

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗΣ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ

**ΜΠΣ ΣΤΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗ  
ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ**

***THE OUTPUT GAP AND THE INDUSTRIAL PRODUCTION GAP AS  
PREDICTORS OF STOCK EXCESS RETURNS***

ΓΕΩΡΓΟΠΟΥΛΟΣ ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ ΜΧΡΗ 0301

**ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:  
ΑΝ.ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΜΑΛΛΙΑΡΟΠΟΥΛΟΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ**

ΜΕΛΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗΣ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΑΝΖΟΥΛΑΤΟΣ ΑΓΓΕΛΟΣ

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΔΙΑΚΟΓΙΑΝΝΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΣ ΕΤΟΣ 2004-2005

The output gap and the industrial production gap as predictors of stock excess returns

*Αφιερώνεται στους γονείς μου*

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

### Περιεχόμενα

### Πρόλογος

### **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 Η Θεωρία Αποτίμησης και οι άλλες επιστήμες**

- 1.1 Εισαγωγή
- 1.2 Στοιχεία Μαθηματικών και Στατιστικής
  - 1.2.1.1 Θεωρία Συνόλων – Θεωρία Μέτρου – Γραμμική Άλγεβρα
  - 1.2.1.2 Απειροστικός Λογισμός – Βελτιστοποίηση
  - 1.2.1.3 Στατιστική – Θεωρία Πιθανοτήτων
- 1.3 Στοιχεία Μικροοικονομικής Θεωρίας
- 1.4 Στοιχεία Μακροοικονομικής Θεωρίας

### **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 Βασικές Αρχές Θεωρίας Αποτίμησης Αξιογράφων**

- 2.1 Το Βασικό Υπόδειγμα Καταναλωτή
- 2.2 Ο Στοχαστικός Συντελεστής Προεξόφλησης
- 2.3 Βελτιστοποίηση Χρησιμότητας και Τιμολόγηση Αξιογράφων
- 2.4 Το Υπόδειγμα CAPM
- 2.5 Beta Pricing Models and the Puzzles
- 2.6 Προβλεψιμότητα των αποδόσεων

### **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 Επισκόπηση Βιβλιογραφίας**

- 3.1 Εισαγωγή
- 3.2 Η περίοδος 1950 – 1979
- 3.3 Η περίοδος 1980 – 1989
- 3.4 Η περίοδος 1990 – 1999
- 3.5 Η περίοδος 2000 – 2005

### **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 Παρουσίαση Υποδείγματος – Εμπειρικά Αποτελέσματα**

- 4.1 Εισαγωγή
- 4.2 Υπάρχει Τάση στο ΑΕΠ;
  - 4.2.1 Εισαγωγή
  - 4.2.2 Transitory Components στο ΑΕΠ των ΗΠΑ
- 4.3 Οι Lettau – Ludvigson και η Προβλεπτικότητα των Αποδόσεων

- 4.3.1 Εισαγωγή
- 4.3.2 Εκτίμηση των Αποκλίσεων ανάμεσα σε Κατανάλωση, Εργατικό Εισόδημα και Asset Holdings
- 4.4 Output gap: Μια νέα Προβλεπτική Μεταβλητή;
  - 4.4.1 Εισαγωγή
  - 4.4.2 Μέθοδοι Εκτίμησης της Τάσης του ΑΕΠ
- 4.5 Παρουσίαση Μοντέλου
  - 4.5.1 Η Αντιπροσωπευτική Οικονομία
  - 4.5.2 Οι Καταστατικές Μεταβλητές
  - 4.5.3 Πηγές και Προέλευση των Δεδομένων
- 4.6 Εμπειρικά Αποτελέσματα
  - 4.6.1 Τριμηνιαία Δεδομένα
    - 4.6.1.1 Σύνομη Στατιστική Παρουσίαση Δεδομένων
    - 4.6.1.2 Εκτίμηση του Μοντέλου
  - 4.6.2 Μηνιαία Δεδομένα
    - 4.6.2.1 Σύνομη Στατιστική Παρουσίαση Δεδομένων
    - 4.6.2.2 Εκτίμηση του Μοντέλου
- 4.7 Προβλέψεις
  - 4.7.1 Εισαγωγή
  - 4.7.2 Τριμηνιαία Δεδομένα
  - 4.7.3 Μηνιαία Δεδομένα
- 4.8 Συμπεράσματα

## Πηγές

## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η αποτίμηση αξιογράφων συνιστά ένα από τα πλέον ενδιαφέροντα αντικείμενα της χρηματοοικονομικής. Βασικός της σκοπός είναι η κατανόηση και η επεξήγηση των παραγόντων και των μηχανισμών που καθορίζουν τις τιμές των αξιογράφων.

Ο κυριότερος λόγος που καθιστά τη θεωρία αποτίμησης αξιογράφων ενδιαφέρουσα, είναι το γεγονός ότι ο σημαντικότερος συντελεστής διαμορφώσης της τιμής ενός αξιογράφου είναι ο κίνδυνός του. Με άλλα λόγια, η θεωρία αποτίμησης αξιογράφων διαμορφώνεται και λειτουργεί ως επί το πλείστον σε περιβάλλον αβεβαιότητας.

Πέραν των παραγόντων που καθορίζουν τις τιμές και τις αποδόσεις των αξιογράφων, η θεωρία αποτίμησης αξιογράφων ερευνά και τη συμπεριφορά των τιμών αυτών διαχρονικά και σε συνάρτηση με την κατάσταση της οικονομίας. Επίσης, προσπαθεί να εξηγήσει γιατί κάποια αξιόγραφα δίνουν μεγαλύτερες αποδόσεις από άλλα.

Τα μέσα τα οποία χρησιμοποιούνται για την απάντηση των παραπάνω ερωτημάτων, είναι διάφορα θεωρητικά και εφαρμοσμένα υποδείγματα αποτίμησης. Τα υποδείγματα αυτά διαφοροποιούνται ανάλογα με τις υποθέσεις τις οποίες κάνουν και τους παράγοντες κινδύνου που θεωρούν ότι επηρεάζουν περισσότερο τη διαμόρφωση των τιμών των αξιογράφων.

Μια σημαντική πρόκληση της έρευνας στον χώρο της αποτίμησης αξιογράφων, είναι η εύρεση παραγόντων που δύνανται να προβλέπουν τις μελλοντικές αποδόσεις των μετοχών. Μια σειρά από τέτοιους παράγοντες έχει μελετηθεί και ο σκοπός της παρούσας εργασίας θα είναι η απόπειρα να προστεθεί άλλος ένας.

Έχοντας ως αφετηρία τη μεθοδολογία των Lettau – Ludvigson (2001) και κάνοντας μια σειρά υποθέσεων για μια αντιπροσωπευτική οικονομία, θα εξετάσουμε αν η διαφορά ανάμεσα στην πραγματοποιηθείσα παραγωγή της οικονομίας από την τάση που ακολουθεί αυτή, έχει προβλεπτική ικανότητα πάνω στις μελλοντικές υπερβάλλουσες αποδόσεις. Το βασικό μοντέλο πάνω στο οποίο θα δουλέψουμε θα είναι μια παραλλαγή του Intertemporal CAPM του Merton. Τελικά, θα δείξουμε ότι η μεταβλητή μας έχει προβλεπτική ικανότητα και μάλιστα σε ορίζοντα ενός έτους. Μάλιστα, σε μηνιαία δεδομένα είναι η πιο ισχυρή από όσες έχουν προταθεί.

Προσπαθήσαμε να κάνουμε την εργασία αυτή όσο το δυνατόν πιο περιεκτική. Έτσι, αποφασίσαμε να συμπεριλάβουμε ένα κεφάλαιο με μια σύντομη αναφορά σε βασικές έννοιες της θεωρίας αποτίμησης αξιογράφων. Όμως, αυτό δημιούργησε την ανάγκη να αναφερθούμε και σε έννοιες μαθηματικών, στατιστικής και οικονομικής θεωρίας που χρησιμοποιούνται από την αποτίμηση αξιογράφων.

Σημαντικό βάρος δώσαμε στην εξέλιξη της θεωρίας αποτίμησης, όπως αυτή αποτυπώνεται από την έρευνα που έχει γίνει. Έτσι, αφιερώνουμε ένα ολόκληρο κεφάλαιο στην επισκόπηση της βιβλιογραφίας με σύντομη περίληψη των πιο σημαντικών δημοσιεύσεων από επιστήμονες της χρηματοοικονομικής επιστήμης.

Η δομή της εργασίας είναι η εξής: στο Κεφάλαιο 1 δίνονται κάποιες έννοιες μαθηματικών, στατιστικής, μικροοικονομικής και μακροοικονομικής θεωρίας που χρειάζονται στη θεωρία αποτίμησης, η οποία παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 2. Στο Κεφάλαιο 3 γίνεται η επισκόπηση της βιβλιογραφίας και στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζονται τα εμπειρικά αποτελέσματα.

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Μαλλιαρόπουλο όχι μόνο για την επίβλεψη της εργασίας αυτής, αλλά και για τη βοήθεια που μου παρείχε σε πολλές περιπτώσεις όλα αυτά τα χρόνια που τον γνωρίζω. Για τους ίδιους λόγους θα ήθελα να ευχαριστήσω και τους κ.κ. Διακογιάννη και Αντζουλάτο, των οποίων η εμπειρία και η προθυμία υπήρξε καθοριστική.

Θα ήταν παράλειψή μου να μην ευχαριστήσω και τους κ.κ. Τσιριτάκη και Φίλιππα, οι οποίοι ήταν αρωγοί μου σε διάφορα προβλήματα που αντιμετώπισα κατά τη διάρκεια της φοίτησής μου στο τμήμα. Τέλος, οφείλω να εκφράσω τις θερμές ευχαριστίες μου στον κ. Αλέξανδρο Μπένο για το υπέροχο μάθημα που μου δίδαξε αλλά και για την εν γένει βοήθειά του, όποτε του ζητήθηκε.

## **Κεφάλαιο 1**

### **Η Θεωρία Αποτίμησης και οι άλλες επιστήμες**

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

### 1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Είναι φυσιολογικό η θεωρία αποτίμησης αξιογράφων να χρησιμοποιεί γνώσεις και στοιχεία από αρκετούς άλλους κλάδους και επιστήμες. Έτσι λοιπόν, θα ήταν παράλειψη να προχωρήσουμε στη θεωρητική παρουσίαση αυτής, χωρίς να κάνουμε ένα σύντομο πέρασμα από τους κλάδους οι οποίοι έχουν επηρεάσει περισσότερο τη θεωρία αποτίμησης.

Έτσι, στο πρώτο αυτό κεφάλαιο θα προσπαθήσουμε να παρουσιάσουμε όσο το δυνατόν πιο περιεκτικά και συνοπτικά διάφορες έννοιες των μαθηματικών, της στατιστικής, της μικροοικονομικής και της μακροοικονομικής θεωρίας που θα μας χρησιμεύσουν τόσο στη θεωρητική θεμελίωση της αποτίμησης αξιογράφων, όσο και στο εμπειρικό μέρος της παρούσας εργασίας.

### 1.2 ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Τα μαθηματικά είναι ένα πολύ σημαντικό εργαλείο στην οικονομική ανάλυση. Σχεδόν κάθε πεδίο της οικονομικής επιστήμης χρησιμοποιεί μαθηματικά και στατιστική. Αυτό συμβαίνει κυρίως γιατί η γλώσσα των μαθηματικών είναι ακριβής, αυστηρή και μπορεί να δώσει αποτελέσματα που δεν μπορεί να δώσει η παρατήρηση των οικονομικών φαινομένων από μόνη της.

Από τον κανόνα αυτό δεν ξεφεύγει ούτε η αποτίμηση αξιογράφων και ως εκ τούτου στην ενότητα αυτή θα κάνουμε μια σύντομη αναφορά σε βασικές μαθηματικές και στατιστικές αρχές που χρησιμοποιεί ο κλάδος αυτός. Προκειμένου να μην πάρει μεγάλη έκταση η ενότητα, θα αναφερθούμε μόνο σε έννοιες που θα θεωρήσουμε αρκετά προχωρημένες, υποθέτοντας ότι τα βασικά στοιχεία είναι ήδη γνωστά.

#### 1.2.1 Θεωρία Συνόλων – Θεωρία μέτρου – Γραμμική Άλγεβρα

Έστω ένα σύνολο αναφοράς  $\Omega$ . Ονομάζουμε κλάση υποσυνόλων του  $\Omega$  και συμβολίζουμε με  $\mathbb{F}$  ένα σύνολο υποσυνόλων του  $\Omega$ . Μια κλάση  $\mathbb{F}$  υποσυνόλων του  $\Omega$  λέγεται σ-άλγεβρα εάν:

$$i) \Omega \in \mathbb{F}$$

$$ii) \forall A \in \mathbb{F} \Rightarrow A' \in \mathbb{F}$$

$$iii) \forall A, B \in \mathbb{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathbb{F}$$

$$iv) \forall A_1, A_2, \dots \in \mathbb{F} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \cup \dots \in \mathbb{F}$$



Έστω η συνολοσυνάρτηση  $\mu: \mathbb{F} \rightarrow [0, +\infty]$  (προσοχή ότι στο πεδίο τιμών περιλαμβάνεται και το άπειρο). Η  $\mu$  θα λέγεται μέτρο ή συνάρτηση μέτρου αν ικανοποιεί τις εξής συνθήκες:

$$i) \mu(\emptyset) = 0$$

$$ii) \forall A_1, A_2, \dots \in \mathbb{F} \text{ με } A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Ένα σύνολο  $E$  είναι διανυσματικός χώρος στο  $R$  αν μπορούμε να ορίσουμε μεταξύ των στοιχείων του δυο πράξεις που συμβολίζονται με  $(+)$  και  $(\cdot)$  (πρόσθεση και βαθμωτός πολλαπλασιασμός αντίστοιχα) που έχουν πεδία ορισμού τα καρτεσιανά γινόμενα  $E \times E$  και  $E \times R$  αντίστοιχα και πεδίο τιμών το  $E$  καθώς και ένα στοιχείο που συμβολίζεται με  $0$  (και ονομάζεται μηδενικό διάνυσμα), τέτοιο ώστε για κάθε τριάδα  $(x, y, z)$  σημείων του  $E \times E \times E$  και κάθε ζεύγος πραγματικών  $(a, b)$  να ισχύουν τα εξής:

1.  $x + y = y + x$
2.  $x + (y + z) = (x + y) + z$
3.  $x + 0 = x$
4.  $\exists u \in E: x + u = 0$
5.  $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$
6.  $(\alpha + b) \cdot x = \alpha \cdot x + b \cdot x$
7.  $\alpha(b \cdot x) = (\alpha b) \cdot x$
8.  $1 \cdot x = x$

Έστω διανυσματικός χώρος  $E$  και στοιχεία – διανύσματα του  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . Τα διανύσματα αυτά ονομάζονται γραμμικά ανεξάρτητα αν η εξίσωση  $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_k x_k = 0$  με πραγματικούς συντελεστές  $\alpha_i$  έχει μόνο τη μηδενική λύση  $\alpha_i = 0$  για  $i = 1, 2, \dots, k$ . Ονομάζουμε διάσταση του χώρου  $E$  το μέγιστο αριθμό των γραμμικά ανεξαρτήτων διανυσμάτων του. Αν η διάσταση του  $E$  είναι ίση με  $n \in \mathbb{N}^*$ , ονομάζουμε βάση (Hamel) του  $E$  κάθε σύνολο  $n$  ανεξαρτήτων διανυσμάτων του.

Ένα παράδειγμα εφαρμογής των παραπάνω βρίσκεται στη θεωρία της πληρότητας των αγορών. Μια αγορά θεωρείται πλήρης αν υπάρχουν σε αυτήν τόσα αξιόγραφα με πληρωμές γραμμικά ανεξάρτητες, όσα και οι πιθανές φυσικές καταστάσεις της οικονομίας. Η διάσταση του χώρου στον οποίο «χτίζεται» αυτό το υπόδειγμα καθορίζεται από τον αριθμό των φυσικών καταστάσεων και βάση του χώρου αυτού είναι τα αξιόγραφα με γραμμικά ανεξάρτητες πληρωμές.

Ορίζουμε μια πραγματική συνάρτηση  $\|\cdot\|: E \rightarrow R$ . Τη συνάρτηση αυτή θα ονομάζουμε νόρμα αν για οποιαδήποτε στοιχεία  $x, y \in E$  και  $\alpha \in R$  ισχύουν τα εξής:

- i)  $\|x\| \geq 0$
- ii)  $\|\alpha x\| = \|\alpha\| \|x\|$
- iii)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
- iv)  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Ένας διανυσματικός χώρος εφοδιασμένος με μια νόρμα ονομάζεται διανυσματικός χώρος νόρμας (ή μετρικός χώρος). Μια ακολουθία  $\{x_n\}$  σε ένα διανυσματικό χώρο νόρμας λέγεται Cauchy αν για κάθε βαθμωτό πραγματικό  $\varepsilon > 0$ , υπάρχει ένας ακέραιος  $N$  τόσο μεγάλος ώστε  $\|x_n - x_m\| \leq \varepsilon$  για κάθε ζευγάρι δεικτών  $m, n > N$ . Διαισθητικά, μια ακολουθία Cauchy είναι μια ακολουθία της οποίας οι όροι έπειτα από κάποιο σημείο βρίσκονται «αυθαίρετα κοντά».

Αν τώρα έχουμε ένα διανυσματικό χώρο νόρμας για τον οποίο ισχύει ότι κάθε ακολουθία Cauchy από στοιχεία του  $E$  έχει όριο που ανήκει στο  $E$ , ο χώρος αυτός ονομάζεται πλήρης. Ένας μετρικός χώρος στον οποίο κάθε ακολουθία Cauchy συγκλίνει -με τη συνάρτηση απόστασης η οποία είναι ορισμένη με βάση το μέτρο μήκους του συγκεκριμένου χώρου-, είναι δηλαδή πλήρης ως προς τη μετρική που επιφέρει η νόρμα, λέγεται χώρος Banach.

Έστω τώρα ένας μετρήσιμος χώρος  $(M, \mathfrak{M}, \mu)$  και  $L$  ο διανυσματικός υποχώρος των μετρήσιμων συναρτήσεων σε αυτών. Ορίζουμε για κάθε συνάρτηση  $x \in L$  και κάθε  $q \in [1, \infty)$  τη νόρμα:

$$\|x_q\| \equiv \left[ \int_M |x(m)|^q d\mu(m) \right]^{1/q}$$

,η οποία είναι δυνατόν να απειρίζεται. Με τον ίδιο τρόπο ορίζουμε:

$$L^q(\mu) \equiv \{x \in L : \|x\|_q < \infty\}$$

Με πιο απλά λόγια, ο χώρος  $L^q$  είναι το σύνολο των μετρήσιμων συναρτήσεων για τις οποίες ισχύει ότι οι συναρτήσεις  $|f|^q$  είναι ολοκληρώσιμες κατά Lebesgue. Μπορούμε τώρα να ορίζουμε μια θεμελιώδη ανισότητα.

**Ανισότητα του Holder:** έστω  $p > 1, q > 1$  πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Έστω επίσης η πραγματική μετρήσιμη συνάρτηση  $f \in L^p$  και η πραγματική μετρήσιμη συνάρτηση  $g \in L^q$ . Τότε ισχύει ότι  $\|fg\| \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$ . Με εναλλακτική διατύπωση, ισχύει ότι  $\int_M |fg| d\mu \leq \left(\int_M |f|^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int_M |g|^q d\mu\right)^{1/q}$ . Αν  $p = q = 2$  προκύπτει η γνωστή ανισότητα Cauchy – Schwarz μέσω της οποίας αποδεικνύεται ότι ο συντελεστής συσχέτισης ανήκει στο διάστημα  $[-1, 1]$ .

Είμαστε τώρα σε θέση να διατυπώσουμε το πολύ σημαντικό θεώρημα απεικόνισης του Riesz: για  $q \in (1, \infty)$ , έστω  $p$  ένας συνεχής και γραμμικός μετασχηματισμός πάνω στον χώρο  $L^q(\mu)$ . Τότε υπάρχει ένα μοναδικό  $\pi \in L^q(\mu)$ , τέτοιο ώστε:

$$p \cdot x = \int_M x(m)\pi(m)d\mu, \quad \forall x \in L^q(\mu)$$

Ο χώρος που χρησιμοποιούμε πιο συχνά στη χρηματοοικονομική είναι ο  $L^2(P)$ , ο οποίος περιέχει τις πραγματικές τυχαίες μεταβλητές του χώρου  $(\Omega, \mathbb{F}, P)$  με πεπερασμένη διακύμανση. Ένα διάνυσμα  $x \in L^2(P)$  αντιπροσωπεύει τότε ένα σχέδιο κατανάλωσης (βλ. ενότητα 1.3) και στο πλαίσιο αυτό ονομάζεται αξιόγραφο αφού πληρώνει αύριο  $x(\omega)$  στη φυσική κατάσταση  $\omega \in \Omega$ . Από την ανισότητα των Cauchy – Schwarz, η εκτιμώμενη τιμή αυτών των πραγματικών τυχαίων μεταβλητών στο χώρο  $L^2(P)$  είναι κι αυτή πεπερασμένη. Υποθέτουμε ότι  $p$  είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός τιμών στον  $L^2(P)$ . Από το θεώρημα του Riesz, υπάρχει μια μοναδική τυχαία μεταβλητή  $\pi \in L^2(P)$ , τέτοια ώστε  $p \cdot x = E(\pi x), \forall x \in L^2(P)$ . Μπορούμε να γράψουμε ακόμα:

$$p \cdot x = E(\pi)E(x) + Cov(x, \pi)$$

και η τιμή οποιουδήποτε αξιογράφου  $x$  θα είναι ίση με τη συνδιακύμανσή του με ένα δεδομένο «αξιόγραφο»  $\pi$  συν ένα πολλαπλάσιο της μέσης τιμής (πληρωμής) του  $x$ . Το αποτέλεσμα αυτό αποτελεί το θεμέλιο λίθο όλων των υποδειγμάτων αποτίμησης αξιογράφων. Το «αξιόγραφο»  $\pi$  είναι αυτό που στη συνέχεια θα ορίσουμε ως πυρήνα των τιμών ή στοχαστικό συντελεστή προεξόφλησης.

Ένας χώρος Hilbert είναι ένας πλήρης διανυσματικός χώρος στον οποίο έχουμε ορίσει ένα εσωτερικό γινόμενο  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Αν  $H$  είναι ένας χώρος

Hilbert,  $K$  ένα κλειστό, κυρτό και όχι κενό υποσύνολο του  $H$  και σημείο  $h \in H$ , υπάρχει ένα μοναδικό σημείο  $k_0 \in K$ , τέτοιο ώστε:

$$\|h - k_0\| = d(h, K) = \inf_{k \in K} \|h - k\|$$

Επιπλέον, έστω ένας γραμμικός και κλειστός υποχώρος  $M$  του  $H$  και  $h \in H$  και  $f_0 \in M$ . Έχουμε

$$\|h - f_0\| = d(h, M) \Leftrightarrow h - f_0 \perp M$$

Το τελευταίο αποτέλεσμα ονομάζεται θεώρημα προβολής σε ένα χώρο Hilbert και σε συνδυασμό με το αμέσως προηγούμενο εγγυάται τη μοναδικότητα του στοιχείου  $f_0 \in M$ . Θα διατυπώσουμε τώρα το πολύ σημαντικό θεώρημα ορθογώνιας προβολής σε χώρους Hilbert που έχει αρκετές εφαρμογές στη χρηματοοικονομική και στην αποτίμηση αξιογράφων.

**Θεώρημα ορθογώνιων προβολών σε χώρους Hilbert:** έστω  $M$  ένας γραμμικός και κλειστός υποχώρος του  $H$  και σημείο  $h \in H$  και  $Ph$  το μοναδικό σημείο του  $M$  τέτοιο ώστε να έχουμε  $h - Ph \perp M$ . Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

1. Η  $P$  είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός του  $H$
2. Η  $P$  είναι ταυτοδύναμη (idempotent), δηλαδή  $P^2 = P$
3.  $\|Ph\| \leq \|h\|$
4. Ο πυρήνας της  $P$  είναι ο χώρος  $M^\perp$  και το πεδίο ορισμού της ο χώρος  $M$ .

Η ορθογώνια προβολή ενός διανύσματος  $h$  του χώρου  $H$  πάνω στον  $M$ , παράγει ένα διάνυσμα  $x \in M$  που είναι ορθογώνιο στο  $h$  με μέτρο μικρότερο από αυτό του  $h$ . Το πεδίο ορισμού της  $P$  είναι το σύνολο των διανυσμάτων που είναι αμετάβλητα ως προς την  $P$ , δηλαδή δεν μετασχηματίζονται όταν εφαρμόσουμε την  $P$  επάνω τους. Ο πυρήνας της  $P$  είναι το σύνολο των διανυσμάτων που είναι ήδη ορθογώνια στον  $M$  και αφού παίρνουμε την προβολή τους επάνω στον  $M$  τα μηδενίζουμε. Η ορθογώνια προβολή του στοιχείου  $h \in H$  επάνω στον  $M$  βρίσκει το διάνυσμα στον χώρο  $M$  που ελαχιστοποιεί την απόσταση μεταξύ του  $h$  και του υποχώρου  $M$ .

Ας δούμε τώρα μια εφαρμογή του θεωρήματος των ορθογώνιων προβολών σε χώρους Hilbert. Αν θεωρήσουμε ένα χώρο πιθανοτήτων  $(\Omega, \mathbb{F}, P)$ , τότε ο χώρος  $L^2(P)$  των τυχαίων μεταβλητών  $x$  είναι ένας χώρος

Hilbert με εσωτερικό γινόμενο  $\langle x, y \rangle = E(xy)$ . Το μέτρο μήκους που συνεπάγεται είναι:

$$\|x\| = (E[x^2])^{1/2}$$

Έστω επιπλέον μια  $\sigma$ -υποάλγεβρα  $G$  της  $\mathbb{F}$  και  $M$  ο χώρος των  $L^2$  μετρήσιμων συναρτήσεων ως προς αυτή τη  $\sigma$ -υποάλγεβρα. Στην περίπτωση αυτή:

$$x \mapsto E(x|G)$$

είναι η ορθογώνια προβολή της  $x$  στον χώρο  $M = L^2(\Omega, \mathbb{F}, P)$ . Παράγει την καλύτερη εκτίμηση της  $x$  με δεδομένη την  $G$ , αφού ελαχιστοποιεί το μέσο τετραγωνικό σφάλμα όλων των εκτιμητών της  $x$  με δεδομένη την πληροφορία που περιέχει η  $G$ . Διακρίνουμε σε αυτό τη λογική της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων. Επιπλέον, η ιδιότητα της ταυτοδυναμίας του τελεστή της δεσμευμένης μέσης τιμής δίνει την πολύ γνωστή ιδιότητα των επαναλαμβανόμενων δεσμευμένων μέσων τιμών (law of iterated expectations). Στο επόμενο κεφάλαιο θα δούμε ότι χάρη στο θεώρημα των ορθογώνιων προβολών σε χώρους Hilbert, εξάγεται ένα πολύ ενδιαφέρον αποτέλεσμα για τη συσχέτιση ενός χαρτοφυλακίου με τον στοχαστικό συντελεστή προεξόφλησης.

### 1.2.2 Απειροστικός λογισμός – Βελτιστοποίηση

Ο απειροστικός λογισμός είναι ο κλάδος των μαθηματικών με τη μεγαλύτερη ίσως εφαρμογή στη χρηματοοικονομική. Εμείς στην παρούσα ενότητα δεν θα αναφερθούμε σχεδόν καθόλου στις αρχές του απειροστικού λογισμού, τις οποίες θα θεωρήσουμε γνωστές, προσπαθώντας να δώσουμε έμφαση στις εφαρμογές του σε προβλήματα βελτιστοποίησης.

Λέμε ότι μια πραγματική συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $D$  είναι  $C^n$  τάξεως όταν είναι  $n$  φορές παραγωγίσιμη στο  $D$  και η  $n$ -ιοστή παράγωγος είναι συνεχής στο  $D$ .

**Τύπος του Taylor:** έστω συνάρτηση  $f$ , μιας μεταβλητής, ορισμένη στο διάστημα  $[a, b]$  και τάξεως  $C^{n+1}$  στο  $(a, b)$ . Υπάρχει  $c \in (a, b)$  τέτοιο ώστε:

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^n f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{(b-a)^{n+1} f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

Ονομάζουμε Εσσιανή μήτρα της πολυμεταβλητής συνάρτησης με  $n$  μεταβλητές  $f$  στο σημείο  $a$ , την  $n \times n$  μήτρα των μερικών παραγώγων δευτέρας τάξεως:

$$H(f, a) = \left[ \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{i \in [1, n], j \in [1, n]}$$

Ας κάνουμε τώρα μια σύντομη ανάλυση της μεθοδολογίας επίλυσης απλών προβλημάτων βελτιστοποίησης με περιορισμούς. Για λόγους απλότητας και χωρίς βλάβη της γενικότητας θα χρησιμοποιήσουμε πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών.

Έστω δυο συναρτήσεις  $f, g$  ορισμένες σε ένα σύνολο  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ , με συνεχείς μερικές παραγώγους μέχρι δευτέρας τάξεως και  $b$  ένας πραγματικός αριθμός. Το γενικό πρόβλημα μεγιστοποίησης της  $f$  γράφεται:

$$\begin{aligned} \max_{(x, y) \in D} f(x, y) \\ \text{s.t. } g(x, y) = b \end{aligned}$$

Ο περιορισμός μπορεί να έχει την οποιαδήποτε μορφή αλλά στις περισσότερες περιπτώσεις προβλημάτων στα οικονομικά είναι γραμμικός. Για να λυθεί το παραπάνω πρόβλημα μεγιστοποίησης, ορίζουμε τη συνάρτηση Lagrange ως την πραγματική συνάρτηση  $L$  που ορίζεται στο  $\mathbb{R} \times D$  ως εξής:

$$L(\mu, x, y) = f(x, y) + \mu[b - g(x, y)]$$

Ο συντελεστής  $\mu$  ονομάζεται πολλαπλασιαστής Lagrange. Η επίλυση του παραπάνω προβλήματος μεγιστοποίησης και η βελτιστοποίηση της συνάρτησης Lagrange χωρίς περιορισμούς είναι διαδικασίες ισοδύναμες. Αν συμβολίσουμε με  $\nabla L(\mu, x, y)$  το διάνυσμα των μερικών παραγώγων πρώτης τάξης της  $L$ , οι ικανές συνθήκες για να είναι η τριάδα  $(\mu, x, y)$  σημείο τοπικού μεγίστου είναι οι εξής:

1.  $\nabla L(\mu, x, y) = 0$
2.  $|H_L(\mu, x, y)| > 0$

Υπάρχουν όμως και προβλήματα βελτιστοποίησης στα οποία οι περιορισμοί δεν εκφράζονται με τη μορφή ισότητας όπως στο παραπάνω αλλά με τη μορφή ανισότητας. Έτσι, έστω συναρτήσεις  $f, g_1, g_2, \dots, g_m$

ορισμένες στο ανοικτό σύνολο  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  και τάξεως  $C^2$ . Το πρόβλημα του οποίου θα προσδιορίσουμε τις συνθήκες βελτιστοποίησης είναι το:

$$\begin{aligned} & \max_{(x,y) \in D} f(x,y) \\ & \text{s.t. } g_j(x,y) \geq 0, j=1,2,\dots,m \end{aligned}$$

Το πρόβλημα αυτό υπερκαλύπτει όλα τα προβλήματα βελτιστοποίησης υπό συνθήκες ανισότητας. Οι πιθανές λύσεις του προβλήματος είναι τα σημεία  $x \in D$  που ικανοποιούν όλους τους περιορισμούς του προβλήματος. Στο σημείο  $x \in D$  η συνθήκη  $g(x) \geq 0$  λέγεται κορεσμένη αν ικανοποιείται σαν ισότητα. Έστω το σύνολο:

$$S(x) = \{j \in \{1,\dots,m\} : g_j(x) = 0\}$$

Οι περιορισμοί του προβλήματος ονομάζονται κανονικοί σε ένα σημείο  $x \in D$  αν τα διανύσματα  $\nabla g_j(x), j \in S(x)$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Ορίζουμε έτσι τις συνθήκες των Kuhn – Tucker:

Αν  $x$  είναι μια λύση του προβλήματος και αν οι περιορισμοί είναι κανονικοί στο σημείο αυτό, υπάρχουν τότε πραγματικοί αριθμοί  $a_j, j=1,2,\dots,m$  τέτοιοι ώστε:

1.  $a_j \geq 0 \quad \forall j$  και  $a_j g_j(x) = 0$
2. Αν  $L(a,x) = f(x) + \sum_{j=1}^m a_j g_j(x) \Rightarrow \nabla L(x,a) = 0$

Οι συντελεστές  $a_j$  λέγονται πολλαπλασιαστές Kuhn – Tucker και η ερμηνεία τους είναι ανάλογη του πολλαπλασιαστή Lagrange.

### 1.2.3 Στατιστική - Θεωρία πιθανοτήτων

Η θεωρία πιθανοτήτων είναι ο κλάδος με τη μεγαλύτερη επιρροή στην αποτίμηση αξιογράφων. Αποτελεί σε μεγάλο βαθμό το συνδυαστικό κρίκο ανάμεσα στα μαθηματικά και τη χρηματοοικονομική ενώ ουδεμία αξιολογή ερευνητική προσπάθεια δεν δύναται να μην έχει έστω και ελάχιστα στοιχεία από στατιστική και θεωρία πιθανοτήτων. Στην ενότητα αυτή θα κάνουμε μια πολύ συνοπτική παρουσίαση των πιο βασικών εννοιών που θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω.

Ένα τυχαίο πείραμα είναι μια διαδικασία που οδηγεί με κάποιες προϋποθέσεις σε τουλάχιστον δυο πιθανά αποτελέσματα, χωρίς να γνωρίζουμε εκ των προτέρων ποιο από αυτά θα πραγματοποιηθεί. Το

σύνολο των ενδεχομένων που σχετίζονται με ένα τυχαίο πείραμα λέγεται δειγματικός χώρος και συνήθως συμβολίζεται με  $\Omega$ .

Μια διήθηση πληροφορίας  $\mathbb{F} = \{\mathfrak{F}_t : t \in T\}$  με  $T \in \mathbb{N}$  είναι μια αύξουσα οικογένεια από  $\sigma$ -άλγεβρες στο  $\Omega$ , τέτοια ώστε  $\mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{F}_s, s \geq t$ . Περιγράφει δηλαδή μια ροή πληροφορόρησης στο χρόνο.

Έστω μια συνάρτηση μέτρου  $P$ , όπως ορίστηκε παραπάνω. Αυτή, θα λέγεται πιθανότητα αν ικανοποιεί επιπλέον:

$$P(\Omega) = 1$$

Δεν θα αναλωθούμε σε αναφορά ιδιοτήτων της πιθανότητας ή των ροπών μιας τυχαίας μεταβλητής, έννοιες που θα θεωρήσουμε γνωστές, όπως και την έννοια της κατανομής. Θα ορίσουμε ως στοχαστική ανέλιξη με πραγματικές τιμές, μια συνάρτηση  $X : (T \times \Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  και θα λέμε ότι είναι προσαρμοσμένη στη διήθηση πληροφορίας  $\mathbb{F}$ , εάν η  $X_t$  είναι μετρήσιμη ως προς  $\mathfrak{F}_t$  για κάθε  $t \in T$ .

Η πιο σημαντική ίσως ανέλιξη που εφαρμόζεται στη χρηματοοικονομική είναι η martingale. Μια στοχαστική ανέλιξη  $X$  είναι martingale ως προς τη διήθηση πληροφορίας  $\mathbb{F}$  αν και μόνον αν:

1. Η ανέλιξη είναι προσαρμοσμένη στη διήθηση πληροφορίας
2. Για κάθε χρονικές στιγμές  $t, s : 0 \leq t \leq s \leq T$ , έχουμε  $E(X_s | \mathfrak{F}_t) = X_t$ , όπου  $E(\cdot | \cdot)$  ο τελεστής της αναμενόμενης δεσμευμένης τιμής.

Η έννοια της martingale σημαίνει ότι η καλύτερη εκτίμηση που μπορούμε να έχουμε για μια τυχαία μεταβλητή γνωρίζοντας την πληροφορία που έχουμε σήμερα, είναι η σημερινή τιμή της.

Δυο συναρτήσεις πιθανότητας  $P$  και  $Q$ , ορισμένες στον ίδιο μετρήσιμο χώρο  $(\Omega, F)$  ονομάζονται ισοδύναμες αν:

$$P(A) = 0 \Leftrightarrow Q(A) = 0$$

Μια διαδικασία αλλαγής πιθανότητας χαρακτηρίζεται από μια δεδομένη μη αρνητική τυχαία μεταβλητή  $Y$ , με μέση τιμή ως προς τη συνάρτηση  $P$  ίση με τη μονάδα. Ορίζουμε τότε την πιθανότητα:

$$Q(B) = E_P[\ell_B Y], \forall B \in F$$

όπου  $\ell$  η index function. Η πραγματική τυχαία μεταβλητή  $Y$  ονομάζεται Radon – Nikodym παράγωγος της  $Q$  ως προς την  $P$  και ισχύει ότι:



$$E_Q(X) = E_P(XY)$$

Η σημασία της διαδικασίας αλλαγής πιθανότητας είναι πολύ καθοριστική. Μας επιτρέπει να μεταφερόμαστε από έναν «κόσμο» σε έναν άλλο πιο κατανοητό και εύκολα χειρίσιμο. Για παράδειγμα, το περίφημο θεώρημα του Girsanov «μετατρέπει» τις τιμές ενός παραγωγού προϊόντος σε martingale, κάνοντας την τιμολόγησή τους μια απλή διαδικασία.

Θα αναφέρουμε σε αυτό το σημείο δύο λήμματα τα οποία θα συναντήσουμε στην πορεία της ανάλυσής μας:

1. Έστω μια τυχαία μεταβλητή  $Z \sim (\mu, \sigma^2)$ . Τότε η τυχαία μεταβλητή  $Y = \exp(Z)$  θα ακολουθεί λογαριθμοκανονική κατανομή με μέσο  $m = \exp\{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\}$  και διακύμανση  $\tau^2 = \exp\{(2\mu + \sigma^2)(e^{\sigma^2} - 1)\}$ .
2. (Λήμμα του Stein): Έστω  $X, Y, Z$  τυχαίες μεταβλητές και  $Y = g(Z)$ . Αν  $X$  και  $Z$  ακολουθούν τη διμεταβλητή κανονική κατανομή και η  $g$  είναι παραγωγίσιμη με  $|E_t(g')| < \infty$ , τότε:

$$\text{Cov}_t(X_{t+1}, g(Z_{t+1})) = E_t(g')\text{Cov}(X_{t+1}, Z_{t+1})$$

### 1.3 ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΙΚΡΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Η μικροοικονομική ασχολείται με τη συμπεριφορά και τις αλληλεπιδράσεις των ατομικών οικονομικών μονάδων, δηλαδή των καταναλωτών και των επιχειρήσεων. Κατά τη μελέτη αυτή, μια από τις βασικότερες αναλυτικές τεχνικές που χρησιμοποιούνται είναι αυτή της μελέτης της ισορροπίας. Θα ξεκινήσουμε την παρουσίαση εννοιών της μακροοικονομικής εισάγοντας την πολύ σημαντική έννοια της χρησιμότητας.

Ορίζουμε ένα σχέδιο κατανάλωσης  $x$  ως μια πραγματική τυχαία μεταβλητή στο χώρο  $(\Omega, \mathbb{F}, P)$  η οποία και προσδιορίζει μια πιθανότητα  $P_x$ . Έστω μια κλάση  $\mathbb{S}$  από σχέδια κατανάλωσης.

Υποθέτουμε ότι ο καταναλωτής έχει προτιμήσεις σε σχέση με τα παραπάνω σχέδια κατανάλωσης. Έστω λοιπόν μια συλλογή ζευγών σχεδίων κατανάλωσης  $(x, y) \in \mathbb{S}$ . Όταν γράφουμε  $x \succcurlyeq y$  εννοούμε ότι ο καταναλωτής θεωρεί το σχέδιο  $x$  τουλάχιστον το ίδιο «καλό» με το σχέδιο  $y$ . Η δυαδική αυτή σχέση είναι:

α) πλήρης αν:

$$\forall x, y \in \mathbb{S} \Rightarrow x \succcurlyeq y \text{ ή } y \succcurlyeq x,$$

β) μεταβατική αν:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{S}, \text{ αν } x \succcurlyeq y \text{ και } y \succcurlyeq z \Rightarrow x \succcurlyeq z,$$

γ) αντανακλαστική αν:

$$\forall x \in \mathbb{S}, x \succcurlyeq x,$$

δ) συνεχής αν:

$$\forall y \in \mathbb{S}, \text{ τα σύνολα } \{x : x \succeq y\}, \{x : x \preceq y\} \text{ είναι κλειστά,}$$

ε) ισχυρά μονότονη αν:

$$x \geq y \text{ και } x \neq y \Leftrightarrow x \succ y$$

Η έννοια της συνάρτησης χρησιμότητας παίζει καθοριστικό ρόλο στη θεωρία αποτίμησης αξιογράφων, ως εκ τούτου θα αναφερθούμε αναλυτικά σε αυτήν. Αναλυτικά λοιπόν, μια συνάρτηση  $u: \mathbb{S} \rightarrow R$  θα λέγεται συνάρτηση χρησιμότητας αν  $x \succeq y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)$ . Η συνάρτηση αυτή μας βοηθάει να ποσοτικοποιήσουμε τις προτιμήσεις ενός καταναλωτή στον χώρο των πραγματικών αριθμών, επομένως είναι ευκολότερη στον χειρισμό.

Έτσι, αν υποθέσουμε ότι οι προτιμήσεις είναι πλήρεις, αντανακλαστικές, μεταβατικές, συνεχείς και ισχυρά μονότονες, τότε υπάρχει συνεχής συνάρτηση χρησιμότητας  $u: R_+^k \rightarrow R$  που απεικονίζει αυτές τις προτιμήσεις (θεώρημα ύπαρξης συνάρτησης χρησιμότητας).

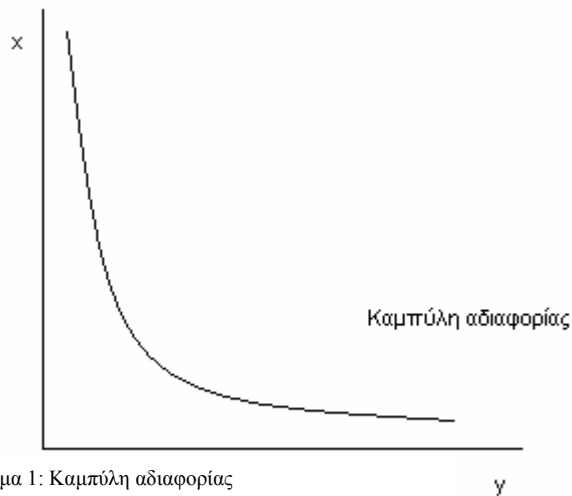
Το σύνολο των σχεδίων κατανάλωσης στα οποία μπορεί να ανταποκριθεί ο καταναλωτής συνιστούν το σύνολο των «feasible alternatives». Αν  $y$  είναι οι χρηματικές μονάδες που έχει στη διάθεσή του ο καταναλωτής,  $p$  το διάνυσμα των τιμών των διαθέσιμων αγαθών και  $x$  σχέδιο κατανάλωσης, ορίζουμε το σύνολο των εφικτών σχεδίων ως:

$$B = \{x \in \mathbb{S} : p \cdot x \leq y\}$$

Επομένως, το πρόβλημα της μεγιστοποίησης της χρησιμότητας μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\begin{aligned} \max \quad & u(x) \\ \text{s.t.} \quad & p \cdot x \leq y, x \in \mathbb{S} \end{aligned}$$

Σε περίπτωση που για δύο σχέδια κατανάλωσης  $x, y$  ισχύει  $x \succeq y$  και  $y \succeq x$ , τότε λέμε ότι ο καταναλωτής είναι αδιάφορος μεταξύ αυτών των σχεδίων κατανάλωσης και γράφουμε  $x \sim y$ . Το σύνολο όλων των ζευγαριών σχεδίων κατανάλωσης που είναι αδιάφορα το ένα με το άλλο, συνιστούν την καμπύλη αδιαφορίας που έχει αρνητική κλίση και παρουσιάζεται στο παρακάτω διάγραμμα. Η κλίση της καμπύλης αδιαφορίας σε κάποιο σημείο της, ονομάζεται οριακός λόγος υποκατάστασης ανάμεσα στα σχέδια  $x, y$ .



Μέχρι τώρα δεν αναφερθήκαμε καθόλου στην έννοια της αβεβαιότητας, την οποία συναντάμε και στην πραγματικότητα. Σε ένα τέτοιο περιβάλλον, η συνάρτηση χρησιμότητας που επιλύει το παραπάνω πρόβλημα μεγιστοποίησης δεν θα είναι γνωστή εκ των προτέρων, θα είναι δηλαδή αναμενόμενη. Εδώ υπεισέρχεται η έννοια της αποστροφής στον κίνδυνο.

Πριν αναλύσουμε την αποστροφή στον κίνδυνο ώστε να καταλήξουμε στον ορισμό του ασφαλίστρου κινδύνου, θα αναφέρουμε τις γνωστές ανισότητες του Jensen, οι οποίες είναι απαραίτητες για την έννοια της αποστροφής στον κίνδυνο:

$$\begin{aligned} f \text{ κυρτή} & \Leftrightarrow \forall x \text{ τυχαία μεταβλητή: } E(f(x)) \geq f(E(x)) \\ f \text{ κοίλη} & \Leftrightarrow \forall x \text{ τυχαία μεταβλητή: } E(f(x)) \leq f(E(x)) \\ f \text{ γραμμική} & \Leftrightarrow \forall x \text{ τυχαία μεταβλητή: } E(f(x)) = f(E(x)) \end{aligned}$$

Ένα άτομο αποστρέφεται τον κίνδυνο όταν προτιμά τη σταθερή τυχαία μεταβλητή  $E(x)$  από την τυχαία μεταβλητή  $x, \forall x \in \mathbb{S}$ . Επιζητά τον κίνδυνο όταν προτιμά την  $x$  από την  $E(x)$  και είναι ουδέτερο στον κίνδυνο όταν αδιαφορεί μεταξύ  $x$  και  $E(x)$ .

Για παράδειγμα, έστω κάποιος με αρχικό πλούτο  $W_0$  που μπορεί να λάβει μέρος σε μια κλήρωση που αποφέρει  $h_1$  με πιθανότητα  $p$  ή  $h_2$  με πιθανότητα  $(1-p)$ , όπου  $ph_1 + (1-p)h_2 = 0$ . Αν αρνηθεί, σημαίνει ότι η χρησιμότητά του ικανοποιεί την σχέση;

$$u(W_0) \geq pu(W_0 + h_1) + (1-p)u(W_0 + h_2)$$

Δηλαδή, αφού  $ph_1 + (1-p)h_2 = 0$ , συνεπάγεται ότι:

$$u[p(W_0 + h_1 + (1-p)(W_0 + h_2))] \geq pu(W_0 + h_1) + (1-p)u(W_0 + h_2),$$

ή αλλιώς  $u[E(W)] \geq E[u(W)]$  και συνεπώς η συνάρτηση χρησιμότητάς του είναι κοίλη. Λόγω αυτής της συνεπαγωγής, έχουμε τις ακόλουθες ισοδυναμίες:

$$\begin{aligned} \text{αποστροφή στον κίνδυνο} &\Leftrightarrow u \text{ κοίλη} \\ \text{αναζήτηση του κινδύνου} &\Leftrightarrow u \text{ κυρτή} \\ \text{ουδετερότητα στον κίνδυνο} &\Leftrightarrow u \text{ γραμμική} \end{aligned}$$

Το τελευταίο βήμα πριν δώσουμε τον (αυστηρά μαθηματικό) ορισμό του ασφαλιστρού κινδύνου, είναι να ορίσουμε την έννοια του βέβαιου ισοδύναμου. Έστω λοιπόν  $x \in \mathbb{S}$ . Το βέβαιο ισοδύναμο,  $C(x) \in R^+$  του τυχαίου σχεδίου κατανάλωσης  $x$ , ορίζεται από:

$$u[C(x)] = Eu(x)$$

Αν η συνάρτηση χρησιμότητας είναι συνεχής, γνησίως αύξουσα και κοίλη, υπάρχει μόνο ένα βέβαιο ισοδύναμο για κάθε  $x \in \mathbb{S}$ . Επειδή η  $u(x)$  είναι κοίλη, το άτομο αποστρέφεται τον κίνδυνο, συνεπώς  $C(x) \leq E(x)$ .

Επομένως, το ασφαλιστρού κινδύνου  $\pi(x)$  ενός σχεδίου κατανάλωσης  $x$  ορίζεται ως εξής:

$$C(x) = E(x) - \pi(x) \quad \text{ή} \quad E(x) - \pi(x) \sim x$$

Αν κάποιος λοιπόν αποστρέφεται τον κίνδυνο, τότε προφανώς έχουμε  $\pi(x) \geq 0$ , αφού για ένα τέτοιο άτομο  $E[u(x)] \leq u[E(x)]$ .

Η έννοια της αποστροφής στον κίνδυνο είναι κεντρική στη θεωρία αποτίμησης αξιογράφων και για αυτό αξίζει να την αναλύσουμε λίγο παραπάνω. Υποθέτουμε μια συνάρτηση χρησιμότητας τάξης  $C^2$ , γνησίως αύξουσα και κοίλη, ένα σχέδιο κατανάλωσης  $x = W + z$ , στο οποίο  $W$  είναι ο αρχικός πλούτος του ατόμου και  $z$  η πληρωμή μιας κλήρωσης με μη μηδενικό αναμενόμενο κέρδος. Από τον ορισμό του βεβαίου ισοδύναμου γράφουμε:

$$E[u(W + z)] = u[E(W + z) - \pi(W + z)]$$

Αναπτύσσοντας κατά Taylor την  $u(W + z)$  και υποθέτοντας ότι η τυχαία μεταβλητή  $z$  είναι αρκετά μικρότερη του  $W$ , καταλήγουμε στη σχέση:

$$\pi(W + z) = -\frac{1}{2} \frac{u''(W)}{u'(W)} \sigma_z^2$$

,η οποία μας οδηγεί στον ορισμό του συντελεστή απόλυτης αποστροφής στον κίνδυνο (Absolute Risk Aversion-ARA) σε επίπεδο πλούτου  $W$ :

$$ARA = -\frac{u''(W)}{u'(W)}$$

Ο συντελεστής αυτός είναι θετικός αν ο καταναλωτής αποστρέφεται τον κίνδυνο, αφού τότε θα ισχύει εξ' ορισμού για τη συνάρτηση χρησιμότητάς του ότι  $u' > 0$  και  $u'' < 0$ . Κάνοντας πράξεις στις παραπάνω σχέσεις, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το βέβαιο ισοδύναμο του  $x$  είναι ίσο με:

$$C(x) = E(W + z) - \frac{1}{2} ARA(W) Var(W + z)$$

Η τελευταία σχέση θυμίζει τη χρησιμότητα σαν συνάρτηση της μέσης τιμής και της διακύμανσης που συναντάμε στη θεωρία χαρτοφυλακίου του Markowitz. Ο συντελεστής απόλυτης αποστροφής στον κίνδυνο είναι ένα ολικό μέτρο της αποστροφής στον κίνδυνο και σχετίζεται με τις προτιμήσεις και όχι με τη συγκεκριμένη συνάρτηση χρησιμότητας που τις απεικονίζει.

Συχνά παρατηρείται ότι οι επενδυτές αποστρέφονται λιγότερο τον κίνδυνο όταν ο πλούτος τους αυξάνει. Αυτό, σημαίνει ότι για έναν καταναλωτή με συνάρτηση χρησιμότητας  $u$ , το ασφάλιστρο κινδύνου που είναι έτοιμος να καταβάλει ώστε να αποφύγει μια δεδομένη κλήρωση, δεν θα πρέπει να αυξάνει καθώς αυξάνεται ο πλούτος του, δηλαδή:

$$\frac{dARA(W)}{dW} \leq 0, \forall W$$

Η ερώτηση που προκύπτει λοιπόν είναι αν ένας επενδυτής καθώς γίνεται πλουσιότερος, επενδύει περισσότερα σε αξιόγραφα με κίνδυνο ή όχι. Αν  $\alpha^*$  το ποσό που αν επενδυθεί σε αξιόγραφα με κίνδυνο μεγιστοποιεί την αναμενόμενη χρησιμότητα του μελλοντικού του κεφαλαίου, θέλουμε να δείξουμε το:

$$\frac{d\alpha^*}{dW_0} \geq 0, \forall W_0,$$

όπου  $W_0$  είναι ο αρχικός πλούτος του επενδυτή. Χρησιμοποιώντας τις διάφορες σχέσεις που ορίσαμε πιο πάνω, καταλήγουμε στην:

$$\frac{\partial G}{\partial W_0}(W_0, \alpha^*(W_0)) = E(u''[W_0(1+\rho) + \alpha^*(\tilde{r} - \rho)](\tilde{r} - \rho))(1+\rho),$$

όπου  $G(W_0, \alpha^*(W_0))$  η συνάρτηση που αντιστοιχεί στη συνθήκη πρώτης τάξης,  $\rho$  η σταθερή απόδοση του αξιογράφου χωρίς κίνδυνο και  $\tilde{r}$  η τυχαία μεταβλητή που απεικονίζει την απόδοση του αξιογράφου με κίνδυνο.

Σε κάθε περίπτωση, από την τελευταία σχέση καταλήγουμε ότι:

$$E[(\tilde{r} - \rho)u''(\tilde{W}_1)] \geq 0 \text{ και } \frac{d\alpha^*(W_0)}{dW_0} > 0,$$

όπου  $\tilde{W}_1 = W_0(1+\rho) + \alpha^*(\tilde{r} - \rho)$ . Φτάσαμε έτσι στο σημαντικό συμπέρασμα ότι ακόμα και σε περιβάλλον αποστροφής στον κίνδυνο, όταν ο επενδυτής γίνεται πλουσιότερος επενδύει περισσότερα χρήματα σε αξιόγραφα με κίνδυνο.

Η τελευταία σημαντική έννοια που θα ορίσουμε σε αυτή την ενότητα είναι αυτή του συντελεστή σχετικής αποστροφής στον κίνδυνο (Relative Risk Aversion-RRA). Κινούμενοι στο ίδιο πλαίσιο που αναπτύξαμε παραπάνω, ορίζουμε τον συντελεστή αυτόν ως:

$$RRA = -\frac{u''(W)W}{u'(W)}$$

Είναι λογικό να αναρωτηθούμε πώς επηρεάζονται οι συντελεστές απόλυτης και σχετικής αποστροφής στον κίνδυνο όταν μεταβάλλεται ο

πλούτος. Ο συντελεστής απόλυτης αποστροφής αυξάνεται όταν αυξάνεται ο πλούτος, ενώ η συμπεριφορά του συντελεστή σχετικής αποστροφής είναι πιο πολύπλοκη και λιγότερο ξεκάθαρη.

Στο σημείο αυτό ολοκληρώσαμε την ενότητα της παρουσίασης εννοιών από τη μικροοικονομική θεωρία που θα μας φανούν χρήσιμες στην αποτίμηση αξιογράφων. Στην αμέσως επόμενη ενότητα θα κάνουμε μια αντίστοιχη ανάλυση εννοιών από τη μακροοικονομική θεωρία.

#### 1.4 ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΑΚΡΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Το ουσιαστικό αντικείμενο του ερευνητικού τμήματος της παρούσας εργασίας θα είναι οι προσπάθειες σύνδεσης της μακροοικονομικής με τη χρηματοοικονομική μέσω του εξής διαύλου: μακροοικονομικές μεταβλητές με προβλεπτική ικανότητα πάνω σε χρηματοοικονομικές μεταβλητές. Από τη μακροοικονομική θεωρία, η έννοια στην οποία θα βασιστούμε είναι αυτή των οικονομικών κύκλων, την οποία και θα παρουσιάσουμε στην παρούσα ενότητα.

Ο οικονομικός κύκλος αντικατοπτρίζει την εξέλιξη μιας οικονομίας στον χρόνο. Οι χρηματοοικονομικές αγορές είναι άρρηκτα συνδεδεμένες με την πραγματική οικονομία. Όλες οι ορθολογικές επενδυτικές αποφάσεις περιέχουν άμεσα ή έμμεσα κρίσεις σχετικά με τις τρέχουσες και τις μελλοντικές οικονομικές συνθήκες. Επομένως, αφετηρία κάθε επενδυτικής απόφασης είναι η εκτίμηση της παρούσας και της μέλλουσας φάσης της οικονομίας ή με άλλα λόγια η θέση της μέσα στον οικονομικό κύκλο.

Ένας επιχειρηματικός κύκλος μπορεί να διαιρεθεί σε 4 κύριες φάσεις:

- i. Η οικονομία έχει αρνητικούς ρυθμούς ανάπτυξης οι οποίοι χειροτερεύουν.
- ii. Η οικονομία έχει αρνητικούς ρυθμούς ανάπτυξης οι οποίοι όμως έχουν αρχίσει και βελτιώνονται
- iii. Η οικονομία έχει θετικούς και επιταχυνόμενους ρυθμούς ανάπτυξης
- iv. Η οικονομία έχει θετικούς αλλά επιβραδυνόμενους ρυθμούς ανάπτυξης

#### Φάση I

Καθώς οι ρυθμοί ανάπτυξης μειώνονται, κάποια στιγμή πέφτουν κάτω από το μηδέν και έτσι η οικονομία εισέρχεται σε φάση ύφεσης. Οι πληθωριστικές πιέσεις έχουν αρχίσει να υποχωρούν, μειώνοντας τα επιτόκια και αυξάνοντας τις αποδόσεις των ομολόγων. Η υπερβάλλουσα ρευστότητα που υπάρχει στην οικονομία από τις 2 προηγούμενες φάσεις καθώς και η προσδοκία ανάκαμψης, οδηγούν τις τιμές των μετοχών προς

τα πάνω και μάλιστα στη φάση αυτή παρουσιάζουν τις καλύτερες αποδόσεις που όμως συνοδεύονται από μεγάλο κίνδυνο . Η χειρότερη επένδυση εδώ είναι οι πρώτες ύλες εξαιτίας της μειωμένης ζήτησης σε συνδυασμό με την υπερβάλλουσα προσφορά.

### Φάση II

Κατά τη διάρκεια της φάσης αυτής, η οικονομία μόλις έχει περάσει από το χαμηλότερο επίπεδο του κύκλου, ωστόσο βρίσκεται ακόμα σε φάση ύφεσης. Ο ρυθμός ανάπτυξης εντούτοις έχει αρχίσει να βελτιώνεται και πλησιάζει το μηδέν. Βασικά γνωρίσματα της φάσης αυτής είναι η αύξηση της ζήτησης, του πληθωρισμού και των κερδών των εταιριών. Βέβαια, στα πρώτα στάδια της εν λόγω φάσης, ο πληθωρισμός μειώνεται κάτι που σε συνδυασμό με τη συντηρητική νομισματική πολιτική, διατηρεί τα επιτόκια σε σχετικά χαμηλά επίπεδα με αποτέλεσμα οι αποδόσεις των ομολόγων να είναι ικανοποιητικές. Παρ' όλα αυτά, η πλέον ενδεδειγμένη επένδυση είναι οι μετοχές. Η αύξηση των κερδών των εταιριών αλλά και οι αισιόδοξες προοπτικές για το μέλλον της οικονομίας, είναι παράγοντες που δημιουργούν θετικές αποδόσεις στις μετοχές.

### Φάση III

Στο στάδιο αυτό, η οικονομία συνεχίζει την ανοδική πορεία της προηγούμενης φάσης και ο ρυθμός ανάπτυξης είναι πλέον θετικός και επιταχυνόμενος. Αρχίζουν να εμφανίζονται περιορισμοί σε ορισμένους τομείς της οικονομίας, όπως έλλειψη παραγωγικών συντελεστών. Κύριο χαρακτηριστικό είναι η εμφάνιση του προβλήματος του πληθωρισμού που γίνεται όλο και πιο έντονο. Αυτό, οδηγεί σε άνοδο των επιτοκίων με αποτέλεσμα τη μείωση των αποδόσεων των ομολόγων αλλά και των μετοχών καθώς τα αυξανόμενα επιτόκια μειώνουν την παρούσα αξία των μελλοντικών μερισμάτων και κατ' επέκταση τις τιμές των μετοχών. Μια άλλη συνέπεια της άνοδου των επιτοκίων, είναι ότι καθιστούν ελκυστικότερες τις επενδύσεις σε μετρητά. Η πιο αποδοτική επένδυση όμως είναι αυτή των πρώτων υλών κι αυτό γιατί η άνθηση της οικονομίας προκαλεί υπερβάλλουσα ζήτηση πρώτων υλών με αποτέλεσμα την αύξηση της τιμής τους.

### Φάση IV

Η επόμενη φάση του επιχειρηματικού κύκλου ξεκινά αφότου η οικονομία φτάσει στο μέγιστο ρυθμό ανάπτυξης και αρχίσει να επιβραδύνεται. Το πρόβλημα του πληθωρισμού εξακολουθεί να υφίσταται ενώ εφαρμόζεται περιοριστική νομισματική πολιτική για την καταπολέμησή



του. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τη μείωση της συνολικής ζήτησης, κάτι που επηρεάζει αρνητικά τα κέρδη των εταιριών και ως εκ τούτου τις τιμές των μετοχών. Οι πρώτες ύλες εξακολουθούν να έχουν σημαντικές αποδόσεις αλλά με μεγάλη μεταβλητότητα. Οι επενδύσεις σε μετρητά θεωρούνται ως οι πιο επικερδείς, δεδομένου του χαμηλού κινδύνου τους.

Το πλέον καθοριστικό σημείο στη διαδικασία λήψης μιας επενδυτικής απόφασης σε συνάρτηση με τη φάση του οικονομικού κύκλου, είναι ακριβώς η εκτίμηση της φάσης στην οποία βρίσκεται η οικονομία και το πόσο ακόμα θα διαρκέσει αυτή. Οι οικονομίες έχουν περιορισμένη διαθεσιμότητα σε παραγωγικούς συντελεστές, δηλαδή σε κεφάλαιο και εργασία. Η διαχρονική διαθεσιμότητα αυτών των συντελεστών καθορίζει το μακροπρόθεσμο δυνητικό ρυθμό ανάπτυξης μιας οικονομίας. Έτσι, ορίζουμε το δυνητικό ΑΕΠ που αποτελεί την παραγωγή που θα υπήρχε σε μια οικονομία σε συνθήκες πλήρους απασχόλησης των παραγωγικών συντελεστών.

Η διαφορά ανάμεσα στο πραγματοποιηθέν και στο δυνητικό ΑΕΠ μας δίνει το λεγόμενο *output gap* (σημ: επειδή δεν υπάρχει κάποιος αντίστοιχος όρος του συγκεκριμένου μεγέθους στα ελληνικά, στη συνέχεια θα χρησιμοποιούμε τον αγγλικό όρο). Η ύπαρξη αυτή της διαφοράς συνιστά ενδείξεις ανισορροπίας μέσα στην οικονομία και συνεπάγεται πληθωριστικές ή αντιπληθωριστικές πιέσεις μέσα στο σύστημα.

Το *output gap* μπορεί να εμφανίσει 4 διαφορετικές τάσεις με τις οποίες συνδέεται άμεσα με τις ισάριθμες φάσεις του επιχειρηματικού κύκλου που αναλύσαμε παραπάνω. Έτσι, στη φάση I είναι αρνητικό και αυξανόμενο σε απόλυτες τιμές στη φάση II είναι αρνητικό και μειούμενο σε απόλυτες τιμές, στη φάση III θετικό και αυξανόμενο, στη φάση IV θετικό και μειούμενο. Αν λοιπόν με κάποιο μοντέλο καταστεί δυνατή η εκτίμηση του *output gap* και της τάσης του, μπορούμε να καταλάβουμε σε ποια φάση του κύκλου βρισκόμαστε και κυρίως πότε θα περάσουμε στην επόμενη. Πρέπει να τονιστεί ότι σημασία έχει η διάρκεια του κύκλου ώστε να προσαρμοστεί ανάλογα η επενδυτική συμπεριφορά. Το καλύτερο σημείο για τοποθέτηση στον εκάστοτε επενδυτικό τίτλο είναι σε κάθε περίπτωση λίγο πριν το τέλος μιας φάσης του κύκλου και το ξεκίνημα μιας νέας.

Το δυνητικό ΑΕΠ και κατ' επέκταση το *output gap* μπορεί να μετρηθεί με διάφορες οικονομετρικές μεθόδους. Επίσης, μπορεί να μετρηθεί με την εκτίμηση της συνάρτησης παραγωγής της οικονομίας. Εμείς, στην εργασία αυτή θα κάνουμε χρήση μιας οικονομετρικής τεχνικής, του Hodrick – Prescott filter για την εκτίμηση του δυνητικού ΑΕΠ και στη συνέχεια θα εξετάσουμε την προβλεπτική ικανότητα του *output gap* πάνω σε χρηματιστηριακές αποδόσεις.

## **Κεφάλαιο 2**

### **Βασικές Αρχές Θεωρίας Αποτίμησης Αξιογράφων**

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2**

## 2.1 ΤΟ ΒΑΣΙΚΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΚΑΤΑΝΑΛΩΤΗ

Ξεκινάμε από έναν αντιπροσωπευτικό καταναλωτή που το βασικό του πρόβλημα είναι τι ποσό από τη σημερινή του κατανάλωση θα «θυσιάσει» ώστε με τη μορφή αποταμίευσης να την χρησιμοποιήσει στο μέλλον. Έτσι, δημιουργείται ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης της χρησιμότητας αυτού του καταναλωτή.

Από τη λύση αυτού του προβλήματος προκύπτει η κεντρική εξίσωση αποτίμησης, σύμφωνα με την οποία η τιμή ενός περιουσιακού στοιχείου είναι η παρούσα αξία της αναμενόμενης μελλοντικής αξίας με συντελεστή προεξόφλησης την οριακή χρησιμότητα του καταναλωτή.

Ο καταναλωτής έχει σαν στόχο να μειώσει τη διακύμανση της κατανάλωσης γιατί με αυτό τον τρόπο πετυχαίνει να μειώσει και την αβεβαιότητά του, εξασφαλίζοντας ένα σταθερό ποσό κατανάλωσης διαχρονικά.

Η αξία (payoff) ενός τίτλου τον οποίο ο επενδυτής αγοράζει σήμερα με σκοπό τη μελλοντική του ρευστοποίηση θα συμβολίζεται με  $X_{t+1}$  και είναι μια τυχαία μεταβλητή. Η συνάρτηση χρησιμότητας ενός επενδυτή εξαρτάται από τη σημερινή και τη μελλοντική του κατανάλωση  $C$ :

$$U(C_t, C_{t+1}) = u(C_t) + \beta E_t[u(C_{t+1})] \quad (1)$$

με  $\beta \in (0,1)$  τον υποκειμενικό συντελεστή προεξόφλησης του επενδυτή.

Επιπλέον ισχύει ότι  $\frac{\partial u}{\partial C} > 0$  και  $\frac{\partial^2 u}{\partial C^2} < 0$ , δηλαδή η οριακή χρησιμότητα είναι θετική αλλά φθίνουσα συνάρτηση της κατανάλωσης. Επιπλέον, η παραπάνω δεσμευμένη μαθηματική ελπίδα ορίζεται βάσει της πληροφόρησης στο χρόνο  $t$ .

Έστω τώρα ένας επενδυτής με εισόδημα  $Y_t$  και  $Y_{t+1}$  τις περιόδους  $t$  και  $t+1$  αντίστοιχα. Αγοράζει την περίοδο  $t$  έναν τίτλο με τιμή  $P_t$  ο οποίος θα του δώσει μια πληρωμή  $X_{t+1} = P_t R_{t+1}$ , όπου  $R_{t+1}$  η ακαθάριστη απόδοση (gross return) του τίτλου. Το πρόβλημα του επενδυτή είναι τι ποσότητα  $q_t$  του τίτλου θα αγοράσει. Έτσι, καταλήγουμε στο παρακάτω πρόβλημα μεγιστοποίησης:

$$\max_q U = u(C_t) + \beta E_t(u(C_{t+1}))$$

$$C_t = Y_t - P_t q$$

$$C_{t+1} = Y_{t+1} + X_{t+1} q$$

Λύνοντας αυτό το πρόβλημα καταλήγουμε στην παρακάτω συνθήκη άριστης κατανάλωσης, από την οποία προκύπτει και η τιμή του τίτλου:

$$P_t u'(C_t) = E_t[\beta u'(C_{t+z}) X_{t+1}] \quad (2)$$

$$P_t = E_t\left[\beta \frac{u'(C_{t+1})}{u'(C_t)} X_{t+1}\right] \quad (3)$$

Παρατηρώντας την (2), βλέπουμε ότι η μείωση της οριακής χρησιμότητας από την αγορά μιας επιπλέον μονάδας του τίτλου σήμερα, ισούται με την αύξηση της αναμενόμενης προεξοφλημένης χρησιμότητας από την πληρωμή του τίτλου. Η σχέση (3) ορίζει την τιμή που ένας επενδυτής είναι διατεθειμένος να πληρώσει για τον τίτλο και αποτελεί την κεντρική εξίσωση αποτίμησης.

## 2.2 Ο ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΠΡΟΕΞΟΦΛΗΣΗΣ

Μια από τις βασικότερες παραμέτρους της θεωρίας αποτίμησης είναι ο στοχαστικός συντελεστής προεξόφλησης (stochastic discount factor). Αυτός, ορίζεται ως ο οριακός λόγος υποκατάστασης μεταξύ παρούσας και μελλοντικής κατανάλωσης και συμβολίζεται με  $M_{t+1}$ , δηλαδή:

$$M_{t+1} = \beta \frac{u'(C_{t+1})}{u'(C_t)} \quad (4)$$

Η σχέση (4) συνεπάγεται ότι η κεντρική εξίσωση αποτίμησης γράφεται ισοδύναμα και:

$$P_t = E_t(M_{t+1} X_{t+1}) \quad (5)$$

Σε αυτό το σημείο, αξίζει να αναφέρουμε ότι η έννοια του στοχαστικού συντελεστή προεξόφλησης συναντάται στη βιβλιογραφία και με τον όρο «πυρήνας των τιμών» (price kernel) ο οποίος μάλιστα αποδεικνύεται ότι σε περίπτωση έλλειψης αντισταθμιστικής κερδοσκοπίας (arbitrage) σε μια κεφαλαιαγορά, είναι μοναδικός για κάθε αξιόγραφο.

Αν συγκεκριμενοποιήσουμε τη συνάρτηση χρησιμότητας, δίνοντάς της εκθετική μορφή (power utility), καταλήγουμε σε μια πιο εύχρηστη μορφή του στοχαστικού συντελεστή προεξόφλησης:

$$u(C_t) = \frac{C_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} \quad (6)$$

$$\Rightarrow M_{t+1} = \beta \left( \frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\gamma} \quad (7)$$

όπου  $\gamma$  είναι ο συντελεστής αποστροφής στον κίνδυνο. Εκφράζοντας την κεντρική εξίσωση αποτίμησης σε όρους αποδόσεων, διαιρούμε την (5) με την τιμή του τίτλου κι έτσι έχουμε ότι:

$$E_t(M_{t+1}R_{t+1}) = 1 \quad (8)$$

Στη συνέχεια, δουλεύοντας πάνω στην κεντρική εξίσωση αποτίμησης, αν εκφράσουμε με  $R_{t+1}^f$  το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου, προκύπτει ότι:

$$R_t^f = \frac{1}{E_t(M_{t+1})} \quad (9)$$

$$R_t^f = \frac{1}{\beta} E_t \left( \frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^\gamma \quad (10)$$

Βασιζόμενοι στην υπόθεση ότι δεν υπάρχει αβεβαιότητα σε ό,τι αφορά στη μελλοντική κατανάλωση, αν λογαριθμήσουμε την (10) παίρνουμε ότι:

$$r_t^f = -\ln \beta + \gamma E_t \Delta c_{t+1} \quad (11)$$

Να επισημάνουμε εδώ πως όταν συμβολίζουμε τις μεταβλητές που ορίσαμε πιο πάνω με μικρά γράμματα, σημαίνει πως χρησιμοποιούμε τους λογαρίθμους τους. Η σχέση (11) μας δείχνει ότι η απόδοση χωρίς κίνδυνο είναι υψηλή είτε όταν ο ρυθμός ανόδου της κατανάλωσης είναι υψηλός είτε όταν οι επενδυτές είναι ανυπόμονοι, δηλαδή το  $\beta$  είναι χαμηλό.

Στην πιο ρεαλιστική περίπτωση που υπάρχει αβεβαιότητα σε ό,τι αφορά τη μελλοντική κατανάλωση και υποθέσουμε ότι ο ρυθμός μεταβολής της κατανάλωσης είναι μια τυχαία μεταβλητή που κατανέμεται λογαριθμοκανονικά, οδηγούμαστε στην παρακάτω εξίσωση:

$$r_t^f = -\ln \beta + \gamma E_t \Delta c_{t+1} - \frac{\gamma^2}{2} \sigma^2 \quad (12)$$

Ο όρος  $-\frac{\gamma^2}{2}\sigma^2$  περιγράφει την επίδραση της αβεβαιότητας στο επιτόκιο μηδενικού κινδύνου. Το συμπέρασμα είναι ότι όταν η αβεβαιότητα που εκφράζεται μέσω της διακύμανσης της κατανάλωσης αυξάνεται, η απόδοση χωρίς κίνδυνο μειώνεται γιατί οι επενδυτές αυξάνουν τις αποταμιεύσεις τους για να αντιμετωπίσουν αυτήν ακριβώς τη μεταβλητότητα της κατανάλωσης.

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (5),(7),(9) και λαμβάνοντας υπόψη ότι για 2 τυχαίες μεταβλητές X και Y ισχύει:

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

προκύπτει η επόμενη σχέση που βασίζεται στη διόρθωση της τιμολόγησης λαμβάνοντας υπόψη τον κίνδυνο:

$$P_t = \frac{E_t(X_{t+1})}{R_t^f} + \text{cov}(\beta(\frac{C_{t+1}}{C_t})^{-\gamma}, X_{t+1}) \quad (13)$$

Η ερμηνεία της (13) είναι ότι η τιμή ενός τίτλου μειώνεται όταν η πληρωμή του έχει θετική συσχέτιση με το ρυθμό ανόδου της κατανάλωσης, επειδή ακριβώς οι καταναλωτές επιθυμούν να μειώσουν τη διακύμανση αυτής.

Αν κάνουμε πράξεις πάνω στην κεντρική εξίσωση αποτίμησης όπως αυτή εκφράζεται σε όρους αποδόσεων, οδηγούμαστε στο εξής:

$$E(R_{t+1}) - R_t^f = \gamma \text{cov}(\Delta c_{t+1}, R_{t+1}) \quad (14)$$

Το αριστερό μέλος της (14) αντιπροσωπεύει την υπερβάλλουσα απόδοση ενός τίτλου πάνω από το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου. Με άλλα λόγια, είναι το ασφάλιστρο κινδύνου. Αυτό, είναι γραμμική συνάρτηση της συνδιακύμανσης μεταξύ των αποδόσεων του τίτλου και του ρυθμού ανόδου της κατανάλωσης.

## 2.3 ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗ ΑΞΙΟΓΡΑΦΩΝ

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε το υπόδειγμα καταναλωτή σε πιο στερεές βάσεις και θα καταλήξουμε σε κάποια σημαντικά αποτελέσματα που θα μας οδηγήσουν στη συνέχεια στο CAPM.

Μια στρατηγική arbitrage πρώτου τύπου είναι μια στρατηγική που παράγει μη αρνητικά κέρδη στο παρόν και καμιά ζημιά στο μέλλον, αφήνοντας παράλληλα μια θετική πιθανότητα κέρδους στο μέλλον. Μια στρατηγική arbitrage δευτέρου τύπου είναι μια στρατηγική που δίνει αυστηρά θετικά κέρδη σήμερα και καμιά ζημιά στο μέλλον. Η βασική ιδέα του υποδείγματος είναι ότι μια αγορά σε ισορροπία δεν μπορεί να προσφέρει δυνατότητες arbitrage.

Εισάγουμε –χάριν απλούστευσης– ένα μονοπεριοδικό υπόδειγμα με δυο χρονικές στιγμές: το σήμερα ( $t=0$ ) και το αύριο ( $t=1$ ). Έστω ότι έχουμε σήμερα  $N$  αξιόγραφα και  $S$  πιθανές αυριανές φυσικές καταστάσεις. Η επένδυση για μια χρονική περίοδο ορίζεται από τον πίνακα πληρωμών  $D = [d_{is}]_{1 \leq i \leq N, 1 \leq s \leq S}$ , όπου το στοιχείο  $d_{is}$  είναι η χρηματοροή που παράγεται από το αξιόγραφο  $i$  στη φυσική κατάσταση  $s$ .

Ένα χαρτοφυλάκιο είναι ένα διάνυσμα στήλη  $\theta \in R^N$  με το στοιχείο  $\theta_i$  να περιγράφει τον αριθμό των αξιογράφων  $i$  που περιέχονται στο χαρτοφυλάκιο. Οι τιμές των αξιογράφων δίνονται από το διάνυσμα  $q \in R^N$ . Το εσωτερικό γινόμενο  $q^T \theta$  είναι η αξία του χαρτοφυλακίου. Το ζεύγος  $(D, q)$  περιγράφει πλήρως μια χρηματοοικονομική αγορά, αφού μας δίνει τις τιμές των αξιογράφων αλλά και τις πληρωμές τους σε κάθε πιθανή μελλοντική κατάσταση.

Ένα αυστηρά θετικό διάνυσμα  $\psi \in R_{++}^S$  τέτοιο ώστε  $q = D\psi$  λέγεται διάνυσμα καταστατικών τιμών. Αποδεικνύεται πως αν υπάρχει αυστηρά θετικό διάνυσμα καταστατικών τιμών, μια αγορά χαρακτηρίζεται από έλλειψη ευκαιριών arbitrage. Επιπλέον, αν η αγορά είναι πλήρης, δηλαδή υπάρχουν τόσα αξιόγραφα όσες και οι πιθανές φυσικές καταστάσεις, το διάνυσμα αυτό είναι μοναδικό.

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Riesz, το οποίο και αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, οδηγούμαστε στο εξής θεμελιώδες συμπέρασμα: μια κεφαλαιαγορά  $(D, q)$  χαρακτηρίζεται από έλλειψη ευκαιριών arbitrage αν και μόνον αν υπάρχει τυχαία μεταβλητή  $\pi \in R^S$  με  $\pi$  αυστηρά θετικό, τέτοια ώστε:

$$q = E(D * \pi)$$

Με  $*$  συμβολίζεται το γινόμενο Hadamard, δηλαδή το γινόμενο του κάθε στοιχείου του διανύσματος με το αντίστοιχο του άλλου. Η τυχαία μεταβλητή  $\pi$  ονομάζεται πυρήνας των τιμών (price kernel) και δεν είναι τίποτα άλλο από τον στοχαστικό συντελεστή προεξόφλησης, όπως

αναφέρθηκε παραπάνω. Για τη θεωρητική αυτή μεταβλητή και την εμπειρική συμπεριφορά της έχουν γίνει διάφορες έρευνες, όπως αυτή του Charman (1997). Η σχέση στην οποία οδηγηθήκαμε από το θεώρημα του Riesz είναι η κεντρική εξίσωση αποτίμησης.

Υποθέτουμε ότι έχουμε μια αγορά  $(D, q)$  στην οποία δεν υπάρχουν ευκαιρίες arbitrage. Έτσι, για κάθε χαρτοφυλάκιο  $\theta$ , η απόδοσή του θα είναι το διάνυσμα  $R^\theta \in R^S$  που ορίζεται από:

$$R_s^\theta \equiv \frac{[D^T \theta]_s}{q \cdot \theta}$$

Αν έχουμε έναν πυρήνα τιμών  $\pi \in R_{++}^S$ , θα ισχύει  $E(\pi R^\theta) = 1$ . Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα χαρτοφυλάκιο χωρίς κίνδυνο με απόδοση  $R^0$ , εξάγονται τα παρακάτω σημαντικά αποτελέσματα:

1. Για κάθε χαρτοφυλάκιο  $\theta$  έχουμε:

$$E(R^\theta) - R_0 = -\frac{\text{Cov}(R^\theta, \pi)}{E(\pi)}$$

2. Υπάρχει πάντα ένα χαρτοφυλάκιο  $\theta^*$  που έχει τη μέγιστη συσχέτιση με τον πυρήνα των τιμών. Δηλαδή, το πρόβλημα

$$\sup_{\theta} \text{corr}(D^T \theta, \pi)$$

έχει πάντα λύση. Για την απόδειξη αυτής της σχέσης χρησιμοποιείται το θεώρημα των ορθογώνιων προβολών σε χώρους Hilbert.

3. Αν το χαρτοφυλάκιο με αυτή τη μέγιστη συσχέτιση έχει απόδοση  $R^*$ , τότε για κάθε άλλο χαρτοφυλάκιο  $\theta$  ισχύει ότι:

$$E(R^\theta) - R^0 = \beta_\theta [E(R^*) - R^0], \quad \beta_\theta = \frac{\text{Cov}(R^*, R^\theta)}{\text{Var}(R^*)}$$

4. Έστω ότι δεν υπάρχει αξιόγραφο χωρίς κίνδυνο. Ορίζουμε τότε την απόδοση  $R^0 = E(R^\theta)$  για κάθε  $\theta$  τέτοιο ώστε να ορίζεται η απόδοσή του και η συνδιακύμανσή του με τον πυρήνα των τιμών να είναι μηδενική. Τότε το ακριβώς παραπάνω αποτέλεσμα ισχύει (υπόδειγμα μηδενικού βήτα του Black).



5. Αν η αγορά είναι πλήρης, η τυχαία μεταβλητή  $R^*$  είναι τέλεια θετικά συσχετισμένη με τον πυρήνα των τιμών.

## 2.4 ΤΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ CAPM

Το υπόδειγμα αποτίμησης κεφαλαιακών στοιχείων (CAPM) εισήχθη για πρώτη φορά στη βιβλιογραφία από τον Sharpe(1964). Υπάρχουν διάφοροι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να καταλήξουμε σε αυτό και έναν από αυτούς θα χρησιμοποιήσουμε κι εμείς.

Έστω μια πλήρης κεφαλαιαγορά, ένα μοναδικό χαρτοφυλάκιο  $M$  που λέγεται χαρτοφυλάκιο αγοράς, τέτοιο ώστε  $D^T M = e$ , όπου  $e$  είναι ο συνολικός πλούτος της οικονομίας με μη μηδενική διακύμανση. Επίσης, στην αγορά προσφέρεται το χαρτοφυλάκιο χωρίς κίνδυνο που πληρώνει μια μονάδα σε όλες τις πιθανές καταστάσεις αβεβαιότητας: πρόκειται όπως λέμε, για το άθροισμα όλων των στοιχειωδών αξιογράφων Arrow – Debreu. Υποθέτουμε επίσης ότι οι καταναλωτές αποστρέφονται αυστηρά τη διακύμανση, δηλαδή για σχέδια κατανάλωσης  $x, y \in R^S$ , ισχύει ότι:

$$U(x) > U(y) \text{ αν } E(x) = E(y) \text{ και } Var(x) < Var(y)$$

Έχουμε ένα νοικοκυριό  $h$ ,  $\theta^h$  το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο αυτού και  $x^h$  η πληρωμή που του αντιστοιχεί. Σε κατάσταση ισορροπίας, το διάνυσμα των τιμών  $q$  απεικονίζεται από έναν πυρήνα των τιμών  $\pi$ . Τότε, η γραμμική παλινδρόμηση του  $x^h$  πάνω στο  $\pi$ , λαμβάνοντας υπόψη τις υποθέσεις της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων δίνει:

$$x^h = A + B\pi + \varepsilon$$

Αφού η αγορά είναι πλήρης, τότε και οι πληρωμές  $\ell$  και  $\pi$  προσφέρονται στην αγορά και το νοικοκυριό θα μπορούσε να έχει διαλέξει το χαρτοφυλάκιο  $\hat{\theta}^h$  με πληρωμή  $\hat{x}^h = A\ell + B\pi$ . Όμως,

$$q \cdot \hat{\theta}^h = E(\pi \hat{x}^h) = E[(A + B\pi)] = E[(A + B\pi + \varepsilon)] = E(\pi x^h) = q \cdot \theta^h$$

Δηλαδή το  $\hat{x}^h$  κοστίζει όσο και το  $x^h$ , Από την άλλη, η διακύμανσή του δίνεται από

$$Var(x^h) = Var(B\pi) + Var(\varepsilon) + 2BCov(\pi, \varepsilon) > Var(B\pi) = Var(\hat{x}^h)$$

Αυτό σημαίνει ότι  $U(\hat{x}^h) > U(x^h)$ , κάτι που είναι άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι το  $\theta^h$  είναι το άριστο χαρτοφυλάκιο του νοικοκυριού  $h$ . Έτσι, θα πρέπει να ισχύει  $\varepsilon = 0$  και η πληρωμή της άριστης επιλογής γράφεται:

$$x^h = A_h + B_h \pi$$

Σε κατάσταση ισορροπίας οι αγορές εκκαθαρίζονται, δηλαδή:

$$D^T M = e = \sum_h e^h = \sum_h x^h = \sum_h (A_h + B_h \pi) = a + b \pi$$

με  $a = \sum_h A_h, b = \sum_h B_h \neq 0$  σταθερές. Από την κεντρική εξίσωση αποτίμησης έχουμε ότι:

$$q \cdot \theta = E[\pi(D^T \theta)] = E\left[\frac{D^T M - a}{b} D^T \theta\right] = kE(D^T \theta) + K \text{Cov}(D^T \theta, D^T M)$$

με  $k = \frac{1}{b} E(D^T M - a), K = \frac{1}{b}$ . Κάνοντας πράξεις και χρησιμοποιώντας τον ορισμό του βήτα έχουμε:

$$\begin{aligned} 1 &= k \frac{E(D^T \theta)}{q \cdot \theta} + K \frac{\text{Cov}(D^T \theta, D^T M)}{q \cdot \theta} \frac{q \cdot M}{q \cdot M} \\ &= kE(R^\theta) + K(q \cdot M) \text{Cov}(R^\theta, R^M) \Leftrightarrow \\ 1 &= kE(R^\theta) + K(q \cdot M) \beta_\theta \text{Var}(R^M) \end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση ισχύει για όλα τα χαρτοφυλάκια  $\theta$ , επομένως ισχύει και για το χαρτοφυλάκιο της αγοράς, δηλαδή:

$$1 = kE(R^M) + K(q \cdot M) \beta_M \text{Var}(R^M)$$

αλλά και για το χαρτοφυλάκιο χωρίς κίνδυνο:

$$1 = kR^0$$

Χρησιμοποιώντας τις δυο τελευταίες σχέσεις, έχουμε:

$$K(q \cdot M) \text{Var}(R^M) = k[R^0 - E(R^M)]$$

Έτσι, καταλήγουμε στο CAPM:

$$E(R^o) - R^o = \beta_o [E(R^M) - R^o]$$

Η ανάλυση αυτή προέρχεται από τη θεώρηση της κατάστασης ισορροπίας σε μια οικονομία όπου τα νοικοκυριά δεν κληρονομούν μόνο μια αρχική διανομή πλούτου αλλά και ένα αρχικό χαρτοφυλάκιο.

Τα παραπάνω μπορούν να εκφραστούν με τη μορφή του παρακάτω θεωρήματος:

Με δεδομένη μια κατάσταση ισορροπίας για μια οικονομία στον χώρο  $L^2(P)$ , ας υποθέσουμε ότι:

1. Οι προτιμήσεις κάθε επενδυτή χαρακτηρίζονται από αυστηρή αποστροφή στη διακύμανση.
2. Η αρχική κατανομή πλούτου κάθε επενδυτή, προσφέρεται στην αγορά
3. Ο χώρος επιλογών κάθε επενδυτή είναι ο  $L^2(P)$ .
4. Η πληρωμή χωρίς κίνδυνο βρίσκεται στην κεφαλαιαγορά και έχει μη μηδενική αξία σε αυτή.
5. Το χαρτοφυλάκιο της αγοράς  $m$  έχει μη μηδενική διακύμανση.

Τότε, κάθε πληρωμή (αξιόγραφο)  $x$  στην κεφαλαιαγορά με μη μηδενική αγοραία αξία, ικανοποιεί την παρακάτω σχέση:

$$E(R_x) - r = \beta_{xm} (E(R_m) - r)$$

## 2.5 BETA PRICING MODELS AND THE PUZZLES

Ένα τελευταίο αλλά σημαντικό βήμα σε αυτή την παρουσίαση των βασικών σχέσεων που θεμελιώνουν τη θεωρία αποτίμησης αξιογράφων, είναι να καταλήξουμε σε ένα beta pricing model αλλά και σε έναν ορισμό του δείκτη Sharpe ώστε στη συνέχεια να σκιαγραφήσουμε το equity premium puzzle (Mehra-Prescott 1985) που αποτελεί μια από τις μεγαλύτερες σύγχρονες προκλήσεις της θεωρίας αποτίμησης.

Σκοπός ενός beta pricing model είναι να εκφράσει το ασφάλιστρο κινδύνου ενός τίτλου ως συνάρτηση δύο παραγόντων: της ποσότητας και της τιμής του κινδύνου. Έτσι, έχοντας ως αφετηρία τη σχέση (14), προκύπτει το εξής μοντέλο για ένα αξιόγραφο  $i$ :

$$\begin{aligned}
 E(R_{t+1}^i) - R_t^f &= \beta_{i,\Delta c} \lambda_{\Delta c} \\
 \lambda_{\Delta c} &= \gamma \text{var}(\Delta c_{t+1}), \\
 \beta_{i,\Delta c} &= \frac{\text{cov}(R_{t+1}^i, \Delta c_{t+1})}{\text{var}(\Delta c_{t+1})}
 \end{aligned} \tag{15}$$

Στο μοντέλο αυτό, τα beta εκφράζουν την ποσότητα του κινδύνου και το  $\lambda$  την τιμή του κινδύνου. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο συντελεστής  $\lambda$  είναι κοινός για όλους τους τίτλους. Κυριότεροι προσδιοριστικοί παράγοντές του είναι ο βαθμός αποστροφής του κινδύνου και η μεταβλητότητα της κατανάλωσης.

Ο δείκτης του Sharpe για ένα περιουσιακό στοιχείο  $i$  ορίζεται ως ο λόγος της υπερβάλλουσας απόδοσής του ανά μονάδα κινδύνου. Αποδεικνύεται ότι η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει αυτός ο δείκτης ταυτίζεται με την κλίση του συνόρου των επενδυτικών δυνατοτήτων μιας οικονομίας, γνωστό και ως mean-variance frontier. Με άλλα λόγια:

$$\left| \frac{E(R_{t+1}) - R_t^f}{\sigma(R_{t+1}^i)} \right| = \frac{\sigma(M_{t+1})}{E(M_{t+1})} \approx \gamma \sigma(\Delta c_{t+1}) \tag{16}$$

Το μέγιστο Sharpe ratio μιας οικονομίας, εξαρτάται θετικά από το βαθμό αποστροφής του κινδύνου και τη διακύμανση της κατανάλωσης. Η σχέση (16) αποτέλεσε το εφιαλήριο για τη διατύπωση του equity premium ruzzle.

Αν υποθέσουμε ότι το θεωρητικό πλαίσιο που αναλύσαμε πιο πάνω ισχύει εμπειρικά και ερμηνεύσουμε τη σχέση (16), συμπεραίνουμε ότι του Sharpe ratio μιας οικονομίας έχει ένα ανώτατο όριο, ένα άνω φράγμα, το  $\gamma \sigma(\Delta c_{t+1})$ .

Χρησιμοποιώντας εμπειρικά δεδομένα για το Sharpe ratio και την τυπική απόκλιση της κατανάλωσης, το τεκμαρτό (implied)  $\gamma$  που προκύπτει είναι πολύ υψηλό. Για παράδειγμα, στις ΗΠΑ ο βαθμός αποστροφής κινδύνου θα έπρεπε να υπερβαίνει το 50.

Το παραπάνω πρόβλημα που οι Mehra-Prescott (1985) ονόμασαν equity premium ruzzle έχει απασχολήσει έκτοτε τη διεθνή βιβλιογραφία, χωρίς όμως να έχει γίνει εφικτή η επίλυσή του. Βέβαια, έχουν δοθεί κάποιες πιθανές εξηγήσεις χωρίς όμως κάποια από αυτές να είναι πλήρης.

Αν εν τέλει αποδεχθούμε ότι όντως οι επενδυτές παρουσιάζουν έναν τόσο υψηλό βαθμό αποστροφής κινδύνου, θα λύναμε το equity premium ruzzle αλλά θα αποτυγχάναμε να εξηγήσουμε το μέσο επιτόκιο μηδενικού κινδύνου. Πράγματι, από τη σχέση (12) και με εμπειρικά δεδομένα των τελευταίων 50 ετών στις ΗΠΑ, προκύπτει ότι  $r_{t+1}^f + \ln \beta = 0.204$ .

Για να εξηγηθεί το παραπάνω εύρημα και να ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα, πρέπει να υποθέσουμε ότι ο υποκειμενικός συντελεστής προεξόφλησης θα έπρεπε να είναι πάνω από 1.20, πράγμα μη λογικό. Ο Weil(1989) που πρώτος παρατήρησε αυτό το πρόβλημα, το ονόμασε «risk-free rate puzzle».

## 2.6 ΠΡΟΒΛΕΨΙΜΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΑΠΟΔΟΣΕΩΝ

Τελειώνοντας το κεφάλαιο αυτό, θα προσπαθήσουμε να καταλήξουμε σε ένα συμπέρασμα πάνω στο αν οι διάφορες εξισώσεις της θεωρίας αποτίμησης αξιογράφων μας λένε κάτι για την προβλεψιμότητα των αποδόσεων.

Ξεκινώντας από την κεντρική εξίσωση αποτίμησης (2) και υποθέτοντας ότι το payoff του τίτλου είναι η μελλοντική του τιμή, ότι οι επενδυτές είναι ουδέτεροι στον κίνδυνο και ότι το χρονικό διάστημα μεταξύ  $t$  και  $t+1$  είναι μικρό, δηλαδή  $\beta=1$ , καταλήγουμε στο ότι  $P_t = E(P_{t+1})$ , δηλαδή οι τιμές είναι martingale, άρα δεν είναι προβλέψιμες.

Σε μακροπρόθεσμο ορίζοντα, οι παραπάνω υποθέσεις δεν ισχύουν και τότε:

$$E(R_{t+1}^i) - R_t^f = \gamma_t \sigma_t(\Delta c_{t+1}) \sigma_t(R_{t+1}) \rho_t(\Delta c_{t+1}, R_{t+1})$$

Έτσι, οι υπερβάλλουσες αποδόσεις μεταβάλλονται ανάλογα με τη μεταβολή του βαθμού αποστροφής κινδύνου, της διακύμανσης της κατανάλωσης, της διακύμανσης των αποδόσεων και του συντελεστή συσχέτισης μεταξύ των αποδόσεων και του ρυθμού μεταβολής της κατανάλωσης. Στο βαθμό λοιπόν που το ασφάλιστρο κινδύνου μεταβάλλεται διαχρονικά κατά τη διάρκεια του οικονομικού κύκλου, οι αποδόσεις είναι προβλέψιμες, εφόσον βέβαια είμαστε σε θέση να κατασκευάσουμε ανάλογα υποδείγματα. Αυτό θα προσπαθήσουμε να κάνουμε και στην εργασία αυτή.

## **Κεφάλαιο 3**

### **Επισκόπηση Βιβλιογραφίας**

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

### 3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο κεφάλαιο αυτό θα προβούμε σε μια συνοπτική περιγραφή των σημαντικότερων papers που έχουν δημοσιευθεί και αναφέρονται στη θεωρία αποτίμησης αξιογράφων<sup>1</sup>. Έτσι, θα δούμε τους σημαντικότερους σταθμούς αυτής, ενώ ταυτόχρονα θα φτιάξουμε και το συνδεδετικό κρίκο με το εμπειρικό μέρος της εργασίας μας.

Η επισκόπηση αυτή θα χωριστεί σε διάφορες χρονικές περιόδους ώστε να είναι πιο λειτουργική. Σε κάθε περίοδο θα γίνεται μια σύντομη αναφορά των πιο σημαντικών συμπερασμάτων που εξάγονται από την έρευνα, ενώ οι πιο αξιόλογες δημοσιεύσεις θα αναλύονται λίγο εκτενέστερα. Η σειρά αναφοράς θα είναι χρονολογική και όχι ανάλογα με το θέμα.

### 3.2 ΠΕΡΙΟΔΟΣ 1950-1979

Η περίοδος αυτή αποτελεί και την περίοδο γέννησης ουσιαστικά της θεωρίας χαρτοφυλακίου και κατ' επέκταση και της θεωρίας αποτίμησης αξιογράφων.

Η αρχή έγινε από το περίφημο «Portfolio selection» του Markowitz (1952) που θεμελίωσε τον κλάδο της διαχείρισης χαρτοφυλακίου. Σε αυτό, η διαδικασία επιλογής χαρτοφυλακίου χωρίζεται σε δυο στάδια: στο πρώτο γίνεται παρατήρηση και αξιολόγηση της μελλοντικής πορείας των διαθέσιμων αξιογράφων και στο δεύτερο γίνεται η επιλογή του χαρτοφυλακίου. Βασικά κριτήρια επιλογής είναι η απόδοση και η διακύμανση. Θεμελιώδεις έννοιες όπως αυτή του αποδοτικού συνόρου αναλύονται πρώτη φορά εκτενώς, ενώ τονίζεται επίσης για πρώτη φορά η αξία της διαφοροποίησης.

Σε ό,τι αφορά τη θεωρία αποτίμησης αξιογράφων, τα θεμέλιά της βρίσκονται στους Sharpe (1964), Lintner (1965), Mossin (1966), που παρουσιάζουν με διάφορες παραλλαγές το CAPM. Επίσης, ο Black (1972) παρουσιάζει το zero beta CAPM για το οποίο κάναμε μια μικρή αναφορά στο κεφάλαιο 2.

#### **Fama – MacBeth (1972)**

Οι Fama και MacBeth στην έρευνά τους «Risk, return and equilibrium: empirical tests» προσπαθούν να ελέγξουν τη σχέση ανάμεσα

---

<sup>1</sup> Η σημαντικότητα των papers είναι καθαρά υποκειμενική σε αυτό το κεφάλαιο. Είναι ενόητο ότι πολλές έρευνες παραλείπονται είτε γιατί δεν τις κρίναμε σημαντικές είτε γιατί δεν ήταν διαθέσιμες.

στη μέση απόδοση και στον κίνδυνο για τις κοινές μετοχές του NYSE. Ξεκινούν από τη διαπίστωση ότι το CAPM εμπεριέχει τρεις υποθέσεις προς έλεγχο: η σχέση ανάμεσα στην αναμενόμενη απόδοση μιας μετοχής και του κινδύνου της σε κάθε αποτελεσματικό χαρτοφυλάκιο είναι γραμμική, το beta είναι ένα πλήρες μέτρο του κινδύνου της μετοχής και τέλος, σε μια αγορά με επενδυτές που αποστρέφονται τον κίνδυνο, υψηλότερος κίνδυνος πρέπει να συνδεθεί με υψηλότερη αναμενόμενη απόδοση.

Για τον έλεγχο των υποθέσεων αυτών, κατασκευάζουν το εξής μοντέλο:

$$\tilde{R}_{it} = \tilde{\gamma}_{0t} + \tilde{\gamma}_{1t}\beta_i + \tilde{\gamma}_{2t}\beta_i^2 + \tilde{\gamma}_{3t}s_i + \tilde{\eta}_{it}$$

Οι υποθέσεις που ελέγχουν είναι οι:

1.  $E(\tilde{\gamma}_{2t}) = 0$
2.  $E(\tilde{\gamma}_{3t}) = 0$
3.  $E(\tilde{\gamma}_{1t}) = E(\tilde{R}_{mt}) - E(\tilde{R}_{0t}) > 0$
4.  $E(\tilde{\gamma}_{0t}) = R_{ft}$

Χρησιμοποιώντας δεδομένα της περιόδου 1935-1968, οδηγούνται στα εξής συμπεράσματα:

1. Αποδέχονται την υπόθεση ότι οι μέσες αποδόσεις των κοινών μετοχών του NYSE αντικατοπτρίζουν τις προσπάθειες των επενδυτών να διακρατούν αποτελεσματικά χαρτοφυλάκια.
2. Αποδέχονται την υπόθεση ότι οι επενδυτές κατά τη διαδικασία επιλογής χαρτοφυλακίου θεωρούν ότι ο κίνδυνος μιας μετοχής και η αναμενόμενη απόδοσή της συνδέονται με γραμμική σχέση.
3. Αποδέχονται την υπόθεση ότι κανένα άλλο μέτρο κινδύνου πλην του beta δεν επηρεάζει συστηματικά τις μέσες αποδόσεις.
4. Οι ιδιότητες των συντελεστών και των καταλοίπων των παλινδρομήσεων που εκτελέστηκαν, είναι συνεπείς με την ύπαρξη μιας αποτελεσματικής αγοράς.



### **Merton (1973)**

Ο Robert Merton το 1973 εισήγαγε μια παραλλαγή του CAPM, η οποία ονομάστηκε Intertemporal CAPM (ICAPM) και θεωρείται ιδιαίτερα σημαντική.

Βασίζεται στην υπόθεση ότι η δεσμευμένη κατανομή των αποδόσεων είναι συνάρτηση ενός συνόλου καταστατικών μεταβλητών που με τη σειρά τους είναι συνάρτηση των μελλοντικών μεταβολών του συνόλου των επενδυτικών ευκαιριών. Εν ολίγοις, οι καταστατικές αυτές μεταβλητές, έχουν προβλεπτικότητα πάνω στις μελλοντικές αποδόσεις. Η εξίσωση του ICAPM που προκύπτει είναι η:

$$E_t(R_{t+1}^i) = R_t^f + \lambda_1 \beta_{i,w} + \lambda_2 \beta_{i,z}$$

,όπου  $z$  είναι οι καταστατικές μεταβλητές που αναφέραμε. Σύμφωνα λοιπόν με το υπόδειγμα αυτό, οι υπερβάλλουσες αποδόσεις (ασφάλιστρο κινδύνου) είναι πέραν του κινδύνου αγοράς, συνάρτηση και κάποιων άλλων κινδύνων.

Η περίοδος αυτή κλείνει με δυο πολύ σημαντικές εργασίες, αυτές των Lucas (1978) και Breeden (1979), στις οποίες εισάγεται για πρώτη φορά συστηματικά το CCAPM, το οποίο αναλύσαμε εκτενώς στο προηγούμενο κεφάλαιο.

### **3.3 Η ΠΕΡΙΟΔΟΣ 1980 – 1989**

Η δεκαετία του '80 χαρακτηρίζεται από τις πρώτες προσπάθειες εμπειρικού ελέγχου για την ισχύ των υποδειγμάτων που είχαν προταθεί μέχρι τότε.

Δεν μπορούμε να πούμε ότι τη δεκαετία αυτή εμφανίστηκαν νέα υποδείγματα, πέραν κάποιων εναλλακτικών μορφών των ήδη υπαρχόντων. Ένα από τα πιο σημαντικά νέα στοιχεία που εισήχθησαν στη βιβλιογραφία, είναι το equity premium puzzle από τους Mehra – Prescott (1985) στο οποίο αναφερθήκαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο.

### **Brown – Gibbons (1985)**

Οι Brown – Gibbons (1985) εξετάζουν την αποτελεσματικότητα μοντέλων αποτίμησης βασισμένων στη χρησιμότητα, ανάλογα με τον αν υποθέτουμε ή όχι μια συγκεκριμένη κατανομή για τις αποδόσεις. Αναπτύσσουν ένα μοντέλο που χαρακτηρίζεται από μια ισοελαστική συνάρτηση συνολικής χρησιμότητας κι ένα σταθερό σύνολο επενδυτικών ευκαιριών. Καταλήγουν έτσι στο συμπέρασμα ότι μοντέλα αποτίμησης

βασισμένα στη χρησιμότητα μπορούν να εκτιμηθούν και να ελεγχθούν χωρίς την ύπαρξη ισχυρών κατανομικών υποθέσεων για τις αποδόσεις.

Προτείνουν έναν μη παραμετρικό εκτιμητή για τον συντελεστή σχετικής αποστροφής στον κίνδυνο (RRA) που αν και μη γραμμικός, είναι εύκολος να υπολογιστεί και παρέχει αρκετά ακριβείς εκτιμήσεις για δεδομένα της περιόδου 1926-1981.

### **Mankiw – Shapiro (1986)**

Μια ιδιαίτερα αξιόλογη προσπάθεια σύγκρισης των δυο μοντέλων, CAPM και CCAPM, γίνεται από τους Mankiw – Shapiro (1986). Σύμφωνα με το CCAPM, το καλύτερο μέτρο συστηματικού κινδύνου ενός αξιογράφου, είναι το consumption beta που βασίζεται στη συνδιακύμανση των αποδόσεων του αξιογράφου με το ρυθμό μεταβολής της κατανάλωσης. Το κλασικό CAPM ως γνωστόν, χρησιμοποιεί τη συνδιακύμανση των αποδόσεων του αξιογράφου με τις αποδόσεις ενός δείκτη της αγοράς.

Στην έρευνα αυτή, οι συγγραφείς ελέγχουν ποιο από τα δυο μοντέλα μπορεί να παράσχει ένα πιο χρήσιμο πλαίσιο για την κατανόηση των αποδόσεων των μετοχών διαστρωματικά. Επιπλέον, συγκρίνουν τις δυο μορφές του συντελεστή beta ώστε να δουν ποιος έχει την καλύτερη επεξηγηματική ικανότητα.

Εκτιμούν αρχικά τα consumption and market beta για 464 μετοχές με δεδομένα της περιόδου 1959-1982. Εν συνεχεία, χρησιμοποιώντας αυτές τις εκτιμήσεις, παλινδρομούν τα beta αυτά με τις μέσες αποδόσεις κάθε αξιογράφου και φτάνουν στα παρακάτω συμπεράσματα:

- Υπάρχει θετική σχέση ανάμεσα σε μια μετοχή και στο market beta της.
- Το κλασικό CAPM είναι πιο αποτελεσματικό από το CCAPM.
- Το market beta φαίνεται να είναι πιο καλό μέτρο συστηματικού κινδύνου από το consumption beta.

Στο τέλος, προσπαθούν να δώσουν κάποιες πιθανές εξηγήσεις για αυτά τα αποτελέσματα. Η πιο αξιοσημείωτη είναι ότι το CCAPM εμφανίζεται λιγότερο αποτελεσματικό γιατί μόνο μια μειοψηφία των καταναλωτών κατέχει μετοχές κι έτσι οι δείκτες της χρηματιστηριακής αγοράς είναι καλύτερες προσεγγίσεις για την κατανάλωση αυτής της μειοψηφίας απ' ό,τι είναι η συνολική κατανάλωση.

Στη συνέχεια, άξια αναφοράς είναι η έρευνα των Ferson – Kandel – Stambaugh (1987), οι οποίοι ελέγχουν τα μοντέλα αποτίμησης αξιογράφων υποθέτοντας ότι τα αναμενόμενα ασφάλιστρα κινδύνου και τα market beta μεταβάλλονται διαχρονικά. Σχηματίζοντας δέκα χαρτοφυλάκια

μετοχών ανάλογα με την κεφαλαιοποίησή τους την περίοδο 1963-1982, συμπεραίνουν ότι ένα τέτοιο μοντέλο δεν είναι απορριπτικό.

Ο Kazemi (1988) αναπτύσσει ένα μοντέλο σε μια οικονομία με πολλά αγαθά το οποίο έχει ισχύ ακόμα και αν η συνολική κατανάλωση και οι αγοραίες τιμές των αγαθών είναι εν μέρει παρατηρήσιμες. Το βασικότερο συμπέρασμα της έρευνας αυτής είναι ότι κάτω από μια σειρά υποθέσεων, όταν υπάρχουν  $m$  αγαθά και μπορούμε να παρατηρήσουμε την συνολική κατανάλωση μόνο  $m-k$  από αυτά, τότε κάποιος αρκεί να παρατηρήσει τις τιμές  $k+1$  αγαθών για να έχει ισχύ το μοντέλο. Επιπλέον, συμπεραίνεται ότι η πληροφόρηση που περιέχεται στις τιμές των αγαθών μπορεί να χρησιμοποιηθεί αντί αυτής που περιέχεται στην κατανάλωση ώστε να ελεγχθεί και να εφαρμοστεί το CCAPM.

### **Mehra – Prescott (1988)**

Ο Rietz (1988) δημοσιεύει μια έρευνα στην οποία προτείνει μια λύση για το equity premium puzzle. Η λύση αυτή χρησιμοποιεί αρκετά προχωρημένη και λεπτομερή μικροοικονομική θεωρία κι έτσι δεν θα την αναφέρουμε εδώ. Ωστόσο, βασίζεται σε μια σειρά υποθέσεων πάνω στις προτιμήσεις και αναπτύσσει μια θεωρία που σύμφωνα με τους Mehra – Prescott δεν είναι αποδεκτή. Έτσι, στην ίδια ακριβώς έκδοση της Journal of Monetary Economics, δημοσιεύουν ένα άρθρο – απάντηση στον Rietz.

Χαρακτηρίζουν τη λύση που προτείνει ο Rietz προβληματική γιατί στα παραδείγματά του, η μικρότερη ετήσια πτώση στην κατανάλωση είναι 25% και η μεγαλύτερη πάνω από 98%. Τα μεγέθη αυτά δεν έχουν παρατηρηθεί ποτέ στις ΗΠΑ, ακόμα και σε περιόδους μεγάλης κρίσης. Ακόμα όμως και αν δεχτούμε ότι υπάρχει πιθανότητα τόσο μεγάλης πτώσης, η λύση του Rietz πάσχει σε άλλα δυο σημεία.

Πρώτον, χρησιμοποιεί μη ρεαλιστικές εξισώσεις για τις αποδόσεις των T-bills και δεύτερον οι τιμές που δίνει σε παραμέτρους όπως η αποστροφή του κινδύνου δεν είναι λογικές. Έτσι, καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι χρειάζεται περισσότερη έρευνα πάνω σε ιστορικά στοιχεία ώστε να μπορεί να ληφθεί σοβαρά υπόψη η θεωρία του Rietz.

Ο Pindyck (1988) προσπαθεί να ερευνήσει το κατά πόσο οι επενδυτές αποστρέφονται τον κίνδυνο στο σύνολό τους. Εκτιμά ένα μοντέλο στο οποίο οι αποδόσεις των μετοχών εξαρτώνται από αλλαγές σε ορισμένες θεμελιώδεις μεταβλητές, όπως η κερδοφορία, ο πληθωρισμός και τα πραγματικά επιτόκια. Υποθέτοντας σταθερό συντελεστή σχετικής αποστροφής στον κίνδυνο και χρησιμοποιώντας ημερήσια δεδομένα για τη συνολική απόδοση των δεικτών NYSE και AMEX για την περίοδο 1962-1983, συμπεραίνει ότι η ανταπόκριση των αποδόσεων των μετοχών σε

αλλαγές των μεταβλητών που αναφέραμε, είναι συνεπής με ένα δείκτη σχετικής αποστροφής στον κίνδυνο μεταξύ 3 και 4.

### **Campbell – Shiller (1988)**

Οι Campbell – Shiller (1988) αναπτύσσουν μια δυναμική μορφή του μοντέλου του Gordon, σύμφωνα με το οποίο, η τιμή μιας μετοχής ισούται με:

$$P_0 = d_0 \frac{1+g}{r-g}$$

,όπου  $g$  ο ρυθμός ανάπτυξης των μερισμάτων που υποθέτουμε ότι είναι σταθερός.

Στη δυναμική του μορφή, το μοντέλο του Gordon εξηγεί τον λογαριθμικό δείκτη τιμής/μέρισμα σαν την αναμενόμενη προεξοφλημένη αξία όλων των μελλοντικών μονοπεριοδικών προεξοφλητικών επιτοκίων, τα οποία έχουν προσαρμοστεί με το ρυθμό μεταβολής των μερισμάτων.

Ο κύριος σκοπός της έρευνας αυτής ήταν να εξεταστεί η διαχρονική μεταβλητότητα των τιμών των μετοχών σε σχέση με τα μερίσματά τους. Χρησιμοποιώντας δεδομένα από το 1871, τα κύρια συμπεράσματα της έρευνας είναι τα εξής:

- Υπάρχουν ενδείξεις ότι ο λογαριθμικός δείκτης μερισμάτων/τιμή κινείται με την αναμενόμενη μελλοντική αύξηση των μερισμάτων, όπως αυτή προβλέπεται από το dynamic Gordon model.
- Ο λογαριθμικός δείκτης μερισμάτων/τιμή Granger causes τον πραγματικό ρυθμό αύξησης των μερισμάτων.
- Η πρόβλεψη για την παρούσα αξία των μελλοντικών δεικτών μεταβολής των μερισμάτων μέσω ενός VAR μοντέλου, έχει μια τυπική απόκλιση περίπου ίση με τη μισή της πραγματικής.
- Τα διάφορα μέτρα που χρησιμοποιήθηκαν ως συντελεστές προεξόφλησης (βραχυπρόθεσμα επιτόκια, ρυθμός μεταβολής της κατανάλωσης, μεταβλητότητα των αποδόσεων) δεν βοηθούν στην εξήγηση της συμπεριφοράς των τιμών των μετοχών.
- Σημαντικό κομμάτι της μεταβλητότητας του λογαριθμικού δείκτη τιμής/μερίσματα δεν μπορεί να εξηγηθεί.

### **Breeden – Gibbons – Litzenberger (1989)**

Μια από τις τελευταίες αξιολογές ερευνητικές προσπάθειες της δεκαετίας του '80 έγινε από τους Breeden – Gibbons – Litzenberger το 1989. Εξάγουν με έναν εναλλακτικό τρόπο το CCAPM και αφού το

εκτιμήσουν, το συγκρίνουν με ένα μοντέλο βασισμένο το χαρτοφυλάκιο της αγοράς.

Ένα σημαντικό σημείο της έρευνας αυτής είναι η αναφορά των πιο βασικών οικονομετρικών προβλημάτων που συναντώνται στη μέτρηση της κατανάλωσης. Αυτά, έχουν να κάνουν με το ότι δημοσιεύονται οι δαπάνες και όχι η κατανάλωση, η δημοσίευση αυτή δεν είναι τόσο συχνή όσο τα δεδομένα των αποδόσεων των μετοχών και το ότι τα δεδομένα που δημοσιεύονται έχουν σφάλμα, δεδομένου ότι μόνο ένα δείγμα των συνολικών καταναλωτικών συναλλαγών είναι αυτό που μετριέται.

Στη συνέχεια, το CCAPM ελέγχεται με τη χρήση beta που έχουν εκτιμηθεί και με βάση την κατανάλωση αλλά και σύμφωνα με ένα χαρτοφυλάκιο με τη μέγιστη συσχέτιση με την κατανάλωση. Χρησιμοποιούνται τρίμηνα δεδομένα της περιόδου 1926-1982 συνολικά και χωρισμένα σε υποπεριόδους. Εξαιρουμένης της υποπεριόδου 1929-1939, το μοντέλο γίνεται αποδεκτό, κάτι που γίνεται και στο σύνολο του δείγματος. Γενικά πάντως, οι συγγραφείς καταλήγουν στο ότι το CCAPM και το παραδοσιακό CAPM έχουν την ίδια αποτελεσματικότητα, πάντα μέσα στο πλαίσιο που εξετάστηκε στην έρευνα αυτή.

### 3.4 Η ΠΕΡΙΟΔΟΣ 1990 – 1999

Η δεκαετία του '90 χαρακτηρίζεται από πληθώρα αξιολογών δημοσιεύσεων. Νέες προσεγγίσεις για την αξιολόγηση των διαφόρων μοντέλων αποτίμησης εισήχθησαν, ενώ η σύνδεση της χρηματοοικονομικής με άλλα πεδία όπως η μακροοικονομική έγινε πιο έντονη.

#### **Abel (1990)**

Στο paper αυτό, ο συγγραφέας εισάγει μια συνάρτηση χρησιμότητας η οποία ενσωματώνει τρεις διαφορετικές τάξεις τέτοιων συναρτήσεων: τις «time-separable», τις «catching up with the Joneses» και τις συναρτήσεις που έχουν «habit formation». Έτσι, χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση αυτή στο μοντέλο του Lucas (1979) και υποθέτοντας ότι ο ρυθμός μεταβολής της κατανάλωσης είναι IID, καταλήγουν σε κλειστού τύπου λύσεις (closed-form solutions) για τις τιμές μετοχών και ομολόγων.

Δεδομένου ότι η συνάρτηση χρησιμότητας εξαρτάται από την κατανάλωση και τις προτιμήσεις, ο Abel υποθέτει ότι η παράμετρος των προτιμήσεων έχει την παρακάτω μορφή:

$$v_t \equiv [c_{t-1}^D C_{t-1}^{1-D}]^\gamma$$

,όπου  $c_{t-1}$  η ατομική κατανάλωση,  $C_{t-1}$  η συνολική κατανάλωση. Ο διαχωρισμός που γίνεται είναι ο εξής: αν  $\gamma=0$  έχουμε time separable συνάρτηση, αν  $\gamma>0$  και  $D=0$  έχουμε catching up with the Joneses συνάρτηση και αν  $\gamma>0$  και  $D=1$  έχουμε habit formation.

Ο συγγραφέας χρησιμοποιεί τις λύσεις που βρίσκει και για διάφορες τιμές του συντελεστή αποστροφής κινδύνου εξάγει τις μη δεσμευμένες αναμενόμενες αποδόσεις για μετοχές και ομόλογα, για καθεμιά από τις τρεις περιπτώσεις συναρτήσεων χρησιμότητας. Για κάθε εκδοχή υπολογίζει δυο θεωρητικές τιμές, την πρώτη υποθέτοντας ότι ο ρυθμός μεταβολής της κατανάλωσης ακολουθεί μια 2-point IID κατανομή και τη δεύτερη υποθέτοντας ότι ακολουθεί λογαριθμοκανονική. Το πιο σημαντικό συμπέρασμα είναι ότι σε κάθε περίπτωση, οι θεωρητικές τιμές που εξάγονται είναι συναφείς με το equity premium puzzle.

Σε σχέση με την παραπάνω προσέγγιση, ο Constantinides (1990) δείχνει ότι αν χαλαρώσουμε την υπόθεση του time separability και χρησιμοποιήσουμε την habit formation προσέγγιση, το equity premium puzzle καταλήγει να είναι ένα μοντέλο ορθολογικών προσδοκιών.

### **Fama – French (1990)**

Τα τυπικά μοντέλα τιμολόγησης, θέτουν τρεις πηγές για τη μεταβλητότητα των αποδόσεων των μετοχών: διαταραχές στις αναμενόμενες ταμειακές ροές, προβλέψιμη μεταβλητότητα των αποδόσεων εξαιτίας διαχρονικής μεταβλητότητας στους συντελεστές προεξόφλησης των αναμενόμενων ταμειακών ροών και διαταραχές στα προεξοφλητικά επιτόκια.

Οι Fama – French (1990), προτείνουν μεταβλητές που εκφράζουν αυτές τις πηγές και εξετάζουν το κατά πόσο εξηγούν τη μεταβλητότητα των ετήσιων αποδόσεων του δείκτη NYSE.

Αναλυτικότερα, βρίσκουν ότι οι μεταβλητές που εκφράζουν τη διαχρονική μεταβλητότητα και τις διαταραχές στις αναμενόμενες αποδόσεις εξηγούν το 30% της διακύμανσης των ετησίων αποδόσεων του δείκτη, ενώ οι μεταβλητές που εκφράζουν τις διαταραχές στις αναμενόμενες ταμειακές ροές εξηγούν το 43% διακύμανσης.

Ένα σημαντικό εύρημα είναι ότι όλες οι μεταβλητές μαζί εξηγούν το 58% της συνολικής διακύμανσης, λιγότερο δηλαδή από το επιμέρους άθροισμά τους. Το ερώτημα λοιπόν που τίθεται χωρίς όμως να δίνεται απάντηση, είναι το αν τα αποτελέσματα αυτά συνιστούν καλά ή κακά νέα για την αποτελεσματικότητα της αγοράς.

Οι Bodurtha – Nelson (1991) έκαναν μια σειρά ελέγχων στο υπό συνθήκη CAPM (Conditional CAPM) στο οποίο το beta ενός αξιογράφου είναι ο λόγος της δεσμευμένης συνδιακύμανσης των αποδόσεων του αξιογράφου με τις αποδόσεις της αγοράς και της δεσμευμένης διακύμανσης των αποδόσεων της αγοράς. Οι συγγραφείς μοντελοποιούν αυτές τις διακυμάνσεις και τις συνδιακυμάνσεις ως ARCH διαδικασίες, ενώ για το ασφάλιστρο κινδύνου της αγοράς υποθέτουν μια αυτοπαλίνδρομη διαδικασία. Εν συνεχεία, με μηνιαία δεδομένα της περιόδου 1926-1985 και εφαρμόζοντας τη μέθοδο GMM, επισημαίνουν την ύπαρξη ενός ντετερμινιστικού συστατικού στις αποδόσεις. Επιπλέον, βρίσκουν ισχυρές ενδείξεις μεταβλητότητας στις δεσμευμένες πρώτες και δεύτερες ροπές των υπερβαλλουσών αποδόσεων της αγοράς.

Ο Cochrane (1992) σε άρθρο του όπου προσπαθεί να εξηγήσει τη διακύμανση του δείκτη τιμής/μέρισμα (το αντίστροφο του δείκτη μερισματικής απόδοσης με άλλα λόγια), οδηγείται στο συμπέρασμα ότι μια άνοδος του δείκτη προβλέπει μια μεγάλη πτώση στις αποδόσεις. Οι προβλέψεις του δείκτη πάνω στο ρυθμό μεταβολής των μερισμάτων, στα επιτόκια και στο ρυθμό μεταβολής της κατανάλωσης είναι λιγότερο στατιστικά σημαντικές και όχι πάντα οικονομικά αποδεκτές.

### **Fama – French (1992)**

Οι Fama – French (1992) δημοσίευσαν μια έρευνά τους που έχει αποδειχθεί ως μια από τις πιο χρήσιμες και σημαντικές στο χώρο της αποτίμησης αξιογράφων. Με τη χρήση μιας σειράς μεταβλητών που θα δούμε πιο κάτω, προσπαθούν να εξηγήσουν τη διαστρωματική συμπεριφορά των μετοχών, μέσω κάποιων χαρτοφυλακίων που κατασκευάζουν με συγκεκριμένα κριτήρια.

Οι μεταβλητές που χρησιμοποιούν οι συγγραφείς είναι τα beta, το μέγεθος της μετοχής, η μόχλευση, ο δείκτης λογιστικής προς αγοραία αξία (BE/ME) και ο δείκτης κερδών προς τιμή (E/P).

Σχηματίζουν χαρτοφυλάκια με βάση το μέγεθος των μετοχών που μετριέται από την αγοραία αξία τους, με βάση το beta τους και με βάση ένα συνδυασμό αυτών των δυο κριτηρίων. Σαν δείκτες μόχλευσης χρησιμοποιούν τους δείκτες ενεργητικού προς αγοραία αξία και ενεργητικού προς λογιστική αξία.

Η παλινδρόμηση των αποδόσεων των χαρτοφυλακίων με τις μεταβλητές αυτές (σε διαστρωματικό επίπεδο, δηλαδή ανά μήνα) και η εύρεση των μέσων όρων των εκτιμηθέντων συντελεστών, δίνει μια σειρά από πολύ σημαντικά αποτελέσματα. Πρώτα από όλα, φαίνεται ότι το beta δεν βοηθά καθόλου στην εξήγηση των μέσων αποδόσεων των μετοχών για την εξετασθείσα περίοδο (1963-1990).

Το μέγεθος της μετοχής έχει επεξηγηματική ικανότητα, η οποία είναι ακόμα μεγαλύτερη για τον δείκτη BE/ME, ο οποίος μάλιστα υπερκαλύπτει αυτή του μεγέθους. Ένα αξιοσημείωτο φαινόμενο είναι ότι οι δυο δείκτες μόχλευσης που χρησιμοποιούνται εξηγούν τη διαστρωματική συμπεριφορά των αποδόσεων αλλά με διαφορετικό πρόσημο. Έτσι, οι συγγραφείς συμπεραίνουν ότι αυτό που εξηγεί είναι διαφορά των δύο δεικτών η οποία όμως δεν είναι άλλη από τον δείκτη BE/ME.

Τα αποτελέσματα των Fama – French (1992) συνοψίζονται σε τρεις φράσεις:

- Δεν υπάρχει σημαντική σχέση ανάμεσα στα beta και τις μέσες αποδόσεις.
- Η αντίθετη επίδραση των δυο δεικτών μόχλευσης στις αποδόσεις εκφράζεται μέσω του δείκτη BE/ME.
- Η σχέση ανάμεσα στον δείκτη E/P και τις αποδόσεις φαίνεται να «απορροφάται» από το συνδυασμό του μεγέθους και του δείκτη BE/ME.

Έτσι, το τελικό συμπέρασμα της δουλειάς αυτής, είναι ότι η διαστρωματική συμπεριφορά των αποδόσεων των μετοχών, όπως αυτή εκφράστηκε μέσω των χαρτοφυλακίων που σχηματίστηκαν, εξηγείται ικανοποιητικά από το μέγεθος μιας μετοχής και τον δείκτη λογιστικής προς αγοραία αξία. Η μεθοδολογία και τα συμπεράσματα των Fama – French (1992) έχουν αναγνωριστεί ως ιδιαίτερα σημαντικά και τμήμα τους θα χρησιμοποιήσουμε κι εμείς στην εργασία μας.

Οι Cochrane – Hansen (1992) κάνουν μια απόπειρα σύνδεσης της θεωρίας αποτίμησης αξιογράφων με τη μακροοικονομική. Ένα σημαντικό τμήμα της ανάλυσής τους επικεντρώνεται στη δομή που πρέπει να έχει ένας καλός συντελεστής προεξόφλησης. Συγκεκριμένα, σύμφωνα με τους συγγραφείς οφείλει να έχει υψηλή συσχέτιση με τις αποδόσεις του αξιογράφου με το οποίο σχετίζεται ή να έχει διακύμανση μεγαλύτερη από τα όρια που είχαν θέσει οι Hansen – Jagannathan (1991).

Μια ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα έρευνα δημοσιεύτηκε από τον Nielsen το 1992. Ο συγγραφέας παρατηρεί πως όταν υποθέτουμε ότι η χρησιμότητα ενός χαρτοφυλακίου είναι συνάρτηση του μέσου και της διακύμανσης των αποδόσεών του, υπάρχει πιθανότητα οι τιμές ισορροπίας που προκύπτουν από το CAPM να είναι αρνητικές. Έτσι, διατυπώνει μια σειρά από ικανές συνθήκες που εξασφαλίζουν τη θετικότητα αυτών των τιμών. Η πρώτη συνθήκη αφορά στην αναμενόμενη απόδοση του αξιογράφου η οποία πρέπει να είναι θετική και πρέπει να έχει είτε μη θετική συνδιακύμανση με τις αποδόσεις του χαρτοφυλακίου της αγοράς, είτε ο συντελεστής αποστροφής κινδύνου όλων των επενδυτών να



είναι άνω φραγμένος από ένα όριο που εξαρτάται από την αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου και τη συνδιακύμανση των αποδόσεων του με αυτές της αγοράς. Η δεύτερη συνθήκη αναφέρει ότι ο συντελεστής αποστροφής κινδύνου ενός επενδυτή, πρέπει να είναι μικρότερος από το λόγο του μέσου και της τυπικής απόκλισης των αποδόσεων του αξιογράφου. Η τρίτη και τελευταία συνθήκη έχει να κάνει με τον οριακό συντελεστή υποκατάστασης μεταξύ μέσου και τυπικής απόκλισης όλων των επενδυτών, ο οποίος πρέπει να είναι μικρότερος από το όριο που ορίζει η δεύτερη συνθήκη

Ο Cochrane (1994) φτάνει σε ορισμένα συμπεράσματα που μας ενδιαφέρουν και για το ερευνητικό τμήμα της παρούσας εργασίας. Προσπάθησε να εξετάσει το κατά πόσο υπάρχει μια τάση στο ΑΕΠ των ΗΠΑ καθώς και τα χαρακτηριστικά αυτής της τάσης. Παλινδρόμησε το ΑΕΠ πάνω στις υστερήσεις τους και το συμπέρασμα στο οποίο κατέληξε ήταν ότι ο ρυθμός μεταβολής του ΑΕΠ είναι προβλέψιμος και ότι υπάρχει τάση στο ΑΕΠ αυτό καθαυτό. Στα ίδια συμπεράσματα κατέληξε και σε ό,τι αφορά στην κατανάλωση αλλά και στις τιμές των μετοχών.

Οι Fama – French (1995) βασίζονται στην εργασία του 1992 και εικάζουν ότι αν η τιμολόγηση είναι ορθολογική, τότε η συμπεριφορά των μετοχών σε σχέση με το μέγεθος και τον δείκτη BE/ME θα πρέπει να αντικατοπτρίζει τη συμπεριφορά των κερδών. Δημιουργώντας και πάλι μια σειρά από χαρτοφυλάκια ανάλογα με το μέγεθος και τον δείκτη BE/ME, βρίσκουν ότι πράγματι υπάρχει σχέση ανάμεσά τους. Μάλιστα, ο δείκτης BE/ME παρέχει ισχυρότερες ενδείξεις κερδοφορίας από το μέγεθος.

Ο Kocherlakota (1996) ασχολείται με τα δυο puzzles που έχουμε ήδη αναφέρει. Ειδικότερα, σχετικά με το equity premium puzzle, γενικεύει τις υποθέσεις που είχαν κάνει οι Mehra – Prescott (1985) σχετικά με τις προτιμήσεις. Εξετάζοντας τις τρεις κατηγορίες συναρτήσεων του Abel (1990) και ακολουθώντας τη μεθοδολογία των Mehra – Prescott (1985), καταλήγει στο ότι το equity premium puzzle παραμένει ένα μεγάλο μυστήριο, ενώ για το risk - free rate puzzle μπορεί να υπάρξουν εξηγήσεις. Στο τέλος, αναφέρει ότι για να μπορέσει να βρεθεί λύση για το equity premium puzzle πρέπει να υπάρξει στροφή της έρευνας προς την εύρεση των θεμελιωδών χαρακτηριστικών των αγαθών και των αγορών αξιογράφων που οδηγούν σε μεγάλες διαφορές στις τιμές (προσαρμοσμένες στον κίνδυνο) ανάμεσα στις μετοχές και στα ομόλογα. Μάλιστα, παρουσιάζεται πεπεισμένος ότι σε αυτό ακριβώς το σημείο βρίσκεται κρυμμένη η εξήγηση του equity premium puzzle.

Μια από τις πιθανές αιτίες της εμπειρικής αποτυχίας του CCAPM είναι η μη χρησιμοποίηση νομισματικών μεγεθών σε αυτό, δεδομένου ότι σημαντικό τμήμα της κατανάλωσης καλύπτεται από χρήμα. Οι Chan – Foresi – Lang (1996) τροποποιούν το CCAPM εισάγοντας νομισματικά μεγέθη όπως τα M1, M2 και M3 και δημιουργούν ένα μοντέλο που το

ονομάζουν Money – CAPM (M-CAPM). Σε αυτό, το money beta είναι ίσο με τη συνδιακύμανση των αποδόσεων του αξιογράφου με το ρυθμό μεταβολής του αντίστοιχου νομισματικού μεγέθους δια τη διακύμανση αυτού του ρυθμού μεταβολής. Με μηνιαία δεδομένα της περιόδου 1959-1988, εκτιμούν (με GMM) το μοντέλο τους και παρότι αυτό απορρίπτεται, θεωρούν ότι τα μοντέλα αποτίμησης αξιογράφων μπορούν να ωφεληθούν αν συμπεριλάβουν ένα νομισματικό μέγεθος στη διαδικασία ανάλυσής τους.

### **Jagannathan – Wang (1996)**

Πολλές εμπειρικές έρευνες πάνω στο στατικό CAPM υποθέτουν ότι τα beta παραμένουν διαχρονικά σταθερά. Έτσι, το μοντέλο αδυνατεί να εξηγήσει ικανοποιητικά τη διαστρωματική συμπεριφορά των μέσων αποδόσεων των μετοχών. Οι Jagannathan – Wang (1996) υποθέτουν ότι τα beta και τα ασφάλιστρα κινδύνου της αγοράς μεταβάλλονται διαχρονικά και προσπαθούν να ελέγξουν την αποτελεσματικότητα αυτής της προσέγγισης πάνω στη διαστρωματική συμπεριφορά των μετοχών.

Το δεσμευμένο CAPM που δημιουργούν ισχύει κάθε χρονική στιγμή δεδομένης της πληροφόρησης που είναι διαθέσιμη. Το δεσμευμένο beta αυτού του μοντέλου συντίθεται από τρία μέρη: το αναμενόμενο beta που είναι σταθερό, μια τυχαία μεταβλητή που είναι τέλεια συσχετισμένη με το ασφάλιστρο κινδύνου της αγοράς και ένα τρίτο τμήμα που είναι κατά μέσο όρο μηδέν και ασυσχέτιστο με το ασφάλιστρο κινδύνου της αγοράς.

Στη συνέχεια, χτίζουν σταδιακά ένα μοντέλο συμπεριλαμβάνοντας νέες μεταβλητές. Αρχικά, καταλήγουν στο Premium – Labor Model το οποίο έχει την παρακάτω μορφή:

$$E[R_{it}] = c_0 + c_{vw}\beta_i^{vw} + c_{prem}\beta_i^{prem} + c_{labor}\beta_i^{labor}$$

Το premium beta έχει να κάνει με το ασφάλιστρο κινδύνου της αγοράς, το οποίο στην περίπτωση αυτή είναι η διαφορά ανάμεσα σε BAA και AAA ομόλογα. Το vw beta αναφέρεται σε ένα χαρτοφυλάκιο που περιέχει όλες τις μετοχές που διαπραγματεύονται σε χρηματιστήρια των ΗΠΑ και χρησιμοποιείται ως προσέγγιση του συνολικού πλούτου. Το labor beta έχει σχέση με το εισόδημα της εργασίας από τη χρήση της στην παραγωγική διαδικασία.

Στο τελικό μοντέλο που εκτιμούν, εισάγουν ως ερμηνευτική μεταβλητή και το μέγεθος μιας μετοχής που το ορίζουν ως τον λογάριθμο της αγοραίας αξίας της. Έτσι, η τελική μορφή του μοντέλου είναι η:

$$E[R_{it}] = c_0 + c_{size} \log(ME_i) + c_{vw}\beta_i^{vw} + c_{prem}\beta_i^{prem} + c_{labor}\beta_i^{labor}$$

Ο στοχαστικός συντελεστής προεξόφλησης εκφράζεται σε αυτό το πλαίσιο από την εξής σχέση:

$$d_i(\delta) = \delta_0 + \delta_{vw} R_i^{vw} + \delta_{prem} R_i^{prem} + \delta_{labor} R_i^{labor}$$

Οι συγγραφείς χρησιμοποιούν τη μεθοδολογία των Fama – French (1992) με τα 100 χαρτοφυλάκιά τους και ελέγχουν το μοντέλο τους βήμα – βήμα. Στην αρχή εκτιμούν το παραδοσιακό CAPM και βρίσκουν ότι το  $R_i^{vw}$  δεν παίζει σημαντικό ρόλο στην εξήγηση της διαστρωματικής συμπεριφοράς των αναμενόμενων αποδόσεων των 100 χαρτοφυλακίων.

Προχωρώντας προς την εκτίμηση της τελικής μορφής του μοντέλου, οι συγγραφείς φτάνουν στο σημαντικό συμπέρασμα ότι το δεσμευμένο CAPM που κατασκεύασαν, εξηγεί ικανοποιητικά τη διαστρωματική συμπεριφορά των αποδόσεων των μετοχών. Η χρήση αυτού του δεσμευμένου CAPM αντιστοιχεί στην υπόθεση ότι τα beta και οι αναμενόμενες αποδόσεις μεταβάλλονται διαχρονικά, δεν βρισκόμαστε δηλαδή στον στατικό κόσμο του παραδοσιακού CAPM. Παρ' όλα αυτά, οι συγγραφείς είναι επιφυλακτικοί για τα αποτελέσματα αυτά, επειδή η μοντελοποίηση αυτής της μεταβλητότητας είναι αρκετά απλή και ενδέχεται να υπάρχουν σφάλματα σε αυτή την εξειδίκευση.

Ο Campbell (1996) δημιουργεί ένα πολυπαραγοντικό CCAPM με μεταβλητές σχετικές με τις αποδόσεις ενός χρηματιστηριακού δείκτη, μεταβλητές που βοηθούν στην πρόβλεψη των μελλοντικών αποδόσεων και του εργατικού εισοδήματος. Στο μοντέλο αυτό, το αναμενόμενο ασφάλιστρο κινδύνου είναι σταθμικός μέσος δυο όρων: της συνδιακύμανσης των αποδόσεων του αξιογράφου με τις αποδόσεις της αγοράς και της συνδιακύμανσης των αποδόσεων του αξιογράφου με την πληροφόρηση σχετικά με τις μελλοντικές αποδόσεις του χαρτοφυλακίου της αγοράς (σταθμά  $\gamma$  και  $\gamma-1$  αντίστοιχα). Χρησιμοποιώντας δυο σετ δεδομένων, μηνιαία στοιχεία της περιόδου 1952-1980 και ετήσια της περιόδου 1871-1990), επιβεβαιώνει πρώτα απ' όλα τις βασικές αδυναμίες του CAPM: ότι αγνοεί δηλαδή τη διαχρονική μεταβλητότητα των αναμενόμενων αποδόσεων καθώς και το γεγονός πως το ανθρώπινο κεφάλαιο είναι ένα σημαντικό συστατικό του πλούτου. Παρ' όλα αυτά, το μοντέλο που εξετάζει εξηγεί σημαντικό μέρος της μεταβλητότητας των αναμενόμενων υπερβαλλουσών αποδόσεων. Η σημαντικότερη συνεισφορά του μοντέλου είναι ότι εξηγεί γιατί οι επενδυτές χρησιμοποιούν τη συνδιακύμανση με ένα συνολικό χρηματιστηριακό δείκτη ως μέσο μέτρησης των αναμενόμενων αποδόσεων ενός αξιογράφου.

### **Cochrane(1996)**

Ο Cochrane(1996) εξετάζει το ρόλο των επενδύσεων στην τιμολόγηση των αξιογράφων. Το ερώτημα στο οποίο προσπαθεί να απαντήσει είναι σχετικό με το τι μπορούμε να μάθουμε για τις αποδόσεις των μετοχών με βάση την πληροφορία που μας δίνουν οι αποδόσεις των επενδύσεων. Ως απόδοση των επενδύσεων ορίζεται ο οριακός λόγος στον οποίο μια επιχείρηση μπορεί να μεταφέρει πόρους διαχρονικά, αυξάνοντας τις επενδύσεις σήμερα και μειώνοντάς τες στο μέλλον, με το σχέδιο παραγωγής αμετάβλητο τις άλλες χρονικές στιγμές.

Το ερέθισμα για αυτή την έρευνα δόθηκε από το γεγονός ότι διάφορες μεταβλητές που προβλέπουν τις μετοχικές αποδόσεις, μπορούν επίσης να προβλέπουν και το ρυθμό μεταβολής των επενδύσεων. Ο συγγραφέας καταλήγει σε ένα παραγοντικό μοντέλο σύμφωνα με το οποίο υπάρχει ένας συντελεστής προεξόφλησης που είναι συνάρτηση των επενδυτικών αποδόσεων.

Η απόδοση της επένδυσης για μια περίοδο είναι η παραπάνω ποσότητα παραγωγής που μπορεί να πουλήσει μια επιχείρηση στο μέλλον, αν επενδύσει μια παραπάνω μονάδα σήμερα. Η μεταβλητή αυτή είναι τυχαία και είναι περίπου ανάλογη της μεταβολής στον δείκτη επένδυσης/κεφαλαίου. Για τις αποδόσεις των μετοχών κατασκευάζονται 10 χαρτοφυλάκια μετοχών του NYSE, με κατάταξη ανάλογα με το μέγεθός τους.

Η εμπειρική επεξεργασία του μοντέλου αυτού, δείχνει ότι λειτουργεί αρκετά καλά. Οι αποδόσεις των επενδύσεων τιμολογούν ικανοποιητικά τα αξιόγραφα και μπορούν να εξηγήσουν σημαντικό μέρος των αναμενόμενων αποδόσεων. Πολύ σημαντικό είναι το γεγονός ότι το μοντέλο αυτό λειτουργεί εξίσου καλά με το CAPM και πολύ καλύτερα από το CCAPM.

Οι Bansal – Coleman (1996) αναπτύσσουν ένα νομισματικό μοντέλο και προσπαθούν να αξιολογήσουν τη λειτουργικότητά του πάνω στην τιμολόγηση αξιογράφων. Αφετηρία για αυτή την προσέγγιση δόθηκε δεδομένου ότι κάποια αξιόγραφα εκτός του χρήματος, όπως επιταγές και πιστωτικές κάρτες, παίζουν ρόλο στη διευκόλυνση των συναλλαγών μεταξύ μετοχών, ομολόγων και άλλων παρόμοιων τίτλων, κάτι που πιθανόν να επηρεάζει και την τελική απόδοση αυτών. Το μοντέλο διακρίνει τις πληρωμές με μετρητά, με επιταγές ή με πίστωση. Εν τέλει, παράγει ένα χαμηλό επιτόκιο μηδενικού κινδύνου, ένα σχετικά υψηλό ασφάλιστρο και μια θετική σχέση ανάμεσα στο term premium και τη ληκτότητα των ομολόγων, αποτελέσματα συμβατά με την πραγματικότητα.

### **Campbell – Cochrane (1999)**

Οι Campbell – Cochrane (1999) δημοσιεύουν τα αποτελέσματα μιας πολύ σημαντικής έρευνάς τους. Σε αυτήν, παρουσιάζουν ένα μοντέλο βασισμένο στην κατανάλωση που εξηγεί ένα ευρύ φάσμα φαινομένων της τιμολόγησης αξιογράφων.

Κεντρικό συστατικό του πλαισίου τους είναι μια παράμετρος που ονομάζεται συνήθεια (habit) και προστίθεται στη συνάρτηση χρησιμότητας του κλασικού υποδείγματος καταναλωτή. Η μεταβλητή αυτή είχε εξεταστεί ευρέως στο παρελθόν, όπως πχ από τον Constantinides (1990). Εδώ, υποθέτουν ότι είναι εξωτερική, εξαρτάται από την παρελθούσα συνολική κατανάλωση και δεν παρουσιάζει μεγάλες διακυμάνσεις. Ο ρυθμός μεταβολής της κατανάλωσης ακολουθεί λογαριθμοκανονική κατανομή με μέσο και τυπική απόκλιση ίσους με τα αντίστοιχα εμπειρικά μεγέθη της μεταπολεμικής περιόδου. Επίσης, το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου θεωρείται σταθερό.

Η συνάρτηση χρησιμότητας την οποία τα άτομα επιθυμούν να μεγιστοποιήσουν είναι τώρα η:

$$E \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \frac{(C_t - X_t)^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma}$$

,όπου  $X_t$  το επίπεδο της συνήθειας. Ορίζουν επίσης τον δείκτη της πλεονασματικής κατανάλωσης (surplus consumption ratio) ως:

$$S_t^\alpha \equiv \frac{C_t^\alpha - X_t^\alpha}{C_t^\alpha}$$

,με τον δείκτη  $\alpha$  να συμβολίζει ότι χρησιμοποιούμε συνολικά (aggregate) στοιχεία, αφού έτσι λέει η υπόθεση που έχει γίνει για τη συνήθεια. Ο δείκτης αυτός σε λογαριθμική μορφή ακολουθεί μια ετεροσκεδαστική AR(1) διαδικασία που έχει την παρακάτω μορφή:

$$s_{t+1}^\alpha = (1-\phi)\bar{s} + \phi s_t^\alpha + \lambda(s_t^\alpha)(c_{t+1}^\alpha - c_t^\alpha - g)$$

,όπου  $\phi, g, \bar{s}$  είναι παράμετροι και  $\lambda(s_t^\alpha)$  μια συνάρτηση που λέγεται συνάρτηση ευαισθησίας.

Ξεκινώντας από τις σχέσεις αυτές και δουλεύοντας με κάποιες από τις βασικές εξισώσεις της θεωρίας αποτίμησης, οδηγούμαστε σε μια εξίσωση για τον στοχαστικό συντελεστή προεξόφλησης:

$$M_{t+1} = \delta G^{-\gamma} e^{-\gamma\{(\phi-1)(s_t-\bar{s})+[1+\lambda(s_t)]u_{t+1}\}}$$

Έτσι, υπολογίζοντας τις διάφορες ροπές του στοχαστικού συντελεστή προεξόφλησης, μπορούν να βρεθούν θεωρητικές τιμές των αξιογράφων. Επιπλέον, χρησιμοποιείται και η παρακάτω σχέση για το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο:

$$r_t^f = -\ln(\delta) + \gamma g - \gamma(1-\phi)(s_t - \bar{s}) - \frac{\gamma^2 \sigma^2}{2} [1 + \lambda(s_t)]^2$$

Η συνάρτηση ευαισθησίας επιλέγεται έτσι ώστε να ικανοποιεί τρεις συνθήκες: το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου είναι σταθερό, η συνήθεια είναι προκαθορισμένη στην κατάσταση  $s_t = \bar{s}$  και η συνήθεια κινείται μη αρνητικά σε σχέση με την κατανάλωση. Έτσι, η τελική μορφή της άνω συνάρτησης είναι:

$$\lambda(s_t) = \begin{cases} \frac{1}{S} \sqrt{1 - 2(s_t - \bar{s})} - 1, & s_t \leq s_{\max} \\ 0, & s_t \geq s_{\max} \end{cases}$$

Οι θεωρητικές τιμές που προκύπτουν από το μοντέλο αυτό, συγκρίνονται με τις αντίστοιχες εμπειρικές από δυο σετ δεδομένων: μηνιαίες της περιόδου 1947-1995 και ετήσιες της περιόδου 1871-1993. Οι θεωρητικές είναι αποτέλεσμα της προσομοίωσης 500.000 μηνών με την κατάλληλη επεξεργασία. Οι τιμές των παραμέτρων επιλέγονται ώστε να είναι συμβατές με τα πραγματικά δεδομένα.

Μετά από όλη αυτή τη διαδικασία, προέκυψε μια σειρά από συμπεράσματα, εκ των οποίων τα σημαντικότερα τα συνοψίζουμε αμέσως παρακάτω:

- Ο δείκτης τιμής/κατανάλωση προβλέπει τις μακροπρόθεσμες αποδόσεις με το σωστό πρόσημο: υψηλές τιμές προβλέπουν χαμηλές αποδόσεις. Η προβλεπτικότητα αυτή αυξάνεται με τον ορίζοντα.
- Χαμηλός δείκτης τιμής/κατανάλωση ή μεγάλη πτώση στην τιμή, σηματοδοτούν υψηλή μεταβλητότητα για μερικά χρόνια μπροστά.
- Υψηλός δείκτης τιμής/μέρισμα σηματοδοτεί μεγάλη πτώση στις αναμενόμενες αποδόσεις.
- Όταν η κατανάλωση παρουσιάζει για μερικά έτη συνεχόμενη πτώση, πλησιάζοντας έτσι το επίπεδο της συνήθειας, οι τιμές των μετοχών πέφτουν.
- Το μοντέλο είναι συμβατό με τις πραγματικές τιμές του ασφαλίστρου κινδύνου και του επιτοκίου μηδενικού κινδύνου.

- Το μοντέλο δεν καταφέρνει να εξηγήσει το equity premium puzzle αλλά τα καταφέρνει καλύτερα στο risk – free rate puzzle.
- Οι επενδυτές φοβούνται τις μετοχές κυρίως γιατί έχουν υψηλή πιθανότητα άσχημης απόδοσης σε περιόδους οικονομικής κάμψης.
- Όταν πέφτει η κατανάλωση, αυτό συνεπάγεται πτώση των δεικτών τιμής/μέρισμα και άνοδο των αναμενόμενων αποδόσεων, της μεταβλητότητας των αποδόσεων και της τιμής του κινδύνου.

Μέχρι τώρα έχουμε διαπιστώσει πως η έρευνα έχει καταστήσει το CCAPM ως ένα πρακτικά μη αποτελεσματικό μοντέλο για την εξήγηση της συμπεριφοράς των τιμών των αξιογράφων. Οι Lettau – Ludvigson (1999) έκαναν μια προσπάθεια να «αναστήσουν», όπως λέει ο τίτλος της έρευνάς τους, το CCAPM. Για να το επιτύχουν, υποθέτουν ότι ο πυρήνας των τιμών εκφράζεται από ένα υπό συνθήκη γραμμικό παραγοντικό μοντέλο με τα αναμενόμενα ασφάλιστρα κινδύνου να μεταβάλλονται διαχρονικά. Η εκτίμηση του μοντέλου τους, δείχνει ότι αυτή η εκδοχή του CCAPM μπορεί να εξηγήσει ένα αξιοσημείωτο τμήμα της διαστρωματικής συμπεριφοράς των μετοχικών αποδόσεων. Το τελικό συμπέρασμα της εργασίας αυτής είναι ότι τέτοιου είδους μοντέλα μπορούν να δείξουν τον δρόμο της εμπειρικής επιτυχίας του CCAPM.

Στο τέλος της δεκαετίας, ο Zhou (1999) κάνει μια ακόμα απόπειρα να εξηγήσει το equity premium puzzle. Αναπτύσσει ένα μοντέλο στο οποίο ενσωματώνει υποθέσεις ότι υπάρχει ασύμμετρη πληροφόρηση και θεσμικοί περιορισμοί στην αγορά, οι οποίοι αναγκάζουν τους επενδυτές να μην έχουν τη δυνατότητα να διακρατούν το χαρτοφυλάκιο της αγοράς. Η εμπειρική διερεύνηση του μοντέλου δείχνει ότι για αποδεκτές τιμές του συντελεστή αποστροφής στον κίνδυνο, καταφέρνει να εξηγήσει ικανοποιητικά διάφορες ιστορικές τιμές των δεδομένων. Αυτό βέβαια δεν σημαίνει –όπως σημειώνει ο συγγραφέας- ότι λύνεται το equity premium puzzle, αφού οι υποθέσεις του μοντέλου είναι πολύ περιοριστικές. Ωστόσο, θέτει έναν σοβαρό προβληματισμό και μια ερευνητική κατεύθυνση η οποία μπορεί εν τέλει να οδηγήσει στην οριστική λύση του puzzle.

### 3.5 Η ΠΕΡΙΟΔΟΣ 2000 – 2005

#### **Campbell (2000)**

Στο ξεκίνημα του 21<sup>ου</sup> αιώνα, ο Campbell (2000) δημοσιεύει μια εργασία η οποία δεν είναι τίποτα άλλο από μια εξαιρετική σύνοψη όλων των εξελίξεων στη θεωρία αποτίμησης αξιογράφων μέσω των διαφόρων δημοσιεύσεων που είχαν γίνει ως τότε. Στο τελικό του συμπέρασμα σημειώνει τρεις εξελίξεις:

- Η θεωρία αποτίμησης διαθέτει πλέον μια πλούσια συλλογή εξειδικευμένων γνώσεων πάνω στα επιτόκια, τις τιμές των μετοχών και τη διαστρωματική συμπεριφορά των αποδόσεων.
- Έχει αναπτυχθεί μια ποικιλία μοντέλων για τη μελέτη αυτών των παραμέτρων.
- Η θεωρία αποτίμησης ασχολείται με τις πηγές των κινδύνων και τις οικονομικές δυνάμεις που καθορίζουν την «αμοιβή» που απαιτούν οι επενδυτές ώστε να αναλάβουν κίνδυνο.

Οι προκλήσεις που καλείται να αντιμετωπίσει η θεωρία αποτίμησης αξιολογώντας συνοψίζονται στα εξής σημεία:

- Υπάρχει πολύ μικρό ποσοστό κατανόησης της επίδρασης του πώς τα κόστη συναλλαγής επηρεάζουν τις τιμές των μετοχών.
- Υπάρχουν ενδείξεις ότι οι παράγοντες κινδύνου που προτείνει η δυναμική θεωρία αποτίμησης μπορούν να εξηγήσουν τη διαστρωματική συμπεριφορά των μετοχικών αποδόσεων.
- Μια σημαντική λειτουργία των αγορών πρέπει να είναι η παρότρυνση προς τους επενδυτές ώστε να μοιράζονται τους κινδύνους.
- Υπάρχουν εξαιρετικά ενδιαφέροντα ερωτήματα για το ρόλο της οικονομικής πολιτικής και της σχέσης της με τη θεωρία αποτίμησης.

Παρ' όλα αυτά, ο συγγραφέας τονίζει ότι δεν είναι ρεαλιστικό να αναμένουμε την ανακάλυψη ενός μοντέλου που να εξηγεί πλήρως τη συμπεριφορά των αποδόσεων. Το πιο λογικό είναι ότι οι χρηματοοικονομικές αγορές βαθμιαία εξελίσσονται προς ορθολογικά μοντέλα αποδόσεων και κινδύνου που περιγράφουν μακροχρόνιες ισορροπίες.

Οι Liew – Vassalou (2000) δημοσιεύουν μια από τις λίγες αξιόλογες μελέτες της συμπεριφοράς των αποδόσεων των αξιολογών σε άλλες χώρες πλην των ΗΠΑ. Χρησιμοποιούν τρεις παράγοντες που σχετίζονται με τις μετοχές: το μέγεθος, το momentum<sup>2</sup> και το value premium<sup>3</sup> και τα δεδομένα προέρχονται από 10 ανεπτυγμένες οικονομίες. Βρίσκουν ότι ειδικά οι παράγοντες του μεγέθους και του value premium περιέχουν σημαντική πληροφόρηση για τη μελλοντική πορεία του ΑΕΠ. Σε ό,τι αφορά στο momentum, δεν φαίνεται να υπάρχει ισχυρή σχέση του με την πραγματική οικονομία.

---

<sup>2</sup> Momentum: το αν οι μετοχές που σημείωσαν θετικές αποδόσεις στο παρελθόν, συνεχίζουν να το κάνουν και στο μέλλον

<sup>3</sup> Value premium: αποδόσεις μετοχών με υψηλό BE/ME μείον αποδόσεις μετοχών με χαμηλό BE/ME



Οι Campbell – Cochrane (2000) δουλεύουν πάνω στην προηγούμενη εργασία τους, αυτή του 1999 και δείχνουν ότι το πλαίσιο που είχαν αναπτύξει σε αυτήν, μπορεί να δείξει γιατί το CAPM λειτουργεί καλύτερα από τα CCAPM μοντέλα. Συμπεραίνουν επίσης ότι τα μοντέλα που λαμβάνουν υπόψη τη διαχρονική πληροφόρηση είναι πιθανό να λειτουργούν καλύτερα από αυτά που δεν την περιέχουν.

Οι Jagannathan – McGrattan – Scherbina (2000) βασίζονται στο μοντέλο του Gordon και δείχνουν ότι αυτό μπορεί εύκολα να μετασχηματιστεί ώστε να περιέχει την υπόθεση ότι ο ρυθμός μεταβολής των μερισμάτων αλλάζει διαχρονικά. Έτσι, με βάση αυτόν τον τύπο υπολογίζουν το ασφάλιστρο κινδύνου των μετοχών με διάφορες εναλλακτικές μορφές και σε κάθε περίπτωση καταλήγουν στο ίδιο σημαντικό συμπέρασμα: το ασφάλιστρο κινδύνου των μετοχών έχει μειωθεί σημαντικά τις τρεις τελευταίες δεκαετίες στις ΗΠΑ. Το αποτέλεσμα αυτό φαντάζει λογικό, αν συγκρίνουμε τις περίπου ίσες αποδόσεις των μετοχών με κάποια είδη ομολόγων την περίοδο 1982-1999 και το μηδενικό ασφάλιστρο που εκτιμήθηκε από το μοντέλο.

Οι Lettau – Ludvigson (2001)<sup>4</sup> δημοσίευσαν τη μελέτη η οποία θα αποτελέσει και τη βάση του ερευνητικού τμήματος της παρούσας εργασίας. Ως εκ τούτου, δεν θα προβούμε σε αναλυτική παρουσίασή της σε αυτό το σημείο. Θα την αφήσουμε για το επόμενο κεφάλαιο ώστε να συνδέεται καλύτερα και με τα όσα θα παραθέσουμε εκεί.

Οι Fama – French (2002) εκτιμούν το ασφάλιστρο κινδύνου των μετοχών χρησιμοποιώντας τις μεταβολές των κερδών και των μερισμάτων ώστε να μετρήσουν τα αναμενόμενα κεφαλαιακά κέρδη. Στα μοντέλα που παρουσιάζουν, υποθέτουν ότι οι δείκτες μερίσματος/τιμή και κερδών/τιμής χαρακτηρίζονται από στασιμότητα, κάτι που σημαίνει ότι αν η περίοδος του δείγματος είναι μεγάλη, ο δείκτης μεταβολής των μερισμάτων προσεγγίζει αυτόν των κεφαλαιακών κερδών. Για το μεγαλύτερο μέρος της περιόδου 1952-2000 την οποία και εξετάζουν, τα δυο μοντέλα παράγουν παρόμοιες εκτιμήσεις για την αναμενόμενη απόδοση. Συμπεραίνουν ότι τα ασφάλιστρα κινδύνου που παράγονται από αυτά βρίσκονται κοντά στις πραγματικές αναμενόμενες τιμές. Επιπλέον, αναφέρουν ότι οι υψηλές μέσες αποδόσεις της περιόδου 1951-2000 οφείλονται σε πτώση του συντελεστή προεξόφλησης που επέφερε μεγάλη και μη αναμενόμενη άνοδο των κεφαλαιακών κερδών. Το κύριο συμπέρασμά τους είναι ότι οι μέσες αποδόσεις των μετοχών για αυτή την περίοδο ήταν αρκετά υψηλότερες από τις αναμενόμενες.

---

<sup>4</sup> Εννοούμε το “Consumption, aggregate wealth and expected stock returns” The Journal of Finance 56 (June 2001):815-849.

Οι Smoluk – Neveu (2002) ακολουθούν μια ενδιαφέρουσα προσέγγιση. Αποδίδουν την αποτυχία των διαφόρων παραλλαγών του CCAPM στο γεγονός ότι υπάρχουν διαφορές στα άτομα ανάλογα με το εισόδημά τους. Άτομα με χαμηλό εισόδημα δεν έχουν τη δυνατότητα να κάνουν εύκολα κατανομή της κατανάλωσής τους διαχρονικά, σε αντίθεση με όσα έχουν υψηλό εισόδημα τα οποία έχουν τη δυνατότητα αποταμιεύσεων. Αυτό συνιστά για τους συγγραφείς λάθος στην εξειδίκευση του μοντέλου κι έτσι παρουσιάζουν ένα μοντέλο στο οποίο τα δεδομένα για την κατανάλωση είναι χωρισμένα ανάλογα με το εισόδημα των καταναλωτών. Η εκτίμηση και ο έλεγχος του μοντέλου αποτυγχάνουν να βρουν διαφορές στην καταναλωτική συμπεριφορά ανάλογα με το εισόδημα, απορρίπτοντας την ιδέα ότι οι περιορισμοί στη ρευστότητα δεσμεύουν ανάλογα τους καταναλωτές με χαμηλό εισόδημα.

Άλλη μια εμπειρική απόδειξη της καλύτερης λειτουργίας του CAPM έναντι του CCAPM γίνεται από τον Chen (2003). Η έρευνα αυτή μάλιστα αφορά μια αναπτυσσόμενη οικονομία, αυτή της Ταϊβάν, οπότε τα συμπεράσματα είναι αρκετά ενδιαφέροντα. Παίρνοντας δεδομένα από 7 κλάδους της τοπικής αγοράς, συγκρίνει τις παραδοσιακές εκδοχές των δυο μοντέλων. Βρίσκει ότι το market beta μετρά καλύτερα τον κίνδυνο από το consumption beta και γενικά το CAPM υπερέχει του CCAPM και σε ακρίβεια αλλά και σε προβλεπτική ικανότητα. Μάλιστα, χαρακτηρίζει τα αποτελέσματα του CCAPM απογοητευτικά, αφού δείχνει ότι δεν υπερέχει ούτε ενός μοντέλου απλού τυχαίου περιπάτου. Η εξήγηση που δίνει είναι παρόμοια με αυτή του Shapiro (1986) την οποία και έχουμε αναφέρει παραπάνω.

Οι Ait Sahalia – Parker – Yogo (2004), κάνουν μια απόπειρα μελέτης των μοντέλων αποτίμησης στηριζόμενοι σε διαχωρισμό της κατανάλωσης σε αγαθά πολυτελείας και βασικά αγαθά. Μοντελοποιούν τη χρησιμότητα συναρτήσεως της κατανάλωσης ενός βασικού αγαθού του οποίου μια ποσότητα απαιτείται σε κάθε περίοδο και ενός αγαθού πολυτελείας με χαμηλή οριακή χρησιμότητα ακόμα και σε περιόδους χαμηλής κατανάλωσης. Βρίσκουν ότι η κατανάλωση των πολυτελών αγαθών έχει σημαντικά μεγαλύτερη συνδιακύμανση με τις αποδόσεις των μετοχών σε σχέση με αυτή που έχει η συνολική κατανάλωση. Βρίσκουν επίσης ότι η κατανάλωση πολυτελών αγαθών εξηγεί ικανοποιητικά τη διαστρωματική συμπεριφορά των αποδόσεων και ότι τα αντίστοιχα betas υπερέχουν και του consumption αλλά και του market beta. Η εξήγηση που δίνουν για αυτό είναι ότι τα άτομα με χαμηλό εισόδημα αποστρέφονται αρκετά τον κίνδυνο, ενώ οι πλούσιοι δεν μεταβάλλουν ουσιαστικά την κατανάλωση των βασικών αλλά αυτή των πολυτελών αγαθών. Έτσι, το μοντέλο τους που έχει ενσωματωμένη αυτή τη διαπίστωση καταφέρνει να είναι μια από τις λίγες εκδοχές του CCAPM που υπερέχει του CAPM. Ωστόσο, δεν

καταφέρνει ούτε αυτό να δώσει κάποια πειστική εξήγηση για το equity premium puzzle.

Θα ολοκληρώσουμε αυτό το κεφάλαιο με μια αναφορά σε μια πρόσφατη δημοσίευση του Cochrane (2005). Σε αυτήν, ο συγγραφέας κάνει μια εκτενέστατη αναφορά μέσω παρελθουσών δημοσιεύσεων στις προσπάθειες σύνδεσης της χρηματοοικονομικής με τη μακροοικονομική. Η πρόκληση για το μέλλον είναι η εύρεση ενός μοντέλου γενικής ισορροπίας το οποίο θα έχει τη δυνατότητα να εξηγήσει και όσα έχουν ήδη εξηγηθεί από άλλα μοντέλα αλλά κυρίως όσα δεν έχει γίνει εφικτό να εξηγηθούν. Οι δυο κλάδοι θα πρέπει να δανειστούν στοιχεία ο ένας από τον άλλον ώστε να μπορέσουν να συμβάλλουν στην ανάπτυξη ενός τέτοιου μοντέλου.

Η αναφορά αυτή του Cochrane (2005) στις προσπάθειες εύρεσης σχέσης ανάμεσα στη χρηματοοικονομική με τη μακροοικονομική αποτελεί τον καλύτερο συνδετικό κρίκο ανάμεσα σε αυτό το κεφάλαιο και στο επόμενο. Εκεί, θα προσπαθήσουμε να εξετάσουμε το κατά πόσο μια μακροοικονομική μεταβλητή, το output gap, έχει προβλεπτική ικανότητα πάνω στις αποδόσεις των μετοχών.

## **Κεφάλαιο 4**

### **Παρουσίαση Υποδείγματος - Εμπειρικά Αποτελέσματα**

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

### 4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Κάποια αξιόγραφα πρέπει να προσφέρουν υψηλότερες αποδόσεις από κάποια άλλα. Αυτά τα πριμ κινδύνου πρέπει να αντικατοπτρίζουν τον συνολικό μακροοικονομικό κίνδυνο. Πρέπει δηλαδή να αντικατοπτρίζουν την τάση των αξιογράφων να έχουν άσχημες αποδόσεις σε περιόδους αρνητικής οικονομικής συγκυρίας.

Όπως έχουμε δει και σε προηγούμενο κεφάλαιο, η τιμή ενός αξιογράφου  $i$  τη χρονική στιγμή  $t$  ισούται θεωρητικά με:

$$p_t^i = \frac{E_t(x_{t+1}^i)}{R_t^f} + \text{cov}_t(m_{t+1}, x_{t+1}^i) \quad (1)$$

,όπου  $x$  η μελλοντική πληρωμή του αξιογράφου και  $m$  ο στοχαστικός συντελεστής προεξόφλησης. Ο πρώτος όρος της σχέσης (1) είναι η παρούσα αξία της πληρωμής και είναι ουδέτερη στον κίνδυνο. Ο δεύτερος όρος είναι η διόρθωση της τιμολόγησης για κίνδυνο και όπως βλέπουμε, μια αρνητική συνδιακύμανση σημαίνει χαμηλότερη τιμή. Με άλλα λόγια, το ασφάλιστρο κινδύνου (risk premium) είναι υψηλότερο για αξιόγραφα με μεγάλη αρνητική συνδιακύμανση της μελλοντικής τους πληρωμής με τον στοχαστικό συντελεστή προεξόφλησης.

Ο στοχαστικός συντελεστής προεξόφλησης είναι ίσος με τη μεταβολή στην οριακή αξία του πλούτου κι επομένως το ασφάλιστρο κινδύνου καθορίζεται έμμεσα από τη συνδιακύμανση των πληρωμών ή των αποδόσεων με την οριακή αξία του πλούτου. Δεδομένου ότι ένα αξιόγραφο θα έχει κάποια στιγμή αρνητική εξέλιξη στην τιμή του, θα ήταν προτιμότερο αυτό να συνέβαινε σε περιόδους που οι επενδυτές δεν χρειάζονται επιπλέον πλούτο. Έτσι, οι επενδυτές επιθυμούν να διακατέχουν αξιόγραφα των οποίων οι πληρωμές να έχουν αρνητική συνδιακύμανση με τον στοχαστικό συντελεστή προεξόφλησης.

Η κατεύθυνση της έρευνας σε αυτό το σημείο είναι η εύρεση παραγόντων που καθορίζουν αυτή τη συμπεριφορά. Ειδικότερα, η έρευνα που συνδέει τη χρηματοοικονομική με την πραγματική οικονομία αναζητά παράγοντες που καθορίζουν την οριακή αξία του πλούτου.

Η παρούσα εργασία θα ασχοληθεί με αυτό ακριβώς το θέμα. Θα ξεκινήσουμε με την παρουσίαση μιας υποθετικής οικονομίας, η οποία θα έχει μια συγκεκριμένη δομή σε ό,τι αφορά στην εξέλιξή της: το Ακαθάριστο Εγχώριο Προϊόν της θα κινείται γύρω από μια τάση. Θα ορίσουμε έτσι το μέτρο της διαφοράς ανάμεσα στο πραγματοποιηθέν ΑΕΠ και στην τάση και θα υποστηρίξουμε ότι αυτή η διαφορά δύναται να έχει προβλεπτική

ικανότητα πάνω στις αποδόσεις των μετοχών. Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε με πραγματικά δεδομένα το αν όντως υπάρχει μια τέτοια σχέση και σε τι μέγεθος.

## 4.2 ΥΠΑΡΧΕΙ ΤΑΣΗ ΣΤΟ ΑΕΠ;

### 4.2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Εύκολα μπορεί κάποιος να υποθέσει ότι το ΑΕΠ μιας οικονομίας θα κινείται γύρω από ένα δυνητικό ΑΕΠ ή γύρω από μια τάση που θα ακολουθείται από διάφορες διαταραχές. Ωστόσο, μια σειρά ερευνών έχει καταφέρει να αποδείξει το αντίθετο (Campbell – Mankiw (1987), Cochrane (1988)).

Από την άλλη πλευρά όμως, ο Cochrane (1994) βρίσκει σημαντικά «προσωρινά συστατικά» (transitory components) στο ΑΕΠ των μεταπολεμικών ΗΠΑ<sup>5</sup>. Δικαιολογεί αυτό το εύρημα βασισμένος στο ότι η ύπαρξη αυτών των συστατικών απαιτεί μακροπρόθεσμη προβλεψιμότητα του ΑΕΠ. Αν ο ρυθμός ανάπτυξης του ΑΕΠ δεν ήταν προβλέψιμος, το ΑΕΠ θα ακολουθούσε έναν τυχαίο περίπατο. Οι ως τότε έρευνες βασίζονταν σε μονομεταβλητά μοντέλα πρόβλεψης και έβρισκαν ότι οι υστερήσεις του ΑΕΠ δεν προέβλεπαν ικανοποιητικά το μελλοντικό ρυθμό ανάπτυξής του. Ο Cochrane (1994) όμως, χρησιμοποιεί το λόγο κατανάλωσης/ΑΕΠ κι επειδή ο δείκτης αυτός είναι σχετικά σταθερός μακροπρόθεσμα, αποδεικνύει ότι η κατανάλωση σχεδόν ακολουθεί τυχαίο περίπατο και άρα το ΑΕΠ θα πρέπει να είναι προβλέψιμο ώστε να αιτιολογείται η σταθερότητα του δείκτη.

### 4.2.2 TRANSITORY COMPONENTS ΣΤΟ ΑΕΠ ΤΩΝ ΗΠΑ

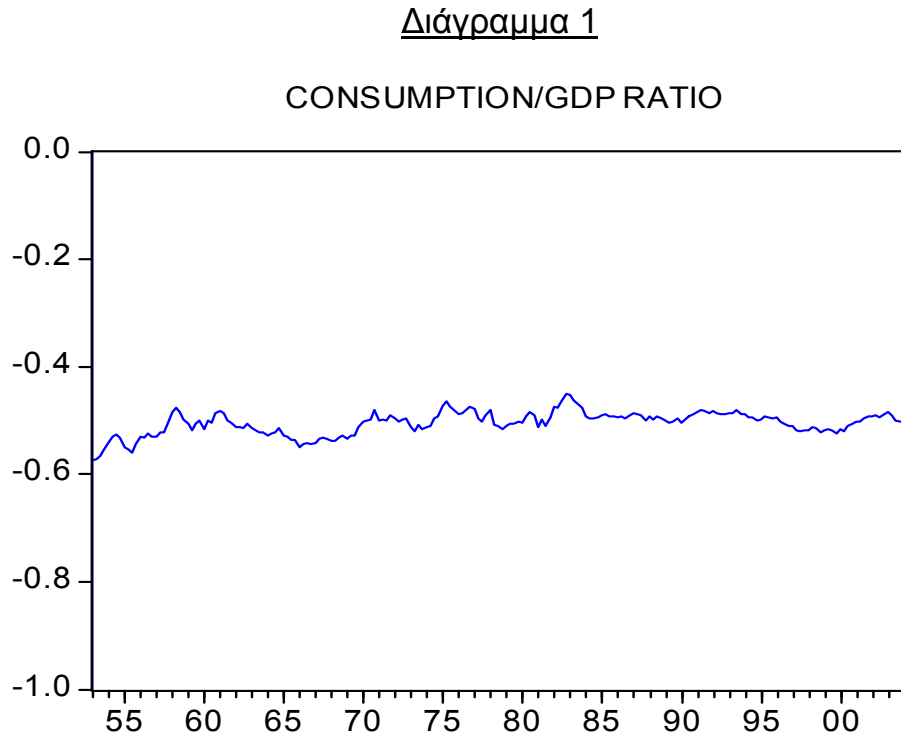
Σε αυτή την ενότητα θα δείξουμε ότι πράγματι στο Ακαθάριστο Εγχώριο Προϊόν των ΗΠΑ για την περίοδο 1953 – 2004 με τρίμηνα στοιχεία, ισχύουν τα συμπεράσματα του Cochrane (1994), στο τμήμα που αφορά τη σταθερότητα του δείκτη κατανάλωσης/ΑΕΠ και την προβλεψιμότητα του ρυθμού μεταβολής του ΑΕΠ.

Η σχετική διαχρονική σταθερότητα του δείκτη κατανάλωσης/ΑΕΠ μπορεί να διαπιστωθεί με δυο τρόπους. Ο πρώτος είναι μέσω ενός διαγράμματος που θα τον απεικονίζει. Έχοντας λοιπόν μετατρέψει τα δεδομένα στις αντίστοιχες λογαριθμικές τιμές τους, παρουσιάζουμε στο

---

<sup>5</sup> Ο Cochrane (1994) ερευνά το Ακαθάριστο Εθνικό Προϊόν ενώ εμείς θα ασχοληθούμε με το Ακαθάριστο Εγχώριο Προϊόν. Όπως όμως αναφέρει και ο ίδιος, τα συμπεράσματα ήταν παρόμοια και για το δεύτερο, κάτι που θα αποδείξουμε και εμείς.

Διάγραμμα 1 τη διαχρονική εξέλιξη του δείκτη κατανάλωσης/ΑΕΠ που λογαριθμικά είναι ίσος με  $c_t - y_t$ <sup>6</sup>.



Όπως παρατηρούμε, ο δείκτης δεν εμφανίζει μεγάλες διακυμάνσεις και η στασιμότητα είναι φανερή. Επιστημονικά, η στασιμότητα αυτή αποδεικνύεται μέσω αντίστοιχου ελέγχου (έλεγχος ύπαρξης μοναδιαίας ρίζας). Πράγματι, η τιμή του Augmented Dickey – Fuller test είναι -3,78 και είναι στατιστικά μη σημαντική, άρα έχουμε στασιμότητα. Εναλλακτικά, δεδομένου ότι το ΑΕΠ και η κατανάλωση (σε λογαριθμικά μεγέθη) έχουν μια μοναδιαία ρίζα, αυτό συνεπάγεται ότι η πρώτη διαφορά τους, δηλαδή ο λογαριθμικός λόγος κατανάλωσης/ΑΕΠ θα είναι στάσιμος. Οι Lettau – Ludvigson (2001) παρέχουν μια ακόμα πιο ισχυρή απόδειξη για αυτό, αποδεικνύοντας ότι η κατανάλωση και το ΑΕΠ συνολοκληρώνονται (cointegration) για δεδομένα ως το 1998.

Έχοντας κατά νου το συμπέρασμα του Cochrane ότι η πορεία της κατανάλωσης προσεγγίζει τον τυχαίο περίπατο, μπορούμε να δούμε αν ο ρυθμός μεταβολής του ΑΕΠ είναι προβλέψιμος μέσω του δείκτη κατανάλωσης/ΑΕΠ.

Ο Πίνακας 1 παρουσιάζει τα αποτελέσματα των παλινδρομήσεων του ρυθμού μεταβολής του ΑΕΠ με υστερήσεις του δείκτη

<sup>6</sup> Υπενθυμίζουμε ότι η χρήση μικρών γραμμάτων υπονοεί ότι τα αντίστοιχα μεγέθη είναι λογαριθμικά, κάτι που θα ακολουθήσουμε σε όλη την πορεία του κεφαλαίου.

κατανάλωσης/ΑΕΠ, του ρυθμού μεταβολής του ΑΕΠ και του ρυθμού μεταβολής της κατανάλωσης.

**Πίνακας 1**  
**Είναι το ΑΕΠ προβλέψιμο;**

Εξαρτημένη μεταβλητή	Ανεξάρτητη μεταβλητή						$\bar{R}^2$
	<i>const.</i>	$c_{t-1} - y_{t-1}$	$\Delta y_{t-1}$	$\Delta y_{t-2}$	$\Delta c_{t-1}$	$\Delta c_{t-2}$	
Συντελεστής	<b>0,059</b>	<b>0,120</b>	0,103	0,037	<b>0,764</b>	0,292	0,28
t-statistic	4,096	4,181	1,385	0,528	5,265	1,887	

Με έντονα γράμματα συμβολίζονται οι συντελεστές οι οποίοι είναι στατιστικά σημαντικοί. Όπως βλέπουμε, οι υστερήσεις του ρυθμού ανάπτυξης του ΑΕΠ δεν εμφανίζουν προβλεπτική ικανότητα για τη μελλοντική εξέλιξη αυτού. Αντίθετα, ο ρυθμός μεταβολής της κατανάλωσης και ο δείκτης κατανάλωσης/ΑΕΠ μπορούν να προβλέψουν μελλοντικά την πορεία του ΑΕΠ και μάλιστα οι αντίστοιχοι εκτιμηθέντες συντελεστές είναι ισχυρά στατιστικά σημαντικοί.

Όλα αυτά πιστοποιούν την ύπαρξη προβλεψιμότητας του ΑΕΠ και επιπλέον σημαίνουν ότι μπορούμε να ανασυνθέσουμε το ΑΕΠ σε δυο συστατικά: σε μια τάση και σε στάσιμα ή κυκλικά συστατικά. Η πιο αξιολογη μέθοδος για αυτό έχει προταθεί από τους Beveridge – Nelson (1981) οι οποίοι ορίζουν την τάση του ΑΕΠ ως το επίπεδο στο οποίο θα φτάσει όταν υπάρχει πλήρης απασχόληση όλων των παραγωγικών συντελεστών. Ισοδύναμα, η τάση είναι ίση με το ΑΕΠ συν το συνολικό μελλοντικό αναμενόμενο ρυθμό ανάπτυξής του. Έτσι, η τάση του ΑΕΠ ορίζεται ως:

$$z_t = \lim_{k \rightarrow \infty} E_t(y_{t+k} - k\mu) = y_t + \sum_{j=1}^{\infty} E_t(\Delta y_{t+j} - \mu)$$

,όπου  $\mu = E(\Delta y)$ . Γενικά, η κατανάλωση παρέχει ένα πολύ καλό μέσο μέτρησης της τάσης του ΑΕΠ, αφού μετρά τις προσδοκίες των καταναλωτών για την πορεία του ΑΕΠ μακροπρόθεσμα.

Από αυτή την ενότητα, κρατάμε το συμπέρασμα ότι το ΑΕΠ παρουσιάζει τάση κι επομένως, αν μπορούσαμε να την μετρήσουμε και να πάρουμε τη διαφορά της από το πραγματικό, να εξετάσουμε αν αυτό το νέο μέγεθος μπορεί να προβλέπει τις αποδόσεις των μετοχών. Πρώτα όμως, είναι καλό να δούμε τι έχει κάνει η ως τώρα έρευνα πάνω σε αυτό.



### 4.3 ΟΙ LETTAU – LUDVIGSON (2001) ΚΑΙ Η ΠΡΟΒΛΕΠΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΑΠΟΔΟΣΕΩΝ

#### 4.3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η έρευνα στο χώρο της χρηματοοικονομικής έχει ασχοληθεί εκτενώς με το θέμα της εύρεσης παραμέτρων που προβλέπουν τις αποδόσεις των μετοχών. Ορισμένα αξιολογικά παραδείγματα είδαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο. Πριν κάνουμε τη δική μας προσπάθεια, θα παρουσιάσουμε περιληπτικά την εξαιρετική δουλειά των Lettau – Ludvigson (2001). Αυτό γιατί η συγκεκριμένη έρευνα εκτός του ότι εισάγει μια νέα προβλεπτική μεταβλητή βασισμένη σε μακροοικονομικά στοιχεία (όπως ακριβώς θα κάνουμε κι εμείς), τη συγκρίνει με μια σειρά άλλων και παρατηρεί το κατά πόσο υπερισχύει ή όχι. Την ίδια ακριβώς μεθοδολογία θα ακολουθήσουμε κι εμείς στη δική μας έρευνα.

Οι συγγραφείς υιοθετούν μια νέα προσέγγιση ερευνώντας τη σύνδεση μακροοικονομικής και χρηματοοικονομικών αγορών. Υποθέτουν ότι η συνολική κατανάλωση, το σύνολο των αξιογράφων που διακρατούνται από τους επενδυτές (asset holdings) και το εργατικό εισόδημα, ακολουθούν μια κοινή τάση μακροπρόθεσμα, αλλά βραχυπρόθεσμα μπορούν να αποκλίνουν σημαντικά μεταξύ τους. Επομένως, μελετούν το ρόλο που μπορούν να διαδραματίσουν αυτές οι αποκλίσεις στο να προβλέπουν τις μετοχικές αποδόσεις.

Το έναυσμα για αυτή την έρευνα δόθηκε από τα ευρήματα των Campbell – Mankiw (1989) που έδειξαν ότι ο δείκτης κατανάλωσης/συνολικού πλούτου μπορεί να προβλέπει τις αποδόσεις των μετοχών ως συνάρτηση των αναμενόμενων αποδόσεων του χαρτοφυλακίου της αγοράς. Ωστόσο, υπήρχαν δυο σημαντικά εμπόδια να ξεπεραστούν. Πρώτον, ο συνολικός πλούτος δεν είναι παρατηρήσιμο μέγεθος. Οι Lettau – Ludvigson δείχνουν ότι τα προβλεπτικά συστατικά αυτού του δείκτη μπορούν να εκφραστούν σε όρους παρατηρήσιμων μεταβλητών: της κατανάλωσης, των asset holdings και του εργατικού εισοδήματος.

Το δεύτερο εμπόδιο ήταν ότι οι αποκλίσεις αυτών των μεγεθών από την κοινή τους τάση είναι κι αυτές μη παρατηρήσιμες κι επομένως πρέπει να εκτιμηθούν. Αυτή είναι και η πλέον σημαντική καινοτομία της έρευνας αυτής.

#### 4.3.2 ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΩΝ ΑΠΟΚΛΙΣΕΩΝ ΑΝΑΜΕΣΑ ΣΕ ΚΑΤΑΝΑΛΩΣΗ, ΕΡΓΑΤΙΚΟ ΕΙΣΟΔΗΜΑ ΚΑΙ ASSET HOLDINGS

Οι Campbell – Mankiw (1989) έδειξαν ότι ο λόγος κατανάλωσης/συνολικού πλούτου μπορεί να γραφτεί σαν:

$$c_t - w_t = E_t \sum_{i=1}^{\infty} \rho_w^i (r_{w,t+i} - \Delta c_{t+i}) \quad (2)$$

,όπου  $\rho_w = \frac{W-C}{W}$  και  $r_w$  η απόδοση του συνολικού πλούτου. Η εξίσωση αυτή δείχνει ότι ο λόγος κατανάλωσης/συνολικού πλούτου είναι συνάρτηση των αναμενόμενων μελλοντικών αποδόσεων και οι προσδοκίες των επενδυτών για τις μελλοντικές αποδόσεις και για το ρυθμό μεταβολής της κατανάλωσης μπορούν να συναχθούν μέσω της κατανάλωσης.

Επειδή όμως ο συνολικός πλούτος και ειδικά το ανθρώπινο κεφάλαιο που είναι ένα από τα συστατικά του δεν είναι παρατηρήσιμος, το παραπάνω πλαίσιο δεν μπορεί να εφαρμοστεί εμπειρικά. Έτσι, οι συγγραφείς υποθέτουν ότι το ανθρώπινο κεφάλαιο μπορεί να εκφραστεί από το συνολικό εργατικό εισόδημα, δηλαδή:  $h_t = \kappa + y_t + z_t$ , όπου  $\kappa$  μια σταθερά και  $z$  μια στάσιμη τυχαία μεταβλητή με μηδενικό μέσο. Στη συνέχεια, με μια σειρά υπολογισμών καταλήγουν σε μια σχέση η οποία δίνει την τάση ανάμεσα σε κατανάλωση, εργατικό εισόδημα και asset holdings:

$$c_t - \omega \alpha_t - (1-\omega)y_t = E_t \rho_w^i \{[\omega r_{\alpha,t+i} + (1-\omega)r_{h,t+i}] - \Delta c_{t+i}\} + (1-\omega)z \quad (3)$$

,όπου  $\omega = \frac{A}{W}$ ,  $A$  τα asset holdings,  $r_{\alpha}$  η απόδοση των asset holdings και  $r_h$  η απόδοση του ανθρωπίνου κεφαλαίου.

Αφού οι όροι του δεξιού μέλους της (3) έχουν υποτεθεί στάσιμοι, αυτό συνεπάγεται ότι τα  $c, \alpha, y$  πρέπει να συνολοκληρώνονται. Το αριστερό μέλος της (3) είναι η περιβόητη μεταβλητή  $cay_t$  την οποία οι Lettau – Ludvigson (2001) εκτιμούν και τη χρησιμοποιούν ως προβλεπτική επί των μετοχικών αποδόσεων μεταβλητή.

Το ζήτημα τώρα είναι η εκτίμηση αυτής της μεταβλητής, τη στιγμή που τα  $c_t, \alpha_t, y_t$  καθορίζονται ενδογενώς. Εξαιτίας της ύπαρξης cointegration και για να αποφευχθούν προβλήματα μη συνέπειας των εκτιμητών, εφαρμόζεται η μέθοδος Dynamic Least Squares (DLS) κι έτσι εκτιμάται το μοντέλο:

$$c_{n,t} = \alpha + \beta_\alpha \alpha_t + \beta_y y_t + \sum_{i=-k}^k b_{\alpha,i} \Delta \alpha_{t-i} + \sum_{i=-k}^k b_{y,i} \Delta y_{t-i} + e_t \quad (4)$$

, όπου  $c_n$  η κατανάλωση των μη διαρκών αγαθών και υπηρεσιών,  $c_t = \lambda c_{n,t}$  και  $\lambda = \frac{1}{\beta_\alpha + \beta_y}$ . Έτσι λοιπόν, αφού  $cay_t = c_{n,t} - \hat{\beta}_\alpha \alpha_t - \hat{\beta}_y y_t$ , εκτιμούν την (4)

και μέσω αυτής προκύπτει το  $cay_t$ . Η μέθοδος DLS εξασφαλίζει ισχυρή συνέπεια των εκτιμητών και το εκτιμηθέν μοντέλο που προκύπτει και πάνω στο οποίο βασίζεται η εκτίμηση του  $cay_t$  είναι το:

$$c_{n,t} = \underset{(7.96)}{0.61} + \underset{(11.70)}{0.31} \alpha_t + \underset{(23.92)}{0.59} y_t \quad (5)$$

Με αυτό τον τρόπο, δημιουργούν μια σειρά από τρίμηνα δεδομένα για τη μεταβλητή τους και προσπαθούν να δουν αν αυτή έχει προβλεπτική ικανότητα πάνω στις αποδόσεις των μετοχών. Το σημαντικό είναι ότι συγκρίνουν την προβλεπτική ισχύ του  $cay_t$  με άλλες σημαντικές χρηματοοικονομικές μεταβλητές.

Συγκεκριμένα, οι άλλες μεταβλητές που χρησιμοποιούνται είναι οι εξής:

- Η υστέρηση των αποδόσεων.
- Το  $cay_t$ .
- Η μερισματική απόδοση  $d_t - p_t$ .
- Ο δείκτης της μερισματικής πολιτικής  $d_t - e_t$  με  $e_t$  τα κέρδη.
- Το Relative Bill rate.
- Το Term Spread.
- Το Default Spread.

Γίνεται μια σειρά παλινδρομήσεων στις οποίες συμπεριλαμβάνονται αναλόγως διάφορες από αυτές τις μεταβλητές. Τα δεδομένα καλύπτουν την περίοδο 1952-1998 και είναι τρίμηνα. Σε όλες τις παλινδρομήσεις, οι εκτιμηθέντες συντελεστές του  $cay_t$  είναι στατιστικά σημαντικοί, σε αντίθεση με τους συντελεστές των άλλων μεταβλητών.

Στη συνέχεια, οι συγγραφείς προχωρούν σε μια σειρά μεθόδων ώστε να εξακριβώσουν τη δυναμική του  $cay_t$ . Σε κάθε περίπτωση βρίσκουν πως είναι ανώτερος από όσους έχουν προταθεί προσθέτοντας ένα ακόμη ισχυρό επιχείρημα ότι τα αναμενόμενα ασφάλιστρα κινδύνου μεταβάλλονται διαχρονικά.

#### 4.4 OUTPUT GAP: ΜΙΑ ΝΕΑ ΠΡΟΒΛΕΠΤΙΚΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ;

##### 4.4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο κεφάλαιο 1 παρουσιάσαμε και αναλύσαμε θεωρητικά την έννοια του output gap. Η ύπαρξη του μεγέθους αυτού εμπειρικά, δικαιολογείται από την ύπαρξη μιας μακροπρόθεσμης τάσης στο ΑΕΠ<sup>7</sup>. Έτσι, πριν προχωρήσουμε στην εκτίμησή του, έπρεπε να αποδείξουμε την ύπαρξη της τάσης αυτής. Αυτό το κάναμε στο προηγούμενο κεφάλαιο κι έτσι τώρα έχουμε όλα τα θεωρητικά εφόδια που χρειαζόμαστε για να προχωρήσουμε.

Η μεθοδολογία που θα ακολουθήσουμε θα είναι παρόμοια με αυτή των Lettau – Ludvigson (2001). Δηλαδή, αφού πρώτα δείξουμε τη διαδικασία εκτίμησης του output gap, θα προβούμε σε μια σειρά από παλινδρομήσεις ώστε να εξετάσουμε την προβλεπτική του ισχύ σε σύγκριση με άλλες χρηματοοικονομικές και μακροοικονομικές μεταβλητές.

##### 4.4.2 ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ ΤΗΣ ΤΑΣΗΣ ΤΟΥ ΑΕΠ

Ένα πρώτο ζήτημα που αντιμετωπίσαμε είναι το πώς θα εκτιμήσουμε τη μακροπρόθεσμη τάση του ΑΕΠ ώστε αφαιρώντας την από το πραγματοποιηθέν, να προκύψει το output gap.

Όπως έχουμε ήδη προαναφέρει, υπάρχουν τρεις βασικές μέθοδοι εκτίμησης της τάσης:

- Μέσω μιας συνάρτησης παραγωγής.
- Με τη μέθοδο των Beveridge – Nelson (1981)
- Με το Hodrick – Prescott filter.

Εμείς θα χρησιμοποιήσουμε την τρίτη μέθοδο αλλά στα τρίμηνα δεδομένα θα δουλέψουμε και με το δυνητικό ΑΕΠ που δημοσιεύουν οι οικονομικές αρχές των ΗΠΑ και του οποίου ο υπολογισμός στηρίζεται σε μια υποθετική συνάρτηση παραγωγής.

##### To Hodrick – Prescott filter

Το Hodrick – Prescott filter είναι μια τεχνική εξομάλυνσης που χρησιμοποιείται για την εκτίμηση της μακροπρόθεσμης τάσης μιας σειράς δεδομένων. Η μέθοδος αυτή είναι ένα δίπλευρο γραμμικό φίλτρο που υπολογίζει την εξομαλυμένη σειρά  $s$  μιας αρχικής σειράς  $y$ , ελαχιστοποιώντας τη διακύμανση του  $y$  γύρω από το  $s$ . Επιπλέον, χρησιμοποιεί μια παράμετρο  $\lambda$  που περιορίζει τη δεύτερη διαφορά του  $s$ .

<sup>7</sup> Επαναλαμβάνουμε ότι στο κεφάλαιο αυτό, ως ΑΕΠ εννοείται το Ακαθάριστο Εγχώριο Προϊόν.

Έτσι, το Hodrick – Prescott filter επιλέγει το  $s$  που ελαχιστοποιεί την εξής σχέση:

$$\sum_{t=1}^T (y_t - s_t)^2 + \lambda \sum_{t=2}^{T-1} ((s_{t+1} - s_t) - (s_t - s_{t-1}))^2$$

Η παράμετρος  $\lambda$  ελέγχει το μέγεθος της εξομάλυνσης της σειράς. Όσο μεγαλύτερη τιμή παίρνει, τόσο πιο εξομαλυμένη είναι η σειρά. Για παράδειγμα, αν  $\lambda = \infty$ , η τάση θα είναι γραμμική.

## 4.5 ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

### 4.5.1 Η ΑΝΤΙΠΡΟΣΩΠΕΥΤΙΚΗ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

Ας υποθέσουμε ότι βρισκόμαστε σε μια οικονομία με έναν αντιπροσωπευτικό καταναλωτή – επενδυτή, στην οποία το σύνολο του πλούτου είναι ανταλλάξιμο (tradable). Αν με  $W_t$  συμβολίσουμε τον συνολικό πλούτο την περίοδο  $t$ ,  $C_t$  την κατανάλωση της ίδιας περιόδου και  $R_{t+1}^w$  την καθαρή απόδοση του πλούτου, ο συνολικός πλούτος εκφράζεται σωρευτικά από την ακόλουθη σχέση:

$$W_{t+1} = (1 + R_{t+1}^w)(W_t - C_t) \quad (6)$$

Αν λογαριθμήσουμε τις παραμέτρους της (6), υποθέσουμε ότι ο λόγος κατανάλωσης/συνολικό πλούτο είναι στάσιμος και πάρουμε μια προσέγγιση πρώτης τάξης με σειρά Taylor, φτάνουμε στην παρακάτω έκφραση για το ρυθμό μεταβολής του συνολικού πλούτου:

$$\Delta w_{t+1} \approx k + r_{t+1}^w + (1 - \frac{1}{\rho^w})(c_t - w_t) \quad (7)$$

,όπου  $\rho^w = \frac{W - C}{W}$  και  $k$  μια σταθερά. Λύνοντας αυτή την εξίσωση διαφορών<sup>8</sup> και παίρνοντας τις δεσμευμένες αναμενόμενες τιμές, θα οδηγηθούμε στην εξίσωση (2), για την οποία έχουμε δώσει ερμηνεία. Το οικονομικό αυτό πλαίσιο, είναι συμβατό με αυτό των Lettau – Ludvigson (2001) και μας βοηθά στο να οδηγηθούμε στο συμπέρασμα ότι οι αναμενόμενες αποδόσεις μεταβάλλονται διαχρονικά και άρα είναι προβλέψιμες, κάτι που είναι απαραίτητη (θεωρητική) προϋπόθεση για να εφαρμόσουμε εμπειρικά το μοντέλο μας.

<sup>8</sup> Βλ. Lettau – Ludvigson (2001), σελ.818

Στη συνέχεια, θα υποθέσουμε ότι η θεωρητική αυτή οικονομία δεν «εκρήγνυται», δηλαδή:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Y_t < \infty \quad (8)$$

,που σημαίνει ότι η συνολική της παραγωγή δεν μπορεί να φτάσει το άπειρο. Αυτό, συνεπάγεται βάσει της μακροοικονομικής θεωρίας ότι η πορεία της συνολικής ετήσιας παραγωγής θα ακολουθεί έναν «κύκλο». Με άλλα λόγια, θα εμφανίζει μια τάση γύρω από την οποία θα κινείται κι έτσι θα μπορεί να οριστεί το μέτρο της διαφοράς της πραγματοποιηθείσας παραγωγής από αυτή την τάση, μέτρο που δεν είναι άλλο από το output gap.

Έστω ότι στην οικονομία αυτή υπάρχει μια χρηματαγορά της οποίας η απόδοση το χρόνο  $t$  είναι  $R_t^m$  και η οποία αντιστοιχεί στην απόδοση του χαρτοφυλακίου της αγοράς. Έστω επίσης ότι στην αγορά αυτή υπάρχει το αξιόγραφο χωρίς κίνδυνο με απόδοση  $R_t^f$  το χρόνο  $t$ .

Κάνουμε τις παρακάτω επιπλέον υποθέσεις για τον αντιπροσωπευτικό κάτοικο αυτής της οικονομίας:

- Αποστρέφεται αυστηρά τη διακύμανση και είναι ουδέτερος στον κίνδυνο.
- Η οριακή χρησιμότητα είναι μια θετική αλλά φθίνουσα συνάρτηση της κατανάλωσης.
- Στην οικονομία δεν υπάρχουν ευκαιρίες arbitrage, επομένως ορίζεται ένας και μοναδικός πυρήνας των τιμών.
- Η αρχική κατανομή του πλούτου του προσφέρεται στην αγορά.
- Η δεσμευμένη κατανομή των αποδόσεων είναι συνάρτηση ενός σετ καταστατικών μεταβλητών οι οποίες δύνανται να έχουν προβλεπτική ικανότητα για τις μελλοντικές αποδόσεις.

Έτσι, αφού η κατανάλωση καθορίζεται από τον πλούτο και οι καταστατικές μεταβλητές προβλέπουν τις αποδόσεις, η συνάρτηση χρησιμότητας εξαρτάται από τον πλούτο και τις καταστατικές μεταβλητές. Οι υποθέσεις αυτές δημιουργούν ένα πλαίσιο στο οποίο έχει εφαρμογή το Intertemporal CAPM του Merton στο οποίο το ασφάλιστρο κινδύνου είναι συνάρτηση μιας σειράς άλλων κινδύνων που σχετίζονται με τη μη προβλέψιμη αλλαγή των καταστατικών μεταβλητών.

#### 4.5.2 ΟΙ ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

Η ανάλυση της προηγούμενης ενότητας μας οδήγησε σε ένα πολυπαραγοντικό υπόδειγμα, σύμφωνα με το οποίο το ασφάλιστρο κινδύνου μπορεί να προβλεφθεί από μια σειρά καταστατικών μεταβλητών. Εμείς, σκοπεύουμε να εξετάσουμε το αν μια τέτοια θεωρία μπορεί να έχει εμπειρική υπόσταση, ενέργεια που έχει γίνει και από αρκετούς άλλους με πιο χαρακτηριστικό παράδειγμα τους Lettau – Ludvigson (2001). Αυτό που εμείς θα προσθέσουμε θα είναι μια νέα καταστατική μεταβλητή.

Έχουμε λοιπόν το παρακάτω μοντέλο:

$$R_t^m - R_t^f = c + \sum_{i=1}^n \beta_i z_i + \varepsilon_t \quad (9)$$

,όπου  $z_i$  οι καταστατικές μεταβλητές και  $\varepsilon_t$  ο διαταρακτικός όρος που ικανοποιεί τις υποθέσεις του πολυμεταβλητού γραμμικού υποδείγματος. Οι μεταβλητές τις οποίες εμείς θα χρησιμοποιήσουμε είναι οι:

- i. Η υστέρηση του ασφάλιστρου κινδύνου  $R_{t-1}^m - R_{t-1}^f$ .
- ii. Η μεταβλητή  $ca_{t-1}$  των Lettau – Ludvigson (2001).
- iii. Η μερισματική απόδοση  $d_{t-1} - p_{t-1}$ .
- iv. Ο δείκτης P/E  $p_{t-1} - e_{t-1}$ .
- v. Το Term Spread  $TRM_{t-1}$  που είναι ίσο με τη διαφορά ανάμεσα στην απόδοση ενός 10ετούς από την απόδοση ενός 3μηνου κρατικού ομολόγου.
- vi. Το Default Spread  $DEF_{t-1}$  που είναι ίσο με τη διαφορά των αποδόσεων ενός BAA και ενός AAA εταιρικών ομολόγων.
- vii. Το Output gap  $GAP_{t-1}$ .

Αυτές οι μεταβλητές επιλέχθηκαν γιατί μια σειρά από έρευνες που έχουν γίνει, έχουν εξετάσει την προβλεπτική τους ικανότητα. Για παράδειγμα, οι Campbell – Shiller (1988) και οι Fama – French (1988) βρήκαν προβλεπτική ικανότητα του δείκτη P/E και της μερισματικής απόδοσης. Επίσης, οι Fama – French (1989) εξέτασαν την προβλεπτική ισχύ του Term Spread και του Default Spread.

Επειδή ο στόχος της έρευνας αυτής είναι να φανεί η ισχύς του output gap ως προβλεπτικής μεταβλητής, είναι ευνόητο ότι θα είναι η «κεντρική» μεταβλητή των διαφόρων παλινδρομήσεων. Αναλυτικότερα, θα τρέξουμε μια σειρά από εναλλακτικές μορφές του μοντέλου (9), προσπαθώντας να δούμε αν το output gap έχει αφενός προβλεπτική ικανότητα και αφετέρου αν αυτή η ικανότητα υπερσχύει των άλλων.

### 4.5.3 ΠΗΓΕΣ ΚΑΙ ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Αρχικά, οφείλουμε να σημειώσουμε ότι θα εκτιμήσουμε το μοντέλο με δεδομένα δυο συχνοτήτων: τρίμηνα και μηνιαία. Σε ό,τι αφορά στα μηνιαία, θα καλύπτουν την περίοδο 1960:1-2004:10, ενώ τα τρίμηνα την περίοδο 1960:1-2003:2. Υπάρχουν δυο σημαντικές παρατηρήσεις που πρέπει να κάνουμε: πρώτον, δεν υπάρχουν μηνιαία στοιχεία για το  $cay_t$  και ως εκ τούτου δεν θα συμπεριληφθεί αυτή η μεταβλητή στις μηνιαίες παλινδρομήσεις. Δεύτερον, επειδή δεν υπάρχουν μηνιαία στοιχεία ούτε για το  $output_t$ , το ρόλο του θα υποκαταστήσει η βιομηχανική παραγωγή που θεωρείται ως ο καλύτερος εκφραστής του ΑΕΠ σε μηνιαία βάση.

Τα δεδομένα για το  $cay_t$  προέρχονται από τη βάση δεδομένων των Lettau – Ludvigson. Οι τιμές του ασφαλιστρου κινδύνου αφορούν το δείκτη S&P 500 και ελήφθησαν από τη βάση δεδομένων των Fama – French. Για το ΑΕΠ χρησιμοποιήσαμε τη βάση δεδομένων FRED (Federal Reserve Economic Database) και για τη βιομηχανική παραγωγή την ιστοσελίδα της EconStats. Για το Term Spread, το Default Spread, τα μερίσματα και τα κέρδη πήραμε δεδομένα από τη βάση δεδομένων EconWin και για την περίοδο 1960-1970 χρησιμοποιήσαμε τη βάση δεδομένων του Shiller.

## 4.6 ΕΜΠΕΙΡΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

### 4.6.1 ΤΡΙΜΗΝΙΑΙΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ

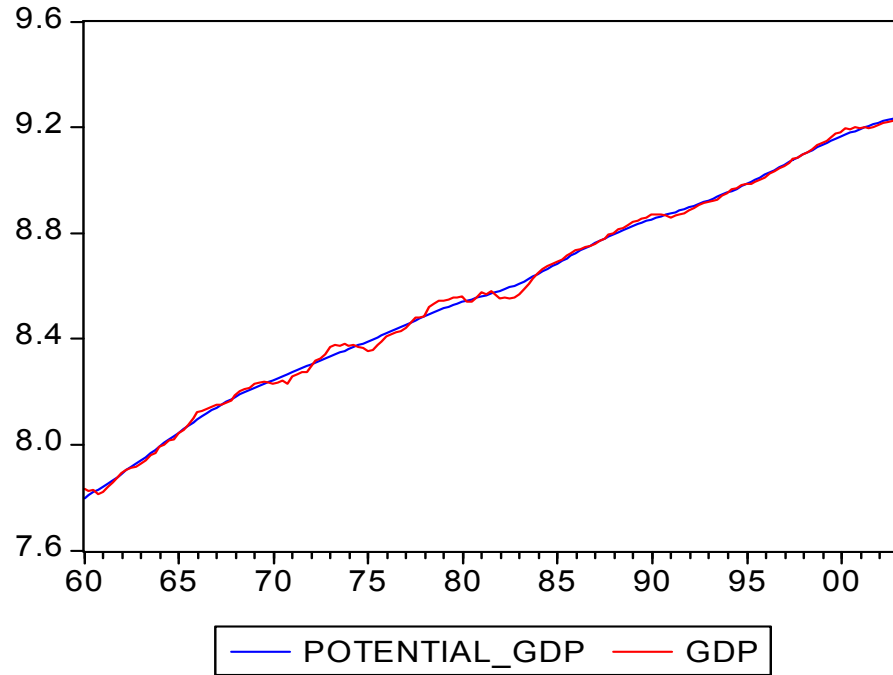
#### 4.6.1.1 ΣΥΝΤΟΜΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Πριν προχωρήσουμε στην εκτίμηση του μοντέλου μας, είναι καλό να δούμε τις τιμές διάφορων στατιστικών μέτρων ώστε να πάρουμε μια πρώτη εικόνα για τα δεδομένα μας. Θα ξεκινήσουμε με το Διάγραμμα 2 στο οποίο θα απεικονίζονται ταυτόχρονα η πορεία του ΑΕΠ αλλά και του δυνητικού ΑΕΠ, όπως αυτό υπολογίστηκε με το Hodrick – Prescott filter. Η κάθετη απόσταση δυο σημείων των δυο γραμμών είναι το  $output\ gap$ .

Ο Πίνακας 2 χωρίζεται σε δυο τμήματα. Στο πρώτο δίνουμε τις τιμές του συντελεστή συσχέτισης ανάμεσα στις διάφορες μεταβλητές του υποδείγματός μας, ενώ στο δεύτερο τμήμα δίνονται κάποια βασικά στατιστικά μεγέθη.



Διάγραμμα 2



**Πίνακας 2**  
**Συσχετίσεις και βασικά στατιστικά μεγέθη**

$r_t^m - r_t^f$  :log υπερβάλλουσες αποδόσεις,  $gap_t$  : log output gap,  $cay_t$  :η μεταβλητή των Lettau – Ludvigson(2001),  
 $d_t - p_t$  :log μερισματική απόδοση,  $p_t - e_t$  : log δείκτης P/E,  $trm_t$  : term spread,  $def_t$  :default spread, . Δείγμα:  
1960:1-2003:2 (quarterly)

	$r_t^m - r_t^f$	$gap_t$	$cay_t$	$d_t - p_t$	$p_t - e_t$	$trm_t$	$def_t$
Panel A: Πίνακας Συσχετίσεων							
$r_t^m - r_t^f$	1.00	-0.22	0.27	-0.11	0.07	0.15	0.13
$gap_t$		1.00	-0.21	-0.07	-0.03	-0.48	-0.39
$cay_t$			1.00	0.40	-0.28	0.32	0.04
$d_t - p_t$				1.00	-0.91	-0.03	0.44
$p_t - e_t$					1.00	0.20	-0.48
$trm_t$						1.00	0.26
$def_t$							1.00
Panel B: Βασικά Στατιστικά Μεγέθη							
Μέσος	0.011	0.000	0.723	-3.468	2.774	0.013	0.009
Τυπική Απόκλιση	0.089	0.016	0.013	0.399	0.395	0.012	0.004
Συντελεστής Αυτοσυσχετίσης	0.027	0.846	0.838	0.974	0.960	0.789	0,895

Αν επιχειρούσαμε κάποια σχόλια πάνω σε αυτόν τον πίνακα, θα επικεντρωνόμασταν πρώτα απ' όλα στη συμπεριφορά του output gap. Παρατηρούμε ότι συσχετίζεται αρνητικά με όλες τις άλλες μεταβλητές, με τον συντελεστή συσχέτισης με τις υπερβάλλουσες αποδόσεις να φτάνει το -0.22. Αυτό το αποτέλεσμα είναι συνεπές με τη θεωρία που αναπτύξαμε στο πρώτο κεφάλαιο, όπου αναφέραμε πως όταν το output gap είναι θετικό, οι αποδόσεις αναμένεται να έχουν πτωτική τάση<sup>9</sup>. Πάντως, το output gap εμφανίζει μεγάλη μεταβλητότητα σε σχέση με τη μέση τιμή του.

#### 4.6.1.2 ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

Στο σημείο αυτό είμαστε έτοιμοι να προχωρήσουμε το μοντέλο ώστε να αξιολογήσουμε την προβλεπτική ισχύ του output gap πάνω στις υπερβάλλουσες αποδόσεις.

Η μορφή του μοντέλου είναι αυτή που δόθηκε στη σχέση (9). Αναλυτικότερα, θα προβούμε σε μια σειρά παλινδρομήσεων με διάφορους συνδυασμούς ανεξάρτητων μεταβλητών. Έτσι, θα μπορούμε να βλέπουμε σε κάθε περίπτωση αν η προσθήκη ή μη μιας μεταβλητής θα αυξάνει την ερμηνευτική ικανότητα του μοντέλου.

Η προσοχή μας θα επικεντρωθεί φυσικά στο output gap για το οποίο θέλουμε να δούμε αν δίνει στατιστικά σημαντικούς συντελεστές παλινδρόμησης αλλά και το πώς συμπεριφέρεται σε σχέση με τις άλλες μεταβλητές και ιδιαίτερα το  $ca_{y,t}$ . Θυμίζουμε πως οι Lettau – Ludvigson (2001) έδειξαν, ακολουθώντας την ίδια μεθοδολογία με τη δική μας, ότι η μεταβλητή αυτή είναι καλύτερη στο να προβλέπει τις υπερβάλλουσες αποδόσεις από κάθε άλλη προταθείσα<sup>10</sup>.

Τα αποτελέσματα των παλινδρομήσεων παρουσιάζονται στον Πίνακα 3:

---

<sup>9</sup> Βλ. Ενότητα 1.4

<sup>10</sup> Βλ. Table III, page 828 του Lettau – Ludvigson (2001)

**Πίνακας 3**  
**Προβλέποντας τις τριμηνιαίες υπερβάλλουσες αποδόσεις**

Ο Πίνακας παρουσιάζει τις εκτιμήσεις του μοντέλου (9) χρησιμοποιώντας τη μέθοδο OLS. Όλες οι αποδόσεις είναι λογαριθμικές και προέρχονται από τον δείκτη S&P 500. Οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι οι εξής: *lag* : μια υστέρηση της εξαρτημένης μεταβλητής, *gap<sub>t-1</sub>* : log output gap, *cay<sub>t-1</sub>* : ο συντελεστής των Lettau – Ludvigson (2001), *d<sub>t-1</sub> - p<sub>t-1</sub>* : log μερισματικές αποδόσεις, *p<sub>t-1</sub> - e<sub>t-1</sub>* : log δείκτης P/E, *trm<sub>t-1</sub>* : term spread, *def<sub>t-1</sub>* : default spread. Στις παρενθέσεις κάτω από τους συντελεστές εμφανίζονται τα t-statistics, διορθωμένα με τη μέθοδο Newey-West. Οι συντελεστές που είναι στατιστικά σημαντικοί σε επίπεδο 5% εμφανίζονται με έντονα γράμματα. Το δείγμα καλύπτει την περίοδο 1960:1 – 2003:2 (quarterly)

#	<i>c</i> (t-stat)	<i>lag</i> (t-stat)	<i>gap<sub>t-1</sub></i> (t-stat)	<i>cay<sub>t-1</sub></i>	<i>d<sub>t-1</sub> - p<sub>t-1</sub></i>	<i>p<sub>t-1</sub> - e<sub>t-1</sub></i>	<i>trm<sub>t-1</sub></i>	<i>def<sub>t-1</sub></i>	$\bar{R}^2$ (%)
1	<b>0.011</b> (2.564)	<b>0.128</b> (2.341)							0.00
2	0.011 (1.704)		<b>-1.174</b> (-2.924)						3.68
3	0.011 (1.665)	0.119 (0.244)	<b>-1.198</b> (-2.951)						3.15
4	<b>-0.015</b> (-4.740)			<b>2.057</b> (4.792)					8.40
5	<b>-1.321</b> (-4.067)		<b>-0.859</b> (-2.170)	<b>1.843</b> (4.116)					10.0
6	<b>-1.327</b> (-3.947)	0.012 (0.150)	<b>-0.843</b> (-2.048)	<b>1.852</b> (3.999)					9.55
7	0.100 (1.509)				0.026 (1.334)				0.70
8	0.088 (1.345)		<b>-1.132</b> (-2.864)		0.022 (1.168)				4.11
9	0.102 (1.505)				0.030 (0.711)	0.006 (0.127)			0.10
10	0.082 (1.212)		<b>-1.177</b> (-2.808)		0.006 (0.126)	-0.019 (-0.421)			3.67
11	<b>-1.413</b> (-3.865)		<b>-0.943</b> (-2.288)	<b>1.943</b> (4.185)	-0.038 (-0.880)	0.040 (0.962)			9.55
12	0.0877 (0.997)	0.015 (0.189)			0.000 (0.012)	-0.032 (-0.631)	1.260 (1.846)	-0.449 (-0.187)	0.60
13	<b>-1.632</b> (-3.592)	0.033 (0.417)		<b>2.184</b> (3.872)	-0.028 (-0.634)	-0.019 (-0.404)	0.159 (0.198)	2.078 (0.816)	6.85
14	<b>-1.468</b> (-3.117)	0.012 (0.149)	-0.901 (-1.767)	<b>2.004</b> (3.456)	-0.037 (-0.809)	-0.036 (-0.700)	-0.099 (-0.121)	0.485 (0.177)	7.94

Η πρώτη γραμμή του Πίνακα 3 δείχνει ότι η προβλεπτική ικανότητα της μιας υστέρησης των υπερβαλλουσών αποδόσεων είναι μεν στατιστικά σημαντική αλλά όχι και τόσο ισχυρή. Όταν όμως εξετάζουμε ως ερμηνευτική μεταβλητή το output gap, βλέπουμε ότι έχει αρκετά ισχυρή ικανότητα πρόβλεψης των υπερβαλλουσών αποδόσεων του επόμενου τριμήνου. Η προσθήκη της υστέρησης όμως, μειώνει την ερμηνευτική ικανότητα του υποδείγματος (γραμμή 3).

Οι πιο ενδιαφέρουσες ίσως γραμμές του Πίνακα είναι οι 4 και η 5. στην 4 βλέπουμε ότι το *cay<sub>t-1</sub>* έχει υψηλή ικανότητα πρόβλεψης με το  $\bar{R}^2$  να φτάνει το 8.4%. Όταν στο υπόδειγμα προστεθεί και το output gap, η

ερμηνευτική ικανότητα του υποδείγματος ανεβαίνει στο 10%, τη μεγαλύτερη τιμή από όλες τις εναλλακτικές μορφές του μοντέλου.

Η χρήση των υπόλοιπων παραμέτρων δεν δίνει στατιστικά σημαντικούς συντελεστές, εκτός των περιπτώσεων που στο μοντέλο υπήρχαν το  $cay_{t-1}$  και το output gap. Ωστόσο, στην τελευταία γραμμή, όπου και χρησιμοποιήσαμε όλες τις μεταβλητές, μόνο το  $cay_{t-1}$  δίνει στατιστικά σημαντική εκτίμηση (πλην της σταθεράς).

Παρατηρούμε πως σε όλες τις περιπτώσεις, οι εκτιμηθέντες συντελεστές του output gap έχουν αρνητικά πρόσημα. Αυτό, είναι απόλυτα συμβατό με την οικονομική θεωρία γιατί αν η οικονομία βρίσκεται γύρω από την κορυφή του κύκλου, δηλαδή το output gap είναι θετικό, η αποστροφή κινδύνου των επενδυτών μειώνεται. Αυτή η μείωση της αποστροφής, αυξάνει τη ζήτηση για αξιόγραφα που φέρουν κίνδυνο, κάτι που μειώνει τις αναμενόμενες υπερβάλλουσες αποδόσεις.

Συμπερασματικά, βλέπουμε ότι το output gap έχει αρκετά σημαντική προβλεπτική επί των υπερβαλλουσών αποδόσεων ικανότητα. Από όλες τις μεταβλητές που εξετάσαμε, είναι η δεύτερη καλύτερη μετά το  $cay_{t-1}$ . Σε όλα τα εναλλακτικά μοντέλα που εκτιμήσαμε, η προσθήκη του gap αυξάνει την ερμηνευτική τους ικανότητα, ενώ σε όλες τις διάφορες εκδοχές μονομεταβλητών μοντέλων, αυτό με το gap έχει το δεύτερο υψηλότερο  $\bar{R}^2$ . Εν τέλει, όπως μας αποκαλύπτει και η γραμμή 5, ο συνδυασμός του  $cay_{t-1}$  και του output gap σε ένα υπόδειγμα, δίνει τον υψηλότερο συντελεστή προσδιορισμού, ενισχύοντας το συμπέρασμα ότι αυτές οι δυο παράμετροι είναι οι καλύτερες στο να προβλέπουν τα τρίμηνα ασφάλιστρα κινδύνου.

#### 4.6.2 ΜΗΝΙΑΙΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ

##### 4.6.2.1 ΣΥΝΤΟΜΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Προκειμένου να ενδυναμώσουμε το συμπέρασμα της προηγούμενης ενότητας, σκεφτήκαμε να εξετάσουμε την προβλεπτική ικανότητα των transitory components μιας οικονομίας και σε μηνιαία δεδομένα. Ωστόσο, υπάρχει ένα βασικό πρόβλημα σε αυτή την προσπάθεια. Αυτό, έχει να κάνει με το ότι δεν υπάρχουν μηνιαία δεδομένα για το ΑΕΠ, επομένως δεν μπορούμε να έχουμε output gap.

Το πρόβλημα αυτό ξεπεράστηκε με τη χρήση δεδομένων της βιομηχανικής παραγωγής (Industrial Production - IP). Το μέγεθος αυτό, θεωρείται ότι απεικονίζει με μεγάλη ακρίβεια τη συμπεριφορά του ΑΕΠ και διάφορες έρευνες χρησιμοποιούν τη βιομηχανική παραγωγή αντί του ΑΕΠ σε μηνιαία βάση.

Επιπλέον, οι Lettau – Ludvigson δεν δίνουν μηνιαία δεδομένα για το  $cay_t$ . Έτσι, θα έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον να δούμε το αν το IP gap είναι η

μεταβλητή με την πιο ισχυρή προβλεπτική ικανότητα. Πρώτα όμως, αξίζει να δούμε τις συσχετίσεις των μεταβλητών και κάποια βασικά στατιστικά.

**Πίνακας 4**  
**Συσχετίσεις και βασικά στατιστικά μεγέθη**

$r_t^m - r_t^f$ : log υπερβάλλουσες αποδόσεις,  $gap_t$ : log industrial production gap,  $d_t - p_t$ : log μερισματική απόδοση,  $p_t - e_t$ : log δείκτης P/E,  $trm_t$ : term spread,  $def_t$ : default spread, . Δείγμα: 1960:1-2004:10 (monthly)

	$r_t^m - r_t^f$	$gap_t$	$d_t - p_t$	$p_t - e_t$	$trm_t$	$def_t$
Panel A: Πίνακας Συσχετίσεων						
$r_t^m - r_t^f$	1.00	-0.23	0.00	0.00	0.11	0.10
$gap_t$		1.00	-0.02	-0.05	-0.36	-0.38
$d_t - p_t$			1.00	-0.91	-0.09	0.44
$p_t - e_t$				1.00	0.24	-0.48
$trm_t$					1.00	0.24
$def_t$						1.00
Panel B: Βασικά Στατιστικά Μεγέθη						
Μέσος	0.004	0.000	-3.485	2.792	0.014	0.009
Τυπική Απόκλιση	0.045	0.021	0.404	0.396	0.012	0.004
Συντελεστής Αυτοσυσχέτισης	0.066	0.940	0.994	0.992	0.954	0.967

Σε σχέση με τα αντίστοιχα μηνιαία μεγέθη, παρατηρούμε ότι η συσχέτιση του gap με τις υπερβάλλουσες αποδόσεις βρίσκεται στα ίδια επίπεδα. Το ίδιο συμβαίνει και με τις άλλες μεταβλητές που χωρίς μεγάλες διακυμάνσεις έχουν τις ίδιες περίπου συσχετίσεις μεταξύ τους σε σχέση με τα τριμηνιαία δεδομένα. Σε ό,τι αφορά στα στατιστικά μεγέθη, αξιοσημείωτη είναι η μεγάλη αυτοσυσχέτιση όλων των μεταβλητών εκτός των αποδόσεων, κάτι που όμως είναι αναμενόμενο αν λάβει κανείς υπόψη ότι η συχνότητα των δεδομένων είναι μικρότερη.

#### 4.6.2.2 ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

Στον Πίνακα 5 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των εκτιμήσεων του μοντέλου με τη χρήση μηνιαίων δεδομένων:

**Πίνακας 5**  
**Προβλέποντας τις μηνιαίες υπερβάλλουσες αποδόσεις**

Ο Πίνακας παρουσιάζει τις εκτιμήσεις του μοντέλου (9) χρησιμοποιώντας τη μέθοδο OLS. Όλες οι αποδόσεις είναι λογαριθμικές και προέρχονται από τον δείκτη S&P 500. Οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι οι εξής: *lag* : μια υστέρηση της εξαρτημένης μεταβλητής, *gap<sub>t-1</sub>* : log industrial production gap, *d<sub>t-1</sub> - p<sub>t-1</sub>* : log μερισματικές αποδόσεις, *p<sub>t-1</sub> - e<sub>t-1</sub>* : log δείκτης P/E, *trm<sub>t-1</sub>* : term spread, *def<sub>t-1</sub>* : default spread. Στις παρενθέσεις κάτω από τους συντελεστές εμφανίζονται τα t-statistics, διορθωμένα με τη μέθοδο Newey-West. Οι συντελεστές που είναι στατιστικά σημαντικοί σε επίπεδο 5% εμφανίζονται με έντονα γράμματα. Το δείγμα καλύπτει την περίοδο 1960:1 – 2004:10 (monthly)

#	<i>c</i> (t-stat)	<i>lag</i> (t-stat)	<i>gap<sub>t-1</sub></i> (t-stat)	<i>d<sub>t-1</sub> - p<sub>t-1</sub></i>	<i>p<sub>t-1</sub> - e<sub>t-1</sub></i>	<i>trm<sub>t-1</sub></i>	<i>def<sub>t-1</sub></i>	$\bar{R}^2$ (%)
1	0.004 (1.916)	0.066 (1.526)						0.3
2	<b>0.004</b> (2.087)		<b>-0.431</b> (-4.936)					4.18
3	0.004 (2.041)	0.018 (0.422)	<b>-0.422</b> (-4.700)					4.03
4	0.026 (1.551)			0.006 (1.324)				0.1
5	0.025 (1.497)		<b>-0.429</b> (-4.916)	0.006 (1.265)				4.29
6	0.026 (1.534)			0.007 (0.636)	0.000 (0.082)			0.00
7	0.022 (1.323)		<b>-0.438</b> (-4.959)	-0.001 (-0.081)	-0.008 (-0.674)			4.19
8	0.026 (1.517)	0.066 (1.524)		0.007 (0.628)	0.001 (0.074)			0.2
9	0.022 (1.322)	0.018 (0.405)	<b>-0.429</b> (-4.722)	-0.001 (-0.069)	-0.007 (-0.660)			4.04
10	0.014 (0.638)	0.053 (1.218)		0.000 (0.032)	-0.007 (-0.524)	0.361 (1.825)	0.347 (0.525)	0.8
11	0.036 (1.620)	0.016 (0.361)	<b>-0.445</b> (-4.306)	-0.006 (-0.474)	-0.017 (-1.273)	0.227 (1.151)	-0.756 (-1.084)	4.01

Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται είναι χαρακτηριστικά. Μόνο στα υποδείγματα που συμπεριλαμβάνουν το IP gap εμφανίζονται στατιστικά σημαντικοί συντελεστές. Η ερμηνευτική ικανότητα του υποδείγματος με μοναδική μεταβλητή το IP gap κρίνεται αρκετά υψηλή και μόνο στην περίπτωση που συμπεριλαμβάνεται και η μερισματική απόδοση γίνεται ελαφρώς υψηλότερη.

Είναι φανερό ότι με τη χρήση μηνιαίων δεδομένων, μόνο το IP gap μπορεί να θεωρηθεί αξιόπιστη προβλεπτική μεταβλητή. Μάλιστα, σε κάθε περίπτωση, οι εκτιμήσεις του συντελεστή είναι στατιστικά σημαντικές με υψηλά t-statistics, μην αφήνοντας έτσι περιθώρια διαφορετικών ερμηνειών.

Η μη ύπαρξη δεδομένων για το *cay<sub>t</sub>* σε μηνιαία βάση, καθιστά το transitory component της βιομηχανικής παραγωγής ως τη μεταβλητή με την ισχυρότερη προβλεπτική ικανότητα. Ένα τέτοιο συμπέρασμα είναι ιδιαίτερα σημαντικό, τη στιγμή που καμιά από τις άλλες δημοφιλείς χρηματοοικονομικές και μακροοικονομικές μεταβλητές που έχει προτείνει η βιβλιογραφία δεν επιδεικνύει τέτοια χαρακτηριστικά. Πόσο καλό όμως είναι

το output gap και το IP gap στις μακροπρόθεσμες προβλέψεις; Η επόμενη ενότητα προσπαθεί να απαντήσει σε αυτό το ερώτημα.

## 4.7 ΠΡΟΒΛΕΨΕΙΣ

### 4.7.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε την προβλεπτική ισχύ των διαφόρων μεταβλητών πάνω σε διάφορους επενδυτικούς ορίζοντες. Οι Lettau – Ludvigson (2001) έδειξαν ότι το  $cay_t$  έχει ισχυρή προβλεπτική ικανότητα σε χρονικούς ορίζοντες που ξεκινούν από ένα και φτάνουν τα 24 τρίμηνα. Έτσι, θα είναι ιδιαίτερα χρήσιμο να εξεταστεί και η συμπεριφορά των temporary components πάνω στο ίδιο θέμα.

Η μεθοδολογία αυτή προβλέπει την παλινδρόμηση μιας υστέρησης των διαφόρων ερμηνευτικών μεταβλητών πάνω στις σωρευτικές μελλοντικές υπερβάλλουσες αποδόσεις. Σκοπός μας, εκτός του να δούμε το αν το output gap μπορεί να προβλέπει μακροπρόθεσμα, είναι να διαπιστώσουμε αν τα αποτελέσματα της προηγούμενης ενότητας επαληθεύονται και εδώ.

### 4.7.2 ΤΡΙΜΗΝΙΑΙΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ

Θα ξεκινήσουμε όπως και πριν με τα τριμηνιαία δεδομένα. Θα δουλέψουμε σε μια σειρά από διάφορους χρονικούς ορίζοντες. Το μοντέλο που εκτιμήσαμε σε διάφορες εκδοχές είναι το:

$$\sum_{H=1}^n (r_{t+H}^m - r_{t+H}^f) = c + \sum_{i=1}^m \beta_i z_{t-1}^i + e_t \quad (10)$$

Με  $H$  συμβολίζουμε τους διάφορους χρονικούς ορίζοντες. Παρατηρούμε ότι η εξαρτημένη μεταβλητή είναι το άθροισμα των υπερβαλλουσών αποδόσεων ανάλογα με την τιμή του  $H$ . Αυτό γίνεται εξαιτίας του γεγονότος ότι οι αποδόσεις είναι λογαριθμικές κι έτσι το άθροισμά τους είναι στην ουσία η σωρευτική απόδοση από τον χρόνο  $t$  ως τον χρόνο  $t+H$ . Με πιο απλά λόγια, αν για παράδειγμα  $H=2$ , θέλουμε να δούμε αν στον χρόνο  $t$ , η προηγούμενη τιμή της κάθε καταστατικής μεταβλητής μπορεί να προβλέπει τη σωρευτική απόδοση των δυο επόμενων περιόδων.

Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον πίνακα 6:

**Πίνακας 6**  
**Προβλέψεις –Τριμηνιαία δεδομένα**

Ο πίνακας παρουσιάζει τα αποτελέσματα των εκτιμήσεων του μοντέλου (10) ανάλογα με τον χρονικό ορίζοντα. Οι εκτιμήσεις έγιναν με τη μέθοδο OLS. Η εξαρτημένη μεταβλητή είναι το άθροισμα των  $H$  λογαριθμικών υπερβαλλουσών αποδόσεων του δείκτη S&P 500. Οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι οι παρακάτω:  $gap_{t-1}$ : log output gap,  $cay_{t-1}$ : ο συντελεστής των Lettau – Ludvigson (2001),  $d_{t-1} - p_{t-1}$ : log μερισματικές αποδόσεις,  $p_{t-1} - e_{t-1}$ : log δείκτης P/E. Στις παρενθέσεις δίνονται τα  $t$ -statistics (διορθωμένα με Newey-West) και στις αγκύλες τα  $\bar{R}^2$  (%). Οι στατιστικά σημαντικοί συντελεστές σε 5% επίπεδο σημαντικότητας εμφανίζονται με έντονα γράμματα. Το δείγμα καλύπτει την περίοδο 1960:1 – 2003:2 (quarterly).

#	Ανεξάρτητες Μεταβλητές	Ορίζοντας πρόβλεψης								
		1	2	3	4	8	12	16	20	
1	$gap_{t-1}$	<b>-1.17</b>	<b>-1.65</b>	<b>-1.90</b>	<b>-2.10</b>	-2.48	-2.36	-2.61	-2.78	
		(-3.50)	(-2.62)	(-2.53)	(-2.46)	(-1.88)	(-1.36)	(-1.24)	(-1.15)	
		[3.67]	[3.50]	[3.36]	[3.24]	[2.77]	[1.48]	[1.69]	[0.72]	
2	$cay_{t-1}$	<b>0.51</b>	<b>0.81</b>	<b>1.20</b>	<b>1.54</b>	<b>2.77</b>	<b>3.60</b>	<b>3.73</b>	<b>4.19</b>	
		(4.08)	(3.39)	(3.69)	(4.31)	(6.74)	(6.94)	(6.97)	(6.32)	
		[8.40]	[10.3]	[16.2]	[21.1]	[40.3]	[48.6]	[41.6]	[36.9]	
3	$gap_{t-1}$	<b>-0.86</b>	<b>-1.15</b>	<b>-1.18</b>	<b>-1.16</b>	-0.75	-0.40	-1.09	-0.72	
		(-2.73)	(-2.67)	(-2.62)	(-2.57)	(-0.85)	(-0.22)	(-0.55)	(-0.40)	
	$cay_{t-1}$	<b>0.46</b>	<b>0.74</b>	<b>1.13</b>	<b>1.46</b>	<b>2.71</b>	<b>3.54</b>	<b>3.68</b>	<b>4.15</b>	
		(3.77)	(3.34)	(3.71)	(4.48)	(6.66)	(6.61)	(6.53)	(6.14)	
		[10.1]	[11.7]	[17.1]	[21.7]	[40.2]	[48.3]	[41.7]	[36.6]	
		0.03	0.08	0.12	0.14	0.24	0.31	0.38	<b>0.75</b>	
4	$d_{t-1} - p_{t-1}$	(0.76)	(1.15)	(1.28)	(1.27)	(1.10)	(0.96)	(1.00)	(2.01)	
	$p_{t-1} - e_{t-1}$	0.01	0.02	0.04	0.03	0.06	0.09	0.17	0.42	
5	$gap_{t-1}$	(0.15)	(0.36)	(0.45)	(0.32)	(0.34)	(0.35)	(0.58)	(1.37)	
		[0.16]	[2.00]	[3.81]	[5.98]	[8.46]	[8.06]	[4.68]	[8.73]	
	$cay_{t-1}$	<b>-0.94</b>	<b>-1.23</b>	<b>-1.26</b>	-1.26	-0.91	-0.52	-1.05	-0.23	
		(-2.98)	(-2.74)	(-2.23)	(-1.04)	(-0.99)	(-0.33)	(-0.55)	(-0.13)	
		<b>0.49</b>	<b>0.71</b>	<b>1.08</b>	<b>1.38</b>	<b>2.67</b>	<b>3.48</b>	<b>3.56</b>	<b>4.00</b>	
		(4.12)	(3.04)	(3.36)	(3.81)	(6.81)	(5.80)	(5.51)	(5.12)	
$d_{t-1} - p_{t-1}$	-0.04	-0.02	-0.02	-0.02	-0.06	-0.05	0.12	<b>0.62</b>		
	(-0.92)	(-0.35)	(-0.18)	(-0.16)	(-0.33)	(-0.28)	(0.53)	(2.64)		
$p_{t-1} - e_{t-1}$	-0.04	-0.04	-0.04	-0.06	-0.09	-0.10	0.04	0.37		
	(-1.12)	(-0.76)	(-0.55)	(-0.63)	(-0.66)	(-0.66)	(0.23)	(1.70)		
		[9.55]	[11.1]	[16.5]	[21.6]	[40.1]	[48.3]	[41.7]	[42.2]	

Τα αποτελέσματα του παραπάνω Πίνακα περιέχουν πολύ σημαντικές πληροφορίες για την προβλεπτική ικανότητα των διαφόρων μεταβλητών που μελετάμε. Θεωρούμε όμως καλύτερο να παραθέσουμε και τον πίνακα με τα μηνιαία δεδομένα και θα κάνουμε μετά ένα συνολικό σχολιασμό των εκτιμήσεων.

#### 4.7.3 ΜΗΝΙΑΙΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ

Ακολουθούμε την ίδια μεθοδολογία, μόνο που υπενθυμίζουμε ότι δεν έχουμε δεδομένα για το  $cay_t$  ενώ ως temporary component



χρησιμοποιούμε το IP gap. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον Πίνακα 7:

**Πίνακας 7**  
**Προβλέψεις – Μηνιαία δεδομένα**

Ο πίνακας παρουσιάζει τα αποτελέσματα των εκτιμήσεων του μοντέλου (10) ανάλογα με τον χρονικό ορίζοντα. Οι εκτιμήσεις έγιναν με τη μέθοδο OLS. Η εξαρτημένη μεταβλητή είναι το άθροισμα των  $H$  λογαριθμικών υπερβαλλουσών αποδόσεων του δείκτη S&P 500. Οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι οι παρακάτω:  $gap_{t-1}$ : log industrial production gap,  $d_{t-1} - p_{t-1}$ : log μερισματικές αποδόσεις,  $p_{t-1} - e_{t-1}$ : log δείκτης P/E. Στις παρενθέσεις δίνονται τα t-statistics (διορθωμένα με Newey-West) και στις αγκύλες τα  $\bar{R}^2$  (%). Οι στατιστικά σημαντικοί συντελεστές σε 5% επίπεδο σημαντικότητας εμφανίζονται με έντονα γράμματα. Το δείγμα καλύπτει την περίοδο 1960:1 – 2004:10 (monthly).

#	Ανεξάρτητες Μεταβλητές	Ορίζοντας πρόβλεψης							
		1	2	3	4	6	12	18	24
1	$gap_{t-1}$	<b>-0.38</b>	<b>-0.70</b>	<b>-0.96</b>	<b>-1.19</b>	<b>-1.48</b>	<b>-1.47</b>	-0.70	-0.33
		(-4.19)	(-4.05)	(-3.86)	(-3.74)	(-3.32)	(2.04)	(-0.81)	(-0.39)
		[3.37]	[5.19]	[6.62]	[7.66]	[7.81]	[3.84]	[0.44]	[0.00]
2	$d_{t-1} - p_{t-1}$	0.00	0.01	0.01	0.02	0.03	<b>0.07</b>	0.07	0.04
		(0.40)	(0.59)	(0.89)	(1.14)	(1.59)	(2.17)	(1.88)	(0.86)
		[0.03]	[0.4]	[0.8]	[1.43]	[2.82]	[5.78]	[6.57]	[6.49]
	$p_{t-1} - e_{t-1}$	-0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	-0.00
		(-0.13)	(0.05)	(0.32)	(0.55)	(0.95)	(1.43)	(1.03)	(-0.21)
		[0.03]	[0.4]	[0.8]	[1.43]	[2.82]	[5.78]	[6.57]	[6.49]
3	$gap_{t-1}$	<b>-0.40</b>	<b>-0.71</b>	<b>-0.96</b>	<b>-1.18</b>	<b>-1.45</b>	<b>-1.39</b>	-0.61	-0.32
		(-4.09)	(-3.98)	(-3.84)	(-3.76)	(-3.41)	(-2.09)	(-0.76)	(-0.42)
		[3.51]	[5.63]	[7.42]	[8.93]	[10.3]	[9.17]	[6.87]	[6.41]
	$d_{t-1} - p_{t-1}$	-0.00	0.00	0.01	0.01	0.03	<b>0.06</b>	0.07	0.04
		(-0.03)	(0.22)	(0.57)	(0.88)	(1.44)	(2.14)	(1.87)	(0.85)
		[0.03]	[0.4]	[0.8]	[1.43]	[2.82]	[5.78]	[6.57]	[6.49]
	$p_{t-1} - e_{t-1}$	-0.00	-0.00	-0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	-0.00
		(-0.61)	(-0.40)	(-0.10)	(0.17)	(0.65)	(1.29)	(0.98)	(-0.24)
		[3.51]	[5.63]	[7.42]	[8.93]	[10.3]	[9.17]	[6.87]	[6.41]

Ξεκινώντας από τα τριμηνιαία δεδομένα, παρατηρούμε ότι το output gap δίνει στατιστικά σημαντικούς συντελεστές μέχρι τη στιγμή που «ζητείται» να προβλέπει 4 περιόδους μπροστά (δηλ. 1 έτος). Από εκεί και πέρα, οι συντελεστές δεν είναι στατιστικά διάφοροι του μηδενός, ενώ και η ερμηνευτική ικανότητα του μοντέλου φθίνει. Το συμπέρασμα από τη γραμμή 1 του Πίνακα 6 είναι πως το output gap έχει βραχυπρόθεσμη ικανότητα πρόβλεψης που φτάνει ως ένα έτος μπροστά.

Η γραμμή 2 του Πίνακα 6 όμως, δείχνει ότι το  $cay_t$  έχει ισχυρή ικανότητα πρόβλεψης, με στατιστικά σημαντικούς συντελεστές σε όλους τους χρονικούς ορίζοντες πρόβλεψης, κάτι που άλλωστε είχαν δείξει και οι Lettau – Ludvigson (2001). Οι συντελεστές προσδιορισμού του υποδείγματος είναι ιδιαίτερα υψηλοί, κυρίως όσο μεγαλώνει ο χρονικός ορίζοντας.

Η τρίτη γραμμή του πίνακα στην ουσία συνοψίζει τις δυο πρώτες. Το output gap διατηρεί την προβλεπτική ικανότητά του μέχρι χρονικό ορίζοντα πρόβλεψης 4 περιόδων, ενώ το  $cay_t$  εμφανίζεται ισχυρότερο σε κάθε

περίπτωση, τη στιγμή που τα  $t$ -statistics του είναι μεγαλύτερα σε όλες τις περιόδους.

Οι δυο τελευταίες γραμμές του Πίνακα 6 δεν μας προσφέρουν ιδιαίτερη πληροφόρηση. Η μερισματική απόδοση εμφανίζει (οριακά) στατιστικό συντελεστή μόνο σε ορίζοντα πενταετίας ενώ ο δείκτης P/E έχει μηδαμινή προβλεπτική ικανότητα. Η γραμμή 5 που δείχνει τα αποτελέσματα των εκτιμήσεων του μοντέλου με όλες τις παραμέτρους επιβεβαιώνει τις προηγούμενες: το *output gap* έχει βραχυπρόθεσμη ικανότητα πρόβλεψης ενώ το *cay<sub>t</sub>* υπερισχύει.

Παρατηρώντας τις εκτιμήσεις βάσει μηνιαίων δεδομένων, βλέπουμε ότι το *temporary component* της οικονομίας με τη μορφή του IP gap έχει παρόμοια συμπεριφορά με του *output gap*: μπορεί να προβλέπει τις μελλοντικές υπερβάλλουσες αποδόσεις μέχρι χρονικό ορίζοντα 12 περιόδων, δηλαδή 1 έτος. Από εκεί και πέρα, οι συντελεστές δεν είναι στατιστικά σημαντικοί και η ερμηνευτική ικανότητα του υποδείγματος είναι σχεδόν μηδενικοί. Η χρήση όλων των μεταβλητών δεν αλλάζει κάτι στη συμπεριφορά του υποδείγματος, καθιστώντας το IP gap ως την παράμετρο με την πιο ισχυρή προβλεπτική ικανότητα σε μελλοντικές μηνιαίες υπερβάλλουσες αποδόσεις.

Να σημειώσουμε σε αυτό το σημείο πως εκτιμήσαμε το μοντέλο (10) και με τη χρήση του *default spread* και του *term spread*. Τα αποτελέσματα όμως ήταν χειρότερα και από αυτά για τη μερισματική απόδοση και το P/E και έτσι επιλέξαμε να μην τα συμπεριλάβουμε στους πίνακες αποτελεσμάτων.

Όλη αυτή η διαδικασία μας δίνει μια πολύ καλή απάντηση για τα ευρήματα της προηγούμενης ενότητας. Εκεί, διαπιστώσαμε ότι το *output gap* έχει μεν προβλεπτική ικανότητα αλλά το *cay<sub>t</sub>* υπερέχει. Εκτιμώντας το μοντέλο (10), μπορούμε να πούμε ότι η υπεροχή αυτή οφείλεται στην πληροφόρηση που περιέχει καθεμιά από αυτές τις μεταβλητές. Συγκεκριμένα, είναι προφανές ότι το *cay<sub>t</sub>* περιέχει πληροφόρηση και για αποδόσεις μακροπρόθεσμες, σε αντίθεση με το *output gap*. Η διαφορά αυτή στην πληροφόρηση ενσωματώνεται στους συντελεστές των υποδειγμάτων που εκτιμήσαμε κι έτσι προκύπτει αυτή η υπεροχή του *cay<sub>t</sub>*.

Συμπερασματικά πάντως, το gap είτε ως *output* είτε ως IP, φαίνεται να είναι μια αρκετά αξιόπιστη μεταβλητή για την πρόβλεψη των αναμενομένων ασφαλιστρών κινδύνου. Μπορεί σε τριμηνιαία δεδομένα το *cay<sub>t</sub>* να έχει καλύτερη συμπεριφορά, δεν παύει όμως να είναι ανώτερο από όλες τις άλλες χρηματοοικονομικές και μακροοικονομικές μεταβλητές που έχουν προταθεί, ενώ σε μηνιαία συχνότητα είναι το ισχυρότερο. Το πιο σημαντικό όμως είναι ότι επιδεικνύει αξιόλογη βραχυπρόθεσμη προβλεπτική ικανότητα, κάτι που είναι και το πλέον ζητούμενο.

#### 4.8 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Μια από τις μεγαλύτερες προκλήσεις της έρευνας στο χώρο της αποτίμησης αξιογράφων είναι η εύρεση παραμέτρων που έχουν τη δυνατότητα να προβλέπουν τις αποδόσεις. Στα πρώιμα στάδια της θεωρίας αποτίμησης, υπήρχε αμφιβολία για το αν οι αποδόσεις είναι προβλέψιμες και πολλοί πίστευαν ότι ακολουθούν τυχαίο περίπατο. Στη συνέχεια όμως, μια σειρά εμπειρικών ερευνών απέδειξε το αντίθετο, σε σημείο που τα τελευταία χρόνια είναι γενικά αποδεκτό ότι οι αναμενόμενες αποδόσεις μεταβάλλονται διαχρονικά και είναι προβλέψιμες.

Το επόμενο βήμα ήταν η εύρεση μεταβλητών που να έχουν τέτοια ικανότητα. Έτσι, αποδείχτηκε ότι παράμετροι όπως η μερισματική απόδοση, ο δείκτης P/E και άλλες χρηματοοικονομικές μεταβλητές μπορούν να προβλέπουν τις αποδόσεις.

Στην προσπάθεια αυτή, χρησιμοποιήθηκαν και μακροοικονομικές μεταβλητές, δεδομένου ότι οι αποδόσεις φαίνονται να ακολουθούν τη φάση του οικονομικού κύκλου. Σε αυτό το πλαίσιο κινήθηκε και η παρούσα εργασία. Υποθέτοντας ότι η συνολική παραγωγή μιας οικονομίας κινείται γύρω από μια τάση, πήραμε τη διαφορά της πραγματοποιηθείσας παραγωγής από την τάση αυτή και εξετάσαμε το κατά πόσο η διαφορά αυτή μπορεί να προβλέπει τις υπερβάλλουσες αποδόσεις.

Για να δώσουμε περισσότερη αξιοπιστία στην έρευνά μας, συμπεριλάβαμε και τις κυριότερες μεταβλητές που έχουν χρησιμοποιηθεί για τον ίδιο σκοπό. Δουλέψαμε πάνω σε τριμηνιαία αλλά και σε μηνιαία δεδομένα και τα κυριότερα συμπεράσματα συνοψίζονται στα παρακάτω:

- ✓ Το output gap αλλά και το IP gap έχουν αρκετά σημαντική προβλεπτική ικανότητα.
- ✓ Η θεωρία λέει ότι αν η οικονομία βρίσκεται πάνω από την τάση ( $gap > 0$ ), η αποστροφή στον κίνδυνο μειώνεται, κάτι που ωθεί προς τα κάτω τις αναμενόμενες αποδόσεις. Οι εκτιμήσεις μας είναι συμβατές με αυτή και αυτό αντικατοπτρίζεται στους αρνητικούς συντελεστές παλινδρόμησης του gap.
- ✓ Σε σχέση με τις άλλες μεταβλητές, το output gap υπερέχει όλων πλην του  $ca_{y_t}$  σε τριμηνιαία δεδομένα, ενώ το IP gap υπερέχει όλων σε μηνιαία δεδομένα.
- ✓ Σε ό,τι αφορά στην ικανότητα πρόβλεψης σε διάφορους μελλοντικούς χρονικούς ορίζοντες, βρήκαμε ισχυρή βραχυπρόθεσμη προβλεπτική ικανότητα στα temporary components με μόνο το  $ca_{y_t}$  να υπερέχει σε τριμηνιαία συχνότητα.
- ✓ Την υπεροχή αυτή του  $ca_{y_t}$  την αποδίδουμε στο ότι ενσωματώνει περισσότερη πληροφόρηση για μακροπρόθεσμες αποδόσεις σε

- σχέση με το output gap και αυτή η διαφορά φαίνεται στη συμπεριφορά των εκτιμητών.
- ✓ Σε μηνιαία συχνότητα, το IP gap έχει σημαντική ικανότητα πρόβλεψης σε ορίζοντα μέχρι ένα έτος και είναι η μόνη μεταβλητή που το επιτυγχάνει.

Γενικά, η παρούσα εργασία εισάγει μια νέα μεταβλητή που μπορεί να προβλέψει σε κάποιο βαθμό τις αποδόσεις. Τα αποτελέσματα είναι αρκετά ενθαρρυντικά αλλά προτού βεβαιωθούμε ολοκληρωτικά πως έχουμε να κάνουμε με μια τόσο καλή μεταβλητή πρόβλεψης, θεωρούμε πως πρέπει να γίνει μια σειρά από έρευνες που θα ενδυναμώσουν τα συμπεράσματα της παρούσας. Οι έρευνες αυτές, θα μπορούσαν να έχουν κάποιο από τα παρακάτω αντικείμενα:

- Εδώ, εκτιμήσαμε το output gap και το IP gap με μια συγκεκριμένη οικονομετρική μέθοδο, το Hodrick – Prescott filter. Ωστόσο, υπάρχουν και άλλοι τρόποι υπολογισμού του, όπως μέσω συναρτήσεων παραγωγής και της μεθόδου των Beveridge – Nielsen (1981). Έτσι, θα ήταν χρήσιμο να γίνει η ίδια διαδικασία που ακολουθήσαμε, με gaps υπολογισμένα με κάποια άλλη μέθοδο.
- Στην παρούσα εργασία εξετάστηκε η προβλεπτική ικανότητα του gap σε χρονοσειρά αποδόσεων. Είναι όμως απαραίτητη η εξέταση της συμπεριφοράς του και σε διαστρωματικά δεδομένα.
- Οι αποδόσεις των μετοχών προήλθαν από τον δείκτη S&P 500 τον οποίο και άλλες έρευνες θεωρούν ως πολύ καλή προσέγγιση του χαρτοφυλακίου της αγοράς. Θα ήταν καλό όμως να χρησιμοποιηθούν και δεδομένα από άλλους δείκτες, αν αυτό βέβαια είναι δυνατόν.
- Θα μπορούσαν τέλος να γίνουν όλα τα παραπάνω σε άλλες οικονομίες εκτός από αυτήν των ΗΠΑ.

Από τη στιγμή λοιπόν που θα γίνουν και αυτές οι συμπληρωματικές έρευνες, θα έχουμε ένα πιο ολοκληρωμένο πλαίσιο για το αν τα temporary components μιας οικονομίας έχουν προβλεπτική επί των αποδόσεων ικανότητα. Η παρούσα εργασία ανοίγει αυτόν το δρόμο και η συνέχεια θα είναι ενδιαφέρουσα.

**Πηγές**

## ΠΗΓΕΣ

### 1. PAPERS

- Abel Andrew “Asset prices under habit formation and catching up with the Joneses” *The American Economic Review* 80 (May 1990):38-42.
- Ait – Sahalia Yacine, Parker Jonathan, Yogo Motohiro “Luxury goods and the equity premium” *The Journal of Finance* 59 (December 2004): 2959-3004.
- Bansal Ravy, Coleman Wilbur John “A monetary explanation of the equity premium, term premium and risk-free rate puzzles” *The Journal of Political Economy* 104 (December 1996):1135-1171.
- Bansal Ravy, Yaron Amir “Risks for the long-run: a potential resolution for asset pricing puzzles” *The Journal of Finance* 59 (August 2004):1481-1509.
- Black Fisher “Capital market equilibrium with restricted borrowing” *The Journal of Business* 45 (July 1972): 444-455.
- Bodurtha James Jr, Nelson Mark “Testing the CAPM with time-varying risks and returns” *The Journal of Finance* 46 (September 1991):1485-1505.
- Bollerslev Timothy, Engle Robert, Woolridge Jeffrey “A capital asset pricing model with time-varying covariances” *The Journal of Political Economy* 96 (January 1988):116-131.
- Breeden Douglas “An intertemporal asset pricing model with stochastic consumption and investment opportunities” *The Journal of Financial Economics* 7 (April 1970):265-296
- Breeden Douglas, Gibbons Michael, Litzenberger Robert “Empirical test of the consumption-oriented CAPM” *The Journal of Finance* 44 (June 1989):231-262.
- Brennan Michael, Xia Yihong “Resolution of a financial puzzle” Working Paper, Anderson Graduate School of Management UCLA (1998).
- Brennan Michael, Wang Ashley, Xia Yihong “Estimation and test of a simple model of intertemporal capital asset pricing” *The Journal of Finance* 59 (August 2004):1743-1775.
- Brown David, Gibbons Michael “A simple econometric approach for utility-based asset pricing models” *The Journal of Finance* 40 (June 1985):359-381.
- Brown David “The implications of nonmarketable income for consumption – bases models of asset pricing” *The Journal of Finance* 43 (September 1988): 867-880.

- Campbell John “Asset pricing at the millenium” The Journal of Finance 55 (August 2000):1515-1568.
- Campbell John “A variance decomposition for stock returns” Economic Journal 101 (January 1991):157-179.
- Campbell John “Intertemporal asset pricing without consumption data” The American Economic Review 83 (June 1993):487-512.
- Campbell John “Understanding risk and return” The Journal of Political Economy 104 (April 1996):298-345.
- Campbell John, Cochrane John “By force of habit: a consumption-based explanation of aggregate stock market behavior” Journal of Political Economy 107 (April 1999):205-251.
- Campbell John, Cochrane John “Explaining the poor performance of consumption based asset pricing models” The Journal of Finance 55 (December 2000):2863-2878.
- Campbell John, Mankiw Gregory “Cnsumption, income and interest rates: reinterpreting the time series evidence” NBER Macroeconomics Annual (1989), MIT Press, Cambridge.
- Campbell John, Shiller Robert “Valuation ratios and the long-run stock market outlook: an update” NBER Working Paper Series, Working paper No 8221 (April 2001).
- Campbell John, Shiller Robert “The dividend-price ratio and expectations of future dividends and discount factors” The Review of Financial Studies 1 (Autumn 1988):195-228.
- Chan , Foresi Silverio, Lang Larry “Does Money explain asset returns? Theory and empirical analysis” The Journal of Finance 51 (March 1996):345-361.
- Chapman David “Approximating the Asset pricing kernel” The Journal of Finance 52 (September 1997):1383-1410.
- Chapman David “Habit formation and aggregate consumption” Econometrica 66 (September 1998):1223-1230.
- Chen Ming-Hsiang “Risk and return: CAPM and CCAPM” The Quarterly Review of Economics and Finance 43 (2003):369-393.
- Chen Xiaohong, Ludvigson Sydney “Land of addicts? An empirical investigation of habit – based asset pricing models” Draft paper (November 2004).
- Cochrane John “Explaining the variance of price – dividend ratio” The Review of Financial Studies 1992 Vol.5 No2: 243-280.
- Cochrane John “Permanent and transitory components of GNP and stock prices” The Quarterly review of Economics 109, No 1 (February 1994): 241-265.
- Cochrane John “A Cross-sectional test of an investment-based asset pricing model” The Journal of Political Economy 104 (June 1996):572-621.

- Cochrane John “Financial markets and the real economy” NBER Working Paper Series, Working Paper No 11193 (March 2005).
- Cochrane John, Hansen Lars Peter “Asset pricing exploration for macroeconomics” NBER Working Paper Series, Working Paper No 4088 (June 1992).
- Constantinides George “Habit formation: a resolution of the equity premium puzzle” *The Journal of Political Economy* 98 (June 1990):519-543.
- Detemple Jerome, Murthy Shashidhar “Equilibrium asset prices and no-arbitrage with portfolio constraints” *The Review Of Financial Studies* 10 (Winter 1997):1133-1174.
- Epstein Larry, Zin Stanley “Substitution, risk aversion and the temporal behavior of consumption and asset returns: an empirical analysis” *The Journal of Political Economy* 99 (April 1991):263-286.
- Fama Eugene “Stock returns, expected returns and real activity” *The Journal of Finance* 45 (September 1990): 1089-1108.
- Fama Eugene, French Kenneth “Permanent and temporary components of stock prices” *The Journal of Political Economy* 96 (April 1988): 246-273.
- Fama Eugene, French Kenneth “Business conditions and expected returns on stocks and bonds” *Journal of Financial Economics* 25 (January 1989): 23-49.
- Fama Eugene, French Kenneth “The cross-section of expected stock returns” *The Journal of Finance* 47 (June 1992):427-465.
- Fama Eugene, French Kenneth “Size and book – to – market factors in earnings and returns” *The Journal of Finance* 50 (March 1995): 131-155.
- Fama Eugene, French Kenneth “The equity premium” *The Journal of Finance* 57 (April 2002):637-659.
- Fama Eugene, MacBeth James “Risk, return and equilibrium: empirical tests” *The Journal of Political Economy* 81 (May – June 1973): 607-636.
- Ferson Wayne, Kandel Shmuel, Stambaugh Robert “Tests of asset pricing with time-varying expected risk premiums and market betas” *The Journal of Finance* 42 (June 1987):201-220.
- Hamori S. “Test of CCAPM for Japan:1980-1988” *Economic Letters* 38 (1992):67-72.
- Hodrick Robert “Dividend yields and expected stock returns: Alternative procedures for inference and measurement” *The Review of Financial Studies* 1992 Volume 5 No3: 357-386.
- Jagannathan Ravi, McGrattan Ellen, Scherbina Anna “The declining U.S. equity premium” NBER Working Paper Series, Working Paper No 8172 (March 2001).



- Jagannathan Ravi, Wang Zhenyu “The conditional CAPM and the cross-section of expected returns” *The Journal of Finance* 51 (March 1996):3-53.
- Jouini Elyes, Clotilde Napp “A class of models satisfying the dynamical version of CAPM” *Economic Letters* 79 (2003):299-304.
- Kazemi Hossein “An alternative testable form for the Consumption CAPM” *The Journal of Finance* 43 (March 1988):61-70.
- Kocherlakota Narayana “The equity premium: it’s still a puzzle” *Journal of Economic Literature* 34 (March 1996):42-71.
- Liew Jimmy, Vassalou Maria “Can book – to – market, size and momentum be risk factors that predict economic growth?” *Journal of Financial Economics* 57 (2000): 221-245.
- Lettau Martin, Ludvigson Sydney “Consumption, aggregate wealth and expected stock returns” *The Journal of Finance* 56 (June 2001):815-849.
- Lettau Martin, Ludvigson Sydney “Expected returns and expected dividend growth” Centre for Economic Policy and Research.
- Lettau Martin, Ludvigson Sydney “Resurrecting the (C)CAPM: a cross-sectional test when risk premia are time-varying” Federal Reserve Bank of New York, Working Paper.
- Lettau Martin, Ludvigson Sydney “Understanding trend and cycle in asset values: bulls, bears and the wealth effect on consumption” CEPR Discussion Paper Series, Discussion Paper No 3104 (December 2001).
- Lettau Martin, Ludvigson Sydney “Measuring and modelling variation in the risk – return trade – off” CEPR Discussion paper Series, Discussion Paper No 3105 (December 2001).
- Lettau Martin, Ludvigson Sydney, Steindel Charles “Monetary policy transmission through the consumption – wealth channel” FRBNY Economic Policy Review (May 2002)
- Lettau Martin, Ludvigson Sydney, Wachter Jessica “The declining equity premium: What role does macroeconomic risk play?” Draft paper (September 2004)
- Lintner John “The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets” *The Review of Economics and Statistics* 47 (February 1965):13-37.
- Lucas Robert Jr “Asset pricing in an exchange economy” *Econometrica* 46 (November 1978):1429-1445.
- Mankiw Gregory, Shapiro Matthew “Risk and return: consumption beta versus market beta” *The Review of Economics and Statistics* 68 (August 1986):452-459.
- Markowitz Harry “Portfolio Selection” *The Journal of Finance* 7 (March 1952):77-91.

- Marshall David, Parekh Nayan “Can costs of adjustment explain asset pricing puzzles?” *The Journal of Finance* 54 (April 1999):623-654.
- Mehra Rajnish, Prescott Edward “The equity risk premium: a puzzle” *Journal of Monetary Economics* 15 (1985):145-161.
- Mehra Rajnish, Prescott Edward “The equity risk premium: a solution?” *Journal of Monetary Economics* 22 (1988):133-136.
- Merton Robert “An intertemporal Capital Asset Pricing Model” *Econometrica* 41 (September 1973):867-887.
- Mossin Jan “Equilibrium in a capital asset market” *Econometrica* 34 (October 1966): 768-783.
- Nielsen Lars Tyge “Positive prices in CAPM” *The Journal of Finance* 47 (June 1992):791-808.
- Phillips P.C.B. “Time series regression with a unit root” *Econometrica* 55 (March 1987): 277-301.
- Pindyck Robert “Risk aversion and determinants of stock market behavior” *The review of Economics and Statistics* 70 (May 1988): 183-190.
- Rietz Tom “The equity risk premium: a solution?” *Journal of Monetary Economics* 4 (1988):117-132
- Sharpe William “Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk” *The Journal of Finance* 19 (September 1964):425-442.
- Smoluk H.J., Neneu Raymond “Consumption and asset prices. An analysis across income groups” *Review of Financial Economics* 11(2002):47-62.
- Weil Robert “The equity premium puzzle and the risk-free rate puzzle” NBER Working Paper Series, Working Paper No 2829 (January 1989).
- Zhou Chunsheng “Informational asymmetry and market imperfections: another solution to the equity premium puzzle” *The Journal of Financial and Quantitative Analysis* 34 (December 1999):445-464.
- Zhou Guofu “Analytical GMM Tests:Asset pricing with time varying risk premiums” *The Review of Financial Studies* 4 (Winter 1994):687-709.

## 2. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Benos Alexandros “Financial calculus and derivatives assets pricing:lecture notes” October 2004.
- Campbell John “Consumption – based asset pricing” *Handbook of the Economics of Finance* (edited by Constantinides, Harris, Stulz)

The output gap and the industrial production gap as predictors of stock excess returns

- Campbell John, Lo Andrew, McKinlay Craig “The econometrics of financial markets” Princeton University Press (1997).
- Cochrane John “Asset pricing” Princeton University Press (2001).
- Duffie Darrel “Security markets, stochastic models” Academic Press 1988
- Duffie Darrel “Dynamic asset pricing theory” 2nd edition, Princeton University Press (1996).
- Greene William “Econometric analysis” 5<sup>th</sup> edition Prentice Hall (2003)
- Malliaropoulos Dimitrios “Asset pricing: lecture notes”, October 2004.
- Pittis Nikitas “Measure theory: lecture notes” February 2005.
- Taylor Jon Gregory “Investment timing and the business cycle” John Wiley & Sons Inc (1998)
- Varian Hal “Microeconomic analysis” 2nd edition, Norton & Company Inc (1984)