ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

“ ΜΕΤΡΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ: ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ ΚΛΑΣΣΙΚΗΣ ΚΑΙ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΤΩΝ GERBER-SHIU ”

Σωτηρία Πανταζή

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Πειραιάς,
Ιούλιος 2016

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

“ RUIN MEASURES: ANALYSIS OF THE CLASSICAL AND GENERALIZED GERBER-SHIU FUNCTION ”

BY

Sotiria Pantazi

MSc Dissertation

Submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management

Piraeus, Greece

July 2016

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ'αριθμ. .... συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Ε. Χατζηκωνσταντινίδης (Επιβλέπων)
- Μ. Κούτρας
- Γ. Τζαβελάς

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

Ευχαριστίες

Αρχικά , θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου και κυρίως τους γονείς μου για την πολύπλευρη και συνεχή υποστήριξη τους καθόλη τη διάρκεια των εκπαιδευτικών μου χρόνων. Επίσης, οφείλω τις θερμές μου ευχαριστίες στον καθηγητή και επιβλέποντά μου , κ. Ευστάθιο Χατζηκωνσταντινίδη για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγηση του καθόλη την διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας.

Περίληψη

Εάν αναρωτηθούμε ποιος είναι ο ορισμός της έννοιας «χρεοκοπία» θα την ορίζαμε ως την αδυναμία ενός οργανισμού να αποπληρώσει τις υποχρεώσεις του. Εάν απαντηθεί το ερώτημα αυτό από την πλευρά ενός Αναλογιστή θα όριζε ως «χρεοκοπία» την περίπτωση που το αρχικό κεφάλαιο γίνει αρνητικό χωρίς αυτό να σημαίνει ότι η εταιρία θα χρεοκοπήσει στην πραγματικότητα αλλά ότι το ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο δεν σχεδιάστηκε σωστά. Ο ρόλος της Αναλογιστικής επιστήμης είναι να μελετήσει εις βάθος τα μέτρα εκείνα της χρεοκοπίας που μπορούν να καταστήσουν έναν οργανισμό να βρεθεί αντιμέτωπος με τις σοβαρές της επιπτώσεις. Η μέτρηση της χρεοκοπίας λοιπόν είναι ένα πολύ σημαντικό και χρήσιμο εργαλείο στην Αναλογιστική επιστήμη. Ιδιαίτερα ένας οργανισμός, όπως για παράδειγμα μία ασφαλιστική εταιρία, ποσοτικοποιώντας και μοντελοποιώντας τα μέτρα αυτά μπορεί να αντιμετωπίσει μια επερχόμενη χρεοκοπία και να αποφύγει τις σοβαρότερες επιπτώσεις που θα έχουν αντίκτυπο στην οικονομική της υπόσταση και ακεραιότητα.

Το 1998, στο άρθρο "on the time value of ruin" οι Gerber – Shiu κατάφεραν να ενσωματώσουν σε μία μόνο συνάρτηση τα μέτρα εκείνα που ενδιαφέρουν έναν ασφαλιστικό οργανισμό δηλαδή το χρόνο χρεοκοπίας, το έλλειμμα και το πλεόνασμα ακριβώς πριν συμβεί η χρεοκοπία. Η συνάρτηση αυτή ονομάστηκε αναμενόμενη προεξοφλητική συνάρτηση ή γνωστή και ως συνάρτηση των Gerber – Shiu.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα ορίσουμε τα σημαντικότερα μέτρα χρεοκοπίας που προκύπτουν από τη μελέτη τόσο της κλασσικής όσο και της γενικευμένης προεξοφλημένης συνάρτησης των Gerber- Shiu. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε ορισμένες περιπτώσεις διαφορετικών μοντέλων ώστε να μελετήσουμε στοχαστικές διαδικασίες του πλεονάσματος.

Αρχικά στο Κεφάλαιο 1, περιγράφουμε κάποιες στοχαστικές διαδικασίες όπως τη στοχαστική διαδικασία του αριθμού των κινδύνων, των συνολικών αποζημιώσεων και του πλεονάσματος καθώς αποτελούν βασικές ενασχολίες ενός ασφαλιστικού οργανισμού αλλά και για να είναι σε θέση ο αναγνώστης να αντιληφθεί με περισσότερη ευκολία τον στόχο και τη ροή της συγκεκριμένης διπλωματικής. Επιπλέον παρουσιάζουμε την κλασσική συνάρτηση των Gerber - Shiu. Η αξία της συνάρτησης $m_{\delta,12}(u)$ εξετάζεται ως ένα μέσο αναγνώρισης των ποσοτήτων εκείνων που σχετίζονται με τη χρεοκοπία, λαμβάνοντας υπόψη ειδικές περιπτώσεις για την συνάρτηση ποινής και την ένταση ανατοκισμού δ.

Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζονται οι δύο εξισώσεις που προέρχονται από τη μελέτη της πρώτης πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό και τη μελέτη του χρόνου και του μεγέθους της πρώτης απαίτησης. Ως αποτέλεσμα προκύπτει ότι η μελέτη της πρώτης πτώσης του πλεονάσματος ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση ενώ η μελέτη του χρόνου και του μεγέθους της πρώτης απαίτησης μας προσδιορίζει τη σχέση μεταξύ της συνάρτησης $m_{\delta,12}(u)$ με την πυκνότητα των ενδιάμεσων χρόνων και την πυκνότητα του μεγέθους της απαίτησης. Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι αριθμητικές μας εφαρμογές για το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου καθώς και για την περίπτωση που οι ενδιάμεσοι χρόνοι κατανέμονται εκθετικά.

Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζουμε το μοντέλο με υστέρηση στο οποίο βασική παραδοχή είναι ότι ο ενδιάμεσος χρόνος μέχρι να εμφανιστεί η πρώτη απαίτηση κατανέμεται διαφορετικά από ότι οι μεταγενέστεροι ενδιάμεσοι χρόνοι.

Τέλος στο Κεφάλαιο 4 εισάγουμε τη γενικευμένη μορφή της συνάρτησης των Gerber-Shiu όπου η συνάρτηση ποινής περιλαμβάνει δύο επιπλέον τυχαίες μεταβλητές: το ελάχιστο επίπεδο πλεονάσματος πριν συμβεί η χρεοκοπία X_t και το πλεόνασμα αμέσως μετά την εμφάνιση της απαίτησης που προκαλεί τη χρεοκοπία R_{N_t-1}. Αυτή η γενικευμένη συνάρτηση των Gerber-Shiu μας επιτρέπει τη μελέτη των τυχαίων μεταβλητών όπως τον τελευταίο ενδιάμεσο χρόνο και του τελευταίου κλιμακωτού ύψους. Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τη μεθοδολογία όπως κάναμε στο κεφάλαιο 2 και παρατηρούμε ότι παρά το γεγονός ότι η συνάρτηση ποινής περιέχει 4 μεταβλητές αποδεικνύεται ότι η $m_\delta(u)$ ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση η οποία εξαρτάται μόνο από την πυκνότητα των 3 μεταβλητών $U(T-)$, $|U(T)|$, και R_{N_t-1} η οποία δεν περιλαμβάνει X_t . Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της μοναδικότητας των μετασχηματισμών Laplace προσδιορίζεται η από κοινού προεξοφλημένη πυκνότητα των μεταβλητών $(T\ ,U(T-)\ ,|U(T)|\ ,R_{N_t-1})$, καθώς και το κλιμακωτό ύψος . Τέλος παρουσιάζουμε σε εφαρμογές τα αποτελέσματα που προέκυψαν , όπως εφαρμόσαμε και στις αριθμητικές εφαρμογές στο κεφάλαιο 2 , αλλά αυτή τη φορά για τη γενικευμένη μορφή της συνάρτησης των Gerber-Shiu.

Abstract

If we are asked to give the definition of «ruin», we would probably answer that is the organization's incapability of paying its liabilities. However from an Actuary's point of view, we would say that is the case when the initial surplus becomes negative without this fact leading necessarily to the ruin of the organization but the insurance portfolio did not designed in the right way. Specifically, the role of Actuarial Science is that it has to study more deeply these measures of ruin which can bring terrible consequences and disasters to an organization. As we can observe though , the measure of ruin is a very useful and significant tool for the Actuarial Science. In particular, an organization for example an insurance company, when quantifies and models the measures which can be faced in a future ruin, the company is able to avoid them and save its economic stability and occurrence.

In 1998, the team Gerber and Shiu , in their article named "On the time value of ruin", revealed only one function which contains all these measures which are at the same time interesting and important for an insurance company ,namely the time of ruin ,the deficit at ruin and the surplus immediately prior to ruin. The name of this function is the Gerber – Shiu expected discounted penalty function or else known as Gerber – Shiu function in short.

In this thesis, we will present the most important ruin measures and we will analyze them from the point of the classical and the general way of the Gerber – Shiu function. Then we will illustrate a variety of different models in order to analyze the surplus from a stochastically point of view.

In Chapter 1, we describe some stochastic processes such as the stochastic process of the number of the aggregate claims, the number of claims process and the insurer's surplus process in order first of all, the reader be able to understand easier the meanings without missing the flow and the consistency of this thesis and secondly because these stochastic processes are necessary activities for an organization. In addition we introduce the classical Gerber-Shiu function .The function's value $m_{\delta,12}(u)$ is examined as a unified means of identifying ruin-related quantities by considering special cases of the penalty function and the force of discount δ.

In Chapter 2, we present the two equations which are derived by conditioning on the first drop in surplus below its initial value, and by conditioning on the time and amount of the first claim. As a result , we obtain that the the first drop in surplus below its initial satisfies a defective renewal equation whereas the time and amount of the first claim gives important information about the relationship between $m_{\delta,12}(u)$ with the interclaim time density and claim size density. At the end of the Chapter, we illustrate some examples where we consider fistly interclaim times are exponentially distributed and secondly an exponential claim size density and an arbitrary interclaim time.

In Chapter 3, we introduce the delayed renewal model which allows the time until the first claim to be distributed differently than subsequent interclaim times.

Final in Chapter 4 we introduce the generalized Gerber-Shiu function where the penalty function includes two additional random variables: the minimum surplus level before ruin X_t, and the surplus immediately after the claim before the claim causing ruin $R_{N_t -1}$. This generalized function, allows us to study random variables such as the last interclaim time and the last ladder height. Additionally, we apply the same methodology as we did in Chapter 2 and we observe that despite the fact that the penalty function obtains 4 variables , by conditioning on the first drop in surplus, it is demonstrated that $m_{\delta}(u)$ satisfies a defective renewal equation that is only dependent on the density of the 3 variables $U(T-)$, $|U(T)|$ and $R_{N_t -1}$ which does not involve X_t. Using the uniqueness property of Laplace transforms, the form of the joint discounted densities of the 4-variables $(T, U(T-), |U(T)|, R_{N_t -1})$, as well as the last ladder height are determined. Finally we revisite the examples of Chapter 2 but we use this time the generalized.

Περιεχόμενα

Πίνακας Σχημάτων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 : Εισαγωγικές έννοιες στη θεωρία κινδύνου

1.1 Εισαγωγή

Μία από τις βασικότερες ενασχολίες ενός ασφαλιστικού οργανισμού είναι η παρακολούθηση των αποθεματικών του κεφαλαίων. Συγκεκριμένα όταν τα αποθεματικά κεφάλαια είναι επαρκή , η ασφαλιστική μπορεί να ανταποκριθεί στις υποχρεώσεις της όπως για παράδειγμα στην κάλυψη των αποζημιώσεων προς τους ασφαλιζόμενους της ή των λειτουργικών της εξόδων αλλά και στην ανάγκη της να προβεί σε επενδυτικές επεκτάσεις. Με τον όρο «αποθεματικά κεφάλαια» λοιπόν στην ασφαλιστική ορολογία αναφερόμαστε στο πλεόνασμα με το οποίο εξετάζουμε τη διαφορά που υπάρχει ανάμεσα στον ενεργητικό της εταιρίας και στο παθητικό δηλαδή στις υποχρεώσεις της.

Στη συγκεκριμένη διπλωματική μελετάμε ένα από τα βασικότερα μέτρα της χρεοκοπίας, τη πιθανότητα χρεοκοπίας. Στη κλασσική θεωρία κινδύνου, η πιθανότητα χρεοκοπίας αποτελεί από τα σημαντικότερα προβλήματα καθώς η εύρεσή της είναι δύσκολη , συνεπώς οι ασφαλιστικές εταιρίες δεν μπορούν να γνωρίζουν πότε και με τι ποσοστό πρόκειται να βρεθούν στη θέση ώστε να μην μπορούν να ανταπεξέλθουν στην κάλυψη των εξόδων τους. Το 1903 ο Σουηδός Filip Lundberg έθεσε τα θεμέλια της ανάπτυξης της μαθηματικής θεωρίας των κινδύνων και αργότερα το 1930 ο Harald Cramér βασιζόμενος στη διδακτορική διατριβή του Lundberg, ενσωμάτωσε τη θεωρία των στοχαστικών διαδικασιών ή αλλιώς στοχαστικών ανελίξεων στη θεωρία κινδύνου. Μάλιστα ο συνδυασμός των δύο εργασιών είχε ως αποτέλεσμα την εισαγωγή ενός μοντέλου το οποίο περιγράφει τη δυναμική εξέλιξη του πλεονάσματος στο χρόνο και είναι γνωστό ως το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου ή μοντέλο των Cramér - Lundberg. Μια σημαντική παραδοχή που προέκυψε από το συγκεκριμένο μοντέλο είναι ότι το αριθμός των κινδύνων στους οποίους είναι εκτεθειμένο το ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο προσδιορίζεται από τη στοχαστική διαδικασία Poisson. Ιδιαίτερα, το χαρακτηριστικό του κλασσικού μοντέλου της θεωρίας κινδύνου είναι ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των κινδύνων του ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την εκθετική κατανομή.

Το 1957 ακολούθησε η γενίκευση του κλασσικού μοντέλου της θεωρίας κινδύνου για το πλεόνασμα ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου από τον Νορβηγό Sparre Andersen ο οποίος παρουσίασε στο 15^{o} Αναλογιστικό συνέδριο στη Νέα Υόρκη την εργασία με τίτλο «On the collective theory of risk in case of contagion between the claims». Συγκεκριμένα ο Sparre Andersen υπέθεσε ότι ο αριθμός των κινδύνων ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου περιγράφεται από μία ανανεωτική στοχαστική διαδικασία και όχι από μία στοχαστική διαδικασία Poisson όπως είδαμε για το κλασσικό μοντέλο. Ιδιαίτερα , βασικό χαρακτηριστικό του εν λόγω μοντέλου είναι ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των κινδύνων του ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές αλλά πλέον δεν ακολουθούν κατ’ ανάγκη την εκθετική κατανομή αλλά όπως για παράδειγμα την κατανομή Erlang.

Όπως διαπιστώνουμε παραπάνω λοιπόν, η μορφή των ανανεωτικών μοντέλων στη θεωρία κινδύνου εξαρτώνται άμεσα από την επιλογή της κατανομής των ενδιάμεσων χρόνων εμφάνισης των κινδύνων. Τα διάφορα μοντέλα που προκύπτουν λοιπόν, εισήχθησαν για την μοντελοποίηση της στοχαστικής διαδικασίας πλεονάσματος το οποίο εξαρτάται άμεσα όπως προκύπτει από τη στοχαστική διαδικασία που επιλέγεται για την περιγραφή του αριθμού των κινδύνων που αντιμετωπίζει ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο.

Στο κεφάλαια που ακολουθούν περιγράφονται αναλυτικότερα οι έννοιες που προαναφέραμε έτσι ώστε ο αναγνώστης να είναι σε θέση να ενταχθεί πιο εύκολα στη ροή της εργασίας. Ειδικότερα περιγράφουμε στοχαστικές διαδικασίες όπως τη στοχαστική διαδικασία του αριθμού των κινδύνων, των συνολικών αποζημιώσεων και του πλεονάσματος καθώς αποτελούν βασικές ενασχολίες ενός ασφαλιστικού οργανισμού. Συγκεκριμένα, μία ασφαλιστική εταιρία αρχικά προσδιορίζει τον αριθμό των κινδύνων στους οποίους είναι εκτεθειμένη, στη συνέχεια το ύψος των συνολικών αποζημιώσεων ώστε να μπορεί να καταβάλλει την αποζημίωση στον ασφαλιζόμενο και τέλος το πλεόνασμα της ώστε να ελέγχει εάν τα έσοδα της είναι περισσότερα από τα έξοδα για να μπορεί να αποφύγει το ενδεχόμενο μιας επερχόμενης χρεοκοπίας.

1.2 Η στοχαστική διαδικασία αριθμού κινδύνων

Αρχικά ορίζουμε τι είναι η στοχαστική διαδικασία και στη συνέχεια αναλύουμε τις παραπάνω έννοιες λεπτομερώς.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1

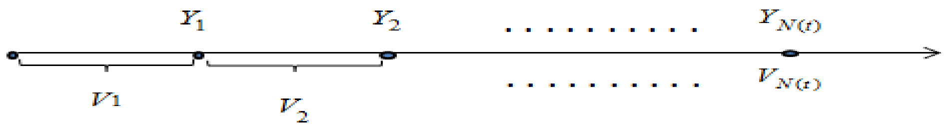
Με τον όρο **στοχαστική διαδικασία (ανέλιξη)** εννοούμε μία οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\{X_t : t \in T\}$ όπου T είναι ένα σύνολο. Χρησιμοποιούμε την έννοια αυτή όταν μελετάμε τυχαίες ποσότητες οι οποίες μεταβάλλονται στο χρόνο.

Όπως προαναφέραμε μία ασφαλιστική εταιρία για να είναι σε θέση να μοντελοποιήσει το πλεόνασμα θα πρέπει πρώτα να προσδιορίσει τον αριθμό των κινδύνων στους οποίους είναι εκτεθειμένη.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2

Έστω $\{N(t), t \geq 0\}$ μια στοχαστική διαδικασία η οποία εκφράζει τον αριθμό των κινδύνων στο χρονικό διάστημα $[0, t]$ και ονομάζεται απαριθμήτρια διαδικασία του αριθμού των κινδύνων ,για την οποία ισχύουν τα εξής:

- $N(t) > 0$, με $N(0) = 0$,
- $N(t)$ είναι διακριτή,
- αν $s \leq t$ τότε $N(s) \leq N(t)$.



Σχήμα 1.1 : Οι κίνδυνοι και οι χρόνοι εμφάνισης τους.

1.3 Η στοχαστική διαδικασία των συνολικών αποζημιώσεων

Έπειτα είναι απαραίτητο να μπορούμε να μοντελοποιήσουμε το ύψος των συνολικών αποζημιώσεων έτσι ώστε η ασφαλιστική εταιρία να καταβάλλει την αποζημίωση στον ασφαλιζόμενο που δικαιούται όταν επέλθει μια ζημία. Συνεπώς οι συνολικές αποζημιώσεις εξαρτώνται :

- από το ***πλήθος*** των ζημιογόνων ενδεχομένων που μπορούν να συμβούν σε κάποιο συγκεκριμένο χρονικό διάστημα ,
- το ***μέγεθος*** των ζημιών που προκαλούνται
- και το ***χρονικό διάστημα αναφοράς***.

Έστω $\{V_n, n \geq 1\}$: ακολουθία τυχαίων μεταβλητών που εκφράζει τους ενδιάμεσους χρόνους άφιξης των ζημιογόνων ενδεχομένων και T_n ο χρόνος εμφάνισης του n-οστού ζημιογόνου ενδεχομένου.

Επομένως ισχύει : $$T_n = \sum_{i=1}^{n} V_i$$

Επίσης θεωρούμε ότι $N(t) = \sup\{n : T_n < t\}$ είναι η στοχαστική διαδικασία του πλήθους των ζημιογόνων ενδεχομένων στο $[0,t]$ χρονικό διάστημα όπου $N(t)$ το πλήθος των απαιτήσεων.

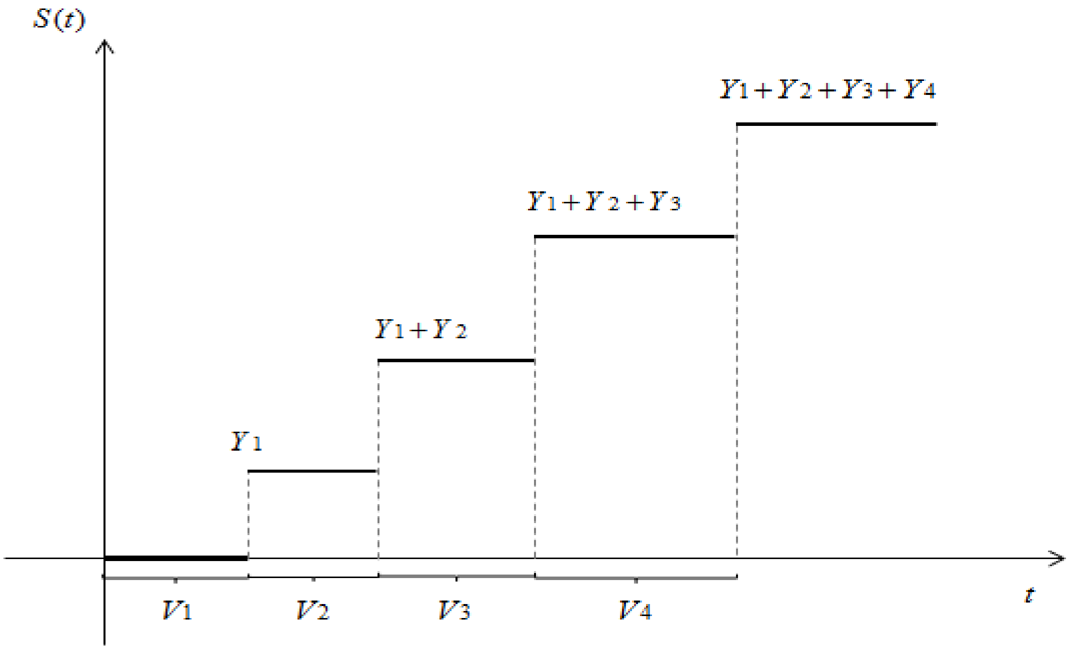
ΟΡΙΣΜΟΣ 1.3

Το μέγεθος των συνολικών αποζημιώσεων που καταβάλλονται έως το χρόνο t ορίζεται η στοχαστική διαδικασία

$$S(t) = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{N(t)} \quad \text{ή} \quad S(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i & , N(t) \geq 1 \\ 0 & , N(t) = 0 \end{cases} \tag{1.3.1}$$

όπου $\{Y_n, n \geq 1\}$ μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με Y_n τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το μέγεθος της n-οστής ζημιάς που προκαλείται από την επέλευση του n-οστού ζημιογόνου ενδεχομένου.

Επίσης οι $\{V_n, n \geq 1\}$ και $\{Y_n, n \geq 1\}$είναι ανεξάρτητες ακολουθίες οι οποίες αποτελούνται από ισόνομες, ανεξάρτητες και θετικά ορισμένες τυχαίες μεταβλητές.



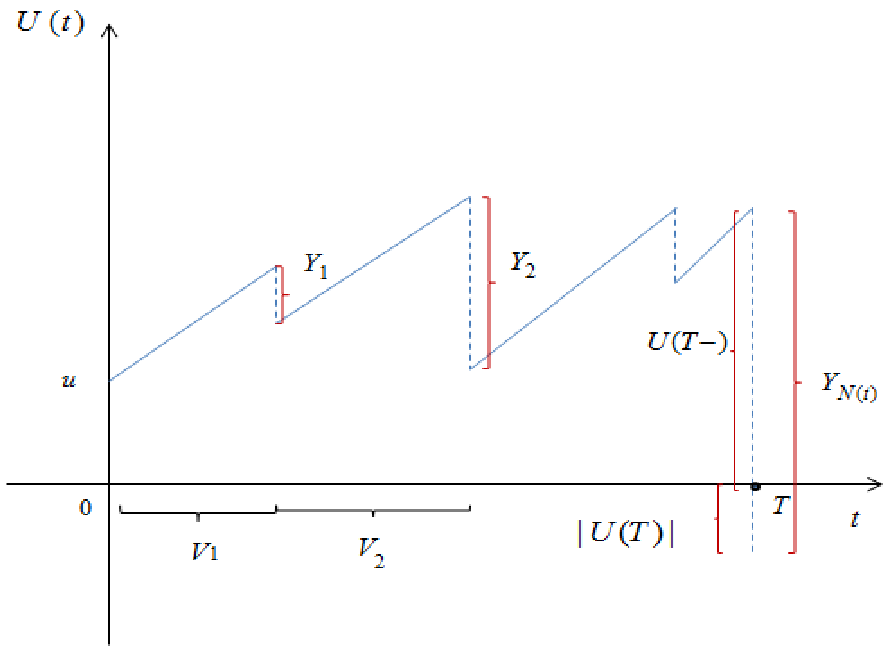
Σχήμα 1.2 : Η στοχαστική διαδικασία των αποζημιώσεων

Από την παραπάνω γραφική παράσταση διαπιστώνουμε πως οι συνολικές αποζημιώσεις $S(t)$ είναι μηδενικές μέχρι την εμφάνιση του πρώτου ζημιογόνου ενδεχομένου. Στη συνέχεια εμφανίζονται «άλματα» ύψους ίσου με το μέγεθος της ατομικής ζημιάς ενώ παραμένει σταθερή όταν δεν εμφανίζονται κίνδυνοι. Σε οποιαδήποτε μεταβολή του ύψους των αποζημιώσεων επέρχεται και μεταβολή στη τιμή του πλεονάσματος.

όπου Y_i : το μέγεθος i-οστής απαίτησης

V_i : ο ενδιάμεσος χρόνος εμφάνισης του i-οστού ζημιογόνου ενδεχομένου.

1.4 Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος



Σχήμα 1.3 : Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος U(t)

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.4

Ως διαδικασία πλεονάσματος $\{U(t)\ ,t \geq 0\}$ορίζεται η στοχαστική διαδικασία

$$U(t) = u + ct - S(t) \tag{1.4.1}$$

όπου:

- u : το αρχικό απόθεμα δηλαδή $U(0) = u$, για $t = 0, u \geq 0$,
- $c > 0$: ο ρυθμός είσπραξης των ασφαλίστρων ανά μονάδα χρόνου και ονομάζεται ένταση ασφαλίστρου,
- $T = \inf\{t \geq 0 : U(t) < 0\}$: ο χρόνος χρεοκοπίας,
- $U(T-)$: το πλεόνασμα λίγο πριν τη χρεοκοπία,
- $|U(T)|$: το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας,
- Y_i : το μέγεθος της i-οστής απαίτησης
- V_i : ο ενδιάμεσος χρόνος εμφάνισης του i-οστού ζημιογόνου ενδεχομένου.

Από την παραπάνω γραφική παράσταση παρατηρούμε ότι η δειγματοσυνάρτηση $U(t)$ εμφανίζει «άλματα» προς τα κάτω κατά τις χρονικές στιγμές επέλευσης των ζημιογόνων γεγονότων V_i . Τα «άλματα» αυτά είναι του ίδιου μεγέθους με τα αντίστοιχα προς τα πάνω «άλματα» της διαδικασίας των συνολικών αποζημιώσεων $S(t)$ με τη μόνη διαφορά ότι μεταξύ δύο διαδοχικών χρονικών στιγμών η δειγματοσυνάρτηση $S(t)$ έχει σταθερή τιμή ενώ η δειγματοσυνάρτηση $U(t)$ είναι ευθύγραμμο τμήμα με θετική κλίση c. Συνεπώς το ύψος του πλεονάσματος είναι ίσο με αυτό των αποζημιώσεων. Ορίζουμε ως T το χρόνο χρεοκοπίας , τη στιγμή δηλαδή που το πλεόνασμα γίνεται για πρώτη φορά αρνητικό και τη N_T -οστή απαίτηση η οποία προκαλεί χρεοκοπία.

Σημειώνουμε πως όταν η απαίτηση Y_{N_T} προκαλέσει χρεοκοπία , το μέγεθος της απαίτησης δίνεται από $U(T-)+|U(T)|$. Επιπλέον θεωρούμε πως το περιθώριο ασφαλείας θ ικανοποιεί τη συνθήκη καθαρού κέρδους

$$cE(V) > E(Y)\,, \tag{1.4.2}$$

η οποία εξασφαλίζει ότι τα έσοδα της εταιρίας υπερβαίνουν τα αναμενόμενα έξοδα, έτσι ώστε $\psi(u) < 1$. Επομένως , $c = \dfrac{(1+\theta)\,E(Y)}{E(V)}$, $\theta > 0$.

1.5 Χρόνος και πιθανότητα χρεοκοπίας

Στην παράγραφο αυτή θα ορίσουμε τα βασικότερα μέτρα της χρεοκοπίας τα οποία αποτελούν ο χρόνος χρεοκοπίας και η πιθανότητας χρεοκοπίας.

Χρόνος χρεοκοπίας

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.5

Για $t \geq 0$ ορίζουμε

$$T = \inf\{t \geq 0 : U(t) < 0\} \text{ με } \inf\emptyset = \infty$$

όπου T ο χρόνος κατά τον οποίο γίνεται για πρώτη φορά η διαδικασία πλεονάσματος αρνητική.

Παρατήρηση : Ο χρόνος χρεοκοπίας T δείχνει ότι το χαρτοφυλάκιο της ασφαλιστικής εταιρίας δεν σχεδιάστηκε σωστά και όχι ότι η εταιρία χρεοκόπησε οικονομικά!

Πιθανότητα χρεοκοπίας

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.6

Ως πιθανότητα χρεοκοπίας ορίζουμε μία ποσότητα που συνδέεται άμεσα με τη στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος για την οποία για αρχικό αποθεματικό $u \geq 0$ ισχύει :

$$\psi(u) = P(T < \infty)\,|\,U(0) = u) = P(U(t) < 0\,|\,U(0) = u) \qquad t \geq 0\ . \tag{1.5.1}$$

όπου

- ► u : αρχικό απόθεμα (κεφάλαιο)
- ► $U(t)$: διαδικασία πλεονάσματος

Για την πιθανότητα χρεοκοπίας θα πρέπει :

- ✓ Ο χρόνος χρεοκοπίας να είναι πεπερασμένος $T < \infty$ δηλαδή κάποια στιγμή να επέρχεται η χρεοκοπία.
- ✓ Η πιθανότητα πτώσης του πλεονάσματος να είναι κάτω από το αρχικό κεφάλαιο.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι τα συγκεκριμένα μέτρα αποτελούν μέτρα χρεοκοπίας καθώς η ασφαλιστική μπορεί να προβεί σε αλλαγές στην πολιτική της όπως για παράδειγμα εάν θα προβεί σε αύξηση του περιθωρίου ασφαλείας , αύξηση του αρχικού αποθέματος ή αλλαγή στην αντασφαλιστική της πολιτική κτλ.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.7

Ως πιθανότητα μη χρεοκοπίας ορίζουμε μία ποσότητα που συνδέεται άμεσα με τη στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος για την οποία για αρχικό αποθεματικό $u \geq 0$ ισχύει :

$$\delta(u) = P(T < \infty) \,|\, U(0) = u) = P(U(t) \geq 0 \,|\, U(0) = u) \qquad t \geq 0 . \qquad (1.5.2)$$

1.6 Η κλασσική συνάρτηση των Gerber – Shiu και μέτρα χρεοκοπίας

Το 1998 οι Αναλογιστές επιστήμονες Hans U. Gerber και Elias S.W Shiu κατάφεραν να μοντελοποιήσουν σε μία μόνο συνάρτηση τις τρείς τυχαίες μεταβλητές,

1. T : ***το χρόνο χρεοκοπίας*** (δηλαδή τη χρονική στιγμή ακριβώς κατά την οποία το πλεόνασμα παίρνει για πρώτη φορά αρνητική τιμή),
2. $|U(T)|$: ***το έλλειμμα*** ακριβώς τη χρονική στιγμή που συμβαίνει η χρεοκοπία,
3. $U(T-)$: και ***το πλεόνασμα*** πριν συμβεί η χρεοκοπία.

Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής (expected discounted penalty function) , μέσω της οποίας μελετώνται ταυτόχρονα τα μέτρα κινδύνου που προσεγγίζονταν μεμονωμένα μέχρι τότε.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.8

Για $u \geq 0,\ \delta \geq 0$ η συνάρτηση ορίζεται ως

$$m_{\delta}(u) = E\left\{e^{-\delta t}\, w\big(U(T-), |U(T)|\big) I(T < \infty \,|\, U(0) = u \right\}, u \geq 0 \qquad (1.6.1)$$

όπου

- δ : η ένταση ανατοκισμού ή η παράμετρος μετασχηματισμού Laplace.
- $0 \le w(x, y) < \infty$: η συνάρτηση ποινής ορισμένη στο $\Re^2$ με $x, y > 0$.
- $I(\cdot)$: η δείκτρια συνάρτηση που μας πληροφορεί για το γεγονός δηλαδή για τον αν έχει επέλθει χρεοκοπία.
- $e^{-\delta T}$: ο προεξοφλητικός παράγοντας ή ο μετασχηματισμός Laplace με $\delta > 0$ να παίρνει αυστηρά θετικές τιμές.

Παρατηρούμε λοιπόν από τον παραπάνω ορισμό ότι η συνάρτηση μπορεί να λάβει διαφορετικές μορφές δίνοντας κάθε φορά διαφορετικές τιμές στη συνάρτηση ποινής $w(x, y)$ και στην ένταση ανατοκισμού δ. Συγκεκριμένα :

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ

$w(x,y)$	δ	$m_{\delta,12}(u)$	
1	0	$E\{I(T<\infty) \mid U(0)=u\} = \Psi(u)$	**Πιθανότητα χρεοκοπίας**

ΡΟΠΕΣ j, k ΤΑΞΗΣ

$x^j y^k$	0	$E\left\{ U(T-)^j (\lvert U(T)\rvert)^k I(T<\infty) \mid U(0)=u \right\}$	**j-οστή ροπή πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία και κ-οστή ροπή ελλείμματος όταν συμβαίνει η χρεοκοπία**
x^j	0	$E\left\{ U(T-)^j I(T<\infty) \mid U(0)=u \right\}$	**j-οστή ροπή πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία**
y^k	0	$E\left\{ (\lvert U(T)\rvert)^k I(T<\infty) \mid U(0)=u \right\}$	**κ-οστή ροπή ελλείμματος όταν συμβαίνει η χρεοκοπία**
y^k	>0	$E\left\{ e^{-\delta T} (\lvert U(T)\rvert)^k I(T<\infty) \mid U(0)=u \right\}$	**Προεξοφλημένη κ-οστή ροπή ελλείμματος όταν συμβαίνει η χρεοκοπία**
$(x+y)^j$	0	$E\left\{ (U(T-)+\lvert U(T)\rvert)^j I(T<\infty) \mid U(0)=u \right\}$	**j-οστή ροπή απαίτησης που προκαλεί τη χρεοκοπία**

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ			
$I(X \le x, Y \le y)$	0	$E\{\, I(U(T-) \le x, \lvert U(T)\rvert \le y)\, I(T<\infty) \mid U(0)=u \,\}$	**Συνάρτηση πυκνότητας πλεονάσματος και ελλείμματος**
$I(Y \le y)$	0	$E\{\, I(\lvert U(T)\rvert \le y)\, I(T<\infty) \mid U(0)=u \,\}$	**Συνάρτηση πυκνότητας ελλείμματος τη στιγμή χρεοκοπίας**
$I(X \le x)$	0	$E\{\, I(U(T-) \le x)\, I(T<\infty) \mid U(0)=u \,\}$	**Συνάρτηση πυκνότητας πλεονάσματος ακριβώς πριν τη στιγμή χρεοκοπίας**
$I(X+Y \le z)$	0	$E\{\, I(U(T-)+\lvert U(T)\rvert \le z)\, I(T<\infty) \mid U(0)=u \,\}$	**Συνάρτηση πυκνότητας της απαίτησης που προκαλεί τη χρεοκοπία**

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE			
$e^{-s_1 x - s_2 y}$	>0	$E\left\{ e^{-\delta T - s_1 U(T) - s_2 \lvert U(T)\rvert}\, I(T<\infty) \mid U(0)=u \right\}$	**LT της σ.π του χρόνου χρεοκοπίας, του πλεονάσματος και του ελλείμματος**
$e^{-s(x+y)}$	0	$E\left\{ e^{-s\,(U(T-)+\lvert U(T)\rvert)}\, I(T<\infty) \mid U(0)=u \right\}$	**LT της σ.π της απαίτησης που προκαλεί τη χρεοκοπία**
1	>0	$E\left\{ e^{-s(U(T-)+\lvert U(T)\rvert)}\, I(T<\infty) \mid U(0)=u \right\}$	**LT της σ.π του χρόνου χρεοκοπίας**

Είναι προφανές ότι η συνάρτηση των Gerber – Shiu είναι ένα χρήσιμο εργαλείο στην κατανόηση της χρεοκοπίας και «δρά» ως ένα μέσο από το οποίο προκύπτουν διάφορα μέτρα χρεοκοπίας.

1.7 Τελεστής Dickson – Hipp

Ο τελεστής ορίζεται γενικά ως μία συνάρτηση που δρα πάνω σε κάποια άλλη συνάρτηση, μετασχηματίζοντάς την κατά ένα καθορισμένο τρόπο. Μάλιστα , το 2001 οι Dickson και Hipp εισήχθησαν τους τελεστές στη θεωρία κινδύνου οι οποίοι αποτελούν ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο. [Dickson and Hipp (2001)]

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.9

Για μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση f και $r \geq 0, x \geq 0$ ορίζουμε ως τελεστή T_r να δίνεται από τη σχέση:

$$T_r f(x) = e^{rx} \int_x^{\infty} e^{-ry} f(y)dy \tag{1.7.1}$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-ry} f(x+y)dy,$$

όπου το r ικανοποιεί $|\hat{f}(r)| < \infty$.

Είναι προφανές ότι ο μετασχηματισμός Dickson – Hipp είναι ένας γραμμικός τελεστής για σταθερές a_i και για διαφορίσιμες συναρτήσεις $f_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$

$$T_r\left(\sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x)\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i T_r\left(f_i(x)\right). \tag{1.7.2}$$

Επισημαίνουμε ότι $\hat{f}(s) = T_s f(0)$, επομένως ο μετασχηματισμός Dickson – Hipp είναι μια γενίκευση του μετασχηματισμού Laplace. Επιπλέον μπορούμε να γράψουμε την ουρά $\overline{F}(x) = \int_x^{\infty} f(t)dt$ ως $T_0 f(x)$.

Υποθέτουμε ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν μια κατανομή Cox [Willmot and Woo (2010)] και για την διευκόλυνσή μας , θεωρούμε ότι ο μετασχηματισμός Laplace της $T_r f(x)$ δίνεται από

$$\int_0^{\infty} e^{-sx}(T_r f(x))dx = \int_0^{\infty} e^{-(s-r)x} \int_x^{\infty} e^{-ry} f(y)dydx$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-ry} \left(\int_0^{y} e^{-(s-r)x} dx\right) f(y)dy$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-ry} \left(\frac{1 - e^{-(s-r)y}}{s-r}\right) f(y)dy$$

$$= \frac{\int_0^{\infty} e^{-ry} f(y)\,dy - \int_0^{\infty} e^{-sy} f(y)\,dy}{s-r}$$

$$= \frac{\hat{f}(r) - \hat{f}(s)}{s-r}, \tag{1.7.3}$$

για $s \neq r$.

Επισημαίνουμε ότι ο μετασχηματισμός Laplace της $\overline{F}(x)$ δίνεται από τη σχέση (1.7.3) αν θέσουμε για $r=0$ και έτσι προκύπτει

$$\int_0^\infty e^{-sx}\,\overline{F}(x)dx = \int_0^\infty e^{-sx}\left(T_0 f(x)\right)dx$$

$$= \frac{1-\hat{f}(s)}{s}\ . \tag{1.7.4}$$

Θεωρούμε ότι Y είναι μια τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(y)=F'(y)$ και για $\overline{F}_x(y)=\overline{F}(x+y)/\overline{F}(x)$ να είναι η ουρά της κατανομής απώλειας. Θεωρούμε ότι η παρακάτω συνάρτηση είναι η γενικευμένη κατανομή ισορροπίας της $F(y)$ για $r\in\Re$

$$\overline{F}_{ge}(y,r)=\frac{\int_0^\infty e^{-rx}\,\overline{F}(x)\,F_x(y)dx}{\int_0^\infty e^{-rx}\,\overline{F}(x)dx}\ ,$$

όπου $F_x(y)$ είναι μία σύνθετη κατανομή.

Επισημαίνουμε πως για $r=0$, τότε

$$\overline{F}_{ge}(y,0)=\frac{\int_0^\infty \overline{F}(x+y)dx}{\int_0^\infty \overline{F}(x)dx}$$

$$=\frac{\int_y^\infty \overline{F}(x)dx}{E[Y]}\ ,$$

η οποία είναι η συνάρτηση ισορροπίας της $F(y)$. Επομένως η γενικευμένη συνάρτηση ισορροπίας πυκνότητας της $f(y)$ ορίζεται ως

$$f_{ge}(y,r)=F'_{ge}(y,r)$$

$$=\frac{e^{ry}\int_y^\infty e^{-rx}\,f(x)dx}{\int_0^\infty e^{-rx}\,\overline{F}(x)dx}\ . \tag{1.7.5}$$

Επειδή ο αριθμητής είναι ο τελεστής Dickson – Hipp της $f(x)$ και ο παρονομαστής είναι ο μετασχηματισμός Laplace της $\overline{F}(x)$, τότε χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.7.4)

$$f_{ge}(y,r) = \frac{T_r f(y)}{\frac{1-\hat{f}(r)}{r}}$$

και χρησιμοποιώντας τη (1.7.3) , ο μετασχηματισμός Laplace δίνεται από

$$\hat{f}_{ge}(s,r) = \frac{r}{s-r}\frac{\hat{f}(r)-\hat{f}(s)}{1-\hat{f}(r)}\ , \qquad (1.7.6)$$

ο οποίος είναι χρήσιμο εργαλείο για την μετέπειτα ανάλυσή μας.

1.8 Η θεμελιώδης εξίσωση του Lundberg

Θεωρούμε ότι η θεμελιώδης εξίσωση του Lundberg δίνεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$1 - \mathrm{E}\left[e^{-sY-(\delta-cs)V}\right] = 0\,, \qquad (1.8.1)$$

όπου για τις τυχαίες μεταβλητές Y και V θεωρούμε ότι είναι τυχαία μεγέθη απαιτήσεων και τυχαίοι ενδιάμεσοι χρόνοι αντίστοιχα. Συνεπώς εφόσον οι Y και V είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές , τότε η σχέση (1.8.1) μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα ως

$$1-\hat{p}(s)\,\hat{k}(\delta-cs) = 0. \qquad (1.8.2)$$

Παρατηρούμε επομένως πως η θεμελιώδης εξίσωση του Lundberg και συγκεκριμένα οι θετικές της ρίζες έχουν πολύ σημαντικό ρόλο στην ανάλυση της συνάρτησης των Gerber – Shiu γεγονός που θα αποδειχτεί στα επόμενα κεφάλαια. Είναι προφανές πως για $\delta = 0$ τότε $s = 0$ προκύπτει μια μη αρνητική ρίζα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.1

Θεωρούμε ότι η συνάρτηση των ενδιάμεσων χρόνων ακολουθεί την εκθετική κατανομή $k(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ και για $\delta > 0$ υπάρχει μία μοναδική και θετική ρίζα $s = \rho_\delta$ στη θεμελιώδη εξίσωση του Lundberg η οποία δίνεται από

$$1-\hat{p}(s)\frac{\lambda}{\lambda+\delta-cs} = 0\ , \qquad (1.8.3)$$

ενώ για $\delta = 0$, τότε $s = \rho_0 = 0$ είναι η μία και μοναδική μη αρνητική ρίζα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Η θεμελιώδης εξίσωση του Lundberg δίνεται από τη σχέση (1.8.3) και μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\lambda + \delta - cs = \lambda\,\hat{\rho}(s). \tag{1.8.4}$$

Θέτουμε, $\Upsilon_1(s) = \lambda + \delta - cs$. Επομένως για $s = 0$ προκύπτει ότι $\Upsilon_1(0) = \lambda + \delta$.

Παίρνοντας την πρώτη παράγωγο προκύπτει ότι $\Upsilon_1'(0) = -c < 0$.

Στη συνέχεια θέτουμε ,

$$\Upsilon_2(s) = \lambda\,\hat{\rho}(s) = \lambda\,\mathrm{E}[e^{-s\Upsilon}]\text{ . Για } s = 0 \text{ προκύπτει ότι } \Upsilon_2(0) = \lambda\,\hat{\rho}(0) = \lambda .$$

Η πρώτη παράγωγος είναι $\Upsilon_2'(s) = -\lambda\,\mathrm{E}[\,\Upsilon e^{-s\Upsilon}\,] < 0$

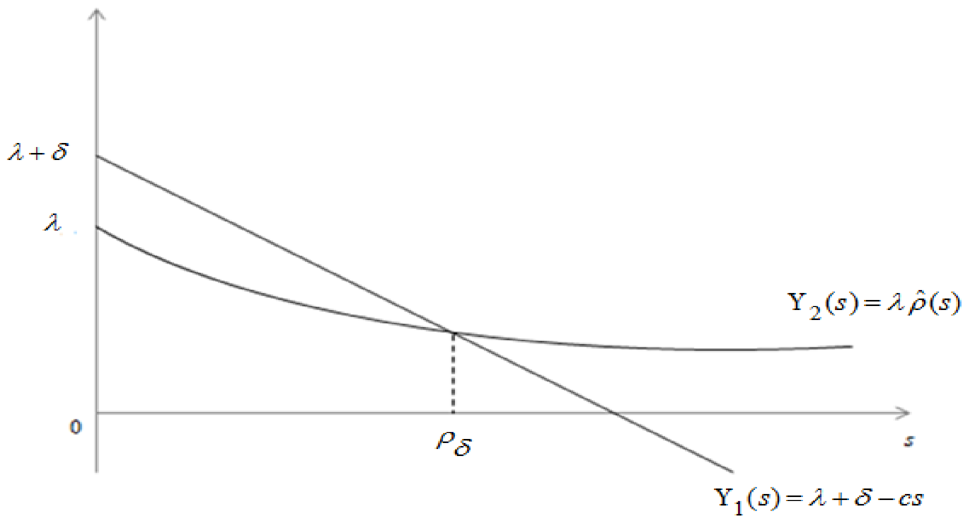
και για $s = 0$ $\Upsilon_2'(0) = -\lambda\,\mathrm{E}[\Upsilon]$.

Επιπλέον η δεύτερη παράγωγος είναι $\Upsilon_2''(s) = \lambda\ \mathrm{E}[\Upsilon^2 e^{-s\Upsilon}] > 0$.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η σχέση (1.8.4) είναι ισοδύναμη με

$$\Upsilon_1(s) = \Upsilon_2(s)\ .$$

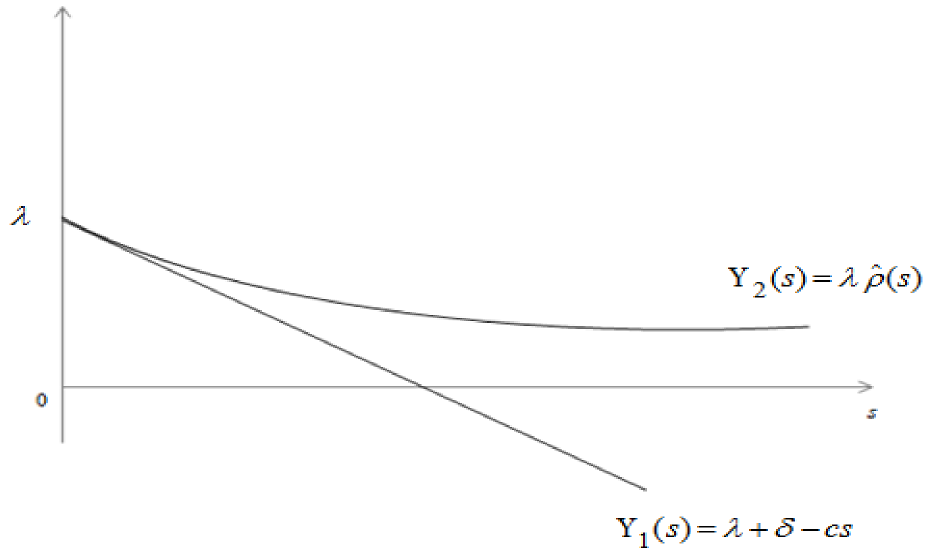
- Για $\delta > 0$, θεωρούμε την παρακάτω γραφική παράσταση των $\Upsilon_1(s)$ και $\Upsilon_2(s)$.



Σχήμα 1.4 : Για $\delta > 0$, $\Upsilon_1(s) = \Upsilon_2(s)$

Είναι προφανές από τη γραφική παράσταση ότι για $\delta > 0$, υπάρχει μία μοναδική θετική ρίζα $s = \rho_\delta$ στη θεμελιώδη εξίσωση του Lundberg.

- Για $\delta = 0$, τονίζουμε από τη συνθήκη καθαρού κέρδους (1.4.2) ότι $c\dfrac{1}{\lambda} > \mathrm{E}(\mathrm{Y})$. Επομένως, $c > \lambda \mathrm{E}[\mathrm{Y}]$, οπότε η παράγωγος $\mathrm{Y}_1^{'}(0) = -c$ είναι περισσότερο αρνητική από την παράγωγο $\mathrm{Y}_2^{''}(0) = -\lambda \mathrm{E}[\mathrm{Y}]$. Συνεπώς η τυχαία μεταβλητή $\mathrm{Y}_1(s)$ έχει πιο απότομη αρνητική κλίση από τη $\mathrm{Y}_2(s)$ στο σημείο $s = 0$.



Σχήμα 1.5 : Για $\delta = 0$, $\mathrm{Y}_1(s) = \mathrm{Y}_2(s)$

Είναι προφανές από τη παραπάνω γραφική παράσταση ότι για $\delta = 0$, $s = \rho_0 = 0$ είναι η μοναδική μη αρνητική ρίζα της θεμελιώδης εξίσωσης του Lundberg. ■

1.9 Μετασχηματισμός Laplace μιας ολοκληρωτικής εξίσωσης

Ο μετασχηματισμός Laplace είναι μια γραμμική απεικόνιση μιας συνάρτησης $f(t)$ με πραγματικό πεδίο ορισμού $t \geq 0$ που τη μετατρέπει σε μια συνάρτηση $F(s)$ με όρισμα ένα μιγαδικό αριθμό s.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.10

Ο μετασχηματισμός Laplace μιας συνάρτησης $f(x)$ για $x \geq 0$, είναι η συνάρτηση της μορφής :

$$\hat{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(x)dx$$

Στην ανάλυση της συνάρτησης των Gerber – Shiu συχνά συναντάμε μια συνάρτηση της μορφής :

$$\eta_\delta(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t}\, w_t(u+ct)\, k(t)\, dt \qquad (1.9.1)$$

και ενδιαφερόμαστε για τον μετασχηματισμό Laplace αυτής της ολοκληρωτικής εξίσωσης η οποία προκύπτει ως εξής :

$$\begin{aligned}
\hat{\eta}_\delta(u) &= \int_0^\infty e^{-su} \left(\int_0^\infty e^{-\delta t}\, w_t(u+ct)\, k(t) dt \right) du \\
&= \int_0^\infty e^{-(\delta - ct)t} \left(\int_0^\infty e^{-s(u+ct)}\, w_t(u+ct) du \right) k(t) dt \\
&= \int_0^\infty e^{-(\delta - cs)t} \left(\hat{w}_t(s) - \int_0^{ct} e^{-sx}\, w_t(x) dx \right) k(t)\, dt \\
&= \int_0^\infty e^{-(\delta - cs)t}\, \hat{w}_t(s)\, k(t)\, dt - \hat{w}^*_\delta(\delta - cs) \qquad (1.9.2)
\end{aligned}$$

όπου

$$\hat{w}^*_\delta(s) = \int_0^\infty \int_0^{ct} e^{-\frac{1}{c}\{\delta x + s\ (ct - x)\}} w_t(x)\, k(t)\, dx dt. \qquad (1.9.3)$$

Αν $w_t(x) = w(x)$ είναι μια συνάρτηση ανεξάρτητη του χρόνου , τότε

$$\hat{\eta}_\delta(s) = \hat{w}(s)\, \hat{k}(\delta - cs) - \hat{w}^*_\delta(\delta - cs), \qquad (1.9.4)$$

όπου

$$\hat{w}^*_\delta(s) = \int_0^\infty \int_0^{ct} e^{-\frac{1}{c}\{\delta x + s\,(ct - x)\}} w(x)\, k(t)\, dx dt.$$

1.10 Η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

Αρχικά πρέπει να επισημάνουμε ότι οι ανανεωτικές εξισώσεις χρησιμοποιούνται για την ανάλυση της διαδικασίας του πλεονάσματος στο κλασσικό μοντέλο της θεωρίας χρεοκοπίας. Οι ανανεωτικές εξισώσεις προέρχονται από τις ανανεωτικές ανελίξεις. Είναι δηλαδή ολοκληρωτικές εξισώσεις ως προς μια άγνωστη συνάρτηση οι οποίες έχουν εφαρμογές σε πολλούς κλάδους.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.11

Μια εξίσωση θα λέγεται ανανεωτική εξίσωση όταν θα είναι της μορφής :

$$m(x) = \int_0^x m(x-y)\, dF(y) + v(x)$$

όπου v : μια φραγμένη συνάρτηση και $v(x)$ είναι συνεχή για $x \geq 0$

F : μια αθροιστική συνάρτηση κατανομής με $F(0) = 0$ και

m : μια άγνωστη συνάρτηση .

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.12

Ως ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση ορίζουμε μια εξίσωση της μορφής :

$$m(x) = \phi \int_0^x m(x-y)\, f(y)\, dy + v(x)\,,\ x \geq 0 \tag{1.10.1}$$

όπου ϕ μια σταθερά τέτοια ώστε $0 < \phi < 1$ και $f(y) = F'(y)$.

Παίρνοντας τον μετασχηματισμό Laplace της (1.9.1) , θα βρούμε μια γενική λύση της $m(x)$. Συνεπώς ,

$$\hat{m}(s) = \phi\, \hat{m}(s)\, \hat{f}(s) + \hat{v}(s),$$

λύνοντας ως προς $\hat{m}(s)$, έχουμε

$$\hat{m}(s) = \frac{\hat{v}(s)}{1-\phi\, \hat{f}(s)}\,. \tag{1.10.2}$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (1-\phi)(\phi)^n\, f^{*n}(x) \qquad , \tag{1.10.3}$$

$$G(y) = 1 - \overline{G}(y) = 1 + \phi + \int_0^y g(x)dx \quad . \tag{1.10.4}$$

Θεωρούμε ότι ο μετασχηματισμός Laplace της $g(x) = -\overline{G}'(x)$ δίνεται από :

$$\begin{aligned} \hat{g}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-s\,x} g(x)dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (1-\phi)(\phi)^n \left\{ \hat{f}(s) \right\}^n \\ &= \frac{1-\phi}{1-\phi\, \hat{f}(s)} - (1-\phi)\ . \end{aligned} \tag{1.10.5}$$

Λύνοντας την (1.9.5) ως προς $\hat{f}(s)$ και αντικαθιστώντας την στη σχέση (1.9.2) προκύπτει το εξής :

$$\begin{aligned} \hat{m}(s) &= \frac{\hat{v}(s)}{1-\phi}(1-\phi+\hat{g}(s)) \\ &= \hat{v}(s) + \frac{\hat{v}(s)\,\hat{g}(s)}{1-\phi}\ , \end{aligned}$$

και κάνοντας την αντιστροφή καταλήγουμε ότι

$$m(x) = v(x) + \frac{1}{1-\phi}\int_0^x v(y) g(x-y) dy, \tag{1.10.6}$$

όπου η παραπάνω σχέση είναι μια γενική λύση της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης (1.10.1). Παρατηρούμε λοιπόν ότι υπάρχει μια άμεση σχέση μεταξύ της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης και της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής $G(x)$.

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.10.5) , ο μετασχηματισμός Laplace της $\overline{G}(x) = \phi - \int_0^x g(y)dy$, η οποία προκύπτει από τη σχέση (1.10.4) , δίνεται από:

$$\begin{aligned}
\hat{\overline{G}}(s) &= \frac{\phi}{s} - \frac{\hat{g}(s)}{s} \\
&= \frac{\phi}{s} - \frac{1}{s}\left(\frac{1-\phi}{1-\phi\,\hat{f}(s)} - (1-\phi)\right) \\
&= \frac{1}{s}\left(1 - \frac{1-\phi}{1-\phi\,\hat{f}(s)}\right) \\
&= \frac{\phi}{s}\,\frac{1-\hat{f}(s)}{1-\phi\,\hat{f}(s)} \ ,
\end{aligned}$$

και λύνοντας ως προς $\hat{\overline{G}}(s)$ προκύπτει ότι :

$$\hat{\overline{G}}(s) = \phi\,\hat{\overline{G}}(s)\,\hat{f}(s) + \phi\,\frac{1-\hat{f}(s)}{s} \ .$$

Τέλος κάνοντας την αντιστροφή καταλήγουμε ότι :

$$\overline{G}(x) = \phi\int_0^x \overline{G}(x-y)\,f(y)\,dy + \phi\,\overline{F}(x) \ , \ x \geq 0 \qquad (1.10.7)$$

Επίσης παρατηρούμε ότι η ουρά της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής ομοίως ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση η οποία δίνεται στη σχέση (1.10.7).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 : Το ανανεωτικό μοντέλο της κλασσικής θεωρίας κινδύνου και η κλασσική συνάρτηση των Gerber – Shiu

2.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε το ανανεωτικό μοντέλο , γνωστό και ως μοντέλο του Sparre Andersen . Το 1957, ο Sparre Andersen στο διεθνές συνέδριο αναλογιστών στη Νέα Υόρκη πρότεινε μία γενίκευση του κλασσικού μοντέλου της Θεωρίας Κινδύνου με την εργασία του «On the collective theory of risk in case of contagion between the claims». Αντί να υποθέσει ότι οι ανεξάρτητοι ενδιάμεσοι χρόνοι είναι κατανεμημένοι εκθετικά , εισήγαγε μία πιο γενική συνάρτηση κατανομής αλλά διατήρησε την υπόθεση της ανεξαρτησίας. Κύριο χαρακτηριστικό του μοντέλου Sparre Andersen ή του ανανεωτικού μοντέλου της θεωρίας κινδύνου είναι ότι ο αριθμός των ζημιών ενός χαρτοφυλακίου κινδύνων περιγράφεται από μια ανανεωτική διαδικασία. Παρατηρούμε λοιπόν παρακάτω ότι το συγκεκριμένο μοντέλο πλέον δεν ακολουθεί την εκθετική κατανομή όπως το κλασσικό μοντέλο, αλλά κάποια άλλη συνεχή και θετική κατανομή όπως για παράδειγμα μια Pareto , Lognormal, Weibull, κτλ. Συνεπώς η στοχαστική ανέλιξη δεν ακολουθεί τη γνωστή ανέλιξη Poisson όπως στο κλασσικό μοντέλο αλλά μια στοχαστική ανέλιξη η οποία ονομάζεται ανανεωτική.

Έστω ότι η γενίκευση του κλασσικού μοντέλου με ανέλιξη πλεονάσματος δίνεται από:

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \tag{2.1.1}$$

όπου $u \geq 0$ το αρχικό αποθεματικό και $c > 0$ η ένταση ασφαλίστρου.

Η στοχαστική διαδικασία αποζημιώσεων/απαιτήσεων $\{N(t), t \geq 0\}$ θεωρείται μια ανανεωτική ανέλιξη η οποία ορίζεται από μία ακολουθία θετικών , ανεξάρτητων και ισόνομων κατανεμημένων ενδιάμεσων χρόνων $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$. Επιπλέον , V_1 είναι ο χρόνος της πρώτης απαίτησης και V_i για $i = 2, 3, \ldots$ είναι ο χρόνος μεταξύ της $(i-1)$ και i-οστής απαίτησης . Η συνάρτηση κατανομής των ενδιάμεσων χρόνων ορίζεται ως $K(t) = 1 - \overline{K}(t) = P_r(V \leq t)$ και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ως $k(t) = K'(t),\ t > 0$. Επιπροσθέτως , θεωρούμε ότι $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι μία ακολουθία θετικών, ανεξάρτητων και ισόνομων κατανεμημένων μεγεθών απαιτήσεων με συνάρτηση κατανομής και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $P(y) = P_r(Y \leq y)$, $p(y) = P'(y)$ αντίστοιχα.

Συγκρίνοντας λοιπόν το μοντέλο του Sparre Andersen με το κλασσικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου καταλήγουμε στα παρακάτω συμπεράσματα.

	Το μοντέλο Sparre Andersen	*Το Κλασσικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου*
1.	Η απαριθμήτρια $N(t)$ δεν ακολουθεί μια ανέλιξη Poisson αλλά **από μια ανανεωτική ανέλιξη**.	Η $N(t)$ ακολουθεί **μια ανέλιξη Poisson με παράμετρο λ**, όπου εκφράζει τον αναμενόμενο αριθμό άφιξης ζημιών στη μονάδα του χρόνου.
2.	Οι στοχαστικές διαδικασίες $\{Y_n, n \geq 1\}$, $\{N(t): t \geq 0\}$ είναι **ανεξάρτητες** μεταξύ τους.	Οι στοχαστικές διαδικασίες $\{Y_n, n \geq 1\}$, $\{N(t): t \geq 0\}$ είναι **ανεξάρτητες** μεταξύ τους.
3.	Η **συνθήκη καθαρού κέρδους** είναι: $c\,E(V) > E(Y)$ όπου $E(V)$: η μέση τιμή των ενδιάμεσων χρόνων , $E(Y)$:η μέση τιμή των απαιτήσεων και c η ένταση ασφαλίστρου.	Η **συνθήκη καθαρού κέρδους** είναι: $c > \lambda\,\mu_1$ ώστε $\psi(u) < 1$, όπου $\mu_1 = E(Y)$:η μέση τιμή των απαιτήσεων και c η ένταση ασφαλίστρου.
4.	Το $c > 0$ καλείται **ένταση ασφαλίστρου** και ικανοποιεί τη σχέση $c = \dfrac{(1+\theta)\,E(Y)}{E(V)}$ όπου $\theta > 0$ το περιθώριο ασφαλείας.	Το $c > 0$ καλείται **ένταση ασφαλίστρου** και ικανοποιεί τη σχέση $c = \lambda\,\mu_1\,(\theta+1)$ όπου $\theta > 0$ το περιθώριο ασφαλείας.
5.	$\psi(0) \neq \dfrac{1}{1+\theta}$ και $\delta(0) \neq \dfrac{\theta}{1+\theta}$	$\psi(0) = \dfrac{1}{1+\theta}$ και $\delta(0) = \dfrac{\theta}{1+\theta}$
6.	Τα κλιμακωτά ύψη L_i ακολουθούν την κατανομή ισορροπίας $F_e(x)$.	Τα κλιμακωτά ύψη L_i ακολουθούν μία άγνωστη κατανομή η οποία είναι δύσκολο να βρεθεί.

<u>Συμπεράσματα</u>:

- ✓ Το περιθώριο ασφαλείας είναι $\theta = \dfrac{c\,E(V)}{E(Y)} - 1$ το οποίο προκύπτει εάν ορίσουμε τα αναμενόμενα έσοδα από τα εισπραχθέντα ασφάλιστρα να ξεπερνούν τα αναμενόμενα έξοδα από τις αποζημιώσεις.

- Η στοχαστική ανέλιξη $N(t)$ δεν ακολουθεί τη γνωστή ανέλιξη Poisson όπως στο κλασσικό μοντέλο αλλά μια στοχαστική ανέλιξη η οποία ονομάζεται ανανεωτική ανέλιξη.
- Το ανανεωτικό μοντέλο ή το μοντέλο Sparre Andersen δεν ακολουθεί πλέον την εκθετική κατανομή όπως το κλασσικό μοντέλο αλλά κάποια άλλη συνεχή και θετική κατανομή όπως για παράδειγμα Pareto ,Lognormal, Weibull, κτλ.
- Η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι μια ουρά σύνθετης γεωμετρικής κατανομής με μορφή :

$$\psi(u) = \sum_{n=1}^{\infty} (1-\phi)(\phi)^n \, \overline{F}^{*n}(u)$$

όπου $\varphi = \psi(0) \neq \frac{1}{1+\theta}$ και F : μια άγνωστη κατανομή ισορροπίας.

2.2 Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των T ,$U(T-)$,$|U(T)|$

Στην παράγραφο αυτή ορίζουμε την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των τυχαίων μεταβλητών $U(T-)$, $|U(T)|$ και T όταν το αρχικό κεφάλαιο είναι u . Πρέπει να επισημάνουμε ότι θέτουμε ως $h_{12}(t, x, y|u)$ την από κοινού συνάρτηση κατανομής και ότι ο δείκτης «1» υποδηλώνει την ποσότητα του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία $U(T-)$ ενώ με δείκτη «2» την ποσότητα του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας $|U(T)|$. Επιπλέον εφόσον θεωρούμε πως συμβαίνει η χρεοκοπία (δηλαδή $T < \infty$) , η από κοινού συνάρτηση και η πυκνότητα των $\left(T, U(T-), |U(T)|\right)$ συγκλίνουν στην πιθανότητα χρεοκοπίας (δηλαδή <1) και ως αποτέλεσμα έχει να είναι ελλειμματικές πυκνότητες.

Αρχικά , συμβολίζουμε με x το πλεόνασμα ακριβώς τη στιγμή πριν συμβεί η χρεοκοπία και το χρόνο χρεοκοπίας με t. Για να εξασφαλίσουμε πως θα συμβεί η χρεοκοπία τη στιγμή που το πλεόνασμά μας βρίσκεται σε ύψος x τη στιγμή t , θεωρούμε την πιθανότητα $\overline{P}(x)$. Επιπροσθέτως, εάν θεωρήσουμε πως το μέγεθος του ελλείμματος είναι y τότε το μέγεθος της απαίτησης θα είναι $x+y$ και κατ' επέκταση με πυκνότητας πιθανότητας $p(x+y)$. Δοθέντος ότι $U(T-) = x$ και $T = t$, η πυκνότητα της $|U(T)|$ δίνεται από

$$p_x(y) = \frac{p(x+y)}{\overline{P}(x)}, \; y > 0 \; , \; x > 0 \tag{2.2.1}$$

η οποία είναι η κατανομή απώλειας της $p(y)$ και δεν εξαρτάται από τη στιγμή χρεοκοπίας $T = t$.

► Θεωρούμε ότι η χρεοκοπία συμβαίνει στην πρώτη απαίτηση. Υποθέτουμε πως ο ασφαλιστικός οργανισμός ξεκινάει με ένα αρχικό απόθεμα ύψους u και ένταση ασφαλίστρου c τη χρονική στιγμή t , τη στιγμή δηλαδή που συμβαίνει η χρεοκοπία. Συνεπώς το πλεόνασμα ακριβώς τη στιγμή πριν συμβεί η χρεοκοπία θα ισούται με $x = u + ct$ ενώ ο χρόνος χρεοκοπίας θα συμβαίνει τη χρονική στιγμή $t = \frac{x-u}{c}$. Επιπροσθέτως , το έλλειμμα y συμβαίνει όταν το μέγεθος της πρώτης απαίτησης είναι ύψους $x+y$.Τότε η από κοινού συνάρτηση των $\left(T, U(T-), |U(T)|\right)$ με αντίστοιχες μεταβλητές $\left(t, x, y\right)$ όταν η χρεοκοπία συμβαίνει στην πρώτη απαίτηση ισούται με $k(t)\,p(x+y)$ όπου $t = \frac{x-u}{c}$. Συνεπώς η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας ισούται με :

$$h^{*}_{12}(x, y\,|\,u) = \frac{1}{c}\,k\left(\frac{x-u}{c}\right)p(x+y) \qquad (2.2.2)$$

όπου $t = \frac{x-u}{c}$, $x > u$ και $y > 0$.

<u>Παρατήρηση</u> : Επισημαίνουμε ότι ο δείκτης «*» που εμφανίζεται στη μεταβλητή « h » υποδηλώνει την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας όταν η χρεοκοπία συμβαίνει στην πρώτη απαίτηση.

Κάνοντας χρήση των παραπάνω τύπων προκύπτει ότι η συνάρτηση της περιθώριας πυκνότητας πιθανότητας του πλεονάσματος $U(T-)$ για τη στιγμή που η χρεοκοπία συμβαίνει στην πρώτη απαίτηση δίνεται από :

$$h^{*}_{1}(x\,|\,u) = \frac{1}{c}\,k\left(\frac{x-u}{c}\right)\overline{P}(x).$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1

Ορίζουμε ως από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία $U(T-)$, του ελλείμματος ακριβώς τη στιγμή της χρεοκοπίας $|U(T)|$ και του χρόνου χρεοκοπίας T δοθέντος ότι το αρχικό κεφάλαιο είναι $u \geq 0$, τη συνάρτηση

$$h_{12}(t, x, y\,|\,u) .$$

► Έπειτα, θεωρούμε ότι η χρεοκοπία δεν συμβαίνει στην πρώτη απαίτηση αλλά σε κάποια μεταγενέστερη. Σε αυτή την περίπτωση δεν υπάρχει κάποια άμεση σχέση μεταξύ των μεταβλητών t, x, και y . Το μόνο που γνωρίζουμε είναι ότι το x θα πρέπει να είναι λιγότερο από $u+ct$ ώστε να επέλθει η χρεοκοπία. Συμβολίζουμε ως $h^{**}_{12}(t, x, y\,|\,u)$ την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των $\left(T\ ,\ U(T-)\ ,\ |U(T)|\ \right)$ δοθέντος ότι η χρεοκοπία συμβαίνει σε κάποια διαδοχική απαίτηση της πρώτης. Ο δείκτης «**» δηλώνει την πυκνότητα της χρεοκοπίας που συμβαίνει σε κάποια διαδοχική απαίτηση εκτός της πρώτης.

Επιπλέον, η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των $\left(T, U(T-), |U(T)|\right)$ η οποία υποδηλώνεται ως $h_{12}(t, x, y\,|\,u)$ μπορεί να οριστεί διαφορετικά αναλόγως πότε συμβαίνει η χρεοκοπία , δηλαδή αν θα συμβεί στην πρώτη απαίτηση $\left(x=u+ct\right)$ ή σε επόμενες απαιτήσεις $\left(x<u+ct\right)$. Συγκεκριμένα :

$$h_{12}(t\ ,\ x\ ,y/u)=\begin{cases} h^{**}_{12}(\ x\ ,\ y|u)=\dfrac{1}{c}k\left(\dfrac{x-u}{c}\right)p(x+y)\ , & t=\dfrac{x-u}{c},\ x>u\ ,\ y>0 \\ h^{**}_{12}(t\ ,\ x\ ,\ y|u) & ,\quad t>0,\ 0<x<u+ct\ ,\ y>0. \end{cases}$$

Θα εισάγουμε μια κατηγορία πυκνοτήτων στις οποίες θα αναφερόμαστε ως "προεξοφλημένες" πυκνότητες επειδή φαίνεται να «προεξοφλούμε» την πυκνότητα των μεταβλητών $\left(T\ ,\ U(T-)\ ,|U(T)|\right)$ από τη στιγμή της χρεοκοπίας, χρησιμοποιώντας τον προεξοφλητικό παράγοντα δ.

Αυτές οι προεξοφλημένες πυκνότητες δεν έχουν κάποια ουσιαστική ερμηνεία και για αυτό συχνά θέτουμε $\delta=0$. Ωστόσο, αυτές οι προεξοφλημένες πυκνότητες θα είναι πολύ χρήσιμες στις ακόλουθες ενότητες. Κατ 'αρχάς, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.2.2) και (2.2.3), υποθέτουμε ότι η από κοινού προεξοφλημένη πυκνότητα του πλεονάσματος ακριβώς πριν συμβεί η χρεοκοπία και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας η οποία συμβαίνει στην εμφάνιση της πρώτης απαίτησης δίνεται από

$$\begin{aligned} h^{*}_{\delta,12}(x,y|u) &= e^{-\delta\frac{x-u}{c}}\,h^{*}_{12}(x,y|u) \qquad (2.2.4)\\ &= e^{-\delta\frac{x-u}{c}}\,\frac{1}{c}k\,(\frac{x-u}{c})\,p(x+y) \\ &= h^{*}_{\delta,1}(x|u)p_{x}(y)\ , \end{aligned}$$

όπου $h^{*}_{\delta,1}(x|u)=e^{-\delta\frac{x-u}{c}}\,\dfrac{1}{c}k\,(\dfrac{x-u}{c})\,\overline{P}(x)$,

είναι η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση του πλεονάσματος $U(T-)$ για τη στιγμή που η χρεοκοπία συμβαίνει στην πρώτη απαίτηση. Ο δείκτης " δ " που εμφανίζεται στο « h » υποδηλώνει ότι είναι προεξοφλημένη πυκνότητα. Επίσης, υποθέτουμε ότι η από κοινού προεξοφλημένη πυκνότητα του πλεονάσματος ακριβώς πριν συμβεί η χρεοκοπία και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας η οποία δεν συμβαίνει στην εμφάνιση της πρώτης απαίτησης αλλά σε κάποια μεταγενέστερη δίνεται από

$$h^{*}_{\delta,12}(x,y|u)=\int_{0}^{\infty}e^{-\delta t}h^{**}_{\delta,12}(t,x,y|u)dt. \qquad (2.2.5)$$

Ομοίως στη (2.2.3),

$$h^{**}_{12}(t,x,y\,|\,u)=h^{**}_{1}(t,x\,|\,u)\,p_x(y)\quad, \tag{2.2.6}$$

όπου η $h^{**}_{1}(t,x\,|\,u)$ είναι η από κοινού πυκνότητα των T και $U(T-)$ σε μεταγενέστερες απαιτήσεις μετά την πρώτη απαίτηση. Έπειτα χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.2.5)

$$h^{**}_{\delta,12}(x,y\,|\,u)=h^{**}_{\delta,1}(x\,|\,u)\,p_x(y),$$

όπου $h^{**}_{\delta,1}(x\,|\,u)=\int_0^\infty e^{-\delta t}h^{**}_{1}(t,x\,|\,u)dt$ είναι η περιθώρια προεξοφλημένη πυκνότητα του πλεονάσματος $U(T-)$ με τη χρεοκοπία να μην συμβαίνει στην εμφάνιση της πρώτης απαίτησης αλλά σε κάποια μεταγενέστερη απαίτηση.

Έπειτα χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.2.3) και (2.2.6), υποθέτουμε

$$h_{\delta,12}(x,y\,|\,u)=h^{*}_{\delta,12}(x,y\,|\,u)+h^{**}_{\delta,12}(x,y\,|\,u) \tag{2.2.7}$$

$$=h^{*}_{\delta,1}(x\,|\,u)\,p_x(y)+h^{**}_{\delta,1}(x\,|\,u)\,p_x(y)$$

$$=h_{\delta,1}(x\,|\,u)\,p_x(y)\ , \tag{2.2.8}$$

είναι η από κοινού προεξοφλημένη πυκνότητα των $\left(U(T-),|U(T)|\right)$ όπου

$$h_{\delta,1}(x\,|\,u)=h^{*}_{\delta,1}(x\,|\,u)+h^{**}_{\delta,1}(x\,|\,u)$$

είναι η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση του πλεονάσματος $U(T-)$.

Δεδομένου ότι η συνάρτηση των Gerber-Shiu $m_{\delta,12}(u)$, δίνεται από (2.1.1) ,μπορούμε να γράψουμε τη συνάρτηση $m_{\delta,12}(u)$ ως άθροισμα των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από την εμφάνιση της χρεοκοπίας στην πρώτη απαίτηση $\left(t=\dfrac{x-u}{c},x>u,y>0\right)$, σε μεταγενέστερες απαιτήσεις μετά την πρώτη $\left(t>0\ ,\ 0<x<u+ct\ ,\ y>0\right)$, και 0 διαφορετικά όπως ακολουθεί παρακάτω.

Κάνοντας χρήση των παραπάνω σχέσεων (2.2.4), (2.2.5) και (2.2.7) προκύπτει η εξής σχέση

$$m_{\delta,12}(u)=\int_0^\infty\int_u^\infty e^{-\delta\left(\frac{x-u}{c}\right)}w_{12}(x,y)\,h^{*}_{12}(x,y\,|\,u)dxdy$$

$$+\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^{u+ct}e^{-\delta t}\,w_{12}(x,y)\,h^{**}_{12}(x,y\,|\,u)\,dx\,dy\,dt$$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} w_{12}(x,y)\left(h^{*}_{\delta,12}(x,y\,|\,u) + h^{**}_{\delta,12}(x,y\,|\,u)\right)dx\,dy$$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} w_{12}(x,y)\,h_{\delta,12}(x,y\,|\,u)\,dx\,dy \quad . \qquad (2.2.9)$$

2.3 Η μελέτη της πρώτης πτώσης του πλεονάσματος

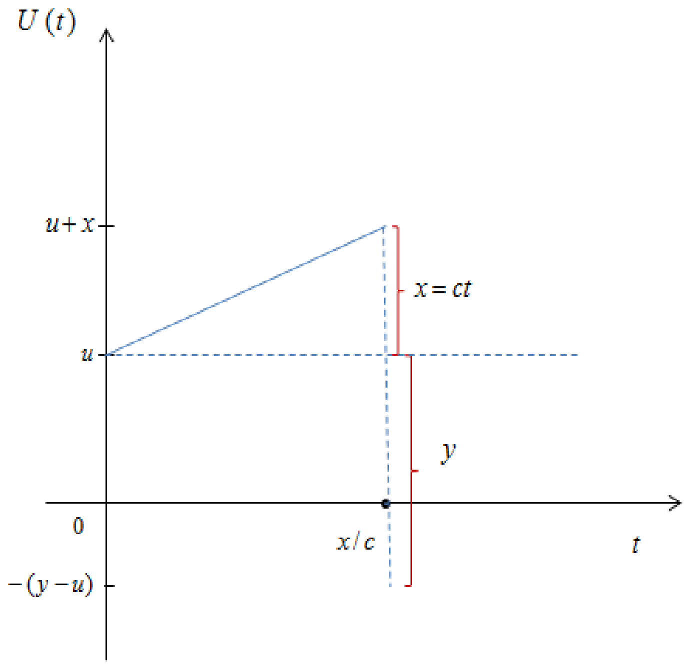
Στη συγκεκριμένη παράγραφο παίρνοντας διαφορετικές περιπτώσεις για το που συμβαίνει η πρώτη πτώση του πλεονάσματος καθώς και αν στη πρώτη απαίτηση οδηγείται σε χρεοκοπία το χαρτοφυλάκιο ή όχι , θα εκφράσουμε τη συνάρτηση $m_{\delta,12}(u)$ ως μία ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση. Αξιοποιώντας τη συνεισφορά της συνάρτησης :

$$m_{\delta,12}(u) = E\,[\,e^{-\delta T}\, w_{12}\big(U(T-),|U(T)|\big)\, I(T<\infty)\,|\,U(0)=u\,]$$

μπορούμε να καταλήξουμε σε συμπεράσματα τα οποία παρουσιάζουμε λεπτομερώς στις παρακάτω περιπτώσεις.

<u>Περίπτωση 1</u> : Η πρώτη πτώση του πλεονάσματος συμβαίνει στην πρώτη απαίτηση και προκαλεί τη χρεοκοπία.

- Η πρώτη πτώση του πλεονάσματος συμβαίνει στην πρώτη απαίτηση και προκαλεί τη χρεοκοπία όταν το μέγεθος του είναι u , το οποίο συσσωρεύεται με ένταση c μέχρι να φτάσει σε μια ποσότητα $x = ct$ πάνω από το επίπεδο του u . Τη χρονική στιγμή $t = \frac{x}{c}$ εμφανίζεται η πρώτη απαίτηση η οποία προκαλεί μια πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό u ,μεγέθους y το οποίο υπερβαίνει το u έτσι ώστε να είναι βέβαιη η χρεοκοπία. Συνεπώς το πλεόνασμα ακριβώς πριν συμβεί η χρεοκοπία είναι ύψους $u + x$ και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας ισούται με $y - u$.



Σχήμα 2.1 : Η χρεοκοπία συμβαίνει όταν το πλεόνασμα πέφτει στην πρώτη απαίτηση.

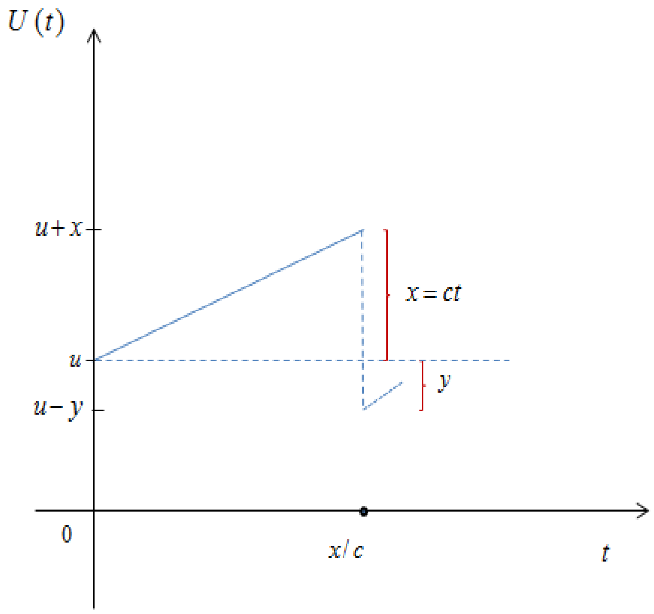
Η παραπάνω περίπτωση συμβαίνει όταν η πυκνότητα ισούται με $h^{*}_{12}(x,y\,|\,0)$ όπως είδαμε σε προηγούμενη παράγραφο , όπου $x>0$ και $y>0$. Επομένως από τον ορισμό της μέσης τιμής για $\delta=0$ και $u=0$ προκύπτει ότι

$$m_{\delta,12}(u)=\int_u^\infty\int_0^\infty e^{-\delta\frac{x}{c}}w_{12}(u+x,y-u)\,h^{*}_{12}(x,y\,|\,0)\,dx\,dy$$

$$=\int_u^\infty\int_0^\infty w_{12}(u+x,y-u)\,h^{*}_{\delta,12}(x,y\,|\,0)\,dx\,dy. \qquad (2.3.1)$$

<u>Περίπτωση 2</u>: Η πρώτη πτώση του πλεονάσματος συμβαίνει στην πρώτη απαίτηση χωρίς ωστόσο να οδηγεί σε χρεοκοπία.

- Η περίπτωση αυτή είναι ακριβώς η ίδια με την περίπτωση 1 με τη μόνη διαφορά ότι η πτώση του πλεονάσματος y πρέπει να είναι λιγότερη από u έτσι ώστε να μην συμβεί η χρεοκοπία. Επιπλέον , η πυκνότητα ισούται με $h^{*}_{12}(x,y\,|\,0)$ αλλά με $x>0$ και $y<u$. Παρατηρούμε λοιπόν ότι η διαδικασία θα ανανεωθεί με αρχικό αποθεματικό $u-y$ καθώς υποθέσαμε πως δεν θα συμβεί η χρεοκοπία , συνεπώς η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος ανανεώνεται έπειτα από κάθε απαίτηση.



Σχήμα 2.2 : Η χρεοκοπία συμβαίνει όταν το πλεόνασμα πέφτει στην πρώτη απαίτηση χωρίς να συμβεί χρεοκοπία.

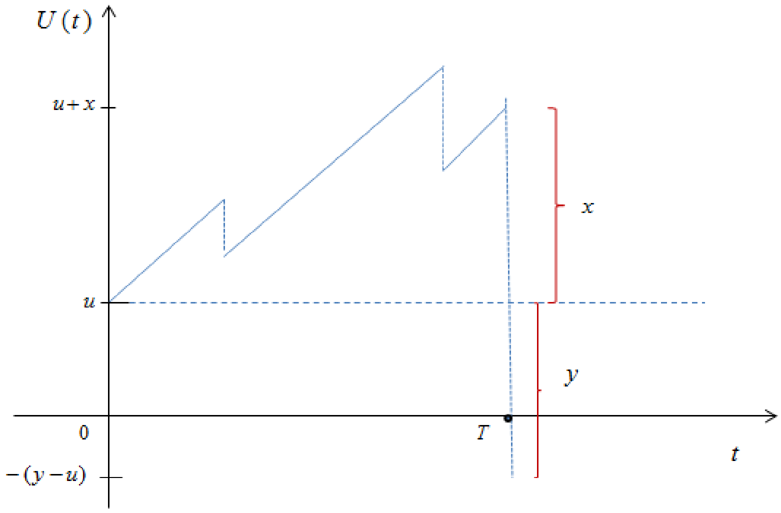
Συνεπώς:

$$m_{\delta,12}(u) = \int_0^u \int_0^\infty e^{-\delta \frac{x}{c}} m_{\delta,12}(u-y) h^*_{12}(x,y\,|\,0)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^u m_{\delta,12}(u-y) \left(\int_0^\infty h^*_{\delta,12}(x,y\,|\,0) dx \right) dy. \qquad (2.3.2)$$

<u>Περίπτωση 3</u> : Η πρώτη πτώση του πλεονάσματος συμβαίνει σε μεταγενέστερη απαίτηση και όχι στην πρώτη και προκαλεί τη χρεοκοπία.

► Στην περίπτωση αυτή η πρώτη πτώση του πλεονάσματος συμβαίνει σε μεταγενέστερη απαίτηση και προκαλεί χρεοκοπία. Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος ξεκινά με αρχικό αποθεματικό u και η ποσότητα x είναι το ύψος που φτάνει το πλεόνασμα όταν παρατηρείται η πτώση που οδηγεί σε χρεοκοπία με $y > u$ (ώστε να οδηγηθεί σε βέβαιη χρεοκοπία). Το πλεόνασμα πριν συμβεί η χρεοκοπία λοιπόν είναι ύψους $u + x$ και το έλλειμμα τη στιγμή χρεοκοπίας είναι $y - u$.



Σχήμα 2.3: Πρώτη πτώση πλεονάσματος σε μεταγενέστερη απαίτηση που οδηγεί σε χρεοκοπία.

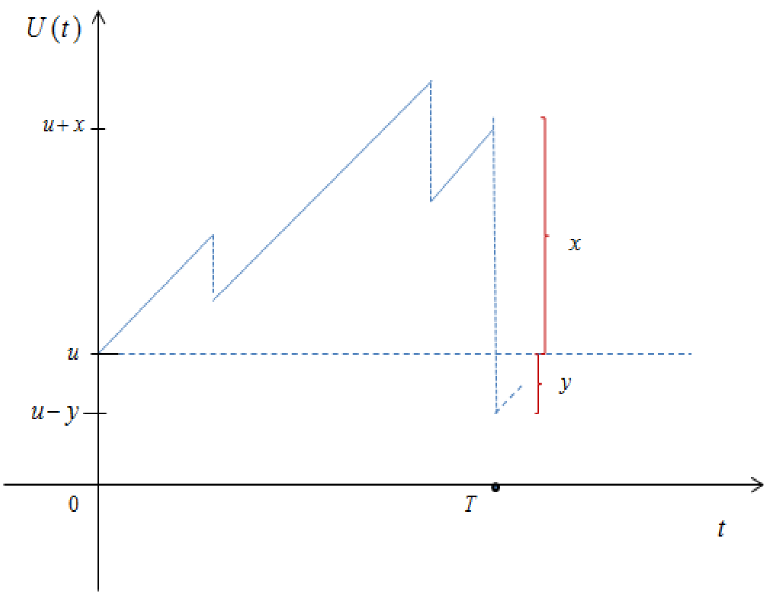
Η περίπτωση αυτή συμβαίνει με πυκνότητα $h^{**}_{12}(t,x,y\,|\,0)$ όπου $t>0, x>0$ και $y>u$. Συνεπώς,

$$m_{\delta,12}(u)=\int_u^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\delta t}\, w_{12}(u+x,y-u)\, h^{**}_{12}(t,x,y\,|\,0)\,dt\,dx\,dy$$

$$=\int_u^{\infty}\int_0^{\infty} w_{12}(u+x,y-u)\, h^{*}_{\delta,12}(x,y\,|\,0)\,dx\,dy. \qquad (2.3.3)$$

<u>Περίπτωση 4</u> : Η πρώτη πτώση του πλεονάσματος συμβαίνει σε μεταγενέστερη απαίτηση και όχι στην πρώτη χωρίς ωστόσο να προκαλεί τη χρεοκοπία.

- Η περίπτωση αυτή είναι ακριβώς η ίδια με την περίπτωση 3 με τη μόνη διαφορά ότι η πτώση του πλεονάσματος y πρέπει να είναι λιγότερη από u έτσι ώστε να μην συμβεί η χρεοκοπία. Επιπλέον , η πυκνότητα ισούται με $h^{*}_{12}(t,x,y\,|\,0)$ αλλά με $t>0$, $x>0$ και $y<u$. Η διαδικασία ανανεώνεται με αρχικό αποθεματικό $u-y$ καθώς υποθέσαμε πως δεν θα συμβεί η χρεοκοπία, επομένως η διαδικασία πλεονάσματος ανανεώνεται έπειτα από κάθε απαίτηση.



Σχήμα 2.4 : Πρώτη πτώση πλεονάσματος σε μεταγενέστερη απαίτηση που δεν οδηγεί σε χρεοκοπία.

Συνεπώς :

$$m_{\delta,12}(u)=\int_0^u\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\delta t}\, m_{\delta,12}(u-y)\, h^{**}_{12}(t,x,y\,|\,0)\,dt\,dx\,dy$$

$$=\int_0^u m_{\delta,12}(u-y)\left(\int_0^\infty h^{**}_{\delta,12}(x,y\,|\,0)dx\right)dy. \qquad (2.3.4)$$

<u>Σημείωση</u> : Από τον παράγοντα $e^{-\delta T}$ της συνάρτησης των Gerber – Shiu , δίνοντας διάφορες τιμές στην μεταβλητή T προκύπτουν οι παραπάνω ποσότητες $e^{-\delta\frac{x}{c}}$ και $e^{-\delta t}$ οι οποίες δηλώνουν το χρόνο μέχρις ότου συμβεί η χρεοκοπία.

Συνοψίζοντας και προσθέτοντας τις 4 περιπτώσεις (2.3.1) , (2.3.2) , (2.3.3) και (2.3.4) καταλήγουμε στο εξής αποτέλεσμα :

$$m_{\delta,12}(u)=\int_0^u\int_0^\infty m_{\delta,12}(u-y)\,h_{\delta,12}(x,y\,|\,0)\;dx\,dy$$

$$+\int_u^\infty\int_0^\infty w_{12}\,(u+x\;,\;y-u)\;h_{\delta,12}(x,y\,|\,0)\,dx\,dy\;, \qquad (2.3.5)$$

όπου $h_{\delta,12}(\,x,y\,|\,0)=h^{*}_{\delta,12}(x\;,y\,|\,0)+h^{**}_{\delta,12}(x,y\,|\,0)$.

Ορίζουμε τη θετική σταθερά ,

$$\phi_\delta = \int_0^\infty \int_0^\infty h_{\delta,12}(x, y \mid 0)\, dy\, dx \qquad (2.3.6)$$

$$= \int_0^\infty h_{\delta,1}(x \mid 0) \left(\int_0^\infty p_x(y) dy \right) dx$$

$$= \int_0^\infty h_{\delta,1}(x \mid 0) dx . \qquad (2.3.7)$$

Σημειώνουμε από τη σχέση (2.2.9) ότι $m_{\delta,12}(0) = \phi_\delta$ όταν $w_{12}(x, y) = 1$. Κάνοντας χρήση τη σχέση (2.1.1) ,

$$0 < \phi_\delta = \mathrm{E}[e^{-\delta T}\, I(T < \infty) \mid U(0) = 0]$$

$$\leq \mathrm{E}[I(T < \infty) \mid U(0) = 0] = P_r\,(T < \infty \mid U(0) = 0) = \psi(0)$$

$$< 1 . \qquad (2.3.8)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.1

Θεωρώντας ότι η συνάρτηση των απαιτήσεων ακολουθεί την εκθετική κατανομή $\rho(y) = \beta e^{-\beta y}$,υπάρχει μια πραγματική ρίζα $x = \phi_\delta \in (0,1)$ της εξίσωσης

$$x = \hat{k}\,(\delta + c\beta(1 - x)) . \qquad (2.3.9)$$

Συγκεκριμένα ότι, $0 < \phi_\delta < \hat{k}(\delta)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Αρχικά ορίζουμε ως $t = \beta\,(1 - x)$. Έπειτα η σχέση (2.3.9) γίνεται

$$1 - \frac{t}{\beta} = \hat{k}\,(\delta + ct) . \qquad (2.3.10)$$

Εφόσον $x = 1 - \dfrac{t}{\beta}$, τότε για $x \in (0, \beta)$. Έτσι θα ασχοληθούμε με τις τιμές του $t \in (0, \beta)$ οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση (2.3.10).

Θεωρούμε ότι $\mathrm{Y}_1(t) = 1 - \dfrac{t}{\beta}$ και $\mathrm{Y}_2(t) = \hat{k}\,(\delta + ct) = \mathrm{E}\left[e^{-(\delta + ct)V} \right]$ και έτσι η σχέση (2.3.10) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $\mathrm{Y}_1(t) = \mathrm{Y}_2(t)$.

Σημειώνουμε ότι $Y_1(t)$ είναι μια φθίνουσα γραμμική συνάρτηση με σταθερό παράγοντα 1 και συντελεστή κλίσης β.

Επιπλέον θεωρούμε, $Y_2(t) > 0$.

Παίρνοντας την πρώτη και δεύτερη παράγωγο προκύπτει αντίστοιχα ότι

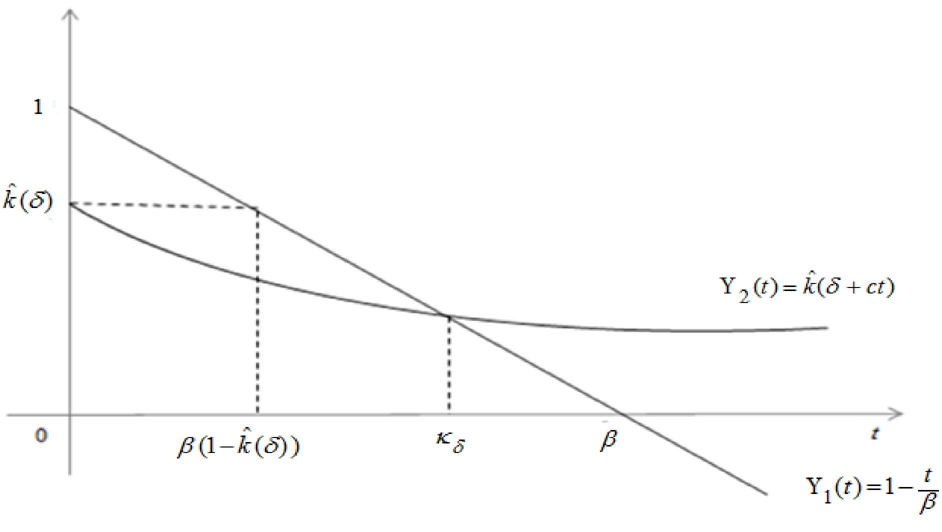
$$Y_2'(t) = -c\,\mathrm{E}[Ve^{-(\delta+ct)V}] < 0$$

και $$Y_2''(t) = c^2\,\mathrm{E}[V^2 e^{-(\delta+ct)V}] > 0.$$

Επομένως προκύπτει ότι η $Y_2(t)$ είναι μια θετική , φθίνουσα και κυρτή συνάρτηση (αφού $Y_2''(t) > 0$). Επιπροσθέτως , θεωρούμε ότι όταν $t = \beta(1-\hat{k}(\delta))$ τότε

$$Y_1(\beta(1-\hat{k}(\delta))) = 1 - \frac{\beta(1-\hat{k}(\delta))}{\beta} = \hat{k}(\delta).$$

- Για $\delta > 0$, θεωρούμε την παρακάτω γραφική παράσταση των $Y_1(t)$ και $Y_2(t)$ όπου $t = \kappa_\delta$ είναι η ρίζα της εξίσωσης $Y_1(t) = Y_2(t)$.



Σχήμα 2.5 : Για $\delta > 0$, $Y_1(t) = Y_2(t)$

- Για $\delta = 0$, τότε

$$Y_1(0) = Y_2(0) = 1$$

και $$Y_2(t) = \hat{k}(ct) = \mathrm{E}[e^{-ctV}].$$

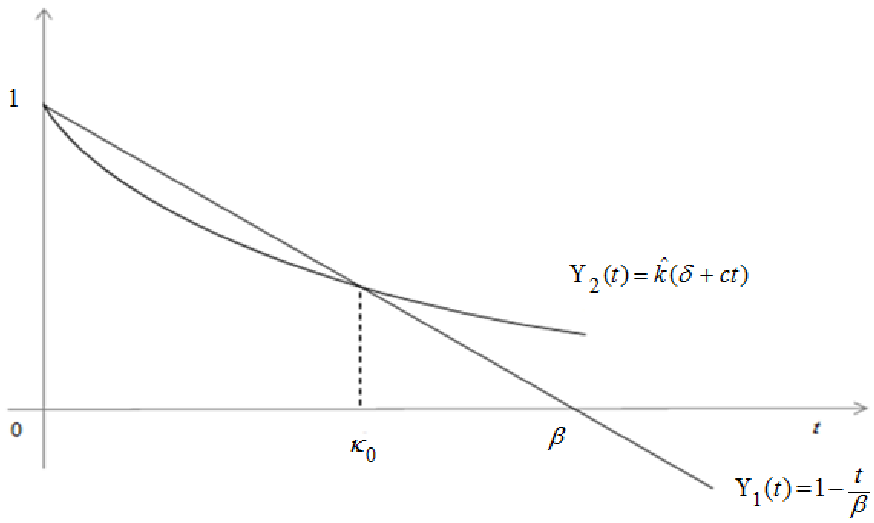
Επομένως για την πρώτη παράγωγο και για $t = 0$ προκύπτει ότι $\mathrm{Y}_2'(0) = -c\,\mathrm{E}[V]$.

$$\text{Ομοίως}\quad \mathrm{Y}_1(t) = 1 - \frac{t}{\beta}$$

$$\text{και για } t = 0 \text{ έχουμε ότι}\quad \mathrm{Y}_1'(0) = -\frac{1}{\beta} = -\mathrm{E}[\mathrm{Y}].$$

Από την συνθήκη καθαρού κέρδους $c\,\mathrm{E}(V) > \mathrm{E}[\mathrm{Y}]$, προκύπτει ότι $\mathrm{Y}_2''(0) < \mathrm{Y}_1'(0)$ η οποία υποδηλώνει ότι η $\mathrm{Y}_2(t)$ έχει μεγαλύτερη αρνητική κλίση από τη $\mathrm{Y}_1(t)$ στο σημείο για $t = 0$.

Θεωρούμε ότι η παρακάτω γραφική παράσταση των $\mathrm{Y}_1(t)$ και $\mathrm{Y}_2(t)$ όπου $t = \kappa_0$ είναι η ρίζα της εξίσωσης $\mathrm{Y}_1(t) = \mathrm{Y}_2(t)$. Τονίζουμε ότι $0 < \kappa_\delta < \beta$.



Σχήμα 2.6 : Για $\delta = 0$, $\mathrm{Y}_1(t) = \mathrm{Y}_2(t)$

Από τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις είναι προφανές ότι για $\delta \geq 0$, υπάρχει μία πραγματική και θετική ρίζα $t = \kappa_\delta$ στη (2.3.10) και $\beta(1 - \hat{k}(\delta)) < \kappa_\delta < \beta$. Επιπλέον από τη σχέση (2.3.10)

$$1 - \frac{\kappa_\delta}{\beta} = \hat{k}(\delta + c\kappa_\delta)\ ,$$

ή ισοδύναμα,

$$\frac{\beta}{\beta-\kappa_\delta}\hat{k}(\delta+c\kappa_\delta)=1. \qquad (2.3.11)$$

Από την θεμελιώδη εξίσωση του Lundberg η οποία δίνεται από τη σχέση (1.8.2) όταν $\rho(y)=\beta e^{-\beta y}$ η οποία μπορεί να τροποποιηθεί σε

$$\frac{\beta}{\beta+s}\hat{k}(\delta-cs)=1, \qquad (2.3.12)$$

και συγκρίνοντας τις σχέσεις (2.3.11) και (2.3.12) , σημειώνουμε ότι $s=-\kappa_\delta$ είναι η μοναδική και θετική ρίζα της θεμελιώδης εξίσωσης του Lundberg .

Σημειώνουμε ότι επειδή κάναμε προηγουμένως αλλαγής μεταβλητής τα αποτελέσματα που προκύπτουν επομένως είναι ότι υπάρχει μια μοναδική πραγματική ρίζα $x=\phi_\delta \in (0,1)$ στη (2.3.9) και μιας και ισχύει $\beta(1-\hat{k}(\delta))<\kappa_\delta<\beta$, τότε $0<\phi_\delta<\hat{k}(\delta)$. ■

Επιπροσθέτως , πρέπει να επισημάνουμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας του κλιμακωτού ύψους δίνεται από :

$$f_\delta(y)=\frac{1}{\varphi_\delta}\int_0^\infty h_{\delta,12}(x,y|0)dx\ ,\ y>0\ ,\ 0<\varphi_\delta<1 \qquad (2.3.13)$$

και χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.2.8) , μπορούμε να εκφράσουμε την παραπάνω σχέση ως εξής

$$f_\delta(y)=\int_0^\infty p_x(y)\left\{\frac{h_{\delta,1}(x|0)}{\phi_\delta}\right\}dx, \qquad (2.3.14)$$

συνεπώς από την (2.3.5) και (2.3.13) προκύπτει ότι η $m_{\delta,12}(u)$ μπορεί να γραφτεί ως μία ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση της μορφής

$$m_{\delta,12}(u)=\varphi_\delta\int_0^u m_{\delta,12}(u-y)\,f_\delta(y)\,dy+v_{\delta,12}(u) \qquad (2.3.15)$$

όπου $$v_{\delta,12}(u)=\int_u^\infty\int_0^\infty w_{12}(u+x,y-u)\,h_{\delta,12}(x,y|0)\,dx\,dy. \qquad (2.3.16)$$

Υπενθυμίζουμε από τις εισαγωγικές έννοιες (1.10.6) ότι η γενική λύση της $m_{\delta,12}(u)$ μπορεί να εκφραστεί ως :

$$m_{\delta,12}(u)=v_{\delta,12}(u)+\frac{1}{1-\phi_\delta}\int_0^u v_{\delta,12}(y)\,g_\delta(u-y)dy, \qquad (2.3.17)$$

όπου

$$g_{\delta}(u) = -\overline{G}_{\delta}'(u) = \sum_{n=1}^{\infty}(1-\phi_{\delta})(\phi_{\delta})^{n} \; f_{\delta}^{*n}(u) \quad , \qquad (2.3.18)$$

είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μιας σχετιζόμενης σύνθετης γεωμετρικής τυχαίων μεταβλητών για $u > 0$ όπου η σταθερά ϕ_{δ} ορίζεται στη σχέση (2.3.6) και $f_{\delta}^{*n}(y)$ είναι η n-οστή συνέλιξη της $f_{\delta}(y)$ η οποία ορίζεται στη σχέση (2.3.13).

Είμαστε σε θέση να απλοποιήσουμε τη $m_{\delta,12}(u)$ παίρνοντας ειδικές περιπτώσεις για τη συνάρτηση ποινής $w_{12}(x, y)$.

Για παράδειγμα αν $w_{12}(x, y) = w_{2}(y)$, τότε η σχέση (2.3.15) απλοποιείται σε

$$m_{\delta,2}(u) = \phi_{\delta}\int_{0}^{u} m_{\delta,2}(u-y) \; f_{\delta}(y)\, dy + v_{\delta,2}(u) \; , \qquad (2.3.19)$$

όπου χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.3.16) και (2.3.13)

$$v_{\delta,2}(u) = \int_{u}^{\infty}\int_{0}^{\infty} w_{2}(y-u)\, h_{\delta,12}(x, y\,|\,0)\, dx\, dy$$

$$= \phi_{\delta}\int_{u}^{\infty} w_{2}(y-u)\; f_{\delta}(y)\, dy \quad , \qquad (2.3.20)$$

η οποία είναι μια πολύ αξιοσημείωτη απλοποίηση διότι σε αντίθεση με $v_{\delta,12}(u)$, η $v_{\delta,2}(u)$ είναι μια συνάρτηση της ϕ_{δ} και του κλιμακωτού ύψους $f_{\delta}(y)$ και δεν εξαρτάται από το $h_{\delta,12}(x, y\,|\,0)$.

Επίσης, χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.3.17) , η γενική λύση της $m_{\delta,12}(u)$ απλοποιείται σε

$$m_{\delta,2}(u) = v_{\delta,2}(u) + \frac{1}{1-\phi_{\delta}}\int_{0}^{u} v_{\delta,2}(y)\, g_{\delta}(u-y)\, dy \qquad (2.3.21)$$

όπου η $g_{\delta}(y)$ δίνεται από τη σχέση (2.3.18).

Έπειτα θεωρούμε ότι $w_{12}(x, y) = w_{2}(y) = 1$. Τότε $m_{\delta,12}(u) = \mathrm{E}[\, e^{-\delta T} \; I(T<\infty)\,|\,U(0)=0\,]$ και χρησιμοποιώντας τη (2.3.20) , η $v_{\delta,2}(u)$ απλοποιείται σε $\phi_{\delta}\overline{F}_{\delta}(u)$ όπου $\overline{F}_{\delta}(u) = \int_{u}^{\infty} f_{\delta}(y)dy$.

Επομένως από τις εισαγωγικές έννοιες (1.10.8) προκύπτει ότι η $m_{\delta,12}(u)$ δίνεται από την ουρά της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής

$$\overline{G}_{\delta}(u) = \sum_{n=1}^{\infty} (1-\phi_{\delta})(\phi_{\delta})^{n}\, \overline{F}_{\delta}^{*n}(u),$$

όπου $\overline{F}_{\delta}^{*n}(u) = \int_{u}^{\infty} f_{\delta}^{*n}(y)dy$. Έτσι η (2.3.16) απλοποιείται σε

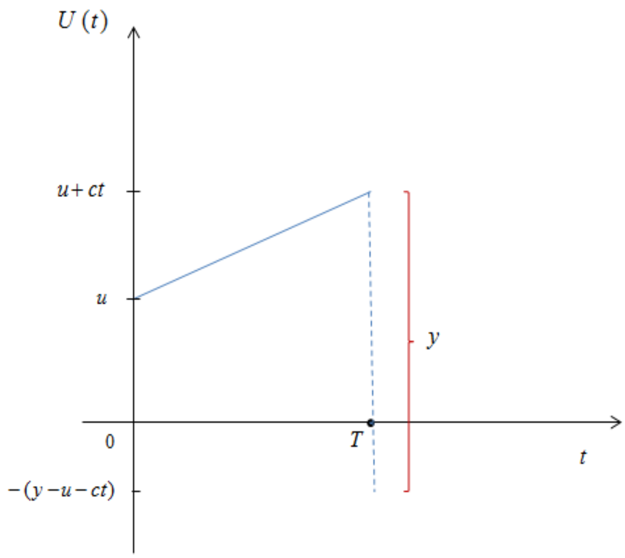
$$\overline{G}_{\delta}(u) = \phi_{\delta} \int_{0}^{u} \overline{G}_{\delta}(u-y)\, f_{\delta}(y)dy + \phi\, \overline{F}_{\delta}(u) \quad . \qquad (2.3.22)$$

Συμπεραίνουμε ότι $\overline{G}_{\delta}(u) = \mathrm{E}[\, e^{-\delta T}\ I(T<\infty) \,|\, U(0)=0\,]$, για $\delta = 0$, $\overline{G}_{0}(u) = \psi(u)$. Επιπλέον $\phi_{\delta} = \mathrm{E}[\, e^{-\delta T}\ I(T<\infty) \,|\, U(0)=0\,] = \overline{G}_{\delta}(0)$.

2.4 Η μελέτη του χρόνου και του μεγέθους της πρώτης απαίτησης

<u>Περίπτωση 1</u> : Στην πρώτη απαίτηση συμβαίνει η χρεοκοπία.

Στην περίπτωση που η χρεοκοπία συμβαίνει στην πρώτη απαίτηση , θεωρούμε ότι το αρχικό αποθεματικό είναι u και ότι το πλεόνασμα ακριβώς πριν συμβεί η χρεοκοπία είναι ύψους $u+ct$. Επιπλέον για να είναι βέβαιη η χρεοκοπία θεωρούμε ότι το ύψος της πρώτης απαίτησης y πρέπει να πέσει κάτω από τον οριζόντιο άξονα , δηλαδή να πάρει αρνητική τιμή τη χρονική στιγμή t . Επισημαίνουμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας ώστε να συμβεί η πρώτη απαίτηση ύψους y είναι $p(y)\, k(t)$.



Σχήμα 2.7 : Μελέτη του μεγέθους της πρώτης απαίτησης που οδηγεί σε χρεοκοπία.

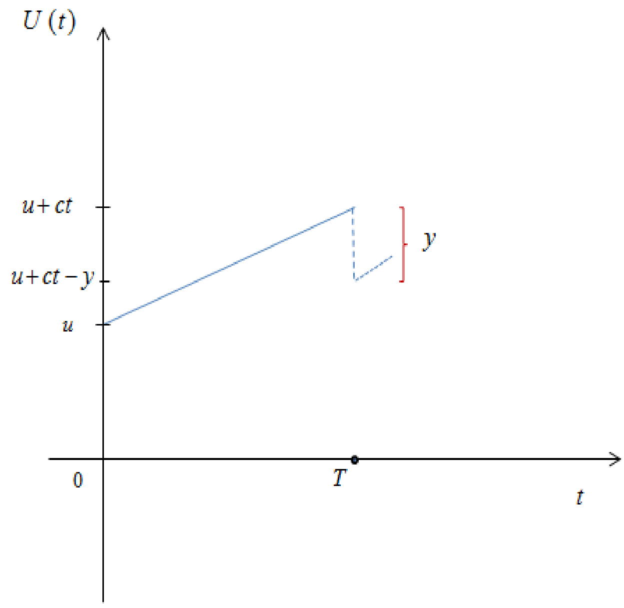
Συνεπώς ομοίως από τον ορισμό της μέσης τιμής καταλήγουμε στο εξής αποτέλεσμα (για λόγους διευκόλυνσης θα ορίσουμε σε αυτή την περίπτωση το $m_{\delta,12}(u)$ ως $\beta_{\delta,12}(u)$) :

$$\beta_{\delta,12}(u) = \int_0^{\infty} \int_{u+ct}^{\infty} e^{-\delta t} w_{12}(u+ct\ , y-u-ct)\, p(y)\, k(t)\, dy\, dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \alpha_{12}(u+ct)\, k(t)\, dt\,. \tag{2.4.1}$$

<u>Περίπτωση 2</u> : Στην πρώτη απαίτηση δεν συμβαίνει η χρεοκοπία.

Στην περίπτωση αυτή εξετάζουμε το ενδεχόμενο που η χρεοκοπία δεν συμβαίνει στην πρώτη απαίτηση. Θεωρούμε ότι το αρχικό αποθεματικό είναι u και ότι για να είναι βέβαιο ότι δεν θα συμβεί η χρεοκοπία, πρέπει το ύψος της πρώτης απαίτησης y να είναι λιγότερο από $u+ct$ ώστε να παίρνει μόνο θετικές τιμές τη χρονική στιγμή t. Επισημαίνουμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας ώστε να συμβεί η πρώτη απαίτηση ύψους y είναι $p(y)\,k(t)$ και ότι η διαδικασία ανανεώνεται με αρχικό αποθεματικό $u+ct-y$ αφού ξεπεράσει τη χρονική στιγμή t.



Σχήμα 2.8 : Μελέτη μεγέθους της πρώτης απαίτησης που δεν οδηγεί σε χρεοκοπία.

Ομοίως η $m_{\delta,12}(u)$ δίνεται από :

$$m_{\delta,12}(u) = \int_0^{\infty}\int_0^{u+ct} e^{-\delta t}\, m_{\delta,12}(u+ct-y)\, p(y)\, k(t)\, dy\, dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\delta t}\, \sigma_{\delta,12}(u+ct)\, k(t)\, dt \quad . \tag{2.4.2}$$

Σημειώνουμε ότι $\sigma_{\delta,12}(x)$ είναι συνέλιξη της $m_{\delta,12}(u)$ και $p(y)$, ο μετασχηματισμός Laplace δίνεται από

$$\hat{\sigma}_{\delta,12}(s) = \hat{m}_{\delta,12}(s)\, \hat{p}(s)\,. \tag{2.4.3}$$

Συνοψίζοντας τις παραπάνω σχέσεις που προκύπτουν (2.4.1) και (2.4.2) του $m_{\delta,12}(u)$ για κάθε μία από τις δύο περιπτώσεις παίρνουμε την παρακάτω μορφή:

$$m_{\delta,12}(u) = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \sigma_{\delta,12}(u+ct)\, k(t)\, dt + \beta_{\delta,12}(u)\,. \tag{2.4.4}$$

Σημειώνουμε ότι ο πρώτος όρος στο δεξιό μέλος της (2.4.4) είναι από τον τύπο (1.9.1) από τις εισαγωγικές έννοιες με το $w_t(x)$ να αντικαταστάθηκε με $\sigma_{\delta,12}(x)$, και έτσι η $\sigma_{\delta,12}(x)$ δεν είναι συναρτήσει του t , χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1.9.4) και (2.4.3), ο μετασχηματισμός Laplace δίνεται παρακάτω :

$$\int_0^{\infty} e^{-s u} \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \sigma_{\delta,12}(u+ct)\; k(t)\, dt\, du \tag{2.4.5}$$

$$= \hat{\sigma}_{\delta,12}(s)\; \hat{k}(\delta - cs) - \hat{\sigma}^{*}_{\delta,12}(\delta - cs) \tag{2.4.6}$$

$$= \hat{m}_{\delta,12}(s)\; \hat{p}(s)\; \hat{k}(\delta - cs) - \hat{\sigma}^{*}_{\delta,12}(\delta - cs)$$

όπου $$\hat{\sigma}^{*}_{\delta,12}(s) = \int_0^{\infty}\int_0^{ct} e^{-\frac{1}{c}\{\delta x + s(ct - x)\}}\, \sigma_{\delta,12}(x)\, k(t)\, dx\, dt \;. \tag{2.4.7}$$

Επιπλέον , ο μετασχηματισμός Laplace της (2.4.4) δίνεται από:

$$\hat{m}_{\delta,12}(s) = \hat{m}_{\delta,12}(s)\, \hat{p}(s)\, \hat{k}(\delta - cs) - \hat{\sigma}^{*}_{\delta,12}(\delta - cs) + \hat{\beta}_{\delta,12}(s) \;,$$

και λύνοντας ως προς $\hat{m}_{\delta,12}(s)$ παίρνουμε ,

$$\hat{m}_{\delta,12}(s)\,(1 - \hat{p}(s)\,\hat{k}(\delta - cs)) = \hat{\beta}_{\delta,12}(s) - \hat{\sigma}^{*}_{\delta,12}(\delta - cs)\,. \tag{2.4.8}$$

Θέτοντας το δεξιό μέλος μηδέν προκύπτει ότι

$$\hat{\sigma}^{*}_{\delta,12}(\delta - c\rho_{\delta}) = \hat{\beta}_{\delta,12}(\rho_{\delta})\,. \tag{2.4.9}$$

Σημειώνουμε ότι ο συντελεστής του $\hat{m}_{\delta,12}(s)$ είναι ίσος με 0 όταν $s = \rho_{\delta}$, όπου ρ_{δ} είναι η ρίζα της θεμελιώδης εξίσωσης του Lundberg η οποία δίνεται στις εισαγωγικές έννοιες (1.8.2).

2.5 Εφαρμογή 1: Το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου

Το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου χαρακτηρίζεται από ένα ανανεωτικό μοντέλο στο οποίο η πυκνότητα του μεγέθους των απαιτήσεων $p(y)$ υποθέτουμε ότι ακολουθεί οποιαδήποτε κατανομή ενώ η πυκνότητα των ενδιάμεσων χρόνων ακολουθεί την εκθετική κατανομή. [Willmot ,G.E. (2011)]. Συνεπώς θεωρούμε ότι $k(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ η οποία κατανομή έχει μετασχηματισμό Laplace $\hat{k}(s) = \dfrac{\lambda}{\lambda + s}$ και κάνοντας χρήση της σχέσης (2.4.7) προκύπτει ότι

$$\hat{\sigma}^{*}_{\delta,12}(s) = \int_0^{\infty}\int_0^{ct} e^{-\frac{1}{c}\{\delta x + s(ct - x)\}}\, \sigma_{\delta,12}(x)\, \lambda e^{-\lambda t}\, dx\, dt \tag{2.5.1}$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{c}(\delta - s)x}\, \sigma_{\delta,12}(x) \left(\int_{\frac{x}{c}}^{\infty} \lambda\, e^{-(\lambda + s)t}\, dt \right) dx$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{c}(\delta - s)x}\, \sigma_{\delta,12}(x)\, \frac{\lambda}{\lambda + s}\, e^{-\frac{1}{c}(\lambda + s)x}\, dx$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda + s} \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{\lambda + \delta}{c}\right)x}\, \sigma_{\delta,12}(x)\, dx$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda + s} \hat{\sigma}_{\delta,12}\left(\frac{\lambda + \delta}{c}\right). \qquad (2.5.2)$$

Συνεπώς η (2.4.8) γίνεται

$$\left(1 - \hat{p}(s)\frac{\lambda}{\lambda + \delta - cs}\right)\hat{m}_{\delta,12}(s) = \hat{\beta}_{\delta,12}(s) - \frac{\lambda}{\lambda + \delta - cs}\hat{\sigma}_{\delta,12}\left(\frac{\lambda + \delta}{c}\right). \qquad (2.5.3)$$

Έπειτα από (2.4.9) και κάνοντας χρήση τη (2.5.2) , προκύπτει ότι (βλ. Θεώρημα 1.1)

$$\frac{\lambda}{\lambda + \delta - c\rho_\delta}\hat{\sigma}_{\delta,12}\left(\frac{\lambda + \delta}{c}\right) = \hat{\beta}_{\delta,12}(\rho_\delta),$$

όπου ρ_δ είναι η μοναδική θετική ρίζα της θεμελιώδης εξίσωσης του Lundberg και λύνοντας ως προς $\hat{\sigma}_{\delta,12}\left(\frac{\lambda + \delta}{\lambda}\right)$ παίρνουμε ,

$$\hat{\sigma}_{\delta,12}\left(\frac{\lambda + \delta}{\lambda}\right) = \frac{\lambda + \delta - c\rho_\delta}{\lambda}\hat{\beta}_{\delta,12}(\rho_\delta),$$

και κάνοντας αντικατάσταση στη (2.5.3) προκύπτει

$$\left(1 - \hat{\rho}(s)\frac{\lambda}{\lambda + \delta - cs}\right)\hat{m}_{\delta,12}(s) = \hat{\beta}_{\delta,12}(s) - \frac{\lambda + \delta - c\rho_\delta}{\lambda + \delta - cs}\hat{\beta}_{\delta,12}(\rho_\delta),$$

και πολλαπλασιάζοντας και τις δύο πλευρές με τον όρο $-\left(\frac{\lambda + \delta - cs}{c}\right)$, προκύπτει

$$\left(s - \frac{\lambda + \delta}{c} + \frac{\lambda}{c}\hat{\rho}(s)\right)\hat{m}_{\delta,12}(s) = \frac{1}{c}\Big((\lambda + \delta - c\rho_\delta)\hat{\beta}_{\delta,12}(\rho_\delta) - (\lambda + \delta - cs)\hat{\beta}_{\delta,12}(s)\Big). \qquad (2.5.6)$$

Χρησιμοποιώντας τη (2.4.1) , ο μετασχηματισμός Laplace της $\beta_{\delta,12}(u)$ δίνεται από

$$\hat{\beta}_{\delta,12}(s) = \int_0^\infty e^{-su}\int_0^\infty e^{-\delta t}\alpha_{12}(u + ct)\,\lambda e^{-\lambda t}\,dt\,du,$$

και όπως παρατηρούμε η μορφή που προκύπτει είναι ίδια με τη σχέση (2.4.5) με το $\sigma_{\delta,12}(x)$ να έχει αντικατασταθεί με το $\alpha_{12}(x)$ και το $k(t)$ να έχει αντικατασταθεί με το $\lambda e^{-\lambda t}$. Έπειτα χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.4.6) και (2.4.7) , προκύπτει ότι

$$\hat{\beta}_{\delta,12}(s) = \hat{\alpha}_{12}(s)\frac{\lambda}{\lambda + \delta - cs} - \hat{\alpha}^*_{\delta,12}(\delta - cs), \qquad (2.5.7)$$

όπου $$\hat{\alpha}^*_{\delta,12}(s) = \int_0^\infty\int_0^{ct} e^{-\frac{1}{c}\{\delta x + s(ct - x)\}}\alpha_{12}(x)\,\lambda e^{-\lambda t}\,dx\,dt,$$

το οποίο έχει ίδια μορφή όπως η (2.5.1) με το $\sigma_{\delta,12}(x)$ να έχει αντικατασταθεί με το $\alpha_{12}(x)$ και έτσι να προκύπτει ότι

$$\hat{\alpha}^{*}_{\delta,12}(s) = \frac{\lambda}{\lambda+s}\hat{\alpha}_{12}\left(\frac{\lambda+\delta}{c}\right).$$

Επομένως , χρησιμοποιώντας τη (2.5.7) , προκύπτει

$$\hat{\beta}_{\delta,12}(s) = \frac{\lambda}{\lambda+\delta-cs}\left(\hat{\alpha}_{12}(s) - \hat{\alpha}_{12}\left(\frac{\lambda+\delta}{c}\right)\right),$$

ή ισοδύναμα,

$$(\lambda+\delta-cs)\hat{\beta}_{\delta,12}(s) = \lambda\left(\hat{\alpha}_{12}(s) - \hat{\alpha}_{12}\left(\frac{\lambda+\delta}{c}\right)\right),$$

και έτσι η δεξιά πλευρά της (2.5.6) δίνεται από

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{c}\Big((\lambda+\delta-c\rho_{\delta})\hat{\beta}_{\delta,12}(\rho_{\delta}) - (\lambda+\delta-cs)\hat{\beta}_{\delta,12}(s)\Big)\\
&= \frac{\lambda}{c}\left(\hat{\alpha}_{12}(\rho_{\delta}) - \hat{\alpha}_{12}\left(\frac{\lambda+\delta}{c}\right) - \hat{\alpha}_{12}(s) + \hat{\alpha}_{12}\left(\frac{\lambda+\delta}{c}\right)\right)\\
&= \frac{\lambda}{c}\big(\hat{\alpha}_{12}(\rho_{\delta}) - \hat{\alpha}_{12}(s)\big). \qquad (2.5.8)
\end{aligned}$$

Θεωρούμε ότι η θεμελιώδης εξίσωση του Lundberg η οποία δίνεται από τη σχέση (2.5.4) με $s=\rho_{\delta}$ η οποία μπορεί να λυθεί ως προς $\frac{\lambda+\delta}{c} = \rho_{\delta} + \frac{\lambda}{c}\hat{p}(\rho_{\delta})$ έτσι ώστε ο συντελεστής της $\hat{m}_{\delta,12}(s)$ στη (2.5.6) να γραφτεί ως

$$\begin{aligned}
s - \frac{\lambda+\delta}{c} + \frac{\lambda}{c}\hat{p}(s) &= s - \rho_{\delta} - \frac{\lambda}{c}\hat{p}(\rho_{\delta}) + \frac{\lambda}{c}\hat{p}(s)\\
&= (s-\rho_{\delta})\left(1 - \frac{\lambda}{c}\frac{\hat{p}(\rho_{\delta}) - \hat{p}(s)}{s-\rho_{\delta}}\right)\\
&= (s-\rho_{\delta})\left(1 - \left\{\frac{\lambda}{c}\frac{1-\hat{p}(\rho_{\delta})}{\rho_{\delta}}\right\}\left\{\frac{\rho_{\delta}}{s-\rho_{\delta}}\frac{\hat{p}(\rho_{\delta}) - \hat{p}(s)}{1-\hat{p}(\rho_{\delta})}\right\}\right). \qquad (2.5.9)
\end{aligned}$$

Έπειτα,

$$\phi_{\delta} = \frac{\lambda}{c}\frac{1-\hat{p}(\rho_{\delta})}{\rho_{\delta}}$$

$$= \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty e^{-\rho_\delta y} \, \overline{P}(y) \, dy \quad , \tag{2.5.10}$$

και επειδή ισχύει ότι $E[Y] = \int_0^\infty \overline{P}(y)\,dy$, γνωρίζουμε ότι $E[Y] > \int_0^\infty e^{-\rho_\delta y} \, \overline{P}(y)\,dy$, οπότε $\phi_\delta < \frac{\lambda}{c} E[Y]$ η οποία ποσότητα είναι μικρότερη του 1 καθώς ισχύει η συνθήκη του καθαρού κέρδους (2.1.2) . Επίσης ισχύει

$$\hat{f}_\delta(s) = \frac{\rho_\delta}{s - \rho_\delta} \frac{\hat{p}(\rho_\delta) - \hat{p}(s)}{1 - \hat{p}(\rho_\delta)} ,$$

την οποία σχέση χρησιμοποιήσαμε στις εισαγωγικές έννοιες (1.7.6) και είναι ο μετασχηματισμός Laplace της γενικευμένης κατανομής ισορροπίας της $p(y)$. Επομένως , χρησιμοποιώντας τη (1.7.5) , προκύπτει ότι

$$f_\delta(y) = \frac{e^{\rho_\delta y} \int_y^\infty e^{-\rho_\delta x} \, p(x) dx}{\int_0^\infty e^{-\rho_\delta x} \, \overline{P}(x) dx} \; . \tag{2.5.11}$$

Επισημαίνουμε ότι για $\delta = 0$, τότε $\rho_0 = 0$ και $f_0(y) = \overline{P}(y) / E[Y]$ η οποία είναι η κατανομή ισορροπίας της $p(y)$. Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.5.9) προκύπτει

$$s - \frac{\lambda + \delta}{c} + \frac{\lambda}{c} \hat{p}(s) = (s - \rho_\delta)(1 - \phi_\delta \hat{f}_\delta(s)) \; , \tag{2.5.12}$$

και κάνοντας χρήση των σχέσεων (2.5.8) και (2.5.6) παίρνουμε ότι

$$(s - \rho_\delta)(1 - \phi_\delta \hat{f}_\delta(s)) \hat{m}_{\delta,12}(s) = \frac{\lambda}{c} (\hat{\alpha}_{12}(\rho_\delta) - \hat{\alpha}_{12}(s)) \; ,$$

και λύνοντας ως προς $\hat{m}_{\delta,12}(s)$

$$\hat{m}_{\delta,12}(s) = \phi_\delta \, \hat{m}_{\delta,12}(s) \, \hat{f}_\delta(s) + \frac{\lambda}{c} \frac{\hat{\alpha}_{12}(\rho_\delta) - \hat{\alpha}_{12}(s)}{s - \rho_\delta} .$$

Χρησιμοποιώντας τη (1.7.3) , παίρνοντας την αντιστροφή του μετασχηματισμού προκύπτει ότι

$$m_{\delta,12}(u) = \phi_\delta \int_0^u m_{\delta,12}(u - y) \, f_\delta(y) \, dy + \frac{\lambda}{c} T_{\rho_\delta} \alpha_{12}(u) \; ,$$

η οποία είναι μία ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση που ικανοποιεί τη $m_{\delta,12}(u)$ και έτσι χρησιμοποιώντας τη (2.3.17) , η γενική της λύση δίνεται από

$$m_{\delta,12}(u) = \frac{\lambda}{c} T_{\rho_\delta}\, \alpha_{12}(u) + \frac{1}{1-\phi_\delta} \int_0^u \frac{\lambda}{c} T_{\rho_\delta}\, \alpha_{12}(y) g_\delta(u-y)\, dy \,,$$

όπου

$$g_\delta(y) = \sum_{n=1}^{\infty} (1-\phi_\delta)(\phi_\delta)^n\, f_\delta^{*n}(y) \ . \tag{2.5.13}$$

Με ϕ_δ και $f_\delta(y)$ να δίνονται από τις σχέσεις (2.5.10) και (2.5.11) . Πρέπει να επισημάνουμε ότι όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι κατανέμονται εκθετικά , χρειαζόμαστε μόνο τα αποτελέσματα από τη μελέτη του χρόνου και του μεγέθους της πρώτης απαίτησης ώστε να λύσουμε ως προς $m_{\delta,12}(u)$. Θα ασχοληθούμε με το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου στην παράγραφο 4.6 όπου θα μελετήσουμε τη γενικευμένη μορφή της συνάρτησης των Gerber – Shiu .

2.6 Εφαρμογή 2: Το μέγεθος των απαιτήσεων ακολουθεί την εκθετική κατανομή

Στη συγκεκριμένη εφαρμογή θεωρούμε το μέγεθος των απαιτήσεων ακολουθεί την εκθετική κατανομή και η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων μια οποιαδήποτε τυχαία κατανομή $k(t)$. [Willmot , G.E. (2011)].

Θεωρούμε ότι $p(y) = \beta e^{-\beta y}$ όπου $\hat{p}(s) = \dfrac{\beta}{\beta + s}$ και η κατανομή απώλειας δίνεται από

$$p_x(y) = \frac{p(x+y)}{\overline{P}(x)} = \frac{\beta e^{-\beta(x+y)}}{e^{-\beta x}} = \beta e^{-\beta y} \ . \tag{2.6.1}$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.3.14) και (2.3.7) , το κλιμακωτό ύψος δίνεται από

$$\begin{aligned} f_\delta(y) &= \int_0^\infty \beta e^{-\beta y} \left\{ \frac{h_{\delta,1}(x|0)}{\phi_\delta} \right\} dx \\ &= \beta e^{-\beta y} \int_0^\infty \left\{ \frac{h_{\delta,1}(x|0)}{\phi_\delta} \right\} dx \\ &= \beta e^{-\beta y} \ , \end{aligned} \tag{2.6.2}$$

το οποίο επίσης κατανέμεται εκθετικά.

Υπενθυμίζουμε πως όταν $w_{12}(x,y) = 1$, το $m_{\delta,12}(u)$ δίνεται από $\overline{G}_\delta(u)$ η οποία είναι η ουρά μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής , με τη βοήθεια των σχέσεων (2.3.22) και (2.6.2) ικανοποιεί

$$\overline{G}_\delta(u)=\phi_\delta\int_0^u \overline{G}_\delta(u-y)\,\beta\, e^{-\beta\, y}\,dy+\phi_\delta\, e^{-\beta\, u}\quad . \tag{2.6.3}$$

Παίρνοντας το μετασχηματισμό Laplace ,

$$\hat{\overline{G}}_\delta(s)=\phi_\delta\,\hat{\overline{G}}_\delta(s)\,\frac{\beta}{\beta+s}+\frac{\phi_\delta}{\beta+s}\ ,$$

λύνοντας ως προς

$$\hat{\overline{G}}_\delta(s)=\frac{\phi_\delta}{\beta(1-\phi_\delta)+s}\ ,$$

και κάνοντας αντιστροφή μετασχηματισμού

$$\overline{G}\ _\delta(u)=\phi_\delta\, e^{-\beta\,(1-\phi_\delta)\,u}\quad . \tag{2.6.4}$$

Για να υπολογίσουμε το ϕ_δ , θα χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση της $m\ _{\delta,12}(u)$ που δίνεται από τη σχέση (2.4.4) στην οποία καταλήξαμε μελετώντας το χρόνο και το μέγεθος της πρώτης απαίτησης. Θεωρώντας ότι $w_{12}(\,x\,,\,y)=1$ τέτοιο ώστε το $m\ _{\delta,12}(u)$ να δίνεται από τη $\overline{G}_\delta(u)$, τότε το $\sigma\ _{\delta,12}(u+ct)$ στη σχέση (2.4.2) για $x=u+ct$ γίνεται

$$\sigma\ _{\delta,12}(x)=\int_0^x \overline{G}_\delta(x-y)\,\beta\, e^{-\beta\, y}\ dy\ ,$$

και το $\alpha\ _{12}(u+ct)$ για $x=u+ct$ στη (2.4.1) γίνεται

$$\alpha\ _{12}(x)=\int_x^\infty \beta\, e^{-\beta\, y}\,dy=e^{-\beta\, x}\quad .$$

Επιπροσθέτως , χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.4.4) και (2.4.1) καταλήγουμε ότι

$$\overline{G}_\delta(u)=\int_0^\infty e^{-\delta\, t}\left\{\int_0^{u+ct}\overline{G}_\delta(u+ct-y)\,\beta\, e^{-\beta\, y}\ dy+e^{-x\,(u+ct)}\right\}k(t)\,dt\quad . \tag{2.6.5}$$

Από τη σχέση (2.6.3), αντικαθιστώντας το u με $u+ct$ και διαιρώντας και τις δύο πλευρές της εξίσωσης με ϕ_δ προκύπτει

$$\int_0^{u+ct}\overline{G}_\delta(u+ct-y)\,\beta\, e^{-\beta\, y}\ dy+e^{-\beta\,(u+ct)}\ =\frac{\overline{G}_\delta(u+ct)}{\phi_\delta}\quad . \tag{2.6.6}$$

Κάνοντας αντικατάσταση της σχέσης (2.6.6) στη (2.6.5) έχουμε ως αποτέλεσμα ότι

$$\phi_\delta \, \overline{G}_\delta(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t} \, \overline{G}_\delta(u+ct)\, k(t)\, dt , \tag{2.6.7}$$

και διαιρώντας με $\overline{G}_\delta(u)$ και τα δύο μέλη προκύπτει ότι η ϕ_δ ικανοποιεί

$$\phi_\delta = \hat{k}\,(\delta + c\beta(1-\phi_\delta)) . \tag{2.6.8}$$

Υπενθυμίζουμε από τη (2.3.8) ότι $0 < \phi_\delta < 1$.

Χρησιμοποιώντας τη (2.3.15) , η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση της $m_{\delta,12}(u)$ όταν τα μεγέθη των απαιτήσεων είναι εκθετικά κατανεμημένα (βλ. Θεώρημα 2.1) δίνεται από

$$m_{\delta,12}(u) = \phi_\delta \int_0^u m_{\delta,12}(u-y)\, \beta\, e^{-\beta y}\, dy + v_{\delta,12}(u) , \tag{2.6.9}$$

όπου από τις σχέσεις (2.3.16) και (2.2.8)

$$v_{\delta,12}(u) = \int_0^\infty \beta\, e^{-\beta y} \int_0^\infty w_{12}(u+x, y-u)\, h_{\delta,1}(x\,|\,0)\, dx\, dy .$$

Επιπλέον η γενική λύση της $m_{\delta,12}(u)$ δίνεται από

$$m_{\delta,12}(u) = v_{\delta,12}(u) + \frac{1}{1-\phi_\delta} \int_0^u v_{\delta,12}(y)\, g_\delta(u-y)\, dy ,$$

όπου από τη (2.6.4) , $g_\delta(u) = -\, \overline{G}'_\delta(u) = \beta\, \phi_\delta\, (1-\phi_\delta)\, e^{-\beta(1-\phi_\delta)u}$.

Στην παράγραφο 4.7 θα εξετάσουμε ξανά την υπόθεση ότι τα μεγέθη των απαιτήσεων είναι εκθετικά κατανεμημένα όμως για τη γενικευμένη μορφή της συνάρτησης των Gerber – Shiu.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : Ένα μη – ανανεωτικό μοντέλο με υστέρηση και η κλασσική συνάρτηση των Gerber – Shiu

3.1 Εισαγωγή

Στην παράγραφο αυτή θα αναλύσουμε ένα μη- ανανεωτικό μοντέλο με υστέρηση το οποίο όπως θα παρατηρήσουμε είναι ένα μοντέλο περισσότερο κατάλληλο για παραγματικές συνθήκες. Στο προηγούμενο κεφάλαιο μελετήσαμε το μοντέλο του Sparre Andersen στο οποίο υποθέτουμε ότι οι απαιτήσεις συμβαίνουν τη χρονική στιγμή $t=0$ και επομένως οι κατανομές των ενδιάμεσων χρόνων είναι ισόνομες. Ωστόσο το χαρτοφυλάκιο της ασφαλιστικής εταιρίας μπορεί να υπάρχει πριν αρχίσουμε να το παρατηρούμε τη χρονική στιγμή $t=0$ και συνεπώς ο πρώτος ενδιάμεσος χρόνος V_1 ακολουθεί διαφορετική κατανομή από τους υπόλοιπους διαδοχικούς ενδιάμεσους χρόνους $\{V_2, V_3, \dots\}$.

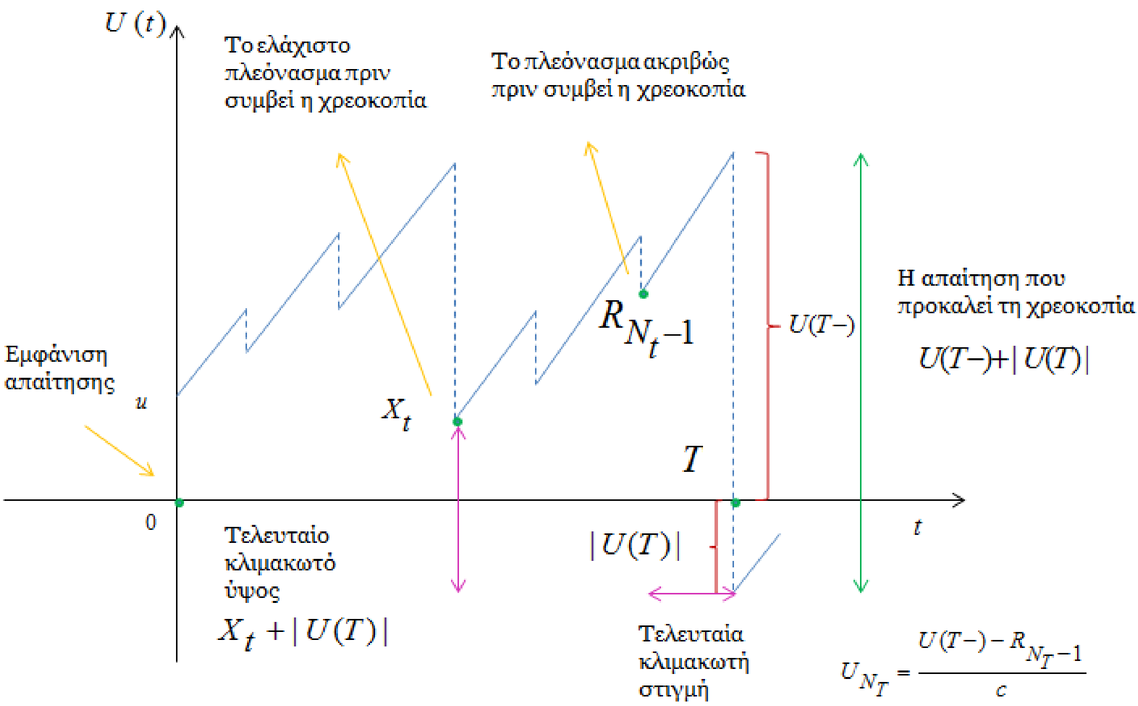
Συγκεκριμένα στο μη- ανανεωτικό μοντέλο θεωρούμε ότι η V_1 ακολουθεί μια διαφορετική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας την οποία ορίζουμε ως $k_d(t)$ έναντι της πυκνότητας $k(t)$ η οποία ακολουθείται από τις τυχαίες μεταβλητές $\{V_2, V_3, \dots\}$. Παρατηρούμε λοιπόν ότι το μη-ανανεωτικό μοντέλο είναι πανομοιότυπο με το ανανεωτικό καθώς οι τυχαίες μεταβλητές $\{V_2, V_3, \dots\}$ παραμένουν ακόμη ανεξάρτητα και ισόνομα κατανεμημένες θετικά με συνάρτηση πυκνότητας $k(t)$ και η τ.μ V_1 είναι ανεξάρτητη των $\{V_2, V_3, \dots\}$, με τη μόνη διαφορά πως η V_1 έχει πλέον συνάρτηση πυκνότητας $k_d(t)$.

Στο μη-ανανεωτικό μοντέλο η συνάρτηση των Gerber – Shiu ορίζεται ως εξής :

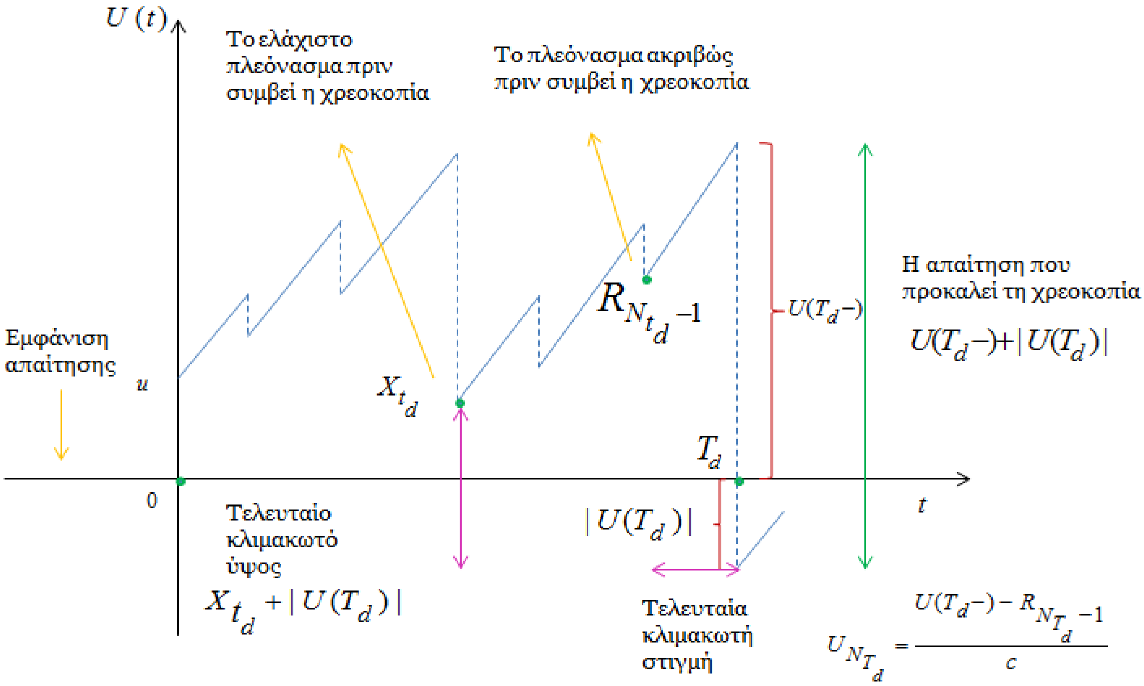
$$m_{\delta,12}^d(u) = E\,[e^{-\delta T_d}\, w(U(T_d-), |U(T_d)|)\, I(T_d < \infty) \,|\, U(0)=u]$$

όπου T_d ο χρόνος χρεοκοπίας, $U(T_d-)$ το πλεόνασμα πριν συμβεί η χρεοκοπία και $|U(T_d)|$ το έλλειμμα ακριβώς τη στιγμή της χρεοκοπίας . Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση ποινής είναι $w(x,y)=1$ επομένως προκύπτει ότι $m_{\delta,12}^d(u) = E\left\lfloor e^{-\delta T_d}\, I(T_d < \infty) \,|\, U(0)=u \right\rfloor$ ενώ για ένταση ανατοκισμού $\delta = 0$ προκύπτει η πιθανότητα χρεοκοπίας για το μη-ανανεωτικό μοντέλο με $\psi^d(u) = P_r(T_d < \infty \,|\, U(0)=u)$.

Στις παρακάτω γραφικές παραστάσεις απεικονίζονται οι τέσσερεις μεταβλητές της γενικευμένης μορφής της συνάρτησης ποινής καθώς και κάποιων ποσοτήτων που συνδέονται άμεσα , τόσο στο ανανεωτικό (Sparre Andersen model) όσο και στο μη- ανανεωτικό μοντέλο με υστέρηση .



Σχήμα 3.1: Η εμφάνιση χρεοκοπίας στο ανανεωτικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου.



Σχήμα 3.2 : Η εμφάνιση χρεοκοπίας στο μη- ανανεωτικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου.

$$m_{\delta,12}(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t}\,\sigma_{\delta,12}(u+ct)\,k(t)\,dt + \beta_{\delta,12}(u)$$

$$= \int_0^\infty e^{-\delta t}\left\{\sigma_{\delta,12}(u+ct) + a_{12}(u+ct)\right\}k(t)\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-\delta t}\,\gamma_\delta(u+ct)\,k(t)\,dt \qquad (3.1.1)$$

όπου $\gamma_\delta(x) = \sigma_{\delta,12}(x) + a_{12}(x)$. (3.1.2)

Δεδομένου ότι η το μοντέλο με υστέρηση επανέρχεται πίσω σε ένα συνηθισμένο μοντέλο μετά την εμφάνιση της πρώτης απαίτησης, χρειαζόμαστε μόνο να αντικαταστήσουμε το $k(t)$ με $k_d(t)$ στη (3.1.1) ώστε να πάρουμε μια σχέση για το $m^{d}_{\delta,12}(u)$ η οποία δίνεται από

$$m^{d}_{\delta,12}(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t}\,\gamma_\delta(u+ct)\,k_d(t)\,dt.$$

Κάνοντας αλλαγή μεταβλητών προκύπτει ότι

$$m^{d}_{\delta,12}(u) = \frac{1}{c}\int_u^\infty e^{-\delta\left(\frac{t-u}{c}\right)}\,\gamma_\delta(t)\,k_d\left(\frac{t-u}{c}\right)dt\ , \qquad (3.1.3)$$

ενώ παραγωγίζοντας ,

$$m'^{d}_{\delta,12}(u) = \frac{\delta}{c}\,m^{d}_{\delta,12}(u) - \frac{k_d(0)}{c}\,\gamma_\delta(u) - \frac{1}{c^2}\int_u^\infty e^{-\delta\left(\frac{t-u}{c}\right)}\,\gamma_\delta(t)\,k'_d\left(\frac{t-u}{c}\right)dt\ . \qquad (3.1.4)$$

3.2 Εφαρμογή 3 : $m_{\delta,12}^{d}(u)$ για μια ειδική κατηγορία $k_d(t)$

Θεωρούμε ότι $m_{\delta,12}^{d}(u)$, όταν η πυκνότητα του πρώτου ενδιάμεσου χρόνου $k_d(t)$ είναι ένας σταθμισμένος μέσος όρος της γενικευμένης πυκνότητας ισορροπίας $k(t)$ παρόμοια με (1.7.5), και μιας εκθετικής κατανομής [Willmot, GE (2004b)]. Δηλαδή,

$$k_d(t) = q\frac{e^{-r\,t}\int_t^{\infty} e^{r\,y}\,k(y)dy}{\int_0^{\infty} e^{r\,y}\,\overline{K}(y)dy} + (1-q)\,r\,e^{-r\,t} \qquad , t \geq 0 \tag{3.2.1}$$

όπου το r ικανοποιεί $\hat{k}(r) < \infty$ και αν $0 \leq q < 1$, τότε $r > 0$, και εάν το $q = 1$, τότε $-\infty < r < \infty$.

Επισημαίνουμε ότι όταν το $q = 1$ και $r = 0$, $k_d(t) = k_e(t)$ η ανανεωτική διαδικασία με υστέρηση γίνεται στατική διαδικασία. Επίσης, όταν το $q = 0$, $k_d(t)$ είναι μια εκθετική πυκνότητα.

Έπειτα χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.2.1) , μπορούμε να εκφράσουμε την $k_d(0)$ ως

$$k_d(0) = q\frac{1 + r\int_0^{\infty} e^{r\,y}\,\overline{K}(y)dy}{\int_0^{\infty} e^{r\,y}\,\overline{K}(y)dy} + (1-q)\,r$$

$$= r + \frac{q}{\int_0^{\infty} e^{r\,y}\,\overline{K}(y)dy} \ ,$$

τέτοιο ώστε $k_d(t)$ να γραφτεί ως

$$k_d(t) = (k_d(0) - r)\,e^{-r\,t}\int_t^{\infty} e^{r\,y}\,k(y)\,dy + (1-q)\,r\,e^{-r\,t} \ . \tag{3.2.2}$$

Έπειτα από παραγώγιση προκύπτει,

$$k_d'(t) = (r - k_d(0))\,k(t) - r\,k_d(t) \ , \tag{3.2.3}$$

ενώ από τη σχέση (3.1.4) θα ασχοληθούμε με τον όρο που εμπεριέχει το ολοκλήρωμα και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.2.3) , (3.1.1) και (3.1.3) προκύπτει ότι

$$\frac{1}{c^2}\int_u^{\infty} e^{-\delta(\frac{t-u}{c})}\,\gamma_\delta(t)\,k_d'(\frac{t-u}{c})\,dt$$

$$=\frac{1}{c^2}\int_u^{\infty} e^{-\delta\left(\frac{t-u}{c}\right)}\gamma_\delta(t)\left[(r-k_d(0))\,k\left(\frac{t-u}{c}\right)-r\,k_d\left(\frac{t-u}{c}\right)\right]dt$$

$$=\frac{(r-k_d(0))}{c}\,m_{\delta,12}(u)-\frac{r}{c}\,m^{d}_{\delta,12}(u)\ .$$

Έπειτα χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.1.2) , (3.1.4) προκύπτει

$$m'^{d}_{\delta,12}(u)=\frac{\delta}{c}\,m^{d}_{\delta,12}(u)-\frac{k_d(0)}{c}\,\gamma_\delta(u)-\frac{(r-k_d(0))}{c}\,m_{\delta,12}(u)+\frac{r}{c}\,m^{d}_{\delta,12}(u)$$

$$=\frac{r+\delta}{c}\,m^{d}_{\delta,12}(u)-\frac{r}{c}\,m_{\delta,12}(u)-\frac{k_d(0)}{c}\,\alpha_{12}(u)$$

$$+\frac{k_d(0)}{c}\Big(m_{\delta,12}(u)-\sigma_{\delta,12}(u)\Big)\ . \tag{3.2.4}$$

Θέλουμε να προσδιορίσουμε το μετασχηματισμό Laplace της (3.2.4). Αλλά πρώτα θα εξετάσουμε το μετασχηματισμό Laplace του τελευταίου όρου της σχέσης και χρησιμοποιώντας (2.4.3), προκύπτει ότι

$$\frac{k_d(0)}{c}\Big(\hat m_{\delta,12}(s)-\hat\sigma_{\delta,12}(s)\Big)=\frac{k_d(0)}{c}\,\hat m_{\delta,12}(s)\,(1-\hat p(s)) . \tag{3.2.5}$$

Θεωρούμε μία συνάρτηση η οποία ορίζεται ως εξής

$$\sigma^{e}_{\delta,12}(u)=\int_0^u m_{\delta,12}(u-y)\,p_e(y)dy\ , \tag{3.2.6}$$

όπου $p_e(y)=P(y)/E[Y]$ είναι η πυκνότητα ισορροπίας του $p(y)$. Παίρνοντας τον μετασχηματισμό Laplace προκύπτει,

$$\hat\sigma^{e}_{\delta,12}(s)=\hat m_{\delta,12}(s)\,\frac{1-\hat p(s)}{s\,E[Y]}\ . \tag{3.2.7}$$

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.2.5) και (3.2.7), ο μετασχηματισμός Laplace της (3.2.4) δίνεται από

$$s\,\hat m^{d}_{\delta,12}(s)-m^{d}_{\delta,12}(0)=\frac{r+\delta}{c}\,\hat m^{d}_{\delta,12}(s)-\frac{r}{c}\,\hat m_{\delta,12}(s)-\frac{k_d(0)}{c}\,\hat a_{12}(s)+\frac{k_d(0)\,E[y]}{c}\,s\,\hat\sigma^{e}_{\delta,12}(s)$$

κάνοντας αριθμητικές πράξεις παίρνουμε ,

$$\left(s-\frac{r+\delta}{c}\right)\hat{m}^{\,d}_{\delta,12}(s)=m^{\,d}_{\delta,12}(0)-\frac{r}{c}\hat{m}_{\,\delta,12}(s)-\frac{k_d(0)}{c}\hat{a}_{12}(s)+\frac{k_d(0)\,E[Y]}{c}s\,\hat{\sigma}^{\,e}_{\delta,12}(s)\,. \quad (3.2.8)$$

Όταν $s=\dfrac{r+\delta}{c}$, η αριστερή πλευρά γίνεται μηδέν και προκύπτει ότι

$$m^{\,d}_{\delta,12}(0)=\frac{r}{c}\hat{m}_{\,\delta,12}\left(\frac{r+\delta}{c}\right)+\frac{k_d(0)}{c}\hat{a}_{12}\left(\frac{r+\delta}{c}\right)-\frac{k_d(0)\,E[Y]}{c}\left(\frac{r+\delta}{c}\right)\hat{\sigma}^{\,e}_{\delta,12}\left(\frac{r+\delta}{c}\right),$$

και κάνοντας αντικατάσταση στη (3.2.8) προκύπτει

$$\left(s-\frac{r+\delta}{c}\right)\hat{m}^{\,d}_{\delta,12}(s)=\frac{r}{c}\left[\hat{m}_{\,\delta,12}\left(\frac{r+\delta}{c}\right)-\hat{m}_{\,\delta,12}(s)\right]+\frac{k_d(0)}{c}\left[\hat{a}_{12}\left(\frac{r+\delta}{c}\right)-\hat{a}_{12}(s)\right]$$

$$-\frac{k_d(0)\,E[Y]}{c}\left(\frac{r+\delta}{c}\right)\left[\hat{\sigma}^{\,e}_{\delta,12}\left(\frac{r+\delta}{c}\right)-\hat{\sigma}^{\,e}_{\delta,12}(s)\right]$$

$$+\frac{k_d(0)\,E[Y]}{c}\left(s-\frac{r+\delta}{c}\right)\hat{\sigma}^{\,e}_{\delta,12}(s)\ .$$

Διαιρώντας κατά μέλη με $\left(s-\dfrac{r+\delta}{c}\right)$ και κάνοντας αριθμητικές πράξεις παίρνουμε ότι

$$\hat{m}^{\,d}_{\delta,12}(s)=\frac{k_d(0)\,E[Y]}{c}\hat{\sigma}^{\,e}_{\delta,12}(s)+\frac{r}{c}\left[\frac{\hat{m}_{\,\delta,12}\left(\frac{r+\delta}{c}\right)-\hat{m}_{\,\delta,12}(s)}{s-\frac{r+\delta}{c}}\right]+\frac{k_d(0)}{c}\left[\frac{\hat{a}_{12}\left(\frac{r+\delta}{c}\right)-\hat{a}_{12}(s)}{s-\frac{r+\delta}{c}}\right]$$

$$-\frac{k_d(0)\,E[Y]}{c}\left(\frac{r+\delta}{c}\right)\left[\frac{\hat{\sigma}^{\,e}_{\delta,12}\left(\frac{r+\delta}{c}\right)-\hat{\sigma}^{\,e}_{\delta,12}(s)}{s-\frac{r+\delta}{c}}\right]. \quad (3.2.9)$$

Θυμίζουμε τη μορφή του μετασχηματισμού Laplace των τελεστών Dickson-Hipp (1.7.3) μαζί με (3.2.6), μπορούμε να τον αντιστρέψουμε (3.2.9) και να προκύψει

$$m^{\,d}_{\delta,12}(u)=\frac{k_d(0)\,E[Y]}{c}\int_0^u m_{\,\delta,12}(u-y)\,p_e(y)\,dy+v^{\,d}_{\delta,12}(u) \quad (3.2.10)$$

όπου $p_e(y)=\overline{P}(y)/E[Y]$ και χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.7.2) , προκύπτει

$$v^{\,d}_{\delta,12}(u) = T_{\frac{r+\delta}{c}}\left(\frac{r}{c} m_{\,\delta,12}(u) + \frac{k_d(0)}{c} a_{12}(u) - \frac{k_d(0)\,E[Y]}{c}\left(\frac{r+\delta}{c}\right)\sigma^{\,e}_{\delta,12}(u)\right). \quad (3.2.11)$$

Τονίζουμε ότι η (3.2.10) δείχνει τη σχέση μεταξύ των $m^{\,d}_{\delta,12}(u)$ και $m_{\,\delta,12}(u)$. Χρησιμοποιώντας τη (3.2.2), παρατηρούμε ότι αν $k_d(0) = 1/E[V]$ και $r = 0$, τότε $k_d(t) = k_e(t)$ και η (3.2.10) απλοποιείται σε

$$m^{\,s}_{\delta,12}(u) = \frac{1}{1+\theta}\int_0^u m_{\,\delta,12}(u-y)\,p_e(y)\,dy + v^{\,s}_{\delta,12}(u)$$

όπου χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.2.11) παίρνουμε

$$v^{\,s}_{\delta,12}(u) = T_{\frac{\delta}{c}}\left(\frac{1}{c\,E[V]} a_{12}(u) - \frac{1}{1+\theta}\left(\frac{\delta}{c}\right)\sigma^{\,e}_{\delta,12}(u)\right),$$

και χρησιμοποιούμε τη συνθήκη καθαρού κέρδους $cE[V] = (1+\theta)E[Y]$ από τη (1.4.2) .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 : Ένα γενικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου με εξάρτηση και η γενικευμένη συνάρτηση των Gerber – Shiu

4.1 Η γενικευμένη συνάρτηση των Gerber- Shiu

Η γενικευμένη μορφή της συνάρτησης των Gerber – Shiu περιέχει την εισαγωγή δύο νέων μεταβλητών σε σχέση με την κλασσική αναμενόμενη προεξοφλητική συνάρτηση η οποία όπως είδαμε προηγουμένως περιλαμβάνει το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία $U(T-)$ και το έλλειμμα μετά τη χρεοκοπία $|U(T)|$. Αυτές οι νέες μεταβλητές που αναφέραμε είναι το ελάχιστο πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία X_t και το πλεόνασμα ακριβώς πριν συμβεί η χρεοκοπία R_{N_t-1}. Αν και αυτές οι δύο ποσότητες δεν μπορούν να μελετηθούν πριν συμβεί η χρεοκοπία μπορούμε να υπολογίσουμε τις κατανομές τους καθώς οι συναρτήσεις τους δεν βασίζονται στο χρόνο χρεοκοπίας αλλά εξαρτώνται μόνο από γνωστές ποσότητες όπως για παράδειγμα το αρχικό πλεόνασμα της επιχείρησης.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.1

Ορίζουμε ως γενικευμένη συνάρτηση των Gerber - Shiu , τη συνάρτηση της μορφής :

$$m_{\delta}(u) = E[e^{-\delta T} w\{U(T-),|U(T)|, X_t, R_{Nt-1}\} I(T<\infty) \,|\, U(0)=u] \;\; , u \geq 0$$

- Υπενθυμίζουμε ότι η κλασσική συνάρτηση των Gerber - Shiu είναι της μορφής:

$$m_{\delta}(u) = E[e^{-\delta T} w\{U(T-),|U(T)|\} I(T<\infty) \,|\, U(0)=u] \quad , u \geq 0 \; .$$

Τονίζουμε ότι οι νέες ποσότητες μας επιτρέπουν να αναλύσουμε το τελευταίο κλιμακωτό πριν τη χρεοκοπία $X_t + |U(T)|$ και της τελευταίας κλιμακωτής στιγμής πριν τη χρεοκοπία $U_{N_t} = \dfrac{U(T-) - R_{N_t-1}}{c}$.

Επισήμανση:

- Ως ***κλιμακωτό ύψος*** (ladder height) ορίζουμε το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό , δοθέντος ότι εμφανίζεται πτώση. Τη συγκεκριμένη σημαντική τυχαία μεταβλητή τη συμβολίζουμε με L_i , $i = 1, 2, 3, \ldots$ και παίρνει θετικές τιμές καθώς μελετάμε τη πτώση του πλεονάσματος σε απόλυτη τιμή.
- Ως ***κλιμακωτές στιγμές*** (ladder epoches) ονομάζουμε τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες εμφανίζεται το κλιμακωτό ύψος και είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές. Συμβολίζονται με $t_i, i = 1, 2, \ldots, N$ και ισχύει για την πρώτη κλιμακωτή στιγμή ότι

$$t_1 = \min\{t : u - U(t) > 0\} = \min\{t : S(t) - ct > 0\}.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.2

Η ακολουθία των κλιμακωτών υψών L_i ορίζεται ως εξής :

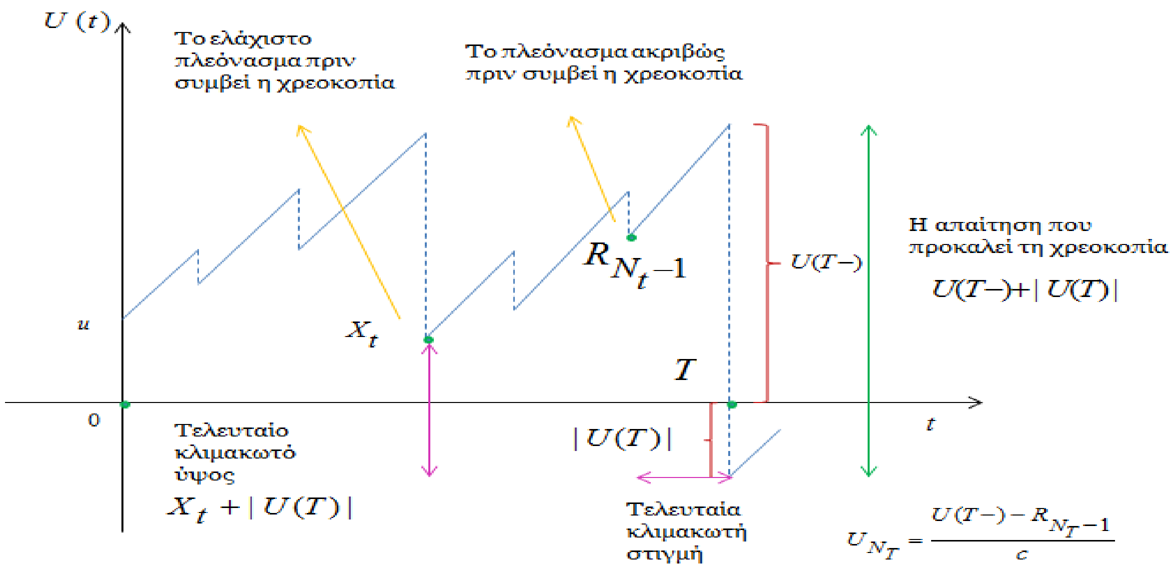
$$L_i = \begin{cases} U(t_i - 1) - U(t_i) \ , & (t_i - 1, t_i) \\ 0 & , \ U(t) < U(t_i - 1) \ \forall \ t > t_{i-1} \end{cases}.$$

- Οι $L_1, L_2, L_3, \ldots, L_n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με κοινή συνάρτηση κατανομής $F_e(x)$. Όπου N είναι η τυχαία μεταβλητή η οποία δηλώνει τον αριθμό των καταγραμμένων πτώσεων και $F_e(x)$ συμβολίζουμε την κατανομή ισορροπίας των αποζημιώσεων η οποία ισούται

$$P_r(L_1 \le y) = F_e(x) = \frac{\int_0^x \overline{F}(t)dt}{\rho_1}$$

με $\overline{F}(t) = 1 - F(t)$ η δεξιά ουρά των αποζημιώσεων.

Συγκεκριμένα στην παρακάτω γραφική παράσταση είμαστε σε θέση να κατανοήσουμε καλύτερα τις παραπάνω έννοιες και διαφορές.



Σχήμα4.1: Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος $U(t)$ με τις κλιμακωτές στιγμές και τα κλιμακωτά ύψη.

4.2 Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των $T, U(T-), |U(T)|, R_{N_t-1}$

Στην παράγραφο αυτή εξετάζουμε την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας της γενικευμένης μορφής της συνάρτησης των Gerber – Shiu . Όπως είδαμε στην περίπτωση της κλασσικής μορφής , θα δούμε πως και η γενικευμένη μορφή της συνάρτησης των Gerber – Shiu μπορεί να γραφτεί ως μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση. Αρχικά εισάγουμε την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των $(T, U(T-), |U(T)|, R_{N_t-1})$ με αντίστοιχες μεταβλητές (t, x, y, v) και κάποιες άλλες χρήσιμες πυκνότητες. Τονίζουμε ότι ο δείκτης «3» υποδηλώνει την ποσότητα X_T ενώ ο δείκτης «4» την ποσότητα R_{N_t-1}.

Υποθέτουμε ότι το μέγεθος των απαιτήσεων εξαρτάται άμεσα από τους ενδιάμεσους χρόνους πριν συβεί η απαίτηση δηλαδή η τ. μ Y δεν είναι ανεξάρτητη της τ.μ V . Θεωρούμε λοιπόν ότι η $P(y|t) = P_r(Y \leq y \ , V = t)$ είναι η συνάρτηση κατανομής του μεγέθους της απαίτησης ύψους t. Τονίζουμε ότι η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των (V_i, Y_i) για $i = 1, 2, \ldots$ δίνεται από $p(y|t)k(t)$ και υποθέτουμε ότι οι $\{ (V_i, Y_i) : i = 1, 2, \ldots \}$ είναι ανεξάρτητα ισόνομα κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές όπως συμβαίνει και στο ανανεωτικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου , το οποίο μελετάμε στην επόμενη παράγραφο.

► Έστω η χρεοκοπία συμβαίνει στην πρώτη απαίτηση. Τότε $N_T = 1$ και $R_{N-1} = R_0 = u$ Χρησιμοποιώντας τις ίδιες υποθέσεις όπως στην παράγραφο 3.4 που μελετήσαμε την κλασσική μορφή της συνάρτησης των Gerber – Shiu έχουμε ότι $t = \dfrac{x-u}{c}$.

Συνεπώς η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των $(T, U(T-), |U(T)|, R_{N_t-1})$ με αντίστοιχες μεταβλητές (t, x, y, v) , όταν η χρεοκοπία συμβεί στην πρώτη απαίτηση είναι ίδια όπως στην περίπτωση της κλασσικής ,αντικαθιστώντας την πιθανότητα $p(y)$ με $p(y|t)$ προκύπτει ότι :

$$h^*_{12}(x, y|u) = \frac{1}{c} k\left(\frac{x-u}{c}\right) p\left(x+y \,\Big|\, \frac{x-u}{c}\right) \text{ όπου } t = \frac{x-u}{c}, x > u, y > 0, v = u. \qquad (4.2.1)$$

► Όταν η χρεοκοπία συμβεί σε μεταγενέστερη απαίτηση, ακόμα δεν υπάρχει άμεση σχέση μεταξύ των μεταβλητών t, x, y, και v . Γνωρίζουμε μόνο ότι $x < u + ct$ και $v < x$ μιας και το πλεόνασμα αυξάνεται από v σε x με ένταση c κατά τη διάρκεια της τελευταίας απαίτησης.

Συμβολίζουμε την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των $(T, U(T-), |U(T)|, R_{N_t-1})$ με αντίστοιχες μεταβλητές (t, x, y, v) , δοθέντος ότι η χρεοκοπία συμβαίνει σε μεταγενέστερες απαιτήσεις εκτός της πρώτης , ως $h^{**}_{124}(t, x, y, v|u)$. Συνοψίζουμε την $h_{124}(t, x, y, v|u)$ ως εξής :

$$h_{124}(t,x,y,v/u)=\begin{cases} h^{*}_{12}(x,y/u) & t=\dfrac{x-u}{c}, x>u, y>0, v=u \\ h^{**}_{124}(t,x,y,v/u) & t>0, v<x<u+ct, y>0, v>0 \end{cases} \quad (4.2.2)$$

<u>Παρατήρηση</u>: Διαπιστώνουμε πως η συνάρτηση πυκνότητας λαμβάνει διαφορετικές τιμές αναλόγως το πότε συμβαίνει η χρεοκοπία , δηλαδή αν συμβαίνει στην πρώτη $t=\dfrac{x-u}{c}, x>u, y>0, v=u$ ή σε κάποια μεταγενέστερη απαίτηση $t>0, v<x<u+ct, y>0, v>0$.

Συνεπώς η προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των $U(T-)$, $|U(T)|$ και R_{N_t-1} ισούται με :

$$h^{**}_{\delta,124}(x,y,v|u)=\int_0^{\infty} e^{-\delta t}\, h^{**}_{124}(t,x,y,v|u)\,dt. \quad (4.2.3)$$

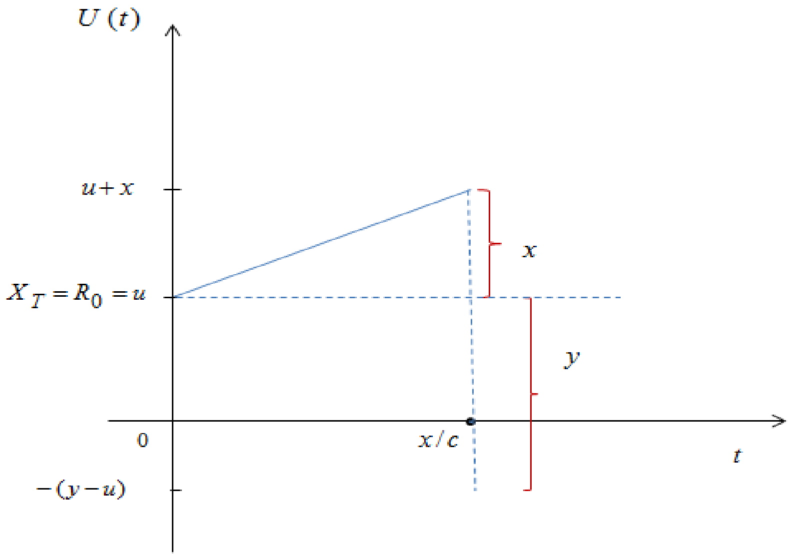
Αξιοποιώντας τις πυκνότητες και τις νέες ποσότητες που εισήχθησαν παραπάνω, θέτοντας για $u=0$, είμαστε σε θέση να μελετήσουμε διάφορες περιπτώσεις για το πότε συμβαίνει η πρώτη πτώση του πλεονάσματος όπως ακριβώς αναλύσαμε και σε προηγούμενη παράγραφο.

4.3 Η μελέτη της πρώτης πτώσης του πλεονάσματος

Ομοίως όπως στην παράγραφο 2.3 μελετήσαμε την κλασσική συνάρτηση των Gerber – Shiu ώστε να εκφράσουμε τη $m_{\delta}(u)$ ως μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση , θα εφαρμόσουμε την ίδια ακριβώς διαδικασία και την γενικευμένη της μορφή. Επειδή στη γενικευμένη μορφή της συνάρτησης εμπεριέχεται ο όρος X_T , θα κάνουμε χρήση μόνο την από κοινού πυκνότητα των $\left(U(T-),|U(T)|,R_{N_T-1}\right)$ καθώς είναι ανεξάρτητη της μεταβλητής X_T.

<u>**Περίπτωση 1**</u> : Η πρώτη πτώση του πλεονάσματος συμβαίνει στην πρώτη απαίτηση και προκαλεί τη χρεοκοπία.

► Όταν συμβεί η πρώτη πτώση του πλεονάσματος τότε ο αριθμός των απαιτήσεων ισούται με $N_T=1$ και το ύψος του τελευταίου πλεονάσματος ισούται με $R_{N_T-1}=R_0=u$.



Σχήμα 4.2 : Η χρεοκοπία συμβαίνει όταν το πλεόνασμα πέφτει στην πρώτη απαίτηση.

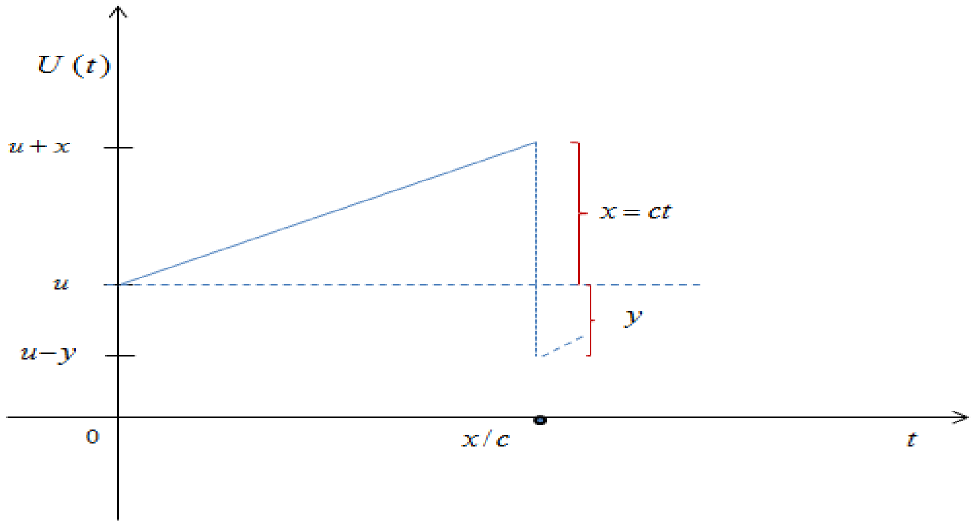
Συνεπώς από τον ορισμό της μέσης τιμής για $\delta = 0$ και $u = 0$ προκύπτει το εξής :

$$m_{\delta}(u) = \int_u^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\delta\frac{x}{c}} w(u+x, y-u, u, u)\, h^{*}_{12}(x, y\,|\,0)\,dx\,dy$$

$$= \int_u^{\infty}\int_0^{\infty} w(u+x, y-u, u, u)\, h^{*}_{\delta,12}(x, y\,|\,0)\,dx\,dy. \qquad (4.3.1)$$

<u>Περίπτωση 2</u>: Η πρώτη πτώση του πλεονάσματος συμβαίνει στην πρώτη απαίτηση χωρίς ωστόσο να οδηγεί σε χρεοκοπία.

► Όταν συμβεί η πρώτη πτώση του πλεονάσματος ύψους y και δεν συμβεί η χρεοκοπία , τότε ισχύει $y < u$ και η διαδικασία πλεονάσματος ξεκινά ξανά με αρχικό αποθεματικό ύψους $u - y$.



Σχήμα 4.3 : Η χρεοκοπία συμβαίνει όταν το πλεόνασμα πέφτει στην πρώτη απαίτηση χωρίς να συμβεί χρεοκοπία.

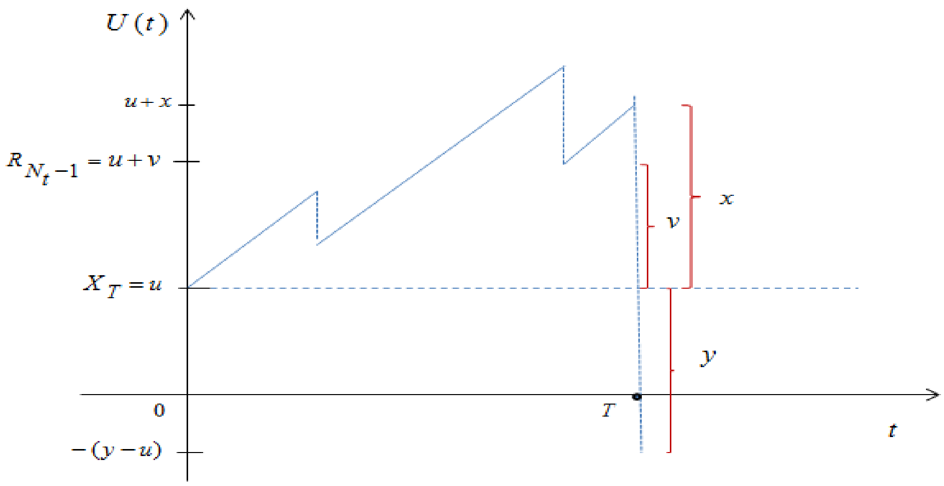
Παρατηρούμε λοιπόν ότι η $m_{\delta}(u)$ που προκύπτει είναι ίδια με την αντίστοιχη περίπτωση που μελετήσαμε σε προηγούμενη παράγραφο για την κλασσική μορφή της συνάρτησης.

$$m_{\delta}(u)=\int_0^u\int_0^\infty e^{-\delta\frac{x}{c}} m_{\delta}(u-y)h_{12}^*(x,y\,|\,0)\,dx\,dy$$

$$=\int_0^u m_{\delta}(u-y)\left(\int_0^\infty h_{\delta,12}^*(x,y\,|\,0)dx\right)dy. \tag{4.3.2}$$

<u>Περίπτωση 3</u> : Η πρώτη πτώση του πλεονάσματος συμβαίνει σε μεταγενέστερη απαίτηση και όχι στην πρώτη και προκαλεί τη χρεοκοπία.

► Στην περίπτωση αυτή όταν συμβεί η πρώτη πτώση του πλεονάσματος σε μεταγενέστερη απαίτηση και προκαλέσει τη χρεοκοπία , τότε το ελάχιστο πλεόνασμα πριν συμβεί η χρεοκοπία είναι ύψους u και το πλεόνασμα ακριβώς μετά τη δεύτερη τελευταία απαίτηση πριν συμβεί η χρεοκοπία πρέπει να είναι πάνω από u , ύψους v έτσι ώστε να ισχύει $v < x$.



Σχήμα 4.4: Πρώτη πτώση πλεονάσματος σε μεταγενέστερη απαίτηση που οδηγεί σε χρεοκοπία.

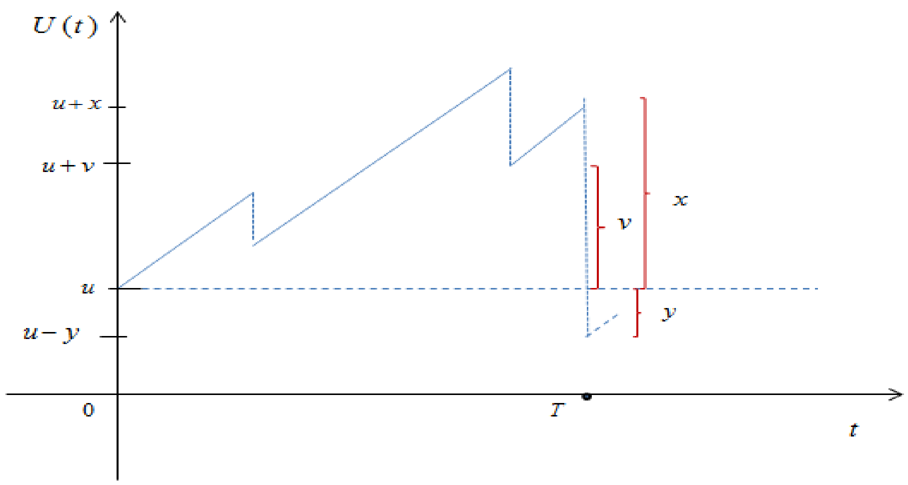
Συνεπώς προκύπτει ότι:

$$m_{\delta}(u)=\int_u^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{x}\int_0^{\infty} e^{-\delta t}\ w(u+x\ ,\ y-u\ ,u\ ,u+v)\ h_{124}^{**}(\ t\ ,\ x\ ,\ y\ ,\ v\,|\,0)\,dt\ dv\,dx\,dy$$

$$=\int_u^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} w(u+x\ ,\ y-u\ ,u\ ,u+v)\ h_{\delta,124}^{**}(\ x\ ,\ y\ ,\ v\,|\,0)\,dv\,dx\,dy \qquad (4.3.3)$$

<u>Περίπτωση 4</u> : Η πρώτη πτώση του πλεονάσματος συμβαίνει σε μεταγενέστερη απαίτηση και όχι στην πρώτη χωρίς ωστόσο να προκαλεί τη χρεοκοπία.

► Στη συγκεκριμένη περίπτωση μελετάμε τη πρώτη πτώση του πλεονάσματος ύψους y η οποία συμβαίνει σε κάποια μεταγενέστερη απαίτηση και όχι στην πρώτη και δεν οδηγεί σε χρεοκοπία. Τότε ισχύει ότι $y<u$ και ότι η διαδικασία ανανεώνεται με αρχικό αποθεματικό ύψους $u-y$. Επιπροσθέτως το πλεόνασμα ακριβώς μετά τη δεύτερη τελευταία απαίτηση πριν συμβεί η χρεοκοπία πρέπει να μεγαλύτερο από u , ύψους δηλαδή v όπου $v<x$.



Σχήμα 4.5 : Πρώτη πτώση πλεονάσματος σε μεταγενέστερη απαίτηση που δεν οδηγεί σε χρεοκοπία.

Επομένως :

$$m_{\delta}(u)=\int_0^u\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-\delta t}\, m_{\delta}(u-y)\,h^{**}_{124}(t,x,y,v\,|\,0)\,dt\,dv\,dx\,dy$$

$$=\int_0^u m_{\delta}(u-y)\int_0^{\infty}\int_0^{x}h^{**}_{\delta,124}(x,y,v\,|\,0)\,dv\,dx\,dy. \tag{4.3.4}$$

Συνοψίζοντας και προσθέτοντας τις 4 περιπτώσεις (4.3.1) , (4.3.2) , (4.3.3) και (4.3.4) καταλήγουμε σε μια μορφή η οποία υποδηλώνει την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση :

$$m_{\delta}(u)=\int_0^u m_{\delta}(u-y)\left(\int_0^{\infty}h_{\delta,12}(x,y\,|\,0)dx+\int_0^{\infty}\int_0^{x}h^{**}_{\delta,124}(x,y,v\,|\,0)dv\,dx\right)dy+v_{\delta}(u) \tag{4.3.5}$$

όπου

$$v_{\delta}(u)=\int_u^{\infty}\int_0^{\infty}w(u+x,y-u,u,u)\,h^{*}_{\delta,12}(x,y\,|\,0)dx\,dy$$

$$+\int_u^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{x}w(u+x,y-u,u,u+v)\,h^{**}_{\delta,124}(x,y,v\,|\,0)dv\,dx\,dy \tag{4.3.6}$$

$$=\int_0^{\infty}e^{-\delta t}\left(\int_0^{\infty}w(u+ct,y,u,u)\,p(u+ct+y\,|\,t)dy\right)k(t)\,dt$$

$$+\int_u^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{x}w(u+x,y,u,u+v)h^{**}_{\delta,124}(x,u+y,v\,|\,0)dv\,dx\,dy \tag{4.3.7}$$

Χρησιμοποιούμε τη σχέση (4.1.4) και αλλάζουμε τις μεταβλητές. Επιπροσθέτως χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.1.6), η (4.2.5) μπορεί να εκφραστεί ως

$$m_{\delta}(u)=\int_0^u m_{\delta}(u-y)\left(\int_0^\infty h_{\delta,12}(x,y\,|\,0)dx\right)dy+v_{\delta}(u)$$

και ως εκ τούτου, με τη χρήση των σχέσεων (4.1.7) και (4.1.8), μπορούμε να γράψουμε τη $m_{\delta}(u)$ ως την ακόλουθη ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

$$m_{\delta}(u)=\phi_\delta\int_0^u m_{\delta}(u-y)\,f_\delta(y)\,dy+v_\delta(u)\,. \tag{4.3.8}$$

Επομένως προκύπτει από τη (1.10.6) από το κεφάλαιο με τις Εισαγωγικές έννοιες ότι η γενική λύση για $m_{\delta}(u)$ δίνεται από

$$m_{\delta}(u)=v_\delta(u)+\frac{1}{1-\phi_\delta}\int_0^u v_\delta(y)\,g_\delta(u-y)\,dy\ , \tag{4.3.9}$$

όπου με τη χρήση (1.3.15), $g_\delta(u)=\sum_{n=1}^{\infty}(1-\phi_\delta)(\phi_\delta)^n\ f_\delta^{*n}(x)$ με ϕ_δ και $f_\delta(y)$ να δίνονται από τις σχέσεις (4.1.7) και (4.1.8) αντίστοιχα. Επισημαίνουμε ότι, παρά το γεγονός ότι η ποσότητα $m_{\delta}(u)$ είναι συναρτήσει του u και περιέχει μια συνάρτηση ποινής με 4-μεταβλητές , συμπεριλαμβανομένου της μεταβλητής X_T , η γενική της λύση εξαρτάται μόνο από την από κοινού προεξοφλημένη πυκνότητα 3 μεταβλητών $U(T-)$, $|U(T)|$, και R_{N_t-1} δοθέντος $u=0$.

Τώρα θα εξετάσουμε ειδικές περιπτώσεις της $m_{\delta}(u)$ για διάφορες μορφές της συνάρτησης ποινής.

- $w(x,y,z,v)=w_{124}(x,y,v)$, τότε η (4.2.8) απλοποιείται σε

$$m_{\delta,124}(u)=\phi_\delta\int_0^u m_{\delta,124}(u-y)\ f_\delta(y)\,dy+v_{\delta,124}(u)\ ,$$

και χρησιμοποιώντας τη (4.2.6)

$$v_{\delta,124}(u)=\int_u^\infty\int_0^\infty w_{124}(u+x,y-u,u)\,h^{*}_{\delta,12}(x,y\,|\,0)\,dx\,dy$$

$$+\int_u^\infty\int_0^\infty\int_0^x w_{124}(u+x,y-u,u+v)\,h^{**}_{\delta,124}(x,y,v\,|\,0)\,dv\,dx\,dy\,. \tag{4.3.10}$$

- $w(x,y,z,v)=w_3(z)\,w_{124}(x,y,v)$, τότε η (4.2.8) απλοποιείται σε

$$m_{\delta,3,124}(u)=\phi_\delta\int_0^u m_{\delta,3,124}(u-y)\ f_\delta(y)\,dy+v_{\delta,3,124}(u) \tag{4.3.11}$$

όπου με τη χρήση των (4.2.6) και (4.2.10),

$$v_{\delta,3,124}(u) = w_3(u)\, v_{\delta,124}(u). \tag{4.3.12}$$

- $w(x, y, z, v) = w_{123}(x, y, z)$ τότε η (4.2.8) απλοποιείται σε

$$m_{\delta,123}(u) = \phi_\delta \int_0^u m_{\delta,123}(u-y)\, f_\delta(y)\, dy + v_{\delta,123}(u) \tag{4.3.13}$$

$$v_{\delta,123}(u) = \int_u^\infty \int_0^\infty w_{123}(u+x, y-u, u)\, h_{\delta,12}(x, y \mid 0)\, dx\, dy \tag{4.3.14}$$

Ομοίως οι αντίστοιχες περιπτώσεις για την ανάλυση του τελευταίου κλιμακωτού ύψους ισχύουν ως εξής:

- $w(x, y, z, v) = w_{23}(y, z)$ τότε η (4.3.13) απλοποιείται σε

$$m_{\delta,23}(u) = \phi_\delta \int_0^u m_{\delta,23}(u-y)\, f_\delta(y)\, dy + v_{\delta,23}(u) \tag{4.3.15}$$

$$v_{\delta,23}(u) = \phi_\delta \int_u^\infty w_{23}(y-u, u)\, f_\delta(y)\, dy \tag{4.3.16}$$

- $w_{23}(y, z) = w_5(y+z)$ τότε η (4.3.15) γίνεται

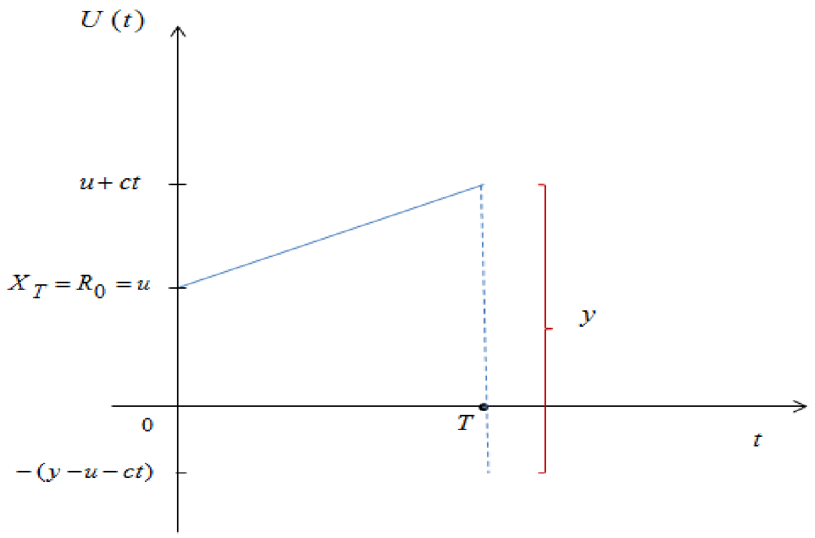
$$m_{\delta,5}(u) = \phi_\delta \int_0^u m_{\delta,5}(u-y)\, f_\delta(y)\, dy + v_{\delta,5}(u) \tag{4.3.17}$$

$$v_{\delta,5}(u) = \phi_\delta \int_u^\infty w_5(y)\, f_\delta(y)\, dy\ . \tag{4.3.18}$$

4.4 Η μελέτη του χρόνου και του μεγέθους της πρώτης απαίτησης

<u>Περίπτωση 1</u> : Στην πρώτη απαίτηση συμβαίνει η χρεοκοπία.

Στην περίπτωση που η χρεοκοπία συμβαίνει στην πρώτη απαίτηση , τότε ισχύει ότι $N_T = 1$ και $R_{N_T - 1} = R_0 = u$ το ύψος της πρώτης απαίτησης y πρέπει να είναι μεγαλύτερο από $u + ct$.



Σχήμα 4.6 : Μελέτη του μεγέθους της πρώτης απαίτησης που οδηγεί σε χρεοκοπία.

Συνεπώς προκύπτει ότι :

$$\beta_{\delta,124}(u)=\int_0^{\infty} e^{-\delta t}\,\alpha_{t,124}(u+ct,u)\,k(t)\,dt \tag{4.4.1}$$

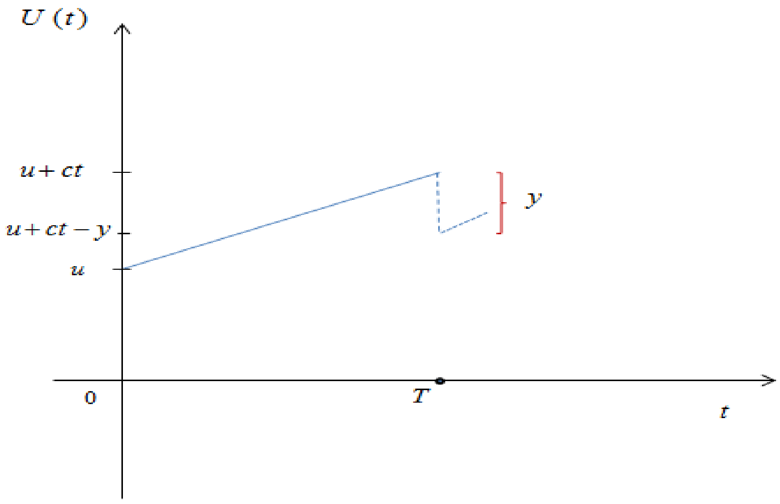
$$=\frac{1}{c}\int_u^{\infty} e^{-\delta\left(\frac{x-u}{c}\right)}\,\alpha_{t,124}(x,u)\,k\left(\frac{x-u}{c}\right)dx\ , \tag{4.4.2}$$

όπου

$$\alpha_{t,124}(x,u)=\int_x^{\infty} w_{124}(x,y-x,u)\,p(y\,|\,t)\,dy\,. \tag{4.4.3}$$

<u>Περίπτωση 2</u>: Στην πρώτη απαίτηση δεν συμβαίνει η χρεοκοπία.

Στην περίπτωση αυτή εξετάζουμε το ενδεχόμενο που η χρεοκοπία δεν συμβαίνει στην πρώτη απαίτηση. Θεωρούμε ότι το ύψος της πρώτης απαίτησης y να είναι λιγότερο από $u+ct$ και η διαδικασία ανανεώνεται με αρχικό αποθεματικό $u+ct-y$ αφού ξεπεράσει τη χρονική στιγμή t.



Σχήμα 4.7 : Μελέτη του μεγέθους της πρώτης απαίτησης που δεν οδηγεί σε χρεοκοπία.

Επομένως προκύπτει :

$$m_{\delta,124}(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t} \sigma_{t,\delta,124}(u+ct)\, k(t)\, dt \tag{4.4.4}$$

όπου

$$\sigma_{t,\delta,124}(x) = \int_0^x m_{\delta,124}(x-y)\, p(y\,|\,t)\, dy \tag{4.4.5}$$

Αθροίζοντας τις παραπάνω μορφές των σχέσεων (4.4.2) και (4.4.4) , παίρνουμε

$$m_{\delta,124}(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t} \sigma_{t,\delta,124}(u+ct)\, k(t)\, dt + \beta_{\delta,124}(u) \tag{4.4.6}$$

και επισημαίνουμε ότι έχει την ίδια μορφή με τη σχέση (2.4.4) όπου τη $\sigma_{\delta,12}(x)$ αντικατέστησε η $\sigma_{t,\delta,124}(x)$ ενώ τη $\alpha_{12}(x)$ αντικατέστησε η $\alpha_{t,124}(x,u)$. Θέλουμε να βρούμε το μετασχηματισμό Laplace του πρώτου όρου της σχέσης (4.4.6), επομένως χρησιμοποιούμε τη σχέση

(1.9.2) από τις Εισαγωγικές έννοιες έτσι ώστε

$$\int_0^\infty e^{-su} \int_0^\infty e^{-\delta t} \sigma_{t,\delta,124}(u+ct)\, k(t)\, dt\, du = \int_0^\infty e^{-(\delta-cs)t}\, \hat{\sigma}_{t,\delta,124}(s)\, k(t)\, dt - \hat{\sigma}^*_{\delta,124}(\delta-cs)$$

όπου κάνοντας χρήση της σχέσης (1.9.3) , παίρνουμε

$$\hat{\sigma}^{*}_{\delta,124}(s)=\int_0^\infty\int_0^{ct} e^{-\frac{1}{c}\{\delta x+s\,(ct-x)\}}\,\sigma_{t,\delta,124}(x)\,k(t)\,dx\,dt \quad . \tag{4.4.7}$$

Εφόσον $\hat{\sigma}_{t,\delta,124}(s)=\hat{m}_{\delta,124}(s)\,\hat{p}(s\,|\,t)$, ο μετασχηματισμός Laplace της (4.4.6) δίνεται από

$$\hat{m}_{\delta,124}(s)=\hat{m}_{\delta,124}(s)\int_0^\infty e^{-(\delta-cs)\,t}\,\hat{p}(s\,|\,t)\,k(t)\,dt-\hat{\sigma}^{*}_{\delta,124}(\delta-cs)+\hat{\beta}_{\delta,124}(s)\,, \tag{4.4.8}$$

και επειδή γνωρίζουμε ότι $\int_0^\infty e^{-(\delta-cs)\,t}\,\hat{p}(s\,|\,t)\,k(t)\,dt=E\left[e^{-sY-(\delta-cs)\,Y}\right]$, κάνοντας αντικατάσταση και λύνοντας ως προς $\hat{m}_{\delta,124}(s)$, παίρνουμε

$$\left(1-E\left[e^{-sY-(\delta-cs)\,Y}\right]\right)\hat{m}_{\delta,124}(s)=\hat{\beta}_{\delta,124}(s)-\hat{\sigma}^{*}_{\delta,124}(\delta-cs)\,. \tag{4.4.9}$$

Δεδομένου ότι το αριστερό μέρος της (4.4.9) είναι 0 όταν $s=\rho_\delta$, όπου ρ_δ είναι οποιαδήποτε ρίζα με θετικό πραγματικό μέρος της θεμελιώδης εξίσωσης του Lundberg (1.8.1), τότε είμαστε σε θέση να προσδιορίσουμε τις άγνωστες σταθερές στη σχέση $\hat{\sigma}^{*}_{\delta,124}(\delta-cs)$ χρησιμοποιώντας ,

$$\hat{\sigma}^{*}_{\delta,124}(\delta-c\rho_\delta)=\hat{\beta}_{\delta,124}(\rho_\delta)\ ,$$

και όπως αναφέρεται στην παράγραφο 2.4 για την κλασσική περίπτωση της συνάρτησης των Gerber - Shiu, είναι απαραίτητη η αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace της $m_{\delta,124}(s)$ κάνοντας κάποιες επιπρόσθετες υποθέσεις για τις συναρτήσεις $k(t)$ και / ή $p(y)$.

Στις ακόλουθες εφαρμογές θα υποθέσουμε ότι το μέγεθος των απαιτήσεων Y και οι ενδιάμεσοι χρόνοι V είναι ανεξάρτητοι. Και ως εκ τούτου, θα αντικαταστήσουμε την πυκνότητα $p(y\,|\,t)$ με $p(y)$ έτσι ώστε η (4.4.6) να γίνει

$$m_{\delta,124}(u)=\int_0^\infty e^{-\delta t}\,\sigma_{\delta,124}(u+ct)\,k(t)\,dt+\beta_{\delta,124}(u)\,,$$

όπου $\sigma_{\delta,124}(x)$ είναι ισοδύναμο με $\sigma_{t,\delta,124}(x)$ με το $p(y\,|\,t)$ να έχει αντικατασταθεί από το $p(y)$.

4.5 Συσχετιζόμενες ελλειμματικές πυκνότητες

Για να προσδιορίσουμε την από κοινού προεξοφλημένη ελλειμματική πυκνότητα των μεταβλητών $\left(U(T-), |U(T)|, X_T, R_{N_T-1}\right)$ από $m_\delta(u)$, επιλέγουμε τη συνάρτηση ποινής $w(x,y,z,v)=e^{-s_1 x - s_2 y - s_3 z - s_4 v}$ η οποία μπορεί να ξαναγραφεί ως $w(x,y,z,v)=w_3(z)\,w_{124}(x,y,v)$ όπου $w_3(z)=e^{-s_3 z}$ και $w_{124}(x,y,v)=e^{-s_1 x - s_2 y - s_4 v}$.

Έτσι, η $m_\delta(u)$ ακολουθεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση η οποία δίνεται από (4.2.11) και από την (4.2.12), $v_{\delta,3,124}(u)=e^{-s_3 u} v_{\delta,124}(u)$, όπου με τη χρήση (4.2.10)

$$v_{\delta,124}(u)=\int_u^\infty\int_0^\infty e^{-s_1(u+x)-s_2(y-u)-s_4 u}\, h^*_{\delta,12}(x,y\,|\,0)\,dx\,dy$$

$$+\int_u^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s_1(u+x)-s_2(y-u)-s_4(u+v)}\, h^{**}_{\delta,124}(x,y,v\,|\,0)\,dv\,dx\,dy.$$

Με αλλαγή στις μεταβλητές προκύπτει ότι

$$v_{\delta,124}(u)=\int_0^\infty\int_u^\infty e^{-s_1 x - s_2 y - s_4 u}\, h^*_{\delta,12}(x-u,u+y\,|\,0)\,dx\,dy$$

$$+\int_0^\infty\int_u^\infty\int_u^x e^{-s_1 x - s_2 y - s_4 u}\, h^{**}_{\delta,124}(x-u,u+y,v-u\,|\,0)\,dv\,dx\,dy. \qquad (4.5.1)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.3.9), η γενική λύση της $m_\delta(u)$ όταν $w(x,y,z,v)=e^{-s_1 x - s_2 y - s_3 z - s_4 v}$ δίνεται από

$$m_{\delta,3,124}(u)=e^{-s_3 u} v_{\delta,124}(u)+\frac{1}{1-\phi_\delta}\int_0^u e^{-s_3 z} v_{\delta,124}(z)\, g_\delta(u-z)dz.$$

Κάνοντας αντικατάσταση την (4.5.1)

$$m_{\delta,3,124}(u)=\int_0^\infty\int_u^\infty e^{-s_1 x - s_2 y - s_3 u - s_4 u}\, h^*_{\delta,12}(x-u,u+y\,|\,0)\,dx\,dy$$

$$+\int_0^\infty\int_u^\infty\int_u^x e^{-s_1 x - s_2 y - s_3 u - s_4 v}\, h^{**}_{\delta,124}(x-u, u+y, v-u\,|\,0)\, dv\, dx\, dy$$

$$+\int_0^u\int_0^\infty\int_z^\infty e^{-s_1 x - s_2 y - s_3 u - s_4 v}\left(h^{*}_{\delta,12}(x-z, z+y\,|\,0)\frac{g_\delta(u-z)}{1-\phi_\delta}\right) dx\, dy\, dz$$

$$+\int_0^u\int_0^\infty\int_z^\infty\int_z^x e^{-s_1 x - s_2 y - s_3 z - s_4 v}$$

$$\times\left(h^{**}_{\delta,124}(x-z, z+y, v-z\,|\,0)\frac{g_\delta(u-z)}{1-\phi_\delta}\right) dv\, dx\, dy\, dz. \qquad (4.5.2)$$

Σημειώνουμε ότι αν $w(x,y,z,v) = e^{-s_1 x - s_2 y - s_3 z - s_4 v}$, τότε θυμίζουμε από τη σχέση (4.1.1) ότι η $m_\delta(u)$ δίνεται από

$$m_{\delta,3,124}(u) = \mathrm{E}[e^{-\delta T - s_1 U(T-) - s_2 |U(T)| - s_3 X_T - s_4 R_{N_T - 1}} I(T<\infty)\,|\,U(0)=u]$$

η οποία είναι ίση με το μετασχηματισμό Laplace της από κοινού προεξοφλημένης πυκνότητας των μεταβλητών $\left(U(T-), |U(T)|, X_T, R_{N_T-1}\right)$,δηλαδή αν $h_\delta(x,y,z,v\,|\,u)$ είναι η από κοινού προεξοφλημένη των μεταβλητών $\left(U(T-), |U(T)|, X_T, R_{N_T-1}\right)$ στο σημείο (x,y,z,v), τότε

$$m_{\delta,3,124}(u) = \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^u\int_0^x e^{-s_1 x - s_2 y - s_3 z - s_4 v}\, h_\delta(x,y,z,v\,|\,u)\, dv\, dz\, dy\, dx,$$

και ως εκ τούτου, χρησιμοποιώντας την μοναδικότητα του μετασχηματισμού Laplace, μπορούμε να ορίσουμε $h_\delta(x,y,z,v\,|\,u)$ από τη σχέση (4.5.2). Παρακάτω συνοψίζουμε τις διαφορετικές πυκνότητες οι οποίες συνθέτουν τη $h_\delta(x,y,z,v\,|\,u)$.

$$h_{\delta}(x,y,z,v\,|\,u)=\begin{cases} h^{*}_{\delta,12}(x-u,u+y\,|\,0) & x>u\,,y>0\,,z=u\,,v=u \\ h^{**}_{\delta,124}(x-u,u+y,v-u\,|\,0) & x>u\,,y>0\,,z=u\,,u<v<x \\ h^{*}_{\delta,12}(x-z,z+y\,|\,0)\dfrac{g_{\delta}(u-z)}{1-\phi_{\delta}} & x>z\,,y>0\,,0<z<u\,,v=z \\ h^{**}_{\delta,124}(x-z,z+y,v-z\,|\,0)\dfrac{g_{\delta}(u-z)}{1-\phi_{\delta}} & z<v<x\,,y>0\,,0<z<u \end{cases}$$

Αντιστοιχεί στη χρεοκοπία που συμβαίνει στην πρώτη απαίτηση.

Αντιστοιχεί στη χρεοκοπία της πρώτης πτώσης του πλεονάσματος η οποία συμβαίνει σε μεταγενέστερη απαίτηση και όχι στην πρώτη.

Αντιστοιχεί σε μείωση του πλεονάσματος στο χαμηλότερο επίπεδο z χωρίς να προκαλείται η χρεοκοπία αλλά να συμβαίνει σε ακόλουθη απαίτηση.

Αντιστοιχεί σε μείωση του πλεονάσματος στο χαμηλότερο επίπεδο z χωρίς να προκαλείται η χρεοκοπία ούτε σε ακόλουθη απαίτηση αλλά στην αμέσως επόμενη.

Τονίζουμε ότι όταν $\delta=0$, μπορούμε να ερμηνεύσουμε το $\dfrac{g_0(u-z)}{1-\phi_\delta}$ ως την πυκνότητα της στοχαστικής διαδικασίας πλεονάσματος η οποία πέφτει στο χαμηλότερο επίπεδο z χωρίς πρώτα να συμβεί χρεοκοπία.

Τώρα θεωρούμε όταν η συνάρτηση ποινής δίνεται από $w(x,y,z,v)=w_3(z)\,w_{124}(x,y,v)=e^{-s_1 x-s_2 y-s_3 z}$, τότε η $m_\delta(u)$ ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση η οποία δίνεται από τη σχέση (4.3.13) και από (4.3.14)

$$v_{\delta,123}(u)=\int_u^\infty\int_0^\infty e^{-s_1(u+x)-s_2(y-u)-s_3 u}\,h_{\delta,12}(x,y\,|\,0)\,dx\,dy$$

$$=\int_0^\infty\int_u^\infty e^{-s_1 x-s_2 y-s_3 u}\,h_{\delta,12}(x-u,u+y\,|\,0)\,dx\,dy$$

και χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.2.9), κάνουμε αντικατάσταση στη γενική λύση για $m_{\delta,123}(u)$ προκύπτει

$$m_{\delta,123}(u)=v_{\delta,123}(u)+\frac{1}{1-\phi_\delta}\int_0^u v_{\delta,123}(z)\,g_\delta(u-z)dz$$

$$=\int_0^\infty\int_u^\infty e^{-s_1 x-s_2 y-s_3 u}\,h_{\delta,12}(x-u,u+y\,|\,0)\,dx\,dy$$

$$+\int_0^u\int_0^\infty\int_z^\infty e^{-s_1 x - s_2 y - s_3 z}\left(h_{\delta,12}(x-z,z+y\,|\,0)\frac{g_\delta(u-z)}{1-\phi_\delta}\right)dx\,dy\,dz$$

Χρησιμοποιώντας πάλι τη μοναδικότητα των μετασχηματισμών Laplace, μπορούμε να ορίσουμε $h_{\delta,123}(x,y,z\,|\,u)$, την από κοινού προεξοφλημένη πυκνότητα των μεταβλητών $(U(T-),|U(T)|,X_T)$ στο σημείο (x,y,z) η οποία συνοψίζεται παρακάτω:

$$h_{\delta,123}(x,y,z\,|\,u)=\begin{cases} h_{\delta,12}(x-u,u+y\,|\,0) & x>u\,,\,y>0\,,\,z=u \\ h_{\delta,12}(x-z,z+y\,|\,0)\,\dfrac{g_\delta(u-z)}{1-\phi_\delta} & x>z\,,\,y>0\,,\,0<z<u \end{cases}$$

Αντιστοιχεί στη χρεοκοπία που συμβαίνει στην πτώση του πλεονάσματος κάτω του u.

Αντιστοιχεί στη χρεοκοπία που συμβαίνει, όχι όμως στην πρώτη πτώση του πλεονάσματος

Είμαστε σε θέση να χρησιμοποιήσουμε την ίδια μέθοδο για τον προσδιορισμό της πυκνότητας του τελευταίου κλιμακωτού ύψους $X_T+|U(T)|$ επιλέγοντας τη συνάρτηση ποινής $w(x,y,z,v)=w_5(y+z)=e^{-s_5\,(y+z)}$ και χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.3.17).

Στη συνέχεια, εφόσον η σχέση (4.3.18) είναι διαφορίσιμη, είναι βολικό να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της γενικής λύσης η οποία δίνεται από (1.10.7) από τις Εισαγωγικές έννοιες και γίνεται

$$m_{\delta,5}(u)=\frac{1}{1-\phi_\delta}\left\{\phi_\delta\int_u^\infty e^{-s_5 y}f_\delta(y)dy-\left(\phi_\delta\int_0^\infty e^{-s_5 y}f_\delta(y)dy\right)\overline{G}_\delta(u)+\int_0^u\overline{G}_\delta(u-y)\,\phi_\delta e^{-s_5 y}f_\delta(y)\,dy\right\}$$

$$=\frac{\phi_\delta}{1-\phi_\delta}\left\{\int_u^\infty e^{-s_5 y}\left[1-\overline{G}_\delta(u)\right]f_\delta(y)\,dy+\int_0^u e^{-s_5 y}\left[\overline{G}_\delta(u-y)-\overline{G}_\delta(u)\right]f_\delta(y)\,dy\right\}.$$

Από τη μοναδικότητα των μετασχηματισμών Laplace, το τελευταίο κλιμακωτό ύψος έχει μια προεξοφλημένη πυκνότητα η οποία δίνεται από

$$f_\delta(u,y)=\begin{cases}\dfrac{\phi_\delta}{1-\phi_\delta}\left[\overline{G}_\delta(u-y)-\overline{G}_\delta(u)\right]f_\delta(y) & , \; y<u\\ \dfrac{\phi_\delta}{1-\phi_\delta}\left[1-\overline{G}_\delta(u)\right]f_\delta(y) & , \; y>u\end{cases}$$

4.6 Εφαρμογή 4 : Το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου

Σε αυτή την εφαρμογή θα ασχοληθούμε ξανά με το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου όπως μελετήσαμε στην Εφαρμογή 1 στην οποία υποθέσαμε ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι κατανέμονται εκθετικά π.χ $k(t)=\lambda e^{-\lambda t}$ [Cheung et al. (2010b)]. Στο κεφάλαιο 4.2 , παρατηρήσαμε ότι παρόλο που η $m_\delta(u)$ αποτελείται από μια συνάρτηση ποινής η οποία περιλαμβάνει 4 μεταβλητές συμπεριλαμβανομένου X_T , η $m_\delta(u)$ μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει της από κοινού προεξοφλημένης πυκνότητας πιθανότητας των $\left(U(T-),|U(T)|,R_{N_T-1}\right)$η οποία δεν εμπεριέχει την X_T.

Αρχικά επισημαίνουμε ότι η $\hat{\sigma}^*_{\delta,124}(s)$ δίνεται από τη σχέση (4.4.7) , είναι ισοδύναμη της $\hat{\sigma}^*_{\delta,12}(s)$ η οποία δίνεται από (2.5.1) με την $\sigma_{\delta,12}(x)$ να έχει αντικατασταθεί από την $\sigma_{t,\delta,124}(x)$ η οποία σε αυτή την εφαρμογή όπου οι μεταβλητές V και Y είναι ανεξάρτητες , είναι ισοδύναμη της $\sigma_{\delta,124}(x)$. Χρησιμοποιώντας λοιπόν τη σχέση (2.5.2) προκύπτει ότι :

$$\hat{\sigma}^*_{\delta,124}(s)=\frac{\lambda}{\lambda+s}\hat{\sigma}_{\delta,124}\left(\frac{\lambda+\delta}{c}\right) ,$$

και αντικαθιστώντας της στην (4.4.9) , παίρνουμε

$$\left\{1-\hat{p}(s)\frac{\lambda}{\lambda+\delta-cs}\right\}\hat{m}_{\delta,124}(s)=\hat{\beta}_{\delta,124}(s)-\frac{\lambda}{\lambda+\delta-cs}\hat{\sigma}_{\delta,124}\left(\frac{\lambda+\delta}{c}\right). \qquad (4.6.1)$$

Χρησιμοποιώντας τη (4.4.2) ,

$$\beta_{\delta,124}(u)=\frac{\lambda}{c}\int_u^\infty e^{-\left(\frac{\lambda+\delta}{c}\right)(x-u)}\alpha_{124}(x,u)\,dx \quad , \qquad (4.6.2)$$

όπου $\alpha_{124}(x,u)$ και $\sigma_{\delta,124}(x)$ δίνονται από τις σχέσεις (4.4.3) και (4.4.5) αντίστοιχα με το $p(y\,|\,t)$ να έχει αντικατασταθεί από το $p(y)$. Αφού η (4.6.1) είναι ισοδύναμη της (2.5.3) ,με $\hat{\beta}_{\delta,12}(s)$ να έχει αντικατασταθεί από τη $\hat{\beta}_{\delta,124}(s)$, η $\hat{m}_{\delta,12}(s)$ να έχει αντικατασταθεί από τη $\hat{m}_{\delta,124}(s)$ και η $\hat{\sigma}_{\delta,12}(s)$ να έχει αντικατασταθεί από τη $\hat{\sigma}_{\delta,124}(s)$, προκύπτει από τη σχέση (2.5.6) ότι :

$$\left\{s-\frac{\lambda+\delta}{c}+\frac{\lambda}{c}\hat{p}(s)\right\}\hat{m}_{\delta,124}(s)=\frac{1}{c}\left\{(\lambda+\delta-c\rho_\delta)\hat{\beta}_{\delta,124}(\rho_\delta)-(\lambda+\delta-cs)\hat{\beta}_{\delta,124}(s)\right\}$$

$$=\left(\frac{\lambda+\delta}{c}-\rho_\delta\right)\hat{\beta}_{\delta,124}(\rho_\delta)-\left(\frac{\lambda+\delta}{c}-s\right)\hat{\beta}_{\delta,124}(s)$$

$$=(s-\rho_\delta)\hat{\beta}_{\delta,124}(s)+\left(\frac{\lambda+\delta}{c}-\rho_\delta\right)(\hat{\beta}_{\delta,124}(\rho_\delta)-\hat{\beta}_{\delta,124}(s)),$$

όπου από το Θεώρημα 1.1 αποδείξαμε ότι ρ_δ είναι η μοναδική και θετική ρίζα της θεμελιώδης εξίσωσης του Lundberg . Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.5.12) μπορούμε να εκφράσουμε την παραπάνω εξίσωση ως εξής :

$$(s-\rho_\delta)(1-\phi_\delta\hat{f}_\delta(s))\hat{m}_{\delta,124}(s)=(s-\rho_\delta)\hat{\beta}_{\delta,124}(s)+\left(\frac{\lambda+\delta}{c}-\rho_\delta\right)(\hat{\beta}_{\delta,124}(\rho_\delta)-\hat{\beta}_{\delta,124}(s))$$

όπου ϕ_δ και $f_\delta(y)$ δίνονται από τις σχέσεις (2.5.10) και (2.5.11) αντίστοιχα.

Λύνοντας ως προς $\hat{m}_{\delta,124}(s)$ παίρνουμε,

$$\hat{m}_{\delta,124}(s)=\phi_\delta\hat{m}_{\delta,124}(s)\hat{f}_\delta(s)+\hat{\beta}_{\delta,124}(s)+\left(\frac{\lambda+\delta}{c}-\upsilon_\delta\right)\frac{\hat{\beta}_{\delta,124}(\rho_\delta)-\hat{\beta}_{\delta,124}(s)}{s-\rho_\delta},$$

από την οποία παίρνουμε το αντίστροφο του μετασχηματισμού Laplace έτσι ώστε να προκύψει η παρακάτω ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

$$m_{\delta,124}(u)=\phi_\delta\int_0^u m_{\delta,124}(u-y)\,f_\delta(y)\,dy+v_{\delta,124}(u).$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1.7.3) και (1.7.1)

$$v_{\delta,124}(u)=\beta_{\delta,124}(u)+\left(\frac{\lambda+\delta}{c}-\rho_\delta\right)\int_u^\infty e^{-\rho_\delta(v-u)}\beta_{\delta,124}(v)dv\ . \qquad (4.6.3)$$

Έπειτα η γενική λύση της $m_{\delta,124}(u)$ δίνεται από

$$m_{\delta,124}(u) = \nu_{\delta,124}(u) + \frac{1}{1-\phi_\delta}\int_0^u \nu_{\delta,124}(v)\, g_\delta(u-v)dv,$$

όπου $g_\delta(y)$ δίνεται από τη σχέση (2.5.13) και κάνοντας αντικατάσταση της (4.6.3) έχουμε ως αποτέλεσμα

$$m_{\delta,124}(u) = \beta_{\delta,124}(u) + \left(\frac{\lambda+\delta}{c} - \rho_\delta\right)\int_u^\infty e^{-\rho_\delta(v-u)}\beta_{\delta,124}(v)\,dv$$

$$+\frac{1}{1-\phi_\delta}\int_0^u \beta_{\delta,124}(v)\, g_\delta(u-v)\,dv$$

$$+\frac{1}{1-\phi_\delta}\left(\frac{\lambda+\delta}{c} - \rho_\delta\right)\int_0^u\left(\int_v^\infty e^{-\rho_\delta(t-v)}\beta_{\delta,124}(t)\,dt\right)g_\delta(u-v)\,dv. \qquad (4.6.4)$$

Αλλάζοντας μεταβλητές στο τελευταίο ολοκλήρωμα προκύπτει ,

$$\int_0^u\left(\int_v^\infty e^{-\rho_\delta(t-v)}\beta_{\delta,124}(t)\,dt\right)g_\delta(u-v)\,dv$$

$$=\int_0^u \beta_{\delta,124}(t)\int_0^t e^{-\rho_\delta(t-v)}\, g_\delta(u-v)\,dv\,dt + \int_u^\infty \beta_{\delta,124}(t)\int_0^u e^{-\rho_\delta(t-v)}\, g_\delta(u-v)\,dv\,dt\ .$$

Για λόγους ευκολίας θα αντικαταστήσουμε τη μεταβλητή v με t, και τη μεταβλητή t με v στην παραπάνω εξίσωση ,

$$\int_0^u\left(\int_t^\infty e^{-\rho_\delta(v-t)}\beta_{\delta,124}(v)dv\right)g_\delta(u-t)\,dt$$

$$=\int_0^u \beta_{\delta,124}(v)\int_0^v e^{-\rho_\delta(v-t)}\, g_\delta(u-t)\,dt\,dv + \int_u^\infty \beta_{\delta,124}(v)\int_0^u e^{-\rho_\delta(v-t)}\, g_\delta(u-t)\,dt\,dv\ .$$

Κάνοντας αντικατάσταση στην (4.6.4) προκύπτει

$$m_{\delta,124}(u) = \beta_{\delta,124}(u)$$

$$+\frac{1}{1-\phi_\delta}\int_0^u \beta_{\delta,124}(v)\left\{g_\delta(u-v) + \left(\frac{\lambda+\delta}{c} - \rho_\delta\right)\int_0^v e^{-\rho_\delta(v-t)}\, g_\delta(u-t)\,dt\right\}dv$$

$$+\left(\frac{\lambda+\delta}{c}-\rho_\delta\right)\int_u^\infty \beta_{\delta,124}(v)\left\{e^{-\rho_\delta\,(v-u)}+\frac{1}{1-\phi_\delta}\int_0^u e^{-\rho_\delta\,(v-t)}g_\delta(u-t)\,dt\right\}dv$$

$$=\beta_{\delta,124}(u)+\int_0^\infty \beta_{\delta,124}(v)\,\tau_\delta(u,v)\,dv \quad , \tag{4.6.5}$$

όπου

$$\tau_\delta(u,v)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\phi_\delta}\left\{g_\delta(u-v)+\left(\dfrac{\lambda+\delta}{c}-\rho_\delta\right)\displaystyle\int_0^v e^{-\rho_\delta\,(v-t)}g_\delta(u-t)dt\right\} & , v<u\\ \left(\dfrac{\lambda+\delta}{c}-\rho_\delta\right)\left\{e^{-\rho_\delta\,(v-u)}+\dfrac{1}{1-\phi_\delta}\displaystyle\int_0^u e^{-\rho_\delta\,(v-t)}\,g_\delta(u-t)dt\right\} & ,v>u\end{cases}. \tag{4.6.6}$$

Σημειώνουμε ότι αν $\delta=0$, τότε όπως δείχθηκε στην Εφαρμογή 1 ότι $p_0=0$, και θυμίζουμε ότι $g_0(u)=-\overline{G}_0'(u)=-\psi'(u)$ και $\phi_0=\overline{G}_0(0)=\psi(0)$. Τότε για $\delta=0$, η σχέση (4.6.6) γίνεται

$$\tau_0(u,v)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\psi(0)}\left\{\dfrac{\lambda}{c}[\psi(u-v)-\psi(u)]-\psi'(u-v)\right\} & , v<u\\ \dfrac{\lambda}{c}\dfrac{1-\psi(u)}{1-\psi(0)} & ,v>u\end{cases}. \tag{4.6.7}$$

Θεωρούμε $w_{124}(x,y,v)=e^{-s_1x-s_2y-s_4v}$ τέτοιο ώστε

$$m_{\delta,124}(u)=\mathrm{E}[e^{-\delta T-s_1U(T-)-s_2|U(T)|-s_4R_{N_T-1}}I(T<\infty)\,|\,U(0)=0], \tag{4.6.8}$$

είναι ο μετασχηματισμός Laplace της $h_{\delta,124}(x,y,v\,|\,u)$, η από κοινού πυκνότητα πιθανότητα των $\left(U(T-),|U(T)|,R_{N_T-1}\right)$.

Έπειτα χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.4.3) με $p(y\,|\,t)$ να έχει αντικατασταθεί με $p(y)$, η $\alpha_{124}(x,u)$ γίνεται

$$\alpha_{124}(x,u)=\int_x^\infty e^{-s_1x-s_2(y-x)-s_4u}\,p(y)\,dy$$

$$=e^{-s_1x-s_4u}\int_0^\infty e^{-s_2y}\,p(x+y)dy \quad . \tag{4.6.9}$$

Χρησιμοποιώντας τη (4.2.1) με $p(y\,|\,t)$ να έχει αντικατασταθεί με $p(y)$, η (4.6.2) γίνεται

$$\beta_{\delta,124}(u)=\frac{\lambda}{c}\int_{u}^{\infty} e^{-\left(\frac{\lambda+\delta}{c}\right)(x-u)} e^{-s_1 x - s_4 u}\int_{0}^{\infty} e^{-s_2 y}\, p(x+y)\,dy\,dx$$

$$=\int_{u}^{\infty}\int_{0}^{\infty} e^{-\delta\left(\frac{x-u}{c}\right)-s_1 x-s_2 y-s_4 u}\left(\frac{\lambda}{c}e^{-\lambda\left(\frac{x-u}{c}\right)}p(x+y)\right)dy\,dx$$

$$=\int_{u}^{\infty}\int_{0}^{\infty} e^{-\delta\left(\frac{x-u}{c}\right)-s_1 x-s_2 y-s_4 u}\, h^{*}_{12}(x,y\,|\,u)\,dy\,dx\ . \qquad (4.6.10)$$

Συμπεραίνουμε από τη σχέση (4.6.8) ότι η $m_{\delta,124}(u)$ είναι ουσιαστικά η συνάρτηση $e^{-\delta T - s_1 U(T-) - s_2 |U(T)| - s_4 R_{N_T - 1}} I(T<\infty)$. Έπειτα μπορούμε να γράψουμε την $m_{\delta,124}(u)$ ως άθροισμα των μορφών που προκύπτουν από τη μελέτη της χρεοκοπίας στην πρώτη απαίτηση (όπου $t=\frac{x-u}{c}$, $x>u$, $y>0$ και $R_{N_T-1}=R_0=u$) και από τη χρεοκοπία σε μεταγενέστερη απαιτήσεις ($t<0, v<x<u+ct, y>0$ και $v>0$). Και χρησιμοποιώντας την πυκνότητα των $\left(T\ ,\ U(T-)\ ,\ |U(T)|\ ,\ R_{N_T-1}\right)$ που συνοψίζεται στην (4.2.2), η $m_{\delta,124}(u)$ μπορεί να γραφτεί ως εξής :

$$m_{\delta,124}=\int_{u}^{\infty}\int_{0}^{\infty} e^{-\delta\left(\frac{x-u}{c}\right)-s_1 x-s_2 y-s_4 u}\, h^{*}_{12}(x,y\,|\,u)\,dy\,dx$$

$$+\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{x}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} e^{-\delta t-s_1 x-s_2 y-s_4 v}\, h^{**}_{124}(t,x,y,v|\,u)\,dt\,dy\,dv\,dx$$

$$=\beta_{\delta,124}(u)+\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{x}\int_{0}^{\infty} e^{-s_1 x-s_2 y-s_4 v}\, h^{**}_{\delta,124}(x,y,v\,|\,u)\,dy\,dv\,dx. \qquad (4.6.11)$$

Λύνοντας την παραπάνω εξίσωση ως προς το ολοκλήρωμα και χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.6.5) παίρνουμε ,

$$\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{x}\int_{0}^{\infty} e^{-s_1 x-s_2 y-s_4 v}\, h^{**}_{\delta,124}(x,y,v\,|\,u)\,dy\,dv\,dx = m_{\delta,124}(u)+\beta_{\delta,124}(u)$$

$$=\int_{0}^{\infty}\beta_{\delta,124}(v)\,\tau_{\delta}(u,v)\,dv$$

$$= \int_0^{\infty} \tau_\delta (u,v) \int_v^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-s_1 x - s_2 y - s_4 v} h^*_{\delta,12}(x,y|v)\,dy\,dx\,dv$$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{x} e^{-s_1 x - s_2 y - s_4 v} \left(\tau_\delta (u,v)\, h^*_{\delta,12}(x,y|v)\right) dv\,dy\,dx \qquad (4.6.12)$$

χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.6.10) και (4.2.3) με $p(y \mid t)$ να έχει αντικατασταθεί με $p(y)$.

Κάνοντας αντικατάσταση τις σχέσεις (4.6.10) και (4.6.12) στην (4.6.11) προκύπτει

$$m_{\delta,124} = \int_u^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-s_1 x - s_2 y - s_4 u} h^*_{12}(x,y|u)\,dy\,dx$$

$$+ \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{x} e^{-s_1 x - s_2 y - s_4 v} \left(\tau_\delta (u,v)\, h^*_{\delta,12}(x,y|v)\right) dv\,dy\,dx \;.$$

Χρησιμοποιώντας τη μοναδικότητα του μετασχηματισμού Laplace , η από κοινού προεξοφλημένη πυκνότητα πιθανότητα των $\left(U(T-), |U(T)|, R_{N_T -1}\right)$ στα σημεία (x, y, v) δίνεται από

$$h_{\delta,124}(x,y,v|u) = \begin{cases} h^*_{\delta,12}(x,y|u) & , x>v, y>0, v=u \\ \tau_\delta(u,v)\, h^*_{\delta,12}(x,y|v) & , x>v, y>0, v\neq u \end{cases} ,$$

όπου $h^*_{\delta,12}(x,y|u) = \dfrac{\lambda}{c} e^{-\left(\frac{\lambda+\delta}{c}\right)(x-u)} p(x+y)$ και $\tau_\delta(u,v)$ να δίνεται από τη σχέση (4.6.6). Είμαστε σε θέση λοιπόν να υπολογίσουμε περιθώριες προεξοφλημένες πυκνότητες των $U(T-)$, $|U(T)|$ και $R_{N_T -1}$ ολοκληρώνοντας βάση συγκεκριμένων μεταβλητών όπως γίνεται στο [Cheung et al. (2010b)].

Τώρα θέλουμε να βρούμε την από κοινού πυκνότητα της τελευταίας ενδιάμεσης απαίτησης V_{N_T} και της τελευταίας απαίτησης που προκαλεί τη χρεοκοπία Y_{N_T}. Γνωρίζουμε ότι $V_{N_T} = \dfrac{U(T-) - R_{N_T -1}}{c}$ και $Y_{N_T} = U(T-) + |U(T)|$ επομένως ,

$$e^{-z V_{N_T} - s Y_{N_T}} = e^{-\left(s+\frac{z}{c}\right) U(T-) - s|U(T)| + \frac{z}{c} R_{N_T -1}} .$$

Έτσι, η $m_{\delta,124}(u)$ είναι ισοδύναμη με τη $\mathrm{E}[e^{-z\,V_{N_T}-s\,Y_{N_T}}I(T<\infty)\,|\,U(0)=0]$, αν $s_1=\left(s+\dfrac{z}{c}\right)$, $s_2=s$, $s_4=-\dfrac{z}{v}$ και $\delta=0$. Τότε η $\alpha_{124}(x,u)$ από τη σχέση (4.6.9) γίνεται

$$\alpha_{124}(x,u)=e^{-\left(s+\frac{z}{c}\right)x+\frac{z}{c}u}\int_0^{\infty}e^{-s\,y}\,p(x+y)dy$$

$$=e^{-\frac{z}{c}(x-u)}\int_x^{\infty}e^{-s\,y}\,p(y)dy.$$

Για $\delta=0$, η (4.6.2) κάνοντας αλλαγή στις μεταβλητές γίνεται

$$\beta_{0,124}(u)=\frac{\lambda}{c}\int_u^{\infty}e^{-\left(\frac{\lambda+z}{c}\right)(x-u)}\int_x^{\infty}e^{-s\,y}\,p(y)dydx$$

$$=\lambda\int_0^{\infty}e^{-(\lambda+z)\,t}\int_{u+ct}^{\infty}e^{-s\,y}\,p(y)dydt$$

$$=\int_0^{\infty}\int_{u+ct}^{\infty}e^{-z\,t-s\,y}\left(\lambda\,e^{-\lambda\,t}\,p(y)\right)dydt\,.$$

Κάνοντας αντικατάσταση στη (4.6.5) προκύπτει

$$\mathrm{E}[e^{-z\,V_{N_T}-s\,Y_{N_T}}I(T<\infty)\,|\,U(0)=0]=\int_0^{\infty}\int_{u+ct}^{\infty}e^{-z\,t-s\,y}\left(\lambda\,e^{-\lambda\,t}\,p(y)\right)dydt$$

$$+\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty}\int_{u+ct}^{\infty}e^{-z\,t-s\,y}\,\lambda\,e^{-\lambda\,t}\,p(y)dydt\right)\tau_0(u,v)dv$$

$$=\int_0^{\infty}\int_{u+ct}^{\infty}e^{-z\,t-s\,y}\left(\lambda e^{-\lambda\,t}\,p(y)\right)dydt$$

$$+\int_0^{\infty}\int_{ct}^{\infty}e^{-z\,t-s\,y}\left(\lambda\,e^{-\lambda\,t}\,p(y)\int_0^{y-ct}\tau_0(u,v)dv\right)dydt.$$

Από τη μοναδικότητα του μετασχηματισμού Laplace προκύπτει ότι η από κοινού πυκνότητα του τελευταίου ενδιάμεσου χρόνου και της απαίτησης που προκαλεί τη χρεοκοπία $\left(V_{N_T},Y_{N_T}\right)$ δίνεται από

$$h_6(t,y|u)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}p(y)\left(1+\int_0^{y-ct}\tau_0(u,v)dv\right) & ,\ y>u+ct\\ \lambda e^{-\lambda t}p(y)\int_0^{y-ct}\tau_0(u,v)\,dv & ,ct<y<u+ct\\ 0 & ,\ y<ct\end{cases}$$

όπου $\tau_0(u,v)$ δίνεται από τη σχέση (4.6.7).

4.7 Εφαρμογή 5 : Το μέγεθος των απαιτήσεων ακολουθεί την εκθετική κατανομή

Θα συνεχίσουμε να υποθέτουμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές V και Y είναι ανεξάρτητες, δηλαδή $p(y|t)=p(y)$ και θα εξετάσουμε πότε οι απαιτήσεις είναι εκθετικά κατανεμημένες δηλαδή $p(y)=\beta e^{-\beta y}$ όπως υποθέσαμε και στην Εφαρμογή 2 όπου αναλύσαμε την $m_{\delta,12}(u)$ η οποία εμπεριείχε η συνάρτηση ποινής της 2-μεταβλητές [Cheung et al. (2010a)]. Σε αυτή την εφαρμογή , θεωρούμε μια γενικευμένη συνάρτηση ποινής $w(x,y,z,v)$ και μάλιστα θεωρούμε ότι $w(x,y,z,v)=e^{-s_1x-s_2y-s_3z-s_4v}$ έτσι ώστε η $m_{\delta,12}(u)$ να γίνεται

$$m_\delta(u)=\mathrm{E}[e^{-\delta T-s_1U(T-)-s_2|U(T)|-s_3X_T-s_4R_{N_T-1}}I(T<\infty)|U(0)=0] \qquad (4.7.1)$$

η οποία όπως αναφέραμε προηγουμένως είναι ο μετασχηματισμός Laplace της από κοινού προεξοφλημένης πυκνότητας πιθανότητας των $\left(U(T-)\ ,|U(T)|\ ,\ X_T\ ,\ R_{N_T-1}\right)$.

$$h^{**}_{\delta,124}(x,u+y,v|0)=p_x(u+y)\,h^{**}_{\delta,14}(x,v|0)$$

$$=\beta e^{-\beta(u+y)}\,h^{**}_{\delta,14}(x,v|0)\ .$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.3.7) , προκύπτει

$$v_\delta(u)=\int_0^\infty e^{-\delta t}\left(\int_0^\infty e^{-s_1(u+ct)-s_2y-s_3u-s_4u}\beta e^{-\beta(u+ct+y)}dy\right)k(t)\,dt$$

$$+\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^x e^{-s_1(u+x)-s_2y-s_3u-s_4(u+v)}\beta e^{-\beta(u+y)}\,h^{**}_{\delta,14}(x,v|0)\,dv\,dx\,dy$$

$$= e^{-(\beta+s_1+s_3+s_4)u}\left(\int_0^\infty \beta e^{-(\beta+s_2)y} dy\right)$$

$$\times\left(\int_0^\infty e^{-(\delta+cs_1+c\beta)t} k(t)\,dt + \int_0^\infty\int_0^x e^{-s_1 x - s_4 v} h^{**}_{\delta,14}(x,v\,|\,0)\,dv\,dx\right)$$

$$= \frac{\beta e^{-(\beta+s_1+s_3+s_4)u}}{\beta+s_2}\left(\hat{k}(\delta+cs_1+c\beta)+\hat{h}^{**}_{\delta,14}(s_1,s_4\,|\,0)\right)$$

όπου $\hat{h}^{**}_{\delta,14}(s_1,s_4\,|\,0)$ είναι ο διδιάστατος μετασχηματισμός Laplace της $h^{**}_{\delta,14}(x,y\,|\,0)$.

Υποθέτουμε ότι $\xi_\delta(s_1,s_4)=\hat{k}(\delta+cs_1+c\beta)+\hat{h}^{**}_{\delta,14}(s_1,s_4\,|\,0)$ τέτοιο ώστε

$$v_\delta(u)=\frac{\beta\,\xi_\delta(s_1,s_4)}{\beta+s_2}e^{-(\beta+s_1+s_3+s_4)u}. \tag{4.7.2}$$

Δεδομένου ότι το κλιμακωτό ύψος $f_\delta(y)$ είναι ανεξάρτητη από την επιλογή της συνάρτησης ποινής, χρησιμοποιώντας (2.6.2), $f_\delta(y)=\beta e^{-\beta y}$. Και επειδή η $m_\delta(u)$ είναι γνωστό ότι ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση ανανέωση, χρησιμοποιώντας τη (4.2.8) έχουμε,

$$m_\delta(u)=\phi_\delta\int_0^u m_\delta(u-y)\beta e^{-\beta y}dy+v_\delta(u),$$

όπου $v_\delta(u)$ δίνεται από τη σχέση (4.7.2) και από το θεώρημα 2.1 , το ϕ_δ είναι μια πραγματική ρίζα $\in(0,1)$ που ικανοποιεί τη (2.6.8). Παίρνοντας τον μετασχηματισμό Laplace της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης προκύπτει,

$$\hat{m}_\delta(z)=\phi_\delta\,\hat{m}_\delta(z)\frac{\beta}{\beta+z}+\frac{\beta\,\xi_\delta(s_1,s_4)}{\beta+s_2}(\beta+s_1+s_3+s_4+z)^{-1}.$$

Λύνοντας ως προς $\hat{m}_\delta(z)$, παίρνουμε

$$\hat{m}_\delta(z)=\frac{\beta\,\xi_\delta(s_1,s_4)}{\beta+s_2}\,\frac{(\beta+s_1+s_3+s_4+z)^{-1}}{1-\phi_\delta\beta(\beta+z)^{-1}}$$

$$\hat{m}_\delta(z)=\frac{\beta\ \xi_\delta(s_1,s_4)}{(\beta+s_2)\ (\phi_\delta\,\beta+s_1+s_3+s_4)}\left\{\frac{s_1+s_3+s_4}{\beta+s_1+s_3+s_4+z}+\frac{\phi_\delta\,\beta}{\beta\,(1-\phi_\delta)+z}\right\}.$$

Χρησιμοποιώντας τη (2.6.4) , παίρνουμε την αντιστροφή

$$m_{\delta}(u) = \frac{\beta\ \xi_{\delta}(s_1, s_4)}{(\beta + s_2)\ (\phi_{\delta}\beta + s_1 + s_3 + s_4)} \left\{ (s_1 + s_3 + s_4) e^{-(\beta + s_1 + s_3 + s_4)u} + \beta\, \overline{G}_{\delta}(u) \right\}. \qquad (4.7.3)$$

Προκειμένου να εκφράσουμε το $\xi_{\delta}(s_1, s_4)$ συναρτήσει του $\hat{k}(\delta)$, θεωρούμε ότι η $m_{\delta}(u)$ δίνεται από (4.4.6) η οποία προέκυψε από τη μελέτη του χρόνου και του μεγέθους της πρώτης απαίτησης. Δεδομένου ότι η $\xi_{\delta}(s_1, s_4)$ δεν είναι συναρτήσει των s_2 ή s_3,υποθέτουμε ότι $s_2 = s_3 = 0$ και έτσι η $\hat{m}_{\delta}(z)$ από τη (4.7.3) απλοποιείται σε

$$m_{\delta,14}(u) = \frac{\beta\ \xi_{\delta}(s_1, s_4)}{\phi_{\delta}\beta + s_1 + s_4} \left\{ (s_1 + s_4) e^{-(\beta + s_1 + s_4)u} + \beta\, \overline{G}_{\delta}(u) \right\}. \qquad (4.7.4)$$

Η (4.7.4) απλοποιείται σε

$$m_{\delta,14}(u) = \int_0^{\infty} e^{-\delta t}\ \sigma_{\delta,14}(u + ct)\, k(t)\, dt + \beta_{\delta,14}(u)\,, \qquad (4.7.5)$$

όπου από τις (4.4.1) και (4.4.3)

$$\beta_{\delta,14}(u) = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \left(\int_{u+ct}^{\infty} e^{-s_1(u+ct) - s_4 u} \beta\, e^{-\beta y} dy \right) k(t) dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\delta t - (\beta + s_1)(u+ct) - s_4 u}\ k(t)\, dt$$

$$= e^{-(\beta + s_1 + s_4)u}\ \hat{k}(\delta + c\beta + cs_1)\,. \qquad (4.7.6)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.4.5) και (4.7.4)

$$\sigma_{\delta,14}(x) = \int_0^{x} m_{\delta,14}(x - y) \beta\, e^{-\beta y} dy\,.$$

$$= \frac{\xi_{\delta}(s_1, s_4)}{\phi_{\delta}\ \beta + s_1 + s_4} \left\{ (s_1 + s_4) \int_0^{x} e^{-(\beta + s_1 + s_4)(x-y)} \beta\, e^{-\beta y} dy + \beta \int_0^{x} \overline{G}_{\delta}(x - y) \beta\, e^{-\beta y} dy \right\}.$$

Θυμίζουμε από την (2.6.3) ότι

$$\int_0^{x} \overline{G}_{\delta}(x - y)\, \beta\, e^{-\beta y} dy = \frac{\overline{G}_{\delta}(x)}{\phi_{\delta}} - e^{-\beta x}\,,$$

επομένως έχουμε

$$\sigma_{\delta,14}(x)=\frac{\xi_{\delta}(s_1,s_4)}{\phi_{\delta}\ \beta+s_1+s_4}\left\{e^{-\beta x}\,(1-e^{-(s_1+s_4)\,x})+\left(\frac{\overline{G}_{\delta}(x)}{\phi_{\delta}}-e^{-\beta x}\right)\right\}$$

$$=\frac{\xi_{\delta}(s_1,s_4)}{\phi_{\delta}\ \beta+s_1+s_4}\left\{\frac{\overline{G}_{\delta}(x)}{\phi_{\delta}}-e^{-(\beta+s_1+s_4)\,x}\right\}. \tag{4.7.7}$$

Επιπλέον χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.7.6), (4.7.7) και (2.6.7) , η (4.7.5) γίνεται

$$m_{\ \delta,14}(u)=\frac{\beta\,\xi_{\delta}(s_1,s_4)}{\phi_{\delta}\beta+s_1+s_4}\left\{\frac{1}{\phi_{\delta}}\int_0^{\infty}e^{-\delta t}\ \overline{G}_{\delta}(u+ct)\ k(t)\ dt-\int_0^{\infty}e^{-\delta t-(\beta+s_1+s_4)(u+ct)}\ k(t)\,dt\right\}$$

$$+e^{-(\beta+s_1+s_4)\,u}\ \hat{k}(\delta+c\beta+cs_1)$$

$$=\frac{\beta\,\xi_{\delta}(s_1,s_4)}{\phi_{\delta}\beta+s_1+s_4}\left\{\overline{G}_{\delta}(u)-e^{-(\beta+s_1+s_4)\,u}\ \hat{k}(\delta+c\beta+cs_1+cs_4)\right\}$$

$$+e^{-(\beta+s_1+s_4)\,u}\ \hat{k}(\delta+c\beta+cs_1)\,. \tag{4.7.8}$$

Εξισώνοντας τις (4.7.4) και (4.7.8) συναρτήσει του $\overline{G}_{\delta}(u)$ απλοποιώντας και διαιρώντας και τις δύο πλευρές με τον όρο $e^{-(\beta+s_1+s_4)\,u}$ προκύπτει ότι

$$\frac{\xi_{\delta}(s_1,s_4)}{\phi_{\delta}\ \beta+s_1+s_4}(s_1+s_4)=\hat{k}(\delta+c\beta+cs_1)-\frac{\xi_{\delta}(s_1,s_4)}{\phi_{\delta}\ \beta+s_1+s_4}\hat{k}(\delta+c\beta+cs_1+sc_4)\,.$$

Λύνοντας ως προς $\xi_{\delta}(s_1,s_4)$ παίρνουμε ,

$$\xi_{\delta}(s_1,s_4)=\frac{(\phi_{\delta}\ \beta+s_1+s_4)\ \hat{k}(\delta+c\beta+cs_1)}{s_1+s_4+\beta\,\hat{k}(\delta+c\beta+cs_1+cs_4)}\quad ,$$

η οποία είναι μια εξίσωση συναρτήσει του $\hat{k}(s)$. Επιπλέον χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.7.3)

$$m_{\ \delta}(u)=c_{\delta}(s_1,s_2,s_3,s_4)\left\{(s_1+s_3+s_4)e^{-(\beta+s_1+s_3+s_4)\,u}+\beta\,\overline{G}_{\delta}(u)\right\}, \tag{4.7.9}$$

με $c_{\delta}(s_1,s_2,s_3,s_4)=\dfrac{\beta\,(\phi_{\delta}\beta+s_1+s_4)\,\hat{k}(\delta+c\beta+cs_1)}{(\beta+s_2)(\phi_{\delta}\ \beta+s_1+s_3+s_4)(s_1+s_4+\beta\,\hat{k}(\delta+c\beta+cs_1+cs_4))}$

και $\overline{G}_{\delta}(u)$ να δίνεται από (2.6.4).

Υπενθυμίζουμε ότι, αν θέλουμε να μελετήσουμε την πυκνότητα του τελευταίου ενδιάμεσου χρόνου πριν συμβεί η χρεοκοπία , οποία δίνεται από τη σχέση $V_{N_T} = \dfrac{U(T-) - R_{N_T - 1}}{c}$, τότε επιλέγουμε τη συνάρτηση ποινής $w(x, y, z, v) = e^{-s\left(\frac{x-v}{c}\right)} = e^{-\frac{s}{c}x + \frac{s}{c}v}$. Έτσι, αν ορίζουμε την πυκνότητα του τελευταίου ενδιάμεσου χρόνου πριν συμβεί η χρεοκοπία ως $k_T(t\,|\,u) = -\overline{K}_T{}'(t\,|\,u)$, τότε ο μετασχηματισμός Laplace της $k_T(t\,|\,u)$ δίνεται από την $\mathrm{E}[e^{-sV_{N_T}} I(T < \infty)\,|\,U(0) = u]$ η οποία μπορεί να δοθεί από την (4.7.9) με $\delta = 0$, $s_1 = s/c$, $s_2 = s_3 = 0$ και $s_4 = -s/c$. Και έτσι, θυμίζουμε ότι $\overline{G}_0(u) = \psi(u)$ παίρνουμε,

$$\mathrm{E}[e^{-sV_{N_T}} I(T < \infty)\,|\,U(0) = u] = \frac{\hat{k}(c\beta + s)}{\hat{k}(c\beta)} \psi(u) \ ,$$

την οποία αντιστρέφουμε ώστε να πάρουμε την πυκνότητα του τελευταίου ενδιάμεσου χρόνου

$$k_T(t\,|\,u) = \frac{e^{-c\beta t}\, k(t)}{\hat{k}(c\beta)} \psi(u) \, .$$

Η κατανομή της $V_{N_T}\ |T < \infty$ δίνεται από

$$\frac{k_T(t\,|\,u)}{\psi(u)} = \frac{e^{-c\beta t}\, k(t)}{\hat{k}(c\beta)} ,$$

η οποία σημειώνουμε δεν εξαρτάται από το αρχικό πλεόνασμα u και εύκολα αξιολογούνται για πολλές μορφές $k(t)$. Έχει αποδειχθεί στο [Cheung et al. (2010a)] ότι ο τελευταίος ενδιάμεσος χρόνος V_{N_T} είναι στοχαστικά δομημένος από το γενικό ενδιάμεσο χρόνο V δηλαδή $\overline{K}_T(t\,|\,u) \leq \overline{K}(t)$. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ένας μικρότερος ενδιάμεσος χρόνος σημαίνει λιγότερος χρόνος να συλλεχθεί το ασφάλιστρο το οποίο αυξάνει τις πιθανότητες μιας απαίτησης να συμβεί η οποία είναι αρκετά μεγάλη ώστε να προκαλέσει χρεοκοπία.

Τώρα υποθέτουμε ότι $s_3 = s_4 = 0$, τέτοιο ώστε $m_{\delta}(u)$ να απλοποιείται σε $m_{\delta,12}(u)$ και χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.7.9)

$$m_{\delta,12}(u) = \frac{\beta\, \hat{k}(\delta + c\beta + cs_1)}{(\beta + s_2)\ (s_1 + \beta\, \hat{k}(\delta + c\beta + cs_1))} \left\{ s_1 e^{-(\beta + s_1)u} + \beta\, \overline{G}_{\delta}(u) \right\} \qquad (4.7.10)$$

η οποία είναι εκτενέστερη λύση της (2.6.12) συναρτήσει του $\hat{k}(s)$ όταν $w_{12}(x,y)=e^{-s_1 x - s_2 y}$.

Τώρα ενδιαφερόμαστε να προσδιορίσουμε την $h_{\delta,12}(x,y|u)$, την από κοινού προεξοφλημένη πυκνότητα του πλεονάσματος ακριβώς πριν συμβεί η χρεοκοπία και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας [Willmott, G.E (2011)]. Και δεδομένου ότι $h_{\delta,12}(x,y|u)=h_{\delta,1}(x|u)\beta e^{\beta y}$ από (4.1.10) όπου η $h_{\delta,1}(x|u)$ είναι η προεξοφλημένη πυκνότητα του πλεονάσματος αμέσως πριν συμβεί η χρεοκοπία, χρειαζόμαστε μόνο να εστιάσουμε την προσοχή μας στον εντοπισμό της $h_{\delta,1}(x|u)$ για τον προσδιορισμό της $h_{\delta,12}(x,y|u)$. Έτσι, υποθέτουμε $s_2=s_3=s_4=0$ τέτοιο ώστε η σχέση (4.7.1) να γίνεται

$$m_\delta(u)=\mathrm{E}[e^{-\delta T - s_1 U(T-)}\, I(T<\infty)\,|\,U(0)=u]$$

$$=\hat{h}_{\delta,1}(s_1\,|\,u)\ ,$$

όπου $\hat{h}_{\delta,1}(s_1\,|\,u)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace του $h_{\delta,1}(x|u)$. Έπειτα υποθέτουμε ότι $s_2=0$ και χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.7.10) , προκύπτει

$$\hat{h}_{\delta,1}(s_1\,|\,u)=\frac{\hat{k}(\delta+c\beta+cs_1)}{s_1+\beta\hat{k}(\delta+c\beta+cs_1)}\left\{ s_1 e^{-(\beta+s_1)u}+\beta\overline{G}_\delta(u)\right\}.$$

Δεδομένου ότι,

$$\hat{h}_{\delta,1}(s_1\,|\,0)=\frac{\hat{k}(\delta+c\beta+cs_1)}{s_1+\beta\hat{k}(\delta+c\beta+cs_1)}\left\{ s_1+\beta\phi_\delta\right\}. \tag{4.7.11}$$

Έπειτα μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\hat{h}_{\delta,1}(s_1\,|\,u)=\frac{\hat{h}_{\delta,1}(s_1\,|\,0)}{s_1+\beta\phi_\delta}\left\{ s_1 e^{-(\beta+s_1)u}+\beta\overline{G}_\delta(u)\right\}.$$

Προσθετο-αφαιρώντας τον όρο $\beta\phi_\delta e^{-(\beta+s_1)u}$, παίρνουμε

$$\hat{h}_{\delta,1}(s_1\,|\,u)=\frac{\hat{h}_{\delta,1}(s_1\,|\,0)}{s_1+\beta\phi_\delta}\left((s_1+\beta\phi_\delta)e^{-(\beta+s_1)u}+\beta\overline{G}_\delta(u)-\beta\phi_\delta\, e^{-(\beta+s_1)u}\right)$$

$$=\hat{h}_{\delta,1}(s_1\,|\,0)e^{-(\beta+s_1)u}+\frac{\beta\hat{h}_{\delta,1}(s_1\,|\,0)}{s_1+\beta\phi_\delta}\left(\overline{G}_\delta(u)-\phi_\delta\, e^{-(\beta+s_1)u}\right). \tag{4.7.12}$$

Έστω ότι ορίζουμε μια αυθαίρετη συνάρτηση $h(x)$ και μια σταθερά a , θεωρώντας ότι ο μετασχηματισμός Laplace της $e^{-a\,s}\ \hat{h}(s)$ να δίνεται από

$$e^{-a\,s}\ \hat{h}(s) = e^{-a\,s}\int_0^\infty e^{-s\,x}\ h(x)dx$$

$$= \int_0^\infty e^{\,-(x+a)\,s}\ h(x)dx$$

$$= \int_a^\infty e^{-s\,x}\ h(x-a)dx\,.$$

Επομένως το $e^{-a\,s}\ \hat{h}(s)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace του $h(x-a)I(x>a)$.

Αντιστρέφοντας την (4.7.12) προκύπτει

$$h_{\,\delta,1}(x\,|\,u) = e^{-\beta\,u}\ h_{\,\delta,1}(x-u\,|\,0)\,I(x>u) + \beta\,\overline{G}_{\delta}(u)\int_0^x e^{-\beta\,\phi_\delta\,(x-y)}\ h_{\,\delta,1}(y\,|\,0)dy$$

$$+\,e^{-\beta\,u}\ \beta\,\phi_\delta\int_0^{x-u} e^{-\beta\,\phi_\delta\,(x-u-y)}\ h_{\,\delta,1}(y\,|\,0)\,dy\,I(x>u)\,, \qquad (4.7.13)$$

η οποία είναι μια εξίσωση για $h_{\,\delta,1}(x\,|\,u)$ συναρτήσει του $h_{\,\delta,1}(x\,|\,0)$. Θυμίζουμε από τη σχέση (4.7.11) με s_1 να έχει αντικατασταθεί με s ότι

$$\hat{h}_{\,\delta,1}(s\,|\,0) = \frac{\hat{k}\,(\delta + c\beta + cs)}{s+\beta\ \hat{k}\,(\delta + c\beta + cs)}\ \left\{s + \beta\,\phi_\delta\ \right\}$$

$$= \frac{\hat{k}\,(\delta + c\beta + cs)}{s+\beta-\beta\,(1-\hat{k}\,(\delta + c\beta + cs))}\ \left\{s + \beta - \beta\,(1-\phi_\delta\,)\ \right\}\,.$$

Θυμίζουμε από την Εφαρμογή 2 ότι για $\kappa_\delta = \beta\,(1-\phi_\delta\,)$, δείξαμε ότι $-\kappa_\delta$ είναι η μοναδική θετική ρίζα της θεμελιώδης εξίσωσης του Lundberg και έτσι ικανοποιεί τη $\kappa_\delta = \beta\,(1-\hat{k}\,(\delta + c\kappa_\delta\,))$. Έτσι προσθετο-αφαιρώντας τον όρο κ_δ , προκύπτει ότι

$$\hat{h}_{\,\delta,1}(s-\beta\,|\,0) = \frac{\hat{k}\,(\delta + cs)}{s-\beta\,(1-\hat{k}\,(\delta + cs)}\ \left\{s - \kappa_\delta\right\}$$

$$= \frac{\hat{k}(\delta + cs)}{s - \kappa_\delta - \beta(1 - \hat{k}(\delta + cs)) + \beta(1 - \hat{k}(\delta + c\kappa_\delta))} \{s - \kappa_\delta\}$$

$$= \frac{\hat{k}(\delta + cs)}{1 - \beta \left\{ \dfrac{\hat{k}(\delta + c\kappa_\delta) - \hat{k}(\delta + cs)}{s - \kappa_\delta} \right\}} \quad . \tag{4.7.14}$$

Ορίζουμε την πυκνότητα

$$n_\delta(t) = \frac{e^{-\delta \frac{t}{c}} k(\frac{t}{c})}{c\,\hat{k}(\delta)} \ , \tag{4.7.15}$$

η οποία έχει μετασχηματισμό Laplace

$$\hat{n}_\delta(s) = \frac{\hat{k}(\delta + cs)}{\hat{k}(\delta)} .$$

Έπειτα η (4.7.14) μπορεί να γραφτεί ως εξής

$$\hat{h}_{\delta,1}(s - \beta \,|\, 0) = \frac{\hat{k}(\delta)\ \hat{n}_\delta(s)}{1 - \beta\,\hat{k}(\delta) \left\{ \dfrac{\hat{n}_\delta(\kappa_\delta) - \hat{n}_\delta(s)}{s - \kappa_\delta} \right\}} .$$

Δεδομένου ότι $\kappa_\delta = \beta(1 - \hat{k}(\delta + c\kappa_\delta))$ τότε προκύπτει ότι

$\beta = \dfrac{\kappa_\delta}{1 - \hat{k}(\delta + c\kappa_\delta)}$, το οποίο αντικαθιστούμε στη $\hat{h}_{\delta,1}(s - \beta \,|\, 0)$ και προκύπτει ότι

$$\hat{h}_{\delta,1}(s - \beta \,|\, 0) = \frac{\hat{k}(\delta)\ \hat{n}_\delta(s)}{1 - \dfrac{\kappa_\delta}{1 - \hat{k}(\delta + c\kappa_\delta)} \hat{k}(\delta) \left\{ \dfrac{\hat{n}_\delta(\kappa_\delta) - \hat{n}_\delta(s)}{s - \kappa_\delta} \right\}}$$

$$= \frac{\hat{k}(\delta)\ \hat{n}_\delta(s)}{1 - \dfrac{\kappa_\delta}{1 - \hat{k}(\delta + c\kappa_\delta)} (1 - \hat{n}_\delta(\kappa_\delta)) \left\{ \dfrac{\kappa_\delta}{s - \kappa_\delta} \dfrac{\hat{n}_\delta(\kappa_\delta) - \hat{n}_\delta(s)}{1 - \hat{n}_\delta(\kappa_\delta)} \right\}}$$

$$= \frac{\hat{v}^*_\delta(s)}{1 - \phi^*_\delta\ \hat{f}^*_\delta(s)} \ , \tag{4.7.16}$$

όπου $\hat{v}^{*}_{\delta}(s)=\hat{k}(\delta)\,\hat{n}_{\delta}(s)$,

$$\phi^{*}_{\delta}=\frac{\hat{k}(\delta)}{1-\hat{k}(\delta+c\kappa_{\delta})}\,(1-\hat{n}_{\delta}(\kappa_{\delta}))$$

$$=\frac{\hat{k}(\delta)-\hat{k}(\delta+c\kappa_{\delta})}{1-\hat{k}(\delta+c\kappa_{\delta})}\;.$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι $\phi^{*}_{\delta}\in(0,1)$ για $\delta>1$και $\phi^{*}_{0}=1$ και

$$\hat{f}^{*}_{\delta}(s)=\frac{\kappa_{\delta}}{s-\kappa_{\delta}}\,\frac{\hat{n}_{\delta}(\kappa_{\delta})-\hat{n}_{\delta}(s)}{1-\hat{n}_{\delta}(\kappa_{\delta})}\,, \tag{4.7.17}$$

και από (1.7.6), (4.7.17) είναι ο μετασχηματισμός Laplace της γενικευμένης πυκνότητα ισορροπίας του $n_{\delta}(y)$ και έτσι, με τη χρήση της (1.7.5), έπεται ότι

$$f^{*}_{\delta}(y)=\frac{e^{\kappa_{\delta}y}\int_{y}^{\infty}e^{-\kappa_{\delta}x}\,n_{\delta}(x)dx}{\int_{0}^{\infty}e^{-\kappa_{\delta}y}\,\overline{N}_{\delta}(y)\,dy}\;,$$

όπου από τη (1.7.1)

$$\overline{N}_{\delta}(y)=\int_{y}^{\infty}n_{\delta}(x)\,dx=\int_{y}^{\infty}\frac{e^{-\delta\frac{x}{c}}\,k(\frac{x}{c})}{c\,\hat{k}(\delta)}\,dx$$

$$=\frac{e^{-\delta\frac{y}{c}}\;T_{\delta}\;k(\frac{y}{c})}{\hat{k}(\delta)}\;.$$

Από τη σχέση (4.7.16) προκύπτει

$$\hat{h}_{\delta,1}(s-\beta\,|\,0)=\phi^{*}_{\delta}\;\hat{h}_{\delta,1}(s-\beta\,|\,0)\;\hat{f}^{*}_{\delta}(s)+v^{*}_{\delta}(s)\,,$$

την οποία αντιστρέφοντάς παίρνουμε

$$e^{\beta x}\,h_{\delta,1}(x\,|\,0)=\phi^{*}_{\delta}\int_{0}^{x}e^{-\beta(x-y)}\,h_{\delta,1}(x-y\,|\,0)\;f^{*}_{\delta}(y)\,dy+\hat{k}(\delta)\,n_{\delta}(x)\,,$$

το οποίο είναι μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση για $e^{\beta x} h_{\delta,1}(x\,|\,0)$ για $\delta > 0$ $(\delta = 0)$. Ως εκ τούτου, με τη χρήση (1.10.6) από τις Εισαγωγικές έννοιες, η γενική λύση αυτής της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης για $\delta > 0$ δίνεται από

$$e^{\beta x} h_{\delta,1}(x\,|\,0) = \hat{k}(\delta)\, n_\delta(x) + \frac{1}{1-\phi_\delta^*}\int_0^x \hat{k}(\delta)\; n_\delta(y)\; g_\delta^*(x-y)dy \qquad (4.7.18)$$

όπου αν $(f_\delta^*(y))^{*n}$ είναι η n-οστή συνέλιξη της $f_\delta^*(y)$, τότε

$$g_\delta^*(u) = \sum_{n=1}^{\infty}(1-\phi_\delta^*)(\phi_\delta^*)^n\,(f_\delta^*(y))^{*n}\ .$$

Επιπλέον, πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (4.7.18) με $e^{-\beta x}$ και χρησιμοποιώντας τη (4.7.15), παίρνουμε την ακόλουθη εξίσωση για $h_{\delta,1}(x\,|\,0)$

$$h_{\delta,1}(x\,|\,0) = e^{\beta x}\ \{\ \hat{k}(\delta)\, n_\delta(x) + \frac{\hat{k}(\delta)}{1-\phi_\delta^*}\int_0^x n_\delta(y)\, g_\delta^*(x-y)\, dy\}$$

$$= e^{\beta x}\left\{\frac{e^{-\delta\frac{x}{c}}\ \hat{k}(\frac{x}{c})}{c} + \frac{1}{c\,(1-\phi_\delta^*)}\int_0^x e^{-\delta(\frac{y}{c})}\ k(\frac{y}{c})\ g_\delta^*(x-y)dy\right\}.$$

4.8 Εφαρμογή 6: Μια μορφή εξάρτησης μεταξύ του μεγέθους των απαιτήσεων και των ενδιάμεσων χρόνων

Σε αυτή την παράγραφο , θεωρούμε μια δομή εξάρτησης μεταξύ του μεγέθους των απαιτήσεων X και των ενδιάμεσων χρόνων V. Θεωρούμε ότι η τυχαία μεταβλητή V ακολουθεί την Erlang κατανομή δηλαδή $V \sim Erl(n,\lambda)$, $\lambda > 0$ με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας , συνάρτηση κατανομής και μετασχηματισμό Laplace

$$f_V(t) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{\,n-1} e^{-\lambda\, t} \quad ,t \geq 0 \;\; n \in N^+, \tag{4.8.1}$$

$$F_V(t) = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^{\,i}}{i!} \tag{4.8.2}$$

$$\hat{f}_V(s) = E[e^{-sV}] = \left(\frac{\lambda}{\lambda + s} \right)^n. \tag{4.8.3}$$

Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των μεταβλητών (X,V) ορίζεται ως $f_{X,V}$ ενώ η συνάρτηση κατανομής ως $F_{X,V}$. Χρησιμοποιούμε τη σύζευξη FGM ώστε να ορίζουμε την από κοινού κατανομή των (X,V) και κατ'επέκταση τη δομή εξάρτησης μεταξύ του μεγέθους των απαιτήσεων και των ενδιάμεσων χρόνων. Η σύζευξη FGM για τον προσδιορισμό της συνάρτησης κατανομής ορίζεται ως εξής

$$C_\theta^{FGM}(u_1,u_2) = u_1 u_2 + \theta u_1 u_2 (1-u_1)\,(1-u_2)$$

και αντίστοιχα για τον προσδιορισμό της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας

$$c_\theta^{FGM}(u_1,u_2) = \frac{\vartheta^2}{\vartheta u_1\, \vartheta u_2} C_\theta^{FGM} = 1 + \theta\,(1-2u_1)\,(1-2u_2),$$

με $(u_1,u_2) \in [0,1] \times [0,1]$ και $-1 \leq \theta \leq 1$.

Συνεπώς η διδιάστατη συνάρτηση κατανομής της $F_{X,V}$ είναι της μορφής

$$F_{X,V}(y,t) = C_\theta^{FGM}(F_X(x),F_V(t)) = F_X(x)F_V(t) + \theta\, F_X(x)\overline{F}_X(x)F_V(t)\overline{F}_V(t), \;\; x,t \in \Re^+$$

και αντίστοιχα η διδιάστατη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{X,V}$ δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$f_{X,V}(x,t) = f_X(x) f_V(t) + \theta\, f_V(t)\, h(x)\, \left[2\overline{F}_V(t) - 1\right], \quad x,t \in \Re^+, \qquad (4.8.4)$$

όπου $h(x) = f_X(x)\left[1 - 2F_X(x)\right]$.

Κάνοντας χρήση των σχέσεων (4.8.1) , (4.8.2) η (4.8.4) μπορεί να γραφτεί ως εξής

$$f_{X,V}(x,t) = f_X(x)\frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t} + \theta\, h(x) \left[2\frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} \right) e^{-2\lambda t} - \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t} \right],$$

$x,t \in \Re^+$.

Στη συνέχεια θα ορίσουμε τη γενικευμένη εξίσωση του Lundberg, προσαρμοσμένη με το μοντέλο μας, η οποία δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$E\left[e^{-\delta V} e^{s(cV - X)}\right] = E\left[e^{(cs-\delta)V} e^{-sX}\right] = 1$$

ή ισοδύναμα

$$\hat{f}_X(s)\left(\frac{\lambda}{\lambda + \delta - cs}\right)^n + \theta\, \hat{h}(s) \left[2\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+i-1}{i} \left(\frac{\lambda}{\delta + 2\lambda - cs}\right)^{n+i} - \left(\frac{\lambda}{\lambda + \delta - cs}\right)^n \right] = 1$$

- Για $\delta > 0$ και $\theta \neq 0$ η γενικευμένη εξίσωση του Lundberg έχει ακριβώς $3n - 1$ ρίζες, έστω $\rho_1(\delta), \rho_2(\delta), ..., \rho_{3n-1}(\delta)$ στο μιγαδικό επίπεδο με $\mathrm{Re}(\rho_i(\delta)) \geq 0,\ i = 1, 2, ..., 3n - 1$.
- Για $\delta = 0$ και $\theta \neq 0$, η γενικευμένη εξίσωση του Lundberg έχει ακριβώς $3n - 2$ ρίζες στο θετικό ημιάξονα με θετικό πραγματικό μέρος και μία ρίζα ίση με το μηδέν.

Για την Erlang(n) διαδικασία κινδύνου με δομή εξάρτησης βασισμένη στην σύζευξη FGM, ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης των Gerber –Shiu δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$\hat{m}_\delta(s) = \frac{\hat{\beta}_{1,\delta}(s) + \hat{\beta}_{2,\delta}(s)}{\hat{h}_{1,\delta}(s) - \hat{h}_{2,\delta}(s)} \qquad (4.8.5)$$

όπου

$$\hat{h}_{1,\delta}(s) = \left(\frac{\delta + \lambda}{c} - s\right)^n \left(\frac{\delta + 2\lambda}{c} - s\right)^{2n-1} \qquad (4.8.6)$$

$$\begin{aligned}\hat{h}_{2,\delta}(s) = {} & \frac{\lambda^n}{c^n}\hat{f}_X(s)\left(\frac{\delta + 2\lambda}{c} - s\right)^{2n-1} + \theta\frac{\lambda^n}{c^n}\hat{h}(s) \\ & \times \left[2\left(\frac{\delta + \lambda}{c} - s\right)^n \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda^i}{c^i} \binom{n+i-1}{i} \left(\frac{\delta + 2\lambda}{c} - s\right)^{n-i-1} - \left(\frac{\delta + 2\lambda}{c} - s\right)^{2n-1} \right] \end{aligned} \qquad (4.8.7)$$

$$\hat{\beta}_{1,\delta}(s) = \frac{\lambda^n}{c^n}\,\hat{\gamma}_1(s)\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}-s\right)^{2n-1} + \theta\,\frac{\lambda^n}{c^n}\,\hat{\gamma}_2(s)$$
$$\times\left[2\left(\frac{\delta+\lambda}{c}-s\right)^n \sum_{i=0}^{n-1}\frac{\lambda^i}{c^i}\binom{n+i-1}{i}\left(\frac{\delta+2\lambda}{c}-s\right)^{n-i-1} - \left(\frac{\delta+2\lambda}{c}-s\right)^{2n-1}\right] \tag{4.8.8}$$

όπου $\hat{\gamma}_i(s) = \int_0^{\infty} e^{-su}\,\gamma_i(u)\,du$, $i=1,2$ και η $\hat{\beta}_{2,\delta}(s)$ είναι ένα πολυώνυμο $3n-1$ βαθμού το οποίο δίνεται από τη σχέση

$$\hat{\beta}_{2,\delta}(s) = -\sum_{j=1}^{3n-1}\hat{\beta}_{1,\delta}(\rho_j)\prod_{k=1,\,k\neq j}^{3n-1}\frac{s-\rho_k}{\rho_j-\rho_k}.$$

Χρησιμοποιώντας την πολυωνυμική παρεμβολή Lagrange για το πολυώνυμο $\hat{h}_{1,\delta}(s)$, που είναι βαθμού $3n-1$, στα σημεία $\left(0,\hat{h}_{1,\delta}(0)\right),\left(\rho_j\ \hat{h}_{1,\delta}(\rho_j)\right)$, $j=1,\ldots,3n-1$, προκύπτει ότι

$$\hat{h}_{1,\delta}(s) = \hat{h}_{1,\delta}(0)\prod_{k=1}^{3n-1}\frac{s-\rho_k}{(-\rho_k)} + s\sum_{j=1}^{3n-1}\frac{\hat{h}_{1,\delta}(\rho_j)}{\rho_j}\prod_{k=1,\,k\neq j}^{3n-1}\frac{s-\rho_k}{\rho_j-\rho_k}$$

οπότε

$$\hat{h}_{1,\delta}(s) - \hat{h}_{2,\delta}(s)$$
$$= \pi_{3n-1}(s)\left[\frac{\hat{h}_{1,\delta}(0)}{\pi_{3n-1}(0)} - \sum_{j=1}^{3n-1}\frac{\hat{h}_{2,\delta}(\rho_j)}{(-\rho_j)\pi'_{3n-1}(\rho_j)} + \sum_{j=1}^{3n-1}\frac{\hat{h}_{2,\delta}(\rho_j)}{(s-\rho_j)\pi'_{3n-1}(\rho_j)} - \frac{\hat{h}_{2,\delta}(s)}{\pi_{3n-1}(s)}\right] \tag{4.8.9}$$

όπου $\pi_{3n-1}(s) = \prod_{i=1}^{3n-1}(s-\rho_i)$.

Ισοδύναμα , κάνοντας χρήση των τελεστών Dickson – Hipp , η παραπάνω σχέση (4.8.9) γίνεται

$$\hat{h}_{1,\delta}(s) - \hat{h}_{2,\delta}(s) = (-1)^{3n-1}\,\pi_{3n-1}(s)\,\left[1 - T_s\,T_{\rho_1}\ldots T_{\rho_{3n-1}}\ h_{2,\delta}(0)\right]. \tag{4.8.10}$$

Έστω $f_{2,\delta}(y\,|\,0)$ η προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας για αρχικό αποθεματικό $u=0$ και $\hat{f}_{2,\delta}(s) = \int_0^{\infty} e^{-s\,y} f_{2,\delta}(y\,|\,0)\,dy$ ο αντίστοιχος μετασχηματισμός Laplace. Τότε, είναι

$$\hat{f}_{2,\delta}(s) = 1 - \frac{\hat{h}_{1,\delta}(s) - \hat{h}_{2,\delta}(s)}{\prod_{i=1}^{3n-1} (\rho_i - s)} , \tag{4.8.11}$$

οπότε από τις σχέσεις (4.8.10) και (4.8.11) προκύπτει ότι

$$\hat{f}_{2,\delta}(s) = 1 - \frac{\hat{h}_{1,\delta}(s) - \hat{h}_{2,\delta}(s)}{\prod_{i=1}^{3n-1} (\rho_i - s)} = 1 - \frac{(-1)^{3n-1} \ \pi_{3n-1}(s) \ \left[1 - T_s \, T_{\rho_1} \ldots T_{\rho_{3n-1}} \ h_{2,\delta}(0)\right]}{(-1)^{3n-1} \ \pi_{3n-1}(s)}$$

$$= T_s \, T_{\rho_1} \ldots T_{\rho_{3n-1}} \ h_{2,\delta}(0) \, . \tag{4.8.12}$$

Επομένως , παίρνοντας αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace , έπεται ότι

$$f_{2,\delta}(y \mid 0) = T_{\rho_1} \ldots T_{\rho_{3n-1}} \ h_{2,\delta}(y) .$$

Δεσμεύοντας ως προς την πρώτη πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό απόθεμα $u \geq 0$ και εξετάζοντας αν συμβαίνει χρεοκοπία ή όχι για την πρώτη απαίτηση , παίρνουμε ότι

$$m_{\delta}(u) = \int_0^u m_{\delta}(u - y) \ f_{2,\delta}(y \mid 0) dy + G_{\delta}(u)$$

όπου

$$G_{\delta}(u) = T_{\rho_1} \ldots T_{\rho_{3n-1}} \ \beta_{1,\delta}(u) .$$

Για $w(x, y) = 1$, η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής $m_{\delta}(u)$ ανάγεται στο μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας , έστω $m_T(u)$.

Τότε, ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας ικανοποιεί την παρακάτω ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση ,

$$m_T(u) = \int_0^u m_T(u - y) \ f_{2,\delta}(y \mid 0) dy + \int_u^{\infty} f_{2,\delta}(y \mid 0) dy$$

$$= \frac{1}{1 + \kappa_{\delta}} \int_0^u m_T \ (u - y) \ \theta_{\delta}(y) \, dy + \frac{1}{1 + \kappa_{\delta}} \ \overline{\Theta}_{\delta}(u) \ , \ u \geq 0 . \tag{4.8.13}$$

Η λύση της παραπάνω εξίσωσης , είναι

$$m_T = \frac{\kappa_\delta}{1+\kappa_\delta} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\kappa_\delta} \right)^j \overline{\Theta}_\delta^{*j}(u) \ u \geq 0,$$

όπου $\overline{\Theta}_\delta(u) = \int_u^\infty \theta_\delta(y)dy$, $\theta_\delta(y) = (1+\kappa_\delta)\, f_{2,\delta}(y\,|\,0)$ και $\overline{\Theta}_\delta^{*j}(u)$ είναι η j-οστή συνέλιξη της συνάρτησης επιβίωσης $\overline{\Theta}_\delta(u)$. Παίρνοντας τον μετασχηματισμό Laplace στην πρώτη από τις σχέσεις που δίνονται στην (4.8.13) προκύπτει ότι ,

$$\hat{m}_T(s) = \frac{m_T(0) - \hat{f}_{2,\delta}(s)}{s[1-\hat{f}_{2,\delta}(s)]} = \frac{1-\hat{f}_{2,\delta}(s) - [1-m_T(0)]}{s[1-\hat{f}_{2,\delta}(s)]} . \tag{4.8.14}$$

Από τις σχέσεις (4.8.10) και (4.8.12) προκύπτει

$$\hat{h}_{1,\delta}(s) - \hat{h}_{2,\delta}(s) = [1-\hat{f}_{2,\delta}(s)] \prod_{i=1}^{3n-1} (\rho_i - s)$$

και έτσι η σχέση (4.8.14) γίνεται,

$$\hat{m}_T(s) = \frac{\hat{h}_{1,\delta}(s) - \hat{h}_{2,\delta}(s) - [1-m_T(0)] \prod_{i=1}^{3n-1} (\rho_i - s)}{s\left[\hat{h}_{1,\delta}(s) - \hat{h}_{2,\delta}(s)\right]} . \tag{4.8.15}$$

Στη συνέχεια θεωρούμε ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\alpha > 0$, έτσι ώστε $f_X(x) = \alpha e^{-\alpha x}$, $x > 0$ και με μετασχηματισμό Laplace $\hat{f}_X(x) = \dfrac{\alpha}{\alpha + s}$.

Για $f_X(x) = \alpha e^{-\alpha x}$, $x > 0$, από τις σχέσεις (4.8.6) και (4.8.7) προκύπτει ότι,

$$\hat{h}_{1,\delta}(s) - \hat{h}_{2,\delta}(s) = \frac{Q_{3n+1,\delta}(s)}{c^{3n-1}(a+s)(2a+s)} , \tag{4.8.16}$$

όπου

$$Q_{3n+1,\delta}(s) = (a+s)(2a+s)(\delta+\lambda-cs)^n (\delta+2\lambda-cs)^{2n-1} - a\lambda^n (2a+s)(\delta+2\lambda-cs)^{2n-1}$$

$$-\theta a \lambda^n s \left[2(\delta+\lambda-cs)^n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+i-1}{i} \lambda^i (\delta+2\lambda-cs)^{n-i-1} - (\delta+2\lambda-cs)^{2n-1} \right], \tag{4.8.17}$$

είναι πολυώνυμο βαθμού .

Επειδή η εξίσωση $Q_{3n+1}(s)=0$ είναι η εξίσωση $\hat{h}_{1,\delta}(s)-\hat{h}_{2,\delta}(s)$, που είναι η γενικευμένη εξίσωση Lundberg , έπεται ότι η εξίσωση $Q_{3n+1}(s)=0$ έχει $3n-1$ ρίζες , έστω τις ρ_1 , ρ_2 ,..., ρ_{3n-1} , με θετικό πραγματικό μέρος και δύο αρνητικές ρίζες , έστω τις $-R_i=-R_i(\delta),\ i=1,2.$. Τότε , το πολυώνυμο $Q_{3n+1}(s)$ γράφεται στη μορφή

$$Q_{3n+1}(s)=(-c)^{3n-1}(s+R_1)(s+R_2)\prod_{i=1}^{3n-1}(s-\rho_i)$$

$$=c^{3n-1}(s+R_1)(s+R_2)\prod_{i=1}^{3n-1}(\rho_i-s).$$

Από τις σχέσεις (4.8.16) και (4.8.17) , η σχέση (4.8.15) γίνεται

$$\hat{m}_T(s)=\frac{\prod_{j=1}^{2}(s+R_j)-[1-m_T(0)](a+s)(2a+s)}{s\prod_{j=1}^{2}(s+R_j)} \quad . \tag{4.8.18}$$

Επειδή $\hat{m}_T(s)<\infty$ για $s\geq 0$, τότε ο αριθμητής της σχέσης (4.8.18) πρέπει να είναι ίσος με μηδέν για $s=0$. Τότε, παίρνουμε ότι $1-m_T(0)=\dfrac{R_1\,R_2}{2a^2}$,

οπότε η σχέση (4.8.18) γίνεται ,

$$\hat{m}_T(s)=\frac{\left(1-\dfrac{R_1\,R_2}{2a^2}\right)s+R_1+R_2-\dfrac{3R_1\,R_2}{2a}}{(s+R_1)(s+R_2)}.$$

Υποθέτοντας ότι οι R_1, R_2 είναι διακριτές ρίζες και χρησιμοποιώντας την τεχνική των μερικών κλασμάτων, παίρνουμε ότι

$$\hat{m}_T(s)=\sum_{j=1}^{2}\frac{\zeta_{j,\delta}}{s+R_j},$$

όπου

$$\zeta_{1,\delta}=\frac{R_2}{R_2-R_1}\left(1-\frac{3R_1}{2a}+\frac{R_1^2}{2a^2}\right) \quad \text{και} \quad \zeta_{2,\delta}=\frac{R_1}{R_2-R_1}\left(1-\frac{3R_2}{2a}+\frac{R_2^2}{2a^2}\right).$$

Αντιστρέφοντας τον παραπάνω μετασχηματισμό Laplace προκύπτει τελικά , ότι

$$m_T(u) = \zeta_{1,\delta}\, e^{-R_1 u} + \zeta_{2,\delta}\, e^{-R_2 u}\ ,\ u \geq 0,$$

και η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$ εύκολα προκύπτει για $\delta = 0$.

Αριθμητική Εφαρμογή

Έστω ότι η συνάρτηση κατανομής των απαιτήσεων ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή 1 , δηλαδή $X \sim Exp(1)$ ενώ η συνάρτηση κατανομής των ενδιάμεσων χρόνων ακολουθεί Erlang , $V \sim Erl(2,2)$, έτσι ώστε $f_V(t) = 4t\,e^{-2t}$. Επιπλέον ο ρυθμός είσπραξης ασφαλίστρων $c = 1.5$, επομένως το σχετικό περιθώριο ασφαλείας είναι 50%.

Για $\delta = 0$, είναι $m_T(u) = \psi(u)$ που είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας. Τότε , είναι

$$\psi(u) = \zeta_{1,0}\, e^{-R_1(0) u} + \zeta_{2,0}\, e^{-R_2(0) u}\ ,\ u \geq 0.$$

Έτσι για $u \geq 0$ και για τις τιμές της παραμέτρου $\theta \in \{-1, -0.5, 0.5, 1\}$ χρησιμοποιώντας το Mathematica , βρήκαμε ότι :

- για $\theta = -1$

$$\psi(u) = 0.6416701672 e^{-0.3487732254\ u} - 0.0169012248\, e^{-2.1517194000\ u}$$

- για $\theta = -0.5$

$$\psi(u) = 0.6111640019 e^{-0.3833132642\ u} - 0.0096651749 e^{-2.0792454120\ u}$$

- για $\theta = 0.5$

$$\psi(u) = 0.5314436215 e^{-0.4762087115\ u} - 0.01332254042\, e^{-1.911908905\ u}$$

- για $\theta = 1$

$$\psi(u) = 0.4774717870 e^{-0.5409429369\ u} - 0.03255482730\, e^{-1.811552947\ u}\ ,$$

είναι εμφανές ότι η παράμετρος εξάρτησης θ έχει επιρροή στις πιθανότητες χρεοκοπίας. Συγκεκριμένα όσο μεγαλύτερη είναι η παράμετρος εξάρτησης τόσο μικρότερη θα είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας. Αυτό συμβαίνει όταν για παράδειγμα η σχέση εξάρτησης είναι θετική, η πιθανότητα να παρουσιαστεί μια σημαντική απαίτηση αυξάνεται, καθώς ο χρόνος που παρέρχεται από την τελευταία απαίτηση αυξάνεται.

Στη συνέχεια, δίνονται αναλυτικά αποτελέσματα και για τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας , υποθέτοντας ότι $\delta = 0.05$ για διάφορες τιμές της παραμέτρου εξάρτησης θ :

- για $\theta = -1$

$$m_T(u) = 0.588107070542046\, e^{-0.4015607208\, u} - 0.0198616515195528\, e^{-2.150382538\, u}$$

- για $\theta = -0.5$

$$m_T(u) = 0.558265539590616\, e^{-0.4358563215\, u} - 0.0112379309905072\, e^{-2.078539964\, u}$$

- για $\theta = 0$

$$m_T(u) = 0.5230305556 e^{-0.4769694444\, u}$$

- για $\theta = 0.5$

$$m_T(u) = 0.480589531459186\, e^{-0.5272636613\, u} - 0.0151619535823271 e^{-1.912699668\, u}$$

- για $\theta = 1$

$$m_T(u) = 0.427916113486677\, e^{-0.5905527687 u} - 0.0366819441278372\, e^{-1.813223037\, u}$$

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε , υπάρχει σαφής εξάρτηση μεταξύ της παραμέτρου θ και του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας και μάλιστα όσο μεγαλώνει η παράμετρος θ τόσο μικραίνει η τιμή του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 : Συμπεράσματα

Σε αυτή τη διπλωματική εργασία, παρουσιάσαμε τα μέτρα της χρεοκοπίας που προκύπτουν τόσο από τη κλασσική όσο και από τη γενικευμένη εξίσωση των Gerber – Shiu για διάφορα μοντέλα κινδύνου. Η γενίκευση της εξίσωσης περιλαμβάνει την εισαγωγή δύο νέων μεταβλητών στην συνάρτηση ποινής, στην οποία ήδη εμπεριέχονται το πλεόνασμα πριν συμβεί η χρεοκοπία $U(T-)$ και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας $|U(T)|$. Αυτές οι νέες μεταβλητές είναι το ελάχιστο επίπεδο πλεονάσματος πριν συμβεί η χρεοκοπία X_T και το πλεόνασμα αμέσως μετά την εμφάνιση της απαίτησης που προκαλεί τη χρεοκοπία R_{N_T-1}. Παρά το γεγονός ότι οι ποσότητες αυτές δεν είναι δυνατό να παρατηρηθούν μέχρι να συμβεί η χρεοκοπία, μπορούμε όμως να προσδιορίσουμε τις κατανομές τους καθώς δεν εξαρτώνται άμεσα από τη χρονική στιγμή που συμβαίνει η χρεοκοπία αλλά από το αρχικό αποθεματικό u που διαθέτει η επιχείρηση.

Αρχικά στο κεφάλαιο 2, εισάγουμε την από κοινού πυκνότητα των μεταβλητών $(T, U(T-), |U(T)|)$ και ορίστηκε με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να ξεχωρίζει η αντίστοιχη για το πότε συνέβη η χρεοκοπία στην πρώτη ή σε μεταγενέστερη απαίτηση. Στη συνέχεια μελετήσαμε γραφικά παίρνοντας περιπτώσεις για το πότε συμβαίνει η χρεοκοπία και στην περίπτωση που η πρώτη πτώση του πλεονάσματος φτάνει κάτω από το αρχικό αποθεματικό , δείξαμε ότι ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση. Για να ορίσουμε τη σχέση μεταξύ $m_{\delta,12}(u)$ με $k(y)$ και $p(y)$, μελετήσαμε το χρόνο και το μέγεθος της πρώτης απαίτησης ώστε να παράγουμε μια ολοκληροδιαφορική εξίσωση η οποία ικανοποιείται από $m_{\delta,12}(u)$. Επιπροσθέτως αποδείξαμε ότι η θεμελιώδης εξίσωση του Lundberg, και ιδιαίτερα οι θετικές της ρίζες επιτρέπουν την αναγνώριση κάποιον άγνωστων ποσοτήτων , η οποία γενικά είναι απαραίτητη για να αντιστροφή της $m_{\delta,12}(u)$ κάτω από τη μελέτη των πρόσθετων υποθέσεων για τις πυκνότητες $k(t)$ και $p(y)$. Τέλος εφαρμόσαμε τα συμπεράσματά μας από τη μελέτη του πλεονάσματος στην Εφαρμογή 1, θεωρώντας ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν το κλασικό μοντέλο Poisson ενώ στην Εφαρμογή 2, θεωρήσαμε ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι κατανέμονται εκθετικά.

Στο κεφάλαιο 3 , παρουσιάζουμε ένα μοντέλο με υστέρηση το οποίο επιτρέπει το χρόνο μέχρι να συμβεί η πρώτη απαίτηση να ακολουθεί μια διαφορετική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $k_d(t)$ από την γνωστή πυκνότητα $k(t)$ η οποία ακολουθείται από μεταγενέστερους ενδιάμεσους χρόνους. Στο μοντέλο αυτό θεωρούμε ως βασική παραδοχή ότι μια απαίτηση μπορεί να συμβεί πριν το χρόνο 0 με μια υστέρηση δηλαδή, σε αντίθεση με το μοντέλο του Sparre Andersen (το οποίο παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 2).

Στο κεφάλαιο 4, εισάγουμε την γενικευμένη συνάρτηση των Gerber-Shiu όπου η συνάρτηση ποινής περιλαμβάνει 2 επιπλέον μεταβλητές όπως αναφέραμε αρχικά. Η γενικευμένη μορφή της συνάρτησης των Gerber-Shiu επιτρέπει τη μελέτη των μεταβλητών όπως του τελευταίου ενδιάμεσου χρόνου και του τελευταίου κλιμακωτού ύψους , οι οποίες δεν θα μπορούσαν διαφορετικά να μελετηθούν με τη χρήση της κλασσικής συνάρτησης των Gerber-Shiu.

Στη συνέχεια, εφαρμόσαμε την ίδια μεθοδολογία όπως στο κεφάλαιο 2, δηλαδή ορίσαμε την από κοινού πυκνότητα των μεταβλητών $\left(T, U(T-), |U(T)|, R_{N_T}\right)$ και μελετήσαμε γραφικά παίρνοντας περιπτώσεις για το πότε συμβαίνει η χρεοκοπία , στην εμφάνιση της πρώτης ή σε μεταγενέστερη απαίτηση δηλαδή. Ομοίως καταλήξαμε ότι στη μελέτη της πρώτης πτώσης του πλεονάσματος η $m_\delta(u)$ ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση η οποία εξαρτάται μόνο από τις τρείς μεταβλητές $\left(U(T-), |U(T)|, R_{N_T}\right)$. Δεδομένου ότι η ανάλυση που παρουσιάζεται στη μελέτη της πρώτης πτώσης του πλεονάσματος παρέχει ενδείξεις για τη μαθηματική δομή της $m_\delta(u)$, αλλά δεν παρέχει πληροφορίες σχετικά με τη σχέση των πυκνοτήτων $k(t)$ και $p(y)$ όπως συνέβη στο κεφάλαιο 2, εμείς μελετάμε το χρόνο και το μέγεθος της πρώτης απαίτησης ώστε να αποκτήσουμε αυτές τις πληροφορίες. Ωστόσο, επειδή η $m_\delta(u)$ εμπεριέχει στη συνάρτηση ποινής τη μεταβλητή X_T , δεν είναι εύκολο να χρησιμοποιήσουμε τη μεθοδολογία αυτή. Επειδή όμως στην παράγραφο 4.2 αποδείχθηκε ότι $m_\delta(u)$ μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει της προεξοφλημένης από κοινού πυκνότητας $\left(U(T-), |U(T)|, R_{N_T}\right)$ δοθέντος ότι $u = 0$,η οποία δεν περιλαμβάνει τη μεταβλητή X_T , αρκεί να μελετήσουμε το χρόνο και το μέγεθος της πρώτης απαίτησης για την περίπτωση $w(x, y, z, v) = w_{124}(x, y, v)$. Ομοίως καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι οι θετικές ρίζες της θεμελιώδης εξίσωσης του Lundberg, μας επιτρέπει να αναγνωρίσουμε τις άγνωστες ποσότητες ώστε να προβούμε στην αντιστροφή της $m_{\delta,12}(u)$, κάτω από τη μελέτη των επιπρόσθετων υποθέσεων για τις πυκνότητες $k(t)$ και $p(y)$. Στη συνέχεια, εφαρμόσαμε τα συμπεράσματα μας για τη γενικευμένη μορφή της συνάρτησης των Gerber-Shiu , θεωρώντας στην πρώτη εφαρμογή ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν το κλασσικό μοντέλο Poisson και στη δεύτερη εφαρμογή ότι κατανέμονται εκθετικά. Τέλος στην τελευταία εφαρμογή παρατηρήσαμε ότι υπάρχει μια σαφής εξάρτηση μεταξύ της παραμέτρου θ και της πιθανότητας χρεοκοπίας.

Βιβλιογραφία

[1] Κ. Πολίτης (2012) - Εισαγωγή στη θεωρία συλλογικού κινδύνου, Εκδόσεις Σταμούλης Α.Ε .

[2] Κ. Πολίτης (2014), Θεωρία Κινδύνου ΙΙ, Σημειώσεις Παραδόσεων, ΠΜΣ στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

[3] Stathis Chadjiconstantinidis, Spyridon Vrontos (2014) – On a renewal risk process with dependence under a Farlie-Gumbel-Morgenstern copula , Scandinavian Actuarial Journal 2, 125-158.

[4] Cheung , Eric C.K. David Landriault , Gordon E. Willmot & Jae-Kyung Woo (2010) - Gerber–Shiu analysis with a generalized penalty function , Scandinavian Actuarial Journal 3 , 185-199.

[5] Cheung, Eric C.K. ,David Landriault, Gordon E. Willmot, Jae-Kyung Woo (2010) - Structural properties of Gerber–Shiu functions in dependent Sparre Andersen models , Insurance: Mathematics and Economists 46, 117-126.

[6] Gerber, Hans U. and Elias S.W. Shiu. (1998) - On the time value of ruin, North American Actuarial Journal 2, 4878.

[7] Sparre Andersen (1957) - «On the collective theory of risk in case of contagion between the claims».

[8] Willmot Gordon E. (2004) - A note on a class of delayed renewal risk processes, Insurance: Mathematics and Economists 34 , 251-257.

[9] Willmot Gordon E. , Jae-Kyung Woob (2012) - On the analysis of a general class of dependent risk processes, Insurance: Mathematics and Economics 51, 134-141.

[10] X. Sheldon Lin , Gordon E. Willmot (1999) - Analysis of a defective renewal equation arising in ruin theory, Insurance: Mathematics and Economists 25, 63-84.