ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΣΧΟΛΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ
&
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ
ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ
ΚΑΙ
ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ

ΠΛΕΟΝΑΣΜΑΤΟΣ ΜΕ ΔΙΠΛΕΥΡΑ ΑΛΜΑΤΑ

Κροκιδάς Νικόλαος-Ερμής

Διπλωματική Εργασία

Πειραιάς,

Μάρτιος 2016

UNIVERSITY OF PIRAEUS

SCHOOL OF FINANCE
&
STATISTICS

DEPARTMENT OF STATISTICS
AND
INSURANCE SCIENCE

M.Sc. IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

STOCHASTIC SURPLUS PROCESSES WITH TWO-SIDED JUMPS

Krokidas Nikolaos-Hermes

Dissertation Thesis

Piraeus,

March 2016

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες και τον σεβασμό μου στον κο Ευστάθιο Χατζηκωσταντινίδη, Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης για την υποστήριξη, ενθάρρυνση, καθοδήγηση και υπομονή του κατά τη διάρκεια της συγγραφής της διπλωματικής εργασίας.

Στη συνέχεια, θα ήθελα να ευχαριστήσω τα υπόλοιπα μέλη της εξεταστικής επιτροπής, την κα Γεωργία Βερροπούλου, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης και τον κο Μιλτιάδη Νεκτάριο, Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης.

Τέλος, να ευχαριστήσω την οικογένεια μου για την εμπιστοσύνη και την αγάπη τους και την πολύτιμη συνεισφορά των γονιών μου στη μόρφωση μου.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός αυτής της διατριβής είναι η μελέτη διαφόρων στοχαστικών διαδικασιών πλεονάσματος με δίπλευρα άλματα (two-sided jumps) τόσο σε διακριτό όσο και σε συνεχή χρόνο με ή και χωρίς την παρουσία ενός τυχαίου όρου διάχυσης που περιγράφεται από μία στοχαστική κίνηση Brown.

Τα προς τα πάνω άλματα (upward jumps) παριστούν τα τυχαία μεγέθη των κερδών εσόδων ενώ τα προς τα κάτω άλματα (downward jumps) παριστούν τα μεγέθη των ζημιών του χαρτοφυλακίου. Ως εκ τούτου, αυτά τα μοντέλα για το πλεόνασμα περιέχουν ως ειδικές περιπτώσεις αντίστοιχα μοντέλα της Κλασσικής Θεωρίας Κινδύνου.

Θεωρώντας διάφορες κατανομές για τα ύψη των δίπλευρων αλμάτων καθώς και για τους ενδιάμεσους χρόνους εμφάνισης των κινδύνων, θα μελετηθούν διάφορα μέτρα χρεοκοπίας μέσω της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής των Gerber-Shiu καθώς επίσης θα δοθούν και ασυμπτωτικά αποτελέσματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας.

ABSTRACT

The purpose of this Thesis is the study of various stochastic processes of surplus with two-sided jumps happening both in distinct and continuous time, with or without the presence of a random diffusion term which is described by a stochastic Brownian motion.

The upward jumps represent the random gain sizes while the downward jumps represent the claim sizes of the portflolio. Therefore, these surplus models include as special cases equivalent models of Classical Ruin Theory.

Considering various distributions for the sizes of the two sided-jumps, as well as for the time between risk appearances, various ruin measures will be studied through the expected Gerber-Shiu discounted penalty function as well as asymptotic results will be given for the ruin probability.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τον σημαντικότερο ρόλο για την ομαλή λειτουργία ενός ασφαλιστικού οργανισμού, τον κατέχει η δημιουργία ικανοποιητικών αποθεματικών κεφαλαίων, ούτως ώστε να μπορεί να ανταπεξέλθει στις ανάγκες και τις υποχρεώσεις του απέναντι στους πελάτες, αλλά και σε επαγγελματικό επίπεδο, όπως, επίσης, και στην κάλυψη των λειτουργικών εξόδων του. Τα αποθεματικά κεφάλαια, με τη χρήση ασφαλιστικών όρων, ουσιαστικά αποτελούν το πλεόνασμα και είναι η διαφορά μεταξύ του ενεργητικού (απαιτήσεις) και του παθητικού (υποχρεώσεις) της ασφαλιστικής εταιρίας.

Ο υπολογισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας αποτελεί βασικό πρόβλημα της Κλασσικής Θεωρίας Κινδύνων. Πρόκειται για την πιθανότητα της εταιρίας να μην μπορέσει να ανταποκριθεί επαρκώς στην κάλυψη του συνόλου των αποζημιώσεων των πελατών της, λόγω ανεπάρκειας των αποθεματικών. Το 1903, ο Σουηδός μαθηματικός Filip Lundberg καταφέρνει να θέσει τα θεμέλια της ανάπτυξης της μαθηματικής Θεωρίας των Κινδύνων, με τη δημοσίευση της διδακτορικής του διατριβής, η οποία έφερε τον τίτλο «Approximerad fremstalning au sannolikheets funktionen». Στη συνέχεια, το 1930, ο Harald Cramer αφού βασίστηκε στη διατριβή του Lundberg θέλησε να ενισχύσει τη Θεωρία Κινδύνου δημοσιεύοντας σχετικές εργασίες, οι οποίες ενσωμάτωσαν τη Θεωρία των Στοχαστικών Ανελίξεων στο ήδη υπάρχον έργο. Έτσι, μετά και την ανανέωση που πρόσφερε ο Cramer στον τομέα, το μοντέλο που παρουσιάζει τη δυναμική εξέλιξη του πλεονάσματος στο χρόνο ονομάστηκε Κλασσικό Μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου ή προς τιμήν τους Μοντέλο Cramer-Lundberg. Το μοντέλο βασίζεται στην παραδοχή ότι το πλήθος των κινδύνων ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου ακολουθεί τη στοχαστική ανέλιξη Poisson. Το κύριο στοιχείο του Κλασσικού Μοντέλου της Θεωρίας Κινδύνου είναι ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των κινδύνων ακολουθούν την εκθετική κατανομή.

Ο Νορβηγός Sparre Andersen ήταν εκείνος που έφερε τη γενίκευση στο Κλασσικό Μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου, όταν το 1957 συμμετείχε στο 15^{ο} Αναλογιστικό Συνέδριο της Νέας Υόρκης παρουσιάζοντας την εργασία του με τίτλο: «On the collective theory of risk in case of contagion between the claims». Ο Sparre Andersen έκανε την υπόθεση ότι το πλήθος των κινδύνων ικανοποιεί μία ανανεωτική στοχαστική διαδικασία. Δηλαδή, σε αντίθεση με τους

Cramer-Lundberg το βασικό γνώρισμα του μοντέλου του Νορβηγού είναι ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των κινδύνων ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, οι οποίες δεν ακολουθούν απαραίτητα την εκθετική κατανομή. Οπότε, γίνεται κατανοητό πως αυτό το μοντέλο αποτελεί γενίκευση του μοντέλου Cramer-Lundberg καθώς το τελευταίο αποτελεί ειδική περίπτωση του πρώτου και ονομάστηκε μοντέλο Sparre Andersen ή ανανεωτικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου. Για παράδειγμα, μία ειδική περίπτωση του ανανεωτικού μοντέλου είναι αυτή όπου οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των κινδύνων ακολουθούν την κατανομή Erlang, η οποία είναι μία γενίκευση της εκθετικής.

Η Θεωρία Κινδύνων εξελίχθηκε σημαντικά και απέκτησε σημαντική ώθηση μέσω του έργου των Gerber και Shiu, οι οποίοι έκαναν λόγο για την συνάρτηση αναμενόμενης ποινής προεξόφλησης, η οποία αποτελεί γενίκευση της πιθανότητας απόλυτης χρεοκοπίας.

1.1 Η Στοχαστική Διαδικασία Πλεονάσματος.

Το πρώτο βήμα για την μοντελοποίηση της στοχαστικής διαδικασίας του πλεονάσματος μίας ασφαλιστικής εταιρίας είναι ο προσδιορισμός του αριθμού των κινδύνων στους οποίους εκτίθεται.

Ορισμός 1.1

Ορίζουμε

$$\{N(t), t \geq 0\}$$

στοχαστική διαδικασία, η οποία παριστάνει το πλήθος των κινδύνων που εμφανίστηκαν στο χρονικό διάστημα $[0, t]$. *Η* $\{N(t), t \geq 0\}$ *ονομάζεται απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη, αν και μόνο αν:*

i. $N(t) > 0$, *με* $N(0) = 0$
ii. $N(t)$ *είναι διακριτή,*
iii. *αν* $s \leq t$, *τότε* $N(s) \leq N(t)$

Οι ανανεωτικές στοχαστικές διαδικασίες αποτελούν τις πιο διαδεδομένες απαριθμήτριες στοχαστικές διαδικασίες στη θεωρία κινδύνου, αλλά, και γενικότερα στη θεωρία πιθανοτήτων. Ο ορισμός τους βασίζεται στους ενδιάμεσους χρόνους εμφάνισης των ενδεχόμενων κινδύνων που απαριθμεί η απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη $\{N(t), t \geq 0\}$. Θεωρούμε $\{T_\iota, i = 0,1,2, \ldots\}$ μία ακολουθία από ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, για τις οποίες ισχύει $T_0 = 0$, και $T_i, i \geq 1$ συμβολίζουμε την χρονική στιγμή όπου εμφανίζεται το i-οστό ενδεχόμενο. Στη συνέχεια, θεωρούμε τις W_i τυχαίες μεταβλητές, για τις οποίες ισχύει ότι $W_i = T_i - T_{i-1}, i \geq 1$. Η W_1 εκφράζει το χρόνο που απαιτείται για την εμφάνιση του πρώτου κινδύνου, ενώ η $W_i, i \geq 2$ εκφράζει το χρόνο που μεσολαβεί από την εμφάνιση του i-1 ενδεχομένου, μέχρι και την εμφάνιση του i ενδεχομένου. Συνεπώς, μπορούμε να πούμε ότι η $\{W_i, i = 1,2, \ldots\}$ είναι ακολουθία ανεξάρτητων μη-αρνητικών τυχαίων μεταβλητών που παριστά τους ενδιάμεσους χρόνους εμφάνισης των κινδύνων. Η ακολουθία των τυχαίων μεταβλητών $\{T_n, n = 0,1, \ldots\}$ ονομάζεται ακολουθία ανανεώσεων, και όταν για $W_0 = 0$, θα είναι

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} W_i = W_1 + W_2 + \cdots + W_n, n \geq 0 \qquad (1.1)$$

Ορίζουμε, ακόμη, την

$$N(t) = sup\{n: T_n < t\},$$

η οποία είναι η στοχαστική ανέλιξη του πλήθους των κινδύνων που παρουσιάζονται στο χρονικό διάστημα $[0, t]$.

Ορισμός 1.2

Θεωρούμε $\{W_i, i = 1,2, \ldots\}$ *μία ακολουθία μη-αρνητικών, ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών και* $\{T_i, i = 1,2, \ldots\}$ *μία ακολουθία ανανεώσεων με*

$$T_i = W_1 + W_2 + \cdots + W_i, i \geq 1$$

και

$$T_0 = W_0 = 0.$$

Τότε η $\{N(t), t \geq 0\}$ *με* $N(0)$ *είναι απαριθμήτρια διαδικασία που ορίζεται από την*

$$\left\{N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} I(T_n \leq t)\right\}$$

η οποία ονομάζεται ανανεωτική στοχαστική διαδικασία και ουσιαστικά πρόκειται για το πλήθος των ανανεώσεων στο χρονικό διάστημα $[0, t]$.

Γίνεται φανερό, ότι από τον ορισμό, για κάθε ανανεωτική στοχαστική διαδικασία $\{N(t), t \geq 0\}$ θα ισχύει ότι:

$$\{N(t) = n\}$$

αν και μόνο αν

$$\{T_n \leq t < T_{n+1}\}.$$

Επίσης, γίνεται φανερό ότι:

$$N(t) = max\{n: T_n \leq t\}$$

και

$$P[N(t) \geq n] = P(T_n \leq t).$$

Το παρακάτω θεώρημα αποτελεί αξιοσημείωτη ιδιότητα των ανανεωτικών στοχαστικών ανελίξεων.

<u>Θεώρημα 1.1</u>

Έστω $\{N(t), t \geq 0\}$ *μία ανανεωτική στοχαστική ανέλιξη. Τότε:*

i. *με πιθανότητα 1 ισχύει ότι:*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{E(W_1)},$$

ii.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[N(t)]}{t} = \frac{1}{E(W_1)}$$

Η (ii) είναι γνωστή ως στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα. Για την απόδειξη, βλ. Rolski et al. (1996, σελ. 211).

Από τον ορισμό 1.2 προκύπτει ότι η στοχαστική ανέλιξη Poisson είναι μία ειδική περίπτωση της ανανεωτικής στοχαστικής διαδικασίας, θεωρώντας ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των κινδύνων είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, οι οποίες ακολουθούν την εκθετική κατανομή.

Εφόσον μοντελοποιήσαμε τον αριθμό των κινδύνων, στη συνέχεια θα μοντελοποιήσουμε τις ζημιές και τις αποζημιώσεις του χαρτοφυλακίου για τον καθορισμό του πλεονάσματος. Έστω $\{X_i, i = 1,2, \ldots\}$ μία ακολουθία μη-αρνητικών τυχαίων μεταβλητών, όπου η X_i δηλώνει το μέγεθος της ζημιάς από την εμφάνιση του i-οστού ενδεχομένου και $S(t), t \geq 0$ παριστά τις συνολικές απαιτήσεις του χαρτοφυλακίου στο διάστημα $[0, t]$.

Ορισμός 1.3

Για το μέγεθος των συνολικών αποζημιώσεων που καταβάλλονται έως τον χρόνο t ορίζουμε τη στοχαστική ανέλιξη

$$S(t) = X_1 + X_2 + \cdots + X_{N(t)}$$

ή

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, & N(t) > 0 \\ 0, & N(t) = 0 \end{cases}$$

Όπου,

$$\{X_i\}_{i\geq 1}^{\infty}$$

είναι μία ακολουθία από ανεξάρτητες κι ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με X_i να είναι τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το μέγεθος της i-οστής ζημιάς που επέρχεται από την εμφάνιση του n-οστού ζημιογόνου ενδεχομένου. Θεωρούμε ότι οι ακολουθίες

$$\{W_n, n \geq 1\}$$

και

$$\{X_n, n \geq 1\}$$

απαρτίζονται από ανεξάρτητες, ισόνομες και θετικά ορισμένες τυχαίες μεταβλητές.

Θεωρούμε

$$P(t)$$

μία συνάρτηση, η οποία εκφράζει τα συνολικά έσοδα από την είσπραξη των ασφαλίστρων μιας ασφαλιστικής εταιρίας, κατά το χρονικό διάστημα $[0, t]$, όπου $P(t)$ είναι αύξουσα συνάρτηση του χρόνου t. Στην κλασσική θεωρία κινδύνου, θεωρούμε πως ο ρυθμός είσπραξης των ασφαλίστρων είναι σταθερός, άρα, για την $P(t)$ θα ισχύει, ότι

$$P(t) = ct, \tag{1.2}$$

όπου

$$c > 0$$

είναι ο σταθερός ρυθμός είσπραξης των ασφαλίστρων, ανά μονάδα χρόνου. Δηλαδή, είναι η ένταση ασφαλίστρου.

Έστω, τώρα η συνάρτηση

$$U(t), t \geq 0,$$

η οποία παριστά το πλεόνασμα της ασφαλιστικής εταιρίας, έως τη χρονική στιγμή t και θα ορίζεται όπως παρακάτω:

Ορισμός 1.4

Η στοχαστική ανέλιξη πλεονάσματος ορίζεται ως εξής:

$$U(t) = u + P(t) - S(t) =$$

$$= u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \tag{1.3}$$

όπου,

- $U(0) = u \geq 0$ *είναι το αρχικό απόθεμα,*
- $c \geq 0$ *είναι ο ρυθμός είσραξης των ασφαλίστρων, ανά μονάδα χρόνου και*
- $S(t)$ *οι συνολικές αποζημιώσεις στο χρονικό διάστημα* $[0, t]$

Γίνεται σαφές ότι από τον παραπάνω ορισμό, η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος μπορεί να παίρνει και αρνητικές τιμές κατά τις χρονικές στιγμές T_i εμφάνισης των κινδύνων. Όταν επέλθει για πρώτη φορά χρεοκοπία, τότε η ανέλιξη πλεονάσματος είναι για πρώτη φορά αρνητική. Για να ορίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας, θα πρέπει να ορίσουμε πρώτα την έννοια του χρόνου χρεοκοπίας.

<u>Ορισμός 1.5</u>

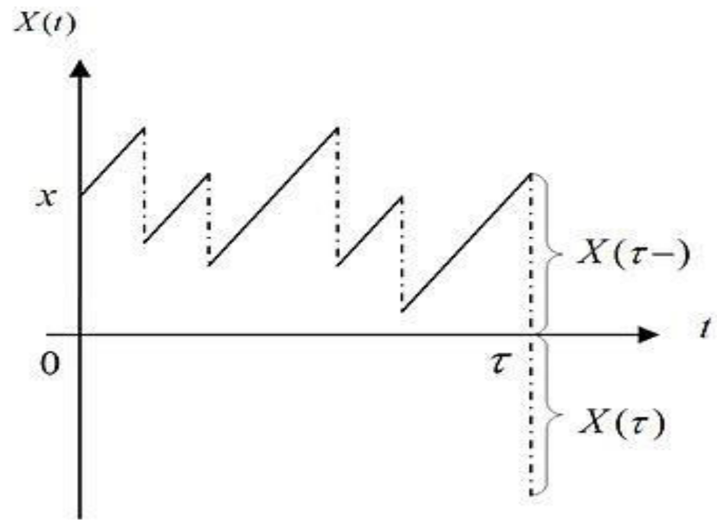
Η χρονική στιγμή T κατά την οποία η στοχαστική ανέλιξη πλεονάσματος γίνεται για πρώτη φορά αρνητική ονομάζεται χρόνος χρεοκοπίας και ορίζεται ως εξής:

$$T = \begin{cases} inf\{t: U(t) < 0\}, \\ \infty, αν\ U(t) \geq 0 \forall\ t \geq 0. \end{cases}$$

Όπου,

- *T, είναι η χρονική στιγμή χρεοκοπίας,*
- *η μεταβλητή $U(T-)$ δηλώνει την τιμή του πλεονάσματος, αμέσως πριν πληρωθεί από την ασφαλιστική επιχείρηση η αποζημίωση που επιφέρει τη χρεοκοπία και ισχύει ότι $U(T-) < 0$,*
- *$U(T)$ είναι η μεταβλητή που δηλώνει το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το μηδέν και θα ισχύει ότι $U(T) > 0$,*
- *η $|U(T)|$ εκφράζει τη σφοδρότητα της χρεοκοπίας, δηλαδή το μέγεθος του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας.*

Το παρακάτω γράφημα είναι αντιπροσωπευτικό του Ορισμού 1.5 (όπου $X(t) = U(t)$).



Οπότε, μπορούμε να ορίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας ως εξής:

Ορισμός 1.6

Για αρχικό απόθεμα, για το οποίο θα ισχύει, ότι

$$u \geq 0,$$

η πιθανότητα χρεοκοπίας θα ορίζεται ως εξής:

$$\psi(u) = \Pr(T < \infty | U(0) = u). \tag{1.4}$$

Η πιθανότητα να μην επέρχεται χρεοκοπία ονομάζεται πιθανότητα μη-χρεοκοπίας ή πιθανότητα επιβίωσης. Τη συμβολίζουμε με $\varphi(u)$ και δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\varphi(u) = 1 - \psi(u). \tag{1.5}$$

1.2 Το Κλασσικό Μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου.

Το κλασσικό μοντέλο αποτελεί το πιο διαδεδομένο και ευρέως γνωστό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου. Έχει δεχτεί μεγάλη αναγνώριση, καθώς εξυπηρετεί στην εύρεση πιο απλών μαθηματικών υπολογισμών σε σύγκριση με άλλα μοντέλα. Στη συνέχεια, θα κάνουμε λόγο για τα σημαντικότερα αποτελέσματα του κλασσικού μοντέλου της Θεωρίας Κινδύνου, τα οποία θα μας βοηθήσουν στα επόμενα κεφάλαια να κατανοήσουμε το θέμα της εργασίας.

Σύμφωνα με το κλασσικό μοντέλο, οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των ζημιογόνων ενδεχομένων ακολουθούν την εκθετική κατανομή. Κοινώς, οι τυχαίες μεταβλητές

$$\{W_n, n \geq 1\},$$

ακολουθούν κοινή εκθετική κατανομή $Exp\ (\lambda)$ με παράμετρο λ. Δηλαδή, θα ισχύει ότι:

$$\Pr(W_1 \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \quad \lambda > 0 \tag{1.6}$$

Όσον αφορά τη στοχαστική ανέλιξη $N(t)$ στο κλασσικό μοντέλο είναι μία στοχαστική ανέλιξη Poisson, που σημαίνει πως η πιθανότητα άφιξης ενός ενδεχομένου σε ένα διάστημα είναι ανάλογη του μήκους του εν λόγω διαστήματος.

Οπότε,

$$Pr(N(t) = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad x > 0, \quad \lambda > 0 \qquad (1.7)$$

Οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \dots, X_n$ και $N(t)$ είναι ανεξάρτητες, ενώ οι τυχαίες μεταβλητές X_n είναι ανεξάρτητες και ισόνομες και έχουν από κοινού συνάρτηση κατανομής,

$$F(x) = \Pr(X \leq x)$$

και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας,

$$f(x) = \Pr(X = x)$$

καθώς και συνάρτηση δεξιάς ουράς,

$$\bar{F}(x) = 1 - \mathrm{F}(x) =$$

$$= 1 - \Pr(X \leq x) =$$

$$= 1 - \int_0^\infty f(x)dx$$

Την αναμενόμενη τιμή της ζημιάς την υπολογίζουμε από τον ακόλουθο τύπο:

$$\mu = E(X) = \int_0^\infty x f(x) dx$$

ή από τον τύπο

$$\mu = E(X) = \int_0^\infty \bar{F}(x) dx$$

Ακόμη, με $F_e(x)$ συμβολίζουμε τη συνάρτηση ισορροπίας της τυχαίας μεταβλητής X για την οποία γνωρίζουμε ότι:

$$F_e(x) = 1 - \bar{F}_e(x) =$$

$$= \int_0^x \frac{\bar{F}(y)}{E(x)} dy =$$

$$= \int_0^x f_e(y)\, dy, \quad x > 0$$

Όπου, προφανώς,

$$f_e(y) = \frac{\bar{F}(y)}{E(x)} \qquad (1.8)$$

Στο συγκεκριμένο μοντέλο θα θεωρήσουμε μία ακόμη στοχαστική ανέλιξη, αυτή της είσπραξης των ασφαλίστρων, την οποία θα συμβολίσουμε με $P(t)$ και για την οποία ισχύει ότι:

$$P(t) = ct \tag{1.9}$$

Όπου c είναι ο ρυθμός είσπραξης των ασφαλίστρων και τα ασφάλιστρα εισπράττονται στο χρονικό διάστημα $[0, t]$. Είναι αναγκαίο να ισχύει η συνθήκη

$$ct \geq E[S(t)],$$

δηλαδή, το μέγεθος των ασφαλίστρων που εισπράττουμε στο $[0, t]$ να είναι επαρκή, ούτως ώστε να καλυφθούν οι αναμενόμενες συνολικές αποζημιώσεις.

Όπως, ήδη αναφέραμε, αφού

$$N(t) \sim P(\lambda t),$$

θα ισχύουν τα παρακάτω:

Η μέση τιμή της στοχαστικής ανέλιξης του αριθμού των κινδύνων θα δίνεται από τον τύπο,

$$E[N(t)] = \lambda t \tag{1.10}$$

Η αναμενόμενη τιμή του μεγέθους των συνολικών αποζημιώσεων θα υπολογίζεται από τον παρακάτω τύπο,

$$\begin{aligned} E[S(t)] &= E[N(t)]E[X] = \\ &= \lambda t E[X] \end{aligned} \tag{1.11}$$

Οπότε, τελικά, αυτό που θέλουμε να ισχύει είναι το εξής:

$$\begin{gathered} ct \geq E[S(t)] \Rightarrow \\ ct \geq E[N(t)]E[X] \Rightarrow \\ ct \geq \lambda t E[X] \Rightarrow \\ c \geq \lambda E[X] \end{gathered} \tag{1.12}$$

Ορισμός 1.7

Ακόμη, θα ορίσουμε και μία παράμετρο θ, η οποία θα εκφράζει το περιθώριο ασφαλείας, για το οποίο θα έχουμε:

$$c = (1 + \theta)\lambda E[X] \tag{1.13}$$

Ορισμός 1.8

Στο κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου ορίζουμε μία ακόμη έννοια, γνωστη ως συντελεστής προσαρμογής, την οποία συμβολίζουμε με R και πρόκειται για τη μοναδική θετική ρίζα της εξίσωσης:

$$1 + (1 + \theta)E(x)r = M_x(r) \tag{1.14}$$

όπου,

- θ*, είναι το περιθώριο ασφαλείας και*
- $M_x(r)$*, είναι η ροπογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής X στο σημείο r, που ορίζεται ως εξής:*

$$M_x(r) = E(e^{rx}) =$$
$$= \int_0^\infty e^{rx} f(x)\, dx$$

Μία κύρια προϋπόθεση για να έχουμε τη δυνατότητα να ορίσουμε τον συντελεστή προσαρμογής, είναι η ύπαρξη ροπογεννήτριας της τυχαίας μεταβλητής X.

1.3 Η Ανισότητα του Lundberg.

Η πιο ευρέως διαδεδομένη ανισότητα στο μοντέλο που μελετάμε είναι αυτή του Lundberg. Η ανισότητα συσχετίζει δύο έννοιες που έχουμε ήδη ορίσει παραπάνω, αυτή της πιθανότητας χρεοκοπίας, με αυτή του συντελεστή προσαρμογής, υπολογίζοντας άνω φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας σε συνάρτηση με το συντελεστή προσαρμογής και το αρχικό αποθεματικό.

Θεώρημα 1.2

Στην περίπτωση που γνωρίζουμε ότι υπάρχει ο συντελεστής προσαρμογής R, τότε ένα άνω φράγμα της πιθανότητας χρεοκοπίας με αρχικό κεφάλαιο $u \geq 0$ είναι το εξής:

$$\psi(u) \leq e^{-Ru} \tag{1.15}$$

Η ανισότητα του Lundberg δέχεται δύο ερμηνείες:

- για γνωστό αρχικό κεφάλαιο u, ο συντελεστής προσαρμογής είναι αντιστρόφως ανάλογος της πιθανότητας χρεοκοπίας, και
- όταν ο συντελεστής προσαρμογής *R* είναι γνωστός, τότε το αρχικό κεφάλαιο είναι αντιστρόφως ανάλογο της πιθανότητας χρεοκοπίας.

1.4 Η Θεμελιώδης Εξίσωση του Lundberg.

Ορισμός 1.9

Ως θεμελιώδη εξίσωση του Lundberg ορίζουμε την εξίσωση που έχει την εξής μορφή:

$$cs + \lambda\hat{f}(s) - (\lambda + \delta) = 0 \tag{1.16}$$

Όπου, η $\hat{f}(s)$ υπολογίζεται όπως παρακάτω,

$$\hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-sy} f(y)dy \tag{1.17}$$

Και πρόκειται για τον μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της s, $f(s)$. Η θεμελιώσης εξίσωση του Lundberg για $\delta > 0$ έχει μία θετική ρίζα, την οποία συμβολίζουμε με

$$\rho = \rho(\delta).$$

Η συγκεκριμένη εξίσωση έχει θετικές ρίζες για $\delta > 0$, ανεξάρτητα από το αν το περιθώριο ασφαλείας θ παίρνει θετικές τιμές ή όχι. Ενώ, για $\delta = 0$,

- αν $\theta < 0$, τότε η εξίσωση έχει θετικές ρίζες, και
- αν $\theta > 0$, τότε έχει ρίζες που είναι ίσες με το μηδέν.

1.5 Η Συνάρτηση των Gerber-Shiu.

Η συνάρτηση με την οποία οι Gerber και Shiu κατάφεραν να μοντελοποιήσουν, το 1998, τον χρόνο και τα μέτρα χρεοκοπίας ονομάζεται προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής (Expected discounted penalty function) ή αλλιώς συνάρτηση των Gerber-Shiu. Κατάφεραν, δηλαδή, μέσα σε μία συνάρτηση να συμπεριλάβουν τις τυχαίες μεταβλητές T, που όπως έχουμε ήδη ορίσει είναι ο χρόνος χρεοκοπίας (δηλαδή, η χρονική στιγμή, κατά την οποία το πλεόνασμα παίρνει για πρώτη φορά αρνητική τιμή), την $|U(T)|$ που είναι το έλλειμμα ακριβώς μετά τη χρεοκοπία και $U(T-)$ που είναι το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία. Η συνάρτηση αυτή, λοιπόν, ορίζεται με τον παρακάτω τρόπο:

Ορισμός 1.10

Όταν $u \geq 0$ *και* $\delta \geq 0$ *η συνάρτηση των Gerber-Shiu έχει τη μορφή:*

$$m_\delta(u) = E\{e^{-\delta t} w\{U(T-), |U(T)|\} I(T < \infty) | U(0) = u\}, \quad u \geq 0 \qquad (1.18)$$

όπου,

- δ*, είναι η ένταση ανατοκισμού,*
- *η* $w(x, y)$ *είναι δισδιάστατη συνάρτηση στο* $\mathbb{R}^2$ *που ονομάζεται συνάρτηση ποινής και η οποία παίρνει τιμές στο διάστημα* $[0, \infty]$
- $I(\cdot)$ *είναι μία δείκτρια συνάρτηση, η οποία αν πάρει την τιμή 1, σημαίνει πως έχει επέλθει χρεοκοπία, ενώ αν πάρει την τιμή 0 τότε ισχύει το αντίθετο, και*
- $e^{-\delta t}$ *είναι ο μεταχηματισμός Laplace, που μπορεί να χαρακτηριστεί και ως προεξοφλητικός παράγοντας.*

Η συνάρτηση των Gerber-Shiu είναι γνωστή, όπως αναφέραμε και ως αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής, γιατί αποτελεί την προεξοφλημένη ποινή που επιβάλλεται, όταν συμβει η χρεοκοπία. Η συνάρτηση ποινής $w(x_1, x_2)$ μπορεί να πάρει διαφορετικές τιμές και μορφές, κι έτσι, από τον ορισμό της $m_\delta(u)$ προκύπτουν διαφορετικά μέτρα κινδύνου. Στη συνέχεια, παραθέτουμε τις πιο ιδιαίτερες περιπτώσεις:

1) Για

$$w(x_1, x_2) = 1$$

και

$$\delta > 0,$$

θα έχουμε:

$$m_\delta(u) = E\{e^{-\delta t} \cdot 1 \cdot I(T < \infty)|U(0) = u\} =$$
$$= E\{e^{-\delta t} I(T < \infty)|U(0) = u\}$$

που είναι ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας, όταν προκύπτει χρεοκοπία.

2) Για

$$w(x_1, x_2) = 1$$

και

$$\delta = 0,$$

παίρνουμε:

$$m_0(u) = E\{e^{-0t} \cdot 1 \cdot I(T < \infty)|U(0) = u\} =$$
$$= E\{1 \cdot 1 \cdot I(T < \infty)|U(0) = u\} =$$
$$= E\{I(T < \infty)|U(0) = u\} =$$
$$= P(T < \infty|U(0) = u) =$$
$$= \psi(u)$$

που είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας.

3) Για

$$w(x_1, x_2) = I(x_1 \leq y_1)I(x_2 \leq y_2)$$

και

$$\delta > 0:$$

$$m_\delta(u) = E\{e^{-\delta t} I(U(T-) \leq y_1) I(|U(T)| \leq y_2) I(T < \infty)|U(0) = u\} =$$
$$= F_\delta(y_1, y_2|u)$$

που είναι η από κοινού προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής των $U(T-)$ και $|U(T)|$ τη στιγμή που επέρχεται χρεοκοπία.

4) Για

$$w(x_1, x_2) = I(x_1 \leq y_1)I(x_2, y_2)$$

και

$$\delta = 0:$$

$$m_0(u) = E[I(U(T^-) \leq y_1 I(|U(T)| \leq y_2)I(T < \infty)|U(0) = u] =$$
$$= P(U(T^-) \leq y_1, |U(T)| \leq y_2, T < \infty|U(0) = u) =$$
$$= F_0(y_1, y_2|u)$$

που είναι η από κοινού συνάρτηση κατανομής των $U(T-)$ και $|U(T)|$, η οποία δηλώνει την πιθανότητα να επέλθει χρεοκοπία όταν το αρχικό κεφάλαιο είναι u και το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία είναι το πολύ y_1, ενώ το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας να είναι το πολύ y_2.

5) Για

$$w(x_1, x_2) = I(x_1 = y_1)I(x_2, y_2)$$

και

$$\delta > 0,$$

προκύπτει:

$$m_\delta(u) = E\{e^{-\delta t} I(U(T^-) = y_1) I(|U(T)| = y_2) I(T < \infty) | U(0) = u\} =$$
$$= f_\delta(y_1, y_2 | u)$$

το αποτέλεσμα που παίρνουμε αποτελεί την από κοινού προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των $U(T^-)$ και $|U(T)|$ τη στιγμή που επέρχεται χρεοκοπία.

6) Για

$$w(x_1, x_2) = I(x_1 = y_1)I(x_2, y_2)$$

και

$$\delta = 0,$$

έχουμε:

$$m_0(u) = E[I(U(T^-) = y_1 I(|U(T)| = y_2) I(T < \infty) | U(0) = u] =$$
$$= f_0(y_1, y_2 | u)$$

η οποία πρόκειται για την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των $U(T^-)$ και $|U(T)|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας.

7) Για

$$w(x_1, x_2) = I(x_1 \leq y_1)$$

και

$$\delta > 0:$$

$$m_\delta(u) = E\{e^{-\delta t} I(U(T^-) \leq y_1) I(T < \infty) | U(0) = u\} =$$
$$= F_\delta(y_1 | u)$$

που είναι η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής της $U(T^-)$ τη στιγμή της χρεοκοπίας.

8) Για

$$w(x_1, x_2) = I(x_1 \leq y_1)$$

και

$$\delta = 0:$$

$$\begin{aligned} m_0(u) &= E\{I(U(T^-) \leq y_1)I(T < \infty | U(0) = u)\} = \\ &= P(U(T^-) \leq y_1, T < \infty | U(0) = u) = \\ &= F_0(y_1|u) \end{aligned}$$

όπου, $F_0(y_1|u)$ δηλώνει την πιθανότητα να συμβεί χρεοκοπία, με αρχικό κεφάλαιο u και το μέγεθος του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία να είναι το πολύ y_1.

9) Για

$$w(x_1, x_2) = I(x_1 = y_1)$$

και

$$\delta = 0:$$

$$\begin{aligned} m_\delta(u) &= E\{e^{-\delta t}I(U(T^-) = y_1)I(T < \infty | U(0) = u)\} = \\ &= f_\delta(y_1|u) \end{aligned}$$

θα έχουμε ως αποτέλεσμα την προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας της $U(T^-)$ τη στιγμή που επέρχεται χρεοκοπία.

10) Για

$$w(x_1, x_2) = I(x_1 = y_1)$$

και

$$\delta = 0:$$

$$\begin{aligned} m_0(u) &= E\{I(U(T^-) = y_1)I(T < \infty | U(0) = u)\} = \\ &= f_0(y_1|u) \end{aligned}$$

Παίρνουμε την περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας της $U(T^-)$ τη στιγμή της χρεοκοπίας.

11) Για

$$w(x_1, x_2) = I(x_2 \leq y_2)$$

και

$$\delta > 0:$$

$$\begin{aligned} m_\delta(u) &= E\{e^{-\delta t}I(|U(T)| \leq y_2)I(T < \infty | U(0) = u)\} = \\ &= F_\delta(y_2|u) \end{aligned}$$

Έχουμε την προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής της $|U(T)|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας.

12) Για

$$w(x_1, x_2) = I(x_2 \leq y_2)$$

και

$$\delta = 0:$$

$$\begin{aligned} m_0(u) &= E\{I(|U(T)| \leq y_2) I(T < \infty | U(0) = u)\} = \\ &= P(|U(T)| \leq y_2, T < \infty | U(0) = u) = \\ &= F_0(y_2 | u) \end{aligned}$$

Έχουμε την περιθώρια συνάρτηση κατανομής της $|U(T)|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας. Πιο συγκεκριμένα, το αποτέλεσμα εκφράζει την πιθανότητα να συμβεί χρεοκοπία, όταν το αρχικό κεφάλαιο είναι u και το ύψος ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας είναι το πολύ y_2.

13) Για

$$w(x_1, x_2) = I(x_2 = y_2)$$

και

$$\delta > 0:$$

$$\begin{aligned} m_\delta(u) &= E\left\{e^{-\delta t} I(|U(T)| = y_2) I(T < \infty | U(0) = u)\right\} = \\ &= f_\delta(y_2 | u) \end{aligned}$$

Προκύπτει η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής της $|U(T)|$ τη στιγμή που επέρχεται χρεοκοπία.

14) Για

$$w(x_1, x_2) = I(x_2 = y_2)$$

και

$$\delta = 0:$$

$$\begin{aligned} m_0(u) &= E\{I(|U(T)| = y_2) I(T < \infty | U(0) = u)\} = \\ &= f_0(y_2 | u) \end{aligned}$$

Προκύπτει η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας της $|U(T)|$ τη στιγμή που επέρχεται χρεοκοπία.

15) Για

$$w(x_1, x_2) = {x_1}^k \text{ ή } w(x_1, x_2) = {x_2}^k$$

και

$$\delta = 0:$$

$$m_0(u) = E\{U(T^-)^k I(T < \infty | U(0) = u)\}$$

ή

$$m_0(u) = E\{|U(T)|^k I(T < \infty | U(0) = u)\}$$

αντίστοιχα.

Θα πρέπει να τονίσουμε ότι η συνάρτηση των Gerber-Shiu δεν παίζει σημαντικό ρόλο μόνο στην αναλογιστική επιστήμη, αλλά είναι ιδιαίτερα χρήσιμη και στη χρηματοοικονομική (π.χ. για την τιμολόγηση ενός Αμερικανικού put option). Οι Gerber και Shiu μετά από ευρεία μελέτη που έκαναν για την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής στο κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου απέδειξαν ότι η $m(u)$ ικανοποιεί μία ολοκληροδιαφορική εξίσωση τύπου Volterra. Η λύση της ολοκληροδιαφορικής εξίσωσης προκύπτει με τη χρήση των μετασχηματισμών Laplace και μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής ικανοποιεί μία ελαττωματική ανανεωτική εξίσωση. Οι Lin και Willmot (1999) βρήκαν τη γενική λύση αυτής σε όρους της ουράς μίας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής.

<u>Θεώρημα 1.3</u>

Η ακόλουθη ολοκληροδιαφορική εξίσωση ικανοποιείται από τη συνάρτηση $m(u)$ των Gerber-Shiu

$$m'(u) = \frac{\lambda + \delta}{c} m(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u m(u-x) f(x) dx - \frac{\lambda}{c} z(u), \quad u \geq 0 \tag{1.19}$$

όπου,

$$z(u) = \int_u^\infty w(u, x-u) f(x) dx.$$

Για

$$\delta = 0,$$

$$w(x, y) = 1$$

η συνάρτηση της $m(u)$ παίρνει τη μορφή της πιθανότητας χρεοκοπίας $\psi(u)$ και έτσι οδηγούμαστε στο παρακάτω πόρισμα.

<u>Πόρισμα 1.1</u>

Η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$ ικανοποιεί την ολοκληροδιαφορική εξίσωση

$$\psi'(u) = \frac{\lambda}{c}\psi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \psi(u-x)f(x)dx - \frac{\lambda}{c}\bar{F}(u), \quad u \geq 0 \tag{1.20}$$

όπου,

$$\bar{F}(u) = 1 - F(u) = \int_u^{\infty} f(x)dx$$

<u>Παρατήρηση 1.1</u>

Από το πόρισμα που αναφέραμε παραπάνω προκύπτει ότι η $\psi(u)$ αποτελεί τη δεξιά ουρά μίας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής και ισχύει ότι:

$$\psi(u) = \Pr(L > u), \tag{1.21}$$

όπου,

$$L = L_1 + L_2 + \cdots + L_M$$

όπου,

$$M \sim G(\psi(0))$$

για

$$\psi(0) = \frac{\lambda}{c}E(x) \overset{(1.13)}{\Longrightarrow}$$

$$\psi(0) = \frac{1}{1+\theta} \tag{1.22}$$

Επισημαίνουμε ότι, οι τυχαίες μεταβλητές L_i είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_e(x)$.

<u>Απόδειξη της (1.22)</u>

Ολοκληρώνοντας την (1.20) στο διάστημα $[0,\infty)$ έχουμε:

$$\int_0^\infty \psi'(s)ds = \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \psi(s)ds - \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \int_0^s \psi(s-x)f(x)dxds - \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \bar{F}(s)ds$$

$$\Rightarrow \psi(\infty)-\psi(0) = \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \psi(s)ds - \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \int_0^s \psi(s-x)f(x)dxds - \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \bar{F}(s)ds$$

$$\xRightarrow{\psi(\infty)=0} -\psi(0) = \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \psi(s)ds - \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \int_0^s \psi(s-x)f(x)dxds - \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \bar{F}(s)ds$$

Αλλάζοντας τα όρια των ολοκληρωμάτων, παίρνουμε:

$$\begin{cases} 0 \le s < \infty \\ 0 \le x < s \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 \le x < \infty \\ x \le s < \infty \end{cases}$$

$$-\psi(0) = \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \psi(s)ds - \frac{\lambda}{c}\int_x^\infty \int_0^\infty \psi(s-x)f(x)dxds - \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \bar{F}(s)ds$$

$$\Rightarrow -\psi(0) = \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \psi(s)ds - \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \int_x^\infty \psi(s-x)f(x)dsdx - \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \bar{F}(s)ds$$

$$\Rightarrow -\psi(0) = \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \psi(s)ds - \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty f(x)(\int_x^\infty \psi(s-x)ds)dx - \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \bar{F}(s)ds$$

Θέτουμε :

$$s-x=u$$

$$\Rightarrow s = u+x$$

$$\Rightarrow ds = du$$

οπότε και τα όρια του ολοκληρώματος θα γίνουν:

$$x \le s < \infty$$

$$\Rightarrow x-x \le s-x < \infty$$

$$\Rightarrow 0 \le s-x < \infty$$

$$\Rightarrow 0 \leq u < \infty$$

Άρα, τελικά οδηγούμαστε στο εξής:

$$\psi(0) = -\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \psi(s)ds + \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty f(x)\int_0^\infty \psi(u)dudx + \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \bar{F}(s)ds$$

$$\Rightarrow \psi(0) = -\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \psi(s)ds + \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \psi(u)du\int_0^\infty f(x)\,dx + \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \bar{F}(s)ds$$

Όμως, $\int_0^\infty f(x)\,dx = 1$, οπότε:

$$\psi(0) = -\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \psi(s)ds + \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \psi(u)du \cdot 1 + \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \bar{F}(s)ds$$

$$\Rightarrow \psi(0) = -\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \psi(s)ds + \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \psi(u)du + \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \bar{F}(s)ds$$

Επίσης, $\int_0^\infty \psi(s)ds = 1$ και $\int_0^\infty \psi(u)du = 1$, άρα:

$$\psi(0) = -\frac{\lambda}{c}\cdot 1 + \frac{\lambda}{c}\cdot 1 + \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \bar{F}(s)ds$$

$$\Rightarrow \psi(0) = -\frac{\lambda}{c} + \frac{\lambda}{c} + \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \bar{F}(s)ds$$

$$\Rightarrow \psi(0) = 0 + \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \bar{F}(s)ds$$

$$\Rightarrow \psi(0) = \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \bar{F}(s)ds$$

Όπου, $\int_0^\infty \bar{F}(s)ds = E(x)$, οπότε παίρνουμε:

$$\psi(0) = \frac{\lambda}{c}E(x)$$

Όμως, από (1.13) η τελευταία σχέση γίνεται:

$$\psi(0) = \frac{\lambda}{(1+\theta)\lambda E(x)}E(x)$$

$$\Rightarrow \psi(0) = \frac{1}{1+\theta}$$

Οπότε καταλήξαμε στην (1.22) της παρατήρησης (1.1).

Ακόμη, από (1.5) συμπεραίνουμε και ότι:

$$\varphi(0) = 1 - \psi(0)$$

$$\Rightarrow \varphi(0) = 1 - \frac{1}{1+\theta}$$

$$\Rightarrow \varphi(0) = \frac{1+\theta}{1+\theta} - \frac{1}{1+\theta}$$

$$\Rightarrow \varphi(0) = \frac{1+\theta-1}{1+\theta}$$

$$\Rightarrow \varphi(0) = \frac{\theta}{1+\theta}$$

<u>1.6 Η Ολοκληροδιαφορική Εξίσωση που Ικανοποιεί η Συνάρτηση Gerber-Shiu.</u>

Δεσμεύοντας ως προς το χρόνο t και το μέγεθος x, της πρώτης απαίτησης , δηλαδή, $T_1 = t$ και $X_1 = x$, από το νόμο ολικής πιθανότητας, έχουμε:

$$m(u) = \int_0^\infty \int_0^\infty m(u|t,x) f_{X_1}(x) f_{T_1}(t) dx dt =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} m(u|t,x) f(x) dx dt =$$

$$= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \left\{ \int_0^\infty m(u|t,x) f(x) dx \right\} dt \qquad (1.23)$$

Όταν εμφανίζεται το πρώτο claim, είναι $U(t) = u + ct - x$ οπότε:

Αν

$$\begin{cases} 0 \le x \le u + ct, \textit{τότε δεν εμφανίζεται χρεοκοπία} \\ \quad x > u + ct, \textit{τότε εμφανίζεται χρεοκοπία} \end{cases}$$

Έτσι, για παράδειγμα, αν $0 \le x \le u + ct$, επειδή δεν εμφανίζεται χρεοκοπία τη χρονική στιγμή t, η διαδικασία ανανεώνεται ξεκινώντας με αρχικό κεφάλαιο $u + ct - x$.

Ενώ, αν $x > u + ct$, τότε

$$I(T < \infty) = 1,$$

γιατί εμφανίζεται σίγουρα χρεοκοπία, και

$$U(T-) = u + ct, |U(T)| = x - u - ct,$$

και συνεπώς από την (1.23) παίρνω:

$$m(u) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \left\{ \int_0^{u+ct} e^{-\delta t} m(u + ct - x) f(x) dx \right.$$
$$\left. + \int_{u+ct}^\infty e^{-\delta t} w(u + ct, x - u - ct) f(x) dx \right\} dt =$$

$$= \lambda e^{-(\lambda+\delta)t} \left\{ \int_0^{u+ct} m(u + ct - x) f(x) dx + \int_{u+ct}^\infty w(u + ct, x - u - ct) f(x) dx \right\} dt \quad (1.24)$$

Θέτουμε,

$$s = u + ct$$

$$\Rightarrow s - u = ct$$

$$\Rightarrow t = \frac{s - u}{c}$$

Οπότε,

$$dt = \frac{1}{c} ds$$

και αλλάζοντας τα όρια,

$$0 \leq t < \infty$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{s - u}{c} < \infty$$

$$\Rightarrow 0 \leq s - u < \infty$$

$$\Rightarrow u \leq s < \infty$$

Άρα, από την (1.24) παίρνω:

$$m(u) = \lambda \int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \int_0^s m(s-x)f(x)dx \frac{1}{c} ds$$
$$+ \lambda \int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \int_s^\infty w(s, x-s)f(x)dx \frac{1}{c} ds$$

Θέτουμε,

$$\gamma(x) = \int_x^\infty w(x, y-x)f(y)dy$$

Οπότε η προηγούμενη σχέση γράφεται:

$$m(u) = \lambda \int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \int_0^s m(s-x)f(x)dx \frac{1}{c} ds + \lambda \int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \gamma(s) \frac{1}{c} ds$$

$$\Rightarrow cm(u) = \lambda \int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \int_0^s \varphi(s-x)f(x)dxds + \lambda \int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \gamma(s)ds \quad (1.25)$$

Έπειτα, θα παραγωγίσουμε την (1.25) ως προς u.

a. Θέτουμε,

$$g(u,s) = e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \int_0^s m(s-x)f(x)dxds$$

Τότε,

$$\frac{d}{du} \int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \int_0^s m(s-x)f(x)dxds$$

$$= \frac{d}{du} \int_u^\infty g(u,s)ds$$

$$= -g(u,u) + \int_u^\infty \frac{dg(u,s)}{du} ds \quad (1.26)$$

Όπου,

$$\frac{dg(u,s)}{du}$$

$$= \frac{d[e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \int_0^s m(s-x)f(x)dx]}{du}$$

$$= \int_0^s m(s-x)f(x)dx \left\{ \frac{d[e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}}]}{du} \right\}$$

$$= \int_0^s m(s-x)f(x)dx \left\{ -\frac{(\lambda+\delta)(0-1)}{c} e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \right\}$$

$$= \int_0^s m(s-x)f(x)dx \left\{ -\frac{(\lambda+\delta)(-1)}{c} e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \right\}$$

$$= \int_0^s m(s-x)f(x)dx \left\{ \frac{\lambda+\delta}{c} e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \right\}$$

$$= \frac{\lambda+\delta}{c} e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \int_0^s m(s-x)f(x)dx$$

$$= \frac{\lambda+\delta}{c} g(u,s) \tag{1.27}$$

Από (1.26) και (1.27) παίρνουμε:

$$\frac{d}{du} \int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \int_0^s m(s-x)f(x)dxds$$

$$= -g(u,u) + \int_u^\infty \frac{\lambda+\delta}{c} g(u,s)ds$$

$$= -g(u,u) + \frac{\lambda+\delta}{c} \int_u^\infty g(u,s)ds$$

b. Έστω, τώρα, ότι

$$g(u,s) = e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \gamma(s)$$

Τότε,

$$\frac{d}{du} \int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \gamma(s)ds$$

$$= \frac{d}{du} \int_u^\infty g(u,s)ds$$

$$= -g(u,u) + \int_u^\infty \frac{dg(u,s)}{du} ds$$

Με τον ίδιο τρόπο, όπως στην

(a.) επιλύουμε και βρίσκουμε:

$$= -\gamma(u) + \frac{\lambda+\delta}{c}\int_u^\infty g(u,s)ds$$

Άρα, τελικά η (1.25) δίνει:

$$cm'(u) = \lambda\left\{-\int_0^u m(u-x)\,f(x)dx + \frac{\lambda+\delta}{c}\int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}}\int_0^s m(s-x)f(x)dxds\right\}$$
$$+\lambda\left\{-\gamma(u) + \frac{\lambda+\delta}{c}\int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}}\gamma(s)ds\right\}$$

$$\Rightarrow\; cm'(u) = -\lambda\int_0^u m(u-x)\,f(x)dx + \lambda\frac{\lambda+\delta}{c}\int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}}\int_0^s m(s-x)f(x)dxds$$
$$-\,\lambda\gamma(u) + \lambda\frac{\lambda+\delta}{c}\int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}}\gamma(s)ds$$

$$\Rightarrow cm'(u) = -\lambda\left\{\int_0^u m(u-x)\,f(x)dx + \gamma(u)\right\} +$$

$$+\frac{\lambda+\delta}{c}\left\{\lambda\int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}}\int_0^s m(s-x)f(x)dxds + \lambda\int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}}\gamma(s)ds\right\}$$

$$\xRightarrow{(1.25)} cm'(u) = -\lambda\left\{\int_0^u m(u-x)f(x)dx + \gamma(u)\right\} + \frac{\lambda+\delta}{c}cm(u)$$

Οπότε,

$$cm'(u) = (\lambda+\delta)m(u) - \lambda\left\{\int_0^u m(u-x)f(x)dx + \gamma(u)\right\}$$

$$\Rightarrow cm'(u) = (\lambda+\delta)m(u) - \lambda\int_0^u m(u-x)f(x)dx - \lambda\gamma(u), \qquad (1.28)$$

Αυτή, λοιπόν, είναι η ολοκληροδιαφορική εξίσωση που ικανοποιεί η $m(u)$.

Όπου, για

$$\delta = 0,$$

$$w(x,y) = 1$$

είναι από (1.24):

$$m(u) = \psi(u)$$

και

$$\gamma(u) = \bar{F}(u)$$

είναι η ολοκληροδιαφορική εξίσωση που δείξαμε παρπάνω ότι ικανοποιεί η $\psi(u)$.

1.7 Μετασχηματισμός Laplace της Συνάρτησης Gerber –Shiu.

Για να βρούμε τον μετασχηματισμό Laplace της $\varphi(u)$, θα πάρουμε μετασχηματισμό Laplace στην (1.28).

Έστω,

$$\hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx$$

και

$$\hat{\gamma}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \gamma(x)dx$$

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της παραγοντικής ολοκλήρωσης, έχουμε:

$$\int_0^\infty e^{-sx} m'(x)dx$$

$$= e^{-sx} m(x) \Big|_{x=0}^{\infty} - \int_0^\infty (e^{-sx})' m(x)dx$$

$$= 0 - e^{-s0} m(0) - \int_0^\infty (e^{-sx})' m(x)dx$$

$$= -1 \times m(0) - \int_0^\infty (e^{-sx})' m(x)dx$$

$$= -m(0) - \int_0^\infty (-s) e^{-sx} m(x)dx$$

$$= -m(0) + \int_0^\infty s e^{-sx} m(x) dx$$

$$= s \int_0^\infty e^{-sx} m(x) dx - m(0)$$

$$= s\widehat{m}(s) - m(0)$$

Τότε από (1.28), έχουμε:

$$c \int_0^\infty e^{-sx} m'(u) du = (\lambda + \delta) \int_0^\infty e^{-sx} m(u) du$$
$$- \lambda \int_0^u e^{-sx} m(u - x) f(x) dx - \lambda \int_0^\infty e^{-sx} \gamma(u) du$$

$$\Rightarrow c[s\widehat{m}(s) - m(0)] = (\lambda + \delta)\widehat{m}(s) - \lambda\widehat{m}(s)\hat{f}(s) - \lambda\hat{\gamma}(s)$$

$$\Rightarrow cs\widehat{m}(s) - cm(0) = (\lambda + \delta)\widehat{m}(s) - \lambda\widehat{m}(s)\hat{f}(s) - \lambda\hat{\gamma}(s)$$

$$\Rightarrow cs\widehat{m}(s) - (\lambda + \delta)\widehat{m}(s) + \lambda\widehat{m}(s)\hat{f}(s) = cm(0) - \lambda\hat{\gamma}(s)$$

$$\Rightarrow \{cs - (\lambda + \delta) + \lambda\hat{f}(s)\}\widehat{m}(s) = cm(0) - \lambda\hat{\gamma}(s)$$

$$\Rightarrow \widehat{m}(s) = \frac{cm(0) - \lambda\hat{\gamma}(s)}{cs - (\lambda + \delta) + \lambda\hat{f}(s)}$$

$$\Rightarrow \widehat{m}(s) = \frac{\lambda\hat{\gamma}(s) - cm(0)}{\lambda + \delta - cs - \lambda\hat{f}(s)}$$

Η τελευταία σχέση δηλώνει το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης Gerber-Shiu.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΤΟ ΚΛΑΣΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΙΝΔΥΝΩΝ ΜΕ ΕΝΑΝ ΟΡΟ ΔΙΑΧΥΣΗΣ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα γίνει λόγος για το κλασσικο μοντέλο της θεωρίας κινδύνων, όταν αυτό περιέχει κι έναν όρο διάχυσης, ο οποίος επηρεάζει την πορεία του χαρτοφυλακίου του ασφαλιστικού οργανισμού παίζοντας σημαντικό ρόλο στην πιθανότητα να χρεοκοπήσει. Το ήδη υπάρχον μοντέλο επεκτείνεται και η πιθανότητα χρεοκοπίας, όπως και η συνάρτηση Gerber-Shiu μεταβάλλονται λόγω της προσθήκης του όρου διάχυσης. Παρακάτω εξετάζουμε αναλυτικά τις αλλαγές που επιδέχονται έννοιες και σχέσεις που παρουσιάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, λόγω αυτής της επέκτασης του μοντέλου.

2.1 Στοχαστική Ανέλιξη Πλεονάσματος με Έναν Όρο Διάχυσης.

Όπως είδαμε και εξετάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, στο κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνων το πλεόνασμα ενός ασφαλιστικού οργανισμού σε χρόνο t δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$U(t) = u + ct - S(t), \quad t \geq 0$$

Ο Gerber το 1970, θέλησε να επεκτείνει το ήδη υπάρχον μοντέλο, προσθέτοντας έναν όρο διάχυσης στη σύνθετη διαδικασία Poisson, γνωστό και ως διαδικασία του Wiener. Συνεπώς, η χρεοκοπία μπορεί να επέλθει, σύμφωνα με το μοντέλο που εξετάζουμε, είτε από απαίτηση (claim), είτε από την ανέλιξη Wiener (oscillation). Ο όρος διάχυσης εκφράζει μία επιπλέον αβεβαιότητα στις συνολικές αποζημιώσεις ή αλλιώς προσθέτει αβεβαιότητα στα έσοδα από τα ασφάλιστρα.

<u>Ορισμός 2.1</u>

Έτσι, η στοχαστική ανέλιξη του πλεονάσματος στο μοντέλο πήρε τη μορφή:

$$U(t) = u + ct - S(t) + \sigma W(t), \quad t \geq 0 \tag{2.1}$$

Όπου,

- $U(0) = u \geq 0$ *είναι το αρχικό απόθεμα,*
- $c \geq 0$ *είναι ο ρυθμός είσπραξης των ασφαλίστρων, ανά μονάδα χρόνου και*
- $S(t)$ *οι συνολικές αποζημιώσεις στο χρονικό διάστημα* $[0, t]$
- $\sigma > 0$ *είναι η μεταβλητότητα του όρου διάχυσης (volatility)*
- $W(t)$ *είναι η κίνηση Brown (ή στοχαστική ανέλιξη του Wiener)*

Η

$$\sigma W(t)$$

είναι ανεξάρτητη από τη σύνθετη διαδικασία Poisson

$$\{S(t): t \geq 0\}.$$

Ισχύει ότι,

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i = X_1 + X_2 + \dots + X_{N(t)},$$

όπου,

$$X_1, X_2, \dots, X_{N(t)}$$

είναι θετικές ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές.

<u>Ορισμός 2.2</u>

Η μεταβλητότητα του όρου διάχυσης (volatility) είναι στατιστικό μέτρο της διασποράς των τιμών των αποζημιώσεων και αποτελεί παράμετρο της κίνησης Brown. Μπορεί να υπολογιστεί μέσω της τυπικής απόκλισης ή της διακύμανσης των αποζημιώσεων.

2.2 Η Κίνηση Brown.

Η κίνηση Brown βοηθά στη μελέτη και επεξήγηση αρκετών φυσικών φαινομένων. Χρησιμοποιείται ευρέως στη Φυσική, τα Μαθηματικά, τη Χρηματοοικονομική και την Αναλογιστική επιστήμη. Έλαβε το όνομα της από τον βοτανολόγο Robert Brown, ο οποίος εν έτει 1827 μελέτησε την κίνηση ενός μικρού σώματος μέσα σε ένα υγρό ή αέριο σώμα. Ο Αμερικανός μαθηματικός Norbert Wiener ήταν εκείνος που ασχολήθηκε εκτενώς με την κίνηση Brown και απέδειξε πολλές από τις ιδιότητες της. Για αυτό τον λόγο είναι γνωστή και ως ανέλιξη του Wiener. Τέλος, η κίνηση Brown δε μπορεί να λάβει αρνητικές τιμές.

Ορισμός 2.3

Η κίνηση Brown (ή στοχαστική ανέλιξη Wiener) είναι στοχαστική διαδικασία σε συνεχή χρόνο που χαρακτηρίζεται από τις εξής ιδιότητες:

1) *οι δυνατές διαδρομές είναι συνεχείς,*
2) $W_0 = 0$,
3) *Για* $0 \leq s < t$ *θα ισχύει* $W_t - W_s \sim N(0, t-s)$ *ανεξάρτητα από την ιστορία* $\mathcal{F}_s$,
4) *ως φυσικό επακόλουθο της τρίτης ιδιότητας, για* $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ *οι τυχαίες μεταβλητές* $W_{t_1} \sim N(0, t_1), W_{t_2} - W_{t_1} \sim N(0, t_2 - t_1), \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}} \sim N(0, t_n - t_{n-1})$ *είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους,*
5) *οι διαδρομές της ανέλιξης δεν παραγωγίζονται σε κανένα σημείο τους,*
6) *η* W_t *έχει τη μαρκοβιανή ιδιότητα και αποτελεί martingale,*
7) *η* $\sigma W(t), t \geq 0$, *είναι ανέλιξη Wiener με συντελεστή διάχυσης σ (volatility), όπου,* $Var(\sigma W_t) = \sigma^2 t$,
8) *η* $W_t = \sigma W_t + \mu t, t \geq 0$ *είναι μία ανέλιξη Wiener με παραμέτρους τον συντελεστή ολίσθησης μ και τον συντελεστή διάχυσης σ. Για τις παραμέτρους θα ισχύουν τα εξής:* $E(\widetilde{W}_t) = \mu t$ *και* $Var(\widetilde{W}_t) = \sigma^2 t$.

Ορισμός 2.4

Ορίζουμε μία ανέλιξη

$$Z_t, t \geq 0$$

ως martingale ως προς την ανέλιξη W_t, *αν για κάθε* t *ισχύει:*

$$E|Z_t| < \infty$$

και

$$E(Z_t|\mathcal{F}_s) = Z_{s,} \quad 0 \le s \le t,$$

όπου $\mathcal{F}_s$ είναι η ιστορία της ανέλιξης W_t.

2.3 Ο Χρόνος Χρεοκοπίας, η Πιθανότητα Χρεοκοπίας και η Προεξοφλημένη Συνάρτηση Αποζημίωσης.

Για τον χρόνο χρεοκοπίας θα ισχύει ο ίδιος ορισμός, όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο, δηλαδή:

Ορισμός 2.5

Η χρονική στιγμή Τ κατά την οποία η στοχαστική ανέλιξη πλεονάσματος γίνεται για πρώτη φορά αρνητική ονομάζεται χρόνος χρεοκοπίας και ορίζεται ως εξής:

$$T = \begin{cases} inf\{t: U(t) \le 0\}, λόγω\ της\ προσθήκης\ της\ ανέλιξης\ Wiener \\ \infty, αν\ U(t) > 0 \forall\ t \ge 0. \end{cases}$$

Όπου,

- *T, είναι η χρονική στιγμή χρεοκοπίας,*
- *$U(t), t \ge 0$, παριστά το πλεόνασμα της ασφαλιστικής εταιρίας, έως τη χρονική στιγμή t.*

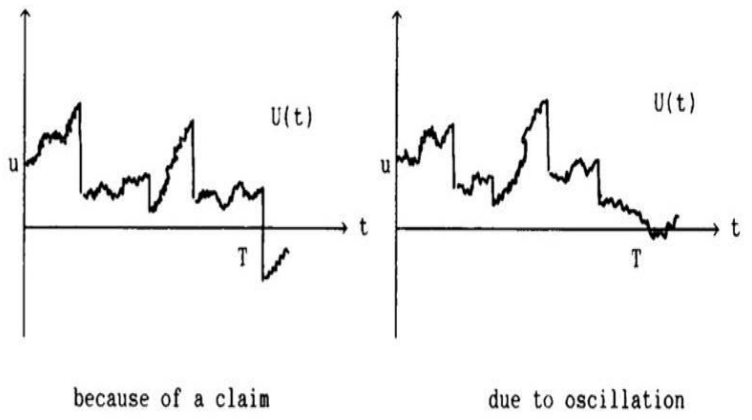
Δύο πολύ σημαντικές μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές που έχουν άμεση σχέση με τον χρόνο χρεοκοπίας T είναι η $|U(T)|$ και η $U(T-)$.

Όπου,

- $|U(T)|$, το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας και
- $U(T-)$, το πλεόνασμα ακριβώς πριν τη στιγμή της χρεοκοπίας.

Μία ακόμη σχετική τυχαία μεταβλητή είναι η $[|U(T)| + U(T-)]$, που είναι το σύνολο της ζημιάς που προκαλεί τη χρεοκοπία.

Τα παρακάτω γραφήματα είναι αντιπροσωπευτικά του Ορισμού 2.5.



Ορισμός 2.6

Οι Gerber και Shiu για $\delta \geq 0$ όρισαν την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση αποζημίωσης, ως εξής:

$$\varphi_0(u) = E[e^{-\delta t} w(U(T-), |U(T)|) I(T < \infty) | U(0) = u]$$

Όπου,

- *$w(x, y), 0 \leq x, y < \infty$ είναι μία μη αρνητική συνάρτηση,*
- *η I είναι δείκτρια συνάρτηση, τέτοια ώστε,*

$$\begin{cases} I(T<\infty) = 1, T < \infty \\ I(T < \infty) = 0, \delta\iota\alpha\varphi o\rho\varepsilon\tau\iota\kappa\acute{\alpha} \end{cases}$$

Ορισμός 2.7

Για την πιθανότητα χρεοκοπίας για το μοντέλο που μελετάμε στο συγκεκριμένο κεφάλαιο θα ισχύει η παρακάτω ισότητα:

$$\psi_0(u) = E[I(T < \infty) | U(0) = u]$$

$$= Pr(T < \infty | U(0) = u), \quad u \geq 0$$

Η οποία είναι μία ειδική περίπτωση της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης αποζημίωσης, για

$$w(x, y) = 1$$

και

$$\delta = 0.$$

Οι Gerber και Shiu το 1998 διατύπωσαν μία ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση για την $\varphi_0(u)$ η οποία βασίζεται στο κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνων και είναι η ακόλουθη:

$$\varphi_0(u) = \frac{\lambda}{c}\int_0^u \varphi_0(u-x)\int_x^\infty e^{-\rho_0(y-x)}dP(y)dx$$
$$+\frac{\lambda}{c}e^{\rho_0 u}\int_u^\infty e^{-\rho_0 x}\int_x^\infty w(x, y-x)dP(y)dx,$$

Όπου,

$$\rho_0 = \rho(\delta, 0)$$

είναι η μοναδική μη αρνητική ρίζα της εξίσωσης του Lundberg,

$$\lambda\tilde{p}(\xi) = \lambda + \delta - c\xi$$

με

$$\rho(0,0) = 0,$$

όπου,

$$\tilde{p}(s) = \int_0^\infty e^{-sx}dP(x).$$

2.4 Χρεοκοπία από Απαίτηση και Χρεοκοπία από Ανέλιξη Wiener.

Στην περίπτωση του Κλασσικού Μοντέλου που μελετάμε υπάρχουν δύο είδη χρεοκοπιών. Αυτά είναι:

1) Χρεοκοπία που προκύπτει από απαίτηση, κατά την οποία $T < \infty$ και $U(T) < 0$, και
2) Χρεοκοπία που προκύπτει από την ανέλιξη Wiener, κατά την οποία $T < \infty$ και $U(T) = 0$.

Οι Dufresne και Gerber (1991) μελέτησαν την πιθανότητα χρεοκοπίας από διάχυση, $\psi_d(u)$, την πιθανότητα χρεοκοπίας από απαίτηση, $\psi_s(u)$ και την πιθανότητα χρεοκοπίας, όταν αυτή προκαλείται είτε από διάχυση είτε από απαίτηση και πρότειναν ανανεωτικές ελλειμματικές εξισώσεις αντίστοιχα. Οι Gerber και Landry το 1998 προχώρησαν στη γενίκευση της πρότασης των Dufresne και Gerber, θεωρώντας μία σταθερά w_0 και μία μη αρνητική συνάρτηση $w(-y), y > 0$. Τότε η ποινή από χρεοκοπία είναι w_0, εάν η χρεοκοπία συμβαίνει λόγω διάχυσης και $w\big(U(T)\big)$, εάν προκύπτει λόγω απαίτησης.

<u>Ορισμός 2.8</u>

Έτσι, κατέληξαν στην αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση αποζημίωσης:

$$\varphi(u) = w_0\varphi_d(u) + E\big[e^{-\delta T}w(U(T))I(T < \infty, U(T) < 0|U(0) = u\big],$$

Όπου,

- $w_{0,}$ *είναι μία μη αρνητική σταθερά,*
- $w(-y), y > 0,$ *είναι μία μη αρνητική συνάρτηση και*
- $\varphi_d(u) = E\big[e^{-\delta t}I(T < \infty, U(T) = 0|U(0) = u\big]$ *είναι ο μετασχηματισμός Laplace ή η αναμενόμενη παρούσα αξία του χρόνου χρεοκοπίας Τ, λόγω της ανέλιξης Wiener. Ισχύει, επίσης, ότι όταν* $\delta = 0$, *τότε* $\varphi_d(u) = \psi_d(u)$, *δηλαδή, η πιθανότητα χρεοκοπίας από διάχυση είναι ο μετασχηματισμός Laplace ή η αναμενόμενη παρούσα αξία του χρόνου χρεοκοπίας* T.

<u>2.5 Γενίκευση της Συνάρτησης Αποζημίωσης.</u>

Οι Tsai και Willmot (2001) επιχείρησαν να προχωρήσουν στη γενίκευση της συνάρτησης αποζημίωσης w εμπεριέχοντας ταυτόχρονα και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας $|U(T)|$ και το πλεόνασμα ακριβώς πριν τη στιγμή της χρεοκοπίας $U(T-)$. Οπότε ο τύπος της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης αποζημίωσης γίνεται:

$$\varphi_w(u) = E[e^{-\delta T}w(U(T-), |U(T)|)I(T < \infty, U(T) < 0|U(0) = u]$$

Μετά από αυτή τη γενίκευση, πολλοί τύποι μπορούν να επανδιατυπωθούν και να λάβουν διαφορετικές μορφές.

Θεωρούμε την από κοινού ελλειματική συνάρτηση πυκνότητας πυθανότητας των $U(T-)$, $|U(T)|$ και T, όταν χρεοκοπία συμβαίνει λόγω απαίτησης και τη συμβολίζουμε με

$$f(x, y, t; D|u),$$

Όπου,

- $D = \frac{1}{2}\sigma^2$
- x, η τιμή που παίρνει η τυχαία μεταβλητή $U(T-)$,
- y, η τιμή που παίρνει η τυχαία μεταβλητή $|U(T)|$, και
- t, η τιμή που παίρνει η τυχαία μεταβλητή T

Παρακάτω ορίζουμε την από κοινού προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, καθώς και τις περιθώριες ελλειμματικές συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των $U(T-)$ και $|U(T)|$, αντίστοιχα, για το μοντέλο που εξετάζουμε σε αυτό το κεφάλαιο με τον παράγοντα προεξόφλησης $\delta \geq 0$. Έτσι, θα έχουμε:

$$f(x, y; \delta, D|u) = \int_0^\infty e^{-\delta T} f(x, y, t; D|u) dt,$$

θα είναι η από κοινού προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των $U(T-)$ και $|U(T)|$,

$$f_1(x; \delta, D|u) = \int_0^\infty f(x, y; \delta, D|u)\, dy =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\delta T} f(x, y, t; D|u) dt dy,$$

θα είναι η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $U(T-)$, και

$$f_2(y; \delta, D|u) = \int_0^\infty f(x, y; \delta, D|u) dx =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\delta T} f(x, y, t; D|u) dt dx,$$

θα είναι η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $|U(T)|$.

Στην ειδική περίπτωση, όπου

$$D = 0,$$

συνεπάγεται ότι

$$\sigma = 0,$$

όποτε αυτό σημαίνει πως η ανέλιξη πλεονάσματος,

$$U(t) = u + ct - S(t) + \sigma W(t)$$

$$\overset{\sigma=0}{\Longrightarrow} U(t) = u + ct - S(t) + 0W(t)$$

$$\Rightarrow U(t) = u + ct - S(t) + 0$$

$$\Rightarrow U(t) = u + ct - S(t)$$

παίρνει πάλι τη μορφή της ανέλιξης πλεονάσματος του κλασσικού μοντέλου της θεωρίας κινδύνου, όπως το μελετήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Σε αυτήν την περίπτωση, η από κοινού προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των $U(T-)$ και $|U(T)|$ θα συμβολίζεται με

$$f(x, y; \delta, 0|u).$$

Η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $U(T-)$ με

$$f_1(x; \delta, 0|u)$$

και η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $|U(T)|$, με

$$f_2(y; \delta, 0|u),$$

αντίστοιχα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΙΝΔΥΝΩΝ ΜΕ ΕΝΑΝ ΟΡΟ ΔΙΑΧΥΣΗΣ ΚΑΙ ΔΙΠΛΕΥΡΑ ΑΛΜΑΤΑ

Όπως εξετάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνων με έναν όρο διάχυσης (Κίνηση Brown) δίνεται από την παρακάτω σχέση (2.1):

3.1 Η Διαδικασία Πλεονάσματος για το Μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνων με Έναν Όρο Διάχυσης και Δίπλευρα Άλματα.

Ορισμός 3.1

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i + \sigma B(t), \tag{3.1}$$

Την οποία έχουμε ορίσει και στο ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2, αλλά τώρα θα ισχύει, ότι οι διαδικασίες $\{N(t)\}, \{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ *και* $\{B(t)\}_{t\geq 0}$ *είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.*

Όπου,

$$B(t) = W(t),$$

δηλαδή η κίνηση Brown είναι όπως έχουμε ήδη αναφέρει ίση με την ανέλιξη Wiener.

Το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνων με έναν όρο διάχυσης, διαμορφώθηκε για να επεκτείνει το κλασσικό μοντέλο της σύνθετης Poisson, στο οποίο η κίνηση Brown μεταφράζεται ως τυχαία μεταβλητή του εισοδήματος των ασφαλίστρων ή της ζημιάς από τις απαιτήσεις. Από τότε, πολλά προβλήματα χρεοκοπίας σχετικά με το μοντέλο έχουν εξεταστεί. Όπως είδαμε, οι Dufresne και Gerber μελέτησαν τις πιθανότητες χρεοκοπίας από διάχυση ή από απαίτηση. Οι Gerber και Landry εξέτασαν την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας. Ο Tsai μελέτησε μερικές προεξοφλημένες κατανομές για τη διαδικασία πλεονάσματος με έναν όρο διάχυσης. Για το ίδιο μοντέλο, ο Tsai και ο Willmot μελέτησαν τις προεξοφλημένες συναρτήσεις ποινής και τις χρονικές στιγμές, αντίστοιχα.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εξετάσουμε μία τροποποιημένη εκδοχή του μοντέλου του Ορισμού 3.1. Θα ισχύουν τα ίδια που ίσχυαν και στα προηγούμενα δύο κεφάλαια, με τη διαφορά ότι τα άλματα θα θεωρούμε πως είναι δίπλευρα.

Ορισμός 3.2

Με τον όρο δίπλευρα άλματα εννοούμε ότι τα πάνω άλματα θα αντιπροσωπεύουν τα τυχαία κέρδη της εταιρίας, ενώ τα κάτω άλματα αποτελούν τις τυχαίες απώλειες της εταιρίας.

Παρακάτω, δίνουμε την πυκνότητα του άλματος X, η οποία ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 3.3

$$f(x) = pf_+(x)I(x > 0) + qf_-(-x)I(x < 0),$$

Όπου,

- $p, q > 0$ *και ισχύει ότι* $p + q = 1$,
- $I(A)$ *είναι μία δείκτρια συνάρτηση του γεγονότος* A *και*
- f_+, f_- *είναι δύο συναρτήσεις πυκνότητας στο διάστημα* $[0, \infty)$

Ακόμη, οι F_+, F_- *υποδηλώνουν τις συναρτήσεις κατανομής και* μ_+, μ_- *θα είναι οι μέσες τιμές των* f_+, f_- *αντίστοιχα.*

Το μοντέλο της θεωρίας κινδύνων με δίπλευρα άλματα και έναν όρο διάχυσης έχει μελετηθεί από πολλούς επιστήμονες. Ο Perry κ.ά. εξέτασαν την από κοινού κατανομή της πρώτης στιγμής εξόδου και του μεγίστου άνω άλματος (ή του ελαχίστου κάτω άλματος), δοθέντος ότι οι κατανομές των αλμάτων ήταν υπερεκθετικές ή μία ειδική περίπτωση κατανομής Coxian. Οι Kou και Wang μελέτησαν εκτενώς τους μετασχηματισμούς Laplace της πρώτης στιγμής εισόδου και του μεγίστου άνω άλματος για το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνων, όπου τα άνω άλματα, αλλά και τα κάτω άλματα ακολουθούν την εκθετική κατανομή. Ο Xing κ.ά. επέκτειναν τα αποτελέσματα των Kou και Wang στην περίπτωση, όπου τα κάτω άλματα είναι κατανεμημένα σύμφωνα με την κατανομή τύπου φάσης και τα άνω άλματα ακολουθούν μία αυθαίρετα ορισμένη κατανομή. Ο Jacobsen θεώρησε ένα πιο γενικευμένο μοντέλο της θεωρίας κινδύνων με δίπλευρα άλματα και έναν όρο διάχυσης, μέσα από το οποίο μελέτησε το μετασχηματισμό Laplace της στιγμής χρεοκοπίας, το ελάχιστο κάτω άλμα τη στιγμή χρεοκοπίας, όπως επίσης και την πιθανότητα χρεοκοπίας. Τέλος, οι Yang και Zhang έχουν μελετήσει το μοντέλο της θεωρίας κινδύνων με δίπλευρα άλματα, αναλύοντας την προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής.

3.2 Η Ρητή Οικογένεια Κατανομών.

Στο μοντέλο που εξετάζουμε θεωρούμε ότι τα κάτω άλματα έχουν μία αυθαίρετα ορισμένη συνάρτηση πυκνότητας, ενώ τα πάνω άλματα έχουν μετασχηματισμό Laplace της ρητής οικογένειας κατανομών, ο οποίος δίνεται από τη σχέση:

Ορισμός 3.4

$$\hat{f}_{-}(s) = \frac{\nu(s)}{\prod_{i=1}^{m}(\nu_i + s)^{n_i}} \tag{3.2}$$

Όπου,

- $m, n_i \in \mathbb{N}^+$, *με* $n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$
- $\nu_i > 0, i = 1,2, \dots, m,$ *με* $\nu_i \neq \nu_j$, *για* $i \neq j$
- *η* $\nu(s)$ *είναι μία πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού* $n - 1$ *και*
- *ισχύει ότι,* $\nu(0) = \prod_{i=1}^{m} {\nu_i}^{n_i}$

Η ρητή οικογένεια κατανομών, η οποία χρησιμοποιείται ευρέως σε εφαρμογές πιθανοτήτων, περιέχει τις κατανομές Erlang, Coxian και κατανομές τύπου φάσης ως ειδική περίπτωση, καθώς και μίξεις αυτών των κατανομών.

Εμείς εξετάζουμε αναλυτικά τις κατανομές που περιέχει η ρητή οικογένεια, κάνοντας εφαρμογή του τύπου που δώσαμε στον παραπάνω ορισμό σχετικά με τον μετασχηματισμό Laplace της ρητής οικογένειας.

1. Για την <u>Εκθετική κατανομή</u> η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δίνεται από τον εξής τύπο:

   $$f_{-}(x) = \lambda e^{-\lambda x} \left(\Rightarrow f_{-}(-x) = \lambda e^{\lambda x}\right),$$

   Ο μετασχηματισμός Laplace της εκθετικής κατανομής είναι ο παρακάτω:

   $$\hat{f}_{-}(s) = \frac{\lambda}{\lambda + s}$$

   Άρα, για

   - $m = 1,$
   - $v_1 = \lambda,$
   - $n_1 = 1\ (= n),$
   - $v(s) = \lambda, \kappa\alpha\iota$
   - $deg v(s) \leq 0$

   η Εκθετική κατανομή ανήκει στη ρητή οικογένεια κατανομών.

2. Για τη <u>Γάμμα κατανομή</u>, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι η παρακάτω:

   $$f_{-}(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x}$$

   Ο μετασχηματισμός Laplace της Γάμμα κατανομής δίνεται από την παρακάτω σχέση:

   $$\hat{f}_{-}(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + s}\right)^2 = \frac{\lambda^2}{(\lambda + s)^2}$$

   Άρα, για

   - $m = 1,$
   - $v_1 = \lambda,$
   - $n_1 = 2\ (= n),$
   - $v(s) = \lambda^2, \kappa\alpha\iota$
   - $deg v(s) = 1$

   η Γάμμα κατανομή ανήκει στη ρητή οικογένεια κατανομών.

3. Για τη <u>Μείξη Εκθετικών</u>, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι η παρακάτω:

   $$f_{-}(x) = \alpha_1 \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} + \alpha_2 \lambda_2 e^{-\lambda_2 x}$$

   Όπου,

   - $\alpha_1 + \alpha_2 = 1,$
   - $0 < \alpha_i < 1,$

- $\lambda_1, \lambda_2 > 0$

Ο μετασχηματισμός Laplace της Μείξης Εκθετικών δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\hat{f}_{-}(s) = \alpha_1 \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + s} + a_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + s}$$

$$\Rightarrow \hat{f}_{-}(s) = \frac{\alpha_1 \lambda_1}{\lambda_1 + s} + \frac{\alpha_2 \lambda_2}{\lambda_2 + s}$$

$$\Rightarrow \hat{f}_{-}(s) = \frac{\alpha_1 \lambda_1 (\lambda_2 + s)}{(\lambda_1 + s)(\lambda_2 + s)} + \frac{\alpha_2 \lambda_2 (\lambda_1 + s)}{(\lambda_1 + s)(\lambda_2 + s)}$$

$$\Rightarrow \hat{f}_{-}(s) = \frac{\alpha_1 \lambda_1 (\lambda_2 + s) + \alpha_2 \lambda_2 (\lambda_1 + s)}{(\lambda_1 + s)(\lambda_2 + s)}$$

$$\Rightarrow \hat{f}_{-}(s) = \frac{a_1 \lambda_1 \lambda_2 + \alpha_1 \lambda_1 s + a_2 \lambda_2 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 s}{(\lambda_1 + s)(\lambda_2 + s)}$$

$$\Rightarrow \hat{f}_{-}(s) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 (\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2) s}{(\lambda_1 + s)(\lambda_2 + s)}$$

Άρα, για

- $m = 2,$
- $v_1 = \lambda_1 \; και \; v_2 = \lambda_2 \; με \; \lambda_1 \neq \lambda_2$
- $n_1 = n_2 = 1 \; και \; n = n_1 + n_2 = 1 + 1 = 2$
- $v(s) = \lambda_1 \lambda_2 (\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2) s, και$
- $degv(s) = 1$

η Γάμμα κατανομή ανήκει στη ρητή οικογένεια κατανομών.

3.3 Η Πιθανότητα Χρεοκοπίας από Κίνηση Brown ή από Κάτω Άλμα.

Όπως, ήδη αναφέραμε η (3.1) αποτελεί τη στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος με δίπλευρα άλματα και κίνηση Brown. Θα ισχύει ότι:

$$T = \begin{cases} inf\{t: U(t) \leq 0\}, λόγω \; της \; ανέλιξης \; Wiener \\ \infty, αν \; U(t) > 0 \forall \; t \geq 0. \end{cases},$$

Όπου, T είναι ο χρόνος χρεοκοπίας και η πιθανότητα χρεοκοπίας θα δίνεται από τη σχέση:

$$\psi(u) = Pr(T < \infty | U(0) = u)$$

Ακόμη, θα ισχύει η συνθήκη του καθαρού κέρδους, δηλαδή:

$$c + \lambda q \mu_- > \lambda p \mu_+ \tag{3.3}$$

Η χρεοκοπία, όπως στις προηγούμενες εκδοχές του μοντέλου, έτσι κι εδώ, θα συμβαίνει απευθείας όταν το αρχικό απόθεμα πάρει την τιμή 0, δηλαδή, όταν,

$$u = 0, \tau ό\tau\varepsilon\ \psi(0) = 1.$$

Παρατήρηση

Η χρεοκοπία σε αυτή την εκδοχή του μοντέλου μπορεί να προέλθει είτε από την κίνηση Brown είτε από ένα κάτω άλμα.

Ορισμός 3.5

Παρομοίως, όπως στα προηγούμενα κεφάλαια, η πιθανότητα χρεοκοπίας ισούται με το εξής άθροισμα:

$$\psi(u) = \psi_s(u) + \psi_d(u),$$

Όπου,

- $\psi_s(u)$ *είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας, όταν η χρεοκοπία προέρχεται από ένα κάτω άλμα, και*
- $\psi_d(u)$ *είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας, όταν αυτή προέρχεται από την κίνηση Brown.*

Τέλος, θα ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες:

$$\psi(0) = \psi_d(0) = 1,$$

$$\psi_s(0) = 0.$$

3.4 Η Συνάρτηση των Gerber-Shiu.

Όσον αφορά τη συνάρτηση των Gerber-Shiu:

Ορισμός 3.6

Ορίζουμε για

$$\delta \geq 0,$$

την προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής, ως εξής:

$$\varphi(u) = E\left[e^{-\delta T} w(U(T-), |U(T)|) I(T < \infty) | U(0) = u\right],$$

Όπου,

$$w(x_1, x_2) \; \mu\varepsilon \; x_1, x_2 \geq 0$$

είναι μία μη αρνητική συνάρτηση του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία $U(T-)$ και του ελλείματος τη στιγμή της χρεοκοπίας $|U(T)|$.

Παρόμοια με την πιθανότητα χρεοκοπίας, και η συνάρτηση των Gerber-Shiu είναι ισοδύναμη με το παρακάτω άθροισμα:

$$\varphi(u) = \varphi_s(u) + \varphi_d(u),$$

Όπου,

$$\varphi_s(u) = E\left[e^{-\delta T} w(U(T-), |U(T)|) I(T < \infty, U(T) < 0) | U(0) = u\right]$$

είναι η προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής τη στιγμή της χρεοκοπίας, όταν αυτή προέρχεται από ένα κάτω άλμα, και

$$\varphi_d(u) = E\left[e^{-\delta T} w(U(T-), |U(T)|) I(T < \infty, U(T) = 0) | U(0) = u\right]$$

$$= w(0,0) E\left[e^{-\delta T} I(T < \infty, U(T) = 0) | U(0) = u\right]$$

είναι η προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής τη στιγμή της χρεοκοπίας, όταν αυτή προέρχεται από την κίνηση Brown.

Εάν θέσουμε

$$w(0,0) = 1,$$

χωρίς απώλεια της γενικότητας, θα ισχύουν οι δύο παρακάτω συνθήκες:

$$\varphi(0) = \varphi_d(0) = 1,$$

$$\varphi_s(0) = 0.$$

3.5 Η Γενικευμένη Εξίσωση του Lundberg.

Σε αυτήν την ενότητα θα ασχοληθούμε με την γενικευμένη εκδοχή της εξίσωσης του Lundberg, για το μοντέλο το οποίο μελετάμε σε αυτό το κεφάλαιο.

Αναζητάμε έναν αριθμό s τέτοιον ώστε η διαδικασία:

$$\left\{e^{-\delta t+sU(t)}\right\}_{t\geq 0}$$

να είναι martingale.

Η συνθήκη martingale που εξετάζουμε είναι η εξής:

$$Ds^2 + cs - (\lambda + \delta) + \lambda\hat{f}(s) = 0, \tag{3.3}$$

Όπου,

- $D = \frac{\sigma^2}{2}$,
- c, είναι ο ρυθμός είσπραξης των ασφαλίστρων,
- λ, είναι η παράμετρος της κατανομής Poisson,
- δ, είναι η ένταση ανατοκισμού και
- $\hat{f}(s)$, είναι ο μετασχηματισμός Laplace της s, για τον οποίον γνωρίζουμε ότι:

$$\hat{f}(s) = E[e^{-sX_1}] = p\hat{f}_+(s) + q\hat{f}_-(-s) \tag{3.4}$$

Η (3.3) αποτελεί τη γενικευμένη εξίσωση του Lundberg για το μοντέλο της θεωρίας κινδυνου με έναν όρο διάχυσης και δίπλευρα άλματα.

Για

$$p = 1,$$

$$q = 0,$$

τότε, από (3.4):

$$\hat{f}(s) = 1 \times \hat{f}_+(s) + 0 \times \hat{f}_-(-s)$$

$$\Rightarrow \hat{f}(s) = \hat{f}_+(s)$$

Οπότε, η (3.3), απλοποιείται και γίνεται ως εξής:

$$Ds^2 + cs - (\lambda + \delta) + \lambda\hat{f}_+(s) = 0, \qquad (3.5)$$

που είναι η εξίσωση του Lundberg των Gerber και Landry. Επίσης, αποδεικνύεται πως η εξίσωση του Lundberg έχει ακριβώς μία θετική ρίζα

$$\rho > 0.$$

<u>Λήμμα 1</u>

Όταν

$$0 < p, q < 1$$

και ο μετασχηματισμός Laplace $\hat{f}_-(s)$ δίνεται από τη σχέση (3.2), τότε η γενικευμένη εξίσωση του Lundberg (3.3) έχει ακριβώς $n + 1$ ρίζες, δηλαδή,

$$\rho_1(\delta), \rho_2(\delta), \dots, \rho_{n+1}(\delta),$$

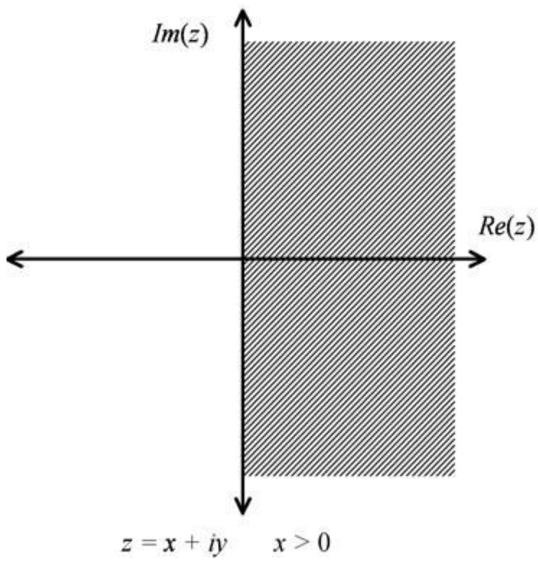
στο πεδίο ορισμού

$$\{z \in \mathbb{C}: Re(z) > 0\},$$

όπου,

$$z = x + iy, x > 0,$$

το οποίο είναι το σκιαγραφημένο κομμάτι παρακάτω:



<u>Απόδειξη</u>

Αρκεί να δείξουμε ότι η παρακάτω εξίσωση:

$$\prod_{i=1}^{m}(\nu_i - s)^{n_i}\left[Ds^2 + cs - (\lambda + \delta) + \lambda p \hat{f}_+(s)\right] + \lambda q \nu(-s) = 0$$

έχει ακριβώς $n + 1$ ρίζες, με θετικό πραγματικό μέρος.

Ας υποθέσουμε ότι

$$r > 0$$

είναι ένας αρκετά μεγάλος αριθμός και με C_r συμβολίζουμε το σχήμα που αποτελείται από τον φανταστικό άξονα που εκτείνεται από το $-ir$, έως το ir, και ένα ημικύκλιο με ακτίνα r που εκτείνεται από το $-ir$, έως το ir. Αν το s είναι ένα σημείο πάνω στο ημικύκλιο θα έχουμε ότι:

$$\left|Ds^2 + cs - (\lambda + \delta)\right| \to \infty, \kappa\alpha\theta\acute{\omega}\varsigma\ r \to \infty,$$

ενώ, από (3.4),

$$\left|\hat{f}(s)\right| \leq p + q\left|\hat{f}_-(-s)\right|$$

$$\xRightarrow{\times\lambda>0} \left|\lambda\hat{f}(s)\right| \leq \lambda p + \lambda q\left|\hat{f}_-(-s)\right|$$

$$\overset{(3.2)}{\Longrightarrow} \left|\lambda\hat{f}(s)\right| \leq \lambda p + \lambda q \frac{|\nu(-s)|}{\left|\prod_{i=1}^{m}(\nu_i - s)^{n_i}\right|} \to \lambda p, \kappa\alpha\theta\acute{\omega}\varsigma\ |s| \to \infty$$

επειδή, η $\nu(s)$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $\leq n - 1$.

Για

$$-ir < s < ir,$$

θα έχουμε:

$$|Ds^2 + cs - (\lambda + \delta)| \geq \lambda + \delta > \lambda \geq \left|\lambda\hat{f}(s)\right|.$$

Οπότε, όταν το r είναι αρκετά μεγάλο, θα έχουμε για την s στο C_r, ότι:

$$\left|\prod_{i=1}^{m}(\nu_i - s)^{n_i}[Ds^2 + cs - (\lambda + \delta)]\right| > \left|\prod_{i=1}^{m}(\nu_i - s)^{n_i}\lambda\hat{f}(s)\right|$$

Από το θεώρημα του Rouches, γνωρίζουμε ότι η εξίσωση (3.3) έχει τον ίδιο αριθμό ριζών με την παρακάτω εξίσωση:

$$\prod_{i=1}^{m}(\nu_i - s)^{n_i}[Ds^2 + cs - (\lambda + \delta)] = 0$$

μέσα στο C_r. Αφού η τελευταία έχει $n + 1$ ρίζες στο C_r, τόσες θα έχει και η (3.3)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ LAPLACE ΚΑΙ ΕΛΛΕΙΜΜΑΤΙΚΕΣ ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΜΕ ΔΙΠΛΕΥΡΑ ΑΛΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΝΑΝ ΟΡΟ ΔΙΑΧΥΣΗΣ

Αφού πραγματοποιήσαμε εκτενή αναφορά στο μοντέλο της θεωρίας κινδύνου με δίπλευρα άλματα και ορίσαμε τη διαδικασία πλεονάσματος, τη συνάρτηση Gerber-Shiu, τη ρητή οικογένεια κατανομών, καθώς και την εξίσωση Lundberg, σε αυτό το κεφάλαιο θα γίνει αναφορά στους μετασχηματισμούς Laplace και στις ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις του μοντέλου αυτού.

Θα βασιστούμε κυρίως σε ορισμούς και έννοιες που παρουσιάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, για να δώσουμε τους μετασχηματισμούς Laplace των προεξοφλημλενων συναρτήσεων ποινής και των ελλειμματικών ανανεωτικών εξισώσεων τους.

4.1 Μετασχηματισμοί Laplace για τις Προεξοφλημένες Συναρτήσεις Ποινής.

Πρώτα θα δώσουμε τις ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις για τις $\varphi_s(u)$ και $\varphi_d(u)$, τις οποιές ορίσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο στη υποενότητα **«Η Συνάρτηση Gerber-Shiu».** Θυμίζουμε, ότι η $\varphi_s(u)$ είναι η προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής όταν συμβαίνει χρεοκοπία και προκαλείται από κάτω άλμα. Ενώ, $\varphi_d(u)$ είναι η προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής όταν συμβαίνει χρεοκοπία και αυτή προκαλείται από την κίνηση Brown. Υποθέτουμε πως οι $\varphi_s(u)$ και $\varphi_d(u)$ είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη για το u στο $(0, \infty)$.

Ξεκινώντας με την $\varphi_s(u)$, θεωρούμε την h, η οποία θα είναι μία μικρή σταθερά, με

$$h > 0.$$

Τότε, θα έχουμε:

$$\varphi_s(u) = (1-\lambda h)e^{-\delta h}E[\varphi_s(u+ch+\sigma B(h)]$$
$$+\lambda h e^{-\delta h}E\Bigg[p\int_0^{u+ch+\sigma B(h)}\varphi_s(u+ch+\sigma B(h)-x)f_+(x)dx$$
$$+p\int_{u+ch+\sigma B(h)}^{\infty} w\big(u+ch+\sigma B(h), x-u-ch-\sigma B(h)\big)f_+(x)dx$$
$$+q\int_0^{\infty}\varphi_s(u+ch+\sigma B(h)+x)f_-(x)dx\Bigg]+o(h) \qquad (4.1)$$

Από σειρές Taylor, για την $E[\varphi_s(u+ch+\sigma B(h)]$, θα έχουμε:

$$E[\varphi_s(u+ch+\sigma B(h)] = \varphi_s(u)+c{\varphi'}_s(u)h+D{\varphi''}_s(u)h+o(h) \qquad (4.2)$$

Αντικαθιστώντας στην (4.1) την (4.2) παίρνουμε, διαιρώντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης με h και θεωρώντας πως

$$h \to 0,$$

καταλήγουμε στη σχέση:

$$D{\varphi''}_s(u)+c{\varphi'}_s(u) =$$
$$= (\lambda+\delta)\varphi_s(u)-\lambda p\int_0^{u}\varphi_s(u-x)f_+(x)dx-\lambda p\omega(u)-\lambda q\int_0^{\infty}\varphi_s(u+x)f_-(x)dx \qquad (4.3)$$

όπου,

$$\omega(u) = \int_u^{\infty} w(u, x-u)f_+(x)dx.$$

Με τον ίδιο τρόπο, για τη $\varphi_d(u)$, καταλήγουμε στην αντίστοιχη σχέση:

$$D{\varphi''}_d(u)+c{\varphi'}_d(u) =$$
$$= (\lambda+\delta)\varphi_d(u)-\lambda p\int_0^{u}\varphi_d(u-x)f_+(x)dx-\lambda q\int_0^{\infty}\varphi_d(u+x)f_-(x)dx \qquad (4.4)$$

Μελετάμε ξεχωριστά το ολοκλήρωμα $\int_0^\infty \varphi_s(u+x)f_-(x)dx$ της (4.3). Θυμίζουμε πως ο μετασχηματισμός Laplace $\hat{f}_-(s)$ έχει τη μορφή της (3.2) και μπορεί να γραφτεί και ως:

$$\hat{f}_-(s) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} \frac{\beta_{i,j}{\nu_i}^j}{(\nu_i+s)^j},$$

όπου,

$$\beta_{i,j} = \frac{1}{{\nu_i}^j(n_i-j)!}\frac{d^{n_i-j}}{ds^{n_i-j}}\left\{\prod_{k=1,k\neq i}^{m}\frac{\nu(s)}{(\nu_k+s)^{n_k}}\right\}\Bigg|_{s=-\nu_i}$$

Έπειτα, καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση:

$$f_-(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\beta_{i,j}\frac{x^{j-1}{\nu_i}^j e^{-\nu_i x}}{(j-1)!} \tag{4.5}$$

η οποία πρόκειται για συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας συνδυασμού κατανομών Erlang.

Θέτουμε:

$$k_{i,j}(x) = \frac{x^{j-1}{\nu_i}^j e^{-\nu_i x}}{(j-1)!}, x>0, j\epsilon\mathbb{N}^+ \tag{4.6}$$

να υποδηλώνει τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Erlang με παράμετρο ν_i. Τότε, από (4.5) και (4.6) παίρνουμε:

$$\int_0^\infty \varphi_s(u+x)f_-(x)dx =$$

$$= \int_0^\infty \varphi_s(u+x)\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\beta_{i,j}\frac{x^{j-1}{\nu_i}^j e^{-\nu_i x}}{(j-1)!}dx =$$

$$= \int_0^\infty \varphi_s(u+x)\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\beta_{i,j}\,k_{i,j}(x)dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\beta_{i,j}\int_0^\infty \varphi_s(u+x)\,k_{i,j}(x)dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\beta_{i,j}\,E\big[\varphi_s(u+Y_{i,j})\big],$$

όπου, η $Y_{i,j}$ είναι μία τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $k_{i,j}$.

Υποθέτουμε ότι

$$Z_{i,1}, Z_{i,2}, \dots, Z_{i,j}$$

είναι j στον αριθμό ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, οι οποίες ακολουθούν την εκθετική κατανομή με μέση τιμή:

$$E[Z_{i,j}] = \frac{1}{\nu_i}$$

Τότε, η $Y_{i,j}$ ακολουθεί την ίδια κατανομή με τη

$$Z_{i,1} + Z_{i,2} + \cdots + Z_{i,j}.$$

Ορίζουμε τις παρακάτω βοηθητικές συναρτήσεις:

$$A_{i,k+1}(u) = E\left[A_{i,k}(u + Z_{i,k+1})\right], \gamma\iota\alpha\ k = 0, 1, \dots, j-1,$$

για τις οποίες θα ισχύει ότι:

$$A_{i,0}(u) = \varphi_s(u)$$

και

$$A_{i,j}(u) = E\left[\varphi_s(u + Y_{i,j})\right]$$

Τότε, παίρνουμε ότι:

$$A_{i,k+1}(u) = \int_0^{\infty} A_{i,k}(u + x)\nu_i e^{-\nu_i x} dx$$

Κάνοντας αλλαγή μεταβλητών και θέτοντας $y = u + x$, άρα:

$$y = u + x$$

$$\Rightarrow x = y - u$$

$$\Rightarrow dx = dy$$

Και αλλάζοντας τα όρια του ολοκληρώματος:

$$0 \leq x < \infty$$

$$\Rightarrow u + 0 \leq u + x < \infty$$

$$\Rightarrow u \leq y < \infty$$

Παίρνουμε την παρακάτω εξίσωση:

$$A_{i,k+1}(u) = \int_u^\infty A_{i,k}(y)\nu_i e^{-\nu_i(y-u)}dy$$

$$\Rightarrow A_{i,k+1}(u) = \nu_i \int_u^\infty A_{i,k}(y)e^{-\nu_i(y-u)}dy \tag{4.7}$$

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της (4.7) ως προς u, θα έχουμε:

$$A'_{i,k+1}(u) = \left[\nu_i A_{i,k}(y)e^{-\nu_i(y-u)}\right]_u^\infty$$

$$\Rightarrow A'_{i,k+1}(u) = \lim_{y\to\infty} \nu_i A_{i,k}(y)e^{-\nu_i(y-u)} - \nu_i A_{i,k}(u)e^{-\nu_i(u-u)}$$

$$\Rightarrow A'_{i,k+1}(u) = \lim_{y\to\infty} \nu_i A_{i,k}(y)e^{-\nu_i(y-u)} - \nu_i A_{i,k}(u)e^{-\nu_i\times 0}$$

$$\Rightarrow A'_{i,k+1}(u) = \lim_{y\to\infty} \nu_i A_{i,k}(y)e^{-\nu_i(y-u)} - \nu_i A_{i,k}(u)e^{0}$$

$$\Rightarrow A'_{i,k+1}(u) = \lim_{y\to\infty} \nu_i A_{i,k}(y)e^{-\nu_i(y-u)} - \nu_i A_{i,k}(u)\times 1$$

$$\Rightarrow A'_{i,k+1}(u) = \nu_i A_{i,k+1}(u) - \nu_i A_{i,k}(u) \tag{4.8}$$

Από την (4.8) και με διαδοχική αντικατάσταση, καταλήγουμε στην:

$$\varphi_s(u) = \left(\frac{\nu_i - \mathcal{D}}{\nu_i}\right)^j A_{i,j}(u) \tag{4.9}$$

όπου, $\mathcal{D}$ είναι ο διαφορικός τελεστής ως προς u.

Παρόμοια, όταν αντιστοίχως, θεωρούμε τη βοηθητική συνάρτηση:

$$B_{i,j}(u) + E\left[\varphi_d(u + Y_{i,j}\right],$$

τότε, θα ισχύει ότι:

$$\int_0^\infty \varphi_d(u+x)f_-(x)dx = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} \beta_{i,j}B_{i,j}(u) \tag{4.10}$$

και

$$\varphi_d(u) = \left(\frac{\nu_i - \mathcal{D}}{\nu_i}\right)^j B_{i,j}(u) \tag{4.11}$$

Θεωρούμε τώρα, ότι $\mathbb{C}^+$ είναι το σύνολο των μιγαδικών αριθμών με μη αρνητικό πραγματικό μέρος, και θα ισχύει ότι:

$$\mathbb{C}^1 = \{s: s \in \mathbb{C}^+, Re(s) < min_{1 \le i \le m} \nu_i\}.$$

Για

$$s \in \mathbb{C}^1,$$

θα εφαρμόσουμε μετασχηματισμούς Laplace στις (4.3) και (4.9), και θα καταλήξουμε στην παρακάτω σχέση:

$$[Ds^2 + cs - (\lambda + \delta) + \lambda p f_+(s)]\hat{\varphi}_s(s) = D\varphi'_s(0) - \lambda p \hat{\omega}(s) - \lambda q \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \beta_{i,j} \hat{A}_{i,j}(s) \tag{4.9}$$

και

$$\hat{\varphi}_s(s) = \left(\frac{\nu_i - s}{\nu_i}\right)^j \hat{A}_{i,j}(s) + l_{s,i,j-1}(s) \tag{4.10}$$

όπου,

$$l_{s,i,j-1}(s)$$

είναι πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $j - 1$.

Στη συνέχεια, θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$\tau(s) = \prod_{i=1}^{m} (s - \nu_i)^{n_i} \tag{4.11}$$

Αντικαθιστώντας την (4.11) στην (4.10) και πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με την (4.12), καταλήγουμε για $s \in \mathbb{C}^1$ στην παρακάτω εξίσωση:

$$\tau(s)\left[Ds^2 + cs - (\lambda + \delta) + \lambda \hat{f}(s)\right]\hat{\varphi}_s(s) = l_s(s) - \lambda p \tau(s) \hat{\omega}(s) \tag{4.12}$$

όπου,

$$l_s(s) = D\varphi'_s(0)\tau(s) + \lambda q \tau(s) \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \beta_{i,j} \frac{\nu_i{}^j l_{s,i,j-1}(s)}{(\nu_i - s)^j}.$$

Ακολουθώντας τα ίδια βήματα για τις (4.4), (4.10) και (4.11), για $s \in \mathbb{C}^1$ οδηγούμαστε στην παρακάτω εξίσωση:

$$\tau(s)\left[Ds^2 + cs - (\lambda + \delta) + \lambda \hat{f}(s)\right]\hat{\varphi}_d(s) = l_d(s) + \tau(s)(Ds + c),$$

όπου,

$$l_d(s) = D\varphi'_d(0)\tau(s) + \lambda q \tau(s) \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \beta_{i,j} \frac{{\nu_i}^j l_{d,i,j-1(s)}}{(\nu_i - s)^j}.$$

Η

$$l_{d,i,j-1(s)}$$

είναι πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $j - 1$, η οποία ικανοποιεί την παρακάτω σχέση:

$$\hat{\varphi}_d(s) = \left(\frac{\nu_i - s}{\nu_i}\right)^j \hat{B}_{i,j}(s) + l_{d,i,j-1}(s).$$

Θεώρημα 1

Για $s \in \mathbb{C}^+$ οι μετασχηματισμοί Laplace των $\hat{\varphi}_s(s)$ και $\hat{\varphi}_d(s)$ δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\hat{\varphi}_s(s) = \frac{\lambda p \sum_{i=1}^{n+1} \prod_{j=1, j\neq i}^{n+1} \frac{s - \rho_i}{\rho_i - \rho_j} [\tau(\rho_i)\hat{\omega}(\rho_i) - \tau(s)\hat{\omega}(s)]}{\tau(s)\left[Ds^2 + cs - (\lambda + \delta) + \lambda \hat{f}(s)\right]} \tag{4.13}$$

$$\hat{\varphi}_d(s) = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} \prod_{j=1, j\neq i}^{n+1} \frac{s - \rho_i}{\rho_i - \rho_j} [\tau(s)(Ds + c) - \tau(\rho_i)(D\rho_i + c)]}{\tau(s)\left[Ds^2 + cs - (\lambda + \delta) + \lambda \hat{f}(s)\right]} \tag{4.14}$$

Απόδειξη

Παρατηρούμε ότι η $\hat{\varphi}_s(s)$ και τα δύο μέλη της (4.12) είναι αναλυτικές για $s \in \mathbb{C}^+$.

Θέτουμε

$$s = \rho_i, \gamma\iota\alpha\ \iota = 1, 2, \dots, n + 1.$$

Τότε το αριστερό μέλος της (4.12) μηδενίζεται λόγω του Λήμματος 1 και συνεπώς θα έχουμε:

$$l_s(\rho_i) = \lambda p\tau(\rho_i)\widehat{\omega}(\rho_i).$$

Εφόσον $l_s(s)$ είναι πολυώνυμο βαθμού n, μπορεί να γραφεί και ως:

$$l_s(s) = \lambda p \sum_{i=1}^{n+1} \prod_{j=1, j\neq i}^{n+1} \frac{s-\rho_j}{\rho_i - \rho_j} \tau(\rho_i)\widehat{\omega}(\rho_i)$$

λόγω του θεωρήματος Lagrange. Εφαρμόζοντας την παραπάνω μέθοδο στην (4.12), μας δίνει την (4.13). Στην (4.14) οδηγούμαστε ακολουθώντας τα ίδια βήματα.

4.2 Ελλειμματικές Ανανεωτικές Εξισώσεις για τις Συναρτήσεις $\boldsymbol{\varphi_s(u)}$ και $\boldsymbol{\varphi_d(u)}$.

Σε αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε με την ανάπτυξη και την παρουσίαση των ελλειμματικών ανανεωτικών εξισώσεων των συναρτήσεων $\varphi_s(u)$ και $\varphi_d(u)$. Θα καταλήξουμε σε αυτές ορίζοντας νέες έννοιες, όπως αυτή του τελεστή Dickson-Hipp.

Ορισμός

Ο τελεστής Dickson-Hipp για μία πραγματική συνάρτηση $h(x)$ είναι η συνάρτηση που ορίζεται από την παρακάτω σχέση:

$$T_s h(x) = \int_x^\infty e^{-s(y-x)} h(y)dy, \;\; x \geq 0 \tag{4.15}$$

όπου, s είναι ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός (ή ένας μιγαδικός αριθμός με μη αρνητικό πραγματικό μέρος), έτσι ώστε το παραπάνω ολοκλήρωμα να συγκλίνει.

Παρατηρούμε εύκολα, ότι για

$$x = 0,$$

η (4.15) γίνεται:

$$T_s h(0) = \int_0^\infty e^{-s(y-0)} h(y)dy$$

$$\Rightarrow T_s h(0) = \int_0^{\infty} e^{-sy} h(y) dy$$

$$\Rightarrow T_s h(0) = \hat{h}(y)$$

δηλαδή, καταλήγουμε στο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης h.

Ο τελεστής T_s ακολουθεί την αντιμεταθετική ιδιότητα, δηλαδή θα ισχύει ότι:

$$T_s T_r = T_r T_s$$

και επιλέον γνωρίζουμε ότι:

$$T_s T_r h(x) = \frac{T_s h(x) - T_r h(x)}{r - s}, \quad r \neq s$$

Προχωρώντας, στη μελέτη των ελλειμματικών ανανεωτικών εξισώσεων των $\varphi_s(u)$ και $\varphi_d(u)$, θεωρούμε για δική μας διευκόλυνση την παρακάτω σχέση:

$$\pi(s) = \prod_{i=1}^{n+1} (s - \rho_i) \pi'(\rho_i) =$$

$$= \prod_{j=1, j \neq i}^{n+1} (\rho_i - \rho_j)$$

Έπειτα, μπορούμε να ασχοληθούμε με την εύρεση ολοκληρωτικών εξισώσεων για τις $\varphi_s(u)$ και $\varphi_d(u)$.

<u>Θεώρημα 1</u>

Οι προεξοφλημένες συναρτήσεις ποινής $\varphi_s(u)$ και $\varphi_d(u)$ ικανοποιούν τις παρακάτω ολοκληρωτικές εξισώσεις:

$$\varphi_s(u) = \int_0^u \varphi_s(u - x) g(x) dx + H(u) \tag{4.16}$$

$$\varphi_d(u) = \int_0^u \varphi_d(u - x) g(x) dx + e^{-au} \tag{4.17}$$

όπου,

$$\alpha = \frac{c}{D} + \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\tau(\rho_i)\rho_i}{\pi'(\rho_i)},$$

$$g(x) = \frac{\lambda p}{D} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\tau(\rho_i)}{\pi'(\rho_i)} e^{-ax} * T_{\rho_i} f(x),$$

$$H(u) = \frac{\lambda p}{D} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\tau(\rho_i)}{\pi'(\rho_i)} e^{-au} * T_{\rho_i} \omega(u)$$

και $*$ είναι το σύμβολο της συνέλιξης.

<u>Απόδειξη</u>

Εφόσον η

$$\tau(s)\left[s - \frac{\lambda+\delta}{c} + \frac{\lambda}{c} q\hat{f}_-(-s)\right]$$

είναι πολυώνυμο βαθμού $n+1$ με συντέλεστη

$$\alpha = 1,$$

τότε η

$$\tau(s)\left[s - \frac{\lambda+\delta}{c} + \frac{\lambda}{c} q\hat{f}_-(-s)\right] - \pi(s)$$

είναι πολυώνυμο βαθμού n που ικανοποιείται για

$$i = 1, 2, \ldots, n+1.$$

$$\tau(\rho_i)\left[\rho_i - \frac{\lambda+\delta}{c} + \frac{\lambda}{c} q\hat{f}_-(-\rho_i)\right] - \pi(\rho_i) = -\tau(\rho_i)\left[\frac{D}{c}\rho_i{}^2 + \frac{\lambda}{c} p\hat{f}_+(\rho_i)\right]$$

λόγω του Λήμματος 1 του Κεφαλαίου 3. Από τον τύπο παρεμβολής του Lagrange παίρνουμε:

$$\tau(s)\left[s - \frac{\lambda+\delta}{c} + \frac{\lambda}{c} q\hat{f}_-(-s)\right] - \pi(s) = -\pi(s) \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\tau(\rho_i)\left[\frac{D}{c}\rho_i{}^2 + \frac{\lambda}{c} p\hat{f}_+(\rho_i)\right]}{\pi'(\rho_i)(s-\rho_i)}$$

Έτσι, θα έχουμε:

$$\tau(s)\left[\frac{D}{c}s^2+s-\frac{\lambda+\delta}{c}+\frac{\lambda}{c}\hat{f}(s)\right]=$$

$$=\pi(s)+\tau(s)\left[\frac{D}{c}s^2+\frac{\lambda}{c}p\hat{f}_+(s)\right]-\pi(s)\sum_{i=1}^{n+1}\frac{\tau(\rho_i)\left[\frac{D}{c}{\rho_i}^2+\frac{\lambda}{c}p\hat{f}_+(\rho_i)\right]}{\pi'(\rho_i)(s-\rho_i)}=$$

$$=\pi(s)\left[1-\sum_{i=1}^{n+1}\frac{\tau(\rho_i)\left[\frac{D}{c}{\rho_i}^2+\frac{\lambda}{c}p\hat{f}_+(\rho_i)\right]-\tau(s)\left[\frac{D}{c}s^2+\frac{\lambda}{c}p\hat{f}_+(s)\right]}{\pi'(\rho_i)(s-\rho_i)}\right]$$

$$=\pi(s)\left[1-\sum_{i=1}^{n+1}\frac{\tau(\rho_i)\left[\frac{D}{c}{\rho_i}^2+\frac{\lambda}{c}p\hat{f}_+(\rho_i)\right]-\tau(\rho_i)\left[\frac{D}{c}s^2+\frac{\lambda}{c}p\hat{f}_+(s)\right]}{\pi'(\rho_i)(s-\rho_i)}\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{n+1}\frac{\tau(s)-\tau(\rho_i)}{\pi'(\rho_i)(s-\rho_i)}\left[\frac{D}{c}s^2+\frac{\lambda}{c}p\hat{f}_+(s)\right]\right]=$$

$$=\pi(s)\left[1+\frac{D}{c}\sum_{i=1}^{n+1}\frac{\tau(\rho_i)(\rho_i+s)}{\pi'(\rho_i)}-\right.$$

$$\left.-\frac{\lambda}{c}p\sum_{i=1}^{n+1}\frac{\tau(\rho_i)}{\pi'(\rho_i)}T_sT_{\rho_i}f_+(0)+\sum_{i=1}^{n+1}\frac{\tau(s)-\tau(\rho_i)}{\pi'(\rho_i)(s-\rho_i)}\left[\frac{D}{c}s^2+\frac{\lambda}{c}p\hat{f}_+(s)\right]\right],\ (4.18)$$

Παρατηρούμε ότι η $\tau(s)$ είναι μία πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού n και ότι η $\frac{\tau(s)-\tau(\rho_i)}{(s-\rho_i)}$ είναι πολυωνυμική βαθμού $n-1$. Τότε, σύμφωνα με τα παρακάτω:

$$\sum_{i=1}^{n+1}\frac{(s_i-s)^k}{\prod_{j=1,j\neq i}^{n}(s_i-s_j)}=\begin{cases}1, & k=n-1\\ 0, & k=0,1,2,\dots,n-2\\ -\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(s-s_i)}, & k=-1\end{cases}\quad (4.19)$$

η (4.18) απλοποιείται στην:

$$\pi(s)\left[\frac{D}{c}(s+a)-\frac{\lambda}{c}p\sum_{i=1}^{n+1}\frac{\tau(\rho_i)}{\pi'(\rho_i)}T_sT_{\rho_i}f_+(0)\right]\qquad(4.20)$$

Παρομοίως ο αριθμητής της (4.13) γίνεται όπως παρακάτω:

$$\lambda p\pi(s)\sum_{i=1}^{n+1}\frac{\tau(\rho_i)\widehat{\omega}(\rho_i)-\tau(s)\widehat{\omega}(s)}{\pi'(\rho_i)(s-\rho_i)}=\lambda p\pi(s)\sum_{i=1}^{n+1}\frac{\tau(\rho_i)}{\pi'(\rho_i)}T_sT_{\rho_i}\omega(0)\qquad(4.21)$$

Από (4.20) και (4.21), η (4.13) παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$\hat{\varphi}_s(s) = \frac{\frac{\lambda p}{D}\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\tau(\rho_i)}{\pi'(\rho_i)} \frac{T_s T_{\rho_i} \omega(0)}{s+a}}{1 - \frac{\lambda p}{D}\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\tau(\rho_i)}{\pi'(\rho_i)} \frac{T_s T_{\rho_i} f_+(0)}{s+a}} \tag{4.22}$$

Η (4.22) μπορεί να γραφεί και ως:

$$\hat{\varphi}_s(s) = \hat{\varphi}_s(s) \frac{\lambda p}{D} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\tau(\rho_i)}{\pi'(\rho_i)} \frac{T_s T_{\rho_i} f_+(0)}{s+a} + \frac{\lambda p}{D} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\tau(\rho_i)}{\pi'(\rho_i)} \frac{T_s T_{\rho_i} \omega(0)}{s+a} \tag{4.23}$$

Στη συνέχεια εάν αντιστρεψουμε τους μετασχηματισμούς Laplace στην (4.23) οδηγούμαστε στην (4.16).

Ο αριθμητής της (4.14) μπορεί να γραφεί και ως:

$$D\pi(s) \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\tau(\rho_i)}{\pi'(\rho_i)} = D\pi(s), \tag{4.24}$$

λόγω της (4.19) και επειδή η $\tau(s)$ είναι πολυώνυμο βαθμού n. Αντικαθιστώντας τις (4.21) και (4.24) στην (4.14) παίρνουμετην εξής σχέση:

$$\hat{\varphi}_d(s) = \hat{\varphi}_d(s) \frac{\lambda p}{D} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\tau(\rho_i)}{\pi'(\rho_i)} \frac{T_s T_{\rho_i} f_+(0)}{s+a} + \frac{1}{s+a} \tag{4.25}$$

Αντιστρέφοντας τους μετασχηματισμούς Laplace στην (4.25) καταλήγουμε στην (4.17).

Όταν είναι

$$q = 0 \text{ (ή } \alpha\nu\tau\acute{\iota}\sigma\tau o\iota\chi\alpha\ n = 0),$$

έχουμε:

$$g(x) = \frac{\lambda}{D} e^{-\left(\frac{C}{D}+\rho\right)x} * T_\rho f_+(x)$$

και

$$H(u) = \frac{\lambda}{D} e^{-\left(\frac{C}{D}+\rho\right)x} * T_\rho \omega(u)$$

Σε αυτήν την περίπτωση παρατηρούμε πως οι εξισώσεις (4.16) και (4.17) παίρνουν τη μορφή της εξίσωσης:

$$\varphi_w(u) = \int_0^u \varphi_w(u-y)g(y)dy + g_\omega(u) =$$

$$= \varphi_w * h * \gamma(u) + h * \gamma_\omega(u), \quad u \geq 0 \tag{4.26}$$

που πρόκειται για την εξίσωση των Tsai και Willmot "A generalized defective renewal equation for the surplus process perturbed by diffusion". Ακόμη, οι εξισώσεις (4.16) και (4.17) αποτελούν ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις όταν

$$q > 0 \ (\gamma\iota\alpha\ n \geq 1).$$

Αυτό, εύκολα, διαπιστώνεται, αν δείξουμε πως

$$\int_0^\infty g(x)dx < 1$$

ή αντίστοιχα,

$$\hat{g}(0) < 1.$$

Από τις (4.18) και (4.21) παίρνουμε ότι:

$$\hat{g}(s) = 1 - \frac{\tau(s)\left[Ds^2 + cs - (\lambda+\delta) + \lambda\hat{f}(s)\right]}{D(s+a)\pi(s)},$$

όπου, για $\delta > 0$, έχουμε:

$$\hat{g}(0) = 1 - \frac{\delta \prod_{i=1}^{m} (\nu_i)^{n_i}}{Da \prod_{i=1}^{n+1} \rho_i} < 1$$

Εάν θέσουμε στην (3.3),

$$s = \rho_{n+1}(\delta)$$

και ύστερα παραγωγίσουμε για δ, τότε βρίσκουμε:

$$\rho'_{n+1}(0) = \frac{1}{c + \lambda q\mu_- - \lambda p\mu_+} > 0,$$

λόγω της συνθήκης του καθαρού κέρδους (3.3). Οπότε, όταν

$$\delta = 0,$$

από τον κανόνα του L' Hospital, παίρνουμε:

$$\hat{g}(0) = 1 - \frac{\prod_{i=1}^{m} {v_i}^{n_i}}{Da \prod_{i=1}^{n} \rho_i} \times \lim_{\delta \to 0^+} \frac{\delta}{\rho_{n+1}(\delta)} =$$

$$= 1 - \frac{(c + \lambda q \mu_- - \lambda p \mu_+) \prod_{i=1}^{m} {v_i}^{n_i}}{Da \prod_{i=1}^{n} \rho_i} < 1 \qquad (4.27)$$

Εάν θεωρήσουμε πώς

$$\hat{g}(0) = \frac{1}{1+\beta} < 1,$$

και

$$G(x) = (1+\beta) \int_0^x g(y) dy,$$

τότε, η $G(x)$ είναι μία καταλλήλη κατανομή. Έτσι, ορίζουμε τη συνάρτηση της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής

$$A(x) = 1 - \bar{A}(x),$$

με

$$\bar{A}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta}{1+\beta} \left(\frac{\beta}{1+\beta} \right)^n \overline{G^{*n}}(x),$$

όπου,

$$\overline{G^{*n}}(x) = 1 - G^{*n}(x)$$

είναι η n-ιοστή συνέλιξη της συνάρτησης κατανομής G, με τον εαυτό της. Έτσι, η (4.16) και η (4.17) γράφονται ως:

$$\varphi_s(u) = \frac{1}{1+\beta} \int_0^u \varphi_s(u-x) dG(x) + H(u),$$

$$\varphi_d(u) = \frac{1}{1+\beta} \int_0^u \varphi_d(u-x) dG(x) + e^{-au}.$$

Τότε σύμφωνα με το παρακάτω θεώρημα των Lin και Wilmot "Analysis of a defective renewal equation arising in ruin theory", οι συναρτήσεις $\varphi_s(u)$ και $\varphi_d(u)$ δίνονται από τους παρακάτω τύπους:

$$\varphi_s(u) = \frac{1+\beta}{\beta}\int_0^u H(u-x)dA(x) + H(u),$$

$$\varphi_d(u) = \frac{1+\beta}{\beta}\int_0^u e^{-a(u-x)}dA(x) + e^{-au}, \ \ u \geq 0$$

Παρακάτω παραθέτουμε το θεώρημα που προαναφέραμε με την αποδειξή του.

Θεώρημα 2

Θεωρούμε την παρακάτω ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση:

$$\varphi(u) = \frac{1}{1+\beta}\int_0^u \varphi(u-x)dG(x) + \frac{1}{1+\beta}H(u), \ \ u \geq 0, \tag{4.28}$$

όπου,

$$\beta > 0$$

και

$$G(x) = 1 - \bar{G}(x)$$

είναι η συνάρτηση κατανομής με

$$G(0) = 0$$

και $H(u)$ είναι συνεχής, για $u \geq 0$. Ορίζουμε τη συνάρτηση κατανομής της σύνθετης γεωμετρικής ως:

$$K(u) = 1 - \overline{K}(u),$$

όταν

$$\overline{K}(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta}{1+\beta}\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^n \overline{G^{*n}}(u), \quad u \geq 0$$

όπου, $\overline{G^{*n}}(u)$ είναι η ουρά της n-ιοστής συνέλιξης της $G(u)$.

Η λύση της (4.28) μπορεί να γραφεί ως:

$$\varphi(u) = \frac{1}{\beta}\int_0^u H(u-x)dK(x) + \frac{1}{1+\beta}H(u) \tag{4.29}$$

ή εναλλακτικά ως:

$$\varphi(u) = -\frac{1}{\beta}\int_0^u \overline{K}(u-x)dH(x) - \frac{H(0)}{\beta}\overline{K}(u) + \frac{1}{\beta}H(u) \tag{4.30}$$

Εάν η $H(u)$ είναι παραγωγίσιμη, τότε η $\varphi(u)$ γράφεται όπως παρακάτω:

$$\varphi(u) = -\frac{1}{\beta}\int_0^u \overline{K}(u-x)H'(x)dx - \frac{H(0)}{\beta}\overline{K}(u) + \frac{1}{\beta}H(u), \quad u \geq 0 \tag{4.31}$$

<u>Απόδειξη</u>

Ο μετασχηματισμός Laplace της $G(x)$ ορίζεται όπως παρακάτω:

$$\hat{g}(s) = \int_0^\infty e^{-su}dG(u).$$

Τότε ο μετασχηματισμός Laplace της $K(x)$ είναι ο:

$$\hat{k}(s) = K(0) + \int_0^\infty e^{-su}dK(u) =$$

$$= \frac{\beta}{1+\beta-\hat{g}(s)} \tag{4.32}$$

Ακόμη θα ισχύει ότι:

$$\hat{\varphi}(s) = \int_0^\infty e^{-su}\varphi(u)du,$$

Και επίσης γνωρίζουμε ότι:

$$\widehat{H}(s) = \int_0^\infty e^{-su}H(u)du.$$

Τότε η (4.28) γίνεται:

$$\hat{\varphi}(s) = \frac{\widehat{H}(s)}{1+\beta-\hat{g}(s)}, \tag{4.33}$$

Από (4.32) έχουμε:

$$\frac{\hat{k}(s)}{\beta} = \frac{1}{1+\beta-\hat{g}(s)}, \tag{4.34}$$

οπότε από (4.33) και (4.34) παίρνουμε:

$$\hat{\varphi}(s) = \frac{1}{\beta}\hat{H}(s)\hat{k}(s).$$

Με αντιστροφή του παραπάνω μετασχηματισμού Laplace καταλήγουμε στην (4.29). Ολοκληρώνοντας την (4.29) κατά παράγοντες βρίσκουμε την (4.30). Αναλυτικά θα είναι:

$$\int_0^u H(u-x)dK(x) =$$

$$= -\int_0^u H(u-x)d\overline{K}(x) =$$

$$= -H(u-x)\overline{K}(x)\Big|_0^u + \int_0^u \overline{K}(x)dH(u-x) =$$

$$= -H(0)\overline{K}(u) + H(u)\overline{K}(0) - \int_0^u \overline{K}(u-x)dH(x). \tag{4.35}$$

Επισημαίνουμε ότι

$$\overline{K}(0) = \frac{1}{1+\beta} \tag{4.36}$$

Τότε από (4.29), (4.35) και (4.36) έχουμε ως εξής:

$$\varphi(u) = \frac{1}{\beta}\left[-H(0)\overline{K}(u) + H(u)\frac{1}{1+\beta} - \int_0^u \overline{K}(u-x)dH(x)\right] + \frac{1}{1+\beta}H(u) =$$

$$= \frac{-H(0)\overline{K}(u)}{\beta} + \frac{H(u)}{\beta(1+\beta)} - \frac{\int_0^u \overline{K}(u-x)dH(x)}{\beta} + \frac{1}{1+\beta}H(u) =$$

$$= -\frac{1}{\beta}\int_0^u \overline{K}(u-x)dH(x) - \frac{H(0)}{\beta}\overline{K}(u) + \frac{H(u)}{\beta(1+\beta)} + \frac{H(u)}{1+\beta} =$$

$$= -\frac{1}{\beta}\int_0^u \overline{K}(u-x)dH(x) - \frac{H(0)}{\beta}\overline{K}(u) + \frac{H(u)}{\beta(1+\beta)} + \frac{\beta H(u)}{\beta(1+\beta)} =$$

$$= -\frac{1}{\beta}\int_0^u \overline{K}(u-x)dH(x) - \frac{H(0)}{\beta}\overline{K}(u) + \frac{H(u)+\beta H(u)}{\beta(1+\beta)} =$$

$$= -\frac{1}{\beta}\int_0^u \overline{K}(u-x)dH(x) - \frac{H(0)}{\beta}\overline{K}(u) + \frac{(1+\beta)H(u)}{\beta(1+\beta)} =$$

$$= -\frac{1}{\beta}\int_0^u \overline{K}(u-x)dH(x) - \frac{H(0)}{\beta}\overline{K}(u) + \frac{1}{\beta}H(u)$$

που είναι η (4.30) και εύκολα μετα αποδεικνύεται κι η (4.31).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ GERBER-SHIU

5.1 Ασυμπτωτικά Αποτελέσματα για την Πιθανότητα Χρεοκοπίας.

Οι ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις (4.16) και (4.17) που ορίσαμε και μελετήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, μας βοηθούν να εξάγουμε ασυμπτωτικά αποτελέσματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας, στην περίπτωση όπου τα κάτω άλματα ακολουθούν κατανομή με βαριά ουρά.

Από εδώ και πέρα θα θεωρούμε ότι

$$\delta = 0.$$

Ακόμη, θα γράφουμε ότι:

$$a(x) \sim b(x),$$

όταν

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a(x)}{b(x)} = 1,$$

όπου, $\alpha(x)$ και $b(x)$ είναι δύο συναρτήσεις για τις οποίες θα ισχύει:

$$a(x), b(x) > 0.$$

Μία κατανομή F στο $[0, \infty)$ θα είναι υποεκθετική και θα συμβολίζεται από

$$F \in \mathcal{S},$$

και για την οποία θα ισχύει ότι:

$$\overline{F^{*2}}(x) \sim 2\bar{F}(x).$$

Επίσης, μία κατανομή F στο $[0, \infty)$ θα λέμε ότι έχει μακριά ουρά και θα συμβολίζεται από

$$F \in \mathcal{L},$$

όταν,

$$\bar{F}(x+y) \sim \bar{F}(x), για\ κάθε\ y > 0.$$

Οι τάξεις $\mathcal{S}$ και $\mathcal{L}$ περιέχουν κατανομές με βαριά ουρά και μεταξύ τους θα ισχύει ότι:

$$\mathcal{S} \subset \mathcal{L}.$$

Πρόκειται να μελετήσουμε τάξεις κατανομών μη αρνητικών τυχαίων μεταβλητών, τέτοιες ώστε:

$$\hat{f}(s) = \infty, για\ κάθε\ s > 0.$$

Τις αποκαλούμε, όπως αναφέραμε παραπάνω κατανομές με βαριά ουρά. Τέτοιες κατανομές για παράδειγμα είναι οι:

- Log Normal,
- Pareto και
- Weibull.

Ορίζουμε:

$$a_F = \lim_{x \to \infty} sup \frac{M(x)}{x},$$

όπου,

$$M(x) = -\log \bar{F}(x)$$

Εάν η F έχει συνεχή πυκνότητα, τότε η $M(x)$ είναι διαφορική και ισχύει ότι:

$$\frac{dM(x)}{dx} = m(x)$$

Ακόμη, θεωρούμε πως για τις κατανομές που μελετάμε είναι:

$$F \in \mathbb{R}_+$$

και

$$F(0-) = 0.$$

<u>Θεώρημα 1</u>

Εάν έχουμε ότι:

$$a_F = 0,$$

τότε η F έχει βαριά ουρά.

<u>Απόδειξη</u>

Υποθέτουμε ότι:

$$a_F = 0.$$

Τότε,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{M(x)}{x} = 0.$$

Οπότε,

$$\forall\, \epsilon > 0 \;\exists\, x' > 0$$

τέτοιο ώστε

$$M(x) \le \epsilon x, για\ όλα\ τα\ x \ge x'.$$

Τότε, για κάποιο

$$c > 0$$

έχουμε

$$\bar{F}(x) \ge ce^{-\epsilon x}, για\ όλα\ τα\ x \ge 0$$

και έτσι

$$\int_0^\infty e^{sx}\bar{F}(x)dx = \infty\,, για\ όλα\ τα\ s \ge \epsilon. \tag{5.1}$$

Έφόσον, το $\epsilon > 0$ είναι αυθαίρετα ορισμένο, η (5.1) ισχύει για όλα τα

$$s > 0,$$

πράγμα το οποίο σημαίνει πως η F είναι κατανομή με βαριά ουρά.

Παρατήρηση

Για μία κατανομή F με βαριά ουρά έχουμε:

$$\lim_{x\to\infty} e^{sx}\bar{F}(x) = \infty\,, \gamma\iota\alpha\ ό\lambda\alpha\ \tau\alpha\ s > 0,$$

Λήμμα 1

Ορίζουμε

$$F_{+e}(x) = \frac{\int_0^x \bar{F}_+(y)dy}{\mu_+} \tag{5.2}$$

και

$$r_+(x) = \frac{f_+(x)}{\bar{F}_+(x)} \tag{5.3}$$

να είναι η κατανομή ισορροπίας και η συνάρτηση αποτυχίας της F_+.

Εάν

$$r_+(x) \to 0, \kappa\alpha\theta ώ\varsigma\ x \to \infty$$

και

$$F_{+e} \in \mathcal{S},$$

τότε

$$G \in \mathcal{S}.$$

Απόδειξη

Η ουρά της κατανομής $G(x)$ είναι η:

$$\bar{G}(x) = 1 - G(x)$$

και δίνεται από τον τύπο:

$$\bar{G}(x) = \frac{\lambda p(1+\beta)}{D} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\tau(\rho_i)}{\pi'(\rho_i)} \int_x^\infty \int_0^z e^{-a(z-y)} T_{\rho_i} f_+(y) dy dz =$$

$$= \frac{\lambda p(1+\beta)}{D} \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\tau(\rho_i)}{\pi'(\rho_i)} \int_x^\infty \int_0^z e^{-a(z-y)} T_{\rho_i} f_+(y) dy dz \right.$$
$$\left. + \frac{\prod_{i=1}^m {\nu_i}^{n_i}}{\prod_{i=1}^n \rho_i} \int_x^\infty \int_0^z e^{-a(z-y)} \bar{F}_+(y) dy dz \right]. \quad (5.4)$$

Έχουμε, λοιπόν , από (5.2) και (5.4):

$$\frac{\int_x^\infty \int_0^z e^{-a(z-y)} \bar{F}_+(y) dy dz}{\bar{F}_{+e}(x)} = \frac{\frac{\mu_+}{a} \int_x^\infty \int_0^z a e^{-a(z-y)} dF_{+e}(y) dz}{\bar{F}_{+e}(x)},$$

το οποίο τείνει στο

$$\frac{\mu_+}{\alpha}, \kappa\alpha\theta\acute{\omega}\varsigma\ \tau o\ x \to \infty.$$

Γνωρίζουμε ότι όταν

$$r_+(x) \to 0, \kappa\alpha\theta\acute{\omega}\varsigma\ x \to \infty,$$

τότε

$$F_+ \in \mathcal{L}.$$

Επισημαίνουμε, ότι η $r_+(x)$ είναι φραγμένη, όταν το x είναι αρκετά μεγάλο, και ότι:

$$\frac{\bar{F}_+(y)}{\bar{F}(x)} \le 1, \gamma\iota\alpha\ y \ge x.$$

Από το θεώρημα της κυριαρχούμενης σύγκλισης καταλήγουμε στα εξής:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{T_{\rho_i} f_+(x)}{\bar{F}_+(x)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\int_x^\infty e^{-\rho_i(y-x)} f_+(y) dy}{\bar{F}_+(x)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \int_0^\infty e^{-\rho_i s} r_+(s+x) \frac{\bar{F}_+(s+x)}{\bar{F}_+(x)} ds =$$

$$= 0.$$

Από τον κανόνα του L'Hospital έχουμε:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_x^{\infty}\int_0^{z} e^{-a(z-y)}T_{\rho_i}f_+(y)dydz}{\bar{F}_{+e}(x)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\mu_+\int_0^{x} e^{-ay}T_{\rho_i}f_+(x-y)dy}{\bar{F}_{+e}(x)} \tag{5.5}$$

Θα δείξουμε ότι το παραπάνω όριο είναι ίσο με 0. Από (5.5) και επειδή

$$F_+\in\mathcal{L},$$

γνωρίζουμε ότι

$$\forall\epsilon, \mu\varepsilon\ 0<\epsilon<1, \exists\ x_0, \mu\varepsilon\ x_0>0,$$

τέτοιο ώστε, όταν

$$x-y>x_{0,}$$

να είναι:

$$\left|\frac{T_{\rho_i}f_+(x-y)}{\bar{F}_+(x)}\right|=$$

$$=\left|\frac{T_{\rho_i}f_+(x-y)}{\bar{F}_+(x-y)}\right|\cdot\left|\frac{\bar{F}_+(x-y)}{\bar{F}_+(x)}\right|<\epsilon(1+\epsilon) \tag{5.6}$$

Επισημαίνουμε ότι

$$\left|T_{\rho_i}f_+(x-y)\right|<1,$$

τότε,

$$\left|\frac{\mu_+\int_0^{x} e^{-ay}T_{\rho_i}f_+(x-y)dy}{\bar{F}_+(x)}\right|\le$$

$$\le\left|\frac{\mu_+\int_0^{x-x_0} e^{-ay}T_{\rho_i}f_+(x-y)dy}{\bar{F}_+(x)}\right|+\left|\frac{\mu_+\int_{x-x_0}^{x} e^{-ay}T_{\rho_i}f_+(x-y)dy}{\bar{F}_+(x)}\right|<$$

$$<\epsilon(1+\epsilon)\left|\mu_+\int_0^{x-x_0} e^{-ay}dy\right|+\left|\frac{\mu_+\left(e^{-a(x-x_0)}-e^{-ax}\right)}{a\bar{F}_+(x)}\right|.$$

Ο δεύτερος όρος της τελευταίας γραμμής της παραπάνω σχέσης τείνει στο 0, καθώς το $x\to\infty$, επειδή η F_+ είναι κατανομή με βαριά ουρά. Έτσι, το όριο στην (5.5) είναι 0.

Τελικά, από (5.4) θα έχουμε:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\bar{G}(x)}{\bar{F}_{+e}(x)} =$$

$$= \frac{\lambda p \mu_+ (1+\beta) \prod_{i=1}^{m} {\nu_i}^{n_i}}{D a \prod_{i=1}^{n} \rho_i},$$

το οποίο δείνχει ότι $G \in \mathcal{S}$. □

Παρατήρηση

Από τις κατανομές με βαριά ουρά, πολλές είναι αυτές που χρησιμοποιούνται ευρέως στην Θεωρία Κινδύνων και ικανοποιούν τις συνθήκες του παραπάνω Λήμματος. Τέτοιες είναι οι:

- Pareto,
- Burr,
- Log Normal κ.α.

Με το θεώρημα που παραθέτουμε στη συνέχεια, θα μελετήσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της πιθανότητας χρεοκοπίας.

Θεώρημα

Υπό τις συνθήκες του Λήμματος 1, έχουμε ότι:

$$\psi_s(u) \sim \psi(u) \sim \frac{\lambda p \mu_+}{c + \lambda q \mu_- - \lambda p \mu_+} \bar{F}_{+e}(u). \tag{5.7}$$

Απόδειξη

Από την (4.16) για $\omega \equiv 1$ παίρνουμε:

$$\psi_s(u) = \frac{1}{1+\beta} \int_0^u \psi_s(u-x) dG(x) + H(u) \tag{5.8}$$

όπου,

$$H(u) = \frac{\lambda p}{D}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\tau(\rho_i)}{\pi'(\rho_i)} \int_0^u e^{-a(u-x)} T_{\rho_i} \bar{F}_+(x)dx + \frac{\mu_+ \prod_{i=1}^{m} {\nu_i}^{n_i}}{\prod_{i=1}^{n} \rho_i} \int_0^u e^{-a(u-x)} \bar{F}_{+e}(x)dx\right].$$

Έπειτα, θα δείξουμε ότι η $H(u)$ είναι ασυμπτωτικά ανάλογη στην $\bar{F}_{+e}(u)$. Για να καταλήξουμε σε αυτό το συμπέρασμα, πρώτα θα πρεπει να ολοκληρώσουμε κατά παράγοντες. Οπότε, θα έχουμε:

$$\int_0^u e^{-a(u-x)} \bar{F}_{+e}(x)dx = \frac{1}{a}\left[1 - \int_0^u \left(1 - e^{-a(u-x)}\right) dF_{+e}(x) - e^{-au}\right]. \tag{5.9}$$

Έπειτα, διαιρώντας με $\bar{F}_{+e}(u)$ και εφαρμόζοντας τα όρια, κάνουμε τι πράξεις στην (5.9) και έχουμε:

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\int_0^u e^{-a(u-x)} \bar{F}_{+e}(x)dx}{\bar{F}_{+e}(u)} =$$

$$= \lim_{u\to\infty} \frac{\frac{1}{a}\left[1 - \int_0^u \left(1 - e^{-a(u-x)}\right) dF_{+e}(x) - e^{-au}\right]}{\bar{F}_{+e}(u)} =$$

$$= \lim_{u\to\infty} \frac{1 - \int_0^u \left(1 - e^{-a(u-x)}\right) dF_{+e}(x) - e^{-au}}{a\bar{F}_{+e}(u)} =$$

$$= \lim_{u\to\infty} \frac{1 - \int_0^u \left(1 - e^{-a(u-x)}\right) dF_{+e}(x)}{a\bar{F}_{+e}(u)} - \lim_{u\to\infty} \frac{e^{-au}}{a\bar{F}_{+e}(u)} =$$

$$= \frac{1}{a}, \tag{5.10}$$

επειδή $F_{+e} \in \mathcal{S}$.

Εφαρμόζοντας ξανά ολοκλήρωση κατά παράγοντες έχουμε:

$$\int_0^u e^{-a(u-x)} T_{\rho_i} \bar{F}_+(x)dx =$$

$$= \int_0^u e^{-a(u-x)} \int_x^\infty e^{-\rho_i(y-x)} \bar{F}_+(y)dydx =$$

$$= \int_0^u \int_0^y e^{-a(u-x)}\, e^{-\rho_i(y-x)} \bar{F}_+(y)dydx + \int_u^\infty \int_0^u e^{-a(u-x)}\, e^{-\rho_i(y-x)} \bar{F}_+(y)dydx =$$

$$= \frac{1}{a+\rho_i}\left[\int_0^u e^{-a(u-y)}\bar{F}_+(y)dy + \int_u^\infty e^{-\rho_i(y-x)}\bar{F}_+(y)dy - e^{-au}\int_0^\infty e^{-\rho_i y}\bar{F}_+(y)dy\right].$$

Από τον κανόνα του L'Hospital και το θεώρημα της κυριαρχούμενης σύγκλισης, στη συνέχεια θα έχουμε:

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\int_u^\infty e^{-\rho_i(y-u)}\bar{F}_+(y)dy}{\bar{F}_{+e}(u)} =$$

$$= \lim_{u\to\infty}\int_0^\infty e^{-\rho_i y}\frac{\bar{F}_+(u+y)}{\bar{F}_{+e}(u)}dy =$$

$$= \lim_{u\to\infty}\mu_+\int_0^\infty e^{-\rho_i y} r_+(u+y)\frac{\bar{F}_{+e}(u+y)}{\bar{F}_{+e}(u)}dy =$$

$$= 0 \tag{5.11}$$

Οπότε, τελικά θα ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\int_0^u e^{-a(u-y)}\bar{F}_+(y)dy}{\bar{F}_{+e}(u)} =$$

$$= \lim_{u\to\infty}\frac{\mu_+\left[\left[1-\int_0^u\left(1-e^{-a(u-y)}\right)dF_{+e}(y)\right]-\bar{F}_{+e}(u)\right]}{\bar{F}_{+e}(u)} =$$

$$= 0. \tag{5.12}$$

Από τις σχέσεις (5.11) και (5.12) βρίσκουμε ότι:

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\int_0^u e^{-a(u-x)}T_{\rho_i}\bar{F}_+(x)dx}{\bar{F}_{+e}(u)} = 0,$$

η οποία σε συνδυασμό και με την (5.10) μας δίνει την παρακάτω εξίσωση:

$$\lim_{u\to\infty}\frac{H(u)}{\bar{F}_{+e}(u)} = \frac{\lambda p\mu_+\prod_{i=1}^m {v_i}^{n_i}}{Da\prod_{i=1}^n \rho_i}. \tag{5.13}$$

Από το Θεώρημα 3.1 των Yin και Zhao: "Nonexponential asymptotics for the solutions of renewal equations, with applications.", από το Λήμμα 1 και από τις σχέσεις (4.27) και (5.13) καταλήγουμε στα παρακάτω:

$$\psi_s(u) \sim \frac{H(u)}{1-\frac{1}{1+\beta}} \sim \frac{\lambda p\mu_+}{c+\lambda q\mu_- - \lambda p\mu_+}\bar{F}_{+e}(u).$$

Τελικά, αποδεικνύουμε ότι:

$$\psi(u) \sim \frac{H(u) + e^{-au}}{1 - \frac{1}{1+\beta}} \sim \frac{\lambda p \mu_+}{c + \lambda q \mu_- - \lambda p \mu_+} \bar{F}_{+e}(u),$$

που είναι κι η σχέση στην οποία θέλαμε να κατλήξουμε. □

<u>Παρατήρηση</u>

Η σχέση (5.7) αποδεικνύει ότι τα κάτω άλματα που ακολουθούν μία κατανομή με βαριά ουρά επικρατούν της κίνησης Brown, όσον αφορά τη χρεοκοπία. Όταν

$$p = 1,$$

$$q = 0,$$

η (5.9) φέρει το αντίστοιχο αποτέλεσμα για το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνων με έναν όρο διάχυσης, χωρίς άνω άλματα.

5.2 Αναλυτικές Λύσεις για τη Συνάρτηση Gerber-Shiu.

Στη συνέχεια, θα παρουσιάσουμε μερικές αναλυτικές λύσεις που αφορούν τη συνάρτηση Gerber-Shiu (συνάσρτηση προεξοφλημένης ποινής). Θα θεωρήσουμε πως η πυκνότητα των κάτω αλμάτων έχει, παρόμοια με την πυκνότητα των κάτω αλμάτων, μετασχηματισμό Laplace της ρητής οικογένειας κατανομών, δηλαδή, θα είναι:

$$\hat{f}_+(s) = \frac{f_{l-1}(s)}{f_1(s)}, \quad l \in \mathbb{N}^+,$$

όπου,

- $f_{l-1}(s)$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $l-1$ ή μικρότερου, ενώ η
- $f_1(s)$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού l, η οποία έχει μόνο αρνητικές ρίζες και ικανοποιεί τη σχέση

$$f_l(0) = f_{l-1}(0).$$

Φυσικά θα ισχύει και ο γνωστός τύπος του μετασχηματισμού Laplace, δηλαδή,

$$\hat{f}_+(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f_+(x) dx.$$

Ξεκινάμε από τους μετασχηματισμούς Laplace των σχέσεων (4.13) και (4.14). Αρχικά, αντικαθιστώντας την (4.22) στην (4.13) βρίσκουμε ότι:

$$\hat{\varphi}_s(s) = \frac{\lambda p \pi(s) \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\tau(\rho_i)}{\pi'(\rho_i)} T_s T_{\rho_i} \omega(0)}{\tau(s)\left[Ds^2 + cs - (\lambda + \delta) + \lambda \hat{f}(s)\right]} =$$

$$= \frac{\lambda p f_1(s) \pi(s) \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\tau(\rho_i)}{\pi'(\rho_i)} T_s T_{\rho_i} \omega(0)}{\tau(s) f_l(s)\left[Ds^2 + cs - (\lambda + \delta) + \lambda q \hat{f}_-(-s)\right] + \lambda p \tau(s) f_{l-1}(s)}. \tag{5.14}$$

Αντίστοιχά, εάν αντικαταστήσουμε την (4.23) στην (4.14), αυτό μας δίνει:

$$\hat{\varphi}_d(s) = \frac{D\pi(s) f_1(s)}{\tau(s) f_l(s)\left[Ds^2 + cs - (\lambda + \delta) + \lambda q \hat{f}_-(-s)\right] + \lambda p \tau(s) f_{l-1}(s)}. \tag{5.15}$$

Ο κοινός παρανομαστής των σχέσεων (5.14) και (5.15) συμβολίζεται με

$$D_{n+l+2}(s)$$

και είναι πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $n + l + 2$, της οποίας ο πρώτος όρος ισούται με D.

Η εξίσωση

$$D_{n+l+2}(s) = 0$$

έχει ακριβώς $n + l + 2$ ρίζες στο σύνολο των μιγαδικών, με όλες τις μιγαδικές ρίζες να αποτελούν διατεταγμένα ζευγάρια.

Από το Λήμμα 1 του Κεφαλαίου 3, γνωρίζουμε ότι οι $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n+1}$ είναι $n + 1$ ρίζες, τότε η $D_{n+l+2}(s)$ ισούται με το παρακάτω:

$$D_{n+l+2}(s) = D\pi(s) \prod_{j=1}^{l+1} (s + R_j). \tag{5.16}$$

Τονίζουμε ότι, όλα τα R_j έχουν πραγματικό θετικό μέρος, γιατί σε περίπτωση που συνέβαινε το αντίθετο, τότε η $-R_j$ θα ήταν κι αυτή μία ρίζα της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg (3.5) κάτι το οποίο θα αποτελούσε αντίκρουση του Λήμματος 1 του Κεφαλαίου 3.

Μέσω της σχέσης (5.16), οι (5.14) και (5.15) παίρνουν την παρακάτω μορφή:

$$\hat{\varphi}_s(s) = \frac{\lambda p f_1(s) \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\tau(\rho_i)}{\pi'(\rho_i)} T_s T_{\rho_i} \omega(0)}{D \prod_{j=1}^{l+1} (s + R_j)}, \tag{5.17}$$

$$\hat{\varphi}_d(s) = \frac{f_1(s)}{\prod_{j=1}^{l+1} (s + R_j)}. \tag{5.18}$$

Στην περίπτωση όπου, όλα τα R_j είναι διακριτά, τότε αναλύοντας τα ρητά κλάσματα σε αθροίσματα απλών κλασμάτων μας δίνει:

$$\frac{\lambda p f_1(s) \frac{\tau(\rho_i)}{\pi'(\rho_i)}}{D \prod_{j=1}^{l+1} (s + R_j)} = \sum\nolimits_{j=1}^{l+1} \frac{a_{ij}}{s + R_j},$$

$$\frac{f_1(s)}{\prod_{j=1}^{l+1} (s + R_j)} = \sum_{j=1}^{l+1} \frac{b_j}{s + R_j},$$

όπου,

$$a_{ij} = \frac{\lambda p f_1(-R_j) \frac{\tau(\rho_i)}{\pi'(\rho_i)}}{D \prod_{k=1, k \neq j}^{l+1} (R_k - R_j)},$$

$$b_j = \frac{f_1(-R_j)}{\prod_{k=1, k \neq j}^{l+1} (R_k - R_j)}. \tag{5.19}$$

Οπότε, τελικά, οι σχέσεις (5.17) και (5.18) παίρνουν την παρακάτω μορφή αντίστοιχα:

$$\hat{\varphi}_s(s) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{l+1} \frac{a_{ij}}{s + R_j} T_s T_{\rho_i} \omega(0)$$

και

$$\hat{\varphi}_d(s) = \sum_{j=1}^{l+1} \frac{b_j}{s + R_j}.$$

Τέλος, αντιστρέφοντας τους μετασχηματισμούς Laplace στις πιο πάνω σχέσεις, βρίσκουμε εύολα τις λύσεις για τις συναρτήσεις $\varphi_s(u)$ και $\varphi_d(u)$.

5.3 Αριθμητικά Αποτελέσματα για Εκθετικά Άνω Άλματα.

Θεώρημα

Εάν ο μετασχηματισμός Laplace $\hat{f}_+(s)$ έχει τη μορφή,

$$\hat{f}_+(s) = \frac{f_{l-1}(s)}{f_1(s)}, \quad l \in \mathbb{N}^+,$$

και οι ρίζες $-R_1, -R_2, \dots, -R_{l+1}$ είναι όλες διακριτές, τότε οι προεξοφλημένες συναρτήσεις ποινής $\varphi_s(u)$ και $\varphi_d(u)$ παίρνουν την παρακάτω μορφή αντίστοιχα:

$$\varphi_s(u) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{l+1} a_{ij} e^{-R_j u} * T_{\rho_i}\, \omega(u) \tag{5.20}$$

και

$$\varphi_d(u) = \sum_{j=1}^{l+1} b_j e^{-R_j u}, \quad u \geq 0. \tag{5.21}$$

□

Παρακάτω, παραθέτουμε αριθμητικά αποτελέσματα για τις προεξοφλημένες συναρτήσεις ποινής, ενώ θεωρούμε πως

$$\hat{f}_+(s) = \frac{a}{s+a},$$

$$\hat{f}_-(s) = \frac{p_1 \nu_1}{s+\nu_1} + \frac{p_2 \nu_2}{s+\nu_2},$$

όπου,

- $\alpha, \nu_1, \nu_2 > 0,$
- $0 < p_1, p_2 < 1,$
- $p_1 + p_2 = 1.$

Σε αυτήν την περίπτωση, τα κάτω άλματα ακολουθούν την εκθετική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f_-(x) = a e^{-ax},$$

ένω τα άνω άλματα ακολουθούν μίξη εκθετικών κατανομών και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας θα είναι:

$$f_{-}(x) = p_1 \nu_1 e^{-\nu_1 x} + p_2 \nu_2 e^{-\nu_2 x}.$$

Συνεπώς, η γενικευμένη εξίσωση Lundberg θα είναι της μορφής:

$$Ds^2 + cs - (\lambda + \delta) + \lambda p \frac{a}{s+a} + \lambda q \left(\frac{p_1 \nu_1}{\nu_1 - s} + \frac{p_2 \nu_2}{\nu_2 - s} \right) = 0 \tag{5.22}$$

και θα έχει πέντε πέντε ρίζες, οι οποίες θα είναι οι

$$\rho_1, \rho_2, \rho_3 > 0$$

και

$$-R_1, -R_2 < 0.$$

Στην (5.22) θέτουμε:

- $c = 2$,
- $D = 1$,
- $\delta = 0.3$,
- $\lambda = 1$,
- $p = 0.6$,
- $q = 0.4$,
- $p_1 = 0.2$,
- $p_2 = 0.8$,
- $\nu_1 = 0.4$,
- $\nu_2 = 0.8$,
- $\alpha = 0.3$.

Διαπιστώνουμε ότι, η συνθήκη του καθαρού κέρδους

$$c + \lambda q \mu_{-} > \lambda p \mu_{+}$$

θα ισχύει για τις τιμές που δώσαμε.

Αντικαθιστώντας στην (5.22) τις τιμές που δώσαμε παραπάνω και λύνοντας την εξίσωση, παίρνουμε:

- $\rho_1 = 0.17095$,
- $\rho_2 = 0.4431$,

- $\rho_3 = 0.95805$,
- $R_1 = 0.15783$,
- $R_2 = 2.51429$.

Μέσω της (5.19) παίρνουμε τα εξής αποτελέσματα:

- $a_{11} = 0.02435$,
- $a_{12} = 0.37920$,
- $a_{21} = 0.00397$,
- $a_{22} = 0.06190$,
- $a_{31} = 0.00788$,
- $a_{32} = 0.12269$,

και

- $b_1 = 0.06033$,
- $b_2 = 0.93967$.

Εάν αντικαταστήσουμε τα αποτελέσματα που βρήκαμε στην (5.21), τότε η $\varphi_d(u)$ παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$\varphi_d(u) = 0.06033e^{-0.15783u} + 0.93967e^{-2.51429u}.$$

Στη συνέχεια θεωρούμε την ουρά της κατανομής του προεξοφλημένου ελλείμματος κατά τη διάρκεια της χρεοκοπίας, όταν η χρεοκοπία προκαλείται από ένα κάτω άλμα. Θα τη συμβολίζουμε με:

$$F_s(x|u) := E\left[e^{-\delta T} I(|U(T)| > x, T < \infty) \middle| U(0) = u\right].$$

Στην περίπτωση αυτή θα είναι:

$$\omega(u) = e^{-a(u+x)},$$

οπότε, τότε η (5.20) θα γίνεται:

$$F_s(x|u) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{l+1} \frac{a_{ij} e^{-R_j u - ax}}{(\rho_i + a)(a - R_j)},$$

από την οποία αν αντικαταστήσουμε τα αποτελέσματα που βρήκαμε παραπάνω, παίρνουμε:

$$F_s(x|u) = 0.445298e^{-0.15783u-0.3x} - 0.445298e^{-2.51429u-0.3x}, \quad u, x \geq 0.$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική:

1. Χατζηκωνσταντινίδης Ε. (2013), *Θεωρία κινδύνων Ι*, Πανεπιστημιακές Σημειώσεις ΠΜΣ «Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνων», Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

2. Χατζηκωνσταντινίδης Ε. (2014), *Θεωρία κινδύνων ΙΙ*, Πανεπιστημιακές Σημειώσεις ΠΜΣ «Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνων», Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

3. Κουτσόπουλος Κ. (1999), *Αναλογιστικά Μαθηματικά,* Εκδόσεις Συμμετρία.

4. Μαχαιράς Ν. (2013), *Στοχαστικές Διαδικασίες Στα Χρηματοοικονομικά Και Στον Αναλογισμό*, Πανεπιστημιακές Σημειώσεις ΠΜΣ «Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνων», Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

Ξενόγλωσση:

1. H.U. Gerber, *An extension of the renewal equation and its application in the collective theory of risk*, Skandinavisk Aktuarietidskrift (1970), pp. 205–210

2. F. Dufresne, H.U. Gerber, *Risk theory for the compound Poisson process that is perturbed by diffusion*, Insurance: Mathematics and Economics, 10 (1) (1991), pp. 51–59

3. H.U. Gerber, B. Landry, *on the discounted penalty at ruin in a jump-diffusion and the perpetual put option*, Insurance: Mathematics and Economics, 22 (3) (1998), pp. 263–276

4. C.C.L. Tsai, G.E. Willmot, *On the moments of the surplus process perturbed by diffusion*, Insurance: Mathematics and Economics, 31 (3) (2002), pp. 327–350

5. D. Perry, W. Stadje, S. Zacks, *First-exit time for the compound Poisson processes for some types of positive and negative jump*, Stochastic Models, 18 (1) (2002), pp. 139–157

6. S.G. Kou, H. Wang, *First passage times of a jump diffusion process*, Advances in Applied Probability, 35 (2) (2003), pp. 504–531

7. X. Xing, W. Zhang, Y. Jiang, *On the time to ruin and the deficit at ruin in a risk model with double-sided jumps*, Statistics & Probability Letters, 78 (16) (2008), pp. 2692–2699

8. M. Jacobsen, *The time to ruin for a class of Markov additive risk process with two-sided jumps*, Advances in Applied Probability, 37 (4) (2005), pp. 963–992

9. H. Yang, Z. Zhang, *On a compound Poisson risk model with two-sided jumps*, Working paper, 2008

10. G. Wang, *A decomposition of the ruin probability for the risk process perturbed by diffusion*, Insurance: Mathematics and Economics, 28 (1) (2001), pp. 49–59

11. S. Li, J. Garrido, *The Gerber–Shiu function in a Sparre Andersen risk process perturbed by diffusion*, Scandinavian Actuarial Journal, 3 (2005), pp. 161–186

12. G. Wang, R. Wu, *The expected discounted penalty function for the perturbed compound Poisson risk process with constant interest*, Insurance: Mathematics and Economics, 42 (1) (2008), pp. 59–64

13. D.C.M. Dickson, C. Hipp, *On the time to ruin for Erlang(2) risk processes*, Insurance: Mathematics and Economics, 29 (3) (2001), pp. 333–344

14. S. Li, J. Garrido, *On ruin for the Erlang(n) risk process*, Insurance: Mathematics and Economics, 34 (3) (2004), pp. 391–408

15. X.S. Lin, G.E. Willmot, *Analysis of a defective renewal equation arising in in ruin theory*, Insurance: Mathematics and Economics, 25 (1) (1999), pp. 63–84

16. T. Rolski, H. Schmidli, V. Schmidt, J. Teugels, *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, John Wiley & Sons Ltd (1999)

17. P. Embrechts, C. Klüppelberg, T. Mikosch, *Modeling Extrement Events for Insurance and Finance*, Springer, New York (1997)

18. P. Embrechts, J.A. Villasenor, *Ruin estimation for large claims*, Insurance: Mathematics and Economics, 7 (4) (1988), pp. 269–274

19. C. Yin, J. Zhao, *Nonexponential asymptotics for the solutions of renewal equations, with applications*, Journal of Applied Probability, 43 (3) (2006), pp. 815–824

20. N. Veraverbeke, *Asymptotic estimates for the probability of ruin in a Poisson model with diffusion*, Insurance: Mathematics and Economics, 13 (1) (1993), pp. 57–62

21. Cary Chi-Liang Tsai, Gordon E. Willmot, *A generalized defective renewal equation for the surplus process perturbed by diffusion*, Insurance: Mathematics and Economics Volume 30, Issue 1, 20 February 2002, Pages 51–66

22. Cary Chi-Liang Tsai, *On the discounted distribution functions of the surplus process perturbed by diffusion*, Insurance: Mathematics and Economics, Volume 28, Issue 3, 20 June 2001, Pages 401–419

23. Dickson, D.C.M., 1992, *On the distribution of the surplus prior to ruin*, Insurance: Mathematics and Economics 11, 191–207.

24. Dickson, D.C.M., 1993, *On the distribution of the claim causing ruin*, Insurance: Mathematics and Economics 12, 143–154.

25. Dickson, D.C.M., Egídio dos Reis, A., 1994, *Ruin problems and dual events*, Insurance: Mathematics and Economics 14, 51–60.

26. Dickson, D.C.M., Waters, H., 1992, *The probability and severity of ruin in finite and in infinite time*. ASTIN Bulletin 22, 177–190.

27. Dufresne, F., Gerber, H.U., 1988, *The surpluses immediately before and at ruin, and the amount of the claim causing rui*n, Insurance: Mathematics and Economics 7, 193–199.

28. Feller, W., 1971, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. 2, 2nd Edition. Wiley, New York.

29. Gerber, H.U., Goovaerts, M., Kaas, R., 1987, *On the probability and severity of ruin*, ASTIN Bulletin 17, 151–163.

30. Gerber, H.U., Shiu, E.S.W., 1997, *The joint distribution of the time of ruin, the surplus immediately before ruin, and the deficit at ruin*, Insurance: Mathematics and Economics 21, 129–137.

31. Gerber, H.U., Shiu, E.S.W., 1998, *On the time value of ruin*, North American Actuarial Journal 2 (1), 48–78.

32. Tsai, C.C.L., 1999, *On the surplus process of ruin theory when perturbed by a diffusion*, Ph.D. Thesis. University of Waterloo, Ontario.

33. Tsai, C.C.L., 2001, *On the expectation of the present value of the time of ruin perturbed by diffusion, submitted for publication*.

34. Wang, G., Wu, R., 2000, *Some distributions for classical risk process that is perturbed by diffusion*, Insurance: Mathematics and Economics 26, 15–24.

35. Willmot, G.E., Lin, X., 1998, *Exact and approximate properties of the distribution of the surplus before and after ruin*, Insurance: Mathematics and Economics 23, 91–110.

36. Willmot, G.E., Lin, X., 2000, *Lundberg Approximations for Compound Distributions with Insurance Applications*, Springer, New York.

37. Zhimin Zhang, Hu Yang, Shuanming Li, *The perturbed compound Poisson risk model with two-sided jumps*, Volume 233, Issue 8, 15 February 2010, Pages 1773–1784

38. Everitt, B., Hand, D., 1981. *Finite Mixture Distributions*. Chapman & Hall, New York.

39. Fagiuoli, E., Pellerey, F., 1994. *Preservation of certain classes of life distributions under Poisson shock models*. Journal of Applied Probability 31, 458–465.

40. Willmot, G.E., 1997. *Bounds for compound distributions based on mean residual lifetime and equilibrium distributions*. Insurance: Mathematics and Economics 21, 25–42.

41. Willmot, G.E., Cai, J., 2000. *On classes of lifetime distributions with unknown age*. Probability in the Engineering and Informational Sciences 14, 473–484.

42. Dufresne, F., Gerber, H.U., 1988. *The surpluses immediately before and at ruin, and the amount of the claim causing ruin*. Insurance: Mathematics and Economics 7, 193–199.