ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗ-
ΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ**

ΜΕΘΟΔΟΙ MONTE CARLO ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΣΕ ΜΟΝΤΕΛΑ ΤΗΣ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΕΙΡΗΝΗ ΑΓΓΕΛΟΠΟΥΛΟΥ

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

**Πειραιάς,
Ιούνιος 2017**

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS
AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN
ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

MONTE CARLO METHODS IN ACTUARIAL MODELING

BY

Irene Angelopoulou

MSc Dissertation

Submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management

Piraeus, Greece

June 2017

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ'αριθμ. …….. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- ΜΙΧΑΗΛ ΜΠΟΥΤΣΙΚΑΣ (Επιβλέπων)
- ………………………………….
- ………………………………….

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας, θα ήθελα κατ’ αρχήν να ευχαριστήσω τον κύριο Μ. Μπούτσικα για την πολύτιμη καθοδήγησή του, καθώς και για τον χρόνο που διέθεσε, καθ’όλη τη διάρκεια της εκπόνησης της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Επίσης ευχαριστώ θερμά τους γονείς μου και τα αδέρφια μου, για την υποστήριξη τους, υλική και ηθική, καθ’ όλη την διάρκεια των σπουδών μου. Ιδιαίτερες ευχαριστίες θέλω να εκφράσω προς τους φίλους μου για την πνευματική υποστήριξη και κυρίως τον Νίκο που πίστεψε σε μένα και με ενθάρρυνε σε κάθε στάδιο των σπουδών μου.

Τέλος θα ήθελα να αφιερώσω αυτήν την εργασία στους γονείς μου και στην μνήμη του αγαπημένου μου καθηγητή, Ν. Τσουμαρόπουλου.

Περίληψη

Η μοντελοποίηση και προσομοίωση είναι ένα πολύ σημαντικό εργαλείο για την Αναλογιστική Επιστήμη, καθώς σε πολλές περιπτώσεις δεν είναι καθόλου εύκολη ή εφικτή η αναλυτική επίλυση πρακτικών προβλημάτων. Στην παρούσα διπλωματική εργασία αρχικά θα παρουσιάσουμε τις αρχές υπολογισμού ασφαλίστρων και τα σημαντικότερα μέτρα κινδύνου και θα αναφερθούμε στις ιδιότητες που πρέπει αυτά να ικανοποιούν. Στο Κεφάλαιο 3, θα παρουσιάσουμε αναλογιστικές μεθόδους των ασφαλίσεων ζωής, όπως και τον υπολογισμό του ασφαλίστρου και του αρχικού αποθέματος ενός ασφαλιστηρίου συμβολαίου. Στην συνέχεια θα ασχοληθούμε με τις μεθόδους των γενικών ασφαλίσεων. Αρχικά θα περιγράψουμε το ατομικό και συλλογικό μοντέλο κινδύνου και έπειτα θα ορίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας σύμφωνα με το μοντέλο Cramer-Lundberg. Στο τελευταίο και σημαντικότερο κεφάλαιο της παρούσας διπλωματικής εργασίας θα παρουσιάσουμε και θα υλοποιήσουμε εφαρμογές προσομοίωσης συγκεκριμένων πρακτικών προβλημάτων ή μοντέλων που παρουσιάσαμε στα αρχικά κεφάλαια. Η προσομοίωση υλοποιείται μέσω του στατιστικού πακέτου R.

Abstract

Modeling and Simulation are very important tools for actuarial science, as in many cases analytic solutions may not be available or very difficult to obtain. In this MSc thesis we will initially review the most important premium principles and risk measures and examine the properties that they must satisfy (Chapters 1 and 2). In Chapter 3, we will present specific actuarial methods of life insurance, as well as the calculation of the premium and the prospective reserve of a term insurance contract. In addition we will also review several methods of nonlife insurance. We will describe the individual and collective model and define the ruin probability according to the Cramer-Lundberg model. In the final and most important chapter we study via Monte Carlo Simulation most of the actuarial methods we presented in the preceding chapters. All simulations are performed using the statistical package R.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: Παραγωγή τυχαίων αριθμών- Προσομοίωση Monte Carlo

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Αρχές υπολογισμού ασφαλίστρων και μέτρων κινδύνου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Ασφαλίσεις Ζωής και Γενικές Ασφαλίσεις

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: Εφαρμογές

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η Αναλογιστική επιστήμη έχει μια ραγδαία εξέλιξη τις τελευταίες δυο δεκαετίες. Με τον όρο εξέλιξη εννοούμε την ανάπτυξη νέων μαθηματικών και οικονομικών μεθόδων καθώς και θεωριών, αλλά και την διεύρυνση του εύρους των εφαρμογών της. Μια ευρεία περιγραφή της Αναλογιστικής επιστήμης ως « Η ανάλυση των μελλοντικών απροβλέπτων» , αντικατοπτρίζει την αναγνώριση ότι ζούμε σε έναν στοχαστικό και γεμάτο κινδύνους κόσμο.

Η μέθοδος Monte Carlo εμφανίζεται σε πολλές εφαρμογές του Ασφαλιστικού και Χρηματοοικονομικού κλάδου. Σε πολλές περιπτώσεις είναι η μόνη εφικτή μέθοδος για την, έστω προσεγγιστική, επίλυση πρακτικών προβλημάτων. Η λογική της μεθόδου βασίζεται στην αναλογία μεταξύ της πιθανότητας να συμβεί κάποιο γεγονός και της έντασης με την οποία συμβαίνει. Ο νόμος των μεγάλων αριθμών εγγυάται ότι η εκτίμηση τείνει προς την σωστή τιμή καθώς το πλήθος των επαναλήψεων αυξάνεται.

Στον πυρήνα κάθε Monte Carlo μεθόδου βρίσκεται μια ακολουθία από φαινομενικά τυχαίους αριθμούς. Αυτοί οι (ψευδό-)τυχαίοι αριθμοί παρόλο που κατασκευάζονται σύμφωνα με έναν κανόνα, έχουν την εμφάνιση και την συμπεριφορά τυχαίων μεταξύ τους αριθμών. Στο πρώτο κεφάλαιο θα αναφερθούμε σε κάποιες μεθόδους παραγωγής τέτοιων (ψευδό-) τυχαίων αριθμών, καθώς και σε κάποια παραδείγματα παραγωγής τους από γνωστές κατανομές. Στην συνέχεια θα παρουσιάσουμε την μέθοδο της εκλέπτυνσης, η οποία χρησιμοποιείται για την παραγωγή τυχαίων αριθμών από μία μη ομογενή διαδικασία Poisson. Στο τέλος του κεφαλαίου θα περιγράψουμε την ίδια την μέθοδο Monte Carlo.

Στο δεύτερο κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με τις αρχές υπολογισμού ασφαλίστρων και τα μέτρα κινδύνου. Η αρχή υπολογισμού ασφαλίστρου αντιστοιχίζει στον κίνδυνο, έναν πραγματικό αριθμό που χρησιμοποιείται σαν οικονομική αποζημίωση για εκείνον τον αναλαμβάνει. Να επισημάνουμε ότι μιλάμε για καθαρά μαθηματικά ασφάλιστρα χωρίς να λαμβάνουμε υπόψιν μας αλλά έξοδα της ασφαλιστικής εταιρίας. Ο κίνδυνος που εμπεριέχεται στα συμβόλαια των ασφαλίσεων, σχετίζεται με το ενδεχόμενο, η αξία του συμβολαίου να είναι μικρότερη από την αναμενόμενη ζημία. Αντίστοιχα και στα μέτρα κινδύνου αντιστοιχίζουμε έναν πραγματικό αριθμό σε κάποιον κίνδυνο. Παραδείγματα τέτοιων κινδύνων είναι, οι χρηματοοικονομικοί κίνδυνοι όπως ο κίνδυνος μιας επένδυσης ή στον αναλογισμό, ο κίνδυνος του ασφαλίστρου, ο κίνδυνος του αποθέματος, ο κίνδυνος των καταστροφικών γεγονότων, ο κίνδυνος του επιτοκίου και πολλοί άλλοι. Αφού λοιπόν ορίσουμε τις αρχές υπολογισμού ασφαλίστρων και τα σημαντικότερα μέτρα κινδύνου και θα αναφερθούμε στις ιδιότητες που πρέπει αυτά να ικανοποιούν.

Στο τρίτο κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με τις ασφαλίσεις ζωής και γενικές ασφαλίσεις. Στις ασφαλίσεις ζωής έχουμε δυο βασικούς κινδύνους, τον κίνδυνο θνησιμότητας ή επιβίωσης (ανάλογα με το είδος του συμβολαίου) και τον κίνδυνο του επιτοκίου. Ο κίνδυνος του επιτοκίου σχετίζεται με τις μελλοντικές πληρωμές των υποχρεώσεων του ασφαλισμένου, των οποίων η παρούσα αξία δεν είναι σήμερα γνωστή επακριβώς. Με την σύναψη ενός τέτοιου συμβολαίου έχουμε λοιπόν «ανταλλαγή» πληρωμών. Η υποχρέωση της ασφαλιστικής εταιρίας είναι η αποζημίωση του πελάτη την χρονική στιγμή που θα οριστεί από το συμβόλαιο και η υποχρέωση του ασφαλισμένου είναι η πληρωμή των περιοδικών ασφαλίστρων. Θα παρουσιάσουμε λοιπόν τον υπολογισμό του αρχικού αποθέματος που πρέπει να κρατήσει η ασφαλιστική εταιρία για τις μελλοντικές υποχρεώσεις, αλλά και τη θεωρία υπολογισμού ασφαλίστρου ενός ασφαλιστήριου συμβολαίου ζωής.

Στην συνέχεια του τρίτου κεφαλαίου θα ασχοληθούμε με την θεωρία των γενικών ασφαλίσεων. Η μεταβολή των απαιτήσεων στις γενικές ασφαλίσεις μπορεί να είναι πολύ υψηλότερη από ό, τι στις ασφαλίσεις ζωής. Συνέπεια καταστροφικών γεγονότων είναι οι εμφάνιση ακραίων τιμών στις ζημιές. Τόσο η συχνότητα των καταστροφικών αυτών γεγονότων, όσο και οι οικονομικές συνέπειες δεν μπορούν να προβλεφθούν με την ίδια ευκολία όσο στις ασφαλίσεις ζωής λόγω της μη ισχύος του νόμου των μεγάλων αριθμών (π.χ. σε κατανομές με άπειρη μέση τιμή). Για τον λόγο αυτό η εκτίμηση της πιθανότητας χρεοκοπίας είναι ένα πολύ σημαντικό εργαλείο για τον κλάδο των γενικών ασφαλίσεων. Έτσι αρχικά θα παρουσιάσουμε το ατομικό και συλλογικό μοντέλο κινδύνου. Στο συλλογικό μοντέλο κινδύνου εξετάζουμε ένα χαρτοφυλάκιο συμβολαίων με βάση την διαδικασία με την οποία εμφανίζονται οι ζημιές μέσα στον χρόνο. Τα μεγέθη των ζημιών θεωρούμε πως είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές και ανεξάρτητες επίσης από το πλήθος τους. Στο μοντέλο συλλογικού κινδύνου θα παρουσιάσουμε μεθόδους υπολογισμού του αρχικού αποθέματος και της πιθανότητας χρεοκοπίας, σύμφωνα με το μοντέλο Cramer-Lundberg .

Στο τέταρτο και σημαντικότερο κεφάλαιο, θα παρουσιάσουμε κάποιες εφαρμογές των μεθόδων που παρουσιάστηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια, χρησιμοποιώντας το στατιστικό πακέτο R. Θα ξεκινήσουμε με την εκτίμηση ασφαλίστρων και μέτρων κινδύνου. Για την εκτίμηση των ασφαλίστρων, χρειάζεται αρχικά να προσομοιώσουμε το μέγεθος των ζημιών, μια αρκετά διαδεδομένη στην βιβλιογραφία κατανομή ζημιών είναι η λογαριθμοκανονική. Αντίστοιχα για τα μέτρα κινδύνου, χρειαζόμαστε την χρηματοοικονομική θέση του επενδυτή την οποία θα προσομοιώσουμε μέσω της κανονικής κατανομής.

Στην συνέχεια του τέταρτου κεφαλαίου επιχειρήσουμε να εκτιμήσουμε το καθαρό μαθηματικό απόθεμα ενός ασφαλιστηρίου συμβολαίου ζωής. Για να εκτιμήσουμε την υπολειπόμενη διάρκεια ζωής του ασφαλισμένου θα χρησιμοποιήσουμε την λογαριθμοκανονική κατανομή. Την προσομοίωση των επιτοκίων θα την κάνουμε σύμφωνα με το μοντέλο του Vasicek.

Στο τελευταίο μέρος του Κεφαλαίου 4, θα προσομοιώσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας σύμφωνα με το μοντέλο Cramer-Lundberg. Για ένα συγκεκριμένο ασφαλιστήριο συμβόλαιο, θα προσομοιώσουμε τους χρόνους των επικείμενων αποζημιώσεων, σύμφωνα με την μέθοδο της εκλέπτυνσης, από μια μη ομογενή ανέλιξη Poisson. Θα υπολογίσουμε την μεταβολή του αποθέματος για την χρονική διάρκεια μέχρι την λήξη του συμβολαίου και σύμφωνα με αυτήν θα υπολογίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας. Τέλος, θα αντιστρέψουμε τον προβληματισμό μας. Η ερώτηση δηλαδή που θέλουμε να απαντήσουμε είναι η επόμενη. Έστω ότι σύμφωνα με την ελεγκτική αρχή η πιθανότητα χρεοκοπίας πρέπει να είναι το πολύ ίση με $\hat{p}_{ruin}(T) =$

0.1 , ποια είναι η τιμή του αρχικού αποθέματος που πρέπει να κρατήσει η ασφαλιστική εταιρία ώστε να μπορεί να ανταπεξέλθει στις μελλοντικές της υποχρεώσεις; Με αυτήν την εφαρμογή κλείνουμε και το τελευταίο κεφάλαιο της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Κεφάλαιο 1 Παραγωγή τυχαίων αριθμών-Προσομοίωση Monte Carlo

Βασικό προαπαιτούμενο για κάθε προσομοίωση είναι η παραγωγή μιας ακολουθίας από φαινομενικά τυχαίους αριθμούς. Ο καλύτερος ίσως τρόπος για να παράγουμε τυχαίους αριθμούς είναι να χρησιμοποιήσουμε μια διαδικασία όπως, το ρίξιμο ενός ζαριού ή οι αριθμοί της κλήρωσης του Τζόκερ. Αλλά αυτός ο τρόπος δεν είναι ιδιαίτερα αποδοτικός, τώρα πια έχουν αναπτυχθεί μέθοδοι που δημιουργούν (ψευδό-)τυχαίους αριθμούς μέσω υπολογιστή. Στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιαστούν δύο μέθοδοι παραγωγής τέτοιων (φαινομενικά) τυχαίων αριθμών, καθώς και κάποια παραδείγματα παραγωγής τυχαίων αριθμών γνωστών κατανομών. Επίσης θα παρουσιαστεί και η μέθοδος της εκλέπτυνσης, η οποία χρησιμοποιείται για την παραγωγή τυχαίων αριθμών από μία μη ομογενή διαδικασία Poisson.

Στο δεύτερο μέρος του κεφαλαίου θα παρουσιάσουμε την μέθοδο Monte Carlo. Ιστορικά η μέθοδος αυτή έγινε ευρύτερα γνωστή από τους J. von Neumann και S. Ulam, σε μια έρευνα πάνω στις ατομικές βόμβες στον Δεύτερο Παγκόσμιο πόλεμο αλλά η ιδέα της προσομοίωσης είχε χρησιμοποιηθεί σε πολλές περιπτώσεις και παλαιότερα (χρησιμοποιώντας π.χ. τυχαία δειγματοληψία από κάλπη). Πήρε το κωδικό όνομα "Monte Carlo" από το γνωστό καζίνο, λόγο της συσχέτισης της με την τυχαιότητα και τον τζόγο. Η μέθοδος πρωτοεμφανίστηκε σε δημοσίευση στο περιοδικό Journal of the American Statistical Association, "The Monte Carlo Method" από τους Metropolis και Ulam. Η χρήση της μεθόδου από τότε έχει διευρυνθεί, καθώς χρησιμοποιείται ευρέως σε πολλούς κλάδους των οικονομικών, της μηχανικής, της αστροφυσικής, της βιολογίας, των εφαρμοσμένων μαθηματικών, της στατιστικής και πολλών άλλων.

1.1 Παράγωγη τυχαίων αριθμών

Οι τυχαίοι αριθμοί για την προσομοίωση Monte Carlo συνήθως παράγονται από αναδρομικούς αλγόριθμους. Αυτό σημαίνει ότι η ακολουθία των παραγόμενων αριθμών είναι ντετερμινιστική για αυτό τους αποκαλούμε και ψευδοτυχαίους αριθμούς. Αλλά εάν τους εξετάσουμε χωρίς να γνωρίζουμε πως παράγονται φαίνονται τυχαίοι και για πολλά στατιστικά τεστ συμπεριφέρονται σαν τυχαίοι αριθμοί. Όταν επιλέγουμε μια γεννήτρια τυχαίων αριθμών πρέπει να είμαστε σίγουροι ότι έχει ελεγχθεί και να γνωρίζουμε σε ποια τεστ έχει αποτύχει.

Στα πλαίσια αυτής της εργασίας δεν θα παρουσιάσουμε μεθόδους παραγωγής τυχαίων αριθμών από την ομοιόμορφη κατανομή ($U \sim U(0,1)$), αλλά θα χρησιμοποιήσουμε την εντολή της R `runif(n,min = 0,max = 1)` για την παραγωγή τυχαίων αριθμών από την ομοιόμορφη στο διάστημα $(0,1)$.

Παρακάτω θα παρουσιαστούν οι δυο πιο γνωστές μέθοδοι παραγωγής τυχαίων αριθμών, η μέθοδος της Αντιστροφής (ή αντίστροφου Μετασχηματισμού), και η μέθοδος της Αποδοχής-Απόρριψης. Για την μέθοδο της αντιστροφής θα μας χρειαστεί ο ορισμός της γενικευμένης αντιστρόφου μιας συνάρτησης κατανομής.

Ορισμός 1.1

Έστω $F(x)$ μια αθροιστική συνάρτηση κατανομής, η αντίστροφη συνάρτηση F^{-1} ορίζεται ως $F^{-1}(u) = \inf F^{-1}([u,1]) = \inf\{x: F(x) \in [u,1]\}, u \in [0,1]$.

1.2 Μέθοδος της αντιστροφής σε Διακριτές Κατανομές

Η κατανομή μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής X προσδιορίζεται από την συνάρτηση πιθανότητας

$$p_j = \Pr(X = x_j), j = 0,1,2, \dots , \qquad \sum_j p_j = 1 .$$

Για να παράγουμε τυχαίους αριθμούς από την κατανομή της X, χρησιμοποιούμε τυχαίους αριθμούς από την U, η οποία είναι ομοιόμορφη διακριτή στο (0,1), θέτοντας

$$X = \begin{cases} x_0 & \alpha\nu \ \ U < p_0 , \\ & \vdots \\ x_j & \alpha\nu \ \ \sum_{i=1}^{j-1} p_i \le U < \sum_{i=1}^{j} p_i \ , \\ & \vdots \end{cases}$$

Η νέα τυχαία μεταβλητή X θα έχει συνάρτηση πιθανότητας $\{p_0, p_1, \dots\}$. Πράγματι,

$$\Pr(X = x_j) = \Pr\left(\sum_{i=0}^{j-1} p_i \le U < \sum_{i=0}^{j} p_i\right) = p_j , \qquad j = 0,1 \dots$$

Εάν θεωρήσουμε ότι $x_0 < x_1 < x_2 < \dots$, η αντίστοιχη συνάρτηση κατανομής στα σημεία $\{x_0, x_1, \dots\}$ θα είναι

$$F(x_k) = \Pr(X \le x_k) = \sum_{i=0}^{k} \Pr(X = x_i) = \sum_{i=0}^{k} p_i \ , k = 0,1, \dots$$

Σε αυτήν την περίπτωση μπορούμε να πούμε ότι η X παράγεται από την U ως εξής :

$$X = \{x_k : F(x_{k-1}) \le U < F(x_k)\} \quad \acute{\eta} \quad X = \{x_k : F(x_{k-1}) < U \le F(x_k)\}$$

όπου από σύμβαση, $F(x_{-1}) = 0$.

Από τον ορισμό της γενικευμένης αντιστροφής συνάρτησης μιας σ.κ. F, αποδεικνύεται ότι $X = F^{-1}(U)$ (εάν $X = \{x_k : F(x_{k-1}) < U \le F(x_k)\}$) και για αυτό τον λόγο η μέθοδος καλείται μέθοδος της αντιστροφής.

Αλγόριθμος **Μεθόδου Αντιστροφής για διακριτή κατανομή**

1. Παράγουμε έναν τυχαίο αριθμό $U \sim U(0,1)$
2. Αν $U < p_0$ τότε θέτουμε $X = x_0$ και σταματάμε, αλλιώς πάμε στο επόμενο βήμα
3. Αν $U < p_0 + p_1$ τότε θέτουμε $X = x_1$ και σταματάμε, αλλιώς πάμε στο επόμενο βήμα

κ.ο.κ.

1.3 Παραδείγματα της Μεθόδου της αντίστροφης σε γνωστές Διακριτές Κατανομές

Γεωμετρική κατανομή $(\mathbf{Ge}(\mathbf{p}))$

Η σ.π.π. είναι $p_i = \Pr(X = i) = pq^{i-1}$, $i = 1,2, \dots$ όπου $q = 1 - p$ και η σ.κ.

$$F(k) = \sum_{i=1}^{k} p_i = \sum_{i=1}^{k} pq^{i-1} = p \sum_{i=1}^{k} q^i = p \frac{1 - q^k}{1 - q} = 1 - q^k.$$

Δεδομένου ενός τυχαίου αριθμού $U \sim \mathrm{U}(0,1)$ θα έχουμε

$$X = \{k \geq 1 : 1 - q^{k-1} \leq U < 1 - q^k\}.$$

Η μέθοδος αυτή απαιτεί κατά μέσο όρο $E(N) = \sum_{i=1}^{\infty} ip_i = \frac{1}{p}$ βήματα. Ένας άλλος απλούστερος τρόπος παραγωγής τυχαίων αριθμών από την γεωμετρική πραγματοποιείται θέτοντας

$$X = \left\lfloor \frac{\ln U}{\ln q} \right\rfloor + 1.$$

Πράγματι, η νέα τ.μ. X ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή με παράμετρο p διότι

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P\left(\left\lfloor \frac{\ln U}{\ln q} \right\rfloor = k - 1\right) = P\left(k - 1 \leq \frac{\ln U}{\ln q} < k\right) \\ &= P(k \ln q < \ln U \leq (k-1) \ln q) = P\left(q^k < U \leq q^{k-1}\right) = q^{k-1} - q^k = pq^{k-1} \end{aligned}$$

Αλγόριθμος **Μεθόδου Αντιστροφής για την Γεωμετρική Ge(p)**

1. Παράγουμε έναν τυχαίο αριθμό $U \sim U(0,1)$
2. Θέτουμε $\mathrm{X} = \left\lfloor \frac{\ln \mathrm{U}}{\ln \mathrm{q}} \right\rfloor + 1$

Στην R η εντολή που παράγει τυχαίους αριθμούς από την γεωμετρική κατανομή είναι η `rgeom(n,prob)` από το πακέτο `{stats}`.

Κατανομή Poisson ($\boldsymbol{Po(\lambda)}$)

Η σ.π.π. είναι $p_i = \Pr(X = i) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}$, $i = 0,1,2,\ldots$

Αλγόριθμος **Μεθόδου Αντιστροφής για την Poisson (Po(λ))**

1. Παράγουμε έναν τυχαίο αριθμό $U \sim U(0,1)$
2. Αν $U < e^{-\lambda}$ τότε θέτουμε $X = 0$ και σταματάμε, αλλιώς πάμε στο επόμενο βήμα
3. Αν $U < e^{-\lambda} + e^{-\lambda}\frac{\lambda}{1!}$ τότε θέτουμε $X = 1$ και σταματάμε, αλλιώς πάμε στο επόμενο βήμα κ.ο.κ.

Επειδή όμως ο προσθετέος $e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}$ μπορεί να προκαλέσει προβλήματα στην μηχανή αριθμητικών πράξεων του προγράμματος που χρησιμοποιούμε, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον παρακάτω αναδρομικό τύπο.

Επειδή $p_{i+1} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^{i+1}}{(i+1)!} = \frac{\lambda}{i+1}e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} = \frac{\lambda}{i+1}p_i$, ο παραπάνω αλγόριθμος γίνεται:

Αλγόριθμος **Μεθόδου Αντιστροφής για την Poisson (Po(λ))**

1. Παράγουμε έναν τυχαίο αριθμό $U \sim U(0,1)$
2. Θέτουμε $p = e^{-\lambda}, F = p, i = 0$.
3. Αν $U < F$ τότε θέλουμε $X = i$ και σταματάμε.
4. Θέτουμε $p = p\frac{\lambda}{i+1}, F = F + p, i = i + 1$ και επιστρέφουμε στο 3.

Στην R η εντολή που παράγει τυχαίους αριθμούς από την Poisson κατανομή είναι η `rpois(n,lambda)` από το πακέτο `{stats}`.

1.4 Μέθοδος της αντίστροφης σε Συνεχείς Κατανομές

Στην περίπτωση που η F είναι αντιστρέψιμη, δηλαδή συνεχής και γνησίως αύξουσα, και γνωρίζοντας ότι η συνάρτηση κατανομής F είναι δεξιά συνεχής, ο ορισμός της αντιστρόφου γίνεται:

$$F^{-1}(u) = \min\{x: F(x) \in [u, 1]\}$$

Η μέθοδος της αντιστροφής, είτε για διακριτές είτε για συνεχείς τ.μ., βασίζεται στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση1.1 Αν $U \sim U(0,1)$ και F είναι μια οποιαδήποτε συνάρτηση κατανομής, τότε η τυχαία μεταβλητή $X = F^{-1}(U)$ έχει συνάρτηση κατανομής F.

Απόδειξη. Η συνάρτηση κατανομής της τ.μ. X είναι ίση με

$$P(X \le x) = P(F^{-1}(U) \le x) = P(\inf\{t: F(t) \ge U\} \le x)$$

αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει η ισοδυναμία $\inf\{t: F(t) \ge U\} \le x \iff U \le F(x)$.

$(\Longrightarrow)$ $\inf\{t: F(t) \geq U\} \leq x \;\Rightarrow\; \exists t_0 \leq x: F(t_0) \geq U$ και επειδή $F(t_0) \leq F(x) \Rightarrow F(x) \geq U$

$(\Longleftarrow)$ $F(x) \geq U \;\Rightarrow x \in \{t: F(t) \geq U\} \Rightarrow x \geq \inf\{t: F(t) \geq U\}$

Άρα τελικά $P(X \leq x) = P(F^{-1}(U) \leq x) = P\big(U \leq F(x)\big) = F(x)$

Η μέθοδος της αντιστροφής για την παραγωγή τυχαίων αριθμών από μια κατανομή με συνάρτηση κατανομής F, περιγράφεται από τον παρακάτω αλγόριθμο.

Αλγόριθμος **Μεθόδου Αντιστροφής**

1. Παράγουμε έναν τυχαίο αριθμό $U \sim U(0,1)$
2. Θέτουμε $X = F^{-1}(U)$

Σε αρκετές περιπτώσεις δεν θα είναι εύκολο να βρούμε άμεσα την γενικευμένη αντίστροφη $F^{-1}(U)$.

Για μεγαλύτερη ανάλυση της θεωρίας της μεθόδου της αντίστροφης βλ. π.χ. Μπούτσικα (2004), Chan and Wong (2006), ή Martin Haugh (2004).

1.5 Παραδείγματα της Μεθόδου της αντίστροφης σε γνωστές Συνεχείς Κατανομές

Σε αυτήν την ενότητα θα δώσουμε κάποια παραδείγματα της Μεθόδου της Αντιστροφής σε ορισμένες βασικές συνεχείς κατανομές όπως η Εκθετική, αλλά και κάποιες κατανομές που χρησιμοποιούνται περισσότερο στα Οικονομικά και τον Αναλογισμό, όπως η Pareto και η Weibull.

Εκθετική κατανομή $\boldsymbol{Exp(\lambda)}$

Αν μια τ.μ. X ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda > 0$, τότε η σ.π.π. και η σ.κ. είναι αντίστοιχα,

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \;, \qquad F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, x > 0\,.$$

Η F είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση στο $(0, \infty)$ και ειδικότερα,

$$F(x) = u \Leftrightarrow\; 1 - e^{-\lambda x} = u \;\Leftrightarrow\; e^{-\lambda x} = 1 - u \;\Leftrightarrow x = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-u).$$

και άρα εάν $U \sim U(0,1)$, η τ.μ. $X = F^{-1}(U) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)$.

Επειδή και η $1 - U \sim U(0,1)$ όταν $U \sim U(0,1)$, θα μπορούσαμε να θέσουμε $X = -\lambda^{-1}\ln U$.

Στην R η εντολή που παράγει τυχαίους αριθμούς από την εκθετική κατανομή είναι η `rexp(n, rate = 1)` από το πακέτο `{stats}`.

Κατανομή Pareto $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

Αν μια τ.μ. X ακολουθεί την κατανομή Pareto με παραμέτρους $\alpha, b > 0$, τότε έχει σ.π.π και σ.κ. αντίστοιχα,

$$f(x) = \frac{ab^a}{x^{a+1}} \text{ και } F(x) = 1 - \left(\frac{b}{x}\right)^a, \; x \geq 0.$$

Η F είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση στο $(0, \infty)$, ειδικότερα,

$$F(x) = u \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{b}{x}\right)^a = u \Leftrightarrow \left(\frac{b}{x}\right)^a = 1 - u \Leftrightarrow \frac{b}{x} = (1-u)^{1/a} \Leftrightarrow x = \frac{b}{(1-u)^{1/a}}$$

και άρα εάν $U \sim U(0,1)$, η τ.μ. $X = F^{-1}(U) = \frac{b}{(1-U)^{1/a}}$ ακολουθεί την κατανομή Pareto.

Επειδή και η $1 - U \sim U(0,1)$ όταν $U \sim U(0,1)$, θα μπορούσαμε να θέσουμε $X = \frac{b}{U^{1/a}}$.

Στην R η εντολή που παράγει τυχαίους αριθμούς από την κατανομή Pareto είναι η `rpareto(n, shape, scale)` από το πακέτο `{actuar}`.

Κατανομή Weibull $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

Αν μια τ.μ. X ακολουθεί την κατανομή Weibull με παραμέτρους $\alpha, b > 0$, τότε έχει σ.π.π και σ.κ. αντίστοιχα,

$$f(x) = abx^{b-1} \exp\{-ax^b\} \text{ και } F(x) = 1 - \exp\{-ax^b\}, \; x \geq 0 .$$

Η F είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση στο $(0, \infty)$,

$$F(x) = u \Leftrightarrow 1 - \exp\{-ax^b\} = u \Leftrightarrow \exp\{-ax^b\} = 1 - u$$
$$\Leftrightarrow -ax^b = \ln(1-u) \Leftrightarrow x = \left(-\frac{\ln(1-u)}{a}\right)^{1/b}$$

και άρα εάν $U \sim U(0,1)$, η τ.μ. $X = F^{-1}(U) = \left\{-\frac{\ln(1-U)}{a}\right\}^{1/b}$ ακολουθεί την κατανομή Weibull.

Στην R η εντολή που παράγει τυχαίους αριθμούς από την κατανομή Weibull είναι η `rweibull(n, shape, scale = 1)` από το πακέτο `{stats}`.

Σε πολλές περιπτώσεις όμως, το να υπολογίσουμε την αντίστροφη συνάρτηση κατανομής δεν είναι εύκολο ή ακόμα είναι και αδύνατο. Σε αυτές τις περιπτώσεις μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια προσεγγιστική μέθοδο όπως αυτήν της Απόρριψης.

1.6 Μέθοδος της Απόρριψης σε Διακριτές Κατανομές

Η μέθοδος της απόρριψης παρουσιάστηκε πρώτη φορά από τον Von Neumann. Με την μέθοδο αυτήν μπορούμε να παράγουμε τυχαίους αριθμούς από μια κατανομή, εάν πρώτα παράγουμε τυχαίους αριθμούς από κάποια άλλη κατανομή που ήδη γνωρίζουμε και στην συνέχεια απορρίψουμε κάποιους από αυτούς σύμφωνα με κάποιον μηχανισμό απόρριψης. Ο μηχανισμός αυτός έχει κατασκευαστεί με κατάλληλο τρόπο, ώστε οι τυχαίοι αριθμοί που παράγουμε να ακολουθούν όντως την κατανομή που θέλουμε.

Συγκεκριμένα, έστω ότι θέλουμε να παράγουμε τυχαίου αριθμό X από μια κατανομή με σ.π. $p_i = \Pr(X = i)\,, i = 0,1,\ldots$. Παράγουμε πρώτα τυχαίο αριθμό Y από μια γνωστή κατανομή με σ.π. $q_i = \Pr(Y = i)\,, i = 0,1,\ldots$ και στην συνέχεια αποδεχόμαστε την τιμή της Y, δηλαδή θέτουμε $X = Y$, με πιθανότητα p_Y/q_Y .

Αναλυτικότερα, εάν υπάρχει σταθερός αριθμός $c < \infty$ τετοιος ώστε

$$\frac{p_i}{q_i} \le c \ \ \forall\, i,$$

ο αλγόριθμος απόρριψης περιγράφεται στον παρακάτω πίνακα.

Αλγόριθμος **Μέθοδος της Απόρριψης**

1. Παράγουμε έναν τυχαίο αριθμό Y με σ.π. $\{q_i\,,\ i = 0,1,\ldots\}$
2. Παράγουμε έναν τυχαίο αριθμό $U \sim U(0,1)$
3. Εάν $U < p_Y/(cq_Y)$, θέτουμε $X = Y$, αλλιώς επιστρέφουμε στο βήμα 1.

1.7 Μέθοδος της Απόρριψης σε Συνεχείς Κατανομές

Αντίστοιχα με την περίπτωση των διακριτών τ.μ. η μέθοδος έχει την παρακάτω μορφή.

Έστω ότι θέλουμε να παράγουμε τυχαίους αριθμούς X από μια κατανομή με σ.π.π. $f(x)\ \mu\varepsilon\ x \in \mathbb{R}$. Παράγουμε τυχαίους αριθμούς Y από μια γνωστή κατανομή με σ.π.π. $g(x)\ \mu\varepsilon\ x \in \mathbb{R}$ και στην συνέχεια αποδεχόμαστε την τιμή της Y, δηλαδή θέτουμε $X = Y$, με πιθανότητα $f(Y)/g(Y)$.

Αναλυτικότερα, εάν υπάρχει σταθερός αριθμός $c < \infty$ τετοιος ώστε

$$\frac{f(x)}{g(x)} \le c \ \ \forall\, x{:}\ g(x) \neq 0\,,$$

ο αλγόριθμος απόρριψης περιγράφεται στον παρακάτω πίνακα.

Αλγόριθμος **Μέθοδος της Απόρριψης**

1. Παράγουμε έναν τυχαίο αριθμό Y με σ.π.π $g(x)$
2. Παράγουμε έναν τυχαίο αριθμό $U \sim U(0,1)$
3. Εάν $U \le f(Y)/(cg(Y))$, θέτουμε $X = Y$, αλλιώς επιστρέφουμε στο βήμα 1.

Για μεγαλύτερη ανάλυση της θεωρίας της μεθόδου της απόρριψης και περισσότερα παραδείγματα βλ. π.χ. Μπούτσικα (2004), Chan and Wong (2006) και McLeish (2004).

Είδαμε κάποια παραδείγματα παραγωγής τυχαίων αριθμών στις προηγούμενες παραγράφους. Στον παρακάτω πίνακα μπορούμε να δούμε τις πιο γνωστές εντολές παραγωγής τυχαίων αριθμών της R.

Κατανομή	**Εντολή παραγωγής τυχαίων αριθμών**
Κανονική	`rnorm(n, mean = 0, sd = 1)`
Εκθετική	`rexp(n, rate = 1)`
Ομοιόμορφη	`runif(n, min = 0, max = 1)`
Γάμμα	`rgamma(n,shape,rate=1,scale= 1/rate)`
Poisson	`rpois(n, lambda)`
Pareto	`rpareto(n, shape, scale)`
Weibull	`rweibull(n, shape, scale = 1)`
Λογαριθμοκανονική	`rlnorm(n,meanlog = 0, sdlog = 1)`

1.8 Μέθοδος εκλέπτυνσης της μη ομογενούς διαδικασίας Poisson

Στην συνέχεια θα παρουσιάσουμε και την μέθοδο της εκλέπτυνσης για την παραγωγή μιας διαδρομής μιας μη ομογενούς διαδικασίας Poisson.

Μια στοχαστική διαδικασία $N(t)$ καλείται μη-ομογενής ανέλιξη Poisson με συνάρτηση έντασης $\lambda(t) \geq 0, t \geq 0$, εάν η $N(t)$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις με:

1. $N(0) = 0$
2. $\Pr(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h)$
3. $\Pr(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$

όπου: $\lim\limits_{h \to 0^+} \frac{o(h)}{h} = 0$ (π.χ. βλ. Ross (2010)).

Στον παρακάτω πίνακα περιγράφουμε τον αλγόριθμο για την παραγωγή τυχαίων αριθμών από μια μη-ομογενή ανέλιξη Poisson.

Αλγόριθμος **Μέθοδος εκλέπτυνσης για την μη-ομογενή Poisson**
1. Θέτουμε $t_0 = 0 = \hat{t}\,, \bar{\lambda} = max\{\lambda_t \mid 0 \leq t \leq T\}$ 2. Όσο ισχύει ότι $t_i < T$ Παράγουμε έναν τυχαίο αριθμό $Z \sim Exp(\bar{\lambda})\,, U \sim U(0,1)$. Θέτουμε $\hat{t} = \hat{t} + Z$. Εάν $U \leq \lambda(\hat{t})/\bar{\lambda}$ τότε $t_i = \hat{t}\,, i = i+1$,αλλιώς επιστρέφουμε στο βήμα 2

Για περισσότερη ανάλυση σχετικά με την μέθοδο και τις εφαρμογές τις βλ. Iacus (2011).

1.9 Μέθοδος Monte Carlo

Η μέθοδος Monte Carlo βασίζεται στον, γνωστό από τις πιθανότητες, νόμο των μεγάλων αριθμών. Η λογική της μεθόδου είναι η προσομοίωση μιας τυχαίας μεταβλητής X με την χρήση πολλών, ανεξάρτητων μεταξύ τους, επαναλήψεων και στην συνέχεια υπολογισμό της μέση τιμής αυτών των τυχαίων αριθμών ως εκτίμηση της μέσης τιμής της X. Όσο περισσότερες επαναλήψεις έχουμε τόσο πιο κοντά στην πραγματική τιμή της $E(X)$ θα είναι η εκτίμηση μας.

Θεώρημα 1.1 Νόμος των μεγάλων αριθμών

Έστω X_n , $n \in \mathbb{N}$ μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών, όπου οι $X_n \in \mathbb{R}$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές. Επίσης, έστω $\mu = E(X_1)$, τότε ισχύει ότι:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{n\to\infty} \mu$$

(με πιθανότητα 1) όπου μ είναι η θεωρητική μέση τιμή των τυχαίων μεταβλητών $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Άρα ο αριθμητικός μέσος των $X_1, X_2, \dots, X_n$ τείνει στην θεωρητική μέση τιμή μ .

Στον παρακάτω πίνακα περιγράφεται ο αλγόριθμος της μεθόδου.

Αλγόριθμος **Μέθοδος Monte Carlo**

1. Παράγουμε $n \in \mathbb{N}$ τυχαίες μεταβλητές $X_i, i = 1,2, \dots, n$, ανεξάρτητες μεταξύ τους και ισόνομες με μια τυχαία μεταβλητή X.
2. Εκτιμούμε την $E(X)$ από τον αριθμητικό μέσο $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Υπάρχουν τρόποι βελτίωσης του αλγορίθμου, μειώνοντας την διασπορά των εκτιμήσεων μας, τους οποίους δεν θα αναλύσουμε στην παρούσα εργασία.

Στα επόμενα κεφάλαια θα παρουσιάσουμε εφαρμογές της παραπάνω εκτίμησης σε συγκεκριμένες αναλογιστικές εφαρμογές.

Κεφάλαιο 2
Αρχές υπολογισμού ασφαλίστρων και μέτρων κινδύνου

Θεμελιώδες πρόβλημα των ασφαλιστικών εταιριών αποτελεί ο κίνδυνος που εμπεριέχεται στα συμβόλαια των ασφαλίσεων. Ο κίνδυνος αυτός σχετίζεται με το ενδεχόμενο, η αξία του συμβολαίου να είναι μικρότερη από την αναμενόμενη ζημία. Μπορούμε να υπολογίσουμε την αξία του συμβολαίου χρησιμοποιώντας παρόμοιες μεθόδους με αυτές που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό άλλων κινδύνων. Θεωρούμε ότι ο κίνδυνος X είναι αντίθετος του κέρδους (αν Y είναι το κέρδος, τότε ο κίνδυνος είναι $X = -Y$ ή $X = \max\{0, -Y\}$).

Τα μέτρα κινδύνου εφαρμόζονται σε χρηματοοικονομικές θέσεις για έναν χρονικό ορίζοντα T. Χρησιμοποιούνται για να ποσοτικοποιήσουμε τους χρηματοοικονομικούς κινδύνους οι οποίοι μπορεί να πάρουν και θετικές και αρνητικές τιμές, σε αντίθεση με τον ασφαλιστικό κίνδυνο όπου ορίζεται στους μη αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε πρώτα με τις αρχές υπολογισμού ασφαλίστρων και στην συνέχεια με τα μέτρα κινδύνου.

2.1 Ιδιότητες των Ασφαλίστρων (Premium)

Αρχικά θα αναφερθούμε σε κάποιες από τις ιδιότητες που μπορεί να ικανοποιούν οι αρχές υπολογισμού ασφαλίστρων. Να τονίσουμε ότι οι παρακάτω ιδιότητες δεν είναι υποχρεωτικό να ισχύουν για όλα τα ασφάλιστρα. Στην εργασία των Laeven and Goovaerts (2008), αναφέρονται πολλές περισσότερες ιδιότητες.

Στη συνέχεια θεωρούμε ότι έχουμε δυο κινδύνους X, Y .

Ιδιότητες:

1. Μη αρνητικό περιθώριο ασφάλειας (Nonegative safety loading)

$$\pi[X] \geq E[X]$$

Δηλαδή, απαιτείται το ασφάλιστρο να μην είναι μικρότερο από τις αναμενόμενες ζημίες. Αυτή η ιδιότητα μπορεί να είναι απλή, αλλά πολύ βασική για την επιλογή του ασφαλίστρου που θα θέλαμε να χρησιμοποιήσουμε.

2. Προσθετικότητα (Additivity)

$$\pi[X + Y] = \pi[X] + \pi[Y]$$

όπου X, Y δυο ανεξάρτητοι μεταξύ τους κίνδυνοι. Σύμφωνα με αυτήν την ιδιότητα τα ασφάλιστρα ενός χαρτοφυλακίου δυο κινδύνων, θα είναι ίσα με τα ασφάλιστρα εάν αναλάβουμε τους δυο κινδύνους ξεχωριστά.

3. Υποπροσθετικότητα (Subadditivity)

$$\pi[X+Y] \leq \pi[X] + \pi[Y]$$

Αυτή είναι μια επέκταση της Ιδιότητας 2 και σύμφωνα με αυτήν δεν θα πρέπει να είναι προτιμότερο να χωρίσουμε τους δυο κινδύνους. Αυτή η ιδιότητα δεν υποθέτει κάποια σχέση ανάμεσα στους κινδύνους.

4. Συνοχή (Translation invariance)

$$\pi[X+c] = \pi[X] + c\,, \qquad c \in \mathbb{R}$$

Δηλαδή εάν έχουμε αύξηση του κινδύνου κατά ένα σταθερό αριθμό c , θα πρέπει να έχουμε ισόποση αύξηση του ασφαλίστρου.

5. Θετική ομοιογένεια (Positive homogeneity)

$$\pi[aX] = a\,\pi[X]\,, \qquad a \geq 0$$

Αντίστοιχα με την προηγούμενη ιδιότητα, εάν πολλαπλασιάσουμε με έναν σταθερό μη αρνητικό αριθμό τον κίνδυνο, τότε και το ασφάλιστρο θα πολλαπλασιαστεί με τον ίδιο αριθμό.

6. Μονοτονία (Monotonicity)

$$\pi[X] \leq \pi[X+Y]$$

Για ένα ασφάλιστρο $\pi[X]$ που ικανοποιεί την ιδιότητα της μονοτονίας, εάν αυξήσουμε τον κίνδυνο τότε θα πρέπει να αυξηθεί και η τιμή του ασφαλίστρου.

7. Κυρτότητα (Convexity)

Το $\pi[X]$ είναι μια κυρτή συνάρτηση εάν ισχύει

$$\pi[\alpha X + (1-\alpha)Y] \leq \alpha\,\pi[X] + (1-\alpha)\pi[Y]\,, \text{όπου } \alpha \in (0,1)$$

Παρατηρούμε ότι η ιδιότητα της κυρτότητας ισοδυναμεί με τις ιδιότητες της θετικής ομοιογένειας και της προσθετικότητας.

8. Μέγιστης ζημίας (No rip-off)

$$\pi[X] \leq sup\, X(\omega)\,, \omega \in \Omega$$

Βασική ιδιότητα ώστε το ασφάλιστρο να είναι ρεαλιστικό (και δίκαιο), προϋποθέτει το ασφάλιστρο να μην κοστίζει περισσότερο από την μέγιστη δυνατή ζημιά.

9. Επαναληψιμότητα (Iterativity)

$$\pi[X] = \pi[\pi[X|Y]]\text{, για κάθε } X, Y$$

Σύμφωνα με αυτήν την ιδιότητα μπορούμε να υπολογίσουμε το ασφάλιστρο $\pi[X]$, υπολογίζοντας πρώτα το ασφάλιστρο για την δέσμευση του κινδύνου X , δεδομένου $Y = y$. Το ασφάλιστρο $\pi[X|Y]$ είναι μια συνάρτηση του y. Και στην συνέχεια σε δεύτερο βήμα υπολογίζουμε το $\pi[\pi[X|Y]]$.

2.2 Παραδείγματα υπολογισμού ασφαλίστρων (Premium principles)

Στην αξία ενός συμβολαίου συνήθως προστίθενται και αλλά ποσά που χρειάζονται για να καλύψουν την λειτουργία της ασφαλιστικής εταιρίας, αλλά και αλλά έξοδα. Δεν αρκεί απλά η μέση ζημιά να μην ξεπερνάει το ασφάλιστρο. Στην συνέχεια όμως αυτής της εργασίας θα ασχοληθούμε με το καθαρά μαθηματικό ασφάλιστρο (premium).

Επίσης σε ένα χαρτοφυλάκιο συμβολαίων, η εξάρτηση μεταξύ τους παίζει σημαντικό ρόλο στον υπολογισμό του κινδύνου, αλλά προς το παρόν θα υποθέσουμε ανεξαρτησία.

Ορισμός 2.1 Έστω (Ω, F, P) ένας χώρος πιθανότητας. Θεωρούμε ότι ο κίνδυνος X είναι μια θετική τυχαία μεταβλητή που ανήκει στον χώρο (Ω, F, P). Τότε η συνάρτηση $p(.)$ που ορίζεται στον χώρο των κινδύνων X, λέγεται αρχή υπολογισμού ασφαλίστρων (premium principle).

Στην βιβλιογραφία έχουν προταθεί πολλές διαφορετικές αρχές υπολογισμού ασφαλίστρων. Μια εκτενής επισκόπηση παρατίθεται στην εργασία των Goovaerts and Laeven (2008). Κάποιες από αυτές τις αρχές θα αναφέρουμε παρακάτω.

Ορισμός 2.2 (net premium) Το καθαρό ασφάλιστρο ισούται απλά με την αναμενομένη τιμή του κινδύνου X,

$$\pi[X\ ] = E[X]$$

Αυτός ο απλουστευμένος υπολογισμός προϋποθέτει ότι ο ασφαλιστής είναι ουδέτερος απέναντι στον κίνδυνο (risk free).

Ορισμός 2.3 (Expected value principle) Η αρχή της αναμενόμενης τιμής δίνεται από τον τύπο

$$\pi[X] = (1 + \lambda)E[X]\,, \qquad \lambda \geq 0$$

Εάν $\lambda = 0$, τότε η σχέση απλουστεύεται και καταλήγουμε πάλι στο καθαρό ασφάλιστρο. Ένα μειονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι δεν λαμβάνει καθόλου υπόψιν την διακύμανση του κινδύνου X.

Ορισμός 2.4 (Variance Principle) Η αρχή της διακύμανσης δίνεται από τον τύπο

$$\pi[X] = E[X] + \lambda\, Var[X]\,, \qquad \lambda > 0$$

Αντίθετα από την αρχή της αναμενομένης τιμής, η οποία λαμβάνει υπόψιν της μόνο την αναμενομένη τιμή, η αρχή της διακύμανσης λαμβάνει υπόψιν της και την διακύμανση του κινδύνου X.

Ορισμός 2.5 (Standard Deviation Principle). Η αρχή της τυπικής απόκλισης είναι παρόμοια με την αρχή της διακύμανσης και δίνεται από τον τύπο

$$\pi[X] = E[X] + \lambda\, \sigma[X]\,, \qquad \lambda > 0$$

Ορισμός 2.6 (Exponential Principle). Η εκθετική αρχή δίνεται από τον τύπο

$$\pi[X] = \frac{1}{\lambda}\log E[\exp(\lambda X)]\ , \qquad \lambda > 0$$

Ορισμός 2.7 (Semistandard Deviation Principle). Σύμφωνα με την αρχή της ημιτυπικής απόκλισης έχουμε,

$$\pi[X] = E[X] + \mu\sqrt{E\left\{\left[max\big(0, X - E(X)\big)\right]^2\right\}}\ , \qquad 0 \le \mu \le 1$$

Ορισμός 2.8 (Expected Utility Principle). Υποθέτουμε την συνάρτηση ωφελιμότητας $u(x)$ με $u'(x)$ και $u''(x) < 0$. Η αρχή της αναμενομένης ωφελιμότητας δίνεται από τον τύπο

$$u(c) = E[u(c - X + \pi[X])]\,, c > 0$$

Σημείωση: Εάν θέσουμε $c = 0$ τότε θα έχουμε την αρχή της μηδενικής ωφελιμότητας

$$u(0) = E[u(\pi[X] - X)]$$

Σύμφωνα με την αρχή της μηδενικής ωφελιμότητας το ασφάλιστρο ορίζεται με τέτοιον τρόπο ώστε να είναι «αδιάφορο» εάν θα εκδοθεί το συμβόλαιο ή όχι (βλ. Dickson (2005)).

2.3 Ιδιότητες των μέτρων κινδύνου (Risk measures)

Αρχικά θα δώσουμε ένα γενικό ορισμό του τι είναι ένα μέτρο κινδύνου, για να μπορέσουμε να κατανοήσουμε παρακάτω τις ιδιότητες.

Συμφώνα με τους Follmer and Schied (2002), ένα μέτρο κινδύνου είναι η ελάχιστη ποσότητα κεφαλαίου που χρειαζόμαστε, ώστε εάν προστεθεί με την θέση μας και το επενδύσουμε (risk free), η θέση μας θα είναι αποδεκτή.

Ορισμός 2.9 Μέτρο κινδύνου είναι μια απεικόνιση από των χώρο των τυχαίων μεταβλητών στους πραγματικούς.

Επειδή αυτός ως ορισμός είναι πολύ γενικός, παρακάτω θα αναφερθούμε σε κάποιες ιδιότητες που είναι επιθυμητό να έχουν τα μέτρα κινδύνου. Δεδομένου ότι πολλές από τις ιδιότητες αυτές είναι παρόμοιες με αυτές που αναφέραμε παραπάνω για τον υπολογισμό τον ασφαλίστρων, θα αναφερθούμε ενδεικτικά σε κάποιες που χρησιμοποιούνται πιο συχνά στην βιβλιογραφία. Στη συνέχεια θα συμβολίζουμε με $\tilde{X}$ τη θέση (ή απλούστερα το κέρδος από τη θέση) ενός επενδυτή. Ο αντίστοιχος κίνδυνος είναι $X = -\tilde{X}$.

Ιδιότητες:

1.***Θετική ομοιογένεια***

$$p(\lambda\tilde{X}) = \lambda p(\tilde{X}),\forall\, \lambda \geq 0$$

Συμφώνα με την ιδιότητα αυτήν, ο κίνδυνος αυξάνεται γραμμικά με την αύξηση της θέσης που κατέχει ο επενδυτής. Αυτή η ιδιότητα έχει αμφισβητηθεί από πολλούς καθώς δεν ισχύει για κάποιους κινδύνους. Ουσιαστικά λέει ότι εάν επενδυτής αποφασίσει να επενδύσει όλα του τα λεφτά σε μια επένδυση ή τα σπάσει σε πολλές, θα έχει αναλάβει τον ίδιο κίνδυνο . Άρα δεν λαμβάνει υπόψιν του τον κίνδυνο συγκέντρωσης.

2.***Συνοχή***

$$p(\tilde{X} + k) = p(\tilde{X}) - k,\forall\, k \in \mathbb{R}$$

Αντίστοιχα με την εξήγηση που είχαμε δώσει και στον υπολογισμό ασφαλίστρων, η οποιαδήποτε αύξηση στην αξία της θέσης του επενδυτή ισοδυναμεί με ισοδύναμη αύξηση του κινδύνου. Μπορούμε να δούμε ότι εάν αυξήσουμε την επένδυση μας κατά $k = p(\tilde{X})$, τότε $p(\tilde{X} + p(\tilde{X})) = p(\tilde{X}) - p(\tilde{X}) = 0$ θα έχουμε $p(\tilde{X} + p(\tilde{X})) = 0$, δηλαδή θα πάρουμε ουδέτερη θέση.

*3.**Μονοτονία***

$$\tilde{X} \geq \tilde{Y} \implies p(\tilde{X}) \leq p(\tilde{Y})$$

Η ιδιότητα αυτή λέει ότι όσο μεγαλύτερη αξία έχει μια επένδυση, τόσο λιγότερο κίνδυνο εμπεριέχει

*4.**Κυρτότητα***

$$p(\lambda\tilde{X} + (1-\lambda)\tilde{Y}) \leq \lambda p(\tilde{X}) + (1-\lambda)p(\tilde{Y}),\forall\, \lambda \in [0,1]$$

Αρά το μέτρο κινδύνου είναι μια κυρτή συνάρτηση. Αυτό σημαίνει ότι τα μέτρα κινδύνου ενθαρρύνουν την διαφοροποίηση.

5. ***Προσθετικότητα***

$$p(\tilde{X}+\tilde{Y}) \leq p(\tilde{X}) + p(\tilde{Y})$$

Όμοια με την Ιδιότητα 4, η ιδιότητα της προσθετικότητας δείχνει ότι εάν έχουμε ένα χαρτοφυλάκιο με δυο επενδύσεις, αναλαμβάνουμε μικρότερο κίνδυνο από το να επενδύσουμε ξεχωριστά στην κάθε μια. Φαίνεται πάλι ότι τα μέτρα κινδύνου είναι υπέρ της διαφοροποίησης των χαρτοφυλακίων.

6. ***Κανονικοποίηση***

$$p(0) = 0$$

Δηλαδή εάν ένας επενδυτής έχει μηδενική θέση έχει και μηδενικό κίνδυνο.

Ορισμός 2.10 Εάν ένα μετρό ικανοποιεί τις ιδιότητες 1-4 λέγεται ***Συνεκτικό*** (βλ. Delbaen (2002)).

Ορισμός 2.11 Εάν ένα μέτρο κινδύνου ικανοποιεί τις ιδιότητες 2-4 τότε λέγεται ***Κυρτό***.

2.4 Παραδείγματα μέτρων κινδύνου (Risk measures)

Σε αυτήν την ενότητα θα αναφερθούμε σε κάποια βασικά μέτρα κινδύνου.

Ένα από τα συνήθη μέτρα κινδύνου που χρησιμοποιούνται στον τραπεζικό και τον ασφαλιστικό κλάδο είναι η αξία σε κίνδυνο (**Value at Risk, VaR**). Η θέση του **VaR** ενισχύθηκε καθώς χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό των κεφαλαιακών απαιτήσεων για τον κίνδυνο της αγοράς και μετέπειτα και για άλλα είδη κινδύνων. Η ερώτηση που ήρθε να απαντήσει το **VaR** είναι «ποσά μπορούμε να χάσουμε από το χαρτοφυλάκιο μας, μέχρι το κλείσιμο αύριο;» διατυπωμένη από τον Προέδρο της JP Morgan Dennis Weatherstone (βλ. Allen, Boudoukh and Saunders (2004)).

Ορισμός 2.12 Το ***Value at Risk*** με επίπεδο εμπιστοσύνης a, είναι το ποσοστημόριο a της κατανομής των ζημιών της θέσης $\tilde{X}$ σε χρόνο T, δηλαδή:

$$VaR_a(\tilde{X}) = -\sup\{u \in R | \, P(\tilde{X} \geq u) \geq 1-a\}$$

όπου το α είναι ένα υψηλό ποσοστό όπως 95% ή 99% . Αν το κέρδος $\tilde{X}$ (άρα $-\tilde{X}$: κίνδυνος) από μια θέση ακολουθεί συνεχή κατανομή τότε από τον παραπάνω τύπο προκύπτει ότι

$$P\left(\tilde{X} \geq -Var_a(\tilde{X})\right) = 1-a.$$

Το ***VaR*** παρέχει μια ολοκληρωμένη εικόνα του κινδύνου του χαρτοφυλακίου, λαμβάνει υπόψιν του τις όποιες συσχετίσεις, καθώς και την τρέχουσα θέση και εκφράζεται στην νομισματική μονάδα που χρησιμοποιούμε.

Ιδιότητες:

1. ***Θετική ομοιογένεια***

$$VaR_a(\lambda\tilde{X}) = \lambda VaR_a(\tilde{X}), \forall\, \lambda \geq 0$$

2. ***Συνοχή***

$$VaR_a(\tilde{X} + k) = VaR_a(\tilde{X}) - k, \forall\, k \in \mathbb{R}$$

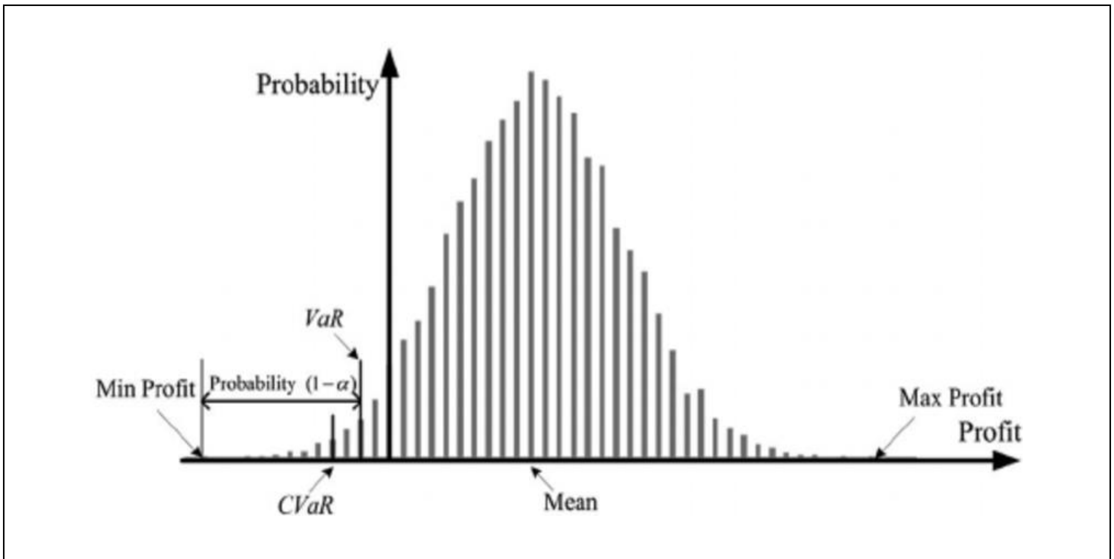
3. **Μονοτονία**

$$\tilde{X} \geq \tilde{Y} \implies VaR_a(\tilde{X}) \leq VaR_a(\tilde{Y})$$

Όμως δεν είναι συνεκτικό μέτρο καθώς δεν επαληθεύει την 4η ιδιότητα, την Κυρτότητα. Άρα δεν υποστηρίζει το διαχωρισμό του κίνδυνου.

Παρόλο που το ***VaR*** μας δίνει μια πολύ καλή εικόνα για το ύψος των ζημίων ανάλογα και με το επίπεδο εμπιστοσύνης που ζητάμε, δεν μας λέει τίποτα για το ύψος που μπορούν να φτάσουν οι ζημίες σε αυτό το 5% ή 1% . Αυτό το πρόβλημα έρχεται να λύσει η Δεσμευμένη Αξία σε Κίνδυνο (***Conditional VaR*)*.**

Η παρακάτω εικόνα δείχνει την σχέση μεταξύ του ***VaR*** και του ***CVaR*** (βλ. Wu, Shahidehpour, Alabdulwahab and Abusorrah (2016)).



Άρα όπως παρατηρούμε για τα μέτρα κινδύνων που ορίσαμε παραπάνω ισχύει ότι:

$$CVaR_a(\tilde{X}) \geq VaR_a(\tilde{X}).$$

Ορισμός 2.13 Το ***Conditional VaR*** είναι η αναμενομένη τιμή των ζημίων που ξεπερνάνε το ***VaR***, με επίπεδο εμπιστοσύνης α, ισούται με:

$$CVaR_a(\tilde{X}) = E[\tilde{X}|\tilde{X} \geq VaR_a(\tilde{X})] , \qquad a \in (0,1)$$

Το ***CVaR***, σε αντίθεση με το ***VaR***, είναι συνεκτικό μέτρο, συνεπώς επαληθεύει τις ιδιότητες 1-4 των μέτρων κινδύνου.

Ιδιότητες:

1. ***Θετική ομοιογένεια***

$$CVaR_a(\lambda\tilde{X}) = \lambda CVaR_a(\tilde{X}) , \forall \lambda \geq 0$$

2. ***Συνοχή***

$$CVaR_a(\tilde{X} + k) = CVaR_a(\tilde{X}) - k , \forall k \in \mathbb{R}$$

3. **Μονοτονία**

$$\tilde{X} \geq \tilde{Y} \implies CVaR_a(\tilde{X}) \leq CVaR_a(\tilde{Y})$$

4. ***Κυρτότητα***

$$p(\lambda\tilde{X} + (1-\lambda)\tilde{Y}) \leq \lambda p(\tilde{X}) + (1-\lambda)p(\tilde{Y}), \forall \lambda \in [0,1]$$

Το **Conditional VaR** είναι γνωστό στην βιβλιογραφία, με κάποιες μικρές διαφορές στους ορισμούς, ως **Expected Shortfall** και **Tail Conditional expectation**. Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με την σχέση μεταξύ των παραπάνω μέτρων βλ. π.χ. Acerbi and Tasche (2002).

Για τις κατανομές οι οποίες έχουν λεπτές ουρές, το ***VaR*** και το ***CVaR*** έχουν πολύ κοντινές τιμές. Στις κατανομές όμως με βαριές ουρές τα αποτελέσματα των δυο μέτρων διαφέρουν σημαντικά.

Ένα αρνητικό του ***CVaR*** είναι ότι συνήθως η εκτίμησή του έχει μεγάλη μεταβλητότητα, επειδή υπάρχουν λίγες παρατηρήσεις στην ουρά της κατανομής. Αυτό είναι σημαντικό πρόβλημα όταν έχουμε μεγάλες ακραίες τιμές στο δείγμα μας.

Ένα άλλο συνεκτικό μετρό κινδύνου, που σχετίζεται με το ***CVaR*** είναι το ***Expected Shortfall***.

Ορισμός 2.14 Το ***Expected Shortfall*** ορίζεται ως ο αριθμητικός μέσος των αντίστοιχων ***VaR*** από το ποσοστημόριο a:

$$ES_a(\tilde{X}) = \frac{1}{1-\alpha}\int_{\alpha}^{1} VaR_{\beta}(\tilde{X})\, d\beta, \text{ με } a \in (0,1) .$$

Το ***ES*** ταυτίζεται με το ***CVaR*** στην περίπτωση που η τ.μ. X είναι συνεχής. Για περισσότερα σχετικά με το ***Expected Shortfall*** βλ. π.χ. Roccioletti (2016).

Κεφάλαιο 3
Ασφαλίσεις Ζωής και Γενικές Ασφαλίσεις

Αρχικά θα ασχοληθούμε με τις ασφαλίσεις ζωής. Η αβεβαιότητα που επηρεάζει αυτού του είδους τις ασφαλίσεις πηγάζει κατά κύριο λόγο από τη διάρκεια ζωής του ασφαλισμένου και τον κίνδυνο του επιτοκίου. Μιλάμε για επιτόκιο γιατί στην πλειονότητα των συμβολαίων ζωής υπάρχουν μελλοντικές πληρωμές, των οποίων η παρούσα αξία δεν είναι σήμερα γνωστή επακριβώς. Η επιλογή, λοιπόν, του παράγοντα προεξόφλησης είναι σημαντικό κομμάτι στον υπολογισμό του ασφαλίστρου. Στην συνέχεια θα παρουσιάσουμε τη θεωρία υπολογισμού ασφαλίστρου ενός ασφαλιστήριου συμβολαίου ζωής. Καθώς και τον υπολογισμό του αρχικού αποθέματος που πρέπει να κρατήσει η ασφαλιστική εταιρία για τις μελλοντικές υποχρεώσεις.

Στην συνέχεια του κεφαλαίου θα ασχοληθούμε με μεθόδους των γενικών ασφαλίσεων. Αρχικά θα περιγράψουμε το ατομικό μοντέλο κινδύνου και στην συνέχεια το συλλογικό. Καθώς και μεθόδους υπολογισμού του αρχικού αποθέματος και της πιθανότητας χρεοκοπίας, σύμφωνα με το μοντέλο Cramer-Lundberg .

3.1 Θεωρία ασφαλίσεων ζωής

Θεωρούμε ότι σήμερα ο πελάτης έχει ηλικία x , $(t=0)$. Ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής, σε έτη, συμβολίζεται με D_x . Όπως είπαμε ο χρόνος θανάτου, και η κατανομή του, είναι κάτι που απασχολεί πολύ τους αναλογιστές που ασχολούνται με τις ασφαλίσεις ζωής. Έτσι παρακάτω θα ορίσουμε την κατανομή της τ.μ. D_x .

Ορισμός 3.1 Έστω D_x , η τ.μ. του υπολειπόμενου χρόνου ζωής ατόμου ηλικίας x. Τότε ορίζουμε:

- Την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της D_x : $G_X(t) = \Pr(D_x \le t) = {}_tq_x$
- Την πιθανότητα επιβίωσης τα επόμενα t χρόνια: ${}_tp_x = 1 - G_X(t)$
- Την ένταση θνησιμότητας στον χρόνο t : $\mu_x(t) = -\frac{d}{dt}\ln[1 - G_X(t)]$

Πρόταση 3.1 Έστω D_x , η τ.μ. του υπολειπόμενου χρόνου ζωής ατόμου ηλικίας x. Τότε η συνάρτηση πιθανότητας και η αθροιστική συνάρτηση της D_x υπολογίζονται μέσω της έντασης θνησιμότητας από τους παρακάτω τύπους,

$$g_x(t) = \mu_x(t)[1 - G_X(t)]$$

$$G_X(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \mu_x(s)ds\right).$$

Έχουν προταθεί πολλοί τύποι για τον υπολογισμό της έντασης θνησιμότητας, με σκοπό την εύρεση της κατανομής του D_x , εμείς θα αναφέρουμε ενδεικτικά δυο από αυτούς.

(i) Ο De Moivre (1724) όρισε ως μέγιστη ηλικία ω και υπέθεσε ότι ο χρόνος θανάτου είναι ομοιόμορφα κατανεμημένος στο διάστημα $[0, \omega]$, έτσι η ένταση θνησιμότητας υπολογίζεται από τον τύπο,

$$\mu_x(t) = \frac{1}{\omega - x - t}, 0 < t \leq \omega - x .$$

(ii) Ο Weibull (1939) πρότεινε μια πολυωνυμική εξίσωση για τον υπολογισμό της έντασης θνησιμότητας.

$$\mu_x(t) = a(x - t)^b$$

όπου: a, b θετικες σταθερές.

Για μεγαλύτερη ανάλυση της παραπάνω θεωρίας βλ. Gerber (1997).

3.2 Υπολογισμός ενός ασφαλίστρου συμβολαίου ζωής

Θα δώσουμε ένα παράδειγμα υπολογισμού του καθαρού ασφαλίστρου (net premium) ενός ασφαλιστηρίου συμβολαίου ζωής. Στα πλαίσια αυτής της εργασίας θα κάνουμε την υπόθεση ότι τα επιτόκια και η ένταση θνησιμότητας υπολογίζονται ντετερμινιστικά. Συγκεκριμένα το $r(t)$, λέγεται Force of discount και συνδέεται με τον παράγοντα προεξόφλησης με τον τύπο:

$$v(t) = \exp\big(-r(t)\big) = \frac{1}{1 + i(t)}$$

Έστω μια ασφάλιση ζωής, όπου ασφαλίζεται άτομο ηλικίας x, στο χρόνο $t = 0$. Η ασφάλιση περιλαμβάνει την πληρωμή του ποσού $C(D_x)$ τον χρόνο αποβίωσής του , καθώς και μια συνεχή ροή πληρωμών (με ένταση $c(t)$, δηλαδή πληρωμή $c(t)dt$ στο $(t, t + dt)$) όσο ο ασφαλισμένος είναι ακόμα εν ζωή. Οι υποχρεώσεις προς την ασφαλιστική είναι μια εφάπαξ πληρωμή του ασφαλίστρου $\Pi(t)$ στο χρόνο t, καθώς και μια συνεχής ροή ασφαλίστρων με ένταση $\pi(s)$, $s \geq 0$ όσο ο ασφαλισμένος είναι ακόμα εν ζωή.

Ορισμός 3.2

Σύμφωνα με τους Korn and Kroisandt (2010), το παραπάνω συμβόλαιο έχει τιμολογηθεί με την αρχή του καθαρού μαθηματικού ασφαλίστρου εάν ισχύει η παρακάτω ισότητα,

$$\Pi(t)e^{-r_0(t)t}\big(1 - G_x(t)\big) + \int_0^\infty \pi(s)\mathrm{e}^{-r_0(s)s}\big(1 - G_x(s)\big)ds$$

$$= \int_0^\infty C(s)\mathrm{e}^{-r_0(s)s}dG_x(s) + \int_0^\infty c(s)\mathrm{e}^{-r_0(s)s}\big(1 - G_x(s)\big)ds$$

όπου: $r_0(t)$, $t \geq 0$ είναι το επιτόκιο (force of discount) που δίνεται από την σημερινή καμπύλη επιτοκίων (yield curve).

Σημειώσεις:

- Το επιτόκιο $r_0(t)$ που δίνεται από την καμπύλη επιτοκίων (yield curve), υπολογίζεται από την σχέση $P(0,t) = e^{-r_0(t)t}$, όπου το $P(0,t)$ είναι η σημερινή τιμή ενός zero coupon ομολόγου με λήξη στον χρόνο t . Αυτή την καμπύλη μπορούμε να την βρούμε στην επίσημη σελίδα της EIOPA.
- Ο παραπάνω ορισμός ουσιαστικά χρησιμοποιεί την αρχή της ισοδυναμίας. Δηλαδή, η μέση τιμή της παρούσας αξίας των υποχρεώσεων του ασφαλισμένου πρέπει να ισούται με την μέση τιμή της παρούσας αξίας των υποχρεώσεων του ασφαλιστή.
- Ο παραπάνω τύπος καλείται προοπτικός (prospective) επειδή υπολογίζεται από την διαφορά των παρουσών αξίων των μελλοντικών υποχρεώσεων και των ασφαλίστρων, στης ασφαλιστικής εταιρίας.

3.3 Υπολογισμός του αποθέματος συμβολαίου ζωής

Μια ασφαλιστική εταιρία είναι υποχρεωμένη, σύμφωνα και με την νέα οδηγία Solvency II, να παρακολουθεί τα αποθέματα της κάθε χρονική στιγμή. Θα πρέπει να είναι σε θέση να υπολογίσει το απόθεμα, που πρέπει να κρατήσει για τις μελλοντικές υποχρεώσεις ενός ασφαλιστηρίου συμβολαίου, σε κάθε χρονική στιγμή της διάρκειας του.

Ορισμός 3.3 Έστω x η ηλικία του ασφαλισμένου την στιγμή σύναψης του ασφαλιστηρίου συμβολαίου και έστω ότι είναι ακόμα εν ζωή στον χρόνο $u \geq 0$. Τότε το απόθεμα $V_x(u)$ στον χρόνο u, ορίζεται ως η διαφορά της δεσμευμένης αναμενόμενης τιμής των μελλοντικών υποχρεώσεων προς τον ασφαλισμένο, μείον την δεσμευμένη αναμενόμενη τιμή των μελλοντικών ασφαλίστρων. Η δέσμευση είναι το ότι ο πελάτης πρέπει να μην έχει αποβιώσει μέχρι την χρονική στιγμή u.

Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω ορισμό θα δώσουμε ένα παράδειγμα υπολογισμού του αποθέματος, όπως αυτό διατυπώθηκε από τους Korn και Kroisadt (2010).

Παράδειγμα: Έστω μια συνεχής ασφάλιση ζωής διάρκειας n ετών που αφορά άτομο ηλικίας x ετών, με ασφαλισμένο κεφάλαιο, $C(D_x)$ που καταβάλλεται εάν ο πελάτης αποβιώσει πριν τα n χρόνια ή C^a που καταβάλεται στην λήξη του συμβολαίου (το n-οστό έτος) εάν ο ασφαλισμένος επιζήσει. Η σταθερή ένταση ασφαλίστρου $\pi(t) = \pi$ καταβάλλεται όσο ο ασφαλισμένος είναι εν ζωή.

Επίσης υποθέτουμε ότι το επιτόκιο είναι σταθερό και ίσο με r και η ένταση θνησιμότητας που είναι $\mu_x(t)$, υπολογίζονται ντετερμινιστικά.

Σύμφωνα λοιπόν με τον Ορισμό 3, πρέπει να ισχύει η παρακάτω εξίσωση,

$$C^a e^{-r(n-t)}(n-t)p_{x+t} + \int_t^n C(s)e^{-r(s-t)}\,(s-t)p_{x+t}\mu_{x+s}\,ds$$
$$= \int_t^n \pi e^{-r(s-t)}\,(s-t)p_{x+t}\,ds\,.$$

Άρα το απόθεμα την χρονική στιγμή t , ισούται με:

$$V_x(t) = C^a e^{-r(n-t)}(n-t)p_{x+t} + \int_t^n (C(s)\mu_{x+s} - \pi)e^{-r(s-t)}\,(s-t)p_{x+t}\,ds\,.$$

Ένας άλλος τρόπος υπολογισμού του αποθέματος, χωρίς να κάνουμε χρήση των πιθανοτήτων θνησιμότητας, είναι μέσω της προσομοίωσης Monte Carlo. Η μεθοδολογία, των Korn και Kroisadt (2010), για την εκτίμηση αυτή περιγράφεται στον παρακάτω αλγόριθμο.

Αλγόριθμος **Υπολογισμού του Αποθέματος με προσομοίωση Monte Carlo**

Για $i = 1$ $εώς$ N

1. Παράγουμε την υπολειπομένη διάρκεια ζωής του ασφαλισμένου $C(D_x)^{(i)}$
2. Παράγουμε την ακολουθία των επιτοκίων $r^{(i)}(t)$, $t \in \left[0, min\{n, C(D_x)^{(i)}\}\right]$
3. Υπολογίζουμε όλες οι οικονομικές συναλλαγές που γίνονται, με βάση την ηλικία $C(D_x)^{(i)}$ του ασφαλισμένου και τις προεξοφλούμε με τον παράγοντα προεξόφλησης.
4. Με βάση τον ορισμό 3, υπολογίζουμε το απόθεμα $\hat{V}^{(i)}{}_x(0)$.

Τέλος υπολογίζουμε το μέσο απόθεμα: $\hat{V}_x(0) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \hat{V}^{(i)}{}_x(0)$.

Στο τελευταίο κεφάλαιο θα παρουσιαστεί αναλυτικά η εφαρμογή αυτής της μεθόδου υπολογισμού του αποθέματος. Στις παρακάτω παραγράφους θα ασχοληθούμε με εφαρμογές που αφορούν κυρίως τις γενικές ασφαλίσεις

3.4 Μοντέλο ατομικού κινδύνου (Individual model)

Θεωρώντας ότι έχουμε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο αποτελείται από n συμβόλαια, οι συνολικές ζημίες υπολογίζονται ως το άθροισμα των ζημίων κάθε συμβολαίου.

Ορισμός 3.4 Στο μοντέλο ατομικού κινδύνου συμβολίζουμε με X_i την τυχαία μεταβλητή των ζημίων του συμβολαίου i και n το πληθος των ζημιων την περιοδο αυτη. Τότε η ***συνολική ζημιά*** S_n του χαρτοφυλακιου δινεται από τον τύπο :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Προκειμένου να μελετήσουμε την κατανομή της S_n κάνουμε την υπόθεση ότι οι ζημίες $X_1, X_2, \dots, X_n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές.

Πρόταση 3.2 Έστω η τ.μ. $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, με $n = 1,2,3, \dots$ και $X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες με μια X τ.μ., τότε ισχύει:

$$E(S) = nE(X) \text{ και } Var(S) = nVar(X)$$

Στην βιβλιογραφία υπάρχουν πολλές μέθοδοι για την εύρεση της κατανομής των συνολικών ζημίων. Στα πλαίσια αυτής της εργασίας θα αναφερθούμε επιγραμματικά στην μέθοδο των συνελίξεων.

Για πιο ενδελεχή ανάλυση του μοντέλου ατομικού κινδύνου βλ. Kaas, Goovaerts, Dhaene and Denuit (2002).

Στους παρακάτω πίνακες παραθέτοντας οι κατανομές των συνολικών ζημίων S_n , όταν οι X_i ακολουθούν κάποια από τις γνωστές κατανομές, διακριτές και συνεχείς.

Κατανομή των $\boldsymbol{X_i}$, $\boldsymbol{i = 1, 2, \dots, n}$	**Κατανομή της $\boldsymbol{S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n}$**
Διωνυμική $\boldsymbol{b(n_i, p)}$	*Διωνυμική* $b(n, p)$, *οπου* $n_i = \sum_{i=1}^{n} n_i$
Poisson $\boldsymbol{P(\lambda_i)}$	*Poisson* $P(\lambda)$, *όπου* $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$
Γεωμετρική $\boldsymbol{G(p)}$	*Αρνητική Διωνυμική* $Nb(n, p)$
Αρνητική Διωνυμική $\boldsymbol{Nb(r_i, p)}$	*Αρνητική Διωνυμική* $Nb(r, p)$, *όπου* $r = \sum_{i=1}^{n} r_i$

Πίνακας 3.1. Κατανομές αθροιστικών ζημίων γνωστών διακριτών κατανομών.

Κατανομή των $\boldsymbol{X_i}$, $\boldsymbol{i = 1, 2, \dots, n}$	**Κατανομή της $\boldsymbol{S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n}$**
Κανονική $\boldsymbol{N(\mu_i, {\sigma_i}^2)}$	*Κανονική* $N(\mu, \sigma^2)$, *οπου* $\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$, $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} {\sigma_i}^2$
Εκθετική $\boldsymbol{Exp(\lambda)}$	$Erlang(n, \lambda)$
Γάμμα $\boldsymbol{Gamma(a, \lambda)}$	*Γάμμα* $Gamma(an, \lambda)$

Πίνακας 3.2. Κατανομές αθροιστικών ζημίων γνωστών συνεχών κατανομών.

3.5 Μέθοδος των συνελίξεων

Η κατανομή του αθροίσματος $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ καλείται και συνέλιξη των τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, \dots, X_n$.

Θεώρημα 3.1 Έστω οι ανεξάρτητες διακριτές τ.μ. $X_i \in \{0,1,2, \dots\}$ $\forall\, i = 1,2, \dots$. Τότε για $x = 0,1, \dots$, και $n = 2,3, \dots$ ισχύουν οι αναδρομικοί τύποι:

(α) Η συνάρτηση πιθανότητας της S_n είναι

$$f_X{}^{*n}(x) = \sum_{y=0}^{x} f_X{}^{*(n-1)}(x-y) f_X(y)$$

(β) Η συνάρτηση επιβίωσης (κατανομή δεξιάς ουράς) της S_n είναι

$$\bar{F}_X{}^{*n}(x) = \bar{F}_X(x) + \sum_{y=0}^{x} \bar{F}_X{}^{*(n-1)}(x-y) f_X(y)$$

Αντίστοιχα για συνεχείς τυχαίες μεταβλητές παίρνουμε το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 3.2 Έστω οι ανεξάρτητες συνεχείς τ.μ. $X_i \in (0, +\infty)$ $\forall\, i = 1,2, \dots, n$. Τότε για $x \geq 0$ και $n = 2,3, \dots$ ισχύει:

(α) Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της S_n είναι

$$f_X{}^{*n}(x) = \int_0^x f_X{}^{*(n-1)}(x-y) f_X(y) dy$$

(β) Η συνάρτηση δεξιάς ουράς της S_n είναι

$$\bar{F}_X{}^{*n}(x) = \bar{F}_X(x) + \int_0^x \bar{F}_X{}^{*(n-1)}(x-y) f_X(y) dy$$

Για συνεχείς και διακριτές τ.μ. ισχύουν τα παρακάτω:

- $f_X{}^{*0}(x) = \begin{cases} 1\,, x = 0 \\ 0\,, x \neq 0 \end{cases}$
- $f_X{}^{*1}(x) = f_X(x)$
- $\bar{F}_X{}^{*0}(x) = \begin{cases} 0\,, x \geq 0 \\ 1\,, x < 0 \end{cases}$
- $\bar{F}_X{}^{*1}(x) = \bar{F}_X(x)$

Για πιο ενδελεχή ανάλυση και παραδείγματα βλ. π.χ. Ε. Χατζηκωνσταντινίδη (2015) ή Κ. Πολίτη (2012).

3.6 Μοντέλο συλλογικού κινδύνου (Collective model)

Στο μοντέλο του συλλογικού κινδύνου εξετάζουμε ένα χαρτοφυλάκιο κινδύνων με X_i ζημίες, το πλήθος των οποίων είναι η τυχαία μεταβλητή N_t σε αντίθεση με το μοντέλο ατομικού κινδύνου που είχαμε σταθερό πλήθος ζημίων.

Ορισμός 3.5 Οι τ.μ. X_i, $i = 1,2, \dots$ είναι ζημίες ενός χαρτοφυλακίου και η τ.μ. N_t το πλήθος των ζημιών που έχουν συμβεί μέχρι τον χρόνο t. Τότε σύμφωνα με το μοντέλο συλλογικού κινδύνου, η τ.μ. των συνολικών ζημίων του χαρτοφυλακίου είναι:

$$S = \begin{cases} X_1 + X_2 + \dots + X_{N_t}\,, & N_t \geq 1 \\ 0\,, & N_t = 0 \end{cases}$$

Για την μελέτη του μοντέλου συλλογικού κινδύνου υποθέτουμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές N_t και X_i είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Επίσης οι X_i είναι ισόνομες τυχαίες μεταβλητές.

Η δυσκολία στην μελέτη του μοντέλου συλλογικού κινδύνου οφείλεται στο τυχαίο πλήθος ζημίων που έχουμε να διαχειριστούμε. Εάν γνωρίζουμε το πλήθος των ζημίων και είναι ένας σταθερός αριθμός n, τότε το μοντέλο μας απλουστεύεται.

Δηλαδή εάν η τ.μ. $N_t = n$, τότε $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Άρα αναγόμαστε στο μοντέλο ατομικού κινδύνου που περιγράψαμε στην προηγουμένη παράγραφο.

Πρόταση 3.3 Οι ροπές της τ.μ. S για το μοντέλο συλλογικού κινδύνου δίνονται από τους τύπους:

$$E(S) = E(N_t)E(X) \quad \text{και} \quad Var(S) = E(N_t)Var(X) + Var(N_t)E^2(X)$$

Απόδειξη: Από το θεώρημα διπλής μέσης τιμής έχουμε

$$E(S) = E[E(S|N_t)] = E[E(X)N_t] = E(N_t)E(X)\,.$$

Αντίστοιχα από το θεώρημα διπλής μέσης τιμής, για την διακύμανση έχουμε

$$Var(S) = E[Var(S|N_t)] + Var[E(S|N_t)]$$

Άρα

$$Var(S) = E[Var(X)N_t] + Var[E(X)N_t] = Var(X)E(N_t) + E^2(X)Var(N_t)$$

Για την εύρεση της κατανομής της τ.μ. S, αλλα και για να υπολογίσουμε την συνάρτηση πιθανότητας ή πυκνότητας πιθανότητας, υπάρχουν πολλές μέθοδοι. Στα πλαίσια αυτής της εργασίας θα αναφερθούμε ενδεικτικά στην μέθοδο των συνελίξεων.

Για πιο ενδελεχή ανάλυση του μοντέλου ατομικού κινδύνου βλ. Kaas, Goovaerts, Dhaene and Denuit (2002).

3.7 Μέθοδος των συνελίξεων

Η μέθοδος των συνελίξεων ισχύει για οποιεσδήποτε κατανομές των N_t και X_i .

Θεώρημα 3.3 Έστω $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_{N_t}$, όπου οι τ.μ. X_i ισόνομες με την τ.μ. X.

(α) Η συνάρτηση κατανομής

$$F_S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \, {F_X}^{*n}(x)$$

(β) Η συνάρτηση δεξιάς ουράς

$$\bar{F}_S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \, {\bar{F}_X}^{*n}(x)$$

Οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν είτε η X είναι διακριτή είτε συνεχής τ.μ. .

Θεώρημα 3.4 (α) Η συνάρτηση πιθανότητας για X_i , X διακριτές τ.μ.

Για $x = 0$,

$$f_S(0) = \begin{cases} p_0\,, & \alpha\nu\ f_X(0) = 0 \\ P_{N_t}\big(f_X(0)\big)\,, & \alpha\nu\ f_X(0) \neq 0 \end{cases}$$

όπου $P_{N_t}(u)$, η πιθανογεννήτρια της τ.μ. N_t και $p_0 = Pr(N_t = 0)$.

Για $x = 1,2, \dots$,

$$f_S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \, f_X{}^{*n}(x)$$

όπου $p_n = Pr(N_t = n)$.

(β) Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για X_i , X συνεχείς τ.μ.

Για $x = 0$,

$$f_S(0) = p_0$$

Για $x > 0$,

$$f_S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \, f_X{}^{*n}(x)$$

Για περισσότερες λεπτομέρειες και παραδείγματα βλ. π.χ. Ε. Χατζηκωνσταντινίδη (2015) ή Κ. Πολίτη (2012).

3.8 Πιθανότητα χρεοκοπίας

Στην παράγραφο αυτήν θα ασχοληθούμε με τον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας, στο συλλογικό μοντέλο κινδύνου και την προσομοίωση αυτής σύμφωνα με το μοντέλο Cramer-Lundberg (π.χ. βλ. Korn and Kroisandt (2010) ή Κ. Πολίτη (2012)).

Έστω h το αρχικό απόθεμα $(t = 0)$, $\pi(t)$ το ασφάλιστρο την χρονική στιγμή t και έστω $X_1, X_2, \dots$ οι ζημίες του χαρτοφυλακίου που συμβαίνουν τις χρονικές στιγμές $t_1, t_2, \dots$. Τότε η τιμή του αποθέματος στον χρόνο t δίνεται από τον τύπο:

$$R(t) = h + \int_0^t \pi(s) ds - \sum_{i=1}^{\infty} 1_{\{t_i \le t\}} X_i \, , \gamma\iota\alpha \; t \in [0, T]$$

Και η πιθανότητα χρεοκοπίας υπολογίζεται από τον τύπο:

$$p_{ruin} = \Pr\left(\exists t : h + \int_0^t \pi(s) ds - \sum_{i=1}^{\infty} 1_{\{t_i \le t\}} X_i < 0 \right) = \Pr(\exists t : R(t) < 0)$$

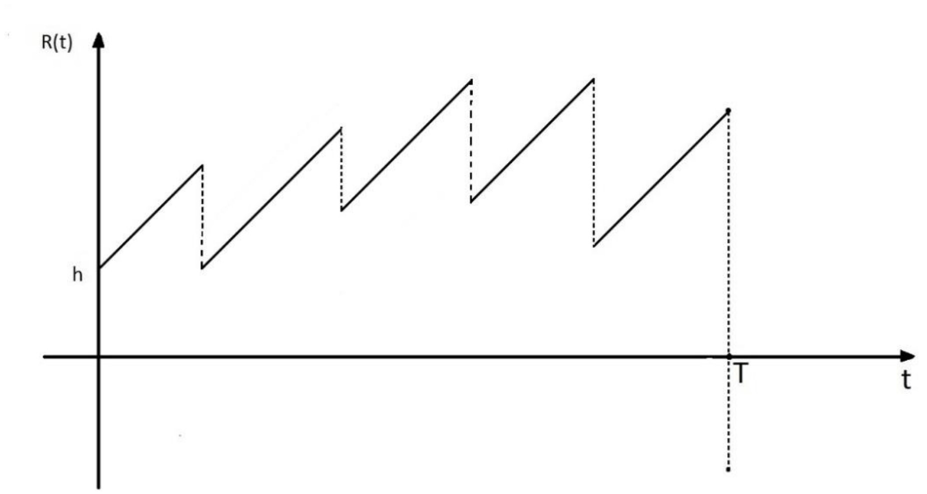
Αντίστοιχα η $1 - p_{ruin}$ είναι η πιθανότητα επιβίωσης.

Σημείωση:

- Θα λέμε ότι επέρχεται χρεοκοπία όταν το απόθεμα $R(t)$ γίνει αρνητικός αριθμός. Στην πράξη φυσικά δεν επέρχεται χρεοκοπία της εταιρίας, αλλά η πιθανότητα χρεοκοπίας αποτελεί ένα μέτρο φερεγγυότητας της.
- Εάν πάρουμε το ασφάλιστρο $\pi(t)$ ίσο με το καθαρό ασφάλιστρο τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι ίση $p_{ruin} = 1$.
- Στο κλασσικό μοντέλο Cramer-Lundberg, οι χρονικές στιγμές $t_1, t_2, \ldots$ προσομοιώνονται από την σύνθετη Poisson κατανομή.

Για περισσότερη ανάλυση της θεωρίας της πιθανότητας χρεοκοπίας βλ. Mikosch (2009).

Μια απεικόνιση της πορείας της τιμής του αποθέματος, φαίνεται στο παρακάτω γράφημα.



Από τους παραπάνω τύπους γίνεται εμφανές ότι μπορούμε να εκτιμήσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας, προσομοιώνοντας i τιμές για το απόθεμα και στην συνέχεια παίρνοντας τον ακόλουθο τύπο:

$$\hat{p}_{ruin}(T) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} 1_{\{R^{(i)}(t) < 0 \ \gamma\iota\alpha \ t \in [0,T]\}}$$

όπου το $R^{(i)}(t)$, $t \in [0, T]$ είναι η i-οστή διαδρομή αποθέματος.

Μια εφαρμογή αυτής της μεθόδου εκτίμησης της πιθανότητας χρεοκοπίας θα παρουσιαστεί στο Κεφάλαιο 4.

Κεφάλαιο 4 Εφαρμογές

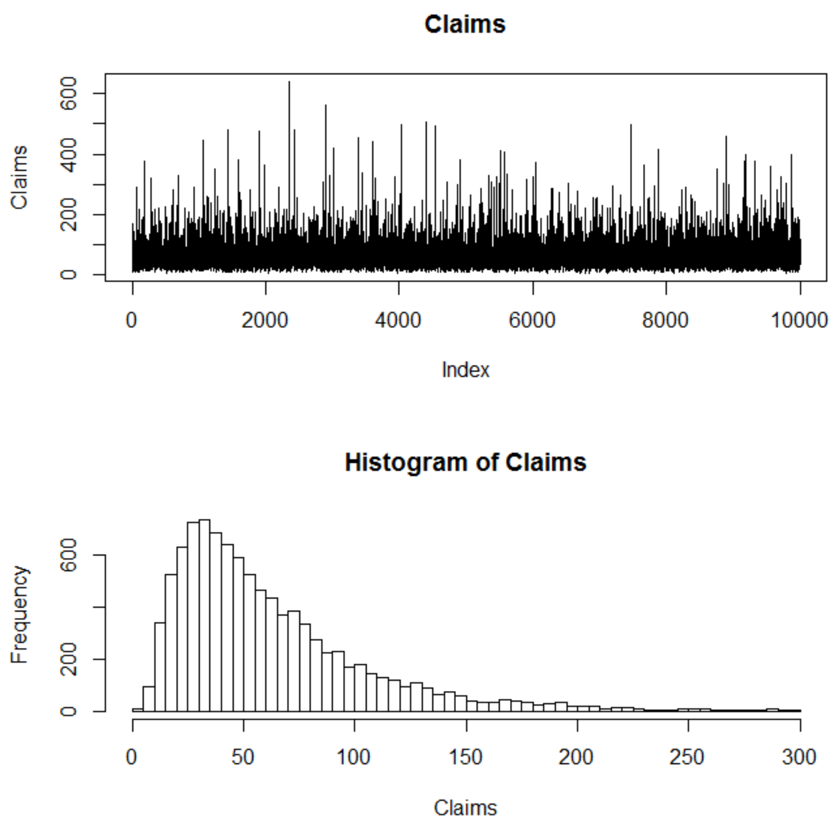
Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε εφαρμογές από τα μοντέλα των προηγουμένων κεφαλαίων. Η προσομοίωση τους θα γίνει με το στατιστικό πακέτο R.

4.1 Εκτίμηση ασφαλίστρων μέσω προσομοίωσης

Στο Κεφάλαιο 2 ορίσαμε τις αρχές υπολογισμού ασφαλίστρων. Σε αυτήν την παράγραφο θα χρησιμοποιήσουμε την προσομοίωση Monte Carlo και με βάση την κατανομή ζημιών, θα εκτιμήσουμε κάποια από τα ασφάλιστρα αυτά.

Αρχικά θα ορίσουμε την κατανομή ζημιών, χρησιμοποιώντας ως παράδειγμα την Λογαριθμοκανονική κατανομή. Για να παράγουμε τυχαίες τιμές θα χρησιμοποιήσουμε την εντολή `rlnorm(n, meanlog = 0, sdlog = 1)` της R.

```
>n1<-10^4;y <- rlnorm(n1,3.912023, 0.6931472);
>par(mfcol=c(2,1))
>plot(y,ylab="Claims",type="l", main="Claims");
>hist(y[y<300],seq(0,300,5),xlab="Claims",main="Histogram of Claims"
);
>par(mfcol=c(1,1))
```



Στα παραπάνω διαγράμματα φαίνεται η κατανομή των ζημιών που προσομοιώσαμε από την Λογαριθμοκανονική κατανομή. Τρέχοντας παρακάτω και την εντολή `summary()`, παρατηρούμε ότι οι ζημιές μας έχουν μεγάλη διασπορά και η μέση τιμή είναι ίση με 65,110 (σε χιλιάδες). Δηλαδή ενώ έχουμε κάποιες μεγάλες τιμές, σχεδόν το 80% των τιμών μας είναι μικρότερες των 100 (χιλιαδων).

```
>summary(y);
Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
5.351  30.360  49.190  65.110  80.440 538.700
```

Για την εκτίμηση των περισσότερων ασφαλίστρων που παρουσιάσαμε στο Κεφάλαιο 2, χρειαζόμαστε την μέση τιμή και την διακύμανση της κατανομής των ζημιών. Τα οποία μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα με την χρήση των παρακάτω εντολών.

```
>mean<-mean(y);print(paste0("Estimated Mean of the claims:",mean));
>var<-var(y);print(paste0("Estimated Variance of the claims:",
var));
"Estimated Mean of the claims:61.8081726519233"
"Estimated Variance of the claims:2050.64256964649"
```

Για τον υπολογισμό όμως της αρχής της ημι-τυπικής απόκλισης χρειάζεται να υπολογίσουμε την ημι-διακύμανση (semivariance). Έχοντας πρώτα υπολογίσει την μέση τιμή, μπορούμε εύκολα να εκτιμήσουμε την ημι-διακύμανση με την χρήση του παρακάτω αλγορίθμου.

```
>n2<-10^5;
>x<-rlnorm(n2,3.912023,0.6931472);
>sum<-0;dia<-0;
>for(i in 1:n2){if(x[i]>mean){dia<-(x[i]-mean)^2;sum<-sum+dia;}}
>semi<-sum/n2;
>print(paste0("Estimated semivariance of the claims:",semi));
"Estimated semivariance of the claims:1793.41543872398"
```

Προσομοιώνουμε λοιπόν τις απαιτήσεις, από την λογαριθμοκανονική κατανομή $n_2 = 10.000$ φορές και μετά χρησιμοποιούμε τον παρακάτω τύπο, (π.χ. βλ. Korn and Kroisandt (2010)), για να εκτιμήσουμε την τιμή της ημι-διακύμανσης.

$$E\left\{\left[\max\left(0, X - E(X)\right)\right]^2\right\} \approx \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}\left(\max\left(0, X - \bar{X}_{n_1}\right)\right)^2$$

όπου: $\bar{X}_{n_1}$, η εκτίμηση της μέσης τιμής που υπολογίσαμε παραπάνω.

Τέλος, θα εκτιμήσουμε ενδεικτικά και κάποια ασφάλιστρα που προκύπτουν από τις γενικές αρχές υπολογισμού ασφαλίστρων που παρουσιάσαμε στο Κεφάλαιο 2.

```
>m<-0.2;
>p<-mean+m*sqrt(semi);
print(paste0("Estimated premium with Semistandard deviation princi-
ple:",p));
>p1<-(1+m)*mean;
print(paste0("Estimated premium with Expected value princi-
ple:",p1));
>p2<-mean+m*var;
print(paste0("Estimated premium with Variance Principle:",p2));
>p3<-mean+m*sqrt(var);
print(paste0("Estimated premium Variance Standard Deviation Princi-
ple:",p3));
"Estimated premium with Semistandard deviation principle:
73.5748084305413"
```

```
"Estimated premium with Expected value principle:78.1260734825257"
"Estimated premium with Variance Principle:640.010933304106"
"Estimated premium Variance Standard Deviation Principle: 75.8279887467912"
```

Παρατηρούμε ότι οι τιμές των ασφαλίστρων που εκτιμήσαμε έχουν πολύ μικρή διαφορά μεταξύ τους. Με εξαίρεση το ασφάλιστρο που υπολογίζεται με την αρχή της διακύμανσης, το οποίο είναι πολύ μεγαλύτερο από τα υπόλοιπα. Αυτό συμβαίνει γιατί το δείγμα μας έχει μεγάλη διακύμανση, η οποία αυξάνει κατά πολύ το ασφάλιστρο. Γι' αυτό είναι πολύ σημαντικό να γνωρίζουμε το δείγμα μας, ώστε να μπορούμε να επιλέξουμε την αρχή υπολογισμού ασφαλίστρων που θα χρησιμοποιήσουμε αλλά και το κατάλληλο m. Τρέχοντας την παραπάνω διαδικασία για $m = 2 \cdot 10^{-3}$ το ασφάλιστρο που υπολογίζεται με την αρχή της διακύμανσης παίρνει την παρακάτω τιμή.

```
> m<-2*10^(-3);
> p3<-mean+m*var;print(paste0("Estimated premium with Variance Principle:",p3));
"Estimated premium with Variance Principle:70.8541199561248"
```

Μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε τα ασφάλιστρα σύμφωνα με την εκθετική αρχή. Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται ο αλγόριθμος υπολογισμού της εκτίμησης και το ασφάλιστρο που υπολογίσαμε.

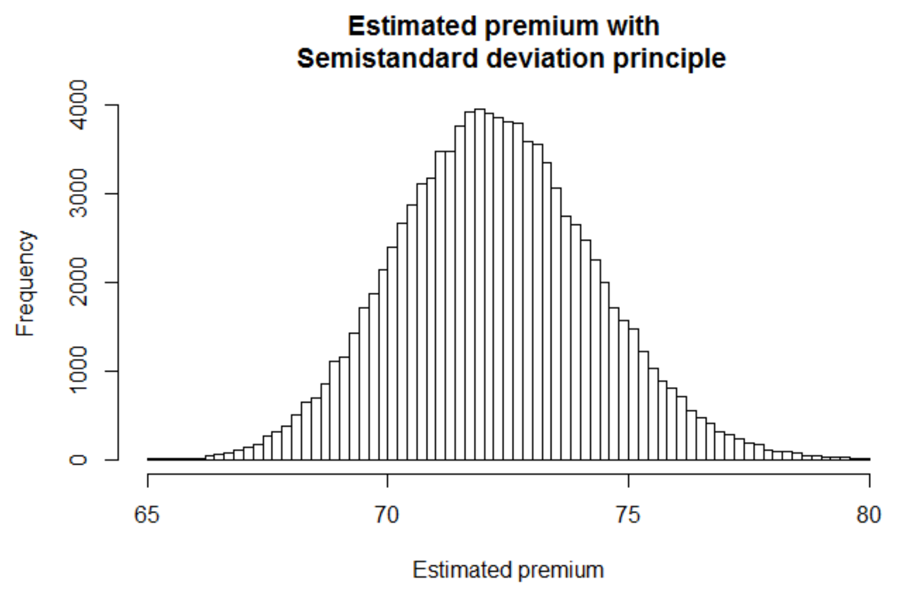
```
>m<-0.005;x<-rlnorm(n2,3.912023,0.6931472);
>p4<-log(mean(exp(m*x)))/m;print(paste0("Estimated premium with Exponential Principle:",p4));
"Estimated premium with Exponential Principle:72.6045136502998"
```

Αν επαναλάβουμε n φορές την παραπάνω διαδικασία υπολογισμού, τότε θα πάρουμε μια εικόνα για την κατανομή της εκτίμησης των ασφαλίστρων μέσω προσομοίωσης.

Έστω ότι εκτελούμε n φορές τον υπολογισμό του ασφαλίστρου σύμφωνα με την αρχή της ημι- τυπικής απόκλισης, στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε τα αποτελέσματα.

```
>N<-10^5;p<-rep(0,times=N);
>for(j in 1:N)
{
n<-10^3;x <- rlnorm(n,3.912023, 0.6931472);
mean<-mean(x);sum<-0;dia<-0;
for(i in 1:n){if(x[i]>mean){dia<-(x[i]-mean)^2;sum<-sum+dia;}}
semi<-sum/n;
m<-0.2;p[j]<-mean+m*sqrt(semi)
}
>summary(p);
Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
71.48   72.14   72.28   72.28   72.42   73.01
```

```
>hist(p[p>65&p<80],seq(65,80,0.2),xlab="Estimated premium",main="Estimated premium with \n Semistandard deviation principle");
```



4.2 Προσομοίωση μέτρων κινδύνου

Μετά τις αρχές υπολογισμού ασφαλίστρων στο Κεφάλαιο 2, αναφερθήκαμε στα μέτρα κινδύνου. Σε αυτήν την παράγραφο λοιπόν, θα εκτιμήσουμε μέσω προσομοίωσης κάποια από αυτά τα μέτρα κινδύνου.

Αρχικά θα ορίσουμε την κατανομή της χρηματοοικονομικής θέσης του επενδυτή. Για παράδειγμα θα θεωρήσουμε ότι $\tilde{X} \sim N(\mu, \sigma)$ ακολουθεί κανονική κατανομή με παραμέτρους $\mu = 50$, $\sigma = 40$, αλλά προφανώς μπορούμε με τον ίδιο τρόπο να χρησιμοποιήσουμε οποιαδήποτε κατανομή.

```
>n1<-10^5; y<-rnorm(n1, mean = 50, sd = 40);
>summary(y);
   Min.  1st Qu.  Median   Mean  3rd Qu.   Max.
-144.20   23.02   50.00   49.96   76.92  239.80
```

Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι η κατανομή της θέσης του επενδυτή, έχει και μεγάλες αρνητικές τιμές. Όταν το πιθανό κέρδος του επενδυτή γίνει αρνητικό, στην αριστερή ουρά της κατανομής, μιλάμε πια για ζημία. Μας ενδιαφέρει λοιπόν να εξετάσουμε την αριστερή ουρά και την πιθανή ζημιά που μπορεί να έχουμε.

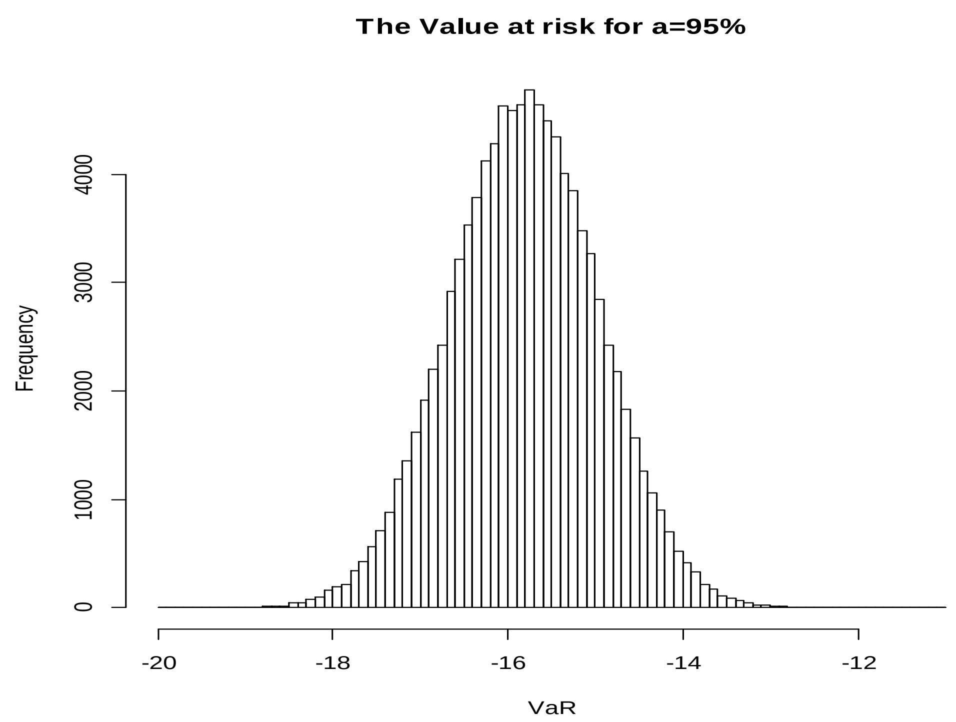
Αρχικά θα υπολογίσουμε το $VaR_a(\tilde{X})$, όπου $a = 95\%$ ή 99% , για την αριστερή ουρά της κατανομής. Μπορούμε να υπολογίσουμε το $VaR_a(\tilde{X})$, βάζοντας σε αύξουσα σειρά τα δεδομένα μας και επιλέγοντας την $n_1(1-a) = 5000$ (για a = 95%) και την $n_1(1-a) = 1000$ (για a = 99%) διατεταγμένη παρατήρηση αντίστοιχα.

```
>sorty<-sort(y);
>print(paste0("The Value at risk for a=95%:",sorty[n1*(0.05)]));
>print(paste0("The Value at risk for a=99%:",sorty[n1*(0.01)]));
```

```
"The Value at risk for a=95%:-16.0960601949603"
"The Value at risk for a=99%:-43.566671689446"
```

Κάνοντας την παραπάνω διαδικασία $N = 10^5$ φορές, μπορούμε να εξετάσουμε την κατανομή της εκτίμησης του $VaR_a(\tilde{X})$ μέσω προσομοίωσης. Στον κάτω πίνακα βλέπουμε και το ιστόγραμμα του $VaR_a(\tilde{X})$, όπου $a = 95\%$.

```
n2<-10^5;n1<-10^4;s1<-rep(0,times=n2);s2<-rep(0,times=n2);
for(i in 1:n2)
{
y<-rnorm(n1, mean = 50, sd = 40);sorty<-sort(y);
s1[i]<-sorty[n1*(0.05)];s2[i]<-sorty[n1*(0.01)];
}
hist(s1 [(s1>-30)&(s1<  -5)],seq(-30,-5,0.25),xlab="VaR",  main="The
Value at risk for a=95%");
```



Παρόλο που γνωρίζουμε το εύρος των τιμών του VaR_a ανάλογα και με το επίπεδο εμπιστοσύνης, δεν έχουμε καθόλου εικόνα για το μέγεθος των τιμών σε αυτό το 1% ή 5%. Για αυτό το λόγο θα υπολογίσουμε και το $CVaR_a(\tilde{X})$.

Το $CVaR_a$ υπολογίζεται άμεσα ως η αναμενομένη τιμή των ζημιών που ξεπερνάνε το $VaR_a(\tilde{X})$, για $a = 95\%$ ή 99% αντίστοιχα.

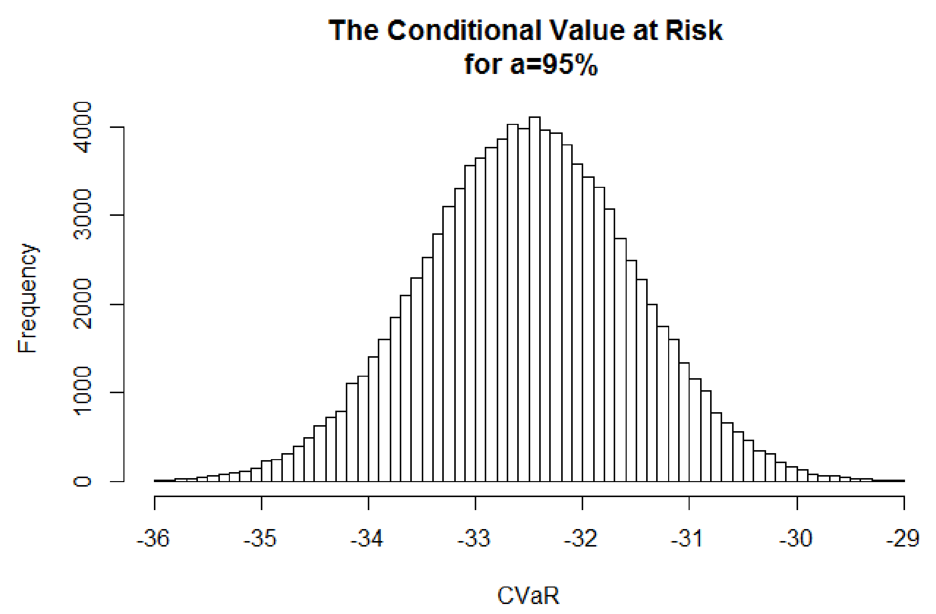
```
>print(paste0("The Conditional Value at Risk for
a=95%:",mean(sorty[1:n1*(0.05)])));
```

```
>print(paste0("The Conditional Value at Risk for a=99%:",mean(sorty[1:n1*(0.01)])));
```

```
"The Conditional Value at Risk for a=95%:-32.7945649443935"
"The Conditional Value at Risk for a=99%:-56.7063761456621"
```

Κάνοντας την παραπάνω διαδικασία $N = 10^5$ φορές, μπορούμε να εξετάσουμε και την κατανομή της Monte Carlo εκτίμησης του $CVaR_a$. Παρακάτω έχουμε και το αντίστοιχο ιστόγραμμα του $CVaR_a$, για $a = 95\%$.

```
n2<-10^5;n1<-10^4;cvar1<-rep(0,times=n2);cvar2<-rep(0,times=n2);
for(i in 1:n2)
{
y<-rnorm(n1, mean = 50, sd = 40);sorty<-sort(y);
cvar1[i]<-mean(sorty[1:n1*(0.05)]);cvar2[i]<-
mean(sorty[1:n1*(0.01)]);
}
hist(cvar1[(cvar1>-36)&(cvar1<  -29)],seq(-36,-29,0.1),xlab="CVaR",
main="The Conditional Value at Risk \n for a=95%");
```



Με τον συνδυασμό των δυο παραπάνω μέτρων κινδύνου, έχουμε μια πολύ καλή εικόνα για τις ακραίες τιμές της τ.μ. $\tilde{X}$.

4.3 Εκτίμηση μέσω προσομοίωσης του Καθαρού μαθηματικού Αποθέματος

Σε αυτήν την παράγραφο θα παρουσιάσουμε μια εφαρμογή για την εκτίμηση του καθαρού μαθηματικού αποθέματος ενός ασφαλιστηρίου συμβολαίου. Δηλαδή το ποσό που πρέπει να έχει κρατήσει η ασφαλιστική εταιρία, για μελλοντικές απαιτήσεις.

Ο κλασσικός τύπος υπολογισμού του αποθέματος εμπεριέχει πιθανότητες επιβίωσης και θνησιμότητας. Εμείς θα παρουσιάσουμε έναν άλλο τρόπο υπολογισμού του αποθέματος, μέσω προσομοίωσης. Ο αλγόριθμος που θα χρησιμοποιήσουμε έχει παρουσιαστεί στην αντίστοιχη παράγραφο στο Κεφάλαιο 3.

Το γενικό πλαίσιο: Έστω μια ασφάλιση ζωής διάρκειας n ετών που αφορά άτομο ηλικίας x ετών, με ασφαλισμένο κεφάλαιο $C(T)$ που καταβάλλεται εάν ο πελάτης αποβιώσει πριν τη λήξη του συμβολαίου (τα n έτη), ή χρηματικό ποσό C^a που καταβάλλεται στην λήξη του συμβολαίου (το n-οστό έτος) εάν ο ασφαλισμένος είναι τότε εν ζωή. Το ασφάλιστρο $\pi(t)$ καταβάλλεται όσο ο ασφαλισμένος είναι εν ζωή.

Εφαρμογή 1

Στα πλαίσια αυτής της εφαρμογής θα προσομοιώσουμε το καθαρό μαθηματικό απόθεμα, ενός ασφαλιστηρίου συμβολαίου την χρονική στιγμή $t = 0$, όπου ξεκινά η ισχύ του.

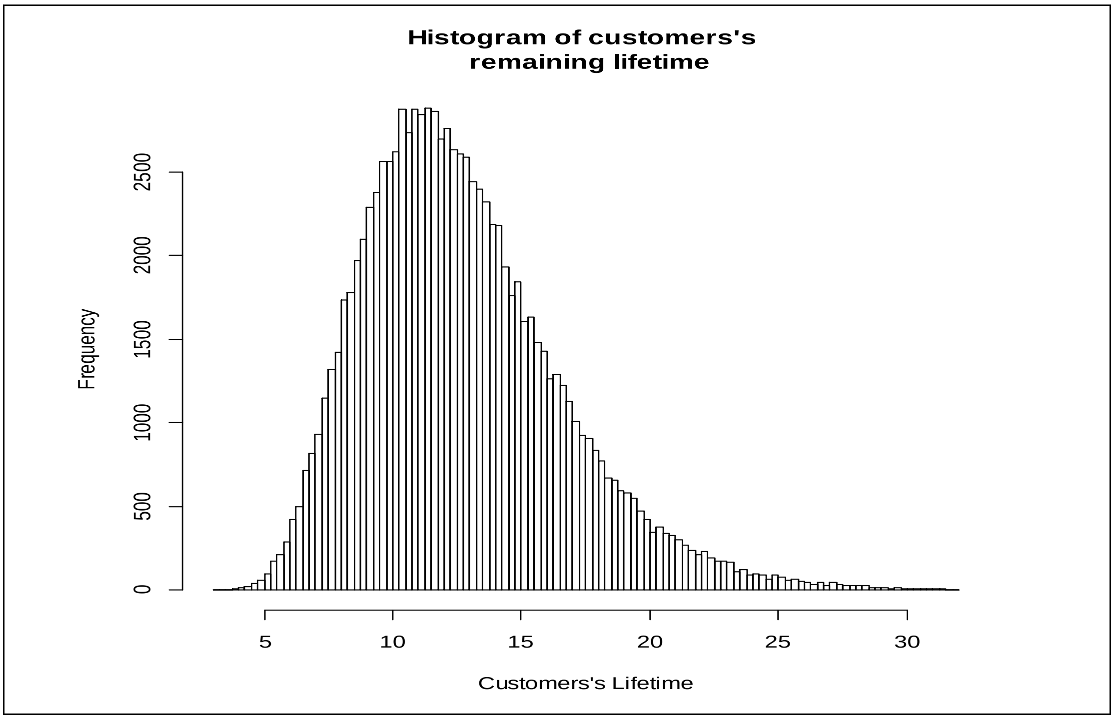
Αρχικά θα προσομοιώσουμε την υπολειπόμενη διάρκεια ζωής του ασφαλισμένου. Για τον σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε την Λογαριθμοκανονική κατανομή και την εντολή `rlnorm(n, meanlog = 0, sdlog = 1)`. Άρα η διάρκεια ζωής του ασφαλισμένου είναι μια τ.μ. $T \sim LN(\mu, \sigma^2)$, οι παράμετροι μ, σ^2 είναι σε λογαριθμική κλίμακα. Η συνάρτηση πιθανότητας που χρησιμοποιείται στην εντολή `rlnorm` είναι:

$$f(x) = \frac{\exp(-(\log(x) - \mu)^2/(2\sigma^2))}{\sigma x\sqrt{2\pi}}, x > 0, \sigma > 0 .$$

```
>T=rlnorm(1,2.5,0.3);
9.600769
```

Εάν εκτελέσουμε την παραπάνω εντολή $N = 10^5$ φορές, μπορούμε να δούμε κάποιες παραπάνω λεπτομέρειες για την κατανομή μας.

```
>summary(T)
Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
3.396   9.947  12.180  12.740  14.910  44.920
>hist(T[(T>3)&(T<32)],seq(3,32,0.25),xlab="Customers's Life-time",main="Histogram of customers's \n remaining lifetime")
```



Στη συνέχεια θα παράγουμε μια ακολουθία τιμών επιτοκίων. Υποθέτουμε ότι ο ανατοκισμός είναι συνεχής για κάθε μεταβλητή του μοντέλου μας. Το επιτόκιο συμβολίζεται με $r(t)\ , t = \{1,2,\dots,12n\}$.

Υπάρχουν πολλά μοντέλα για τον υπολογισμό τιμών επιτοκίων, εμείς θα χρησιμοποιήσουμε το γνωστό μοντέλο του Vasicek (1977) που περιγράφεται από την παρακάτω στοχαστική διαφορική εξίσωση,

$$dr(t) = a\big(b - r(t)\big)dt + \sigma dW(t), \quad \acute{o}\pi o \upsilon\ a, b, \sigma\ \in \mathbb{R}^{+}$$

άρα διακριτοποιώντας την παραπάνω,

$$r_i = r_{i-1} + ah(b - r_{i-1}) + \sigma\sqrt{h}\, W_i\ , \gamma\iota\alpha\ i \in \{2,3,\dots,m\}$$

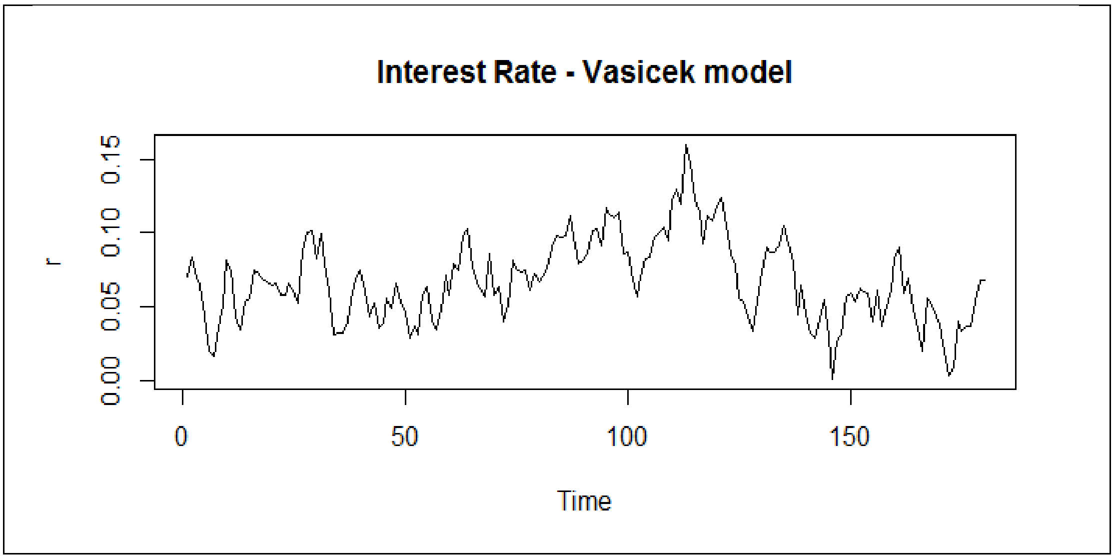
όπου:

$m = 12n$ το πλήθος των premiums και $h = n/m$ η χρονική διάρκεια ενός μηνός

$W(t), t \geq 0$: είναι μια κίνηση Brown, ($W_i \sim N(0,1)$)

Στον επόμενο πίνακα παρουσιάζουμε τον αλγόριθμο προσομοίωσης επιτοκίων, σύμφωνα με το μοντέλο του Vasicek που παρουσιάσαμε παραπάνω.

```
>n=15; m=floor(n*12); h=n/m;
>a=2;b=0.07;sigma=0.05;r=rep(b,m);
>for(i in 2:m){r[i]=r[i-1]+a*(b-r[i-1])*h+rnorm(1,0,sigma*h^0.5)}
>plot(r,type="l",xlab="Time",main="Interest Rate - Vasicek model");
```



Από το μοντέλο που περιγράψαμε παραπάνω προκύπτει ότι η αρχική αξία του ασφαλιστηρίου συμβολαίου την χρονική στιγμή μηδέν $t = 0$, δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$V_x(0) = \begin{cases} C^a \exp\left(-\sum_{s=1}^{m} r(s)h\right) - \sum_{k=1}^{m} \pi \exp\left(-\sum_{s=1}^{k} r(s)h\right), & \varepsilon\alpha\nu\ T \geq n \\ C(T) \exp\left(-\sum_{s=1}^{m_1} r(s)h\right) - \sum_{k=1}^{m_1} \pi \exp\left(-\sum_{s=1}^{k} r(s)h\right), & \varepsilon\alpha\nu\ T < n \end{cases}$$

όπου:

C^a: το εφάπαξ κεφάλαιο που καταβάλλεται στην λήξη του συμβολαίου έναν ο ασφαλισμένος επιβιώσει μέχρι τα n έτη.

$C(T)$: το κεφάλαιο που καταβάλλεται εάν ο ασφαλισμένος αποβιώσει πριν τα n έτη.

T : ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής του ασφαλισμένου σε έτη.

π: το σταθερό μηνιαίο ασφάλιστρο που καταβάλει ο ασφαλισμένος μέχρι την λήξη του συμβολαίου ή μέχρι το χρόνο T αν $T < n$.

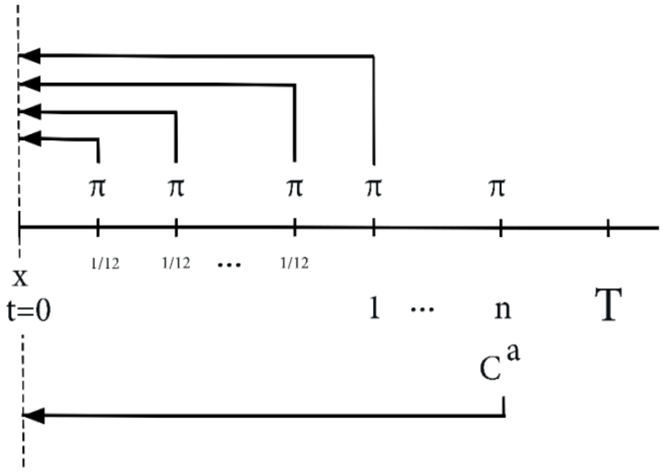
$m = \lfloor 12n \rfloor$, καθώς έχουμε μηνιαίες δόσεις, είναι η διάρκεια του συμβολαίου σε μήνες

$h = {}^{n}/_{m}$, η χρονική διάρκεια ενός μηνός.

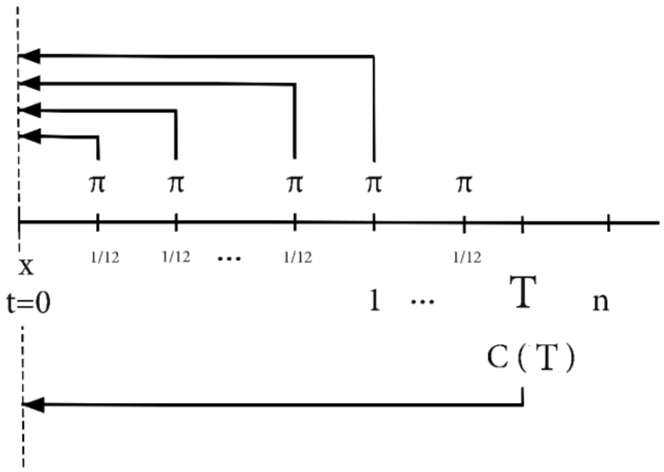
$m_1 = \lfloor 12\min(n, T) \rfloor$, είναι το πλήθος των μηνών που καταβάλλει ασφάλιστρο ο ασφαλισμένος.

$r(s)$: η ακολουθία του επιτοκίου που υπολογίσαμε παραπάνω.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι οικονομικές συναλλαγές που γίνονται στην ευθεία του χρόνου, για τον υπολογισμό του καθαρού μαθηματικού αποθέματος.



Εικόνα 4.1. Οικονομικές συναλλαγές όταν $T \geq n$.



Εικόνα 4.2. Οικονομικές συναλλαγές όταν $T < n$.

Πριν παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα της προσομοίωσης, θα αναφέρουμε τις τιμές που δώσαμε στις σταθερές μας:

```
>A=18000;print(paste0("Total premium=",A));
>n=15;print(paste0("Years of contract=",n));
>m=floor(n*12);h=n/m;print(paste0("Number of premiums until ex-
piry=",m));
>P=A/m; print(paste0("Premium=",P));
>DS=1.8;print(paste0("Payment in case of Death=",DS*P,"*number of
premiums paid"));
>LS=2.5;print(paste0("Lump sum paid out upon survival until time
n=",LS*A));
>N=10^5; print(paste0("The number of repetitions=",N));
```

```
"Total premium=18000"
"Years of contract=15"
```

```
"Number of premiums until expiry=180"
"Premium=100"
"Payment in case of Death=180*number of premiums paid"
"Lump sum= 45000"
"The number of repetitions=1e+05"
```

Στην συνέχεια προσομοιώνουμε το απόθεμα $V_x(0)$ την χρονική στιγμή $t = 0$, για $N = 10^5$ φορές και υπολογίσουμε τον μέσο όρο:

$$\widehat{V}_x(0) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \widehat{V}_x{}^{(i)}(0) \, .$$

```
V=0; Vx<-rep(0,times=N); T<-rep(0,times=N);
for(i in 1:N)
{
V=0;a=2;b=0.07;sigma=0.05;r=rep(b,m);
for(j in 2:m){r[j]=r[j-1]+a*(b-r[j-1])*h+rnorm(1,0,sigma*h^0.5)}

T[i]=rlnorm(1,2.5,0.3);m1=floor(min(n,T[i])*12);
for(k in 1:m1){V=V+P*exp(-sum(r[1:k]*h))};
if(T[i]>n){Vx[i]=-V+LumpSum;}
else {DeathSum=DS*P*m1*exp(-sum(r[1:m1]*h)); Vx[i]=-V+DeathSum};
}
MeanVx<-sum(Vx[1:N])/N;print(paste0("The approximation for the Pro-
spective reserve is :",MeanVx));
```

```
"The approximation for the Prospective reserve is:2447.69582020976"
```

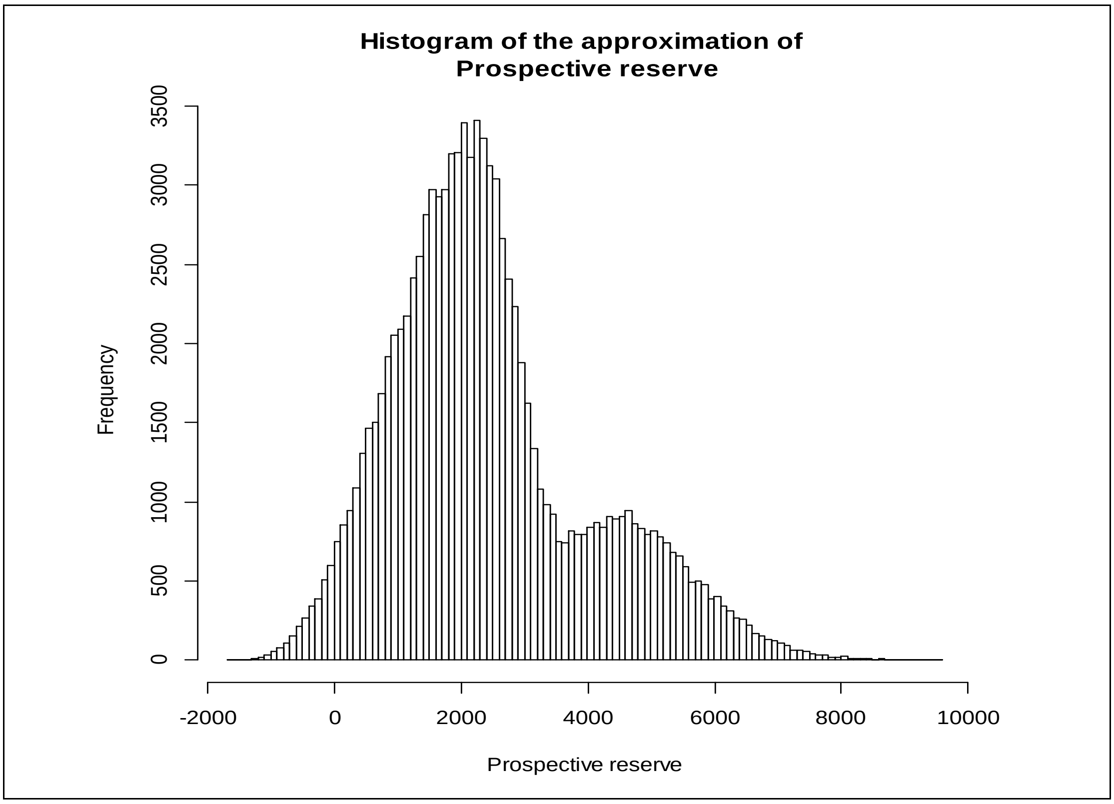
Επομένως η αρχική αξία του παραπάνω συμβολαίου είναι περίπου 2447 χρηματικές μονάδες. Το ποσό αυτό μπορεί να θεωρηθεί ότι εκφράζει το αρχικό ποσό που πρέπει να καταβάλλει ο ασφαλιζόμενος για να συνάψει το ασφαλιστήριο συμβόλαιο ή π.χ. εκφράζει το ελάχιστό ποσό που πρέπει να έχει ως κέρδος η ασφαλιστική εταιρία (σε παρούσα αξία) από την επένδυση των premiums που εισπράττει ώστε τελικά να έχει θετικό αναμενόμενο κέρδος από το συμβόλαιο αυτό.

Παρακάτω παραθέτουμε και κάποια αλλά αποτελέσματα για την προσομοίωση του αποθέματος $\widehat{V}_x(0)$. Όπως παρατηρούμε κάποιες τιμές είναι μικρότερες του μηδενός, σε αυτήν την περίπτωση η ασφαλιστική θα έχει καθαρό κέρδος.

```
> summary(Vx);
```

```
Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
-1707    1369    2185    2448    3171    9597
```

```
>hist(Vx,seq(-1800,10000,200),xlab="Prospective      reserve",main=
"Histogram of the approximation of \n Prospective reserve" ,horizon-
tal=T);
```

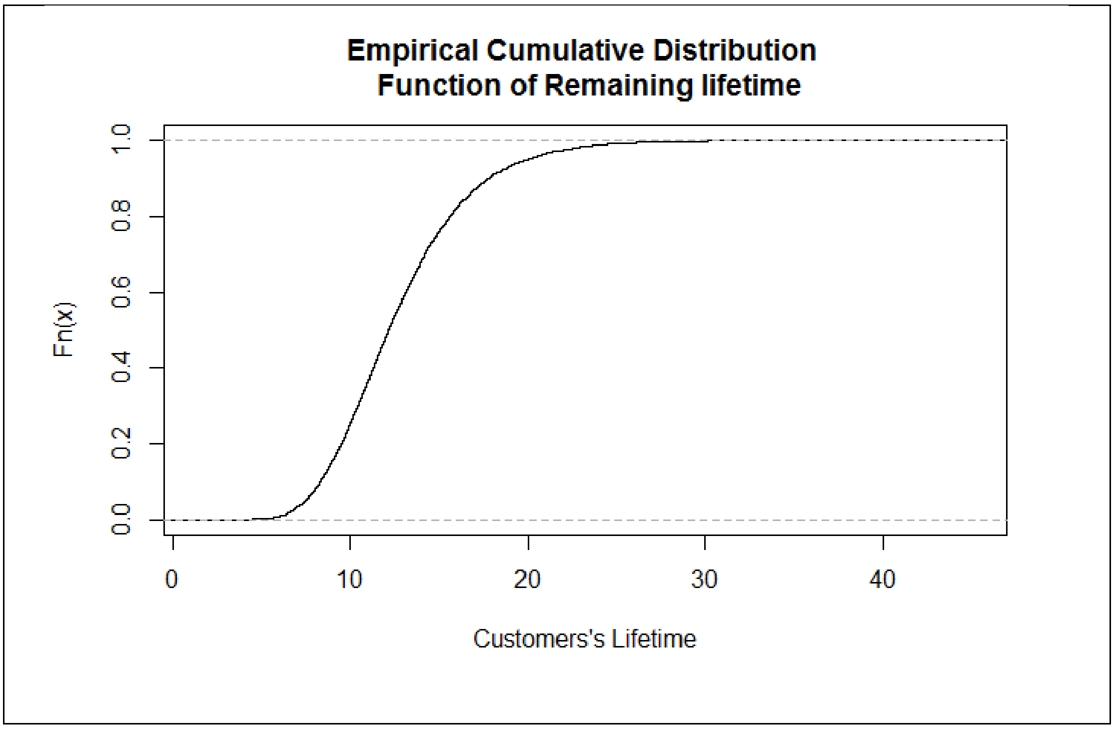


Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε από το παραπάνω γραφήμα, υπάρχει διπλή κορυφή στην κατανομή των τιμών του αποθέματος. Αυτό συμβαίνει γιατί οι ασφαλισμένοι που έχουν διάρκεια ζωής μεγαλύτερη ή ίση με τα 15 χρόνια, που είναι η διάρκεια του συμβολαίου, αποζημιώνονται όλοι με το C^a. Άρα το απόθεμα τον ασφαλισμένων με $T \geq 15$ υπολογίζεται από τον τύπο:

$$V_x(0) = C^a \exp\left(-\sum_{s=1}^{m} r(s) * h\right)$$

Τέλος κάτι που θα μπορούσε επίσης να μας ενδιαφέρει είναι πόσοι ασφαλισμένοι θα πάρουν το κεφάλαιο επιβίωσης C^a, στο οποίο έχουμε δώσει και υψηλότερη αξία από το κεφάλαιο θανάτου $C(\mathrm{T})$. Αφού ουσιαστικά μας ενδιαφέρει να δούμε πόσοι ασφαλισμένοι θα ξεπεράσουν σε χρόνο ζωής τα $n = 15$ χρόνια, αυτό μπορούμε να το δούμε και από την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της ηλικίας επιβίωσης των ασφαλισμένων.

```
> plot.ecdf(T,xlab="Customers's Lifetime",main="Empirical Cumulative
Distribution \n Function of Remaining lifetime");
```



Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε και από το παραπάνω διάγραμμα, με την κατανομή του υπολειπόμενου χρόνου ζωής που έχουμε υποθέσει, σχεδόν το 75% των ασφαλισμένων θα αποβιώσει μέσα στα επόμενα δεκαπέντε χρόνια. Αυτό είναι ένα πολύ χρήσιμο συμπέρασμα για την τιμολόγηση του ασφαλιστικού προϊόντος που εξετάζουμε.

Συμπέρασμα: Σε σχέση με τον κλασσικό υπολογισμό των αποθεμάτων, με την παραπάνω μεθοδολογία μπορούμε εύκολα να μεταβάλουμε κάποιες από τις σταθερές που ορίσαμε παραπάνω, ώστε να δημιουργήσουμε άλλα προϊόντα, να τιμολογήσουμε καλύτερα τα υπάρχοντα, καθώς και να ελέγξουμε τα αποθέματα μας κάτω από ακραίες καταστάσεις.

4.4 Προσομοίωση της πιθανότητας χρεοκοπίας

Στο Κεφάλαιο 3 ασχοληθήκαμε με το μοντέλο συλλογικού κινδύνου, τις συνολικές ζημίες και την πιθανότητα χρεοκοπίας. Σε αυτήν την παράγραφο θα εκτιμήσουμε μέσω προσομοίωσης την πιθανότητα χρεοκοπίας σύμφωνα με το μοντέλο Cramer-Lundberg.

Θεωρούμε ότι μια ασφαλιστική εταιρία προσφέρει ένα προϊόν στο οποίο ο ασφαλισμένος καταβάλει μηνιαία ασφάλιστρα p. Στον χρόνο $t = 0$ που ξεκινάει η ασφάλιση, η ασφαλιστική διατηρεί απόθεμα h. Θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας του προγράμματος αυτού, στο πέρας των $T = 5$ χρόνων.

Αρχικά πρέπει να προσομοιώσουμε τους χρόνους των επικείμενων αποζημιώσεων στην διάρκεια των πέντε χρόνων. Για τον σκοπό αυτό επιλέγουμε να παράγουμε τυχαίους αριθμούς από μια μη-ομογενή Poisson, με χρήση της μεθόδου της εκλέπτυνσης.

Έστω ότι η στοχαστική διαδικασία $N(t), t \geq 0$, του πλήθους των ζημίων που έχουν συμβεί μέχρι τον χρόνο t, ακολουθεί μια μη-ομογενή ανέλιξη Poisson με συνάρτηση έντασης $\lambda(t) \geq 0$ και ότι υπάρχει $\bar{\lambda}$ τέτοιο ώστε $\lambda(t) \leq \bar{\lambda}$ για κάθε $t \leq T$.

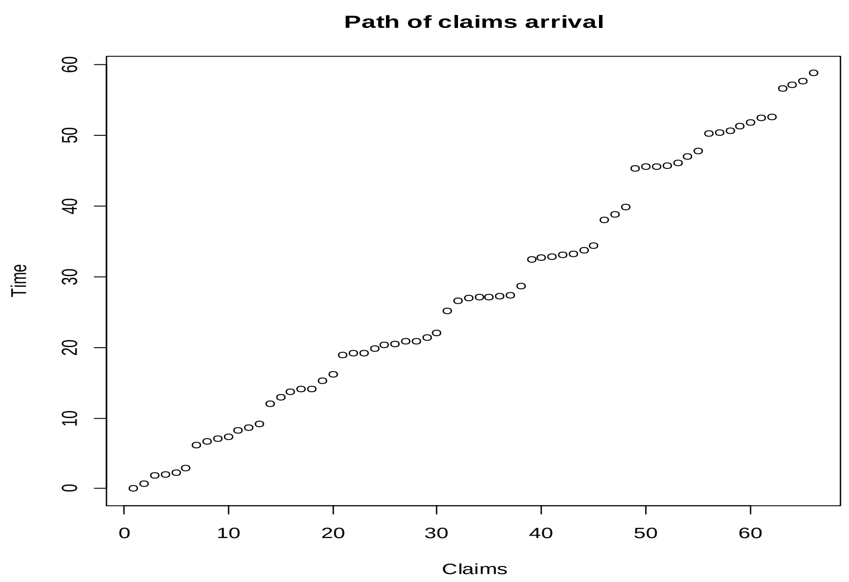
Στον αλγόριθμο που παραθέτουμε στον παρακάτω πίνακα, επιλέξαμε $\lambda(t) = \sin(t) + 1$ και άρα έχουμε $0 \leq \lambda(t) \leq 2$. Επομένως θέτουμε σαν άνω άκρο το $\bar{\lambda} = 2$. Για περισσότερα παραδείγματα προσομοίωσης της μη-ομογενή Poisson βλ. π.χ. Fathi-Vajargah and Khoshkar-Foshtomi (2014).

```
lamda<-2;T<-60;t<-0;ti<-0;K<-0;c<-0;
while(ti<T){
z<-rexp(1, rate=lamda);u<-runif(1, min = 0, max = 1); t<-t+z;
if(u<=(sin(t)+1)/lamda){ti<-t;c<-c+1;if(ti<=T){K<-c(K,ti)}}}
print(paste0("The number of claims:",c-1));
```

```
"The number of claims:65"
```

Στο παρακάτω γράφημα φαίνεται η κατανομή των ζημίων στον χρόνο.

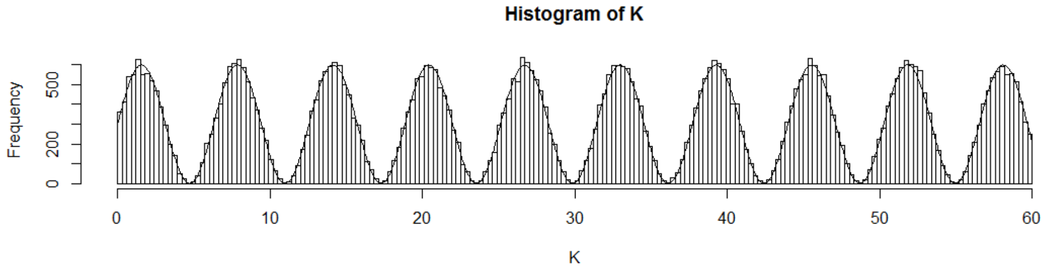
```
plot(K,main="Path of claims arrival",ylab="Time",xlab="Claims");
```



Εάν επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία $N = 1000$ φορές, παίρνουμε στοιχεία για την κατανομή του πλήθους των ζημίων καθώς και για τους χρόνους εμφάνισης των αποζημιώσεων.

```
lamda<-2;T<-60;t<-0;ti<-0;K<-0;c<-0;
while(ti<T){
z<-rexp(1, rate=1000*lamda);u<-runif(1, min = 0, max = 1); t<-t+z;
if(u<=(sin(t)+1)/lamda){ti<-t;c<-c+1;if(ti<=T){K<-c(K,ti)}}
}
hist(K,seq(0,60,0.5))
x=seq(0,60,0.5);lines(x,1000*(sin(x)+1)/lamda)
```

Οι χρόνοι αυτοί συμφωνούν με την συνάρτηση έντασης όπως φαίνεται στο ακόλουθο γράφημα:



Στον παρακάτω πίνακα μπορούμε να δούμε ότι η μέση τιμή του πλήθους των ζημίων, που θα εμφανιστούν σε ένα ασφαλιστήριο συμβόλαιο στην διάρκεια πέντε χρόνων, είναι με 62. Επίσης παρατηρούμε ότι οι τιμές μας έχουν μεγάλη διακύμανση.

Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.
36.00	57.00	62.00	62.25	67.00	88.00

Στην συνέχεια προσομοιώνουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας σύμφωνα με το μοντέλο Cramer-Lundberg.

Υπολογίζουμε την τιμή του αποθέματος στο χρόνο t_k μέσω του τύπου:

$$R(t_k) = h + p\sum_{i=1}^{k}(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^{k} X_i = h + \sum_{i=1}^{k} Y_i\,, \qquad k = 0,1,2,\ldots,$$

όπου:

$Y_i = p(t_i - t_{i-1}) - X_i\,, \mu\varepsilon\ i = 1,2,\ldots,k$

h: το αρχικό απόθεμα (για $t_0 = 0$) το οποίο επιλέξαμε να είναι 1000€

p: ο ρυθμός είσπραξης των ασφαλίστρων, που θεωρείται σταθερός και ίσος με 60€ ανά μονάδα χρόνου (για απλότητα θεωρούμε ότι τα ασφάλιστρα εισπράττονται με συνεχή τρόπο στη διάρκεια του χρόνου).

X_i : το μέγεθος των ζημίων, που ακολουθούν τη λογαριθμοκανονική κατανομή με κατάλληλες παραμέτρους

t_i: ο i-οστός χρόνος εμφάνισης ζημίας. Οι τυχαίοι χρόνοι $t_1, t_2, \ldots$ περιγράφονται από μια μη-ομογενή ανέλιξη Poisson σύμφωνα με παραπάνω παράγραφο.

Επομένως $R(0) = h$ και $R(t_k) = R(t_{k-1}) + Y_k,\ k = 1,2,\ldots$.

Για περισσότερη ανάλυση του αποθέματος, βλ. Goldie and Kluppelberg (1998).

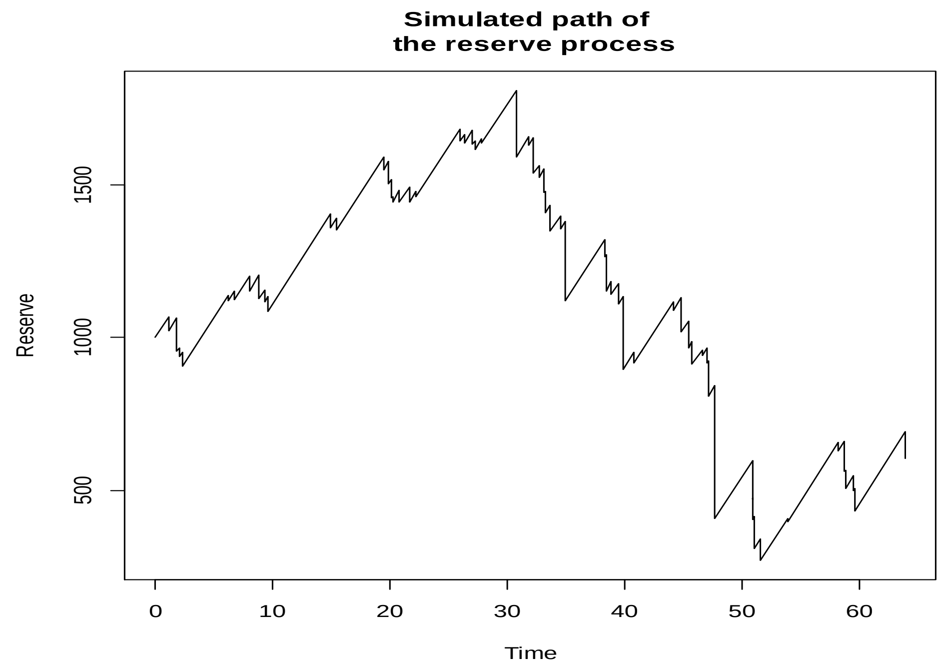
Θεωρούμε ότι η ασφαλιστική εταιρία έχει «χρεοκοπήσει» εάν το απόθεμα γίνει, μέσα στον χρόνο T, αρνητικό. Φυσικά στην πράξη δεν επέρχεται χρεοκοπία της εταιρίας (διότι μπορεί υπό κανονικές συνθήκες να καλύψει το έλλειμμα με δανεισμό), αλλά η πιθανότητα χρεοκοπίας αποτελεί ένα μέτρο φερεγγυότητας της. Συνήθως προκαθορίζεται μια μικρή πιθανότητα χρεοκοπίας και από αυτήν υπολογίζεται το αρχικό απόθεμα. Παρακάτω βλέπουμε τον κώδικα υπολογισμού του αποθέματος.

```
lamda<-2;T<-60;t<-0;ti<-0;K<-0;c<-0;p=60;h=1000;R=h;Rt=R;
print(paste0("initial reserve=",h));
print(paste0("calculate the ruin up to a fixed time =", T));
print(paste0("premium rate=",p));
while((ti<T)&(R>0))
{
  z<-rexp(1, rate=lamda);u<-runif(1, min = 0, max = 1);
  t<-t+z;
  if(u<=(sin(t)+1)/lamda)
    { X=rlnorm(1,3.912023, 0.6931472);
      Y=p*(t-ti)-X;R=R+Y;
      ti<-t; c<-c+1;
      Rt=c(Rt,R+X);K<-c(K,ti);Rt=c(Rt,R);K<-c(K,ti)}
}
```

```
"initial reserve=1000"
"calculate the ruin up to a fixed time =60"
"premium rate=60"
```

Και στο παρακάτω διάγραμμά φαίνεται και η μεταβολή του αποθέματος με τον χρόνο. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, βλέπουμε ότι δεν είχαμε χρεοκοπία μέσα στα 5 χρόνια.

```
plot(K,Rt,type="l",xlab="Time",ylab="Reserve",main="Simulated  path
of \n the reserve process" )
```



Στην συνέχεια, επαναλαμβάνοντας την παραπάνω διαδικασία $N = 10^5$ φορές, υπολογίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας,

$$\hat{p}_{ruin}(T) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} 1_{\{R^{(i)}(t)<0\ \gamma\iota\alpha\ t\in[0,T]\}}$$

όπου το $R^{(i)}(t)$, $t \in [0,T]$ είναι η i-οστή διαδρομή αποθέματος που προσομοιώσαμε.

Ο τελικός αλγόριθμος υπολογισμού της πιθανότητας χρεοκοπίας, παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα. Όπως βλέπουμε, σύμφωνα με τα δεδομένα που χρησιμοποιήσαμε, η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι ίση με $\hat{p}_{ruin}(T) = 0.22539$. Μεταβάλλοντας λίγο τα ασφάλιστρα ή το αρχικό απόθεμα, μπορούμε να μειώσουμε περισσότερο αυτήν την πιθανότητα ώστε να είναι σε αποδεκτά, για την ασφαλιστική, επίπεδα.

```
sum<-0;N<-10^5;
for(j in 1:N){
lamda<-2;T<-60;t<-0;ti<-0;K<-0;c<-0;p=60;h=1000;R=h;Rt=R;
while((ti<T)&(R>0))
{
  z<-rexp(1, rate=lamda);u<-runif(1, min = 0, max = 1);
  t<-t+z;
  if(u<=(sin(t)+1)/lamda)
    { X=rlnorm(1,3.912023, 0.6931472);
      Y=p*(t-ti)-X;
      R=R+Y;
      ti<-t; c<-c+1;
      Rt=c(Rt,R+X);K<-c(K,ti)
      Rt=c(Rt,R);K<-c(K,ti)
    }
}
if(R<=0){sum<-sum+1};
}
prop<-sum/N;print(paste0("Ruin probability =",prop));
```

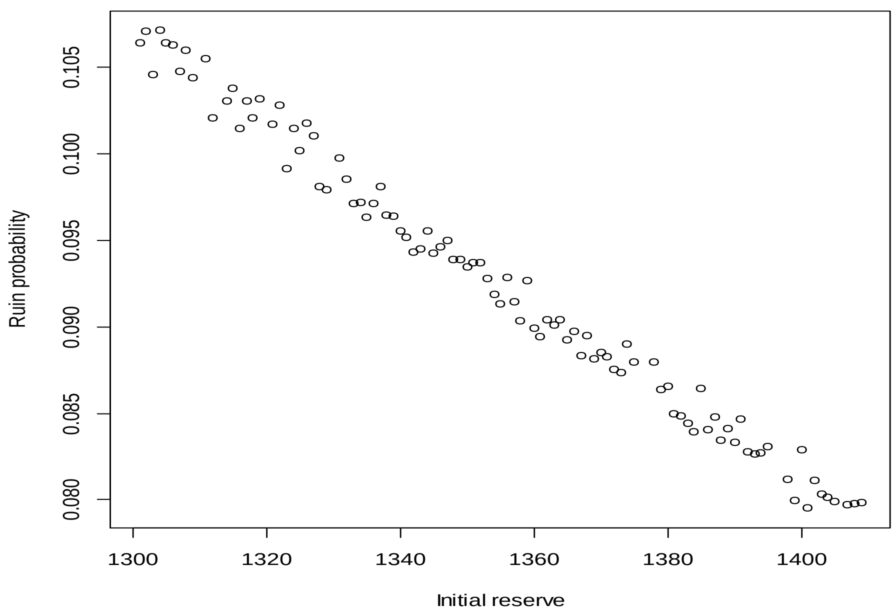
```
"Ruin probability =0.22539"
```

Με την χρήση της προηγούμενης μεθόδου μπορούμε εύκολα να μεταβάλουμε κάποια από τα αρχικά στοιχεία του προβλήματος μας, ώστε η πιθανότητα χρεοκοπίας να είναι σε επιθυμητά επίπεδα. Συγκεκριμένα θα εκτιμήσουμε το αρχικό απόθεμα h ώστε η πιθανότητα χρεοκοπίας να είναι ίση με $\hat{p}_{ruin}(T) = 10\%$.

Αρχικά τρέχουμε την διαδικασία που περιγράψαμε παραπάνω για 100 διαφορετικες τιμες του h με $h \in [1230,1350]$ και παίρνουμε το γράφημα με τις τιμές της πιθανότητας χρεοκοπίας, που προσομοιώσαμε, προς το αρχικό απόθεμα που υποθέσαμε.

```
N<-10^5; k<-100;h<-sort(sample(1300:1410,k,replace=F));
y<-rep(0,k);x<-rep(0,k);dataframe<-data.frame(Reserve=y,Ruin=x);
for(i in 1:k){
sum<-0;
for(j in 1:N){
lamda<-2;T<-60;t<-0;ti<-0;c<-0;p=60;H<-h[i];R<-H;

while((ti<T)&(R>0)){
  z<-rexp(1, rate=lamda);u<-runif(1, min = 0, max = 1);
  t<-t+z;
  if(u<=(sin(t)+1)/lamda)
    { X=rlnorm(1,3.912023, 0.6931472);
```

```
      Y=p*(t-ti)-X;
      R=R+Y;
      ti<-t; c<-c+1;}
}
if(R<=0){sum<-sum+1};}
prop<-sum/N;dataframe[i,1]<-prop;dataframe[i,2]<-h[i];}
plot(dataframe,ylab="Initial reserve", xlab="Ruin probability");
```



Στο παραπάνω γράφημα παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται η πιθανότητα χρεοκοπίας, μειώνεται το αρχικό απόθεμα. Μπορούμε επίσης να δούμε ότι η σχέση το αποθέματος και της πιθανότητας χρεοκοπίας είναι (περίπου) γραμμική. Συνεπώς μπορούμε να βρούμε το γραμμικό μοντέλο που συνδέει τις δυο αυτές μεταβλητές και στη συνέχεια να το χρησιμοποιήσουμε ώστε να εκτιμήσουμε το αρχικό απόθεμα δεδομένου ότι πιθανότητα χρεοκοπίας είναι 10%.

Από τον παρακάτω πίνακα μπορούμε να πάρουμε τις εκτιμήτριες των παραμέτρων μας. Επομένως η εξίσωση της ευθείας που προσεγγίζει τα δεδομένα μας έχει την γενική μορφή:

$$Reserve = 1708.672 \quad - 3823.065 Ruin$$

Επίσης από τον παρακάτω πίνακα μπορούμε να δούμε και κάποια αλλά στοιχεία για το μοντέλο μας. Όπως την τιμή του $R^2 = 0.9867$, αυτό σημαίνει ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας μπορεί να ερμηνεύσει το $98{,}67\%$ της συνολικής μεταβλητότητας της τιμής του αποθέματος (η υπόλοιπη μεταβλητότητα προφανώς προέρχεται από την προσομοίωση), καθώς και τα p_value των εκτιμητριών, τα οποία βλέπουμε στον πίνακα Coefficients, αλλά και του μοντέλου, το οποίο το βλέπουμε στο κάτω μέρος του πίνακα, των οποίων οι τιμές είναι $p\_value < 2e - 16$.

```
fit<-lm(Reserve ~ Ruin, data = dataframe);
summary(fit);
```

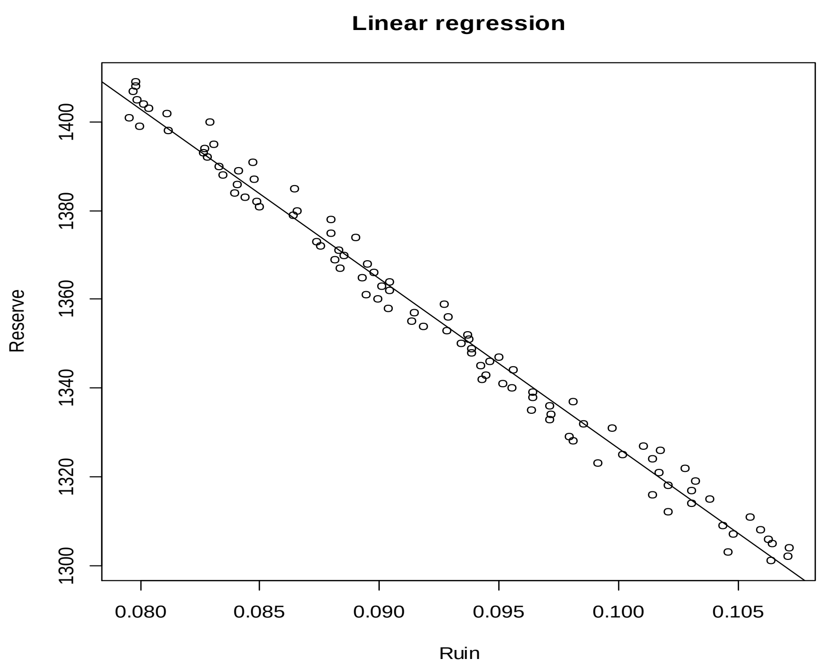
```
Call:
```

```
lm(formula = Reserve ~ Ruin, data = dataframe)
Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max 
-6.6914 -2.7293 -0.3529  2.6865  8.2220 

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
(Intercept)  1708.672      4.141  412.58   <2e-16 ***
Ruin        -3823.065     44.563  -85.79   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 3.575 on 98 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9869,    Adjusted R-squared:  0.9867 
F-statistic:  7360 on 1 and 98 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Συμπερασματικά είναι ασφαλές να χρησιμοποιήσουμε το παραπάνω μοντέλο γραμμικής παλινδρόμησης, για την πρόβλεψη του αποθέματος για δεδομένη πιθανότητα χρεοκοπίας.

Στο επόμενο γράφημα φαίνονται οι παρατηρήσεις μας και η ευθεία του μοντέλου της γραμμικής παλινδρόμησης.

```
plot(Reserve~Ruin,data=dataframe,main="Linear        regression");
abline(fit);
```



Στην συνέχεια, θα χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη εντολή για να εκτιμήσουμε το αρχικό απόθεμα. Ένας άλλος τρόπος θα ήταν να χρησιμοποιήσουμε το παραπάνω γράφημα.

```
new.df<-data.frame(Ruin=c(0.08,0.09,0.1));predict(fit, new.df);
       1        2        3 
1402.827 1364.596 1326.365
```

Άρα $Reserve = 1326.365$ για $Ruin = 0.1$. Γνωρίζοντας λοιπόν ότι το επίπεδο ασφαλείας θέλει η πιθανότητα χρεοκοπίας να μην υπερβαίνει την τιμή $Ruin = 0.1$, μπορεί η ασφαλιστική εταιρία να θέλει να υιοθετήσει μια στρατηγική πιο συντηρητική, έτσι εάν ας πούμε θέλει η $Ruin = 0.09$ βλέπουμε από το παραπάνω ότι το $Reserve = 1364.596$ ή για $Ruin = 0.08$ θα έχουμε $Reserve = 1402.827$.

Ξένη Βιβλιογραφία

1. Stefano M. Iacus (2011). *Option Pricing and Estimation of Financial Models with R*, Wiley
2. Ngai Hang Chan, Hoi Ying Wong (2006). *Simulation Techniques in Financial Risk Management,* Wiley
3. Rob Kaas, Marc J. Goovaerts, Jan Dhaene, Michel Denuit (2008). *Modern Actuarial Risk Theory*, Springer, Second Edition
4. Charles M. Goldie, Claudia Kluppelberg (1998). *Subexponential Distributions*, *A practical Guide to Heavy-Tails: Statistical Techniques and Applications*, E. Adler, R. Feldman, R. Taqqu, M. S. Birkhauser, Boston
5. H.U. Gerber (1997). *Life Insurance Mathematics*, Springer, 3rd edition
6. T. Mikosch (2009). *Non-Life Insurance Mathematics: An Introduction with Stochastic Processes*, Springer, 2rd edition
7. L. Allen, J. Boudoukh and A. Saunders (2004). *Understanding market, credit, and operational risk : the value at risk approach*, Blackwell Publishing
8. Don L. McLeish (2005). *Monte Carlo Simulation and Finance*, Wiley
9. F. Delbaen (2002). *Coherent Risk Measures on General Probability Spaces*, Springer
10. David C. M. Dickson (2005). *Insurance risk and ruin,* Cambridge University Press
11. S. Roccioletti (2016). *Backtesting Value at Risk and Expected Shortfall,* Springer
12. C. Acerbi and D. Tasche (2002). On the coherence of expected shortfall, *Journal of Banking and Finance*, Vol. 26, σελίδες 1487–1503
13. Sheldon M. Ross (2010). *Introduction to Probability Models*, Elsevier, 10rd edition
14. O. Vasicek (1977). An Equilibrium Characterization of the Term Structure*, Journal of Financial Economics*, Vol. 5, Σελίδα 185
15. R. J. Laeven and M. J. Goovaerts (2008). Premium Calculation and Insurance Pricing, In E. L. Melnick and B. S. Everitt, editors, *Encyclopedia of Quantitative Risk Analysis and Assessment*, Wiley, Σελίδες 1302-1314
16. M. Haugh (2004). *Generating Random Variables and Stochastic Processes*, Monte Carlo Simulation: IEOR E4703
17. B. Fathi-Vajargah, H. Khoshkar-Foshtomi (2014). Simulating Nonhomogeneous Poisson Point Process Based on Multi Criteria Intensity Function and Comparison with Its Simple Form, *Journal of mathematics and computer Science*, Vol. 9, Σελίδες 133 - 138
18. H. Wu, M. Shahidehpour, A. Alabdulwahab, A. Abusorrah (2016). A Game Theoretic Approach to Risk-Based Optimal Bidding Strategies for Electric Vehicle Aggregators in Electricity Markets With Variable Wind Energy Resources, *IEEE Transactions on Sustainable Energy*, Vol. 7, Issue: 1, Σελίδες 374 -385

Ελληνική Βιβλιογραφία

1. Μ. Μπούτσικας (2004). *Σημειώσεις παραδόσεων: Μέθοδοι Προσομοίωσης και υπολογιστικές στατιστικές τεχνικές*, Πανεπιστήμιο Πειραιά
2. Κ. Πολίτης (2012) *Εισαγωγή στη θεωρία συλλογικού κινδύνου: Το συλλογικό πρότυπο και θεωρία χρεοκοπίας,* Εκδόσεις Σταμούλη
3. Ε. Χατζηκωνσταντινίδης (2015). *Σημειώσεις του μεταπτυχιακού μαθήματος Θεωρίας Κινδύνου Ι*, Πανεπιστήμιο Πειραιά