισχύει ότι $u(\vartheta)\sum_{i=0}^{k} a_i\vartheta^i = u'(\vartheta)\sum_{i=0}^{k} b_i\vartheta^i$, και με ολοκλήρωση, χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.4.10), παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \sum_{i=0}^{k} a_i \vartheta^i p_\vartheta(n,m) u(\vartheta) d\vartheta = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \sum_{i=0}^{k} b_i \vartheta^i p_\vartheta(n,m) u'(\vartheta) d\vartheta \\
= \left[\sum_{i=0}^{k} b_i \vartheta^i p_\vartheta(n,m) u(\vartheta) \right]_{\sigma_1}^{\sigma_2} - \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \sum_{i=0}^{k} i \vartheta^i b_i u(\vartheta) p_\vartheta(n,m) d\vartheta \\
- \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \sum_{i=0}^{k} b_i \vartheta^i u(\vartheta) [\lambda_1 p_\vartheta(n-1,m) + \lambda_2 p_\vartheta(n,m-1) \\
- \lambda p_\vartheta(n,m)] d\vartheta \\
= \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \sum_{i=0}^{k-1} (i+1) \vartheta^i b_{i+1} u(\vartheta) p_\vartheta(n,m) d\vartheta \\
- \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \sum_{i=0}^{k} b_i \vartheta^i u(\vartheta) [\lambda_1 p_\vartheta(n-1,m) + \lambda_2 p_\vartheta(n,m-1) \\
- \lambda p_\vartheta(n,m)] d\vartheta \ ,
\end{aligned}
$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από τη σχέση (2.4.3). Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με $f_1^{*n}(x) f_2^{*m}(y)$ και αθροίζοντας ως προς (n,m), παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k} a_i h_i(x,y) = -\sum_{i=0}^{k-1} (i+1) b_{i+1} h_i(x,y) - \lambda_1 \sum_{u=0}^{x} f_1(u) \sum_{i=0}^{k} b_i h_i(x-u,y) \\
- \lambda_2 \sum_{v=0}^{y} f_2(v) \sum_{i=0}^{k} b_i h_i(x,y-v) + \lambda \sum_{i=0}^{k} b_i h_i(x,y) \ . \qquad (2.4.11)
\end{aligned}
$$

Αναδιατάσσοντας τους παραπάνω όρους παίρνουμε την (2.4.9). ■

<u>Παρατηρήσεις</u>

- Με αρχικές τιμές $h_i(0,0)$, μπορούν να υπολογιστούν από τη σχέση (2.4.7) οι ποσότητες $h_0(x,0)$, $h_1(x,0)$, …, $h_{k-1}(x,0)$ και από την σχέση (2.4.9) τα $h_k(x,0)$, για $x = 1,2 \ldots$. Ομοίως, τα $h_0(0,y)$, $h_1(0,y)$, …, $h_{k-1}(0,y)$ υπολογίζονται από τη σχέση (2.4.8) και τα $h_k(0,y)$ από τη σχέση (2.4.9), για $y = 1,2 \ldots$. Για $(x,y) \geq (1,1)$, τα $h_k(x,y)$ μπορούν να υπολογιστούν χρησιμοποιώντας είτε τη σχέση (2.4.7) είτε τη σχέση (2.4.8), μαζί με τη (2.4.9).
- Οι (μονοδιάστατες) μεμειγμένες κατανομές Poisson με τυχαία μεταβλητή Θ που έχει συνάρτηση πυκνότητας $u(\vartheta)$ που ικανοποιεί τη σχέση (2.4.2) μελετήθηκε από τον Willmot (1993), ο οποίος διερεύνησε έναν αριθμό ειδικών περιπτώσεων της σχέσης (2.4.2). Μία αναδρομική σχέση για τη δισδιάστατη τυχαία μεταβλητή (N,M) βρίσκεται θεωρώντας ότι $f_1(1) = f_2(1) = 1$ στο Θεώρημα 2.4.1. Σε αυτή την περίπτωση, μπορούμε να εξαλείψουμε τις βοηθητικές συναρτήσεις $h_i(n,m)$ για $i \geq 1$ και να πάρουμε μία αναδρομική

σχέση για τη συνάρτηση πιθανότητας $p(n,m) = h_0(n,m)$, ανάλογη με αυτή του Willmot (1993).

<u>Θεώρημα 2.4.2</u>

Υπό το Μοντέλο Γ, για $n > k$ έχουμε

$$\sum_{i=0}^{k+1} \lambda_1^i (n-i)!\, p(n-i,m)\{a_{k-i} - \lambda b_{k-i} + (n+m+1-i)b_{k+1-i}\} = 0\,, \quad (2.4.12)$$

και για $m > k$ έχουμε

$$\sum_{i=0}^{k+1} \lambda_2^i (m-i)!\, p(n,m-i)\{a_{k-i} - \lambda b_{k-i} + (n+m+1-i)b_{k+1-i}\} = 0\,, \quad (2.4.13)$$

με $a_{-1} = b_{-1} = b_{k+1} = 0$.

<u>Απόδειξη</u>

Αν $f_1(1) = f_2(1) = 1$, οι σχέσεις (2.4.7) και (2.4.8) γίνονται

$$h_i(n,m) = \frac{\lambda}{n} h_{i+1}(n-1,m), \qquad h_i(n,m) = \frac{\lambda}{m} h_{i+1}(n,m-1). \quad (2.4.14)$$

Η επαναλαμβανόμενη χρήση της πρώτης σχέσης δίνει

$$h_i(n,m) = \lambda_1^{-i}(n+i)^{(i)} p(n+i)$$

όπου $(n+i)^{(i)} = (n+i)!/n!$. Εισάγοντάς τη στη σχέση (2.4.11), η οποία στην περίπτωση αυτή γίνεται

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k} a_i h_i(n,m) = -\sum_{i=0}^{k-1}(i+1)b_{i+1}h_i(n,m) - \lambda_1 \sum_{i=0}^{k} b_i h_i(n-1,m) \\ - \lambda_2 \sum_{i=0}^{k} b_i h_i(n,m-1) + \lambda \sum_{i=0}^{k=0} b_i h_i(n,m),\end{aligned} \quad (2.4.15)$$

οπότε μετά από μία αναδιάταξη των όρων της παραπάνω σχέσης παίρνουμε

$$\sum_{i=0}^{k}(a_{k-i}-\lambda b_{k-i})\lambda_1^i(n-i)!\,p(n-i,m)$$

$$= -\sum_{i=1}^{k}(k-i+1)b_{k-i+1}\lambda_1^i(n-i)!\,p(n-i,m)$$

$$-\lambda_1\sum_{i=0}^{k} b_{k-i}\lambda_1^i(n-k)(n-i-1)!\,p(n-i-1,m)$$

$$-\lambda_2\sum_{i=0}^{k} b_{k-i}\lambda_1^i(n-i)(n-i)!\,p(n-i,m-1)\ . \qquad (2.4.16)$$

Από τη σχέση (2.4.14) προκύπτει ότι

$$p(n-i,m-i)=\frac{\lambda_1}{n-i}h_1(n-i-1,m-1)=\frac{\lambda_1 m}{(n-i)\lambda_2}p(n-i-1,m),$$

την οποία αν εισάγουμε στον τελευταίο όρο της (2.4.16), και ύστερα από αναδιάταξη των όρων, καταλήγουμε στη σχέση (2.4.12). Ομοίως, αποδεικνύεται και η σχέση (2.4.13). ■

Παρατήρηση

– Από την απόδειξη του Θεωρήματος 2.4.2 παρατηρείται ότι υπάρχει μία ποικιλία αναδρομικών σχέσεων για τη δισδιάστατη συνάρτηση πιθανότητας $p(n,m)$. Από τη σχέση (2.4.14) παρατηρούμε ότι

$$h_i(n,m)=\left(\frac{(n+j)^{(j)}}{\lambda_1^j}\right)\left(\frac{(m+i-j)^{(i-j)}}{\lambda_2^{i-j}}\right)p(n+j,m+i-j)$$

για αυθαίρετο $j=0,\dots,i$, και μαζί με τη σχέση (2.4.15) μας δίνει μία αναδρομική σχέση. Ειδικά η σχέση (2.4.16) είναι η δισδιάστατη επέκταση της αναδρομικής σχέσης του Willmot (1993) στη μονοδιάστατη περίπτωση, η οποία επαληθεύεται αν αθροίσουμε τη (2.4.16) για $m\geq 0$.

Για τη δεσμευμένη κατανομή της Y δοθέντος $X=x$, αν πολλαπλασιάσουμε τις σχέσεις (2.4.8) και (2.4.9) με y^l και αθροίσουμε ως προς y, παίρνουμε έναν αναδρομικό αλγόριθμο για τη συνάρτηση $\tilde{\mu}_{l,x}^{(i)}=\sum_y y^l h_i(x,y)$. Αυτός μας δίνει μία αναδρομική σχέση για τη συνάρτηση $\tilde{\mu}_{l,x}=\tilde{\mu}_{l,x}^{(0)}$, και ως εκ τούτου, για τις δεσμευμένες ροπές $\mu_{l,x}=\tilde{\mu}_{l,x}/g(x)$.

Έτσι, για τις δεσμευμένες ροπές

$$\mu_{l,x}=\tilde{\mu}_{l,x}^{(0)}=E(Y^l|X=x)=\sum_{y=0}^{\infty}y^l g(y|x)$$

ορίζοντας τις βοηθητικές συναρτήσεις

$$\tilde{\mu}_{l,x}^{(i)} = \sum_{y} y^l h_i(x,y), \quad i = 0,1,\dots,k$$

έχουμε το ακόλουθο θεώρημα που δίνεται χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 2.4.3

Για $c_i = \lambda_1 b_i\big(1 - f_1(0)\big) - a_i$ και $e_j = \sum_v v^j f_2(v)$, ισχύει ότι

$$\tilde{\mu}_{l,x}^{(i)} = \lambda_2 \sum_{j=0}^{l-1} \binom{l-1}{j} e_{l-j} \tilde{\mu}_{j,x}^{(i+1)} \ , \quad i = 0,\dots,k-1 \, ,$$

$$c_k \tilde{\mu}_{l,x}^{(k)} = \lambda_2 \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{l-1}{j} e_{l-j} \tilde{\mu}_{j,x}^{(i)} + \sum_{i=0}^{k-1} (b_{i+1}(i+1) - c_i) \tilde{\mu}_{l,x}^{(i)} \ .$$

2.5 Η δισδιάστατη εκδοχή της αναδρομικής σχέσης του Panjer – Η γενίκευση της Vernic

2.5.1 Η εκδοχή της Vernic

Η Vernic (1999) θεώρησε δισδιάστατες σύνθετες κατανομές όπου η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας $p(n,m)$ της δισδιάστατης διακριτής τυχαίας μεταβλητής (N,M) ικανοποιεί το αναδρομικό σχήμα

$$p(n,m) = \left(a_0 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{m} + \frac{a_{12}}{nm}\right) p(n-1,m-1) + \left(b_0 + \frac{b_1}{n}\right) p(n-1,m) + \left(c_0 + \frac{c_2}{m}\right) p(n,m-1), \quad n,m = 1,2,\dots \tag{2.5.1}$$

$$p(n,0) = \left(d_0 + \frac{d_1}{n}\right) p(n-1,0), \quad n \geq 1\,, \ m = 0 \tag{2.5.2}$$

$$p(0,m) = \left(e_0 + \frac{e_2}{m}\right) p(0,m-1), \quad n = 0, \ m \geq 1 \tag{2.5.3}$$

Στο ακόλουθο θεώρημα δίνεται η αναδρομική σχέση για τον υπολογισμό της από κοινού συνάρτησης πιθανότητας της δισδιάστατης σύνθετης διακριτής τυχαίας μεταβλητής (X,Y).

Θεώρημα 2.5.1

Εάν ισχύει το αναδρομικό σχήμα (2.5.1)-(2.5.3), τότε η από κοινού συνάρτησης πιθανότητας $g(x,y)$, για $x,y \geq 1$, μπορεί να υπολογιστεί από τον παρακάτω αναδρομικό τύπο:

$$g(x,y) = \sum_{u=1}^{x}\sum_{v=1}^{y}\left(a_0 + a_1\frac{u}{x} + a_2\frac{v}{y} + a_{12}\frac{uv}{xy}\right) f_1(u)f_2(v)g(x-u,y-v)$$
$$+ \sum_{u=1}^{x}\left(b_0 + b_1\frac{u}{x}\right) f_1(u)g(x-u,y) \qquad (2.5.4)$$
$$+ \sum_{v=1}^{y}\left(c_0 + c_2\frac{v}{y}\right) f_2(v)g(x,y-v).$$

Απόδειξη

Χρησιμοποιώντας την σχέση (2.5.1) και το γεγονός ότι

$$f_1^{*n}(0) = \begin{cases} 1\,, & n = 0 \\ 0\,, & n \neq 0 \end{cases} \quad , \quad f_2^{*m}(0) = \begin{cases} 1\,, & m = 0 \\ 0\,, & m \neq 0 \end{cases}, \qquad (2.5.5)$$

για $x, y \geq 1$, έχουμε

$$g(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\left(a_0 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{m} + \frac{a_{12}}{nm}\right)p(n-1,m-1) + \left(b_0 + \frac{b_1}{n}\right)p(n-1,m)\right.$$
$$\left. + \left(c_0 + \frac{c_2}{m}\right)p(n,m-1)\right] f_1^{*n}(x)f_2^{*m}(y)\,. \qquad (2.5.6)$$

Σπάζοντας το άθροισμα της σχέσης (2.5.6) σε τρία μέρη, παίρνουμε για το πρώτο μέρος

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_0 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{m} + \frac{a_{12}}{nm}\right)p(n-1,m-1)f_1^{*n}(x)f_2^{*m}(y)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} E\left[a_0 + a_1\frac{U_1}{x} + a_2\frac{V_1}{y} + a_{12}\frac{U_1V_1}{xy} \,|\, \sum_{i=0}^{n} U_i = x\,, \sum_{j=0}^{m} V_j = y\,,\ i,j = 1,2,\dots\right] p(n-1,m-1)f_1^{*n}(x)f_2^{*m}(y)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{u=1}^{x}\sum_{v=1}^{y}\left(a_0 + a_1\frac{u}{x} + a_2\frac{y}{y} + a_{12}\frac{uy}{xy}\right)p(n-1,m-1)f_1(u)f_2(v)f_1^{*n-1}(x-u)f_2^{*m-1}(y-v)$$

$$= \sum_{u=1}^{x}\sum_{v=1}^{y}\left(a_0 + a_1\frac{u}{x} + a_2\frac{v}{y} + a_{12}\frac{uv}{xy}\right)f_1(u)f_2(v)\sum_{u}^{\infty}\sum_{v}^{\infty}p(n-1,m-1)f_1^{*n-1}(x-u)f_2^{*m-1}(y-v)$$

$$= \sum_{u=1}^{x}\sum_{v=1}^{y}\left(a_0 + a_1\frac{u}{x} + a_2\frac{v}{y} + a_{12}\frac{uv}{xy}\right) f_1(u)f_2(v)g(x-u,y-v)\,.$$

Για το δεύτερο μέρος παίρνουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(b_0+\frac{b_1}{n}\right)p(n-1,m)f_1^{*n}(x)f_2^{*m}(y)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}E\left[b_0+b_1\frac{U_1}{x}\mid\sum_{i=0}^{n}U_i=x\right]p(n-1,m)f_1^{*n}(x)f_2^{*m}(y)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{u=1}^{x}\left(b_0+b_1\frac{u}{x}\right)p(n-1,m)f_1(u)f_1^{*(n-1)}(x-u)f_2^{*m}(y)$$

$$=\sum_{u=1}^{x}\left(b_0+b_1\frac{u}{x}\right)f_1(u)\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}p(n-1,m)f_1^{*(n-1)}(x-u)f_2^{*m}(y)$$

$$=\sum_{u=1}^{x}\left(b_0+b_1\frac{u}{x}\right)f_1(u)g(x-u,y)\,.$$

Ανάλογα, για το τρίτο μέρος, παίρνουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(c_0+\frac{c_2}{m}\right)p(n,m-1)f_1^{*n}(x)f_2^{*m}(y)=\sum_{v=1}^{y}\left(c_0+c_2\frac{v}{y}\right)f_2(v)g(x,y-v)\,.$$

Αθροίζοντας τα παραπάνω τρία μέρη προκύπτει ο αναδρομικός τύπος (2.5.4). ■

<u>Παρατήρηση</u>

– Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι το Θεώρημα 2.2.2 είναι μια ειδική περίπτωση του Θεωρήματος 2.5.1 για κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων του αναδρομικού σχήματος (2.5.1).

Στο ακόλουθο θεώρημα δίνονται αναδρομικοί τύποι υπολογισμού αρχικών συνθηκών για την εφαρμογή του Θεωρήματος 2.5.1.

<u>Θεώρημα 2.5.2</u>

Έστω $g(0,0)=p(0,0)$. Τότε

– αν ισχύει η σχέση (2.5.2), τότε για $x\geq 1$ έχουμε τον ακόλουθο αναδρομικό τύπο

$$g(x,0)=\sum_{u=1}^{x}\left(d_0+d_1\frac{u}{x}\right)f_1(u)g(x-u,0) \qquad (2.5.7)$$

– αν ισχύει η σχέση (2.5.3), τότε για $y\geq 1$ έχουμε τον ακόλουθο αναδρομικό τύπο

$$g(0,y)=\sum_{v=1}^{y}\left(e_0+e_1\frac{v}{y}\right)f_2(v)g(0,y-v)\,. \qquad (2.5.8)$$

Απόδειξη

Για $y = 0$ και $x \geq 1$, χρησιμοποιώντας κατάλληλα τις σχέσεις (2.5.2) και (2.5.5) στην (2.1.2), έχουμε

$$g(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n,0) f_1^{*n}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(d_0 + \frac{d_1}{n}\right) p(n-1,0) f_1^{*n}(x) \ . \qquad (2.5.9)$$

Δεσμεύοντας, όπως κάναμε και στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.5.1, παίρνουμε

$$g(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} E\left[d_0 + d_1 \frac{U_1}{x} | \sum_{i=1}^{n} U_i = x\right] p(n-1,0) f_1^{*n}(x)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{u=1}^{x} \left(d_0 + d_1 \frac{u}{x}\right) p(n-1,0) f_1(u) f_1^{*(n-1)}(x-u)$$

$$= \sum_{u=0}^{x} \left(d_0 + d_1 \frac{u}{x}\right) f_1(u) \sum_{n=1}^{\infty} p(n-1,0) f_1^{*(n-1)}(x-u)$$

$$= \sum_{u=1}^{x} \left(d_0 + d_1 \frac{u}{x}\right) f_1(u) g(x-u,0)$$

που είναι η (2.5.7). Ομοίως αποδεικνύεται και η (2.5.8). ■

Τώρα, θα εξετάσουμε μια ειδική περίπτωση όπου υποθέτουμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές *N* και *M* είναι ανεξάρτητες με περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας $q(n)$ και $r(m)$, αντίστοιχα, οι οποίες ικανοποιούν τον αναδρομικό τύπο του Panjer, δηλαδή έχουμε

$$\begin{cases} q(n) = \left(\alpha + \dfrac{\beta}{n}\right) q(n-1) \ , \quad n = 1,2,\dots \\ r(m) = \left(\gamma + \dfrac{\delta}{m}\right) r(m-1) \ , \quad m = 1,2,\dots \end{cases} . \qquad (2.5.10)$$

Έτσι, για $n, m > 0$, έχουμε

$$p(n,m) = q(n) r(m) = \left(\alpha\gamma + \frac{\beta\gamma}{n} + \frac{\alpha\delta}{m} + \frac{\beta\delta}{nm}\right) p(n-1,m-1) \ ,$$

η οποία είναι η σχέση (2.5.1), που ικανοποιείται για

$$a_0 = \alpha\gamma \ , a_1 = \beta\gamma \ , a_2 = \alpha\delta \ , a_{12} = \beta\delta \quad \text{και} \quad b_0 = b_1 = c_0 = c_2 = 0 \ .$$

Εισάγοντας τα παραπάνω στη σχέση (2.5.4), παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
g(x,y) &= \sum_{u=1}^{x}\sum_{v=1}^{y}\left(\alpha\gamma + \beta\gamma\frac{u}{x} + \alpha\delta\frac{v}{y} + \beta\delta\ \frac{uv}{xy}\right) f_1(u) f_2(v) g(x-u, y-v) \\
&= \left(\sum_{u=1}^{x}\left(\alpha + \beta\frac{u}{x}\right) f_1(u) g_1(x-u)\right)\left(\sum_{v=1}^{y}\left(\gamma + \delta\frac{v}{y}\right) f_2(v)\, g_2(y-v)\right) \\
&= g_1(x) g_2(y).
\end{aligned}
$$

Η τελευταία ισότητα προκύπτει από τον τύπο του Panjer.

Επίσης, έχουμε

$$
p(n,0) = q(n)r(0) = \left(\alpha + \frac{\beta}{n}\right) q(n-1)r(0) = \left(\alpha + \frac{\beta}{n}\right)\ p(n-1,0)\,,
$$

η οποία είναι η σχέση (2.5.2), που ικανοποιείται για $d_0 = \alpha$ και $d_1 = \beta$. Η εισαγωγή τους στη σχέση (2.5.7), μας δίνει

$$
\begin{aligned}
g(x,0) &= \sum_{u=1}^{x}\left(\alpha + \beta\frac{u}{x}\right) f_1(u) g(x-u, 0) \\
&= \left(\sum_{u=1}^{x}\left(\alpha + \beta\frac{u}{x}\right) f_1(u) g_1(x-u))\right) g_2(0) \\
&= g_1(x) g_2(0)\ \ .
\end{aligned}
$$

Η τελευταία ισότητα προκύπτει από τον τύπο του Panjer. Αναλόγως, από τη (2.5.8), παίρνουμε $g(0,y) = g_1(0) g_2(y)$.

<u>**Παρατηρήσεις**</u>

Από τους παραπάνω υπολογισμούς δείξαμε ότι:

- Όταν οι τυχαίες μεταβλητές *N* και *M* είναι ανεξάρτητες με περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας που ικανοποιούν τον αναδρομικό τύπο, τότε η από κοινού κατανομή τους ικανοποιεί τις σχέσεις (2.5.1), (2.5.2) και (2.5.3).
- Χρησιμοποιώντας τα Θεωρήματα 2.5.1 και 2.5.2 με αυτές τις απαριθμήτριες κατανομές είναι ισοδύναμο με τον υπολογισμό της από κοινού κατανομής των X, Y ως το γινόμενο των περιθώριων συναρτήσεων πιθανότητας των X, Y υπολογισμένες με τον τύρο του Panjer.

2.5.2 Παραδείγματα

Οι δισδιάστατες κατανομές που θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια μπορούν να βρεθούν στο βιβλίο των Kocherlakota and Kocherlakota (1992).

Παράδειγμα 1. Έστω το ακόλουθο μοντέλο (Hesselager, 1996): Η κατανομή της $K = N + M$ ικανοποιεί την αναδρομική σχέση του Panjer

$$P(K = k) = \left(a + \frac{b}{k}\right) P(K = k - 1)\,, \quad k = 1, 2, \dots\,,$$

για κάποιες σταθερές a και b, και η δεσμευμένη κατανομή της N δοθέντος της $N + M$ ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με

$$P(N = n | N + M = n + m) = \binom{n+m}{n} \rho_1^n \rho_2^m\,,$$

όπου $\rho_1 + \rho_2 = 1$. Από το Θεώρημα 2.2.1 έχει αποδειχθεί ότι για το συγκεκριμένο μοντέλο, έχουμε τις παρακάτω αναδρομικές σχέσεις

$$p(n, m) = \rho_1 \left(a + \frac{b}{n}\right) p(n - 1, m) + a\rho_2 p(n, m - 1), \quad n \geq 1 \qquad (2.5.2.1)$$

$$p(n, m) = \rho_2 \left(a + \frac{b}{m}\right) p(n, m - 1) + a\rho_1 p(n - 1, m), \quad m \geq 1 \qquad (2.5.2.2)$$

όπου $p(n, -1) = p(-1, m) = 0$. Οι παραπάνω σχέσεις είναι ειδικές περιπτώσεις των σχέσεων (2.5.1), (2.5.2) και (2.5.3).

Έτσι, για τη σχέση (2.5.2.1) έχουμε

$$a_0 = a_1 = a_2 = a_{12} = 0\,; \quad b_0 = d_0 = a\rho_1\,; \quad b_1 = d_1 = b\rho_1\,;$$

$$c_0 = e_0 = \alpha\rho_2\,; \quad c_2 = e_2 = 0\,,$$

και για την σχέση (2.5.2.2) έχουμε

$$a_0 = a_1 = a_2 = a_{12} = 0\,; \quad b_0 = d_0 = a\rho_1\,; \quad b_1 = d_1 = 0\,;$$

$$c_0 = e_0 = \alpha\rho_2\,; \quad c_2 = e_2 = b\rho_1\,.$$

Ειδική περίπτωση 1: Η τριωνυμική κατανομή με παραμέτρους (k, r_1, r_2), όπου k θετικός ακέραιος, $r_1, r_2 \in (0, 1)$, έχει συνάρτηση πιθανότητας

$$p(n, m) = \frac{k!}{n!\, m!\, (k - n - m)!} r_1^n r_2^m (1 - r_1 - r_2)^{k-n-m} \qquad (2.5.2.3)$$

(θεωρούμε ότι $0! = 1$).

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι η σχέση (2.5.2.3) ικανοποιεί τις αναδρομικές σχέσεις

$$p(n, m) = \frac{r_1}{1 - r_1 - r_2} \left(\frac{k + 1}{n} - 1\right) p(n - 1, m) - \frac{r_2}{1 - r_1 - r_2} p(n, m - 1), \quad n \geq 1$$

$$p(n,m) = \frac{r_2}{1-r_1-r_2}\left(\frac{k+1}{m} - 1\right)p(n,m-1) - \frac{r_1}{1-r_1-r_2}p(n-1,m), \quad m \geq 1\,.$$

Αυτές είναι οι αντίστοιχες σχέσεις (2.5.2.1) και (2.5.2.2), όπου

$$\rho_1 = \frac{r_1}{r_1+r_2}, \qquad \rho_2 = \frac{r_2}{r_1+r_2}, \qquad a = -\frac{r_1+r_2}{1-r_1-r_2}, \quad b = (k+1)\frac{r_1+r_2}{1-r_1-r_2}.$$

Ειδική περίπτωση 2: Η δισδιάστατη Αρνητική Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους ($\lambda, \theta_1, \theta_2$),όπου $\lambda > 0$, $\theta_1, \theta_2 \in (0\,,1)$ έχει συνάρτηση πιθανότητας

$$p(n,m) = \frac{\Gamma(\lambda+n+m)}{\Gamma(\lambda)n!\,m!}\theta_1^n\theta_2^m(1-\theta_1-\theta_2)^\lambda\,. \qquad (2.5.2.4)$$

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι η σχέση (2.5.2.4) ικανοποιεί τις αναδρομικές σχέσεις

$$p(n,m) = \theta_1\left(1 + \frac{\lambda-1}{n}\right)p(n-1,m) + \theta_2 p(n,m-1)$$

$$= \theta_2\left(1 + \frac{\lambda-1}{m}\right)p(n,m-1) + \theta_1 p(n-1,m).$$

Αυτές είναι οι αντίστοιχες σχέσεις (2.5.2.1) και (2.5.2.2), όπου

$$\rho_1 = \frac{\theta_1}{\theta_1+\theta_2}, \qquad \rho_2 = \frac{\theta_2}{\theta_1+\theta_2}, \qquad a = \theta_1+\theta_2, \qquad b = (\lambda+1)(\theta_1+\theta_2).$$

Παράδειγμα 2. Η δισδιάστατη Poisson κατανομή, η οποία εξαρτάται από τρεις θετικές παραμέτρους λ_1, λ_2, λ_3, έχει συνάρτηση πιθανότητας

$$p(n,m) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}\sum_{k=0}^{min\{n,m\}}\frac{\lambda_1^{n-k}\lambda_2^{m-k}\lambda_3^k}{(n-k)!\,(m-k)!\,k!}\,, \quad n,m \geq 0.$$

Ικανοποιεί τις αναδρομικές σχέσεις (Partrat (1993), Hesselager (1996))

$$p(n,m) = \frac{\lambda_3}{n}p(n-1,m-1) + \frac{\lambda_1}{n}p(n-1,m) \qquad (2.5.2.5)$$

$$= \frac{\lambda_3}{m}p(n-1,m-1) + \frac{\lambda_2}{m}p(n,m-1)\,, \quad n,m \geq 1,$$

$$p(0,0) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)},$$

$$p(n,0) = \frac{\lambda_1}{n}p(n-1,0), \quad n \geq 1,$$

$$p(0,m) = \frac{\lambda_2}{m} p(0,m-1), \quad m \geq 1.$$

Σε αντιστοιχία με τις σχέσεις (2.5.1), (2.5.2) και (2.5.3), παίρνουμε για παράδειγμα για τη σχέση (2.5.2.5) ότι

$$a_0 = a_2 = a_{12} = b_0 = c_0 = c_2 = d_0 = e_0 = 0\,, \; a_1 = \lambda_3\,, \; b_1 = d_1 = \lambda_1\,.$$

<u>Παρατήρηση</u>

Τα παραδείγματα μας δείχνουν ότι στη σχέση (2.5.1) δεν είναι πάντα μοναδικά ορισμένοι οι παράμετροι. Έτσι, ο καθένας έχει ελευθερία στην παραμετροποίηση των αναδρομικών σχέσεων του Θεωρήματος 2.5.1 κάνοντας τις κατάλληλες προσαρμογές στο μοντέλο του.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΟΣ ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ PANJER ΣΤΗ ΠΟΛΥΔΙΑΣΤΑΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

3.1 Εισαγωγή

Έστω N ο αριθμός των απαιτήσεων που εμφανίζονται σε ένα χαρτοφυλάκιο σε μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο και έστω U_i το ποσό της i απαίτησης. Υποθέτουμε ότι τα ποσά των απαιτήσεων παίρνουν μη αρνητικές ακέραιες τιμές και ότι οι τυχαίες μεταβλητές $U_1, U_2, \dots$ είναι ανεξάρτητες, ισόνομες με κοινή συνάρτηση πιθανότητας f και, επίσης, είναι ανεξάρτητες από την τυχαία μεταβλητή N. Τότε η κατανομή των συνολικών απαιτήσεων $X = \sum_{i=1}^{N} U_i$ είναι μία σύνθετη κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) f^{n*}(x) \tag{3.1.1}$$

όπου $p(n)$ η συνάρτηση πιθανότητας της N.

Όταν η συνάρτηση πιθανότητας $p(n) = P(N = n)$ της τυχαίας μεταβλητής N, ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$p(n) = \left(a + \frac{b}{n}\right) p(n-1), \quad n \geq 1\,, \tag{3.1.2}$$

για κάποιες σταθερές a και b, ο Panjer (1981) έδωσε το παρακάτω αναδρομικό σχήμα για το υπολογισμό της g όταν $f(0) = 0$

$$g(0) = p(0)$$

$$g(x) = \sum_{u=1}^{x} \left(a + b\frac{u}{x}\right) f(u) g(x-u)\;, \qquad x \geq 1.$$

Όταν $f(0) \neq 0$ τότε το αναδρομικό σχήμα είναι το

$$g(0) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) [f(0)]^n$$

$$g(x) = \frac{1}{1 - af(0)} \sum_{u=1}^{x} \left(a + b\frac{u}{x}\right) f(u) g(x-u) \;, \qquad x \geq 1.$$

Στο προηγούμενο κεφάλαιο παρουσιάστηκαν δισδιάστατες γενικεύσεις του παραπάνω τύπου που δόθηκαν από τους Hesselager (1996) και Vernic (1999).

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο θα μελετήσουμε επεκτάσεις της αναδρομικής σχέσης του Panjer στις m διαστάσεις και θα ασχοληθούμε πρωτίστως με την γενίκευση που πρότεινε ο Sundt (1999). Υποθέτουμε τώρα ότι ο αριθμός των απαιτήσεων N είναι μονοδιάστατη τυχαία μεταβλητή που η κατανομή της ικανοποιεί τη σχέση (3.1.2). Όμως, τώρα υποθέτουμε ότι η κάθε απαίτηση είναι ένα τυχαίο διάνυσμα m διαστάσεων, και ότι αυτά τα διανύσματα είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα και ισόνομα, και ανεξάρτητα του αριθμού των απαιτήσεων. Αυτό μπορεί να ερμηνευθεί σαν να είναι τώρα ο αριθμός των απαιτήσεων, ο αριθμός των γεγονότων που οδηγούν σε απαιτήσεις που δημιουργούνται μέσα σε ένα χαρτοφυλάκιο m συμβολαίων (claim events) και το τυχαίο διάνυσμα αντιπροσωπεύει το διάνυσμα των πληρωμών για κάθε συμβόλαιο που προήλθαν από ένα τέτοιο γεγονός. Πιο συγκεκριμένα, έστω ότι η τυχαία μεταβλητή N δηλώνει τον αριθμό των γεγονότων, και έστω ότι το i γεγονός δημιουργεί στο χαρτοφυλάκιο το διάνυσμα των απαιτήσεων,

$$\mathbf{U}_i = (U_{i1}, \dots, U_{im})', \qquad i = 1, 2, \dots,$$

και

$$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)' = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{U}_i = \left(\sum_{i=1}^{N} U_{i1}, \sum_{i=1}^{N} U_{i2}, \dots, \sum_{i=1}^{N} U_{im} \right)'$$

όπου X_i δηλώνει το σύνολο των απαιτήσεων στο συμβόλαιο $i\ (1 \leq i \leq m)$. Υποθέτουμε ότι τα $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{U}_2$, …. είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα και ισόνομα με από κοινού συνάρτηση πιθανότητας f και, επιπλέον, είναι ανεξάρτητα από το N. Επίσης, υποθέτουμε ότι όλα τα U_{ij} είναι μη αρνητικά. Έστω, τώρα, ότι p και g δηλώνουν τη συνάρτηση πιθανότητας της N και X αντίστοιχα. Τότε η (3.1.1) ισχύει ακόμα, δηλαδή

$$g(\boldsymbol{x}) = P(X_1 = x_1, \dots, X_m = x_m) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) f^{n*}(\boldsymbol{x})$$

Το πολυδιάστατο μοντέλο που περιγράψαμε παραπάνω έχει εφαρμογές όπως φαίνεται στα ακόλουθα παραδείγματα:

1. Σε ένα χαρτοφυλάκιο με m συμβόλαια ερμηνεύουμε το U_{ij} ως το ποσό της απαίτησης του j συμβολαίου που προκλήθηκε από το i γεγονός. Ένα φυσικό

παράδειγμα είναι μία ασφάλεια έναντι σεισμών, όπου ένας σεισμός (το γεγονός) μπορεί να επηρεάσει περισσότερα από ένα συμβόλαιο. Έτσι η μεταβλητή X_j αντιπροσωπεύει το σύνολο των απαιτήσεων του *j* συμβολαίου.

2. Αν θεωρήσουμε ότι το U_{ij} είναι ίσο με ένα στην περίπτωση που το i γεγονός προκαλεί μία πληρωμή στο συμβόλαιο *j*, και μηδέν σε διαφορετική περίπτωση, τότε η μεταβλητή X_j θα είναι ο αριθμός των απαιτήσεων στο *j* συμβόλαιο.
3. Μία άλλη εφαρμογή του μοντέλου θα μπορούσε να είναι σε μία κατάσταση όπου το κάθε γεγονός μπορεί να επηρεάσει διάφορους τύπους από απαιτήσεις. Αυτοί οι τύποι των απαιτήσεων μπορεί να έχουν διαφορετικές αντασφαλιστικές καλύψεις. Ένα καλό παράδειγμα, αυτής της εφαρμογής, είναι η ασφάλιση αυτοκινήτων, όπου συχνά η αντασφάλιση διαφοροποιείται από το αν η ζημιά αφορά τη ζημιά του οχήματος ή τον προσωπικό τραυματισμό μας. Ανάλογη εφαρμογή είναι η αποζημίωση ενός εργάτη. Μπορεί να έχει άλλη αντασφάλιση για αρρώστια και άλλη για εργατικό ατύχημα.

Επιστρέφοντας τώρα στο γενικό μας μαθηματικό μοντέλο έχουμε ότι

$$Cov\left(X_j, X_k\right) = E(N)Cov\left(U_{1j}, U_{1k}\right) + E\left(U_{1j}\right)E(U_{1k})Var(N) \qquad (3.1.3)$$

Αν U_{1j} και U_{1k} είναι ανεξάρτητα, τότε η σχέση (3.1.3) μας δίνει

$$Cov\left(X_j, X_k\right) = E\left(U_{1j}\right)E(U_{1k})Var(N) > 0\,, \qquad j \neq k$$

Αυτό συμβαίνει, γιατί το *N* επηρεάζει όλα τα συμβόλαια και οι συνολικές απαιτήσεις διαφορετικών συμβολαίων θα έχουν θετική συσχέτιση όταν οι κατανομές των ποσών των αποζημιώσεων σε διαφορετικά συμβόλαια είναι ανεξάρτητες.

Ξαναγράφουμε τη σχέση (3.1.3) σαν

$$Cov\left(X_j, X_k\right) = E(N)E\left(U_{1j}U_{1k}\right) + E\left(U_{1j}\right)E(U_{1k})[Var(N) - E(N)].$$

Αν η *N* ακολουθεί την κατανομή Poisson, τότε $Var(N) = E(N)$, και παίρνουμε

$$Cov\left(X_j, X_k\right) = E(N)E\left(U_{1j}U_{1k}\right).$$

Βλέπουμε ότι σε αυτή την περίπτωση, για $j \neq k$, X_j και X_k είναι ασυσχέτιστες, αν και μόνο αν, $E\left(U_{1j}U_{1k}\right) = 0$. Αυτό προϋποθέτει ότι U_{1j} και U_{1k} δεν μπορούν να είναι και τα δύο θετικά. Στην περίπτωση όπου U_{ij} συμβολίζει το ποσό που προκαλείται στο συμβόλαιο *j* από το γεγονόςi, αυτό σημαίνει ότι το γεγονός που προκάλεσε την απαίτηση δεν επηρεάζει παραπάνω από ένα συμβόλαιο. Στην περίπτωση όπου το U_{ij} συμβολίζει το ποσό τύπου *j* που προκλήθηκε από μία απαίτηση, αυτό σημαίνει ότι η μία απαίτηση δεν προκαλεί πληρωμές παραπάνω από ενός τύπου (για παράδειγμα, δεν γίνεται να γίνουν ταυτόχρονα πληρωμές θανάτου και αναπηρίας). Δηλαδή, σε αυτή την περίπτωση, δεν έχουμε μόνο ότι τα X_j και X_k είναι ασυσχέτιστα, αλλά ότι είναι και ανεξάρτητα.

Αφήνουμε την υπόθεση της Poisson, αλλά κρατώντας την υπόθεση ότι $E\left(U_{1j}U_{1k}\right) = 0$, για $j \neq k$, έχουμε

$$Cov\left(X_{1j}, X_{1k}\right) = E\left(U_{1j}\right)E(U_{1k})[Var(N) - E(N)]\,, \qquad j \neq k.$$

Αν το N ακολουθεί την αρνητική διωνυμική κατανομή, έχουμε $Var(N) > E(N)$, και έτσι τα X_j και X_k είναι θετικά συσχετισμένα. Από την άλλη, αν το N ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή, τότε $Var(N) < E(N)$, και τα X_j και X_k είναι αρνητικά συσχετισμένα.

3.2 Η πολυδιάστατη εκδοχή της αναδρομικής σχέσης του Panjer

Στη συνέχεια θα κάνουμε χρήση των παρακάτω:

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_m)', \qquad \boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_m)'$$

$$x. = \sum_{j=1}^{m} x_j, \qquad u. = \sum_{j=1}^{m} u_j$$

Θεωρούμε ότι οι συνιστώσες των $\boldsymbol{x}$ και $\boldsymbol{u}$ είναι μη-αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί. Με το συμβολισμό $\boldsymbol{u} \leq \boldsymbol{x}$ εννοούμε ότι $u_j \leq x_j$ για κάθε $j = 1,2, \dots, m$ και με το συμβολισμό $\boldsymbol{u} < \boldsymbol{x}$ εννοούμε ότι $u_j \leq x_j$, με αυστηρή ανισότητα για τουλάχιστον ένα j. Για $j = 1,2, \dots, m$ ορίζουμε το $\boldsymbol{e_j}$ ως το $m \times 1$ διάνυσμα του οποίου το j στοιχείο είναι 1 και όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του είναι 0 (μηδέν).

Υπό την πρόσθετη υπόθεση ότι η συνάρτηση πιθανότητας p ικανοποιεί τη σχέση (3.1.2), στο ακόλουθο θεώρημα δίνεται μια πολυδιάστατη εκδοχή της αναδρομικής σχέσης του Panjer που ικανοποιεί η πολυδιάστατη σύνθετη διακριτή τυχαία μεταβλητή $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)'$.

<u>Θεώρημα 3.2.1</u>

Η συνάρτηση πιθανότητας της g ικανοποιεί το παρακάτω αναδρομικό σχήμα:

$$g(\mathbf{0}) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)[f(\mathbf{0})]^n \tag{3.2.1}$$

$$x_k g(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{1 - af(\mathbf{0})} \sum_{\mathbf{0}<\boldsymbol{u}\leq\boldsymbol{x}} (ax_k + bu_k) f(\boldsymbol{u}) g(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{u})\,, \qquad \boldsymbol{x} > \mathbf{0} \tag{3.2.2}$$

για $k = 1,2, \dots, m$.

<u>Απόδειξη</u>

Από την σχέση

$$
\begin{aligned}
g(\boldsymbol{x}) = P(X_1 = x_1, \dots, X_m = x_m)&\\
&= P\left(\sum_{i=1}^{N} U_{i1} = x_1, \sum_{i=1}^{N} U_{i2} = x_2, \dots, \sum_{i=1}^{N} U_{im} = x_m\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) P\left[\left(\sum_{i=1}^{N} U_{i1} = x_1, \dots, \sum_{i=1}^{N} U_{im} = x_m\right) | N = n\right]\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} p(n) f^{n*}(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

προκύπτει άμεσα η σχέση (3.2.1).

Για $\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$, έχουμε

$$
\begin{aligned}
x_k g(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} x_k p(n) f^{*n}(\boldsymbol{x})&\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} x_k p(n-1)\left(a + \frac{b}{n}\right) f^{*n}(\boldsymbol{x})\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} p(n-1) E\left[a x_k + b U_{1k} \mid \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{U}_i = \boldsymbol{x}\right] f^{*n}(\boldsymbol{x})\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} p(n-1) \sum_{0 \leq \boldsymbol{u} \leq \boldsymbol{x}} (a x_k + b u_k) f(\boldsymbol{u}) f^{*(n-1)}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{u})\\
&= \sum_{0 \leq \boldsymbol{u} \leq \boldsymbol{x}} (a x_k + b u_k) f(\boldsymbol{u}) \sum_{n=1}^{\infty} p(n-1) f^{*(n-1)}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{u})\\
&= \sum_{0 \leq \boldsymbol{u} \leq \boldsymbol{x}} (a x_k + b u_k) f(\boldsymbol{u}) g(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{u})\\
&= a x_k f(\boldsymbol{0}) g(\boldsymbol{x}) + \sum_{0 < \boldsymbol{u} \leq \boldsymbol{x}} (a x_k + b u_k) f(\boldsymbol{u}) g(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{u})
\end{aligned}
$$

Αν λύσουμε τώρα ως προς $x_k g(\boldsymbol{x})$ προκύπτει άμεσα η σχέση (3.2.2). ■

Όταν $x_k > 0$, από την (3.2.2) παίρνουμε

$$
g(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{1 - a f(\boldsymbol{0})} \sum_{0 < \boldsymbol{u} \leq \boldsymbol{x}} \left(a + b \frac{u_k}{x_k}\right) f(\boldsymbol{u}) g(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{u}), \qquad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{e}_k \qquad (3.2.3)
$$

η οποία μαζί με την σχέση (3.2.1) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον αναδρομικό υπολογισμό της g.

Όταν $f(\mathbf{0}) = 0$, τότε οι σχέσεις (3.2.1) και (3.2.3) γίνονται

$$g(\mathbf{0}) = p(0)$$

$$g(\boldsymbol{x}) = \sum_{0<\boldsymbol{u}\leq\boldsymbol{x}} \left(a + b\frac{u_k}{x_k}\right) f(\boldsymbol{u}) g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}) \,, \quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{e}_k \qquad (3.2.4)$$

Στην περίπτωση που έχουμε ένα χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από m συμβόλαια, η παραπάνω υπόθεση συνεπάγεται ότι κάθε γεγονός απαίτησης (claim event) επηρεάζει τουλάχιστον ένα συμβόλαιο. Προφανώς για $m = 1$ η σχέση (3.2.4) ανάγεται στη σχέση

$$g(x) = \sum_{u=1}^{x} \left(a + b\frac{u}{x}\right) f(u) g(x-u) \,, \quad x \geq 1 \qquad (3.2.5)$$

Αυτή είναι η αναδρομική σχέση που εισήγαγε ο Panjer (1981).

<u>Παρατηρήσεις</u>

- Μία ενδιαφέρουσα περίπτωση προκύπτει όταν έχουμε $b \neq 0$. Τότε η αναδρομική σχέση (3.2.3) δεν είναι «συμμετρική» ως προ τα συμβόλαια, αφού κάποιο (ειδικό) συμβόλαιο k, έχει ειδική μεταχείριση. Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι υπολογιστικά είναι πιο αποτελεσματικό να διαλέξουμε το συμβόλαιο με το μικρότερο ποσό απαίτησης.
- Επίσης, παρατηρούμε ότι πρέπει να εστιάσουμε σε κάποιο άλλο συμβόλαιο, εκτός του k, σαν ειδικό συμβόλαιο όταν έχουμε $x_k = 0$. Έστω ότι έχουμε το ειδικό συμβόλαιο l όταν $x_k = 0$ και $x_l > 0$. Όμως, στην περίπτωση που $x_k = x_l = 0$, πρέπει να διαλέξουμε ένα τρίτο ειδικό συμβόλαιο, κ.λπ. Αυτό ίσως κάνει το Θεώρημα 3.2.1, όπου ως ένα βαθμό είναι δύσκολο να προγραμματιστεί. Παρ' όλα αυτά, θα τρέξει πιο γρήγορα σε σχέση με την αναδρομική σχέση
$$g(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) f^{n*}(\boldsymbol{x}).$$
- Πρακτικά φαίνεται ότι ο πολυδιάστατος αναδρομικός τύπος μπορεί να εφαρμοστεί μόνο όταν έχουμε μικρό m, διαφορετικά η υπολογιστική δουλειά είναι σχεδόν απαγορευτική.

3.3 Γενικεύσεις της πολυδιάστατης αναδρομικής σχέσης του Panjer

Έστω $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \dots, c_m)'$ ένα σταθερό διάνυσμα. Πολλαπλασιάζοντας την σχέση (3.2.2) με c_k και αθροίζοντας ως προς k παίρνουμε

$$g(\boldsymbol{x})\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} = \frac{1}{1 - af(\boldsymbol{0})} \sum_{0<\boldsymbol{u}\leq\boldsymbol{x}} (a\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{c}'\boldsymbol{u}) f(\boldsymbol{u}) g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}), \quad \boldsymbol{x} > \boldsymbol{0} \qquad (3.3.1)$$

Όταν $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} \neq 0$, διαιρώντας με $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}$, παίρνουμε

$$g(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{1 - af(\boldsymbol{0})} \sum_{0<\boldsymbol{u}\leq\boldsymbol{x}} \left(a + b\frac{\boldsymbol{c}'\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}}\right) f(\boldsymbol{u}) g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}), \quad \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \qquad (3.3.2)$$

Παρατήρηση

Κανονικά θα επιλέγαμε τα c_j να είναι ίσα με μηδέν ή ένα. Ειδικότερα, όταν $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{e}_k$ από την σχέση (3.3.2) προκύπτει η σχέση (3.2.3).

Μία άλλη ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι όταν $c_j = 1$, για όλα τα j. Τότε ισχύει ότι $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{m} x_j = x.$, όπου είναι πάντα θετικό για $\boldsymbol{x} > 0$. Έτσι έχουμε την παρακάτω σχέση

$$g(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{1 - af(\boldsymbol{0})} \sum_{0<\boldsymbol{u}\leq\boldsymbol{x}} \left(a + b\frac{u.}{x.}\right) f(\boldsymbol{u}) g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}), \quad \boldsymbol{x} > 0, \qquad (3.3.3)$$

Παρατηρήσεις

- Μέσω ενός αποτελεσματικού κώδικα προγραμματισμού, η σχέση (3.3.3) δεν είναι απαραίτητα πιο χρονοβόρα από την σχέση (3.2.3), και έχει το πλεονέκτημα ότι μπορεί να εφαρμοστεί για όλα τα $\boldsymbol{x} > 0$.
- Όταν $m = 1$, η αναδρομική σχέση (3.3.3) ανάγεται στην αναδρομική σχέση του Panjer

$$g(x) = \frac{1}{1 - af(0)} \sum_{u=1}^{x} \left(a + b\frac{u}{x}\right) f(u) g(x-u), \quad x > 0.$$

Ο τρόπος με τον οποίο επεκτάθηκε η αναδρομική σχέση του Panjer, μπορεί να εφαρμοστεί εξίσου και σε άλλες μονοδιάστατες αναδρομικές σχέσεις. Για παράδειγμα, μια γενίκευση της σχέσης (3.2.3) προκύπτει στην περίπτωση που το p ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$p(n) = \sum_{s=1}^{r} \left(a_s + \frac{b_s}{n}\right) p(n-s), \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (3.3.4)$$

για κάποιον θετικό ακέραιο r, και $p(n) = 0$ για $n < 0$. Για $r = 1$, η σχέση (3.3.4) παράγει στη σχέση (3.1.2). Σε αυτή την περίπτωση μπορεί να δειχθεί ότι

$$g(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{1 - \sum_{s=1}^{r} a_s [f(\boldsymbol{0})]^s} \sum_{0<\boldsymbol{u}\leq\boldsymbol{x}} g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}) \sum_{s=1}^{r} \left(a_s + \frac{b_s u_k}{s x_k}\right) f^{*s}(\boldsymbol{u}), \quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{e}_k$$

και

$$g(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{1 - \sum_{s=1}^{r} a_s [f(\boldsymbol{0})]^s} \sum_{0<\boldsymbol{u}\leq \boldsymbol{x}} g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}) \sum_{s=1}^{r} \left(a_s + \frac{b_s u.}{s x.}\right) f^{*s}(\boldsymbol{u}) \ , \qquad \boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$$

Οι παραπάνω δύο αναδρομικές σχέσεις ανάγονται στις αναδρομικές σχέσεις (3.2.3) και (3.3.3) αντίστοιχα, όταν $r = 1$.

3.4 Ειδικές περιπτώσεις της πολυδιάστατης αναδρομικής σχέσης του Panjer

3.4.1 Ειδική περίπτωση 1

Θεωρούμε την περίπτωση που ένα γεγονός απαίτησης παράγει διάφορους τύπους απαιτήσεων, και υποθέτουμε ότι ένα γεγονός απαίτησης δεν μπορεί να παραγάγει παραπάνω από ένα τύπο απαίτησης. Για $j = 1, 2, \dots, m$ έστω ότι το U_{ij} είναι ίσο με μονάδα αν το i γεγονός απαίτησης παράγει μια απαίτηση τύπου j, και μηδέν διαφορετικά. Τότε $\sum_{j=1}^{m} U_{ij} = 1$. Έστω

$$h(j) = \mathrm{P}\big(U_{ij} = 1\big), \qquad j = 1, 2, \dots, m$$

Τότε από την σχέση (3.3.3), για $\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$, παίρνουμε

$$g(\boldsymbol{x}) = \left(a + \frac{b}{x.}\right) \sum_{j=1}^{m} h(j) g(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{e}_j) \, .$$

Για τις υπόλοιπες ειδικές περιπτώσεις που θα μας απασχολήσουν στην παρούσα παράγραφο υποθέτουμε ότι $m = 2$ και $f(0,0) = 0$.

3.4.2 Ειδική περίπτωση 2

Έστω $U_i = U_{i1}$, $V_i = U_{i2}$, $X = X_1 = \sum_{i=1}^{N} U_i$, και $Y = X_2 = \sum_{j=1}^{N} V_j$. Από τη σχέση (3.2.4), για $x = 1,2, \dots$ και $y = 0,1, \dots$, έχουμε

$$g(x,y) = \sum_{u=0}^{x} \left(a + b\frac{u}{x}\right) \sum_{v=0}^{y} f(u,v) g(x-u, y-v), \qquad (3.4.1)$$

και για $x = 0,1, \dots$ και $y = 1,2, \dots$, έχουμε

$$g(x,y) = \sum_{v=0}^{y} \left(a + b\frac{v}{y}\right) \sum_{u=0}^{x} f(u,v) g(x-u, y-v), \qquad (3.4.2)$$

και από τη (3.3.3) για $(x, y) \neq (0, 0)$, παίρνουμε

$$g(x, y) = \sum_{u=0}^{x} \sum_{v=0}^{y} \left(a + b\frac{u+v}{x+y}\right) f(u, v) g(x-u, y-v). \qquad (3.4.3)$$

<u>**Παρατηρήσεις**</u>

- Σε αντίθεση με τη σχέση (3.2.4), σε αυτούς τους τύπους έχουμε συμπεριλάβει το $(u, v) = (0, 0)$ στα αθροίσματα για καλύτερη παρουσίαση των τύπων.
- Αν βασίζαμε τον υπολογισμό της $g(x, y)$ στη σχέση (3.4.1) για όλα τα (x, y), που ικανοποιούν τη σχέση $x > 0$, τότε θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε από τη σχέση (3.4.2) την πιθανότητα $g(0, y)$, δηλαδή
  $$g(0, y) = \sum_{v=1}^{y} \left(a + b\frac{v}{y}\right) f(0, v) g(0, y-v)\ , \quad y = 1,2, \dots\ .$$
  Όμως, αν το U_i είναι πάντα θετικό, τότε μαζί με την πιθανότητα $g(0, 0)$ η αναδρομική σχέση (3.4.1) καθορίζει πλήρως την g. Σε αυτή την περίπτωση, για $y = 1,2,\dots$ έχουμε
  $$g(0, y) = 0\ .$$

3.4.3 Ειδική περίπτωση 3

Η υπόθεση ότι οι τυχαίες μεταβλητές U_i και V_i είναι ανεξάρτητες δεν προσφέρει περαιτέρω ουσιαστική απλοποίηση στις αναδρομικές σχέσεις. Σε αυτή την περίπτωση, αν με h και k συμβολίσουμε τις περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας των U_i και V_j, αντίστοιχα, η σχέση (3.4.1) γράφεται ως

$$g(x, y) = \sum_{u=0}^{x} \left(a + b\frac{u}{x}\right) h(u) \sum_{v=0}^{y} k(v) g(x-u, y-v).$$

3.4.4 Ειδική περίπτωση 4

Έστω ότι έχουμε δύο τύπους απαιτήσεων. Αντίθετα με την ειδική περίπτωση 1, δεν απορρίπτουμε την πιθανότητα ένα γεγονός απαίτησης να μπορεί να παραγάγει παραπάνω από ένα τύπο απαίτησης. Έστω $U_i = 1$, αν το i γεγονός απαίτησης οδήγησε σε πληρωμές τύπου 1, και $U_i = 0$ σε διαφορετική περίπτωση. Αντίστοιχα, $V_i = 1$, αν το i γεγονός απαίτησης οδήγησε σε πληρωμές τύπου 2, και $V_i = 0$ σε διαφορετική περίπτωση. Τότε οι X, Y δηλώνουν το συνολικό αριθμό των απαιτήσεων τύπου 1 και 2, αντίστοιχα. Σε αυτή την περίπτωση η $f(u, v)$ είναι θετική μόνο όταν $u, v \in \{0, 1\}$, και τότε η σχέση (3.4.1) γίνεται

$$\begin{aligned} g(x, y) = &\left(a + \frac{b}{x}\right) [f(1, 0) g(x-1, y) + f(1, 1) g(x-1, y-1)] \\ &+ a f(0, 1) g(x, y-1). \end{aligned} \qquad (3.4.4)$$

3.4.5 Ειδική περίπτωση 5

Τώρα, αφήνουμε τον περιορισμό ότι οι τυχαίες μεταβλητές U_i και V_i μπορούν να πάρουν μόνο τις τιμές 0 και 1, και θεωρούμε την περίπτωση που $E(U_iV_i) = 0$. Στην κατάσταση με διαφορετικούς τύπους πληρωμών, αυτό αντιστοιχεί στην περίπτωση ότι μία απαίτηση πρέπει να ανήκει μόνο σε ενός τύπου πληρωμών. Έστω c η πιθανότητα μίας απαίτησης να είναι τύπου 1, h η δεσμευμένη κατανομή του ποσού της απαίτησης δοθέντος ότι η απαίτηση είναι τύπου 1, και k η δεσμευμένη κατανομή του ποσού της απαίτησης δοθέντος ότι η απαίτηση είναι τύπου 2.

Η $f(0,0)$ πρέπει να είναι ίση με το μηδέν και έχουμε ότι $h(0) = k(0) = 0$. Τότε

$$f(u,v) = \begin{cases} ch(u), & u = 1,2,\dots : v = 0 \\ (1-c)k(v), & u = 1,2,\dots : v = 1,2,\dots \\ 0. & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Η εισαγωγή της παραπάνω σχέσης στην (3.4.1), για $x = 1,2,\dots$ και $y = 0,1,\dots$, δίνει

$$g(x,y) = c\sum_{u=1}^{x}\left(a + b\frac{u}{x}\right)h(u)g(x-u,y)$$

$$+(1-c)a\sum_{v=1}^{y}k(v)g(x,y-v). \tag{3.4.5}$$

Στην ειδική περίπτωση που $a = 0$, η N ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο b, το τελευταίο άθροισμα της (3.4.5) εξαφανίζεται, κι έτσι για $x = 1,2,\dots$ και $y = 0,1,\dots$, έχουμε

$$g(x,y) = \frac{cb}{x}\sum_{u=1}^{x}h(u)g(x-u,y). \tag{3.4.6}$$

Από την τελευταία σχέση και το γεγονός ότι στη συγκεκριμένη περίπτωση γνωρίζουμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές X, Y είναι ανεξάρτητες μπορούμε να γράψουμε ότι $g(x,y) = s(x)t(y)$ όπου s και t οι περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας των X, Y, αντίστοιχα. Έτσι η σχέση (3.4.6), για $x = 1,2,\dots$ και $y = 0,1,\dots$, παίρνει τη μορφή

$$s(x)t(y) = t(y)\frac{cb}{x}\sum_{u=1}^{x}h(u)s(x-u).$$

Αφού πρέπει να υπάρχει κάποιο y τέτοιο ώστε $t(y) > 0$, για $x = 1,2,\dots$ παίρνουμε

$$s(x) = \frac{cb}{x}\sum_{u=1}^{x}h(u)s(x-u) \tag{3.4.7}$$

Παρατηρήσεις

- Η σχέση (3.4.7) είναι η αναδρομική σχέση του Panjer στη μονοδιάστατη περίπτωση, για μια σύνθετη κατανομή Poisson κατανομή με παράμετρο cb και κατανομή κατανομή του ύψους των απαιτήσεων h.
- Αφού $s(x) = \sum_{y=0}^{\infty} g(x, y)$, για $x = 1, 2, \ldots$, θα μπορούσαμε να εξάγουμε τη σχέση (3.4.7), από τη σχέση (3.4.6) με άθροιση ως προς y.

Αν ορίσουμε τα U_i και V_i όπως στην ειδική περίπτωση 4, τότε

$$f(1,0) = c, \qquad f(0,1) = 1 - c, \qquad f(1,1) = 0,$$

και εισάγοντάς τα στην (3.4.4), για $x = 1, 2, \ldots$ και $y = 0, 1, \ldots$, παίρνουμε

$$g(x,y) = \left(a + \frac{b}{x}\right) cg(x-1, y) + a(1-c)g(x, y-1). \qquad (3.4.8)$$

3.4.6 Ειδική περίπτωση 6

Το μοντέλο της ειδικής περίπτωσης 5 μπορεί να εκφραστεί και μέσω του πλαισίου που έχει αναλύσει ο Hesselager (1996) στη δισδιάστατη περίπτωση. Για $j = 1, 2$ έστω N_j ο αριθμός των απαιτήσεων του τύπου j και W_{ij} το ύψος της i απαίτησης. Τότε για το μοντέλο της Παραγράφου 2.1 έχουμε, ανάλογα, ότι $f_1 = h$ και $f_2 = k$.

Η δεσμευμένη κατανομή του N_1 δοθέντος $N = n$, για $n_1 = 0,1, \ldots, n$ και $n = 0, 1, \ldots$, είναι διωνυμική με

$$\mathrm{P}(N_1 = n_1 | N = n) = \binom{\mathrm{n}}{n_1} \mathrm{c}^{n_1} (1 - \mathrm{c})^{\mathrm{n} - n_1}.$$

Έτσι για $n_1, n_2 = 0, 1, \ldots$, έχουμε

$$\begin{aligned} q(n_1, n_2) &= P[(N_1 = n_1) \cap (N_2 = n_2)] = P[(N_1 = n_1) \cap (N = n_1 + n_2)] \\ &= P(N = n_1 + n_2) Pr(N_1 = n_1 | N = n_1 + n_2) \\ &= p(n_1 + n_2) \binom{n_1 + n_2}{n_1} \mathrm{c}^{n_1} (1 - \mathrm{c})^{n_2}. \end{aligned}$$

Τώρα, είμαστε μέσα στην καρδιά του Μοντέλου Α του Hesselager (1996) (βλ Παράγραφο 2.2) και οι αναδρομικές σχέσεις (3.4.5) και (3.4.8) δίνονται στα Θεωρήματα 2.2.2 και 2.2.1, αντίστοιχα.

3.4.7 Ειδική περίπτωση 7

Ας θεωρήσουμε τώρα μία μονοδιάστατη περίπτωση ($m = 1$). Έστω W_i το ποσό της i απαίτησης. Υποθέτουμε ότι τα W_i είναι θετικά, παίρνουν ακέραιες τιμές, είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα και ισόνομα κατανεμημένα με από κοινού συνάρτηση πιθανότητας h, και είναι ανεξάρτητα του N. Έστω s ένας θετικός ακέραιος. Λέμε ότι μία απαίτηση είναι τύπου 1 αν είναι μικρότερη ή ίση του s, και τύπου 2 αν είναι μεγαλύτερη του s. Σε αυτή την περίπτωση, για $x = 0, 1, \dots$ και $y = 1, 2, \dots, s$, έχουμε

$$g(x, y) = 0\,.$$

Τώρα έχουμε μία ειδική μορφή της ειδικής περίπτωσης 5 με

$$f(u, v) = \begin{cases} h(u), & u = 1, 2, \dots, s\,,\ v = 0 \\ h(v), & u = 0\,,\ v = s + 1, s + 2, \dots \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \tag{3.4.9}$$

Και με εισαγωγή της παραπάνω σχέσης στη σχέση (3.4.1), δίνει

$$g(x, 0) = \sum_{u=1}^{s} \left(a + b\frac{u}{x}\right) h(u) g(x - u, 0), \qquad x = 1, 2, \dots$$

$$g(x, y) = \sum_{u=1}^{s} \left(a + b\frac{u}{x}\right) h(u) g(x - u, y) + a \sum_{v=s+1}^{y} h(v) g(x, y - v)$$
$$x = 1, 2, \dots,\ \ y = s + 1, s + 2, \dots\ .$$

Η εισαγωγή της σχέσης (3.4.9) στην (3.4.2), δίνει

$$g(x, y) = a \sum_{u=1}^{s} h(u) g(x - u, y) + \sum_{v=s+1}^{y} \left(a + b\frac{v}{x}\right) k(v) g(x, y - v)$$

$$x = 0, 1, \dots,\ \ y = s + 1, s + 2, \dots\ .$$

3.4.8 Ειδική περίπτωση 8

Στη προηγούμενη ειδική περίπτωση, ξεχωρίσαμε τις απαιτήσεις σε μικρότερες ή ίσες του s και σε μεγαλύτερες του s. Μια πιο ενδιαφέρουσα κατάσταση θα ήταν αν θεωρούσαμε ότι

$$U_i = \min(W_i, s), \qquad V_i = \max(W_i - s, 0).$$

Σε μια απεριόριστη ασφάλιση υπερβάλλοντος ζημίας με ιδία κράτηση s, U_i και V_i είναι τα μέρη της i απαίτησης που αναλαμβάνει ο ασφαλιστής και ο αντασφαλιστής, αντίστοιχα. Έτσι η τυχαία μεταβλητή X δηλώνει τις συνολικές πληρωμές της εκχωρήτριας εταιρίας, και η τυχαία μεταβλητή Y δηλώνει τις συνολικές πληρωμές του αντασφαλιστή.

Σε αυτή την περίπτωση, για $x = 0, 1, \dots, s - 1$ και $y = 1, 2, \dots$, έχουμε $g(x, y) = 0$. Από την (3.4.9), παίρνουμε

$$f(u,v)=\begin{cases}h(u), & u=1,2,\dots,s\,,\ \ v=0\\ h(v+s), & u=s\,,\ \ v=1,2,\dots\\ 0, & \text{διαφορετικά}\end{cases} \qquad (3.4.10)$$

Εισάγοντας την τελευταία σχέση στη (3.4.1), για $x=0,1,\dots$ και $y=0{,}1,\dots$, παίρνουμε

$$g(x,y)=\sum_{u=1}^{s}\left(a+b\frac{u}{x}\right)h(u)g(x-u,y)$$
$$+\left(a+b\frac{s}{x}\right)\sum_{v=1}^{y}h(v+s)g(x-s,y-v). \qquad (3.4.11)$$

Εφόσον τώρα το U_i είναι πάντα θετικό, μαζί με το $g(0,0)$ η παραπάνω αναδρομική σχέση ορίζει πλήρως την g.

Αν εισάγουμε τώρα τη σχέση (3.4.10) στην (3.4.2), για $x=1,2,\dots$ και $y=1,2,\dots$, παίρνουμε

$$g(x,y)=a\sum_{u=1}^{s}h(u)g(x-u,y)+\sum_{v=1}^{y}\left(a+b\frac{v}{x}\right)h(v+s)g(x-s,y-v)\,.$$

Παρατήρηση

Για μικρές τιμές του y ο τελευταίος αναδρομικός τύπος ίσως είναι πιο βολικός από αυτόν της σχέσης (3.4.11) για τον υπολογισμό του $g(x,0)$.

3.4.9 Ειδική περίπτωση 9

Τέλος, θεωρούμε την περίπτωση, όπου $U_i=W_i$ και $V_i=1$. Τότε η X δηλώνει τις συσσωρευμένες απαιτήσεις, και η Y ο δηλώνει τον αριθμό των απαιτήσεων. Έτσι η g είναι η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των συσσωρευμένων απαιτήσεων και του αριθμού των απαιτήσεων. Για $x,y=0,1,\dots$, έχουμε

$$g(x,y)=\Pr(Y=y)\Pr(X=x|Y=y)=p(y)h^{y*}(x) \qquad (3.4.12)$$

Επιπλέον

$$f(u,v)=\begin{cases}h(u), & u=1,2,\dots:\ v=1\\ 0, & \text{διαφορετικά}\end{cases}$$

και η εισαγωγή της παραπάνω σχέσης στις σχέσεις (3.4.1) και (3.4.2), για $x,y=1,2,\dots$, αντίστοιχα, δίνει

$$g(x,y) = \sum_{u=1}^{x} \left(a + b\frac{u}{x}\right) h(u) g(x-u, y-1) \tag{3.4.13}$$

$$g(x,y) = \left(a + \frac{b}{y}\right) \sum_{u=1}^{x} h(u) g(x-u, y-1) \tag{3.4.14}$$

Εφόσον τα U_i και V_i είναι πάντα θετικά, μαζί με το $g(0,0)$ κάθε μια από τις παραπάνω αναδρομικές σχέσεις καθορίζει πλήρως την g.

3.5 Πολυδιάστατη αναδρομική σχέση του Panjer και συνελίξεις

Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή N ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή, δηλαδή για $n = 0, 1, \dots, r$, $r = 1, 2, \dots$ και $0 < c < 1$, τότε έχουμε ότι

$$p(n) = \binom{r}{n} c^n (1-c)^{r-n} \tag{3.5.1}$$

Επομένως

$$a = -\frac{c}{1-c}, \qquad b = (r+1)\frac{c}{1-c}.$$

Υποθέτουμε ότι $f(\mathbf{0}) = 0$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.2.1 παίρνουμε

$$g(\mathbf{0}) = (1-c)^r \tag{3.5.2}$$

$$g(\boldsymbol{x}) = \frac{c}{1-c} \sum_{0 < \boldsymbol{u} \le \boldsymbol{x}} \left((r+1)\frac{u_k}{x_k} - 1\right) f(\boldsymbol{u}) g(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{u}), \quad \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{e}_k. \tag{3.5.3}$$

Έστω τώρα $\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2, \dots, \boldsymbol{V}_r$ με m διαστάσεις, ανεξάρτητα και ισόνομα τυχαία διανύσματα που παίρνουν μη αρνητικές ακέραιες τιμές με από κοινού συνάρτηση πιθανότητας h. Υποθέτουμε ότι $0 < h(\mathbf{0}) < 1$. Θέλουμε να βρούμε ένα αναδρομικό τύπο για τη συνάρτηση πιθανότητας g της

$$\boldsymbol{X} = \sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{V}_i.$$

Προφανώς ισχύει ότι

$$g(\boldsymbol{x}) = h^{r*}(\boldsymbol{x}).$$

Έστω

$$c = 1 - h(\mathbf{0}) \tag{3.5.4}$$

$$f(\boldsymbol{y}) = \frac{h(\boldsymbol{y})}{c}, \quad y > 0 \tag{3.5.5}$$

Η συνάρτηση f μπορεί να ερμηνευτεί ως η δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας της V_i δοθέντος ότι τουλάχιστον ένα από τα στοιχεία του είναι μεγαλύτερο του μηδενός. Τώρα έχουμε ότι η X είναι μία σύνθετη διωνυμική κατανομή, όπου η κατανομή της N δίνεται από τη σχέση (3.5.1), το c δίνεται από τη σχέση (3.5.4) και η κατανομή του ύψους των απαιτήσεων έχει συνάρτηση πιθανότητας f. Με την εισαγωγή των σχέσεων (3.5.4) και (3.5.5) στις (3.5.2) και (3.5.3), παίρνουμε

$$g(\mathbf{0}) = h(\mathbf{0})^r$$

$$g(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{h(\mathbf{0})} \sum_{0<\boldsymbol{u}\leq\boldsymbol{x}} \left((r+1)\frac{u_k}{x_k} - 1 \right) h(\boldsymbol{u}) g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}), \qquad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{e}_k \qquad (3.5.6)$$

Ανάλογα, εφαρμόζοντας τη σχέση (3.3.3) παίρνουμε

$$g(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{h(\mathbf{0})} \sum_{0<\boldsymbol{u}\leq\boldsymbol{x}} \left((r+1)\frac{u.}{x.} - 1 \right) h(\boldsymbol{u}) g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}), \qquad \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0} \qquad (3.5.6)$$

Όταν $m = 1$ (μονοδιάστατη περίπτωση), και οι δύο παραπάνω αναδρομικοί τύποι, ανάγονται στις παρακάτω σχέσεις

$$g(0) = h(0)^r$$

$$g(x) = \frac{1}{h(0)} \sum_{u=1}^{x} \left((r+1)\frac{u}{x} - 1 \right) h(u) g(x-u), \quad x = 1,2, \dots . \qquad (3.5.7)$$

Ο παραπάνω αναδρομικός τύπος εισήχθη από τον ο De Pril (1985).

Για $j = 1, \dots, m$, έστω h_j και g_j οι περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας των V_{1j} και X_j αντίστοιχα. Αφού $h(\mathbf{0}) > 0$, θα πρέπει να έχουμε $h_j(0) > 0$, για $j = 1, \dots, m$. Αν οι τυχαίες μεταβλητές $V_{11}, \dots, V_{1m}$ είναι ανεξάρτητες, τότε και οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, \dots, X_m$ είναι επίσης ανεξάρτητες και ισχύει

$$h(\boldsymbol{u}) = \prod_{j=1}^{m} h_j(u_j) , \qquad g(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{m} g_j(x_j) .$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στην (3.5.6), παίρνουμε

$$\prod_{j=1}^{m} g_j(x_j) = \sum_{0<\boldsymbol{u}\leq\boldsymbol{x}} \left((r+1)\frac{u_k}{x_k} - 1 \right) \prod_{j=1}^{m} \frac{h_j(u_j) g_j(x_j - u_j)}{h_j(0)} , \qquad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{e}_k \quad (3.5.8)$$

Ωστόσο σε αυτή την περίπτωση φαίνεται να είναι πιο βολικό να υπολογίσουμε το κάθε g_j ξεχωριστά από το αναδρομικό τύπο (3.5.7) και στη συνέχεια να τα πολλαπλασιάσουμε μεταξύ τους.

Αν $\prod_{j\neq k} g_j(x_j) > 0$, μπορούμε να ξαναγράψουμε την (3.5.8), για $x \geq e_k$, σαν

$$g_k(x_k) = \frac{1}{h_k(0)} \times$$

$$\times \sum_{0<\boldsymbol{u}\leq \boldsymbol{x}} \left((r+1)\frac{u_k}{x_k} - 1 \right) h_k(u_k) g_k(x_k - u_k) \prod_{j\neq k} \frac{h_j(u_j) g_j(x_j - u_j)}{h_j(0) g_j(x_j)} \ , \quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{e}_k.$$

Η αναδρομική σχέση (3.5.7) δίνει

$$g_k(x_k) = \frac{1}{h(0)} \sum_{u_k=1}^{x_k} \left((r+1)\frac{u_k}{x_k} - 1 \right) h_k(u_k) g_k(x_k - u_k), \quad x_k = 1,2,\ldots \qquad (3.5.9)$$

και επομένως θα μπορούσαμε να συμπεράνουμε, αθροίζοντας ως προς u_j, ότι

$$\sum_{u_j} \prod_{j\neq k} \frac{h_j(u_j) g_j(x_j - u_j)}{h_j(0) g_j(x_j)} = 1 \,.$$

Όμως, στη συνέχεια θα διαπιστώσουμε ότι κάτι τέτοιο δεν είναι τόσο απλό.

Έστω τώρα η ειδική περίπτωση $m = 2$. Σε αυτή την περίπτωση η (3.5.6) για $k = 1$, $x = 1, 2, \ldots$ και $y = 0, 1, \ldots$, δίνει

$$g(x,y) = \frac{1}{h(0,0)} \left[\sum_{u=1}^{x} \left((r+1)\frac{u}{x} - 1 \right) \sum_{v=0}^{y} h(u,v) g(x-u, y-v) \right.$$
$$\left. - \sum_{v=1}^{y} h(0,v) g(x, y-v) \right] \qquad (3.5.10)$$

Αφού όσο $h(0,0) > 0$, δεν μπορούμε να συμπεριλάβουμε στο άθροισμα το $(u, v) = (0, 0)$, σε αντίθεση με τις σχέσεις (3.4.1) και (3.4.2).

Αν V_{11} και V_{12} είναι ανεξάρτητα, τότε η (3.5.10), για $x = 1, 2, \ldots$ και $y = 0, 1, \ldots$, δίνει

$$g_1(x) g_2(y) = \frac{1}{h_1(0) h_2(0)} \left[\left(\sum_{u=1}^{x} \left((r+1)\frac{u}{x} - 1 \right) h_1(0) g_1(x-u) \right) \times \right.$$
$$\left. \times \sum_{v=0}^{y} h_2(v) g_2(y-v) - h_1(0) g_1(x) \sum_{v=1}^{y} h_2(v) g_2(y-v) \right].$$

Δηλαδή

$$g_1(x) g_2(y) = \frac{1}{h_1(0) h_2(0)} \times$$

$$\times\left[A\sum_{v=0}^{y}h_2(v)g_2(y-v)+h_1(0)g_1(x)h_2(0)g_2(y)\right] \qquad (3.5.11)$$

όπου

$$A=\sum_{u=1}^{x}\left((r+1)\frac{u}{x}-1\right)h_1(0)g_1(x-u)-h_1(0)g_1(x)\,.$$

<u>Παρατήρηση</u>

Από την (3.5.9) παρατηρούμε ότι $A=0$, και έτσι το δεξί μέλος της σχέσης (3.5.11) ανάγεται στο $g_1(x)g_2(y)$.

3.6 Μια άλλη προσέγγιση της πολυδιάστατης αναδρομικής σχέσης του Panjer

3.6.1 Εισαγωγή

Στην Παράγραφο 2.5 παρουσιάστηκε η εκδοχή της Vernic στη δισδιάστατη περίπτωση της αναδρομικής σχέσης του Panjer. Εδώ θα παρουσιάσουμε τη γενίκευση αυτής της εκδοχής στην περίπτωση των m διαστάσεων ($m\geq 2$). Εκεί είδαμε ότι η Vernic (1999) θεώρησε δισδιάστατες σύνθετες κατανομές, όπου από η κοινού συνάρτηση πιθανότητας $p(n_1,n_2)$ της δισδιάστατης διακριτής τυχαίας μεταβλητής (N_1,N_2) ικανοποιεί το αναδρομικό σχήμα

$$p(n_1,n_2)=\psi_{12}(n_1,n_2)p(n_1-1,n_2-1)$$
$$+\psi_1(n_1,n_2)p(n_1-1,n_2)+\psi_2(n_1,n_2)p(n_1,n_2-1)$$

όταν τουλάχιστον ένα από τα n_1 και n_2 είναι θετικά, με

$$\psi_{12}(n_1,n_2)=\begin{cases}a_0+\dfrac{a_1}{n_1}+\dfrac{a_2}{n_2}+\dfrac{a_{12}}{n_1n_2}\,, & n_1,n_2=1,2,\dots\\ 0, & \text{διαφορετικά},\end{cases}$$

$$\psi_1(n_1,n_2)=\begin{cases}b_0+\dfrac{b_1}{n_1}, & n_1,n_2=1,2,\dots\\ d_0+\dfrac{d_1}{n_1}\,, & n_1=1,2\,,\dots \quad \text{και} \quad n_2=0\\ 0\,, & n_1=0 \quad \text{και} \quad n_2=1,2,\dots\,,\end{cases}$$

$$\psi_2(n_1, n_2) = \begin{cases} c_0 + \dfrac{c_2}{n_2}, & n_1, n_2 = 1, 2, \dots \\ e_0 + \dfrac{e_2}{n_2}, & n_1 = 0 \quad \text{και} \quad n_2 = 1, 2, \dots \\ 0, & n_1 = 1, 2, \dots \quad \text{και} \quad n_2 = 0\,. \end{cases}$$

Τότε ισχύει ότι

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2) = & \sum_{y_1=1}^{x_1} \sum_{y_2=1}^{x_2} \varphi_{12}(y_1, y_2\,;\, x_1, x_2) f_1(y_1) f_2(y_2) g(x_1 - y_1, x_2 - y_2) \\ & + \sum_{y_1=1}^{x_1} \varphi_1(y_1\,;\, x_1, x_2) f_1(y_1) g(x_1 - y_1, x_2) \\ & + \sum_{y_2=1}^{y} \varphi_2(\, y_2\,;\, x_1, x_2) f_2(y_2) g(x_1, x_2 - y_2), \end{aligned}$$

όταν τουλάχιστον ένα από τα x_1 και x_2 είναι θετικά, με

$$\varphi_{12}(y_1, y_2;\, x_1, x_2) = \begin{cases} a_0 + a_1 \dfrac{y_1}{x_1} + a_2 \dfrac{y_2}{x_2} + a_{12} \dfrac{y_1 y_2}{x_1 x_2}\ , & n_1, n_2 = 1, 2, \dots \\ 0\ , & \text{διαφορετικά}, \end{cases}$$

$$\varphi_1(y_1;\, x_1, x_2) = \begin{cases} b_0 + b_1 \dfrac{y_1}{x_1}, & n_1, n_2 = 1, 2, \dots \\ d_0 + d_1 \dfrac{y_1}{x_1}, & n_1 = 1, 2, \dots \quad \text{και} \quad n_2 = 0 \\ 0, & n_1 = 0 \quad \textit{και} \quad n_2 = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$\varphi_2(\, y_2\,;\, x_1, x_2) = \begin{cases} c_0 + c_2 \dfrac{y_2}{x_2}, & n_1, n_2 = 1, 2, \dots \\ e_0 + e_2 \dfrac{y_2}{x_2}, & n_1 = 0 \quad \text{και} \quad n_2 = 1, 2, \dots \\ 0, & n_1 = 1, 2, \dots \quad \text{και} \quad n_2 = 0\,. \end{cases}$$

3.6.2 Η γενίκευση

Έστω $\boldsymbol{N}$ ένα $m \times 1$ διάνυσμα με στοιχεία μη αρνητικές ακέραιες τυχαίες μεταβλητές. Έστω επίσης οι ανεξάρτητες θετικές ακέραιες τυχαίες μεταβλητές Y_{ij} ($i = 1, \dots, m\,;\, j = 1, 2, \dots$), που είναι ανεξάρτητες του $\boldsymbol{N}$, και έστω f_i η κατανομή της Y_{ij} και p η κατανομή της $\boldsymbol{N}$. Εισάγουμε το τυχαίο διάνυσμα $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_m)'$ με $X_i = \sum_{j=1}^{N_i} Y_{ij}$, για $i = 1, 2, \dots, m$. Τότε, η κατανομή της $\boldsymbol{X}$ δίνεται από τον τύπο

$$g(\boldsymbol{x}) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_m=0}^{\infty} p(n_1, \dots, n_m) \prod_{i=1}^{m} f_i^{n_i *}(\boldsymbol{x})\,.$$

Στην προσπάθεια γενίκευσης των συναρτήσεων p και g της προηγούμενης παραγράφου στις m διαστάσεις, είναι λογικό να ψάξουμε για ζευγάρια συναρτήσεων $(\psi_{i_1,i_2,\dots,i_h}, \varphi_{i_1,i_2,\dots,i_h})$, τέτοια ώστε

$$p(\boldsymbol{n}) = \sum_{h=1}^{m} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_h\le m} \psi_{i_1,i_2,\dots,i_h}(\boldsymbol{n})p\big(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_{i_1,i_2,\dots,i_h}\big), \qquad (3.6.2.1)$$

$$g(\boldsymbol{x}) = \sum_{h=1}^{m} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_h\le m} \sum_{s=1}^{h} \sum_{y_s}^{x_{i_s}} \varphi_{i_1,i_2,\dots,i_h}(y_1,y_2,\dots,y_h;\boldsymbol{x}) \times g\left(\boldsymbol{x}-\sum_{j=1}^{h} y_j \boldsymbol{e}_{i_j}\right) \prod_{j=1}^{h} f_{i_j}(y_j) \qquad (\boldsymbol{x}>\boldsymbol{0}) \qquad (3.6.2.2)$$

όπου $\boldsymbol{e}_{i_1,i_2,\dots,i_h}$ είναι το $m\times 1$ διάνυσμα του οποίου το i_j στοιχείο είναι 1 και όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του είναι 0 (μηδέν).

Λήμμα 3.6.2.1

Αν για διαφορετικούς ακέραιους $i_1, i_2, \dots, i_h \in \{1,\dots,m\}$

$$E\left[\varphi(Y_{i_1 1},\dots,Y_{i_h 1};\boldsymbol{x}\left|\bigcap_{j=1}^{h}\left(\sum_{r=1}^{n_{i_j}} Y_{i_j r} = x_{i_j}\right)\right.\right] = \psi(\boldsymbol{n}) \qquad (3.6.2.3)$$

για όλα τα $\boldsymbol{x},\boldsymbol{n} > 0$ τέτοια ώστε $\prod_{i=1}^{m} f_i^{n_i *}(x_i) > 0$, τότε, για $\boldsymbol{x} > 0$, έχουμε

$$\sum_{\boldsymbol{n}>0} \psi(\boldsymbol{n})p(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_{i_1,i_2,\dots,i_h}) \prod_{i=1}^{m} f_i^{n_i *}(x_i) = \sum_{s=1}^{h}\sum_{y_s=1}^{x_{i_s}} \varphi(y_1,\dots,y_h;\boldsymbol{x}) g\left(\boldsymbol{x}-\sum_{j=1}^{h} y_j \boldsymbol{e}_{i_j}\right)\prod_{j=1}^{h} f_{i_j}(y_j)\,.$$

Απόδειξη

Για όλα τα $\boldsymbol{x} > 0$, έχουμε

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\boldsymbol{n}>0} \psi(\boldsymbol{n}) p(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_{i_1,i_2,\dots,i_h}) \prod_{i=1}^{m} f_i^{n_i *}(x_i) \\
&\qquad = \sum_{\boldsymbol{n}>0} p\big(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_{i_1,i_2,\dots,i_h}\big) E\left[\varphi(Y_{i_1 1},\dots,Y_{i_h 1};\boldsymbol{x} \,\middle|\, \bigcap_{j=1}^{h}\left(\sum_{r=1}^{n_{i_j}} Y_{i_j 1} = x_{i_j}\right)\right] \\
&\qquad \times \prod_{i=1}^{m} f_i^{n_i *}(x_i) \\
&\qquad = \sum_{\boldsymbol{n}>0} p(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_{i_1,i_2,\dots,i_h}) \sum_{s=1}^{h} \sum_{y_s=1}^{x_{i_s}} \varphi(y_1,\dots,y_h;\boldsymbol{x}) \\
&\qquad \times \left(\prod_{j=1}^{h} f_{i_j}(y_j) f_{i_j}^{(n_{i_j}-1)*}\left(x_{i_j}-y_j\right)\right) \prod_{j=h+1}^{m} f_{i_j}^{n_{i_j}*}\left(x_{i_j}\right) \\
&\qquad = \sum_{s=1}^{h} \sum_{y_s=1}^{x_{i_s}} \varphi(y_1,\dots,y_h;\boldsymbol{x}) \left(\prod_{j=1}^{h} f_{i_j}(y_j)\right) \\
&\qquad \times \sum_{\boldsymbol{n}>0} p(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_{i_1,i_2,\dots,i_h}) \left(\prod_{j=1}^{h} f_{i_j}^{(n_{i_j}-1)*}\left(x_{i_j}-y_j\right)\right) \prod_{j=h+1}^{m} f_{i_j}^{n_{i_j}*}\left(x_{i_j}\right) \\
&\qquad = \sum_{s=1}^{h} \sum_{y_s=1}^{x_{i_s}} \varphi(y_1,\dots,y_h;\boldsymbol{x}) g\left(\boldsymbol{x} - \sum_{j=1}^{h} y_j \boldsymbol{e}_{i_j}\right) \prod_{j=1}^{h} f_{i_j}\big(y_j\big) .
\end{aligned}
$$

■

Είναι ξεκάθαρο ότι αν τα ζευγάρια $(\varphi_1,\psi_1),\dots,(\varphi_w,\psi_w)$ ικανοποιούν τους όρους του παραπάνω Λήμματος, τότε και τα $\left(\sum_{v=1}^{w} c_v\varphi_v, \sum_{v=1}^{w} c_v\psi_v\right)$ επίσης ικανοποιούν τους όρους, για όλες τις σταθερές $c_1,\dots,c_w$.

Εφόσον οι τυχαίες μεταβλητές Y_{ij} $(i=1,\dots,m\,;\ j=1,2,\dots)$ είναι θετικές ακέραιες τυχαίες μεταβλητές, τότε έχουμε ότι $X_i=0$ αν και μόνο εάν $N_i=0$. Αυτό προϋποθέτει ότι αν τα ζευγάρια (φ_1,ψ_1) και (φ_2,ψ_2) ικανοποιούν τις υποθέσεις του Λήμματος 3.6.2.1, τότε οι υποθέσεις ικανοποιούνται και από το ακόλουθο ζευγάρι (φ,ψ):

$$
\varphi(y_1,\dots,y_h;\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \varphi_1(y_1,\dots,y_h;\boldsymbol{x}), & x_i = 1,2,\dots \\ \varphi_2(y_1,\dots,y_h;\boldsymbol{x}), & x_i = 0 \end{cases}
$$

$$
\psi(\boldsymbol{n}) = \begin{cases} \psi_1(\boldsymbol{n}), & n_i = 1,2,\dots \\ \psi_2(\boldsymbol{n}), & n_i = 0 \end{cases} .
$$

Θεώρημα 3.6.2.1

Αν υπάρχουν ζευγάρια συναρτήσεων $(\psi_{i_1,i_2,\dots,i_h}, \varphi_{i_1,i_2,\dots,i_h})$, τέτοια ώστε να ισχύει η σχέση (3.6.2.1) και κάθε ζευγάρι να ικανοποιεί τη σχέση (3.6.2.3), για όλα τα $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n} > 0$ όσο $\prod_{i=1}^{m} f_i^{n_i *}(x_i) > 0$, τότε η σχέση (3.6.2.2) ισχύει.

Απόδειξη

Από το Λήμμα 3.6.2.1, για όλα τα $\boldsymbol{x} > 0$, έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
g(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{n}>0} p(\boldsymbol{n}) \prod_{i=1}^{m} f_i^{n_i *}(x_i) \\
&= \sum_{\boldsymbol{n}>0} \sum_{h=1}^{m} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_h \le m} \psi_{i_1,i_2,\dots,i_h}(\boldsymbol{n}) p\left(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{e}_{i_1,i_2,\dots,i_h}\right) \prod_{i=1}^{m} f_i^{n_i *}(x_i) \\
&= \sum_{h=1}^{m} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_h \le m} \sum_{\boldsymbol{n}>0} \psi_{i_1,i_2,\dots,i_h}(\boldsymbol{n}) p\left(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{e}_{i_1,i_2,\dots,i_h}\right) \prod_{i=1}^{m} f_i^{n_i *}(x_i) \\
&= \sum_{h=1}^{m} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_h \le m} \sum_{s=1}^{h} \sum_{y_s}^{x_{i_s}} \varphi_{i_1,i_2,\dots,i_h}(y_1, \dots, y_h; \boldsymbol{x}) \\
&\quad \times g\left(\boldsymbol{x} - \sum_{j=1}^{h} y_j \boldsymbol{e}_{i_j}\right) \prod_{j=1}^{h} f_{i_j}(y_j) \ .
\end{aligned}
$$

■

Στο επόμενο θεώρημα θα δείξουμε τον τρόπο που φτιάχνουμε επιπλέον αναδρομικές σχέσεις για την g, αν υπάρχουν παραπάνω από μία αναδρομικές σχέσεις που ικανοποιούν τις συνθήκες του Θεωρήματος 3.6.2.1.

Θεώρημα 3.6.2.2

Αν για $v = 1, \dots, w$ η σχέση (3.6.2.2) ικανοποιείται με

$$\varphi_{i_1,i_2,\dots,i_h} = \varphi_{i_1,i_2,\dots,i_h}^{(v)}, \qquad (1 \le i_1 < \cdots < i_h \le m;\ \ h = 1, \dots, m)$$

τότε η σχέση (3.6.2.2) ικανοποιείται με

$$\varphi_{i_1,i_2,\dots,i_h}(y_1, \dots, y_h; \boldsymbol{x}) = \sum_{v=1}^{w} c_v(\boldsymbol{x}) \varphi_{i_1,i_2,\dots,i_h}^{(v)}(y_1, \dots, y_h; \boldsymbol{x}),$$

$$(y_j = 1, \dots, x_{i_j};\quad j = 1, \dots, h;\quad 1 \le i_1 < \cdots < i_h \le m;\quad h = 1, \dots, m; \boldsymbol{x} > 0)$$

όπου τα βάρη c_v επιλέγονται έτσι ώστε $\sum_{v=1}^{w} c_v(\boldsymbol{x}) = 1$, για όλα τα $\boldsymbol{x} > 0$.

Απόδειξη

Από την υπόθεση έχουμε

$$g(\boldsymbol{x}) = \sum_{h=1}^{m} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_h \le m} \sum_{s=1}^{h} \sum_{y_s=1}^{x_{i_s}} \varphi_{i_1, i_2, \dots, i_h}^{(v)}(y_1, \dots, y_h; \boldsymbol{x})$$

$$\times g\left(\boldsymbol{x} - \sum_{j=1}^{h} y_j \boldsymbol{e}_{i_j}\right) \prod_{j=1}^{h} f_{i_j}(y_j), \qquad (\boldsymbol{x} > 0; v = 1, \dots, w)$$

και το θεώρημα αποδεικνύεται πολλαπλασιάζοντας με $c_v(\boldsymbol{x})$ και αθροίζοντας ως προς v. ■

Η σχέση (3.6.2.3) του Λήμματος 3.6.2.1 ικανοποιείται από τα ζεύγη

$$\varphi(y_1, \dots, y_h; \boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{q} \frac{y_j}{x_{i_j}} \; ; \qquad \psi(\boldsymbol{n}) = \frac{1}{\prod_{j=1}^{q} n_{i_j}} \qquad (q = 0, 1, \dots, h)$$

και κατά συνέπεια για

$$\varphi(y_1, \dots, y_h; \boldsymbol{x}) = a + \sum_{q=1}^{h} \sum_{1 \le s_1 < \cdots < s_q \le h} b_{i_{s_1}, i_{s_2}, \dots, i_{s_q}} \prod_{j=1}^{q} \frac{y_{s_j}}{x_{i_{s_j}}} \; ; \qquad (3.6.2.4)$$

$$\psi(\boldsymbol{n}) = a + \sum_{q=1}^{h} \sum_{1 \le s_1 < \cdots < s_q \le h} \frac{b_{i_{s_1}, i_{s_2}, \dots, i_{s_q}}}{\prod_{j=1}^{q} n_{i_{s_j}}} \, . \qquad (3.6.2.5)$$

Στην μονοδιάστατη περίπτωση, οι σχέσεις (3.6.2.4) και (3.6.2.5) ανάγονται στις

$$\varphi(y; x) = a + b\frac{y}{x} \; ; \qquad \psi(n) = a + \frac{b}{n} \, .$$

3.6.3 Παράδειγμα

Υποθέτουμε ότι η κατανομή $p.$ της $N.$ ικανοποιεί την αναδρομική σχέση του Panjer

$$p.(n.) = \left(a + \frac{b}{n.}\right) p.(n. - 1), \quad n = 1,2, \dots$$

και ότι η δεσμευμένη κατανομή της $\boldsymbol{N}$ δοθέντος ότι $N. = n.$ είναι η πολυωνυμική κατανομή

$$q(\boldsymbol{n}) = n.! \prod_{i=1}^{m} \frac{w_i^{n_i}}{n_i!} \, .$$

Έχουμε ότι $q = q_1^{n.*}$ με

$$q_1(\boldsymbol{y}) = \begin{cases} w_i, & \boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_i\,;\ \ i = 1, 2, \ldots \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases} \qquad (3.6.2.6)$$

Δηλαδή, η p είναι η σύνθετη κατανομή $p = \sum_{n_.=0}^{\infty} p_.(n_.) q_1^{n_.*}$ με μονοδιάστατη απαριθμήτρια κατανομή $p_.$ και πολυδιάστατη συνάρτηση ύψους των ζημιών q_1. Τέτοιες σύνθετες κατανομές αναπτύχθηκαν από τον Sundt (1999). Έτσι από το Θεώρημα 3.6.2.1 έχουμε

$$n_h p(\boldsymbol{n}) = \sum_{\boldsymbol{0}<\boldsymbol{u}\leq\boldsymbol{n}} (a n_h + b u_h) q_1(\boldsymbol{u}) p(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{u}) \quad .$$

και εισάγοντάς τη στη σχέση (3.6.2.6), μας δίνει

$$n_h p(\boldsymbol{n}) = b w_h p(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{e}_h) + a n_h \sum_{i=1}^{m} w_i p(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{e}_i) \quad .$$

Όταν $\boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{e}_h$, μπορούμε να διαιρέσουμε με n_h και τότε παίρνουμε

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{n}) &= b \frac{w_h}{n_h} p(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{e}_h) + a \sum_{i=1}^{m} w_i p(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{e}_i) \\ &= \left(a + \frac{b}{n_h}\right) w_h p(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{e}_h) + a \sum_{i\neq h} w_i p(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{e}_i) \quad . \end{aligned}$$

Έτσι προκύπτει η ακόλουθη σχέση

$$g(\boldsymbol{x}) = b \frac{w_h}{x_h} \sum_{y_h=1}^{x_h} y_h f_h(y_h) g(\boldsymbol{x} - y_h \boldsymbol{e}_h) + a \sum_{i=1}^{m} w_i \sum_{y_i=1}^{x_i} f_i(y_i) g(\boldsymbol{x} - y_i \boldsymbol{e}_i)$$

$$= w_h \sum_{y_h=1}^{x_h} \left(a + b \frac{y_h}{x_h}\right) f_h(y_h) g(\boldsymbol{x} - y_h \boldsymbol{e}_h) + a \sum_{i\neq h} w_i \sum_{y_i=1}^{x_i} f_i(y_i) g(\boldsymbol{x} - y_i \boldsymbol{e}_i)$$

(3.6.2.7)

Η παραπάνω σχέση δίνει m αναδρομικές σχέσεις για την g. Μπορούμε να συνδυάσουμε τις αναδρομικές σχέσεις χρησιμοποιώντας το θεώρημα 3.6.2.2. Έτσι, πολλαπλασιάζοντας τη σχέση (3.6.2.7) με $x_h / x_.$ και αθροίζοντας ως προς εκείνα τα h, όπου $x_h > 0$, παίρνουμε

$$g(\boldsymbol{x}) = \sum_{h=1}^{m} w_h \sum_{y_h=1}^{x_h} \left(a + b \frac{y_.}{x_.}\right) f_h(y_h) g(\boldsymbol{x} - y_h \boldsymbol{e}_h), \quad \boldsymbol{x} > 0 \qquad (3.6.2.8)$$

Η διαφορά της τελευταίας σχέσης σε σύγκριση με τη σχέση (3.6.2.7) είναι ότι έχει το πλεονέκτημα ότι ισχύει για όλα τα $\boldsymbol{x} > 0$.

Μία ειδική περίπτωση που παίρνουμε από τη σχέση (3.6.2.8) είναι η

$$p(\boldsymbol{n}) = \left(a + \frac{b}{n.}\right)\sum_{h=1}^{m} w_h\, p(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{e}_h), \quad (\boldsymbol{n} > 0)$$

Η συγκεκριμένη αναδρομική σχέση έχει δοθεί από τον Sudnt (1999).

3.6.4 Επεκτάσεις

Στη μονοδιάστατη περίπτωση ο Sundt (1992) έδωσε την ακόλουθη επέκταση της αναδρομικής σχέσης του Panjer (1981).

Θεώρημα 3.6.4.1

Αν η p ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$p(n) = \sum_{i=1}^{k}\left(a_i + \frac{b_i}{n}\right)p(n-i)\,, \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

τότε

$$g(x) = \sum_{y=1}^{x} g(x-y)\sum_{i=1}^{k}\left(a_i + \frac{b_i}{i}\frac{y}{x}\right)f^{i*}(y)\,. \quad (x = 1, 2, \dots)$$

Μία ανάλογη επέκταση της θεωρίας της Παραγράφου 3.6.2 θα μπορούσε να γίνει αν πηγαίναμε την αναδρομική σχέση που ικανοποιεί η p, k βήματα πίσω. Σε αυτή την περίπτωση θα χρειαζόμασταν το ακόλουθο Λήμμα.

Λήμμα 3.6.4.1

Αν για διαφορετικούς ακέραιους $i_1, \dots, i_h \in \{1, \dots, m\}$ και για θετικούς ακέραιους $k_1, \dots, k_h$

$$E\left[\varphi(\sum_{j=1}^{k_1} Y_{i_1 1}, \dots, \sum_{j=1}^{k_h} Y_{i_h 1}\,; \boldsymbol{x}\left|\bigcap_{j=1}^{h}\left(\sum_{r=1}^{n_{i_j}} Y_{i_j r} = x_{i_j}\right)\right.\right] = \psi(\boldsymbol{n}) \qquad (3.6.4.1)$$

για όλα τα $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n} > 0$ τέτοια ώστε $\prod_{i=1}^{m} f_i^{n_i *}(x_i) > 0$, τότε, για $\boldsymbol{x} > 0$, έχουμε

$$\sum_{\boldsymbol{n}>\boldsymbol{0}} \psi(\boldsymbol{n}) p(\boldsymbol{n} - \sum_{j=1}^{h} k_j \, \boldsymbol{e}_{i_j}) \prod_{i=1}^{m} f_i^{n_i *}(x_i)$$
$$= \sum_{s=1}^{h} \sum_{y_s=1}^{x_{i_s}} \varphi(y_1, \dots, y_h; \boldsymbol{x}) g\left(\boldsymbol{x} - \sum_{j=1}^{h} y_j \boldsymbol{e}_{i_j}\right) \prod_{j=1}^{h} f_{i_j}^{k_j *}(y_j) \, .$$

Το Θεώρημα 3.6.2.1 μπορεί να επεκταθεί ανάλογα.

Η σχέση (3.6.4.1) του Λήμματος 3.6.4.1 ικανοποιείται αντίστοιχα, για

$$\varphi(y_1, \dots, y_h; \boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{q} \frac{y_j}{k_j x_{i_j}}; \qquad \psi(\boldsymbol{n}) = \frac{1}{\prod_{j=1}^{q} n_{i_j}} \qquad (q = 0, 1, \dots, h)$$

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Έχοντας πια φτάσει στο τέλος της διπλωματικής μας εργασίας, εκτιμούμε ότι οι βασικοί θεωρητικοί στόχοι και η επισκόπηση του βασικού μας θέματος έχουν, σε γενικά πλαίσια, επιτευχθεί κατά τρόπο ικανοποιητικό.

Αξίζει να τονιστεί η σημασία του Panjer στη συγκεκριμένη εργασία, αφού ήταν ο άνθρωπος που έδωσε καινοτόμους τρόπους υπολογισμού της κατανομής της πιθανότητας χρεοκοπίας χαρτοφυλακίου και τη μοντελοποίηση μέσω της αναδρομικής του σχέσης και έδωσε τροφή σε επόμενους ερευνητές όπως οι Hesselager, Sundt, η Vernic και άλλοι, να εξελίξουν τη θεωρία του και να φτάσουν σε πολύ ωραία και χρήσιμα συμπεράσματα για την ανάλυση πολλών χαρτοφυλακίων συγχρόνως, αφού οι κίνδυνοι ποικίλουν και έχουν διακυμάνσεις που εξαρτώνται από διαφορετικούς παράγοντες κάθε φορά.

Ελπίζω, η επισκόπηση αυτή να βοηθήσει και, γιατί όχι, να γίνει πηγή έμπνευσης και κατ’επέκταση ένα καλό βοήθημα στην μεταγενέστερη έρευνα και ενασχόληση με το αντικείμενο, γιατί οι προοπτικές εξέλιξης των παραπάνω θεωριών και εφαρμογών στην σύγχρονη εποχή θα βοηθήσει τις μεγάλες χρηματοοικονομικές εταιρίες να κατανοήσουν πολλά όσον αφορά το σύνολο των κινδύνων που έχουν να διαχειριστούν σε ένα και, κυρίως, περισσότερα χαρτοφυλάκια, όπου η ανάλυση και διαχείρισή τους απαιτεί επιδέξιους χειρισμούς.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- SUNDT, B.(1999). On Multivariate Panjer Recursions. ASTIN Bulletin, 29,pp 29-45
- SUNDT, B. (1992). On some extensions of Panjer's class of counting distributions. *ASTIN* Bulletin 22, 61-80.
- SUNDT, B. (1993). An introduction to non-life insurance mathematics. (3. ed.) Verlag Versicherungswirtschaft e.V., Karlsruhe.
- DE PRIL, N. (1986) Moments of a class of compound distributions. Scand. Actuarial J., 1986, 117-120.
- GULDBERO, A. (1934) On discontinuous frequency functions of two variables. Skandinavisk Aktuarietidskrift, 1934, 89-117.
- AMBAGASPITIYA, R.S. (1999). On the distributions of two classes of correlated aggregate claims.Insurance: Mathematics and Economics 24, 301-308.
- Ole Hesselager (1996). Recursions For Certain Bivariate Counting Distributions And Their Compound Distributions. ASTIN Bulletin, 26, pp 35-52
- Raluca Vernic (1999). Recursive Evaluation Of Some Bivariate Compound Distributions. ASTIN Bulletin, 29, pp 315-325
- Demetrios L. Antzoulakos and Stathis Chadjiconstantinidis (2002?). Bivariate Compound Distributions In Risk Theory. Department of Statistics and Actuarial Science, University of Piraeus, 18534, Piraeus, Greece
- SUNDT, B., DHAENE, J. & DE PRIL, N. (1998). Some results on moments and cumulants. Scandinavian Actuarial JournaX, 24-40
- DHAENE, J. & SUNDT, B. (1998). On approximating distributions by approximating their De Pril transforms. Scandinavian Actuarial Journal, 1-23
- Harry H. Panjer (1981). Recursive Evaluation of a Family of Compound Distributions. ASTIN Bulletin, 12, pp 22-26
- Bjørn Sundt and William S. Jewell (1981). Further Results on Recursive Evaluation of Compound Distributions. ASTIN Bulletin, 12, pp 27-39
- Ευστάθιος Χατζηκωνσταντινίδης (2015). Αναδρομικές Μέθοδοι Υπολογισμού Σύνθετων Καντανομών. Πανεπιστημιακές Σημειώσεις
- Adelson (1966).
- DHAENE, J., WILLMOT, G. & SUNDT, B. (1999). Recursions for distribution functions and their stop-loss transforms. Scandinavian Actuarial Journal, 52-6
- TEICHER, H. (1954). On the multivariate Poisson distribution. Skandinavisk Aktuarietidskrift 37,1-9.
- VERNIC, R. (1999). Recursive evaluation of some bivariate compound distributions. ASTIN Bulletin 29, 315-325.
- HESSELAGER, O. (1993) A recursive procedure for calculation of some mixed compound Poisson distributions. Working paper, 115, Laboratory of Actuarial Math., Copenhagen. (To appear in Scand. Actuarial J.).
- HOLGATE, P. (1954) Estimation for the bivariate Poisson distribution. Biometrika, 51, 241-245.

– JOHNSON, N.L. and KOTZ, S. (1969) Distributions in Statistics: Discrete distributions. Wiley, New York.
– KOCHERLAKOTA, S. and KOCHERLAKOTA, K. (1992) Bivariate Discrete Distributions. Marcel Dekker, New York.
– PANJER, H. H. (1981) Recursive evaluation of a family of compound distributions. ASTIN Bulletin, 12, 22-26.
– PANJER, H.H. and WILLMOT, G. (1982) Recursions for compound distributions. ASTIN Bulletin. 13, 1-11.
– PANJER, H.H. and WILLMOT, G. (1992) Insurance Risk Models. Society of Actuaries, Schaumburg.
– PAPAGEORGIOU, H. (1984) On recursive formulas for aggregate claims. Scand. Actuarial J., 1984, 102-104.
– SCHROTER, K. J. (1990) On a class of counting distributions and recursions for related compound distributions. Scand. Actuarial.!., 1990, 161-175.
– WANG, S. and SOBRERO, M. (1994) Further results on Hesselager's recursive procedure for calculation of some compound distributions. ASTIN Bulletin, 24, 160-166.
– WILLMOT, G. (1993) On recursive evaluation of mixed Poisson probabilities and related quantities. Stand. Actuarial J., 1993, 114-133.
– LEMAIRE, J. (1985). Automobile insurance." Actuarial models. Kluwer Publ.
– PARTRAT, C. (1993). Compound model for two dependent kinds of claim, XXIVth ASTIN Colloquium, Cambridge.
– WILLMOT, G.E. (1986). Mixed compound Poisson distributions. ASTIN Bulletin.
– WILLMOT, G.E. & PANJER, H.H. (1987). Difference equation approaches in evaluation of compound distributions. Insurance: Mathematics and Economics 6, 43-56.