Πανεπιστήμιο Πειραιώς – Τμήμα Πληροφορικής

Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Προηγμένα Συστήματα Πληροφορικής»

Μεταπτυχιακή Διατριβή

Τίτλος Διατριβής	Συνεργατική Θεωρία Παιγνίων και Εφαρμογές: Συνεργατικά Παίγνια που ανακύπτουν από την Συνδυαστική Βελτιστοποίηση —————— Cooperative Game Theory And Applications: Cooperative Games That Derive From Combinatorial Improvement
Ονοματεπώνυμο Φοιτητή	**Καλλιδώνης Ιωάννης**
Πατρώνυμο	**Στυλιανός**
Αριθμός Μητρώου	**ΜΠΣΠ/12026**
Επιβλέπων	**Καθηγητής Γεώργιος Τσιχριτζής**

Ημερομηνία Παράδοσης **Οκτώβριος 2015**

Συνεργατική Θεωρία Παιγνίων και Εφαρμογές:

Συνεργατικά Παίγνια που Ανακύπτουν από την Συνδυαστική Βελτιστοποίηση

Καλλιδώνης Ιωάννης

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή

(υπογραφή)	(υπογραφή)	(υπογραφή)
Όνομα Επώνυμο Βαθμίδα	Όνομα Επώνυμο Βαθμίδα	Όνομα Επώνυμο Βαθμίδα

Στον γιο μου Στέλιο,
Την σύζυγό μου Ελένη,
Τον αδερφό μου Σπύρο,
Και Τους γονείς μου Στέλιο και Πιπίτσα,
Για την Αμέριστη Στήριξη και την Υπομονή τους.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η βιβλιογραφική μελέτη συνεργατικών παιγνίων με ειδίκευση στα προβλήματα που προκύπτουν από καταστάσεις συνδυαστικής βελτιστοποίησης.

Η Θεωρία Παιγνίων είναι μια θεματική περιοχή των μαθηματικών που ασχολείται με την μαθηματική μοντελοποίηση ανταγωνιστικών καταστάσεων με στόχο την πρόβλεψη – εκτίμηση του αποτελέσματός τους, αλλά και η παροχή συμβουλών στους ανταγωνιζόμενους «παίκτες».

Στο επόμενο κεφάλαιο θα κάνουμε μία σύντομη ανασκόπηση της κλασικής θεωρίας παιγνίων, όπου οι παίκτες λειτουργούν μη συνεργατικά, δηλαδή ο καθένας ενεργεί με βάση το ατομικό του όφελος. Συγκεκριμένα θα δούμε τον μαθηματικό φορμαλισμό της αναπαράστασης ενός παιγνίου (αναλυτική – κανονική μορφή, αλλά και χαρακτηριστική συναρτησιακή μορφή) και έπειτα θα δούμε τις εφαρμογές της θεωρίας σε διαφορετικούς τομείς όπως τα οικονομικά, η πολιτική επιστήμη, η φιλοσοφία και θα εστιάσουμε το ενδιαφέρον μας στην επιστήμη των υπολογιστών. Έπειτα θα μελετήσουμε τους βασικούς χαρακτηρισμούς των παιγνίων με βάση τόσο τη μαθηματική όσο και την εννοιολογική δομή τους (συμμετρικά και μη συμμετρικά παίγνια, συνεργατικά και μη συνεργατικά παίγνια, παίγνια μηδενικού και μη μηδενικού αθροίσματος, ακολουθιακά και ταυτόχρονα παίγνια και άλλα). Επίσης στο κεφάλαιο αυτό θα αναφερθούμε σε περίφημα παίγνια της βιβλιογραφίας που αναδεικνύουν τον φορμαλισμό αλλά και αναδεικνύουν ενδιαφέροντα συμπεράσματα, όπως το δίλημμα του φυλακισμένου, το παιχνίδι του δειλού, το παίγνιο της κυριαρχίας, του δικτάτορα και άλλα.

Αφού οριοθετήσουμε τις έννοιες της (μη συνεργατικής) θεωρίας παιγνίων, έπειτα θα εστιάσουμε το ενδιαφέρον μας στην συνεργατική θεωρία παιγνίων όπου οι παίκτες δεν λειτουργούν αποκλειστικά ατομικά, αλλά μπορούν να λειτουργήσουν σε ομάδες σε οποιονδήποτε συνδυασμό. Αυτό οδηγεί αυτόματα σε πιο περίπλοκη μαθηματική μοντελοποίηση των παιγνίων αυτών που θα την δούμε αναλυτικά στο κεφάλαιο 3. Η φύση του μαθηματικού ορισμού οδηγεί σε βασικούς ορισμούς που ανακύπτουν από την πολυδιάστατη γεωμετρία, όπως ο πυρήνας, το κάλυμμα πυρήνα και το σύνολο Weber του παιγνίου. Τέλος θα εισαχθούν δύο μετρήσιμοι δείκτες του παιγνίου, η τιμή Shapley και η τιμή *‘r’* οι οποίες προσφέρουν μια υψηλού επιπέδου διαίσθηση για την φύση του παιγνίου.

Στο τέταρτο κεφάλαιο θα επεκτείνουμε τους ορισμούς της συνεργατικής θεωρίας παιγνίων ώστε να συμπεριλαμβάνονται χαρακτηρισμοί των παικτών που συμμετέχουν σε αυτό με αυστηρή ωστόσο μαθηματική μοντελοποίηση (π.χ. ανόητος παίκτης, παίκτης βέτο, παίκτης δικτάτορας κ.λπ.). Για την ανάδειξη και τον φορμαλισμό του ρόλου κάθε παίκτη στο παίγνιο ορίζονται έπειτα και οι δείκτες επιρροής των παικτών οι οποίοι αναθέτουν στους παίκτες τιμές από το 0 στο 1 ανάλογα με το ρόλο που θα διαδραματίσουν στο παίγνιο. Συνολικά αυτή η προσπάθεια θα οδηγήσει στον ορισμό του δείκτη επιρροής *'γ'* ως ενός δείκτη της απόδοσης των παικτών στο παίγνιο ανάλογα με το χαρακτηρισμό τους.

Στα επόμενα τρία κεφάλαια οδηγούμαστε στο κυρίως σώμα της διπλωματικής εργασίας που είναι η ανάδειξη της συσχέτισης συνδυαστικών προβλημάτων με συνεργατικά παίγνια.

Στο κεφάλαιο 5 εισάγουμε τον γραμμικό προγραμματισμό ως μαθηματικό μοντέλο το οποίο μπορεί να εκφράσει ένα συνεργατικό παίγνιο. Επειδή μάλιστα κάθε πρόβλημα συνδυαστικής βελτιστοποίησης μπορεί να μοντελοποιηθεί ως ακέραιο πρόγραμμα άρα και να προσεγγιστεί με διαδικασίες γραμμικού προγραμματισμού, η συσχέτιση γραμμικού προγράμματος και συνεργατικού παιγνίου κρίνεται ιδιαίτερα επωφελής για το στόχο της παρουσίασης. Ως προπομπός των συνδυαστικών προβλημάτων που θα συσχετιστούν με παίγνια μελετάμε την συσχέτιση των προβλημάτων ροής με παίγνια γραμμικού προγραμματισμού.

Στο κεφάλαιο 6 δίνουμε δύο βασικές συνδυαστικές δομές, την μετάθεση (αριθμών) και το ταίριασμα (κορυφών γραφήματος) τα οποία μπορούν να εκφράσουν άμεσα συνεργατικά παίγνια. Αφού δώσουμε τους απαραίτητους ορισμούς από τις αντίστοιχες θεματικές περιοχές και γνωστά προβλήματα θεώρησης συνεργατικών παιγνίων (π.χ. ανάθεση αγοραστών σε εμπόρους σπιτιών και ανάθεση υπαλλήλων σε εταιρίες) δίνουμε την άμεση συσχέτιση των προβλημάτων αυτών με αντίστοιχα συνεργατικά παίγνια.

Στο κεφάλαιο 7 θα δούμε την συσχέτιση δύο περίφημων προβλημάτων με συνεργατικά παίγνια. Το πρώτο, που είναι το πρόβλημα περιοδεύοντος πωλητή, μπορεί να μοντελοποιήσει καταστάσεις όπου ταυτόχρονοι παίκτες-ταξιδιώτες προσπαθούν να ελαχιστοποιήσουν τα κόστη του ταξιδιού τους. Ορίζεται έτσι μια οικογένεια συνεργατικών παιγνίων τα οποία θα ονομάσουμε παίγνια περιοδεύοντος πωλητή. Έπειτα θα μελετήσουμε το πρόβλημα του ελάχιστου επικαλυπτικού δένδρου και τα παίγνια ελάχιστου επικαλυπτικού δένδρου που ανακύπτουν από αυτό. Η παράθεση προβλημάτων θα ολοκληρωθεί ορίζοντας τα παίγνια τοποθέτησης υπηρεσιών τα οποία μοντελοποιούν και πάλι μια μεγάλη οικογένεια συνεργατικών παιγνίων τα οποία εμπνέονται αυτήν την φορά από μία κλάση συνδυαστικών προβλημάτων με ιδιαίτερα δύσκολη δομή, τα προβλήματα τοποθέτησης υπηρεσιών (facility location problems).

Κεφάλαιο 2: Κλασική Θεωρία Παιγνίων – Βασικοί Ορισμοί

Η Θεωρία Παιγνίων είναι η μελέτη των στρατηγικών για τη λήψη αποφάσεων. Ειδικότερα, είναι «η μελέτη μαθηματικών μοντέλων των συγκρούσεων και των συνεργασιών έξυπνων και ορθολογιστών παικτών που πρέπει να πάρουν αποφάσεις» [1]. Η Θεωρία παιγνίων κυρίως χρησιμοποιείται στα οικονομικά, την πολιτική επιστήμη, την ψυχολογία, τη λογική, τη θεωρία υπολογιστών και την βιολογία. Το θέμα που αναπτύχθηκε πρώτο στην θεωρία παιγνίων είναι τα παίγνια μηδενικού αθροίσματος, στα οποία ένα παίκτης κερδίζει ακριβώς όσο χάνει ο άλλος παίκτης.

Σήμερα πάντως η θεωρία παιγνίων εφαρμόζεται σε μία μεγάλη γκάμα σχέσεων συμπεριφοράς και είναι ένας όρος – ομπρέλα για την λογική ερμηνεία της επιστήμης αποφάσεων που περιλαμβάνει ταυτόχρονα ανθρώπους και μη (μηχανές, ζώα).

Η σύγχρονη θεωρία παιγνίων ξεκίνησε με την ιδέα που αφορούσε την ύπαρξη μεικτών στρατηγικών που οδηγούν σε ισορροπία σε παίγνια μηδενικού αθροίσματος μέσω της απόδειξης του John Von Neumann.

Η θεωρία αναπτύχθηκε περαιτέρω την δεκαετία του 1950 από πολλούς μελετητές και έπειτα έγινε εφαρμογή της στην βιολογία τη δεκαετία του 1970 παρόλο που παρόμοια ανάπτυξη πάει πίσω στο 1930. Η θεωρία παιγνίων αναγνωρίζεται ως ένα σημαντικό εργαλείο σε πολλά πεδία.

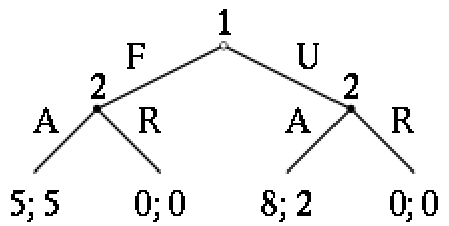
2.1 Αναπαράσταση των παιγνίων.

Τα παίγνια που έχουν μελετηθεί στην θεωρία παιγνίων είναι καλά ορισμένα μαθηματικά αντικείμενα. Για να οριστεί πλήρως ένα παίγνιο, πρέπει να οριστούν τα ακόλουθα στοιχεία του: οι παίκτες (players) του παιγνίου, η πληροφορία (information) και οι ενέργειες (actions) που είναι διαθέσιμες σε κάθε παίκτη σε κάθε σημείο αποφάσεων και οι ανταμοιβές (payoffs) για κάθε αποτέλεσμα. Ένας επιστήμονας της θεωρίας παιγνίων ορίζει ένα σύνολο από παραδοχές για να κατασκευάσει στρατηγικές ισορροπίας. Αυτές οι στρατηγικές ισορροπίας ορίζουν μία ισορροπία (equilibrium) στο παίγνιο – μία σταθερή κατάσταση στην οποία κάθε ένα από τα αποτελέσματα προκύπτει με την ίδια πιθανότητα.

Τα περισσότερα συνεργατικά παίγνια αναπαρίστανται στην χαρακτηριστική συναρτησιακή μορφή, ενώ η αναλυτική και η κανονική μορφή χρησιμοποιούνται για να περιγραφούν μη συνεργατικά παίγνια.

2.1.1 Αναλυτική Μορφή.

Η αναλυτική μορφή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να μοντελοποιήσει παίγνια με ακολουθία σειρών κινήσεων. Τα παίγνια εδώ παίζονται σε δένδρα όπως φαίνεται στην ακόλουθη εικόνα.



Εικόνα 1: Αναλυτική Μορφή ενός παιγνίου

Εδώ κάθε κορυφή (ή κόμβος) συμβολίζει ένα σημείο επιλογής για τον παίκτη. Ο παίκτης προσδιορίζεται από έναν αριθμό που φαίνεται στην κορυφή. Οι γραμμές έξω από την κορυφή αναπαριστούν μία πιθανή ενέργεια του παίκτη. Οι ανταμοιβές περιγράφονται στα φύλλα του δένδρου.

Το παίγνιο που αναπαρίσταται εδώ αποτελείται από δύο παίκτες. Ο τρόπος που δομείται αυτό το συγκεκριμένο παίγνιο (π.χ. με ακολουθιακή επιλογή – απόφαση και τέλεια πληροφόρηση). Ο παίκτης 1 κινείται πρώτος επιλέγοντας είτε το F είτε το U (τα γράμματα μοντελοποιούν συγκεκριμένες αποφάσεις). Ο παίκτης 2 τώρα έχει δει την ενέργεια του παίκτη 1 και επιλέγει να παίξει είτε το A είτε το R. Όταν ο παίκτης 2 κάνει την επιλογή του, το παίγνιο θεωρείται ότι έχει περατωθεί και κάθε παίκτης παίρνει την ανταμοιβή του. Ας υποθέσουμε ότι ο παίκτης 1 επιλέγει την στρατηγική U και έπειτα ο παίκτης 2 επιλέγει την στρατηγική A: Ο παίκτης 1 τότε παίρνει μια ανταμοιβή «8 μονάδων» (που στον πραγματικό κόσμο μπορεί να ερμηνευθεί με διαφορετικούς τρόπους, ο απλούστερος των οποίων είναι με την έννοια των χρημάτων, αλλά θα μπορούσε να θεωρηθεί και οτιδήποτε άλλο σαν ανταμοιβή στον πραγματικό κόσμο) και ο παίκτης 2 παίρνει μια ανταμοιβή «2 μονάδων».

Η αναλυτική μορφή μπορεί επίσης να αναπαραστήσει ταυτόχρονες κινήσεις και παίγνια με ημιτελή πληροφόρηση. Για να γίνει η αναπαράσταση, μία διακεκομμένη γραμμή συνδέει διαφορετικές κορυφές για να γίνει κατανοητό ότι είναι μέρος στο ίδιο σύνολο πληροφορίας (π.χ. οι παίκτες που δεν ξέρουν σε ποιο σημείο βρίσκονται).

2.1.2 Κανονική Μορφή.

Η κανονική (ή στρατηγική μορφή) του παιγνίου χρησιμοποιείται συνήθως για να αναπαραστήσει έναν πίνακα που δείχνει τους παίκτες, τις στρατηγικές και τις ανταμοιβές (παράδειγμα στο παρακάτω σχήμα).

4, 3	–1, –1
0, 0	3, 4

Εικόνα 2: Κανονική απεικόνιση ενός παιγνίου

Γενικά, μπορεί να αναπαρασταθεί με οποιαδήποτε συνάρτηση η οποία σχετίζει την ανταμοιβή για κάθε παίκτη με κάθε πιθανό συνδυασμό ενεργειών. Ο παίκτης 1 επιλέγει τη γραμμή και ο παίκτης 2 επιλέγει τη στήλη. Κάθε παίκτης έχει δύο στρατηγικές οι οποίες καθορίζονται από τον αριθμό των γραμμών και των στηλών (στο παράδειγμα μας έχουμε δύο γραμμές και δύο στήλες, άρα ο $1^{ος}$ παίκτης έχει 2 στρατηγικές και ο παίκτης 2 έχει 2 στρατηγικές επίσης). Οι ανταμοιβές περιγράφονται στο εσωτερικό του αντίστοιχου κελιού του πίνακα. Ο $1^{ος}$ αριθμός είναι η ανταμοιβή του παίκτη 1 και ο $2^{ος}$ αριθμός είναι η αμοιβή του παίκτη 2. Π.χ. αν ο παίκτης 1 επιλέξει την $1^{η}$ στρατηγική του ($1^{η}$ γραμμή) και ο παίκτης 2 επιλέγει την $1^{η}$ του στρατηγική (δηλαδή την $1^{η}$ στήλη) έχουμε ότι η αντίστοιχη ανταμοιβή είναι «4 μονάδες» για τον παίκτη 1 και «3 μονάδες» για τον παίκτη 2.

2.1.3 Χαρακτηριστική Συναρτησιακή Μορφή.

Στα παίγνια που αποδίδονται διαφορετικές ανταμοιβές (π.χ. στα συνεργατικά παίγνια) η χαρακτηριστική συνάρτηση περιγράφει την ανταμοιβή κάθε μονάδας. Η ιδέα είναι ότι αν μία μονάδα είναι «άδεια» τότε δεν θα πάρει καμία ανταμοιβή.

Η καταβολή αυτής της μορφής αποδίδεται στον Von Neumann και στον Oskar Morgenstern οι οποίοι όταν μελετούν στιγμιότυπα υπέθεσαν ότι η ένωση τους C εμφανίζεται, και το κλάσμα N/C απεικονίζει την αντίστοιχη τιμή όταν οι δύο παίζουν ένα κανονικό παιχνίδι. Ωστόσο υπάρχουν διαφορετικά παραδείγματα που βοηθούν τις συνέργειες παικτών και έτσι σε μία συνεργασία δίδεται μία ανταμοιβή η οποία στην συνέχεια επιμερίζεται στους συμμετέχοντες.

Τελικά μία χαρακτηριστική συνάρτηση μπορεί να ειδωθεί ως: (N,v) όπου το N απεικονίζει την ομάδα ανθρώπων και v είναι μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το δυναμοσύνολο των παικτών και σύνολο τιμών τους πραγματικούς αριθμούς.

Τέτοιου τύπου συναρτήσεις χρησιμοποιούνται στην συνεργατική θεωρία παιγνίων την οποία θα μελετήσουμε εκτενώς στη συνέχεια.

2.2 Εφαρμογές των παιγνίων.

Ως κλάδος των εφαρμοσμένων μαθηματικών, η θεωρία παιγνίων έχει χρησιμοποιηθεί για να μελετηθεί μία μεγάλη ποικιλία από συμπεριφορές (είτε ανθρώπινες, είτε ενστικτώδεις). Αρχικά αναπτύχθηκε στα οικονομικά για να γίνει κατανοητή μία μεγάλη συλλογή από οικονομικές συμπεριφορές, , που περιλαμβάνει εταιρίες, αγορές και καταναλωτές. Η πρώτη χρήση ανάλυσης με όρους της θεωρίας παιγνίων έγινε από τον Antoine Augustin Cournot το 1838 με τη λύση ενός οικονομικού προβλήματος που διατύπωσε ο ίδιος και το οποίο για ιστορικούς λόγους, θα αναπτύξουμε ακολούθως:

2.2.1 Το πρόβλημα του ανταγωνισμού (Cournot)

Το πρόβλημα του ανταγωνισμού Cournot, είναι ένα οικονομικό μοντέλο που έχει χρησιμοποιηθεί για να περιγράψει μία δομή μιας βιομηχανίας στην οποία οι εταιρίες ανταγωνίζονται για να αποφασίσουν το μέγεθος της παραγωγής που θα παράξουν.

Στο μοντέλο κάθε ανταγωνιστής αποφασίζει ανεξάρτητα από τον άλλο, αλλά παίρνουν την απόφασή τους ταυτόχρονα. Ακόμη περισσότερο, ικανοποιούνται όλες οι ακόλουθες συνθήκες:

- υπάρχουν περισσότερες από μία εταιρία και όλες οι εταιρίες παράγουν ένα ομοιογενές αντικείμενο.
- Οι εταιρίες δεν συνεργάζονται.
- Οι εταιρίες έχουν δύναμη στην αγορά (market power), δηλαδή η απόφαση κάθε εταιρίας επηρεάζει την τιμή του αγαθού συνολικά στην αγορά.
- Ο αριθμός των εταιριών είναι καθορισμένος.
- Οι εταιρίες ανταγωνίζονται στις ποσότητες και επιλέγουν τις ποσότητες ταυτόχρονα.
- Οι εταιρίες λειτουργούν ορθολογιστικά και στρατηγικά, συνήθως αναζητώντας να μεγιστοποιήσουν το κέρδος τους συναρτώμενο από τις αποφάσεις των ανταγωνιστών τους.

Μία ουσιώδης υπόθεση του μοντέλου είναι της «μη εικασίας» ότι κάθε φίρμα αποσκοπεί στο να μεγιστοποιήσει το όφελός της, γεγονός που βασίζεται στην προσδοκία ότι η απόφασή της δεν θα επηρεαστεί από τις αποφάσεις των ανταγωνιστών της. Η αξία είναι μία κοινά γνωστή φθίνουσα συνάρτηση της συνολικής εξόδου. Όλες οι εταιρίες γνωρίζουν το N, το σύνολο των εταιριών της αγοράς και παίρνουν την έξοδο που δίδουν οι άλλοι. Κάθε εταιρία έχει μία συνάρτηση κόστους. Φυσιολογικά οι συναρτήσεις κόστους αντιμετωπίζονται ως κοινή γνώση, δηλαδή την γνωρίζουν όλες οι εταιρίες και κάθε εταιρία γνωρίζει τη συνάρτηση κόστους των ανταγωνιστών της. Οι συναρτήσεις κόστους μπορούν είτε να είναι ίδιες είτε διαφορετικές για τις ανταγωνιστικές εταιρίες. Η τιμή της αγοράς είναι σε ένα τέτοιο επίπεδο που να απαιτεί η συνολική ποσότητα που παράγεται από τις εταιρίες να είναι ίση με την αξία της αγοράς. Κάθε εταιρία παίρνει ποσότητα που ορίζεται από τους ανταγωνιστές, αξιολογεί την απαίτηση και αν επικρατήσει, τότε λειτουργεί ως μονοπώλιο.

2.2.2 Επιρροές της Θεωρίας της Εξέλιξης

Αν και οι φυσιολόγοι πριν το 1900 όπως ο Κάρολος Δαρβίνος έκανε παιγνιοθεωρητικές διατυπώσεις όπως μοντελοποίηση παιγνίων στη βιολογία, η χρήση της θεωρίας παιγνίων στην βιολογία ξεκίνησε με τη μελέτη του Ronald Fischer για την συμπεριφορά των ζώων στην δεκαετία του 1930. Η εργασία αυτή εισάγει για πρώτη φορά την ορολογία της θεωρίας παιγνίων και χρησιμοποιεί πολλά αξιόλογα χαρακτηριστικά από την περιοχή. Η ανάπτυξη των οικονομικών έπειτα χρησιμοποίησε τις ιδέες που αναπτύχθηκαν σε αυτήν την έρευνα σε μεγάλη κλίμακα από τον John Maynard Smith στο βιβλίο «Θεωρία Εξέλιξης και Θεωρία Παιγνίων».

Εκτός από την χρήση της θεωρίας για να περιγράψει, να προβλέψει και να εξηγήσει συμπεριφορές, η θεωρία παιγνίων έχει επίσης χρησιμοποιηθεί για να αναπτύξει θεωρίες ηθικής και για να περιγράψει τέτοιες συμπεριφορές. Στα οικονομικά και στην φιλοσοφία, οι μελετητές έχουν εφαρμόσει τη θεωρία παιγνίων για να κατανοήσουν τις ηθικές ή τις κατάλληλες συμπεριφορές. Τα επιχειρήματα της θεωρίας παιγνίων μπορούν να ευρεθούν στους τομείς αυτούς, ακόμη και στον Πλάτωνα.

2.2.3 Οικονομικά και Επιχειρήσεις

Η θεωρία παιγνίων έχει μελετηθεί εκτενώς στα οικονομικά για να μοντελοποιήσει ανταγωνιστικές συμπεριφορές αυτόνομων οντοτήτων. Οι εφαρμογές περιλαμβάνουν τις δημοπρασίες, το παζάρι, την ανάθεση τιμών, τη μετατροπή ολιγοπωλίων σε μονοπώλια, το σχεδιασμό μηχανισμών, την πολιτική οικονομία κ.α.

Η έρευνα εστιάζεται κυρίως στην εύρεση στρατηγικών επίλυσης μια κατάστασης, οι οποίες αναφέρονται και ως σημεία ισορροπίας. Μία κοινή υπόθεση είναι ότι οι παίκτες ενεργούν ορθολογιστικά. Στα μη συνεργατικά παίγνια η πιο διάσημη στρατηγική επίλυσης είναι το σημείο ισορροπίας Nash (Nash equilibrium). Ένα σύνολο στρατηγικών είναι ισορροπία Nash αν κάθε μία αναπαριστά ένα σύνολο βέλτιστων απαντήσεων στις στρατηγικές των άλλων. Αν όλοι οι παίκτες παίζουν τις στρατηγικές του σημείου ισορροπίας Nash, τότε δεν έχουν κανέναν λόγο να αποκλίνουν από αυτήν, μιας και η ισορροπία Nash απεικονίζει το καλύτερο που μπορούν να κάνουν οι παίκτες ως συνάρτηση των επιλογών των άλλων παικτών.

2.2.4 Πολιτική Επιστήμη

Οι εφαρμογές της θεωρίας παιγνίων στην πολιτική επιστήμη, εστιάζονται στην τομή τους με επιστημονικές περιοχές όπως η πολιτική οικονομία, η ισονομία, η κοινή γνώμη, οι στρατηγικές πολέμου και η θεωρία της κοινωνικής επιλογής. Σε αυτές τις περιοχές οι ερευνητές έχουν αναπτύξει παγνιοθεωρητικά μοντέλα στα οποία οι παίκτες (συχνά ψηφοφόροι, πολιτείες, ειδικά γκρουπ ενδιαφέροντος και πολιτικοί) ανταγωνίζονται για την επίτευξη των συμφερόντων τους.

2.2.5 Επιστήμη Υπολογιστών και Λογική

Η θεωρία παιγνίων παίζει έναν αυξημένο ρόλο στη λογική και στην επιστήμη των υπολογιστών. Νέες θεωρίες λογικής έχουν την βάση τους στη σημειολογία της θεωρίας παιγνίων. Πρόσθετα οι επιστήμονες των υπολογιστών έχουν χρησιμοποιήσει παίγνια για να μοντελοποιήσουν διαδραστικούς υπολογισμούς. Επίσης, η θεωρία παιγνίων προσφέρει τη βάση για συστήματα πολυπαραμετρικών πρακτόρων (multi agent systems)

Σημαντικός είναι ο ρόλος της θεωρίας παιγνίων και στους online αλγορίθμους. Ειδικότερα δε, έχει χρησιμοποιηθεί για την εύρεση κάτω φραγμάτων στην πολυπλοκότητα τυχαιοκρατικών αλγορίθμων και ειδικότερα των online αλγορίθμων.

Ακόμη, η ανάδειξη του ιντερνέτ έχει δώσει κίνητρο για την εύρεση αλγορίθμων που υπολογίζουν σημεία ισορροπίας σε παίγνια, αγορές, υπολογιστικές δημοπρασίες, συστήματα peer-to-peer κ.λπ. Η αλγοριθμική Θεωρία Παιγνίων και σε αυτήν ο τομέας του αλγοριθμικού σχεδιασμού μηχανισμών, συνδυάζουν το σχεδιασμό αλγορίθμων και την ανάλυση περίπλοκων συστημάτων με την οικονομική θεωρία.

2.2.6 Φιλοσοφία

Η θεωρία παιγνίων έχει χρησιμοποιηθεί και στη φιλοσοφία. Συγκεκριμένα από το 1969 και τον Quine η θεωρία παιγνίων χρησιμοποιήθηκε ως μοντέλο για την ανάλυση της κοινής γνώσης και χρησιμοποιήθηκε σε εφαρμογές παιγνίων σχεδιασμού. Πρόσθετα, πρώτα πρότεινε κάποιον να αντιληφθεί το νόημα στα λεγόμενα παίγνια σινιάλων. Αυτό έπειτα ενέπνευσε διάφορους φιλοσόφους.

Η θεωρία παιγνίων έχει επίσης προκαλέσει τους φιλοσόφους να σκεφτούν με όρους επιστημολογίας, τι σημαίνει για μία ομάδα να έχουν κοινά πιστεύω ή γνώσεις και ποιες είναι οι συνέπειες αυτή η γνώση να κοινωνείται από τις συμπεριφορές των αυτόνομων οντοτήτων.

Στην ηθική, κάποιοι συγγραφείς έχουν προσπαθήσει να επιβάλλουν την υπευθυνότητα μέσα από το ατομικό συμφέρον. Επειδή όμως τα παίγνια, όπως το δίλημμα του φυλακισμένου, θέτουν θέμα σύγκρουσης ηθικής και ατομικού συμφέροντος, προσπαθούν να εξηγήσουν γιατί η συνεργασία απαιτείται από το ίδιο το ατομικό συμφέρον. Αυτή η στρατηγική οδήγησε στην έννοια του κοινωνικού συμβολαίου, όπως αυτό αναπτύχθηκε στην πολιτική φιλοσοφία.

Άλλοι συγγραφείς έχουν αποπειραθεί να χρησιμοποιήσουν τη συνεργατική θεωρία παιγνίων για να εξηγήσουν την ανάδειξη ανθρωπίνων συμπεριφορών σε σχέση με την ηθική και σε σύγκριση με τη συμπεριφορά των ζώων. Έτσι μελετούν διάφορα παίγνια, όπως το δίλημμα του φυλακισμένου μελετώντας τις αναδυόμενες συμπεριφορές σε σχέση με την ηθική είτε ατομική είτε της ομάδας.

2.3 Περιγραφή και Μοντελοποίηση Παιγνίου

Η κύρια χρήση της θεωρίας παιγνίων είναι να περιγράψει και να μοντελοποιήσει τις ανθρώπινες συμπεριφορές. Ορισμένοι μελετητές πιστεύουν ότι η εύρεση της ισορροπίας των παιγνίων ισοδυναμεί με την πρόβλεψη της συμπεριφοράς ομάδων ανθρώπων όταν ικανοποιούν τις συνθήκες του αντιστοίχου παιγνίου. Αυτή η άποψη έχει υποστεί ωστόσο έντονη κριτική. Ένα πρώτο επιχείρημα είναι ότι οι υποθέσεις που κάνουν οι θεωρητικοί των παιγνίων συχνά παραβιάζονται όταν εφαρμόζονται σε καταστάσεις του πραγματικού κόσμου. Για παράδειγμα οι θεωρητικοί των παιγνίων υποθέτουν ότι οι παίκτες σκέφτονται λογικά (ορθολογιστικά), αλλά στην πράξη η ανθρώπινη συμπεριφορά αποκλίνει από τον ορθολογισμό. Οι θεωρητικοί των παιγνίων απαντούν συγκρίνοντας τις υποθέσεις τους με αυτές που γίνονται στα μοντέλα της φυσικής, έτσι για παράδειγμα, μπορεί οι υποθέσεις τους να μην ευσταθούν πάντα, ωστόσο εξηγούν συμπεριφορές σε ένα μέτρο όπως και η φυσική εξηγεί σε ένα μέτρο τις φυσικές συμπεριφορές. Θα λέγαμε ότι χρησιμοποιεί την ερμηνεία του πλατωνικού ιδεατού κόσμου. Στην πράξη, η εμπειρική εργασία που έχει πραγματοποιηθεί σε κλασικά παίγνια, όπως το παίγνιο των 2/3 και το παίγνιο του δικτάτορα οι παίκτες δεν παίζουν την ισορροπία Nash, οπότε υπάρχει μια έντονη αμφιταλάντευση στους ερευνητές αναφορικά με τη σημασία των πειραμάτων και το αν η ανάλυση των πειραμάτων καλύπτει πλήρως όλες τις πλευρές της σχετικής κατάστασης.

Ακολουθεί μια αναφορά στα παίγνια των 2/3 και το παίγνιο του δικτάτορα.

2.3.1 Το παίγνιο των 2/3

Στο παίγνιο των 2/3, αρκετοί άνθρωποι μαντεύουν ποιο θα είναι το 2/3 των αριθμών που μαντεύουν οι ίδιοι αν οι αριθμοί είναι από το 1 έως το 100. Ο νικητής είναι αυτός που είναι πιο κοντά στα 2/3 των εκτιμήσεων. Στο παίγνιο αυτό δεν υπάρχει κυρίαρχη στρατηγική.

2.3.2 Το παίγνιο του δικτάτορα

Στο παίγνιο του δικτάτορα, ένας παίκτης «ο δικτάτωρ» αποφασίζει πώς να μοιράσει ένα ποσό μεταξύ του ίδιου και ενός δεύτερου παίκτη. Ο δεύτερος παίκτης «ο αποδέκτης» απλά λαμβάνει το υπόλοιπο του ποσού που έχει αφήσει ο δικτάτωρ. Ο ρόλος του αποδέκτη είναι εντελώς παθητικός και δεν έχει αποτέλεσμα στην εξέλιξη του παιγνίου. Ως αποτέλεσμα το παίγνιο του δικτάτορα δεν είναι ένα σύνηθες παίγνιο (όπως αυτό ορίζεται στην θεωρία παιγνίων). Για να είναι ένα συνήθεις παίγνιο το αποτέλεσμα των ενεργειών κάθε παίκτη πρέπει να βασίζεται στις ενέργειές του, άρα εδώ έχουμε να κάνουμε περισσότερο με θεωρία αποφάσεων παρά με θεωρία παιγνίων. Παρόλα αυτά το παίγνιο αυτό χρησιμοποιείται στην θεωρία παιγνίων ως εκφυλισμένο παίγνιο. Το παίγνιο έχει χρησιμοποιηθεί για να ελεγχθεί το μοντέλο του homo economicus στην οικονομική θεωρία. Αν οι παίκτες ενδιαφέρονταν μόνο για το ατομικό τους όφελος, τότε ο δικτάτορας θα δέσμευε όλο το ποσό για τον εαυτό του και δεν θα έδινε τίποτα στον αποδέκτη του.

Πειραματικά αποτελέσματα έχουν αναδείξει ότι οι ενήλικες συχνά δίνουν χρήματα στους αποδέκτες, μειώνοντας το ποσό που ο δικτάτορας ο ίδιος λαμβάνει. Αυτά τα αποτελέσματα μοιάζουν συνεπή, σε μελέτες που έχουν γίνει σε διαφορετικούς πολιτισμούς (χώρες) πάντα οι «δικτάτορες» τείνουν να αφήνουν ένα ποσό για τους «αποδέκτες. Σε μία τροποποιημένη έκδοση του παιγνίου μάλιστα τα παιδιά τείνουν να αφήσουν ακόμη μεγαλύτερο ποσό το οποίο τείνει να είναι ίσο και μέχρι το μισό ολικό ποσό.

Τα αποτελέσματα αυτά ωστόσο τείνουν να αναδείξουν κάποια βασικά χαρακτηριστικά τα οποία δεν αναμένουμε στην κλασική θεωρία παιγνίων:

1. Οι δικτάτορες αποτυγχάνουν να μεγιστοποιήσουν την δική τους ωφέλεια (βασική αντίφαση σε σχέση με την βασική θεωρία παιγνίων)
2. Η συνάρτηση που απεικονίζει την ωφέλεια του δικτάτορα δεν συμπεριλαμβάνει παραμέτρους όπως η εικόνα του δικτάτορα στην κοινωνία, ή αναμενόμενες αρνητικές επιπτώσεις από μία ωφελιμιστική συμπεριφορά.
3. Η συνάρτηση ωφέλειας δεν συμπεριλαμβάνει οφέλη που μπορεί να προκύψουν από μία μη απόλυτα ορθολογική συμπεριφορά.

Επιπλέον πειραματικά αποτελέσματα δείχνουν ότι τα υποκείμενα επιδεικνύουν ένα μεγάλο βαθμό συνέπειας σε σχέση με πολλαπλές εκδόσεις του παίγνιου του δικτάτορα όπου το κόστος για να δώσει ο δικτάτορας στον αποδέκτη του ποικίλει.

Αυτό αναδεικνύει ότι στην πραγματικότητα συνεκτιμάται η έννοια του αλτρουισμού σε σχέση με την συμπεριφορά βελτιστοποίησης. Άλλα πειράματα έχουν δείξει ότι η σχέση μεταξύ της συμπεριφοράς του δικτάτορα και του ενδιαφέροντος του συνολικού καλού έχουν άμεση συσχέτιση.

2.4 Τύποι Παιγνίων

Ανάλογα με το είδος του παιγνίου αυτά διαχωρίζονται σε περαιτέρω κατηγορίες:

2.4.1 Συνεργατικά και μη συνεργατικά παίγνια

Ένα παίγνιο είναι συνεργατικό αν οι παίκτες μπορούν να εφαρμόσουν αμοιβαίες δεσμεύσεις. Για παράδειγμα το νομικό σύστημα απαιτεί από τους παίκτες να διατηρούν τις υποσχέσεις του. Στα μη συνεργατικά παίγνια αυτό δεν είναι δυνατόν.

Συχνά γίνεται η υπόθεση ότι η επικοινωνία μεταξύ των παικτών επιτρέπεται στα συνεργατικά παίγνια και δεν επιτρέπεται στα μη συνεργατικά παίγνια. Ωστόσο, αυτή η ταξινόμηση αμφισβητείται ή απορρίπτεται από μελετητές οι οποίοι πιστεύουν ότι δεν μοντελοποιούν ορθολογιστικά τον πραγματικό κόσμο, αφού αυτά μπορεί να συμβαίνουν ταυτόχρονα.

Οι δύο τύποι των παιγνίων, συνεργατικά και μη συνεργατικά είναι δυνατόν να μοντελοποιήσουν καταστάσεις σε πολύ εκλεπτυσμένο επίπεδο έτσι ώστε να δίνουν ακριβή αποτελέσματα. Τα συνεργατικά παίγνια βλέπουν το παίγνιο σε μεγαλύτερο επίπεδο αφαίρεσης. Έχουν γίνει επίσης αρκετές απόπειρες για να συνδεθούν οι δύο προσεγγίσεις.

Υβριδικά παίγνια έχουν οριστεί επίσης που περιλαμβάνουν συνασπισμούς παικτών και οδηγούν σε μη συνεργατικά παίγνια πλέον ομάδων.

2.4.2 Συμμετρικά και μη Συμμετρικά Παίγνια

Ένα συμμετρικό παίγνιο είναι ένα παίγνιο όπου οι ανταμοιβές για την επιλογή μίας συγκεκριμένης στρατηγικής εξαρτάται αποκλειστικά από τις στρατηγικές των άλλων και όχι από το ποιος παίκτης τις παίζει. Αν ανταλλαχθούν οι ταυτότητες των παικτών τότε οι ανταμοιβές παραμένουν οι ίδιες, τότε το παίγνιο καλείται συμμετρικό. Πολλά από τα συχνά χρησιμοποιούμενα παίγνια 2 παικτών είναι συμμετρικά. Η συνήθης απεικόνιση των παιγνίων του δειλού, του διλήμματος του φυλακισμένου είναι συμμετρικά. Κάποιοι μελετητές ωστόσο θεωρούν συγκεκριμένα μη συμμετρικά παίγνια ως παραδείγματα τέτοιων παιγνίων επίσης. Ωστόσο οι συνήθεις ανταμοιβές είναι συμμετρικές.

	E	F
E	1, 2	0, 0
F	0, 0	1, 2

Εικόνα 3: Ένα μη συμμετρικό παίγνιο.

Τα κοινά μελετημένα μη συμμετρικά παίγνια είναι παίγνια που οι παίκτες δεν έχουν κοινές στρατηγικές. Για παράδειγμα το παίγνιο της κυριαρχίας και το παίγνιο του δικτάτορα έχουν διαφορετικές στρατηγικές για κάθε παίκτη. Είναι δυνατό πάντως για ένα παίγνιο να υπάρχουν κοινές στρατηγικές για τους παίκτες και οι ανταμοιβές να μην είναι συμμετρικές. Για παράδειγμα το παίγνιο που απεικονίζεται στο σχήμα είναι μη συμμετρικό παρόλο που και οι δύο παίκτες έχουν το ίδιο σύνολο στρατηγικών.

Στην συνέχεια θα παραθέσουμε βασικά στοιχεία των παιγνίων που αναφέρθηκαν στην ενότητα αυτή ως δύο χαρακτηριστικά συμμετρικά παίγνια:

2.4.2.1 Το παιχνίδι του δειλού

Το παίγνιο του δειλού (chicken game) είναι ένα από τα θεμελιώδη παίγνια που αναδεικνύουν ένα μοντέλο σύγκρουσης. Η αρχή του παιγνίου είναι ότι οι παίκτες προτιμούν να μην συγκρουστούν, όταν η σύγκρουσή τους θα είναι ολέθρια.

Το όνομα του παιγνίου (παίγνιο του κοτόπουλου) έχει τις καταβολές του στο παίγνιο όπου δύο οδηγοί αυτοκινήτου κατευθύνονται ο ένας προς τον άλλον σε μία τροχιά σύγκρουσης.: ο ένας πρέπει να στρίψει αλλιώς θα συγκρουστούν και θα πεθάνουν και οι δύο. Ωστόσο αν ο ένας στρίψει και ο άλλος συνεχίσει, αυτός που θα στρίψει είναι «κοτόπουλο» δηλαδή δειλός. Αυτή η ορολογία έχει επικρατήσει μάλιστα στην πολιτική επιστήμη και στα οικονομικά. Το παίγνιο αυτό έχει χρησιμοποιηθεί για να περιγράψει επίσης την συμπεριφορά των υπερδυνάμεων στο ενδεχόμενο ενός πυρηνικού πολέμου.

	Swerve	Straight
Swerve	Tie, Tie	Lose, Win
Straight	Win, Lose	Crash, Crash

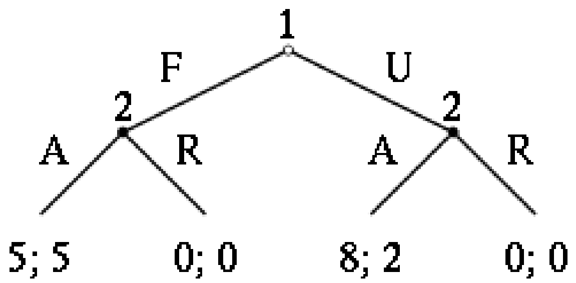
Εικόνα 4: Απεικόνιση του Παιγνίου του Δειλού με πίνακα

Στο σχήμα φαίνεται μία έκδοση που έχει χρησιμοποιηθεί στη μοντελοποίηση του παιγνίου. Αν και οι δύο παίκτες οπισθοχωρήσουν (swerve) τότε το αποτέλεσμα είναι ισοπαλία (tie). Αν ο ένας παίκτης οπισθοχωρήσει και ο άλλος δεν οπισθοχωρήσει (straight), τότε ο παίκτης που δεν οπισθοχωρεί νικάει. Αντίθετα αν και οι δύο παίκτες δεν οπισθοχωρήσουν τότε συντρίβονται και οι δύο, άρα χάνουν και οι δύο. Συνήθεις ανταμοιβές που χρησιμοποιούνται είναι 0: να συμβολίζει την ισοπαλία, 1: να συμβολίζει τη νίκη, -1: να συμβολίζει την ήττα και -10: να συμβολίζει την συντριβή των παικτών σε περίπτωση σύγκρουσης.

Η θεωρία παιγνίων έχει αποφανθεί στην μελέτη του παιγνίου αυτού ότι η καλύτερη στρατηγική των παικτών είναι να οπισθοχωρήσουν παρά την μη μεγιστοποίηση του οφέλους τους.

2.4.2.2 Το παίγνιο της κυριαρχίας

Το παίγνιο της κυριαρχίας χρησιμοποιείται στα οικονομικά πειράματα. Ο πρώτος παίκτης (που κάνει την πρόταση) λαμβάνει ένα χρηματικό ποσό και προτείνει πως το ποσό αυτό να μοιραστεί ανάμεσα σε αυτόν και τον δεύτερο παίκτη (που λαμβάνει την πρόταση). Ο δεύτερος παίκτης λαμβάνει την πρόταση και επιλέγει είτε να την αποδεχτεί είτε να την απορρίψει. Αν ο δεύτερος παίκτης αποδεχτεί την πρόταση, τότε το χρηματικό ποσό μοιράζεται σύμφωνα με την πρόταση. Αν ο δεύτερος παίκτης απορρίψει τότε κανένας παίκτης δεν λαμβάνει χρήματα. Το παίγνιο παίζεται τυπικά μόνο μία φορά οπότε οι αποφάσεις που λαμβάνονται έχουν σημασία ότι είναι μοναδικές και ντετερμινιστικές.



Εικόνα 5: Μία εκδοχή του παιγνίου της κυριαρχίας.

Ο παίκτης 1 προσφέρει μία δικαία (F) ή μία μη δίκαια (U) μοιρασιά. Ο παίκτης 2 αν αποδεχτεί (A) τότε είτε μοιράζονται το ποσό στην 1η περίπτωση, είτε δεν μοιράζονται το ποσό στην 2η περίπτωση. Αν απορρίψει τότε δεν παίρνει κανείς παίκτης τίποτε.

2.4.3 Παίγνια μηδενικού και μη μηδενικού αθροίσματος.

Τα παίγνια μηδενικού αθροίσματος είναι μια ειδική περίπτωση των παιγνίων σταθερού αθροίσματος όπου οι επιλογές των παικτών διατηρούν το διαμοιραζόμενο ποσό σταθερό. Στα παίγνια μηδενικού αθροίσματος το συνολικό όφελος για όλους τους παίκτες στο παίγνιο για κάθε συνδυασμό στρατηγικών πάντα αθροίζει στο μηδέν (πιο τυπικά ο παίκτης κερδίζει αυτό που χάνουν οι άλλοι παίκτες). Κλασικά παίγνια που είναι μηδενικού αθροίσματος είναι το matching pennies και πολλά παίγνια ταμπλό όπως το σκάκι και το Go.

	A	B
A	–1, 1	3, –3
B	0, 0	–2, 2

Εικόνα 6: Ένας πίνακας ενός παιγνίου μηδενικού αθροίσματος.

Παρατηρούμε ότι το άθροισμα των ανταμοιβών κάθε κελιού (συνδυασμός στρατηγικών των δύο παικτών) είναι πάντα ίσο με το μηδέν.

Πολλά επίσης παίγνια που μελετώνται από τους θεωρητικούς των παιγνίων όπως το δίλημμα του φυλακισμένου είναι παίγνια μη μηδενικού αθροίσματος, επειδή το αποτέλεσμα δεν αθροίζει στο μηδέν.

Τα παίγνια μηδενικού αθροίσματος μοντελοποιούν καταστάσεις όπως η κλοπή και ο τζόγος. Αποδεικνύεται επίσης ότι κάθε παίγνιο μπορεί να μετατραπεί σε ένα ισοδύναμο παίγνιο μηδενικού αθροίσματος.

2.4.3.1 Matching Pennies

Το παίγνιο αυτό είναι η παραλλαγή για δύο στρατηγικές του γνωστού «πέτρα, ψαλίδι, χαρτί». Είναι ένα κλασικό παίγνιο που χρησιμοποιείται εκτενώς στη θεωρία παιγνίων και για διδακτικούς λόγους και έχει μεικτή ισορροπία Nash.

Το παίγνιο παίζεται μεταξύ δύο παικτών, του παίκτη Α και του παίκτη Β όπου ο κάθε παίκτης έχει ένα νόμισμα (penny) και πρέπει μυστικά (χωρίς να τον δει ο άλλος παίκτης) να επιλέξει τη μία όψη του νομίσματος (κορώνα ή γράμματα). Οι παίκτες δείχνουν την επιλογή τους ταυτόχρονα. Αν τα νομίσματα συμπίπτουν (κορώνα-κορώνα ή γράμματα-γράμματα) τότε ο παίκτης Α κρατάει και τα δύο νομίσματα έτσι κερδίζει ένα νόμισμα από τον παίκτη Α. Αν τα νομίσματα είναι διαφορετικά (κορώνα - γράμματα ή γράμματα-κορώνα) τότε κερδίζει ο παίκτης Β ο οποίος κρατάει και τα δύο νομίσματα για τον εαυτό του.

Ο πίνακας ανταμοιβών του παιγνίου φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:

	Heads	Tails
Heads	+1, −1	−1, +1
Tails	−1, +1	+1, −1

Εικόνα 7: Ο πίνακας ανταμοιβών του παιγνίου matching pennies.

Οι ανταμοιβές συμβολίζουν την διαφορά στα νομίσματα που έχει ο κάθε παίκτης με το πέρας του παιγνίου. Για παράδειγμα το 1ο κελί συμβολίζει ότι ο 1ος παίκτης παίζει κορώνα και ο 2ος παίκτης παίζει κορώνα (κερδίζει ο 1ος παίκτης) οπότε το πλήθος των νομισμάτων του πρώτου παίκτη αυξάνεται κατά ένα και το πλήθος των νομισμάτων του δευτέρου παίκτη μειώνεται κατά ένα.

Αποδεικνύεται ότι το παίγνιο αυτό δεν έχει αμιγή Nash ισορροπία, αλλά έχει μεικτή στρατηγική που οδηγεί σε ισορροπία η οποία είναι οι παίκτες ισοπίθανα να επιλέξουν κορώνα ή γράμματα.

Σημειωτέο ότι στατιστικές αναλύσεις των πέναλτι σε ένα παιχνίδι ποδοσφαίρου έχουν μετρηθεί να είναι πολύ κοντά στο παίγνιο matching pennies, όπου ισοπίθανα οι παίκτες επιλέγουν την πλευρά στην οποία θα γίνει το σουτ, τόσο ο παίκτης, όσο και ο τερματοφύλακας.

2.4.3.2 Το δίλημμα του φυλακισμένου

Το δίλημμα του φυλακισμένου είναι ένα από τα κλασικότερα παίγνια που έχουν μελετηθεί εκτενώς και αποδεικνύουν ότι παίκτες που είναι απόλυτα ορθολογιστές μπορεί να μη συνεργαστούν ακόμη και αν αυτό είναι στο απόλυτο συμφέρον τους.

Το παίγνιο διατυπώνεται ως εξής: Δύο μέλη μιας εγκληματικής συμμορίας συλλαμβάνονται και φυλακίζονται. Κάθε φυλακισμένος είναι εντελώς απομονωμένος από τον άλλο και δεν υπάρχει καμία δυνατότητα να επικοινωνήσουν. Έτσι δεν μπορούν να καθορίσουν μια κοινή στρατηγική και ο καθένας πρέπει να ενεργήσει μόνος του. Οι κατήγοροι δεν διαθέτουν αρκετά αποδεικτικά στοιχεία για την καταδίκη τους και προσπαθούν να αποσπάσουν την ομολογία του ενός εναντίον του άλλου με ένα κατάλληλο αντιστάθμισμα. Έτσι κάθε φυλακισμένος έχει δύο επιλογές: είτε να καταδώσει τον συνεργάτη του και να πει ότι έκανε το έγκλημα είτε να συνεργαστεί με τον συνεργάτη του και να σιωπήσει.

Οι ανταμοιβές είναι οι ακόλουθες (συμβολίζουμε τους φυλακισμένους-παίκτες A και B):

- Αν ο A και ο B προδώσουν ο ένας τον άλλο κάθε ένας από αυτούς θα εκτίσει 2 χρόνια στη φυλακή.
- Αν ο A προδώσει τον B και ο B παραμείνει σιωπηλός, τότε και ο B θα εκτίσει 3 χρόνια στη φυλακή και ο A θα ελευθερωθεί (αντίστοιχα ισχύει και αντιστρόφως, δηλαδή αν ο B προδώσει τον A και ο A παραμείνει σιωπηλός)
- Αν ο A και ο B παραμείνουν σιωπηλοί τότε ο καθένας από αυτούς θα εκτίσουν έναν χρόνο φυλάκισης.

Επίσης γίνονται οι υποθέσεις ότι δεν θα υπάρξουν μακροχρόνιες συνέπειες στους φυλακισμένους (π.χ. ότι θα επηρεαστεί η φήμη τους. Το παίγνιο απεικονίζεται τυπικά με τον εξής πίνακα ανταμοιβών:

1,1	0,3
3,0	2,2

Εικόνα 8: Πίνακας Ανταμοιβών του Διλήμματος του Φυλακισμένου

Στην πρώτη γραμμή η απόφαση του παίκτη Α να παραμείνει σιωπηλός και στην $2^{η}$ γραμμή η απόφαση του να καταδώσει. Στην $1^{η}$ στήλη η απόφαση του παίκτη Β να παραμείνει σιωπηλός και στην $2^{η}$ στήλη η απόφασή του να καταδώσει. Οι αντίστοιχες ανταμοιβές φαίνονται στον πίνακα.

2.4.4 Ταυτόχρονα / Ακολουθιακά Παίγνια

Τα ταυτόχρονα παίγνια είναι παίγνια όπου οι δύο παίκτες παίζουν ταυτόχρονα, ή ακόμη κι αν δεν παίζουν ταυτόχρονα ο ένας παίκτης δεν έχει γνώση των επιλογών του άλλου παίκτη και έτσι οι κινήσεις τους μπορούν να προσομοιωθούν από μία ταυτόχρονη επιλογή των δύο παικτών.

Τα ακολουθιακά παίγνια (ή δυναμικά παίγνια) είναι παίγνια όπου οι παίκτες έχουν μερική γνώση προτέρων δράσεων των άλλων παικτών. Δεν απαιτείται να έχουν τέλεια πληροφορία για τις ενέργειες των άλλων παικτών. Μπορεί να έχουν πολύ μικρή γνώση. Για παράδειγμα ένας παίκτης μπορεί να ξέρεις ότι ένας προηγούμενος παίκτης δεν έκανε μία συγκεκριμένη κίνηση, χωρίς να γνωρίζει ποια ακριβώς κίνηση έκανε.

Η διαφορά μεταξύ των ταυτόχρονων και των ακολουθιακών παιγνίων μέσω των διαφορετικών απεικονίσεων που αποτυπώνονται τα παίγνια. Συχνά η κανονική μορφή επιλέγεται για να απεικονίσει τα ταυτόχρονα παίγνια, ενώ η εκτενής επιλέγεται για να απεικονίσει ακολουθιακά παίγνια.

2.4.5 Συνδυαστικά Παίγνια

Τα παίγνια στα οποία η δυσκολία της εύρεσης μία βέλτιστης στρατηγικής πηγάζει από την πολυπλοκότητα των υποψηφίων κινήσεων καλούνται συνδυαστικά παίγνια. Παραδείγματα τέτοιων παιγνίων είναι το σκάκι και το Go. Τα παίγνια που έχουν ημιτελή πληροφόρηση για την κατάσταση τους ή βασίζονται και στον παράγοντα της τυχαιότητας έχουν αντίστοιχη δομή, όπως για παράδειγμα το Τάβλι.

Τα παίγνια τέλειας πληροφορίας έχουν μελετηθεί στην συνδυαστική θεωρία παιγνίων (combinatorial game theory).

2.4.6 Διακριτά και Συνεχή Παίγνια

Τα περισσότερα παίγνια που έχουν μελετηθεί είναι διακριτά και πεπερασμένα, δηλαδή έχουν ένα πεπερασμένο αριθμό από παίκτες, κινήσεις, γεγονότα, αποτελέσματα, κ.λπ. Πολλές φορές το αντικείμενο αυτών των παιγνίων μπορεί να επεκταθεί. Τα συνεχή παίγνια επιτρέπουν στους παίκτες να επιλέξουν τη στρατηγική τους από ένα σύνολο συνεχών στρατηγικών. Για παράδειγμα ο ανταγωνισμός Cournot που μελετήσαμε παραπάνω είναι ένα παίγνιο συνεχών τιμών.

2.4.7 Παίγνια πολλών παικτών και παίγνια πληθυσμού

Τα παίγνια με αυθαίρετο αλλά πεπερασμένο αριθμό παικτών, συνήθως καλούνται παίγνια n-παικτών. Η εξελικτική θεωρία παιγνίων θεωρεί παίγνια που αφορούν ένα πληθυσμό παικτών που λαμβάνουν αποφάσεις, ενώ η συχνότητα με την οποία μία συγκεκριμένη απόφαση λαμβάνεται μπορεί να αλλάξει με το χρόνο σε συνδυασμό με τις αποφάσεις των άλλων παικτών. Στη βιολογία η προσέγγιση αυτή τείνει να μοντελοποιήσει την βιολογική εξέλιξη, όπου γενετικά προγραμματισμένοι οργανισμοί περνάνε χαρακτηριστικά στους απογόνους τους. Στα οικονομικά η ίδια θεωρία χρησιμοποιείται για να περιγράψει τις αλλαγές του πληθυσμού με την αλλαγή των γενεών και την αλλαγή των συμπεριφορών (τις περισσότερες φορές μάλιστα με ορθολογιστικό τρόπο).

2.5 Ισορροπία Nash

Η ισορροπία Nash είναι ένα σκεπτικό επίλυσης σε ένα μη συνεργατικό παίγνιο που περιλαμβάνει δύο ή περισσότερους παίκτες, στην οποία ο κάθε παίκτης υποθέτουμε ότι γνωρίζει τις στρατηγικές ισορροπίας των άλλων παικτών και κανένας παίκτης δεν έχει κέρδος από το να αλλάξει τη στρατηγική που έχει επιλέξει.

Αν κάθε παίκτης έχει επιλέξει μία στρατηγική και κανένας δεν έχει όφελος από το να αλλάξει την στρατηγική του, άρα οι επιλογές τους θα παραμείνουν σταθερές, τότε το σύνολο των στρατηγικών των παικτών συγκροτούν την ισορροπία Nash.

Με απλά λόγια δύο παίκτες είναι σε ισορροπία Nash αν ο $1^{ος}$ παίκτης έχει κάνει επιλογή στρατηγικής η οποία είναι η καλύτερη δυνατή λαμβάνοντας υπόψιν την επιλογή στρατηγικής του άλλου παίκτη, ενώ η απόφαση του $2^{ου}$ παίκτη δεν θα αλλάξει όσο η επιλογή του $1^{ου}$ παίκτη δεν αλλάζει επίσης. Σε συνέχεια ένα σύνολο παικτών είναι σε ισορροπία Nash αν κάθε ένας από αυτούς έχουν κάνει την καλύτερη δυνατή επιλογή, λαμβάνοντας υπόψιν τις επιλογές των άλλων παικτών εφόσον αυτές δεν αλλάζουν και είναι οριστικοποιημένες.

Οι θεωρητικοί των παιγνίων χρησιμοποιούν το σκεπτικό της ισορροπίας Nash για να περιγράψουν το αποτέλεσμα των αλληλεπιδράσεων διαφόρων παικτών που έχουν να λάβουν μια απόφαση. Με άλλα λόγια παρέχουν έναν τρόπο πρόβλεψης του αποτελέσματος όταν διαφορετικοί άνθρωποι ή οργανισμοί παίρνουν αποφάσεις την ίδια στιγμή, και το αποτέλεσμα εξαρτάται από τις επιλογές των επιμέρους παικτών. Η ιδέα πίσω από την ισορροπία Nash είναι ότι δεν μπορεί να γίνει πρόβλεψη των '*ν*' επιλογών πολλών παικτών αν κάποιος αναλύσει τις επιλογές απομονωμένα. Αντίθετα κάποιος παίκτης πρέπει να λαμβάνει υπόψιν τι θα κάνουν οι άλλοι παίκτες.

Το σημείο ισορροπίας Nash έχει χρησιμοποιηθεί για να αναλυθούν ανταγωνιστικές καταστάσεις όπως ο πόλεμος και ο ανταγωνιστικός εξοπλισμός χωρών με όπλα, ενώ επίσης δείχνει πως η σύγκρουση μπορεί να αποφευχθεί μέσω συνεχών αλληλεπιδράσεων. Έχει επίσης μελετηθεί το πώς απομονωμένοι παίκτες διαφορών προτιμήσεων μπορούν να συνεργαστούν και γιατί θα αναλάβουν ρίσκα για να επιτύχουν ένα συνεργατικό αποτέλεσμα. Έχει χρησιμοποιηθεί επίσης για την μελέτη των εμφανίσεων φαινομένων διαφυγής αποθεματικών από τράπεζες, κρίσεις χρηματιστικής ευστάθειας, αλλά και σταθεροποίησης συστημάτων ανταγωνισμού όπως συστήματα διαχείρισης του κυκλοφοριακού συστήματος, μέχρι και για την ανάλυση του χτυπήματος πέναλτι σε ποδοσφαιρικό αγώνα.

Το σημείο ισορροπίας Nash έχει ονομαστεί προς τιμήν του John Forbes Nash. Μία πρώτη έκδοση του σημείου ισορροπίας Nash είχε προταθεί από το 1838 από τον Cournot [Courn1838] στην θεωρία των ολιγοπωλίων του. Δύο βασικές εκδοχές του σημείου ισορροπίας Nash συναντώνται στην βιβλιογραφία. Το σημείο ισορροπίας με καθαρές στρατηγικές όπου οι επιμέρους παίκτες επιλέγουν αυστηρά και μόνο μία από τις διαθέσιμες στρατηγικές τους και το σημείο ισορροπίας μεικτών στρατηγικών όπου ο παίκτης αναθέτει πιθανότητα επιλογής κάθε διαθέσιμης στρατηγικής. Η επιτυχία του Nash συνίσταται στο ότι απέδειξε ότι κάθε πεπερασμένο παίγνιο έχει σημείο ισορροπίας Nash μεικτών στρατηγικών [Nash1950] [Nash1951].

Δεν θα μελετήσουμε περαιτέρω το σημείο ισορροπίας Nash διότι στην παρούσα εργασία μελετούμε μόνο συνεργατικά παίγνια όπου δεν υπάρχει αντίστοιχος ορισμός.

2.6 Το Τίμημα της Αναρχίας

Το Τίμημα της Αναρχίας (Price of Anarchy – PoA) είναι ένα σκεπτικό τόσο των οικονομικών όσο και της θεωρίας παιγνίων που μετρά την αποδοτικότητα ενός συστήματος και συγκεκριμένα τον εκφυλισμό του λόγω της εγωιστικής συμπεριφοράς των παικτών που συμμετέχουν σε αυτό. Είναι ένας γενικότερος ωστόσο συμβολισμός ο οποίος μπορεί να εφαρμοστεί σε ποικιλόμορφα συστήματα και έννοιες αποδοτικότητας συστημάτων. Για παράδειγμα στο σύστημα μεταφορών μία πόλης πολλοί πράκτορες προσπαθούν να πάνε από μία αρχική τοποθεσία σε έναν προορισμό. Στην «κεντρικοποιημένη» λύση αυτού, μία κεντρική αρχή μπορεί να πει σε κάθε αυτόνομη οντότητα ποιο δρόμο να πάρει με στόχο να ελαχιστοποιήσει το μέσο χρόνο της διαδρομής των οντοτήτων. Στην «μη κεντρικοποιημένη» εκδοχή του, κάθε πράκτορας επιλέγει το δική του διαδρομή. Το τίμημα της αναρχίας μετράει το λόγο των μέσων αυτών χρόνων.

Συνήθως το σύστημα μοντελοποιείται με ένα παίγνιο και η αποδοτικότητα είναι μια συνάρτηση των αποτελεσμάτων (π.χ. η μέγιστη καθυστέρηση του δικτύου, ανταγωνισμός σε ένα σύστημα μαζικών μεταφορών, κ.λπ.). Διαφορετικές εκδοχές της ισορροπίας μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να μοντελοποιήσουν τις εγωιστικές συμπεριφορές των οντοτήτων εκ των οποίων η συνηθέστερη είναι η ισορροπία Nash.

Ο όρος «Τίμημα της Αναρχίας» χρησιμοποιήθηκε πρώτα από τους Κουτσουπιά και Παπαδημητρίου στο [KouPap94]. Ωστόσο η ιδέα να μετρηθεί η μη αποδοτικότητα της ισορροπίας είναι παλιότερη. Το σκεπτικό στην τρέχουσα μορφή του είναι το ανάλογο του «λόγου προσέγγισης» στους προσεγγιστικούς αλγορίθμους. Αυτό είναι και ο τρέχων τρόπος ανάλυσης των παιγνίων χρησιμοποιώντας αλγοριθμικές μεθόδους, που οδήγησε και σε έναν νέο επιστημονικό κλάδο, την αλγοριθμική θεωρία παιγνίων.

2.6.1 Μαθηματικός Ορισμός του Τιμήματος της Αναρχίας.

Θεωρούμε ένα παίγνιο $G =< N, S, v >$ που ορίζεται από ένα σύνολο παικτών N ένα σύνολο στρατηγικών S_i για κάθε παίκτη και σύνολο ωφελειών $u_i: S \to R$ (που αναφέρεται και ως αποτέλεσμα – outcome – του παιγνίου). Ορίζουμε ένα μέτρο της επάρκειας κάθε αποτελέσματος το οποίο ονομάζουμε συνάρτηση ευμάρειας $W: S \to R$. Η συνάρτηση ευμάρειας ποικίλει από παίγνιο σε παίγνιο ενώ ορθολογιστικές επιλογές για την συνάρτηση αυτή είναι το άθροισμα των ωφελειών των παικτών:

$$W(s) = \sum_{i \in N} u_i(s)$$

Είτε η ελάχιστη ωφέλεια κάθε παίκτη (που αναδεικνύει και ένα σκεπτικό ισότητας των παικτών):

$$W(s) = \min_{i \in N} u_i(s)$$

ή οποιαδήποτε άλλη συνάρτηση που έχει νόημα για το συγκεκριμένο παίγνιο που αναλύεται κάθε φορά.

Μπορούμε να ορίσουμε ένα υποσύνολο $E \subseteq S$ να είναι το σύνολο των στρατηγικών στο σημείο ισορροπίας (παραδείγματος χάρη το σύνολο των σημείων ισορροπίας Nash). Το τίμημα της αναρχίας τότε ορίζεται ως ο λόγος μεταξύ του χειρότερου σημείου ισορροπίας προς την βέλτιστη «κεντρικοποιημένη» επίλυση:

$$PoA = \frac{\max_{s \in S} W(s)}{\min_{s \in E} W(s)}$$

Ακολουθώντας την μεθοδολογία από τους προσεγγιστικούς αλγορίθμους αν το μέτρο της αποδοτικότητας είναι αντί της ευμάρειας η επιθυμία μεγιστοποίησης μιας συνάρτησης $C: S \to R$ θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε (π.χ. την καθυστέρηση ενός δικτύου) χρησιμοποιούμε την εκδοχή:

$$PoA = \frac{\max_{s \in S} W(s)}{\min_{s \in E} W(s)}$$

Μια σχετική έννοια που έχει αναπτυχθεί κάτω από συναφές σκεπτικό είναι το τίμημα της σταθερότητας (price od stability – PoS) ως ο λόγος μεταξύ του καλύτερου σημείου ισορροπίας προς την βέλτιστη κεντρικοποιημένη λύση:

$$PoS = \frac{\max_{s \in S} W(s)}{\max_{s \in E} W(s)}$$

Ή στην περίπτωση των συναρτήσεων κόστους (αντικειμενικές συναρτήσεις)

$$PoS = \frac{\min_{s \in S} W(s)}{min_{s \in E} W(s)}$$

Γνωρίζουμε ότι $1 \leq PoS \leq PoA$ εξ ορισμού και των δύο εννοιών. Αναμένουμε ότι η ελάττωση στην αποδοτικότητα λόγω των παιγνιο-θεωρητικών περιορισμών είναι κάπου μεταξύ του τιμήματος της σταθερότητας και του τιμήματος της αναρχίας.

2.6.2 Παράδειγμα: Το Δίλημμα του Φυλακισμένου

Θεωρούμε την εκδοχή του προβλήματος του διλήμματος του φυλακισμένου που αναπτύξαμε νωρίτερα να περιγράφεται ότι στην περίπτωση που και οι δύο καταδώσουν να έχουν 5 χρόνια φυλακής, σε περίπτωση κατάδοσης μόνο από τον έναν φυλακισμένο, ο καταδότης δέχεται 0 χρόνια φυλακής και ο καταδιδόμενος 7 χρόνια φυλακής, ενώ σε περίπτωση που κανένας δεν καταδώσει τιμωρούνται και οι δύο με 1 χρόνο φυλακής.

Αυτές οι τιμές ωφελειών μπορούν να αναπαρασταθούν και από τον παρακάτω πίνακα ωφελειών:

1,1	7,0
0,7	5,5

Εικόνα 9: Μία εκδοχή του προβλήματος του διλήμματος του φυλακισμένου.

Έστω επίσης ότι η συνάρτηση κόστους είναι $C(s_1, s_2) = u_1(s_1, s_2) + u_2(s_1, s_2)$. Τώρα το ελάχιστο κόστος της παραπάνω συνάρτησης είναι όταν οι παίκτες συνεργαστούν οπότε οδηγούμαστε σε μία αθροιστική ωφέλεια: 1+1=2.

Αντίθετα το μοναδικό σημείο ισορροπίας Nash του παραπάνω παιγνίου είναι όταν και οι δύο καταδώσουν και στην περίπτωση αυτή είναι 5+5=10, έτσι το τίμημα της αναρχίας είναι ίσο με 10/2=5, δηλαδή ερμηνευόμενο το τίμημα της αναρχίας υπο-πενταπλασιάζει την ωφέλεια των παικτών.

Κεφάλαιο 3: Συνεργατικά Παίγνια

Το κεφάλαιο αυτό περιέχει τους βασικούς συμβολισμούς και τους στοιχειώδεις ορισμούς από την συνεργατική θεωρία παιγνίων που απαιτούνται στην συνέχεια της πτυχιακής εργασίας. Στο υποκεφάλαιο 1 εισάγονται τα συνεργατικά παίγνια στην χαρακτηριστική συναρτησιακή τους μορφή. Στο υποκεφάλαιο 3 δίδονται τρείς πτυχές της λύσης των συνεργατικών παιγνίων, ο πυρήνας, το κάλυμμα πυρήνα και το σύνολο Weber. Το υποκεφάλαιο 4 πραγματεύεται την τιμή Shapley. Το υποκεφάλαιο 5 αφιερώνεται σε ειδικές μαθηματικές έννοιες που εισάγονται. Στο υποκεφάλαιο 6 μελετάται η τιμή r. Όλες οι πτυχές αυτών των 5 υποκεφαλαίων εισάγονται με την μορφή ενός συνόλου ανταμοιβών που μπορεί να επιτύχει ένα σύνολο παικτών αν δουλέψουν ομαδικώς.

3.1 Συνεργατικά Παίγνια στην χαρακτηριστική συναρτησιακή μορφή.

Τα συνεργατικά παίγνια σε χαρακτηριστική συναρτησιακή μορφή (characteristic function form) μπορούν να μοντελοποιήσουν καταστάσεις που είναι απαραίτητη η συνεργασία μεταξύ ομάδας ανθρώπων. Αυτή η συνεργασία έχει ως στόχο να αποκομηθεί μεγαλύτερο κέρδος από την περίπτωση που τα μέλη της ομάδας λειτουργούσαν αυτόνομα.

Ακολουθούν ένα σύνολο απαραίτητων ορισμών για τη συνέχεια της διατριβής:

3.1.1 Βασικοί Ορισμοί των Συνεργατικών Παιγνίων

Ορισμός 3.1.1: *Ένα συνεργατικό παίγνιο σε χαρακτηριστική συναρτησιακή μορφή είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος* $< N, v >$ *όπου* N *είναι ένα πεπερασμένο σύνολο, το σύνολο των παικτών και* v *είναι μια συνάρτηση από το* 2^N *στο* $\mathbb{R}$ *με* $v(\emptyset) = 0$.

Ένα υποσύνολο S του N καλείται συνέργια (coalition). Ο αριθμός $v(S)$ μπορεί να θεωρηθεί ως η αξία της συνέργιας S στο παίγνιο v. Για την συνέχεια, τα συνεργατικά παίγνια σε χαρακτηριστική συναρτησιακή μορφή θα καλούνται συνεργατικά παίγνα. Το συνεργατικό παίγνιο $< N, v >$ θα αναγνωρίζεται και μόνο από την χαρακτηριστική συνάρτηση v όταν δεν θα υπάρχει σύγχυση για το ποιο είναι το σύνολο παικτών N. Το σύνολο όλων των συνεργατικών παιγνίων με σύνολο παικτών N θα συμβολίζεται με G^N. Γενικά το σύνολο N θεωρείται ίσο με το $\{1,2, \dots, n\}$.

Ορισμός 3.1.2: *Ένα συνεργατικό παίγνιο καλείται υπερπροσθετικό (superadditive) αν*

$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T)$ *για κάθε* $S, T \in 2^N$ *με* $S \cap T = \emptyset$

Ενώ αντίθετα καλείται κατάπροσθετικό (subadditive) αν η αντίθετη ανισότητα ικανοποιείται και προσθετικό αν ισχύει η ισότητα.

Ορισμός 3.1.3: *Ένα συνεργατικό παίγνιο καλείται κυρτό (convex) αν*

$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T)$ *για κάθε* $S, T \in 2^N$

Ενώ καλείται κοίλο αν ισχύει η αντίθετη ανισότητα.

Ο Shapley (1971) απέδειξε ότι ένα παίγνιο είναι κυρτό αν και μόνο αν:

$v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(T \cup \{i\}) - v(T)$ για κάθε $i \in N$ και για $S \subset T \subset N \backslash \{i\}$

Ορισμός 3.1.4: *Ένα συνεργατικό παίγνιο καλείται 0-κανονικοποιημένο (0-normalized) αν:* $v(i) = 0$ *για κάθε* $i \in N$ *και (0,1)-κανονικοποιημένο αν* $v(i) = 0$ *για κάθε* $i \in N$ *και* $v(N) = 1$.

Ορισμός 3.1.5: *Δύο συνεργατικά παίγνια u και v καλούνται στρατηγικά ισοδύναμα αν υπάρχει ένα k>0 και* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ *τέτοια ώστε:*

$$v(S) = ku(S) + \sum_{i \in S} a_i$$

για κάθε $S \in 2^N$

Ορισμός 3.1.6: *Ένα συνεργατικό παίγνιο v είναι μονότονο αν* $v(S) \geq v(T)$ *όταν* $S \supset T$.

Ορισμός 3.1.7: *Ένα συνεργατικό παίγνιο καλείται 0-μονοτονικό αν είναι στρατηγικά ισοδύναμο σε ένα 0-κανονικοποιημένο μονοτονικό παίγνιο.*

Ένα παίγνιο είναι 0-μονοτονικό αν και μόνο αν

$$v(T) \leq v(S) - \sum_{i \in S \backslash T} v(i)$$

όταν $T \subset S$.

Ορισμός 3.1.8: *Το δυικό παίγνιο v* ενός συνεργατικού παιγνίου v ορίζεται από την σχέση:* $v^*(S) \coloneqq v(N) - v(N \backslash S)$ *για κάθε* $S \in 2^N$

Σημείωση: Το δυικό ενός κυρτού παιγνίου είναι κοίλο και αντίστροφα.

Σημειώστε ότι το δυικό παίγνιο ενός κυρτού παιγνίου είναι κοίλο και αντιστρόφως και ότι v**=v για κάθε παίγνιο v.

Το σύνολο όλων των συνεργατικών παιγνίων σε ένα σύνολο N παικτών είναι ένας $(2^N - 1)$ −διάστατος γραμμικός χώρος.

Ορισμός 3.1.9: *Για κάθε* $T \in 2^N$ *το παίγνιο T-unanimity* u_T *ορίζεται ως:*

$$u_T = \begin{cases} 1, & \alpha\nu\ S \subset T \\ 0, & \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \end{cases}$$

Το σύνολο $\{u_T | T \in 2^N \backslash \{\emptyset\}\}$ *είναι μια βάση του γραμμικού χώρου* G^N. *Κάθε παίγνιο* $v \in G^N$ *μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός της παραπάνω βάσης.*

Ορισμός 3.1.10: *Μία συλλογή B μη κενών υποσυνόλων του N καλείται ισορροπημένη συλλογή αν υπάρχουν θετικοί αριθμοί:* λ_S *για κάθε* $S \in B$ *έτσι ώστε:*

$$\sum_{S \in B} \lambda_S 1_S = 1_N$$

Οι αριθμοί λ_S καλούνται βάρη των στοιχείων του B. Μία ισορροπημένη συλλογή που δεν περιέχει κατάλληλη ισορροπημένη υπο-συλλογή καλείται ελαχιστοτική ισορροπημένη συλλογή.

Ορισμός 3.1.11: *Ένα συνεργατικό παίγνιο v καλείται ισορροπημένο παίγνιο αν για κάθε ισορροπημένη συλλογή B με βάρη* $\{\lambda_S\}_{S \in B}$ *ισχύει το ακόλουθο:*

$$v(N) \geq \sum_{S \in B} \lambda_S v(S)$$

Έστω v ένα συνεργατικό παίγνιο. Για κάθε $S \in 2^N$ το υπο-παίγνιο $< S, v_S >$ ορίζεται από την σχέση: $v_S(T) = v(T)$ για κάθε $T \subset S$.

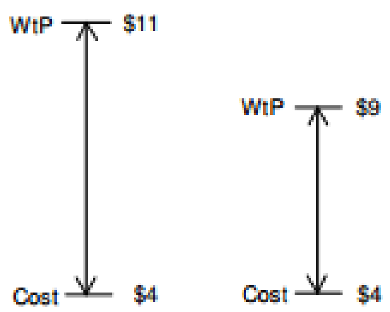
Ορισμός 3.1.12: *Ένα συνεργατικό παίγνιο v καλείται ολικά ισορροπημένο παίγνιο αν για κάθε συνέργεια S το υπο-παίγνιο* v_S *είναι ισορροπημένο.*

3.1.2 Ένα απλό παράδειγμα ενός συνεργατικού παιγνίου

Θεωρούμε και το ακόλουθο απλό παράδειγμα ενός συνεργατικού παιγνίου.

Υπάρχουν τρεις παίκτες άρα N={1,2,3}. Σκεφτόμαστε τον παίκτη 1 ως έναν πωλητή και τους παίκτες 2 και 3 ως αγοραστές. Ο παίκτης 1 έχει μία μονάδα να πουλήσει σε κόστος 4 ευρώ. Κάθε αγοραστής ενδιαφέρεται να αγοράσει το πολύ 1 μονάδα. Ο παίκτης 2 έχει μία επιθυμία να πληρώσει 9 ευρώ για το προϊόν του παίκτη 1 ενώ ο παίκτης 3 έχει την επιθυμία να πληρώσει 11 ευρώ για το προϊόν του παίκτη 1.

Το παίγνιο μπορεί να αναπαρασταθεί με την ακόλουθη εικόνα:



Εικόνα 10: Σχηματική αναπαράσταση ενός συνεργατικού παιγνίου.

Ορίζουμε την χαρακτηριστική συνάρτηση v για αυτό το παίγνιο ως ακολούθως:

v({1,2})=9 ευρώ – 4 ευρώ = 5 ευρώ.

v({1,3})=11 ευρώ – 4 ευρώ = 7 ευρώ

v({2,3})=0 ευρώ

v({1})=v({2})=v({3})=0 ευρώ

v({1,2,3})=7 ευρώ.

Αυτός ο ορισμός της συνάρτησης v είναι εντελώς διαισθητικός . Αν οι παίκτες 1 και 2 έρθουν σε επαφή και αλληλοεπιδράσουν το ολικό τους όφελος είναι η διαφορά μεταξύ της επιθυμίας του αγοραστή μείον το κόστος του πωλητή δηλαδή 5 ευρώ.

Αντίστοιχα αν οι παίκτες 1 και 3 αποφασίσουν να αλληλοεπιδράσουν τότε το συνολικό τους όφελος είναι ξανά η διαφορά της επιθυμίας του αγοραστή μείον το κόστος του πωλητή αυτήν τη φορά είναι ίσο με 7 ευρώ.

Οι παίκτες 2 και 3 δεν μπορούν να δημιουργήσουν αξία με το να έρθουν σε επαφή. Ο κάθε ένας επιθυμεί τη συνεργία με τον πωλητή και όχι με άλλο αγοραστή.

Επιπρόσθετα κανένας παίκτης δεν δημιουργεί αξία από μόνος του αφού καμία αλληλεπίδραση οικονομικής φύσεως δεν μπορεί να λάβει χώρα.

Τέλος, σημειώνεται ότι v({1,2,3}) είναι ένα σύνολο ίσο με 7 ευρώ και όχι με 5 +7 = 12 ευρώ. Αυτό συμβαίνει επειδή ο παίκτης 1 έχει μόνο μία μονάδα να πουλήσει παρόλο που υπάρχουν δύο αγοραστές στο σύνολο {1,2,3} και ο παίκτης 1 μπορεί να αλληλοεπιδράσει μόνο με τον έναν από αυτούς. Είναι μια επιλογή μοντελοποίησης ίσως όχι τόσο κοντά στον πραγματικό κόσμο. Για τον λόγο αυτό το κόστος ορίζεται να είναι ίσο με 7 ευρώ και όχι ίσο με 5.

3.2 Ο πυρήνας, το κάλυμμα πυρήνα και το σύνολο Weber.

Αν σε ένα παίγνιο v όλοι οι παίκτες αποφασίσουν να συνεργαστούν τότε ανακύπτει η ερώτηση πως η ποσότητα v(N) μπορεί να μοιραστεί σε αυτούς. Μία διανομή του v(N) μπορεί να αναπαρασταθεί με ένα διάνυσμα ανταμοιβών $x \in R^n$ όπου το x_i απεικονίζει το ποσό που ανατίθεται στον παίκτη $i \in N$. Ένα $x \in R^n$ με $x(N) = v(N)$ καλείται επαρκές.

Ορισμός 3.2.1: *Μία συνάρτηση f που αναθέτει κάθε συνεργατικό παίγνιο v σε ένα πιθανά κενό υποσύνολο f(v) του* R^n *καλείται σκεπτικό λύσης.*

Ορισμός 3.2.2: *Ένα σκεπτικό λύσης f καλείται σταθερό κάτω από στρατηγική ισοδυναμία αν για κάθε παίγνιο v κάθε k>0 και κάθε προσθετικό παίγνιο a ισχύει η σχέση:*

$$f(kv + a) = kf(v) + a$$

Ένα σκεπτικό λύσης είναι ένα ενός σημείου σκεπτικό λύσης αν $|f(v)| = 1$ για κάθε συνεργατικό παίγνιο v. Αν f είναι ένα σκεπτικό λύσης ενός σημείου, τότε $f(v)$ είναι ένα στοιχείο του R^n αντί για ένα υποσύνολο του R^n

Ορισμός 3.2.3*: Έστω v ένα συνεργατικό παίγνιο. Τότε το σύνολο των μεταθέσεων PI(v) του παιγνίου v είναι ένα υποσύνολο του R^n που περιέχει όλα τα επαρκή διανύσματα του παιγνίου v.*

Ορισμός 3.2.4*: Το σύνολο εισόδων I(v) ενός παιγνίου v ορίζεται ως το σύνολο των διανυσμάτων του n-διάστατου χώρου όπου $x(N) = v(N)$ και $x_i \geq v(i)$ για κάθε $i \in N$.*

Το σύνολο εισόδων ενός παιγνίου αναπαριστά μια διανομή του v(N) με τέτοιο τρόπο ώστε κανένας παίκτης να μην μπορεί να κάνει καλύτερα αν εργάζεται μόνος του. Ωστόσο μπορεί ακόμη να είναι δυνατόν για ένα σύνολο παικτών να βελτιώσουν μία κατάσταση αφήνοντας την μεγάλη συνέργεια και να εργάζονται μόνοι τους. Αυτή ωστόσο δεν είναι η περίπτωση αν το x ανήκει στον πυρήνα του v.

3.2.1 Ο πυρήνας ενός συνεργατικού παιγνίου

Ορισμός 3.2.5*: Έστω v ένα συνεργατικό παίγνιο. Ο πυρήνας $C(v)$ του v ορίζεται ως το σύνολο των n-διάστατων διανυσμάτων του R^n με την ιδιότητα ότι $x(N) = v(N)$ και επιπλέον ότι $x(S) \geq v(S)$ για κάθε $S \in 2^N$*

Ο πυρήνας του παιγνίου v αποτελείται από εκείνα τα διανύσματα του R^N που απεικονίζουν τις διανομές που δεν μπορούν να βελτιωθούν από άλλες συνέργειες. Ο πυρήνας ενός παιγνίου v είναι ένα κυρτό συμπαγές υποσύνολο του R^N και μπορεί να είναι κενό. Το ακόλουθο γνωστό θεώρημα που διατυπώνεται εδώ χωρίς την απόδειξη του δίνει έναν χαρακτηρισμό στα παίγνια που έχουν μη κενό πυρήνα.

Θέωρημα 3.2.6 (Bondareva 1961, Shapley 1967)*: Ένα συνεργατικό παίγνιο v έχει μη κενό πυρήνα αν και μόνο αν είναι ισορροπημένο.*

Από το θεώρημα 3.2.6 και τον ορισμό 3.1.12 έπεται ότι αν ένα παίγνιο είναι ολικά ισορροπημένο αν και μόνο αν κάθε υπο-παίγνιο αυτού έχει μη κενό πυρήνα.

Στην πραγματικότητα μπορεί να αποδειχθεί ότι ένα παίγνιο v έχει μη κενό πυρήνα αν και μόνο αν το θεώρημα ισχύει για όλες τις ελαχιστοτικά ισορροπημένες συνέργειες B. Για τα υπερπροσθετικά παίγνια με τρεις παίκτες αυτό οδηγεί στην ακόλουθη πρόταση:

Ορισμός 3.2.7*: Έστω v ένα υπερπροσθετικό παίγνιο με σύνολο παικτών {1,2,3}. Τότε $C(v) \neq \emptyset$ αν και μόνο αν v(1,2)+v(1,3)+v(2,3)≤2v(1,2,3).*

Απόδειξη: Εκτός από τις διαμερίσεις του {1,2,3} υπάρχει μόνο μία ισορροπημένη συλλογή και συγκεκριμένα η B={{1,2},{1,3},{2,3}} με βάρη ½ για όλα τα στοιχεία του B. Επειδή η υπερπροσθετικότητα του v(1) ισχύει για όλες τις διαμερίσεις του {1,2,3}. Έτσι $C(v) \neq \emptyset$ *αν και μόνο αν v(1,2)+v(1,3)+v(2,3)≤2v(1,2,3).*

***Ορισμός 3.2.8**: Έστω v ένα συνεργατικό παίγνιο. Τότε το άνω διάνυσμα* M^v *του v ορίζεται ως:*

$$M_i^v := v(N) - v(N \backslash \{i\})$$

για κάθε $i \in N$. *Ενώ το κάτω διάνυσμα* μ^v *του v ορίζεται ως:*

$$\mu_i^v := \max(v(S) - \sum_{j \in S \backslash \{i\}} M_i^v$$

$\mathrm{M_i^v}$ είναι η συνεισφορά του παίκτη ι στην μεγάλη συνέργεια. Αν ο παίκτης I απαιτήσει περισσότερα από M_i^v τότε είναι καλύτερο για τους άλλους παίκτες να εργαστούν χωρίς αυτόν.

Έτσι το M_i^v μπορεί να ειδωθεί σαν η μέγιστη ανταμοιβή που ο παίκτης i μπορεί να περιμένει αν σχηματιστεί η συνέργεια N. Το ακόλουθο επιχείρημα επιδεικνύει ότι μ_i^v μπορεί να ειδωθεί σαν η ελάχιστη ανταμοιβή του παίκτη. Ο παίκτης i ισχυρίζεται ότι μπορεί να λάβει την ανταμοιβή κάνοντας μια συνέργεια όπου το μέγιστο του ορισμού 3.2.7 μπορεί να επιτευχθεί και να δοθούν στους υπόλοιπους παίκτες της συνεργίας η μέγιστη ανταμοιβή. Έτσι οι δύο αυτές ποσότητες ορίζουν την ελάχιστη και την μέγιστη ανταμοιβή που μπορεί να έχει ο παίκτης i λαμβάνοντας μέρος στην συνεργία.

3.2.2 Το κάλυμμα ενός συνεργατικού παιγνίου

***Ορισμός 3.2.9**: Το κύριο κάλυμμα CC(v) ενός συνεργατικού παιγνίου v ορίζεται ως:*

$$CC(v) := \{x \in I(v) \mid \mu_i^v \leq x \leq M_i^v)$$

***Θεώρημα 3.2.10**: Έστω v ένα συνεργατικό παίγνιο. Τότε C(v)⊂CC(v):*

$$CC(v) := \{x \in I(v) \mid \mu_i^v \leq x \leq M_i^v)$$

Το παραπάνω θεώρημα αποδίδεται στους Tijs και Lipperts [TijsLipp1982] οι οποίοι έδωσαν και κάποιες κλάσεις παιγνίων στις οποίες ισχύει ότι CC(v)=C(v). Θα συναντήσουμε και στην παρούσα διπλωματική παίγνια στα οποία θα ισχύει αυτή εδώ η σχέση, τα λεγόμενα παίγνια χρεωκοπίας.

Ορισμός 3.2.11: *Έστω v ένα συνεργατικό παίγνιο και έστω π ένας μετασχηματισμός του v. Τότε το οριακό διάνυσμα* $\mu^*(v)$ *του v ορίζεται ως:*

$$m_i^* = v(P(\pi,i) \cup \{i\}) - v(P(\pi,i))$$

Όπου $P(\pi,i) \coloneqq \{j \in N \,|\pi(j) < \pi(i)\}$ είναι το σύνολο όλων των προηγούμενων του I με σεβασμό στην διάταξη του π.

3.2.3 Το σύνολο Weber ενός συνεργατικού παιγνίου

Ορισμός 3.2.12: *Το σύνολο Weber W(v) ενός συνεργατικού παιγνίου v είναι το κυρτό περίβλημα (convex hull) των n! Οριακών διανυσμάτων.*

Τα ακόλουθα θεωρήματα οφείλονται στους πρωτοπόρους της συνεργατικής θεωρίας παιγνίων Weber και Shapley και παρατίθενται χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 3.2.13 (Weber 1978): *Έστω v ένα συνεργατικό παίγνιο. Τότε ισχύει:* $C(v) \subset W(v)$

Θεώρημα 3.2.14 (Shapley 1971): *Έστω v ένα κυρτό παίγνιο. Τότε ισχύει:* $C(v) = W(v)$

Θεώρημα 3.2.15 (Ichiishi 1981): *Έστω v ένα συνεργατικό παίγνιο για το οποίο ισχύει* $C(v) = W(v)$. *Τότε το v είναι κυρτό.*

Επειδή το σύνολο Weber ενός παιγνίου δεν είναι ποτέ κενό έπεται ότι τα κυρτά παίγνια είναι ισορροπημένα. Επειδή κανένα υπο-παίγνιο ενός κυρτού παιγνίου δεν είναι κυρτό προκαλεί ότι τα κυρτά παίγνια είναι ισορροπημένα.

3.3 Η τιμή Shapley

Ο Shapley το 1953 χρησιμοποίησε μία αξιωματική προσέγγιση για να εισάγει ένα σκεπτικό λύσης ενός σημείου. Στα ακόλουθα ένα σκεπτικό λύσης ενός σημείου θα καλείται επίσης μια συνάρτηση λύσης. Ο Shapley έδωσε ένα σύνολο ιδιοτήτων οι οποίες πρέπει να ικανοποιούνται και απέδειξε ότι υπάρχει ένα μοναδικό σκεπτικό επίλυσης που ικανοποιεί αυτές τις ιδιότητες.

Ορισμός 3.3.1*: Ένας παίκτης σε ένα συνεργατικό παίγνιο v καλείται ανόητος αν*

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) = v(i)$$

για κάθε $S \subset N \backslash \{i\}$.

Ορισμός 3.3.2*: Μία συνάρτηση λύσης f θα λέμε ότι ικανοποιεί την ιδιότητα του ανόητου παίκτη αν* $f_i(v) = v(i)$ *όταν i είναι ένας ανόητος παίκτης του παιγνίου v.*

Ορισμός 2.3.3*: Μία συνάρτηση λύσης f θα λέμε ότι είναι επαρκής αν η f(v) είναι επαρκής για κάθε παίγνιο v.*

Ορισμός 3.3.4*: Μία συνάρτηση λύσης f ικανοποιεί την ιδιότητα της συμμετρίας αν* $f_{\pi(i)}(\pi v) = f_i(v)$ *για κάθε παίγνιο v κάθε παίκτη i και κάθε μετάθεση* $\pi \in \Pi_N$. *Έτσι το παίγνιο πv ορίζεται ως*

$$\pi v\big(\pi(S)\big) \coloneqq v(S)$$

για κάθε $S \in 2^N$.

Ορισμός 3.3.5*: Μία συνάρτηση λύσης f καλείται προσθετική αν* $f(u+v) = f(u) + f(v)$ *για όλα τα συνεργατικά παίγνια u,v*

Το ακόλουθο θεώρημα παρατίθεται χωρίς απόδειξη:

Θεώρημα 3.3.6(Shapley 1953)*: Υπάρχει ένα μοναδικό σκεπτικό επίλυσης φ το οποίο ικανοποιεί την ιδιότητα του ανόητου παίκτη, την ιδιότητα της επάρκειας, την ιδιότητα της συμμετρίας και την ιδιότητα της προσθετικότητας. Ακόμη περισσότερο η φ δίδεται από τη σχέση:*

$$\varphi_i(v) = \sum_{S \subset N \backslash \{i\}} \frac{|S|!\,(n-|S|)!}{n!} \big(v(S \cup \{i\}) - v(S)\big)$$

Η συνάρτηση επίλυσης φ από το θεώρημα 3.3.6 καλείται τιμή Shapley. Ένας άλλος τρόπος για να περιγραφεί η τιμή Shapley είναι με την βοήθεια των οριακών διανυσμάτων. Η τιμή Shapley του παιγνίου v είναι ο μέσος όρος των οριακών διανυσμάτων του παιγνίου. Π.χ.

$$\varphi(v) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi_N} m^*(v)$$

Από την παραπάνω σχέση και το θεώρημα 3.2.13 έπεται ότι η τιμή Shapley σε ένα κυρτό παίγνιο βρίσκεται στο βαρύκεντρο του πυρήνα του παιγνίου. Αν v είναι ένα υπερπροσθετικό παίγνιο τότε η συνάρτηση φ(v) είναι ορθολογιστική. Για ένα γενικό παίγνιο v δεν είναι πάντα αυτή η περίπτωση. Η τιμή Shapley ενός μη κυρτού παιγνίου δεν είναι ανάγκη να είναι στον πυρήνα του παιγνίου.

Ο Young [Young1985a] έδωσε έναν διαφορετικό χαρακτηρισμό της τιμής Shapley αντικαθιστώντας την ιδιότητα του ανόητου παίκτη και την ιδιότητα της προσθετικότητας από μία ισχυρή μονοτονική ιδιότητα. Ο Driessen [Dries1985a] χαρακτήρισε την τιμή Shapley αντικαθιστώντας την ιδιότητα της συμμετρίας και την ιδιότητα του ανόητου παίκτη με μία ασθενή ιδιότητα ανόητου παίκτη και μία περιορισμένη ιδιότητα ισότητας. Οι Hart και Mas Colell [Hart1985] έδωσε μία μετάφραση της τιμής Shapley με ερμηνεία στην δυναμική συνάρτηση (potential function) του παιγνίου. Ο χαρακτηρισμός της τιμής Shapley με τη βοήθεια της ιδιότητας της συνέπειας επίσης ήταν μια προσέγγιση που ακολουθήθηκε στην ίδια μονογραφία. Εδώ η ιδιότητα της συνέπειας και το περιορισμένο παίγνιο καλούταν η HM ιδιότητα της συνέπειας έτσι ώστε να γίνει διαχωρισμός σε αυτό από την απλή ιδιότητα της συνέπειας και το περιορισμένο παίγνιο που θα μελετήσουμε στην επόμενη ενότητα.

Ορισμός 3.3.7: *Έστω v ένα παίγνιο και f μία συνάρτηση επίλυσης. Για οποιοδήποτε $S \subset N$ το HM-ανηγμένο παίγνιο $< N\backslash S, v_j >$ του v με σεβασμό στο S και στο f ορίζεται ως:*

$$v_j(T) = v(T \cup S) - \sum_{i \in S} f_i(T \cup S, v)$$

Για κάθε $T \subset N \backslash S$, όπου το $f_i(T \cup S, v)$ είναι η ανταμοιβή του παίκτη i σύμφωνα με την συνάρτηση επίλυσης f στο παίγνιο $< T \cup S, v >$.

Ορισμός 3.3.8: *Ένα σκεπτικό επίλυσης f είναι HM-συνεπές αν για κάθε παίγνιο v και κάθε ισορροπημένη συσχέτιση $S \subset N$ έπεται ότι:*

$$f_j\left(N\backslash S, v_f\right) = f_j(v)$$

Για κάθε $j \in N \backslash S$ όπου $f_j(N \backslash S, v_f)$ είναι η ανταμοιβή του παίκτη j σύμφωνα με την συνάρτηση επίλυσης f στο παίγνιο $< N \backslash S, v_f >$.

Η ερμηνεία της HM-συνέπειας έχει ως ακολούθως. Ας θεωρήσουμε ένα παίγνιο v και μία συνέργεια $S \subset N$. Τα μέλη της συνέργειας $T \subset N \backslash S$ θεωρεί το υπόλοιπο αφότου τα μέλη του S έχουν λάβει μια ανταμοιβή σύμφωνα με τη συνάρτηση επίλυσης f. Με αυτήν την θεώρηση η αξία του T στη νέα κατάσταση θεωρείται ίση με την αρχική αξία του $S \cup T$ αφαιρώντας τις ανταμοιβές των μελών του S στο υπο-παίγνιο $< S \cup T, v >$ σύμφωνα με την συνάρτηση f. Για να είναι η συνάρτηση f HM-συνεπής, πρέπει η f να σχετίζει κάθε μέλος του T στο HM-ανηγμένο παίγνιο με την ίδια ανταμοιβή όπως το πρωτότυπο παίγνιο v. Το ακόλουθο θεώρημα είναι αποτέλεσμα των Hart και Mas Colell και παρατίθεται χωρίς απόδειξη από την ίδια μονογραφία:

Ορισμός 3.3.9: *Υπάρχει μία μοναδική HM-συνεπής συνάρτηση επίλυσης f με $f_i(v) = v(i) + \frac{1}{2}\big(v(i,j) - v(i) - v(j)\big)$ και $f_j(v) = v(j) + \frac{1}{2}\big(v(i,j) - v(i) - v(j)\big)$ για όλα τα συνεργατικά παίγνια v με δύο παίκτες i και j. Επίσης ισχύει ότι η f είναι ίση με την τιμή Shapley f.*

3.4 Ο Πυρήνας και το Επίκεντρο ενός Παιγνίου

Ο πυρήνας ενός συνεργατικού παιγνίου έχει εισαχθεί από τους Davis και Maschler [DavMas1965]. Δύο σκεπτικά είναι σημαντικά στον ορισμό του πυρήνα: Το σκεπτικό της υπέρβασης και της υπερφόρτωσης.

Ορισμός 3.4.1: *Έστω v το συνεργατικό παίγνιο και έστω x στο R^n ένα διάνυσμα ανταμοιβών. Για κάθε $S \subset N$ η υπέρβαση $e(S,x)$ του S με σεβασμό στο x ορίζεται ως:*

$$e(S,x) \coloneqq v(S) - \sum_{i \in S} x_i$$

Ορισμός 3.4.2: *Έστω v ένα συνεργατικό παίγνιο και έστω i,j δύο διαφορετικοί παίκτες. Το μέγιστο περίσσευμα s_{ij} του παίκτη i εναντίο του παίκτη j με σεβασμό στο διάνυσμα ανταμοιβής x ορίζεται ως:*

$$s_{ij}(x) \coloneqq \max_{S \in M_{i,j}} e(S,x) - \sum_{i \in S} x_i$$

Όπου το $M_{i,j} \coloneqq \{S \in 2^N \mid i \in S, j \notin S\}$

Το μέγιστο περίσσευμα του παίκτη i εναντίον του παίκτη j με σεβασμό στο x μπορεί να θεωρηθεί ως η μέγιστη ανταμοιβή που ο παίκτης i μπορεί να κερδίσει (ή το ελάχιστο ποσό που μπορεί να χάσει ισοδύναμα) χωρίς τη συνεργασία του παίκτη j. Ο παίκτης i μπορεί να κάνει αυτήν την ενέργεια συγκροτώντας μία συνεργία χωρίς τον j αλλά με άλλους παίκτες που ικανοποιούνται από την ανταμοιβή τους σύμφωνα με το x. Έτσι το $s_{i,j}$ μπορεί να θεωρηθεί ως το βάρος μιας πιθανής απειλής του παίκτη i εναντίον του παίκτη j. Αν το x είναι μία είσοδος, τότε ο παίκτης j μπορεί να αντιμετωπιστεί από τον παίκτη i ή οποιοδήποτε άλλο παίκτη, διότι ο παίκτης j μπορεί να κερδίσει το v(j) αρκεί να εργαστεί μόνος του. Έπεται ότι ο παίκτης i υπερβαίνει τον παίκτη j αν ισχύει ότι:

$$x_j > v(j)$$

και

$$s_{i,j}(x) > s_{j,i}(x)$$

Ο πυρήνας είναι το σύνολο των εισόδων με την ιδιότητα ότι κανένας παίκτης δεν υπερβαίνει σε βάρος άλλο παίκτη με σεβασμό σε αυτήν την είσοδο.

3.4.1 Ο Πυρήνας ενός Παιγνίου

Ορισμός 3.4.3*: Ο πυρήνας K(v) ενός συνεργατικού παιγνίου v ορίζεται ως:*

$$K(v) \coloneqq \{x \in I(v) \mid s_{i,j}(x) \leq s_{j,i}(x) \text{ ή } x_j = v(j) \text{ για κάθε } i,j \in N, i \neq j\}$$

Οι Maschler, Peleg και Shapley [MeleShap1972] όρισαν τον πυρήνα του συνεργατικού παιγνίου.

Ορισμός 3.4.4*: Ο πρότερος πυρήνας PK(v) ενός συνεργατικού παιγνίου v ορίζεται ως:*

$$PK(v) \coloneqq \{x \in PI(v) \mid s_{i,j}(x) = s_{j,i} \text{ για κάθε } i,j \in N, i \neq j\}$$

Οι Davis και Maschler [DaviMasc1965] αποδεικνύουν ότι ο πυρήνας ενός συνεργατικού παιγνίου είναι πάντα μη κενός. Οι Maschler, Peleg και Shapley [MascPele1972] απέδειξαν ότι η συνάρτηση πρότερου πυρήνα κάθε συνεργατικού παιγνίου είναι μη κενό και ότι τα 0-μονοτονικά παίγνια έχουν την ιδιότητα ότι ο πυρήνας και ο πρότερος πυρήνας ταυτίζονται. Από τον ορισμό έπεται ότι τα κυρτά παίγνια είναι 0-μονοτονικά και έτσι ο πυρήνας και ο πρότερος πυρήνας ταυτίζονται για τα κυρτά παίγνια.

Ο ορισμός του επίκεντρου του πυρήνα που εισήχθηκε από τον Schmeidler εισάγονται οι ακόλουθοι συμβολισμοί. Έστω $v \in G^N$.

Για κάθε $x \in R^N$ έστω $\theta(x)$ ότι είναι ένα διάνυσμα του R^n του οποίου οι συντεταγμένες υπερβαίνουν το δυναμοσύνολο του N ταξινομημένο σε φθίνουσα σειρά πληθάριθμου στοιχείων. Έτσι ορίζεται ότι:

$$\theta_i(x) \geq \theta_j(x)$$

όταν $1 \leq i \leq j < 2^n$

Θεωρούμε την λεξικογραφική διάταξη των διανυσμάτων $\theta(x)$. Η λεξικογραφική διάταξη ορίζεται ως ακολούθως: Δοσμένων δύο διανυσμάτων: $y = (y_1, \dots, y_q)$ και $z = (z_1, z_2, \dots, z_q)$ λέμε ότι το y είναι λεξικογραφικά μικρότερο από το z αν υπάρχει ένας ακέραιος k με την ιδιότητα $1 \leq k \leq q$ έτσι ώστε:

$$y_l = z_l$$

Για $1 \leq l \leq q$ και επίσης ισχύει $y_k < z_k$

Η σχέση θα συμβολίζεται με $y <_L z$ όσο $y \leq_L z$ χρησιμοποιείται για να συμβολίσει είτε $y <_L z$ είτε $y =_L z$

3.4.2 Το Επίκεντρο του Πυρήνα ενός Παιγνίου

Ορισμός 3.4.5: *Ο πρότερος πυρήνας v(u) ενός συνεργατικού παιγνίου v ορίζεται ως:*

$$v(u) \coloneqq \{x \in I(v) \mid \theta(x) \leq \theta(y) \;\; \text{για κάθε } y \in I(v)\,\}$$

Έτσι το εσωτερικό του πυρήνα αποτελείται από εκείνες τις εισόδους που ελαχιστοποιούν την μεγαλύτερη υπερχείλιση. Ο Schmeidler το 1969 απέδειξε ότι το εσωτερικό του πυρήνα οποιουδήποτε παιγνίου αποτελείται ακριβώς από ένα σημείο το οποίο πάντα είναι ένα στοιχείο του πυρήνα του παιγνίου και το οποίο βρίσκεται στον πυρήνα του παιγνίου όταν ο πυρήνας δεν είναι κενός. Οι Maschleg, Peleg και Shapley το 1972 απέδειξαν ότι ένα κυρτό παίγνιο αποτελείται από ένα μοναδικό σημείο και το σημείο είναι το εσωτερικό του πυρήνα. Έτσι για ένα κυρτό παίγνιο ισχύει ο ακόλουθος ορισμός: $PK(v) = K(v) = v(v)$

Ορισμός 3.4.6: *Το εσωτερικό του πυρήνα pv(u) ενός παιγνίου v ορίζεται ως:*

$$pv(u) \coloneqq \{x \in PI(v) \mid \theta(x) \leq \theta(y) \;\; \text{για κάθε } y \in PI(v)\,\}$$

Το εσωτερικό του πυρήνα κάθε παιγνίου αποτελείται από ένα και μοναδικό σημείο. Για τον χαρακτηρισμό του εσωτερικού του πυρήνα όπως αυτό δίνεται από τον Sobolev [Sobo1975] απαιτείται η ιδιότητα του ανηγμένου παιγνίου η όποια προδιαγράφεται ακολούθως:

Ορισμός 3.4.7: *Έστω v ένα συνεργατικό παίγνιο και έστω ότι το S είναι γνήσιο υποσύνολο του N. Έστω ότι $x \in R^n$. Το ανηγμένο παίγνιο $< S, v_x^S >$ του v με σεβασμό στο S και στο x ορίζεται ως:*

$$v_x^S(T) := \begin{cases} 0, & \alpha\nu\ T = \emptyset \\ v(N) - x(S), & \alpha\nu\ T = S \\ \max\{v(T \cup Q) - x(Q) | \, Q \subset N \backslash S\} & \alpha\nu\ T \subset S, T \neq \emptyset, S \end{cases}$$

Τα ανηγμένα παίγνια ορίστηκαν και διερευνήθηκαν πρώτα από τους Davis και Maschler [DavMas1965]

Ορισμός 3.4.8: *Ένα σκεπτικό επίλυσης f έχει την ιδιότητα του ανηγμένου παιγνίου αν ικανοποιεί την ακόλουθη συνθήκη:*

$$v \in G^N, \emptyset \neq S \subset N\ \kappa\alpha\iota\ x \in f(v)\ \pi\rho o\kappa\alpha\lambda\varepsilon\acute{\iota}\ \acute{o}\tau\iota\ x_S \in f(S, v_x^S)$$

Μία συστηματική διερεύνηση της ιδιότητας του ανηγμένου παιγνίου πρώτα προτάθηκε από τους Aumann και Dreze [AumaDre1974]. Απέδειξαν ότι ο πυρήνας έχει την ιδιότητα του ανηγμένου παιγνίου.

Θεώρημα 3.4.9: *Το εσωτερικό του πυρήνα είναι το μοναδικό σκεπτικό επίλυσης που ικανοποιεί την ιδιότητα της συμμετρίας, της διασποράς κάτω από την ιδιότητα της στρατηγικής ισοδυναμίας.*

Ο Peleg το 1985 [Pele1985] σημείωσε ότι η τιμή Shapley, ο πυρήνας και το εσωτερικό του πυρήνα δεν ικανοποιούν την ιδιότητα του ανηγμένου παιγνίου. Το εσωτερικό του πυρήνα δεν ικανοποιεί την ιδιότητα του ανηγμένου παιγνίου και ο Peleg έδωσε έναν χαρακτηρισμό του εσωτερικού του πυρήνα καθώς και ακόμη πέντε άλλα αξιώματα. Ένα από αυτά είναι η ιδιότητα του ποικίλου ανηγμένου παιγνίου.

Θεώρημα 3.4.10: *Ένα σκεπτικό επίλυσης f ικανοποιεί την ιδιότητα του ποικίλου ανηγμένου παιγνίου αν ισχύει το ακόλουθο: Αν $v \in G^N$ και $x \in I(v)$ και για κάθε $S \in 2^N$ με $|S| = 2$ η απαίτηση το x να ανήκει στο $f(S, v^S)$ τότε το x ανήκει στο $f(v)$.*

Ο Peleg το 1985 [Peleg1985] έδωσε επίσης ένα χαρακτηρισμό του πυρήνα χρησιμοποιώντας την ιδιότητα του ανηγμένου παιγνίου και του ποικίλου ανηγμένου παιγνίου.

3.5 Η τιμή r ενός παιγνίου.

Η τιμή r είναι ένα σκεπτικό επίλυσης το οποίο εισήχθηκε από τον Tijs (βλέπε [Tijs1981]). Αρχικά ορίστηκε μόνο στην υποκλάση των ημι-ισορροπημένων παιγνίων όταν υπάρχει συνάρτηση επίλυσης.

Ορισμός 3.5.1: *Ένα παίγνιο $v \in G^N$ καλείται ημι-ισορροπημένο αν ισχύουν οι εξής δύο ακόλουθες ιδιότητες:*

1. $\mu^v \leq M^v$
2. $\mu^v(N) \leq v(N) \leq M^v(N)$

Σημειώνεται ότι κάθε παίγνιο με μη κενό κάλυμμα πυρήνα είναι ημι-ισορροπημένο. Με το θεώρημα 3.2.10 έπεται ότι κάθε ισορροπημένο παίγνιο είναι ημι-ισορροπημένο. Έστω ότι το Q^N συμβολίζει το σύνολο των ημι-ισορροπημένων παιγνίων στο G^N. Έπεται άμεσα ότι το Q^N είναι μία κωνική τομή. Για ένα παίγνιο $v \in Q^N$ η τιμή r είναι η μοναδική επαρκής ανταμοιβή στο κλειστό διάστημα $[\mu^v, M^v]$.

Ορισμός 3.5.2: *Ένα παίγνιο $v \in Q^N$. Η τιμή r του v ορίζεται ως:*

$$r(v) := \lambda\mu^v + (1-\lambda)M^v$$

Η τιμή r ενός παιγνίου Q δεν χρειάζεται να είναι στοιχείο του C(v) ακόμη και αν το C(v) δεν είναι κενό. Οι Driessen και Tijs [DriesTis1985] έδωσαν ικανές και αναγκαίες συνθήκες για το $r(v)$ να είναι ένα στοιχείο του C(v).

3.6 Συνεργατικά Παίγνια κόστους.

Στις προηγούμενες ενότητες οι ορισμοί και τα σκεπτικά που δόθηκαν ήταν με την έννοια της ανταμοιβής των παικτών βάση των επιλογών τους. Ο σκοπός αυτής της ενότητας είναι να αναδείξει ότι μπορούμε να μετατρέψουμε αυτούς τους ορισμούς έτσι ώστε να είναι κατάλληλες και για καταστάσεις που αναφερόμαστε σε κόστος αντί για κέρδος.

Η χαρακτηριστική συνάρτηση ενός παιγνίου κόστους θα συμβολίζεται γενικά με c αντί για v. Για μία συνέργεια S το ποσό c(S) είναι το κόστος του S. Ένα παίγνιο κόστους μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να περιγράψει μια κατάσταση όπου το σύνολο των ανθρώπων μπορεί να μειώσει το κόστος τους αν αυτοί συνεργαστούν.

Όλοι οι ορισμοί της ενότητας 3.2 παραμένουν ίδιοι. Αν σε ένα παίγνιο κόστους οι παίκτες αποφασίσουν να συνεργαστούν τότε το κόστος c(N) πρέπει να μοιραστεί σε αυτούς. Όπως στα παίγνια ανταμοιβής έτσι και εδώ μπορούμε να το εκφράσουμε με ένα διάνυσμα $x \in R^n$ όπου τώρα το x θα εκφράζει το κόστος που αποδίδεται σε κάθε παίκτη αντίστοιχα.

Όπως σε ένα παίγνιο ανταμοιβής κάθε παίκτης θεωρείται ότι προσπαθεί να μεγιστοποιήσει την ωφέλειά του, έτσι και στα παίγνια κόστους κάθε παίκτης επιθυμεί να ελαχιστοποιήσει το κόστος το οποίο του επιμερίζεται. Για ένα παίγνιο κόστους c το διάνυσμα M^c ορίζεται με τον ίδιο τρόπο όπως στον ορισμό 3.2.8. Αντίστοιχα τροποποιούνται και οι υπόλοιποι ορισμοί, δηλαδή οι ορισμοί των ενοτήτων 3.3, 3.4 και 3.5 ενώ ειδικά για την τιμή r ενός ημι-ισορροπημένου παιγνίου αυτά μπορούν να δοθούν από τις ίδιες σχέσεις επειδή η έννοια της ελαχιστοποίησης ταυτίζεται με την έννοια της μεγιστοποίησης στον μαθηματικό φορμαλισμό του αντίστοιχου ορισμού.

Κεφάλαιο 4: Απλά Συνεργατικά Παίγνια

4.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τα λεγόμενα απλά συνεργατικά παίγνια. Ένα συνεργατικό παίγνιο καλείται απλό, αν κάθε συνέργεια έχει αξία 0 ή 1. Μία συνέργεια S λοιπόν είτε θα είναι ισχυρή (που σημαίνει ότι v(S)=1) είτε εντελώς ανίσχυρη (που σημαίνει ότι v(S)=0). Τα απλά συνεργατικά παίγνια έχουν ήδη μελετηθεί στο [VonNeu44] και έπειτα έχουν χρησιμοποιηθεί για την μοντελοποίηση καταστάσεων όπως ο έλεγχος επιτροπής (committee control) και ψηφοφοριών (voting). Πιο ειδικά είναι τα μονότονα απλά συνεργατικά παίγνια, π.χ. τα παίγνια που η αξία κάθε συνεργίας δεν είναι μικρότερη από την αξία των συνεργιών που περιέχει.

Ένα περίγραμμα θεωρίας για μονότονα απλά παίγνια δίδεται στο [Shap62]. Επίσης στο [Luca83] περιγράφεται η χρήση ενός ειδικού τύπου αυτών των παιγνίων τα οποία ονομάζονται βεβαρημένα παίγνια πλειοψηφίας (weighted majority games) και χρησιμοποιούνται για να μοντελοποιήσουν καταστάσεις ψηφοφοριών όπου κάθε ψήφος έχει δυνητικά διαφορετικό βάρος. Ένας παίκτης σε ένα απλό παίγνιο εξακολουθεί να θέλει να γνωρίζει την δύναμή του στο παίγνιο. Έτσι έχουν προταθεί διάφοροι δείκτες για να καταμετρηθεί η δύναμη των παικτών σε μονότονα απλά παίγνια. Στο [Benz53] και [Cole71] εισήχθησαν ανεξάρτητοι δείκτες καταμέτρησης της δύναμης που ωστόσο ουσιωδώς είναι ίδιοι.

Στο [Shap54] έγινε περιορισμός της τιμής Shapley ώστε να οριστεί ο δυναμικός δείκτης Shapley-Shubik. Στο [Deeg78] εισήχθη νέος δυναμικός δείκτης που εξαρτάται από την ελάχιστη συνέργεια νίκης σε ένα μονότονο απλό παίγνιο. Στο [Packe80] προτείνεται μία γενίκευση του δείκτη και στο [Bolge80] μελετάται η κλάση δυναμικών δεικτών που περιλαμβάνουν τον δείκτη Deegan-Packel. Στο κεφάλαιο αυτό που βασίζεται στο [Curie87a] προτείνεται μία κλάση από μη κανονικοποιημένους δυναμικούς δείκτες. Οι δυναμικοί δείκτες αυτής της κλάσης μπορεί να μην είναι επαρκείς π.χ. το άθροισμα όλων των δυνάμεων των παικτών μπορεί να μην αθροίζει στο 1. Έτσι περιγράφουν ένα σύνολο συναρτήσεων, οι οποίες με την σειρά τους, περιγράφουν την δυναμική του ρόλου των παικτών σε ένα απλό παίγνιο και όχι ενός χωρισμού των ωφελειών. Έτσι η επάρκεια δεν είναι απαραίτητη συνθήκη για τους κανόνες αυτούς.

Στις επόμενες υποενότητες θα ασχοληθούμε τυπικά με τον ορισμό των απλών παιγνίων, και έπειτα θα ασχοληθούμε με μία οικογένεια παιγνίων όπου οι συνέργειες δεν είναι όλες ισοπίθανο να συμβούν.

4.2 Απλά Παίγνια

Σο κεφάλαιο αυτό θα δώσουμε τυπικούς ορισμούς και συμβολισμούς που απαιτούνται κατά την διάρκεια του κεφαλαίου.

4.2.1 Ορισμοί

Ορισμός 4.2.1: *Ένα συνεργατικό παίγνιο καλείται απλό αν* $v(N) = 1$ *και* $v(S) \in \{0,1\}$ *για κάθε* $S \in 2^N$

Ορισμός 4.2.2: *Ένα απλό παίγνιο καλείται μονότονο αν* $v(S) \leq v(T)$ *για όλες τις συνέργιες* S *και* T *με* $S \subset T$.

Ορισμός 4.2.3: *Μία συνέργεια* S *σε ένα απλό παίγνιο καλείται ηττημένη αν* $v(S) = 0$ *και νικήτρια αν* $v(S) = 1$

Ορισμός 4.2.4: *Μία συνεργία* S *σε ένα μονότονο απλό παίγνιο καλείται μεγιστοτικά (maximal) ηττημένη αν* $v(S) = 0$ *και* $v(T) = 1$ *για κάθε* $S \subset T$ *και καλείται ελαχιστοτικά (minimal) νικήτρια αν* $v(S) = 1$ *και* $v(T) = 0$ *για κάθε* $T \subset S$

Το σύνολο όλων των συνεργιών που είναι νικήτριες σε ένα παίγνιο v συμβολίζεται με $W(v)$ ενώ η συλλογή όλων των ελαχιστοτικά νικητριών στρατηγικών σε ένα μονότονο απλό παίγνιο $W^m(v)$. Για κάθε $i \in N$ η συλλογή όλων των ελαχιστοτικά νικητριών συνεργιών που περιέχουν το i συμβολίζεται με $W_i^m(v)$.

4.2.2 Βασικοί Χαρακτηρισμοί Παικτών σε Συνεργατικά Παίγνια

Ορισμός 4.2.5: *Ένας παίκτης* $i \in N$ *ενός απλού παιγνίου v καλείται:*

- *Αφελής παίκτης (dummy player) αν* $v(S) + v(i) = v(S \cup \{i\})$ *για κάθε* $S \subset N \backslash \{i\}$
- *Κενός παίκτης (null player) αν* $v(S) = v(S \cup \{i\})$ *για κάθε* $S \subset N \backslash \{i\}$
- *Δικτάτορας (dictator) αν* $v(S) = 1$ *αν και μόνο αν* $i \in S$

- *Παίκτης Βέτο (veto player) αν $v(S) = 1$ τότε $i \in S$*

Ένας αφελής παίκτης μπορεί να είναι είτε ένας κενός παίκτης αν v(i)=0 ή ένας δικτάτορας αν v(i)=1.

Ένα γνωστό αποτέλεσμα στα απλά παίγνια είναι ότι ένα απλό παίγνιο είναι ισορροπημένο αν και μόνο αν έχει τουλάχιστον ένα παίκτη βέτο.

Θεώρημα 4.2.6: *Ένα απλό παίγνιο είναι ισορροπημένο αν και μόνο αν έχει 2 παίκτες:*

Απόδειξη: Έστω $i \in N$ ότι είναι ένα παίκτης βέτο του v. Ορίζουμε ότι $x \in R^n$ με $x_i = 1$ και $x_j = 0$ για κάθε $j \in N\backslash\{i\}$. Τότε $x(S) = 1 \geq v(S)$ για όλα τα S με $i \in S$ και x(S)=0=v(S) για κάθε $N \subset S$. Έτσι $x \in C(v)$ και το ευθύ της ισοδυναμίας προκύπτει άμεσα. Τότε για κάθε $i \in N$ υπάρχει ένα $S_i \subset N\backslash\{i\}$ με $v(S_i) = 1$. Έτσι αν το x είναι ένα στοιχείο του πυρήνα του v, τότε $x_i = 0$ για κάθε $i \in N$, αλλά αυτό έρχεται σε αντίφαση με το S για κάθε $i \in N$ αλλά αυτό έρχεται σε αντίφαση με το γεγονός ότι $x(N) = 1$ και έτσι ο πυρήνας του v είναι κενός.. Αυτό αποδεικνύει και το αντίστροφο της ισοδυναμίας. ■

Ο Spinetto το 1971 [Spin1971] απέδειξε ότι κάθε μη αρνητικό (0, 1)-κανονικοποιημένο ισορροπημένο παίγνιο μπορεί να γραφεί ως η κυρτή βελτιστοποίηση ισορροπημένων απλών παιγνίων. Το ακόλουθο επίσης αποτέλεσμα δίδεται από τον Derks το 1987 [Derks1987] και εδώ παρατίθεται χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 4.2.7 (Derks): *Κάθε μη αρνητικό ισορροπημένο παίγνιο μπορεί να γραφεί ως θετικός γραμμικός συνδυασμός απλών παιγνίων.*

Όπως ήδη αναφέρθηκε τα μονότονα απλά παίγνια μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να μοντελοποιήσουν καταστάσεις όπως ο έλεγχος που ασκεί μια επιτροπή (committee control) και ψηφοφοριών (voting). Ένας παίκτης σε μία τέτοια κατάσταση επιθυμεί να γνωρίζει πόση επιρροή έχει στο αποτέλεσμα του παιγνίου. Πρέπει να έχει ένα μέτρο της δύναμής του στο παίγνιο. Ένα τέτοιο μέτρο λέγεται δείκτης δύναμης (power index)

4.2.3 Δείκτες Επιρροής Παικτών σε Συνεργατικό Παίγνιο

Ορισμός 4.2.8: *Ένας δείκτης επιρροής μίας συνάρτησης f αναθέτει σε κάθε συνεργατικό παίγνιο v, ένα διάνυσμα $f(v) \in R^n$.*

Ο αριθμός $f_i(v)$ θεωρείται ότι είναι ένα μέτρο της επιρροής του παίκτη i στο παίγνιο v. Παραδείγματα τέτοιων δεικτών είναι ο Shapley-Shubik και ο δείκτης Banzhaf. Ο δείκτης Shapley-Shubik είναι στην πραγματικότητα ο περιορισμός της τιμής Shapley σε μονοτονικά απλά παίγνια. Ο δείκτης Banzhaf μετράει των αριθμό των αμφιταλαντεύσεων(swings) του παίκτη i. Μία αμφιταλάντευση του παίκτη i είναι ένα ζεύγος συνόλων της μορφής $(S \cup \{i\}, S\backslash\{i\})$ έτσι ώστε το $S \cup \{i\}$ να κερδίζει και $S\backslash\{i\}$ να χάνει.

Οι Deegan και Packel [DeegPack1978] εισήγαγαν και χαρακτήρισαν έναν δείκτη επιρροής που εξαρτάται μόνο από τις ελαχιστοτικές συνθήκες νίκης ενός μονοτονικού απλού παιγνίου. Υπέθεσαν ότι μόνο οι ελαχιστοτικές συνέργειες έχουν την ίδια πιθανότητα να σχηματιστούν. Ο δείκτης επιρροής γ που θα εισαχθεί στην ενότητα 4.3 επίσης εξαρτάται από τις ελαχιστοτικές συνέργειες του μονοτονικού απλού παιγνίου. Ωστόσο ο ορισμός του γ δεν θεωρεί ίδια την πιθανότητα να συμβούν οι ελαχιστοτικές συνθήκες νίκης που παράγονται με την ίδια μέθοδο.

4.3 Ο δείκτης επιρροής γ

Θεωρούμε μία κατάσταση ελέγχου επιτροπής όπου δεν ισχύει ότι όλα τα υποσύνολα S της επιτροπής N είναι ισοδύναμα να συμβούν. Για κάθε μη κενό σύνολο $S \subset N$ και ένα βάρος $r_S > 0$ επισυνάπτεται ένα βάρος $r_S > 0$ που μπορεί να ερμηνευθεί ως ένα μέτρο της πιθανότητας ότι το S θα σχηματιστεί. Οι συνέργειες με το ίδιο βάρος είναι ισοδύναμα πιθανό να συμβούν και αντίστροφα. Για κάθε συλλογή B από συνέργειες $\sum_{S \in B} r_S$ συμβολίζεται με $r(B)$. Έστω μία συγκεκριμένη δομή νίκης και ήττας σε συνέργειες της επιτροπής N οι οποίες μπορούν να περιγραφούν από ένα απλό μονοτονικό παίγνιο v.

Στην θεώρηση του v υποθέτουμε ότι ο μοναδικός σχηματισμός νίκης θα σχηματιστεί. Αυτή η υπόθεση τεκμηριώνεται από το γεγονός ότι ένας ελαχιστοτικός σχηματισμός νίκης μπορεί να επιτευχθεί όσο μία συνέργεια τον περιέχει.

Είναι λογικό να υποθέσουμε ότι κέρδος που προκαλείται από το σχηματισμό μιας συνεργίας πρέπει να διαιρεθεί μεταξύ των μελών έτσι ώστε να έχει μεγαλύτερο συμφέρον η διαίρεση μεταξύ των μελών του και επίσης, να μην έχει μεγαλύτερο συμφέρον να σχηματιστούν συνέργειες νίκης που μπορούν να αντικατασταθούν από μικρότερες. Συμβολίζουμε με MSG^N το σύνολο των μονοτονικών απλών παιγνίων με σύνολο παικτών το N. Για κάθε $v \in MSG^N$ και κάθε $S \in 2^N$ ορίζουμε:

$$ps(v) := \begin{cases} 0, αν\ S \notin W^m(v) \\ \dfrac{r_s}{r\left(W^m(v)\right)}, αν\ S \in W^m(v) \end{cases}$$

Τότε ισχύει ότι

$$ps(v) \geq 0\ για\ κάθε\ S \in 2^N\ και\ p\left(W^m(v)\right) = 1$$

Ο αριθμός $p_S(v)$ ερμηνεύεται ως η πιθανότητα ότι η συνεργία S σχηματίζεται στο παίγνιο v. Ο δείκτης επιρροής γ αναθέτει σε κάθε παίκτη $i \in N$ σε ένα απλό παίγνιο την πιθανότητα ότι μία ελαχιστοτική συνεργία νίκης που τον περιέχει μπορεί να σχηματιστεί.

4.3.1 Ορισμός του δείκτη επιρροής γ

Ορισμός 4.3.1: *Ο δείκτης επιρροής γ ορίζεται ως:*

$$\gamma_i(v) = p\big(W_i^m(v)\big) \; \text{για κάθε } i \in N$$

Σημειώστε ότι επειδή η άθροιση στο κενό σύνολο είναι 0, δηλαδή $\gamma_i(v) = 0$ αν $W_i^m(v)$ είναι κενό. Επίσης η ποσότητα $\gamma_i(v)$ δίνει ένα μέτρο της σημαντικότητας του παίκτη στο παίγνιο v. Όσο μεγαλύτερο είναι το $\gamma_i(v)$ τόσο περισσότερο σημαντικός είναι ο παίκτης στο παίγνιο. Αν ο παίκτης i είναι παίκτης βέτο τότε δεν μπορεί να γίνει κάτι χωρίς αυτόν και το $\gamma_i(v)$ είναι ίσο με το 1 τότε η μέγιστη τιμή μπορεί να ληφθεί.

Ορισμός 4.3.2: *Έστω v_1 και v_2 δύο μονοτονικά απλά παίγνια. Τότε τα παίγνια ονομάζονται συνενώσιμα αν για κάθε $S \in W^m(v_1)$ και $T \in W^m(v_2)$ με $S \not\subset T$ και $T \not\subset S$*

Σημειώστε ότι για δύο συνενώσιμα παίγνια v_1 και v_2 ισχύουν ότι:

$$W^m(v_1) \cap W^m(v_2) = \emptyset$$

και

$$W^m(v_1) \cup W^m(v_2) = W^m(v_1 \vee v_2)$$

4.3.2 Ιδιότητες του δείκτη επιρροής γ

Ορισμός 4.3.3: *Ένας δείκτης επιρροής f λέγεται ότι ικανοποιεί την ιδιότητα της συγχώνευσης αν*

$$f(v_1 \vee v_2) = \frac{f(v_1)r\big(W^m(v_1)\big) + f(v_2)r\big(W^m(v_2)\big)}{r\big(W^m(v_1)\big) + r\big(W^m(v_2)\big)}$$

για όλα τα συνενώσιμα παίγνια v_1 και v_2

Ορισμός 4.3.4: *Ένας δείκτης επιρροής* f *ικανοποιεί την ιδιότητα του κενού παίκτη αν* $f_i(v) = 0$ *όταν το i είναι ένας κενός παίκτης στο παίγνιο v.*

Ορισμός 4.3.5: *Ένας δείκτης επιρροής* f *ικανοποιεί την ιδιότητα του παίκτη βέτο αν* $f_i(v) = 1$ *όταν το i είναι ένας κενός παίκτης στο παίγνιο v.*

Το ακόλουθο θεώρημα παρέχει έναν χαρακτηρισμό του δείκτη επιρροής γ:

Θεώρημα 4.3.6: *Ο δείκτης επιρροής γ είναι ο μοναδικός δείκτης επιρροής που ικανοποιεί ταυτόχρονα (i) την ιδιότητα της συγχώνευσης (ii) την ιδιότητα του κενού παίκτη (iii) την ιδιότητα του παίκτη βέτο.*

Η απόδειξη βρίσκεται στο [Book]. Οι ιδέες πίσω από την ιδιότητα του κενού παίκτη και του παίκτη βέτο είναι προφανείς. Ένας κενός παίκτης δεν έχει καμία απολύτως επιρροή και αυτό αντικατοπτρίζεται από την ιδιότητα του κενού παίκτη. Ένας παίκτης βέτο έχει απόλυτη δύναμη η ιδιότητα του παίκτη βέτο του αναθέτει το μεγαλύτερο μέτρο δύναμης που είναι δυνατόν. Η ιδιότητα της συγχώνευσης θεωρεί ότι η δύναμη ενός παίκτη σε μία συγχώνευση παικτών είναι ο βεβαρυμμένος μέσος όρος σε ξεχωριστά παίγνια. Άλλος ένας τρόπος να ερμηνευθεί αυτή η ιδιότητα είναι η ακόλουθη:

Αν v_1, v_2 είναι δύο παίγνια που μπορούν να συγχωνευθούν και ας υποθέσουμε ότι ο παίκτης i παίζει το παίγνιο v_1 με πιθανότητα:

$$\frac{r\big(W^m(v_1)\big)}{r\big(W^m(v_1)\big) + r\big(W^m(v_2)\big)}$$

και το παίγνιο v_1 με πιθανότητα:

$$\frac{r\big(W^m(v_2)\big)}{r\big(W^m(v_1)\big) + r\big(W^m(v_2)\big)}$$

Τότε η ιδιότητα της συγχώνευσης θεωρεί ότι η ποσότητα $\gamma_i(v_1 \vee v_2)$ είναι η εκτιμώμενη δύναμη σε αυτήν την κατάσταση.

Για παράδειγμα αν έχει απόλυτη δύναμη στο v_1 και μηδενική δύναμη στο v_2 τότε η αναμενόμενη δύναμη είναι ίση με την πιθανότητα ότι το v_1 θα συμβεί.

Ο δείκτης Shapley-Shubik και ο δείκτης Banzhaf χαρακτηρίστηκαν από τον Roth [Roth1977] ως συναρτήσεις ωφέλειας για απλά παίγνια τα οποία διαφοροποιούνται στην αντιμετώπισή τους όσον αφορά την έννοια του ρίσκου. Εδώ ο χαρακτηρισμός του γ ως μία συνάρτησης ωφέλειας για απλά παίγνια έπεται λογικά.

4.4 Άλλες ιδιότητες του δείκτη επιρροής γ

Στην ενότητα αυτή θα δούμε άλλες ιδιότητες του δείκτη επιρροής γ. Μία σημαντική ιδιότητα είναι η ιδιότητα της συμμετρίας δηλαδή ότι η σειρά απεικόνισης των μελών της συνεργίας δεν έχει μεγάλη σημασία.

Πρόταση 4.4.1: *Ο δείκτης επιρροής γ ικανοποιεί την ιδιότητα της συμμετρίας αν και μόνο αν* $r_S = r_T$ *για κάθε* $S, T \in 2^N$ *με* $|S| = |T|$.

Πρόταση 4.4.2: *Ο δείκτης επιρροής γ ικανοποιεί την ιδιότητα του κενού παίκτη.*

Απόδειξη: Έστω $v \in MSG^N$ *και έστω* i *ένας αφελής παίκτης στο παίγνιο v. Τότε ο παίκτης* i *είναι είτε ένας κενός παίκτης είτε ένας δικτάτορας. Αν ο* i *είναι ένας κενός παίκτης τότε* $\gamma_i(v) = 0 = v(i)$ *από το θεώρημα 3.3.6. Αν ο* i *είναι δικτάτορας τότε* $W_i^m(v) = W^m(v) = \{i\}$ *και* $\gamma_i(v) = v(i)$.

Κεφάλαιο 5: Παίγνια Γραμμικού Προγραμματισμού

5.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με παίγνια γραμμικού προγραμματισμού. Τα παίγνια γραμμικού προγραμματισμού είναι παίγνια στα οποία για κάθε συνεργία S, η αξία v(S) δίδεται από ένα γραμμικό πρόγραμμα το οποίο εξαρτάται από το S. Στην 2η υποενότητα θα επεξηγηθούν τα παίγνια γραμμικού προγραμματισμού και θα χρησιμοποιηθούν για να ταξινομηθούν ολικά ισορροπημένα παίγνια. Δύο παραδείγματα παιγνίων γραμμικού προγραμματισμού μελετώνται. Στην 3η υποενότητα συγκεκριμένα θα συζητηθούν τα παίγνια γραμμικού προγραμματισμού με έλεγχο επιτροπής. Επειδή αυτά τα παίγνια δεν είναι ισορροπημένα θα οριστούν επαρκείς συνθήκες για να ισορροπήσουν. Αποδεικνύεται ότι κάθε μη αρνητικό ισορροπημένο παίγνιο είναι ένα παίγνιο γραμμικού προγραμματισμού με έλεγχο επιτροπής. Η εκδοχή που το παίγνιο δεν είναι ισορροπημένο παρουσιάζεται στην υπο-ενότητα 4 όπου μελετώνται δύο τρόποι διαχείρισης μη ισορροπημένων γραμμικών προγραμμάτων. Τέλος στην τελευταία ενότητα αυτού του κεφαλαίου παρουσιάζονται τα παίγνια γραμμικού προγραμματισμού με αξιώσεις. Αυτά τα παίγνια περιγράφουν παραγωγές που σχετίζονται γραμμικά με ένα προκαθορισμένο ποσό από παροχές τις οποίες αξιώνουν οι παίκτες. Τα παίγνια αξιώσεων μπορούν να κατασκευαστούν για να περιγράψουν τέτοιες καταστάσεις. Τα παίγνια αξιώσεων αφού μελετηθούν τοποθετούνται στα κυρτά παίγνια και για αυτό είναι και ισορροπημένα.

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε τα βασικά στοιχεία του γραμμικού προγραμματισμού:

Στη μαθηματική γλώσσα, ο όρος προγραμματισμός δεν έχει καμία σχέση με τον γνωστό προγραμματισμό υπολογιστών αλλά χρησιμοποιείται ως συνώνυμο της λέξης σχεδιασμός. Επομένως, προγραμματισμός είναι ο σχεδιασμός ενός μαθηματικού μοντέλου με τη βοήθεια μαθηματικών σχέσεων, οι οποίες περιγράφουν τόσο τη δομή, όσο και τις αλληλεπιδράσεις των στοιχείων ενός συστήματος με κύριο σκοπό τη βελτιστοποίηση της λειτουργίας ή της δομής του συστήματος.

Ο γραμμικός προγραμματισμός (Linear Programming) περιλαμβάνει όλα τα προβλήματα για τα οποία όλες οι συναρτήσεις και οι σχέσεις που χαρακτηρίζουν το μοντέλο είναι γραμμικές. Δηλαδή οι μεταβλητές εμφανίζονται μόνο στην πρώτη δύναμη και δεν υπάρχουν υψηλότερες δυνάμεις, ρίζες, γινόμενα μεταβλητών, κτλ.

Η βάση του γραμμικού προγραμματισμού τέθηκε με τη δημοσίευση του κεντρικού θεωρήματος της Θεωρίας των Παιγνίων του John von Neumann (1928) και το μοντέλο εισροών-εκροών του Vassily Leontief (1936). Η σημερινή μορφή του γραμμικού προγραμματισμού, καθώς και η βασική τεχνική για την επίλυση των προβλημάτων του, η μέθοδος simplex, οφείλονται στον George Dantzig (1951).

Στην περίπτωση όπου οι μεταβλητές του προβλήματος μπορούν να πάρουν μόνο ακέραιες τιμές, ασχέτως γραμμικότητας, τότε ο προγραμματισμός καλείται ακέραιος (integer programming) και ειδικότερα δε αμιγώς ακέραιος (pure integer programming). Σε περίπτωση που κάποιες από τις μεταβλητές ενός προβλήματος περιορίζονται σε ακέραιες τιμές και κάποιες όχι, έχουμε ένα πρόβλημα μεικτού ακέραιου προγραμματισμού (mixed integer programming).

Ο δυαδικός ακέραιος προγραμματισμός (binary integer programming) είναι μία ειδική κατηγορία προβλημάτων ακέραιου προγραμματισμού, όπου οι μεταβλητές μπορούν να πάρουν μόνο τιμές «0» ή «1».

Το γραμμικό μοντέλο έχει τα εξής στοιχεία: α) ένα σύνολο από μεταβλητές απόφασης, β) μία αντικειμενική συνάρτηση και γ) ένα σύνολο από περιορισμούς.

Μεταβλητές απόφασης: Οι μεταβλητές των οποίων οι τιμές προσδιορίζονται από την επίλυση του προβλήματος και οι οποίες μας δείχνουν το ύψος της εκτέλεσης ή παραγωγής των δραστηριοτήτων του προβλήματος. Επειδή οι μεταβλητές αυτές ποσοτικοποιούν τις αποφάσεις που πρόκειται να ληφθούν για το λόγο αυτό ονομάζονται μεταβλητές απόφασης. Είθισται να τις συμβολίζουμε ως $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Αντικειμενική συνάρτηση: Η συνάρτηση που μοντελοποιεί το στόχο του προβλήματος και ζητούμε τη βελτιστοποίηση αυτής (μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση). Επομένως είναι η μαθηματική σχέση που περιγράφει το κριτήριο (ή μέτρο) απόδοσης του συστήματος. Έχει τη μορφή:

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n \Leftrightarrow z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

Συντελεστές κέρδους (ή κόστους): Οι συντελεστές $c_1, c_2, \ldots, c_n$, των μεταβλητών της αντικειμενικής συνάρτησης που αντιπροσωπεύουν το κέρδος (ή το κόστος) **ανά μονάδα** της μεταβλητής. Επομένως ο συντελεστής c_i δείχνει πόσο συμβάλλει η μεταβλητή x_i στη βελτιστοποίηση της z.

Περιορισμοί: Οι περιορισμοί του προβλήματος μπορεί να είναι είτε εξισώσεις είτε ανισώσεις του τύπου ≥ ή ≤. Η παρουσία περιορισμών περιορίζει το βαθμό στον οποίο μπορεί να επιδιωχθεί ο αντικειμενικός στόχος. Έχουν τη μορφή:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq \text{ή} \geq \text{ή} = b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq \text{ή} \geq \text{ή} = b_i \quad (1)$$

$$\text{και } g_j \leq x_j \leq h_j, \text{όπου: } i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\} \quad (2)$$

Λειτουργικοί περιορισμοί: Είναι οι περιοριστικές σχέσεις της 1ης έκφρασης. Αν είναι του τύπου ≤, τότε η παράμετρος b_i παριστάνει **διαθέσιμους πόρους**. Αν είναι του τύπου ≥, τότε η παράμετρος b_i παριστάνει **ελάχιστες απαιτήσεις**.

Περιορισμοί φραγμένων μεταβλητών: Στη γενική περίπτωση οι μεταβλητές μπορούν να παίρνουν τιμές από το σύνολο των πραγματικών τιμών, μπορεί όμως να είναι άνω ή/και κάτω φραγμένες όπως απεικονίζονται με την $2^{η}$ έκφραση. Οι συνήθεις φραγμοί είναι $x_j \geq 0$ και καλούνται **περιορισμοί μη αρνητικότητας**.

Τεχνολογικοί συντελεστές: Οι συντελεστές a_{ij} όπου δείχνουν την ποσότητα όπου j-οστή απόφαση (x_j) συμβάλλει στην κάλυψη της i-οστής απαίτησης (b_i).

Η κανονική μορφή ενός μοντέλου συνίσταται σε:

- μη αρνητικές μεταβλητές απόφασης
- μεγιστοποίηση της αντικειμενικής
- περιορισμούς που είναι ανισώσεις της μορφής μικρότερο-ίσο (≤)

Στοιχειώδεις μετασχηματισμοί για την μετατροπή ενός μοντέλου σε κανονικό:

Πρόβλημα ελαχιστοποίησης

Ανάγουμε το πρόβλημα σε μεγιστοποίηση παίρνοντας την αντίθετη της αντικειμενικής συνάρτησης, z’ = -z. Π.χ.:

$$\min z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \Rightarrow \max z' = -z = -c_1x_1 - c_2x_2 - \cdots - c_nx_n.$$

Περιορισμός ως ανίσωση τύπου μεγαλύτερο-ίσο (≥)

Πολλαπλασιάζουμε τα δύο μέλη της ανίσωσης με -1 και αντιστρέφεται η ανίσωση.

Π.χ. $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i \Rightarrow -a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \cdots - a_{in}x_n \leq -b_i$

Περιορισμός ως ισότητα (=)

Δημιουργούμε σύστημα δύο ανισώσεων με ανίσωση μικρότερο-ίσο (≤) **και** μεγαλύτερο-ίσο (≥). Κατόπιν μετασχηματίζουμε τη δεύτερη ανίσωση όπως (**2**).

Π.χ. $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \Rightarrow \begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i \end{cases}$

Περιορισμός (ή μεταβλητή απόφασης) σε απόλυτη τιμή

Δημιουργούμε σύστημα δύο ανισώσεων ίδιου τύπου με τον περιορισμό, όπου στη μία ανίσωση πολλαπλασιάζουμε τα πρώτο μέλος της ανίσωσης με -1. Αν οι ανισώσεις είναι μεγαλύτερο-ίσο (≥) τις μετασχηματίζουμε όπως (**2**).

Π.χ. $|a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n| \leq b_i \Rightarrow \begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i \\ -a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \cdots - a_{in}x_n \leq b_i \end{cases}$

Φραγμένη μεταβλητή απόφασης

Εισάγουμε νέα μεταβλητή (x'_j) για αντικατάσταση της φραγμένης μεταβλητής σε οποιαδήποτε σχέση συμμετέχει, αφού την εξισώσουμε κατάλληλα. Κατόπιν δημιουργούμε ένα νέο περιορισμό.

Π.χ. $g_j \le x_j \le h_j \Rightarrow \begin{cases} x'_j = x_j - g_j \Rightarrow x_j = x'_j + g_j \text{ (Αντικατάσταση } x_j) \\ x'_j \le h_j - g_j \text{ (Δημιουργία επιπλέον περιορισμού)} \end{cases}$

Μεταβλητή απόφασης χωρίς περιορισμό αρνητικών τιμών

Εισάγουμε δύο νέες μεταβλητές (x'_j, x''_j), μη αρνητικές, για αντικατάσταση της μεταβλητής χωρίς περιορισμό αρνητικών τιμών σε οποιαδήποτε σχέση συμμετέχει, αφού την εξισώσουμε κατάλληλα.

Π.χ. $x_j \in \mathbb{Q}$ ή $x_j \in \{-\infty, +\infty\} \Rightarrow x_j = x'_j - x''_j$(Αντικατάσταση x_j), $x'_j, x''_j \ge 0$

5.2 Παίγνια Γραμμικού Προγραμματισμού

Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$\max cx$

υπό:

$xA \le b$

$xB = d$

$x \ge 0$

όπου $c \in \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}^p$, $d \in \mathbb{R}^r$, A είναι ένας $m \times p$ πίνακας, B είναι ένας $m \times r$ πίνακας. Σημειώστε ότι ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού που περιέχει μόνο σχέσεις ανισοισότητας μπορεί να γραφεί στην μορφή ισοτήτων προσθέτωντας τις σχέσεις $xB = d$ όπου B είναι ένας m x 1 πίνακας που περιλαμβάνει μόνο μηδενικά και το d είναι ίσο με το 0. Τελείως αντίστοιχα ένα πρόβλημα που περιέχει μόνο ισότητες μπορεί να διαχειριστεί αντίστοιχα. Ένα διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^m$ που ικανοποιεί τις παραπάνω συνθήκες καλείται λύση του προβλήματος Αν υπάρχει έστω μία λύση, το πρόβλημα λέγεται εφικτό, αλλιώς λέγεται μη εφικτό. Μία λύση $\hat{x} \in \mathbb{R}^m$ καλείται βέλτιστη αν ισχύει $c\hat{x} \ge cx$ για κάθε λύση x. Στην περίπτωση αυτή η αξία: $v_p(A, B, b, d, c)$ του γραμμικού προγράμματος ισούται με $c\hat{x}$. Αν το πρόβλημα δεν είναι εφικτό τότε ισχύει:

$v_p(A,B,b,d,c) = -\infty$. Αν το πρόβλημα είναι εφικτό αλλά μη φραγμένο τότε $v_p(A,B,b,d,c) = \infty$.

Το δυικό πρόβλημα του γραμμικού προγράμματος είναι το:

$\min yb + zd$

υπό:

$Ay + Bz \geq c$

$y \geq 0$

Προφανώς οι ορισμοί των λύση και βέλτιστη λύση, εφικτή και μη εφικτή κατηγορία προβλήματος μπορούν να οριστούν για το δυικό πρόβλημα. Η τιμή του δυικού προβλήματος συμβολίζεται με $v_d(A,B,b,d,c)$ ενώ ισχύει ότι το πρόβλημα αυτό είναι φραγμένο και εφικτό αν και μόνο αν το αρχικό πρόγραμμα είναι εφικτό και φραγμένο.

Ένα συνεργατικό παίγνιο μπορεί να κατασκευαστεί από το αρχικό πρόγραμμα μετατρέποντας όλους ή μερικούς από τους περιορισμούς να εξαρτώνται από τις συνέργειες. Αυτό μπορεί να γίνει με πολλούς τρόπους. Στην ενότητα αυτή μελετούμε την εξής περίπτωση: Για κάθε $k \in \{1,2,\dots,p\}$ και για κάθε $S \in 2^N \backslash \{\emptyset\}$ συμβολίζουμε με $b_k(S) = \sum_{i \in S} b_k(i)$ όπου $b_k(i) \in \mathbb{R}$ για κάθε $i \in N$. Το διάνυσμα στο $\mathbb{R}^p$ με την k-συντεταγμένη ίση με $b_k(i)$ συμβολίζεται me b(S).

Το ίδιο ισχύει και για το d(S). Έτσι για κάθε $k \in \{1,2,\dots,r\}$ και για κάθε $S \in 2^N \backslash \{\emptyset\}$ συμβολίζουμε με $d_k(S) = \sum_{i \in S} d_k(i)$ όπου $d_k(i) \in \mathbb{R}$ για κάθε $i \in N$. Το διάνυσμα στο $\mathbb{R}^p$ με την k-συντεταγμένη ίση με $b_k(i)$ συμβολίζεται me d(S).

5.2.1 Σχέση παιγνίου γραμμικού προγραμματισμού με τη συνεργατική θεωρία παιγνίων

Ορισμός 5.1: *Ένα συνεργατικό παίγνιο v είναι ένα παίγνιο γραμμικού προγραμματισμού αν υπάρχει ένας mxp πίνακας A, ένας mxr πίνακας B και διανύσματα $b(S) \in \mathbb{R}^p$ και $d(S) \in \mathbb{R}^r$ τέτοια ώστε $v(S) = v_p(A,B,b(S),d(S),c)$*

Παρατήρηση 5.2: *Σημειώστε ότι για να πάρουμε παίγνιο, θα πρέπει ο αριθμός $v_p(A,B,b(S),d(S),c)$ να είναι πραγματικός αριθμός για κάθε $S \in 2^N \backslash \{\emptyset\}$. Για τον λόγο αυτό για κάθε $S \in 2^N \backslash \{\emptyset\}$ το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού θα πρέπει να είναι εφικτό και φραγμένο. Αν απουσιάζουν περιορισμοί ισότητας μία επαρκής αλλά όχι* *αναγκαία συνθήκη είναι όλα τα στοιχεία του πίνακα να είναι μη αρνητικά με μία θετική τιμή σε κάθε γραμμή και ότι το b(S) είναι μη αρνητικό.*

Θεώρημα 5.3: *Ένα παίγνιο γραμμικού προγραμματισμού είναι ολικά ισορροπημένο.*

Απόδειξη: Έστω v ένα παίγνιο γραμμικού προγραμματισμού για κάθε $S \in 2^N\{\emptyset\}$ *με* $v(S) = v_p(A, B, b(S), d(S), c)$. *Τότε για κάθε* $S \in 2^N\{\emptyset\}$ *το υπο-παίγνιο* v_T *του v είναι επίσης ένα παίγνιο γραμμικού προγραμματισμού με* $v_T(S) = v_p(A, B, b(S), d(S), c)$ *για κάθε* $\emptyset \neq S \subset T$. *Συνακόλουθα είναι επαρκές να αποδείξουμε ότι το v είναι ισορροπημένο. Έστω* $(y', z') \in R^p \times R^r$ *είναι μία βέλτιστη λύση για το δυϊκό πρόβλημα του προβλήματος που ορίζει το v(N). Ορίζουμε* $u \in R^n$ *ως:*

$$u_i \coloneqq y'b(i) + z'd(i)$$

Τότε

$$\sum_{i \in N} u_i \coloneqq y' \sum_{i \in N} b(i) + z' \sum_{i \in N} d(i) = y'b(N) + z'd(N) = v(N)$$

Ακόμη περισσότερο ισχύει ότι:

$$\sum_{i \in N} u_i = y'b(S) + z'd(S) \geq v(S)$$

Για κάθε $S \in 2^N$. Εδώ η ανισότητα ακολουθεί το γεγονός ότι το (y', z') είναι μία λύση του δυικού προβλήματος του προβλήματος που καθορίζει το $v(S)$ επίσης. Έτσι έπεται ότι $u \in C(v)$ και το v είναι ολικά ισορροπημένο.

Θεώρημα 5.4: *Κάθε ολικά ισορροπημένο παίγνιο είναι παίγνιο γραμμικού προγραμματισμού.*

Απόδειξη: Έστω ένα ολικά ισορροπημένο παίγνιο.

$max\, xc$

Υπό τους περιορισμούς:

$xA \leq b(S)$

Έστω c ο πίνακας ο οποίος όλες οι συντεταγμένες του είναι ίσες με 1 και ορίζουμε με b(S) το άθροισμα όλων των b(i) των i που ανήκουν στο S. Τότε το παραπάνω γραμμικό πρόγραμμα μπορεί να γραφεί ως:

$$max\, x^1 c - x^2 c$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$x^1 A - x^2 A \leq b(S)$$

$$x^1 \geq 0$$

$$x^2 \geq 0$$

Αν A' είναι ο πίνακας διαστάσεων 2n x 2^n-1 με την j-οστή γραμμή του A για $1 \leq j \leq n$ *και ίσο με το αντίθετο του αρνητικού της (j-n)-οστής γραμμής του A για* $n + 1 \leq j \leq 2n$. *Τότε το παραπάνω γραμμικό πρόγραμμα είναι ισοδύναμο με το ακόλουθο:*

$$\max xc'$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$xA \leq b(S)$$

$$x \leq 0$$

Έτσι έπεται ότι το v είναι παίγνιο γραμμικού προγραμματισμού με $v(S) = v_p(A', B, b(S), d(S), c)$ *για κάθε S* $\in 2^N$ *όπου το B είναι ένας m x 1 Πίνακας με όλα τα στοιχεία του ίσα με 0 και* d(S)=0 *για κάθε S* $\in 2^N$. ■

5.2.2 Παίγνια Διαχείρισης Ροής

Παρατήρηση 5.5: Τα παίγνια ροής είναι παραδείγματα παιγνίων γραμμικού προγραμματισμού τα οποία εισήχθησαν από τους Kalai και Zemel [KalaZeme82a]. Έστω G είναι ένας κατευθυνόμενος γράφος με πεπερασμένο σύνολο κορυφών P και πεπερασμένο σύνολο ακμών L. Για κάθε p ∈ P έστω B(p) το σύνολο των ακμών που έχουν το ένα άκρο τους στο p. Δύο συναρτήσεις δίδονται οι c και o. Η συνάρτηση c καλείται συνάρτηση χωρητικότητας c(i) του i. Επίσης με o(i) συμβολίζουμε τον ιδιοκτήτη του i. Δύο διαφορετικές κορυφές διακρίνονται σε δύο κατηγορίες μία αφετηρία s και έναν προορισμό t. Μία ροή από την αφετηρία στον προορισμό (καταβόθρα) είναι μια συνάρτηση f από την L στην R με 0<f(l)<c(l) για κάθε l ανήκει L έτσι ώστε για κάθε p ανήκει στο P\{s,t} το ποσό της ροής που εισέρχεται στο p είναι ίσο με τη ροή που εξέρχεται.

Η τιμή αυτής της ροής είναι το ποσό που εισέρχεται στην αφετηρία και είναι ίσο με το ποσό που εξέρχεται από την καταβόθρα. Μία ροή με μέγιστη τιμή καλείται μέγιστη ροή και η αξία αυτή είναι ίσο με w(G). Έτσι ώστε:

$$w(G) := \sum_{l \in B(s)} f(l) - \sum_{l \in E(s)} f(l) = \sum_{l \in E(t)} f(l) - \sum_{l \in B(t)} f(l)$$

όπου f είναι μία μέγιστη ροή στο G.

Για κάθε $S \in 2^N \backslash \{\emptyset\}$ *ένας γράφος* G_S *μπορεί να εξαχθεί το G αν διατηρηθούν οι κορυφές και αφαιρώντας τις ακμές που δεν χρησιμοποιούνται από κάποιο στοιχείο του S. Έτσι το νέο σύνολο των ακμών συμβολίζεται με* L_S. *Σημειώνεται ότι το* $G_N = G$ *και* $L_N = L$.

Θεώρημα 5.6: *Τα προβλήματα ροής είναι παίγνια γραμμικού προγραμματισμού.*

Απόδειξη:

Έστω v ένα παίγνιο ροής με $v(S) = w(G_S)$ *για κάθε* $S \in 2^N$, *όπου* $G_N = G$ *είναι ένας κατευθυνόμενος γράφος με συνάρτηση χωρητικότητας c και συνάρτηση ιδιοκτησίας o. Έστω* $l_1, l_2, \dots l_r$ *μία διάταξη του L έτσι ώστε* $\{l_1, l_2, \dots l_r\} = B(s)$. *Για κάθε* $i \in N$ *ορίζουμε το διάνυσμα* $b(i) \in R^r$. *Από τα θεωρήματα που έχουν αναπτυχθεί ακολουθεί ότι τα παίγνια ροής Kalai και Zemel [KalaZeme82a] απέδειξαν ότι οι Kalai και Zemel απέδειξαν ότι κάθε ολικά ισορροπημένο παίγνιο είναι παίγνιο ροής.*

5.3 Παίγνια Γραμμικού Προγραμματισμού με Έλεγχο Επιτροπής

Ορισμός 5.7: Ένα παίγνιο v είναι ένα παίγνιο γραμμικού προγραμματισμού με έλεγχο επιτροπής αν υπάρχει ένας m x p πίνακας A, ένας m x r πίνακας H, ένα διάνυσμα $c \in R^m$ και για κάθε $k \in \{1, \dots, p\}$ και κάθε $j \in \{1, \dots, r\}$ υπάρχουν αριθμοί $g_k \in N$ και $h_j \in N$ έτσι ώστε g_k πραγματικοί μη αρνητικοί αριθμοί $b_k^1 + b_k^2 + \cdots + b_k^{g_k}$ και g_k είναι απλά παίγνια και οι υπόλοιπες παραμέτροι ορίζονται από τις σχέσεις:

$$\sum_{q=1}^{g_k} b_k^q w_k^q$$

Και

$$d_j(S) = \sum_{q=1}^{h_j} d_j^q u_j^q(S)$$

Έτσι ώστε:

$$v(S) = v_p(A, H, b(S), d(S), c)$$

Για κάθε $S \in 2^N \backslash \{\emptyset\}$

Ορισμός 5.8: *Ένα παίγνιο γραμμικού προγραμματισμού με έλεγχο επιτροπής είναι ένα απλό παίγνιο που περιγράφει τους ελέγχους η περιγραφή του ελέγχου είναι μονοτονικά και μη ισορροπημένα έχουν άδειο πυρήνα.*

Θεώρημα 5.9: *Κάθε μη αρνητικό ισορροπημένο παίγνιο είναι παίγνιο γραμμικού προγραμματισμού με έλεγχο επιτροπής.*

Απόδειξη: Παρατίθεται στο [ImmaCur85].

Κεφάλαιο 6: Παίγνια Συνδυαστικής Δομής

6.1 Εισαγωγή

Ενώ η χαρακτηριστική συνάρτηση του κεφαλαίου 3 προσδιορίζονταν από προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού, η χαρακτηριστική συνάρτηση των παιγνίων αυτού του κεφαλαίου θα προσδιορίζεται από προβλήματα συνδυαστικής βελτιστοποίησης.

Ένα συνεργατικό παίγνιο v με v(S) ίσο με την αξία ενός προβλήματος συνδυαστικής βελτιστοποίησης για κάθε $S \in 2^N$ καλείται συνδυαστικό παίγνιο.

Θα αναλύσουμε στους 3 ακόλουθους τομείς δύο τύπους συνδυαστικών καταστάσεων και συγκεκριμένα τις έννοιες του ταιριάσματος (matching) και μεταθέσεων (permutations). Στην ενότητα 6.2 θα εισάγουμε και θα συζητήσουμε ορισμένα παραδείγματα. Στην ενότητα 6.3 θα ασχοληθούμε με συνδυαστικά παίγνια που προκύπτουν από προβλήματα ταιριασμάτων και μεταθέσεων. Στην ενότητα 6.4 θα συζητήσουμε για οικονομίες και μη διαφοροποιησιμότητες που προκύπτουν από προβλήματα μεταθέσεων. Στην ενότητα 6.5 ασχολούμαστε με κανονικοποιημένες καταστάσεις ταιριάσματος. Στην ενότητα 6.6 ασχολούμαστε με συνδυαστικά παίγνια που προκύπτουν από προβλήματα των οποίων η συνδυαστική δομή είναι αυτή της ακολουθίας. Ειδικά τα παίγνια αυτά είναι κυρτά και ως εκ τούτου ισορροπημένα. Αποδεικνύεται επίσης ότι υπάρχει ένας κανόνας που είναι ο πυρήνας των αντίστοιχων προβλημάτων ακολουθιών και οδηγούν στην έκφραση απλών παραστάσεων για την τιμή Shapley και την τιμή r ενός παιγνίου ακολουθίας..

6.2 Παίγνια Ταιριασμάτων και Μεταθέσεων

Ας θεωρήσουμε την ακόλουθη κατάσταση. Ένα σύνολο που αποτελείται από n γυναίκες και n άνδρες πρέπει να «ταιριαστεί» έτσι ώστε κάθε άνδρας να παντρευτεί μια και μόνο γυναίκα. Κάθε άτομο έχει μία συγκεκριμένη προτίμηση στα άτομα του άλλου φύλλου. Τι κριτήρια πρέπει να έχει κάποιος στο μυαλό όταν κάνει μια ανάθεση των ανδρών στις γυναίκες; Υπάρχει τρόπος να ικανοποιηθούν τα κριτήρια αυτά; Το πρόβλημα (γνωστό ως και πρόβλημα των γάμων) είναι ένα πολύ γνωστό παράδειγμα ενός προβλήματος «ταιριάσματος» (matching) ή για την συνέχεια της παρουσίασης μια «κατάσταση» ταιριάσματος. Οι καταστάσεις ταιριάσματος έχουν μελετηθεί εκτενώς στην βιβλιογραφία . [GaleSha1962] [DubiFree1981] [CrawKno1981] [Roth 1982] [Roth1984] και [GaleSoto1985]. Σε μία κατάσταση ταιριάσματος υπάρχει μια ομάδα ανθρώπων ή οργανισμών που πρέπει να ταιριαστούν ένας προς ένα ή ένας προς πολλά. Αν υπάρχουν δύο ομάδες και το ταίριασμα μπορεί να γίνει μόνο μεταξύ ενός μέλους της μίας ομάδας με ένα μέλος της άλλης ομάδας τότε το ταίριασμα καλείται διμερές (από το διμερές γράφημα, δηλαδή το γράφημα του οποίου οι κόμβοι χωρίζονται σε δύο σύνολα έτσι ώστε κάθε ακμή του γραφήματος να έχει το ένα της άκρο στο ένα σύνολο και το άλλο της άκρο στο άλλο σύνολο). Στην παρουσίαση που ακολουθεί ασχολούμαστε κυρίως με διμερή ταιριάσματα τα οποία είναι ιδιαίτερα δημοφιλή στη βιβλιογραφία. Παραδείγματος χάρη στο πρόβλημα των πωλήσεων σπιτιών (house market problem) κάθε πωλητής έχει στην κατοχή του ένα σπίτι και κάθε αγοραστής θέλει να αγοράσει ένα σπίτι όταν τα σύνολα των πωλητών και αγοραστών είναι ξένα μεταξύ τους και κάθε αγοραστής θέλει να αγοράσει ακριβώς ένα σπίτι. Παρόμοιο πρόβλημα είναι και το πρόβλημα ανάθεσης σπουδαστών σε πανεπιστήμια (college admission problem) στο οποίο φοιτητές πρέπει να ανατεθούν σε κολλέγια. Οι προτιμήσεις των φοιτητών δίδονται σε λίστες κατάταξης στις οποίες διατάσσουν σε σειρά προτίμησης τα πανεπιστήμια, ενώ τα πανεπιστήμια με κάποιον πραγματικό αριθμό βαθμολογούν τους υποψηφίους κατά σειρά προτεραιότητας. Συνεργατικά παίγνια που προκύπτουν από καταστάσεις σαν και αυτές μελετώνται στο [ShapShu1972].

Ένα παράδειγμα μίας διαφορετικής κατάστασης είναι το ακόλουθο: Μία ομάδα N={1,2,…,n} πελατών στέκονται σε μια ουρά και περιμένουν να εξυπηρετηθούν. Έχουν όλοι κοινό χρόνο εξυπηρέτησης (κάθε πελάτης εξυπηρετείται στον ίδιο χρόνο). Κάθε ένας από αυτούς έχει ένα κόστος που εξαρτάται από τη χρονική στιγμή που ολοκληρώνεται η διεκπεραίωση της εξυπηρέτησής του. Αφού όλοι οι χρόνοι εξυπηρέτησής είναι οι ίδιοι, το κόστος για κάθε πελάτη αντικρίζεται μόνο από την θέση του στην ουρά. Η θέση κάθε πελάτη στην ουρά μπορεί να θεαθεί ως μετάθεση (permutation) των N πελατών. Έτσι το κόστος ενός πελάτη μπορεί να θεαθεί ως μια μετάθεση. Αυτό είναι ένα παράδειγμα μιας κατάστασης μετάθεσης. Σε μία κατάσταση μετάθεσης κάθε μέλος της ομάδας έχει μια προτίμηση στο σύνολο των μεταθέσεων της ομάδας.

Άλλο ένα παράδειγμα μιας κατάστασης μετάθεσης είναι η κατάσταση μεταθέσεων μηχανής-εργασίας όπου κάθε παραγωγός είναι ιδιοκτήτης μίας μηχανής και έχει μία εργασία για να διεκπεραιώσει. Κάθε μηχανή μπορεί να διεκπεραιώσει οποιαδήποτε εργασία, αλλά καμία μηχανή δεν μπορεί να διεκπεραιώσει πάνω από μία εργασία. Κάθε παραγωγός έχει μία προτίμηση επί των μηχανών. Μία μετάθεση των παραγωγών αντιστοιχεί σε μία διανομή των μηχανών στους παραγωγούς. Τα συνεργατικά παίγνια που ανακύπτουν από αυτήν την κατάσταση μελετώνται στα [ShapScar1974], [Tijs1984], [CurieTijs1986].

Στις ακόλουθες δύο υποενότητες μελετώνται προβλήματα ταιριάσματος και προβλήματα μεταθέσεων. Στην ενότητα 6.3 που στηρίζεται μερικώς στην δουλειά των [CurieTijs1986] μελετώνται συνεργατικά παίγνια που ανακύπτουν από καταστάσεις ταιριασμάτων και μεταθέσεων και στην ενότητα 6.4 μελετώνται οικονομίες με διαφοροποιησιμότητες που ανακύπτουν από καταστάσεις μεταθέσεων. Στην ενότητα 6.5 θα ενοποιήσουμε τις δύο αυτές υποενότητες σε γενικά παίγνια ταιριασμάτων.

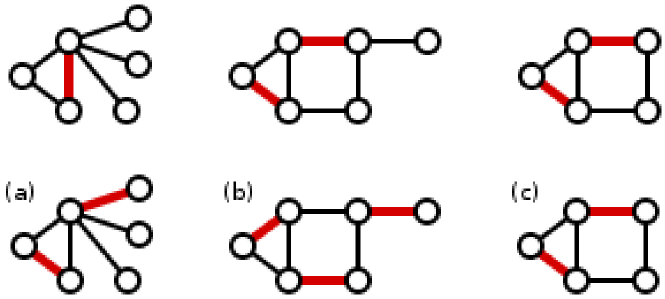
6.3 Παίγνια Ανάθεσης και Μεταθέσεων

Θεωρούμε τις ακόλουθες καταστάσεις διμερών ταιριασμάτων. Έστω B και M δύο ξένα μεταξύ τους σύνολα. Για κάθε στοιχείο $i \in B$ και για κάθε στοιχείο $j \in M$ ορίζεται η αξία του ταιριάσματος των δύο στοιχείων να είναι $g_{i,j}$, ενώ η συσχέτιση του στοιχείου $j \in M$ με το στοιχείο $i \in B$ ορίζεται να είναι $h_{i,j}$. Συνεπώς η αξία της συσχέτισης ενός στοιχείου του M με ένα στοιχείο του B είναι ίση με: $a_{i,j} = g_{i,j} + h_{i,j}$. Από την κατάσταση αυτή μπορεί να κατασκευαστεί το ακόλουθο συνεργατικό παίγνιο. Για κάθε συσχέτιση $S \subset B \cup M$ η αξία $v(S)$ του S ορίζεται ως το μέγιστο που μπορεί να επιτεύξει το S δημιουργώντας κατάλληλα ζευγάρια από τα μέλη του. Αν $S \subset B$ ή $S \subset M$ τότε δεν υπάρχει ταίριασμα και για αυτό $v(S) = 0$. Αν δεν ισχύει $S \subset B$ και δεν ισχύει $S \subset M$ αλλά για όλα τα $i \in S \cap M$ και για όλα τα $j \in S \cap M$ το ζεύγος (i,j) έχει αξία $a_{i,j} < 0$ τότε το μέγιστο του S επιτυγχάνεται με το να μην κατασκευαστούν ζεύγη και είναι ίσο με το 0.

Τυπικά το v(S) είναι ίσο με την λύση του ακόλουθου ακεραίου προγράμματος:

$$\begin{cases} \max \sum_{i \in B} \sum_{j \in M} a_{i,j} x_{i,j} & \textit{υπό} \\ \sum_{j \in M} x_{i,j} \leq 1 & \textit{για κάθε } i \in B \\ \sum_{j \in M} x_{i,j} \leq 1 & \textit{για κάθε } j \in M \\ x_{i,j} \in \{0,1\} & \textit{για κάθε } i \in B, j \in M \end{cases}$$

Στην θεωρία γράφων το πρόβλημα της εύρεσης ενός ταιριάσματος των κορυφών του γραφήματος είναι πολύ γνωστό στην βιβλιογραφία. Περισσότερα αναδεικνύονται με το παρακάτω σχήμα:

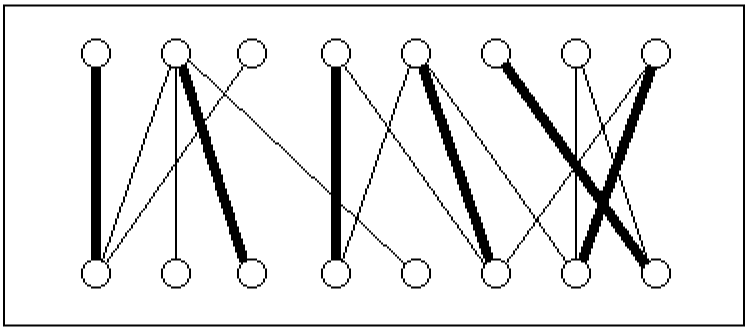


Εικόνα 11: Τρία γραφήματα και τα ταιριάσματά τους.

Επιλέγονται ακμές που ταιριάζουν κορυφές με σκοπό να ταιριαστούν όσο πιο πολλές κορυφές γίνεται (ισοδύναμα να επιλεχθούν όσο πιο πολλές ακμές γίνεται). Στο σχήμα (α) το πάνω ταίριασμα καλείται μεγιστοτικό, αλλά όχι μέγιστο. Στο σχήμα (β) το πάνω ταίριασμα δεν είναι ούτε καν μεγιστοτικό. Στο σχήμα (γ) και τα δύο ταιριάσματα είναι και μεγιστοτικά, αλλά και μέγιστα αφού ούτε μπορούν να επαυξηθούν, ούτε υπάρχει κάποιο ταίριασμα με 3 ακμές.

Ένα τέλειο ταίριασμα (perfect matching) είναι ένα ταίριασμα που ταιριάζει όλες τις κορυφές του γραφήματος, δηλαδή κάθε κορυφή είναι γειτονική με ακριβώς μία κορυφή του γραφήματος στο ταίριασμα που έχει κατασκευαστεί.

Στην παρούσα ενότητα μας ενδιαφέρουν ιδιαιτέρως τα καλούμενα διμερή ταιριάσματα, δηλαδή η εύρεση ενός ταιριάσματος σε έναν διμερή γράφο. Ένας διμερής γράφος είναι ένας γράφος στον οποίο οι κορυφές του μπορούν να διαμεριστούν σε δύο ξένα μεταξύ τους σύνολα έτσι ώστε όλες οι ακμές να έχουν το ένα άκρο τους σε κορυφή του ενός συνόλου και το άλλο άκρο τους σε κορυφή του άλλου συνόλου.



Εικόνα 12: Ένα ταίριασμα σε έναν διμερή γράφο.

Τα δύο μέρη του γραφήματος είναι οι κορυφές που βρίσκονται στο πάνω και στο κάτω μέρος αντίστοιχα του σχήματος. Παρατηρούμε ότι υπάρχουν κορυφές οι οποίες δεν κατέστη εφικτό να ταιριαστούν. Ωστόσο το ταίριασμα είναι μεγιστοτικό, δηλαδή δεν υπάρχει η δυνατότητα να επαυξηθεί περαιτέρω με το ταίριασμα και άλλων κορυφών.

Το πρόβλημα του διμερούς ταιριάσματος έχει μελετηθεί εκτενώς στη βιβλιογραφία και έχουν προταθεί αρκετοί αλγόριθμοι για την επίλυση του. Ο πιο γνωστός αλγόριθμος (που χρησιμοποιεί τεχνικές ροών) είναι ο αλγόριθμος των Ford-Fulkerson με την χρήση του οποίου το πρόβλημα τα εύρεσης ενός ταιριάσματος σε έναν διμερή γράφο μπορεί να λυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο.

Ορισμός 6.3.1: *Ένα συνεργατικό παίγνιο v είναι ένα παίγνιο ανάθεσης αν το σύνολο των παικτών μπορεί να διαχωριστεί σε δύο σύνολα B και M έτσι ώστε για κάθε* $i \in B$ *και για κάθε* $j \in M$ *υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί* $g_{i,j}$ *και* $h_{i,j}$ *με* $\alpha_{i,j} = g_{i,j} + h_{i,j}$ *έτσι ώστε κάθε σχέση* S *αξίας* $v(S)$ *είναι ίση με την αξία του παραπάνω γραμμικού προγράμματος.*

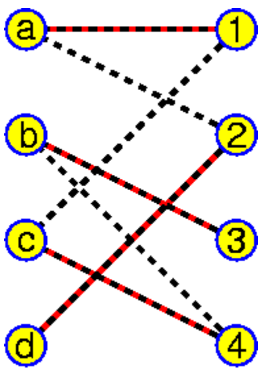
Μερικά παραδείγματα καταστάσεων ταιριάσματος που οδηγούν σε παίγνια συσχέτισης είναι τα ακόλουθα:

6.3.1 Ανάθεση Αγοραστών και Εμπόρων Σπιτιών

Θεωρούμε ότι M είναι ένα σύνολο εμπόρων που κατέχουν ένα αδιαίρετο αγαθό (παραδείγματος χάριν ένα σπίτι) και B είναι ένα σύνολο αγοραστών που επιθυμούν να αγοράσουν ακριβώς ένα σπίτι ο καθένας.

Τότε $g_{i,j}$ είναι η αξία του σπιτιού του εμπόρου $j \in M$ προς τον αγοραστή $i \in B.$ Έστω επίσης ότι c_j είναι η αξία του σπιτιού όπως την θεωρεί ο έμπορος $j.$ Έστω το ταίριασμα με τον αγοραστή $i.$ Αν ταιριαστεί με έναν αγοραστή έτσι ώστε να θεωρείται ότι χάνει το σπίτι του (π.χ με έναν αγοραστή που θα τον εξαπατήσει και θα χάσει νομικά το σπίτι και δεν θα πληρωθεί ποτέ), τότε η αξία αυτής της κατάστασης θα είναι: $-c_j.$ Έτσι ισχύει ότι το κόστος $h_{ij} = -c_j$ στην περίπτωση αυτή. Επίσης σε κάθε άλλη περίπτωση θα ισχύει ότι: $\alpha_{ij} = g_{ij} - c_j$. Έτσι αν $a_{ij} > 0$ τότε αυτό θα σημαίνει ότι ο αγοραστής εκτιμά ότι το κόστος του σπιτιού είναι μεγαλύτερο από ότι το εκτιμά ο ίδιος ο έμπορος, ενώ αν είναι αρνητικό τότε ο αγοραστής υποεκτιμά το κόστος του σπιτιού σε σχέση με την αξία που του έχει δώσει ο έμπορος. Είναι σαφές ότι είναι προσοδοφόρο να γίνει ταίριασμα ενός αγοραστή με ένα έμπορο μόνο αν η παραπάνω ποσότητα είναι γνήσια θετική οπότε αυτός που αγοράζει δίνει επιπλέον αξία στο αγοραζόμενο προϊόν. Το μοντέλο αυτό είναι μια ελαφρά παραλλαγή του μοντέλου των Shapley και Shubik [ShapShub1972]

Ακολουθεί και ένα σχηματικό παράδειγμα:



Εικόνα 13: Διμερές Ταίριασμα σε έναν γράφο πωλητών – αγοραστών

Στο παραπάνω γράφημα ορίζονται 4 έμποροι και 4 αγοραστές και για χάρι απλότητας θεωρούμε ότι όλες οι ακμές έχουν βάρος 1. Οι ακμές δείχνουν το ταίριασμα πωλητών – αγοραστών. Για παράδειγμα ο πωλητής α θέλει να διαθέσει το οίκημα του στους αγοραστές 1 και 2. Με έντονο κόκκινο χρώμα φαίνεται το ταίριασμα, όπου έχουν ανατεθεί οι πωλητές στους αγοραστές σύμφωνα με τις επιθυμίες του και το σύνολο όλων των δυνατών αγοραπωλησιών έχει επιτευχθεί.

6.3.2 Ταίριασμα Ανδρών και Γυναικών

Ακόμη ένα γνωστό παράδειγμα προκύπτει αν θέσουμε M να είναι το σύνολο των ανδρών και B να είναι ένα σύνολο γυναικών. Ορίζουμε ως g_{ij} ένα μέτρο της επιθυμίας του άνδρα i για να παντρευτεί τη γυναίκα j και ως h_{ij} της επιθυμίας της γυναίκας j για να παντρευτεί τον άνδρα i. Με τον τρόπο αυτό μία παραλλαγή πληθικότητας (δηλαδή μέτρο του πλήθους των ταιριασμάτων) μπορεί να οριστεί [GaleShap1962].

6.3.3 Ταίριασμα Εταιριών και Υπαλλήλων

Έστω M ότι είναι το σύνολο των εταιριών και B είναι ένα σύνολο εργαζομένων. Κάθε εταιρία επιθυμεί να προσλάβει ακριβώς έναν υπάλληλο και κάθε υπάλληλος επιθυμεί να δουλέψει σε ακριβώς μία εταιρία. Τότε ορίζουμε ως h_{ij} το κέρδος της εταιρίας i αν προσλάβει τον υπάλληλο j και επίσης ορίζουμε ως w_{ij} ένα μέτρο της δυσκολίας της εργασίας του υπαλλήλου i αν προσληφθεί από την εταιρία j. Τότε η επιθυμία του εργαζομένου ορίζεται στο παίγνιο αυτό ως: $g_{ij} = -w_{ij}$ δηλαδή αντίθετη τιμή του κόπου πρέπει να καταβάλλει. Έτσι το ζεύγος ταιριάσματος της εταιρίας i στον υπάλληλο j είναι ίσο με $a_{ij} = h_{ij} + g_{ij} = h_{ij} - w_{ij}$. Είναι και πάλι προφανές ότι έχει νόημα να ταιριαστεί μία εταιρία με έναν υπάλληλο αν η αξία της δουλείας στην εταιρία είναι μεγαλύτερη από το κόστος της εργασίας όπως αυτό προσδιορίζεται από τον ίδιο τον υπάλληλο. Ένα πιο γενικό παράδειγμα ενός (όπως αναφέρεται) προβλήματος ταιριάσματος εργασίας μπορεί να βρεθεί στο [CrawKno1981].

6.3.4 Επιπλέον ορισμοί της συνεργατικής θεωρίας παιγνίων

Θεωρούμε την ακόλουθη κατάσταση μετάθεσης. Ένα σύνολο N={1,2,…n} δίδεται. Κάθε $i \in N$ τοποθετεί την τιμή $k_{\iota\pi(i)}$ σε μία μετάθεση π του N. Κάθε υποομάδα $S \subset N$ έχει τη δύναμη να τοποθετήσει μία μετάθεση π έτσι ώστε μόνο τα μέλη του S να δέχονται μετάθεση έτσι ώστε π(i)=I για κάθε $i \in N\backslash S$. Στο συνεργατικό παίγνιο που αντιστοιχεί σε αυτήν την κατάσταση η αξία v(S) μιας συνέργειας S ορίζεται να είναι το μέγιστο του αθροίσματος των αξιών όλων των μελών του S τα οποία λαμβάνονται από όλες τις μεταθέσεις που μπορεί να επιτύχει το S. Έστω Π_S το σύνολο όλων των μεταθέσεων π έτσι ώστε να ισχύει $\pi(i) = i$ για κάθε $i \in N\backslash S$. Τότε

$$v(S) = \max_{\pi \in \Pi_S} \sum_{i \in S} k_{i\pi(i)}$$

Ένας άλλος τρόπος για να συμβολίσουμε την παραπάνω σχέση είναι με την βοήθεια πινάκων μετάθεσης. Για κάθε μετάθεση $\pi \in \Pi_S$ ένας αντίστοιχος πίνακας μετάθεσης $P = [p_{ij}]_{i=1,j=1}^{i=n,j=n}$ μπορεί να οριστεί ως ακολούθως:

$$p_{ij} \coloneqq \begin{cases} 1, \alpha\nu\ i \in S, j \in S\ \kappa\alpha\iota\ \pi(i) = j \\ 0, \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \end{cases}$$

Έστω P(S) ότι είναι το σύνολο των S-αποδεκτών πινάκων μετάθεσης π.χ. πίνακες μετάθεσης που αντιστοιχούν σε ένα $\pi \in \Pi_S$. Έστω K ότι είναι ένας n x n πίνακας $[k_{ij}]_{i=1,j=1}^{i=n,j=n}$. Τότε η παραπάνω σχέση είναι ισοδύναμη με την εξής:

$$v(S) = \max_{P \in P(X)} K * P$$

Όπου K*P ορίζεται ως:

$$K * P \coloneqq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} k_{ij} p_{ij}$$

***Ορισμός* 6.3.2:** *Ένα συνεργατικό παίγνιο v είναι ένα παίγνιο μετάθεσης αν υπάρχει ένας πίνακας K τέτοιος ώστε v(s) να δίδεται από την παραπάνω σχέση για κάθε S στο δυναμοσύνολο του N εκτός του κενού συνόλου.*

***Παρατήρηση* 6.3.3:** *Ένας τρίτος τρόπος για να περιγραφεί ένα παίγνιο μετάθεσης v με τη σημειολογία του ακέραιου προγραμματισμού είναι ο ακόλουθος. Έστω $v(S)$ ότι είναι ίσο με την αξία του ακόλουθου ακέραιου προγράμματος:*

$$max \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} k_{ij} x_{ij}$$

υπό τους περιορισμούς:

$$\sum_{j \in N} x_{ij} = 1_S(i), \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ i \in N$$

$$\sum_{i \in N} x_{ij} = 1_S(j), \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ j \in N$$

$$x_{i,j} \in \{0,1\}\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ i,j \in N$$

Ένα παράδειγμα ενός παιγνίου μετάθεσης είναι να δούμε την κατάσταση μετάθεσης όπου πελάτες περιμένουν σε μια ουρά. Για $i \in N$ έστω c_{ij} ότι συμβολίζει το κόστος του i αν περιμένει στη j-οστή θέση. Ορίζουμε τον πίνακα $K = [k_{ij}]_{i=1,j=1}^{i=n,j=n}$ ως $k_{i,j} = c_{ii} - c_{ij}$. Τότε το παίγνιο μετάθεσης που αντιστοιχεί σε αυτήν την κατάσταση δίδεται από τη σχέση:

$$v(S) = \max_{P \in P(X)} K * P$$

Ένα άλλο παράδειγμα μπορεί να ευρεθεί αν δούμε την μετάθεση μηχανών σε εργασίες. Ας υποθέσουμε ότι το κόστος για $i \in N$ είναι ίσο με c_{ij} αν η εργασία μπορεί να εκτελεστεί από την μηχανή j η οποία ανήκει στον παίκτη $j \in N$. Η αξία k_{ij} της μηχανής j για $i \in N$ ορίζεται ως $k_{ij} = c_{ii} - c_{ij}$. Η χαρακτηριστική συνάρτηση του παιγνίου μετάθεσης που αντιστοιχεί σε αυτήν την κατάσταση δίδεται και πάλι από την παραπάνω σχέση.

Θέωρημα 6.3.4: *Κάθε παίγνιο ανάθεσης είναι ένα παίγνιο μετάθεσης.*

Απόδειξη: Παραλείπεται, βλέπε σελ. 56 [ImmaCuri82]

Θέωρημα 6.3.5: *Τα παίγνια ανάθεσης και τα παίγνια μετάθεσης είναι ολικά ισορροπημένα.*

Απόδειξη: Λόγω του θεωρήματος 6.3.4 είναι επαρκές να αποδείξουμε ότι τα παίγνια μετάθεσης είναι ολικά ισορροπημένα. Αφού κάθε υπο-παίγνιο ενός παιγνίου μετάθεσης είναι και πάλι παίγνιο μετάθεσης είναι επαρκές να αποδείξουμε ότι τα παίγνια μετάθεσης είναι ισορροπημένα. Έστω v ένα παίγνιο μετάθεσης με πίνακα $[k_{ij}]_{i=1,j=1}^{i=n,j=n}$. *Τότε v(S) δίδεται από τη σχέση:*

$$max \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} k_{ij} x_{ij}$$

υπό τους περιορισμούς:

$$\sum_{j \in N} x_{ij} = 1_S(i), για\ κάθε\ i \in N$$

$$\sum_{i \in N} x_{ij} = 1_S(j), για\ κάθε\ j \in N$$

$$x_{i,j} \in \{0,1\}\ για\ κάθε\ i, j \in N$$

Από το θεώρημα των Birkhoff – von Neumann το οποίο θεωρεί ότι τα ακραία σημεία του συνόλου των διπλά στοχαστικά πινάκων είναι ακριβώς ίδια με τους πίνακες μετάθεσης έπεται ότι το παραπάνω ακέραιο πρόγραμμα είναι ισοδύναμο με το ακόλουθο:

$$max \sum_{i\in N} \sum_{j\in N} k_{ij}x_{ij}$$

υπό τους περιορισμούς:

$$\sum_{j\in N} x_{ij} = 1_S(i), \text{για κάθε } i \in N$$

$$\sum_{i\in N} x_{ij} = 1_S(j), \text{για κάθε } j \in N$$

$$x_{i,j} \geq 0 \text{ για κάθε } i,j \in N$$

Ενώ το δυικό πρόγραμμα αυτού είναι το ακόλουθο:

$$min \sum_{i\in N} 1_S(i)u_i + \sum_{j\in N} 1_S(j)v_j$$

υπό τους περιορισμούς:

$$u_i + v_j \geq k_{ij}, \qquad \text{για κάθε } i,j \in N$$

Έστω (u', v') να είναι η βέλτιστη λύση του δυικού προγράμματος για S=N, τότε

$$\sum_{i\in N} (u_i' + v_i') = v(N)$$

Και για κάθε $S \in 2^N$

$$\sum_{i\in S} (u_i' + v_i') = \sum_{i\in N} 1_S(i)u_i' + \sum_{i\in N} 1_S(i)u_i' \geq v(S)$$

Όπου η ανισότητα ακολουθεί από το γεγονός ότι (u', v') είναι μία λύση του δυικού γραμμικού προγράμματος για κάθε $S \in 2^N$. Έτσι το διάνυσμα $z \in R^n$ ορίζεται ως:

$$z_i \coloneqq u_i' + v_i'$$

Είναι ένα στοιχείο του πυρήνα του v και το v είναι ισορροπημένο. ■

Η γενίκευση του παιγνίου ανάθεσης και του παιγνίου μετάθεσης είναι τα παίγνια πολυδιάστατης ανάθεσης και πολυδιάστατης μετάθεσης αντίστοιχα. Ένα παράδειγμα μίας κατάστασης πολυδιάστατης ανάθεσης που ορίζει ένα παίγνιο πολυδιάστατου παιγνίου ανάθεσης είναι η αγορά πωλητών-αγοραστών όπου κάθε πωλητής έχει στην κατοχή του ένα αντικείμενο από διαφορετικούς τύπους αδιαίρετων αντικειμένων, π.χ. ένα σπίτι, ένα αυτοκίνητο, μία τηλεόραση, ένα cd player κ.λπ. και κάθε αγοραστής θέλει να αγοράσει ακριβώς ένα από κάθε αγαθό.

***Ορισμός* 6.3.6:** *Ένα συνεργατικό παίγνιο v είναι ένα p-παίγνιο ανάθεσης για κατάλληλο* $p \in N$ *αν το σύνολο των παικτών μπορεί να διαχωριστεί σε δύο σύνολα B και M τέτοια ώστε να υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί* $g_i(j_1, j_2, \dots, j_p)$ *για κάθε* $i \in B$ *και κάθε* $(j_1, j_2, \dots, j_p) \in M^p$ *και πραγματικοί αριθμοί* $h_j(q, i)$ *για κάθε* $j \in M,\ q \in \{1, \dots, p\}$ *και* $i \in B$ *με* $a(i, j_1, \dots, j_p) = g_i(j_1, \dots, j_p) + h_{j1}(1, i) + h_{j2}(2, i) + \cdots + h_{jp}(p, i)$ *έτσι ώστε για κάθε συνέργεια S, η αξία v(S) του S δίδεται από ένα εκτενές γραμμικό πρόγραμμα έκφρασης των επιμέρους περιορισμών.*

***Ορισμός* 6.3.7:** *Ένα συνεργατικό παίγνιο v είναι ένα p-παίγνιο μετάθεσης για κατάλληλο* $p \in N$ *αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί* $k_i(j_1, j_2, \dots, j_p)$ *για κάθε* $i \in B$ *και κάθε* $(j_1, j_2, \dots, j_p) \in N^{p+1}$ *έτσι ώστε η αξία v(S) να δίδεται από γραμμικό πρόγραμμα έκφρασης των περιορισμών.*

***Θεώρημα* 6.3.8:** *Για κατάλληλο* $p \geq 2$ *τα παίγνια π-παίγνιο ανάθεσης και p-παίγνιο μετάθεσης δεν είναι κατ' ανάγκην ισορροπημένα.*

Απόδειξη:Βλέπε σελ. 59 [ImmaCuri82] ■

***Παρατήρηση* 6.3.9:** *Για ένα p-παίγνιο ανάθεσης v με |B|=1 ή |M|=1 ένα στοιχείο του πυρήνα μπορεί να εξαχθεί αν αναθέσουμε* $v(B \cup M)$ *να είναι το μοναδικό στοιχείο του B ή του M. Για ένα p-παίγνιο μετάθεσης v με* $|N| \leq 2$ *έπεται ότι ο πυρήνας δεν είναι κενός από την υπερπροσθετικότητα του παιγνίου.*

Κεφάλαιο 7: Παίγνια NP-Complete Προβλημάτων

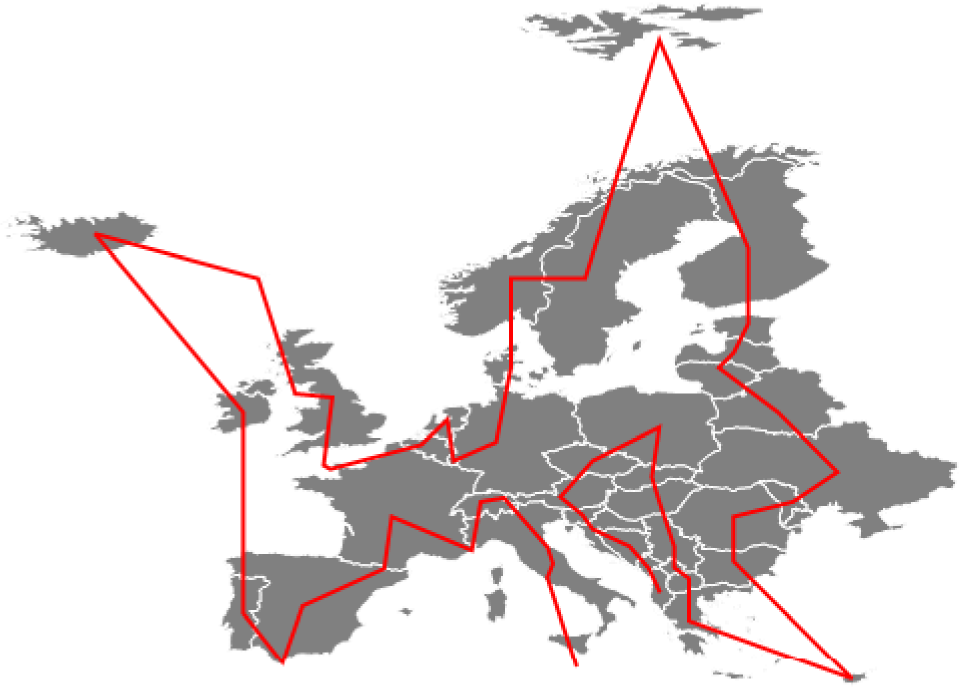
7.1 Εισαγωγή

Στην ενότητα 7.2 θα ασχοληθούμε με παίγνια που προκύπτουν και εμπνέονται από το πρόβλημα του περιοδεύοντος πωλητή (travelling salesman problem – TSP). Μία παραλλαγή των παιγνίων του περιοδεύοντος πωλητή τα επονομαζόμενα και παίγνια δρομολόγησης ορίζονται εδώ. Στην πραγματικότητα τα παίγνια αυτά δεν είναι παίγνια συνδυαστικής βελτιστοποίησης αφού ορίζεται μόνο το v(N) ως ένα πρόβλημα συνδυαστικής βελτιστοποίησης. Αποδεικνύεται επίσης ότι τα παίγνια δρομολόγησης δεν είναι ισορροπημένα στην γενική περίπτωση και μελετώνται κάποιες υποκλάσεις αυτών που είναι ισορροπημένες. Στην ενότητα 7.3 συζητάμε τα παίγνια συνδετικών δένδρων ελαχίστου κόστους (Δένδρο Επικάλυψης Ελαχίστου Κόστους – ΔΕΕΚ). Στην ενότητα 5.4 ασχολούμαστε με τα παίγνια τοποθέτησης υπηρεσιών (facility location problems). Επίσης τα παίγνια που θα ορίσουμε στις ενότητες 7.4, 7.5 και 7.6 είναι παίγνια κόστους και προκύπτουν από προβλήματα συνδυαστικής βελτιστοποίησης που θα μελετήσουμε εκτενώς.

7.2 Παίγνια Περιοδεύοντος Πωλητή

7.2.1 Το Πρόβλημα του Περιοδεύοντος Πωλητή

Το πρόβλημα του περιοδεύοντος πωλητή είναι ένα πολύ γνωστό πρόβλημα συνδυαστικής βελτιστοποίησης. Σε μία από τις μοντελοποιήσεις του (με την οποία θα ασχοληθούμε στα πλαίσια αυτής της διπλωματικής) δίδεται ένας κατευθυνόμενος γράφος με βάρη στις ακμές και ζητείται να βρεθεί ένας κύκλος που περνάει από κάθε κορυφή ακριβώς μία φορά. Το πρόβλημα είναι περίφημο NP-Complete πρόβλημα και έτσι πολλοί προσεγγιστικοί αλγόριθμοι έχουν αναπτυχθεί για την εύρεση μιας προσεγγιστικής επίλυσης. Στο σχήμα που ακολουθεί παρουσιάζεται μια επίλυση του προβλήματος εύρεσης ενός σύντομου περίπατου στις πρωτεύουσες της Ευρώπης (και όχι του συντομότερου) αφού η εύρεση της βέλτιστης λύσης αποτελεί ουτοπικό στόχο διότι η πολυπλοκότητα του εν λόγω προβλήματος είναι ίση με O(n!) εκτός κι αν P=NP.



Εικόνα 14: Ένας περίπατος του περιοδεύοντα πωλητή στις πόλεις της Ευρώπης

Μία προσεγγιστική επίλυση του προβλήματος του περιοδεύοντος πωλητή για έναν περίπατο στις πρωτεύουσες της Ευρώπης με το ελάχιστο συνολικό μήκος [refTSP].

Το βάρος ενός κύκλου ορίζεται ως το άθροισμα των βαρών των ακμών από τις οποίες διέρχεται ο κύκλος.

7.2.2 Παρατηρήσεις από την εκδοχή του TSP ως πρόβλημα βελτιστοποίησης

Αν ο γράφος είναι πλήρης (δηλαδή κλίκα, δηλαδή συνδέεται κάθε κορυφή με κάθε κορυφή) και τα βάρη ικανοποιούν την τριγωνική ιδιότητα (π.χ. αν δυο κόμβοι i, j συνδέονται με ακμή που έχει βάρος $w_{i,j}$ με κατεύθυνση - δηλαδή η ακμή έχει αφετηρία τον κόμβο i και τερματισμό τον κόμβο j: $w_{i,j} + w_{j,k} \geq w_{i,k}$ για όλους τους κόμβους i, j, k) τότε υπάρχει ένας κύκλος που επισκέπτεται κάθε κόμβο ακριβώς μία φορά και έχει ελάχιστο βάρος σε σχέση με κάθε άλλο κύκλο του γραφήματος. Κάθε πρόβλημα περιοδεύοντος πωλητή σε έναν τυχαίο γράφο μπορεί να μετατραπεί σε έναν ισοδύναμο πλήρη γράφο με τον εξής τρόπο: Κάθε ακμή που υπήρχε στο αρχικό γράφημα παραμένει με το ίδιο βάρος στο τροποποιημένο γράφημα ενώ αν δεν υπήρχε ακμή στο αρχικό γράφημα τοποθετούμε μία ακμή με πολύ μεγάλο βάρος (π.χ. με το άθροισμα των κοστών των n μεγαλύτερων ακμών του γραφήματος) έτσι ώστε να είναι πρακτικά μη επιλέξιμη μια ακμή του γραφήματος. Για την συνέχεια υποθέτουμε ότι τα προβλήματα του περιοδεύοντος πωλητή είναι σε έναν πλήρη γράφο στον οποίο υποθέτουμε ότι ισχύει η τριγωνική ιδιότητα εκτός κι αν έχει διατυπωθεί με άλλο τρόπο.

7.2.3 Παίγνια Περιοδεύοντος Πωλητή

Τα παίγνια περιοδεύοντος πωλητή ανακύπτουν σε καταστάσεις όπως η ακόλουθη: Κάθε ένα από n πανεπιστήμια έχει προσκαλέσει έναν ομιλητή για να δώσει μία διάλεξη. Ο ομιλητής πρέπει να ταξιδέψει από την πόλη στην οποία διαμένει σε όλα τα πανεπιστήμια και να επιστρέψει στην πόλη του. Το πρόβλημα του να βρεθεί ο φθηνότερος τρόπος να επισκεφθεί όλα τα πανεπιστήμια και να επιστρέψει στην πόλη του, είναι ένα πρόβλημα περιοδεύοντος πωλητή. Το πρόβλημα του διαμοιρασμού του κόστους των ταξιδιών μεταξύ όλων των πανεπιστημίων που τον κάλεσαν είναι ένα πρόβλημα τοποθέτησης κοστών (cost allocation problem) που μπορεί να μοντελοποιηθεί με την βοήθεια ενός συνεργατικού παιγνίου και εισάγουμε την ορολογία για την περίπτωση αυτή του παιγνίου περιοδεύοντος πωλητή. Στον ορισμό της χαρακτηριστικής συνάρτησης ενός παιγνίου περιοδεύοντος πωλητή υποθέτουμε ότι κάθε διευθέτηση (coalition, που στο παράδειγμά μας είναι ένα υποσύνολο των πανεπιστημίων) μετρά το κόστος αν ο ομιλητής επισκεφθεί μόνο τα πανεπιστήμια που είναι στο υποσύνολο και έπειτα επιστρέψει στην αφετηρία του.

Ένα τέτοιο ταξίδι με επιστροφή μπορεί να οριστεί με την βοήθεια μιας απεικόνισης $e:\{1,2,\dots,|S|\} \to S$ όπου $e(1)$ είναι το πανεπιστήμιο που έχει επισκεφθεί πρώτο, $e(2)$ είναι το πανεπιστήμιο που έχει επισκεφθεί δεύτερο κ.λπ. Το σύνολο όλων των συναρτήσεων που μπορούν να οριστούν είναι: $E(S)$. Έστω 0 ότι συμβολίζει το σπίτι του ομιλητή και έστω ότι $S \in 2^N$ ενώ το σύνολο $S \cup 0$ το συμβολίζουμε με S_0.

Ορισμός 7.2.1: *Ένα συνεργατικό παίγνιο c καλείται παίγνιο περιοδεύοντος πωλητή όταν για κάθε $i, j \in N_0$ υπάρχει ένα $w_{i,j} > 0$ τέτοιο ώστε το $c(S)$ δίδεται για όλα τα $S \in 2^N$ ως εξής:*

$$e(S) \coloneqq \min\{w_{0,e(1)} + w_{e(1),e(2)} + \dots + w_{e(S),0} \mid e \in E(S)\}$$

συναρτήσεων που μπορούν να οριστούν είναι: $E(S)$. Έστω 0 ότι συμβολίζει το σπίτι του ομιλητή και έστω ότι $S \in 2^N$ ενώ το σύνολο $S \cup 0$ το συμβολίζουμε με S_0.

Άλλος ένας τρόπος να εκφράσουμε το $c(S)$ είναι μέσω του ακέραιου προγράμματος:

$$c(S) := \begin{cases} \min \sum_{i \in S_0} \sum_{j \in S_0} w_{i,j} x_{i,j} & \textit{υπό τους περιορισμούς} \\ \sum_{j \in S_0 \setminus \{i\}} x_{i,j} = 1_S(i) & \textit{για κάθε } i \in N \\ \sum_{i \in S_0 \setminus \{j\}} x_{i,j} = 1_S(j) & \textit{για κάθε } j \in N \\ u_i - u_j + n x_{i,j} \leq n - 1 & \textit{για κάθε } i,j \in S \textit{ και } i \neq j \\ x_{i,j} \in \{0,1\} & \textit{για κάθε } i,j \in N \end{cases}$$

Εδώ αν έχουμε ότι $x_{i,j} = 1$ σημαίνει ότι ο ομιλητής ταξιδεύει απευθείας από το πανεπιστήμιο i στο πανεπιστήμιο j και $x_{i,j} = 0$ σημαίνει ότι δεν επισκέπτεται το πανεπιστήμιο j μετά το πανεπιστήμιο i. Οι πρώτες $2n$ συνθήκες εξασφαλίζουν ότι κάθε πανεπιστήμιο θα επισκεφθεί από τον ταξιδιώτη ακριβώς μία φορά το καθένα, ενώ οι υπόλοιπες $|S|^2$ συνθήκες εξασφαλίζουν ότι το πλάνο του ταξιδιού περιγράφεται από τα $x_{i,j}$ που δεν περιέχουν επαναλήψεις χωρίς το 0.

Ορισμός 7.2.2: *Σημειώστε ότι με τον ορισμό 7.2.1 καμία πόλη (ακόμη και η 0) δεν μπορεί να επισκεφθεί περισσότερες από μία φορές, ενώ είναι πιθανό η πόλη 0 να επισκεφθεί περισσότερες από μία φορές. Ωστόσο επειδή τα βάρη σέβονται την τριγωνική ιδιότητα τα δύο ελάχιστα ταυτίζονται.*

Θέωρημα 7.2.3: *Τα παίγνια περιοδεύοντος πωλητή δεν απαιτείται να είναι ισορροπημένα.*

Απόδειξη: Έστω $N = \{1,2,3,4\}$ *και έστω ότι τα* $w_{i,j}$ *για τα* $i,j \in N_0$ *δίδονται ως:*

$w_{0,1} = 1$	$w_{0,2} = 2$	$w_{0,3} = 2$	$w_{0,4} = 1$
$w_{1,0} = 1$	$w_{1,2} = 1$	$w_{1,3} = 2$	$w_{1,4} = 2$
$w_{2,0} = 1$	$w_{2,1} = 1$	$w_{2,3} = 1$	$w_{2,4} = 2$
$w_{3,0} = 1$	$w_{3,1} = 2$	$w_{3,2} = 2$	$w_{3,4} = 2$
$w_{4,0} = 1$	$w_{4,1} = 2$	$w_{4,2} = 1$	$w_{4,3} = 1$

Τότε ένας ελάχιστος κύκλος για το N δίδεται από $e(1) = 1, e(2) = 2, e(3) = 3,$ $e(4) = 4$ *από το οποίο προκύπτει ότι* $c(N) = 6$. *Ένας ελάχιστος κύκλος για το σύνολο {1,2,3} δίδεται ως:* $e(1) = 1, e(2) = 2, e(3) = 3$ *από τον οποίο προκύπτει κέρδος ίσο με* $c(1,2,3) = 4$ *ενώ αντίστοιχα ένας ελάχιστος κύκλος για το σύνολο {1,2,4} δίδεται ως:* $e(1) = 4, e(2) = 2, e(3) = 1$ *που αποδίδει κόστος* $c(1,2,4) = 4$, *ενώ ένας ελάχιστος κύκλος για το σύνολο {3,4} δίδεται από* $e(1) = 4, e(3) = 2$ *που έχει κόστος* $c(3,4) = 3$. *Έτσι:*

$$\frac{1}{2}c(1,2,3) + \frac{1}{2}c(1,2,4) + \frac{1}{2}c(3,4) = 5\frac{1}{2} < 6 = c(1,2,3,4)$$

Το οποίο παραβιάζει τον περιορισμό ισορροπίας. Έτσι το c δεν είναι ισορροπημένο■.

Για ένα παίγνιο περιοδεύοντος πωλητή για να έχουμε άδειο πυρήνα θα πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον 4 παίκτες όπως δείχνει το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 7.2.4: *Έστω c ένα παίγνιο πλανόδιου πωλητή με τρεις ή λιγότερους παίκτες. Τότε το c είναι ισορροπημένο.*

Απόδειξη: Αν c είναι ένα παίγνιο με μόνο ένα παίκτη τότε το c είναι τετριμμένα ισορροπημένο. Αν c είναι ένα παίγνιο περιοδεύοντος πωλητή με δύο παίκτες τότε η ισορροπία του c αποδεικνύεται. Έστω c ένα παίγνιο περιοδεύοντος πωλητή με σύνολο παικτών N={1,2,3}. Για να αποδείξουμε ότι η c είναι ισορροπημένη μόνο η τριγωνική ανισότητα

$$c(1,2)+c(1,3)+c(2,3)\geq 2c(1,2,3)$$

Πρέπει να ελεγχθεί. Δύο περιπτώσεις πρέπει να διαχωριστούν:

(i) *Αν στην έκφραση* $c(1,2)+c(1,3)+c(2,3)$ *υπάρχει ένα* $w_{0,i}$ *που εμφανίζεται δύο φορές. Τότε χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι το* $w_{0,1}$*εμφανίζεται δύο φορές. Τότε έχουμε ότι:*

$$\begin{aligned} &c(1,2)+c(1,3)+c(2,3)\\ &\qquad = w_{0,1}+w_{1,2}+w_{2,0}+w_{0,1}+w_{1,3}+w_{3,0}\\ &\qquad + \min\{w_{0,2}+w_{2,3}+w_{3,0}, w_{0,3}+w_{3,2}+w_{2,0}\} \end{aligned}$$

Έστω ότι το ελάχιστο είναι ίσο με $w_{0,2}+w_{2,3}+w_{3,0}$. *Η άλλη περίπτωση μπορεί να διαχειριστεί ανάλογα. Τότε έχουμε ότι:*

$$\begin{aligned} &c(1,2)+c(1,3)+c(2,3)\\ &= w_{0,1}+w_{1,2}+w_{2,0}+w_{0,1}+w_{1,3}+w_{3,0}+w_{0,2}+w_{2,3}+w_{3,0}\\ &= w_{0,1}+w_{1,2}+w_{2,3}+w_{3,0}+w_{0,2}+w_{2,0}+w_{0,1}+w_{1,3}+w_{3,0}\\ &\geq c(1,2,3)+w_{0,2}+w_{2,0}+w_{0,1}+w_{1,3}+w_{3,0}\\ &\geq c(1,2,3)+w_{0,2}+w_{2,1}+w_{1,3}+w_{3,0}\\ &\geq 2c(1,2,3) \end{aligned}$$

(ii) *Αν στην έκφραση* $c(1,2)+c(1,3)+c(2,3)$ *δεν υπάρχει κάποιο* $w_{0,i}$ *που να εμφανίζεται δύο φορές. Τότε για κάθε* $i\in N$ *το* $w_{0,i}$*εμφανίζεται ακριβώς μία φορά. Τότε έχουμε:*

$$\begin{aligned} &c(1,2)+c(1,3)+c(2,3)\\ &\qquad = w_{0,1}+w_{1,2}+w_{2,0}+w_{0,2}+w_{3,0}+w_{0,3}+w_{3,1}+w_{1,0} \end{aligned}$$

ή

$$\begin{aligned} &c(1,2)+c(1,3)+c(2,3)\\ &\qquad = w_{0,1}+w_{1,3}+w_{3,0}+w_{0,3}+w_{3,2}+w_{2,0}+w_{0,2}+w_{2,1}\\ &\qquad + w_{1,0} \end{aligned}$$

Και οι δύο περιπτώσεις μπορούν να διαχειριστούν με ανάλογο τρόπο. Αν θεωρήσουμε την πρώτη περίπτωση έχουμε:

$$\begin{aligned} &c(1,2) + c(1,3) + c(2,3) \\ &= w_{0,1} + w_{1,2} + w_{2,0} + w_{0,2} + w_{2,3} + w_{3,0} + w_{0,3} + w_{3,1} + w_{1,0} \\ &= w_{0,1} + w_{1,2} + w_{2,3} + w_{3,0} + w_{2,0} + w_{0,2} + w_{0,3} + w_{3,1} + w_{1,0} \\ &\geq c(1,2,3) + w_{0,2} + w_{2,0} + w_{0,3} + w_{3,1} + w_{1,0} \\ &\geq c(1,2,3) + w_{0,2} + w_{2,1} + w_{1,3} + w_{3,0} \\ &\geq c(1,2,3) + w_{0,2} + w_{2,3} + w_{3,1} + w_{1,0} \\ &\geq 2c(1,2,3) \end{aligned}$$

Συνεπώς η παραπάνω ανισότητα αποδείχθηκε και έτσι το c είναι ισορροπημένο. ■

Πρόταση 7.2.5: *Έστω c ένα παίγνιο πλανόδιου πωλητή έτσι ώστε για κάθε $i \in N_0$ υπάρχουν u_i, z_i με $w_{ij} = u_i + z_i$ για κάθε $i, j \in N_0$. Τότε:*

$C(c) = \{c \in R^n \mid x_i = u_i + z_i + \lambda_i(u_0 + z_0)$ *με* $0 \leq \lambda \leq 1$ *για κάθε* $i \in N$ *και* $\sum_{i \in N} \lambda_i = 1\}$

Απόδειξη: Για ένα τέτοιο παίγνιο περιοδεύοντος πωλητή όλα τα προγράμματα του ταξιδιού για μία συγκεκριμένα συνεργία S που έχει το ίδιο κόστος (συγκεκριμένα $\sum_{i \in S_0}(u_i + z_i)$

Παρατήρηση 7.2.6: *Οι αριθμοί u_i, z_i μπορούν να ειδωθούν ως φόροι (διόδια)*

που πρέπει να πληρωθούν όταν μπαίνεις ή βγαίνει από μία πόλη αντίστοιχα.

Αν δεν υπάρχουν άλλα κόστη που έχουν σημασία τότε το κόστος του ταξιδιού από την πόλη i στην πόλη j ισούται με $u_i + z_j$.

Πρόταση 7.2.7: *Θεωρήστε ένα πρόβλημα περιοδεύοντος πωλητή με σύνολο κόμβων N_0 όπου $N = \{1,2,\dots,n\}$ και βάρη $w_{i,j}$ για $i, j \in N_0$. Τότε υπάρχουν u_i, z_j για κάθε $i \in N_0$ τέτοια ώστε $w_{i,j} = u_i + z_i$ για κάθε $i, j \in N_0$ αν και μόνο αν για κάθε $j \in N$, $w_{i,j} - w_{i,0}$ είναι το ίδιο $i \in N_0$ όπου w_{00} το παίρνουμε να είναι ίσο με 0.*

Απόδειξη: Έστω $w_{i,j}$ τέτοιο ώστε $u_{i,}, z_i$ για κάθε $i \in N_0$ με $w_{i,j} = u_i + w_j$ για κάθε $i, j \in N_0$. Τότε $w_{i,j} - w_{i,0} = u_i + z_j - u_i - z_0 = z_j - z_0$ για κάθε $i \in N_0$ με τον τρόπο αυτό αποδεικνύεται το «μόνο αν» της ισοδυναμίας. Ας υποθέσουμε ότι $w_{i,j} - w_{i,0}$ είναι το ίδιο με κάθε $i \in N_0$, ας θεωρήσουμε ότι είναι: $w_{i,j} - w_{i,0} = b_j$. Ορίζουμε $\alpha_i = w_{i,0}$ για κάθε

$i \in N_0$ και $b_0 = 0$. Τότε $w_{i,j} = a_i + b_j$ για κάθε $i, j \in N_0$. Έτσι αποδεικνύεται και το κομμάτι του «αν».

Διαισθητικά είναι απολύτως προφανές ότι όταν η πόλη αφετηρία είναι σχετικά μακριά από τα πανεπιστήμια σταθμούς των ομιλιών, ενώ τα πανεπιστήμια είναι σχετικά ομαδοποιημένα (με μικρές αποστάσεις μεταξύ τους), τότε το κόστος για να γίνει ένα ταξίδι στα πανεπιστήμια είναι σχετικά φτηνό σε σχέση με το κόστος της μεταφοράς από την πόλη-αφετηρία σε ένα από τα πανεπιστήμια και έπειτα της επιστροφής από ένα πανεπιστήμιο στην πόλη-αφετηρία (όχι απαραίτητα το ίδιο πανεπιστήμιο που ήταν η αφετηρία του ταξιδιού), είναι προσοδοφόρο για τα πανεπιστήμια να συνεργαστούν και να διαμοιραστούν το κόστος και θα ήταν δυνατό να διανείμουν τα έξοδα των ταξιδιών έτσι ώστε καμία συνέργεια πανεπιστημίων να μην είναι προτιμότερη από την μεμονωμένη ενέργεια ενός πανεπιστήμιου.

Πρόταση 7.2.8: *Έστω c ένα παίγνιο περιοδεύοντος πωλητή τέτοιο ώστε $i, j \in N$ να ισχύει: $\frac{w_{0i}+w_{j0}}{n} \geq \max\{w_{e(1)e(2)} + w_{e(2)e(3)} + \cdots + w_{e(n-1)e(n)} \mid e \in E(n)\}$. Τότε το παίγνιο c είναι ισορροπημένο.*

Απόδειξη: Χωρίς βλάβη της γενικότητας ας υποθέσουμε ότι $c(N) = w_{01} + w_{12} + \cdots + w_{n0}$. Έστω $x \in R^n$ορίζεται ως:

$$x_i = w_{i,i+1} + \frac{w_{0,1}+w_{n,0}}{n} \text{ για κάθε } i \in n\backslash\{n\}$$

$$x_n = w_{i,i+1} + \frac{w_{0,1}+w_{n,0}}{n}$$

Έστω $x(N) = \sum_{i \in N\backslash\{n\}} w_{i,i+1} + w_{0,1} + w_{n,0} = c(N)$

Και έστω $S \subset N, S \neq N$ με $e \in E(S)$ έτσι ώστε $c(S) = w_{0,e(1)} + w_{e(1),e(2)} + \cdots + w_{e(|S|),0}$. Στα ακόλουθα: $w_{e(1),e(2)} + w_{e(2),e(3)} + \cdots + w_{e(|S|-1),e(|S|)}$ συμβολίζεται με M_S και $\max\{w_{e(1),e(2)} + w_{e(2),e(3)} + \cdots + w_{e(n-1),e(n)} \mid e \in E(N)\}$ συμβολίζεται με M.

Τότε:

$$c(S) = w_{0,e(1)} + w_{e(|S|),0} + M_S$$

$$= \frac{|S|}{n}\left(w_{0,e(1)} + w_{e(|S|),0}\right) + \frac{n-|S|}{n}\left(w_{0,e(1)} + w_{e(|S|),0}\right) + M_S$$

$$\geq \frac{|S|}{n}\left(w_{0,e(1)} + w_{e(|S|),0}\right) + (n-|S|)M + M_S$$

$$= \frac{|S|}{n}\left(w_{0,e(1)} + w_{e(|S|),0}\right) + \frac{|S|}{n}M + \left(n - |S| - \frac{|S|}{n}\right)M + M_S$$

$$\geq \frac{|S|}{n}\left(w_{0,1} + w_{n,0} + \sum_{i \in S \setminus \{n\}} w_{i,i+1}\right) + \left(n - |S| - \frac{|S|}{n}\right) M + M_S$$

$$\geq \frac{|S|}{n}\left(w_{0,1} + w_{n,0} + \sum_{i \in S \setminus \{n\}} w_{i,i+1}\right) + \frac{n - |S|}{n} M + M_S$$

$$\geq \frac{|S|}{n}(w_{0,1} + w_{n,0}) + \sum_{i \in S \setminus \{n\}} w_{i,i+1}$$

$$= x(S)$$

Εδώ η δεύτερη ανισότητα ακολουθεί από το γεγονός ότι $w_{0,e(1)} + w_{e(|S|),0} + M < w_{0,1} + w_{n,0} + \sum_{i \in N \setminus \{n\}} w_{i,i+1}$

Έρχεται σε αντίφαση με

$c(N) = w_{0,1} + w_{1,2} + \cdots + w_{n,0}$

Επειδή κάθε πλάνο ταξιδιού που πηγαίνει από την πόλη 0 στην πόλη e(1) και τερματισμό από την πόλη e(|S|) στην πόλη 0 θα ήταν φθηνότερο. Έτσι $x \in C(c)$ και το c είναι ισορροπημένο. ■

***Πρόταση* 7.2.9:** *Μία κατάσταση που περιγράφεται από τα θεώρημα 7.2.7 μπορεί να προκύψει όταν ένας ομιλητής από τις Ηνωμένες Πολιτείες ή τον Καναδά έχει προσκληθεί για να δώσει μία διάλεξη σε κάποια πανεπιστήμια π.χ. στην Ολλανδία. Το κόστος του ταξιδιού στα πανεπιστήμια της Ολλανδίας είναι ασήμαντη σε σχέση με το κόστος του διηπειρωτικού ταξιδιού.*

Ας θεωρήσουμε την ακόλουθη παραλλαγή των παιγνίων περιοδεύοντος πωλητή. Στο παράδειγμα του ομιλητή και των πανεπιστημίων το κόστος $c(N)$ της συνεργίας N λαμβάνεται ξανά να είναι το συνολικό κόστος του φθηνότερου περίπατου του ομιλητή. Το κόστος $c(S)$ μίας συνέργιας $S \subset N, S \neq N$ ωστόσο, δεν είναι πλέον το κόστος του φθηνότερου περιπάτου μεταξύ των πανεπιστημίων του S αλλά είναι το κόστος το οποίο ανακύπτει παρακάμπτοντας τα πανεπιστήμια που δεν είναι στο S και κάνοντας επίσκεψη μόνο στα πανεπιστήμια που είναι στο S με την ίδια διάταξη όπως το πλάνο ταξιδίου στο N.

***Ορισμός* 7.2.10:** *Ένα παίγνιο c καλείται παίγνιο δρομολόγησης αν για όλα τα $i, j \in N_0$ υπάρχει $w_{ij} > 0$ έτσι ώστε να υπάρχει $e_N \in E(N)$ με*

$$c(N) = w_{0,e_N(1)} + w_{e_N(1),e_N(2)} + \cdots + w_{e_N(n),0}$$

$$= \min\{w_{0,e(1)} + w_{e(1),e(2)} + \cdots + w_{e(n),0} | e \in E(N)\}$$

και

$c(S) = w_{0,e_S(1)} + w_{e_S(1),e_S(2)} + \cdots + w_{e_S(|S|),0}$ *για κάθε* $S \in 2^N$

Όπου $e(S)$ *ορίζεται ως:*

$e_S(i) > e_s(j) \Leftrightarrow e_N(i) > e_N(j)$ *για κάθε* $i, j \in S$

Παρατήρηση 7.2.11: *Ένας λογικός έλεγχος για να χρησιμοποιήσουμε ένα παίγνιο δρομολόγησης αντί για ένα παίγνιο περιοδεύοντος πωλητή είναι να μοντελοποιηθεί μία κατάσταση όπως αυτή που περιγράφεται πιο πάνω που μπορεί σε κάθε συνέργεια* $S \subset N, S \neq N$ *προτιμά να κατασκευάσει ένα πλάνο ταξιδιού σε σχέση με ένα βέλτιστο πλάνο ταξιδιού από τη στιγμή που η εύρεση ενός βελτίστου πλάνου τείνει να θέλει πολύ υπολογιστικό χρόνο παρά οφέλη. Στην πραγματικότητα τα παίγνια δρομολόγησης δεν είναι συνδυαστικά παίγνια αφού μόνο ο υπολογισμός του c(N) εμπεριέχει την επίλυση ενός προβλήματος συνδυαστικής βελτιστοποίησης. Σημειώστε ότι εκτός από την μεγάλη συνέργεια των συνεργειών του ενός ατόμου επίσης έχουν το ίδιο κόστος σε ένα παίγνιο δρομολόγησης στο αντίστοιχο παίγνιο περιοδεύοντος πωλητή έτσι ώστε να προκύπτει αντίστοιχη λύση και για τα δύο παίγνια.*

Ορισμός 7.2.12: *Έστω c ένα παίγνιο δρομολόγησης και έστω* $e \in E(N)$. *Μία συνέργια T είναι μία e-συνδεδεμένη συνεργία αν T έχει την μορφή* $e^{-1}(i), e^{-1}(i+1), \dots, e^{-1}(i+p)\}$ *με* $\{i, i+1, \dots, i+p\} \subset N$.

Ορισμός 7.2.13: *Έστω c ένα παίγνιο δρομολόγησης και έστω* $e \in E(N)$. *Έστω* $S \subset N$. *Μία συνεργία T καλείται μία e-συνιστώσα του S αν (i) T ⊂ S,(ii) T είναι e-συνδεδεμένο (iii)* $T \cup \{i\}$ *δεν είναι e-συνδεδεμένο για κάθε* $i \in S \backslash T$.

Θεώρημα 7.2.14: *Έστω B μία ισορροπημένη συλλογή με βάρη* $\{\lambda_T\}_{T \in B}$. *Αν υπάρχει ένα* $e \in E(N)$ *τέτοιο ώστε το T να είναι e-συνδεδεμένο για κάθε* $T \in B$ *τότε υπάρχουν διαμερίσεις:* $B_1, B_2, \dots, B_q$ *του N τέτοια ώστε η ένωση όλων των* B_ι *να ισούται με το B kai ta* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q \geq 0$ *με*

$$\sum_{k=1}^{q} a_k = 1$$

Έτσι ώστε:

$$\lambda_T = \sum_{k=1}^{q} a_k 1 s_k(T)$$

Για όλα τα T που ανήκουν στο B.

Απόδειξη: Έστω ότι B είναι μία ισορροπημένη συνεργία με βάρη $\{\lambda_T\}_{T \in B}$*. Έτσι ώστε κάθε T που ανήκει στο B είναι e-συνδεδεμένο για ένα e που ανήκει στο E(N). Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι* $e(i) = i$ *για κάθε* $i \in N$*. Έτσι κάθε T που ανήκει στο B έχει τη μορφή* $\{i, i+1, \dots, i+p\} \subset N$*. Η απόδειξη θα συνεχιστεί με επαγωγή στο πλήθος των στοιχείων του B. Αν B έχει μόνο ένα στοιχείο τότε B=N και η ιδιότητα που τεθηκε από το θεώρημα τετριμμένα ισχύει. Υποθέτουμε ότι όλες οι ισορροπημένες συνέργειες με* m *ή λιγότερα στοιχεία ικανοποιούν την ιδιότητα. Εδώ θεωρούμε ότι το* $m \geq 1$*. Έστω B ότι είναι μια ισορροπημένη συνεργία με m+1 στοιχεία. Τότε υπάρχει ένα* T_1 *που ανήκει στο B με* T_1 *να είναι ίσο με* $\{1,2, \dots, j_i\}$ *όπου* $j_i < n$*. Επιδή το B είναι μια ισορροπημένη συνεργία υπάρχει ένα* $T_2 = \{j_1 + 1, \dots, j_2\}$*. An* $j_2 < n$ *τότε υπάρχει ένα* $T_3 \in B$ *με* $T_3 = \{j_2, \dots, j_3\}$*. Προχωρώντας με τον τρόπο αυτό με την σειρά:* $T_1, T_2, \dots, T_r$ *των στοιχείων του B μπορεί να εξασφαλιστεί επιλέγοντας*$T_1 = \{1, \dots, j_1\}$*,* $T_i = \{j_{i-1} + 1, \dots, j_i\}$ *για* $i \in \{2, \dots, r\}$ *με* $j_r = n$*. Έστω* $B_1 = \{T_1, T_2, \dots, T_r\}$ *τότε* B_1 *είναι μία διαμέριση του N. Ορίζουμε ως:*

$$a_1 \coloneqq \min_{T \in B_1} \lambda_T$$

Έστω B' μία συλλογή που περιλαμβάνει όλα τα στοιχεία του B εκτός από εκείντα τα T στο B_1 *με* $\lambda_T = \alpha_1$*. Αν* B' *είναι κενό τότε το επαγωγικό βήμα έχει ολοκληρωθεί με το* B_1 *με* $\lambda_T = \alpha_1$*. Αν* B'*είναι κενό τότε το επαγωγικό βήμα έχει ολοκληρωθεί με* B_1 *και* α_1*να έχουν οριστεί ως άνω. Αλλιώς ορίζουμε:*

$\lambda'_S \coloneqq \frac{\lambda_S}{1-a_1}$ *αν* $S \in B' \backslash B_1$

$\lambda'_S \coloneqq \frac{\lambda_S - a_1}{1-a_1}$ *αν* $S \in B' \cap B_1$

Τότε $\lambda'_S > 0$ *για κάθε* $S \in B'$ *και*

$$\sum_{S \in B'} \lambda'_S 1_S = \sum_{S \in B \backslash B_1} \frac{1_S \lambda_S}{1 - a_1} + \sum_{T \in B_1} \frac{1_T(\lambda_T - a_1)}{1 - a_1} =$$

$$= \frac{1}{1-a_1}\sum_{S\in B}\lambda_S 1_S - \frac{a_1}{1-a_1}\sum_{T\in B_1} 1_T =$$

$$= \frac{1_N}{1-a_1} - \frac{1_N a_1}{1-a_1} = 1_N$$

Έτσι το Β' είναι μία ισορροπημένη συλλογή με βάρη $\{\lambda'_S\}_{S\in B'}$ *και m ή λιγότερα στοιχεία. Από την επαγωγική υπόθεση έπεται ότι υπάρχουν διαμερίσεις*

$$B_2, B_3, \dots, B_q$$

του N *τέτοιες ώστε:*

$$\bigcup_{k=2}^{q} B_k = B'$$

και $\gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_q \geq 0$ *με*

$$\sum_{k=2}^{q} \gamma_k = 1$$

έτσι ώστε $\lambda'_S = \sum_{k=2}^{q} \gamma_k 1_{B_k}(S) = 1$ *για κάθε* $S \in B'$.

7.3 Παίγνια Συνδετικών Δένδρων Ελαχίστου Κόστους

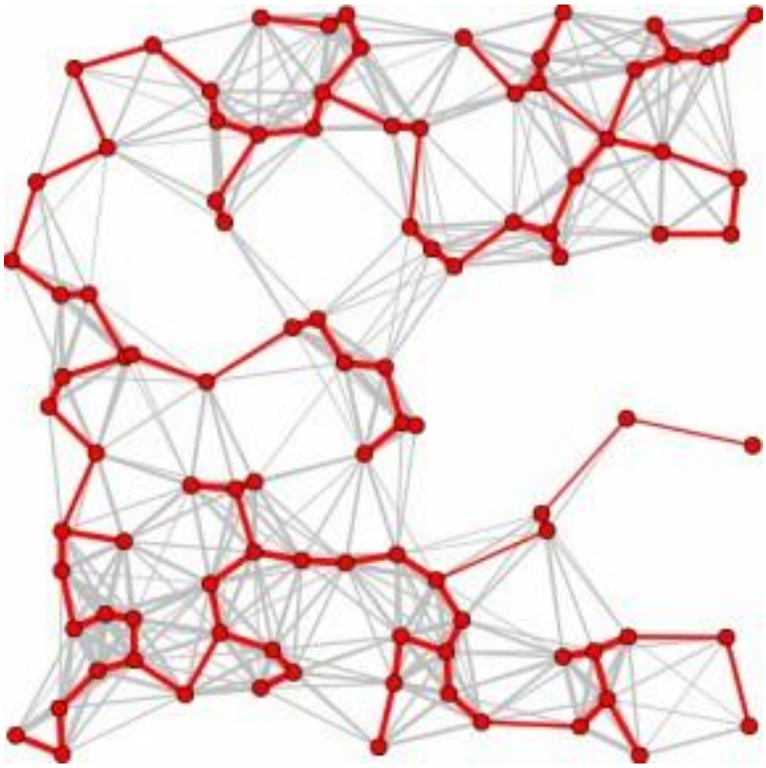
7.3.1 Η εκδοχή του MST ως παίγνιο

Θεωρήστε την ακόλουθη κατάσταση που έχει μελετηθεί στο [ClauKlei1973]: Πελάτες που βρίσκονται σε διαφορετικές γεωγραφικές τοποθεσίες πρέπει να συνδεθούν σε έναν συγκεκριμένο προμηθευτή. Ο προμηθευτής μπορεί για παράδειγμα να είναι ένα εργοστάσιο ηλεκτρικής ενέργειας και οι πελάτες να είναι πόλεις. Ένας πελάτης μπορεί να συνδεθεί απευθείας στον προμηθευτή ή μέσω άλλων πόλεων. Κάθε σύνδεση προσδιορίζεται από ένα μη αρνητικό κόστος. Στο [ClauKlei1973] προτάθηκε η ερώτηση πώς να προσδιοριστεί το ολικό κόστος που προσδιορίζεται από την σύνδεση του προμηθευτή με όλους τους πελάτες. Μελέτησαν διαφορετικούς τρόπους να μοιράσουν το κόστος στους πελάτες και συζήτησαν τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα των τρόπων αυτών. Επίσης έδωσαν μία λίστα από επιθυμητά κριτήρια για τον επιμερισμό του κόστους σε αυτήν την κατεύθυνση.

7.3.2 Η εκδοχή του MST ως πρόβλημα συνδυαστικής βελτιστοποίησης

Τυπικά αυτή η κατάσταση μπορεί να περιγραφεί ως ακολούθως: Έστω $N = \{1,2,\dots,n\}$ ότι είναι το σύνολο των πελατών και έστω ότι ο προμηθευτής συμβολίζεται με 0. Έστω G_N ο πλήρης γράφος που έχει σύνολο κορυφών $N \cup \{0\}$. Έστω E_N ότι συμβολίζει το σύνολο των ακμών του G_N. Μία ακμή του G_N συμβολίζεται με $l_{ij} = l_{ji}$ όπου $i, j \in N_0$ είναι τα άκρα της ακμής. Σε κάθε ακμή $l_{ij} \in E_N$ αποδίδεται ένα κόστος $k(l_{i,j})$ το οποίο είναι το βάρος που αποδίδεται αν επιλέξουμε την ακμή για την σύνδεση των πόλεων (ισοδύναμα αν η ακμή αυτή επιλεχθεί ως δομικό στοιχείο της λύσης του προβλήματος) . Το πρόβλημα τα εύρεσης του τρόπου να συνδέσουμε όλους τους πελάτες στον προμηθευτή είναι ισοδύναμο της εύρεσης ενός συνδετικού δένδρου ελαχίστου κόστους στο γράφημα G_N.

Το πρόβλημα εύρεσης του συνδετικού δένδρου ελαχίστου κόστους σε έναν γράφο με βάρη είναι ένα από τα πιο μελετημένα προβλήματα της θεωρίας γραφημάτων. Συγκεκριμένα στο πρόβλημα αυτό, δίδεται ένας μη κατευθυνόμενος γράφος $G = (V, E)$. Επίσης υπάρχει μία συνάρτηση απόδοσης μη αρνητικών βαρών στις ακμές δηλαδή συγκεκριμένα μία συνάρτηση: $W: E \to R^{+}$. Πολλές φορές το γράφημα απεικονίζεται και ως $G = (V, E, W)$ για να ενσωματώνεται σε αυτό και η συνάρτηση βάρους των ακμών. Σημειώνουμε ότι στον ορισμό αυτό καλύπτεται και η μη ύπαρξη ακμών αποδίδοντας σε αυτές ένα πολύ μεγάλο βάρος (π.χ. το άθροισμα των βαρών όλων των ακμών του γραφήματος πολλαπλασιασμένο επί μία θετική σταθερά). Το συνδετικό δένδρο ορίζεται ως ένα υπογράφημα του G το οποίο είναι δένδρο (δηλαδή συνδεόμενο και άκυκλο γράφημα με μοναδικό μονοπάτι από κάθε κορυφή σε κάθε κορυφή του γραφήματος). Γενικά ένα συνδεόμενο γράφημα έχει πολλά συνδετικά δένδρα και κάθε ένα από αυτά έχει ένα βάρος το οποίο ορίζεται ως το άθροισμα των βαρών των ακμών του. Αναζητούμε το συνδετικό δένδρο αυτό με το ελάχιστο βάρος από όλα τα συνδετικά δένδρα. Στο σχήμα φαίνονται επίσης ένα γράφημα και ένα συνδετικό του δένδρο σε ένα συνδεόμενο γράφημα:



Εικόνα 15: Ένας μη κατευθυνόμενος γράφος και ένα ελάχιστο συνδετικό του δένδρο

Στο παραπάνω γράφημα έχει υπολογιστεί ένα ελάχιστο συνδετικό δένδρο σε ένα γράφημα με βάρος ίσο με 1.

Το πρόβλημα έχει μελετηθεί εκτενώς στην βιβλιογραφία και έχουν προταθεί πολυωνυμικοί αλγόριθμοι για την επίλυσή του. Δημοφιλείς αλγόριθμοι σε αυτήν την κατεύθυνση είναι ο αλγόριθμος του Prim και ο αλγόριθμος του Kruskal. Στην συνέχεια συνεχίζουμε με την προσέγγιση του προβλήματος από τη σκοπιά της θεωρίας παιγνίων:

7.3.3 Ορισμοί και Παρατηρήσεις στα Παίγνια Συνδετικών Δένδρων

Θεώρημα 7.3.1: *Έστω c συνεργατικό παίγνιο είναι ένα παίγνιο ελάχιστου συνδετικού δένδρου με συσχετισμένο γράφο G_N. Έστω T_N ένα ελάχιστο συνδετικό δένδρο του γραφήματος G_N. Για κάθε $i \in N$ έστω c_i η ακμή του μοναδικού μονοπατιού από τον κόμβο 0 στον κόμβο i. Έστω $x \in R^n$ που ορίζεται από την σχέση: $x_i \coloneqq k(e_i)$ για κάθε $i \in N$. Τότε*

$$x(N) = \sum_{i \in N} k(e_i)$$

Για $S \in 2^n \backslash \{0\}$ *έστω* T_S*ένα ελαχίστου κόστους συνδετικού δένδρου του* G_S. *Για κάθε* $i \in S$ *έστω* e_i^S*να είναι η ακμή στο μοναδικό μονοπάτι από την κορυφή 0 στην κορυφή i sto* T_S *με το ένα άκρο να είναι η κορυφή i. Τότε*

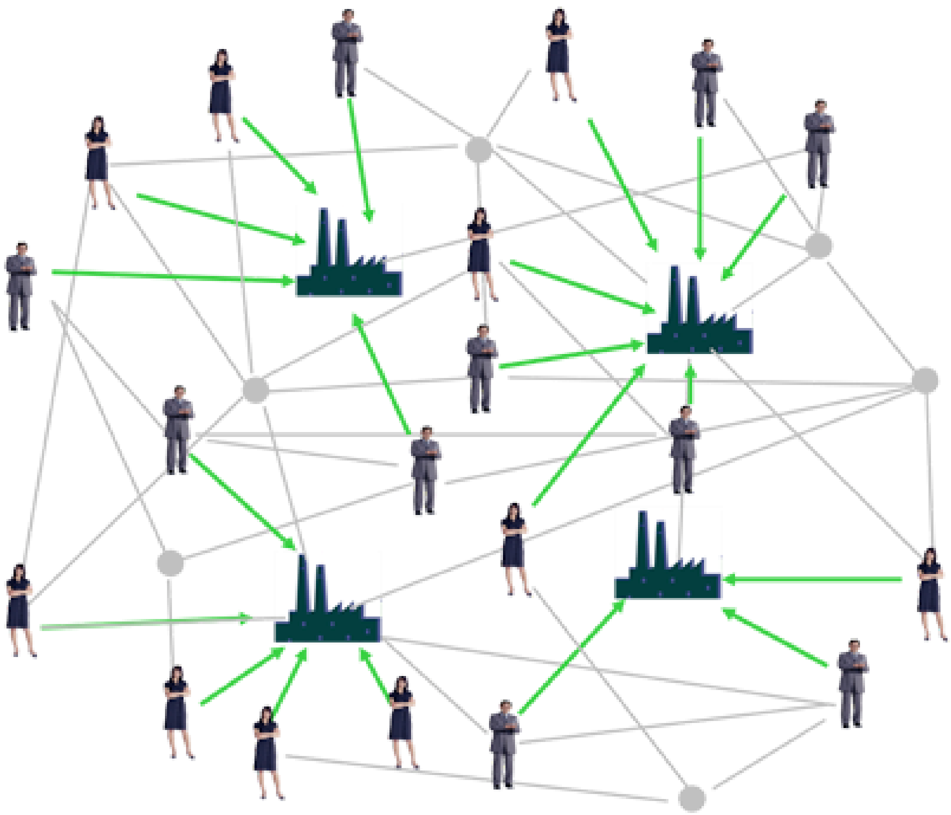
$$c(S) = \sum_{i \in S} k(e_i^S)$$

Ας υποθέσουμε επίσης ότι $x(S) > c(S)$, *τότε υπάρχει ένα* $i \in S$ *με* $\kappa(e_i^S) < k(e_i)$ *και* $\kappa(e_j^S) < k(e_j)$ *για κάθε j στο μονοπάτι από το 0 στη i στο* T_S *με το ένα άκρο ίσο με i. Αντικαθιστούμε στο* T_N *την ακμή* e_i *από την ακμή* e_i^S. *Αυτό έχει ως αποτέλεσμα ένα συνδετικό δένδρο του* G_N *με μικρότερο κόστος από το* T_N *που έρχεται σε αντίφαση με το γεγονός ότι το* T_N *είναι ένα συνδετικό δένδρο ελαχίστους κόστους του* G_N. *Για το λόγο αυτό* $x(S) \leq c(S)$ *για κάθε* $S \in 2^N$ *και* $x \in C(c)$.

7.4 Παίγνια Τοποθέτησης Υπηρεσιών

Τα παίγνια τοποθέτησης έχουν προταθεί από τον Tamir [Tami1980a]. Έστω G ένας Γράφος με σύνολο κόμβων V και σύνολο ακμών E. Κάθε ακμή έχει ένα θετικό μήκος (βάρος). Το μήκος ενός μονοπατιού στο G είναι το άθροισμα των ακμών που ανήκουν στο μονοπάτι. Για δύο κόμβους $v_i, v_2 \in V$ η απόσταση $d(v_1, v_2)$ μεταξύ των v_1 και v_2 ορίζεται ως το μήκος του συντομότερου περίπατου από το v_1 στο v_2 Δύο όχι απαραίτητα ξένα μεταξύ τους υποσύνολα N και Q του V δίδονται. $N = \{1,2,\dots,n\}$ είναι το σύνολο των παικτών. Κάθε παίκτης θεωρείται ότι τοποθετείται στον αντίστοιχο κόμβο. Τα κέντρα εξυπηρέτησης πρέπει να τοποθετηθούν στο G έτσι ώστε να παρέχουν υπηρεσίες στους παίκτες. Το σύνολο $Q = \{q_1, \dots, q_t\}$ συμβολίζει τις πιθανές τοποθεσίες για τα κέντρα εξυπηρέτησης.

Το κόστος για την εγκατάσταση ενός κέντρου εξυπηρέτησης στο q_j είναι $k_j \geq 0$. Ο παίκτης i απαιτεί ότι τουλάχιστον ένα κέντρο εξυπηρέτησης θα τοποθετηθεί σε απόσταση $r_i \geq 0$ από αυτόν. Το πρόβλημα είναι να τοποθετηθούν τα κέντρα εξυπηρέτησης με τέτοιο τρόπο ώστε οι απαιτήσεις να ικανοποιούνται και το κόστος να ελαχιστοποιείται. Υποθέτουμε ότι όλες οι απαιτήσεις μπορούν να ικανοποιηθούν.



Εικόνα 16: Παίγνιο Τοποθέτησης Υπηρεσιών

Ένας Γράφος (κορυφές και ακμές αποτυπωμένες με γκρι χρώμα) στον οποίο τοποθετούνται τα κέντρα εξυπηρέτησης (εργοστάσια ηλεκτρικής ενέργειας) και οι πελάτες που αγοράζουν την υπηρεσία (αγοραστές ηλεκτρικής ενέργειας). Με πράσινο χρώμα υποδεικνύεται από ποιο εργοστάσιο εξυπηρετείται κάθε πελάτης χρησιμοποιώντας όμως τις γκρι ακμές του γράφου.

Το αντίστοιχο πρόβλημα στην βιβλιογραφία της βελτιστοποίησης είναι το πρόβλημα τοποθέτησης υπηρεσιών (facility location problem) το οποίο είναι ένα πολύ γνωστό NP-πλήρες πρόβλημα το οποίο έχει αποδειχθεί NP-Hard. Έχει ενδιαφέρον ότι το πρόβλημα έχει αυξημένη δυσκολία με αποτέλεσμα η ίδια η προσέγγιση του προβλήματος από προσεγγιστικό αλγόριθμο είναι επίσης NP-Hard (συγκεκριμένα η εύρεση ενός προσεγγιστικού αλγορίθμου στον οποίο βρίσκουμε προσεγγιστική λύση ως συνάρτηση του επιθυμητού σφάλματος). Έχει αποδειχθεί ότι το πρόβλημα της προσέγγισης με παράγοντα μικρότερο από 1.82 είναι NP-Hard.

Το συνεργατικό παίγνιο c που μπορεί να κατασκευαστεί από αυτήν την διαχείριση έχει ως ακολούθως:

Στο παίγνιο αυτό το $c(s)$ ορίζεται να είναι το ελάχιστο κόστος που απαιτείται για να τοποθετήσουμε τα κέντρα εξυπηρέτησης με τέτοιο τρόπο οι απαιτήσεις όλων των μελών του S να ικανοποιούνται. Έστω $A=a_{ij}$ να είναι ο mxt πίνακας που ορίζεται ως εξής:

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 1, \alpha\nu\ d(i, q_j) \leq r_i \\ 0, \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \end{cases}$$

7.4.1 Ορισμός Παιγνίων Τοποθέτησης Υπηρεσιών

Οι ακόλουθοι ορισμοί ορίζουν επαρκώς ένα παίγνιο τοποθέτησης υπηρεσιών:

Ορισμός 7.5.1: *Το κόστος c(S) μίας συνεργίας S σε ένα παίγνιο τοποθέτησης υπηρεσιών s δίνεται από την ακόλουθη σχέση:*

$$c(S) = \min kx$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$Ax \geq e^S$$

$$x_j \in \{0,1\}$$

Για όλα τα $j \in \{1, \dots, t\}$

Όπου τα $e^S \in R^n$ *ορίζονται από τη σχέση* $e_i^S = 1_S(i)$ *και ο πίνακας A ορίζεται όπως πρωτύτερα και το διάνυσμα* $k \in R^n$ *δίδεται παραπάνω.*

Θεώρημα 7.5.2(Tamir): *Έστω c ένα παίγνιο τοποθέτησης υπηρεσιών στο οποίο ο γράφος G είναι δένδρο. Τότε* $C(c) \neq 0$

Απόδειξη: Από το Tamir και την διατύπωση που έδωσε στο πρόβλημα έπεται ότι:

$$c(S) = \min kx$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$Ax \geq e^S$$

$$x_j \in \{0,1\}$$

Το δυικό πρόγραμμα του γραμμικού προγράμματος δίδεται από τη σχέση

$$c(S) = \max ye^S$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$yA \leq c$$

$$y \geq 0$$

Κεφάλαιο 8: Συμπεράσματα - Επεκτάσεις

Σκοπός της διπλωματικής αυτής εργασίας ήταν η βιβλιογραφική μελέτη συνεργατικών παιγνίων με ειδίκευση στα προβλήματα που προκύπτουν από καταστάσεις συνδυαστικής βελτιστοποίησης.

Στο κεφάλαιο 2 έγινε μια γενική εισαγωγή στην θεωρία παιγνίων με έμφαση στα μη συνεργατικά παίγνια, σε χαρακτηριστικά παίγνια και τον ορισμό του μέτρου του τιμήματος της αναρχίας.

Στο κεφάλαιο 3 έγινε εισαγωγή των βασικών ορισμών των συνεργατικών παιγνίων και μελετήθηκε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα ως παράδειγμα αναφοράς για τους ορισμού που ακολουθούν.

Στο κεφάλαιο 4 έγινε ο χαρακτηρισμός των παικτών σε συνεργατικά παίγνια με ρόλους κλειδιά στην εξέλιξη του παιγνίου με τον αντίστοιχο μαθηματικό συμβολισμό. Επίσης έγινε εισαγωγή μιας βασικής έννοιας που ήταν ο δείκτης επιρροής ενός παίκτη στο παίγνιο.

Στο κεφάλαιο 5 έγινε μια αναφορά στα παίγνια που ανακύπτουν από την μελέτη προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού. Ο γραμμικός προγραμματισμός είναι σημαντικός γιατί όλα τα προβλήματα συνδυαστικής δομής μπορούν να εκφραστούν σαν προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού και συγκεκριμένα μιας συγκεκριμένης κατηγορίας αυτών, δηλαδή των μοντέλων ακεραίου προγραμματισμού

Στο κεφάλαιο 6 μελετήσαμε παίγνια συνδυαστικής δομής και συγκεκριμένα παίγνια που το υπόβαθρό τους είναι παίγνια ταιριασμάτων και μεταθέσεων (τα οποία είναι δύο πολύ βασικές συνδυαστικές δομές).

Στο κεφάλαιο 7 μελετήσαμε βασικά παίγνια συνεργατικής φύσεως που προκύπτουν από τρία βασικά προβλήματα συνδυαστικής βελτιστοποίησης δηλαδή τα παίγνια περιοδεύοντος πωλητή, τα παίγνια ελάχιστων συνδετικών δένδρων και τα παίγνια τοποθέτησης υπηρεσιών.

Αρκετή περαιτέρω εργασία τόσο σε θεωρητικό όσο και σε πειραματικό επίπεδο φαίνεται στον ορίζοντα αυτού του πεδίου της θεωρίας παιγνίων. Πολλά ακόμη NP-complete προβλήματα μπορούν να θεαθούν από την οπτική γωνία των συνεργατικών παιγνίων. Ορισμοί δεικτών επιρροής αξίζει να μελετηθούν επίσης στην οπτική γωνία των προβλημάτων αυτών. Αντίστοιχοι ορισμοί με το τίμημα της αναρχίας δεν έχουν οριστεί με επάρκεια στα συνεργατικά παίγνια.

Επίσης η πολυπλοκότητα της μαθηματικής μοντελοποίησης αυτών των προβλημάτων αξίζει να προσομοιωθεί με υπολογιστικές μεθόδους για να εξαχθούν στατιστικά συμπεράσματα για την αποτίμηση των ειδών των παικτών, των δεικτών επιρροής τους και στοχαστικών συντελεστών που θα μελετούν το τίμημα της μη κεντρικοποιημένης λήψης των αποφάσεων των παικτών.

Αναφορές

[AumaDrez74] Aumann, R.J. and J.H. Drèze (1974). Cooperative games with coalition structures. International Journal of Game Theory 3, 217-237.

[AumaMasc85] Aumann, R.J. and M. Maschler (1985). Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud. Journal of Economic Theory 36, 195-213.

[Bank81] Banker, R.D. (1981). Equity considerations in traditional full cost allocation practices: An axiomatic perspective. In: Joint Cost Allocations (S. Moriarity, ed.). University of Oklahoma, 110-130.

[BanzIll65] Banzhaf, J.F. Ill (1965) Weighted voting doesn't work: A mathematical analysis. Rutgers Law Review 19, 317-343.

[Bird76] Bird, C.G. (1976). On cost allocation for a spanning tree: A game theoretic approach. Networks 6, 335-350.

[Boig80] Böiger, E.M. (1980). A class of power indices for voting games. International Journal of Game Theory 9, 217-232.

[Bolg82] Bolger, E.M. (1982). Characterizing the Banzhaf and Shapley values assuming limited linearity. International Journal of Game Theory 11, 1-12.

[Bram75] Brams, S.J. (1975). Game theory and politics. Free Press, New York.

[Bond63] Bondareva, O.N. (1963). Certain applications of the methods of linear programming to the theory of cooperative games. (In Russian) Problemy Kibernetiki 10, 119-139.

[Claus73] Claus, A. and Kleitman, D.J. (1973). Cost allocation for a spanning tree. Networks 3, 289-304.

[Cole71] Coleman, J.S. (1971). Control of collectivities and the power of a collectivity to act. In: Social Choice (B. Lieberman, ed.). Gordon and Breach, London, 269-300.

[CrawKno81] Crawford, V.P. and E.M. Knoer (1981). Job matching with heterogeneous firms and workers. Econometrica 49, 437-450.

[Curi87a] Curiel, I.J. (1987a). A class of non-normalized power indices for simple games. Mathematical Social Sciences 13, 141-152.

[Curi87b] Curiel, I.J. (1987b). Combinatorial games. In: Surveys in game theory and related topics (H.J.M. Peters and O.J. Vrieze eds.) CWI-tract 39. Centre for Mathematics and Computer Science, Amsterdam, 229-250.

[CuriDerk87] Curiel, I.J., J.J.M. Derks and S.H. Tijs (1987). On balanced games and games with committee control. Report 8732, Department of Mathematics, Catholic University, Nijmegen, The Netherlands.

[CuriMasc87] Curiel, I.J., M. Maschlerand S.H. Tijs (1987). Bankruptcy games. Zeitschrift für Operations Research Series A 31, 143-159.

[CuriPede88a] Curiel, I.J., G. Pederzoli and S.H. Tijs (1988a). Reward allocations in production systems. In: Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems

(H.A. Eiselt and G. Pederzolieds.). Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 186-199.

[CuriPede88b] Curiel, I.J., G. Pederzoli and S.H. Tijs (1988b). Sequencing games. European Journal of Operational Research to appear.

[CuriTijs86] Curiel, I.J. and S.H. Tijs (1986). Assignment games and permutation games. Methods of Operations Research 54, 323-334.

[CuriDavi65] Davis, M. and M. Maschler (1965). The kernel of a cooperative game. Naval Research Logistics Quarterly 12, 223-259.

[DeegPack78] Deegan, J. and E.W. Packel (1978). A new index of power for simple nperson games. International Journal of Game Theory!, 113-123.

[DeegPack83] Deegan, J. and E.W. Packel (1983). To the (minimal winning) victors go the (equally divided) spoils: A new power index for simple η-person games. In: Political and Related Models (S.J. Brams, W.F. Lucas and P.D. Straffin Jr. eds.). Springer-Verlag, New York, 239-255.

[Derk87] Derks, J.J.M. (1987). Decomposition of games with non-empty core into veto-controlled simple games. OR Spektrum 9, 81-85.

[Drie85a] Driessen, T.S.H. (1985a). A new axiomatic characterization of the Shapleyvalue. Methods of Operations Research 50, 505-517.

[Drie85b] Driessen, T.S.H. (1985b). Properties of 1-convex n-person games. OR Spektrum 7, 19-26.

[Drie85c] Driessen, T.S.H. (1985c). Contributions to the theory of cooperative games: The r-value and ¿-convex games. Ph.D. Thesis, Catholic University of Nijmegen.

[DrieTijs84] Driessen, T.S.H. and S.II. Tijs (1984). Extensions and modifications of the r-value for cooperative games. In: Selected Topics in Operations Research and Mathematical Economics (G. Hammer and D. Pallaschke eds.). Springer-Verlag, Berlin, 252-261.

[DrieTijs85] Driessen, T.S.H. and S.H. Tijs (1985). The r-value, the core and semiconvex games. International Journal of Game Theory 14, 229-247.

[Dube75] Dubey, P. (1975). On the uniqueness of the Shapley-value. International Journal of Game Theory 4, 131-139.

[DubeShap79] Dubey, P. and L.S. Shapley (1979). Mathematical properties of the Banzhaf power index. Mathematics of Operations Research 4, 99-131.

[DubeShap84] Dubey, P. and L.S. Shapley (1984). Totally balanced games arising from controlled programming problems. Mathematical Programming 29, 245-267.

[DubiFree81] Dubins, L.E. and D.L. Freedman (1981). Machiavelli and the Gale-Shapley algorithm. American Mathematical Monthly 88, 485-494.

[Edmo67] Edmonds, J. (1967). Optimum branchings. J. Res. Bur. Standards Sect. B71, 233-240.

[FordFulk62] Ford, L.R. Jr. and D.R. Fulkerson (1962). Flows in Networks. Princeton University Press, Princeton.

[Gale84] Gale, D. (1984). Equilibrium in a discrete exchange economy with money. International Journal of Game Theory 13, 61-64.

[GaleShap62] Gale, D. and L.S. Shapley (1962). College admission and the stability of marriage. American Mathematical Monthly 69, 9-15.

[GaleSoto85] Gale, D. and M. Sotomayor (1985). Ms. Machiavelli and the stable matching problem. American Mathematical Monthly 92, 261-268.

[Gill53] Gilles, D.B. (1953). Some theorems on n-person games. Ph.D. Thesis, Princeton University.

[GranHube81] Granot, D. and G. Huberman (1981). Minimum cost spanning tree games. Mathematical programming 21, 1-18.

[GranHube82] Granot, D. and G. Huberman(1982). The relationship between convex games and minimal cost spanning tree games: A case for permutationally convex games. Siam Journal of Algebra and Discrete Mathematics 3, 288- 292.

[HartMasc85] Hart, S. and A. Mas-Colell (1985). The potential: a new approach to the value in multi-person allocation problems. Discussion paper 1157, Harvard Institute of Economic Research, Harvard University, Cambridge.

[HersMiln53] Herstein, I.N. and J. Milnor (1953). An axiomatic approach to measurable utility. Econometrica 21, 291-297.

[Ichi81] Ichiishi, T. (1981). Super-modularity: Applications to convex games and to the greedy algorithm for LP. Journal of Economic Theory 25, 283-286.

[KalaZeme82a] Kalai, E. and E. Zemel (1982a). Totally balanced games and games of flow. Mathematics of Operations Research 7, 476-478.

[KalaZeme82b] Kalai, E. and E. Zemel (1982b). Generalized networks problems yielding totally balanced games. Operations Research 30, 998-1008.

[Kane82] Kaneko, M. (1982). The central assignment game and the assignment markets. Journal of Mathematical Economics 10, 205-232.

[Kane83] Kaneko, M. (1983). Housing markets with indivisibilities. Journal of Urban Economics 13, 22-50.

[KaneYama86] Kaneko, M. and Y. Yamamoto (1986). The existence and computation of competitive equilibria in markets with an indivisible commodity. Journal of Economic Theory 38, 118-136.

[Kilg74] Kilgour, D.M. (1974). A Shapley-value for cooperative games with quarelling. In: Game Theory as a Theory of Conflict Resolution (A. Rapoport ed.). D. Reidel, Dordrecht, Holland, 193-206.

[KoutPapa94] E. Koutsoupias, C. H. Papadimitriou Worst-case equilibria, STACS 99

[Luca83] Lucas, W.F. (1983). Measuring power in weighted voting systems. In: Po- liticai and Related Models (S.J. Brams, W.F. Lucas and P.D. Straffin Jr. eds.). Springer-Verlag, New York, 181-238.

[MascPele72] Maschler, M., B. Peleg and L.S. Shapley (1972). The kernel and bargaining set for convex games. International Journal of Game Theory 1, 73-93.

[Megi78a] Megiddo, N. (1978a). Cost allocation for Steiner trees. Networks 8, 1-6.

[Megi78b] Megiddo, N. (1978b). Computationally complexity of the game theory approach to cost allocation for a tree. Mathematics of Operations Research 3, 189-196.

[Moul85] Moulin, H. (1985). The separability axiom and equal-sharing methods. Journal of Economic Theory 36, 120-148.

[Meye77] Myerson, R.B. (1977). Graphs and cooperation in games. Mathematics of Operations Research 2, 225-229.

[NeumMorg44] Neumann, J. von and 0. Morgenstern (1944). Theory of games and economic behavior. Princeton University Press, Princeton.

[Nash1950] Nash, John (1950) "Equilibrium points in n-person games" Proceedings of the National Academy of Sciences36(1):48-49.

[Nash1951] Nash, John (1951) "Non-Cooperative Games" The Annals of Mathematics 54(2):286-295.

[Onei82] O'Neill, B. (1982). A problem of rights arbitration from the Talmud. Mathematical Social Sciences 2, 345-371.

[Owen82] Owen, G. (1972). Multilinear extensions of games. Managament Science 18, 64-79.

[Owen75a] Owen, G. (1975a). Multilinear extensions and the Banzhaf value. Naval Research Logistics Quarterly 22, 741-750.

[Owen75b] Owen, G. (1975b). The core of linear production games. Mathematical Programming 9, 358-370.

[Owen77] Owen, G. (1977). Values of games with a priori unions. In: Mathematical Economics and Game Theory (R. Henn and 0. Moeschlin eds.). Berlin, 76- 88.

[Owen81] Owen, G. (1981). Modification of the Banzhaf-Coleman index for games with a priori unions. In: Power, Voting, and Voting Power (M.J. Holler ed.). Physica-Verlag, Würzburg.

[Owen82] Owen, G. (1982). Game theory (second edition). Academic Press, Orlando.

[Owen84] Owen, G. (1984). Values of graph restricted games. Working paper, Deparment of Mathematics, Naval Postgraduate School, Monterey.

[PackDeeg80] Packel, E.W. and J. Deegan (1980). An axiomated family of power indices for simple n-person games. Public Choice 35, 229-239.

[Pele85] Peleg, B. (1985). On the reduced game property and its converse. International Journal of Game Theory 15, 187-200.

[PottCuri87] Potters, J.A.M., I.J. Curiel and S.H. Tijs (1987). Traveling salesman games. Report 8712, Department of Mathematics, Catholic University, Nijmegen, The Netherlands.

[Quin84] Quinzii, M. (1984). Core and competitive equilibria with indivisibilities. 131 International Journal of Game Theory 13, 41-60.

[refTSP] http://mathematica.stackexchange.com/questions/15985/solving-the-travelling-salesman-problem. Ανάκτηση την 20.05.2015

[Rike62] Riker, W.H. (1962). The theory of political coalitions. Yale University Press, New Haven.

[Roth77] Roth, A.E. (1977). Utility functions for simple games. Journal of Economic Theory 16, 481-489.

[Roth82] Roth, A.E. (1982). The economics of matching: Stability and incentives. Mathematics of Operations Research 7, 617-628.

[Roth84] Roth, A.E. (1984). Stability and polarization of interests in job matching. Econometrica 52, 47-57.

[Roth85] Roth, A.E. (1985) The college admission problem is not equivalent to the marriage problem. Journal of Economic Theory 36, 277-288.

[SameZeme84] Samet, D. and E. Zemel (1984). On the core and dual set of linear programming games. Mathematics and Operations Research 9, 309-316.

[Schme69] Schmeidler, D. (1969). The nucleolus of a characteristic function game. Siam Journal of Applied Mathematics 17, 1163-1170.

[Shap53] Shapley, L.S. (1953). A value for n-person games. In: Contributions to the Theory of Games II (H. Kuhn and A.W. Tucker eds.). Princeton University Press, Princeton, 307-317.

[Shap62] Shapley, L.S. (1962). Simple games: An outline of the descriptive theory. Behavioral Science 7, 59-66.

[Shap67] Shapley, L.S. (1967). On balanced sets and cores. Naval Research Logistics Quarterly 14, 453-460.

[Shap71] Shapley, L.S. (1971). Cores of con vex games. International Journal of Game Theory I, 11-26.

[ShapScar74] Shapley, L.S. and H. Scarf (1974). On cores and indivisibilities. Journal of Mathematical Economics 1, 23-37.

[ShapShub54] Shapley, L.S. and M. Shubik (1954). A method for evaluating the distribution of power in a committee system. American Political Science Review 48, 787-792.

[ShapShub72] Shapley, L.S. and M.Shubik (1972). The assignment game I: The core. International Journal of Game Theory 1, 111-130.

[Sobo75] Sobolev, A.I. (1975). The characterization of optimality principles in cooperative games by functional equations (in Russian). Mathematical Methods in the Social Sciences 6, 150-165.

[Spin71] Spinetto, R.D. (1971). Solution concepts of n-person cooperative games as points in the games space. Technical Report 138, Department of Operations Research, College of Engineering, Cornell University, Ithaca.

[Stra83] Straffin, P.D. Jr. (1983). Power indices in politics. In: Political and Related Models (S.J. Brams, W.F. Lucas and P.D. Straffin Jr. eds.). S ρ ringer-Verlag, New York.

[Tami80a] Tamir, A. (1980a). On the core of cost allocation games defined on location problems. Deparment of Statistics, Tel-Aviv University.

[Tami80b] Tamir, A. (1980b). A class of balanced matrices arising from location problems. Deparment of Statistics, Tel-Aviv University.

[Tijs81] Tijs, S.H. (1981). Bounds for the core and the r-value. In: Game Theory and Mathematical Economics (O. Moeschlin and D. Pallaschke eds.). North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 123-132.

[Tijs87] Tijs, S.H. (1987). An axiomatization of the r-value. Mathematical Social Sciences 13, 177-181.

[TijsDrie86a] Tijs, S.H. and T.S.H. Driessen (1986a). Extensions of solutions concepts by means of multiplicative ε-tax games. Mathematical Social Sciences 12, 9-20.

[TijsDrie86b] Tijs, S.H. and T.S.H. Driessen (1986b). Game theory and cost allocation problems. Management Science 32, 1015-1028.

[TijsLipp82] Tijs, S.H. and F.A.S. Lipperts (1982). The hypercube and the core cover of η-person cooperative games. Cahiers du Centre de Recherche Operationelle 24, 27-37.

[TijsPart84] Tijs, S.H., T.Parthasarathy, J.A.M. Potters and V. Rajendra Prasad (1984). Permutation games: Another class of totally balanced games. OR Spektrum 6, 119-123.

[Tuck60] Tucker, A.W. (1960). On directed graphs and integer programs. Princeton University Press, Princeton.

[Wako84] Wako, J. (1984). A note on the strong core of a market with indivisible goods. Journal of Mathematical Economics 13, 189-194.

[Wako86] Wako, J. (1986). Strong core and competitive equilibria of an exchange market with indivisible goods. Tokyo Center of Game Theory, Tokyo Institute of Technology.

[Webe78] Weber, R.J. (1978). Probabilistic values for games. Cowles Foundation Discussion Paper 417R, Yale University, New Haven.

[Webe79] Weber, R.J. (1979). Subjectivity in the valuation of games. IniGame Theory and Related Topics (0. Moeschlin and D. Pallaschke eds.). North-Holland, Amsterdam, 129-136.

[Youn85a] Young, H.P. (1985a). Monotonie solutions of cooperative games. International Journal of Game Theory 14, 65-72.

[Youn85b] Young, H.P. (1985b) ed. Cost allocation: Methods, principles, applications. North-Holland, Amsterdam.
[Youn87] Young, H.P. (1987). On dividing an amount according to individual claims or liabilities. Mathematics of Operations Research 12, 398-414.