

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ Γ. ΔΡΑΚΑΤΟΥ  
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΕΝ ΤΩ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΩ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ  
ΕΙΣ ΤΗΝ  
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΝ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΠΑΖΗΣ ● ΦΕΙΔΙΟΥ 16 ● ΑΘΗΝΑΙ

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ Γ. ΔΡΑΚΑΤΟΥ  
ΥΦΗΓΗΤΟΥ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
ΠΑΝΤΕΙΟΥ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ  
ΕΙΣ ΤΗΝ  
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΝ

ΕΚΔΟΤΗΣ : ΒΙΚΤΩΡ Α. ΠΑΠΑΖΗΣΗΣ  
ΑΘΗΝΑΙ 1968

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Κ. ΜΑΡΑΒΕΛΗΣ  
ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟ ΚΕΝΤΡΟ  
ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΒΟΗΘΕΙΑΣ

Πᾶν ἀντίτυπον φέρει τὴν ὑπογραφήν τοῦ συγγραφέως

*Κ. Μαραβέλης*

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Κ. ΜΑΡΑΒΕΛΗΣ  
ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟ ΚΕΝΤΡΟ

## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Σκοπός τοῦ παρόντος βοηθήματος εἶναι νά παράσχη εἰς τοὺς σπουδα-  
στάς τῶν οἰκονομικῶν καὶ πολιτικῶν ἐπιστημῶν καὶ γενικῶς εἰς τοὺς ἐπιθυ-  
μοῦντας ὅπως μνηθοῦν εἰς τὴν σύγχρονον ποσοτικὴν ἀνάλυσιν ὠρισμένας  
στοιχειώδεις γνώσεις Στατιστικῆς.

Τὰ ἐξεταζόμενα θέματα δέν καλύπτουν ὀλόκληρον τό πεδῖον τῆς στατι-  
στικῆς μεθοδολογίας, εἶναι, ὅμως, ἐκ τῶν κυρωτέρων ἰδῶς ἀπό ἀπόψεως  
πρακτικῆς χρησιμότητος. Τό ἐπίπεδον ἀναλύσεως τῶν ἐπιλεγέντων ἀντικει-  
μένων ἐπιτρέπει, καθ' ἡμᾶς, τὴν παρακολούθησιν των καὶ ἀπό τοὺς μὴ ἔχον-  
ντας οἰανδήποτε στατιστικὴν προπαίδευσιν. Σχετικῶς δέον νά σημειωθῆ ὅτι  
κατεβλήθη πᾶσα προσπάθεια πρὸς περιορισμόν τῆς χρήσεως τῶν μαθηματικῶν  
εἰς τό ἐλάχιστον δυνατόν.

Τό παρὸν βοήθημα, ὡς ἐκ τοῦ τρόπου παρουσιάσεως τῶν θεμάτων, ἔχει  
σαφῶς ἐφηρμοσμένον χαρακτῆρα. Πρὸς πληρεστέραν κατανόησιν τῶν στατι-  
στικῶν μεθόδων ἐγένετο εὐρεῖα χρῆσις παραδειγμάτων βασιζομένων, ὡς ἐπὶ  
τό πλεῖστον, ἐπὶ τῶν διαθεσίμων ἑλληνικῶν στατιστικῶν στοιχείων. Παρά τόν  
ἐμπειρικόν προσανατολισμόν τῆς ὕλης, δέν παρημελήθη, ἐν τούτοις, ἡ πα-  
ροχὴ ὠρισμένης, ἔστω καὶ στοιχειώδους, λογικῆς θεμελιώσεως τῶν ἀναπτυσ-  
σομένων τεχνικῶν.

Εἰς τό τέλος ἐκάστου κεφαλαίου ἐκφραζομένη ὅπως παρατεθῆ ἐπι-  
λογὴ ἐκ τῆς σχετικῆς ἑλληνικῆς καὶ ξένης βιβλιογραφίας πρὸς διευκόλυν-  
σιν τῶν ἐπιθυμοῦντων νά συμπληρώσουν τὰς γνώσεις των ἐπὶ τῶν ἐπὶ μέρους  
στατιστικῶν θεμάτων.



## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Σελίς

### ΕΙΣΑΓΩΓΗ

#### ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄ : ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΓΕΝΙΚΩΣ

1. Ἡ φύσις τῶν στατιστικῶν στοιχείων.....	17
2. Ἡ ἀκρίβεια τῶν στατιστικῶν στοιχείων.....	19
3. Κατηγορίαι διαθεσίμων στατιστικῶν καὶ χρησι- μοποιήσεις αὐτῶν.....	25
4. Διαδικασία καὶ μέθοδοι διεξαγωγῆς στατιστι- κῶν ἐρευνῶν.....	28
Βιβλιογραφία.....	34

#### ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄ : ΤΟ ΕΛΛΗΝΙΚΟΝ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΝ ΣΥΣΤΗΜΑ

1. Ἐννοια τοῦ στατιστικοῦ συστήματος.....	36
2. Ἡ ἀνάπτυξις τοῦ ἑλληνικοῦ στατιστικοῦ συ- στήματος.....	38
3. Βασικαὶ πηγαὶ τῶν ἑλληνικῶν στατιστικῶν.....	39
4. Ἀξιολόγησις τῶν ἑλληνικῶν στατιστικῶν.....	46
Βιβλιογραφία.....	51

#### ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄ : ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

1. Χρησιμότης τῶν στατιστικῶν πινάκων καὶ κα- τηγορίαι αὐτῶν.....	52
2. Τεχνικὴ καταρτίσεως.....	53
3. Τρόποι ταξινομήσεως τῶν στατιστικῶν στοι- χείων.....	56
4. Κατανομαὶ κατὰ συχνότητος.....	58
5. Ποιοτικαὶ κατατάξεις.....	64
6. Χρονολογικὴ κατάταξις.....	66
7. Σύνθετοι κατατάξεις εἰς πίνακας διπλῆς εἰ- σόδου.....	67
Βιβλιογραφία.....	75

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ: : ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ

1. Χρησιμότης τῶν στατιστικῶν διαγραμμάτων...	77
2. Ὄρθογώνιοι ἄξονες.....	78
3. Γενικοὶ κανόνες κατασκευῆς διαγραμμάτων...	81
4. Γραφικὴ ἀπεικόνισις τῶν κατανομῶν συχνότητων.....	83
5. Ἀθροιστικὰ διαγράμματα καὶ καμπύλαι συγκεντρώσεως.....	90
6. Ἀκιδωτὰ καὶ κυκλικὰ διαγράμματα.....	95
7. Γραφικὴ ἀπεικόνισις τῶν χρονολογικῶν σειρῶν	98
8. Ἡμιλογαριθμικὰ διαγράμματα.....	104
Βιβλιογραφία.....	108

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε: : ΛΟΓΟΙ ΚΑΙ ΠΟΣΟΣΤΑ

1. Πρωτογενῆ καὶ παράγωγα στατιστικὰ δεδομένα	110
2. Ὑπολογισμὸς τῶν λόγων καὶ ποσοστῶν.....	111
3. Συγκρίσεις στατιστικῶν στοιχείων διαφορετικῆς φύσεως.....	113
4. Ποσοστιαῖα ἀναλογίαι.....	117
5. Ποσοστιαῖα καὶ ἀπόλυτοι μεταβολαί.....	119
6. Λόγοι λόγων ἢ ποσοστῶν.....	124
7. Μέσοι ὄροι λόγων καὶ ποσοστῶν.....	127
Βιβλιογραφία.....	131

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ: : ΚΑΤΑΝΟΜΑΙ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ

1. Κατανομαὶ συχνότητων καὶ χαρακτηριστικὰ μέτρα αὐτῶν.....	133
2. Μέτρα κεντρικῆς τάσεως καὶ θέσεως.....	136
3. Μέτρα διασπορᾶς.....	152
4. Μέτρα ἀσυμμετρίας.....	165
Βιβλιογραφία.....	168

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ: : ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ

1. Προβλήματα στατιστικῆς ἐπαγωγῆς.....	170
2. Κατανομὴ δειγματοληψίας τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου.....	171
3. Ἐπίπεδον καὶ διάστημα ἐμπιστοσύνης τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου.....	174
4. Ἐλεγχος στατιστικῶν ὑποθέσεων.....	181

Βιβλιογραφία .....	186
--------------------	-----

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Η' : ΑΡΙΘΜΟΔΕΙΚΤΑΙ

1. Ἐννοια καὶ κατηγορίαι ἀριθμοδεικτῶν .....	188
2. Σχετικαὶ τμῆαι καὶ προβλήματα καταρτίσεως συνθετικῶν ἀριθμοδεικτῶν .....	190
3. Τὸ πρωτογενές στατιστικὸν ὑλικὸν τῶν ἀριθ- μοδεικτῶν .....	193
4. Τύποι χρησιμοποιούμενοι κατὰ τὴν κατάρτι- σιν τῶν ἀριθμοδεικτῶν .....	196
5. Ἐπιλογή τῆς περιόδου βάσεως .....	207
6. Εἰδικὰ τινα θέματα τῶν ἀριθμοδεικτῶν .....	209
Βιβλιογραφία .....	215

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Θ' : ΣΥΧΕΤΙΣΙΣ ΚΑΙ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΙΣ

1. Χρησιμοποιούμενοι τύποι στατιστικῶν στοιχεί- ων .....	217
2. Ἡ φύσις τῶν σχέσεων μεταξὺ τῶν μεταβλητῶν .....	220
3. Ὁ συντελεστὴς συσχέτισεως .....	225
4. Ἐννοια καὶ χαρακτηριστικὰ τῆς γραμμικῆς ἐ- ξισώσεως .....	235
5. Ἐκτίμησις τῆς γραμμικῆς παλινδρομήσεως διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγῶνων .....	238
6. Ἐλαστικότης καὶ μέτρησις αὐτῆς .....	247
7. Ἀνάλυσις τῆς διακυμάνσεως τῆς ἐξηρητημένης μεταβλητῆς .....	250
8. Μέσον σφάλμα τετραγῶνου τῆς ἐκτιμήσεως ...	255
9. Στατιστικὴ σημαντικότης τῶν σταθερῶν τῆς εὐθείας παλινδρομήσεως .....	259
10. Λογαριθμικὸς μετασχηματισμὸς .....	262
Βιβλιογραφία .....	266

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι' : ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΤΩΝ ΧΡΟΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΣΕΙΡΩΝ

1. Ἡ βασικὴ ὑπόθεσις περὶ τῶν συνιστωσῶν τῶν χρονολογικῶν σειρῶν .....	268
2. Ἡ μακροχρόνιος τάσις .....	271
3. Αἱ ἐποχικαὶ κινήσεις .....	287
4. Ἐξομάλυνσις τῶν ἀρρυθμῶν μεταβολῶν .....	302
Βιβλιογραφία .....	306





## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

### 1. Ἀντικείμενον τῆς Στατιστικῆς

Ὁ ὅρος "στατιστική" ὅταν χρησιμοποιῆται εἰς τόν πληθυντικόν ἀφορᾷ εἰς σειράς ἀριθμητικῶν δεδομένων τὰ ὅποια ἐκφράζουν μετρήσεις ἰδιοτήτων ἀναφερομένας εἰς σὺνολα ἢ ὁμάδας. Καλοῦνται, οὕτω, "δημογραφικαὶ στατιστικαί" τὰ στοιχεῖα γεννήσεων, θανάτων κλπ., "γεωργικαὶ στατιστικαί" τὰ στοιχεῖα παραγωγῆς διαφόρων προϊόντων, καλλιεργουμένων ἐκτάσεων κλπ. Ὄταν ὁ ὅρος "στατιστική" χρησιμοποιῆται εἰς τόν ἐνικόν ἐκφράζει τὸ ἀντικείμενον τῆς στατιστικῆς ἐπιστήμης, τὸ ὅποιον, γενικῶς, συνίσταται εἰς τὴν συγκέντρωσιν, παρουσίασιν καὶ ἀνάλυσιν τῶν στατιστικῶν δεδομένων.

Τὰ στατιστικὰ στοιχεῖα ἀποτελοῦν, κατ' οὐσίαν, τὴν πρώτην ὑλὴν ἢ ὅποια διὰ καταλλήλων ἐπεξεργασιῶν καὶ μετασχηματισμῶν εἰς τὸ στάδιον τῆς ἀναλύσεως λαμβάνει τελικῶς μορφὰς ὁδηγοῦσας εἰς τὴν ἐξαγωγήν πολυτίμων συμπερασμάτων. Εἰς τὰς φυσικὰς ἐπιστήμας τὰ δεδομένα προκύπτουν, ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον, ἐκ πειραμάτων, δι' ὅ καὶ ἡ συγκέντρωσις τῶν ἀναγκαιούτων ἐκάστοτε διὰ τὴν μελέτην ὀρισμένου θέματος ἐπιτυγχάνεται διὰ καταλλήλου σχεδιασμοῦ τῆς πειραματικῆς ἐργασίας. Τοιαύτη, ὅμως, δυνατότης δέν ὑπάρχει εἰς τὰς κοινωνικὰς ἐπιστήμας, ἔνθα ἡ διεξαγωγή πειραμάτων εἶναι σχεδόν ἀνέφικτος. Εἰς τὰς ἐν λόγῳ ἐπιστήμας ἡ συλλογὴ ποσοτικῶν πληροφοριῶν διὰ ποικίλης φύσεως πολυπληθεῖς ὁμάδας εἶναι ἔργον λίαν δυσχερές, κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τοῦ ὁποίου ἀντιμετωπίζονται σοβαρὰ προβλήματα, ὡς εἶναι τὰ ἀναφερόμενα εἰς τὸν προσδιορισμὸν τοῦ

είδους τῶν ἀναγκαιουσίντων ἐκάστοτε δεδομένων καί, κυρίως, εἰς τὴν ἐπιλογὴν τῶν μονάδων ἐκ τῶν ὁποίων θὰ πρέπει νὰ ληφθοῦν τὰ δεδομένα ταῦτα. Ὁ βασικὸς σκοπὸς πάσης τοιαύτης προσπάθειας συνίσταται εἰς τὴν ἀπόκτησιν, ὄχι οὐκὼνδηποτε στοιχείων, ἀλλὰ σχετικῶς ἀξιοπιστῶν στοιχείων. Τὰ στατιστικὰ δεδομένα, ὡς ἐκ τῆς φύσεώς των, δὲν ἀποτελοῦν ἀκριβεῖς μετρήσεις ἀλλὰ ἐκτιμήσεις τῶν μεγεθῶν εἰς τὰ ὁποῖα ἀναφέρονται καί, συνεπῶς, τὸ πρόβλημα τῆς ποιοτικῆς στάθμης των συνίσταται, ὄχι εἰς τὴν ἐκμηδένισιν τοῦ σφάλματος, ἀλλὰ εἰς τὸν περιορισμὸν αὐτοῦ ἐντὸς ἀνεκτῶν ὁρίων.

Μετά τὴν συλλογὴν τῶν στατιστικῶν δεδομένων τὰ ὁποῖα ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν ἐξέτασιν ἑνὸς θέματος ἀκολουθεῖ συνήθως ἡ παρουσία τῶν ὑπὸ τὴν μορφήν ὑπὸ τὴν ὁποίαν ἐμφανίζονται πρωτογενῶς, δηλαδὴ πρὶν ἢ τυχὸν οὐκ ἀσθητέως περαιτέρω ἀναλύσεως. Ἡ τοιαύτη παρουσία εἰς ὠρισμένας μὲν περιπτώσεις εἶναι σκόπιμος εἰς ἄλλας δὲ ἐπιβάλλεται ἐκ τῶν πραγμάτων. Ἡ σκοπιμότης τῆς παρουσίας τῶν στοιχείων ἐνδέχεται νὰ ἀφορᾷ εἰς τὴν διενέργειαν μιᾶς προκαταρκτικῆς ἐξετάσεως τῶν μελετωμένων φαινομένων, διὰ τῆς ὁποίας διευκολύνεται μεγάλως τὸ ἐν συνεχείᾳ ἔργον τῆς ἀναλύσεως. Ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὴν ἀναγκαιότητα τῆς παρουσίας τῶν δεδομένων, αὕτη ἐνίοτε δημιουργεῖται ἐκ τῆς μὴ ὑπάρξεως τῶν ἀντικειμενικῶν προϋποθέσεων (προσωπικόν, χρόνος κλπ.), αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀπαραίτητοι διὰ περαιτέρω ἐπεξεργασίαν τοῦ πρωτογενοῦς ὕλικου. Πάντως, ἀνεξαρτήτως τῶν συνθηκῶν ὑπὸ τὰς ὁποίας λαμβάνει χώραν ἡ παρουσία τῶν στατιστικῶν δεδομένων, δεόν ὅπως ἀκολουθῆ αὕτη ὠρισμένους βασικούς κανόνας ἀποβλέποντας εἰς τὴν ταχείαν καὶ κατὰ τρόπον σαφῆ καὶ παραστατικόν παροχὴν τῶν σχετικῶν ποσοτικῶν πληροφοριῶν.

Ἡ πλήρης ἀξιοποίησις τῶν στατιστικῶν δεδομένων ἐπιτυγχάνεται διὰ τῆς ἀναλύσεως αὐτῶν, ἡ ὁποία συνίσταται εἰς τὴν ἐφαρμογὴν καταλλήλων μεθόδων πρὸς συναγωγὴν συμπερασμάτων ἐχόντων οὐσιαστικὴν σημασίαν διὰ τὴν λήψιν ὀρθῶν ἀποφάσεων. Σημειωτέον ὅτι ἡ μαθηματικὴ θεωρία ἐπὶ τῆς ὁποίας στηρίζονται αἱ ἐν λόγῳ μέθοδοι ἀποτελεῖ τὴν "Θεωρίαν τῆς Στατιστικῆς" ἢ ἄλλως τὴν "Μαθηματικὴν Στατιστικὴν". Αἱ στατιστικαὶ μέθοδοι διακρίνονται συνήθως εἰς δύο κατηγορίας, ἧτοι εἰς τὰς μεθόδους "Περιγραφικῆς Στατιστικῆς" καὶ εἰς τὰς μεθόδους "Ἐπαγωγικῆς Στατιστικῆς". Αἱ μέθοδοι τῆς περιγραφικῆς στατιστικῆς περιορίζονται εἰς τὴν ἀποτύπωσιν τῶν βασικῶν χαρακτηριστικῶν ἑνὸς σχετικῶς μεγάλου ἀριθμοῦ μετρήσεων, ἀναφερομένων εἰς ἓν ἢ πλεονα μεγέθη, περιλαμβάνουν δε

γενικῶς πᾶσαν ἐπεξεργασίαν ἢ ὅποια δέν ἀποβλέπει εἰς γενικεύσεις. Κατ' ἀντιθέσιν πρὸς τὰς μεθόδους τῆς περιγραφικῆς στατιστικῆς, αἱ μέθοδοι τῆς ἐπαγωγικῆς στατιστικῆς ἀποσκοποῦν εἰς γενικεύσεις ἢ προβλέψεις περὶ τῆς διαμορφώσεως τῶν χαρακτηριστικῶν εἰς μεγάλας ὁμάδας στατιστικῶν δεδομένων, ἐπὶ τῇ βάσει πληροφοριῶν λαμβανομένων ἐκ τινος σχετικῶς μικροῦ μέρους αὐτῶν. Κατὰ συνέπειαν, ἡ μεταξὺ τῶν δύο τούτων κατηγοριῶν μεθόδων διαφορά ἀναφέρεται, ὄχι εἰς τὴν φύσιν των, ἀλλὰ εἰς τοὺς ἐξυπηρετούμενους ὑπ' αὐτῶν σκοπούς.

## 2. Ἀνάπτυξις τῆς Στατιστικῆς καὶ πεδία ἐφαρμογῆς αὐτῆς

Αἱ πρῶται προσπάθειαι συγκεντρώσεως στατιστικῶν στοιχείων ἀνάγονται εἰς τοὺς ἀρχαιοτάτους χρόνους. Ὑπὸ τῆς ἱστορίας τῶν Κινέζων, τῶν Αἰγυπτίων, τῶν Ἑλλήνων, τῶν Ρωμαίων καὶ ἄλλων λαῶν τῆς ἀρχαιότητος παρέχονται ἀριεταί πληροφοραὶ περὶ διενεργηθεισῶν κατὰ καιροὺς ἀπογραφῶν τοῦ πληθυσμοῦ, τῶν γαιῶν κλπ., αἱ ὁποῖαι ἀπέβλεπον, ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον, εἰς τὴν ἐξυπηρέτησιν φορολογικῶν, στρατιωτικῶν καὶ ἄλλων γενικωτέρας σημασίας σκοπῶν. Εἰς τὴν Εὐρώπην ἤδη ἀπὸ τοῦ τέλους τοῦ μεσαίωνα ἤρχισαν νὰ συγκεντροῦνται συστηματικῶς ὑπὸ διαφόρων Κυβερνήσεων στατιστικὰ στοιχεῖα γεννήσεων, θανάτων, γάμων κλπ. Βαθμιαίως, τὸ ἐνδιαφέρον τῶν Ἀρχῶν ἐπεξετάθη καὶ εἰς ἄλλας κατηγορίας ποσοτικῶν πληροφοριῶν, ὡς εἶναι αἱ ἀφορῶσαι εἰς τὸ ἐξωτερικὸν ἐμπόριον κλπ.

Καθ' ὅλην τὴν μακρὰν ταύτην περίοδον, παραλλήλως πρὸς τὰς καταβληθείσας προσπάθειας πρὸς ἀπόκτησιν στατιστικῶν δεδομένων, ἀνεπτύχθησαν βαθμιαίως καὶ κατάλληλοι μέθοδοι ταξινομήσεως καὶ παρουσιάσεως αὐτῶν. Κατ' οὐσίαν, ὅμως, αἱ ρίζαι τῆς Στατιστικῆς, ὡς ἐπιστήμης ἀσχολουμένης μὲ τὴν ποσοτικὴν ἀνάλυσιν τῶν διαφορῶν φαινομένων ἀνατρέχουν εἰς τὸν 17ον αἰῶνα, ὅτε τὸ πρῶτον ἤρχισε νὰ διαμορφοῦται ἡ θεωρία τῶν πιθανοτήτων. Αὕτη κατὰ τοὺς ἐπομένους δύο αἰῶνας ἐτύχε περαιτέρω ἐπεξεργασίας καὶ συμπληρώσεων κυρίως ὑπὸ τῶν Bernoulli, Gauss, Laplace. Οὕτω περὶ τὰ τέλη τοῦ 19ου αἰῶνος εἶχε πλέον σχηματισθῆ τὸ ἀπαιτούμενον μαθηματικὸν ὑπόβαθρον πρὸς ἀνάπτυξιν τῶν στατιστικῶν μεθόδων καὶ ἰδίως τῆς ἐπαγωγικῆς στατιστικῆς. Εἰς τὸ ἔργον τοῦτο οὐσιωδῶς συνέβαλον οἱ K. Pearson καὶ R.A. Fisher κατὰ τὰς ἀρχὰς τοῦ παρόντος αἰῶνος.

Ἡ οὕτως ἐξελιχθεῖσα στατιστικὴ θεωρία εἶναι κατὰ βάσιν γενικῆ, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι δύναται νὰ τύχη ἐφαρμογῆς εἰς οἷονδήποτε

τε τομέα έρεύνης εἰς τόν ὅποιον ὑπάρχουν διαθέσιμα στατιστικά δεδομένα. Αἱ ἀναπτυχθεῖσαι μέθοδοι χρησιμοποιοῦνται εὐρέως εἰς πολλές ἐπιστήμας, ὡς εἰς τήν βιολογίαν, τήν φυσικήν, τήν ἰατρικήν, τήν ἀστρονομίαν κλπ. Ἐκτός τῶν φυσικῶν ἐπιστημῶν καί αἱ κοινωνικά ἐπιστήμαι ἐπωφελήθησαν μεγάλως ἐκ τῆς ἀναπτύξεως τῶν μεθόδων τούτων ποσοτικῆς ἀναλύσεως. Δέον μάλιστα νά σημειωθῇ ὅτι εἰς τὰς κοινωνικάς ἐπιστήμας ἡ Στατιστική προσφέρει τήν μόνην δυνατότητα ἐμπειρικῆς έρεύνης. Ἀναμφιβόλως, ἄνευ τῶν στατιστικῶν μεθόδων οἱ ὀρίζοντες τῆς ψυχολογίας, τῆς κοινωνιολογίας, τῶν πολιτικῶν ἐπιστημῶν καί ἰδίως τῆς οἰκονομικῆς ἐπιστήμης θά ἦσαν εἰσέτι περωρισμένοι, αἱ δέ δυνατότητες χρησιμοποίησεως τῶν πορισμάτων τῶν ἐπιστημῶν τούτων διά ἀναλύσεις πραγματικῶν καταστάσεων καί διά προβλέψεις σχετικῶς μικραί.

Κατά τά ἀνωτέρω, ἡ Στατιστική, ἐνῶ καθ' ἑαυτήν, ὡς περιλαμβάνουσα συστηματικά καί καθολικῆς ἐφαρμογῆς τεχνικάς ποσοτικῆς ἀναλύσεως, εἶναι ἐπιστήμη, ταυτοχρόνως ἀποτελεῖ καί μέθοδον έρεύνης χρησιμοποιουμένην ὑπό τῶν ἄλλων ἐπιστημῶν. Δύο εἶναι, ὡς γνωστόν, αἱ βασικάς ὁδοί αἱ ὀδηγοῦσαι εἰς τήν ἐπιστημονικήν ἀλήθειαν. Ἡ μία, λεγομένη "ἀπαγωγική μέθοδος", ἀναχωρεῖ ἀπό ὠρισμένους γενικούς κανόνες καί διά τῆς λογικῆς συναγει ἐξ αὐτῶν εἰδικά συμπεράσματα. Ἡ ἑτέρα, λεγομένη "ἐπαγωγική μέθοδος", ἐκ δεδομένων παρατηρήσεων καταλήγει διά τῆς λογικῆς εἰς γενικεύσεις. Εἶναι φανερόν ὅτι ἡ Στατιστική, ὡς μέθοδος έρεύνης, ἔχει ὅλα τά χαρακτηριστικά τῆς ἐπαγωγικῆς μεθόδου καί μάλιστα ἀποτελεῖ, ὡς ἀνωτέρω ἐλέχθη, τόν μοναδικόν τρόπον ἐμπειρικῆς ἀναλύσεως εἰς τὰς κοινωνικάς ἐπιστήμας. Εἰς ταύτας ἡ χρησιμοποίησις τῆς Στατιστικῆς δύναται κατ' ἀρχήν νά ἀποβλέπη εἰς τήν ἐπαλήθευσιν βασικῶν θεωρῶν, αἱ ὁποῖαι, ἔχουν μὲν διατυπωθῆ καί τύχει τῆς ἀπαιτήτου ἐπεξεργασίας ἀπό πλευρᾶς λογικῆς θεμελιώσεως, δέν ἔχουν, ὅμως, ἐλεγχθῆ ἐμπειρικῶς κατά πόσον ἀνταποκρίνονται πρὸς τήν πραγματικότητα. Εἰς ὠρισμένας περιπτώσεις ἐκ τῆς στατιστικῆς ἀναλύσεως προκύπτουν ἀποτελέσματα ὀδηγοῦντα ἀκόμη καί εἰς τήν διατύπωσιν νέων θεωρῶν. Πέραν, ὅμως, τούτων, αἱ στατιστικάς μέθοδοι παρέχουν σαφεῖς, ἐπὶ ποσοτικῆς βάσεως, πληροφορίας, ἐπὶ τῶν ὁποῶν εἶναι δυνατή ἡ στήριξις προβλέψεων. Διά τῆς στατιστικῆς ἀναλύσεως ὑποβοηθεῖται, οὕτω, οὐσιαστικῶς ἡ λῆψις ὀρθῶν ἀποφάσεων ὑπό τῶν ἐπιφορτισμένων μέ τήν χάραξιν καί ἐφαρμογῆν ὠρισμένης πολιτικῆς εἰς οἷονδήποτε τομέα τῆς ἀνθρωπίνης δραστηριότητος.

### 3. Προϋποθέσεις αποτελεσματικῆς χρησιμοποίησεως τῶν στατιστικῶν μεθόδων

Αἱ στατιστικαὶ μέθοδοι, ἂν καὶ τυγχάνουν, κατὰ τὰ ἀνωτέρω, γενικῆς ἐφαρμογῆς, δὲν πρέπει, ἐν τούτοις, νὰ χρησιμοποιοῦνται κατὰ τρόπον μηχανικόν, διότι ἄλλως ὑπάρχει κίνδυνος συναγωγῆς ἐσφαλμένων συμπερασμάτων. Αἱ στατιστικαὶ μέθοδοι δὲν ἀποτελοῦν, δηλαδή, μέσα αὐτομάτου λήψεως ἀποτελεσμάτων κατόπιν τροφοδοτήσεως τῶν διὰ στατιστικῶν δεδομένων. Ἡ ἐπιτυχῆς ἐφαρμογὴ τῶν ἐξαρτᾶται εἰς σημαντικόν βαθμόν ἐκ τῆς ἰκανότητος καὶ τῆς πείρας τοῦ ἐρευνητοῦ, πρᾶγμα ὅπερ ἔχει ὀδηγήσει ὠρισμένους συγγραφεῖς εἰς τὸ νὰ θεωροῦν τὴν Στατιστικὴν, ὄχι μόνον ὡς ἐπιστήμην, ἀλλὰ καὶ ὡς τέχνην.

Βασικῆ, βεβαίως, προϋπόθεσις διὰ τὴν ἀποτελεσματικὴν χρησιμοποίησιν τῶν στατιστικῶν μεθόδων εἶναι ἡ πλήρης γνῶσις αὐτῶν. Αἱ ὑποθέσεις ἐπὶ τῶν ὁποίων στηρίζονται, ὁ σκοπὸς εἰς τὸν ὁποῖον ἀποβλέπουν καὶ γενικῶς τὸ περιεχόμενον τῶν ἐξ αὐτῶν προκυπτόντων ἀποτελεσμάτων ἀποτελοῦν τὰ στοιχεῖα ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ὁποίων δεῖον νὰ κρίνεται ἡ καταλληλότης ἢ μὴ τῶν διαφόρων μεθόδων εἰς ἐκάστην συγκεκριμένην περίπτωσιν. Ἐκτός, ὅμως, τῆς γνώσεως τῶν μεθόδων, ἀπαιτεῖται καὶ πλήρης εἰς βάθος γνῶσις τοῦ ἀντικειμένου ἐπὶ τοῦ ὁποῖου ἐφαρμόζονται αὐταί. Ὡς ἔχει ἤδη ἀναφερθῆ, τὸ πεδίον ἐφαρμογῆς τῆς Στατιστικῆς εἶναι εὐρύτατον. Πρὸς ἀποτελεσματικὴν χρησιμοποίησιν τῶν διαφόρων τεχνικῶν εἶναι ἐκ τῶν πραγμάτων ἀναγκαῖα καὶ ὠρισμένου βαθμοῦ ἐξειδικεύσεις τοῦ ἐπιχειροῦντος τὴν στατιστικὴν ἀνάλυσιν εἰς τὸν συγκεκριμένον ἐπιστημονικόν κλάδον. Μία τοιαύτη ἐξειδικεύσις παρέχει τὴν δυνατότητα πληρεστέρας ἀναλύσεως τοῦ ἐξεταζομένου θέματος καὶ κυρίως, καθιστᾷ εὐχερῆ τὴν ἐπιλογὴν τῶν καταλλήλων μεθόδων αἱ ὁποῖαι θὰ πρέπει νὰ τύχουν ἐφαρμογῆς. Τοῦτο, διότι, παρά τὴν γενικότητα ἢ ὅποια χαρακτηρίζει τὰς στατιστικὰς μεθόδους εἰς τὴν βάσιν τῶν, ὑπάρχει, ἐν τούτοις, τάσις ἐξειδικεύσεως τῶν κατὰ ἐπιστημονικοὺς κλάδους, ὥστε νὰ ἀνταποκρίνονται πληρέστερον πρὸς τὰς συνθήκας τὰς ἐπικρατοῦσας εἰς ἕκαστον τούτων.

Δὲν πρέπει νὰ λησμονῆται ὅτι ἡ Στατιστικὴ ἀσχολεῖται μόνον μὲ ἀριθμητικὰ δεδομένα, δηλαδή ἐξετάζει μόνον τοὺς παράγοντας οἱ ὁποῖοι δύνανται νὰ τύχουν ποσοτικῆς ἐκφράσεως. Ἐκτός, ὅμως, αὐτῶν ὑπάρχει εἰς τὰς κοινωνικὰς ἐπιστήμας καὶ ἐν πλῆθος παραγόντων ποιοτικῆς φύσεως, οἱ ὁποῖοι παίζουν σημαντικόν ρόλον εἰς τὴν δια-

μόρφωσιν καταστάσεων ἢ ἐξελεξέων. Ἐπομένως, εἰς τοιαύτας περιπτώσεις ἡ Στατιστική, ὡς περιοριζομένη εἰς τοὺς ποσοτικούς παράγοντας, δὲν εἶναι εἰς θέσιν διὰ τῶν μεθόδων τῆς νὰ ἀντιμετωπίσῃ ἐξ ὀλοκλήρου τὰ ἐμφανιζόμενα προβλήματα καὶ νὰ δώσῃ πλήρεις λύσεις εἰς αὐτά. Οὐχ ἦττον, καὶ ὑπὸ τὰς συνθήκας ταύτας ἡ βοήθεια τὴν ὅποσαν παρέχει ἡ ποσοτικὴ ἀνάλυσις εἶναι οὐσώδης, διότι ἐν πάσῃ περιπτώσει καθιστᾷ δυνατὴν τὴν μόρφωσιν κάποιας, γενικῆς ἔστω, ἀντιλήψεως καὶ ἐπιτρέπει τὸν ἔλεγχον συμπερασμάτων ἐξαχθέντων ἐπὶ τῇ βάσει ἄλλων ἐπιστημονικῶν μεθόδων. Ἡ Στατιστικὴ, παρά τὴν ἀναμφισβήτητον σημασίαν καὶ τὴν οὐσιαστικὴν χρησιμότητά της ὡς μεθόδου ἐπιστημονικῆς ἀναλύσεως, παρουσιάζει καὶ ὠρισμένας ἀδυναμίας, αἱ ὅποιαι δεόν νὰ λαμβάνωνται πάντοτε ὑπ' ὄψιν κατὰ τὰς ἐφαρμογὰς. Αἱ ἀδυναμίαι αὗται εἶναι πολὺ ὀλιγώτεραι σήμερον ἀπὸ ὅτι ἦσαν πρὸ δεκαετίας ἢ εἰκοσαετίας, ἀναμένεται δὲ ἐπὶ τῇ βάσει τῆς διαγραφομένης τάσεως ὅτι θὰ περιορισθοῦν σημαντικῶς εἰς τὸ μέλλον.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

### ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΓΕΝΙΚΩΣ

#### 1. Ἡ φύσις τῶν στατιστικῶν στοιχείων

Ἰά στατιστικά στοιχεία ἀναφέρονται γενικῶς εἰς ομάδας ἐμψύχων ὄντων (ὡς εἶναι οἱ ἄνθρωποι) ἢ ἀψύχων ἀντικειμένων (ὡς εἶναι τὰ αὐτοκίνητα, αἱ οἰκίαι κλπ.). Αἱ ἐν λόγῳ ομάδες ἀποκαλοῦνται "πληθυσμοί" καὶ δεόν νά προσδιορίζωνται εἰς ἐκάστην συγκεκριμένην περίπτωσην κατὰ τρόπον σαφῆ, ὥστε νά μή δημιουργοῦνται ἀμφιβολαὶ ὡς πρὸς τὸ ἐάν ὠρισμένοι μονάδες περιλαμβάνωνται ἢ μή εἰς αὐτούς. Πληθυσμοὺς ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ταύτην ἀποτελοῦν οἱ ἀπασχολούμενοι εἰς ὠρισμένον βιομηχανικόν κλάδον, οἱ ἄρρενες κάτοικοι μιᾶς χώρας, αἱ οἰκίαι μιᾶς πόλεως, τὰ εἰς μίαν χώραν κυκλοφοροῦντα αὐτοκίνητα ἰδωτικῆς χρήσεως κλπ. Οἱ πληθυσμοὶ οὗτοι εἰς τοὺς ὁποίους ἀφοροῦν τὰ στατιστικά δεδομένα δύνανται νά εἶναι οἰουδήποτε μεγέθους. Ἐπὶ παραδείγματι, εἰς ἄνθρωπινος πληθυσμὸς ἐνδέχεται νά περιλαμβάνῃ μόνον τοὺς κατοίκους ἑνὸς μικροῦ συνοικισμοῦ ἢ χωρίου εἰς ἄλλην δέ περίπτωσην τὸ σύνολον τῶν κατοίκων τῆς γῆς.

Εἶναι φανερόν ὅτι αἱ μονάδες ἐκ τῶν ὁποίων ἀποτελεῖται δεδομένος πληθυσμὸς παρουσιάζουν πλῆθος ἰδιοτήτων. Οὕτω, οἱ κάτοικοι μιᾶς χώρας δύνανται νά ἐξετασθοῦν ἀπὸ ἀπόψεως φύλου, βάρους, ὕψους, εἰσοδήματος, ἀπασχολήσεως κλπ. Διὰ τῶν στατιστικῶν στοιχείων ἐπιδιώκεται ἀκριβῶς ἢ ἐπί ποσοτικῆς βάσεως περιγραφή τῶν ἐν λόγῳ ἰδιοτήτων. Ἐπὶ παραδείγματι, ἀναφορικῶς πρὸς τὸν πληθυσμὸν μιᾶς χώρας δυνάμεθα νά ἔχωμεν τοὺς ἀριθμοὺς τῶν ἀρρένων καὶ τῶν θηλέων, τὸ κατὰ μέσον ὄρον βάρους καὶ ὕψους, τὸ συνολικόν εἰσόδημα καὶ τοὺς ἀριθμοὺς τῶν ἀνέργων καὶ ἀπασχολουμένων. Τὰ στοιχεῖα ἐκαστῆς κατηγορίας προκύπτουν κατόπιν συγκεντρώσεως ἀριθμητικῶν



δεδομένων ὡς πρὸς ὠρισμένην ιδιότητα ἐξ ὅλων τῶν μονάδων τοῦ ἐξεταζομένου πληθυσμοῦ. Δύναται, ἐπομένως, νὰ λεχθῆ ὅτι τὰ στατιστικά στοιχεῖα ἀποτελοῦν, ἐν τελευταίᾳ ἀναλύσει, ποσοτικὰ ἐκφράσεις τῶν ιδιοτήτων τὰς ὁποίας παρουσιάζουν αἱ εἰς ὠρισμένον πληθυσμόν ἀνήκουσαι μονάδες.

Αἱ ιδιότητες ἢ ἄλλως τὰ χαρακτηριστικά τῶν μονάδων ἑνὸς πληθυσμοῦ διακρίνονται εἰς δύο κατηγορίας, εἰς τὰς ὁποίας ἀντιστοιχοῦν καὶ δύο τύποι στατιστικῶν δεδομένων. Εἰς τὴν πρώτην κατηγορίαν ἀνήκουν τὰ χαρακτηριστικά τὰ ὁποῖα δύναται νὰ μετρηθοῦν διὰ χρησιμοποίησιν τῆς καταλλήλου μονάδος μετρήσεως (ἀξίας, ὄγκου, βάρους κλπ.). Ταῦτα καλοῦνται "ποσοτικά χαρακτηριστικά" ἢ "μεταβλητά" ὑπὸ τὴν μαθηματικὴν ἔννοιαν τοῦ ὅρου. Ἐπὶ παραδείγματι, ποσοτικά χαρακτηριστικά εἶναι τὸ εἰσόδημα, αἱ πωλήσεις τῶν βιομηχανικῶν ἐπιχειρήσεων, αἱ καταθέσεις εἰς τὰς Τραπεζάς, αἱ εἰσαγωγαί, αἱ ἐξαγωγαί κλπ.

Εἰς τὴν ἑτέραν κατηγορίαν ιδιοτήτων ἀνήκουν αἱ ἔχουσαι ποιοτικὴν ὑπόστασιν καὶ μὴ δυνάμεναι νὰ ἐκφραστοῦν διὰ χρησιμοποίησιν ὠρισμένης μονάδος μετρήσεως. Ποιοτικαὶ ιδιότητες εἶναι τὸ φύλον, τὸ χρῶμα, ἡ εἰδικευσίς, ἡ οἰκογενειακὴ κατάσταση κλπ. Ἐν προκειμένῳ αἱ ὑπὸ ἐξέτασιν μονάδες διαχωρίζονται, μὲ βάσιν τὸ ποιοτικὸν κριτήριον, εἰς κατηγορίας καὶ προσδιορίζεται ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων, ὁ ὁποῖος ἀντιστοιχεῖ εἰς ἑκάστην ἐκ τῶν κατηγοριῶν αὐτῶν. Ἐπομένως, αἱ ποιοτικαὶ ιδιότητες, ἐνῶ δὲν δύναται νὰ μετρηθοῦν, ὡς αἱ μεταβλητά, δύναται, ἐν τούτοις, νὰ ἀπαριθμηθοῦν. Οὕτω, ἐξετάζοντες ἕνα πληθυσμόν ἀνθρώπων ἀπὸ πλευρᾶς φύλου δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν πόσοι ἐξ αὐτῶν εἶναι ἄρρενες καὶ πόσοι θῆλεις, ἐξετάζοντες δὲ ἕνα πληθυσμόν ἐργατῶν ἀπὸ πλευρᾶς βαθμοῦ εἰδικεύσεως δυνάμεθα νὰ καθορίσωμεν πόσοι ἐξ αὐτῶν εἶναι ἀνιδεικτεῖς, πόσοι ἡμιειδικευμένοι καὶ πόσοι εἰδικευμένοι.

Εἰς ὠρισμένας περιπτώσεις εἶναι δυνατὴ ἡ ἐκφρασίς ἑνὸς ποιοτικοῦ χαρακτηριστικοῦ ὑπὸ ποσοτικὴν μορφήν διὰ χρησιμοποίησιν μιᾶς ἢ περισσοτέρων ἐνδεικτικῶν μεταβλητῶν ἐμμέσως συνδεομένων μετὰ τοῦ ποιοτικοῦ χαρακτηριστικοῦ. Ἐπὶ παραδείγματι, ἡ ὑγεία, μετρηθῆ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἡμερῶν ἀσθενείας, ἢ ὀξύνουα διὰ τινος μέσου ὅρου βαθμῶν ἐπὶ πνευματικῶν ἀσκήσεων κλπ. Ἀναμφιβόβως, οἱ τρόποι οὔτοι ποσοτικῆς ἐκφράσεως τῶν ποιοτικῶν χαρακτηριστικῶν ἐνέχουν σημαντικὸν βαθμὸν αὐθαιρεσίας καὶ ἐγκλείουν πάντοτε τὸν κίνδυνον παροχῆς ψευδοῦς εἰκόνας τῆς πραγματικότη-

τος. Ἐν τούτοις, εἰς τὴν στατιστικὴν γίνεται πολλάκις χρῆσις αὐτῶν, διότι οὕτω καθίσταται δυνατὴ ἡ ἐφαρμογὴ καὶ ἐπὶ τῶν ποιοτικῶν χαρακτηριστικῶν τῶν διαφορῶν μεθόδων ἀναλύσεως, αἱ ὁποῖαι ἀφοροῦν κυρίως εἰς ποσοτικὰς ιδιότητες.

## 2. Ἡ ἀκρίβεια τῶν στατιστικῶν στοιχείων

Εἰς τὴν πρᾶξιν ἡ ποσοτικὴ περιγραφή ἑνὸς χαρακτηριστικοῦ, ἰδίως ὅταν τοῦτο ἀναφέρεται εἰς σημαντικὸν ἀριθμὸν μονάδων, δέν εἶναι ἐκ τῶν πραγμάτων δυνατὸν νὰ ἐπιτυχάνεται μὲ ἀπόλυτον ἀκρίβειαν, λόγῳ τῶν ἀδυναμιῶν τὰς ὁποίας ἐμφανίζουν αἱ χρησιμοποιούμεναι μέθοδοι καὶ τὰ μέσα συγκεντρώσεως τῶν ἀριθμητικῶν δεδομένων. Μειωμένην ἀκρίβειαν ἔχουν ἀκόμη καὶ τὰ στοιχεῖα τὰ ἀφορῶντα εἰς τὰς φυσικὰς ἐπιστήμας καὶ μάλιστα τὰ ἐξ αὐτῶν καταγραφόμενα διὰ καταλλήλων ὀργάνων ἐντὸς τοῦ ἐργαστηρίου. Ἐκ τούτου ἀντιλαμβάνεται τις πόσον δυσχερεστέρα καθίσταται ἡ ἀκριβὴς ἀριθμητικὴ ἀποτύπωσις τῶν κοινωνικῶν καὶ οἰκονομικῶν φαινομένων, τὰ ὁποῖα, ὡς γνωστὸν, δέν ὑπόκεινται εἰς πειραματισμὸν, ἀλλὰ μόνον ἀπλῆς παρατηρήσεως δύνανται νὰ τύχουν.

Γενικῶς παρατηρεῖται ὅτι ἀπόλυτος ἀκρίβεια σπανίως ἐπιτυγχάνεται εἰς τὰς ἀριθμήσεις, εἶναι δέ σχεδὸν ἀδύνατος εἰς τὰς μετρήσεις. Ἀναφορικῶς πρὸς τὰς τελευταίας δέον νὰ σημειωθῇ ὅτι ὁ βαθμὸς ἀκρίβειας ἐξαρτᾶται, μεταξύ ἄλλων, καὶ ἐκ τῆς χρησιμοποιουμένης μονάδος μετρήσεως. Ἐάν διὰ τὴν μέτρησιν τῶν διαστάσεων ὠρισμένου ἀντικειμένου λάβωμεν ἓνα κανόνα φέροντα ὑποδιαίρεσις μέχρι χιλιοστοῦ, εἶναι φανερόν ὅτι δέν θά εἶναι ἐφικτὴ ἡ μετ' ἀκρίβειας λήψις τῶν ἐν λόγῳ διαστάσεων εἰς δεκάκις χιλιοστά ἢ ἑκατοντάκις χιλιοστά. Ὁμοίως, ἐάν κατὰ τὴν συγκέντρωσιν στοιχείων ἡλικίας δεδομένου ἀνθρωπίνου πληθυσμοῦ ζητοῦμεν ὅπως ταῦτα δίδωνται ὑπὸ τῶν ἐπὶ μέρους μονάδων εἰς ἔτη καὶ μῆνας, εἶναι φυσικόν αἰ οὕτω προκύπτουσαι μετρήσεις νὰ μὴ εἶναι ἀκριβεῖς καὶ ὡς πρὸς τὰς ἡμέρας τῶν ἡλικιῶν.

Κατὰ ταῦτα, τὰ ἐκαστοτε χρησιμοποιούμενα στατιστικὰ δεδομένα δέν ἀποτελοῦν ἀπολύτως ἀκριβεῖς ποσοτικὰς ἐκφράσεις τῶν καταστάσεων εἰς τὰς ὁποίας ἀναφέρονται, ἀλλὰ ἀπλᾶς προσεγγίσεις τῶν πραγματικῶν τιμῶν των, δι' ὅ καὶ ἀποκαλοῦνται "ἐκτιμήσεις" αὐτῶν. Ἡ ἀπόκλισις ἡ ὁποία ὑπάρχει μεταξύ δεδομένης ἐκτιμήσεως καὶ τῆς πραγματικῆς τιμῆς - τῆς ὁποίας ὁ ἀκριβὴς προσδιορισμὸς ἐνδέχεται νὰ εἶναι ἐκ τῶν πραγμάτων ἀδύνατος - καλεῖται εἰς τὴν στατιστικὴν "σφάλμα". Ἡ ἐν λόγῳ ἀπόκλισις, ὅταν ἐκφράζεται ὡς

διαφορά καλεῖται "ἄπολυτον σφάλμα", ὅταν δὲ ἐκφράζεται ὡς ποσοστόν ἐπὶ τοῖς ἑκατόν τῆς πραγματικῆς τιμῆς καλεῖται "σχετικόν σφάλμα". Γενικῶς, ἐάν  $X$  εἶναι ἡ πραγματικὴ τιμὴ ἑνὸς μεγέθους καὶ  $x$  ἡ τιμὴ αὐτοῦ ἐκ παρατηρήσεως, θὰ ἔχωμεν, κατὰ τὰ ἀνωτέρω:

$$\text{Ἄπολυτον σφάλμα} \quad : \quad \varepsilon_{\alpha} = x - X$$

$$\text{καὶ σχετικόν σφάλμα} \quad : \quad \varepsilon_{\sigma} = \frac{\varepsilon_{\alpha}}{X} \cdot 100$$

Οὕτω, ἐάν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ πραγματικόν μέγεθος τῆς παραγωγῆς σίτου ἐν Ἑλλάδι κατὰ τὸ ἔτος 1965 ἦτο 1.823,4 χιλ.τόννοι, ἐνῶ κατὰ τὰς ἐκτιμήσεις τοῦ Ὑπουργείου Γεωργίας αὕτη ἀναβιβάζεται εἰς 1.989,1 χιλ.τόννους, τότε :

Τὸ μὲν ἄπολυτον σφάλμα θὰ εἶναι :  $1.989,1 - 1.823,4 = 165,7$  χιλ.τόν.

Τὸ δὲ σχετικόν σφάλμα θὰ εἶναι :  $\frac{165,7}{1.823,4} \cdot 100 = 9,1\%$

Ἐκ τοῦ τρόπου ὑπολογισμοῦ τῶν δύο τούτων τύπων σφαλμάτων προκύπτει ὅτι, ἐνῶ τὸ ἄπολυτον εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς πραγματικῆς ἀξίας τοῦ μεγέθους, τὸ σχετικόν σφάλμα συνδέεται μετ' αὐτῆς. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον τὸ τελευταῖον χρησιμοποιεῖται συνηθέστερον ἐπὶ συγκρίσεων σφαλμάτων διαφόρων τιμῶν. Ἐάν, δηλαδή, ἡ κατὰ τὸ ἔτος 1965 παραγωγή ἀραβοσίτου, ἡ ὁποία κατὰ τὰς ἐπισήμους ἐκτιμήσεις ἀνῆλθεν εἰς 297,8 χιλ.τόννους, ὑποτεθῆ ὅτι ἦτο εἰς τὴν πραγματικότητά 265,6 χιλ.τόννοι, προκύπτει ἄπολυτον σφάλμα ἐκ 32,2 χιλ.τόννων τὸ ὁποῖον δέν εἶναι συγκρίσιμον πρὸς τὸ ἀντίστοιχον τῆς παραγωγῆς σίτου κατὰ τὸ ἴδιον ἔτος, λόγω χρησιμοποιοῦσως διαφορετικῆς βάσεως ὑπολογισμοῦ. Λαμβάνοντες, ὅμως, τὸ σχετικόν σφάλμα εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις, ἀποφαινόμεθα ὅτι ἡ ἀπόκλισις τῆς ἐκτιμήσεως τῆς πραγματικῆς τιμῆς εἶναι μεγαλύτερα εἰς τὴν παραγωγὴν ἀραβοσίτου :

$$\varepsilon_{\sigma} = \frac{32,2}{265,6} \cdot 100 = 12,1\%$$

ἢ εἰς τὴν παραγωγὴν σίτου :  $\varepsilon_{\sigma} = 9,1\%$

Γενικῶς, ὁ ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος ἐκφράζει τὸ σχετικόν (ἀλλὰ καὶ τὸ ἄπολυτον) σφάλμα ὠρισμένου στατιστικοῦ στοιχείου δέν φέρει συγκριμένον πρόσημον (+ ἢ -), καθ' ὅσον ὑποτίθεται ὅτι ἡ πραγματικὴ τιμή

μή του ἔξεταζομένου μεγέθους ἐμπίπτει εἰς τὸ διάστημα τὸ προσδιοριζόμενον ὑπὸ τοῦ στοιχείου μειὼν τὸ διδόμενον σφάλμα καὶ ὑπὸ τοῦ στοιχείου πλεόν τὸ διδόμενον σφάλμα.

Συγκεκριμένως, ἐάν δοθῇ ὅτι διὰ τὸν ἀριθμὸν 3.500 τὸ σχετικὸν σφάλμα εἶναι 2%, τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ πραγματικὴ τιμὴ θὰ πρέπει νὰ εὑρίσκηται εἴτε ἄνω τοῦ 3.500 εἴτε κάτω αὐτοῦ. Δεδομένου ὅτι τὸ 2% τοῦ 3.500 εἶναι εἰς ἀπόλυτον ἀριθμὸν 70, ἡ ἐν λόγῳ ἐκτίμησις ἐκφράζεται ὡς ἑξῆς:  $3.500 \pm 70$ . Ἐπομένως ἡ πραγματικὴ τιμὴ θὰ περιλαμβάνεται εἰς τὸ διάστημα μεταξύ 3.430 καὶ 3.570.

Ὁ ἄνωτέρω τρόπος ἐκφράσεως τῆς ἐκτιμήσεως ἑνὸς μεγέθους συναρτῆσει τοῦ σφάλματος αὐτῆς στηρίζεται εἰς τὴν ὑπόθεσιν ὅτι τοῦτο εἶναι ἐξ ἴσου πιθανὸν νὰ ἐμφανισθῇ τόσον πρὸς τὴν μίαν κατεύθυνσιν ὅσον καὶ πρὸς τὴν ἄλλην. Οὕτω, ἡ ἐκτίμησις  $3.500 \pm 70$ , σημαίνει ὅτι ἡ πραγματικὴ τιμὴ δέν ἀποκλείεται νὰ εἶναι 3.430 ἢ 3.570 ἢ καὶ διάφορος τούτων, ἀλλ' ὄχι μικρότερα τῆς πρώτης ἢ μεγαλύτερα τῆς δευτέρας, ἐφ' ὅσον, βεβαίως, δέν ἔχομεν λόγον τινὰ νὰ δεχθῶμεν ὅτι αἱ πρὸς τὴν μίαν κατεύθυνσιν τιμαὶ δέν ὑπάρχουν εἰς τὴν πραγματικότητα. Εἰς τοιαύτας περιπτώσεις κατὰ τὰς ὁποίας ἡ πραγματικὴ τιμὴ ἑνὸς μεγέθους δύναται νὰ εἶναι μικρότερα ἢ μεγαλύτερα τῆς ἐκ παρατηρήσεως, τὸ σφάλμα ἐκτιμήσεως καλεῖται "μὴ συστηματικόν". Ἐάν, ὅμως, στοιχεῖον τι ἀναφέρεται εἰς τὰς δηλωθείσας ἡλικίας ὠρισμένης ομάδος γυναικῶν, τὸ σφάλμα ἐκτιμήσεως αὐτοῦ δέν δύναται, προφανῶς, νὰ χαρακτηρισθῇ ὡς μὴ συστηματικόν καθ' ὅσον εἶναι πιθανόν αἱ δηλωθεῖσαι ἡλικίαι νὰ ὑπολείπωνται τῶν πραγματικῶν. Τὸ σφάλμα ἐκτιμήσεως, ὅταν, ὡς εἰς τὸ προαναφερθέν παράδειγμα, εὑρίσκηται περισσότερο πρὸς τὴν μίαν κατεύθυνσιν ἢ πρὸς τὴν ἄλλην - πράγμα τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι ἡ ἐκ παρατηρήσεως τιμὴ θὰ εἶναι, κατὰ πᾶσαν πιθανότητα, μικρότερα (ἢ μεγαλύτερα) τῆς πραγματικῆς - καλεῖται "συστηματικόν".

Ἡ ὑπαρξὶς σφάλματος εἰς τὰ στατιστικὰ στοιχεῖα δικαιολογεῖ τὴν ἄποψιν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ οἱ ὁποῖοι ἐκφράζουν ποσοτικῶς τὰ διάφορα μεγέθη δέν εἶναι ἀκριβεῖς ὡς πρὸς ὅλα τὰ ψηφία των. Δύναται, ἐπομένως, νὰ γίνῃ στρογγύλευσις αὐτῶν ἄνευ περιορισμοῦ τοῦ βαθμοῦ ἀκριβείας των. Εἰς τὴν πράξιν ἡ τοιαύτη στρογγύλευσις ἐνδείκνυται καὶ πρὸς τὸν σκοπὸν διευκολύνσεως τῆς κατανοήσεως τῶν στατιστικῶν στοιχείων. Ἐξ ἄλλου, εἰς πολλὰς περιπτώσεις δέν εἶναι τόσον ἀναγκαῖα ἢ πέραν ἑνὸς ὠρισμένου ὁρίου ἀκρίβεια, ὅσον ἡ ταχεῖα ἀπόκτησις τῶν στατιστικῶν πληροφοριῶν.

Ἡ στρογγύλευσις ἑνὸς ἀριθμοῦ δύναται νά γίνῃ ἐπὶ τῇ βάσει δύο μεθόδων. Κατὰ τὴν πρώτην ἐπιλέγεται ὠρισμένον ψηφίον καὶ ἡ στρογγύλευσις ἐνεργεῖται ὡς πρὸς αὐτό, ὅλα δὲ τὰ ἀκολουθοῦντα ἀγνοοῦνται. Κατὰ τὴν ἑτέραν μέθοδον ἡ στρογγύλευσις ἐνεργεῖται ὡς πρὸς ὠρισμένον ἀριθμὸν σημαντικῶν ψηφίων μετρούμενων ἐξ ἀριστερῶν, τῶν λοιπῶν μὴ λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν. Παραδείγματα τοιούτων στρογγυλεύσεων παρέχονται εἰς τὸν Πίνακα Α-1, ἔνθα χρησιμοποιεῖται ὁ ὄγκος ἑλληνικῶν ἐξαγωγῶν ἀκατεργάστου καπνοῦ εἰς φύλλα κατὰ τὸ 1963. Εἰς ἀμφοτέρας τὰς μεθόδους τὰ ἀγνοοῦμενα ψηφία καθορίζουν κατὰ πόσον τὸ τελευταῖον μετὰ τὴν στρογγύλευσιν ψηφίον θά παραμείνῃ ὡς ἔχει εἰς τὸν ἀρχικὸν ἀριθμὸν ἢ θά ἀυξηθῇ κατὰ μονάδα. Οὕτω, ὡς ἐμφαίνεται εἰς τὸν Πίνακα Α-1, τὸ ἀποτέλεσμα τῆς στρογγυλεύσεως τοῦ ἀριθμοῦ 61.786.988 εἰς τὴν πλησιέστεραν δεκάδα ἢ ἄλλως εἰς ἀριθμὸν ἑπτὰ σημαντικῶν ψηφίων εἶναι 61.786.990, καθ' ὅσον ὁ ἀριθμὸς 61.786.988 εὐρίσκεται πλησιέστερον πρὸς τὸν 61.786.990 ἢ πρὸς τὸν 61.786.980. Ἡ στρογγύλευσις, ὅμως, τοῦ ἀριθμοῦ 2.223 εἰς τὴν πλησιέστεραν ἑκατοντάδα ἢ ἄλλως εἰς ἀριθμὸν δύο σημαντικῶν ψηφίων δίδει 2.200, διότι ὁ ἀριθμὸς 2.223 εὐρίσκεται ἐγγύτερον τοῦ 2.200 ἢ τοῦ 2.300. Πρόβλημα δημιουργεῖται κατὰ τὴν στρογγύλευσιν τοῦ ἀριθμοῦ 244,5 εἰς τὴν πλησιέστεραν μονάδα ἢ ἄλλως εἰς ἀριθμὸν τριῶν σημαντικῶν ψηφίων, διότι ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ἀπέχει ἐκ τοῦ 244 ὅσον ἀκριβῶς καὶ ἐκ τοῦ 245. Εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτάς ἀκολουθεῖται ὁ κανὼν τῆς στρογγυλεύσεως εἰς τὸν πλησιέστερον ἄρτιον ἀριθμὸν. Οὕτω, 244,5 στρογγυλεύεται εἰς 244 ὁ 743,5 εἰς 744 κ.ο.κ.

Εἰς τὴν θέσιν τῶν διὰ τῆς στρογγυλεύσεως ἀφαιρουμένων σημαντικῶν ψηφίων δεόν νά ἀναγράφονται ἀντίστοιχα μηδενικά. Εἰς τὴν πρᾶξιν, ὅμως, δέν ἀκολουθεῖται ὁ τρόπος οὗτος παρουσιάσεως τῶν στρογγυλευομένων ἀριθμῶν, ἀλλὰ, χάριν ἀπλουστεύσεως, παραλείπονται τὰ μηδενικά. Ὡς ἐμφαίνεται εἰς τὸν Πίνακα Α-1, ὁ ἀριθμὸς 61.800.000 δύναται νά γραφῇ 61.800 ἢ 61,8 ὅποτε δέν ἐμφράζει χιλιώγραμμα, ὡς ὁ ἀρχικὸς ἀριθμὸς, ἀλλὰ τόννους ἢ χιλιάδας τόννων ἀντιστοιχῶς. Ὁ προκείμενος ἐκ τῆς στρογγυλεύσεως ἀριθμὸς π.χ. 61.786.990 ἔχει τὴν ἔννοιαν ὅτι ὁ πραγματικὸς ὄγκος τῶν ἑλληνικῶν ἐξαγωγῶν ἀκατεργάστου καπνοῦ εἰς φύλλα κατὰ τὸ 1963 θά πρέπει νά εὐρίσκεται μεταξύ τῶν 61.786.985 καὶ 61.786.995 (ἢ ἀκριβέστερον μεταξύ τῶν 61.786.985,1 καὶ 61.786.994,9) χιλιογράμμων, ἐνῶ ὁ ἀριθμὸς 62.000.000, ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖ προῖδον στρογγυλεύσεως τοῦ ἴδου μεγέθους, δεικνύει ὅτι ὁ πραγματικὸς ὄ-

γκος τῶν ἐν λόγῳ ἑξαγωγῶν θά πρέπει νά εὕρσκεται μεταξύ τῶν 61.500.000 καί τῶν 62.500.000 χιλιογράμμων. Εἶναι φανερόν ὅτι ὅσον διά τῆς στρογγυλεύσεως περιορίζεται ὁ ἀριθμός τῶν σημαντικῶν ψηφίων ἑνός στατιστικοῦ στοιχείου, ἐπί τοσοῦτον αὐξάνει τό διάστημα ἐντός τοῦ ὁποῦ ὑποτίθεται ὅτι ἐμπίπτει ἡ πραγματική τιμή τοῦ μεγέθους. Ἰδιαιτέραν σημασίαν ἔχουν ἀπό τῆς ἀπόψεως αὐτῆς τά τυχόν ὑπάρχοντα εἰς τό τέλος ἑνός στρογγυλευμένου ἀριθμοῦ, καί δὴ μετά τήν ὑποδιαστολήν, μηδενικά, καθ' ὅσον ταῦτα, μολονότι δέν ἐπηρεάζουν τόν ἀριθμόν καθ' ἑαυτόν, ἐν τούτοις προσδιορίζουν τό διάστημα ἐντός τοῦ ὁποῦ ἐμπίπτει ἡ πραγματική τιμή τοῦ μεγέθους. Ἐπί παραδείγματι, ἐάν ὁ ἀριθμός 762,952 στρογγυλευθῆ εἰς τό πλησιέστερον δέκατον ἢ ἄλλως εἰς τετραψήφιον ἀριθμόν, οὗτος θά πρέπει νά γραφῆ 762,0. Ἐπί τῆ βάσει τοῦ ἀριθμοῦ τούτου λέγομεν ὅτι ἡ ἀληθῆς τιμή εὕρσκεται μεταξύ 762,0-0,05 καί 762,0 + 0,05, ἤτοι  $762,0 \pm 0,05$ . Ἀλλά ὁ ἀριθμός 762,0 εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τόν 762. Ἐπί τῆ βάσει τοῦ τελευταίου αὐτοῦ εἶναι φανερόν ὅτι ἡ ἀληθῆς τιμή θά πρέπει νά εἶναι  $762 \pm 0,5$ , ἤτοι θά ἐμπίπτῃ εἰς διάστημα μεγαλύτερον τοῦ προηγουμένου. Ἐπομένως,

### Πίναξ Α - 1

Τρόποι στρογγυλεύσεως ὄγκου ἑλληνικῶν ἑξαγωγῶν ἀκατεργάστου καπνοῦ εἰς φύλλα κατὰ τό 1963

Προσέγγισις	Εἰς χιλιόγραμμα	Εἰς τόννους	Εἰς χιλιάδας τόννους
Ἀρχικός ἀριθμός . . . . .	61.786.988		
Πλησιεστέρα δεκάς . . . . .	61.786.990	61.786,99	61,78699
Πλησιεστέρα ἑκατοντάς . . . . .	61.787.000	61.787	61,787
Πλησιεστέρα χιλιάς . . . . .	61.787.000	61.787	61,787
Πλησιεστέρα δεκάκις χιλιάς . . . . .	61.790.000	61.790	61,79
Πλησιεστέρα ἑκατοντάκις χιλιάς . . . . .	61.800.000	61.800	61,8
Πλησιέστερον ἑκατομμύριον . . . . .	62.000.000	62.000	62
7 σημαντικά ψηφία . . . . .	61.786.990	61.786,99	61,78699
6 σημαντικά ψηφία . . . . .	61.787.000	61.787	61,787
5 σημαντικά ψηφία . . . . .	61.787.000	61.787	61,787
4 σημαντικά ψηφία . . . . .	61.790.000	61.790	61,79
3 σημαντικά ψηφία . . . . .	61.800.000	61.800	61,8
2 σημαντικά ψηφία . . . . .	62.000.000	62.000	62

τά μετά τήν ὑποδιαστολήν μηδενικά τά ἀπομένοντα κατόπιν τῆς στρογγυλεύσεως σκόπιμον εἶναι νά ἀναγράφονται, διότι ἄλλως ὑπάρχει κίνδυνος περιορισμοῦ τῆς ἀκριβείας τῆς ἐκτιμῆσεως.

Ὅταν εἰς ἀριθμός προκύπτῃ ἐξ ἀριθμητικῶν πράξεων αἱ ὁποῖαι ἐκτελοῦνται ἐπὶ ὤρισμένων ἀρχικῶν δεδομένων, ἡ στρογγύλευσις δεῖν νά ἐνεργῆται ἐπὶ τοῦ τελικοῦ ἀποτελέσματος, νά ἀποφεύγεται δέ ἡ ἐκτέλεσις τῶν πράξεων ἐπὶ τῶν στρογγυλευμένων ἀριθμῶν, διότι ἐν ἐναντία περιπτώσει ὑπάρχει κίνδυνος λήψεως ἀποτελεσμάτων πολὺ ἀπεχόντων τῆς πραγματικότητος. Ἐάν, ἐπὶ παραδειγματι, ἔχωμεν τήν διαφοράν : 8.904,48-8.898,53, ἡ ὁποία δίδει ἀποτέλεσμα 5,95, θά ἦτο λάθος νά στρογγυλεύσωμεν πρῶτον τοὺς δεδομένους ἀριθμούς - ἔστω εἰς τήν πλησιεστέραν μονάδα - καί κατόπιν νά προβῶμεν εἰς τόν σχετικόν ὑπολογισμόν, διότι τότε θά προέκυπτεν ὁ ἀριθμός 5, ὁ ὁποῖος εἶναι κατὰ μονάδα μικρότερος τοῦ ἐκ τῶν ἀρχικῶν δεδομένων εὑρεθέντος καί κατόπιν στρογγυλευθέντος (5,95 ἦτοι περίπου 6).

Πολλάκις, ὅμως, παρίσταται ἀνάγκη παρουσιάσεως δύο στρογγυλευμένων ἀριθμῶν ὁμοῦ μετά τῆς διαφορᾶς των ἢ μιᾶς σειρᾶς στρογγυλευμένων ἀριθμῶν ὁμοῦ μετά τοῦ ἄθροίσματος αὐτῶν. Εἰς τήν στήλην (2) τοῦ Πίνακος Α-2 παρέχονται πέντε ἀριθμοί ἐκφράζοντες ἀντιστοιχοῦς κατηγορίας τακτικῶν ἐσόδων τοῦ κρατικοῦ προϋπολογισμοῦ διὰ τό οἰκονομικόν ἔτος 1963, τό ἄθροισμα τῶν ὁποίων ἀνέρχε-

### Πίναξ Α - 2

Ἐπολογισμός ἄθροίσματος στρογγυλευμένων στοιχείων τακτικῶν ἐσόδων κρατικοῦ προϋπολογισμοῦ οἰκονομικοῦ ἔτους 1963

Κατηγορίαι τακτικῶν ἐσόδων (1)	Ἀρχικά δεδομένα εἰς δραχμάς (2)	Στρογγυλευμένα στοιχεία εἰς δισεκατομμύρια δραχμῶν		
		(3)	(4)	(5)
* Ἀμεσοὶ φόροι . . . . .	2.833.621.513	2,8	2,8	2,8
* Ἐμμεσοὶ φόροι . . . . .	13.731.887.170	13,7	13,7	13,7
* Ἔσοδα ἐκ τῆς ἐπιχειρηματικῆς δράσεως τοῦ κράτους . . . .	1.569.975.024	1,6	1,6	1,6
Προσαυξήσεις, πρόστιμα, χρηματικά ποινὰ καὶ παράβολα . . . . .	305.463.361	0,3	0,3	0,3
Λοιπὰ τακτικά ἔσοδα . . . . .	1.540.767.907	1,5	1,6	1,5
Σύνολον τακτικῶν ἐσόδων	19.981.714.975	19,9	20,0	20,0

ται εἰς 19.981.714.975. Ἐάν στρογγυλεύσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς εἰς τὸ πλησιέστερον δέκατον τοῦ δισεκατομμυρίου, τὸ προκείμενον ἄθροισμα θὰ εἶναι 19,9 δισεκατ. δραχμῶν (βλ. στήλην (3)), ἤτοι κατὰ 0,1 δισεκατ. δραχ. μικρότερον τοῦ πραγματικοῦ τοῦ ὑπολογιζομένου ἐν τῶν ἀρχικῶν δεδομένων (19.981.714.975 ἢ περίπου 20,0 δισεκατ. δραχ.). Ἐν προκειμένῳ ἡ ἐπαυξάνεται εἰς τῶν στρογγυλευθέντων προσθετέων κατὰ 0,1 δισεκατ. δραχ., ὡς εἰς τὴν στήλην (4), ἢ οἱ προσθετέοι παραμένουν ἀμετάβλητοι, ἀλλὰ ὡς ἄθροισμα τίθεται τὸ στρογγυλευμένον ἄθροισμα τῶν ἀρχικῶν ἀριθμῶν, ὡς εἰς τὴν στήλην (5). Ὁ ὀρθὸς τρόπος παρουσιάσεως εἶναι ὁ ἀκολουθηθεὶς εἰς τὴν στήλην (5), παρά τὸ γεγονός ὅτι δὲν ἐμφανίζει συνέπειαν. Πάντως, ὡς ἐφαρμόζεται αὐτός εἶναι ἀπαραίτητον νὰ ἀναφέρεται σαφῶς ὅτι ἡ τοιαύτη ἔλλειψις συνεπελάς ὀφείλεται εἰς τὰς γενομένας στρογγυλεύσεις.

### 3. Κατηγορίαι διαθεσίμων στατιστικῶν καὶ χρησιμοποίησις αὐτῶν

Τὰ στατιστικά δεδομένα ἐξεταζόμενα ἀπὸ ἀπόψεως προελεύσεως διακρίνονται εἰς ἐσωτερικά καὶ ἐξωτερικά. Ἐσωτερικά στατιστικά στοιχεῖα μιᾶς ὑπηρεσίας, ἑνὸς ὀργανισμοῦ ἢ μιᾶς ἐπιχειρήσεως εἶναι τὰ ὑπ' αὐτῶν συλλεγόμενα, τὰ ὅποια ἐν συνεχείᾳ ὑποδιαφοῦνται εἰς τὰ προκύπτοντα ἐν τῆς λειτουργίας τῆς ὑπηρεσίας, τοῦ ὀργανισμοῦ ἢ τῆς ἐπιχειρήσεως καὶ εἰς τὰ συγκεντρούμενα κατόπιν διενεργείας εἰδικῶν στατιστικῶν ἐρευνῶν πρὸς τὸν σκοπὸν ἐξετάσεως εἰδικῶν θεμάτων. Τὸ Λογιστήριον μιᾶς ἐπιχειρήσεως εἶναι συνήθως εἰς θέσιν νὰ παράσχη ποικίλας στατιστικῆς πληροφορίας ἀναφορικῶς πρὸς τὸ κόστος τῶν προϊόντων, τὰς ἐπενδύσεις τῆς ἐπιχειρήσεως, τὰς πωλήσεις αὐτῆς κλπ. Ἐπίσης, ἡ Γραμματεία μιᾶς Ἀνωτάτης Σχολῆς, ὡς ἐν τῆς ἐφαρμογῆς ὀρισμένων νομίμων διαδικασιῶν, διαθέτει στατιστικά στοιχεῖα περὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν σπουδαστῶν τῆς κατ' ἔτος, τοῦ διδακτικοῦ προσωπικοῦ, τῶν ὥρων διδασκαλίας κλπ. Εἰς ἀμφότερα τὰ προαναφερθέντα παραδείγματα εἶναι φανερόν ὅτι ἡ συγκέντρωσις τῶν στατιστικῶν στοιχείων ἐπιτυγχάνεται ὄχι κατόπιν ἐνεργειῶν ἀποβλεπουσῶν ἀποκλειστικῶς καὶ μόνον εἰς τὴν στατιστικὴν ἐνημέρωσιν τῶν ἐνδιαφερομένων, ἀλλὰ διὰ ἀξιοποιήσεως ἀριθμητικῶν δεδομένων τῶν ὁποίων ἡ τήρησις ἐπιβάλλεται ἐξ ἄλλων λόγων. Ὡς πρὸς τὰς εἰδικὰς στατιστικὰς ἐρεύνας, διὰ τῶν ὁποίων ὡς ἀνωτέρω ἐλέχθη, καθίσταται δυνατὴ ἡ συλλογὴ στοιχείων μὴ προκείμενων ἐν τῆς συνήθους λειτουργίας μιᾶς ὑπηρεσίας, ἑνὸς ὀργανισμοῦ ἢ μιᾶς ἐπιχειρήσεως, ἡ φύσις καὶ ὁ τρόπος διεξαγωγῆς τῶν



ἐξετάζονται αὐτοτελῶς κατωτέρω, λόγῳ τῆς οὐσιώδους σημασίας αὐτῶν ὡς μέσων ταχεύας καὶ ἀκριβοῦς στατιστικῆς πληροφορήσεως.

Ἐξωτερικά στατιστικά στοιχεία ὡς πρὸς ὠρισμένην ὑπηρεσίαν, ὀργανισμόν ἢ ἐπιχείρησιν εἶναι τὰ λαμβανόμενα ἐκ πηγῶν εὐρισκομένων ἐκτός αὐτῶν. Εἰς τὴν ἐν λόγῳ κατηγορίαν περιλαμβάνονται ποικίλης φύσεως δεδομένα συγκεντρούμενα ὑπὸ δημοσίων ὑπηρεσιῶν, τραπεζῶν, ἐπιμελητηρίων, δημοσίων ἐπιχειρήσεων καὶ ὀργανισμῶν, κέντρων οἰκονομικῶν μελετῶν κλπ. Τὰ δεδομένα ταῦτα εἰς τὰς περισσότερας περιπτώσεις προκύπτουν ὡς ὑποπροϊόντα διοικητικῶν ἢ ἄλλων λειτουργῶν. Οὕτω, αἱ στατιστικαὶ ἀξίας καὶ ὄγκου εἰσαγωγῶν συγκεντροῦνται παρ' ἡμῖν ἐπ' εὐκαιρίᾳ τῆς εἰσπράξεως τῶν δασμῶν, αἱ στατιστικαὶ ὄγκου νέων οἰκοδομῶν προκύπτουν ἐκ τῶν παρεχομένων ἀδειῶν τῶν Πολεοδομικῶν Γραφείων κλπ. Τὰ στατιστικά στοιχεία τῶν κατηγοριῶν αὐτῶν, ὡς ἐκ τοῦ τρόπου συλλογῆς τῶν, δὲν ἀποτελοῦν πάντοτε κατάλληλα μέτρα τῶν μεγεθῶν εἰς τὰ ὁποῖα ἀναφέρονται, μολονότι κατὰ τὸ στάδιον τῆς ἐπεξεργασίας τῶν καταβάλλονται εἰς πολλὰς περιπτώσεις προσπάθειαι πρὸς προσαρμογὴν τῶν εἰς τὰς ἀνάγκας τῆς ἀναλύσεως.

Ὑπάρχουν, ὅμως, καὶ κατηγορίαι ἐξωτερικῶν στατιστικῶν, τῶν ὁποίων ἡ συγκέντρωσις σχεδιάζεται καὶ ἐκτελεῖται ἀνεξαρτήτως οἰασδῆποτε διοικητικῆς ἢ ἄλλης τινὸς λειτουργίας. Ἐν προκειμένῳ πρόκειται περὶ στοιχείων συλλεγομένων κατόπιν διεξαγωγῆς στατιστικῶν ἐρευνῶν παρομοίων πρὸς τὰς χρησιμοποιουμένας διὰ τὴν συλλογὴν ἐσωτερικῶν στατιστικῶν ἀναγκαιουσῶν διὰ τὴν μελέτην εἰδικῶν θεμάτων. Αἱ ἐν λόγῳ στατιστικαὶ ἐρευναι αἰ παρέχουσαι ἐξωτερικὰς στατιστικὰς ἐνεργοῦνται συνήθως ἐπὶ ἐθνικῆς κλίμακος καὶ ἔχουν γενικὸν χαρακτήρα. Αὗται δύνανται νὰ ἀφοροῦν εἰς τὸν πληθυσμὸν τῆς χώρας, τὴν βιομηχανίαν, τὴν γεωργίαν, τὴν κατανάλωσιν, τὰς οἰκιστικὰς συνθήκας κλπ. Λόγῳ τῆς ἐκτάσεως καὶ τῆς σημασίας τῶν, ἀλλὰ καὶ τῆς σοβαρᾶς δαπάνης ἣ ὅποια συνήθως ἀπαιτεῖται πρὸς διεξαγωγὴν τῶν, αἱ ἐν λόγῳ στατιστικαὶ ἐρευναι ἀναλαμβάνονται εἰς τὰς περισσότερας περιπτώσεις ὑπὸ τῶν ἀρμοδίων κρατικῶν ὑπηρεσιῶν, αἱ ὁποῖαι διαθέτουν τὴν κατάλληλον ὀργάνωσιν καὶ τὸ ἀναγκαῖον ἐπιστημονικὸν ἐπιτελεῖον.

Αἱ ἐξωτερικαὶ στατιστικαὶ περιέχονται εἰς περιοδικῶς ἢ ἐφ' ἄπαξ ἐκιδιδόμενα δημοσιεύματα, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν τὰς διαθεσίμους στατιστικὰς πηγὰς. Ὁρισμένα ἐκ τῶν δημοσιευμάτων αὐτῶν, ὡς π.χ. εἶναι παρ' ἡμῖν τὸ φέρον τὸν τίτλον "Ἐθνικοὶ Λογαριασμοὶ τῆς Ἑλλάδος" περιλαμβάνουν στατιστικὰ δεδομένα συγκεντρωθέντα ὑπὸ τῶν

ἐκδιδουσῶν ταῦτα ὑπηρεσῶν, ἐν προκειμένῳ τῆς Διευθύνσεως Ἐθνικῶν Λογαριασμῶν τοῦ Ὑπουργείου Συντονισμοῦ. Αἱ τοιαῦται πηγαὶ καλοῦνται "πρωτογενεῖς". Ἀλλαι στατιστικαὶ ἐκδόσεις ἀπλῶς ἀναδημοσιεύουν στοιχεῖα τὰ ὁποῖα ἔχουν ἤδη συγκεντρωθῆ ὑπὸ ἄλλων ὑπηρεσῶν ἢ ὀργανισμῶν καὶ δημοσιευθῆ εἰς πρωτογενεῖς πηγὰς. Αὗται καλοῦνται "δευτερογενεῖς" πηγαί. Οὕτω, ἡ Στατιστικὴ Ἐπιτηρὶς τῆς Ἑλλάδος, ἡ ὁποία ἐκδίδεται κατ' ἔτος ὑπὸ τῆς Ἐθνικῆς Στατιστικῆς Ὑπηρεσίας τῆς Ἑλλάδος εἶναι δευτερογενὴς πηγή διὰ κατηγορίας τινὰς στατιστικῶν στοιχείων περιεχομένων εἰς αὐτήν, ὡς εἶναι π.χ. τὰ ἀφορῶντα εἰς τοὺς ἐθνικοὺς λογαριασμοὺς καὶ τὰ νομισματικὰ μεγέθη, δεδομένου ὅτι ταῦτα συγκεντροῦνται ὑπὸ τοῦ Ὑπουργείου Συντονισμοῦ καὶ τῆς Τραπεζῆς τῆς Ἑλλάδος ἀντιστοίχως καὶ δημοσιεύονται ἀρχικῶς εἰς εἰδικὰς πρωτογενεῖς πηγὰς. Ἄν καὶ εἰς ὠρισμένας περιπτώσεις ἐνδέχεται νὰ εἶναι εὐχερεστέρα ἢ χρησιμοποίησις δευτερογενῶν πηγῶν, ἐν τούτοις, γενικῶς, δεόν νὰ καταβάλλεται προσπάθεια ὅπως τὰ ἀναγκαιῶντα στοιχεῖα λαμβάνωνται ἐκ πρωτογενῶν πηγῶν διὰ τοὺς κάτωθι λόγους : (α) Ἡ δευτερογενὴς πηγή εἶναι πιθανόν νὰ περιέχῃ σφάλματα γενόμενα κατὰ τὴν λήψιν τῶν στοιχείων ἐκ τῆς πρωτογενοῦς πηγῆς, (β) Ἡ πρωτογενὴς πηγή πολλάκις περιέχει ὀρισμούς, ἐπεξηγήσεις καὶ ἄλλας πληροφορίες περὶ τοῦ τρόπου συγκεντρώσεως τῶν στοιχείων, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀπαραίτητοι διὰ τὴν καλὴν χρῆσιν αὐτῶν καὶ (γ) Ἡ πρωτογενὴς πηγή συνήθως περιέχει τὰ στοιχεῖα μὲ μεγαλυτέραν ἀνάλυσιν.

Πρὸ πάσης χρησιμοποίησεως τῶν ἐσωτερικῶν ἢ ἐξωτερικῶν στατιστικῶν στοιχείων πρέπει νὰ ἐλέγχεται ἡ ἀξιοπιστία καὶ ἀκρίβεια αὐτῶν. Τοιοῦτος ἐλεγχος εἶναι πολὺ περισσότερο ἀναγκαῖος διὰ τὰ δεδομένα τὰ λαμβανόμενα ἐξ ἐξωτερικῶν πηγῶν, ἀνεξαρτήτως τοῦ ἂν αὗται εἶναι πρωτογενεῖς ἢ δευτερογενεῖς. Τὰ περιεχόμενα εἰς τὰς ἐν λόγω πηγὰς στοιχεῖα εἶναι ποικίλα, ὁ βαθμὸς, ὅμως, ἀκρίβειας διαφέρει μεταξύ τούτων, ἐξαρτώμενος κατὰ βάσιν ἐκ τῶν χρησιμοποιουμένων μεθόδων συγκεντρώσεως των. Βεβαίως λεπτομερειακὴ περιγραφή τῶν μεθόδων τούτων ἐνδέχεται νὰ μὴ παρέχεται ὑπὸ τῶν ὑπηρεσῶν ἢ ὀργανισμῶν τῶν ἐπιφορτισμένων μὲ τὴν συλλογὴν των. Ἐν τούτοις, ἀκόμη καὶ ἡ χρησιμοποίησις γενικῶν τινῶν πληροφορῶν περὶ τῶν ἀκολουθουμένων διαδικασιῶν καὶ τοῦ τρόπου ὀργανώσεως τῆς λήψεως τῶν στοιχείων δύναται εἰς πολλὰς περιπτώσεις νὰ ἀποτελέσῃ βάσιν κρίσεως τοῦ βαθμοῦ ἀξιοπιστίας των.

Ἐπιπροσθέτως, ὅταν λαμβάνωνται στοιχεῖα ἐξ ὠρισμένης στατιστικῆς πηγῆς καλύπτοντα χρονικὴν τινὰ περίοδον, εἶναι ἀναγκαῖον

νά ἐξετάζεται ἡ ὁμοιογένεια αὐτῶν. Εἰς περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν διαπιστωθῆ ὅτι ἔχει λάβει χώραν ἀλλαγὴ τῶν ὁρισμῶν ἢ οἰαδήποτε ἄλλη μεταβολή, δεόν ὅπως ἐνεργοῦνται αἱ ἀπαραίτητοι διορθώσεις ἢ ἔάν τοῦτο εἶναι ἐκ τῶν πραγμάτων ἀδύνατον, λαμβάνεται ἡ ὑπάρχουσα ἀνομοιογένεια ὑπ' ὄψιν κατὰ τὴν χρησιμοποίησιν τῶν στοιχείων πρὸς ἀποφυγὴν ἐξαγωγῆς ἐξ αὐτῶν ἐσφαλμένων συμπερασμάτων. Ἐπίσης, ὅταν διὰ τὸ αὐτὸ μέγεθος χρησιμοποιοῦνται στοιχεῖα ἐκ δύο ἢ περισσοτέρων πηγῶν, ἐκτός τῆς ὁμοιογενείας τῶν ἐξ ἐκάστης πηγῆς προερχομένων δεδομένων, πρέπει νά ἐξετάζεται καὶ ἡ μεταξὺ τῶν συγκρισιμότης. Ἐλλειψις συγκρισιμότητος δύναται νά ὀφείλεται εἰς διαφόρους λόγους, ὡς π.χ. εἰς διαφορὰς εἰς τοὺς χρησιμοποιουμένους ὁρισμούς, εἰς τὰς μεθόδους συγκεντρώσεως τῶν στοιχείων, εἰς τὴν χρονικὴν ἢ γεωγραφικὴν κάλυψιν αὐτῶν κλπ.

#### 4. Διαδικασία καὶ μέθοδοι διεξαγωγῆς στατιστικῶν ἐρευνῶν

Ὡς ἀνωτέρω ἐλέχθη, διὰ τῶν στατιστικῶν ἐρευνῶν ἐπιδιώκεται ἡ συγκέντρωσις ποσοτικῶν πληροφοριῶν ἐπὶ εἰδικῶν θεμάτων, διὰ τὰ ὁποῖα δέν ὑπάρχουν διαθέσιμοι στατιστικά. Τὰ θέματα ταῦτα δύνανται νά εἶναι οἰαδήποτε φύσεως, ὡς οἰκονομικά, κοινωνικά, δημογραφικά, διοικητικά κλπ., ἢ ἐπ' αὐτῶν δέ ἐνημέρωσις τῶν ἐνδιαφερομένων διὰ χρησιμοποίησεως τῶν ἀποτελεσμάτων τῶν στατιστικῶν ἐρευνῶν βοηθεῖ μεγάλως εἰς τὴν λήψιν ὀρθῶν ἀποφάσεων. Σημειωτέον ὅτι πολλαὶ στατιστικαὶ ἐρευναι δέν περιορίζονται εἰς καθαρῶς περιγραφικοὺς σκοπούς, ἀλλὰ ἐπιδιώκουσιν ὅπως ἐρμηνεύσουσιν καὶ ἀναλύσουσιν εἰδικὰς καταστάσεις ἢ γενικώτερον ἐλέγξουσιν τὴν εἰς τὰ πράγματα ἀνταπόκρισιν ἢ μὴ ὠρισμένης θεωρίας.

Ἡ διεξαγωγή μιᾶς στατιστικῆς ἐρεύνης ἀπαιτεῖ σειράν ἐνεργειῶν αἱ ὁποῖαι διὰ νά ἀποδώσουσιν τὸ ἄριστον ἀποτέλεσμα δεόν νά ἔχουν ἐκ τῶν προτέρων ἐν ἀρχῇ εἰς ἓν πλήρες σχέδιον δράσεως. Βασικῆς σημασίας ὅρος διὰ τὴν ἐπιτυχίαν μιᾶς τοιαύτης προσπάθειας εἶναι ἡ πλήρης γνῶσις τῆς χρήσεως διὰ τὴν ὁποίαν προορίζονται τὰ συγκεντρωθησόμενα δεδομένα. Ἐξ αὐτῆς ἐξαρτᾶται καὶ ὁ ὁρισμὸς τοῦ πρὸς μέτρησιν χαρακτηριστικοῦ, ὁ ὁποῖος δεόν νά διατυποῦται ἐπακριβῶς, ὥστε νά μὴ δημιουργοῦνται ἀμφιβολαὶ ὡς πρὸς τὸ ἐάν ὠρισμένοι περιπτώσεις καλύπτονται ἢ ὄχι ὑπὸ τῆς ἐρεύνης. Ἐπὶ παραδείγματι, εἰς στατιστικὴν ἐρευναν ἐπὶ τῶν ἀμοιβῶν τῶν βιομηχανικῶν ἐργατῶν θά πρέπει νά ἀποσαφηνίζεσθαι ἐάν αὕτη ἀφορᾷ μόνον εἰς τὰ καταβαλλόμενα ἡμερομίσθια ἢ εἰς τὸ σύνολον τῶν ἐργα-

τικῶν ἀπολαβῶν, ἐάν εἰς τὰς τελευταίας περιλαμβάνονται αἱ ὑπερῶσαι, αἱ παροχαὶ εἰς εἶδος κλπ. Ἐπὶ πλέον, τὸ πεδῖον τῆς στατιστικῆς ἐρεύνης δεόν νά καθορίζεται μέ ὅσην εἶναι δυνατόν μεγαλύτεραν ἀκρίβειαν. Οὕτω, εἰς τὸ ἀνωτέρω χρησιμοποιηθὲν παράδειγμα εἶναι ἀναγκαῖον νά προσδιορισθῶν ἐξ ἀρχῆς οἱ συγκεκριμένοι βιομηχανικοὶ κλάδοι τοὺς ὁποῖους θά περιλάβῃ ἡ ἔρευνα ἐπὶ τῶν ἐργατικῶν ἀμοιβῶν. Πέραν τούτων, κατὰ τὸν προγραμματισμὸν μιᾶς στατιστικῆς ἐρεύνης εἶναι ἀπαραίτητον νά λαμβάνωνται ὑπ' ὄψιν τόσον ἡ ἀπαιτουμένη ἀκρίβεια τῶν στοιχείων ὅσον καὶ ἡ προθεσμία ἐντός τῆς ὁποίας ταῦτα θά πρέπει νά ἔχουν συγκεντρωθῆ, δεδομένου ὅτι ἡ ταχύτης συλλογῆς τῶν δεδομένων ἔχει εἰς ὠρισμένας περιπτώσεις μεγαλύτεραν σημασίαν ἀπὸ τὴν ἀκρίβειάν των.

Ἀπὸ πλευρᾶς καλύψεως τοῦ μελετωμένου πληθυσμοῦ ὑπάρχει κατ' ἀρχὴν ἡ δυνατότης λήψεως τῶν ἀναγκαιουσῶν ποσοτικῶν πληροφοριῶν ἐξ ὅλων τῶν μονάδων αὐτοῦ, ὁπότε ἡ διεξαγομένη ἔρευνα λαμβάνει τὴν μορφήν τῆς ἀπογραφῆς, ὡς εἶναι παρ' ἡμῖν ἡ ἀνά δεκαετίαν διενεργουμένη ὑπὸ τῆς Ἑθνικῆς Στατιστικῆς Ὑπηρεσίας τῆς Ἑλλάδος καὶ ἡ ὁποία ἀφορᾷ εἰς δημογραφικὰ καὶ ἄλλα χαρακτηριστικά τοῦ πληθυσμοῦ τῆς χώρας. Ἐν τούτοις, μιᾶ στατιστικῆς ἔρευνας εἶναι δυνατόν νά στηριχθῆ, ὄχι ἐπὶ ὅλων τῶν μονάδων τοῦ πληθυσμοῦ, ἀλλὰ ἐπὶ ἑνὸς δείγματος αὐτῶν, ἐπιλεγομένου δι' ἐφαρμογῆς τῶν καταλλήλων στατιστικῶν τεχνικῶν. Ἡ χρησιμοποίησις δειγμάτων εἶναι εὐρύτατα διαδεδομένη, διότι οἱ ὑπὸ μελέτην πληθυσμοὶ εἶναι συνήθως ἐκτεταμένοι ὥστε ἐκ τῶν πραγμάτων νά καθίσταται ἀδύνατος ἡ ἐφαρμογὴ τῆς ἀπογραφικῆς μεθόδου, ἡ ὁποία, ὡς εἶναι εὐνόητον, ἀπαιτεῖ πολὺ περισσότερον χρόνον, προσωπικόν καὶ μεγαλύτεραν δαπάνην. Βεβαίως, ὅταν πρόκειται περὶ τῆς ἐξετάσεως ἑνὸς σχετικῶς μικροῦ πληθυσμοῦ, π.χ. τῶν 500 ἐργατῶν ἑνὸς ἐργοστασίου, αἱ ὑπάρχουσαι δυσχέρειαι δέν δύναται νά θεωρηθῶν ὡς ἀνυπερβλήτοι, εἰς τὰς περιπτώσεις δὲ αὐτὰς ἡ ὑπὸ τοῦ δείγματος κάλυψις ὅλων τῶν μονάδων τοῦ πληθυσμοῦ εἶναι ἐπιτητή. Δέον, ἐν τούτοις, νά ληφθῆ ὑπ' ὄψιν ὅτι, ἀκόμη καὶ ὅταν ἐξασφαλίζονται τὰ οἰκονομικὰ μέσα πρὸς ἀπογραφικὴν ἐξέτασιν τῶν 500 ἐργατῶν, ἐνδέχεται ἡ διάθεσις τῶν πόρων τούτων νά μὴ δικαιολογῆται ἐκ τοῦ ἐπιδιωκόμενου σκοποῦ. Ἡ σύγχρονος τεχνικὴ τῆς δειγματοληψίας παρέχει τὴν δυνατότητα προσδιορισμοῦ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μονάδων αἱ ὁποῖαι δεόν νά περιληφθῶν εἰς τὸ δεῖγμα προκειμένου νά προκύψουν ἀποτελέσματα μέ δεδομένην ἀκρίβειαν. Κατὰ ταῦτα, ἐάν ἐξ ἑνὸς τοιούτου ὑπολογισμοῦ ἤθελε προκύψει ὅτι τὸ δεῖγμα ἀπαιτεῖ

ται ὅπως περιλάβῃ 500 ἐργάτας, τότε, βεβαίως, ἡ ἀπογραφικὴ μέθοδος θὰ ἦτο ἡ ἐνδεδειγμένη. Συνήθως, ὅμως, γίνεται χρῆσις σχετικῶς ὀλιγοπληθῶν δειγμάτων. Ἐφ' ὅσον ἡ ἐπιλογή των ἐνεργεῖται κατὰ τυχαῶν τρόπον, τὰ ἐξ αὐτῶν προκύπτοντα στατιστικὰ δεδομένα δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὅτι ἀφοροῦν καὶ εἰς ὀλόκληρον τὸν πληθυσμὸν μὲ ὠρισμένον, βεβαίως, περιθώριον σφάλματος. Οὕτω, ἀνεξαρτήτως ἄλλων πρακτικῶν πλεονεκτημάτων ἀναφερομένων εἰς τὴν ἐξοικονόμησιν χρόνου καὶ δαπάνης, αἱ ἐπὶ δειγμάτων στηριζόμεναι στατιστικαὶ ἔρευναι δέν ἀποκλείεται ὑπὸ ὠρισμένας συνθήκας νὰ παρέχουν ἀποτελέσματα ἀκριβέστερα καὶ τῶν προκυπτόντων ἐκ πλήρους ἀπογραφῆς.

Ἡ βασικὴ ἀρχὴ ἐπὶ τῆς ὁποίας στηρίζεται ἡ χρησιμοποίησις δειγματος πρὸς λήψιν στατιστικῶν πληροφοριῶν εἶναι ὅτι εἰς ἀριθμὸς μονάδων, λαμβανόμενος τυχαίως ἐξ ἐνὸς πληθυσμοῦ, τείνει νὰ παρουσιάσῃ τὰ χαρακτηριστικὰ αὐτοῦ τοῦτου τοῦ πληθυσμοῦ ἢ, κατ' ἄλλην διατύπωσιν, νὰ ἀποτελῇ σμικρογραφίαν αὐτοῦ. Ἡ τυχαία ἐπιλογή τοῦ δειγματος ἔχει τὴν ἔννοιαν ὅτι οἰαδήποτε μόνος τοῦ πληθυσμοῦ ἔχει δεδομένην πιθανότητα νὰ περιληφθῇ εἰς τὸ δεῖγμα. Θὰ πρέπει, ἐν τούτοις, νὰ διευκρινισθῇ ὅτι διὰ τῆς τυχαίας ἐπιλογῆς, ἐπιτυγχάνεται μὲν ἡ λήψις ἀμερολήπτων ἐπιτηρήσεων τῶν ποσοτικῶν ἰδιωτήτων τοῦ πληθυσμοῦ, οὐδόπως, ὅμως, ἐξασφαλίζεται καὶ ὁ ἀντιπροσωπευτικὸς χαρακτήρ τοῦ δειγματος, ἰδίᾳ ὅταν ὁ πληθυσμὸς περιλαμβάνει τμᾶς μὲ ὑψηλὸν βαθμὸν μεταβλητικότητος. Γενικῶς, δύνανται νὰ λεχθῇ ὅτι ἐπὶ "τυχαίας δειγματοληψίας", ὅσον μεγαλύτερον εἶναι τὸ δεῖγμα ἐπὶ τοσοῦτον θὰ ὁμοιάζῃ τοῦτο πρὸς τὸν πληθυσμὸν ἐκ τοῦ ὁποίου προέρχεται.

Ἡ ἐπιλογή τοῦ δειγματος ἐνεργεῖται κατὰ τυχαῶν τρόπον, μόνον ὅταν εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς ἀνθρωπίνης κρίσεως. Τοιαύτη ἀνεξαρτησία δύναται νὰ ἐξασφαλισθῇ διὰ χρησιμοπορήσεως εἴτε κληρωτῆδος εἴτε πινάκων τυχαίων ἀριθμῶν. Κατὰ τὴν πρώτην μέθοδον, διὰ τὰς ἐπιμέρους μονάδας τοῦ πληθυσμοῦ κατασκευάζονται κλήροι, οἱ ὅποιοι τοποθετοῦνται ἐντὸς κληρωτῆδος. Κατόπιν καλῆς ἀναμίξεως τῶν ἐξάγεται δεῖγμα, μετὰ ἢ ἄνευ ἀντικαταστάσεως, τὸ μέγεθος τοῦ ὁποίου ἔχει προσδιορισθῇ ἐκ τῶν προτέρων. Κατὰ τὴν ἑτέραν μὲν ἢ τάξις τῶν ὁποίων ἔχει, δηλαδή, προκίψει ἐκ τινος μηχανικῆς διαδικασίας ἄνευ ἀναμίξεως τῆς ἀνθρωπίνης κρίσεως. Μετὰ τὴν ἀρθρωσὶν ὅλων τῶν μονάδων τοῦ πληθυσμοῦ ἐπιλέγεται ἀριθμὸς τις ἐξ αὐτῶν διὰ χρησιμοπορήσεως τυχαίων ἀριθμῶν λαμβανομένων καθ' οἷαν-

δηποτε σειράν (κατακορύφως ή όριζοντίως) έν τών σχετικών πινάκων. Σχετικόν παράδειγμα παρέχεται είς τόν Πίνακα Α-3, είς τόν όποιον οί θετικοί άκέραιοι άριθμοί από 0 μέχρι 9 έμφανίζονται μέ τήν ίδίαν περίπου συχνότητα. Σημειωτέον ότι όταν οί άριθμοί ούτοι λαμβάνωνται ανά δύο προκύπτουν άριθμοί από 00 μέχρι 99, όταν λαμβάνωνται ανά τρεΐς προκύπτουν άριθμοί από 000 μέχρι 999 κ.ο.κ.

Παραλλαγήν τής άνωτέρω περιγραφείσης τυχαίας δειγματοληψίας άποτελεΐ ή λεγομένη "συστηματική δειγματοληψία", κατά τήν όποίαν, έάν π.χ. έν πληθυσμύ 1.000 έργατών ήριθμημένων είς κατάλογον πρόκειται νά έπιλεγή δείγμα έξ 100, προσδιορίζεται κατ' άρχήν κατά τυχαϊών τρόπον είς άριθμός μεταξύ 1 καί 10, έστω ό 8, κατόπιν δε μέ άρχήν τόν άριθμόν 8 λαμβάνεται έν τού καταλόγου διδοχικώς ό έργάτης ό εύρισκόμενος 10 θέσεις κατόπιν, ήτοι μετά τόν 8ον, ό 18ος, ό 28ος, ό 38ος, ό 48ος κλπ. 'Η έν λόγω διαδικασία έπιλογής τού δείγματος δέν είναι κατ'ούσίαν τυχαία, διά τούτο καί άποκαλεΐται συνήθως "οΐωνεί τυχαία δειγματοληψία". 'Εν τούτοις καί αύτη δύναται νά άποβή έξ ίσου άποτελεσματική μέ τήν τυχαίαν, έφ' όσον ή χρησιμοποιουμένη κατάταξις τών μονάδων τού πληθυσμού δέν

**Πίναξ Α - 3**  
Τυχαίοι άριθμοί (α)

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
1	78994	36244	02673	25475	84953
2	04909	58485	70686	93930	34880
3	46582	73570	33004	51795	86477
4	29242	89792	88634	60285	07190
5	68104	81339	97090	20601	78940
6	17156	02182	82504	19880	93747
7	50711	94789	07171	02103	99057
8	39449	52409	75095	77720	39729
9	75629	82729	76916	72657	58992
10	01020	55151	36132	51971	32155

(α) Οί άριθμοί ούτοι έλήφθησαν έκ πινάκων κατασκευασθέντων υπό τών H. Burke Horton καί R. Tynes Smith πρός χρήση υπό τού Bureau of Transport Economics and Statistics, Interstate Commerce Commission (βλ. Ya - Lun Chou, « Applied Business and Economic Statistics », Holt, Rinehart and Winston, New York, 1963, σελ. 363).

είναι συστηματική καὶ ἐν πάσῃ περιπτώσει ἡ τάξις καθ' ἣν καθορίζονται αἱ μονάδες τοῦ δείγματος δέν συντελεῖ εἰς μεροληπτικὴν ἐπιλογὴν αὐτῶν.

Ὡς ἔχει ἤδη λεχθῆ, ἀκόμη καὶ ἡ ἀπλὴ τυχαία δειγματοληψία δέν ἐξασφαλίζει πάντοτε ἱκανοποιητικὸν βαθμὸν ἀκριβείας εἰς τὰς ἐξ αὐτῆς προκυπτούσας ἐκτιμήσεις. Ἐκτός τῆς αὐξήσεως τοῦ μεγέθους τοῦ δείγματος, ἕτερος τρόπος ἀντιμετωπίσεως τοῦ ἐν λόγῳ προβλήματος εἶναι ἡ λεγομένη "στρωματοποίησης". Αὕτη κατ' οὐσίαν συνίσταται εἰς τὴν χρησιμοποίησιν πληροφοριῶν, ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὴν δομὴν τοῦ πληθυσμοῦ ἀπὸ πλευρᾶς βασικῶν χαρακτηριστικῶν, πρὸς τὸν σκοπὸν αὐξήσεως τῆς ἀκριβείας καὶ τῆς ἀντιπροσωπευτικότητος τοῦ δείγματος. Οὕτω, εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ δείγματος τῶν βιομηχανικῶν ἐργατῶν τοῦ ἀπαιτουμένου πρὸς ἐξέτασιν τῶν ἀμοιβῶν των, ἐάν ὑποτεθῆ ὅτι εἶναι γνωστὸν ὅτι εἰς τὸν πληθυσμὸν τὸ 30% εἶναι θῆλεις, σκόπιμον θὰ ἦτο νὰ στρωματοποιηθῆ τοῦτο κατὰ φύλον, εἰς τρόπον ὥστε αἱ περιληφθησόμεναι θῆλεις νὰ ἀποτελοῦν, ὡς καὶ εἰς τὸν πληθυσμὸν, τὸ 30% τοῦ συνόλου. Ἔτεροι παράγοντες στρωματοποιήσεως θὰ ἠδύνατο εἰς τὴν ἐξεταζομένην περίπτωσην νὰ εἶναι ὁ βαθμὸς ἐξειδικεύσεως, ἡ ἡλικία κλπ. Πάντως, ἡ στρωματοποίησις δέν σημαίνει ἀπομάκρυνσιν ἐκ τῆς ἀρχῆς τῆς τυχαίας ἐπιλογῆς. Κατ' αὐτὴν ὁ πληθυσμὸς διαχωρίζεται εἰς στρώματα, κατόπιν δέ ἐξ ἐκάστου στρώματος ἐπιλέγεται τὸ ἀνάλογον δείγμα κατὰ τυχαῖον τρόπον. Ἐπομένως, ἡ στρωματοποίησις ἀποτελεῖ βελτίωσιν τῆς ἀπλῆς τυχαίας δειγματοληψίας, δεδομένου ὅτι καθιστᾷ περισσότερον πιθανὴν τὴν ἀντιπροσώπευσιν εἰς τὸ δείγμα τῶν ἐπὶ μέρους τμημάτων τοῦ πληθυσμοῦ.

Ὅλαι αἱ ἀνωτέρω περιγραφεῖσαι μέθοδοι δειγματοληψίας φέρουν τὸν χαρακτήρα τοῦ τυχαίου, ὡς ἐκ τοῦ ὁποῦ ἐκαστὴ μονάδα τοῦ πληθυσμοῦ ἔχει ὠρισμένην πιθανότητα ἐπιλογῆς τῆς εἰς τὸ δείγμα. Ὑπάρχει, ἐν τούτοις, καὶ ἡ μέθοδος τῆς κατευθυνομένης δειγματοληψίας, ἡ ὁποία, κατ' ἀντιδιαστολὴν πρὸς τὰς προηγουμένας, δέν στηρίζεται ἐπὶ τυχαίας ἐπιλογῆς τῶν μονάδων τοῦ δείγματος.

Ἡ κατευθυνομένη δειγματοληψία εἶναι κατ' οὐσίαν μία μέθοδος στρωματοποιημένης δειγματοληψίας, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ἐπιλογή τῶν μονάδων τοῦ δείγματος ἐκ τῶν ἐπὶ μέρους στρωμάτων ἐνεργεῖται κατὰ μὴ τυχαῖον τρόπον. Κατ' αὐτὴν τὸ δείγμα π.χ τῶν 100 ἐργατῶν θὰ πρέπει νὰ ληφθῆ κατὰ τοιοῦτον τρόπον ὥστε αἱ ἀναλογαὶ ἀρρένων καὶ θηλέων, τῶν διαφόρων τάξεων ἡλικιῶν, εἰδικότητων κλπ. εἰς τὸν πληθυσμὸν νὰ ὑπάρχουν ὁμοίως, εἰ δυνα-

τόν, καί εἰς τό δεῖγμα. Μετά τόν προσδιορισμόν τοῦ μεγέθους τῶν ἐπί μέρους τμημάτων τοῦ δείγματος, αἱ συγκεκριμέναί μονάδες τούτου ἐπιλέγονται ὑπό τῶν ἐρευνητῶν, ἐνῶ εἰς τήν στρωματοποιημένην τυχαίαν δειγματοληψίαν αὐταί καθορίζονται ἐν τῶν προτέρων. Ἡ κατευθυνομένη δειγματοληψία παρουσιάζει ὀρισμένα οὐσιώδη πλεονεκτήματα ἔναντι τῆς τυχαίας, κυρίως ἀπό ἀπόψεως οἰκονομίας, ταχύτητος κλπ. Προϋποθέτει, ὅμως, ἀκριβῆ γνώσιν τῆς συνθέσεως τοῦ πληθυσμοῦ καί ἐνέχει πάντοτε τόν κίνδυνον τοῦ μεροληπτικοῦ προσδιορισμοῦ τοῦ δείγματος, ἐφ' ὅσον ἡ ἐντός τῶν στρωμάτων ἐπιλογή τῶν μονάδων δέν λαμβάνει χώραν κατά τυχαῖον τρόπον, ἀλλά στηρίζεται εἰς τήν κρίσιν τῶν ἐρευνητῶν.

Ἡ λήψις τῶν ποσοτικῶν πληροφοριῶν ἐν τῶν καθ' οἷονδῆποτε τρόπον ἐπιλεγειῶν μονάδων τοῦ δείγματος, ἢ καί ἐξ ὀλοκλήρου τοῦ πληθυσμοῦ ἐν περιπτώσει ἀπογραφῆς, γίνεται διά χρησιμοποίησιν ἐρωτηματολογίου, εἰς τό ὁποῖον ἀναγράφεται ὑπό τύπον ἐρωτήσεων ἡ φύσις τῶν ζητουμένων στοιχείων. Ἡ διατύπωσις τῶν ἐρωτήσεων τούτων δέον νά εἶναι ἀρκούντως σαφῆς, ὥστε νά μή δημιουργοῦνται ἀμφιβολαί περὶ τῆς ἀκριβοῦς ἐννοίας των. Πρὸς διευκόλυνσιν τῶν ἐρωτωμένων σκόπιμον εἶναι ὅπως τό ἐρωτηματολόγιον συνοδεύεται ἀπό ὀδηγίας περὶ τοῦ τρόπου συμπληρώσεως, ὡς καί διευκρινήσεις ὅσον ἀφορᾷ εἰς τό περιεχόμενον ὀρισμένων ἐπιστημονικῶν ὄρων οἱ ὁποῖοι ἐνδέχεται νά χρησιμοποιοῦνται εἰς τό κείμενον. Μολονότι τά διά τήν ἐξέτασιν θεματός τινος ἀπαιτούμενα ἐρωτήματα εἶναι συνήθως πολλά, ἐνδείκνυται ὅπως ὁ ἀριθμός των μή ὑπερβαίνει ὀρισμένα ὄρια, διότι, ἄλλως, ὑπάρχει κίνδυνος λήψεως ὀλως ἀνακριβῶν ἀπαντήσεων. Γενικῶς, κατά τήν σύνταξιν τοῦ ἐρωτηματολογίου δέον νά καταβάλλεται πᾶσα προσπάθεια, ὥστε τοῦτο νά ἐμφανίζῃ ἀπλότητα, συστηματικότητα, καί σαφήνειαν, διότι δέν πρέπει νά λησμονῆται ὅτι οἱ παράγοντες οὗτοι προσδιορίζουν συνήθως εἰς σημαντικόν βαθμόν τήν ἀποτελεσματικότητα τῆς ὅλης στατιστικῆς ἐρεῦνης.

Τό ἐπί τῇ βάσει τῶν ἀνωτέρω ἀρχῶν καταρτιζόμενον ἐρωτηματολόγιον τίθεται ὑπ' ὄψιν τῶν προσώπων τά ὁποῖα περιλαμβάνονται εἰς τό ἐπιλεγέν δεῖγμα, ἵνα συμπληρωθῇ καταλλήλως ὑπ' αὐτῶν. Ἡ χρησιμοποίησις τῆς ταχυδρομικῆς ὑπηρεσίας διά τήν ἀποστολήν τοῦ ἐρωτηματολογίου καί τήν ἐν συνεχείᾳ ἐπιστροφήν αὐτοῦ συμπληρωμένου δέν ἐνδείκνυται ἐν προκειμένῳ, λόγῳ τοῦ κινδύνου ὁ ὁποῖος ὑπάρχει νά μή σταλοῦν ἀπαντήσεις ὑπό



σημαντικοῦ ἀριθμοῦ ἀτόμων. Πρὸς ἀντιμετώπισιν τοῦ ἐνδεχομένου ἀρνήσεως συνεργασίας εἰς τὴν διεξαγομένην στατιστικὴν ἔρευναν ἐκ μέρους μεγάλου ἀριθμοῦ προσώπων ἐκ τῶν περιλαμβανομένων εἰς τὸ δείγμα, χρησιμοποιοῦνται συνήθως εἰδικοί ἐρευνηταί, οἱ ὁποῖοι διὰ τὴν συγιέντρωσιν τῶν στατιστικῶν δεδομένων ἐνεργοῦν προσωπικὰ ἐπισκέψεις. Κατ' αὐτὰς δίδεται, ἐπιπλέον, ἡ εὐκαιρία ὅπως παρασχεθοῦν διευκρινήσεις ἐπὶ ὠρισμένων ἐρωτήσεων αἱ ὁποῖαι δὲν εἶναι ὅσον θὰ ἔπρεπε σαφεῖς. Ἐν τούτοις, εἶναι ἀνάγκη ὅπως λαμβάνεται μέριμνα, ὥστε ἐκ τῶν παρεμβάσεων τούτων τῶν ἐρευνητῶν νὰ μὴ δημιουργῆται καθ' οἷόνδε ποτε τρόπον συστηματικὸν σφάλμα εἰς τὰ συγκεντρούμενα σταθεῖα. Διὰ τοῦτο, τὰ χρησιμοποιούμενα πρὸς λήψιν τῶν στατιστικῶν δεδομένων πρόσωπα δεόν νὰ ἔχουν σχετικὴν πείραν καὶ νὰ ἔχουν προηγουμένως ὑποστῆ κατάλληλον ἐκπαίδευσιν.

Τὰ ἐρωτηματολόγια συμπληροῦνται εἴτε ὑπὸ τῶν ἰδίων τῶν ἀτόμων τῶν συνεργαζομένων εἰς τὴν ἔρευναν εἴτε ὑπὸ τῶν ἐρευνητῶν ἐπὶ τῇ βάσει τῶν πρὸς αὐτοὺς διδομένων προφορικῶν ἀπαντήσεων ἐκ μέρους τῶν ἐρωτωμένων. Αἱ συγκεντρούμεναι ἀπαντήσεις ὑπόκεινται ἐν συνεχείᾳ εἰς ἔλεγχον ἀπὸ ἀπόψεως συνεπειᾶς καὶ πληρότητος. Τὰ ἐκ τῆς σχετικῆς ἐξετάσεως προκύπτοντα σφάλματα ἢ κενὰ εἰς τὰς ἐπὶ μέρους ἀπαντήσεις δύνανται νὰ διορθωθοῦν καὶ συμπληρωθοῦν εἴτε δι' ἀναδρομῆς ἐκ νέου εἰς τὸν συμπληρώσαντα τὸ ἐρωτηματολόγιον εἴτε, ἐάν τοῦτο εἶναι ἐκ τῶν πραγμάτων ἀδύνατον, ἐπὶ τῇ βάσει τῶν λοιπῶν πληροφορικῶν τῶν παρασχεθειῶν ὑπὸ τοῦ ἰδίου τοῦ ἐρευνημένου. Ἡ τελικὴ ἐπεξεργασία τῶν δεδομένων, ἐφ' ὅσον πρόκειται περὶ πολυαριθμῶν παρατηρήσεων, γίνεται διὰ χρησιμοποίησεως καταλλήλων μηχανῶν ἄλλως διὰ τῆς χειρὸς, ἀκολουθεῖ δὲ ἡ παρουσίασις τοῦ συγκεντρωθέντος στατιστικοῦ ὕλικου προκειμένου τοῦτο νὰ χρησιμοποιηθῆ πρὸς μελέτην καὶ ἀνάλυσιν τοῦ εἰδικοῦ θέματος εἰς τὸ ὁποῖον ἀναφέρεται.

#### ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

##### Αἱ Ἑλληνικαί

1. Ἀθανασιάδου, Κ., "Στατιστικὴ", 2ος τόμος, Ἀθήναι, 1957, σελ. 8 - 39.
2. Παπαδόπουλος, "Στατιστικὴ", Ἀθήναι, 1957, σελ. 29 - 287.

Β. Έξυη

1. Allen, R.G.D., "Statistics for Economists", Hutchinson University Library, London (Tenth Impression), 1960, σελ. 10-16 καί 67-76. Μετάφρασις εἰς τήν Ἑλληνικὴν ὑπὸ Κ. Ἀθανασιάδου ὑπὸ τὸν τίτλον "Στατιστικὴ", Ἀθήναι, 1955, σελ. 6 - 13 καί 63 - 72.
2. Budin, E., "Statistical Measurements for Economics and Administration", Asia Publishing House, London, 1962, σελ. 14 - 53.
3. Connor, L.R. and Morrell, A.J.H., "Statistics in Theory and Practice - With Special Reference to Published Statistics", Sir Isaac Pitman and Sons Ltd, London, 1964, σελ. 4 - 8, 13 - 23 καί 30 - 34.
4. Croxton, F.E. and Cowden, D.J., "Applied General Statistics", Sir Isaac Pitman and Sons Limited, London (Second Edition), 1960, σελ. 15 - 49.
5. Hays S., "An Outline of Statistics", Longmans, Green and Co, London, New York, Toronto, 1956, σελ. 6 - 23.
6. Ilersic, A.R., "Statistics", H.F.L. (Publishers) Ltd, London (Twelfth Edition), 1959, σελ. 10 - 34.
7. Karmel, P.H., "Applied Statistics for Economists - A Course in Statistical Methods", Melbourne, Sir Isaac Pitman and Sons Ltd (Second Edition), 1963, σελ. 13 - 23.
8. Moser, C. A., "Survey Methods in Social Investigation", William Heinemann Ltd, Melbourne, London, Toronto, 1958.
9. Thirkettle, G.L., "Wheldon's Business Statistics and Statistical Method", Macdonald and Evans Ltd, London, 1962, σελ. 5 - 36.
10. Wessel, R.H. and Willett, E.R., "Statistics as Applied to Economics and Business", Henry Holt and Company, New York 1959, σελ. 7 - 31.
11. Yates, F., "Sampling Methods for Censuses and Surveys", Charles Griffin and Company Limited, London, 1953.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

### ΤΟ ΕΛΛΗΝΙΚΟΝ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΝ ΣΥΣΤΗΜΑ

#### 1. Έννοια τοῦ στατιστικοῦ συστήματος

Τά συγκεντρούμενα στατιστικά στοιχεῖα διά τās ἐπὶ μέρους οἰκονομικὰς δραστηριότητας εἰς μίαν χώραν συνιστοῦν ἐν τῷ συνόλω των τό στατιστικόν σύστημα αὐτῆς, τό ὁποῖον εἶναι διαθέσιμον τόσον εἰς τās οἰκονομικὰς ἀρχάς, τās κρατικὰς ὑπηρεσίας καὶ ὀργανισμούς ὅσον καὶ εἰς τοὺς ἰδιώτας πρὸς ἀντλήσιν ποσοτικῶν πληροφοριῶν. Εἰς ὠρισμένας περιπτώσεις τὰ ὑπὸ κρατικῶν ὑπηρεσιῶν ἢ ἰδιωτικῶν ὀργανισμῶν συλλεγόμενα στοιχεῖα δὲν προσφέρονται πρὸς γενικὴν χρῆσιν εἴτε διότι εἶναι ἐμπιστευτικοῦ χαρακτῆρος εἴτε διότι ἡ ἐπεξεργασία των παρατείνεται ἐπὶ μακρόν. Ἡ κατηγορία αὐτῆ στατιστικῶν στοιχείων, ὡς μὴ διαθέσιμος εἰς τόν εὐρύτερον κύκλον τῶν ἐνδιαφερομένων, δὲν θεωρεῖται ὅτι περιλαμβάνεται εἰς τό στατιστικόν σύστημα.

Ἡ καθ' ὠρισμένον χρόνον διαμόρφωσις τοῦ στατιστικοῦ συστήματος μιᾶς χώρας προσδιορίζεται γενικῶς, ἀφ' ἑνὸς μὲν ἀπὸ τῆν ὑφισταμένην ζήτησιν στατιστικῶν στοιχείων, ἀφ' ἑτέρου δὲ ἀπὸ τῆν ὑπαρξιν ἢ μὴ τῶν συνθηκῶν ἐκεῖνων αἰδιποῖαι ἀπαιτοῦνται ὥστε νά καθαστῆ δυνατὴ ἡ κάλυψις τῆς ζητήσεως αὐτῆς.

Ἡ ἐντασις τῆς ζητήσεως στατιστικῶν στοιχείων ἐξαρτᾶται ἀπὸ τῆς ἀρχῆς ἐκ τοῦ βαθμοῦ ἀναγνωρίσεως τῆς ἀναγκαιότητος τῶν ποσοτικῶν πληροφοριῶν διά τῆν ἀνάλυσιν τῶν οἰκονομικῶν καὶ κοινωνικῶν φαινομένων. Ἀλλ' ἡ χρησιμότης τῶν στατιστικῶν στοιχείων ἀναγνωρίζεται σήμερον εἰς τās περισσοτέρας χώρας, ἀνεξαρτήτως ἐπιπέδου ἀναπτύξεως. Ἐν πάσῃ περιπτώσει ἡ πλήρης ἀξιοποίησις τῶν διαθέσιμων στατιστικῶν καθίσταται δυνατὴ μόνον διά τῆς καταλλήλου ἀναλύ-

σεως των ὑπὸ εἰδικῶν ἐπιστημόνων. Διὰ τοῦτο, ὅ,τι πράγματι προσδιορίζει τὴν ζήτησιν στατιστικῶν στοιχείων εἰς μίαν χώραν εἶναι, ἐν τελευταίᾳ ἀναλύσει, ἡ δυνατότης ἀποτελεσματικῆς χρησιμοποίησεως αὐτῶν. Θὰ πρέπει, πάντως, νὰ λεχθῆ ὅτι καὶ ἐάν ἀκόμη ὑπάρχουν αἱ ἐν λόγῳ προϋποθέσεις, ἀλλ' ἡ ἀναγκαιότης τῆς ποσοτικῆς ἀναλύσεως δέν ἀναγνωρίζεται ὑπὸ τῶν ἀσκούντων τὴν οἰκονομικὴν καὶ κοινωνικὴν πολιτικὴν, ἡ ζήτησις ἡ προερχομένη ὑπὸ τῶν ἀκαδημαϊκῶς ἀσχολουμένων μὲ τὴν ἀνάλυσιν τῶν οἰκονομικῶν φαινομένων δέν ἔχει συνήθως ἐπαρκῆ βαρῦτητα ὥστε νὰ ἐπηρεάσῃ οὐσιαστικῶς τὴν διαμόρφωσιν τοῦ στατιστικοῦ συστήματος.

Ἡ συγχρότης τοῦ στατιστικοῦ συστήματος μιᾶς χώρας προσδιορίζεται περὶ αἰτέρῳ καὶ ὑπὸ τῶν ὑφισταμένων δυνατοτήτων συγκεντρώσεως στατιστικοῦ ὕλικου, αἱ ὁποῖαι συνδέονται μὲ τὰς ἐπιπρατούσας συνθήκας ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὸ μορφωτικόν ἐπίπεδον τοῦ λαοῦ, τὴν κατάσταση τῆς δημοσίας διοικήσεως, τὴν ὀργάνωσιν τῶν ἐπιχειρήσεων κλπ. Γενικῶς, διὰ τὴν ἀπόκτησιν στοιχείων ἀπαιτεῖται κατάλληλος ὑποδομή, ἡ ὁποία ἀναφέρεται εἰς ποικίλους κοινωνικοοικονομικούς παράγοντας. Μόνον ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν αὐτὴν καθίσταται δυνατὴ ἡ ἀνάπτυξις τοῦ στατιστικοῦ συστήματος, ὅχι μόνον ἀπὸ ποσοτικῆς ἀπόψεως, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον δέν εἶναι ἄλλωστε δυσχερές νὰ ἐπιτευχθῆ εἰς οἰανδήποτε χώραν, ἀλλὰ καὶ ἀπὸ ποιοτικῆς ἀπόψεως, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι τὰ συγκεντρούμενα στοιχεῖα παρουσιάζουν ἱκανοποιητικὸν βαθμὸν ἀξιοπιστίας. Σημειωτέον ὅτι ἡ ποιοτικὴ κατάστασις τῶν στοιχείων πρέπει νὰ λαμβάνεται σοβαρῶς ὑπ' ὄψιν κατὰ τὴν ἀξιολόγησιν δεδομένου στατιστικοῦ συστήματος καὶ κατὰ τὴν συγκριτικὴν ἐξέτασιν τῶν στατιστικῶν συστημάτων διαφόρων χωρῶν, πρὸς ἀποφυγὴν ἐσφαλμένων ἐντυπώσεων. Οὕτω, ἡ ὑπὸ ἐνῶν ὑπαναπτύκτων χωρῶν ἐμφανιζομένη πληθῶρα στοιχείων διὰ πολλοὺς τομεῖς τῆς οἰκονομίας ἐνδέχεται, κατόπιν ἐλέγχου τῆς ἀξιοπιστίας των, νὰ ἀποδειχθῆ ὅτι εἰς τὴν πραγματικότητα εἶναι ἄνευ οὐδεμιᾶς χρησιμότητος.

Γενικῶς, δύναται νὰ λεχθῆ ὅτι ἡ ζήτησις στοιχείων εἶναι σήμερον εἰς ὅλας τὰς χώρας μεγάλη καὶ αὐξάνει μὲ ταχύν ρυθμὸν. Ἡ ἐντεῦθεν ἀσκουμένη πίεσις ἀποτελεῖ προφανῶς ἀποφασιστικὸν παράγοντα διὰ τὴν ἀνάπτυξιν τῶν στατιστικῶν συστημάτων. Δέν πρέπει, ἐν τούτοις, νὰ παραγνωρίζωνται τὰ σοβαρὰ μειονεκτήματα τὰ ὁποῖα παρουσιάζει ἡ ἀνάπτυξις αὐτῆ εἰς τὰς καθυστερημένας χώρας, ὅταν περιορίζεται μόνον εἰς τὴν ἐπέκτασιν τῆς στατιστικῆς καλύψεως ποσοτικῶς, χωρὶς ταυτοχρόνως νὰ καταβάλλωνται ἔντονοι προσπά-

θειαί διά τήν δημιουργίαν τῶν ἀπαιτουμένων προϋποθέσεων πρὸς βελ-  
τώσιν τῆς ποιότητος τῶν στοιχείων.

## 2. Ἡ ἀνάπτυξις τοῦ ἑλληνικοῦ στατιστικοῦ συστήματος

Συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω ἐπιθέντα καὶ ἡ ἐρμηνεία τῆς μέ-  
χρι σήμερον ἐξελίξεως τοῦ ἑλληνικοῦ στατιστικοῦ συστήματος θά  
πρέπει νά στηριχθῇ ἐπὶ τῶν συνθηκῶν αἰόποιαί ἐπικράτουν κατὰ και-  
ρούς εἰς τήν χώραν κυρῶς ἀπὸ πλευρᾶς ζητήσεως στατιστικῶν δεδο-  
μένων. Μία τοιαύτη, ἔστω καὶ σύντομος, ἱστορικὴ ἐπισκόπησις εἴ-  
ναι ἀναγκαία πρὸς δικαιολόγησιν τῆς σημερινῆς καταστάσεως τῶν  
ἑλληνικῶν στατιστικῶν.

Κατὰ τήν προπολεμικὴν περίοδον αἱ διαθέσιμοι στατιστικαὶ ἤ-  
σαν λίαν πενιχραί, δέν ὑπῆρχον δέ στοιχεῖα διὰ βασικὰ μεγέθη τῆς  
οἰκονομίας. Σήμερον ἡ ἔλλειψις αὐτῆ δέν δημιουργεῖ προβλήματα  
εἰς τήν στατιστικὴν ἀνάλυσιν τῶν στοιχείων, καθ' ὅσον αἱ σημειωθεῖ-  
σαι ἔκτοτε ἐξελίξεις εἰς τήν χώραν ἔθεσαν τήν προπολεμικὴν περι-  
οδον ἐκτὸς τοῦ ἐνδιαφέροντος τῶν ἀσχολουμένων μέ τήν ἔρευναν  
τῶν οἰκονομικῶν καὶ κοινωνικῶν φαινομένων.

Σοβαρὰ πρόοδος εἰς τήν ἀπόκτησιν στατιστικοῦ ὕλικου ἐσημει-  
ώθη ἐν Ἑλλάδι μετὰ τὸν πόλεμον. Εἰς τοῦτο συνετέλεσαν κατὰ βά-  
σιν αἱ καταβληθεῖσαι τότε προσπάθειαι ἐκ μέρους τοῦ κράτους ἐν  
συνεργασίᾳ μετὰ τῶν ξένων ἀποστολῶν διὰ τήν μελέτην τῶν προβλη-  
μάτων τῆς ἑλληνικῆς οἰκονομίας καὶ τῶν ἀναγκῶν ἀνασυγκροτήσεώς  
τῆς κατόπιν τῶν ἐκ τοῦ πολέμου καταστροφῶν. Τοιαῦται ἔρευναι ἀ-  
πῆλθον, ὡς εἶναι εὐνόητον, ποικίλης φύσεως ποσοτικᾶς πληροφορί-  
ας, αἱ ὁποῖαι μέχρι τότε δέν ἦσαν διαθέσιμοι. Διὰ τήν συστηματι-  
κὴν συγκέντρωσιν τῶν στατιστικῶν στοιχείων παρεσχέθη πολὺτιμος  
βοήθεια ὑπὸ διεθνῶν ὀργανισμῶν κυρῶς ὑπὸ τήν μορφήν τῆς διαθέ-  
σεως εἰδικῶς ἐκπαιδευμένου εἰς τήν στατιστικὴν προσωπικοῦ.

Ἡ περαιτέρω βελτίωσις τοῦ ἑλληνικοῦ στατιστικοῦ συστήματος  
ἀπετέλεσε τήν ἀπαραίτητον προϋπόθεσιν διὰ τήν χάραξιν καὶ ἐφαρ-  
μογὴν ὑπὸ τοῦ κράτους ὀρθῆς οἰκονομικῆς πολιτικῆς καὶ διὰ τήν  
κατάρτισιν προγραμμάτων οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως. Πρὸς ἀπόκτησιν  
ἑνὸς ἐκσυγχρονισμένου στατιστικοῦ συστήματος καὶ ἰδῶς διὰ τήν  
ἐπὶ ἐπιστημονικῆς βάσεως ὀργάνωσιν τῆς συγκεντρώσεως τοῦ στατι-  
στικοῦ ὕλικου ἰδρύθη κατὰ τὸ ἔτος 1953 ἡ Ἐθνικὴ Στατιστικὴ Ὑπη-  
ρεσία τῆς Ἑλλάδος διὰ συγχωνεύσεως τῆς Διευθύνσεως Στατιστικῆς  
τοῦ Ὑπουργείου Συντονισμοῦ καὶ τῆς Διευθύνσεως Στατιστικῆς  
τοῦ Ὑπουργείου Ἐμπορίου. Ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ σχετικοῦ ἰδρυτικοῦ νόμου,

εἰς τὴν ἀρμοδιότητα αὐτῆς ὑπήχθη ἡ συλλογὴ, ταξινομήσεις καὶ ἐπεξεργασία πάντων τῶν στατιστικῶν στοιχείων τῆς χώρας, ὡς καὶ ἡ συστηματικὴ ἀνάλυσις αὐτῶν.

Μέχρι τοῦδε ἡ συμβολὴ τῆς Ε.Σ.Υ.Ε. εἰς τὴν ἀπόκτησιν καταλλήλων ποσοτικῶν πληροφοριῶν περὶ τῶν βασικῶν μεγεθῶν τῆς ἑλληνικῆς οἰκονομίας ὑπῆρξε σημαντικὴ. Αἱ ὑπ' αὐτῆς διεξαχθεῖσαι δειγματοληπτικαὶ ἔρευναι, ὡς εἶναι ἡ ἐπὶ τῶν οἰκογενειακῶν προϋπολογισμῶν εἰς τὰς ἀστικὰς περιοχὰς τῆς χώρας, αἱ ἐπὶ τῶν βιομηχανικῶν, βιοτεχνικῶν καὶ ἐμπορικῶν ἐν γένει καταστημάτων κλπ. παρέσχον πολύτιμα στοιχεία, τὰ ὅποια ἐπιτρέπουν πλέον τὴν μελέτην καὶ ἀνάλυσιν θεμάτων τῆς ἑλληνικῆς οἰκονομίας περὶ τῶν ὁποίων πολὺ ὀλίγα ἦσαν γνωστὰ μέχρι τοῦδε.

Ἐν προκειμένῳ δεόν ὡσαύτως νὰ μνημονευθῇ ἡ συμβολὴ τῆς Τραπεζῆς τῆς Ἑλλάδος εἰς τὴν ἀπόκτησιν ὑψηλῆς στάθμης στατιστικῶν στοιχείων διὰ βασικῆς σημασίας οἰκονομικὰ μεγέθη, ὡς εἶναι τὰ ἀναφερόμενα εἰς τὸν νομισματικὸν καὶ πιστωτικὸν τομέα καὶ τὸ ἴσοζυγιον πληρωμῶν. Παραλλήλως καὶ ἄλλοι δημόσιοι ὀργανισμοὶ καὶ ὑπηρεσίαι ἤρχισαν σὺν τῷ χρόνῳ νὰ καταβάλλουν ἀξιολόγους καὶ συστηματικὰς προσπάθειάς πρὸς συγέντρωσιν στοιχείων ἀναφερομένων εἰς τὸ πεδίου τῆς ἀρμοδιότητός των, ὑπὸ τὴν πρῆσιν τῶν ἰδικῶν των ἀναγκῶν, ἀλλὰ καὶ κατόπιν τῆς συνεχῶς αὐξανομένης ζητήσεως τὸσον ἐκ μέρους τῶν ἐπιφορτισμένων μετὰ τὴν ἄσκησιν τῆς οἰκονομικῆς πολιτικῆς ὅσον καὶ ἐκ μέρους κατ' ἴδιαν ἐρευνητῶν.

Κατὰ τὰ τελευταῖα ἔτη αἱ καταβληθεῖσαι προσπάθειαι πρὸς κατάρτισιν ὠλοκληρωμένων καὶ ἐπὶ τῆς συγχρόνου μεθοδολογίας στηριζομένων Προγραμμάτων Οἰκονομικῆς Ἀναπτύξεως συνετέλεσαν εἰς τὸν περαιτέρω ἐμπλουτισμὸν τοῦ ἑλληνικοῦ στατιστικοῦ συστήματος διὰ νέων στοιχείων, ταυτοχρόνως δὲ ἔδωσαν ἀφορμὴν διὰ νὰ καταστοῦν ἐμφανεῖς αἱ ὑφιστάμεναι εἰσέτι βασικαὶ ἐλλείψεις καὶ ἀδυναμίας του.

### 3. Βασικὰ πηγαὶ τῶν ἑλληνικῶν στατιστικῶν

#### α) Γενικὰ στατιστικὰ δημοσιεύματα

Ἐπὶ τῶν παρ' ἡμῶν, ὡς ἄλλωστε καὶ εἰς ὅλας τὰς χώρας, ὑφ' ἰσχυρὰ γενικὰ στατιστικὰ δημοσιεύματα ἐκδιδόμενα περιοδικῶς ὑπὸ κρατικῶν ὑπηρεσιῶν ἢ ὀργανισμῶν, τὰ ὅποια περιέχουν ποικίλης φύσεως στατιστικὰ στοιχεία. Τοιαῦτα δημοσιεύματα εἶναι κατὰ βᾶσιν ἡ Στατιστικὴ Ἐπετηρὶς τῆς Ε.Σ.Υ.Ε., τὸ Μηνιαῖον Στατιστικὸν Δελτίον τῆς Ε.Σ.Υ.Ε. καὶ τὸ Μηνιαῖον Στατιστικὸν Δελτίον

της Τραπεζης της Ελλάδος. Τά ἐν λόγῳ γενικά στατιστικά δημοσιεύματα, δι' ὠρισμένας μὲν κατηγορίας μεγεθῶν ἀποτελοῦν πρωτογενεῖς πηγὰς, δι' ἄλλας δὲ κατηγορίας μεγεθῶν εἶναι δευτερογενεῖς πηγὰί. Ταῦτα συγκεντρῶνουν μέγα μέρος τοῦ διαθέσιμου στατιστικοῦ ὕλικου, δι' ὃ καὶ ἀποτελοῦν χρησιμώτατα βοηθήματα πάντων τῶν ἀσχολουμένων μέ τήν ποσοτικήν ἀνάλυσιν.

Ἡ Στατιστική Ἐπετηρίς της Ελλάδος ἐκδίδεται ὑπό της Ε.Σ.Υ.Ε. ἐτησίως ἀπό τοῦ ἔτους 1955. Τά εἰς αὐτήν περιεχόμενα στοιχεῖα ἐκφράζονται ἐπί ἐτήσιας βάσεως καί εἰς τὰς περισσότερας περιπτώσεις ἀναφέρονται εἰς τό προηγούμενον τῆς ἐκδόσεώς της ἔτος. Οὕτω, ἡ κατά τό ἔτος 1966 ἐκδοθεῖσα Ἐπετηρίς περιλαμβάνει στατιστικά στοιχεῖα τοῦ ἔτους 1965. Διά πολλὰς κατηγορίας μεγεθῶν αἱ διδόμεναι ποσοτικά πληροφορία καλύπτουν καὶ ἕνα ἀριθμόν - ποικίλλοντα κατά περίπτωσιν - προηγούμενων ἐτῶν, πρὸς διευκόλυνσιν τῶν συγκρίσεων.

Ἀπό τῆς ἀρχικῆς ἐκδόσεώς της ἡ Στατιστική Ἐπετηρίς δέν ἐμφανίζει ἀμετάβλητον διάρθρωσιν περιεχομένων. Πρὸς τόν σκοπὸν καλλιτέρας παρουσιάσεως τῆς ὕλης ἐπιφέρονται ἐκάστοτε τροποποιήσεις εἰς τήν κατάταξιν τῶν πινάκων, ὡς καὶ συντμήσεις ἢ ἀναλύσεις δημοσιευθέντων εἰς προηγούμενας ἐκδόσεις πινάκων. Ἡ κατά τό ἔτος 1966 ἐκδοθεῖσα Ἐπετηρίς, ἡ ὁποία ὡς προελέχθη ἀναφέρεται εἰς τό ἔτος 1965, περιέχει ἐν συνόλῳ 265 στατιστικούς πίνακας κατατασσόμενους εἰς 25 κατηγορίας. Αἱ ἐν λόγῳ κατηγορίαι ἐμφαίνονται εἰς τόν Πίνακα Β-1 ὁμοῦ μετά τῶν ἀριθμῶν τῶν εἰς αὐτάς περιλαμβανομένων πινάκων. Σημειωτέον ὅτι τῶν βασικῶν κατηγοριῶν πινάκων προτάσσονται εἰσαγωγικά κείμενα, τὰ ὁποῖα διευκρινίζουν τοὺς χρησιμοποιούμενους ὅρους καὶ παρέχουν συντόμους πληροφορίας περὶ τῆς ἀκολουθηθείσης μεθόδου συλλογῆς τῶν ἐπιμέρους στοιχείων.

Τό Μηνιαῖον Στατιστικὸν Δελτίον τῆς Ε.Σ.Υ.Ε. ἐκδίδεται ὑπ' αὐτῆς μηνιαίως ἀπό τοῦ ἔτους 1956. Σκοπὸς αὐτοῦ εἶναι ἡ παροχή τῶν ἐπί μηνιαίας - εἰς τινὰς δὲ περιπτώσεις τριμηνιαίας - βάσεως συγκεντρουμένων στατιστικῶν στοιχείων δι' ὠρισμένα οὐσώδους σημασίας μεγέθη. Πρὸς διευκόλυνσιν τῶν συγκρίσεων τὰ διδόμενα στοιχεῖα ἀφοροῦν εἰς ὠρισμένας περιπτώσεις, ὅχι μόνον εἰς τόν τελευταῖον μῆνα, ἀλλὰ καὶ εἰς τινὰς μῆνας προηγούμενους τούτου, ὡς καὶ εἰς ἀριθμόν τινα προηγούμενων ἐτῶν. Οἱ πίνακες τοῦ Μηνιαίου Στατιστικοῦ Δελτίου, ὡς καὶ οἱ περιεχόμενοι εἰς τήν Στατιστικὴν Ἐπετηρίδα, ὑπόκεινται εἰς τροποποιήσεις, αἱ ὁποῖαι ἀποβλέπουν εἰς τήν

βελτώσιν τῆς παρουσιάσεως τῶν στοιχείων. Εἰς τό τεῦχος τοῦ μηνός Ἰουνίου 1967 περιέχονται ἐν συνόλῳ 83 στατιστικοί πίνακες, κατατάσσόμενοι εἰς 15 κατηγορίας. Αἱ ἐν λόγῳ κατηγορίαι ὁμοῦ μετά τῶν ἀριθμῶν τῶν εἰς αὐτάς περιλαμβανομένων πινάκων ἐμφαίνονται εἰς τόν Πίνακα Β-2. Ἐν τῆς συγκρίσεως τῶν κατηγοριῶν στατιστικῶν στοιχείων τοῦ πίνακος τούτου πρός ἐκείνας τοῦ Πίνακος Β-1 προκύπτει ὅτι τό Μηνιαῖον Στατιστικόν Δελτίον καλύπτει πολύ μικρότερον ποικίλλαν μεγεθῶν ἢ ἡ Στατιστική Ἐπετηρίς.

Τό Μηνιαῖον Στατιστικόν Δελτίον τῆς Τραπεζῆς τῆς Ἑλλάδος ἐκδίδεται ὑπ' αὐτῆς μηνιαίως ἀπό τοῦ ἔτους 1956. Τά εἰς αὐτό περιεχόμενα στοιχεία ἀναφέρονται, ὡς ἐπὶ τό πλεῖστον, εἰς τούς μῆνας τῶν δύο τελευταίων ἐτῶν, ὡς καί εἰς μίαν σειράν παρελθόντων ἐτῶν.

### Πίναξ Β - 1

Κατηγορίαι στατιστικῶν στοιχείων περιεχομένων εἰς τήν  
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΝ ΕΠΕΤΗΡΙΔΑ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ τῆς Ε.Σ.Υ.Ε.

A/A	Κατηγορίαι	Ἀριθμός πινάκων	A/A	Κατηγορίαι	Ἀριθμός πινάκων
I.	*Ἐδαφος - κλίμα . . . .	9	XIV.	*Ἐμπόριον . . . . .	27
II.	Πληθυσμός . . . . .	27	XV.	Μεταφοραί καί ἐπικοινωνία . . . . .	24
III.	Δημοσία ὑγεία . . . . .	5	XVI.	Μετανάστευσις - τουρισμός . . . . .	10
IV.	Κοινωνική ἀντίληψις καί ἀσφάλισις . . . . .	11	XVII.	*Ἱαματικά πηγαί - λουτροπόλεις . . . . .	1
V.	Παιδεία . . . . .	19	XVIII.	Μουσεῖα καί ἀρχαιολογικοὶ χώροι . . . . .	2
VI.	Δικαιοσύνη . . . . .	14	XIX.	Τύπος . . . . .	2
VII.	Διοικήσις . . . . .	1	XX.	Δημοσία θέατρον - κινηματ. παραγωγή . . . . .	4
VIII.	*Ἀπασχολήσις - ἀνεργία . . . . .	11	XXI.	Δημοσία οἰκονομικά . . . . .	8
IX.	Γεωργία - κτηνοτροφία - ὄασις - ἀλιεία . . . . .	17	XXII.	Νόμισμα - πιστις - τραπεζαί . . . . .	19
X.	*Ὀρυκτεῖα - λατομεῖα - ἄλκαϊ . . . . .	10	XXIII.	Τιμαί . . . . .	7
XI.	Βιομηχανία - βιοτεχνία . . . . .	10	XXIV.	*Ἐθνικόν εἰσόδημα καί δαπάνη . . . . .	3
XII.	*Ἡλεκτρισμός - φωταἷριον . . . . .	9	XXV.	*Ἴσοζύγιον πληρωμῶν . . . . .	5
XIII.	Οἰκοδόμησις καί δημοσία ἔργα . . . . .	10		Σύνολον . . . . .	265



Εἰς τὸ τεῦχος τοῦ μηνὸς Ἰουλίου 1967 περιέχονται ἐν συνόλῳ 60 στατιστικοὶ πίνακες, κατατασσόμενοι εἰς 5 κατηγορίας. Αἱ ἐν λόγῳ κατηγορίαι ὁμοῦ μετὰ τῶν ἀριθμῶν τῶν εἰς αὐτάς περιλαμβανομένων πινάκων ἐμφαίνονται εἰς τὸν Πίνακα Β-3.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω περιγραφέντων γενικῶν στατιστικῶν δημοσιευμάτων ἡ Στατιστικὴ Ἐπιθερὶς τῆς Ἑλλάδος καὶ τὸ Μηνιαῖον Στατιστικὸν Δελτίον τῆς Τραπεζῆς τῆς Ἑλλάδος περιέχουν, ἐκτὸς τῶν πινάκων ἑλληνικῶν στατιστικῶν, καὶ ἑτέρους περιλαμβάνοντας στατιστικὰ δεδομένα διὰ διαφόρους ξένας χώρας. Τὰ ἐν λόγῳ στοιχεῖα προέρχονται ἐκ τῶν ἐπίσημων δημοσιευμάτων διεθνῶν ὀργανισμῶν (Ὀργανισμοῦ Ἠνωμένων Ἐθνῶν καὶ Διεθνoῦς Νομισματικοῦ Ταμεῖου) καὶ συνεπῶς δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς κατάλληλα διὰ διεθνεῖς συγκρίσεις.

### β) Εἰδικὰ στατιστικὰ δημοσιεύματα

Εἰς τὰ γενικὰ στατιστικὰ δημοσιεύματα δέν εἶναι ἐκ τῶν πραγμάτων δυνατόν νὰ συγκεντροῦνται ὅλα τὰ διαθέσιμα στατιστικὰ στοιχεῖα. Διὰ τοῦτο, ἐκτὸς τῶν ἐν λόγῳ γενικῶν πηγῶν ὑπάρχουν καὶ ἕτεραι εἰδικαὶ πηγαί, αἱ ὁποῖαι περιέχουν στατιστικὰ δεδομένα δι' ἐπὶ μέρους τομεῖς ἢ δραστηριότητες. Κατωτέρω ἐξετάζονται ἐν συντομίᾳ τὰ σπουδαιότερα ἐκ τῶν ὑπαρχόντων ἐν Ἑλλάδι εἰδικῶν στα-

### Πίναξ Β - 2

Κατηγορίαι στατιστικῶν στοιχείων περιεχομένων εἰς τὸ  
ΜΗΝΙΑΙΟΝ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΝ ΔΕΛΤΙΟΝ τῆς Ε.Σ.Υ.Ε.

Α/Α	Κατηγορίαι	Ἀριθμὸς πινάκων	Α/Α	Κατηγορίαι	Ἀριθμὸς πινάκων
I.	Κλίμα . . . . .	2	VII.	Οἰκοδόμησις καὶ δημόσια ἔργα . . . . .	3
II.	Πληθυσμὸς - μετανάστευσις . . . . .	5	VIII.	Ἐξωτερικὸν ἐμπόριον	4
III.	Ἀπασχόλησις-ἀνεργία	8	IX.	Ἐσωτερικὸν ἐμπόριον	1
IV.	Κοινωνικὴ ἀντίληψις καὶ ἀσφάλισις . . . . .	6	X.	Μεταφοραὶ . . . . .	15
V.	Γεωργία-κτηνοτροφία-δάση-ἀλιεία . . . . .	9	XI.	Ἐπικοινωνίαι . . . . .	2
VI.	Βιομηχανία - ἠλεκτρισμὸς - φωταερίον . . . . .	5	XII.	Τουρισμὸς . . . . .	3
			XIII.	Δημόσια οἰκονομικά . . . . .	3
			XIV.	Τιμαὶ . . . . .	4
			XV.	Νόμισμα - πίστις - τράπεζαι . . . . .	13
				Σύνολον . . . . .	83

## Πίναξ Β - 3

Κατηγορίαι στατιστικῶν στοιχείων περιεχομένων εἰς τὸ ΜΗΝΙΛΙΟΝ  
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΝ ΔΕΛΤΙΟΝ τῆς ΤΡΑΠΕΖΗΣ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

Α/Α	Κατηγορίαι	Ἀριθμὸς πινάκων	Α Α	Κατηγορίαι	Ἀριθμὸς πινάκων
I.	Νόμισμα - πίστις - τρα- πεζαί . . . . .	32	III.	Ἴσοζύγιον πληρωμῶν	17
II.	Δημόσια οἰκονομικά . . . . .	4	IV.	Παραγωγή . . . . .	4
			V.	Τιμαὶ . . . . .	3
				Σύνολον . . . . .	60

τιστικῶν δημοσιευμάτων κατὰ κατηγορίας μεγεθῶν :

I) Πληθυσμός. Λεπτομερεῖς πληθυσμιακαὶ στατιστικαὶ περιέχονται εἰς εἰδικὰ δημοσιεύματα τῆς Ε.Σ.Υ.Ε., τὰ ὁποῖα ἀφοροῦν εἰς τὰ ἀποτελέσματα τῶν ἀνά δεκαετίαν διενεργουμένων γενικῶν ἀπογραφῶν εἰς τὴν χώραν. Τὰ "Ἀποτελέσματα τῆς Ἀπογραφῆς Πληθυσμοῦ-Κατοικιῶν τῆς 19-3-1961", περιλαμβάνονται εἰς δύο τόμους ἐκ τῶν ὁποίων, ὁ μὲν πρῶτος ἀναφέρεται εἰς τὸν "Πληθυσμὸν κατὰ Γεωγραφικὰς καὶ Διοικητικὰς Ὑποδιαρέσεις", ὁ δὲ δεῦτερος εἰς τὰ "Δημογραφικὰ, Κοινωνικὰ καὶ Οἰκονομικὰ Χαρακτηριστικὰ τοῦ Πληθυσμοῦ". Ἐπὶ πλέον, ἔχουν δημοσιευθῆ ὑπὸ τῆς Ε.Σ.Υ.Ε. εἰς αὐτοτελῆ τεύχη στατιστικὰ στοιχεῖα ἀφορῶντα εἰς τὴν ἐκπαίδευσιν, τὴν ἀσχόλησιν τοῦ ἐνεργοῦ πληθυσμοῦ, τὴν ἐσωτερικὴν μετανάστευσιν, τὰς συνθήκας στεγασεως κλπ., τὰ ὁποῖα προέρχονται ἐκ δειγματοληπτικῆς ἐπεξεργασίας τῶν δεδομένων τῆς ἀπογραφῆς τοῦ 1961. Ἐκτός τῶν πηγῶν τῶν ἀφορῶν εἰς τὰ ἀποτελέσματα τῶν ἀπογραφῶν ἕτερον βασικῆς σημασίας δημοσίευμα εἶναι τὸ ἀπὸ τοῦ 1956 ἐκδιδόμενον ἐτησίως ὑπὸ τῆς Ε.Σ.Υ.Ε. ὑπὸ τὸν τίτλον "Στατιστικὴ τῆς Φυσικῆς Κινήσεως τοῦ Πληθυσμοῦ τῆς Ἑλλάδος", εἰς τὸ ὁποῖον, πέραν τῶν ὑπὸ μορφήν ποσοστῶν καὶ ἀναλογῶν ἐκφραζομένων δημογραφικῶν χαρακτηριστικῶν, περιέχονται καὶ λεπτομερεῖς στατιστικὰ γάμων, γεννήσεων καὶ θανάτων.

II) Ἐθνικὸν εἰσόδημα. Ἐκτιμήσεις τοῦ ἔθνικοῦ εἰσοδήματος καὶ τῆς συνολικῆς δαπάνης τῆς οἰκονομίας, μετὰ ἀναλυτικῶν στοιχείων τῶν ἐπὶ μέρους κατηγορῶν αὐτῶν, περιέχονται εἰς τὸ κατ' ἔτος ἐκδιδόμενον ὑπὸ τῆς Διευθύνσεως Ἐθνικῶν Λογαριασμῶν τοῦ Ὑπουργοῦ

γείου Συντονισμού τεύχος υπό τόν τίτλον "Ἐθνικός Λογαριασμός τῆς Ἑλλάδος". Ἐνσωλωλογικά διευκρινήσεις καί ἐπεξηγηματικά πληροφορία περί τῶν ἐπιτιμήσεων τούτων περιλαμβάνονται εἰς τό τεύχος ὑπ' ἀριθ. 9 (1961). Σημειωτέον ὅτι εἰς τό τελευταῖον τεύχος ὑπ' ἀριθ. 16 (1967) του ἐν λόγῳ δημοσιεύματος δίδονται συνεχεῖς σειραὶ στοιχείων τῶν βασικῶν μεγεθῶν τῆς ἑλληνικῆς οἰκονομίας διά τὰ ἔτη 1948-1965.

III) Γεωργία. Στατιστικά στοιχεῖα ἀναφερόμενα εἰς τόν γεωργικόν τομέα συγκεντρώνονται διά ἀπογραφῆς διεξαγομένης ἀνά δεκαετίαν περίπου. Εἰς τό δημοσίευμα τῆς Ε.Σ.Υ.Ε. ὑπό τόν τίτλον "Ἀποτελέσματα τῆς Ἀπογραφῆς Γεωργίας - Κτηνοτροφίας τῆς 19 Μαρτίου 1961" περιέχονται ἀναλυτικά δεδομένα ἐπὶ τοῦ πλήθους καί τῆς διαρθρώσεως τῶν γεωργικῶν ἐκμεταλλεύσεων τῆς χώρας, προκύψαντα ἐκ τῆς τελευταίας γεωργικῆς ἀπογραφῆς, ἡ ὅποια ἐνηργήθη εἰς τὰ πλαίσια τοῦ παγκοσμίου προγράμματος ἀπογραφῶν τοῦ ἔτους 1960, του ἐκτελεσθέντος ὑπὸ τὴν αἰγίδα τοῦ Ὄργανισμοῦ Τροφῶν καί Γεωργίας τοῦ Ο.Η.Ε. Εἰς ἕτερον δημοσίευμα τῆς Ε.Σ.Υ.Ε. ὑπό τόν τίτλον "Γεωργική Στατιστική τῆς Ἑλλάδος" περιλαμβάνονται τὰ ἀποτελέσματα ἐρεύνης διενεργουμένης κατ' ἔτος ἀπὸ τοῦ ἔτους 1961 εἰς τοὺς κλάδους τῆς γεωργίας, τῆς κτηνοτροφίας καί τῶν δασῶν καί ἀφορώσης εἰς τὰς ἐπιτάσεις καλλιεργειῶν, τὴν παραγωγὴν κλπ. Ἐπί πλέον, τό Ὑπουργεῖον Γεωργίας ἐκδίδει ἀνά διετίαν τό "Γεωργικόν Δελτίον", τό τελευταῖον διαθέσιμον τεύχος τοῦ ὁποῦ ἀναφέρεται εἰς τὰ ἔτη 1959 καί 1960. Εἰς τοῦτο περιέχονται στατιστικά στοιχεῖα τῶν καλλιεργηθεισῶν ἐπιτάσεων, τῆς παραγωγῆς κλπ. τῶν ἐπὶ μέρος προϊόντων διά τό σύνολον τῆς χώρας καί κατὰ περιφερείας αὐτῆς.

IV) Μεταπολίσεις. Ἀπὸ τοῦ ἔτους 1958 ἐνεργοῦνται ὑπὸ τῆς Ε.Σ.Υ.Ε. ἐτήσιαι στατιστικά ἐρευναι ἐπὶ τῶν βιομηχανικῶν καί βιοτεχνικῶν καταστημάτων ὡς καί τῶν ὀρυχείων, τὰ ἀποτελέσματα τῶν ὁποῶν δημοσιεύονται εἰς εἰδικά τεύχη. Τό τελευταῖον τεύχος ὑπό τόν τίτλον "Προσωρινά Ἀποτελέσματα Ἐτησίων Ἐρευνῶν Ὄρυχείων καί Βιομηχανίας - Βιοτεχνίας ἔτους 1964" περιέχει ἐπιτιμήσεις τῶν βασικῶν οἰκονομικῶν μεγεθῶν, ἤτοι τῆς ἀπασχολήσεως, τῆς ἀμοιβῆς ἐργασίας, τῆς ἀκαθάρστου ἀξίας τῆς παραγωγῆς, τῶν ἀναλώσεων καί τῆς προστιθεμένης ἀξίας κατὰ κλάδους.

V) Συγκοινωνία - ἐπικοινωνία. Ἀπὸ τοῦ ἔτους 1961 ἐκδίδεται ὑπὸ τῆς Ε.Σ.Υ.Ε. ἀνά τρίμηνον τό "Δελτίον Στατιστικῆς Συγκοινωνιῶν καί Ἐπικοινωνιῶν" εἰς τό ὁποῖον περιέχονται στοιχεῖα διά τοὺς τε-

λευταίους μῆνας, καὶ ἐπὶ ἐτησίᾳ βάσει διὰ τὴν τελευταίαν διε-  
 τταν, ἀναφερόμενα εἰς τὰς διὰ ξηρᾶς καὶ ἀέρος μεταφορᾶς ἐπιβατῶν  
 καὶ ἐμπορευμάτων, εἰς τὰ τροχαῖα ἀτυχήματα, εἰς τὰς ταχυδρομικὰς  
 καὶ τηλεφωνικὰς ἐπικοινωνίας καὶ εἰς τὰ κυκλοφοροῦντα παντός εἴ-  
 δους αὐτοκίνητα ὀχήματα. Συμπληρωματικῶς, ἐκδίδεται ὑπὸ τῆς Ε. Σ.  
 Υ. Ε. ἀνά τρίμηνον ἀπὸ τοῦ ἔτους 1960 τὸ " Δελτίον Στατιστικῆς  
 Ἐμπορικῆς Ναυτιλίας", τὸ ὁποῖον περιλαμβάνει στοιχεῖα ἀφορῶντα  
 εἰς τὴν δύναμιν καὶ τὴν σύνθεσιν τοῦ ἑλληνικοῦ ἐμπορικοῦ στόλου  
 ὡς πρὸς διάφορα κριτήρια, εἰς τὰ ἀργούντα ἐμπορικὰ πλοῖα, εἰς  
 τὴν ναυτιλιακὴν κίνησιν τῶν λιμένων τοῦ ἐσωτερικοῦ, εἰς τὴν ἀπασχό-  
 λησιν καὶ ἀνεργίαν τῶν Ἑλλήνων ναυτικῶν κλπ.

VI) Ἐξωτερικὸν ἔμπόριον. Στατιστικὰ στοιχεῖα εἰσαγωγῶν ἐπὶ τῇ βά-  
 σει ἀφίξεων καὶ ἐξαγωγῶν ἐπὶ τῇ βάσει φορτώσεων δημοσιεύονται ὑπὸ  
 τῆς Ε. Σ. Υ. Ε., ἐτησίως μὲν ἀπὸ τοῦ ἔτους 1953 εἰς τὸ δημοσίευμα  
 " Ἐξωτερικὸν Ἐμπόριον τῆς Ἑλλάδος", μηνιαίως δὲ εἰς τὸ " Μηνιαῖ-  
 ον Δελτίον Στατιστικῆς Ἐξωτερικοῦ Ἐμπορίου". Εἰς τὰ ἐν λόγῳ δη-  
 μοσιεύματα παρέχονται ἀναλυτικὰ στατιστικὰ ἀξίας καὶ ὄγκου κατὰ  
 κατηγορίας ἐμπορευμάτων καὶ κατὰ χώρας. Πληρεστέρα γεωγραφικὴ  
 ταξινόμησις τῶν εἰσαγωγῶν καὶ ἐξαγωγῶν ἐπὶ ἐτησίᾳ βάσει δίδε-  
 ται ἀπὸ τοῦ ἔτους 1960 εἰς ἕτερον δημοσίευμα τῆς Ε. Σ. Υ. Ε. ὑπὸ  
 τὸν τίτλον " Ἐξωτερικὸν Ἐμπόριον τῆς Ἑλλάδος κατὰ Χώρας".

VII) Δημόσια οἰκονομικά. Ἀνάλυσις τῶν ἐσόδων καὶ ἐξόδων τοῦ  
 κράτους κατὰ κατηγορίας παρέχεται εἰς τὸ ἐτήσιον δημοσίευμα τῆς  
 Ε. Σ. Υ. Ε. " Στατιστικὴ Ἐπετηρὶς Δημοσίων Οἰκονομικῶν", τὸ ὁποῖον  
 ἐκδίδεται ἀπὸ τοῦ 1962. Σχετικὰ στοιχεῖα ἐπὶ μηνιαίας βάσει δη-  
 μοσιεύονται ἀπὸ τοῦ ἔτους 1959 εἰς τὸ " Μηνιαῖον Δελτίον Στατιστι-  
 κῆς Δημοσίων Οἰκονομικῶν" τῆς ἰδίας ὑπηρεσίας. Ἐκτός αὐτῶν ὑ-  
 πάρχουν καὶ ἕτερα δημοσιεύματα ἐκδιδόμενα ὑπὸ τοῦ Ὑπουργείου  
 Οἰκονομικῶν (Γενικοῦ Λογιστηρίου τοῦ Κράτους), ὡς εἶναι τὰ ὑπὸ  
 τοὺς τίτλους " Γενικὸς Προϋπολογισμός", " Προσωρινὸς Γενικὸς Ἰ-  
 σολογισμὸς τοῦ Κράτους" καὶ " Ἐκτέλεσις Προϋπολογισμοῦ Ἐσόδων"  
 εἰς τὰ ὁποῖα περιλαμβάνονται λεπτομερειακὰ στοιχεῖα ἐπὶ τῆς δη-  
 μοσιονομικῆς διαχειρίσεως.

VIII) Ἐκπαίδευσις. Ἡ Ε. Σ. Υ. Ε. ἐκδίδει κατ' ἔτος " Στατιστικὴν τῆς  
 Ἐκπαιδεύσεως", ἣ ὁποῖα περιέχει στοιχεῖα περὶ τῶν Σχολείων καὶ  
 Σχολῶν, τοῦ διδακτικοῦ προσωπικοῦ, τῶν μαθητῶν καὶ σπουδαστῶν  
 κλπ. Ἡ ἐν λόγῳ Στατιστικὴ περιλαμβάνει 4 τεύχη ἀφορῶντα εἰς τὴν  
 Τεχνικὴν καὶ Ἐπαγγελματικὴν, τὴν Στοιχειώδη, τὴν Μέσην καὶ τὴν  
 Ἀνωτάτην Ἐκπαίδευσιν.

ΙΧ) Δικαιοσύνη. Ἀπό τοῦ ἔτους 1961 ἢ Ε.Σ.Υ.Ε. ἐκδίδει κατ' ἔτος τήν "Στατιστικὴν Δικαιοσύνης" περιέχουσαν στατιστικὰς πολιτικῆς δικαιοσύνης, ἐγκληματολογικὴν στατιστικὴν καί, τελευταίως, αἰφρο- νιστικὴν στατιστικὴν. Σημειωτέον ὅτι πρότερον αἱ στατιστικαὶ ἐπὶ τῶν ἐν λόγῳ ἀντικειμένων ἐδημοσιεύοντο εἰς τρία χωριστὰ τεύ- χη.

#### 4. Ἀξιολόγησις τῶν ἑλληνικῶν στατιστικῶν

α) Στατιστικὴ κάλυψις τῶν ἐπὶ μέρους τομέων καὶ δραστηριοτήτων

Αἱ διαθέσιμοι στατιστικαὶ εἰς τὴν χώραν μας, παρά τὸν οὐ- σιῶδη ἐμπλουτισμὸν τῶν κατὰ τὰ τελευταῖα ἔτη, δέν δύνανται νά θεωρηθοῦν γενικῶς ὅτι ἱκανοποιοῦν ἐπαρκῶς τὴν ὑφισταμένην ζήτησιν, ἢ ὅποια, ἄλλωστε, παντοῦ σήμερον εἶναι μεγαλυτέρα τῆς προσφορᾶς. Ἐὰν πρέπει, ἐν τούτοις, νά ἀναγνωρισθῇ ὅτι τὸ στατιστικὸν σύστημα ἐν Ἑλλάδι, εἶναι, ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον, πληρέστερον ἢ εἰς ἄλλας χώ- ρας εὐρίσκομένας εἰς τὸ αὐτὸ περίπου ἐπίπεδον ἀναπτύξεως.

Ἐνταῦθα δέν εἶναι δυνατόν νά γίνῃ λεπτομερῆς περιγραφή τῆς στατιστικῆς καλύψεως τῶν ἐπὶ μέρους οἰκονομικῶν καὶ κοινωνικῶν με- γεθῶν. Διὰ τοῦτο, ἡ σχετικὴ ἐξέτασις θά περιορισθῇ εἰς γενικὴν ἀ- ξιολόγησιν τοῦ βαθμοῦ πληρότητος τῶν διαθέσιμων στατιστικῶν στοι- χεῶν μέ βάσιν τὰς κατατάξεις, αἱ ὁποῖαι ἀκολουθοῦνται συνήθως κα- τὰ τὴν παρουσίαν τῶν στοιχείων εἰς τὰς στατιστικὰς πηγὰς.

Κατ' ἀρχὴν, ἡ στατιστικὴ κάλυψις κατὰ γενικὰς κατηγορίας με- γεθῶν δέν εἶναι ὁμοιόμορφος, ἀλλὰ παρουσιάζει μεταξύ αὐτῶν οὐσι- ῶδεις διαφορὰς. Ἐπαρκῶς καλύπτονται τὰ μεγέθη ἐκεῖνα διὰ τὰ ὁποῖ- α ὑπάρχει δυνατότης στατιστικῆς παρακολουθήσεως ἐπ' εὐκαρίῃ τῆς ἀσκήσεως ὀρισμένης διοικητικῆς ἢ ἄλλης φύσεως λειτουργίας, ὡς εἶναι ἡ τραπεζικὴ, ἡ τελωνειακὴ, ἡ φορολογικὴ κλπ. Οὕτω, αἱ διαθέσιμοι παρ' ἡμῖν στατιστικαὶ τῶν νομισματικῶν καὶ πιστωτικῶν μεγεθῶν, τοῦ ἐ- ξωτερικοῦ ἐμπορίου καὶ τοῦ ἰσοζυγίου πληρωμῶν, τῆς φορολογίας κλπ. εἶναι λίαν ἱκανοποιητικὰ ἀπὸ ἀπόψεως πληρότητος καὶ δέν ὑστεροῦν τῶν ἀντιστοίχων τῶν προηγμένων χωρῶν, αἱ ὁποῖαι διαθέτουν ἄφθονα μέσα καὶ μακρὰν στατιστικὴν παράδοσιν. Σημειωτέον ὅτι αἱ ἐν λόγῳ στατιστικαὶ εἰς τὰς περισσοτέρας περιπτώσεις, ὅχι μόνον καλύπτουν ὀλόκληρον τὸν τομέα εἰς τὸν ὁποῖον ἀναφέρονται, ἀλλὰ καὶ ἐμφανί- ζουν, ἀπὸ πλευρᾶς ταξινομήσεως, σχετικῶς ὑψηλὸν βαθμὸν ἀνα- λύσεως.

Προκειμένου περί τῶν μεγεθῶν διά τὰ ὁποῖα δέν ὑπάρχουν δυνατότητες στατιστικῆς παρακολουθήσεως ἐπ' εὐκαιρίᾳ ἀσκήσεως διοικητικῶν ἢ ἄλλων λειτουργιῶν, ἢ δι' εἰδικῶν δειγματοληπτικῶν ἐρευνῶν συλλογῆ τῶν καταλλήλων στοιχείων ἀποτελεῖ, ὡς εἶναι γνωστόν, ἔργον δυσχερές, τὸ ὁποῖον ἀπαιτεῖ σημαντικὴν δαπάνην, τὴν ὑπαρξιν ἐπαρκῶς εἰδιευμένου καὶ ἐμπείρου προσωπικοῦ διά τόν καλόν σχεδιασμόν καὶ ἐκτέλεσιν τῶν ἐρευνῶν, ὡς καὶ σύγχρονον μηχανογραφικόν ἐξοπλισμόν. Εἰς τὰς δυσχερεῖας αὐτάς ὀφείλεται κυρίως ἡ παρατηρηθεῖσα παρ' ἡμῖν καθυστέρησις εἰς τὴν ἀπόκτησιν στατιστικῶν στοιχείων διά μεγέθη τῆς ἐν λόγῳ κατηγορίας.

Ἐξ ἄλλου, οὐσιώδεις διαφοραὶ ἀπὸ πλευρᾶς στατιστικῆς καλύψεως ὑπάρχουν καὶ μεταξύ τῶν ἐπὶ μέρους παραγωγικῶν τομέων τῆς οἰκονομίας ἀνεξαρτήτως κατηγορίας μεγεθῶν. Βασικόν χαρακτηριστικόν τῶν μέχρι τοῦδε καταβληθεισῶν προσπαθειῶν πρὸς ἀπόκτησιν στοιχείων εἶναι ὅτι αὐταὶ συνενετρώθησαν κυρίως εἰς τόν κλάδον τῆς βιομηχανίας, ἐνῶ διά τοὺς λοιπούς τὰ διαθέσιμα στοιχεῖα ἐξακολουθοῦν καὶ σήμερον νά εἶναι λίαν πενιχρά. Εἶναι, βεβαίως, ἀληθές ὅτι ἡ βιομηχανία, ὡς ἐν τῆς στρατηγικῆς τῆς σημασίας διά τὴν οἰκονομικὴν ἀνάπτυξιν, χρήζει ἰδιαιτέρας μελέτης καὶ ἐκτεταμένης ποσοτικῆς ἀναλύσεως. Ἐν τούτοις καὶ οἱ λοιποὶ κλάδοι, ὡς τῆς γεωργίας, τῶν κατασκευῶν, τῆς βιοτεχνίας καὶ τῶν ὑπηρεσιῶν εἶναι ἀναγκαῖον νά τυγχάνουν συμμετροῦ στατιστικῆς καλύψεως, ἀφ' ἑνός μὲν λόγῳ τῆς οὐσιώδους συμβολῆς των εἰς τὸ ἐγχώριον προϊόν (π.χ. τὸ εἰσόδημα ἐξ ὑπηρεσιῶν ἀποτελεῖ παρ' ἡμῖν τὸ 45% περίπου τοῦ συνολικοῦ ἀναθαρῆστον ἐγχωρίου προϊόντος), ἀφ' ἑτέρου δέ λόγῳ τῶν σοβαρῶν προβλημάτων τὰ ὁποῖα ἐμφανίζουσιν ὠρισμένοι τουλάχιστον ἐξ αὐτῶν κατὰ τὴν διαδικασίαν τῆς οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως.

Ἐνταῦθα δέον νά παρατηρηθῇ ἐπίσης ὅτι ἐν Ἑλλάδι ἐλλείπουν λεπτομερῆ δεδομένα τῶν διακλαδικῶν σχέσεων τῆς οἰκονομίας προερχόμενα ἐξ εἰδικῶν ἀπογραφῶν τῆς παραγωγῆς.

## β) Τὸ πρόβλημα τῆς ἀξιοπιστίας

Ὡς ἔχει ἤδη ἀναπτυχθῆ, τὰ στατιστικὰ στοιχεῖα ἀποτελοῦν κατ' οὐσίαν προσεγγίσεις τῶν πραγματικῶν τιμῶν τῶν μεγεθῶν εἰς τὰ ὁποῖα ἀναφέρονται. Εἶναι γνωστόν, ὅτι ὁ βαθμὸς ἀκριβείας των ποικίλει ὑπὸ τοῦ μεγέθους τοῦ συνολικοῦ σφάλματος, τὸ ὁποῖον προκαλεῖται ἐκ πάσης φύσεως παραγόντων κατὰ τὴν συγκέντρωσιν τῶν ποσοτικῶν πληροφοριῶν. Δεδομένου, ὅμως, ὅτι ἐκτιμήσεις τοῦ σφάλματος αὐτοῦ δέν εἶναι συνήθως διαθέσιμοι παρ' ἡμῖν, ὁ ἔλεγχος τοῦ βαθμοῦ

ἀξιοπιστίας τῶν ἑλληνικῶν στατιστικῶν θά πρέπει κατ' ἀνάγκην νά στηριχθῆ εἰς ποιοτικὰς πληροφορίες περὶ τῆς ἀκολουθηθείσης διαδικασίας καὶ τοῦ τρόπου συλλογῆς των.

Τὰ στοιχεῖα τὰ προερχόμενα ἐκ δειγματοληπτικῶν ἐρευνῶν τῆς Ε.Σ.Υ.Ε., θά πρέπει νά θεωροῦνται ὡς μᾶλλον ἰκανοποιητικά προσεγγίσεις τῶν πραγματικῶν τιμῶν. Τοῦτο, διότι αἱ ἐρευναι αὐταὶ βασίζονται ἐπὶ τυχαίων δειγμάτων, ἡ δὲ ἐφαρμοζομένη τεχνικὴ ἀριστοποίησεως τῶν σχημάτων δειγματοληψίας ὀδηγεῖ εἰς τὴν ἐπίτευξιν ἐκτιμήσεων μὲ σφάλμα δειγματοληψίας κατὰ πολὺ μικρότερον τοῦ 10%. Ἐπὶ πλέον, δεδομένου ὅτι ἐφαρμόζονται αὐστηραί πειραματικά συνθήκαι ἐρευνῶν, τεκμαίρεται ὅτι καὶ τὰ μὴ δειγματοληπτικά σφάλματα εἶναι μᾶλλον περὶωρισμένης ἐκτάσεως.

Ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὴν ἀξιοπιστίαν τῶν λοιπῶν στατιστικῶν, δέν εἶναι δυνατόν εἰς τὰς περισσότερας περιπτώσεις νά ἐλεγχθῆ αὕτη, καθ' ὅσον δέν εἶναι διαθέσιμοι αἱ ἀναγκαῖαι πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτὸν πληροφορίες. Πάντως, συμφώνως πρὸς ὠρισμένας ἐνδείξεις, πολλὰς κατηγορίας ἐκ τῶν δημοσιευομένων στοιχείων καὶ δὴ ἐκ τῶν ἀναφερομένων εἰς βασικά μεγέθη τῆς οἰκονομίας δέν ἀποκλείεται νά ἐμπεριέχουν οὐσώδους ἐκτάσεως σφάλμα ἐκτιμήσεως.

Θά πρέπει, πάντως, νά ληφθῆ ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ ποιοτικὴ στάθμη τῶν στατιστικῶν στοιχείων μιᾶς χώρας προσδιορίζεται, ὄχι μόνον ὑπὸ τῶν ἐφαρμοζομένων μεθόδων κατὰ τὴν συλλογὴν των, ἀλλὰ καὶ ὑπὸ πλείστων ἄλλων παραγόντων, οἱ ὅποιοι κατὰ βάσιν συνδέονται μὲ τὸ ἐπίπεδον ἀναπτύξεώς της. Οὕτω, ἡ ἐκ μέρους τῶν παρεχόντων τὰς ποσοτικὰς πληροφορίες ἀτόμων, ἐπιχειρήσεων κλπ. διαθέσεις πρὸς εὐλικρινῆ συνεργασίαν μετὰ τῶν ὀργάνων τῶν ἐπιφορτισμένων μὲ τὴν συγκέντρωσιν των, ὡς καὶ ἡ χρησιμοποίησις ἐπαρκοῦς καὶ καταλλήλως ἐκπαιδευμένου προσωπικοῦ πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτὸν, ἀποτελοῦν στοιχειώδεις προϋποθέσεις διὰ τὴν ἐξασφάλισιν ἑνὸς ἀνεκτοῦ ἐπιπέδου ἀξιοπιστίας τῶν συλλεγομένων στατιστικῶν. Ἀπὸ τῆς πλευρᾶς αὐτῆς αἱ ἐπικρατοῦσαι ἐν Ἑλλάδι συνθήκαι δέν δύνανται νά χαρακτηρισθοῦν ὡς ἀπολύτως ἰκανοποιητικά, χωρὶς βεβαίως νά παραβλέπεται ἡ μέχρι τοῦδε ἐπιτευχθεῖσα βελτίωσις των.

#### γ) Καταλληλότης τῶν διαθέσιμων στατιστικῶν

Τὰ διαθέσιμα στατιστικά στοιχεῖα δέν εἶναι ἀρκετὸν νά εἶναι σχετικῶς ἀξιόπιστα, ἀλλὰ πρέπει νά πληροῦν καὶ ὠρισμένας ἄλλας προϋποθέσεις, αἱ ὅποια ἀναφέρονται κυρίως εἰς τὸν τρόπον παρουσιάσεώς των. Ταῦτα, μόνον ὅταν ἀνταποκρίνωνται εἰς τὰς ἀπαιτή-

σεις τῆς οἰκονομικῆς καὶ στατιστικῆς ἀναλύσεως εἶναι χρησιμοποιοῦνται καὶ ἐκπληροῦν τὸν βασικὸν σκοπὸν διὰ τὸν ὁποῖον συγκεντροῦνται. Συνεπῶς, ἡ καταλληλότης τῶν στοιχείων ἀποτελεῖ, ὡς καὶ ὁ βαθμὸς ἀξιοπιστίας των, βασικῆς σημασίας κριτήριον ἀξιολογήσεως ἑνὸς στατιστικοῦ συστήματος. Ἀπὸ τῆς ἀπόψεως αὐτῆς παρατηρεῖται ὅτι αἱ ἑλληνικαὶ στατιστικαί, ὑπὸ τὴν μορφήν ὑπὸ τὴν ὁποῖαν ἐμφανίζονται εἰς τὰς πηγὰς των, ἔχουν τὰς κάτωθι ἀδυναμί-

1) Εἰς ὠρισμένας περιπτώσεις τὰ συγκεντρούμενα στοιχεῖα δὲν ἀνταποκρίνονται ἐπαρκῶς εἰς τὴν θεωρητικὴν ἔννοιαν τοῦ μετρούμενου μεγέθους, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον περιορίζει μεγάλως τὴν χρησιμότητά των δι' ἀνάλυσιν καὶ ἐνδέχεται νὰ ὀδηγήσῃ εἰς τὴν συναγωγὴν ἐσφαλμένων συμπερασμάτων. Τοιαῦται ἀποκλίσεις δὲν παρατηροῦνται, ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον, εἰς τὰ στοιχεῖα τὰ συλλεγόμενα διὰ τῆς διενεργείας εἰδικῶν στατιστικῶν ἐρευνῶν, διότι εἰς ταύτας ὑπάρχει πάντοτε ἡ δυνατότης τοῦ ἐκ τῶν προτέρων ἐπακριβοῦς καθορισμοῦ τῆς φύσεως καὶ τοῦ περιεχομένου τῶν ἀπαιτούμενων ποσοτικῶν πληροφοριῶν. Αὗται παρατηροῦνται κυρίως εἰς ὠρισμένας στατιστικάς, αἱ ὁποῖαι προκύπτουν ὡς ὑποπροϊὸν διοικητικῶν ἢ ἄλλων διαδικασιῶν. Ἐπὶ παραδείγματι, τὰ διαθέσιμα φορολογικὰ στοιχεῖα δὲν ἀνταποκρίνονται πλήρως πρὸς τὴν ἔννοιαν τοῦ μεγέθους τῆς φορολογικῆς ἐπιβαρύνσεως τῆς οἰκονομίας, διότι ἐκτός τῶν ὑπὸ τοῦ κράτους εἰσπραττομένων φόρων ὑπάρχουν οἱ φόροι ὑπὲρ τρίτων, οἱ ὁποῖοι, ὅμως, δὲν καλύπτονται ὑπὸ τῶν δημοσιευομένων στατιστικῶν φορολογίας.

2) Τὰ ἀκόλουθούμενα συστήματα ταξινομήσεως τῶν δεδομένων δὲν προσαρμύζονται πάντοτε πρὸς τὰς ἀνάγκας τῆς ἀναλύσεως, μέ ἀποτέλεσμα αἱ ἐμφανιζόμεναι ἐπὶ μέρους κατηγοραὶ καὶ ὑποκατηγοραὶ τῶν μεγεθῶν νὰ μὴ ἀξιοποιοῦνται ἐπαρκῶς. Ἰδιαιτέρως δεόν νὰ τοῖσιθῇ τὸ γεγονός ὅτι τὰ διεθνῶς ἐφαρμοζόμενα συστήματα ταξινομήσεως εἶναι εἰς ὠρισμένας περιπτώσεις ἀνατάλληλα διὰ τὴν κατάταξιν τῶν ἑλληνικῶν στατιστικῶν, λόγῳ τῶν ἰδιαζουσῶν συνθηκῶν αἱ ὁποῖαι ἐπικρατοῦν εἰς τὴν ἑλληνικὴν οἰκονομίαν. Οὕτω, προκειμένου περὶ τῶν τελωνειακῶν στατιστικῶν τοῦ ἐξωτερικοῦ ἐμπορίου, ἢ ὑπὸ τῆς Ε. Σ. Υ. Ε. παρουσίας αὐτῶν ἐπὶ τῇ βάσει τῆς Τυποποιημένης Ταξινομήσεως τοῦ Διεθνοῦς Ἐμπορίου, διευκολύνει μὲν τὰς διεθνεῖς συγκρίσεις, δὲν ἀνταποκρίνεται, ὅμως, πρὸς τὰς ἰδιομορφίας τῆς συνθέσεως τοῦ ἑλληνικοῦ ἐξωτερικοῦ ἐμπορίου. Τὴν αὐτὴν ἀδυναμίαν παρουσιάζει καὶ ἡ κατάταξις κατὰ τμήματα τοῦ Ἑλληνι-



κοῦ Τελωνειακοῦ Δασμολογίου Εἰσαγωγῶν, ἐνῶ τὸ ὑπὸ τῆς Τραπεζῆς τῆς Ἑλλάδος ἀκολουθούμενον σύστημα ταξινομήσεως προσφέρεται περισσότερο πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτόν.

3) Πέραν τῆς καθέτου κατατάξεως τῶν στατιστικῶν στοιχείων ἐπὶ τῇ βάσει διαφόρων κριτηρίων, εἶναι πολλάκις ἀναγκαῖα καὶ ἡ ὀριζοντιῶς ταξινόμησις κατὰ γεωγραφικὰς περιοχάς. Τοῦτο ἐπιβάλλεται ἐκ τοῦ λόγου ὅτι πολλὰ μεγέθη παρουσιάζουν οὐσιώδεις διαφορὰς μεταξὺ τῶν ἐπὶ μέρους περιοχῶν τῆς χώρας καὶ ἰδῶς μεταξύ τῶν μεγάλων ἀστικῶν κέντρων καὶ τῶν ἀγροτικῶν περιοχῶν, ἡ παρακολούθησις δὲ αὐτῶν κεχωρισμένως καθιστᾷ εὐχερεστέραν τὴν ἐρμηνείαν τῶν σημειουμένων μεταβολῶν εἰς τὸ σύνολον. Εἰς τινὰς περιπτώσεις αἱ δι-σθεῖσμοι στατιστικὰς ἀναφέρονται μόνον εἰς τὰς ἀστικὰς περιοχάς, ὡς συμβαίνει μὲ τὸν δείκτην τιμῶν καταναλωτοῦ καὶ τὸν δείκτην ἀξίας λιανικῶν πωλήσεων τῆς Ε. Σ. Υ. Ε., ἔλλείπουν δὲ σχετικὰ ποσοτικὰ πληροφορία περὶ τῶν λοιπῶν περιοχῶν τῆς χώρας.

4) Αἱ ἐπὶ ἐτήσιας βάσεως ἱστορικὰ στατιστικὰ διὰ τὰ εἶναι κατάλληλοι πρὸς στατιστικὴν ἀνάλυσιν δέον νὰ καλύπτουν μίαν σχετικῶς μακρὰν χρονικὴν περίωδον. Ἄλλ' ἐκ τῆς ἐξετάσεως μιᾶς συλλογῆς ἐξ 160 χρονολογικῶν σειρῶν, ἀναφερομένων εἰς τὰ βασικώτερα μεγέθη τῆς ἑλληνικῆς οἰκονομίας, προέκυψεν ὅτι μόνον 101 (ἧτοι 63% τοῦ συνόλου) καλύπτουν τὴν ἀπὸ τοῦ 1950 καὶ ἐντεῦθεν περίωδον, ἐνῶ 43 (ἧτοι 27%) καλύπτουν περιόδους ἀρχομένας κατὰ τὰ ἔτη 1951-1955 καὶ 16 (ἧτοι 10%) καλύπτουν περιόδους ἀρχομένας μετὰ τὸ ἔτος 1955. Ὑφίσταται, συνεπῶς, καὶ ἀπὸ τῆς ἀπόψεως αὐτῆς οὐσιώδης περιορισμὸς εἰς τὴν χρησιμοποίησιν πολλῶν ἐκ τῶν διαθέσιμων στοιχείων.

5) Αἱ ἐπὶ μηνιαίας βάσεως στατιστικὰ δι' ὀρισμένα οἰκονομικὰ μεγέθη, οὐσιώδους σημασίας διὰ τὴν παρακολούθησιν τῶν βραχυχρόνων ἐξελίξεων τῆς οἰκονομίας, δημοσιεύονται μὲ σημαντικὴν καθυστέρησιν, ὡς ἐκ τῆς ὁποίας δὲν καθίσταται δυνατὴ ἡ ταχεῖα διάγνωσις τῆς οἰκονομικῆς καταστάσεως καὶ ἡ ἔγκαιρος λήψις τῶν ἀπαιτουμένων μέτρων πρὸς ἀντιμετώπισιν τῶν τυχόν δημιουργουμένων προβλημάτων. Χαρακτηριστικῶς ἀναφέρεται ἐν προκειμένῳ ὅτι ἡ καθυστέρησις τῆς δημοσιεύσεως εἶναι, διὰ μὲν τὸν δείκτην βιομηχανικῆς παραγωγῆς 1,5-2 μῆνες, διὰ δὲ τὰς τελωνειακὰς στατιστικὰς ἐξωτερικοῦ ἐμπορίου 4-5 μῆνες.

6) Τὰ πλεῖστα τῶν ἐπὶ μηνιαίας βάσεως συγκεντρουμένων στοιχείων δημοσιεύονται ὑπὸ τὴν ἐντελῶς πρωτογενῆ των μορφῆν, χωρὶς, δηλαδή, νὰ ἔχουν ὑποστῆ προηγουμένως τὰς ἀναγκαῖας διορθώσεις.

Αί διορθώσεις αυτές αποσκοποῦν εἰς τὴν ἐξουδετέρωσιν τῆς ἐπιδράσεως ὠρισμένων διαταρακτικῶν παραγόντων, ὡς εἶναι π.χ. ἡ διαφορὰ μεταξύ τῶν μηνῶν ὡς πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐργασίμων ἡμερῶν. Τοιοῦτου εἴδους προκαταρκτικὰ ἐπεξεργασίαι τῶν μηνιαίων στοιχείων διευκολύνουν μεγάλως τὴν ἀξιοποίησιν των, ἔχουν δὲ εὐρύτατα διαδοθῆ εἰς ἄλλας χώρας, χάρις εἰς τὴν χρησιμοποίησιν ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν.

#### ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

##### Α. Ἑλληνική

1. Δρακάτου, Κ., "Ἡ Συγκρότησις τοῦ Ἑλληνικοῦ Στατιστικοῦ Συστήματος", Ἀθῆναι, 1966.
2. Δρακάτου, Κ., "Ἑλληνικὰ Στατιστικὰ Ἐξωτερικοῦ Ἐμπορίου καὶ Ἴσοζυγίου Πληρωμῶν", Τράπεζα τῆς Ἑλλάδος, Σειρὰ Εἰδικῶν Μελετῶν, Ἀριθ. 14, Ἀθῆναι, 1966, σελ.1-38 καὶ 62 - 89.

##### Β. Ξένη

1. Arrow, K.J., "Statistical Requirements for Greek Economic Planning," Center of Planning and Economic Research, Lecture Series 18, Athens, 1965.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

### ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

#### 1. Χρησιμότης τῶν στατιστικῶν πινάκων καὶ κατηγορίαι αὐτῶν

Ἡ παρουσίασις τῶν στατιστικῶν στοιχείων δεόν νά γίνεται κατὰ τρόπον διευκολύνοντα τήν κατανόησίν των ὑπό τοῦ ἀναγνώστου καὶ γενικῶς, ἐπιτρέποντα τήν ἐπίτευξιν τοῦ σκοποῦ εἰς τόν ὁποῖον ἀπροβλέπει ἡ χρησιμοποίησις των. Οὕτω, ἡ ἐντός κειμένου μετὰ ποικίλων ἀριθμῶν ἀναφερομένων εἰς ἐξελίξεις μεγεθῶν ἢ διαμόρφωσιν ἐπί μέρους χαρακτηριστικῶν δέν ἀποτελεῖ πρόσφορον μέθοδον παρουσιάσεως, καθ' ὅσον, παρέχεται μὲν δι' αὐτῆς ἡ δυνατότης ἀξιολογήσεως τῶν στοιχείων καὶ ὑπογραμμίσεως τῶν ἀξιοσημειώτων γεγονότων ἢ ἰδιοτήτων, ταυτοχρόνως, ὅμως, διὰ τῆς διασπορᾶς τῶν ἀριθμῶν ἐπέρχεται διάσπασις τῆς γενικῆς εἰκόνης τήν ὁποῖαν παρέχουν οὗτοι. Πρὸς ἀποφυγὴν τῶν δυσχερειῶν αὐτῶν κατὰ τήν ἀνάγνωσιν τῶν στατιστικῶν δεδομένων ἐνδείκνυται ὅπως ταῦτα ἐμφανίζονται κενχωρισμένως εἰς πίνακας, ἔνθα ἡ παρουσίασις γίνεται κατὰ τρόπον ἀπλοῦν καὶ συνοπτικόν, δεδομένου ὅτι ἀποφεύγονται περιτταὶ ἐπαναλήψεις καὶ ἐπιτυγχάνεται συγκέντρωσις τῶν ἀριθμῶν εἰς μίαν λογικὴν τάξιν.

Οἱ στατιστικοὶ πίνακες ἀποτελοῦν συστηματικὰς κατατάξεις ἀριθμητικῶν δεδομένων εἰς στήλας καὶ γραμμάς πρὸς διευκόλυνσιν τῶν συγκρίσεων. Πρὸς ἐπίτευξιν ἰκανοποιητικῆς παρουσιάσεως εἶναι ἀναγκαῖον ὅπως κατὰ τήν κατάρτισιν τῶν στατιστικῶν πινάκων λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν ἡ χρῆσις διὰ τήν ὁποῖαν προορίζονται οὗτοι, ἡ φύσις τῶν ποσοτικῶν πληροφοριῶν αἱ ὁποῖαι θὰ ἐμφανισθοῦν, ὡς καὶ οἱ τυχόν ὑπάρχοντες ἀντικειμενικοὶ περιορισμοὶ ἀπὸ πλευρᾶς διαθέσιμου χώρου. Ἀναλόγως τῶν ἐπιδιωκομένων σκοπῶν ποικίλλει καὶ

ἡ μορφή τῶν πρὸς ἐξυπηρέτησίν των χρησιμοποιουμένων στατιστικῶν πινάκων. Αὕτη εἶναι συνήθως ἀπλή καὶ εὐκόλως κατανοητή, ἀλλὰ εἰς ὠρισμένας περιπτώσεις δὲν ἀποκλείεται νὰ εἶναι ἀναγκαῖα ἡ ἐμφάνις συνθέτων κατατάξεων.

Οἱ στατιστικοὶ πίνακες διακρίνονται βασικῶς εἰς δύο κατηγορίας, ἤτοι εἰς γενικοὺς πίνακας καὶ εἰς εἰδικούς πίνακας. Οἱ γενικοὶ πίνακες περιέχουν πρωτογενῆ στατιστικὸν ὕλικόν καὶ, ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον, ἀποτελοῦν πηγὰς στατιστικῶν πληροφοριῶν. Ὡς ἐκ τούτου, ἡ εἰς αὐτοὺς παρουσίασις τῶν στοιχείων γίνεται μὲ μοναδικὸν κριτήριον τὴν διευκόλυνσιν τοῦ ἐρευνητοῦ κατὰ τὴν λήψιν των. Οἱ γενικοὶ πίνακες, ὡς ἐκ τῶν λεπτομερειῶν στοιχείων τὰ ὅποια περιέχουν, εἶναι συνήθως λίαν ἐκτεταμένοι, καταλαμβάνοντες πολλὰς ἀκόμη καὶ σημαντικὸν ἀριθμὸν σελίδων. Εἰς τὴν κατηγορίαν αὐτὴν ἀνήκουν οἱ πίνακες οἱ περιεχόμενοι εἰς τὰ διάφορα περιοδικῶς ἢ ἐφ' ἅπαξ ἐκδιδόμενα στατιστικὰ δημοσιεύματα, ὡς καὶ οἱ συνοδεύοντες μελέτας, ἐκθέσεις κλπ. ἐφ' ὅσον τίθενται εἰς παραρτήματα.

Οἱ εἰδικοὶ πίνακες εἶναι σχετικῶς μικροῦ μεγέθους καὶ παρεμβάλλονται εἰς κείμενα, ἀποσκοποῦν δὲ εἰς τὴν παρουσίαν χαρακτηριστικῶν στατιστικῶν στοιχείων ἢ εἰδικῶν σχέσεων μεταξύ διαφόρων ἐπὶ μέρους μεγεθῶν πρὸς ὑποστήριξιν ἐπιχειρημάτων ἢ διαγνώσιν καταστάσεων. Οὗτοι συνήθως καταρτίζονται ἐπὶ τῇ βάσει στατιστικῶν στοιχείων περιεχομένων εἰς ἓνα ἢ πλείονας γενικοὺς πίνακας, χωρὶς, βεβαίως, νὰ ἀποκλείεται καὶ ἡ περίπτωσις καταρτίσεως εἰδικοῦ πίνακος ἐπὶ τῇ βάσει ἑνὸς ἢ πλείονων ἑτέρων εἰδικῶν πινάκων. Πάντως, κατὰ τὴν κατασκευὴν ἑνὸς εἰδικοῦ πίνακος δεόν νὰ χρησιμοποιῶνται μόνον τὰ στοιχεῖα ἐκεῖνα τὰ ὅποια ἀφοροῦν εἰς τὸ ὑπὸ ἐξέτασιν θέμα, νὰ παραλείπωνται δὲ ἐξ αὐτοῦ δεδομένα τὰ ὅποια εἴτε εἶναι ἄσχετα μὲ τὸ ὑπὸ ἐξέτασιν θέμα εἴτε δὲν εἶναι οὐσιώδους σημασίας διὰ τὴν ἀνάλυσίν του. Ἐπίσης, εἶναι σκόπιμον νὰ ἀποφεύγεται ἡ παρουσίασις ἀναλυτικῶν δεδομένων, ὅταν ὁ σκοπὸς ἐξυπηρετῆται διὰ τῆς ἀναγραφῆς εἰς τὸν πίνακα μόνον τῶν σχετικῶν συνόλων. Τέλος, εἰς τὸν εἰδικὸν πίνακα δὲν εἶναι ἀπαραίτητον νὰ ἀκολουθῆται ἡ σειρά τῶν δεδομένων ἢ τηρουμένη εἰς τὸν γενικὸν ἢ τὸν εἰδικὸν πίνακα ἐκ τοῦ ὁποίου ταῦτα ἐλήφθησαν, ἀλλὰ αὕτη δύναται νὰ μεταβάλλεται ἀναλόγως τοῦ ἐπιδιωκόμενου ἐκάστοτε σκοποῦ.

## 2. Τεχνικὴ καταρτίσεως

Ἄν καὶ εἰς τὴν πρᾶξιν δὲν ἐφαρμόζεται πάντοτε ὁμοίομορφος τεχνικὴ, ἐν τούτοις κατὰ τὴν κατασκευὴν τῶν στατιστικῶν πινάκων

σκόπιμον είναι να ακολουθοῦνται ὀρισμένοι γενικοὶ κανόνες, οἱ κυριώτεροι τῶν ὁποίων ἐκτίθενται κατωτέρω. Ὑπόδειγμα πίνακος καταρτισθέντος ἐπὶ τῇ βάσει τῶν κανόνων τούτων ἀποτελεῖ ὁ ὑπ' ἀριθ. Γ-1. Σημειωτέον ὅτι κατὰ τὴν παρουσίαν τῶν διαφορῶν κατατάξεων τῶν στατιστικῶν δεδομένων ὅλαι αἱ προσπάθειαι δεόν νά κατατείνουσι εἰς τὸ νά καταστήσουσι τὸν πίνακα αὐτοτελεῆ. Ἐξ αὐτοῦ, δηλαδή, δεόν νά προκύπτουσι σαφῶς ὅλαι αἱ ἀναγκαῖαι ποσοτικαὶ πληροφορικαὶ, χωρὶς νά ὑπάρχη λόγος ἀναδρομῆς εἰς τὸ κείμενον ἔνθα ὁ πίναξ εἶναι ἐντεταγμένος.

#### α) Τίτλος

Ὁ στατιστικὸς πίναξ δεόν νά φέρῃ τίτλον ἀναγραφόμενον εἰς τὸ ἄνω μέρος αὐτοῦ. Ὁ τίτλος πρέπει νά εἶναι σαφῆς καὶ νά ἐκφράζῃ συνοπτικῶς τὴν φύσιν τῶν ἐμφανιζομένων στοιχείων, τὴν γεωγραφι-

### Πίναξ Γ - 1

Τ Ι Τ Λ Ο Σ      Παραγωγή ἠλεκτρικοῦ ρεύματος καὶ φωταερίου  
ἐν Ἑλλάδι, 1955 - 1964

ΕΠΙΚΕΦΑΛΙΔΕΣ ΣΤΗΛΩΝ	Ἔτος	Παραγωγή ἠλεκτρικοῦ ρεύματος (α) (Εἰς ἑκατομύρια $\Omega \times B$ )			Παραγωγή φωταερίου (β) (Εἰς ἑκατομύρια $M^3$ )	Μ Ο Ν Α Δ Ε Σ
		Θερμικὴ	Ὑδροηλεκτρικὴ	Σύνολον		
	1955	948	310	1.258	17	
	1956	974	502	1.476	17	
	1957	1.279	348	1.627	16	
	1958	1.339	451	1.790	16	
	1959	1.529	433	1.962	15	
	1960	1.729	469	2.198	14	
	1961	1.930	554	2.484	14	
	1962	2.121	614	2.735	13	
	1963	2.307	806	3.113	14	
	1964	2.967	749	3.716	12	

(α) Δὲν περιλαμβάνεται ἡ παραγωγή ἐργοστασίων παραγόντων δι' ἰδίων χρῆσιν.

(β) Συνολικὴ παραγωγή τῶν ἐργοστασίων φωταερίου.

Πηγή: Ε.Σ.Υ.Ε., « Στατιστικὴ Ἐπετηρὶς τῆς Ἑλλάδος, 1965 », Ἀθήναι, 1966, σελ. 256.

Π Η Γ Η

κήν περιοχὴν εἰς τὴν ὁποῖαν ἀναφέρονται, ὡς καὶ τὴν χρονικὴν περι-  
 οδὸν τὴν ὁποῖαν ταῦτα καλύπτουν. Τὰς ἐν λόγῳ προϋποθέσεις εἶναι  
 φανερόν ὅτι πληροῖ ὁ τίτλος τοῦ Πίνακος Γ-1, ὡς παραδείγματα, ὅ-  
 μως, δύναται νὰ χρησιμεύσουν καὶ οἱ τίτλοι ὅλων τῶν ἐν συνεχείᾳ  
 κατωτέρω παρατιθεμένων πινάκων. Σημειωτέον ὅτι ὁ τίτλος, ἐάν, πα-  
 ρά τὴν συνοπτικὴν διατύπωσίν του, καταλαμβάνη πολλὰς γραμμάς, ἀ-  
 ναγράφεται εἰς σχῆμα ἀντεστραμμένης πυραμίδος (βλ. π.χ. Πίνακα  
 Γ-4). Κάτωθι τοῦ τίτλου καὶ πρό τοῦ κορμοῦ τοῦ πίνακος εἶναι δυνα-  
 τὴ ἢ ὑπὸ μορφήν ὑποτίτλου ἀναγραφὴ ἐντός παρενθέσεως τῆς χρησι-  
 μοποιουμένης μονάδος μετρήσεως ἢ ἑτέρας ἐνδείξεως ἀφορώσης εἰς  
 ὅλα τὰ ἐν τῷ πινάκι περιεχόμενα στατιστικὰ στοιχεῖα. Ὅσακις εἰς  
 τινα μελέτην ἢ ἔκθεσιν παρεμβάλλονται πλείονες πίνακες, οὔτοι πρὸς  
 διευκόλυνσιν τῶν εἰς αὐτοὺς παραπομπῶν ἐκ τοῦ κειμένου δεόν νὰ  
 φέρουν αὐξοῦντα ἀριθμὸν ἀναγραφόμενον ἄνωθι τοῦ τίτλου.

### β) Στῆλαι καὶ γραμμαί

Εἰς τὴν κορυφὴν ἐκάστης στήλης (καὶ εἰς τὴν ἀρχὴν ἐκάστης  
 γραμμῆς) πρέπει νὰ ἀναγράφεται ἐν συντομίᾳ ἢ φύσιν τῶν εἰς αὐτὴν  
 περιεχομένων στατιστικῶν δεδομένων, ὡς καὶ ἡ μονὰς μετρήσεως εἰς  
 τὴν ὁποῖαν ἐκφράζονται, ἐφ' ὅσον, βεβαίως, ἡ τελευταία αὕτη δὲν  
 εἶναι ἐνιαία εἰς τὰς ἐπὶ μέρους στήλας (ἢ γραμμάς). Ἐάν ὁ πίναξ πε-  
 ριλαμβάνη πολλὰς στήλας, αὗται δεόν νὰ ἀριθμοῦνται πρὸς διευκό-  
 λυνσιν τῶν τυχόν παραπομπῶν εἰς αὐτάς (βλ. π.χ. Πίνακα Γ-4).

### γ) Στρογγύλευσις ἀριθμῶν

Πρὸς διευκόλυνσιν τῶν συγκρίσεων δεόν νὰ περιορίζεται, εἰς ὅ-  
 σον τὸ δυνατόν μεγαλύτερον βαθμὸν, ὁ ἀριθμὸς τῶν ψηφίων τῶν εἰς  
 τὸν πίνακα ἐμφανιζομένων στατιστικῶν στοιχείων διὰ στρογγυλεύσεως ἐ-  
 νεργουμένης συμφώνως πρὸς τοὺς ἤδη ἀνωτέρω διατυπωθέντας κανό-  
 νας. Ἄλλωστε, ἡ διὰ λόγους ἀπλουστεύσεως τοῦ πίνακος ἐνδεικνυο-  
 μένη χρησιμοποίησις εἰς τοῦτον τῶν δεδομένων μὲ μικρότερον ἀριθ-  
 μὸν ψηφίων δικαιολογεῖται, ὡς εἶναι εὐνόητον, ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι  
 τὰ διαθέσιμα στατιστικὰ στοιχεῖα ἀποτελοῦν γενικῶς ἐκτιμήσεις καὶ  
 ὄχι ἀκριβεῖς μετρήσεις.

### δ) Μηδενικὴ τιμὴ

Εἰς τοὺς στατιστικούς πίνακας ἀποφεύγεται ἡ ἀναγραφὴ τοῦ μη-  
 δενός, ἀντ' αὐτοῦ δὲ χρησιμοποιοῦνται διάφορα σύμβολα. Οὕτω, κα-  
 τὰ παγίαν τακτικὴν ἀκολουθουμένην ὑπὸ τῆς Ε.Σ.Υ.Ε. ὡς καὶ ἄλλων

ὕπηρεσῶν καὶ ὀργανισμῶν, ἀλλὰ καὶ διεθνῶς, ὅσαυτις ἡ τιμὴ ὠρισμένης μεταβλητῆς εἶναι μηδέν ἢ περίπου μηδέν τῆσεται ἢ παῦλα (-). Εἰς τὰς περιπτώσεις κατὰ τὰς ὁποίας οὐδέν στατιστικόν στοιχείον εἶναι διαθέσιμον χρησιμοποιοῦνται τρεῖς στιγμαί (...).

#### ε) Σύνολα

Ἐφ' ὅσον εἶναι δυνατὴ ἡ ἄθροισις τῶν εἰς τὸν πίνακα περιεχομένων στοιχείων κατὰ στήλας καὶ γραμμάς, τὰ σχετικὰ σύνολα τίθενται εἰς τὸ κάτω μέρος τῶν στηλῶν καὶ εἰς τὸ ἄκρον δεξιὰ τῶν γραμμῶν (βλ. π.χ. Πίνακα Γ-6), ἐκτός ἐάν ἐπιδιώκεται ὅπως δοθῇ ἰδιαίτερα ἔμφασις εἰς τὰ ἄθροίσματα, ὅποτε ταῦτα ἀναγράφονται εἰς τὸ ἄνω μέρος τῶν στηλῶν καὶ εἰς τὸ ἄκρον ἀριστερά τῶν γραμμῶν.

#### στ) Ὑποσημειώσεις

Αἱ ὑποσημειώσεις χρησιμοποιοῦνται πρὸς περαιτέρω ἐπεξηγήσιν ἐπὶ μέρους στοιχείων τοῦ πίνακος καὶ γενικῶς πρὸς παροχὴν πληροφοριῶν καὶ διευκρινήσεων, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀπαραίτητοι διὰ τὴν κατανόησιν καὶ καλὴν χρῆσιν τῶν περιεχομένων στατιστικῶν δεδομένων (βλ. π.χ. Πίνακα Γ-1). Διὰ τὰς σχετικὰς παραπομπὰς ἐνδείκνυται ὅπως χρησιμοποιοῦνται τὰ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου, ἀποφεύγεται δὲ ἡ ἀναγραφή ἀριθμῶν, διότι ἐνδέχεται νὰ ἐπέλθῃ σύγχυσις αὐτῶν μετὰ τῶν ἀριθμητικῶν δεδομένων τοῦ πίνακος.

#### ζ) Πηγὴ

Εἰς τὸν στατιστικόν πίνακα δεόν ἀπαραιτῆτως νὰ ἀναγράφεται ἡ πηγὴ ἐκ τῆς ὁποίας ἐλήφθησαν τὰ εἰς αὐτόν ἐμφανιζόμενα στοιχεία, ἐκτός ἐάν ταῦτα ἀποτελοῦν πρωτογενὲς ὑλικόν διὰ πρῶτην φεραν ἐμφανιζόμενον. Ἡ περιγραφή τῆς στατιστικῆς πηγῆς πρέπει νὰ εἶναι πλήρης, δηλαδὴ νὰ παρέχῃ πληροφορίας, περὶ τοῦ συγγραφέως τῆς μελέτης ἢ τῆς ὑπηρεσίας τῆς ἐκδιδούσης τὸ δημοσίευμα, τοῦ τίτλου, τῆς χρονολογίας ἐκδόσεως καὶ, εἰ δυνατόν, τῆς σελίδος ἐκ τῆς ὁποίας ἐλήφθησαν τὰ δεδομένα. Ἡ εἰς τὸν πίνακα μνεῖα τῆς πηγῆς παρέχει εἰς τὸν ἀναγνώστην τὴν δυνατότητα ὅπως κρήνῃ τὴν ἀξιοπιστίαν τῶν στοιχείων καὶ ἀνατρέξῃ εἰς τὴν ἀρχικὴν πηγὴν πρὸς ἐπαλήθευσίν των ἢ λήψιν συμπληρωματικῶν ποσοτικῶν πληροφοριῶν.

### 3. Τρόποι ταξινομήσεως τῶν στατιστικῶν στοιχείων

Τὰ εἰς τοὺς πίνακας ἐμφανιζόμενα στατιστικὰ στοιχεία στηρίζονται εἰς ὠρισμένον τρόπον ταξινομήσεως, ὁ ὁποῖος προσιδιάζει εἰς

τήν φύσιν των καὶ ἐξυπηρετεῖ τὸν διὰ τῆς παρουσιάσεώς των ἐπιδιωκόμενον σκοπὸν. Γενικῶς, ὑπάρχουν τρεῖς θεμελιώδεις βάσεις κατατάξεως τῶν στατιστικῶν δεδομένων ἢ ποσοτική, ἢ ποιοτική καὶ ἢ χρονολογική, ἐκάστη τῶν ὁποίων ἐξετάζεται ἐκτενέστερον κατωτέρω. Δέον νὰ σημειωθῇ ὅτι εἰς τὴν σχετικὴν βιβλιογραφίαν αἱ δύο πρῶται βάσεις κατατάξεως, ἢτοι ἢ ποσοτική καὶ ἢ ποιοτική ἀποκαλοῦνται συνήθως "ἐνδοτομεακαὶ κατατάξεις", ὡς στηριζόμεναι εἰς τὴν ταξινόμησιν τῶν δεδομένων τῶν ἀναφερομένων εἰς ὠρισμένην χρονικὴν περίοδον ἐπὶ τῇ βάσει ὠρισμένου κριτηρίου ποσοτικῆς ἢ ποιοτικῆς φύσεως. Εἶναι φανερόν ὅτι ἢ ἐν λόγῳ ἐνδοτομεακῆς κατάταξης ἀντιδιαστέλλεται πρὸς τὴν χρονολογικὴν κατάταξιν, ἢ ὅποια στηρίζεται ἀπλῶς εἰς τὸν χρόνον ἐμφανίσεως τῶν συνολικῶν τιμῶν κρίσεως τῶν μεθόδων κατατάξεως τῶν στατιστικῶν στοιχείων δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ ὡς παράδειγμα τὸ μέγεθος τοῦ ἔθνικοῦ εἰσοδήματος. Οὕτω, ἢ ἐμφάνισις εἰς πίνακα τοῦ καθ' ὠρισμένον ἔτος (ἔστω κατὰ τὸ 1965) πραγματοποιηθέντος εἰσοδήματος εἰς τὰς ἐπὶ μέρους γεωγραφικὰς περιοχὰς τῆς χώρας ἢ εἰς τοὺς ἐπὶ μέρους τοῦ βιομηχανικόν τομέα κλπ.) στηρίζεται, κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἐκτεθέντα, εἰς ἐνδοτομεακὴν κατάταξιν. Ἡ παρουσίαις, ὅμως, τοῦ συνολικοῦ εἰσοδήματος τῆς χώρας εἰς διαδοχικά ἔτη (π.χ. τῆς περιόδου 1950-1965) στηρίζεται εἰς χρονολογικὴν κατάταξιν.

Ἀνεξαρτήτως τῆς χρησιμοποιουμένης βάσεως κατατάξεως τῶν εἰς τινὰ πίνακα ἐμφανιζομένων στατιστικῶν στοιχείων, εἶναι ἀναγκαῖον ὅπως λαμβάνεται μέριμνα ὥστε ἢ ἀκολουθουμένη ταξινόμησις νὰ εἶναι πλήρης. Τοῦτο, κατ' ἀρχήν, σημαίνει ὅτι ἢ κατάταξις δέον νὰ εἶναι ἐξαντλητική, εἰς τρόπον ὥστε ὅλοι αἱ διαθέσιμοι τμαὶ τοῦ ἐξεταζομένου μεγέθους νὰ δύνανται νὰ ὑπαχθοῦν εἰς τινὰ τῶν χρησιμοποιουμένων κατηγοριῶν. Οὕτω, προκειμένου περὶ ταξινομήσεως τῶν κατοίκων τῆς χώρας ἀναλόγως τῆς οἰκογενειακῆς καταστάσεως αὐτῶν εἶναι εὐνόητον ὅτι ἢ σχετικὴ κατάταξις δέν θὰ εἶναι ἐξαντλητική, ἐὰν περιλαμβάνῃ μόνον δύο κατηγορίας, ἢτοι τοὺς ἀγάμους καὶ ἐγγάμους, καθ' ὅσον ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει δέν θὰ ὑπάρχῃ δυνατότης κατατάξεως τῶν ἐν χρεῖα διατελούντων καὶ τῶν διεξευγμένων (βλ. Πίνακα Γ-7). Ἐπὶ πλέον, ἢ ἀκολουθουμένη εἰς τὸν πίνακα ταξινόμησις δέν θὰ πρέπει νὰ ἐπιτρέπῃ τὴν ὑπαγωγήν ὠρισμένης τιμῆς εἰς πλεόνας κατηγορίας. Ὡς παράδειγμα ἀναφέρεται ἢ κατανομή τοῦ πληθυσμοῦ τῆς Ἑλλάδος κατὰ γεωγραφικὰς περιοχὰς, μεταξὺ



τῶν ὁποίων περιλαμβάνεται κεχωρισμένως ἡ περιοχὴ τῆς Διοικήσεως Πρωτευούσης, ἡ ὁποία γεωγραφικῶς ἀνήκει, ὡς γνωστόν, εἰς τὴν μετζίονα περιφέρειαν τῆς Στερεᾶς Ἑλλάδος. Εἶναι σκόπιμον ἐν προκειμένῳ, πρὸς ἀποφυγὴν συγχύσεως καὶ ἐξασφάλισιν πληρότητος εἰς τὴν ταξινόμησιν, ὅπως ἡ μετζίονα αὕτη περιφέρεια προσδιορισθῇ ὡς "Λοιπὴ Στερεὰ Ἑλλάς".

Ὅταν τὸ κριτήριον κατατάξεως τῶν στατιστικῶν στοιχείων εἶναι καθωρισμένον, ἐνδείκνυται ὅπως ἡ ἀναγραφὴ τῶν ἐπὶ μέρους κατηγοριῶν ἀκουλουθῇ ὠρισμένην τάξιν, ὥστε νὰ διευκολύνεται ἡ ἐκπλήρωσις τοῦ σκοποῦ των. Δύναται, οὕτω, νὰ χρησιμοποιοῦθῃ ἡ ἀλφαβητικὴ σειρὰ, ἡ τάξις μεγέθους ἢ καὶ ὠρισμένη κοινῶς παραδεδεγμένη κατάταξις. Πάντως, ἡ ἐπιλογή τῆς σειρᾶς ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων εἰς τινα πίνακα, τόσον εἰς τὰς στήλας ὅσον καὶ εἰς τὰς γραμμάς αὐτοῦ, δεόν πρωτίστως νὰ ἐξυπηρετῇ τὰς ἐπιδιωκόμενας συγκρίσεις καὶ νὰ δίδῃ τὴν πρέπουσαν ἔμφασιν εἰς τὰ δεδομένα τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν μεγαλυτέραν σημασίαν. Σχετικῶς δεόν νὰ σημειωθῇ ὅτι, ἐπειδὴ ἡ ἀνάγνωσις τῶν μὲν στηλῶν γίνεται ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω τῶν δὲ γραμμῶν ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ, τὰ σημαντικώτερα στατιστικὰ στοιχεῖα δεόν νὰ ἀναγράφωνται εἰς τὸ ἄνω μέρος τῶν στηλῶν καὶ εἰς τὸ ἀριστερὸν τῶν γραμμῶν.

#### 4. Κατανομαὶ κατὰ συχνότητος

Ὅταν αἱ στατιστικαὶ παρατηρήσεις ἐκφράζονται τμηστικῶς ὠρισμένον ποσοτικῶν χαρακτηριστικῶν εἶναι δυνατὴ ἡ ἐπὶ ποσοτικῆς βάσεως κατάταξις αὐτῶν. Δεδομένου ὅτι εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτάς αἱ μετρήσεις εἶναι συνήθως πολυπληθεῖς, ἡ σύμπτυξις των εἰς ἓνα συνοπτικὸν πίνακα διευκολύνει μεγάλως τὸ περαιτέρω ἔργον τῆς στατιστικῆς ἀναλύσεως. Οὕτω, ἐάν λάβωμεν τὰς εἰς τὸν Πίνακα Γ-2 περιεχομένας ὑποθετικὰς ἐκτάσεις ἀγροτεμαχίων, δέν εἶναι δυνατόν, χρησιμοποιοῦντες τὰ πρωτογενῆ ταῦτα στοιχεῖα, νὰ μορφώσωμεν γνώμην καὶ μάλιστα ταχέως - περὶ τοῦ μεγέθους τῶν ὑπὸ ἐξέτασιν ἀγρῶν. Ἐπισκοποῦντες τὸν ἐν λόγῳ πίνακα κατὰ στήλας ἢ γραμμάς διαπιστοῦμεν, βεβαίως, τὴν ὑπαρξιν διαφορῶν τιμῶν ὑψηλῶν ἢ χαμηλῶν, δέν εἴμεθα, ὅμως, εἰς θέσιν νὰ προβῶμεν εἰς σαφῆ καθορισμὸν τῆς μορφῆς τῆς κατανομῆς των. Ὡς εἶναι εὐνόητον, ἀκόμη μεγαλυτέρας δυσχέρειας παρουσιάζονται κατὰ τὴν χρησιμοποίησιν πινάκων περιεχόντων, ὅχι μόνον 60, ἀλλὰ ἑκατοντάδας ἢ καὶ χιλιάδας μετρήσεων. Ἐξ ἄλλου, ἡ ταξινόμησις τῶν διαθεσῶν παρατηρήσεων - ἐν προκειμένῳ τῶν 60 ἐκτάσεων - κατὰ αὐξοῦσαν ἢ φθίνουσαν τά-

ξιν μεγέθους δέν ἀποτελεῖ ἱκανοποιητικὴν λύσιν τοῦ προβλήματος, καθ' ὅσον, διευκολύνει μὲν τὴν συναγωγὴν ὠρισμένων γενικῶν συμπερασμάτων ὡς πρὸς τὴν κατανομὴν τῶν τιμῶν, παρουσιάζει, ὅμως, καὶ αὕτη τὸ μειονέκτημα ὅτι στηρίζεται εἰς ἄκρως λεπτομερειακὰς πληροφορίας, αἱ ὁποῖαι εἶναι περωρισμένης χρησιμότητος.

Ἡ συνοπτικὴ παρουσίασις μεγάλου ἀριθμοῦ μετρήσεων ὠρισμένης μεταβλητῆς ἐπιτυγχάνεται διὰ τῆς διακρίσεως τῶν τιμῶν αὐτῆς εἰς κατηγορίας ἢ "τάξεις" καὶ ἐν συνεχείᾳ διὰ τοῦ προσδιορισμοῦ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μετρήσεων, αἱ ὁποῖαι ἀνήκουν εἰς ἑκάστην ἐκ τῶν τάξεων τούτων. Ἡ εἰς πῖνακα ταξινομήσεως τῶν δεδομένων κατὰ ποσοτικῶς καθοριζόμενας τάξεις ὁμοῦ μετὰ τῶν ἀντιστοίχων συχνοτήτων καλεῖται "κατανομὴ κατὰ συχνότητας" ἢ "πῖναξ συχνοτήτων".

### Πίναξ Γ - 2

Ὑποθετικαὶ ἐκτάσεις 60 ἀγροτεμαχίων  
(εἰς στρέμματα)

66,71	72,34	89,31	77,90	92,29	53,42
72,48	105,87	83,08	79,74	83,34	68,62
56,68	83,75	66,45	87,17	64,07	94,48
57,55	57,13	55,85	<u>119,76</u>	59,25	72,95
109,04	58,39	62,38	49,37	61,75	76,80
98,82	42,07	86,85	50,08	78,15	78,44
70,08	68,14	89,80	70,26	68,79	85,44
73,39	73,20	78,34	86,38	56,34	<u>40,00</u>
62,04	94,75	104,35	77,44	77,82	61,63
44,12	96,37	61,12	78,21	83,42	79,13

Εἰς τὸν Πῖνακα Γ-2 παρατηρεῖται ὅτι ἡ μικρότερα τιμὴ εἶναι 40,00 στρέμματα καὶ ἡ μεγαλύτερα τιμὴ 119,76 στρέμματα. Συνεπῶς, τὸ εὖρος τῶν ἐκ παρατηρήσεως τιμῶν τῆς μεταβλητῆς "ἐκτάσεις ἀγροτεμαχίων" εἶναι :  $119,76 - 40,00 = 79,76$  (στρέμματα). Τὸ διάστημα ἀπὸ 40,00 μέχρι 119,76 ὑποδιαφοῦμεν εἰς τάξεις, ὁ ἀριθμὸς τῶν ὁποίων συνήθως λαμβάνεται μετὰξὺ 5 καὶ 20. Πάντως, κατὰ τὸν καθορισμὸν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν διαστημάτων τάξεων δεόν ἀπαραιτήτως νὰ λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν ἡ χρῆσις διὰ τὴν ὁποῖαν προορίζεται ὁ καταρτισθόμενος πῖναξ συχνοτήτων. Ὅσον μεγαλύτερος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν τάξεων καὶ, συνεπῶς, μικρότερον τὸ εὖρος αὐ-

τῶν, τοσοῦτον λεπτομερέστεραιθὰ εἶναι αἰ ὑπό τοῦ πίνακος παρεχόμεναι πληροφοραί. Τοῦτο, ὅμως, ἐπιτυγχάνεται εἰς βάρος τῆς διὰ τῆς κατανομῆς ἐπιδωκομένης ἀπλουστεύσεως τῆς παρουσιάσεως τῶν στατιστικῶν στοιχείων. Ἀντιθέτως, ἐάν χρησιμοποιηθῇ σχετικῶς μικρός ἀριθμός τάξεων, πραγματοποιεῖται μὲν εἰς μεγαλύτερον βαθμόν ἢ περιληπτικὴ ἐμφάνισις τῶν δεδομένων, ἀλλὰ ἐν ταύτῃ ἀπὸλλυνται πληροφοραί, αἱ ὁποῖαι ἐνδέχεται νὰ εἶναι οὐσιώδους σημασίας διὰ τὴν ἀνάλυσιν τοῦ ἐξεταζομένου θέματος. Εὐθύς ὡς καθορισθῇ ὁ ἀριθμός τῶν τάξεων, ὑπολογίζονται, ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ εὗρους τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς, τὰ διαστήματα αὐτῶν. Οὕτω, εἰς τὸ ἐξεταζόμενον παράδειγμα, εἰς τὸ ὁποῖον ἐχρησιμοποιήθησαν 8 τάξεις, τὸ διάστημα ἐκάστης ἐξ αὐτῶν εἶναι:  $79,76/8=10$ . Δεδομένου ὅτι τὸ μικρότερον ἀγροτεμάχιον ἔχει ἔκτασιν 40,00 στρεμμάτων, τὰ διαδοχικὰ διαστήματα τάξεως θὰ ἠδύναντο νὰ καθορισθοῦν ὡς ἑξῆς:

$$40,00 - 50,00$$

$$50,00 - 60,00$$

$$60,00 - 70,00$$

κ.ο.κ.

Ὁ τρόπος, ὅμως, οὗτος καθορισμοῦ τῶν διαστημάτων τάξεως ἐπιφέρει σάγχην αἰνκαὶ δημιουργεῖ ἀμφιβολίας περὶ τοῦ διαστήματος εἰς τὸ ὁποῖον θὰ πρέπει νὰ ὑπαχθοῦν αἱ τυχόν ὑπάρχουσαι τιμαὶ 50,00, 60,00, 70,00 κλπ. Εἰς παρομοίας περιπτώσεις εἶναι προτιμότερον ὅπως τὰ διαστήματα τάξεως ὀρίζονται ὡς ἀκολούθως:

$$40,00 - 49,99$$

$$50,00 - 59,99$$

$$60,00 - 69,99$$

κ.ο.κ.

Εἶναι φανερόν ὅτι ὁ τρόπος οὗτος προσδιορισμοῦ τῶν διαστημάτων τάξεως προσιδιάζει εἰς τὰς περιπτώσεις ἐκεῖνας κατὰ τὰς ὁποίας αἱ παρατηρήσεις ἀφοροῦν εἰς συνεχῆ μεταβλητὴν. Ἐάν, ὅμως, ἐπρόκειτο νὰ καταρτισθῇ κατανομὴ ἐνὸς ἀριθμοῦ ἐπιχειρήσεων ἀναλόγως τοῦ ἀριθμοῦ τῶν εἰς αὐτὰς ἀπασχολουμένων (ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖ ἀσυνεχῆ μεταβλητὴν), τὰ διαστήματα τάξεως θὰ ἠδύναντο νὰ ὀρισθοῦν, προφανῶς, ὡς κάτωθι:

$$5 - 9$$

$$10 - 14$$

$$15 - 19$$

κ.ο.κ.

Εἰς τὸ παράδειγμα τῶν ἀγροτεμαχίων, μετὰ τὸν προσδιορισμὸν, κατὰ τὰ ἀνωτέρω, τῶν 8 διαστημάτων τάξεως, λαμβάνομεν διαδοχικῶς μίαν πρὸς μίαν κατὰ στήλας ἢ γραμμὰς τὰς εἰς τὸν Πίνακα Γ-2 περιλαμβανομένας ἀρχικὰς τιμὰς ἐκτάσεων καὶ κατατάσσομεν ταύτας εἰς τὰς τάξεις εἰς τὰς ὁποίας ἀνήκουν. Εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τῶν συχνοτήτων, ἦτοι τοῦ ἀριθμοῦ τῶν παρατηρήσεων αἱ ὁποῖαι ἐμπίπτουν εἰς τὰς ἐπὶ μέρους τάξεις, διευκολυνόμεθα μεγάλως - ἰδίως ὅταν αἱ μετρήσεις εἶναι πολυπληθεῖς - διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς εἰς τὸν Πίνακα Γ-3 δεικνυομένης μεθόδου. Ὁ οὕτω προκύπτων πίναξ συχνοτήτων εἶναι φανερόν ὅτι, παρὰ τὸ σχετικῶς μικρὸν μέγεθος του - ἀποτελεῖται μόνον ἐκ δύο στηλῶν καὶ 8 γραμμῶν - παρέχει σαφεῖς καὶ οὐσιώδεις πληροφορίες περὶ τῆς κατανομῆς τῶν 60 ἀγροτεμαχίων ἀπὸ πλευρᾶς ἐκτάσεως.

Πίναξ Γ-3

Κατανομή 60 ἀγροτεμαχίων ἀναλόγως τῆς ἐκτάσεως αὐτῶν

Ἑκτασις εἰς στρέμματα	Ἀριθμὸς ἀγροτεμαχίων	Συχνότης
40,00 - 49,99		4
50,00 - 59,99		9
60,00 - 69,99		11
70,00 - 79,99		17
80,00 - 89,99		10
90,00 - 99,99		5
100,00 - 109,99		3
100,00 - 119,99		1
Σ ὑ ν ο λ ο ν		60

Εἰς τὴν κατανομήν τοῦ Πίνακος Γ-3 αἱ εἰς τὴν πρώτην στήλην ἀναγραφόμεναι τιμαὶ αἱ ὁποῖαι προσδιορίζουν τὰ διαστήματα τάξεως καλοῦνται "ὄρια τῶν τάξεων". Ἡ μὲν πρώτη ἐξ αὐτῶν, ὡς π.χ. ἡ 40,00 εἰς τὸ πρῶτον, ἢ 50,00 εἰς τὸ δεύτερον διάστημα κλπ., ἀποτελεῖ τὸ "κατώτερον ὄριον" τάξεως, ἢ δὲ ἐπομένη, ὡς π.χ. ἡ 49,99 εἰς τὸ πρῶτον, ἢ 59,99 εἰς τὸ δεύτερον διάστημα κλπ., ἀποτελεῖ τὸ "ἀνώτερον ὄριον" αὐτῆς. Διαστήματα τάξεως μὴ ἔχοντα σαφῶς καθωρισμένον κατώτερον ἢ ἀνώτερον ὄριον καλοῦνται "ἀνοικτὰ διαστήματα", χρησιμοποιοῦνται δὲ ὅσκις αἱ συχνότητες εἶναι πολὺ μικραί. Ἐπὶ παραδείγματι, εἰς τὴν κατανομήν τῶν Ἑλλήνων φο-

ρολογουμένων κατά κλίμακα οικογενειακού εισοδήματος δηλωθέντος κατά τό 1965 τοῦ Πίνακος Γ-4 τό τελευταῖον διάστημα τάξεως ὠρίσθη "600.000 δραχ. καί ἄνω", εἰς τρόπον ὥστε νά καλύπτῃ ὅλα τά ἄνωτάτου ἐπιπέδου εἰσοδήματα, τά ὁποῖα, εἶναι μὲν σχετικῶς ὀλίγα τόν ἀριθμόν, διασπείρονται, ὅμως, εἰς διάστημα λίαν ἐκτεταμένον πρὸς τά ἄνω ἐν συγκρίσει πρὸς τά ἀντίστοιχα τῶν προηγούμενων τάξεων.

Ἡ κεντρικὴ τιμὴ δεδομένης τάξεως μιᾶς κατανομῆς δίδεται ὑπὸ τοῦ ἡμιστορίσματος τοῦ κατωτέρου καὶ ἄνωτέρου ὀρίου αὐτῆς. Οὕτω, εἰς τόν Πίνακα Γ-3 :

Ἡ κεντρικὴ τιμὴ τῆς πρώτης τάξεως εἶναι :

$$\frac{40,00 + 49,99}{2} = 44,995 \approx 45$$

Ἡ κεντρικὴ τιμὴ τῆς δευτέρας τάξεως εἶναι :

$$\frac{50,00 + 59,99}{2} = 54,995 \approx 55 \text{ κ.ο.κ.}$$

#### Πίναξ Γ - 4

Πυκνότητες συχνότητων κατανομῆς Ἑλλήνων φορολογουμένων κατά κλίμακα οικογενειακοῦ εἰσοδήματος αὐτῶν κατά τὸ οικονομικὸν ἔτος 1965

Κλίμακα οικογενειακοῦ εἰσο- δήματος (χιλιάδες δραχμῶν)	Ἀριθμὸς φορολογουμένων	Διάστημα τάξεως (χιλιάδες δραχμῶν)	Πυκνότης συχνότητος (ἀριθμὸς φορολογουμένων ἀντιστοιχῶν εἰς διάστημα χιλίων δραχμῶν)
(1)	(2)	(3)	(4) = $\frac{(2)}{(3)}$
20,000 - 39,999	56.431	20	2.822
40,000 - 59,999	65.443	20	3.272
60,000 - 99,999	75.181	40	1.880
100,000 - 199,999	46.561	100	466
200,000 - 399,999	11.252	200	56
400,000 - 599,999	1.828	200	9
600.000 καὶ ἄνω	1.066		
Σ ὑ ν ο λ ο ν	257.762		

Πηγή: Ε.Σ.Υ.Ε., «Στατιστικὴ τοῦ Δηλωθέντος Εἰσοδήματος Φυσικῶν Προσώπων καὶ τῆς Φορολογίας αὐτοῦ κατά τὸ Οἰκονομικὸν ἔτος 1965», Ἀθῆναι, 1965, σελ. 47.

Ἡ βασική ὑπόθεσις ἐπὶ τῆς ὁποίας στηρίζονται αἱ κατανομαὶ συχνότητων εἶναι ὅτι αἱ τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς, αἱ περιλαμβανόμεναι ἐν τῷ ἐκάστης τάξεως, συγκεντρῶνται περὶ τὴν κεντρικὴν τιμὴν αὐτῆς. Εἰς τὴν πραγματικότητα τοῦτο ἐνδέχεται νὰ μὴ συμβαίνει, θὰ πρέπει, ὅμως, κατὰ τὸν προσδιορισμὸν τῶν διαστημάτων λαμβάνεται μέριμνα ὥστε ἡ ἀπόκλισις ἐκ τῆς ἀνωτέρω ὑποθέσεως νὰ εἶναι ὅσον τὸ δυνατόν μικροτέρα. Ὑπάρχουν, ἐπὶ παραδείγματι, μεταβληταὶ τῶν ὁποίων αἱ τιμαὶ διὰ λόγους θεσμολογικοῦς ἢ διὰ λόγους παραδόσεως καὶ συνηθείας ἐμφανίζονται ἐκτετατωμένως εἰς ὀριζόμενα σημεία τῆς κλίμακος μετρήσεως. Εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτάς ἐνδεικνύεται ὅπως αἱ τιμαὶ αἱ ὁποῖαι ἐμφανίζονται συχνότερον συμπύκνουν, εἰ δυνατόν, μὲ τὰς κεντρικὰς τιμὰς τῶν τάξεων τῆς κατανομῆς.

Δεῖον νὰ σημειωθῇ ὅτι εἰς τὰς κατανομάς τὸ εὖρος τοῦ διαστήματος δέν εἶναι πάντοτε σταθερόν, ὡς εἰς τὸ παράδειγμα τοῦ Πίνακος Γ-3, ἀλλὰ ἐνδέχεται νὰ μεταβάλλεται ἀπὸ τάξεως εἰς τάξιν. Τοῦτο κατ' ἀνάγκην συμβαίνει εἰς τὰς περιπτώσεις ἐκεῖνας κατὰ τὰς ὁποίας, ἐνῶ τὸ εὖρος τῶν ἐκ παρατηρήσεως τιμῶν τῆς μεταβλητῆς εἶναι μέγα, ὑπάρχει σημαντικὴ συγένεσις αὐτῶν εἰς σχετικῶς μικρὸν διάστημα. Ἐνταῦθα ἡ χρησιμοποίησις ἴσων διαστημάτων τάξεως θὰ συνεπήγετο ἀπώλειαν πληροφοριῶν διὰ τὸ διάστημα τῆς μεγάλης συγκεντρώσεως καὶ λεπτομερειαικὴν περιγραφὴν τοῦ λοιποῦ διαστήματος, τὸ ὁποῖον, προφανῶς, παρουσιάζει τὸ μικρότερον ἐνδιαφέρον. Τοιαῦτα ἄνισα διαστήματα Ἑλλήνων φορολογουμένων κατὰ παραδείγματι, εἰς τὴν κατανομὴν τῶν Ἑλλήνων φορολογουμένων κατὰ κλιμάκια οἰκογενειακοῦ εἰσοδήματος δηλωθέντος κατὰ τὸ ἔτος 1965, ἡ ὁποία ἐμφαίνεται εἰς τὸν Πίνακα Γ-4. Εἰς τὴν ἐν λόγω κατανομὴν τὰ διαστήματα τῶν τάξεων τῶν ἀναφερομένων εἰς τὰ χαμηλὰ εἰσοδήματα εἶναι σχετικῶς μικρά, διότι εἰς τὰ κατώτερα εἰσοδηματικά κλιμάκια συγκεντρῶνται ὁ μεγαλύτερος ἀριθμὸς φορολογουμένων. Τὰ διαστήματα τῶν ἀνωτέρων εἰσοδηματικῶν κλιμακίων καθίστανται μεγαλύτερα, διότι ἄλλως - ἔάν, δηλαδή, διετηρεῖτο τὸ εὖρος τῶν διαστημάτων τῶν κατωτέρων εἰσοδημάτων - εἰς πολλὰ ἐξ αὐτῶν ἐλάχιστα ἢ καὶ οὐδεμίαν παρατήρησις θὰ ἐνεφανίζετο.

Πρὸς μέτρησιν τοῦ βαθμοῦ συγκεντρώσεως τῶν παρατηρήσεων εἰς τὰς ἐπὶ μέρους τάξεις τοῦ συνολικοῦ εὗρους τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς, χρησιμοποιεῖται ἡ καλουμένη "πυκνότης συχνότητων", ἡ ὁποία ὑπολογίζεται διὰ διαφέσεως τῆς συχνότητος ἐκάστης τάξεως διὰ τοῦ διαστήματος αὐτῆς. Παράδειγμα ὑπολογισμοῦ τῆς πυκνότη-

τος συχνότητας παρέχεται εἰς τόν Πίνακα Γ-4, διά χρησιμοποίησιν ὡς τῆς κατανομῆς τῶν Ἑλλήνων φορολογουμένων κατά κλιμάκια οἰκογενειακοῦ εἰσοδήματος δηλωθέντος κατά τό ἔτος 1965. Εἰς τήν στήλην (3) τοῦ πίνακος τούτου ἀναγράφονται τά διαστήματα τάξεως, τά ὅποια, ὡς ἤδη ἐλέχθη, καθίστανται μεγαλύτερα εἰς ἀνώτερα ἐπίπεδα εἰσοδήματος. Διά χρησιμοποίησιν τῶν στηλῶν (2) καί (3) ὑπελογίσθη ὁ ἀριθμός τῶν φορολογουμένων ὁ ἀντιστοιχῶν εἰς διάστημα χιλίων δραχμῶν (βλ. στήλην (4)). Ἐκ τῶν ἀποτελεσμάτων τούτων προκύπτει σαφῶς ὅτι ἡ πυκνότης συχνότητων καθίσταται μέγιστη εἰς τό δεύτερον εἰσοδηματικόν κλιμάκιον, ἐνῶ ἡ μέγιστη συχνότης παρατηρεῖται εἰς τό τρίτον εἰσοδηματικόν κλιμάκιον. Μετά τό δεύτερον κλιμάκιον ἡ πυκνότης συχνότητων κατέρχεται ταχέως, εἰς δέ τό τρίτον κλιμάκιον ἡ τιμή αὐτῆς καθίσταται κατά πολύ μικρότερα τῆς ἀντιστοιχοῦσης εἰς τό πρῶτον κλιμάκιον.

##### 5. Ποιοτικά κατατάξεις

Ταξινομήσις ἐπί ποιοτικῆς βάσεως ἐφαρμόζεται ὅταν τό ὑπό ἐξέτασιν χαρακτηριστικόν δέν εἶναι ποσοτικόν ἀλλά ποιοτικόν, ὁπότε αὕτη λαμβάνει τήν μορφήν τῆς ἀπαριθμήσεως ἐπί μέρους καταστάσεων διαχωριζομένων μεταξύ των ὡς πρός ὠρισμένον ποιοτικόν κριτήριον. Κατά ταῦτα, ποιοτικήν κατάταξιν ἔχομεν ὅταν διαχωρίζωμεν τά μέλη τοῦ οἰκονομικῶς ἐνεργοῦ πληθυσμοῦ τῆς χώρας εἰς ἀπασχολουμένους καί ἀνέργους (βλ. Πίνακα Γ-9) ἢ ὅταν διαχωρίζωμεν τά ἄτομα τοῦ συνολικοῦ πληθυσμοῦ ἀπό πλευρᾶς οἰκογενειακῆς καταστάσεως εἰς ἀγάμους, ἐγγάμους, χήρους καί διεζευγμένους (βλ. Πίνακα Γ-7). Εἰς ποιοτικά κριτήρια στηρίζονται, ὡς αὐτῶς, αἱ ταξινομήσις τῶν λειτουργουσῶν καθ' ὠρισμένον χρόνον ἰδιωτικῶν ἐπιχειρήσεων εἰς προσωπικάς, ἀνωνύμους καί περιωρισμένης εὐθύνης ἢ εἰς ἐμπορικάς, βιομηχανικάς, γεωργικάς, τουριστικάς κλπ.

Ὁ ἀνωτέρω ἀναφερθεῖς τρόπος ποιοτικῆς κατατάξεως ἐφαρμόζεται ὡς αἰεὶ ἡ στατιστικῆ ἐξέτασις διαφόρων καταστάσεων γίνεται μόνον ἐπί τῆ βάσει τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐμφανιζομένων περιπτώσεων, δηλ. δι' ἀπλῆς ἀπαριθμήσεως. Δι' ὠρισμένους πληθυσμούς ἢ ἐπί τῆς τοιαύτης ἀπαριθμήσεως στηριζομένη κατάταξις ἀποτελεῖ ἵκανοποιητικόν τρόπον ποιοτικοῦ διαφορισμοῦ των ὡς πρός δεδομένον κριτήριον, καθ' ὅσον αἱ ἐπί μέρους μονάδες ἐκ τῶν ὁποίων ἀποτελοῦνται δέν ἐμφανίζουσι μεταξύ των ποσοτικῆς φύσεως διαφοράς δυναμένας νά ληφθοῦν ὑπ' ὄψιν κατά τήν ταξινομήσιν. Οὕτω, εἰς τά ἀνωτέρω χρησιμοποίηθέντα παραδείγματα κατατάξεως τοῦ πληθυσμοῦ τῆς χώ-

ρας από πλευρᾶς ἀπασχολήσεως καὶ οὐλογενειακῆς ποιότητος καὶ ἐπὶ μέρους ἄτομα οὐδέλως διαφοροῦνται μεταξύ των, ἀλλὰ ὡς ἰσοδύναμοι μονάδες ἐντάσσονται εἰς τὴν Αἴθρην Β' κατηγορίας τοῦ 1966. ὁμοίως, δὲν ἰσχύει καὶ προκειμένου περὶ τῆς ταξινομήσεως τῶν ἰδιωτικῶν ἐπιχειρήσεων ἐπὶ τῆ βᾶσει ὠρισμένου ποιοτικοῦ κριτηρίου, διότι ὁ ἀριθμὸς αὐτῶν κατὰ κατηγορίας, π.χ. κατὰ κλάδους παραγωγικῆς δραστηριότητος, δὲν παρέχει τὴν πραγματικὴν εἰκόνα τῆς κατανομῆς των, ἐφ' ὅσον δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν καὶ τὸ μέγεθος τῶν ἐπὶ μέρους ἐπιχειρήσεων, τὸ ὁποῖον ἐνδέχεται νὰ ποικιλλῆμα

### Πίναξ Γ - 5

Ἄξια ἑλληνικῶν ἐξαγωγῶν τοῦ ἔτους 1966  
κατὰ γεωγραφικὰς περιοχὰς (Ἐπὶ τῆ βᾶσει  
φορτώσεων)

Γεωγραφικὴ περιοχὴ	Ἄξια εἰς ἑκ. δραχ.
Ἄμερική . . . . .	1.392,3
Χῆραι Ε.Ο.Κ. . . . .	4.321,0
Χῆραι Ε.Σ.Ε.Σ. . . . .	1.298,7
Ἀνατολικὴ Εὐρώπη . . . . .	2.785,4
Λοιπὴ Εὐρώπη . . . . .	864,7
Ἀσία - Ὀκεανία . . . . .	945,6
Ἀφρική . . . . .	567,8
Σύνολον (α)	12.175,5

(α) Δὲν περιλαμβάνονται ἐξαγωγαὶ ἀξίας 4 ἑκατ. δραχ. πρὸς ἀκαθορίστους χρόνους τῆς

Πηγή: Ε.Σ.Υ.Ε., «Μηνιαῖον Δελτίον Στατιστικῆς Ἐξωτερικοῦ Ἐμπορίου», Δεκέμβριος 1966, σελ. 2 - 5.

γάλως. Ἀπὸ τῆς ἀπόψεως αὐτῆς προσφορώτερος θὰ ἦτο ἕτερος τρόγος ποιοτικῆς κατατάξεως στηριζόμενος εἰς ὠρισμένον ποσοτικὸν χαρακτηριστικὸν, ὡς εἶναι π.χ. ἡ ἀξία τῶν πωλήσεων τῶν ἐπιχειρήσεων ἐντὸς δεδομένης χρονικῆς περιόδου.

Κατὰ ταῦτα, ἡ ποιοτικὴ κατάταξις δύναται νὰ γίνῃ, ὄχι μόνον δι' ἀπαριθμῆσεως περιπτώσεων, ἀλλὰ καὶ διὰ ταξινομήσεως τῶν τιμῶν ὠρισμένης μεταβλητῆς κατὰ κατηγορίας καὶ ἐν συνεχείᾳ καθορισμοῦ τοῦ συνολικοῦ μεγέθους τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς ἐκάστην ἐξ αὐτῶν. Εἶναι φανερόν ὅτι ἀνάλογος μέθοδος δύναται νὰ ἐφαρμοσθῆ



καί εἰς τὰς κατανομάς συχνότητων (βλ. Πίνακα Γ-8). Εἰς τὰς τελευταίας, ὅμως, δεδομένου ὅτι ἡ κατάταξις γίνεται ὡς πρὸς ὀρισμένον ποσοτικὸν χαρακτηριστικόν, δέν ὑπάρχει συνήθως ἰδιαίτερος λόγος ὑπολογισμοῦ τῶν ἀθροισμάτων τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς, τῶν ἀντιστοιχοῦντων εἰς τὰς ἐπὶ μέρους τάξεις. Ἀντιθέτως, εἰς τὰς ποιοτικάς κατατάξεις ἢ ἐν λόγῳ μέθοδος ἐφαρμόζεται εὐρῆως, καθ' ὅσον δι' αὐτῆς παρέχονται πολυτιμώταται πληροφορία περὶ τῆς συνθέσεως τῶν διαφόρων μεγεθῶν ὡς πρὸς ὀρισμένα κριτήρια .

Εἰς τὴν κατηγορίαν τῶν ποιοτικῶν κατατάξεων ἀνήκει καί ἡ γεωγραφικὴ κατάταξις, μολοντί αὕτη θεωρεῖται ὑπὸ τινων συγγραφέων ὅτι ἀποτελεῖ χωριστὸν εἶδος. Παράδειγμα γεωγραφικῆς κατατάξεως παρέχεται εἰς τὸν Πίνακα Γ-5, ἔνθα ἡ ἀξία τῶν ἑλληνικῶν ἐξαγωγῶν κατὰ τὸ ἔτος 1966 κατανέμεται κατὰ μείζονας γεωγραφικὰς περιοχὰς τοῦ κόσμου, ὡς εἶναι ἡ Ἀμερικὴ, αἰχῶραι τῆς Ε.Ο.Κ. κλπ .

#### δ. Χρονολογικὴ κατάταξις

Αἱ ἀνωτέρω περιγραφεῖσαι δύο μέθοδοι κατατάξεως ἀφοροῦν εἰς τὰς τιμὰς ὀρισμένης μεταβλητῆς ἢ εἰς ἀπαριθμήσεις καταστάσεων κατὰ δεδομένην χρονικὴν περίοδον. Δι' αὐτῶν κατ' οὐσίαν ἀποτυπῶνται ἢ ὑφισταμένη διάρθρωσις ἢ σύνθεσις τῶν μεγεθῶν εἰς τι σημεῖον τοῦ χρόνου. Πολλοί, ὅμως, ἐκ τῶν διαθεσίμων στατιστικῶν ἀποτελοῦνται ἐκ σειρᾶς μετρήσεων συνολικῶν μεγεθῶν ἀναφερομένων εἰς διαφόρους χρονικάς περιόδους. Εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτάς τὰ δεδομένα κατατάσσονται κατὰ τὴν ἐν τῷ χρόνῳ ἐμφάνισιν αὐτῶν. Αἱ οὕτω ταξινομούμεναι μετρήσεις, αἰ ὅποια ἀναφέρονται εἰς διαδοχικά καί ἴσα χρονικά διαστήματα καλοῦνται "χρονολογικαὶ σειραί" .

Ἡ εἰς πίνακα χρονολογικὴ κατάταξις εἶναι δυνατόν νά μῆ ἀφορᾷ εἰς διαδοχικάς περιόδους, καθ' ὅσον ὁ σκοπὸς τῆς παρουσιάσεως ἐνδέχεται νά ἐκπληροῦται διὰ τῆς ἀναγραφῆς στατιστικῶν στοιχείων ἀναφερομένων εἰς χρονικά διαστήματα ἀπέχοντα μεταξύ των. Ἐπὶ παραδείγματι, ἡ ἐξέλιξις τῆς βιομηχανικῆς ἢ ἀγροτικῆς παραγωγῆς θά ἦδύνατο νά ἐπισκοπηθῇ διὰ χρησιμοποίησεως μόνον τῶν δεδομένων τῶν ἐτῶν 1950, 1955, 1960 καί 1965, χωρὶς, δηλαδή, νά περιληφθοῦν εἰς τὸν σχετικὸν πίνακα καί αἱ τιμαὶ τῶν ἐνδιαμέσων ἐτῶν. Εἰς τὰς χρονολογικάς κατατάξεις αἱ περίοδοι τὰς ὁποίας καλύπτουν τὰ στοιχεῖα, ἐνῶ δέν εἶναι ἀπαραίτητον νά εἶναι διαδοχικά, δέον νά εἶναι ἴσα μεταξύ των, διότι ἄλλως καθίστανται ἀδύ-

νατοι αἰ συγκρίσεις καὶ ὑπάρχει κίνδυνος ἔξαγωγῆς ἐσφαλμένων συμπερασμάτων.

Αἱ χρονολογικαὶ σειραὶ δύνανται νὰ ἀναφέρονται εἰς οἰανδήποτε χρονικὴν μονάδα, συνήθως, ὅμως, ἐκφράζονται εἰς ἔτη, τρίμηνα, ἢ μῆνας. Εἰς τὴν πραγματικότητα αἱ μονάδες αὗται λαμβάνονται ἐπὶ ἡμερολογιακῆς βάσεως, δὲν ἔχουν σταθερὸν μέγεθος. Τοῦτο, γενικῶς, δὲν δημιουργεῖ σοβαρὰ προβλήματα συγκρισιμότητος, λόγῳ τῆς μικρᾶς σχετικῶς ἐντάσεως τῶν ἐντεῦθεν ἀσκουμένων ἐπιδράσεων ἐπὶ τῶν δεδομένων. Μεγαλυτέρας σημασίας εἶναι, βεβαίως, αἱ ἐπιδράσεις αἱ προκαλούμεναι εἰς τὰ μηνιαῖα στοιχεῖα ἐκ τῶν διαφορῶν ὡς πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν ἡμερῶν, καὶ δὴ τῶν ἐργασίμων μετὰ τῶν ἐπὶ μέρους μηνῶν τοῦ ἔτους.

Παράδειγμα χρονολογικῆς κατατάξεως ἐπὶ ἑτησίας βάσεως ἀποτελοῦν αἱ εἰς τὸν Πίνακα Γ-1 διδόμεναι σειραὶ παραγωγῆς ἠλεκτρικοῦ ρεύματος καὶ φωταερίου ἐν Ἑλλάδι κατὰ τὴν περίωδον 1955-1964. Εἰς τὴν πρώτην στήλην τοῦ ἐν λόγω πίνακος ἀναγράφονται αἱ χρονικαὶ περίοδοι αἱ ὁποῖαι συνίστανται ἐκ διαδοχικῶν ἐτῶν, εἰς δὲ τὰς ἐπομένας στήλας παρέχονται αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῶν μεγεθῶν. Ὁ τρόπος οὗτος τῆς εἰς στήλας παρουσιάσεως τῶν χρονολογικῶν σειρῶν διευκολύνει τὴν παρακολούθησιν τῆς ἐξελίξεώς των καὶ διὰ τοῦτο δεόν νὰ προτιμᾶται τοῦ ἑτέρου κατὰ τὸν ὁποῖον αἱ χρονικαὶ περίοδοι τῶν εἰς τὴν πρώτην γραμμὴν τὰ δὲ ἀντίστοιχα στοιχεῖα εἰς τὰς ἐπομένας.

## 7. Συνθετοὶ κατατάξεις εἰς πίνακας διπλῆς εἰσόδου

Ἐκ τῆς ἐφαρμογῆς τῶν ἀνωτέρω περιγραφέντων τρόπων ταξινομήσεως τῶν στατιστικῶν δεδομένων προκύπτουν "πίνακες ἀπλῆς εἰσόδου", δεδομένου ὅτι εἰς αὐτοὺς ἡ κατάταξις στηρίζεται ἐπὶ μιᾶς μόνο βάσεως, ἢ ὅποια δύναται νὰ εἶναι ποσοτικὴ, ποιοτικὴ ἢ χρονολογικὴ. Ἐκτὸς τῶν πινάκων τούτων εἶναι δυνατόν νὰ κατασκευασθοῦν καὶ πίνακες συνθέτου μορφῆς προκύπτοντες ἐκ τοῦ συνδυασμοῦ δύο ἢ περισσοτέρων ἀπλῶν πινάκων. Τοιοῦτου εἴδους πίνακες ἐνσωματοῦντες συνθέτους κατατάξεις στατιστικῶν δεδομένων χρησιμοποιῶνται εὐρέως τόσον ὡς στατιστικαὶ πηγαὶ ὅσον καὶ δι' εἰδικούς ἀναλυτικούς σκοπούς.

Ἡ ταξινόμησις ὠρισμένου μεγέθους ὡς πρὸς δύο κριτήρια ἐπιτυγχάνεται δι' ἀναγραφῆς τῶν κατηγοριῶν τῆς μιᾶς κατατάξεως εἰς τὰς στήλας καὶ τῶν κατηγοριῶν τῆς ἑτέρας κατατάξεως εἰς τὰς γραμμάς τοῦ πίνακος. Ὁ οὕτω καταρτιζόμενος πίναξ καλεῖται "πίναξ

διπλῆς εἰσόδου". Διὰ τοῦ τρόπου αὐτοῦ ταξινομήσεως καθίσταται δυνατός ὁ προσδιορισμός τῆς τιμῆς, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς οἷον-δῆποτε συνδυασμὸν τῶν εἰς τὰς στήλας καὶ τὰς γραμμὰς τοῦ πίνακος ἐμφαινόμενων κατηγοριῶν. Σημειωτέον ὅτι διὰ τῶν συνόλων κατὰ στήλας καὶ γραμμὰς παρέχονται αἱ τιμαὶ τῶν ἐπὶ μέρους κατηγοριῶν ἑκατέρας κατατάξεως κεχωρισμένως.

Πρὸς κατασκευὴν ἐνός τοιοῦτου εἶδους συνθέτου πίνακος δεόν προηγουμένως νὰ καθορισθῇ ἡ κατάταξις ἡ ὁποία, ὡς ἐκ τοῦ σκοποῦ τοῦ πίνακος, ἔχει τὴν μεγαλυτέραν σημασίαν. Τὰ δεδομένα εἰς τὰ ὁποῖα κυρίως δίδεται ἡ ἔμφασις τίθενται εἰς τὰς στήλας, ἐνῶ ἡ δευτερευούσης σημασίας ταξινόμησις εἰς τὰς γραμμὰς. Τοῦτο, διότι εἶναι εὐκόλον νὰ διαπιστώσῃ τις ὅτι εὐχερέστερον ἐπισκοποῦνται τὰ στατιστικὰ στοιχεῖα ὅταν κατατάσσονται τὸ ἐν κάτωθι τοῦ ἄλλου (εἰς στήλας) ἢ τὸ ἐν παραπλευρῶς τοῦ ἄλλου (εἰς γραμμὰς).

### Πίναξ Γ - 6

Κατανομή βιομηχανικῶν καὶ βιοτεχνικῶν καταστημάτων ἐν Ἑλλάδι κατὰ τὸ ἔτος 1963 κατὰ μέγεθος ἀπασχολήσεως καὶ ἐγκατεστημένην κινητήριον δύναμιν

Τάξεις μεγέθους ἀπασχολήσεως (ἀπασχολούμενα άτομα)	Καταστήματα ἔχοντα κινητήρας ἰσχύος:								Σύνολον καταστημάτων
	0,1 ἕως 4,9 HP	5,0 ἕως 9,9 HP	10,0 ἕως 19,9 HP	20,0 ἕως 49,9 HP	50,0 ἕως 99,9 HP	100,0 ἕως 499,9 HP	500,0 ἕως 999,9 HP	1.000,0 HP καὶ ἄνω	
0 - 4	19.358	7.331	6.663	3.691	457	140	3	1	37.644
5 - 9	2.870	1.729	1.510	1.060	352	154	10	5	7.690
10 - 19	706	393	556	805	287	226	9	4	2.986
20 - 29	127	75	138	261	129	154	3	10	897
30 - 49	46	41	63	167	152	164	17	10	660
50 καὶ ἄνω	10	26	33	102	159	304	86	91	811
Σύνολον καταστημάτων . . .	23.117	9.595	8.963	6.086	1.536	1.142	128	121	50.688

Πηγή: Ε.Σ.Υ.Ε., «Ἀποτελέσματα τῆς Ἀπογραφῆς Βιομηχανίας - Βιοτεχνίας καὶ Ὀρυκτῶν τῆς 28ης Σεπτεμβρίου 1963», Τόμος II, Ἀθήναι, 1964, σελ. 208.

Σύνθετοι πίνακες δύο κατατάξεων δύνανται να προκύψουν διαχρησιμοποιήσας ούλοδήποτε συνδυασμού τῶν τριῶν βασικῶν κατατάξεων, ἤτοι τῆς ποσοτικῆς, τῆς ποιοτικῆς καὶ τῆς χρονολογικῆς. Οὕτω, ἔχομεν πίνακες διπλῆς εἰσόδου στηριζομένους εἰς δύο ποσοτικὰς, εἰς ποσοτικὴν καὶ ποιοτικὴν, εἰς ποσοτικὴν καὶ χρονολογικὴν, εἰς δύο ποιοτικὰς, εἰς ποιοτικὴν καὶ χρονολογικὴν, καὶ εἰς δύο χρονολογικὰς κατατάξεις. Κατωτέρω ἐξετάζεται ὁ τρόπος καταρτίσεως τῶν ἐπὶ μέρους αὐτῶν μορφῶν πινάκων διαχρησιμοποίησεως καταλλήλων παραδειγμάτων.

Εἰς τὸν Πίνακα Γ-6 δίδεται ἡ κατανομή τῶν ἐν Ἑλλάδι βιομηχανικῶν καὶ βιοτεχνικῶν καταστημάτων κατὰ τὸ ἔτος 1963 μὲ βάσιν δύο ποσοτικὰ χαρακτηριστικὰ αὐτῶν, ἤτοι τὸ μέγεθος τῆς ἀπασχολήσεως καὶ τὴν ἐγκατεστημένην κινητήριον δύναμιν. Εἰς τὴν πρώτην στηλὴν ἀναγράφονται αἱ τάξεις τοῦ μεγέθους τῆς ἀπασχολήσεως καὶ εἰς τὰς κορυφὰς τῶν λοιπῶν στηλῶν αἱ τάξεις τῆς κινητήριου δυνάμεως. Διὰ τῆς σταυροειδοῦς αὐτῆς κατατάξεως καθίσταται δυνατὸς ὁ καθορισμὸς, ὄχι μόνον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν καταστημάτων τὰ ὁποῖα ἀπασχολοῦν π.χ. 5-9 ἄτομα ἢ ἔχουν κινητήρας ἰσχύος 10,0 - 19,9

### Πίναξ Γ-7

Πληθυσμὸς τῆς Ἑλλάδος καθ' ὀμάδας ἡλικιῶν καὶ οἰκογενειακὴν κατάστασιν (Ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἀπογραφῆς τοῦ 1961)

Ὅμαδες ἡλικιῶν	Ἄγαμοι	Ἐγγαμοι	Χήροι	Διεζευγμένοι	Σύνολον (α)
0 - 14 ἐτῶν	2.243.361	555	15	12	2.243.943
15 - 24 »	1.157.650	187.630	608	1.879	1.347.767
25 - 34 »	492.250	919.866	6.836	9.799	1.428.751
35 - 44 »	111.654	826.423	28.205	11.991	978.273
45 - 54 »	58.716	823.546	76.402	11.508	970.172
55 - 64 »	35.965	553.108	136.590	7.121	732.784
65 - 74 »	19.274	251.482	155.867	2.727	429.350
75 ἐτῶν καὶ ἄνω	8.487	103.283	144.733	778	257.281
Σύνολον	4.127.357	3.665.893	549.256	45.815	8.388.321

(α) Ἄνευ τῶν μὴ δηλωσάντων οἰκογενειακὴν κατάστασιν.

Πηγή: Ε.Σ.Υ.Ε., « Στατιστικὴ Ἐπετηρὶς τῆς Ἑλλάδος, 1965 », Ἀθῆναι, 1966, σελ. 31.

HP, αλλά επίσης και του αριθμού τῶν καταστημάτων τάξεως τινος τῆς μιᾶς κατανομῆς τὰ ὅποια ταυτοχρόνως ἀνήκουν καὶ εἰς ὠρισμένην τάξιν τῆς ἑτέρας κατανομῆς. Οὕτω, ἐκ τοῦ ἐν λόγῳ πίνακος (δευτέρα γραμμὴ) λαμβάνομεν ὅτι τὰ καταστήματα τὰ ἀπασχολοῦντα 5-9 ἄτομα ἀνέρχονται συνολικῶς εἰς 7.690. Διὰ χρησιμοποίησεως καὶ τῆς ἑτέρας κατατάξεως πληροφοροῦμεθα ὅτι τὰ ἐξ αὐτῶν διαθέτουντα κινητῆρας ἰσχύος 10,00-19,99 HP (τρίτη στήλη) εἶναι 1.510. Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον εὐρίσκομεν ἐκ τοῦ Πίνακος Γ-6 ὅτι ὑπάρχουν 17

### Πίναξ Γ-8

Κατανομή τοῦ ἑλληνικοῦ ἐμπορικοῦ στόλου  
καθ' ἡλικίαν κατὰ τὰ ἔτη 1962 - 1964

Ἑλικία πλοίων εἰς ἔτη	Χωρητικότης εἰς χιλιάδας ΚΟΧ		
	1962	1963	1964
- < 5	1.670	1.492	1.370
5 - 10	1.651	1.712	1.797
10 - 15	265	443	563
15 - 20	2.381	1.244	612
20 - 25	369	1.420	2.114
25 - 30	103	203	364
30 καὶ ἄνω	335	424	429
Σύνολον	6.774	6.938	7.249

Πηγή: Ε.Σ.Υ.Ε., « Στατιστικὴ Ἐπετηρὶς τῆς Ἑλλάδος, 1965 », Ἀθήναι, 1966, σελ. 333.

καταστήματα ἀπασχολοῦντα 30-49 ἄτομα καὶ ταυτοχρόνως ἔχοντα ἐγκατεστημένην κινητήριον δύναμιν 500,0-999,9 HP. Οἱ πίνακες τοῦ τύπου αὐτοῦ οἱ παρέχοντες κατατάξεις στατιστικῶν δεδομένων ὡς πρὸς δύο ποσοτικά χαρακτηριστικά καλοῦνται " πίνακες συσχετίσεως " καὶ χρησιμοποιοῦνται εὐρύτατα εἰς τὴν στατιστικὴν ἀνάλυσιν.

Ὁ Πίναξ Γ-7 παρέχει τὸν πληθυσμὸν τῆς Ἑλλάδος (ἐπὶ τῇ βᾶσει τῆς ἀπογραφῆς τοῦ 1961) κατανεμημένον καθ' ὀμάδας ἡλικιῶν καὶ οἰκογενειακὴν κατάστασιν. Ἐνταῦθα εἰς τὴν πρώτην στήλην ἀναγράφονται αἱ τάξεις τῆς ἡλικίας, ἡ ὅποια ἀποτελεῖ ποσοτικὸν χαρακτηριστικὸν τοῦ πληθυσμοῦ, ἐνῶ εἰς τὰς κορυφὰς τῶν ἐπομένων στηλῶν

περιέχονται αἱ ἐπί μέρους κατηγορίαι τῆς οἰκογενειακῆς καταστάσεως, ἡ ὁποία, ὡς γνωστόν, ἀποτελεῖ ποιοτικόν χαρακτηριστικόν. Διὰ τῆς σταυροειδοῦς ταύτης ταξινομήσεως εἶναι δυνατός ὁ καθορισμός τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀτόμων ὠρισμένης ὁμάδος ἡλικιῶν, τὰ ὁποῖα ἀνήκουν εἰς ἐκάστην κατηγορίαν οἰκογενειακῆς καταστάσεως. Οὕτω, ἐκ τοῦ πίνακος αὐτοῦ λαμβάνομεν ὅτι 6.836 ἄτομα ἡλικίας 25 - 34 ἐτῶν διατελοῦν ἐν χρεῖρα, ὅτι 19.274 ἄτομα ἡλικίας 65-74 ἐτῶν εἶναι ἄγαμοι κλπ.

Εἰς τόν Πίνακα Γ-8 δίδεται ἡ κατανομή τῆς χωρητικότητος τοῦ ἑλληνικοῦ ἐμπορικοῦ στόλου καθ' ἡλικίαν καθ' ἕναστον τῶν ἐτῶν 1962, 1963 καί 1964. Εἰς τήν πρώτην στήλην αὐτοῦ ἀναγράφονται αἱ τάξεις τῆς ἡλικίας τῶν πλοίων εἰς ἔτη, εἰς δέ τὰς κορυφάς τῶν ἐπομένων στηλῶν σημειοῦνται τὰ ἔτη εἰς τὰ ὁποῖα ἀναφέρονται αἱ ἐμφανιζόμεναι κατατάξεις. Συνεπῶς, εἰς τό παράδειγμα τοῦτο ἡ ταξινομήσις εἶναι ταυτοχρόνως ποσοτικῆ καί χρονολογική. Ὁ τρόπος οὗτος παρουσιάσεως τῶν στατιστικῶν δεδομένων διευκολύνει τήν παρακολούθησιν τῆς ἐν τῷ χρόνῳ ἐξελίξεως τῆς χωρητικότητος τοῦ ἑλληνικοῦ ἐμπορικοῦ στόλου κατά τάξιν ἡλικίας τῶν πλοίων. Οὕτω, εὐχερῶς προκύπτει ἐκ τοῦ Πίνακος Γ-8 ὅτι κατά τήν ἐξεταζομένην περίοδον μειοῦται συνεχῶς ἡ χωρητικότης τῶν πλοίων ἡλικίας κάτω τῶν 5 ἐτῶν καί 15-20 ἐτῶν, αὐξάνεται δέ ἡ χωρητικότης τῶν πλοίων ὅλων τῶν λοιπῶν τάξεων.

### Πίναξ Γ - 9

Οἰκονομικῶς ἐνεργὸς πληθυσμὸς (α) τῆς Ἑλλάδος κατανεμόμενος εἰς ἀπασχολουμένους καί ἀνέργους κατά ἀστικάς, ἡμιαστικάς καί ἀγροτικάς περιοχάς

(Ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἀπογραφῆς τοῦ 1961)

Περιοχαί	Ἀπασχολούμενοι	Ἄνεργοι	Ἐνεργὸς πληθυσμὸς
Ἀστικάι . .	1.211.005	137.147	1.348.152
Ἡμιαστικάι .	440.087	24.965	465.052
Ἀγροτικάι . .	1.772.339	53.058	1.825.397
Σύνολον	3.423.431	215.170	3.638.601

(α) Ἐκτὸς τῶν στρατευμένων καί φυλακισμένων.

Πηγή: Ε.Σ.Υ.Ε., « Στατιστικὴ Ἐπετηρὶς τῆς Ἑλλάδος, 1965 », Ἀθῆναι, 1966, σελ. 165.

Ο Πίναξ Γ-9 δεικνύει τόν οίκονομικῶς ἐνεργόν πληθυσμόν τῆς Ἑλλάδος (ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἀπογραφῆς τοῦ 1961) κατανεμημένον εἰς ἀπασχολούμενους καὶ ἀνέργους κατὰ ἀστικές, ἡμιαστικές καὶ ἀγροτικές περιοχάς. Εἰς τὴν πρώτην στήλην τοῦ πίνακος ἀναγράφονται αἱ ἐπὶ μέρους κατηγορίαι περιοχῶν, εἰς δὲ τὰς κορυφάς τῶν ἐπομένων στηλῶν αἱ κατηγορίαι τῶν ἀπασχολούμενων καὶ τῶν ἀνέργων. Ἡ κατάταξις αὕτη στηρίζεται, ὡς εἶναι φανερόν, εἰς δύο ποιοτικά κριτήρια καὶ παρέχει τὴν δυνατότητα προσδιορισμοῦ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀτόμων τὰ ὅποια ἀνήκουν εἰς οἴονδήποτε δυνατόν συνδυασμόν τῶν χρησιμοποιούμενων ἔξ κατηγοριῶν. Οὕτω, ἐκ τοῦ πίνακος Γ-9 λαμβάνομεν ὅτι κατὰ τὸν χρόνον τῆς ἀπογραφῆς οἱ ἀπασχολούμενοι εἰς τὰς ἀστικές περιοχάς τῆς χώρας ἀνῆρχοντο εἰς 1.211.005, οἱ δὲ ἀνεργοὶ εἰς τὰς ἀγροτικές περιοχάς αὐτῆς εἰς 53.058.

Εἰς τὸν πίνακα Γ-10 δίδεται ὁ ἀριθμὸς τῶν τελεσιδίκως καταδικασθέντων ἐν Ἑλλάδι κατὰ βαθμὸν ἐκπαιδεύσεως καθ' ἕκαστον τῶν ἐτῶν 1960, 1961, 1962, 1963 καὶ 1964. Εἰς τὴν πρώτην στήλην τοῦ πίνακος τούτου ἀναγράφονται οἱ διάφοροι βαθμοὶ ἐκπαιδεύσεως, εἰς δὲ τὰς κορυφάς τῶν ἐπομένων στηλῶν τὰ διαδοχικὰ ἔτη εἰς τὰ ὅποια ἀναφέρονται αἱ κατάταξις. Εἶναι φανερόν ὅτι εἰς τὸ ἐν λόγῳ παράδειγμα ἡ ταξινομήσις εἶναι ταυτοχρόνως ποιοτικὴ καὶ χρονολογικὴ. Δι' αὐτῆς καθίσταται δυνατὴ ἡ παρακολούθησις τῆς ἐν τῷ χρόνῳ ἐξελίξεως τοῦ ἀριθμοῦ τῶν τελεσιδίκως καταδικασθέντων οἱ ὅποιοι εἶναι ἀγράμματοι ἢ ἔχουν ὠρισμένον βαθμὸν ἐκπαιδεύσεως.

Ο Πίναξ Γ-11 παρέχει τὰς τιμὰς τῶν μετοχῶν τῆς Ἑθνικῆς Κτηματικῆς Τραπεζῆς τῆς Ἑλλάδος ἐν τῷ Χρηματιστηρίῳ Ἀθηνῶν

Πίναξ Γ-10

Τελεσιδίκως καταδικασθέντες ἐν Ἑλλάδι κατὰ βαθμὸν ἐκπαιδεύσεως, 1960-1964

Βαθμὸς ἐκπαιδεύσεως	1960	1961	1962	1963	1964
* Αγράμματοι . . . . .	2.526	2.398	2.414	1.733	1.491
Στοιχειώδους ἐκπαιδεύσεως . . . .	55.111	61.813	67.226	55.514	49.230
Μέσης ἐκπαιδεύσεως . . . . .	4.678	3.998	4.251	3.910	3.788
* Ἀνωτάτης ἐκπαιδεύσεως . . . . .	697	694	679	573	568
* Ἀγνώστου βαθμοῦ ἐκπαιδεύσεως	19.637	11.052	8.514	22.046	15.859
Σύνολον . . . . .	82.649	79.955	83.084	83.776	70.936

ἐπί μηνιαίαις βάσεως κατά τήν περίοδον 1963-1966. Ἐνταῦθα εἰς τήν πρώτην στήλην ἀναγράφονται οἱ μῆνες τοῦ ἔτους, εἰς δέ τὰς κορυφάς τῶν ἐπομένων στηλῶν τὰ ἔτη. Συνεπῶς, πρόκειται περί δύο χρονολογιῶν κατατάξεων στηριζομένων εἰς διαφορετικὴν χρονικὴν μονάδα. Ἄπαντα τὰ εἰς τὸν πίνακα τοῦτον περιεχόμενα στοιχεῖα θὰ

Πίναξ Γ - 11

Τίμαι μετοχῶν Ἐθνικῆς Κτηματικῆς Τραπεζῆς τῆς Ἑλλάδος  
ἐν τῷ Χρηματιστηρίῳ Ἀθηνῶν, 1963-1966  
(Μηνιαῖοι μέσοι ὄροι τῶν ἡμερησίων τιμῶν εἰς δραχμὰς)

Μ ῆ ν ε ς	ἔ τ η			
	1963	1964	1965	1966
Ἰανουάριος . . . . .	550	520	572	582
Φεβρουάριος . . . . .	541	570	584	580
Μάρτιος . . . . .	524	542	583	612
Ἀπρίλιος . . . . .	501	528	570	610
Μάιος . . . . .	499	500	570	589
Ἰούνιος . . . . .	498	519	543	595
Ἰούλιος . . . . .	482	518	540	585
Αὐγουστος . . . . .	506	520	550	567
Σεπτέμβριος . . . . .	525	525	543	559
Ὀκτώβριος . . . . .	540	532	546	546
Νοέμβριος . . . . .	542	561	533	541
Δεκέμβριος . . . . .	522	544	551	553

Πηγή: Τράπεζα τῆς Ἑλλάδος, «Μηνιαῖον Στατιστικὸν Δελτίον», Ἰούλιος 1964, 1965, 1966 καὶ 1967.

ἠδύνατο νὰ ἐμφανισθοῦν εἰς μίαν μόνον στήλην. Ὅσαίς, ὅμως, ὑπάρχει ἕν μέγεθος πρὸς παρουσίας, προτιμᾶται ἡ χρησιμοποίησις, ὡς ἀνωτέρω, τοῦ πίνακος διπλῆς εἰσόδου πρὸς ἑξοικονόμησιν χώρου.

Εἰς τοὺς μέχρι τοῦδε ἑξετασθέντας πίνακας διπλῆς εἰσόδου ἐγένετο χρῆσις δύο διαστάσεων, εἰς ἑκατέραν τῶν ὁποίων ἀντιστοιχεῖ μία κατάταξις. Εἰς τήν πράξιν, ὅμως, παρίσταται πολλάκις ἀνάγκη χρησιμοποίησεως πλειόνων ταυτοχρόνως ταξινομήσεων πρὸς λεπτομερεστέραν ἀνάλυσιν δεδομένου μεγέθους. Κατάρτισις πίνακος εἰς τρεῖς ἢ περισσότερας διαστάσεις δέν εἶναι, βεβαίως, δυνατή. Πλήν



## Πίναξ Γ - 12

Θάνατοι (α) εν Ελλάδι κατά τὰ ἔτη 1961 - 1963, κατὰ ἡλικίαν καὶ φύλον τοῦ θανόντος

Ἡλικία τοῦ θανόντος	1 9 6 1		1 9 6 2		1 9 6 3	
	Ἄρσενες	Θήλειες	Ἄρσενες	Θήλειες	Ἄρσενες	Θήλειες
	Ἄρσενες	Σύνολον	Ἄρσενες	Σύνολον	Ἄρσενες	Σύνολον
Κάτω τοῦ 1 ἔτους	3.276	2.730	3.387	2.757	3.094	2.731
1 - 19 ἐτῶν	1.333	952	1.274	961	1.206	868
20 - 39 »	1.658	1.212	1.641	1.211	1.679	1.170
40 - 59 »	5.226	3.410	5.291	3.552	5.330	3.488
60 - 79 »	13.373	12.409	14.107	13.341	14.328	13.694
80 ἐτῶν καὶ ἄνω	7.768	10.508	8.189	10.758	8.469	10.711
Σ ύ ν ο λ ο ν	32.634	31.221	33.889	32.580	34.106	32.662
		63.855		66.469		66.768
		6.006		6.144		5.825
		2.285		2.235		2.074
		2.870		2.852		2.849
		8.636		8.843		8.818
		25.782		27.448		28.022
		18.276		18.947		19.180
		31.221		32.580		32.662

(α) Δὲν περιλαμβάνονται οἱ θανόντες τῶν ὁποίων δὲν ἐδηλώθη ἡ ἡλικία.

Πηγή: Ε.Σ.Υ.Ε., « Στατιστικὴ Ἐπετηρὶς τῆς Ἑλλάδος » διὰ τὰ ἔτη 1963 (Ἀθῆναι, 1964, σελ. 49), 1964 (Ἀθῆναι, 1965, σελ. 63) καὶ 1965 (Ἀθῆναι, 1966, σελ. 43).

ὅμως τὸ πρόβλημα τοῦτο ἀντιμετωπίζεται διὰ τῆς χρησιμοποίησεως ὑποδιαφρέσεων εἰς τὰς στήλας ἢ τὰς γραμμάς ἢ καὶ εἰς ἀμφοτέρας. Οἱ πίνακες τῆς μορφῆς αὐτῆς εἶναι κατ' οὐσίαν διπλῆς εἰσόδου μετὰ πολλαπλῶν συγκρίσεων. Παράδειγμα τοιαύτης ταξινομήσεως ἀποτελεῖ ὁ Πίναξ Γ-12 εἰς τὸν ὁποῖον ἐμφανίζονται οἱ ἐπισυμβάντες ἐν Ἑλλάδι θάνατοι κατὰ τὰ ἔτη 1961-1963 καθ' ἡλικίαν καὶ φύλον τοῦ θανόντος. Εἰς τὴν πρώτην στήλην τοῦ ἐν λόγω πίνακος ἀναγράφονται αἱ τάξεις ἡλικίας, εἰς δὲ τὰς κορυφάς τῶν ἐπομένων στηλῶν τὰ ἔτη. Ἡ στήλη, ὅμως, ἐκάστου ἔτους ὑποδιαφεῖται εἰς ἐπὶ μέρους στήλας, εἰς τὰς κορυφάς τῶν ὁποίων ὑπάρχουν ἐνδείξεις περὶ τοῦ φύλου. Διὰ τοῦ τρόπου τούτου καθίσταται δυνατὴ ἡ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ πίνακος παρουσιάσις τριῶν ταυτοχρόνως κατατάξεων, ἥτοι μιᾶς ποσοτικῆς, μιᾶς ποιοτικῆς καὶ μιᾶς χρονολογικῆς. Οὕτω, ἐκ τοῦ Πίνακος Γ-12 λαμβάνομεν ὅτι οἱ κατὰ τὸ ἔτος 1961 ἐπισυμβάντες θάνατοι θηλέων ἡλικίας 20-39 ἐτῶν, ἦσαν 1.212 καὶ ὅτι οἱ κατὰ τὸ ἔτος 1963 ἐπισυμβάντες θάνατοι ἀρρένων ἡλικίας 60-79 ἐτῶν ἦσαν 14.328. Σημειωτέον ὅτι ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἰδίας μεθόδου εἶναι δυνατόν νά κατασκευασθοῦν πίνακες διπλῆς εἰσόδου μετὰ πολλαπλῶν συγκρίσεων πλεον συνθέτου μορφῆς, διὰ χρησιμοποίησεως τεσσάρων, πέντε ἢ καὶ ἀκόμη περισσότερων κατατάξεων οἰασδήποτε φύσεως.

#### ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Α'. Ἑλληνική
1. Ἀθανασιάδου, Κ., "Στατιστική", Μέρος Πρῶτον, Ἀθῆναι, 1957, σελ. 43-49.
  2. Μαργαρίτη, Ε., "Στατιστική", Ἀθῆναι, 1952, σελ. 113-132.
- Β'. Ξένη
1. Allen, R.G.D., "Statistics for Economists", Hutchinson University Library, London, (Tenth Impression 1960), σελ. 19-25. Μετάφρασις εἰς τὴν Ἑλληνικὴν ὑπὸ Κ. Ἀθανασιάδου ὑπὸ τὸν τίτλον "Στατιστική", Ἀθῆναι, 1955, σελ. 13-22.
  2. Arkin, H. and Colton, R.R., "Statistical Methods", Barnes and Noble Inc. New York, (Fourth Edition), 1961, σελ. 152-155.
  3. Budin, M., "Statistical Measurements for Economics and Administration", Asia Publishing House, London, 1962, σελ. 55-59.

4. Connor, L.R. and Morrell A.J.H., "Statistics in Theory and Practice - With Special Reference to Published Statistics", Sir Isaac Pitman and Sons Ltd, London, 1964, σελ. 24-29.
5. Croxton, F.E. and Cowden, D.J., "Applied General Statistics", Sir Isaac Pitman and Sons Ltd, London (Second Edition), 1960, σελ. 3-6 και 50-66.
6. Hays, S., "An Outline of Statistics", Longmans, Green and Co, London, 1956, σελ. 24-33.
7. Ilersic, A.R., "Statistics", H.F.L. (Publishers) Ltd, London (Twelfth Edition), 1959, σελ. 35-62.
8. Karmel, P.H., "Applied Statistics for Economists - A Course in Statistical Methods", Melbourne, Sir Isaac Pitman and Sons Ltd (Second Edition), 1963, σελ. 7-12.
9. Mills, F. "Statistical Methods", Holt, Rinehart and Winston, New York, 1955, σελ. 40-50.
10. Myers, J.H., "Statistical Presentation", Littlefield, Adams and Co, Totowa, New Jersey, 1965, σελ. 5 - 18.
11. Paden, D.N. and Lindquist, E.F., "Statistics for Economics and Business", Mc Graw Hill Book Company Inc., New York-Toronto - London (Second Edition), 1956, σελ. 17-21.
12. Suits, D.B., "Statistics : An Introduction to Quantitative Economic Research", Rand McNally and Company Chicago, 1966, σελ. 7 - 13.
13. Thirkettle, G.L., "Wheldon's Business Statistics and Statistical Method", Macdonald and Evans Ltd, London, 1962, σελ. 37 - 45.
14. U.S. Department of Commerce, "Bureau of the Census Manual of Tabular Presentation-An Outline of Theory and Practice in the Presentation of Statistical Data in Tables for Publication", U.S. Government Printing Office, Washington, 1949.
15. Wessel, R.H. and Willett, E.R., "Statistics as Applied to Economics and Business", Henry Holt and Company, New York 1959, σελ. 55-60.
16. Yamane, T., "Statistics - An Introductory Analysis", A Harper International Edition, 1966, σελ. 3-5.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

### ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ

#### 1. Χρησιμότης τῶν στατιστικῶν διαγραμμάτων

Ἐκτός τῶν στατιστικῶν πινάκων, ἕτερος τρόπος παρουσιάσεως τῶν στατιστικῶν στοιχείων εἶναι διὰ γραφικῶν ἀπεικονίσεων ἢ διαγραμμάτων. Ἡ ἐν λόγῳ μέθοδος συνίσταται εἰς τὴν ἐμφάνισιν τῶν ἀριθμητικῶν δεδομένων διὰ χρησιμοποίησεως σημείων, γραμμῶν, σχημάτων καὶ λοιπῶν συμβόλων. Διαγράμματα χρησιμοποιοῦνται πολλάκις εἰς τὴν στατιστικὴν ἀνάλυσιν πρὸς λεπτομερῆ μελέτην διαφόρων θεμάτων ἢ διὰ σκοποῦς ὑπολογισμῶν. Τὰ διαγράμματα τὰ ὅποια ἐξετάζονται εἰς τὸ παρὸν κεφάλαιον δὲν ἀνήκουν εἰς τὰς κατηγορίας αὐτάς, δεδομένου ὅτι πρωταρχικῆ ἐπιδιώξις των εἶναι ἀπλῶς ἢ ἐνημέρωσις τοῦ ἀναγνώστου ἐπὶ ὠρισμένης χαρακτηριστικῆς καταστάσεως, ἐξελιξέως ἢ σχέσεως. Βεβαίως, εἰς ὠρισμένας περιπτώσεις δὲν ἀποκλείεται νὰ προορίζωνται ταῦτα καὶ δι' ἑτέρας χρήσεις, ἀλλὰ αὐτὰ ἔρχονται εἰς ὅλως δευτερεύουσαν μοῖραν.

Ἐν διάγραμμα, ἵνα πληροῖ ἱκανοποιητικῶς τὸν σκοπὸν του ὡς μέσον στατιστικῆς ἐνημερώσεως, δεόν νὰ παρέχῃ τὰς σχετικὰς ποσοτικὰς πληροφορίας κατὰ τρόπον παραστατικόν, σαφῆ καὶ ἀκριβῆ. Ἡ παραστατικότης διευκολύνει τὴν ταχειᾶν κατανόησιν τῶν παρουσιαζομένων δεδομένων, ὡς καὶ τὴν διατήρησιν τῆς εἰκόνης αὐτῶν εἰς τὴν μνήμην τοῦ ἀναγνώστου. Ἡ σαφήνεια εἶναι ἀναγκαία πρὸς ἀποφυγὴν συγχύσεως καὶ ἰδῶς ἐξαγωγῆς ἐσφαλμένων συμπερασμάτων ἐκ τῆς ἐπισκοπῆσεως τοῦ διαγράμματος. Ἐπίσης, εἶναι ἀπαραίτητον ὅπως αἱ γραφικαὶ ἀπεικονίσεις εἶναι ἀκριβεῖς, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι αἱ ἐξ αὐτῶν δημιουργούμεναι ἐντυπώσεις εἰς τὸν ἀναγνώστην δὲν ἀφίστανται τῆς πραγματικότητος.

Τά στατιστικά διαγράμματα, όταν πληροῦν τὰς ἀνωτέρω προϋποθέσεις ἀποτελοῦν λίαν ἀποτελεσματικόν τρόπον παρουσιάσεως τῶν δεδομένων. Δέον, ἐν τούτοις, νά σημειωθῆ ὅτι ταῦτα, συγκρινόμενα πρὸς τοὺς στατιστικούς πίνακας, παρουσιάζουν ὠρισμένα μειονεκτήματα τὰ ὁποῖα δέον πάντοτε νά λαμβάνωνται ὑπ' ὄψιν κατὰ τὴν ἐπιλογὴν τοῦ καταλλήλου τρόπου παρουσιάσεως τῶν στοιχείων εἰς ἐκάστην συγκεκριμένην περίπτωσιν. Ἐν πρώτοις, εἰς τὰ διαγράμματα δέν δύναται νά περιληφθοῦν πολλαὶ σειραὶ δεδομένων, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον εἶναι, ἀντιθέτως, ἐφικτόν διὰ χρησιμοποίησεως τῶν στηλῶν καὶ τῶν γραμμῶν τοῦ πίνακος. Τυχόν προσπάθεια ἐμφανίσεως ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ διαγράμματος περισσοτέρων τοῦ δέοντος στατιστικῶν σειρῶν θά ἔχη, κατ' ἀνάγκην, ὡς συνέπειαν τὴν δημιουργίαν συγχύσεως εἰς τὸν ἀναγνώστην, λόγῳ ἀδυναμίας ἀνέτου παρακολούθησεως τῆς ἐξελίξεως τῶν διαφορῶν, ἐμπλεκόμενων μεταξύ των, γραμμῶν. Ἐπί πλέον, μολονότι ἡ κατασκευὴ τῶν διαγραμμάτων στηρίζεται εἰς τὴν χρησιμοποίησιν τῶν ἀρχικῶν στατιστικῶν δεδομένων, τὰ ὁποῖα λαμβάνονται μὲ ἀριθμὸν ψηφίων προσδιοριζόμενον, μεταξύ ἄλλων, καὶ ὑπὸ τοῦ βαθμοῦ ἀξιοπιστίας των, ἐν τούτοις ἐκ τοῦ διαγράμματος δέν δύναται τις νά ἀρυσθῆ εἰ μὴ μόνον γενικὰ ποσοτικὰ πληροφορίας. Ὡς ἔχει ἤδη λεχθῆ εἰς προηγούμενον κεφάλαιον, πηγὰς τῶν στατιστικῶν στοιχείων ἀποτελοῦν μόνον οἱ πίνακες καὶ, ἐπομένως, ἐάν ἐπιδιώκωμεν νά παράσχωμεν τὰς ἀκριβεῖς τιμὰς ὠρισμένων μεγεθῶν, δέν ἐνδείκνυται ἡ χρησιμοποίησις πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτὸν στατιστικῶν διαγραμμάτων. Πέραν τῶν τεχνικῶν τούτων ἀδυναμιῶν, τὰ διαγράμματα μειονεκτοῦν ἔναντι τῶν πινάκων καὶ λόγῳ τοῦ σχετικῶς μακροτέρου χρόνου τὸν ὁποῖον ἀπαιτεῖ ἡ κατασκευὴ των. Σημειωτέον ὅτι εἰς πολλὰς περιπτώσεις ἡ διάθεσις ἢ μὴ τοῦ ἀναγκαιοῦντος χρόνου ἢ τοῦ καταλλήλως ἐκπαιδευμένου προσωπικοῦ πρὸς κατάρτισιν διαγραμμάτων βαρύνει ἀποφασιστικῶς εἰς τὴν ἐπιλογὴν τοῦ τρόπου παρουσιάσεως τῶν στατιστικῶν δεδομένων.

## 2. Ὁρθογώνιοι ἄξονες

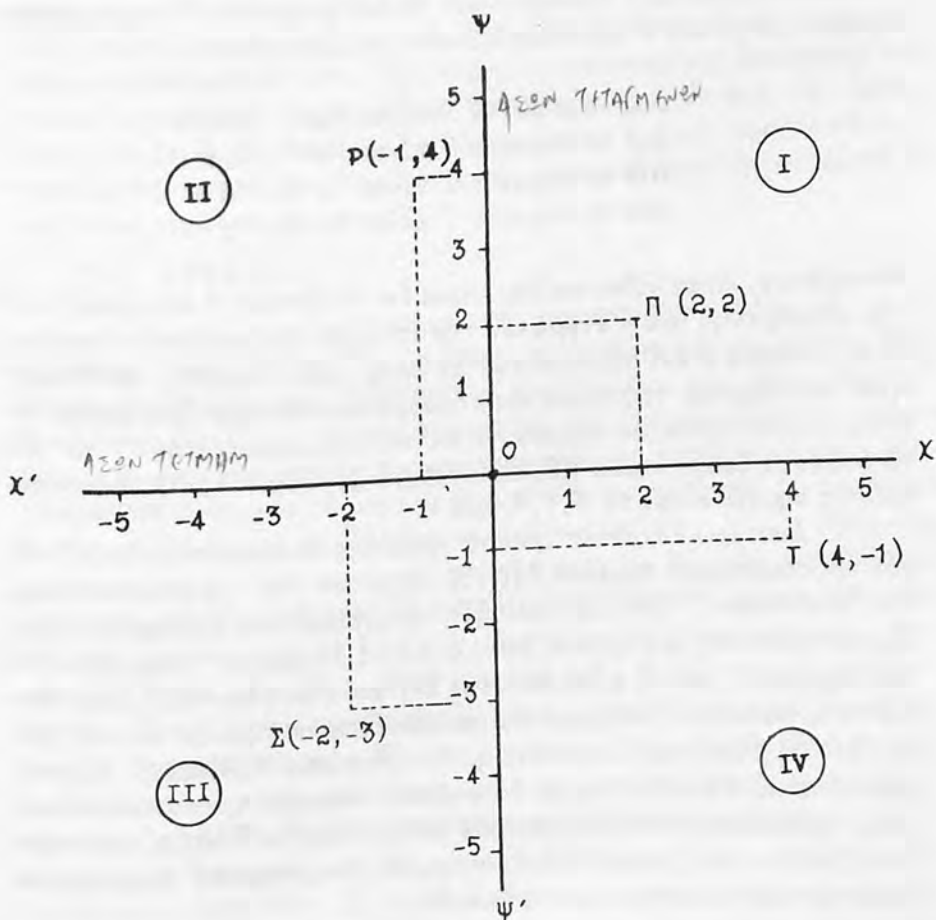
Εἰς τὰ πλεῖστα τῶν διαγραμμάτων ἡ γραφικὴ ἀπεικόνισις τῶν στατιστικῶν στοιχείων γίνεται ὡς πρὸς δύο καθέτως τεμνομένας εὐθείας, αἱ ὁποῖαι καλοῦνται "ὀρθογώνιοι ἄξονες" ἢ "ὀρθογώνιοι συντεταγμένοι". Αὗται δεικνύονται εἰς τὸ Διάγραμμα Δ-1. Ἡ ὀριζόντιος εὐθεῖα ΧΧ' εἶναι γνωστὴ ὡς "ἄξων τῶν Χ" ἢ "ἄξων τῶν τετμημένων", ἡ δὲ κάθετος εὐθεῖα ΨΨ' ὡς "ἄξων τῶν Ψ" ἢ "ἄξων τῶν τε-

ταγμένων". Τό σημείον τομῆς τῶν δύο τούτων ἄξόνων ἔχει μηδενικήν τιμήν δι' ἄμφότερα τὰ  $X$  καὶ  $\Psi$  καὶ καλεῖται "ἀρχὴ τῶν ἄξόνων".

Ἀμφότεροι οἱ ὀρθογώνιοι ἄξονες φέρουν κατὰ μῆκος αὐτῶν κλίμακα μετρήσεως. Πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς μηδενικῆς τιμῆς ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν  $X$  καὶ πρὸς τὰ ἄνω τῆς μηδενικῆς τιμῆς ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν  $\Psi$  αἱ τιμαὶ εἶναι θετικαί. Πρὸς τὰ ἀριστερά τῆς μηδενικῆς τιμῆς ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν  $X$  καὶ πρὸς τὰ κάτω τῆς μηδενικῆς τιμῆς ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν  $\Psi$  αἱ τιμαὶ εἶναι ἀρνητικαί. Αἱ θετικαὶ καὶ αἱ ἀρνητικαὶ τιμαὶ ἀξάνουν κατ' ἀπόλυτον τιμήν, ἐφ' ὅσον ἀπομακρυνόμεθα ἐκ τῆς ἀρχῆς τῶν ἄξόνων.

### Διάγραμμα Δ-1

Ὅρθογώνιοι συντεταγμένοι



Οί ὀρθογώνιοι ἄξονες διαφοῦν τὴν ἐπιφάνειαν ἐπὶ τῆς ὁποίας εἶναι ἐγγεγραμμένοι εἰς τέσσαρα τμήματα, καλούμενα "τεταρτημόρια", τὰ ὅποια εἰς τὸ Διάγραμμα Δ-1 φέρουν τοὺς ἀριθμούς I, II, III καὶ IV. Δεδομένου ὅτι αἱ ἐκ παρατηρήσεως τιμαὶ τῶν οἰκονομικῶν καὶ κοινωνικῶν μεγεθῶν εἶναι συνήθως θετικά, κατὰ τὴν γραφικὴν ἀπεικόνισιν τῶν εἰς αὐτὰ ἀναφερομένων στατιστικῶν στοιχείων χρησιμοποιεῖται, ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον, μόνοι τὸ τεταρτημόριον I.

Οἰονδήποτε σημεῖον κείμενον ἐφ' ἑνὸς τῶν τεταρτημορίων δύνανται νὰ προσδιορισθῆ ὡς πρὸς τὸ σύστημα τῶν ὀρθογωνίων ἄξόνων ἐπὶ τῆ βάσει δύο τιμῶν, ἥτοι τῆς τιμῆς τῆς τεταρτημένης του (X), ἡ ὅποια εἶναι ἡ ἀντίστοιχος ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν X ὀριζοντιᾶ ἀπόστασις ἐκ τοῦ μηδενὸς καὶ τῆς τιμῆς τῆς τεταρτημένης του (Ψ), ἡ ὅποια εἶναι ἡ ἀντίστοιχουσα ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν Ψ κάθετος ἀπόστασις αὐτοῦ ἐκ τοῦ μηδενός. Οὕτω, τὰ εἰς τὸ Διάγραμμα Δ-1 σημειωμένα σημεῖα Π, Ρ, Σ καὶ Τ προσδιορίζονται ὡς ἀκολούθως :

Διὰ τὸ σημεῖον Π εἶναι  $X=2$ ,  $\Psi=2$

Διὰ τὸ σημεῖον Ρ εἶναι  $X=-1$ ,  $\Psi=4$

Διὰ τὸ σημεῖον Σ εἶναι  $X=-2$ ,  $\Psi=-3$

Διὰ τὸ σημεῖον Τ εἶναι  $X=4$ ,  $\Psi=-1$

Ἀντιθέτως, ὅταν δίδονται δύο τιμαὶ ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία ἀφορᾷ εἰς τὴν τεταρτημένην καὶ ἡ ἕτερα εἰς τὴν τεταρτημένην ὀριζόμενου σημείου, εἶναι δυνατὸς ὁ ἐπὶ τῆ βάσει τῶν ἐν λόγω τιμῶν ἀκριβῆς προσδιορισμὸς τοῦ σημείου τούτου ὡς πρὸς δεδομένον σύστημα ὀρθογωνίων ἄξόνων. Κατὰ ταῦτα, ὡς προκύπτει ἐκ τοῦ διαγράμματος Δ-1, τὰ εἰς τὰ δοθέντα ζεύγη τιμῶν  $(2, 2)$ ,  $(-1, 4)$ ,  $(-2, -3)$  καὶ  $(4, -1)$  ἀντιστοιχοῦντα σημεῖα εἶναι τὰ Π, Ρ, Σ καὶ Τ.

Ὁ ἀνωτέρω ἐκτεθεὶς τρόπος γραφικῆς ἀπεικονίσεως ἀφορᾷ εἰς τὸν προσδιορισμὸν σημείων ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου διὰ χρησιμοποίησεως δύο διαστάσεων. Ἐάν εἰς τοὺς ἤδη περιγραφέντας δύο ὀρθογωνίους ἄξονας προστεθῆ καὶ τρίτος, ἔστω ὁ ΖΖ', ὁ ὅποιος νὰ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Ο καὶ νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΨΟΧ, τότε καθίσταται δυνατὸς ὁ καθορισμὸς καὶ οἰονδήποτε σημείου εἰς τὸν χώρον ἐπὶ τῆ βάσει τριῶν συντεταγμένων, ἥτοι τῶν Χ, Ψ καὶ Ζ. Αἱ γραφικαὶ ἀπεικονίσεις ἐπὶ τριῶν διαστάσεων σπανίως χρησιμοποιοῦνται πρὸς παρουσίαν τῶν στατιστικῶν δεδομένων, δι' ὃ καὶ αἱ κατωτέρω παρεχόμεναι περιγραφαὶ ἀναφέρονται εἰς διαγράμματα σφαιρικοῦ ἀποκλειστικῶς ἐπὶ δύο διαστάσεων.

### 3. Γενικοί κανόνες κατασκευής διαγραμμάτων

Κατά την κατασκευή των στατιστικῶν διαγραμμάτων εἶναι ἀναγκαῖον ὅπως ἀκολουθοῦνται αἱ κάτωθι γενικοί κανόνες πρὸς ἐπιπλήρωσιν τῶν σκοπῶν εἰς τοὺς ὁποίους ἀποβλέπει ἡ χρησιμοποίησις των :

#### α) Τίτλος

Τὸ στατιστικόν διάγραμμα δεόν νά φέρῃ εἰς τὸ ἄνω μέρος αὐτοῦ τίτλον σαφῆ καὶ σύντομον, παρέχοντα πληροφορίας περὶ τῆς φύσεως τῶν γραφικῶς ἀπεικονιζομένων στοιχείων, τῆς γεωγραφικῆς περιοχῆς εἰς τὴν ὅποσαν ἀναφέρονται, ὡς καὶ τῆς χρονικῆς περιόδου τὴν ὅποσαν ταῦτα καλύπτουν. Πέραν τούτων, δέν εἶναι σκόπιμον νά περιλαμβάνωνται εἰς τὸν τίτλον καὶ ἄλλου εἴδους πληροφορία, ὡς εἶναι αἱ ἀναφερόμεναι π.χ. εἰς τὴν ἀκολουθηθεῖσαν μέθοδον γραφικῆς ἀπεικονίσεως, εἰς τὴν ὑπὸ τῶν δεδομένων δεικνυμένην συμπεριφορὰν κλπ. Ἐπί πλέον, ἡ τακτικὴ τῆς ἀναγραφῆς τοῦ τίτλου κάτωθι τοῦ διαγράμματος δέν θεωρεῖται γενικῶς ὡς ὀρθή. Τοῦτο, διότι ἡ κατατόπισις τοῦ ἀναγνώστου ἐπὶ τῆς φύσεως τῶν ἐμφανιζομένων στοιχείων λογικόν εἶναι νά προηγήται τῆς ὑπ' αὐτοῦ ἐξετάσεως τοῦ διαγράμματος.

#### β) Διαστάσεις

Ἡ ἐπιλογή τῶν διαστάσεων τοῦ διαγράμματος δεόν νά γίνεται μετὰ προσοχῆς καὶ ἐν γνώσει τῶν ἐπιδιωκομένων σκοπῶν πρὸς ἀποφυγὴν δημιουργίας ἐσφαλμένων ἐντυπώσεων εἰς τὸν ἀναγνώστην ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὴν συμπεριφορὰν τῶν ἀπεικονιζομένων μεγεθῶν. Χαρακτηριστικόν ἐν προκειμένῳ εἶναι τὸ παράδειγμα τοῦ διαγράμματος Δ-2, εἰς τὸ ὁποῖον ἀπεικονίζεται γραφικῶς ἡ παραγωγή συσπόρου βάμβακος ἐν Ἑλλάδι κατὰ τὴν περίοδον 1955 - 1965 διὰ χρησιμοποίησεως διαφορετικῶν κλιμάκων τόσοσιν εἰς τὸν ὀριζόντιον ὅσον καὶ εἰς τὸν κάθετον ἄξονα. Εὐκόλως γίνεται ἀντιληπτόν ὅτι εἰς τὴν ἀπεικόνισιν (Α) ἔχει περιορισθῆ ἡ κάθετος κλίμαξ καὶ ἐπεκταθῆ ἡ ὀριζοντία, ἐνῶ εἰς τὴν ἀπεικόνισιν (Β) ἔχει συμβῆ τὸ ἀντίθετον. Ἀποτέλεσμα τῶν διαφορῶν τούτων εἶναι ὅτι ἡ παραγωγή βάμβακος, ἐπὶ τῇ βάσει μὲν τῆς ἀπεικονίσεως (Α) ἐμφανίζει ἀσημάντους μεταβολὰς ἀπὸ ἔτους εἰς ἔτος καὶ σχετικὴν στασιμότητα μακροχρονίως, ἐπὶ τῇ βάσει δὲ τῆς ἀπεικονίσεως (Β) δεικνύει ἐντόνους βραχυχρονίως διακυμάνσεις καὶ γενικῶς ἀνοδικὴν τάσιν κατὰ τὴν καλυπτομένην περίοδον. Εἶναι φανερόν ὅτι κανονικῶς παρουσιάζονται τὰ δεδομένα εἰς τὴν ἀπεικόνισιν (Γ), ἐνθα γίνεται χρῆσις τῶν καταλ-



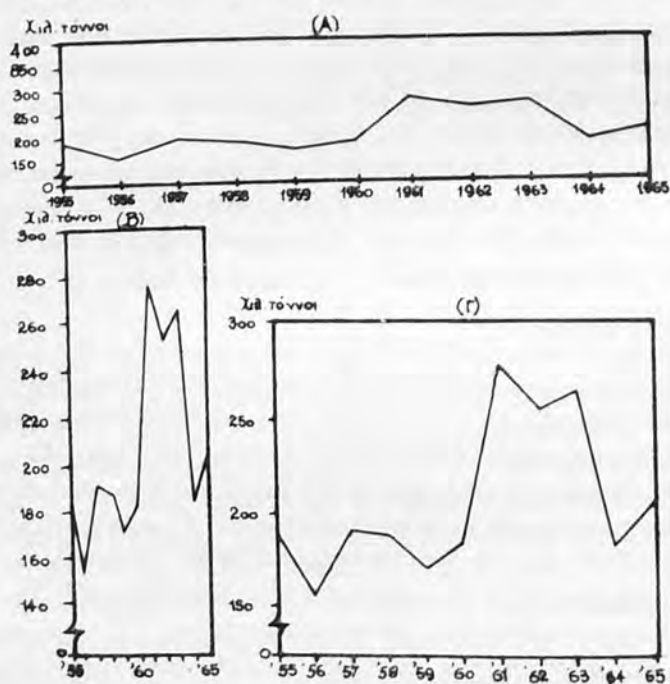
λήλων διαστάσεων και αποφεύγεται οιαδήποτε υπερβολή από πλευράς μεγέθους τῶν κλιμάκων.

### γ) Μονάδες μετρήσεως

Οἱ ἄξονες ὡς πρὸς τοὺς ὁποίους κατασκευάζεται τὸ διάγραμμα δεόν νά φέρουν κατὰ μήκος αὐτῶν τήν κλίμακα τῶν τιμῶν ἐπὶ τῆς ὁποίας μετροῦνται τὰ γραφικῶς ἀπεικονιζόμενα στοιχεία.

### Διάγραμμα Δ - 2

Παραγωγή συσπόρου βάμβακος ἐν Ἑλλάδι, 1955 - 1965



Πηγή: Ὑπουργεῖον Γεωργίας.

Πρὸς ἀποφυγὴν παραπλανήσεως τοῦ ἀναγνώστου ὡς πρὸς τήν σχέσιν τῶν ἐπὶ μέρους ἐκ παρατηρήσεως τιμῶν μεταξύ των δεόν νά γίνονται χρήσις ὁλοκλήρου τῆς κλίμακος ἀπὸ τοῦ μηδενός. Εἰς τὰς περιπτώσεις κατὰ τὰς ὁποίας σημαντικόν μέρος αὐτῆς παραμένει ἀχρησιμοποίητον λόγω μὴ ὑπάρξεως ἀντιστοίχων τιμῶν ἐκ παρατηρήσεως, ἢ παράλειψις του ἐνδείκνυται νά γίνεται ἄνευ ἀφαίρεσεως ἐκ τοῦ

διαγράμματος και της αρχής της κλίμακος, πράγμα τό ὁποῖον ἐπι-  
 τυγχάνεται διά τῆς μεθόδου ἢ ὁποῖα ἐφηρμόσθη π.χ. ἐπί τῶν ἀπει-  
 κονίσεων τοῦ Διαγράμματος Δ-2. Ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὰς χρησιμοποι-  
 ούμενας μονάδας μετρήσεως, εἶναι ἀπαραίτητον νά παρέχεται περι-  
 γραφή τῆς φύσεως αὐτῶν εἴτε ἀμέσως κάτωθι τοῦ τίτλου ὑπό μορφήν  
 γενικῆς σημειώσεως εἴτε πλησίον τῶν ἄξόνων. Ὅταν χρησιμοποιῶνται  
 πλείονες μονάδες μετρήσεως εἰς τό ἴδιον διάγραμμα, αἱ σχετικαί  
 ἐνδείξεις πρέπει ὅπωςδῆποτε νά ἀναγράφωνται πλησίον τῶν ἄξόνων.  
 Σημειωτέον ὅτι ἡ μονάς μετρήσεως ἢ ἀναγραφομένη εἰς τόν ἄξονα  
 τῶν Χ τίθεται συνήθως εἰς τό μέσον κάτωθι αὐτοῦ, ἐνῶ ἡ ἀναφερο-  
 μένη εἰς τόν ἄξονα τῶν Ψ ἄνω ἀριστερά τούτου.

#### δ) Ὑποσημειώσεις

Αἱ τυχόν ἀναγκαῖαι διευκρινήσεις ἢ συμπληρωματικά ἐπεξη-  
 γήσεις σχετικῶς μέ τά γραφικῶς ἀπεικονιζόμενα στοιχεῖα τίθενται  
 ὑπό μορφήν ὑποσημειώσεων κάτωθι τοῦ διαγράμματος, ὡς καί εἰς  
 τοὺς πίνακας. Ἐν τούτοις, σπανίως συναντᾷ τις ὑποσημειώσεις εἰς  
 διαγράμματα, πιθανῶς διότι ταῦτα ἀποσκοποῦν βασικῶς εἰς τήν δη-  
 μιουργίαν γενικῶν ἐντυπώσεων καί ὄχι, ὡς οἱ πίνακες, εἰς τήν πα-  
 ροχήν λεπτομερειῶν πληροφοριῶν.

#### ε) Πηγαι

Πρός διευκόλυνσιν τοῦ ἀναγνώστου εἶναι ἀπαραίτητον  
 νά ἀναγράφεται κάτωθι τῶν τυχόν ὑποσημειώσεων ἡ πηγή ἐκ τῆς ὁ-  
 ποίας ἐλήφθησαν τά εἰς τό διάγραμμα ἐμφανιζόμενα στατιστικά δε-  
 δομένα, ἐκτός ἐάν ταῦτα ἀποτελοῦν τό προῖόν στατιστικῆς ἐρεῦ-  
 νης τοῦ ἴδιου τοῦ χρησιμοποιοῦντος τό διάγραμμα, ὅποτε δέν ὑπάρ-  
 χει λόγος ἀναγραφῆς πηγῆς.

### 4. Γραφική ἀπεικόνισις κατανομῶν συχνότητων

Ἡ γραφική ἀπεικόνισις μιᾶς κατανομῆς κατά συχνότητος δύνα-  
 ται νά γίνη κατά δύο τρόπους, ἤτοι δι' ἰστογράμματος καί διά πολυ-  
 γωνικῆς γραμμῆς.

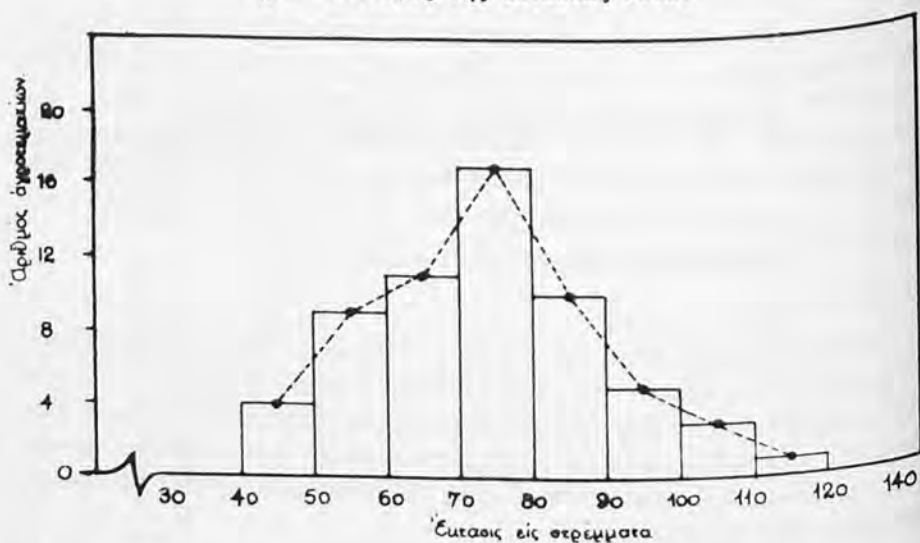
#### α) Ἰστογράμματα

Ἐπί τοῦ ὀριζοντίου ἄξονος τῶν Χ ἑνός συστήματος ὀρθογωνί-  
 ων ἄξόνων λαμβάνομεν διαδοχικά τμήματα ἀνάλογα πρός τά διαστή-  
 ματα τάξεως τῆς διδομένης κατανομῆς. Χρησιμοποιοῦντες τά ὑπο-  
 θετικά στοιχεῖα τοῦ ἀνωτέρω Πίνακος Γ-3, τά τμήματα ταῦτα, ὡς

ἐμφαίνεται εἰς τὸ Διάγραμμα Δ-3, εἶναι : 40-50 στρέμματα, 50-60 στρέμματα κλπ. Ἐφ' ἐκάστου τούτων κατασκευάζομεν ὀρθογώνιον ἔχον ὕψος ἀνάλογον πρὸς τὴν ἀντίστοιχον συχνότητα (ἀριθμὸς ἀγροκτημάτων), ἢ ὅποια μετρεῖται ἐπὶ τοῦ καθέτου ἄξονος τῶν  $\psi$ . Ὁ ἀριθμὸς τῶν οὕτω κατασκευαζομένων ὀρθογώνων εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν τάξεων, αἱ ὁποῖαι χρησιμοποιοῦνται εἰς τὴν κατανομήν. Σημειωτέον ὅτι εἶναι σκόπιμον πρὸ τοῦ πρώτου καὶ μετὰ τὸ τελευταῖον ὀρθογώνιον νὰ ἀφήνωνται ἀποστάσεις ἴσαι πρὸς ἓν διάστημα τάξεως, ὥστε νὰ καθίσταται σαφές ὅτι πέραν τῶν ἐμφανιζο-

### Διάγραμμα Δ-3

Γραφικὴ ἀπεικόνισις δι' ἰστογράμματος τῆς κατανομῆς 60 ἀγροκτημάτων ἀναλόγως τῆς ἐκτάσεως αὐτῶν

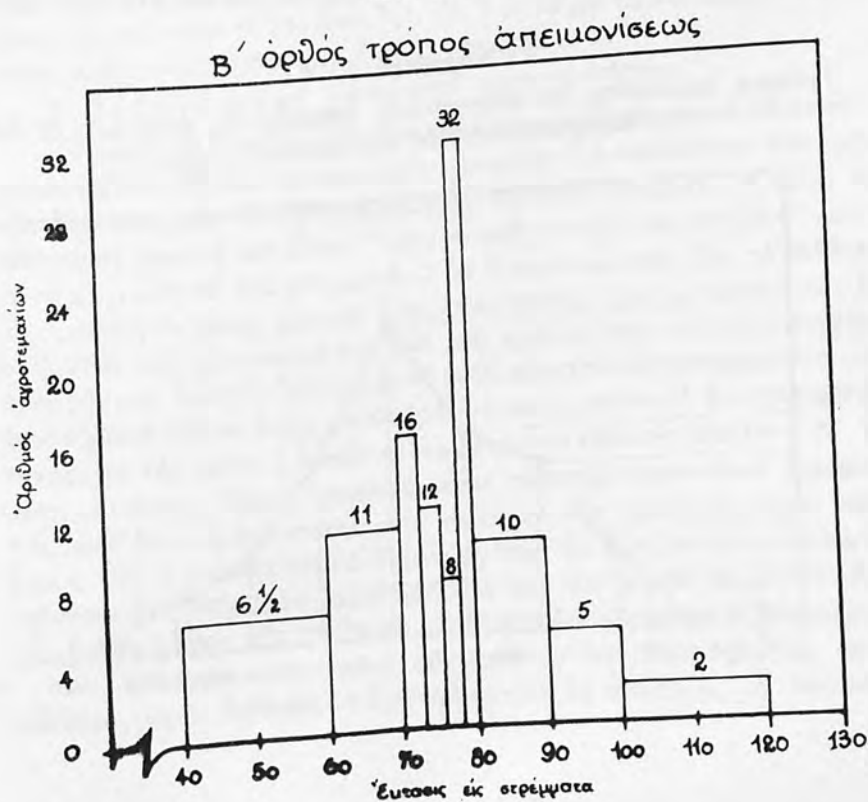
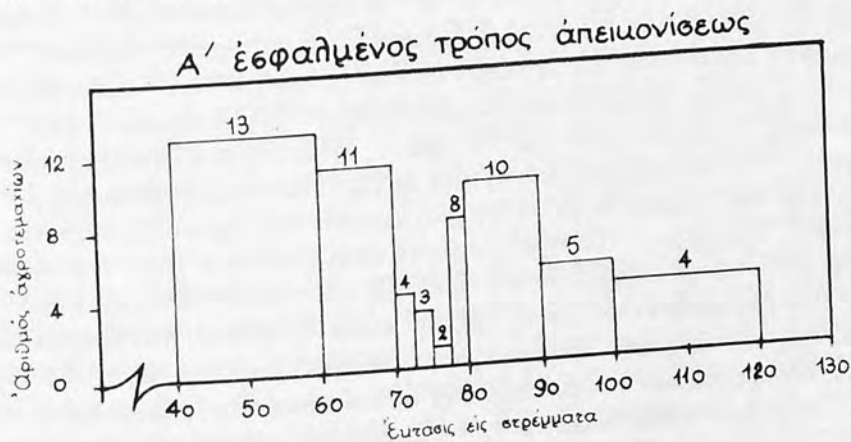


μένων τάξεων δὲν ὑπάρχουν ἕτεροι εἰς τὰς ὁποίας νὰ ὑφίστανται συχνότητες. Ἐφ' ὅσον αἱ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν  $X$  κείμεναι πλευραὶ τῶν ὀρθογώνων εἶναι ἴσαι, τὰ ἔμβραδα αὐτῶν εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰς συχνότητας. Τὸ οὕτω κατασκευαζόμενον διάγραμμα καλεῖται "ἰστόγραμμα".

Ἡ ἀνωτέρω περιγραφεῖσα τεχνικὴ ἀφορᾷ εἰς τὰς κατανομὰς, τὰ διαστήματα τάξεως τῶν ὁποίων εἶναι ἴσα μεταξύ των. Προκειμένου περὶ τῶν κατανομῶν τῶν ἐχουσῶν ἄνισα διαστήματα τάξεως, εἶναι ἀπαραίτητον ὅπως κατὰ τὴν γραφικὴν ἀπεικόνισίν των ἀντιμετωπιζῶνται δεδόντως ὠρισμένα προβλήματα δημιουργούμενα ἐκ τῶν ἰδιομορ-

Διάγραμμα Δ-4

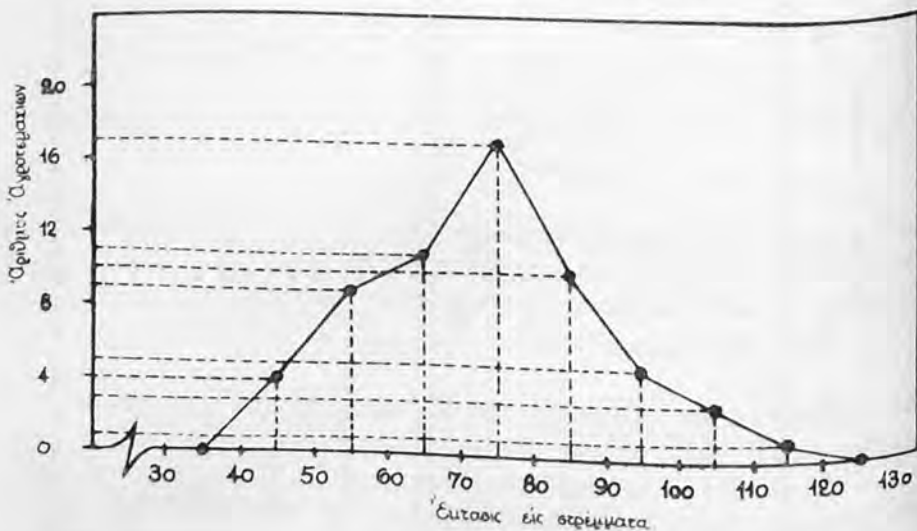
Γραφική απεικόνισις δι' ιστογράμματος τῆς κατανομῆς 60 ἀγροτεμαχίων ἀναλόγως τῆς ἐκτάσεως αὐτῶν, ἐχούσης ἄνισα διαστήματα τάξεως



φωῶν τὰς ὁποίας παρουσιάζουν αὐταί. Πρὸς ἐξέτασιν τοῦ ἐν ἐν λόγῳ θέματος ἐχρησιμοποιήθησαν τὰ ἀριθμητικὰ δεδομένα τῆς κατανομῆς τῶν 60 ἀγροτεμαχίων, ἡ ὁποία προέκυψε διὰ συνενώσεως εἰς μίαν τῶν δύο πρώτων καὶ τῶν δύο τελευταίων τάξεων τῆς ἀρχικῆς κατανομῆς τοῦ Διαγράμματος Δ-3 καὶ διὰ διαχωρισμοῦ τοῦ διαστήματος τάξεως "70-80 στρέμματα" εἰς τέσσαρα ἐπὶ μέρους διαστήματα. Ἡ νέα αὕτη κατανομή θὰ ἠδύνατο κατ' ἀρχὴν νὰ ἀπεικονισθῇ γραφικῶς καθ' ὅν τρόπον καὶ ἡ ἀρχικὴ ἢ ἔχουσα ἴσα διαστήματα τάξεως. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει θὰ προέκυπτε ἡ κατανομή Α' τοῦ Διαγράμματος Δ-4, ἡ ὁποία, ὅμως, δεικνύει μεγαλυτέραν συγκέντρωσιν τιμῶν εἰς τὰ ἄκρα καὶ μικροτέραν εἰς τὸ μέσον, ἥτοι δίδει εἰκόνα ἐντελῶς δι-ἀφορον τῆς παρεχομένης ὑπὸ τῆς ἀρχικῆς κατανομῆς (Διάγραμμα Δ-3), εἰς τὴν ὁποίαν αἱ μεγαλύτεραι συχνότητες ἐμφανίζονται εἰς τὸ μέσον. Πράγματι, εἰς τὴν γραφικὴν ἀπεικόνισιν Α' τοῦ Διαγράμματος Δ-4, τὸ μὲν ἔμβαδόν τῶν ὀρθογωνίων τῶν ἀντιστοιχοῦντων εἰς τὰ δύο ἐνοποιηθέντα ζεύγη τάξεων εἶναι διπλάσιον τοῦ ἐμφανιζομένου εἰς τὴν ἀρχικὴν κατανομήν τοῦ Διαγράμματος Δ-3, τὸ δὲ ἔμβαδόν τῶν τεσσάρων τάξεων εἰς τὰς ὁποίας διηρέθη ἡ ἀρχικὴ ἀπὸ 70-80 στρέμματα ἀποτελεῖ τὸ 1/4 τοῦ ἐμφανιζομένου εἰς τὴν ἀρχικὴν

#### Διάγραμμα Δ-5

Γραφικὴ ἀπεικόνισις διὰ πολυγωνικῆς γραμμῆς τῆς κατανομῆς 60 ἀγρο-  
τεμαχίων ἀναλόγως τῆς ἐκτάσεως αὐτῶν



κατανομήν. Ἐκ τῆς παρατηρήσεως ταύτης προκύπτει ὅτι πρὸς ἀπεικόνισιν τῆς νέας κατανομῆς κατ' ὀρθὸν τρόπον θά πρέπει νά ληφθῆ ὡς συχνότης, διὰ μὲν τὴν πρώτην καὶ τὴν τελευταίαν τάξιν τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν συχνότητων τῶν ἐνοποιηθεισῶν τάξεων, δι' ἐκάστην δὲ τῶν τεσσάρων τάξεων εἰς τὰς ὁποίας διηρέθη ἡ ἀρχικὴ ἀπὸ 70-80 στρέμματα τὸ τετραπλάσιον τῆς εἰς αὐτὴν ἀντιστοιχοῦσης συχνότητος. Ὡς ἐμφαίνεται εἰς τὸ Διάγραμμα Δ-4, ἡ ὑπὸ τῆς γραφικῆς ἀπεικονίσεως Β' παρεχομένη εἰκὼν δὲν διαφέρει τῆς διδομένης ὑπὸ τῆς ἀρχικῆς κατανομῆς τοῦ Διαγράμματος Δ-3, εἰ μὴ μόνον ὡς πρὸς τὸ μέγεθος ἐνῶν ἐκ τῶν διαστημάτων τάξεως. Εἶναι ὁμῶς, ἀναγκαῖον νά τονισθῆ ἐν προκειμένῳ ὅτι ἐπὶ τοῦ καθέτου ἄξονος τῆς γραφικῆς ἀπεικονίσεως Β' μετρεῖται, ὄχι τὸ μέγεθος, ἀλλὰ "ὁ ρυθμότης συχνότητος", ἥτοι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀγροκτημάτων τὰ ὁποῖα ἐμπίπτουν εἰς διάστημα ἐκ 10 στρεμμάτων. Ἐπὶ παραδείγματι, τὸ πρῶτον ὀρθογώνιον δὲν σημαίνει ὅτι ὑπάρχουν  $6\frac{1}{2}$  ἀγροτεμάχια, ἔχοντα ἔκτασιν ἀπὸ 40-60 στρέμματα, ἀλλὰ ὅτι εἰς τὴν τάξιν ἀπὸ 40-60 στρέμματα ἀντιστοιχοῦν  $6\frac{1}{2}$  ἀγροτεμάχια ἀνά διάστημα ἐκ 10 στρεμμάτων. Ὁμοίως, τὸ πρῶτον ἐκ τῶν τεσσάρων ὀρθογωνίων τῶν ἀντιστοιχοῦντων εἰς τὴν τάξιν 70-80 στρέμματα ἔχει τὴν ἔννοιαν ὅτι εἰς τὴν τάξιν ἀπὸ 70-72,5 στρέμματα περιλαμβάνονται 16 ἀγροτεμάχια ἀνά διάστημα ἐκ 10 στρεμμάτων.

### β) Πολυγωνικαὶ γραμμαὶ συχνότητων

Τὸ κατὰ τὰ ἀνωτέρω κατασκευαζόμενον ἰστόγραμμα δύναται νά μετασχηματισθῆ εἰς πολυγωνικὴν γραμμὴν διὰ συνδέσεως τῶν μέσων τῶν ἄνω πλευρῶν τῶν ὀρθογωνίων δι' εὐθειῶν γραμμῶν. Ἡ οὕτω προκύπτουσα γραμμὴ καλεῖται "πολυγωνικὴ γραμμὴ συχνότητων" καὶ εἰκονίζεται εἰς τὸ Διάγραμμα Δ-2 ὡς διακεκομμένη. Εἰς τὸ Διάγραμμα τοῦτο ἡ ἐν λόγῳ γραμμὴ ἔχει ἐπέκταθῆ μέχρι τῶν μέσων τῶν διαστημάτων τῶν εὐρισκομένων πρὸ τοῦ πρώτου καὶ μετὰ τὸ τελευταῖον ὀρθογώνιον. Τοῦτο, διότι εἰς τὰ ὀρθογώνια τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὰ διαστήματα ταῦτα, λόγῳ μὴ ὑπάρξεως συχνότητων, ἡ ἄνω πλευρὰ συμπύπτει μὲ τὴν κάτω ἢ ὅποια κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν Χ. Ἡ τοιούτη σύνδεσις, ὁμῶς, γενικῶς εἶναι προτιμότερον ὅπως ἀποφεύγεται, καθ' ὅσον ἡ ἐπέκτασις τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς μέχρι τοῦ ἄξονος τῶν Χ ἐνδέχεται νά δημιουργήσῃ τὴν ἐντύπωσιν εἰς τὸν ἀναγνώστην ὅτι ὑπάρχουν παρατηρήσεις καὶ διὰ τμᾶς κειμένης ἐκτός τῶν διαστημάτων εἰς τὰ ὁποῖα πράγματι ἀναφέρονται αἱ συχνότητες.

Αἱ πολυγωνικαὶ γραμμαὶ συχνότητων κατασκευάζονται καὶ ἀπ' εὐθείας, χωρὶς, δηλαδή, νά ἔχη προηγηθῆ, ὡς ἀνωτέρω, ἡ κατασκευὴ

του αντίστοιχου ιστογράμματος. Προς τούτο, επί συστήματος ὀρθογωνίων ἀξόνων προσδιορίζονται διαδοχικὰ σημεῖα, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει τετμημένην ἀνάλογον πρὸς τὴν ἀντίστοιχον συχνότητα. Ὁ καθορισμὸς τοιούτων σημείων ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ὑποθετικῶν δεδομένων τοῦ Πίνακος Γ-3 ἐμφαίνεται εἰς τὸ Διάγραμμα Δ-5. Μετὰ ταῦτα, ἡ πολυγωνική γραμμὴ προκύπτει διὰ συνδέσεως τῶν ἐν λόγω σημείων δι' εὐθειῶν γραμμῶν.

Γενικῶς αἱ πολυγωνικαὶ γραμμαὶ συχνότητων χρησιμοποιοῦνται περισσότερον ἢ τὰ ιστογράμματα διὰ τὴν διαγραμματικὴν παρουσίαν τῶν κατανομῶν κατὰ συχνότητας. Δέον, ἐν τούτοις, νὰ σημειωθῇ ὅτι εἰς περιπτώσεις κατὰ τὰς ὁποίας ἡ μεταβλητὴ εἶναι ἀσυνεχῆς, ὡς π.χ. εἰς τὴν κατανομὴν ἑνὸς ἀριθμοῦ οἰκογενειῶν ἀναλόγως τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀτόμων τὰ ὁποῖα περιλαμβάνει ἕκαστη ἐξ αὐτῶν, ἡ γραφικὴ ἀπεικόνισις τῆς κατανομῆς δέον νὰ γίνεται, ὅχι διὰ πολυγωνικῆς γραμμῆς, ἀλλὰ δι' ιστογράμματος, καθ' ὅσον εἰς τὸ τελευταῖον

#### Πίναξ Δ - 1

Κατανομὴ τοῦ πληθυσμοῦ τῆς Ἑλλάδος καθ' ὀμάδας ἡλικιῶν ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἀπογραφῶν τῶν ἐτῶν 1928 καὶ 1961

Ὅμαδες ἡλικιῶν	1 9 2 8 (α)				1 9 6 1			
	Ἀριθμὸς ἀτόμων	‰ συνόλου	‰ ἀθροιστικῶς		Ἀριθμὸς ἀτόμων	‰ συνόλου	‰ ἀθροιστικῶς	
			(Α)	(Β)			(Α)	(Β)
0 - 9	1.389.964	22,5	22,5	100,0	1.511.071	18,0	18,0	100,0
10 - 19	1.293.356	20,9	43,4	77,5	1.355.768	16,2	34,2	82,0
20 - 29	1.066.017	17,2	60,6	56,6	1.445.494	17,2	51,4	65,8
30 - 39	757.922	12,3	72,9	39,4	1.233.262	14,7	66,1	48,6
40 - 49	639.526	10,3	83,2	27,1	955.985	11,4	77,5	33,9
50 - 59	484.325	7,8	91,0	16,8	863.470	10,3	87,8	22,5
60 - 69	332.331	5,4	96,4	9,0	566.663	6,8	94,6	12,2
70 - 79	162.555	2,6	99,0	3,6	327.075	3,9	98,5	5,4
80 καὶ ἄνω	58.649	1,0	100,0	1,0	129.765	1,5	100,0	1,5
<b>Σύνολον</b>	<b>6.184.645</b>	<b>100,0</b>			<b>8.388.553</b>	<b>100,0</b>		

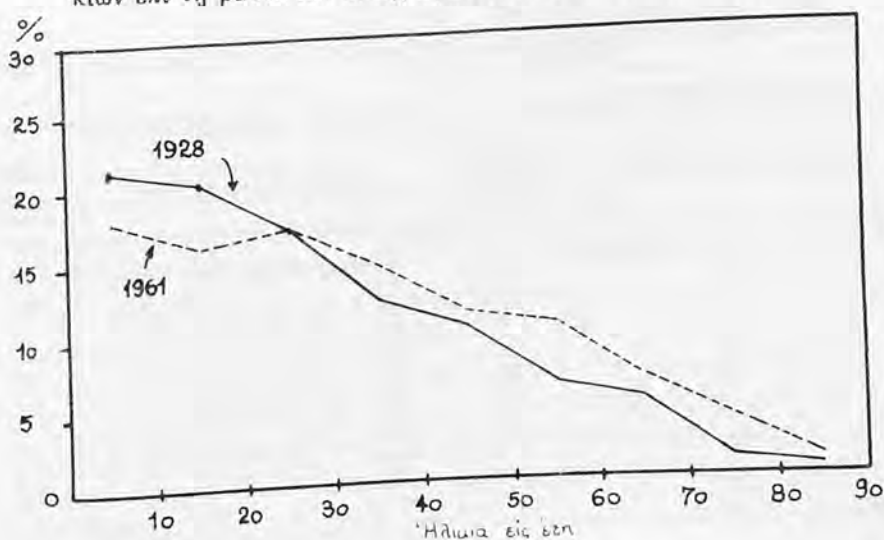
(α) Ἄνευ τῶν μὴ δηλωσάντων ἡλικιῶν.

Πηγαί: Γενικὴ Στατιστικὴ Ὑπηρεσία τῆς Ἑλλάδος, « Στατιστικὴ Ἐπετηρὶς τῆς Ἑλλάδος, 1937 », Ἀθῆναι, 1938, σελ. 50. Ε.Σ.Υ.Ε., « Στατιστικὴ Ἐπετηρὶς τῆς Ἑλλάδος, 1965 », Ἀθῆναι, 1966, σελ. 19.

ἡ διὰ χωριστῶν ὀρθογωνίων παρουσιάσεις τῶν συχνότητων ὑπογραμμίζει τὴν ὑφιστάμενην ἀσυνέχειαν εἰς τὰς τιμὰς τῆς ἐξεταζομένης μεταβλητῆς. Προκειμένου νὰ γίνῃ σύγκρισις ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ διαγράμματος δύο κατανομῶν ἐνδεικνύται ἡ χρησιμοποίησις πολυγωνικῆς γραμμῆς, ἀντὶ ἰσογράμματος, διότι εἰς τὸ τελευταῖον δέν θὰ εἶναι εὐχερῆς ἡ διάκρισις τῶν ὀρθογωνίων τῆς μιᾶς κατανομῆς ἀπὸ τῶν ὀρθογωνίων τῆς ἑτέρας. Πάντως, δεόν νὰ προστεθῇ ἐνταῦθα ὅτι ἡ σύγκρισις δύο κατανομῶν καθίσταται λίαν δυσχερῆς, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν συνολικῶν συχνότητων διαφέρῃ οὐσῶδες μεταξύ των. Τὸ ἐν λόγω πρόβλημα δύναται νὰ ἀντιμετωπισθῇ διὰ χρησιμοποίησεως κατὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ διαγράμματος, ὅχι τῶν ἀρχικῶν ἀριθμῶν τῶν συχνότητων, ἀλλὰ τῶν ἀντιστοίχων ποσοστῶν αὐτῶν ἐπὶ τοῦ συνόλου. Οὕτω, προκειμένου νὰ συγκριθοῦν αἱ κατανομαὶ τοῦ πληθυσμοῦ τῆς Ἑλλάδος καθ' ὁμάδας ἡλικιῶν κατὰ τὰ ἔτη ἀπογραφῆς 1928 καὶ 1961, μεταξύ τῶν ὁποίων, ὡς ἐμφαίνεται εἰς τὸν Πίνακα Δ-1, ὑπάρχει σημαντικὴ διαφορά ἀπὸ ἀπόψεως συνολικοῦ ἀριθμοῦ ἀτόμων, ἐλήφθησαν τὰ ποσοστὰ τῶν ἐπὶ μέρους συχνότητων ἐπὶ τοῦ ἀντιστοίχου πληθυσμοῦ, τὰ ὁποῖα ἀπεικονίζονται γραφικῶς διὰ πολυγωνικῶν γραμμῶν εἰς τὸ Διάγραμμα Δ-6. Ἐξ αὐτοῦ προκύπτει σαφῶς ὅτι μεταξύ τῶν ἐτῶν 1928 καὶ 1961 ἡ πληθυσμιακὴ πυραμὶς τῆς χώρας διεμορφώθη ἐπὶ

Διάγραμμα Δ-6

Ποσοστιαία κατανομή τοῦ πληθυσμοῦ τῆς Ἑλλάδος καθ' ὁμάδας ἡλικιῶν ἐπὶ τῆ βάσει τῶν ἀπογραφῶν τῶν ἐτῶν 1928 καὶ 1961





τό δυσμενέστερον, λόγω περιορισμοῦ τῆς συμμετοχῆς τῶν νεαρῶς ἡλικίας ἀτόμων καὶ αὐξήσεως τῆς συμμετοχῆς τῶν μεγαλύτερας ἡλικίας ἀτόμων εἰς τὸ σύνολον.

### 5. Ἄθροιστικά διαγράμματα καὶ καμπύλαι συγκεντρώσεως

Ἡ συνολικὴ συχνότης ὅλων τῶν τιμῶν μιᾶς μεταβλητῆς, αἱ ὁποῖαι εἶναι μικρότεροι τοῦ ἀνωτέρου ὁρίου δεδομένου διαστήματος τάξεως καλεῖται "ἄθροιστικὴ συχνότης" διὰ τὸ μέχρι τῆς τάξεως ταύτης διάστημα. Οὕτω, εἰς τὴν κατανομήν, τοῦ πίνακος Γ-3 ἡ ἄθροιστικὴ συχνότης μέχρι καὶ τῆς τάξεως 60, 00-69, 99 εἶναι:  $4+9+11=24$ , δηλαδή 24 ἀγροτεμάχια ἔχουν ἔκτασιν μικρότεραν τῶν 70 στρεμμάτων. Αἱ κατανομαὶ τῆς μορφῆς αὐτῆς καλοῦνται "δεξιόστροφοι ἄθροιστικά κατανομαί". Παράδειγμα ὑπολογισμοῦ τοιαύτης ἄθροιστικῆς κατανομῆς δίδεται εἰς τὸν Πίνακα Δ-2. Τὰ διαγράμματα τὰ ὁποῖα ἀπεικονίζουσι διὰ πολυγωνικῆς γραμμῆς τὰς ἄθροιστικὰς συχνότητας (μετρούμενας ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν Ψ) τὰς ἀντιστοιχοῦσας εἰς τὰ ἀνώτερα ὅρια τῶν διαστημάτων τάξεως τῆς μεταβλητῆς (ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν Χ) καλοῦνται "ἄθροιστικά διαγράμματα". Γραφικὴ ἀπεικόνισις τῆς ὑπὸ τοῦ πίνακος Δ-2 παρεχομένης ἄθροιστικῆς κατανομῆς τῶν 60 ἀγροτεμαχίων ἀναλόγως τῆς ἐκτάσεως αὐτῶν δίδεται εἰς τὸ Διάγραμμα Δ-7 (πολυγωνικὴ γραμμὴ (Α)).

Πίναξ Δ-2

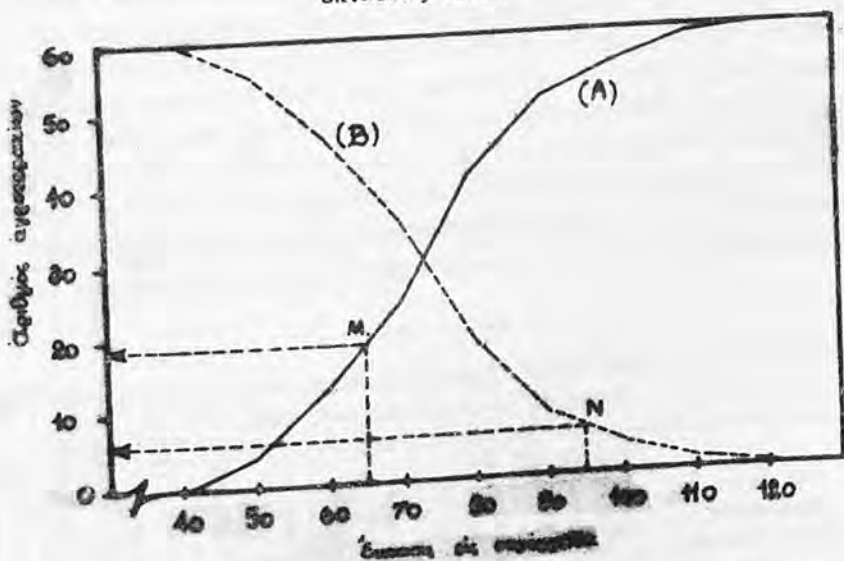
Ἄθροιστικαὶ κατανομαὶ 60 ἀγροτεμαχίων ἀναλόγως τῆς ἐκτάσεως αὐτῶν

Δεξιόστροφος ἄθροιστικὴ κατανομή			Ἀριστερόστροφος ἄθροιστικὴ κατανομή		
Ἐκτασίς εἰς στρέμματα		Ἀριθμὸς ἀγροτεμαχίων	Ἐκτασίς εἰς στρέμματα		Ἀριθμὸς ἀγροτεμαχίων
Κάτω τῶν	50 στρεμμάτων	4	40 στρέμματα καὶ ἄνω		60
» »	60 »	13	50 » » »		56
» »	70 »	24	60 » » »		47
» »	80 »	41	70 » » »		36
» »	90 »	51	80 » » »		19
» »	100 »	56	90 » » »		9
» »	110 »	59	100 » » »		4
» »	120 »	60	110 » » »		1

Εἰς ὠρισμένας περιπτώσεις εἶναι προτιμότερα ἢ χρησιμοποῦναι τῶν ἀθροιστικῶν συχνότητων ὅλων τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς, αἱ ὁποῖαι εἶναι μεγαλύτεραι ἢ ἴσαι πρὸς τὸ κατώτερον ὄριον ἐκάστου δι-αστήματος τάξεως. Αἰτιοαῦται κατανομαὶ καλοῦνται "ἀριστερόστροφοι ἀθροιστικαὶ κατανομαὶ". Σχετικὸν παράδειγμα ἀποτελοῦν τὰ δεδομένα τοῦ Πίνακος Δ-2, ἡ γραφικὴ ἀπεικόνισις τῶν ὁποῶν δίδεται εἰς τὸ Διάγραμμα Δ-7 (διακεκομμένη γραμμὴ (B)).

Διάγραμμα Δ-7

Ἀθροιστικαὶ κατανομαὶ τῶν 60 ἀγροτεμαχίων ἀναλόγως τῆς ἐκτάσεως αὐτῶν



Τὰ διαγράμματα τῶν ἀθροιστικῶν κατανομῶν χρησιμεύουν μεταξύ ἄλλων, πρὸς ὑπολογισμόν, διὰ γραφικῆς παρεμβολῆς, τῆς συνολικῆς συχνότητος τῆς ἀντιστοιχοῦσης εἰς ὅλας τὰς τιμὰς τῆς μεταβλητῆς τὰς εὐρισκομένας κάτω ἢ ἄνω δεδομένης τιμῆς, μὴ περιλαμβανομένης μεταξύ τῶν χρησιμοποιηθεισῶν πρὸς κατασκευὴν τοῦ διαγράμματος. Ἐπὶ παραδείγματι, ἐπὶ τοῦ Διαγράμματος Δ-7 δυνάμεθα νὰ καθορίσωμεν τὸν κατὰ προσέγγισιν ἀριθμὸν τῶν ἀγροτεμαχίων τῶν ἐχόντων ἔκτασιν κάτω τῶν 65 στρεμμάτων. Πρὸς τοῦτο, φέρομεν κάθετον ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν  $X$  εἰς τὸ σημεῖον τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν ἐν λόγω τιμὴν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν δεξιόστροφον ἀθροιστικὴν γραμμὴν (A) εἰς τὸ σημεῖον M. Ἐκ τοῦ σημείου αὐτοῦ φέρομεν ἕτερον κάθετον ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν  $\Psi$ , ἡ ὁποία τέμνει τοῦτον εἰς σημεῖον ἀντιστου-

χοῦν εἰς τὴν τμηὴν 19. Ἐπομένως, ὑπάρχουν 19 περίπου ἀγροτεμάχια ἔχοντα ἕκτασιν κάτω τῶν 65 στρεμμάτων. Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον εὐ-  
 ρύσκομεν, διὰ χρησιμοποίησεως τῆς ἀριστεροστροφῆς ἀθροιστικῆς  
 γραμμῆς (B), ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀγροτεμαχίων τῶν ἔχόντων ἕκτασιν  
 95 στρεμμάτων καὶ ἄνω ἀνέρχεται περίπου εἰς 6.

Ὡς ἤδη ἐλέχθη ἀνωτέρω, ἡ σύγκρισις δύο κατανομῶν μὲ διαφο-  
 ρητικὸν ἀριθμὸν συνολικῶν συχνοτήτων διευκολύνεται διὰ τῆς χρη-  
 σιμοποίησεως τῶν πολυγωνικῶν γραμμῶν τῶν συχνοτήτων ἔκπεφρα-  
 σμένων ὡς ποσοστῶν τοῦ συνόλου. Ἐπι σαφεστέρα παρουσιάσις τῶν  
 μεταξύ τῶν ὑφισταμένων διαφορῶν ἐπιτυγχάνεται διὰ τῆς γραφικῆς  
 ἀπεικονίσεως τῶν ἀντιστοίχων ἀθροιστικῶν κατανομῶν καὶ δὴ ἐπὶ  
 τοῦ ἴδιου διαγράμματος. Σχετικὸν παράδειγμα παρέχεται εἰς τὸ Δι-  
 ἀγραμμα Δ-8, ἔνθα ἀπεικονίζονται γραφικῶς αἱ δεξιόστροφαι καὶ αἱ ἀ-  
 ριστερόστροφαι ἀθροιστικαὶ κατανομαὶ τοῦ πληθυσμοῦ τῆς Ἑλλάδος  
 καθ' ὁμάδας ἡλικιῶν κατὰ τὰ ἔτη ἀπογραφῆς 1928 καὶ 1961, ἐπὶ τῇ βά-  
 σει τῶν δεδομένων τοῦ Πίνακος Δ-1 (στήλαι (A) καὶ (B)). Ἐνταῦθα  
 παρατηρεῖται ὅτι εἰς τὴν δεξιόστροφον ἀθροιστικὴν κατανομήν ἡ  
 γραμμὴ τοῦ ἔτους 1928 κεῖται συνεχῶς ὑπεράνω τῆς γραμμῆς τοῦ ἔ-

Πίναξ Δ - 3

Φορολογούμενοι καὶ οἰκογενειακὸν εἰσοδήμα αὐτῶν κατὰ κλιμάκια εἰσοδήματος  
 κατὰ τὸ οἰκονομικὸν ἔτος 1965

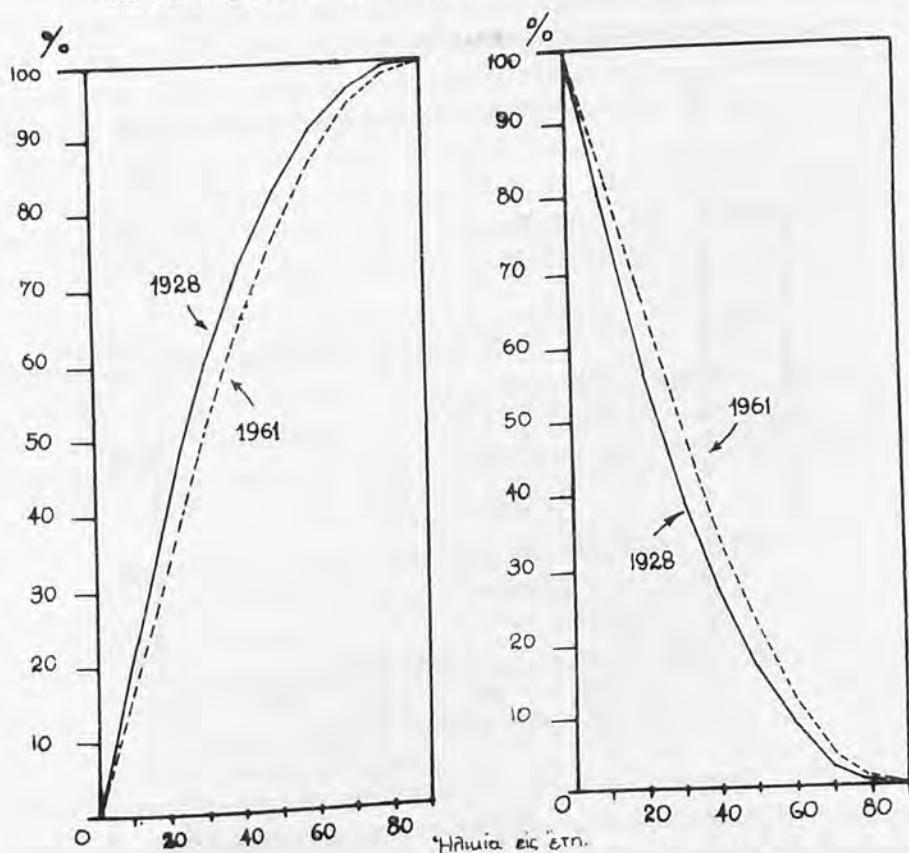
Κλιμάκια εἰσοδήματος (χιλιάδες δραχμῶν)	Ἀριθμὸς φορολογου- μένων	Ἀθροιστικὴ σειρὰ στήλης (2)	Στήλη (3) ἐπὶ τοὺς % τοῦ συνόλου	Δηλωθὲν οἰκογενειακὸν εἰσόδημα (ἑκατ. δραχμῶν)	Ἀθροιστικὴ σειρὰ στήλης (5)	Στήλη (6) ἐπὶ τοὺς % τοῦ συνόλου
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
Κάτω τῶν 30	22.724	22.724	8,8	612,6	612,6	2,8
ἀπὸ 30 ἕως 50	68.769	91.493	35,5	2.759,1	3.371,7	15,4
ἀπὸ 50 - 100	105.562	197.055	76,4	7.466,1	10.837,8	49,3
ἀπὸ 100 - 400	57.813	254.868	98,9	9.196,1	20.033,9	91,2
ἀπὸ 400 καὶ ἄνω	2.894	257.762	100,0	1.929,3	21.963,2	100,0
Σύνολον	257.762			21.963,3		

Πηγή: Ε.Σ.Υ.Ε., «Στατιστικὴ τοῦ Δηλωθέντος Εἰσοδήματος Φυσικῶν Προσώπων καὶ  
 τῆς Φορολογίας αὐτοῦ κατὰ τὸ Οἰκονομικὸν ἔτος 1965», Ἀθήναι, 1966, σελ. 10.

τους 1961, ἐνῶ εἰς τὴν ἀριστερόστροφον ἀθροιστικὴν κατανομὴν συμβαίνει τὸ ἀντίθετον. Ἡ τοιαύτη συμπεριφορὰ τῶν ἀθροιστικῶν κατανομῶν δεικνύει, προφανῶς, ὅτι ἡ συμμετοχὴ τῶν νεαρῶς ἡλικίας ἀτόμων εἶναι μεγαλύτερα εἰς τὴν κατανομὴν τοῦ ἔτους 1928 ἢ εἰς τὴν κατανομὴν τοῦ ἔτους 1961.

#### Διάγραμμα Δ-8

Ἀθροιστικαὶ κατανομαὶ τοῦ πληθυσμοῦ τῆς Ἑλλάδος καθ' ὁμάδας ἡλικιῶν ἐπὶ τῆ βάσει τῶν ἀπογραφῶν τῶν ἐτῶν 1928 καὶ 1961



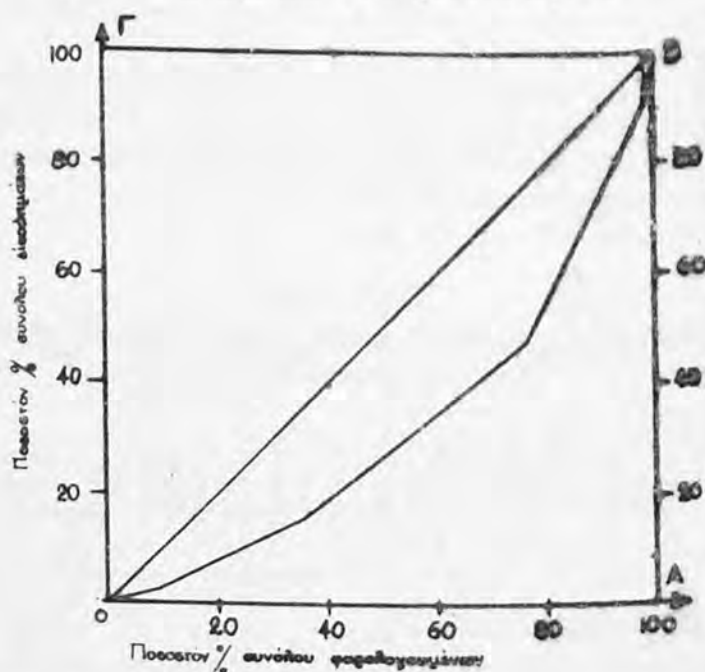
Εἰς τὴν οἰκογένειαν τῶν ἀθροιστικῶν κατανομῶν ἀνήκουν καὶ αἱ καλούμεναι "καμπύλαι συγκεντρώσεως", αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἰδιαιτέραν σημασίαν εἰς τὴν σπουδὴν τῆς κατανομῆς τῶν εἰσοδημάτων, τῶν μισθῶν, τῶν γαῶν κλπ. μεταξύ τοῦ πληθυσμοῦ. Διὰ τὴν ἐξέτασιν τοῦ τρόπου κατασκευῆς τοῦ τύπου τούτου καμπύλης χρησιμοποιοῦμεν τὴν εἰς τὸν Πίνακα Δ-3 διδομένην κατανομὴν τῶν φορολογουμένων καὶ

του οικογενειακού εισοδήματος αυτών κατά κλιμάκια εισοδήματος επί τη βάσει φορολογικών δηλώσεων του οικονομικού έτους 1965.

Είς τόν Πίνακα Δ-3 περιέχονται πέντε εισοδηματικά τάξεις (στήλη (1)), έναντι δε έκαστης ἐξ αυτών ἀναγράφεται ὁ ἀριθμὸς τῶν φορολογουμένων οἱ ὁποῖοι ἐδήλωσαν εἰσόδημα ἐμπύπτον εἰς τὴν ἀντίστοιχον τάξιν (στήλη (2)), ὡς καὶ τὸ συνολικὸν εἰσόδημα αὐτῶν

Διάγραμμα Δ-9

Καμπύλη συγκεντρώσεως εισοδημάτων ἐπὶ τῆς βάσει φορολογικῶν δηλώσεων οικονομικοῦ ἔτους 1965



(στήλη (5)). Σχηματίζομεν τὰς ἀθροιστικὰς σειρὰς τῶν στηλῶν (2) καὶ (5), αἱ ὁποῖαι δίδονται εἰς τὰς στήλας (3) καὶ (6) ἀντιστοίχως. Μετὰ ταῦτα ἐκφράζομεν ἕκαστον ὄρον τῆς ἀθροιστικῆς σειρὰς τῶν συχνοτήτων ὡς ποσοστὸν τοῦ συνολικοῦ ἀριθμοῦ τῶν φορολογουμένων (βλ. στήλην (4)) καὶ ἕκαστον ὄρον τῆς ἀθροιστικῆς σειρὰς τῶν ἀντιστοίχων δηλωθέντων εἰσοδημάτων ὡς ποσοστὸν τοῦ συνολικοῦ εἰσοδήματος ὅλων τῶν φορολογουμένων (βλ. στήλην (7)). Τὰ ποσοστά ταῦτα σημαίνουν ὅτι π.χ. τὰ 8,8% τῶν φορολογουμένων (ἕκαστος τῶν ὁποίων ἐδήλωσαν εἰσόδημα κάτω τῶν 30 χιλ. δραχ. ἐτησίως) ἔχουν

τά 2,8% του συνολικού εισοδήματος, τά 35,5% των φορολογουμένων έχουν τά 15,4% του εισοδήματος κλπ.

Ἡ χάραξις τῆς σχετικῆς καμπύλης συγκεντρώσεως γίνεται ἐπὶ τοῦ τετραγώνου ΟΑΒΓ ἐκάστη πλευρά τοῦ ὁποῦ ὑποδιαφεῖται εἰς 100 ποσοστιαίας μονάδας (βλ. Διάγραμμα Δ-9). Ἐπ' αὐτοῦ προσδιορίζομεν διαδοχικὰ σημεῖα ἔχοντα, τετμημένην μὲν τὸ ἀθροιστικὸν ποσοστὸν τῆς στήλης (4), τεταγμένην δὲ τὸ ἀθροιστικὸν ποσοστὸν τῆς στήλης (7) τοῦ Πίνακος Δ-3. Ἐνοῦντες δι' εὐθειῶν γραμμῶν τά οὕτω προκύπτοντα σημεῖα καὶ ἐν συνεχείᾳ ταῦτα μετὰ τῶν σημείων Ο καὶ Β, λαμβάνομεν τὴν καμπύλην συγκεντρώσεως τῶν εισοδημάτων. Ἐάν τά εισοδήματα κατανέμονται μεταξὺ τῶν οἰκογενειῶν ὁμοιόμορφως, τότε ἡ καμπύλη συγκεντρώσεως θά συμπίπτῃ μετὰ τῆς διαγωνίου ΟΒ, ἢ ὁποῖα, διὰ τοῦτο, καλεῖται "διαγώνιος ἰσοκατανομῆς". Ἄλλως, ἡ καμπύλη κάμπτεται, ὡς εἰς τὸ Διάγραμμα Δ-9, ἀπομακρυνόμενη τῆς διαγωνίου ταύτης τόσον περισσότερο ὅσον μεγαλυτέρα εἶναι ἡ ἀνισότης τῆς κατανομῆς τῶν εισοδημάτων.

#### δ. Ἄνιδωτὰ καὶ κυκλικὰ διαγράμματα

Συνήθεις, καὶ σχετικῶς ἀπλοῦ, τύποι διαγραμμάτων, χρησιμοποιούμενοι διὰ τὴν γραφικὴν ἀπεικόνισιν ποιοτικῶν κατατάξεων, εἶναι τά καλούμενα "ἀνιδωτὰ διαγράμματα" καὶ "κυκλικὰ διαγράμματα".

#### Πίναξ Δ-4

Ποσοστιαία κατανομή τῆς ἀξίας τῶν ἑλληνικῶν ἐξαγωγῶν τοῦ ἔτους 1966 κατὰ γεωγραφικὰς περιοχὰς

Α/Α	Γεωγραφικαὶ περιοχαὶ	Εἰς %	Εἰς μοίρας
1.	Χῶραι Ε.Ο.Κ . . . . .	35,5	127°,8
2.	Ἀνατολικὴ Εὐρώπη . . . . .	22,9	82°,4
3.	Ἀμερικὴ . . . . .	11,4	41°,0
4.	Χῶραι Ε.Ζ.Ε.Σ. . . . .	10,7	38°,5
5.	Ἀσία - Ὠκεανία . . . . .	7,8	28°,2
6.	Λοιπὴ Εὐρώπη . . . . .	7,0	25°,2
7.	Ἀφρικὴ . . . . .	4,7	16°,9
	Σύνολον . . . . .	100,0	360°,0

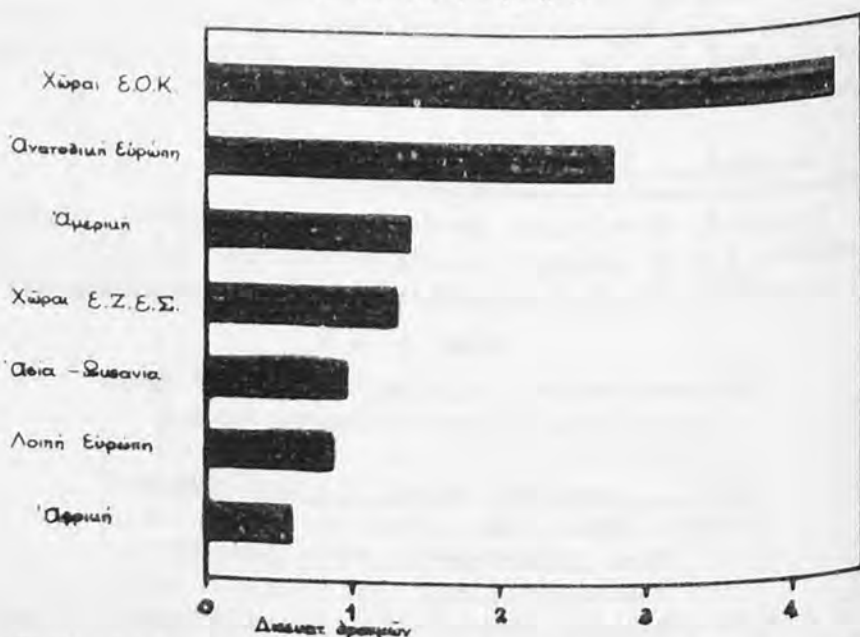
Ταῦτα, ὡς ἐκ τῆς φύσεώς των, ἐκφράζουν στατικὰς καταστάσεις καὶ συνεπῶς, κατ' ἀρχὴν, δέν προσφέρονται πρὸς παρακολούθησιν διαχρο-

νικῶν ἐξελίξων, ἐκτός ἐάν τύχουν καταλλήλου προσαρμογῆς ἢ ληφθοῦν ἐν σειρά.

Τά ἀκιδωτά διαγράμματα ἀποτελοῦνται ἀπό ἰσπέχοντα μεταξύ των ὀριζόντια ὀρθογώνια ἢ ἀκίδας, τὸ μῆκος τῶν ὀποῶν εἶναι ἀνάλογον πρὸς τὰς ὑπὸ σύγκρισιν ἀπολύτους τιμὰς ἢ ποσοστά. Παράδειγμα ἀκιδωτοῦ διαγράμματος δίδεται εἰς τὸ Διάγραμμα Δ-10, τὸ ὁποῖον ἀπεικονίζει τὴν γεωγραφικὴν κατανομὴν τῆς ἀξίας τῶν ἑλληνικῶν ἐξαγωγῶν κατὰ τὸ ἔτος 1966 ἐπὶ τῆ βάσει τῶν στοιχείων τοῦ Πίνακος Γ-5. Σημειωτέον ὅτι εἰς τὰ ἐν λόγῳ διαγράμματα αἱ ὀριζόντιαι ἀκί-

#### Διάγραμμα Δ-10

Κατανομή τῆς ἀξίας τῶν ἑλληνικῶν ἐξαγωγῶν τοῦ ἔτους 1966 κατὰ γεωγραφικὰς περιοχὰς



Πηγή: Ε.Σ.Υ.Ε., «Μηνιαῖον Δελτίον Στατιστικῆς Ἐξωτερικοῦ Ἐμπορίου», Δεκέμβριος 1966, σελ. 2-5.

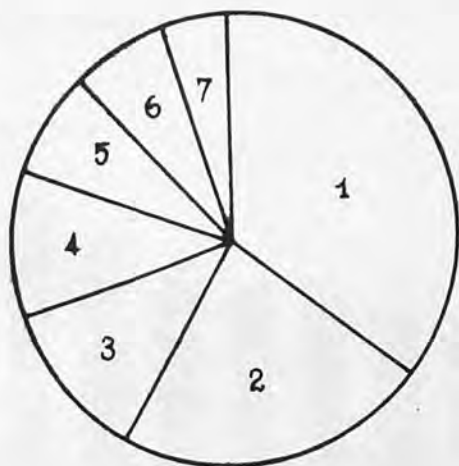
δες εἶναι δυνατόν νά ἐπενταθοῦν καί πρὸς τὰ ἀριστερά τῆς καθέτου γραμμῆς βάσεως πρὸς ἀπεικόνισιν εἴτε ἐπὶ μέρους συνιστωσῶν τοῦ αὐτοῦ μεγέθους εἴτε καί τῆς ἰδίας κατατάξεως ἑτέρου μεγέθους.

Τά κυκλικὰ διαγράμματα ἀποτελοῦνται ἐκ κύκλων διηρημένων εἰς τομεῖς, τὸ ἔμβωδόν ἐκάστου τῶν ὀποῶν ἐκφράζει τὴν ἀναλογία τοῦ ἀπεικονιζομένου μέρους πρὸς τὸ σύνολον. Διὰ τοιοῦτου κυ-

κλινοῦ διαγράμματος, ἐπὶ παραδείγματι, δύναται νά παρασταθοῦν τὰ στοιχεῖα τοῦ Πίνακος Γ-5 τὰ ἀναφερόμενα εἰς τὴν γεωγραφικὴν κατανομὴν τῆς ἀξίας τῶν ἑλληνικῶν ἐξαγωγῶν κατὰ τὸ ἔτος 1966. Πρὸς τοῦτο ἐκφράζομεν τὴν ἀξίαν τῶν πρὸς ἑκάστην περιοχὴν τοῦ κόσμου ἐξαγωγῶν ὡς ποσοστὸν τῆς συνολικῆς ἀξίας τῶν ἑλληνικῶν ἐξαγωγῶν (βλ. Πίνακα Δ-4). Χαράσσομεν κύκλον μὲ ἀκτῖνα οἴουδῆποτε μήκους καὶ διαιροῦμεν τοῦτον εἰς κυκλικούς τομεῖς ἕκαστος τῶν

### Διάγραμμα Δ-11

Ποσοστιαία κατανομή τῆς ἀξίας τῶν ἑλληνικῶν ἐξαγωγῶν τοῦ ἔτους 1966 κατὰ γεωγραφικὰς περιοχὰς



1. Χῶραι Ε.Ο.Κ.
2. Ἀνατολική Εὐρώπη
3. Ἀμερική
4. Χῶραι Ε.Ζ.Ε.Σ.
5. Ἀσία -Βουλγαρία
6. Λοιπὴ Εὐρώπη
7. Ἀφρική

Πηγή: Ε.Σ.Υ.Ε., «Μηνιαῖον Δελτίον Στατιστικῆς Ἐξωτερικοῦ Ἐμπορίου», Δεκέμβριος 1966, σελ. 2-5.

ὁποῶν πρέπει νά ἔχη ἐπιφάνειαν ἀνάλογον πρὸς τὸ μέγεθος τοῦ ἀντιστοιχοῦντος ποσοστοῦ. Δεδομένου ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ποσοστῶν εἶναι 100, ἢ δὲ περιφέρεια τοῦ κύκλου ἔχει  $360^\circ$ , προκύπτει ὅτι ἕκαστος  $1\%$  ἀντιστοιχεῖ εἰς γωνίαν  $3,6^\circ$ . Οὕτω, ὡς ἐμφαίνεται εἰς τὸν Πίνακα Δ-4, τὸ ποσοστὸν  $35,5\%$  ἀντιστοιχεῖ εἰς τομεᾶ γωνίας  $35,5 \times 3,6 = 127,8$  κ.ο.κ. Ἡ σχετικὴ γραφικὴ ἀπεικόνισις παρέχεται εἰς τὸ Διάγραμμα Δ-11.



## 7. Γραφική ἀπεικόνισις τῶν χρονολογιῶν σειρῶν

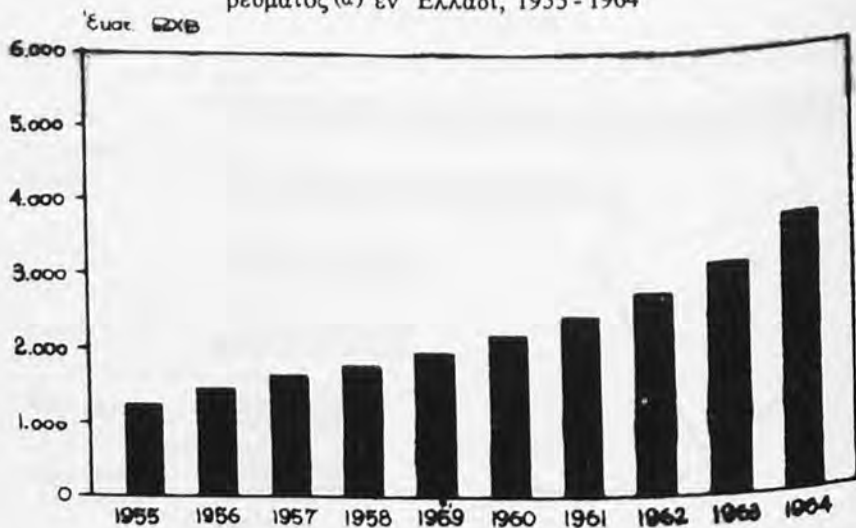
Ἡ γραφικὴ ἀπεικόνισις μιᾶς χρονολογιῆς σειρᾶς δύναται, ὡς καὶ ἡ τῶν κατανομῶν κατὰ συχνότητος, νὰ γίνῃ κατὰ δύο τρόπους, ἥτοι δι' ἰστογράμματος καὶ διὰ πολυγωνικῆς γραμμῆς.

### α) Ἴστογράμματα

Διὰ τὴν γραφικὴν ἀπεικόνισιν μιᾶς χρονολογιῆς σειρᾶς δι' ἰστογράμματος, ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν Χ, ὁ ὁποῖος ἐν προκειμένῳ καλεῖται "ἄξων τοῦ χρόνου", μετροῦμεν τὸν χρόνον, λαμβάνοντες ἴσα

Διάγραμμα Δ - 12

Γραφικὴ ἀπεικόνισις δι' ἰστογράμματος τῆς παραγωγῆς ἠλεκτρικοῦ ρεύματος (α) ἐν Ἑλλάδι, 1955-1964



(α) Δὲν περιλαμβάνεται ἡ παραγωγή ἐργοστασίων παραγόντων δι' ἰδίαν χρήσιν.

Πηγή: Ε.Σ.Υ.Ε., «Στατιστικὴ Ἐπετηρὶς τῆς Ἑλλάδος, 1965», Ἀθήναι, 1966, σελ. 256.

τμήματα ἀντίστοιχα πρὸς τὰς περιόδους (ἔτη, τρίμηνα, μῆνας κλπ.) εἰς τὰς ὁποίας ἀναφέρονται αἱ μετρήσεις. Ταῦτα λαμβάνεται μέρημα ὡστε νὰ ἀπέχουν ἐξ ἴσου μεταξύ των, σκόπιμον δὲ εἶναι ὅπως αἱ σχετικαὶ ἀποστάσεις μὴ ὑπερβαίνουν τὸ μῆκος τῶν τμημάτων τῶν ἀντιστοιχοῦντων εἰς τὰς χρονικὰς μονάδας. Μὲ βάσει τὰ ἐν λόγω τμήματα κατασκευάζομεν ὀρθογώνια ἔχοντα ὕψος ἀνάλογον πρὸς τὴν τιμὴν τῆς μεταβλητῆς, ἡ ὁποία μετρεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν Ψ. Παράδειγμα γραφικῆς ἀπεικονίσεως χρονολογιῆς σειρᾶς δι' ἰστογράμ-

ματος δίδεται εἰς τὸ Διάγραμμα Δ-12, τὸ ὁποῖον στηρίζεται ἐπὶ τῶν δεδομένων τοῦ Πίνακος Γ-1 καὶ δεικνύει τὴν ἐξέλιξιν τῆς παραγωγῆς ἠλεκτρικοῦ ρεύματος ἐν Ἑλλάδι κατὰ τὴν περίοδον 1955-1964.

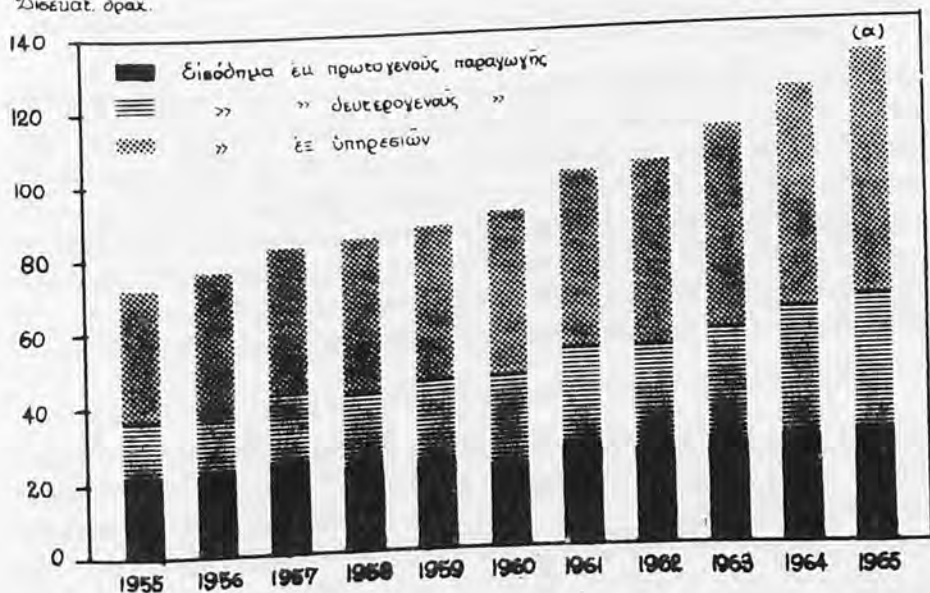
Εἰς τὸ ἰστογράμμα τῆς χρονολογικῆς σειρᾶς δυνάμεθα νὰ ἀπεικονίσωμεν καὶ τὴν ἐξέλιξιν τῶν ἐπιμέρους συνιστωσῶν τῆς μεταβλητῆς διὰ διαίρεσως τῶν ὀρθογώνων εἰς τμήματα ἀνάλογα πρὸς τὸ μέγεθος τῶν συνιστωσῶν τούτων. Πρὸς ἀποφυγὴν συγχύσεως αἱ ἐν λόγῳ συνιστώσαι δεόν νὰ ἐμφανίζωνται μὲ τὴν αὐτὴν σειρὰν εἰς ὅλα τὰ ὀρθογώνια. Γενικῶς, αἱ μεγαλύτεραι ἐξ αὐτῶν εἶναι σκόπιμον νὰ τίθενται εἰς τὸ κάτω μέρος (πλησίον τοῦ ἄξονος τοῦ χρόνου), ἐκτός ἐάν ἡ σειρὰ ἐμφανίσεως εἶναι καθιερωμένη, ὅποτε εἶναι προτιμότερον νὰ μὴ ἀκολουθῆται ἡ τάξις μεγέθους.

Ἡ εἰς διαδοχικὰς χρονικὰς περιόδους σύγκρισις ἑνὸς μεγέθους πρὸς ἕτερον εἶναι δυνατόν νὰ γίνῃ ἐπὶ τοῦ ἴδιου διαγράμματος διὰ

### Διάγραμμα Δ-13

Γραφικὴ ἀπεικόνισις δι' ἰστογράμματος ἐξελίξεως ἀκαθαρίστου ἐθνικοῦ εἰσοδήματος εἰς τιμὰς 1958 κατὰ βασικοὺς παραγωγικοὺς τομεῖς, 1955-1965

Δισεκατ. δραχ.

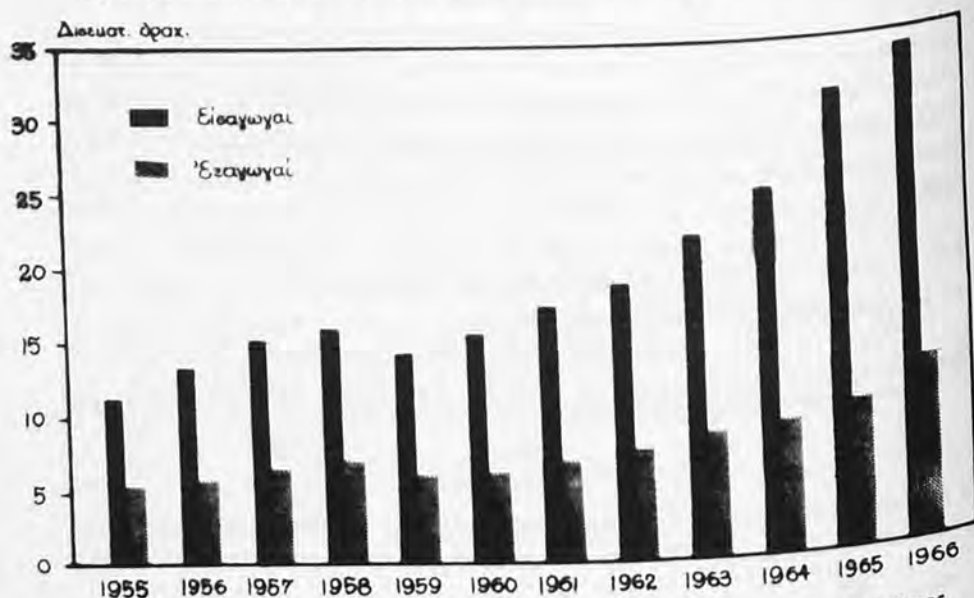


(α) Προσωρινὰ στοιχεία.

Πηγή: Ὑπουργεῖον Συντονισμοῦ, «Ἐθνικοὶ Λογαριασμοὶ τῆς Ἑλλάδος, 1948-1965», Ἀριθ. 16, Ἀθῆναι, 1967, σελ. 105-106.

## Διάγραμμα Δ-14

Ἐξέλιξις ἑλληνικῶν εἰσαγωγῶν (ἄνευ πλοίων) καὶ ἐξαγωγῶν, 1955-1966



Πηγή: Ε.Σ.Υ.Ε., «Μηνιαῖον Δελτίον Στατιστικῆς Ἐξωτερικοῦ Ἐμπορίου», Δεκέμβριος 1966, σελ. 1.

χρησιμοποίησεως εἰδικοῦ τύπου ἰσογράμματος. Ἡ διαφορὰ αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ συνήθους ἔγκειται εἰς τὸ ὅτι ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν Χ καὶ ἐφ' ἑκάστου τμήματος ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου κατασκευάζονται, ὄχι ἓν, ἀλλὰ δύο συνεχόμενα ὀρθογώνια. Οὕτω, πρὸς παρακολούθησιν τῆς ἀπὸ ἔτους εἰς ἔτος διαμορφώσεως τοῦ ἐμπορικοῦ ἰσοζυγίου τῆς Ἑλλάδος κατὰ τὴν περίωδον 1955-1966 χρησιμοποιοῦνται εἰς τὸ Διάγραμμα Δ-14 δώδεκα ζεύγη ὀρθογωνίων τὰ ὁποῖα παριστοῦν τὴν ἀξίαν τῶν εἰσαγωγῶν καὶ τῶν ἐξαγωγῶν.

## β) Πολυγωνικαὶ γραμμαὶ

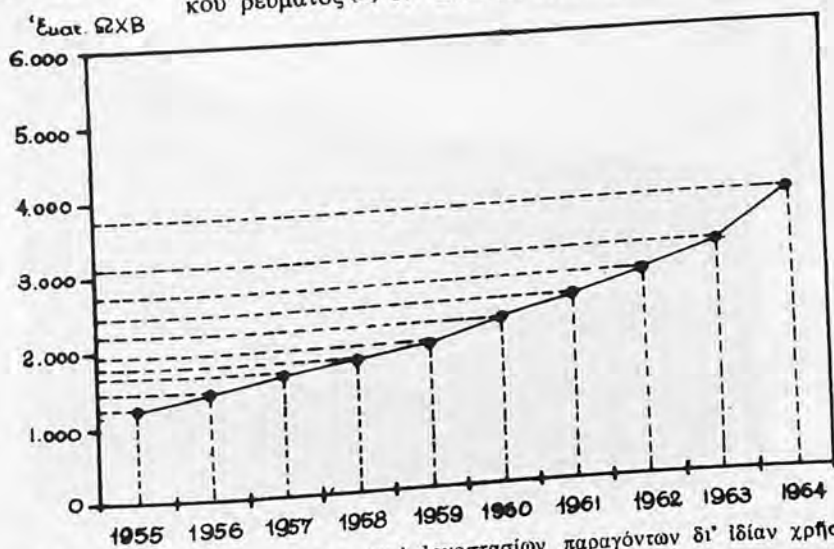
Ἡ γραφικὴ ἀπεικόνισις δεδομένης χρονολογιῆς σειρᾶς γίνεται ἐν προκειμένῳ διὰ τοῦ προσδιορισμοῦ ἐπὶ συστήματος ὀρθογωνίων ἀξόνων διαδοχικῶν σημείων, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει τετμημένην καθοριζομένην ὑπὸ τοῦ μέσου τοῦ τμήματος τοῦ δεικνύοντος τὴν μονάδα τοῦ χρόνου ἐπὶ τοῦ ἄξονος τοῦ χρόνου καὶ τεταγμένην ἀνάλογον πρὸς τὴν τιμὴν τῆς μεταβλητῆς, μετρουμένην ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν Ψ. Ἡ πολυγωνικὴ γραμμὴ τῆς χρονολογιῆς σειρᾶς προκύπτει

διά συνδέσεως τῶν διαδοχικῶν τούτων σημείων δι' εὐθειῶν γραμμῶν. Σχετικόν παράδειγμα δίδεται εἰς τὸ Διάγραμμα Δ-15 ἔνθα ἀπεικονίζεται γραφικῶς ἡ παραγωγή ἠλεκτρικοῦ ρεύματος ἐν Ἑλλάδι κατὰ τὴν περίοδον 1955-1964.

Κατὰ τὴν ἀπεικόνισιν τῶν χρονολογικῶν σειρῶν διὰ πολυγωνικῶν γραμμῶν αἱ μονάδες τοῦ χρόνου εἶναι δυνατόν νά παρασταθοῦν, ὄχι διὰ τμημάτων τοῦ ἄξονος τοῦ χρόνου, ὡς ἐγένετο εἰς τὸ Διάγραμμα Δ-15, ἀλλὰ διὰ σημείων αὐτοῦ ἰσαπεχόντων μεταξύ των. Ὁ τρόπος οὗτος γραφικοῦ προσδιορισμοῦ τῶν μονάδων τοῦ χρόνου δέον,

### Διάγραμμα Δ - 15

Γραφικὴ ἀπεικόνισις διὰ πολυγωνικῆς γραμμῆς τῆς παραγωγῆς ἠλεκτρικοῦ ρεύματος (α) ἐν Ἑλλάδι, 1955 - 1964



(α) Δὲν περιλαμβάνεται ἡ παραγωγή ἐργοστασίων παραγόντων δι' ἰδίαν χρῆσιν.  
 Πηγή: Ε.Σ.Υ.Ε., «Στατιστικὴ Ἐπετηρὶς τῆς Ἑλλάδος, 1965», Ἀθῆναι, 1966, σελ. 256.

γενικῶς, νά ἀποφεύγεται, διότι ἐνδέχεται νά δημιουργήσῃ σύγχυσις ὡς πρὸς τὸ ἀκριβές χρονικόν σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον ἀναφέρονται αἱ τιμαὶ τοῦ ἐξεταζομένου μεγέθους. Τοιοῦτου εἴδους δυσχέρειαι ἀνακύπτουν κυρίως ὅταν πρόκειται περὶ στατιστικῶν δεδομένων καλυπτόντων μόνον σημεῖον τι τῆς χρησιμοποιουμένης χρονικῆς μονάδος, ὡς εἶναι π.χ. τὰ στοιχεῖα τιμῶν, τραπεζικῶν καταθέσεων, νομισματικῆς κυκλοφορίας κλπ. Εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτάς ἡ παράστασις τῆς μονάδος τοῦ χρόνου διὰ τμήματος τοῦ ἄξονος τοῦ χρόνου παρέχει τὴν δυνατότητα τοποθετήσεως τῶν σχετικῶν σημείων τῆς πο-

λυγωνικῆς γραμμῆς εἰς τὴν ἀρχὴν, τὸ μέσον ἢ τὸ τέλος τῶν τμημάτων τούτων, ἀναλόγως τοῦ ἔαν τὰ στατιστικὰ δεδομένα ἀναφέρονται εἰς τὴν ἀρχὴν, τὸ μέσον ἢ τὸ τέλος τῆς μονάδος τοῦ χρόνου.

Διὰ πολυγωνικῶν γραμμῶν δυνάμεθα νὰ ἀπεικονίσωμεν καὶ τὴν ἐξέλιξιν τῶν ἐπὶ μέρους συνιστωσῶν ἐκ τῶν ὁποίων ἀποτελεῖται δεδομένον μέγεθος. Πρὸς τοῦτο, δι' ἐκάστην ἐπὶ μέρους συνιστώσαν

### Διάγραμμα Δ - 16

Γραφικὴ ἀπεικόνισις διὰ πολυγωνικῆς γραμμῆς ἐξελίξεως ἀκαθαρίστου ἔθνικοῦ εἰσοδήματος εἰς τιμὰς 1958 κατὰ βασικοὺς παραγωγικοὺς τομεῖς, 1955 - 1965

Στοιχεῖα.

δραχ.

140

120

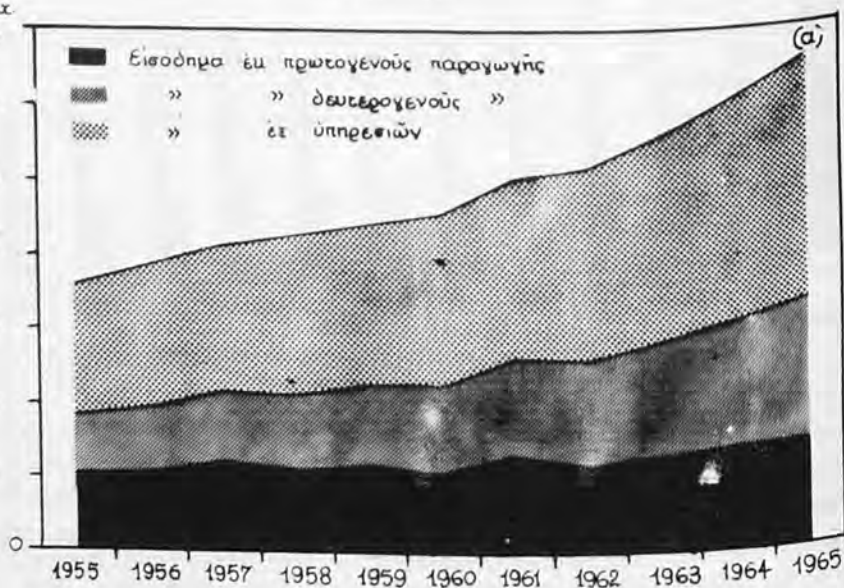
100

80

60

40

20



(α) Προσωρινὰ στοιχεῖα.

Πηγή: Ὑπουργεῖον Συντονισμοῦ, «Ἐθνικοὶ Λογαριασμοὶ τῆς Ἑλλάδος, 1948 - 1965», Ἀριθ. 16, Ἀθῆναι, σελ. 105 - 106.

κατασκευάζομεν τὴν πολυγωνικὴν γραμμὴν τῆς ἐν τῷ χρόνῳ ἐξελίξεως τῆς κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἐκτεθέντα, μὲ μόνην τὴν διαφορὰν ὅτι αἱ τεταγμέναι τῶν ἐπὶ μέρους σημείων διὰ τινὰ χρονικὴν περίοδον δὲν μετροῦνται ὅλαι ἐκ τοῦ ἄξονος τοῦ χρόνου, ἀλλὰ ἐκάστη ἀπὸ τοῦ τέλους τῆς προηγουμένης ἐπὶ τῇ βάσει τῆς σειρᾶς παρουσιάσεως τῶν. Πρὸς παραστατικωτέραν ἐμφάνισιν τῆς ἐξελίξεως τῶν ἐπὶ μέρους συνιστωσῶν, αἱ μεταξύ τῶν κατασκευαζομένων πολυγωνικῶν γραμμῶν ζῶναι καλύπτονται, συνήθως, διὰ διαφορετικοῦ τύπου ραβδώσεων,

σημείων κλπ. Σχετικόν παράδειγμα τοιαύτης γραφικῆς ἀπεικονίσεως ἀποτελεῖ τὸ Διάγραμμα Δ-16, εἰς τὸ ὁποῖον δεικνύεται ἡ ἐξέλιξις τοῦ ἀκαθαρίστου ἐθνικοῦ εἰσοδήματος (εἰς τμᾶς 1958) κατὰ βασικοὺς παραγωγικοὺς τομεῖς κατὰ τὴν περίωδον 1955-1965.

Διὰ λόγους συγκρίσεως παρίσταται πολλάκις ἀνάγκη παρουσιάσεως ἐπὶ τοῦ ἴδιου διαγράμματος δύο ἢ περισσοτέρων χρονολογιῶν σειρῶν ὑπὸ μορφήν πολυγωνικῶν γραμμῶν. Ἡ κατασκευὴ αὐτῶν γίνεται εἰς τὰς ἐν λόγῳ περιπτώσεις κατὰ τὰ γνωστά, ἐφ' ὅσον ὅλα τὰ με-

Διάγραμμα Δ-17

Ἐξέλιξις παραγωγῆς ἠλεκτρικοῦ ρεύματος (α) καὶ φωταερίου ἐν Ἑλλάδι, 1955-1964



(α) Δὲν περιλαμβάνεται ἡ παραγωγή ἐργοστασίων παραγόντων δι' ἰδίαν χρῆσιν.  
 Πηγή: Ε.Σ.Υ.Ε., «Στατιστικὴ Ἐπετηρὶς τῆς Ἑλλάδος, 1965», Ἀθήναι, 1966, σελ. 256.

γέθη ἐκφράζονται εἰς τὴν ἴδιαν μονάδα μετρήσεως. Ὄταν, ὅμως, αἱ μονάδες μετρήσεως διαφέρουν, ἡ γραφικὴ ἀπεικόνισις ἐνδείκνυται ὅπως περιορίζεται εἰς τὴν παρουσίᾳσιν δύο μόνων μεγεθῶν, μετρούμενων ἐπὶ τῶν δύο καθέτων πλευρῶν τοῦ διαγράμματος, ὡς εἰς τὸ Διάγραμμα Δ-17. Διὰ χρησιμοποίησιν πολλαπλῶν κλιμάκων μετρήσεως ἐπὶ ἑκατέρας πλευρᾶς εἶναι, βεβαίως, δυνατὴ ἢ ταυτόχρονος ἀπεικόνισις καὶ περισσοτέρων τῶν δύο χρονολογιῶν σειρῶν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ διαγράμματος, πλὴν ὅμως τοιαῦται παρουσιάσεις συνήθως στεροῦνται σαφηνείας καὶ ἀπλότητος καὶ διὰ τοῦτο εἶναι σκόπιμον ὅπως ἀποφεύγῃται, ἰδίως ὅταν προορίζωνται δι' εὐρυτέραν χρῆσιν.

Διά τῶν πολυγωνικῶν γραμμῶν διευκολύνεται κυρίως ἡ παρακολούθησις τῶν ἀπὸ περιόδου εἰς περίερον μεταβολῶν τῶν μεγεθῶν. Διά τοῦτο, ὡς ἀνωτέρω ἐλέχθη, πολλάκις ἀφαιρεῖται τό μέρος ἐκείνο τῆς κλίμακος μετρήσεως ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν  $\Psi$ , διά τό ὅποιον δέν ὑπάρχουν τιμαί ἐν παρατηρήσεως, εἰς τρόπον ὥστε νά ἐπιτυχῶνεται μεγέθυνσις τῶν διακυμάνσεων τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς. Ὅταν μάλιστα ἀπεικονίζονται δύο ἢ περισσότερα μεγέθη ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ διαγράμματος, δύναται εὐκόλως νά διαπιστωθῆ ὅτι ἡ προσοχή συγκεντροῦται εἰς τήν συγκριτικὴν ἐπισκόπησιν τῆς πορείας τῶν γραμμῶν. Τά ἰστογράμματα, παρέχουν μὲν καί ταῦτα τήν κατεύθυνσιν τῆς κινήσεως τῶν μεγεθῶν ἐν τῷ χρόνῳ, ἀλλά διά τῶν διαδοχικῶν ὀρθογωνίων δίδουν μεγαλύτεραν ἔμφασιν εἰς τό διαμορφούμενον ὕψος αὐτῶν καθ' ἑκάστην περίερον. Κατά ταῦτα, ἡ παρουσία δύο ταυτοχρόνως μεγεθῶν διά χρησιμοποίησεως διαδοχικῶν ζευγῶν ὀρθογωνίων πρωταρχικῶς ἀποβλέπει εἰς τήν σύγκρισιν τῶν τιμῶν των καθ' ἑκάστην περίερον.

Δέον νά προστεθῆ ὅτι εἰς τήν πράξιν ἡ γραφικὴ ἀπεικόνισις τῶν χρονολογικῶν σειρῶν εἶναι πολλάκις προτιμότερον νά γίνεται διά χρησιμοποίησεως ἀμφοτέρων τῶν τρόπων τούτων ἀπεικονίσεως πρὸς σαφῆ διαφορισμόν τῆς φύσεως τῶν ἐμφανιζομένων στοιχείων. Συγκεκριμένως, ὅταν διά τό αὐτό μέγεθος λαμβάνωνται, ἐτήσια μὲν στοιχεῖα διά μίαν προγενεστέραν περίερον, ἐν συνεχείᾳ δέ τριμηνιαῖα ἢ μηνιαῖα στοιχεῖα διά μίαν πρόσφατον περίερον, ἐνδείκνυται ὅπως, τά μὲν πρῶτα ἀπεικονίζονται δι' ὀρθογωνίων, τά δέ δεύτερα διά πολυγωνικῆς γραμμῆς. Ἐπίσης, ἐν περιπτώσει ἐμφανίσεως ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ διαγράμματος δύο μεγεθῶν, ἐκ τῶν ὁποίων τό ἐν μετρεῖται ἐπὶ ἐτήσιας τό δέ δεύτερον ἐπὶ τριμηνιαίας ἢ μηνιαίας βάσεως, εἶναι σκόπιμον ὅπως, διά μὲν τό πρῶτον χρησιμοποιηθῆ ἰστόγραμμα διά δέ τό δεύτερον πολυγωνικὴ γραμμῆ.

### 8. Ἡμιλογαριθμικά διαγράμματα

Εἰς τά ἀνωτέρω περιγραφέντα διαγράμματα χρησιμοποιοῦνται "φυσικαὶ κλίμακες", αἱ ὁποῖαι μετροῦν τὰς ἀπολύτους μεταβολὰς τῶν στατιστικῶν στοιχείων. Εἰς ταύτας, δηλαδή, ἴσαι ἀποστάσεις ἀντιστοιχοῦν εἰς ἴσας διαφοράς. Εἰς τήν πράξιν, ἐν τούτοις, συχνάκις γίνεται χρῆσις ἑνὸς ἄλλου τύπου κλίμακος ὁ ὁποῖος καλεῖται "λογαριθμικὴ κλίμαξ". Ἐπὶ ταύτης ἡ μέτρησις γίνεται διά χρησιμοποίησεως, ὄχι τῶν ἀρχικῶν ἢ φυσικῶν ἀριθμῶν, ἀλλὰ τῶν λογαριθμῶν αὐτῶν.

Ὡς γνωστόν, λογάριθμος (δεκαδικός) ἑνός ἀριθμοῦ εἶναι ἡ δύναμις εἰς τὴν ὅποیان πρέπει νά ὑψωθῆ ὁ ἀριθμός 10 διὰ νά δώσῃ τὸν ἀριθμόν. Δηλαδή,

$$\text{Ἐάν } A = 10^\lambda, \text{ τότε } \log A = \lambda$$

Οὕτω, ἐπειδὴ :  $10 = 10^1$ ,  $100 = 10^2$ ,  $1.000 = 10^3$  κ.ο.κ.

Ἔχομεν :  $\log 10 = 1$ ,  $\log 100 = 2$ ,  $\log 1.000 = 3$  κ.ο.κ.

Σημειωτέον ὅτι οἱ λογάριθμοι ὅλων τῶν θετικῶν ἀριθμῶν περιέχονται εἰς εἰδικούς πίνακας εἰς τοὺς ὁποίους καὶ παρέχονται συνήθως λεπτομερεῖς ὁδηγαί περὶ τοῦ τρόπου χρησιμοποίησεως αὐτῶν.

Ἐάν εἰς τινα συνήθη ἀριθμητικὴν κλίμακα, ἀντὶ τῶν ἀρχικῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, λάβωμεν τοὺς λογαριθμούς αὐτῶν, ἡ τοιαύτη κλίμαξ καθίσταται λογαριθμική. Ἐνῶ, ὅμως, ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν τῆς σειρᾶς :

10, 100, 1.000, 10.000, 100.000

εἶναι δεκαπλάσιος τοῦ προηγουμένου - ἄλλως παρουσιάζει αὐξήσειν κατὰ 9000% - οἱ λογάριθμοι αὐτῶν εἶναι ἀντιστοίχως :

1, 2, 3, 4, 5,

δηλαδή αὐξάνουν κατὰ στεθερόν ποσόν (κατὰ μονάδα). Ἐπομένως εἰς τὴν λογαριθμικὴν κλίμακα ἴσαι ἀποστάσεις δεικνύουν πάντοτε ἴσα ποσοστά μεταβολῆς. Τοῦτο εἶναι συνέπεια τῶν ἀκολουθῶν ιδιοτήτων τῶν λογαριθμῶν :

α) Ὁ λογάριθμος ἑνός γινομένου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν λογαριθμῶν τῶν παραγόντων αὐτοῦ, δηλαδή :

$$\text{Ἐάν } A = B \cdot \Gamma$$

$$\text{Τότε } \log A = \log B + \log \Gamma$$

β) Ὁ λογάριθμος πηλίκου ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν λογαριθμῶν τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ, δηλαδή :

$$\text{Ἐάν } A = \frac{B}{\Gamma}$$

$$\text{τότε } \log A = \log B - \log \Gamma$$

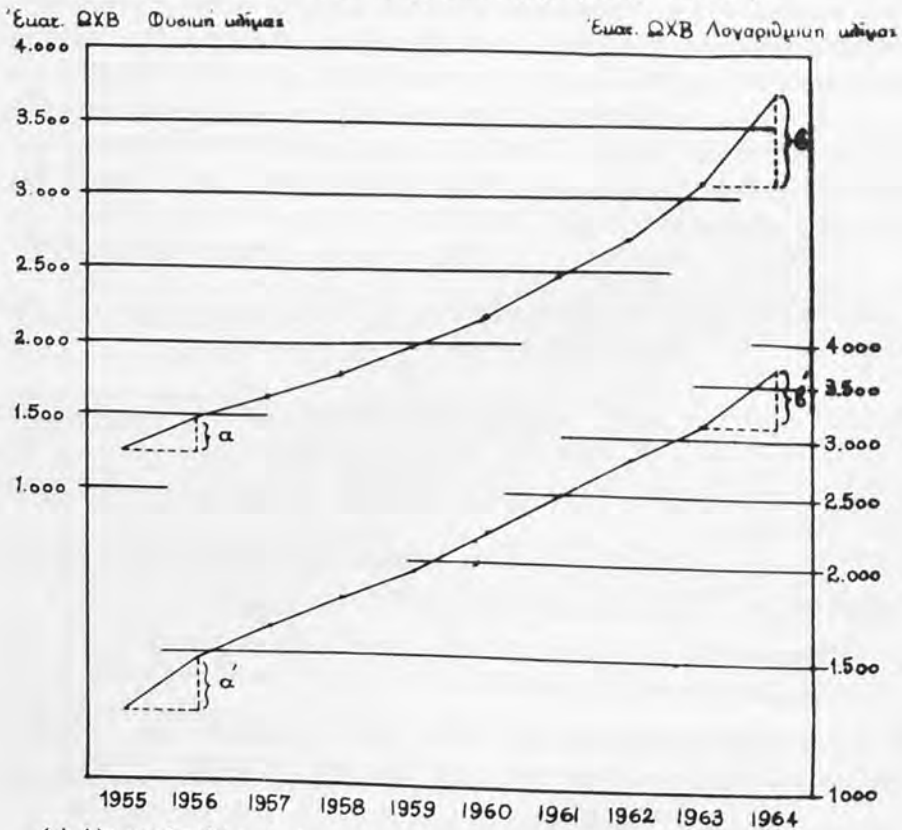
Ὅταν εἰς ἀμφοτέρους τοὺς ἄξονας ἑνός διαγράμματος ἡ μέτρηση γίνεται, ὄχι ἐπὶ ἀριθμητικῆς, ὡς συνήθως, ἀλλὰ ἐπὶ λογαριθμικῆς κλίμακας, τὸ διάγραμμα τοῦτο καλεῖται "λογαριθμικόν". Εἰδικώτερον, τὰ διαγράμματα τὰ ἀπεικονίζοντα χρονολογικάς σειρὰς, εἰς τὰ ὁποῖα, ὁ μὲν χρόνος μετρεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν X



εἰς φυσικὴν κλίμακα, ἡ δὲ μεταβλητὴ μετρεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν  $\Psi$  εἰς λογαριθμικὴν κλίμακα, καλοῦνται "ἡμιλογαριθμικά διαγράμματα". Εἰς ταῦτα ἡ γραφικὴ ἀπεικόνισις τῶν μεγεθῶν γίνεται διὰ πολυγωνικῶν γραμμῶν, συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω ἐκτεθέντα, μὲ

### Διάγραμμα Δ - 18

Ἐξέλιξις τῆς παραγωγῆς ἠλεκτρικοῦ ρεύματος (α) ἐν Ἑλλάδι κατὰ τὴν περίοδον 1955-1964 ἐπὶ φυσικῆς καὶ λογαριθμικῆς κλίμακος



(α) Δὲν περιλαμβάνεται ἡ παραγωγή ἐργοστασίων παραγόντων δι' ἰδίων χρησιν.

Πηγή: Ε.Σ.Υ.Ε., «Στατιστικὴ Ἐπετηρὶς τῆς Ἑλλάδος, 1965», Ἀθῆναι, 1966, σελ. 256.

τὴν διαφορὰν ὅτι, ἀντὶ τῶν ἀρχικῶν φυσικῶν τιμῶν, χρησιμοποιοῦνται οἱ λογάριθμοι αὐτῶν. Ὑπάρχει, ὅμως, δυνατότης χρησιμοποίησεως καὶ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ἀπ' εὐθείας, χωρὶς, δηλαδὴ, προηγουμένως, νὰ ἔχουν εὑρεθῆ οἱ λογάριθμοι αὐτῶν. Τοῦτο συμβαίνει ὅταν ἡ γραφικὴ ἀπεικόνισις γίνεται ἐπὶ εἰδικῶν "ἡμιλογαριθμικοῦ

χάρτου" εἰς τόν ὁποῖον ὑπάρχει ἑτοῖμη ἡ λογαριθμική κλίμαξ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν  $\Psi$ .

Εἰς τό Διάγραμμα Δ-18 ἀπεικονίζεται ἡ ἐξέλιξις τῆς παραγωγῆς ἠλεκτρικοῦ ρεύματος ἐν Ἑλλάδι κατά τήν περίοδον 1955-1964 εἰς φυσικήν καί λογαριθμικήν κλίμακα. Ὡς ἐμφαίνεται εἰς τόν Πίνακα Γ-1, ἡ παραγωγή αὕτη ἀπό 1.258 ἑκατ. ΩΧΒ κατά τό 1955 ἠΰξθη εἰς 1.476 ἑκατ. ΩΧΒ κατά τό 1956 (ἦτοι κατά 218 ἑκατ. ΩΧΒ) καί ἀπό 3.113 ἑκατ. ΩΧΒ κατά τό 1963 ἠΰξθη εἰς 3.716 ἑκατ. ΩΧΒ κατά τό 1964 (ἦτοι κατά 603 ἑκατ. ΩΧΒ). Εἰς τήν φυσικήν κλίμακα τοῦ διαγράμματος ἡ δευτέρα αὔξησις (δεικνυομένη διά τοῦ γράμματος β) ἐμφανίζεται διπλασία τῆς πρώτης (δεικνυομένης διά τοῦ γράμματος α). Ἐν τούτοις, ἐπὶ τῆς λογαριθμικῆς κλίμακος αἱ ἐν λόγῳ δύο αὔξησις (δεικνυόμεναι διά τῶν γραμμάτων β' καί α' ἀντιστοίχως) εἶναι περίπου ἴσαι, καθ' ὅσον ὡς ποσοστά δέν διαφέρουν σημαντικῶς μεταξύ των (αὔξησις μεταξύ 1955 καί 1956 κατά 17,3% καί μεταξύ 1963 καί 1964 κατά 19,4%).

Γενικῶς, ἡ ἐπιλογή τῆς καταλλήλου κλίμακος εἰς ἐκάστην σύγκρισην περιπτώσεων ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ σκοποῦ τόν ὁποῖον ἐπιδιώκει ἡ διαγραμματική παρουσίασις τῆς χρονολογικῆς σειρᾶς. Ἐάν ἴσαι ποσοστιαῖαι μεταβολαί θεωροῦνται ὡς ἔχουσαι τήν ἰδίαν σημαντικότητα, τότε κατάλληλος κλίμαξ εἶναι ἡ λογαριθμική. Συνεπῶς, λογαριθμικήν κλίμακα χρησιμοποιοῦμεν ὡς ἐπιδιώκομεν νά παρουσιάσωμεν ποσοστιαίας καί ὄχι ἀπολύτους μεταβολάς τῆς μεταβλητῆς. Ὅ,τι, ὅμως, ἀποτελεῖ πλεονέκτημα διά τόν ἕνα τύπον διαγράμματος εἶναι ταυτοχρόνως καί μειονέκτημα διά τόν ἕτερον. Οὗτοι δέον νά θεωροῦνται ὡς συμπληρωματικοί, δι' ὅ καί ἡ χρῆσις ἀμφοτέρων διά τήν παρουσίασιν τῆς ἰδίας χρονολογικῆς σειρᾶς βοηθεῖ εἰς τόν καθορισμόν τῶν βασικῶν χαρακτηριστικῶν αὐτῆς.

Πέραν τῆς ἀνωτέρω γενομένης γενικῆς ἀξιολογήσεως εἶναι ἀναγκαῖον νά γίνῃ μνεῖα καί ὠρισμένων περιπτώσεων κατά τὰς ὁποίας τά ἡμιλογαριθμικά διαγράμματα, λόγῳ εἰδικῶν συνθηκῶν, δέον νά προτιμῶνται τῶν συνήθων εἰς τὰς γραφικάς ἀπεικονίσεις. Κατ' ἀρχήν ἡ παρουσίασις τῶν στατιστικῶν δεδομένων διά ἡμιλογαριθμικοῦ διαγράμματος ἐνδείκνυται ὅταν ταῦτα παρουσιάζουν μεγάλης ἐκτάσεως διακυμάνσεις ἐν τῷ χρόνῳ, ὅποτε ἡ χρησιμοποίησις φυσικῆς κλίμακος καθίσταται ἐκ τῶν πραγμάτων σχεδόν ἀδύνατος. Ἐπίσης, προκειμένου νά συγκριθοῦν αἱ κινήσεις δύο μεγεθῶν, ἐκ τῶν ὁποίων τό ἐν ἕξει πολύ ὑψηλάς τιμᾶς τό δέ ἕτερον πολύ χαμηλάς, πρέπει ἡ γραφική ἀπεικόνισις νά γίνεταί ἐπὶ λογαριθμικῆς κλίμακος, δεδομένου ὅτι

ἐπ' αὐτῆς δὲν μετροῦνται αἱ ἀπόλυτοι τιμαὶ ἀλλ' αἱ ποσοστιαῖαι μεταβολαὶ τῶν. Τέλος, ἐν περιπτώσει διαγραμματικῆς παρουσιάσεως πλειόνων μεγεθῶν ταυτοχρόνως, ἐκφραζομένων ὅμως, εἰς διαφορετικὰς μονάδας μετρήσεως, ἀντὶ νὰ λαμβάνωνται πολλαπλαῖ φυσικαὶ κλίμακες ἐπὶ ἀμφοτέρων τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ διαγράμματος, εἶναι προτιμότερον νὰ γίνεται ἡ μέτρησις ὄλων τῶν μεγεθῶν ἐπὶ μιᾶς λογαριθμικῆς κλίμακος. Τοῦτο εἶναι δυνατόν, διότι αἱ κινήσεις τῶν πολυγωνικῶν γραμμῶν, αἱ ἐκφράζουσαι ποσοστὰ μεταβολῆς, εἶναι ἀνεξάρτητοι τῶν χρησιμοποιουμένων μονάδων μετρήσεως διὰ τὰ ἀντίστοιχα μεγέθη.

#### BIBLIOΓΡΑΦΙΑ

##### Α. Ἑλληνικὴ

1. Ἀθανασιάδου, Κ., "Στατιστικὴ", Μέρος Πρῶτον, Ἀθήναι, 1957, σελ. 71-108.
2. Μαργαρίτη, Ε., "Στατιστικὴ", Ἀθήναι, 1952, σελ. 133-162.
3. Σκανδανοπούλου, Ἰ., "Οἰκονομικὴ Ἀνάλυσις τοῦ Ἰσολογισμοῦ", Ἀθήναι, 1960, σελ. 28-32.

##### Β. Ξένη

1. Allen, R.G.D., "Statistics for Economists", Hutchinson University Library, London, (Tenth impression), 1960, σελ. 42-63. Βλ. ἐπίσης ἑλληνικὴν μετάφρασιν ὑπὸ Κ. Ἀθανασιάδου ὑπὸ τὸν τίτλον "Στατιστικὴ" (Ἀθήναι, 1955), σελ. 39-59.
2. Arkin, H. and Colton, R.R., "Statistical Methods", Barnes and Noble Inc. New York (Fourth Edition), 1961, σελ. 156-170
3. Budin, M., "Statistical Measurements for Economics and Administration", Asia Publishing House, London, 1962, σελ. 64-80.
4. Connor, L.R. and Morrell, A.J.H., "Statistics in Theory and Practice - With Special Reference to Published Statistics", Sir Isaac Pitman and Sons Ltd, London, 1964, σελ. 35-46.
5. Croxton, F.E. and Cowden, D.J., "Applied General Statistics", Sir Isaac Pitman and Sons Ltd, London (Second Edition), 1960, σελ. 67-135.
6. Dickinson, G., "Statistical Mapping and the Presentation of Statistics", Edward Arnold Ltd, London, 1964.
7. Hays, S., "An Outline of Statistics", Longmans, Green and Co, London - New York - Toronto (Fourth Edition), 1956, σελ. 34-55.
8. Hirsch, W.Z., "Introduction to Modern Statistics - With Applications to Business and Economics", the Macmillan Company, New York, 1962, σελ. 21-31.

9. Ilersic, A.R., "Statistics", H.F.L. (Publishers) Ltd, London ( Twelfth Edition), 1959, σελ. 63-88.
10. Karmel, P.H., "Applied Statistics for Economists - A Course in Statistical Methods", Melbourne, Sir Isaac Pitman and Sons Ltd (Second Edition), 1963, σελ. 24-39.
11. Lutz, R.R., "Graphic Presentation Simplified", Funk and Wagnalls Company, New York, 1949.
12. Mills, F., "Statistical Methods", Holt, Rinehart and Winston, New York, 1955, σελ. 6-39.
13. Modley, R. and Lowenstein, D., "Pictographs and Graphs - How to Make and Use Them", Harper and Brothers Publishers, New York, 1952.
14. Myers, J.H., "Statistical Presentation", Littlefield - Adams and Co, Totowa, New Jersey, 1965, σελ. 19-65.
15. Paden, D.W. and Lindquist, E.F., "Statistics for Economics and Business", Mc Graw- Hill Book Company Inc., New York - Toronto - London (Second Edition), 1956, σελ. 64- 74 καί 188-200.
16. Spear, M.E. "Charting Statistics", Mc Graw-Hill Book Company, Inc, New York, Toronto, London, 1952.
17. Spiegel, M., "Theory and Problems of Statistics", Schaum Publishing Co, New York, 1961, σελ. 12-17.
18. Stephen, A., "An Introduction to Statistics", Allman and Sons Ltd London, 1966, σελ. 12-20.
19. Thinkettle, G.L., "Wheldon's Business Statistics and Statistical Method ", Macdonald and Evans Ltd, London, 1962, σελ. 50-80.
20. Wessel R.H. and Willett, E.R., "Statistics as Applied to Economics and Business", Henry Holt and Company, New York 1959, σελ. 61-71.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ

### ΛΟΓΟΙ ΚΑΙ ΠΟΣΟΣΤΑ

#### 1. Πρωτογενή καὶ παράγωγα στατιστικά δεδομένα

Ἡ χρησιμοποίησις μεμονωμένων στοιχείων καὶ δὴ ὑπὸ τὴν μορφήν ὑπὸ τὴν ὅποیان δίδονται ταῦτα εἰς τὰς στατιστικὰς πηγὰς δὲν δύναται νὰ ἀποτελέσῃ κατάλληλον βάσιν ἀξιολογήσεως καταστάσεων πρὸς ἐξαγωγήν οὐσιαστικῶν συμπερασμάτων. Ἐπὶ παραδείγματι, αἱ πληροφορίες ὅτι ἐν Ἑλλάδι ἡ παραγωγή σίτου ἀνῆλθε κατὰ τὸ ἔτος 1960 εἰς 1.692 χιλ. τόννους, ὅτι τὸ καθαρὸν ἔθνικόν εἰσόδημα ἦτο κατὰ τὸ 1965 145.248 ἑκατ. δραχ. καὶ ὅτι αἱ πρὸς τὰς χώρας τῆς Εὐρωπαϊκῆς Οἰκονομικῆς Κοινότητος ἑλληνικαὶ ἐξαγωγαὶ ἀνῆλθον κατὰ τὸ 1966 εἰς 12.180 ἑκατ. δραχ., ἀποτελοῦν μὲν καθ' ἑαυτὰς χρησίμους στατιστικὰς περιγραφὰς τῶν ἐξεταζομένων μεγεθῶν, δὲν παρέχουν, ὅμως, τὴν δυνατότητα διατυπώσεως ἀξιολογικῶν κρίσεων. Ποῖαν σημασίαν ἔχει, ἐν προκειμένῳ, τὸ γεγονός ὅτι ἡ παραγωγή σίτου ἐν Ἑλλάδι ἦτο κατὰ τὸ ἔτος 1960 1.692 χιλ. τόννοι; Θὰ πρέπει νὰ χαρακτηρισθῇ αὐτὴ ὡς μεγάλη ἢ μικρά; Παρόμοια ἐρωτήματα γεννῶνται καὶ διὰ τὰ στοιχεῖα τὰ ἀναφερόμενα εἰς τὸ συνολικόν ἔθνικόν εἰσόδημα καὶ τὰς ἐξαγωγὰς πρὸς τὴν Ε.Ο.Κ.

Εἶναι, ὅθεν, ἀναγκαῖον ὅπως ἡ ποσοτικὴ ἐξέτασις τῶν διαφόρων μεγεθῶν μὴ περιορίζεται εἰς τὴν χρῆσιν μεμονωμένων ἀριθμῶν, ἀλλὰ ἐπεκτείνεται καὶ εἰς ἄλλα παρεμφερῆ στοιχεῖα, τὰ ὅποια, ὡς ἐκ τῆς φύσεώς των, δύναται νὰ συμβάλουν εἰς τὴν διενέργειαν συγκρίσεων. Οὕτω, πρὸς ἐξέτασιν τῆς παραγωγῆς σίτου κατὰ τὸ ἔτος 1960 θὰ πρέπει νὰ ληφθῇ, ὅχι μόνον τὸ στοιχεῖον τοῦ ἔτους τούτου, ἀλλὰ καὶ τὰ ἀντιστοιχὰ μᾶς σειρᾶς παρελθόντων ἐτῶν, καθ' ὅσον ἐκ τῆς ἐπισκοπήσεως τῶν ἐξελιξέων τῆς παραγωγῆς κατὰ τὰ ἐν λόγῳ ἔτη θὰ προέλθῃ καὶ ἡ ἀξιολόγησις τοῦ μεγέθους αὐτῆς κατὰ τὸ 1960.

Ἐπίσης, ἡ συμπλήρωσις τοῦ στοιχείου τοῦ καθαρῶ ἔθνικοῦ εἰσοδήματος διὰ τοῦ πληθυσμοῦ τῆς χώρας ἐπιτρέπει τὴν μόρφωσιν ἀντιλήψεως περὶ τοῦ ἀναλογουμένου μέρους αὐτοῦ εἰς ἕκαστον κάτοικον. Ὁμοίως, ἡ χρησιμοποίησις δεδομένων τῆς ἀξίας τῶν ἐξ Ἑλλάδος ἐξαγωγῶν καὶ πρὸς ἄλλας χώρας ἢ γεωγραφικάς περιοχάς τοῦ κόσμου, ὡς εἶναι αἱ Η.Π.Α. ἢ αἱ χῶραι τῆς Ε.Ζ.Ε.Σ., παρέχει τὴν δυνατότητα ἀξιολογήσεως τοῦ ὕψους καὶ τῶν πρὸς τὴν Ε.Ο.Κ. ἐξαγωγῶν.

Ἐν τούτοις καὶ ἡ ἀπλῆ παράθεσις στατιστικῶν στοιχείων, εἴτε εἰς πίνακα ἐμφανίζονται ταῦτα εἴτε ἀπεικονίζονται γραφικῶς, μολονότι, ἀναμφιβόλως, ἐπιτρέπει μίαν πρώτην ἀξιολόγησιν τῆς συνθέσεως ἢ ἐξελεξεως τοῦ ἐξεταζομένου μεγέθους, δὲν εἶναι εἰς θέσιν νά παράσχη σαφῆ εἰκόνα τῆς μελετωμένης καταστάσεως. Πρὸς τοῦτο ἀπαιτοῦνται ποσοτικά ἐκτιμήσεις τῶν σχέσεων αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ ἐξεταζόμενα στατιστικά στοιχεῖα πρὸς ἕτερα. Εἰς τὴν Στατιστικὴν ὑπάρχουν διάφορα μέτρα ἐκφράζοντα συνοπτικῶς τοιαύτας σχέσεις εἴτε μεταξὺ τῶν τιμῶν μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς μεταβλητῆς εἴτε μεταξὺ τιμῶν διαφόρων μεταβλητῶν. Τὰ μέτρα ταῦτα, δεδομένου ὅτι προκύπτουν διὰ ἀριθμητικῶν πράξεων αἱ ὁποῖαι ἐνεργοῦνται ἐπὶ τῶν πρωτογενῶν στατιστικῶν στοιχείων, καλοῦνται "παράγωγα" καὶ χρησιμοποιοῦνται εὐρύτατα εἰς παντοειδεῖς συγκρίσεις.

## 2. Ὑπολογισμὸς τῶν λόγων καὶ ποσοστῶν

Ὁ ἀπλούστερος τύπος παραγῶν στατιστικῶν δεδομένων εἶναι ὁ λόγος, διὰ τοῦ ὁποῦ ἐκφράζεται ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων ἑνὸς μεγέθους ὁ ἀντιστοιχῶν εἰς μίαν μονάδα ἑτέρου μεγέθους ἢ τοῦ ἴδιου μεγέθους ἀλλὰ διαφέροντος χρονικῶς, γεωγραφικῶς κλπ. Ὁ λόγος δὺο τιμῶν ὑπολογίζεται ὡς τὸ πηλίκον αὐτῶν. Εἰς τοῦτο ὡς διαφέτης λαμβάνεται ἡ τιμὴ, ὡς πρὸς τὴν μονάδα τῆς ὁποίας ἐπιδιώκεται ὅπως ἐκφρασθῇ ἢ ἕτερα. Οὕτω, ὁ λόγος  $\Lambda$ , ὁ ὁποῖος προκύπτει ὡς τὸ πηλίκον τῆς διαφέσεως ἑνὸς ἀριθμοῦ  $A$  δι' ἑτέρου  $B$ , δίδει τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων τοῦ  $A$  τῶν ἀντιστοιχουσῶν εἰς ἑκάστην μονάδα τοῦ  $B$ . Ἐάν, συνεπῶς, ἔχωμεν  $A=321$  καὶ  $B=107$ , τότε  $\Lambda=321/107=3$ , ὁπερ σημαίνει ὅτι εἰς ἑκάστην μονάδα τοῦ  $B$  ἀντιστοιχοῦν 3 μονάδες τοῦ  $A$ . Τοῦτο δυνάμεθα νά διατυπώσωμεν καὶ κατ' ἄλλον τρόπον, λέγοντες ὅτι μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 321 καὶ 107 ὑπάρχει ἡ σχέση 3:1 ἢ ἄλλως ὅτι ὁ ἀριθμὸς 321 εἶναι τριπλάσιος τοῦ ἀριθμοῦ 107.

Οἱ λόγοι, δεδομένου ὅτι εἰς τὰς περισσώτερας περιπτώσεις ἐκφράζονται διὰ δεκαδικῶν καὶ δεσμικροτέρων τῆς μονάδος ἀριθμῶν, εἶναι γενικῶς προτιμότερον ὅπως ὑπολογίζωνται ὡς πρὸς 10 ἢ 100 ἢ

καί 1.000. Ἐπί παραδείγματι, διὰ τὸ ἔτος 1965 ὁ λόγος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀρρένων πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν θηλέων ἐν Ἑλλάδι εἶναι :  $4.157.291/4.393.042 \approx 0,946$ , ἥτοι 0,946 ἄνδρες πρὸς μίαν γυναῖκα. Ἡ σχέσηις αὕτη, ἀναμφισβητήτως, καθίσταται πληρέστερον ἀντιληπτή, ἐὰν ἐκφρασθῇ εἰς ὀλόκληρα ἄτομα, ἀντὶ εἰς χιλιοστά τοῦ ἀτόμου. Τροποποιῦντες ἀναλόγως τὸ ἐκ τῆς ἀπλῆς διαρέσεως τῶν δύο ἀριθμῶν προκῶψαν ἀποτέλεσμα, λέγομεν ὅτι ἡ σχέσηις τῶν ἀρρένων πρὸς θήλειαις κατὰ τὸ 1965 ἐν Ἑλλάδι ἦτο 94,6 πρὸς 100 ἢ καί 946 πρὸς 1.000. Ὁ λόγος ὡς πρὸς ἑκατὸν ἀποκαλεῖται ποσοστόν ἐπὶ τοῖς ἑκατόν (‰), ὁ δὲ λόγος ὡς πρὸς χίλια ποσοστόν ἐπὶ τοῖς χιλίοις (‱). Τὰ ποσοστά ταῦτα ὑπολογίζονται, κατὰ τὰ ἀνωτέρω, διὰ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ λόγου ἐπὶ 100 ἢ 1.000 ἀντιστοίχως, καὶ συνεπῶς δύναται νὰ λεχθῇ ὅτι ἀποτελοῦν εἰδικὰς περιπτώσεις τῶν λόγων, ἐφ' ὅσον προκύπτουν ἐξ αὐτῶν δι' ἀπλοῦ μετασχηματισμοῦ. Ὁὕτω, χρησιμοποιοῦντες τὸν ἀνωτέρω συμβολισμόν, δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν τὸν τρόπον ὑπολογισμοῦ τῶν λόγων καὶ ποσοστῶν (Π) γενικῶς ὡς κάτωθι :

$$(E-1) \quad \Lambda = \frac{A}{B}$$

$$(E-2) \quad \Pi(\text{‰}) = \frac{A}{B} \cdot 100$$

$$(E-3) \quad \Pi(\text{‱}) = \frac{A}{B} \cdot 1.000$$

Συνήθως, τὰ ποσοστά ἐπὶ τοῖς ἑκατόν λαμβάνονται μὲ ἐν δεκαδικὸν ψηφίων, χωρὶς, βεβαίως, νὰ ἀποκλειεταί καὶ ἡ χρησιμοποίησις περισσοτέρων. Μάλιστα ἡ λήψις περισσοτέρων δεκαδικῶν ἐπιβάλλεται, ὡσάντις τὰ ἀρχικά δεδομένα, ἐκ τῶν ὁποίων ὑπολογίζονται τὰ ποσοστά, εἶναι πολὺ μεγάλοι ἀριθμοὶ ἢ ὅταν ὁ ὑπὸ ἐξέτασιν ἀριθμὸς εἶναι πολὺ μικρὸς ἐν σχέσει πρὸς τὸν ἕτερον ἀριθμὸν πρὸς τὸν ὁποῖον συγκρίνεται. Εἶναι εὐνόητον ὅτι τὰ ποσοστά πρὸ τῆς παρουσιάσεως τῶν δέον νὰ στρογγυλεύωνται καταλλήλως (π.χ. εἰς τὸ πλησιέστερον δέκατον τῆς ποσοστιαίας μονάδος ἐὰν ἐκφράζωνται μὲ ἐν δεκαδικὸν ψηφίων) ἐπὶ τῇ βάσει τῶν εἰς προηγούμενον κεφάλαιον ἐκτεθέντων ἡδη κανόνων.

Ἡ χρησιμοποίησις τῶν ποσοστῶν εἶναι εὐρυτάτη, κυρίως εἰς τὰς περιπτώσεις κατὰ τὰς ὁποίας γίνονται συγκρίσεις τιμῶν ἀναφε-

ρομένων εις τό ίδιον μέγεθος. Ίδιατέρως διά τῶν συνηθέστερον χρησιμοποιομένων ποσοστῶν ἐπί τοῖς ἑκατόν διευκολύνεται μεγάλως ἡ ἐξέτασις τῶν σχέσεων μεταξύ τῶν στατιστικῶν δεδομένων, διότι σμικρύνεται κατά πολύ ὁ ἀριθμός τῶν ψηφίων τῶν ἀρχικῶν δεδομένων καί, ὅπερ τό σπουδαιότερον, εἶναι εὐχερεστέρα ἡ σύγκρισις ὡς πρός τόν στρογγυλόν ἀριθμόν 100 ἢ πρός ἕνα οἷονδῆποτε ἄλλον. Παρά ταῦτα, δεόν νά ἀποφεύγεται ἡ χρησιμοποίησις τοῦ ποσοστοῦ ἐπί τοῖς ἑκατόν πρός ἔκφρασιν τῆς μεταξύ δύο ἀριθμῶν ὑφισταμένης σχέσεως, ὡς ὅτι ὁ ἀριθμός ὡς πρός τόν ὁποῖον γίνεται ἡ σύγκρισις εἶναι μικρότερος τοῦ 100 (ἢ τοῦ 1.000 προκειμένου περί τοῦ ποσοστοῦ ἐπί τοῖς χιλίοις).

### 3. Συγκρίσεις στατιστικῶν στοιχείων διαφορετικῆς φύσεως

Πολλάκις παρίσταται ἀνάγκη συγκρίσεως ἑνός στατιστικοῦ στοιχείου πρός ἕτερον διαφορετικῆς φύσεως μετά τοῦ ὁποῖου, ὅμως, συνδέεται δι' ὠρισμένης σχέσεως. Λόγοι ἐκφράζοντες ὠρισμένας τοιοῦτου εἴδους βασικάς οἰκονομικάς καί δημογραφικάς σχέσεις ἐν Ἑλλάδι παρέχονται ἐνδεικτικῶς εἰς τόν Πίνακα Ε-1.

Κατά τόν ὑπολογισμόν λόγων τῆς κατηγορίας αὐτῆς δυσχερέας παρουσιάζει κυρίως ἡ ἐπιλογή τῶν καταλλήλων μεγεθῶν τά ὁποῖα θά πρέπει νά χρησιμοποιηθοῦν ὡς διαίρεται καί διααιρετέοι. Ἐν προκειμένῳ δεόν νά λαμβάνωνται κατά βάσιν ὑπ' ὄψιν οἱ ὑπό τῆς οἰκονομικῆς θεωρίας διδόμενοι ὀρισμοί, ἐν συνδυασμῷ, βεβαίως, πρός τά διαθέσιμα στατιστικά στοιχεῖα. Οὕτω, διά τόν ὑπολογισμόν τοῦ λόγου τοῦ ἐκφράζοντος τήν εἰσοδηματιήν ταχύτητα κυκλοφορίας τοῦ χρήματος θά πρέπει νά διαιρεθῇ τό ἀκαθάριστον ἐθνικόν προϊόν εἰς τρεχούσας τιμάς διά τῆς συνολικῆς προσφορᾶς χρήματος κατά δεδομένην χρονικήν περίοδον. Ἐπίσης, ὁ ὀριστικός συντελεστής κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως τοῦ προϊόντος διά τό σύνολον τῆς οἰκονομίας προκύπτει, ἐπί τῆ βάσει τοῦ ὀρισμοῦ τῆς σχετικῆς θεωρίας, διά διαίρεσεως τῶν ἀκαθάρστων ἐπενδύσεων παγίου κεφαλαίου διά τῆς αὐξήσεως τοῦ ἀκαθάρστων ἐγχωρίου προϊόντος εἰς σταθεράς τιμάς ἐν τῷ ὠρισμένῳ περιόδῳ.

Βασικήν σημασίαν κατά τήν σύγκρισιν μεγεθῶν διαφορετικῆς φύσεως ἔχει ὁ προσδιορισμός τῆς χρονικῆς περιόδου εἰς τήν ὁποίαν δεόν νά ἀναφέρονται ταῦτα. Οὕτω, προκειμένου νά ὑπολογισθῇ ἡ εἰσοδηματιή ταχύτης κυκλοφορίας τοῦ χρήματος διά τό ἔτος 1965 παρατηρεῖται ὅτι, ἐνῶ τό ἀκαθάριστον ἐθνικόν προϊόν καλύπτει ὁλό-



Πίναξ Ε - 1

Λόγοι έκφραζοντες ώρισιμένες βασικές οικονομικές και δημογραφικές σχέσεις εν 'Ελλάδι

Α/Α	Σ χ έ σ ε ι ς	Έτος	Μ έ γ ε θ ο ς		Λόγος	Ποσοστό έντι τοίς έκατόν (%)	Ποσοστό έντι τοίς χιλίαις (%)
			Αριθμητού	Παρονομαστού			
1.	Εισοδηματική ταχύτης κυκλοφορίας του χρήματος (α)	1965	176.341 εκ. δρχ.	27.643 εκ. δρχ.	6,38		
2.	Όριακός συντελεστής κεφαλαιακής επίβαρύνσεως του προϊόντος (β)	1965	32.350 εκ. δρχ.	8.598 εκ. δρχ.	3,76		
3.	Σχέσις αξίας εξαγωγών προς άξίαν εισαγωγών (γ)	1966	12.179 εκ. δρχ.	33.886 εκ. δρχ.	0,359	35,9	
4.	Σχέσις άρρένων προς θήλειαις	1965	4.157.291	4.393.042	0,946	94,6	
5.	Σχέσις άγροτικού προς αστικόν (δ) πληθυσμόν	1961	3.674.592	4.713.961	0,780	78,0	
6.	Γεννήσεις ζώντων ανά 1.000 κατοίκους	1965	151.083	8.550.333 (ε)			17,7
7.	Θάνατοι ανά 1.000 κατοίκους	1965	66.945	8.550.333 (ε)			7,8
8.	Κατά κεφαλήν καθαρών έθνικόν εισόδημα εις τρεχούσας τιμάς	1965	145.248 εκ. δρχ.	8.550.333 (ε)	16.987 δρχ.		
9.	Κατά κεφαλήν δαπάνη διά τρόφιμα εις τρεχούσας τιμάς	1965	50.055 εκ. δρχ.	8.550.333 (ε)	5.854 δρχ.		
10.	Αριθμός κατοίκων εν 'Ελλάδι κατά τετραγωνικόν χιλιόμετρον	1965	8.550.333 (ε)	131.944 τ. χ.μ.	64,8		

κληρον τό ἔτος τοῦτο, ἢ προσφορά χρήματος, ἀναφερομένη εἰς τό σύνολον τῶν μέσων πληρωμῆς τά ὅποια εὑρίσκονται εἰς τήν διάθεσιν τῆς οἰκονομίας, μεταβάλλεται ἀπό στιγμῆς εἰς στιγμήν. Εἰς τήν πράξιν τό ἐν λόγῳ πρόβλημα δύναται νά ἀντιμετωπισθῇ κατά διαφόρους τρόπους, ἐνταῦθα, ὅμως, προεκβῆ ἡ χρησιμοποίησις τοῦ μέγεθους τῆς προσφοράς χρήματος εἰς τό μέσον τοῦ ὑπό ἑξέτασιν ἔτους, ἤτοι τῆς 30ῆς Ἰουνίου 1965. Παρόμοιαι δυσχέρειαι ἀνακύπτουν καί κατά τόν ὑπολογισμόν ὠρισμένων δημογραφικῶν σχέσεων ὡς εἶναι αἱ γεννήσεις ζώντων ἢ οἱ θάνατοι ἀνά 1.000 κατοίκους. Ὡς εἶναι εὐνόητον, εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτάς οἱ ἀριθμοί τῶν ἐντός δεδομένου ἔτους γεννηθέντων ζώντων ἢ θανόντων συγκρίνονται πρὸς τόν συνολικόν πληθυσμόν τῆς χώρας κατά τήν 30ῆν Ἰουνίου τοῦ ἔτους τούτου.

Σιόπιμον εἶναι ὅπως γίνῃ ἰδιαίτερα μνεα τῆς κατηγορίας ἐκείνης τῶν λόγων, οἱ ὅποιοι ἐκφράζουν τό κατ' ἄτομον (ἢ ἄλλως κατὰ κεφαλῆν) εἰσόδημα (ὡς ἐπίσης παραγωγῆν, κατανάλωσιν κλπ.) εἰς ὠρισμένην γεωγραφικήν περιοχῆν καί κατά δεδομένην χρονικήν περίοδον. Οἱ λόγοι οὗτοι χρησιμοποιοῦνται εὐρύτατα τόσον διά τήν

(Ἐποσημειώσεις καί Πηγαί Πίνακος Ε—1)

(α) Προκύπτει ὡς λόγος τοῦ ἀκαθαρίστου ἔθνικου προϊόντος εἰς τρεχούσας τιμάς πρὸς τήν προσφοράν χρήματος τῆς 30ῆς Ἰουνίου.

(β) Προκύπτει ὡς λόγος τῶν ἀκαθαρίστων ἐπενδύσεων παγίου κεφαλαίου πρὸς τήν ἀπόλυτον ἀξίωσιν τοῦ ἀκαθαρίστου ἐγχωρίου προϊόντος εἰς σταθεράς τιμάς 1958.

(γ) Ἐπὶ τῇ βάσει στοιχείων τελωνειακῆς στατιστικῆς.

(δ) Εἰς τόν ἀστικόν πληθυσμόν περιλαμβάνεται καί ὁ ἡμισιατικός.

(ε) Ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ πληθυσμοῦ τῆς χώρας τῆς 30ῆς Ἰουνίου.

**Πηγαί** (τῶν χρησιμοποιηθέντων στοιχείων πρὸς ὑπολογισμόν τῶν ἐπὶ μέρος σχέσεων, ἀναφερομένων διά τοῦ Α/Α αὐτῶν):

(1) Ἐπιχειρήματα Συντονισμοῦ, « Ἐθνικοὶ Λογαριασμοὶ τῆς Ἑλλάδος, 1948-1965 », Ἀριθ. 16, Ἀθήναι, 1967, σελ. 52. Τράπεζα τῆς Ἑλλάδος, « Μηνιαῖον Στατιστικὸν Δελτίον », Ἀδγουστος 1967, σελ. 10.

(2) Ἐπιχειρήματα Συντονισμοῦ, ἔνθ' ἄνωτ., σελ. 106 καί 108.

(3) Ε.Σ.Υ.Ε., « Μηνιαῖον Δελτίον Στατιστικῆς Ἐξωτερικοῦ Ἐμπορίου », Δεκέμβριος 1966, σελ. 1.

(4) Ε.Σ.Υ.Ε., « Μηνιαῖον Στατιστικὸν Δελτίον », Ἀπρίλιος 1967, σελ. 2.

(5) Ε.Σ.Υ.Ε., « Στατιστικὴ Ἐπετηρὶς τῆς Ἑλλάδος, 1965 », Ἀθήναι, 1966, σελ. 26.

(6) Ε.Σ.Υ.Ε., « Μηνιαῖον Στατιστικὸν Δελτίον », Ἀπρίλιος 1967, σελ. 2 καί 3.

(7) Ε.Σ.Υ.Ε., ἔνθ' ἄνωτ., σελ. 2 καί 5.

(8) Ἐπιχειρήματα Συντονισμοῦ, ἔνθ' ἄνωτ., σελ. 50. Ε.Σ.Υ.Ε., ἔνθ' ἄνωτ., σελ. 2.

(9) Ἐπιχειρήματα Συντονισμοῦ, ἔνθ' ἄνωτ., σελ. 94.

(10) Ε.Σ.Υ.Ε., ἔνθ' ἄνωτ., σελ. 2. Ε.Σ.Υ.Ε., « Στατιστικὴ Ἐπετηρὶς τῆς Ἑλλάδος, 1965 », Ἀθήναι, 1966, σελ. 2.

παρακολούθησιν τῆς ἐξειλιξέως ἑνὸς μεγέθους ἐν τῷ χρόνῳ ὅσον καὶ εἰς διεθνεῖς συγκρίσεις. Ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὸ ἐθνικὸν εἰσόδημα, ἢ ἀπὸ ἔτους εἰς ἔτος διαμόρφωσις αὐτοῦ δέν δύναται νά παράσχη ἀξιοπιάστους ἐνδείξεις περὶ τῆς ἐπερχομένης βελτιώσεως ἢ μὴ τοῦ βιωτικῆς ἐπιπέδου τῶν κατοίκων τῆς χώρας, χωρὶς νά ληφθῆ ὑπ' ὄψιν καὶ ἡ μεταβολή αὐτοῦ τούτου τοῦ πληθυσμοῦ. Εἶναι φανερόν ὅτι, ἐάν εἰς ὠρισμένην χώραν τὸ εἰσόδημα ἀνέλθῃ ἐντός δεδομένου ἔτους κατὰ 2<sup>ο</sup>%, ἀλλὰ ταυτοχρόνως αὐξηθῆ καὶ ὁ πληθυσμὸς κατὰ 3<sup>ο</sup>%, ὅχι μόνον δέν θά ὑπάρξῃ βελτίωσις, ἀλλὰ, ἀντιθέτως, θά σημειωθῆ κάθοδος τοῦ βιωτικῆς ἐπιπέδου τῶν κατοίκων. Πρὸς ἀντιμετώπισιν τῶν δυσχερεῶν τούτων γίνεται συνήθως χρῆσις τοῦ κατὰ κεφαλὴν ἐθνικοῦ εἰσοδήματος, τὸ ὁποῖον ὑπολογίζεται ὡς λόγος τοῦ συνολικοῦ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος διὰ τοῦ πληθυσμοῦ τῆς χώρας. Ἐν τούτοις, εἶναι ἀναγκαῖον νά τονισθῆ ὅτι τοιοῦτοι λόγοι, ἀναφερόμενοι εἰς τὸ κατὰ κεφαλὴν εἰσόδημα, τὴν κατὰ κεφαλὴν καταβάλωσιν κλπ., δέον νά χρησιμοποιοῦνται μετ' ἐπιφυλάξεως καὶ ἐν γνώσει τῆς βασικῆς ἀδυναμίας των ὅτι δέν λαμβάνουν ὑπ' ὄψιν καὶ τὴν κατανομήν τῶν ἐξεταζομένων μεγεθῶν (τοῦ εἰσοδήματος, τῆς καταναλώσεως κλπ.) μεταξύ τοῦ πληθυσμοῦ. Οὕτω, ἐάν εἰς τινὰ χώραν τὸ μέγιστον μέρος τοῦ συνολικοῦ εἰσοδήματος ἢ τῆς συνολικῆς καταναλώσεως πραγματοποιῆται ὑφ' ἑνὸς πολὺ μικροῦ μέρους τοῦ πληθυσμοῦ, εἶναι φανερόν ὅτι ἡ σχέση ἢ ἐκφραζομένη ὑπὸ τοῦ κατὰ κεφαλὴν εἰσοδήματος ἢ τῆς κατὰ κεφαλὴν καταναλώσεως δέν θά ἀποδίδῃ τὰς πράγματι ὑφισταμένας συνθήκας.

Οἱ πλεῖστοι ἐκ τῶν λόγων οἱ ὁποῖοι ἐκφράζουν σχέσεις μεταξύ μεγεθῶν διαφορετικῆς φύσεως ὑπολογίζονται μετὰ βᾶσιν μόνον τὴν μονάδα τοῦ ἑνός ἐξ αὐτῶν. Εἰς τὴν κατηγορίαν ταύτην ὑπάγονται: (α) Οἱ λόγοι οἱ στηριζόμενοι εἰς θεωρητικὰς σχέσεις, ὡς εἶναι αἱ ὑπ' ἀριθ. (1) καὶ (2) τοῦ Πίνακος Ε-1. (β) Οἱ λόγοι οἱ ἐκφράζοντες ἀξίας ἢ ποσότητας κατὰ κεφαλὴν, ὡς εἶναι οἱ ὑπ' ἀριθ. (8) καὶ (9) τοῦ Πίνακος Ε-1 καὶ (γ) Ἑτεροὶ σχέσεις δεικνύουσαι τὸν κατὰ μονάδα ἑνός μεγέθους ἀριθμὸν μονάδων ἑνός ἄλλου, ὡς εἶναι ἡ ὑπ' ἀριθ. (10) τοῦ Πίνακος Ε-1. Ὑπάρχουν, ὅμως, καὶ τινες κατηγορίαι λόγων, ἐκ τῶν κρινομένων διαφορετικῆς φύσεως μεγεθῶν, οἱ ὁποῖοι ἐκφράζονται σαφέστερον ὡς ποσοστὰ ἐπὶ τοῖς ἑκατόν ἢ τοῖς χιλίοις. Ἐπὶ παραδειγματικῶν συγκρίσεων τῆς ἀξίας τῶν ἐξαγωγῶν πρὸς τὴν ἀξίαν τῶν εἰσαγωγῶν ἐν Ἑλλάδι κατὰ τὸ ἔτος 1965 καθίσταται πληρέστερον κατανοητὴ ὅταν δίδεται διὰ τοῦ ποσοστοῦ 35,9<sup>ο</sup>% ἢ διὰ τοῦ ἀπλοῦ λόγου 0,359. Ἐξ ἄλλου, ὠρισμένοι δημογραφικαὶ σχέσεις, ὡς εἶναι αἱ ὑπ' ἀριθ. (6)

καί (7) τοῦ Πίνακος Ε-1, ἐκφράζονται συνήθως ἀνά 1.000 κατοί-  
κους.

#### 4. Ποσοστιαῖα ἀναλογαίαι

Μολονότι δέν γίνεται συνηθῶς σαφῆς διάκρισις μεταξύ λόγου καί ἀναλογίας, ἐν τούτοις θά ἦτο δυνατόν νά λεχθῆ ὅτι ἡ τελευταία, ἀποτελοῦσα μερικὴν περίπτωσιν τοῦ λόγου, ἐκφράζει τήν σχέσιν ἢ ὅποια ὑπάρχει μεταξύ τοῦ μέρους καί τοῦ ὅλου δεδομένου μέγθους. Ἐν προκειμένῳ τό ὑπό σύγκρισιν μέρος διαφορίζεται ἀπό τὰ λοιπά μέρη τοῦ συνόλου ὡς πρὸς ὠρισμένον ποσοτικόν ἢ ποιοτικόν χαρακτηριστικόν. Οὕτω, ἐάν Μ εἶναι τό μέρος τό ὅποῖον π.χ. ἐμφανίζει ὠρισμένην ιδιότητα, Ν τό μέρος τό μή ἐμφανίζον ταύτην καί Σ τό σύνολον τῶν ἐξεταζομένων μερῶν (ἦτοι  $\Sigma = M + N$ ), αἱ ἀναλογαίαι τῶν Μ καί Ν ἐπὶ τοῦ συνόλου εἰς ποσοστόν ἐπὶ τοῖς ἑκατόν θά δίδωνται ὑπό τῶν σχέσεων :

$$(E-4) \quad \alpha_M (\%) = \frac{M}{\Sigma} 100, \quad \alpha_N (\%) = \frac{N}{\Sigma} 100$$

Θεωρητικῶς, τό ἄθροισμα τῶν δύο ποσοστιαίων ἀναλογιῶν ἰσοῦται πρὸς 100 :

$$(E-5) \quad \alpha_M (\%) + \alpha_N (\%) = \frac{M}{\Sigma} 100 + \frac{N}{\Sigma} 100 = \frac{M+N}{\Sigma} 100 = 100$$

Ὡς, ὅμως, ἔχει λεχθῆ εἰς προηγούμενον κεφάλαιον, ἡ ἰσότης αὐτή δέν ἰσχύει πάντοτε εἰς τήν πράξιν, καθ' ὅσον, λόγω τῆς στρογγυλεύσεως τῶν ἐπὶ μέρους ποσοστιαίων ἀναλογιῶν, ἐνδέχεται τό ἄθροισμα αὐτῶν νά εἶναι κατά τι μεγαλύτερον ἢ κατά τι μικρότερον τοῦ 100. Εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτάς ὑπενθυμίζεται ὅτι εἶναι προτιμότερον ὅπως αἱ ἐπὶ μέρους ποσοστιαῖαι ἀναλογαίαι ἐμφανίζωνται ὡς προκύπτουν ἐκ τῆς στρογγυλεύσεως, ἄνευ, δηλαδή, οἰασθήποτε δι-  
ορθώσεώς των.

Ἰπὸ μορφήν ποσοστιαίας ἀναλογίας δύναται, ἐπὶ παραδείγματι, νά ἐκφρασθῆ ἡ σχέση τῶν 4.157.291 ἀρρένων καί 4.393.042 θηλέων εἰς τό σύνολον τοῦ ἑλληνικοῦ πληθυσμοῦ κατά τό ἔτος 1965 (30 ἡν Ἰουνίου). Κατ' ἐφαρμογήν τῶν τύπων (E-4) λαμβάνομεν ὅτι ἡ ἀνα-  
λογία :

$$\alpha) \text{ τῶν μὲν ἄρρένων εἶναι : } \frac{4.157.291}{8.550.333} 100 = 48,6 \%$$

$$\beta) \text{ τῶν δὲ θηλέων εἶναι : } \frac{4.393.042}{8.550.333} 100 = 51,4 \%$$

Αἱ ἀναλογίαι δύνανται νά ἀναφέρωνται καί εἰς πλεοναυς ὁμάδας ἑνὸς πλήθους, διαφοριζομένης μεταξὺ τῶν ὡς πρὸς ὠρισμένον ποσοτικὸν ἢ ποιοτικὸν χαρακτηριστικόν. Ὁ ὑπολογισμὸς αὐτῶν γίνεται καί εἰς τὰς ἐν λόγω περιπτώσεις κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἐκτεθέντα, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν προκυπτόντων ποσοστῶν θά πρέπει, θεωρητικῶς τοῦλάχιστον, νά ἰσοῦται πρὸς 100. Παράδειγμα ὑπολογισμοῦ τοιούτων ἀναλογιῶν παρέχεται εἰς τὸν Πίνακα Ε-2, ἔνθα ἐμφανίζονται αἱ ποσοστιαῖαι ἀναλογίαι τοῦ πληθυσμοῦ τῶν ἐπὶ μέρους δέκα γεωγραφικῶν διαμερισμάτων τῆς Ἑλλάδος εἰς τὸ σύνολον αὐτοῦ ἢ, κατ' ἄλλην διατύπωσιν, ἡ ποσοστιαία κατανομή τοῦ ἑλληνικοῦ πληθυσμοῦ κατὰ

Πίναξ Ε - 2

Κατανομή τοῦ πληθυσμοῦ τῆς Ἑλλάδος κατὰ γεωγραφικὸν διαμέρισμα ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἀπογραφῶν τῶν ἐτῶν 1951 καὶ 1961

Γεωγραφικὸν διαμέρισμα	1 9 5 1		1 9 6 1	
	Ἀριθμὸς κατοίκων	Ποσοστιαία κατανομή %	Ἀριθμὸς κατοίκων	Ποσοστιαία κατανομή %
Περιφέρεια πρωτευούσης . . . . .	1.378.586	18,1	1.852.709	22,1
Λοιπὴ Στερεὰ Ἑλλάς καὶ Εὐβοία	908.433	11,9	970.949	11,6
Πελοπόννησος . . . . .	1.129.022	14,8	1.096.390	13,1
Ἴόνιοι νῆσοι . . . . .	228.597	3,0	212.573	2,5
Ἠπειρος . . . . .	330.543	4,3	352.604	4,2
Θεσσαλία . . . . .	624.342	8,2	689.927	8,2
Μακεδονία . . . . .	1.705.434	22,3	1.896.112	22,6
Θράκη . . . . .	336.954	4,4	356.555	4,2
Νῆσοι Αἰγαίου . . . . .	528.766	6,9	477.476	5,7
Κρήτη . . . . .	462.124	6,1	483.258	5,8
Σύνολον Ἑλλάδος . . . . .	7.632.801	100,0	8.388.553	100,0

γεωγραφικά διαμερίσματα, ἐπὶ τῇ βάσει δεδομένων προκυψάντων ἐν τῶν δύο τελευταίων ἀπογραφῶν. Διὰ τῆς χρησιμοποίησεως τῶν δύο σειρῶν ποσοστιαίων ἀναλογιῶν τοῦ Πίνακος Ε-2 εἶναι φανερόν ὅτι διευκολύνεται μεγάλως ἡ σύγκρισις τῆς πληθυσμιακῆς καταστάσεως τῶν διαφόρων περιοχῶν τῆς χώρας κατὰ τὰ ἔτη 1951 καὶ 1961 καὶ ἡ συναγωγή ὠρισμένων συμπερασμάτων ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὰς κατὰ τὴν μεσολαβήσανσαν δεκαετίαν ἐπελθούσας μεταβολάς.

### 5. Ποσοστιαῖαι καὶ ἀπόλυτοι μεταβολαί

Συνήθης εἶναι ἡ χρησιμοποίησις τῶν λόγων καὶ μάλιστα ὑπό μορφὴν ποσοστῶν ἐπὶ τοῖς ἑκατόν εἰς συγκρίσεις εἴτε τῶν μερῶν ἑνὸς συνόλου μεταξύ των κατὰ τὴν αὐτὴν χρονικὴν περίοδον (ὡς εἶναι αἰστηριζόμεναι εἰς τινὰ γεωγραφικὴν διαφέρειν) εἴτε τῶν συνολικῶν τιμῶν ἑνὸς χαρακτηριστικοῦ εἰς διαφορετικὰς περιόδους. Εἰς τὴν πρῶ-ξιν συνηθεστέρα εἶναι ἡ παρακολούθησις τῆς ἐν τῷ χρόνῳ ἐξελξε-ως τῶν διαφόρων μεγεθῶν, δι' ὃ καὶ ἡ κατωτέρω διδομένη περιγραφή

Πίναξ Ε - 3

Παραγωγή συσπόρου βάμβακος ἐν Ἑλλάδι, 1955 - 1965

Ἔτος	Παραγωγή εἰς χιλιάδας τόννων	°/ο τοῦ προηγουμένου ἔτους	Ποσοστιαία μεταβολὴ ἐναντι τοῦ προηγουμένου ἔτους	°/ο τοῦ ἔτους 1955	Ποσοστιαία μεταβολὴ ἐναντι τοῦ ἔτους 1955	Ἀπόλυτος μεταβολὴ εἰς χιλιάδας τόννων	
						Ἐναντι τοῦ προηγουμένου ἔτους	Ἐναντι τοῦ ἔτους 1955
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
1955	189	...	...	100,0	...	...	...
1956	154	81,5	- 18,5	81,5	- 18,5	- 35	- 35
1957	192	124,7	24,7	101,6	1,6	38	3
1958	188	97,9	- 2,1	99,5	- 0,5	- 4	- 1
1959	170	90,4	- 9,6	89,9	- 10,1	- 18	- 19
1960	184	108,2	8,2	97,4	- 2,6	14	- 5
1961	277	150,5	50,5	146,6	46,6	93	88
1962	253	91,3	- 8,7	133,9	33,9	- 24	64
1963	266	105,1	5,1	140,7	40,7	13	77
1964	184	69,2	- 30,8	97,4	- 2,6	- 82	- 5
1965	205	111,4	11,4	108,5	8,5	21	16

Πηγή: Ὑπουργεῖον Γεωργίας.

του τρόπου χρησιμοποίησης τῶν λόγων καὶ ποσοστῶν τῆς ἐξεταζομένης κατηγορίας περιορίζεται εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν διαχρονικῶν συγκρίσεων. Προφανῶς, ὅ,τι ἰσχύει διὰ τὰς διαχρονικὰς συγκρίσεις δύναται κατ'ἀναλογίαν νὰ ἐφαρμοσθῇ καὶ ἐπὶ τῶν γεωγραφικῶν καὶ λοιπῶν συγκρίσεων τῶν ἀναφερομένων εἰς διαφορετικὰς καταστάσεις ὑφισταμένας κατὰ τὴν ἰδίαν χρονικὴν περίωδον.

Γενικῶς, ἡ κατὰ τινὰ χρονικὴν περίωδον διαμορφωμένη τιμὴ ἑνὸς μεγέθους συγκρίνεται πρὸς μίαν ἄλλην τιμὴν αὐτοῦ ἢ ὁποῖα ἀποτελεῖ καὶ τὴν βάσιν τῆς συγκρίσεως. Ἡ περίωδος εἰς τὴν ὁποῖαν ἀναφέρεται ἡ τιμὴ ἢ χρησιμοποιουμένη ὡς βάση τῆς συγκρίσεως καλεῖται "περίωδος βάσεως". Ἐάν θεωρήσωμεν ὅτι  $Y_0$  εἶναι ἡ τιμὴ ἑνὸς μεγέθους κατὰ τὴν περίωδον βάσεως ο καὶ  $Y_t$  ἡ τιμὴ αὐτοῦ κατὰ τινὰ ἄλλην περίωδον  $t$ , τότε ἡ μεταξύ αὐτῶν ὑφισταμένη σχέσηις δύναται νὰ ἐκφρασθῇ διὰ ποσοστοῦ ἐπὶ τοῖς ἑκατόν ὡς ἑξῆς :

$$(E-6) \quad \pi (\% / o) = \frac{Y_t}{Y_0} 100$$

Οὕτω, ὡς ἐμφαίνεται εἰς τὸ Πίνακα E-3, ἡ παραγωγή συσπόρου βάμβακος ἐν Ἑλλάδι ἦτο κατὰ τὸ ἔτος 1956 τὸ 81,5 % τῆς παραγωγῆς τοῦ 1955, κατὰ δὲ τὸ ἔτος 1957 τὸ 124,7% τῆς παραγωγῆς τοῦ 1956. Διὰ τοῦ τρόπου αὐτοῦ καθίσταται δυνατὴ ἡ ἐκφρασις ἑκάστης τῶν τιμῶν μιᾶς χρονολογικῆς σειρᾶς ὑπὸ μορφήν ποσοστοῦ ἐπὶ τοῖς ἑκατόν τῆς ἀμέσως προηγουμένης (βλ. στήλην (3) τοῦ Πίνακος E-3). Ἄντι, ὅμως νὰ λαμβάνεται ὡς περίωδος βάσεως τὸ ἀμέσως προηγούμενον ἔτος, εἶναι ἐπίσης δυνατόν - καὶ εἰς ὠρισμένας περιπτώσεις σκόπιμον - ὁ ὑπολογισμὸς τῶν ποσοστῶν ὅλων τῶν ἐτῶν νὰ γίνεται ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ ἔτος βάσεως, τὸ ὁποῖον εἰς τὸ ἀνωτέρω χρησιμοποιθὲν παράδειγμα δύναται νὰ εἶναι τὸ πρῶτον τῆς ἐξεταζομένης περιόδου, δηλαδὴ τὸ 1955. Ἐφαρμόζοντες τὴν μέθοδον ταύτην συγκρίσεως εὐρίσκομεν ὅτι ἡ παραγωγή συσπόρου βάμβακος κατὰ τὸ ἔτος 1956 ἀπετέλει τὸ 81,5% τῆς παραγωγῆς τοῦ 1955, ἡ παραγωγή κατὰ τὸ ἔτος 1957 ἀπετέλει τὸ 101,6% τῆς παραγωγῆς τοῦ 1955 κ.ο.κ. (βλ. στήλην (5) Πίνακος E-3).

Ὅταν αἱ ἐπὶ μέρους τιμαὶ μιᾶς χρονολογικῆς σειρᾶς ἐκφράζονται ὑπὸ μορφήν ποσοστῶν μέ βάσιν τὴν τιμὴν εἴτε τοῦ προηγούμενου εἴτε ἄλλου τινος ἔτους, εἶναι φανερόν ὅτι ἡ μεταξύ τῶν δύο ὑπὸ σύγκρισιν περιόδων ἐπελθοῦσα ποσοστιαία μεταβολή (αὐξήσις ἢ μείωσις) τοῦ μεγέθους ὑπολογίζεται εὐκόλως δι' ἀπλῆς ἀφαίρεσεως ἐκ τοῦ ποσοστοῦ τοῦ ἀριθμοῦ 100, ὁ ὁποῖος ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν πε-

ρίοδον βάσεως. Φύτω, ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ ἀνωτέρω χρησιμοποιηθέντος συμβολισμοῦ, ἡ ποσοστιαία ἐπὶ τοῖς ἑκατόν μεταβολή (Π.Μ) τοῦ μεγέθους  $Y$  μεταξύ τῶν περιόδων  $o$  καὶ  $t$  θά εἶναι :

$$(E-7) \quad \text{Π.Μ. (\%)} = \left( \frac{Y_t}{Y_o} 100 \right) - 100$$

$$(E-8) \quad \text{ἢ ὅπερ τὸ αὐτὸ : Π.Μ. (\%)} = \frac{100Y_t}{Y_o} - \frac{100Y_o}{Y_o} = \frac{Y_t - Y_o}{Y_o} 100$$

Κατὰ ταῦτα, ἡ παραγωγή συσπόρου βάμβακος ἐν Ἑλλάδι λέγομεν ὅτι ἐμειώθη κατὰ τὸ ἔτος 1956 ἐν συγκρίσει πρὸς τὸ 1955 κατὰ 18,5% (81,5-100,0=-18,5), ἠϋξήθη δέ κατὰ τὸ ἔτος 1957 ἔναντι τοῦ 1956 κατὰ 24,7% (124,7-100,0=24,7). Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον ὑπολογίζονται αἱ ποσοστιαῖαι μεταβολαὶ ἀπὸ ἔτους εἰς ἔτος, αἱ ὁποῖαι ἀναγράφονται εἰς τὴν στήλην (4), ὡς καὶ αἱ ποσοστιαῖαι μεταβολαὶ ἔναντι τοῦ ἔτους βάσεως 1955, αἱ ὁποῖαι ἀναγράφονται εἰς τὴν στήλην (6) τοῦ Πίνακος E-3.

Ὡς προκύπτει ἐκ τῶν στοιχείων τοῦ Πίνακος E-3, ἡ παραγωγή συσπόρου βάμβακος ἐν Ἑλλάδι ἀπὸ 184 χιλ. τόννους κατὰ τὸ ἔτος 1960 ἀνῆλθεν εἰς 277 χιλ. τόννους τὸ 1961, ἥτοι ἐσημείωσεν αὔξησην κατὰ 50,5%. Ἐάν, ὅμως, κατὰ τὴν σύγκρισιν τῶν δύο τούτων στοιχείων ληφθῇ ὡς ἔτος βάσεως τὸ 1961, ἀντὶ τοῦ 1960, τότε προκύπτει μείωσις τῆς παραγωγῆς συσπόρου βάμβακος κατὰ 33,6%. Συνεπῶς, ἡ σχέσις μεταξύ τῶν δύο ποσοστῶν μεταβολῆς δέν εἶναι ἀθροιστικῆ, δηλαδή αὔξησης τῆς παραγωγῆς κατὰ 50,5% κατὰ τὸ ἔτος 1961 ἔναντι τοῦ 1960 δέν ἰσοδυναμεῖ πρὸς μείωσιν αὐτῆς κατὰ 50,5% κατὰ τὸ ἔτος 1960 ἔναντι τοῦ 1961. Μεταξύ τῶν λόγων  $Y_t/Y_o$  καὶ  $Y_o/Y_t$  ὑφίσταται, ἀντιθέτως, πολλαπλασιαστικὴ σχέσις, ἥτοι :

$$(E-9) \quad \frac{Y_t}{Y_o} \cdot \frac{Y_o}{Y_t} = 1$$

ὡς ἐκ τῆς ὁποίας ἑκάτερος τούτων εἶναι ἀντίστροφος τοῦ ἄλλου :

$$(E-10) \quad \frac{Y_t}{Y_o} = \frac{1}{\frac{Y_o}{Y_t}} \quad \text{καὶ} \quad \frac{Y_o}{Y_t} = \frac{1}{\frac{Y_t}{Y_o}}$$

Πράγματι χρησιμοποιῶντες τὸ παράδειγμα τῆς παραγωγῆς συσπόρου βάμβακος κατὰ τὰ ἔτη 1960 καὶ 1961, λαμβάνομεν : (1,505) · (0,664) = 1. Ἐπομένως, ὅταν δίδεται ὁ εἰς τῶν λόγων τούτων, π.χ. ὁ ἀνα-



φερόμενος εἰς τὴν παραγωγὴν τοῦ 1961 ὡς πρὸς ἐκείνην τοῦ 1960, ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ ἑτέρου, ὡς καὶ τοῦ ἀντιστοίχου ποσοστοῦ μεταβολῆς, γίνεται ὡς ἑξῆς:  $1/1,505 = 0,664$ .

Οὕτω, ἡ ἀλλαγὴ τῆς βάσεως εἰς τὰς μεταξὺ δύο στατιστικῶν στοιχείων ἐνεργουμένης συγκρίσεις στηρίζεται εἰς εἰδικὰς ἀρχάς, ἡ ἄγνοια τῶν ὁποίων ὑπάρχει κίνδυνος νὰ ὀδηγήσῃ εἰς τὴν συναγωγὴν ἐσφαλμένων συμπερασμάτων. Χαρακτηριστικὸν παράδειγμα ἐν προκειμένῳ ἀποτελεῖ ἡ μείωσις τῶν τιμῶν ὠρισμένης κατηγορίας ἀγαθῶν κατὰ 30% καὶ ἡ ἐν συνεχείᾳ ἄνοδος αὐτῶν εἰς τρεῖς διαδοχικά στά-

Πίναξ Ε-4

Ἐπολογισμὸς ποσοστῶν μεταβολῆς δι' ἐναλλαγῆς τῆς βάσεως

Ἀριθμοὶ ὑπὸ σύγκρισιν		Ποσοστιαία αὐξήσεις ἀπὸ (1) εἰς (2)	Ποσοστιαία μειώσεις ἀπὸ (2) εἰς (1)
(1)	(2)		
100	1.000	900,00	90,0
100	750	650,00	86,7
100	500	400,00	80,0
100	300	200,00	66,7
100	200	100,00	50,0
100	150	50,00	33,3
100	125	25,00	20,0
100	110	10,00	9,9
100	105	5,00	4,8
100	101	1,00	0,99

δια κατὰ 10% εἰς ἕκαστον. Μετὰ τὴν πραγματοποιήσιν καὶ τῆς τρίτης ἐκ 10% αὐξήσεως ἴσως νὰ ἐνόμιζέ τις ὅτι αἱ τιμαὶ ἐπανῆλθον εἰς τὸ ἀρχικόν των ἐπίπεδον. Τοῦτο, ὅμως, δέν εἶναι ἀληθές, διότι ἐκκινουῦντες ἐκ τῆς βάσεως 100, ἡ κατὰ 30% μείωσις τῶν τιμῶν θά διεμόρφωνε τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν εἰς 70. Ἐν συνεχείᾳ, ἡ πρώτη ἄνοδος κατὰ 10% θά ἀνεβίβαζε τοῦτο εἰς 77, ἡ δευτέρα ἄνοδος κατὰ 10% εἰς 84,7 καὶ ἡ τρίτη ἄνοδος κατὰ 90% εἰς 93,17. Οὕτω, τελικῶς αἱ τιμαὶ θά διεμορφούντο εἰς ἐπίπεδον κατὰ 6,83% κατώτερον τοῦ ἀρχικοῦ. Σημειωτέον ὅτι, ἐάν, μετὰ τὴν κατὰ 30% ἀρχικὴν πτώσιν τῶν τιμῶν, ἐπῆρχετο ἐφ' ἅπαξ ἄνοδος αὐτῶν κατὰ 30%, τότε τὸ ἐπίπεδόν των θά ἦτο 91, ἥτοι θά ὑπελείπετο τοῦ

ἀρχικοῦ κατὰ 90%, παρὰ τὴν μείωσιν καὶ τὴν ἐν συνεχείᾳ αὐξήσιν κατὰ τὸ ἴδιον, ἀπολύτως, ποσοστόν.

Ἡ κατὰ τὰ ἀνωτέρω ὑπάρχουσα διαφορὰ εἰς τὰς ποσοστιαίας ἀποκλίσεις μεταξύ δύο ἀριθμῶν, αἱ ὁποῖαι προκύπτουν ἐκ τῆς ἐναλλαγῆς τῆς βάσεως συγκρίσεως, καθίσταται σαφεστέρα εἰς τὸν Πίνακα E-4. Ἐξ αὐτοῦ προκύπτει ὅτι, ἐνῶ ἀπὸ 100 εἰς 1.000 ἔχομεν ποσοστιαίαν αὐξήσιν κατὰ 900%, ἀπὸ 1.000 εἰς 100 ἔχομεν ποσοστιαίαν μείωσιν κατὰ 90%. Ἐπίσης, ἐνῶ ἀπὸ 100 εἰς 200 ἔχομεν ποσοστιαίαν αὐξήσιν κατὰ 100%, ἀπὸ 200 εἰς 100 ἔχομεν ποσοστιαίαν μείωσιν κατὰ 50%. Γενικῶς, τὸ ποσοστόν αὐξήσεως ἀπὸ ἐκείνου τοῦ ἀριθμοῦ εἰς ἕτερον δύναται νὰ εἶναι ὅσονδῆποτε μέγα. Ἐπὶ παραδείγματι, εἰς τὸν Πίνακα E-4 ἐμφανίζονται αὐξήσεις ἀπὸ 1% ἕως 900%. Ἡ ποσοστιαία, ὅμως, μείωσις δέν δύναται νὰ ὑπερβῇ τὸ 100. Ποσοστιαίαν μείωσιν κατὰ 100% θὰ ἔχωμεν ὅταν ἡ τιμὴ τοῦ ἐξεταζομένου μεγέθους καταστῇ μηδέν. Πράγματι, ἐάν εἰς τὸν τύπον (E-7) θέσωμεν  $Y_t = 0$ , θὰ λάβωμεν:  $\Pi.M(\%) = -100$ . Ποσοστιαία μείωσις μεγαλύτερα τοῦ 100 σημαίνει πῶσιν τῆς τιμῆς τοῦ μεγέθους κάτω τοῦ μηδενός, δηλαδὴ διαμόρφωσιν αὐτῆς εἰς ἀρνητικὸν ἐπίπεδον.

Τὰ ποσοστά μεταβολῆς διευκολύνουν μεγάλως τὴν παρακολούθησιν τῆς ἐν τῷ χρόνῳ ἐξελίξεως τῶν διαφόρων μεγεθῶν, δι' ὃ καὶ ἡ χρῆσις των εἶναι εὐρυτάτη. Ἐξ ἄλλου, ταῦτα, δεδομένου ὅτι εἶναι ἀνεξάρτητα τῶν μονάδων μετρήσεως προσφέρονται κατ' ἐξοχίαν διὰ διαχρονικὰς συγκρίσεις διαφορετικῆς φύσεως μεγεθῶν, ὡς εἶναι π.χ. τῶν εἰσόδων καὶ τῆς ἀπασχόλησις. Ἐν τούτοις, ὡς ἐκ τῆς τοιαύτης φύσεώς των, τὰ ποσοστά μεταβολῆς παρουσιάζουν ταυτοχρόνως καὶ τὸ μειονέκτημα ὅτι δέν ἐκφράζουν τὰς μεταβολὰς τῶν μεγεθῶν εἰς τὰς ὁποίας ταῦτα μετροῦνται καὶ συνεπῶς ἐνδέχεται νὰ ὀδηγήσουν εἰς ἐσφαλμένα συμπεράσματα. Ἐάν, ἐπὶ παραδείγματι, δοθῇ ἡ στατιστικὴ πληροφορία ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν ιδιωτικῶν αὐτοκινήτων εἰς τινὰ πόλιν ἠϋξήθη ἐντὸς δεδομένου ἔτους κατὰ 50%, εἶναι πολὺ πιθανόν νὰ δημιουργηθῇ ἡ ἐντύπωσις, ὡς ἐκ τοῦ ὑψηλοῦ αὐτοῦ ποσοστοῦ, ὅτι σημαντικὸς ἀριθμὸς αὐτοκινήτων προσετέθη κατὰ τὸ ὑπὸ ἐξέτασιν ἔτος εἰς τὰ ἤδη ὑπάρχοντα ἐν τῇ πόλει. Ἡ ἐντύπωσις ὅμως, αὐτὴ πόρρω θὰ ἀπέχη τῆς πραγματικότητος, ἐάν ὑποθεθῇ ὅτι ἡ κατὰ 50% αὐξήσις τῶν ιδιωτικῶν αὐτοκινήτων ἐκφράζει προσθήκην εἰς τὰ τέσσαρα ὑπάρχοντα ἑτέρων δύο. Ἐπίσης, ἐσφαλμένας ἐντυπώσεις εἶναι δυνατόν νὰ δημιουργηθῇ ἡ χρῆσις τῶν ποσοστῶν μεταβολῆς ὅταν δι' αὐτῶν ἐπιδιώκεται ἡ σύγκρισις τῶν ἐξελίξεων διαφό-

ρων μεγεθῶν. Οὕτω, ἐάν παρασχεθῇ ἡ πληροφορία ὅτι εἰς δεδομένην χρονικὴν περίωδον ἡ ἀξία τῶν πωλήσεων τῆς ἐπιχειρήσεως Αἠύξθη κατὰ 50%, τῆς δὲ ἐπιχειρήσεως Β κατὰ 30%, δὲν θά πρέπει τις νά προβῇ εἰς τὴν διατύπωσιν κρίσεων περὶ τοῦ δυναμισμοῦ τῶν ἐν λόγῳ ἐπιχειρήσεων, ἐφ' ὅσον προηγουμένως δὲν ἔχει λάβει ὑπ' ὄψιν καὶ τὸ ὕψος τῶν πωλήσεων ἑκατέρας τούτων κατὰ τὴν περίωδον βάσεως. Ἡ ὑπό τῶν ποσοστῶν παρεχομένη εἰκὼν εἶναι φανερόν ὅτι θά μεταβληθῇ, ἐάν ὑποτεθῇ ὅτι κατὰ τὴν περίωδον βάσεως αἱ πωλήσεις τῆς μὲν ἐπιχειρήσεως Α ἀνῆρχοντο εἰς 10 ἑκατ. δραχ. τῆς δὲ ἐπιχειρήσεως Β εἰς 100.000 δραχ. Ἐξ αὐτοῦ θά προέκυπτεν ὅτι ἡ κατὰ 30% αὔξεις τῶν πωλήσεων τῆς ἐπιχειρήσεως Α ἀντιστοιχεῖ εἰς ἀξίαν 300.000 δραχ., ἐνῶ ἡ κατὰ 30% αὔξεις τῶν πωλήσεων τῆς ἐπιχειρήσεως Β μόνον εἰς 30.000 δραχ.

Διὰ τοὺς ἀνωτέρω ἀναφερθέντας λόγους ἐνδείκνυται εἰς ὠρισμένας περιπτώσεις ἢ ἐκ παραλλήλου χρησιμοποίησις καὶ τῶν λεγομένων "ἀπολύτων μεταβολῶν" (Α.Μ), αἱ ὁποῖαι ἐκφράζονται εἰς τὰς μονάδας εἰς τὰς ὁποίας μετρεῖται τὸ ἐξεταζόμενον μέγεθος καὶ ὑπολογίζονται δι' ἀπλῆς ἀφαρέσεως ἐκ τοῦ ὑπὸ συγκρίσιν ἀριθμοῦ ( $Y_t$ ) τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὴν περίωδον βάσεως ( $Y_0$ ).

Ἦτοι, ἔχομεν :

(E-11)

$$Α.Μ. = Y_t - Y_0$$

Εἶναι εὐνόητον ὅτι ἐπὶ δεδομένης χρονολογικῆς σειρᾶς ἀπόλυτοι μεταβολαὶ δύνανται νά ὑπολογισθοῦν εἴτε ἔναντι τοῦ προηγουμένου ἔτους εἴτε ὡς πρὸς σταθερόν ἔτος βάσεως. Παραδείγματα ὑπολογισμοῦ ἀπολύτων μεταβολῶν ἀμφοτέρων τῶν κατηγοριῶν τούτων παρέχονται εἰς τὰς στήλας (7) καὶ (8) τοῦ Πίνακος E-3. Μόνοι αἱ ἀπόλυτοι μεταβολαὶ δὲν εἶναι συνήθως ἐπαρκεῖς διὰ νά περιγράψουν τὴν ἐν τῷ χρόνῳ ἐξέλιξιν ἑνὸς μεγέθους. Πάντως, εἰς ἐκάστην περίπτωση ἢ χρῆσις τῶν ποσοστικῶν ἢ τῶν ἀπολύτων μεταβολῶν ἢ καὶ ἀμφοτέρων δεόν νά γίνεται κατόπιν ἐξετάσεως τῆς φύσεως τῶν στατιστικῶν δεδομένων καὶ τοῦ σκοποῦ εἰς τὸν ὁποῖον ἀποβλέπουν αἱ συγκρίσεις.

## 6. Λόγοι λόγων ἢ ποσοστῶν

Οἱ λόγοι χρησιμοποιοῦνται πρὸς διευκόλυνσιν τῶν συγκρίσεων, ὄχι μόνον τῶν πρωτογενῶν στατιστικῶν δεδομένων, ὡς ἀνωτέρω, ἀλλὰ καὶ τῶν παραγῶν στοιχείων. Οὕτω, εἰς πολλὰς περιπτώσεις

παρίσταται ανάγκη χρησιμοποίησε λόγων πρὸς σαφεστέραν παρου-  
σάσιν καὶ τῆς μεταξὺ λόγων ἢ ποσοστῶν ὑφισταμένης σχέσεως. Λό-  
γοι εἶναι δυνατόν νά προκύψουν ἐκ λόγων ἢ ποσοστῶν κατὰ ποικί-  
λους τρόπους πρὸς ἐξυπηρέτησιν τῶν ἐκάστοτε ἐπιδιωκομένων εἰ-  
δικῶν σκοπῶν. Ἐκ τῶν λόγων αὐτῶν ἰδιαίτερον ἐνδιαφέρον παρουσι-  
άζουν οἱ συγκρίνοντες ποσοστιαίας ἀναλογίας εἴτε καθ' ὕρισμένην  
χρονιαὴν περίοδον εἴτε διαχρονικῶς.

Εἰς τὸν Πίνακα Ε-5 δίδεται ἡ ποσοστιαία σύνθεσις τοῦ δηλω-  
θέντος διὰ τὸ ἔτος 1964 οἰκογενειακοῦ εἰσοδήματος εἰς τὸ σύνο-  
λον τῆς Ἑλλάδος (στήλη (2)) καὶ εἰς τὴν περιφέρειαν τῆς πρωτε-  
ούσης (στήλη (3)) κατὰ πηγὴν προελεύσεως. Μεταξὺ τῶν δύο τούτων  
κατηγοριῶν ποσοστιαίων ἀναλογιῶν ὑπάρχουν διαφοραί, αἱ ὅποιαι,  
προφανῶς, δικαιολογοῦνται ἀπὸ τὴν διαφορετικὴν διάρθρωσιν τῆς  
οἰκονομίας τῆς περιοχῆς πρωτευούσης ἐν σχέσει πρὸς ἐκείνην τῆς  
ὑπολοίπου χώρας. Ἐάν θεωρήσωμεν τὴν ποσοστιαίαν σύνθεσιν τοῦ  
δηλωθέντος οἰκογενειακοῦ εἰσοδήματος εἰς τὸ σύνολον τῆς χώρας  
ὡς βάσιν, δυνάμεθα νά συγκρίνωμεν ἔναντι αὐτῆς τὴν ποσοστιαίαν  
σύνθεσιν τοῦ δηλωθέντος οἰκογενειακοῦ εἰσοδήματος εἰς τὴν περι-  
οχὴν πρωτευούσης διὰ χρησιμοποίησε τῶν λόγων τῶν ἀντιστοίχων

#### Πίναξ Ε - 5

Ποσοστιαία σύνθεσις τοῦ δηλωθέντος διὰ τὸ ἔτος 1964 οἰκογενεια-  
κοῦ εἰσοδήματος εἰς τὸ σύνολον τῆς Ἑλλάδος καὶ εἰς τὴν περιφέ-  
ρειαν πρωτευούσης κατὰ πηγὴν προελεύσεως

Π η γ α ἰ (1)	Σύνολον Ἑλλάδος (2)	Περιφέρεια πρωτευούσης (3)	Λόγος $\frac{(3)}{(2)}$ (4)
Οἰκοδομῶν . . . . .	18,1	19,5	1,08
Ἐκμισθώσεως γαιῶν . . . . .	0,1	0,1	1,00
Κινητῶν ἀξιῶν . . . . .	3,1	4,1	1,32
Ἐμπορικῶν καὶ βιομηχανικῶν ἐπιχειρήσεων . . . . .	32,5	26,8	0,82
Γεωργικῶν ἐπιχειρήσεων . . . . .	0,2	0,1	0,50
Μισθωτῶν ὑπηρεσιῶν . . . . .	40,5	43,6	1,08
Ἐλευθερίων ἐπαγγελματιῶν . . . . .	5,5	5,8	1,05
Σύνολον . . . . .	100,0	100,0	

Πηγή: Ε.Σ.Υ.Ε., «Στατιστικὴ Ἐπετηρὶς τῆς Ἑλλάδος, 1965», Ἀθῆναι, 1966, σελ. 392.

ποσοστών. Οί λόγοι οὔτοι ἐμφαίνονται εἰς τήν στήλην (4) τοῦ πίνακος Ε-5, παρέχουν δέ σαφῆ εἰκόνα τῶν ἀποκλίσεων αἱ ὁποῖαι ὑφίστανται μεταξύ τῶν ποσοστών τῆς πρωτεύουσας καί ἐκείνων τοῦ συνόλου τῆς χώρας.

Διά τῶν λόγων καθίσταται ἐπίσης εὐχερεστέρα ἢ ἐν τῷ χρόνῳ παρακολούθησις τῆς ἐξελίξεως ὠρισμένης, οὐσιώδους σημασίας, ποσοστιαίας ἀναλογίας. Ὡς τοιαύτη δύναται, ἐπὶ παραδειγματι, νά θεωρηθῆ ὅτι εἶναι ἡ ἐκφράζουσα τήν καθ' ἕναστον ἔτος σχέσηιν τῶν ἐξ ἀμέσων φόρων εἰσπράξεων πρὸς τὸ σύνολον τῶν φορολογικῶν εἰσπράξεων τοῦ κράτους. Αἱ ἐν λόγῳ ποσοστιαῖαι ἀναλογαὶ διὰ τήν περιόδον 1959-1964 παρέχονται εἰς τήν στήλην (4) τοῦ Πίνακος Ε-6, προκύπτουν δέ ἐκ τῶν ἀρχικῶν δεδομένων τῶν ἀναγραφομένων εἰς τὰς στήλας (2) καί (3). Αἱ ἐν τῷ χρόνῳ διακυμάνσεις τῆς ἀναλογίας τῶν ἀμέσων φόρων εἰς τὸ σύνολον αὐτῶν, αἱ ὁποῖαι ἰδιαιτέρως ἐνδιαφέρουν τὰς οἰκονομικὰς ἀρχάς, εἶναι φανερόν ὅτι παρακολουθοῦνται εὐχερέστερον διὰ χρησιμοποίησεως τοῦ λόγου τῆς δι' ἕναστον ἔτος ἀναλογίας πρὸς ἐκείνην τοῦ προηγουμένου. Οἱ λόγοι οὔτοι, ὑπὸ μορφήν ποσοστών ἐπὶ τοῖς ἑκατόν, ἐμφαίνονται εἰς τήν στήλην (5) τοῦ Πίνακος (Ε-6), αἱ ὑπ' αὐτῶν δέ παρεχόμεναι πληροφοραὶ συμπληρῶνουν τὰς διδομένας ὑπὸ τῆς στήλης (6), αἱ ὁποῖαι ἀφοροῦν

#### Πίναξ Ε-6

Ἐξέλιξις σχέσεως ἀμέσων φόρων πρὸς σύνολον φόρων  
κρατικοῦ προϋπολογισμοῦ, 1960-1965

*Ἔτος	Σύνολον φόρων	*Ἀμεσοὶ φόροι	*Αναλογία ἀμέσων ἐπὶ συνόλου φόρων	Λόγος στήλης (4) δι' ἕκαστον ἔτος πρὸς τὸ προηγούμενον	Λόγος στήλης (3) δι' ἕκαστον ἔτος πρὸς τὸ προηγούμενον
	*Ἐκατ. δρχ.	*Ἐκατ. δρχ.	%	%	%
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1959	11.963	2.502	20,9	...	...
1960	12.936	2.615	20,2	96,7	104,5
1961	15.105	3.222	21,3	105,4	123,2
1962	16.768	3.591	21,4	100,5	111,5
1963	18.549	3.606	19,4	90,7	100,4
1964	21.629	4.467	20,7	106,7	123,9

ἀπλῶς εἰς τὰς ἀπὸ ἔτους εἰς ἔτος ποσοστιαίας μεταβολάς τῶν ἀρχικῶν δεδομένων τῶν ἀμέσων φόρων. Παρατηρεῖται, ἐπί παραδείγματι, ὅτι κατὰ τὸ ἔτος 1960, ἐνῶ αἱ ἐξ ἀμέσων φόρων εἰσπράξεις ἠϋξήθησαν ἔναντι τοῦ 1959 κατὰ 4,50%, ἐν τούτοις ἡ ποσοστιαία ἀναλογία αὐτῶν εἰς τὸ σύνολον τῶν φορολογικῶν εἰσπράξεων ἐσημείωσε μείωσιν ἔναντι τοῦ προηγουμένου ἔτους κατὰ 3,30%.

## 7. Μέσοι ὅροι λόγων καὶ ποσοστῶν

Πολλάνκις παρσιτάται ἀνάγκη χρησιμοποίησεως τοῦ μέσου ὅρου μιᾶς σειρᾶς λόγων ἢ ποσοστῶν, καθ' ὅσον δι' αὐτοῦ ἐπιτυγχάνεται περιληπτικὴ περιγραφὴ δεδομένης καταστάσεως. Κατὰ τὸν ὑπολογισμόν, ὅμως, τοῦ μέσου ὅρου ὑπάρχει κίνδυνος εἰς τὰς περιπτώσεις ταύτας νὰ γίνουσι βασικά σφάλματα, ἐάν δὲν ἀκολουθηθῇ ἡ ἐνδεδειγμένη διαδικασία, ἡ ὁποία προσιδιάζει εἰς τὴν φύσιν καὶ τὰς ἰδιωμορφίας τῶν λόγων ἢ ποσοστῶν.

Εἰς τὸν Πίνακα (E-7) παρέχεται ἡ κατὰ τὸ ἔτος 1965 πραγματοποιηθεῖσα ἀπόδοσις κατὰ στρέμμα τῆς καλλιεργείας σίτου εἰς ἑπτὰ μείζονας γεωγραφικὰς περιοχὰς τῆς Ἑλλάδος, ἡ ὁποία προκύπτει ἐκ τῆς διαφέσεως τῆς παραγωγῆς διὰ τῆς καλλιεργηθείσης ἐκτάσεως εἰς τὰς ἐν λόγω περιοχὰς. Ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ μέσου ὅρου τῶν στρεμματικῶν τούτων ἀποδόσεων ἢ, ἄλλως, τῆς μέσης στρεμματικῆς ἀποδόσεως τῆς καλλιεργείας σίτου εἰς ὁλόκληρον τὴν χώραν δύναται εὐκόλως νὰ γίνῃ διὰ διαφέσεως τῶν παραχθεισῶν ποσοτήτων διὰ τοῦ συνόλου τῶν καλλιεργηθεισῶν ἐκτάσεων. Οὕτω, ἐπὶ τῇ βάσει τῶν δεδομένων τῶν σπηλῶν (2) καὶ (3) τοῦ Πίνακος E-7, ἔχομεν : 1.989,1 χιλ. τόννοι/11.235 στρ. = 177 χιλιογράμμα. Ἐάν, ὅμως, ὁ ὑπολογισμὸς τῆς μέσης στρεμματικῆς ἀποδόσεως διὰ τὸ σύνολον τῆς χώρας πρόκειται νὰ γίνῃ ἐκ τῶν στοιχείων στρεμματικῆς ἀποδόσεως διὰ τὰς ἐπὶ μέρους περιφερείας, ἐνδέχεται τις νὰ ἐλάβανε πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτὸν τὸ ἄθροισμα τῶν δεδομένων ἐπτά ἀποδόσεων, τὸ ὁποῖον ἀνέρχεται εἰς 1.121,4 χιλιογράμμα καὶ ἐν συνεχείᾳ νὰ διῆρῃ τοῦτο διὰ ἑπτὰ, ὅποτε θὰ προέκυπτε : 160,2 χιλιογράμμα. Ἀλλὰ, ἐάν ἐξετάσωμεν προσεκτικῶς τὸν τρόπον αὐτὸν ὑπολογισμοῦ, θὰ διαπιστώσωμεν ὅτι ὁ προκύψας ἀριθμὸς δὲν ἀνταποκρίνεται εἰς τὴν πραγματικὴν κατάστασιν. Εἶναι φανερόν ὅτι ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ γενικοῦ μέσου ὅρου τῶν ἀποδόσεων ἐγένετο χωρὶς νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ἡ σχετικὴ συμβολὴ ἐκάστης γεωγραφικῆς περιοχῆς εἰς τὴν συνολικὴν παραγωγὴν σίτου. Πρὸς ἐπίτευξιν, ἐπομένως, ὀρθῶν ἀποτελεσμάτων θὰ πρέπει αἱ ἐπὶ μέρους ἀποδόσεις νὰ σταθμι-

Πίναξ Ε - 7

Συνολική παραγωγή σίτου και μέση κατά στρέμμα απόδοσις αὐτοῦ εἰς διαφόρους περιοχάς τῆς Ἑλλάδος κατὰ τὸ ἔτος 1965

Π ε ρ ι ο χ α ῖ	(1)	Παραγωγή εἰς χιλ. τόν- νους	Καλλιεργηθείσα ἐκτασις διὰ σίτου εἰς στρέμματα	Ἀπόδοσις κατὰ στρέμμα εἰς χιλιό- γραμμα (2) : (3)	% συνολ- λικῆς πα- ραγωγῆς	Γινόμενα (4) X (2)	Γινόμενα (4) X (5)
		(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
Πελοπόννησος . . . . .		191,8	1.417,6	135,3	9,6	25.950,5	1.298,9
Στερεὰ Ἑλλάς καὶ Εὐβοία . . . . .		259,2	1.561,9	166,0	13,0	43.027,2	2.158,0
Θεσσαλία . . . . .		420,9	2.274,2	185,1	21,2	77.908,6	3.924,1
Ἡπείρος . . . . .		23,9	167,5	142,7	1,2	3.410,5	171,2
Μακεδονία . . . . .		826,9	4.183,6	197,6	41,6	163.395,4	8.220,2
Θράκη . . . . .		219,9	1.227,9	179,1	11,1	39.384,1	1.988,0
Κρήτη καὶ Νῆσοι . . . . .		46,5	402,3	115,6	2,3	5.375,4	265,9
Σύνολον . . . . .		1.989,1	11.235,0	1.121,4	100,0	358.451,7	18.026,3

Πηγή: Ὑπουργεῖον Γεωργίας.

σθουῶν προηγουμένως εἴτε διὰ τοῦ ἀντιστοίχου μεγέθους τῆς παραγωγῆς, τό ὅποιον παρέχεται εἰς τήν στήλην (2), εἴτε διὰ τῆς ποσοστιαίας συμμετοχῆς τῆς παραγωγῆς ἐκάστης περιοχῆς εἰς τήν συνολικήν παραγωγήν, ἡ ὅποια παρέχεται εἰς τήν στήλην (5) τοῦ Πίνακος E-7. Διὰ τοῦ τρόπου τούτου δίδεται μεγαλυτέρα βαρύτης εἰς τὰς περιοχάς αἱ ὅποια ἐμφανίζονται, ὄχι μόνον ὑψηλοτέραν ἀπόδοσιν, ἀλλά καί μεγαλυτέραν παραγωγήν. Κατά ταῦτα, ὁ μέσος ὅρος τῶν στρεμματικῶν ἀποδόσεων ὑπολογίζεται διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐκάστης ἀποδόσεως ἐπὶ τόν ἀντίστοιχον συντελεστήν σταθμίσεως καί ἐν συνεχείᾳ διαιρέσεως τοῦ ἀθροίσματος τῶν γινομένων διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν συντελεστῶν σταθμίσεως. Οὕτω, χρησιμοποιοῦντες τὰ δεδομένα τῶν στηλῶν (6) καί (7) τοῦ Πίνακος E-7 εὐρίσκομεν ὅτι ἡ μέση στρεμματική ἀπόδοσις τοῦ σίτου εἰς ὀλόκληρον τήν χώραν εἶναι 180,2 χιλιόγραμμα ὅταν οἱ συντελεσταί σταθμίσεως στηρίζονται ἐπὶ τοῦ ἀπολύτου μεγέθους τῆς παραγωγῆς καί 180,3 χιλιόγραμμα ὅταν οἱ συντελεσταί σταθμίσεως στηρίζονται ἐπὶ τοῦ ποσοστοῦ συμμετοχῆς τῆς παραγωγῆς ἐκάστης περιοχῆς εἰς τό σύνολον.

Οἱ μέσοι ὅροι τῶν ἀποδόσεων οἱ ὑπολογισθέντες διὰ τῆς χρησιμοποίησεως συντελεστῶν σταθμίσεως εἶναι περίπου ἴσοι μεταξύ των, ἀμφότεροι, ὅμως, διαφέρουν σημαντικῶς τοῦ προκύψαντος ἀνωτέρω ἐκ τῆς διαιρέσεως τῆς συνολικῆς παραγωγῆς διὰ τοῦ συνόλου τῶν καλλιεργηθεισῶν ἐκτάσεων. Ἡ διαφορά αὕτη ὀφείλεται εἰς τήν στρωγυλευσιν τῶν λόγων, οἱ ὅποιοι ἐκφράζουν τὰς στρεμματικὰς ἀποδόσεις εἰς τὰς ἐπὶ μέρους περιοχάς. Τό ἐντεῦθεν δημιουργούμενον σφάλμα εἶναι εὐνόητον ὅτι μεγεθύνεται διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀποδόσεων ἐπὶ τοὺς ἀντιστοίχους συντελεστάς σταθμίσεως. Δεδομένου ὅτι ὠρισμένοι ἐκ τῶν στρωγυλεύσεως γίνονται πρὸς τὰ κάτω καί ἄλλαι πρὸς τὰ ἄνω, ὑπάρχει τάσις ἀλληλοσμυψισμοῦ τῶν σφαλμάτων. Καθ' ὅ μέρους τοῦτον δέν ἐπιτυγχάνεται ἀπολύτως, περιορίζεται ἡ ἀκρίβεια τοῦ μέσου ὅρου τοῦ προκύψαντος ἐκ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου τῆς σταθμίσεως.

Μέσοι ὅροι δύνανται ὡσαύτως νά χρησιμοποιηθοῦν καί πρὸς περιληπτικὴν παρουσίαν τῆς ἐν τῷ χρόνῳ ἐξελίξεως ἑνός μεγέθους. Εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτάς ἐκάστη τιμὴ μιᾶς χρονολογικῆς σειρᾶς ἐκφράζεται ὑπὸ μορφήν ποσοστοῦ ἐπὶ τοῖς ἐκατόν τῆς ἀντιστοίχου τιμῆς τῆς προηγουμένης περιόδου. Ἐν προκειμένῳ ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ μέσου ποσοστοῦ γίνεται ἀπλῶς δι' ἀθροίσεως τῶν ποσοστῶν διὰ τὰς ἐπὶ μέρους περιόδους καί διαιρέσεως αὐτῶν διὰ τοῦ πλήθους των. Οὕτω, εἰς τό προαναφερθέν παράδειγμα τῆς παραγωγῆς συσπόρου



βάμβακος ἐν Ἑλλάδι κατά τήν περίοδον 1955-1965, δεδομένου ὅτι, ὡς προκύπτει ἐκ τῆς στήλης (3) τοῦ Πίνακος Ε-3, τό ἄθροισμα τῶν 10 ἐτησίων ποσοστῶν ἀνέρχεται εἰς 1.030,2, ὁ μέσος ὅρος αὐτῶν εἶναι 103,02. Εἶναι φανερόν ὅτι ἡ μέση ποσοστιαία μεταβολή ὑπολογίζεται δι' ἀφαίρεσεως ἐκ τοῦ προκύψαντος μέσου ποσοστοῦ τοῦ 100. Ἐπομένως, ἡ μέση ποσοστιαία κατ' ἔτος μεταβολή τῆς παραγωγῆς συσπόρου βάμβακος κατά τήν περίοδον 1955-1965 εἶναι 3,02%.

Εἰς τό ἴδιον ἀποτέλεσμα καταλήγομεν, ἐάν, ἀντί τῶν ποσοστῶν τῆς στήλης (3), χρησιμοποιήσωμεν τὰς ποσοστιαίας μεταβολάς ἐναντι τοῦ προηγουμένου ἔτους τῆς στήλης (4), ὁ μέσος ὅρος τῶν ὁποίων δίδει ἀπ' εὐθείας τήν μέσην ποσοστιαίαν μεταβολήν τοῦ μεγέθους κατά τήν ἐξεταζομένην περίοδον. Πράγματι, διαφοῦντες διά 10 τό ἄθροισμα τῶν ποσοστιαίων μεταβολῶν τῆς στήλης (4), τό ὁποῖον ἀνέρχεται εἰς 30,2, λαμβάνομεν καί πάλιν 3,02%.

Ἰδιαιτέρας ἐξετάσεως τυγχάνει ἡ περίπτωσης κατά τήν ὁποίαν εἶναι γνωστή ἡ ποσοστιαία μεταβολή ἑνός μεγέθους κατά μίαν σχετικῶς μακράν χρονικήν περίοδον καί ἐπὶ τῇ βάσει αὐτῆς ἐπιδιώκομεν νά προσδιορίσωμεν τήν μέσην ποσοστιαίαν μεταβολήν εἰς τήν μονάδα τοῦ χρόνου ἐντός τῆς περιόδου ταύτης. Ὡς ἐμφαίνεται εἰς τόν Πίνακα Ε-2, ὁ πληθυσμός τῆς Ἑλλάδος ἀνῆρχετο, κατά μέν τήν ἀπογραφὴν τοῦ 1951 εἰς 7.632.801 ἄτομα, κατὰ δέ τήν ἀπογραφὴν τοῦ 1961 εἰς 8.388.553 ἄτομα. Ἐπομένως, ἐντός τῆς δεκαετίας 1951-1961 οὗτος ἐσημείωσεν αὐξησιν κατὰ 9,9%. Δεδομένης τῆς μεταβολῆς αὐτῆς θά ἠδύνατό τις νά συμπεράνη ὅτι ἡ μέση ἐτησία αὐξησις ἐντός τῆς ἐξεταζομένης περιόδου εἶναι  $9,9/10 = 0,99$ , ἥτοι 0,99%.

Ἐάν, ὅμως, ἀρχίζοντες ἐκ τοῦ ἔτους 1951, ὑπολογίσωμεν διαδοχικῶς δι' ἕκαστον μεταγενέστερον ἔτος αὐξησιν κατὰ 0,99% ἐναντι τοῦ προηγουμένου, εὕρισκομεν ὅτι κατὰ τό δέκατον ἔτος, ἥτοι κατὰ τό 1961, ὁ πληθυσμός τῆς Ἑλλάδος εἶναι 8.423.016, ἀντί τοῦ πραγματικοῦ 8.388.553. Συνεπῶς, ἡ μέση κατ' ἔτος ποσοστιαία αὐξησις θά πρέπει νά εἶναι κατὰ τι μικροτέρα τοῦ 0,99%.

Ἐν προκειμένῳ ὁ προσδιορισμός τοῦ μέσου ποσοστοῦ μεταβολῆς, τό ὁποῖον κατωτέρω συμβολίζεται διά τοῦ γράμματος  $x$  καί ἐκφράζεται ὑπό δεκαδικήν μορφήν, γίνεται ὡς ἀκολούθως :

$$\begin{aligned} \text{Ὁ πληθυσμός μετὰ ἓν ἔτος θά εἶναι} &= 7.632.801 + 7.632.801x = \\ &= 7.632.801(1+x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ὁ πληθυσμός μετὰ δύο ἔτη θά εἶναι} &= 7.632.801(1+x) + \\ &+ 7.632.801(1+x)x = 7.632.801(1+x)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ο πληθυσμός μετά τρία ἔτη θά εἶναι} &= 7.632.801(1+r)^2 + \\ &+ 7.632.801(1+r)^2 r = 7.632.801(1+r)^3 \end{aligned}$$

.....  
 Ο πληθυσμός μετά δέκα ἔτη θά εἶναι  $= 7.632.801(1+r)^{10}$   
 Δεδομένου ὅτι ὁ πληθυσμός τῆς Ἑλλάδος κατά τό 1961 γνωρίζομεν ὅτι ἦτο 8.388.553 ἄτομα, ἔχομεν :

$$8.388.553 = 7.632.801 (1+r)^{10}$$

Λύοντες τήν ἐξίσωσιν αὐτήν διά χρησιμοποίησεως τῶν λογαριθμῶν , λαμβάνομεν :

$$\begin{aligned} \log 8.388.553 &= \log 7.632.801 + 10 \log(1+r) \\ \text{ἢ} \quad 6,923710 &= 6,882695 + 10 \log(1+r) \\ \text{ἢ} \quad \log(1+r) &= \frac{0,041015}{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ἢ} \quad \log(1+r) &= 0,004102 \\ \text{καί} \quad 1+r &= 1,0095 \end{aligned}$$

ὁπότε  $r = 0,0095$  ἢ εἰς ποσοστόν ἐπί τοῖς ἑκατόν  $0,95\%$ . Γενικῶς, ἐάν ἡ τιμή μεγέθους τινός κατά τήν ἀρχήν τῆς περιόδου εἶναι  $A$  καί μεταβάλλεται (αὐξάνεται ἢ μειοῦται) κατά σταθερόν ποσοστόν κατ' ἔτος, ἡ τιμή αὐτοῦ μετά  $N$  ἔτη θά εἶναι :

$$(E-10) \quad T = A(1+r)^N$$

Ἡ ἐν λόγω ἔκφρασις εἶναι γνωστή ὡς τύπος τοῦ ἀνατοκισμοῦ καί χρησιμοποιεῖται εὐρέως, ὄχι μόνον διά τόν ὑπολογισμόν τοῦ μέσου ποσοστοῦ μεταβολῆς  $r$ , ἀλλά καί οἴουδήποτε ἐκ τῶν  $T, A, N$ , ὅταν αἱ τιμαί τῶν λοιπῶν ἐξ αὐτῶν εἶναι δεδομένα.

#### BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

##### A. Ἑλληνική

1. Ἀθανασιάδου, Κ., "Στατιστική", Μέρος Πρῶτον, Ἀθήναι, 1957, σελ. 50 - 54.
2. Σπανδοπούλου Ἰ., "Οἰκονομική Ἀνάλυσις τοῦ Ἰσολογισμοῦ", Ἀθήναι, 1960, σελ. 24-28

Β. Ξένη

1. Allen, R.G.D., "Statistics for Economists", Hutchinson University Library, London (Tenth Impression, 1960), 1960, σελ. 65-67. Μετάφρασις εἰς τὴν Ἑλληνικὴν ὑπὸ Κ. Ἀθανασιάδου ὑπὸ τὸν τίτλον "Στατιστικὴ", Ἀθῆναι, 1955, σελ. 61-63.
2. Barclay, G., "Techniques of Population Analysis", John Wiley and Sons, Inc., New York, 1959, σελ. 16-55.
3. Budin, M., "Statistical Measurements for Economics and Administration", Asia Publishing House, London, 1962, σελ. 88-97.
4. Greenwald, W.I., "Statistics for Economics", Charles E. Merrill Books Inc, Columbus, Ohio, 1963, σελ. 16-19.
5. Croxton, F.E. and Cowden, D.J., "Applied General Statistics", Sir Isaak Pitman and Sons Limited, London (Second Edition), 1960, σελ. 136-152.
6. Ilersic, A.R., "Statistics", H.F.L. (Publishers) Ltd, London (Twelfth Edition), 1959, σελ. 145-148.
7. Paden, D.W. and Lindquist, E.F., "Statistics for Economics and Business", Mc Graw-Hill Book Company Inc., New York - Toronto - London (Second Edition), 1956, σελ. 11-14.
8. Wessel, R.H. and Willett, E.R., "Statistics as Applied to Economics and Business", Henry Holt and Company, New York, 1959, σελ. 32-36.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ

### ΚΑΤΑΝΟΜΑΙ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ

#### 1. Κατανομαί συχνοτήτων καί χαρακτηριστικά μέτρα αὐτῶν

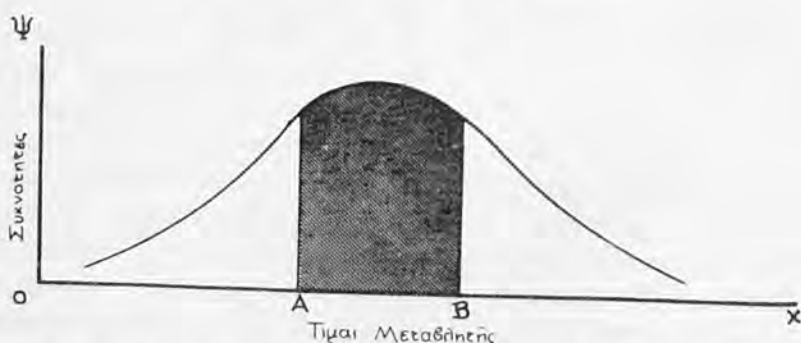
Αἱ διαθέσιμοι μετρήσεις τῶν διαφορῶν μεταβλητῶν εἶναι συνήθως πολυπληθεῖς, δι' ὅ καί πρὸς πληρεστέραν κατανόησιν τῶν δεδομένων ποσοτικῶν πληροφορῶν, ὡς ἀνωτέρω ἐλέχθη, ἐμφανίζομεν αὐτάς ὑπὸ μορφήν κατανομῆς συχνοτήτων. Ἄν καί ἡ κατανομή συχνοτήτων ἀποτελεῖ ἀπλούστερον τρόπον παρουσιάσεως τῶν ἀρχικῶν δεδομένων, ἐν τούτοις δι' αὐτῆς δέν ἐπιτυγχάνεται εἰς ἰκανοποιητικόν βαθμόν ἐξειδικεύσεις τῶν γνωρισμάτων τῶν εἰς ὠρισμένον δεῖγμα ἀναφερομένων μετρήσεων δεδομένου χαρακτηριστικοῦ. Σοβαραὶ δυσχέρειαι ἀντιμετωπίζονται κυρίως ὅταν ἐπιδίδωκεται ἡ σύγκρισις δύο δειγμάτων ἀποτελουμένων ἐν πολυαρθμῶν σχετικῶς παρατηρήσεων τῆς αὐτῆς μεταβλητῆς. Παρίσταται, συνεπῶς, ἀνάγκη περιορισμοῦ τοῦ ὑπὸ μορφήν κατανομῆς συχνοτήτων διατεταγμένου πλήθους παρατηρήσεων εἰς μικρόν ἀριθμόν χαρακτηριστικῶν μέτρων, τὰ ὅποια νά περιγράφουν τήν κατανομήν ταύτην ἐπαριῶς, κατὰ τρόπον σαφῆ καί περιληπτικόν.

Ἡ χρησιμοποίησις τοιούτων χαρακτηριστικῶν μέτρων τῶν κατανομῶν συχνοτήτων στηρίζεται εἰς ὠρισμένην ὑπόθεσιν ὅσον ἀφορᾷ εἰς τό σχῆμα αὐτῶν. Ἄντί τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς, ἡ ὁποία εἰς τήν πρᾶξιν ἀπεικονίζεται γραφικῶς τήν κατανομήν συχνοτήτων, δυνάμεθα νά θεωρήσωμεν μίαν ὑποθετικὴν ἢ θεωρητικὴν κατανομήν εἰς τήν ὁποίαν ὁ ἀριθμὸς τῶν διαστημάτων τάξεως εἶναι ἄπειρος. Μία τοιαύτη κατανομή ἀπεικονίζεται γραφικῶς διὰ μιᾶς ὀμαλῆς γραμμῆς, ὡς εἶναι ἡ καμπύλη ἢ δεικνυομένη εἰς τό Διάγραμμα ΣΤ-1.

Ἡ μεταξὺ τῆς καμπύλης καί τοῦ ἄξονος τῶν Χ ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία περιλαμβάνεται μεταξὺ δύο καθέτων γραμμῶν φερομένων εἰς τά σημεία

Α καὶ Β τοῦ ἄξονος τῶν Χ, δεικνύει τὸν ἀριθμὸν τῶν συχνοτήτων αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τιμὰς τῆς μεταβλητῆς ἀπὸ Α ἕως Β. Ἡ εἰς τὸ Διάγραμμα ΣΤ-1 εἰκονιζομένη ὑποθετικὴ καμπύλη κατανομῆς ἔχει σχῆμα κώδωνος, πρὸς τὸ σχῆμα δὲ τοῦτο τείνουν συνήθως αἱ εἰς τὴν πράξιν παρατηρούμεναι κατανομαὶ τῶν εἰσοδημάτων, τῶν μισθῶν κλπ. Εἰς τὴν καμπύλην ταύτην παρατηροῦμεν ὅτι ὑφίσταται τάσις συγκεντρώσεως τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς εἰς ὠρισμένον διάστημα (ὡς εἶναι π.χ τὸ διάστημα εἰς τὴν ὑποθετικὴν κατανομήν ἢ ὅποια εἰκονίζεται εἰς τὸ Διάγραμμα ΣΤ-1), αἱ δὲ συχνότητες καθίστανται μικρότεροι ὅσον ἀπομακρυνόμεθα ἐκ τοῦ διαστήματος τούτου πρὸς τὰ δεξιά ἢ πρὸς τὰ ἀριστερά. Δέον νὰ σημειωθῇ ὅτι ἐκτός τοῦ ἀνωτέρω περιγραφέντος ὑπάρχουν καὶ ἄλλοι τύποι καμπύλων κατανομῶν, οἱ ὁ-

Διάγραμμα ΣΤ-1  
Θεωρητικὴ κατανομὴ συχνοτήτων



ποῖοι, ὅμως, ἀπαντῶνται σπανιώτερον. Εἰς τὸ Διάγραμμα ΣΤ-2 δίδονται ὠρισμένα παραδείγματα τοιούτων καμπύλων κατανομῶν συχνοτήτων, ὡς εἶναι ἡ ἔχουσα σχῆμα J, σχῆμα ἀντεστραμμένου J, σχῆμα U, ἡ διόρυφος καὶ ἡ πολυκόρυφος.

Τὰ διὰ τὴν περιγραφὴν μιᾶς κατανομῆς συχνοτήτων γενικῶς χρησιμοποιούμενα στατιστικὰ μέτρα ἀναφέρονται εἰς τὴν κεντρικὴν τάσιν καὶ θέσιν, τὴν διασποράν καὶ τὴν ἀσύμμετρίαν αὐτῆς.

#### α) Κεντρικὴ τάσις καὶ θέσις

Εἰς τὰς κατανομάς συχνοτήτων διαπιστοῦμεν τὴν ὑπαρξιν μιᾶς κεντρομόλου, τρόπον τινα, δυνάμεως, τεινούσης νὰ συγκεντρώνη τὰς παρατηρήσεις περίξ μιᾶς τιμῆς τοῦ ὑπὸ παρατήρησιν μεγέθους. Ὑπάρχει, δηλαδή, εἰς τὰς κατανομάς μία τιμὴ τῆς μεταβλητῆς, ὡς

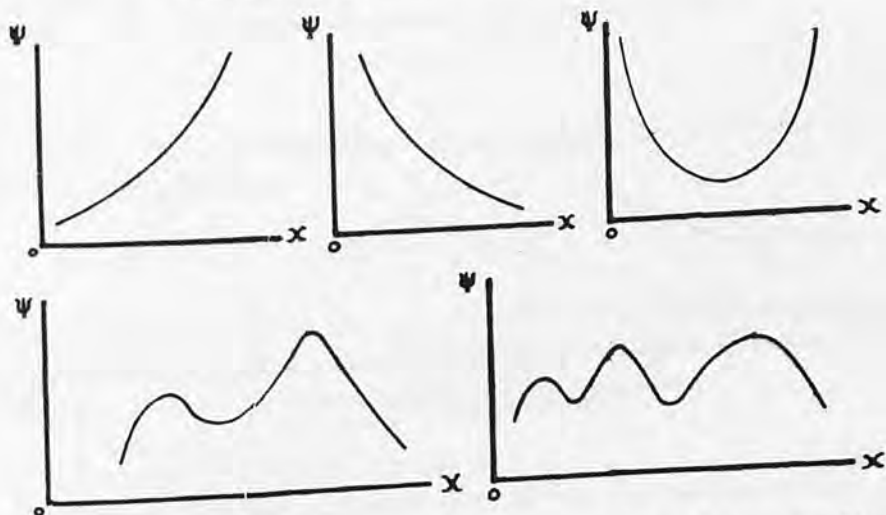
είναι ή τιμή  $K$  τής κατανομής (Α) εἰς τό Διάγραμμα ΣΤ-3, περίξ τής ὀποίας συγκεντροῦται σημαντικόν μέρος τῶν παρατηρήσεων. Ἡ τοιαύτη τιμή ἀποτελεῖ μέτρον κεντρικῆς τάσεως τής κατανομής. Παρομοίας φύσεως εἶναι καί τά μέτρα κεντρικῆς θέσεως.

β) Διασπορά τῶν παρατηρήσεων περίξ τής κεντρικῆς τάσεως

Κατανομαί ἔχουσαι τήν αὐτήν κεντρικήν τιμήν, ὡς εἶναι αἱ κατανομαί (Α) καί (Β) εἰς τό Διάγραμμα ΣΤ-3 ἢ διαφορετικῆς κεντρικῆς τιμῆς, ὡς εἶναι αἱ κατανομαί (Α) καί (Γ), δύνανται νά εἶναι πε-

### Διάγραμμα ΣΤ-2

Διάφοροι μορφαί κατανομῶν συχνοτήτων



ρισσότερον ἢ ὀλιγότερον συγκεντρωμένα. Αἱ τιμαί τής μεταβλητῆς διασπεύονται πρὸς τά πολύ χαμηλά καί πολύ ὑψηλά ἐπίπεδα ὑπό τήν ἐπίδρασιν μιᾶς φυγοκέντρου, τρόπου τινα, δυνάμεως, ἀντιρρόπου τής προκαλούσης τήν κεντρικήν τάσιν. Ὁ βαθμός συγκεντρώσεως τῶν τιμῶν τής μεταβλητῆς περί τό μέτρον κεντρικῆς τάσεως ἀποτελεῖ οὐσῶδες χαρακτηριστικόν τής κατανομής καί δίδεται ὑπό τῶν μέτρων διασπορᾶς.

γ) Ἀσυμμετρία

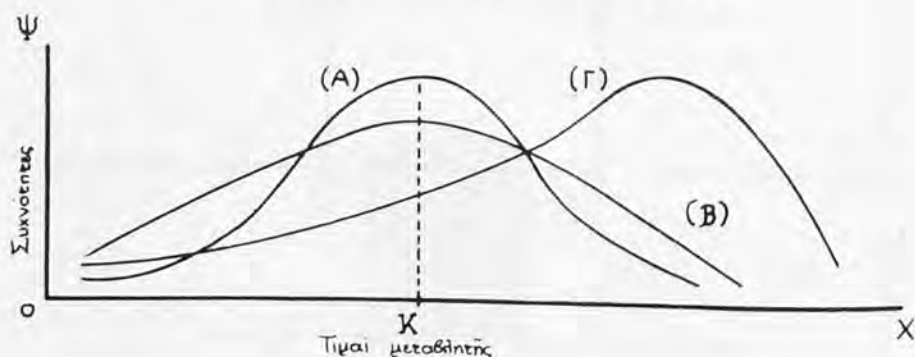
Πρὸς περιγραφὴν δεδομένης κατανομῆς ἐκτός τῶν ἀνωτέρω δύο χαρακτηριστικῶν, περὶστὰται ὡσαύτως ἀνάγκη ἐξετάσεως κατὰ πό-

σον αὕτη εἶναι συμμετρική περί τό μέτρον κεντρικῆς τάσεως, ὡς εἶναι αἱ καμπύλαι (Α) καί (Β) εἰς τό Διάγραμμα ΣΤ-3, ἢ συμπιέζεται πρὸς τήν μίαν ἢ τήν ἄλλην πλευράν, ὡς π.χ. εἶναι ἡ καμπύλη (Γ). Τοιαύτης φύσεως ποσοτικά πληροφορία παρέχονται ὑπό τῶν μέτρων ἀσυμμετρίας.

Πρέπει νά σημειωθῇ ὅτι δι' ἕκαστον ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἀναφερθέντων χαρακτηριστικῶν τῶν κατανομῶν, ἤτοι τήν κεντρικήν τάσιν, τήν διασποράν καί τήν ἀσυμμετρίαν, δύνανται νά χρησιμοποιηθοῦν διάφορα στατιστικά μέτρα, τά ὅποια στηρίζονται ἐπὶ διαφορετικῶν ὁρισμῶν. Ἐκαστον παρουσιάζει πλεονεκτήματα καί μειονεκτήματα, ἢ καταλληλότης δέ αὐτῶν εἰς ἕκαστην συγκεκριμένην περίπτωσιν κρι-

### Διάγραμμα ΣΤ-3

Παραλλαγὴ καμπύλων κατανομῆς συχνότητων



νεται ἐκ τῆς φύσεως τῶν στατιστικῶν στοιχείων καί τοῦ σκοποῦ τόν ὁποῖον ἐπιδιώκομεν διά τῆς μετρήσεως. Κατωτέρω ἐξετάζονται τά βασικώτερα καί συνηθέστερον χρησιμοποιούμενα μέτρα κεντρικῆς τάσεως, διασποράς καί ἀσυμμετρίας τῶν κατανομῶν συχνότητων.

## 2. Μέτρα κεντρικῆς τάσεως καί θέσεως

Κατά τά ἀνωτέρω λεχθέντα, μέτρον κεντρικῆς τάσεως ἢ θέσεως εἶναι ἡ τιμή τῆς μεταβλητῆς ἢ ὁποῖα εἶναι τυπική ἢ ἄλλως ἀντιπροσωπευτική ὀρισμένης σειρᾶς τιμῶν ἐκ παρατηρήσεως τῆς μεταβλητῆς ταύτης. Μέτρα κεντρικῆς τάσεως εἶναι οἱ διάφοροι μέσοι ὄροι. Ἐκ τῶν μέτρων κεντρικῆς θέσεως τό περισσότερο γνωστόν εἶναι ἡ διάμεσος ἢ ὁποῖα καί ἐξετάζεται κατωτέρω. Πρῖν, ὅμως, ὀρί-

αυθεν ταῦτα καὶ περιγράψωμεν τὴν μέθοδον ὑπολογισμοῦ των, εἶναι σκόπιμον ὅπως ἐκθέσωμεν ὀλίγα τινὰ περὶ τοῦ χρησιμοποιουμένου συμβολισμοῦ.

Διὰ τοῦ γράμματος  $X$  παρέχεται οἰαδήποτε τῶν  $n$  τιμῶν τῆς ἐξεταζομένης μεταβλητῆς :  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ , τῶν ὑποδεικτῶν  $1, 2, 3, \dots, n$  δεικνυόντων τὴν τάξιν κατὰ τὴν ὅποیان ἐμφανίζονται αἱ τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς εἰς τινὰ σειρᾶν. Τὸ σύμβολον  $\Sigma X$  σημαίνει τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν διαθεσῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς. Δηλαδή εἶναι :

$$\Sigma X = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n$$

Ὁμοίως,  $\Sigma X^2$  σημαίνει τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγῶνων τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς, δηλαδή εἶναι :

$$\Sigma X^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + \dots + X_n^2$$

$\Sigma \log X$  σημαίνει τὸ ἄθροισμα τῶν λογαριθμῶν τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς, δηλαδή εἶναι :

$$\Sigma \log X = \log X_1 + \log X_2 + \log X_3 + \dots + \log X_n$$

$\Sigma X\psi$  σημαίνει τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τὰ ὅποια προκύπτουν διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐκάστης τιμῆς τῆς μεταβλητῆς  $X$  ἐπὶ τὴν ἀντίστοιχον τιμὴν μιᾶς ἄλλης μεταβλητῆς  $\psi$ , δηλαδή :

$$\Sigma X\psi = X_1\psi_1 + X_2\psi_2 + X_3\psi_3 + \dots + X_n\psi_n$$

α) Μέσοι ὅροι

Οἱ γνωστότεροι καὶ συνηθέστερον χρησιμοποιούμενοι μέσοι ὅροι εἶναι ὁ ἀριθμητικὸς μέσος καὶ ὁ γεωμετρικὸς μέσος.

1) Ἀριθμητικὸς μέσος. Ὁ ἀριθμητικὸς μέσος μιᾶς σειρᾶς τιμῶν ἐκ παρατηρήσεως δεδομένης μεταβλητῆς ὑπολογίζεται διὰ τῆς προσθέσεως αὐτῶν καὶ κατόπιν διαφέσεως τοῦ ἄθροισματος διὰ τοῦ πλήθους των. Ὁ ἀριθμητικὸς μέσος τῶν  $n$  τιμῶν :  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  τῆς μεταβλητῆς  $X$  συμβολίζεται συνήθως διὰ τοῦ  $\bar{X}$  καὶ εἰς τὴν στατιστικὴν ἀνάλυσιν ἐκφράζεται διὰ τοῦ τύπου :

$$(\Sigma T-1) \quad \bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \frac{\Sigma X}{n}$$



$$\bar{X} = \frac{2.238,20}{36} = 62,17$$

Ἄξιον παρατηρήσεως εἶναι τὸ γεγονός ὅτι ὁ ἀριθμητικὸς μέσος τῶν ἡμερομισθίων τῶν 36 ἐργατῶν ὁ ὑπολογισθεὶς ἐκ τῆς κατανομῆς εἶναι 62,17, ἐνῶ ὁ προελθὼν ἀπ' εὐθείας ἐκ τῶν ἀρχικῶν δεδομένων εὐρέθη 61,84. Ἡ ἐν λόγω διαφορὰ ὀφείλεται εἰς τὴν ἐπίδρασιν τῆς ταξινομήσεως τῶν ἀρχικῶν δεδομένων εἰς κατανομήν κατὰ συχνότη-  
τας καὶ εἰς τὴν μὴ ἀνταπόκρισιν πρὸς τὴν πραγματικότητα τῆς ἀνω-  
τέρω γενομένης ὑποθέσεως περὶ κατανομῆς τῶν παρατηρήσεων περὶ  
τῆς κεντρικῆς τιμῆς τῶν ἐπὶ μέρος διαστημάτων τάξεως.

Εἰς τὸν τύπον (ΣΤ-3) ὑπολογισμοῦ τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου κατα-  
νομῶν συχνότητων ἐκάστη τῶν τιμῶν :  $X_1, X_2, \dots, X_k$  τῆς με-  
ταβλητῆς λαμβάνεται μεθ' ὠρισμένου συντελεστοῦ, ἴσου πρὸς τὴν συχ-  
νότητα ἐμφανίσεως αὐτῆς :  $f_1, f_2, \dots, f_k$ . Καθ' ὅμοιον τρό-  
πον ὑπολογίζεται ὁ ἀριθμητικὸς μέσος μιᾶς σειράς τιμῶν, ὡσαύτως ἐ-  
κάστη ἐξ αὐτῶν δὲν ἔχει τὴν αὐτὴν σημασίαν μὲ τὰς λοιπὰς. Εἰς τὴν  
περίπτωσιν ταύτην σταθμιζόμεν τὰς ἐπὶ μέρος τιμὰς διὰ πολλαπλα-  
σιασμοῦ αὐτῶν ἐπὶ συντελεστὰς :  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ , ἕκαστος τῶν  
ὁποῶν ἀντικατοπτρίζει τὴν σπουδαιότητα τῆς ἀντιστοίχου τιμῆς. Ὁ  
ἀριθμητικὸς μέσος, ὁ ὁποῖος ἐν προκειμένῳ καλεῖται "σταθμικὸς ἀ-  
ριθμητικὸς μέσος", ὑπολογίζεται διὰ διαίρεσεως τοῦ ἀθροίσματος  
τῶν γινομένων τούτων διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν συντελεστῶν σταθ-  
μίσεως, δηλαδὴ :

$$(ΣΤ-4) \quad \bar{X} = \frac{\sum \varphi X}{\sum \varphi}$$

Εἶναι φανερόν ὅτι εἰς περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποῖαν αἱ ἐπὶ μέρος τι-  
μαὶ τῆς μεταβλητῆς ἔχουν τὴν αὐτὴν σημασίαν, ὅλαι θὰ ἔχουν συν-  
τελεστὴν σταθμίσεως :  $\varphi=1$ , ὅποτε ὁ σταθμικὸς ἀριθμητικὸς μέσος  
καθίσταται ἀπλοῦς ἀριθμητικὸς μέσος, ὡς εἶναι ὁ διδόμενος ὑπὸ τοῦ  
ἀνωτέρω τύπου (ΣΤ-1).

Ἐφαρμογὴ τοῦ ἀνωτέρω περιγραφέντος σταθμικοῦ ἀριθμητικοῦ  
μέσου γίνεται εἰς τὸ κατωτέρω παράδειγμα : "Ἐστω ὅτι ἐκ τῆς ἐξετά-  
σεως τῶν συνθηκῶν ἀπασχολήσεως καὶ ἀμοιβῆς πέντε ἐργατῶν προέ-  
κυψαν τὰ εἰς τὸν Πίνακα ΣΤ-3 ἐμφανιζόμενα στοιχεῖα. Ἐάν πρὸς ὑ-  
πολογισμόν τῆς μέσης ὡριαίας ἀμοιβῆς τῶν πέντε ἐργατῶν χρησιμο-  
ποιήσωμεν τὸν ἀπλοῦν ἀριθμητικὸν μέσον, θὰ ἔχωμεν :

$$\bar{X} = \frac{91,35}{5} = 18,27 \text{ δραχ.}$$

Είναι, όμως, φανερόν ὅτι ἡ εὐρεθεῖσα μέση ὥριαία ἀμοιβή ἐκ 18,27δραχ. δέν ἀποτελεῖ ἀξιόπιστον μέτρον, καθ' ὅσον κατὰ τόν ὑπολογισμόν αὐτῆς δέν ἐλήφθησαν ὑπ' ὄψιν καί αἱ ὥραι ἀπασχολήσεως. Παρατηρεῖται ἐν προκειμένῳ ὅτι ἡ ἐξ 24,60 δραχ. ἀμοιβή, ἡ ὅποια, λόγω τοῦ ὕψους της, ἐπηρεάζει τόν ἀριθμητικόν μέσον περισσότερο τῶν ἄλ-

### Πίναξ ΣΤ-3

Ὑραι ἐργασίας κατὰ μήνα καί μέση ὥριαία ἀμοιβή  
πέντε ἐργατῶν

Ἑργάτης	Ὑραι ἐργασίας κατὰ μήνα	Μέση ὥριαία ἀμοιβή εἰς δραχμάς
A	150	14,50
B	200	13,00
Γ	100	15,75
Δ	50	23,50
E	40	24,60
Σύνολον	540	91,35

λων, ἐπραγματοποιήθη ὑπό τοῦ ἐργάτου E μόνον διά 40 ὥρας κατὰ μήνα, ἐνῶ ἡ ἐκ 13,00 δραχ. ἀμοιβή, ἡ ὅποια ἐπηρεάζει τόν ἀριθμητικόν μέσον ὀλιγώτερον τῶν ἄλλων, εἰσεπράχθη ὑπό τοῦ ἐργάτου B διά 200 ὥρας κατὰ μήνα. Παρίσταται, συνεπῶς, ἀνάγκη σταθμίσεως τῶν ἐπί μέρους ὥριαίων ἀμοιβῶν διά τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀντιστοιχῶν ὥρῶν ἐργασίας, ὅποτε ὁ ἀριθμητικὸς μέσος θά εἶναι, συμφώνως πρὸς τόν τύπον (ΣΤ-4):

$$\bar{X} = \frac{(14,50)(150) + (13,00)(200) + (15,75)(100) + (23,50)(50) + (24,60)(40)}{540}$$

$$= 15,74$$

Ὁ ἀριθμητικὸς μέσος, ὡς ἐκ τοῦ ἀνωτέρω περιγραφέντος τρόπου ὑπολογισμοῦ του, παρουσιάζει τὰς ἀκολουθοῦσους δύο βασικὰς ιδιότητες:

Πρῶτον, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποκλίσεων δεδομένης σειρᾶς τιμῶν ἐκ

παρατηρήσεως ώρισμένης μεταβλητῆς ἐκ τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου αὐτῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ μηδέν. Ἐχομεν, δηλαδή :

$$(ΣΤ-5) \quad \Sigma (X - \bar{X}) = 0$$

Οὕτω, ἐάν λάβωμεν τὰς τιμὰς 3, 5, 10, αἱ ὁποῖαι ἔχουν  $\bar{X}=6$ , διαπιστοῦμεν πράγματι ὅτι αἱ ἀντίστοιχοι ἀποκλίσεις  $X-\bar{X}:-3, -1, +4$  δίδουν ἄθροισμα μηδέν. (1)

Δεύτερον, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποκλίσεων δεδομένης σειρᾶς τιμῶν ἐκ παρατηρήσεως ώρισμένης μεταβλητῆς ἐκ τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου αὐτῶν εἶναι ἐλάχιστον. Ἡ ἰδιότης αὕτη σημαίνει ὅτι, ἐάν λάβωμεν τιμὴν τινα, ἔστω  $m$ , τότε τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποκλίσεων τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς ἐκ τῆς τιμῆς αὐτῆς:

$$(ΣΤ-6) \quad \Sigma (X - m)^2$$

καθίσταται ἐλάχιστον ὅταν  $m = \bar{X}$ . (2)

Χρησιμοποιοῦντες τὰς ἀνωτέρω τιμὰς 3, 5, 10, ἔχομεν, ἐφ' ὅσον  $\bar{X}=6$ :

$$\Sigma (X - \bar{X})^2 = (-3)^2 + (-1)^2 + (+4)^2 = 26$$

Ἐν προκειμένῳ τὸ ἀποτέλεσμα θὰ εἶναι πάντοτε μεγαλύτερον, ἐάν, ἀντὶ  $\bar{X}$ , θεσωμεν οἰανδήποτε ἄλλην τιμὴν εἰς τὸ  $m$ . Ἐπὶ παραδείγματι, διὰ  $m = 4$  λαμβάνομεν :

(1) Ἡ μαθηματικὴ ἀπόδειξις ἔχει ὡς ἑξῆς :

$$\Sigma (X - \bar{X}) = \Sigma X - n\bar{X} = \Sigma X - n \frac{\Sigma X}{n} = 0$$

(2) Ἡ μαθηματικὴ ἀπόδειξις ἔχει ὡς ἑξῆς : Ἐξισοῦμεν τὴν παράγωγον (ὡς πρὸς  $m$ ) τοῦ ἀθροίσματος :

$$\Sigma (X - m)^2$$

πρὸς τὸ μηδέν καὶ ἐν συνεχείᾳ εὐρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ  $m$  ἢ ὁποῖα καθιστᾷ τὸ ἐν λόγῳ ἄθροισμα ἐλάχιστον :

$$\frac{d(\Sigma (X - m)^2)}{dm} = 2\Sigma (X - m) = 0$$

$$\text{ἢ} \quad \Sigma X - nm = 0$$

$$\text{ἢ} \quad m = \frac{\Sigma X}{n} = \bar{X}$$

$$\Sigma (X-5)^2 = (-1)^2 + (+1)^2 + (+6)^2 = 38$$

διὰ  $m = 8$ , ἔχομεν :

$$\Sigma (X-8)^2 = (-5)^2 + (-3)^2 + (+2)^2 = 38 \text{ κ.ο.κ.}$$

Ὡς ἐκ τῆς ιδιότητος τοῦ αὐτῆς ὁ ἀριθμητικός μέσος, ὡς ὠρίσθη ἀνωτέρω, καλεῖται καὶ μέτρον κεντρικῆς τάσεως "τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων".

**II) Γεωμετρικός μέσος.** Ὁ γεωμετρικός μέσος ἀποτελεῖ παραλλαγήν τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου καὶ παρίσταται διὰ τοῦ γράμματος  $G$ . Οὗτος ὑπολογίζεται διὰ πολλαπλασιασμοῦ, ἀντὶ προσθέσεως, τῶν  $n$  διδομένων τιμῶν ἐκ παρατηρήσεως ὠρισμένης μεταβλητῆς :  $X_1, X_2, \dots, X_n$  καὶ κατόπιν ἐξαγωγῆς τῆς  $n$  ρίζης τοῦ γινομένου. Δηλαδή εἶναι :

$$(ΣΤ-7) \quad G = \sqrt[n]{X_1 X_2 \dots X_n}$$

Εἰς τὴν πρᾶξιν ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ γεωμετρικοῦ μέσου γίνεται διὰ χρησιμοποίησεως τῶν λογαριθμῶν. Συμφώνως πρὸς μίαν ιδιότητα αὐτῶν, ὁ λογάριθμος τῆς  $n$  ρίζης ἑνὸς ἀριθμοῦ ἰσοῦται πρὸς τὴν λήκον τοῦ λογαριθμοῦ τοῦ ἀριθμοῦ διὰ τοῦ πλήθους τῶν τιμῶν  $n$ . Οὕτω, ἐάν εἰς τὸν τύπον (ΣΤ-7) θεωρήσωμεν τὸ γινόμενον :  $X_1 X_2 \dots X_n$  ὡς ἓνα ἀριθμὸν, θά ἔχωμεν :

$$\log G = \frac{\log (X_1 X_2 \dots X_n)}{n}$$

Ἐπειδὴ, ὅμως, συμφώνως πρὸς ἄλλην ιδιότητα τῶν λογαριθμῶν ἀναφερθεῖσαν ἀνωτέρω, εἶναι :

$$\log (X_1 X_2 \dots X_n) = \log X_1 + \log X_2 + \dots + \log X_n = \Sigma \log X$$

λαμβάνομεν :

$$(ΣΤ-8) \quad \log G = \frac{\Sigma \log X}{n}$$

Δηλαδή, ὁ λογάριθμος τοῦ γεωμετρικοῦ μέσου μιᾶς σειρᾶς τιμῶν ἰ-

σούται πρὸς τὸν ἀριθμητικὸν μέσον τῶν λογαριθμῶν τῶν τιμῶν τούτων.

Οὕτω, πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ γεωμετρικοῦ μέσου τῶν ἡμερομισθίων τῶν 36 ἐργατῶν, τὰ ὅποια ἐδόθησαν ἀνωτέρω, εὐρίσκομεν κατ' ἀρχὴν τοὺς λογαριθμοὺς αὐτῶν, οἱ ὅποιοι ἀναγράφονται εἰς τὸν Πίνακα ΣΤ-4. Τὸ ἄθροισμα τῶν λογαριθμῶν τούτων εἶναι :  
 $\Sigma \log X = 64,11986$ . Συνεπῶς,

$$\log G = \frac{64,11986}{36} = 1,78111$$

Ἐκ τῶν λογαριθμικῶν πινάκων λαμβάνομεν ὅτι ὁ λογάριθμος 1,78111 ἀντιστοιχεῖ εἰς φυσικὸν ἀριθμὸν 60,41. Δηλαδή, ἔχομεν :

$$G = 60,41$$

#### Πίναξ ΣΤ - 4

Λογάριθμοι τῶν ἡμερομισθίων 36 ἐργατῶν ἐνὸς ἐργοστασίου  
 (Στοιχεῖα Πίνακος ΣΤ - 1)

1,77670	1,75511	1,75967	1,78533	1,47857	1,63749
1,87390	1,92583	1,72509	1,76864	1,79239	1,76492
1,91803	1,85370	1,91487	1,69373	1,75282	1,80550
1,77085	1,67394	1,85065	1,80618	1,70757	1,73400
1,56467	1,84819	1,78675	1,81624	1,81358	1,99782
1,79934	1,76343	1,77887	1,74429	1,86034	1,82086

Ὅσακις τὰ δεδομένα παρέχονται ὑπὸ μορφήν κατανομῆς κατὰ συχνότητος ὑπάρχει τρόπος ὑπολογισμοῦ τοῦ γεωμετρικοῦ μέσου ἀνάλογος πρὸς τὸν ἀνωτέρω περιγραφέντα προκειμένου περὶ τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου. Δὲν θὰ προβῶμεν, ὅμως, εἰς περιγραφὴν αὐτοῦ καθ' ὅσον εἰς τὰς συνήθεις πρακτικὰς ἐργασίας ὁ γεωμετρικὸς μέσος χρησιμοποιεῖται κυρίως εἰς ἀπλᾶς σειρὰς στατιστικῶν δεδομένων.

#### β) Διάμεσος καὶ τεταρτημόρια

Πρὸς προσδιορισμὸν τῆς διαμέσου εἰς τινὰ σειρὰν ἀρχικῶν δεδομένων, τάσσομεν ταῦτα κατ' αὐξοῦσαν φυσικὴν τάξιν μεγέθους. Εἰς τὴν αὕτω προκύπτουσαν νέαν σειρὰν ἢ διάμεσος, παρισταμένη διὰ τοῦ γράμματος  $M$ , ὀρίζεται ὡς ἡ τιμὴ ἐκείνη τῆς μεταβλητῆς ἢ

ὅποια κατέχει τὴν κεντρικὴν θέσιν. Ἐπομένως, τῆς διαμέσου προηγούμενα τὰ 50% τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς καὶ ἔπονται τὰ ὑπόλοιπα 50% αὐτῶν. Ἐνῶ ἡ διάμεσος ὑποδιαφεῖ τὸν συνολικὸν ἀριθμὸν τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς εἰς δύο ἰσοπληθεῖς ομάδας, τὰ τεταρτημόρια ὑποδιαφοῦν τὰς διαθεσίμους τιμὰς τῆς μεταβλητῆς, διατεταγμένας πάντοτε κατ'αύξουσαν τάξιν μεγέθους, εἰς τέσσαρας ἰσοπληθεῖς ομάδας. Τὸ πρῶτον τεταρτημόριον, συμβολιζόμενον διὰ  $Q_1$ , εἶναι ἡ τιμὴ ἐκεῖνη τῆς μεταβλητῆς, πρὸ τῆς ὅποιας εὐρίσκονται τὰ 25% τοῦ συνόλου τῶν μετρήσεων καὶ μετ' αὐτὴν τὰ 75% τούτων. Τὸ τρίτον τεταρτημόριον, συμβολιζόμενον διὰ  $Q_3$ , εἶναι ἡ τιμὴ τῆς μεταβλητῆς, πρὸ τῆς ὅποιας εὐρίσκονται τὰ 75% τοῦ συνόλου τῶν μετρήσεων καὶ μετ' αὐτὴν τὰ 25% τοῦτων.

Συμφώνως πρὸς τοὺς ἀνωτέρω ὁρισμούς εἰς μίαν σειρὰν ἐξ ἑνδεκα τιμῶν, διατεταγμένων κατ'αύξουσαν τάξιν μεγέθους, τὸ πρῶτον τεταρτημόριον ( $Q_1$ ), ἡ διάμεσος ( $M$ ) καὶ τὸ τρίτον τεταρτημόριον ( $Q_3$ ) ἐντοπίζονται εἰς τὴν 3ην, ὅην καὶ 9ην τιμὴν ἀντιστοίχως. Οὕτω, ὑπάρχουν δύο τιμαὶ πρὸ τοῦ  $Q_1$ , δύο τιμαὶ μεταξύ  $Q_1$  καὶ  $M$ , δύο τιμαὶ μεταξύ  $M$  καὶ  $Q_3$  καὶ δύο τιμαὶ μετὰ τὸ  $Q_3$ . Ἐάν ἀντί ἑνδεκα, ἡ διδομένη σειρὰ περιλαμβάνῃ δώδεκα τιμὰς, τότε τὸ πρῶτον τεταρτημόριον θὰ πρέπει νὰ ὀρισθῇ μεταξύ τῆς 3ης καὶ τῆς 4ης τιμῆς, ἡ διάμεσος μεταξύ τῆς 6ης καὶ τῆς 7ης καὶ τὸ τρίτον τεταρτημόριον μεταξύ τῆς 9ης καὶ τῆς 10ης. Ὁ γενικὸς κανὼν διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς θέσεως τῆς διαμέσου καὶ τῶν δύο τεταρτημορίων εἰς δεδομένην σειρὰν  $n$  τιμῶν ἐκ παρατηρήσεως τῆς μεταβλητῆς, διατεταγμένων κατ'αύξουσαν τάξιν μεγέθους, εἶναι :

(ΣΤ-9) Τὸ πρῶτον τεταρτημόριον ( $Q_1$ ) ἐντοπίζεται εἰς τὴν θέσιν :

$$\frac{(N + 1)}{4}$$

(ΣΤ-10) Ἡ διάμεσος ( $M$ ) ἐντοπίζεται εἰς τὴν θέσιν :  $\frac{(N + 1)}{2}$

(ΣΤ-11) Τὸ τρίτον τεταρτημόριον ( $Q_3$ ) ἐντοπίζεται εἰς τὴν θέσιν :

$$\frac{3(N + 1)}{4}$$

Δέον νὰ σημειωθῇ ὅτι, ἔάν κατὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς θέσεως τῶν  $Q_1$ ,  $M$  καὶ  $Q_3$  προκύπτουν δεκαδικοὶ ἀριθμοί, οὗτοι στρογγυλεύονται εἰς τὴν πλησιεστέρην μονάδα, ἐκτός τῆς περιπτώσεως κατὰ τὴν ὅποیان ἔχομεν  $1/2$  ὅποτε λαμβάνομεν τὸ ἡμίθροισμα τῶν τιμῶν

αί ὅποιοι κατέχουν θέσεις ἀντιστοιχοῦσας εἰς τοὺς δύο συνεχόμε-  
νους ἀκεραίους.

Συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω ἐκτεθέντα, πρὸς προσδιορισμὸν τῆς  
διαμέσου καὶ τῶν δύο τεταρτημορίων τῆς σειρᾶς τῶν ἡμερομίσθων  
τῶν 36 ἐργατῶν, τάσσομεν κατ' ἀρχὴν ταῦτα κατ' αὐξουσαν τάξιν με-  
γέθους, ὡς δεικνύεται εἰς τὸν Πίνακα ΣΤ-5.

Πίναξ ΣΤ-5

Ἡμερομίσθια 36 ἐργατῶν ἐνὸς ἐργοστασίου εἰς δραχμᾶς (Στοιχεῖα  
Πίνακος ΣΤ - 1) διατεταγμένα κατ' αὐξουσαν τάξιν μεγέθους

30,1	53,1	58,0	61,0	65,1	72,5
36,7	54,2	58,2	61,2	65,5	74,8
43,4	55,5	58,7	62,0	66,2	82,2
47,2	56,6	59,0	63,0	70,5	82,8
49,4	56,9	59,8	63,9	70,9	84,3
51,0	57,5	60,1	64,0	71,4	99,5

Δεδομένου ὅτι ἔχομεν 36 παρατηρήσεις, ἡ θέσις τοῦ πρώτου τε-  
ταρτημορίου δίδεται ὑπὸ :  $\frac{36+1}{4} = \frac{37}{4} = 9,25$ , δηλαδή τοῦτο δίδε-

ται ὑπὸ τῆς ἐννάτης τιμῆς, ἡ ὁποία εἶναι  $Q_1 = 55,50$ . Ἡ θέσις  
τῆς διαμέσου δίδεται ὑπὸ :  $\frac{36+1}{2} = \frac{37}{2} = 18,5$ , δηλαδή ἡ διάμεσος

δίδεται ὑπὸ τοῦ ἡμισθροσμάτος τῆς 18ης καὶ 19ης τιμῆς. Οὕτω, ἔ-  
χομεν :  $M = \frac{60,1 + 61,0}{2} = 60,55$ . Τέλος, ἡ θέσις τοῦ τρίτου

τεταρτημορίου δίδεται ὑπὸ :

$\frac{3(36+1)}{4} = \frac{111}{4} = 27,75$ , δηλαδή τοῦτο δίδεται ὑπὸ τῆς 28ης  
τιμῆς, ἡ ὁποία εἶναι :  $Q_3 = 70,50$ . Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ διάμε-  
σον ἡμερομίσθιον : 60,55 ἀπὸ ἀπόψεως θέσεως εὐρίσκεται εἰς τὸ  
κέντρον τῆς σειρᾶς τῶν ἡμερομίσθων, δηλαδή ὑπάρχουν 18 ἐργά-  
ται οἱ ὅποιοι λαμβάνουν ἡμερομίσθιον μικρότερον τῶν 60,55 δραχ.  
καὶ 18 ἐργάται λαμβάνοντες μεγαλύτερον τῶν 60,55 δρχ. Ἐπίσης,  
ὑπάρχουν 8 ἐργάται (δηλαδή τὸ 25%) λαμβάνοντες ἡμερομίσθιον  
κατώτερον τῶν 55,50 δραχ., τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ πρῶτον  
τεταρτημόριον καὶ 28 ἐργάται (δηλαδή τὸ 75%) λαμβάνοντες ἀνώ-  
τερον τούτου. Τέλος, ὑπάρχουν 28 ἐργάται (δηλαδή τὸ 75%) λαμ-  
βάνοντες ἡμερομίσθιον κατώτερον τῶν 70,50 δραχ., τὸ ὁποῖον ἀν-

τιστοιχει εἰς τό τρίτον τεταρτημόριον καί 8 ἔργαται ( δηλαδή τό 25% ) λαμβάνοντες ἡμερομισθίον ἀνώτερον τούτου .

Ὅταν τά στατιστικά δεδομένα δίδωνται ὑπό μορφήν κατανομῆς συχνότητων, ἡ θέσις τῆς διαμέσου ἢ τῶν τεταρτημορίων ἐντοπίζεται συνήθως ἐντός ὠρισμένου διαστήματος τάξεως, δι' ὃ καὶ δέν εἶναι δυνατή ἡ εὐρεσις τῆς ἀκριβοῦς τιμῆς αὐτῶν . Τοῦτο, διότι ἡ ταξινομησις τῶν ἀρχικῶν τιμῶν κατὰ συχνότητας συνεπάγεται ἀπώλειαν πληροφοριῶν περὶ τοῦ ἀκριβοῦς ὕψους τῶν ἐπὶ μέρος μετρήσεων . Οὕτω, ἡ κατὰ προσέγγισιν ἐκτίμησις τῆς διαμέσου καὶ τῶν τεταρτημορίων στηρίζεται ἀναγκάως ἐπὶ τῆς ὑποθέσεως ὅτι αἱ τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς, αἱ ἐμπίπτουσαι εἰς ἕναστον διάστημα τάξεως, κατανέμονται ὁμοιομόρφως μεταξύ τοῦ κατωτέρου καὶ ἀνωτέρου ὀρίου αὐτοῦ . Ὁ γενικός κανὼν διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς θέσεως τῆς διαμέσου καὶ τῶν δύο τεταρτημορίων εἰς τινα κατανομήν  $n$  τιμῶν μιᾶς μεταβλητῆς εἶναι :

(ΣΤ-12) Τό πρῶτον τεταρτημόριον ( $Q_1$ ) ἐντοπίζεται εἰς τὴν θέσιν:  $\frac{N}{4}$

(ΣΤ-13) Ἡ διάμεσος ( $M$ ) ἐντοπίζεται εἰς τὴν θέσιν :  $\frac{N}{2}$

(ΣΤ-14) Τό τρίτον τεταρτημόριον ἐντοπίζεται εἰς τὴν θέσιν :  $\frac{3N}{4}$

### Πίναξ ΣΤ - 6

Ὑπολογισμὸς τῆς διαμέσου καὶ τῶν δύο τεταρτημορίων τῆς κατανομῆς τῶν ἡμερομισθίων 36 ἔργατων (Στοιχεῖα Πίνακος ΣΤ - 2)

A/A διαστήματος τάξεως	Διάστημα τάξεως (εἰς δραχμ.)	Συχνότης	Ἀθροιστικὴ συχνότης
1	30,0 - 39,9	2	2
2	40,0 - 49,9	3	5
3	50,0 - 59,9	12	17
4	60,0 - 69,9	10	27
5	70,0 - 79,9	5	32
6	80,0 - 89,9	3	35
7	90,0 - 99,9	1	36

Κατωτέρω περιγράφεται ἡ διαδικασία προσδιορισμοῦ τῆς διαμέσου καὶ τῶν δύο τεταρτημορίων τῆς κατανομῆς τῶν ἡμερομισθίων 36 ἔργατων, ἡ ὁποία περιέχεται εἰς τὸν ἀνωτέρω Πίνακα ΣΤ-2. Πρὸς



διευκλυνσιν τῶν ἀπαιτουμένων ὑπολογισμῶν χρησιμοποιοῦμεν ἀθροιστικὰ συχνότητος, αἱ ὁποῖαι ἀναγράφονται εἰς τὸν Πίνακα ΣΤ-6.

Ἐπειδὴ  $n = 36$ , ἡ διάμεσος τῆς κατανομῆς εἶναι ἡ 18ῃ τιμῇ, ἡ ὁποία ἐντοπίζεται εἰς τὸ διάστημα τάξεως 60,0-69,9. Τὸ διάστημα τοῦτο περιέχει 10 τιμὰς καὶ ἡ διάμεσος δίδεται ὑπὸ τῆς πρώτης ἐξ αὐτῶν, καθ' ὅσον τὰ προηγούμενα διαστήματα τάξεως περιέχουν συνολικῶς 17 παρατηρήσεις. Δεδομένου ὅτι, καθ' ὑπόθεσιν, ἡ 17ῃ παρατήρησις ἔχει τιμὴν 60, θὰ πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὴν τιμὴν ταύτην μέρος τοῦ ἐπομένου διαστήματος 60,0-69,9 (θεωρουμένου ἐνταῦθα χάριν εὐκολίας ὡς ἔχοντος εὖρος 10) ἀνάλογον πρὸς τὴν σχέσιν μεταξὺ τῆς θέσεως τῆς διαμέσου καὶ τῆς συχνότητος τοῦ διαστήματος τούτου, δηλαδὴ πρὸς 1/10. Οὕτω, ἔχομεν :

$$M = 60 + 10 \frac{1}{10} = 61,0$$

Ὅμοιως, τὰ τεταρτημόρια προσδιορίζονται ὡς κάτωθι :

$$Q_1 = 50 + 10 \frac{4}{12} = 53,3$$

$$\text{καὶ} \quad Q_3 = 70,0$$

### Πίναξ ΣΤ-7

Σύγκρισις ὑπολογισθεισῶν τιμῶν τῆς διαμέσου καὶ τῶν δύο τεταρτημορίων τῶν ἡμερομισθίων 36 ἐργατῶν (Εἰς δραχμάς)

Μέτρα	Ἐκ τῶν ἀρχικῶν δεδομένων	Ἐκ τῆς κατανομῆς
$Q_1$	55,50	53,30
M	60,55	61,00
$Q_3$	70,50	70,00

Ὡς προκύπτει ἐκ τοῦ Πίνακος ΣΤ-7, αἱ οὕτω ἐκτιμηθεῖσαι τιμαί, συγκρινόμεναι πρὸς τὰς ὑπολογισθείσας ἀπ' εὐθείας ἐκ τῶν ἀρχικῶν δεδομένων, παρουσιάζουν διαφορὰς τινὰς, αἱ ὁποῖαι ὀφείλονται εἰς

τόν τρόπον ταξινομήσεως καί εἰς τήν γενομένην ὑπόθεσιν περὶ ὁμοιομόρφου καί συμμετροῦ κατανομῆς τῶν ἀρχικῶν ἐκ παρατηρήσεως τιμῶν ἐντός τῶν διαστημάτων τάξεως.

γ) Κύρια χαρακτηριστικά τῶν μέσων ὄρων καί τῆς διαμέσου

Ἐνωτέρω ἐδείχθη ὅτι ὠρισμένη σειρά τιμῶν μιᾶς μεταβλητῆς δύναται νά περιγραφῆ διά διαφόρων μέτρων κεντρικῆς τάσεως ἢ θέσεως, ὡς εἶναι ὁ ἀριθμητικός μέσος, ὁ γεωμετρικός μέσος καί ἡ διάμεσος. Αἱ τιμαί, ὅμως, τῶν μέτρων τούτων ὑπολογιζόμεναι ἐκ κατανομῆς συχνοτήτων παρουσιάζουν διαφοράς ἔναντι ἐκείνων αἰ ὁ-

### Πίναξ ΣΤ-8

Σύγκρισις ὑπολογισθεισῶν τιμῶν διαφόρων μέτρων κεντρικῆς τάσεως τῶν ἡμερομισθίων 36 ἐργατῶν (Εἰς δραχμάς)

Μέτρον κεντρικῆς τάσεως	Ἐκ τῶν ἀρχικῶν δεδομένων	Ἐκ τῆς κατανομῆς (Α)	Ἐκ τῆς κατανομῆς (Β)
Ἀριθμητικός μέσος	61,84	62,17	61,96
Γεωμετρικός μέσος	60,41	...	...
Διάμεσος . . .	60,55	61,00	61,25

ποῖαι προκύπτουν ἀπ' εὐθείας ἐκ τῶν ἀρχικῶν δεδομένων. Αἱ διαφοραὶ αὐταί εἰς τό παράδειγμα τῶν ἡμερομισθίων τῶν 36 ἐργατῶν τοῦ Πίνακος ΣΤ-1 δίδονται εἰς τόν Πίνακα ΣΤ-8, εἰς τόν ὁποῖον ἡ ἤδη χρησιμοποιηθεῖσα κατανομή τοῦ Πίνακος ΣΤ-2 ἀναγράφεται ὡς κατανομή (Α).

Δέον νά σημειωθῆ, ἐν τούτοις, ὅτι τά ἀρχικά δεδομένα τῶν ἡμερομισθίων δύναται νά ταξινομηθοῦν ὑπό μορφήν κατανομῆς συχνοτήτων κατὰ διαφόρους τρόπους, ὡς εἶναι π.χ. ὁ ἀκολουθούμενος εἰς τόν Πίνακα ΣΤ-9, ἔνθα τά διαστήματα τάξεως εἶναι ἄνισα. Ὁ ἀριθμητικός μέσος καί ἡ διάμεσος τῆς κατανομῆς τοῦ Πίνακος ΣΤ-9 περιέχονται εἰς τήν στήλην ὑπό τόν τίτλον "Κατανομή (Β)" τοῦ Πίνακος ΣΤ-8. Παρατηροῦμεν, ὅτι, ὅταν ἀλλάσῃ ὁ τρόπος ταξινομήσεως τῶν ἀρχικῶν δεδομένων, τά μέτρα κεντρικῆς τάσεως ἢ θέσεως λαμβάνουν διαφορετικὰς τιμάς. Αἱ διαφοραὶ αὐταί τείνουν νά γίνωνται μικρότεροι ὅσον τό χρησιμοποιούμενον δεῖγμα τῶν παρατηρήσεων εἶναι πολυπληθέστερον.

Εἰς οἰανδήποτε σειράν θετικῶν τιμῶν :  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ὁ γεωμετρικὸς μέσος εἶναι πάντοτε μικρότερος ἢ ἴσος πρὸς τὸν ἀριθμητικὸν μέσον (1). Ἰσότης μεταξύ τῶν δύο τούτων μέτρων κεντρικῆς τάσεως ὑπάρχει ὡσάν τις αἱ τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς εἶναι ἴσαι μεταξύ των, δηλαδή :

$$X_1 = X_2 = \dots = X_n$$

Παρομοία σχέσις δὲν ὑφίσταται διὰ τὴν διάμεσον, ἣ ὅποια δύναται νὰ ἔχη τιμὴν μικροτέραν ἢ μεγαλυτέραν ἐκείνης τοῦ μέσου ἀριθμητικοῦ ἢ τοῦ μέσου γεωμετρικοῦ. Κατὰ τὸν ὑπολογισμόν τῶν δύο τελευταίων μέτρων κεντρικῆς τάσεως λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν ὅλαι αἱ δια-

### Πίναξ ΣΤ-9

Κατανομή κατὰ συχνότητος τῶν ἡμερομισθίων  
36 ἔργατῶν

Διάστημα τάξεως (εἰς δραχ.)	Συχνότης
30,0 - 34,9	1
35,0 - 39,9	1
40,0 - 44,9	1
45,0 - 54,9	5
55,0 - 64,9	16
65,0 - 74,9	8
75,0 - 99,9	4
Σύνολον	36

- (1) Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἔστωσαν αἱ τιμαὶ  $\alpha$  καὶ  $\beta$ . Εἶναι φανερόν ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς διαφορᾶς τῶν τετραγωνικῶν ριζῶν τῶν τιμῶν αὐτῶν θά εἶναι μεγαλύτερον τοῦ μηδενός, ἐάν  $\alpha \neq \beta$ , ἴσον δὲ πρὸς τὸ μηδέν, ἐάν  $\alpha = \beta$ . Ἐπομένως, θά ἔχωμε γενικῶς :

$$(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2 \geq 0$$

$$\text{ἢ } \alpha + \beta - 2\sqrt{\alpha\beta} \geq 0$$

$$\text{ἢ } \alpha + \beta \geq 2\sqrt{\alpha\beta}$$

$$\text{καὶ } \frac{\alpha + \beta}{2} \geq \sqrt{\alpha\beta}$$

Ἄλλὰ  $\frac{\alpha + \beta}{2}$  δεικνύει τὸν ἀριθμητικὸν μέσον τῶν τιμῶν  $\alpha$  καὶ  $\beta$  καὶ  $\sqrt{\alpha\beta}$  τὸν γεωμετρικὸν μέσον αὐτῶν.

θέσιμοι τιμαί τῆς μεταβλητῆς, ἐνῶ ἡ ἐκτίμησις τῆς διαμέσου στήριζεται εἰς τὰς τιμάς αἱ ὁποῖαι κείνται εἰς τό μέσον τοῦ εὗρου τῶν δεδομένων. Ὡς ἐκ τούτου, ὁ ἀριθμητικός μέσος καί ὁ γεωμετρικός μέσος ἐπηρεάζονται περισσότερο ἀπό τὰς ἀκράτας τιμάς ἢ ἡ διάμεσος. Ὡς προκύπτει ἐκ τοῦ Πίνακος ΣΤ-10, ἡ προσθήκη ὑψηλῶν τιμῶν εἰς τινα σειράν ἀριθμητικῶν δεδομένων αὐξάνει σημαντικῶς τόν ἀριθμητικόν μέσον, ὀλιγώτερον τόν γεωμετρικόν μέσον καί πολύ ὀλίγον τήν διάμεσον. Ἐπίσης, ἡ προσθήκη χαμηλῶν τιμῶν μειώνει σημαντικῶς τόν γεωμετρικόν μέσον, ὀλιγώτερον τόν ἀριθμητικόν μέσον καί πολύ ὀλίγον τήν διάμεσον.

Πίναξ ΣΤ-10

Ἐπίδρασις τῶν ἀκράτων τιμῶν ἐπὶ τοῦ ὕψους τῶν μέτρων κεντρικῆς τάσεως

Τιμαί μεταβλητῆς	Ἀριθμητικός μέσος	Γεωμετρικός μέσος	Διάμεσος
2, 3, 4, 8	4,25	3,72	3,50
2, 3, 4, 8, 20	7,40	5,21	4,00
20, 24, 25, 26	23,75	23,63	24,50
2, 20, 24, 25, 26	19,40	14,42	24,00

Ἐκ τῶν ἐξετασθέντων μέτρων κεντρικῆς τάσεως καί θέσεως, ὁ ἀριθμητικός μέσος καί ἡ διάμεσος δύνανται νά ὑπολογισθοῦν καί νά ἐρμηνευθοῦν εὐκόλως. Ἡ ἐπιλογή τοῦ καταλλήλου ἐκ τῶν μέτρων τούτων εἰς ἐκάστην συγκεκριμένην περίπτωσιν ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ σκοποῦ τόν ὁποῖον ἐπιδιώκομεν. Ἐάν πρέπει νά δοθῇ πλήρης στάθμισις εἰς τὰς ἀκράτας τιμάς προτιμῶμεν τόν ἀριθμητικόν μέσον, ἄλλως χρησιμοποιοῦμεν τήν διάμεσον. Πέραν τούτου, ὁ ἀριθμητικός μέσος πλεονεκεῖ ἔναντι τῆς διαμέσου, καθ' ὅσον δύναται νά τύχη ἀλγεβρικῶν χειρισμῶν. Ἐπὶ παραδείγματι, ὅταν ἔχωμεν τούς ἀριθμητικούς μέσους ἐπὶ μέρους ὁμάδων τιμῶν μιᾶς μεταβλητῆς, ὁ γενικός ἀριθμητικός μέσος τοῦ συνόλου αὐτῶν ὑπολογίζεται ὡς ἀριθμητικός μέσος τῶν μέσων τῶν ὁμάδων. Σημειωτέον, ὅτι, ἐάν ὁ ἀριθμὸς τῶν παρατηρήσεων ποικίλλῃ μεταξύ τῶν ἐπὶ μέρους ὁμάδων, χρησιμοποιεῖται σταθμικός ἀριθμητικός μέσος. Τοιοῦτοι χειρισμοί δέν δύνανται νά γίνουν εἰς τήν διάμεσον. Ἐπὶ παραδείγματι, ἡ διάμεσος δεδομένης σειράς τιμῶν μιᾶς μεταβλητῆς δέν δύναται νά προκύψῃ ὡς μέσος ἢ διάμεσος τῶν διαμέσων ἐπὶ μέρους ὁμάδων τῶν τιμῶν τούτων.

Ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὴν σύγκρισιν μεταξύ τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου καὶ τοῦ γεωμετρικοῦ μέσου, παρατηρεῖται ὅτι ἀμφότεροι δύνανται νὰ τύχουν ἀλγεβρικοῦ χειρισμῶν, ἀλλὰ ὁ ἀριθμητικὸς μέσος εἶναι ὁ συνηθέστερον χρησιμοποιούμενος, διότι ὑπολογίζεται καὶ ἐρμηνεύεται εὐκόλως. Ἐξ ἄλλου, ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ γεωμετρικοῦ μέσου εἶναι ἀδύνατος, ὡς ἂν τὰ δεδομένα περιέχουν ἀρνητικὰς τιμὰς ἢ μὴν τουλάχιστον μηδενικὴν τιμὴν.

### 3. Μέτρα διασπορᾶς

Τὰ μέτρα κεντρικῆς τάσεως καὶ θέσεως καθ' ἑαυτὰ, ἀποτελοῦν μὲν ἀντιπροσωπευτικὰς τιμὰς δεδομένης κατανομῆς συχνότητων, δὲν παρέχουν, ὅμως, πλήρη εἰκόνα ταύτης, καθ' ὅσον δὲν δίδουν πληροφορίας περὶ τοῦ βαθμοῦ συγκεντρώσεως τῶν παρατηρήσεων. Εἰς περιπτώσεις μάλιστα κατὰ τὰς ὁποίας αἱ τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς παρουσιάζουν μεγάλην διασποράν ἢ σημασία τῶν μέτρων κεντρικῆς τάσεως ὡς ἀντιπροσωπευτικῶν τιμῶν τῆς κατανομῆς εἶναι λίαν περωρισμένη.

Τὸ συνηθέστερον χρησιμοποιούμενα μέτρα διασπορᾶς εἶναι τὸ εὖρος μεταβολῆς, ἡ τεταρτημοριακὴ ἀπόκλισις, ἡ μέση ἀπόκλισις καὶ ἡ μέση ἀπόκλισις τετραγώνου, τὰ ὅποια καὶ ἐξετάζονται κατωτέρω. Ἐν τούτων, τὸ εὖρος μεταβολῆς εἶναι γενικὸν μέτρον διασπορᾶς, ἡ τεταρτημοριακὴ ἀπόκλισις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν διάμεσον, ἐνῶν τὰ δύο τελευταῖα συνδυάζονται μὲ τὸν ἀριθμητικὸν μέσον.

#### α) Εὖρος μεταβολῆς

Τὸ "εὖρος μεταβολῆς" εἶναι τὸ ἀπλούστερον τῶν μέτρων διασπορᾶς, δίδεται δέ, ὡς καὶ ἀνωτέρω ἐλέχθη, ὑπὸ τῆς διαφορᾶς μεταξύ τῆς μεγίστης καὶ τῆς ἐλαχίστης τιμῆς τῶν δεδομένων. Ἐπὶ παραδείγματι, τὸ εὖρος μεταβολῆς τῶν ἡμερομισθίων τῶν 36 ἐργατῶν τοῦ Πίνακος ΣΤ-1 εἶναι :

$$E = 99,5 - 30,1 = 69,4$$

Ἄλλ' ὁ ἀριθμὸς 69,4 δὲν παρέχει ἐνδειξεις περὶ τοῦ ἐάν τὰ ἐπίμειρους ἡμερομισθία κυμαίνωνται ἀπὸ 50,0 ἕως 119,4 δραχ. ἢ ἀπὸ 10,0 ἕως 79,4 δραχ. Διὰ τοῦτο, ὡς ἂν τὸ μέτρον διασπορᾶς χρησιμοποιεῖται τὸ εὖρος τῆς μεταβολῆς, σκόπιμον εἶναι ὅπως ἀναφέρονται καὶ αἱ τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς (μεγίστη καὶ ἐλαχίστη) ὑπὸ τῶν ὁποίων τοῦτο προσδιορίζεται.

Τό εύρος μεταβολῆς δέν θεωρεῖται ἀξιόπιστον μέτρον διασπορᾶς, διότι βασίζεται εἰς δύο μόνον ἀκράτας τιμὰς τῆς μεταβλητῆς, αἱ ὁποῖαι ἐνδέχεται νά ἔχουν ἀσύνηθες μέγεθος. Ἐπί πλέον, κατά τόν ὑπολογισμόν του δέν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν ἡ μεταξύ τῆς μεγίστης καί τῆς ἐλαχίστης τιμῆς ὑφισταμένη κατανομή τῶν ὑπολοίπων, Ἐπί παραδείγματι, ἀμφότεραι αἱ κατωτέρω ἀναγραφόμενα σειραϊκῶν ἔχουν εύρος μεταβολῆς :  $100 - 10 = 90$  :

10, 10, 11, 12, 12, 12, 13, 14, 15, 100  
10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100

Ἄλλά εἰς τήν πρώτην ἐκ τούτων ἐννέα ἐκ τῶν δέκα τιμῶν ἔχουν εύρος  $15 - 10 = 5$  καί μόνον μία εἶναι 100, ἡ ὑπαρξίς δέ αὐτῆς αὐξάνει τό εύρος ἀπό 5 εἰς 90.

### β) Τεταρτημοριακή ἀπόκλισις

Συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω ἐκτεθέντα, εἰς τό διάστημα μεταξύ τῶν δύο τεταρτημορίων  $Q_1$  καί  $Q_3$  περιλαμβάνεται τό 50% τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς. Τό ὑπόλοιπον 50% τῶν τιμῶν εὐρίσκεται ἐκτός τοῦ διαστήματος τούτου καί δὴ 25% αὐτῶν ἔχουν τιμὴν μικροτέραν ἐκεῖνης τοῦ πρώτου τεταρτημορίου καί 25% ἔχουν τιμὴν μεγαλύτεραν ἐκεῖνης τοῦ τρίτου τεταρτημορίου. Εἶναι, συνεπῶς, φανερόν ὅτι ὅσον μεγαλύτερα εἶναι ἡ ἀπόστασις μεταξύ τῶν τεταρτημορίων  $Q_1$  καί  $Q_3$  τοσοῦτον ἐντονωτέρα εἶναι ἡ διασπορά τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς. Τό ἥμισυ τῆς διαφορᾶς μεταξύ τῶν δύο τεταρτημορίων  $Q_1$  καί  $Q_3$  ἀποτελεῖ μέτρον διασπορᾶς, τό ὁποῖον καλεῖται "τεταρτημοριακή ἀπόκλισις". Ἡ τεταρτημοριακή ἀπόκλισις (Q) δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$(ΣΤ-15) \quad Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

Εἰς τό παράδειγμα τῶν ἡμερομισθίων τῶν 36 ἐργατῶν τοῦ Πίνακος ΣΤ-1 ἔχουν ἤδη ὑπολογισθῆ, ἐπί τῇ βάσει τῶν ἀρχικῶν δεδομένων, αἱ κάτωθι τιμαί τῶν  $Q_1$  καί  $Q_3$  :

$$Q_1 = 55,50, \quad Q_3 = 70,50$$

Ὅποτε ἡ τεταρτημοριακή ἀπόκλισις εἶναι, συμφώνως πρὸς τόν τύπον (ΣΤ-15) :

$$Q = \frac{70,50 - 55,50}{2} = 7,50$$

Δυνάμεθα, συνεπῶς, νά περιγράψωμεν τήν δοθεῖσαν κατανομήν τῶν ἡμερομισθίων λέγοντες ὅτι ἡ διάμεσος τιμὴ αὐτῶν εἶναι 60,55 δρχ. μέ διασποράν (τεταρτημοριακὴν ἀπόκλισιν) 7,50 δρχ.

γ) Μέση ἀπόκλισις

Προσδιορισμός τῆς διασπορᾶς τῶν τιμῶν μιᾶς μεταβλητῆς ὡς πρὸς τὸν ἀριθμητικὸν μέσον αὐτῶν δύναται νά γίνῃ μέ κριτήριον τὰς ἀποστάσεις τῶν ἐπιμέρους τιμῶν ἐκ τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου. Πρὸς τοῦτο ἀφαيروῦμεν τήν ἤδη ὑπολογισθεῖσαν τιμὴν τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου ἐξ ἐκάστης τιμῆς τῆς μεταβλητῆς. Αἱ οὕτω προκύπτουσαι ἀπο-

### Πίναξ ΣΤ - 11

Ἀποκλίσεις ἡμερομισθίων 36 ἐργατῶν Πίνακος ΣΤ - 1  
ἀπὸ τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου αὐτῶν

- 2,04	- 4,94	- 4,34	- 0,84	- 31,74	- 18,44
12,96	22,46	- 8,74	- 3,14	0,16	- 3,64
20,96	9,56	20,36	- 12,44	- 5,24	2,06
- 2,84	- 14,64	9,06	2,16	- 10,84	- 7,64
- 25,14	8,66	- 0,64	3,66	3,26	37,66
1,16	- 3,84	- 1,74	- 6,34	10,66	4,36

κλίσεις δύνανται νά εἶναι θετικαί ἢ ἀρνητικαί. Ἐπειδὴ ἐξ ὀρισμοῦ τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα ἰσοῦται πρὸς τὸ μηδέν, δέν λαμβάνομεν ὑπ' ὄψιν τὸ σημεῖον + ἢ -, ἀλλὰ τὸ ἀπόλυτον ὕψος των. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν ἀποκλίσεων τούτων, διαιρούμενον διὰ τοῦ πληθους των δίδει τήν καλουμένην "μέσην ἀπόκλισιν" (Μ.Α.). Δηλαδή εἶναι :

$$(ΣΤ-16) \quad \text{Μ.Α.} = \frac{\sum |X - \bar{X}|}{n}$$

ὅπου αἱ κάθετοι γραμμαὶ || σημαίνουν ὅτι αἱ ἐντός αὐτῶν ἀναγραφόμεναι διαφοραὶ λαμβάνονται κατ' ἀπόλυτον τιμὴν, δηλαδή χωρὶς νά λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν τὸ σημεῖον + ἢ -. Εἶναι φανερόν ὅτι ἡ Μ.Α. καθίσταται μεγαλυτέρα ὅσον αὐξάνει ἡ διασπορά τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς περὶ τὸν ἀριθμητικὸν μέσον αὐτῶν.

Πρὸς ὑπολογισμόν τῆς Μ.Α. τῶν ἡμερομισθίων τῶν 36 ἐργατῶν τοῦ Πίνακος ΣΤ-1 εὐρίσκωμεν, συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω, τὰς ἀποκλίσεις ἀπὸ τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου αὐτῶν, χρησιμοποιοῦντες  $\bar{X} = 61,84$ . Αἱ ἐν λόγῳ ἀποκλίσεις ἀναγράφονται εἰς τὸν Πίνακα ΣΤ-11.

$$\text{Οὕτω ἔχομεν :} \quad \Sigma |x - \bar{X}| = 338,36$$

$$\text{καὶ} \quad \text{Μ.Α.} = \frac{338,36}{36} = 9,40$$

Πίναξ ΣΤ-12

Ὑπολογισμὸς τῆς μέσης ἀποκλίσεως εἰς τὴν κατανομήν τῶν ἡμερομισθίων 36 ἐργατῶν τοῦ Πίνακος ΣΤ-2

Διάστημα τάξεως (εἰς δραχ.)	Συχνότης f	Κεντρικὴ τιμὴ x	Ἀποκλίσις κεντρικῆς τιμῆς ἀπὸ ἀριθμητικοῦ μέσου $x - \bar{X}$	Γινόμενον $f  x - \bar{X} $
30 - 39,9	2	34,95	34,95 - 62,17 = - 27,22	54,44
40 - 49,9	3	44,95	44,95 - 62,17 = - 17,22	51,66
50 - 59,9	12	54,95	54,95 - 62,17 = - 7,22	86,64
60 - 69,9	10	64,95	64,95 - 62,17 = 2,78	27,80
70 - 79,9	5	74,95	74,95 - 62,17 = 12,78	63,90
80 - 89,9	3	84,95	84,95 - 62,17 = 22,78	68,34
90 - 99,9	1	94,95	94,95 - 62,17 = 32,78	32,78
Σύνολον	36			385,56

Προκειμένου περὶ κατανομῶν συχνότητων ὁ ὑπολογισμὸς τῆς μέσης ἀποκλίσεως γίνεται ὡς ἀκολούθως : Λαμβάνομεν τὰς κεντρικὰς τιμὰς τῶν διαστημάτων τάξεως καὶ ὑπολογίζομεν τὰς ἀποκλίσεις αὐτῶν ἀπὸ τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου. Τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ἀποκλίσεων τούτων, λαμβανομένων κατ' ἀπόλυτον τιμὴν, ἐπὶ τὰς ἀντιστοίχους συχνότητας, διαιροῦμενον διὰ τοῦ ἄθροίσματος τῶν συχνότητων, δίδει τὴν μέσην ἀπόκλισιν τῆς κατανομῆς ἀπὸ τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου αὐτῆς. Ὁ σχετικὸς τύπος ὑπολογισμοῦ τῆς Μ.Α. εἰς κατανομάς συχνότητων εἶναι :

$$(\text{ΣΤ-17}) \quad \text{Μ.Α.} = \frac{\Sigma f |x - \bar{X}|}{\Sigma f} = \frac{\Sigma f |x - \bar{X}|}{n}$$



Ἡ διαδικασία ὑπολογισμοῦ τῆς μέσης ἀποκλίσεως εἰς τὴν κατανομήν τῶν ἡμερομισθίων τῶν 36 ἐργατῶν τοῦ Πίνακος ΣΤ-2 δεικνύεται εἰς τὸν Πίνακα ΣΤ-12. Ἐν τοῦ Πίνακος τούτου λαμβάνομεν :

$$\Sigma f |X - \bar{X}| = 385,56 \text{ καὶ } n = 36$$

Συνεπῶς εἶναι :

$$M.A. = \frac{385,56}{36} = 10,71$$

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω ὑπολογισμῶν δυνάμεθα νὰ περιγράψωμεν τὴν ἐξεταζομένην κατανομήν λέγοντες ὅτι τὸ μέσον ἡμερομισθίων τῶν 36 ἐργατῶν εἶναι 62,17 δραχ. μέ μέσην ἀπόκλισιν 10,71 δραχ.

δ) Μέση ἀπόκλισις τετραγώνου καὶ διακύμανσις

Μέτρον διασπορᾶς δεδομένης σειρᾶς τιμῶν μιᾶς μεταβλητῆς ἀποτελεῖ ἐπίσης καὶ ἡ διακύμανσις, ἡ ὁποία ὑπολογίζεται διὰ προσθέσεως τῶν τετραγῶνων τῶν ἀποκλίσεων τῶν ἐπὶ μέρους τιμῶν ἀπὸ τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου αὐτῶν καὶ διαφέσεως διὰ τοῦ πλήθους τῶν. Ἡ διακύμανσις συμβολίζεται διὰ τοῦ  $\sigma^2$  καὶ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$(ΣΤ-18) \quad \sigma^2 = \frac{\Sigma (X - \bar{X})^2}{n}$$

### Πίναξ ΣΤ-13

Τετράγωνα ἀποκλίσεων ἡμερομισθίων 36 ἐργατῶν (Πίνακος ΣΤ-1)  
ἐκ τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου τῶν

4,1616	24,4036	18,8356	0,7056	1.007,4276	340,0336
167,9616	504,4516	76,3876	9,8596	0,0256	13,2496
439,3216	91,3936	414,5296	154,7536	27,4576	4,2436
8,0656	214,3296	82,0836	4,6656	117,5056	58,3696
632,0196	74,9956	0,4096	13,3956	10,6276	1.418,2756
1,3456	14,7456	3,0276	40,1956	113,6356	19,0096

Τὸ μέτρον τοῦτο εἶναι μεγίστης σημασίας εἰς τὴν στατιστικὴν, καθ' ὅσον διὰ τῆς λεγομένης "ἀναλύσεως τῆς διακυμάνσεως" ἐπιτυγχάνεται προσδιορισμὸς τῆς συμβολῆς ἐπὶ μέρους παραγόντων εἰς τὰς μεταβολὰς τῶν ἀρχικῶν δεδομένων.

Εἶναι φανερόν ὅτι ἡ διακύμανσις ἐκφράζεται εἰς μονάδας αἱ ὁποῖαι εἶναι τὸ τετράγωνον τῶν ἀρχικῶν μονάδων εἰς ἃς εἶναι ἐκπεφρασμένη ἢ μεταβλητὴ. Δυνάμεθα, συνεπῶς, νὰ λάβωμεν ὡς μέτρον διασπορᾶς ἐκφραζόμενον εἰς ἀρχικὰς μονάδας τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τῆς διακυμάνσεως. Οὕτω προκύπτει ἡ μέση ἀποκλίσις τετραγώνου ( $\sigma$ ), ἡ μαθηματικὴ διατύπωσις τῆς ὁποίας εἶναι :

$$(ΣΤ-19) \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum (X - \bar{X})^2}{n}}$$

Ἐπειδὴ ὁ τύπος (ΣΤ-19) ἀπαιτεῖ πολλοὺς ἀριθμητικοὺς ὑπολογισμοὺς, εἶναι προτιμότερα ἢ χρησιμοποίησις τοῦ ἀκολουθοῦ τύπου τῆς μέσης ἀποκλίσεως τετραγώνου, ὁ ὁποῖος προκύπτει διὰ καταλλήλων ἀλγεβρικῶν μετασχηματισμῶν τοῦ ἀρχικοῦ (1) :

$$(ΣΤ-20) \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum X^2}{n} - \left(\frac{\sum X}{n}\right)^2}$$

Κατὰ τὸν τύπον (ΣΤ-20) εὐρίσκομεν τὸν ἀριθμητικὸν μέσον τῶν τετραγῶνων τῶν ἀρχικῶν τιμῶν, ἐξ αὐτοῦ δὲ ἀφαιροῦμεν τὸ τετράγωνον τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου τῶν τιμῶν τούτων. Ἡ μέση ἀποκλίσις τετραγώνου προκύπτει δι' ἐξαγωγῆς τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τῆς διαφορᾶς ταύτης.

Πρὸς ὑπολογισμόν τῆς μέσης ἀποκλίσεως τετραγώνου τῶν ἀρχικῶν δεδομένων τῶν ἡμερομισθίων τῶν 36 ἔργατῶν τοῦ Πίνακος ΣΤ-1 ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ τύπου (ΣΤ-19) λαμβάνομεν τὰ τετράγωνα τῶν ἀποκλίσεων αὐτῶν ἀπὸ τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου των, τὰ ὁποῖα δίδονται εἰς τὸν Πίνακα (ΣΤ-13).

Προσθέτοντες τὰ 36 τετράγωνα τῶν ἀποκλίσεων τοῦ Πίνακος ΣΤ-13, ἔχομεν :

(1) Ἐχομεν :

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\sum (X - \bar{X})^2}{n}} &= \sqrt{\frac{\sum X^2 - 2\bar{X}\sum X + n\bar{X}^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum X^2}{n} - \frac{2(\sum X)^2}{n^2} + \frac{(\sum X)^2}{n^2}} \\ &= \sqrt{\frac{\sum X^2}{n} - \left(\frac{\sum X}{n}\right)^2} \end{aligned}$$

$$\Sigma (X - \bar{X})^2 = 6125,9056$$

Όπότε, ή διακύμανσις είναι :  $\sigma^2 = \frac{6125,9056}{36} = 170,1640$

καί ή μέση απόκλισις τετραγώνου :  $\sigma = \sqrt{170,1640} = 13,04 \text{ δρχ.}$

Όταν τά δεδομένα είναι ταξινομημένα υπό μορφήν κατανομής συχνότητων, λαμβάνομεν τάς κεντρικάς τιμάς τῶν διαστημάτων τάξεως, ὑποθέτοντες ὅτι τά ἀρχικά δεδομένα συγκεντροῦνται εἰς τό μέσον αὐτῶν. Εὕρισκομεν τάς ἀποκλίσεις τῶν κεντρικῶν τούτων τιμῶν ἀπό τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου τῆς κατανομῆς καί ὑποῦμεν ταύτας εἰς τό τετράγωνον. Κατόπιν, πολλαπλασιάζομεν τά οὕτω προκύπτοντα τετράγωνα ἐπί τάς ἀντιστοίχους συχνότητας. Ἡ διακύμανσις ὑπολογίζεται διά διαφέσεως τοῦ ἀθροίσματος τῶν γινομένων αὐτῶν διά τοῦ ἀθροίσματος τῶν συχνότητων. Ἐχομεν, δηλαδή :

$$(ΣΤ-21) \quad \sigma^2 = \frac{\Sigma f(X - \bar{X})^2}{\Sigma f} = \frac{\Sigma f(X - \bar{X})^2}{n}$$

Ἐπομένως, ή μέση απόκλισις τετραγώνου είναι :

$$(ΣΤ-22) \quad \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f(X - \bar{X})^2}{n}}$$

Εἰς τάς πρακτικάς ἐφαρμογάς ἐνδείκνυται ή χρησιμοποίησις τοῦ ἀκολούθου τύπου <sup>(1)</sup>, ὁ ὁποῖος ἀπαιτεῖ ὀλιγωτέρους ἀριθμητικούς ὑπολογισμούς ἐν συγκρίσει πρὸς τόν τύπον (ΣΤ-22) :

(1) Ἐχομεν :

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\Sigma f(X - \bar{X})^2}{n}} &= \sqrt{\frac{\Sigma fX^2 - 2\bar{X}\Sigma fX + n\bar{X}^2}{n}} = \sqrt{\frac{\Sigma fX^2}{n} - \frac{2(\Sigma fX)^2}{n^2} + \frac{(\Sigma fX)^2}{n^2}} \\ &= \sqrt{\frac{\Sigma fX^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fX}{n}\right)^2} \end{aligned}$$

$$(ΣΤ-23) \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum f X^2}{n} - \left(\frac{\sum f X}{n}\right)^2}$$

Ἡ διαδικασία ὑπολογισμοῦ τῆς μέσης ἀποκλίσεως τετραγώνου τῆς κατανομῆς τῶν ἡμερομισθίων τῶν 36 ἔργατῶν τοῦ Πίνακος ΣΤ-2 διά χρησιμοποίησιν τοῦ τύπου (ΣΤ-22) δεικνύεται εἰς τὸν Πίνακα ΣΤ-14.

#### Πίναξ ΣΤ-14

Ὑπολογισμὸς τῆς μέσης ἀποκλίσεως τετραγώνου τῆς κατανομῆς τῶν ἡμερομισθίων τῶν 36 ἔργατῶν (τοῦ Πίνακος ΣΤ-2) ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ τύπου (ΣΤ-22)

Κεντρικὴ τιμὴ $X$	Συχνότης $f$	Διαφορὰ $X - \bar{X}$	Τετράγωνον $(X - \bar{X})^2$	Γινόμενον $f(X - \bar{X})^2$
34,95	2	- 27,22	740,9284	1.481,8568
44,95	3	- 17,22	296,5284	889,5852
54,95	12	- 7,22	52,1284	625,5408
64,95	10	2,78	7,7284	77,2840
74,95	5	12,78	163,3284	816,6420
84,95	3	22,78	518,9284	1.556,7852
94,95	1	32,78	1.074,5284	1.074,5284
Σύνολον	36			6.522,2224

Ἐκ τοῦ Πίνακος ΣΤ-14 λαμβάνομεν :

$$\sum f (X - \bar{X})^2 = 6.522,2224$$

Ἐπομένως, ἔχομεν, ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ τύπου (ΣΤ-21) :

$$\sigma^2 = \frac{6.522,2224}{36} = 181,1728$$

καὶ 
$$\sigma = \sqrt{181,1728} = 13,46$$

Πρὸς ὑπολογισμὸν τῆς μέσης ἀποκλίσεως τετραγώνου ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ τύπου (ΣΤ-23) χρησιμοποιοῦμεν τὴν κατάταξιν ἣ ὅποια περιέχεται εἰς τὸν Πίνακα ΣΤ-15.

Ἐκ τοῦ Πίνακος ΣΤ-15 λαμβάνομεν :  $\sum f (X^2) = 145.676,0900$  καὶ  $\sum f X = 2.238,2000$ . Ἦτοι, ἔχομεν :

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{\frac{145.676,0900}{36} - \left(\frac{2.238,2000}{36}\right)^2} = \\ &= \sqrt{4.046,5581 - (62,1722)^2} = \sqrt{4.046,5581 - 3.865,3825} = \\ &= \sqrt{181,1756} = 13,46\end{aligned}$$

Δηλαδή, ἡ εὐρεθεῖσα διὰ τοῦ τύπου (ΣΤ-23) τιμὴ τῆς μέσης ἀποκλίσεως τετραγώνου εἶναι ἰση πρὸς τὴν ὑπολογισθεῖσαν ἐπὶ τῆς βάσει τοῦ τύπου (ΣΤ-22). Οὕτω, ἡ κατανομὴ τῶν ἡμερομισθίων τῶν 36 ἐργατῶν ἔχει ἀριθμητικὸν μέσον 62,17 δραχ. με μέσην ἀποκλίσειν τετραγώνου 13,46 δραχ.

### Πίναξ ΣΤ - 15

Ὑπολογισμὸς τῆς μέσης ἀποκλίσεως τετραγώνου τῶν ἡμερομισθίων 36 ἐργατῶν ἐπὶ τῆ βάσει τοῦ τύπου (ΣΤ - 23)

Κεντρικὴ τιμὴ X	Συχνότης f	Γινόμενον f X	Τετράγωνον X <sup>2</sup>	Γινόμενον f (X <sup>2</sup> )
34,95	2	69,90	1.221,5025	2.443,0050
44,95	3	134,85	2.020,5025	6.061,5075
54,95	12	659,40	3.019,5025	36.234,0300
64,95	10	649,50	4.218,5025	42.185,0250
74,95	5	374,75	5.617,5025	28.087,5125
84,95	3	254,85	7.216,5025	21.649,5075
94,95	1	94,95	9.015,5025	9.015,5025
Σύνολον	36	2.238,20	32.329,5175	145.676,0900

Ἡ παρατηρουμένη διαφορὰ μεταξύ τῆς ἐκτιμῆσεως ταύτης τῆς μέσης ἀποκλίσεως τετραγώνου ( $\sigma=13,46$ ) καὶ τῆς ἀκριβοῦς τιμῆς αὐτῆς τῆς ὑπολογισθεῖσης ἐκ τῶν ἀρχικῶν παρατηρήσεων ( $\sigma=13,04$ ) ὀφείλεται εἰς τὴν ἐπίδρασιν ἐκ τῆς κατατάξεως τῶν δεδομένων ὑπό μορφήν κατανομῆς συχνοτήτων. Εἰς τὴν ἐν λόγῳ κατάταξιν ἐγένετο ἡ ὑπόθεσις ὅτι αἱ τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς συγκεντροῦνται εἰς τὸ μέσον τῶν διαστημάτων τάξεως. Ἡ ὑπόθεσις, ὅμως, αὕτη δέν ἀνταποκρίνεται πάντοτε εἰς τὴν πραγματικότητα, ἰδῶς εἰς τὰς περιπτώσεις ἐκεῖνας κατὰ τὰς ὁποίας ἡ κατανομὴ ἔχει σχῆμα κῶδωνος, ὡς εἶναι ἡ εἰκονιζομένη εἰς τὸ Διάγραμμα ΣΤ-1. Εἰς κατανομὰς τῆς

μορφής αυτής αί τιμαί τῆς μεταβλητῆς αί ἀνήκουσαι εἰς οἷονδῆποτε διάστημα τάξεως τείνουν νά διασπεύωνται περισσότερον πέριξ τοῦ κέντρου τῆς κατανομῆς ἢ πέριξ τῆς κεντρικῆς τιμῆς τοῦ διαστήματος τάξεως. Κατά συνέπειαν, αί ἀπόκλισεις  $(X - \bar{X})$ , ὅταν ὑπολογίζωνται διά χρησιμοποίησιν τῶν κεντρικῶν τιμῶν τῶν διαστημάτων τάξεως, εἶναι μεγαλύτεραι τῶν πραγματικῶν, πᾶγμα ὅπερ σημαίνει ὅτι καί ἡ ἐκ τῆς κατανομῆς ὑπολογιζομένη μέση ἀπόκλιση τετραγώνου ἐπί τῇ βάσει τοῦ τύπου (ΣΤ-22) ἢ (ΣΤ-23) εἶναι μεγαλύτερα τῆς ἐκτιμωμένης ἐκ τῶν ἀρχικῶν δεδομένων ἐπί τῇ βάσει τοῦ τύπου (ΣΤ-19) ἢ (ΣΤ-20). Ὅταν ἡ κατανομή : Πρῶτον εἶναι σχετικῶς συμμετρική μέ τήν κορυφήν τῶν μέσον τοῦ εὔρους μεταβολῆς τῶν τιμῶν καί, Δεύτερον, ἔχη διαστήματα τάξεως μέ ἴσον εὔρος, ἔστω ἡ μονάδων, δυνάμεθα νά διορθώσωμεν τήν διακύμανσιν (ἄρα καί τήν μέσην ἀπόκλισιν τετραγώνου) ἐκ τοῦ ὡς ἄνω σφάλματος τό ὁποῖον δημιουργεῖ ἡ ὑπό μορφήν κατανομῆς ταξινόμησις τῶν στοιχείων. Ἡ διόρθωσις αὕτη, ὑποδειχθεῖσα ὑπό τοῦ SHEPPARD, δίδεται ὑπό τοῦ κάτωθι τύπου :

$$(ΣΤ-24) \quad \sigma_{\delta}^2 = \sigma^2 - \frac{h^2}{12}$$

ὅπου  $\sigma_{\delta}^2$  = ἡ διορθωθεῖσα διακύμανσις.

Διόρθωσις κατά SHEPPARD δέν ἐνδείκνυται, κατά τά ἀνωτέρω, ὡσάντις ἡ κατανομή εἶναι ἀρκετά ἀσυμμετρική ἢ τά διαστήματα τάξεως ἔχουν ἄνισον εὔρος. Ἐφαρμογή αὕτης εἶναι δυνατή εἰς τήν κατανομήν τῶν ἡμερομισθίων τῶν 36 ἐργατῶν, δεδομένου ὅτι ὁ βαθμός ἀσυμμετρίας αὕτης εἶναι σχετικῶς μικρός, ὅλα δέ τά διαστήματα τάξεως ἔχουν εὔρος 10 δραχ.

Οὕτω, ἔχομεν :

$$\sigma_{\delta}^2 = 181,1756 - \frac{100}{12} = 181,1756 - 8,3333 = 172,8423$$

Ἐπομένως,

$$\sigma_{\delta} = \sqrt{172,8423} = 13,15$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ διορθωθεῖσα μέση ἀπόκλιση τετραγώνου ( $\sigma_{\delta} = 13,15$ ) εἶναι μικροτέρα τῆς ἀρχικῶς ὑπολογισθείσης ἐκ τῆς κατανομῆς ( $\sigma = 13,46$ ), εὑρίσκεται δέ πλησιέστερον πρός τήν ἐκτιμηθεῖσαν ἐκ τῶν ἀρχικῶν δεδομένων ( $\sigma = 13,04$ ).

ε) Κύρια χαρακτηριστικά τῶν μέτρων διασπορᾶς

Αἱ τιμαὶ τῶν μέτρων διασπορᾶς, ὡς καὶ τῶν μέτρων κεντρικῆς τάσεως καὶ θέσεως, ὑπολογιζόμεναι ἐκ κατανομῆς συχνοτήτων παρουσιάζουν διαφορὰς ἔναντι ἐκείνων αἱ ὁποῖαι προκύπτουν ἐκ τῶν ἀρχικῶν δεδομένων. Αἱ διαφοραὶ αὐταὶ εἰς τὸ παράδειγμα τῶν ἡμερομισθίων τῶν 36 ἔργατῶν τοῦ Πίνακος ΣΤ-1 δεικνύονται εἰς τὸν Πίνακα ΣΤ-16, εἰς τὸν ὁποῖον, ἡ μὲν κατανομή τοῦ Πίνακος ΣΤ-2 ἀναγράφεται ὡς κατανομή (Α), ἡ δὲ τοῦ Πίνακος ΣΤ-9 ὡς κατανομή (Β).

Ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν μέτρων τῶν ὑπολογισθέντων ἐκ τῆς κατανομῆς (Α) πρὸς τὰ ὑπολογισθέντα ἐκ τῆς κατανομῆς (Β) προκύπτει ὅτι ἐπιδρασεις ἐπὶ τοῦ ὕψους αὐτῶν ἀσκειῖται καὶ ἐκ τοῦ ἀκολουθουμένου τρόπου ταξινομήσεως τῶν στοιχείων κατὰ συχνότητα.

Ὡς ἀνωτέρω ἐλέχθη, τὸ εὖρος μεταβολῆς εἶναι γενικὸν μέτρον διασπορᾶς καὶ ἂν καὶ ὑπολογίζεται εὐκόλως, ἔχει περωρισμένην χρῆσιν, διότι αἱ πληροφοραὶ τὰς ὁποίας παρέχει εἶναι λίαν ἀνεπαρκεῖς. Μεταξὺ τῶν λοιπῶν μέτρων διασπορᾶς ὑφίστανται αἱ κάτωθι ἐμπειρικαὶ σχέσεις διὰ κατανομὰς αἱ ὁποῖαι παρουσιάζουν σχετικῶς περωρισμένην ἀσυμμετρίαν :

$$(ΣΤ-25) \quad M.A. = \frac{4}{5} \sigma$$

$$(ΣΤ-26) \quad Q = \frac{2}{3} \sigma$$

#### Πίναξ ΣΤ - 16

Σύγκρισις ὑπολογισθεισῶν τιμῶν διαφόρων μέτρων διασπορᾶς τῶν ἡμερομισθίων 36 ἔργατῶν  
(Εἰς δραχμάς)

Μέτρον διασπορᾶς	Ἐκ τῶν ἀρχικῶν δεδομένων	Ἐκ τῆς κατανομῆς (Α)	Ἐκ τῆς κατανομῆς (Β)
Εὖρος . . . . .	69,40		
Τεταρτημοριακὴ ἀπόκλισις	7,50	8,35	6,56
Μέση ἀπόκλισις . . . .	9,40	10,71	9,21
Μέση ἀπόκλισις τετραγώνου	13,04	10,15 (α)	12,64

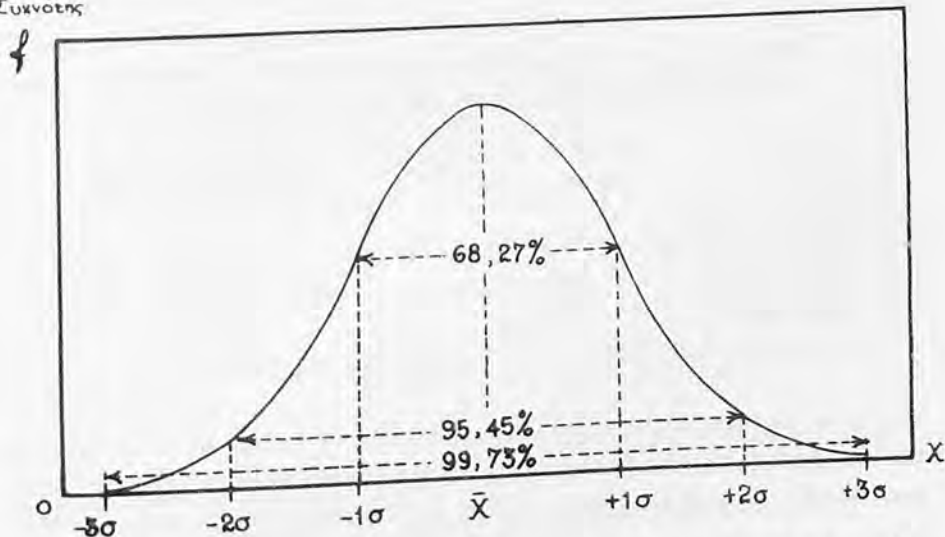
(α) Διωρθωμένη κατὰ Sheppard.

Ἐκ τῶν μέτρων τούτων ἡ τεταρτημοριακὴ ἀπόκλισις, ἡ ὅποια ἀναγκαίως χρησιμοποιεῖται ὅσκις ὡς μέτρον κεντρικῆς τάσεως ἔχει ἐπιλεγῆ ἢ διὰ μέσου, παρουσιάζει τὸ μειονέκτημα ὅτι δέν ἐπηρεάζεται ὑπὸ τῶν ἀκραίων τιμῶν καὶ δέν βασίζεται ἐφ' ὅλων τῶν διαθεσίμων τιμῶν τῆς μεταβλητῆς. Τόσον ἡ μέση ἀπόκλισις ὅσον καὶ ἡ μέση ἀπόκλισις τετραγώνου ἐπηρεάζονται ὑφ' ὅλων τῶν χρησιμοποιουμένων τιμῶν. Ἀλλὰ ἡ δευτέρα ἐπηρεάζεται περισσότερο τῆς πρώτης ὑπὸ τῶν ἀκραίων τιμῶν, καθ' ὅσον κατὰ τὸν ὑπολογισμόν αὐτῆς λαμβάνονται, ὄχι τὰ ἀρχικὰ δεδομένα, ἀλλὰ τὰ τετράγωνα αὐτῶν.

#### Διάγραμμα ΣΤ-4

Ποσοστὰ τιμῶν μεταβλητῆς περιλαμβανόμενα εἰς τὰ διαστήματα  $\bar{x} \pm \sigma$ ,  $\bar{x} \pm 2\sigma$  καὶ  $\bar{x} \pm 3\sigma$  τῆς κανονικῆς κατανομῆς

Συχνότης



Τὸ σημαντικώτερον καὶ συνηθέστερον χρησιμοποιούμενον μέτρον διασπορᾶς εἶναι ἡ μέση ἀπόκλισις τετραγώνου. Εἰς κατανομὰς συχνοτήτων ἐχούσας σχῆμα κώδωνος, ὡς εἶναι ἡ εἰκονιζομένη εἰς τὸ Διάγραμμα ΣΤ-4, αἱ ὅποια καλοῦνται "κανονικαὶ κατανομαὶ" (α) 68,27% τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς περιλαμβάνονται εἰς τὸ διάστημα μεταξύ  $\bar{X} - \sigma$  καὶ  $\bar{X} + \sigma$ . (β) 95,45% τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς περιλαμβάνονται εἰς τὸ διάστημα μεταξύ  $\bar{X} - 2\sigma$  καὶ  $\bar{X} + 2\sigma$  καὶ (γ) 99,73% τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς περιλαμβάνονται εἰς τὸ διάστημα μεταξύ  $\bar{X} - 3\sigma$  καὶ  $\bar{X} + 3\sigma$ .



τα θετικῶς καὶ ἀρνητικῶς ἀσύμμετριων κατανομῶν δίδονται εἰς τὸ Διάγραμμα ΣΤ-5. Δέον νά σημειωθῇ ὅτι αἱ πλεῖστα τῶν ἀσύμμετριων κατανομῶν αἱ ὁποῖαι ἀφοροῦν εἰς οἰκονομικά μεγέθη, ὡς π.χ. εἰς μισθοῦς, εἰσοδήματα κλπ., ἔχουν θετικὴν ἀσύμμετρίαν.

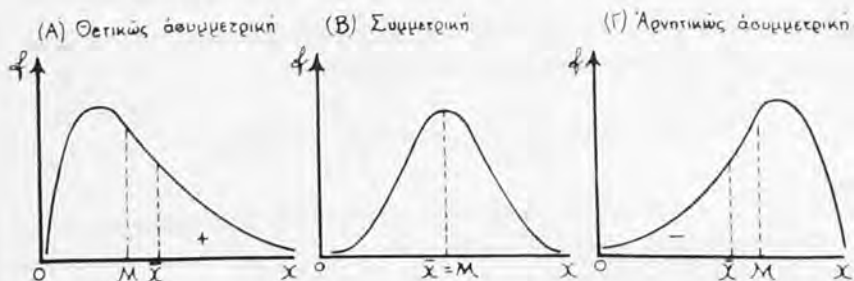
Κατωτέρω ἐξετάζονται δύο ἐκ τῶν συνηθέστερον χρησιμοποιουμένων μέτρων ἀσύμμετρίας τῶν κατανομῶν συχνότητων, ἴτοι τὸ μέτρον ἀσύμμετρίας τοῦ Κ. PEARSON καὶ τὸ τεταρτημοριακὸν μέτρον ἀσύμμετρίας (προταθὲν ὑπὸ τοῦ Α. BOWLEY).

#### α) Μέτρον ἀσύμμετρίας τοῦ Κ. PEARSON

Ἐάν εἰς τινὰ κατανομὴν αἱ τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς τάσσονται συμμετρικῶς περὶ τινὰ τιμὴν κεντρικῆς τάσεως, ἐπὶ παραδείγματι τὸν ἀριθμητικὸν μέσον (ὡς συμβαίνει εἰς τὴν καμπύλην (Β) τοῦ Διαγράμματος ΣΤ-5), τότε ἡ διάμεσος θά ἴσούται πρὸς τὸν ἀριθμητικὸν μέσον αὐτῆς. Ἐκ τούτου ἔπεται ὅτι ἡ διαφορά μεταξὺ τῶν ἐν λόγω δύο μέτρων δύναται νά παράσχη πληροφορίαν περὶ τοῦ βαθμοῦ ἀσύμμετρίας τῶν κατανομῶν συχνότητων. Ἀλλὰ ἡ ἔκφρασις τοῦ βαθμοῦ

#### Διάγραμμα ΣΤ-5

Κατανομαὶ με διαφορετικὴν μορφήν ἀσύμμετρίας



ἀσύμμετρίας εἰς τὰς μονάδας εἰς τὰς ὁποίας μετρεῖται ἡ μεταβλητὴ παρουσιάζει τὸ μειονέκτημα ὅτι δέν ἐπιτρέπει συγκρίσεις κατανομῶν με διαφορετικὴν διασποράν. Διὰ τὸν λόγον αὐτὸν ὁ Κ. PEARSON προέτεινε τὴν μέτρησιν τῆς ἀσύμμετρίας ( $S_p$ ) ἐν σχέσει πρὸς τὴν μέσην ἀπόκλισιν τετραγώνου.

Ἡ σχετικὸς τύπος τοῦ Κ. PEARSON ἔχει ὡς ἑξῆς :

$$(ΣΤ-28) \quad S_p = \frac{3(\bar{X} - M)}{\sigma}$$

Ἡ ἐκ τοῦ τύπου (ΣΤ-28) προκύπτουσα τιμὴ δύναται νὰ κυμαίνεται μεταξύ +3 καὶ -3. Ἐν τούτοις, εἰς τὴν πρᾶξιν αὕτη συνήθως δὲν ὑπερβαίνει τὰ ὅρια : +1 καὶ -1. Αἱ θετικαὶ τιμαὶ τοῦ μέτρου τούτου δεικνύουν θετικὴν ἀσυμμετρίαν, αἱ δὲ ἀρνητικαὶ ἀρνητικὴν ἀσυμμετρίαν. Ἐάν  $S_p = 0$ , τότε ἡ κατανομὴ εἶναι συμμετρικὴ.

Ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον (ΣΤ-28) εἰς τὴν κατανομὴν τῶν ἡμερομισθίων τῶν 36 ἔργατῶν τοῦ Πίνακος ΣΤ-2, λαμβάνομεν :

$$S_p = \frac{3 (62,17 - 61,00)}{13,15} = 0,27$$

Ἦτοι, ἡ ἐξεταζομένη κατανομὴ παρουσιάζει περὶωρισμένης ἐκτάσεως θετικὴν ἀσυμμετρίαν.

β) Τεταρτημοριακὸν μέτρον ἀσυμμετρίας

Τὸ μέτρον τοῦτο ἀσυμμετρίας στηρίζεται ἐπὶ τῆς διαμέσου καὶ τῶν δύο τεταρτημορίων. Εἰς μίαν συμμετρικὴν κατανομὴν τὸ τρίτον τεταρτημόριον ἀπέχει τῆς διαμέσου ὅσον καὶ τὸ πρῶτον τεταρτημόριον. Εἶναι, δηλαδή :

$$Q_3 - M = M - Q_1$$

$$\text{ἢ } (Q_3 - M) - (M - Q_1) = 0$$

Εἰς τина θετικῶς ἀσυμμετρικὴν κατανομὴν τὸ τρίτον τεταρτημόριον θὰ ἀπέχη τῆς διαμέσου περισσότερον ἢ τὸ πρῶτον τεταρτημόριον. Ἀντιθέτως, εἰς τина ἀρνητικῶς ἀσυμμετρικὴν κατανομὴν τὸ πρῶτον τεταρτημόριον θὰ εὑρίσκειται εἰς μεγαλύτεραν ἀπόστασιν ἐκ τῆς διαμέσου ἢ τὸ τρίτον τεταρτημόριον. Ἐπὶ τῶν παρατηρήσεων τούτων στηριχθεὶς ὁ Α. BOWLEY προέτεινε τὸ ἀκόλουθον μέτρον ἀσυμμετρίας τῶν κατανομῶν συχνότητων :

$$(ΣΤ-29) \quad S_B = \frac{(Q_3 - M)(M - Q_1)}{Q_3 - Q_1}$$

Εἰς τὸν τύπον (ΣΤ-29) ὁ παρονομαστής εἶναι τὸ διπλάσιον τῆς τεταρτημοριακῆς ἀποκλίσεως (ΣΤ-15). Οὕτω, ὁ βαθμὸς ἀσυμμετρίας μετρεῖται καὶ ἐνταῦθα ἐν σχέσει πρὸς τὴν διασποράν τῆς κατανομῆς. Αἱ θετικαὶ τιμαὶ τοῦ τεταρτημοριακοῦ μέτρου ἀσυμμετρίας δει-

κινούν θετικήν ασυμμετρίαν, ἐνῶ αἱ ἀρνητικαὶ ἀρνητικὴν ἀσυμμετρίαν. Ἐάν  $S_B = 0$ , τότε ἡ κατανομή εἶναι συμμετρική. Σημειωτέον ὅτι τὸ τεταρτημοριακὸν μέτρον ἀσυμμετρίας παρουσιάζει ἔναντι τοῦ μέτρου τοῦ K. PEARSON τὸ μειωθέντημα ὅτι στηρίζεται μόνον εἰς τὰς μεταξὺ τοῦ πρώτου καὶ τοῦ τρίτου τεταρτημορίου περιλαμβανομένας τιμὰς, ἥτοι μόνον εἰς τὸ 50% τῶν ἐκ παρατηρήσεως τιμῶν τῆς μεταβλητῆς.

Ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον (ΣΤ-29) εἰς τὴν κατανομὴν τῶν ἡμερομισθῶν τῶν 28 ἐργατῶν τοῦ Πίνακος ΣΤ-2, λαμβάνομεν :

$$S_B = \frac{(70,00 - 61,00) - (61,00 - 53,30)}{70,00 - 53,30} = 0,08$$

Ἦτοι, καὶ τὸ μέτρον τοῦτο δεικνύει ὅτι ἡ ἐξεταζομένη κατανομή τῶν ἡμερομισθῶν ἔχει μικρὰν θετικὴν ἀσυμμετρίαν.

#### BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

##### Α. Ἑλληνικὴ

1. Ἀθανασιάδου, Κ., "Στατιστικὴ", Μέρος Πρῶτον, Ἀθήναι, 1957, σελ. 109-169.
2. Μαργαρίτη, Ε., "Στατιστικὴ", Ἀθήναι, 1952, σελ. 163-189.

##### Β. Ξένη

1. Allen, R.G.D., "Statistics for Economists", Hutchinson University Library, London, 1960, σελ. 77-99. Μετάφρασις εἰς τὴν Ἑλληνικὴν ὑπὸ Κ. Ἀθανασιάδου ὑπὸ τὸν τίτλον "Στατιστικὴ", Ἀθήναι, 1955, σελ. 73-95.
2. Arkin, H. and Colton, R.R., "Statistical Methods", Barnes and Noble, Inc., New York, 1961 σελ. 11-42.
3. Budin, M., "Statistical Measurements for Economics and Administration", Asia Publishing House, London, 1962, σελ. 114-139.
4. Chou, Ya-lun, "Applied Business and Economic Statistics", Holt, Rinehart and Winston, New York, 1963, σελ. 145-213.
5. Connor, L.R. and Morrell, A.J.H., "Statistics in Theory and Practice - With Special Reference to Published Statistics", Sir Isaac Pitman and Sons Ltd, London, 1964, σελ. 70-89.
6. Croxton, F.E. and Cowden, D.J., "Applied General Statistics", Isaac Pitman and Sons Limited, London, 1960, σελ. 173-239.

7. Greenwald, W.I., "Statistics for Economics", Charles E. Merrill Book, Inc., Columbus, Ohio, 1963, σελ.20-50.
8. Guthrie, H.W., "Statistical Methods in Economics", Richard D.Irwin, Inc., Homewood, Illinois, 1966, σελ. 28-72.
9. Hays, S., "An Outline of Statistics", Longmans, Green and Co, London, 1956, σελ. 56-97.
10. Hirsch, W.Z., "Introduction to Modern Statistics- With Applications to Business and Economics", The Macmillan Company, New York, 1962.
11. Ilersic, A.R., "Statistics", H.F.L. (Publishers) Ltd,London,1959, σελ. 89-138.
12. Karmel, P.H., "Applied Statistics for Economists - Course in Statistical Methods", Melbourne, Sir Isaak Pitman and Sons Ltd, 1963, σελ. 40-67.
13. Mason, R.D., "Statistical Techniques in Business and Economics ", Richard D. Irwin, Inc., Homewood,Illinois, 1967,σελ. 113-175.
14. Mills, F., "Statistical Methods", Holt, Rinehart and Winston, New York, 1955, σελ.74- 133.
15. Paden, D.W. and Lindquist, "Statistics for Economics and Business", Mc Graw Hill Book Company, Inc. New York,1956 σελ. 75 - 110.
16. Runyon, R.P. and Haber, A., "Fundamentals of Behavioral Statistics", Addison - Wesley Publishing Company, Reading Massachusetts, 1967, σελ. 49-79.
17. Spiegel, M., "Theory and Problems of Statistics",Schaum Publishing Co, New York, 1961, σελ. 45-88.
18. Suits, D.B., "Statistics: An Introduction to Quantitative Economic Research", Rand Mc Nally and Company, Chicago 1963, σελ. 23-53.
19. Thirkettle, G.L., "Wheldon's Business Statistics and Statistical Method", Macdonald and Evans, Ltd, London,1962, σελ. 103-125 καί 134-143.
20. Yamane, T., "Statistics - An Introductory Analysis", A Harper International Edition, 1966, σελ. 35-77.
21. Wessel, R.H. and Willett, E.R., "Statistics as Applied to Economics and Business", Henry Holt and Company,New York, 1959,σελ. 96-149.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ

### ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ

#### 1. Προβλήματα στατιστικῆς ἐπαγωγῆς

Ὁ ἀντικειμενικός σκοπός οἰασδήποτε στατιστικῆς ἀναλύσεως συνίσταται εἰς τὴν ἐκτίμησιν χαρακτηριστικῶν μέτρων τὰ ὅποια ἀφοροῦν εἰς ὀλοκλήρους πληθυσμούς. Ὡς, ὅμως, ἔχει ἤδη λεχθῆ ἀνωτέρω, ἡ ἀπ' εὐθείας ἐκ τοῦ πληθυσμοῦ λῆψις τῶν ἀναγκαίωσων ἐκαστοτε ποσοτικῶν πληροφοριῶν διὰ διαφόρους λόγους καθίσταται συνήθως ἀδύνατος ἢ ἀσύμφορος, δι' ὅ καὶ εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτάς γίνεται χρῆσις δειγμάτων τμηῶν τῶν ὑπὸ ἐξέτασιν ἰδιοτήτων. Ἐπὶ τῇ βάσει τούτων προκύπτουν κατανομαὶ συχνότητων, ἡ περιγραφή τῶν ὁποίων, ὡς γνωστόν, ἐπιτυγχάνεται διὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ κυρῶς τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου καὶ τῆς μέσης ἀποκλίσεως τετραγώνου.

Κατὰ τὴν ἐν λόγω διαδικασίαν, πρὸς ἐκτίμησιν τῶν βασικῶν χαρακτηριστικῶν δεδομένου πληθυσμοῦ χρησιμοποιοῦμεν τὰς τμᾶς τὰς προκυπτούσας ἐκ τοῦ δειγματος. Βεβαίως, ἡ λῆψις τοῦ δειγματος ὑποτίθεται ὅτι ἔχει γίνει συμφώνως πρὸς τοὺς κανόνας τῆς τυχαίας δειγματοληψίας, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι ἐκαστῆ μονάσ τοῦ πληθυσμοῦ ἢ ἐκαστος συνδυασμός μονάδων αὐτοῦ ἔχει ἴσην πιθανότητα ὑπαγωγῆς ἢ μὴ εἰς τὸ δεῖγμα ὡς οἰαδήποτε ἄλλη μονάσ ἢ οἰοσδήποτε ἄλλος συνδυασμός μονάδων. Τὸ πρόβλημα τὸ ὁποῖον ἀντιμετωπίζεται ἐν προκειμένῳ ἀφορᾷ εἰς τὴν σχέσιν ἢ ὅποια ὑφίσταται μεταξύ τῶν τμηῶν τῶν ὑπολογιζομένων ἐκ τοῦ οὕτω ἐπιλεγομένου δειγματος καὶ τῶν ἀντιστοίχων πραγματικῶν τμηῶν τοῦ πληθυσμοῦ εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει τὸ δεῖγμα τοῦτο. Πλέον συγκεκριμένως, παρίσταται ἀνάγκη προσδιορισμοῦ τοῦ βαθμοῦ ἀξιοπιστίας ἢ ἀκριβείας τῶν ἐκ τοῦ δειγματος προερχομένων τμηῶν ὡς ἐκτιμήσεων τῶν ἀντιστοίχων χαρακτηριστικῶν τοῦ πληθυσμοῦ. Ἡ τοιαύτη μετάβασις ἐκ

του δείγματος εἰς τόν πληθυσμόν ἀποτελεῖ τό περιεχόμενον τῆς "στατιστικῆς ἐπαγωγῆς", ἡ ὁποία κατ' οὐσίαν συνίσταται εἰς τήν δι-  
 ατύπωσιν γενικῶν συμπερασμάτων ποσοτικῆς φύσεως στηριζομένων  
 ἐπὶ παρατηρήσεων λαμβανομένων ἐν μικροῦ σχετικῶς ἀριθμοῦ μονά-  
 δων ἀλλὰ ἀντιπροσωπευτικῶν τοῦ ἐξεταζομένου πληθυσμοῦ.

Τό πρόβλημα τῆς στατιστικῆς ἐπαγωγῆς ἐμφανίζεται εἰς τήν  
 πρᾶξιν ὑπὸ δύο μορφάς, ἥτοι ὡς ἐκτίμησις χαρακτηριστικῶν μέτρων  
 τῆς κατανομῆς τοῦ πληθυσμοῦ καί ὡς ἔλεγχος ὠρισμένης ὑποθέσεως  
 ἀφορώσης εἰς τήν τιμὴν ἑνὸς ἢ πλειόνων ἐν τῶν μέτρων τούτων.

Κατ' ἀρχήν, ὁ ἀκολουθοῦμενος τρόπος ἐπιλογῆς ἑνὸς τυχαίου  
 δείγματος ἐπιτρέπει τήν χρησιμοποίησιν τῆς τιμῆς δεδομένου χα-  
 ρακτηριστικοῦ τῆς ἐν τούτῳ προκυπτούσης κατανομῆς ὡς "ἀρίστης  
 ἐκτιμήσεως" τοῦ ἀντιστοίχου χαρακτηριστικοῦ τοῦ πληθυσμοῦ. Ἐν  
 λόγῳ τιμῆ καλεῖται "στιγμικὴ ἐκτίμησις". Περαιτέρω, καθίσταται  
 δυνατός ὁ καθορισμός, ὅχι πλέον μιᾶς συγκεκριμένης τιμῆς, ἀλλὰ  
 ὁλοκλήρου διαστήματος τιμῶν, προσδιοριζομένου ὑπὸ ἑνὸς κατωτέ-  
 ρου καί ἑνὸς ἀνωτέρου ὁρίου, ἐντός τοῦ ὁποίου θά πρέπει νά ἀνα-  
 μένεται ὅτι κατὰ πᾶσαν πιθανότητα θά ἐμπέτη ἡ ἀληθῆς τιμὴ τοῦ  
 χαρακτηριστικοῦ τοῦ πληθυσμοῦ.

Ὅσον ἀφορᾷ εἰς τόν ἔλεγχον ὑποθέσεων, οὗτος κατ' οὐσίαν  
 στηρίζεται ἐπὶ τῶν ἀποτελεσμάτων τῆς ἐκτιμήσεως τῶν χαρακτηρι-  
 στικῶν τοῦ πληθυσμοῦ, ἀναφέρεται, ὅμως, ὡς χωριστόν θέμα τῆς  
 στατιστικῆς ἐπαγωγῆς λόγῳ τῆς ἰδιομορφίας τήν ὁποίαν παρουσιάζει  
 καί, ἰδίως, τῆς οὐσιώδους σημασίας του ἀπὸ πρακτικῆς ἀπόψεως. Ἡ  
 ἀκολουθοῦμένη ἐν προκειμένῳ διαδικασία συνίσταται εἰς τήν διατύ-  
 πωσιν ὠρισμένης ὑποθέσεως περὶ τῆς τιμῆς δεδομένου χαρακτηρι-  
 στικοῦ τοῦ πληθυσμοῦ καί ἐν συνεχείᾳ εἰς τήν ἐξέτασιν κατὰ πόσον  
 τό διαθέσιμον δείγμα εἶναι πιθανόν νά ἔχη προέλθῃ ἐξ ἑνὸς πληθυ-  
 σμοῦ μέ τοιαύτην τιμὴν, δι' ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου τῆς τυχαίας  
 δειγματοληψίας.

Δέον νά σημειωθῇ ὅτι τὰ ἀνωτέρω ἀναφερθέντα θέματα στατι-  
 στικῆς ἐπαγωγῆς ἐξετάζονται κατωτέρω ἀναφορικῶς μόνον πρὸς τόν  
 ἀριθμητικόν μέσον, ὁ ὁποῖος καί ἀποτελεῖ τό σπουδαιότερον καί  
 γνωστότερον περιγραφικόν μέτρον. Ἐν τούτοις, αἱ αὐταί γενικαί  
 ἀρχαί ἰσχύουν κατὰ βάσιν καί διὰ τήν ἐκτίμησιν ἢ τόν ἔλεγχον ὑπο-  
 θέσεων ὡς πρὸς ἕτερα μέτρα ὑπολογιζόμενα ἐν δειγμάτων.

## 2. Κατανομή δειγματοληψίας τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου

Ὁ ἀριθμητικὸς μέσος δεδομένου ποσοτικοῦ χαρακτηριστικοῦ,  
 ὁ ὁποῖος ὑπολογίζεται ἐκ τίνος δείγματος τιμῶν αὐτοῦ ἐπιλεγέντος

δι' ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου τῆς τυχαίας δειγματοληψίας, θεωρεῖται μὲν ὡς ἀρίστη ἐκτίμησις τοῦ μέσου τοῦ πληθυσμοῦ, πλὴν ὅμως δὲν εἶναι καὶ ἡ μόνη δυναμένη νὰ ληφθῆ διὰ τὸν πληθυσμὸν τοῦτον. Δι' ἐφαρμογῆς πάντοτε τῆς μεθόδου τῆς τυχαίας δειγματοληψίας εἶναι ἐφικτὴ ἡ ἐπιλογή ἐκ τοῦ ἐξεταζομένου πληθυσμοῦ, ὄχι ἑνός, ἀλλὰ πολλῶν, τοῦ ἴδου μεγέθους, δειγμάτων, ἐξ ἑκάστου τῶν ὁποίων προκύπτει καὶ μία ἐκτίμησις τοῦ μέσου τοῦ πληθυσμοῦ. Εἶναι εὐνόητον ὅτι ὅλαι αἱ οὕτως ὑπολογιζόμεναι τιμαὶ τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου ἐκ τῶν ἐπὶ μέρους δειγμάτων δὲν θὰ εἶναι ἴσαι. Μεταξύ των θὰ ὑπάρχουν διαφοραὶ, εἰς ἄλλας μὲν περιπτώσεις μεγάλαι, εἰς ἄλλας δὲ μικραί. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ ἐξ ἑνός δειγματος λαμβανομένη τιμὴ τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου θὰ ἐμφανίζῃ πάντοτε ὠρισμένου βαθμοῦ ἀπόκλισιν ἐκ τοῦ πραγματικοῦ, ἀλλὰ ἀγνώστου, μέσου τοῦ πληθυσμοῦ.

Πρὸς περαιτέρω ἐξέτασιν τῆς σχέσεως ἡ ὁποία συνδέει τὸν ἀριθμητικὸν μέσον τοῦ δειγματος ( $\bar{X}$ ) μὲ τὸν πραγματικὸν μέσον τοῦ πληθυσμοῦ ( $\mu$ ) κατατάσσομεν τοὺς καθ' ὑπόθεσιν διαθεσίμους ἀριθμητικούς μέσους τῶν ἐπὶ μέρους τυχαίων δειγμάτων, ἔστω μεγέθους  $n$ , ὑπὸ μορφήν κατανομῆς κατὰ συχνότητος. Ἡ ἐν λόγω κατανομή καλεῖται "κατανομή δειγματοληψίας τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου". Εἰς ταύτην ὁ γενικὸς ἀριθμητικὸς μέσος συμβολίζεται διὰ  $\bar{X}_k$  καὶ ἡ μέση ἀπόκλισις τετραγώνου διὰ  $\sigma_{\bar{X}}$ .

Ἀποδεικνύεται, κατ' ἀρχὴν, ὅτι, μολονότι οἱ ἀριθμητικοὶ μέσοι τῶν ἐπὶ μέρους δειγμάτων, ὡς ἀνωτέρω ἐλέχθη, ἀποκλίνουν ἐκ τοῦ γενικοῦ μέσου τοῦ πληθυσμοῦ, ἐν τούτοις ὁ ἀριθμητικὸς μέσος τῶν μέσων τῶν δειγμάτων ἰσοῦται πρὸς  $\mu$ . Ἐάν, δηλαδή, λάβωμεν ὅλα τὰ  $k$  δυνατὰ δειγματα, μεγέθους  $n$ , διὰ τὰ ὁποῖα ἔχομεν ἀντιστοίχους ἀριθμητικούς μέσους:  $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_k$ , θὰ εἶναι:

$$(Z-1) \quad \mu = \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \dots + \bar{X}_k}{k}$$

Κατὰ ταῦτα, ὅταν, ἐπὶ παραδείγματι, πρὸς εὔρεσιν τοῦ μέσου ἡμερομισθίου δεδομένου πληθυσμοῦ ἐργατῶν χρησιμοποιοῦμεν ἓν δειγμα ἐξ αὐτῶν, ὡς εἶναι τὸ ἐκ 36 ἐργατῶν τοῦ προηγουμένου κεφαλαίου, ἡ ἀρίστη ἐκτίμησις τοῦ μέσου ἡμερομισθίου δι' ὀλοκληρὸν τὸν πληθυσμὸν θὰ παρέχεται ὑπὸ τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου τοῦ ἐν λόγω δειγματος, ὁ ὁποῖος ὑπελογίσθη  $\bar{X} = 61,84$  δραχ. Βεβαίως, ἐάν ἀντὶ τοῦ ἐπιλεγέντος δειγματος ἐλαμβάνετο ἕτερον, ὁμοίως κατὰ τυχαῖον τρόπον, θὰ προέκυπτε ἄλλη τιμὴ διὰ τὸν ἀριθμητικὸν μέσον.

Αί ἐκ διαδοχικῶν δειγμάτων προκύπτουσαι τιμαὶ θά ἀπέκλινον ἐκ τῆς πραγματικῆς, ἀλλὰ ἀγνώστου, τιμῆς τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου εἰς τὸν πληθυσμόν, ἀλλὰ κατὰ μέσον ὅρον θά συνέπιπτον μετ' αὐτοῦ. Τοῦτο σημαίνει ὅτι οἱ μέσοι τῶν ἐπὶ μέρους δειγμάτων, ἂν καὶ στηρίζονται ἐπὶ τιμῶν ἐκ παρατηρήσεως ληφθειῶν ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἀρχῶν τῆς τυχαίας δειγματοληψίας, ἐν τούτοις δέν ἴσούνται πρὸς τὸν ἀριθμητικὸν μέσον τοῦ πληθυσμοῦ ἐκ λόγων καθαρῶς τυχαίων, ὀφειλομένων εἰς τὴν μὴ ἐξασφάλισιν πλήρους ἀντιπροσωπευτικότητος. Αἱ ἀποκλίσεις τῶν μέσων τῶν δειγμάτων ἀπὸ τοῦ πραγματικοῦ μέσου τοῦ πληθυσμοῦ ἐκφράζουσι τὰ τυχαῖα σφάλματα τῆς δειγματοληψίας. Τὰ ἐν λόγω σφάλματα, ὡς ἐκ τῆς φύσεώς των, δέν εἶναι συστηματικά, ἔχουσι δὲ ἀριθμητικὸν μέσον ἴσον πρὸς τὸ μηδέν ἐφ' ὅσον ὑπολογίζονται ἐφ' ὅλων τῶν δειγμάτων τῶν δυναμένων νὰ ληφθοῦν ἐκ δεδομένου πληθυσμοῦ.

Ἡ διακύμανσις τῆς κατανομῆς δειγματοληψίας τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου ( $\sigma_{\bar{X}}^2$ ) δίδεται ὑπὸ τῆς διακυμάνσεως τῆς κατανομῆς τοῦ πληθυσμοῦ ( $\sigma^2$ ) διαφυομένης διὰ τοῦ μεγέθους τῶν δειγμάτων  $n$ .

Ἔχομεν, δηλαδή :

$$(Z-2) \quad \sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Ἦτοι αὕτη εἶναι ἀνάλογος τῆς διακυμάνσεως τοῦ πληθυσμοῦ καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογος τοῦ μεγέθους τοῦ δείγματος. Πράγματι, ὅσον μεγαλύτερα εἶναι ἡ διασπορά τῶν τιμῶν τοῦ μελετωμένου χαρακτηριστικοῦ εἰς τὸν πληθυσμόν τοσοῦτον μεγαλύτερα θά πρέπει νὰ εἶναι καὶ ἡ διακύμανσις μεταξύ τῶν μέσων τῶν ἐκ τοῦ πληθυσμοῦ τούτου λαμβανομένων ἰσοπληθῶν δειγμάτων. Ἐπίσης, ὅσον μεγαλύτερον εἶναι τὸ μέγεθος τῶν δειγμάτων τῶν χρησιμοποιουμένων πρὸς κατασκευὴν ὀρισμένης κατανομῆς δειγματοληψίας τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου τοσοῦτον μικρότερα θά εἶναι ἡ διακύμανσις τῆς ἐν λόγω κατανομῆς. Σημειωτέον ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τῆς διακυμάνσεως, ἢ ὅποια κυρίως χρησιμοποιεῖται ὡς μέτρον τῆς διασπορᾶς, ἀποκαλεῖται "μέσον σφάλμα τετραγώνου ἐκτιμήσεως" ἢ "τυπικὸν σφάλμα ἐκτιμήσεως" καὶ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$(Z-3) \quad \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Διευκρινίζεται ἐν προκειμένῳ ὅτι τὸ τυπικὸν σφάλμα ἐκτιμήσεως οὐ



δόλως διαφέρει τῆς εἰς τό προηγούμενον Κεφάλαιον ἐξετασθείσης "μέσης ἀποκλίσεως τετραγώνου", μέ μόνην τήν διαφοράν ὅτι, ἐνῶ ἡ τελευταία ἀναφέρεται εἰς τήν κατανομήν τῶν τιμῶν δεδομένου χαρακτηριστικοῦ περίξ τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου αὐτῶν, ἡ πρώτη ἀφορᾷ εἰς τήν κατανομήν τῶν μέσων τῶν δειγμάτων περίξ τοῦ ἀληθοῦς μέσου τοῦ πληθυσμοῦ.

### 3. Ἐπίπεδον καί διάστημα ἐμπιστοσύνης τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου

Ἡ κατά τά ἀνωτέρω σχηματιζομένη κατανομή δειγματοληψίας τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου, ἡ ὁποία, θεωρητικῶς, ὡς ἤδη ἐλέχθη, ἔχει μέσον ἴσον πρός τόν πραγματικόν μέσον τοῦ πληθυσμοῦ καί διακύμανσιν  $\sigma_{\bar{x}}^2$ , ἐάν ἀπεικονίζετο γραφικῶς θά ἐνεφάνιζε σχῆμα κωδωνοειδέες προσεγγίζον ἐκείνο τῆς κανονικῆς κατανομῆς. Εἰς ἀπομά-

Πίναξ Z - 1

Ἐναλογίαι ἐπιφανειῶν ὀριζομένων ὑπό τῆς κανονικῆς καμπύλης καί διαφορῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς εἰς μονάδας  $\sigma_{\bar{x}}$

T (Μονάδες $\sigma_{\bar{x}}$ )	Ἐναλογία ἐπιφανείας
0,0	0,0000
0,5	0,1915
1,0	0,3413
1,5	0,4332
2,0	0,4773
2,5	0,4938
3,0	0,49865
4,0	0,499968
5,0	0,49999971

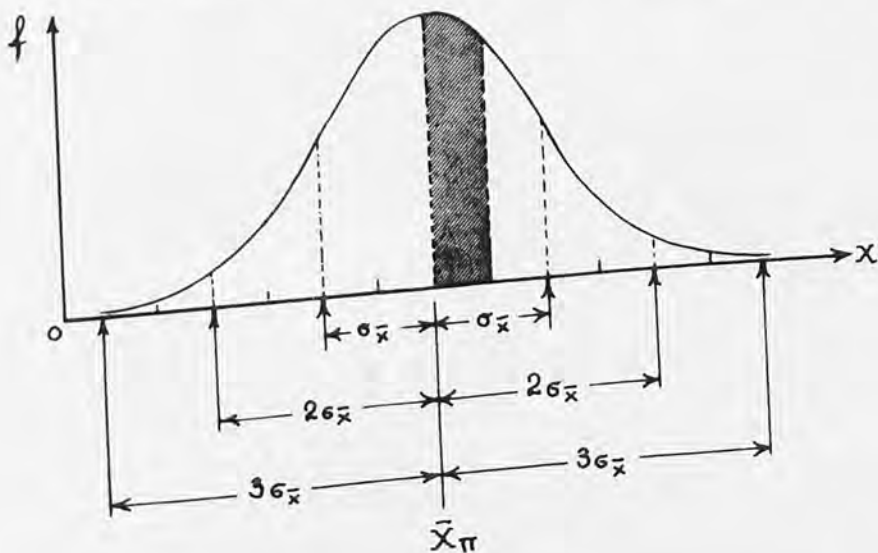
κρυσιν ἐκ τῆς κανονικότητος τῆς κατανομῆς τῶν μέσων συντελεῖ ἡ χρησιμοποίησις μικροῦ μεγέθους δειγμάτων (περιλαμβανόντων ὀλιγώτερας τῶν 30 μονάδων) καί μάλιστα λαμβανομένων ἐκ μή κανονικῶς κατανεμομένου πληθυσμοῦ. Γενικῶς, ὅμως, δύναται νά λεχθῆ ὅτι ὅταν τά δείγματα εἶναι μεγάλα (περιλαμβάνοντα 30 μονάδας καί ἄνω), ἡ κατανομή τῶν ἐξ αὐτῶν ὑπολογιζομένων ἀριθμητικῶν μέσων θά

εἶναι κατὰ πᾶσαν πιθανότητα κανονική, ἔστω καὶ ἂν ὁ πληθυσμὸς ἐν τοῦ ὁποῦ προέρχονται ταῦτα δὲν κατανέμεται κανονικῶς.

Ἐφ' ὅσον, ὑπὸ τὰς προϋποθέσεις αὐτάς, ἡ κατανομή δειγματοληψίας τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου θεωρεῖται ὡς κανονική, εἶναι δυνατὴ ἢ κατὰ προσέγγισιν εὐρέσις τοῦ ποσοστοῦ τῶν μέσων οἱ ὅποιοι κεῖνται ἐντὸς δεδομένων ὁρίων τιμῶν, διὰ χρησιμοποίησιν τῶν θεωρητικῶν ἀναλογιῶν τῶν ἀντιστοιχοῦσάν εἰς τὰ τμήματα τὰ προσδιοριζόμενα ὑπὸ τῆς κανονικῆς καμπύλης καὶ τῶν ὁρίων τούτων. Διάφοροι

### Διάγραμμα Z-1

Ἐπιφάνειαι ὁριζόμεναι ὑπὸ τῆς κανονικῆς καμπύλης καὶ ὠρισμένων τιμῶν τῆς μεταβλητῆς ἐκπεφρασμένων εἰς μονάδας  $\sigma_{\bar{x}}$



τοιαῦται θεωρητικὰ τμᾶτα δίδονται εἰς τὸν Πίνακα Z-1, ἔνθα διὰ τὴν συμβολίζονται διάστημα τι τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς ἐκπεφρασμένων εἰς τυπικὰ σφάλματα ἐκτιμήσεως. Δι' ἐκάστην τμήν τ ἐν τῶν ἀναγραφόμενων εἰς τὸν πίνακα τούτον παρέχεται ἢ ἐπὶ τοῦ συνόλου ἀναλογία τῆς ἐπιφανείας τῆς περιεχομένης μεταξύ τῆς καμπύλης τῆς κατανομῆς καὶ δύο καθέτων ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν  $X$  ἐκ τῶν ὁποῶν ἢ μὴ ἀγεται ἐπὶ τὸν ἀριθμητικὸν μέσον ἢ δὲ ἕτερα εἰς σημειῶν ἀπέχον  $T\sigma_{\bar{x}}$  ἐξ αὐτοῦ (βλ. Διάγραμμα Z-1).

Ούτω, διά νά εύρωμεν ἐκ τοῦ Πίνακος Z-1 τήν ἀναλογία ν τῆς ἐπιφανείας ἡ ὅποια περιλαμβάνεται μεταξύ τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου καί  $0,5\sigma_{\bar{X}}$  ὑπεράνω τούτου, ἐντοπιζόμεν τήν τιμήν  $T=0,5$  εἰς τήν πρώτην στήλην καί ἐν συνεχείᾳ λαμβάνομεν ἐκ τῆς δευτέρας στήλης ἀντιστοίχως  $0,1915$ . Συνεπῶς, εἰς τήν κανονικήν κατανομήν  $0,1915$  τοῦ συνόλου τῶν τιμῶν ἡ τό  $19,15\%$  αὐτῶν ἐμπίπτει εἰς τό διάστημα μεταξύ  $\mu$  καί  $\mu+0,5\sigma_{\bar{X}}$ . Εἶναι φανερόν ὅτι πρὸς ὑπολογισμόν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν τιμῶν αἱ ὅποια περιλαμβάνονται εἰς τό διάστημα μεταξύ  $\mu - 0,5\sigma_{\bar{X}}$  καί  $\mu + 0,5\sigma_{\bar{X}}$  θά πρέπει νά διπλασιάσωμεν τήν εἰς τόν Πίνακα Z-1 ἀναγραφομένην τιμήν παραπλεύρως τοῦ  $0,5$ , ὅποτε λαμβάνομεν  $0,3830$  ἢ  $38,3\%$ . Ἐπίσης, ἡ ἀναλογία τῶν τιμῶν τῶν μεγαλυτέρων τοῦ  $\mu + 0,5\sigma_{\bar{X}}$  εἶναι, προφανῶς,  $0,5000 - 0,1915 = 0,3085$  ἢ  $30,85\%$ , ἡ ἀναλογία τῶν τιμῶν τῶν μεγαλυτέρων τοῦ  $\mu + 0,5\sigma_{\bar{X}}$  καί μικροτέρων τοῦ  $\mu$  εἶναι  $1,0000 - 0,1915 = 0,8085$  ἢ  $80,85\%$ , ἡ δέ ἀναλογία τῶν τιμῶν τῶν μεγαλυτέρων τοῦ  $\mu + 0,5\sigma_{\bar{X}}$  καί μικροτέρων τοῦ  $\mu - 0,5\sigma_{\bar{X}}$  εἶναι  $1,0000 - 0,3830 = 0,6170$  ἢ  $61,7\%$ .

Ὡς ἔχει ἤδη λεχθῆ, ὁ ἀριθμητικὸς μέσος ὁ ὑπολογιζόμενος ἐκ τινος δειγματος μεγέθους  $n$  ἐλημμένου κατὰ τήν διαδικασίαν τῆς τυχαίας δειγματοληψίας δύναται νά χρησιμοποιηθῆ ὡς στιγμική ἐκτίμησις τοῦ πραγματικοῦ μέσου τοῦ πληθυσμοῦ. Ἐκ τοῦ δειγματος λαμβάνομεν ἐπίσης καί στιγμικήν ἐκτίμησιν τῆς διακυμάνσεως τοῦ πληθυσμοῦ ( $\hat{\sigma}^2$ ). Αὕτη προκύπτει ἐκ τῆς διακυμάνσεως τοῦ δειγματος  $S_{\bar{X}}^2$ , προσηυξημένης, ὅμως, κατὰ  $n/n-1$  διά νά καταστή ἄμερόληπτος ἐκτίμησις τῆς  $\sigma^2$ . Ἐχομεν, δηλαδή :

$$(Z-4) \quad \hat{\sigma}^2 = \left(\frac{n}{n-1}\right) S_{\bar{X}}^2 = \frac{\Sigma(X - \bar{X})^2}{n-1}$$

Σημειωτέον ὅτι ὁ ἀριθμὸς  $n-1$  εἰς τόν τύπον (Z-4) ἐκφράζει τοὺς "βαθμοὺς ἐλευθερίας", δηλαδή τόν ἀριθμόν τῶν ἐλευθέρων ἐπιλογῶν αἱ ὅποια δύναται νά γίνουν πρὸς σχηματισμόν ὁμάδος τινὸς τιμῶν. Εἰς τήν περίπτωσιν τῶν ἀποκλίσεων τῶν ἐκ παρατηρήσεως τιμῶν ἐκ τοῦ μέσου των, ὅλαι δύναται νά ἐπιλεγοῦν ἐλευθέρως ἐκτός μιᾶς, καθ' ὅσον ὅταν ἐκ τῶν  $n$  ἀποκλίσεων ἔχουν καθορισθῆ αἱ  $n-1$  θά εἶναι δεδομένη καί ἡ τελευταία ἀπομένουσα δεδομένου ὅτι τό ἄθροισμά των θά πρέπει νά ἰσοῦται πρὸς τό μηδέν.

Ἡ ὑπὸ τοῦ τύπου (Z-4) διδομένη ἄμερόληπτος ἐκτίμησις τῆς διακυμάνσεως τοῦ πληθυσμοῦ εἶναι δυνατόν νά ἀντικαταστήσῃ τήν

πραγματικήν τιμήν αὐτῆς  $\sigma^2$  εἰς τόν τύπον (Z-2), ὅποτε τό τυπικόν σφάλμα ἐκτιμήσεως εἰς τήν κατανομήν δειγματοληψίας τοῦ μέσου θά εἶναι :

$$(Z-5) \quad \sigma_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n}} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$$

Κατά ταῦτα, ἐκ τῶν δεδομένων ἑνός μόνου δείγματος λαμβάνομεν, ὄχι μόνον τήν στιγμικήν ἐκτίμησιν τοῦ μέσου τοῦ πληθυσμοῦ, ἀλλά καί ἀμερόληπτον ἐκτίμησιν τοῦ τυπικοῦ σφάλματος τῆς κατανομῆς δειγματοληψίας τῶν μέσων. Βεβαίως, ἡ στιγμική ἐκτίμησις  $\bar{X}$  ἐνδέχεται νά εὑρίσκηται πλησίον τοῦ ἀληθοῦς μέσου τοῦ πληθυσμοῦ  $\mu$ . Δέν ἀποκλείεται, ὅμως, καί νά ἀπέχη ἐξ αὐτοῦ σημαντικῶς. Ἐάν, συνεπῶς, λάβωμεν διάστημα τιμῶν τῆς μεταβλητῆς  $X$  ὀριζόμενον ὑπό  $3\sigma_{\bar{X}}$  ἔνθεν καί ἔνθεν τοῦ  $\bar{X}$ , προκύπτει ἐκ τοῦ σχετικοῦ πίνακος τῆς κανονικῆς κατανομῆς (βλ. Πίνακα Z-1) ὅτι ἡ ἀναλογία τῆς ἀντιστοίχου ἐπιφανείας θά εἶναι 0,9973. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ ἐν λόγῳ ἐπιφάνεια θά περιλαμβάνη τό 99,73% τοῦ συνόλου τῶν δειγμάτων. Κατ' ἄλλην διατύπωσιν, ἡ πιθανότης ὅτι ὁ μέσος ἑνός οἰουδήποτε ἐκ τῶν δυναμένων νά ἐπιλεγοῦν δειγμάτων ἐκ τοῦ ἐξεταζομένου πληθυσμοῦ θά ἐμπίπτῃ εἰς τό διάστημα  $\bar{X} - 3\sigma_{\bar{X}}$  καί  $\bar{X} + 3\sigma_{\bar{X}}$  εἶναι 997,3 εἰς τὰς 1.000.

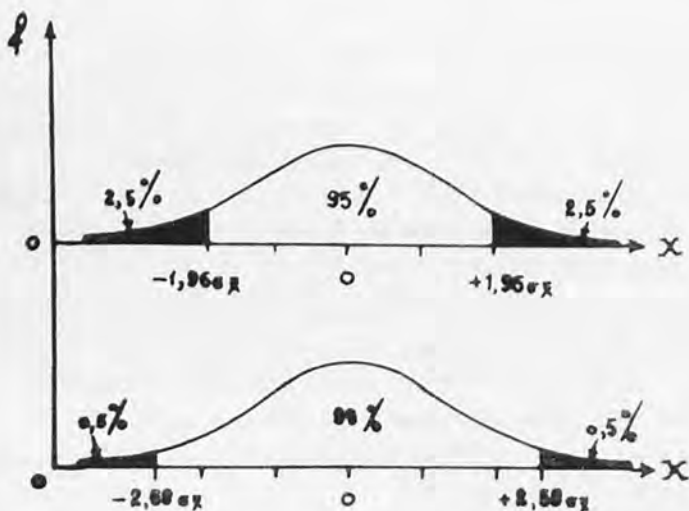
Τό χρησιμοποιούμενον διάστημα πρὸς ἐκτίμησιν τοῦ μέσου τοῦ πληθυσμοῦ τῶν διαφόρων οἰκονομικῶν καί κοινωνικῶν μεγεθῶν δέν ὑπερβαίνει συνήθως τὰ  $1,96\sigma_{\bar{X}}$  ἔνθεν καί ἔνθεν τοῦ μέσου τοῦ δείγματος. Ἐκ τοῦ σχετικοῦ πίνακος λαμβάνομεν ὅτι εἰς τό διάστημα τοῦτο θά ἐμπίπτουν τὰ 95% τῶν δειγμάτων καί συνεπῶς εἰς τό ποσοστόν τοῦτο ἀνέρχεται καί ἡ πιθανότης ὅτι ὁ ἄγνωστος ἀριθμητικὸς μέσος τοῦ πληθυσμοῦ θά εὑρίσκηται ἐντός τῶν ὁρίων  $\bar{X} - 1,96\sigma_{\bar{X}}$  καί  $\bar{X} + 1,96\sigma_{\bar{X}}$ . Ἡ πιθανότης αὕτη, ἐπεὶδὴ προσδιορίζει τήν ἐμπιστοσύνην μετὰ τῆς ὁποίας ὁ ἐρευνητῆς ἀναμένει ὅτι οἰουδήποτε μέσος προερχόμενος ἐξ ἄλλου τινός δειγματος τοῦ ἐξεταζομένου πληθυσμοῦ ἐπὶ τῇ βάσει τῆς διαδικασίας τῆς τυχαίας δειγματοληψίας θά ἀποκλιῇ ἐκ τοῦ πραγματικοῦ μέσου κατὰ ἕλασσον τῆς τεθείσης ἀποστάσεως πρὸς τὰ ἄνω ἢ πρὸς τὰ κάτω, καλεῖται "ἐπιπέδον ἐμπιστοσύνης". Πολλάνκις, ἀντὶ τοῦ ἐπιπέδου ἐμπιστοσύνης γίνονται χρῆσις τοῦ ὄρου "ἐπίπεδον σημαντικότητος", ὁ ὁποῖος ἀναφέρεται εἰς τήν πιθανότητα μὴ ὑπάρξεως τοῦ μέσου τοῦ πληθυσμοῦ ἐν-

τός τῶν τεθέντων ὁρίων. Οὕτω, εἰς τὴν προαναφερθεῖσαν περίπτω-  
σιν κατὰ τὴν ὁποῖαν χρησιμοποιῶμεν  $1,96\sigma_{\bar{X}}$  τὸ ἐπίπεδον σημαντι-  
κότητος εἶναι  $1,00 - 0,95 = 0,05$ , ἥτοι 5%. Σημειωτέον ὅτι αἱ  
τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς  $T\sigma_{\bar{X}}$  ἐνθεν καὶ ἐνθενταῦ  
 $\bar{X}$  προσδιορίζουν τὸ καλούμενον "διάστημα ἐμπιστοσύνης".

Εἰς τὴν πράξιν, κατὰ τὴν ἐκτίμησιν τοῦ μέσου πληθυσμοῦ τινος,  
πρῶτον καθορίζεται τὸ ἐπίπεδον ἐμπιστοσύνης καὶ ἐν συνεχείᾳ, ὡς  
συνέπεια τοῦ καθορισμοῦ τούτου, προκύπτει τὸ διάστημα ἐμπιστο-

### Διάγραμμα Z-2

Ἐπίπεδα ἐμπιστοσύνης τῆς κανονικῆς κατανομῆς  
95% καὶ 99%



σύνης. Τὸ χρησιμοποιούμενον ἐπίπεδον ἐμπιστοσύνης, ἐνῶ, ὡς ἀνω-  
τέρω ἐλέχθη, διὰ τὰ οἰκονομικὰ καὶ κοινωνικὰ μεγέθη εἶναι συνήθως  
95%, δι' ἄλλα μεγέθη, διὰ τὰ ὁποῖα ἀπαιτεῖται μεγάλη ἐμπιστοσύνη  
κατὰ τὸν καθορισμὸν τῆς πιθανῆς τιμῆς τοῦ πραγματικοῦ, ἀλλ' ἀγνώ-  
στου, μέσου τοῦ πληθυσμοῦ, εἶναι 99% ἢ καὶ ἀνώτερον. Ἀμφότερα  
τὰ ἐπίπεδα ταῦτα ἐμπιστοσύνης, τὰ ὁποῖα, ὡς γνωστόν, ἀντιστοι-  
χοῦν εἰς τμήματα τῆς ὑπὸ τῆς κανονικῆς καμπύλης ὀριζομένης ἐπι-  
φανείας, ἀπεικονίζονται γραφικῶς εἰς τὸ Διάγραμμα Z-2.

Πρός εφαρμογήν τῶν ἀνωτέρω ἐκτεθέντων σχετικῶς μέ τήν ἐκτίμησιν τοῦ μέσου τοῦ πληθυσμοῦ, λαμβάνομεν τά εἰς τό προηγούμενον κεφάλαιον χρησιμοποιηθέντα στοιχεῖα ἡμερομισθίων 36 ἔργατῶν, τά ὁποῖα ὑποτίθεται ὅτι προέκυψαν ἐκ τινος πληθυσμοῦ (π.χ. τοῦ συνόλου τῶν ἔργατῶν τῆς βιομηχανίας ἢ τῶν ἔργατῶν ὠρισμένου κλάδου ταύτης) διά τῆς μεθόδου τῆς τυχαίας δειγματοληψίας. Ὡς γνωστόν, τά δεδομένα τοῦ ἐν λόγω δείγματος δίδουν στιγμικὴν ἐκτίμησιν τοῦ μέσου τοῦ πληθυσμοῦ  $\bar{X} = 61,84$  δραχ. Πρὸς προσδιορισμόν τοῦ διαστήματος ἐντός τοῦ ὁποίου θά ἐμπίπτῃ ὁ πραγματικὸς μέσος τοῦ πληθυσμοῦ εἰς δεδομένον ἐπίπεδον ἐμπιστοσύνης προβαίνομεν εἰς ὑπολογισμόν τοῦ  $\sigma_{\bar{X}}$  ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ τύπου (Z-5). Χρησιμοποιοῦντες ὡς ἐκτίμησιν τῆς διακυμάνσεως τοῦ πληθυσμοῦ τήν διακύμανσιν τοῦ δείγματος  $S_{\bar{X}} = 170,164$ , λαμβάνομεν :

$$\sigma^2 = \left( \frac{36}{36-1} \right) 170,164 = 175,028$$

Ἐπομένως, εἶναι :

$$\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{175,028}{36}} = 2,205$$

Κατὰ συνέπειαν, δυνάμεθα νά εἰπῶμεν ὅτι ὁ πραγματικὸς μέσος τῶν ἡμερομισθίων εἰς τόν πληθυσμόν τῶν ἔργατῶν θά ἐμπίπτῃ, μέ πιθανότητα 95% (ἢ ἄλλως εἰς ἐπίπεδον σημαντικότητος 5%), ἐντός τοῦ διαστήματος ἀπὸ  $61,84 - (1,96)(2,205)$  ἕως  $61,84 + (1,96)(2,205)$ , ἤτοι ἀπὸ 57,52 δραχ. ἕως 66,16 δραχ.

Ὁ ἀνωτέρω περιγραφεὶς τρόπος ἐκτιμήσεως τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου τοῦ πληθυσμοῦ ἐφαρμόζεται, ὡς ἤδη ἐλέχθη, εἰς περιπτώσεις κατὰ τὰς ὁποίας, αἰ μὲν τιμαὶ τῆς ἐξεταζομένης μεταβλητῆς εἰς τόν πληθυσμόν κατανέμονται περίπου κανονικῶς, τό δέ μέγεθος τῶν χρησιμοποιουμένων δειγμάτων εἶναι σχετικῶς μέγα (καλύπτει περισσότερας τῶν 30 μονάδων), ὁπότε καὶ ἡ τιμὴ τοῦ λόγου :

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}}$$

κατανέμεται κανονικῶς. Ὅταν, ὅμως, τό μέγεθος τοῦ χρησιμοποι-

ουμένου δείγματος είναι σχετικῶς μικρόν (περιλαμβάνει ὀλιγωτέρας τῶν 30 μονάδων), τότε ἡ τιμὴ τοῦ λόγου :

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}}$$

δὲν ἀκολουθεῖ τὴν κανονικὴν κατανομὴν, ἀλλὰ ἑτέραν, καλουμένην "κατανομὴν  $t$  τοῦ Student". Ἐν προκειμένῳ εἶναι φανερόν ὅτι ἡ κατά τούς τύπους (Z-4) καὶ (Z-5) ἐκτίμησις τοῦ  $\sigma_X$  συναρτῆσει τοῦ  $S_X$  ἐπηρεάζεται πολὺ περισσότερον ἐπὶ μικρῶν ἢ ἐπὶ μεγάλων δειγμάτων ὑπὸ τοῦ παράγοντος  $n/n - 1$ . Συνεπῶς, ὅταν μεταβάλλεται τὸ μέγεθος τοῦ δείγματος ἀλλάσσει καὶ ἡ τιμὴ τοῦ  $t$ , ὄχι μόνον λό-

### Πίναξ Z-2

Τιμαὶ  $t$  τῆς κατανομῆς τοῦ Student εἰς διάφορα ἐπίπεδα πιθανότητος καὶ διὰ διαφόρους βαθμοὺς ἐλευθερίας

Βαθμοὶ ἐλευθερίας ( $v = n - 1$ )	Πιθανότης		
	0,50	0,10	0,05
5	0,727	0,02	2,57
10	0,700	1,81	2,23
15	0,691	1,75	2,13
20	0,687	1,72	2,09
30	0,683	1,70	2,04
40	0,681	1,68	2,02
50	0,679	1,68	2,01
100	0,677	1,66	1,98
1.000	0,674	1,65	1,96

γῶν ὑπολογισμοῦ διαφορετικοῦ  $\bar{X}$ , ἀλλὰ καὶ λόγω χρησιμοποίησεως διαφορετικοῦ  $S_X$ . Διὰ τοῦτο, εἰς τούς διαθέσιμους πίνακας τοῦ  $t$  εἰς τὰς διαφόρους τιμὰς αὐτοῦ ἀντιστοιχοῦντα ἐπίπεδα ἐμπιστοσύνης προσδιορίζονται καὶ συναρτῆσει τῶν λεγομένων βαθμῶν ἐλευθερίας  $v = n - 1$ .

Οἱ πίνακες τῶν τιμῶν τοῦ  $t$  χρησιμοποιοῦνται κατὰ βάσιν καὶ οἱ ἀντίστοιχοι τῆς κανονικῆς κατανομῆς. "Ὅταν ἔχωμεν ὑπολογίσει ἐκ τοῦ δείγματος τὴν τιμὴν τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου  $\bar{X}$ , θά νά καθορίσωμεν τὸ διάστημα ἐμπιστοσύνης τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου τοῦ πληθυσμοῦ διὰ προσθέσεως εἰς τὸν  $\bar{X}$  καὶ δι' ἀφαιρέσεως ἐξ αὐ-

του  $t$  φορές τό  $\sigma_{\bar{X}}$ . Ἡ τιμή του  $t$  διά δεδομένον ἐπίπεδον πιθανότητας  $0,05$  (ἢ ἐπίπεδον ἐμπιστοσύνης  $95\%$ ) καί μέγεθος δείγματος  $n = 10$  εἶναι, ὡς ἐμφαίνεται εἰς τόν Πίνακα  $Z-2, 2,26$ . Ἡ τιμή αὕτη σημαίνει ὅτι εἰς τό  $95\%$  τῶν δειγμάτων ὁ ἀριθμητικός μέσος θά ἐμπίπτῃ εἰς τό διάστημα ἀπό  $\bar{X} - 2,26\sigma_{\bar{X}}$  ἕως  $\bar{X} + 2,26\sigma_{\bar{X}}$ , μόνον δέ εἰς τό  $5\%$  αὐτῶν εἶναι πιθανόν νά προκύψῃ ἀριθμητικός μέσος μικρότερος τοῦ  $\bar{X} - 2,26\sigma_{\bar{X}}$  ἢ μεγαλύτερος τοῦ  $\bar{X} + 2,26\sigma_{\bar{X}}$ .

#### 4. Ἐλεγχοί στατιστικῶν ὑποθέσεων

##### α) Σύγκρισις τῶν μέσων δύο δειγμάτων

Πολλάκις εἰς τὰς πρακτικάς ἐφαρμογὰς παρίσταται ἀνάγκη ἐξετάσεως τῆς ὑπάρξεως ἢ μή σημαντικῆς διαφορᾶς μεταξύ τῶν ἀριθμητικῶν μέσων δύο πληθυσμῶν ἐπὶ τῇ βάσει τῶν διαθεσίμων πληροφορικῶν τῶν προερχομένων ἐκ τῶν ἀντιστοιχῶν δειγμάτων. Ἐπὶ παραδειγματι, ἐάν ὑποτεθῇ ὅτι τό εἰς τό προηγούμενον κεφάλαιον χρησιμοποιηθέν δειγμα ἐκ  $36$  ἐργατῶν ἔχει ληφθῆ ἐκ τινος βιομηχανικοῦ κλάδου  $A$  καί ὅτι ἕτερον δειγμα ἐκ  $50$  ἐργατῶν λαμβάνεται ἐκ τινος ἄλλου βιομηχανικοῦ κλάδου  $B$ , οἱ ἐκ τῶν ἐν λόγω δειγμάτων ὑπολογιζόμενοι ἀριθμητικοί μέσοι τῶν ἡμερομισθίων τῶν ἐργατῶν, ἔστωσαν  $\bar{X}_1 = 61,84$  καί  $\bar{X}_2 = 58,72$ , δημιουργοῦν ἐκ πρώτης ὄψεως τήν ἐντύπωσιν ὅτι οἱ εἰς τόν κλάδον  $A$  ἀπασχολούμενοι ἐργάται ἀμοιβονται καλλίτερον ἢ οἱ ἀπασχολούμενοι εἰς τόν κλάδον  $B$ . Δέν ἀποκλείεται, ὅμως, ἡ ἐμφανιζομένη διαφορά τῶν μέσων νά μή ἀντικατοπτρίζῃ πραγματικὴν διαφορὰν τῶν ἐπιπέδων ἀμοιβῆς εἰς τοὺς πληθυσμούς, ἀλλὰ νά ὀφείλεται ἀποκλειστικῶς καί μόνον εἰς τὰς κυμάνσεις τῆς τυχαίας δειγματοληψίας.

Πρὸς ἔλεγχον τῆς στατιστικῆς σημαντικότητος τῆς διαφορᾶς ἢ ὅποια παρατηρεῖται μεταξύ τῶν ἀριθμητικῶν μέσων δύο δειγμάτων γίνεται ἡ ὑπόθεσις ὅτι τὰ δειγματα ταῦτα προέρχονται ἐξ ὁμοίων πληθυσμῶν καί ὅτι ἡ διαφορά εἰς τοὺς μέσους τῶν δημιουργεῖται ἐκ τῆς διαδικασίας τῆς δειγματοληψίας. Ἐν συνεχείᾳ ἐφαρμόζονται κατάλληλα κριτήρια προκειμένου νά διαπιστωθῇ ἐάν ἡ ὑπόθεσις αὕτη ἀνταποκρίνεται ἢ ὄχι εἰς τήν πραγματικότητα. Ἐφ' ὅσον ἐκ τῶν ἀποτελεσμάτων προκύπτει ὅτι ἡ ὑπόθεσις δέν εἶναι ἀληθής, τότε τὰ χρησιμοποιηθέντα δύο δειγματα θεωροῦνται ὅτι ἀνήκουν εἰς διαφορετικούς πληθυσμούς καί, συνεπῶς, ἡ μεταξύ αὐτῶν ὑφισταμένη διαφορά εἶναι στατιστικῶς σημαντικῆ.



"Υποθέσεις, ως ἡ ἐν προκειμένῳ ἐλεγχόμενη, καλοῦνται " ὑποθέσεις μηδέν", τυγχάνουν δέ εὐρυτάτης χρησιμοποίησεως εἰς τὴν στατιστικὴν ἀνάλυσιν. Θὰ πρέπει, πάντως, νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν ὠρισμένης διαδικασίας ἀποσκοποῦσης γενικῶς εἰς τὸν ἐλεγχον ὑποθέσεώς τινος ὑπάρχει πάντοτε τὸ ἐνδεχόμενον νὰ διαπραχθοῦν σφάλματα τῶν ἐξῆς δύο τύπων. Ἐν περιπτώσει ἀπορρίψεως τῆς ὑποθέσεως, ἐνῶ θὰ ἔδει νὰ γίνῃ αὕτη δεκτὴ, ἔχομεν σφάλμα τύπου I, ἐν περιπτώσει δὲ ἀποδοχῆς τῆς ὑποθέσεως, ἐνῶ θὰ ἔπρεπε αὕτη νὰ ἀπορριφθῇ, ἔχομεν σφάλμα τύπου II. Ἀμφότερα αἱ ἐν λόγῳ κατηγορίαι σφαλμάτων συνεπάγονται λανθασμένην κρίσιν τῶν πραγμάτων καὶ, συνεπῶς, μὴ ὀρθὴν λήψιν ἀποφάσεως.

Θεωροῦμεν ὅτι  $\bar{X}_1$  καὶ  $\bar{X}_2$  εἶναι οἱ εἰς δεδομένον χαρακτηριστικὸν ἀναφερόμενοι ἀριθμητικοὶ μέσοι, οἱ ὁποῖοι ὑπελογίσθησαν ἐκ δύο μεγάλων σχετικῶς τυχαίων δειγμάτων (περιλαμβανόντων πλέον τῶν 30 μονάδων), μεγέθους  $n_1$  καὶ  $n_2$  ἀντιστοίχως. Ὑποθέτομεν, ἐπίσης, ὅτι οἱ πληθυσμοὶ ἐκ τῶν ὁποίων ἐλήφθησαν τὰ ἐν λόγῳ δείγματα ἔχουν ἀριθμητικούς μέσους  $\mu_1$  καὶ  $\mu_2$  καὶ διακυμάνσεις  $\sigma_1^2$  καὶ  $\sigma_2^2$ . Προκειμένου νὰ ἐλέγξωμεν τὴν στατιστικὴν σημαντικότητά τῆς μεταξὺ τῶν μέσων τῶν δειγμάτων ὑπαρχούσης διαφορᾶς  $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ , ὑποθετοῦμεν τὴν ἀνωτέρω ἐκτεθειᾶσαν ὑπόθεσιν μηδέν, κατὰ τὴν ὁποίαν μεταξὺ τῶν ἀντιστοίχων μέσων τῶν πληθυσμῶν δέν ὑπάρχει διαφορὰ, ἥτοι εἶναι  $\mu_1 = \mu_2$ .

Ἀποδεικνύεται ὅτι ἐάν ἐλαμβάνετο μέγας ἀριθμὸς τυχαίων δειγμάτων ἐκ τῶν ὡς ἄνω δύο πληθυσμῶν καὶ ὑπελογίζοντο οἱ μέσοι αὐτῶν, αἱ μεταξὺ των διαφοραὶ θὰ κατενέμοντο περίπου κανονικῶς μὲ μέσον :

$$(Z-6) \quad \mu_1 - \mu_2 = 0$$

καὶ τυπικὸν σφάλμα ἐκτιμήσεως :

$$(Z-7) \quad \sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

Ἐπειδὴ αἱ μέσοι ἀποκλίσεις τετραγώνου τῶν κατανομῶν τῶν δύο πληθυσμῶν δέν εἶναι συνήθως γνωσταί, χρησιμοποιοῦμεν ὡς ἐκτιμήσεις τούτων τὰς ἀντιστοίχους τῶν δειγμάτων καὶ συνεπῶς ἔχομεν :

$$(Z-8) \quad \hat{\sigma}_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$$

Έχοντας νῦν τόν μέσον τῆς κατανομῆς δειγματοληψίας τῶν διαφορῶν τῶν μέσων τῶν δειγμάτων, ὡς καί τό τυπικόν σφάλμα ἐκτιμῆσεως ταύτης, δυνάμεθα νά ἐλέγξωμεν κατά πόσον ἡ συγκεκριμένη διαφορά :

$$(Z-9) \quad (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2) = \bar{X}_1 - \bar{X}_2$$

εἶναι ὑπερμέτρως μεγάλη ἢ δύναται νά θεωρηθῆ ὡς συνήθης εἰς τήν κατανομήν εἰς τήν ὅποیان ἀνήκει. Πρὸς τοῦτο ὑπολογίζομεν τόν λόγον :

$$(Z-10) \quad T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\hat{\sigma}_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}}$$

ὁ ὁποῖος, ὡς ἐλέχθη καί ἀνωτέρω, ἐπί μεγάλου ἀριθμοῦ δειγμάτων καταπέμεται περίπου κανονικῶς.

Δύναται τις, ὅθεν, νά εἶναι 95% βέβαιος ὅτι, ἐάν ἡ ἀρχικῶς τεθεῖσα ὑπόθεσις εἶναι ἀληθής, ἡ τιμὴ τοῦ T ἢ ὑπολογιζομένη ἐκ τοῦ ζεύγους τῶν δειγμάτων θά ἐμπίπτῃ εἰς τό διάστημα μεταξύ -1,96 καί +1,96. Ἐκ τούτου ἐπεταί ὅτι, ἐάν ἐκ τινος ζεύγους δειγμάτων προκύπτῃ τιμὴ τοῦ T εὐρισκομένη ἐκτός τοῦ ἐν λόγῳ διαστήματος, θά πρέπει νά συμπεράνωμεν ὅτι εἰς ἐπίπεδον σημαντικότητος 5% ἢ ὑπόθεσις μηδέν δέν ἀνταποκρίνεται εἰς τήν πραγματικότητα ἢ ἄλλως ὅτι ἡ μεταξύ τῶν δύο μέσων τῶν δειγμάτων παρατηρουμένη διαφορά εἶναι στατιστικῶς σημαντική.

Εἰς τό ἀνωτέρω ἀναφερθέν παράδειγμα τῶν ἐργατικῶν ἡμερομισθίων, ὑποθέτοντες ὅτι αἱ ἐκ τῶν δειγμάτων ὑπολογιζόμεναι μέσαι ἀποκλίσεις τετραγώνου εἶναι :  $S_1 = 175,028$  καί  $S_2 = 182,937$ , ἔχομεν:

$$\hat{\sigma}_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{175,028}{36} + \frac{182,937}{50}} = 2,919$$

Συνεπῶς :

$$T = \frac{61,84 - 58,72}{2,919} = 1,07$$

Ήτοι, ἡ εὐρεθεῖσα τιμὴ τοῦ  $T$  ἐμπίπτει εἰς τὸ διάστημα παραδοχῆς  $(1,07 < 1,96)$  καὶ διὰ τοῦτο γίνεται δεκτὴ ἢ ἀρχικῶς υἰοθετηθεῖσα ὑπόθεσις μηδέν. Συμπεραίνομεν, ἐπομένως, ὅτι ἡ παρατηρουμένη δε-  
αφορά μεταξύ τῶν μέσων ἡμερομισθίων τῶν ἐργατῶν τῶν δύο δειγμά-  
των δέν ἀντικατοπτρίζει πραγματικὴν διαφορὰν ἀμοιβῆς εἰς τοὺς  
κλάδους εἰς τοὺς ὁποίους ἀνήκουν ταῦτα, ἀλλὰ μᾶλλον προέρχεται  
ἐκ τῶν σφαλμάτων τῆς τυχαίας δειγματοληψίας.

Εἰς περιπτώσεις κατὰ τὰς ὁποίας χρησιμοποιοῦνται δείγματα μι-  
κροῦ σχετικῶς μεγέθους (καλῶς πτοῦντα ὀλιγωτέρας τῶν 30 μονάδων) τὰ  
ὁποῖα ἔχουν ληφθῆ ἐκ κανονικῶν πληθυσμῶν ἐχόντων ἴσας μέσας ἀ-  
ποκλίσεις τετραγώνου ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ ), πρὸς ἔλεγχον τῆς ὑποθέσεως μη-  
δέν διὰ τοὺς ἀριθμητικoὺς μέσους τῶν ἔχομεν ὡς τυπικὸν σφάλμα ἐ-  
κτιμῆσεως ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ τύπου (Z-7):

$$(Z-11) \quad \sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

ὅπου ἡ μέση ἀπόκλισις τετραγώνου  $\sigma$  ἐκτιμᾶται ὡς μέση σταθμικὴ τῶν  
 $S_1$  καὶ  $S_2$  τῶν δειγμάτων :

$$(Z-12) \quad \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

Ἐν προκειμένῳ ὁ λόγος (Z-10) συγκρίνεται κατὰ τὸν ἀνωτέρω ἐκτε-  
θέντα τρόπον, ὄχι πρὸς τὰς εἰς τοὺς πίνακας τῆς κανονικῆς κατα-  
νομῆς ἀναγραφόμενας τιμὰς, ἀλλὰ πρὸς ἐκεῖνας τῆς κατανομῆς  $t$   
τοῦ Student. Αἱ τελευταῖαι λαμβάνονται ἐκ τῶν σχετικῶν πινά-  
κων μὲ βαθμοὺς ἐλευθερίας  $v = n_1 + n_2 - 2$ .

β) Σύγκρισις τοῦ μέσου ἑνὸς δειγματος πρὸς τὸν  
γνωστὸν μέσον τοῦ πληθυσμοῦ

Παρίσταται πολλάκις ἀνάγκη ὅπως διαπιστωθῇ ἐάν ὠρισμένον τυ-  
χαῖον δειγμα ἀνήκει εἰς δεδομένον πληθυσμὸν τοῦ ὁποίου γνωρίζο-  
μεν τὸν ἀριθμητικὸν μέσον. Πρὸς τοῦτο ὑπολογίζομεν τὸν ἀριθμη-  
τικὸν μέσον τοῦ δειγματος καὶ ἐπιδιώκομεν ὅπως ἐλέγξωμεν τὴν ὑ-  
πόθεσιν ὅτι ἡ μεταξύ αὐτοῦ καὶ τοῦ γνωστοῦ μέσου τοῦ πληθυσμοῦ  
παρατηρουμένη διαφορὰ ὀφείλεται μόνον εἰς τὰς κυμάνσεις τῆς δειγ-  
ματοληψίας. Τοιαῦτα προβλήματα ἀναφύονται εἰς τὴν πρᾶξιν κυρίως  
κατὰ τὸν ἔλεγχον τῆς ποιότητος τῶν προϊόντων εἰς τὴν παραγωγικὴν

διαδικασίαν. Ὑποθεθείσθω, ἐπὶ παραδείγματι, ὅτι ἐκ τῆς μακροχρονίου πείρας, ἀλλὰ καὶ τῶν ὑφισταμένων τεχνικῶν προδιαγραφῶν, γνωρίζομεν ὅτι τὸ μέσον βάρος τῶν ὑπὸ τινος ἔργοστασίου παραγομένων σιδηρῶν ράβδων εἶναι 4,535 χιλιόγραμμα, ἢ δὲ μέση ἀπόκλισις τετραγώνου αὐτῶν 0,212 χιλιόγραμμα. Ἐάν δεῖγμα τι ἐξ 100 τεμαχίων, λαμβανόμενον κατὰ τυχαῖον τρόπον, ἐμφανίζῃ μέσον βάρος 4,422 χιλιόγραμμα, εἶναι φυσικόν νά διερωτηθῇ τις κατὰ πόσον αἱ παραγόμεναι ράβδοι δέν ἔχουν πλέον τὸ κανονικόν των βάρος ἀλλὰ μικρότερον, λόγῳ βλάβης τῶν ἐγκαταστάσεων ἢ ἐξ ἄλλης αἰτίας.

Πρὸς ἀντιμετώπισιν παρομοίων προβλημάτων υἱοθετοῦμεν κατ'ἄλιν τὴν ὑπόθεσιν μηδέν, ἢ ὅποια ἐνταῦθα ἔχει τὴν ἕννοιαν ὅτι ὁ μέσος  $\bar{X}$  δεδομένου δείγματος μεγάλου σχετικῶς μεγέθους ( $n > 30$ ) δέν διαφέρει σημαντικῶς τοῦ μέσου τοῦ πληθυσμοῦ  $\mu$ . Ἐν συνεχείᾳ θεωροῦμεν ὅτι ἡ κατανομή δειγματοληψίας τῶν διαφορῶν  $\bar{X} - \mu$  εἶναι κανονικὴ μὲ μέσον 0 καὶ τυπικόν σφάλμα ἐκτιμήσεως  $\sigma/\sqrt{n}$ . Συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω ἐκτεθέντα, ὁ ἔλεγχος τῆς ἐν λόγω ὑποθέσεως γίνεται κατόπιν ὑπολογισμοῦ τοῦ λόγου :

$$(Z-13) \quad T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

ὅπου ἡ μέση ἀπόκλισις τετραγώνου τοῦ πληθυσμοῦ εἶναι δυνατόν νά ἐκτιμηθῇ καὶ ἐκ τοῦ δείγματος ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ τύπου (Z-4). Μετὰ ταῦτα ἡ τιμὴ τοῦ  $T$  συγκρίνεται πρὸς τὴν ἐκ τῶν πινάκων τῆς κανονικῆς κατανομῆς προκύπτουσαν δι' ὠρισμένον ἐπίπεδον σημαντικότητος, ἔστω 5%. Ἐάν ἡ ἐξ ὑπολογισμοῦ τιμὴ εἶναι μικρότερα τῆς ἐκ τῶν πινάκων λαμβανομένης, γίνεται δεκτὴ ἡ ὑπόθεσις ὅτι τὸ δεῖγμα ἀνήκει πράγματι εἰς τὸν δεδομένον πληθυσμόν, ἄλλως ἀπορρίπτεται αὕτη ὁπότε τὸ δεῖγμα θεωρεῖται ὅτι ἀνήκει εἰς ἄλλον πληθυσμόν.

Εἰς τὸ προαναφερθέν παράδειγμα τῶν σιδηρῶν ράβδων ὁ λόγος (Z-13) εἶναι :

$$T = \frac{4,422 - 4,535}{\frac{0,212}{\sqrt{100}}} = -5,33$$

Ὁ ἔλεγχος, ὅμως, ἐνταῦθα ἐνεργεῖται διὰ τὰς μικροτέρου βάρους σιδηρᾶς ράβδους, δεδομένου ὅτι ἐάν ἐκ τοῦ ληφθέντος δείγματος

προέκυπτε μέσον βάρος μεγαλύτερον του ἐκ τῆς μακροχρονίου πείρας προσδιοριζομένου δὲν θὰ ἐδημιουργεῖτο πρόβλημα. Ἐπομένως, τὸ δαστημα ἀπορρίψεως τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς ἐπίπεδον σημαντικότητος 50% θὰ πρέπει νὰ περιλαμβάνη μόνον ἀρνητικὰς τιμὰς τῆς κατανομῆς. Τοῦτο θὰ ὀρίζεται, ὄχι ὑπὸ τῆς τιμῆς  $T = \pm 1,96$ , ἀλλὰ ὑπὸ τῆς τιμῆς  $T = -1,645$ . Ἐπειδὴ ἡ ἀνωτέρω ὑπολογισθεῖσα τιμὴ τοῦ  $T$  εἶναι μικρότερα τῆς τιμῆς  $-1,645$ , ἀπορρίπτομεν τὴν ἀρχικῶς υἰόθετηθεῖσαν ὑπόθεσιν μηδέν καὶ δεχόμεθα ὅτι αἱ ἤδη παραγόμεναι σιδηραῖ ράβδοι ἔχουν βάρος σημαντικῶς μικρότερον τοῦ ἐκ τῆς μακροχρονίου πείρας καθιερωθέντος.

Σημειωτέον ὅτι ὅταν τὸ δείγμα εἶναι μικροῦ μεγέθους ( $n < 30$ ) ὁ ἔλεγχος τῆς ὑποθέσεως ὅτι ὁ μέσος αὐτοῦ  $\bar{X}$  δὲν διαφέρει σημαντικῶς τοῦ μέσου  $\mu$  τοῦ πληθυσμοῦ γίνεται διὰ συγκρίσεως τῆς ἐξ ὑπολογισμοῦ τιμῆς τοῦ  $T$ , ὄχι πρὸς τὰς ἀναφερομένας εἰς τὴν κανονικὴν κατανομήν, ἀλλὰ πρὸς ἐκεῖνας τῆς κατανομῆς  $t$  τοῦ Student.

#### BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

##### Α. Ἑλληνική

1. Ἀθανασιάδου, Κ., "Στατιστική", Μέρος Πρῶτον, Ἀθῆναι, 1957, σελ. 170-287.
2. Μαργαρίτη, Ε., "Στατιστική", Ἀθῆναι, 1952, σελ. 256-287.

##### Β. Ξένη

1. Allen, R.G.D., "Statistics for Economists", Hutchinson University Library, London, 1960, σελ.159-177. Μετάφρασις εἰς τὴν Ἑλληνικὴν ὑπὸ Κ. Ἀθανασιάδου ὑπὸ τὸν τίτλον "Στατιστική", Ἀθῆναι, 1955, σελ. 158-177.
2. Budin, M., "Statistical Measurements for Economics and Administration", Asia Publishing House, London, 1962, σελ. 140-207.
3. Connor, L.R. and Morrell, A.J.H., "Statistics in Theory and Practice- With Special Reference to Published Statistics", Sir Isaac Pitman and Sons Ltd, London, 1964, σελ.101-113.
4. Croxton, F.E., and Cowden, D.J., "Applied General Statistics", Sir Isaac Pitman and Sons Limited, London, 1960, σελ.626-736.
5. Greenwald, W.I., "Statistics for Economics", Charles E. Marill Books, Inc., Columbus, Ohio, 1963, σελ.51-105.

6. Guthrie, H.W., "Statistical Methods in Economics", Richard D. Irwin Inc., Homewood, Illinois, 1966, σελ. 177-274.
7. Hirsch, W.Z., "Introduction to Modern Statistics-With Applications to Business and Economics", The Macmillan Company, New York, 1962, σελ. 93-213.
8. Karmel, P.H., "Applied Statistics for Economists - A Course in Statistical Methods", Melbourne, Sir Isaak Pitman and Lons Ltd, 1963, σελ. 70-121.
9. Mason, R.D., "Statistical Techniques in Business and Economics", Richard D. Irwin, Inc., Homewood, Illinois, 1967, σελ. 335-413.
10. Mills, F., "Statistical Methods", Holt, Rinehart and Winston, New York, 1955, σελ. 134-245.
11. Moser, C.A., "Survey Methods in Social Investigation", William Heinemann Ltd, Melbourne - London - Toronto, 1958, σελ. 56-72.
12. Paden, D.W. and Lindquist, E.F., "Statistics for Economics and Business", Mc Graw- Hill Book Company Inc., New York, 1956, σελ. 111-187.
13. Runyon, R.P. and Haber, A., "Fundamentals of Behavioral Statistics", Addison-Wesley Publishing Company, Reading Massachusetts, 1967, σελ. 127-174.
14. Springer, C.H. and others, "Statistical Inference", Richard D. Irwin, Inc., Homewood Illinois, 1966.
15. Suits, D.B., "Statistics: An Introduction to Quantitative Economic Research", Rand Mc Nally and Company, Chicago, 1963, σελ. 54-78.
16. Tintner, G., "Mathematics and Statistics for Economists", Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1962, σελ. 235-264.
17. Wessel, R.H. and Willett, E.R., "Statistics as Applied to Economics and Business", Henry Holt and Company, New York, 1959, σελ. 163-181.
18. Yamane, T., "Statistics - An Introductory Analysis", A Harper International Edition, 1966, σελ. 78-264.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΟΓΔΟΟΝ

### ΑΡΙΘΜΟΔΕΙΚΤΑΙ

#### 1. Έννοια καὶ κατηγορίαι ἀριθμοδεικτῶν

Οἱ ἀριθμοδεικταὶ ἢ ἀπλῶς δεῖνται εἶναι στατιστικὰ μέτρα δεικνύοντα τὰς μεταβολὰς τοῦ ἐπιπέδου τῶν τιμῶν μιᾶς μεταβλητῆς ἢ μιᾶς ὁμάδος μεταβλητῶν σχετιζομένων μεταξύ των. Κύριος σκοπὸς ἑνὸς δείκτου εἶναι νὰ χαρακτηρίσῃ δι' ἑνὸς μοναδικοῦ ἀριθμοῦ τὴν σχετικὴν μεταβολὴν τῆς τιμῆς ἑνὸς μεγέθους ἀπλοῦ ἢ συνθέτου μεταξύ δύο χρονικῶν περιόδων ἢ γεωγραφικῶν περιοχῶν, γενικώτερον δὲ μεταξύ δύο καταστάσεων. Διὰ χρησιμοποίησεως ἀριθμοδεικτῶν δυνάμεθα, ἐπὶ παραδείγματι, νὰ συγκρίνωμεν τὸ κόστος ζωῆς εἰς μίαν πόλιν ἢ εἰς τινὰ χώραν καθ' ὕρισμένον ἔτος πρὸς τὸ κόστος ζωῆς κατ' ἄλλην χρονικὴν περίωδον. Δυνάμεθα ἐπίσης νὰ συγκρίνωμεν τὴν παραγωγὴν ἀγαθοῦ τινὸς εἰς μίαν περιοχὴν τῆς χώρας πρὸς τὴν παραγωγὴν τοῦ ἰδίου ἀγαθοῦ εἰς ἄλλην περιοχὴν κατὰ δεδομένην χρονικὴν περίωδον. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν οἱ χρησιμοποιουόμενοι δείκται καλοῦνται χρονολογικοί, ἐνῶ εἰς τὴν δευτέραν γεωγραφικοί. Ἐὰν καὶ αἱ μέθοδοι καταρτίσεως εἶναι κατὰ βάσιν αἱ αὐταὶ εἰς ἀμφοτέρας τὰς κατηγορίας ταύτας δεικτῶν, ἐν τούτοις αἱ ἀντιμετωπιζόμεναι δυσχέρειαι πρὸς ἐπίτευξιν ἰκανοποιητικοῦ βαθμοῦ συγκρισιμότητος τῶν δεδομένων ὡς καὶ κατὰ τὴν ἔρμηνειαν τῶν ἀποτελεσμάτων εἶναι πολὺ μεγαλύτεραι εἰς τοὺς γεωγραφικοὺς δείκτας. Εἰς ἓνα καὶ τὸν αὐτὸν τόπον εἶναι δυνατὴ ἡ διατήρησις κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἥττον ἀμεταβλήτων τῶν συνθηκῶν παρατηρήσεως ἑνὸς οἰκονομικοῦ ἢ κοινωνικοῦ φαινομένου ἐξελισσομένου ἐν τῷ χρόνῳ. Τοῦτο εἶναι πολὺ δύσκολον νὰ ἐπιτευχθῇ ὅταν αἱ παρατηρήσεις ἀναφέρονται εἰς ἐπὶ μέρους περιοχὰς ἐνίοτε λίαν ἀπομεμακρυσμένας μεταξύ των, ὅπου αἱ συνθήκαι εἶναι ἐντελῶς διάφοροι. Κατωτέρω ἐξετά-

ζονται αἱ μέθοδοι καὶ τὰ προβλήματα καταρτίσεως μόνον τῶν χρονολογιῶν δεικτῶν.

Ἐκ τῆς ἀπόψεως συγκροτήσεως οἱ χρονολογικοὶ δεικταὶ διακρίνονται εἰς τὰς ἀκολούθους τρεῖς βασικὰς κατηγορίας :

#### α) Δεῖνται ἰδιαίτεροι

Οὔτοι δεικνύουν τὰς ἐν τῷ χρόνῳ μεταβολὰς μιᾶς καὶ μόνον μεταβλητῆς, ὡς εἶναι π.χ. ἡ τιμὴ ἢ ὁ ὄγκος τῆς παραγωγῆς ἑνὸς ὠρισμένου ἀγαθοῦ.

#### β) Δεῖνται συνθετικοί

Οὔτοι ἐκφράζουν τὰς συνδεδεασμένας κινήσεις ἢ ἄλλως τὸ γενικὸν ἐπίπεδον τῶν τιμῶν δεδομένου χαρακτηριστικοῦ διὰ χρησιμοποίησεως ἀντιστοιχῶν ἰδιαιτέρων δεικτῶν. Εἰς τὴν κατηγορίαν ταύτην ἀνήκουν οἱ δεικταὶ βιομηχανικῆς παραγωγῆς, οἱ δεικταὶ τιμῶν γεωργικῶν προϊόντων κλπ.

#### γ) Δεῖνται σύμμεικοι

Δι' αὐτῶν καθίσταται δυνατὴ ἢ εἰς ἓνα μόνον δείκτην σύμπτυξις πολλῶν ἐπὶ μέρους ἀνομοιογενῶν δεικτῶν ἀναφερομένων, ὅμως, εἰς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ φαινόμενον. Χαρακτηριστικὸν παράδειγμα τοιούτων δεικτῶν ἀποτελοῦν οἱ καλούμενοι "γενικοὶ δεικταὶ οἰκονομικῆς δραστηριότητος". Οὔτοι καταρτίζονται διὰ συνθέσεως διαφόρων δεικτῶν, ὡς π.χ. ἀπασχολήσεως, παραγωγῆς, τιμῶν, τραπεζικῶν συμφηφισμῶν, ἐπιτοκίων κλπ. Ἡ βασικὴ ἀδυναμία τῶν γενικῶν δεικτῶν οἰκονομικῆς δραστηριότητος ἐγκνείται εἰς τὴν ἀνυπαρξίαν ἀντικειμενικῆς μεθόδου σταθμίσεως τῶν χρησιμοποιουμένων ἐπὶ μέτρους δεικτῶν. Ἐξ ἄλλου, οἱ διὰ συνθέσεως ἀνομοιογενῶν μεγεθῶν προκύπτοντες γενικοὶ δεικταὶ στεροῦνται συγκεκριμένου οἰκονομικοῦ περιεχομένου, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον καθιστᾷ δυσχερῆ τὴν ἐρμηνείαν τῶν μεταβολῶν αὐτῶν. Οἱ δεικταὶ οἰκονομικῆς δραστηριότητος μέχρι τοῦ δευτέρου παγκοσμίου πολέμου ἐχρησιμοποιοῦντο εὐρῆως πρὸς παρακολούθησιν τῶν βραχυχρονίων ἐξελίξεων τῆς οἰκονομίας, ἰδίως εἰς τὰς Ἠνωμένας Πολιτείας τῆς Ἀμερικῆς. Σήμερον οὔτοι δὲν ἐφαρμόζονται πλέον, ἢ παρακολούθησις δὲ τῶν μεταβολῶν τῆς οἰκονομικῆς δραστηριότητος γίνεται διὰ χρησιμοποίησεως τῶν στοιχείων τῶν ἐθνικῶν λογαριασμῶν, ὡς καὶ δι' ἄλλων καταλληλοτέρων στατιστικῶν μέσων.



Ο γνωστότερος τύπος αριθμοδείκτη είναι ο παρέχων τās μεταβολās του γενικού επιπέδου τῶν τιμῶν ἐν τῷ χρόνῳ, ὁ ὁποῖος καλεῖται καὶ "τιμῆριθμος". Δέον νά σημειωθῆ ὅτι ἱστορικῶς οἱ ἀριθμοδείκται τό πρῶτον ἐχρησιμοποιήθησαν πρὸς μέτρησιν τῶν μεταβολῶν τῆς ἀγοραστικῆς δυνάμεως τοῦ χρήματος. Ἡ χρησιμότης τῶν τιμαριθμῶν εἶναι μεγίστη, καθ' ὅσον διὰ τῆς σπουδῆς τῆς ἐξελέξεως αὐτῶν καθίσταται δυνατός, ἐπὶ παραδείγματι, ὁ προσδιορισμός τῶν αἰτῶν ἢ τῶν ἐνδεχομένων ἐπιδράσεων τῶν μεταβολῶν τῶν τιμῶν ἐπὶ τῶν ἄλλων μεγεθῶν τῆς οἰκονομίας. Κυρίως, ὅμως, οἱ τιμαριθμοὶ παρέχουν εἰς τās Νομισματικῆς Ἀρχῆς ποσοτικῆς πληροφορίας αἱ ὁποῖαι εἶναι βασικῆς σημασίας διὰ τὴν ὑπ' αὐτῶν χάραξιν τῆς καταλλήλου πολιτικῆς.

Σήμερον οἱ ἀριθμοδείκται δέν περιορίζονται εἰς τὴν μέτρησιν τῶν μεταβολῶν τοῦ γενικοῦ επιπέδου τῶν τιμῶν, ἀλλὰ χρησιμοποιοῦνται πρὸς παροχὴν ἐνδείξεων περὶ τῶν ἐν τῷ χρόνῳ μεταβολῶν :

(α) Διαφόρων ἄλλων κατηγοριῶν τιμῶν, ὡς εἶναι οἱ μισθοὶ καὶ τὰ ἡμερομίσθια, οἱ ναῦλοι, αἱ τιμαὶ τῶν χρηματιστηριακῶν τίτλων κλπ.

(β) Ὀγκῶν, ὡς εἶναι ἡ ἀγροτικὴ παραγωγὴ, ἡ βιομηχανικὴ παραγωγὴ, τὰ ἀποθέματα πρῶτων ὑλῶν καὶ ἐτοίμων προϊόντων, αἱ εἰσαγωγαί, αἱ ἐξαγωγαί κλπ. καὶ (γ) Ἀξῶν, ὡς εἶναι τὰ κέρδη τῶν βιομηχανικῶν καὶ ἐμπορικῶν ἐπιχειρήσεων, ἡ ἀξία τῶν λιανικῶν καὶ χονδρικῶν πωλήσεων κλπ.

## 2. Σχετικαὶ τιμαὶ καὶ προβλήματα καταρτίσεως συνθετικῶν ἀριθμοδεικτῶν

Ἡ ἀπλουστέρα μορφή ἀριθμοδεικτῶν εἶναι οἱ ἰδιαίτεροι δείκται, οἱ ὁποῖοι εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν τιμῶν καλοῦνται "σχετικαὶ τιμαί". Σχετικὴ τιμὴ εἶναι ὁ λόγος τῆς τιμῆς ἑνὸς ἐξειδικευμένου ἀγαθοῦ καθ' ὠρισμένην χρονικὴν περίοδον πρὸς τὴν τιμὴν αὐτοῦ εἰς ἄλλην περίοδον καλουμένην "περίοδον βάσεως". Αἱ σχετικαὶ τιμαὶ συνήθως ἐκφράζονται ὡς ποσοστὸν διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ 100. Σημεωτέον ὅτι ἐάν διαθέτωμεν μηνιαῖα στοιχεῖα τιμῶν ἀγαθοῦ τινὸς καὶ ἡ σύγκρισις ἀναφέρεται εἰς ἔτη, χρησιμοποιοῦμεν ὡς ἐτήσια στοιχεῖα τὸν ἀριθμητικὸν μέσον τῶν δώδεκα μηνιαίων τιμῶν δι' ἕκαστον ἔτος.

Συμβολίζομεν διὰ  $P_0$  καὶ  $P_1$  τās τιμὰς ὠρισμένου ἀγαθοῦ κατὰ τὴν περίοδον βάσεως ο καὶ κατὰ τὴν περίοδον 1 ἀντιστοίχως. Κατὰ τὸν ἀνωτέρω δοθέντα ὄρισμόν ἔχομεν :

$$(H-1) \quad P_{1/0} = \frac{P_1}{P_0} 100$$

όπου  $P_{1/0}$  δεικνύει τήν σχετική τιμήν κατά τήν περίοδον 1 ἐν σχέσει πρὸς τήν περίοδον 0. Σημειωτέον ὅτι ἡ σχετική τιμή κατά δεδομένην χρονικήν περίοδον ἐν σχέσει πρὸς τήν ἴδιαν περίοδον εἶναι πάντοτε 100% ἢ 100. Οὕτω, ἡ σχετική τιμή ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τήν περίοδον βάσεως λαμβάνεται ὡς 100. Ἡ ἔνδειξις ἡ ὁποία συχνάκις ἀναγράφεται εἰς τοὺς στατιστικούς πίνακας ἀριθμο-

### Πίναξ Η - 1

Τιμαὶ καὶ σχετικαὶ τιμαὶ ἐκκοκισμένου βάμβακος εἰς τήν ἀγοράν Πειραιῶς

Τιμαὶ καὶ σχετικαὶ τιμαὶ	Ποιότης 4/26	Ποιότης 4/27	Ποιότης 4/28	Ποιότης 5/26
<b>Τιμαὶ</b>				
(Εἰς δραχ. κατὰ χιλιόγραμμον)				
(1) Τιμὴ κατὰ Δεκέμβριον 1961 . . . . .	17,85	18,05	18,75	17,55
(2) » » Ἰανουάριον 1963 . . . . .	18,75	19,20	19,60	18,50
(3) » » Φεβρουάριον 1963 . . . . .	19,05	19,25	19,85	18,50
<b>Σχετικαὶ τιμαὶ</b>				
(Δεκέμβριος 1961 = 100)				
(4) Ἰανουάριος 1963 . . . . .	105,0	106,4	104,5	105,4
(5) Φεβρουάριος 1963 . . . . .	106,7	106,6	105,9	105,4
<b>Σχετικαὶ τιμαὶ</b>				
(Φεβρουάριος 1963 = 100)				
(6) Δεκέμβριος 1961 . . . . .	93,7	93,8	94,5	94,9
(7) Ἰανουάριος 1963 . . . . .	98,4	99,7	98,7	100,0

Πηγή: Ἑλληνικὸς Ὄργανισμὸς Βάμβακος.

δεικτῶν, ὡς ἐπὶ παραδείγματι: Δεκέμβριος 1961 = 100 (βλ. Πίνακα Η-1), δεικνύει ἀκριβῶς ὅτι ὁ μῆν Δεκέμβριος τοῦ 1961 λαμβάνεται ὡς περίοδος βάσεως.

Εἰς τὸν Πίνακα Η-1 (σειρά (1) ἕως (3)) δίδονται αἱ τιμαὶ τεσσάρων ποιοτήτων ἐκκοκισμένου βάμβακος εἰς τήν ἀγοράν Πειραιῶς κατὰ τοὺς μῆνας: Δεκέμβριον 1961, Ἰανουάριον 1963 καὶ Φεβρου-

αριον 1963. Συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω ἐκτεθέντα, δυνάμεθα εὐκόλως νὰ ὑπολογίσωμεν τὰς ἀντιστοίχους σχετικὰς τιμὰς μέ βάσιν : Δεκέμβριος 1961 = 100.

Π.χ. διὰ τὴν ποιότητα 4/26 ἔχομεν :

$$P_{\text{Ιαν.63/Δεκ.61}} = \frac{18,75}{17,85} 100 = 105,0$$

$$P_{\text{Φεβρ.63/Δεκ.61}} = \frac{19,05}{17,85} 100 = 106,7$$

καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Αἱ σχετικὰς τιμὰς τῶν τεσσάρων ποιοτήτων βάμβacos ἀναγράφονται εἰς τὰς σειρὰς (4) καὶ (5) τοῦ Πίνακος Η-1.

Πρὸς παρακολούθησιν τῶν μεταβολῶν τῶν τιμῶν τοῦ βάμβacos γενικῶς θὰ ἦτο κατ' ἀρχὴν δυνατόν νὰ χρησιμοποιηθοῦν αἱ ἐνδείξεις αἱ παρεχόμεναι ὑπὸ τῆς ἐξελέξεως τῆς τιμῆς ὠρισμένης ποιότητος αὐτοῦ π.χ. τῆς ποιότητος 4/28. Εἶναι, ἐν τούτοις, φανερόν ὅτι ἡ τιμὴ μιᾶς οἰασθήποτε ἐκ τῶν πολλῶν ὑφισταμένων ποιοτήτων βάμβacos εἶναι ἀπίθανον νὰ εἶναι εἰς τὴν πραγματικότητα ἀντιπροσωπευτικὴ τῶν διαφόρων ἐπὶ μέρους τιμῶν αὐτοῦ. Ἀκόμη καὶ ἐὰν ἐπιλέξωμεν τὰς τιμὰς ὠρισμένων βασικῶν ποιοτήτων, ὡς εἶναι αἱ περιλαμβανόμεναι εἰς τὸν Πίνακα Η-1 (αἱ ὁποῖαι, σημειωτέον, ἀφοροῦν μόνον εἰς τὴν ἀγορὰν Πειραιῶς), παραμένει τὸ πρόβλημα τῆς μετρήσεως τῶν μεταβολῶν τοῦ ἐπιπέδου τῶν τιμῶν τοῦ βάμβacos ἐν τῷ χρόνῳ. Αἱ ὑφιστάμεναι ποιοτικαὶ διαφοραὶ μεταξύ τῶν ἐπὶ μέρους ποικιλιῶν καθίστουσιν προβληματικόν τὸν ὑπολογισμόν μιᾶς μέσης τιμῆς δι' ἕκαστον τῶν ἐξεταζομένων μηνῶν. Ἡ χρησιμοποίησις μέσων τιμῶν καθίσταται δυσχερεστέρα, ὅταν ἐπιδιώκωμεν νὰ ἐκτιμήσωμεν τὰς μεταβολὰς τῶν τιμῶν πλέον ἀνομοιογενῶν κατηγοριῶν, ὡς εἶναι π.χ. τὰ γεωργικὰ προϊόντα ἐν τῷ συνόλῳ των ἢ καὶ τὸ σύνολον τῶν ἀγαθῶν καταναλώσεως.

Τὸ πρόβλημα τῆς ἐκφράσεως τῶν μεταβολῶν τῶν τιμῶν μιᾶς κατηγορίας ἀγαθῶν δι' ἑνὸς ἀριθμοῦ δύναται νὰ ἀντιμετωπισθῇ διὰ χρησιμοποίησεως σχετικῶν τιμῶν, αἱ ὁποῖαι, ὡς ἐκ τῆς φύσεώς των, εἶναι ἀνεξάρτητοι τῶν μονάδων μετρήσεως τῶν ἀγαθῶν. Οὕτω, ἐνῶ δέν δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὰς μέσας τιμὰς τῶν ἐπὶ μέρους ποιοτήτων τοῦ βάμβacos δι' ἕκαστον μῆνα, δυνάμεθα, ἐν τούτοις, νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν μέσην μεταβολὴν τοῦ ἐπιπέδου τῶν τιμῶν αὐτοῦ διὰ χρησιμοποίησεως ἑνὸς μέτρου κεντρικῆς τάσεως ἢ θέσεως τῶν σχετικῶν τιμῶν τῶν ἀναγραφομένων εἰς τὰς σειρὰς (4) καὶ (5) τοῦ Πίνακος Η-

1. Αί προκύπτουσαι μέσαι σχετικαί τιμαί διά τόν 'Ιανουάριον 1963 καί τόν Φεβρουάριον 1963 αποτελοῦν ἀπλήν μορφήν τῶν συνθετικῶν ἀριθμοδεικτῶν.

Κατά τήν κατάρτισιν ἑνός ἀριθμοδείκτου ἀνακύπτουν σοβαρά στατιστικά προβλήματα τά ὅποια ἀναφέρονται :

Πρῶτον, εἰς τήν ἐπιλογήν τῶν εἰδῶν τά ὅποια δεόν νά περιληφθοῦν εἰς τόν δείκτην. Ἐπί παραδείγματι, εἰς τήν ἑλληνικήν ἀγοράν διαμορφοῦνται πολλαί τιμαί βάμβακος, αἱ δέ ἀνωτέρω καταχωρηθεῖσαι 4 ἐξ αὐτῶν τῆς ἀγορᾶς Πειραιῶς πρέπει νά εἶναι ἀντιπροσωπευτικαί τῶν λοιπῶν καί σχετικῶς ἀκριβεῖς.

Δεύτερον, εἰς τήν ἐπιλογήν τοῦ καταλλήλου τύπου ὑπολογισμοῦ τοῦ δείκτου. Αἱ μεταβολαί τοῦ ἐπιπέδου τῶν τιμῶν τοῦ βάμβακος κατά τούς μήνας 'Ιανουάριον καί Φεβρουάριον 1963 δύνανται, κατ' ἀρχήν, νά ὑπολογισθοῦν διά χρησιμοποίησιν τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου, γεωμετρικοῦ μέσου ἢ τῆς διαμέσου τῶν εἰς τὰς σειράς (4) καί (5) τοῦ Πίνακος Η-1 ἀναγεγραφομένων σχετικῶν τιμῶν. Ἀλλά οἱ μέσοι οὗτοι εἶναι ἀστάθμητοι, στηρίζονται, δηλαδή, εἰς τήν ὑπόθεσιν ὅτι αἱ τιμαί τῶν τεσσάρων ποιότητων βάμβακος ἔχουν κατά τήν περίοδον βάσεως τήν ἴδιαν σημασίαν. Εἶναι, ὅμως, γνωστόν ὅτι αἱ ἐπιμέρους ποιότητες βάμβακος παράγονται εἰς διαφορετικάς ποσότητας, πρᾶγμα τό ὅποιον ἐπιβάλλει τήν χρησιμοποίησιν, ὄχι ἀπλῶν, ἀλλά σταθμικῶν μέσων.

Τρίτον, εἰς τήν ἐπιλογήν τῆς περιόδου βάσεως. Ὡς προκύπτει ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν σειρῶν (4), (5) καί (6), (7) τοῦ Πίνακος Η-1, αἱ σχετικαί τιμαί παρουσιάζουν διαφορετικόν ὕψος ὅταν ὑπολογίζονται μέ διαφορετικήν περίοδον βάσεως. Παρίσταται, ὅθεν, ἀνάγκη ἐφαρμογῆς ὀρισμένων κριτηρίων κατά τήν ἐπιλογήν τῆς καταλλήλου περιόδου βάσεως.

Αἱ ἐν λόγῳ τρεῖς βασικαί κατηγορίαι προβλημάτων τά ὅποια συνδέονται μέ τήν κατάρτισιν τῶν ἀριθμοδεικτῶν ἐξετάζονται ἀναλυτικώτερον κατωτέρω. Ταῦτα κατά βάσιν ἐκτιθενται ἐν ἀναφορᾷ πρὸς τούς τιμαριθμούς, πλην ὅμως γίνεται ἰδιαίτερα ἐξέτασις καί τῶν ἄλλων κατηγοριῶν δεικτῶν, εἰς τὰς περιπτώσεις κατά τὰς ὁποίας οὗτοι παρουσιάζουν χαρακτηριστικᾶς ἰδιομορφίας.

### 3. Τό πρωτογενές στατιστικόν ὑλικόν τῶν ἀριθμοδεικτῶν

Οἱ ἀριθμοδείκται χρησιμοποιοῦνται συνήθως ὡς μέτρα τῶν μεταβολῶν τοῦ γενικοῦ ἐπιπέδου τῶν τιμῶν μιᾶς μεγάλης κατηγορίας ἀγαθῶν, ὡς εἶναι π.χ. τά εἶδη καταναλώσεως. Εἶναι φανερόν ὅτι κα-

τά τήν κατάρτισιν ἑνός δείκτου δέν εἶναι πρακτικῶς δυνατόν νά ληφθῶν ὑπ' ὄψιν ὅλαι αἱ ἐπί μέρους τιμαί τῶν εἰς τήν ἐξεταζομένην κατηγορίαν περιλαμβανομένων ἀγαθῶν. Ἐντί τῆς χρησιμοποίησεως ἑνός μεγάλου ἀριθμοῦ τιμῶν, εἶναι προτιμότερα ἢ ἐπιλογή ἑνός δείγματος περιλαμβάνοντος περῶρισμένον ἀριθμόν ἐξ αὐτῶν. Τά δεδομένα ταῦτα πρέπει νά εἶναι ἀκριβῆ καί ὁμοιογενῆ, τό δέ δείγμα ἐν τῷ συνόλῳ του ἀντιπροσωπευτικόν τῆς κατηγορίας τῶν ἀγαθῶν ἐκ τῆς ὁποίας ἐλήφθη.

Οἱ δεικται τιμῶν γενικῶν κατηγοριῶν ἀγαθῶν, π.χ. τῶν ἀγαθῶν εἰς τό στάδιον τῆς χονδρικήσ πωλήσεως, τῶν εἰδῶν καταναλώσεως κλπ., θεωροῦνται ὡς ἀμφιβόλου ἀξίας μέτρα, ἀπετέλεσαν δέ ἀντικείμενον κριτικῆς ὑπό πολλῶν συγγραφῶν. Κατά τās ἀπόψεις αὐτῶν τό πρόβλημα τῆς κατάρτισεως ἑνός τιμαριθμοῦ καθίσταται πλέον συγκεικμῆνον καί ἢ χρησιμότησ τοῦ δείκτου μεγαλυτέρα ὅταν οὗτος ἀναφέρεται εἰς περῶρισμένην καί σχετικῶς ὁμοιογενῆ κατηγορίαν ἀγαθῶν. Ὡς τοιοῦτοι εἰδικοί τιμαριθμοί ἀναφέρονται ἐνδεικτικῶς, διά μέν τό στάδιον χονδρικήσ πωλήσεως οἱ δεικται τιμῶν ἐπιτομῶν βιομηχανικῶν προϊόντων, βιομηχανικῶν πρώτων ὑλῶν κλπ., διά δέ τό στάδιον λιανικήσ πωλήσεως οἱ δεικται τιμῶν εἰδῶν καταναλώσεως ἐπί μέρους τάξεων τοῦ πληθυσμοῦ, ὡς π.χ. ἐργατῶν, ἀγροτῶν κλπ. Ἄλλά καί αἱ εἰδικαί αὐταί κατηγορίαι ἀγαθῶν περιλαμβάνουν πληθῶραν εἰδῶν, πρᾶγμα τό ὁποῖον σημαίνει ὅτι καί κατά τήν κατάρτισιν τῶν ἐν λόγῳ τιμαριθμῶν παρίσταται ἀνάγκη ἐπιλογῆσ ἑνός καταλλήλου καί ἀντιπροσωπευτικοῦ δείγματος.

Γενικῶς, τά εἰς ἕνα τιμαριθμόν συμπεριληφθησόμενα εἶδη, ὡς καί αἱ χρησιμοποιοησόμεναί τιμαί αὐτῶν ἐξαρτῶνται ἐκ τῆσ φύσεως τοῦ ὑπό κατάρτισιν τιμαριθμοῦ. Διά τιμαριθμούς χονδρικήσ πωλήσεως ἀπαιτεῖται ἢ συγκέντρωσις τῶν εἰς τό στάδιον τῆσ χονδρικήσ πωλήσεως διαμορφωμένων τιμῶν τῶν ἀγαθῶν. Προκειμένου περὶ τῶν δεικτῶν τιμῶν καταναλωτοῦ εἶναι ἀναγκαῖον ὅπως συγκεντροῦνται λιανικάί τιμαί εἰδῶν διατροφῆσ, ἐνδύσεως καί ὑποδήσεως, κατοικίας, μεταφορᾶσ κλπ., ἀφορῶσαι εἰς ὠρισμένην κατηγορίαν προσώπων. Τό εἰς τοῦσ δείκτας χρησιμοποιοούμενον στατιστικόν ὑλικόν λαμβάνεται ἐκ διαφόρων πηγῶν, ὡς εἶναι π.χ. οἱ περιοδικῶς ἐκιδιδόμενοι πῆνακες τιμῶν ὑπό ὑπηρεσιῶν ἢ ὀργανισμῶν. Ἐάν τοιαῦτα δημοσιεύματα δέν ὑφίστανται ἢ τά ὑπάρχοντα κρίνωνται ἀνεπαρκῆ, τά σχετικαί στοιχεῖα τιμῶν λαμβάνονται εἴτε ἐξ εἰδικῶν καταστάσεων ὑποβαλλομένων περιοδικῶς ὑπό τῶν κατεχόντων τās ἀπαιτουμένασ πληροφορίας, ὡς εἶναι οἱ ἔμποροι, οἱ παραγωγοί κλπ., εἴτε δι' εἰδικῶν

τιμοληπτῶν, οἱ ὅποιοι περιερχόμενοι τὴν ἀγορὰν καὶ ἐπικοινωνοῦν-  
τες μετὰ τῶν συναλλασσομένων, ἀντλοῦν τὰς σχετικὰς πληροφορίας  
τὰς ὁποίας ἐν συνεχείᾳ καταχωροῦν εἰς εἰδικὰς καταστάσεις. Τὰ  
στοιχεῖα, ἀνεξαρτήτως τῆς πηγῆς ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνονται, πρὸ  
τῆς χρησιμοποιήσεως τῶν δέον νὰ ἐλέγχωνται, τόσον ἀπὸ ἀπόψεως  
καταλληλότητος διὰ τὸν ὑπὸ κατάρτισιν δείκτην, ὅσον καὶ ἀπὸ ἀπό-  
ψεως ἀκριβείας.

Ἡ συλλογὴ καταλλήλων στατιστικῶν στοιχείων ἀποτελεῖ βασι-  
κὸν πρόβλημα τῆς καταρτίσεως τῶν ἀριθμοδεικτῶν, ἐκ τῆς ἐπιτυ-  
χοῦς ἢ μὴ ἀντιμετωπίσεως τοῦ ὁποίου ἐξαρτᾶται εἰς σημαντικὸν βαθ-  
μὸν καὶ ἡ ἀξιοπιστία τῶν προκυπτόντων ἀποτελεσμάτων. Ἡ καταλ-  
ληλότης τοῦ χρησιμοποιουμένου ὕλικου ἀναφέρεται βασικῶς εἰς τὴν  
ἀντιπροσωπευτικότητα καὶ τὴν συγκρισιμότητα αὐτοῦ.

#### α) Ἀντιπροσωπευτικότης

Αἱ τιμαὶ ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ὁποίων καταρτίζεται εἰς τιμᾶριθμος  
δέον νὰ ἔχουν συμπεριφορὰν παρομοίαν πρὸς ἐκείνην τοῦ συνόλου  
ἐκ τοῦ ὁποίου προέρχονται. Πρὸς ἐξασφάλισιν τούτου εἰς ὅσον τὸ  
δυνατὸν μεγαλύτερον βαθμὸν εἶναι ἀναγκαῖον ὅπως τὸ δείγμα τῶν  
παρακολουθουμένων ἀγαθῶν μὴ διαφέρῃ ἀπὸ ἀπόψεως συνθέσεως τοῦ  
πληθυσμοῦ εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει. Κατὰ τὴν ἐπιλογὴν τοῦ ἐν λόγῳ  
δείγματος πρέπει, συνεπῶς, νὰ καταβάλλεται προσπάθεια ὅπως ἀν-  
τιπροσωπεύονται ὅλαι αἱ οὐσῶδεις κατηγορίαι ἀγαθῶν. Τοῦτο δύ-  
νεται νὰ ἐπιτευχθῇ διὰ διακρίσεως τοῦ συνολικοῦ πληθυσμοῦ τῶν ἀ-  
γαθῶν εἰς κατηγορίας καὶ ὑποκατηγορίας καὶ ἐν συνεχείᾳ καθορι-  
σμοῦ μικρῶν ἀντιπροσωπευτικῶν ὁμάδων ἐντὸς αὐτῶν. Διὰ τῆς ἐν λό-  
γῳ στρωματοποιήσεως διευκολύνεται μεγάλως ἡ παρακολούθησις τῶν  
μεταβολῶν τῶν τιμῶν ποικίλων κατηγοριῶν ἀγαθῶν ἐπηρεαζομένων  
ἀπὸ διαφορετικοὺς οἰκονομικοὺς παράγοντας. Ἐπὶ παραδείγματι, ἐν  
περιπτώσει καταρτίσεως ἐνὸς δείκτου τιμῶν χονδρικής πωλήσεως, τὰ  
εἶδη διατροφῆς καὶ τὰ βιομηχανικά εἶδη θὰ πρέπει νὰ ἐμφανίζονται  
εἰς χωριστὰς ὁμάδας, καθ' ὅσον εἰς τὰς διακυμάνσεις τῶν τιμῶν τῆς  
πρώτης συντελοῦν κυρίως αἱ συνθήκαι προσφορᾶς καὶ μάλιστα αἱ και-  
ρικαὶ συνθήκαι, ἐνῶ εἰς τὰς διακυμάνσεις τῶν τιμῶν τῆς δευτέρας  
οὐσῶδως συμβάλλει τὸ ἐπίπεδον τῆς ζητήσεως.

#### β) Συγκρισιμότης

Τὰ διὰ τὴν κατάρτισιν ἐνὸς τιμαριθμοῦ προοριζόμενα στοιχεῖα  
τιμῶν δέον νὰ εἶναι συγκρίσιμα διαχρονικῶς, ἥτοι δέον νὰ συλλέ-

γωνται κατά τοιοῦτον τρόπον ὥστε νά ἀναφέρωνται πάντοτε εἰς τὰ αὐτά ἀγαθὰ. Τοῦτο ἐπιβάλλεται ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι, λόγω τῆς τεχνολογιῆς καὶ οἰκονομιῆς προόδου, τὰ διάφορα εἶδη δέν παραμένουν ἀμετάβλητα, ἀλλὰ παρουσιάζουν ἐν τῷ χρόνῳ ποικίλας βελτιώσεις ὡς πρὸς τὰ χαρακτηριστικὰ ἐκεῖνα τὰ ὁποῖα συνθέτουν τὴν ποιότητα αὐτῶν. Σημειωτέον ὅτι ἐν προκειμένῳ ἡ ποιότης δέν λαμβάνεται ὑπὸ στενὴν ἔννοιαν, ἀλλὰ ἀναφέρεται καὶ εἰς τὰς ἐν γένει συνθήκας διαθέσεως καὶ διανομῆς τῶν ἀγαθῶν. Οὕτω, δέν ἀποκλείεται εἰς ὠρισμένας περιπτώσεις αἱ σημειούμεναι ἀνατιμήσεις νά ἀντικατοπτρίζουν κατὰ τὸ μεγαλύτερον μέρος των τοιοῦτου εἴδους ποιοτικὰς μεταβολὰς καὶ νά μὴ ἐκφράζουν πραγματικὴν ἄνοδον τοῦ ἐπιπέδου τῶν τιμῶν.

#### 4. Τύποι χρησιμοποιούμενοι κατὰ τὴν κατάρτισιν τῶν ἀριθμοδεικτῶν

##### α) Χρησιμοποιούμενος συμβολισμὸς

Ἡ ἐξέτασις τῶν τύπων ὑπολογισμοῦ τῶν δεικτῶν ἀναφέρεται, ἀφ' ἑνὸς μὲν εἰς τὸ χρησιμοποιούμενον μέτρον κεντρικῆς τάσεως, ἀφ' ἑτέρου δέ εἰς τὴν ἀκολουθουμένην μέθοδον σταθμίσσεως. Ἡ ἀνάλυσις τῶν προβλημάτων τούτων διευκολύνεται μεγάλως διὰ τῆς χρησιμοποίησεως τῶν κατωτέρω συμβόλων.

Αἱ τιμαὶ τῶν  $n$  ἀγαθῶν κατὰ τὴν περίοδον βάσεως ο ἐκφράζονται διὰ :

$$p_o^{(1)}, p_o^{(2)}, p_o^{(3)}, \dots, p_o^{(n)}$$

ὅπου  $p_o^{(1)}$  εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ ἀγαθοῦ (1),  $p_o^{(2)}$  ἡ τιμὴ τοῦ ἀγαθοῦ (2) κ.ο.κ.

Αἱ ἀντίστοιχοι ἀγοραζόμεναι ποσότητες τῶν ἐξεταζομένων ἀγαθῶν εἶναι :

$$q_o^{(1)}, q_o^{(2)}, q_o^{(3)}, \dots, q_o^{(n)}$$

ὅπου  $q_o^{(1)}$  εἶναι ἡ ἀγοραζομένη ποσότης τοῦ ἀγαθοῦ (1) κατὰ τὴν περίοδον βάσεως ο,  $q_o^{(2)}$  ἡ ἀγοραζομένη ποσότης τοῦ ἀγαθοῦ (2) κ.ο.κ.

Διὰ τὴν περίοδον 1, αἱ τιμαὶ τῶν  $n$  ἀγαθῶν εἶναι :

$$p_1^{(1)}, p_1^{(2)}, p_1^{(3)}, \dots, p_1^{(n)}$$

αί δέ αντίστοιχοι αγοραζόμενοι ποσότητες :

$$q_1^{(1)}, q_1^{(2)}, q_1^{(3)}, \dots, q_1^{(n)}$$

Κατά τήν χρησιμοποίησιν ἄθροισμάτων παραλείπονται αἱ ἄνω (ἐν τὸς παρενθέσεων) δεῖκται τῶν  $p$  καὶ  $q$ , ὑπονοεῖται δέ ὅτι ταῦτα ἀφοροῦν εἰς ὅλα τὰ  $n$  ἐξεταζόμενα ἀγαθά. Οὕτω, ἔχομεν :

$$\Sigma p_0 q_0 = p_0^{(1)} q_0^{(1)} + p_0^{(2)} q_0^{(2)} + p_0^{(3)} q_0^{(3)} + \dots + p_0^{(n)} q_0^{(n)}$$

δηλαδή τὸ ἄθροισμα  $\Sigma p_0 q_0$  δεικνύει τήν συνολικὴν ἀξίαν ὅλων τῶν  $n$  αγοραζομένων ἀγαθῶν κατὰ τήν περίοδον βάσεως 0. Ὁμοίως, εἰ-  
και :

$$\Sigma p_1 q_1 = p_1^{(1)} q_1^{(1)} + p_1^{(2)} q_1^{(2)} + p_1^{(3)} q_1^{(3)} + \dots + p_1^{(n)} q_1^{(n)}$$

Ἐνταῦθα τὸ ἄθροισμα  $\Sigma p_1 q_1$  ἐκφράζει τήν συνολικὴν ἀξίαν ὅλων τῶν αγοραζομένων ποσοτήτων τῶν  $n$  ἀγαθῶν κατὰ τήν περίοδον 1.

Ἐπίσης, ἔχομεν :

$$\Sigma p_1 q_0 = p_1^{(1)} q_0^{(1)} + p_1^{(2)} q_0^{(2)} + p_1^{(3)} q_0^{(3)} + \dots + p_1^{(n)} q_0^{(n)}$$

καὶ  $\Sigma p_0 q_1 = p_0^{(1)} q_1^{(1)} + p_0^{(2)} q_1^{(2)} + p_0^{(3)} q_1^{(3)} + \dots + p_0^{(n)} q_1^{(n)}$

Τὸ  $\Sigma p_1 q_0$  δεικνύει τήν συνολικὴν ἀξίαν τῶν αγοραζομένων ποσο-  
τήτων τῶν  $n$  ἀγαθῶν κατὰ τήν περίοδον βάσεως 0, ὑπολογιζομένην,  
ὅμως, εἰς τιμὰς τῆς περιόδου 1. Τὸ ἄθροισμα  $\Sigma p_0 q_1$ , ἀναφέρεται  
εἰς τήν συνολικὴν ἀξίαν τῶν αγοραζομένων ποσοτήτων τῶν  $n$  ἀγα-  
θῶν κατὰ τήν περίοδον 1, ὑπολογιζομένην εἰς τιμὰς τῆς περιόδου  
βάσεως 0.

β) Ἐπιλογή τοῦ καταλλήλου μέτρου κεντρικῆς  
τάσεως

Ἄνωτέρω ἐλέχθη ὅτι σύνθεσις τῶν μεταβολῶν τῶν τιμῶν ἐπίμέ-  
ρους ἀγαθῶν μεταξύ τῶν περιόδων 0 καὶ 1 εἰς ἓνα γενικὸν δείκτην  
δύναται νὰ ἐπιτευχθῇ διὰ χρησιμοποίησεως ἑνὸς μέτρου κεντρικῆς  
τάσεως ἢ θέσεως τῶν σχετικῶν τιμῶν τῶν ὑπὸ ἐξέτασιν ἀγαθῶν. Δέ-  
τα ἔστιν νὰ τονισθῇ ἐνταῦθα ὅτι ὁ ὑπολογισμὸς οὗτος στηρίζεται ἐπὶ τῆς  
ὑποθέσεως ὅτι αἱ ἐπὶ μέρους σχετικαὶ τιμαὶ εἶναι τῆς αὐτῆς σπου-  
δαιότητος, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον εἰς τήν πραγματικότητα συνήθως δέν



είναι ἀληθές. Ἐκ τῶν γνωστῶν μέτρων ἡ διάμεσος σπανίως χρησιμο-  
ποιεῖται, ἡ δὲ ἐπιλογή περιορίζεται μεταξύ τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου  
καὶ τοῦ γεωμετρικοῦ μέσου.

Οὕτω, ἐάν ἔχωμεν τὰς σχετικές τιμὰς  $n$  ἀγαθῶν :

$$\frac{p_1^{(1)}}{p_0^{(1)}}, \frac{p_1^{(2)}}{p_0^{(2)}}, \frac{p_1^{(3)}}{p_0^{(3)}}, \dots, \frac{p_1^{(n)}}{p_0^{(n)}}$$

ὁ δείκτης ὁ βασιζόμενος ἐπὶ τοῦ ἀσταθμήτου ἀριθμητικοῦ μέσου αὐ-  
τῶν εἶναι, συμφώνως πρὸς τὸν τύπον (ΣΤ-1)

$$(H-2) \quad \frac{\frac{p_1^{(1)}}{p_0^{(1)}} + \frac{p_1^{(2)}}{p_0^{(2)}} + \frac{p_1^{(3)}}{p_0^{(3)}} + \dots + \frac{p_1^{(n)}}{p_0^{(n)}}}{n} = \Sigma \left( \frac{p_1}{p_0} \right)$$

Ὁ δείκτης ὁ βασιζόμενος ἐπὶ τοῦ γεωμετρικοῦ μέσου τῶν σχετικῶν  
τιμῶν δίδεται συμφώνως πρὸς τὸν τύπον (ΣΤ-5) ὑπὸ :

$$(H-3) \quad p_{1/0} = \sqrt[n]{\frac{p_1^{(1)}}{p_0^{(1)}} \cdot \frac{p_1^{(2)}}{p_0^{(2)}} \cdot \frac{p_1^{(3)}}{p_0^{(3)}} \dots \frac{p_1^{(n)}}{p_0^{(n)}}}$$

Ἐκ τῆς εἰς προηγούμενον Κεφάλαιον γενομένης ἐξετάσεως  
τῶν μέτρων κεντρικῆς τάσεως προέκυψεν ὅτι εἰς δεδομένην σειράν  
τιμῶν μιᾶς μεταβλητῆς ὁ γεωμετρικὸς μέσος εἶναι μικρότερος τοῦ  
ἀριθμητικοῦ μέσου. Εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν σχετικῶν τιμῶν, ἡ μετα-  
ξύ τῶν δύο τούτων μέτρων διαφορά τείνει νὰ αὐξάνη ἐφ' ὅσον ἀπο-  
μακρυνόμεθα ἐκ τῆς περιόδου βάσεως. Οὕτω, ὁ μὲν γεωμετρικὸς μέ-  
σος ἐμφανίζεται ὡς ὑποεκτιμῶν, ὁ δὲ ἀριθμητικὸς μέσος ὡς ὑπερε-  
κτιμῶν τὰς πραγματικὰς μεταβολὰς τοῦ ἐπιπέδου τῶν τιμῶν.

Εἰς τὸν πίνακα Η-2 δίδονται ὑποθετικά τιμὰ ὡς καὶ αἱ ἀντί-  
στοιχοὶ σχετικαὶ τιμὰ ἕξ ἀγαθῶν, ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ὁποίων ζητεῖται  
νὰ καταρτισθῇ τιμὰριθμος. Μεταξύ τῶν ἐτῶν 1950 καὶ 1960 ἡ τιμὴ  
τοῦ ἀγαθοῦ Β ἀνῆλθεν ἀπὸ 15,39 εἰς 19,25. Ἡ σχετικὴ τιμὴ αὐτοῦ,  
ὑπολογιζομένη ὡς ἀπλοῦς λόγος καὶ ὄχι ὡς ποσοστὸν, εἶναι 1,25 διὰ  
τὸ ἔτος 1960 (μὲ βάσιν τὸ ἔτος 1950) καὶ 0,80 διὰ τὸ ἔτος 1950  
(μὲ βάσιν τὸ ἔτος 1960). Ἐν προκειμένῳ, δηλαδὴ, ἡ μεταξύ 1950  
καὶ 1960 αὐξησης κατὰ 25% ἀντισταθμίζεται ἀπὸ μεῶσιν κατὰ

20% μεταξύ 1960 και 1950. Έχομεν, όμως:  $1/0,80 = 1,25$ , ήτοι αϊ δύο υπολογισθεϊσαι σχετικαϊ τιμαϊ εϊναι αντιστροφοι. Η ιδιότης αϋτη της αναστρεψιμότητος εν τῷ χρόνῳ τήν ὁποίαν παρουσιάζουναϊ σχετικαϊ τιμαϊ γενικῶς θά ἔδει νά χαρακτηρίζη ὅλους τοὺς τύπους ἀριθμοδεικτῶν. Ἀποδεικνύεται ὅτι τό κριτήριον της αναστρεψιμότη-

### Πίναξ Η - 2

Τιμαϊ καϊ σχετικαϊ τιμαϊ ἐξ ἀγαθῶν

Τιμαϊ καϊ σχετικαϊ τιμαϊ	Ἀγαθὸν Α	Ἀγαθὸν Β	Ἀγαθὸν Γ	Ἀγαθὸν Δ	Ἀγαθὸν Ε	Ἀγαθὸν ΣΤ
Τιμαϊ 1950	18,25	15,39	12,00	28,64	14,56	20,78
Τιμαϊ 1960	23,00	19,25	15,97	27,17	21,13	20,00
Σχετικαϊ τιμαϊ						
1960 (1950 = 100)	126,0	125,1	133,1	94,9	145,1	96,2
1950 (1960 = 100)	79,3	79,9	75,1	105,5	68,9	103,9

τητος εν τῷ χρόνῳ ἱκανοποιεϊται ὑπό τοῦ γεωμετρικοῦ μέσου, ὄχι δέ καϊ ὑπό τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου. Χρησιμοποιοῦντες τὰ δεδομένα τοῦ Πίνακος Η-2 υπολογιζομεν τοὺς δύο δείκτας ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ τύπου (Η-2) :

$$P_{60/50} = \frac{126,0 + 125,1 + 133,1 + 94,9 + 145,1 + 96,2}{6} = 120,1$$

$$P_{50/60} = \frac{79,3 + 79,9 + 75,1 + 105,4 + 68,9 + 103,9}{6} = 85,4$$

Ἐπίσης υπολογιζομεν τοὺς ἀντιστοιχοὺς δύο δείκτας, ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ τύπου (Η-3) :

$$P_{60/50} = \sqrt[6]{(126,0) \cdot (125,1) \cdot (133,1) \cdot (94,9) \cdot (145,1) \cdot (96,2)} = 118,6$$

$$P_{50/60} = \sqrt[6]{(79,3) \cdot (79,9) \cdot (75,1) \cdot (105,4) \cdot (68,9) \cdot (103,9)} = 84,3$$

Μεταξύ τῶν δύο γεωμετρικῶν μέσων ὑφίσταται ἡ σχέσις :  $1/0,843 = 1,186$ . Οἱ δείκται, ὅμως, οἱ υπολογισθέντες διὰ χρησιμοποίησεως ἀριθμητικῶν μέσων δέν παρουσιάζουσι τήν ιδιότητα ταύτην, διότι :  $1/0,854 \neq 1,201$ .

Πίναξ Η-3

Υπολογισμός ειδικού δείκτη καυσίμων και λιπαντικών τιμαρίθμου χονδρικής πωλήσεως

Α γ α θ α	1 9 5 2		1 9 6 2		Γ ι ν ό μ ε ν α			
	Σταθμί- σεις	Αγοραί (α) (εις χιλ. τόνν.)	Τιμαί (εις δρχ.)	Τιμαί (εις δρχ.)	°/ο έναντι 1952	(1) X (5)	(2) X (3) (χιλ.)	(2) X (4) (χιλιάδ.)
		(1)	(2)	(3)		(4)	(5)	(6)
Γαϊάνθρακες . . . . .	0,76	153,0	495	812	164,0	124,6	75.735	124.236
Λιγνίτης . . . . .	0,30	107,0	280	510	182,1	54,6	29.960	54.570
Πετρέλαιον φωτ. . . . .	0,80	36,0	2.236	3.150	140,9	112,7	80.496	113.400
Όρυκτέλειον . . . . .	0,70	9,6	7.267	10.800	148,6	104,0	69.763	103.680
Νάφθα . . . . .	2,05	345,0	595	1.133	190,4	390,3	205.275	390.885
Βενζίνη . . . . .	3,74	131,5	2.842	5.772	203,1	759,6	373.723	759.018
Σ ύ ν ο λ ο ν . . . . .	8,35					1.545,8	834.952	1.545.789

(α) Τα στοιχεία αγοραζομένων ποσοτήτων είναι υποθετικά.  
Πηγή: Τράπεζα της Ελλάδος.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι ὁσάνκις ὁ δείκτης ὑπολογίζεται ὡς ἀστάθμητος μέσος, εἶναι προτιμότερον νά χρησιμοποιηῖται ὁ γεωμετρικός μέσος, διότι οὗτος ἱκανοποιεῖ τό βασικόν κριτήριον τῆς ἀναστρεψιμότητος ἐν τῷ χρόνῳ.

γ) Μέθοδοι σταθμίσεως τῶν τιμαριθμῶν

Αἱ σχετικαί τιμαί τῶν ἐπί μέρους ἀγαθῶν, δεδομένου ὅτι δέν ἔχουν τήν αὐτήν σπουδαιότητα, δεόν κατά τήν σύνθεσιν των εἰς ἓνα γενικόν δείκτην νά σταθμίζωνται καταλλήλως. Ἡ διαδικασία ὑπολογισμοῦ τοιούτων σταθμικῶν δεικτῶν περιγράφεται κατωτέρω διά χρησιμοποίησης πραγματικῶν στοιχείων τοῦ ὑπό τῆς Τραπεζῆς τῆς Ἑλ-λάδος καταρτιζομένου τιμαριθμοῦ χονδρικήσ πωλήσεως. Ὁ δείκτης οὗτος καλύπτει πέντε κατηγορίας εἰδῶν, ἐνταῦθα δέ ἐξετάζεται ἡ περιλαμβανούσα "Καύσιμα καί λιπαντικά". Αἱ κατά τόννον τιμαί τῶν εἰδῶν αὐτῶν κατά τά ἔτη 1952 καί 1962 δίδονται εἰς τās στήλας (3) καί (4) ἀντιστοίχως, αἱ δέ σχετικαί τιμαί μέ βάσιν 1952 = 100 εἰς τήν στήλην (5) τοῦ Πίνακος Η-3.

Ἡ ἀξία τῶν ἀγοραζομένων ποσοτήτων βενζίνης εἶναι μεγαλυτέρα ἐκείνης τοῦ λιγνίτου καί ἐπομένως κατά τόν ὑπολογισμόν τῶν μεταβολῶν τοῦ ἐπιπέδου τῶν τιμῶν τῆς κατηγορίας "Καύσιμα καί λιπαντικά" ἡ σχετική τιμή τῆς βενζίνης πρέπει νά σταθμισθῇ περισσότερο ἢ ἡ σχετική τιμή τοῦ λιγνίτου. Οἱ χρησιμοποιούμενοι συντελεσταί σταθμίσεως τῶν ἐπί μέρους εἰδῶν ἀναγράφονται εἰς τήν στήλην (1) τοῦ Πίνακος Η-3 καί εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀξιῶν τῶν ἀγοραζομένων ποσοτήτων κατά τήν περίδον βάσεως (ἔτος 1952), δηλαδή ἀνάλογοι τῶν γινομένων τά ὁποῖα περιέχονται εἰς τήν στήλην (7). Πρὸς ὑπολογισμόν τοῦ δείκτου τιμῶν καυσίμων καί λιπαντικῶν πολ-λαπλασιαζόμεν τās σχετικὰς τιμάς τῆς στήλης (5) ἐπί τούς ἀντι-στοίχους συντελεστάς σταθμίσεως τῆς στήλης (1), τό δέ ἄθροισμα τῶν προκύπτόντων γινομένων (βλ. στήλην (6)) διαφουῶμεν διά τοῦ ἄθροισματος τῶν συντελεστῶν σταθμίσεως. Κατά ταῦτα ὁ τιμαριθμός διά τό ἔτος 1962, μέ βάσιν 1952 = 100, εἶναι :

$$P_{62/52} = \frac{1.545,8}{8,35} = 185,1$$

Ὁ οὕτω ὑπολογιζόμενος τιμαριθμός εἶναι σταθμικός μέσος τῶν σχετικῶν τιμῶν, σταθμισμένος ἐπί τῆ βάσει στοιχείων τῆς περιόδου βάσεως, ἔχει δέ γενικήν ἐφαρμογήν. Σημειωτέον ὅτι τό αὐτό ἀποτέλεσμα προκύπτει δι' ἐφαρμογῆς διαφορετικῆς μεθόδου. Αἱ ἀγορα-τέλεσα προκύπτει δι' ἐφαρμογῆς διαφορετικῆς μεθόδου. Αἱ ἀγορα-τέλεσα προκύπτει δι' ἐφαρμογῆς διαφορετικῆς μεθόδου. Αἱ ἀγορα-τέλεσα προκύπτει δι' ἐφαρμογῆς διαφορετικῆς μεθόδου.

σθεισαι ποσοτητες καυσιμων και λιπαντικων κατα την περιοδον βασειως, αι οποιαι δεικνυονται εις την στηλην (2) του Πινακος Η-3, δυνανται να εκφρασθουν ειτε εις τιμας του ετους 1952 ειτε εις τιμας του ετους 1962. Οι σχετικοι υπολογισμοι περιεχονται εις τας στηλας (7) και (8). Τα αθροισματα των στηλων τούτων δεικνυουν τας αξιας δεδομενων ποσοτητων των εξεταζομενων ειδων κατα τας δυο περιόδους. Δεδομένου ότι αι ποσοτητες παραμένουσιν σταθεραί, είναι φανερόν ότι η παρατηρουμένη μεταξύ των αθροισμάτων διαφορά οφείλεται εις τόν παράγοντα των τιμών. Έπομένως, ο λόγος των αθροισμάτων των στηλών (7) και (8), πολλαπλασιαζόμενος επί 100, δίδει τόν τιμαριθμόν της κατηγορίας "Καύσιμα και λιπαντικά" διά τό έτος 1962 μέ 1952 = 100, ο οποίος είναι :

$$P_{62/52} = \frac{1.545.789}{834.952} 100 = 185,1$$

Ο λόγος των αθροισμάτων, ως ώρισθη άνωτέρω, είναι κατ'ούσαν ίσοδύναμος πρós τόν σταθμικόν αριθμητικόν μέσον των σχετικων τιμών. Έκ του υπολογισμού του δείκτου τιμών χονδρικής πωλήσεως των καυσιμων και λιπαντικων προκύπτει ότι αυται ηύξηθησαν μεταξύ των ετών 1952 και 1962 κατά 85% περίπου.

Πρός ολοκλήρωσιν της περιγραφής του τρόπου καταρτίσεως του γενικού δείκτου τιμών χονδρικής πωλήσεως δεόν να προστεθή ότι παρόμοιοι πρós τούς άνωτέρω υπολογισμούς, γίνονται και διά τας λοιπάς τέσσαρας κατηγορίας των εις τούτον περιλαμβανομένων ειδων, ήτοι τά είδη διατροφής, τας πρώτας ύλας και ήμικατεργασμένα προϊόντα, τά έτοιμα προϊόντα, τά ποτά και τόν καπνόν. Κατά τό δεύτερον στάδιον υπολογισμού οι πέντε ειδικοί δείκται σταθμίζονται καταλλήλως, έξ αυτών δέ προκύπτει ο γενικός δείκτης τιμών χονδρικής πωλήσεως.

#### δ) Τύποι σταθμικων μέσων

Έκτός της άνωτέρω περιγραφείσης μεθόδου σταθμίσεως, η οποία άφορα μόνον εις τούς τιμαριθμούς, υπάρχουν και άλλαι βασιζόμεναι επί διαφορετικων υποθέσεων. Κατωτέρω εξετάζονται αι γενικαι μορφαί των σπουδαιοτέρων τύπων επί των οποίων στηρίζεται ο υπολογισμός των δεικτων τιμών και όγκου.

1) Τύποι τιμαρίθμων. Ο τύπος επί του οποίου στηρίζεται ο υπό της Τραπεζης της Ελλάδος καταρτιζόμενος τιμαριθμός χονδρικής πωλήσεως δύναται να γραφή διά συμβόλων ως κάτωθι :

$$(H-4) \quad P_{1/0} = \frac{\sum p_0 q_0 \left( \frac{p_1}{p_0} \right)}{\sum p_0 q_0}$$

Ἡ ἔκφρασις αὕτη καλεῖται τύπος τοῦ LASPEYRES καὶ δεῖδειτόν ἀριθμητικόν μέσον τῶν σχετικῶν τιμῶν τῶν ἐπὶ μέρους ἀγαθῶν, σταθμισμένων διὰ τῶν ἀντιστοιχῶν ἀξιῶν τῶν ἀγοραζομένων ποσοτήτων κατὰ τὴν περίοδον βάσεως. Ἀπλοποιοῦντες τὸν ἀριθμητὴν τοῦ τύπου (H-4), λαμβάνομεν :

$$(H-5) \quad P_{1/0} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0}$$

Δηλαδή, τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα προκύπτει, ἔάν, ἀντὶ τοῦ σταθμικοῦ μέσου τῶν σχετικῶν τιμῶν, λάβωμεν τὸν λόγον τῆς ἀξίας τῶν ἀγοραζομένων ποσοτήτων κατὰ τὴν περίοδον βάσεως ὀ εἰς τιμὰς τῆς περιόδου 1 πρὸς τὴν ἀξίαν τῶν ἀγοραζομένων ποσοτήτων κατὰ τὴν περίοδον βάσεως.

Ἀπὸ πρακτικῆς ἀπόψεως ὁ τύπος (H-5) εἶναι ἀπλούστερος τοῦ τύπου (H-4). Ἐν τούτοις, ἡ χρησιμοποίησις τοῦ τύπου (H-4) εἶναι ἀναγκαία, ὅσάντις ἐπιδιώκομεν νὰ ἐξετάσωμεν τὴν χαρακτηριστικὴν συμπεριφορὰν τῶν τιμῶν ὑποκατηγοριῶν ἀγαθῶν καὶ νὰ προσδιορίσωμεν τὴν συμβολὴν τῶν μεταβολῶν τῶν εἰς τὰς μεταβολὰς τοῦ γενικοῦ δείκτου.

Ἄλλος γενικὸς τύπος ὑπολογισμοῦ τῶν τιμαριθμῶν εἶναι ὁ καλούμενος τύπος τοῦ PAASCHE. Εἰς τούτον ἡ στάθμισις τῶν σχετικῶν τιμῶν τῶν ἀγαθῶν γίνεται διὰ χρησιμοποίησεως τῶν ἀξιῶν τῶν ἀγοραζομένων ποσοτήτων κατὰ τὴν περίοδον 1, ὑπολογιζομένων εἰς τιμὰς τῆς περιόδου βάσεως. Ὁ δείκτης τιμῶν τοῦ PAASCHE δεῖδειται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$(H-6) \quad P'_{1/0} = \frac{\sum p_0 q_1 \left( \frac{p_1}{p_0} \right)}{\sum p_0 q_1}$$

ἢ μετ' ἀπλοποιήσιν τοῦ ἀριθμητοῦ :

$$(H-7) \quad P'_{1/0} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}$$

Ὁ τύπος (H-7) ἐκφράζει τὸν λόγον τῆς ἀξίας τῶν ἀγοραζομένων ποσοτήτων τῶν ἀγαθῶν κατὰ τὴν περίοδον 1 πρὸς τὴν ἀξίαν τῶν

ἀγοραζομένων ποσοτήτων κατά τήν ἴδιαν περίοδον, ὑπολογιζομένων, ὅμως, εἰς τιμὰς τῆς περιόδου βάσεως.

Εἰς τόν πίνακα Η-4 δίδεται ἡ ἀξία τῶν ἐλληνικῶν ἐξαγωγῶν κατὰ τὰ ἔτη 1960 καί 1965 ἐκπεφρασμένη εἰς τιμὰς ἀμφοτέρων τῶν ἐ-

#### Πίναξ Η - 4

Ἀξία ἐλληνικῶν ἐξαγωγῶν διὰ τὰ ἔτη 1960 καί 1965 εἰς τιμὰς ἀμφοτέρων τῶν ἐτῶν

Ἔτος εἰς τὸ ὁποῖον ἀναφέρεται :		Ἀξία ἐξαγωγῶν (εἰς ἑκατ. δρχ.)
ὁ ὄγκος	αἱ τιμαί	
1960	1960	6.096
1960	1965	6.608
1965	1960	9.071
1965	1965	9.833

Πηγή : Ε.Σ.Υ.Ε., «Δελτίον Στατιστικῆς Ἐξωτερικοῦ Ἐμπορίου», Δεκέμβριος 1965, σελ. 1.

τῶν. Ὁ δείκτης τιμῶν ἐξαγομένων προϊόντων κατὰ τὸ 1965 μέ βάσιν 1960=100 εἶναι ἐπὶ τῆ βάσει τοῦ τύπου LASPEYRES (H-5) :

$$P_{65/60} = \frac{6.608}{6.096} 100 = 108,4$$

Ἐφαρμόζοντες τόν τύπον τοῦ PAASCHE, λαμβάνομεν :

$$P'_{65/60} = \frac{9.833}{9.071} 100 = 108,4$$

Παρατηροῦμεν ὅτι οἱ δύο τύποι ἔδωσαν τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα, πλὴν ὅμως τοῦτο δέν εἶναι πάντοτε ἀναγκαῖον.

Γενικῶς, ἡ ἐφαρμογή τοῦ τύπου PAASCHE προϋποθέτει τόν ὑπολογισμόν νέων συντελεστῶν σταθμίσσεως δι' ἐκάστην ἐξεταζομένην χρονικὴν περίοδον. Προκειμένου, δηλαδή, περὶ δεικτῶν τιμῶν καταναλωτοῦ ἀπαιτεῖται γνῶσις τῶν καταναλισκομένων ποσοτήτων τῶν ἐπὶ μέρος ἀγαθῶν κατ' ἔτος ἢ κατὰ μῆνα. Τοιαῦται ποσοτικά πληροφορία, ὅμως, εἶναι λίαν δυσχερές νά συγκεντροῦνται δι' ἐκάστην περίοδον. Ἐκτός τούτου, οἱ ἀπαιτούμενοι ἀριθμητικοὶ ὑπολογισμοὶ διὰ τόν δείκτην PAASCHE εἶναι περίπου διπλάσιοι τῶν

ἀπαιτούμενων διά τόν τύπον LASPEYRES. Ἡ εἰς τόν τύπον LASPEYRES ὑπάρξεις σταθερῶν συντελεστῶν σταθμίσεως διευκολύνει μέγας τούς ἀριθμητικούς ὑπολογισμούς κατά διαδοχικά χρονικά περιόδους, δι' ὅ καί οὗτος εἰς τήν πράξιν εἶναι ὁ περισσότερο χρησιμοποιούμενος.

II) Τύποι δεικτῶν ὄγκου. Οἱ δεῖνται ὄγκου δεικνύουν τās μεταβολάς τῶν ἀγοραζομένων, παραγομένων κλπ. ποσοτήτων ὀριμένης κατηγορίας ἀγαθῶν μεταξύ δύο χρονικῶν περιόδων. Λόγῃ τῆς ἀδυναμίας μετρήσεως τῶν ἐπί μέρους εἰδῶν διά τινος κοινῆς μονάδος βάρους ἐπιτρεπούσης ἄθροισιν καί τῆς ὑπάρξεως, ἐνδεχομένως, εἰς τήν κατηγορίαν βαρέων καί πολυτίμων ἀγαθῶν, σκόπιμον εἶναι ὅπως οἱ λόγοι τῶν ποσοτήτων σταθμίζονται ἐπί τῆ βάσει τῆς ἀξίας τῆς ἀναφερομένης εἰς τινά περίοδον. Κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὰ ἐφαρμοζόμενα εἰς τούς τιμαριθμούς εἰς τόν τύπον LASPEYRES ἡ στάθμισις τῶν λόγων τῶν ποσοτήτων γίνεται διά τῶν ἀξιῶν τῆς περιόδου βάσεως. Εἶναι, δηλαδή :

$$(H-8) \quad Q_{1/0} = \frac{\sum q_1 p_0 \left( \frac{q_1}{q_0} \right)}{\sum q_0 p_0}$$

ἢ μετ' ἀπλοποιήσιν τοῦ ἀριθμητοῦ :

$$(H-9) \quad Q_{1/0} = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0}$$

Εἰς τόν τύπον ὄγκου τοῦ PAASCHE, ἡ στάθμισις γίνεται ἐπί τῆ βάσει τῶν ἀξιῶν τῆς περιόδου βάσεως εἰς τιμάς τῆς τρεχούσης περιόδου :

$$Q'_{1/0} = \frac{\sum q_0 p_1 \left( \frac{q_1}{q_0} \right)}{\sum q_0 p_1}$$

ἢ μετ' ἀπλοποιήσιν τοῦ ἀριθμητοῦ :

$$(H-10) \quad Q'_{1/0} = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_1}$$

Χρησιμοποιοῦντες τὰ δεδομένα τοῦ Πίνακος H-4, ὑπολογίζομεν τόν δείκτην ὄγκου ἐξαγωγῶν διά τό ἔτος 1965 (1960=100) ἐπί τῆ βάσει τοῦ τύπου LASPEYRES ὡς ἐξῆς :



$$Q_{65/60} = \frac{9.071}{6.096} 100 = 148,8$$

Κατά τόν τύπον τοῦ PAASCHE, ὁ δείκτης ὄγκου ἐξαγωγῶν εἶναι :

$$Q'_{65/60} = \frac{9.833}{6.608} 100 = 148,8$$

Ἐχοντες ὑπολογίσει τοὺς δείκτες μέσων τιμῶν καὶ ὄγκου τῶν ἐξαγομένων προϊόντων δυνάμεθα νά ἐρμηνεύσωμεν τήν μεταβολήν τῆς συνολικῆς ἀξίας αὐτῶν ὡς κάτωθι. Αὕτη μεταξύ τῶν ἐτῶν 1960 καὶ 1965 ηὔξηθη ἀπὸ 6.096 ἑκατ. δραχ. εἰς 9.833 ἑκατ. δραχ. Κατά τήν ἐν λόγῳ περίοδον αἱ μέσαι τιμαὶ ἐξαγωγῶν ἐσημείωσαν ἄνοδον κατὰ 8,4%, ἐνῶ αἱ ἐξαχθεῖσαι ποσότητες ηὔξηθησαν κατὰ 48,8%, πρᾶγμα τό ὁποῖον σημαίνει ὅτι ἡ μεταβολή τῆς ἀξίας μεταξύ 1960 καὶ 1965 προῆλθε κατὰ κύριον λόγον ἐκ τῆς ἐξαγωγῆς μεγαλύτερου ὄγκου προϊόντων. Παρατηροῦμεν ὅτι διὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν δύο ἐπί μέρους δεικτῶν καθίσταται δυνατὴ ἡ ἀνάλυσις τῶν μεταβολῶν τῆς ἀξίας τῶν ἐξαγωγῶν εἰς τὰς συνιστώσας μεταβολὰς τιμῶν καὶ ὄγκου.

III) Σχέσεις μεταξύ τύπων LASPEYRES καὶ PAASCHE. Οἱ δείκται τιμῶν καὶ ὄγκου οἱ ὑπολογιζόμενοι ἐπὶ τῇ βάσει τῶν τύπων LASPEYRES καὶ PAASCHE συνδέονται διὰ χαρακτηριστικῶν σχέσεων, αἱ ὁποῖαι διευκολύνουν τήν χρησιμοποίησίν των εἰς τήν πρᾶξιν.

Ἐστω ὅτι  $V_{1/0}$  εἶναι ὁ δείκτης ἀξίας διὰ τήν περίοδον 1 ὡς πρὸς περίοδον βάσεως 0. Δηλαδή :

$$(H-11) \quad V_{1/0} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0}$$

Χρησιμοποιοῦντες τοὺς τύπους (H-5) καὶ (H-1C) λαμβάνομεν :

$$(H-12) \quad \left( P_{1/0} \right) \cdot \left( Q'_{1/0} \right) = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \cdot \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_1 q_0} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0} = V_{1/0}$$

Ἐμοίως, ἐκ τῶν τύπων (H-7) καὶ (H-9) προκύπτει :

$$(H-13) \quad \left( P'_{1/0} \right) \cdot \left( Q_{1/0} \right) = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} \cdot \frac{\sum p_0 q_1}{\sum p_0 q_0} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0} = V_{1/0}$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (H-12) καὶ (H-13) ἔχομεν :

$$(H-14) \quad (P_{1,0}) \cdot (Q_{1,0}) = (P'_{1,0}) \cdot (Q_{1,0}) = V_{1,0}$$

Σὺτῶ κατὰ τὴν ἀνάλυσιν τῶν μεταβολῶν τῆς ἀξίας δυνάμεθα νὰ συν-  
δυσάσωμεν τὸν τύπον τιμῶν τοῦ LASPEYRES μὲ τὸν τύπον ὄγκου τοῦ  
PAASCHE ἢ τὸν τύπον τιμῶν τοῦ PAASCHE μὲ τὸν τύπον ὄγκου τοῦ  
LASPEYRES. Ἐάν ἔχομεν τὸν δείκτην ἀξίας, διὰ μόνου τοῦ ὑπολο-  
γισμοῦ τοῦ δείκτη τιμῶν ἢ τοῦ δείκτη ὄγκου, ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ  
τύπου LASPEYRES, δυνάμεθα δι' ἀπλῆς διαφέσεως νὰ εὕρωμεν τὸν  
διὰ τὴν ἴδιαν περίοδον δείκτην ὄγκου ἢ τιμῶν ἀντιστοίχως βασιζό-  
μενον ἐπὶ τοῦ τύπου PAASCHE.

Ἐκ τῶν σχέσεων (H-14) προκύπτει ὅτι, ἐάν  $P_{1,0} > P'_{1,0}$ , τότε  
θὰ εἶναι  $Q_{1,0} > Q'_{1,0}$ . Ἐάν δέ,  $P_{1,0} < P'_{1,0}$ , θὰ εἶναι  $Q_{1,0} < Q'_{1,0}$ .

Ἡ διαφορὰ τὴν ὁποίαν παρουσιάζουν συνήθως οἱ δείκται LA-  
SPEYRES καὶ PAASCHE ὡς μέτρα τῶν μεταβολῶν τῶν τιμῶν ἢ τοῦ ὄ-  
γκου εἰς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν χρονικὴν περίοδον ὀφείλεται εἰς τὴν  
διαφορετικὴν θεωρητικὴν θεμελίωσιν αὐτῶν. Εἰδικῶς διὰ τοὺς τιμα-  
ριθμούς ἀποδεικνύεται ὅτι, ὑπὸ ὠρισμένας προϋποθέσεις, ὁ μὲν τύ-  
πος τοῦ LASPEYRES ὑπερεκτιμᾷ, ὁ δὲ τύπος τοῦ PAASCHE ὑποε-  
κτιμᾷ τὰς πραγματικὰς μεταβολὰς τῶν τιμῶν. Ἐν προκειμένῳ ὁ FI-  
SHER προέτεινε τὴν χρησιμοποίησιν τοῦ καλουμένου "ἰδανικοῦ τύ-  
που", ὁ ὁποῖος προκύπτει ὡς ὁ γεωμετρικὸς μέσος τῶν δεικτῶν τι-  
μῶν LASPEYRES καὶ PAASCHE. Δηλαδή εἶναι :

$$(H-15) \quad P_{1,0} \text{ (ἰδανικός)} = \sqrt{(P_{1,0}) \cdot (P'_{1,0})}$$

Ὁ ἰδανικὸς τύπος τοῦ FISHER, ἀνεξαρτήτως τοῦ γεγονότος ὅτι ἀ-  
παιτεῖ πολλοὺς ἀριθμητικὸς ὑπολογισμοὺς, δέν ἔχει, ἀπὸ ἀπόψεως  
οἰκονομικῆς θεωρίας, ἐπαρῆ θεμελίωσιν, καθ' ὅσον δέν στηρίζεται  
εἰς συγκεκριμένον θεωρητικόν ὑπόδειγμα, ὡς συμβαίνει μὲ τοὺς τύ-  
πους LASPEYRES καὶ PAASCHE.

##### 5. Ἐπιλογή τῆς περιόδου βάσεως

Αἱ τιμαὶ ἑνὸς ἀριθμοδείκτη, ὑπολογιζόμεναι δι' ὠρισμένην  
χρονικὴν περίοδον, ἔχουσαι, ὅμως, διάφορον περίοδον βάσεως, θὰ  
ἔδει νὰ εἶναι ἀνάλογοι. Τοῦτο θὰ καθίστα δυνατὴν τὴν ἀλλαγὴν τῆς  
περιόδου βάσεως τοῦ δείκτη δι' ἀπλῆς διαφέσεως ἐκάστης τῶν τι-

μῶν του διά τῆς τιμῆς ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν περίοδον ἡ ὁποία θά ἀπετέλει τὴν νέαν περίοδον βάσεως. Θά πρέπει, δηλαδή, νά ἔχωμεν προκειμένου περί τιμαριθμῶν :

$$P_{2/0} = (P_{2/1}) \cdot (P_{1/0})$$

$$(H-16) \quad \eta \quad \frac{P_{2/0}}{P_{1/0}} = P_{2/1}$$

Ἐν τούτοις, ἀναπτύσσοντες τὴν σχέσιν (H-16) διά χρησιμοποίησιν τοῦ τύπου τοῦ LASPEYRES, λαμβάνομεν :

$$(H-17) \quad \frac{\frac{\Sigma p_2 q_0}{\Sigma p_0 q_0}}{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 p_0}} = \frac{(\Sigma p_2 q_0)(\Sigma p_0 q_0)}{(\Sigma p_0 q_0)(\Sigma p_1 q_0)} = \frac{\Sigma p_2 q_0}{\Sigma p_1 q_0} \neq \frac{\Sigma p_2 q_1}{\Sigma p_1 q_1}$$

Ὅμοως, χρησιμοποιοῦντες τὸν τύπον τοῦ PAASCHE, ἔχομεν :

$$(H-18) \quad \frac{\frac{\Sigma p_2 q_2}{\Sigma p_1 q_2}}{\frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}} = \frac{(\Sigma p_2 q_2)(\Sigma p_0 q_1)}{(\Sigma p_0 q_2)(\Sigma p_1 q_1)} \neq \frac{\Sigma p_2 q_2}{\Sigma p_1 q_2}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι, ὡσάκις χρησιμοποιοῦνται οἱ τύποι οὔτοι ἀριθμοδεικτῶν, ἡ ἐπιλογή τῆς περιόδου βάσεως ἐπηρεάζει τὰς σχετικές τιμὰς τοῦ δείκτου διά τὰς διαφόρους χρονικάς περιόδους. Διά τὸν λόγον τοῦτον δεόν νά καταβάλλεται πάντοτε προσπάθεια ὥστε ἡ ὀριζομένη περίοδος βάσεως νά εἶναι "κανονική", ὑπό τὴν ἔννοιαν ὅτι αἱ εἰς ταύτην ἀναφερόμεναι τιμαὶ δέν ἐμφανίζονται ἐκτάκτως ὑψηλαὶ ἢ ἐκτάκτως χαμηλαί. Δέον, ὅμως, νά σημειωθῇ ὅτι, αἱ προκύπτουσαι διαφοραὶ ἐκ τῆς χρησιμοποίησιν διαφόρων περιόδων βάσεως συνήθως δέν εἶναι οὐσιώδεις.

Οἱ συνηθέστερον εἰς τὴν πράξιν χρησιμοποιούμενοι δείκται ἔχουν σταθεράν περίοδον βάσεως, δηλαδή δι' αὐτῶν γίνονται συγκρίσεις διαδοχικῶν χρονικῶν περιόδων ἀπ' εὐθείας πρὸς τὴν περίοδον βάσεως. Κατ' ἄλλην μέθοδον ὑπολογισμοῦ, ὁ δείκτης καθ' ἑκάστην ἐξεταζομένην περίοδον ἔχει ὡς περίοδον βάσεως τὴν ἀμέσως προηγουμένην. Οὕτω, ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ τύπου τοῦ LASPEYRES, εἶναι :

$$P_{1/0} = \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0}$$

$$(H-19) \quad P_{2/1} = \frac{\Sigma p_2 q_1}{\Sigma p_1 q_1}$$

$$P_{3/2} = \frac{\Sigma p_3 q_2}{\Sigma p_2 q_2}$$

κ.ο.κ.

Οί δείκται οὔτοι, καλούμενοι "άλυσωτοί δείκται", μετατρέπονται εἰς δείκται μέ σταθεράν περίοδον βάσεως ὡς κάτωθι :

$$(H-20) \quad P_{3/0} = (P_{3,2}) \cdot (P_{2,1}) \cdot (P_{1,0})$$

Τό γινόμενον, ὅμως  $(P_{3,2}) \cdot (P_{2,1}) \cdot (P_{1,0})$  ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι δέν εἶναι ἴσον πρός τό πηλίκον  $\Sigma p_3 q_0 / \Sigma p_0 q_0$ , τό ὁποῖον δίδει τήν πραγματικήν τιμήν τοῦ δείκτου  $P_{3/0}$ . Κατά συνέπειαν, ὁσάνις χρησιμοποιοῦμεν ἀλυσωτούς δείκται, οἱ ἐξ αὐτῶν προκύπτοντες δείκται σταθερᾶς βάσεως δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (H-20) δέν εἶναι ἴσοι πρός τοῦς ἀπ' εὐθείας ὑπολογιζομένους, ἄν καί ἡ μεταξύ αὐτῶν διαφορά ἐνδέχεται νά εἶναι πολύ μικρά.

#### 6. Εἰδικά τινα θέματα τῶν ἀριθμοδεικτῶν

Μετά τήν ἀνάλυσιν τῶν γενικῶν προβλημάτων τῶν ἀριθμοδεικτῶν ἐξετάζονται κατωτέρω ὠρισμένα εἰδικά προβλήματα τά ὁποῖα συχνάκις ἀντιμετωπίζονται κατά τήν χρησιμοποίησιν αὐτῶν. Τά ἐν λόγῳ προβλήματα ἀναφέρονται εἰς τήν σύνδεσιν πλειόνων ἀριθμοδεικτῶν, εἰς τόν ἀποπληθωρισμόν ἀξιῶν καί εἰς τήν μέτρησιν τῆς ἀγοραστικῆς δυνάμεως τοῦ χρήματος. Τό πρῶτον ἐκ τῶν θεμάτων τούτων ἀφορᾷ εἰς τοῦς ἀριθμοδείκταις γενικῶς, ἐνῶ τά λοιπά ὀ ἀναφέρονται εἰς τοῦς δείκταις τιμῶν.

α) Σύνδεσις πλειόνων ἀριθμοδεικτῶν

Δι' ὠρισμένον οἰκονομικόν μέγεθος εἶναι δυνατόν νά ὑφίστανται δύο ἢ περισσότεροι δείκται καλύπτοντες διαδοχικάς χρονικάς περιόδους. Δεδομένου ὅτι ἡ στατιστική ἀνάλυσις ἀπαιτεῖ συνεχῆ σειράν τιμῶν ἑνός δείκτου δι' ὅλοκληρον τήν ἐξεταζομένην περίο-

δον, παρίσταται ανάγκη συνδέσεως τῶν ἐπὶ μέρους διαθεσίμων δεικτῶν. Οἱ δεικται οὔτοι συνήθως διαφέρουν ὡς πρὸς τὴν στάθμισιν ἢ τὴν περίοδον βάσεως.

Ἐάν ἡ διαφορά ἔγκειται μόνον εἰς τὴν περίοδον βάσεως, εἶναι φανερόν ὅτι τὸ πρόβλημα δύναται εὐκόλως νὰ ἀντιμετωπισθῇ διὰ μεταφορᾶς ἀμφοτέρων τῶν δεικτῶν ὡς πρὸς μίαν κοινήν περίοδον βάσεως. Πρὸς τοῦτο εἶναι ἀναγκαῖον ὅπως διὰ μίαν τουλάχιστον χρονικήν περίοδον ὑφίστανται τιμαὶ ἀμφοτέρων τῶν συνδεομένων δεικτῶν.

Ὅταν, ὅμως, οἱ δεικται στηρίζονται ἐπὶ διαφορετικῶν σταθμίσεων, ἡ σύνδεσις αὐτῶν προσηροῦει εἰς σοβαράς δυσχερείας, αἱ ὁποῖαι δέν δύναται νὰ ἀντιμετωπισθοῦν ἱκανοποιητικῶς. Ἐάν ἀμφοτέροι οἱ δεικται καλύπτουν ὠρισμένην χρονικήν περίοδον, ἀρχομένην μετὰ τὴν χρονολογίαν τῆς παλαιᾶς σταθμίσεως καὶ λήγουσαν πρὸ τῆς χρονολογίας τῆς νέας σταθμίσεως, τὸ πρόβλημα τῆς συνδέσεως ἀντιμετωπίζεται διὰ τῆς λήψεως διὰ τὴν ἐνδιάμεσον ταύτην περίοδον τοῦ ἀριθμητικοῦ ἢ γεωμετρικοῦ μέσου τῶν δύο δεικτῶν, ἀφοῦ, ὅμως, προηγουμένως οὔτοι ἔχουν τεθῆ ἐπὶ κοινῆς περιόδου βάσεως. Εἰς τὰς στήλας (1) καὶ (2) τοῦ Πίνακος Η-5 δίδονται δύο ὑποθετικοὶ δεικται ἀναφερόμενοι εἰς τὸ αὐτὸ οἰκονομικὸν μέγεθος, ἐκ τούτων, ὅμως, ὁ μὲν (Α) καλύπτει τὴν περίοδον 1954-1958, ὁ δὲ (Β) τὴν περίοδον 1956-1960. Πρὸς σύνδεσιν αὐτῶν εἰς ἓνα συνεχῆ δεικτὴν δι' ὅλην τὴν περίοδον 1954-1960, ἐκφράζομεν κατ' ἀρχὴν

### Πίναξ Η - 5

Διαδικασία συνδέσεως ἀριθμοδεικτῶν

Ἔτος	Δείκτης (Α)	Δείκτης (Β)	Δείκτ. (Α) Δείκτ. (Β)		Συνεχῆς Δείκτης (1957=100)	Συνεχῆς Δείκτης (1954=100)
	Περίοδος βάσεως καὶ σταθμίσεως : 1954=100	Περίοδος βάσεως καὶ σταθμίσεως : 1960=100	Περίοδος βάσεως 1957=100			
	(1)	(2)	(3)	(4)		
1954	100		90,9		90,9	100,0
1955	105		95,5		95,5	105,1
1956	107	85	97,3	94,4	95,8	105,4
1957	110	90	100,0	100,0	100,0	110,0
1958	112	94	101,8	104,4	103,1	113,4
1959		95		105,6	105,6	116,2
1960		100		111,1	111,1	122,2

ἀμφοτέρους ὡς πρὸς κοινήν περίοδον βάσεως, ἤτοι 1957 = 100. Με-  
τὰ ταῦτα ὑπολογίζομεν τοὺς ἀριθμητικούς μέσους τῶν διὰ τὰ ἔτη  
1955, 1957 καὶ 1958 τιμῶν τῶν δύο δεικτῶν, οἱ ὁποῖοι δεικνύονται  
εἰς τὴν στήλην (5). Τέλος, εἰς τὴν στήλην (6) δίδεται ὁ προκύψας  
συνεχῆς δεικτής μετὰ 1954 = 100.

Οἱ ἐπὶ διαφορετικῆς σταθμίσεως στηριζόμενοι δεῖνται συνήθως  
δέν ἐκτείνονται εἰς περιόδους κατὰ πολὺ προγενεστέρας τῆς χρο-  
νολογίας εἰς τὴν ὁποίαν ἀναφέρεται ἡ νέα στάθμισις. Εἰς τὰς πε-  
ριπτώσεις ταύτας ἡ σύνδεσις γίνεται ἀπλῶς δι' ἐκφράσεως ἀμφοτέ-  
ρων τῶν δεικτῶν ἐπὶ κοινῆς περιόδου βάσεως.

Εἶναι εὐνόητον ὅτι, ὅταν ὑφίστανται διαθέσιμοι τιμαὶ ἀμφοτέ-  
ρων τῶν δεικτῶν διὰ τινα χρονικὴν περίοδον, ἡ χρησιμοποίησις διὰ  
τὰς ἐπὶ μέρους περιόδους τῶν τιμῶν τοῦ δεικτοῦ ἐκείνου τοῦ ὁποί-  
ου ἡ χρονολογία σταθμίσεως εὐρίσκεται πλησιέστερον, ἐξασφαλίζει  
μὲν σχετικῶς ἀκριβεστέρας ἐκτιμήσεις, ὅχι, ὅμως, καὶ συνέπειαν  
μεταξύ αὐτῶν, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον ἐπιτυγχάνεται ἔν τινι μέτρῳ - ἐπὶ  
θεσίᾳ, βεβαίως, τῆς ἀκριβείας - διὰ τῆς ἀνωτέρω περιγραφείσης με-  
θόδου τοῦ ἀριθμητικοῦ ἢ γεωμετρικοῦ μέσου.

Γενικῶς, ἡ σύνδεσις δεικτῶν στηρίζεται ἐπὶ τῶν κάτωθι ὑποθέ-  
σεων: Πρῶτον, ὅτι δέν ὑφίστανται οὐσιώδεις διαφοραὶ μεταξύ τῶν  
σταθμίσεων τῶν ἐπὶ μέρους δεικτῶν καὶ, δεύτερον, ὅτι οἱ συνδεό-  
μενοι δεῖνται εἶναι ὁμοιογενεῖς ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι ἔχουν τὰ αὐτὰ  
βασικά χαρακτηριστικά καὶ ἀναφέρονται εἰς τὸ αὐτὸ οἰκονομικὸν μέ-  
γεθος.

### β) Ἀποπληθωρισμός ἀξιῶν

Πολλὰ ἐκ τῶν διαθεσίμων χρονολογικῶν σειρῶν ἀναφέρονται  
εἰς ἀξίας, δηλαδή εἶναι ἐκπεφρασμένοι εἰς τρεχούσας νομισματικές  
μονάδας. Ὡς τοιαῦται ἀποτελοῦν τὸ γινόμενον δύο μεταβλητῶν, ἡ-  
μοιότητων καὶ τιμῶν. Κατὰ συνέπειαν, αἱ ἐν τῷ χρόνῳ μεταβο-  
λαὶ τῆς ἀξίας δύνανται νὰ ὀφελῶνται, ὅχι μόνον εἰς μεταβολὰς τῶν  
ποσοτήτων, ἀλλὰ καὶ εἰς μεταβολὰς τῶν τιμῶν. Πρὸς παρακολούθη-  
σιν τῆς ἐξελίξεως τῆς ποσότητος ἢ τοῦ ὄγκου ἑνὸς οἰκονομικοῦ με-  
γέθους παρίσταται ἀνάγκη ἀποπληθωρισμοῦ αὐτοῦ, δηλαδή ἀπομονώ-  
σεως τοῦ παράγοντος τῶν τιμῶν. Τοῦτο ἐπιτυγχάνεται διὰ διαιρέσε-  
ως τῆς δι' ἐκάστην περίοδον ἀξίας διὰ τῆς ἀντιστοίχου τιμῆς ἑνὸς  
τιμαριθμοῦ. Ἡ προκύπτουσα νέα χρονολογικὴ σειρά δίδει τὴν ἐξε-  
τιμηθῆσαν ἀξίαν τοῦ ὄγκου ἀποτιμωμένου εἰς νομισματικὰς μονάδας σταθερᾶς  
ἀξίας τῆς περιόδου βάσεως τοῦ χρησιμοποιηθέντος τιμαριθμοῦ.

Είναι φανερόν ὅτι ἡ ἀποτελεσματικότης τοῦ ἀποπληθωρισμοῦ ἐξαρτᾶται βρασικῶς ἐκ τῆς καταλληλότητος τοῦ δείκτη τιμῶν, ὁ ὁποῖος χρησιμοποιεῖται ὡς ἀποπληθωριστής. Λόγω τῶν ἀδυναμιῶν τὰς ὁποίας παρουσιάζουν οἱ ἐν χρήσει τιμαριθμοί, ὠρισμένοι συγγραφεῖς ἔχουν ἐκφράσει σοβαράς ἀμφιβολίας περὶ τῆς ἀξιοπιστίας τῶν χρονολογικῶν σειρῶν ποσοτήτων, αἱ ὁποῖαι προκύπτουν δι' ἐφαρμογῆς τῆς διαδικασίας τοῦ ἀποπληθωρισμοῦ. Ἐπὶ παραδείγματι, αἱ ἀποπληθωρισμέναι ἀξίαι ἐνδέχεται νὰ περιέχουν σφάλμα προερχόμενον ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι αἱ μεταβολαὶ τοῦ χρησιμοποιουμένου τιμαριθμοῦ ἀντικατοπτρίζουν ἐν τινι μέτρῳ μεταβολὰς τῆς ποιότητος τῶν ἀγοραζομένων ἀγαθῶν. Γενικῶς, αἱ ποσότητες καὶ αἱ τιμαὶ συσχετίζονται στενῶς μεταξύ των, πᾶρμα τό ὁποῖον καθιστᾷ λίαν δυσχερῆ τὴν ἐρμηνείαν τῶν μεταβολῶν τῆς μιᾶς τῶν μεταβλητῶν τούτων ἀνεξαρτήτως ἐκείνων τῆς ἑτέρας. Τοῦτο, ὅμως, δέν σημαίνει ὅτι ἡ χρησιμοποίησις ἀποπληθωρισμένων ἀξιῶν δέον νὰ ἀποφεύγεται εἰς οἵανδήποτε περίπτωσιν. Ὑπὸ τὰς ἀνωτέρω διαγραφείσας προϋποθέσεις καὶ ἰδίως ὅταν ἡ ἐπίδρασις τῶν τιμῶν εἶναι ἔντονος, ὁ ἀποπληθωρισμός ἀποτελεῖ χρήσιμον μέθοδον ἐπιτρέπουσαν τὴν συναγωγὴν σχετικῶς ἀξιοπίστων πληροφοριῶν περὶ τῆς κινήσεως τῶν "πραγματικῶν" μεγεθῶν.

### γ) Μέτρησις τῶν μεταβολῶν τῆς ἀγοραστικῆς δυνάμεως τοῦ χρήματος

Ἡ μέτρησις τῶν μεταβολῶν τῆς ἀγοραστικῆς δυνάμεως τοῦ χρήματος, π.χ. τῆς δραχμῆς, γίνεται διὰ χρησιμοποίησεως τῶν ἀντιστρόφων τιμῶν ἑνὸς τιμαριθμοῦ, συνήθως τοῦ δείκτη τιμῶν καταναλωτοῦ. Δηλαδή, ἡ μεταβολὴ τῆς ἀγοραστικῆς δυνάμεως τοῦ χρήματος κατὰ τὴν περίοδον 1 ἔναντι τῆς περιόδου 0 εἶναι:

$$(H-21) \text{ Ἀγοραστικὴ δυνάμις} = \frac{1}{P_1/P_0} = \frac{1}{\frac{\sum P_1 Q_1}{\sum P_0 Q_1} \left( \frac{P_1}{P_0} \right)} = \frac{\sum P_0 Q_0}{\sum P_0 Q_1 \left( \frac{P_1}{P_0} \right)}$$

Εἰς τὸν Πίνακα Η-6 ἀναγράφεται ὁ ὑπὸ τῆς Ε.Σ.Υ.Ε. ὑπολογιζόμενος δείκτης τιμῶν καταναλωτοῦ διὰ τὰ ἔτη 1959-1966. Αἱ μεταβολαὶ τῆς ἀγοραστικῆς δυνάμεως τῆς δραχμῆς, ὑπολογισθεῖσαι ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ τύπου (H-21), δίδονται εἰς τὴν τελευταίαν στήλην τοῦ ἐν λόγω πίνακος. Κατὰ τὴν ἐξεταζομένην περίοδον αἱ τιμαὶ παρουσιάζονται

ζουν σχεδόν συνεχή άνοδον, ύποδηλουσαν συνεχή μείωσιν τής αγοραστικής δυνάμεως τής δραχμής.

Έχει ύποστηρικθή ότι, όπως ο δείκτης τιμών προκύπτει ως μέσος τών μεταβολών τών τιμών τών επί μέρους αγαθών, κατά τόν ίδι-

### Πίναξ Η - 6

Δείκται τιμών καταναλωτοῦ και αγοραστικῆς δυνάμεως τής δραχμής, 1948 - 1956  
(1948 = 100)

Έτος	Δείκτης τιμών καταναλωτοῦ		Δείκτης αγορ. δυνάμ. δραχμής 1959 = 100
	Ίούλιος 1959=100	1959 = 100	
			100,0
1959	100,7	100,0	98,4
1960	102,3	101,6	96,7
1961	104,1	103,4	97,0
1962	103,8	103,1	94,2
1963	106,9	106,2	93,4
1964	107,8	107,1	90,7
1965	111,0	110,2	86,4
1966	116,6	115,8	

Πηγή: Ε.Σ.Υ.Ε., «Μηνιαίων Στατιστικόν Δελτίον», Νοέμβριος 1967, σελ. 68.

ον τρόπον και ο δείκτης τής αγοραστικῆς δυνάμεως τοῦ χρήματος θά πρέπει νά προκύπτῃ ως μέσος τών μεταβολών τής αγοραστικῆς δυνάμεως τοῦ χρήματος δι' επί μέρους αγαθά. Συμβολίζοντες τās μονάδας τής αγοραστικῆς δυνάμεως τής δραχμής διά  $U$ , ο τύπος τοῦ δείκτου αγοραστικῆς δυνάμεως θά εἶναι :

$$(H-22) \text{ 'Αγοραστικῆ δυνάμις} = \frac{\sum p_0 q_0 \left( \frac{U_1}{U_0} \right)}{\sum p_0 q_0}$$

Έφ' όσον, όμως, εἶναι  $U = \frac{1}{P}$ , ἔχομεν :

$$\sum p_0 q_0 \left( \frac{p_0}{p_1} \right)$$

$$(H-23) \text{ 'Αγοραστικῆ δυνάμις} = \frac{\sum p_0 q_0}{\sum p_0 q_0}$$

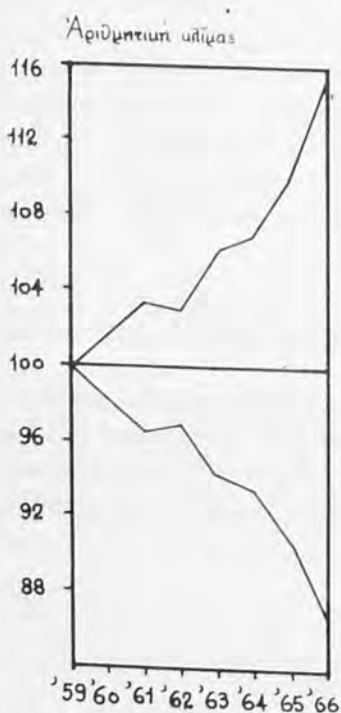


Ἄλλὰ ἡ ἔκφρασις (H-23) εἶναι διάφορος τῆς ἐκφράσεως (H-21). Παρά ταῦτα, εἰς τὴν πράξιν συνηθεστέρα εἶναι ἡ χρῆσις τοῦ τύπου (H-21).

Ἐνταῦθα δεόν νά προστεθῇ ὅτι κατὰ τὴν γραφικὴν ἀπεικόνισιν τοῦ δείκτου ἀγορασττικῆς δυνάμεως τοῦ χρήματος δεόν νά χρησιμοποιηται λογαριθμικὴ κλίμαξ. Ἐάν, ὡς εἰς τὸ Διάγραμμα H-1 ( ἔνθα ἀπεικονίζονται τὰ στοιχεῖα τοῦ Πίνακος H-6), ἡ μέτρησις τῶν δει-

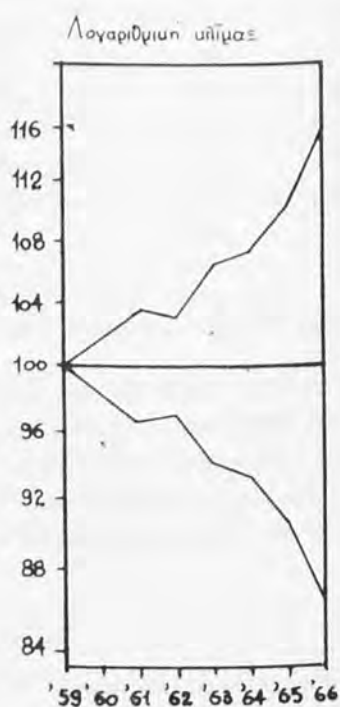
### Διάγραμμα H-1

Δεῖκται τιμῶν καταναλωτοῦ καὶ ἀγορασττικῆς δυνάμεως τοῦ χρήματος (1959 = 100)



### Διάγραμμα H-2

Δεῖκται τιμῶν καταναλωτοῦ καὶ ἀγορασττικῆς δυνάμεως τοῦ χρήματος (1959 = 100)



κτῶν τιμῶν καὶ ἀγορασττικῆς δυνάμεως γίνεται ἐπὶ ἀριθμητικῆς κλίμακος, ὁ μὲν πρῶτος δύναται νά ἀνέρχεται συνεχῶς, ὁ δεῦτερος, ὅμως, δέν δύναται νά κατέλθῃ κάτω τοῦ μηδενός. Τοῦτο συντελεῖ εἰς τὴν ἐν τῷ Διαγράμματι H-1 παρατηρουμένην ἀσυμμετρίαν μεταξύ τῶν δύο δεικτῶν, ἡ ὁποία, χωρὶς νά ὑποδηλοῦ σφάλμα εἰς τὴν χρησιμοποίησιν τῆς ἀριθμητικῆς κλίμακος, ἐν τούτοις παρέχει παρα-

πλανητικήν εικόνα τῆς πραγματικῆς καταστάσεως, καὶ ὅσον κατὰ τὴν ἐξεταζομένην περίοδον, ἐνῶ ὁ δείκτης τιμῶν παρουσιάζει, γενικῶς, συνεχῆ ἄνοδον, ὁ δείκτης ἀγοραστικῆς δυνάμεως τῆς δραχμῆς δεικνύει ὅλον ἐν καὶ μικροτέραν κάμψιν. Τουναντίον, εἰς τὸ Δι-ἀγράμμα Η-2, ἐνθα χρησιμοποιεῖται λογαριθμικὴ κλίμαξ, τόσον ὁ δείκτης τιμῶν ὅσον καὶ ὁ δείκτης ἀγοραστικῆς δυνάμεως τοῦ χρήματος παρουσιάζουν συμμετρικὰ κινήσεις. Ὡς γνωστόν, εἰς τὸ λογαριθμικόν τοῦτο διάγραμμα ἴσαι ἀποστάσεις δεικνύουν ἴσας ποσοστιαίας μεταβολάς.

#### ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

##### Α. Ἑλληνική

1. Ἀθανασιάδου, Κ., "Στατιστική", Μέρος Δεύτερον, Ἀθήναι, 1957, σελ. 149-221.
2. Δρακάτου, Κ., "Ἡ Οἰκονομικὴ Θεωρία τῶν Τιμαρίθμων", Ἐπιθεώρησις Οἰκονομικῶν καὶ Πολιτικῶν Ἐπιστημῶν, Ἔτος 18ου τεύχους 1-2, 1963.
3. Δρακάτου, Κ., "Ἑλληνικὰ Στατιστικὰ Ἐξωτερικοῦ Ἐμπορίου καὶ Ἴσοζυγίου Πληρωμῶν", Τράπεζα τῆς Ἑλλάδος, Σειρά Εἰδικῶν Μελετῶν, Ἀριθ. 14, Ἀθήναι, 1966, σελ. 39-56.
4. Ζητρίδη, Ἀ., "Θεωρητικὰ Πρότυπα καὶ Ἐφαρμοσμένοι Δεῖκται Μετρήσεως τῆς Βιομηχανικῆς Παραγωγῆς", εἰς περιοδικὸν "Σπουδαί", τεύχος 5, Τόμος ΙΓ', Πειραιεὺς, 1963.
5. Κωνσταντινίδου, Μ., "Δεῖκται Μισθῶν καὶ Ἡμερομισθίων - Προβλήματα Καταρτίσεως καὶ Ἐξελίξεις", Τράπεζα τῆς Ἑλλάδος, "Ἡ Ἑλληνικὴ οἰκονομία κατὰ τὸ 1965", Ἀθήναι, 1966 σελ. 180-189.
6. Μαργαρίτη, Ε., "Ἀριθμοδείκται", Ἀθήναι, 1955.
7. Μπόντζου, Ε., "Φύσις καὶ περιεχόμενον τῶν Τιμαρίθμων καὶ Ὁρθῆ Ἑρμηνεία τῶν Ἐνερίξεών των", Τράπεζα τῆς Ἑλλάδος, "Ἡ Ἑλληνικὴ Οἰκονομία κατὰ τὸ ἔτος 1964", Ἀθήναι, 1965, σελ. 216-223.

##### Β. Ξένη

1. Allen, R.G.D., "Statistics for Economists", Hutchinson University Library, London, 1960, σελ. 100-119. Μετάφρασις εἰς τὴν Ἑλληνικὴν ὑπὸ Κ. Ἀθανασιάδου ὑπὸ τὸν τίτλον "Στατιστική", σελ. 96-116.
2. Arkin, H. and Colton, R.R., "Statistical Methods", Barnes and Noble Inc., New York, 1961, σελ. 129-144.
3. Budin, M., "Statistical Measurements for Economics and Administration", Asia Publishing House, London, 1962, σελ. 208 - 225.

4. Connor, L.R. and Morrell, A.J.H., "Statistics in Theory and Practice - With Special Reference to Published Statistics", Sir Isaak Pitman and Sons Ltd, London, 1964, σελ. 127-143.
5. Croxton, F.E. and Cowden, D.J., "Applied General Statistics", Sir Isaak Pitman and Sons Limited, London, 1960, σελ. 394-450.
6. Drakatos, C., "London Share Price Indices", The Bankers' Magazine, June 1962, No 1419.
7. Greenwald, W.I., "Statistics for Economics", Charles E. Merrill Books, Inc., Columbus, Ohio, 1963, σελ. 154-177.
8. Guthrie, H.W., "Statistical Methods in Economics" Richard D. Irwin, Inc, Homewood, Illinois, 1966, σελ. 75-86.
9. Hays, S., "An Outline of Statistics", Longmans, Green and Co, London, 1956, σελ. 123-132.
10. Hirsch, W.Z., "Introduction to Modern Statistics - With Applications to Business and Economics", The Macmillan Company, New York, 1962, σελ. 214-246.
11. Ilersic, A.R., "Statistics", H.F.L. (Publishers) Ltd, London, 1959, σελ. 325-343.
12. Karmel, P.H., "Applied Statistics for Economists - A Course in Statistical Methods", Melbourne, Sir Isaak Pitman and Sons Ltd, 1963, σελ. 286-353.
13. Mason, R.D., "Statistical Techniques in Business and Economics", Richard D. Irwin, Inc., Homewood, Illinois, 1967, σελ. 283-308.
14. Mills, F., "Statistical Methods", Holt, Rinehart and Winston, New York, 1955, σελ. 426-511.
15. Mudgett, B.D., "Index Numbers", Wiley, New York, 1951.
16. Paden, D.W., and Lindquist, E.F., "Statistics for Economics and Business", Mc Graw - Hill Book Company Inc., New York, 1956, σελ. 27-45.
17. Spiegel, M., "Theory and Problems of Statistics", Schaum Publishing Co, New York, 1961, σελ. 313-339.
18. Yamane, T., "Statistics - An Introductory Analysis", A Harper International Edition, 1966, σελ. 265-329.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΝΝΑΤΟΝ

### ΣΥΣΧΕΤΙΣΙΣ ΚΑΙ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΙΣ

#### 1. Χρησιμοποιούμενοι τύποι στατιστικῶν στοιχείων

Κατά τήν ἀγάμισιν τῶν οἰκονομικῶν καὶ κοινωνικῶν φαινομένων οὐσιώδη σημασίαν ἔχει ὁ καθορισμός, καὶ δὴ ἐπὶ ποσοτικῆς βάσεως, τῶν μεταξὺ τῶν διαφόρων μεταβλητῶν ὑφισταμένων σχέσεων. Ἡ γνώσις τῶν μηχανισμῶν μέσῳ τῶν ὁποίων ἀλληλοεπηρεάζονται τὰ ἐπιμέρους μεγέθη ἀποτελεῖ, ὡς γνωστόν, τὴν ἀπαραίτητον βάσιν πρὸς διατύπωσιν προβλέψεων. Πρὸς ἐκτίμησιν, ὅμως, τῶν σχέσεων αὐτῶν ἀπαιτοῦνται κατάλληλα στατιστικὰ δεδομένα διὰ τὰς χρησιμοποιούμενας μεταβλητάς. Διὰ τοῦτο, πρὶν ἢ ἐξετασθῶν τὰ προβλήματα ἐκτιμήσεως, σκόπιμον εἶναι ὅπως περιγραφῶν οἱ τύποι τῶν στοιχείων τῶν χρησιμοποιουμένων συνήθως εἰς τοιοῦτου εἴδους ἀναλύσεις.

Ἡ σπουδὴ τῆς μεταξὺ δύο μεγεθῶν ὑφισταμένης ποσοτικῆς σχέσεως δύναται, κατ' ἀρχήν, νὰ γίνη διὰ χρησιμοποίησεως τιμῶν ἐκ παρατηρήσεως ἀναφερομένων εἰς ποικίλας ἀτομικὰς περιπτώσεις. Ἐπι παραδείγματι, πρὸς προσδιορισμὸν τῆς σχέσεως ἢ ὁποῖα συνδέει τὴν κατανάλωσιν σαυχάρους καὶ τὸ εἰσόδημα λαμβάνομεν στοιχεῖα δι' ἀμφότερα τὰ μεγέθη ἐξ ἐπὶ μέρους οἰκογενειῶν, ἀναφερόμενα εἰς δεδομένην χρονικὴν περίοδον. Ἐπίσης, πρὸς μελέτην τῆς σχέσεως ἢ ὁποῖα ὑφίσταται μεταξὺ τοῦ κατὰ κεφαλὴν εἰσοδήματος καὶ τοῦ ποσοστοῦ τοῦ ἀγροτικοῦ πληθυσμοῦ εἰς τὸ σύνολον, ἀντλοῦμεν σχετικὰς στατιστικὰς πληροφορίας ἐξ ἐπὶ μέρους μικρῶν γεωγραφικῶν περιοχῶν ἢ οἰκισμῶν (χωρῶν, κωμοπόλεων κλπ.). Συνήθως, ὅμως, εἰς τὰς στατιστικὰς πηγὰς δέν παρέχονται αἱ ἀρχικαὶ παρατηρήσεις αἱ ἀφορῶσαι εἰς τὰς ἀτομικὰς τιμὰς τῶν ἐξεταζομένων μεγεθῶν. Αὗται, πρὸς εὐχερεστέραν χρησιμοποίησιν τῶν ἐμφανίζονται ὑπὸ μορφήν ἀ-

θροισμάτων ἢ μέσων ὄρων, ἀναφερομένων εἰς τίνα κατάταξιν στηριζομένην ἐπὶ ὠρισμένου κριτηρίου ποσοτικῆς ἢ ποιοτικῆς φύσεως.

Οὕτω, τὰ ὑπὸ τῆς Ε.Σ.Υ.Ε. συγκεντρωθέντα δεδομένα καταναλώσεως σακχάρους καὶ χρηματικοῦ εἰσοδήματος ἐν δείγματος 2.568 οἰκογενειῶν τῶν ἀστικῶν κέντρων τῆς χώρας (εἰς τὰ πλαίσια τῆς κατὰ τὸ 1957/1958 διεξαχθείσης ἐρεύνης ἐπὶ τῶν οἰκογενειακῶν προϋπολογισμῶν) δίδονται εἰς τὴν σχετικὴν πηγὴν ὑπὸ μορφήν κατανομησέμφαινομένης εἰς τὸν Πίνακα Θ-1. Ἐν προκειμένῳ αἱ ἐπὶ μέρους οἰκογένειαι τοῦ δείγματος κατενεμήθησαν κατὰ κατηγορίας ἐ-

Πίναξ Θ - 1

Μέσος ὄρος ἑβδομαδιαίων ποσοτήτων σακχάρους, κτηθεισῶν ὑπὸ 2.568 οἰκογενειῶν ταξινομημένων ὡς πρὸς τὸ συνολικὸν χρηματικὸν τῶν εἰσοδήμα

Ἑβδομαδιαῖον χρηματικὸν εἰσόδημα (εἰς δραχμάς)	Κεντρικαὶ τιμαὶ εἰσοδηματικῶν τάξεων (εἰς δραχμάς)	Μέση καταναλισκομένη ποσότης σακχάρους (εἰς χιλιόγραμμα)
Μέχρι 249	125	0,530
250 - 449	350	0,707
450 - 799	625	0,936
800 - 1099	950	1,088
1100 - 1599	1350	1,114
1600 καὶ ἄνω	2000 (α)	1,269

(α) Ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ὑποθέσεως ὅτι τὸ ἀνώτερον ὄριον τοῦ διαστήματος τάξεως εἶναι 2.400 δραχμαί.

Πηγή: Ε.Σ.Υ.Ε., «Ἐρευνα Οἰκογενειακῶν Προϋπολογισμῶν - Διεξαχθεῖσα εἰς τὰς Ἀστικὰς Περιοχὰς τῆς Ἑλλάδος κατὰ τὸ 1957/58», Ἀθήναι, 1961, σελ. 232 - 233.

πὶ τῇ βάσει τοῦ ἑβδομαδιαίου χρηματικοῦ εἰσοδήματος, δι' ἕκαστον δὲ κλιμάκιον εἰσοδήματος ὑπελογίσθη ἡ μέση καταναλισκομένη ἑβδομαδιαίως ποσότης σακχάρους. Ἡ τοιαύτη κατάταξις ἐγένετο, συνεπῶς, ὡς πρὸς τὸ ἓν ποσοτικὸν χαρακτηριστικὸν (τὸ χρηματικὸν εἰσόδημα), ἔναντι τῶν τιμῶν τοῦ ὁποῦ ἐτέθησαν αἱ τιμαὶ τοῦ ἑτέρου χαρακτηριστικοῦ (κατανάλωσις σακχάρους) ὑπὸ μορφήν μέσων ὄρων. Εἶναι φανερόν ὅτι πληρέστεραι θά ἦσαν αἱ ποσοτικαὶ πληροφορίες, ἐάν, ἀντὶ διαστημάτων τάξεως, ἐλαμβάνοντο καὶ διὰ τὸ χρηματικὸν εἰσόδημα οἱ ἀντίστοιχοι μέσοι ὄροι. Ἡ δυσχέρεια, ὅμως, αὕτη ἀντιμετωπίζεται διὰ χρησιμοποίησεως τῶν κεντρικῶν τιμῶν τῶν

διαστημάτων τάξεως ὡς ἐκτιμήσεων τῶν πραγματικῶν μέσων ὄρων (βλ. Πίνακα Θ-1).

Ἐξ ἄλλου, τὰ διαθέσιμα παρ' ἡμῖν στατιστικά δεδομένα κατὰ κεφαλὴν ἀκαθάριστου ἐγχώριου προϊόντος καὶ ποσοστιαίας συμμετοχῆς τοῦ ἀγροτικοῦ πληθυσμοῦ εἰς τὸ σύνολον ἀναφέρονται εἰς δέκα ἐπὶ μέρους μείζονας γεωγραφικὰς περιοχὰς τῆς χώρας, ὡς δεικνύεται εἰς τὸν Πίνακα Θ-2. Ὑποθέεται καὶ ἐν προκειμένῳ ὅτι ὑπῆρ-  
ται εἰς τὸν Πίνακα Θ-2.

### Πίναξ Θ-2

Ποσοστὸν ἀγροτικοῦ πληθυσμοῦ εἰς τὸ σύνολον κατὰ τὸ 1961 καὶ κατὰ κεφαλὴν ἀκαθάριστον ἐγχώριον προϊόν κατὰ τὸ 1962 εἰς τὰ ἐπὶ μέρους γεωγραφικὰ διαμερίσματα τῆς Ἑλλάδος

Γεωγραφικὰ διαμερίσματα	Ποσοστὸν % ἀγροτικοῦ πληθυσμοῦ ἐπὶ συνολικοῦ πληθυσμοῦ κατὰ τὸ 1961	Κατὰ κεφαλὴν ἀκαθάρ. ἐγχώριον προϊόν κατὰ τὸ 1962 (εἰς δραχμ.)
Νομὸς Ἀττικῆς	1,7	18.801
Ἑπόλοιπον Στερεᾶς Ἑλλάδος	60,4	9.215
Πελοπόννησος	63,7	10.658
Θεσσαλία	54,5	8.913
Ἡπειρος	73,4	6.846
Μακεδονία	46,0	11.137
Θράκη	60,4	8.605
Κρήτη	64,0	7.938
Νῆσοι Αἰγαίου	56,5	8.229
Νῆσοι Ἰονίου	68,7	6.544

Πηγή: Ε.Σ.Υ.Ε., «Στατιστικὴ Ἐπετηρὶς τῆς Ἑλλάδος, 1966», Ἀθῆναι, 1966, σελ. 27 - 28. Κέντρον Προγραμματισμοῦ καὶ Οἰκονομικῶν Ἐρευνῶν, «Σχέδιον Προγράμματος Οἰκονομικῆς Ἀναπτύξεως τῆς Ἑλλάδος (1966 - 1970)», Ἀθῆναι, Δεκέμβριος 1965, σελ. 174.

χον διαθέσιμα ἀρχικὰ δεδομένα τοῦ ἀνωτέρω τύπου δι' ὅλους τοὺς ἐπὶ μέρους οἰκισμοὺς τῆς χώρας (χωρία, κωμοπόλεις κλπ.), τὰ ὅποια ἐν συνεχείᾳ ἠθροίσθησαν κατὰ γεωγραφικὰ διαμερίσματα. Αἱ τοιοῦτου εἶδους περιληπτικαὶ ἐμφανίσεις τῶν ἀρχικῶν παρατηρήσεων, καθιστοῦν μὲν εὐκολωτέραν τὴν σύγκρισιν δύο μεγεθῶν καὶ τὴν διερεύνησιν τῆς μεταξὺ των ὑφισταμένης σχέσεως, ὑπὸ ὠρισμένας, ὁμῶς, συνθήκας δημιουργοῦν σοβαρὰς δυσχερείας εἰς τὴν στατιστικὴν ἀνάλυσιν.

Εἰς τὰς ἀνωτέρω ἀναφερθείσας περιπτώσεις ἡ ἐξέτασις τῆς μεταξὺ δύο μεγεθῶν ὑφισταμένης σχέσεως στηρίζεται εἰς τὴν χρῆσιν ἐνδοτομεσιῶν στοιχείων προερχομένων ἐκ τινος ποσοτικῆς ἢ γεωγραφικῆς (ποιοτικῆς) κατατάξεως. Λίαν διαδεδομένη, ἐν τούτοις, εἶναι καὶ ἡ χρησιμοποίησις πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτὸν στατιστικῶν δεδομένων τῆς μορφῆς τῶν χρονολογικῶν σειρῶν. Αὗται, ὡς γνωστόν, ἀναφέρονται εἰς σύνολα ἢ μέσους ὄρους ἀτομικῶν τιμῶν κατὰ διαδοχικὰς καὶ ἴσας χρονικὰς περιόδους. Οὕτω, ἐπὶ παραδείγματι, ἡ στατιστικὴ μελέτη τῆς σχέσεως μεταξὺ ἰδιωτικῆς καταναλώσεως καὶ

Πίναξ Θ - 3

Ἐθνικὴ ἰδιωτικὴ κατανάλωσις <sup>(α)</sup> καὶ διαθέσιμον ἰδιωτικὸν εἰσόδημα εἰς τρεχοῦσας τιμάς, 1958 - 1965

Ἔ τ ο ς	Ἐθνικὴ ἰδιωτικὴ κατανάλωσις (α) (εἰς δισεκ. δραχ.)	Διαθέσιμον ἰδιωτικὸν εἰσόδημα (εἰς δισεκ. δραχ.)
1958	73,2	79,3
1959	74,2	82,3
1960	80,7	87,5
1961	88,2	99,2
1962	94,2	104,8
1963	102,1	117,4
1964	112,9	130,2
1965 <sup>(β)</sup>	125,0	146,4

(α) Ἐκτιμηθεῖσα ὡς ἐξ ὑπολοίπου μέγεθος.

(β) Προσωρινὰ στοιχεῖα.

Πηγή: Ὑπουργεῖον Συντονισμοῦ, Διεύθυνσις Ἐθνικῶν Λογαριασμῶν, «Ἐθνικοὶ Λογαριασμοὶ τῆς Ἑλλάδος, 1948 - 1965», Ἀριθ. 16, Ἀθήναι, 1967, σελ. 93 καὶ 104.

διαθεσίμου ἰδιωτικοῦ εἰσοδήματος δύναται νὰ στηριχθῇ εἰς τὰ σχετικὰ στοιχεῖα τῶν ἐθνικῶν λογαριασμῶν, τὰ ὅποια ἐμφαίνονται εἰς τὸν Πίνακα Θ-3. Ταῦτα ἀφοροῦν, συγκεκριμένως, εἰς τὴν ἀξίαν τῆς συνολικῆς ἰδιωτικῆς καταναλώσεως καὶ τοῦ συνολικοῦ διαθεσίμου ἰδιωτικοῦ εἰσοδήματος εἰς τρεχοῦσας τιμάς κατὰ τὴν περίοδον 1958-1965.

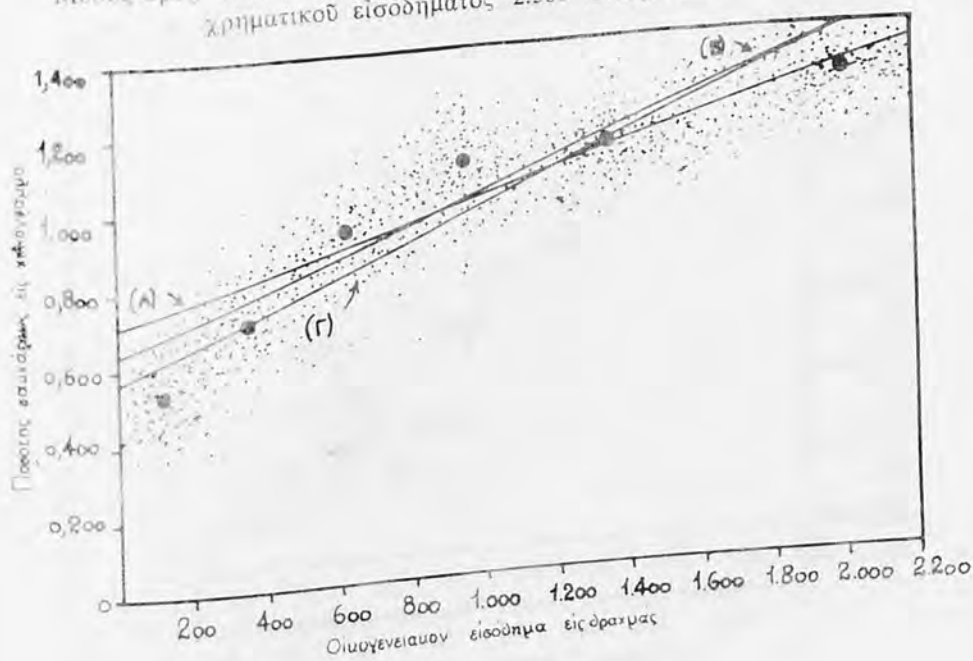
## 2. Ἡ φύσις τῶν σχέσεων μεταξὺ τῶν μεταβλητῶν

Ἀκόμη καὶ ὅταν αἱ ἐκ παρατηρήσεως τιμαὶ τῶν ὑπὸ σύγκρισιν μεταβλητῶν εἶναι ὀλιγάριθμοι, παρίσταται ἀνάγκη προσδιορισμοῦ τῆς

μεταξύ των σχέσεως διά χρησιμοποίησεως ὀρισμένων χαρακτηριστικῶν μέτρων ἢ συντελεστῶν, διά τῶν ὁποῶν καθίσταται δυνατή, ὄχι μόνον ἢ πληρεστέρα κατανόησις τῆς φύσεως τῆς ἐξαρτήσεως, ἀλλὰ καὶ ἢ διενέργεια ἐκτιμήσεων εἰς περιπτώσεις κατὰ τὰς ὁποίας ἐπικρατοῦν παρόμοιαι συνθήκαι. Πρὶν ἢ, ὅμως, ἐπιχειρηθῇ τοιαύτη ἀνάλυσις, ἐνδείκνυται ὅπως διερευνηθῇ καὶ διευκρινισθῇ ἢ μεταξύ δύο μεταβλητῶν ὑφισταμένη σχέσηις δι' ἐφαρμογῆς τῆς διαγραμματικῆς μεθόδου.

### Διάγραμμα Θ - 1

Μέσως θρος ἑβδομαδιαίας καταναλώσεως σακχάρους καὶ ἀντιστοίχου χρηματικοῦ εἰσοδήματος 2.568 οἰκογενειῶν



Πηγή: Δεδομένα πίνακος Θ-1

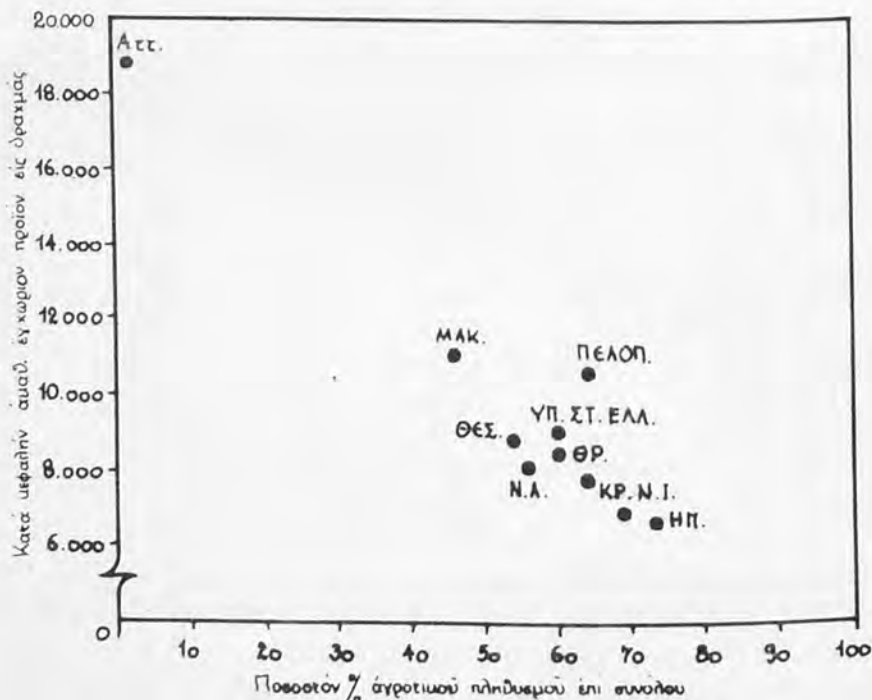
Πρὸς τοῦτο χρησιμοποιοῦμεν σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων ἐφ' ἑκατέρου τῶν ὁποῶν μετρεῖται ἓν τῶν ἐξεταζομένων μεγεθῶν. Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ζευγῶν τιμῶν τοῦ δείγματος τῶν παρατηρήσεων προσδιορίζομεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ἀντίστοιχα σημεῖα. Τό οὕτω προκωπτον νέφος σημείων καλεῖται "διάγραμμα διασπορᾶς". Σχετιον παράδειγμα παρέχεται εἰς τό Διάγραμμα Θ-1, ἔνθα ἀπεικονίζονται τά εἰς



τόν Πίνακα Θ-1 ἀναγραφόμενα στοιχεῖα τὰ ἀναφερόμενα εἰς τὴν σχέσιν μεταξύ καταναλώσεως σακχάρους καὶ χρηματικοῦ εἰσοδήματος. Ἐνταῦθα, τὰ διὰ μεγάλων στιγμῶν δεικνυόμενα σημεῖα καθωρίσθησαν διὰ χρησιμοποίησεως, ὡς τετμημένης μὲν τῆς κεντρικῆς τιμῆς τῆς εἰσοδηματικῆς τάξεως, ὡς τεταγμένης δὲ τῆς ἀντιστοίχου μέσης καταναλώσεως σακχάρους ὑπὸ τῶν οἰκογενεῶν τῶν ἀνη-

### Διάγραμμα Θ - 2

Ποσοστὸν ἀγροτικοῦ πληθυσμοῦ εἰς σύνολον (κατὰ τὸ 1961) καὶ κατὰ κεφαλὴν ἀκαθάριστον ἐγχώριον προϊόν (κατὰ τὸ 1962) εἰς ἐπὶ μέρους γεωγραφικὰ διαμερίσματα τῆς Ἑλλάδος



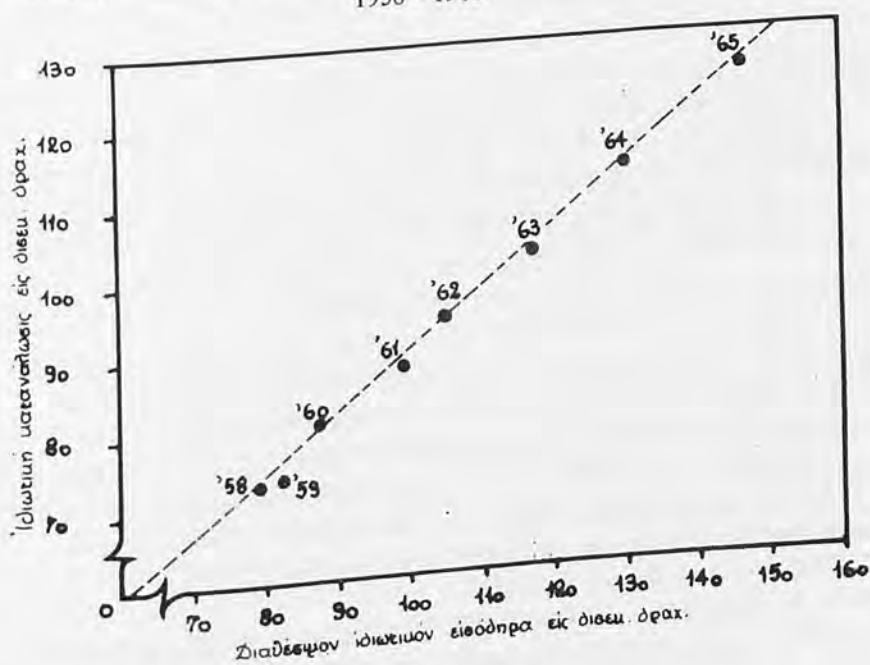
Πηγή: Δεδομένα πίνακος Θ-2

κουσῶν εἰς τὴν ἐν λόγω εἰσοδηματικὴν τάξιν. Εἶναι εὐνόητον ὅτι τὰ ἀρχικὰ ἀτομικὰ δεδομένα ἐκ τῶν ὁποῶν προέκυψεν ὁ συνοπτικὸς Πίναξ Θ-1, ἐάν ἦσαν διαθέσιμα καὶ ἀπεικονίζοντο γραφικῶς, θὰ ἐσημάτιζον ἐν νέφους σημείων παρόμοιον πρὸς τὸ ἐμφανιζόμενον διὰ μικρῶν στιγμῶν εἰς τὸ Διάγραμμα Θ-1. Ἔτερον παράδειγμα ἀποτε-

λεῖ τὸ Διάγραμμα Θ-2, εἰς τὸ ὁποῖον αἱ στιγμαὶ δεικνύουν τὰ ση-  
μεῖα τὰ προσδιοριζόμενα ὑπὸ τοῦ ποσοστοῦ τοῦ ἀγροτικοῦ πληθυ-  
σμοῦ εἰς τὸ σύνολον καὶ τοῦ κατὰ κεφαλὴν ἀκαθαρίστου ἔγχωρου  
προϊόντος εἰς τὰ ἐπὶ μέρους γεωγραφικὰ διαμερίσματα τῆς χώρας .  
Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον κατεσκευάσθη καὶ τὸ Διάγραμμα Θ-3, εἰς τὸ  
ὁποῖον ἀπεικονίζεται ἡ σχέση μεταξύ ἰδιωτικῆς καταναλώσεως καὶ  
διαθεσίμου ἰδιωτικοῦ εἰσοδήματος κατὰ τὴν περίοδον 1958-1965.

### Διάγραμμα Θ - 3

Ἔθνικὴ ἰδιωτικὴ κατανάλωσις καὶ διαθέσιμον ἰδιωτικὸν εἰσόδημα  
1958 - 1965



Πηγή: Δεδομένα πίνακος Θ-3

Διὰ χρησιμοποίησεως τοῦ διαγράμματος διασπορᾶς εἶναι δυνα-  
τόν νά διαπιστωθῇ κατὰ πόσον δύο μεγέθη παρουσιάζουν μεταξύ των  
ὁμοιότητα ἢ συγγένειαν ἀπὸ πλευρᾶς κινήσεων. Οὕτω, εἰς τὰ Δια-  
γράμματα Θ-1 καὶ Θ-3 παρατηρεῖται ὅτι τὸ νέφος τῶν σημείων τεί-  
νει νά διασπερέται περὶ μιᾶς γραμμῆς ἐκτεινομένης ἐν τῶν κάτω  
ἀριστερὰ πρὸς τὰ ἄνω δεξιὰ. Εἰς τὸ Διάγραμμα Θ-2 ἡ διάταξις τῶν  
σημείων λαμβάνει κατεύθυνσιν ἐν τῶν ἄνω ἀριστερὰ πρὸς τὰ κάτω

δεξιά. Αί γραμμαί αί αποδίδουσαι τās σχέσεις τῶν ἐξεταζομένων μεγεθῶν ἐμφανίζονται μᾶλλον ὡς εὐθείαι, μολονότι δέν ἀποκλείεται ἄλλος τύπος γραμμῆς νά προσαρμόζεται καλλίτερον εἰς τήν μορφήν τῆς διασπορᾶς τῶν σημείων (ὡς π.χ. εἶναι πιθανόν νά συμβαίῃ εἰς τήν σχέσηιν τοῦ Διαγράμματος  $\Theta-1$ ). Εἰς τās περιπτώσεις κατὰ τās ὁποίας δύο μεταβληταί συνδέονται κατὰ τοιοῦτον τρόπον μεταξύ των λέγομεν ὅτι αὐταί "συσχετίζονται".

"Ὅταν ὑψηλαί τιμαί τῆς μιᾶς μεταβλητῆς ἀντιστοιχοῦν εἰς ὑψηλάς τιμάς τῆς ἑτέρας καί χαμηλαί τιμαί τῆς μιᾶς ἀντιστοιχοῦν εἰς χαμηλάς τιμάς τῆς ἑτέρας, ὡς εἰς τὰ Διαγράμματα  $\Theta-1$  καί  $\Theta-3$ , τότε λέγομεν ὅτι μεταξύ των ὑφίσταται "θετική συσχέτισις". Ὅταν, ἀντιθέτως, ὑψηλαί τιμαί τῆς μιᾶς μεταβλητῆς ἀντιστοιχοῦν εἰς χαμηλάς τιμάς τῆς ἑτέρας καί χαμηλαί τιμαί τῆς μιᾶς ἀντιστοιχοῦν εἰς ὑψηλάς τιμάς τῆς ἑτέρας, ὡς εἰς τό Διαγράμμα  $\Theta-2$ , τότε λέγομεν ὅτι μεταξύ των ὑπάρχει "ἀρνητική συσχέτισις". Ἐφ' ὅσον τό νέφος τῶν σημείων δέν ἐμφανίζει συστηματικήν τινα διάταξιν, ἀλλά αί ὑψηλαί (ὡς καί αί χαμηλαί) τιμαί τῆς μιᾶς μεταβλητῆς τείνουν νά ἀντιστοιχοῦν εἰς ὑψηλάς καί χαμηλάς τιμάς τῆς ἑτέρας, λέγομεν ὅτι αί μεταβληταί εἶναι "ἀνεξάρτητοι", ἤ, ἄλλως, "ἀσυσχέτιστοι". Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει τά σημεία θά διασπεύωνται ἐπί τοῦ διαγράμματος ὡς ἐάν εἶχον τεθῆ ἐπ' αὐτοῦ κατὰ τυχαίων τρόπον. Ὅταν τό νέφος τῶν σημείων ἀκολουθῆ ἀκριβῶς τήν πορείαν μιᾶς γραμμῆς εὐθείας ἢ καμπύλης λέγομεν ὅτι αί μεταβολαί "συσχετίζονται πλήρως". Βεβαίως, μεταξύ τῆς πλήρους συσχέτισεως καί τῆς ἀνεξαρτησίας τῶν μεταβλητῶν περιλαμβάνονται αί ἐνδιάμεσοι περιπτώσεις ἰσχυρᾶς ἢ ἀσθενοῦς συσχέτισεως (θετικῆς ἢ ἀρνητικῆς). Ἡ ἔντασις τῆς συσχέτισεως δύναται νά μετρηθῆ διά καταλλήλου συντελεστοῦ περί τοῦ ὁποίου γίνεται λόγος κατωτέρω.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι ἡ συσχέτισις ἐκφράζει τήν μεταξύ δύο μεταβλητῶν ὑφισταμένην ὁμοιότητα κινήσεων, χωρίς νά ἐξετάζη ταύτας ἀπό πλευρᾶς αἰτιότητος. Βεβαίως, ἡ ὑπαρξις συσχέτισεως ἐνδέχεται νά ἀπορρῆ ἐκ τῆς ἐπενεργείας τῆς μιᾶς μεταβλητῆς ὡς αἰτίου, τῆς δέ ἑτέρας ὡς αἰτιατοῦ. Δέν πρέπει, ὅμως, νά ἀποκλείεται καί ἡ περίπτωσις κατὰ τήν ὁποίαν ἡ ὁμοιότης τῶν κινήσεων δύο μεταβλητῶν ὀφείλεται, ὄχι εἰς οἰανδήποτε αἰτιώδη σχέσηιν μεταξύ των, ἀλλά εἰς ἐξάρτησιν ἀμφοτέρων ἐκ τρίτης τινός μεταβλητῆς ἢ καί εἰς τήν τύχην. Περὶ τούτων οὐδεμία ἔνδειξις παρέχεται ὑπό τῆς ἀναλύσεως τῆς συσχέτισεως, ἡ ὁποία, ὡς προελέχθη, περιορίζεται εἰς τήν ἐξέτασιν τῆς συγγενείας τῶν κινήσεων δύο με-

ταβλητῶν, χωρίς νά ὑπεισέρχεται καί εἰς περαιτέρω διερεύνησιν τῆς σχέσεως αὐτῶν.

Ὁ στατιστικός προσδιορισμός τῆς αἰτιώδους σχέσεως δύο μεταβλητῶν ἐπιτυγχάνεται διά τῆς "παλινδρομήσεως" τῆς ἐξ αὐτῶν θεωρουμένης ὡς ἐξηρητημένης ( $\Psi$ ) ἐπὶ τῆς ἑτέρας ἢ ὅποια ἐπέχει θέσιν ἀνεξαρτήτου ( $X$ ). Δέον ἐν προκειμένῳ νά διευκρινισθῇ ὅτι αἱ στατιστικά σχέσεις δέν εἶναι ἀκριβεῖς σχέσεις, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι αἱ εἰς δεδομένην τιμὴν τῆς  $X$  ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ τῆς  $\Psi$  δέν εἶναι ἰσάι μεταξὺ των, ἀλλά, ἄλλαι ὀλιγώτερον ἄλλαι περισσότερον, ἀποκλίνουν ἐν τινος μέσης τιμῆς", ἐκφραζούσης τὸ συστηματικὸ μέρος αὐτῶν. Αἱ οὕτω παρατηρούμεναι ἀποκλίσεις ὀφείλονται εἰς παντός εἶδους σφάλματα μετρήσεως, εἰς τὴν ἐπίδρασιν ἄλλων παραγόντων μὴ περιληφθέντων εἰς τὴν σχέσιν, εἰς τυχαῖα συμβάντα κλπ. Θεσιν μέσης τιμῆς ἐπέχει ἐν προκειμένῳ ὄρισμένη μορφή μαθηματικῆς συναρτήσεως, καταλλήλως ἐπιλεγμένη, ὥστε νά καθίστανται ἐλάχισται αἱ ἐξ αὐτῆς ἀποκλίσεις τῶν ἀρχικῶν τιμῶν τῆς  $\Psi$ . Διά τῆς παλινδρομήσεως ἐπιδιώκεται ἀκριβῶς ὁ καθορισμὸς γραμμῆς τινος, συνήθως εὐθείας, ἢ ὅποια, διερχομένη διά μέσου τοῦ νέφους τῶν σημείων, νά ἀποδίδῃ κατὰ ἱκανοποιητικὸν τρόπον τὴν μεταξύ τῶν δύο μεταβλητῶν ὑφισταμένην αἰτιώδη σχέσιν.

### 3. Ὁ συντελεστὴς συσχέτισεως

Ὁ συντελεστὴς συσχέτισεως ἀποτελεῖ οὐσιώδους σημασίας καί μεγάλης χρησιμότητος στατιστικὸν μέτρον, τὸ ὅποιον ἐκφράζει τὸν βαθμὸν συγγενείας μεταξύ τῶν τιμῶν δύο μεγεθῶν. Ἡ ἀνάπτυξις τῆς ἔννοιας αὐτῆς δύναται νά γίνῃ κατὰ διαφόρους τρόπους, ἕκαστος τῶν ὁποίων δίδει ἔμφασιν εἰς ὄρισμένας μόνον ιδιότητες. Κατωτέρω ἢ παρουσιάσας τοῦ συντελεστοῦ συσχέτισεως στηρίζεται εἰς ἀπλᾶς τινὰς ὑποθέσεις, ἀλλὰ πρὸς πληρεστέραν κατανόησιν του θά παραστή ἀνάγκη ἀναφορᾶς εἰς αὐτόν καί κατὰ τὴν ἐξέτασιν τῆς παλινδρομήσεως, μετὰ τῆς ὁποίας, ὡς θά δειχθῇ, συνδέεται στενῶς.

Ἐστὼ ὅτι ὑπάρχουν διαθέσιμοι  $n$  τιμαὶ ἐκ παρατηρήσεως μεταβλητῆς τινος  $X$  καί ἰσάριθμοι ἑτέρας  $\Psi$  κατὰ τρόπον ὥστε εἰς ἑκάστην τιμὴν τῆς  $X$  νά ἀντιστοιχῇ μία τιμὴ τῆς  $\Psi$ . Διά χρησιμοποίησιν τοῦ ἐν λόγῳ δείγματος τῶν  $n$  ζευγῶν τιμῶν ἐπιδιώκεται ἡ ἐκτίμησις τοῦ βαθμοῦ συσχέτισεως τῶν μεταβλητῶν  $X$  καί  $\Psi$ .

Αἱ τιμαὶ ἑκατέρας τῶν ἐν λόγῳ μεταβλητῶν, λαμβανόμεναι κενωρισμένως, συνιστοῦν μίαν κατανομήν τῆς ὁποίας δύναται νά ὑπολογισθοῦν ὁ ἀριθμητικὸς μέσος καί ἡ διακύμανσις. Οὕτω, διά μὲν

τὴν κατανομήν τῶν  $X$  ἔχομεν ἀριθμητικὸν μέσον  $\bar{X}$  καὶ διακύμανσι  $S_X^2$ , διὰ δὲ τὴν κατανομήν τῶν  $\Psi$ ,  $\bar{\Psi}$  καὶ  $S_\Psi^2$  ἀντιστοίχως. Πρὸς μέτρησιν τῆς διασπορᾶς τῶν τιμῶν καὶ τῶν δύο μεταβλητῶν ταυτοχρόνως παρίσταται ἀνάγκη χρησιμοποιήσεως ἑτέρου μέτρου, τὸ ὁποῖον καλεῖται "συνδιακύμανσις". Ἡ συνδιακύμανσις ὑπολογίζεται ὡς τὸ μέσον γινόμενον τῶν ἀποκλίσεων τῶν τιμῶν τῶν δύο μεταβλητῶν  $X$  καὶ  $\Psi$  ἐκ τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου αὐτῶν. Ἦτοι εἶναι :

$$(\Theta-1) \quad \text{Συνδ. } (X, \Psi) = \frac{\sum(X-\bar{X})(\Psi-\bar{\Psi})}{n}$$

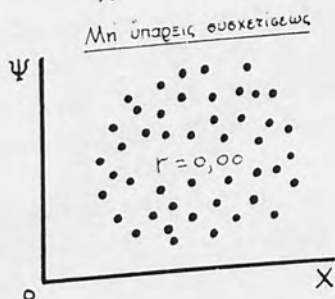
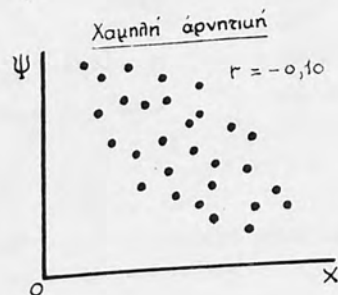
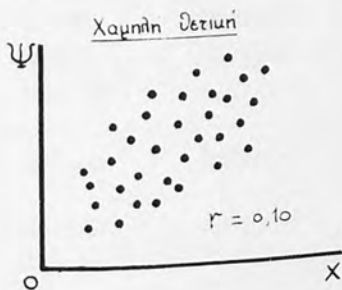
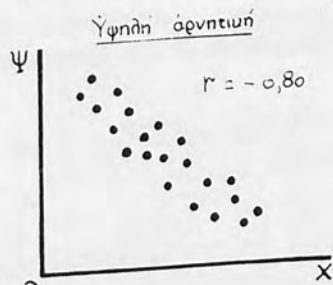
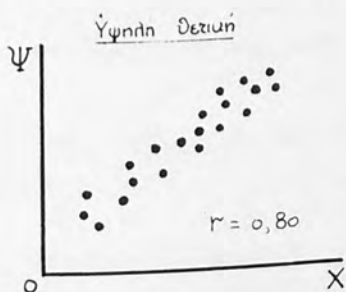
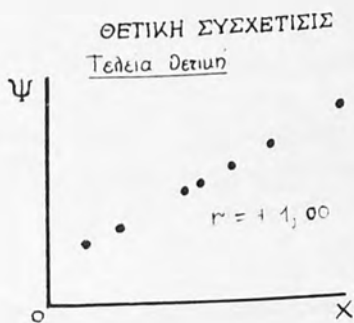
Εἶναι φανερόν ὅτι ἐάν εἰς δεδομένην τιμὴν τῆς μιᾶς μεταβλητῆς, ἔστω τῆς  $X$ , ἀντιστοιχοῦν ὑψηλαὶ καὶ χαμηλαὶ τιμαὶ τῆς ἑτέρας  $\Psi$ , λόγῳ τοῦ συμψηφισμοῦ τῶν σχετικῶν γινομένων, ἡ τιμὴ τῆς συνδιακυμάνσεως θά εἶναι χαμηλὴ. Ἀντιθέτως, ἐάν αἱ κινήσεις τῶν τιμῶν τῶν δύο μεταβλητῶν παρουσιάζουν ὁμοιότητα, τότε ἡ τιμὴ τῆς συνδιακυμάνσεως θά εἶναι ὑψηλὴ. Ἐπομένως, ἡ συνδιακύμανσις ἀποτελεῖ ἓν μέτρον τῆς μεταξὺ δύο μεταβλητῶν ὑφισταμένης συσχέτισεως. Ἐπί πλέον, ὅμως, αὕτη διὰ τοῦ προσήμου της παρέχει πληροφορίας καὶ περὶ τοῦ ἐάν ἡ συσχέτισις εἶναι θετικὴ ἢ ἀρνητικὴ. Τοῦτο, διότι, ἐάν εἰς ὑψηλὰς τιμὰς τῆς  $X$  ἀντιστοιχοῦν ὑψηλαὶ τιμαὶ τῆς  $\Psi$  καὶ εἰς χαμηλὰς τιμὰς τῆς  $X$  χαμηλαὶ τιμαὶ τῆς  $\Psi$ , εἶναι φυσικόν τὰ ἐπὶ μέρους γινόμενα τῶν ἀποκλίσεων ἐκ τοῦ μέσου - ἄρα καὶ ὁ ἀριθμητικὸς μέσος αὐτῶν - νὰ εἶναι ὅλα θετικά. Ἀντιθέτως, ἐάν εἰς ὑψηλὰς τιμὰς τῆς  $X$  ἀντιστοιχοῦν χαμηλαὶ τιμαὶ τῆς  $\Psi$  καὶ εἰς χαμηλὰς τιμὰς τῆς  $X$  ὑψηλαὶ τῆς  $\Psi$ , θά ἔχωμεν ἀρνητικὰ γινόμενα ἀποκλίσεως καὶ, συνεπῶς, ἀρνητικὴν συνδιακύμανσιν.

Ἡ ἀνωτέρω ὀρισθεῖσα συνδιακύμανσις, ὑπολογιζομένη ὡς ἀριθμητικὸς μέσος τῶν γινομένων τῶν ἀποκλίσεων τῶν μεταβλητῶν  $X$  καὶ  $\Psi$  ἐκ τοῦ μέσου των, ἐκφράζεται εἰς τὰς μονάδας μετρήσεως αὐτῶν, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον περιορίζει οὐσωδῶς τὴν χρησιμότητά της ὡς μέτρου τῆς συσχέτισεως. Ἡ ἐν λόγῳ ἀδυναμία ἀντιμετωπίζεται διὰ διαφάσεως τῆς συνδιακυμάνσεως διὰ τοῦ γινομένου τῶν μέσων ἀποκλίσεων τετραγώνου τῶν μεταβλητῶν  $X$  καὶ  $\Psi$ . Οὕτω, προκύπτει ὁ "συντελεστὴς συσχέτισεως" ( $r$ ) τῶν ἐν λόγῳ μεταβλητῶν, ὁ ὁποῖος εἶναι, βεβαίως, ἀνεξάρτητος τῶν μονάδων μετρήσεων τῶν  $X$  καὶ  $\Psi$ :

$$(\Theta-2) \quad r = \frac{\text{Συνδ. } (X, \Psi)}{S_X S_\Psi} = \frac{\frac{\sum(X-\bar{X})(\Psi-\bar{\Psi})}{n}}{\sqrt{\frac{\sum(X-\bar{X})^2}{n}} \sqrt{\frac{\sum(\Psi-\bar{\Psi})^2}{n}}}$$

# Διάγραμμα Θ - 4

Διάφοροι υποθετικοί περιπτώσεις συσχετίσεως



Βασικόν χαρακτηριστικόν τοῦ συντελεστοῦ συσχέτισεως εἶναι ὅτι οὗτος μετρεῖ τὴν ἔντασιν τῆς μεταξύ δύο μεταβλητῶν ὑφισταμένης γραμμικῆς σχέσεως. Εἶναι, ἐπομένως, εὐνόητον ὅτι ὁ ἐν λόγω συντελεστής δὲν ἀποτελεῖ κατάλληλον μέτρον συσχέτισεως εἰς τὰς περιπτώσεις κατὰ τὰς ὁποίας ἡ μεταξύ δύο μεταβλητῶν ὑφισταμένη σχέση ἀκολουθεῖ ὠρισμένην καμπύλην καὶ ὄχι εὐθείαν γραμμὴν. Ὁὕτως ὁ συντελεστής συσχέτισεως θὰ πρέπει νὰ ὑποεκτιμᾷ τὴν μεταξύ καταναλώσεως σακχάρους καὶ χρηματικοῦ εἰσοδήματος ὑφισταμένην σχέσιν, καθ' ὅσον αὕτη, ὡς προκύπτει ἐκ τοῦ Διαγράμματος Θ-1, εἶναι μᾶλλον καμπυλόγραμμος. Τοῦτ' αὐτὸ δὲν ἰσχύει, βεβαίως, διὰ

Πίναξ Θ - 4

Ἐπολογισμὸς συντελεστοῦ συσχέτισεως καταναλώσεως σακχάρους ( $\Psi$ ) καὶ χρηματικοῦ εἰσοδήματος ( $X$ ) ἐπὶ τῇ βάσει τῶν στοιχείων τοῦ Πίνακος Θ - 1 διὰ χρησιμοποίησεως τοῦ τύπου τῶν ἀποκλίσεων

$X - \bar{X}$ ( $\bar{X} = 900$ )	$\Psi - \bar{\Psi}$ ( $\bar{\Psi} = 0,941$ )	$(X - \bar{X})^2$	$(\Psi - \bar{\Psi})^2$	$(X - \bar{X})(\Psi - \bar{\Psi})$
- 775	- 0,411	600.625	0,168921	318,525
- 550	- 0,234	302.500	0,054756	128,700
- 275	- 0,005	75.625	0,000025	1,375
50	0,147	2.500	0,021609	7,350
450	0,173	202.500	0,029929	77,850
1.100	0,328	1.210.000	0,107584	360,800
Σ ὅλων:		2.393.750	0,382824	894,600
Ἀριθμητικὸς Μέσος:		398.958	0,063804	149,100

τὰς σχέσεις τὰς ἀπεικονιζομένας εἰς τὰ Διαγράμματα Θ-2 καὶ Θ-3, αἱ ὁποῖαι εἶναι σαφῶς γραμμικαί. Ὄταν μεταξύ τῶν μεταβλητῶν  $X$  καὶ  $\Psi$  ὑπάρχη ἀπόλυτος γραμμικὴ σχέση, δηλαδὴ ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ διαγράμματος διασπορᾶς κεῖνται ἐπὶ εὐθείας γραμμῆς, τότε θὰ εἶναι  $r = +1$ , ἐὰν ἡ εὐθεῖα αὕτη ἀνέρχεται ἐκ τῶν κάτω ἀριστερὰ πρὸς τὰ ἄνω δεξιὰ, καὶ  $r = -1$ , ἐὰν κατέρχεται ἐκ τῶν ἄνω ἀριστερὰ πρὸς τὰ κάτω δεξιὰ. Ἐφ' ὅσον τὸ νέφος τῶν σημείων οὐδεμίαν συσχέτισιν δεικνύει μεταξύ τῶν μεταβλητῶν, θὰ ἔχωμεν  $r = 0$ . Αἱ ἐν τῇ πράξει συνήθως ἐμφανιζόμεναι τιμαὶ τοῦ συντελεστοῦ συσχέτισεως περιλαμβάνονται μεταξύ τοῦ μηδενὸς καὶ τῆς μονάδος (θετικῆς ἢ ἀρ-

νητιῆς). Ὑποθετικά γραφικά ἀπεικονίσεις τῶν διαφόρων χαρακτηριστικῶν περιπτώσεων συσχέτισεως παρέχονται εἰς τὸ Διάγραμμα Θ-4.

Ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ συντελεστοῦ συσχέτισεως ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ τύπου (Θ-2) ἀποτελεῖ προέκτασιν τοῦ ἀπαιτουμένου διὰ τὴν ἐπίμησιν τῆς μέσης ἀποκλίσεως τετραγώνου. Ἐν προκειμένῳ ὁ τρόπος ἐργασίας δεικνύεται διὰ χρησιμοποίησεως τῶν δεδομένων τοῦ Πίνακος Θ-1, τὰ ὅποια ἀναφέρονται εἰς τὴν κατανάλωσιν σακχάρους καὶ τὸ χρηματικὸν εἰσόδημα. Αἱ σχετικαὶ ἀριθμητικαὶ πράξεις παρέχονται εἰς τὸν Πίνακα Θ-4, ἐκ τοῦ ὁποῦ λαμβάνομεν :

$$S_X^2 = 398.958, S_\Psi^2 = 0,063804 \text{ καὶ } \text{Συνδ.}(X, \Psi) = 149,100$$

Ἐπομένως, ἔχομεν :

$$r = \frac{149,100}{\sqrt{398.958} \sqrt{0,063804}} = 0,9345$$

Ὁ ἀνωτέρω χρησιμοποιηθεὶς τύπος τοῦ συντελεστοῦ συσχέτισεως, ἂν καὶ εἶναι εὐκόλως κατανοητός, ἐν τούτοις δέν προσφέρεται διὰ πρακτικὴν ἐργασίαν, ἰδίως ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν παρατηρήσεων εἶναι σχετικῶς μέγας. Εἰς τὰς ἐφαρμογὰς, ἀντὶ νὰ ἀκολουθητῆ ἡ διαδικασία ὑπολογισμοῦ ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἀποκλίσεων, εἶναι προτιμότερον νὰ γίνεται χρῆσις ἀπ' εὐθείας τῶν ἀρχικῶν τιμῶν τῶν X καὶ Ψ. Πρὸς τοῦτο ἐνδείκνυται ἡ χρησιμοποίησις τοῦ τύπου :

$$(Θ-3) \quad r = \frac{n \Sigma X \Psi - (\Sigma X)(\Sigma \Psi)}{\sqrt{[n \Sigma X^2 - (\Sigma X)^2] [n \Sigma \Psi^2 - (\Sigma \Psi)^2]}}$$

ὁ ὁποῖος προκύπτει ἐκ τοῦ ἀρχικοῦ (Θ-2) κατόπιν καταλλήλων ἀλγεβρικῶν μετασχηματισμῶν (1).

Πρὸς ἐφαρμογὴν τοῦ τύπου (Θ-3) ἐπὶ τῶν δεδομένων τῆς κατανώσεως σακχάρους καὶ τοῦ χρηματικοῦ εἰσοδήματος τῶν ἀναγραφόμενων εἰς τὸν Πίνακα Θ-1, χρησιμοποιοῦμεν τὴν εἰς τὸν Πίνακα

(1) Ἡ ἀπόδειξις ἔχει ὡς ἐξῆς :

$$\Sigma (X - \bar{X})(\Psi - \bar{\Psi}) = \Sigma (X\Psi - \bar{X}\Psi - X\bar{\Psi} + \bar{X}\bar{\Psi}) = \Sigma X\Psi - \bar{X}\Sigma\Psi + \bar{\Psi}\Sigma X + n\bar{X}\bar{\Psi}$$

Δεδομένου ὅτι :  $\bar{X}\Sigma\Psi = n\bar{X} \frac{\Sigma\Psi}{n} = n\bar{X}\bar{\Psi}$  καὶ  $\bar{\Psi}\Sigma X = n\bar{\Psi} \frac{\Sigma X}{n} = n\bar{\Psi}\bar{X}$ , ἔχομεν :

$$\Sigma (X - \bar{X})(\Psi - \bar{\Psi}) = \Sigma X\Psi - n\bar{X}\bar{\Psi} - n\bar{\Psi}\bar{X} + n\bar{X}\bar{\Psi} = \Sigma X\Psi - n\bar{X}\bar{\Psi} \longrightarrow$$



Θ-5 έμφαινόμενην ειδικήν κατάταξιν, ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν :

$$\Sigma X = 5.400, \quad \Sigma \Psi = 5,644, \quad \Sigma X^2 = 7.253.750, \quad \Sigma \Psi^2 = 5,692 \text{ καὶ} \\ \Sigma X\Psi = 5.974,200$$

Συνεπῶς, ἔχομεν :

$$r = \frac{6(5.974,200) - (5.400)(5,644)}{\sqrt{[6(7.253.750) - (5.400)^2][6(5,692) - (5,644)^2]}} = 0,9345$$

Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον ὑπολογίζονται καὶ οἱ συντελεσταὶ συσχέτισης τῶν μεγεθῶν τὰ ὁποῖα δίδονται εἰς τοὺς Πίνακας Θ-2 καὶ Θ-3. Οὕτω, διὰ μὲν τὸ κατὰ κεφαλὴν ἀκαθάριστον ἐγχώριον προϊόν καὶ τὸ ποσοστὸν τοῦ ἀγροτικοῦ πληθυσμοῦ ἐπὶ τοῦ συνολικοῦ εἰς τὰ ἐπί

Εἶναι ἐπίσης :

$$S_X = \sqrt{\frac{\Sigma (X - \bar{X})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\Sigma X^2}{n} - \left(\frac{\Sigma X}{n}\right)^2}$$

καὶ

$$S_\Psi = \sqrt{\frac{\Sigma (\Psi - \bar{\Psi})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\Sigma \Psi^2}{n} - \left(\frac{\Sigma \Psi}{n}\right)^2}$$

Δι' ἀντικατάστασιν εἰς τὸν τύπον (Θ-2) λαμβάνομεν :

$$r = \frac{\Sigma X\Psi - n\bar{X}\bar{\Psi}}{\sqrt{\frac{\Sigma X^2}{n} - \left(\frac{\Sigma X}{n}\right)^2} \cdot \sqrt{\frac{\Sigma \Psi^2}{n} - \left(\frac{\Sigma \Psi}{n}\right)^2}} \\ = \frac{n\Sigma X\Psi - n^2\bar{X}\bar{\Psi}}{\left[n\sqrt{\frac{\Sigma X^2}{n} - \left(\frac{\Sigma X}{n}\right)^2}\right] \left[n\sqrt{\frac{\Sigma \Psi^2}{n} - \left(\frac{\Sigma \Psi}{n}\right)^2}\right]}$$

Ἐπειδὴ, ὁμως :  $n^2\bar{X}\bar{\Psi} = n^2\frac{\Sigma X}{n} \cdot \frac{\Sigma \Psi}{n} = (\Sigma X)(\Sigma \Psi)$

$$\text{καὶ } n\sqrt{\frac{\Sigma X^2}{n} - \left(\frac{\Sigma X}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{n^2\Sigma X^2}{n} - \frac{n^2(\Sigma X)^2}{n^2}} = \sqrt{n\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2}$$

$$n\sqrt{\frac{\Sigma \Psi^2}{n} - \left(\frac{\Sigma \Psi}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{n^2\Sigma \Psi^2}{n} - \frac{n^2(\Sigma \Psi)^2}{n^2}} = \sqrt{n\Sigma \Psi^2 - (\Sigma \Psi)^2}$$

$$\text{ἔχομεν τελικῶς : } r = \frac{n\Sigma X\Psi - (\Sigma X)(\Sigma \Psi)}{\sqrt{[n\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2][n\Sigma \Psi^2 - (\Sigma \Psi)^2]}}$$

μέρους γεωγραφικά διαμερίσματα τῆς χώρας, λαμβάνομεν:  $r = -0,9595$ , διὰ δὲ τὴν ἰδιωτικὴν κατανάλωσιν καὶ τὸ διαθέσιμον ἰδιωτικὸν εἰσόδημα κατὰ τὴν περίοδον 1958-1965,  $r = 0,9989$ . Ἐν τῶν ἀποτελεσμάτων τούτων προκύπτει ὅτι τὴν ἐντονωτέραν συσχέτισιν παρουσιάζουν ἡ ἰδιωτικὴ κατανάλωσις καὶ τὸ διαθέσιμον ἰδιωτικὸν εἰσόδημα, ὁ συντελεστὴς τῆς ὁποίας, μάλιστα, εὐρίσκεται πολὺ ἐγγύς τῆς μονάδος. Ὁλιγώτερον ἰσχυρά, πάντως ἰσχυροτέρα τῆς μετὰ κατανάλωσιν σακχάρους καὶ χρηματικῆς εἰσοδήματος, εἶναι ἡ συσχέτισις τοῦ κατὰ κεφαλὴν ἀκαθάρστου ἐγχωρίου προϊόντος καὶ τοῦ ποσοστοῦ τοῦ ἀγροτικοῦ πληθυσμοῦ εἰς τὸ σύνολον. Ἐν τῶν

### Πίναξ Θ - 5

Ἐπιλογισμὸς συντελεστοῦ συσχέτισεως κατανάλωσιν σακχάρους ( $\Psi$ ) καὶ χρηματικῆς εἰσοδήματος ( $X$ ) ἐπὶ τῆ βάσει τῶν στοιχείων τοῦ Πίνακος Θ - 1, διὰ χρησιμοποίησεως τοῦ τύπου τῶν ἀρχικῶν τιμῶν

$X$	$\Psi$	$X^2$	$\Psi^2$	$X \Psi$
125	0,530	15.625	0,281	66,250
350	0,707	122.500	0,500	247,450
625	0,936	390.625	0,876	585,000
950	1,088	902.500	1,184	1.033,600
1.350	1,114	1.822.500	1,241	1.503,900
2.000	1,269	4.000.000	1,610	2.538,000
5.400	5,644	7.253.750	5,692	5.974,200

τῶν συντελεστῶν - ὡς ἄλλωστε ἀνεμένετο - οἱ δύο εἶναι θετικοί, ὁ δὲ ἀναφερόμενος εἰς τὴν σχέσιν μεταξύ κατὰ κεφαλὴν ἀκαθάρστου ἐγχωρίου προϊόντος καὶ ποσοστοῦ τοῦ ἀγροτικοῦ πληθυσμοῦ ἀρνητικὸς.

Ὁ ἀνωτέρω περιγραφεῖς συντελεστὴς συσχέτισεως  $r$  ἀναφέρεται εἰς τι δεῖγμα ληφθὲν ἐξ ὠρισμένου διμεταβλητοῦ πληθυσμοῦ, εἰς τὸν ὁποῖον ἡ ἀγνωστὸς τιμὴ τοῦ συντελεστοῦ συσχέτισεως μετὰ τῶν  $X$  καὶ  $\Psi$  συμβολίζεται διὰ τοῦ γράμματος  $\rho$ . Ἐάν ὑποτεθῆ ὅτι ἐκ τοῦ ἴδου πληθυσμοῦ λαμβάνονται ἐπανειλημμένα δείγματα τοῦ αὐτοῦ μεγέθους  $n$ , ἡ κατανομή τῶν ἐξ αὐτῶν ἐπιλογισθῶν τιμῶν τοῦ  $r$  θὰ ἐμφανίζῃ μορφήν ἐξαρτημένην, ἀφ' ἑνὸς μὲν ἐκ τῆς τιμῆς τοῦ  $\rho$  εἰς τὸν πληθυσμὸν, ἀφ' ἑτέρου δὲ ἐκ τοῦ μεγέθους τοῦ  $n$ . Οὕτω, ἡ κατανομή τῶν  $r$  τῶν δειγμάτων θὰ τεύ-

νη προς την κανονικήν ὅσον ἢ τιμὴ τοῦ  $\rho$ , τείνει πρὸς τὸ μηδέν καὶ τὸ  $n$  αὐξάνει. Ὄταν ἡ τιμὴ τοῦ  $\rho$  ἀπέχη ἐκ τοῦ μηδενὸς καὶ εὑρίσκειται πλησίον εἴτε τοῦ  $+1$  εἴτε τοῦ  $-1$ , ἡ μορφή τῆς κατανομῆς τῶν  $x$  τῶν δειγμάτων θά παρουσιάσῃ ἀσυμμετρικὴν μορφήν. Τοῦτο, διότι, ἐάν π.χ. θεωρήσωμεν ὅτι  $\rho = 0,95$ , τὰ  $x$  τῶν δειγμάτων θά δύνανται νὰ κυμαίνωνται, πρὸς τὴν μίαν μὲν κατεύθυνσιν (πρὸς τὰ κάτω) ἐπὶ διαστήματος ἴσου πρὸς  $1,95$  (ἀπὸ  $+0,95$  ἕως  $-1,00$ ), πρὸς τὴν ἑτέραν, ὅμως, κατεύθυνσιν (πρὸς τὰ ἄνω) μόνον ἐπὶ διαστήματος  $0,05$  (ἀπὸ  $+0,95$  ἕως  $+1,00$ ). Ἐπομένως, εἰς τοιαύτας περιπτώσεις, ἵνα ἡ κατανομή δειγματοληψίας τῶν  $x$  ἐμφανίζῃ σχετικῶς κανονικὴν μορφήν θά πρέπει τὸ  $n$  νὰ καθίσταται λίαν ὑψηλόν.

Πρὸς ἀντιμετώπισιν προβλημάτων στατιστικῆς ἐπαγωγῆς ἀναφορικῶς πρὸς τὸν συντελεστὴν συσχέτισεως εἶναι ἀναγκαῖα ἡ ἐκτίμησις τοῦ τυπικοῦ σφάλματος ἐκτιμήσεως αὐτοῦ  $\sigma_r$ . Εἰς τὴν πρῶξιν τὸ συνήθως ζητούμενον ἐν προκειμένῳ εἶναι "ὁ ἔλεγχος τῆς ὑποθέσεως μηδέν". Δι' αὐτοῦ διερευνᾶται ἡ στατιστικὴ σημαντικότης τῶν ἀποκλίσεων τὰς ὁποίας ἐμφανίζουσιν αἱ διάφοροι τιμαὶ τοῦ  $x$  ἐκ τοῦ μηδενός. Ἡ ἐξεταζομένη ὑπόθεσις εἶναι ὅτι ἡ ἀληθὴς τιμὴ τοῦ συντελεστοῦ συσχέτισεως εἰς τὸν διμεταβλητὸν πληθυσμόν, ἐκ τοῦ ὁποίου προέρχεται τὸ δεῖγμα τῶν  $n$  ζευγῶν παρατηρήσεων, εἶναι μηδέν ( $\rho = 0$ ). Πρὸς τοῦτο χρησιμοποιεῖται ὁ λόγος :

$$(Θ-4) \quad T = \frac{r - \rho}{S_r} = \frac{r}{S_r}$$

Ἐνθα  $S_r$  συμβολίζει τὴν ἐκτίμησιν τοῦ τυπικοῦ σφάλματος  $\sigma_r$ . Ἐπὶ μεγάλων δειγμάτων τὸ τυπικόν σφάλμα ἐκτιμήσεως τῶν  $x$  ὑπολογίζεται ἐπὶ τῆ βᾶσει τοῦ τύπου :

$$(Θ-5) \quad S_r = \frac{1 - \rho^2}{\sqrt{n-1}} \quad \text{ἢ, ἐπειδὴ } \rho = 0, \quad S_r = \frac{1}{\sqrt{n-1}}$$

καὶ γίνεται χρῆσις τοῦ ἔμβαστοῦ τῆς κανονικῆς κατανομῆς διὰ :

$$(Θ-6) \quad T = \frac{r}{\frac{1}{\sqrt{n-1}}} = r \sqrt{n-1}$$

Ἐπὶ μικρῶν δειγμάτων τὸ τυπικόν σφάλμα ἐκτιμήσεως τῆς κατανομῆς τῶν  $x$  ὑπολογίζεται ἐπὶ τῆ βᾶσει τοῦ τύπου :

$$(\Theta-7) \quad S_r = \frac{\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{n-2}}$$

Ο δέ σχετικός λόγος :

$$(\Theta-8) \quad T = \frac{r}{\frac{\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{n-2}}} = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

ἀκολουθεῖ τὴν κατανομὴν  $t$  τοῦ Student.

Ἐάν, ἐπομένως, διὰ ἐπίπεδον σημαντικότητος  $P = 0,05$  καὶ βαθμούς ἐλευθερίας  $v = n - 2$  προκύπτῃ ἐκ τῶν σχετικῶν πινάκων (τῆς κανονικῆς κατανομῆς ἢ τοῦ  $t$  τοῦ Student) τιμὴ τοῦ  $T$  μικρότερα τῆς ὡς ἀνωτέρω ὑπολογιζομένης, τότε δεχόμεθα ὅτι ἡ πιθανότης τῆς προελεύσεως τοῦ δείγματος ἐκ πληθυσμοῦ ἔχοντος  $\rho = 0$  εἶναι πολὺ μικρά. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει ἀπορρίπτομεν τὴν ἀρχικῶς γενομένην ὑπόθεσιν ὅτι τὸ χρησιμοποιηθέν δείγμα προέρχεται ἐκ πληθυσμοῦ εἰς τὸν ὁποῖον τὰ  $X$  καὶ  $\Psi$  εἶναι ἀσυσχέτιστα καὶ δεχόμεθα ὅτι πράγματι ὑφίσταται συσχέτισις μεταξύ αὐτῶν. Ἀντιθέτως, ἐάν ἡ ἐκ τῶν πινάκων προκύπτουσα τιμὴ τοῦ  $T$  εἶναι μεγαλύτερα τῆς ὑπολογισθείσης, τότε εἶναι πολὺ πιθανόν ἢ ὑπὸ τοῦ δείγματος δεικνυομένη συσχέτισις νὰ ὀφείλεται εἰς τὴν τύχην καὶ διὰ τοῦτο δεχόμεθα τὴν ἀρχικῶς γενομένην ὑπόθεσιν περὶ μὴ ὑπάρξεως συσχέτισεως μεταξύ τῶν μεταβλητῶν  $X$  καὶ  $\Psi$  εἰς τὸν πληθυσμόν.

Ἡ ἀνωτέρω περιγραφεῖσα διαδικασία ἐλέγχου τῆς ὑποθέσεως μηδέν ἐφηρμόσθη καὶ ἐπὶ τῶν τριῶν συντελεστῶν συσχέτισεως τῶν ἀναφερομένων εἰς τὰ δεδομένα τῶν Πινάκων  $\Theta-1$ ,  $\Theta-2$  καὶ  $\Theta-3$ . Εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις πρὸς ὑπολογισμόν τοῦ  $T$  ἐγένετο χρῆσις τοῦ τύπου  $(\Theta-7)$  τοῦ τυπικοῦ σφάλματος ἐκτιμῆσεως τῆς κατανομῆς τῶν  $x$ , λόγω τοῦ σχετικῶς πολὺ μικροῦ μεγέθους τῶν δειγμάτων. Ὡς ἐμφαίνεται εἰς τὸν Πίνακα  $\Theta-6$ , ἡ ὑπολογισθεῖσα τιμὴ τοῦ  $T$  εἶναι σημαντικῶς μεγαλύτερα τῆς ἐκ τῶν πινάκων τοῦ STUDENT προκύπτουσης διὰ  $v = n - 2$  καὶ  $P = 0,05$  δι' ὅλους τοὺς συντελεστὰς συσχέτισεως καὶ, ἐπομένως, εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις θὰ πρέπει νὰ ἀπορριφθῇ ἡ ὑπόθεσις ὅτι τὰ μεγέθη εἶναι ἀσυσχέτιστα εἰς τὸν πληθυσμόν. Ἀλλὰ καὶ ἐάν χρησιμοποιηθῇ ἐπίπεδον σημαντικότητος μικρότερον τοῦ  $0,05$ , ἔστω  $0,01$ , αἱ ἐκ τοῦ σχετικοῦ πίνακος προ-

κύτεουσαι (διά  $v=n-2$ ) τιμαί του  $T$  δεικνύουν καί πάλιν ότι ή υπόθεσις περί μή ύπάρξεως συσχετίσεως εις τόν πληθυσμόν δέν πρέπει νά γίνη άποδεκτή.

Δέον νά προστεθῆ έν προκειμένῳ ότι ό έλεγχος τῆς ύποθέσεως μηδέν επί του συντελεστού συσχετίσεως διευκολύνεται μεγάλως διά τῆς χρησιμοποίησεως σχετικῶν πινάκων περιεχόντων τά κατώτερα όρια τῶν τιμῶν του  $r$ , διά διάφορα επίπεδα σημαντικότητας καί βαθμούς έλευθερίας  $v=n-2$ , τά όποια άπαιτοῦνται πρὸς άπόρριψιν τῆς ύποθέσεως μηδέν. Ούτω, διά τήν κατανάλωσιν σακχάρως καί τό χρηματικόν εισόδημα λαμβάνομεν έν τῶν έν λόγω πινάκων ότι διά  $v=4$  καί  $P=0,05$  ό συντελεστής συσχετίσεως αὐτῶν δέον νά εἶναι τουλάχιστον 0,8114 διά νά έχωμεν  $r \neq 0$ . Έχομεν, όμως,  $r = 0,9345$  καί, έπομένως, άπορρίπτομεν τήν ύπόθεσιν μηδέν. Τό ίδιον συμπέρασμα συνάγεται καί διά τούς ύπολογισθέντας συντελεστάς συσχετίσεως - 0,9595 (μεταξύ κατά κεφαλῆν άκαθαρίστου έγχωρίου προϊόντος καί ποσοστού άγροτικοῦ πληθυσμοῦ) καί 0,9977 (μεταξύ ιδιωτικῆς καταναλώσεως καί διαθεσίμου ιδιωτικοῦ εισοδήματος), καθ'

### Πίναξ Θ - 6

Ύπολογισμοί άπαιτούμενοι πρὸς έλεγχον τῆς ύποθέσεως μηδέν επί τῶν συντελεστῶν συσχετίσεως τῶν άναφερομένων εις τά δεδομένα τῶν Πινάκων Θ - 1, Θ - 2 καί Θ - 3

Δ ε δ ο μ έ ν α	Συντελεστής Συσχετίσεως $r$	Μέση απόκλισις τετραγώνου $S_r$	$T$ ύπολογισθέν (κατ' άπολ. τιμ.)	Βαθμοί έλευθερ. $v=n-2$	$T$ εκ πινάκων Student ( $v=n-2$ )	
					$P=0,05$	$P=0,01$
1) Κατανάλ. σακχάρ. καί χρημ. εισόδ. (Πίναξ Θ - 1) . .	0,9345	0,1780	5,2515	4	2,776	4,604
2) Κατά κεφαλ. άκαθ. έγχώρ. προϊόν καί ποσοσ. άγρ. πληθ. (Πίναξ Θ - 2) . .	-0,9595	0,0996	9,6335	8	2,306	3,355
3) Ίδιωτ. κατανάλ. καί διαθέσ. ιδιωτ. εισ. (Πίναξ Θ - 3) . .	0,9977	0,0277	36,0181	6	2,447	3,707

όσον οὔτοι εἶναι, κατ' ἀπόλυτον τιμὴν, σημαντικῶς ὑψηλότεροι τῶν κατωτέρων ἐπιπέδων 0,6319 καὶ 0,7067, τὰ ὅποια ἀπαιτοῦνται ἀντιστοιχῶς πρὸς ἀπόρριψιν τῆς ὑποθέσεως μηδέν.

#### 4. Ἔννοια καὶ χαρακτηριστικά τῆς γραμμικῆς ἐξισώσεως

Εἰς τὴν ἀνάλυσιν παλινδρομήσεως ἢ μεταξὺ δύο μεγεθῶν ὑφισταμένη σχέσις ἀποδίδεται συνήθως δι' εὐθείας γραμμῆς. Μολοντί ἡ εὐθεῖα γραμμὴ δὲν ἀποτελεῖ πάντοτε ἰκανοποιητικὴν προσέγγισιν τῆς ἐξεταζομένης σχέσεως, ἐν τούτοις ἡ χρῆσις αὐτῆς εἶναι εὐρεῖα καθ' ὅσον πολλαὶ οἰκονομικαὶ σχέσεις εἶναι πράγματι γραμμικαὶ ἢ περὶ τοῦ γραμμικαί. Διὰ τὸν λόγον αὐτόν, ἀλλὰ καὶ ὡς ἐκ τῆς ἀπλόπερῆτος τῶν ἀπαιτουμένων ὑπολογισμῶν, ἡ ἀκολουθοῦσα ἐξέτασις ἀφορᾷ μόνον εἰς τὴν γραμμικὴν παλινδρόμησιν καὶ μάλιστα ὡς πρὸς μίαν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν. Πρὶν ἢ ἀναπτυχθῆ τὸ πρόβλημα τῆς στατιστικῆς ἐκτιμήσεως ἐκρῖθη σκόπιμον ὅπως ἀναλυθῆ ἡ μαθηματικὴ ἔννοια τοῦ γραμμικοῦ ὑποδείγματος καὶ ἐκτεθοῦν τὰ βασικά χαρακτηριστικά αὐτοῦ.

Οἰαδήποτε εὐθεῖα γραμμὴ δύναται νὰ ἐκφρασθῆ διὰ μιᾶς ἐξισώσεως τῆς μορφῆς·

$$\psi = a + bX$$

ἔνθα  $X$  εἶναι ἡ μεταβλητὴ ἢ μετρούμενη ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν  $X$  καὶ  $\psi$  ἡ μεταβλητὴ ἢ μετρούμενη ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν  $\psi$ . Διὰ τῶν γραμμάτων  $a$  καὶ  $b$  συμβολίζονται αἱ σταθεραὶ τῆς ἐξισώσεως. Ὄταν αἱ σταθεραὶ αὗται εἶναι γνωσταί, καθίσταται δυνατός ὁ ὑπολογισμὸς τῆς τιμῆς τῆς  $\psi$  τῆς ἀντιστοιχοῦσης εἰς δεδομένην τιμὴν τῆς  $X$ . Συνεπῶς, ὑπὸ τῆς γραμμικῆς ἐξισώσεως (Θ-9) παρέχονται τὰ ζεύγη τιμῶν τῶν μεταβλητῶν  $X$  καὶ  $\psi$ , τὰ ὅποια προσδιορίζονται ὑπὸ τινος εὐθείας γραμμῆς.

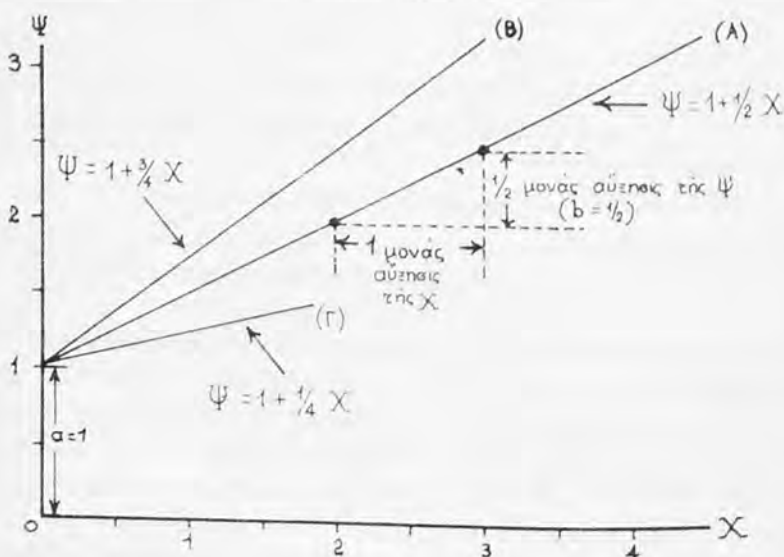
Ἐκ τῶν σταθερῶν τῆς γραμμικῆς ἐξισώσεως ἡ  $a$  ἐκφράζει τὴν τιμὴν τῆς  $\psi$  ἢ ὅποια ἀντιστοιχεῖ εἰς  $X = 0$  ἢ, ἄλλως, τὸ σημεῖον τομῆς τοῦ ἄξονος τῶν  $\psi$  ὑπὸ τῆς εὐθείας γραμμῆς. Ἡ ἑτέρα σταθερὰ  $b$  ἀποτελεῖ τὸν "γωνιακὸν συντελεστὴν" τῆς εὐθείας καὶ δίδει τὴν ἀπόλυτον μεταβολὴν ἢ ὅποια ἐπέρχεται εἰς τὴν μεταβλητὴν  $\psi$ , ὅταν ἡ μεταβλητὴ  $X$  μεταβάλλεται κατὰ μίαν μονάδα. Ἡ εἰς τὸ Διάγραμμα Θ-5 ἀπεικονιζομένη εὐθεῖα γραμμὴ (Α) ἔχει  $a = 1$  καὶ γωνιακὸν συντελεστὴν  $b = 1/2$ . Συνεπῶς, ἡ ἐξίσωσις αὐτῆς εἶναι :

$$\psi = 1 + 1/2X$$

"Όσον μεγαλύτερα είναι η τιμή του γωνιακού συντελεστού τόσο ταχύτερον ανέρχεται η ευθεία. Διά τόν λόγον τούτον εις τό Διάγραμμα Θ-5 η ευθεία γραμμή (B), η οποία έχει γωνιακόν συντελεστήν  $3/4$  κείται άνωθι τής (A), ενώ η ευθεία γραμμή (Γ), η οποία έχει γωνιακόν συντελεστήν  $1/4$ , κείται κάτωθι τής (A). Σημειωτέον ότι εις τας σχέσεις, αι όποια θεωρούνται ότι είναι γραμμικής μορφής, ο γωνιακός συντελεστής εκφράζει τήν "όριακήν μεταβολήν" τ'αυ έτέρου. Ούτω, εάν διά  $\Psi$  συμβολίζεται η συνολική καταναλωτική δαπάνη καί διά  $X$  τό συνολικόν εισόδημα, τό  $b$  δίδει τήν "όριακήν

### Διάγραμμα Θ - 5

Γραφική άπεικόνισις τών ευθειών  $\Psi = 1 + 1/2 X$ ,  $\Psi = 1 + 3/4 X$   
καί  $\Psi = 1 + 1/4 X$



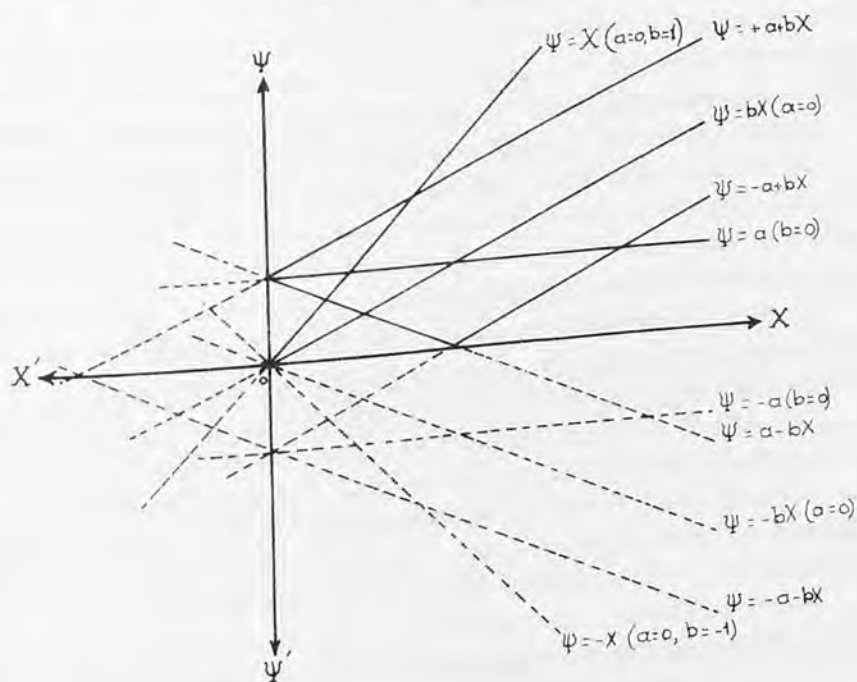
ροπήν προς κατανάλωσιν". Επίσης, εάν διά  $\Psi$  συμβολίζεται η παραγωγή προϊόντος τινός καί διά  $X$  η χρησιμοποιουμένη εργασία, τό  $b$  παρέχει τήν "όριακήν παραγωγικότητα τής εργασίας" κ.ο.κ.

Τόσον η σταθερά  $a$  όσον καί ο γωνιακός συντελεστής  $b$  δύναται νά φέρουν θετικόν ή άρνητικόν πρόσημον. Ός είναι φανερόν, όταν τό  $a$  είναι θετικόν η ευθεία τέμνει τόν άξονα τών  $\Psi$  εις σημείον αυτου εύρισκόμενον άνωθι τής άρχής τών άξόνων, ενώ όταν τούτο είναι άρνητικόν τό σημείον τομής κείται κάτωθι τής άρχής τών άξόνων. Μηδενική τιμή του  $a$  τής γραμμικής εξισώσεως σημαίνει ότι η ευθεία διέρχεται διά τής άρχής τών άξόνων. Θετικόν γωνιακόν

συντελεστήν ἔχουν αἱ εὐθεῖαι αἱ ἀνερχόμεναι ἐκ τῶν κάτω ἀριστερά πρὸς τὰ ἄνω δεξιὰ, ἀρνητικὸν δὲ αἱ εὐθεῖαι αἱ κατερχόμεναι ἐκ τῶν ἄνω ἀριστερά πρὸς τὰ κάτω δεξιὰ. Γωνιακὸν συντελεστήν μὲ μηδενικήν τιμὴν ἔχουν αἱ εὐθεῖαι αἱ ὁποῖαι εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸν ἄξονα τῶν  $X$ . Αἱ ἐπὶ μέρους κατηγορίαι εὐθειῶν αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς διαφόρους συνδυασμοὺς θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν  $a$  καὶ  $b$  ἀπεικονίζονται γραφικῶς εἰς τὸ Διάγραμμα Θ-6. Εἰς τοῦτο αἱ συνεχεῖς

### Διάγραμμα Θ - 6

Εὐθεῖαι γραμμαὶ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς διαφόρους συνδυασμοὺς θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν  $a$  καὶ  $b$



γραμμαὶ δεικνύουν τὰ τμήματα τῶν εὐθειῶν τὰ περιλαμβανόμενα εἰς τὸ πρῶτον τεταρτημόριον τοῦ συστήματος τῶν ὀρθογωνίων ἀξόνων, εἰς τὸν ὁποῖον συνήθως ἀπεικονίζονται αἱ διάφοροι σχέσεις.

Μία εὐθεῖα γραμμὴ προσδιορίζεται ἀπολύτως ὅταν δίδονται αἱ συντεταγμέναι δύο σημείων ἢ αἱ συντεταγμέναι ἑνὸς σημείου καὶ ὁ γωνιακὸς συντελεστής αὐτῆς. Συνεπῶς, αἱ σταθεραὶ  $a$  καὶ  $b$  γραμμικῆς τινος ἐξισώσεως προσδιορίζουν μίαν καὶ μόνην εὐθεῖαν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ὡς πρὸς ὠρισμένον σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων. Ἀντιθέ-



τως, διά δεδομένην εὐθείαν γραμμὴν δύνανται νά καθορισθῶν μοναδικά τιμὰι τῶν σταθερῶν  $a$  καὶ  $b$ . Συνεπῶς, ἡ ἔκφρασις ὠρισμένης σχέσεως διά γραμμικῆς ἐξισώσεως ἰσοδυναμεῖ πρὸς παράστασιν αὐτῆς δι' εὐθείας γραμμῆς.

##### 5. Ἐκτίμησις τῆς γραμμικῆς παλινδροουήσεως διά τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων

Ἐστω ὅτι διαθέτομεν δείγμα ἐξ  $n$  ζευγῶν τιμῶν τῶν μεταβλητῶν  $X$  καὶ  $\Psi$ , ἐκ τῶν ὁποίων ἡ πρώτη θεωρεῖται ὡς ἀνεξάρτητος ἡ δὲ δευτέρα ὡς ἐξαρτημένη. Τὸ πρόβλημα τῆς ποσοτικῆς ἔκφρασεως τῆς μεταξὺ τῶν δύο τούτων μεταβλητῶν αἰτιώδους σχέσεως συνίσταται εἰς τὸν καθορισμὸν μιᾶς εὐθείας γραμμῆς διά τῆς ὁποίας νά καθίσταται δυνατὴ ἡ ἐκτίμησις τῶν τιμῶν τῆς  $\Psi$  τῶν ἀντιστοιχοῦσάν εἰς δεδομένας τιμὰς τῆς  $X$ . Ἡ προσαρμογὴ μιᾶς τοιαύτης εὐθείας εἰς δεδομένον νέφος σημείων δύναται, κατ' ἀρχήν, νά γίνῃ δι' ἐλευθέρως χειρὸς. Πρὸς τοῦτο χρησιμοποιοῦμεν τὸ διάγραμμα διασπορᾶς ἐπὶ τοῦ ὁποίου χαράσσομεν εὐθείαν γραμμὴν ἀκολουθοῦσαν τὴν διάταξιν τῶν σημείων. Σχετικὸν παράδειγμα τοιαύτης ἐμπειρικῆς προσαρμογῆς παρέχεται εἰς τὸ Διάγραμμα  $\Theta-3$ , τὸ ὁποῖον δεικνύει τὴν σχέσιν μεταξὺ ἰδιωτικῆς καταναλώσεως καὶ διαθεσίμου ἰδιωτικοῦ εἰσοδήματος. Ὁ καθορισμὸς, ὅμως, τῆς καταλλήλου εὐθείας γραμμῆς καθίσταται λίαν δυσχερῆς, ὅταν τὰ σημεία τοῦ διαγράμματος διασπορᾶς εἶναι σχετικῶς ὀλίγα, ἡ δὲ διάταξις των εἶναι τοιαύτη ὥστε νά μὴ προκύπτῃ ἐξ αὐτῆς σαφῶς ἡ κεντρικὴ τάσις. Εἰς τὴν κατηγορίαν ταύτην ἀνήκει τὸ νέφος τῶν σημείων τοῦ Διαγράμματος  $\Theta-1$ , εἰς τὸ ὁποῖον θά ἠδύναντο νά προσαρμοσθῶν δι' ἐλευθέρως χειρὸς διάφοροι εὐθεῖαι, ὡς αἱ (A), (B), (Γ) κλπ., χωρὶς, ὅμως, νά εἶναι εἰς θέσιν τις νά ἐπιλέξῃ μίαν ἐξ αὐτῶν ὡς τὴν ἀρίστην.

Κατὰ συνέπειαν, πρὸς καθορισμὸν τῆς καταλλήλου εὐθείας παλινδρομήσεως ἐπὶ τῇ βάσει ὠρισμένων τιμῶν ἐκ παρατηρήσεως τῶν μεταβλητῶν  $X$  καὶ  $\Psi$ , παρίσταται ἀνάγκη καθιερώσεως ἀντικειμενικῶν κριτηρίων. Τὰ ἐν προκειμένῳ χρησιμοποιούμενα οὐδόπως διαφέρουν κατὰ βάσιν ἐκείνων ἐπὶ τῶν ὁποίων στηρίζεται ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου ὡς μέτρου κεντρικῆς τάσεως εἰς τὰ μονομεταβλητὰ ὑποδείγματα. Οὕτω, ἔχει γίνῃ ἀποδεικτόν ὅτι μία εὐθεῖα γραμμὴ, ἵνα διέρχεται ὅσον τὸ δυνατόν πλησιέστερον ἐκ τῶν διαφόρων σημείων τοῦ διαγράμματος διασπορᾶς, θά πρέπει - κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὰ ἰσχύοντα διά τὸν ἀριθμητικὸν μέσον - νά παρουσιάσῃ τὰς ἀκολουθούς δύο βασικὰς ἰδιότητες :

α) Το άθροισμα τῶν καθέτων ἀποκλίσεων τῶν σημείων τῶν ἀρχικῶν δεδομένων ἐν τῆς εὐθείας νά ἰσοῦται πρὸς τὸ μηδέν.

β) Το άθροισμα τῶν τετραγώνων ὄλων τῶν ἀποκλίσεων τούτων νά εἶναι ἐλάχιστον, ἤτοι μικρότερον τοῦ προκύπτοντος ἐν τῆς χρησιμοποιοῦσας οἰασθήποτε ἄλλης εὐθείας γραμμῆς. Ἀκριβῶς, ὡς ἐν τῆς ποιήσεως ταύτης ἢ ἐν λόγῳ μέθοδος προσαρμογῆς τῆς εὐθείας παλινδρομήσεως καλεῖται "μέθοδος τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων".

Ἐάν θεωρήσωμεν ὅτι  $X$  καὶ  $\Psi$  εἶναι αἱ ἐν παρατηρήσεως τιμαὶ τῶν δύο μεταβλητῶν καὶ  $\hat{\Psi}$  αἱ τιμαὶ τῆς ἐξηρητημένης αἱ προκύπτουσαι ἐκ τῆς ὑπὸ ἐκτίμησιν εὐθείας παλινδρομήσεως διὰ δεδομένας τιμὰς τῆς  $X$  ἐπὶ τῆ βάσει τῆς γραμμικῆς σχέσεως:

$$(Θ-10) \quad \hat{\Psi} = a + bX$$

θά πρέπει, κατὰ τὴ ἀνωτέρω, ἢ ἐκτίμησιν τῶν σταθερῶν  $a$  καὶ  $b$  τῆς (Θ-10) νά γίνῃ κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε,

$$(Θ-11) \quad \sum (\Psi - \hat{\Psi}) = 0$$

$$(Θ-12) \quad \text{καὶ} \quad \sum (\Psi - \hat{\Psi})^2 = \text{ἐλάχιστον}$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὰς ἐκφράσεις (Θ-11) καὶ (Θ-12) τὰ  $\hat{\Psi}$  διὰ χρησιμοποίησεως τῆς σχέσεως (Θ-10), ἔχομεν :

$$(Θ-13) \quad \sum (\Psi - a - bX) = 0$$

$$(Θ-14) \quad \text{καὶ} \quad \sum (\Psi - a - bX)^2 = \text{ἐλάχιστον}$$

Ἀλλὰ ἡ ἐκφράσις (Θ-13) δύναται νά γραφῆ καὶ ὡς ἑξῆς :

$$\sum \Psi - na - b\sum X = 0$$

Διαφοῦντες διὰ  $n$  ἀμφότερα τὰ μέλη λαμβάνομεν :

$$\frac{\sum \Psi}{n} - a - b \frac{\sum X}{n} = 0$$

$$(Θ-15) \quad \text{ἢ} \quad a = \bar{\Psi} - b\bar{X}$$

Όσον αφορά εἰς τὴν ἔκφρασιν (Θ-14), λαμβάνομεν κατόπιν ἀντι-καταστάσεως τοῦ  $a$  :

$$\begin{aligned}\Sigma(\Psi - a - bX)^2 &= \Sigma(\Psi - \bar{\Psi} + b\bar{X} - bX)^2 \\ &= \Sigma([\Psi - \bar{\Psi}] - b[X - \bar{X}])^2 \\ &= \Sigma(\Psi - \bar{\Psi})^2 - 2b\Sigma(\Psi - \bar{\Psi})(X - \bar{X}) + b^2\Sigma(X - \bar{X})^2\end{aligned}$$

Ἐπομένως, πρὸς ἐπίτευξιν τοῦ ἐλαχίστου τῆς ἐκφράσεως (Θ-14) ἐξισοῦμεν πρὸς τὸ μηδέν τὴν πρώτην παράγωγον τῆς προκυψάσης ἰσοδυναμοῦ πρὸς αὐτὴν παραστάσεως, ὡς κάτωθι :

$$\frac{d\Sigma(\Psi - a - bX)^2}{db} = -2\Sigma(X - \bar{X})(\Psi - \bar{\Psi}) + 2b\Sigma(X - \bar{X})^2 = 0$$

Ὅπόθεν λαμβάνομεν :

$$(Θ-16) \quad b = \frac{\Sigma(X - \bar{X})(\Psi - \bar{\Psi})}{\Sigma(X - \bar{X})^2} = \frac{\frac{\Sigma(X - \bar{X})(\Psi - \bar{\Psi})}{n}}{\frac{\Sigma(X - \bar{X})^2}{n}} = \frac{\text{Συνδ. } (X, \Psi)}{\text{Διασπ. } (X)}$$

Οἱ ἀνωτέρω μετασχηματισμοὶ ἀποτελοῦν κατ' οὐσίαν ἐπίλυσιν ἑνὸς συστήματος δύο ἐξισώσεων, καλουμένων "κανονικῶν ἐξισώσεων", αἱ ὁποῖαι ἀπορρέουν ἐκ τῶν ἐκφράσεων (Θ-13) καὶ (Θ-14), ἔνθα ὡς ἄγνωστοι ἐμφανίζονται αἱ σταθεραὶ  $a$  καὶ  $b$ . Ὑπὸ τῶν προκυψάντων ἀποτελεσμάτων παρέχεται ὁ τρόπος ὑπολογισμοῦ τῶν τιμῶν τῶν σταθερῶν  $a$  (τύπος (Θ-15)) καὶ  $b$  (τύπος (Θ-16)) τῆς εὐθείας παλινδρομήσεως ἢ ὁποῖα, σημειωτέον, ὡς δεικνύει ἡ σχέση (Θ-15), διέρχεται διὰ τοῦ σημείου  $(\bar{X}, \bar{\Psi})$ , ἥτοι τοῦ ἔχοντος συντεταγμένας τοὺς ἀριθμητικoὺς μέσοις τῶν ἐκ παρατηρήσεως τιμῶν τῶν  $X$  καὶ  $\Psi$ .

Πρὸς ὑπολογισμὸν τῆς γραμμικῆς ἐξισώσεως παλινδρομήσεως τῆς καταναλώσεως σακχάρους ( $\Psi$ ) ἐπὶ τοῦ χρηματικοῦ εἰσοδήματος ( $X$ ) ἐπὶ τῇ βάσει τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων, χρησιμοποιοῦμεν τὴν κατάταξιν τοῦ Πίνακος Θ-4, ἢ ὁποῖα στηρίζεται εἰς τὰς ἀποκλίσεις τῶν  $X$  καὶ  $\Psi$  ἐκ τῶν μέσων των. Οὕτω, λαμβάνομεν :

$$\Sigma(X - \bar{X})(\Psi - \bar{\Psi}) = 894,600 \quad \text{καὶ} \quad \Sigma(X - \bar{X})^2 = 2.393.750$$

Ἐπομένως, ὁ γωνιακὸς συντελεστὴς, ἢ, ἄλλως, συντελεστὴς παλινδρομήσεως εἶναι, κατ' ἐφαρμογὴν τοῦ τύπου (Θ-16).

$$b = \frac{894,600}{2.393.750} = 0,000374$$

Δεδομένου δὲ ὅτι:  $\bar{X} = 900$  καὶ  $\bar{\Psi} = 0,941$ , ἔχομεν, ἐπὶ τῆ βάσει τοῦ τύπου (Θ-15):

$$a = 0,941 - (0,000374)(900) = 0,604400$$

Κατὰ συνέπειαν ἡ ἐξίσωσις παλινδρομήσεως εἶναι:

$$(Θ-17) \quad \hat{\Psi} = 0,604400 + 0,000374 X$$

Ὡς, ὅμως, ἐλέχθη καὶ διὰ τὸν συντελεστὴν συσχετίσεως, ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ συντελεστοῦ παλινδρομήσεως διευκολύνεται μεθυσ εἰς τὴν πράξιν ὅταν στηρίζεται εἰς τὰς ἀρχικὰς τιμὰς τῶν μεταβλητῶν, ἀντὶ εἰς τὰς ἀποκλίσεις αὐτῶν ἐκ τῶν μέσων των. Εἶναι, διὰ τοῦτο, προτιμότερον ὅπως ἐφαρμόζεται ἕτερος τύπος, ἰσοδύναμος τοῦ (Θ-16), ὁ ὁποῖος προκύπτει ἐξ αὐτοῦ διὰ καταλλήλων ἀλγεβρικῶν μετασχηματισμῶν: (1)

$$(Θ-18) \quad b = \frac{n \Sigma X \Psi - (\Sigma X)(\Sigma \Psi)}{n \Sigma X^2 - (\Sigma X)^2}$$

Πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ συντελεστοῦ παλινδρομήσεως τῆς καταναλώσεως σακχάρους ἐπὶ τοῦ χρηματικοῦ εἰσοδήματος δι' ἐφαρμογῆς

(1) Ἐκ τῆς ἀνωτέρω γενομένης ἀναπτύξεως τοῦ τύπου τοῦ συντελεστοῦ συσχετίσεως, ἔχομεν:

$$\Sigma (X - \bar{X})(\Psi - \bar{\Psi}) = \Sigma X \Psi - n \bar{X} \bar{\Psi}$$

$$\begin{aligned} \text{καὶ } \Sigma (X - \bar{X})^2 &= \Sigma (X^2 - 2\bar{X}X + \bar{X}^2) = \Sigma X^2 - 2\bar{X}\Sigma X + n\bar{X}^2 = \Sigma X^2 - 2\frac{\Sigma X}{n}\Sigma X + n\frac{(\Sigma X)^2}{n^2} = \\ &= \Sigma X^2 - 2\frac{(\Sigma X)^2}{n} + \frac{(\Sigma X)^2}{n} = \Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{n} = \frac{n\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2}{n} \end{aligned}$$

$$\text{Συνεπῶς εἶναι: } b = \frac{\Sigma (X - \bar{X})(\Psi - \bar{\Psi})}{\Sigma (X - \bar{X})^2} = \frac{\Sigma X \Psi - n\bar{X}\bar{\Psi}}{\frac{n\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2}{n}} = \frac{n\Sigma X \Psi - (\Sigma X)(\Sigma \Psi)}{n\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2}$$

του τύπου (Θ-18), χρησιμοποιούμεν τήν κατάταξιν του Πίνακος Θ-5, ή όποια στηρίζεται εἰς τὰς ἀρχικάς τιμάστων  $X$  καί  $\Psi$ . Ἐκ τοῦ πίνακος τούτου λαμβάνομεν :

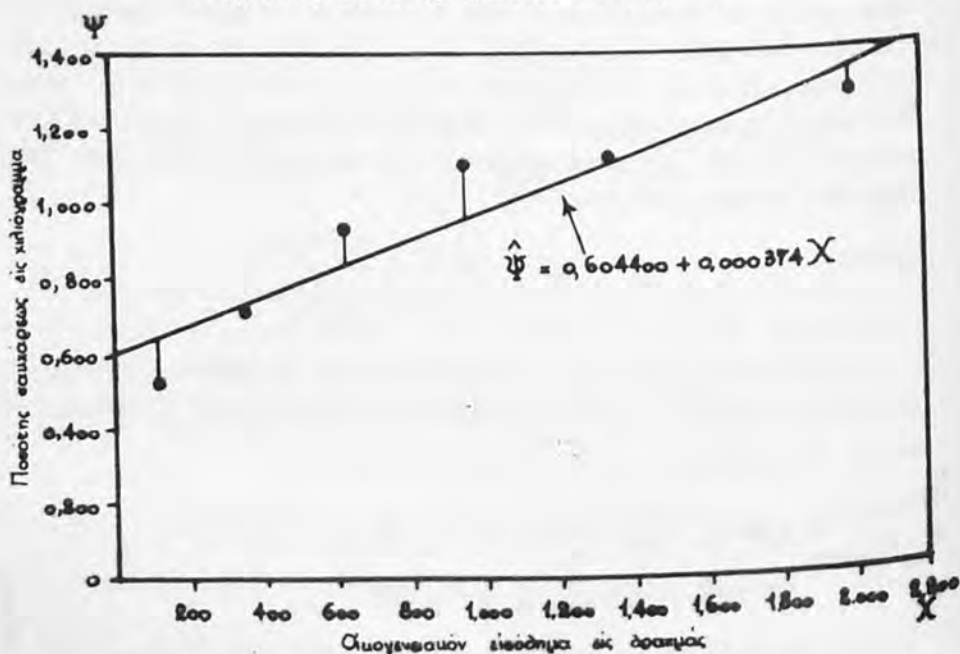
$$\Sigma X = 5.400, \Sigma \Psi = 5,644, \Sigma X^2 = 7.253.750 \text{ καί } \Sigma X\Psi = 5.974,200$$

Ἦτοι ἔχομεν :

$$b = \frac{6(5.974,200) - (5.400)(5,644)}{6(7.253.750) - (5.400)^2} = 0,000374$$

### Διάγραμμα Θ - 7

Γραφική ἀπεικόνισις τῆς εὐθείας παλινδρομήσεως τῆς καταναλώσεως σακχάρους ἐπὶ τοῦ χρηματικοῦ εισοδήματος



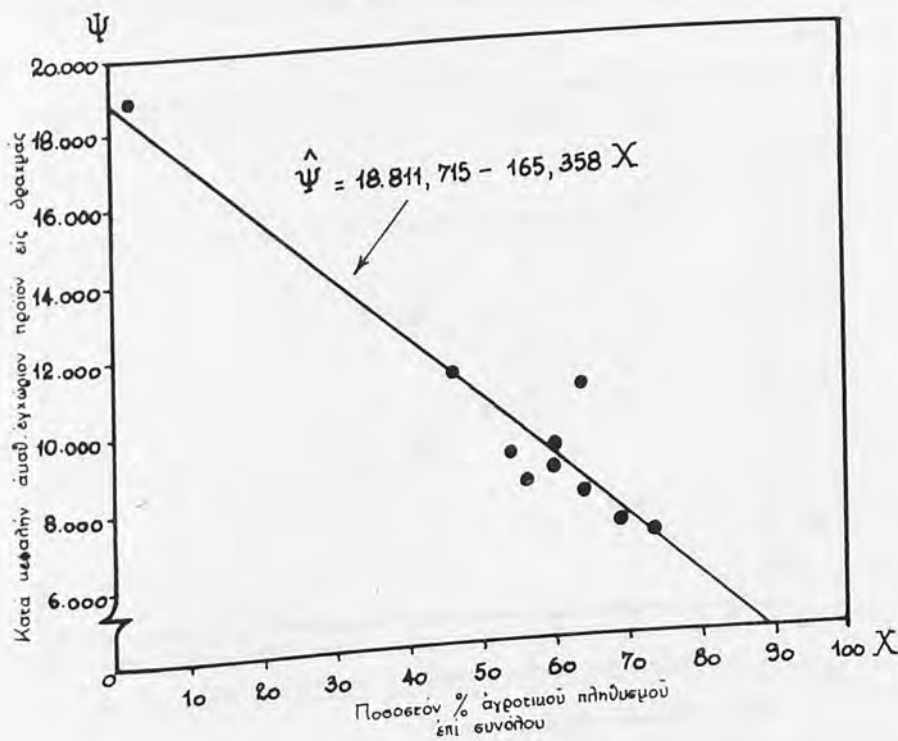
Πηγή: Δεδομένα πίνακος Θ-1

Προκειμένου νά ἀπεικονισθῇ γραφικῶς ἡ κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἐπιμνημένη ἐξίσωσις παλινδρομήσεως, ἐπιλέγονται δύο τιμαί τῆς  $X$ , ἔστωσαν αἱ  $X_0$  καί  $X_1$  καί ὑπολογίζονται ἐπὶ τῇ βάσει αὐτῶν αἱ ἀντίστοιχοι θεωρητικά  $\hat{\Psi}_0 = a + bX_0$  καί  $\hat{\Psi}_1 = a + bX_1$ . Καθορίζονται

διά του τρόπου τούτου δύο σημεία  $(X_0, \hat{\Psi}_0)$  και  $(X_1, \hat{\Psi}_1)$ , διά μέσου των οποίων άγεται ή ζητούμενη εύθεια. Διά τής μεθόδου ταύτης έγένητο ή χάραξις τής έκτιμηθείσης έξισώσεως παλινδρομήσεως τής καταναλώσεως σακχάρους επί του χρηματικού εισοδήματος είς τό Διάγραμμα Θ-7. Σημειώτεον ότι είς τήν έν λόγω έξίσωσιν ή τι -

### Διάγραμμα Θ - 8

Γραφική άπεικόνισις τής εύθειας παλινδρομήσεως του κατά κεφαλήν άκαθαρίστου έγχωρίου προϊόντος επί του ποσοστού του άγροτικού πληθυσμού είς συνολικόν



Πηγή: Δεδομένα πίνακος Θ-2

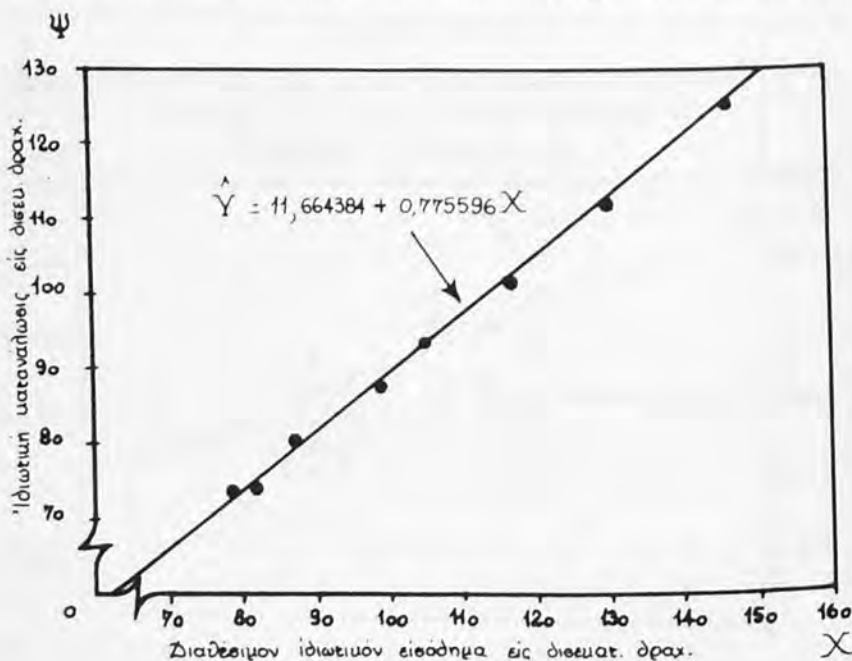
μή τής σταθεράς  $a(0,604400$  χιλιογράμμα) δεικνύει τήν καταναλισκομένην ποσότητα σακχάρους ή όποία αντιστοιχεί είς χρηματικόν εισόδημα μηδέν. Η θετική τιμή του συντελεστού παλινδρομήσεως έχει τήν έννοϊαν ότι μεγαλύτεραι ποσότητες σακχάρους καταναλίσκονται υπό οίκογενειών με άνωτερον επίπεδον εισοδήματος

Συγκεκριμένως, αύξησης του χρηματικού εισοδήματος της οικογενείας κατά μίαν δραχμήν ἐπιφέρει αύξησην τῆς καταναλώσεως σακχάρους κατά 0,000374 χιλιογράμμα.

Δι' ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων ἐγένετο, ὡσαύτως, ἐκτίμησις τῶν εὐθεῶν παλινδρομήσεως τῶν ἑτέρων δύο ἀνωτέρω χρησιμοποιηθειῶν σχέσεων, αἱ ὁποῖαι ἀπεικονίζονται γραφικῶς εἰς τὰ Διαγράμματα Θ-8 καὶ Θ-9. Ἐκ τούτων, ἡ ἀναφερομένη

### Διάγραμμα Θ-9

Γραφικὴ ἀπεικόνισις τῆς εὐθείας παλινδρομήσεως τῆς ἰδιωτικῆς καταναλώσεως ἐπὶ τοῦ διαθέσιμου ἰδιωτικοῦ εισοδήματος (1958 - 1965)



Πηγή: Δεδομένα πίνακος Θ-3

εἰς τὸ κατά κεφαλὴν ἀκαθάριστον ἐγχώριον προϊόν (Ψ) καὶ τὸ ποσοστὸν τοῦ ἀγροτικοῦ πληθυσμοῦ εἰς τὸν συνολικόν (Χ) εἶναι :

$$(\Theta-19) \quad \hat{\Psi} = 18.811,715 - 165,358 X \quad (\Psi \text{ εἰς δραχμάς, } X \text{ εἰς } \alpha/\alpha)$$

Παρατηρεῖται, ὡς ἄλλωστε ἀνεμένετο, ὅτι ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἔχει ἀρνητικὸν συντελεστὴν παλινδρομήσεως, ὁ ὁποῖος σημαίνει ὅτι αὐ-

ξησις τῆς ποσοστιαίας συμμετοχῆς τοῦ ἀγροτικοῦ πληθυσμοῦ εἰς τὸ σύνολον κατὰ μίαν ποσοστιαίαν μονάδα συνεπάγεται μείωσιν τοῦ κατὰ κεφαλὴν ἀκαθαρίστου ἐγχωρίου προϊόντος κατὰ 165,358 δραχμάς.

Ἡ ἐξίσωσις παλινδρομήσεως τῆς ἰδιωτικῆς καταναλώσεως ( $\Psi$ ) ἐπὶ τοῦ διαθεσίμου ἰδιωτικοῦ εἰσοδήματος ( $X$ ) ἐξετιμήθη ὡς ἑξῆς :

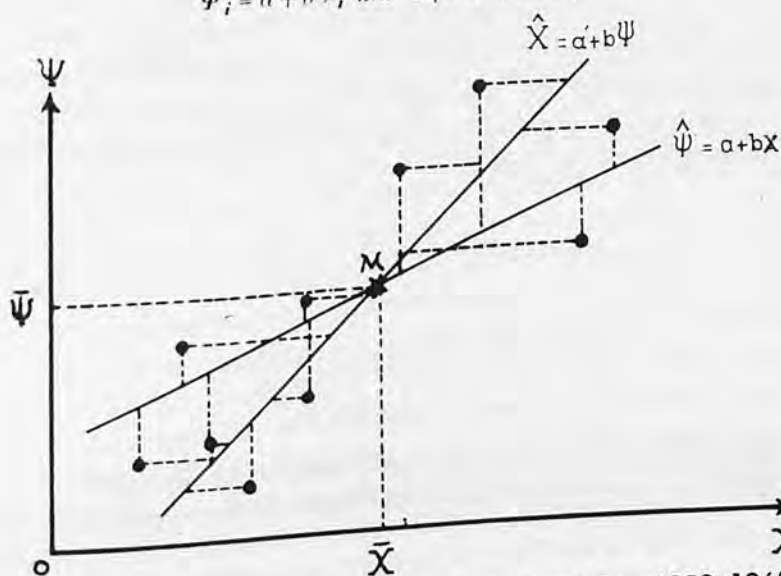
$$(\Theta-20) \quad \hat{\Psi} = 11,554384 + 0,775596 X \quad (\Psi, X \text{ εἰς δισεκ.δρχ.})$$

Ἡ ἐν λόγῳ ἐξίσωσις ἔχει θετικὸν συντελεστὴν παλινδρομήσεως, ὁ ὅποιος ἐκφράζει τὴν ὀριακὴν ροπὴν πρὸς κατανάλωσιν τοῦ ἰδιωτικοῦ

### Διάγραμμα Θ - 10

Γραφικὴ ἀπεικόνισις τῶν ἐξισώσεων

$$\hat{\Psi}_i = a + b x_i \quad \text{καὶ} \quad \hat{X}_i = a' + b' \Psi_i$$



τομέως τῆς ἐλληνικῆς οἰκονομίας κατὰ τὴν περίοδον 1958-1965. Ὁ συντελεστὴς οὗτος ἔχει τὴν ἔννοιαν ὅτι ἐκ τῆς κατὰ μίαν δραχμὴν αὐξήσεως τοῦ διαθεσίμου ἰδιωτικοῦ εἰσοδήματος 0,776 δραχμαὶ διατίθενται πρὸς αὐξήσιν τῆς καταναλωτικῆς δαπάνης.

Ἡ κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἐκτιμωμένη ἐξίσωσις παλινδρομήσεως τῆς μεταβλητῆς  $\Psi$  ἐπὶ τῆς μεταβλητῆς  $X$  παρέχει, ὡς γνωστὸν, τὰς θεωρητικὰς τιμὰς τῆς ἐξηρητημένης μεταβλητῆς τὰς ἀντιστοιχοῦσας εἰς δεδομένας τιμὰς τῆς ἀνεξαρτήτου. Διὰ χρησιμοποίησεως, ὅμως, τῶν ἰδῶν ἐκ παρατηρήσεως τιμῶν τῶν  $X$  καὶ  $\Psi$  εἶναι δυνατὴ ἡ ἐκτίμησις,



διά τῆς αὐτῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων, καί ἐτέρας γραμμικῆς ἐξισώσεως παλινδρομήσεως, ἐχούσης, ἀντιθέτως πρὸς τὴν προηγούμενην, ὡς ἐξηρητημένην μὲν μεταβλητὴν τὴν  $X$ , ὡς ἀνεξάρτητον δὲ τὴν  $\Psi$  :

$$(\Theta-21) \quad \hat{X} = a' + b' \Psi$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη, ὁμοῦ μετὰ τῆς ἀρχικῆς  $(\Theta-10)$  ἀπεικονίζεται γραφικῶς εἰς τὸ Διάγραμμα  $\Theta-10$ , τὸ ὁποῖον στηρίζεται ἐπὶ ὑποθετικῶν δεδομένων. Αἱ σταθεραὶ τῆς ἐξισώσεως  $(\Theta-21)$  συμβολίζονται διὰ  $a'$  καὶ  $b'$ , διότι, ὡς εἶναι εὐνόητον, αὗται διαφέρουν τῶν ἀντιστοιχῶν τῆς ἐξισώσεως  $(\Theta-10)$ . Δέον ἐπίσης νά παρατηρηθῇ, ὅτι, ὅταν ἀμφότεραι αἱ ἐξισώσεις ἀπεικονίζονται γραφικῶς ἐπὶ τοῦ ἰδίου διαγράμματος, ἐνῶ αἱ ἀποκλίσεις  $\Psi - \bar{\Psi}$  μετροῦνται καθέτως, αἱ ἀποκλίσεις  $X - \bar{X}$  μετροῦνται ὀριζοντῶς (βλ. Διάγραμμα  $\Theta-10$ ). Πάντως, ἀμφότεραι αἱ εὐθεῖαι διέρχονται διὰ τοῦ σημείου  $(\bar{X}, \bar{\Psi})$ , ἥτοι τοῦ ἔχοντος συντεταγμένας τοὺς ἀριθμητικoὺς μέσους τῶν  $X$  καὶ  $\Psi$ .

Οἱ συντελεσταὶ παλινδρομήσεως τῶν ἐξισώσεων  $(\Theta-10)$  καὶ  $(\Theta-18)$  δίδονται κατὰ τὰ γινωστά ὑπὸ :

$$b = \frac{\sum (X - \bar{X})(\Psi - \bar{\Psi})}{\sum (X - \bar{X})^2}$$

$$b' = \frac{\sum (\Psi - \bar{\Psi})(X - \bar{X})}{\sum (\Psi - \bar{\Psi})^2}$$

Πολλαπλασιάζοντες κατὰ μέλη καὶ διαφουρντες ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν τοῦ προκύπτοντος κλάσματος διὰ  $n^2$ , λαμβάνομεν :

$$bb' = \frac{[\sum (X - \bar{X})(\Psi - \bar{\Psi})]^2}{[\sum (X - \bar{X})^2][\sum (\Psi - \bar{\Psi})^2]} = \frac{\frac{[\sum (X - \bar{X})(\Psi - \bar{\Psi})]^2}{n^2}}{\frac{\sum (X - \bar{X})^2}{n} \cdot \frac{\sum (\Psi - \bar{\Psi})^2}{n}}$$

Ἐξάγοντες νῦν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν, ἔχομεν :

$$(\Theta-22) \quad \sqrt{bb'} = \frac{\text{Συνδ. } (X, \Psi)}{S_X S_\Psi} = r$$

Συνεπώς, ὁ γεωμετρικός μέσος τῶν δύο συντελεστῶν παλινδρομήσεως, οἱ ὁποῖοι προκύπτουν ἐάν ἑκατέρα τῶν μεταβλητῶν  $X$  καὶ  $\Psi$  ληφθῇ διαδοχικῶς ὡς ἐξηρητημένη, ἰσοῦται πρὸς τὸν συντελεστήν συσχετίσεως τῶν ἐν λόγῳ μεταβλητῶν.

Ἀναφορικῶς πρὸς τὴν χρησιμότητα τῶν δύο ἐξισώσεων (Θ-10) καὶ (Θ-21) παρατηρεῖται ὅτι αὕτη ἐξαρτᾶται ἐκαστοτε ἐκ τῆς φύσεως τῶν ἐξεταζομένων σχέσεων. Τὸ γεγονός ὅτι ἀμφότεραι δύνανται νὰ ἐκτιμηθοῦν στατιστικῶς δέν σημαίνει ὅτι κατ' ἀνάγκην ἔχουν καὶ συγκεκριμένην ἔννοιαν. Ἐάν, ἐπὶ τῇ βάσει A PRIORI ἐξετάσεως, ἡ μεταβλητὴ  $\Psi$  θεωρῆται ὡς προσδιοριζομένη ὑπὸ τῆς μεταβλητῆς  $X$  καὶ ὄχι τὸ ἀντίθετον, τότε μόνον ἡ ἐξίσωσις (Θ-10) ἔχει σημασίαν καὶ χρησιμότητα.

#### 6. Ἐλαστικότης καὶ μέτρησις αὐτῆς

Αἱ τιμαὶ τῶν διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγῶνων ἐκτιμωμένων σταθερῶν  $a$  καὶ  $b$  τῆς εὐθείας παλινδρομήσεως ἐξαρτῶνται, ὡς εἶναι φανερόν, ἐκ τῶν μονάδων μετρήσεως εἰς τὰς ὁποίας ἐκφράζονται αἱ μεταβληταὶ  $X$  καὶ  $\Psi$ . Ἐπομένως, ἐάν τὰ αὐτὰ μεγέθη μετρηθοῦν εἰς διαφορετικὰς μονάδας, θὰ προκύψουν καὶ διαφορεθερῶν τῆς ἐξισώσεως παλινδρομήσεως ἐκ τῶν μονάδων μετρήσεως τῶν μεταβλητῶν ἔχει τὸ μειονέκτημα ὅτι δέν ἐπιτρέπει τὴν σύγκρισιν πρὸς ἄλλας ἐξισώσεις περιεχοῦσας διαφορετικῆς φύσεως μεταβλητάς.

Ἡ ποσοτικὴ ἔκφρασις τῆς μεταξύ δύο μεταβλητῶν ὑφισταμένης σχέσεως δύναται, ἐν τούτοις, νὰ καταστή ἄνεξάρτητος τῶν χρησιμοποιουμένων μονάδων μετρήσεως δι' ὑπολογισμοῦ τῆς "ἐλαστικότητος", ἡ ὁποία ἀποτελεῖ "καθαρόν ἀριθμόν". Ἐξ ὀρισμοῦ, ἡ ἐλαστικότης τῆς ἐξηρητημένης μεταβλητῆς  $\Psi$  ὡς πρὸς τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν  $X$  ἐκφράζει τὴν ποσοστιαίαν μεταβολὴν τῆς  $\Psi$  ἢ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς ποσοστιαίαν μεταβολὴν τῆς  $X$  κατὰ 1%. Σημειωτέον ὅτι ὑπὸ τῶν συγγραφέων δέν ἀκολουθεῖται ἐνιαῖος τύπος συμβολισμοῦ τῆς ἐλαστικότητος. Οἱ συνήθως ἀπαντῶμενοι συμβολισμοὶ εἶναι:

$$E[\Psi, X], \frac{E_{\Psi}}{E_X}, E_X(\Psi), E_X \text{ κλπ.}$$

Ἐκ τούτων κατωτέρω χρησιμοποιεῖται, ὡς σαφέστερος, ὁ πρῶτος  $E[\Psi, X.]$ .

Ἐάν θεωρήσωμεν ὅτι αἱ ἔκ τινος σημείου  $(X, \Psi)$  ἀπόλυτοι μεταβολαί τῶν δι' ὠρισμένης μαθηματικῆς συναρτήσεως συνδεομένων μεταβλητῶν  $X$  καὶ  $\Psi$  εἶναι  $\Delta X$  καὶ  $\Delta \Psi$ , αἱ ἀντίστοιχοι σχετικαὶ μεταβολαὶ αὐτῶν προκύπτουν διὰ διαιρέσεως διὰ τῶν τιμῶν  $X$  καὶ  $\Psi$ , δηλαδή εἶναι αἱ  $\frac{\Delta X}{X}$  καὶ  $\frac{\Delta \Psi}{\Psi}$ . Κατὰ ταῦτα, συμφώνως πρὸς τὸν ἀνωτέρω δοθέντα ὀρισμὸν, ἡ ἐλαστικότης τῆς  $\Psi$  ὡς πρὸς τὴν  $X$  δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$(Θ-23) \quad E[\Psi, X] = \frac{\frac{\Delta \Psi}{\Psi}}{\frac{\Delta X}{X}} = \frac{\Delta \Psi}{\Delta X} \cdot \frac{X}{\Psi}$$

Εἰς τὴν γραμμικὴν, ὅμως, σχέσιν, ὡς ἔχει ἤδη λεχθῆ, ἡ ἀπόλυτος μεταβολὴ τῆς  $\Psi$  ἢ ἀντιστοιχοῦσα εἰς κατὰ μονάδα ἀπόλυτον μεταβολὴν τῆς  $X$ , ἴτοι ὁ λόγος  $\Delta \Psi / \Delta X$  τοῦ τύπου (Θ-23), ἐκφράζεται ὑπὸ τοῦ γωνιακοῦ συντελεστοῦ  $b$ . Κατὰ συνέπειαν, ἡ ἐλαστικότης εἰς τὰς γραμμικὰς ἐξισώσεις εἶναι :

$$(Θ-24) \quad E[\Psi, X] = b \frac{X}{\Psi}$$

Ἐν προκειμένῳ παρατηρεῖται ὅτι ἡ ἐλαστικότης ἐξαρτᾶται, ὄχι μόνον ἐκ τοῦ γωνιακοῦ συντελεστοῦ ὁ ὁποῖος εἶναι σταθερὸς, ἀλλὰ καὶ ἐκ τοῦ λόγου  $X/\Psi$ . Ἐπομένως αὕτη παρουσιάζει μεταβαλλομένην τιμὴν ἀπὸ σημείου εἰς σημεῖον τῆς εὐθείας γραμμῆς. Μόνον ὅταν εἶναι  $a=0$  (ὅπότε  $\Psi=bX$ ), ἔχομεν :  $E[\Psi, X] = b \frac{X}{bX} = 1$ , δηλαδή σταθεράν ἐλαστικότητα καὶ μάλιστα ἴσην πρὸς τὴν μονάδα. Εἰς ὅλους τοὺς ἄλλους τύπους εὐθειῶν αὕτη λαμβάνει τιμὰς μεταβαλλομένας ἐντὸς διαφόρων διαστημάτων ἐξαρτωμένων ἐκ τῶν σταθερῶν  $a$  καὶ  $b$  τῆς ἐξισώσεως.

Εἰς τὸν Πίνακα Θ-7 παρέχονται αἱ τιμαὶ τῆς ἐλαστικότητος τῶν θεωρητικῶν τιμῶν τῆς ἐξηρητημένης μεταβλητῆς ( $\bar{\Psi}$ ), αἱ ὁποῖαι ὑπελογίσθησαν ὡς πρὸς ὅλας τὰς ἐκ παρατηρήσεως τιμὰς τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβολῆς ( $X$ ) εἰς τὰς ἐκτιμηθείσας ἐξισώσεις παλινδρομήσεως (Θ-17) καὶ (Θ-20). Ἐκ τῶν ἀποτελεσμάτων τούτων προκύπτει ὅτι ἡ ἐλαστικότης τόσον τῆς ζητήσεως σακχάρους ὡς πρὸς τὸ χρηματικὸν εἰσόδημα ὅσον καὶ τῆς συνολικῆς ἰδωτικῆς καταναλώσεως ὡς πρὸς τὸ συνολικὸν ἰδωτικὸν διαθέσιμον εἰσόδημα βαίνει αὐξανομένη εἰς μεγαλυτέρας τιμὰς τῆς  $X$ .

Εἰς τὰς γραμμικὰς ἐξισώσεις ὡς ἀντιπροσωπευτικὴ τιμὴ τῆς ἐλαστικότητος χρησιμοποιεῖται συνήθως ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὰς μέσας τιμὰς τῶν μεταβλητῶν, ἡ ὁποία δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$(\Theta-25) \quad \bar{E} [\hat{\psi}, X] = b \frac{\bar{X}}{\bar{\psi}}$$

Οὕτω, ἐκ τῆς ἐξίσωσης  $(\Theta-17)$  λαμβάνομεν ὅτι ἡ μέση ἐλαστικότης τῆς καταναλώσεως σακχάρους ὡς πρὸς τὸ χρηματικὸν εἰσόδημα εἶναι :

$$\bar{E} [\hat{\psi}, X] = (0,000374) \frac{900}{0,941} = 0,358$$

Δηλαδή, αὐξήσις τοῦ χρηματικοῦ εἰσοδήματος κατὰ 1% ἐπιφέρει κατὰ μέσον ὄρον αὐξήσιν τῆς καταναλισκομένης ποσότητος σακχάρους κατὰ 0,358%. Ἐπίσης, ἐκ τῆς ἐξίσωσης  $(\Theta-20)$  προκύπτει ὅτι ἡ μέση ἐλαστικότης τῆς συνολικῆς ἰδιωτικῆς καταναλώσεως ὡς πρὸς τὸ συνολικὸν διαθέσιμον ἰδιωτικὸν εἰσόδημα εἶναι :

$$\bar{E} [\hat{\psi}, X] = (0,775596) \frac{105,9}{93,8} = 0,876$$

Ἦτοι, αὐξήσις τοῦ διαθέσιμου ἰδιωτικοῦ εἰσοδήματος κατὰ 1% συνοδεύεται ἀπὸ αὐξήσιν τῆς καταναλωτικῆς δαπάνης κατὰ 0,876%.

#### Πίναξ $\Theta-7$

Τιμαὶ ἐλαστικότητος ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὰς ἐκ παρατηρήσεως τιμὰς τῆς X ὑπολογισθεῖσαι ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἐξισώσεων  $(\Theta-17)$  καὶ  $(\Theta-20)$

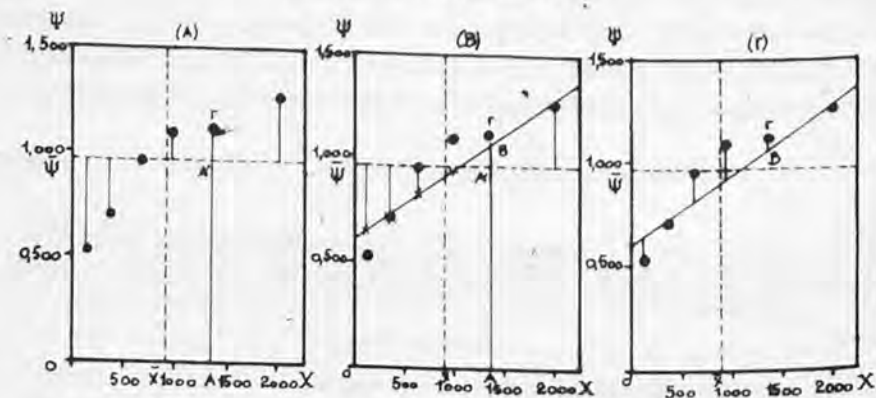
Ἐξίσωσις $(\Theta-17)$ $\psi = 0,604400 + 0,000374X$			Ἐξίσωσις $(\Theta-20)$ $\psi = 11,664384 + 0,775596X$		
$\psi$	X	$E[\psi, X]$	$\psi$	X	$E[\psi, X]$
0,651	125	0,072	73,2	79,3	0,841
0,735	350	0,178	75,5	82,3	0,845
0,838	625	0,279	79,5	87,5	0,853
0,960	950	0,370	88,6	99,2	0,868
1,109	1.350	0,455	92,9	104,8	0,875
1,352	2.000	0,553	102,7	117,4	0,886
			112,6	130,2	0,896
			125,2	146,4	0,907

## 7. Ἀνάλυσις τῆς διακυμάνσεως τῆς ἐξηρητημένης μεταβλητῆς

Αἱ θεωρητικαὶ τιμαὶ  $\Psi$ , δεδομένου ὅτι προκύπτουν ἐκ τῆς ἐξι-  
σώσεως παλινδρομήσεως ἐπὶ τῇ βάσει τῶν τιμῶν τῆς  $X$  καὶ δύο στα-  
θερῶν, κατ' οὐσίαν ἐναματώνουν τὴν ἐπίδρασιν τῆς ἀνεξαρτήτου  
μεταβλητῆς ἐπὶ τῆς ἐξηρητημένης. Δι' αὐτοῦ τοῦ τρόπου ἐπιτυχά-  
νεται διαίρεσις ἐκάστης τιμῆς ἐκ παρατηρήσεως τῆς μεταβλητῆς  $\Psi$   
εἰς δύο μέρη, ἥτοι εἰς ἓν ἐρμηνευόμενον ὑπὸ τῆς μεταβλητῆς  $X$  καὶ  
εἰς ἕτερον, τὸ ὁποῖον παραμένει ἀνερμηνευτόν. Οὕτω, εἰς τὸ Διά-  
γραμμα Θ-11 ἡ ἐκ παρατηρήσεως τιμὴ τῆς καταναλώσεως σακχάρου

Διάγραμμα Θ - 11

Ἀνάλυσις τῆς διακυμάνσεως τῆς καταναλώσεως σακχάρου ( $\Psi$ )  
διὰ χρησιμοποίησεως τῆς παλινδρομήσεως αὐτῆς ἐπὶ τοῦ χρη-  
ματικοῦ εἰσοδήματος ( $X$ )



Πηγή: Δεδομένα πίνακος Θ-1

ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς χρηματικόν εἰσόδημα 1.350 δραχμῶν ἀπεικονί-  
ζεται ὑπὸ τῆς καθέτου ΑΓ (Σχῆμα Α), ἡ ὁποία διαφεύεται εἰς ἓν τμή-  
μα ΑΒ (Σχῆμα Β) ὀριζόμενον ὑπὸ τῆς εὐθείας παλινδρομήσεως καὶ  
εἰς ἕτερον ΒΓ (σχῆμα Γ) ἰσούμενον πρὸς τὴν ἀπόκλισιν τῆς ἐκ παρα-  
τηρήσεως ἐκ τῆς θεωρητικῆς τιμῆς τῆς ἐξηρητημένης μεταβλητῆς.

Ὡς εἶναι εὐνόητον, τὸ μέγεθος τοῦ ἐρμηνευομένου ὑπὸ τῆς  
παλινδρομήσεως τμήματος ποικίλλει, ἀπολύτως καὶ σχετικῶς, ἀπὸ τι-  
μῆς εἰς τιμὴν τῆς  $\Psi$ . Διὰ τοῦτο, πρὸς ἀντλησιν γενικῶν πληροφορι-  
ῶν περὶ τῆς ἐκτάσεως, ἀλλὰ καὶ τῆς σημαντικότητος, τῆς συμβολῆς  
τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς εἰς τὴν ἐρμηνείαν τῶν μεταβολῶν τῆς  
ἐξηρητημένης, λαμβάνομεν τὸ σύνολον τῶν διαθέσιμων τιμῶν. Ἐν προ-

κειμένων χρησιμοποιούμεν τὰς συνολικὰς μεταβολὰς τῶν ἀρχικῶν τιμῶν τῆς  $\Psi$ , τὰς ὁποίας διαιροῦμεν εἰς δύο μέρη, δηλαδή εἰς ἓν ἐρμηνευόμενον ὑπὸ τῆς μεταβλητῆς  $X$  καὶ εἰς ἕτερον παραμένον ἀνερμηνευτον. Ὅσον μικρότερον εἶναι τὸ ἀνερμηνευτον τοῦτο μέρος τῆς ἐξηγητημένης μεταβλητῆς τόσον καλλιτέρα εἶναι ἡ προσαρμογὴ τῆς γραμμῆς παλινδρομήσεως. Εἶναι φανερόν ὅτι, ὅταν οὐδέν ἀνερμηνευτον μέρος ὑπάρχη, αἱ ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως παρεχόμεναι ἐκτιμήσεις  $\Psi$  θὰ συμπίπτουν μὲ τὰς ἀρχικὰς τιμὰς  $\Psi$ .

Ἡ μέτρησις τῶν μεταβολῶν τῶν τιμῶν τῆς  $\Psi$  δύναται νὰ γίνῃ διὰ χρησιμοποίησεως ἑνὸς ἐκ τῶν γνωστῶν μέτρων διασπορᾶς. Ἐνταῦθα, ὅμως, κρίνεται προτιμότερα ἡ λήψις τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν ἀποκλίσεων τῶν ἀρχικῶν τιμῶν ἐκ τοῦ μέσου των. Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς τιμῆς τῆς μεταβλητῆς  $\Psi$  τῆς ἀντιστοιχοῦσης εἰς τιμὴν τῆς  $X$  1350 δραχμαί, ἡ ὁποία ἐμφαίνεται εἰς τὸ Διάγραμμα  $\Theta-11$  διὰ τοῦ σημείου  $\Gamma$ , ἡ διαίρεσις αὐτῆς, ὡς ἀποκλίσεως λαμβανόμενης, ἔχει, προφανῶς, ὡς ἐξῆς:  $A\Gamma = A'B + B\Gamma$ . Δηλαδή ἡ ἀπόκλισις τῆς ἐκ παρατηρήσεως τιμῆς τῆς  $\Psi$  ἐκ τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου ὅλων τῶν τιμῶν τοῦ δείγματος ( $\bar{\Psi}$ ) ἀποτελεῖται ἐκ τῆς ἀποκλίσεως τῆς θεωρητικῆς τιμῆς  $\hat{\Psi}$  ἐκ τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου  $\bar{\Psi}$  καὶ ἐκ τῆς ἀποκλίσεως τῆς ἀρχικῆς τιμῆς  $\psi$  ἐκ τῆς θεωρητικῆς  $\bar{\Psi}$ . Ἀποδεικνύεται (1) ὅτι παρομοία σχέσεις ὑφίσταται καὶ μεταξύ τῶν ἀθροισμάτων τῶν τετραγώνων τῶν ἀποκλίσεων τῶν ἀναφερομένων εἰς ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ δείγματος. Ἦτοι εἶναι:

$$(1) \text{ Ἐχομεν: } \Sigma (\psi - \bar{\Psi})^2 = \Sigma \psi^2 - 2\bar{\Psi}\Sigma\psi + n\bar{\Psi}^2$$

$$\text{Ἐπίσης: } \Sigma (\hat{\Psi} - \bar{\Psi})^2 + \Sigma (\psi - \hat{\Psi})^2 = \Sigma \hat{\Psi}^2 - 2\bar{\Psi}\Sigma\hat{\Psi} + n\bar{\Psi}^2 + \Sigma \psi^2 - 2\bar{\Psi}\Sigma\psi + \Sigma \hat{\Psi}^2$$

$$= \Sigma \psi^2 + n\bar{\Psi}^2 + 2\Sigma\hat{\Psi}^2 - 2\bar{\Psi}\Sigma\hat{\Psi} - 2\Sigma\psi\hat{\Psi}$$

Εἶναι ὁμως:  $\Sigma\psi\hat{\Psi} = \Sigma\psi$  διότι  $\Sigma\psi = \Sigma(a+bX) = na + b\Sigma X$  καὶ ἐκ τῆς πρώτης κανονικῆς ἐξισώσεως  $\Sigma\psi = na + b\Sigma X$ .

Ὁμοίως:  $\Sigma\hat{\Psi}^2 = \Sigma\psi\hat{\Psi}$ , διότι εἶναι:

$$\Sigma\psi\hat{\Psi} = \Sigma[\psi(a+bX)] = \Sigma(a\psi + bX\psi) = a\Sigma\psi + b\Sigma X\psi$$

$$\text{καὶ } \Sigma\hat{\Psi}^2 = \Sigma(a+bX)^2 = \Sigma(a^2 + 2abX + b^2X^2) = na^2 + 2ab\Sigma X + b^2\Sigma X^2 =$$

$$= a(na + b\Sigma X) + b(a\Sigma X + b\Sigma X^2) = a\Sigma\psi + b\Sigma X\psi,$$

δεδομένου ὅτι ἐκ τῶν κανονικῶν ἐξισώσεων λαμβάνομεν:  $na + b\Sigma X = \Sigma\psi$  καὶ  $a\Sigma X + b\Sigma X^2 = \Sigma X\psi$

Ἐπομένως κατόπιν σχετικῆς ἀντικαταστάσεως ἔχομεν:

$$\Sigma (\hat{\Psi} - \bar{\Psi})^2 + \Sigma (\psi - \hat{\Psi})^2 = \Sigma \psi^2 - 2\bar{\Psi}\Sigma\psi + n\bar{\Psi}^2 = \Sigma (\psi - \bar{\Psi})^2$$

$$\Theta-26) \quad \Sigma (\Psi - \bar{\Psi})^2 = \Sigma (\hat{\Psi} - \bar{\Psi})^2 + \Sigma (\Psi - \hat{\Psi})^2$$

Ούτω, ἡ συνολικὴ "διακυμάνσις" τῶν ἐν παρατηρήσεως τιμῶν τῆς  $\Psi$ , μετρουμένη ἐν προκειμένῳ διὰ τοῦ ἄθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν ἀποκλίσεων αὐτῶν ἐκ τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου των, διασπᾶται εἰς δύο μέρη, ἥτοι εἰς ἓν ἐρμηνευόμενον ὑπὸ τῆς εὐθείας παλινδρομήσεως, ἐκφραζόμενον ὑπὸ τοῦ ἄθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν ἀποκλίσεων τῶν θεωρητικῶν τιμῶν  $\hat{\Psi}$  ἐκ τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου  $\bar{\Psi}$  καὶ εἰς ἕτερον παραμένον ἀνερμηνευτον, τὸ ὅποιον δίδεται ὑπὸ τοῦ ἄθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν ἀποκλίσεων τῶν ἀρχικῶν τιμῶν  $\Psi$  ἐκ τῶν ἀντιστοιχῶν θεωρητικῶν  $\hat{\Psi}$ .

Πρὸς ὑπολογισμόν τῆς συνολικῆς διακυμάνσεως τῆς καταναλώσεως σακχάρους ( $\Psi$ ), ὡς καὶ τοῦ ὑπὸ τοῦ χρηματικοῦ εἰσοδήματος ( $X$ ) ἐρμηνευομένου καὶ ἀνερμηνεύτου μέρους αὐτῆς ἐχρησιμοποιήθη ἡ κατάταξις τοῦ Πίνακος  $\Theta-8$ . Ἐκ τῶν προκυψάντων ἀποτελεσμάτων, τὰ ὅποια ἐμφανίζονται συνοπτικῶς εἰς τὸν Πίνακα  $\Theta-9$ , προκύπτει ὅτι τὸ μέγιστον μέρος τῆς διακυμάνσεως τῆς καταναλώσεως σακχάρους μεταξύ τῶν οἰογενεῶν τοῦ δείγματος, ἀνερχόμενον εἰς 87,4%,

Πίναξ  $\Theta-8$ 

Ὑπολογισμὸς συνολικῆς διακυμάνσεως, ὡς καὶ τοῦ ἐρμηνευομένου καὶ ἀνερμηνεύτου μέρους αὐτῆς, διὰ τὴν κατανάλωσιν σακχάρους ( $\Psi$ ) θεωρουμένην ὡς συνάρτησιν τοῦ χρηματικοῦ εἰσοδήματος ( $X$ )

Ἀρχικά δεδομένα		$\Phi$	Ἀποκλίσεις			Τετράγωνα ἀποκλίσεων		
$X$	$\Psi$		$\Psi - \bar{\Psi}$	$\Phi - \bar{\Phi}$	$\Psi - \Phi$	$(\Psi - \bar{\Psi})^2$	$(\Phi - \bar{\Phi})^2$	$(\Psi - \Phi)^2$
125	0,530	0,651	-0,411	-0,290	-0,121	0,168921	0,084100	0,014641
350	0,707	0,735	-0,234	-0,206	-0,028	0,054756	0,042436	0,000784
625	0,936	0,838	-0,005	-0,103	0,098	0,000025	0,010609	0,009604
950	1,088	0,960	0,147	0,019	0,128	0,021609	0,000369	0,016384
1350	1,114	1,109	0,173	0,168	0,005	0,029929	0,028224	0,000025
2000	1,269	1,352	0,328	0,411	-0,083	0,107584	0,168921	0,006889
5400	5,644	5,645				0,382824 <sup>(α)</sup>	0,334659	0,048327

(α) Λόγῳ τῶν στρογγυλεύσεων δὲν ὑφίσταται ἰσότης πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἐπὶ μέρους ἀποκλίσεων.

έρμηνεύεται υπό τῶν διαφορῶν εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ χρηματικοῦ εἰσοδήματος καὶ μόνον 12,6% παραμένει ἀνερμήνευτον ὑπ' αὐτῶν.

Ὁ λόγος τοῦ ἐρμηνευομένου ὑπὸ τῆς Χ μέρους τῆς διακυμάνσεως τῆς ἐξηρητημένης μεταβλητῆς Ψ πρὸς τὸ σύνολον αὐτῆς καλεῖται "συντελεστὴς προσδιορισμοῦ". Οὗτος ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ συντελεστοῦ συσχετίσεως ( $r^2$ ), συμβολίζεται δέ συνήθως διὰ τοῦ  $R^2$ . Ἦτοι εἶναι :

$$(\Theta-27) \quad R^2 = \frac{\sum (\hat{\psi} - \bar{\psi})^2}{\sum (\psi - \bar{\psi})^2}$$

### Πίναξ Θ - 9

Ἀνάλυσις τῆς διακυμάνσεως τῆς καταναλώσεως σακχάρους

Διακύμανσις	Συμβολισμός	Ἐκτίμησις διακυμάνσεως	Ποσοστὸν % τῆς συνολ. διακυμ.
Ἐρμηνευομένη ὑπὸ χρηματικοῦ εἰσοδήμ.	$\sum (\hat{\psi} - \bar{\psi})^2$	0,334659	87,4
Ἄνερμήνευτος	$\sum (\psi - \hat{\psi})^2$	0,048327	12,6
Συνολικῆ	$\sum (\psi - \bar{\psi})^2$	0,382824 (α)	100,0

(α) Λόγῳ τῶν στρογγυλεύσεων δὲν ὑφίσταται ἰσότης πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἐπὶ μέρους ἀποκλίσεων.

Εἶναι φανερόν ὅτι ἡ σχέσηις τοῦ μέρους τῆς διακυμάνσεως τῆς ἐξηρητημένης μεταβλητῆς τοῦ μὴ ἐρμηνευομένου ὑπὸ τῆς Χ πρὸς τὴν συνολικὴν διακύμανσιν τῆς Ψ θά εἶναι :

$$(\Theta-28) \quad 1 - R^2 = \frac{\sum (\psi - \hat{\psi})^2}{\sum (\psi - \bar{\psi})^2}$$

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω, ὁ συντελεστὴς συσχετίσεως δύναται νὰ ὀρισθῆ, ὄχι μόνον κατὰ τοὺς ἤδη ἀναφερθέντας δύο τρόπους, ἀλλὰ καίως ἢ τετραγωνικὴ ρίζα τῆς ἀναλογίας τῆς διακυμάνσεως τῆς ἐξηρητημένης μεταβλητῆς, ἢ ὅποια ἐρμηνεύεται ὑπὸ τῆς ἐξιῶσεως παλινδρομήσεως. Εἶναι, δηλαδὴ :



$$(\Theta-29) \quad r = \pm \sqrt{\frac{\Sigma(\hat{\Psi} - \bar{\Psi})^2}{\Sigma(\Psi - \bar{\Psi})^2}}$$

Τό πρόσημον τῆς διά τοῦ τύπου  $(\Theta-29)$  ὑπολογιζομένης τιμῆς τοῦ  $r$  δέν καθορίζεται ἐκ τῶν σχετικῶν πράξεων, καθ' ὅσον ὁ ἐκ τῆς ἔξαγωγῆς τῆς τετραγωνικῆς ρίζης προκύπτων ἀριθμός δύναται νά εἶναι θετικός ἢ ἀρνητικός. Διά τοῦτο, ὅταν ἐφαρμόζεται ὁ ἐν λόγω τύπος, τό πρόσημον τοῦ συντελεστοῦ συσχετίσεως προσδιορίζεται ἐπί τῆ βάσει εἴτε τῆς μορφῆς τοῦ διαγράμματος διασπορᾶς εἴτε τοῦ προσήμου τοῦ γωνιακοῦ συντελεστοῦ, ἐφ' ὅσον βεβαίως, ἔχει ἐκτιμηθῆ ἢ εὐθεῖα παλινδρομήσεως. Προφανῶς, ὁ συντελεστής συσχετίσεως εἶναι πάντοτε ὑψηλότερος τοῦ ἀντιστοίχου συντελεστοῦ προσδιορισμοῦ, ἐκτός τῶν περιπτώσεων κατὰ τὰς ὁποίας ἔχομεν  $R^2 = 1$  καί  $R^2 = 0$ , ὁπότε εἶναι  $r = R^2$ .

Ὁ συντελεστής προσδιορισμοῦ <sup>(1)</sup> εἰς τήν εὐθεῖαν παλινδρομήσεως τῆς καταναλώσεως σακχάρους ἐπί τοῦ χρηματικοῦ εἰσοδήματος ἔχει ἤδη ὑπολογισθῆ εἰς τόν Πίνακα  $\Theta-9$  καί εἶναι :

$$R^2 = \frac{0,334659}{0,382824} = 0,874$$

Οὗτος, ὡς ἀνωτέρω ἐλέχθη, σημαίνει ὅτι 87,4% τῆς διακυμάνσεως τῆς καταναλώσεως σακχάρους ἐρμηνεύεται ὑπό τῶν διαφορῶν εἰς τό ἐπίπεδον τοῦ χρηματικοῦ εἰσοδήματος καί μόνον 12,6% αὐτῆς ὀφείλεται εἰς ἑτέρους παράγοντας. Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου  $(\Theta-29)$  προκύπτει ἡ τιμή τοῦ συντελεστοῦ συσχετίσεως:  $r = \sqrt{0,874} = 0,9350$ , ἡ ὁποία, λόγω τῶν στρογγυλεύσεων διαφέρει

- (1) Σημειωτέον ὅτι εἰς πρακτικούς ὑπολογισμούς ἐνδεῖνται ἡ χρησιμοποίησις τοῦ τύπου :

$$R^2 = \frac{a\Sigma\Psi + b\Sigma X\Psi - n(\bar{\Psi})^2}{\Sigma\Psi^2 - n(\bar{\Psi})^2}$$

ὁ ὁποῖος στηρίζεται εἰς τὰς ἀρχικὰς τιμὰς τῶν μεταβλητῶν καί τὰς σταθεράς τῆς ἐξισώσεως παλινδρομήσεως. Οὗτος προκύπτει ἐκ τοῦ  $(\Theta-28)$  κατόπιν καταλλήλων ἀλγεβρικῶν μετασχηματισμῶν, ὡς ἑξῆς :

Ἐκ τοῦ κατωτέρω τύπου  $(\Theta-32)$  λαμβάνομεν :  $\Sigma(\Psi - \hat{\Psi})^2 = \Sigma\Psi^2 - a\Sigma\Psi - b\Sigma X\Psi$ , ἐκ δὲ τῶν ἀνωτέρω εἶναι γνωστόν ὅτι :  $\Sigma(\Psi - \bar{\Psi})^2 = \Sigma\Psi^2 - n(\bar{\Psi})^2$ . Ἐπομένως, εἶναι :

$$R^2 = 1 - \frac{\Sigma(\Psi - \hat{\Psi})^2}{\Sigma(\Psi - \bar{\Psi})^2} = 1 - \frac{\Sigma\Psi^2 - a\Sigma\Psi - b\Sigma X\Psi}{\Sigma\Psi^2 - n(\bar{\Psi})^2} = \frac{a\Sigma\Psi + b\Sigma X\Psi - n(\bar{\Psi})^2}{\Sigma\Psi^2 - n(\bar{\Psi})^2}$$

τά τι τῆς ἀρχικῶς ὑπολογισθείσης. Δέον ἐνταῦθα νά σημειωθῆ ὅτι ὁ σχετικῶς ὑψηλὸς συντελεστὴς προσδιορισμοῦ  $R^2 = 0,874$  ὀφείλεται ἐν μέρει εἰς τὸ γεγονός ὅτι τὰ χρησιμοποιηθέντα εἰς τὴν ἀνάλυσιν ἀρχικὰ δεδομένα ἀποτελοῦν ἀριθμητικούς μέσους, κατὰ τὸν ὑπολογισμόν τῶν ὁποίων ἀπηλείφθη μέρος τῆς διακυμάνσεως τῶν ἀτομικῶν τιμῶν τῶν μεγεθῶν. Πάντως, ὡς ἐκ τῆς διατάξεως τοῦ νέφους τῶν σημείων εἰς τὸ σχετικόν διάγραμμα διασπορᾶς, ὁ συντελεστὴς προσδιορισμοῦ θά ἦτο ἀκόμη ὑψηλότερος τοῦ  $0,874$ , ἐάν εἰς τὰς ἐκ παρατηρήσεως τιμὰς προσηρμόζετο, ἀντὶ εὐθείας, καμπύλης γραμμῆς.

Εἰς τὸ παράδειγμα τῆς παλινδρομήσεως τοῦ κατὰ κεφαλὴν ἀκαθαρστοῦ ἐγχωρίου προϊόντος ἐπὶ τοῦ ποσοστοῦ τοῦ ἀγροτικοῦ πληθυσμοῦ εἰς τὸν συνολικόν ἔχομεν συντελεστὴν προσδιορισμοῦ  $R^2 = 0,921$ , ὁ ὁποῖος δεικνύει ὅτι ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ ἐρμηνεύει εἰς τὴν  $92,1\%$  τῆς διακυμάνσεως τῆς ἐξερτημένης μεταβλητῆς. Τέλος, εἰς τὴν παλινδρόμησιν τῆς ἰδιωτικῆς καταναλώσεως ἐπὶ τοῦ διαθέσιμου ἰδιωτικοῦ εἰσοδήματος εἶναι  $R^2 = 0,998$ . Ἐνταῦθα, δηλαδή, τὸ ὑπὸ τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς ἐρμηνευόμενον ποσοστὸν τῆς διακυμάνσεως τῆς ἐξερτημένης εἶναι ἔτι μεγαλύτερον, ἀνερχόμενον εἰς  $99,8\%$ .

### 8. Μέσον σφάλμα τετραγώνου τῆς ἐκτιμήσεως

Τὸ μέγεθος τῶν ἀποκλίσεων τῶν ἐκ παρατηρήσεως τιμῶν τῆς ἐξερτημένης μεταβλητῆς ἐκ τῶν ἀντιστοιχῶν θεωρητικῶν τιμῶν αὐτῆς καθορίζει τὴν ἀκρίβειαν ἢ, ἄλλως, τὴν "προβλεπτικὴν ἱκανότητα" τῶν ὑπὸ τῆς ἐξιῶσεως παλινδρομήσεως παρεχομένων ἐκτιμήσεων. Ὁ βαθμὸς ἀκρίβειας τῶν  $\hat{\psi}$  μετρεῖται διὰ τοῦ "μέσου σφάλματος τετραγώνου τῆς ἐκτιμήσεως" ( $\sigma_{\psi \cdot X}$ ), τὸ ὁποῖον, προκειμένου περὶ τοῦ πληθυσμοῦ ὑπολογίζεται ὡς ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν ἀποκλίσεων τῶν ἀρχικῶν τιμῶν τῆς ἐξερτημένης μεταβλητῆς ἐκ τῶν ἀντιστοιχῶν θεωρητικῶν τιμῶν αὐτῆς. Ἦτοι ἔχομεν :

$$(\Theta-30) \quad \sigma_{\psi \cdot X} = \sqrt{\frac{\sum (\psi - \hat{\psi})^2}{N}}$$

ὅπου  $N$  = τὸ μέγεθος τοῦ πληθυσμοῦ.

Ὡς ἐκτίμησις τοῦ  $\sigma_{\psi \cdot X}$  χρησιμοποιεῖται ἡ ἐκ τοῦ δείγματος προκύπτουσα ἀντίστοιχος τιμὴ ( $S_{\psi \cdot X}$ ), κατὰ τὸν ὑπολογισμόν τῆς ὁποίας, ὅμως, ὡς παρονομαστῆς εἰς τὸ ὑπόρριζον λαμβάνεται ὁ ἀ-

ριθμός τῶν ζευγῶν τιμῶν μειωμένος κατά δύο. Είναι δηλαδή :

$$(Θ-31) \quad S_{\psi \cdot X} = \sqrt{\frac{\Sigma(\psi - \bar{\psi})^2}{n-2}}$$

Σχετικῶς μέ τήν μείωσιν αὐτήν τοῦ παρονομαστοῦ δεόν νά λεχθῆ ὅτι εἰς τήν ἐξίσωσιν παλινδρομήσεως ὑπάρχουν δύο σταθεραὶ αἰά καὶ b καὶ συνεπῶς ἀπόλλυνται δύο βαθμοὶ ἐλευθερίας. Είναι φανερόν ὅτι ἡ ἐν λόγω μείωσις τοῦ n εἰς τήν περίπτωσιν ἑνός μεγάλου δείγματος πολὺ μικρὰν ἐπίδρασιν θά ἔχη ἐπὶ τοῦ ἀποτελέσματος τῆς ἐκτιμῆσεως. Ὅταν, ὅμως, τὸ δείγμα περιλαμβάνη πολὺ μικρὸν ἀριθμὸν ζευγῶν τιμῶν τῶν X καὶ ψ, τότε ἡ χρησιμοποίησις τοῦ n-2, ἀντὶ τοῦ n ἐνδέχεται νά μεταβάλῃ οὐσῶδῶς τήν τιμὴν τοῦ  $S_{\psi \cdot X}$ .

Πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ μέσου σφάλματος τετραγώνου ἐκτιμῆσεως εἰς τήν ἐξίσωσιν παλινδρομήσεως τῆς καταναλώσεως σακχάρους ἐπὶ τοῦ χρηματικοῦ εἰσοδήματος, χρησιμοποιοῦμεν τήν κατάταξιν τοῦ Πίνακος Θ-8, ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν  $\Sigma(\psi - \bar{\psi})^2 = 0,048327$ . Ἦτοι, ἔχομεν

$$S_{\psi \cdot X} = \sqrt{\frac{0,048327}{4}} = 0,110$$

Εἰς τὰς ἐφαρμογὰς, ὅμως, εἶναι προτιμότερον νά χρησιμοποιῆται ὁ κάτωθι τύπος, ὁ ὁποῖος προκύπτει ἐκ τοῦ (Θ-31) κατόπιν καταλλήλων ἀλγεβρικῶν μετασχηματισμῶν (1) :

$$(Θ-32) \quad S_{\psi \cdot X} = \sqrt{\frac{\Sigma\psi^2 - \alpha\Sigma\psi - b\Sigma X\psi}{n-2}}$$

(1) Ἔχομεν :

$$\Sigma(\psi - \bar{\psi})^2 = \Sigma(\psi - \alpha - bX)^2 = \Sigma(\psi - \alpha - bX)(\psi - \alpha - bX) = \Sigma\psi(\psi - \alpha - bX) - \alpha\Sigma(\psi - \alpha - bX) - b\Sigma X(\psi - \alpha - bX)$$

Ἄλλὰ ἐκ τῆς πρώτης κανονικῆς ἐξισώσεως λαμβάνομεν :  $\Sigma(\psi - \alpha - bX) = \Sigma(\psi - \bar{\psi}) = 0$  καὶ ἐκ τῆς δευτέρας :  $\Sigma X(\psi - \alpha - bX) = 0$

Ἐπομένως :

$$\Sigma(\psi - \bar{\psi})^2 = \Sigma\psi(\psi - \alpha - bX) = \Sigma\psi^2 - \alpha\Sigma\psi - b\Sigma X\psi$$

Ἦτοι εἶναι :

$$S_{\psi \cdot X} = \sqrt{\frac{\Sigma\psi^2 - \alpha\Sigma\psi - b\Sigma X\psi}{n-2}}$$

Ούτω, εἰς τὸ παράδειγμα τῆς καταναλώσεως σακχάρους τὸ μέσον σφάλμα τετραγώνου τῆς ἐκτιμήσεως δύναται νὰ ὑπολογισθῇ καὶ ὡς ἑξῆς, διὰ χρησιμοποίησεως τῆς κατατάξεως τοῦ Πίνακος Θ-5 καὶ τῶν σταθερῶν τῆς ἐξισώσεως (Θ-17) :

$$S_{\psi, X} = \sqrt{\frac{5,592 - (0,604400)(5,644) - (0,000374)(5,974,200)}{4}} = 0,108$$

Σημειωτέον ὅτι ἡ μικρὰ διαφορὰ τὴν ὁποῖαν παρουσιάζει τὸ ἀποτέλεσμα τοῦτο ἐν σχέσει μὲ τὸ προκύψαν ἐκ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ ἀρχικοῦ τύπου τῶν διαφορῶν ὀφείλεται εἰς τὰς στρογγυλεύσεις.

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω περιγραφῆς τοῦ μέσου σφάλματος τετραγώνου τῆς ἐκτιμήσεως καθίσταται σαφές ὅτι τοῦτο εἶναι διὰ τὴν παλινδρομῆσιν ὅτι ἡ μέση ἀπόκλισις τετραγώνου διὰ τὰ μονομεταβλητὰ ὑποδείγματα. Ἡ διαφορὰ μεταξύ αὐτῶν ἔγκειται μόνον εἰς τὸ γεγονός ὅτι αἱ ἀποκλίσεις, ἐνῶ εἰς τὴν πρώτην ὑπολογίζονται ἐκ τινος θεωρητικῆς τιμῆς ἀντικατοπτρίζουσης τὴν ἐπίδρασιν ἑτέρας μεταβλητῆς, εἰς τὴν δευτέραν λαμβάνονται ἐκ τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου τῶν παρατηρήσεων. Ἐκ τούτου προκύπτει, βεβαίως, ὅτι τὸ μέσον σφάλμα τετραγώνου τῆς ἐκτιμήσεως ( $S_{\psi, X}$ ) θὰ ἴσούται πρὸς τὴν μέσην ἀπόκλισιν τετραγώνου ( $S_{\psi}$ ) τῶν τιμῶν τῆς  $\psi$ , αὐτοτελῶς λαμβανομένων, ὅταν οὐδεμία σχέσις ὑπάρχη μεταξύ τῶν  $X$  καὶ  $\psi$ . Εἰς ὅλας τὰς ἄλλας περιπτώσεις ἡ τιμὴ τοῦ  $S_{\psi, X}$  θὰ ὑπολείπεται τῆς τιμῆς τοῦ  $S_{\psi}$  εἰς ἕκτασιν ἐξαρτημένην ἐκ τοῦ μεγέθους τοῦ συντελεστοῦ συσχετίσεως. Διὰ χρησιμοποίησεως τῆς σχέσεως (Θ-28) λαμβάνομεν :

$$1-R^2 = \sqrt{\frac{\sum(\psi - \hat{\psi})^2}{\sum(\psi - \bar{\psi})^2}} = \sqrt{\frac{\frac{\sum(\psi - \hat{\psi})^2}{n-2}}{\frac{\sum(\psi - \bar{\psi})^2}{n-2}}} = \frac{S_{\psi, X}}{S_{\psi}}$$

Συνεπῶς, ὁ λόγος τοῦ μέσου σφάλματος τετραγώνου ἐκτιμήσεως πρὸς τὴν μέσην ἀπόκλισιν τετραγώνου καθίσταται τοσοῦτον μεγαλύτερος ὅσον μικρότερος εἶναι ὁ συντελεστὴς συσχετίσεως.

Θεωρητικῶς, αἱ ἐκ παρατηρήσεως τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς  $\psi$  αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς διαφόρους τιμὰς τῆς  $X$  ἀναμένεται ὅτι θὰ κατανέμονται κανονικῶς περὶ τῆς ἐκτιμηθείσης εὐθείας παλινδρομήσεως. Ὅταν τοῦτο πράγματι συμβαίνει καὶ τὸ μέγεθος τοῦ δείγματος εἶναι ἀρκούντως μέγα, τὸ μέσον σφάλμα τετραγώνου τῆς ἐκτιμήσεως

δύναται νά χρησιμεύσῃ πρὸς καθορισμὸν ζωνῶν ἔνθεν καὶ ἔνθεν τῆς εὐθείας παλινδρομήσεως - καθ' ὃν τρόπον ἡ μέση ἀπόκλισις τετραγώνου χρησιμεύει πρὸς καθορισμὸν διαστημάτων πέριξ τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου - ἐντὸς τῶν ὁποίων θά περιλαμβάνωνται τὰ κάτωθι ποσοστά τῶν τιμῶν ἐκ παρατηρήσεως τῆς  $\Psi$  :

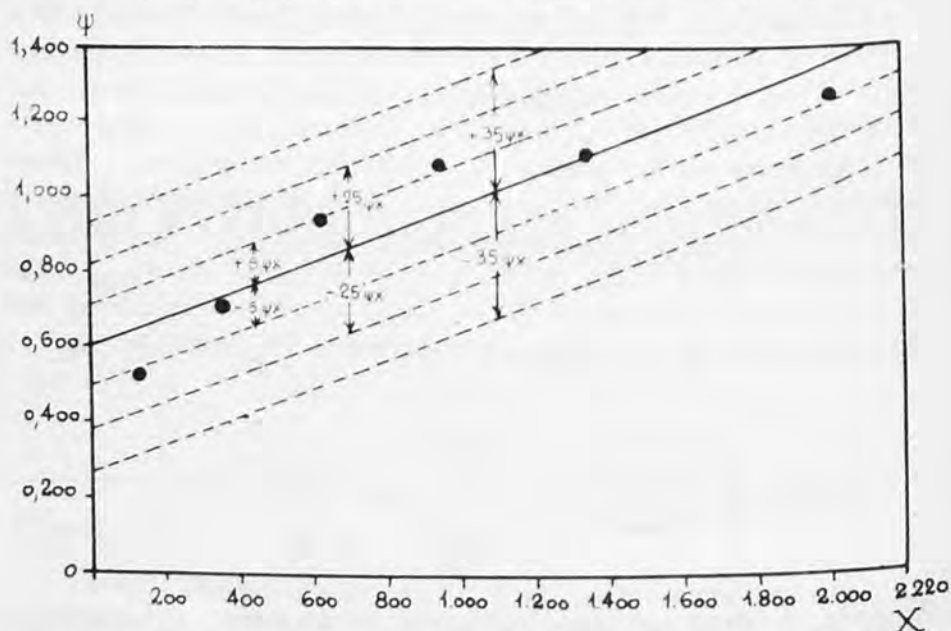
Εἰς τὴν ζώνην  $\Psi \pm 5\psi \cdot X$  θά περιλαμβάνωνται τὰ 68,27% τῶν τιμῶν ἐκ παρατηρήσεως τῆς  $\Psi$ .

Εἰς τὴν ζώνην  $\Psi \pm 25\psi \cdot X$  θά περιλαμβάνωνται τὰ 95,45% τῶν τιμῶν ἐκ παρατηρήσεως τῆς  $\Psi$ .

Εἰς τὴν ζώνην  $\Psi \pm 35\psi \cdot X$  θά περιλαμβάνωνται τὰ 99,73% τῶν τιμῶν ἐκ παρατηρήσεως τῆς  $\Psi$ .

### Διάγραμμα Θ - 12

Ζῶναι  $\pm 1$ ,  $\pm 2$  καὶ  $\pm 3$  μέσων σφαλμάτων τετραγώνου ἐκτιμήσεως τῆς καταναλώσεως σακχάρους ( $\Psi$ ) καὶ τοῦ χρηματικοῦ εἰσοδήματος ( $X$ )



Εἰς τὸ Διάγραμμα Θ-12 προσδιορίζονται αἱ ἐν λόγῳ τρεῖς ζῶναι ἐπὶ τοῦ νέφους τῶν σημείων τῶν ἐκ παρατηρήσεως τιμῶν τῆς καταναλώσεως σακχάρους καὶ τοῦ χρηματικοῦ εἰσοδήματος. Παρατηρεῖται ἐν προκειμένῳ ὅτι ἐκ τῶν ἑξῆς σημείων εἰς τὴν ζώνην  $\Psi \pm 5\psi \cdot X$  περιλαμβάνονται τὰ τέσσαρα, ἡτοι τὰ 66,67% τοῦ συνόλου καὶ εἰς τὰς ζῶνας  $\Psi \pm 25\psi \cdot X$  καὶ  $\Psi \pm 35\psi \cdot X$  καὶ τὰ ἑξῆ, ἡτοι τὰ 100,00%.

Αἱ ἀποκλίσεις τῶν ποσοστῶν τούτων ἐκ τῶν ἀντιστοιχῶν θεωρητικῶν ὀφείλονται, προφανῶς, εἰς τὸ μικρὸν μέγεθος τοῦ χρησιμοποιηθέντος δείγματος καί, ἰδίως, εἰς τὴν ἀδυναμίαν τοῦ γραμμικοῦ ὑποδείγματος ὅπως ἀποδώσῃ ἱκανοποιητικῶς τὴν μεταξύ τῶν ἐξεταζομένων μεταβλητῶν ὑφισταμένην σχέσιν.

Ὅταν ἡ ὑπόθεσις περὶ κανονικότητος θεωρῆται ὅτι ἀνταποκρίνεται πρὸς τὴν πραγματικότητα, τὸ δὲ δείγμα ἐκ παρατηρήσεως εἶναι ἀντιπροσωπευτικόν, εἶναι δυνατὴ ἡ χρησιμοποίησις τοῦ μέσου σφάλματος τετραγώνου τῆς ἐκτιμήσεως καὶ πρὸς καθορισμὸν τοῦ διαστήματος ἐντὸς τοῦ ὁποίου θὰ ἐμπέπη, με ἄρισμένην πιθανότητα, ἡ τιμὴ τῆς μεταβλητῆς  $\psi$  ἢ ἀντιστοιχοῦσα εἰς δεδομένην τιμὴν τῆς μεταβλητῆς  $X$ . Συνήθως, ὅμως, δέν συντρέχουν αἱ ἀναγκαῖαι προϋποθέσεις διὰ τοιοῦτου εἶδους ἐκτιμήσεις, δεδομένου ὅτι τὰ δείγματα ἐπὶ τῶν ὁποίων στηρίζονται αὐταί εἶναι σχετικῶς μικρά. Εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτάς τὸ πρόβλημα τοῦ καθορισμοῦ ὁρῶν ἐμπιστοσύνης, κευμένης τιμῆς τῆς  $\psi$ , ἀντιμετωπίζεται διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως καταλλήλου διορθωτικοῦ παράγοντος, ὁ ὁποῖος κατ' οὐσίαν συντελεῖ εἰς τὴν ἐκτίμησιν ζωνῶν μεταβαλλομένου πλάτους κατὰ μῆκος τῆς εἰς τὰ ἀρχικὰ δεδομένα προσαρμοσθείσης εὐθείας γραμμῆς.

### 9. Στατιστικὴ σημαντικότης τῶν σταθερῶν τῆς εὐθείας παλινδρομήσεως

Αἱ σταθεραὶ τῆς εὐθείας παλινδρομήσεως μιᾶς μεταβλητῆς  $\psi$  ἐπὶ ἑτέρας  $X$  αἱ προκύπτουσαι διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου τῶν ἐλάχιστων τετραγῶνων κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἐκτεθέντα, ἀφοροῦν, ὡς εἴλασιν φυσικόν, ἀποκλειστικῶς εἰς τὸ δείγμα τῶν παρατηρήσεων ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐστηρίχθη ἡ ἐκτίμησις. Ἐάν ὁ ὑπολογισμὸς ἐνηργεῖτο διὰ χρησιμοποιήσεως ἑτέρου, ἴσου μεγέθους, δείγματος, προερχομένου ἐκ τοῦ ἰδίου πληθυσμοῦ, αἱ νέαι τιμαὶ τῶν  $\alpha$  καὶ  $\beta$  θὰ ἦσαν διαφορετικαὶ τῶν προηγουμένων. Οὕτω, διὰ τῆς λήψεως ἐπανειλημμένων δειγμάτων δύνανται νὰ ἐκτιμηθοῦν πολλαὶ τιμαὶ τῶν ἐν λόγῳ σταθερῶν. Ἐν προκειμένῳ, ὅμως, ὅτι κυρίως ἐνδιαφέρει εἶναι ἡ ἐκτίμησις τῆς εἰς τὸν πληθυσμὸν ὑφισταμένης σχέσεως :

$$\psi = \alpha + \beta X$$

(Θ-33)

ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἐξιῶσεως παλινδρομήσεως τοῦ δείγματος. Ὡς διὰ πᾶσαν στατιστικὴν ἐπαγωγὴν, οὕτω καὶ διὰ τὴν ἀφορῶ-

σαν εἰς τὰς σταθεράς  $\alpha$  καὶ  $\beta$ , ἀπαιτεῖται ἐκτίμησις τῆς διακυμάνσεως τῶν σχετικῶν κατανομῶν. Ἡ σταθερά  $\alpha$ , δεδομένου ὅτι προσδιορίζει ἀπλῶς τὸ γενικὸν ἐπίπεδον τῶν  $\Psi$ , δὲν παρουσιάζει συνήθη ἰδιαίτερον ἐνδιαφέρον ἀπὸ πλευρᾶς κατανομῆς. Ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὸν γωνιακὸν συντελεστήν, ἡ κατανομή τῶν ἐκτιμήσεων αὐτοῦ ἐν δειγμάτων ἀποτελουμένων ἀπὸ  $n$  παρατηρήσεις ἀποδεικνύεται ὅτι ἔχει διακύμανσιν :

$$(\Theta-34) \quad S_b^2 = \frac{S_{\Psi \cdot X}^2}{nS_X^2} = \frac{S_{\Psi \cdot X}^2}{\Sigma(X-\bar{X})^2}$$

Τὸ τυπικὸν σφάλμα ἐκτιμήσεως τοῦ  $b$  εἶναι προφανῶς :

$$(\Theta-35) \quad S_b = \sqrt{\frac{S_{\Psi \cdot X}^2}{\Sigma(X-\bar{X})^2}}$$

Πρὸς διευκόλυνσιν τῶν ὑπολογισμῶν εἶναι προτιμότερον ὅπως χρησιμοποιοῦνται, ἀντὶ τοῦ  $(\Theta-35)$ , ὁ κάτωθι τύπος, ὁ ὁποῖος στηρίζεται εἰς τὰς ἀρχικὰς τιμὰς τῶν μεταβλητῶν καὶ προκύπτει κατόπιν καταλήλων ἀλγεβρικῶν μετασχηματισμῶν τοῦ προηγουμένου :<sup>(1)</sup>

$$(\Theta-36) \quad S_b = \sqrt{\frac{\Sigma\Psi^2 - \alpha\Sigma\Psi - b\Sigma X\Psi}{(n-2)(\Sigma X^2 - n\bar{X}^2)}}$$

Πρὸς ἐφαρμογὴν τοῦ τύπου  $(\Theta-36)$  εἰς τὴν ἐξίσωσιν παλινδρομήσεως τῆς καταναλώσεως σακχάρους ἐπὶ τοῦ χρηματικοῦ εἰσοδήμα-

(1) Ἐχομεν :

$$S_{\Psi \cdot X}^2 = \frac{\Sigma\Psi^2 - \alpha\Sigma\Psi - b\Sigma X\Psi}{n-2}$$

$$\text{καὶ } \Sigma(X-\bar{X})^2 = \Sigma(X^2 - 2\bar{X}X + \bar{X}^2) = \Sigma X^2 - 2n\bar{X} + n\bar{X}^2 = \Sigma X^2 - n\bar{X}^2$$

$$\text{Ἐπομένως : } S_b = \sqrt{\frac{S_{X \cdot \Psi}^2}{\Sigma(X-\bar{X})^2}} = \sqrt{\frac{\Sigma\Psi^2 - \alpha\Sigma\Psi - b\Sigma X\Psi}{(n-2)(\Sigma X^2 - n\bar{X}^2)}}$$

τος, λαμβάνομεν τὰς ἀπαιτούμενας τιμὰς ἐκ τῆς κατατάξεως τοῦ Πί-  
 νاکος Θ-5, ὁπότε ἔχομεν :

$$S_b = \sqrt{\frac{5,692 - (0,604400)(5,644) - (0,000374)(5.974,200)}{4[(7.253.750) - 6(900)^2]}} =$$

$$= 0,00006965$$

Σημειωτέον ὅτι κατὰ τὴν παρουσίαν τῶν ἀποτελεσμάτων τῆς ἀνα-  
 λύσεως παλινδρομήσεως τὸ τυπικὸν σφάλμα ἐκτιμήσεως τοῦ  $b$  τίθε-  
 ται ἐντὸς παρεθέσεως κάτωθι αὐτοῦ. Οὕτω, εἰς τὸ ἀνωτέρω παρά-  
 δεῖγμα ἔχομεν :

$$\hat{\psi} = 0,604400 + \frac{0,000374X}{(0,000070)}$$

Διὰ χρησιμοποίησε τοῦ  $S_b$  εἶναι δυνατόν, ἐπὶ τῇ βάσει τῆς  
 ἐκτιμήσεως τῆς προκινύσεως ἐκ τοῦ δείγματος, νὰ ἐξετασθῇ ἡ ση-  
 μαντικότης τῆς γραμμικῆς παλινδρομήσεως εἰς τὸν πληθυσμὸν. Ὡς,  
 δηλαδή, ἐγένετο καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ συντελεστοῦ ἀσχετί-  
 σεως οὕτω καὶ ἐν προκειμένῳ ἐλέγχεται ἡ ὑπόθεσις μηδέν, κατὰ τὴν  
 ὁποῖαν αἱ μεταβληταὶ  $X$  καὶ  $\psi$  θεωροῦνται ἀσχετίστοι εἰς τὸν πλη-  
 θυσμὸν. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει καὶ ἡ ἀληθὴς τιμὴ τοῦ συντελεστοῦ  
 παλινδρομήσεως εἰς τὸν πληθυσμὸν, δηλαδή τὸ  $\beta$ , θὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ  
 μηδέν, ἡ δὲ ἐκτιμηθεῖσα ἐκ τοῦ δείγματος τιμὴ  $b$  θὰ πρέπει νὰ ὁ-  
 φελεται εἰς τὴν τύχην. Ἡ σημαντικότης τοῦ  $b$  τοῦ δείγματος δύ-  
 νεται νὰ ἐλεγχθῇ ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ λόγου :

$$(\Theta-37) \quad T = \frac{b - \beta}{S_b} = \frac{b}{S_b}$$

Ἐάν τὸ δείγμα εἶναι σχετικῶς μέγα, τὸ ἐξ ὑπολογισμοῦ προκῶπτον  
 $T$  συγκρίνεται πρὸς τὸ ἀναγραφόμενον εἰς τοὺς σχετικούς πίνακας  
 τῆς κανονικῆς κατανομῆς εἰς δεδομένον ἐπίπεδον σημαντικότητος,  
 π.χ. 0,05. Ἐάν τὸ δείγμα εἶναι ὀλιγοπληθές, τὸ  $T$  συγκρίνεται  
 πρὸς τὸ ἀναγραφόμενον εἰς τοὺς πίνακας τῆς κατανομῆς  $t$  τοῦ STU-  
 DENT εἰς ὠρισμένον ἐπίπεδον σημαντικότητος, π.χ. 0,05 καὶ μὲ  
 βαθμοὺς ἐλευθερίας  $v = n-2$ . Εἰς τὸ παράδειγμα τῆς παλινδρομήσεως  
 τῆς καταναλώσεως σακχάρους ἐπὶ τοῦ χρηματικοῦ εἰσοδήματος ἔχο-  
 μεν :



$$T = \frac{0,000374}{0,000070} = 5,34$$

Ἐκ τοῦ πίνακος, ὅμως, τοῦ  $t$  τοῦ STUDENT λαμβάνομεν εἰς ἐπίπεδον σημαντικότητος 0,05 καὶ μέ βαθμούς ἐλευθερίας  $\nu=6-2=4$ ,  $T=2,78$ . Κατὰ συνέπειαν ἀπορρίπτεται ἡ ὑπόθεσις μηδέν, ἤτοι ὁ ἐκ τοῦ χρησιμοποιηθέντος δείγματος ἐκτιμηθεὶς συντελεστής παλινδρομήσεως εἶναι στατιστικῶς σημαντικὸς μέ πιθανότητα 95%.

### 10. Λογαριθμικὸς μετασχηματισμὸς

Τὸ γραμμικὸν ὑπόδειγμα δέν ἀποδίδει πάντοτε ἱκανοποιητικῶς τὴν μεταξὺ δύο μεταβλητῶν ὑφισταμένην σχέσηιν, διότι αὕτη εἰς ὠρισμένας περιπτώσεις ἐνδέχεται νὰ ἐμφανίζῃ ὑψηλοῦ βαθμοῦ καμπυλότητα. Ἡ ἀκαταλληλότης, ὅμως, τῆς εὐθείας γραμμῆς εἶναι δυνα-

#### Πίναξ Θ - 10

Ὑπολογισμὸς γραμμικῆς παλινδρομήσεως λογαρίθμων καταναλώσεως σακχάρως (λογ Ψ) ἐπὶ λογαρίθμων χρηματικοῦ εἰσοδήματος (λογ X) ἐπὶ τῇ βάσει τῶν φυσικῶν τιμῶν τοῦ Πίνακος Θ - 1

λογ X	λογ Ψ	(λογ X) <sup>2</sup>	(λογ Ψ) <sup>2</sup>	(λογ X) (λογ Ψ)
2,09691	-0,27572	4,39703	0,07602	-0,57816
2,54407	-0,15058	6,47229	0,02267	-0,38309
2,79588	-0,02872	7,81694	0,00082	-0,08030
2,97772	0,03663	8,86682	0,00134	0,10907
3,13033	0,04689	9,79897	0,00220	0,14678
3,30103	0,10346	10,89680	0,01070	0,34152
16,84594	-0,26804	48,24885	0,11375	-0,44418

τόν, πέραν τῆς ἐμπειρικῆς ἐξετάσεως, νὰ προκύπτῃ καὶ ἐξ A PRIORI λόγων συνδεομένων μέ τὴν θεωρίαν τῆς συγκεκριμένης σχέσεως.

Ἐκτός τῆς ἀπ' εὐθείας χρησιμοποιήσεως καμπυλογράμμων ὑποδειγμάτων, ἡ περιγραφή τῶν ὁποίων ἐκφεύγει τῶν ὁρίων τῆς παρούσης ἐξετάσεως, ὑπάρχει καὶ ἕτερος τρόπος προσαρμογῆς ἐπὶ τῶν δεδομένων ἑνὸς εἴδους καμπύλης γραμμῆς, συνιστάμενος εἰς τὸν λογαριθμικὸν μετασχηματισμὸν τῶν μεταβλητῶν, ἄνευ ἀπομακρύνσεως ἐκ τοῦ γραμμικοῦ ὑποδείγματος. Οὕτω, ἡ εὐθεῖα γραμμῆ, ἐνῶ ἐν-

δέχεται νά μή ἀποδίδη ικανοποιητικῶς τήν μεταξύ τῶν μεταβλητῶν  $X$  καί  $\Psi$  ὑφισταμένην σχέσιν, δέν ἀποκλείεται νά προσαρμόζεται ἄριστα ἐπί τῶν λογαριθμῶν τῶν ἀρχικῶν δεδομένων, ἤτοι ἐπί τῶν  $\log X$  καί  $\log \Psi$ . Ἡ γραμμική αὐτή ἐξίσωσις ἐπί τῶν λογαριθμῶν :

$$(Θ-38) \quad \log \hat{\Psi} = A + B \log X$$

οὐδόπως διαφέρει τῆς γνωστῆς γραμμικῆς ἐξισώσεως ἐπί τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, δεδομένου ὅτι, ἐάν θέσωμεν ὅπου  $\log \hat{\Psi} = \hat{\Psi}'$  καί ὅπου  $\log X = X'$ ; λαμβάνομεν :

$$(Θ-39) \quad \hat{\Psi}' = A + BX'$$

Ἡ ἐξίσωσις (Θ-38), ὅταν χρησιμοποιοῦνται αἱ ἀντίστοιχοι φυσικὰ τιμὰ τῶν μεταβλητῶν, λαμβάνει τήν μορφήν :

$$(Θ-40) \quad \hat{\Psi} = aX^B \quad \text{ὅπου } \log a = A$$

Ἡ ἐν λόγῳ ἐξίσωσις ἐκφράζει ἕνα τύπον καμπύλης γραμμῆς, τῆς ὁποίας ἡ κατεύθυνσις καί ὁ βαθμὸς κλίσεως προσδιορίζεται, προφανῶς, ὑπὸ τοῦ προσήμου καί τοῦ μεγέθους τῆς σταθερᾶς  $B$ . Κυριῶδες χαρακτηριστικόν τῆς καμπύλης (Θ-40) (ἢ τῆς ἀντιστοίχου εὐθείας ἐπί τῶν λογαριθμῶν τῶν μεταβλητῶν) εἶναι ὅτι ἡ ἐλαστικότης αὐτῆς εἶναι σταθερὰ εἰς ὅλα τὰ σημεῖα τῆς καί ἴση πρὸς τὸν ἐκθέτην (ἢ τὸν κωνιακὸν συντελεστὴν τῆς εὐθείας ἐπί τῶν λογαριθμῶν)  $B$ .

Ἡ ἐν λόγῳ μορφή καμπύλης γραμμῆς δύναται νά προσαρμοσθῇ εἰς τήν σχέσιν μεταξύ καταναλώσεως σακχάρους καί χρηματικοῦ εἰσοδήματος, ἢ ὅποια, ὡς ἐπανειλημμένως ἀνωτέρω ἐδόθη εὐκαιρία νά παρατηρηθῇ, δέν παρουσιάζει γραμμικὴν διάταξιν. Πρὸς τοῦτο, ἀντὶ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, λαμβάνομεν τοὺς λογαριθμοὺς αὐτῶν (βλ. Πίνα-

(1) Ὁ γενικὸς τύπος τῆς ἐλαστικότητος εἶναι :

$$E[\Psi, X] = \frac{d\Psi}{dX} \cdot \frac{X}{\Psi}$$

Ἐπομένως, ἡ ἐλαστικότης τῆς μεταβλητῆς  $\Psi$  ὡς πρὸς τὴν μεταβλητὴν  $X$  εἰς τὴν ἐπιθετικὴν ἐξίσωσιν (Θ-40) εἶναι :

$$E[\hat{\Psi}, X] = \frac{d(aX^B)}{dX} \cdot \frac{X}{aX^B} = B a X^{B-1} \cdot \frac{X}{aX^B} = \frac{B a X^{B-1} X}{a X^B} = \frac{B a X^B}{a X^B} = B$$

κα  $\Theta=10$ ), επί τῶν ὁποίων ἐφαρμόζομεν ἐν συνεχείᾳ τὴν γνωστὴν διαδικασίαν ἐκτιμῆσεως τῶν σταθερῶν τῆς γραμμικῆς παλινδρομήσεως διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων, ὡς κάτωθι :

$$B = \frac{n \Sigma(\log X)(\log \Psi) - [\Sigma(\log X)] [\Sigma(\log \Psi)]}{n \Sigma(\log X)^2 - [\Sigma(\log X)]^2} =$$

$$= \frac{6(-0,44418) - (16,84594)(-0,26804)}{6(48,24885) - (16,84594)^2} = 0,32419$$

$$A = \overline{\log \Psi} - B \overline{\log X} = -0,04467 - (0,32419)(2,80766) = -0,95489$$

Ἐπίσης, ὑπολογίζομεν τὸν συντελεστὴν προσδιορισμοῦ :

$$R^2 = \frac{A \Sigma(\log \Psi) + B \Sigma(\log X)(\log \Psi) - n (\overline{\log \Psi})^2}{\Sigma(\log \Psi)^2 - n (\overline{\log \Psi})^2} =$$

$$= \frac{(-0,95489)(-0,26804) + (0,32419)(-0,44418) - 6(-0,04467)^2}{0,11375 - 6(-0,04467)^2} =$$

$$= 0,98231$$

ὡς, καὶ τὸ τυπικὸν σφάλμα ἐκτιμῆσεως τοῦ συντελεστοῦ παλινδρομήσεως :

$$S_B = \sqrt{\frac{\Sigma(\log \Psi)^2 - A \Sigma(\log \Psi) - B \Sigma(\log X)(\log \Psi)}{(n-2) [\Sigma(\log X)^2 - n (\overline{\log X})^2]}} =$$

$$= \sqrt{\frac{0,11375 - (-0,95489)(-0,26804) - (0,32419)(-0,44418)}{4 [(48,24885) - 6(2,80766)^2]}} =$$

$$= 0,00189$$

Τὰ οὕτω προκύψαντα ἀποτελέσματα συγκεντροῦνται κατωτέρω, ὁμοῦ μετὰ τῶν ἀντιστοίχων τῆς ἀρχικῆς ἐκτιμηθείσης γραμμικῆς παλινδρομήσεως ἐπὶ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, πρὸς διευκόλυνσιν τῶν συγκρίσεων :

$$(\Theta-41) \quad \log \hat{\Psi} = -0,95489 + 0,32419 \log X \quad R^2 = 0,982$$

$$(0,00189) \quad E[\hat{\Psi}, X] = 0,324$$

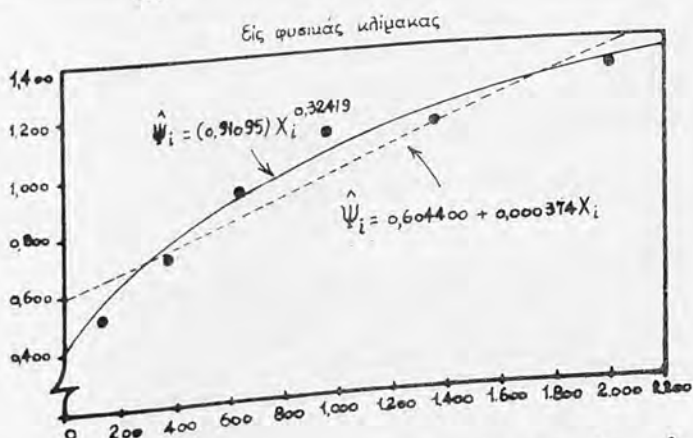
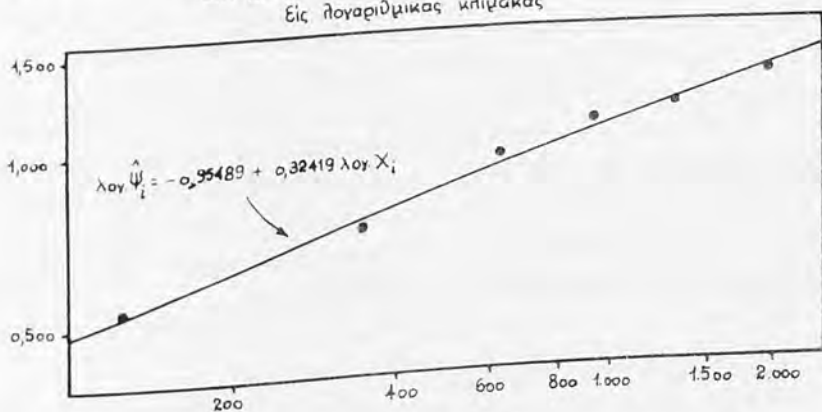
$$(\Theta-42) \quad \eta \text{ εἰς τὰς φυσικὰς τιμὰς : } \hat{\Psi} = (0,91095)X^{0,32419}$$

$$(\Theta-43) \quad \hat{\Psi} = 0,604400 + 0,000374 X \quad R^2 = 0,873$$

$$(0,000070) \quad \bar{E}[\hat{\Psi}, X] = 0,358$$

### Διάγραμμα Θ - 13

Λογαριθμική ἐξίσωσις παλινδρομήσεως καταναλώσεως σακχάρους ( $\Psi$ )  
ἐπὶ χρηματικῷ εἰσοδήματι ( $X$ )  
εἰς λογαριθμικὰς κλίμακας



Ἐκ τῶν ἀποτελεσμάτων τούτων προκύπτει πράγματι ὅτι ἡ εὐθεῖα γραμμὴ προσαρμόζεται καλλίτερον εἰς τοὺς λογαριθμούς ἢ εἰς τοὺς φυσικοὺς ἀριθμούς τῶν δεδομένων. Εἰδικώτερον, ὁ συντελεστὴς παλινδρομήσεως τῆς ἐξισώσεως (Θ-41) εἶναι περισσότερον ἀξιόπιστος ἐκείνου τῆς (Θ-43). Ἐπίσης, αἱ τιμαὶ τοῦ συντελεστοῦ προσδιορισμοῦ δεικνύουν ὅτι διὰ τῆς χρησιμοπορήσεως τοῦ γραμμικοῦ ὑποδείγματος ἐπὶ τῶν φυσικῶν τιμῶν ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ ἐρμηνεύει τὰ

87,30% της διακυμάνσεως της εξηρημένης μεταβλητής, ενώ διά της χρησιμοποιήσεως του γραμμικοῦ ὑποδείγματος ἐπὶ τῶν λογαριθμῶν τὸ σχετικὸν ποσοστὸν ἀνέρχεται εἰς 98,20%. Πρέπει, ἐν τούτοις, νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι αἱ τιμαὶ τοῦ  $R^2$  εἰς τὰς ἐκτιμηθείσας ἐξισώσεις (Θ-41) καὶ (Θ-43) δὲν εἶναι ἀπολύτως συγκρίσιμοι, καθ' ὅσον ἀφοροῦν εἰς διαφορετικὰς εξηρημένας μεταβλητάς. Συγκεκριμένως, ὡς εξηρημένη μεταβλητὴ περιλαμβάνεται, εἰς μὲν τὴν ἐξίσωσιν (Θ-43) ἡ καταναλώσις σακχάρως, εἰς δὲ τὴν ἐξίσωσιν (Θ-41) ὁ λογαριθμὸς τῆς καταναλώσεως σακχάρως. Ἡ ὑπὸ τῆς λογαριθμικῆς ἐξισώσεως ἱκανοποιητικωτέρα, ἔναντι τῆς ἀπλῆς γραμμικῆς, ἀπόδοσις τῆς μεταξύ καταναλώσεως σακχάρως καὶ χρηματικοῦ εἰσοδήματος ὑφισταμένης σχέσεως προκύπτει καὶ ἐκ τοῦ Διαγράμματος Θ-13, εἰς τὸ ὁποῖον ἀπεικονίζονται γραφικῶς αἱ ἐκ τοῦ λογαριθμικοῦ μετασχηματισμοῦ προκύψασαι γραμμαὶ παλινδρομήσεως (ἧτοι τόσον ἡ εὐθεῖα εἰς τοὺς λογαριθμούς, ὅσον καὶ ἡ ἀντίστοιχος καμπύλη εἰς τοὺς φυσικοὺς ἀριθμούς), ἐν ἀντιπαραβολῇ πρὸς τὴν ἀρχικῶς ἐκτιμηθεῖσαν εὐθεῖαν εἰς τοὺς φυσικοὺς ἀριθμούς.

#### ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

##### Α. Ἑλληνικὴ

1. Ἀθανασιάδου, Κ., "Στατιστικὴ", μέρος Δεύτερον, Ἀθῆναι, 1957, σελ. 5-42.
2. Μαργαρίτη, Ε., "Στατιστικὴ", Ἀθῆναι, 1952, σελ. 199-240.

##### Β. Ξένα

1. Allen, R.G.D., "Statistics for Economists", Hutchinson University Library, London 1960, σελ. 120-137. Μετάφρασις εἰς τὴν Ἑλληνικὴν ὑπὸ Κ. Ἀθανασιάδου ὑπὸ τὸν τίτλον "Στατιστικὴ", Ἀθῆναι, 1956, σελ. 117-135.
2. Arkin, H. and Colton, R.R., "Statistical Methods", Barnes and Noble Inc., New York (Fourth Edition), 1961, σελ. 74-102.
3. Budin, M., "Statistical Measurements for Economics and Administration", Asia Publishing House, London, 1962, σελ. 272-322.
4. Connor, L.R., and Morrell, A.J.H., "Statistics in Theory and Practice - With Special Reference to Published Statistics", Sir Issac Pitman and Sons Ltd, London, 1964, σελ. 114-126.
5. Croxton, F.E. and Cowden, D.J., "Applied General Statistics", Sir Issac Pitman and Sons Ltd, London (Second Edition), 1960, σελ. 451-587.

6. Ezekiel, M. and Fox, K.A., "Methods of Correlation and Regression Analysis - Linear and Curvilinear", John Wiley and Sons Inc., New York. 1959.
7. Greenwald, W.I., "Statistics for Economics", Charles E. Merrill Books Inc., Columbus, Ohio, 1963,σελ . 106-147.
8. Guthrie, H.W., "Statistical Methods in Economics", Richard D. Irwin Inc., Homewood, Illinois, 1966,σελ . 275-312.
9. Hays, S., "An Outline of Statistics", Longmans, Green and Co, London - New York - Toronto, 1956,σελ 109-122.
10. Hirsch, W.Z., "Introduction to Modern Statistics - With Applications to Business and Economics", The Macmillan Company, New York, 1962,σελ . 247-283.
11. Ilersic, A.R., "Statistics", H.F.L. (Publishers) Ltd, London (Twelfth Edition), 1959, σελ. 201-221.
12. Karmel, "Applied Statistics for Economists - A Course in Statistical Methods", Melbourne, Sir Isaak Pitman and Sons Ltd (Second Edition), 1963,σελ . 160-210.
13. Mason, R.D., "Statistical Techniques in Business and Economics", Richard D. Irwin Inc., Homewood, Illinois, 1967,σελ 177-210.
14. Mills, F., "Statistical Methods", Holt, Rinehart and Winston, New York, 1955,σελ . 246-318.
15. Paden, D.W. and Lindquist, E.F., "Statistics for Economics and Business", Mc Graw-Hill Book Company Inc., New York - Toronto - London (Second Edition), 1956,σελ.241-293.
16. Runyon, R.P. and Haber, A., "Fundamentals of Behavioral Statistics", Addison - Wesley Publishing Company, Reading Massachusetts, 1967,σελ . 80-108.
17. Spiegel, M., "Theory and Problems of Statistics", Schaum Publishing Co, New York, 1961,σελ . 217-268.
18. Suits, D.B., "Statistics : An Introduction to Quantitative Economic Research", Rand McNally and Company, Chicago , 1963,σελ . 155-188.
19. Thirkettle, G.L., "Wheldon's Business Statistics and Statistical Method", Macdonald and Evans Ltd, London, 1962,σελ . 144-163.
20. Tintner, G., "Mathematics and Statistics for Economists", Holt-Rinehart and Winston, Inc., New York, 1962,σελ. 11 -27 και 273-302.
21. Yamane, T., "Statistics - An Introductory Analysis", A Harper International Edition, 1966,σελ . 368-440.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ

### ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΤΩΝ ΧΡΟΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΣΕΙΡΩΝ

#### 1. Ἡ βασικὴ ὑπόθεσις περὶ τῶν συνιστῶσῶν τῶν χρονολογικῶν σειρῶν

Αἱ πλεῖσται τῶν διαθεσίμων στατιστικῶν ἐκφράζονται ὑπὸ μορφῆν χρονολογικῶν σειρῶν, λόγῳ τοῦ μεγάλου ἐνδιαφέροντος τὸ ὅποιον παρουσιάζουν αἱ διαχρονικαὶ συγκρίσεις τῶν διαφόρων μεγεθῶν. Ἡ εὐρυτάτη χρῆσις τῆς ὁποίας τυγχάνουν αἱ χρονολογικαὶ σειραί, ἀλλὰ καὶ ἡ ἰδιομορφία τῶν προβλημάτων, τὰ ὅποια ἐμφανίζονται αὐταί, καθιστοῦν ἀναγκαίαν τὴν χωριστὴν ἐξέτασιν τῶν μεθόδων ἀναλύσεως τῶν ἐφαρμοζομένων ἐπὶ τῆς ἐν λόγω κατηγορίας δεδομένων.

Αἱ χρονολογικαὶ σειραὶ παρουσιάζουν μεταβολὰς μὲ ποικίλλουσαν ἐκάστοτε μορφήν καὶ ἔντασιν. Συνήθως γίνεται ἀποδεικτὴ ἡ ὑπόθεσις ὅτι αἱ μεταβολαὶ αὐταὶ διαμορφοῦνται ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τεσσάρων ἐπὶ μέρους εἰδικῶν παραγόντων, ἥτοι τῆς μακροχρονίου τάσεως, τοῦ κυκλικοῦ παράγοντος, τοῦ ἐποχικοῦ παράγοντος καὶ τοῦ ἀρρυθμοῦ παράγοντος. Πρόκειται κατ' οὐσίαν περὶ τεσσάρων κατηγοριῶν κινήσεων, ἐκάστη τῶν ὁποίων, ἔχει μὲν γενικῶς ἐνιαῖον χαρακτήρα καὶ ἐμφανίζεται εἰς ὅλα σχεδὸν τὰ μεγέθη, διαμορφοῦται ὁμῶς, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν εἰδικῶν συνθηκῶν καὶ αἰτίων τὰ ὅποια, βεβαίως, ποικίλλουν ἀπὸ μεγέθους εἰς μέγεθος.

Ἡ τάσις νοεῖται ὡς δύναμις ὠθοῦσα τὸ μέγεθος μακροχρονίως πρὸς ὠρισμένην κατεύθυνσιν, συνήθως ἀνοδικῶς ἢ καθοδικῶς. Ὡς παράγοντες συντελοῦντες εἰς τὴν διαμόρφωσιν ἀνοδικῆς τάσεως θά ἦ δυνατόν νά ἀναφερθῶν ἡ αὐξήσις τοῦ πληθυσμοῦ, ἡ τεχνολογικὴ πρόοδος κλπ. Εἰς τὴν ἐμφάνισιν καθοδικῆς τάσεως, ἐξ ἄλλου, δύναται νά συμβάλῃ ἡ συντελουμένη βαθμιαίως ὑποκατάστασις διαφόρων ἀγαθῶν δι' ἑτέρων, ἡ ἀλλαγὴ συνηθειῶν κλπ. Παρ' ἡμῖν, κατὰ τὰ τελευταῖα εἴκοσιν ἔτη ἀνοδικὴν τάσιν παρουσιάζει π.χ. ἡ παραγωγή

ηλεκτρικού ρεύματος, καθοδικήν δέ ἢ παραγωγή φωταερίου. Σημειώ-  
 τεον ὅτι εἰς τὰς χρονολογικὰς σειρὰς ἢ τάσεις δέν ἐμφανίζεται μό-  
 τον ὡς βαθμιαία ἐν τῷ χρόνῳ μεταβολή πρὸς τὴν αὐτὴν κατεύθυνσιν.  
 Οὕτω, ὠρισμένα μεγέθη εἶναι δυνατόν νά δεικνύουν ἀνοδικήν ἐξέ-  
 λιξιν ἐπὶ τι χρονικόν διάστημα καί καθοδικήν ἐν συνεχείᾳ ἢ καί ἀν-  
 τιστρόφως.

Αἱ ἐποχικαὶ κινήσεις τῶν χρονολογικῶν σειρῶν ἀποτελοῦν ἐν εἴ-  
 ροδος ρυθμικῆς κυμάνσεως ἐπαναλαμβανομένης κατ' ἔτος καί συνδεο-  
 μένης μετὰς ἐποχὰς αὐτοῦ. Τοιοῦτου εἴδους κινήσεις παρατηροῦν-  
 ται εἰς τὰ περισσότερα οἰκονομικά μεγέθη μέ ποικίλλοντα βαθμόν  
 ἐντάσεως, δημιουργοῦνται δέ, ὡς ἐπὶ τό πλεῖστον, ἐκ λόγων ἀναγο-  
 μένων εἰς ὑφισταμένας οἰκονομικὰς καί κοινωνικὰς συνηθείας. Οὕτω,  
 κατὰ τὰς ἐορτάς τῶν Χριστουγέννων καί τοῦ Πάσχα ἐνεργοῦνται συ-  
 νήθως ἠϋξημένοι ἀγοραὶ ὑπὸ τῶν καταναλωτῶν, κατὰ τοὺς χειμερι-  
 νοὺς μῆνας περιορίζεται ἢ οἰκοδομικὴ δραστηριότης κλπ. Ἰδιαιτέρως  
 εἰς τὴν ἑλληνικὴν οἰκονομίαν σημαντικόν μέρος τῆς ἐποχικότητος ἐν  
 γένει ἐμπορεῦεται ἐκ τοῦ ἀγροτικῆς τομέως, αἱ δραστηριότητες τοῦ  
 ὁποίου συνδέονται εἰς μέγα βαθμόν μέ τὰς ἐποχὰς τοῦ ἔτους.

Αἱ κυκλικαὶ κινήσεις ἀποτελοῦν καί αὐταὶ διακυμάνσεις, αἱ ὁ-  
 ποῖαι, ὅμως, μορφολογικῶς διαφέρουν τῶν ἐποχικῶν κατὰ τό ὅτι εἴ-  
 ναι διαρκείας συνήθως μακροτέρας τοῦ ἔτους καί δέν ἐμφανίζου-  
 νται ρυθμικότητα. Αἱ κινήσεις τῆς κατηγορίας ταύτης προέρχονται, κατὰ  
 τινὰς μὲν ἐκ τῆς κατὰ καιροὺς δημιουργουμένης ἀνισορροπίας με-  
 ταξὺ ζήτησεως καί προσφορᾶς εἰς τὴν οἰκονομίαν, κατ' ἄλλους δέ ἐξ  
 ἐξωτερικῶν ἐπιδράσεων.

Αἱ ἄρρυθμοὶ κινήσεις τῶν χρονολογικῶν σειρῶν ὀφείλονται εἰς  
 ποικίλους παράγοντας, ὡς εἶναι τὰ διάφορα ἔκτακτα γεγονότα, ὡς  
 σεισμοί, ἐπιδημίαι, ἀπεργαί κλπ. καί τὰ παντός εἴδους στατιστικὰ  
 σφάλματα. Σημειώτεον ὅτι, ἐκτός τῶν μείζονος σημασίας ἄρρυθμῶν  
 κινήσεων, παρατηροῦνται συνήθως καί ἕτεροι μικρότερας ἐκτάσεως  
 ἔχουσαι τυχαίαν, ὡς ἐπὶ τό πλεῖστον, συμπεριφορὰν, αἱ ὁποῖαι δέν  
 δύνανται νά ἀποδοθοῦν εἰς συγκεκριμένα ἔκτακτα γεγονότα.

Ἀναφορικῶς πρὸς τὴν φύσιν τῆς ὑφισταμένης σχέσεως μεταξὺ  
 τῶν ὡς ἄνω τεσσάρων κατηγοριῶν κινήσεων τῶν χρονολογικῶν σειρῶν,  
 δύναται, κατ' ἀρχὴν, νά γίνῃ ἢ ὑπόθεσις ὅτι αὕτη εἶναι "πολλαπλα-  
 σιαστικὴ". Οὕτω, ἐάν συμβολίσωμεν διὰ  $D$  τὰ ἀρχικά δεδομένα, διὰ  
 $T$  τὴν μακροχρόνιον τάσιν, διὰ  $S$  τὴν ἐποχικὴν κίνησιν, διὰ  $C$  τὴν  
 κυκλικὴν κίνησιν καί διὰ  $I$  τὴν ἀντίστοιχον ἄρρυθμον μεταβολήν, θά  
 ἔχωμεν διὰ τὴν περίοδον  $t$ , συμφώνως πρὸς τὴν ἐν λόγῳ ὑπόθεσιν:



$$(1-1) \quad D_t = T_t \cdot S_t \cdot C_t \cdot I_t$$

Υπάρχει, όμως, και έτερος τρόπος συνθέσεως τῶν ἐπί μέρους συνιστωσῶν τῶν χρονολογικῶν σειρῶν, ὁ ὁποῖος στηρίζεται εἰς τὴν λεγομένην "ἄθροιστικὴν σχέσιν". Κατὰ ταύτην ἔχομεν :

$$(1-2) \quad D_t = T_t + S_t + C_t + I_t$$

Εἶναι φανερόν ὅτι εἰς τὸ ὑπόδειγμα (1 - 2) αἱ ἐπιδράσεις τῶν ἐπί μέρους παραγόντων ἐπὶ τῶν ἀρχικῶν δεδομένων ἐκφράζονται εἰς τὴν μονάδα μετρήσεως τοῦ μεγέθους καὶ ὅτι ἐκάστη τούτων εἶναι ἀνεξάρτητος τῶν λοιπῶν. Εἰς τὸ ὑπόδειγμα (1-1) μόνον ἡ τάσις ἐκφράζεται εἰς τὴν μονάδα μετρήσεως τῶν ἀρχικῶν δεδομένων, ἐνῶ αἱ λοιπαὶ συνιστώσαι εἰσέρχονται ὑπὸ μορφήν δεικτῶν. Συνεπῶς, αἱ τιμαὶ τῶν τελευταίων, ἐκπεφρασμέναι εἰς τὴν μονάδα μετρήσεως τῶν ἀρχικῶν δεδομένων, ἐξαρτῶνται κατ' οὐσίαν καὶ ἐκ τοῦ ἐπιπέδου τῆς τιμῆς τῆς τάσεως. Ἐκ τῶν δύο αὐτῶν ὑποδειγμάτων ὡς περισσότερον ἀνταποκρινόμενον πρὸς τὰ πράγματα θεωρεῖται τὸ στηριζόμενον ἐπὶ τῆς πολλαπλασιαστικῆς σχέσεως, δι' ὃ καὶ τυγχάνει τοῦτο εὐρυτάτης χρήσεως εἰς τὴν ἀνάλυσιν τῶν χρονολογικῶν σειρῶν. Ἐν τούτοις, εἰς ὠρισμένας περιπτώσεις κατὰ τὰς ὁποίας ὑπάρχουν a priori λόγοι συνηγοροῦντες ὑπὲρ τῆς ὑπάρξεως ἀνεξαρτησίας εἰς τὰς τιμὰς τῶν ἐπί μέρους συνιστωσῶν ἐφαρμόζεται τὸ ἐπὶ τῆς ἄθροιστικῆς ἀρχῆς στηριζόμενον ὑπόδειγμα.

Διὰ τῆς ἀναλύσεως τῶν χρονολογικῶν σειρῶν ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἀνωτέρω περιγραφέντων ὑποδειγμάτων ἐπιδίδωκεται ἡ ἐκτίμησις εἴτε μιᾶς συγκεκριμένης συνιστώσης πρὸς μελέτην ἀποκλειστικῶς τῆς συμπεριφορᾶς ταύτης εἴτε τοῦ μέρους τῶν ἀρχικῶν δεδομένων τοῦ ἀπομένοντος μετὰ τὴν ἀπομόνωσιν τῆς ἐν λόγω συνιστώσης. Πρέπει νὰ σημειωθῇ σχετικῶς ὅτι διὰ τῆς ἀπαλοιφῆς μιᾶς ἢ περισσότερων συνιστωσῶν ἐκ τῶν ἀρχικῶν δεδομένων δὲν προκύπτουν αἱ κινήσεις τῆς χρονολογικῆς σειρᾶς αἱ ὁποῖαι θὰ ἐλάμβανον χώραν ἐάν δὲν ὑφίσταντο αἱ ἐπιδράσεις τῶν συνιστωσῶν τούτων. Ἀπὸ τῆς ἀπόψεως αὐτῆς ἡ θεωρητικὴ θεμελίωσις τῆς ἀναλύσεως δὲν εἶναι ικανοποιητικὴ. Οὐχ ἥττον, ἡ ἐφαρμογὴ τῶν ἐν λόγω μεθόδων δικαιολογεῖται ἐκ τῆς μεγάλης πρακτικῆς τῶν χρησιμότητος.

Εἰς τὰς χρονολογικὰς σειρὰς δὲν ἐμφανίζονται πάντοτε καὶ αἱ τέσσαρες προαναφερθεῖσαι συνιστώσαι. Οὕτω, ἐκ τῶν ἐπί ἐτήσιας

βάσεως έκφραζομένων δεδομένων έλλείπει ή έποχική συνιστώσα, ή όποία έξ όρισμού άφορά είς ρυθμικές κινήσεις έπαναλαμβανομένας κατ' έτος. Άλλά καί τινες τών έπίμηνιαίας βάσεως έκφραζομένων χρονολογικών σειρών δέν άποκλείεται νά στεροϋνται μιās ή πλείονων συνιστωσών διά λόγους συνδεομένους μέ τήν φύσιν τών αντίστοιχων μεγεθών. Όσον άφορά, είδιωότερον, είστάς κυκλικές κυμάνσεις δέον νά ληφθῆ ύπ' όψιν ότι αϋται παρατηροϋνται κυρίως είς τάς άνεπτυγμένας οίκονομίας, αί όποίαι κατά καιρούς διέρχονται διά τών φάσεων τής άνθήσεως καί τής ύφέσεως. Είς χώρας ώς ή Έλλάς τοιαϋται βραχυχρόνιοι διακυμάνσεις είναι σχετικώς μικράς έκτάσεως, αί δέ τυχόν έμφανιζόμεναι ρυθμικαί κινήσεις είς διάφορα μεγέθη τοϋ άγροτικού τομέως όφειλονται έν πολλοίς είς φυσικούς παράγοντας. Διά τούς λόγους αϋτούς ή άκολουθοϋσα έξέταση περιορίζεται είς τάς λοιπάς τρείς βασικές συνιστώσας τών χρονολογικών σειρών, ήτοι τήν μακροχρόνιον τάσιν, τήν έποχικότητα καί τάς άρρυθμούς κινήσεις.

## 2. Η μακροχρόνιος τάσις

α) Η χρησιμοποίησης τής εύθείας γραμμής

Έκ τών γραμμών τών δυναμένων νά έκφραθοϋν μαθηματικώς ή εύθεια άποτελεί πολλάκις ίκανοποιητική προσέγγισιν τής τάσεως διά μεγέθη δεικνύοντα μακροχρονίως έξέλιξιν πρός μίαν μόνον κατεύθυνσιν, ώς είναι, έπί παραδείγματι, ή είς τό Διάγραμμα I-1 άπεικονιζόμενη άξια τών διαπραγματευθεισών μεταχών είς τό Χρηματιστήριο Αξιών Αθηνών κατά τήν περίοδον 1955-1964. Είς τήν πράξιν ή προτίμησις τής εύθείας γραμμής έναντι άλλων πολυπλοκωτέρων δικαιολογεΐται καί εκ τής άπλότητος τών άπαιτουμένων υπολογισμών.

Η χρησιμοποιουμένη γραμμική έξίσωσις πρός έκφρασιν τής τάσεως τών τιμών δεδομένης μεταβλητής  $\Psi$  είναι :

$$\hat{\Psi}_t = a + bt$$

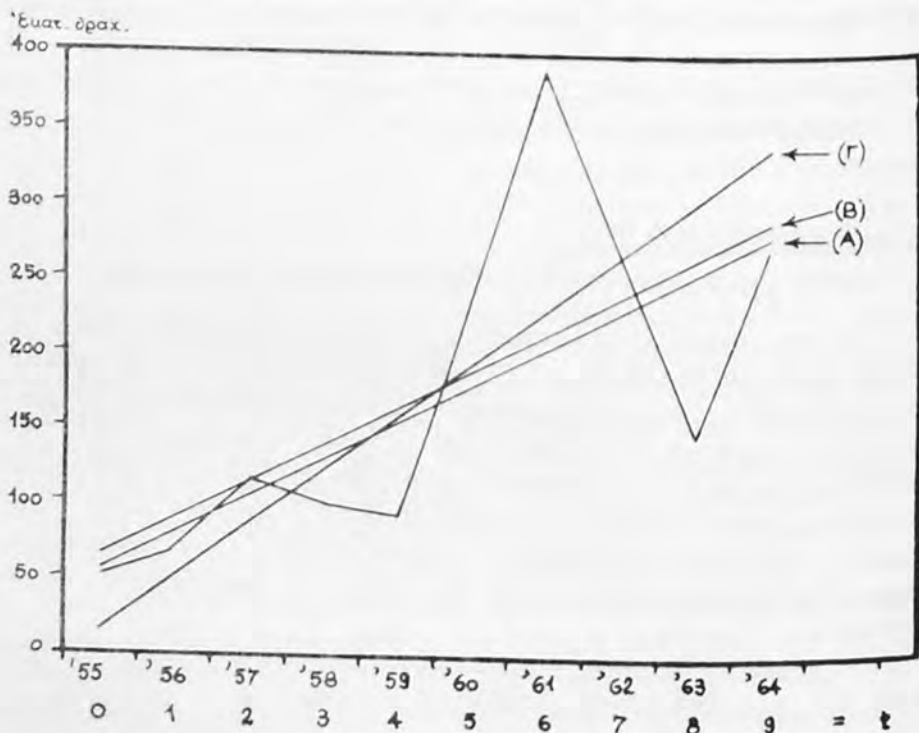
(I-3)

όπου διά  $\hat{\Psi}_t$  συμβολίζεται ή τιμή τής τάσεως διά τήν χρονικήν περίοδον  $t$  (ή όποία δύναται νά αναφέρεται είς μήνας, τρίμηνα, έτη κλπ.) Έάν ή χρονολογική σειρά είναι έπί έτησιας βάσεως ή άρθμησης τής μεταβλητής "χρόνος"  $t$  γίνεται ώς έξής : Ο διά τό πρώτον έτος (τό όποϊον οϋτως άποτελεΐ τήν άρχήν τής περιόδου τής καλυ-

πομένης υπό τῆς χρονολογικῆς σειρᾶς), 1 διὰ τό ἐπόμενον ἔτος κ.ο.κ. Συμφώνως πρός τήν μαθηματικήν ἔννοιαν τοῦ γραμμικοῦ ὑποδείγματος, ἡ μὲν σταθερά  $a$  δίδει τήν τιμήν τῆς τάσεως τήν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς  $t=0$ , δηλαδή εἰς τήν ἀρχήν τῆς περιόδου, ἡ δέ

### Διάγραμμα I-1

Ἀξία μετοχῶν διαπραγματευθεισῶν εἰς τό Χρηματιστήριον Ἀξιῶν Ἀθηνῶν καί εὐθεῖαι τάσεως αὐτῆς προσαρμοσθεῖσαι κατὰ διαφόρους μεθόδους (1955 - 1964)



Πηγή ἀρχικῶν δεδομένων : Πίναξ I-1

τιμή τοῦ  $b$  τήν ἀπό ἔτους εἰς ἔτος σταθεράν μεταβολήν τῆς τάσεως. Εἶναι εὐνόητον ὅτι ὁ γωνιακός συντελεστής θά φέρῃ θετικόν πρόσημον ὅταν ἡ τάσις τοῦ ἐξεταζομένου μεγέθους εἶναι ἀνοδική, ἀρνητικόν δέ ὅταν ἡ τάσις εἶναι καθοδική.

## β) Πρακτικοί τρόποι προσαρμογής ευθείας γραμμής

Πρακτικῶς, ἡ ἐκτίμησις τῆς εὐθυγράμμου τάσεως δεδομένης χρονολογικῆς σειρᾶς δύναται νά γίνη κατὰ διαφόρους μεθόδους, αἱ κυριώτεραι τῶν ὁποίων εἶναι ἡ δι' ἐλευθέρας χειρός, ἡ τῶν πρώτων διαφορῶν καί ἡ τῶν δύο μέσων σημείων. Κατωτέρω δίδεται περιγραφή τῶν ἐν λόγῳ μεθόδων καί ἐκτίθεται ὁ τρόπος ἐφαρμογῆς αὐτῶν διά χρησιμοποίησεως ὡς παραδείγματος τῶν ἐτησίων δεδομένων τῆς ἀξίας τῶν διαπραγματευθεισῶν μετοχῶν εἰς τό Χρηματιστήριον Ἀξίων Ἀθηνῶν κατὰ τήν περίοδον 1955-1964.

ι) Δι' ἐλευθέρας χειρός. Πρός ἐφαρμογήν τῆς μεθόδου ταύτης ἀπαιτεῖται ἡ γραφική ἀπεικόνισις τῆς χρονολογικῆς σειρᾶς διά πολυγωνικῆς γραμμῆς (βλ. Διάγραμμα I-1). Ἐπί τοῦ διαγράμματος τούτου χαράσσεται εὐθεῖα γραμμὴ διερχομένη διά μέσου τῆς τεθλασμένης τῶν ἀρχικῶν δεδομένων κατὰ τρόπον ὥστε αἱ ἀποστάσεις ἐκ τῶν τελευταίων ἔνθεν καί ἔνθεν νά εἶναι ἐν τῷ συνόλῳ τῶν ἴσαι. Εἶναι φανερόν ὅτι ἡ μέθοδος αὕτη εἶναι ὄλως ὑποκειμενική, ἐάν δέ ἤθελεν ἐπιχειρηθῆ ἡ ἐφαρμογή τῆς ὑπὸ διαφόρων προσώπων (ἢ ἀκόμη καί ὑπὸ τοῦ ἰδίου προσώπου ἀλλά κατὰ διαστήματα), θά προέκυπτεν εἰς ἐκάστην περίπτωσιν καί διαφορετικὴ γραμμὴ τάσεως. Παρά ταῦτα, λόγῳ τῆς εὐκόλου ἐφαρμογῆς τῆς, ἡ ἐν λόγῳ μέθοδος ἐνδείκνυται ὅπως χρησιμοποιῆται ὅταν δέν ἀπαιτῆται ἀκρίβεια, ἀλλά ἡ ἐπίτευξις μιᾶς πρώτης προσεγγίσεως ἐντὸς συντόμου χρόνου.

Ἡ γραφικῶς καθοριζομένη εὐθεῖα τάσεως δύναται νά ἐκφρασθῆ καί μαθηματικῶς διά χρησιμοποίησεως τῶν συντεταγμένων δύο σημείων, ὡς εἶναι, ἐπὶ παραδείγματι, τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὴν πρώτην καί τὴν τελευταίαν χρονικὴν μονάδα τῆς καλυπτομένης ὑπὸ τῆς χρονολογικῆς σειρᾶς περιόδου. Οὕτω, εἰς τό παράδειγμα τῆς ἀξίας Διαγράμματος I-1 ὡς συντεταγμένας, διά μὲν τό ἔτος 1955 τὰς τιμὰς (0, 55), διά δέ τό ἔτος 1964 τὰς τιμὰς (9, 280). Ἐχομεν, συνεπῶς :

$$\begin{aligned} 55 &= a + 0b \\ \text{καί} \quad 280 &= a + 9b \end{aligned}$$

Ἐκ τῆς ἐπιλύσεως τοῦ συστήματος τούτου λαμβάνομεν :  $a = 55$  καί  $b = 25$ . Ἡτοι, ἡ ἐξίσωσις τάσεως εἶναι :

$$\hat{\psi}_t = 55 + 25t \quad (\text{Ἀρχή : 1955, Μονὰς : ἔτος})$$

11) Μέθοδος τῶν πρώτων διαφορῶν. Κατά τήν μέθοδον ταύτην ὑπολογίζονται διαδοχικῶς αἱ ἀπό ἔτους εἰς ἔτος ἀπόλυτοι μεταβολαί τοῦ μεγέθους ( $\Delta\Psi$ ) δι' ἀφαίρεσεως ἐκ τῆς τιμῆς αὐτοῦ κατά τό ἔτος  $t$  τῆς τιμῆς του κατά τό ἔτος  $t-1$ . Ἐν συνεχείᾳ ἢ σταθερά  $b$  προκύπτει ὡς ἀριθμητικός μέσος τῶν εἰς τάς  $N$  μονάδας τοῦ χρόνου ἀντιστοιχοῦσῶν μεταβολῶν :

$$(1-4) \quad b = \frac{\sum \left( \frac{\Delta\Psi}{\Delta t} \right)}{N}$$

Πίναξ I-1

Πρώται διαφοραὶ τοῦ χρόνου καὶ τῆς ἀξίας τῶν διαπραγματευθεισῶν μετοχῶν εἰς τὸ Χρηματιστήριον Ἀξιῶν Ἀθηνῶν, 1955 - 1964

Ἔτος	Χρόνος $t$	Ἀξία μετοχῶν εἰς ἑκάτ. δρχ. $\Psi$	Διαφοραὶ $\Delta t$	Διαφοραὶ $\Delta\Psi$	Λόγοι $\frac{\Delta\Psi}{\Delta t}$
1955	0	50,5	...	...	...
1956	1	70,0	1	+ 19,5	+ 19,5
1957	2	115,0	1	+ 45,0	+ 45,0
1958	3	100,6	1	- 14,4	- 14,4
1959	4	93,6	1	- 7,0	- 7,0
1960	5	241,6	1	+148,0	+148,0
1961	6	392,8	1	+151,2	+151,2
1962	7	269,8	1	- 123,0	- 123,0
1963	8	148,5	1	- 121,3	- 121,3
1964	9	274,5	1	+126,0	+126,0

Πηγή ἀρχικῶν δεδομένων : Χρηματιστήριον Ἀξιῶν Ἀθηνῶν, «Ἐτήσιον Δελτίον τοῦ Χρηματιστηρίου Ἀθηνῶν».

Ἡ σταθερά  $a$  ὑπολογίζεται ἐκ τῆς ἐξισώσεως ἣ ὅποια διέρχεται ἐκ τοῦ σημείου ( $\bar{t}, \bar{\Psi}$ ) καὶ ἣ ὅποια ἔχει ὡς γωνιακόν συντελεστήν τήν ὑπὸ τῆς ἐκφράσεως (1-4) δεδομένην τιμήν. Ἦτοι :

$$(1-5) \quad a = \bar{\Psi} - b\bar{t}$$

Πρὸς ἐφαρμογὴν τῆς μεθόδου ταύτης ἐπὶ τῆς χρονολογιῆς σειρᾶς τῆς ἀξίας τῶν χρηματιστηριακῶν συναλλαγῶν ἐπὶ μετοχῶν

χρησιμοποιούμε την κατάταξιν του Πίνακος 1-1, ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν :

$$b = \frac{224}{9} = 24,9$$

$$\text{καί } a = 175,7 - (24,9)(4,5) = 63,7$$

Ἦτοι ἡ ἐξίσωσις τάσεως εἶναι :

$$\hat{\psi}_t = 63,7 + 24,9t \quad (\text{Ἀρχή : 1955, Μονάς: ἔτος})$$

III) Μέθοδος τῶν δύο μέσων σημείων. Κατά τὴν μέθοδον ταύτην ὑποδιαίρουμεν τὰ δεδομένα εἰς δύο ἰσοπληθεῖς ομάδας καὶ μετὰ ταῦτα προσδιορίζομεν τὴν εὐθεῖαν τάσεως διὰ χρησιμοποιήσεως τῶν συντεταγμένων τῶν μέσων σημείων τῶν δύο τούτων ομάδων. Πρὸς ἐφαρμογὴν τῆς ἐν λόγῳ μεθόδου ἐπὶ τῆς χρονολογικῆς σειρᾶς τῆς ἀξίας τῶν χρηματιστηριακῶν συναλλαγῶν ἐπὶ μετοχῶν χρησιμοποιούμεν τὴν κατάταξιν τοῦ Πίνακος 1-2 ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν ὡς συντεταγμένας, διὰ μὲν τὸ μέσον σημείον τῆς πρώτης ομάδος (2 καὶ 85,9), διὰ δὲ τὸ μέσον σημείον τῆς δευτέρας ομάδος (7 καὶ 265,4). Οὕτω, ἔχομεν :

$$\begin{aligned} 85,9 &= a + 2b \\ \text{καί} \quad 265,4 &= a + 7b \end{aligned}$$

Ἐκ τῆς ἐπιλύσεως τοῦ συστήματος τούτου λαμβάνομεν :  $b = 35,9$  καὶ  $a = 14,1$ . Ἦτοι, ἡ ἐξίσωσις τάσεως εἶναι :

$$\hat{\psi}_t = 14,1 + 35,9t \quad (\text{Ἀρχή : 1955, Μονάς: ἔτος})$$

γ) Ἐκτιμήσεις τῆς γραμμικῆς τάσεως διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων

Αἱ ἀνωτέρω περιγραφεῖσαι μέθοδοι ὑπολογισμοῦ τῆς εὐθείας τάσεως, ἐμφανίζουν μὲν τὸ πλεονέκτημα τῆς ἀπλότητος τῶν ὑπολογισμῶν, τὸ ὁποῖον εἰς ὠρισμένας περιπτώσεις ἐνδέχεται νὰ ἔχη τὴν βαρύνουσαν σημασίαν, πλὴν ὅμως αὗται δὲν ἔχουν ἐπαρκῆ θεωρητικὴν θεμελίωσιν καὶ γενικῶς δὲν παρέχουν τὰς ἀρίστας ἐκτιμήσεις. Σύγκρισις τῶν διὰ τῶν μεθόδων τούτων ὑπολογισθεισῶν ἐξισώσεων τάσεως τῆς ἀξίας τῶν χρηματιστηριακῶν συναλλαγῶν ἐπὶ μετοχῶν γίνεται εἰς τὸ Διάγραμμα 1-1 ((A) δι' ἐλευθέρας χειρὸς, (B) διὰ τῆς

μεθόδου τῶν πρώτων διαφορῶν καὶ (Γ) διὰ τῆς μεθόδου τῶν δύο μέσων σημείων).

Πρὸς ἐπίτευξιν τῶν πιθανωτέρων τιμῶν διὰ τὰς σταθεράς α καὶ β τῆς γραμμικῆς ἐξισώσεως τάσεως εἶναι ἀναγκαῖα ἡ ἐφαρμογὴ τῆς ἐκ τῆς παλινδρομήσεως γνωστῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων. Ὡς εἰς τὴν παλινδρόμησιν οὕτω καὶ εἰς τὴν ἐπιτήρησιν τῆς τάσεως διαθέτομεν δύο μεταβλητάς, μέ τὴν διαφορὰν ὅτι εἰς τὴν τελευταίαν ὡς ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ χρησιμοποιεῖται ὁ χρόνος, ὁ ὅ-

### Πίναξ I - 2

Ἐπολογισμὸς συντεταγμένων μέσων σημείων ἀξίας τῶν διαπραγματευθεισῶν μετοχῶν εἰς τὸ Χρηματιστήριον Ἀξιών Ἀθηνῶν, 1955 - 1964

Ἔτος	Ἀξία μετοχῶν εἰς ἑκατ. δρχ. Ψ		Χρόνος t	
1955	50,5		0	
1956	70,0		1	
1957	115,0		2	
1958	100,6		3	
1959	93,6	429,7 : 5 = 85,9	4	10 : 5 = 2
1960	241,6		5	
1961	392,8		6	
1962	269,8		7	
1963	148,5		8	
1964	274,5	1.327,2 : 5 = 265,4	9	35 : 5 = 7

Πηγὴ ἀρχικῶν δεδομένων : Βλ. Πίνακα I-1.

ποῖος, ὡς ἔχει ἤδη λεχθῆ, λαμβάνει, χάριν ἀπλουστερίας τῶν ὑπολογισμῶν, τιμὰς 0, 1, 2 κλπ. Κατὰ συνέπειαν, πρὸς ἀπλοποίησιν τῶν σταθερῶν τῆς ἐξισώσεως τάσεως (1-3) μιᾶς χρονολογικῆς εἰρήσ ἀποτελουμένης ἀπὸ τῶν παρατηρήσεων δύνανται νὰ ἐπισημανθῶσιν οἱ σχετικοὶ τύποι τῆς παλινδρομήσεως κατόπιν ἀντικαταστάσεως τῆς μεταβλητῆς X διὰ τῆς t. Οὕτω, ἔχομεν :

$$(1-3) \quad b = \frac{n \sum' t - (\sum \Psi) (\sum t)}{n \sum t^2 - (\sum t)^2}$$

$$(1-7) \quad \text{καί} \quad a = \bar{\psi} - b\bar{t}$$

Διά τήν προσαρμογήν, ἐπί τῇ βάσει τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγῶνων, εὐθυγράμμου τάσεως εἰς τήν χρονολογικήν σειράν τῆς ἀξίας τῶν διαπραγματευθειῶν μετοχῶν εἰς τὸ Χρηματιστήριον Ἀ-ξίων Ἀθηνῶν κατά τήν περίοδον 1955-1965, χρησιμοποιοῦμεν τήν κατάταξιν τοῦ Πίνακος 1-3, ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν :

$$b = \frac{(11)(12.039,4) - (1.952,1)(55)}{(11)(385) - (55)^2} = 20,717$$

$$\text{καί} \quad a = 177,464 - (20,717)(5) = 73,877$$

Ἐπομένως, ἡ ἐξίσωσις τάσεως εἶναι :

$$\hat{\psi}_t = 73,877 + 20,717t \quad (\text{Ἀρχή: 1955, Μονάς: ἔτος})$$

### Πίναξ 1-3

Ὑπολογισμοί ἀναγκασιόυντες διὰ τήν προσαρμογήν γραμμικῆς τάσεως ἐπὶ τῆς ἀξίας τῶν διαπραγματευθειῶν μετοχῶν εἰς τὸ Χρηματιστήριον Ἀξίων Ἀθηνῶν, 1955 - 1965  
(Εἰς ἑκατ. δραχ.)

Ἔτος	Ἀξία μετοχῶν $\psi$	$t$	$t^2$	$\psi t$	$t$	$t^2$	$\psi t$	Τιμαὶ τάσεως $\hat{\psi}$
1955	50,5	0	0	0	-5	25	-252,5	73,9
1956	70,0	1	1	70,0	-4	16	-280,0	94,6
1957	115,0	2	4	230,0	-3	9	-345,0	115,3
1958	100,6	3	9	301,8	-2	4	-201,2	136,0
1959	93,6	4	16	374,4	-1	1	-93,6	156,7
1960	241,6	5	25	1.208,0	0	0	0	177,5
1961	392,8	6	36	2.356,8	1	1	392,8	198,2
1962	269,8	7	49	1.887,9	2	4	539,6	218,9
1963	148,5	8	64	1.188,0	3	9	445,5	239,6
1964	274,5	9	81	2.470,5	4	16	1.098,0	260,4
1965	195,2	10	100	1.952,0	5	25	976,0	281,1
	1.952,1	55	385	12.039,4	0	110	2.279,6	

Πηγή ἀρχικῶν δεδομένων : Βλ. Πίνακα 1-1.



Οί απαιτούμενοι ὑπολογισμοί διά τήν ἐκτίμησιν τῶν σταθερῶν τῆς εὐθείας τάσεως εἶναι δυνατόν νά ἀπλουστευθοῦν διά μεταφορᾶς τῆς ἀρχῆς ἐκ τοῦ ἀρχικοῦ ἔτους τῆς καλυπτομένης χρονικῆς περιόδου εἰς τό κεντρικόν ἔτος ταύτης. Εἰς τό ἀνωτέρω παράδειγμα τῆς ἀξίας τῶν χρηματιστηριακῶν συναλλαγῶν ἐπί μετοχῶν διαθέτομεν στοιχεῖα διά ἕνδεκα ἐν συνόλῳ ἔτη τό κεντρικόν τῶν ὁποίων εἶναι τό 1960. Θέτομεν  $t=0$  διά τό ἔτος τοῦτο καί διά μέν τά προηγούμενα αὐτοῦ  $t = -1, -2$  κλπ., διά δέ τά ἐπόμενα  $t = +1, +2$  κλπ. Κατ' αὐτόν τόν τρόπον, ὅμως, προκύπτει:  $\sum t = 0$  καί  $(\sum t)^2 = 0$ . Συνεπῶς, οἱ τύποι (1-6) καί (1-7) ἀπλοποιοῦνται ὡς ἀκολούθως:

$$(1-8) \quad b = \frac{\sum \Psi t}{\sum t^2}$$

$$(1-9) \quad \text{καί } a = \bar{\Psi}$$

Πρός ἐφαρμογήν τῶν τύπων (1-8) καί (1-9) εἰς τό προηγουμένως χρησιμοποιηθέν παράδειγμα λαμβάνομεν τά ἀναγκαζοῦντα δεδομένα ἐκ τῆς κατατάξεως τοῦ Πίνακος 1-3, ὅποτε ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις τάσεως εἶναι:

$$\hat{\Psi}_t = 177,464 + 20,724t \quad (\text{Ἀρχή: 1960, Μονάς: ἔτος})$$

Εἰς τήν νέαν αὐτήν ἐξίσωσιν ἡ σταθερά  $a$  ἐκφράζει τήν τιμήν τῆς τάσεως, ὄχι πλέον διά τό ἔτος 1955, ἀλλά διά τό κεντρικόν ἔτος 1960. Σημειωτέον ὅτι ἡ μικρά διαφορά ἡ ὁποία παρατηρεῖται εἰς τās ἐκτιμήσεις τοῦ γωνιακοῦ συντελεστοῦ ὀφείλεται εἰς τās στρογγυλεύσεις.

Ἐάν ἡ χρονολογική σειρά καλύπτει ἄρτιον ἀριθμόν ἐτῶν, ἡ τοιαύτη μεταφορά τῆς ἀρχῆς εἰς τό μέσον τῆς περιόδου δύναται νά ἐπιτευχθῆ κατά δύο τρόπους: Ὁ πρῶτος τρόπος συνίσταται εἰς τήν θέσιν τῆς μηδενικῆς τιμῆς μεταξύ τῶν δύο μεσαίων ἐτῶν ὁπότε ταῦτα θά ἔχουν τιμᾶς  $-1$  καί  $+1$ , μειουμένας διά τά προηγούμενα καί ἀξανομένας διά τά ἐπόμενα ἔτη ἀνά δύο μονάδας, ὡς δεικνύεται εἰς τόν Πίνακα 1-4. Ἡ ἐπί τῆ βάσει τῆς μεθόδου ταύτης ὑπολογισθεῖσα ἐξίσωσις τάσεως τῆς ἀξίας τῶν χρηματιστηριακῶν συναλλαγῶν ἐπί μετοχῶν διά τήν περίοδον 1955-1964 εἶναι:

$$\hat{\Psi}_t = 175,690 + 13,225t \quad (\text{Ἀρχή: 1959-1960, Μονάς: } 1/2 \text{ ἔτος})$$

Εἰς τὴν ἐν λόγῳ ἐξίσωσιν εἶναι φανερόν ὅτι ἡ σταθερά  $\alpha$  δεικνύει τὴν τιμὴν τῆς τάσεως τὴν ἀντιστοιχοῦσαν μεταξύ τῶν ἐτῶν 1959 καὶ 1960, ὁ δὲ γωνιακὸς συντελεστὴς τὴν καθ' ἑξάμηνον αὐξησιν τοῦ ἐξεταζομένου μεγέθους ἢ ὅποια ἀποδίδεται εἰς τὴν μακροχρόνιον τάσιν.

Ὁ δεῦτερος τρόπος μεταφορᾶς τῆς ἀρχῆς εἰς χρονολογικὰς σειρὰς καλυπτούσας ἄρτιον ἀριθμὸν ἐτῶν συνίσταται εἰς τὴν χρησιμοποίησιν τοῦ ἡμίσεος τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς  $t$  τῶν ληφθεισῶν εἰς τὸν πρῶτον τρόπον, ὡς δεικνύεται εἰς τὴν σχετικὴν στήλην τοῦ Πίνακος 1-4. Ἡ ἐπὶ τῇ βάσει τῆς μεθόδου ταύτης ὑπολογισθεῖσα ἀντίστοιχος ἐξίσωσις τάσεως τῆς ἀξίας τῶν χρηματιστηριακῶν συναλλαγῶν ἐπὶ μετοχῶν εἶναι :

$$\hat{\psi}_t = 175,690 + 26,449t \quad (\text{Ἀρχή: 1959-1960, Μονάς: ἔτος})$$

Ἡ οὕτω προκύψασα ἐξίσωσις τάσεως, συγκρινομένη πρὸς τὴν ὑπολογισθεῖσαν ἀμέσως προηγουμένως ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ πρώτου τρόπου μεταφορᾶς τῆς ἀρχῆς, ἔχει μὲν τὸ ἴδιον  $\alpha$ , ἀλλὰ διπλάσιον γωνιακὸν συντελεστὴν, διότι ἀκριβῶς ἐκφράζει τὴν καθ' ἑτος καὶ ὀχικαθ' ἑξάμηνον) αὐξησιν τῆς τάσεως τοῦ μεγέθους.

Σημειωτέον ὅτι ἡ ἐξίσωσις τάσεως διὰ τὴν περίοδον 1955-1964 μὲ τιμὰς τῆς μεταβλητῆς  $t$  : 0, 1, 2 κλπ. εἶναι :

$$\hat{\psi}_t = 56,669 + 26,449t \quad (\text{Ἀρχή: 1955, Μονάς : ἔτος})$$

ἥτοι ἔχει τὸν αὐτὸν γωνιακὸν συντελεστὴν ὡς ἡ προηγουμένη, ἀλλὰ διάφορον  $\alpha$ , λόγω χρησιμοποίησεως διαφορετικῆς ἀρχῆς. Ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἀπεικονίζεται γραφικῶς εἰς τὸ Διάγραμμα 1-1 διὰ τῆς εὐθείας (Δ), ἔνθα καὶ συγκρίνεται πρὸς τὰς ὑπολογισθεῖσας ἐπὶ τῇ βάσει πρακτικῶν μεθόδων ἑτέρας τρεῖς ἐξισώσεις τάσεως τοῦ αὐτοῦ μεγέθους καὶ διὰ τὴν ἴδιαν χρονικὴν περίοδον.

δ) Ἐκτίμησις τῆς ἐκθετικῆς τάσεως διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων

Ὁ γωνιακὸς συντελεστὴς τῆς γραμμικῆς τάσεως ἐκφράζει, ὡς γνωστὸν, σταθερὰν αὐξησιν (ἢ μείωσιν) τοῦ μεγέθους καθ' ὅλας τὰς χρονικὰς μονάδας (συνήθως ἔτη) τὰς περιλαμβανομένας εἰς τινὰ σχετικῶς μακρὰν περίοδον. Ὁ τρόπος οὗτος περιγραφῆς τῆς μακροχρόνου συμπεριφορᾶς δὲν καλύπτει, ἐν τούτοις, πάντοτε τὰς

Πίναξ Ι - 4

Υπολογισμοί αναγκαιούντες διά τήν προσαρμογήν γραμμικής τάσεως επί τῆς ἀξίας τῶν διαπραγματευθεισῶν μετοχῶν εἰς τὸ Χρηματιστήριον Ἀξιῶν Ἀθηνῶν, 1955 - 1964  
(Εἰς ἑκατ. δραχ.)

Ἔτος	Ἀξία μετοχῶν $\psi$	$t$	$t^2$	$\psi t$	$t$	$t^2$	$\psi t$	$t$	$t^2$	$\psi t$	$t$	$t^2$	$\psi t$	Τιμὴ τάσεως $\psi$
1955	50,5	0	0	0	-9	81	-454,5	-4,5	20,25	-227,25	-4,5	20,25	-227,25	56,7
1956	70,0	1	1	70,0	-7	49	-490,0	-3,5	12,25	-245,00	-3,5	12,25	-245,00	83,1
1957	115,0	2	4	230,0	-5	25	-575,0	-2,5	6,25	-287,50	-2,5	6,25	-287,50	109,6
1958	100,6	3	9	301,8	-3	9	-301,8	-1,5	2,25	-150,90	-1,5	2,25	-150,90	136,0
1959	93,6	4	16	374,4	-1	1	-93,6	-0,5	0,25	-46,80	-0,5	0,25	-46,80	162,5
1960	241,6	5	25	1.208,0	1	1	241,6	0,5	0,25	120,80	0,5	0,25	120,80	188,9
1961	392,8	6	36	2.356,8	3	9	1.178,4	1,5	2,25	589,20	1,5	2,25	589,20	215,4
1962	269,8	7	49	1.888,6	5	25	1.349,0	2,5	6,25	674,50	2,5	6,25	674,50	241,8
1963	148,5	8	64	1.188,0	7	49	1.039,5	3,5	12,25	519,75	3,5	12,25	519,75	268,3
1964	274,5	9	81	2.470,5	9	81	2.470,5	4,5	20,25	1.235,25	4,5	20,25	1.235,25	294,7
	1.756,9	45	285	10.088,1	0	330	4.364,1	0	82,50	2.182,05	0	82,50	2.182,05	

Πηγή ἀρχικῶν δεδομένων: Βλ. Πίνακα Ι - 1.

ανάγκας τῆς ἀναλύσεως, καθ' ὅσον ἡ τάσις ἐνδέχεται εἰς ὠρισμένας περιπτώσεις νά ἐμφανίζῃ καμπυλόγραμμον ἐξελίξιν. Εἷς τύπος μαθηματικῆς καμπύλης, ὁ ὁποῖος χρησιμοποιεῖται εὐρύτατα πρὸς περιγραφὴν τῆς μακροχρονίου τάσεως διαφόρων μεγεθῶν, εἶναι ὁ στηριζόμενος εἰς σταθερὸν ποσοστὸν μεταβολῆς ἀπὸ περιόδου εἰς περίοδον.

Συμφώνως πρὸς τὸν τύπον τοῦ ἀνατοκισμοῦ, περὶ τοῦ ὁποῦ ἐγένετο ἤδη λόγος εἰς τὸ Τέταρτον Κεφάλαιον, μίᾳ χρονολογικῇ

### Πίναξ 1-5

Ὑπολογισμοὶ ἀναγκαιοῦντες διὰ τὴν προσαρμογὴν εὐθείας γραμμῆς ἐπὶ τῶν λογαρίθμων τοῦ ἀκαθάριστου ἐθνικοῦ εἰσοδήματος τῆς Ἑλλάδος εἰς τιμὰς 1948-1965

(Εἰς δισεκ. δραχμὰς)

Ἔτος	Ἀκαθάριστον ἐθνικὸν εἰσοδήμα $\Psi$	$t$	λογ $\Psi$	$t^2$	$t$ λογ $\Psi$	Τιμαὶ τάσεως	
						λογ $\Phi$	$\Phi$
		0	1,64738	0	0	1,67599	47,4
1948	44,4	0	1,64738	0	0	1,67599	47,4
1949	52,9	1	1,72346	1	1,72346	1,70115	50,2
1950	53,3	2	1,72673	4	3,45346	1,72631	53,2
1951	57,7	3	1,76118	9	5,28354	1,75147	56,4
1952	57,8	4	1,76193	16	7,04772	1,77663	59,8
1953	65,1	5	1,81358	25	9,06790	1,80179	63,4
1954	67,2	6	1,82737	36	10,96422	1,82695	67,1
1955	71,7	7	1,85552	49	12,98864	1,85211	71,1
1956	76,5	8	1,88366	64	15,06928	1,87727	75,4
1957	82,8	9	1,91803	81	17,26227	1,90243	79,9
1958	84,4	10	1,92634	100	19,26340	1,92759	84,6
1959	88,0	11	1,94448	121	21,38928	1,95275	89,7
1960	90,9	12	1,95856	144	23,50272	1,97791	95,0
1961	100,9	13	2,00389	169	26,05057	2,00307	100,7
1962	103,7	14	2,01578	196	28,22092	2,02823	106,7
1963	112,0	15	2,04922	225	30,73830	2,05339	113,1
1964	121,6	16	2,08493	256	33,35888	2,07855	119,8
1965	130,4	17	2,11528	289	35,95976	2,10371	127,0
		153	34,01732	1.785	301,34432		

Πηγή ἀρχικῶν δεδομένων: Ὑπουργεῖον Συντονισμοῦ, Διεύθυνσις Ἐθνικῶν Λογαριασμῶν. «Ἐθνικοὶ Λογαριασμοὶ τῆς Ἑλλάδος, 1948 - 1965», Ἀριθ. 16, Ἀθῆναι, 1966, σελ. 105.

σειρά ή όποια έχει αρχικήν τιμήν  $\Psi_0$  και αυξάνει κατ' έτος κατά ποσοστόν  $r$ , θα έμφανίζη κατά τό έτος  $t$  τιμήν :

$$(1-10) \quad \hat{\Psi}_t = \hat{\Psi}_0 (1+r)^t$$

Θέτοντες εις τήν έξίσωσιν (1-10) όπου  $\hat{\Psi}_0 = A$  και  $1+r = B$ , έχομεν :

$$(1-11) \quad \hat{\Psi}_t = AB^t$$

Εις τήν έξίσωσιν (1-11) ό χρόνος  $t$  εύρίσκειται εις τόν έκθετην, δι' ό και ή ύπ' αυτής έκφραζομένη τάσις καλεϊται "έκθετική". Λαμβάνοντες νυν τόν λογάριθμον τής (1-11), εύρίσκομεν :

$$(1-12) \quad \log \hat{\Psi}_t = \log A + t \log B$$

Έάν δε θέσωμεν :  $\log A = a$  και  $\log B = b$ , έχομεν :

$$(1-13) \quad \log \hat{\Psi}_t = a + bt$$

Άλλά ή προκύψασα έξίσωσις (1-13), πέραν του λογαριθμικοῦ μετασχηματισμοῦ τής μεταβλητῆς  $\Psi$ , οὐδόπως διαφέρει του άνωτέρω χρησιμοποιηθέντος γραμμικοῦ τύπου. Κατά συνέπειαν, και ή έκτίμησις τῶν σταθερῶν  $\log A$  και  $\log B$  τής έν λόγω έξισώσεως τάσεως δύναται νά γίνη διά τής μεθόδου τῶν έλαχίστων τετραγώνων ως έξης :

$$(1-14) \quad \log B = \frac{n \Sigma t \log \Psi - (\Sigma t)(\Sigma \log \Psi)}{n \Sigma t^2 - (\Sigma t)^2}$$

$$(1-15) \quad \log A = \overline{\log \Psi} - \log B \bar{t}$$

Πρός ύπολογισμόν τής έκθετικῆς τάσεως του άκαθάρστου έθνικοῦ εισοδήματος τής Ελλάδος (εις τιμάς 1958) διά τήν περίοδον 1948-1965, έγινετο χρῆσις τῶν ύπολογισμῶν του Πίνακος 1-5. Ούτω, εφαρμόζοντες τοὺς τύπους (1-14) και (1-15), λαμβάνομεν :

$$\log B = \frac{(18)(301,34432) - (153)(34,01732)}{(18)(1.785) - (153)^2} = 0,02516$$

$$\text{και } \log A = 1,88985 - (0,02516)(8,5) = 1,67599$$

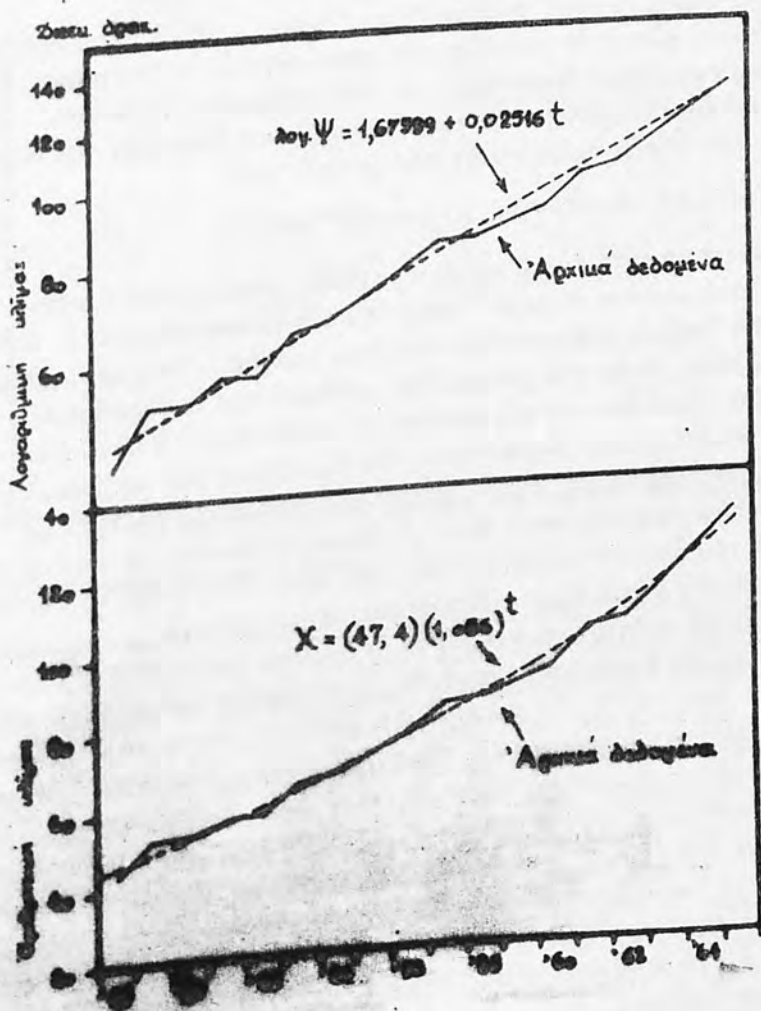
Ἐπομένως, ἡ ἐξίσωσις τάσεως εἶναι :

$$\log \hat{\Psi}_t = 1,67599 + 0,02516t \quad (\text{Ἀρχή: 1948, Μονάς: ἔτος})$$

$$\text{ἢ } \hat{\Psi}_t = (47,4)(1,056)^t$$

Διάγραμμα I-2

Ἀκαθάριστον ἐθνικὸν εἰσόδημα τῆς Ἑλλάδος εἰς σταθερᾶς τιμᾶς 1958 καὶ ἐκθετικὴ τάσις αὐτοῦ, 1948 - 1965



Πηγή ἀρχικῶν δεδομένων: Πίναξ I-4

Ἐν προκειμένῳ ἡ σταθερά  $A = 47,4$  δισεκ. δραχ. δίδει τὴν τιμὴν τῆς τάσεως τοῦ ἀκαθαρίστου ἐθνικοῦ εἰσοδήματος διὰ  $t=0$ , ἥτοι διὰ τὸ ἔτος 1948, ἡ δὲ σταθερά  $B = 1,056$  τὸ ποσοστὸν τῆς κατὰ μέσον ὄρον ἐτησίας αὐξήσεως τῆς τάσεως τοῦ μεγέθους τούτου κατὰ τὴν περίοδον 1948-1965. Τὸ ποσοστὸν τοῦτο ( $x$ ) προκύπτει, κατὰ τὰ ἄνωτέρω ( $B = 1 + x$ ), δι' ἀφαίρεσεως τῆς μονάδος ἐκ τῆς τιμῆς τῆς σταθερᾶς  $B$ . Εἶναι, δηλαδή :

$$x = 1,056 - 1,000 = 0,056, \text{ ἥτοι } 5,6\%$$

Τὰ ἀρχικά δεδομένα τοῦ ἀκαθαρίστου ἐθνικοῦ εἰσοδήματος καὶ ἡ ἐκθετική τάσις αὐτοῦ ἀπικινοῦνται γραφικῶς εἰς τὸ Διάγραμμα 1 - 2 διὰ χρησιμοποίησεως ἀμφοτέρων τῶν ἐκτιμηθεισῶν ἐξισώσεων, ἥτοι τὸσον τῆς ἀναφερομένης εἰς τοὺς λογαριθμούς ὅσον καὶ τῆς ἀναφερομένης εἰς τὰς φυσικὰς τιμὰς τῆς μεταβλητῆς.

ε) Ἡ μέθοδος τῶν κινητῶν μέσων

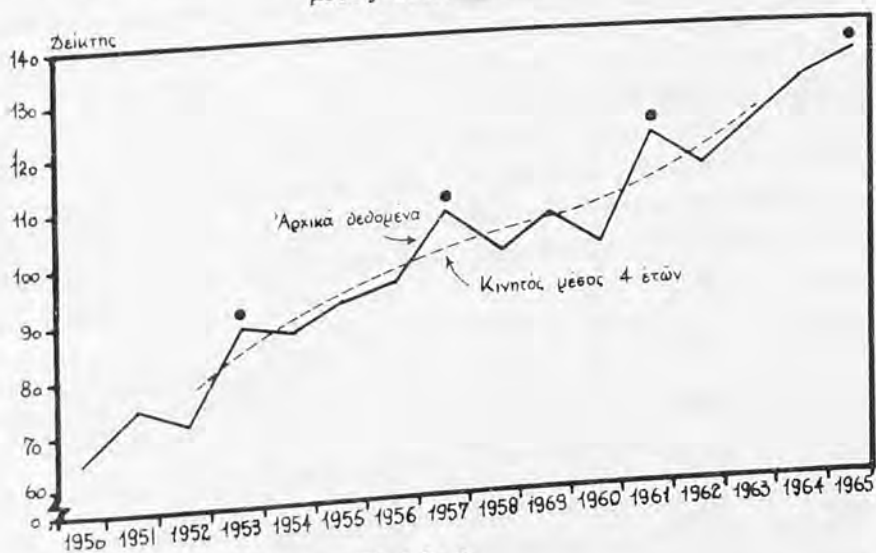
Ἡ συμπεριφορὰ τῶν διαφορῶν μεγεθῶν μακροχρονίως, ἀκόμη ὅταν ταῦτα κινουῦνται συνεχῶς πρὸς τὴν αὐτὴν κατεύθυνσιν (ἀνοδικῶς ἢ καθιζήτικῶς), παρουσιάζει ποικίλας μορφάς. Ὑπάρχουν, βεβαίως, καὶ ἄλλαι, πλὴν τῆς γραμμικῆς, μαθηματικαὶ συναρτήσεις, ὑπὸ τῶν ὁποίων εἶναι δυνατὴ εἰς ὠρισμένας περιπτώσεις ἢ κατὰ λίαν ἱκανοποιητικὸν τρόπον παράστασις τῆς ἐξελίξεως τοῦ μεγέθους ἐν τῷ χρόνῳ. Αἱ καμπύλαι, ὅμως, αὐταὶ δὲν ἀποδίδουν πάντοτε με ἀκρίβειαν τὴν μακροχρόνιον τάσιν, ἢ ὅποια, ἄλλωστε, ὡς ἐκ τοῦ τρόπου κατὰ τὸν ὁποῖον διαμορφοῦται, δὲν εἶναι ἀναγκαῖον νὰ ἀκολουθῆ μίαν ἐκ τῶν διαθεσίμων μαθηματικῶν συναρτήσεων.

Ὅταν τὰ στατιστικὰ δεδομένα δεικνύουν κυμάνσεις κυκλικοῦ τύπου ρυθμικῶς ἐπαναλαμβανομένας, ἡ ἐκτίμησις τῆς τάσεως εἶναι δυνατὴ δι' ἐφαρμογῆς τῆς καλουμένης "μεθόδου τῶν κινητῶν μέσων". Ἐάν ὑποτεθῆ ὅτι ἡ περίοδος ἐντὸς τῆς ὁποίας ὀλοκληροῦται μία πλήρης κυκλικὴ κύμανσις περιλαμβάνει  $n$  ἔτη, ὁ ἀριθμητικὸς μέσος τῶν τιμῶν οἰσδήποτε σειρᾶς  $n$  ἐτῶν θὰ προσδιορίζῃ τὴν τιμὴν τῆς τάσεως διὰ τὸ κεντρικὸν ἔτος τῆς ἐν λόγῳ περιόδου. Διὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ τοιοῦτων διαδοχικῶν μέσων προκύπτει, συνεπῶς, μία νέα σειρά ἀπηλλαγμένη τῆς κυκλικῆς συνιστώσης, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν, βεβαίως, ὅτι αἱ κυκλικαὶ κυμάνσεις εἶναι σταθερᾶς διάρκειας ἐν τῷ χρόνῳ. Ταυτοχρόνως, ὅμως, διὰ τῶν κινητῶν μέσων ἐπιτυγχάνεται καὶ ἐξομάλυνσις τῶν ἀρρυθμῶν μεταβολῶν, λόγω ἀλληλοσμυψιμοῦ,

ἐφ' ὅσον αὐταὶ δὲν ἐμφανίζουσι ἐξαιρετικῶς ὑψηλὰς ἢ χαμηλὰς τιμὰς. Ἡ διὰ τῆς μεθόδου τῶν κινητῶν μέσων ἐκτιμωμένη τάσις παρουσιάζει τὸ πλεονέκτημα τῆς εὐκαμψίας, ὡς ἐκ τῆς ὁποίας εἶναι δυνατὴ ἡ πιστὴ ἀπόδοσις τῶν μακροχρονίων ἐξελίξεων ἐνός μεγέθους οἰασδῆποτε μορφῆς καὶ ἂν εἶναι αὐταί. Ἐπί πλέον, ἀπὸ πρακτικῆς πλευρᾶς, ἡ ἐν λόγῳ μέθοδος δύναται νὰ τύχη ἐφαρμογῆς εὐκόλως, διότι δὲν ἀπαιτεῖ πολυπλόκους ὑπολογισμοὺς.

### Διάγραμμα I-3

Δείκτης ὄγκου ἀγροτικῆς παραγωγῆς (1958 = 100) καὶ κινητὸς μέσος αὐτοῦ 4 ἐτῶν



Πηγή ἀρχικῶν δεδομένων: Πίναξ I-5

Ἐναντι τῶν πλεονεκτημάτων τούτων οἱ κινητοὶ μέσοι ἐμφανίζουσι καὶ ὀρισμένα μειονεκτήματα τὰ ὁποῖα ὁποσδῆποτε περιορίζουσι τὴν χρησιμότητά των ὡς ἐκτιμήσεων τῆς τάσεως. Κατ' ἀρχὴν, ἡ ἀρκεία τῶν κυκλικῶν κυμάνσεων ἐνός μεγέθους συνήθως δὲν εἶναι σταθερά, ἀλλ' οὔτε καὶ δύναται εὐκόλως νὰ ἐξευρεθῇ. Συνεπῶς, ἡ χρησιμοποίησις ὡς ἐκτιμήσεως ταύτης ἐνός κατὰ προσέγγισιν ἀριθμοῦ εἰσάγει κατ' ἀνάγκην σφάλμα εἰς τὸν ὑπολογισμόν τῆς τιμῆς τῆς τάσεως. Ἐπίσης, ἡ λήψις ἀριθμητικῶν μέσων συνεπάγεται ἀπώλειαν ἐκτιμήσεων τῆς τάσεως εἰς τὴν ἀρχὴν καὶ τὸ τέλος τῆς χρονολογικῆς σειρᾶς δι' ἀριθμὸν ἐτῶν ἐξαρτώμενον ἐκ τῆς υἱοθετηθείσης διαρκείας τοῦ κύκλου. Ἡ βασικὴ, ὅμως, ἀδυναμία τῶν κινητῶν μέσων ἔγκειται εἰς τὸ ὅτι οὗτοι δὲν δύναται νὰ ὑπολογισθοῦν εἰ μὴ μό-



νον διά τήν περίοδον τήν ὅποιαν καλύπτουν τά ἀρχικά δεδομένα. Δέν ὑπάρχει, δηλαδή, τρόπος προβολῆς τῶν κινητῶν μέσων εἰς τό

### Πίναξ I - 6

\*Υπολογισμός κινητοῦ μέσου τεσσάρων ἐτῶν ἐπὶ δείκτου ὄγκου ἀγροτικῆς παραγωγῆς (1958 = 100)

Ἔτος (1)	Δείκτης ὄγκου ἀγροτικῆς παραγωγῆς (1958=100) (2)	Κινητά ἀθροίσματα τεσσάρων ἐτῶν στήλης (2) (3)	Κινητά ἀθροίσματα δύο ἐτῶν στήλης (3) (4)	Κινητοὶ μέσοι τεσσάρων ἐτῶν Στήλη (4) : 8 (5)
1950	64,2	...	...	...
1951	73,5	...	...	...
1952	70,0	295,6	613,1	76,6
1953	87,9	317,5	652,9	81,6
1954	86,1	335,4	695,0	86,9
1955	91,4	359,6	737,2	92,1
1956	94,2	377,6	769,1	96,1
1957	105,9	391,5	796,5	99,6
1958	100,0	405,0	814,9	101,9
1959	104,9	409,9	833,0	104,1
1960	99,1	423,1	859,7	107,5
1961	119,1	436,6	889,9	111,2
1962	113,5	453,3	937,0	117,1
1963	121,6	483,7	983,1	122,9
1964	129,5	499,4	...	...
1965	134,8	...	...	...

μέλλον, ὡς συμβαίνει μέ τήν εὐθείαν γραμμήν καί τās διαφόρους μαθηματικές καμπύλας.

Πρός παρακολούθησιν τοῦ τρόπου ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου τῶν κινήτων μέσων ἐχρησιμοποιήθη ὁ δείκτης ὄγκου τῆς ἀγροτικῆς παραγωγῆς διά τήν περίοδον 1950-1965, ὁ ὁποῖος, ὡς ἐμφαίνεται εἰς τό Διάγραμμα 1-3, παρουσιάζει ἀσυνήθη ἕξαρσιν ἀνά τετραετία. Διά τοῦτο, ἐλήφθη ἐπί τῶν δεδομένων τούτων κινήτος μέσος τεσσάρων ἐτῶν, ἡ διαδικασία ὑπολογισμοῦ τοῦ ὁποῖου δεικνύεται εἰς τόν Πίνακα 1-6. Εἰς τήν στήλην (3) παρέχονται διαδοχικά ἀθροίσματα τοῦ δείκτη κατά τετραετία, τά ὁποῖα ἀναγράφονται εἰς θέσιν ἀντιστοιχοῦσαν μεταξύ τοῦ δευτέρου καί τοῦ τρίτου ἔτους. Εἰς τήν στήλην (4) ὑπολογίζονται τά κινήτα ἀθροίσματα δύο ἐτῶν τῶν δεδομένων τῆς στήλης (3), τά ὁποῖα, ἐν συνεχείᾳ, διαιρούμενα διά ὀκτώ τεσσάρων ἐτῶν. Οὗτοι, λόγω ἀπωλείας ἀνά δύο παρατηρήσεων εἰς τήν ἀρχήν καί τό τέλος τῆς περιόδου, καλύπτουν μόνον τά ἔτη 1952-1963, ὡς ἐμφαίνεται δέ εἰς τό Διάγραμμα 1-3 ἀποτελοῦν ἱκανοποιητικήν ἐκτίμησιν τῆς τάσεως τῆς ἀγροτικῆς παραγωγῆς κατά τήν περίοδον ταύτην.

### 3. Αἱ ἐποχικαί κινήσεις

α) Συγκρίσεις πρὸς τήν ἀντίστοιχον περίοδον τοῦ προηγουμένου ἔτους

Εἰς τήν πρᾶξιν αἱ "συστηματικά" βραχυχρόνιοι μεταβολαί (ἢτοι ἡ τάσις καί αἱ κυκλικαί κυμάνσεις) τῶν χρονολογικῶν σειρῶν συχνά-κις μελετῶνται διά συγκρίσεων πρὸς τήν ἀντίστοιχον περίοδον τοῦ προηγουμένου ἔτους. Τοιαῦται συγκρίσεις γίνονται διά διαίρεσιν τῆς τιμῆς τοῦ μεγέθους εἰς δεδομένον μῆνα διά τῆς τιμῆς αὐτοῦ κατὰ τόν ἀντίστοιχον μῆνα τοῦ προηγουμένου ἔτους.

Ἡ προκείμενα σειρά τῶν ποσοστιαίων μεταβολῶν ὑποτίθεται ὅτι περιγράφει τήν κίνησιν τοῦ μεγέθους ἀπηλλαγμένην ἐποχικότητος. Ἡ ὑπόθεσις αὕτη ἀφορᾷ μόνον εἰς τοὺς ἐποχικούς ἐκείνους παράγοντας, τῶν ὁποίων ἡ ἐπίδρασις εἶναι σταθερά ἐν τῷ χρόνῳ. Οὕτω, ἐν περιπτώσει ὑπάρξεως μεταβαλλομένης ἐποχικῆς ἐπίδρασεως, τά προκείμενα ποσοστά μεταβολῆς θά ἐμπεριέχουν μεταξύ τῶν ἄλλων στοιχείων καί ὠρίσματα κατάλοιπα τοῦ ἐποχικοῦ προτύπου. Ὅσον δέ ἀφορᾷ εἰς τās ἀρρυθμοὺς κινήσεις τῆς σειράς αὗται εἶναι λογικόν νά θεωροῦνται ὡς ἀσυσχέτιστοι - ἰδῶς ὅταν μεταξύ αὐτῶν πα-

ρεμβάλλεται περίοδος ενός έτους - και συνεπώς δεόν να αναμένεται ότι τά ποσοστά μεταβολής θα παρουσιάζουν μεγαλύτερα σχετική μεταβλητικότητα εκείνης τήν όποιαν εμφανίζει ο άρρυθμος παράγων καθ' έαυτόν εις τά αρχικά δεδομένα.

Άλλά πέραν τών αδυναμιών τούτων, ύπάρχει και έτερος ουσιαστικός λόγος διά τόν όποιον ή χρησιμοποίησις τών διά τής ανωτέρω μεθόδου παρεχομένων πληροφοριών καθίσταται προβληματική. Ούτος συνίσταται εις τό ότι ή ποσοστιαία μεταβολή έναντι του αντίστοιχου μηνός του προηγούμενου έτους εκφράζει εξέλιξεις, αί όποιαί έλαβον χώραν κατά τήν διάρκειαν τών μεσολαβούντων ένδεκα μηνών και πιθανώς πρό έξ μηνών, όχι δε κατά τήν υπό σύγκρισιν τρέχουσαν περίοδον.

Έκ τών ανωτέρω παρατηρήσεων προκύπτει ότι αί συγκρίσεις πρός τήν αντίστοιχον περίοδον του προηγούμενου έτους δεν αποτελούν ικανοποιητικήν αντιμετώπισιν του προβλήματος τής εποχικής διορθώσεως. Παρίσταται, συνεπώς, ανάγκη χρησιμοποίησεως καταλλήλων μεθόδων εκτίμησεως τής εποχικής συνωτώσεως και έν συνεχεία απομονώσεως αυτής έν τών αρχικών δεδομένων. Αί μέθοδοι αύται εφαρμόζονται κατωτέρω επί του δείκτου βιομηχανικής παραγωγής, ό όποιος έχει ύπολογισθί, μέ βάση 1959 = 100 και καλύπτει τήν περίοδον από του Ιανουαρίου 1961 μέχρι του Δεκεμβρίου 1966.

### β) Η χρησιμοποίησις κινητών μέσων

Η ένταυθα ακολουθουμένη μέθοδος απαλοιφής τής εποχικότητας αποτελεί συνδυασμόν τής κλασικής μεθόδου τών κινητών μέσων και τής γραφικής μεθόδου. Η βασική ύπόθεσις επί τής όποιας στηρίζεται ή έν λόγω μέθοδος είναι ότι ό κινητός μέσος 12 μηνών αποτελεί ικανοποιητικήν εκτίμησιν τών συστηματικών βραχυχρονών μεταβολών τής εξεταζομένης χρονολογικής σειράς. Η εκτίμησις του εποχικού παράγοντος θα ήδύνατο να γίνει διά προσαρμογής εις τά αρχικά δεδομένα μορφής τινος συναρτήσεως. Έν τούτοις, ό κινητός μέσος, συγκρινόμενος πρός τοιούτου είδους γραμμάς, παρουσιάζει μεγαλύτερον βαθμόν προσαρμοστικότητας εις τάς βραχυχρονούς διακυμάνσεις.

Ός έν του τρόπου ύπολογισμού του κινητού μέσου 12 μηνών, αί μεταβολαί εις τι χρονικόν σημείον, αί όποιαί όφείλονται εις τάς συστηματικάς κινήσεις ή τούς άρρυθμούς παράγοντας, κατανέμονται εις μίαν περίοδον 12 μηνών. Η καμπύλη τών κινητών μέσων τείνει, συνεπώς, να ύποεκτιμά τάς συστηματικάς μεταβολάς βραχυχρονώς.

Ὁ πλέον ἀξιόλογος ἐκ τῶν προταθέντων τρόπων ἀντιμετωπίσεως τοῦ ἐν λόγῳ προβλήματος συνίσταται εἰς τὴν χρησιμοποίησιν ὡς γραμμῆς τάσεως, εἴτε αὐτοῦ τούτου τοῦ κινητοῦ μέσου 12 μηνῶν διωρθωμένου καταλλήλως δι' ἐλευθέρας χειρὸς ὥστε νά πλησιάσῃ περισσότερον τὰς βραχυχρονίους κυμάνσεις, εἴτε σταθμικῶν κινητῶν μέσων. Ἐν τούτοις, εἰς τὰς περιπτώσεις ἰδῶς κατὰ τὰς ὁποίας ἐπιδιώκεται ἡ ἐποχικὴ διόρθωσις ἑνὸς μεγάλου ἀριθμοῦ χρονολογικῶν σειρῶν, ἡ ἐφαρμογὴ τῶν ὡς ἄνω τεχνικῶν καθίσταται προβληματικὴ, λόγῳ τῆς μεγάλῃς ἐντάσεως τῶν ἀπαιτουμένων ἀριθμητικῶν ὑπολογισμῶν. Δέον ἐπίσης νά ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι ὁ κινητὸς μέσος 12 μηνῶν συνεπάγεται ἀπώλειαν ἕξ μηνῶν εἰς ἕκαστον ἄκρον τῆς σειρᾶς. Ἄλλ' ἡ ἐφαρμογὴ οἰασδῆποτε ἄλλης μορφῆς κινητοῦ μέσου θά συνεπήγετο ἀκόμη μεγαλύτεραν ἀπώλειαν μηνιαίων παρατηρήσεων.

Ὁ τρόπος κατὰ τὸν ὁποῖον ὑπολογίζεται ὁ κινητὸς μέσος 12 μηνῶν ἐπὶ τοῦ δείκτου βιομηχανικῆς παραγωγῆς παρέχεται εἰς τὸν Πίνακα 1-7. Εἰς τὴν στήλην (3) αὐτοῦ ἀναγράφονται τὰ διαδοχικὰ ἀθροίσματα, τὰ ὁποῖα, ἐπειδὴ ἀναφέρονται εἰς ἄρτιον ἀριθμὸν μηνῶν τίθενται εἰς θέσιν ἀντιστοιχοῦσαν μεταξύ τοῦ ἔκτου καὶ τοῦ ἑβδόμου μηνός. Οὕτω, τὸ ἄθροισμα 1.415,8 τὸ ὁποῖον ἀφορᾷ εἰς τὴν περίοδον ἀπὸ Ἰανουαρίου 1961 μέχρι καὶ τοῦ Δεκεμβρίου τοῦ ἰδίου ἔτους, τίθεται μεταξύ τοῦ Ἰουνίου καὶ τοῦ Ἰουλίου, τὸ ἄθροισμα 1.424,3, τὸ ὁποῖον ἀφορᾷ εἰς τὴν περίοδον ἀπὸ Φεβρουαρίου 1961 μέχρι καὶ τοῦ Ἰανουαρίου 1962, τίθεται μεταξύ τοῦ Ἰουλίου καὶ τοῦ Αὐγούστου κ.ο.κ. Εἰς τὴν στήλην (4) προστίθενται ἀνά δύο τὰ ἀθροίσματα τῆς στήλης (3), τὰ δὲ προκύπτοντα νέα ἀθροίσματα ἀναγράφονται ἀντιστοιχῶς τῶν μηνῶν οἱ ὁποῖοι περιλαμβάνονται μεταξύ τῶν δύο προσθετέων. Συγκεκριμένως, τὸ ἄθροισμα 2.840,1, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἐκ τῶν ἀριθμῶν 1.415,8 καὶ 1.424,3, τίθεται ἔναντι τοῦ μηνός Ἰουλίου, τὸ ἄθροισμα 2.854,7, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἐκ τῶν ἀριθμῶν 1.424,3 καὶ 1.430,4, τίθεται ἔναντι τοῦ μηνός Αὐγούστου κ.ο.κ. Διὰ διαφύσεως τῶν κινητῶν ἀθροισμάτων τῆς στήλης (4) διὰ 24, προκύπτουν, ὡς εἶναι φανερόν, οἱ κινητοὶ μέσοι 12 μηνῶν τοῦ δείκτου βιομηχανικῆς παραγωγῆς, οἱ ὁποῖοι περιέχονται εἰς τὴν στήλην (5) τοῦ Πίνακος 1-7.

γ) Σταθερὸν καὶ μεταβαλλόμενον ἐποχικὸν πρότυπον

Ἐφ' ὅσον ὁ κινητὸς μέσος 12 μηνῶν θεωρεῖται ὅτι ἐκφράζει τὴν τάσιν καὶ τὴν κυκλικὴν συνιστώσαν, εἶναι φανερόν ὅτι οἱ διὰ τούτους

Πίναξ Ι - 7

\*Υπολογισμός κινητού μέσου 12 μηνών και ποσοστών αρχικών δεδομένων  
έναντι αυτού διά τόν δείκτην βιομηχανικής παραγωγής (1959 = 100)  
(Γενάριος 1961 - Δεκέμβριος 1966)

Έτος και μήν		Δείκτης βιομηχανικής παραγωγής (1959 = 100)	Κινητά άθροισματα 12 μηνών στήλης (2)	Κινητά άθροισματα 2 μηνών στήλης (3)	Κινητοί μέσοι 12 μηνών Στήλη (4) : 24	Ποσοστόν αρχικών δεδομένων προς κινητούς μέσους 12 μηνών Στήλη (2) : Στήλη (5)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	
1961	Γενάριος	95,0	. . .	. . .	. . .	. . .
	Φεβρουάριος	101,4	. . .	. . .	. . .	. . .
	Μάρτιος	106,2	. . .	. . .	. . .	. . .
	Άπρίλιος	111,4	. . .	. . .	. . .	. . .
	Μάιος	120,9	. . .	. . .	. . .	. . .
	Ιούνιος	134,8	. . .	. . .	. . .	. . .
	Ιούλιος	136,8	1.415,8	2.840,1	118,3	115,6
	Αύγουστος	127,9	1.424,3	2.854,7	118,9	107,6
	Σεπτέμβριος	125,7	1.430,4	2.865,8	119,4	105,3
	Όκτώβριος	122,4	1.435,4	2.874,5	119,8	102,2
	Νοέμβριος	118,8	1.439,1	2.875,3	119,8	99,2
	Δεκέμβριος	114,5	1.436,2	2.877,0	119,9	95,5
1962	Γενάριος	103,5	1.440,8	2.887,3	120,3	86,0
	Φεβρουάριος	107,5	1.446,5	2.900,0	120,8	89,0
	Μάρτιος	111,2	1.453,5	2.915,5	121,5	91,5
	Άπρίλιος	115,1	1.462,0	2.934,6	122,3	94,1
	Μάιος	118,0	1.472,6	2.949,0	122,9	96,0

Πίναξ 1 - 7 (Συνέχεια)

Έτος και μήν		Δείκτης βιομηχανικής παραγωγής (1959 = 100)	Κινητά άθροισματα 12 μηνών στήλης (2)	Κινητά άθροισματα 2 μηνών στήλης (3)	Κινητοί μέσοι 12 μηνών Στήλη (4) : 24	Ποσοστόν άρχικών δεδομένων προς κινήτους μέσοους 12 μηνών Στήλη (2) : Στήλη (5)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(6)
1962	Ίούνιος	139,4	1.476,4	2.953,5	123,1	113,2
	Ίούλιος	142,5	1.477,1	2.956,0	123,2	115,7
	Αύγουστος	134,9	1,478,9	2.964,0	123,5	109,2
	Σεπτέμβριος	134,2	1.485,1	2.977,3	124,1	108,1
	Όκτώβριος	133,0	1.492,2	2.987,1	124,5	106,8
	Νοέμβριος	122,6	1.494,9	2.996,2	124,8	98,2
	Δεκέμβριος	115,2	1.501,3	3.007,4	125,3	91,9
1963	Ίανουάριος	105,3	1,506,1	3.020,2	125,8	83,7
	Φεβρουάριος	105,3	1.514,1	3.045,4	126,9	89,6
	Μάρτιος	113,7	1.531,3	3.082,4	128,4	92,1
	Άπρίλιος	118,3	1.551,1	3.116,1	129,8	90,8
	Μάιος	117,8	1.565,0	3.140,5	130,9	95,0
	Ίούνιος	124,4	1.575,5	3.167,0	132,0	109,2
	Ίούλιος	144,2	1.591,5	3.197,6	133,2	113,0
	Αύγουστος	150,5	1.606,1	3.222,7	134,3	113,3
	Σεπτέμβριος	152,1	1.616,6	3.245,6	135,2	113,9
	Όκτώβριος	154,0	1.629,0	3.279,5	136,6	107,5
	Νοέμβριος	146,9	1.650,5	3.310,7	137,9	96,5
	Δεκέμβριος	133,1	1.660,2	3.336,1	139,0	94,4

Πίναξ Ι - 7 (Συνέχεια)

Έτος και μήν	Δείκτης βιομηχανικής παραγωγής (1959 = 100)	Κινητά άθροισματα 12 μηνών στήλης (2)	Κινητά άθροισματα 2 μηνών στήλης (3)	Κινητοί μέσοι 12 μηνών Στήλη (4) : 24	Ποσοστών άρχικων δεδομένων προς κινητούς μέσους 12 μηνών Στήλη (2) : Στήλη (5)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
<b>1964</b> Ιανουάριος	119,9	1.675,9	3.376,9	140,7	85,2
Φεβρουάριος	124,2	1.701,0	3.419,2	142,5	87,2
Μάρτιος	130,7	1.718,2	3.442,9	143,5	91,1
Άπρίλιος	139,3	1.724,7	3.456,6	144,0	96,7
Μάιος	134,1	1.731,9	3.478,9	145,0	92,5
Ιούνιος	159,9	1.747,0	3.506,9	146,1	109,4
Ιούλιος	175,6	1.759,9	3.506,9	146,1	109,4
Αύγουστος	169,3	1.772,0	3.531,9	147,2	119,3
Σεπτέμβριος	169,3	1.772,0	3.555,6	148,2	114,2
Οκτώβριος	160,5	1.783,6	3.583,9	149,3	107,5
Νοέμβριος	154,1	1.800,3	3.607,9	150,3	102,5
Δεκέμβριος	148,2	1.807,6	3.607,9	150,3	102,5
<b>1965</b> Ιανουάριος	148,2	1.807,6	3.636,7	151,5	97,8
Φεβρουάριος	144,1	1.829,1	3.636,7	151,5	97,8
Μάρτιος	144,1	1.855,6	3.684,7	153,5	93,9
Άπρίλιος	132,0	1.865,9	3.721,5	155,1	85,1
Μάιος	135,8	1.865,2	3.731,1	155,5	87,3
Ιούνιος	147,4	1.876,0	3.741,2	155,9	94,5
Ιούλιος	146,6	1.883,0	3.759,0	156,6	93,6
Αύγουστος	155,6	1.891,7	3.774,7	157,3	98,9
Σεπτέμβριος	186,4	1.898,5	3.790,2	157,9	118,0
Οκτώβριος	185,9	1.898,5	3.811,1	158,8	117,1

Πίναξ 1 - 7 (Συνέχεια)

Έτος και μήν	Δείκτης βιομηχανικής παραγωγής (1959 = 100)	Κινητά άθροίσματα 12 μηνών στήλης (2)	Κινητά άθροίσματα 2 μηνών στήλης (3)	Κινητοί μέσοι 12 μηνών Στήλη (4) : 24	Ποσοτόν άρχικών δεδομένων προς κινητούς μέσους 12 μηνών Στήλη (2) : Στήλη (5)	
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	
Αύγουστος	168,6	1.912,6	3.848,4	160,4	105,1	
Σεπτέμβριος	171,3	1.935,8	3.893,1	162,2	105,6	
Όκτώβριος	161,1	1,957,3	3.938,3	164,1	98,2	
Νοέμβριος	156,9	1.981,0	4.005,3	166,9	94,0	
Δεκέμβριος	150,9	2.024,3	4.079,7	170,0	88,8	
1966	Ίανουάριος	146,1	2.055,4	4.137,7	172,4	84,7
	Φεβρουάριος	159,0	2.082,3	4.188,8	174,5	91,1
	Μάρτιος	168,9	2.106,5	4.231,8	176,3	95,8
	Άπρίλιος	170,3	2.125,3	4.273,7	178,1	95,6
	Μάϊος	198,9	2.148,4	4.318,9	180,0	110,5
	Ίούνιος	217,5	2.170,5	4.361,7	181,7	119,7
	Ίούλιος	212,8	...	...	...	...
	Αύγουστος	192,8	...	...	...	...
	Σεπτέμβριος	190,1	...	...	...	...
	Όκτώβριος	184,2	...	...	...	...
	Νοέμβριος	179,0	...	...	...	...
	Δεκέμβριος	172,1	...	...	...	...

Πηγή άρχικών δεδομένων: Ε.Σ.Υ.Ε., «Στατιστική Έκθεσις τής Ελλάδος».



πί μέρους μῆνας ὑπολογιζόμενοι λόγοι τῶν ἀρχικῶν δεδομένων πρὸς τὸν κινήτῶν τοῦτον μέσον θὰ δίδουν τὸν ἐποχικὸν καὶ τὸν ἄρρυθμον παράγοντα. Οἱ λόγοι οὗτοι διὰ τὸν δείκτην βιομηχανικῆς παραγωγῆς ἀναγράφονται (ὑπὸ μορφήν ποσοστῶν ἐπὶ τοῖς ἑκατόν) εἰς τὴν στήλην (5) τοῦ Πίνακος 1-7.

Ἐκτίμησις τοῦ ἐποχικοῦ προτύπου παρέχεται ὑπὸ τῶν ἀριθμητικῶν μέσων τῶν ποσοστῶν τῶν ἀρχικῶν δεδομένων ὡς πρὸς τοὺς ἀντιστοιχοῦντες κινήτους μέσους διὰ τοὺς ἐπὶ μέρους μῆνας. Οἱ μέσοι οὗτοι συνιστοῦν μίαν σειρὰν ἐκ 12 δεικτῶν, οἱ ὁποῖοι ἐκφράζουν τὰς μέσας ἐποχικὰς μεταβολὰς κατὰ τὴν ἐξεταζομένην χρονικὴν περίοδον. Πρὸς ἐκτίμησιν αὐτῶν εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ δείκτη βιομηχανικῆς παραγωγῆς ἐγράφησαν ἐν νέου εἰς τὸ ἄνω μέρος τοῦ Πίνακος 1-8 τὰ ποσοστά τῆς στήλης (6) τοῦ Πίνακος 1-7 καὶ ἐν συνεχείᾳ ὑπελογίσθησαν οἱ ἀριθμητικοὶ μέσοι οἱ ἀντιστοιχοῦντες εἰς τοὺς 12 μῆνας τοῦ ἔτους. Ἐπειδὴ, ὅμως, τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ὑπολείπεται τοῦ 1.200 (= 12X100), ἕκαστος ἀριθμητικὸς μέσος ἐπολλαπλασιάσθη ἐπὶ τὸν διορθωτικὸν συντελεστὴν :  $1.200/1.195,6 = 1,00368$ . Παρατηρεῖται σχετικῶς ὅτι ἐκ τῶν δεικτῶν ἐποχικότητος τινὲς εἶναι μικρότεροι τοῦ 100, ἐνῶ ἄλλοι μεγαλύτεροι τοῦ 100. Μεταξύ τῶν πρώτων περιλαμβάνεται π.χ. ὁ δείκτης τοῦ Ἰανουαρίου, ὁ ὁποῖος σημαίνει ὅτι κατὰ τὸν μῆνα τοῦτον ἡ βιομηχανικὴ παραγωγή δεικνύει καθ' ἕκαστον ἔτος μείωσιν ἐξ ἐποχικῶν λόγων ἀνερχομένην κατὰ μέσον ὅρον εἰς 14,7% (= 85,3 - 100,0). Ἐξ ἄλλου, μεταξύ τῶν δεικτῶν τῶν μεγαλυτέρων τοῦ 100 περιλαμβάνεται π.χ. ὁ τοῦ Ἰουνίου, ὁ ὁποῖος σημαίνει ὅτι κατὰ τὸν μῆνα τοῦτον ἡ βιομηχανικὴ παραγωγή παρουσιάζει καθ' ἕκαστον ἔτος αὔξησιν ἐξ ἐποχικῶν λόγων ἀνερχομένην κατὰ μέσον ὅρον εἰς 12,9% (= 112,9 - 100,0).

Λόγω τῆς χρησιμοποιήσεως ἀριθμητικῶν μέσων κατὰ τὴν διαδικασίαν ἐκτίμησεως τῶν δεικτῶν ἐποχικότητος, ὑποτίθεται ὅτι οἱ τυχαῖοι ἄρρυθμοι παράγοντες ἀλληλοεξουδετεροῦνται. Ἐν τούτοις, ἄλλοι ἄρρυθμοι κινήσεις εἶναι πιθανόν νά μὴ ἀπομονοῦνται καὶ οὕτω νά ἐπηρεάζουν τὸ πραγματικὸν ὕψος τῶν δεικτῶν ἐποχικότητος. Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἀντιμετωπίζεται συνήθως δι' ἐφαρμογῆς τῶν κάτωθι τεχνικῶν (βλ. Πίνακα 1-8): Ὅταν ὁ βαθμὸς ἀρρυθμίας εἶναι σχετικῶς μικρὸς, ὁ ἀριθμητικὸς μέσος ὑπολογίζεται μὴ λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν τῶν ἀκραίων τιμῶν, αἱ ὁποῖαι ἀποδίδονται εἰς προσωρινὰς ἐπιδράσεις. Ὅταν ὁ βαθμὸς ἀρρυθμίας εἶναι ὑψηλός, χρησιμοποιοῦμεν, ἀντὶ τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου, τὴν διάμεσον, ἡ ὁποία δὲν ἐπηρεάζεται μεγάλως ἀπὸ τὰς ἀκραίας τιμὰς. Εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις ὁ ἀριθμὸς τῶν

Ποσοστά αρχικών δεδομένων δείκτη βιομηχανικής παραγωγής (1959 = 100) έναντι αντίστοιχων τιμών κινητού μέσου 12 μηνών και ύπολογισμός δείκτων εποχικότητας

Έ τ ο ς	Έ π ο λ ο γ ι σ μ ό ς δ ε ι κ τ ῶ ν β ἰ ο μ η χ α ν ἰ κ ῶ ν π α ρ α γ ω γ ῆ ς											
	Ἰανουάριος	Φεβρουάριος	Μάρτιος	Ἀπρίλιος	Μάιος	Ἰούνιος	Ἰούλιος	Αύγουστος	Σεπτέμβριος	Ὀκτώβριος	Νοέμβριος	Δεκέμβριος
1962	86,0	89,0	91,5	94,1	96,0	113,2	115,7	109,2	108,1	106,8	98,2	91,9
1963	83,7	89,6	92,1	90,8*	95,0	109,2	113,0	113,3	113,9*	107,5	96,5	94,4
1964	85,2	87,2	91,1	96,7	92,5*	109,4	119,3	114,2	107,5	102,5	97,8	93,9
1965	85,1	87,3	94,5	93,6	98,9	118,0*	117,1	105,1	105,6	98,2*	94,0	88,8*
* Ἀθροίσματα												
Ἀθροίσματα	340,0	353,1	369,2	375,2	382,4	449,8	465,1	441,8	435,1	415,0	386,5	369,0
Ἀριθμητικοί μέσοι	85,0	88,3	92,3	93,8	95,6	112,5	116,3	110,4	108,8	103,8	96,6	92,2
Δείκται εποχικότητας (α)	85,3	88,6	92,6	94,2	96,0	112,9	116,7	110,8	109,2	104,2	97,0	92,5
* Ἀθροίσματα (β)												
Ἀθροίσματα (β)	340,0	353,1	369,2	284,4	289,9	331,8	465,1	441,8	321,2	316,8	386,5	280,2
Ἀριθμητικοί μέσοι	85,0	88,3	92,3	94,8	96,6	110,6	116,3	110,4	107,1	105,6	96,6	93,4
Δείκται εποχικότητας (γ)	85,2	88,5	92,5	95,0	96,8	110,9	116,6	110,7	107,4	106,0	96,8	93,6
Διάμεσος												
Διάμεσος	85,2	88,2	91,8	93,8	95,5	111,3	116,4	111,2	107,8	104,6	97,2	92,9
Δείκται εποχικότητας (δ)												
Δείκται εποχικότητας (δ)	85,5	88,5	92,1	94,1	95,8	111,7	116,8	111,6	108,2	105,0	97,5	93,2

(α) Προκύπτουν διά πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀριθμητικῶν μέσων ἐπὶ τὸν διορθωτικὸν παράγοντα :  $1.200/1.195,6 = 1,00368$ .

(β) Ἄνευ ὑπολογισμοῦ τῶν δι' ἀστερίσκου σημειωμένων τιμῶν.

(γ) Προκύπτουν διά πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀριθμητικῶν μέσων ἐπὶ τὸν διορθωτικὸν παράγοντα :  $1.200/1.197,0 = 1,00251$ .

(δ) Προκύπτουν διά πολλαπλασιασμοῦ τῆς διαμέσου ἐπὶ τὸν διορθωτικὸν παράγοντα :  $1.200/1.195,9 = 1,00368$ .

χρησιμοποιουμένων παρατηρήσεων δέον νά εἶναι ἐπαρκῆς, ὥστε νά ἐπιτρέπη τήν, τουλάχιστον κατά προσέγγισιν, ἐκτίμησιν τοῦ ἐποχικοῦ παράγοντος. Διά τόν λόγον τοῦτον εἰς τήν πρᾶξιν ἔχει γίνει ἀποδεικτόν ὅτι σχετικῶς ἀξιόπιστος ἐκτίμησις τῶν ἐποχικῶν μεταβολῶν καί ἐν συνεχείᾳ ἀπαλοιφή αὐτῶν δύναται νά γίνῃ εἰς χρονολογικάς σειράς, αἱ ὁποῖαι καλύπτουν περίοδον τουλάχιστον τεσσάρων ἐτῶν.

Σταθερόν ἐποχικόν πρότυπον χρησιμοποιεῖται μόνον ὅταν τάσσοσά τῶν ἀρχικῶν δεδομένων ὡς πρὸς τοὺς ἀντιστοιχοῦς κινητοὺς μέσους κατανέμονται κατά τρόπον δικαιολογούντα ἐπαρκῶς τήν ὑπόθεσιν τῆς κανονικῆς ἐτησίας περιοδικότητος. Ὅσακις, ὅμως, οἱ ἐποχικοὶ παράγοντες παρουσιάζουν συστηματικὴν μεταβολὴν εἶναι προφανές ὅτι οἰαδήποτε προσπάθεια πρὸς ἐκτίμησιν τοῦ ἐποχικοῦ προτύπου διά χρησιμοποίησεως ἀριθμητικῶν μέσων ἢ διαμέσων τιμῶν εἶναι λίαν πιθανόν νά συνεπάγεται οὐσῶδες σφάλμα. Εἰς τοιαύτας περιπτώσεις ἐνδείνυται ἡ ἐφαρμογὴ μεταβαλλομένου ἐποχικοῦ προτύπου, ὅποτε ὁ δείκτης ἐποχικότητος δι' ἕκαστον μῆνα ὑπολογίζεται διά χρησιμοποίησεως τῶν ἀντιστοιχῶν τιμῶν τῆς γραμμῆς τάσεως, ἡ ὅποια προσαρμόζεται εἰς τὰ ποσοστά τῶν ἀρχικῶν δεδομένων ὡς πρὸς τοὺς ἀντιστοιχοῦς κινητοὺς μέσους διὰ διαδοχικὰ ἔτη. Αἱ μεταβολαὶ τοῦ ἐποχικοῦ προτύπου ἐν τῷ χρόνῳ σχετίζονται πρὸς μεταβολὰς τῶν κοινωνικῶν καί θεσμολογικῶν συνθηκῶν, δι' ὅ καί θεωροῦνται ὅτι λαμβάνουν χώραν βαθμιαίως, μὴ ἐπηρεαζόμεναι ὑπὸ τῶν αὐτῶν παραγόντων, οἱ ὁποῖοι προσδιορίζουν τήν μακροχρόνιον τάσιν τοῦ μεγέθους. Αἱ τοιαῦται βαθμιαῖαι μεταβολαὶ ἀντικατοπτρίζονται εἰς τὸ ἐποχικόν πρότυπον τῶν χρονολογικῶν σειρῶν κατά δύο τρόπους: Πρῶτον, ὡς ἀλλαγὴ τοῦ σχήματος καί, δεῦτερον, ὡς μεταβολὴ τοῦ εὗρους τοῦ ἐποχικοῦ προτύπου. Εἶναι φανερόν ὅτι βασικὴ προϋπόθεσις ἐφαρμογῆς τῆς ἀνωτέρω μεθόδου εἶναι ὅτι αἱ ἐν παρατηρήσεως τιμαὶ καλύπτουν μίαν σχετικῶς μακρὰν χρονικὴν περίοδον.

Τὸ ἐποχικόν πρότυπον, ἐκτός τῶν μακροχρονίων μεταβολῶν, ἐνδέχεται νά ἐμφανίζῃ βραχυχρονίως καί ἄλλου εἴδους μεταβολὰς ἀρρυθμοῦ ἢ κυκλικοῦ χαρακτῆρος. Αἱ ἐν λόγῳ κινήσεις, ὡς καί αἱ προαναφερθεῖσαι μακροχρόνιοι τοιαῦται, ἐκδηλοῦνται εἴτε ὡς ἀλλαγὴ τοῦ σχήματος εἴτε ὡς μεταβολὴ τοῦ εὗρους τοῦ ἐποχικοῦ προτύπου. Αἱ ἄρρυθμοι μεταβολαὶ ἀναφέρονται κυρίως εἰς τήν ἐπίδρασιν τῶν κινητῶν ἑορτῶν, ἐνῶ αἱ κυκλικαὶ ὀφείλονται εἰς ἐπιδράσεις τῶν βραχυχρονίων διακυμάνσεων ἐπὶ τοῦ ἐποχικοῦ παράγοντος. Διά τόν λόγον αὐτόν αἱ βραχυχρόνιοι μεταβολαὶ τοῦ ἐποχικοῦ εὗρους τῆς δευ-

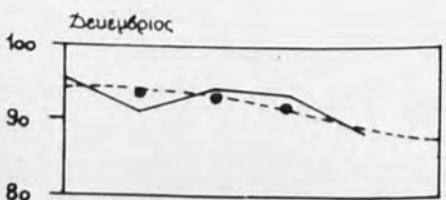
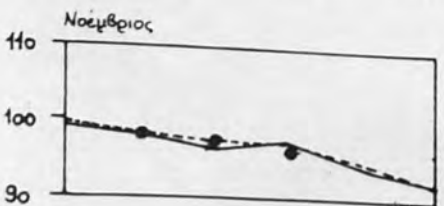
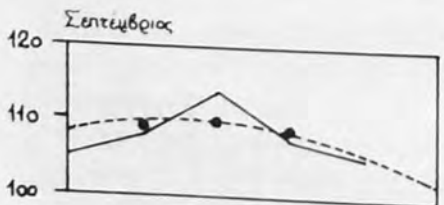
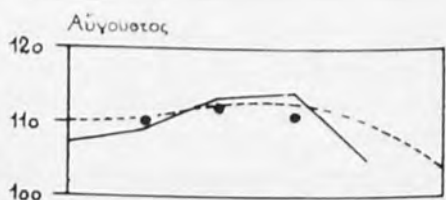
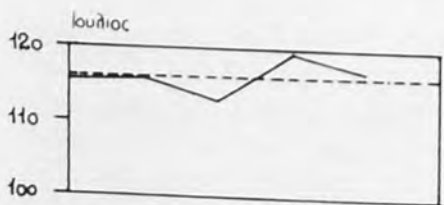
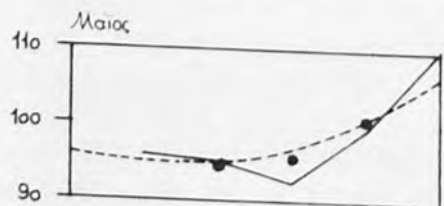
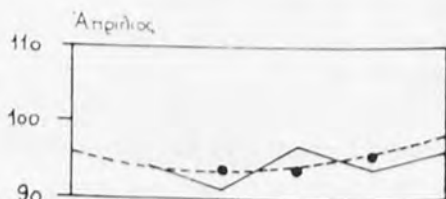
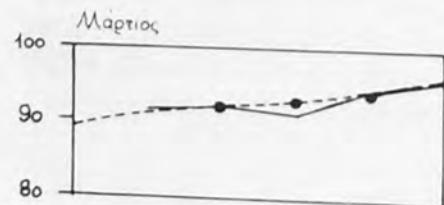
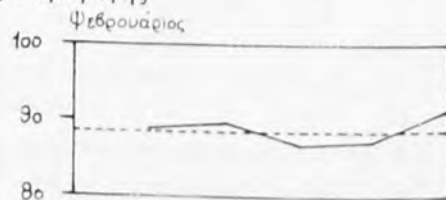
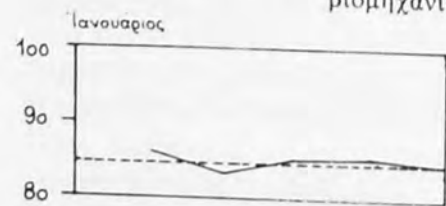
τέρας ταύτης κατηγορίας δέν δύνανται νά περιληφθοῦν μεταξύ τῶν κινήσεων ἐκείνων αἱ ὁποῖαι προκαλοῦνται ἐν καθαρῶς ἐποχικῶν παραγόντων. Πρὸς ἀπομόνωσιν τῶν μεταβολῶν τῆς πρώτης κατηγορίας δεόν ὅπως κατὰ τὴν χάραξιν τῶν γραμμῶν τάσεως τῶν ἐποχικῶν παραγόντων λαμβάνωνται ὑπ' ὄψιν καὶ αἱ ἐν λόγῳ ἄρρυθμοὶ κινήσεις. Πρὸς τόν σκοπὸν τοῦτον οἱ σχετικοὶ δεῖνται ἐποχικότητος ἐκτιμῶνται διὰ χρησιμοποίησεως καμπύλων χαρασσομένων δι' ἐλευθέρας χειρὸς διὰ μέσου ἑνὸς κινήτου μέσου 3 ἢ 5 διαδοχικῶν τιμῶν τοῦ ποσοστοῦ τῶν ἀρχικῶν δεδομένων ὡς πρὸς τοὺς ἀντιστοίχους κινήτους μέσου 12 μηνῶν καὶ ἐπὶ χωριστῶν διαγραμμάτων δι' ἕκαστον ἐν τῶν 12 μηνῶν τοῦ ἔτους. Δι' ἐκεῖνα ἐν τῶν πρώτων καὶ τελευταίων ἐτῶν τῶν σειρῶν διὰ τὰ ὁποῖα ἔλλείπουν κινήτοι μέσοι χρησιμοποιοῦνται σχετικαὶ ἐκτιμήσεις διὰ προεικβολῆς.

Ἡ ἀνωτέρω μέθοδος ἐκτιμήσεως τῶν δεικτῶν ἐποχικότητος δέν εἶναι αὐστηρῶς μηχανικὴ, ἀλλὰ ἀφήνει περιθώριά τινα διὰ προσαρμογῆς ὑπαγορευομένης ἀπὸ εἰδικῆς συνθήκας καὶ οἰκονομικοῦ λόγου. Διὰ ταύτης ὑφίσταται, ἐν τούτοις, κίνδυνος νά ἀπομονωθοῦν ἐν τῶν ἀρχικῶν δεδομένων καὶ κινήσεις, αἱ ὁποῖαι δέν εἶναι καθαρῶς ἐποχικαί. Πρὸς περιορισμὸν ἑνὸς τοιούτου ἔνδεχόμενου πρέπει νά γίνῃ διάκρισις μεταξύ ἀρρυθμῶν ἐποχικῶν μεταβολῶν καὶ ἄλλων ἀρρυθμῶν κινήσεων τοῦ μεγέθους, αἱ ὁποῖαι, συμφῶνως πρὸς τὸ ὑπόθετηθὲν ὑπόδειγμα, ἐμπεριέχονται εἰς τὰ ποσοστά τῶν ἀρχικῶν δεδομένων ὡς πρὸς τοὺς ἀντιστοίχους κινήτους μέσους. Οὕτω, ἐνῶ αἱ πρῶται πρέπει νά περιλαμβάνωνται εἰς τὰς ἐκτιμήσεις τοῦ ἐποχικοῦ παράγοντος, αἱ τελευταῖαι δέν πρέπει νά λαμβάνωνται ὑπ' ὄψιν κατὰ τὴν δι' ἐλευθέρας χειρὸς χάραξιν τῶν γραμμῶν τάσεως τῆς ἐποχικότητος διὰ τοὺς ἐπὶ μέρος μηνῶν.

Ἡ διαδικασία ἐκτιμήσεως μεταβαλλομένου ἐποχικοῦ προτύπου τοῦ δεικτοῦ βιομηχανικῆς παραγωγῆς ἐμφαίνεται εἰς τὸ Διάγραμμα 1-4. Ἐξ αὐτοῦ προκύπτει, κατ' ἀρχὴν, ὅτι τὰ ποσοστά τῶν ἀρχικῶν δεδομένων ὡς πρὸς τοὺς ἀντιστοίχους κινήτους μέσους διὰ τὸν Ἰανουάριον, τὸν Φεβρουάριον καὶ τὸν Ἰούλιον παραμένουν γενικῶς ἀμετάβλητα ἐν τῷ χρόνῳ, δι' ὃ καὶ προειρήθη ἡ διὰ τοὺς ἐν λόγῳ μήνας χρησιμοποίησις σταθερῶν δεικτῶν ἐποχικότητος. Δι' ἕκαστον τῶν ὑπολοίπων μηνῶν ὑπελογίσθησαν κινήτοι μέσοι τριῶν περιόδων (βλ. Πίνακα 1-9), οἱ ὁποῖοι σημειοῦνται διὰ στιγμῶν εἰς τὸ Διάγραμμα 1-4. Εἰς τὸ ἴδιον διάγραμμα ἐμφαίνονται καὶ αἱ δι' ἐλευθέρας χειρὸς χαραχθεῖσαι διὰ μέσου τῶν κινήτων μέσων καμπύλαι αἱ ὁποῖαι χρησιμεύουν πρὸς ἐκτίμησιν τῶν μεταβαλλομένων δεικτῶν ἐποχικότη-

### Διάγραμμα I - 4

Διαδικασία υπολογισμού μεταβαλομένου εποχικού προτύπου δείκτη βιομηχανικής παραγωγής



'61 '62 '63 '64 '65 '66

'61 '62 '63 '64 '65 '66

Πίναξ Ι - 9

'Υπολογισμός δι' ἕκαστον μῆνα 3 περιόδων κινητοῦ μέσου ἐπὶ τῶν ποσοστῶν τῶν ἀρχικῶν δεδομένων τοῦ δείκτου βιομηχανικῆς παραγωγῆς (1959=100) ὡς πρὸς τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τοῦ κινητοῦ μέσου 12 μηνῶν

Ἔτος	Μάρτιος			Ἀπρίλιος			Μάιος		
	Ποσοστὰ στήλης (6) Πίνακος 1-7	Κινητὸν ἄθροισμα 3 περιόδων	Κινητὸς μέσος 3 περιόδων	Ποσοστὰ στήλης (6) Πίνακος 1-7	Κινητὸν ἄθροισμα 3 περιόδων	Κινητὸς μέσος 3 περιόδων	Ποσοστὰ στήλης (6) Πίνακος 1-7	Κινητὸν ἄθροισμα 3 περιόδων	Κινητὸς μέσος 3 περιόδων
1962	91,5	...	...	94,1	...	...	96,0	...	...
1963	92,1	274,7	91,6	90,8	281,6	93,9	95,0	283,5	94,5
1964	91,1	277,7	92,6	96,7	281,1	93,7	92,5	286,4	95,5
1965	94,5	281,4	93,8	93,6	285,9	95,3	98,9	301,9	100,6
1966	95,8	...	...	95,6	...	...	110,5	...	...
Ἔτος	Ἰούλιος			Αὐγουστος			Σεπτέμβριος		
	Ποσοστὰ στήλης (6) Πίνακος 1-7	Κινητὸν ἄθροισμα 3 περιόδων	Κινητὸς μέσος 3 περιόδων	Ποσοστὰ στήλης (6) Πίνακος 1-7	Κινητὸν ἄθροισμα 3 περιόδων	Κινητὸς μέσος 3 περιόδων	Ποσοστὰ στήλης (6) Πίνακος 1-7	Κινητὸν ἄθροισμα 3 περιόδων	Κινητὸς μέσος 3 περιόδων
1961	...	...	...	107,6	...	...	105,3	...	...
1962	113,2	...	...	109,2	330,1	110,0	108,1	327,3	109,1
1963	109,2	331,8	110,6	113,3	336,7	112,2	113,9	329,5	109,8
1964	109,4	336,6	112,2	114,2	332,6	110,9	107,5	327,0	109,0
1955	118,0	347,1	115,7	105,1	...	...	105,6	...	...
1966	119,7	...	...	...	...	...	...	...	...
Ἔτος	Ὀκτώβριος			Νοέμβριος			Δεκέμβριος		
	Ποσοστὰ στήλης (6) Πίνακος 1-7	Κινητὸν ἄθροισμα 3 περιόδων	Κινητὸς μέσος 3 περιόδων	Ποσοστὰ στήλης (6) Πίνακος 1-7	Κινητὸν ἄθροισμα 3 περιόδων	Κινητὸς μέσος 3 περιόδων	Ποσοστὰ στήλης (6) Πίνακος 1-7	Κινητὸν ἄθροισμα 3 περιόδων	Κινητὸς μέσος 3 περιόδων
1961	102,2	...	...	99,2	...	...	95,5	...	...
1962	106,8	316,5	105,5	98,2	293,9	98,0	91,9	281,8	93,9
1963	107,5	316,8	105,6	96,5	292,5	97,5	94,4	280,2	93,4
1964	102,5	308,2	102,7	97,8	288,3	96,1	93,9	277,1	92,4
1965	98,2	...	...	94,0	...	...	88,8	...	...

τητος. Οί ἐν τοῦ διαγράμματος προκύψαντες δεῖνται, ὁμοῦ μετὰ τῶν ὡς σταθερῶν θεωρηθέντων δεικτῶν τῶν μηνῶν Ἰανουαρίου, Φεβρουαρίου καὶ Ἰουλίου, παρέχονται εἰς τόν Πίνακα I-10. Σημειώ-  
τέον ὅτι, πρὸ τῆς τελικῆς παρουσιάσεως ἐγένοντο αἱ κατάλληλοι διορθώσεις, ὥστε τὸ εἰς ἕκαστον ἔτος ἀντιστοιχοῦν ἄθροισμα τῶν δεικτῶν ἐποχικότητος νά ἰσοῦται πρὸς 1.200.

### δ) Ἀπαλοιφή τῆς ἐποχικότητος

Ἡ ἀπαλοιφή τῆς ἐποχικότητος ἐκ δεδομένης χρονολογιῆς σει-  
ρᾶς ἐπιτυγχάνεται διὰ διαφύσεως τῶν ἀρχικῶν δεδομένων διὰ τῶν ἀντιστοιχῶν δεικτῶν ἐποχικότητος, σταθερῶν ἢ μεταβαλλομένων. Οἱ ἐν λόγῳ δεῖνται, ὡς ἀνωτέρω ἐλέχθη, πρὸς τῆς χρησιμοποιήσεως τῶν διορθοῦνται καταλλήλως εἰς τρόπον ὥστε τὸ ἄθροισμα αὐτῶν δι' ἕ-  
καστον ἔτος νά ἰσοῦται πρὸς 1200. Κατόπιν τούτου δεόν νά ἀνα-  
μένεται ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐποχικῶς διορθωμένων στοιχείων δι' ὅ-  
ρισμένον ἔτος θά εἶναι περίπου ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀρχικῶν δεδομένων τοῦ ἔτους τούτου.

Πρέπει νά σημειωθῇ ὅτι ἡ ἀξιοπιστία τῶν ἀποτελεσμάτων ἐκ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς ἀνωτέρω περιγραφείσης μεθόδου ἀπαλοιφῆς τῆς ἐπο-  
χικότητος ἐξαρτᾶται εἰς σημαντικόν βαθμόν ἐκ τῆς φύσεως τῶν ἀρ-

Πίναξ I-10

Μεταβαλλόμενον ἐποχικόν πρότυπον δείκτου βιομηχανικῆς παραγωγῆς  
(Ἰανουάριος 1961 - Δεκέμβριος 1966)

Μ ἢ ν	1961	1962	1963	1964	1965	1966
Ἰανουάριος	84,9	84,9	84,9	84,9	84,9	84,9
Φεβρουάριος	88,8	88,8	88,8	88,8	88,8	88,8
Μάρτιος	89,2	91,0	92,0	93,0	94,0	96,7
Ἀπρίλιος	95,5	94,2	93,5	94,0	96,0	98,0
Μάϊος	96,0	95,0	95,0	96,5	101,5	107,0
Ἰούνιος	113,0	111,5	111,0	112,5	116,0	120,0
Ἰούλιος	116,1	116,1	116,1	116,1	116,1	116,1
Αὐγουστος	110,0	111,0	112,0	112,2	110,2	106,0
Σεπτέμβριος	108,5	109,0	110,0	109,5	106,5	102,0
Ὀκτώβριος	104,5	105,5	105,0	103,0	100,5	99,5
Νοέμβριος	99,5	98,5	97,7	97,0	94,5	92,0
Δεκέμβριος	94,0	94,5	94,0	92,5	91,0	89,0

Πίναξ I - 11

Δείκτης βιομηχανικής παραγωγής εποχικώς διορθωμένος και κινητός μέσος αυτού τριών μηνών  
(1959 = 100)

Μ ή ν	Στοιχεία εποχικώς διορθωμένα						Κινητός μέσος τριών μηνών					
	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1961	1962	1963	1964	1965	1966
Γανουάριος	111,9	121,9	124,0	141,2	155,5	172,1	...	121,6	124,6	140,2	154,7	172,3
Φεβρουάριος	114,2	121,1	128,0	139,9	152,9	179,1	115,1	121,7	126,9	140,5	155,1	175,3
Μάρτιος	119,1	122,2	128,6	140,5	156,8	174,7	116,6	121,8	127,5	142,9	154,1	175,9
Απρίλιος	116,6	122,2	126,0	148,2	152,7	173,8	120,5	122,9	128,4	142,6	154,3	178,1
Μάιος	125,9	124,2	130,5	139,0	153,3	185,9	120,6	123,8	128,8	143,1	155,6	180,3
Ίούνιος	119,3	125,0	129,9	142,1	160,7	181,3	121,0	124,0	130,0	144,1	158,0	183,5
Ίούλιος	117,8	122,7	129,6	151,2	160,1	183,3	117,8	123,1	131,8	148,1	157,9	182,2
Αύγουστος	116,3	121,5	135,8	150,9	153,0	181,9	116,7	122,4	135,1	149,6	158,0	183,9
Σεπτέμβριος	115,9	123,1	140,0	146,6	160,8	186,4	116,4	123,6	138,6	149,0	158,0	184,5
Όκτώβριος	117,1	126,1	139,9	149,6	160,3	185,1	117,5	124,6	138,7	149,7	162,4	188,7
Νοέμβριος	119,4	124,5	136,2	152,8	166,0	194,6	119,4	124,2	138,6	152,7	164,0	191,0
Δεκέμβριος	121,8	121,9	139,6	155,8	165,8	193,4	121,0	123,5	139,0	154,7	168,0	...



χικῶν δεδομένων καὶ ἰδιαιτέρως ἐκτοῦ βαθμοῦ ρυθμικότητος τῶν ἐποχικῶν μεταβολῶν αὐτῶν. Ὡς ταν ἡ ἐπίδρασις τοῦ ἐποχικοῦ παράγοντος δὲν εἶναι συστηματικὴ ἢ ἐποχικὴ διόρθωσις τῆς σειρᾶς καθίσταται προβληματικὴ. Εἰς τοιαύτας περιπτώσεις ὡς κριτήριον ἀπαλοιφῆς ἢ μὴ τῆς ἐποχικότητος δεόν νά λαμβάνεται τό εὖρος τῶν ἐποχικῶν κινήσεων. Ἐάν αἱ ἐποχικά μεταβολαί εἶναι σχετικῶς ἔντονοι, εἶναι προτιμότερον νά χρησιμοποιοῦνται τά δεδομένα ἐποχικῶς διορθωμένα ἢ εἰς τήν ἀρχικὴν των μορφήν. Εἰς τήν περίπτωσιν ταύτην τό σφάλμα τό ὅποιον συνεπάγεται ἡ ἐποχικὴ διόρθωσις εἶναι πιθανόν νά εἶναι ὀλιγώτερον σημαντικόν τῶν διαταρακτικῶν ἐπιδράσεων τὰς ὁποίας ἀσκοῦν αἱ ἐποχικά κινήσεις ἐπὶ τῆς βραχυχρονίου πορείας τοῦ μεγέθους. Ὡς ταν σειρά τις παρουσιάσῃ σχετικῶς περιωρισμένης ἐκτάσεως μὴ συστηματικᾶς ἐποχικᾶς μεταβολᾶς εἶναι προτιμότερα ἢ χρησιμοποίησις των ἀρχικῶν δεδομένων.

Πρὸς ἐποχικὴν διόρθωσιν τοῦ δείκτου βιομηχανικῆς παραγωγῆς διὰ τήν περίοδον ἀπὸ Ἰανουαρίου 1961 μέχρι τοῦ Δεκεμβρίου 1966, διηρέθησαν τά ἀρχικά δεδομένα τά ἀναγραφόμενα εἰς τήν στήλην (2) τοῦ Πίνακος I-7 διὰ τῶν ἀντιστοίχων δεικτῶν ἐποχικότητος τοῦ Πίνακος I-10. Τά οὕτω προκύψαντα διορθωμένα στοιχεία περιέχονται εἰς τόν Πίνακα I-11, ἀπεικονίζονται δὲ γραφικῶς ὁμοῦ μετὰ τῶν ἀρχικῶν εἰς τό Διάγραμμα I-5.

#### 4. Ἐξομάλυνσις τῶν ἀρρυθμῶν μεταβολῶν

Αἱ βραχυχρόνιοι μεταβολαί τῶν ἐποχικῶς διορθωμένων χρονολογικῶν σειρῶν περιέχουν ἀρρυθμοὺς κινήσεις, αἱ ὁποῖαι δυσχεραίνουν τήν διάγνωσιν τῆς συστηματικῆς μεταβολῆς τοῦ μεγέθους, ἰδίως κατὰ τοὺς τελευταίους μῆνας διὰ τοὺς ὁποίους ὑφίστανται διαθέσιμα στοιχεία. Στατιστικῶς, αἱ ἀρρυθμοὶ κινήσεις ἐκτιμῶνται διὰ τῶν ποσοστῶν τῶν ἐποχικῶς διορθωμένων στοιχείων ὡς πρὸς τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τοῦ κινητοῦ μέσου 12 μηνῶν, ὁ ὁποῖος ἐνσωματώνει τήν τάσιν καὶ τὰς κυκλικὰς κινήσεις.

Ἡ περαιτέρω ἀνάλυσις τῶν βραχυχρονίων κινήσεων τῶν ἐποχικῶς διορθωμένων δεδομένων δύναται νά γίνῃ διὰ χρησιμοποίησεως τοῦ μέσου εὖρους τῶν μεταβολῶν τῶν ἐπὶ μέρος συνιστωσῶν αὐτῶν. Τό μέσον μηνιαῖον εὖρος τοῦ ἀρρυθμοῦ παράγοντος (I) ὑπολογίζεται ὡς ἀριθμητικὸς μέσος τῶν μηνιαίων ποσοστιαίων μεταβολῶν τοῦ παράγοντος τούτου, κατ' ἀπόλυτον τιμὴν λαμβανομένων. Ὁμοίως, τό μέσον μηνιαῖον εὖρος τῶν συστηματικῶν κινήσεων, ἥτοι τῆς τάσεως καὶ τῆς

κυκλικῆς συνιστώσης ( $\overline{TC}$ ), εὐρίσκεται ὡς ἀριθμητικός μέσος τῶν μηνιαίων ποσοστιαίων μεταβολῶν τοῦ κινητοῦ μέσου 12 μηνῶν, κατ' ἀπόλυτον τιμὴν λαμβανομένων.

Ὁ λόγος τῶν κατὰ τὰ ἀνωτέρω ὑπολογιζομένων μέτρων  $\overline{I}, \overline{TC}$  παρέχει ἐνδείξεις περί τῆς σχέσεως, ἣ ὁποία ὑφίσταται μεταξύ τῶν ἐν λόγω συνιστωσῶν. Οὕτω, ἐάν  $\overline{I}/\overline{TC} < 1$ , δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν, ὅτι κατὰ μέσον ὅρον εἰς τὰς μηνιαίας μεταβολάς τοῦ ἐξεταζομένου μεγέθους αἱ συστηματικαὶ κινήσεις ἐπικρατοῦν τῶν ἀρρυθμῶν. Ἀντιθέτως, ἐάν  $\overline{I}/\overline{TC} > 1$ , συμπεραίνομεν ὅτι αἱ ἀρρυθμοὶ κινήσεις εἶναι τυπικῶς ἐπικρατέστεραι τῶν συστηματικῶν. Εἰς τὴν τελευταίαν ταύτην περίπτωσιν ἀπαιτεῖται χρονικόν διάστημα μεγαλύτερον τοῦ ἑνὸς μηνός, ἵνα αἱ συστηματικαὶ κινήσεις καταστοῦν ἐντονώτεραι τῶν ἀρρυθμῶν.

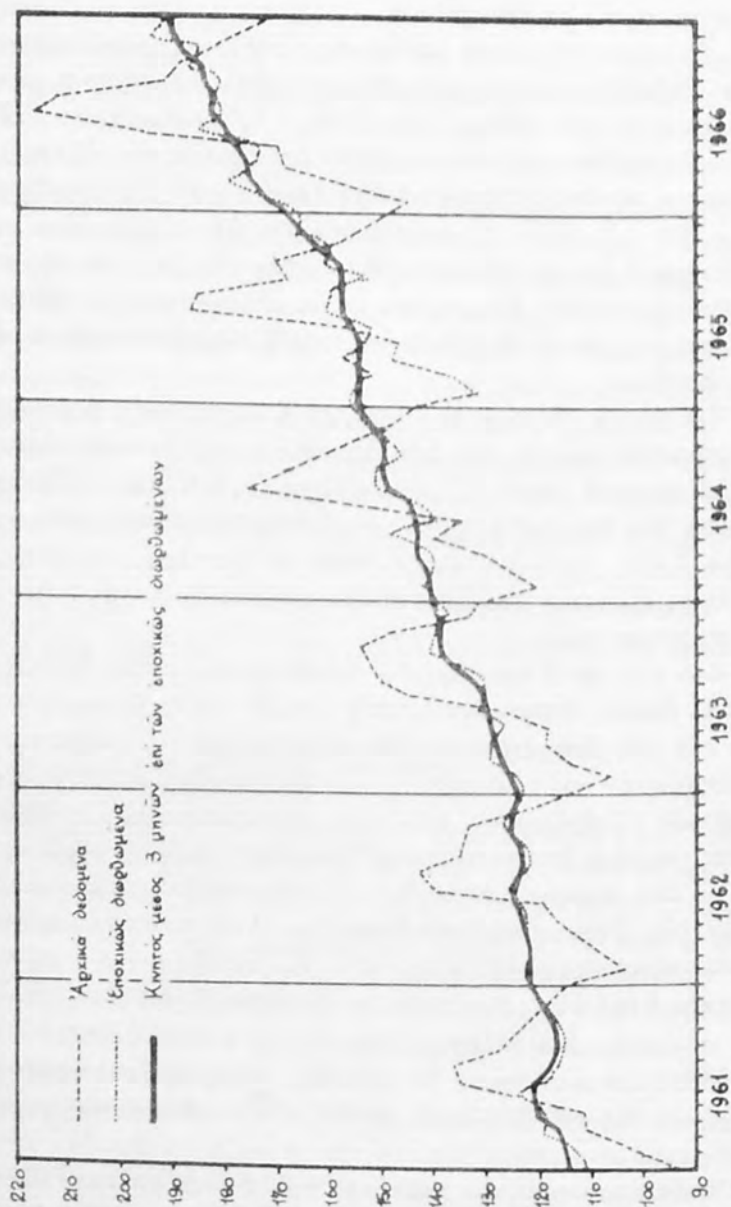
Εἰς τὸ παράδειγμα τοῦ δείκτου βιομηχανικῆς παραγωγῆς τὸ μέσον μηνιαίων εὔρος, τοῦ μὲν ἀρρυθμοῦ παράγοντος εἶναι 2,1 ( $\overline{I} = 2,1$ ), τοῦ δὲ κινητοῦ μέσου 12 μηνῶν εἶναι 0,7 ( $\overline{TC} = 0,7$ ). Δεδομένου ὅτι ὁ λόγος τῶν δύο τούτων μέτρων εἶναι μεγαλύτερος τῆς μονάδος ( $2,1/0,7 = 3,0$ ), συμπεραίνομεν, κατὰ τὰ ἀνωτέρω, ὅτι βραχυχρονῶς αἱ ἀρρυθμοὶ κινήσεις τοῦ δείκτου βιομηχανικῆς παραγωγῆς ἐπικρατοῦν τῶν συστηματικῶν.

Διὰ τὸν κατὰ προσέγγισιν προσδιορισμὸν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μηνῶν, οἱ ὁποῖοι ἀπαιτοῦνται πρὸς ἐπικράτησιν τῶν συστηματικῶν κινήσεων εἰς τὰς βραχυχρονίους μεταβολάς χρονολογικῆς τινος σειρᾶς, ὑπολογίζομεν τοὺς λόγους  $\overline{I}/\overline{TC}$  διὰ διαφόρους χρονικὰς περιόδους ὡς κάτωθι: Διὰ δέμηνον περίοδον αἱ ποσοστιαῖαι μεταβολαὶ ὑπολογίζονται μεταξύ Ἰανουαρίου καὶ Μαρτίου, Φεβρουαρίου καὶ Ἀπριλίου κ.ο.κ. Διὰ τρίμηνον περίοδον αἱ ποσοστιαῖαι μεταβολαὶ ὑπολογίζονται μεταξύ Ἰανουαρίου καὶ Μαρτίου, Φεβρουαρίου καὶ Μαΐου κ.ο.κ. Χρησιμοποιοῦντες τοὺς λόγους  $\overline{I}/\overline{TC}$  διὰ δέμηνον, τρίμηνον κλπ. χρονικὴν περίοδον, δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν μηνῶν, οἱ ὁποῖοι ἀπαιτεῖται νὰ παρέλθουν πρὶν ἢ ἢ τὰς ἐπικράτησιν τῶν ἀρρυθμῶν κινήσεων. Ἡ περίοδος αὕτη ἰσοῦται πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν μηνῶν διὰ τὸν ὁποῖον ὁ λόγος  $\overline{I}/\overline{TC}$  καθίσταται μικρότερος τῆς μονάδος.

Πρὸς ἀποφυγὴν, ἐν τούτοις, πολλῶν καὶ ἐν πολλοῖς ἀσκόπων ὑπολογισμῶν δυνάμεθα νὰ προβῶμεν ἀπ' εὐθείας εἰς δοκιμαστικὴν ἐκτίμησιν τοῦ ἀπαιτουμένου ἀριθμοῦ μηνῶν ἐπὶ τῇ βάσει ἐνδείξεων παρεχομένων ὑπὸ τοῦ λόγου  $\overline{I}/\overline{TC}$  τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὰς μηνιαίας μεταβολάς. Ἡ βασικὴ ὑπόθεσις ἐν προκειμένῳ εἶναι ὅτι τὸ

### Διάγραμμα I - 5

Δείκτης βιομηχανικής παραγωγής  
(1959 = 100)



Πηγή αρχικών δεδομένων : Πίναξ I-6

εὖρος τῶν ἀρρυθμῶν κινήσεων παραμένει σχεδόν ἀμετάβλητον ἀνεξαρτήτως τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μηνῶν, ἐνῶ τὸ εὖρος τῶν συστηματικῶν μεταβολῶν συσσωρεύεται συνεχῶς, ἐφ' ὅσον αὐξάνει ὁ ἀριθμὸς τῶν μηνῶν διὰ τὸν ὁποῖον ὑπολογίζονται αἱ ποσοστιαῖαι μεταβολαί. Οὕτω, πρέπει νὰ ἀναμένεται ὅτι ὁ ὑπολογισμὸς ἐπὶ διμηνιαίας βάσεως θὰ δώσῃ  $\bar{T}/\bar{T}\bar{C}$  ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ λόγου τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς μηνιαίας μεταβολάς, ὁ ὑπολογισμὸς ἐπὶ τριμηνιαίας βάσεως θὰ δώσῃ  $\bar{T}/\bar{T}\bar{C}$  ἴσον πρὸς τὸ  $1/3$  τοῦ λόγου τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς μηνιαίας μεταβολάς κλπ. Εἶναι, συνεπῶς, δυνατόν νὰ ἐπιλεγῇ ἡ περίοδος κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε, ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἀνωτέρω σχέσεων, νὰ ἀντιστοιχῇ εἰς λόγον  $\bar{T}/\bar{T}\bar{C}$  κατὰ τι μικρότερον τῆς μονάδος. Ἐπὶ παραδείγματι, ἡ περίοδος αὕτη διὰ τὸν δείκτην βιομηχανικῆς παραγωγῆς θὰ πρέπει νὰ ὑπερβαίῃ τούς τρεῖς μῆνας, καθ' ὅσον ὁ ὑπολογισμὸς ἐπὶ τριμηνιαίας βάσεως ἀναμένεται ὅτι θὰ δώσῃ:  $\bar{T}/\bar{T}\bar{C} = 1$  (ἤτοι  $1/3$  τοῦ 3). Ἐάν ληφθῇ περίοδος τεσσάρων μηνῶν, ὁ λόγος  $\bar{T}/\bar{T}\bar{C}$  κατέρχεται εἰς 0,75 (ἤτοι  $1/4$  τοῦ 3,0). Ἀπαιτοῦνται, συνεπῶς, τέσσαρες μῆνες περίπου πρὸς ἐπικράτησιν τῶν συστηματικῶν κινήσεων εἰς τὰς βραχυχρονίους μεταβολὰς τοῦ δείκτη βιομηχανικῆς παραγωγῆς.

Αἱ ἀρρυθμαί τὰς ὁποίας παρουσιάζουν αἱ βραχυχρόνιοι κινήσεις τῶν χρονολογικῶν σειρῶν δύνανται νὰ ἐξομαλυνθοῦν διὰ χρησιμοποίησιν κινήτων μέσων. Οἱ μακροχρόνιοι κινήτοι μέσοι παρουσιάζουν τὸ πλεονέκτημα ὅτι δεικνύουν εὐκρινῶς τὰς κυμάνσεις τοῦ μεγέθους, τὸ γεγονός, ὅμως, ὅτι συνεπάγονται ἀπώλειαν τιμῶν δι' ἀρκετοὺς μῆνας εἰς τὴν ἀρχὴν καὶ τὸ τέλος τῆς σειρᾶς περιορίζει σοβαρῶς τὴν χρησιμότητά των. Ἐξ ἄλλου, οἱ βραχυχρόνιοι κινήτοι μέσοι, ὅταν βασίζονται ἐπὶ περιόδου αὐθαφρέτως ὀριζομένης, δὲν ἐπιφέρουν ἱκανοποιητικὴν ἐξομάλυνσιν τῆς σειρᾶς. Συνεπῶς, τὰ κριτήρια ἐπιλογῆς τῶν καταλλήλων κινήτων μέσων πρέπει νὰ εἶναι, ἀφ' ἑνὸς μὲν ὁ ἱκανοποιητικὸς βαθμὸς ἐξομαλύνσεως τῶν δεδομένων, ἀφ' ἑτέρου δὲ ἡ ἀπώλεια ὅσον τὸ δυνατόν μικροτέρου ἀριθμοῦ προσφάτων παρατηρήσεων.

Εἶναι προφανές ὅτι αἱ πρῶται διαφοραὶ ἑνὸς κινήτου μέσου ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς διαφορὰς μεταξύ τῶν τιμῶν διὰ τούς μῆνας οἱ ὁποῖοι ἀπέχουν κατὰ περίοδον ἴσην πρὸς ἐκείνην τοῦ κινήτου μέσου. Κατὰ ταῦτα, ὁ κινήτος μέσος μιᾶς ἐποχικῶς διωρθωμένης χρονολογικῆς σειρᾶς, ὁ ὁποῖος βασίζεται ἐπὶ περιόδου ἴσης πρὸς τὴν απαιτούμενην τοιαύτην δι' ἐπικράτησιν τῆς τάσεως (δηλαδή περιόδου διὰ τὴν ὁποῖαν εἶναι  $\bar{T}/\bar{T}\bar{C} < 1$ ) δεικνύει κατὰ κύριον λόγον τὰς μετα-

βολάς τῆς τάσεως. Οὕτω, ἡ ἐπιλογή τῶν κινητῶν μέσων διά τήν ἐξομαλύνσιν τῶν διαφόρων χρονολογικῶν σειρῶν δεόν νά στηρίζεται ἐπί τῶν πληροφοριῶν αἱ ὁποῖαι παρέχονται ὑπό τοῦ λόγου  $I/T_C$ .

Ἐν τούτοις, ἡ ἀρχή αὕτη, ἄν καί θεωρητικῶς ὀρθή, δέν ἀκολουθεῖται συνήθως εἰς τήν πράξιν, λόγω τῆς σημαντικῆς ἀπώλειας προσφάτων παρατηρήσεων τήν ὁποῖαν συνεπάγεται ἡ χρησιμοποίησις κινητῶν μέσων μεγάλου ἀριθμοῦ μηνῶν. Πρὸς ἐπίτευξιν, ὅμως, ὠρισμένου βαθμοῦ ἐξομαλύνσεως τῶν ἐποχικῶς δωρθωμένων δεδομένων, ἐφαρμόζεται πολλάκις - ἀνεξαρτήτως τοῦ εὗρους μεταβολῆς τῆς ἀρρυθμίου συνιστώσης - εἰς κινητός μέσος τριῶν μηνῶν, ὁ ὁποῖος ἐπιφέρει ἀπώλειαν μιᾶς μόνον προσφάτου παρατηρήσεως. Τοιοῦτος κινητός μέσος ὑπελογίσθη καί ἐπί τοῦ ἐποχικῶς δωρθωμένου δείκτου βιομηχανικῆς παραγωγῆς, μολονότι, ὡς ἀνωτέρω ἐδείχθη, θά ἔδει μᾶλλον νά ἐφαρμοσθῆ ἐπί τοῦ δείκτου τούτου κινητός μέσος τεσσάρων μηνῶν πρὸς ἱκανοποιητικὴν ἐξομαλύνσιν του ἐκ τῶν ἀρρυθμῶν μεταβολῶν. Σημειωτέον ὅτι ὁ ὑπολογισθεὶς κινητός μέσος τριῶν μηνῶν ἀναγράφεται εἰς τὸν Πίνακα I-11, ἀπεικονίζεται δέ γραφικῶς εἰς τὸ Διάγραμμα I-5 ὁμοῦ μετά τῶν ἀρχικῶν καί τῶν ἐποχικῶς δωρθωμένων δεδομένων.

#### BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

##### A. Ἑλληνική

1. Ἀθανασιάδου, Κ., "Στατιστική", Μέρος Τρίτον, Ἀθῆναι, 1958, σελ. 5-172.
2. Δρακάτου, Κ., "Ἀνάλυσις τῶν Βραχυχρονίων Μεταβολῶν τῶν Χρονολογικῶν Σειρῶν", εἰς περιοδικόν "Σπουδαί", τεύχος 3, Τομ. ΙΓ', Πειραιεύς, 1963.
3. Δρακάτου, Κ., "Ἐποχικὴ Διόρθωσις Ὁρισμένων Νομισματικῶν Μεγεθῶν", Τράπεζα τῆς Ἑλλάδος, "Ἡ Ἑλληνικὴ Οἰκονομία κατὰ τὸ ἔτος 1964", Ἀθῆναι, 1965, σελ. 202-215.
4. Μαργαρίτη, Ε., "Σπουδὲ τῶν Ἐποχικῶν μεταβλητῶν εἰς τὰς Χρονολογικὰς Σειράς", εἰς περιοδικόν "Σπουδαί", ἀριθ. 7-8, 1958.

##### B. Ξένη

1. Allen, R.G.D., "Statistics for Economists", Hutchinson University Library, London, 1960, σελ. 138-158. Μετάφρασις εἰς τήν Ἑλληνικὴν ὑπό Κ. Ἀθανασιάδου ὑπό τὸν τίτλον "Στατιστική", Ἀθῆναι, 1959, σελ. 136-157.
2. Budin, M., "Statistical Measurements for Economics and Administration", Asia Publishing House, London, 1962, σελ. 226 - 271.

3. Connor, L.R. and Morrell, A.J.H., "Statistics in Theory and Practice - With Special Reference to Published Statistics", Sir Isaac Pitman and Sons Ltd, London, 1964, σελ. 47-57.
4. Croxton, F.E. and Cowden, D.J., "Applied General Statistics", Sir Isaac Pitman and Sons Limited, London, 1960, σελ. 240-393.
5. Greenwald, W.I., "Statistics for Economics", Charles E. Merrill Books, Inc., Columbus, Ohio, 1963, σελ. 178-337.
6. Guthrie, H.W., "Statistical Methods in Economics", Richard D. Irwin, Inc., Homewood, Illinois, 1966, σελ. 73-134.
7. Hays, S., "An Outline of Statistics", Longmans, Green and Co, London, 1956, σελ. 98-108.
8. Hirsch, W.Z., "Introduction to Modern Statistics - With Applications to Business and Economics", The Macmillan Company, New York, 1962, σελ. 284-353.
9. Ilersic, A.R., "Statistics", H.F.L. (Publishers) Ltd, London, 1959, σελ. 408-426.
10. Karmel, P.H., "Applied Statistics for Economists-A Course in Statistical Methods", Melbourne, Sir Isaac Pitman and Sons Ltd, 1963, σελ. 211-238.
11. Mason, R.D., "Statistical Techniques in Business and Economics", Richard D. Irwin, Inc., Homewood, Illinois, 1967, σελ. 211-282.
12. Mills, F., "Statistical Methods", Holt, Rinehart and Winston, New York, 1955, σελ. 319-425.
13. O.E.C.D., "Seasonal Adjustment on Electronic Computers - Proceedings of an International Conference Held in Paris", 1960.
14. Paden, D.W. and Lindquist, E.F., "Statistics for Economics and Business", Mc Graw - Hill Book Company Inc., New York, 1956, σελ. 188-240.
15. Spiegel, M., "Theory and Problems of Statistics", Schaum Publishing Co, New York, 1961, σελ. 283-312.
16. Suits, D.B., "Statistics : An Introduction to Quantitative Economic Research", Rand Mc Nally and Company, Chicago, 1963, σελ. 203-249.
17. Thirkettle, G.L., "Wheldon's Business Statistics and Statistical Method", Macdonald and Evans, Ltd, London, 1962, σελ. 178-192.
18. Yamane, T., "Statistics - An Introductory Analysis", A Harper International Edition, 1966, σελ. 330-367.