ΝΙΚ. Π. ΘΕΟΔΩΡΟΥ
Δρος Φυσικῶν
Καθηγητοῦ 'Ανωτ. Σχολῆς Βιομηχανικῶν Σπουδῶν

ΜΑΘΗΜΑΤΑ
ΦΥΣΙΚΗΣ

ΤΟΜΟΣ Α΄

ΜΗΧΑΝΙΚΗ - ΑΚΟΥΣΤΙΚΗ

ΕΚΔΟΣΙΣ ΔΕΥΤΕΡΑ
(βελτιωμένη καὶ ἐπηυξημένη)

(Μὲ 175 προβλήματα, δι' ἕκαστον τῶν ὁποίων παρέχεται ὑπόδειξις λύσεως)

ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ: ΑΡΓΥΡΗ ΠΑΠΑΖΗΣΗ
ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ 76 — ΑΘΗΝΑΙ
1957

ΑΝΤΙ ΠΡΟΛΟΓΟΥ

Ἡ ἐξάντλησις τῶν ἀντιτύπων τῆς πρώτης ἐκδόσεως ἐπέβαλε τὴν παροῦσαν διὰ τοὺς λόγους ποὺ ὡδήγησαν καὶ εἰς τὴν προηγουμένην, ἤτοι διὰ νὰ ἀνταποκριθῇ εἰς τὴν ἀνάγκην τελειοφοίτων Γυμνασίων καὶ σπουδαστῶν Ἀνωτέρων Σχολῶν νὰ ἀποκτήσουν ἀποσαφηνισμένας καὶ κατ' ἐπιστημονικὴν συνέπειαν διατεταγμένας γνώσεις τῶν βασικῶν στοιχείων ἐποικοδομήσεως τῆς συγχρόνου Φυσικῆς. Τὸ ὅ,τι, ὅπως λέμε εἰς τὴν Εἰσαγωγήν, ἡ Φυσικὴ τῆς σήμερον καθορίζει τὸν Πολιτισμὸν τῆς αὔριον ὀφείλεται κατὰ μέγα μέρος εἰς τὴν προσπάθειαν ποὺ ἀπὸ τῆς ἐποχῆς Γαλιλαίου μὲ αἰσθητοτέραν ἐκδήλωσιν κατὰ τὸν αἰῶνά μας καταβάλλει τὰ διέπεται ἡ ἔρευνά της ἀπὸ αὐστηρῶς τηρουμένην ἐπιστημονικὴν τάξιν. Κατὰ συνέπειαν τούτου κατεβλήθη προσπάθεια κατὰ τὴν συγγραφὴν τοῦ παρόντος νὰ εἶναι κατὰ τὸ δυνατὸν σύντομον χωρὶς νὰ θυσιασθῇ πρὸς τοῦτο ἡ βαθυτέρα ἀποσαφήνισις καὶ σύνδεσις τῶν βασικῶν στοιχείων ἐποικοδομήσεως τῆς Φυσικῆς εἰς ὅσην ἔκτασιν καλύπτει ἡ περιληφθεῖσα εἰς τὸν τόμον τοῦτον ὕλη της. Ὁ χαρακτηρισμὸς τοῦ βιβλίου μὲ τὸν ὅρον «Μαθήματα» ὀφείλεται εἰς τὸ ὅτι ἀποτελεῖ προϊὸν τῆς κτηθείσης πείρας ἐκ τῆς ἀσκήσεως ἐπὶ σειρὰν ἐτῶν διδασκαλίας τῆς Φυσικῆς εἰς τὰς ἀνωτέρας τάξεις Γυμνασίων καὶ εἰς τὴν Ἀνωτ. Σχολὴν Βιομηχανικῶν Σπουδῶν. Τὸ γεγονὸς τοῦτο συνδυασμένον μὲ τὴν ἀπὸ ἔτους εἰς ἔτος ἐκπληκτικῶς γοργὴν πρόοδον τῶν κατακτήσεων τῆς φυσικῆς ἐρεύνης ἐξηγεῖ τὸ ὅτι ἡ παροῦσα ἔκδοσις εἶναι πολὺ διάφορος τῆς προηγουμένης, προκειμένου νὰ προσαρμοσθῇ τόσον εἰς τὴν ἐκ τῆς διδασκαλίας τοῦ μαθήματος πεῖραν, ὅσον καὶ εἰς τὴν ἐπιβαλλομένην ἐκ τῆς συγχρόνου στάθμης τῆς Φυσικῆς ἐπιλογὴν καὶ διάρθρωσιν τῆς ὕλης. Πέραν τούτων πολύτιμοι ὑποδείξεις ἐκλεκτῶν φίλων, δυναμένων νὰ ἔχουν βαρύνουσαν γνώμην, συνέβαλον σημαντικῶς εἰς τὴν δοθεῖσαν διαμόρφωσιν καὶ τούτου ἕνεκα ἐκφράζονται καὶ ἐδῶ αἱ προσήκουσαι εὐχαριστίαι. Τέλος κατὰ τὴν συγγραφὴν εἴχομεν ὑπ' ὄψιν ἀντίστοιχα ξένα συγγράμματα ὡς καὶ ὅλα (καθόσον μᾶς εἶναι γνωστὰ) τὰ σχετικῶς πρὸς τὸ θέμα μας ἑλληνικά. Εἰδικώτερον διὰ τὰ τελευταῖα εὐχαρίστως σημειώνομεν ὅτι οὔτε ὀλίγα σχετικῶς εἶναι, οὔτε ἀπὸ ἀπόψεως περιεχομένου των μπορεῖ νὰ κατηγορηθοῦν ὡς ὑστεροῦντα ἀντιστοίχων των ξένων. Εἶναι πιθανὸν ὅτι αὐστηρότεροι κριταὶ μὲ τὴν δικαιολογίαν ὅτι παροτρύνουν πρὸς βελτιώσεις θὰ ἐσημείωναν τὰς ἀτελείας καὶ θὰ ἔθεταν ὑπὸ ἀμφισβήτησιν τὸν δοθέντα γενικὸν χαρακτηρισμόν· ἡμεῖς ἐπιμένομεν εἰς τὴν γνώμην μας, διότι τὴν διατυπώνομεν εἰς ἑκάστην περίπτωσιν μὲ συσχετισμὸν τοῦ περιεχομένου τοῦ βιβλίου πρὸς τὸν σκοπόν, διὰ τὸν ὁποῖον ἐγράφη. Ἐλπίζομεν ὅτι καὶ οἱ δυνάμενοι νὰ ἔχουν γνώμην διὰ τὸ παρὸν θὰ λάβουν ὑπ' ὄψιν των τὴν κατὰ τ' ἀνωτέρω διέπουσαν τοῦτο τοποθέτησιν.

Ἀθῆναι, Σ)βριος 1957 — Ο ΣΥΓΓΡΑΦΕΥΣ

Σημ. 1. Τὰ προβλήματα ποὺ κατὰ ἑνότητας ἔχουν κατανεμηθῇ εἰς διαφόρους θέσεις τοῦ βιβλίου, ἀποσκοποῦν εἰς τὴν ἐμπέδωσιν τῶν κτηθεισῶν γνώσεων· εἰς καθὲν ἐξ αὐτῶν παρέχεται ὑπόδειξις τῆς λύσεως μὲ ἀναγραφήν, ἄλλοτε τοῦ τελικοῦ ἐξαγομένου, ἄλλοτε τῶν ἐπὶ ἀριθμητικῶν τιμῶν πράξεων καὶ ἄλλοτε μὲ ὑπόμνησιν τῶν σχετικῶν φυσικῶν νόμων.

Σημ. 2. Κάθε γνήσιον ἀντίτυπον πρέπει νὰ ἔχῃ ὑπογραφὴ ἀπὸ τὸν Συγγραφέα.

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Προεισαγωγικὸν σημείωμα

Ἡ περιληφθεῖσα εἰς τὸν τόμον τοῦτον διαπραγμάτευσις φαινομένων τῆς Μηχανικῆς ἐκτείνεται εἰς τοιαῦτα ποὺ γίνονται κατανοητὰ μὲ τὴν «κλασσικήν», (ὅπως χαρακτηρίζεται σήμερον), ἀντίληψιν τῆς Φυσικῆς, τὴν ἀντίληψιν δηλαδὴ κατὰ τὴν ὁποίαν αἱ ἔννοιαι ***χώρου*** καὶ ***χρόνου*** εἶναι ἀνεξάρτητοι ἀλλήλων καὶ ἔχουν καθεμία ἀπόλυτον πρωταρχικὴν ὑπόστασιν. Ἡ θεώρησις αὐτὴ ὁδηγεῖ εἰς ἐξαγόμενα ποὺ εἶναι αἰσθητῶς σύμφωνα μὲ τὰς πειραματικὰς διαπιστώσεις, ***μόνον***, ἐφ' ὅσον αἱ ταχύτητες κινήσεως τῶν σωμάτων εἶναι πολὺ μικραὶ ἐν συγκρίσει πρὸς τὴν ταχύτητα διαδόσεως τοῦ φωτός, ἤτοι τὴν ταχύτητα τῶν 3.10^{10} cm/sec. Τὸ γεγονὸς αὐτό, συνδυαζόμενον μὲ τὸ ὅτι ἡ θεώρησις τῆς «κλασσικῆς Μηχανικῆς» εἶναι περισσότερον εὔληπτος, προσδίδει εἰς τὸ περιεχόμενον τοῦ τόμου τούτου θεμελιώδη σημασίαν διὰ τὴν συγκρότησιν τοῦ οἰκοδομήματος τῆς Φυσικῆς. Προκειμένου ὅμως περὶ φαινομένων κινήσεως μὲ ταχύτητας ποὺ προσεγγίζουν τὴν ταχύτητα τοῦ φωτός, ἡ κλασσικὴ μηχανικὴ δὲν ἐπαρκεῖ διὰ τὴν κατανόησιν τῆς πορείας των καὶ ἀπαιτεῖται νὰ ἀναθεωρηθῇ ἡ βασική της ἀντίληψις ἀναφορικῶς πρὸς τὰς ἐννοίας χώρου καὶ χρόνου. Τοῦτο ἔγινε ἀπὸ τῶν ἀρχῶν τοῦ αἰῶνος μας (1905) ποὺ ὁ μέγας ἐρευνητὴς Albert Einstein (1879—1955) διετύπωσε τὴν περίφημον ***θεωρίαν τῆς σχετικότητος***, ἡ ὁποία μαζὶ μὲ τὴν ἐπίσης εὐρυτάτης σημασίας ***θεωρίαν τῶν*** Quanta ποὺ πρῶτος διετύπωσε ὁ Max Planck (1858—1947) ἀπετέλεσαν τὰς βάσεις ἀναθεμελιώσεως τοῦ οἰκοδομήματος τῆς συγχρόνου Φυσικῆς. Εἶναι πέραν τῶν ὁρίων τοῦ βιβλίου τούτου ἡ ἀνάπτυξις τῶν θεωριῶν αὐτῶν· (τουτο γίνεται εἰς τὸ βιβλίον μας «Ἐπιτομὴ τῆς νεωτέρας Φυσικῆς», Κεφ. XIII καὶ XIV). Διὰ τὴν πληρότητα τῆς περιληφθείσης εἰς τὸν τόμον τοῦτον ὕλης κρίνεται ἐπάναγκες νὰ σημειωθῇ καὶ ἐδῶ ὅτι κατὰ τὴν θεωρίαν τῆς σχετικότητος ἡ ταχύτης τοῦ φωτὸς εἶναι μία ταχύτης ὁρική, (ἀνέφικτος κατὰ τὰς κινήσεις τῶν σωμάτων)· καὶ ὅτι ἡ ***ἀδρανὴς*** μᾶζα (§ 16) δὲν εἶναι διὰ κάθε σῶμα σταθερὰ (ὅπως θεωρεῖται εἰς τὴν κλασσικὴν μηχανικήν), ἀλλὰ λαμβάνει τιμὰς ποὺ αὐξάνονται ἰλιγγιωδῶς, ὅταν ἡ ταχύτης τῆς κινήσεως τοῦ σώματος πλησιάζῃ τὴν ταχύτητα τοῦ φωτός. Ἡ ἀκριβὴς ἐξάρτησις τῆς ἀδρανοῦς μάζης m ἀπὸ τὴν ταχύτητα v τῆς κινήσεώς της δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον: $m = m_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$, ἂν m_0 παριστάνῃ τὴν μᾶζαν τοῦ σώματος, ὅταν ἠρεμῇ (v=o), καὶ c τὴν ταχύτητα τοῦ φωτός. Σύμφωνα μὲ τὸν τύπον αὐτόν, ὅταν ἡ ταχύτης v τοῦ σώματος εἶναι πολὺ μικροτέρα τῆς ταχύτητος c τοῦ φωτὸς ($v \ll c$), τότε ὁ ὅρος v^2/c^2 ἐκμηδενίζεται καὶ συνεπῶς ἡ μᾶζα m τοῦ κινουμένου σώματος εἶναι ἴση μὲ τὴν μᾶζαν m_0 ποὺ ἔχει τοῦτο, ὅταν ἠρεμῇ. Ἔτσι ἡ κλασσικὴ μηχανικὴ ἀποβαίνει εἰδικὴ περίπτωσις τῆς ἐπὶ τῇ βάσει τῆς θεωρίας τῆς σχετικότητος γενικώτερον ἰσχυούσης. Ἂν τώρα λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι εἰς τὸν τύπον $m = m_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$ ὁ ὅρος v^2/c^2 εἶναι πολὺ μικρότερος τῆς μονάδος, μποροῦμε κατὰ μεγάλην προσέγγισιν νὰ θέσωμεν: $m = m_0\,(1 + {}^1/_2 v^2/c_2)$ καὶ $mc^2 = m_0c^2 + {}^1/_2 m_0 v^2$. Εἰς τὴν σχέσιν αὐτὴν ὁ ὅρος ${}^1/_2 m_0 v^2$ παριστάνει κινητικὴν ἐνέργειαν (§ 20) τοῦ σώματος. Πρέπει συνεπῶς καὶ οἱ ὅροι m_0c^2 καὶ mc^2 νὰ παρέχουν ποσὰ ἐνεργείας. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ μᾶζα m σώματος ἐγκλείει ἐνέργειαν mc^2 ἴσην μὲ τὴν ἐνέργειαν m_0c^2 ποὺ ἐγκλείει εἰς τὴν κατάστασιν ἠρεμίας, ἀφοῦ τότε εἶναι $v=0$ καὶ συνεπῶς καὶ ${}^1/_2 m_0 v^2 = 0$. Κατὰ ταῦτα: ***Κάθε μᾶζα*** m ***εἶναι ἰσοδύναμος μὲ ἐνέργειαν*** $E = mc^2$ ***καὶ ἀντιστρόφως κάθε ἐνέργεια*** E ***ἐκδηλώνει ἀδράνειαν μάζης*** $m = E/c^2$. Ἔτσι διὰ τῆς μεταπτώσεως μαζῶν εἰς ἐνέργειαν μποροῦμε νὰ ἔχωμεν τεράστια ποσὰ τοιαύτης· (ἀπὸ 1 mg μάζης μπορεῖ νὰ προκύψῃ ἐνέργεια 9.10^{10} Joule). Τοῦ ἐξαγομένου τούτου γίνεται ἐφαρμογὴ εἰς τὴν ἐκμετάλλευσιν τῆς ἀτομικῆς ἐνεργείας.

Πίναξ μεγεθῶν Μηχανικῆς — Ἀκουστικῆς καὶ μονάδων μετρήσεως αὐτῶν

Ὀνομασία μεγέθους καὶ συμβολισμός του	Φυσικαὶ διαστάσεις τοῦ ποσοῦ	Συμβολισμὸς καὶ ὀνομασία τῆς μονάδος μετρήσεως τοῦ ποσοῦ	Σχέσις πρὸς ἄλλην πρακτικωτέραν μονάδα	Σχέσις τοῦ ποσοῦ πρὸς ἄλλα
Γωνία α ἢ β κλπ.	0, 0, 0	rd ἀκτίνιον	1 rd = 57° 17′ 45″	$\alpha = \frac{\text{μῆκ. τόξου}}{\text{μῆκ. ἀκτῖνος}}$
Μῆκος μῆ/, διάστημα s	1, 0, 0	cm ἑκατοστόμετρον	1 cm = 10^{-2} m (μέτρ.)	—
Ἐπιφάνεια q ἢ F	2, 0, 0	cm^2 τετραγ. »	1 cm^2 = 10^{-4} m^2	q=[s.s]
Ὄγκος V	3, 0, 0	cm^3 κυβικ. »	1 cm^3 = 10^{-3} l (λίτρα)	V=[s.s.s]
Μᾶζα m	0, 1, 0	g ἢ gr γραμμάριον	1 gr=10^{-3}kg (χιλιόγρ.)	—
Χρόνος t, Περίοδος T	0, 0, 1	s ἢ sec δευτερόλεπτον	1 sec = 1/3600 h (ὥρ.)	—
Συχνότης ἢ Ἀριθμὸς στροφῶν κατὰ sec ν	0, 0,–1	sec^{-1} ἢ Hz (Herz) ἢ κύκλος (c)	1 Hz = 10^{-3} χιλιόκυκλοι (kc)	ν=1/T
Γωνιακὴ ταχύτης ἢ κυκλοσυχνότης ω	0, 0,–1	rd/sec ἀκτίνια κατὰ δευτερόλεπτον	1 rd/sec=2π/T Hz	ω=2πν
Γωνιακὴ ἐπιτάχυνσις β	0, 0,–2	rd/sec^2	1 rd/sec^2=2π/T^2	β=P/Θ
Ταχύτης (γραμ.) v ἢ c	1, 0,–1	cm/sec (cel)	1 cm/s = 10^{-2} m/sec	v=ds/dt
Ἐπιτάχυνσις » γ ἢ g	1, 0,–2	cm/sec^2 (gal)	1 cm/s^2 = 10^{-2} m/sec^2	γ=dv/dt
Δύναμις k	1, 1,–2	dyn δύνη	1 dyn = 1/981 g* ἢ p	k=m.γ
Βάρος G ἢ B	1, 1,–2	gr* ἢ p (πόντ)	1 p=980 dyn=10^{-3} kp	B=m.g
Πυκνότης ρ ἢ d	–3,1,0	gr/cm^3	1 gr/cm^3=1 kg/l	ρ=m/V
Εἰδικὸν βάρος σ	2, 1,-3	dyn/cm^3	1 dyn/cm^3=1/980p/cm^3	σ=B/V
Πίεσις p	-1, 1,-2	dyn/cm^2(μικρομπὰρ μb)	1 μb = 75 10^{-6} Torr.	p=k/q
Ἔργον A, Ἐνέργεια W	2, 1,–2	erg ἔργιον	1 erg = 10^{-7} Joule	A=k.s
Ἰσχὺς L	2, 1,–3	erg/sec	1 erg/sec=10^{-7} Watt	L=A/t
Ποσὸν κινήσεως, Ὁρμὴ B	1, 1,–1	gr.cm/s ἢ dyn.sec	—	B=m.v=k.t
Ροπὴ περιστροφῆς P	2, 1,–2	dyn.cm	1 dyn cm=1/981 p.cm	P=k.μ
Ροπὴ ἀδρανείας Θ	2, 1, 0	gr cm^2	—	$\Theta=\Sigma m_i s^2_i$
Στροφορμὴ Γ	2, 1,–1	gr cm^2/sec	—	Γ=Θ.ω
Ἔντασις ρεύματος I	3, 0,–1	cm^3/sec	1 cm^3/sec=10^{-3} l/sec	I=q.v
» ἤχου	0, 1,–3	Watt/cm^2	—	I=L/4πr^2
Ἀκουστότης A	—	phon (φὼν)	—	A=10λογ(I/I_0)

Πίναξ πυκνοτήτων εἰς gr/cm^3

ΣΤΕΡΕΑ		ΥΓΡΑ	
Ἀλουμίνιον	2.7	Αἰθὴρ	0.72
Ἄργυρος	10,5	Αἷμα	1,05—1,06
Ἤλεκτρον	1,0	Βενζίνη	0,68—0.7
Καουτσοὺκ	0,9—1	Βενζόλιον	0.88
Κασσίτερος	7,3	Γλυκερίνη	1,26
Κυτταρινοειδὲς	1.4	Ἐλαιόλαδον	0,91
Λευκόχρυσος	21.4	Οἰνόπνευμα	0,79
Μάρμαρον	2,5—2.9	Πετρέλαιον	0,79-0,82
Μόλυβδος	11,3	Τερεβινθέλαιον	0,87
Νικέλιον	8.8	Ὕδωρ	1
Ξύλον δρυὸς	0,7	Ὑδράργυρος	13,59
» ἐβένου	1,2	Χλωροφόρμιον	1,48
» πεύκης	0,5		
Ὀρείχαλκος	8,4–8,7	ΑΕΡΙΑ	
Πάγος	0,91	Ἄζωτον	0,0012507
Πορσελάνη	2,3—2,5	Ἀὴρ	0 0012928
Σίδηρος	7,6—7,8	Ἀμμωνία	0,0007708
Ὕαλος	2,4—3,9	CO_2	0.00 9768
Φελλὸς	0,16—0,24	Ἥλιον	0,0001785
Χαλαζίας	2.7	Ὀξυγόνον	0,0014290
Χαλκὸς	8.9	Ὑδρογόνο	0,0000898
Χρυσὸς	19,3	Φωταέριον	0, 0006
Ψευδάργυρος	7.2	Χλώριον	0,003220

Πίναξ ταχυτήτων εἰς m/sec

Κανονικ. βάδισμα	1,5	Μετρίου ἀνέμου	10
Τροχάδην	2,2	Σφοδροῦ »	25
Δρομέως μέχρις	7	Θυσάνου νεφῶν	20
Λέμβου μὲ κουπιὰ »	5	Γῆς περὶ τὸν Ἥλιον	29,6.10^3
Ἵππου βάδην »	1,2	Σημείου τοῦ Ἰσημερινοῦ κατὰ τὴν περιστροφὴν τῆς Γῆς	0,465.10^3
» τροχάδην »	4-7		
» ἱπ)δρομίου »	25		
κυνηγετ. σκύλου »	25		
Ποδηλατιστοῦ »	17	Σελήνης περὶ τὴν Γῆν	10^3
αὐτοκινήτου »	70		
ταχείας ἁμαξοστοιχίας »	60	Ἡλίου εἰς τὸ Διάστημα	20.10^3
Ἀεροπλάνου »	143	Ἤχου εἰς τὸν ἀέρα	0,333.10^3
Ὑπερωκεανείου »	13		
Βλήματος πολεμ. ὅπλου »	820	Φωτὸς καὶ ἠλεκτρομαγνητικῶν κυμάτων	300.10^6
Βλήματος πυροβόλου	550-1000	Ἐπιτάχυνσις βάρους εἰς τόπον Γῆς πλάτους 45°	9,806 m/s^2
κυμάτων θαλάσσης	6	Εἰς τὴν Σελήνην	1,66
ρεύματος τοῦ Κόλπου	1	» τὸν Ἥλιον	270

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

§ 1. Περιεχόμενον καὶ μέθοδος τῆς φυσικῆς. α) ***Φύσις καὶ φαινόμενα.*** Εἰς τὸ ἄπειρον «Σύμπαν» ποὺ μᾶς περιβάλλει διαπιστώνομεν μὲ τὰς αἰσθήσεις μας—εἴτε ἀπ' εὐθείας εἴτε μὲ τὴν χρησιμοποίησιν καταλλήλων ὀργάνων—ὅτι ὑπάρχει ἀμέτρητον πλῆθος διαφόρων σωμάτων. Ὅλα αὐτὰ μαζὶ ἀποτελοῦν τὴν ***Φύσιν***. Εἰς τὴν Φύσιν γίνονται ἀδιάκοπα μεταβολαί : ἡ Γῆ, ἡ Σελήνη, ὁ Ἥλιος καὶ τὰ ἄλλα οὐράνια σώματα μεταβάλλουν ἀδιαλείπτως τὰς θέσεις των εἰς τὸν χῶρον, τὰ ὕδατα ἐξατμίζονται, οἱ ὑδρατμοὶ συμπυκνώνονται καὶ σχηματίζουν νέφη, αὐτὰ παράγουν βροχὲς καὶ χιόνια· τὸ ἠλεκτρικὸν ρεῦμα θερμαίνει εἰδικὰ σύρματα ποὺ διαρρέει, τὸ ἀναμμένο κερὶ λυώνει καὶ μεταβάλλεται εἰς ἀέρια τῆς καύσεως, τὸ σίδερο σκουριάζει, τὰ ζῶα καὶ φυτὰ τρέφονται, μεγαλώνουν, πολλαπλασιάζονται, ἀποθνήσκουν, ἀποξηραίνονται, παθαίνουν ἀποσύνθεσιν κλπ. Τὰς μεταβολὰς γενικῶς τὰς ὀνομάζομεν ***φαινόμενα.***

β) ***Ὁρισμὸς τῆς Φυσικῆς.*** Ἡ Φυσική, ὅπως τὸ λέει ἡ ὀνομασία της, ἦτο κατ' ἀρχὰς ἡ Ἐπιστήμη ποὺ κατεγίνετο μὲ τὴν μελέτην τῆς Φύσεως καὶ τῶν φαινομένων της ὡς καὶ μὲ τὴν ἀξιοποίησιν (ἐπωφελῆ χρησιμοποίησιν) τῶν ἐξαγομένων τῆς μελέτης αὐτῆς. Περιελάμβανε δηλαδὴ κατ' ἀρχὰς ὅλους τοὺς σημερινοὺς κλάδους τῶν φυσικῶν ἐπιστημῶν καὶ τὰς τεχνικὰς ἐφαρμογάς αὐτῶν. Μὲ τὴν πάροδον ὅμως τοῦ χρόνου ἡ πολύπλευρος αὐτὴ ἔκτασις τῆς μελέτης ἔλαβε τόσην ἀνάπτυξιν, ὥστε μὲ τὴν συστηματοποίησιν καὶ ταξινόμησιν τῶν ἐξαγομένων της νὰ προκύψουν ὁμάδες συγγενῶν γνώσεων, ἑκάστη τῶν ὁποίων ἀπετέλεσεν ἀντικείμενον μελέτης ἰδιαιτέρας Ἐπιστήμης. Ἔτσι ἐξεχώρισαν πρῶτα—πρῶτα αἱ Βιολογικαὶ Ἐπιστῆμαι (***Ζωολογία, Φυτολογία, Μικροβιολογία*** κλπ) ποὺ ἀσχολοῦνται μὲ τὴν μελέτην τῶν ἐμβίων ὄντων, δηλαδὴ ὠργανωμένων σωμάτων ποὺ ἐκδηλώνουν τὸ φαινόμενον τῆς ζωῆς. Κατόπιν τούτου ἀπέμεινεν εἰς τὴν Φυσικὴν ἡ μελέτη τῆς ἀψύχου Φύσεως καὶ τῶν φαινομένων αὐτῆς. Ἀλλὰ καὶ μὲ τὸν περιορισμὸν αὐτὸν τὸ ἀντικείμενον ἐρεύνης τῆς Φυσικῆς ἦτο τόσον πολύπλευρον, ὥστε νὰ μὴ μπορῇ νὰ ὑπαχθῇ εἰς ὁμοιόμορφον μέθοδον μελέτης. Διὰ τοῦτο ἐξεχώρισαν ἄλλοι εἰδικώτεροι κλάδοι, ὅπως εἶναι ἡ ἀρχαιοτέρα ὅλων *'Αστρολογία*, ἡ ἐπιστημονικωτέρα *'Αστρονομία* καὶ *'Αστροφυσικὴ* μὲ ἀντικείμενον ἐρεύνης τὴν μελέτην τῶν οὐρανίων σωμάτων, ἡ *Γεωλογία* καὶ *Γεωφυσικὴ* ποὺ ἐξετάζει τὰς μεταβολὰς τοῦ σώματος τῆς Γῆς καὶ ἄλλαι. Εἰδικώτερον ἐξεχώρισεν ἡ Χημεία μὲ προορισμὸν τὴν μελέτην τῶν καθέκαστα εἰδῶν τῆς ὕλης τῶν σωμάτων καὶ τῶν ἀλλοιώσεων αὐτῶν.

Ἔτσι ἡ Φυσικὴ περιωρίσθη εἰς τὴν ἔρευναν φαινομένων ποὺ δὲν ἀναφέρονται εἰς τὰς ἐπὶ μέρους οὐσιώδεις ἰδιότητας τῶν καθέκαστα εἰδῶν τῆς ὕλης, ἀλλὰ χαρακτηρίζουν γενικωτέρας καταστάσεις αὐτῶν. Ἀποτελεῖ π.χ. θέμα τῆς Χημείας ἡ μεταβολὴ ποὺ γίνεται κατὰ τὴν καῦσιν ὡρισμένου σώματος, ἐνῷ εἰς τὴν Φυσικὴν ἀνήκει ἡ ἐξέτασις φαινομένων ὡς εἶναι ἡ τῆξις, ἐξάτμισις κλπ. κατὰ τὰ ὁποῖα μεταβάλλεται ἡ φυσικὴ κατάστασις οἱουδήποτε σώματος.

γ) ***Φαινόμενα φυσικὰ καὶ φαινόμενα χημικά.*** Ἀπὸ τὴν διάκρισιν αὐτὴν τῆς Φυσικῆς ἀπὸ τὴν Χημείαν προκύπτει ἡ διάκρισις τῶν φαινομένων εἰς ***φυσικὰ καὶ χημικά***. Τὰ πρῶτα εἶναι μεταβολαὶ καταστάσεων εἰς τὰς ὁποίας περιπίπτουν τὰ σώματα χωρὶς ἀλλοίωσιν τῶν χαρακτηριστικῶν ἰδιοτήτων τῆς ὕλης ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἀποτελοῦνται ταῦτα. Τὰ χημικὰ ἐξ ἄλλου φαινόμενα εἶναι μεταβολαὶ ποὺ ἐπιφέρουν ἀλλοίωσιν εἰς τὰς οὐσιώδεις ἰδιότητας τῶν σωμάτων ποὺ τὰς ὑφίστανται. Ἡ θέρμανσις σώματος (μεταβολὴ τῆς θερμικῆς του καταστάσεως) εἶναι φαινόμενον φυσικόν, ἐνῷ ἡ καῦσις τοῦ ἄνθρακος εἶναι χημικόν, ἀφοῦ κατ' αὐτὸ ὁ μέλας στερεὸς ἄνθραξ μεταβάλλεται εἰς ἄχρουν ἀέριον, τὸ διοξείδιον τοῦ ἄνθρακος.

Σημ. 1. Εἶναι εὐνόητον ὅτι μὲ τὸν παραπάνω καθορισμὸν δὲν προκύπτουν σαφῆ ὅρια μεταξὺ τῆς Φυσικῆς καὶ τῶν ἄλλων κλάδων τῆς ἐρεύνης τοῦ φυσικοῦ κόσμου. Ἡ διάκρισις μεταξύ των στηρίζεται περισσότερον εἰς τὴν μέθοδον ἐρεύνης καὶ τὴν ἄποψιν θεωρήσεως παρὰ εἰς τὸ ἀντικείμενον ἐρεύνης. Εἰς τοῦτο ὀφείλεται τὸ ὅτι τὰ ὅρια διακρίσεως εἶναι περισσότερον ἀσαφῆ μεταξὺ Φυσικῆς καὶ Χημείας, διότι καὶ ἡ Χημεία χρησιμοποιεῖ εἰς τὴν ἔρευνάν της μέθοδον ποὺ ὁμοιάζει πολὺ μὲ τὴν μέθοδον τῆς Φυσικῆς.

Σημ. 2. Σύμφωνα μὲ τὰ προηγηθέντα ἡ Φυσικὴ εἶναι σήμερον ἡ ***βασικὴ*** ἐπιστήμη τῆς Φύσεως. Εἶναι ἐπομένως ἡ ***πηγὴ*** κάθε ἐξελίξεως καὶ προαγωγῆς τῶν ἄλλων κλάδων τῆς ἐρεύνης τῆς Φύσεως ὡς καὶ τῶν ἐφαρμογῶν της εἰς τὴν Τεχνικήν. Μπορεῖ λοιπὸν νὰ ὑποστηριχθῇ χωρὶς ὑπερβολήν, ὅτι ***ἡ προαγωγὴ τοῦ πολιτισμοῦ μας προσδιορίζεται ἀπὸ τὰς κατακτήσεις τῆς ἐρεύνης τῆς Φυσικῆς.*** Ἐπιγραμματικὰ μποροῦμε νὰ ποῦμε: ***«Ἡ Φυσικὴ τῆς σήμερον καθορίζει τὸν πολιτισμὸν τῆς αὔριον»***.

δ) Μέθοδος τῆς Φυσικῆς. 1. Εἰς τὴν ἔρευναν τῶν φαινομένων ἡ Φυσικὴ δὲν περιορίζεται εἰς ἁπλῆν περιγραφὴν αὐτῶν, ἀλλ' ἀναζητεῖ τὰς ποσοτικὰς σχέσεις ποὺ συνδέουν τὰ μεγέθη εἰς τὰ ὁποῖα ἀναφέρονται τὰ καθέκαστα φαινόμενα. Μὲ ἄλλα λόγια ἐπιζητεῖ νὰ καθορίσῃ ἐπακριβῶς τὰς σχέσεις μεταξὺ αἰτίων καὶ ἀποτελεσμάτων.

Ἔτσι ἡ Φυσικὴ ἀποβαίνει ὑπόδειγμα ***ἀκριβολογικῆς*** ἐπιστήμης. Διὰ τὴν ἔκφρασιν τῶν σχέσεων ποὺ ἀνακαλύπτει μεταξὺ τῶν φυσικῶν μεγεθῶν διατυπώνει προτάσεις ποὺ ἀποτελοῦν τοὺς ***φυσικοὺς νόμους.***

Κάθε φυσικὸς νόμος ἐκφράζει ἐξακριβωμένην σχέσιν· διὰ τοῦτο ἐξακολουθεῖ νὰ ἔχῃ ἰσχὺν ἀκόμη καὶ ἂν συμβῇ μὲ τὴν πρόοδον τῆς ἐρεύνης νὰ διαπιστωθῇ ὅτι ὑπάρχουν βαθύτεραι σχέσεις αἰτίων μὲ ἀποτελέσματα, δηλαδὴ βασικώτεροι φυσικοὶ νόμοι. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν μπορεῖ ὡρισμένοι φυσικοὶ νόμοι νὰ ἀποδειχθοῦν ὅτι εἶναι εἰδικαὶ περιπτώσεις ἄλλων γενικωτέρων· ὁ νόμος π.χ. ποὺ καθορίζει τὴν δύναμιν μὲ τὴν ὁποίαν ἡ Γῆ ἕλκει τὰ ἐπ' αὐτῆς σώματα πρὸς τὸ κέντρον της, δὲν παύει νὰ ἰσχύῃ μὲ τὸ ὅτι ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι εἰδικὴ περίπτωσις τοῦ νόμου τῆς παγκοσμίου ἕλξεως, δηλαδὴ τοῦ νόμου ποὺ καθορίζει γενικώτερα τὴν δύναμιν μὲ τὴν ὁποίαν ἡ μᾶζα οἱουδήποτε σώματος ἕλκει κάθε ἄλλην μᾶζαν. Ἡ διαπίστωσις μάλιστα αὐτὴ ἔχει ἐκτιμηθῇ ἀπὸ τὴν Φυσικὴν τόσο πολύ, ὥστε νὰ ἀποτελῇ ἐπιδίωξιν τῆς ἐρεύνης ἡ προσπάθεια νὰ ἀναχθοῦν οἱ πολυπληθεῖς καθέκαστα νόμοι εἰς ὅσο τὸ δυνατὸν ὀλιγωτέρους μὲ καθολικωτέραν ἰσχύν.

2. Ἀλλὰ τὰ περισσότερα φαινόμενα δὲν γίνονται εἰς τὴν φύσιν μὲ τόσην ἁπλότητα, ὥστε νὰ ἀρκῇ προσεκτικὴ τούτων παρακολούθησις (ἀπ' εὐθείας ***παρατήρησις***) διὰ νὰ συναχθοῦν οἱ νόμοι ποὺ τὰ διέπουν· πολλὲς φορὲς συνοδεύεται τὸ φαινόμενον ποὺ ὑποβάλλεται εἰς ἔρευναν ἀπὸ ἄλλας ἐπιδράσεις ποὺ τὸ περιπλέκουν· ἄλλοτε πάλιν αἱ συνθῆκαι ὑπὸ τὰς ὁποίας λαμβάνει χώραν τὸ φαινόμενον δὲν ἐπιτρέπουν ἀκριβῆ παρακολούθησιν τῆς διαδρομῆς του. Ἔτσι π.χ. τὸ φαινόμενον τῆς πτώσεως ἑνὸς σώματος λόγῳ τοῦ βάρους του ἐπηρεάζεται ἀπὸ τὴν ἀντίστασιν τοῦ ἀέρος ποὺ διασχίζει κατὰ τὴν πτῶσιν του τὸ σῶμα· ἐξ ἄλλου τὸ φαινόμενον τοῦτο γίνεται μὲ τόσην ταχύτητα, ὥστε δὲν προφθαίνομεν νὰ τὸ παρακολουθήσωμεν ἐπακριβῶς μὲ ἄμεσον παρατήρησιν. Εἰς τοιαύτας περιπτώσεις ἐπιβάλλεται νὰ ἀποχωρίσωμεν τὸ ὑπὸ μελέτην φαινόμενον ἀπὸ τὰς ἐπιδράσεις ποὺ τὸ περιπλέκουν ἢ νὰ τὸ ἀναπαραγάγωμεν ὑπὸ συνθήκας ποὺ ἐπιτρέπουν τὴν παρακολούθησιν τῆς διαδρομῆς του.

Τὴν σκόπιμον ἀναπαραγωγὴν φαινομένου ὑπὸ συνθήκας ποὺ ἐπιτρέπουν ἀκριβῆ καὶ ἀναμφίβολον καθορισμὸν τῆς σχέσεως μεταξὺ αἰτίας καὶ ἀποτελέσματος τὴν λέμε ***πείραμα***. Κατὰ ταῦτα τὸ πείραμα εἶναι ***σκοπίμως ἁπλοποιημένον ἐρώτημα ποὺ θέτομεν εἰς τὴν Φύσιν μὲ τόσην σαφήνειαν, ὥστε νὰ εἶναι κατηγορηματικὴ ἡ ἀπάντησις***.

Ἡ σημασία τοῦ πειράματος ἀναγνωρίζεται καὶ ἀπὸ ἄλλους κλάδους τῆς ἐπιστημονικῆς ἐρεύνης καὶ διὰ τοῦτο ἐπεκτείνεται ὅλο καὶ περισσότερον ἡ χρησιμοποίησίς του. Εἰς τὴν Φυσικὴν ὅμως ἀποτελεῖ τοῦτο βασικὸν χαρακτηριστικὸν τῆς μεθόδου ποὺ χρησιμοποιεῖ εἰς τὴν ἔρευναν τῶν φαινομένων. Εἶναι τόσον ἰδιαζόντως χαρακτηριστικὸν ὥστε, ὅπως εἴπαμε παραπάνω, ἀποτελεῖ διακριτικὸν γνώρισμα τῆς Φυσικῆς ἀπὸ τοὺς ἄλλους κλάδους τῶν φυσικῶν ἐπιστημῶν. Μποροῦμε ἑπομένως νὰ ποῦμε ὅτι ὅσον μεγαλύτερον ρόλον ἀποκτᾷ καὶ εἰς ἄλλους κλάδους τὸ πείραμα τόσον περισσότερον συγχέονται τὰ ὅριά των μὲ τὰ ὅρια τῆς

Φυσικῆς· αὐτὸ ἀκριβῶς γίνεται μὲ τὴν Χημείαν καὶ δι' αὐτὸ εἶναι περισσότερον ἀσαφῆ τὰ ὅρια μεταξὺ Φυσικῆς καὶ Χημείας.

3. Πέραν ἀπὸ τὴν ἀνεύρεσιν τῶν φυσικῶν νόμων ἡ ἔρευνα τῆς Φυσικῆς ἐπιδιώκει νὰ ἐξηγήση τὰ φαινόμενα, νὰ κάνη δηλαδὴ κατανοητὴν τὴν ἐμφάνισίν των. Πρὸς τὸν σκοπὸν τοῦτον διατυπώνει ***ὑποθέσεις***. Κάθε ὑπόθεσις εἶναι ἐκδοχὴ μιᾶς ἀνθρωπομορφικὰ ἀντιληπτῆς εἰκόνος (***φυσικοῦ κοσμοειδώλου***), εἰς τὴν ὁποίαν προσαρμόζονται τὰ ὑπ' ὄψιν μας φαινόμενα. Ὅσον περισσότερα εἶναι τὰ φαινόμενα ποὺ ἐξηγοῦνται μὲ ὡρισμένην ὑπόθεσιν, τόσον μεγαλύτερον εἶναι τὸ κῦρος τῆς ὑποθέσεως, ἐφόσον—ἐννοεῖται—δὲν εἶναι γνωστὸν κανὲν φαινόμενον ἀσυμβίβαστον πρὸς αὐτήν. Τὰς ἐγκυροτέρας ὑποθέσεις τὰς λέμε ***θεωρίας***.

Αἱ ὑποθέσεις ὁδηγοῦν εἰς τὴν πρόβλεψιν φαινομένων ποὺ πρέπει νὰ μποροῦν νὰ λάβουν χώραν καὶ κατὰ συνέπειαν εἰς τὴν ἐπινόησιν ἐρεύνης ποὺ ἀποβλέπει εἰς τὴν ἐπαλήθευσιν τῶν ἐπακολούθων τῆς ὑποθέσεως. Ἔτσι κάθε ὑπόθεσις παρέχει ἀφορμὴν εἰς ἐπέκτασιν τῆς ἐρεύνης καὶ ἑπομένως ἐπέκτασιν τῶν κατακτήσεων τῆς Φυσικῆς. ***Εἰς τοῦτο προπάντων ἔγκειται ἡ χρησιμότης τῆς ὑποθέσεως.***

Μὲ τὴν ἔρευναν ποὺ προκύπτει ἀπὸ ὡρισμένην ὑπόθεσιν φθάνομεν εἰς διαπιστώσεις ποὺ εἴτε εἶναι αἱ προβλεφθεῖσαι, ὁπότε ἐνισχύεται τὸ κῦρος τῆς ὑποθέσεως, εἴτε διαφέρουν ἀπὸ τὰς προβλέψεις μας, ὁπότε ἐπιβάλλεται ἡ ἀναθεώρησις ἢ καὶ ἡ ἀπόρριψις τῆς ὑποθέσεως. Ἔτσι π.χ. ἡ ὑπόθεσις τοῦ Dalton κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ὕλη συγκροτεῖται ἀπὸ ἄτομα ἔχει ἀποβῆ ἀδιάσειστος κατόπιν τῆς συμφωνίας μὲ αὐτὴν ὅλων τῶν σχετικῶν διαπιστώσεων, ἐνῷ ἡ ὑπόθεσις ποὺ ἐθεώρει τὴν θερμότητα ὡς «ἀβαρὲς ρευστὸν» δὲν μπορεῖ νὰ προσαρμοσθῆ εἰς τὸ σημερινὸν κοσμοείδωλον τῆς Φυσικῆς.

§ 2. Μέτρησις φυσικῶν ποσῶν. α) ***Βασικὰ ποσά.*** Ἡ ἐπιδίωξις τῆς Φυσικῆς νὰ ἔχη σαφῆ καὶ ἀκριβῆ διατύπωσιν εἰς τὰς διαπιστώσεις της ἐπιβάλλει νὰ εἶναι καθωρισμένα τελείως τὰ μεγέθη εἰς τὰ ὁποῖα ἐκδηλώνονται τὰ καθέκαστα φαινόμενα. Κάθε φυσικὸν φαινόμενον διεξάγεται ***κάπου*** (εἰς τὸν χῶρον) καὶ ***κάποτε*** (εἰς τὴν διαρροὴν τοῦ χρόνου). Ἀντιστοίχως πρὸς τὴν τοποθέτησιν αὐτὴν τῶν καθέκαστα φαινομένων προκύπτει ὅτι τὰ μεγέθη ***χώρου*** καὶ ***χρόνου*** εἶναι τὰ ἀμεσώτερον προβαλλόμενα· ἀντὶ τοῦ χώρου προβάλλει ὡς ἁπλούστερον μέγεθος τὸ ***μῆκος***, ἀφοῦ τὸν χῶρον τὸν ἀντιλαμβανόμεθα μὲ τρεῖς διαστάσεις, καθεμία ἀπὸ τὰς ὁποίας ἔχει μῆκος. Ἐκτὸς ἀπὸ τὰ δύο αὐτὰ ἁπλούστερα μεγέθη ἡ φυσικὴ ἔρευνα συναντᾶ καὶ ἄλλα πολλά, ὅπως εἶναι τὰ μεγέθη ταχύτητος, δυνάμεως, ἔργου κλπ. Δι' ὅλα ὅμως τὰ μεγέθη διαπιστώνεται ἐμπειρικῶς ὅτι σχετίζονται μεταξύ των ἔτσι ποὺ καθένα των μπορεῖ νὰ ἀναχθῆ τελικῶς εἰς τρία—τὸ πολὺ—ἀπὸ αὐτά. Τὰ τρία τέτοια μεγέθη τὰ λέμε ***βασικά***.

Εἶναι εὐνόητον ὅτι δύο ἀπὸ τὰ βασικὰ μεγέθη θὰ εἶναι τὸ μῆκος καὶ ὁ χρόνος· ὡς τρίτον μπορεῖ νὰ ληφθῇ κάποιο ἄλλο, ἀρκεῖ τοῦτο νὰ μὴ καθορίζεται μὲ συσχέτισιν πρὸς τὸ μῆκος καὶ τὸν χρόνον. Ἔτσι εἰς τὴν Φυσικὴν λαμβάνεται ὡς τρίτον βασικὸν μέγεθος ἡ ***μᾶζα***, ἐνῶ εἰς τὴν Τεχνικὴν προτιμᾶται ἡ ***δύναμις***.

β) ***Διαστάσεις τῶν φυσικῶν ποσῶν***. Μὲ τὰ τρία λοιπὸν βασικὰ μεγέθη της, ἤτοι τὸ μῆκος ποὺ ἐπισημαίνεται μὲ [L], τὴν μᾶζαν [M], καὶ τὸν χρόνον [T], ἡ Φυσικὴ καθορίζει ἐπακριβῶς ὅλα τὰ ἄλλα (τοὐλάχιστον εἰς τὴν Μηχανικὴν) σύμφωνα μὲ τὰς σχέσεις ποὺ τὰ συνδέουν. Ἔτσι π.χ. ἡ ἐπιφάνεια [q] ποὺ εἶναι μέγεθος, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἀπὸ πολλαπλασιασμὸν μήκους ἐπὶ μῆκος, θὰ εἶναι: [L].[L] ἢ $[L^2]$, ὁ ὄγκος [V] θὰ εἶναι $[L^3]$, ἡ πυκνότης, δηλ. ἡ μᾶζα [M] ποὺ περιέχεται εἰς τὴν μονάδα ὄγκου, θὰ εἶναι M/V ἢ M/L^3 ἢ $[ML^{-3}]$ ἢ μὲ τὴν σειρὰν ποὺ ἔχει καθορισθῇ $[L^{-3}M]$ κ.ο.κ.

Γιὰ κάθε λοιπὸν φυσικὸν μέγεθος ὑπάρχει μία σχέσις ποὺ ἐκφράζει τὴν ἐξάρτησίν του ἀπὸ καθὲν τῶν βασικῶν μεγεθῶν. Τὴν σχέσιν αὐτὴν τὴν ὀνομάζομεν ***ἐξίσωσιν διαστάσεων*** τοῦ θεωρουμένου μεγέθους. Εἰς περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ θεωρούμενον μέγεθος εἶναι ἀνεξάρτητον ἀπὸ κάποιο ἐκ τῶν βασικῶν μεγεθῶν σημειώνομεν τοῦτο μὲ τὴν μηδενικὴν δύναμιν τοῦ βασικοῦ τούτου μεγέθους. Ἔστι π. χ. ἡ ἐξίσωσις διαστάσεων εἶναι: διὰ τὴν ἐπιφάνειαν: $[q]=[L^2M^0T^0]$, διὰ τὴν πυκνότητα: $[d]=[L^{-3}M.T^0]$, διὰ τὴν ταχύτητα [v] ἤτοι τὸ εἰς τὴν μονάδα χρόνου διανυόμενον διάστημα (μῆκος): $[v]=[LM^0T^{-1}]$ κ.ο.κ.

Οἱ ἐκθέται τῶν δυνάμεων εἰς τὰς ὁποίας εἶναι ὑψωμένα τὰ βασικὰ μεγέθη εἰς τὴν ἐξίσωσιν διαστάσεων ἑνὸς ποσοῦ μὲ πρῶτον κατὰ σειρὰν τὸν ἐκθέτην τοῦ μήκους, δεύτερον τὸν τῆς μάζης καὶ τρίτον τὸν τοῦ χρόνου, μᾶς παρέχουν ***τὰς φυσικὰς διαστάσεις*** τοῦ ποσοῦ. Ἔτσι π.χ. εἶναι αἱ διαστάσεις ἐπιφανείας (2,0,0), πυκνότητος (—3,1,0), ταχύτητος (1,0,—1) κ.ο.κ.

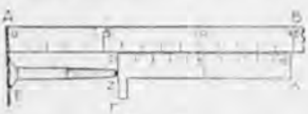
Σημ. Οἱ φυσικοὶ νόμοι ἐκφράζουν, ὅπως εἴπαμε, τὰς σχέσεις μεταξὺ ποσῶν ἐπὶ τῶν ὁποίων μπορεῖ νὰ ἐκδηλωθοῦν φαινόμενα. Εἶναι λοιπὸν εὐνόητον ὅτι εἰς τὰς σχέσεις αὐτὰς δὲν μπορεῖ νὰ ὑπάρχῃ οὔτε πρόσθεσις οὔτε ἐξίσωσις μεταξὺ μεγεθῶν, τὰ ὁποῖα δὲν ἔχουν τὰς αὐτὰς φυσικὰς διαστάσεις. Ἔτσι ὁ ἔλεγχος τῶν διαστάσεων εἰς μίαν ἐξίσωσιν μπορεῖ νὰ χρησιμεύσῃ καὶ ὡς κριτήριον τῆς ὀρθότητος τῆς σχέσεως ποὺ ἐκφράζει ἡ ἐξίσωσις.

γ) ***Ἀριθμητικὴ τιμὴ ποσοῦ***. Κάθε φυσικὸν μέγεθος προσδιορίζεται μὲ ἕνα ἀριθμὸν ποὺ ἀκολουθεῖται ἀπὸ τὴν ἐπισήμανσιν τῆς ***μονάδος***, δηλαδὴ ***ἑνὸς ἀκριβῶς καθωρισμένου ὁμοειδοῦς ποσοῦ πρὸς τὸ ὁποῖον συγκρίνεται τὸ προσδιοριζόμενον***. Λέμε π. χ. ὅτι τὸ μῆκος τῆς ἀποστάσεως Ἀθηνῶν—Θεσσαλονίκης εἶναι ***604 χιλιόμετρα***, τὸ βάρος δοθέντος σώματος εἶναι ***2 χιλιόγραμμα***, ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα εἶναι ***340 μέτρα κατὰ δευτερόλεπτον*** κλπ.

Ἡ σύγκρισις ποὺ χρειάζεται νὰ κάνωμεν πρὸς τὴν μονάδα του διὰ νὰ καθορίσωμεν δοθὲν ποσὸν λέγεται *μέτρησις* τοῦ ποσοῦ. Τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐπισημειουμένων μονάδων ποὺ προκύπτει ἀπὸ τὴν μέτρησιν δοθέντος ποσοῦ τὸν λέμε *ἀριθμητικὴν τιμὴν* ἢ *μέτρον* αὐτοῦ.

Αἱ μετρήσεις τῶν φυσικῶν ποσῶν ἀποτελοῦν πρωταρχικὸν βῆμα διὰ τὴν ἔρευναν φαινομένων· βασίζεται λοιπὸν εἰς αὐτὰς τὸ οἰκοδόμημα τῆς Φυσικῆς. Ἔτσι διὰ τὴν εὕρεσιν φυσικῶν νόμων ἀπαιτεῖται νὰ ἔχωμεν ἀντιστοίχους ἀριθμητικὰς τιμὰς ἀπὸ δύο εἰς ἑκάστην περίπτωσιν διάφορα μεγέθη ποὺ σχετίζονται μεταξύ των κατὰ τρόπον ὥστε εἰς κάθε ἀριθμητικὴν τιμὴν τοῦ ἑνὸς νὰ ἀντιστοιχῇ ὡρισμένη τιμὴ τοῦ ἄλλου, ὅταν τὰ ὑπόλοιπα μεγέθη ποὺ μπορεῖ νὰ ἐπηρεάζωνται κατὰ τὸ μελετώμενον φαινόμενον τὰ ἀφήνωμεν ἀμετάβλητα. Προκειμένου π.χ. νὰ εὕρωμεν τὸν νόμον ποὺ ἐκφράζει τὴν σχέσιν μεταξὺ πιέσεως καὶ ὄγκου ἑνὸς ἀερίου διατηροῦμεν σταθερὰν τὴν θερμοκρασίαν καὶ μεταβάλλοντες διαδοχικῶς τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τῆς πιέσεως σημειώνομεν ἀντιστοίχους μεταβολὰς τῆς ἀριθμητικῆς τιμῆς τοῦ ὄγκου.

δ) Μονάδες μετρήσεως ποσῶν. Πρὸς μέτρησιν ἑκάστου εἴδους φυσικοῦ ποσοῦ εἶναι ἀπαραίτητον νὰ ἔχωμεν ὡρισμένην τὴν μονάδα μετρήσεώς του. Πρὸς μέτρησιν π. χ. τοῦ μήκους ΕΖ (σχ. 1) ἑνὸς σώματος ἐφαρμόζομεν ἐπ᾽ αὐτοῦ τὸ μέτρον ΑΒ, δηλαδὴ κανόνα ἢ ταινίαν (ἀπὸ χάλυβα ἢ ἄλλο κατάλληλον ὑλικὸν) ἐπὶ τῆς ὁποίας ἔχουν χαραχθῆ ἠριθμημέναι μονάδες μήκους (μέτρα, ἑκατοστόμετρα, χιλιοστόμετρα). Ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων τῆς μετρικῆς κλίμακος ποὺ σημειώνεται ἐπὶ τῆς μετροταινίας καὶ περιέχεται εἰς τὸ διάστημα μεταξὺ τοῦ ἑνὸς ἄκρου καὶ τοῦ ἄλλου τοῦ πρὸς μέτρησιν μήκους μᾶς δίδει τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τοῦ μήκους τούτου.



Σχ. 1

Ἐὰν τὸ τέλος Ζ τοῦ μετρουμένου μήκους, δὲν συμπίπτει ἀκριβῶς μὲ ὑποδιαίρεσιν τοῦ μετρικοῦ κανόνος καθορίζομεν τὸ κλάσμα αὐτῆς ἀκριβῶς διὰ ***βερνιέρου*** ΓΔ (σχ. 1). Οὗτος εἶναι ἐξάρτημα τοῦ μετρικοῦ κανόνος δυνάμενον νὰ μετακινῆται κατὰ μῆκος αὐτοῦ. Τὸ μῆκος τοῦ βερνιέρου ἴσον πρὸς 9 ὑποδιαιρέσεις τῆς μετρικῆς κλίμακος τοῦ κανόνος, ἔχει ὑποδιαιρεθῆ εἰς 10 ἴσα μέρη καὶ συνεπῶς ἑκάστη ὑποδιαίρεσις τοῦ βερνιέρου εἶναι ἴση πρὸς 0,9 τῆς ὑποδιαιρέσεως τοῦ κανόνος. Σύρομεν τὸν βερνιέρον οὕτως ὥστε τὸ 0 τῆς κλίμακός του νὰ συμπέσῃ μὲ τὸ τέλος τοῦ μετρουμένου μήκους καὶ ἀναζητοῦμεν τὴν ὑποδιαίρεσιν αὐτοῦ ἡ ὁποία συμπίπτει μὲ ὑποδιαίρεσιν τοῦ κανόνος. Εἰς τὸ σχῆμα συμβαίνει τοῦτο διὰ τὴν ὑποδιαίρεσιν 8. Ἐὰν συνέπιπτε ἡ ὑποδιαίρεσις 1 τότε τὸ μετρούμενον μῆκος θὰ ἦτο κατὰ 0,1 μεγαλύτερον τῶν 5 ὑποδιαιρέσεων τοῦ κανόνος· ἂν συνέπιπτε ἡ 2 τὸ μετρούμενον μῆκος θὰ ἦτο 5,2. Εἰς τὴν περίπτωσιν ποὺ παρέχει τὸ σχῆμα τὸ μετρούμενον μῆκος θὰ εἶναι 5,8 ὑποδιαιρέσεις τοῦ κανόνος.

Ἡ ἐκλογὴ τῶν μονάδων μετρήσεως διὰ τὰ καθέκαστα ποσὰ εἶναι κατ' ἀρχὴν αὐθαίρετος· διὰ νὰ εἶναι ὡς τόσο δυνατὸν νὰ συγκρίνωνται τὰ ἐξαγόμενα μετρήσεων ποὺ γίνονται εἰς διαφόρους τόπους καὶ χρόνους ἔχει συμφωνηθῆ νὰ χρησιμοποιοῦνται ὡρισμέναι δι' ἕκαστον εἶδος ποσοῦ μονάδες. Διὰ τὴν εὐρυτέραν ἀναγνώρισιν τούτων ἀπαιτεῖται νὰ εἶναι αὗται ἀκριβῶς καθωρισμέναι καὶ νὰ παρέχουν εὐκολίαν ἐλέγχου τῆς ἀκριβείας των μὲ σύγκρισιν πρὸς πρότυπά των ἀμετάβλητα εἰς ὁποιονδήποτε τόπον καὶ χρόνον. Εἶναι εὐνόητον ὅτι ἡ ἀλλαγὴ τῶν μονάδων μετρήσεως δὲν ἐπηρεάζει τὸ οὐσιῶδες περιεχόμενον τῶν φυσικῶν νόμων. ***Ἐπηρεάζει μόνον τὰς ἀριθμητικὰς τιμὰς τῶν καθέκαστα μετρουμένων ποσῶν, διότι αὗται εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τοῦ μεγέθους τῶν χρησιμοποιουμένων μονάδων***. Μεγαλυτέραν σημασίαν ἔχει τὸ ὅτι ἀπὸ τὰς χρησιμοποιηθείσας μονάδας ἐξαρτῶνται αἱ τιμαὶ τῶν σταθερῶν συντελεστῶν ποὺ ἔχομεν εἰς τὰς διατυπώσεις τῶν φυσικῶν νόμων. Προκειμένου π.χ. περὶ τῆς διατυπώσεως τοῦ νόμου τῆς παγκοσμίας ἕλξεως (πρβλ. § 39,α) $K=fm_1m_2/\alpha^2$ ἀντιλαμβανόμεθα εὐκόλως ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ συντελεστοῦ f (***σταθερᾶς τῆς παγκοσμίας ἕλξεως***) ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὰς μονάδας τῆς δυνάμεως K, τῆς μάζης m_1, m_2 καὶ τῆς ἀποστάσεως α.

1. ***Μονάδες μετρήσεως μηκῶν***. Πρὸς μέτρησιν μηκῶν λαμβάνεται διεθνῶς ὡς μονὰς τὸ ***πρότυπον μέτρον*** [m], δηλαδὴ τὸ μῆκος ποὺ ἔχει εἰς θερμοκρασίαν 0° Κελσίου ἡ ἀπόστασις μεταξὺ δύο γραμμῶν ποὺ ἔχουν χαραχθῆ ἐπὶ ράβδου ἀπὸ ἰριδιολευκόχρυσον, ἡ ὁποία φυλάσσεται εἰς τὸ ***διεθνὲς γραφεῖον μέτρων καὶ σταθμῶν*** εἰς τὰς Σέβρας τῶν Παρισίων. Τὸ μῆκος τοῦτο τοῦ μέτρου ὡρίσθη κατ' ἀρχὴν ἴσον μὲ 1/40.000.000 τοῦ μήκους ἑνὸς μεσημβρινοῦ τῆς γηΐνης σφαίρας. Ἀντίτυπα τοῦ προτύπου μέτρου ἔχουν ὅλα τὰ πολιτισμένα κράτη. Εἰς τὴν Φυσικὴν χρησιμοποιεῖται συνηθέστερον ὡς βασικὴ μονὰς μήκους τὸ 0,01 τοῦ μέτρου, δηλαδὴ τὸ ***ἑκατοστόμετρον*** [cm].

Πληρέστερον αἱ χρησιμοποιούμεναι ἀντιστοίχως πρὸς τὸ μέγεθος τοῦ μετρουμένου ποσοῦ μονάδες μήκους εἶναι:

Τὸ χιλιόμετρον (km)$=10^3$(m)$=10^5$(cm)
Τὸ μέτρον (m)$=1$(m)$=10^2$(cm)
Τὸ ἑκατοστόμετρον (cm)$=10^{-2}$(m)$=1$(cm)
Τὸ χιλιοστόμετρον (mm)$=10^{-3}$(m)$=10^{-1}$(cm)
Τὸ μικρὸν (μ)$=10^{-6}$(m)$=10^{-4}$(cm)
Τὸ χιλιοστομικρὸν (mμ)$=10^{-9}$(m)$=10^{-7}$(cm)
Τὸ Angstörm (A)$=10^{-10}$(m)$=10^{-8}$(cm)
Τὸ μικρομικρὸν (μμ)$=10^{-12}$(m)$=10^{-10}$(cm).

Ὅλαι αἱ μονάδες αὐταὶ εἶναι δεκαδικὰ πολλαπλάσια ἢ ὑποδιαιρέσεις τοῦ μέτρου. Διὰ τὴν ὀνομασίαν ἑκάστης τούτων ἰσχύει γενικῶς ὅτι: διὰ τὰ χιλιοπλάσια προτάσσεται τῆς βασικῆς μονάδος (ἐδῶ τοῦ μέτρου) τὸ συνθετικὸν χιλιο— ἢ kilo— ποὺ σημειώνεται διεθνῶς μὲ k, διὰ τὰ ἑκατομμυριοπλάσια τὸ ***μέγα***— (M), διὰ τὰ δισεκατομμυριοπλάσια τὸ Γιγα— (G), διὰ τὰ τρισεκατομμυριοπλάσια τὸ ***Τερα***— (T), διὰ τὰ χιλιοστὰ τὸ ***χιλιοστο***— ἢ milli— (m), διὰ τὰ ἑκατομμυριοστὰ τὸ ***μικρό***— (μ), διὰ τὰ δισεκατομμυριοστὰ τὸ nano— (n), καὶ διὰ τὰ τρισεκατομμυριοστὰ τὸ pico— (p). Διὰ πολὺ μεγάλας (ἀστρονομικὰς) ἀποστάσεις χρησιμοποιοῦνται πρὸς ἔκφρασιν τῶν μηκῶν των καὶ αἱ μονάδες: ***ἔτος φωτός***, ἤτοι τὸ μῆκος τοῦ διαστήματος ποὺ διατρέχει τὸ φῶς εἰς 1 ἔτος, ἴσον μὲ $9{,}4608.10^{12}$(km) (στρογγυλά: 10^{13}km) καὶ ἡ parsec, ἤτοι ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τὴν ὁποίαν φαίνεται ὑπὸ γωνίαν 1'' ἡ διάμετρος τῆς τροχιᾶς τῆς Γῆς γύρω ἀπὸ τὸν Ἥλιον, δηλαδὴ τὸ μῆκος $30{,}833.10^{12}$(km) ἢ 3,257 ἔτη φωτός.

Κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν μετρήσεων μηκῶν μπορεῖ ἡ ἀνάγνωσις τοῦ ἀποτελέσματος τῆς μετρήσεως νὰ παρουσιάζῃ τὸ λεγόμενον ***λάθος παραλλάξεως***, ὅταν ὁ μετρικὸς κανὼν καὶ τὸ ἀντικείμενον ποὺ ὑπόκειται εἰς μέτρησιν δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Προκειμένου π.χ. νὰ ἀναγνώσωμεν εἰς τὸν μετρικὸν κανόνα (σχ. 2) τὴν ὑποδιαίρεσιν μέχρι τῆς ὁποίας φθάνει τὸ ὕψος τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης εἰς τὸν σωλῆνα ποὺ εἶναι τοποθετημένος πρὸ τοῦ κανόνος, πρέπει νὰ προσβλέψωμεν καθέτως πρὸς τὴν διεύθυνσιν τοῦ σωλῆνος. Ἂν ἡ πρόσβλεψις γίνεται πλαγίως θὰ ὑποπέσωμεν εἰς τὸ λάθος παραλλάξεως, δηλαδὴ θὰ ἀναγνώσωμεν ἐπὶ τοῦ κανόνος ὑποδιαίρεσιν ὑψηλοτέραν ἢ χαμηλοτέραν· τὴν διαφορὰν αὐτὴν τοῦ πραγματικοῦ ὕψους τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης ἀπὸ ἐκεῖνο ποὺ βλέπομεν τὴν λέμε ***λάθος παραλλάξεως***. Πρὸς ἀποφυγὴν τούτου κρατοῦμεν ὄπισθεν τῆς μετρικῆς κλίμακος ἐπίπεδον κάτοπτρον· ἂν ὁ δείκτης ποὺ παρακολουθοῦμεν ἐπὶ τῶν μετρικῶν ὑποδιαιρέσεων συμπίπτει μὲ τὸ εἴδωλόν του εἰς τὸ κάτοπτρον, εἴμεθα βέβαιοι ὅτι ἡ σκόπευσις γίνεται καθέτως καὶ ἑπομένως δὲν ὑπάρχει λάθος παραλλάξεως.

Σχ. 2

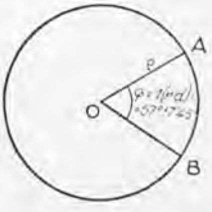
2. ***Μονάδες ἐπιφανείας καὶ ὄγκου***. Πρὸς μέτρησιν ἐπιφανειῶν χρησιμοποιοῦμεν μονάδας ἀντιστοίχους πρὸς τὰς μονάδας μήκους. Ἔτσι λαμβάνεται ὡς μονὰς ἐπιφανείας τὸ ***τετραγωνικὸν μέτρον*** (m^2), δηλαδὴ ἡ ἐπιφάνεια τετραγώνου τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ἔχει μῆκος 1 (m). Δεκαδικὰ ὑποπολλάσια τῆς μονάδος αὐτῆς εἶναι τὸ ***τετραγωνικὸν ἑκατοστόμετρον*** (cm^2) ἴσον μὲ $10^{-4}(m^2)$, τὸ ***τετραγωνικὸν χιλιοστόμετρον*** $1(mm^2)=10^{-6}(m^2)$ κλπ.

Κατ' ἀναλογίαν λαμβάνομεν ὡς μονάδας ὄγκου τὸ ***κυβικὸν μέτρον*** (m^3), δηλ. τὸν ὄγκον κύβου τοῦ ὁποίου ἡ ἀκμὴ ἔχει μῆκος 1(m)· τὸ ***κυβικὸν δεκατόμετρον*** ἢ ***κυβικὴν παλάμην*** (dm^3) ἢ ***λίτρον*** (l) ἴσον μὲ 10^{-3} (m^3), τὸ ***κυβικὸν ἑκατοστόμετρον*** ἢ ***κυβικὸν δάκτυλον*** (cm^3) ἴσον μὲ 10^{-6} (m^3) κλπ.

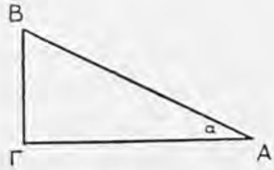
3. ***Μονὰς μετρήσεως γωνιῶν***. Πρακτικὴ μονὰς μετρήσεως γωνιῶν εἶναι ἡ ***μοῖρα*** (1°), δηλαδὴ τὸ ἄνοιγμα ἐπικέντρου γωνίας

ποὺ βαίνει εἰς τόξον ἴσον μὲ 1/360 τῆς περιφερείας. Ἑκάστη μοῖρα ἔχει 60 πρῶτα λεπτὰ (′) καὶ κάθε πρῶτον λεπτὸν ἔχει 60 δεύτερα (″).

Εἰς τὴν Φυσικὴν τὸ μέτρον τῆς γωνίας παρέχεται ἀπὸ τὸν λόγον τοῦ μήκους τοῦ μεταξὺ τῶν πλευρῶν της τόξου πρὸς τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου, εἰς τὸν ὁποῖον ἡ γωνία εἶναι ἐπίκεντρος. Ἔτσι μονὰς μετρήσεως γωνιῶν εἶναι ἡ ἐπίκεντρος γωνία ΑΟΒ (σχ. 3)



Σχ. 3



Σχ. 4

τῆς ὁποίας τὸ μεταξὺ τῶν πλευρῶν τόξον ΑΒ ἔχει μῆκος ἴσον μὲ τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος ρ. Ἡ μονὰς αὐτὴ καλεῖται ***ἀκτίνιον*** (rd). Ὥστε τὸ μέγεθος τυχούσης γωνίας φ θὰ εἶνα: $\varphi = \frac{\text{μῆκος τόξου} : s}{\text{μῆκος ἀκτῖνος} : \varrho}$ (rd)

Κατὰ συνέπειαν τὸ μέγεθος τῆς γωνίας ἔχει διαστάσεις [0,0,0], ἤτοι ἐκφράζεται ἀπὸ καθαρὸν ἀριθμόν. Ἂν τώρα λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι τὸ μῆκος τῆς περιφερείας εἶναι 2π φορὰς μεγαλύτερον τοῦ μήκους τῆς ἀκτῖνος καὶ συνεπῶς εἰς ὅλην τὴν περιφέρειαν θὰ βαίνει γωνία ἴση μὲ 2π (rd) καὶ ὅτι ἡ αὐτὴ γωνία εἶναι 360°, εὑρίσκομεν ὅτι $1\ (\text{rd}) = (360/2\pi)^\circ = 57^\circ 17' 45''$ καὶ $1^\circ = 2\pi/360 = 0{,}017453$ (rd).

Εἰς τὰς σχέσεις μεταξὺ φυσικῶν ποσῶν, εἰς τὰς ὁποίας παίζουν ρόλον καὶ γωνίαι, λαμβάνονται συνήθως ἀντ' αὐτῶν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοί. Τέτοιοι εἶναι τὸ ἡμίτονον (ημ), τὸ συνημίτονον (συν), ἡ ἐφαπτομένη (εφ) καὶ ἡ συνεφαπτομένη (σφ) τῆς γωνίας. Διὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν ἀριθμῶν τούτων θεωροῦμεν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν α ἢ ΒΑΓ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 4)· τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας α, (ημα), εἶναι ὁ λόγος ποὺ ἔχει τὸ μῆκος τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς ΒΓ πρὸς τὸ μῆκος τῆς ὑποτεινούσης ΑΒ, εἶναι δηλ. $\eta\mu\alpha = \frac{\overline{\text{ΒΓ}}}{\text{ΑΒ}}$. συνημίτονον τῆς γωνίας α, (συνα), εἶναι ὁ λόγος τῆς προσκειμένης πλευρᾶς ΑΓ πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν ΑΒ, ἤτοι: $\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΒ}}$. Ἡ $\varepsilon\varphi\alpha = \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΑΓ}}$ καὶ $\sigma\varphi\alpha = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΓ}}$. Εἶναι ἀξιοσημείωτον ὅτι εἰς πολὺ μικρὰς γωνίας οἱ ἀριθμοὶ ποὺ ἐκφράζουν αὐτὰς εἰς ἀκτίνια εἶναι σχεδὸν ἴσοι μὲ αὐτοὺς ποὺ ἐκφράζουν τὰ ἡμίτονά των ἢ τὰς ἐφαπτομένας των. Διὰ τοῦτο εἰς περιπτώσεις τοιαύτας λαμβάνομεν χωρὶς αἰσθητὸν λάθος ημα=α=εφα. Ἔτσι π.χ. διὰ γωνίαν 6° εἶναι α=0,1047 (rd), ημα=0,1045 καὶ εφα=0,1051.

Ἰδιάζουσαν σημασίαν εἰς τὴν ἔρευναν τῆς Φυσικῆς ἔχει ἡ ***στερεὰ γωνία***, δηλαδὴ τὸ σχῆμα ποὺ περικλείεται ἀπὸ τὰς εὐθείας ποὺ φέρονται ἀπὸ ἓν σημεῖον κείμενον ἐκτὸς ἐπιφανείας πρὸς τὰ καθέκαστα σημεῖα κλειστοῦ σχήματος κειμένου ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας. Διὰ τὴν μέτρησιν στερεᾶς γωνίας λαμβάνομεν ὡς μονάδα τὴν στερεάν γωνίαν ποὺ περικλείουν αἱ ἀκτῖνες σφαίρας, αἱ ὁποῖαι φέρονται πρὸς τὰ καθέκαστα σημεῖα τῆς γραμμῆς ποὺ περιβάλλει τμῆμα τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, τὸ ὁποῖον ἔχει ἐμβαδὸν q ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος (ρ^2). Ἔτσι τὸ μέγεθος στερεᾶς γωνίας ω παρέχεται ἀπὸ τὸν λόγον ποὺ ἔχει πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος τὸ ἐμβαδὸν q τοῦ τμήματος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, τὸ ὁποῖον καθορίζεται ἀπὸ τὸ ἄνοιγμα τῆς στερεᾶς γωνίας ποὺ ἔχει τὴν κορυφήν της εἰς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας. Εἶναι δηλαδή: $\omega = q/\rho^2$.

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον προκύπτει ὅτι τὸ μέγεθος τῆς στερεᾶς γωνίας εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ σχήματος ποὺ ἔχει τὸ τμῆμα τῆς ἐπιφανείας q ποὺ περικλείεται ἀπὸ γραμμήν, τῆς ὁποίας τὰ καθέκαστα σημεῖα συνδέονται μὲ τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας. Ἑπομένως μπορεῖ νὰ ἔχωμεν ἴσας στερεάς γωνίας μὲ διάφορα σχήματα.

Σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμὸν τῆς στερεᾶς γωνίας προκύπτει ὅτι ἡ στερεὰ γωνία ποὺ μὲ τὴν κορυφή της εἰς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας διανοίγεται ἐφ' ὅλης τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας θὰ εἶναι: $\Omega = 4\pi\rho^2/\rho^2 = 4\pi$ (srd=στερακτίνια).

4) Μονάδες χρόνου. Πρὸς μέτρησιν τοῦ χρόνου λαμβάνεται ὡς μονὰς τὸ δευτερολέπτον [(sec) καὶ συντομώτερον (s)]. Ὁ καθορισμὸς τῆς μονάδος χρόνου βασίζεται ἐπὶ τοῦ ὅτι κάθε περιοδικὸν φαινόμενον, (δηλαδὴ φαινόμενον τὸ ὁποῖον ἐπαναλαμβάνεται ὁμοιομόρφως) χρειάζεται δι' ἑκάστην τῶν ἐπαναλαμβανομένων διαδρομῶν του τὸν αὐτὸν πάντοτε χρόνον. Τὸ περισσότερον μὲ τὴν ζωήν μας συνυφασμένον περιοδικὸν φαινόμενον εἶναι ἡ ἐναλλαγὴ ἡμέρας καὶ νυκτὸς ποὺ, ὡς γνωστόν, ὀφείλεται εἰς τὴν περιστροφὴν τῆς Γῆς περὶ τὸν ἄξονά της. Δι' ἑκάστην περιστροφὴν χρειάζεται κατὰ μέσον ὅρον χρόνος ἴσος μὲ $24 \times 60 \times 60 = 86.400$ δευτερόλεπτα. Ὁ χρόνος αὐτὸς λέγεται ***μέση ἡλιακὴ ἡμέρα*** (d). Ἔτσι τὸ δευτερόλεπτον (sec) εἶναι τὸ 1/86400 τῆς μέσης ἡλιακῆς ἡμέρας. Ἄλλαι ὑποδιαιρέσεις τῆς μέσης ἡλιακῆς ἡμέρας εἶναι ἡ 1 ὥρα (h)=1/24 (d), τὸ πρωτόλεπτον(1 min)=1/60 (h).

Σημ. Ἡλιακὴν ἡμέραν ὀνομάζομεν τὸν χρόνον ποὺ μεσολαβεῖ μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ἄνω μεσουρανήσεων τοῦ ἡλίου κατὰ συνέπειαν τῆς περιστροφῆς τῆς Γῆς περὶ τὸν ἄξονά της. Ὁ χρόνος αὐτὸς δὲν εἶναι ὁ ἴδιος δι' ὅλας τὰς ἡλιακὰς ἡμέρας ποὺ περιέχονται εἰς τὴν διάρκειαν ἑνὸς ἔτους, δηλαδὴ τοῦ χρόνου ποὺ χρειάζεται ἡ Γῆ διὰ νὰ συμπληρώσῃ τὴν περιφοράν της γύρω ἀπὸ τὸν ἥλιον. Λόγω τῆς διαφορᾶς ποὺ ἔχουν αἱ καθέκασται ἡλιακαὶ ἡμέραι, λαμβάνομεν τὸν μέσον ὅρον τῆς διαρκείας ἑκάστης τούτων καὶ ἔτσι καθορίζομεν τὴν ***μέσην ἡλιακὴν ἡμέραν.***

Διάφορος ἀπὸ αὐτὴν εἶναι ἡ ***ἀστρικὴ ἡμέρα***, δηλαδὴ ὁ χρόνος ποὺ παρέρχεται μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ἄνω μεσουρανήσεων ἀπλανοῦς ἀστέρος. Ἕκαστον ἔτος ἔχει 366,25 ἀστρικὰς ἡμέρας ἀλλὰ 365,25 (d), ἤτοι ἔχει ἡλιακὰς ἡμέρας κατὰ μίαν ὀλιγωτέρας τῶν ἀστρικῶν. Ἑπομένως εἶναι $1(d) = \frac{366,25}{365,25}$ ἀστρικ. ἡμ.

5) *Μονάδες μάζης*. Πρὸς μέτρησιν τῆς μάζης σώματος λαμβάνομεν ὡς μονάδα τὴν μᾶζαν τοῦ *προτύπου χιλιογράμμου* ποὺ εἶναι κύλινδρος ἀπὸ ἰριδιολευκόχρυσον ὁ ὁποῖος φυλάσσεται ἐπίσης εἰς τὸ Διεθνὲς Γραφεῖον Μέτρων καὶ Σταθμῶν εἰς Sèvres τῶν Παρισίων. Κατ' ἀρχὴν ἡ μᾶζα τοῦ προτύπου χιλιογράμμου (kg) ὡρίσθη ἴση μὲ τὴν μάζαν ποὺ ἔχει 1 κυβικὴ παλάμη (1000 cm^3) ὕδατος ἀπεσταγμένου καὶ θερμοκρασίας 4° C(*). Ἀκριβέστεραι μετρήσεις διαπιστώνουν ὅτι ἡ μᾶζα μιᾶς κυβικῆς παλάμης ὕδατος (ἀπεσταγμένου καὶ 4°C) εἶναι ὀλίγον μικροτέρα (0,999973 kg). Ἀπὸ τὴν ἀσήμαντον αὐτὴν διαφορὰν προκύπτει ὅτι τὸ λίτρον ποὺ ὁρίζεται μὲ τὸν ὄγκον ποὺ ἔχει 1 kg ὕδατος 4°C δὲν εἶναι ἀκριβῶς ἴσον μὲ 1000 cm^3, ἀλλὰ ὀλίγον παραπάνω (1 l=1000,028 cm^3).

Εἰς τὴν Φυσικὴν χρησιμοποιεῖται ὡς μονὰς μάζης περισσότερον τὸ γραμμάριον: 1 (g)=10^{-3} (kg). Ἄλλαι μονάδες μάζης εἶναι: τὸ χιλιοστόγραμμον: 1 (mg)=10^{-6}(kg)=10^{-3}(g), τὸ μικρόγραμμον 1 (μg)=10^{-9}(kg)=10^{-6}(g). (**) καὶ διὰ μεγάλας μάζας ὁ τόνος 1 (t)=10^3 (kg).

ε) *Μετρικὰ συστήματα*. Ἀντιστοίχως πρὸς τὰ βασικὰ ποσὰ ποὺ προτιμῶνται καὶ τὰς μονάδας μετρήσεως αὐτῶν προκύπτουν διάφορα μετρικὰ συστήματα. Ἔτσι εἰς τὴν Φυσικὴν χρησιμοποιεῖται ὡς μετρικὸν σύστημα τὸ λεγόμενον *σύστημα* cgs· ἡ ὀνομασία του ὀφείλεται εἰς τὰ ἀρχικὰ γράμματα— **c** διὰ τὸ ἑκατοστόμετρον (centimètre), **g** διὰ τὸ γραμμάριον (gramme) καὶ **s** διὰ τὸ δευτερόλεπτον (seconde)— τῶν μονάδων ποὺ λαμβάνονται πρὸς μέτρησιν τῶν βασικῶν ποσῶν. Εἰς τὴν Τεχνικὴν λαμβάνουν ὡς βασικὰ ποσὰ τὸ μῆκος, τὴν δύναμιν καὶ τὸν χρόνον καὶ ἀντιστοίχως ὡς μονάδας μετρήσεώς των τὸ μέτρον (m), τὸ βάρος τοῦ χιλιογράμμου (kp)(***) ἢ (kg*) καὶ τὸ δευτερόλεπτον (s)· διὰ τοῦτο μποροῦμε νὰ χαρακτηρίσωμεν τὸ σύστημα τοῦτο ὡς *σύστημα* mks.

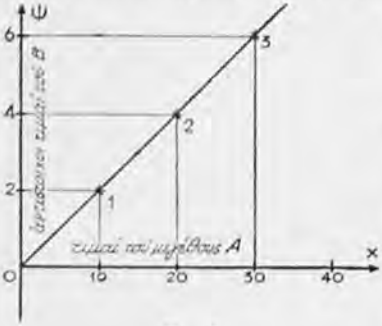
§ 3. Γραφικὴ παράστασις. Εἰς τὴν ἔρευναν φυσικῶν φαινομένων χρησιμοποιοῦμεν συχνὰ γραφικὴν παράστασιν τῆς σχέσεως ποὺ ὑπάρχει μεταξὺ δύο μεγεθῶν ποὺ ἐπηρεάζονται ἀπὸ τὸ μελετώμενον φαινόμενον. Γενικὰ διὰ νὰ παραστήσωμεν γραφικῶς τὴν ἐξάρτησιν ἑνὸς μεγέθους Β ἀπὸ ἄλλο Α, δηλαδὴ τὰς μεταβολὰς ποὺ παθαίνει τὸ μέγεθος Β, ὅταν γίνωνται ὡρισμέναι μεταβολαὶ εἰς τὸ Α, καταγράφομεν ἐπὶ τῶν δύο ἀξόνων ὀρθογωνίων συντατεγμένων ΟΧ καὶ

(*) Εἰς τὴν θερμοκρασίαν αὐτὴν τὸ ὕδωρ ἔχει τὴν μεγίστην του πυκνότητα.

(**) Εἰς τὴν χημείαν ἐπισημαίνεται ἡ μονὰς αὐτὴ 1γ.

(***) Ἡ ἐπισήμανσις αὐτὴ προέρχεται ἀπὸ τὴν ὀνομασίαν kilopont (=χιλιοπόντιον) ἀντὶ τῆς: χιλιόγραμμον βάρους (kg*) πρὸς ἀποφυγὴν συγχύσεως μὲ τὴν μονάδα χιλιόγραμμον μάζης (kg). (Πρβλ. § 17).

ΟΨ (σχ. 5) ἀντιστοίχους τιμὰς τῶν δύο μεγεθῶν, εἰς τὸν ἄξονα ΟΧ τὰς διαδοχικὰς τιμὰς $x_1, x_2, x_3, \ldots$ ποὺ δίδομεν εἰς τὸ Α καὶ εἰς τὸν ἄξονα ΟΨ τὰς $y_1, y_2, y_3, \ldots$ ποὺ λαμβάνει ἀντιστοίχως τὸ Β.



Σχ. 5

Δι' ἕκαστον ζεῦγος ἀντιστοίχων τιμῶν x_1 καὶ y_1, x_2 καὶ y_2, .. καθορίζεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΧΟΨ ἀνὰ ἓν σημεῖον 1,2,3... ποὺ ἔχει συντεταγμένας τὰς δύο ἀντιστοίχους τιμάς. Ἡ ὁμαλωτέρα γραμμὴ ποὺ ἑνώνει τὰ εὑρεθέντα ἔτσι σημεῖα 1,2,3... παρέχει τὴν γραφικὴν παράστασιν τῆς συναρτήσεως.

Εἰς τὴν περίπτωσιν π. χ. τῆς συναρτήσεως μεταξὺ τοῦ βάρους ποὺ κρεμῶμεν εἰς ἐλατήριον καὶ τῆς ἐπιμηκύνσεως ποὺ ὑφίσταται τοῦτο, καταγράφομεν εἰς τὸν ἄξονα Χ τὰς τιμὰς 10, 20, 30... γραμμαρίων βάρους ποὺ ἐξαρτῶμεν διαδοχικῶς ἀπὸ τὸ ἐλατήριον καὶ εἰς τὸν Ψ τὰς τιμὰς 2, 4, 6.... mm ποὺ λαμβάνει ἀντιστοίχως ἡ ἐπιμήκυνσις τοῦ ἐλατηρίου. Κάθε ζεῦγος ἀντιστοίχων τιμῶν προσδιορίζει ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΧΟΨ ἓν σημεῖον, τὸ σημεῖον 1 διὰ τὸ ζεῦγος τιμῶν 10 καὶ 2, τὸ 2 διὰ 20 καὶ 4 κ.ο.κ. Ἡ γραμμὴ τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν ἔτσι ὅτι παριστάνει γραφικῶς τὴν σχέσιν μεταξὺ βάρους ποὺ τεντώνει τὸ ἐλατήριον καὶ ἐπιμηκύνσεως ποὺ ὑφίσταται τοῦτο εἶναι εὐθεῖα, διὰ τὴν ὁποίαν ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις : $y = k.x$.

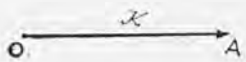
Εἰς τὴν περίπτωσίν μας ὁ συντελεστὴς k ἔχει τὴν τιμὴν $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = .. = 0{,}2$ καὶ ἑπομένως ἡ συνάρτησις εἶναι : $y = 0{,}2\,x$.

Ἡ γραφικὴ παράστασις μιᾶς συναρτήσεως μᾶς παρέχει ἄμεσον εἰκόνα τῆς πορείας τοῦ φαινομένου εἰς τὸ ὁποῖον ἀναφέρεται. Πέραν τούτου ὑποδεικνύει τὴν διόρθωσιν σφαλμάτων ποὺ ἐνδεχομένως ἔγιναν εἰς τὴν παρατήρησιν κάποιας ἐκ τῶν τιμῶν, διότι παρουσιάζει ἐμφαντικώτερον τὴν ἀπίθανον πορείαν τοῦ φαινομένου. Περισσότερον ὡς τόσο χρήσιμος ἀποβαίνει ἡ γραφικὴ παράστασις, διότι παρέχει δι' ἀμέσου ἀναγνώσεως τὴν τιμὴν τῆς συναρτήσεως y_i ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς τυχοῦσαν τιμὴν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ φέρωμεν ἐκ τῆς τιμῆς x παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα y μέχρις ὅτου συναντήσῃ αὕτη τὴν γραμμὴν ποὺ παριστάνει γραφικῶς τὴν συνάρτησιν. Τὸ σημεῖον τῆς συναντήσεως ἔχει τότε τεταγμένην, ἡ ὁποία παρέχει τὴν ἀντίστοιχον τιμὴν τῆς συναρτήσεως. Ἔτσι π.χ. εἰς τὴν συνάρτησιν ποὺ παριστάνει γραφικῶς τὸ σχῆμα μας εὑρίσκομεν ὅτι εἰς τιμὴν ἐπιφορτίσεως τοῦ ἐλατηρίου μὲ 25 γραμμάρια ἡ ἐπιμήκυνσις πρέπει νὰ εἶναι 5 mm.

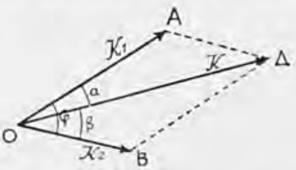
§ 4. Εἴδη ποσῶν. Τὰ φυσικὰ ποσὰ τὰ διακρίνομεν εἰς : α) ***Μονόμετρα*** ὅπως εἶναι ἡ μᾶζα, ὁ ὄγκος, ἡ πυκνότης, ἡ θερμότης κ. ἄ. Καθὲν ἀπὸ τὰ ποσὰ αὐτὰ εἶναι τελείως καθωρισμένον μὲ τὸ νὰ δοθῇ ἡ ***ἀριθμητική του τιμὴ*** ἢ ***τὸ μέτρον του***, τ. ἔ. ὁ ἐκ τῆς μετρήσεώς του μὲ ἐπισημειουμένην μονάδα προκύπτων ἀριθμός. Ἔτσι π.χ. εἶναι πλήρως καθωρισμένον τὸ ποσὸν μάζης 5 γραμμαρίων, θερμότητος 30 θερμίδων κλπ.

β) ***Ἀνύσματα.*** Τέτοια εἶναι ἡ ταχύτης, ἡ δύναμις κ.ἄ. Καθὲν ἀπὸ τὰ ποσὰ αὐτὰ ἐκτὸς τῆς ἀριθμητικῆς του τιμῆς ἔχει καὶ ὡρισμένην διεύθυνσιν καὶ φοράν. Διὰ νὰ εἶναι λοιπὸν τελείως καθωρισμένον πρέπει ἐκτὸς τῆς ***ἀριθμητικῆς τιμῆς του*** νὰ δοθῇ καὶ ἡ διεύθυνσις καὶ φορὰ αὐτοῦ. Ἔτσι π.χ. προκειμένου διὰ τὴν ταχύτητα ἑνὸς ὀχήματος, διὰ νὰ εἶναι τελείως καθωρισμένη πρέπει νὰ δοθῇ ἐκτὸς τῆς ἀριθμητικῆς της τιμῆς (ἔστω 10 m|s) καὶ ἡ ***διεύθυνσις*** τῆς γραμμῆς ἐπὶ τῆς ὁποίας κινεῖται τὸ ὄχημα ὡς καὶ ἡ ***φορὰ*** κατὰ τὴν ὁποίαν διανύεται ἡ γραμμὴ αὐτή.

Κάθε ἄνυσμα παριστάνεται μὲ εὐθύγραμμον τμῆμα ΟΑ ποὺ καταλήγει εἰς βέλος καὶ ἐπισημαίνεται μὲ ἰδιάζουσαν γραφὴν τοῦ συμβόλου του k (σχ. 6). τὸ μῆκος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος κανονίζεται νὰ εἶναι τόσες φορὲς μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ μῆκος ποὺ εἰς ἑκάστην περίπτωσιν θεωροῦμεν ὅτι παριστάνει τὴν μονάδα τοῦ ἀνύσματος, ὅσες φορὲς μᾶς λέει ὁ ἀριθμὸς τῆς ἀριθμητικῆς τιμῆς του. Ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ἐπὶ τῆς ὁποίας λαμβάνεται τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα παρέχει τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἀνύσματος, καὶ τὸ σημειούμενον βέλος δείχνει τὴν φορὰν ποὺ ἔχει ἐπὶ τῆς εὐθείας γραμμῆς τὸ ἄνυσμα. Ἡ ἀριθμητικὴ ἢ ἀπόλυτος τιμὴ ἀνύσματος k σημειώνεται συμβολικῶς εἴτε μὲ ἐγκλεισμὸν ἐντὸς ἀγκυλῶν τοῦ ἰδιάζοντος συμβόλου ποὺ παριστάνει τὸ ἄνυσμα, εἴτε συνηθέστερα μὲ γραφὴν τοῦ



Σχ. 6



Σχ. 7

γράμματος μὲ τὴν συνήθη εἰς τὸν τύπον μορφήν του· σημειώνομεν δηλαδὴ τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τοῦ ἀνύσματος k μὲ [k] ἢ μὲ K.

§ 5. **Στοιχεῖα ἀπὸ τὸν ἀνυσματικὸν λογισμόν.** Τὰ ἀνύσματα διακρίνονται ἀπὸ τὰ μονόμετρα ποσὰ καὶ ἐκ τοῦ ὅτι, ἐνῷ εἰς αὐτὰ αἱ λογιστικαὶ πράξεις γίνονται κατὰ τοὺς κανόνας τῆς ἀριθμητικῆς, εἰς τὰ ἀνύσματα ὑπόκεινται εἰς κανόνας ποὺ διδάσκει ὁ ἀνυσματικὸς λογισμός, τοῦ ὁποίου παραθέτομεν στοιχεῖα :

α) Πρόσθεσις ἀνυσμάτων. Διὰ τὴν πρόσθεσιν δύο ἀνυσματικῶν ποσῶν ἰσχύει ὁ λεγόμενος ***κανὼν τοῦ παραλληλογράμμου.*** Κατ' αὐτὸν τὸ ἄθροισμα δύο ἀνυσμάτων k_1 καὶ k_2 παρέχεται ἀπὸ τὸ ἄνυσμα k (σχ. 7). τὸ ὁποῖον παριστάνεται ἀπὸ τὴν διαγώνιον τοῦ παραλληλογράμμου ποὺ σχηματίζεται μὲ προσκειμένας πλευρὰς τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ποὺ παριστάνουν τὰ προστιθέμενα ἀνύσματα.

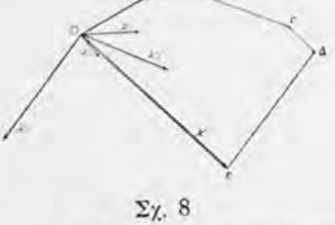
Τὴν πρόσθεσιν ἀνυσμάτων τὴν λέμε καὶ ***σύνθεσιν*** αὐτῶν· τότε τὰ προστιθέμενα τὰ λέμε ***συνιστώσας*** καὶ τὸ ἄθροισμά των ***συνισταμένην*** αὐτῶν.

Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ K τῆς συνισταμένης δύο ἀνυσμάτων προκύπτει ἐκ τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν K_1 καὶ K_2 τῶν συνιστωσῶν κατὰ τοὺς κανόνας τῆς τριγωνομετρίας ἀπὸ τὸν τύπον:

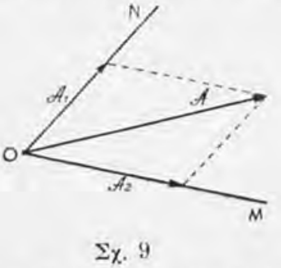
$K=\sqrt{K_1^2+K_2^2+2K_1K_2 \text{ συνφ}}$, εἰς τὸν ὁποῖον φ παριστάνει τὴν γωνίαν ποὺ περικλείουν αἱ διευθύνσεις τῶν δύο συνιστωσῶν.

Εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον προσθέσεως δύο ἀνυσμάτων φθάνομεν ἂν ἀπὸ τὸ τέλος A (σχ. 7) τοῦ ἑνὸς ἀνύσματος k_1 φέρομεν εὐθύγραμμον τμῆμα AΔ ἴσον, παράλληλον καὶ ὁμόρροπον πρὸς τὸ παριστῶν τὸ ἄλλον ἄνυσμα k_2 καὶ ἑνώσωμεν τὴν ἀφετηρίαν O μὲ τὸ τέλος Δ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ποὺ ἐφέραμεν. Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα OΔ ποὺ λαμβάνομεν παρέχει τὴν συνισταμένην k τῶν ἀνυσμάτων k_1 καὶ k_2 Εἶναι πρόδηλον ὅτι τὸ ἐξαγόμενον εἶναι τὸ αὐτὸ εἴτε προσθέσωμεν τὸ k_2 εἰς τὸ k_1 εἴτε τὸ k_1 εἰς τὸ k_2· τοῦτο σημαίνει ὅτι εἰς τὴν πρόσθεσιν ἀνυσμάτων ἰσχύει ὅπως καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν μονομέτρων μεγεθῶν ὁ ***κανὼν τῆς ἀντιμεταθέσεως***.

Προκειμένου περὶ περισσοτέρων ἀνυσμάτων k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 (σχ. 8) εἶναι εὐνόητον ὅτι, ὅπως γίνεται καὶ διὰ τὰ μονόμετρα ποσά, τὸ ἄθροισμά των εὑρίσκεται ἂν τὴν συνισταμένην δύο ἐξ αὐτῶν τὴν συνθέσωμεν μὲ τρίτον, αὐτὴν ποὺ θὰ βροῦμε μὲ τέταρτον κ.ο.κ. μέχρις ὅτου λάβωμεν καθ' ὁποιανδήποτε τάξιν ὅλας τὰς συνιστώσας καὶ καθεμίαν ἐξ αὐτῶν μίαν φοράν. Ἔτσι ἀπὸ τὸ τέλος A τοῦ k_1 φέρομεν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα AB ἴσον, παράλληλον καὶ ὁμόρροπον πρὸς τὸ παριστῶν τὸ k_2 ἔπειτα ἀπὸ τὸ πέρας B φέρομεν τὸ BΓ ἴσον παράλληλον καὶ ὁμόρροπον τοῦ k_3, κατόπιν ἀπὸ τὸ Γ τὸ



Σχ. 8



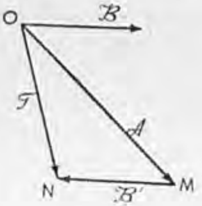
Σχ. 9

ΓΔ ἴσον παράλληλον καὶ ὁμόρροπον τοῦ k_4 καὶ τέλος ἀπὸ Δ τὸ ΔE ἴσον παράλληλον καὶ ὁμόρροπον τοῦ k_5· τὸ τμῆμα OE παρέχει τὴν συνισταμένην k τῶν δοθέντων ἀνυσμάτων.

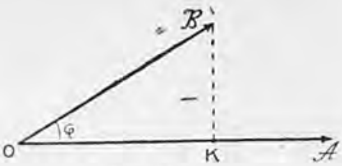
β) Ἀνάλυσις ἀνύσματος. Ἀντιθέτως πρὸς τὴν σύνθεσιν ἀνυσμάτων μποροῦμε δοθὲν ἄνυσμα νὰ τὸ ἀντικαταστήσωμεν μὲ δύο ἢ περισσότερα ποὺ τὸ ἔχουν ὡς ἄθροισμα. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέμε ὅτι κάνομεν ***ἀνάλυσιν*** δοθέντος ἀνύσματος εἰς τὰς συνιστώσας του. Προκειμένου π. χ. νὰ ἀναλυθῆ τὸ ἄνυσμα A (σχ. 9) εἰς δύο συνιστώσας κατὰ δοθείσας διευθύνσεις ΟΝ καὶ ΟΜ φέρομεν ἀπὸ τὸ πέρας τοῦ δοθέντος ἀνύσματος εὐθείας παραλλήλους πρὸς τὰς δοθείσας διευθύνσεις καὶ καθορίζομεν τὰ σημεῖα τομῆς τούτων μὲ τὰς δοθείσας διευθύνσεις. Τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ποὺ προκύπτουν ἔτσι ὡς πλευραὶ παραλληλογράμμου εἰς τὸ ὁποῖον τὸ δοθὲν ἄνυσμα A εἶναι διαγώνιος, παρέχουν τὰς συνιστώσας A_1, A_2 εἰς τὰς ὁποίας ἀναλύεται τοῦτο.

γ) Ἀφαίρεσις ἀνύσματος. Ἡ ἀφαίρεσις ἀνύσματος B ἀπὸ ἄλλο A ἀνάγεται εἰς πρόσθεσιν τοῦ ἀφαιρουμένου μὲ ἀντίθετον φοράν. Ἔτσι ἡ διαφορὰ $A-B$ παρέχεται ἀπὸ τὸ ἄνυσμα Γ ποὺ λαμβάνομεν ἂν ἀπὸ τὸ τέλος Μ (σχ. 10) τοῦ A φέρωμεν εὐθύγραμμον τμῆμα ΜΝ ἴσον πρὸς τὸ παριστῶν τὸ B μὲ φορὰν ἀντίθετον τῆς φορᾶς τούτου καὶ ἑνώσωμεν τὴν ἀφετηρίαν Ο μὲ τὸ τέλος Ν τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ποὺ ἐφέραμεν.

δ) Γινόμενον ἀνυσμάτων. Τὸ γινόμενον $\mu A = A\mu$ *ἑνὸς μονομέτρου ποσοῦ* μ *ἐπὶ ἄνυσμα* A ἢ *ἀνύσματος* A *ἐπὶ μονόμετρον ποσὸν* μ εἶναι ἄνυσμα B



Σχ. 10



Σχ. 11

ποὺ ἔχει τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν καὶ φορὰν μὲ τὸ A, ἀλλὰ ἀριθμητικὴν τιμὴν μ φορὰς μεγαλυτέραν ἀπὸ τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν αὐτοῦ. Εἶναι δηλαδή :

$$\mu \,.\, A = A \,.\, \mu = B \quad \text{καὶ} \quad B = A \,.\, \mu \,.$$

Προκειμένου διὰ τὸ γινόμενον *ἀνύσματος ἐπὶ ἄνυσμα* διακρίνομεν :

1. ***Ἀριθμητικὸν ἢ ἐσωτερικὸν γινόμενον δύο ἀνυσμάτων*** : Τοῦτο σημειώνεται μὲ $(A.B)$ καὶ εἶναι μονόμετρον ποσὸν ποὺ ἔχει ἀριθμητικὴν τιμὴν ἴσην μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν τῶν δύο ἀνυσμάτων ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας φ ποὺ σχηματίζουν αἱ διευθύνσεις καὶ φοραὶ τῶν δύο ἀνυσμάτων. Εἶναι δηλαδή: $(A.B) = A.B\,\text{συνφ}$. (σχ. 11).

Σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον δύο ἀνυσμάτων τῶν ὁποίων αἱ διευθύνσεις εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας ($\varphi = 90^0$) θὰ εἶναι ἴσον μὲ μηδέν, διότι τότε εἶναι συνφ$=0$.

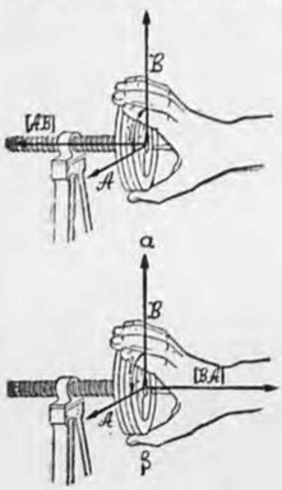
Ὅπως φαίνεται ἐκ τοῦ σχ. 11 εἶναι $\text{συνφ} = \dfrac{\overline{OK}}{B}$ καὶ $B\,.\,\text{συνφ} = \overline{OK}$, ἐπομένως καὶ $(A.B) = A\,.\,B\,.\,\text{συνφ} = A\,.\,\overline{OK}$ ἤτοι : ***τὸ ἀριθμητικὸν γινόμενον δύο ἀνυσμάτων εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν*** Α ***τοῦ ἑνὸς πολ)σμένην ἐπὶ τὸ μῆκος*** ΟΚ ***τῆς προβολῆς τοῦ ἄλλου*** B ***ἐπὶ τὸ πρῶτον*** A.

Διὰ τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον ἰσχύει ὁ κανὼν τῆς ἀντιμεταθέσεως. Εἶναι δηλαδὴ $(AB) = (BA)$· τοῦτο καθίσταται εὐνόητον ἂν ληφθῆ ὑπ' ὄψιν ὅτι : συνφ$=$συν$(-\varphi)$

καὶ ἑπομένως δὲν παίζει ρόλον, εἴτε λαμβάνομεν τὴν γωνίαν φ στρέφοντες τὴν διεύθυνσιν τοῦ A μέχρι τῆς διευθύνσεως τοῦ B, εἴτε τὴν γωνίαν (—φ), στρέφοντες τὴν διεύθυνσιν τοῦ B μέχρι τῆς διευθύνσεως τοῦ A.

2. ***Ἀνυσματικὸν ἢ ἐξωτερικὸν γινόμενον δύο ἀνυσμάτων.*** Τοῦτο σημειώνεται μὲ $[AB]$ καὶ εἶναι ἀνυσματικὸν μέγεθος ποὺ ἔχει μέτρον ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέτρων τῶν δύο ἀνυσμάτων ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας φ ποὺ σχηματίζουν αἱ διευθύνσεις τῶν δύο ἀνυσμάτων. Εἶναι δηλαδή : $[AB] = A \cdot B \cdot ημφ$.

Ἡ διεύθυνσις τοῦ ἀνύσματος εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ποὺ ὁρίζουν αἱ διευθύνσεις τῶν πολλαπλασιαζομένων ἀνυσμάτων. Ἡ φορὰ ἐξ ἄλλου τοῦ ἀνύσματος $[AB]$ εἶναι τοιαύτη, ὥστε νὰ ἀντιστοιχῇ πρὸς τὴν προώθησιν δεξιοστρόφου κοχλίου ποὺ στρέφει τὴν διεύθυνσιν τοῦ πρώτου ἀνύσματος A πρὸς τὴν διεύθυνσιν τοῦ δευτέρου B (σχ. 12,α).



Σχ. 12

Εἶναι εὐνόητον ὅτι, ἐὰν εἶναι φ ἡ γωνία κατὰ τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ στραφῇ περὶ τὴν κοινὴν ἀρχὴν τὸ ἄνυσμα A διὰ νὰ ἔλθῃ εἰς τὴν διεύθυνσιν τοῦ B, θὰ εἶναι —φ ἐκείνη κατὰ τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ στραφῇ τὸ B διὰ νὰ ἔλθῃ εἰς τὴν διεύθυνσιν τοῦ A. Ἑπομένως ἂν εἶναι : $[AB] = A.B.$ ημφ, θὰ εἶναι: $[BA] = B.A.$ημ(—φ) (σχ. 12β). Καὶ ἐπειδὴ εἶναι ημ(—φ) = —ημφ θὰ ἔχωμεν: $[BA] = -A.B$ημφ $= -[AB]$. Ἐκ τούτου προκύπτει ὅτι εἰς τὸ ἀνυσματικὸν γινόμενον δὲν ἰσχύει ὁ νόμος τῆς ἀντιμεταθέσεως, ἀφοῦ μὲ τὴν ἀντιμετάθεσιν τῶν παραγόντων ἀλλάσσει τὸ σημεῖον τοῦ γινομένου, δηλαδὴ ἡ φορὰ τοῦ ἀνύσματος ποὺ παριστάνει τὸ γινόμενον.

Ἂν τὰ πολλαπλασιαζόμενα ἀνύσματα ἔχουν τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν (φ=0) θὰ ἔχωμεν ημφ=0 καὶ ἑπομένως $[AB]=0$.

§ 6. Ὑποδιαίρεσις τοῦ περιεχομένου τῆς Φυσικῆς.

Πρὸς συστηματικὴν διαπραγμάτευσιν τοῦ περιεχομένου τῆς Φυσικῆς διαιροῦμεν τοῦτο εἰς τὰ ἑξῆς μέρη : 1) Μηχανικήν, 2) Ἀκουστικήν, 3) Θερμαντικόν, 4) Ὀπτικήν, 5) Ἠλεκτρισμὸν - Μαγνητισμὸν καὶ 6) Ἀτομοδομικήν.

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Ἡ Μηχανικὴ εἶναι τὸ ἀρχαιότερον ἀναπτυχθὲν μέρος τῆς Φυσικῆς. Εἰς αὐτὴν ἐξετάζονται αἱ μεταβολαὶ τῆς θέσεως ἢ τοῦ σχήματος τῶν σωμάτων καὶ τὰ αἴτια (***δυνάμεις***), εἰς τὰ ὁποῖα ὀφείλονται αἱ μεταβολαὶ αὐταί.

Ἡ Μηχανικὴ διαιρεῖται εἰς: 1) ***Κινητικήν***, ὅπου ἐξετάζονται αἱ κινήσεις αὐταὶ καθ' ἑαυτάς, χωρὶς δηλαδὴ τὰ αἴτια αὐτῶν, 2) ***Στατικήν***, ὅπου ἐξετάζονται αἱ δυνάμεις εἰς ἰσορροπίαν, δηλαδὴ ὑπὸ συνθήκας ποὺ δὲν προκαλοῦν μεταβολὰς τῆς κινητικῆς καταστάσεως τῶν σωμάτων, ἐπὶ τῶν ὁποίων ἐνεργοῦν, 3) ***Δυναμικήν***, ὅπου ἐξετάζονται κινήσεις συσχετισμέναι μὲ τὰς δυνάμεις, ἀπὸ τὰς ὁποίας ρυθμίζονται.

Τὰ διάφορα σώματα ἐμφανίζονται ὑπὸ τρεῖς διαφόρους ***φυσικὰς καταστάσεις***: εἶναι δηλαδὴ ***στερεά***, ***ὑγρὰ*** ἢ ***ἀέρια*** ἀντιστοίχως πρὸς τὰς κινήσεις ποὺ κάνουν καὶ τὰς δυνάμεις, εἰς τὰς ὁποίας ὑπόκεινται τὰ ἐλάχιστα τεμαχίδια, (μόρια ἢ ἄτομα), ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦνται (πρβλ. § 40). Μὲ τὴν διάκρισιν αὐτὴν τῶν σωμάτων ἔχομεν ἀντιστοίχως 1) Μηχανικὴν τῶν στερεῶν, 2) Μηχανικὴν τῶν ὑγρῶν καὶ 3) Μηχανικὴν τῶν ἀερίων.

Ι. Εἴδη καὶ χαρακτηριστικὰ τῶν κινήσεων (Κινητική)

§ 7. Σχετικότης πάσης κινήσεως. Κίνησις εἶναι ἡ μεταβολὴ ποὺ γίνεται εἰς τὴν θέσιν σώματος. Ἡ κίνησις σώματος παρατηρεῖται εἰς ἑκάστην περίπτωσιν ἀπὸ ὡρισμένην θέσιν τοῦ χώρου ἤ, ὅπως λέμε, ἀπὸ ὡρισμένον ***σύστημα ἀναφορᾶς***. Ἔτσι π.χ. ἡ κίνησις ὀχήματος μπορεῖ νὰ παρατηρηθῇ ἀπὸ παρατηρητὴν ποὺ εὑρίσκεται μέσα εἰς τὸ ὄχημα ἢ ἀπὸ ἄλλον ποὺ στέκεται ἔξω ἀπὸ αὐτό. Εἶναι εὐνόητον, ὅτι ἀπὸ τὴν θέσιν, ποὺ ἔχει ὁ παρατηρητὴς ***σχετικὰ*** μὲ τὸ κινούμενον σῶμα, ἐξαρτᾶται καὶ ἡ ἀντίληψις ποὺ θὰ σχηματίσῃ διὰ τὴν μορφὴν τῆς κινήσεως τοῦ σώματος. Ὥστε ἡ ἔννοια τῆς κινήσεως σώματος εἶναι ***πάντοτε σχετικὴ*** καὶ ἀνάγεται ἑκάστοτε εἰς ὡρισμένον σύστημα ἄλλων σωμάτων (σύστημα ἀναφορᾶς), τὸ ὁποῖον θεωρεῖται εἰς ἠρεμίαν. ***Ἀπόλυτος κίνησις σώματος, δηλαδὴ κίνησις ποὺ δὲν ἀνάγεται εἰς σύστημα ἀναφορᾶς, δὲν ἔχει νόημα διὰ τὴν Φυσικήν.***

§ 8. Ὁμαλὴ κίνησις. Ταχύτης. Ἡ γραμμὴ ποὺ ἑνώνει τὰς διαδοχικὰς θέσεις, ἀπὸ τὰς ὁποίας διέρχεται τὸ κινητὸν κατὰ τὴν διαρροὴν τοῦ χρόνου λέγεται ***τροχιά***. Ἡ τροχιὰ μπορεῖ νὰ εἶναι ***εὐθύ-***

γραμμος ἢ *καμπυλόγραμμος*. Τὸ μῆκος τῆς τροχιᾶς ποὺ διανύεται εἰς δοθέντα χρόνον, τὸ λέμε *διάστημα* καὶ τὸ σημειώνομεν συνήθως μὲ τὸ γράμμα **s**. Ὅταν τὸ κινητὸν κινῆται ἐπὶ εὐθυγράμμου τροχιᾶς ἔτσι ποὺ νὰ διατρέχῃ εἰς ἴσους χρόνους πάντοτε ἴσα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας διαστήματα, ἔχομεν τὴν ἁπλουστέραν μορφὴν τῆς κινήσεως· τὴν κίνησιν αὐτὴν τὴν λέμε *εὐθύγραμμον ἰσοταχῆ* ἢ *ὁμαλήν*. Κατ' αὐτὴν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τυχόντος διαστήματος **s** διὰ τοῦ χρόνου **t**, εἰς τὸν ὁποῖον διατρέχεται, εἶναι σταθερόν. Τὸ μέγεθος τοῦτο τὸ λέμε *ταχύτητα* τοῦ κινητοῦ καὶ τὸ σημειώνομεν συνήθως μὲ τὸ γράμμα **v**.

Κατὰ ταῦτα ὀνομάζομεν *ταχύτητα τὸ κατὰ μίαν ὡρισμένην διεύθυνσιν εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου μὲ ὁμαλὴν κίνησιν διανυόμενον διάστημα*. Τοῦτο ἐκφράζει ὁ τύπος: $v=s/t$ (1).

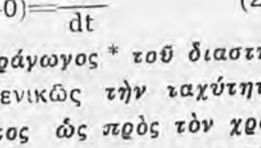
Σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμὸν αὐτὸν ἡ ταχύτης εἶναι μέγεθος μὲ ἐξίσωσιν διαστάσεων: $[v]=[L.M^0.T^{-1}]$ καὶ διαστάσεις (1,0,–1).

Ἀντιστοίχως πρὸς τὸν παραπάνω ὁρισμὸν *μονὰς ταχύτητος* εἶναι ἡ ταχύτης ποὺ ἔχει κινητόν, τὸ ὁποῖον διατρέχει *μὲ ὁμαλὴν κίνησιν* τὴν μονάδα τοῦ μήκους εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου. Ἔτσι εἰς τὸ σύστημα cgs ἡ μονὰς ταχύτητος εἶναι 1 cm/sec (συντομώτερον: cm/s), δηλ. 1 ἑκατοστόμετρον κατὰ δευτερόλεπτον· τὴν μονάδα αὐτὴν τὴν λέμε μονολεκτικῶς καὶ **cel**. Εὐχρηστότερες μονάδες ταχύτητος εἶναι αἱ: 1 m/s (μέτρον κατὰ δευτερόλεπτον), 1 km/h (χιλιόμετρον καθ' ὥραν).

§ 9. Ταχύτης οἱασδήποτε κινήσεως. *α) Μέτρον τῆς ταχύτητος*. Ὅταν ἡ κίνησις δὲν εἶναι ὁμαλή, δηλαδὴ τὸ κινητὸν διανύει εἰς διαδοχικοὺς ἴσους χρόνους διάφορα κατὰ μῆκος ἢ διεύθυνσιν διαστήματα, θὰ ἔχωμεν διαφόρους ταχύτητας κατὰ τὰς διαφόρους χρονικὰς στιγμάς, δηλαδὴ εἰς τὰς διαφόρους θέσεις, ποὺ καταλαμβάνει διαδοχικῶς ἐπὶ τῆς τροχιᾶς του. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν πρέπει νὰ καθορίζεται ἡ ταχύτης τοῦ κινητοῦ δι' ἕκαστον σημεῖον τῆς τροχιᾶς του. Ἡ τιμή της δίδεται τότε διὰ τὴν θεωρουμένην θέσιν ἀπὸ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ εἰς τὴν θέσιν ταύτην ἐντὸς ἐλαχίστου χρόνου ($\Delta t \rightarrow 0$) διανυομένου διαστήματος Δs διὰ τοῦ χρόνου τούτου Δt. Ὅσον μικρότερον εἶναι τὸ χρονικὸν διάστημα Δt, τόσον μικροτέρα θὰ εἶναι ἡ μεταβολὴ ποὺ μπορεῖ νὰ ὑποστῇ κατὰ τὸν χρόνον τοῦτον ἡ ταχύτης καὶ ἑπομένως τόσον ἀκριβεστέρα εἶναι ἡ εὑρισκομένη τιμή. Ἔτσι ἡ ταχύτης v δι' οἱανδήποτε κίνησιν εἰς δοθεῖσαν θέσιν τοῦ κινητοῦ παρέχεται γενικῶς ἀπὸ τὸ πηλίκον $\Delta s/\Delta t$, τοῦ διαστήματος Δs, μετρουμένου εἰς τὴν θεωρουμένην θέσιν, διὰ τοῦ ἐλαχίστου χρόνου Δt, κατὰ τὸν ὁποῖον διανύεται τὸ διάστημα τοῦτο. Εἶναι λοιπὸν γενικῶς: $v=\Delta s/\Delta t$, ὅταν Δt τείνῃ πρὸς μηδέν, ($\Delta t \to 0$). Κατὰ ταῦτα, ἂν θεωρήσωμεν ὅτι ὁ χρόνος Δt γίνεται μικρότερος πάσης ἀριθμητικῆς τιμῆς ὁσονδήποτε μικρᾶς ἤ, ὅπως λέμε, λαμβάνει ἀπειροστὴν τιμήν, θὰ ἔχωμεν τὴν ἀκριβεστέραν τιμὴν τῆς ταχύτητος. Συνεπῶς ἡ ταχύτης εἰς οἱανδήποτε κίνησιν παρέχεται ἀπὸ τὸ πηλίκον δύο ἀπειροστῶν ποσῶν, ποὺ εἰς τὴν γλῶσσαν τῶν Μαθηματικῶν τὰ λέμε διαφορικὰ καὶ τὰ σημειώνομεν μὲ dt καὶ ds. Τὸ πηλίκον αὐτὸ ὅπως ἀποδεικνύεται εἰς τὰ Μαθηματικὰ ἔχει πεπερασμένην τιμήν. Τὸ ἐξαγόμενον ἐκφράζεται συμβολικῶς μὲ τὸν τύπον: $v = \text{ὅριον}\ \frac{\Delta s}{\Delta t}\ (\text{ὅταν}\ \Delta t \to 0) = \frac{ds}{dt}$ (2).

Τὸ διαφορικὸν πηλίκον ds/dt λέγεται ***παράγωγος**** ***τοῦ διαστήματος ὡς πρὸς τὸν χρόνον.*** Ἔτσι ὁρίζομεν γενικῶς ***τὴν ταχύτητα ἑνὸς κινητοῦ μὲ τὴν παράγωγον τοῦ διαστήματος ὡς πρὸς τὸν χρόνον*** διὰ τυχοῦσαν θέσιν τῆς τροχιᾶς, ὅπου εὑρίσκεται τὸ κινητὸν εἰς δοθεῖσαν χρονικὴν στιγμήν. Εἶναι εὐνόητον ὅτι ἡ σταθερὰ ταχύτης τῆς ὁμαλῆς κινήσεως εἶναι δι' οἱανδήποτε χρονικὴν στιγμὴν καὶ εἰς οἱανδήποτε θέσιν τῆς τροχιᾶς πάντοτε ἡ αὐτή.

β) Ἡ ταχύτης ὡς ἄνυσμα. Πέραν τῆς ἀριθμητικῆς της τιμῆς ἡ ταχύτης ἔχει ἑκάστοτε ὡρισμένην διεύθυνσιν καὶ φοράν, εἶναι δηλαδὴ ἀνυσματικὸν μέγεθος. Διὰ νὰ εἶναι συνεπῶς τελείως καθωρισμένη, πρέπει νὰ δίδεται καὶ τὸ δεύτερον αὐτὸ χαρακτηριστικόν της. Ἀπὸ τὴν ἀνυσματικὴν φύσιν τῶν ταχυτήτων προκύπτει ὅτι εἰς περιπτώσεις, κατὰ τὰς ὁποίας δίδονται εἰς τὸ κινητὸν δύο ἢ περισσότεραι ταχύτητες, τὸ ἄθροισμά των θὰ εὑρίσκεται κατὰ τοὺς κανόνας συνθέσεως ἀνυσμάτων. Ἔτσι π.χ. ἂν θεωρήσωμεν λέμβον, εἰς τὴν ὁποίαν προσδίδεται, ἀφ' ἑνὸς ἡ ταχύτης υ_1 (σχ. 13) καθέτως πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς ροῆς ποταμοῦ (ὑπὸ κωπηλάτου ἐπιχειροῦντος νὰ διαπεραιωθῇ ἀπὸ τὸ σημεῖον Α τῆς μιᾶς ὄχθης εἰς τὸ σημεῖον Β τῆς ἀπέναντι) καὶ ἀφ' ἑτέρου ἡ υ_2 κατὰ τὴν φορὰν τοῦ ρεύματος, ποὺ τὴν παρασύρει καθέτως πρὸς τὴν διεύθυνσιν ΑΒ, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ κίνησις τῆς λέμβου θὰ γίνεται μὲ ταχύτητα υ ποὺ παρέχεται κατ' ἀριθμητικὴν τιμήν, διεύθυνσιν καὶ φορὰν ἀπὸ τὴν συνισταμένην τῶν υ_1 καὶ υ_2. Συνεπῶς ἡ λέμβος δὲν θὰ



Σχ. 13

---

* Ὅταν δύο ποσά, ὅπως τὸ διάστημα καὶ ὁ χρόνος εἰς τὸν ὁποῖον διανύεται, σχετίζωνται μεταξύ των ἔτσι ποὺ εἰς κάθε μεταβολὴν τοῦ ἑνὸς — ποὺ τὸ λέμε ***ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν*** — ἀντιστοιχεῖ ὡρισμένη μεταβολὴ τοῦ ἄλλου, λέμε πὼς τὸ ἄλλο αὐτὸ ποσὸν εἶναι ***συνάρτησις*** τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς. Εἰς τὴν περίπτωσιν διαστήματος - χρόνου λέμε, ὅτι τὸ διανυόμενον διάστημα s εἶναι συνάρτησις τοῦ χρόνου t καὶ σημειώνομεν τοῦτο μὲ τὸν τύπον: $s = \sigma(t)$ (α). Εἰς μεταβο-

φθάση, οὔτε εἰς τὸ σημεῖον Β (ποὺ θὰ τὴν ἔφερε ἡ ταχύτης $υ_1$), οὔτε εἰς τὸ Δ (ποὺ θὰ τὴν ἔφερε ἡ ταχύτης $υ_2$), ἀλλὰ εἰς τὸ Γ, ὅπου τὴν φέρει ἡ συνισταμένη ταχύτης υ.

Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς συνισταμένης ταχύτητος v εὑρίσκεται ἀπὸ τὰς ἀριθμητικὰς τιμὰς τῶν συνιστωσῶν v_1, v_2 μὲ τὸν τύπον: $v=\sqrt{v_1^2+v_2^2+2v_1v_2συνφ}$ ἂν φ εἶναι (βλ. σχ. 13) ἡ γωνία ποὺ σχηματίζουν αἱ διευθύνσεις τῶν συνιστωσῶν. Ἡ διεύθυνσις ἐξ ἄλλου τῆς συνισταμένης καθορίζεται ἀπὸ τὴν γωνίαν α ἢ β (=φ—α) ποὺ σχηματίζει αὕτη μὲ τὴν διεύθυνσιν τῆς v_1 ἢ τῆς v_2. Δι' αὐτὴν ἰσχύει: $ημα=(v_2ημφ)/v$ ἢ $ημβ=(v_1ημφ)/v$.

§ 10. **Ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη κίνησις. Ἐπιτάχυνσις.** Εἰς τὴν γενικῶς ἀνισοταχῆ κίνησιν μπορεῖ νὰ μεταβάλλεται ἡ ταχύτης, εἴτε κατὰ τὴν ἀριθμητικήν της τιμήν, εἴτε κατὰ τὴν διεύθυνσιν καὶ φοράν της, εἴτε καὶ κατὰ τὰ δύο αὐτὰ χαρακτηριστικά της. Τὴν κίνησιν αὐτὴν τὴν λέμε γενικῶς ***ἐπιταχυνομένην***, ἀνεξαρτήτως τοῦ ἂν ἡ μεταβολὴ τῆς ταχύτητος εἶναι αὔξησις ἢ ἐλάττωσις τῆς ἀριθμητικῆς της τιμῆς ἢ ἂν ἡ μεταβολὴ γίνεται μόνον εἰς τὴν διεύθυνσιν καὶ φοράν αὐτῆς.

Ἡ ἁπλουστέρα περίπτωσις ἐπιταχυνομένης κινήσεως εἶναι ἡ τῆς ***ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένης***. Κατ' αὐτὴν ἡ ταχύτης διατηρεῖ σταθερὰν τὴν διεύθυνσιν καὶ φοράν της καὶ μεταβάλλει μόνον τὴν ἀριθμητικήν της τιμήν, [τὴν αὐξάνει (+) ἢ τὴν ἐλαττώνει (—)], ἀλλὰ κατὰ τὸ αὐτὸ πάντοτε ποσὸν εἰς τοὺς διαδοχικοὺς ἴσους χρόνους. ***Ἡ σταθερὰ μεταβολὴ ποὺ ὑφίσταται εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ταχύτης καθ' ἑκάστην μονάδα χρόνου ὀνομάζεται ἐπιτάχυνσις.*** Ἂν εἶναι $Δv\,(=v_2-v_1)$ ἡ μεταβολὴ ποὺ πάσχει ἡ ταχύτης κατὰ τὴν μεταβολὴν τοῦ χρόνου $Δt\,(=t_2-t_1)$ καὶ παραστήσωμεν μὲ γ τὴν ἐπιτάχυνσιν, θὰ εἶναι: $γ=\dfrac{v_2-v_1}{t_2-t_1}=\dfrac{Δv}{Δt}=\dfrac{v}{t}$ (3)

Ἔτσι τὸ μέγεθος τῆς ἐπιταχύνσεως ἔχει ἐξίσωσιν διαστάσεων $[γ]=[L.\,T^{-2}]=[L.\,M^0.T^{-2}]$ καὶ διαστάσεις: (1, 0, -2).

Μονὰς ἐπιταχύνσεως εἰς τὸ σύστημα cgs θὰ εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένης κινήσεως, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ταχύτης εἰς

λὴν Δt τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς ἀντιστοιχεῖ μεταβολὴ Δs τῆς συναρτήσεως, ἤτοι εἶναι: $s+Δs=σ(t+Δt)$ (β). Ἂν ἀφαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς (α) καὶ (β) λαμβάνομεν: $Δs=σ(t+Δt)-σ(t)$ καὶ ἑπομένως $\dfrac{Δs}{Δt}=\dfrac{σ(t+Δt)-σ(t)}{Δt}$ (γ)

Ὅταν ἡ μεταβολὴ Δt εἶναι ἀπειροστὴ ($Δt\rightarrow 0$) τὸ πηλίκον Δs/Δt ἔχει ὡρισμένον ὅριον, τὸ ὁποῖον ὀνομάζομεν ***παράγωγον τῆς συναρτήσεως*** καὶ τὸ σημειώνομεν μὲ ἕνα τόνον εἰς τὸ σύμβολον τῆς συναρτήσεως. Ἔτσι ἔχομεν: $s'=σ'(t)=$ $=$ ορ Δs/Δt (ὅταν $Δt\rightarrow 0$). Ἀντὶ τῆς ἐπισημάνσεως: ορ Δs/Δt (διὰ $Δt\rightarrow 0$), χρησιμοποιοῦμεν τὸ πηλίκον τῶν ἀντιστοίχων διαφορικῶν ds/dt. Ἔτσι ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως ἐκφράζεται συντομώτερον μὲ τὸν τύπον: $s'=ds/dt$ (δ).

κάθε 1 δευτερόλεπτον αὐξάνεται (ἢ ἐλαττώνεται) κατὰ 1 cm/sec. Τὴν μονάδα αὐτὴν 1 cm/sec/sec ἢ 1 cm/sec² τὴν λέμε μονολεκτικῶς 1 gal. Μποροῦμε ἐπίσης νὰ λάβωμεν ὡς μονάδας ἐπιταχύνσεως τὰς: 1 m/sec², 1 km/h² κ.ἄ. Εἶναι πρόδηλον, ὅτι ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι (ὅπως καὶ ἡ ταχύτης) ἀνυσματικὸν μέγεθος καὶ ἑπομένως ἰσχύουν καὶ δι' αὐτὴν ὅ,τι εἴπαμε διὰ τὴν ταχύτητα ὡς ἄνυσμα.

§ 11. Ἐλευθέρα πτῶσις σώματος. α) ***Ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος.*** Παράδειγμα ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένης κινήσεως εἶναι ἡ ***ἐλευθέρα πτῶσις*** σώματος, δηλαδὴ ἡ κίνησις ποὺ κάνει σῶμα, τὸ ὁποῖον ἀφήνεται νὰ πέσῃ κατακορύφως ἀπὸ κάποιο ὕψος εἰς χῶρον, ὅπου τὸ σῶμα δὲν ὑπόκειται εἰς καμμίαν ἄλλην ἐπίδρασιν πλὴν τοῦ βάρους του. Ἐγκλείομεν εἰς ὑάλινον σωλῆνα ἀρκετοῦ μήκους διάφορα σώματα (μιὰ πέτρα, ἕνα φτερό, ἕνα καρφί, ἕνα φελλὸ) καὶ μὲ ἀεραντλίαν ἀφαιροῦμεν τὸν ἀέρα ἀπὸ τὸν σωλῆνα. Ἂν κρατῶμεν τὸν σωλῆνα αὐτὸν κατακορύφως καὶ τὸν ἀναστρέψωμεν ἀποτόμως, παρατηροῦμεν ὅτι τὰ διάφορα σώματα, ποὺ περιέχει, καταπίπτουν ἀπὸ τὸ ἕν ἄκρον του εἰς τὸ ἄλλο ὅλα μαζὶ ταυτοχρόνως. Ἂν εἰς τὸν σωλῆνα περιέχεται καὶ ἀήρ, τότε τὰ ἔχοντα μικροτέραν πυκνότητα καὶ μικρότερον βάρος πίπτουν βραδύτερον ἀπὸ τὰ πυκνότερα καὶ βαρύτερα. Εἰς τὴν περίπτωσιν ποὺ ἔχει ἀφαιρεθῆ ὁ ἀήρ, τὰ σώματα πίπτουν ἐλευθέρως, ἐνῷ, ὅταν ἐμπεριέχεται εἰς τὸν σωλῆνα καὶ ἀήρ, προβάλλεται ὑπ' αὐτοῦ ἀντίστασις εἰς τὰ πίπτοντα σώματα καὶ αὐτὴ ἐπιβραδύνει τὴν πτῶσιν των τόσον αἰσθητότερον, ὅσον μικρότερα καὶ ἐλαφρότερα εἶναι. Ἡ διαπίστωσις ὅτι ὅλα τὰ σώματα πίπτουν εἰς τὸ κενὸν (ἐλευθέρως) μὲ τὴν αὐτὴν ταχύτητα ἔγινε τὸ 1590 ἀπὸ τὸν Γαλιλαῖον (1564—1642), ποὺ εἶναι ὁ θεμελιωτὴς τῆς πειραματικῆς μεθόδου εἰς τὴν φυσικὴν ἔρευναν. Ἀπὸ τὴν διαπίστωσιν αὐτὴν ὁδηγούμεθα νὰ συναγάγωμεν, ὅτι κατὰ τὴν ἐλευθέραν πτῶσιν ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς κινήσεως εἶναι σταθερὰ καὶ συνεπῶς ἡ κίνησις αὐτὴ εἶναι ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη. Ἡ ***σταθερὰ δι' ἕκαστον τόπον τῆς Γῆς*** ἐπιτάχυνσις τῆς ἐλευθέρας πτώσεως ὀνομάζεται ***ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος*** καὶ παριστάνεται διεθνῶς μὲ τὸ γράμμα g. Ἡ τιμή της δὲν εἶναι ἡ αὐτὴ εἰς ὅλους τοὺς τόπους τῆς Γῆς· εἶναι μεγίστη εἰς τοὺς πόλους (983 cm/sec²) καὶ ἐλαχίστη εἰς τὸν Ἰσημερινὸν (978 cm/sec²). Εἰς τοὺς τόπους μέσου γεωγραφικοῦ πλάτους εἶναι περὶ τὰ 981 cm/sec² (στρογγυλά : 10 m/sec²).

β) ***Πειραματικὴ εὕρεσις τῶν νόμων τῆς ἐλευθέρας πτώσεως.*** Λαμβάνομεν σῶμα βαρύ, π.χ. σφαῖραν ἀπὸ μόλυβδον, καὶ τὸ ἀφήνομεν νὰ καταπέσῃ ἀπὸ ὕψος πρῶτον 5 m, δεύτερον 20 m, τρίτον 45 m, τέταρτον 80 m. . . . καὶ προσδιορίζομεν κάθε φορὰν τὸν χρόνον ποὺ χρειάζεται διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὸ ἔδαφος. Ἐπειδὴ εἰς τὸ βαρὺ σῶμα ἡ ἐπίδρασις τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἀέρος εἶναι ἀνεπαίσθητος (διὰ τὰς ταχύτητας ποὺ ἀποκτᾷ κατὰ τὴν πτῶσιν ἀπὸ ὕψος ὀλίγων δεκάδων μέτρων), μποροῦμε νὰ θεωρήσωμεν τὴν κίνησιν αὐτὴν τοῦ βαρέος σώματος μὲ μεγάλην προσέγγισιν ὡς ἐλευθέραν πτῶσιν. Μὲ τοὺς κτύπους ἑνὸς μετρονόμου (χρονομέτρου), ποὺ τὸν ἔχομε κανονίσει νὰ κτυπᾷ δευτερόλεπτα, εὑρίσκομεν ὅτι :

Τὸ ὕψος τῶν 5 m $= 5 \cdot 1^2$ διανύεται ἀπὸ τὸ πῖπτον σῶμα, εἰς 1 sec
» » » 20 » $= 5 \cdot 2^2$ » » » » » » 2 »
» » » 45 » $= 5 \cdot 3^2$ » » » » » » 3 »
» » » 80 » $= 5 \cdot 4^2$ » » » » » » 4 »

Ἐκ τῶν πειραματικῶν τούτων διαπιστώσεων συνάγομεν, ὅτι τὰ διανυόμενα κατὰ τὴν ἐλευθέραν πτῶσιν διαστήματα εἶναι ἀνάλογα τῶν τετραγώνων τῶν χρόνων, κατὰ τοὺς ὁποίους διανύονται. Ὁ σταθερὸς συντελεστὴς τῆς ἀναλογίας αὐτῆς, ἤτοι ὁ 5 (καὶ ἀκριβέστερον ὁ 4,9), εἶναι ἀκριβῶς τὸ ἥμισυ τῆς σταθερᾶς ἐπιταχύνσεως $g = 10$ m/sec^2 (καὶ ἀκριβέστερον 9,8 m/sec^2).

Τοῦτο ἐξ ἄλλου εἶναι σύμφωνον καὶ πρὸς τὰς φυσικὰς διαστάσεις τοῦ προκύπτοντος ποσοῦ, διότι ἀπὸ τὸν πολ/σμὸν ἐπιταχύνσεως (m/sec^2) ἐπὶ τὸ τετράγωνον χρόνου (sec^2) προκύπτει ποσὸν μὲ διαστάσεις μήκους (m) ὅπως εἶναι τὸ ποσὸν τοῦ διανυομένου διαστήματος.

Κατὰ ταῦτα, ἂν εἶναι h τὸ ὕψος, ἀπὸ τὸ ὁποῖον καταπίπτει ἐλευθέρως τὸ σῶμα, t ὁ χρόνος ποὺ χρειάζεται διὰ νὰ διατρέξῃ τοῦτο καὶ g ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς κινήσεως, θὰ ἔχωμεν: $h = \frac{1}{2} g t^2$ (4).

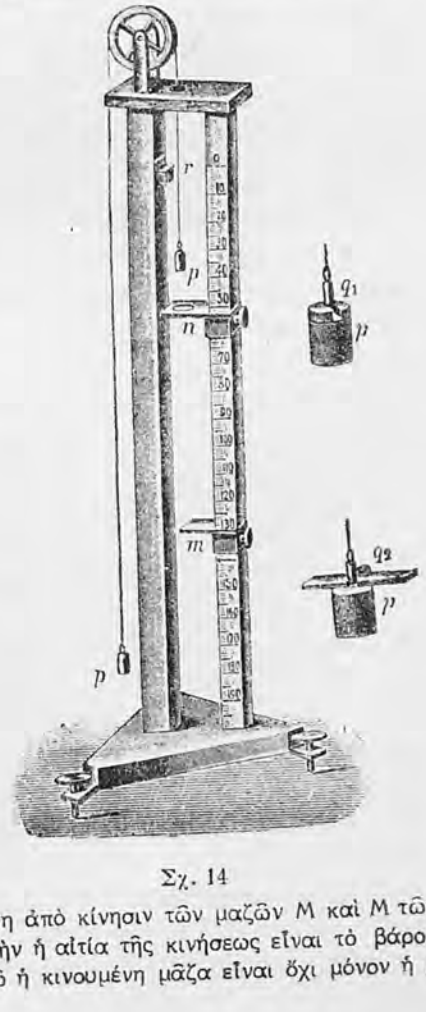
γ) Θεωρητικὴ συναγωγὴ τῶν νόμων τῆς ἐλευθέρας πτώσεως. Τὸ παραπάνω ἐξαγόμενον εἶναι εὔκολον νὰ συναχθῇ καὶ θεωρητικῶς. Πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὅτι τὸ σῶμα, ποὺ εἰς τὴν ἀρχὴν ($t = 0$) εὑρίσκεται εἰς ἠρεμίαν, δηλαδὴ ἔχει ταχύτητα μηδέν, ἀποκτᾷ μετὰ 1 sec ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως τῆς ἐλευθέρας πτώσεως ταχύτητα $v_1 = 0 + g = g.1$, μετὰ 2 sec ταχύτητα $v_2 = g.1 + g = g.2$, μετὰ 3 sec $v_3 = g.2 + g = g.3$ καὶ μετὰ t sec: $\mathbf{v_t = g \cdot t}$ (5)

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ διάστημα ποὺ διανύεται εἰς χρόνον t, ὁρίζομεν ὡς ***μέσην ταχύτητα*** v_m τῆς κινήσεώς του, τὴν ταχύτητα ἐκείνην ποὺ ἔπρεπε νὰ ἔχῃ τὸ σῶμα, ὥστε, ***κινούμενον ὁμαλῶς***, νὰ διατρέχῃ τὸ αὐτὸ διάστημα εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον. Τότε τὸ διάστημα s_t ποὺ διανύεται εἰς χρόνον t θὰ εἶναι : $s_t = v_m . t$. Εἰς τὴν περίπτωσίν μας ἡ μέση ταχύτης ἐλευθέρως πίπτοντος σώματος κατὰ τὸν χρόνον t εἶναι (λόγῳ τῆς ὁμοιομόρφου μεταβολῆς κατὰ τὰς διαδοχικὰς στιγμὰς τοῦ θεωρουμένου χρόνου) ἴση μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο ἄκρων τιμῶν τῆς πραγματικῆς ταχύτητος, ἤτοι τῆς τιμῆς 0 ποὺ ἔχει ἡ ταχύτης εἰς τὴν ἀρχὴν καὶ τῆς τιμῆς g.t ποὺ λαμβάνει αὕτη εἰς τὸ τέλος τοῦ χρόνου t. Εἶναι λοιπόν: $v_m = (0 + g\,t) / 2 = g\,t / 2$. Ἔτσι

τὸ διάστημα s_t, ἤτοι τὸ ὕψος h, ποὺ διανύεται κατὰ τὴν ἐλευθέραν πτῶσιν σώματος εἰς χρόνον t, θὰ εἶναι : $\mathbf{h = 1/_2\, gt.t = 1/_2\, gt^2}$. (5')
Ἂν ἀπὸ τὴν σχέσιν (5) λάβωμεν τὴν τιμὴν τοῦ χρόνου καὶ τὴν εἰσαγάγωμεν εἰς τὴν σχέσιν (5'), λαμβάνομεν: $h = v^2/2g$ καὶ $v = \sqrt{2gh}$ (5'').

Εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον φθάνομεν ἀμεσώτερον κατὰ τοὺς κανόνας τοῦ ἀπειροστικοῦ λογισμοῦ. Ἀναχωροῦμεν πρὸς τοῦτο ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (2) ποὺ παρέχει τὴν ταχύτητα εἰς οἱανδήποτε κίνησιν. Ἀπὸ αὐτὴν προκύπτει : $ds = v.dt$ καὶ εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν : $ds = gt\,.\,dt$. Δι' ὁλοκληρώσεως μεταξὺ ὡρισμένων ὁρίων λαμβάνομεν : $\int_0^s ds = \int_0^t gtdt = g\int_0^t tdt$ ὅθεν $s_t = 1/_2\, gt^2$.

δ) Συσκευὴ δι' ἀκριβεστέραν ἀπόδειξιν τῶν νόμων τῆς ἐλευθέρας πτώσεως. Ἡ σταθερὰ εἰς ἕκαστον τόπον τῆς Γῆς ἐπιτάχυνσις, τὴν ὁποίαν ἔχει ἡ φυσικὴ ἐλευθέρα πτῶσις, εἶναι τόσον μεγάλη (στρογγυλά : 10 m/s²), ποὺ δὲν μπορεῖ νὰ γίνεται μὲ τὴν ἀπαιτουμένην ἀκρίβειαν ἡ ἀπ' εὐθείας παρακολούθησις τῆς διαδρομῆς τοῦ φαινομένου. Ἕνεκα τούτου χρησιμοποιοῦνται συσκευαί, διὰ μέσου τῶν ὁποίων κατορθώνομεν νὰ ἔχωμεν ἀκριβῶς τὰς σχέσεις ποὺ ἀναζητοῦμεν πειραματικῶς. Τοιαύτη συσκευὴ εἶναι ἡ μηχανὴ Atwood (σχ. 14). Ἀποτελεῖται ἀπὸ σανίδα μὲ μετρικὰς ὑποδιαιρέσεις, ἡ ὁποία στηρίζεται ἔτσι ποὺ νὰ ἔχῃ ἀκριβῶς κατακόρυφον διεύθυνσιν. Εἰς τὸ ἀνώτερον ἄκρον της εἶναι στερεωμένη ἀμετάθετος τροχαλία ποὺ μπορεῖ νὰ στρέφεται εὔκολα περὶ ὁριζόντιον ἄξονα. Εἰς τὴν αὔλακα, ποὺ ἔχει ἡ τροχαλία ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ δίσκου της, διέρχεται ἐλαφρὸν εὔκαμπτον νῆμα, εἰς τὰ ἄκρα τοῦ ὁποίου εἶναι κρεμασμένα τὰ βαρέα κυλινδρικὰ σώματα p, p, ἴσα ἀκριβῶς τὸ ἓν μὲ τὸ ἄλλο. Ἔτσι τὸ σύστημα ἰσορροπεῖ εἰς ὁποιανδήποτε θέσιν τῶν κυλίνδρων p, p, διότι τὸ βάρος τοῦ νήματος, ποὺ μπορεῖ νὰ εἶναι περισσότερον πρὸς τὸ ἕνα μέρος παρὰ πρὸς τὸ ἄλλο, εἶναι ἀνεπαίσθητον συγκριτικὰ μὲ τὸ βάρος ἑκάστου κυλίνδρου. Τοποθετοῦμεν ἐπὶ τοῦ ἑνὸς τῶν δύο κυλίνδρων πρόσθετον βάρος q_1 ἢ q_2, ὁπότε ἀρχίζει ἡ κατάπτωσις αὐτοῦ, παρακολουθουμένη ἀπὸ κίνησιν τῶν μαζῶν M καὶ M τῶν κυλίνδρων. Ἐπειδὴ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ αἰτία τῆς κινήσεως εἶναι τὸ βάρος β τοῦ προστιθεμένου σώματος q_1 ἢ q_2, ἐνῶ ἡ κινουμένη μᾶζα εἶναι ὄχι μόνον ἡ μ



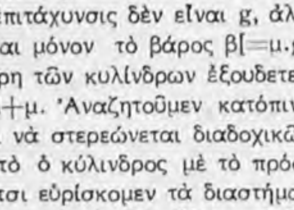
Σχ. 14

τοῦ προσθέτου σώματος, ἀλλὰ καὶ ἡ $M+M$ τῶν δύο κυλίνδρων, διὰ τοῦτο ἡ κίνησις, χωρὶς νὰ παύσῃ νὰ ἀκολουθῇ τοὺς νόμους τῆς ἐλευθέρας πτώσεως, γίνεται μὲ πολὺ βραδύτερον ρυθμόν, ὥστε νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ ἄνετος παρακολούθησις τοῦ φαινομένου.

Πρὸς προσδιορισμὸν τῶν διαστημάτων ποὺ διατρέχονται εἰς 1, 2, 3, . . μονάδας χρόνου, ὑποστηρίζομεν τὸν κύλινδρον μὲ τὸ πρόσθετον βάρος ἐπὶ τραπεζιδίου τ ποὺ εὑρίσκεται εἰς τὸ ἀνώτερον ἄκρον τῆς σανίδος, ὅπου σημειώνεται τὸ 0 τῆς μετρικῆς κλίμακος.

Εἰς μίαν ὡρισμένην χρονικὴν στιγμὴν προκαλοῦμεν μὲ μηχανισμὸν τὴν ἀνατροπὴν τοῦ τραπεζιδίου καὶ ἀφήνομεν ἔτσι ἐλεύθερον τὸν κύλινδρον μὲ τὸ πρόσθετον βάρος νὰ κινηθῇ πρὸς τὰ κάτω, παρασύροντας πρὸς τὰ ἄνω τὸν κύλινδρον ποὺ κρέμεται εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον τοῦ νήματος. Ἡ κίνησις πρὸς τὰ κάτω τοῦ κυλίνδρου μὲ τὸ πρόσθετον βάρος εἶναι κίνησις ἐλευθέρας πτώσεως, εἰς τὴν ὁποίαν ἡ ἐπιτάχυνσις δὲν εἶναι g, ἀλλὰ $\gamma[=g.\mu/(2M+\mu)]$, διότι τώρα ἡ κινοῦσα δύναμις εἶναι μόνον τὸ βάρος $\beta[=\mu.g$ (πρβλ. § 15)] τοῦ προσθέτου σώματος, (ἀφοῦ τὰ βάρη τῶν κυλίνδρων ἐξουδετερώνονται ἀμοιβαίως), ἐνῷ ἡ κινουμένη μᾶζα εἶναι $2M+\mu$. Ἀναζητοῦμεν κατόπιν τούτου τὰς θέσεις τῆς σανίδος, εἰς τὰς ὁποίας πρέπει νὰ στερεώνεται διαδοχικῶς ἄλλο τραπεζίδιον διὰ νὰ φθάνῃ καὶ προσκρούῃ εἰς αὐτὸ ὁ κύλινδρος μὲ τὸ πρόσθετον βάρος μετὰ 1, 2, 3. . . . χρονικὰς μονάδας. Ἔτσι εὑρίσκομεν τὰ διαστήματα ποὺ διανύονται εἰς 1, 2, 3. . . . χρονικὰς μονάδας κατὰ τὴν ἐλευθέραν αὐτῶν πτῶσιν. Αἱ πειραματικαὶ διαπιστώσεις ποὺ προκύπτουν τότε δείχνουν, ὅτι τὰ διανυόμενα κατὰ τὴν κίνησιν αὐτὴν διαστήματα εἶναι ἀνάλογα τῶν τετραγώνων τῶν χρόνων, εἰς τοὺς ὁποίους διανύονται, ἤτοι ἐπαληθεύουν τὸν νόμον ποὺ ἐκφράζει ἡ παραπάνω δοθεῖσα σχέσις: $s={}^1/_2 gt^2$.

§ 12. Κυκλικὴ κίνησις. *α) Ἐπιτάχυνσις γενικὰ μεταβαλλομένης κινήσεως.* Ἂν ἡ τροχιὰ τῆς κινήσεως εἶναι καμπυλόγραμμος, ἐκτὸς τῆς μεταβολῆς ποὺ μπορεῖ νὰ ὑφίσταται ἡ ***ἐπιτρόχιος*** ἢ ***διαστηματικὴ*** ταχύτης v τοῦ κινητοῦ, δηλαδὴ ἡ ταχύτης ποὺ ἔχει τὸ κινητὸν κατὰ τὴν διεύθυνσιν (ἐφαπτομένην) τῆς τροχιᾶς εἰς δοθὲν σημεῖον της, θὰ ἔχωμεν καὶ ***μεταβολὴν τῆς διευθύνσεως*** τῆς ταχύτητος.



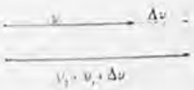
Σχ. 15

Ἔστω ὅτι εἶναι υ_1 καὶ υ_2 (σχ. 15) αἱ ταχύτητες εἰς τὰ σημεῖα A_1 καὶ A_2 τῆς τροχιᾶς, δηλαδὴ εἰς τὴν ἀρχὴν καὶ εἰς τὸ τέλος τοῦ διαστήματος A_1A_2, τὸ ὁποῖον διατρέχεται ὑπὸ τοῦ κινητοῦ εἰς χρόνον Δt. Ἡ τελικὴ ταχύτης υ_2 προκύπτει ἀπὸ τὴν ἀρχικὴν υ_1 μὲ ἀνυσματικὴν πρόσθεσιν τῆς διαφορᾶς $\Delta\upsilon$ τῶν ἀνυσμάτων υ_2, υ_1. Τοῦτο σημαίνει ὅτι εἰς τὸν χρόνον Δt ἡ ταχύτης μεταβάλλεται κατὰ $\upsilon_2-\upsilon_1=\Delta\upsilon$. Ὀνομάζομεν λοιπὸν ***ἐπιτάχυνσιν*** εἰς τὴν γενικὴν αὐτὴν περίπτωσιν τὸ πηλίκον $\gamma(=\Delta\upsilon/\Delta t)$ τῆς μεταβολῆς τῆς ταχύτητος $\Delta\upsilon$ διὰ τοῦ χρόνου Δt, εἰς τὸν ὁποῖον γίνεται αὕτη.

Ὅσον μικρότερος εἶναι ὁ χρόνος Δt ($\Delta t \to 0$), τόσον περισσότερον προσεγγίζομεν εἰς τὴν μεταβολὴν ποὺ ὑφίσταται πράγματι ἡ ταχύτης εἰς τὴν θεωρουμένην θέσιν τῆς τροχιᾶς, ὁσονδήποτε ἀνώμαλος καὶ ἂν εἶναι ἡ θεωρουμένη κίνησις. Ὥστε ἡ ἐπιτάχυνσις οἱασδήποτε κινήσεως θὰ εἶναι γενικῶς :

$\gamma = \Delta\upsilon/\Delta t$ (ὅταν $\Delta t \to 0$) ἢ $[\gamma = d\upsilon/dt = ds'/dt = d^2s/dt^2]$ (6)

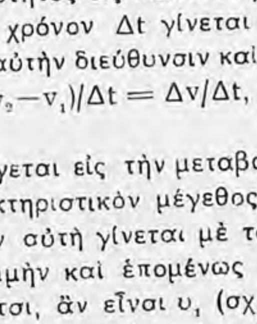
β) Ἐπιτρόχιος καὶ ἀκτινικὴ ἐπιτάχυνσις. Ἀντιστοίχως πρὸς τὸ εἶδος τῆς μεταβολῆς τῆς ταχύτητος διακρίνομεν ***ἐπιτρόχιον*** καὶ ***ἀκτινικὴν*** ἐπιτάχυνσιν. Ἡ ἐπιτρόχιος ἐπιτάχυνσις γ_τ ἀνάγεται εἰς τὴν μεταβολὴν τῆς ἀριθμητικῆς τιμῆς τῆς ταχύτητος, ἐνῶ ἡ διεύθυνσις καὶ φορὰ τῆς ταχύτητος παραμένει ἡ αὐτή. Ἂν εἶναι v_1 ἡ τιμὴ τῆς ταχύτητος εἰς κάποιαν χρονικὴν στιγμὴν καὶ μετὰ χρόνον Δt γίνεται αὕτη v_2 (σχ. 16) κατὰ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν καὶ φοράν, θὰ εἶναι : $\gamma_\tau = (v_2 - v_1)/\Delta t = \Delta v/\Delta t$, διὰ $\Delta t \to 0$. (6')



Σχ. 16

Ἐξ ἄλλου ἡ ἀκτινικὴ ἐπιτάχυνσις ἀνάγεται εἰς τὴν μεταβολὴν τῆς ***διευθύνσεως*** τῆς ταχύτητος· εἶναι χαρακτηριστικὸν μέγεθος κάθε καμπυλογράμμου κινήσεως, ἀκόμη καὶ ἂν αὐτὴ γίνεται μὲ ταχύτητα, ποὺ διατηρεῖ σταθερὰν ἀριθμητικὴν τιμὴν καὶ ἑπομένως ἔχει ἐπιτρόχιον ἐπιτάχυνσιν ἴσην μὲ μηδέν. Ἔτσι, ἂν εἶναι υ_1 (σχ. 17) τὸ ἄνυσμα τῆς ταχύτητος εἰς κάποιαν χρονικὴν στιγμὴν καὶ υ_2 ἐκεῖνο ποὺ παρέχει τὴν ταχύτητα τοῦ κινητοῦ μετὰ χρόνον Δt, θὰ εἶναι : $\gamma_\rho = (\upsilon_2 - \upsilon_1)/\Delta t = \Delta\upsilon/\Delta t$, διὰ $\Delta t \to 0$. (6'')

γ) Περίοδος καὶ συχνότης. Ὅταν τὸ κινητὸν διατρέχῃ τὴν περιφέρειαν κύκλου ἀκτῖνος ρ (σχ 17), ἔτσι ποὺ εἰς διαδοχικοὺς ἴσους χρόνους νὰ διανύῃ ἴσα μεταξύ των τόξα τοῦ κύκλου, ἡ ἐπιτρόχιος ἐπιτάχυνσις εἶναι μηδέν, ἀφοῦ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς ταχύτητος υ εἶναι σταθερὰ ($v_2 = v_1$). Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἔχομεν μόνον ἀκτινικὴν ἐπιτάχυνσιν γ_ρ, τῆς ὁποίας ἡ διεύθυνσις εἶναι κάθετος ἑκάστοτε πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς ταχύτητος υ, ἤτοι ἔχει τὴν διεύθυνσιν τῆς ἀκτῖνος τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς, ὅθεν καὶ ὁ χαρακτηρισμός της ὡς ἀκτινικῆς.


Σχ. 17

Εἰς κάθε περιστροφικὴν κίνησιν ὀνομάζομεν περίοδον Τ τὸν χρόνον ποὺ χρειάζεται τὸ κινητὸν διὰ νὰ διατρέξῃ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου μίαν φοράν. Ἔτσι ἡ σταθερὰ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς ταχύτητος, ἤτοι ἡ σταθερὰ ἐπιτρόχιος ἢ γραμμικὴ ταχύτης v θὰ εἶναι : $v = 2\pi\rho/T$ (7)

Ἂν ἀντὶ τῆς περιόδου Τ θέσωμεν τὸν ἀριθμὸν ν τῶν εἰς τὴν μονάδα χρόνου (1 sec) διατρεχομένων ὑπὸ τοῦ κινητοῦ ἀλλεπαλλήλων περιφερειῶν τοῦ κύκλου, θὰ εἶναι : $\nu = 1/T$. Τὸν ἀριθμὸν ν τὸν λέμε *συχνότητα* τῆς κυκλικῆς κινήσεως. Μὲ αὐτήν, ἡ σταθερὰ ἐπιτρόχιος ἢ γραμμικὴ ταχύτης θὰ εἶναι : $v=2\pi\rho\nu$ (7').

δ) Γωνιακὴ ταχύτης. Εἰς κάθε καμπυλόγραμμον τροχιὰν ὀνομάζομεν ***ἐπιβατικὴν ἀκτῖνα*** τὴν εὐθεῖαν, ποὺ ἑνώνει τυχοῦσαν θέσιν τοῦ κινητοῦ ἐπὶ τῆς τροχιᾶς μὲ τὸ κέντρον καμπυλότητος αὐτῆς. Εἰς τὴν κυκλικὴν κίνησιν ἡ ἐπιβατικὴ ἀκτὶς εἶναι ἀκτὶς τοῦ κύκλου. Ἡ ἐπιβατικὴ ἀκτὶς μεταβάλλει συνεχῶς τὴν διεύθυνσίν της κατὰ τὴν κίνησιν τοῦ κινητοῦ ἐπὶ καμπυλογράμμου τροχιᾶς. Συνεπῶς διαγράφεται ὑπὸ τῆς ἐπιβατικῆς ἀκτῖνος γωνία, τῆς ὁποίας τὸ ἄνοιγμα αὐξάνεται μετὰ τοῦ χρόνου. Ὀνομάζομεν ***γωνιακὴν*** ταχύτητα ω τὴν εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου (1 sec) (μὲ σταθερὰν ἐπιτρόχιον ταχύτητα τοῦ κινητοῦ) διαγραφομένην ὑπὸ τῆς ἐπιβατικῆς ἀκτῖνος γωνίαν Δφ. Εἶναι λοιπὸν : $\omega=\Delta\varphi/\Delta t$, ὅταν $\Delta t\to 0$ (8)

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον προκύπτει ὅτι μονὰς μετρήσεως τῆς γωνιακῆς ταχύτητος εἶναι ἡ : 1 rd/s (=ἀκτίνιον κατὰ δευτερόλεπτον) ἢ 1°/sec (μοῖρα κατὰ δευτερόλεπτον). Μὲ ἄλλα λόγια ἡ γωνιακὴ ταχύτης εἶναι μέγεθος μὲ διαστάσεις (0, 0, −1).

Ἂν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν, ὅτι εἰς χρόνον ἴσον μὲ τὴν περίοδον T διαγράφεται εἰς τὴν κυκλικὴν κίνησιν γωνία ἴση μὲ 2π, θὰ εἶναι :

$$\omega = 2\pi/T \qquad (9)$$

Τὸ ὅτι ἐξ ἄλλου ἡ συχνότης ν παρέχει τὰς φορὰς ποὺ διαγράφεται ἡ γωνία 2π εἰς 1 sec, ὁδηγεῖ εἰς τὸ ἐξαγόμενον : $\omega=2\pi\nu$ (9')

Ἡ σχέσις αὐτὴ (9') δικαιολογεῖ τὸ ὅτι τὴν γωνιακὴν ταχύτητα ω τὴν λέμε καὶ ***κυκλοσυχνότητα***.

Ἁπλῆ σύγκρισις τῆς σχέσεως (9) ἢ (9') μὲ τὴν (7) ἢ (7') παρέχει τὴν : $v=\omega\rho$ καὶ $\omega=v/\rho$ (10)

ε) Κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις. Εἰς τὴν κυκλικὴν κίνησιν αἱ ταχύτητες υ_1 καὶ υ_2 (σχ. 17), ποὺ ἔχει τὸ κινητὸν εἰς τὴν ἀρχὴν καὶ εἰς τὸ τέλος ἑνὸς ἐλαχίστου χρόνου Δt (→0), διαφέρουν μόνον κατὰ τὰς διευθύνσεις των. Αὗται σχηματίζουν γωνίαν Δφ, πρὸς τὴν ὁποίαν ἡ διαφορὰ $\upsilon_2-\upsilon_1$, ἤτοι τὸ ἄνυσμα Δυ συνδέεται μὲ τὴν σχέσιν : $\Delta v = v_1\Delta\varphi = v_2\Delta\varphi = v\Delta\varphi$. Κατὰ συνέπειαν ἡ ἀκτινικὴ ἐπιτάχυνσις γ_ρ εἰς τὴν κίνησιν αὐτὴν εἶναι :

$$\gamma_\rho = \Delta v/\Delta t = v\Delta\varphi/\Delta t = v.\omega = v^2/\rho = \omega^2.\rho \qquad (11)$$

Ὥστε εἰς τὴν κυκλικὴν κίνησιν ποὺ ἔχομεν μόνον ἀκτινικὴν ἐπιτάχυνσιν, εὑρίσκομεν δι' αὐτὴν τὴν τιμὴν υ^2/ρ· τὴν ἐπιτάχυνσιν αὐτὴν τὴν λέμε ***κεντρομόλον***. Ἂν ἡ κίνησις εἶναι τυχοῦσα καμπυλόγραμμος, θὰ ἔχῃ γενικῶς καὶ ἐπιτρόχιον καὶ ἀκτινικὴν ἐπιτάχυνσιν.

Προβλήματα

1. Ἱππεὺς προχωρεῖ κατὰ τὰ πρῶτα 6 min μὲ ταχύτητα 0,9 m/sec, ἔπειτα ἐπὶ 7 min μὲ 3,4 m/sec, ἀκολούθως ἐπὶ 5 min μὲ 1,2 m/s καὶ τέλος ἐπὶ 3 min

μὲ 4,2 m/sec. Πόσον εἶναι τὸ διάστημα ποὺ ἔχει διατρέξει καὶ ποία εἶναι ἡ μέση ταχύτης; ('Απ. $s=2868$ m καὶ $v_m=2,276$ m/s)

2. Εἰς τὸν ὑαλοπίνακα ἐξωτερικοῦ παραθύρου σιδηροδρομικοῦ ὀχήματος ποὺ τρέχει μὲ ταχύτητα 13,5 m/s, παρατηρεῖται ὅτι σταγὼν βροχῆς ποὺ, λόγῳ νηνεμίας πίπτει κατακορύφως, διατρέχει γραμμήν, ἡ ὁποία χωρίζει τριγωνικὸν τμῆμα τοῦ ὑαλοπίνακος, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ὁριζοντία κάθετος εἶναι 0,6 m καὶ ἡ κατακόρυφος 0,5 m. Μὲ ποίαν ταχύτητα v_β (θεωρουμένην σταθερὰν) καταπίπτει ἡ βροχὴ καὶ πόση εἶναι ἡ συνισταμένη ταχύτης v τῆς σταγόνος ἐπὶ τοῦ ὑαλοπίνακος; ('Απ. $0,6:0,5=13,5:v_\beta$ ὅθεν $v_\beta=11,25$ m/s καὶ $v=\sqrt{13,5^2+11,25^2}$)

3. Πλοῖον ἐπὶ ἠρεμοῦντος ὕδατος σύρεται κατὰ διεύθυνσιν ποὺ σχηματίζει γωνίαν 60° μὲ τὸν κατὰ μῆκος ἄξονα τοῦ πλοίου καὶ κινεῖται πρὸς τὴν διεύθυνσιν αὐτὴν μὲ ταχύτητα 2 m/s. Μὲ ποίαν ταχύτητα προχωρεῖ τὸ πλοῖον κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ κατὰ μῆκος ἄξονός του; ('Απ. 2 συν60° = 1 m/s)

4. 'Από δοχεῖον ποὺ κινεῖται μὲ ταχύτητα 1,9 m/sec ἐκρέει ὕδωρ μὲ ταχύτητα 2,5 m/s κατὰ διεύθυνσιν, ποὺ σχηματίζει γωνίαν 130° μὲ τὴν διεύθυνσιν τῆς κινήσεως τοῦ δοχείου. Πόση εἶναι ἡ συνισταμένη ταχύτης κατ' ἀριθμητικὴν τιμὴν καὶ διεύθυνσιν; ('Απ. $v=1,937$ m/s, $\varphi=48^{\circ}42'$)

5. "Αν κατά τινα τρόπον προσδιορισθῇ ὅτι μετὰ 3 sec τὸ ἐλευθέρως πῖπτον σῶμα ἀποκτᾷ ταχύτητα 29,43 m/s, πόση εἶναι ἡ ἐκ τούτου ὑπολογιζομένη ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος; ('Απ. 9,81 m/sec)

6. Πόσον χρόνον διαρκεῖ ἡ πτῶσις σώματος ἀπὸ ὕψους 510 m καὶ μὲ ποίαν ταχύτητα προσκρούει τοῦτο εἰς τὸ ἔδαφος; ('Απ. $t=10,2$ sec, $v=100$ m/sec)

7. Πόσον διάστημα διανύει σῶμα, ποὺ πίπτει ἐλευθέρως, κατὰ τὸ 12ον sec ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῆς πτώσεώς του; ('Απ. 112,815 m)

8. Εἰς τὴν μηχανὴν Adwood πρὸς καθορισμὸν τῆς ταχύτητος, ποὺ ἀποκτᾷ τὸ σύστημα μετὰ πάροδον t sec ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως τῆς κινήσεως, ἐπιφορτίζομεν τὸν κύλινδρον p (βλ. σχ. 14) μὲ τὸ μεγαλυτέρας ἐκτάσεως πρόσθετον βάρος q_2 καὶ στερεώνομεν ἐπὶ τῆς κατακορύφου σανίδος τὸν δακτύλιον n εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς ἀφετηρίας ἴσην μὲ τὸ ὕψος ποὺ διανύει τὸ σύστημα εἰς τὸν χρόνον t. 'Επειδὴ ἀπὸ τῆς στιγμῆς αὐτῆς θὰ κρατηθῇ εἰς τὸν δακτύλιον τὸ πρόσθετον βάρος q_2, θὰ συνεχισθῇ ἡ κίνησις τοῦ ὑπολοίπου συστήματος, διότι ὁ κύλινδρος διέρχεται διὰ μέσου τοῦ δακτυλίου. 'Αλλὰ τώρα πλέον ἡ περαιτέρω κίνησις θὰ εἶναι ἰσοταχὴς (πρβλ. § 14), διότι τὰ βάρη τῶν ἑκατέρωθεν κυλίνδρων ἐξουδετερώνονται ἀμοιβαίως· ἑπομένως μποροῦμε νὰ προσδιορίσωμε τὴν κτηθεῖσαν ταχύτητα, μετρῶντες τὴν περαιτέρω ἀπόστασιν, εἰς τὴν ὁποίαν φθάνει ὁ κύλινδρος μετὰ 1 sec. "Ετσι, ἂν εὑρεθῇ ὅτι τὸ διάστημα ποὺ διατρέχει ἀπὸ τὴν ἀφετηρίαν ὁ κύλινδρος μὲ τὸ πρόσθετον βάρος, εἶναι 75 cm καὶ πρὸς τοῦτο ἐχρειάσθη χρόνος 5 sec, πόση εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις γ τῆς κινήσεως καὶ μὲ ποίαν ταχύτητα θὰ κινηθῇ περαιτέρω ὁ κύλινδρος, ἀπαλλασσόμενος τοῦ προσθέτου βάρους ποὺ κρατεῖται εἰς τὸν δακτύλιον n στερεωθέντα εἰς τὴν ἀπόστασιν τῶν 75 cm ἀπὸ τῆς ἀφετηρίας; ('Απ. $\gamma=6$ cm/sec καὶ $v=30$ cm/sec)

9. 'Ατμομηχανὴ ἔχει εἰς μίαν ὡρισμένην στιγμὴν ταχύτητα 10 m/s. 'Από τῆς στιγμῆς αὐτῆς φρενάρεται, κατὰ τρόπον ὥστε νὰ ἐλαττώνῃ τὴν ταχύτητά της κατὰ 0,4 m/s εἰς ἕκαστον δευτερόλεπτον. Πόση θὰ εἶναι ἡ ταχύτης της μετὰ 20 sec, μετὰ πόσον χρόνον θὰ σταματήσῃ καὶ πόσον διάστημα θὰ διατρέξῃ μέχρι τῆς στάσεώς της; ('Απ. 2 m/s, 25 sec, 125 m)

10. 'Ατμομηχανὴ κινεῖται ἐπί τινα χρόνον ἰσοταχῶς μὲ ταχύτητα 2 m/s, ἔπειτα μὲ ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην κίνησιν, κατὰ τὴν ὁποίαν διατρέχει 150 m εἰς 20 sec. Πόση εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς κινήσεώς της καὶ ποία ἡ εἰς τὸ τέλος τοῦ

χρόνου τούτου ταχύτης ; ('Απ. 0,55 m|sec, 13 m|sec)

11. Σῶμα, πῖπτον ἐλευθέρως, ἔχει εἰς ὡρισμένον σημεῖον τῆς διαδρομῆς του ταχύτητα 40 m|s καὶ εἰς ἄλλο χαμηλότερον 150 m|s Εἰς πόσον χρόνον διανύει τὸ μεταξὺ τῶν δύο τούτων σημείων διάστημα καὶ πόσον εἶναι τοῦτο ;

['Απ. $(150-40)/9{,}81$ sec, $(150^2-40^2)/2 \cdot 9{,}81$ m]

12. Πόσον εἶναι τὸ βάθος φρέατος h, ἂν ὁ κρότος ποὺ θὰ κάνη λίθος, τὸν ὁποῖον ἀφήνομεν νὰ πέση εἰς τὸ φρέαρ, ἀκουσθῇ μετὰ t sec ἀπὸ τῆς στιγμῆς ποὺ ἀφήσαμεν τὸν λίθον ; (Θεωρεῖται γνωστὴ ἡ ταχύτης c τοῦ ἤχου).

['Απ. Ὁ χρόνος t εἶναι ἄθροισμα τοῦ χρόνου, $\sqrt{2h/g}$, καταπτώσεως τοῦ λίθου μέχρι τοῦ πυθμένος καὶ τοῦ χρόνου, h/c, ποὺ χρειάζεται ὁ ἦχος διὰ νὰ ἔλθη ἐπάνω ἐκ τοῦ πυθμένος, ὅπου παρήχθη· ὅθεν: $h=c[c+gt\pm\sqrt{c(c+2gt)}]/g$

13. Εἰς καταβόθραν, ὅπου ἀφέθη νὰ καταπέση λίθος, ἐχρειάσθη νὰ περάσουν 25 sec, μέχρις ὅτου ἀκουσθῇ ὁ κρότος τῆς προσκρούσεως τοῦ λίθου εἰς τὸν πυθμένα τῆς καταβόθρας. Ἂν δὲν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος καὶ δοθῇ ὅτι ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἶναι 333 m|s, πόσον εἶναι τὸ βάθος τῆς καταβόθρας ;

('Απ. 1865 m)

14. Βλῆμα πῖπτον καθέτως ἐπὶ πλευρικοῦ τοιχώματος πλοίου, κινουμένου μὲ ταχύτητα 4 m|s, διατρυπᾷ τὸ τοίχωμα τοῦτο καί, ἐξερχόμενον ἀπ' αὐτὸ μὲ ταχύτητα 10 m/s, προσκρούει ἐπὶ τοῦ ἀπέναντι πλευρικοῦ τοιχώματος τοῦ πλοίου, ἀπέχοντος 15 m ἀπὸ τὸ διατρυπηθέν. Ποίαν γωνίαν σχηματίζει ἡ εὐθεῖα ποὺ ἑνώνει τὰ σημεῖα τῶν πλευρικῶν τοιχωμάτων ὅπου προσέκρουσε τὸ βλῆμα, μὲ τὸν ἐγκάρσιον ἄξονα τοῦ πλοίου ; Εἰς πόσον χρόνον διατρέχει ἡ σφαῖρα τὸ πλάτος τοῦ πλοίου ; ('Απ. 21° 48,9', 1,5 sec)

15. Εἰς τὸ μέσον συρμοῦ μήκους 200 m, κινουμένου μὲ ταχύτητα 20 m|s παράγεται ἕνας κρότος. Μετὰ πόσον χρόνον ἀκούεται ὁ κρότος εἰς τὴν ἀρχὴν καὶ μετὰ πόσον εἰς τὸ τέλος τοῦ συρμοῦ, ἂν ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἶναι 330 m|s;

('Απ. 10/31 sec, 2/7 sec)

II. Βάρος καὶ μᾶζα

§ 13. **Δυνάμεις.** Διὰ νὰ πετάξωμεν μιὰ πέτρα, νὰ θέσωμεν εἰς κίνησιν χειράμαξαν ποὺ ἠρεμεῖ ἢ νὰ σταματήσωμεν ἄλλην ποὺ κυλίεται ἐπὶ κατωφερείας καὶ γενικῶς διὰ νὰ μεταβάλωμεν τὴν κινητικὴν κατάστασιν (δηλαδὴ τὴν ταχύτητα τῆς κινήσεως) σώματος, χρειάζεται νὰ καταβάλωμεν προσπάθειαν· τὴν προσπάθειαν αὐτὴν τὴν λέμε ***δύναμιν***. Δύναμιν ἐπίσης χρειάζεται νὰ καταβάλωμεν διὰ νὰ συμπιέσωμεν ἕνα τόπι, διὰ νὰ τεντώσωμεν ἐλατήριον καὶ γενικὰ διὰ νὰ προκαλέσωμεν ὁποιανδήποτε παραμόρφωσιν σώματος.

Ὥστε αἱ δυνάμεις εἶναι τὰ αἴτια ποὺ προκαλοῦν μεταβολάς, εἴτε εἰς τὴν ταχύτητα τῆς κινήσεως, εἴτε εἰς τὴν μορφὴν ἢ σύστασιν τοῦ σώματος. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν συνάγονται ἀπὸ τὰ ***κινητικά*** των ἀποτελέσματα, εἰς τὴν δευτέραν ἀπὸ τὰ ***στατικά*** των. Μὲ ἄλλα λόγια, αἱ δυνάμεις γίνονται ἀντιληπταὶ καὶ μποροῦν νὰ συγκριθοῦν (μετρηθοῦν) μόνον ἀπὸ τὰ ἀποτελέσματά των.

Τὰ εἴδη τῶν δυνάμεων εἶναι ποικίλα· ἔχομεν μυϊκὰς δυνάμεις, ἐλαστικάς, βάρους, ἠλεκτρικάς, μαγνητικάς, χημικὰς ποὺ συνδέουν τὰ ἄτομα πρὸς ἀποτέλεσιν μορίων, συνοχῆς καὶ συναφείας ποὺ συνδέουν τὰ μόρια τῶν σωμάτων καὶ δυνάμεις τριβῆς.

Ἀντιστοίχως πρὸς τὸ εἶδος τοῦ ἀποτελέσματος ποὺ χρησιμεύει πρὸς μέτρησιν δυνάμεως, ἔχομεν ***κινητικὸν*** ἢ ***στατικὸν*** μέτρον δυνάμεως.

§ 14. **Ἀρχὴ τῆς ἀδρανείας.** Ὁ ἐπιβάτης ὀχήματος πίπτει πρὸς τὰ ὀπίσω, ὅταν τὸ ὄχημα αὐξάνῃ ἀποτόμως τὴν ταχύτητα τῆς κινήσεώς του, πρὸς τὰ ἐμπρός, ὅταν τὴν ἐλαττώνῃ, πρὸς τὰ δεξιά, ὅταν στρέφεται ἀριστερὰ καὶ πρὸς τὰ ἀριστερά, ὅταν στρέφεται δεξιά. Τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὸ ὅτι κάθε σῶμα ἔχει τὴν τάσιν νὰ διατηρήσῃ ἀμετάβλητον τὴν ταχύτητά του, τόσον εἰς τὴν ἀριθμητικήν της τιμήν, ὅσον καὶ εἰς τὴν διεύθυνσίν της. Τὴν τάσιν διατηρήσεως ἀμεταβλήτου κινητικῆς καταστάσεως τὴν λέμε ***ἀδράνειαν*** τοῦ σώματος καὶ ἐκφράζομεν τὴν ὕπαρξιν αὐτῆς μὲ πρότασιν, τὴν ἀλήθειαν τῆς ὁποίας δεχόμεθα a priori πρὸς ἐξήγησιν σχετικῶν φαινομένων. Τοιαύτας προτάσεις τὰς ὀνομάζομεν ***ἀρχὰς*** ἢ ***ἀξιώματα***. Εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν ἔχομεν τὴν ***ἀρχὴν ἀδρανείας*** ποὺ διέγνωσε πρῶτος ὁ Γαλιλαῖος καὶ διετύπωσε τὸ 1687 ὁ Νεύτων (1643 - 1727) ὡς ***πρῶτον ἀξίωμα τῆς δυναμικῆς***. Σύμφωνα μὲ αὐτήν: ***Κάθε σῶμα ποὺ εἶναι ἀπηλλαγμένον τῆς ἐπιδράσεως οἱασδήποτε δυνάμεως διατηρεῖ ἀμετάβλητον τὴν κατάστασιν τῆς ἠρεμίας ἢ τῆς εὐθυγράμμου ἰσοταχοῦς κινήσεως.*** Συνεπῶς ἡ οἱαδήποτε μεταβολὴ τῆς κινητικῆς καταστάσεως σώματος γίνεται ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν ἀντιστοίχου δυνάμεως.

Ἡ πειραματικὴ ἐπαλήθευσις τῆς Ἀρχῆς τῆς ἀδρανείας δὲν εἶναι ἀπ' εὐθείας δυνατή, διότι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχωμεν σῶμα ἀπηλλαγμένον τελείως ἀπὸ κάθε ἐξωτερικὴν ἐπίδρασιν. Ἔτσι π.χ. ἡ κίνησις σφαίρας ποὺ κυλίεται ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου ἀνακόπτεται ἀπὸ τριβήν. Ἀλλὰ ὅσον ὁμαλωτέρα εἶναι ἡ ἐπιφάνεια καὶ ἑπομένως ὅσον μικροτέρα εἶναι ἡ τριβή, τόσον μικροτέρα εἶναι καὶ ἡ ἐλάττωσις τῆς ταχύτητος. Καὶ μολονότι εἶναι ἀδύνατον νὰ πραγματοποιήσωμεν τὴν ἰδανικὴν περίπτωσιν τελείας ἐξαλείψεως τῆς τριβῆς, δεχόμεθα ἐν τούτοις τὴν ἰσχὺν τῆς ἀρχῆς τῆς ἀδρανείας, διότι ὅλα τὰ συμπεράσματα, ποὺ προκύπτουν ἀπὸ αὐτήν, συμφωνοῦν πλήρως μὲ τὰς διαπιστώσεις τῆς ἐμπειρίας.

§ 15. **Κινητικὸν μέτρον δυνάμεως.** Διὰ τὴν μεταβολὴν τῆς ταχύτητος χρειάζεται κατὰ τὰ ἀνωτέρω νὰ ἐνεργήσῃ δύναμις. Ὅσον μεγαλυτέρα εἶναι ἡ δύναμις, τόσον μεγαλυτέρα θὰ εἶναι καὶ ἡ ἐπιφερομένη μεταβολὴ τῆς ταχύτητος, δηλαδὴ ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς κινήσεως. Ἀκριβέστερον: ***Ἡ δύναμις εἶναι ἀνάλογος τῆς ἐπιταχύνσεως ποὺ προσδίδει εἰς τὴν κίνησιν ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ σώματος.***

Ἂν ἔχωμεν δύο ὅμοια κατὰ τὴν ὑλικὴν σύστασιν σώματα καὶ ἐνεργήσῃ διαδοχικῶς εἰς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἡ αὐτὴ δύναμις, εἶναι εὐνόητον ὅτι θὰ προσδώση τόσον εἰς τὸ ἓν ὅσον καὶ εἰς τὸ ἄλλο τὴν ἰδίαν ἐπιτάχυνσιν. Ἂν κατόπιν συγκολλήσωμεν τὰ δύο αὐτὰ ἴσα σώματα καὶ εἰς τὸ ἔτσι ἀποτελεσθὲν σῶμα διπλασίας ὕλης ἐνεργήση πάλιν ἡ ἰδία δύναμις, ἡ ἐπιτάχυνσις ποὺ θὰ προσδώση τώρα θὰ εἶναι τὸ ἥμισυ ἐκείνης ποὺ προσδίδει εἰς καθὲν ἐξ αὐτῶν χωριστά. Διὰ νὰ προσδοθῆ εἰς τὸ διπλοῦν σῶμα ἡ αὐτὴ ἐπιτάχυνσις ποὺ προσδίδεται εἰς τὸ ἁπλοῦν, πρέπει ἡ δύναμις νὰ εἶναι διπλασία. Μὲ ἄλλα λόγια, ἡ ἀντίστασις ποὺ προβάλλει τὸ σῶμα εἰς τὴν μεταβολὴν τῆς ταχύτητός του, ἤτοι ἡ ἀδράνεια τοῦ σώματος, εἶναι ἀνάλογος τοῦ ποσοῦ τῆς ὕλης, ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἀποτελεῖται. Ὅθεν ἡ ἀδράνεια σώματος μετρᾶται ἀπὸ τὸ ποσὸν τῆς ὕλης του, ποὺ τὸ λέμε ***ἀδρανῆ μᾶζαν τοῦ σώματος***. Ἔτσι ***ἡ δύναμις ποὺ χρειάζεται διὰ νὰ προσδώση εἰς σῶμα ὡρισμένην ἐπιτάχυνσιν, εἶναι ἀνάλογος τῆς ἀδρανοῦς μάζης τοῦ σώματος.***

Κατὰ ταῦτα μεταξὺ δυνάμεως K, ἀδρανοῦς μάζης m καὶ ἐπιταχύνσεως γ, ὑφίσταται ἡ θεμελιώδης σχέσις: $K = m.\gamma$ (12)

Σύμφωνα μὲ τὴν σχέσιν αὐτὴν ἡ δύναμις ἔχει ἐξίσωσιν διαστάσεων: $[K] = [L.M.T^{-2}]$ καὶ διαστάσεις: $(1, 1, -2)$.

Μονὰς δυνάμεως εἰς τὸ σύστημα cgs θὰ εἶναι: ***ἡ δύναμις ἐκείνη πού, ἐνεργοῦσα κινητικῶς ἐπὶ μάζης 1 γραμμαρίου, προσδίδει εἰς αὐτὴν ἐπιτάχυνσιν*** $1\,\mathrm{cm/s^2}$ ***(=1 ἑκατοστομέτρου κατὰ δευτερόλεπτον εἰς τὸ δευτερόλεπτον)*** τὴν μονάδα αὐτὴν τὴν λέμε ***δύνην*** καὶ τὴν σημειώνομεν μὲ τὸ διεθνὲς σύμβολον dyn.

§ 16. **Βαρεῖα καὶ ἀδρανὴς μᾶζα.** Κάθε σῶμα ἕλκεται προς τὸ ἔδαφος προφανῶς ἀπὸ δύναμιν ποὺ ἐξασκεῖ ἐπ' αὐτοῦ ἡ Γῆ. Ἡ διεύθυνσις τῆς ἑλκτικῆς αὐτῆς δυνάμεως δίδεται ἀπὸ τὸ ***νῆμα τῆς στάθμης***, δηλαδὴ τυχὸν εὔκαμπτον νῆμα, εἰς τὸ ἄκρον τοῦ ὁποίου εἶναι κρεμασμένον βαρὺ σῶμα. Τὴν διεύθυνσιν αὐτὴν τὴν λέμε ***κατακόρυφον***.

Ἡ ἕλξις ποὺ ἀσκεῖ ἡ Γῆ ἐπὶ τῶν ἐπ' αὐτῆς σωμάτων λέγεται ***βαρύτης*** καὶ ἡ ἐκδήλωσίς της ἐπὶ τυχόντος σώματος παρέχει τὸ ***βάρος*** τοῦ σώματος (πρβλ. § 39).

Ἀποτέλεσμα τῆς βαρύτητος εἶναι ἡ ἐλευθέρα πτῶσις, τὴν ὁποίαν ἐξητάσαμεν εἰς τὴν § 11 ὡς περίπτωσιν τῆς ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένης κινήσεως. Ἐκτὸς ὅμως ἀπὸ τὴν ἐλευθέραν πτῶσιν ἡ βαρύτης ἐκδηλώνεται καὶ μὲ τὴν πίεσιν ποὺ ἀσκεῖ κάθε σῶμα ἐπὶ τοῦ ὑποστηρίγματος, ἐπάνω εἰς τὸ ὁποῖον ἠρεμεῖ ἢ μὲ τὸ τέντωμα ποὺ ἐπιφέρει τὸ σῶμα εἰς νῆμα, ἀπὸ τὸ ὁποῖον εἶναι κρεμασμένον. Διὰ νὰ κρατήσωμεν εἰς τὴν παλάμην μας σφαιρίδιον ἐκ τυχούσης ὕλης, χρειάζεται νὰ καταβάλωμεν ἀντίστοιχον μυϊκὴν δύναμιν πρὸς ἐξουδετέρωσιν τοῦ βάρους τοῦ σφαιριδίου. Ἂν ἀντὶ ἑνὸς κρατήσωμεν εἰς τὴν παλάμην δύο ἀκριβῶς ὅμοια σφαιρίδια, χρειάζεται νὰ καταβάλωμεν διπλασίαν μυϊκὴν δύναμιν. Τοῦτο σημαίνει, ὅτι τὸ βάρος τῶν δύο σφαιριδίων εἶναι διπλάσιον τοῦ βάρους τοῦ ἑνός, ἤτοι τὸ βάρος εἶναι ἀνάλογον τοῦ ποσοῦ τῆς ὕλης τοῦ σώματος.

Ἂν ἀποσύρωμεν τὸ ὑποστήριγμα τῆς σφαίρας, τὸ βάρος της B τὴν θέτει εἰς ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην κίνησιν μὲ σταθερὰν ἐπιτάχυνσιν g· συνεπῶς τὸ βάρος (*κινοῦσα δύναμις*) εἶναι καὶ τώρα ἀνάλογον τῆς ὕλης τοῦ σώματος μὲ συντελεστὴν ἀναλογίας g, σύμφωνα μὲ τὴν θεμελιώδη σχέσιν (12), ἡ ὁποία εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ βάρους γίνεται: $B = mg$.

Ἐκ τούτων προκύπτει ὅτι ἡ ὕλη, ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἀποτελεῖται τυχὸν σῶμα, ἔχει δύο βασικὰς ἰδιότητας. Εἶναι δηλαδὴ 1) ἀδρανὴς καὶ 2) βαρεῖα. Μὲ ἄλλα λόγια κάθε σῶμα ἔχει ***ἀδρανῆ μᾶζαν*** καὶ ***βαρεῖαν μᾶζαν*** καί, τόσον ἡ ἀδρανὴς ὅσον καὶ ἡ βαρεῖα μᾶζα σώματος, εἶναι ἀνάλογος τοῦ ποσοῦ τῆς ὕλης τοῦ σώματος. Ἡ διαπίστωσις ὅτι εἰς ἕκαστον τόπον τῆς Γῆς ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος g εἶναι ἡ αὐτὴ δι' ὅλα τὰ σώματα καθίσταται εὐνόητος, ἂν ἡ βαρεῖα μᾶζα σώματος εἶναι ἀνάλογος τῆς ἀδρανοῦς μάζης του, ἀφοῦ ὁ παράγων g εἰς τὴν θεμελιώδη σχέσιν $B = mg$ εἶναι ὁ αὐτὸς δι' ὅλα τὰ σώματα. Ἕνεκα τούτου λαμβάνομεν τὴν ἀδρανῆ μᾶζαν σώματος ὡς ἴσην μὲ τὴν βαρεῖαν μᾶζαν αὐτοῦ. Ἔτσι προσδιορίζοντες μὲ ζυγὸν τὴν βαρεῖαν μᾶζαν σώματος, ἔχομεν ταὐτοχρόνως καὶ τὸ μέτρον τῆς ἀδρανοῦς μάζης του. Ἡ ἑνιαία τιμὴ ποὺ ἔχουν εἰς κάθε σῶμα ἡ ἀδρανὴς καὶ ἡ βαρεῖα μᾶζα του, ἐπιτρέπει νὰ ὁμιλοῦμεν ἀδιαφόρως διὰ τὴν ***μᾶζαν*** τοῦ σώματος, ἀνεξαρτήτως τῆς ἀπόψεως, ἀπὸ τὴν ὁποίαν τὴν ἐξετάζομεν.

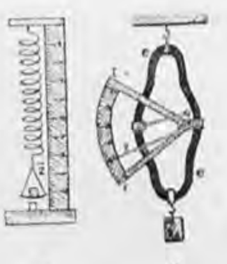
Τὸ ὅτι ἡ ἀδρανὴς μᾶζα ἑνὸς σώματος καὶ ἡ βαρεῖα μᾶζα αὐτοῦ ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀριθμητικὴν τιμήν, δὲν εἶναι αὐτονόητον· θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ εὐσταθήσῃ καὶ ἡ σκέψις, ὅτι ἡ Γῆ ἕλκει μὲ διάφορον ἔντασιν σώματα ποὺ ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀδρανῆ μᾶζαν, ἀλλὰ ἀποτελοῦνται ἀπὸ διάφορα εἴδη ὕλης, ὅπως γίνεται μὲ ἕνα μαγνήτην, ὁ ὁποῖος ἐκδηλώνει τὴν ἑλκτικήν του δύναμιν κυρίως ἐπὶ σιδηρούχων ὑλικῶν. Ἐξ ἄλλου ἡ λογικὴ θεώρησις δὲν ἀποκλείει τὴν δυνατότητα νὰ μὴ ἔπιπτον μὲ τὴν αὐτὴν ταχύτητα δύο σώματα ποὺ ἔχουν τὸ αὐτὸ βάρος, ἀλλὰ ἀποτελοῦνται ἀπὸ διάφορα εἴδη ὕλης (τὸ ἕνα ἀπὸ ξύλον καὶ τὸ ἄλλο ἀπὸ σίδηρον), ὁπότε θὰ ἐλέγαμεν ὅτι τὰ σώματα αὐτὰ ἔχουν διαφόρους ἀδρανεῖς μάζας, μολονότι ἔχουν ἴσας βαρείας μάζας. Ἔτσι ἡ ἐκδοχὴ ἰσότητος μεταξὺ ἀδρανοῦς καὶ βαρείας μάζης ἑνὸς σώματας βασίζεται περισσότερον εἰς τὰς σχετικὰς πειραματικὰς διαπιστώσεις.

§ 17. Στατικὸν μέτρον δυνάμεως. Δυναμόμετρα. Τὸ βάρος μπορεῖ νὰ χρησιμεύσῃ διὰ τὴν μέτρησιν δυνάμεων στατικῶς. Πρὸς τοῦτο ὁρίζεται ὡς μονὰς μετρήσεως δυνάμεως τὸ ***χιλιόγραμμον βάρους*** (kg^*), τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ δύναμις, μὲ τὴν ὁποίαν ἕλκεται (παρὰ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης εἰς τόπους γεωγραφικοῦ πλάτους 45°) τὸ πρότυπον χιλιόγραμμον μάζης. Τὸ χιλιοστὸν τῆς μονάδος αὐτῆς καλεῖται ***γραμμάριον βάρους*** ($1g^*$) καὶ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν δύναμιν, μὲ τὴν ὁποίαν ἕλκει ἡ Γῆ τὴν μᾶζαν ἑνὸς γραμμαρίου.

Ἡ ὀνομασία τῶν μονάδων δύο τελείως διαφορετικῶν μεγεθῶν, ὅπως εἶναι τὰ μεγέθη μάζης καὶ βάρους, μὲ τὴν ἴδια λέξιν «χιλιόγραμμον» ἢ «γραμμάριον», ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα νὰ γίνεται σύγχυσις μεταξὺ τῶν δύο ἐννοιῶν. Ἀπὸ τὴν σύγχυσιν αὐτὴν δὲν ἐκφεύγουν πάντοτε οἱ ἀρχάριοι, μὲ τὴν διάκρισιν ποὺ γίνεται εἰς τὴν ἐπισήμανσιν τῆς μονάδος βάρους (δυνάμεως) διὰ προσγραφῆς ἑνὸς ἀστερίσκου. Κρίνεται ὡς ἐκ τούτου σκόπιμον, νὰ χρησιμοποιοῦνται αἱ λέξεις γραμμάριον καὶ χιλιόγραμμον διὰ τὰς μονάδας μάζης, ἐνῶ διὰ τὰς μονάδας βάρους προτείνονται αἱ λέξεις ***χιλιοπόντιον*** (1 kp) καὶ ***πόντιον*** (1 p) ἀντὶ τῶν kg* καὶ g*.

Πρὸς εὕρεσιν τῆς σχέσεως τῆς μονάδος 1p ἢ 1g* μὲ τὴν μονάδα 1dyn, σκεπτόμεθα πῶς ἡ δύναμις (βάρος) 1p προσδίδει εἰς τὴν μᾶζαν 1gr ἐπιτάχυνσιν $g = 981\ cm/s^2$, ἐνῶ 1dyn προσδίδει εἰς τὴν αὐτὴν μᾶζαν ἐπιτάχυνσιν $1 cm/s^2$. Ἐπομένως πρέπει ἡ δύναμις 1p νὰ εἶναι 981 φορὲς μεγαλυτέρα τῆς 1dyn. Εἶναι λοιπόν : 1p ἢ 1g* = 981 dyn καὶ 1 dyn = 1/981 p ἢ 1,019 mp (χιλιοστοπόντια)

Ὄργανα μετρήσεως δυνάμεων εἶναι τὰ ***δυναμόμετρα***. Ἀποτελοῦνται ἀπὸ ἐλάσματα (σχ. 18β) ἢ σπειροειδῆ ἐλατήρια (σχ. 18α), τὰ ὁποῖα παραμορφώνονται (κάμπτονται, συμπιέζονται, ἐκτείνονται) παροδικῶς, ὅταν ὑφίστανται τὴν ἐπίδρασιν δυνάμεων. Τὸ μέγεθος τῆς παραμορφώσεως, τὴν ὁποίαν μᾶς δείχνει δείκτης ποὺ παρακολουθεῖ τὴν παραμόρφωσιν, εἶναι ἀνάλογον πρὸς τὴν ἔντασιν τῆς δυνάμεως. Μὲ κατάλληλον βαθμολογίαν τοῦ ὀργάνου παρέχεται δι' ἀπευθείας ἀναγνώσεως ἡ ἔντασις τῆς δυνάμεως, ποὺ προκαλεῖ τὴν παραμόρφωσιν.



α β
Σχ. 18

§ 18. **Εἰδικὸν βάρος καὶ πυκνότης.** Εἰδικὸς ὄγκος. α) Γνωρίζομεν ὅτι ἴσοι ὄγκοι ἀπὸ διαφόρους οὐσίας, (π.χ. 1 dm^3 ἀπὸ ξύλον καὶ 1 dm^3 ἀπὸ ὑδράργυρον), δὲν ἔχουν γενικῶς τὸ αὐτὸ βάρος καὶ ἑπομένως οὔτε τὴν αὐτὴν μᾶζαν.

Ὡρισμένος ὄγκος ἀπὸ ὑδράργυρον εἶναι 13,6 φορὰς βαρύτερος ἀπὸ ἴσον ὄγκον ὕδατος, τὸ ὕδωρ εἶναι 1,267 φορὰς βαρύτερον ἀπὸ ἴσον ὄγκον οἰνοπνεύματος, τοῦτο ἔχει διάφορον βάρος ἀπὸ τὸ βάρος ἴσου ὄγκου γλυκερίνης κλπ.

Πρὸς διάκρισιν τῶν διαφόρων σωμάτων ἀπὸ τὴν ἰδιότητα αὐτήν, ὁρίζομεν διὰ κάθε σῶμα : ***Τὸ εἰδικὸν βάρος αὐτοῦ καὶ χαρακτηρίζομεν ἔτσι τὸ βάρος (εἰς g* ἢ p) ποὺ ἔχει ἡ μονὰς ὄγκου*** (*1* cm^3) ***τοῦ σώματος.*** Τοῦτο σημαίνει, ὅτι τὸ εἰδικὸν βάρος σ σώματος παρέχεται ἀπὸ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ βάρους B τοῦ σώματος διὰ τοῦ ὄγκου V, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ σῶμα τοῦτο. Εἶναι λοιπόν:

$$\textit{Εἰδικὸν βάρος}: \sigma = B/V \qquad (13)$$

Κατὰ ταῦτα τὸ εἰδικὸν βάρος σώματος θὰ δίδεται εἰς gr* ἢ p κατὰ cm^3, [gr^*/cm^3] ἢ [p/cm^3]· τὴν αὐτὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν θὰ ἔχῃ, ἂν ἐκφράζεται εἰς [kp/dm^3].

β) Κατ' ἀντιστοιχίαν λέμε ***πυκνότητα σώματος τὴν εἰς τὴν μονάδα ὄγκου περιεχομένην μᾶζαν τοῦ σώματος***, ἤτοι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τῆς μάζης m τοῦ σώματος διὰ τοῦ ὄγκου του V. Εἶναι δηλαδή:

$$\textit{Πυκνότης}\ d = m/V \qquad (14)$$

Κατὰ ταῦτα ἡ πυκνότης σώματος παρέχεται εἰς γραμμάρια μάζης (gr) κατὰ κυβικὸν ἑκατοστόμετρον (cm^3) ἢ εἰς [kg/dm^3].

Ἐπειδὴ τὸ βάρος σώματος εἰς p (πόντ) καὶ ἡ μᾶζα του εἰς gr (γραμμάρια) παρέχονται μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, εἶναι εὐνόητον, ὅτι καὶ τὸ εἰδικὸν βάρος ἐκφράζεται μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ποὺ παρέχει τὴν πυκνότητα τοῦ ἐξεταζομένου σώματος. Εἰς τοῦτο ὀφείλεται κατὰ μέγα μέρος ἡ σύγχυσις μεταξὺ τῶν δύο τούτων ἐννοιῶν. Ἀπὸ τὴν σύγχυσιν αὐτὴν προφυλασσόμεθα, ἂν ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν τὰς διαστάσεις ἑκάστου τῶν δύο τούτων μεγεθῶν, ποὺ εἶναι πολὺ διάφοροι, ἤτοι τοῦ μὲν εἰδικοῦ βάρους (−2,1,−2) τῆς δὲ πυκνότητος (−3,1,0). Πέραν τούτου πρέπει νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν μας, ὅτι ἡ σύμπτωσις τῶν ἀριθμῶν ἐκφράσεως εἰδικοῦ βάρους καὶ πυκνότητος ἑνὸς σώματος ὀφείλεται εἰς τὴν σχέσιν τῶν δύο διαφόρων μετρικῶν συστημάτων, ποὺ χρησιμοποιοῦμεν εἰς τὴν μέτρησιν αὐτῶν. Ἂν ἐξεφράζετο καὶ τὸ βάρος εἰς μονάδας τοῦ συστήματος cgs, ἤτοι εἰς dyn καὶ ὄχι εἰς gr*, τότε ὁ ἀριθμὸς ἐκφράσεώς του δι' ἓν σῶμα θὰ ἦτο 981 φορὰς μεγαλύτερος τοῦ ἀριθμοῦ τῆς πυκνότητος τοῦ σώματος.

Μὲ τὰς μονάδας ποὺ χρησιμοποιοῦμεν πρὸς μέτρησιν τοῦ εἰδικοῦ βάρους (1gr^*/cm^3) καὶ τῆς πυκνότητος (1 gr/cm^3), συμβαίνει ὥστε, τὸ εἰδικὸν βάρος ὕδατος ἀπεσταγμένου καὶ θερμοκρασίας 4° νὰ εἶναι ἴσον μὲ 1 (gr^*/cm^3) καὶ ἡ πυκνότης ἴση μὲ 1 (gr/cm^3). Ἕνεκα τούτου ὁ ἀριθμὸς ποὺ παρέχει τὸ εἰδικὸν βάρος (εἰς p/cm^3) καὶ τὴν πυκνότητά (εἰς g/cm^3) ἐκφράζει ἐπίσης καὶ τὸν λόγον, ποὺ ἔχει τὸ βάρος B_σ (καὶ ἡ μᾶζα M_σ) δοθέντος σώματος πρὸς τὸ βάρος B_υ (καὶ τὴν μᾶζαν M_υ) ἴσου ὄγκου ὕδατος (ἀπεσταγμένου καὶ θερμοκρασίας 4°) Τὸν λόγον τοῦτον τὸν λέμε ***σχετικὸν βάρος*** ρ τοῦ σώματος καὶ εἶναι:

$$\varrho = B_\sigma / B_\upsilon = m_\sigma / m_\upsilon \qquad (15)$$

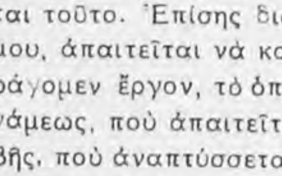
γ) Ἀντιστρόφως πρὸς τὴν ἔννοιαν τῆς πυκνότητος ὀνομάζομεν ***εἰδικὸν ὄγκον*** β ἑνὸς σώματος, τὸν ὄγκον ποὺ κατέχει ἡ μονὰς μάζης (1 gr) τοῦ σώματος. Εἶναι λοιπόν: $\beta = V/m = 1/d$ (16)

Ἔτσι ὁ εἰδικὸς ὄγκος ἐκφράζεται εἰς cm^3/gr καὶ ἔχει διαστάσεις (3,-1,0).

III. Ἔργον καὶ ἐνέργεια

§ 19. Ἔργον καὶ ἰσχύς. α) Ἡ ἔννοια τοῦ ἔργου εἰς τὴν Φυσικὴν ἔχει τὴν προέλευσίν της ἀπὸ τὴν ὁμώνυμον ἔννοιαν τῆς καθημερινῆς μας ζωῆς. Πρὸς ἀνύψωσιν βάρους Β, πρέπει νὰ καταβάλωμεν μυϊκὴν δύναμιν ἀντιθέτως πρὸς τὴν δύναμιν τῆς βαρύτητος. Λέμε τότε, ὅτι ἡ καταβαλλομένη μυϊκὴ δύναμις παράγει ἔργον, τὸ ὁποῖον εἶναι τόσον μεγαλύτερον, ὅσον μεγαλύτερον εἶναι ἀφ' ἑνὸς τὸ ὑπερνικώμενον βάρος, καὶ ἀφ' ἑτέρου τὸ ὕψος, εἰς τὸ ὁποῖον ἀνυψώνεται τοῦτο. Ἐπίσης διὰ νὰ σύρωμεν ἁμάξιον κατὰ μῆκος ἑνὸς δρόμου, ἀπαιτεῖται νὰ καταβάλωμεν μυϊκὴν δύναμιν καὶ ἑπομένως παράγομεν ἔργον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀνάλογον ἀφ' ἑνὸς τῆς μυϊκῆς δυνάμεως, ποὺ ἀπαιτεῖται νὰ καταβάλλεται πρὸς ὑπερνίκησιν τῆς τριβῆς, ποὺ ἀναπτύσσεται κατὰ τὴν μετακίνησιν, καὶ ἀφ' ἑτέρου τοῦ μήκους τοῦ δρόμου, ἐπὶ τοῦ ὁποίου σύρομεν, τὸ ἁμάξιον. Γενικῶς ὁρίζομεν **τὸ ἔργον W μὲ τὸ γινόμενον τῆς δυνάμεως k, ποὺ καταβάλλεται καθ' ὡρισμένην διεύθυνσιν καὶ φοράν, ἐπὶ τὸ διάστημα s, ποὺ διατρέχει τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως κατὰ τὴν διεύθυνσιν καὶ φορὰν αὐτῆς.** Εἶναι λοιπόν: $\mathbf{W=k.s}$ (17)

Σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον, οἱ δύο παράγοντες τοῦ ἔργου, ἤτοι ἡ δύναμις k καὶ τὸ διάστημα s, εἶναι ἀνύσματα, ποὺ πρέπει νὰ ἔχουν τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν καὶ φοράν. Εἰς περιπτώσεις, κατὰ τὰς ὁποίας ἡ διεύθυνσις καὶ φορὰ τοῦ διαστήματος s, κατὰ μῆκος τοῦ ὁποίου μεταφέρεται τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς Ο τῆς δυνάμεως k, (σχ. 19) δὲν ἔχει τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν καὶ φορὰν μὲ τὴν δύναμιν, ἀλλὰ σχηματίζει μὲ αὐτὴν τὴν γωνίαν α, θεωροῦμεν ὅτι ἡ δύναμις ἔχει ἀναλυθῆ εἰς δύο συνιστώσας. Ἐκ τούτων ἡ μία k_2, κάθετος πρὸς τὴν διεύθυνσιν τοῦ διαστήματος (καὶ ἑπομένως ἴση μὲ k ημα), δὲν παράγει ἔργον, ἐνῶ ἡ ἄλλη k_1, ποὺ ἔχει τὴν διεύθυνσιν καὶ φορὸν τοῦ διαστήματος καὶ εἶναι ἴση μὲ k συν α, παράγει τὸ παρεχόμενον ἔργον, διότι κατὰ τὴν διεύθυνσίν της, καὶ μόνον κατ' αὐτήν, μετακινεῖται τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως k. Ἔτσι τὸ ἔργον δίδεται γενικώτερον ἀπὸ τὴν σχέσιν: $W=sk_1=s.k.\text{συν}\,\alpha$.



Σχ. 19

Εἰς τὴν αὐτὴν σχέσιν φθάνομεν, ἂν θεωρήσωμεν τὸ ἔργον ὡς γινόμενον τῆς δυνάμεως k ἐπὶ τὴν προβολὴν τοῦ διαστήματος s (ἴσην μὲ s.συν α) ἐπάνω εἰς τὴν διεύθυνσιν τῆς δυνάμεως. Εἶναι λοιπὸν γενικῶς: $W=s.k.\text{συν}\,\alpha=k.s.\text{συν}\,\alpha$. (17')

Ἐκ τῆς σχέσεως αὐτῆς προκύπτει, ὅτι τὸ ἔργον W εἶναι ἀριθμητικὸν γινόμενον (βλέπε § 5, δ) τῶν δύο ἀνυσμάτων (δυνάμεως ἐπὶ διάστημα) καὶ τοῦτο συμφωνεῖ μὲ τὸ ὅτι εἶναι μονόμετρον ποσόν.

β) Κατὰ τὰ ἀνωτέρω τὸ ποσὸν τοῦ ἔργου ἔχει ἐξίσωσιν φυσικῶν διαστάσεων τήν : $[W]=[M.L.T^{-2}]=[L^2.M.T^{-2}]$ καὶ φυσικὰς διαστάσεις : (2, 1, –2). ***Μονὰς μετρήσεως*** τοῦ ἔργου εἰς τὸ σύστημα cgs θὰ εἶναι ***τὸ ἔργον ποὺ ἐκτελεῖ δύναμις μιᾶς δύνης (1 dyn), ὅταν μεταφέρῃ τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς της εἰς ἀπόστασιν ἑνὸς ἑκατοστομέτρου (1 cm) κατὰ τὴν διεύθυνσιν καὶ φοράν της.*** Τὴν μονάδα αὐτὴν τὴν ὀνομάζομεν ***ἔργιον*** (erg). Εἶναι λοιπὸν : 1 erg=1 dyn . 1 cm. Πολλαπλάσια τοῦ ἐργίου εἶναι ἡ μονὰς 1 Joule ἢ ***1 βαττοδευτερόλεπτον*** (Ws) ἴση μὲ 10^7 erg, τὸ ***βαττώριον*** (1 Wh) = 3600 10^7 erg καὶ τὸ ***χιλιοβαττώριον*** ἢ ***ὡριαῖον χιλιοβάττ*** (1 kWh) = 3600.10^3.10^7 erg = 3.600 000 Joule = 3,6.10^6 Ws.

Εἰς τὸ Τεχνικὸν μετρικὸν σύστημα λαμβάνεται ὡς μονὰς τὸ ***χιλιογραμμόμετρον*** ἢ ***χιλιοποντόμετρον*** (1 mkg* ἢ 1 mkp), ἤτοι τὸ ἔργον ποὺ παράγεται, ὅταν ἀνυψώνεται βάρος 1 kp εἰς ὕψος 1 m.

Μεταξὺ τῶν βασικῶν τούτων μονάδων ἔργου ὑπάρχει ἡ σχέσις : 1 mkp = 9,81 . 10^7 erg = 9,81 Ws ἢ Joule.

γ) ***Ἰσχύς.*** Εἶναι εὐνόητον, ὅτι εἰς τὰς περιπτώσεις παραγωγῆς ἔργου, ἔχει μεγάλην σημασίαν ὁ χρόνος, κατὰ τὸν ὁποῖον παράγεται τοῦτο. Ἐκ τούτου προκύπτει ἡ ἔννοια τῆς ***ἰσχύος, δηλαδὴ τοῦ ἔργου ποὺ παράγεται εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου.*** Ἂν λοιπὸν εἰς χρόνον t παράγεται ἔργον W, ἡ ἰσχὺς L θὰ εἶναι : $\mathbf{L=W/t}$. (18)

Ἔτσι ἡ ἰσχὺς ἔχει φυσικὰς διαστάσεις : (2,1,–3).

Πρὸς μέτρησιν τῆς ἰσχύος λαμβάνεται ὡς βασικὴ μονὰς τοῦ συστήματος cgs ἡ ἰσχὺς ἐκείνη, κατὰ τὴν ὁποίαν παράγεται ἔργον ἑνὸς ἐργίου εἰς ἕκαστον δευτερόλεπτον. Τὴν μονάδα αὐτὴν σημειώνομεν συμβολικῶς μὲ 1 erg/s. Ἐπειδὴ ἡ μονὰς αὐτὴ εἶναι πάρα πολὺ μικρά, χρησιμοποιοῦμεν συνηθέστερον τὴν μονάδα 1 Joule/sec ἴσην μὲ 10^7 erg/s. Τὴν μονάδα αὐτὴν τὴν λέμε Βάττ (W) καὶ τὸ χιλιοπλάσιον αὐτῆς χιλιοβάττ (1 kW).

Κατ' ἀντιστοιχίαν εἰς τὸ τεχνικὸν σύστημα λαμβάνεται ὡς μονὰς ἰσχύος ὁ ***ἀτμόϊππος*** ἢ ἁπλῶς ***ἵππος.*** Ἡ μονὰς αὐτὴ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἰσχύν, κατὰ τὴν ὁποίαν παράγεται ἔργον 75 mkp εἰς 1 sec. Εἶναι λοιπὸν 1 ἵππος = 75 (mkp/s). Μεταξὺ τῶν μονάδων Watt καὶ ἵππου ὑφίσταται ἡ σχέσις : 1 kW = 1,359 ἵπ.

Σημ. 1. Εἶναι φανερὸν ὅτι αἱ μονάδες ἔργου Ws, Wh, kWh, ποὺ ὡρίσαμεν παραπάνω, προκύπτουν ἀπὸ τὰς μονάδας ἰσχύος, W καὶ kW, διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ τοὺς ἀντιστοίχους χρόνους.

Σημ. 2. Πρὸς ἐκτίμησιν τῆς ἰσχύος, μὲ τὴν ὁποίαν παρέχεται ἔργον εἰς διαφόρους περιπτώσεις, σημειώνομεν, ὅτι ἡ ἰσχὺς ἀνθρώπου κατ' ἀπασχόλησιν διαρκείας εἶναι κάπου 100 W, καὶ εἰς περίπτωσιν βραχείας ὑπερεντάσεως φθάνει μέχρι 1000 W, ἐνῶ ἡ ἰσχὺς τῆς ἀτμομηχανῆς ἀνέρχεται εἰς : κάπου 2000 ἵππ. ἢ 1472 kW.

lv

§ 20. Ἐνέργεια. *α) Εἴδη ἐνεργείας*. Ὀνομάζομεν *ἐνέργειαν* σώματος τὴν ἱκανότητα, ποὺ ἔχει τοῦτο νὰ παράγῃ ἔργον. Τὸ βλῆμα ἑνὸς ὅπλου ἐγκλείει ἐνέργειαν, διότι εἶναι ἱκανὸν νὰ παράγῃ ἔργον, [νὰ ὑπερνικήσῃ ἐμπόδια (δυνάμεις) κατὰ μῆκος ὡρισμένου ἑκάστοτε διαστήματος]. Ἐπίσης ἐγκλείει ἐνέργειαν τὸ τεντωμένον ἐλατήριον ἢ σῶμα βαρὺ ποὺ κρατεῖται ὑψηλὰ κ. ἄ. Εἶναι δηλαδὴ ἡ ἐνέργεια τὸ ἀποταμίευμα ἔργου, ποὺ ἐγκλείεται εἰς σῶμα, εἴτε λόγῳ τῆς θέσεώς του, εἴτε λόγῳ τῆς καταστάσεως, εἰς τὴν ὁποίαν εὑρίσκεται. Κατὰ συνέπειαν μετρᾶται αὕτη μὲ τὸ ἔργον, ποὺ εἶναι ἀποταμιευμένον εἰς τὸ σῶμα καὶ μπορεῖ νὰ ἀποδοθῇ ἀπὸ αὐτό. Εἰς τὰ φαινόμενα τῆς μηχανικῆς ἡ ἐνέργεια παρουσιάζεται ὑπὸ δύο μορφάς, δηλαδή: εἴτε ὡς *κινητικὴ ἐνέργεια* (ἢ ρύμη), εἴτε ὡς *δυναμική*.

1. *Κινητικὴ ἐνέργεια*. Ἂν ἐπὶ σώματος μάζης m ἐνεργῇ κινητικῶς δύναμις $k = m.\gamma$ κατὰ μῆκος διαστήματος s, θὰ ἀποταμιεύσῃ εἰς τὸ σῶμα ἔργον $W = k.s$, σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμὸν τοῦ ἔργου. Τὸ ἔργον τοῦτο θὰ μετρᾷ τὴν ἐνέργειαν E_κ, ποὺ ἐγκλείει κατόπιν τούτου τὸ σῶμα. Ἂν ἀντὶ k θέσωμεν τὸ ἴσον γινόμενον τῆς μάζης m ἐπὶ τὴν ἐπιτάχυνσιν γ, καὶ ἀντὶ s τὸ ἴσον του $\frac{1}{2}\gamma t^2$, θὰ ἔχωμεν $E_\kappa = m.\gamma.\frac{1}{2}\gamma t^2 = \frac{1}{2}m\gamma^2 t^2$ · ἀλλὰ τὸ γινόμενον τῆς ἐπιταχύνσεως γ ἐπὶ τὸν χρόνον t μᾶς δίδει τὴν ταχύτητα v, ποὺ ἀποκτᾷ τὸ σῶμα ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως εἰς τὸ τέρμα τοῦ διαστήματος s. Ἐκ τούτου προκύπτει ὅτι εἶναι : $E_\kappa = \frac{1}{2}\,mv^2$. (19)

Εἶναι λοιπὸν ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ σώματος ἀνάλογος τῆς μάζης τοῦ σώματος καὶ τοῦ τετραγώνου τῆς ταχύτητος ποὺ ἔχει τοῦτο. Ἔτσι ἡ κινητικὴ ἐνέργεια βλήματος μάζης 75 kg, ποὺ κινεῖται μὲ ταχύτητα 800 m/s, εἶναι κάπου ἴση μὲ τὴν κινητικὴν ἐνέργειαν ὁλοκλήρου ὀχήματος μάζης 75000 kg, ποὺ κινεῖται μὲ ταχύτητα 90 km/h.

2. *Δυναμικὴ ἐνέργεια*. Διὰ νὰ ἀνυψώσωμεν σῶμα βάρους B εἰς ὕψος h ὑπεράνω ὡρισμένου ὁριζοντίου ἐπιπέδου, πρέπει νὰ ὑπερνικήσωμεν τὸ βάρος B κατὰ μῆκος τοῦ ὕψους h καὶ συνεπῶς νὰ καταβάλωμεν ἔργον $W = B.h$. Τὸ ἔργον τοῦτο ἀποταμιεύεται εἰς τὸ σῶμα ποὺ ἀναβιβάζεται εἰς τὸ ὕψος h, καὶ μπορεῖ νὰ ἀποδοθῇ ἀπὸ τὸ σῶμα τοῦτο, ἂν ἀφεθῇ νὰ καταπέσῃ ἐλευθέρως εἰς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον, ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἀνεβιβάσθη. Ἑπομένως τὸ σῶμα εἰς τὸ ὕψος h ἐγκλείει ἐνέργειαν· τὴν ἐνέργειαν αὐτὴν τὴν λέμε ***δυναμικὴν*** ἢ ***ἐνέργειαν θέσεως*** τοῦ σώματος. Μέτρον αὐτῆς παρέχει προφανῶς τὸ ἀποταμιευθὲν ἔργον καὶ συνεπῶς εἶναι : $E_\delta = B.h$ (20)

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν προκύπτει, ὅτι ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια E_δ σώματος βάρους B, εἶναι ἀνάλογος τοῦ βάρους τοῦ σώματος ὡς καὶ τοῦ ὕψους h, ὑπεράνω τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, ποὺ λαμβάνεται ὡς ἀφετηρία. Τὸ αὐτὸ σῶμα εἰς τὴν αὐτὴν θέσιν ἔχει διάφορον δυναμικὴν ἐνέργειαν ὡς πρὸς τὰ διάφορα ὁριζόντια ἐπίπεδα κάτωθεν τοῦ σώματος. Ὅσον χαμηλότερον ἀπὸ τὸ σῶμα κεῖται τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον, πρὸς τὸ ὁποῖον ἀνάγομεν τὴν συσχέτισιν, τόσον μεγαλυτέρα εἶναι ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια τοῦ σώματος. Δυναμικὴν ἐπίσης ἐνέργειαν ἐγκλείει σῶμα ἐλαστικὸν (π.χ. ἐλατήριον), ὅταν διὰ τῆς ἐπιδράσεως δυνάμεως k ἐπιφέρωμεν ἐλαστικὴν παραμόρφωσιν εἰς τοῦτο.

β) ***Ἀρχὴ τῆς ἀφθαρσίας τῆς ἐνεργείας.*** Ἂν σῶμα βάρους $B=m\,g$, ποὺ εὑρίσκεται εἰς ὕψος h ὑπεράνω ὁριζοντίου ἐπιπέδου καὶ ἔχει ὡς ἐκ τούτου δυναμικὴν ἐνέργειαν B.h, ἀφεθῇ νὰ καταπέσῃ ἐλευθέρως, θὰ ἀποκτήσῃ, μετὰ τὴν διανύσιν τοῦ ὕψους h, ταχύτητα $v=\sqrt{2gh}$ (ἐξίσ.5'').Μὲ τὴν ταχύτητα αὐτὴν θὰ φθάσῃ εἰς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον, ὅπου ἡ δυναμική του ἐνέργεια εἶναι μηδέν, ἀφοῦ $h=0$· θὰ ἔχῃ ὅμως κινητικὴν ἐνέργειαν ἴσην μὲ $\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\,.\,2gh=mgh=B.h$, ἤτοι ἴσην μὲ τὴν ἐξαφανισθεῖσαν δυναμικήν. Ἀντιθέτως, ἂν τὸ σῶμα βάλλεται κατακορύφως πρὸς ἄνω μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα v καί, συνεπῶς, μὲ κινητικὴν ἐνέργειαν $\frac{1}{2}mv^2$, θὰ φθάσῃ εἰς ὕψος $h=v^2/2g$, ὅπου ἡ μὲν κινητική του ἐνέργεια θὰ εἶναι μηδέν, ἀφοῦ $v=0$, ἡ δυναμική του ὅμως θὰ εἶναι: $B.h=mgv^2/2g=\frac{1}{2}mv^2$, δηλαδὴ ἀκριβῶς ἴση μὲ τὴν ἐξαφανισθεῖσαν κινητικήν του ἐνέργειαν.

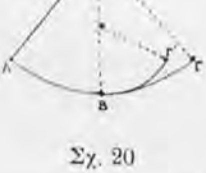
Ὅ,τι ἰσχύει διὰ τὰ ἀκραῖα στάδια τοῦ θεωρηθέντος φαινομένου τῆς πτώσεως, ἰσχύει ἐπίσης καὶ δι' ὁποιοδήποτε ἐνδιάμεσον στάδιον αὐτοῦ. Τὴν στιγμὴν π.χ. ποὺ τὸ πῖπτον σῶμα ἔχει διανύσει τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ὕψους του h, καὶ ἔχει χάσει συνεπῶς τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς δυναμικῆς του ἐνεργείας B.h, θὰ ἔχῃ ἀποκτήσει ἰσόποσον κινητικὴν ἐνέργειαν, ἀφοῦ θὰ εἶναι αὕτη: $\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m.2g.h/3=mg.h/3=\frac{1}{3}Bh$.

Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο ἰσχύει γενικῶς δι' ὅλα τὰ ***καθαρῶς*** μηχανικὰ φαινόμενα, τὰ φαινόμενα, δηλαδή, εἰς τὰ ὁποῖα ἐνεργοῦν δυνάμεις (ὡς τὸ βάρος), ποὺ δὲν παύουν νὰ ὑφίστανται καὶ μετὰ τὴν διαδρομὴν τοῦ φαινομένου. (Ἀπὸ τὰ φαινόμενα αὐτὰ πρέπει νὰ διακριθοῦν τὰ μὴ καθαρῶς μηχανικά, εἰς τὰ ὁποῖα ἀναφαίνονται κατὰ τὴν διαδρομήν των δυνάμεις (τριβή, ἀντίστασις τοῦ μέσου), ποὺ παύουν νὰ ὑφίστανται μετὰ τὴν πάροδον τοῦ φαινομένου· εἰς τὰ φαινόμενα αὐτὰ ἔχομεν καὶ ἄλλα εἴδη ἐνεργείας, (θερμότητα, ἠλεκτρισμὸν κλπ.).

Ἔτσι εἰς ὅλα τὰ καθαρῶς μηχανικὰ φαινόμενα λαμβάνει χώραν ἐναλλαγὴ κινητικῆς καὶ δυναμικῆς ἐνεργείας, κατὰ τρόπον ὥστε δι' ὁποιοδήποτε ποσὸν ἐξαφανιζομένης ἐνεργείας τοῦ ἑνὸς εἴδους, ἐμφανίζεται ἴσον ποσὸν τοῦ ἄλλου εἴδους. Συνεπῶς τὸ σύνολον τῆς μηχανικῆς ἐνεργείας σώματος κατὰ τὴν διαδρομὴν οἱουδήποτε καθαρῶς μηχανικοῦ φαινομένου παραμένει σταθερόν· οὔτε δηλαδὴ χάνεται μηχανικὴ ἐνέργεια, οὔτε ἐμφανίζεται ἐκ τοῦ μηδενὸς τοιαύτη, ἀλλ' ἁπλῶς μεταπίπτει ποσὸν κινητικῆς εἰς ἴσον ποσὸν δυναμικῆς ἢ ἀντιστρόφως. Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο ἀποτελεῖ τὴν ***Ἀρχὴν ἀφθαρσίας τῆς μηχανικῆς ἐνεργείας*** ποὺ ἰσχύει εἰς ὅλα τὰ καθαρῶς μηχανικὰ φαινόμενα.

Σημ. Εἰς τὴν πραγματικότητα δὲν ἔχομεν ***καθαρῶς*** μηχανικὰ φαινόμενα. Πάντοτε τὰ φυσικὰ φαινόμενα συνοδεύονται ἀπὸ ἀντιστάσεις, ποὺ ἔχουν ὡς ἀποτέλεσμα νὰ μεταβάλλουν μηχανικὴν ἐνέργειαν εἰς θερμότητα ἢ ἄλλας μορφάς. Ὅπως θὰ ἰδοῦμε ὅμως εἰς τὸ Θερμαντικόν, ἡ θερμότης ποὺ ἐμφανίζεται εἰς ἀντικατάστασιν ἐξαφανισθείσης μηχανικῆς ἐνεργείας, εἶναι ἀκριβῶς ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἐξαφανισθεῖσαν. Ἐκ τούτου συνάγεται, ὅτι ἡ Ἀρχὴ ἀφθαρσίας τῆς ἐνεργείας ἔχει γενικὴν ἰσχὺν δι' ὅλα τὰ φαινόμενα τῆς φύσεως. Ἐπομένως εἶναι φυσικῶς ἀδύνατον νὰ ἐπινοηθῇ συσκευή, ποὺ θὰ μποροῦσε νὰ παρέχῃ ἐνέργειαν περισσοτέραν ἀπὸ ἐκείνην ποὺ τῆς προσδίδομεν. Ἂν συνέβαινε τοῦτο θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ ἔχωμεν ἐνέργειαν ἐκ τοῦ μηδενός· μὲ ἄλλα λόγια θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ κατασκευάσωμεν τὸ «ἀεικίνητον». Τοῦτο ὅμως ἀποτελεῖ οὐτοπίαν, διὰ τὴν ὁποίαν οὐδεμίαν ἔνδειξιν ἔχομεν, ποὺ νὰ μᾶς ἐπιτρέπῃ νὰ ἀμφιβάλλωμεν.

Μὲ τὴν ἀρχὴν διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας ἑρμηνεύονται μὲ μεγάλην ἁπλότητα πολλὰ φαινόμενα τῆς Μηχανικῆς. Παράδειγμα τούτου ἔχομεν εἰς τὸ ***ἐμποδιζόμενον ἐκκρεμὲς*** τοῦ Γαλιλαίου. Τοῦτο ἀποτελεῖται ἀπὸ βαρὺ σφαιρίδιον δεμένον εἰς τὸ ἄκρον λεπτοῦ νήματος καὶ κρεμασμένον ἀπὸ τὸν ὁριζόντιον ἄξονα Ο. Ἂν τοῦτο ἐκτραπῇ ἀπὸ τὴν θέσιν ἰσορροπίας ΟΒ μέχρι τῆς ΟΑ (σχ. 20) καὶ κατόπιν ἀφεθῇ ἐλεύθερον, θὰ φθάσῃ μέχρι τῆς θέσεως ΟΓ καὶ θὰ αἰωρῆται μεταξὺ τῶν θέσεων ΟΑ καὶ ΟΓ, εἰς τὰς ὁποίας ὅλη ἡ ἀποταμιευθεῖσα διὰ τῆς ἀρχικῆς ἐκτροπῆς ἐνέργεια εἶναι ἐξ ὁλοκλήρου δυναμική, ἐνῷ εἰς τὴν θέσιν ΟΒ (κατωτάτην διὰ τὸ βαρὺ σφαιρίδιον) εἶναι ἐξ ὁλοκλήρου κινητική. Εἰς τὰς ἐνδιαμέσους θέσεις εἶναι ἐν μέρει δυναμικὴ καὶ ἐν μέρει κινητική, πάντοτε ὅμως ἔτσι, ποὺ τὸ σύνολον τῆς μηχανικῆς ἐνεργείας (κινητικῆς καὶ δυναμικῆς) νὰ εἶναι σταθερὸν (ἴσον πρὸς τὴν ἀποταμιευθεῖσαν, κατὰ τὴν ἀρχικὴν ἐκτροπήν, δυναμικήν). Ἡ αἰώρησις λοιπὸν τοῦ ἐκκρεμοῦς δὲν εἶναι τίποτε ἄλλο, παρὰ μία διαρκὴς ἐναλλαγὴ δυναμικῆς καὶ κινητικῆς ἐνεργείας, ἐναλλαγὴ κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ὁλικὴ ἐνέργεια παραμένει σταθερά. Ἂν κατὰ τὴν αἰώρησιν τοῦ ἐκκρεμοῦς καὶ ὅταν τοῦτο εὑρίσκεται πρὸς τ' ἀριστερά, ἐμπήξωμεν καρφίον εἰς τὸ σημεῖον κ, τὸ νῆμα ἐμποδίζεται, ὅταν προσκρούῃ εἰς τὸ κ, κάμπτεται περὶ αὐτὸ καὶ ἡ αἰώρησις συνεχίζεται ἀπὸ τὸ κατώτερον τμῆμα κΓ' τοῦ νήματος. Ἐπειδὴ μὲ τὴν τοποθέτησιν τοῦ καρφίου κ δὲν μετεβλήθη ἡ ἐνέργεια τοῦ σφαιριδίου, πρέπει τοῦτο νὰ συνεχίσῃ νὰ ἔχῃ μέγιστον τῆς δυναμικῆς ἐνεργείας τὸ αὐτό, καὶ συνεπῶς θὰ ἀνυψωθῇ μέχρι τοῦ σημείου Γ', ποὺ κεῖται εἰς τὸ αὐτὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον μὲ τὰ σημεῖα Α καὶ Γ.



Σχ. 20

Καθ' ὅμοιον τρόπον μποροῦμε νὰ εὕρωμεν τὸ ὕψος, μέχρι τοῦ ὁποίου φθάνει σῶμα ποὺ βάλλεται κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα c, ἂν βέβαια, ὅπως καὶ εἰς τὸ προηγούμενον, δὲν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὴν τριβήν. Κατὰ τὴν ἀνύψωσιν τοῦ σώματος ἐλαττώνεται ἡ κινητική του ἐνέργεια καὶ εἰς τὴν θέσιν της ἐμφανίζεται ἰσόποσος δυναμική. Εἰς τὸ ἀνώτατον σημεῖον ὅλη ἡ ἀποταμιευθεῖσα κατὰ τὴν βολὴν κινητικὴ ἐνέργεια $^1/_2mc^2$ θὰ μεταβληθῆ εἰς ἰσόποσον δυναμικὴν mgh. Θὰ εἶναι λοιπόν: $m.g.h={}^1/_2mc^2$. Ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης προκύπτει: $h=c^2/2g$, ἤτοι ἡ σχέσις, τὴν ὁποίαν δι' ἄλλης θεωρήσεως εὑρίσκομεν εἰς τὴν § 32.

Προβλήματα

16. Πόση εἶναι ἡ γραμμικὴ ταχύτης v, πόση ἡ γωνιακὴ ω καὶ πόση ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις γ_ρ εἰς σημεῖον τοῦ Ἰσημερινοῦ τῆς Γῆς, δεδομένου ὅτι ἡ περιφέρεια, τὴν ὁποίαν διατρέχει τοῦτο εἶναι 40068 km καὶ ὅτι πρὸς τοῦτο ἀπαιτεῖται χρόνος μιᾶς ἀστρικῆς ἡμέρας, ἤτοι 86164 sec;
('Απ. $v=465{,}01$ m/s, $\omega=0{,}0000729\ s^{-1}$ καὶ $\gamma_\rho=0{,}03389923\ m/s^2$)

17. Ἂν διὰ καλὸ ἄλεσμα χρειάζεται ἡ κατὰ μῆκος τῆς περιφερείας τῆς μυλόπετρας ταχύτης νὰ εἶναι 7,5 m/s, πόσας στροφὰς κατὰ λεπτὸν τῆς ὥρας πρέπει νὰ κάνη μυλόπετρα ποὺ ἔχει διάμετρον 1,43 m; ('Απ. 100 min^{-1})

18. Πόσας μονάδας μάζης τοῦ τεχνικοῦ συστήματος περιέχει σῶμα βάρους 29,43 kp; ('Απ. 3)

19. Πόσην ταχύτητα ἀποκτᾶ σῶμα μάζης 200 kg, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐνεργεῖ ἐπὶ 20 sec σταθερὰ δύναμις 30 kp; ('Απ. 29,43 m/s)

20. Μὲ πόσην δύναμιν πιέζει σῶμα βάρους 2 kp τὴν παλάμην ποὺ τὸ ἀνυψώνει μὲ ἐπιτάχυνσιν $0{,}5\ m/s^2$; ('Απ. 2,10 kp)

21. Εἰς τὰ ἄκρα νήματος ἀβαροῦς καὶ εὐκάμπτου, τὸ ὁποῖον κρέμεται ἀπὸ τὴν αὔλακα παγίας τροχαλίας (ὅπως εἰς τὴν μηχανὴν Adwood, σχ. 14) εἶναι δεμένα δύο σώματα, ἀπὸ τὰ ὁποῖα τὸ εἰς τὸ ἓν ἄκρον τοῦ νήματος ἔχει μᾶζαν 5 kg καὶ τὸ εἰς τὸ ἄλλο 3 kg. Φέρομεν τὸ σύστημα εἰς θέσιν ὥστε ἡ μεγαλυτέρα μᾶζα νὰ εἶναι ὑψηλὰ καὶ κατόπιν τὸ ἀφήνομεν ἐλεύθερον. Ἀρχίζει τότε ἡ πτῶσις τοῦ μεγαλυτέρου βάρους, ποὺ παρασύρει ὅμως καὶ ἀνυψώνει τὸ μικρότερον. Πόση εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς κινήσεως αὐτῆς; ['Απ. $\gamma=g.(5-3)/(5+3)$]

22. Πόσον εἶναι τὸ ἔργον ποὺ ἐκτελεῖ δύναμις ἡ ὁποία ἀνυψώνει βάρος 75 kp εἰς ὕψος 16 m καὶ ἐπὶ πλέον προσδίδει εἰς τὸ σῶμα ταχύτητα 0,25 m/s;
['Απ. $75\,.\,16+{}^1/_2\,(75/9{,}81)\,.\,0{,}25^2$ mkp]

23. Πόσον βάρος πρέπει νὰ φορτώσωμεν ἐπὶ καρφίου, διὰ νὰ εἰσχωρήση τοῦτο εἰς ξύλον καὶ εἰς βάθος 5 cm, ἂν τὸ ἀποτέλεσμα τοῦτο ἐπιτυγχάνεται μὲ σφυρὶ βάρους 0,5 kp, τὸ ὁποῖον καταπίπτει ἐπὶ τοῦ καρφίου μὲ ταχύτητα 10 m/s;
['Απ. $0{,}5(10^2/2g+0{,}05)/0{,}05$ kp]

24. Ἀτμομηχανὴ βάρους 10000 kp, ποὺ κινεῖται ἐπὶ ὁριζοντίας σιδηροτροχιᾶς ἔχει νὰ ὑπερνικήση ἐπ' αὐτῆς ἀντίστασιν 37,5 kp. Ἂν ἡ δύναμις τοῦ ἀτμοῦ της κατορθώνη νὰ ἀναπτύξη εἰς αὐτὴν ἐντὸς 3 min ταχύτητα 13 m/s, πόσον εἶναι τὸ ἔργον τῆς δυνάμεως αὐτῆς;
['Απ. $37{,}5\,.\,13\,.\,180/2+{}^1/_2\,(10000/9{,}81)\,13^2=130012$ mkp]

25. Ἂν ἡ παραπάνω ἀτμομηχανὴ διατηρήση σταθερὰν τὴν ταχύτητα τῶν 13 m/s ἐπὶ 10 min, καὶ μετὰ τοῦτο διακόψη τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως τοῦ ἀτμοῦ, νὰ εὑρεθῆ: α) Μετὰ πόσον χρόνον ἀπὸ τῆς στιγμῆς αὐτῆς θὰ σταματήση καὶ πόσον διάστημα θὰ διατρέξη κατὰ τὸν χρόνον τοῦτον; β) Πόσον εἶναι μετὰ τοῦτο τὸ ἔργον τῆς δυνάμεως τοῦ ἀτμοῦ; ['Απ. α) $(10000/g).13/37{,}5=353{,}4$ sec καὶ 2297,1 m β) $130012\ mkp+37{,}5\,.\,600\,.\,13+0=422512$ mkp].

26. Δύναμις 12 kp ἐνεργεῖ ἐπὶ σώματος ἐπὶ 15 sec καὶ τὸ μεταφέρει εἰς ἀπόστασιν 600 m. Πόσον εἶναι τὸ βάρος τοῦ σώματος;
('Απ. $B=m.g=(k/\gamma).g=[k/(2s/t^2)].g=(k.t^2/2s).g=12.9{,}81.15^2/2.600$ kp)

27. Ὄχημα βάρους 93 t* κινεῖται μὲ ταχύτητα 40 m/s. Ἂν ὑποστῆ τὴν ἐπί-

δρασιν τῶν φρένων του, σταματᾶ, ἀφοῦ διανύση ἀκόμη 6.5 km Πόση εἶναι ἡ ἀντίστασις τῶν φρένων τοῦ ὀχήματος; ('Απ. 1185 kp)

28. 'Ορειβάτης βάρους 62 kp φέρει μαζί του ἐφόδια 7,5 kp. "Αν ἐντὸς 45 min ἀνέλθη οὗτος ἀπὸ θέσιν, ὅπου τὸ ὑψόμετρον εἶναι 440,2 m, εἰς ἄλλην ὕψους 736,8 m, πόσον εἶναι τὸ ἔργον ποὺ καταβάλλει καὶ ποία εἶναι ἡ ἰσχύς του;
('Απ. 20613 mkp = 20220 Joule καὶ 7,6 mkp/s = 74,9 Watt)

29. Βλῆμα βάρους 5 kp ἐξέρχεται ἀπὸ τὸν πυροβλητικὸν σωλῆνα ποὺ ἔχει μῆκος 2 m μὲ ταχύτητα 800 m/s. Πόση εἶναι ἡ ἐξωθοῦσα τὸ βλῆμα δύναμις τῶν ἀερίων τῆς ἐκπυρσοκροτήσεως (ἂν αὐτὴ θεωρηθῆ σταθερὰ) καὶ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ βλήματος κατὰ τὴν στιγμήν, ποὺ ἐξέρχεται ἐκ τοῦ σωλῆνος;
('Απ. 8.10^{10} dyn καὶ 163100 mkp)

30. Ποία δύναμις ἀπαιτεῖται νὰ ἐνεργήση σταθερῶς ἐπὶ 4 min ἐπὶ σιδηροδρομικοῦ συρμοῦ βάρους 27000 kp διὰ νὰ ἀνυψώση τὴν ταχύτητα τοῦ συρμοῦ ἀπὸ 7 m/s εἰς 14 m/s, ἂν ἡ κίνησις γίνεται ἐπὶ ὁριζοντίας σιδηροτροχιᾶς;
['Απ. (27000/9,81) . (14—7)/240]

IV. Δυνάμεις ποὺ ἰσορροποῦν (Στατική)

§ 21. Χαρακτηριστικὰ καὶ ἰσορροπία δυνάμεων. α) 'Η δύναμις, σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμὸν ποὺ τῆς ἐδώσαμεν (§ 13), εἶναι ἀνυσματικὸν μέγεθος· συνεπῶς διὰ τὸν καθορισμόν της δὲν ἀρκεῖ μόνον ἡ ἀριθμητική της τιμή, ἀλλὰ χρειάζεται καὶ ἡ διεύθυνσις καὶ φορὰ τοῦ ἀνύσματος ποὺ τὴν ἐκφράζει. "Ετσι κάθε δύναμις χαρακτηρίζεται ἀπὸ 1) τὴν ***ἔντασίν*** της, δηλ. τὴν ἀριθμητικὴν τιμήν, ἡ ὁποία προκύπτει ἀπὸ τὴν μέτρησίν της μὲ καθωρισμένην μονάδα, 2) τὴν ***διεύθυνσιν*** καὶ ***φοράν***, δηλ. τὴν εὐθεῖαν γραμμήν, κατὰ τὴν διεύθυνσιν καὶ φορὰν τῆς ὁποίας ἐνεργεῖ αὕτη καὶ 3) τὸ ***σημεῖον ἐφαρμογῆς***, δηλ. τὸ σημεῖον, ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἀσκεῖ τὴν δρᾶσιν της ἐπὶ σώματος.

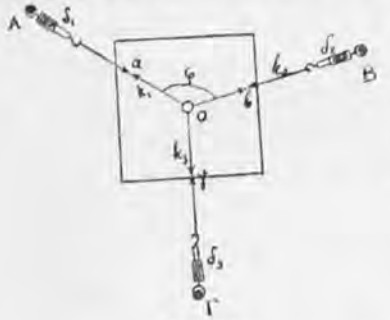
Τὰ στοιχεῖα αὐτὰ (ἔντασις, διεύθυνσις, φορὰ καὶ σημεῖον ἐφαρμογῆς), μὲ τὰ ὁποῖα καθορίζεται πλήρως ἑκάστη δύναμις, ὀνομάζονται ***χαρακτηριστικὰ*** αὐτῆς. Εἶναι εὐνόητον, ὅτι τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς δυνάμεως κεῖται πάντοτε ἐπὶ τῆς διευθύνσεώς της, καὶ ἑπομένως ἀποτελεῖ λεπτομερειακὴν διάκρισιν ἑκάστης περιπτώσεως, ἡ ὁποία μάλιστα δὲν ἔχει σημασίαν διὰ τὸ ἀποτέλεσμα τῆς δυνάμεως, γιατὶ εἶναι ἐμπειρικῶς γνωστόν, ὅτι ***τὸ ἀποτέλεσμα δυνάμεως εἶναι τὸ αὐτό, ὁποιοδήποτε σημεῖον τῆς διευθύνσεώς της καὶ ἂν λάβωμεν ὡς σημεῖον ἐφαρμογῆς***. Ἀκόμη καὶ ἡ φορὰ τῆς δυνάμεως μπορεῖ εἰς ἑκάστην περίπτωσιν νὰ νοηθῆ ὅτι περιλαμβάνεται εἰς τὸ χαρακτηριστικὸν τῆς διευθύνσεως, ἀρκεῖ κατὰ τὸν καθορισμὸν τῆς εὐθείας ποὺ τὴν παριστάνει, νὰ ὁρισθῆ σημεῖον ἀφετηρίας, καθὼς καὶ τοιοῦτο πρὸς τὸ ὁποῖον φέρεται. Μποροῦμε συνεπῶς τὰ τρία αὐτὰ χαρακτηριστικὰ (διεύθυνσιν, φορὰν καὶ σημεῖον ἐφαρμογῆς) νὰ τὰ συμπεριλάβωμεν εἰς ἕν, ποὺ τὸ ὀνομάζομεν ***γραμμὴν δράσεως*** τῆς δυνάμεως. Ἔτσι καὶ διὰ τὴν δύναμιν, ὅπως διὰ κάθε ἀνυσματικὸν μέγεθος, ἔχομεν οὐσιαστικῶς δύο καθοριστικὰ στοιχεῖα, ἤτοι τὴν **ἔντασιν** καὶ τὴν **γραμμὴν δράσεως**. Ὅπως κάθε ἄνυσμα, ἔτσι καὶ ἡ δύναμις k παριστάνεται μὲ εὐθύγραμμον τμῆμα (βλ. σχ 6). Τὸ μῆκος $\overline{OA}$ τούτου εἶναι ἀνάλογον πρὸς τὴν ἔντασιν. Ἡ φορὰ σημειώνεται μὲ βέλος, ποὺ γράφεται εἰς τὸ τέλος A τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος. Τέλος τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς σημειώνεται μὲ σημεῖον O, κείμενον ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς διευθύνσεως.

β) Κρεμῶμεν εἰς σπειροειδὲς ἐλατήριον (κοινὸ κανταράκι) τὸ βάρος **B** (σχ 21) τὸ ἐλατήριον τεντώνεται πρὸς τὰ κάτω, συρόμενον ἀπὸ τὸ βάρος B, καὶ τὴν ἐπιμήκυνσίν του τὴν δείχνει ὁ δείκτης **δ**, ποὺ μετακινεῖται μετὰ τοῦ κατωτέρου ἄκρου τοῦ ἐλατηρίου ἐνώπιον βαθμολογημένης κλίμακος **σσ**. Δι' ἕκαστον ὡρισμένον βάρος ἡ ἐπιμήκυνσις τοῦ ἐλατηρίου ἔχει μίαν ὡρισμένην τιμήν. Ἂν ξεκρεμάσωμεν τὸ βάρος, τὸ ἐλατήριον συσπειρώνεται καὶ ὁ δείκτης ἀνασύρεται μέχρι τῆς ὑποδιαιρέσεως 0 τῆς κλίμακος. Αἱ παρατηρήσεις αὐταὶ μαρτυροῦν, ὅτι κατὰ τὴν ἐπενέργειαν τῆς δυνάμεως k τοῦ βάρους, ἡ ὁποία τεντώνει τὸ ἐλατήριον, ἀναπτύσσεται εἰς αὐτὸ μία ἴση καὶ ἀντίθετος δύναμις k', ἡ ὁποία ἀντιτίθεται εἰς τὴν προκαλουμένην ὑπὸ τοῦ βάρους ἐπιμήκυνσιν. Ὅταν ὁ δείκτης σταματᾷ εἰς μίαν ὡρισμένην θέσιν, τοῦτο σημαίνει, ὅτι ἡ δύναμις k τοῦ βάρους ποὺ ἐνεργεῖ κατακορύφως πρὸς τὰ κάτω, ἐξουδετερώνεται ἀπὸ τὴν δύναμιν k' ποὺ ἀσκεῖ τὸ τεντωμένον ἐλατήριον μὲ φορὰν ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω. Αἱ δύο αὐταὶ δυνάμεις ἔχουν ἴσας ἐντάσεις, (K=K'), καὶ ἐνεργοῦν ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας (τῆς κατακορύφου) μὲ ἀκριβῶς ἀντιθέτους φοράς, (ἡ μία πρὸς τὰ κάτω, ἡ ἄλλη πρὸς τὰ ἄνω). Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέμε ὅτι αἱ δύο αὐταὶ δυνάμεις **εὑρίσκονται εἰς ἰσορροπίαν** ἢ **ἰσορροποῦν**. Ὅθεν : ***Διὰ νὰ ἰσορροποῦν δύο δυνάμεις, ποὺ ἐνεργοῦν ἐπὶ ἑνὸς σώματος, πρέπει νὰ ἐνεργοῦν ἐπὶ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας μὲ τὴν αὐτὴν ἔντασιν κατ' ἀντιθέτους φοράς***. Μὲ ἄλλα λόγια ***διὰ νὰ ἰσορροποῦν δύο δυνάμεις πρέπει νὰ εἶναι ἴσαι καὶ ἀντίθετοι***. Ἐὰν αἱ ἐνεργοῦσαι ἐπὶ σώματος δυνάμεις εἶναι περισσότεραι τῶν δύο, θὰ ἰσορροποῦν, ἐὰν ἑκάστη ἐξ αὐτῶν εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος τοῦ **ἀθροίσματος** ὅλων τῶν ἄλλων. Τὸ ἄθροισμα δύο ἢ περισσοτέρων δυνάμεων εἶναι μία δύναμις, ἡ ὁποία παράγει μόνη της τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα, ποὺ παράγουν ὅλαι μαζὶ αἱ προστιθέμεναι Τὸ ἄθροισμα δύο ἢ περισσοτέρων δυνάμεων τὸ λέμε **συνισταμένην** αὐτῶν· τὰς προστιθεμένας δυνάμεις τὰς λέμε **συνιστώσας** καὶ τὴν πρόσθεσιν αὐτῶν **σύνθεσιν** τῶν δυνάμεων.

Σχ. 21

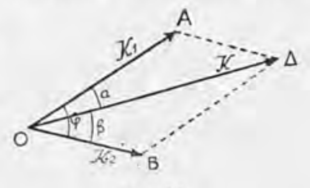
Σύμφωνα μὲ τὰ παραπάνω **πρὸς εὕρεσιν τῆς συνισταμένης** *δσωνδήποτε δυνάμεων, πρέπει νὰ εὕρωμεν μίαν μόνον δύναμιν ποὺ ἰσορροπεῖ ὅλας τὰς δοθείσας, καὶ νὰ λάβωμεν τὴν ἴσην καὶ ἀντίθετον αὐτῆς,* δηλαδὴ *τὴν ἐνεργοῦσαν ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας μὲ τὴν αὐτὴν ἔντασιν καὶ ἀντίθετον φοράν.*

§ 22. Σύνθεσις δυνάμεων ποὺ ἔχουν συγκλινούσας διευθύνσεις. *α) Παραλληλόγραμμον δυνάμεων.* Προσδένομεν τὸ ἓν ἄκρον ἑκάστου τριῶν νημάτων εἰς μικρὸν δακτύλιον (σχ 22). Τὸ ἄλλο ἄκρον ἑκάστου τῶν νημάτων τὸ δένομεν εἰς τὸ ἄγκιστρον δυναμομέτρου, ὅπως εἶναι ἕνα κοινὸ κανταράκι μὲ ἐλατήριον. Στερεώνομεν κατόπιν τὸν δακτύλιον, ἀπὸ τὸν ὁποῖον ἐξαρτᾶται τὸ κανταράκι, εἰς καρφίον (τὸν πρῶτον εἰς τὸ Α, τὸν δεύτερον εἰς τὸ Β καὶ τὸν τρίτον εἰς τὸ Γ), ποὺ ἔχομεν ἐμπήξει ἐπὶ ὁριζοντίας τραπέζης, ὅπως ὑποδηλώνεται εἰς τὸ σχ. 22. Τὰ σημεῖα Α, Β, Γ τῆς τραπέζης μπορεῖ νὰ εἶναι ὁποιαδήποτε, ἀρκεῖ νὰ μὴ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας καὶ νὰ εὑρίσκωνται τόσον μακράν, ὥστε νὰ χρειασθῆ νὰ τεντώνωνται τὰ ἐλατήρια τῶν δυναμομέτρων (ἄλλο περισσότερον καὶ ἄλλο ὀλιγώτερον), διὰ νὰ φέρωμεν καὶ στερεώσωμεν εἰς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν τὸν δακτύλιον ἐξαρτήσεως τοῦ δυναμομέτρου. Ὅταν ἰσορροπήσῃ τὸ σύστημα, παρατηροῦμεν τὰς ἐνδείξεις τῶν τριῶν δυναμομέτρων, αἱ ὁποῖαι μᾶς παρέχουν τὰς ἐντάσεις τῶν τριῶν δυνάμεων k_1, k_2, k_3, ποὺ ἰσορροποῦν. Φέρομεν κάτω ἀπὸ τὰ τεντωμένα τρία νήματα φύλλον χάρτου, καὶ χαράσσομεν ἐπ' αὐτοῦ τρεῖς εὐθείας, τὰς Οα, Οβ, Ογ, μὲ διευθύνσεις καὶ φορὰς ἀντιστοίχους πρὸς τὰς διευθύνσεις καὶ φορὰς τῶν νημάτων ἀπὸ τοῦ δακτυλίου Ο πρὸς τὰ σημεῖα Α, Β καὶ Γ. Εἰς τὰς εὐθείας αὐτὰς λαμβάνομεν μήκη ἀνάλογα τῶν ἐντάσεων τῶν δυνάμεων, ποὺ παρέχουν ἀντιστοίχως τὰ κανταράκια. Ἔτσι κάθε μία τῶν εὐθειῶν Οα, Οβ, Ογ, παρέχει ἀντιστοίχως τὸ ἄνυσμα ἑκάστης τῶν δυνάμεων k_1, k_2, k_3. Ὅταν τὸ σύστημα ἰσορροπῆ, εὑρίσκομεν ὅτι ἑκάστη τῶν τριῶν εὐθειῶν Οα, Οβ καὶ Ογ εἶναι ἀκριβῶς ἴση καὶ ἀντίθετος τῆς διαγωνίου τοῦ παραλληλογράμμου, ποὺ κατασκευάζεται μὲ προσκειμένας πλευρὰς τὰς ἄλλας δύο. Ἐπομένως ἡ διαγώνιος τοῦ παραλληλογράμμου παρέχει τὴν συνισταμένην τῶν δύο ἐκ τῶν δυνάμεων k_1, k_2, k_3, ἀφοῦ αὐτὴ μόνη της φέρει τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα ποὺ φέρουν καὶ αἱ δύο ἄλλαι μαζί. (Ἰσορροπεῖ καὶ αὐτὴ ὡς ἴση καὶ ἀντίθετος τὴν τρίτην τῶν δυνάμεων k_1, k_2, k_3). Ἐκ τούτων συνάγομεν ὅτι : ***Ἡ συνι-***



Σχ. 22

σταμένη δύο δυνάμεων, πού ἔχουν κοινὸν σημεῖον ἐφαρμογῆς καὶ τυχούσας διευθύνσεις, παρέχεται κατ' ἔντασιν, διεύθυνσιν καὶ φορὰν ἀπὸ τὴν διαγώνιον τοῦ παραλληλογράμμου, ποὺ κατασκευάζεται μὲ προσκειμένας πλευρὰς τὰ ἀνύσματα τῶν δύο συνιστωσῶν. Τὴν πρότασιν αὐτὴν τὴν λέμε *κανόνα τοῦ παραλληλογράμμου.* Σύμφωνα μὲ οὐτὸν ἡ ἔντασις (ἀριθμητικὴ τιμή) K τῆς συνισταμένης προκύπτει ἐκ τῶν ἐντάσεων K_1, K_2 τῶν συνιστωσῶν, ἂν εἶναι φ ἡ γωνία ποὺ σχηματίζουν αἱ διευθύνσεις καὶ φοραί των (σχ. 23), σύμφωνα μὲ τὸν τύπον:

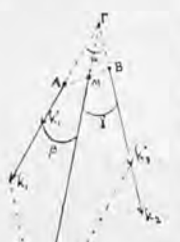


Σχ. 23

$$K = \sqrt{K_1^2 + K_2^2 + 2K_1K_2\text{συν}\varphi} \qquad (21)$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν ποὺ αἱ διευθύνσεις καὶ φοραὶ τῶν συνιστωσῶν συμπίπτουν, $\varphi = 0$, θὰ εἶναι $\text{συν}\varphi = 1$ καὶ ἑπομένως: $K = K_1 + K_2$, ἤτοι ἡ ἔντασις τῆς συνισταμένης εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐντάσεων τῶν συνιστωσῶν. Ἂν αἱ συνιστῶσαι ἔχουν τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν ἀλλὰ *φορὰς ἀντιθέτους*, ($\varphi = 180°$), θὰ εἶναι: $\text{συν}\varphi = -1$ καὶ ἑπομένως: $K = \sqrt{K_1^2 + K_2^2 - 2K_1K_2} = K_1 - K_2$, ἤτοι:

Ἡ συνισταμένη δύο δυνάμεων ποὺ ἐνεργοῦν ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας κατ' ἀντιθέτους φοράς, ἔχει ἔντασιν ἴσην μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ἐντάσεων τῶν συνιστωσῶν καὶ φορὰν τὴν τῆς μεγαλυτέρας ἐξ αὐτῶν.



Σχ. 24

Ἡ διεύθυνσις καὶ φορὰ τῆς συνισταμένης k δύο δυνάμεων k_1 καὶ k_2, τῶν ὁποίων αἱ διευθύνσεις σχηματίζουν γωνίαν φ, παρέχεται ἀπὸ τὴν γωνίαν α ἢ τὴν γωνίαν β, τὴν ὁποίαν σχηματίζει μὲ τὴν διεύθυνσιν καὶ φορὰν τῆς k_1 ἢ τῆς k_2. Ἐκ τῶν τριγωνομετρικῶν σχέσεων, ποὺ προκύπτουν ἐκ τοῦ σχ. 23, αἱ γωνίαι α καὶ β εὑρίσκονται ἀπὸ τὰς σχέσεις:

$$\text{ημ}\alpha = K_2\text{ημ}\varphi/K \quad \text{καὶ} \quad \text{ημ}\beta = K_1\text{ημ}\varphi/K \qquad (22)$$

Ἂν αἱ δοθεῖσαι δυνάμεις k_1 καὶ k_2 (σχ. 24) ἐνεργοῦν εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β, ποὺ δὲν συμπίπτουν, τὰς θεωροῦμεν μετακινουμένας, ἑκάστην ἐπὶ τῆς γραμμῆς δράσεώς της, μέχρις ὅτου συναντηθοῦν εἰς ἓν σημεῖον Γ. Τότε, χωρὶς νὰ ἀλλάξῃ τὸ ἀποτέλεσμα τῶν δυνάμεων, ἀποκτοῦν αὗται κοινὸν σημεῖον ἐφαρμογῆς. Ἔτσι εὑρίσκομεν τὴν συνισταμένην k' τῶν δυνάμεων k_1' καὶ k_2' ποὺ ἐπιφέρουν τὸ αὐτὸ καθ' ὅλα ἀποτέλεσμα μὲ τὰς δοθείσας k_1 καὶ k_2. Τὴν συνισταμένην k' μποροῦμε πάλι νὰ τὴν θεωρήσωμεν μετακινουμένην ἐπὶ τῆς γραμμῆς δράσεώς της, μέχρις ὅτου τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς της ἔλθη ἐπὶ τῆς γραμμῆς ΑΒ, ποὺ ἑνώνει τὰ σημεῖα ἐφαρμογῆς τῶν συνιστωσῶν. Ἔτσι ἡ συνισταμένη τῶν δύο δυνάμεων k_1 καὶ k_2 δίδεται ἀπὸ τὴν ΜΚ.

β) Ἀνάλυσις δυνάμεως. Ὁ κανὼν τοῦ παραλληλογράμμου μπορεῖ νὰ χρησιμεύσῃ ἀντιστρόφως, ὅταν ζητῆται νὰ ἀντικατασταθῇ μία δύναμις k ἀπὸ δύο ἄλλας k_1 καὶ k_2, αἱ ὁποῖαι νὰ παράγουν τὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα. Τὴν ἀντικατάστασιν μιᾶς δυνάμεως ἀπὸ δύο ἢ περισσοτέρας ἄλλας, τὴν λέμε ***ἀνάλυσιν τῆς ἀντικαθισταμένης δυνάμεως***. Αἱ ἐντάσεις τῶν συνιστωσῶν προκύπτουν τώρα ἀπὸ τὴν ἔντασιν Κ τῆς ἀναλυομένης καὶ τὰς γωνίας α, β, ποὺ σχηματίζει ἡ διεύθυνσίς της μὲ τὰς διευθύνσεις ἑκάστης τῶν συνιστωσῶν k_1, k_2, εἰς τὰς ὁποίας ἀναλύεται. Ἔτσι ἀπὸ τὰ τρίγωνα εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται τὸ παραλληλόγραμμον ΟΑΔΒ (σχ. 23) ποὺ προκύπτει, ὅταν ἀπὸ τὸ πέρας Δ τοῦ ἀνύσματος ΟΚ φέρωμεν παραλλήλους πρὸς τὰς διδομένας διευθύνσεις τῶν ζητουμένων συνιστωσῶν (καθοριζομένας ἀπὸ τὰς γωνίας α, β καὶ φ=α+β), εὑρίσκομεν:

$$K_1 = \frac{K\,.\,\eta\mu\beta}{\eta\mu(\alpha+\beta)} = \frac{K\,\eta\mu(\varphi-\alpha)}{\eta\mu\varphi} \text{ καὶ } K_2 = \frac{K\,.\,\eta\mu\alpha}{\eta\mu(\alpha+\beta)} = \frac{K.\eta\mu(\varphi-\beta)}{\eta\mu\varphi} \quad (21')$$

γ) Πολύγωνον δυνάμεων. Ἂν ἀπὸ κοινὸν σημεῖον ἐφαρμογῆς Α (σχ. 25) ἐνεργοῦν περισσότεραι δυνάμεις $k_1, k_2, k_3, \ldots$, εὑρίσκο-

Σχ. 25 α

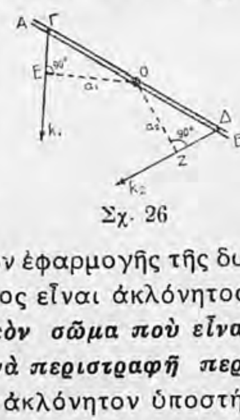
Σχ. 25 β

μεν τὴν συνισταμένην των k, συνθέτοντες δύο ἐξ αὐτῶν—τὰς k_1, k_2—κατὰ τὸν κανόνα τοῦ παραλληλογράμμου. Τὴν συνισταμένην αὐτῶν $k_{1,2}$ παρεχομένην ἀπὸ τὴν διαγώνιον ΑΖ, τὴν συνθέτομεν μὲ τὴν τρίτην τῶν δοθεισῶν — τὴν k_3 — καὶ τὴν νέαν συνισταμένην $k_{1,2,3}$ μὲ τετάρτην κ.ο.κ., μέχρις ὅτου λάβωμεν ὅλας τὰς δοθείσας συνιστώσας καθ' οἱανδήποτε σειράν. Ἡ συνισταμένη k, ποὺ θὰ λάβωμεν τελικῶς, εἶναι συνισταμένη τοῦ συστήματος τῶν δυνάμεων ποὺ ἐδόθησαν

Εἶναι πρόδηλον, ὅτι καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν συνθέσεως περισσοτέρων δυνάμεων, γίνεται ὅπως εἰς περίπτωσιν ἀθροίσματος πολλῶν προσθετέων, ὅπου προσθέτομεν τὸν πρῶτον μὲ τὸν δεύτερον, εἰς τὸ εὑρεθὲν ἄθροισμα τὸν τρίτον, εἰς τὸ νέον ἄθροισμα τὸν τέταρτον κ.ο.κ. μέχρις ὅτου ληφθοῦν ὅλοι οἱ προσθετέοι. Καὶ ὅπως εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν πολλῶν προσθετέων, τὸ ἄθροισμα εἶναι τὸ αὐτὸ καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν λάβωμεν τοὺς προσθετέους, ἔτσι καὶ εἰς τὴν σύνθεσιν περισσοτέρων δυνάμεων.

Ὅπως φαίνεται ἐκ τοῦ σχήματος 25β, ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων k_1, k_2, k_3, . . . , εὑρίσκεται ἁπλούστερα, ἂν ἀπὸ τὸ τέλος Β τοῦ ἀνύσματος ΑΒ ποὺ παριστάνει τὴν πρώτην, φέρωμεν εὐθύγραμμον τμῆμα ΒΖ ἴσον καὶ παράλληλον πρὸς τὸ ἄνυσμα ΑΓ ποὺ παριστάνει τὴν δευτέραν, ἀπὸ τὸ τέλος αὐτοῦ Ζ φέρωμεν ἔπειτα τμῆμα εὐθύγραμμον ΖΘ ἴσον καὶ παράλληλον πρὸς τὸ ἄνυσμα ΑΔ τῆς τρίτης κ.ο.κ. Ἂν ἑνώσωμεν τὴν ἀφετηρίαν Α (κοινὸν σημεῖον ἐφαρμογῆς τῶν συνιστωσῶν) μὲ τὸ τέλος Η τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΘΗ, ποὺ ἐφέραμεν ἴσον καὶ παράλληλον πρὸς τὸ ἄνυσμα ΑΕ, ποὺ παριστάνει τὴν δύναμιν, τὴν ὁποίαν ἐλάβαμεν τελευταίαν, ἔχομεν τὸ ἄνυσμα ΑΗ, ποὺ παριστάνει τὴν συνισταμένην k τῶν δυνάμεων, τὰς ὁποίας εἴχαμε νὰ συνθέσωμεν. Μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν τῆς συνθέσεως σχηματίζεται πολύγωνον, ποὺ τὸ λέμε ***πολύγωνον δυνάμεων***.

§ 23. Ἰσορροπία μοχλοῦ. ***Ροπὴ περιστροφῆς***. Κρεμῶμεν ἄκαμπτον καὶ ἐλαφρὸν χάρακα ΑΒ (σχ.26), (εἰς τὸ μέσον τοῦ ὁποίου ἔχομεν ἀνοίξει ὀπὴν Ο), εἰς καρφίον ποὺ διέρχεται ἐλευθέρως διὰ τῆς ὀπῆς. Ἔτσι ἡ μόνη κίνησις ποὺ μπορεῖ νὰ κάνῃ ἡ ράβδος αὐτή, εἶναι περιστροφὴ γύρω ἀπὸ τὸ καρφίον, ὡς ἀκλόνητον ἄξονα. Διὰ τὴν μοναδικῶς δυνατὴν αὐτὴν κίνησιν τῆς ράβδου πρέπει νὰ ἐνεργήσῃ δύναμις, τῆς ὁποίας ἡ γραμμὴ δράσεως νὰ ***μὴ*** διέρχεται διὰ τοῦ ἄξονος,



Σχ. 26

διότι, ἂν συμβαίνῃ τοῦτο, θὰ εἶναι ὡς ἐὰν τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως εὑρίσκετο ἐπὶ τοῦ ἄξονος καί, ἐπειδὴ οὗτος εἶναι ἀκλόνητος, δὲν μπορεῖ καὶ αὐτὸ νὰ μετακινηθῇ. ***Κάθε στερεὸν σῶμα ποὺ εἶναι δεσμευμένον κατὰ τρόπον ὥστε νὰ μπορῇ μόνον νὰ περιστραφῇ περὶ ἀκλόνητον ἄξονα, τὸ ὀνομάζομεν μοχλόν***. Τὸ ἀκλόνητον ὑποστήριγμα ***(ἄξονα περιστροφῆς)***, περὶ τὸ ὁποῖον μπορεῖ νὰ περιστραφῇ ὁ μοχλός, τὸ λέμε ***ὑπομόχλιον***.

Ἐφαρμόζομεν εἰς δύο σημεῖα Γ καὶ Δ τοῦ μοχλοῦ τὰς δυνάμεις k_1 καὶ k_2· (πρὸς τοῦτο γαντζώνομεν εἰς καθὲν ἀπὸ τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ δυναμόμετρον (κανταράκι), εἰς τρόπον ὥστε νὰ ἔχωμεν ἀμέσως ἀπὸ τὰς ἐνδείξεις τῶν δυναμομέτρων τὰ χαρακτηριστικὰ τῶν δυνάμεων k_1, k_2). Ἂν ἡ στροφή, ποὺ μόνη της θὰ προσέδιδε εἰς τὸν μοχλὸν ἡ μία δύναμις, εἶναι ἀντιθέτου φορᾶς (ἀντίρροπος) ἀπὸ ἐκείνην ποὺ θὰ προσέδιδε ἡ ἄλλη, εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ ἀποτέλεσμα τῆς μιᾶς ἐξουδετερώνεται ἀπὸ τὸ τῆς ἄλλης καὶ συνεπῶς ὁ μοχλὸς παραμένει εἰς ἰσορροπίαν, ἂν συμβαίνῃ νὰ εἶναι :

$$K_1 \cdot \alpha_1 = K_2\, \alpha_2 \quad \text{ἢ} \quad K_1 : K_2 = \alpha_2 : \alpha_1 \tag{23}$$

(ὅπου K_1 καὶ K_2 παριστάνουν τὰς ἐντάσεις τῶν δυνάμεων καὶ $\alpha_1 = OE$, $\alpha_2 = OZ$ τὰς ἀποστάσεις τοῦ ὑπομοχλίου ἀπὸ ἑκάστην τῶν γραμμῶν δράσεως. Τὰς ἀποστάσεις α_1, α_2 τοῦ ὑπομοχλίου ἀπὸ τὰς γραμμὰς δράσεως τῶν δυνάμεων τὰς ὀνομάζομεν ***μοχλοβραχίονας*** τῶν δυνάμεων· καὶ ἔτσι ἡ συνθήκη ἰσορροπίας μοχλοῦ ἐκφράζεται ὡς ἑξῆς : ***Εἰς κάθε μοχλὸν ὑφίσταται ἰσορροπία, ἂν ἐπ' αὐτοῦ ἐνεργοῦν δύο δυνάμεις, ἑκάστη τῶν ὁποίων τείνει νὰ προσδώσῃ στροφὴν ἀντίρροπον τῆς στροφῆς τῆς ἄλλης καὶ ἐφόσον αἱ ἐντάσεις τῶν δυνάμεων ἔχουν λόγον ἀντίστροφον τοῦ λόγου τῶν ἀντιστοίχων μοχλοβραχιόνων.***

Τὸ γινόμενον $K \cdot \alpha$ τῆς ἐντάσεως δυνάμεως ἐπὶ τὸν μοχλοβραχίονά της, (ἤτοι τὴν ἀπόστασιν $AB = \alpha$ (σχ. 27) τοῦ ἄξονος περιστροφῆς Α ἀπὸ τὴν γραμμὴν δράσεως τῆς δυνάμεως), τὸ λέμε ***ροπὴν περιστροφῆς*** τῆς δυνάμεως, καὶ τὸ παριστάνομεν μὲ τὸ γράμμα P. Ἡ ***ροπὴ περιστροφῆς*** εἶναι μέγεθος ἀνυσματικόν, ἀφοῦ χαρακτηρίζεται ὄχι μόνον ἀπὸ τὴν ἀριθμητικήν της τιμήν, ἀλλὰ καὶ ἀπὸ τὴν διεύθυνσιν καὶ φοράν, καθόσον μπορεῖ νὰ εἶναι δεξιόστροφος (ἂν ἡ στροφὴ γίνεται κατὰ τὴν φορὰν τῶν δεικτῶν ὡρολογίου) ἢ ἀριστερόστροφος.

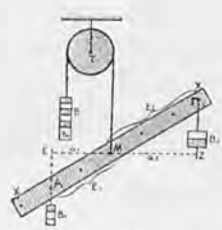
Σχ. 27

Τὸ ὅτι ἡ ροπὴ περιστροφῆς εἶναι ἀνυσματικὸν μέγεθος γίνεται κατανοητόν, ἂν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι ἀποτελεῖ τὸ ἐξωτερικὸν (ἀνυσματικὸν) γινόμενον δύο ἀνυσμάτων, ἤτοι τῆς δυνάμεως k (σχ. 27) ἐπὶ τὸ ἄνυσμα $r = OA$, ποὺ παρέχει τὴν ἀπόστασιν, ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως μέχρι τοῦ ἄξονος Α. Πράγματι, σύμφωνα μὲ ὅ,τι εἴπαμε εἰς τὴν § 5, δ, ἂν σχηματίσωμεν τὸ ἐξωτερικὸν γινόμενον τῶν ρηθέντων ἀνυσμάτων, θὰ ἔχωμεν : $[K \cdot r] = K \cdot r\, \eta\mu\varphi = K(AB) = K \cdot \alpha$, δηλαδὴ τὴν ροπὴν περιστροφῆς τῆς δυνάμεως, ὅπως τὴν ὡρίσαμεν παραπάνω.

Πρὸς μέτρησιν τῆς ροπῆς περιστροφῆς λαμβάνεται ὡς μονὰς εἰς τὸ σύστημα cgs τὸ ***δυνοεκατοστόμετρον*** (1 dyncm), τ. ἔ. ***ἡ ροπὴ περιστροφῆς δυνάμεως 1 δύνης ὡς πρὸς ἄξονα, ποὺ ἀπέχει 1 ἑκατοστόμετρον ἀπὸ τὴν γραμμὴν δράσεως τῆς δυνάμεως.*** Μὲ τὴν ἔννοιαν τῆς ροπῆς περιστροφῆς P ὁ νόμος ἰσορροπίας μοχλοῦ μπορεῖ νὰ διατυπωθῇ καὶ ὡς ἑξῆς : ***Ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν δύο δυνάμεων ποὺ ἐνεργοῦν εἰς διάφορα σημεῖα μοχλοῦ, ὁ μοχλὸς παραμένει εἰς ἰσορροπίαν, ἂν ἡ ροπὴ τῆς μιᾶς ἐκ τῶν δυνάμεων τούτων ὡς πρὸς τὸ ὑπομόχλιον, εἶναι ἴση καὶ ἀντίρροπος τῆς ροπῆς τῆς ἄλλης.***

Πρὸς κατανόησιν τοῦ ἐξαγομένου τούτου, ποὺ ἐπαληθεύεται πειραματικῶς, θεωροῦμεν σῶμα στρεπτὸν περὶ ἄξονα Α (σχ. 28), εἰς δύο σημεῖα (E, Z) τοῦ ὁποίου ἐφαρμόζονται αἱ δυνάμεις k_1 καὶ k_2. Μετακινοῦμεν τὰ σημεῖα ἐφαρμογῆς τῶν δυνάμεων τούτων, ἑκαστον ἐπὶ τῆς γραμμῆς δράσεως τῆς δυνάμεως εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει, μέχρις ὅτου ἔλθουν ἀμφότερα εἰς τὸ κοινὸν σημεῖον Ο τῆς τομῆς τῶν γραμμῶν δράσεως τῶν δύο δυνάμεων. Εἰς τὴν θέσιν αὐτὴν εὑρίσκομεν τὴν συνισταμένην k τῶν δύο δυνάμεων κατὰ τὸν κανόνα τοῦ παραλληλογράμμου. Ἂν ἡ γραμμὴ δράσεως τῆς συνισταμένης k διέρχεται διὰ τοῦ ἀκλονήτου ἄξονος Α, μποροῦμε νὰ θεωρήσωμεν τοῦτον ὡς σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς k. Εἰς τὴν περίπτωσιν ὅμως αὐτὴν ἡ συνισταμένη k ἐξουδετερώνεται ὑπὸ τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἀκλονήτου ἄξονος. Συνεπῶς, τὸ στρεπτὸν περὶ τὸν ἄξονα Α σῶμα (ὁ μοχλὸς) παραμένει εἰς ἰσορροπίαν ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς k δηλ. τῶν δυνάμεων k_1 καὶ k_2. Ἀλλά, διὰ νὰ διέρχεται ἡ γραμμὴ δράσεως τῆς συνισταμένης τῶν δυνάμεων k_1 καὶ k_2 διὰ τοῦ ἄξονος πε-

Σχ. 28



Σχ. 29

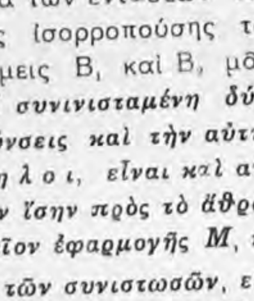
ριστροφῆς, πρέπει (ὡς προκύπτει ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων, εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται τὸ παραλληλόγραμμον) νὰ εἶναι $K_1.\alpha_1 = K_2.\alpha_2$· ἐξ ἄλλου ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα προκύπτει $\alpha_1/\alpha_1' = \alpha_2/\alpha_2'$ καὶ ἑπομένως εἶναι: $K_1.\alpha_1 = K_2.\alpha_2$, ἤτοι ὁ μοχλὸς ἰσορροπεῖ ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν τῶν δυνάμεων k_1 καὶ k_2, ἂν ἡ ἀριστερόστροφος ῥοπὴ τῆς k_1 εἶναι κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ἴση μὲ τὴν δεξιόστροφον ῥοπὴν τῆς k_2.

§ 24. Σύνθεσις δυνάμεων μὲ παραλλήλους διευθύνσεις.

α) Δυνάμεις τῆς αὐτῆς φορᾶς (ὁμοπαράλληλοι) Κρεμῶμεν ἕνα χάρακα ἀπὸ τὸ μέσον του Μ (σχ. 29) προσδένοντες τοῦτο εἰς τὸ ἄκρον νήματος, τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τῆς αὔλακος παγίας τροχαλίας Τ καὶ φέρει εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον του βάρος B_0 ποὺ ἰσορροπεῖ ἀκριβῶς τὸ βάρος τοῦ χάρακος. Ἂν εἰς τὴν συσκευὴν ταύτην κρεμάσωμεν ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Γ τοῦ χάρακος τὰ βάρη B_1 καὶ B_2 τοιαῦτα, ὥστε ὁ λόγος των $B_1 : B_2$ νὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἀντίστροφον λόγον τῶν ἀποστάσεων $ME = \alpha_1$ καὶ $MZ = \alpha_2$, (ὥστε νὰ εἶναι $B_1 : B_2 = \alpha_2 : \alpha_1$), εὑρίσκομεν ὅτι ἐπιφέρομεν ἰσορροπίαν, ἂν εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον τοῦ νήματος ἐξαρτήσεως κρεμάσωμεν ἐπὶ πλέον τοῦ B_0 βάρος Β ἴσον μὲ $B_1 + B_2$. Ἡ πειραματικὴ αὐτὴ διαπίστωσις μᾶς λέει, ὅτι αἱ δύο δυνάμεις B_1 καὶ B_2, ποὺ ἔχουν διευθύνσεις παραλλήλους (διευθύνονται καὶ αἱ δύο κατακορύφως) καὶ εἶναι τῆς αὐτῆς φορᾶς (καὶ αἱ δύο ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω), ἰσορροποῦνται ἀπὸ μίαν καὶ μόνην δύναμιν ποὺ εἶναι τῆς αὐτῆς διευθύνσεως (ἔχει καὶ αὐτὴ τὴν διεύθυνσιν τῆς κατακορύφου) καὶ ἔχει φορὰν ἀντίθετον τῶν συνιστωσῶν (ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω)· (ἡ δύναμις αὐτὴ διὰ τῆς παγίας τροχαλίας ἰσορροπεῖται μὲ τὴν σειράν της ἀπὸ τὴν ἴσην καὶ ἀντίθετον δύναμιν Β). Ἡ ἔντασις τῆς δυνάμεως ταύτης εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐντάσεων τῶν συνιστωσῶν (B_1+B_2). Ἡ ἴση καὶ ἀντίθετος τῆς ἰσορροπούσης τὰς δύο παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους δυνάμεις B_1 καὶ B_2 μᾶς δίδει τὴν συνισταμένην αὐτῶν. Ἐπομένως :

Ἡ συνισταμένη δύο δυνάμεων ποὺ ἔχουν παραλλήλους διευθύνσεις καὶ τὴν αὐτὴν φορὰν ἤ, ὅπως λέμε, εἶναι ὁμοπαράλληλοι, εἶναι καὶ αὐτὴ ὁμοπαράλληλος τῶν συνιστωσῶν, ἔχει ἔντασιν ἴσην πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐντάσεων τῶν συνιστωσῶν καὶ σημεῖον ἐφαρμογῆς Μ, κείμενον μεταξὺ τῶν σημείων ἐφαρμογῆς Α καὶ Γ τῶν συνιστωσῶν, εἰς θέσιν ὥστε νὰ χωρίζῃ τὴν εὐθεῖαν $\overline{ΑΓ}$ εἰς τμήματα, ἔχοντα λόγον ἀντίστροφον τοῦ λόγου τῶν ἐντάσεων τῶν ἀντιστοίχων δυνάμεων.

Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ ἐκεῖνο ποὺ ἔχομεν εἰς τὴν γενικωτέραν περίπτωσιν τῆς ἰσορροπίας μοχλοῦ. Εἰς τὴν προκειμένην εἰδικὴν περίπτωσιν αἱ δυνάμεις εἶναι παράλληλοι, καὶ τοῦτο ἁπλουστεύει περισσότερον τὸν νόμον τῆς ἰσορροπίας μοχλοῦ, διότι τώρα, ἀντὶ τοῦ λόγου τῶν ἀποστάσεων α_1 καὶ α_2 τοῦ ἄξονος (ὑπομοχλίου) ἀπὸ τὰς γραμμὰς δράσεως τῶν δυνάμεων, λαμβάνομεν τὸν ἴσον λόγον τῶν ἀποστάσεων τοῦ ἄξονος ἀπὸ τὰ σημεῖα ἐφαρμογῆς τῶν δυνάμεων.



Σχ. 30

Τὸ ὅτι ἡ περίπτωσις παραλλήλων δυνάμεων μπορεῖ νὰ ἀναχθῇ εἰς τὴν γενικωτέραν περίπτωσιν τοῦ νόμου ἰσορροπίας μοχλοῦ, καθίσταται εὐεξήγητον, ἂν θεωρήσωμεν εἰς τὰ σημεῖα ἐφαρμογῆς A_1, A_2 τῶν παραλλήλων δυνάμεων k_1, k_2 (σχ. 30) καὶ κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς $\overline{A_1A_2}$ ἐφηρμοσμένας τὰς ἴσας καὶ ἀντιθέτους δυνάμεις $\overrightarrow{A_1Z_1}$ καὶ $\overrightarrow{A_2Z_2}$, ἡ παρουσία τῶν ὁποίων κατ' οὐδὲν μεταβάλλει τὴν ἰσορροπίαν τοῦ συστήματος. Ἀλλὰ τὸ νέον ἰσοδύναμον σύστημα θὰ ὑφίσταται εἰς τὰ σημεῖα A_1 καὶ A_2 τὴν ἐπίδρασιν τῶν δυνάμεων Σ_1' καὶ Σ_2' (προερχομένων ἐκ συνθέσεως τῆς k_1 μὲ τὴν A_1Z_1 καὶ τῆς k_2 μὲ τὴν A_2Z_2'), αἱ ὁποῖαι δὲν εἶναι πλέον παράλληλοι καὶ ὑπάγονται εἰς τὴν γενικωτέραν περίπτωσιν, ποὺ ἐξητάσαμεν εἰς τὴν ἰσορροπίαν μοχλοῦ. Ὅπως φαίνεται ἐκ τοῦ σχήματος εἶναι εὔκολον νὰ ἀποδειχθῇ ἀπὸ τὴν σύνθεσιν τῶν Σ_1 καὶ Σ_2, ὅτι ἡ συνισταμένη των Σ (ποὺ εἶναι καὶ συνισταμένη τῶν K_1 καὶ K_2), εὑρισκομένη σύμφωνα μὲ τὰ περὶ συνθέσεως δύο δυνάμεων, ποὺ ἔχουν διάφορα σημεῖα ἐφαρμογῆς καὶ διευθύνσεις συγκλινούσας, καθορίζεται ἀπὸ τὰ χαρακτηριστικὰ ποὺ ἐδόθησαν παραπάνω.

Ἂν αἱ ὁμοπαράλληλοι δυνάμεις εἶναι περισσότεραι τῶν δύο, συνθέτομεν κατὰ τὰ ἀνωτέρω δύο ἐξ αὐτῶν καθ' οἱανδήποτε σειρὰν π.χ. τὰς k_1 καὶ k_2 (σχ. 31), τὴν συνισταμένην αὐτῶν $k_{1,2}$ τὴν συνθέτομεν μὲ ἄλλην, π.χ. τὴν k_3 κ.ο.κ., μέχρις ὅτου λάβωμεν ὅλας τὰς συνιστώσας. Ἡ τελευταία συνισταμένη $k_{1,2,3...}$ εἶναι συνισταμένη τοῦ συστήματος ὅλων τῶν δοθεισῶν ὁμοπαραλλήλων δυνάμεων.

β) Δυνάμεις μὲ διευθύνσεις παραλλήλους καὶ φορὰς ἀντιρρόπους (ἀντιπαράλληλοι). Ἂν εἰς τὸ σύστημα ἰσορροπημένων παραλλήλων δυνάμεων, ποὺ παριστάνει τὸ σχ.29, θεωρήσωμεν ὡς συνιστώσας τὴν B_1 καὶ τὴν πρὸς τὴν τροχαλίαν φερομένην B, θὰ ἔχωμεν δύο δυνάμεις μὲ διευθύνσεις παραλλήλους καὶ ἀντιρρόπους ἤ, ὅπως συντόμως λέμε, δύο ***ἀντιπαραλλήλους*** δυνάμεις. Ἐκ τῆς ἰσορροπίας τοῦ συστήματος προκύπτει, ὅτι ἡ συνισταμένη τούτων θὰ εἶναι ἀκριβῶς ἴση καὶ ἀντίθετος τῆς B_2. Ἑπομένως εἰς τὴν περίπτωσιν δύο ἀντιπαραλλήλων δυνάμεων B καὶ B_1 ***ἡ συνισταμένη ἔχει ἔντασιν B_2 ($=B-B_1$) ἴσην μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ἐντάσεων τῶν συνιστωσῶν, εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς συνιστώσας καὶ ἔχει φορὰν τὴν τῆς μεγαλυτέρας τῶν συνιστωσῶν. Τὸ σημεῖον A ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης k τῶν ἀντιπαραλλήλων δυνάμεων k_1, k_3 (σχ 32) εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως (πρὸς τὰ πέραν τῆς μεγαλυτέρας συνιστώσης) τῆς εὐθείας ποὺ ἑνώνει τὰ σημεῖα A_1, A_2 ἐφαρμογῆς τῶν συνιστωσῶν, εἰς θέσιν A, ὥστε νὰ ἀπέχῃ ἀπὸ τὰ σημεῖα ἐφαρμογῆς τῶν συνιστωσῶν ἀποστάσεις AA_1 καὶ AA_2, ποὺ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ἐντάσεων τῶν ἀντιστοίχων δυνάμεων***· ἤτοι: $(AA_1):(AA_2)=K_3:K_1$ (23′)

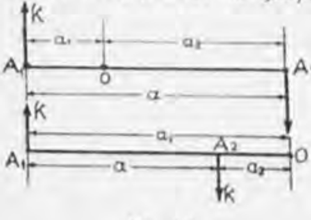
Σχ. 31

Σχ. 32

Ἡ σχέσις αὐτὴ προκύπτει εὐκόλως ἀπὸ ἐκείνην, ποὺ εὑρέθη ὅτι ἰσχύει εἰς ὁμοπαραλλήλους δυνάμεις. Πράγματι, εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν ὁμοπαραλλήλων δυνάμεων k καὶ k_3 ($K_2=K_3$) (σχ.32) εἴδομεν ὅτι τὸ σημεῖον A_1 ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης εὑρίσκεται εἰς θέσιν ὥστε νὰ εἶναι: $(AA_1):(A_1A_2)=K_2:K=K_3:K$. Ἀπὸ τὴν ἀναλογίαν αὐτὴν προκύπτει $(AA_1):[(A_1A_2)+(AA_1)]=K_3:(K_1+K_3)$ ἢ $(AA_1):(AA_2)=K_3:K_1$. (23″)

γ) Ζεῦγος δυνάμεων. Ἀπὸ τὴν σχέσιν $(AA_1):(AA_2)=K_3:K_1$ ἢ $(AA_2):(AA_1)=K_1:K_3$ λαμβάνομεν τήν $(AA_2):[(AA_1)-(AA_2)]=K_1:(K_3-K_1)$ ἢ $(AA_2)=(A_1A_2)K_1:(K_3-K_1)$. Ὅταν αἱ ἐντάσεις K_3 καὶ K_1 τείνουν νὰ γίνουν ἴσαι, ἡ διαφορὰ αὐτῶν ($K_2 - K_1$) τείνει πρὸς τὸ μηδέν, καὶ ἡ ἀπόστασις (AA_1) τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης τείνει νὰ γίνῃ ἄπειρος. Εἰς τὴν περίπτωσιν λοιπὸν δύο ἴσων καὶ ἀντιπαραλλήλων δυνάμεων δὲν ὑπάρχει συνισταμένη. Τὸ σύστημα δύο ἴσων ἀντιπαραλλήλων δυνάμεων εἶναι ἰδιότυπον καὶ τὸ λέμε ***ζεῦγος δυνάμεων***. Τὸ ζεῦγος δυνάμεων προκαλεῖ εἰς τὸ σῶμα, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐφαρμόζεται, στροφὴν περὶ ἄξονα κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ποὺ ὁρίζουν αἱ διευθύνσεις τῶν δύο ἀντιπαραλλήλων δυνάμεων τοῦ ζεύγους. Τὴν στροφικὴν ἱκανότητα τοῦ ζεύγους τὴν μετρῶμεν μὲ τὴν ροπὴν P αὐτοῦ, ἡ ὁποία εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τῆς ἐντάσεως μιᾶς τῶν ἴσων δυνάμεων τοῦ ζεύγους ἐπὶ τὴν μεταξὺ τῶν δύο δυνάμεων ἀπόστασιν **α**. Εἶναι δηλαδή : $P = K \cdot \alpha$ (24)

Ἡ τιμὴ αὐτὴ τῆς ροπῆς περιστροφῆς τοῦ ζεύγους δυνάμεων προκύπτει ἀμέσως, ἂν θεωρήσωμεν τὸ ζεῦγος ἐφαρμοσμένον εἰς σῶμα στρεπτὸν περὶ ἄξονα O



Σχ. 33

(σχ. 33). Ἡ ροπὴ περιστροφῆς P τοῦ ζεύγους τῶν δυνάμεων k, k περὶ τὸν ἄξονα O θὰ εἶναι εἴτε ἄθροισμα τῶν ροπῶν $K.\alpha_1$ καὶ $K.\alpha_2$, ἂν ὁ ἄξων κεῖται μεταξὺ τῶν δυνάμεων τοῦ ζεύγους, εἴτε διαφορὰ αὐτῶν (κατώτερον μέρος τοῦ σχήματος), ἂν ὁ ἄξων O κεῖται ἐκτὸς τοῦ μεταξὺ τῶν δυνάμεων διαστήματος. Ὅπως ὅμως φαίνεται ἐκ τοῦ σχήματος, θὰ εἶναι καὶ εἰς τὴν μίαν περίπτωσιν : $P = K\,\alpha_1 + K.\alpha_2 = K(\alpha_1 + \alpha_2) = K.\alpha$ καὶ εἰς τὴν ἄλλην : $P = K.\alpha_1 - K\,\alpha_2 = K(\alpha_1 - \alpha_2) = K.\alpha$, ἤτοι πάντοτε ἴση μὲ τὸ γινόμενον τῆς ἐντάσεως μιᾶς τῶν ἴσων δυνάμεων ἐπὶ τὴν μεταξύ των ἀπόστασιν.

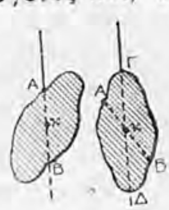
§ 25. Κέντρον βάρους σώματος. α) Καθὲν ἀπὸ τὰ ἐλάχιστα τεμαχίδια, ποὺ ἀποτελοῦν τυχὸν σῶμα, ὑπόκειται (ὁσονδήποτε μικρὸν καὶ ἂν εἶναι) εἰς τὴν δύναμιν τῆς βαρύτητος, δηλαδὴ ἕλκεται κατακορύφως πρὸς τὰ κάτω. Εἰς κάθε σῶμα λοιπὸν ἐνεργοῦν ὁμοπαράλληλοι δυνάμεις, τῶν ὁποίων τὰ σημεῖα ἐφαρμογῆς εὑρίσκονται εἰς τὰ καθέκαστα τεμαχίδια, ἀπὸ τὰ ὁποῖα συγκροτεῖται τὸ σῶμα. Ἡ συνισταμένη ὅλων τούτων τῶν δυνάμεων παρέχει τὸ βάρος τοῦ σώματος. Ὅπως εἴδαμε εἰς τὰ προηγούμενα, ἡ δύναμις αὐτὴ ἔχει ὡρισμένον σημεῖον ἐφαρμογῆς, ἐφόσον τὰ καθέκαστα τεμαχίδια διατηροῦν ἀμεταβλήτους τὰς μεταξύ των θέσεις εἰς τὸ σῶμα.

Τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως τοῦ βάρους σώματος τὸ ὀνομάζομεν κέντρον βάρους τοῦ σώματος καὶ τὸ ἐπισημαίνομεν μὲ κ.β.

β) Πειραματικῶς μποροῦμε νὰ προσδιορίσωμεν τὴν θέσιν τοῦ κέντρου βάρους τοῦ σώματος μὲ δύο ἀλλεπαλλήλους ἐξαρτήσεις τοῦ σώματος. Πρὸς τοῦτο κρεμῶμεν τὸ σῶμα ἀπὸ ἓν ἄκρον του A (σχ. 34) καί, ὅταν ἠρεμήσῃ ἐξηρτημένον, σημειώνομεν ἐπ' αὐτοῦ τὴν διεύθυνσιν AB ποὺ λαμβάνει ἡ διὰ μέσου αὐτοῦ ἀπὸ τὸ σημεῖον ἐξαρτήσεως A καταβιβαζομένη κατακόρυφος. (Τὴν διεύθυνσιν αὐτὴν μᾶς δεικνύει ***νῆμα τῆς στάθμης***, δηλαδὴ λεπτὸν νῆμα, εἰς τὸ ἄκρον τοῦ ὁποίου εἶναι κρεμασμένον ἕνα βαρίδι). Μετὰ τοῦτο ἐξαρτῶμεν τὸ σῶμα ἀπὸ ἄλλο σημεῖον Γ καὶ ἀφοῦ ἠρεμήση, σημειώνομεν εἰς αὐτὸ τὴν διεύθυνσιν ΓΔ τῆς ἐκ τοῦ νέου σημείου ἐξαρτήσεως Γ κατερχομένης κατακορύφου. Τὸ σημεῖον *κ* τομῆς τῶν σημειωθεισῶν ἐπὶ τοῦ σώματος δύο ὡς ἄνω διευθύνσεων, παρέχει τὸ κ.β. τοῦ σώματος. Εἶναι προφανές, ὅτι ἑκάστη τῶν σημειωθεισῶν διευθύνσεων τῆς κατακορύφου παρέχει μίαν γραμμὴν δράσεως τοῦ βάρους· κατὰ συνέπειαν τὸ σημεῖον τομῆς δύο ἐξ αὐτῶν εἶναι κοινὸν σημεῖον ὅλων τῶν γραμμῶν δράσεως τοῦ βάρους, ἤτοι τὸ κ.β. τοῦ σώματος.

γ) Ἀκριβέστερον προσδιορίζεται ἡ θέσις τοῦ κ.β. μὲ κανόνας, ποὺ προκύπτουν ἀπὸ τὸ ὅτι, τὸ κ.β. εἶναι σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης τῶν ὁμοπαραλλήλων δυνάμεων βάρους τῶν καθέκαστα τεμαχιδίων, ποὺ ἀποτελοῦν τὸ σῶμα.

Ἔτσι: Ἂν τὸ σῶμα (εἶναι ὁμοιογενὲς καὶ) ἔχει κέντρον συμμετρίας*, τὸ σημεῖον τοῦτο θὰ εἶναι κ.β. τοῦ σώματος. Κατὰ ταῦτα τὸ κ.β. ὁμοιομεροῦς ἐπιφανείας: κύκλου εἶναι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, παραλληλογράμμου τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων του, ἐλλείψεως τὸ σημεῖον τομῆς τῶν ἀξόνων της, σφαίρας τὸ κέντρον της, ὀρθοῦ κυλίνδρου τὸ μέσον τῆς εὐθείας ποὺ ἑνώνει τὰ κέντρα τῶν βάσεών του.



Σχ. 34

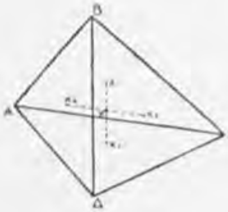
Σχ. 35

δ) Εἰς τριγωνικὴν ἐπιφάνειαν τὸ κ.β. κεῖται εἰς τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαμέσων του. Τοῦτο συνάγεται ἐκ τοῦ ὅτι, ἂν θεωρήσωμεν τρίγωνον ΑΒΓ (σχ 35) χωρισμένον εἰς λεπτοτάτας λωρίδας παραλλήλους πρὸς μίαν τῶν πλευρῶν του, π.χ. τὴν ΒΓ, εἶναι προφανὲς ὅτι τὸ κ.β. ἑκάστης τῶν λωρίδων εὑρίσκεται εἰς τὸ μέσον της καὶ συνεπῶς ἡ γραμμὴ ποὺ ἑνώνει τὰ μέσα ταῦτα, ἤτοι ἡ διάμεσος AM_1, εἶναι μία γραμμὴ δράσεως τοῦ βάρους. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον εἶναι ἐπίσης γραμμὴ δράσεως τοῦ βάρους καὶ ἡ διάμεσος BM_2 (ὡς καὶ ἡ $ΓM_3$) καὶ συνεπῶς τὸ σημεῖον τομῆς τούτων εἶναι κ.β. τῆς τριγωνικῆς ἐπιφανείας. Ἐκ τῆς Γεωμετρίας εἶναι γνωστόν, ὅτι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαμέσων τριγώνου χωρίζει ἑκάστην διάμεσον εἰς δύο μέρη, ποὺ ἔχουν μεταξύ των λόγον 2 : 1. Ὥστε τὸ κ.β. τριγωνικῆς ἐπιφανείας εὑρίσκεται ἐπὶ μιᾶς τῶν διαμέσων του καὶ εἰς

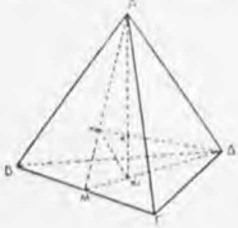
* Κέντρον συμμετρίας σώματος ὀνομάζομεν σημεῖον του κ τοιοῦτο, ὥστε οἱοδήποτε ἄλλο σημεῖον Α τοῦ σώματος νὰ ἔχη ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς εὐθείας $\overline{Aκ}$ καὶ εἰς ἴσην ἀπὸ τὸ κ ἀπόστασιν ἀντίστοιχον σημεῖον Α′ τοῦ σώματος.

ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἴσην μὲ τὰ $^2/_3$ τῆς διαμέσου.

ε) Προκειμένου περὶ τυχούσης τετραπλεύρου ἐπιφανείας ΑΒΓΔ (σχ. 36), θεωροῦμεν αὐτὴν χωρισμένην μὲ μίαν τῶν διαγωνίων, τὴν ΑΓ, εἰς δύο τρίγωνα, ἑκάστου τῶν ὁποίων προσδιορίζομεν τὸ κ.β. Ἡ γραμμὴ $\kappa_1\kappa_2$ ποὺ ἑνώνει τὰ δύο αὐτὰ κ.β., εἶναι μία γραμμὴ δράσεως τοῦ βάρους. Ἂν ἔπειτα θεωρήσωμεν τὸ τετράπλευρον χωρισμένον μὲ τὴν ἄλλην του διαγώνιον, τὴν ΒΔ, εἰς δύο τρίγωνα καὶ καθορίσωμεν εἰς αὐτὰ τὰ κ.β. κ_3 καὶ κ_4, θὰ εἶναι καὶ ἡ γραμμὴ $\kappa_3\kappa_4$ μία ἄλλη γραμμὴ βάρους. Ἑπομένως ἡ τομὴ τῶν δύο τούτων γραμμῶν μᾶς δίδει τὸ κ.β. κ τοῦ τετραπλεύρου.



Σχ. 36



Σχ. 37

Ἐπεκτείνοντες τὴν θεώρησιν αὐτὴν καὶ εἰς ἐπίπεδα σχήματα μὲ περισσοτέρας τῶν τεσσάρων πλευράς, μποροῦμε καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν νὰ καθορίσωμεν τὴν θέσιν τοῦ κ.β. τῆς ἐπιφανείας.

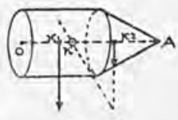
Εἰς ὁμοιομερῆ τριγωνικὴν πυραμίδα, τετράεδρον, τὸ κ.β. εὑρίσκεται εἰς τὸ σημεῖον τομῆς τῶν τριῶν εὐθειῶν, ἑκάστη τῶν ὁποίων ἑνώνει μίαν κορυφὴν μὲ τὸ κ.β. τῆς ἀπέναντι ἕδρας, διότι ἑκάστη τῶν εὐθειῶν τούτων εἶναι γραμμὴ συμμετρίας τοῦ τετραέδρου. Ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχ. 37, τὸ σημεῖον τοῦτο κ χωρίζει καθεμίαν ἀπὸ τὰς γραμμὰς συμμετρίας, ἤτοι τὰς $Α\kappa_1$, $Δ\kappa_2$ (καὶ $Β\kappa_3$ ποὺ διὰ λόγους εὐκρινείας δὲν ἔχει χαραχθῆ εἰς τὸ σχῆμα) εἰς δύο μέρη $\kappa_1\kappa$ καὶ κΑ ἢ $\kappa_2\kappa$ καὶ κΔ, ποὺ ἔχουν μεταξύ των λόγον 1 : 3. Τοῦτο προκύπτει εὐκόλως ἐκ τοῦ ὅτι τὰ τρίγωνα $Μ\kappa_1\kappa_2$ καὶ ΜΔΑ εἶναι ὅμοια, ἐπειδὴ ἔχουν κοινὴν τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς Μ καὶ τὰς πλευρὰς ποὺ τὴν περιέχουν ἀναλόγους, ἀφοῦ τὰ κ_1 καὶ κ_2 χωρίζουν ἑκάστοντὴν διάμεσον τριγωνικῆς ἕδρας εἰς μέρη ἔχοντα τὸν αὐτὸν λόγον 1 : 2. Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων προκύπτει : $\kappa_1\kappa_2 : ΔΑ = Μ\kappa_1 : ΜΔ = Μ\kappa_2 : ΜΑ = 1 : 3$. Περαιτέρω εἶναι ὅμοια καὶ τὰ κατὰ κορυφὴν τρίγωνα $\kappa_1\kappa\kappa_2$ καὶ ΔκΑ καὶ ἐκ τούτου προκύπτει : $\kappa_1\kappa : \kappa Α = \kappa_2\kappa : \kappa Δ = \kappa_1\kappa_2 : ΔΑ = 1 : 3$.

Σχ. 38α

Σχ. 38β

Γενικώτερον ἡ θέσις τοῦ κ.β ὁμοιομεροῦς πολυγωνικῆς πυραμίδος (σχ. 38α) εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία ἑνώνει τὴν κορυφήν της μὲ τὸ κ β. τοῦ πολυγώνου τῆς βάσεώς της, εἰς σημεῖον ποὺ χωρίζει τὴν εὐθεῖαν αὐτὴν εἰς δύο μέρη, ἔχοντα μεταξύ των λόγον 1 : 3. Μὲ τὸν αὐτὸν κανόνα καθορίζεται καὶ ἡ θέσις τοῦ κ.β. ὁμοιομεροῦς κώνου (σχ. 38β), ἀφοῦ ὁ κῶνος μπορεῖ νὰ θεωρηθῇ πυραμίς, ποὺ ἔχει βάσιν πολύγωνον μὲ ἄπειρον πλῆθος πλευρῶν.

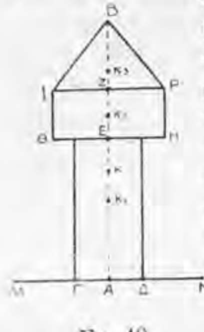
Προκειμένου περὶ σώματος συνθετωτέρου, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ μέρη, εἰς ἕκαστον τῶν ὁποίων εἶναι γνωστὴ ἡ θέσις τοῦ κ.β., μποροῦμε νὰ καθορίσωμεν τὴν θέσιν τοῦ κ.β. τοῦ ὅλου σώματος, ἂν θεωρήσωμεν τὰς παραλλήλους δυνάμεις βάρους τῶν καθέκαστα μερῶν. Τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης τῶν ὁμοπαραλλήλων τούτων δυνάμεων εἶναι τὸ κ.β. τοῦ ὅλου σώματος. Ἔτσι εἰς τὸ σῶμα τοῦ σχ. 39, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ κύλινδρον καὶ κῶνον, εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης τῶν δυνάμεων, ποὺ παρέχουν τὸ βάρος, ἡ μία τοῦ κυλίνδρου καὶ ἡ ἄλλη τοῦ κώνου. Τὸ σημεῖον αὐτὸ κ εἶναι τὸ κ.β. τοῦ συνθέτου σώματος. Γενικώτερον διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ κ.β. συνθέτου σωματος βασιζόμεθα εἰς τὸ *θεώρημα τῶν ροπῶν*. Κατ' αὐτὸ *τὸ ἄθροισμα τῶν ροπῶν (περιστροφῆς), ποὺ ἔχουν τὰ καθέκαστα βάρη τῶν μερῶν τοῦ σώματος ὡς πρὸς δοθέντα ἄξονα (ἢ ἐπίπεδον), εἶναι ἴσον μὲ τὴν ροπὴν περιστροφῆς τοῦ ὅλου βάρους τοῦ σώματος ὡς πρὸς τὸν αὐτὸν ἄξονα ἢ ἐπίπεδον.*



Σχ. 39

Ἔτσι εἰς τὸ σῶμα τοῦσχήματος 40, ἂν εἶναι B_1 τὸ βάρος καὶ υ_1=ΑΕ τὸ ὕψος τοῦ κατωτέρου κυλινδρικοῦ τμήματος, B_2 τὸ βάρος καὶ υ_2=ΕΖ τὸ ὕψος τοῦ τμήματος ΗΘΙΡ, καὶ B_3 τὸ βάρος καὶ υ_3 τὸ ὕψος τοῦ τμήματος ΒΙΡ θὰ εἶναι : $B_1 (\upsilon_1/2)$ ἡ ροπὴ περιστροφῆς τοῦ βάρους B_1 ὡς πρὸς τὸν ἄξονα ΜΝ διερχόμενον διὰ τῆς βάσεως τοῦ σώματος. Ὡς πρὸς τὸν αὐτὸν ἄξονα ἡ ροπὴ τοῦ τμήματος ΗΘΙΡ θὰ εἶναι : $B_2 [\upsilon_1+(\upsilon_2/2)]$ καὶ ἡ τοῦ τμήματος ΒΙΡ θὰ εἶναι $B_3[\upsilon_1+\upsilon_2+(\upsilon_3/4)]$. Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν τούτων ροπῶν θὰ εἶναι ἴσον μὲ τὴν ροπὴν τοῦ βάρους Β ($=B_1+B_2+B_3$) ὅλου τοῦ σώματος ὡς πρὸς τὸν αὐτὸν ἄξονα. Ἂν ὀνομάσωμεν x τὴν ἀπόστασιν τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς τοῦ βάρους, ἤτοι τοῦ κ.β. τοῦ σώματος ἀπὸ τὸν ἄξονα, ἡ ροπὴ αὕτη θὰ εἶναι : $B.x = B_1 (\upsilon_1/2) + B_2 [\upsilon_1 + (\upsilon_2/2)] + B_3 [\upsilon_1 + \upsilon_2 + (\upsilon_3/4)]$· ὅθεν :

$$x = [B_1.(\upsilon_1/2)+B_2[\upsilon_1+(\upsilon_2/2)]+B_3[\upsilon_1+\upsilon_2+(\upsilon_3/4)]] : B.$$



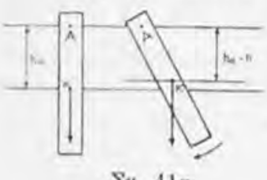
Σχ. 40

§ 26. **Ἰσορροπία σώματος.** Κάθε σῶμα εὑρίσκεται εἰς ἰσορροπίαν, ἂν ὅλαι αἱ δυνάμεις ποὺ τυχὸν ἐνεργοῦν ἐπ' αὐτοῦ, δὲν προκαλοῦν μεταβολὴν εἰς τὴν κινητικήν του κατάστασιν. Διὰ νὰ συμβαίνη τοῦτο πρέπει ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων Σk, ποὺ τυχὸν ἐνεργοῦν ἐπὶ τοῦ σώματος, νὰ εἶναι ἴση μὲ μηδέν. Ἂν πρὸς τοῦτο χρειάζεται νὰ στηριχθῇ τὸ σῶμα εἰς ἀκλόνητον ὑποστήριγμα ἢ ἄξονα, θὰ ἰσορροπῇ, ἐφόσον τὸ ἄθροισμα τῶν ροπῶν ΣΡ, τῶν καθέκαστα δυνάμεων (ποὺ ἐνεργοῦν ἐπὶ τοῦ σώματος), ὡς πρὸς τὸ ὑποστήριγμα ἢ ἄξονα, εἶναι ἴσον μὲ μηδέν. Ἔτσι, διὰ νὰ ἰσορροπῇ ἓν σῶμα, πρέπει νὰ εἶναι γενικῶς : Σk=0 ἢ ΣΡ=0.

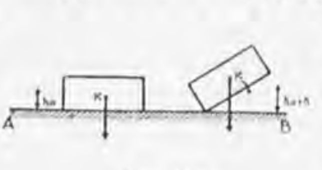
Εἰδικῶς εἰς τὴν περίπτωσιν ποὺ τὸ σῶμα εὑρίσκεται ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν *μόνον* τοῦ βάρους του, θὰ ἔχωμεν ἰσορροπίαν αὐτοῦ, ἐξηρτημένου ἀπὸ ἀκλόνητον ἄξονα ἢ βασιζομένου ἐπὶ ἀνενδότου ὑποστηρίγματος, ἂν ***ἡ ἐκ τοῦ κ β. τοῦ σώματος διερχομένη κατακόρυφος*** (ἤτοι ἡ γραμμὴ δράσεως τοῦ βάρους του) ***συναντᾶ εἰς τὴν προέκτασίν της τὸν ἄξονα ἐξαρτήσεως ἢ τὴν βάσιν τοῦ σώματος.*** Τοῦτο εἶναι εὐνόητον, ἂν σκεφθῶμεν ὅτι τότε ἡ ροπὴ περιστροφῆς τοῦ βάρους τοῦ σώματος ὡς πρὸς τὸν ἄξονα ἢ τὸ ὑποστήριγμα, θὰ εἶναι ἴση μὲ μηδέν, διότι, ὡς γινόμενον τοῦ βάρους ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν αὐτοῦ ἀπὸ τὸν ἄξονα ἢ τὸ ὑποστήριγμα, θὰ μηδενίζεται, ἀφοῦ ὁ δεύτερος παράγων του εἶναι ἴσος μὲ μηδέν.

Ἀντιστοίχως τώρα μὲ τὴν θέσιν, ποὺ ἔχει τὸ κ β. τοῦ σώματος, σχετικῶς πρὸς τὸν ἄξονα ἐξαρτήσεως διακρίνομεν α) ***εὐσταθῆ***, β) ***ἀσταθῆ*** καὶ γ) ***ἀδιάφορον*** ἰσορροπίαν τοῦ σώματος.

Εἰς τὴν εὐσταθῆ ἰσορροπίαν τὸ κ β. εὑρίσκεται χαμηλότερον τοῦ ἄξονος ἐξαρτήσεως τοῦ σώματος καὶ ἔχει τὴν κατωτάτην δυνατὴν θέσιν· δι' οἱανδήποτε ἐκτροπὴν ἐκ τῆς θέσεως ἰσορροπίας, ἐπέρχεται ἀνύψωσις h τοῦ κ β. (σχ. 41). Τοῦτο ἀντιβαίνει εἰς τὴν τάσιν του νὰ λάβῃ τὴν κατὰ τὸ δυνατὸν χαμηλοτέραν θέσιν καὶ διὰ τοῦτο τὸ ἐκ τῆς θέσεως αὐτῆς ἐκτρεπόμενον σῶμα θὰ ἐπανέρχεται πάλιν εἰς αὐτήν.

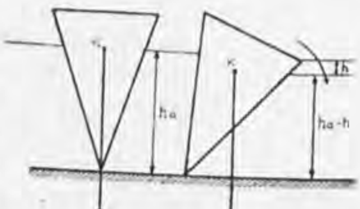


Σχ. 41α

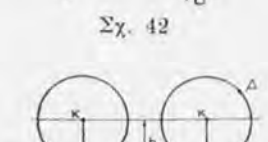


Σχ. 41β

Εἰς τὴν ἀσταθῆ ἰσορροπίαν τὸ κ.β. τοῦ σώματος εὑρίσκεται ὑπεράνω τοῦ ἄξονος ἢ τοῦ ὑποστηρίγματος, (σχ.42), εἰς τὴν ὑψηλοτέραν ἀπ' αὐτοῦ ἀπόστασιν h_a. Οἱαδήποτε ἐκτροπὴ ἀπὸ τὴν θέσιν αὐτὴν ἰσορροπίας, ἐπιφέρει χαμήλωσιν h τοῦ κ.β. τοῦ σώματος καὶ συνεπῶς ἀκολουθεῖ τὴν τάσιν ποὺ ἔχει τοῦτο. Ἔτσι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, τὸ ἐκτραπὲν ἀπὸ τὴν θέσιν ἰσορροπίας σῶμα δὲν ἐπανέρχεται πλέον εἰς αὐτήν, ἀλλὰ συνεχίζει τὴν χαμήλωσίν του, μέχρις ὅτου ἔλθῃ εἰς τὴν θέσιν εὐσταθοῦς ἰσορροπίας. Εἰς τὴν ἀδιάφορον τέλος θέσιν ἰσορροπίας τὸ κ.β. τοῦ σώματος παραμένει εἰς τὸ αὐτὸ ὕψος h (σχ. 43), ὡς πρὸς τὸ ὑποστήριγμα, οἱανδήποτε στροφὴν καὶ ἂν ὑποστῇ τὸ σῶμα περὶ τὸ ἀκλόνητον ὑποστήριγμα. Ἕνεκα τούτου τὸ σῶμα διατηρεῖ τὴν ἰσορροπίαν του εἰς κά-



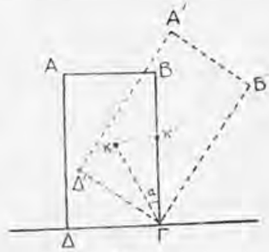
Σχ. 42



Σχ. 43

θε περιστροφήν του περὶ τὸν ἀκλόνητον ἄξονα ποὺ διέρχεται διὰ τοῦ κ.β. ἢ ἐπὶ τοῦ ὑποστηρίγματος, ἐπὶ τοῦ ὁποίου στηρίζεται (σχ.43). Σφαῖρα ὁμοιομερὴς ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, τροχὸς ὡς πρὸς τὸν ἄξονά του κ.ἄ., παρέχουν παραδείγματα ἀδιαφόρου ἰσορροπίας.

Εἰς τὴν περίπτωσιν σώματος στηριζομένου ἐπὶ ἐπιπέδου, ὀνομάζομεν ***εὐστάθειαν τῆς ἰσορροπίας του*** τὴν ἀντίστασιν, ποὺ προβάλλει τοῦτο, προκειμένου νὰ ἀνατραπῇ περὶ μίαν ἐκ τῶν ἀκμῶν, ποὺ καθορίζουν τὸ πολύγωνον τῆς βάσεώς του. Μέτρον τῆς εὐσταθείας ἰσορροπίας σώματος παρέχει: εἴτε ἡ γωνία στροφῆς α (σχ. 44), ποὺ χρειάζεται νὰ διαγράψῃ τὸ σῶμα διὰ νὰ μεταπέσῃ ἀπὸ τὴν θέσιν εὐσταθοῦς εἰς τὴν θέσιν ἀσταθοῦς ἰσορροπίας, εἴτε τὸ ἔργον ἢ ἡ δύναμις F (σχ. 45), ποὺ πρέπει νὰ καταβληθῇ διὰ τὴν ἀνατροπὴν τοῦ σώματος. Ἔτσι εἰς τὸ σῶμα, ποὺ παριστάνει τὸ σχῆμα 44, στηριζόμενον ἐπὶ μιᾶς τῶν ἑδρῶν του, ἡ εὐστάθεια τῆς ἰσορροπίας του, ἀναφορικῶς πρὸς μίαν ἐκ τῶν ἀκμῶν τῆς βάσεώς του, μπορεῖ νὰ μετρηθῇ:



Σχ. 44

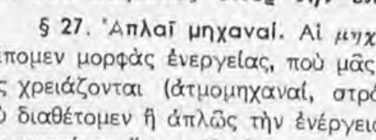
Γεωμετρικῶς μὲ τὴν γωνίαν α (σχ. 44), ἴσην μὲ $\widehat{\kappa\kappa'}/\kappa\Gamma$, κατὰ τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ στραφῇ περὶ τὴν ληφθεῖσαν ἀκμὴν Γ, ὥστε νὰ ἔλθῃ εἰς θέσιν πέραν τῆς ὁποίας ἀνατρέπεται. Ὅσον μεγαλυτέρα εἶναι ἡ γωνία α τόσον μεγαλυτέρα εἶναι καὶ ἡ εὐστάθεια τῆς ἰσορροπίας τοῦ σώματος· ἀλλ' ἡ γωνία α εἶναι τόσον μεγαλυτέρα, ὅσον μεγαλύτερον εἶναι τὸ τόξον κκ' ποὺ διαγράφει τὸ κ.β. τοῦ σώματος καὶ ὅσον μικροτέρα εἶναι ἡ ἀκτὶς ἢ ἡ ἀπόστασις τοῦ κ.β. ἀπὸ τὴν θεωρουμένην ἀκμὴν τῆς βάσεως. Ἀντὶ τούτου μπορεῖ νὰ ἐκφρασθῇ ἡ εὐστάθεια ἐνεργειακῶς, μὲ τὸ ἔργον ποὺ ἀπαιτεῖται διὰ νὰ ἀνυψωθῇ τὸ κ.β. τοῦ σώματος μέχρι τῆς θέσεως τῆς ἀσταθοῦς ἰσορροπίας. Τὸ ἔργον τοῦτο, ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ βάρους τοῦ σώματος ἐπὶ τὴν ρηθεῖσαν ἀνύψωσιν, θὰ εἶναι τόσον μεγαλύτερον, ὅσον μεγαλύτερος εἶναι ἑκάτερος τῶν δύο παραγόντων.

Σχ. 45

Συνηθέστερον ἐκφράζεται ἡ εὐστάθεια ἰσορροπίας: ***Δυναμικῶς μὲ τὴν δύναμιν F*** (σχ.45) ποὺ πρέπει νὰ ἐνεργήσῃ εἰς τὸ κ β κ τοῦ σώματος, μὲ διεύθυνσιν παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν ΓΔΘΕ καὶ κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκμὴν ἀνατροπῆς ΔΓ, διὰ νὰ ἐπιφέρῃ τὴν ἀνατροπήν. Ἂν εἶναι: $h=\overline{\kappa N}=\overline{IM}$ τὸ ὕψος τοῦ κ.β. ὑπὲρ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς στηρίξεως καὶ $b=\overline{NM}=\overline{\kappa I}$ τὸ ***πλάτος ἀνατροπῆς***, δηλ. ἡ ὁριζοντία ἀπόστασις τῆς γραμμῆς δράσεως τοῦ βάρους Β ἀπὸ τὴν ἀκμὴν περιστροφῆς ΔΓ, τότε ἡ ροπὴ περιστροφῆς $F.h$ τῆς δυνάμεως F ὡς πρὸς τὴν ἀκμὴν ΔΓ, πρέπει νὰ γίνῃ ἴση μὲ τὴν ροπὴν B.b τοῦ βάρους B ὡς πρὸς τὴν αὐτὴν ἀκμήν, διὰ νὰ φθάσῃ τὸ σῶμα εἰς θέσιν, πέραν τῆς ὁποίας ἀνατρέπεται. Ἑπομένως τὸ δυναμικὸν μέτρον τῆς εὐσταθείας ἰσορροπίας τοῦ σώματος παρέχεται ἀπὸ τὴν σχέσιν : $F \cdot h = B \cdot b$ ἢ τὴν $F = (B \cdot b)/h$ (25) ἡ ὁποία, σύμφωνα καὶ μὲ ἐμπειρικὰς διαπιστώσεις, μᾶς φανερώνει ὅτι : ***Ἡ εὐστάθεια τῆς ἰσορροπίας σώματος, στηριζομένου ἐπὶ ἐπιπέδου, εἶναι ἀνάλογος τοῦ βάρους B τοῦ σώματος καὶ τοῦ πλάτους ἀνατροπῆς b καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογος τοῦ ὕψους h, ποὺ ἔχει τὸ κ.β. τοῦ σώματος ὑπὲρ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς στηρίξεως.***

§ 27. Ἁπλαῖ μηχαναί. Αἱ *μηχαναὶ* εἶναι συσκευαί, μὲ τὰς ὁποίας εἴτε μετατρέπομεν μορφὰς ἐνεργείας, ποὺ μᾶς παρέχονται ἀπὸ τὴν Φύσιν, εἰς ἄλλας, ποὺ μᾶς χρειάζονται (ἀτμομηχαναί, στρόβιλοι), εἴτε χρησιμοποιοῦμεν τὴν ἐνέργειαν ποὺ διαθέτομεν ἢ ἁπλῶς τὴν ἐνέργειαν τῶν μυϊκῶν μας δυνάμεων, πρὸς παραγωγὴν χρησίμου ἔργου (ἀνελκυστῆρες, γραφομηχαναί). Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν ἡ μηχανή, ἀπὸ τὴν ἄποψιν τῆς Φυσικῆς, χρησιμεύει εἰς τὸ νὰ μεταβάλλωμεν τὴν θέσιν τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς, τὴν διεύθυνσιν ἢ τὴν ἔντασιν καταβαλλομένης δυνάμεως πρὸς ἐπιτυχίαν τοῦ ἐπιδιωκομένου σκοποῦ. Ὅλαι αἱ μηχαναὶ μποροῦν νὰ ἀναχθοῦν εἰς συνδυασμοὺς ὀλίγων εἰδῶν ἁπλουστέρων συστατικῶν των, τὰ ὁποῖα ὀνομάζομεν *ἁπλᾶς μηχανάς*. Τελικῶς καὶ αἱ ἁπλαῖ μηχαναὶ εἶναι διάφοροι μορφαὶ δύο βασικῶν μορφῶν των, ἤτοι τοῦ ***κεκλιμένου ἐπιπέδου*** καὶ τοῦ ***μοχλοῦ***.

α) Κεκλιμένον ἐπίπεδον. Ἡ ἐπίπεδος καὶ στερεὰ σανίδα, ποὺ χρησιμοποιοῦν διὰ νὰ ἀναβιβάσουν εἰς ὄχημα βαρειὰ βαρέλια κλπ., στηρίζοντες τὸ ἓν ἄκρον τῆς σανίδας εἰς τὸ ὄχημα καὶ τὸ ἄλλο εἰς τὸ ἔδαφος, ἔτσι, ποὺ τὸ ἐπίπεδόν της νὰ σχηματίζῃ ὀξεῖαν γωνίαν μὲ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον τοῦ ἐδάφους, εἶναι ἐφαρμογὴ κεκλιμένου ἐπιπέδου. Κεκλιμένον ἐπίπεδον ἔχομεν ἐπίσης εἰς ὁποιαδήποτε σκάλα, ποὺ στηρίζομεν πλαγίως εἰς κατακόρυφον τοῖχον, εἰς ἀνηφορικὸν δρόμον κλπ. Εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις, ἂν θεωρήσωμεν τομὴν τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου ἀπὸ κατακόρυφον ἐπίπεδον, ὀνομάζομεν ***γωνίαν κλίσεως*** τὴν γωνίαν α=ΒΑΓ (σχ. 46α, β) ποὺ σχηματίζει τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον μὲ τὸ ὁριζόντιον, ***μῆκος*** μ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου τὴν ἀπόστασιν ΑΒ, ***ὕψος*** αὐτοῦ h τὴν ΒΓ καὶ ***βάσιν*** τὴν ΑΓ.



α Σχ. 46 β

Ἂν ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου τοποθετηθῇ σῶμα βάρους k, μποροῦμε νὰ θεωρήσωμεν ὅτι τοῦτο ἔχει ἀναλυθῆ εἰς δύο συνιστώσας· τὴν μίαν k_2 κάθετον ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου, καὶ τὴν ἄλλην k_1 παράλληλον πρὸς αὐτό. Ἔτσι, ὅπως φαίνεται ἐκ τοῦ σχ. 46α θὰ εἶναι : $k_2 : k = β : μ$ ὅθεν $K_2 = K.β : μ$ ἢ $K_2 = K$ συνα (26)

καὶ $k_1 : k = h : μ$ ὅθεν $K_1 = K \cdot h : μ$ ἢ $K_1 = K \cdot$ ημα (26')

Ἡ κάθετος συνιστῶσα k_2 ἐξουδετερώνεται ἀπὸ τὴν ἀντίστασιν τοῦ ὑποστηρίγματος (πιέζει τὸ δάπεδον τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου καὶ δὲν μπορεῖ νὰ παράγῃ ἔργον), ἡ παράλληλος ὅμως συνιστῶσα k_1 μετακινεῖ τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς της κατὰ τὴν διεύθυνσίν της καὶ πρέπει νὰ ὑπερνικηθῇ ἀπὸ τὴν ἴσην καὶ ἀντίθετόν της k_1' προκειμένου νὰ ἀνυψωθῇ τὸ βάρος K κατὰ μῆκος τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου. Ὥστε διὰ νὰ ἀνυψώσωμεν τὸ βάρος K ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου (ἂν δὲν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὴν τριβήν), ἀρκεῖ νὰ καταβάλωμεν δύναμιν ἴσην κατ' ἔντασιν πρὸς τὴν $K_1' = K_1 = K.h : μ = K.$ημα. Ἔτσι μὲ τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον μποροῦμε νὰ ἀναβιβάσωμεν τὸ βάρος K εἰς ὕψος h, καταβάλλοντες κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ μήκους του μικροτέραν δύναμιν ἐντάσεως K_1 ἀλλὰ ἐπὶ μεγαλύτερον διάστημα, τὸ μ. Τὸ ἔργον ὅμως ποὺ ἀπαιτεῖται πρὸς τοῦτο εἶναι τὸ αὐτό, εἴτε ἀνυψώνομεν τὸ βάρος Κ κατακορύφως εἰς ὕψος h, εἴτε τὸ μετακινοῦμεν διὰ τῆς δυνάμεως $K_1' = K.h:\mu$ κατὰ τὸ μῆκος μ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου, ἀφοῦ εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν θὰ εἶναι ἴσον μὲ $K_1.\mu = (K.h:\mu).\mu = K.h$, ἤτοι μὲ τὸ εἰς τὴν ἀπ' εὐθείας ἀνύψωσιν. Ὅθεν : *μὲ τὴν χρησιμοποίησιν τῆς μηχανῆς δὲν κερδίζομεν ἔργον, διότι ὅ,τι κερδίζομεν καταβάλλοντες μικροτέραν δύναμιν, τὸ χάνομεν ἐπειδὴ ὁ δρόμος, κατὰ μῆκος τοῦ ὁποίου ἐνεργεῖ ἡ δύναμις, εἶναι κατ' ἀναλογίαν μεγαλύτερος*. Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο ἰσχύει διὰ κάθε μηχανὴν καὶ ἀποτελεῖ συνέπειαν τῆς Ἀρχῆς διατηρήσεως τοῦ ἔργου. Μὲ τὰς μηχανὰς δὲν γίνεται οἰκονομία ἔργου, ἀλλ' ἁπλῶς μποροῦμε νὰ μεταβάλλωμεν τὴν ἔντασιν, διεύθυνσιν, φορὰν ἢ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς καταβαλλομένης δυνάμεως. Τὴν διαπίστωσιν αὐτὴν τὴν χαρακτηρίζομεν ὡς *χρυσοῦν κανόνα τῆς μηχανικῆς*.

Εἰς τὸ σχ. 46β ἡ δύναμις k_1 ποὺ χρειάζεται νὰ ἀνυψωθῇ τὸ σῶμα ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου, ἔχει διεύθυνσιν ὁριζοντίαν, ἤτοι παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου καὶ ἑπομένως, ὅπως προκύπτει ἐκ τοῦ σχήματος, εἶναι :

$$K_1' = K_1 = K.h/\beta = K.\varepsilon\varphi\alpha \qquad (26'')$$

Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο, ὅπως καὶ τὸ προηγούμενον, ἐπαληθεύεται πειραματικῶς μὲ συσκευὴν ποὺ ὑποδεικνύει τὸ σχῆμα. Εἰς αὐτὴν τὸ σῶμα κ προσδένεται εἰς τὸ ἄκρον νήματος, τὸ ὁποῖον περνάει διὰ τῆς αὔλακος τοῦ δίσκου παγίας τροχαλίας (πρβλ. ἐδ. ε) καὶ φέρει εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον του τὸ βάρος β, ποὺ πρέπει νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὴν δύναμιν K_1'. Ἔτσι ἡ ἔντασις τοῦ βάρους β, ποὺ χρειάζεται νὰ κρεμάσωμεν εἰς τὸ νῆμα, μᾶς δίδει τὴν ἔντασιν τῆς K_1 καὶ συνεπῶς τὴν σχέσιν της πρὸς τὸ βάρος Κ τοῦ σώματος ποὺ θέλομεν νὰ ἀνασύρωμεν ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου.

β) **Κοχλίας.** Ὁ κοχλίας (βίδα) εἶναι ἁπλῆ μηχανὴ ποὺ μπορεῖ νὰ ἀναχθῇ εἰς κεκλιμένον ἐπίπεδον. Ἂν θεωρήσωμεν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 47α) (κεκλιμένον ἐπίπεδον), τὸ ὁποῖον περιτυλίσσεται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου, εἰς τρόπον ὥστε ἡ μία τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ τριγώνου, ἡ ΒΓ, νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου παραλλήλως πρὸς τὸ ὕψος του καὶ ἡ ἄλλη, ἡ ΓΑ, νὰ γίνεται περιφέρεια μιᾶς ἐγκαρσίας τομῆς τοῦ κυλίνδρου, ἡ ὑποτείνουσα ΑΒ θὰ διαγράφῃ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου ἑλικοειδῆ γραμμὴν ΓΔΒ. Μὲ κατάλληλον ἐπεξεργασίαν τοῦ ὑλικοῦ τοῦ κυλίνδρου σχηματίζομεν ἔξαρσιν κατὰ μῆκος τῆς ἑλικοειδοῦς γραμμῆς. Τὸ σῶμα ποὺ λαμβάνομεν τότε ἀποτελεῖ τὴν *ἄτρακτον* τοῦ κοχλίου (σχ. 47 β καὶ γ). Ἀντίστοιχος ἐκσκαφὴ τοῦ ὑλικοῦ εἰς τὴν ἐσωτερικὴν ἐπιφάνειαν κοίλου κυλινδρικοῦ σώματος παρέχει τὸ *περικόχλιον* ΠΠ (σχ. 48). Εἰς τοῦτο μπορεῖ νὰ προχωρῇ ἡ ἄτρακτος κατὰ τὴν περιστροφήν της. Ὀνομάζομεν *βῆμα* τοῦ κοχλίου τὴν ἀπόστασιν h (σχ. 48) μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ἀντιστοίχων σημείων τῆς ἑλικοειδοῦς γραμμῆς. Τὸ βῆμα τοῦ κοχλίου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὕψος h τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου (κεκλιμένου ἐπιπέδου), τοῦ ὁποίου ἡ βάσις β ἔχει μῆκος ἴσον πρὸς τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τῆς ἐγκαρσίας τομῆς τῆς ἀτράκτου.

Σχ. 47

Σχ. 48

Ἡ πιεστικὴ δύναμις Κ (σχ. 48), τὴν ὁποίαν ἐξασκεῖ ὁ κοχλίας κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἄξονός του, δηλαδὴ τὴν διεύθυνσιν κατὰ τὴν ὁποίαν προχωρεῖ ἡ ἄτρακτος, ἔχει πρὸς τὴν δύναμιν K_1, ποὺ ἐνεργεῖ εἰς τὴν περιφέρειαν τῆς ἀτράκτου κατὰ τὴν ἐφαπτομένην αὐτῆς, λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον ποὺ ἔχει ἡ περιφέρεια β μιᾶς ἐγκαρσίας κυκλικῆς τομῆς τῆς ἀτράκτου πρὸς τὸ βῆμα h τοῦ κοχλίου.

Εἶναι δηλαδὴ : $K : K_1 = \beta : h$. Τοῦτο προκύπτει ἐκ τῆς ἀρχῆς τῆς διατηρήσεως τοῦ ἔργου. Σύμφωνα μὲ αὐτὴν πρέπει τὸ ἔργον τῆς δυνάμεως K, ποὺ προωθεῖ τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς της κατὰ h, ἤτοι τὸ ἔργον $K.h$, νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τῆς δυνάμεως K_1 ποὺ μετακινεῖ τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς της κατὰ μίαν ὁλόκληρον περιφέρειαν β, ἤτοι μὲ τὸ ἔργον $K_1.\beta$. Τὴν σχέσιν αὐτὴν τὴν εὑρίσκομεν καὶ μὲ τὴν θεώρησιν τῶν δυνάμεων τούτων εἰς κεκλιμένον ἐπίπεδον, ὅπου ἔχομεν τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ καταβαλλομένη δύναμις K_1 ἐνεργεῖ παραλλήλως πρὸς τὴν βάσιν καὶ ἡ ἐπιφερομένη πιεστικὴ δύναμις K ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ βάρος ποὺ ἰσορροπεῖται (βλ. ἐξίσωσιν 24΄). Ὥστε : ***ἡ πιεστικὴ δύναμις, τὴν ὁποίαν ἀσκεῖ κοχλίας εἶναι τόσον μεγαλυτέρα, ὅσον μεγαλυτέρα εἶναι ἡ περιφέρεια ἢ τὸ πάχος τῆς ἀτράκτου καὶ ὅσον μικρότερον εἶναι τὸ βῆμα τοῦ κοχλίου.*** Ὁ κοχλίας χρησιμοποιεῖται πολλαπλῶς. Ἔτσι εἰς ὄργανα ἀπαριθμήσεως ἔχομεν τὸν ***ἀτέρμονα κοχλίαν***. Ἡ ἄτρακτος τούτου φέρει ὀλίγας μόνον στροφὰς ἑλικοειδοῦς χαράξεως (σχ. 49). Μεταξὺ τούτων ἐμπλέκονται ὁ εἷς μετὰ τὸν ἄλλον οἱ ὀδόντες ὀδοντωτοῦ τροχοῦ· δι' ἑκάστην περιστροφὴν τοῦ κοχλίου ὁ ὀδοντωτὸς τροχὸς προχωρεῖ κατὰ ἕνα ὀδόντα. Ἐξ ἄλλου ὁ ***μικρομετρικὸς κοχλίας*** (σχ. 50) ἔχει ἄτρακτον μὲ ἑλικοειδῆ χάραξιν πολὺ μικροῦ βήματος· ἔτσι διὰ μίαν ὁλόκληρον περιστροφὴν ἡ ἄτρακτος προχωρεῖ πολὺ ὀλίγον (ἓν βῆμα) καὶ ἀκόμη ὀλιγώτερον διὰ στροφὴν ὀλίγων μοιρῶν. Μποροῦμε νὰ μετρήσωμεν πολὺ μικρὰ μήκη, παρατηροῦντες τὰς στροφὰς ἢ κλάσματα τούτων ποὺ πρέπει νὰ γίνουν, διὰ νὰ χωρέσουν τὰ μήκη ταῦτα μεταξὺ τοῦ ἄκρου τῆς ἀτράκτου τοῦ κοχλίου καὶ ἑνὸς ἄλλου σταθεροῦ ὑποβάθρου. Κοχλίαι εἶναι καὶ αἱ ***ἕλικες*** πλοίων ἢ ἀεροπλάνων. Συνδέονται μὲ τὸ σκάφος καὶ μὲ τὴν ταχυτάτην περιστροφήν των βιδώνονται εἰς τὸ ὕδωρ ἢ τὸν ἀέρα, μὲ ἀποτέλεσμα νὰ προχωροῦν καὶ παρασύρουν μαζί των τὸ σκάφος.

Σχ. 49

Σχ. 50

Σχ. 51

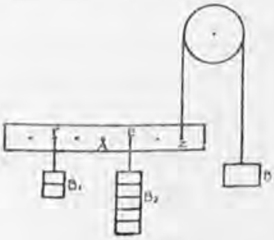
γ) ***Ὁ σφὴν*** μπορεῖ ἐπίσης νὰ θεωρηθῇ ἄλλη μορφὴ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου. Εἶναι σκληρὸν σῶμα μὲ ἐγκαρσίαν τομὴν σχήματος ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΕ (σχ. 51) μὲ πολὺ ὀξεῖαν τὴν γωνίαν ΑΕΒ=α τῆς κορυφῆς του. Τὸ σῶμα τοῦ σφηνὸς μπορεῖ νὰ εἰσχωρήσῃ εἰς τὸ σῶμά ἀνθεκτικοῦ ὑλικοῦ (ξύλου, μαρμάρου κλπ.) καὶ νὰ τὸ διασχίσῃ· τὰ μαχαίρια, τὰ ψαλίδια, οἱ βελόνες κλπ. εἶναι σφῆνες.

Ἡ δύναμις k ποὺ ὠθεῖ τὸν σφῆνα εἰς τὸ σῶμα, ποὺ θέλομεν νὰ διανοίξωμεν, ἐνεργεῖ καθέτως ἐπὶ τῆς βάσεως ΑΒ=β τοῦ σφηνὸς καὶ μπορεῖ νὰ θεωρηθῇ ὅτι ἀναλύεται εἰς δύο ἴσας κατ' ἔντασιν συνιστώσας k_1, k_1 ποὺ ἐνεργοῦν καθέτως ἐπὶ τῶν ἴσων ἑδρῶν ΒΕ=ΑΕ=s τοῦ σφηνός. Αἱ συνιστῶσαι αὗται ἐπιφέρουν τὴν διάνοιξιν τοῦ σώματος. Ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα βλέπομεν ὅτι εἶναι : $K_1 : K = s : \beta$

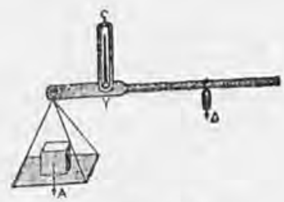
καὶ $K_1 = K \cdot s : \beta = K \cdot s : 2\beta/2 = K \cdot s : 2s\,\eta\mu(\alpha/2) = K : 2\,\eta\mu(\alpha/2)$ (27)

Ὥστε : ὅσον ὀξυτέρα εἶναι ἡ γωνία α τῆς τριγωνικῆς τομῆς τοῦ σφηνὸς καὶ συνεπῶς ὅσον μικρότερον εἶναι τὸ ημ α/2, τόσον μεγαλυτέρα εἶναι ἡ ἀντίστασις K_1 τοῦ ὑλικοῦ, τὴν ὁποίαν ἐξουδετερώνει ἡ δύναμις K, ποὺ ὠθεῖ τὸν σφῆνα νὰ εἰσχωρήσῃ εἰς τὸ ὑλικόν.

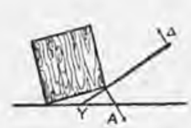
δ) ***Μοχλός***. Εἰς τὴν § 23 εἴδαμε τὰ χαρακτηριστικὰ τοῦ μοχλοῦ καὶ καθωρίσαμεν τὴν συνθήκην ἰσορροπίας αὐτοῦ. Ὡς ἁπλῆ μηχανὴ ὁ μοχλὸς χρησιμεύει ὑπὸ διαφόρους μορφὰς εἰς τὴν ὑπερνίκησιν δυνάμεων, τὰς ὁποίας ὀνομάζομεν ***ἀντιστάσεις***, δι' ἄλλων δυνάμεων, τὰς ὁποίας ἀφήνομεν νὰ ἐνεργήσουν εἰς ἄλλα σημεῖα τοῦ μοχλοῦ. Τοὺς μοχλοὺς μποροῦμε νὰ τοὺς διακρίνωμεν εἰς μονοπλεύρους καὶ διπλεύρους ἀντιστοίχως πρὸς τὸ ἂν αἱ δυνάμεις, ποὺ ἐνεργοῦν, ἔχουν τὰ σημεῖα ἐφαρμογῆς των πρὸς τὸ ἓν μέρος ἢ ἑκατέρωθεν τοῦ ὑπομοχλίου. Τοὺς διπλεύρους μοχλοὺς τοὺς ὀνομάζουν καὶ μοχλοὺς πρώτου εἴδους. Εἰς αὐτοὺς ἡ δύναμις ποὺ ἐνεργεῖ πρὸς ἰσορρόπησιν τῆς ἀντιστάσεως (ἡ μία ἀπὸ τὸ ἓν μέρος καὶ ἡ ἄλλη ἀπὸ τὸ ἄλλο τοῦ ὑπομοχλίου) μπορεῖ νὰ εἶναι μεγαλυτέρα ἢ ἴση ἢ μικροτέρα τῆς ἀντιστάσεως, ἀντιστοίχως πρὸς τὸ ἂν ὁ μοχλοβραχίων τῆς δυνάμεως εἶναι μικρότερος ἢ ἴσος ἢ μεγαλύτερος τοῦ μοχλοβραχίονος τῆς ἀντιστάσεως. Οἱ μονόπλευροι μοχλοὶ ἔχουν τὸν βραχίονα τῆς δυνάμεως εἴτε μεγαλύτερον τοῦ τῆς ἀντιστάσεως (μοχλοὶ δευτέρου εἴδους) εἴτε μικρότερον (μοχλοὶ τρίτου εἴδους).



Σχ. 52

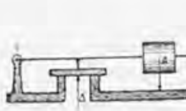


Σχ. 53

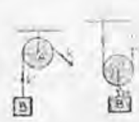


Σχ. 54

Τὸ σχ. 52 παριστάνει συσκευὴν πειραματικῆς ἐπαληθεύσεως τοῦ νόμου τῶν μοχλῶν. Εἰς διάφορα σημεῖα Γ, Ε, Ζ, ράβδου ποὺ μπορεῖ νὰ στρέφεται περὶ ἄξονα Α (ὑπομόχλιον) κρεμῶνται βάρη B_1, B_2 καὶ B_3 μὲ ροπὰς περιστροφῆς $B_1 \cdot (\Gamma A)$ ἢ $B_1 \cdot \alpha_1$, $B_2 \cdot (EA)$ ἢ $B_2 \cdot \alpha_2$ καὶ $B_3 \, (ZA)$ ἢ $B_3 \cdot \alpha_3$, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ $B_1 \cdot \alpha_1$ καὶ ἡ $B_3 \cdot \alpha_3$ εἶναι ἀριστερόστροφοι ἐνῶ ἡ $B_2 \cdot \alpha_2$ εἶναι δεξιόστροφος. Διὰ νὰ ὑφίσταται ἰσορροπία, πρέπει νὰ ἰσχύη ἡ σχέσις: $B_1 \cdot \alpha_1 + B_3 \cdot \alpha_3 = B_2 \cdot \alpha_2$. Τὸ σχ. 53, ἡ κοινὴ παλάντζα, εἶναι μοχλὸς δίπλευρος ἢ πρώτου εἴδους, εἰς τὸν ὁποῖον ἡ ἀντίστασις Α ἔχει σταθερὸν μοχλοβραχίονα, ἐνῶ ἡ ἰσορροποῦσα αὐτὴν σταθερὰ δύναμις Δ (τὸ βαρύδι) μεταβάλλει τὸν βραχίονά της ἀναλόγως πρὸς τὴν ἔντασιν τῆς ἀντιστάσεως (τὸ βάρος τοῦ ζυγιζομένου σώματος). Τὸ σχ. 54 παριστάνει μονόπλευρον μοχλὸν δευτέρου εἴδους καὶ τὸ σχ. 55 (βαλβίδα ἀσφαλείας) μονόπλευρον τρίτου εἴδους.



Σχ. 55



α Σχ. 56 β

ε) Τροχαλίαι. Κάθε τροχαλία εἶναι ἰδιάζουσα μορφὴ μοχλοῦ. Ἀποτελεῖται ἀπὸ κυκλικὸν δίσκον (σχ. 56), δυνάμενον νὰ περιστρέφεται περὶ ἄξονα Α, διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου του, καθέτως ἐπὶ τὴν κυκλικήν του ἐπιφάνειαν. Ὁ ἄξων αὐτὸς στηρίζεται ἀμετακινήτως εἰς θήκην σχήματος U, τὴν *τροχαλιοθήκην*. Ἐπὶ τῆς περιφερειακῆς ἐπιφανείας τοῦ δίσκου εἶναι ἐσκαμμένη αὔλαξ, εἰς τὴν ὁποίαν στηρίζεται εὔκαμπτον καὶ ἀνένδοτον νῆμα. Διακρίνομεν δύο εἴδη τροχαλίας, ἤτοι τὴν *παγίαν* ἢ *ἀμετάθετον* (σχ. 56α) καὶ τὴν *ἐλευθέραν* ἢ *μεταθετὴν* (σχ. 56β). Εἰς τὴν παγίαν τροχαλίαν (σχ. 56α) ἡ τροχαλιοθήκη στερεώνεται εἰς ἀκλόνητον στήριγμα. Εἰς τὰ ἐλεύθερα ἄκρα τοῦ νήματος, ποὺ διέρχεται διὰ τῆς αὔλακος τοῦ δίσκου τῆς τροχαλίας, ἐνεργοῦν αἱ δυνάμεις, εἰς τὸ ἓν ἡ ἀντίστασις ποὺ θέλομεν νὰ ἰσορροπήσωμεν (π.χ. τὸ βάρος ποὺ θέλομεν νὰ ἀνυψώσωμεν) καὶ εἰς τὸ ἄλλο ἡ δύναμις k ποὺ πρέπει νὰ καταβάλωμεν πρὸς τοῦτο. Ἔτσι ὁ βραχίων τῆς δυνάμεως (ἀπόστασις ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ δίσκου ὅπου ὁ ἄξων περιστροφῆς μέχρι τοῦ σημείου, ὅπου ἐφάπτεται τὸ νῆμα, εἰς τὸ ἄκρον τοῦ ὁποίου ἐνεργεῖ ἡ δύναμις), εἶναι ἀκριβῶς ἴσος μὲ τὸν βραχίονα τῆς ἀντιστάσεως ὡς ἀκτῖνες τοῦ κυκλικοῦ δίσκου. Κατὰ συνέπειαν τούτου πρέπει ἡ καταβαλλομένη δύναμις νὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἰσορροπουμένην διὰ τῆς τροχαλίας ταύτης ἀντίστασιν. Ἂν μὲ k_ε παραστήσωμεν τὴν δύναμιν, μὲ k_α τὴν ἀντίστασιν καὶ μὲ ρ τὴν ἀκτῖνα τοῦ δίσκου πρέπει εἰς τὴν περίπτωσιν ἰσορροπίας νὰ εἶναι : $K_\varepsilon \cdot \rho = K_\alpha \cdot \rho$ καὶ συνεπῶς $K_\varepsilon = K_\alpha$.

Κατὰ ταῦτα εἰς τὴν παγίαν τροχαλίαν ἡ δύναμις εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀντίστασιν ποὺ ἰσορροποῦμεν καὶ τὸ μόνον ποὺ ἐπιτυγχάνομεν εἶναι ὅτι ἡ φορὰ τῆς δυνάμεως εἶναι ἀντίθετος τῆς φορᾶς ποὺ ἔχει ἡ ἰσορροπουμένη ἀντίστασις.

Εἰς τὴν ἐλευθέραν τροχαλίαν (σχ. 56β) προσδένεται τὸ ἓν ἄκρον τοῦ περὶ τὸν δίσκον νήματος εἰς ἀκλόνητον στήριγμα. Εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον τοῦ νήματος ἐνεργεῖ ἡ δύναμις k, ἐνῶ ἡ ἀντίστασις B ἐφαρμόζεται εἰς τὸ ἄγκιστρον τῆς τροχαλιοθήκης. Ἔτσι τὸ ὑπομόχλιον περὶ τὸ ὁποῖον τείνουν νὰ περιστρέψουν τὴν τροχαλίαν καὶ ἡ δύναμις καὶ ἡ ἀντίστασις (ἡ μία ἀντιθέτως πρὸς τὴν ἄλλην) εὑρίσκεται τώρα εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τοῦ σχοινίου πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ δίσκου τῆς τροχαλίας. Ἕνεκα τούτου ὁ βραχίων τῆς δυνάμεως k εἶναι ἴσος μὲ τὴν διάμετρον 2ρ τοῦ δίσκου, ἐνῶ ὁ τῆς ἀντιστάσεως εἶναι ἴσος μὲ τὴν ἀκτῖνα ρ τοῦ δίσκου. Ὅθεν εἰς τὴν περίπτωσιν ἰσορροπίας (ἴσων καὶ ἀντιθέτων ῥοπῶν περιστροφῆς) θὰ ἔχωμεν : $K.2\rho = B.\rho$ καὶ ἑπομένως $K = B/2$ ἢ $B = 2K$.

Ὥστε, μὲ τὴν ἐλευθέραν τροχαλίαν ἡ δύναμις ποὺ καταβάλλεται εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ἀντιστάσεως ποὺ ἰσορροπεῖ.

στ) Πολύσπαστα. Τὰ πολύσπαστα εἶναι συνθετώτεραι μηχαναὶ ποὺ προκύπτουν διὰ συνδυασμοῦ παγίων καὶ ἐλευθέρων τροχαλιῶν. Τοιαῦτα εἶναι :

1) ***Τὸ ἐκθετικὸν πολύσπαστον*** (σχ. 57), ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ μίαν παγίαν καὶ περισσοτέρας ἐλευθέρας τροχαλίας, ποὺ συνδέονται ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα. Ἐπειδὴ εἰς κάθε μεταθετὴν τροχαλίαν ἡ δύναμις ποὺ καταβάλλεται, εἶναι τὸ $1/2$ ἐκείνης ποὺ ἰσορροπεῖ εἰς τὴν προηγουμένην της, προκύπτει ὅτι ἡ δύναμις K, ποὺ χρειάζεται νὰ ἐνεργήση τελικῶς εἰς τὴν παγίαν τροχαλίαν τοῦ πολυσπάστου διὰ νὰ ἰσορροπηθῇ ἡ ἀντίστασις B, ποὺ ἐνεργεῖ εἰς τὸν ἄξονα τῆς πρώτης ἐλευθέρας, θὰ εἶναι τόσας φορὰς $1/2$ τοῦ $1/2$ τῆς ἀντιστάσεως, ὅσας μᾶς δίδει ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐλευθέρων τροχαλιῶν. Ἂν δηλαδὴ εἶναι ν αἱ ἐλεύθεραι τροχαλίαι, τότε ἡ δύναμις K εἶναι $1/2 \cdot 1/2 \ldots 1/2$ (ν φορὰς) $= (1/2)^\nu$ τῆς ἀντιστάσεως B. Κατὰ ταῦτα ἡ συνθήκη ἰσορροπίας εἰς τὸ ἐκθετικὸν πολύσπαστον δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου: $K=(1/2)^\nu . B=B/2^\nu$ ἢ $B=2^\nu . K$ (28)

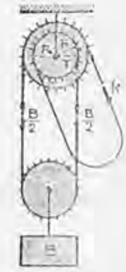

Σχ. 57


Σχ. 58

2) Τὸ ***πολλαπλασιαστικὸν πολύσπαστον***, (σχ. 58) ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ μίαν ἢ περισσοτέρας παγίας τροχαλίας καὶ ***ἰσαρίθμους*** μεταθετάς. Ἡ ὁμὰς τῶν παγίων τροχαλιῶν ἀφ' ἑνὸς καὶ τῶν μεταθετῶν ἀφ' ἑτέρου τοποθετεῖται εἰς κοινὴν τροχαλιοθήκην, εἴτε ὅπως δείχνει τὸ σχ. 58, εἴτε εἰς κοινὸν ἄξονα (μακαρᾶν) καὶ τὸ σχοινίον, τοῦ ὁποίου τὸ ἓν ἄκρον προσδένεται εἰς τὸ ἄγκιστρον τῆς τροχαλιοθήκης τῶν παγίων, περιβάλλει κατὰ σειρὰν τὴν πρώτην ἐλευθέραν, τὴν πρώτην παγίαν, τὴν δευτέραν ἐλευθέραν, τὴν δευτέραν παγίαν, τὴν τρίτην ἐλευθέραν, τὴν τρίτην παγίαν κ.ο.κ. μέχρι τῆς τελευταίας παγίας, ἐκ τῆς ὁποίας ἐξέρχεται τὸ ἐλεύθερον ἄκρον αὐτοῦ, εἰς τὸ ὁποῖον ἐφαρμόζεται ἡ δύναμις k. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ συνθήκη ἰσορροπίας παρέχεται ὑπὸ τῆς σχέσεως : $B=2\nu . K$ καὶ $K=B/2\nu$ (28')

Διότι μὲ κάθε ἐλευθέραν τροχαλίαν ἰσορροποῦμεν ἀντίστασιν B διπλασίαν τῆς καταβαλλομένης δυνάμεως καὶ ἑπομένως μὲ ν ἐλευθέρας τροχαλίας θὰ ἰσορροπήσωμεν ἀντίστασιν B, ἡ ὁποία θὰ εἶναι 2ν φορὰς μεγαλυτέρα τῆς καταβαλλομένης δυνάμεως P.

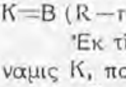
3) *Τὸ διαφορικὸν πολύσπαστον* (σχ. 59), τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο παγίας τροχαλίας μὲ κοινὸν ἄξονα περιστροφῆς καὶ διαφόρους ἀκτῖνας R, r τῶν δίσκων των καὶ ἀπὸ μίαν ἐλευθέραν τροχαλίαν, ἀπὸ τὴν τροχαλιοθήκην τῆς ὁποίας κρέμεται τὸ βάρος ποὺ θέλομεν νὰ ἰσορροπήσωμεν. Αἱ τροχαλίαι φέρουν ἐπὶ τῶν περιφερειακῶν ἐπιφανειῶν των ἀντὶ αὔλακος ὀδοντωτὰς προεξοχάς, εἰς τὰς ὁποίας ἐμπλέκονται αἱ κοιλότητητες κλεστῆς (ἀτέρμονος) ἁλύσεως, ποὺ περιβάλλει διαδοχικῶς τὴν παγίαν τροχαλίαν τῆς μικροτέρας ἀκτῖνος, τὴν ἐλευθέραν, τὴν παγίαν τῆς μεγαλυτέρας ἀκτῖνος καὶ συνεχίζεται πάλιν ἀπὸ τὴν ἀρχὴν χωρὶς διακοπὴν ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα. Εἰς τὴν περίπτωσιν ἰσορροπίας πρέπει ἡ δεξιόστροφος ροπὴ τῆς δυνάμεως K, ἴση μὲ K.R, καὶ ἡ ἐπισης δεξιόστροφος ροπὴ τοῦ ἡμίσεως τῆς ἀντιστάσεως B, ποὺ ἐνεργεῖ εἰς τὴν παγίαν τροχαλίαν τῆς ἀκτῖνος r, ἴση μὲ 1/2 B.r, νὰ δίδουν ἄθροισμα ἴσον μὲ τὴν ἀριστερόστροφον ροπὴν τοῦ ἄλλου ἡμίσεως τῆς ἀντιστάσεως B, ποὺ ἐνεργεῖ εἰς τὴν παγίαν τροχαλίαν τῆς ἀκτῖνος R, ἴσην μὲ 1/2 B.R, ἤτοι πρέπει νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις: $K.R+1/2\,B.r=1/2\,B.R$ ἢ $K.R=1/2\,B(R-r)$, ὅθεν: $K=B\,(R-r)/2R$ (28″)



Σχ. 59

Ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης προκύπτει ὅτι εἰς τὸ διαφορικὸν πολύσπαστον ἡ δύναμις K, ποὺ ἀπαιτεῖται διὰ νὰ ἰσορροπηθῇ ἀντίστασις B, εἶναι τόσον μικροτέρα ταύτης, ὅσον μικροτέρα εἶναι ἡ διαφορὰ R—r τῶν ἀκτίνων τῶν δύο ὁμοαξονικῶν παγίων τροχαλιῶν καὶ ὅσον μεγαλυτέρα εἶναι ἡ ἀκτὶς R τῆς μεγαλυτέρας παγίας τροχαλίας.

ζ) *Βαροῦλκον καὶ ἐργάτης*. Τοῦτο εἶναι ἄλλη ἰδιάζουσα μορφὴ μοχλοῦ. Ἀποτελεῖται ἀπὸ ὁριζοντίως τοποθετημένον κύλινδρον, ἐπὶ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ΕΕ τοῦ ὁποίου μπορεῖ νὰ περιτυλίσσεται σχοινίον, εἰς τὸ ἐλεύθερον ἄκρον τοῦ ὁποίου εἶναι προσδεδεμένη ἀντίστασις Α (τὸ πρὸς ἀνύψωσιν βάρος) (σχ. 60). Ὁ κύλινδρος οὗτος μπορεῖ νὰ περιστρέφεται περὶ τὸν ὁριζόντιον ἄξονά του ΑΑ, στηριζόμενον εἰς τὰ δύο ἄκρα του ἐπὶ ἀκλονήτων ὑποστηριγμάτων. Ἡ περιστροφὴ ἐπιβάλλεται ὑπὸ τῆς δυνάμεως Δ, ἐνεργούσης ἐπὶ τῆς περιφερείας δίσκου ΖΖ ἢ εἰς *στρόφαλον*, ποὺ ἐφαρμόζεται ἐπὶ τοῦ κυλίνδρου κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ. Ἔτσι ὁ μοχλοβραχίων τῆς δυνάμεως Δ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ τῆς ἀντιστάσεως Α. Ἂν εἶναι R ἡ ἀκτὶς τοῦ δίσκου ἢ ἡ ἀπόστασις τοῦ ἄκρου τοῦ στροφάλου ἀπὸ τὸν ἄξονα περιστροφῆς, θὰ εἶναι Δ.R ἡ ροπὴ περιστροφῆς τῆς δυνάμεως. Αὕτη εἰς τὴν περίπτωσιν ἰσορροπίας πρέπει νὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀντίθετον ροπὴν περιστροφῆς τῆς ἀντιστάσεως Α, ἤτοι τῆς ροπῆς περιστροφῆς A.r, ἂν r εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ κυλίνδρου, ἐπὶ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ ὁποίου ἐνεργεῖ διὰ τοῦ σχοινίου ἡ ἀντί-στασις Α. Κατὰ ταῦτα εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ βαρούλκου ἡ συνθήκη ἰσορροπίας δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως: $\Delta.R=A.r$ ὅθεν $\Delta=A.r/R$. (28‴)



Σχ. 60

Ὁ λόγος r/R ποὺ μᾶς δίδει τὴν σχέσιν τῆς δυνάμεως Δ πρὸς τὴν ἀντίστασιν Α, ποὺ ἰσορροπεῖ, λέγεται *σχέσις μεταβιβάσεως*.

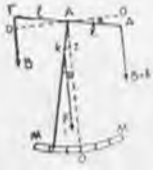
Τὸ βαροῦλκον λέγεται *ἐργάτης*, ἂν ὁ ἄξων περιστροφῆς αὐτοῦ τοποθετεῖται κατακορύφως.

η) *Ζυγός*. Ὁ ζυγὸς εἶναι ὄργανον ποὺ, ὡς γνωστόν, χρησιμεύει πρὸς ἀκριβῆ μέτρησιν τοῦ βάρους σώματος. Ἀποτελεῖται ἀπὸ ἐπιμήκη στερεὰν καὶ ἄκαμπτον ράβδον ΦΦ (σχ. 61) ἡ ὁποία φέρει εἰς τὸ μέσον της τριγωνικὴν πρισματικὴν ἀκμὴν S, μὲ τὴν ὁποίαν στηρίζεται ἐπὶ τῆς ἀνωτάτης ἐπιφανείας κατακορύφου στελέχους. Μὲ τὴν στήριξιν αὐτὴν ἡ ράβδος, τὴν ὁποίαν ὀνομάζομεν *φάλαγ-*

γα τοῦ ζυγοῦ, μπορεῖ νὰ ταλαντεύεται περὶ τὴν ὁριζοντίαν ἀκμήν· μὲ τὴν ὁποίαν στηρίζεται. Ἀπὸ τὰ δύο ἄκρα τῆς φάλαγγος κρέμονται δίσκοι Π, Π τοὺς ὁποίους ὀνομάζομεν πλάστιγγας τοῦ ζυγοῦ. Αἱ δύο πλάστιγγες εἶναι ἰσοβαρεῖς καὶ ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς φάλαγγος στηριγμέναι καὶ αὐταὶ ἐπὶ πρισματικῶν ἀκμῶν. Εἰς τὴν μίαν τῶν πλαστίγγων τοποθετεῖται τὸ σῶμα, τοῦ ὁποίου πρόκειται νὰ μετρηθῇ τὸ βάρος, καὶ εἰς τὴν ἄλλην τὰ *σταθμά*, ποὺ ἀπαιτοῦνται διὰ νὰ ἰσορροπήσουν τὸ βάρος τοῦ σώματος. Τὰ σταθμὰ εἶναι σώματα γνωστοῦ βάρους ἀπὸ μέταλλον, ποὺ δὲν ὀξειδώνεται εὔκολα καὶ φυλάσσονται εἰς κιβώτια κατὰ σειράς, ἑκάστη τῶν ὁποίων μπορεῖ νὰ συνθέσῃ οἱονδήποτε ἀριθμὸν γραμμαρίων βάρους, ποὺ δὲν εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸ ἄθροισμά των. Ἡ ἰσορροπία τῆς φάλαγγος μὲ τὰς πλάστιγγας ποὺ κρέμονται εἰς τὰ ἄκρα της, εἶναι εὐσταθὴς διὰ τὴν ὁριζοντίαν θέσιν τῆς φάλαγγος. Τὴν θέσιν αὐτὴν μᾶς δείχνει δείκτης Ζ προσηρμοσμένος εἰς τὴν φάλαγγα. Ὁ δείκτης οὗτος κινεῖται ἐνώπιον τόξου μὲ μετρικὰς ὑποδιαιρέσεις, τῶν ὁποίων τὸ μηδὲν ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν θέσιν τῆς ὁριζοντίας ἰσορροπίας τῆς φάλαγγος.

Ὁ ζυγὸς πρέπει νὰ εἶναι *ἀκριβὴς* καὶ *εὐπαθής*. Ἀκριβὴς εἶναι ὅταν τὸ βάρος τοῦ σώματος, ποὺ τοποθετεῖται εἰς τὴν μίαν τῶν πλαστίγγων, εἶναι ἀκριβῶς ἴσον μὲ τὸ βάρος τῶν σταθμῶν, ποὺ χρειάζεται νὰ τεθοῦν εἰς τὴν ἄλλην πλάστιγγα διὰ νὰ ἰσορροπῇ ἡ φάλαξ ὁριζοντίως, ἤτοι ὁ δείκτης νὰ ἠρεμῇ ἐνώπιον τῆς ὑποδιαιρέσεως 0 τοῦ τόξου. Τοῦτο γίνεται ὅταν ἡ φάλαγξ εἶναι ὁμοιομερῶς κατασκευασμένη καὶ τὰ μήκη της ἑκατέρωθεν τῆς ἀκμῆς, περὶ τὴν ὁποίαν δύναται νὰ ταλαντεύεται, εἶναι ἴσα μεταξύ των. Τότε ὁ μοχλοβραχίων τοῦ βάρους τοῦ σώματος εἶναι ἴσος μὲ τὸν βραχίονα τοῦ βάρους τῶν σταθμῶν καί, ὡς ἐκ τούτου, τὸ βάρος τοῦ σώματος εἶναι ἴσον μὲ τὸ βάρος τῶν σταθμῶν. Πρὸς ἔλεγχον τῆς ἀκριβείας ζυγοῦ ἀρκεῖ νὰ ἀνταλλάξωμεν τὰς πλάστιγγας αὐτοῦ, ἤτοι νὰ κρεμάσωμεν τὴν δεξιὰ εἰς τὸ ἀριστερὸν καὶ τὴν ἀριστερὰ εἰς τὸ δεξιὸν ἄκρον τῆς φάλαγγος· ἂν καὶ μὲ τὴν ἀλλαγὴν αὐτὴν ἡ φάλαξ τοῦ ζυγοῦ ἐξακολουθεῖ νὰ ἰσορροπῇ ὁριζοντίως, ἔχομεν ἀπόδειξιν ὅτι ὁ ζυγὸς εἶναι ἀκριβής.

Σχ. 61



Σχ. 62

Ἡ εὐπάθεια ζυγοῦ εἶναι τόσον μεγαλυτέρα ὅσον μικροτέρα εἶναι ἡ εὐστάθεια τῆς ἰσορροπίας του, διότι τότε ἀρκεῖ μικροτέρα διαφορὰ βάρους τῆς μιᾶς πλάστιγγος ἀπὸ τὴν ἄλλην διὰ νὰ ἐκτραπῇ ἡ φάλαγξ (καὶ μετ' αὐτῆς ὁ δείκτης) ἀπὸ τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας· ἀλλὰ διὰ νὰ εἶναι μικροτέρα ἡ εὐστάθεια τῆς ἰσορροπίας τῆς φάλαγγος μὲ τὰς πλάστιγγας, πρέπει [(βλ. § 20, σχέσιν (30)] τὸ βάρος των νὰ εἶναι μικρότερον, τὸ κ.β. αὐτῶν νὰ κεῖται ὀλιγώτερον κάτω ἀπὸ τὸν ἄξονα περιστροφῆς (ἀκμὴν ταλαντώσεως) καὶ ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τὴν ἀκμὴν ταλαντώσεως τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς τοῦ ἐπιπλέον βάρους, δηλαδὴ ὁ μοχλοβραχίων αὐτοῦ, νὰ εἶναι μεγαλύτερος. Πρὸς τὸν σκοπὸν ὅπως ἐπιτύχωμεν νὰ ἔχωμεν μικρὸν βάρος εἰς μεγάλους μοχλοβραχίονας τῆς φάλαγγος, δίδομεν εἰς αὐτήν, εἰς εὐπαθεῖς ζυγούς, τὸ σχῆμα ἐπιμήκους ῥόμβου (διὰ νὰ μὴ κάμπτεται) μὲ διάκενα ὕλης. Ἐξ ἄλλου φροντίζομεν νὰ κεῖται τὸ κ.β. αὐτῆς ὀλίγον κάτωθεν τῆς ἀκμῆς στηρίξεως καί, διὰ νὰ μὴ κατέλθῃ τοῦτο πολύ, ὅταν τοποθετοῦνται βάρη εἰς τὰς πλάστιγγας, προσαρτῶμεν εἰς τὴν φάλαγγα στέλεχος κατακόρυφον κατὰ μῆκος τοῦ ὁποίου δύναται νὰ μετακινῆται βάρος Β οὕτως, ὥστε νὰ ἀναβιβάζῃ ἢ καταβιβάζῃ κατὰ βούλησιν τὴν θέσιν τοῦ κ.β. τοῦ συστήματος φάλαγγος καὶ πλαστίγγων. Μέτρον τῆς εὐπαθείας ζυγοῦ παρέχει ἡ γωνία α=ΟΑΑ (σχ. 62), τὴν ὁποίαν σχηματίζει μὲ τὴν ὁριζοντίαν διεύθυνσιν ΟΟ ἡ διεύθυνσις ΓΑ ποὺ λαμβάνει ἡ φάλαγξ, ὅταν εἰς τὴν μίαν πλάστιγγα τεθῆ βάρος μεγαλύτερον κατὰ β ἀπὸ ἐκεῖνο ποὺ ἔχει τεθῆ εἰς τὴν ἄλλην. Ἂν εἶναι F τὸ βάρος τῆς φάλαγγος μὲ τὰς πλάστιγγας καὶ τὰ ἐπ' αὐτῶν βάρη, B εἰς τὴν μίαν καὶ B+β εἰς τὴν ἄλλην, τότε ἡ ἰσορροπία εἰς τὴν νέαν θέσιν ΓΑ καθορίζεται ἐκ τοῦ ὅτι ἡ ἀναφαινομένη ροπὴ ἐπαναφορᾶς τῆς F, προστιθεμένη εἰς τὴν ροπὴν τῆς B, πρέπει νὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν ροπὴν τῆς B+β, ὅλων ὡς πρὸς τὴν ἀκμὴν A. ἂν εἶναι ε ἡ ἀπόστασις KA τοῦ κέντρου βάρους K τοῦ ταλαντευομένου συστήματος ἀπὸ τὸν ἄξονα, τότε ἡ ροπὴ τῆς F εἰς τὴν θέσιν ΓΔ τῆς φάλαγγος θὰ εἶναι: $F.(KZ)=F.\varepsilon.\eta\mu\alpha$. Ἡ ροπὴ τῆς B εἶναι $B.l.\sigma\upsilon\nu\alpha$ καὶ ἡ τῆς B+β ὡς πρὸς τὸν αὐτὸν ἄξονα A: $(B+\beta).l.\sigma\upsilon\nu\alpha$. Ἔτσι ἡ συνθήκη ἰσορροπίας εἰς τὴν θέσιν ΓΔ τῆς φάλαγγος θὰ δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως: $F.\varepsilon.\eta\mu\alpha+B.l.\sigma\upsilon\nu\alpha=(B+\beta)l\,\sigma\upsilon\nu\alpha$, ὅθεν $F.\varepsilon.\eta\mu\alpha=B.l.\sigma\upsilon\nu\alpha$ καὶ $\varepsilon\varphi\alpha=B.l/F.\varepsilon$ (29)

Κατὰ ταῦτα, ἡ εὐπάθεια ζυγοῦ τῆς ὁποίας ὡς μέτρον δύναται νὰ ληφθῆ ἡ ἐφαπτομένη τῆς γωνίας α, κατὰ τὴν ὁποίαν ἐκτρέπεται ἀπὸ τὴν ὁριζοντιότητα ἡ φάλαγξ, εἶναι ἀνάλογος τοῦ ἐπὶ πλέον βάρους B καὶ τοῦ βραχίονος l, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐνεργεῖ, καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογος τοῦ ὁλικοῦ βάρους F καὶ τῆς ἀποστάσεως τοῦ κ.β. αὐτοῦ ἀπὸ τὴν ἀκμὴν περὶ τὴν ὁποίαν ταλαντεύεται ἡ φαλαγξ.

Προβλήματα

31. Ἡ συνισταμένη k δύο δυνάμεων k_1 καὶ k_2, ποὺ ἔχουν κοινὸν σημεῖον ἐφαρμογῆς, ἔχει διεύθυνσιν ποὺ σχηματίζει γωνίαν 75° μὲ τὴν διεύθυνσιν τῆς k_1 καὶ 30° μὲ τὴν τῆς k_2. Ἂν ἡ K_1 εἶναι 40 kp, πόσον εἶναι ἡ K καὶ πόσον ἡ K_2; (Ἀπ. $K_2=K_1=77,274$ kp).

32. Τρεῖς δυνάμεις k_1, k_2, k_3, ποὺ ἐνεργοῦν εἰς ἓν σημεῖον μὲ ἀντιστοίχους ἐντάσεις 200, 300, 400 kp εὑρίσκονται εἰς ἰσορροπίαν. Ποίας γωνίας σχηματίζουν αἱ διευθύνσεις τῶν k_1 καὶ k_2 μὲ τὴν διεύθυνσιν τῆς k_3; (Ἀπ. Ἡ k_3 εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος τῆς συνισταμένης τῶν k_1 καὶ k_2. α=133° 25′ 57″, β=151° 2′ 42″).

33. Σῶμα βάρους 110 kp τίθεται εἰς κίνησιν ἐπὶ ὁριζοντίου ὑποβάθρου ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν δύο δυνάμεων k_1 καὶ k_2 καὶ διανύει εἰς τὸ 1ον sec διάστημα 6,5 m. Ἂν ἡ διεύθυνσις τῆς τροχιᾶς σχηματίζη μὲ τὰς διευθύνσεις τῶν k_1 καὶ k_2 ἀντιστοίχως τὰς γωνίας 52° καὶ 77°, ποῖαι εἶναι αἱ ἐντάσεις τῶν k_1 καὶ k_2; (Ἀπ. $K_1=(110/9,81).2.6,5.\eta\mu77^\circ/\eta\mu(52^\circ+77^\circ)=182,76$ kp καὶ $K_2=147,81$ kp).

34. Σῶμα βάρους 70 kp, ποὺ στηρίζεται ἐπὶ τραπέζης, εὑρίσκεται ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν δυνάμεως 50 kp, τῆς ὁποίας ἡ διεύθυνσις πρὸς τὰ ἄνω πλαγίως σχηματίζει γωνίαν 40° μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς τραπέζης. Πόση εἶναι ἡ δύναμις ποὺ πιέζει τὴν τράπεζαν; (Ἀπ. $70-50\,\eta\mu40^\circ=37,86$ kp).

35. Εἰς πέντε διάφορα σημεῖα στερεοῦ σώματος ἐνεργοῦν παράλληλοι δυνάμεις ἐντάσεων ἀντιστοίχως 4, 8, 5, 3 καὶ 2 kp. Ἂν αἱ ἀποστάσεις τῶν σημείων ἐφαρμογῆς τῶν δυνάμεων τούτων ἀπὸ ἓν ἐπίπεδον εἶναι ἀντιστοίχως 3, 4, 6, 7, καὶ 9, πόση εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς τῆς συνισταμένης τῶν δυνάμεων ποὺ μᾶς ἐδόθησαν; [Ἀπ. $(4.3+8.4+5.6+3.7+2.9)/(4+8+5+3+2)$].

36. Εἰς τὰ ἄκρα A_1, A_2 μιᾶς εὐθείας μήκους 2,5 m ἐνεργοῦν αἱ δυνάμεις $k_1=24$ kp καὶ $k_2=18$kp, ἡ πρώτη μὲ διεύθυνσιν ποὺ σχηματίζει γωνία $\alpha_1=144^\circ$ μὲ τὴν εὐθεῖαν $\overline{A_1A_2}$ καὶ ἡ δευτέρα ὑπὸ γωνίαν $\alpha_2=126^\circ$ πρὸς τὴν αὐτὴν γραμμὴν A_1A_2. Ποίαν γωνίαν σχηματίζει ἡ διεύθυνσις τῆς συνισταμένης μὲ τὴν διεύθυνσιν τῆς k_1, ποίαν ἔντασιν ἔχει καὶ εἰς ποῖον σημεῖον τῆς A_1A_2 ἐνεργεῖ; (Ἀπ. Θεωροῦμεν τὰ σημεῖα ἐφαρμογῆς τῶν k_1, k_2 μετα-

τιθέμενα κατὰ μῆκος τῶν διευθύνσεών των μέχρι τοῦ σημείου Ο ὅπου συ-
ναντῶνται. Εἰς τὸ ἔτσι σχηματιζόμενον (ὀρθογώνιον διὰ τὰ δεδομένα τοῦ
προβλήματος) τρίγωνον OA_1A_2 εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι OA_1=2,022 καὶ OA_2=
1,469 m. Ἀπὸ τὰ τρίγωνα πάλιν $Ok_1'k'$ καὶ $Ok'k_2'$ τοῦ παραλληλογράμμου
$Ok_1'k'k_2'$ τῶν δυνάμεων εἰς τὴν νέαν των θέσιν εὑρίσκομεν, ὅτι ἡ διεύθυνσις
τῆς συνισταμένης Ok' σχηματίζει μὲ τὴν διεύθυνσιν τῆς Ok_1' γωνίαν 36°52',
ὅτι ἡ ἔντασις τῆς συνισταμένης εἶναι 30 kp καὶ ὅτι τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς
της ἐπὶ τῆς A_1A_2 ἀπέχει τὸ A_1 ἀπόσκασιν A_1A=1,265 m).

37. Εἰς σημεῖον 0 ἐνεργοῦν τέσσαρες δυνάμεις ἔτσι ποὺ τὸ σύστημα
ἰσορροπεῖ. Ἂν αἱ τρεῖς ἐξ αὐτῶν k_1=7kp, k_2=8kp καὶ k_3=11kp ἔχουν διευ-
θύνσεις καθέτους ἐπ' ἀλλήλας, πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἔντασις τῆς τετάρ-
της k_4 καὶ ποίαν γωνίαν σχηματίζει ἡ διεύθυνσίς της μὲ ἑκάστην τῶν διευ-
θύνσεων τῶν ἄλλων. (Ἀπ. 15,297kp, γων. k_1, k_4=117° 13' 58'', k_2, k_4=121° 31'
54'', k_3, k_4=135° 58' 45'').

38. Ποῦ κεῖται τὸ κ.β. τῆς περιμέτρου τριγώνου ΑΒΓ; (Ἀπ. Ἂν ἑνώσωμεν
τὰ τρία ἀπέναντι τῶν σημειουμένων κορυφῶν μέσα M_A, M_B, M_Γ τῶν πλευ-
ρῶν (ποὺ εἶναι καὶ κ.β. αὐτῶν) καὶ λάβωμεν ἐπὶ τῆς $\overline{M_A M_B}$ σημεῖον Ο, ὥστε
νὰ εἶναι $\overline{M_A O} : \overline{OM_B} = \overline{B\Gamma} : \overline{A\Gamma}$, τὸ Ο θὰ εἶναι κ.β. τῶν $\overline{A\Gamma}$ καὶ $\overline{B\Gamma}$. Ἂν ἔπει-
τα εὑρεθῆ ἐπὶ τῆς OM_Γ σημεῖον κ ἔτσι ποὺ νὰ εἶναι $\overline{O\kappa} : \kappa M_\Gamma$ =
$\overline{AB} : (\overline{A\Gamma} + \overline{\Gamma B})$, τὸ σημεῖον κ εἶναι τὸ ζητούμενον κ.β. Τὸ σημεῖον τοῦτο
εἶναι σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ
συνεπῶς τὸ κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου).

39. Νὰ καθορισθῆ ἡ θέσις τοῦ κ.β. τόξου μήκους τ, ἀνήκοντος εἰς κύ-
κλον ἀκτῖνος ρ. (Ἀπ. Ἂν θεωρήσωμεν τὸ τόξον $(\widehat{A_1A_2})$ χωρισμένον εἰς στοι-
χειώδη τμήματα $\alpha_1 \alpha_2$, ἡ ροπὴ ἑκάστου τούτων, ὡς πρὸς τὴν διάμετρον ποὺ φέρε-
ται παράλληλος πρὸς τὴν χορδὴν τοῦ τόξου, θὰ εἶναι: $(\alpha_1\alpha_2)\cdot(\alpha_1\kappa_1)$, ἂν $\alpha_1\kappa_1$ εἶναι
ἡ κάθετος ἀπόστασις τοῦ στοιχειώδους τόξου ἀπὸ τὴν ληφθεῖσαν διάμε-
τρον. Φέρομεν τὴν ἀκτῖνα $\alpha_1 O$ καὶ τὴν $\alpha_2\varepsilon$ κάθετον ἐπὶ τὴν $\alpha_1\kappa_1$. Ἔτσι σχη-
ματίζονται δύο ὅμοια τρίγωνα, $\alpha_1\varepsilon\alpha_2$ καὶ $\alpha_1 O\kappa_1$, ὁπόθεν προκύπτει:
$(\alpha_1\alpha_2)(\alpha_1\kappa_1)=(\alpha_2\varepsilon)(\alpha_1 O)=(\alpha_2\varepsilon)\cdot\rho$, ἤτοι ἡ ροπὴ στοιχείου τοῦ τόξου, ὡς πρὸς
διάμετρον παράλληλον πρὸς τὴν χορδὴν τοῦ τόξου, εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμε-
νον τῆς ἀκτῖνος ρ ἐπὶ τὴν προβολὴν τοῦ στοιχείου τοῦ τόξου ἐπὶ τῆς χορ-
δῆς τοῦ τόξου. Ἑπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν ροπῶν ὅλων τῶν στοιχείων, εἰς
τὰ ὁποῖα θεωρεῖται χωρισμένον τὸ τόξον, θὰ εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἀκτῖνα ρ
ἐπὶ τὸ μῆκος μ τῆς χορδῆς τοῦ τόξου. Ἀλλὰ κατὰ τὸ θεώρημα τῶν ροπῶν
τὸ ἄθροισμα αὐτὸ εἶναι ἴσον μὲ τὴν ροπὴν ὅλου τοῦ τόξου ὡς πρὸς τὴν
αὐτὴν διάμετρον. Ἂν εἶναι x ἡ ἀπόστασις τοῦ κ.β. τοῦ τόξου (ποὺ κεῖται
ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος ποὺ φέρεται πρὸς τὸ μέσον του) ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύ-
κλου, ἡ ροπή του θὰ εἶναι: τ.x· ἑπομένως θὰ ἔχωμεν τ.x=ρ.μ καὶ x=ρ.μ/τ
καὶ ἂν τὸ μῆκος τῆς χορδῆς ἐκφρασθῆ μὲ τὴν ἀκτῖνα προκύπτει:
$x=[2\rho^2 \eta\mu(360\tau/4\pi\rho)]/\tau$).

40. Ποῦ κεῖται τὸ κ.β. ἡμισφαιρίου ἀκτῖνος 3,2 cm; (Ἀπ. Εἰς τὴν
ἀκτῖνα τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν βάσιν εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τὸ κέντρον ἴσην μὲ
3,2 . 3/8=1,2 cm).

41. Αἱ μᾶζαι Γῆς καὶ Σελήνης ἔχουν μεταξύ των λόγον 81 : 1. Ἡ ἀπό-
στασις μεταξὺ τῶν κέντρων τῶν δύο σωμάτων ἀνέρχεται εἰς 382.420 km.
Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς Γῆς εὑρίσκεται τὸ κ.β. τοῦ συ-

στήματος τῶν δύο σωμάτων; ('Απ. $382420/(81+1)=4663{,}66$ km).

42. Πόση εἶναι ἡ εὐστάθεια τῆς ἰσορροπίας ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἀπὸ ξύλον εἰδ. βάρους 0,6 p/cm³, ποὺ ἔχει μῆκος 120 cm, ὕψος 50 cm καὶ πλάτος 80 cm καὶ ὑπόκειται εἰς τὴν ἐπίδρασιν δυνάμεως Κ, ἐνεργούσης παραλλήλως πρὸς τὴν βάσιν εἰς τὴν ἀνωτάτην ἐπιφάνειαν καὶ τεινούσης νὰ τὸ ἀνατρέψῃ περὶ τὴν ἀκμὴν τοῦ πλάτους του; ('Απ. $K=[(120 \,.\, 50 \,.\, 80) \,.\, 0{,}6 \,.\, (120/2)/50]$.

43. Ἐπίπεδος τριγωνικὴ ἐπιφάνεια μὲ πλευρὰς ΑΒ=ΑΓ=10 cm καὶ ΒΓ=8 cm φέρει εἰς τὰς κορυφὰς Α, Β, Γ ἀντιστοίχως τὰ βάρη 60, 30, 30 kp. Εἰς ποῖον σημεῖον της πρέπει νὰ στηριχθῇ ἡ ἐπιφάνεια αὐτὴ ἐπὶ κατακορύφου στελέχους, διὰ νὰ ἰσορροπῇ ὁριζοντίως; ('Απ. Εἰς σημεῖον τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν βάσιν τοῦ τριγώνου, κείμενον εἰς ἀπόστασιν $(60\sqrt{10^2-4^2})/120$).

44. Ἐπὶ ἐπιπέδου ἐπιφανείας, ἡ ὁποία κλίνει πρὸς τὴν ὁριζοντίαν κατὰ γωνίαν 10°, βασίζεται ὀρθὸς ὁμοιογενὴς κύλινδρος, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις ἔχει ἀκτῖνα 5 cm. Πόσον ὕψος μπορεῖ νὰ ἔχῃ τὸ πολὺ ὁ κύλινδρος αὐτός, διὰ νὰ μὴ ἀνατρέπεται; ('Απ. 56,71 cm).

45. Ὀρθὴ τετραγωνικὴ πυραμὶς ἀπὸ μάρμαρον εἰδ. βάρους 2,8 p/cm³, ποὺ ἔχει ὕψος 12 dm καὶ ἀκμὴν τῆς βάσεως 9 cm, στηρίζεται ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου. Ποία εἶναι ἡ ἔντασις τῆς δυνάμεως, ποὺ ἀπαιτεῖται νὰ ἐνεργήσῃ εἰς τὴν κορυφὴν τῆς πυραμίδος καθ' ὁριζοντίαν διεύθυνσιν, καὶ κατὰ ποίαν γωνίαν πρέπει νὰ στραφῇ ἡ πυραμὶς περὶ μίαν τῶν ἀκμῶν τῆς βάσεώς της, διὰ νὰ ἀνατραπῇ; ('Απ. 340,2 kp καὶ 56° 18′ 36″).

46. Ἐπίπεδος ἐπιφάνεια σχήματος τραπεζίου ἔχει παραλλήλους πλευρὰς ΑΒ=12 cm καὶ ΓΔ=18 cm καὶ ὕψος υ=6 cm. Εἰς ποῖον σημεῖον της πρέπει νὰ στηριχθῇ ἡ ἐπιφάνεια αὐτὴ ἐπὶ κατακορύφου στελέχους διὰ νὰ ἰσορροπῇ ὁριζοντίως; ('Απ. Εἰς τὸ σημεῖον ὅπου ἡ ἑνοῦσα τὰ μέσα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν συναντᾷ τὴν ἑνοῦσαν τὰ κ.β. τῶν τριγώνων εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται τὸ τραπέζιον διὰ μιᾶς διαγωνίου. Ἔτσι ἡ ἀπόστασις x τοῦ ζητουμένου σημείου ἀπὸ τὴν ΓΔ προκύπτει ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$\frac{(18+12)\,6}{2}\,x=\frac{18\,.\,6}{2}\,.\,\frac{2\,.\,6}{3}+\frac{12\,.\,6}{2}\,.\,\frac{6}{3}, \text{ ὅθεν } x=\frac{18+2.12}{18+12}\,.\,\frac{6}{3}\Big).$$

47. Ἐπὶ ἐπιπέδου ἐπιφανείας, ἡ ὁποία κλίνει πρὸς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον κατὰ γωνίαν 10°, βασίζεται ὀρθὸς ὁμοιογενὴς κύλινδρος, τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος ἀνέρχεται εἰς 20 cm. Πόση πρέπει νὰ εἶναι κατ' ἐλάχιστον ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως, διὰ νὰ μὴ ἀνατρέπεται ὁ κύλινδρος αὐτός; ('Απ. 1,76).

48. Ὀρθὴ τετραγωνικὴ πυραμὶς ἀπὸ ὑλικὸν εἰδ. βάρους 2,8 p/cm³, ποὺ ἔχει ἀκμὴν τῆς βάσεως 9 cm, στηρίζεται ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου. Ποῖον εἶναι τὸ ὕψος, ἂν ἡ ἔντασις τῆς δυνάμεως, ποὺ ἀπαιτεῖται νὰ ἐνεργήσῃ εἰς τὴν κορυφὴν τῆς πυραμίδος καθ' ὁριζοντίαν διεύθυνσιν διὰ νὰ ἀνατραπῇ, ἀνέρχεται εἰς 340,2 kp καὶ κατὰ ποίαν γωνίαν πρέπει νὰ στραφῇ πρὸς τοῦτο ἡ πυραμὶς περὶ μίαν τῶν ἀκμῶν τῆς βάσεώς της; ('Απ. 12 dm καὶ 56° 18′ 36″).

49. Ράβδος ΑΒ βάρους 14,5 kp, ἡ ὁποία εἶναι στρεπτὴ περὶ σταθερὸν ὁριζόντιον ἄξονα διερχόμενον ἀπὸ τὸ ἄκρον Β τῆς ράβδου, θέλομεν νὰ ἰσορροπηθῇ ὁριζοντίως διὰ δυνάμεως 9,6 kp, ἐνεργούσης εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον Α αὐτῆς, ἐπὶ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὴν ράβδον. Ὑπὸ ποίαν γωνίαν φ ὡς πρὸς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον πρέπει νὰ ἐνεργῇ ἡ δύναμις αὐτή; ('Απ. ημφ $=14{,}5/2.9{,}6$ καὶ φ=49° 2′ 38″).

50. Σχοινίον τοῦ ὁποίου τὸ ἓν ἄκρον εἶναι δεμένον εἰς ἀκλόνητον

στήριγμα, περιβάλλει τὸ 1/8 τῆς περιφερείας τοῦ δίσκου ἐλευθέρας τροχαλίας, εἰς τὴν ὁποίαν κρέμεται βάρος 96 kp. Πόση εἶναι ἡ δύναμις ποὺ χρειάζεται νὰ ἐνεργῇ εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον τοῦ σχοινίου, διὰ νὰ ἰσορροπῇ τὸ βάρος; ('Απ. 96 : 2 ημ (360/2.5) kp).

51. Εἰς διαφορικὸν πολύσπαστον αἱ ἀκτῖνες τῶν δύο παγίων τροχαλιῶν ἔχουν λόγον 17 : 18. Πόσην ἀντίστασιν ἰσορροπεῖ εἰς αὐτὸ δύναμις 50 kp; ('Απ. [2.18/(18—17)].50 kp).

52. Ἡ γωνία κλίσεως κεκλιμένου ἐπιπέδου εἶναι 17°. Πόση δύναμις ἀπαιτεῖται διὰ νὰ ἰσορροπήσῃ βάρος 450 kp ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου, ἂν ἡ διεύθυνσις τῆς δυνάμεως εἶναι α) παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου, β) παράλληλος πρὸς τὸ μῆκος αὐτοῦ καὶ γ) σχηματίζει γωνίαν 30° μὲ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον; ['Απ. α) 137,6 kp, β) 131,6 kp καὶ γ) 450 ημ 17°/συν (30—17)°=135,03 kp].

53. Κοχλίας, μὲ βῆμα 2,5 cm καὶ ἀκτῖνα τῆς ἀτράκτου 12 cm, στρέφεται μὲ δύναμιν 30 kp, ἐνεργοῦσαν ἐπὶ τῆς περιφερείας τῆς ἀτράκτου. Πόσην ἀντίστασιν ἰσορροπεῖ; ('Απ. 30.2.3,14.12/2,5 kp).

— 54. Σῶμα μάζης 294 kg ἀποκτᾷ ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν σταθερᾶς κινητηρίου δυνάμεως ταχύτητα 72 km/h εἰς χρόνον 2 min. Πόση εἶναι ἡ ἔντασις τῆς δυνάμεως, πόσον εἶναι τὸ διανυθὲν διάστημα καὶ ποίαν κινητικὴν ἐνέργειαν ἔχει τὸ σῶμα; ['Απ. 294(kg).72(km/h)/2(min), 1,2 (km), 58800 (mkp)].

— 55. Πόσον χρόνον πρέπει νὰ ἐνεργήσῃ ἐπὶ σώματος μάζης 200gr, δύναμις 10000 dyn, διὰ νὰ παραγάγῃ ἔργον ἴσον μὲ τὸ παρεχόμενον εἰς 5 sec ἀπὸ μηχανὴν 10 ἵππων; ('Απ. $\sqrt{2 . 200\,gr . 10 . 75 . 5\,mkp}$ / 10^4 dyn].

— 56. Βλῆμα βάρους 5 kp ἐκφεύγει ἀπὸ τὸν σωλῆνα τοῦ πυροβόλου (ποὺ ἔχει μῆκος 2 m) μὲ ταχύτητα 800 m/s. Πόση εἶναι ἡ ἔντασις τῆς ὠστικῆς δυνάμεως τῶν ἀερίων τῆς ἐκρηκτικῆς ὕλης εἰς τὸν σωλῆνα τοῦ πυροβόλου καὶ καὶ μὲ ποίαν κινητικὴν ἐνέργειαν ἐκφεύγει τὸ βλῆμα ἀπὸ τὸ πυροβόλον; ('Απ. 5(kg).800^2(m^2/s^2)/2.2(m) καὶ 2,5(kg).800^2(m^2/s^2)).

57. Εἰς ράβδον μήκους 3 m κρέμονται τὰ βάρη 3, 5, 7 καὶ 9 kp, τὸ πρῶτον εἰς τὸ ἓν ἄκρον τῆς ράβδου καὶ τὸ τελευταῖον εἰς τὸ ἄλλο, ἐνῷ τὰ δύο ἄλλα ἐνδιαμέσως εἰς ἴσας μεταξύ των ἀποστάσεις. Εἰς ποῖον σημεῖον τῆς ράβδου πρέπει νὰ στηριχθῇ τὸ σύστημα διὰ νὰ ἰσορροπῇ; ('Απ. Εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τὸ πρῶτον ἄκρον (5+7.2+9.3) : (3+5+7+9)=1,92 m].

58. Πόσην ἔντασιν ἔχει ἡ δύναμις ποὺ χρειάζεται νὰ ἐνεργήσῃ εἰς ἐκθετικὸν πολύσπαστον μὲ 8 ἐλευθέρας τρχοαλίας, διὰ νὰ ἰσορροπήσῃ ἀντίστασιν 10 τόννων; ('Απ. 10000/2^8=39,06 kp).

59. Πόσον βάρος ἰσορροπεῖ δύναμις 80 kp, ἡ ὁποία ἐνεργεῖ εἰς κοινὸν (πολλαπλασιαστικὸν) πολύσπαστον, ποὺ ἔχει 4 ἐλευθέρας τροχαλίας εἰς κοινὴν τροχαλιοθήκην βάρους 7 kp; ('Απ. 4.80—7=313 kp).

60. Ἀτέρμων κοχλίας μὲ βῆμα 2 cm στρέφεται μὲ στρόφαλον ἀκτῖνος ρ=0,3 m καὶ ἐμπλέκεται εἰς τοὺς ὀδόντας τροχοῦ ἀκτῖνος 0,12 m, ὁ ὁποῖος προσαρμόζεται εἰς βαροῦλκον ἀκτῖνος 6 cm. Γύρω ἀπὸ τὸν κύλινδρον τοῦ βαρούλκου περιτυλίσσεται σχοινίον, εἰς τὸ ἄκρον τοῦ ὁποίου εἶναι κρεμασμένον βάρος 500 kp. Πόση δύναμις πρέπει νὰ ἐνεργήσῃ εἰς τὸν στρόφαλον διὰ νὰ ἰσορροπῇ τὸ σύστημα; ('Απ. 500.2.6/2.3.14.30.12 kp).

61. Χημικὸς ζυγὸς ἐκτρέπεται τῆς ὁριζοντιότητος κατὰ γωνίαν 5°, ὅταν ἐπὶ μιᾶς τῶν πλαστίγγων του τοποθετηθῇ βάρος 12 mp. Κατὰ ποίαν γωνίαν θὰ ἐκτραπῇ, ἂν τὸ βάρος ἀνέρχεται εἰς 7,2 mp; ('Απ. Ἀπὸ τὴν σχέσιν εφ 5° : εφ x = 12 : 7.2 εὑρίσκομεν x=3°).

62. Τὸ βάρος σώματος ποὺ ζυγίζεται μὲ ἀνακριβῆ ζυγὸν εὑρίσκεται ἴσον μὲ 534 p, ὅταν ἰσορροπῆται εἰς τὸν ἕνα δίσκον τοῦ ζυγοῦ καὶ 596, ὅταν ἰσορροπῆται εἰς τὸν ἄλλον. Πόσον εἶναι τὸ ἀκριβὲς βάρος τοῦ σώματος; ('Απ. $\sqrt{534 \cdot 596}$ p).

63. Πῶς μποροῦμε νὰ προσδιορίσωμεν τὸ βάρος μιᾶς ράβδου χωρὶς ζυγόν, ἄν γνωρίζωμεν τὴν θέσιν τοῦ κ.β. καὶ διαθέτωμεν ἓν γνωστὸν βάρος; ('Απ. Κρεμῶμεν τὸ γνωστὸν βάρος εἰς τὸ ἓν ἄκρον τῆς ράβδου καὶ στηρίζομεν τὸ σύστημα ἐπὶ ὑπομοχλίου, τὸ ὁποῖον μεταθέτομεν κατὰ μῆκος τῆς ράβδου, μέχρις ὅτου ἐπιτύχωμεν νὰ ἰσορροπῇ ἡ ράβδος ὁριζοντίως. Τότε βάσει τοῦ νόμου τοῦ μοχλοῦ ἐξισώνομεν τὴν ροπὴν τοῦ βάρους τῆς ράβδου μὲ τὴν ροπὴν τοῦ γνωστοῦ βάρους ὡς πρὸς τὸ ὑπομόχλιον· ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον).

V. Κινήσεις καὶ δυνάμεις ποὺ τὰς προκαλοῦν (Δυναμική)

§ 28. Ἀρχαὶ ἢ ἀξιώματα τῆς Δυναμικῆς. *α) Γενικά.* Εἰς τὴν Δυναμικὴν ἐξετάζονται κινήσεις τῶν σωμάτων συσχετισμέναι πρὸς τὰς δυνάμεις ποὺ τὰς προκαλοῦν. Εἰς τὴν ἐξέτασιν αὐτὴν τὰ σώματα θεωροῦνται ὡς ἀπολύτως στερεά, δηλαδὴ ὡς ἔχοντα τελείως σταθερὸν σχῆμα καὶ ὄγκον. Εἰς τὴν πραγματικότητα τὰ σώματα ἀποτελοῦνται ἀπὸ τεμαχίδια (μόρια, ἄτομα κ.λ.π.) (πρβλ. Κεφ. VI), τὰ ὁποῖα ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν δυνάμεων μεταβάλλουν τὰς μεταξύ των θέσεις καὶ ὡς ἐκ τούτου προκαλοῦνται παραμορφώσεις τῶν σωμάτων. Παρὰ ταῦτα ἡ θεώρησις τῆς Δυναμικῆς παραβλέπει αὐτὰς τὰς παραμορφώσεις τῶν σωμάτων, ἀδιαφοροῦσα διὰ τὰς μεταβολὰς τῶν διαστάσεων αὐτῶν. Πέραν τούτου ἡ Δυναμικὴ δὲν ἐνδιαφέρεται κάν, οὔτε δι' αὐτὰς ταύτας τὰς διαστάσεις τῶν σωμάτων καί, κατὰ τὸ πλεῖστον, θεωρεῖ τὰ σώματα ὡς ἂν μὴ ἔχουν διαστάσεις, δηλαδὴ ὡς ἂν ὅλη ἡ μᾶζα ἑκάστου σώματος εἶναι συγκεντρωμένη εἰς ἓν σημεῖον καὶ ἀπὸ τὴν ἄποψιν αὐτὴν χρησιμοποιεῖ τὴν ἔννοιαν τοῦ *ὑλικοῦ* σημείου.

β) Δευτέρα Ἀρχὴ τῆς δυναμικῆς. Εἴδαμεν εἰς τὴν § 14 ὅτι ἡ ἐμπειρία ὡδήγησεν εἰς τὴν διατύπωσιν τῆς Ἀρχῆς τῆς ἀδρανείας (πρώτης Ἀρχῆς τῆς Δυναμικῆς), σύμφωνα μὲ τὴν ὁποίαν ἐξηγεῖται ὁ ρόλος ποὺ παίζει ἡ δύναμις εἰς τὴν μορφὴν τῆς κινήσεως σώματος. Προκειμένου ἔπειτα (§ 15) νὰ ὁρισθῇ τὸ κινητικὸν μέτρον δυνάμεως, ἐξητάσθη ἡ σχέσις μεταξὺ δυνάμεως καὶ τῆς κινήσεως, πού ἐπιβάλλει αὕτη εἰς τὸ σῶμα. Καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἐμπειρία ὁδηγεῖ εἰς τὴν διαπίστωσιν ὅτι : ***Ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς κινήσεως σώματος εἶναι ἀνάλογος τῆς δυνάμεως ποὺ τὴν ἐπιβάλλει καὶ ἔχει τὴν διεύθυνσιν καὶ φορὰν τῆς δυνάμεως.*** Ἡ διαπίστωσις αὐτὴ ἀποτελεῖ τὴν ***δευτέραν Ἀρχὴν τῆς Δυναμικῆς***. Μαθηματικὴν διατύπωσιν αὐτῆς παρέχει ἡ θεμελιώδης σχέσις τῆς Δυναμικῆς : $K = m \cdot \gamma$ (βλ. ἐξίσ. 12).

Ἡ Ἀρχὴ αὐτή, ποὺ μπορεῖ νὰ ὀνομασθῇ καὶ *Ἀρχὴ τῆς ἐπιταχύνσεως*, περικλείει ὡς εἰδικὴν περίπτωσιν τὴν ἀρχὴν τῆς ἀδρανείας, διότι μᾶς λέγει ὅτι, ἂν ἡ δύναμις Κ ποὺ ἐνεργεῖ ἐπὶ τοῦ σώματος γίνῃ μηδέν, τότε καὶ ἡ ἐπιτάχυνσις γ τῆς κινήσεως τοῦ σώματος θὰ γίνῃ μηδὲν καὶ συνεπῶς τὸ σῶμα θὰ κινῆται μὲ ἀμετάβλητον ταχύτητα (ἡ ὁποία μπορεῖ νὰ εἶναι καὶ μηδέν, ὁπότε τὸ σῶμα θὰ ἠρεμῇ).

γ) Τρίτη Ἀρχὴ ἢ Ἀρχὴ τῆς δράσεως καὶ ἀντιδράσεως. Ἐξ ἴσου σημαντικὴ διὰ τὴν θεώρησιν τῆς Δυναμικῆς εἶναι καὶ ἡ ***Ἀρχὴ τῆς δράσεως καὶ ἀντιδράσεως***. Κατ' αὐτὴν ὁσάκις ἐπὶ ἑνὸς σώματος ἐνεργεῖ κάποια δύναμις, ἀναφαίνεται αὐτομάτως μία ἄλλη δύναμις, ἴση κατ' ἔντασιν καὶ τῆς αὐτῆς διευθύνσεως, ἀλλ' ἀντιθέτου φορᾶς. Ὅταν σύρωμεν τὸ ἓν ἄκρον ἐλατηρίου (βλ. σχ. 21), τοῦ ὁποίου τὸ ἄλλο ἄκρον εἶναι δεμένον εἰς ἀκλόνητον στήριγμα, ἀναφαίνεται εἰς τὸ ἐλατήριον ἄλλη ἴση καὶ ἀντίρροπος δύναμις, ἡ ὁποία ἀντιτίθεται εἰς τὴν ἐλαστικὴν παραμόρφωσιν, ποὺ ἐπιβάλλεται εἰς τὸ ἐλατήριον ἀπὸ τὴν δύναμιν, ποὺ τὸ τεντώνει. Γενικῶς εἰς ὅλα τὰ καθέκαστα φαινόμενα ἐκδηλώνονται ἀνὰ δύο ἴσαι καὶ ἀντίθετοι δυνάμεις. Σῶμα βαρὺ ποὺ ὑποβαστάζεται ἐπὶ ὑποστηρίγματος πιέζει τὸ ὑποστήριγμά του μὲ δύναμιν ἴσην πρὸς τὸ βάρος του· εἰς τὴν δύναμιν αὐτὴν ἀντιτάσσεται ἀπὸ τὸ ὑποστήριγμα ἴση καὶ ἀντίθετος δύναμις, ἡ ὁποία κρατεῖ τὸ σῶμα ἐπὶ τοῦ ὑποστηρίγματος. Κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν πηδήματος ἐνεργοῦν ταυτοχρόνως μία δύναμις ποὺ ὠθεῖ τὸ σῶμα μας καὶ ἄλλη ἴση καὶ ἀντίθετος ποὺ ὠθεῖ τὸ βάθρον, ἀπὸ τὸ ὁποῖον πηδῶμεν· ἡ δευτέρα αὐτὴ δύναμις εἶναι ἐμφανής, ἂν τὸ βάθρον εἶναι κινητόν, ἂν π.χ. πηδῶμεν ἀπὸ μίαν λέμβον εἰς τὴν ἀποβάθραν, ὁπότε παρατηροῦμεν ὅτι ἡ λέμβος ὠθεῖται ἀντιθέτως πρὸς τὸ σῶμα μας.

Εἰς ἕκαστον ζεῦγος τῶν ἴσων καὶ ἀντιθέτων, ἀλλὰ ταυτοχρόνως ἐνεργουσῶν δυνάμεων, ὀνομάζομεν τὴν μίαν ***δρᾶσιν*** καὶ τὴν ἄλλην ***ἀντίδρασιν***. Ἔτσι ἡ σχετικὴ μὲ τὴν συνύπαρξιν τῶν δύο τούτων δυνάμεων διαπίστωσις χαρακτηρίζεται ὡς ***ἀρχὴ τῆς δράσεως καὶ ἀντιδράσεως*** καὶ διατυπώνεται μὲ τὴν πρότασιν: ***Ἡ δρᾶσις εἶναι κατ' ἔντασιν ἴση μὲ τὴν ἀντίδρασιν***.

Σημ. Αἱ τρεῖς αὗται Ἀρχαὶ τῆς δυναμικῆς διετυπώθησαν μὲ σαφήνειαν κατὰ πρῶτον τὸ 1687 ἀπὸ τὸν Νεύτωνα.

δ) Ἀρχὴ τῆς διατηρήσεως τοῦ κ.β. Εἰς συνθετώτερα συστήματα σωμάτων, ὅπως π.χ. τὸ σύστημα λέμβου καὶ ἐπιβάτου, δυνάμεθα νὰ διακρίνωμεν τὰς δυνάμεις, ποὺ ἐπιδροῦν ἐπ' αὐτῶν, εἰς ***ἐσωτερικὰς*** καὶ εἰς ***ἐξωτερικάς***. Ἐσωτερικὰς χαρακτηρίζομεν ἐκείνας ποὺ ἐξασκοῦνται μεταξὺ μόνων τῶν σωμάτων ποὺ ἀποτελοῦν τὸ σύστημα. Ἔτσι ἡ δύναμις ποὺ ὠθεῖ τὸν ἐπιβάτην νὰ πηδήσῃ ἀπὸ τὴν λέμβον (ἡ δρᾶσις) καὶ ἡ ἀντίθετός της (ἀντίδρασις), ποὺ ὠθεῖ τὴν λέμβον κατ' ἀντίθετον φοράν, εἶναι ἐσωτερικαὶ δυνάμεις τοῦ συστήματος. Ἡ ἕλξις ὅμως ποὺ ἀσκεῖ ἡ Γῆ ἐπὶ τῆς λέμβου μὲ τὸν ἐπιβάτην εἶναι μία ἐξωτερικὴ δύναμις διὰ τὸ σύστημα αὐτό, διότι ἡ ἀντίδρασίς της, δηλ. ἡ δύναμις μὲ τὴν ὁποίαν τὸ σύστημα λέμβου - ἐπιβάτου ἕλκει τὴν Γῆν, ἔχει τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς της ἔξω ἀπὸ τὸ σύστημα.

Μὲ τὴν διάκρισιν αὐτὴν μποροῦμε νὰ καθορίσωμεν εἰδικωτέρας διαπιστώσεις τῆς ἐμπειρίας, αἱ ὁποῖαι ἐπιτρέπουν πληρεστέραν κατανόησιν τῶν φαινομένων. Τέτοια διαπίστωσις εἶναι ἡ διατυπουμένη ὡς ***Ἀρχὴ διατηρήσεως τοῦ κ.β.*** Κατ' αὐτήν: ***Ἡ κινητικὴ κατάστασις τοῦ κ.β. συστήματος σωμάτων δὲν μεταβάλλεται μὲ τὴν ἐπενέργειαν ἐσωτερικῶν δυνάμεων.*** Μὲ ἄλλα λόγια τὸ κ.β. συστήματος σωμάτων διατηρεῖ ἀμετάβλητον τὴν κατάστασιν ἠρεμίας ἢ εὐθυγράμμου ἰσοταχοῦς κινήσεως, ἂν δὲν ἐπιδροῦν ἐπὶ τοῦ συστήματος ἐξωτερικαὶ δυνάμεις. Ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν ἐξωτερικῶν δυνάμεων ἡ κινητικὴ κατάστασις τοῦ κ.β. μεταβάλλεται, ὡς ἐὰν ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων τούτων ἐνήργει ἐπ' αὐτοῦ τοῦ κ.β. Ἂν ἡ σύνθεσις τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων παρέχει καὶ ζεῦγος περιστροφῆς, τοῦτο δὲν ἔχει ἐπίδρασιν ἐπὶ τοῦ σώματος, διότι διὰ τὰς ἐξωτερικὰς δυνάμεις τὸ σῶμα εἶναι, ὡς ἐὰν ἔχῃ ὅλην τὴν μᾶζαν του συγκεντρωμένην εἰς τὸ κ.β. του. Εἰς τὸ σύστημα λέμβου - ἐπιβάτου πρέπει κατὰ ταῦτα τὸ κ.β. νὰ μένῃ εἰς τὴν θέσιν του καὶ μετὰ τὸ πήδημα τοῦ ἐπιβάτου πρὸς τὰ ἔμπρὸς καὶ τὴν ἀπώθησιν τῆς λέμβου πρὸς τὰ ὀπίσω. Εἰς βόμβαν, ἡ ὁποία ἐκρήγνυται κατὰ τὴν διαδρομήν της, τὰ θραύσματα ἐκτινάσσονται γύρω ἀπὸ τὴν θέσιν τῆς ἐκρήξεως κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε τὸ κ.β. ὅλων τῶν θραυσμάτων νὰ ἐξακολουθήσῃ τὴν διαδρομήν, ποὺ θὰ ἔκανε ἡ βόμβα ἂν δὲν ἐξερρηγνύετο.

ε) ***Ἀρχὴ τῆς διατηρήσεως τῆς ποσότητος κινήσεως.*** Ἰδιάζουσαν σημασίαν διὰ τὴν κατανόησιν φαινομένων τῆς Δυναμικῆς εἰς συνθετώτερα συστήματα σωμάτων ἔχει τὸ μέγεθος, ποὺ ὀνομάζομεν ***ποσότητα κινήσεως***. Τοῦτο ὁρίζεται ὡς γινόμενον τῆς μάζης m θεωρουμένου σώματος ἐπὶ τὴν ταχύτητα υ, μὲ τὴν ὁποίαν κινεῖται τοῦτο. Ἂν παραστήσωμεν τὴν ποσότητα κινήσεως σώματος μὲ Q, θὰ εἶναι κατὰ τὸν δοθέντα ὁρισμόν :

$$Q = m\upsilon \tag{30}$$

Ἐκ τούτου προκύπτει ὅτι τὸ μέγεθος τοῦτο εἶναι ἀνυσματικὸν καὶ ἔχει διαστάσεις (1, 1, −1).

Διὰ τὸ ποσὸν κινήσεως, ἰσχύει ἐπίσης ἡ Ἀρχὴ τῆς διατηρήσεώς του. Κατ' αὐτήν: ***Εἰς κάθε κλειστὸν σύστημα σωμάτων, δηλ. σύστημα ποὺ δὲν ὑφίσταται τὴν ἐπίδρασιν ἐξωτερικῶν δυνάμεων, τὸ ποσὸν κινήσεως μένει σταθερὸν δι' οἱασδήποτε μεταβολὰς τοῦ συστήματος, ὀφειλομένας εἰς ἐπίδρασιν ἐσωτερικῶν μόνον δυνάμεων.*** Εἰς τὴν περίπτωσιν π.χ. τοῦ συστήματος λέμβου - ἐπιβάτου πρέπει σύμφωνα μὲ τὴν ἀρχὴν αὐτὴν τὸ ποσὸν κινήσεως τοῦ συστήματος, ποὺ εἶναι μηδέν, ὅταν ὁ ἐπιβάτης ἀκινητῇ ἐπὶ τῆς λέμβου, νὰ ἔχῃ τὴν αὐτὴν τιμὴν (μηδὲν) καὶ ὅταν ὁ ἐπιβάτης πηδᾷ πρὸς τὴν ἀποβάθραν, ἐνῷ ἡ λέμβος ἀπομακρύνεται κατ' ἀντίθετον φορὰν ἀπὸ τὴν ἀποβάθραν. Κατὰ συνέπειαν τούτου, τὸ ποσὸν κινήσεως m_1v_1, ποὺ προσκτᾶται κατὰ τὸ πήδημά του ὁ ἐπιβάτης, εἶναι ἀκριβῶς ἴσον καὶ ἀντίθετον πρὸς τὸ ποσὸν κινήσεως m_2v_2, τὸ ὁποῖον ἐμφανίζει ἡ λέμβος, ἀπομακρυνομένη ἐκ τῆς ἀποβάθρας. Πρέπει λοιπὸν εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην νὰ ἰσχύει ἡ σχέσις :

$$m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = 0 \quad \text{ἢ} \quad m_1v_1 - m_2v_2 = 0 \tag{31}$$

Ὁμοίως εἰς τὴν περίπτωσιν βλήματος ποὺ ἐκπέμπεται ἀπὸ ὅπλον, πρέπει τὸ ποσὸν κινήσεως τοῦ βλήματος $m_1\upsilon_1$ νὰ εἶναι ἴσον καὶ ἀντιθέτου φορᾶς πρὸς τὸ ἀνυσματικὸν μέγεθος $m_2\upsilon_2$ ποὺ παρέχει τὸ ποσὸν κινήσεως, τὸ ὁποῖον παρουσιάζει τὸ ὅπλον (αἰσθητὸν μὲ τὸ ὅτι τὸ ὅπλον «κλωτσάει»).

Εἰς τὰ ***ἀεριοπροωθούμενα*** τὸ σκάφος ὠθεῖται πρὸς τὰ ἐμπρὸς ἀπὸ τὰ ἀέρια τῆς καύσεως, ποὺ ἐκφεύγουν πρὸς τὰ ὀπίσω. Ἂν εἶναι m_1 καὶ υ_1 ἡ μᾶζα καὶ ἡ ταχύτης τοῦ προωθουμένου ἀεροσκάφους καὶ m_2 καὶ υ_2 ἡ μᾶζα καὶ ἡ ταχύτης ἐκφυγῆς τῶν ἀερίων τῆς ἐκρήξεως, τότε θὰ εἶναι ἐπίσης: $m_1 v_1 = m_2 v_2$

στ) ***Ἐπιφορὰ δυνάμεως ἢ ὁρμή.*** Ὀνομάζομεν ***ἐπιφορὰν ἢ ὁρμὴν*** (Impuls) τὸ γινόμενον δυνάμεως k ἐπὶ τὸν χρόνον t ποὺ ἐνεργεῖ αὕτη. Ἀποτέλεσμα τῆς ἐπιφορᾶς εἶναι νὰ ἐπέρχεται μεταβολὴ εἰς τὸ ποσὸν κινήσεως τοῦ σώματος. Ἂν εἰς σῶμα μάζης m ἐνεργήσῃ ἐπὶ χρόνον t ἡ δύναμις k, ἡ ταχύτης τοῦ σώματος θὰ μεταβληθῇ ἀπὸ υ_1 εἰς υ_2 καὶ συνεπῶς θὰ μεταβληθῇ καὶ τὸ ποσὸν κινήσεως ἀπὸ $m\upsilon_1$ εἰς $m\upsilon_2$. Ἔτσι ἡ μεταβολὴ τοῦ ποσοῦ κινήσεως θὰ εἶναι: $m(\upsilon_2-\upsilon_1)$. Ἀλλὰ εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ἐνεργοῦσα δύναμις k εἶναι σταθερά, ἡ μεταβολὴ τῆς ταχύτητος $\upsilon_2-\upsilon_1$ εἶναι γινόμενον τῆς ἐπιταχύνσεως γ ἐπὶ τὸν χρόνον t, κατὰ τὸν ὁποῖον ἐπέρχεται ἡ μεταβολή. Ἑπομένως εἶναι: $m(\upsilon_2-\upsilon_1)=m.\gamma.t$. Σύμφωνα ὅμως μὲ τὴν θεμελιώδη σχέσιν τῆς Δυναμικῆς τὸ γινόμενον $m.\gamma$ μᾶς δίδει τὴν ἐνεργοῦσαν δύναμιν k. Ἔτσι προκύπτει:

$$m(\upsilon_2-\upsilon_1)=k.t \tag{32}$$

ἤτοι: ***Ἡ ἐπιφορὰ ἢ ὁρμὴ δυνάμεως εἶναι ἴση μὲ τὴν μεταβολὴν τοῦ ποσοῦ κινήσεως, ποὺ ὑφίσταται τὸ σῶμα.***

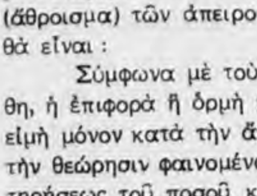
Εἰς τὴν γενικωτέραν περίπτωσιν ποὺ ἡ δύναμις k δὲν εἶναι σταθερὰ καθ' ὅλον τὸν χρόνον t τῆς ἐνεργείας της, θεωροῦμεν τὸν χρόνον τοῦτον χωρισμένον εἰς ἀπείρως μικρὰ χρονικὰ διαστήματα dt, εἰς ἕκαστον τῶν ὁποίων μποροῦμε νὰ θεωρῶμεν ὅτι ἡ δύναμις ἔχει σταθερὰν ἔντασιν καὶ διεύθυνσιν, καὶ συνεπῶς ἔχομεν ἐπιφορὰν k.dt. Τότε ἡ ὁλικὴ ἐπιφορὰ τῆς δυνάμεως εἶναι τὸ ὁλοκλήρωμα (ἄθροισμα) τῶν ἀπειροστῶν ἐπιφορῶν k.dt. Ἑπομένως εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ εἶναι:

$$m(\upsilon_2-\upsilon_1)=\int k.dt\,. \tag{32'}$$

Σύμφωνα μὲ τοὺς δοθέντας ὁρισμοὺς εἶναι εὐνόητον ὅτι τὰ δύο αὐτὰ μεγέθη, ἡ ἐπιφορὰ ἢ ὁρμὴ καὶ τὸ ποσὸν κινήσεως, δὲν διαφέρουν τὸ ἓν ἀπὸ τὸ ἄλλο εἰμὴ μόνον κατὰ τὴν ἄποψιν θεωρήσεως καὶ συνεπῶς μπορεῖ νὰ χρησιμεύσῃ εἰς τὴν θεώρησιν φαινομένων τὸ ἓν ἢ τὸ ἄλλο μέγεθος ἀδιαφόρως. Ἔτσι ἡ Ἀρχὴ διατηρήσεως τοῦ ποσοῦ κινήσεως ἰσχύει καὶ διὰ τὴν ἐπιφορὰν ἢ ὁρμήν.

§ 29. Κεντρομόλος καὶ φυγόκεντρος δύναμις.

α) Διὰ νὰ ἀναγκάσωμεν σῶμα, π.χ. λίθον δεμένον εἰς τὸ ἄκρον ἀνενδότου νήματος, νὰ κινηθῇ κυκλικῶς γύρω ἀπὸ σταθερὸν κέντρον O (σχ. 63) (εἰς τὸ παράδειγμα γύρω ἀπὸ τὸ ἄλλο ἄκρον τοῦ νήματος), χρειάζεται νὰ ἐνεργῇ ἐπὶ τοῦ σώματος συνεχῶς δύναμις K, ἐφόσον διαρκεῖ ἡ κυκλική του κίνησις. Ἡ παρουσία τῆς δυνάμεως αὐτῆς εἶναι εὐεξήγητος, ἂν σκεφθῶμεν, ὅτι, διὰ νά κινῆται κυκλικῶς τὸ σῶμα, πρέπει νὰ μεταβάλλεται συνεχῶς ἡ διεύθυνσις τῆς ταχύτητός του καὶ ἑπομένως νὰ προσδίδεται



Σχ. 63

συνεχῶς ἐπιτάχυνσις· ἀλλὰ τοῦτο, σύμφωνα μὲ τὴν δευτέραν Ἀρχὴν τῆς δυναμικῆς, γίνεται, ὅταν ἐπὶ τοῦ σώματος ἐνεργῇ συνεχῶς δύναμις. Εἰς τὴν § 12 εἴδαμε, ὅτι ἡ ἐπιτάχυνσις κυκλικῆς κινήσεως διευθύνεται πρὸς τὸ κέντρον, περὶ τὸ ὁποῖον γίνεται ἡ κίνησις καὶ ὀνομάζεται ***κεντρομόλος*** ἐπιτάχυνσις γ_ρ. Δι' αὐτὴν ἰσχύει: $\gamma_\rho = \upsilon^2/\rho = \omega^2.\rho$, ἂν εἶναι υ ἡ ἐπιτρόχιος ταχύτης, ρ ἡ ἀκτὶς τῆς διαγραφομένης κυκλικῆς περιφερείας καὶ ω ἡ γωνιακὴ ταχύτης. Διὰ τὴν ἀνάπτυξιν καὶ διατήρησιν τῆς ἐπιταχύνσεως ταύτης, πρέπει νὰ ἐνεργῇ συνεχῶς ἐπὶ τοῦ σώματος δύναμις K, διευθυνομένη ἐπίσης πρὸς τὸ κέντρον. Ἂν m παριστάνει τὴν μᾶζαν τοῦ σώματος, T τὴν περίοδον καὶ ν τὴν συχνότητα τῆς κυκλικῆς κινήσεως (§ 12), ποὺ ἐπιβάλλεται εἰς τὸ σῶμα ἀπὸ τὴν δύναμιν K, θὰ εἶναι: $K = m \,.\, \gamma_\rho = m\upsilon^2/\rho = m\omega^2\rho = m(2\pi/T)^2\rho = m(2\pi.\nu)^2\rho$ (33)

Ἡ δύναμις αὐτὴ ὀνομάζεται ***κεντρομόλος***, διότι σύρει τὸ σῶμα συνεχῶς πρὸς τὸ κέντρον τῆς διαγραφομένης κατὰ τὴν κίνησίν του κυκλικῆς τροχιᾶς. Ἂν εἰς κάποιαν στιγμὴν παύσῃ νὰ ἐνεργῇ ἐπὶ τοῦ σώματος, θὰ συνεχίσῃ τοῦτο τὴν κίνησίν του εὐθυγράμμως κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἐφαπτομένης τῆς τροχιᾶς, εἰς τὸ σημεῖον ὅπου εὑρίσκεται κατὰ τὴν στιγμὴν τοῦ ἐξαφανισμοῦ τῆς κεντρομόλου δυνάμεως. Εἶναι λοιπὸν σφάλμα νὰ νομισθῇ, ὅτι ἡ κεντρομόλος δύναμις προκαλεῖται ἀπὸ τὴν κυκλικὴν κίνησιν. Τὸ ὀρθὸν εἶναι, ὅτι κάθε ***σταθερὰ*** δύναμις, ἡ ὁποία ἐνεργεῖ ἐπὶ σώματος μὲ διεύθυνσιν πρὸς ὡρισμένον κέντρον οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι συνεχῶς κάθετος ἐπὶ τὴν τροχιάν, ποὺ διατρέχει τὸ σῶμα, ἐπιβάλλει εἰς αὐτὸ νὰ κινῆται ἐπὶ περιφερείας κύκλου. Ἡ ἀκτὶς ρ τοῦ κύκλου ἐξαρτᾶται (σύμφωνα μὲ τὴν σχέσιν: $\rho = m\upsilon^2/K$) ὄχι μόνον ἀπὸ τὴν ἔντασιν K τῆς δυνάμεως, ἀλλὰ καὶ ἀπὸ τὴν μᾶζαν m τοῦ σώματος καὶ τὴν ταχύτητα υ τῆς κινήσεώς του. Ἡ κεντρομόλος δύναμις μπορεῖ νὰ εἶναι ἐλαστικὴ (ὅπως εἰς τὴν περίπτωσιν νήματος, ποὺ συνδέει τὸ σῶμα μὲ τὸ σταθερὸν κέντρον) ἢ ἠλεκτρικὴ ἢ ἀκόμη καὶ δύναμις βαρύτητος.

Ἡ κεντρομόλος δύναμις εἶναι ἀπαραίτητος πρὸς ὑπερνίκησιν τῆς ἀδρανείας τῆς μάζης τοῦ σώματος, τὸ ὁποῖον ἐξαναγκάζεται νὰ διαγράψῃ κυκλικὴν τροχιάν. Ἡ ἀντίστασις, ποὺ λόγῳ τῆς ἀδρανείας της προβάλλει ἡ μᾶζα τοῦ σώματος εἰς τὴν ὑπὸ τῆς κεντρομόλου δυνάμεως ἐπιβαλλομένην μεταβολὴν τῆς διευθύνσεως τῆς ταχύτητος, εἶναι (κατὰ τὸ ἀξίωμα τῆς δράσεως καὶ ἀντιδράσεως) ἴση καὶ ἀντίθετος τῆς κεντρομόλου δυνάμεως. Ἔτσι, κατὰ τὴν περιστροφὴν σώματος, εἰς τὴν κεντρομόλον δύναμιν K, ποὺ ἐπιβάλλει τὴν κυκλικὴν κίνησιν, ἀντιτίθεται ἴση καὶ ἀντίθετος δύναμις F, τὴν ὁποίαν ὀνομάζομεν ***φυγόκεντρον***.

Τὴν δύναμιν αὐτὴν αἰσθανόμεθα, ὅταν π.χ. κρατῶμεν εἰς τὸ χέρι μας τὸ ἓν ἄκρον σχοινίου, εἰς τὸ ἄλλον ἄκρον τοῦ ὁποίου ἔχομεν προσδέσει τὸ σῶμα, ποὺ περιστρέφομεν γύρω ἀπὸ τὸ χέρι μας ὡς κέντρον. Χρειάζεται τότε νὰ καταβάλλωμεν μυϊκὴν δύναμιν διὰ νὰ κρατῶμεν τὸ σῶμα ἐπὶ κυκλικῆς τροχιᾶς. Εἰς τὴν κεντρομόλον αὐτὴν δύναμιν ἀντιτίθεται ἴση καὶ ἀντίθετος φυγόκεντρος, ἡ ὁποία ἐκδηλώνεται εἰς τὸ τέντωμα τοῦ σχοινίου. Ἡ ἔντασις τῆς δυνάμεως αὐτῆς καθορίζεται ἀπὸ τὴν σχέσιν (33) καὶ εἶναι, σύμφωνα μὲ αὐτήν: ***Ἀνάλογος τῆς μάζης τοῦ σώματος καὶ τοῦ τετραγώνου τῆς ταχύτητος μὲ τὴν ὁποίαν διατρέχει τοῦτο τὴν κυκλικήν του τροχιάν. Ἀναφορικῶς πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς ἡ φυγόκεντρος δύναμις εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος αὐτῆς, ἂν ἡ γραμμικὴ ταχύτης εἶναι σταθερά, ἐνῷ εἶναι ἀνάλογος τῆς ἀκτῖνος, ὅταν διατηρῆται σταθερὰ ἡ γωνιακὴ ταχύτης.***

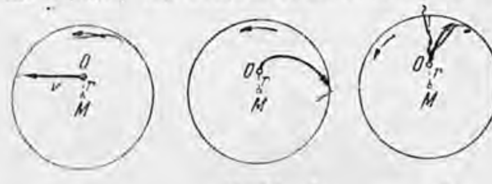
Ἂν ἡ φυγόκεντρος δύναμις καὶ συνεπῶς ἡ δύναμις ποὺ τεντώνει τὸ νῆμα, γίνῃ τόσον μεγάλη, ὥστε νὰ κοπῇ τοῦτο, τὸ σῶμα ἐκφεύγει λόγῳ τῆς ἀδρανείας του κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἐφαπτομένης τῆς τροχιᾶς· τότε δηλαδὴ ἐξαφανίζονται ταυτοχρόνως καὶ ἡ κεντρομόλος καὶ ἡ φυγόκεντρος δύναμις.

β) Προκειμένου τώρα νὰ θεωρήσωμεν τὴν κυκλικὴν κίνησιν ἀπὸ τὴν σκοπιὰν παρατηρητοῦ, ὁ ὁποῖος μετέχει εἰς τὴν περιστροφικὴν κίνησιν, φανταζόμεθα τὸν παρατηρητὴν ἐγκατεστημένον εἰς τὸ κέντρον Μ ἑνὸς περιστρεφομένου δίσκου (σχ. 64) καὶ ἔχοντα πρὸ αὐτοῦ ἐπὶ τοῦ δίσκου σφαιρίδιον Ο. Ὅταν ὁ δίσκος περιστρέφεται, ὁ παρατηρητής, ποὺ περιστρέφεται ἐπίσης, βλέπει τὴν σφαῖραν νὰ κυλίεται πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ δίσκου. Τοῦτο σημαίνει δι' αὐτὸν ὅτι ἡ σφαῖρα ὑφίσταται τὴν ἐπίδρασιν δυνάμεως, ποὺ τὴν ἀπομακρύνει ἀπὸ τὸν ἄξονα περιστροφῆς. Τὴν δύναμιν αὐτήν, ποὺ δὲν μπορεῖ παρὰ νὰ τὴν χαρακτηρίσῃ ὡς φυγόκεντρον, μπορεῖ καὶ νὰ τὴν μετρήσῃ, ἂν συνδέσῃ τὴν σφαῖραν διὰ μέσου ἑνὸς δυναμομέτρου μὲ τὸν ἄξονα περιστροφῆς. Κάθε παρατηρητὴς ποὺ στέκεται ἔξω ἀπὸ τὸν δίσκον, συνάγει ὅτι ἡ ἔνδειξις τοῦ δυναμομέτρου παρέχει τὴν κεντρομόλον δύναμιν, ποὺ ἀναγκάζει τὴν σφαῖραν νὰ παραμένῃ ἐπὶ τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς, τὴν ὁποίαν διατρέχει, ἀφοῦ περιστρέφεται μαζὶ μὲ τὸν δίσκον. Ὁ παρατηρητὴς ὅμως ποὺ κάθεται ἐπὶ τοῦ περιστρεφομένου δίσκου, βλέπει τὴν σφαῖραν νὰ ἀκινητῇ ἐπὶ τοῦ δίσκου ὅταν αὕτη κρατῆται εἰς ὡρισμένην ἀπόστασιν ἀπὸ τὸν ἄξονα. Διὰ τὸν περιστρεφόμενον παρατηρητήν, ἡ σφαῖρα δὲν ὑπόκειται εἰς ἐπιτάχυνσιν καὶ ἐκ τούτου συνάγει, ὅτι ἡ δύναμις ποὺ ἀσκεῖται ἐπὶ τῆς σφαίρας, σύμφωνα μὲ τὴν ἔνδειξιν τοῦ δυναμομέτρου, ἐξουδετερώνεται ἀκριβῶς ἀπὸ μίαν ἄλλην δύναμιν, ποὺ διευθύνεται πρὸς τὰ ἔξω καὶ ἐφαρμόζεται ἐπ' αὐτῆς ταύτης τῆς σφαίρας καὶ ὄχι (ὅπως διὰ τὸν ἔξωθεν παρατηρητὴν) εἰς τὸ κέντρον τῆς περιστροφῆς. Διὰ τοῦτο ὁ παρατηρητὴς ποὺ εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ περιστρεφομένου δίσκου θεωρεῖ τὴν δύναμιν αὐτὴν ὡς ***φυγόκεντρον***. Διὰ τὴν ἔντασιν τῆς δυνάμεως αὐτῆς διαπιστώνει καὶ ὁ παρατηρητὴς αὐτὸς ὅτι εἶναι : $m\omega^2 r$, δηλ. ἀνάλογος τῆς μάζης m τοῦ σώματος καὶ τῆς ἀποστάσεως r αὐτοῦ ἀπὸ τὸν ἄξονα, ὡς καὶ ἀνάλογος τῆς γωνιακῆς ἢ περιστροφικῆς ταχύτητος ω. Διὰ τὸν παρατηρητὴν ἑπομένως ποὺ μετέχει τῆς περιστροφῆς τοῦ δίσκου, ὅλα τὰ σώματα ποὺ κεῖνται ἐπὶ τοῦ δίσκου εὑρίσκονται εἰς ἓν ***φυγοκεντρικὸν πεδίον***, ἤτοι χῶρον εἰς τὸν ὁποῖον ἀσκεῖται ἐξωστικὴ δύναμις.

Διὰ τὸν ἔξω τοῦ δίσκου παρατηρητὴν ἡ σφαῖρα κινεῖται μὲ γραμμικὴν ταχύτητα $v=\omega.r$, ἐφόσον κρατεῖται εἰς ἀπόστασιν r ἀπὸ τὸν ἄξονα. Ἂν κοπῇ τὸ νῆμα ποὺ τὴν συνδέει μὲ τὸν ἄξονα τῆς περιστροφῆς, ἡ σφαῖρα θὰ συνεχίσῃ τὴν κίνησίν της εὐθυγράμμως (σχ. 64α) καὶ μὲ τὴν αὐτὴν ταχύτητα v κατὰ τὴν ἐφαπτομένην τῆς κυκλικῆς της τροχιᾶς, εἰς τὸ σημεῖον 0 ποὺ εὑρίσκεται τὴν στιγμὴν ποὺ κόπτεται τὸ νῆμα. Διὰ τὸν παρατηρητὴν ὅμως ποὺ κάθηται ἐπὶ τοῦ περιστρεφομένου δίσκου, ἡ κίνησις ποὺ θὰ κάνῃ ἡ σφαῖρα, ὅταν κοπῇ τὸ νῆμα ποὺ τὴν συνδέει μὲ τὸ κέντρον, θὰ εἶναι πολὺ διάφορος. Εἰς τὴν περίπτωσιν ποὺ ὁ δίσκος μὲ τὸν ἐπ' αὐτοῦ παρατηρητὴν στρέφεται ἀντίθετα πρὸς τοὺς δείκτας ὡρολογίου, ἡ ἐλευθερωθεῖσα σφαῖρα κυλίεται πρὸς τὰ ἔξω καὶ διαγράφει ἐπὶ τοῦ δίσκου μίαν σπειροειδῆ τροχιὰν (σχ. 64β). Κινεῖται δηλαδὴ ἀφ' ἑνὸς ἀπομακρυνομένη ἐκ τοῦ κέντρου καὶ ἀφ' ἑτέρου ἐκτρεπομένη πλευρικῶς. Ἡ κίνησις λοιπὸν εἶναι ἐπιταχυνομένη διὰ τὸν παρατηρητήν, ποὺ μετέχει τῆς περιστροφῆς. Εἶναι ἑπομένως οὗτος ὑποχρεωμένος νὰ συμπεράνῃ, σύμφωνα μὲ τὴν θεμελιώδη σχέσιν τῆς Δυναμικῆς ($K=m.\gamma$), ὅτι ἐπὶ τῆς σφαίρας ἐνεργοῦν δυνάμεις ποὺ προκαλοῦν τὴν ἐπιτάχυνσιν, ἡ ὁποία τὴν ἐκτρέπει ἀπὸ τὴν ἰσοταχῆ εὐθύγραμμον κίνησιν. Μία ἀπὸ τὰς δυνάμεις αὐτὰς εἶναι ἡ γνωστή μας φυγόκεντρος δύναμις (ἡ ὁποία ἄλλωστε ἐνεργεῖ ἐπὶ τῆς σφαίρας καὶ ὅταν ἀκόμη αὕτη κρατῆται ἐπὶ τοῦ δίσκου εἰς ὡρισμένην ἀπόστασιν ἀπὸ τὸν ἄξονα). Ἡ δύναμις αὕτη μόνη θὰ ἐκύλιε τὴν σφαῖραν πρὸς τὰ ἔξω κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἀκτῖνος. Κατὰ τὴν κύλισίν της ὅμως πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ δίσκου, ἡ σφαῖρα ἐκτρέπεται ἀπὸ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἀκτῖνος (σχ. 64β) καὶ τοῦτο μαρτυρεῖ, ὅτι ὑφίσταται τὴν ἐπίδρασιν καὶ μιᾶς ἄλλης δυνάμεως. Τὴν δύναμιν αὐτὴν τὴν ὀνομάζομεν ἀπὸ τὸν πρῶτον ποὺ τὴν διέγνωσε, ***δύναμιν τοῦ Coriolis***. Ἡ δύναμις Coriolis ἀναφαίνεται μόνον, ἐφόσον ἡ σφαῖρα κυλίεται ἐπὶ τοῦ περιστρεφομένου δίσκου, μὲ σχετικὴν ὡς πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν αὐτοῦ ταχύτητα υ'. Ἔτσι, ἂν ἐξωθηθῇ σφαῖρα μάζης m ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ δίσκου κατὰ τὴν διεύθυνσιν ἀκτῖνος αὐτοῦ, ἀπὸ τὸν ἄξονα πρὸς τὴν περιφέρειαν μὲ ταχύτητα υ' (σχ. 64γ), διαπιστώνεται ἀπὸ τὸν ἐπὶ τοῦ δίσκου παρατηρητήν, ὅτι ὑφίσταται ἐκτροπὴν πρὸς τὰ πλάγια ἀντιθέτως πρὸς τὴν φορὰν τῆς περιστροφῆς τοῦ δίσκου καὶ καθέτως πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς ταχύτητος υ'. Ἂν εἶναι ρ ἡ ἀκτὶς τοῦ περιστρεφομένου δίσκου καὶ t ὁ χρόνος ποὺ χρειάζεται διὰ νὰ φθάσῃ ἡ σφαῖρα ἀπὸ τὸ κέντρον μέχρι τῆς περιφερείας μὲ τὴν ταχύτητα υ', ποὺ προσέλαβε μὲ τὸν ὠθισμόν, θὰ εἶναι : $\rho=\upsilon'.t$ Κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον t κάθε σημεῖον τῆς περιφερείας τοῦ δίσκου προχωρεῖ, λόγῳ τῆς περιστροφῆς, κατὰ τόξον μήκους $\tau=\upsilon.t=\omega.\rho.t$ (ἂν υ εἶναι ἡ γραμμικὴ καὶ ω ἡ γωνιακὴ ταχύτης τοῦ περιστρεφομένου δίσκου)· θέτομεν εἰς τὴν σχέσιν αὐτὴν τὴν ἐκ τῆς προηγουμένης τιμὴν τῆς ρ καὶ θὰ ἔχωμεν : $\tau=\omega.\upsilon'.t.t=\omega\upsilon' t^2$. Τὸ μῆκος αὐτὸ τοῦ τόξου διατρέχεται ἀπὸ τὴν μᾶζαν m τῆς σφαίρας λόγῳ τῆς δυνάμεως Coriolis k_c καὶ ἑπομένως πρέπει νὰ εἶναι : $\tau={}^1\!/_2\gamma t^2$, ἂν γ εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις ποὺ ἐπιβάλλει ἡ k_c ($=m.\gamma$). Εἶναι λοιπόν : ${}^1\!/_2\gamma t^2 = \omega.\upsilon' t^2$ καὶ $\gamma=2\omega\upsilon'$. Ἀπὸ τὴν τιμὴν αὐτὴν τῆς ἐπιταχύνσεως προκύπτει ὅτι ἡ δύναμις Coriolis θὰ εἶναι :

$$k_c = m.\gamma = 2m\omega\upsilon', \tag{34}$$

ὁπόθεν φαίνεται, ὅτι διὰ νὰ ἐμφανισθῇ δύναμις Coriolis, χρειάζεται ἡ στρεφομένη μὲ γωνιακὴν ταχύτητα ω μᾶζα m νὰ κινῆται ἐπὶ τοῦ στρεφομένου συστήματος μὲ σχετικὴν ὡς πρὸς τοῦτο ταχύτητα υ'. Ἐπὶ μὴ στρεφομένου συστήματος (ω=0)



α Σχ. 64 β γ

καὶ διὰ σώματα ποὺ δὲν κινοῦνται σχετικῶς μὲ αὐτὸ ($v'=0$), ἡ δύναμις Coriolis εἶναι μηδέν. Ἔτσι εἰς κινούμενον ὄχημα ποὺ διατρέχει στροφήν, αἰσθανόμεθα μόνον φυγόκεντρον δύναμιν, ὅταν ἀκινητῶμεν εἰς τὸ ὄχημα, ἐνῷ παραπαίομεν, ὅταν βαδίζωμεν εἰς αὐτό, διότι τότε ἐμφανίζεται καὶ ἡ δύναμις Coriolis.

γ) Ἐκδηλώσεις τῆς φυγοκέντρου δυνάμεως, κατὰ τὰς ὁποίας ἐπαληθεύονται καὶ πειραματικῶς οἱ νόμοι ποὺ ἐκφράζονται ὑπὸ τῶν σχέσεων (33), ποὺ εἴδαμε παραπάνω, ἔχομεν εἰς διαφόρους περιπτώσεις. Ἔτσι ἡ συσκευὴ τοῦ σχήματος 65, εἰς τὴν ὁποίαν ἔχουν συνδεθῆ μὲ νῆμα αἱ μᾶζαι m_1, m_2 δύο σωμάτων, ποὺ μποροῦν νὰ ὀλισθαίνουν κατὰ μῆκος ὁριζοντίου στελέχους, μπορεῖ νὰ χρησιμεύσῃ διὰ τὴν ἀπόδειξιν τῆς ἐξαρτήσεως τῆς φυγοκέντρου δυνάμεως ἀπὸ τὴν μᾶζαν m_1, m_2 καὶ τὴν ἀκτῖνα ρ_1, ρ_2, ὅταν ἡ γωνια-


Σχ. 65


Σχ. 66


Σχ. 67

κὴ ταχύτης ω εἶναι ἡ αὐτὴ καὶ διὰ τὰς δύο περιστρεφομένας μάζας. Πρὸς τοῦτο στερεώνομεν τὸ κατακόρυφον στέλεχος τῆς συσκευῆς εἰς τὸν περιστρεφόμενον ἄξονα μηχανῆς καὶ θέτομεν τὴν συσκευὴν εἰς περιστροφικὴν κίνησιν. Τότε ἡ φυγόκεντρος δύναμις, ποὺ ἐνεργεῖ ἐπὶ τῆς μάζης m_1, ἐκπορεύεται ἀπὸ τὴν κεντρομόλον δύναμιν, ποὺ ἐνεργεῖ ἐπὶ τῆς m_2, καὶ ἀντιστρόφως. Ἰσορροπία θὰ ὑπάρχῃ, ἐφόσον εἶναι $m_1\rho_1\omega^2=m_2\rho_2\omega^2$ ἢ $m_1:m_2=\rho_2:\rho_1$. Εἰς πᾶσαν ἄλλην περίπτωσιν αἱ δύο μᾶζαι ὀλισθαίνουν πρὸς τὸ ἓν ἢ τὸ ἄλλον ἄκρον τοῦ ὁριζοντίου στελέχους ἀντιστοίχως πρὸς τὸ ἂν εἶναι $m_1\rho_1>m_2\rho_2$ ἢ $m_1\rho_1<m_2\rho_2$. — Ὁ φυγογεντρικὸς ρυθμιστὴς ἀτμομηχανῆς, ποὺ παριστάνει τὸ σχῆμα 66, χρησιμεύει πρὸς αὐτορρύθμισιν τῆς παροχῆς ἀτμοῦ. Ὅταν ἡ πίεσις τοῦ ἀτμοῦ τείνει νὰ ὑπερβῆ ὡρισμένον ὅριον, ἡ περιστροφικὴ ταχύτης τῶν σφαιρῶν γίνεται τόσον μεγάλη, ὥστε ἀναπτύσσεται εἰς αὐτὰς φυγόκεντρος δύναμις, ἡ ὁποία τὰς ἀνυψώνει τόσον, ποὺ μετακινοῦν ἀρκετὰ τὸ ἄκρον μοχλοῦ μὲ τὸν ὁποῖον ἀνοίγει ἀσφαλιστικὴ δικλείς, μέσω τῆς ὁποίας ἐκφεύγει ὁ ἀτμός. — Ἐφαρμογὴν ἐπίσης τῆς φυγοκέντρου δυνάμεως ἔχομεν εἰς ὄργανα μετρήσεως τῆς ταχύτητος ὀχημάτων. Μὲ τὸν περιστρεφόμενον ἄξονα A (σχ. 67) στρέφονται καὶ αἱ σφαῖραι M_1, M_2, M_3, M_4, καὶ διανοίγονται περισσότερον ἢ ὀλιγώτερον, καθόσον αὐξάνεται ἢ ἐλαττώνεται ἡ ταχύτης περιστροφῆς τοῦ ἄξονος. Εἰς τὴν κίνησίν των αὐτὴν παρασύρουν τὸ στέλεχος St καὶ τοῦτο διὰ τοῦ ὑπομοχλίου O παρασύρει ὀδοντωτὸν τροχὸν Z, ὁ ὁποῖος συνδέεται μὲ δείκτην H, ποὺ κινεῖται ἔμπροσθεν βαθμολογημένης κλίμακος ταχυτήτων.

Ἄλλην περίπτωσιν ἐκδηλώσεως τῆς φυγοκέντρου δυνάμεως ἔχομεν εἰς τὴν ταχεῖαν ἀπόθεσιν σωματιδίων αἰωρουμένων εἰς ὑγρὸν μικροτέρας πυκνότητος. Ἐὰν ἀφήσωμεν ἤρεμον τὸ ὑγρὸν μὲ τὰ αἰωρούμενα εἰς αὐτὸ σωματίδια, κατακάθηνται ταῦτα πολὺ βραδέως καὶ μάλιστα τόσον βραδύτερον, ὅσον μικρότερα εἶναι τὰ σωματίδια καὶ ὅσον μικροτέρα εἶναι ἡ διαφορὰ πυκνότητος αὐτῶν ὑπὲρ τὴν πυκνότητα τοῦ ὑγροῦ· τὸ κατακάθισμα μάλιστα τῶν σωματιδίων δὲν εἶναι πλῆρες, ἀλλὰ μέχρις ἑνὸς βαθμοῦ, διότι τελικῶς ἀποκαθίσταται ἰσορροπία, κατὰ τὴν ὁποίαν κα-

τακάθηνται τὰ περισσότερα σωματίδια καὶ παραμένουν μερικά, ποὺ αἰωροῦνται
εἰς ἀνώτερα στρώματα τοῦ ὑγροῦ, εἰς τρόπον ὥστε νὰ εἶναι τόσον ὀλιγώτερα
ὅσον ὑψηλότερα τοῦ πυθμένος εὑρίσκονται. Ἡ ἰσορροπία αὐτὴ ὀφείλεται εἰς τὴν
κίνησιν Brown (πρβλ. § 41, ε), δηλαδὴ τὴν ἀέναον ἄτακτον κίνησιν τῶν μορίων
κατὰ τὴν ὁποίαν λαμβάνουν χώραν ἀνὰ πᾶσαν στιγμὴν συγκρούσεις μεταξύ των,
ποὺ (τρόπον τινὰ) δὲν ἐπιτρέπουν τὴν πλήρη ἠρεμίαν εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ ὑγροῦ.
Ἂν θέσωμεν εἰς ταχεῖαν περιστροφικὴν κίνησιν τὸ αἰώρημα, τὰ σωματίδια ὑφί-
στανται τὴν ἐπίδρασιν τῆς φυγοκέντρου δυνάμεως, ἡ ὁποία μπορεῖ νὰ εἶναι πολλὲς
φορὲς μεγαλυτέρα τοῦ βάρους των (εἶναι π.χ. εἰς κάθε σωματίδιον, ποὺ διαγράφει
περιφέρειαν ἀκτῖνος 10 cm μὲ περιστροφικὴν ταχύτητα 30 στροφῶν κατὰ δευτερό-
λεπτον, μεγαλυτέρα τοῦ 400πλασίου τοῦ βάρους του). Λόγῳ τῆς φυγοκέντρου δυ-
νάμεως τὰ σωματίδια τῆς αἰωρουμένης οὐσίας ἀπωθοῦνται πολὺ ταχύτερα πρὸς
τὰς ἐξωτάτας στιβάδας τοῦ αἰωρήματος.– Εἰς τὰς τροχιὰς ποὺ διατρέχουν ὀχήματα,
ὅπου ὑπάρχουν καμπαί, λαμβάνεται φροντίς, ὅπως ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τῆς τρο-
χιᾶς εἶναι κατὰ τὸ δυνατὸν μεγαλυτέρα, ἡ ταχύτης τοῦ ὀχήματος, ποὺ διατρέχει
τὴν καμπήν, εἶναι μικροτέρα καὶ τέλος ὅπως κλίνουν πρὸς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς κα-
μπῆς πρὸς ἀποφυγὴν ἐκροχιασμοῦ λόγῳ τῆς ἀναφαινομένης φυγοκέντρου δυνάμεως.

§ 30. **Δυνάμεις ποὺ ἐνεργοῦν κατὰ τὴν περιστροφὴν τῆς
Γῆς περὶ τὸν ἄξονά της.** α) Προκειμένου περὶ τῆς ἐπιδράσεως τῆς
φυγοκέντρου δυνάμεως εἰς σώματα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς περι-
στρεφομένης Γῆς, εἶναι προφανὲς ὅτι ἐπιφέρεται ὑπ' αὐτῆς ἐλάττω-
σις τοῦ βάρους, τόσον μεγαλυτέρα, ὅσον πλησιέστερον πρὸς τὸν
Ἰσημερινὸν εὑρίσκεται τὸ σῶμα· μὲ ἄλλα λόγια ὅσον μικρότερον
εἶναι τὸ πλάτος τοῦ τόπου, εἰς τὸν ὁποῖον κεῖται τὸ θεωρούμενον
σῶμα. Ἂν εἶναι ω ($=2\pi/T=6{,}28/86164=7{,}29.10^{-5}[\mathrm{sec}^{-1}]\simeq 15^{\circ}/\mathrm{h}$)
ἡ γωνιακὴ ταχύτης μὲ τὴν ὁποίαν στρέφεται ἡ Γῆ περὶ τὸν ἄξονά
της ΑΑ (σχ. 68), φ τὸ πλάτος τοῦ τόπου Ε, εἰς τὸν ὁποῖον εὑρίσκεται
τὸ θεωρούμενον σῶμα, $\mathbf{r}$ ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ἀπὸ τὸν ἄξονα πε-
ριστροφῆς καὶ $\mathbf{R}=r/$συνφ ἡ ἀκτὶς τῆς Γῆς (ὡς σφαίρας θεωρουμέ-
νης), ἡ φυγόκεντρος δύναμις F, ποὺ ἐνεργεῖ ἐπὶ τῆς μάζης m τοῦ
σώματος, θὰ εἶναι: $F_{\varphi}=m\omega^2 r=m\omega^2 R$ συνφ. Ἀναλύομεν τὴν δύναμιν
αὐτὴν εἰς δύο συνιστώσας, τὴν μίαν F_1 κατὰ διεύθυνσιν ἀντίθετον
τοῦ πρὸς τὸ κέντρον τῆς Γῆς διευθυνομένου βάρους τοῦ σώματος
($F_1=F_{\varphi}$ συνφ) καὶ τὴν ἄλλην F_2 κάθετον πρὸς αὐτὴν ($F_2=F_{\varphi}$ ημφ).
Ἡ F_2 ἔχει διεύθυνσιν ἀπὸ τὸν Πόλον πρὸς τὸν Ἰσημερινὸν καὶ εἶναι
ἡ αἰτία τῆς ἐξογκώσεως ποὺ ἔχει ὑποστῆ ἡ Γῆ εἰς ἐποχὴν ποὺ
ἡ ὕλη της ἦτο εὔπλαστος. Ἡ F_1 ἐλαττώνει τὸ βάρος τοῦ σώματος.
Διὰ τοῦτο ἡ ἐλάττωσις τοῦ βάρους, $F_1=F_{\varphi}$ συνφ$=m\omega^2R$συνφ.συνφ$=$
$m\omega^2R$συν^{2}φ, εἶναι, ὅπως εἴπαμεν, μεγίστη εἰς τὸν Ἰσημερινόν, ὅπου
φ$=0^{\circ}$ καὶ συνφ$=1$ καὶ μηδὲν εἰς τοὺς Πόλους, ὅπου συνφ$=0$.

β) Ἂν τὸ σῶμα κινῆται ἐπὶ τῆς Γῆς μὲ σχετικὴν ὡς πρὸς αὐτὴν ταχύτητα
υ', τότε, πέραν τῆς φυγοκέντρου, ὑφίσταται καὶ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως Corio-
lis ἴσης (ὅπως εἴπαμε παραπάνω) μὲ $2m\upsilon'\omega$. Κατὰ συνέπειαν τῆς δυνάμεως αὐ-
τῆς, τὸ κινούμενον σῶμα ἐκτρέπεται ἀπὸ τὴν τροχιάν, ποὺ τοῦ καθορίζει ἡ κινητή-

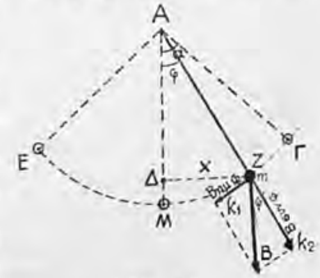
ριος δύναμις. Θεωροῦμεν εἰδικώτερα τὴν ἐκτροπὴν ποὺ ὑφίσταται τὸ σῶμα ἀπὸ τὴν κατακόρυφον τροχιάν του, ὅταν πίπτη ἐλευθέρως, δηλ. ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν μόνον τοῦ βάρους του, καὶ ἀπὸ τὴν τροχιὰν ποὺ θὰ διέγραφε, ὅταν βάλλεται ὁριζοντίως. Δεδομένου ὅτι τὸ σῶμα εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς Γῆς ἔχει λόγω τῆς περιστροφῆς γραμμικὴν ταχύτητα $\upsilon_0 = \omega R$, ἐνῶ εἰς τὴν κορυφὴν ἑνὸς πύργου ὕψους h ἔχει ταχύτητα $\upsilon_h = \omega(R+h)$, εἶναι προφανὲς ὅτι, ὅταν ἀπὸ τὸ ὕψος τοῦ πύργου ἀφήνεται νὰ πέση ἐλευθέρως, εἶναι ὑποχρεωμένον νὰ ἐλαττώση τὴν ταχύτητά του ἀπὸ $\omega(R+h)$ εἰς ωR λόγω τῆς ἀδρανείας του προπορεύεται ὡς ἐκ τούτου ἀπὸ τὴν Γῆν ἐκ δυσμῶν πρὸς ἀνατολάς. Ὑφίσταται λοιπὸν τὸ ἐλευθέρως πῖπτον σῶμα ἐκτροπὴν πρὸς ἀνατολάς, ἡ ὁποία πάντως εἶναι πολὺ μικρά, μόλις 9 mm διὰ πτῶσιν ἀπὸ ὕψος 75 m.—Ἐξ ἄλλου κάθε σῶμα κινούμενον παραλλήλως πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς Γῆς, π.χ. ἓν βλῆμα, ὑφίσταται, λόγω τῆς δυνάμεως Coriolis, ἐκτροπὴν ἀπὸ τὴν διεύθυνσιν τῆς πορείας πρὸς τὰ δεξιὰ πάντοτε, ὅταν ἡ κίνησις γίνεται εἰς τὸ βόρειον ἡμισφαίριον καὶ πρὸς τ' ἀριστερά, ὅταν ἡ κίνησις λαμβάνει χώραν εἰς τὸ νότιον. Πρὸς κατανόησιν τούτου ἐξετάζομεν τὰς καθέκαστα περιπτώσεις. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν σῶμα ποὺ κινεῖται εἰς τὸ βόρειον ἡμισφαίριον μὲ ταχύτητα υ' κατὰ μῆκος τῆς περιφερείας παραλλήλου κύκλου. Ἡ γωνιακή του ταχύτης εἶναι συνεπῶς διάφορος τῆς γωνιακῆς ταχύτητος τοῦ ἐδάφους τῆς Γῆς. Τοῦτο σημαίνει, ὅτι ἐνεργεῖ ἐπὶ τοῦ σώματος φυγόκεντρος δύναμις διάφορος ἀπὸ ἐκείνην ποὺ ἐνεργεῖ εἰς ἄλλο σῶμα τῆς αὐτῆς μάζης, ποὺ ἠρεμεῖ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους εἰς τὸν αὐτὸν παράλληλον. Ἔτσι καὶ καθεμία ἐκ τῶν δύο συνιστωσῶν F_1, F_2 (σχ. 68) εἰς τὰς ὁποίας ἀναλύεται ἡ φυγόκεντρος δύναμις, θὰ ἔχη εἰς τὸ κινούμενον σῶμα τιμὴν διάφορον ἀπὸ ἐκείνην ποὺ ἔχει εἰς τὸ κάτωθεν τοῦ σώματος ἠρεμοῦν ἔδαφος. Θὰ εἶναι λοιπὸν καὶ ἡ πρὸς τὸν Ἰσημερινόν, ἤτοι πρὸς νότον, διευθυνομένη συνιστῶσα F_2 εἰς τὸ κινούμενον σῶμα μεγαλυτέρα τῆς εἰς τὸ ἠρεμοῦν, ἂν ἡ κίνησις ἔχη διεύθυνσιν ἀπὸ δυσμῶν πρὸς ἀνατολάς, διότι τότε ἡ ταχύτης υ' τοῦ κινουμένου σώματος προστίθεται ὡς ὁμόρροπος εἰς τὴν ταχύτητα περιστροφῆς τῆς Γῆς. Ἑπομένως τὸ κινούμενον σῶμα θὰ ὑφίσταται, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς ἐπὶ πλέον ταύτης δυνάμεως, ἐκτροπὴν πρὸς νότον, ἤτοι πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς πορείας του. Ἂν ἡ κίνησις τοῦ σώματος γίνεται ἐξ ἀνατολῶν πρὸς δυσμάς, ἤτοι ἀντιθέτως πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς στρεφομένης Γῆς, τότε ἡ γωνιακή του ταχύτης καί, μετ' αὐτῆς, ἡ φυγόκεντρος δύναμις καί, συνεπῶς, ἡ πρὸς νότον συνιστῶσα της, θὰ εἶναι μικροτέρα ἐκείνης ποὺ θὰ ἐνήργει, ἂν τὸ σῶμα εὑρίσκετο εἰς ἠρεμίαν. Λόγω τούτου τὸ κινούμενον σῶμα ἐκτρέπεται κατὰ τὴν κίνησιν σχετικῶς πρὸς τὸ ἔδαφος κατὰ τὴν διεύθυνσιν πρὸς βορρᾶν, ἤτοι καὶ πάλιν πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς πορείας του. Μὲ ἀντίστοιχον θεώρησιν τῆς κινήσεως σώματος κατὰ μῆκος παραλλήλου τοῦ νοτίου ἡμισφαιρίου, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἐκτροπὴ γίνεται πρὸς τ' ἀριστερὰ τῆς πορείας του.

Σχ. 68

Ἂν τὸ σῶμα κινῆται εἰς τὸ βόρειον ἡμισφαίριον κατὰ μῆκος μεσημβρινοῦ μὲ φορὰν πρὸς τὸν Ἰσημερινόν, ἤτοι πρὸς νότον, ἀπομακρύνεται ἀπὸ τὸν ἄξονα περιστροφῆς, καὶ ἑπομένως ἔρχεται ἀπὸ περιοχὴν μικροτέρας γραμμικῆς ταχύτητος εἰς τοιαύτην μεγαλυτέρας. Πρέπει ἑπομένως νὰ ὑπολείπεται σχετικὰ πρὸς τὸ κάτωθέν του ἔδαφος, ἤτοι νὰ ἐκτρέπεται πρὸς δυσμάς, δηλαδὴ πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς διευθύνσεως τῆς πορείας του. Ἂν ἡ κίνησις γίνεται ἐκ νότου πρὸς βορρᾶν (εἰς τὸ βόρειον πάλιν ἡμισφαίριον καὶ κατὰ μῆκος μεσημβρινοῦ), τὸ σῶμα ἔρχεται ἀπὸ περιοχὰς μεγαλυτέρας ταχύτητος εἰς τοιαύτας μικροτέρας, καὶ συνεπῶς προτρέχει σχετικὰ μὲ τὸ ἔδαφος. Ἐπομένως ἐκτρέπεται πρὸς ἀνατολάς, ἤτοι καὶ πάλιν δεξιὰ τῆς διευθύνσεως τῆς πορείας. Μὲ ἀνάλογον θεώρησιν εὑρίσκεται ὅτι εἰς σῶμα, ποὺ κινεῖται εἰς τὸ νότιον ἡμισφαίριον τῆς Γῆς καθ' οἱανδήποτε διεύθυνσιν, γίνεται πάντοτε ἐκτροπὴ πρὸς τ' ἀριστερὰ τῆς διευθύνσεως τῆς πορείας του.

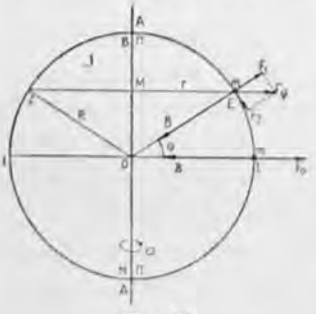
Εἰς τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως Coriolis πρέπει κατὰ τὰ ἀνωτέρω νὰ ἀποδοθῇ ὅτι ὁ ἄνεμος, ποὺ πνέει ἀπὸ περιοχὴν ὑψηλῆς πιέσεως πρὸς περιοχὴν χαμηλῆς, ὑφίσταται ἐκτροπὴν ἀπὸ τὴν διεύθυνσίν του εἰς τὸ βόρειον ἡμισφαίριον πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ εἰς τὸ νότιον πρὸς τ' ἀριστερά. Ἔτσι διὰ τὴν χώραν μας, ποὺ κεῖται εἰς τὸ βόρειον ἡμισφαίριον, οἱ τόποι χαμηλῆς πιέσεως κεῖνται πάντοτε ἀριστερὰ τῆς διευθύνσεως τοῦ πνέοντος ἀνέμου.

§ 31. Ἐκκρεμές. α) Ὀνομάζομεν ἐκκρεμὲς κάθε σῶμα, τὸ ὁποῖον ἐκτελεῖ ***κίνησιν αἰωρήσεως***, δηλαδὴ παλινδρομικὴν κίνησιν ἑκατέρωθεν μιᾶς ὡρισμένης θέσεως, τῆς θέσεως ἠρεμίας του. Ἡ αἰώρησις τοῦ ἐκκρεμοῦς ἔχει τὴν αἰτίαν της εἰς μεταβαλλομένην δύναμιν, ἡ ὁποία ἐνεργεῖ ἐπὶ τοῦ σώματος μὲ φορὰν πάντοτε πρὸς τὴν θέσιν τῆς ἠρεμίας του. Ἔτσι σῶμα, ἐξηρτημένον ἀπὸ ὁριζόντιον ἄξονα, ποὺ κεῖται ὑψηλότερον τοῦ κ.β. τοῦ σώματος, ὅταν ἐκτραπῇ ἀπὸ τὴν θέσιν, ὅπου ἠρεμεῖ (ἰσορροπεῖ εὐσταθῶς), αἰωρεῖται περὶ τὴν θέσιν ταύτην κατ' ἀκολουθίαν δυνάμεως, ἡ ὁποία ὀφείλεται εἰς τὸ βάρος τοῦ σώματος. Ἁπλουστέραν μορφὴν τοιούτου ἐκκρεμοῦς μᾶς δίδει σφαιρίδιον μάζης m, ποὺ εἶναι δεμένον εἰς τὸ ἄκρον λεπτοῦ (αἰσθητῶς ἀβαροῦς) νήματος, τοῦ ὁποίου τὸ ἄλλο ἄκρον προσδένεται εἰς ἀκλόνητον στήριγμα Α (σχ. 69). Ἐὰν ἐκτρέψωμεν τὸ σφαιρίδιον τοῦτο ἀπὸ τὴν θέσιν Μ, ὅπου ἠρεμεῖ, μέχρι μιᾶς ἄλλης θέσεως, π.χ. τῆς Γ, καταβάλλομεν ἔργον, ἀφοῦ ἡ νέα θέσις κεῖται ὑψηλότερον τῆς θέσεως ἠρεμίας· τὸ ἔργον τοῦτο ἀποταμιεύεται εἰς τὸ σῶμα ὑπὸ μορφὴν δυναμικῆς ἐνεργείας. Ἔτσι, ὅταν ἀφεθῇ εἰς τὴν θέσιν Γ, τὸ σῶμα κινεῖται πρὸς τὴν θέσιν τῆς ἠρεμίας του καὶ ὅταν φθάσῃ εἰς αὐτήν, δὲν σταματᾶ, ἀλλὰ τὴν ὑπερβαίνει, διότι εἰς τὴν θέσιν Μ ἐγκλείει τὸ σῶμα κινητικὴν ἐνέργειαν, ἴσην μὲ τὴν δυναμικὴν ποὺ ἀπέκτησε μὲ τὴν ἐκτροπὴν ποὺ τοῦ ἐπεβάλαμεν (βλ. § 20, β). Ἡ κίνησις πέραν τοῦ Μ θὰ εἶναι ἐπιβραδυνομένη μέχρι τῆς θέσεως Ε, ὅπου ἡ κινητικὴ ἐνέργεια θὰ ἔχῃ ὅλη μεταβληθῆ πάλιν εἰς δυναμικήν. Ἡ θέσις Ε θὰ εἶναι εἰς τὸ αὐτὸ ὕψος μὲ τὴν Γ, ἂν δὲν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι κατὰ τὴν κίνησιν ἐμφανίζονται δυνάμεις (τριβή, ἀντίστασις τοῦ ἀέρος) ποὺ τείνουν νὰ τὴν σταματήσουν. Ἀπὸ τὴν θέσιν Ε τὸ σῶμα θὰ κινηθῇ πάλιν πρὸς τὴν θέσιν Μ καὶ θὰ τὴν προσπεράσῃ μέχρι τοῦ Γ, ὁπόθεν πάλιν θὰ ἀρχίσῃ τὴν αὐτὴν ἀκριβῶς



Σχ. 69

ριος δύναμις. Θεωροῦμεν εἰδικώτερα τὴν ἐκτροπὴν ποὺ ὑφίσταται τὸ σῶμα ἀπὸ τὴν κατακόρυφον τροχιάν του, ὅταν πίπτῃ ἐλευθέρως, δηλ. ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν μόνον τοῦ βάρους του, καὶ ἀπὸ τὴν τροχιὰν ποὺ θὰ διέγραφε, ὅταν βάλλεται ὁριζοντίως. Δεδομένου ὅτι τὸ σῶμα εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς Γῆς ἔχει λόγῳ τῆς περιστροφῆς γραμμικὴν ταχύτητα $υ_0 = ωR$, ἐνῷ εἰς τὴν κορυφὴν ἑνὸς πύργου ὕψους h ἔχει ταχύτητα $υ_h = ω(R+h)$, εἶναι προφανὲς ὅτι, ὅταν ἀπὸ τὸ ὕψος τοῦ πύργου ἀφήνεται νὰ πέσῃ ἐλευθέρως, εἶναι ὑποχρεωμένον νὰ ἐλαττώσῃ τὴν ταχύτητά του ἀπὸ $ω(R+h)$ εἰς $ωR$· λόγῳ τῆς ἀδρανείας του προπορεύεται ὡς ἐκ τούτου ἀπὸ τὴν Γῆν ἐκ δυσμῶν πρὸς ἀνατολάς. Ὑφίσταται λοιπὸν τὸ ἐλευθέρως πῖπτον σῶμα ἐκτροπὴν πρὸς ἀνατολάς, ἡ ὁποία πάντως εἶναι πολὺ μικρά, μόλις 9 mm διὰ πτῶσιν ἀπὸ ὕψος 75 m.—Ἐξ ἄλλου κάθε σῶμα κινούμενον παραλλήλως πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς Γῆς, π.χ. ἓν βλῆμα, ὑφίσταται, λόγῳ τῆς δυνάμεως Coriolis, ἐκτροπὴν ἀπὸ τὴν διεύθυνσιν τῆς πορείας πρὸς τὰ δεξιὰ πάντοτε, ὅταν ἡ κίνησις γίνεται εἰς τὸ βόρειον ἡμισφαίριον καὶ πρὸς τ' ἀριστερά, ὅταν ἡ κίνησις λαμβάνει χώραν εἰς τὸ νότιον. Πρὸς κατανόησιν τούτου ἐξετάζομεν τὰς καθέκαστα περιπτώσεις. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν σῶμα ποὺ κινεῖται εἰς τὸ βόρειον ἡμισφαίριον μὲ ταχύτητα $υ'$ κατὰ μῆκος τῆς περιφερείας παραλλήλου κύκλου. Ἡ γωνιακή του ταχύτης εἶναι συνεπῶς διάφορος τῆς γωνιακῆς ταχύτητος τοῦ ἐδάφους τῆς Γῆς. Τοῦτο σημαίνει, ὅτι ἐνεργεῖ ἐπὶ τοῦ σώματος φυγόκεντρος δύναμις διάφορος ἀπὸ ἐκείνην ποὺ ἐνεργεῖ εἰς ἄλλο σῶμα τῆς αὐτῆς μάζης, ποὺ ἠρεμεῖ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους εἰς τὸν αὐτὸν παράλληλον. Ἔτσι καὶ καθεμία ἐκ τῶν δύο συνιστωσῶν F_1, F_2 (σχ. 68) εἰς τὰς ὁποίας ἀναλύεται ἡ φυγόκεντρος δύναμις, θὰ ἔχῃ εἰς τὸ κινούμενον σῶμα τιμὴν διάφορον ἀπὸ ἐκείνην ποὺ ἔχει εἰς τὸ κάτωθεν τοῦ σώματος ἠρεμοῦν ἔδαφος. Θὰ εἶναι λοιπὸν καὶ ἡ πρὸς τὸν Ἰσημερινόν, ἤτοι πρὸς νότον, διευθυνομένη συνιστῶσα F_2 εἰς τὸ κινούμενον σῶμα μεγαλυτέρα τῆς εἰς τὸ ἠρεμοῦν, ἂν ἡ κίνησις ἔχῃ διεύθυνσιν ἀπὸ δυσμῶν πρὸς ἀνατολάς, διότι τότε ἡ ταχύτης $υ'$ τοῦ κινουμένου σώματος προστίθεται ὡς ὁμόρροπος εἰς τὴν ταχύτητα περιστροφῆς τῆς Γῆς. Ἑπομένως τὸ κινούμενον σῶμα θὰ ὑφίσταται, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς ἐπὶ πλέον ταύτης δυνάμεως, ἐκτροπὴν πρὸς νότον, ἤτοι πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς πορείας του. Ἂν ἡ κίνησις τοῦ σώματος γίνεται ἐξ ἀνατολῶν πρὸς δυσμάς, ἤτοι ἀντιθέτως πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς στρεφομένης Γῆς, τότε ἡ γωνιακή του ταχύτης καί, μετ' αὐτῆς, ἡ φυγόκεντρος δύναμις καί, συνεπῶς, ἡ πρὸς νότον συνιστῶσα της, θὰ εἶναι μικροτέρα ἐκείνης ποὺ θὰ ἐνήργει, ἂν τὸ σῶμα εὑρίσκετο εἰς ἠρεμίαν. Λόγῳ τούτου τὸ κινούμενον σῶμα ἐκτρέπεται κατὰ τὴν κίνησιν σχετικῶς πρὸς τὸ ἔδαφος κατὰ τὴν διεύθυνσιν πρὸς βορρᾶν, ἤτοι καὶ πάλιν πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς πορείας του. Μὲ ἀντίστοιχον θεώρησιν τῆς κινήσεως σώματος κατὰ μῆκος παραλλήλου τοῦ νοτίου ἡμισφαιρίου, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἐκτροπὴ γίνεται πρὸς τ' ἀριστερὰ τῆς πορείας του.



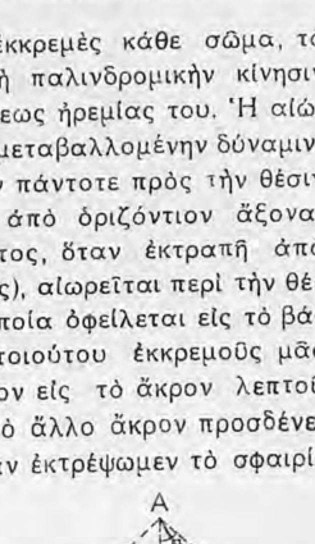
Σχ. 68

Ἂν τὸ σῶμα κινῆται εἰς τὸ βόρειον ἡμισφαίριον κατὰ μῆκος μεσημβρινοῦ μὲ φορὰν πρὸς τὸν Ἰσημερινόν, ἤτοι πρὸς νότον, ἀπομακρύνεται ἀπὸ τὸν ἄξονα περιστροφῆς, καὶ ἑπομένως ἔρχεται ἀπὸ περιοχὴν μικροτέρας γραμμικῆς ταχύτητος εἰς τοιαύτην μεγαλυτέρας. Πρέπει ἑπομένως νὰ ὑπολείπεται σχετικὰ πρὸς τὸ κάτωθέν του ἔδαφος, ἤτοι νὰ ἐκτρέπεται πρὸς δυσμάς, δηλαδὴ πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς διευθύνσεως τῆς πορείας του. Ἂν ἡ κίνησις γίνεται ἐκ νότου πρὸς βορρᾶν (εἰς τὸ βόρειον πάλιν ἡμισφαίριον καὶ κατὰ μῆκος μεσημβρινοῦ), τὸ σῶμα ἔρχεται ἀπὸ περιοχὰς μεγαλυτέρας ταχύτητος εἰς τοιαύτας μικροτέρας, καὶ συνεπῶς προτρέχει σχετικὰ μὲ τὸ ἔδαφος. Ἑπομένως ἐκτρέπεται πρὸς ἀνατολάς, ἤτοι καὶ πάλιν δεξιὰ τῆς διευθύνσεως τῆς πορείας. Μὲ ἀνάλογον θεώρησιν εὑρίσκεται ὅτι εἰς σῶμα, ποὺ κινεῖται εἰς τὸ νότιον ἡμισφαίριον τῆς Γῆς καθ' οἱανδήποτε διεύθυνσιν, γίνεται πάντοτε ἐκτροπὴ πρὸς τ' ἀριστερὰ τῆς διευθύνσεως τῆς πορείας του.

Εἰς τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως Coriolis πρέπει κατὰ τὰ ἀνωτέρω νὰ ἀποδοθῇ ὅτι ὁ ἄνεμος, ποὺ πνέει ἀπὸ περιοχὴν ὑψηλῆς πιέσεως πρὸς περιοχὴν χαμηλῆς, ὑφίσταται ἐκτροπὴν ἀπὸ τὴν διεύθυνσίν του εἰς τὸ βόρειον ἡμισφαίριον πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ εἰς τὸ νότιον πρὸς τ' ἀριστερά. Ἔτσι διὰ τὴν χώραν μας, ποὺ κεῖται εἰς τὸ βόρειον ἡμισφαίριον, οἱ τόποι χαμηλῆς πιέσεως κεῖνται πάντοτε ἀριστερὰ τῆς διευθύνσεως τοῦ πνέοντος ἀνέμου.

80

§ 31. **Ἐκκρεμές.** α) Ὀνομάζομεν ἐκκρεμὲς κάθε σῶμα, τὸ ὁποῖον ἐκτελεῖ ***κίνησιν αἰωρήσεως***, δηλαδὴ παλινδρομικὴν κίνησιν ἑκατέρωθεν μιᾶς ὡρισμένης θέσεως, τῆς θέσεως ἠρεμίας του. Ἡ αἰώρησις τοῦ ἐκκρεμοῦς ἔχει τὴν αἰτίαν της εἰς μεταβαλλομένην δύναμιν, ἡ ὁποία ἐνεργεῖ ἐπὶ τοῦ σώματος μὲ φορὰν πάντοτε πρὸς τὴν θέσιν τῆς ἠρεμίας του. Ἔτσι σῶμα, ἐξηρτημένον ἀπὸ ὁριζόντιον ἄξονα, ποὺ κεῖται ὑψηλότερον τοῦ κ.β. τοῦ σώματος, ὅταν ἐκτραπῇ ἀπὸ τὴν θέσιν, ὅπου ἠρεμεῖ (ἰσορροπεῖ εὐσταθῶς), αἰωρεῖται περὶ τὴν θέσιν ταύτην κατ' ἀκολουθίαν δυνάμεως, ἡ ὁποία ὀφείλεται εἰς τὸ βάρος τοῦ σώματος. Ἁπλουστέραν μορφὴν τοιούτου ἐκκρεμοῦς μᾶς δίδει σφαιρίδιον μάζης m, ποὺ εἶναι δεμένον εἰς τὸ ἄκρον λεπτοῦ (αἰσθητῶς ἀβαροῦς) νήματος, τοῦ ὁποίου τὸ ἄλλο ἄκρον προσδένεται εἰς ἀκλόνητον στήριγμα Α (σχ. 69). Ἐὰν ἐκτρέψωμεν τὸ σφαιρίδιον τοῦτο ἀπὸ τὴν θέσιν Μ, ὅπου ἠρεμεῖ, μέχρι μιᾶς ἄλλης θέσεως, π.χ. τῆς Γ, καταβάλλομεν ἔργον, ἀφοῦ ἡ νέα θέσις κεῖται ὑψηλότερον τῆς θέσεως ἠρεμίας· τὸ ἔργον τοῦτο ἀποταμιεύεται εἰς τὸ σῶμα ὑπὸ μορφὴν δυναμικῆς ἐνεργείας. Ἔτσι, ὅταν ἀφεθῇ εἰς τὴν θέσιν Γ, τὸ σῶμα κινεῖται πρὸς τὴν θέσιν τῆς ἠρεμίας του καὶ ὅταν φθάσῃ εἰς αὐτήν, δὲν σταματᾷ, ἀλλὰ τὴν ὑπερβαίνει, διότι εἰς τὴν θέσιν Μ ἐγκλείει τὸ σῶμα κινητικὴν ἐνέργειαν, ἴσην μὲ τὴν δυναμικὴν ποὺ ἀπέκτησε μὲ τὴν ἐκτροπὴν ποὺ τοῦ ἐπεβάλαμεν (βλ. § 20, β). Ἡ κίνησις πέραν τοῦ Μ θὰ εἶναι ἐπιβραδυνομένη μέχρι τῆς θέσεως Ε, ὅπου ἡ κινητικὴ ἐνέργεια θὰ ἔχῃ ὅλη μεταβληθῇ πάλιν εἰς δυναμικήν. Ἡ θέσις Ε θὰ εἶναι εἰς τὸ αὐτὸ ὕψος μὲ τὴν Γ, ἂν δὲν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι κατὰ τὴν κίνησιν ἐμφανίζονται δυνάμεις (τριβή, ἀντίστασις τοῦ ἀέρος) ποὺ τείνουν νὰ τὴν σταματήσουν. Ἀπὸ τὴν θέσιν Ε τὸ σῶμα θὰ κινηθῇ πάλιν πρὸς τὴν θέσιν Μ καὶ θὰ τὴν προσπεράσῃ μέχρι τοῦ Γ, ὁπόθεν πάλιν θὰ ἀρχίσῃ τὴν αὐτὴν ἀκριβῶς

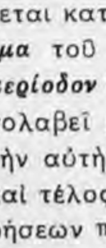


Σχ. 69

διαδρομήν. Ἐάν, ὅπως εἴπαμε, δὲν ἐνεφανίζοντο ἐμπόδια, ἡ αἰώρησις θὰ συνεχίζετο ὁμοιομόρφως ἐπ' ἄπειρον. Εἰς τὴν πραγματικότητα δὲν συμβαίνει τοῦτο, καὶ διὰ τοῦτο αἱ αἰωρήσεις γίνονται ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον μικρότεραι μέχρι τελείας ἀποσβέσεως. —Ἐξιδανικεύοντες τὴν μορφὴν τοῦ περιγραφέντος ἐκκρεμοῦς ὀνομάζομεν ***μαθηματικὸν ἐκκρεμές, ἐκεῖνο ποὺ ἔχει ὅλην τὴν μᾶζαν του συγκεντρωμένην εἰς ἓν σημεῖον,*** τὸ ὁποῖον συνδέεται ἀνενδότως μὲ τὸν ἄξονα Α καὶ συνεπῶς ἔχει σταθερὰν τὴν ἀπόστασίν του ἀπὸ αὐτόν. Τὴν ἀπόστασιν αὐτὴν τὴν λέμε ***μῆκος*** τοῦ μαθηματικοῦ ἐκκρεμοῦς.

Πλάτος τῆς αἰωρήσεως ἐκκρεμοῦς ὀνομάζομεν τὴν γωνίαν α (σχ. 69) ποὺ σχηματίζει ἡ διεύθυνσις τοῦ μήκους τοῦ ἐκκρεμοῦς εἰς τὴν θέσιν ΑΓ τῆς μεγίστης του ἐκτροπῆς, μὲ τὴν διεύθυνσιν αὐτοῦ εἰς τὴν θέσιν ἠρεμίας ΑΜ. Τὴν γωνίαν φ(=ΜΑΖ) ποὺ σχηματίζουν αἱ διευθύνσεις τοῦ μήκους τοῦ ἐκκρεμοῦς, ἀφ' ἑνὸς εἰς τὴν θέσιν τῆς ἠρεμίας ΑΜ, καὶ ἀφ' ἑτέρου εἰς τὴν θέσιν ΑΖ, ἀπὸ τὴν ὁποίαν διέρχεται κατὰ μίαν χρονικὴν στιγμήν, τὴν λέμε ἁπλῶς ***ἐκτροπὴν*** ἢ ***ἄνοιγμα*** τοῦ ἐκκρεμοῦς κατὰ τὴν στιγμὴν ἐκείνην. Ἐξ ἄλλου θὰ λέμε ***περίοδον*** ἢ ***χρόνον αἰωρήσεως*** τοῦ ἐκκρεμοῦς τὸν χρόνον Τ, ποὺ μεσολαβεῖ μεταξὺ τῶν δύο διαδοχικῶν διαβάσεων τοῦ ἐκκρεμοῦς ἀπὸ τὴν αὐτὴν θέσιν τῆς διαδρομῆς του μὲ τὴν αὐτὴν φορὰν κινήσεως καὶ τέλος συχνότητα τῆς αἰωρήσεως $\nu(=1/T)$ τὸν ἀριθμὸν τῶν αἰωρήσεων ποὺ κάνει τὸ ἐκκρεμὲς εἰς 1 sec. Αἱ διάφοροι καταστάσεις ποὺ διατρέχει τὸ ἐκκρεμὲς κατὰ τὴν αἰώρησίν του, μποροῦν νὰ ἀναφέρονται εἴτε εἰς θέσεις τῆς ἐπαναλαμβανομένης διαδρομῆς του, εἴτε εἰς καθέστατα χρονικὰς στιγμὰς τῆς περιόδου του καὶ χαρακτηρίζονται ὡς ***φάσεις*** τῆς αἰωρήσεως.

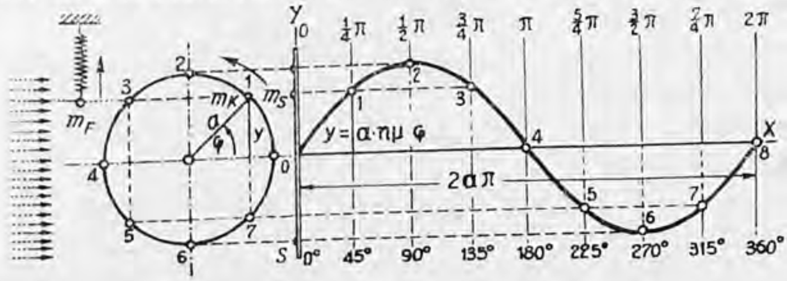
β) Εἰς τὸ παραπάνω ἐκκρεμὲς ἡ κινοῦσα δύναμις προέρχεται ἐκ τοῦ βάρους τῆς μάζης m. Μποροῦμε ὅμως νὰ ἔχωμεν αἰωρήσεις καὶ ἀπὸ ἄλλας δυνάμεις. Ἔτσι συμβαίνει μὲ ἔλασμα ποὺ προσηλώνεται μὲ τὸ ἓν ἄκρον του εἰς ἀκλόνητον στήριγμα (σχ. 70)· νὰ ἐκτελῇ αἰωρήσεις, ὅταν συρθῇ τὸ ἄλλο (ἐλεύθερον) ἄκρον του πλαγίως καὶ κατόπιν ἀφεθῇ ἐλεύθερον. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἀναφαινομένη μὲ τὴν ἐκτροπὴν ἀπὸ τὴν θέσιν ἠρεμίας δύναμις προέρχεται ἀπὸ τὴν ἐλαστικότητα τοῦ ἐλάσματος (πρβλ. § 44) καὶ εἶναι, ὅπως διδάσκεται ἐκεῖ, ἀνάλογος τῆς ἐκτροπῆς ἀπὸ τὴν θέσιν ἠρεμίας. Ἂν δηλ. παραστήσωμεν μὲ Κ τὴν δύναμιν ποὺ ἀναφαίνεται εἰς τὸ ἔλασμα λόγῳ τῆς ἐκτροπῆς καὶ μὲ x τὴν κατὰ μίαν στιγμὴν ἀπόστασιν ἀπὸ τὴν θέσιν ἠρεμίας, θὰ ἔχωμεν: $K=-Dx$ καὶ $D=-K/x$. Τὸ μέγεθος D παρέχει κατὰ ταῦτα τὴν δύναμιν ποὺ ἀναφαίνεται εἰς δοθὲν ἔλασμα, ὅταν τοῦτο ἐκτραπῇ ἀπὸ τὴν θέσιν ἠρεμίας εἰς ἀπόστασιν x ἴσην μὲ 1 (τὸ ἀρνητικὸν σημεῖον εἰς τὴν σχέσιν αὐτὴν σημαίνει, ὅτι ἡ δύναμις Κ δὲν ἔχει τὴν διεύθυνσιν τῆς ἐκτροπῆς x, ἀλλὰ διευθύνεται πάντοτε ἀντιθέτως, ἤτοι πρὸς τὴν θέσιν ἠρεμίας). Τὸ μέγεθος D τὸ ὀνομάζομεν ***κατευθυντήριον ἱκανότητα***. Γενικὰ εἰς κάθε ἐκκρεμὲς ὀνομάζομεν ***κατευθυντήριον μέγεθος*** ἢ ***κατευθύνουσαν ἱκανότητα*** τοῦ ἐκκρεμοῦς τὴν δύ-



Σχ. 70

ναμιν, ἡ ὁποία ἐνεργεῖ ἐπὶ τοῦ ἐκκρεμοῦς τὴν στιγμὴν ποὺ τοῦτο εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 1 ἀπὸ τὴν θέσιν ἠρεμίας.

γ) Κατὰ τὰ ἀνωτέρω κάθε αἰώρησιν ἢ ***ταλάντωσιν*** (ὅπως λέγεται γενικώτερον ἡ παλινδρομικὴ αὐτὴ κίνησις), εἰς τὴν ὁποίαν ἡ κατευθύνουσα ἱκανότης εἶναι ἀνάλογος τοῦ μεγέθους τῆς ἐκτροπῆς, τὴν ὀνομάζομεν ***ἁπλῆν ἁρμονικὴν κίνησιν*** ἢ ***ἡμιτονοειδῆ ταλάντωσιν***. Τέτοια εἶναι ἡ ταλάντωσις ποὺ κάνει σφαιρίδιον m_F (σχ. 71) κρεμασμένον εἰς σπειροειδὲς ἐλατήριον, ὅταν συρθῇ εἰς ἀπόστασιν α ἀπὸ



Σχ. 71

τὴν θέσιν τῆς ἠρεμίας του, ἡ ὁποία εἰς τὸ σχῆμα κεῖται εἰς ὁριζόντιον ἐπίπεδον, ποὺ περνάει ἀπὸ τὸν ἄξονα ΟΧ. Μὲ κατάλληλον ρύθμισιν τῆς γωνιακῆς ταχύτητος ἄλλης μάζης m_K, ποὺ διατρέχει τὴν περιφέρειαν κατακορύφου κύκλου ἀκτῖνος α, μποροῦμε νὰ ἐπιτύχωμεν νὰ συμπίπτουν αἱ σκιαὶ τῆς m_F καὶ τῆς m_K εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον m_s, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν ἐπὶ κατακορύφου ἐπιπέδου πετάσματος, ὅταν προσπίπτῃ κατάλληλος φωτισμός. Ἡ παρατήρησις αὐτὴ εἶναι μία πειραματικὴ ἀπόδειξις τοῦ ὅτι καὶ ἡ κίνησις τῆς προβολῆς σημείου (ποὺ διατρέχει μὲ σταθερὰν γωνιακὴν ταχύτητα τὴν περιφέρειαν κύκλου) ἐπὶ μίαν τῶν διαμέτρων τοῦ κύκλου (εἰς τὴν πειραματικήν μας διάταξιν τὴν κατακόρυφον) εἶναι καὶ αὐτὴ ἁπλῆ ἁρμονική. Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ σχῆμα, ἡ ἀπόστασις y ἀπὸ τὴν θέσιν ἠρεμίας τῶν m_F καὶ m_s μετὰ χρόνον t ἀπὸ τῆς στιγμῆς, ποὺ περνοῦν διὰ τῆς θέσεως ἠρεμίας, θὰ εἶναι : $y = \alpha.\eta\mu\varphi$, ἂν α εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας ποὺ διατρέχει ἡ m_K ἢ τὸ πλάτος (ἡ μεγίστη ἐκτροπὴ) τῆς ταλαντώσεως τῶν m_F καὶ m_s καὶ φ ἡ ***γωνία φάσεως***, ἤτοι ἡ γωνία ποὺ χαρακτηρίζει τὴν φάσιν τῆς ταλαντώσεως. Ἀλλὰ διὰ τὴν γωνίαν φ, ποὺ διαγράφει ἡ ἐπιβατικὴ ἀκτὶς (δηλ. ἡ ἀκτὶς ποὺ συνδέει τὴν περιφερομένην μᾶζαν m_K μὲ τὸ κέντρον τῆς περιφερείας) εἰς χρόνον t μὲ σταθερὰν γωνιακὴν ταχύτητα ω ($=2\pi\nu=$ $=2\pi/T$) μποροῦμε νὰ θέσωμεν τὴν τιμήν της καὶ ἔτσι θὰ ἔχωμεν :

$$y = \alpha\eta\mu\varphi = \alpha\ \eta\mu\omega t = \alpha\eta\mu 2\pi\nu t = \alpha\eta\mu 2\pi t/T. \qquad (35)$$

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν τῆς ἁρμονικῆς κινήσεως καθίσταται εὐνόητος ὁ χαρακτηρισμός της ὡς ἡμιτονοειδοῦς ταλαντώσεως. Ἡ γραφική παράστασις αὐτῆς εἰς ἄξονας συντεταγμένων, ὅπου εἰς τὸν ἄξονα τῶν τετμημένων καταγράφονται διαδοχικαὶ τιμαὶ τῆς φάσεως καὶ εἰς τὸν ἄξονα τῶν τεταγμένων αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὴν θέσιν ἠρεμίας, παρέχεται ἀπὸ τὴν γραμμὴν 0, 1, 2, . . . , 8, (σχ. 71), τὴν ὁποίαν ἐπίσης τὴν λέμε ***ἡμιτονοειδῆ*** ἢ ***ἡμιτονικήν***.

Ὥστε : ***Ὅταν σῶμα διατρέχῃ τὴν περιφέρειαν κύκλου μὲ σταθερὰν γωνιακὴν ταχύτητα ω (=v/ϱ), ἡ συνιστῶσα τῆς κινήσεως αὐτῆς κατὰ τὴν διεύθυνσιν μιᾶς διαμέτρου τοῦ κύκλου θὰ εἶναι ἁπλῆ ἁρμονικὴ ἢ ἡμιτονικὴ ταλάντωσις.***

Προκειμένου τώρα νὰ καθορισθῇ ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς ἡμιτονικῆς ταλαντώσεως, ἀρκεῖ νὰ προσδιορισθῇ ἡ ἀντίστοιχος συνιστῶσα τῆς ἐπιταχύνσεως τῆς κυκλικῆς κινήσεως. Γνωρίζομεν ἤδη (§ 12, ε), ὅτι ἡ ἐπιτάχυνσις κυκλικῆς κινήσεως ἔχει τὴν διεύθυνσιν τῆς ἀκτῖνος καὶ εἶναι : $\gamma_\rho = v^2/\rho = \omega^2 \rho$. Ἡ συνιστῶσα αὐτῆς κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς διαμέτρου, ἐπὶ τῆς ὁποίας γίνεται ἡ ταλάντωσις, θὰ εἶναι: $-\gamma \eta \mu \varphi = -\omega^2 \rho \eta \mu \omega t$. Διὰ νὰ ἔχῃ τὴν ἐπιτάχυνσιν αὐτὴν ἡ μᾶζα m ποὺ ἐκτελεῖ ταλάντωσιν, πρέπει νὰ ὑφίσταται τὴν ἐπίδρασιν δυνάμεως $k = -m.\omega^2.\rho.\eta\mu\omega t = -m\omega^2 y$, ἤτοι δυνάμεως, ἡ ὁποία εἶναι ἀνάλογος τῆς ἀποστάσεως y ἀπὸ τὴν θέσιν τῆς ἠρεμίας. Ὁ συντελεστὴς τῆς ἀναλογίας $m\omega^2$ παρέχει εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν τὴν ***κατευθύνουσαν ἱκανότητα*** D. Ἔτσι ἡ περίοδος T τῆς ἁρμονικῆς ταλαντώσεως προκύπτει ἀπὸ τὴν σχέσιν : $D = m\omega^2$ (36)

ὅθεν $D/m = \omega^2 = (2\pi/T)^2 = (2\pi\nu)^2$ καὶ $1/\nu = T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{m/D}$. (37)

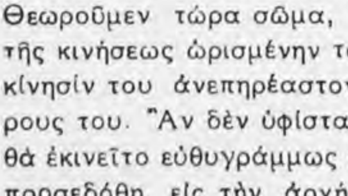
δ) Ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια ποὺ ἐγκλείει ὁ ταλαντωτὴς (τὸ ἐκκρεμές), ὅταν εὑρίσκεται ἐκτὸς τῆς θέσεως ἠρεμίας, ὅπως π.χ. εἰς τὴν περίπτωσιν ποὺ τείνεται τὸ ἐλατήριον, ὀφείλεται εἰς τὴν ἐπίδρασιν δυνάμεως K, ἡ ὁποία εἶναι ἴση καὶ ἀντίρροπος τῆς ἀναφαινομένης δυνάμεως D.x, ποὺ τείνει νὰ ἐπαναφέρῃ τὸν ταλαντωτὴν εἰς τὴν θέσιν τῆς ἠρεμίας. Τὸ ἔργον ποὺ ἀπαιτεῖται νὰ ἐκτελεσθῇ ὑπὸ τῆς δυνάμεως αὐτῆς δι' ἀπειροστὴν ἐκτροπὴν dx, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ δύναμις μπορεῖ νὰ θεωρηθῇ σταθερά, θὰ εἶναι : $dA = D.x.dx$. Συνεπῶς τὸ συνολικὸν ἔργον, ἤτοι ἡ ἀποταμιευομένη εἰς τὸν ταλαντωτὴν δυναμικὴ ἐνέργεια, θὰ εἶναι $\int dA = \int D.x.dx$ ὅθεν $A_\delta = D.x^2/2$. ***Ἐκ τούτου προκύπτει ὅτι ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια τεντωμένου ἐλατηρίου (ἐκκρεμοῦς ποὺ ἔχει ἐκτραπῆ ἀπὸ τὴν θέσιν ἠρεμίας του), εἶναι ἀνάλογος τοῦ τετραγώνου τῆς ἀπομακρύνσεως ἀπὸ τὴν θέσιν ἠρεμίας, ἐνῶ διὰ τὴν δύναμιν ἡ ὁποία προκαλεῖ τὴν ἐλαστικὴν παραμόρφωσιν (τέντωμα τοῦ ἐλατηρίου), εὑρήκαμεν ὅτι εἶναι*** (k=D.x) ***ἁπλῶς ἀνάλογος τῆς ἀπομακρύνσεως*** x ***ἀπὸ τὴν θέσιν ἠρεμίας*** (νόμος τοῦ Hooke).

ε) Εἰς τὸ ἐκρεμὲς ποὺ μᾶς δίδει σφαιρίδιον μάζης m δεμένο εἰς τὸ ἄκρον λεπτοῦ ἀνενδότου νήματος ΑΖ (σχ. 69), ἡ δύναμις k_1 ποὺ ἀναφαίνεται, ὅταν ἐξαχθῇ ἐκ τῆς θέσεως τῆς ἠρεμίας του (διευθύνσεως τῆς κατακορύφου), θὰ εἶναι ἡ συνιστῶσα τοῦ βάρους B (=mg), ἡ ἐνεργοῦσα κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἐφαπτομένης τῆς τροχιᾶς του εἰς τὸ σημεῖον Z, ποὺ εὑρίσκεται κατὰ τὴν θεωρουμένην στιγμὴν ἡ μᾶζα m τοῦ σφαιριδίου. Ἑπομένως εἶναι: $k_1=-B\eta\mu\varphi$, ἂν φ παριστάνει τὴν γωνίαν ἐκτροπῆς ἀπὸ τὴν θέσιν ἠρεμίας. Ἀλλά, ὅπως φαίνεται ἐκ τοῦ σχήματος, εἶναι: $\eta\mu\varphi=x/l$, ἂν x παριστάνει τὴν ἀπόστασιν τῆς μάζης m ἀπὸ τὴν κατακόρυφον διεύθυνσιν τῆς ἠρεμίας καὶ l τὸ ***μῆκος τοῦ ἐκκρεμοῦς***. Εἶναι λοιπὸν καὶ ἐδῶ ἡ κινοῦσα δύναμις $k_1(=B.x/l)$ ἀνάλογος τῆς ἀποστάσεως x ἀπὸ τὴν θέσιν ἠρεμίας. Ἔτσι ἡ κατευθυντήριος ἱκανότης [βλ. ἐξίσ. (36)] θὰ εἶναι: $D=k_1/x=B/l=m\,g/l$, καὶ ἡ περίοδος τοῦ μαθηματικοῦ ἐκκρεμοῦς: $$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}=2\pi\sqrt{\frac{m}{m.g/l}}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (37')$$

στ) Ἡ σχέσις αὐτὴ ἐκφράζει μαθηματικῶς τοὺς νόμους τῆς κινήσεως ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς. Σύμφωνα μὲ αὐτὴν δηλαδή: ***Ἡ περίοδος (χρόνος αἰωρήσεως) T μαθηματικοῦ ἐκκρεμοῦς εἶναι: 1) ἀνάλογος τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ μήκους l τοῦ ἐκκρεμοῦς καὶ 2) ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τῆς ἐπιταχύνσεως g τῆς βαρύτητος.*** Πειραματικὴν ἐπαλήθευσιν τῆς σχέσεως τῆς περιόδου πρὸς τὸ μῆκος τοῦ ἐκκρεμοῦς μποροῦμε νὰ ἔχωμεν, ἂν λάβωμεν περισσότερα ἐκκρεμῆ μὲ μήκη: τοῦ πρώτου 11 cm, τοῦ δευτέρου ($11.2^2=$)44 cm, τοῦ τρίτου ($11.3^2=$)99 cm, τοῦ τετάρτου ($11.4^2=$) 176 cm κ.ο.κ. καὶ καθορίσωμεν τὸν ἀριθμὸν αἰωρήσεων ἑκάστου εἰς ὡρισμένον χρόνον, π.χ. εἰς 1 min. Εὑρίσκομεν τότε, ὅτι τὸ βραχύτερον κάνει 180, ὅταν τὸ δεύτερον κάνει 90, τὸ τρίτον 60, τὸ τέταρτον 45 αἰωρήσεις κ.ο.κ. Ἐκ τῶν μετρήσεων τούτων προκύπτει, ὅτι ὁ χρόνος αἰωρήσεως εἶναι $^1/_3$ sec εἰς τὸ βραχύτερον, $^2/_3$ sec εἰς τὸ δεύτερον, $^3/_3$ (=1 sec) εἰς τὸ τρίτον, $^4/_3$ sec εἰς τὸ τέταρτον. Ἑπομένως εἰς τὰ ἐκκρεμῆ ποὺ ἐλάβαμεν, ἔτσι ποὺ τὰ μήκη των νὰ ἔχουν λόγους 1 : 4 : 9 : 16, εὑρίσκομεν, ὅτι οἱ χρόνοι αἰωρήσεως ἔχουν ἀντιστοίχως λόγους: $1:2:3:4=\sqrt{1}:\sqrt{4}:\sqrt{9}:\sqrt{16}$. — Διὰ τὴν ἐξάρτησιν τῆς περιόδου ἀπὸ τὴν ἐπιτάχυνσιν τῆς βαρύτητος, λαμβάνομεν ἄκαμπτον ράβδον, τὴν ὁποίαν ἐξαρτῶμεν ἀπὸ ἄξονα κλίνοντα πρὸς τὸν ὁρίζοντα ὑπὸ γωνίαν φ, ἔτσι ποὺ καὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐπὶ τοῦ ὁποίου αἰωρεῖται ἡ ράβδος, νὰ κλίνῃ πρὸς τὸ κατακόρυφον ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν. Ἔτσι μόνον ἡ συνιστῶσα ***gσυνφ*** τῆς ἐπιταχύνσεως τῆς βαρύτητος ἐπιδρᾷ εἰς τὴν κίνησιν τοῦ ἐκκρεμοῦς. Παρατηροῦμεν τότε, ὅτι ἡ περίοδος εἶναι $\sqrt{1/\sigma\upsilon\nu\varphi}$ φορὰς μεγαλυτέρα ἀπὸ ἐκείνην, ποὺ ἔχομεν, ὅταν τὸ αὐτὸ ἐκκρεμὲς αἰωρεῖται ἐπὶ κατακορύφου ἐπιπέδου.

Ἐξ ἄλλου, ἡ περίοδος ἐκκρεμοῦς εἶναι ἀνεξάρτητος τόσον τοῦ ποιοῦ ὅσον καὶ τοῦ ποσοῦ τῆς ὕλης τοῦ αἰωρουμένου σώματος. Ἡ πειραματικὴ ἐπαλήθευσις τούτου εἶναι εὐχερὴς μὲ ἁπλῆν παρατήρησιν τῶν αἰωρήσεων διαφόρων ἰσομήκων ἐκκρεμῶν. Τέλος, ἐπαληθεύεται καὶ πειραματικῶς, ὅτι ἡ περίοδος δὲν ἐξαρτᾶται, οὔτε ἀπὸ τὸ πλάτος τῆς αἰωρήσεως, ἀρκεῖ τοῦτο νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ τὰς ὀλίγας μοίρας, τόσας, ποὺ χωρὶς αἰσθητὸν λάθος νὰ μπορῇ νὰ ληφθῇ τὸ μῆκος τοῦ διατρεχομένου τόξου ἴσον μὲ τὸ τῆς χορδῆς του.

§ 32. **Κίνησις βαλλομένου σώματος.** Εἴδαμε παραπάνω (§ 11) ὅτι ἡ κίνησις ποὺ κάνει σῶμα, τὸ ὁποῖον ἀφήνεται νὰ καταπέσῃ ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν *μόνον* τοῦ βάρους του, εἶναι ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη. Θεωροῦμεν τώρα σῶμα, εἰς τὸ ὁποῖον προσδίδομεν εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς κινήσεως ὡρισμένην ταχύτητα, καὶ τὸ ἀφήνομεν νὰ συνεχίσῃ τὴν κίνησίν του ἀνεπηρέαστον ἀπὸ κάθε ἄλλην δύναμιν πλὴν τοῦ βάρους του. Ἂν δὲν ὑφίστατο τὴν ἐπίδρασιν τῆς βαρύτητος, τὸ σῶμα θὰ ἐκινεῖτο εὐθυγράμμως καὶ ἰσοταχῶς μὲ τὴν ταχύτητα υ_0, ποὺ τοῦ προσεδόθη εἰς τὴν ἀρχήν. Ἐπειδὴ ὅμως τοῦτο ὑφίσταται συνεχῶς τὴν ἐπίδρασιν τοῦ βάρους του, θὰ διαγράψῃ τροχιάν, ἡ ὁποία εἶναι ἀνυσματικὸν ἄθροισμα (συνισταμένη) δύο συνιστωσῶν, δηλαδή, μιᾶς κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἀρχικῆς του σταθερᾶς ταχύτητος υ_0 καὶ ἄλλης κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς κατακορύφου, ποὺ διαγράφεται ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ βάρους του. Ἔτσι π.χ. βλῆμα, τὸ ὁποῖον βάλλεται μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα υ_0, ὑπὸ γωνίαν ἀνυψώσεως (ἤτοι γωνίαν ποὺ σχηματίζει ἡ διεύθυνσις τῆς ταχύτητος υ_0 μὲ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον) α (σχ. 72), θὰ διαγράψῃ καμπύλην τροχιάν, ποὺ προκύπτει ὡς ἑξῆς: Λόγῳ τῆς ἀρχικῆς του ταχύτητος (ἂν δὲν ὑφίστατο τὴν ἐπίδρασιν τοῦ βάρους του) τὸ βλῆμα θὰ ἐκινεῖτο κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ταχύτητός του καὶ εἰς τοὺς διαδοχικοὺς χρόνους 1,2,3,... θὰ διήρχετο ἀντιστοίχως διὰ τῶν σημείων A, B, C,... Ἕνεκα τῆς ἐπιδράσεως τοῦ βάρους του τὸ βλῆμα καταπίπτει εἰς τοὺς αὐτοὺς χρόνους κατὰ τὰ διαστήματα $\frac{1}{2}g1^2$, $\frac{1}{2}g2^2$, $\frac{1}{2}g3^2$, . . ., ἢ $g/2$, $4g/2$, $9g/2$, . . . Ἑπομένως διατρέχει τὴν καμπύλην OA′B′C′, . . . ἡ ὁποία εἶναι ***παραβολή***.



Σχ. 72

Ἡ συνιστῶσα x τῆς τροχιᾶς, ποὺ διατρέχει τὸ βαλλόμενον ὑπὸ γωνίαν ἀνυψώσεως α σῶμα κατὰ τὴν ὁριζοντίαν διεύθυνσιν (ἄξονα τῶν x), διανύεται ὁμαλῶς μὲ τὴν ἀντίστοιχον συνιστῶσαν τῆς ἀρχικῆς ταχύτητος υ_0, ἤτοι μὲ ταχύτητα υ_0συνα, καὶ ἑπομένως καθορίζεται ἀπὸ τὴν σχέσιν: $x=\upsilon_0 t\,\text{συν}\alpha$. Ἡ ἄλλη συνιστῶσα y τῆς τροχιᾶς τοῦ βλήματος, κατὰ τὴν κατακόρυφον διεύθυνσιν, θὰ εἶναι ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τοῦ διαστήματος $\upsilon_0 t\,\text{ημ}\alpha$, ποὺ διανύεται πρὸς τὰ ἄνω, λόγῳ τῆς ἀντιστοίχου συνιστώσης τῆς ἀρχικῆς ταχύτητος (ἤτοι τῆς ταχύτητος υ_0ημα) καὶ τοῦ διαστήματος $-gt^2/2$, ποὺ διανύεται πρὸς τὰ κάτω, λόγῳ τοῦ βάρους του, μὲ ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην κίνησιν καὶ ἑπομένως καθορίζεται ἀπὸ τὸν τύπον: $y=\upsilon_0 t\,\text{ημ}\alpha-gt^2/2$. **Διὰ** συσχετίσεως τῶν δύο τούτων ἐξισώσεων λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς διαγραφομένης τροχιᾶς: $y=x\,\text{εφ}\alpha-gx^2/2\upsilon_0^2\text{συν}^2\alpha$, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς παραβολικὴν καμπύλην.

Τὸ βλῆμα θὰ διατρέξη τὸν ἀνερχόμενον κλάδον τῆς παραβολικῆς τροχιᾶς του εἰς χρόνον T_α, τὸν ὁποῖον ὀνομάζομεν ***χρόνον ἀνυψώσεως***. Ὅταν φθάση εἰς τὸ ὕψιστον σημεῖον τῆς τροχιᾶς του, ἡ κατακόρυφος συνιστῶσα υ_y τῆς ταχύτητος θὰ μηδενισθῆ καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι: $\upsilon_y = \upsilon_0 \eta\mu\alpha - gT_\alpha = 0$ ὅθεν $T_\alpha = (\upsilon_0 . \eta\mu\alpha)/g$ (38)

Μὲ τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ χρόνου ἀνυψώσεως εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ μέγιστον ὕψος Ψ, εἰς τὸ ὁποῖον θὰ φθάση τὸ βλῆμα, θὰ εἶναι:
$\Psi = \upsilon_0 . T_\alpha . \eta\mu\alpha - {}^1/_2 gT_\alpha^2 = \upsilon_0 . \upsilon_0 \eta\mu\alpha . \eta\mu\alpha/g - {}^1/_2 g\upsilon_0^2 \eta\mu^2\alpha/g^2 = (\upsilon_0 \eta\mu\alpha)^2/2g$ (39)

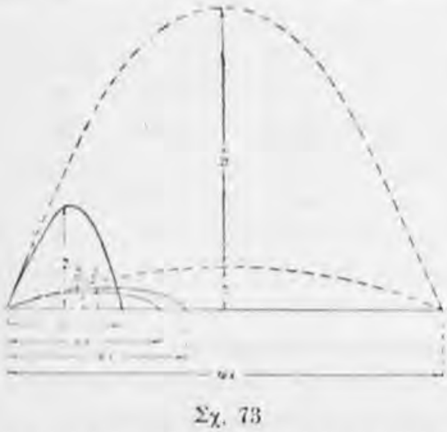
Εὐθὺς μετὰ τὴν ἀνύψωσιν μέχρι τοῦ ἀνωτάτου σημείου τῆς τροχιᾶς του τὸ βλῆμα θὰ συνεχίση τὴν διαδρομήν του, διατρέχον τὸν κατερχόμενον κλάδον τῆς παραβολῆς καὶ διὰ νὰ φθάση εἰς τὸ αὐτὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον, ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἐξεκίνησε, θὰ χρειασθῆ ***χρόνον καταπτώσεως*** T_κ. Πρὸς καθορισμὸν τοῦ χρόνου T_κ σκεπτόμεθα ὅτι, ὅταν τὸ σῶμα φθάνη εἰς τὸ ἀνώτατον σημεῖον τῆς τροχιᾶς του, ἡ κατακόρυφος συνιστῶσα τῆς ἀρχικῆς του ταχύτητος, ἤτοι ἡ ταχύτης $\upsilon_0 \eta\mu\alpha$, μηδενίζεται καὶ συνεπῶς ἡ κατάπτωσις γίνεται χωρὶς κατακόρυφον συνιστῶσαν τῆς ἀρχικῆς του ταχύτητος.
Ἑπομένως εἶναι: $\Psi = {}^1/_2 gT_\kappa^2$ ὅθεν: $T_\kappa = \sqrt{2\Psi/g} = \sqrt{2(\upsilon_0 \eta\mu\alpha)^2/2g^2}$
καὶ $T_\kappa = (\upsilon_0 \eta\mu\alpha)/g = T_\alpha$ (38΄)

Ἤτοι: ***Ὁ χρόνος τῆς ἀνυψώσεως τοῦ βλήματος εἶναι ἴσος μὲ τὸν χρόνον καταπτώσεως αὐτοῦ***

Ἡ ἐμβέλεια τοῦ βλήματος, ἤτοι ἡ ὁριζοντία ἀπόστασις Χ, εἰς τὴν ὁποίαν φθάνει τοῦτο, βαλλόμενον ὑπὸ γωνίαν ἀνυψώσεως α, εὑρίσκεται ἀπὸ τὴν σχέσιν $x = \upsilon_0 t \sigma\upsilon\nu\alpha$, ἂν εἰς αὐτὴν θέσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ χρόνου, ἴσην μὲ $T_\alpha + T_\kappa = (2\upsilon_0 \eta\mu\alpha)/g$ (38΄΄)
Ἔτσι λαμβάνομεν $X = (2\upsilon_0^2 \eta\mu\alpha\, \sigma\upsilon\nu\alpha)/g = (\upsilon_0^2 \eta\mu 2\alpha)/g$ (40)
Ἐπειδὴ ἡ μεγίστη τιμὴ τοῦ ημ2α προκύπτει ὅταν εἶναι $2\alpha = 90^\circ$ καὶ $\alpha = 45^\circ$, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ μεγίστη ἐμβέλεια εἰς πλαγίαν βολὴν ἐπιτυγχάνεται ὅταν τὸ σῶμα βάλλεται ὑπὸ γωνίαν ἀνυψώσεως $\alpha = 45^\circ$. Διὰ κάθε ἄλλην γωνίαν ἐπιτυγχάνεται μικροτέρα ἐμβέλεια. Δι᾽ αὐτὴν ἰσχύει, ὅτι εἶναι ἴση μὲ ἐκείνην ποὺ μποροῦμε νὰ ἐπιτύχωμεν καὶ μὲ τὴν συμπληρωματικήν της γωνίαν (ἀνυψώσεως), διότι εἶναι $\eta\mu 2\alpha = \eta\mu(180 - 2\alpha) = \eta\mu 2(90 - \alpha)$. Ὥστε διὰ μίαν καὶ τὴν αὐτὴν ἐμβέλειαν (πλὴν τῆς ὑπὸ γωνίαν ἀνυψώσεως 45°) διακρίνομεν τὴν ***εὐθυφόρον*** καὶ τὴν ***ἐπισκηπτικὴν*** βολήν, τὴν πρώτην ὑπὸ τὴν μικροτέραν καὶ τὴν δευτέραν ὑπὸ τὴν μεγαλυτέραν τῶν δύο συμπληρωματικῶν γωνιῶν ἀνυψώσεως. Ἂν τὸ σῶμα βάλλεται κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω δὲν θὰ ἔχωμεν ὁριζοντίαν συνιστῶσαν τῆς ἀρχικῆς ταχύτητος ($\upsilon_0 \sigma\upsilon\nu 90^\circ = 0$), ἀλλὰ ὅλη ἡ ἀρχική του ταχύτης υ_0, θὰ ἐκδηλώνεται κατακορύφως ($\upsilon_0 \eta\mu 90^\circ = \upsilon_0$). Ἔτσι ἁπλουστεύονται οἱ τύποι ποὺ δίδουν τὸν χρόνον ἀνόδου ἢ καθόδου T_α ἢ $T_\kappa = \upsilon_0 \eta\mu 90^\circ/g = \upsilon_0/g$ καὶ

τὸ μέγιστον ὕψος $\Psi=(\upsilon_0^2 \eta\mu^2 90^\circ)/2g=\upsilon_0^2/2g$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἐμβέλεια ($X=(\upsilon_0^2 \eta\mu 180^\circ)/g=0$) θὰ εἶναι ἴση μὲ μηδέν.

Τὰ παραπάνω ἐξαγόμενα ἰσχύουν μόνον διὰ βολὴν εἰς χῶρον κενόν. Εἰς τὴν πραγματικότητα αἱ τροχιαὶ ποὺ διαγράφουν τὰ βλήματα ὑφίστανται σημαντικὰς μεταβολὰς ἕνεκα τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἀέρος. Ἡ ἐπίδρασις τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἀέρος καταφαίνεται εἰς τὸ σχ. 73, ὅπου αἱ συνεχεῖς γραμμαὶ παρέχουν τὰς πραγματικὰς τροχιὰς καὶ αἱ στικταὶ τὰς ὑπολογιζομένας χωρὶς τὴν ἀντίστασιν τοῦ ἀέρος, διὰ βλήματα διαφόρου βάρους, ποὺ βάλλονται πλαγίως μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 550 m/s. Ἡ τροχιὰ δὲν εἶναι πλέον παραβολική, ἀλλὰ ὁ κατερχόμενος κλάδος της εἶναι πολὺ ἀποτομώτερος ἀπὸ τὸν ἀνερχόμενον· ἔτσι καὶ ἡ ἐμβέλεια τῆς βλητικῆς αὐτῆς καμπύλης γίνεται πολὺ βραχυτέρα. Ἐπειδὴ ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος εἶναι μικροτέρα εἰς τὰ ἀνώτερα στρώματα αὐτοῦ, κατορθώνεται μεγαλυτέρα ἐμβέλεια, ἂν ἡ τροχιὰ διέρχεται ἀπὸ μεγάλα ὕψη (εἰς τηλεβόλα, ποὺ ἐχρησιμοποιήθησαν κατὰ τὸν παγκόσμιον πόλεμον, ἐπετεύχθη ἐμβέλεια 130 km δι' ἀνυψώσεως τοῦ βλήματος εἰς 54 km).



Σχ. 73

§ 33. **Κροῦσις**. Τὸ φαινόμενον τῆς συγκρούσεως δύο σωμάτων διεξάγεται μὲ τόσην ταχύτητα, ὥστε δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ τὸ παρακολουθήσωμεν ἀπ' εὐθείας. Μὲ τὴν βοήθειαν ὅμως τῆς Ἀρχῆς τῆς διατηρήσεως ἀφ' ἑνὸς τῆς ποσότητος κινήσεως καὶ ἀφ' ἑτέρου τῆς ἐνεργείας, διευκολύνεται ἡ μελέτη του. Εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις κρούσεως ἀναφαίνονται δυνάμεις μεταξὺ τῶν ἀλληλοσυγκρουομένων σωμάτων, ἤτοι δυνάμεις ἐσωτερικαὶ εἰς τὸ σύστημα, ποὺ ἀποτελοῦν τὰ συγκρουόμενα σώματα καὶ ἐπομένως πρέπει τὸ ποσὸν κινήσεως, ποὺ ἔχουν τὰ σώματα τοῦ συστήματος, νὰ εἶναι μετὰ τὴν κροῦσιν ὅσον ἦτο καὶ πρὸ αὐτῆς (§ 28,ε). Προκειμένου διὰ τὴν ἐνέργειαν ἰσχύει βεβαίως ἡ Ἀρχὴ τῆς διατηρήσεώς της· πρέπει ὅμως εἰς κάθε περίπτωσιν νὰ ἐξετασθῇ, ἂν ἡ μηχανικὴ ἐνέργεια τῶν σωμάτων πρὸ τῆς κρούσεως δὲν μετέπεσε διὰ τῆς κρούσεως, ἐξ ὁλοκλήρου ἢ ἐν μέρει, εἰς θερμότητα. Διακρίνομεν δύο ὁρικὰς περιπτώσεις, ἤτοι τὴν ***(τελείως) ἐλαστικὴν*** καὶ τὴν ***μὴ ἐλαστικὴν (πλαστικὴν)*** κροῦσιν. Ἐλαστικὴν ὀνομάζομεν τὴν κροῦσιν μεταξὺ ἐλαστικῶν σωμάτων (πρβλ. § 44), δηλαδὴ σωμάτων, ποὺ ὑφιστάμενα ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν ἐξωτερικῶν δυνάμεων παραμορφώσεις (ἐπιμήκυνσιν, ἐπιβράχυνσιν, κάμψιν, στρέψιν), τὰς ἀποβάλλουν ἐξ ὁλοκλήρου καὶ συνεπῶς ἀναλαμβάνουν τὴν ἀρχικήν των μορφήν, ὅταν παύσουν νὰ ἐνεργοῦν αἱ δυνάμεις. Ἀντιθέτως μὴ ἐλαστικὰ (πλαστικὰ) εἶναι τὰ σώματα ποὺ διατηροῦν καὶ μετὰ τὴν παῦσιν ἐπιδράσεως ἐξωτερικῶν δυνάμεων τὰς παραμορφώσεις ποὺ ὑπέστησαν. Ἔτσι π.χ. λέμε ὅτι μία σφαῖρα ἀπὸ χάλυβα εἶναι ἐλαστική, ἐνῶ σφαῖρα ἀπὸ μόλυβδον εἶναι μὴ ἐλαστικὴ (πλαστική).

Διὰ νὰ ἐπιβληθῇ μία παραμόρφωσις εἰς δοθὲν σῶμα πρέπει νὰ καταβληθῇ ἔργον· *τὸ ἔργον παραμορφώσεως*. Τὸ ἔργον τοῦτο εἰς μίαν ἐλαστικὴν παραμόρφωσιν ἐναποθηκεύεται εἰς τὸ παραμορφούμενον σῶμα ὡς δυναμικὴ ἐνέργεια τούτου. Διὰ νὰ τεντωθῇ ἐλατήριον καταβάλλεται ἔργον· τὸ τεντωμένον ἐλατήριον ἐγκλείει δυναμικὴν ἐνέργειαν. Αὕτη τὸ ἐπαναφέρει εἰς τὴν ἀρχικήν του μορφήν, ὅταν παύσῃ ἡ ἐπίδρασις τῆς δυνάμεως ποὺ τὸ ἐτέντωσε. Εἰς τὸ μὴ ἐλαστικὸν ὅμως σῶμα τὸ ἔργον τῆς παραμορφώσεως μεταβάλλεται εἰς θερμότητα καὶ δὲν μπορεῖ νὰ ἀποδοθῇ πάλιν ἀπὸ αὐτό· ἔτσι ἡ παραμόρφωσις παραμένει μονίμως εἰς τὸ σῶμα. Ἐκ τούτου προκύπτει, ὅτι κατὰ τὴν ἐλαστικὴν κροῦσιν ἡ μηχανικὴ ἐνέργεια διατηρεῖται ἐξ ὁλοκλήρου ὑπὸ τὴν αὐτὴν μορφήν, ἐνῶ κατὰ τὴν μὴ ἐλαστικὴν κροῦσιν τὸ μέγιστον μέρος αὐτῆς μεταβάλλεται εἰς θερμότητα καὶ συνεπῶς χάνεται εἰς τὸ περιβάλλον.

Ἐξετάζομεν τώρα τὸ φαινόμενον τῆς κρούσεως εἰς τὴν ἁπλουστέραν μορφὴν δύο σφαιρῶν, αἱ ὁποῖαι κινοῦνται φερόμεναι εἰς σύγκρουσιν ἐπὶ τῆς εὐθείας ποὺ ἑνώνει τὰ κέντρα των (κεντρικὴ κροῦσις). Ἀπὸ τὴν στιγμὴν ποὺ θὰ ἔλθουν εἰς ἐπαφὴν ἡ μία πρὸς τὴν ἄλλην, λαμβάνει χώραν συμπίεσις τῶν σφαιρῶν. Τοῦτο σημαίνει, ὅτι ἐπέρχεται παραμόρφωσις τῶν σφαιρῶν, διὰ τὴν ὁποίαν ἀπαιτεῖται νὰ καταβληθῇ ἔργον. Τὸ ἔργον τοῦτο τῆς παραμορφώσεως λαμβάνεται ἐκ τῆς κινητικῆς ἐνεργείας ποὺ ἔχουν αἱ σφαῖραι. Ἔτσι ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τῶν σφαιρῶν ἐλαττώνεται καὶ ἡ ἐλάττωσις αὐτὴ προχωρεῖ μέχρις ὅτου ἀποκτήσουν καὶ αἱ δύο σφαῖραι τὴν ἴδια ταχύτητα, ὁπότε πλέον μένει ἀμετάβλητος ἡ μεταξύ των σχετικὴ θέσις. Τὴν στιγμὴν αὐτὴν ἡ παραμόρφωσις ἔχει τὴν μεγίστην της τιμήν. Μέχρι τοῦ σημείου τούτου τὸ φαινόμενον ἔχει τὴν ἴδια διαδρομὴ εἰς ὅλα τὰ συγκρουόμενα σώματα, ἔπειτα ὅμως ἀπὸ αὐτὴν ἡ πορεία τοῦ φαινομένου εἶναι διαφορετικὴ εἰς τὰ μὴ ἐλαστικὰ ἀπὸ ὅ,τι εἶναι εἰς τὰ ἐλαστικὰ σώματα·

Ἂν αἱ σφαῖραι ποὺ συγκρούονται εἶναι μὴ ἐλαστικαί, θὰ παραμείνῃ ἡ παραμόρφωσις, ποὺ προεκλήθη κατὰ τὴν ὡς ἄνω διαδρομὴν τοῦ φαινομένου καὶ τὸ μέρος τῆς κινητικῆς ἐνεργείας, ποὺ κατη-

ναλώθη διὰ τὴν παραμόρφωσιν, χάνεται, μετασχηματιζόμενον εἰς θερμότητα. Ἔτσι αἱ συγκρουσθεῖσαι σφαῖραι, ποὺ δὲν ἐμφανίζουν ἐλαστικὰς δυνάμεις ἐπανορθωτικὰς τῆς παραμορφώσεως, θὰ κινηθοῦν περαιτέρω μὲ τὴν κοινὴν ταχύτητα c ποὺ ἀπέκτησαν. Ἂν εἶναι m_1, m_2 αἱ μᾶζαι τῶν σφαιρῶν καὶ υ_1, υ_2 αἱ ταχύτητες αὐτῶν πρὸ τῆς κρούσεως, τότε ἡ κοινὴ ταχύτης c, ποὺ θὰ ἔχουν αὗται μετὰ τὴν κροῦσιν, πρέπει νὰ εἶναι τόση, ὥστε τὸ ποσὸν κινήσεως μετὰ τὴν κροῦσιν νὰ εἶναι ὅσον καὶ τὸ πρὸ τῆς κρούσεως. Θὰ εἶναι λοιπόν :
$m_1\upsilon_1+m_2\upsilon_2=(m_1+m_2)c$ ὅθεν $c=(m_1\upsilon_1+m_2\upsilon_2)/(m_1+m_2)$ (41)

Ἂν ὅμως αἱ σφαῖραι ποὺ συνεκρούσθησαν εἶναι ἐλαστικαί, ἡ ὡς ἄνω προκληθεῖσα κατὰ τὴν πρώτην φάσιν τοῦ φαινομένου παραμόρφωσις ἀναπτύσσει εἰς τὰς σφαίρας ἐλαστικὰς δυνάμεις. Ἐπακολουθεῖ, ὡς ἐκ τούτου, δευτέρα φάσις τοῦ φαινομένου, κατὰ τὴν ὁποίαν αἱ σφαῖραι ἀναλαμβάνουν τὴν πρὸ τῆς κρούσεως μορφήν. Κατὰ συνέπειαν τούτου αἱ σφαῖραι ἀπωθοῦνται ἡ μία ἀπὸ τὴν ἄλλην κατ' ἀντιθέτους φοράς. Ἡ κινητικὴ ἐνέργεια, ποὺ κατὰ τὴν πρώτην φάσιν τοῦ φαινομένου μετεσχηματίσθη, δὲν ἔγινε θερμότης ποὺ χάνεται εἰς τὸ περιβάλλον, ἀλλὰ ἀποταμιεύεται ὑπὸ μορφὴν δυναμικῆς ἐνεργείας. Αὕτη κατὰ τὴν ἐπακολουθοῦσαν δευτέραν φάσιν μετασχηματίζεται πάλιν εἰς κινητικὴν ἐνέργειαν καὶ μάλιστα ἐξ ὁλοκλήρου, ἐφόσον αἱ σφαῖραι εἶναι τελείως ἐλαστικαί, ἤτοι ἀποβάλλουν ἐξ ὁλοκλήρου τὰς παραμορφώσεις των καὶ ἀναλαμβάνουν τὴν ἀρχικήν των μορφήν.

Ἡ μεταβολὴ λοιπὸν υ_1-c καὶ $c-\upsilon_2$, ποὺ γίνεται ἀντιστοίχως εἰς τὴν ταχύτητα ἑκάστης τῶν σφαιρῶν κατὰ τὴν πρώτην φάσιν τοῦ φαινομένου, ἐπαναλαμβάνεται καὶ κατὰ τὴν δευτέραν φάσιν τοῦ φαινομένου. Ἑπομένως ἡ μεταβολὴ τῆς ταχύτητος ἑκάστης σφαίρας εἰς τὴν ἐλαστικὴν κροῦσιν εἶναι ***διπλασία*** τῆς εἰς τὴν μὴ ἐλαστικήν. Ἂν εἶναι λοιπὸν c_1 καὶ c_2 αἱ ταχύτητες ποὺ ἀποκτοῦν ἀντιστοίχως αἱ σφαῖραι m_1 καὶ m_2 μετὰ τὴν κροῦσιν, θὰ διαφέρουν ἀπὸ τὰς ταχύτητας υ_1 καὶ υ_2 ποὺ εἶχον αἱ σφαῖραι πρὸ τῆς κρούσεως κατὰ $2(\upsilon_1-c)$ καὶ $2(c-\upsilon_2)$. Ἑπομένως θὰ εἶναι : $c_1=\upsilon_1-2(\upsilon_1-c)=\upsilon_1-2[\upsilon_1-(m_1\upsilon_1+m_2\upsilon_2)/(m_1+m_2)]=\upsilon_1-2m_2(\upsilon_1-\upsilon_2)/(m_1+m_2)$ καὶ $c_2=\upsilon_2+2(c-\upsilon_2)=\upsilon_2+2[(m_1\upsilon_1+m_2\upsilon_2)/(m_1+m_2)-\upsilon_2]=\upsilon_2+2[m_1(\upsilon_1-\upsilon_2)/(m_1+m_2)]$· Ἀπὸ τὰς σχέσεις αὐτὰς προκύπτει : $\mathbf{c}_1-\mathbf{c}_2=\upsilon_1-2[m_2(\upsilon_1-\upsilon_2)/(m_1+m_2)]-\upsilon_2-2m_1(\upsilon_1-\upsilon_2)/(m_1+m_2)=-(\upsilon_1-\upsilon_2)$ (42)
ἤτοι : ***Εἰς τὴν ἐλαστικὴν κροῦσιν αἱ σφαῖραι κινοῦνται μετὰ τὴν κροῦσιν μὲ ταχύτητας, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὴν αὐτὴν διαφορὰν μὲ ἐκείνην ποὺ ἔχουν αἱ πρὸ τῆς κρούσεως ταχύτητες· ἀλλ' ἡ διαφορὰ τῶν ταχυτήτων πρὸ τῆς κρούσεως εἶναι ἀντίθετος τῆς τῶν μετὰ τὴν κροῦσιν.*** Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ σφαῖρα ποὺ ἔχει πρὸ τῆς κρούσεως τὴν

μεγαλυτέραν ταχύτητα, θὰ ἔχῃ μετὰ τὴν κροῦσιν τὴν μικροτέραν.

Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν ταχυτήτων c_1 καὶ c_2, ποὺ ἀποκτοῦν ἀντιστοίχως αἱ σφαῖραι μετὰ τὴν κροῦσιν, μπορεῖ νὰ στηριχθῶμεν εἰς τὸ ὅτι κατὰ τὴν ἐλαστικὴν κροῦσιν ἰσχύει ἡ Ἀρχὴ τῆς διατηρήσεως ὄχι μόνον τοῦ ποσοῦ κινήσεως (πού, ὅπως εἴδαμε, μᾶς καθωδήγησε καὶ εἰς τὴν θεώρησιν τῆς μὴ ἐλαστικῆς κρούσεως), ἀλλὰ καὶ τῆς κινητικῆς ἐνεργείας, διότι τώρα δὲν μετασχηματίζεται αὕτη εἰς θερμότητα. Ἔτσι θὰ ἔχωμεν εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἐλαστικῆς κρούσεως τὰς σχέσεις:

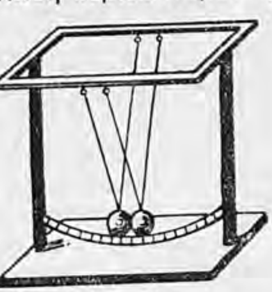
$$m_1\upsilon_1+m_2\upsilon_2=m_1c_1+m_2c_2 \quad \text{καὶ} \quad {}^1/_2 m_1\upsilon_1^2+{}^1/_2 m_2\upsilon_2^2={}^1/_2 m_1c_1^2+{}^1/_2 m_2c_2^2.$$

Τὴν ἰσότητα τῆς κινητικῆς ἐνεργείας πρὸ καὶ μετὰ τὴν ἐλαστικὴν κροῦσιν τὴν λαμβάνομεν ἐπίσης, ἂν εἰς τὴν τιμὴν αὐτῆς μετὰ τὴν κροῦσιν θέσωμεν τὰς τιμὰς τῶν ταχυτήτων c_1 καὶ c_2 ἐκ τῶν ἀνωτέρω σχέσεων. Τότε θὰ εἶναι :

$$ {}^1/_2 m_1c_1^2+{}^1/_2 m_2c_2^2={}^1/_2 m_1\left(\upsilon_1-2\frac{m_2(\upsilon_1-\upsilon_2)}{m_1+m_2}\right)^2+{}^1/_2 m_2\left(\upsilon_2-2\frac{m_1(\upsilon_1-\upsilon_2)}{m_1+m_2}\right)^2= $$

$$ ={}^1/_2 m_1\upsilon_1^2+{}^1/_2 m_2\upsilon_2^2. $$

Αἱ δύο περιπτώσεις α) τῆς ἐλαστικῆς καὶ β) τῆς μὴ ἐλαστικῆς κρούσεως, ποὺ ἐθεωρήσαμεν παραπάνω, ἀποτελοῦν ἰδανικὰς ὁρικὰς περιπτώσεις. Εἰς τὴν πραγματικότητα τὰ συγκρουόμενα σώματα ἔχουν ἐνδιαμέσους ἰδιότητας, προσεγγίζουν δηλαδὴ περισσότερον ἢ ὀλιγώτερον πρὸς τὴν μίαν ἢ τὴν ἄλλην περίπτωσιν.



Σχ. 74

Ἡ συσκευὴ ποὺ παριστάνει τὸ σχ. 74 χρησιμεύει διὰ πειραματικὴν ἐπαλήθευσιν τῶν νόμων τῆς κρούσεως. Μετὰ τὴν ἐπιλογὴν τῶν σφαιρῶν (ποὺ κρέμονται κατὰ τρόπον ὥστε νὰ συγκρούωνται κεντρικῶς) τόσον ὡς πρὸς τὰς μάζας των m_1, m_2 ὅσον καὶ ὡς πρὸς τὴν ἐλαστικότητα ἢ πλαστικότητα αὐτῶν, μποροῦμε νὰ κανονίζωμεν καὶ τὰς ταχύτητας v_1 καὶ v_2 συγκρούσεως, ἀφήνοντες αὐτὰς νὰ καταπίπτουν ἀπὸ μεγαλυτέρας ἢ μικροτέρας ἐκτροπῆς πρὸς τὰ πλάγια.

Προβλήματα

64. Μὲ πόσην δύναμιν ὠθεῖται πρὸς τὰ ὀπίσω («κλωτσάει») πυροβόλον, τὸ ὁποῖον μὲ ἐπενέργειαν διαρκείας 0,1 sec τῆς ἐκρηκτικῆς δυνάμεως ἐκπέμπει βλῆμα βάρους 500 gr* μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 750 m/s ; (Ἀπ. $500.750.10^2/0,1$ dyn).

65. Μὲ ποίαν ταχύτητα ὀπισθοχωρεῖ πυροβόλον βάρους 1000 kp τὴν στιγμὴν ποὺ ἐκπέμπει βλῆμα βάρους 5 kp μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 800 m/s ; (Ἀπ. 4 m/s)

ΙΟΥΝΙΟΣ 1965 → 66. Δύναμις 50 kp ἐνεργεῖ εἰς κινούμενον σῶμα ἐπὶ 12 sec καὶ ἐπιφέρει αὔξησιν τῆς ταχύτητός του ἀπὸ 15 m/sec εἰς 75 m/sec. Πόση εἶναι ἡ μᾶζα τοῦ σώματος ; (Ἀπ. $50.9{,}81.10^5.12/(75-15)\ 10^3$ gr).

67. Εἰς σάκκον πλήρη ἄμμου, μάζης 20 kg, κρεμασμένον ἀπὸ ὁριζόντιον ἄξονα, περὶ τὸν ὁποῖον μπορεῖ νὰ αἰωρῆται, ἐνσφηνώνομεν μὲ πυροβολισμὸν ὅπλου βλῆμα μάζης 30 gr. Λόγω τούτου ὁ σάκκος ἐκτρέπεται

ἀπὸ τὴν θέσιν ἠρεμίας μέχρις ἀνυψώσεως 10 cm. Πόση ἦτο ἡ ταχύτης τοῦ ἐνσφηνωθέντος εἰς τὸν σάκκον βλήματος; ['Απ. $20.10^3.\sqrt{2.981.10} = 30.(\upsilon - \sqrt{2.981.10})$, ὁπόθεν εὑρίσκεται ἡ ζητουμένη τιμὴ τῆς υ].

68. Πόση εἶναι ἡ κεντρομόλος δύναμις ποὺ πρέπει νὰ ἐνεργῇ εἰς σφαῖραν μολύβδου μάζης 109 gr, δεμένην εἰς τὸ ἄκρον νήματος μήκους 50 cm, διὰ νὰ τὴν ἀναγκάζῃ νὰ περιφέρεται περὶ τὸ ἄλλο ἄκρον τοῦ νήματος μὲ ἐπιτρόχιον ταχύτητα 300 cm/sec; ('Απ. $\sim$ 200 gr*).

69. Εἰς τὸ ἄκρον νήματος μήκους 1,2 m κρέμεται σῶμα μάζης 220 gr, τὸ ὁποῖον εἰς τὴν θέσιν ἠρεμίας ἀπέχει 3 m ἀπὸ τὸ ἔδαφος. Τὸ σῶμα τοῦτο μπορεῖ νὰ αἰωρῆται περὶ τὸ ἄλλο ἄκρον τοῦ νήματος ὡς ἐκκρεμές. Ἐκτρέπομεν τὸ ἐκκρεμὲς τοῦτο ἀπὸ τὴν θέσιν τῆς ἠρεμίας κατὰ γωνίαν 4° καὶ τὸ ἀφήνομεν ἐλεύθερον νὰ κάνῃ αἰωρήσεις. Ζητεῖται α) ποίαν γραμμικὴν ταχύτητα ἔχει καὶ β) μὲ πόσην δύναμιν τεντώνεται τὸ νῆμα τὴν στιγμὴν ποὺ διέρχεται διὰ τῆς θέσεως ἠρεμίας, γ) ἂν κατὰ τὴν στιγμὴν αὐτὴν κοπῇ τὸ νῆμα μετὰ πόσον χρόνον καὶ δ) εἰς ποίαν ὁριζοντίαν ἀπόστασιν θὰ προσκρούσῃ τὸ σῶμα ἐπὶ τοῦ τοῦ ἐδάφους; ['Απ. α) $981\sqrt{2.1{,}2.10^2(1-\text{συν}4^0)/981} = \sqrt{2.120.981(1-\text{συν}4^0)}$ cm/sec, β) $220.981+220.2.120.981(1-\text{συν}4^0)/120 = 220.981 + 220.2.981(1-\text{συν}4_0) = 220.981[1+2(1-\text{συν}4^0)]$ dyn, γ) $\sqrt{2.3.10^2/981}$ sec καὶ δ) $\sqrt{2.120.981(1-\text{συν}4^0)}\,.\,\sqrt{2.300/981}$ cm].

70. Πόση εἶναι ἡ ἐπιτρόχιος καὶ πόση ἡ γραμμικὴ ταχύτης σημείου τοῦ Ἰσημερινοῦ λόγῳ τῆς περιστροφῆς τῆς Γῆς περὶ τὸν ἄξονά της, δεδομένου ὅτι τὸ μῆκος τῆς διατρεχομένης περιφερείας εἶναι 5400 μίλια (1 μίλιον=7420 m) καὶ ὁ χρόνος τῆς περιστροφῆς ἀνέρχεται εἰς 86164 sec; ('Απ. $\sim$465 m/sec^{-1} καὶ 0,0000729 sec^{-1}).

71. Πόση εἶναι ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις σημείου τοῦ Ἰσημερινοῦ τῆς Γῆς, δεδομένου ὅτι ἡ ἀκτὶς τῆς Γῆς εἰς τὸν τόπον τοῦτον εἶναι 6377,398 km καὶ ὁ χρόνος περιστροφῆς T=86164 sec; ('Απ. 0,0339 m/s).

72. Βάσει ἀκριβεστέρων μετρήσεων εὑρέθη, ὅτι ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος g_φ εἰς τόπον γεωγραφικοῦ πλάτους φ συνδέεται μὲ τὴν ἐπιτάχυνσιν τῆς βαρύτητος $g_0=9{,}7806\ \text{m/sec}^2$ εἰς τόπον τοῦ Ἰσημερινοῦ διὰ τῆς σχέσεως: $g_\varphi = g_0(1+0{,}0052\ \text{ημ}^2\varphi)$. Πόση εἶναι κατὰ τὸν τύπον αὐτὸν ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος εἰς τὸν τόπον μας; ['Απ. $9{,}7806(1+0{,}0052\text{ημ}^2 38^0)$].

— 73. Πόσον ταχύτερον ἔπρεπε νὰ στρέφεται ἡ Γῆ περὶ τὸν ἄξονά της διὰ νὰ ἐξουδετερώνεται τὸ βάρος σώματος εἰς τὸν Ἰσημερινόν; ('Απ. Θὰ ἔπρεπε, κατὰ τὸ ἐξαγόμενον τοῦ προβλήματος 71, νὰ εἶναι: $\upsilon^2/R : \upsilon'^2/R = 9{,}78 : 0{,}0339$, ἤτοι $\upsilon' = 17\upsilon$).

74. Μὲ ποίαν ταχύτητα υ' πρέπει νὰ βληθῇ ὁριζοντίως σῶμα παρὰ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς Γῆς διὰ νὰ μὴ καταπίπτῃ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους; ('Απ. Προκειμένου περὶ τόπου τοῦ Ἰσημερινοῦ, ὅπου υ=465 m/sec, πρέπει νὰ εἶναι: υ' = =465.17 m/sec).

75. Σιδηροδρομικὸν ὄχημα κινεῖται ἐπὶ τροχιᾶς πλάτους 1,5 m· τὸ κ.β. τοῦ ὀχήματος κεῖται 1,2 m ὑψηλότερον τῆς ἐπιφανείας τῆς σιδηροτροχιᾶς. Πόση μπορεῖ νὰ εἶναι ἡ μεγίστη ταχύτης, μὲ τὴν ὁποίαν διατρέχει τὸ ὄχημα καμπύλην 72 m, χωρὶς νὰ ἐκτροχιασθῇ; ('Απ. $\sqrt{9{,}81.1{,}5.72/2.1{,}2}$ m/s).

76. Ποία εἶναι ἡ περίοδος ἐκκρεμοῦς, μήκους 1 m, εἰς τόπον ὅπου $g=9{,}808\ \text{m/s}^2$; ('Απ. 1,0035 sec).

77. Σύμφωνα μὲ πείραμα ποὺ ἔκανε ὁ Foucault τὸ 1851, τὸ ἐπίπεδον αἰωρήσεως τοῦ ἐκκρεμοῦς φαίνεται νὰ στρέφεται περὶ τὴν κατακόρυφον (εἰς τὴν πραγματικότητα τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὴν περιστροφὴν τῆς Γῆς) κατὰ γω-

νίαν α, ἡ ὁποία εἰς 24 ὥρας παρέχεται ἀντιστοίχως πρὸς τὸ γεωγραφικὸν
πλάτος φ τοῦ τόπου ἀπὸ τὸν τύπον : α=2π ημφ. Πόσον χρόνον χρειάζεται
τὸ ἐπίπεδον τοῦ ἐκκρεμοῦς διὰ νὰ κάμη μίαν πλήρη περιστροφὴν εἰς τό-
πον γεωγραφικοῦ πλάτους 52° 30′ 17″; ('Απ. 30,25 h).

78. Πόση εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος εἰς τὸν Ἰσημερινόν, ἂν
εἰς αὐτὸν τὸ μῆκος ἐκκρεμοῦς, ποὺ ἔχει περίοδον 1 sec, εἶναι ἴσον μὲ
99,103 cm ; ('Απ. 978,1 cm/sec²)

79. Εἰς πλάτος 30° τὸ ἐκκρεμὲς δευτερολέπτων ἔχει παρὰ τὴν ἐπιφά-
νειαν τῆς θαλάσσης μῆκος l=992,29 mm. Πόσον μῆκος ἔχει ὅταν εἰς τὸν τό-
πον τοῦ αὐτοῦ πλάτους ἀνυψωθῶμεν 1,5 km ὑπὲρ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θα-
λάσσης; (Δίδεται ὅτι ἡ ἀκτὶς τῆς Γῆς εἰς τὸ πλάτος τοῦτο εἶναι R=6370 km).
('Απ. Ἂν ληφθῆ ὑπ' ὄψιν ὅτι μεταξὺ τῆς ἐπιταχύνσεως τῆς βαρύτητος παρὰ
τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης g_0 καὶ τῆς g_h εἰς τὸ ὕψος h ὑφίσταται ἡ σχέ-
σις $g_h = g_0(1-2h/R)$ εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ζητούμενον μῆκος θὰ εἶναι 991,84 mm).

80. Πόσον θὰ μένη πίσω εἰς μίαν ἡμέραν ὡρολόγιον μὲ ἐκκρεμὲς δευ-
τερολέπτων, τὸ ὁποῖον εἶναι ρυθμισμένον εἰς τόπον, ὅπου g=981,21 cm/sec²,
ἂν τοῦτο μεταφερθῆ εἰς τὸν Ἰσημερινόν, ὅπου g_0=978,1 m/sec² ; ('Απ. Τὸ
ἐκκρεμὲς εἰς τὸν Ἰσημερινὸν θὰ κάνη ἀνὰ 24ωρον $86400\sqrt{978,1:981,21}$ αἰωρή-
σεις, ἤτοι 138 ὀλιγωτέρας, ἄρα μένει πίσω 2 min καὶ 18 sec).

81. Εἰς πόσον ὕψος θὰ φθάση σῶμα, τὸ ὁποῖον βάλλεται κατακορύ-
φως πρὸς τὰ ἄνω μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 500 m/sec, ἂν δὲν ληφθῆ ὑπ' ὄψιν
ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος ; ('Απ. 12,5 km).

82. Εἰς ποίαν θέσιν θὰ φθάση καὶ ποίαν ταχύτητα θὰ ἔχη μετὰ 5 sec
βλῆμα, τὸ ὁποῖον βάλλεται ὑπὸ γωνίαν ἀνυψώσεως 10° μὲ ἀρχικὴν ταχύτη-
τα 800 m/s ; ('Απ. $s_x = 3939$ m, $s_y = 570$ m, υ = 793 m/s).

83. Λίθος, ποὺ ἐκσφενδονίζεται ἀπὸ βλητικὸν μηχάνημα, φθάνει εἰς μέ-
γιστον ὕψος Y=40 m καὶ ἐμβέλειαν X=190 m. Ὑπὸ ποίαν γωνίαν ἀνυψώσεως
καὶ μὲ ποίαν ἀρχικὴν ταχύτητα ἐβλήθη ὁ λίθος ; ('Απ. εφα=4Y:X ὅθεν
α=40° 6′ 5″ καὶ $υ_0^2$=gX : ημ2α, ὅθεν $υ_0$=43,49 m/s).

84. Εἰς τόπον κείμενον 180 m ὑψηλότερον τοῦ ἐδάφους ἐκτοξεύεται
ὁριζοντίως σφαῖρα μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα $υ_0$=540 m/sec . Μὲ ποίαν ταχύτη-
τα υ καὶ εἰς ποίαν ὁριζοντίαν ἀπόστασιν x (ἐμβέλειαν) προσκρούει αὕτη
ἐπὶ τοῦ ἐδάφους ; ('Απ. $υ=\sqrt{540+2.9,81.180} = 543,3$ m/s καὶ $x=540\sqrt{2.180:9,81}$)

85. Σῶμα πλαστικὸν μάζης 20 gr κινεῖται μὲ ταχύτητα 800 cm/s καὶ
προσκρούει ἐπὶ σώματος ἐπίσης μὴ ἐλαστικοῦ μάζης 80 gr, τὸ ὁποῖον κινεῖ-
ται κατὰ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν καὶ φορὰν μὲ ταχύτητα 500 cm/s. Μὲ ποίαν
κοινὴν ταχύτητα θὰ συνεχισθῆ ἡ κίνησις τῶν δύο σωμάτων ; ('Απ. 560 cm/s).

86. Ἂν τὰ ρηθέντα σώματα κινοῦνται κατ' ἀντιθέτους φοράς, ποία
θὰ εἶναι ἡ κοινὴ ταχύτης των μετὰ τὴν σύγκρουσιν ; ('Απ. 240 cm/s).

87. Σφαῖρα ἐλαστική, μάζης 30 gr, κινεῖται μὲ ταχύτητα 200 cm/sec
καὶ προσκρούει κεντρικῶς ἐπὶ ἄλλης, μάζης 40 gr, ἡ ὁποία κινεῖται κατὰ
τὴν αὐτὴν φορὰν μὲ ταχύτητα 120 cm/s. Μὲ ποίας ταχύτητας θὰ κινηθοῦν
αἱ σφαῖραι μετὰ τὴν σύγκρουσιν ; ('Απ. 108,57 καὶ 188,57 cm/s).

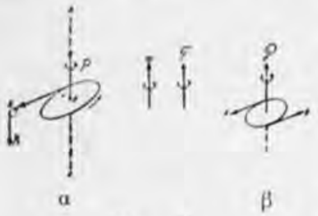
88. Ἂν εἰς τὸ προηγηθὲν πρόβλημα ἡ δευτέρα σφαῖρα ἔχει μᾶζαν
105 gr καὶ ταχύτητα 20 cm/s, ποῖαι θὰ εἶναι αἱ ταχύτητες μετὰ τὴν σύγ-
κρουσιν ; ('Απ. −80 cm/s καὶ 100 cm/s, ἤτοι ἡ πρώτη θὰ κινηθῆ ἀντιθέτως).

89. Δύο ἐλαστικαὶ σφαῖραι, ποὺ ἔχουν μάζας m_1=10 kg καὶ m_2=16 kg,
κινοῦνται ἡ μία πρὸς τὴν ἄλλην καὶ συγκρούονται κεντρικῶς μὲ ταχύτητας
$υ_1$=4,5 m/s καὶ $υ_2$=−2,5 m/s. Ποίας ταχύτητας θὰ λάβουν αἱ σφαῖραι μετὰ

τὴν σύγκρουσιν; (Ἀπ. $c_1 = -4{,}12$ m/s καὶ $c_2 = 2{,}885$ m/s).

90. Σφαῖρα ἐλαστική, ποὺ κινεῖται μὲ ταχύτητα $υ_1 = 2$ m/s, προσκρούει κεντρικῶς ἐπὶ ἄλλης ἴσης καὶ ὁμοίας της, ἡ ὁποία ἠρεμεῖ ($υ_2 = 0$). Ποῖαι αἱ ταχύτητες τῶν σφαιρῶν μετὰ τὴν σύγκρουσιν; (Ἀπ. $c_1 = 0$ καὶ $c_2 = 2$ m/s).

§ 34. Περιστροφὴ ἀδιασπάστων στερεῶν. *α) Γωνιακὴ ἐπιτάχυνσις.* Εἰς κυκλικὸν δίσκον, ποὺ μπορεῖ νὰ στρέφεται περὶ ἄξονα ΑΑ κάθετον ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ δίσκου εἰς τὸ κέντρον Ο αὐτῆς, ἐφαρμόζομεν τὴν δύναμιν k (σχ. 75α) μὲ νῆμα ποὺ ἔχει τυλιχθῆ εἰς τὴν περιφέρειαν τοῦ δίσκου καὶ σύρεται ἀπὸ τὸ ἐλεύθερον ἄκρον του διὰ τῆς αὔλακος παγίας τροχαλίας. Τὸ στροφικὸν ἀποτέλεσμα, ποὺ ἐπιβάλλεται ἔτσι εἰς τὸν δίσκον, δὲν ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὴν ἔντασιν τῆς δυνάμεως Κ, ἀλλὰ καὶ ἀπὸ τὸν βραχίονά της r, δηλαδὴ καὶ ἀπὸ τὴν ἀπόστασιν τῆς γραμμῆς ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως ἀπὸ τὸν ἄξονα (εἰς τὴν περίπτωσίν μας τὴν ἀκτῖνα τοῦ δίσκου). Εἶναι λοιπὸν τὸ θεωρούμενον στροφικὸν ἀποτέλεσμα ἀνάλογον τῆς ***ῥοπῆς περιστροφῆς*** τῆς δυνάμεως Κ, ἤτοι τοῦ μεγέθους $P = K\,r$ (§ 23). Ἂν ἡ περιστροφὴ τοῦ δίσκου ἐπιβάλλεται ἀπὸ ζεῦγος δυνάμεων (σχ. 75β), τὸ μέτρον τοῦ στροφικοῦ ἀποτελέσματος θὰ παρέχεται ἀπὸ τὴν ῥοπὴν τοῦ ζεύγους. Ἡ ῥοπὴ περιστροφῆς P εἰς κάθε περίπτωσιν εἶναι ἀνυσματικὸν μέγεθος καὶ παριστάνεται ἀπὸ εὐθύγραμμον τμῆμα κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ποὺ ὁρίζει ἡ γραμμὴ ἐφαρμογῆς καὶ ὁ βραχίων αὐτῆς. Ἡ φορὰ τοῦ ἀνύσματος τῆς ῥοπῆς περιστροφῆς σημειώνεται πρὸς σημεῖον, ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἡ στροφὴ φαίνεται νὰ γίνεται ἀντιθέτως πρὸς τὴν στροφὴν δεικτῶν ὡρολογίου. Κατὰ τὴν περιστροφὴν τοῦ δίσκου εἰς κάθε χρονικὴν στιγμὴν ὅλα τὰ σημεῖα του ἔχουν τὴν αὐτὴν γωνιακὴν ταχύτητα ω ($= Δφ/Δt$), ἐνῶ ἡ γραμμικὴ (ἐπιτρόχιος) ταχύτης υ($= ω.ρ$) ἔχει δι' ἕκαστον σημεῖον τοῦ περιστρεφομένου σώματος τιμὴν ἀνάλογον τῆς ἀποστάσεώς του ρ ἀπὸ τὸν ἄξονα καὶ ἑπομένως εἶναι γενικῶς διάφορος εἰς τὰ διάφορα σημεῖα τοῦ σώματος. Ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς ῥοπῆς περιστροφῆς τῆς δυνάμεως Κ, ἡ (***ἑνιαία καθ' ἑκάστην χρονικὴν στιγμὴν*** δι' ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ σώματος) γωνιακὴ ταχύτης μεταβάλλεται ἀπὸ στιγμῆς εἰς στιγμὴν καὶ συνεπῶς ἡ περιστροφὴ γίνεται μὲ ***γωνιακὴν ἐπιτάχυνσιν*** β ($= Δω/Δt$). Διὰ τὸν καθορισμὸν τῆς γωνιακῆς ἐπιταχύνσεως ὁρίζομεν αὐτὴν μὲ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τῆς μεταβολῆς τῆς γωνιακῆς ταχύτητος Δω διὰ τοῦ χρόνου Δt, εἰς τὸν ὁποῖον γίνεται αὕτη, τ.ἔ. μὲ τὴν μεταβολὴν ποὺ ὑφίσταται ἡ γωνιακὴ ταχύτης εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρό-



Σχ. 75

νου (1 sec), ὅταν ἐπὶ τοῦ σώματος ἐνεργῇ συνεχῶς δύναμις μὲ σταθερὰν ροπὴν περιστροφῆς. Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν αὐτὸν προκύπτει, ὅτι ἡ γωνιακὴ ἐπιτάχυνσις εἶναι ἀνυσματικὸν μέγεθος μὲ διαστάσεις 0, 0, −2 καὶ ἐκφράζεται εἰς μονάδας γωνίας ἐπὶ sec^{-2}. Γενικώτερα ἡ γωνιακὴ ἐπιτάχυνσις β παρέχεται ἀπὸ τὸ πηλίκον $\Delta\omega/\Delta t$ διὰ $\Delta t \to 0$, ὁπότε $\Delta t = dt$. Εἶναι λοιπόν: $\beta = \Delta\omega/\Delta t \to 0 = d\omega/dt$ (43)

β) Κινητικὴ ἐνέργεια περιστρεφομένου σώματος. Προκειμένου νὰ καθορισθῇ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια περιστρεφομένου σώματος, λαμβάνομεν τὸ ἄθροισμα τῶν κινητικῶν ἐνεργειῶν ὅλων τῶν καθέκαστα ὑλικῶν σημείων ποὺ ἀποτελοῦν τὸ σῶμα. Ἂν εἶναι: $m_1, m_2, m_3, \ldots$ αἱ μᾶζαι τῶν καθέκαστα ὑλικῶν σημείων τοῦ σώματος, $r_1, r_2, r_3, \ldots$ αἱ ἀντίστοιχοι ἀποστάσεις των ἀπὸ τὸν ἄξονα περιστροφῆς καὶ $\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3, \ldots$ ἢ $r_1\omega, r_2\omega, r_3\omega, \ldots$ αἱ γραμμικαὶ ταχύτητες αὐτῶν, αἱ κινητικαί των ἐνέργειαι θὰ εἶναι ἀντιστοίχως: $\frac{1}{2}m_1r_1^2\omega^2$, $\frac{1}{2}m_2r_2^2\omega^2$, $\frac{1}{2}m_3r_3^2\omega^2 \ldots$ Ἔτσι ἡ κινητικὴ ἐνέργεια $E_{\sigma\tau\rho}$ στρεφομένου σώματος μάζης $M = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots$ θὰ εἶναι:

$$E_{\sigma\tau\rho} = \frac{1}{2}m_1r_1^2\omega^2 + \frac{1}{2}m_2r_2^2\omega^2 + \ldots = \frac{1}{2}\omega^2(m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \ldots) = \frac{1}{2}\omega^2\Sigma m_\iota r_\iota^2 \quad (44)$$

Ἂν τὸ περιστρεφόμενον σῶμα κυλίεται ἐπὶ ἐπιφανείας (ὅπως γίνεται εἰς τροχοὺς ὀχήματος), τότε πλὴν τῆς κινητικῆς ἐνεργείας τῆς στροφῆς $E_{\sigma\tau\rho}$, θὰ ἔχῃ καὶ τοιαύτην E_μ τῆς μετατοπίσεώς του μὲ ταχύτητα υ καὶ συνεπῶς ἴσην μὲ $\frac{1}{2}M\upsilon^2$. Εἰς τὴν περίπτωσιν λοιπὸν αὐτὴν ἡ ὁλικὴ κινητικὴ ἐνέργεια E_κ θὰ εἶναι:

$$E_\kappa = E_\mu + E_{\sigma\tau\rho} = \frac{1}{2}\upsilon^2M + \frac{1}{2}\omega^2\Sigma m_\iota r_\iota^2. \quad (44')$$

γ) Ροπὴ ἀδρανείας. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει, ὅτι ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τῆς περιστροφῆς καθορίζεται (κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὴν κινητικὴν ἐνέργειαν μετατοπίσεως) ἀπὸ τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ γινομένου τοῦ τετραγώνου τῆς γωνιακῆς ταχύτητος ἐπὶ τὸ ἄθροισμα $(\Sigma m_\iota r_\iota^2)$ τῶν γινομένων τῶν μαζῶν $(m_\iota = m_1, m_2, m_3)$ τῶν καθέκαστα ὑλικῶν σημείων τοῦ περιστρεφομένου σώματος ἐπὶ τὰ τετράγωνα τῶν ἀντιστοίχων ἀποστάσεών των $(r_\iota^2 = r_1^2, r_2^2, r_3^2 \ldots)$ ἀπὸ τὸν ἄξονα. Τὸ ἄθροισμα τοῦτο τὸ ὀνομάζομεν ***ῥοπὴν ἀδρανείας*** τοῦ σώματος ὡς πρὸς τὸν δοθέντα ἄξονα καὶ τὸ σημειώνομεν μὲ Θ. Εἶναι λοιπόν:

$$\Theta = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2 + \ldots = \Sigma m_\iota r_\iota^2 \quad (\text{διὰ } \iota = 1, 2, 3, \ldots) \quad (45)$$

καὶ μὲ τὴν εἰσαγωγὴν τοῦ μεγέθους εἰς τὴν (44): $E_{\sigma\tau\rho} = \frac{1}{2}\Theta\omega^2$ (45')

Ἡ ροπὴ ἀδρανείας κατὰ ταῦτα ἀντικαθιστᾷ τὴν μᾶζαν τοῦ σώματος, ὅπως ἡ γωνιακὴ ταχύτης εἰσάγεται ἀντὶ τῆς γραμμικῆς, ὅταν τὸ σῶμα κάνει περιστροφικὴν κίνησιν. Κατὰ τὸν ὁρισμόν της, ἡ ροπὴ ἀδρανείας ἔχει φυσικὰς διαστάσεις (2, 1, 0) καὶ ἐκφράζεται μὲ τὸ γινόμενον μονάδων μάζης (gr) ἐπὶ τὸ τετράγωνον μονάδων μήκους (cm^2).

δ) Σχέσις ἀξόνων καὶ ροπῆς ἀδρανείας. Ἡ ροπὴ ἀδρανείας σώματος δὲν εἶναι μία χαρακτηριστικὴ *σταθερὰ* τοῦ σώματος, ἀλλ' ἔχει διὰ τὸ αὐτὸ σῶμα διαφόρους τιμὰς ἀντιστοίχως πρὸς τὴν θέσιν ποὺ ἔχει εἰς τὸ σῶμα ὁ ἄξων. Ἂν ἐκ τῶν διαφόρων ἀξόνων θεωρήσωμεν μόνον ἐκείνους ποὺ διέρχονται διὰ τοῦ κ.β. τοῦ σώματος, εὑρίσκομεν μεταξὺ τούτων ἕνα, ὡς πρὸς τὸν ὁποῖον ἡ ροπὴ ἀδρανείας εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ὡς πρὸς ὁποιοδήποτε ἄλλον. Κάθετος πρὸς τὸν ἄξονα τοῦτον τῆς μεγίστης ροπῆς ἀδρανείας εἶναι ὁ ἄξων, ὡς πρὸς τὸν ὁποῖον ἡ ροπὴ ἀδρανείας τοῦ σώματος ἔχει ἐλαχίστην τιμήν· ἐκτὸς τῶν δύο τούτων ἀξόνων λαμβάνεται καὶ τρίτος κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν δύο προηγουμένων, ὡς πρὸς τὸν ὁποῖον ἡ ροπὴ ἀδρανείας ἔχει ἐνδιάμεσον τιμήν. Εἰς κάθε σῶμα οἱ τρεῖς αὐτοὶ ἄξονες ποὺ διέρχονται διὰ τοῦ κ.β. τοῦ σώματος, καλοῦνται *κύριοι ἄξονες ἀδρανείας*.

Προκειμένου περὶ τῆς ροπῆς ἀδρανείας Θ_d, ὡς πρὸς ἄξονα κείμενον εἰς ἀπόστασιν d ἀπὸ τὸ κ.β. τοῦ σώματος, ἀποδεικνύεται (κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Steiner) ὅτι εἶναι μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν ροπὴν ἀδρανείας Θ_κ τοῦ σώματος, ὡς πρὸς παράλληλον ἄξονα διερχόμενον διὰ τοῦ κ.β., κατὰ τὸ γινόμενον τῆς μάζης M τοῦ σώματος ἐπὶ τὸ τετράγωνον τῆς μεταξὺ τῶν δύο ἀξόνων ἀποστάσεως d. Εἶναι δηλαδή: $\Theta_d = \Theta_\kappa + M.d^2$. (46)

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου, ἐξετάζομεν τὴν ροπὴν ἀδρανείας σώματος ὡς πρὸς ἄξονα A ποὺ ἀπέχει ἀπὸ τὸ κ.β. τοῦ σώματος ἀπόστασιν d. Ἂν μὲ ἀρχὴν τὸ κ.β. τοῦ σώματος φέρομεν τοὺς ἄξονας ὀρθογωνίων συντεταγμένων X, Ψ ἔτσι, ποὺ ὁ X νὰ εἶναι παράλληλος τοῦ A καὶ ὁ Ψ νὰ ἔχῃ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἀποστάσεως d, ἤτοι νὰ συναντᾷ καθέτως τὸν ἄξονα A, τότε διὰ τυχὸν σημεῖον m τοῦ σώματος, ποὺ ἀπέχει r_A ἀπὸ τὸν ἄξονα A καὶ r_κ ἀπὸ τὸ κ.β., θὰ σχηματίζεται τρίγωνον μὲ πλευρὰς τὰς r_A, r_κ καὶ d καὶ γωνίαν α τὴν μεταξὺ r_κ καὶ d περικλειομένην. Ἔτσι θὰ εἶναι: $r_A^2 = r_\kappa^2 + d^2 - 2r_\kappa d\sigma\upsilon\nu\alpha$. Ἡ ροπὴ ἀδρανείας ὡς πρὸς τὸν ἄξονα A θὰ εἶναι:

$$\Theta_A = \Sigma m r_A^2 = \Sigma m\, r_\kappa^2 + \Sigma m d^2 - \Sigma 2 m r_\kappa d\sigma\upsilon\nu\alpha = \Sigma m r_\kappa^2 + d^2 \Sigma m - 2d\Sigma m r_\kappa \sigma\upsilon\nu\alpha$$

Ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ τριωνύμου αὐτοῦ εἶναι ἡ ροπὴ ἀδρανείας Θ_κ ὡς πρὸς ἄξονα παράλληλον τοῦ A διερχόμενον διὰ τοῦ κ.β., ὁ δεύτερος εἶναι γινόμενον τοῦ τετραγώνου τῆς ἀποστάσεως d τοῦ κ.β. ἀπὸ τὸν ἄξονα A ἐπὶ τὴν ὅλην μᾶζαν $\Sigma m = M$ τοῦ σώματος, ἐνῷ τὸ $\Sigma m r_\kappa \sigma\upsilon\nu\alpha = \Sigma m y = 0$, διότι εἶναι $\Sigma y = 0$, ἀφοῦ ὁ ἄξων Ψ περνάει διὰ τοῦ κ.β. Ἔτσι μένει: $\Theta_A = \Theta_\kappa + M.d^2$.

ε) Τιμαὶ ροπῆς ἀδρανείας. Ὁ ὑπολογισμὸς τῆς ροπῆς ἀδρανείας σώματος γίνεται μὲ κανόνας τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ καὶ παρέχει δι' ὁμοιομερῆ σώματα, ποὺ ἔχουν ἁπλοῦν γεωμετρικὸν σχῆμα, ὡρισμένας τιμάς, ὅπως: Διὰ σφαῖραν μάζης M ὡς πρὸς ἄξονα διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου της (δηλ. μίαν τῶν διαμέτρων της 2R) εἶναι: $\Theta_\kappa = 0{,}4.M.R^2$. Διὰ κύλινδρον, μάζης M, ἀκτῖνος τῆς κυκλικῆς του διατομῆς R καὶ ὕψους h, εἶναι: 1) ὡς πρὸς ἄξονα διερχόμενον διὰ τῶν κέντρων τῶν κυκλικῶν του βάσεων: $\Theta_\kappa = 0{,}5MR^2$ καὶ 2) ὡς πρὸς ἄξονα κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας ποὺ ἑνώνει τὰ κέντρα τῶν δύο κυκλικῶν του βάσεων: $\Theta_\kappa = M\left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right)$. Δι' ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ὡς πρὸς ἄξονα κάθετον ἐπὶ ἕδρας αὐτοῦ, ἀκμῶν A, B, εἰς τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων της: $\Theta_\kappa = M\,\frac{A^2+B^2}{12}$. Διὰ δακτύλιον μάζης M καὶ ἀκτίνων R_1 (ἐσωτερικῆς) καὶ R_2 (ἐξωτερικῆς)

$\Theta_\kappa = 0{,}5M(R_1^2+R_2^2)$. Διὰ λεπτὴν ράβδον μήκους L ὡς πρὸς ἄξονα κάθετον ἐπὶ τὴν ράβδον: 1) εἰς τὸ μέσον (κέντρον βάρους) αὐτῆς $\Theta_\kappa = {}^1/_{12}M . L^2$. 2) εἰς τὸ ἄκρον τῆς ράβδου (βλ. καὶ θεώρημα Steiner): $\Theta = \Theta_\kappa + L^2M/4 = {}^1/_3 ML^2$.

§ 35. **Θεμελιώδης σχέσις τῆς περιστροφικῆς κινήσεως.** Ἂν ἐπὶ τῆς μάζης m_κ (βλ. σχ. 71), ποὺ εἶναι ὑποχρεωμένη νὰ κινῆται γύρω ἀπὸ ἑλκτικὸν κέντρον εἰς ἀπόστασιν α ἀπὸ αὐτό, ἐνεργῇ συνεχῶς δύναμις Κ κατὰ τὴν ἑκάστοτε διεύθυνσιν τῆς τροχιᾶς, θὰ προσδίδῃ αὕτη εἰς τὴν μᾶζαν m γραμμικὴν ἐπιτάχυνσιν $\Delta\upsilon/\Delta t = \gamma = K/m$. Ἀπὸ τὴν γνωστὴν σχέσιν $\upsilon/\alpha = \omega$ μεταξὺ γραμμικῆς ταχύτητος υ καὶ γωνιακῆς τοιαύτης ω προκύπτει ὅτι ἡ γωνιακὴ ἐπιτάχυνσις $\beta = \Delta\omega/\Delta t$ θὰ εἶναι: $\beta = \Delta\upsilon/\alpha\,\Delta t = \gamma/\alpha = K/m.\alpha$, ὅθεν $K = m.\alpha.\beta$ καὶ $K.\alpha = m\alpha^2\beta$. Ἀλλὰ $K.\alpha$ παρέχει τὴν ροπὴν περιστροφῆς P τῆς δυνάμεως, ἐνῶ $m\alpha^2$ εἶναι ἡ ροπὴ ἀδρανείας Θ τῆς μάζης m. Ἐπομένως εἶναι:

$$P = \Theta.\beta = \Theta(d\omega/dt) \qquad (47)$$

Ὥστε: ***Ἡ ροπὴ περιστροφῆς δυνάμεως, ποὺ ἐνεργεῖ ἐπὶ σώματος στρεφομένου περὶ ἄξονα, εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τῆς ροπῆς ἀδρανείας τοῦ σώματος ὡς πρὸς τὸν θεωρούμενον ἄξονα ἐπὶ τὴν γωνιακὴν ἐπιτάχυνσιν τῆς περιστροφικῆς κινήσεως.***

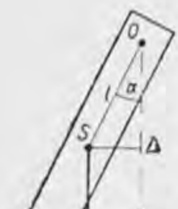
Ἡ σχέσις αὐτὴ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν μεταξὺ δυνάμεως καὶ γραμμικῆς ἐπιταχύνσεως σχέσιν (βλέπ. ἐξίσ. 12) τῆς μεταφορικῆς κινήσεως. Ἔτσι εἰς τὴν περιστροφικὴν κίνησιν ἡ ροπὴ περιστροφῆς ἀντικαθιστᾷ τὴν δύναμιν, ἡ ροπὴ ἀδρανείας τὴν μᾶζαν καὶ ἡ γωνιακὴ ἐπιτάχυνσις τὴν γραμμικὴν τοιαύτην τῆς μεταφορικῆς κινήσεως. Ἡ ἀντιστοιχία ἐπεκτείνεται εἰς ὅλα τὰ χαρακτηριστικὰ μεγέθη τῶν κινήσεων, εἰς βαθμὸν ὥστε νὰ μποροῦν νὰ συναχθοῦν σχέσεις με-

Πίναξ ἀντιστοίχων μεγεθῶν
Μεταφορικῆς κινήσεως καὶ Περιστροφικῆς

Διάστημα	s	—	Γωνία	α ἢ φ
Γραμμικὴ Ταχύτης	c ἢ υ	—	Γωνιακὴ ταχύτης	ω
» Ἐπιτάχυνσις	γ	—	» ἐπιτάχυνσις	$\beta = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$
Μᾶζα	m	—	Ροπὴ ἀδρανείας	Θ
Δύναμις	$K=m.\gamma$	—	Ροπὴ περιστροφῆς	$P=\Theta.\beta$
Γραμμικὸν Κατευθυντήριον μέγεθος	$D = \frac{K}{x}$	—	Γων. κατευθυντήριον μέγεθος	$D^* = \frac{P}{\alpha}$
Περίοδος γραμμικῆς ταλαντώσεως	$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$	—	Περίοδος κυκλικῆς ταλαντώσεως	$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{D^*}}$
Κινητικὴ ἐνέργεια μεταφορικῆς κινήσεως	$W_\mu = \frac{1}{2}m\upsilon^2$	—	Κινητικὴ ἐνέργεια περιστροφῆς	$W_{\sigma\tau\rho} = \frac{1}{2}\Theta\omega^2$
Ἐπιφορὰ ἢ ὁρμὴ μεταφορικῆς κινήσεως	$B=m.\upsilon$	—	Ἐπιφορὰ περιστροφῆς ἢ στροφορμὴ	$\Gamma=\Theta.\omega$
Δύναμις	$K=\Delta B/\Delta t$	—	Ροπὴ περιστροφῆς	$P=\Delta\Gamma/\Delta t$

ταξὺ μεγεθῶν περιστροφικῆς κινήσεως κατ' ἀναλογίαν ὁμοίων, ποὺ ἰσχύουν μεταξὺ μεγεθῶν μεταφορικῆς κινήσεως. Τοῦτο καταφαίνεται εἰς τὸν παρατιθέμενον πίνακα. Ἡ ἀναλογία μεταξὺ μεταφορικῆς καὶ περιστροφικῆς κινήσεως ἐκδηλώνεται καὶ εἰς τὴν ἐπίδρασιν, ποὺ ἔχει ἡ ***διεύθυνσις*** τῆς δυνάμεως K καὶ ἀντιστοίχως τῆς ροπῆς περιστροφῆς P, εἰς τὸ ἐπιφερόμενον ἀποτέλεσμα. Ἔτσι εἰς τὴν περίπτωσιν ποὺ ἡ δύναμις ἔχει διεύθυνσιν παράλληλον πρὸς τὴν ταχύτητα τῆς μεταφορικῆς κινήσεως, προσδίδεται μόνον ἐπιτρόχιος ἐπιτάχυνσις, ὅπως συμβαίνει π.χ. εἰς τὴν ἐλευθέραν πτῶσιν σώματος. Κατ' ἀναλογίαν, ὅταν ἡ ροπὴ περιστροφῆς ἔχει τὴν φορὰν τῆς γωνιακῆς ταχύτητος, ὅπως γίνεται εἰς τὸν δίσκον τοῦ σχ. 75, ἡ περιστροφὴ γίνεται μὲ γωνιακὴν ἐπιτάχυνσιν. — Ἂν ὅμως ἡ δύναμις ἔχῃ διεύθυνσιν κάθετον πρὸς τὴν ταχύτητα τοῦ κινουμένου σώματος, ἐπιβάλλεται μόνον ἀκτινικὴ ἐπιτάχυνσις (ἤτοι μεταβολὴ μόνον τῆς διευθύνσεως τῆς ταχύτητος), ὅπως γίνεται εἰς τὴν κυκλικὴν κίνησιν. Κατ' ἀναλογίαν, ὅταν ἡ ροπὴ περιστροφῆς εἶναι κάθετος πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς γωνιακῆς ταχύτητος, ὅπως γίνεται εἰς τὴν περιστροφὴν σβούρας (πρβλ. § 38), ἐπιφέρεται μεταβολὴ μόνον τῆς διευθύνσεως τοῦ ἄξονος περιστροφῆς.

§ 36. **Φυσικὸν ἐκκρεμές.** α) Φυσικὸν ἐκκρεμὲς ἀποτελεῖ κάθε σῶμα ποὺ αἰωρεῖται περὶ ἄξονα κείμενον ὑψηλότερον τοῦ κ.β. του. Εἰς αὐτὸ αἱ αἰωρήσεις ὀφείλονται εἰς ροπὴν περιστροφῆς P τοῦ βάρους τοῦ σώματος ὡς πρὸς τὸν ἄξονα ἐξαρτήσεως αὐτοῦ. Ἂν εἶναι m ἡ μᾶζα τοῦ σώματος καὶ συνεπῶς mg τὸ βάρος αὐτοῦ, ἡ ροπὴ περιστροφῆς εἰς τυχοῦσαν θέσιν τοῦ αἰωρουμένου σώματος, ὅπου τὸ κ.β. S (σχ. 76) ἀπέχει SΔ ἀπὸ τὴν διὰ τοῦ ἄξονος O κατακόρυφον, θὰ εἶναι : $P = m\,g.(S\Delta)$. Ὅπως φαίνεται ἐκ τοῦ σχήματος, ἡ ἀπόστασις SΔ εἶναι ἴση μὲ lημα (ἂν l εἶναι ἡ ἀπόστασις SO μεταξὺ κ.β. καὶ ἄξονος καὶ α ἡ γωνία ἐκτροπῆς (τὸ ἄνοιγμα) τοῦ ἐκκρεμοῦς εἰς τὴν θεωρουμένην θέσιν)· ἔτσι ἡ ροπὴ περιστροφῆς θὰ εἶναι : $P = m\,g.l\,\eta\mu\alpha$ Διὰ γωνίας ἐκτροπῆς ποὺ δὲν ὑπερβαίνουν τὰς ὀλίγας μοίρας, μπορεῖ νὰ λαμβάνεται ημα = α μὲ μεγάλην προσέγγισιν καὶ τότε εἶναι : $P = m.g.l.\alpha$ καὶ $P/\alpha = m\,g.l$, ἤτοι : Ἡ ροπὴ περιστροφῆς ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν μονάδα τῆς γωνίας ἐκτροπῆς, ἤτοι τὸ πηλίκον P/α, εἶναι διὰ κάθε φυσικὸν ἐκκρεμὲς σταθερὸν μέγεθος, χαρακτηριστικὸν τοῦ ἐκκρεμοῦς τούτου, ἀκριβῶς ὅπως εἰς τὸ ἁπλοῦν ἐκκρεμές, εἶναι τὸ μέγεθος $D = K/x$, τὸ ὁποῖον ὠνομάσαμεν ***κατευθύνουσαν ἱκανότητα*** τοῦ ἐκκρεμοῦς. Κατ' ἀναλογίαν λοιπὸν



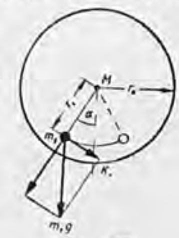
Σχ. 76

εἰς τὸ φυσικὸν ἐκκρεμὲς ἡ ***κατευθύνουσα ἱκανότης*** (κατευθυντήριος ῥοπὴ) θὰ εἶναι τὸ μέγεθος $D^* = P/\alpha = mgl$ (48)

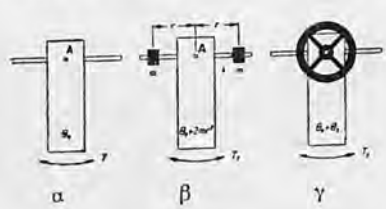
Μὲ τὸ μέγεθος τοῦτο καὶ τὸ μέγεθος τῆς ῥοπῆς ἀδρανείας Θ, ποὺ εἰς τὸ φυσικὸν ἐκκρεμὲς πρέπει νὰ ληφθῇ ἀντὶ τῆς μάζης τοῦ μαθηματικοῦ, καθορίζεται ἡ περίοδος T τῆς αἰωρήσεως κατ' ἀντιστοιχίαν πρὸς τὴν σχέσιν (37΄) μὲ τὴν σχέσιν:

$$T = 2\pi\sqrt{\Theta/D^*} = 2\pi\sqrt{\Theta/m.g.l} \qquad (49)$$

β) Διὰ τὴν πειραματικὴν ἐπαλήθευσιν τοῦ τύπου (49΄) λαμβάνομεν ὁμοιομερῆ κυκλικὸν δίσκον μάζης m καὶ ἀκτῖνος r_0 καὶ τὸν προσαρμόζομεν εἰς ὁριζόντιον ἀκλόνητον ἄξονα, ποὺ περνάει διὰ τοῦ κέντρου M (σχ. 77), ἔτσι ποὺ νὰ μπορῇ ὁ δίσκος νὰ στρέφεται περὶ τὸν ἄξονα τοῦτον ἐπὶ κατακορύφου ἐπιπέδου. Ἂν προσκολλήσωμεν ἐπὶ τοῦ δίσκου, εἰς ἀπόστασιν r_1 ἀπὸ τὸ κέντρον, σφαιρίδιον μάζης m_1 (ἀμελητέας ἐν συγκρίσει πρὸς τὴν μᾶζαν m τοῦ δίσκου), ὁ δίσκος μπορεῖ τότε νὰ κάνῃ αἰωρήσεις περὶ ὡρισμένην θέσιν ἠρεμίας, ἡ ὁποία εἶναι ἐκείνη, ὅπου τὸ σφαιρίδιον εὑρίσκεται κάτωθεν τοῦ κέντρου τοῦ δίσκου (ἤτοι τοῦ ἄξονος) ἐπὶ τῆς κατακορύφου, ποὺ περνάει ἀπὸ αὐτό. Διὰ μίαν μικρὰν γωνίαν ἐκτροπῆς α ἡ ῥοπὴ περιστροφῆς θὰ εἶναι: $P = m_1 g.r_1.\eta\mu\alpha \simeq m_1 g.r_1.\alpha$ καὶ συνεπῶς ἡ κατευθυντήριος ῥοπὴ



Σχ. 77



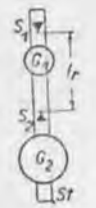
Σχ. 78

D^* μπορεῖ νὰ ὑπολογισθῇ ἀπὸ γνωστὰ μεγέθη σύμφωνα μὲ τὸν τύπον: $D^* = P/\alpha = m_1.g.r_1$. Ἐξ ἄλλου ἡ ῥοπὴ ἀδρανείας τοῦ αἰωρουμένου σώματος μπορεῖ νὰ ληφθῇ μὲ μεγάλην προσέγγισιν ἴσην μὲ τὴν ῥοπὴν ἀδρανείας τοῦ δίσκου $\Theta = {}^1/_2 mr_0^2$ (βλ. § 34, ε), ἀφοῦ ἡ πρόσθετος μᾶζα m_1 τοῦ σφαιριδίου εἶναι, ὅπως εἴπαμε, πολὺ μικρά. Ἔτσι ἡ περίοδος T τοῦ ἐκκρεμοῦς, ποὺ μποροῦμε νὰ προσδιορίσωμεν μετρῶντες τὰς αἰωρήσεις ποὺ γίνονται εἰς ὡρισμένον χρόνον, π.χ. εἰς 30 sec, πρέπει νὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν προκύπτουσαν ἀπὸ τὸν τύπον: $T = 2\pi\sqrt{\Theta : D^*} = 2\pi\sqrt{mr_0^2/2m_1 gr_1} = 2\pi r_0\sqrt{m/2m_1 gr_1}$, ἂν αὐτὸς εἶναι ἀκριβής.

γ) Ἀντιστρόφως ὁ τύπος τοῦ φυσικοῦ ἐκκρεμοῦς μπορεῖ νὰ μᾶς χρησιμεύσῃ διὰ τὸν πειραματικὸν προσδιορισμὸν τῆς ῥοπῆς ἀδρανείας σώματος ὡς πρὸς ἄξονα, περὶ τὸν ὁποῖον μπορεῖ νὰ αἰωρῆται. Πρὸς τοῦτο μετρῶμεν πρῶτον τὴν περίοδον T_0 τῆς αἰωρήσεως τοῦ σώματος περὶ τὸν ἄξονα A (σχ. 78α). Ἔπειτα προσηλώνομεν εἰς τὸ σῶμα ἑκατέρωθεν τοῦ ἄξονος εἰς ἴσας ἀπὸ αὐτὸν ἀποστάσεις r, r (σχ. 78β) τὰς ἴσας μάζας m, m καὶ μετρῶμεν πάλιν τὸν χρόνον T_1 τῆς αἰωρήσεως. Σύμφωνα μὲ τὸν τύπον τοῦ φυσικοῦ ἐκκρεμοῦς θὰ εἶναι: $T_0 = 2\pi\sqrt{\Theta : D^*}$ καὶ $T_1 = 2\pi\sqrt{(\Theta + 2mr^2) : D^*}$ καὶ $T_1^2 : T_0^2 = (\Theta + 2mr^2) : \Theta$ ὅθεν $\Theta = 2mr^2.T_0^2 : (T_1^2 - T_0^2)$.

Ἂν τώρα θέλομεν νὰ προσδιορίσωμεν τὴν ῥοπὴν ἀδρανείας Θ_x οἱουδήποτε ἄλλου σώματος ὡς πρὸς ἄξονα ποὺ διέρχεται διὰ τοῦ κ.β. τοῦ σώματος, προσαρμόζομεν τὸ σῶμα τοῦτο εἰς τὸ ὡς ἄνω φυσικὸν ἐκκρεμές, ἔτσι ποὺ ὁ ἄξων αἰωρήσεως νὰ εἶναι καὶ ἄξων, ὡς πρὸς τὸν ὁποῖον θέλομεν νὰ ἔχωμεν τὴν ῥοπὴν ἀδρανείας τοῦ σώματος (σχ.78γ). Ἂν τότε μετρήσωμεν τὸν χρόνον αἰωρήσεως T_2 θὰ εἶναι: $T_2 = 2\pi\sqrt{(\Theta + \Theta_x) : D^*}$ καὶ μὲ συσχετισμὸν πρὸς τὴν παραπάνω μετρηθεῖσαν περίοδον $T_0 = 2\pi\sqrt{\Theta : D^*}$ λαμβάνομεν: $\Theta_x = \Theta_0(T_2^2 - T_0^2) : T_0^2 = 2mr^2(T_2^2 - T_0^2) : (T_1^2 - T_0^2)$.

δ) *Ἀντιστρεπτὸν ἐκκρεμές.* Ἀπὸ τὴν σύγκρισιν τοῦ τύπου ποὺ παρέχει τὸν χρόνον αἰωρήσεως φυσικοῦ ἐκκρεμοῦς μὲ τὸν τοῦ μαθηματικοῦ, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ μαθηματικὸν ἐκκρεμές, ποὺ κάνει ἰσοχρόνους αἰωρήσεις πρὸς δοθὲν φυσικόν, θὰ ἔχῃ ὡρισμένον μῆκος $l=\Theta\, g/D^*$· τὸ μῆκος τοῦτο καλεῖται *ἀνηγμένον μῆκος* τοῦ φυσικοῦ ἐκκρεμοῦς. Εἶναι δηλαδὴ *τὸ ἀνηγμένον μῆκος δοθέντος φυσικοῦ ἐκκρεμοῦς τὸ μῆκος ποὺ πρέπει νὰ ἔχῃ μαθηματικὸν ἐκκρεμὲς διὰ νὰ κάνῃ αἰωρήσεις τῆς αὐτῆς περιόδου μὲ τὸ δοθέν.* Ἂν ἐπὶ φυσικοῦ ἐκκρεμοῦς λάβωμεν *δύο σημεῖα* ἑκατέρωθεν τοῦ κέντρου βάρους του, ὡς πρὸς τὰ ὁποῖα τὸ ἐκκρεμὲς τοῦτο ἐκτελεῖ αἰωρήσεις τῆς αὐτῆς περιόδου, ἂν ἐξαρτηθῇ περὶ ἄξονα διερχόμενον εἴτε διὰ τοῦ ἑνὸς εἴτε διὰ τοῦ ἄλλου τῶν σημείων τούτων, εὑρίσκομεν ὅτι τὰ σημεῖα αὐτὰ ἀπέχουν μεταξύ των ἴσον πρὸς τὸ ἀνηγμένον του μῆκος. Τὸ ἓν ἐκ τῶν δύο τούτων σημείων διὰ τοῦ ὁποίου διέρχεται ὁ ἄξων καλεῖται *κέντρον ἐξαρτήσεως* του ἐκκρεμοῦς, ἐνῷ τὸ ἄλλο λέγεται *κέντρον αἰωρήσεως* αὐτοῦ. Εἰς τὴν περίπτωσιν ποὺ καὶ τὰ δύο σημεῖα κεῖνται ἐπὶ τοῦ σώματος, ποὺ ἀποτελεῖ τὸ φυσικὸν ἐκκρεμές, μποροῦμε νὰ τὰ ἐναλλάσσωμεν καὶ διὰ τοῦτο τὸ φυσικὸν ἐκκρεμές, εἰς τὸ ὁποῖον ἔχουν καθορισθῆ τὰ δύο ὡς ἄνω σημεῖα, τὸ λέμε *ἀντιστρεπτὸν* ἐκκρεμές. Ἀντιστρεπτὸν ἐκκρεμμὲς εἶναι καὶ τὸ ὑπὸ τοῦ σχ. 79 παριστανόμενον, εἰς τὸ ὁποῖον ἐπὶ μιᾶς ῥάβδου ἔχουν στερεωθῆ δύο πρισματικαὶ ἀκμαὶ S_1 καὶ S_2, μὲ τὰς ὁποίας μπορεῖ νὰ στηριχθῇ ἐναλλὰξ ἐπὶ ἐπιπέδου ἐπιφανείας, ὥστε ἡ ὅλη ῥάβδος νὰ κάνῃ αἰωρήσεις ἐκκρεμοῦς. Κατὰ μῆκος τῆς ῥάβδου μποροῦν νὰ μετακινοῦνται φακοειδῆ σώματα G_1, G_2 κατὰ τρόπον ὥστε νὰ ἐπιτυγχάνεται θέσις, εἰς τὴν ὁποίαν ἔχομεν τὸν αὐτὸν χρόνον αἰωρήσεως, εἴτε περὶ τὴν μίαν ἀκμὴν αἰωρεῖται τὸ ἐκκρεμές, εἴτε περὶ τὴν ἄλλην. Τότε ἡ μεταξὺ τῶν δύο ἀκμῶν ἀπόστασις S_1S_2 εἶναι τὸ ἀνηγμένον μῆκος τοῦ φυσικοῦ τούτου ἐκκρεμοῦς καὶ ἡ περίοδός του θὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν τοῦ μαθηματικοῦ ἐκκρεμοῦς, ποὺ ἔχει μῆκος l_r ἴσον μὲ S_1S_2. Μποροῦμε λοιπὸν νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὸ ἐκκρεμὲς τοῦτο ἀντὶ μαθηματικοῦ πρὸς προσδιορισμὸν τῆς ἐπιταχύνσεως g, διότι ἐκ τοῦ τύπου $T=2\pi\sqrt{l/g}$ λαμβάνομεν : $g=4\pi^2 l_r : T^2$.



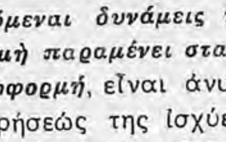
Σχ. 79

§ 37. Ἀρχὴ τῆς διατηρήσεως τῆς περιστροφικῆς ὁρμῆς. Ἐπὶ κυκλικῆς τραπέζης στηριζομένης ἐπὶ κατακορύφου ἄξονος, ὁ ὁποῖος διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου της, στέκεται ἄνθρωπος μὲ τεντωμένα πλαγίως τὰ χέρια καὶ κρατεῖ εἰς τὰς παλάμας του μεταλλικὰς σφαίρας διὰ νὰ εἶναι ἐναργέστερον τὸ φαινόμενον. Ἂν προσδώσωμεν εἰς τὴν τράπεζαν περιστροφικὴν κίνησιν γωνιακῆς ταχύτητος ω καὶ κατ' αὐτὴν συμπτύσσεται ὁ ἐπιβάτης (πλησιάζει τὰ χέρια του πρὸς τὸν κορμόν), παρατηροῦμεν ὅτι ἡ γωνιακὴ ταχύτης τῆς περιστροφῆς, ποὺ κάνει μαζὶ μὲ τὴν τράπεζαν, αὐξάνεται τόσον περισσότερον ὅσον μεγαλύτεραι εἶναι αἱ μᾶζαι ποὺ μὲ τὰς χεῖρας του πλησιάζει πρὸς τὸν ἄξονα περιστροφῆς. Ἂν ἐκτείνη πάλιν τὰς χεῖρας του, ἡ γωνιακὴ ταχύτης τῆς περιστροφῆς ἐλαττώνεται.

Τὸ φαινόμενον τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὸ ὅτι κατὰ τὴν περιστροφικὴν κίνησιν παραμένει σταθερὸν τὸ γινόμενον τῆς ροπῆς ἀδρανείας Θ τοῦ περιστρεφομένου σώματος ὡς πρὸς τὸν ἄξονα ἐπὶ τὴν γωνιακὴν ταχύτητα ω τῆς περιστροφῆς. Ἔτσι, ὅταν διὰ τῆς συμπτύξεως ἐλαττώνεται ἡ ροπὴ ἀδρανείας, πρέπει ἀντιστοίχως νὰ αὐξηθῆ ἡ γωνιακὴ ταχύτης καὶ ἀντιστρόφως.

Ὀνομάζομεν ***περιστροφικὴν ὁρμὴν ἢ ἐπιφορὰν*** τό : $\Gamma = \Theta . \omega$ (50) καὶ κατ' ἀντιστοιχίαν πρὸς τὴν ὁρμὴν ἢ ἐπιφορὰν $B = m.\upsilon$ (§ 28, ε) μεταφορικῆς κινήσεως ἰσχύει καὶ δι' αὐτὴν ἡ Ἀρχὴ τῆς διατηρήσεώς της, ἐφόσον τὸ σύστημα δὲν ὑφίσταται τὴν ἐπίδρασιν ἐξωτερικῆς ροπῆς περιστροφῆς. Ὥστε : ***Ἐφ' ὅσον δὲν ἐπιδροῦν ἐπὶ στρεπτοῦ σώματος ἢ συστήματος σωμάτων ἔξωθεν ἐπιβαλλόμεναι δυνάμεις ἢ ροπαὶ περιστροφῆς, ἡ περιστροφικὴ ἐπιφορὰ ἢ ὁρμὴ παραμένει σταθερά.*** Ἡ περιστροφικὴ ὁρμὴ ἢ (μονολεκτικῶς) ἡ ***στροφορμή***, εἶναι ἀνυσματικὸν μέγεθος καὶ συνεπῶς ἡ Ἀρχὴ διατηρήσεώς της ἰσχύει τόσον διὰ τὴν ἀριθμητικήν της τιμὴν ὅσον καὶ διὰ τὴν φορὰν αὐτῆς.

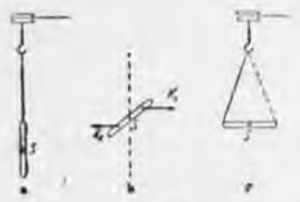
§ 38. **Ἐλεύθεροι ἄξονες.** α) Εἰς τὴν ἐξέτασιν περιστροφικῶν κινήσεων ποὺ ἐκάναμεν εἰς τὰ προηγούμενα ἐθεωρήσαμεν τοὺς ἄξονας περιστροφῆς στερεωμένους ἀμετακινήτως. Ἂν τώρα ἀφήσωμεν τὸν περιορισμὸν αὐτὸν καὶ θεωρήσωμεν τὴν ἐπίδρασιν ροπῆς περιστροφῆς, π.χ. ἑνὸς ζεύγους δυνάμεων, θὰ ἔχωμεν περιστροφὴν περὶ ἄξονα κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ ζεύγους καὶ μάλιστα εἰς τὸ κ.β. τοῦ περιστρεφομένου σώματος, σύμφωνα μὲ τὴν Ἀρχὴν διατηρήσεως αὐτοῦ (§ 22, δ). Εἰς τὴν Στατικὴν (Κεφ. IV) εἴδομεν ὅτι ὅλαι αἱ ὁποιαιδήποτε δυνάμεις, ποὺ ἐνεργοῦν εἰς σῶμα, μποροῦν νὰ ἀντικατασταθοῦν εἰς τὴν γενικωτέραν περίπτωσιν ἀπὸ μίαν μόνον συνισταμένην δύναμιν καὶ ἓν μόνον ζεῦγος δυνάμεων. Ἡ συνισταμένη δύναμις Κ (σχ. 80) θὰ ἔχη σημεῖον ἐφαρμογῆς ποὺ πιθανώτερον θὰ κεῖται ἐκτὸς τοῦ κ.β. τοῦ σώματος. Μποροῦμε ὅμως νὰ θεωρήσωμεν, χωρὶς τοῦτο νὰ ἔχη ἐπίδρασιν εἰς τὴν κατάστασιν τοῦ σώματος, ὅτι εἰς τὸ κ.β. S αὐτοῦ ἐνεργοῦν αἱ ἴσαι καὶ ἀντίθετοι δυνάμεις K_1, K_2 ποὺ ἔχουν καθεμία ἔντασιν ἴσην μὲ τὴν τῆς Κ καὶ γραμμὴν ἐφαρμογῆς παράλληλον πρὸς τὴν τῆς Κ. Ἔτσι ἡ ἐπίδρασις τῆς Κ ἐπὶ τοῦ σώματος εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν ἐπίδρασιν τῆς K_1 ποὺ ἐνεργεῖ εἰς τὸ κ.β. καὶ τοῦ ζεύγους K, K_2. Ἡ K_1 προκαλεῖ μετατόπισιν τοῦ κ.β. κατὰ τὴν φοράν της. Τὸ ζεῦγος δυνάμεων K, K_2 προσδίδει περιστροφὴν εἰς τὸ σῶμα, κατὰ τὴν ὁποίαν ὁ ἄξων πρέπει νὰ περνάη ἀπὸ τὸ κ.β., ἀφοῦ, κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς διατηρήσεώς του, πρέπει τοῦτο νὰ μένη ἀκίνητον, ἂν δὲν ὑπάρχη ἡ ἐκτὸς τοῦ ζεύγους δύναμις K_1. Ἐφόσον ὅμως ὑπάρχει καὶ ἡ K_1, τὸ σῶμα, πλὴν τῆς περιστροφῆς, θὰ κάνη καὶ μετα-



Σχ. 80

φορικὴν κίνησιν, κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ κ.β. S ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς K_1 κινεῖται, ὡς ἐὰν ἦτο ὅλη ἡ μᾶζα συγκεντρωμένη εἰς αὐτό.

Αἱ φυγοκεντρικαὶ δυνάμεις ποὺ ἀναφαίνονται κατὰ τὴν περιστροφὴν παρέχουν γενικῶς ροπὴν περιστροφῆς, ἡ ὁποία ὀνομάζεται *φυγοκεντρικὴ ροπή*. Ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν αὐτῆς τὸ σῶμα τείνει νὰ ἀνατραπῇ καὶ ὡς ἐκ τούτου ὁ ἄξων περιστροφῆς τοῦ σώματος ἀλλάζει διεύθυνσιν. Ἂν π.χ. θέσωμεν εἰς περιστροφὴν κυλινδρικὴν ράβδον, ποὺ εἶναι ἐξηρτημένη κατακορύφως ἀπὸ ἓν ἄκρον της (σχ. 81, α), αἱ ἀναφαινόμεναι φυγοκεντρικαὶ δυνάμεις ἰσορροποῦν, ἐφόσον ὁ ἄξων περιστροφῆς τῆς ράβδου εἶναι ἀκριβῶς κατακόρυφος. Μὲ τὴν παραμικρὰν ὅμως ταλάντευσιν περὶ τὴν κατακόρυφον αἱ συνιστάμεναι φυγοκεντρικαὶ δυνάμεις K_1, K_2 (σχ. 81, b) ἐξασκοῦν ροπὴν περιστροφῆς, ἡ ὁποία τείνει νὰ στρέψῃ τὴν ράβδον, ὥστε νὰ προσλάβῃ αὕτη ὁριζοντίαν θέσιν (σχ. 81, c). Ἔτσι ἡ θέσις πρὸς τὴν ὁποίαν φέρεται τὸ περιστρεφόμενον σῶμα εἶναι ἐκείνη, διὰ τὴν ὁποίαν ἔχει τοῦτο τὴν μεγίστην ροπὴν ἀδρανείας ὡς πρὸς τὸν ἄξονα περιστροφῆς. Ὥστε σῶμα ποὺ περιστρέφεται περὶ ἄξονα, ὡς πρὸς τὸν ὁποῖον ἡ ροπὴ ἀδρανείας τοῦ σώματος ἔχει τὴν μεγίστην τιμήν, διατηρεῖ εὐσταθῶς τὴν τοποθέτησίν του αὐτήν, διότι κάθε ἐκτροπὴ ἀπὸ αὐτὴν ἀναπτύσσει φυγοκεντρικὴν ροπὴν ἐπαναφορᾶς εἰς αὐτήν. Διὰ τοῦτο ὀνομάζομεν τὸν ἄξονα, ὡς πρὸς τὸν ὁποῖον τὸ σῶμα ἔχει τὴν μεγίστην ροπὴν ἀδρανείας ***εὐσταθῆ ἐλεύθερον ἄξονα***. Ἐλεύθερος ἐπίσης ἄξων εἶναι καὶ ἐκεῖνος, ὡς πρὸς τὸν ὁποῖον τὸ σῶμα ἔχει τὴν ἐλαχίστην ροπὴν ἀδρανείας· ἀλλὰ εἰς τὸν προσανατολισμὸν αὐτὸν τὸ σῶμα περιστρέφεται μὲ ***ἀσταθῆ ἰσορροπίαν***, διότι ἡ παραμικρὰ ἐκτροπὴ προκαλεῖ τὴν ἐμφάνισιν φυγοκεντρικῆς ροπῆς, ἡ ὁποία τὸ ἀπομακρύνει περισσότερον ἀπὸ τὸν προσανατολισμὸν αὐτόν.

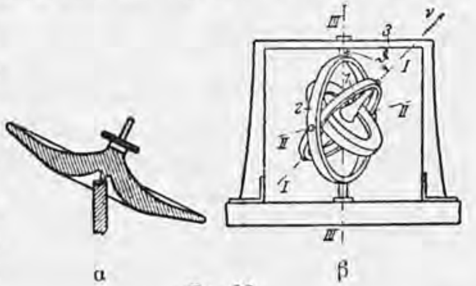


Σχ. 81

Ἄξονες τέλος ὡς πρὸς τοὺς ὁποίους ἡ ροπὴ ἀδρανείας ἔχει διαμέσους τιμὰς δὲν διατηροῦν τὰς διευθύνσεις των, ἀλλὰ κλυδωνίζονται. Ἂν π.χ. ρίψωμεν ἕνα κουτὶ σπίρτων, προσδίδοντάς του περιστροφὴν περὶ ἄξονα (διερχόμενον διὰ τοῦ κ.β. τοῦ κουτιοῦ) κάθετον ἐπὶ τὰς δύο μεγαλυτέρας παραλλήλους ἕδρας του, ὡς πρὸς τὸν ὁποῖον ἐπομένως ἔχομεν τὴν μεγίστην ροπὴν ἀδρανείας, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ σῶμα διατρέχει τὴν τροχιὰν τῆς βολῆς του περιστρεφόμενον εὐσταθῶς περὶ τὸν ἄξονα τοῦτον· ἂν ἡ ρίψις γίνῃ ἔτσι ὥστε τὸ κουτὶ νὰ στρέφεται περὶ ἄξονα κάθετον ἐπὶ τὰς δύο παραλλήλους μικροτέρας ἕδρας του, ὡς πρὸς τὸν ὁποῖον συνεπῶς ἔχομεν τὴν ἐλαχίστην ροπὴν ἀδρανείας τοῦ σώματος, ἐπιτυγχάνομεν πάλιν νὰ διατηρῆται ἡ διεύθυνσις τοῦ ἄξονος στροφῆς, ἀλλὰ τοῦτο μόνον ὑπὸ προφυλάξεις ἀπὸ ἐκτροπάς· εἰς τὴν περίπτωσιν ὅμως ποὺ ἡ περιστροφὴ τοῦ ριπτομένου σώματος γίνεται περὶ ἄξονα κάθετον ἐπὶ τὰς ἄλλας δύο παραλλήλους μέσου μεγέθους ἕδρας, βλέπομεν τὸ κουτὶ νὰ τρικλίζῃ.

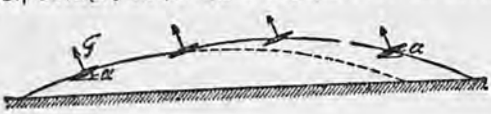
β) ***Στρόβος.*** Σῶμα ποὺ περιστρέφεται ἐλεύθερον ἢ στηριζόμενον ***μόνον*** εἰς ἓν σημεῖον του τὸ λέμε στρόβον. Ἡ περιστροφὴ τοῦ στρόβου γίνεται πάντοτε, σύμφωνα μὲ ὅσα εἴπαμε παραπάνω, περὶ ἄξονα, ὁ ὁποῖος περνάει ἀπὸ τὸ κ.β. του. Ὁ ἄξων ***συμμετρίας*** ἢ ἄξων ***μορφῆς*** τοῦ στρόβου εἶναι ἄξων, ὡς πρὸς τὸν ὁποῖον ἔχομεν τὴν μεγίστην τιμὴν ροπῆς ἀδρανείας τοῦ σώματος καὶ ἐπομένως εἶναι εὐσταθὴς ἐλεύθερος ἄξων. Τὸ γνωστὸν παιδικὸν παιγνίδι, ἡ σβούρα, εἶναι στρόβος. Διὰ νὰ ἐπιτύχωμεν νὰ διέρχεται ὁ ἄξων περιστροφῆς καθ' οἱασδήποτε ταλαντώσεις πάντοτε διὰ τοῦ κ.β. τοῦ σώματος ἢ προσδίδομεν εἰς τὸν στρόβον ὡρισμένην μορφὴν (σχ. 82α), τέτοιαν ποὺ τὸ κ.β. τοῦ σώματος νὰ εἶναι καὶ σημεῖον στηρίξεως ἢ στερεώνομεν τὸν ἄξονα περιστροφῆς του I (σχ. 82β) εἰς τὸν ἐσωτερικὸν δακτύλιον ἐξαρτήσεως

Cardano. ("Ετσι όνομάζεται συσκευή, πού άποτελεῖται άπό σταθερόν κατακόρυφον πλαίσιον 3, είς τό όποῖον στηρίζεται δακτύλιος 2 είς δύο ἄκρα μιᾶς διαμέτρου του, περὶ τὴν ὁποίαν μπορεῖ νὰ στρέφεται ὡς περὶ ἄξονα III ὁ δακτύλιος αὐτός. Εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ δακτυλίου 2 τοποθετεῖται ἄλλος δακτύλιος 1, στηριζόμενος εἰς τὰ ἄκρα διαμέτρου του II, *καθέτου* πρὸς τὸν ἄξονα III στροφῆς τοῦ ἐξωτερικοῦ δακτυλίου, εἰς τρόπον ὥστε νὰ μπορῇ νὰ γίνεται στροφὴ περὶ τὴν διάμετρόν του αὐτὴν ὡς περὶ ἄξονα II. Εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ δακτυλίου 1 καὶ κατὰ τὴν διεύθυνσιν διαμέτρου του, καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα II τῆς στροφῆς του, στηρίζεται ὁ ἄξων I περιστροφῆς τοῦ στρόβου. "Ετσι ὁ στρόβος εἶναι ὡς νὰ στηρίζεται εἰς ἓν μόνον σημεῖον, τὸ σημεῖον τομῆς τῶν τριῶν ἀξόνων I, II, III). Μὲ τὴν στήριξιν αὐτὴν ἐξουδετερώνεται δι' οἱανδήποτε θέσιν τὸ βάρος τοῦ σώματος καὶ διατηρεῖ ὁ στρόβος, πού τίθεται εἰς περιστροφὴν περὶ τὸν ἄξονα συμμετρίας του, σταθερὰν τὴν διεύθυνσιν τῆς περιστροφικῆς του ὁρμῆς σύμφωνα μὲ τὴν 'Αρχὴν τῆς διατηρήσεώς της. Εἰς τὴν σταθερότητα τοῦ ἄξονος περιστροφῆς βασίζεται τὸ ὅτι δίσκος βαλλόμενος (σχ. 83) ἔχει μεγαλυτέραν ἐμβέλειαν, ἂν περιστρέφεται περὶ ἄξονα κάθετον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας του—."Αν εἰς περιστρεφόμενον στρόβον ἐνεργήσῃ δύναμις ἐκτροπῆς, ὁ στρόβος δὲν θὰ ἐκτραπῇ κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς δυνάμεως, ἀλλὰ καθέτως πρὸς αὐτήν."Ετσι εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ στρόβου, πού στρέφεται στηριζόμενος εἰς σημεῖον O, κείμενον κάτωθεν τοῦ κ.β. S (σχ. 84 α), μόλις παύσῃ ὁ ἄξων νὰ εἶναι κατακόρυφος, τὸ βάρος B ἐξασκεῖ ῥοπὴν περιστροφῆς περὶ ὁριζόντιον ἄξονα αα, πού διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον στηρίξεως O. "Αν ὁ στρόβος δὲν περιεστρέφετο, θὰ ἀνετρέπετο. Λόγῳ τῆς περιστροφῆς του ὅμως δὲν ἀνατρέπεται, ἀλλὰ ἐκτρέπεται πρὸς τὴν ῥοπὴν τοῦ βάρους του καὶ ἔτσι ὁ ἄξων περιστροφῆς ΟΓ διαγράφει τὸν μανδύαν ἑνὸς κώνου, πού ἔχει κορυφὴν τὸ σημεῖον στηρίξεως O καὶ ἄξονα τὸν AA· τὴν κίνησιν αὐτὴν τοῦ ἄξονος τὴν λέμε *μετάπτωσιν* καὶ ἀπὸ αὐτὴν λέμε τὴν διαγραφομένην ἐπιφάνειαν *κῶνον μεταπτώσεως* καὶ τὸν ἄξονά του AA *ἄξονα μεταπτώσεως* Πρὸς ἐξήγησιν τῆς μεταπτώσεως, σκεπτόμεθα ὅτι ἡ ῥοπὴ πού ἐπιδρᾷ διὰ τὴν παραγωγὴν τοῦ φαινομένου, εἶναι ἄνυσμα πού φέρεται καθέτως (εἰς τὸ σημεῖον στηρίξεως O) ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον πού ὁρίζει ἡ διεύθυνσις τοῦ βάρους καὶ τὸ σημεῖον στηρίξεως O. 'Υπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς ῥοπῆς αὐτῆς ἐπὶ χρόνον Δt (πολὺ μικρόν), ἐπιφέρεται μεταβολὴ τῆς στροφορμῆς **Γ** τοῦ στρόβου κατὰ ΔΓ καὶ τοῦτο μεταβάλλει τὴν στροφορμὴν τοῦ στρόβου ἀπὸ Γ εἰς Γ' (σχ. 84, β), ἔτσι πού νὰ εἶναι : $\Gamma'=\Gamma+\Delta\Gamma$. 'Επειδὴ ὁ στρόβος μπορεῖ νὰ στρέφεται μόνον περὶ τὸν ἄξονα συμμετρίας του καὶ συνεπῶς συμπίπτουν διαρκῶς ἡ διεύθυνσις τοῦ ἄξονος συμμετρίας καὶ τοῦ ἄξονος περιστροφῆς μὲ τὴν διεύθυνσιν τῆς στροφορμῆς, διὰ τοῦτο μὲ τὴν μεταβολὴν τῆς διευθύνσεως τῆς στροφορμῆς θὰ ἐπέρχεται καὶ μεταβολὴ τοῦ ἄξονος περιστροφῆς κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν. Δεδομένου δὲ ὅτι ἡ ῥοπὴ περιστροφῆς, πού ἐπιβάλλει τὸ βάρος τοῦ στρόβου, εἶναι συνεχής, εἶναι εὔλογον ὅτι θὰ συνεχισθῇ ἡ μεταβολὴ τῆς διευθύνσεως τοῦ ἄξονος περιστροφῆς καὶ



α β

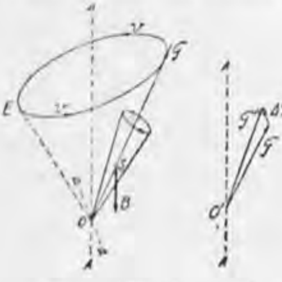
Σχ. 82



Σχ. 83

θὰ διαγράφῃ οὗτος τὸν κῶνον μεταπτώσεως. Ἔτσι ἡ κίνησις τοῦ στρόβου εἶναι σύνθετος ἀπὸ δύο κινήσεις, μίαν περὶ τὸν ἄξονα συμμετρίας του ΟΓ καὶ μίαν περὶ τὸν ἄξονα μεταπτώσεως ΑΑ. Ἡ συνισταμένη περιστροφικὴ κίνησις τοῦ στρόβου γίνεται περὶ ἄξονα, ποὺ μεταβάλλει ἀπὸ στιγμῆς εἰς στιγμὴν τὴν διεύθυνσίν του καὶ δι' αὐτὸ τὸν λέμε ***στιγμιαῖον*** ἄξονα περιστροφῆς.

Μὲ τὴν ἐπίδρασιν τῆς ροπῆς περιστροφῆς περὶ τὸν ἄξονα αα, ὁ ἄξων τοῦ στρόβου κλίνει περισσότερον πρὸς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον, ὅπως φαίνεται (σχ. 84) ἐκ τοῦ ὅτι ἡ συνισταμένη στροφορμὴ Γ' σχηματίζει μὲ τὴν ΔΓ γωνίαν μικροτέραν ἀπὸ ἐκείνην ποὺ σχηματίζει ἡ Γ μὲ τὴν ΔΓ. Τοῦτο σημαίνει, ὅτι ὁ ἄξων περιστροφῆς τείνει νὰ λάβῃ τοιαύτην θέσιν, ὥστε νὰ σχηματίζῃ ὅσον τὸ δυνατὸν μικροτέραν γωνίαν μὲ τὸν ἄξονα τῆς ἐπιδρώσης ροπῆς περιστροφῆς (ποὺ εἰς τὸ σχῆμα 84, β παριστάνεται ὑπὸ τοῦ ΔΓ). Τοῦτο ἀποτελεῖ τὸν βασικὸν νόμον τῆς κινήσεως στρόβου, νόμον ποὺ εἰς κάθε στιγμὴν προδιαγράφει τὴν ἀντίδρασιν ἑνὸς στρόβου εἰς ἐπιφερομένην ἐπ' αὐτοῦ ἔξωθεν ροπὴν περιστροφῆς.



α Σχ. 84 β

Ἡ ταχύτης τῆς μεταπτώσεως εἶναι τόσον μικροτέρα, ὅσον μεγαλυτέρα εἶναι ἡ στροφορμὴ τοῦ στρόβου. Ὁ στρόβος ἐπηρεάζεται τόσον ὀλιγώτερον ἀπὸ ἐξωτερικὰς δυνάμεις (ἔχει τόσον σταθερώτερον ἄξονα), ὅσον ταχύτερον περιστρέφεται. Ὁ ἄξων τοῦ στρόβου σταθεροποιεῖται λοιπὸν διὰ τῆς στροφορμῆς. Τοῦτο εἶναι συνέπεια τοῦ ὅτι μὲ τὴν περιστροφικὴν ταχύτητα ἐπαυξάνεται ἡ δρᾶσις ἀδρανείας. Ὅπως ἡ κεντρομόλος δύναμις (ποὺ εἶναι ἀναγκαία διὰ τὴν περιστροφὴν) ἀνταγωνίζεται πρὸς τὴν ἀντίθετον δύναμιν τῆς φυγοκέντρου, ἔτσι καὶ εἰς τὸν στρόβον, εἰς τὴν ἐξωτερικὴν ροπὴν περιστροφῆς ἀντιδρᾷ ἡ ***ροπὴ τοῦ στρόβου***, ἤτοι ἡ ροπὴ τῶν φυγοκεντρικῶν δυνάμεων. Ἂν ἐξαφανισθῇ ἡ ἔξωθεν ἐπιδρῶσα ροπὴ περιστροφῆς, ἐξαφανίζεται καὶ ἡ ροπὴ τοῦ στρόβου καὶ ἡ περιστροφή του γίνεται μὲ σταθερὸν ἄξονα στμοφορμῆς.

Ἐπειδὴ ἡ προστιθεμένη στροφορμὴ ΔΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἀρχικὴν στροφορμὴν Γ, ἐπιφέρεται μεταβολὴ ***μόνον*** εἰς τὴν διεύθυνσιν τῆς Γ. Ἂν μεταξὺ τῆς νέας διευθύνσεως τῆς στροφορμῆς Γ' καὶ τῆς ἀρχικῆς Γ σχηματίζεται γωνία: $\Delta\alpha = \Gamma O \Gamma'$ (σχ. 84, β), θὰ εἶναι: $\Delta\Gamma = \Gamma . \Delta\alpha = \Theta . \omega . \Delta\alpha$. Ἐπειδὴ ἐξ ἄλλου ἡ ΔΓ καθορίζεται ἀπὸ τὴν ροπὴν περιστροφῆς Ρ, ἀφοῦ εἶναι $\Delta\Gamma = P . \Delta t$, ἕπεται ὅτι:

$$P = \Delta\Gamma : \Delta t = \Theta . \omega\ (\Delta\alpha : \Delta t) \quad \text{καὶ} \quad \Delta\alpha : \Delta t = P : (\Theta\ \omega) \tag{51}$$

ἤτοι: Ἡ ταχύτης μεταπτώσεως ($\Delta\alpha : \Delta t$) εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς στροφορμῆς ($\Theta . \omega$) τοῦ στρόβου.

Αἱ δυνάμεις τοῦ στρόβου, ποὺ ὀφείλονται εἰς τὴν ἀδράνειαν περιστρεφομένων μαζῶν, ἐκδηλώνονται μόνον, ὅταν εἰς τοὺς ἄξονας περιστροφῆς ταχέως περιστρεφομένων μαζῶν ἐπιβάλλεται μεταβολὴ τῆς διευθύνσεως. Εἰς τροχοφόρον ὄχημα ποὺ διατρέχει καμπύλην, ἐπιβάλλεται στροφὴ περὶ κατακόρυφον ἄξονα καὶ εἰς τοὺς ταχέως περιστρεφομένους τροχούς. Αἱ δυνάμεις στρόβου ποὺ ἀναφαίνονται κατὰ τὴν κίνησιν αὐτήν, τείνουν νὰ ἀνεγείρουν τὸν ἄξονα τοῦ ὀχήματος. Τοῦτο σημαίνει μίαν ἐπὶ πλέον πίεσιν ἐπὶ τοῦ ἐξωτερικοῦ τροχοῦ καὶ μίαν ἐλάφρυνσιν τοῦ ἐσωτερικοῦ. Ἔτσι ἡ ροπὴ ἀνατροπῆς ποὺ προέρχεται ἀπὸ τὰς φυγοκεντρικὰς δυνάμεις ἐνισχύεται ἀκόμη περισσότερον. Ἀντιστοίχως εἶναι δυνατὸν μία ἀπότομος ἀνωμαλία τῆς τροχιᾶς νὰ ἐκτινάξῃ πρὸς τὰ ἔξω ἀπὸ τὴν εὐθύγραμμον πορείαν του τὸ τροχοφόρον, ὅταν ἡ ταχύτης του εἶναι μεγάλη (ντεραμπάρισμα).

Εἰς τὸ ***γυροσκόπιον***, στρόβον ποὺ μπορεῖ νὰ στρέφεται μόνον εἰς ὁριζόντιον ἐπίπεδον, ὁ ἄξων περιστροφῆς τείνει νὰ λάβῃ θέσιν παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῆς Γῆς καὶ συνεπῶς δεικνύει τὴν διεύθυνσιν Βορρᾶ - Νότου. Ἡ δυνατότης τῆς ἐποχήσεως μὲ ἐλευθέρας χεῖρας ἐπὶ ποδηλάτου βασίζεται εἰς τὰς ἀναφαινομένας δυνάμεις στρόβου κατὰ τὴν κλίσιν τοῦ ποδηλάτου. Διὰ νὰ ἐπιτευχθῇ μεγαλυτέρα ἐμβέλεια εἰς βλήματα, προσδίδομεν εἰς αὐτὰ στροφορμὴν κατὰ τὴν διαδρομήν των εἰς τὸν σωλῆνα τοῦ ὅπλου μὲ ἑλικοειδῆ ἐνσκαφὴν ποὺ ἔχομεν χαράξῃ εἰς αὐτόν.

§ 39. Παγκοσμία ἕλξις. ***α) Νόμος τῆς παγκοσμίας ἕλξεως.*** Πρὸς ἐξήγησιν τῆς ἰσορροπίας τοῦ Σύμπαντος ὁ Νεύτων διετύπωσε τὸ 1687 τὸν νόμον τῆς ***παγκοσμίας ἕλξεως***, τοῦ ὁποίου μερικὴν περίπτωσιν ἀποτελεῖ ἡ ἑλκτικὴ δύναμις τῆς Γῆς (ἡ βαρύτης). Κατὰ τὸν νόμον τοῦτον ἡ μᾶζα m_1 ἑνὸς σώματος ἀσκεῖ ἐπὶ τῆς μάζης m_2 ἄλλου ἑλκτικὴν δύναμιν Κ, ἡ ὁποία εἶναι ἀνάλογος τοῦ γινομένου $m_1 . m_2$ τῶν μαζῶν τούτων καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογος τοῦ τετραγώνου τῆς μεταξύ των ἀποστάσεως α. Εἶναι λοιπόν : $K = f . m_1 . m_2 : \alpha^2$ (52)

Ὁ συντελεστὴς f εἶναι μία φυσικὴ σταθερά, ἀνεξάρτητος τοῦ εἴδους τῆς ὕλης τῶν θεωρουμένων σωμάτων καὶ ὀνομάζεται ***σταθερὰ τῆς παγκοσμίας ἕλξεως***. Ἡ ἀριθμητική της τιμή, ἴση μὲ τὴν ἕλξιν ποὺ ἀσκεῖ μᾶζα 1 gr ἐπὶ ἄλλης ἐπίσης 1 gr, ἀπεχούσης ἀπὸ τὴν πρώτην ἀπόστασιν α ἴσην μὲ 1 cm, προσδιορίζεται ὅτι εἶναι $6{,}67 . 10^{-8}\,(gr^{-1} . cm^3 . sec^{-2})$. Ὥστε ὄχι μόνον ἡ Γῆ ἕλκει τὰ γύρω της σώματα, ἀλλὰ καὶ κάθε σῶμα ἕλκει τὴν Γῆν ὡς καὶ οἱοδήποτε ἄλλο σῶμα. Ἡ ἕλξις ὅμως αὐτὴ εἶναι σχετικῶς πάρα πολὺ μικρά. Ἔτσι εἰς τὴν περίπτωσιν δύο μαζῶν, ἑκάστη τῶν ὁποίων εἶναι ἴση μὲ 1 gr, ἡ ἀσκουμένη μεταξύ των ἕλξις, ὅταν ἀπέχουν ἡ μία ἀπὸ τὴν ἄλλην α=1 cm, θὰ εἶναι ἴση μὲ $6{,}67 . 10^{-8}$ [dyn], ἤτοι μὲ δύναμιν ἴσην περίπου μὲ τὸ ἓν δεκάκις δισεκατομμυριοστὸν ($1/10^{10}$) τῆς δυνάμεως μὲ τὴν ὁποίαν ἡ Γῆ ἕλκει ἑκάστην τῶν δύο μαζῶν. Δὲν εἶναι ὡς ἐκ τούτου ἐκπληκτικὸν τὸ ὅτι ἡ πειραματικὴ ἀπόδειξις τῆς ἕλξεως μεταξὺ ἐπιγείων μαζῶν ἐπετεύχθη μόλις μετὰ 100 ἔτη ἀπὸ τῆς ἐποχῆς τοῦ Newton.

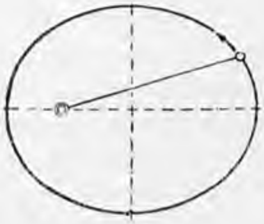
Ὁ Νεύτων συνήγαγε τὸν νόμον τῆς παγκοσμίας ἕλξεως ἀπὸ παρατηρήσεις τῆς κινήσεως τῆς Σελήνης περὶ τὴν Γῆν. Ἡ Σελήνη περιφέρεται γύρω ἀπὸ τὴν Γῆν διαγράφουσα κυκλικὴν περίπου (ἀκριβέστερον ἐλλειπτικὴν) τροχιὰν ἀκτῖνος r, ἴσης μὲ 60 ἀκτῖνας Γῆς (R). Πρὸς τοῦτο ἀπαιτεῖται κεντρομόλος δύναμις, ἐνεργοῦσα κατὰ τὴν ἀκτῖνα τῆς τροχιᾶς, ἴση μὲ $K_r = m . r . \omega^2$ ἢ ἐπιτάχυνσις γ_r κατὰ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν, ἴση μὲ $r\omega^2$. Ἂν ὁ χρόνος $T = 2\pi : \omega$, ποὺ χρειάζεται ἡ Σελήνη διὰ τὴν συμπλήρωσιν μιᾶς περιφορᾶς της περὶ τὴν Γῆν, εἶναι ἴσος μὲ 1 μῆνα, ἡ ἀκτινικὴ ἐπιτάχυνσις θὰ εἶναι : $\gamma_r = r\omega^2 = r . (2\pi : T)^2 = 60 . R(2\pi : T)^2 = 0{,}27$ cm/sec². Ἡ σχέσις τῆς ἐπιταχύνσεως ταύτης πρὸς τὴν ἐπιτάχυνσιν (g=981 cm/sec²) μὲ τὴν ὁποίαν πίπτουν τὰ σώματα ἐπὶ τῆς Γῆς εἶναι : $\gamma : g = 0{,}27 : 981 \simeq 1/3600 = 1 : 60^2$, ἤτοι : ἴση μὲ τὴν ἀντίστροφον σχέσιν τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς Γῆς. (Σώματα ποὺ ἀπέχουν μίαν ἀκτῖνα Γῆς ἀπὸ τὸ κέντρον της ἔχουν ἐπιτάχυνσιν πτώσεως 60^2 φορὰς μεγαλυτέραν ἀπὸ τὴν ἐπιτάχυνσιν τῆς Σελήνης ποὺ ἀπέχει 60 ἀκτῖνας Γῆς). Ὥστε ἡ ἕλξις ποὺ ἀσκεῖ ἡ Γῆ ἐπὶ τῆς Σελήνης, τὸ βάρος τῆς Σελήνης, δὲν εἶναι σταθερὰ ποσότης, ἀλλὰ μεταβαλλομένη καὶ μάλιστα κατὰ λόγον ἀντίστροφον τοῦ τετραγώνου τῆς ἀποστάσεως. Γενικὰ ἡ ἕλξις τῆς Γῆς ἐπὶ σώματος ἢ τὸ βάρος σώματος ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν ἀπόστασιν αὐτοῦ ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς Γῆς.

Ἡ ἕλξις ποὺ ἀσκεῖται ἀπὸ τὴν Γῆν ἐπὶ σώματος, ποὺ εὑρίσκεται ἐπ' αὐτῆς, εἶναι κατὰ τὸν νόμον τῆς παγκοσμίας ἕλξεως ἴση μὲ : $f.M.m:R^2$, ἂν f παριστάνη τὴν σταθερὰν παγκοσμίας ἕλξεως, M τὴν μᾶζαν τῆς Γῆς, m τὴν μᾶζαν τοῦ σώματος καὶ R τὴν ἀκτῖνα τῆς Γῆς, ποὺ εἰς τὴν περίπτωσίν μας ἀποτελεῖ τὴν ἀπόστασιν μεταξὺ τῶν δύο μαζῶν. (Εἰς τὴν περίπτωσιν ὀγκωδῶν σωμάτων, ὅπως ἡ Γῆ, πρέπει νὰ θεωρήσωμεν τὴν ὅλην μᾶζαν συγκεντρωμένην εἰς τὸ κ.β. τοῦ σώματος καὶ διὰ τοῦτο ἡ ἀπόστασις σώματος, κειμένου ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς Γῆς, εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα αὐτῆς). Ἀλλ' ἡ ἕλξις αὐτὴ εἶναι ἴση μὲ τὸ βάρος τοῦ σώματος m.g, ἂν g(=981 cm/sec²) εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς ἐλευθέρας πτώσεως τοῦ σώματος. Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτήν : $m.g=f.m.M : R^2$ ἢ $g=(f.M) : R^2$ εὑρίσκομεν : $M=R^2g/f=(6370.10^5)^2[cm^2]\ 981\ [cm/sec^2]/6{,}68.10^{-8}(cm^3.gr^{-1}.sec^{-2})$, ἤτοι ἡ μᾶζα τῆς Γῆς M εἶναι 6.10^{21} τόννοι καὶ συνεπῶς ἡ πυκνότης της ρ εἶναι : $M/V=5{,}5 gr/cm^3$. Ἂν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν, ὅτι ἡ μέση πυκνότης τῶν πετρωμάτων, ποὺ ἀποτελοῦν τὸν ἐξωτερικὸν φλοιὸν τῆς Γῆς, ἀνέρχεται εἰς 2,7 gr/cm³, συνάγεται ὅτι τὸ ἐσωτερικόν της ἀποτελεῖται ἀπὸ ὕλην μεγαλυτέρας πυκνότητος.

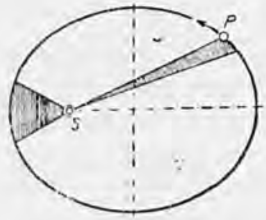
Συνέπειαν τῆς παγκοσμίας ἕλξεως ἀποτελοῦν καὶ αἱ παλίρροιαι, τ.ἔ. αἱ διαδοχικαὶ καθ' ὡρισμένην περίοδον ἀνυψώσεις ***(πλημμυρίδες)*** καὶ καταπτώσεις ***(ἀμπώτιδες)*** τῆς στάθμης τῆς θαλάσσης ποὺ παρατηροῦνται εἰς τὰ μέρη ἐπαφῆς τῆς θαλάσσης μὲ τὴν ξηράν. Εἰς μερικὰ μέρη, ὅπως εἰς τὸν πορθμὸν τοῦ Εὐρίπου, ἡ μετακίνησις τοῦ θαλασσίου ὕδατος κατὰ τὴν μίαν ἢ τὴν ἄλλην περίπτωσιν λαμβάνει τὴν μορφὴν ἰσχυροῦ ρεύματος πρὸς τὴν μίαν ἢ τὴν ἀντίθετόν της διεύθυνσιν. Τὸ φαινόμενον τῆς παλιρροίας εἶναι ἀρκετὰ περίπλοκον καὶ ἐκδηλώνεται μὲ ἰδιομορφίας, ὀφειλομένας εἰς τὰς τοπογραφικὰς συνθήκας. Γενικῶς προέρχεται ἐκ τῆς συνεπιδράσεως διαφόρων δυνάμεων, ἤτοι τῆς ἕλξεως τοῦ θαλασσίου ὕδατος κυρίως ὑπὸ τῆς Σελήνης καὶ κατὰ δεύτερον λόγον (ἕνεκα τῆς μεγάλης του ἀποστάσεως) ὑπὸ τοῦ Ἡλίου ὡς καὶ τῶν φυγοκεντρικῶν δυνάμεων, ποὺ ὀφείλονται εἰς τὴν περιστροφὴν τῆς Γῆς περὶ τὸ κοινὸν κέντρον βάρους Γῆς καὶ Σελήνης. (Λόγω τῆς ἀμοιβαίας ἕλξεως μεταξὺ Γῆς καὶ Σελήνης ἀναγκάζεται ἡ Σελήνη νὰ περιφέρεται γύρω ἀπὸ τὴν Γῆν. Ἐπειδὴ κατὰ τὴν κίνησιν αὐτὴν ἐνεργοῦν μόνον ἐσωτερικαὶ δυνάμεις εἰς τὸ σύστημα τῆς Γῆς - Σελήνης, πρέπει, σύμφωνα μὲ τὴν Ἀρχὴν διατηρήσεως τοῦ κ β (§ 28, δ), τὸ σύστημα Γῆς - Σελήνης νὰ περιστρέφεται περὶ τὸ ἀμετάθετον κέντρον βάρους των). Ὁ χρόνος τῆς περιστροφῆς ταύτης ἀνέρχεται εἰς 27 ⅓ ἡμέρας.

β) Κινήσεις τῶν πλανητῶν. Βάσει ἀστρονομικῶν παρατηρήσεων τοῦ Tycho de Brahe διετύπωσεν ὁ Johannes Keppler (1571—1630) τοὺς νόμους τῆς κινήσεως τῶν πλανητῶν, τοὺς ὁποίους ἀργότερον ἠδυνήθη ὁ Νεύτων νὰ συναγάγῃ ἀπὸ τὸν νόμον τῆς παγκοσμίας ἕλξεως. Σύμφωνα μὲ τὴν διατύπωσιν τοῦ Keppler ἡ κίνησις τῶν πλανητῶν διέπεται ἀπὸ τοὺς ἑξῆς τρεῖς νόμους :

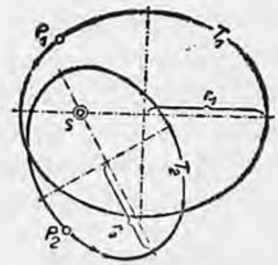
1) Κάθε πλανήτης διατρέχει κλειστὴν τροχιὰν ποὺ ἔχει σχῆμα ἐλλείψεως, τῆς ὁποίας τὴν μίαν ἑστίαν κατέχει ὁ Ἥλιος (σχ. 85).



Σχ. 85



Σχ. 86



Σχ. 87

2) Ἡ ἐπιβατικὴ ἀκτὶς ποὺ συνδέει ἕνα πλανήτην μὲ τὸν Ἥλιον διαγράφει εἰς ἴσους χρόνους ἴσας ἐπιφανείας (καὶ συνεπῶς ἡ γραμμικὴ ταχύτης τῆς κινήσεως πλανήτου εἶναι μεγαλυτέρα, ὅταν οὗτος εὑρίσκεται πλησιέστερον πρὸς τὸν Ἥλιον (***Περιήλιον***) καὶ μικροτέρα ὅταν ἀπέχῃ περισσότερον (εὑρίσκεται εἰς τὸ ***Ἀφήλιον***) (σχ. 86).

3) Τὰ τετράγωνα τῶν χρόνων περιφορᾶς T_1 καὶ T_2 δύο πλανητῶν περὶ τὸν Ἥλιον ἔχουν μεταξύ των λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν κύβων τῶν μεγάλων ἀξόνων τῶν ἐλλειπτικῶν τροχιῶν των (σχ. 87).

Ὁ πρῶτος νόμος εἶναι ἄμεσος συνέπεια τῆς ***κεντρικῆς***, ὅπως τὴν λέμε, κινήσεως σώματος γύρω ἀπὸ ἑλκτικὸν κέντρον, πρὸς τὸ ὁποῖον συγκρατεῖται μὲ δύναμιν ἀντιστρόφως ἀνάλογον τοῦ τετραγώνου τῆς ἀποστάσεως. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἀποδεικνύεται γενικῶς, ὅτι ἡ τροχιὰ τοῦ σώματος θὰ εἶναι ἔλλειψις. Διὰ τοὺς κυριωτέρους πλανήτας αἱ ἐλλείψεις των ὀλίγον διαφέρουν τοῦ κύκλου.

Ὁ νόμος τῶν ἐμβαδῶν, ὅπως λέγεται ὁ ἀνωτέρω δεύτερος νόμος τοῦ Keppler, ἀποτελεῖ ἐφαρμογὴν τοῦ θεωρήματος τῶν ἐμβαδῶν, τὸ ὁποῖον ἰσχύει διὰ πᾶσαν κεντρικὴν κίνησιν, δηλαδὴ πᾶσαν κίνησιν κατὰ τὴν ὁποίαν ἐνεργεῖ συνεχῶς δύναμις διευθυνομένη διαρκῶς πρὸς ὡρισμένον σημεῖον, ***τὸ ἑλκτικὸν κέντρον*** ἢ ***κέντρον ἐπιταχύνσεως***. Εἰς τὴν περίπτωσιν τοιαύτης κινήσεως καλοῦμεν ***ἐπιβατικὴν ἀκτῖνα*** τὴν εὐθεῖαν ποὺ συνδέει τὸ κινητὸν μὲ τὸ κέντρον ἐπιταχύνσεως. Ἡ ἐπιβατικὴ ἀκτὶς παρέχει ἑκάστοτε καὶ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἑλκτικῆς δυνάμεως καὶ συνεπῶς καὶ τῆς ἐπιταχύνσεως.

Τέλος ὁ τρίτος νόμος συνάγεται καὶ αὐτὸς ἐκ τοῦ νόμου τῆς παγκοσμίας ἕλξεως. Ἂν θεωρήσωμεν κυκλικὴν τροχιὰν ἀκτῖνος r, τότε ἡ κεντρομόλος δύναμις F, ἡ ὁποία πρέπει νὰ ἐξασκῆται ἐπὶ τοῦ σώματος, μάζης m, ποὺ τὴν διαγράφει μὲ ταχύτητα υ, εἶναι :

$F=mv^2/r$. Ἐξ ἄλλου ἡ ταχύτης v σχετίζεται πρὸς τὴν περίοδον (χρόνον περιφορᾶς) T μὲ τὴν ἐξίσ. (7), ὅθεν $T^2=4\pi^2 r^2/v^2$. Ἂν εἰς τὴν σχέσιν αὐτὴν θέσωμεν τὴν ἐκ τῆς προηγουμένης τιμὴν τοῦ $v^2=F.r/m$, θὰ ἔχωμεν: $T^2=4\pi^2.r.m/F$. Καὶ ἂν εἰς αὐτὴν ἀντικαταστήσωμεν τὴν F μὲ τὸ ἴσον της: $f.m.M/r^2$, προκύπτει: $T^2=4\pi^2 r^3/f.M$. Ἐπειδὴ ὁ συντελεστὴς $4\pi^2/f.M$ εἶναι ὁ αὐτὸς δι' ὅλους τοὺς πλανήτας, ἀφοῦ M παριστάνει τὴν μᾶζαν τοῦ Ἡλίου, ἐξάγεται ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς περιόδου (T^2) ἑκάστου πλανήτου εἶναι ἀνάλογον τοῦ κύβου τῆς ἀποστάσεώς του (r^3) ἀπὸ τὸν Ἥλιον. Ἂν ἑπομένως εἶναι T_1, T_2 οἱ χρόνοι περιφορᾶς δύο πλανητῶν καὶ r_1, r_2 αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τὸν Ἥλιον, θὰ ἔχωμεν: $T_1^2 : T_2^2 = r_1^3 : r_2^3$ (53)

Προβλήματα

91. Κύλινδρος μάζης 8000 kg, κυλίεται ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου καὶ διανύει ἰσοταχῶς εἰς 2 sec διάστημα 30 m. Πόσην ἐν συνόλῳ κινητικὴν ἐνέργειαν ἔχει ὁ κύλινδρος; (Ἀπ. $^3/_4 . 8000 . 10^3 . (30.10^2/2)^2$ erg).

92. Πόσον εἶναι τὸ ἀνηγμένον μῆκος φυσικοῦ ἐκκρεμοῦς, ποὺ ἔχει χρόνον αἰωρήσεως 1,5 sec; (Ἀπ. 2,2355 m).

93. Εἰς ἀντιστρεπτὸν ἐκκρεμές, μάζης $M=10$ kg, τὸ ἀνηγμένον μῆκος εὑρέθη ἴσον μὲ $l_r = 65$ cm. Πόση εἶναι ἡ ροπὴ ἀδρανείας του ὡς πρὸς τὸν διὰ τοῦ κ.β. ἄξονα, ἂν ἡ ἀπόστασις τοῦ κ.β. ἀπὸ τὸν ἄξονα ἐξαρτήσεως εἶναι $\alpha=50$ cm; (Ἀπ. $\Theta_\kappa = M.\alpha.(l_r - \alpha) = 10.10^3.50.(65-50)$ gr.cm²).

94. Ἡ ροπὴ ἀδρανείας Θ_κ ράβδου, μάζης $m=250$ gr καὶ μήκους $l=50$ cm, ὡς πρὸς ἄξονα ποὺ περνάει ἀπὸ τὸ μέσον τῆς ράβδου, εὑρίσκεται μὲ τὸν τύπον: $\Theta_\kappa = {}^1/_{12} m.l^2$. Πόση εἶναι ἡ ροπὴ ἀδρανείας τῆς ράβδου ὡς πρὸς τὸν διὰ τοῦ ἄκρου της A ἄξονα καὶ ποῖος ὁ χρόνος αἰωρήσεως ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τοῦτον; (Ἀπ. $\Theta_A = \Theta_\kappa + m(l/2)^2$ καὶ $T=2\pi\sqrt{2\Theta_A : mgl}$).

95. Μετάλλινος κυκλικὸς δίσκος, ἀκτῖνος $\alpha=5,85$ cm, ἠρεμεῖ ὁριζοντίως, κρεμασμένος μὲ ἐλαστικὸν σύρμα, τοῦ ὁποίου τὸ ἓν ἄκρον εἶναι προσκολλημένον εἰς τὸ κέντρον τοῦ δίσκου καὶ τὸ ἄλλο εἰς ἀκλόνητον στήριγμα· ἂν στρέψωμεν τὸν δίσκον περὶ τὸ σύρμα, καὶ ἔπειτα τὸν ἀφήσωμεν ἐλεύθερον, κάνει αἰωρήσεις περιόδου $T_1=9,02$ sec. Προσκολλῶμεν κατόπιν εἰς τὰ ἄκρα μιᾶς διαμέτρου τοῦ δίσκου ἀνὰ ἓν σφαιρίδιον μάζης $m=20$ gr καὶ διαπιστώνομεν ὅτι ἡ περίοδος ταλαντώσεως στρέψεως γίνεται $T_2=10,5$ sec. Πόση εἶναι ἡ ροπὴ ἀδρανείας Θ_κ τοῦ δίσκου ὡς πρὸς ἄξονα κάθετον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας του εἰς τὸ κέντρον αὐτῆς; (Ἀπ. Κατὰ τὴν σχέσιν (45) εἶναι: $T_1 : T_2 = \sqrt{\Theta_\kappa : (\Theta_\kappa + 2m\alpha^2)}$, ὅθεν: $\Theta_\kappa = 3855,3$ grcm²).

96. Εἰς τὰ ἄκρα ράβδου στρεπτῆς περὶ ἄξονα, ὁ ὁποῖος περνάει διὰ τοῦ μέσου της, προσκολλῶμεν τὰς μάζας 10 gr καὶ 20 gr, τὴν μίαν εἰς τὸ ἓν καὶ τὴν ἄλλην εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον. Πόσον εἶναι τὸ ἀνηγμένον μῆκος καὶ ὁ χρόνος αἰωρήσεως; (Ἀπ. $l_r = 36$ cm καὶ $T = 0,6$ sec).

97. Πόσον μῆκος μ πρέπει νὰ ἔχῃ λεπτὴ ράβδος, διὰ νὰ αἰωρῆται περὶ τὸ ἓν ἄκρον της μὲ χρόνον ἁπλῆς αἰωρήσεως 1 sec; (Ἀπ. Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (49) ἂν θέσωμεν $\Theta={}^1/_3 M.\mu^2$ καὶ $D^*=M.g.\mu/2$, προκύπτει: $\mu=1,5g : \pi^2$).

98. Πόση εἶναι ἡ γωνιακὴ ἐπιτάχυνσις β εἰς τὸν δίσκον τοῦ σχ. 75,

ἄν εἶναι ἡ δύναμις K=2 kp, ἡ μᾶζα τοῦ δίσκου m=981 gr καὶ ἡ ἀκτίς του r=4 cm ; (Ἐκ τοῦ τύπου (47) προκύπτει : $\beta=(2.981000.4):(^1/_2.98,1.4^2)=10^4 sec^{-2}$).

99. Πόση εἶναι ἡ ταχύτης μεταπτώσεως Δα/Δt στρόβου, ποὺ ἔχει ροπὴν ἀδρανείας ὡς πρὸς τὸν ἄξονα συμμετρίας του 2500 gr.cm² καὶ περιστρέφεται μὲ γωνιακὴν ταχύτητα 200 sec^{-1}, ὅταν ἡ ἐπενεργοῦσα δύναμις ἔχει ροπὴν περιστροφῆς 5.10^7 dyn.cm ; (Ἀπ. Κατὰ τὴν (49) : $10^8 sec^{-1}$).

100. Πόση εἶναι ἡ στροφορμὴ τοῦ ἀνωτέρω στρόβου ; (Ἀπ. Ἀπὸ τὴν σχέσιν (50) προκύπτει : $\Gamma=2500.200$ $grcm^2sec^{-1}$).

101. Πόση εἶναι ἡ στροφορμὴ στρόβου, ποὺ ἔχει μᾶζαν m=250 gr, συγκεντρωμένην μὲ ὁμοιόμορφον ἐξάπλωσιν κυρίως ἐπὶ κύκλου ἀκτῖνος r=8 cm, καὶ κάνει 3000 στροφὲς εἰς 1 min ; (Ἀπ. Θέτομεν εἰς τὸν τύπον (50) $\Theta=^1/_2mr^2$ καὶ $\omega=2\pi:T=2\pi:^1/_{50}$ καὶ εὑρίσκομεν: $\Gamma=^1/_2.250.8^2.2.3,14.50$ $grcm^2sec^{-1}$).

102. Πόσην ἐνέργειαν ἐγκλείει σφόνδυλος βάρους 2,4 t καὶ διαμέτρου 2,1 m, ποὺ κάνει 80 στροφὲς εἰς 1 min, ἄν ἡ μᾶζα θεωρηθῇ συγκεντρωμένη εἰς τὴν περιφερειακήν του στεφάνην ; (Ἀπ. Ἐκ τοῦ τύπου (44) καὶ (45) προκύπτει : $E_{στρ} = ^1/_2.2,4.10^6.(210/2)^2.(2.3,14:^6/_8)^2$ erg).

103. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ σταθερὰ f τῆς παγκοσμίας ἕλξεως, ἄν ληφθῇ ἡ πυκνότης τῆς Γῆς d ἴση μὲ 5.6 g/cm³ καὶ ἡ ἀκτίς της R ἴση μὲ 6370.10^5 cm ; (Ἀπ. $f=6,565.10^{-8}cm^3g^{-1}s^{-2}$).

104. Ἡ μεταξὺ Γῆς καὶ Σελήνης ἀπόστασις εἶναι ἴση μὲ 60 ἀκτῖνας Γῆς καὶ ἡ μᾶζα τῆς Σελήνης εἶναι $^1/_{81}$ τῆς μάζης τῆς Γῆς. Εἰς ποίαν θέσιν τῆς ἀποστάσεως Γῆς—Σελήνης θὰ ὑφίστατο τυχὸν σῶμα ἴσην ἕλξιν ἑκατέρωθεν ; (Ἀπ. 6R ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς Σελήνης).

105. Ἡ μᾶζα τοῦ Ἡλίου εἶναι 355000 καὶ ἡ ἀκτίς του 112000 φορὰς μεγαλυτέρα τοῦ ἀντιστοίχου μεγέθους τῆς Γῆς. Πόση εἶναι κατὰ ταῦτα ἡ ἐπιτάχυνσις g' εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ Ἡλίου ; (Ἀπ. 28,3 g = 277,63 m/s²).

106. Ὁ χρόνος περιστροφῆς γύρω ἀπὸ τὸν Ἥλιον εἶναι διὰ τὴν Γῆν 365,262 ἡμέρ. καὶ διὰ τὴν Ἀφροδίτην 224,72 ἡμέρ. Ἄν ἡ μέση ἀπόστασις τῆς Γῆς ἀπὸ τὸν Ἥλιον ληφθῇ ἴση μὲ 20.10^6 μίλλια, πόση θὰ εἶναι ἡ μέση ἀπόστασις τῆς Ἀφροδίτης ἀπὸ τὸν Ἥλιον : [Ἀπ. $20.10^6(224,72^2:365,262^2)^{1/3}$].

107. Πόσον ζυγίζει μᾶζα 1 kg εἰς ὕψος 1 km, ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας τόπου τῆς Γῆς, ὅπου g=981 m/s²; (Ἀπ. Ἀπὸ τὴν σχέσιν $mg_0/mg_h = R^2:(R+h)^2$, προκύπτει : $(6370.10^5+10^5)^2:(6370.10^5)^2$ kg*).

108. Εἰς ποῖον σημεῖον τῆς ἀποστάσεώς των θὰ συνεκρούοντο ἡ μᾶζα m τῆς Γῆς μὲ τὴν μᾶζαν M τοῦ Ἡλίου, ἄν συνέβαινε νὰ σταματήσῃ ἡ περιστροφική των κίνησις καὶ ἐκινοῦντο ἡ μία πρὸς τὴν ἄλλην ; (Ἀπ. Εἰς ἀπόστασιν x ἀπὸ τὸν Ἥλιον, ποὺ ὑπολογίζεται ἀπὸ τὴν σχέσιν : $x:(d-x)=$ $=m:M$. Ἡ θέσις αὐτὴ εἶναι κ.β. τοῦ συστήματος Γῆς—Ἡλίου).

109. Ἄν σῶμα διέτρεχεν ἐλευθέρως μίαν διάμετρον τῆς Γῆς, ποῦ θὰ εἶχε τὴν μεγίστην ταχύτητά του ; (Ἀπ. Εἰς τὸ κέντρον τῆς Γῆς).

110. Μὲ ποίαν ταχύτητα θὰ ἔφθανε τὸ παραπάνω σῶμα εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον τῆς διαμέτρου ; (Ἀπ. Ἐκείνην ποὺ εἶχε κατὰ τὴν ἐκκίνησίν του).

111. Ἡ ἑλκτικὴ δύναμις ποὺ ἀσκεῖται ὑπὸ μάζης, κατανεμημένης ὁμοιομόρφως εἰς σφαιρικὸν χῶρον, ἀποδεικνύεται ὅτι διὰ τὸ ἑλκόμενον σῶμα φαίνεται νὰ προέρχεται ἀπὸ τὸ *κέντρον* τῆς σφαίρας, ἡ ὁποία περικλείει τὴν μᾶζαν ποὺ ἐκτείνεται μέχρι τοῦ ἑλκομένου σώματος. Πόσην ἕλξιν θὰ ὑφίσταται τὸ κατὰ ταῦτα σῶμα, φερόμενον εἰς τὸ κέντρον τῆς Γῆς ; (Ἀπ. Μηδέν).

IV. Γενικὰ Χαρακτηριστικὰ τῶν σωμάτων, ὀφειλόμενα εἰς τὴν συγκρότησίν των ἐκ τεμαχιδίων

§ 40. Φυσικαὶ καταστάσεις. Ὠνομάζομεν *φυσικὰς καταστάσεις* τῶν σωμάτων (βλ. Εἰσαγωγὴν εἰς τὴν Μηχανικὴν) τὸ ὅτι τὰ διάφορα σώματα εἶναι *στερεὰ* ἢ *ὑγρὰ* ἢ *ἀέρια*. Στερεὰ λέγονται, ὅταν ἔχουν ὡρισμένον ὄγκον καὶ ὡρισμένον σχῆμα καὶ προβάλλουν ἀντίστασιν εἰς ὁποιανδήποτε μεταβολὴν εἴτε τοῦ ὄγκου εἴτε τοῦ σχήματός των. Μὲ ἄλλην ἔκφρασιν λέμε ὅτι τὰ στερεὰ ἔχουν ἐλαστικότητα (πρβλ. § 44) ὄγκου καὶ σχήματος. Τὰ ὑγρὰ ἔχουν καὶ αὐτὰ ὡρισμένον ὄγκον, ἀλλὰ στεροῦνται ὡρισμένου σχήματος· ἑπομένως ἔχουν ἐλαστικότητα ὄγκου, ἀλλὰ τὸ σχῆμα των προσαρμόζεται πάντοτε πρὸς τὸ σχῆμα τοῦ ἐσωτερικοῦ τοῦ δοχείου, εἰς τὸ ὁποῖον περιέχονται· [ἐξαίρεσιν κάνει μόνον ἡ ἐλευθέρα των ἐπιφάνεια ποὺ εἶναι ὁριζοντία (πρβλ. 45, β)]. Τέλος τὰ ἀέρια δὲν ἔχουν οὔτε σχῆμα, οὔτε ὄγκον ὡρισμένον. Ἐκτείνονται εἰς πάντα χῶρον, τὸν ὁποῖον ἔχουν εἰς τὴν διάθεσίν των καὶ μόνον, ὅταν ἐμποδίζωνται, περιορίζονται εἰς ὡρισμένον χῶρον.

§ 41. Ἡ συγκρότησις τῆς ὕλης ἀπὸ τεμαχίδια. *α) Ἄτομα, μόρια, ἰόντα.* Κάθε σῶμα μπορεῖ νὰ χωρισθῇ εἰς τεμαχίδια μὲ ἀφάνταστα μικρὰς διαστάσεις· ἔτσι π.χ. τὰ σταγονίδια ὕδατος, ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦνται τὰ νέφη, εἶναι τόσον μικρὰ καὶ ἔχουν ἀντιστοίχως τόσον μικρὸν βάρος ὥστε ἡ πτῶσις των, νὰ ἀνακόπτεται ἀπὸ τὴν ἀντίστασιν τοῦ ἀέρος (πρβλ. § 64)· εἰς οὐσίας τῶν ὁποίων ἡ παρουσία μαρτυρεῖται ἀπὸ τὴν ὀσμήν των διαπιστώνεται ἀκόμη μεγαλυτέρα κατάτμησις, ἀφοῦ ἀρκεῖ ὄγκος $2 \cdot 10^{-14}$ cm^3 μερκαπτάνης, διὰ νὰ δώσῃ τὴν χαρακτηριστικὴν δυσοσμίαν τῆς οὐσίας εἰς 1 m^3 ἀέρος. Κατὰ τοὺς μετριωτέρους ὑπολογισμοὺς εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἔχομεν τεμαχίδια μὲ διάμετρον μικροτέραν τῶν $3 \cdot 10^{-6}$ cm, ἤτοι πολλὰς ἑκατοντάδας φορὰς μικροτέραν τοῦ ὁρίου μικροσκοπικῆς διοράσεως, δεδομένου ὅτι αὐτὴ φθάνει μέχρι κάπου 10^{-4} cm ἢ 0,001 mm. Παρὰ ταῦτα δὲν εἶναι νοητὸν ὅτι ἡ ὑποδιαίρεσις τῆς ὕλης μπορεῖ νὰ προχωρήσῃ ἀπεριορίστως καὶ τοῦτο παρέχει ἓν ἀκόμη δεῖγμα τῆς πνευματικῆς ἀνωτερότητος τῶν μεγάλων προγόνων μας, ὅτι αὐτοὶ πρῶτοι διέγνωσαν ὅτι τὰ διάφορα σώματα ἀποτελοῦνται ἀπὸ μικρότατα μὴ περαιτέρω διαιρετὰ σωματίδια, τὰ ὁποῖα ἀπεκάλεσαν *ἄτομα*. Ἡ ἐκδοχὴ τοῦ ὅτι ἡ ὕλη συγκροτεῖται ἀπὸ σωματίδια μὲ τὴν σημερινὴν ἀνάπτυξιν τῆς Φυσικῆς δὲν εἶναι πλέον ἁπλῶς συμπέρασμα λογικῆς ἑρμηνείας, ἀλλ' ἐπιβάλλεται ἀπὸ πειραματικὰς διαπιστώσεις, ἡ ὕπαρξις τῶν ὁποίων δὲν θὰ ἦτο ἄλλως δυνατή. Διὰ τὰ σωματίδια αὐτὰ τῆς ὑποδιαιρέσεως τῆς ὕλης ἔχομεν σήμερον τὰς ἐννοίας *ἀτόμων, μορίων, ἰόντων, ἠλεκτρονίων, πρωτονίων, νετρονίων* κ.ἄ. Ἡ ἔννοια τοῦ ἀτόμου καθωρίσθη τὸ πρῶτον ἀπὸ τὸν Dalton πρὸς ἐξήγησιν τῶν νόμων τῶν χημικῶν ἀντιδράσεων· (πολὺ πρὸ τοῦ Dalton ὁ Ἕλλην φιλόσοφος Δημόκριτος τὸ 400 π.Χ. ὑπεστήριξε τὴν ἀναγκαιότητα τῆς ἐξ ἀτμήτων σωματιδίων (ἀτόμων) συγκροτήσεως τῆς ὕλης. Τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ θεωρία τοῦ Δημοκρίτου ἐξεπήγασεν ἐκ φιλοσοφικῆς θεωρήσεως δὲν ἐλαττώνει βεβαίως τὸ ἀξιοθαύμαστον αὐτῆς, δικαιολογεῖ ὅμως τὸ ὅτι δὲν εἶχε τὴν ἀπήχησιν τῆς θεωρίας τοῦ Dalton). Κατὰ τὴν θεωρίαν τοῦ Dalton κάθε χημικὸν στοιχεῖον πρέπει νὰ ἀποτελῆται ἀπὸ πολὺ μικρὰ ἀδιαίρετα σωματίδια μὲ ὡρισμένην δι' ἕκαστον στοιχεῖον μᾶζαν, τὰ *ἄτομα*. Ἀπὸ τὴν ἕνωσιν δύο ἢ περισσοτέρων ἀτόμων προκύπτουν τὰ πειὸ μικρὰ σωματίδια μὲ αὐτοτελῆ ὕπαρξιν· αὐτὰ καλοῦνται *μόρια*. Εἰς τὰ ἁπλᾶ σώματα ἢ στοιχεῖα τὰ μόρια ἀποτελοῦνται ἀπὸ ἓν (εὐγενῆ ἀέρια, ἀτμοὶ μετάλλων), δύο (ὑδρογόνον, ὀξυγόνον κλπ.) ἢ τέσσαρα (φωσφόρος, ἀντιμόνιον) ἄτομα τοῦ αὐτοῦ στοιχείου, ἐνῷ τὰ μόρια τῶν συνθέτων σωμάτων ἀποτελοῦνται ἀπὸ ἄτομα δύο ἢ περισσοτέρων ἁπλῶν σωμάτων (τὸ μόριον π.χ. τοῦ ὕδατος ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἄτομα ὑδρογόνου καὶ ἓν ἄτομον ὀξυγόνου). Εἰς τὰ ἁπλᾶ σώματα τῶν ὁποίων τὸ μόριον ἀποτελεῖται ἀπὸ ἓν ἄτομον, *μονατομικὰ στοιχεῖα*, (ἥλιον, νέον, κ.ἄ.) ἡ ἔννοια τοῦ μορίου συμπίπτει μὲ τὴν τοῦ ἀτόμου.—Εἰς τὰ ἐλάχιστα σωματίδια συγκροτήσεως τῆς ὕλης ἀναφέρομεν ἐδῶ χωρὶς ἐπακριβέστερον προσδιορισμὸν (τοῦτο γίνεται εἰς τὸ κεφάλαιον τοῦ ἠλεκτρισμοῦ) καὶ τὰ *ἰόντα*, ποὺ εἶναι μόρια ἢ ἄτομα μὲ ἠλεκτρικὸν φορτίον. Ἔτσι τὰ μόρια, τὰ ἄτομα καὶ τὰ ἰόντα παρέχουν τοὺς στοιχειώδεις ἐποικοδομητικοὺς λίθους εἰς τοὺς ὁποίους βασίζεται ἡ Φυσικὴ εἰς τὴν ἔρευναν πολλῶν φαινομένων της· πέραν αὐτῶν σήμερον ἡ Φυσικὴ βασίζεται εἰς ἀκόμη στοιχειωδέστερα σωματίδια (ἠλεκτρόνια, πρωτόνια, νετρόνια), τὰ ὁποῖα προκύπτουν ἐκ τῆς διασπάσεως τῶν ἀτόμων (πρβλ. Ἀτομοδομική). Εἰς πολλὰ φαινόμενα τῆς Φυσικῆς θεωροῦμεν καὶ τὰ τρία εἴδη τῶν σωματιδίων (μόρια, ἄτομα, ἰόντα) ἑνιαίως καὶ τὰ συμπεριλαμβάνομεν ὅλα ὑπὸ τὸ κοινὸν ὄνομα «μόρια».

β) Μοριακὸν καὶ ἀτομικὸν βάρος. Ὁ χημικὸς δὲν ἐργάζεται μὲ βάρη τῶν καθέκαστα ἀτόμων καὶ μορίων, ἀλλὰ μὲ πολὺ μεγαλύτερα καὶ εὐκόλως προσδιοριζόμενα σχετικὰ βάρη, τὰ ὁποῖα ὀνομάζονται ***ἀτομικὰ καὶ μοριακὰ βάρη***. Ὡς βάσις διὰ τὸν καθορισμὸν τῶν ἀτομικῶν βαρῶν τῶν στοιχείων λαμβάνεται τὸ ἀτομικὸν βάρος τοῦ ὀξυγόνου, εἰς τὸ ὁποῖον δίδεται τὸ ἀτομικὸν βάρος 16. Τὸ ἀτομικὸν βάρος κάθε ἄλλου στοιχείου εἶναι ὁ ἀριθμὸς ποὺ μᾶς λέει πόσες φορὲς εἶναι βαρύτερον τοῦ 1/16 τοῦ ἀτόμου ὀξυγόνου τὸ ἄτομον τοῦ θεωρουμένου στοιχείου. Ἔτσι τὸ ἀτομικὸν βάρος τοῦ ὑδρογόνου εἶναι 1,008 καὶ κατὰ προσέγγισιν 1. Κατ' ἀντιστοιχίαν ὁρίζεται τὸ μοριακὸν βάρος ὁποιουδήποτε σώματος, ὡς ἄθροισμα τῶν ἀτομικῶν βαρῶν τῶν ἀτόμων ποὺ ἀποτελοῦν τὸ μόριον τοῦ σώματος. Ἔτσι τὸ μοριακὸν βάρος τοῦ ὀξυγόνου, ποὺ εἶναι διατομικόν, εἶναι 2·16=32, τοῦ ὑδρογόνου 2.1,008=2,016, τοῦ ὕδατος 2.1+16=18· τῶν μονατομικῶν στοιχείων τὸ μοριακὸν βάρος εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἀτομικόν των.

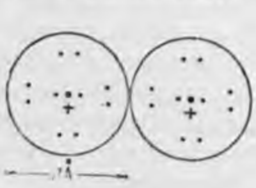
γ) Γραμμοάτομον καὶ γραμμομόριον. Κατὰ συσχετισμὸν πρὸς τὸ ἀτομικὸν βάρος, ὀνομάζομεν ***γραμμοάτομον*** στοιχείου ποσὸν ἐκ τοῦ στοιχείου τούτου ἴσον μὲ τόσα γραμμάρια, ὅσα μᾶς λέει τὸ ἀτομικόν του βάρος. Ἔτσι τὸ γραμμοάτομον ὀξυγόνου εἶναι 16 gr αὐτοῦ, ὑδρογόνου 1,008 gr αὐτοῦ κλπ.

Κατ' ἀναλογίαν ὀνομάζομεν ***γραμμομόριον*** (mol) μιᾶς οὐσίας τόσα γραμμάρια ἐξ αὐτῆς ὅσα μᾶς λέει τὸ μοριακόν της βάρος. Ἔτσι τὸ γραμμομόριον ὕδατος εἶναι 18 gr ὕδατος, γραμμομόριον ὀξυγόνου εἶναι 32 γραμμάρια αὐτοῦ κλπ.

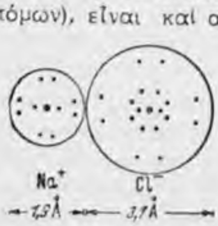
δ) Μοριακὸς ὄγκος. Ἀριθμὸς Avogadro. Ὁ ὄγκος ποὺ καταλαμβάνει ἓν γραμμομόριον ἀερίου καλεῖται ***μοριακὸς ὄγκος*** (V_{mol}) αὐτοῦ. Εἶναι ὁ αὐτὸς δι' ὁποιοδήποτε ἀέριον ὑπὸ τὰς αὐτὰς συνθήκας θερμοκρασίας καὶ πιέσεως. Ἔτσι ὑπὸ θερμοκρασίαν 0° C καὶ πίεσιν 760 Torr (πρβ. § 55, α) ὁ μοριακὸς ὄγκος κάθε ἀερίου εἶναι 22,4 λίτρα. Κατὰ ταῦτα ὁ αὐτὸς (ὅπως εἶναι ὁ μοριακός) ὄγκος ἀπὸ διάφορα ἀέρια ἔχει βάρη ἀνάλογα πρὸς τὰ μοριακὰ βάρη τῶν θεωρουμένων ἀερίων· (ὑπὸ τὰς αὐτὰς κανονικὰς συνθήκας τὰ 22,4 λίτρα ζυγίζουν μὲ ὑδρογόνον 2,016 gr, μὲ ὀξυγόνον 32 gr κλπ.). Μὲ ἄλλα λόγια: Ὑπὸ αὐτὰς συνθήκας θερμοκρασίας καὶ πιέσεως ἴσοι ὄγκοι διαφόρων ἀερίων περιέχουν ἕκαστος τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν μορίων. Τοῦτο διέγνωσε πρῶτος ὁ Avogadro τὸ 1811 καὶ πρὸς τιμήν του ὀνομάζομεν ***ἀριθμὸν*** Avogadro ***N*** τὸν ἀριθμὸν τῶν μορίων ποὺ περιέχεται εἰς 1 mol ὁποιουδήποτε ἀερίου. Τὴν τιμὴν τοῦ ἀριθμοῦ τούτου ὑπελόγισε πρῶτος ὁ Loschmidt καὶ διὰ τοῦτο φέρεται καὶ τὸ ὄνομα τοῦ ἐρευνητοῦ τούτου εἰς τὴν ὀνομασίαν τοῦ ἀριθμοῦ N. Ὡς ἀκριβεστέρα τιμή του θεωρεῖται σήμερον ἡ: $N = 6{,}024 \cdot 10^{23}$ μόρια/mol. Μὲ τὴν τιμὴν αὐτὴν καθορίζεται πλέον καὶ ἡ μᾶζα m ἑνὸς μορίου ἢ καὶ ἑνὸς ἀτόμου· (προκειμένου π.χ. περὶ ὀξυγόνου, εἶναι: $m_{O_2} = 32/6{,}024 \cdot 10^{23}$ gr καὶ $m_O = 16/6{,}024 \cdot 10^{23}$ gr).

ε) *Μέγεθος, σχῆμα καὶ κατασκευὴ τῶν ἀτόμων.* Ἂν καὶ μᾶς εἶναι ἀδύνατον νὰ ἴδωμεν καὶ μὲ τὴν χρησιμοποίησιν τῶν πλέον ἰσχυρῶν μικροσκοπίων τὰ καθέκαστα μόρια καὶ ἄτομα, ἐν τούτοις κατορθώνομεν μὲ μεθόδους, διὰ τὰς ὁποίας γίνεται λόγος εἰς ἄλλα μέρη τοῦ βιβλίου, νὰ γνωρίσωμεν ὄχι μόνον τὸ μέγεθος καὶ σχῆμα, ἀλλὰ καὶ τὴν διάταξιν ποὺ ἔχουν τὰ ἄτομα εἰς τὴν συγκρότησιν τῶν καθέκαστα μορίων. Ἐπιγραμματικῶς σημειώνομεν ἐδῶ, ὅτι κάθε ἄτομον ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα ***θετικῶς*** ἠλεκτρισμένον ***πυρῆνα***, εἰς τὸν ὁποῖον εἶναι συγκεντρωμένη οὐσιαστικῶς ὅλη ἡ μᾶζα τοῦ ἀτόμου· γύρω ἀπὸ αὐτὸν περιφέρεται ὡρισμένος διὰ κάθε ἄτομον ἀριθμὸς στοιχειωδῶν μονάδων ἀρνητικοῦ ἠλεκτρισμοῦ ποὺ ὀνομάζονται ***ἠλεκτρόνια***. Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἠλεκτρονίων ποὺ περιβάλλουν τὸν πυρῆνα (ὡς νέφος ἠλεκτρονίων) εἶναι τόσος, ὥστε τὸ ἀρνητικόν των φορτίον νὰ εἶναι ἀκριβῶς ἴσον μὲ τὸ φορτίον θετικοῦ ἠλεκτρισμοῦ ποὺ ἔχει ὁ πυρήν· ἔτσι τὸ ὅλον ἄτομον εἶναι ἠλεκτρικῶς οὐδέτερον. — Αἱ διάμετροι τῶν ἀτόμων ἔχουν μήκη ποὺ δὲν ὑπερβαίνουν ὀλίγας μονάδας Ångström ($1 Å = 10^{-8}$ cm $= 0{,}1$ mμ). Αἱ διάμετροι τῶν πυρήνων εἶναι πολὺ μικρότεραι, κάπου 10000 φορὰς μικρότεραι. Ἔτσι ἡ μᾶζα ἑκάστου ἀτόμου εἶναι συγκεντρωμένη εἰς ἐλάχιστον τμῆμα (0.0001) τῆς περιοχῆς ποὺ καταλαμβάνει τὸ ἄτομον. Τὸ ἄτομον δὲν ἔχει σταθερὰν ἐξωτερικὴν ἐπιφάνειαν· ἔχει τὸν πυρῆνα του περιβεβλημένον ἀπὸ ἠλεκτρόνια, τὰ ὁποῖα εἶναι βέβαια καὶ αὐτὰ πάρα πολὺ μικρά, ἐξασκοῦν ὅμως πολὺ ἰσχυρὰς ἀπωστικὰς δυνάμεις ἐπὶ τῶν ἠλεκτρονίων παρακειμένων ἀτόμων. Κατὰ συνέπειαν τῶν δυνάμεων τούτων, εἶναι ἀδύνατον εἰς δεύτερον ἄτομον νὰ προσεγγίσῃ εἰς τὸ πρῶτον περισσότερον ἑνὸς ὡρισμένου ὁρίου. Εἰς τοῦτο ὀφείλεται, ὅτι κάθε ἄτομον καταλαμβάνει χῶρον πολὺ μεγάλον σχετικῶς πρὸς τὸ μέγεθος τῶν σωματιδίων ποὺ τὸ ἀποτελοῦν. Ὅταν λέμε ὅτι ἓν ἄτομον ἔχει διάμετρον 3 Å ἢ 0.3 mμ, τοῦτο σημαίνει, ὅτι εἰς τὸ ἄτομον τοῦτο μπορεῖ νὰ πλησιάσῃ ἄλλο μέχρι θέσεως ποὺ ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τὸν πυρῆνα τοῦ ἑνὸς ἀτόμου μέχρι τοῦ πυρῆνος τοῦ ἄλλου νὰ μὴ εἶναι μικροτέρα ἀπὸ 0,3 mμ. Ἡ περιοχὴ γύρω ἀπὸ τὸν πυρῆνα ἑνὸς ἀτόμου, εἰς τὴν ὁποίαν ὑπὸ συνήθεις συνθήκας δὲν μπορεῖ νὰ εἰσδύσῃ ἕτερον ἄτομον ὀνομάζεται ***σφαῖρα δράσεως*** τοῦ ἀτόμου (σχ. 88). Μόνον πολὺ ταχέα ἠλεκτρόνια κατορθώνουν νὰ διαπεράσουν τὸ νέφος ἠλεκτρονίων ποὺ περιβάλλει τὸν πυρῆνα καὶ νὰ τὸν πλησιάσουν τόσον, ὥστε νὰ ἐπηρεασθοῦν ἀπὸ αὐτὸν εἰς τὴν διεύθυνσιν τῆς πορείας των.

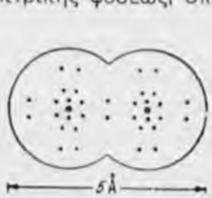
στ) *Σύνδεσις ἀτόμων πρὸς σχηματισμὸν μορίων.* Αἱ δυνάμεις χημικῆς δράσεως ποὺ συγκρατοῦν τὰ ἄτομα κατὰ τὴν συνένωσίν των πρὸς μόρια (ἤτοι, ὅπως λέμε, τὰ ***χημικὰ σθένη*** τῶν ἀτόμων), εἶναι καὶ αὐταὶ ἠλεκτρικῆς φύσεως, ὅπως



Σχ. 88. *Δύο ἄτομα Νέου εἰς ἐπαφήν· αἱ στιγμαὶ παριστάνουν τὰ ἠλεκτρόνια.*



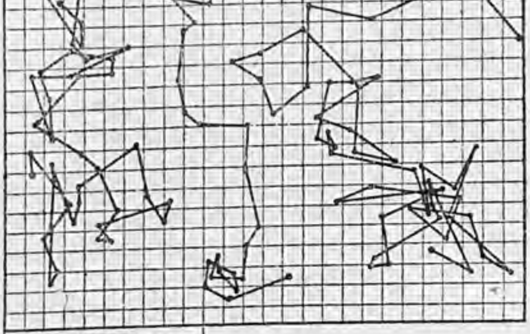
Σχ. 89. *Ἑτεροπολικὴ σύνδεσις εἰς μόριον* NaCl. *ἡ σφαῖρα δράσεως ἔχει διάμετρον* 5,6 Å.



Σχ. 90. *Ὁμοιοπολικὴ σύνδεσις εἰς* Cl_2 *μὲ ἀμοιβαίαν διείσδυσιν τῶν ἠλεκτρονικῶν νεφῶν.*

καὶ αἱ δυνάμεις μεταξὺ πυρῆνος καὶ ἠλεκτρονίων. Συγκριτικὰ πρὸς τὰς δυνάμεις αὐτὰς αἱ δυνάμεις βαρύτητος εἶναι ἐξαφανιστικῶς μικραί. Ἔτσι εἰς τὸ μόριον χλωριούχου νατρίου—NaCl—συγκρατοῦνται μεταξύ των ἓν θετικῶς ἠλεκτροφορτισμένον ἰὸν νατρίου (Na^+) μὲ ἓν ἀρνητικῶς ἠλεκτροφορτισμένον ἰὸν χλωρίου (Cl^-)· τὴν σύνδεσιν αὐτὴν (σχ. 89) τὴν ὀνομάζομεν *ἑτεροπολικήν*. Εἰς τὴν περίπτωσιν ποὺ τὸ μόριον σχηματίζεται μὲ σύνδεσιν δύο οὐδετέρων ἀτόμων, ὅπως π.χ. τὸ μόριον χλωρίου, γίνεται τοῦτο μὲ ἀμοιβαίαν διείσδυσιν τῶν ἠλεκτρονικῶν των νεφώσεων καὶ μὲ ἀντίστοιχον προσέγγισιν τῶν πυρήνων των (σχ. 90). Τὴν σύνδεσιν αὐτὴν τῶν ἀτόμων τὴν λέμε *ὁμοιοπολικήν*· αἱ συνδετικαὶ δυνάμεις εἶναι καὶ εἰς αὐτὴν ἠλεκτρικῆς προελεύσεως. Πέραν τῶν τρόπων τούτων συνδέσεως ἀτόμων πρὸς σχηματισμὸν μορίων πρέπει νὰ δεχθῶμεν καὶ ἄλλους, ἡ μνημόνευσις τῶν ὁποίων ἐκφεύγει τῶν ὁρίων περιληπτικῆς καταγραφῆς.

ζ) Κίνησις τῶν μορίων. Τὰ μόρια ὁποιουδήποτε σώματος εὑρίσκονται διαρκῶς εἰς ἄτακτον κίνησιν, δηλαδὴ κίνησιν κατὰ τὴν ὁποίαν ἕκαστον ἔχει ἰδίαν ταχύτητα ποὺ μόνον συμπτωματικῶς μπορεῖ νὰ εἶναι ὁμοία καὶ εἰς ἄλλα. Ἡ ἐνέργεια τῆς ἀτάκτου καθ' ὅλας τὰς δυνατὰς διευθύνσεις κινήσεως αὐτῆς τῶν μορίων συνιστᾶ (ὅπως ἀναπτύσσεται εἰς τὰ περὶ Θερμότητος) τὸ θερμικὸν περιεχόμενον τοῦ σώματος καὶ δι' αὐτὸ τὴν λέμε καὶ *θερμικὴν* κίνησιν. Παραστατικὴν ἐκδήλωσιν τῆς θερμικῆς κινήσεως ἀποτελεῖ ἡ κίνησις ποὺ παρετήρησε πρῶτος ὁ βοτανολόγος Brown. Πρὸς παρατήρησίν της φέρομεν εἰς τὸ ὀπτικὸν πεδίον μικροσκοπίου σταγόνα ὑγροῦ, εἰς τὸ ὁποῖον αἰωροῦνται σωματίδια (ὁ Brown εἶχε κόνιν γύρεως). Βλέπομεν τότε, ὅτι τὰ σωματίδια αὐτὰ κινοῦνται ἀκαταπαύστως κατὰ διαφόρους διευθύνσεις, ἐμπρὸς ἢ ὀπίσω, δεξιὰ ἢ ἀριστερά, ἄνω ἢ κάτω (σχ. 91). Ἡ κίνησις αὐτὴ γίνεται χωρὶς ἐξωτερικὴν αἰτίαν καὶ δὲν παύει ποτέ. Ὅσον μικρότερα εἶναι τὰ σωματίδια, τόσον ζωηρότερα κινοῦνται. Ἡ κίνησις τῶν σωματιδίων προέρχεται ἐκ τοῦ ὅτι δέχονται ταῦτα ἀναριθμήτους προσκρούσεις τῶν μορίων τοῦ ὑγροῦ, εἰς τὸ ὁποῖον εὑρίσκονται. Τὰ μόρια τοῦ ὑγροῦ, ποὺ ὡς βλήματα ἀπὸ διαφόρους διευθύνσεις προσπίπτουν ἀκανονίστως ἐπὶ τῶν σωματιδίων, εἶναι τόσον μικρὰ ὥστε δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ τὰ ἴδωμεν· ἔχουν ὅμως ἀρκετὰ μεγάλην ποσότητα κινήσεως, διὰ νὰ θέσουν εἰς κίνησιν τὰ σωματίδια ποὺ βλέπομεν μὲ τὸ μικροσκόπιον. Ἐκ τῶν πολυαρίθμων προσκρούσεων ποὺ κάθε σωματίδιον ὑφίσταται καθ' ἑκάστην στιγμὴν ἐκ μέρους τῶν γύρω του μορίων τοῦ ὑγροῦ, τυχαίνει νὰ ὑπάρχουν μερικαὶ ποὺ ἔχουν εἰς κάποιαν στιγμὴν τὴν αὐτὴν φορὰν καὶ συνεπῶς μετακινοῦν τὸ σωματίδιον κατὰ τὴν φορὰν ταύτην. Εὐθὺς ἀμέσως δέχεται τὸ σωματίδιον προσκρούσεις ἄλλων διευθύνσεων καὶ μεταξὺ τούτων μερικὰς ποὺ κατορθώνουν νὰ τὸ μετακινήσουν πρὸς ἄλλην διεύθυνσιν κ.ο.κ. Ἐπειδὴ τὰ μόρια τοῦ ὑγροῦ εἶναι πολὺ πυκνὰ καὶ τὰ διαστήματα ποὺ μποροῦν νὰ διανύουν χωρὶς νὰ προσκρούσουν εἰς ἄλλα μόρια, εἶναι τὸ πολὺ ἴσα μὲ τὴν διάμετρον τοῦ ἀτόμου, τὰ σωματίδια μποροῦν μὲ τὰς καθέκαστα προσκρούσεις νὰ μετακινοῦνται μόνον



Σχ. 91

κατὰ ἐπίσης ἐξαφανιστικῶς μικρὰ διαστήματα. Διὰ νὰ γίνῃ ὁρατὴ κάποια μετακίνησις τοῦ σωματιδίου πρέπει νὰ τὸ παρακολουθοῦμεν ἐπί τινα χρόνον, ὁπότε θὰ τὸ ἴδωμεν εἰς ἄλλην θέσιν. Εἰς τὸ σχ. 91 σημειώνομεν τὰς θέσεις ποὺ καταλαμβάνει σωματίδιον διαμέτρου 5.10^{-5} cm εἰς διαδοχικὰς στιγμὰς ποὺ ἀπέχουν ἡ μία ἀπὸ τὴν ἄλλην ἀνὰ 30 sec. Ἡ τεθλασμένη γραμμὴ ποὺ προκύπτει μὲ ἕνωσιν τῶν διαδοχικῶν τούτων θέσεων δι' εὐθειῶν, δὲν σημαίνει ὅτι καὶ τὸ σωματίδιον κινεῖται ἐπὶ τῶν εὐθυγράμμων τούτων στοιχείων τῆς τεθλασμένης γραμμῆς· διαπιστώνεται ἁπλῶς, ὅτι τοῦτο καταλαμβάνει διαδοχικῶς τὰ ἄκρα τῶν εὐθυγράμμων στοιχείων τῆς τεθλασμένης, ἀλλὰ αἱ τροχιαὶ ποὺ διαγράφει μεταξὺ τῶν καθέκαστα θέσεων εἶναι περιπλοκώτεραι.

η) Διάχυσις καὶ διαπήδησις. Τὸ σχ. 91 μᾶς δείχνει ἐπίσης ὅτι τὰ σωματίδια μὲ τὴν πάροδον τοῦ χρόνου διανύουν ἀρκετὰ μεγάλα διαστήματα καὶ εἰσδύουν ἤ, ὅπως λέμε, ***διαχέονται*** εἰς περιοχάς, ὅπου δὲν ὑπῆρχον προηγουμένως. Κατ' ἀκολουθίαν τῆς ἰδιοκινήσεως αὐτῆς τῶν σωματιδίων, ἔχομεν ὡς ἀποτέλεσμα τὴν τάσιν αὐτῶν νὰ ἐξαπλωθοῦν εἰς πάντα χῶρον, ὅπου ἔχουν τὴν δυνατότητα νὰ εἰσδύσουν. Ὥστε ἡ διάχυσις εἶναι ἀναγκαῖον ἐπακόλουθον τῆς κινήσεως Brown. Ὅσον πυκνοτέρα εἶναι ἡ συσκευασία τῶν μορίων τόσον βραδυτέρα γίνεται ἡ διάχυσις. Τοῦτο ἐξηγεῖ τὸ ὅτι εἰς τὰ ἀέρια ἔχομεν διάχυσιν πολὺ ταχυτέραν ἀπὸ ἐκείνην ποὺ παρατηροῦμεν εἰς τὰ ὑγρά, ἀφοῦ ἡ συσκευασία τῶν μορίων εἶναι εἰς τὰ ἀέρια πολὺ ἀραιοτέρα τῆς εἰς τὰ ὑγρά. Ἂν εἰς διάλυμα θειικοῦ χαλκοῦ, ποὺ ἔχομεν ἐντὸς ἐπιμήκους κυλινδρικοῦ δοχείου, προσθέσωμεν, χωρὶς ἀνατάραξιν, καθαρὸν ὕδωρ θὰ χρειασθῇ μακρὸς χρόνος (ἡμέραι ὁλόκληροι) διὰ νὰ ἐξαπλωθοῦν (διαχυθοῦν) τὰ σωματίδια τοῦ $CuSO_4$ ὁμοιομόρφως καὶ εἰς τὸ ὑπερκείμενον καθαρὸν ὕδωρ· ἐνῶ, ἂν εἰς κυλινδρικὸν δοχεῖον, ποὺ περιέχει βρώμιον, ἐφαρμόσωμεν διὰ τῶν χειλέων του ἀνεστραμμένον ὅμοιον δοχεῖον πλῆρες ὑδρογόνου, παρατηροῦμεν ἐκ τῆς ἐξαπλώσεως τοῦ καστανοχρόου βρωμίου, ὅτι ἡ ὁμοιόμορφος ἀνάμειξις τῶν δύο ἀερίων γίνεται πολὺ ταχύτερα. Ἀκόμη καὶ μεταξὺ στερεῶν μπορεῖ νὰ παρατηρηθῇ διείσδυσις μορίων τοῦ ἑνὸς εἰς τὸ ἄλλο, ἀλλὰ πρὸς τοῦτο ἀπαιτεῖται χρόνος πολὺ μακρότερος (ὁλόκληρα ἔτη).

Ἂν οἱ δύο χῶροι, ποὺ περιέχουν τὰ δύο διάφορα ἀέρια ἢ ὑγρά, χωρίζωνται διὰ πορώδους τοιχώματος καὶ τότε πάλιν γίνεται διείσδυσις διὰ μέσου τῶν πόρων τοῦ χωριστικοῦ τοιχώματος· τὸ φαινόμενον αὐτὸ τὸ λέμε ***διαπήδησιν***.

§ 42. Δυνάμεις ποὺ ἀσκοῦνται μεταξὺ τῶν μορίων. *α) Σφαῖρα δράσεως μοριακῶν δυνάμεων.* Εἰς τὰ ὑγρὰ καὶ στερεὰ σώματα τὰ μόρια συγκρατοῦνται εἰς ὡρισμένας ἀποστάσεις μεταξύ των (διὰ τοῦτο ἔχουν ὡρισμένον ὄγκον). Ἂν βυθίσωμεν τεμάχιον σιδήρου εἰς ὕδωρ καὶ κατόπιν τὸ ἀνασύρωμεν, βλέπομεν νὰ παραμένῃ προσκεκολλημένον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ σιδήρου λεπτὸν στρῶμα ὕδατος. Διὰ νὰ τεμαχίσωμεν στερεὸν σῶμα χρειάζεται νὰ καταβάλωμεν δύναμιν, ποὺ εἰς πολλὰς περιπτώσεις εἶναι πολὺ ἰσχυρά. Αἱ διαπιστώσεις αὗται ὡς καὶ πλῆθος ἄλλων δείχνουν ἀμέσως, ὅτι μεταξὺ τῶν μορίων ὑφίστανται ***ἑλκτικαὶ*** δυνάμεις. Ἡ διαπίστωσις ἐξ ἄλλου κατὰ τὴν ὁποίαν, διὰ νὰ συμπιέσωμεν (ἐλαττώσωμεν τὰς μεταξὺ τῶν μορίων ἀποστάσεις) στερεὰ ἢ ὑγρὰ σώματα, πρέπει νὰ καταβάλωμεν μεγάλας δυνάμεις, ὁδηγεῖ εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι πέραν μιᾶς ὡρισμένης προσεγγίσεως ἐκδηλώνονται μεταξὺ τῶν μορίων ***ἀπωστικαὶ*** δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι ἀνθίστανται εἰς μεγαλυτέραν προσέγγισιν. Ἀπὸ ἐμπειρικὰς διαπιστώσεις γνωρίζομεν σήμερον ὅτι αἱ ἑλκτικαὶ δυνάμεις μεταξὺ τῶν μορίων ἐκμηδενίζονται πρακτικῶς, ὅταν ταῦτα ἀπομακρυνθοῦν ἀπ' ἀλλήλων εἰς ἀποστάσεις ὑπερβαινούσας τὸ μῆκος μερικῶν διαμέτρων τῶν μορίων. Ἂν ἐλαττώνωνται βαθμηδόν αἱ μεταξὺ τῶν καθέκαστα μορίων ἀποστάσεις, ἀρχίζουν νὰ λαμβάνουν αἰσθητὴν τιμὴν αἱ μεταξύ των ἑλκτικαὶ δυνάμεις καὶ ἀποβαίνουν ὅλο καὶ περισσότερον σημαντικαί, ὅσον μικρότεραι γίνονται αἱ ἀποστάσεις. Τοῦτο συνεχίζεται μέχρις ὅτου αἱ ἀποστάσεις μεταξὺ τῶν μορίων φθάσουν εἰς τιμὰς μεγέθους διαμέτρου τῶν μορίων, ὁπότε πλέον ἐκδηλώνονται αἱ ἀπωστικαὶ μεταξύ των δυνάμεις. Αὗται γίνονται ταχύτατα ἐξαιρετικῶς μεγάλαι καὶ θέτουν πρακτικῶς ὅριον εἰς τὴν περαιτέρω προσέγγισιν. Τὰ ὅρια τῶν ἀποστάσεων μεταξὺ τῶν μορίων (ἀνώτερον τὸ τῆς ἐκμηδενίσεως τῶν ἑλκτικῶν δυνάμεων, κατώτερον τὸ τῆς ἀνυπερβλήτου τιμῆς τῶν ἀπωστικῶν) ἐντὸς τῶν ὁποίων ἐκδηλώνονται αἱ μεταξὺ μορίων δυνάμεις, παρέχουν τὴν *σφαῖραν δράσεως* τῶν μοριακῶν δυνάμεων.

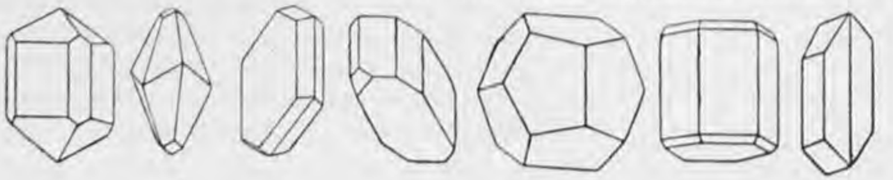
β) Μεσομοριακαὶ δυνάμεις. Συνοχὴ — Συνάφειες. Τὰς ἑλκτικὰς καὶ ἀπωστικὰς δυνάμεις ποὺ ὑφίστανται μεταξὺ τῶν μορίων, τὰς ὀνομάζομεν *μεσομοριακὰς δυνάμεις* ἢ καὶ δυνάμεις τοῦ van der Waals. Εἶναι καὶ αὗται ἠλεκτρικῆς φύσεως ὅπως καὶ αἱ *ἐνδομοριακαὶ* ἢ *χημικαὶ δυνάμεις* ποὺ παίζουν ρόλον εἰς τὸν σχηματισμὸν τῶν μορίων διὰ συνδέσεως ἀτόμων. Αἱ μεσομοριακαὶ δυνάμεις εἶναι πάντως πολὺ ἀσθενέστεραι τῶν ἐνδομοριακῶν καὶ ἔχουν δραστικότητα μόνον εἰς μικρὰς ἀποστάσεις, οὐσιαστικῶς μόνον εἰς τὰ ἀμέσως γειτονικὰ μόρια. Αἱ ἑλκτικαὶ δυνάμεις μεταξὺ μορίων ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ σώματος χαρακτηρίζονται ὡς δυνάμεις *συνοχῆς*, ἐνῶ αἱ μεταξὺ τῶν μορίων διαφόρων σωμάτων λέγονται *δυνάμεις συναφείας*. Ἔτσι λέμε π.χ. ὅτι τὰ μόρια τοῦ ὕδατος ἔχουν συνοχὴν μεταξύ των, ἐνῶ τὰ μόρια τοῦ ὕδατος ἔχουν συνάφειαν μὲ τὰ μόρια σιδήρου. Εἰς τὰς δυνάμεις συναφείας ὀφείλεται ἡ γραφὴ μὲ κιμωλίαν ἐπὶ τοῦ πίνακος, μὲ μελάνην ἐπὶ φύλλου χάρτου κλπ. Ἂν ἡ συνάφεια ἐν σχέσει μὲ τὴν συνοχὴν δὲν εἶναι ἀρκετὰ ἰσχυρά, ὅπως π.χ. εἰς τὴν περίπτωσιν ποὺ τὸ φύλλον χάρτου εἶναι λαδωμένο, τὸ γράψιμο μὲ μελάνην δὲν εἶναι δυνατόν. Ἂν ἀνασύρωμεν ὑαλίνην ράβδον βυθισμένην εἰς ὕδωρ παρατηροῦμεν ὅτι παραμένουν προσκεκολλημέναι ἐπ' αὐτῆς σταγόνες ὕδατος· τοῦτο ἀποδεικνύει ὅτι ἐνεργοῦν συγχρόνως δυνάμεις συνοχῆς (μεταξὺ τῶν μορίων ὕδατος ποὺ ἀποτελοῦν τὰς σταγόνας) καὶ συναφείας (μεταξὺ ὕδατος καὶ ὑάλου). Ὑάλινοι πλάκες μὲ ἐπιμελημένην λείανσιν εἶναι δυνατὸν νὰ συνάπτονται μεταξύ των τόσον καλὰ ὡς ἐὰν ὑπάρχη μεταξύ των συγκολλητικη ὕλη.

γ) Ἡ ἰδιοκίνησις τῶν μορίων συνδυασμένη μὲ τὰς μεταξύ των ἐνεργούσας δυνάμεις, τ.ἔ. ἡ κινητικὴ καὶ ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια τῶν μορίων καθορίζει τὴν φυσικὴν κατάστασιν τῆς ὕλης. Εἰς κάθε σῶμα ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τῶν μορίων γίνεται ὑπεράνω μιᾶς ὡρισμένης διὰ τὸ σῶμα θερμοκρασίας (τῆς κρισίμου θερμοκρασίας τοῦ σώματος) τόσον μεγάλη, ὥστε δὲν συγκρατοῦνται πλέον τὰ μόρια μεταξύ των (ὑπερνικᾶται ἡ λόγω τῶν μεσομοριακῶν δυνάμεων δυναμικὴ ἐνέργεια τῶν μορίων) καὶ τὸ σῶμα ἔχει τὴν ἀερίαν κατάστασιν. Κάτω τῆς θερμοκρασίας αὐτῆς καὶ μιᾶς ὡρισμένης συμπιέσεως ἡ ἰδιοκίνησις τῶν μορίων ἀνακόπτεται ὑπὸ τῶν μεσομοριακῶν δυνάμεων εἰς βαθμὸν ὥστε νὰ περιπίπτη τὸ σῶμα εἰς ὑγρὰν κατάστασιν. Ἂν ἡ ἐλάττωσις τῆς θερμοκρασίας προχωρήση ἀκόμη περισσότερον ἔρχεται στιγμὴ ποὺ ἡ ἰδιοκίνησις τῶν μορίων περιορίζεται τόσον πολύ, ὥστε κάθε μόριον τοῦ σώματος κραδαίνεται μόνον εἰς ὡρισμένην θέσιν ἰσορροπίας καὶ τὸ σῶμα τότε εἶναι στερεόν.

VII. Φαινόμενα τῆς τεμαχιδιακῆς δομῆς εἰς τὰ στερεὰ

§ 43. **Κρυσταλλικὰ καὶ ἄμορφα σώματα.** α) Τὰ πλεῖστα τῶν σωμάτων εἰς τὴν στερεὰν κατάστασιν ἐμφανίζονται μὲ ἐξωτερικῶς κανονικὰ σχήματα τὰ ὁποῖα χαρακτηρίζομεν ὡς ***κρυσταλλικά***. Ἔτσι τὸ μαγειρικὸν ἅλας (NaCl) ἀποτελεῖται ἀπὸ κρυστάλλους κυβικοῦ σχήματος, ὁ ἀδάμας ἔχει τὸ σχῆμα ὀκταέδρων, ὁ χαλαζίας ἑξαέδρων κλπ. Τὰ κρυσταλλικὰ σώματα διασπῶνται σχετικῶς εὐκολώτερον παραλλήλως πρὸς τὰς ἕδρας των· παρουσιάζουν, ὅπως λέμε, ***σχισμόν***. Διὰ τοῦτο ὅταν συντρίβωνται προκύπτουν πάλι κρύσταλλοι τῆς αὐτῆς μορφῆς, ἀλλὰ μικροτέρων διαστάσεων. Εἰς περιπτώσεις ποὺ ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν ἐξωτερικῶν δυνάμεων ὑφίστανται ***παραμορφώσεις***, διαπιστώνομεν ὅτι καὶ πάλιν διατηροῦνται αἱ γωνίαι ὑπὸ τὰς ὁποίας συναντῶνται αἱ ἕδραι των εἰς τοὺς κανονικοὺς κρυστάλλους.

Εἰς κάθε κρύσταλλον διακρίνομεν ***κρυσταλλογραφικοὺς ἄξονας***, δηλαδὴ νοητὰς γραμμὰς διὰ μέσου τοῦ κρυστάλλου, τοιαύτας ὥστε κάθε ἐπίπεδον ποὺ διέρχεται δι' ἑκάστης τούτων χωρίζει τὸν κρύσταλλον εἰς δύο κατοπτρικῶς ὅμοια ἡμίση. Ἀντιστοίχως πρὸς τὸν ἀριθμὸν καὶ τὰς μεταξὺ των κλίσεις τῶν κρυσταλλογραφικῶν ἀξόνων κατατάσσομεν τοὺς κρυστάλλους εἰς ἑπτὰ κατηγορίας ποὺ τὰς λέμε ***κρυσταλλικὰ συστήματα***, ἤτοι: 1) τὸ ***κυβικὸν*** μὲ τρεῖς ἴσους καὶ καθέτους μεταξὺ των ἄξονας, ὅπως εἶναι εἰς κρυστάλλους τοῦ πυρίτου (σχ. 92α)· εἰς τὸ σύστημα τοῦτο κρυσταλλώνονται καὶ ὁ μόλυβδος, ἀδάμας, σίδηρος, χρυσός, χαλκός, ἄργυρος, λευκόχρυσος, μαγειρικὸν ἅλας κ.ἄ., 2) τὸ ***ἑξαγωνικὸν*** μὲ ἕνα ***κύριον*** ἄξονα κάθετον ἐπὶ τρεῖς ἄλλους οἱ ὁποῖοι κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, εἶναι ἴσοι μεταξὺ των καὶ τέμνονται ἀνὰ δύο ὑπὸ γωνίαν 60°, ὅπως εἶναι εἰς κρυστάλλους ἀπατίτου (σχ. 92β), ψευδαργύρου, μαγνησίου, ἰωδιούχου ἀργύρου κ.ἄ., 3) τὸ ***τετραγωνικὸν*** μὲ ἕνα κύριον ἄξονα κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον δύο ἄλλων ποὺ εἶναι κάθετοι καὶ ἴσοι μεταξὺ των, ὅπως εἶναι εἰς κρυστάλλους κασσιτέρου (σχ. 92γ), βορίου, ζιρκονίου, οὐρίας κ.ἄ.,

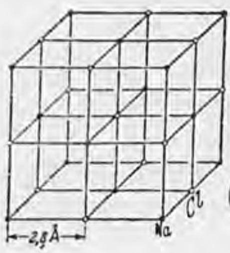


α β γ δ ε ζ η

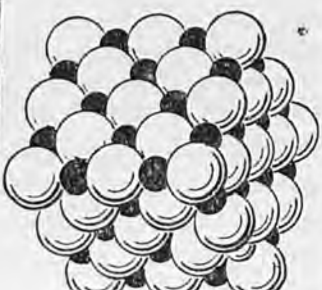
Σχ. 92

4) τὸ ***ρομβικὸν*** μὲ τρεῖς ἄξονας καθέτους τὸν ἕνα ἐπὶ τοῦ ἄλλου, ἀλλ' ἀνίσους μεταξὺ των, ὅπως εἶναι εἰς κρυστάλλους ἀραγωνίτου (σχ. 92δ), ἰωδίου, θείου, νιτρικοῦ ἀργύρου, πικρικοῦ ὀξέως κ.ἄ., 5) τὸ ***τριγωνικὸν*** μὲ ἴσους ἀλλ' ὄχι καθέτους μεταξὺ των ἄξονας, ὅπως εἶναι εἰς κρυστάλλους ἀσβεστίτου (σχ. 92ε), ἀντιμονίου, ἀρσενικοῦ, βισμουθίου, γραφίτου, πάγου, χαλαζίου κ.ἄ., 6) τὸ ***μονοκλινὲς*** μὲ τρεῖς ἄξονας ἀνίσους μεταξὺ των, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ εἷς κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν δύο ἄλλων ποὺ τέμνονται ὑπὸ γωνίαν διάφορον τῆς ὀρθῆς, ὅπως εἶναι εἰς κρυστάλλους γύψου (σχ. 92ζ), σόδας, μαρμαρυγίου, καλαμοσακχάρου, τρυγικοῦ ὀξέως κ.ἄ. καὶ 7) τὸ ***τρικλινὲς*** μὲ τρεῖς ἄξονας ποὺ οὔτε ἴσοι οὔτε κάθετοι μεταξὺ των εἶναι, ὅπως συμβαίνει εἰς κρυστάλλους θειικοῦ χαλκοῦ (σχ. 92η), βορικοῦ ὀξέος, διχρωμικοῦ καλίου κ.ἄ.

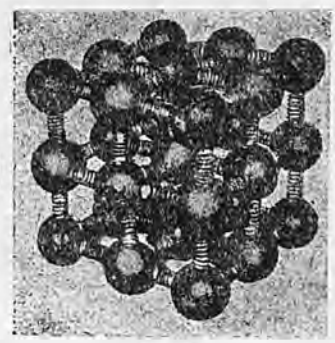
Ἡ πειραματικὴ ἔρευνα μὲ ἀκτῖνας Röntgen (ἡ διαπραγμάτευσις τούτων γίνεται εἰς ἄλλο μέρος τῆς Φυσικῆς) διαπιστώνει, ὅτι τὰ ἄτομα ποὺ συγκροτοῦν τὴν ὕλην ἔχουν εἰς τὰ στερεὰ μίαν κανονικὴν διάταξιν, τὴν διαμόρφωσιν τῆς ὁποίας ὀνομάζομεν *κρυσταλλικὸν πλέγμα*. Εἰς αὐτὸ ἡ τακτοποίησις ποὺ ἔχουν τὰ ἄτομα κατὰ μίαν τυχοῦσαν διεύθυνσιν ἐπαναλαμβάνεται ὁμοιομόρφως καὶ κατὰ πᾶσαν ἄλλην παράλληλόν της. Μποροῦμε ἔτσι νὰ θεωρήσωμεν τὸ σύστημα τῶν ἀτόμων ποὺ συγκροτοῦν τὸν κρύσταλλον ὡς προκῦπτον ἀπὸ τὴν ἐπανάληψιν σειρᾶς στοιχείων τοῦ κρυσταλλικοῦ πλέγματος εἰς τρόπον, ὥστε νὰ διακρίνωμεν εἰς αὐτὸ ἐπάλληλα ἐπίπεδα, εἰς ἕκαστον τῶν ὁποίων τὰ ἄτομα κατέχουν τοὺς κόμβους δικτυωτοῦ πλέγματος. Εἰς τὸ σχ. 93 παριστάνεται τὸ κρυσταλλικὸν πλέγμα τῆς ἑνώσεως NaCl (μαγειρικοῦ ἅλατος). Εἰς αὐτὸ τὰ ἰόντα Na^{+} μὲ θετικὸν ἠλεκτρικὸν φορτίον καὶ ἠλεκτραρνητικὰ ἰόντα Cl^{-} ἐναλλάσσονται κανονικῶς εἰς ἑκάστην τῶν εὐθειῶν ἢ ἐπιφανειῶν ποὺ διαμορφώνουν τὸ πλέγμα. Ἡ συσσωμάτωσις τῶν σωματιδίων παρέχεται ἀπὸ τὸ σχ. 94, εἰς τὸ ὁποῖον οἱ μελανοὶ κυκλίσκοι παριστάνουν πυρῆνας ἰόντων Na^{+}, ἐνῶ οἱ λευκοὶ τοιούτους τῶν ἰόντων Cl^{-}. Ἡ μεταξὺ τῶν πυρήνων ἀπόστασις εἶναι 0,28 μμ ἐνῶ τὰ γύρω ἀπὸ ἕκαστον πυρῆνα Na ἠλεκτρόνια εἰσδύουν εἰς τὴν περιοχήν,



Σχ. 93



Σχ. 94



Σχ. 95

ὅπου ἐκτείνεται τὸ περὶ τὸν πυρῆνα Cl νέφος ἠλεκτρονίων. Κάθε ἰὸν νατρίου περιβάλλεται ἀπὸ 6 ἰόντα χλωρίου καὶ κάθε ἰὸν χλωρίου (Cl^{-}) ἀπὸ 6 ἰόντα νατρίου (Na^{+}). Κατὰ ταῦτα τὰ ἐποικοδομητικὰ στοιχεῖα τοῦ κρυστάλλου εἶναι ἰόντα Na^{+} καὶ Cl^{-} καὶ ὁλόκληρος ὁ κρύσταλλος μπορεῖ νὰ θεωρηθῇ ὡς σχετικῶς τεράστιον πολυμοριακὸν συγκρότημα (nNaCl). Ὑπάρχουν ὡς τόσο οὐσίαι (αἱ πλεῖσται τῶν ὀργανικῶν), εἰς τὰς ὁποίας ὁ κρύσταλλος ἐποικοδομεῖται ἀπὸ μόρια *(μοριακὸν πλέγμα)*· Εἰς τὰς οὐσίας αὐτὰς τὰ συστατικὰ συγκρατοῦνται μεταξὺ των μὲ μεσομοριακὰς δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι εἶναι πολὺ ἀσθενέστεραι ἀπὸ τὰς μεταξὺ τῶν ἀτόμων δυνάμεις χημικῶν ἑνώσεων.

Ἡ καθ' ὡρισμένους νόμους κατασκευὴ πλέγματος εἶναι οὐσιῶδες γνώρισμα τῆς στερεᾶς καταστάσεως τῆς ὕλης καὶ διὰ τοῦτο καλοῦμεν τὴν κατάστασιν αὐτὴν καὶ *κρυσταλλικήν*. Πλεῖστα ἐν τούτοις σώματα, ὅπως εἶναι τὰ μέταλλα, δὲν σχηματίζονται μὲ κρυστάλλους μιᾶς ὡρισμένης μορφῆς. Ἀποτελοῦνται ἀπὸ συσσώρευσιν ἐλαχίστων κρυσταλλιδίων, τὰ ὁποῖα συσσωματοῦνται μὲ ἀκαθόριστον τάξιν καὶ σχηματίζουν τὰ *κρυσταλλινικά*, ὅπως λέμε, στερεά. Εἰς αὐτὰ τὸ μέγεθος τῶν καθέκαστα κρυσταλλικῶν κοκκίων καὶ ἡ συσκευασία των ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὴν μηχανικὴν καὶ θερμικὴν προεξεργασίαν τοῦ ὑλικοῦ.

Κάθε ἄτομον, ἰὸν ἢ μόριον εἰς τὸ κρυσταλλικὸν πλέγμα συγκρατεῖται εἰς ὡρισμένην θέσιν διὰ τῶν ἠλεκτρικῶν δυνάμεων ποὺ ἐξασκοῦνται μεταξὺ αὐτοῦ καὶ τῶν γειτονικῶν του, ὡς ἐὰν ἦτο συνδεδεμένον μὲ αὐτὰ δι' ἐλατηρίων, ὅπως δείχνεται παραστατικὰ εἰς τὸ σχ. 95. Ἡ ἰδιοκίνησις τῶν μορίων εἶναι τόσον περιωρισμένη, ὥστε κάθε στοιχειῶδες σωματίδιον μπορεῖ νὰ ἐκτελῇ πλέον μόνον κραδασμοὺς περὶ τὴν θέσιν ἰσορροπίας του. Τὸ πλάτος τῶν κραδασμῶν τούτων αὐξάνεται μετὰ τῆς θερμοκρασίας καὶ εἰς ὡρισμένον διὰ κάθε στερεὸν ὕψος τῆς θερμοκρασίας (σημεῖον τήξεως) καταρρέει τὸ κρυσταλλικὸν συγκρότημα καὶ τὸ σῶμα παύει νὰ εἶναι στερεόν.

β) Ἐκτὸς τῶν κρυσταλλικῶν στερεῶν σωμάτων ὑπάρχουν καὶ πρακτικῶς στερεά, εἰς τὰ ὁποῖα τὰ ἄτομα δὲν σχηματίζουν κανονικῶς διατεταγμένον πλέγμα. Τὰ στερεὰ αὐτὰ τὰ λέμε ***ἄμορφα***· εἰς αὐτὰ ὑπάγονται ἡ ὕαλος, τὸ καουτσούκ, ὅλα τὰ εἴδη φυσικῶν καὶ τεχνητῶν ρητινῶν. Κατ' ἀντίθεσιν πρὸς τὰ κρυσταλλικὰ τὰ ἄμορφα στερεὰ δὲν τήκονται εἰς ὡρισμένην θερμοκρασίαν, ἀλλὰ μαλακώνουν ὅλο καὶ περισσότερον, ὅταν ἀνέρχεται ἡ θερμοκρασία των. Ἔτσι ὁμοιάζουν περισσότερον πρὸς ὑγρὰ ποὺ μὲ τὴν ἀνύψωσιν τῆς θερμοκρασίας γίνονται ὅλο καὶ περισσότερον λεπτόρρευστα ἤ, ὅπως λέμε, ἐλαττώνουν τὴν ***ἐσωτερικήν των τριβήν***. Θεωροῦμεν λοιπὸν τὰ ἄμορφα σώματα ὡς ***κατεψυγμένα ὑγρὰ*** ποὺ ἔχουν τόσον μεγάλην ἐσωτερικὴν τριβήν, ὥστε νὰ φαίνωνται πρακτικῶς ὡς στερεά. Ἡ ἰδιοκίνησις τῶν μορίων ἀμόρφου στερεοῦ εἶναι περιωρισμένη (παγωμένη) εἰς βαθμόν, ὥστε νὰ μὴ μποροῦν τὰ μόρια νὰ φθάσουν εἰς τὰς ὡρισμένας θέσεις κρυσταλλικοῦ πλέγματος εἰς πεπερασμένον χρόνον. Ἡ τάξις ποὺ ἔχουν τὰ μόρια εἰς τὸ ἄμορφον σῶμα εἶναι ἐκείνη ποὺ δίδεται ἀπὸ τὰς θέσεις ποὺ εἶχαν εἰς τὴν ὑγρὰν κατάστασιν πρὶν «παγώσουν» αἱ ἰδιοκινήσεις των.

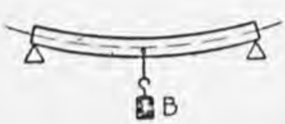
§ 44. Ἐλαστικότης. α) ***Ἐλαστικὰ καὶ μὴ ἐλαστικὰ σώματα***. Εἰς τὰ φαινόμενα ποὺ ἐξετάσαμεν ὡς τώρα, ἐθεωρήσαμεν τὰ στερεὰ σώματα ὡς μὴ παραμορφούμενα ἀπὸ τὴν ἐπίδρασιν ἐξωτερικῶν δυνάμεων. Εἰς τὴν πραγματικότητα ὅμως τὰ σώματα δὲν εἶναι ἀνένδοτα, ἀλλὰ μεταβάλλουν τὴν μορφὴν ἢ καὶ τὸν ὄγκον των, ὅταν ὑπόκεινται εἰς τὴν ἐπίδρασιν ἐξωτερικῶν δυνάμεων. Ἡ διαπίστωσις αὐτὴ εἶναι σύμφωνος μὲ ὅσα εἴπαμε παραπάνω διὰ τὴν δομὴν τῶν στερεῶν σωμάτων. Τὰ ἄτομα καὶ μόρια τοῦ σώματος, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν ἐξωτερικῶν δυνάμεων μετακινοῦνται ἀπὸ τὰς θέσεις ἰσορροπίας των πρὸς ἄλλας ποὺ παρέχουν τὴν νέαν μορφὴν τοῦ σώματος. Ἀλλὰ τὰ σωματίδια ποὺ ἀποτελοῦν τὸ σῶμα συγκρατοῦνται μεταξύ των μὲ μεσομοριακὰς δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι ἀντιτίθενται εἰς τὴν μετακίνησιν αὐτὴν καὶ τείνουν νὰ ἐπαναφέρουν τὰ σωματίδια εἰς τὰς ἀρχικάς των θέσεις ἰσορροπίας. Ὀνομάζομεν ***ἐλαστικὰς*** τὰς δυνάμεις ποὺ ἀναφαίνονται, ὅταν τὸ σῶμα ὑφίσταται παραμορφώσεις ποὺ ἐξαφανίζονται, ὅταν παύσουν νὰ ἐνεργοῦν αἱ δυνάμεις, ἀπὸ τὰς ὁποίας προεκλήθησαν. Εἰς τὰς ἐλαστικὰς δυνάμεις ὀφείλεται τὸ ὅτι τὸ σῶμα ἀναλαμβάνει πάλιν τὴν ἀρχικήν του μορφήν, ὅταν παύσῃ ἡ ἐπίδρασις τῶν παραμορφωτικῶν δυνάμεων. Κατ' ἀντιστοιχίαν χαρακτηρίζομεν ὡς ἐλαστικὰς καὶ τὰς παραμορφώσεις ποὺ δὲν παραμένουν εἰς τὸ τὸ σῶμα, ὅταν ἐκλείψουν τὰ αἴτια ποὺ τὰς προεκάλεσαν. Σπειροειδὲς ἐλατήριον ὑφίσταται ἐλαστικὰς παραμορφώσεις, ὅταν τὸ συμπιέζωμεν ἢ τὸ κάμπτωμεν μέχρις ἑνὸς ὁρίου ποὺ εἶναι γενικῶς διάφορον εἰς τὰ διάφορα εἴδη τῆς ὕλης. Μὲ ἄλλα λόγια αἱ ἐλαστικαὶ παραμορφώσεις εἶναι παροδικαί, ἐνῶ ἐκεῖναι ποὺ παραμένουν μονίμως εἰς τὸ σῶμα λέγονται ***πλαστικαὶ*** ἢ ***μὴ ἐλαστικαὶ*** παραμορφώσεις. Διὰ κάθε σῶμα ὑπάρχει ἓν μέγιστον παραμορφώσεως, μέχρι τοῦ ὁποίου εἶναι αὕτη ἐλαστική. Τὸ μέγιστον τοῦτο τὸ λέμε ***ὅριον ἐλαστικότητος*** τοῦ σώματος. Πέραν τούτου ἡ παραμόρφωσις παραμένει εἴτε μερικῶς εἴτε ἐξ ὁλοκλήρου καὶ μετὰ τὴν παῦσιν ἐπενεργείας τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων ποὺ τὴν ἐπέβαλον. Ἐπὶ πλέον παρατηρεῖται ὅτι ἡ ***ἐλαστικὴ παραμόρφωσις*** οὔτε προσδίδεται ὁλόκληρος ἀμέσως μόλις ἐπενεργήσουν αἱ ἐπιφέρουσαι αὐτὴν ἐξωτερικαὶ δυνάμεις, οὔτε (πολὺ περισσότερον) ἀποβάλλεται ἐξ ὁλοκλήρου εὐθὺς μετὰ τὴν παῦσιν αὐτῶν. Χρειάζεται, προκειμένου ἰδίως περὶ παραμορφώσεων ποὺ πλησιάζουν εἰς τὸ ὅριον ἐλαστικότητος καὶ διατηροῦνται ἐπὶ πολύ, νὰ παρέλθῃ ἀρκετὸς χρόνος διὰ τὴν συμπλήρωσιν ἢ τὸν πλήρη ἐξαφανισμὸν τῆς παραμορφώσεως. Τὴν καθυστέρησιν αὐτὴν τῆς συμπληρώσεως τοῦ φαινομένου τὴν λέμε ***ἐλαστικὴν ὑστέρησιν***.

Τὰ διάφορα σώματα δείχνουν σημαντικὰς διαφορὰς εἰς τὰς ἐλαστικάς των ἰδιότητας. Μεγάλην ἐλαστικότητα ἔχει π.χ. ὁ χάλυψ, ἐνῶ σώματα ἀπὸ μόλυβδον, ἄργιλλον ἢ κηρὸν ὑφίστανται μονίμους παραμορφώσεις, ἀκόμη καὶ ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν πολὺ ἀσθενῶν δυνάμεων. Εἰς τὴν πραγματικότητα τὰ σώματα δὲν εἶναι οὔτε ἀπολύτως ἐλαστικὰ οὔτε ἀπολύτως πλαστικά. Πάντως, ὅταν ἔχωμεν ἐλαστικὴν παραμόρφωσιν, τὸ σῶμα ἐγκλείει δυναμικὴν ἐνέργειαν, ἀφοῦ εὑρίσκεται ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν ἐλαστικῶν δυνάμεων.

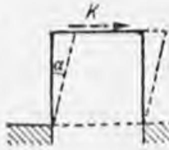
β) Εἴδη ἐλαστικῶν παραμορφώσεων. Ἀντιστοίχως πρὸς τὸ εἶδος τῆς προκαλουμένης ἐλαστικῆς παραμορφώσεως διακρίνομεν ἐλαστικότητα 1) ἐφελκυσμοῦ (ἐπιμηκύνσεως) ἢ θλίψεως (ἐπιβραχύνσεως) 2) κάμψεως καὶ λυγισμοῦ, 3) ὀλισθήσεως καὶ στρέψεως. (Εἰς τὰ εἴδη αὐτὰ ἐλαστικῶν φαινομένων δέον νὰ προστεθῇ καὶ ἡ ἐλαστικότης μεταβολῆς τοῦ ὄγκου, ἡ ὁποία προκειμένου περὶ ὑγρῶν ἢ ἀερίων ἔχει ***μόνον αὐτὴ*** δυνατότητα ἐκδηλώσεως, ἀφοῦ ταῦτα στεροῦνται ὡρισμένου σχήματος).

Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ἡ δύναμις ποὺ τὴν ἐπιβάλλει ἐνεργεῖ κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς πλέον ἐξεχούσης γραμμικῆς διαστάσεως (μήκους) τοῦ σώματος (ράβδου ἢ στήλης) καὶ ἀντιστοίχως πρὸς τὴν φοράν της ἐπιφέρει ἐπιμήκυνσιν ἢ ἐπιβράχυνσιν τῆς διαστάσεως ταύτης. Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν ἡ δύναμις (σχ. 96 καὶ 97) ἐπιφέρει καμπύλωσιν τῆς πλέον ἐξεχούσης διαστάσεως τοῦ σώματος (δοκοῦ). Κατὰ τὴν καμπύλωσιν ταύτην (κάμψιν) τὰ καθέκαστα σημεῖα κατὰ μῆκος τῆς παραμορφουμένης διαστάσεως ἐκτρέπονται καθέτως πρὸς τὴν ἀρχικήν της διεύθυνσιν εἰς ἀποστάσεις τόσον μεγαλυτέρας, ὅσον περισσότερον ἀπέχουν ἀπὸ τὰ σημεῖα στηρίξεως· ἡ μεγίστη ἐκ τῶν ἀποστάσεων τούτων παρέχει τὸ ***βέλος κάμψεως***. Ἂν ἡ ἐπιφέρουσα τὴν κάμψιν δύναμις P (σχ. 96) ἔχει τὴν διεύθυνσιν τοῦ βέλους κάμψεως BC, λέμε ὅτι τὸ σῶμα ὑφίσταται ***κάμψιν***, ἐνῶ

Σχ. 96



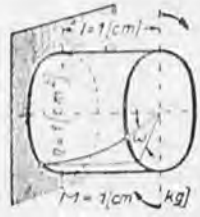
Σχ. 97



Σχ. 98

λέμε ***λυγισμὸν*** τὴν καμπύλωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ δύναμις ἐνεργεῖ κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς καμπτομένης διαστάσεως, ἤτοι καθέτως πρὸς τὸ βέλος κάμψεως.

Τέλος, ὅταν ἡ δύναμις K (σχ. 98) ἢ τὸ ζεῦγος δυνάμεων (σχ. 99) ἐνεργεῖ ἐπὶ σώματος ποὺ στηρίζεται ἀκλονήτως ἐπὶ μιᾶς ἕδρας του κατὰ τρόπον, ὥστε νὰ κεῖται ἐπὶ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν ἕδραν τῆς στηρίξεως, προκαλεῖται παραμόρφωσις, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν ***ὀλίσθησιν*** (σχ. 98) ἢ ***στρέψιν*** (σχ. 99). Μέτρον



Σχ. 99

τῆς παραμορφώσεως εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν εἶναι ἡ γωνία ὀλισθήσεως ***α*** (σχ. 98) ἢ ἡ γωνία στρέψεως ***ω*** (σχ. 99).

γ) Νόμος τοῦ H o o k e. Εἰς πάσας τὰς περιπτώσεις ἐλαστικῆς παραμορφώσεως ἀποδεικνύεται πειραματικῶς ὅτι ἰσχύει ὁ νόμος ποὺ διετύπωσε τὸ 1676 ὁ Robert Hooke, κατὰ τὸν ὁποῖον: ***Ἡ ἐλαστικὴ παραμόρφωσις εἶναι ἀνάλογος τῆς δυνάμεως ποὺ τὴν προκαλεῖ***. Ἐφαρμογὴν τούτου ἔχομεν εἰς τὰ δυναμόμετρα (σχ. 18).

δ) Συντελεστὴς καὶ μέτρον ἐλαστικότητος. 1) Εἰς τὴν περίπτωσιν ἐφελκυσμοῦ ἢ θλίψεως εὑρίσκεται πειραματικῶς ὅτι ἡ ἐπιμήκυνσις ἢ ἐπιβράχυνσις Δl ράβδου, τὴν ὁποίαν προκαλεῖ δύναμις K, εἶναι ἀνάλογος τοῦ μήκους l καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς ἐγκαρσίας τομῆς q τῆς ράβδου. Εἶναι δηλαδή: $\Delta l = \varepsilon K\, l/q$ (54)
ἂν ε παριστάνῃ συντελεστὴν τῆς ἀναλογίας, τὸν ὁποῖον ὀνομάζομεν ***συντελεστὴν ἐλαστικότητος***. Ἂν τὸ πηλίκον $K/q = T$ (ἤτοι τὴν ἐπὶ τῆς μονάδος ἐγκαρσίας τομῆς ἐπιφερομένην δύναμιν) τὸ ὀνομάσωμεν ***τάσιν*** καὶ τὸν λόγον $\Delta l/l = \lambda$ (ἤτοι τὴν ἐπιμήκυνσιν ποὺ ὑφίσταται ἡ μονὰς τοῦ μήκους) ***εἰδικὴν ἐπιμήκυνσιν***, ἡ παραπάνω σχέσις

παίρνει τὴν ἁπλουστέραν μορφήν : $T=(1/\varepsilon).\lambda=E.\lambda$ (54')
εἰς τὴν ὁποίαν τὸ μέγεθος E $(=1/\varepsilon)$ ὀνομάζεται ***μέτρον ἐλαστικότητος ἢ μέτρον*** Young. Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν προκύπτει ὅτι διὰ $\lambda=1$ θὰ εἶναι $E=T$. Ἤτοι : ***Τὸ μέτρον ἐλαστικότητος εἶναι ἴσον μὲ τὴν τάσιν*** (τὴν δύναμιν ποὺ ἐνεργεῖ ἐπὶ τῆς μονάδος ἐγκαρσίας τομῆς τῆς ράβδου) ***ποὺ ἀπαιτεῖται διὰ τὸν διπλασιασμὸν τοῦ μήκους*** ($\lambda=\Delta l/l=1$, ὅθεν $\Delta l=l$), ***ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι καὶ διὰ μίαν τόσον μεγάλην ἐπιμήκυνσιν ἐξακολουθεῖ νὰ ἰσχύῃ ὁ νόμος*** Hooke (νὰ εἶναι ἐλαστικὴ ἡ παραμόρφωσις). Ἐξ ἄλλου ἐκ τῆς σχέσεως $T=E.\lambda$ ἢ $E=T/\lambda$ εὑρίσκομεν ὅτι τὸ μέτρον Young E ἔχει τὰς διαστάσεις τῆς τάσεως T, ἀφοῦ ἡ εἰδικὴ ἐπιμήκυνσις λ (ὡς λόγος ὁμοειδῶν μεγεθῶν) εἶναι καθαρὸς ἀριθμός. Θὰ ἐκφράζεται λοιπὸν εἰς μονάδας δυνάμεως κατὰ μονάδα ἐπιφανείας. Εἰς τὴν Τεχνικὴν ἐκφράζεται εἰς kg^*/mm^2.

ε) Ἀριθμὸς τοῦ Poisson. Κατὰ τὸν ἐφελκυσμὸν σύρματος παρατηρεῖται ὅτι εἰς ἐπιμήκυνσιν Δl λαμβάνει χώραν σμίκρυνσις Δd τῆς διαμέτρου d τῆς ἐγκαρσίας τομῆς τοῦ σύρματος. Ἂν ἀντιστοίχως πρὸς τὴν εἰδικὴν ἐπιμήκυνσιν ($\lambda=\Delta l/l$) ὀνομάσωμεν ***εἰδικὴν συστολὴν*** τὸν λόγον $\Delta d/d=\delta$, εὑρίσκομεν πειραματικῶς ὅτι ἰσχύει ἡ σχέσις : $\Delta d/d=\mu.\Delta l/l$ ἢ $\boldsymbol{\delta=\mu.\lambda}$ (55)
Ὁ συντελεστὴς μ $(=\delta/\lambda)$ τῆς σχέσεως (55) εἶναι καθαρὸς ἀριθμὸς (δὲν ἔχει φυσικὰς διαστάσεις) ὡς λόγος δύο καθαρῶν ἀριθμῶν. Ὀνομάζεται ***ἀριθμὸς τοῦ*** Poisson καὶ ἔχει τιμὰς κυμαινομένας ἀπὸ 0,2 μέχρι 0,5. Διὰ $\mu=0,5$ ὁ ὄγκος τοῦ σώματος παραμένει σταθερός, ἐνῶ διὰ μικροτέρας τιμὰς τοῦ μ ὁ ὄγκος αὐξάνεται κατὰ τὸν ἐφελκυσμὸν καὶ ἐλαττώνεται κατὰ τὴν θλίψιν.

στ) Ἐλαστικότης λυγισμοῦ καὶ κάμψεως. Εἰς τὴν περίπτωσιν λυγισμοῦ ἢ κάμψεως εὑρίσκεται πειραματικῶς ὅτι τὸ βέλος κάμψεως ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν δυνάμεως K εἶναι ἀνάλογον τοῦ κύβου τοῦ μήκους l τῆς ὑφισταμένης τὴν καταπόνησιν ράβδου καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογον τοῦ πλάτους b καὶ τῆς τρίτης δυνάμεως τοῦ ὕψους h αὐτῆς. [Ὡς πλάτος λαμβάνεται ἡ διάστασις ἐκείνη τῆς ἐγκαρσίας τομῆς ποὺ εἶναι κάθετος πρὸς τὴν διεύθυνσιν τοῦ βέλους κάμψεως καὶ ὡς ὕψος ἐκείνη ποὺ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ βέλος κάμψεως]. Ἔτσι τὸ βέλος κάμψεως s παρέχεται ἀπὸ τὸν τύπον :
διὰ στήριξιν εἰς τὸ ἓν ἄκρον (σχ. 96): $s=(4/E).K.l^3/b.h^3$ (56)
καὶ διὰ στήριξιν εἰς τὰ δύο ἄκρα (σχ. 97): $s=(1/4E).K.l^3/b.h^3$ (56')
(Εἰς τὰς σχέσεις ταύτας τὸ E παριστάνει τὸ μέτρον Young).

Εἶναι εὐνόητον ὅτι κατὰ τὴν κάμψιν τῆς ράβδου τὰ κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ μήκους της στρώματα ὑλικοῦ, ἐκ τῶν ὁποίων δύναται νὰ θεωρηθῇ ὅτι ἀποτελεῖται, ὑφίστανται διαφόρους καταπονήσεις· τὰ εἰς τὸ κοῖλον τῆς καμπυλώσεως ἐπιβραχύνονται, ἐνῶ τὰ ἐξωτερικὰ εἰς τὸ κυρτὸν τῆς καμπυλώσεως ἐπιμηκύνονται· ἐκ τούτου προκύπτει ὅτι τὰ ἐνδιάμεσα στρώματα οὔτε θὰ ἐπιμηκύνωνται οὔτε θὰ βραχύνωνται, ἤτοι δὲν θὰ ὑφίστανται καταπόνησιν. Αὐτὰ ἀποτελοῦν λοιπὸν μίαν οὐδετέραν ζώνην τῆς ράβδου, ἡ ὁποία οὐδὲν προσφέρει εἰς τὴν ἀντίστασιν τῆς ράβδου κατὰ τὴν κάμψιν της. (Τὰ ὀστᾶ μὲ τὸ νὰ εἶναι κοῖλα καὶ συνεπῶς ἐλαφρότερα δὲν χάνουν ἀπὸ τὴν ἀνθεκτικότητά των εἰς τὰς κάμψεις).

ζ) Ἐλαστικότης στρέψεως. Εἰς τὴν περίπτωσιν ὀλισθήσεως εὑρίσκεται ὅτι ἡ γωνία ὀλισθήσεως α (σχ. 98) εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως q καί, ὅπως καὶ εἰς τὰς ἄλλας περιπτώσεις, ἀνάλογος τῆς δυνάμεως K. Ἤτοι εἶναι : $\alpha=(1/F).(K/q)$ (57) (ἂν F παριστάνῃ τὸ ***μέτρον στρέψεως*** ἀντίστοιχον τοῦ μέτρου Young). Ἂν ὀνομάσωμεν ***ἐφαπτομένην τάσιν*** T_t τὸ πηλίκον K/q, ἡ σχέσις (57) γράφεται ἁπλούστερα : $T_t = F.\alpha$ (57΄)
καὶ διὰ $\alpha=1$, εἶναι $F=T_t$, ἤτοι : ***Τὸ μέτρον στρέψεως F εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἐφαπτομένην τάσιν*** (τὴν δύναμιν ποὺ ἐνεργοῦσα παραλλήλως πρὸς τὴν ἀκλόνητον βάσιν τοῦ σώματος καταπονεῖ ἑκάστην μονάδα τῆς ἐπιφανείας της), ***ἡ ὁποία εἶναι ἀναγκαία διὰ νὰ προκαλέσῃ γωνίαν ὀλισθήσεως ἴσην μὲ 1*** (rd).

Τέλος εἰς τὴν περίπτωσιν στρέψεως εὑρίσκεται ὅτι ἡ γωνία στρέψεως ω (σχ 99), ποὺ προκαλεῖται ὑπὸ ροπῆς P ἐνεργούσης εἰς τὸ ἄκρον κυλίνδρου, ὁ ὁποῖος στηρίζεται εἰς τὸ ἕτερον ἄκρον του καὶ ἔχει μῆκος l καὶ διατομὴν q ἀκτῖνος r, εἶναι : $\omega=2P.l/F.\pi.r^4$. (58)

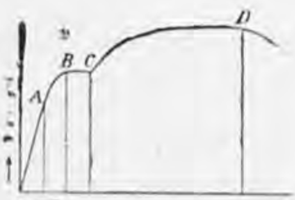
η) Σχέσεις μεταξὺ τῶν χαρακτηριστικῶν δι' ἑκάστην ὕλην μεγεθῶν ἐλαστικότητος. Μεταξὺ τοῦ μέτρου ἐλαστικότητος E, τοῦ μέτρου στρέψεως F καὶ τοῦ ἀριθμοῦ Poisson μ ὑφίσταται ἡ σχέσις: $E=2F(1+\mu)$. Εἰς τὰ χαρακτηριστικὰ ταῦτα ἑκάστης ὕλης μεγέθη δέον νὰ προστεθῇ καὶ τὸ ***μέτρον συμπιεστικότητος*** Σ, ποὺ κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὰ δύο παραπάνω μέτρα προκύπτει ἐκ τῆς θεωρήσεως τῆς ἐλαστικῆς ἐλαττώσεως τοῦ ὄγκου σώματος, τὸ ὁποῖον ὑποβάλλεται εἰς ὁμοιόμορφον πανταχόθεν ἐπενέργειαν πιεστικῶν δυνάμεων· ἔτσι, ἂν ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν ὁμοιομόρφου γύρωθεν ἐξωτερικῆς πιέσεως p ὁ ὄγκος V ἐλαττώνεται κατὰ ΔV, ἡ ***εἰδικὴ ἐλάττωσις τοῦ ὄγκου***, τ.ἔ. ἡ ἐλάττωσις ποὺ πάσχει ἡ μονὰς τοῦ ὄγκου, θὰ εἶναι : ΔV/V. Εἶναι πρόδηλον ὅτι αὐτὴ εἶναι ἀνάλογος τῆς πιέσεως p καὶ συνεπῶς ἰσχύει ἡ σχέσις : $p=\Sigma.\Delta V/V$, ὅπου Σ παριστάνει τὸν συντελεστὴν ἀναλογίας. Ὀνομάζομεν τοῦτον ***μέτρον συμπιεστικότητος***. Τὸ ἀντίστροφον αὐτοῦ $1/\Sigma=\sigma$ παρέχει τὴν ***συμπιεστικότητα*** τοῦ σώματος καὶ εἶναι $\sigma=\Delta V/p.V$, ἤτοι ὁ συντελεστὴς συμπιεστικότητος σ εἶναι ἴσος μὲ τὴν ἐλάττωσιν ὄγκου ΔV, τὴν ὁποίαν ὑφίσταται ἡ μονὰς ὄγκου, ὅταν συμπιέζεται ὁμοιομόρφως διὰ πιέσεως p ἴσης μὲ τὴν μονάδα. Τὸ μέτρον συμπιεστικότητος Σ συνδέεται μὲ τὰ προηγούμενα διὰ τῆς σχέσεως : $\Sigma=E/3(1-2\mu)$. Ἐκ τῆς σχέσεως αὐτῆς προκύπτει : $\mu=0{,}5-E/6\Sigma$ καὶ συνεπῶς ἡ τιμὴ τοῦ μ δὲν μπορεῖ νὰ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ 0,5. Ἐκ τοῦ ὅτι μεταξὺ τῶν μεγεθῶν E, F, μ, Σ ἰσχύουν δι' ἕκαστον ἰσότροπον ὑλικὸν αἱ σχέσεις : 1) $E=2F(1+\mu)$ καὶ 2) $E=3\Sigma(1-2\mu)$ (59) συνάγεται ὅτι ἀρκεῖ νὰ καθορισθοῦν δύο μόνον ἐκ τῶν μεγεθῶν τούτων· αἱ τιμαί τῶν ἄλλων δύο εὑρίσκονται μὲ λύσιν τοῦ συστήματος τῶν δύο ἐξισώσεων.

Εἰς τὸν ἀκολουθοῦντα πίνακα σταθερῶν ἐλαστικότητος παρέχονται αἱ τιμαὶ τῶν δύο ἐκ τῶν ἀνωτέρω μεγεθῶν, ἤτοι τοῦ E καὶ τοῦ F διὰ μερικὰ ὑλικά.

Πίναξ σταθερῶν ἐλαστικότητος ὑλικῶν

Εἶδος ὑλικοῦ	Τιμαὶ εἰς μονάδας μετρήσεως [kg*/mm²]		
	Μέτρον ἐλαστικότητος E	Μέτρον στρέψεως F	Ἀντοχὴ εἰς ἐφελκυσμὸν K
Ἀλουμίνιον	6300—7200	2300—2700	20—30
Ἄργυρος	7000—8000	2500—2900	29
Κασσίτερος	4000—5500	1700	2
Μόλυβδος	1500—1700	550	2
Νικέλιον	20000—22000	7800	—
Ὀρείχαλκος	8000—10000	2700—3700	60
Σίδηρος (σφυρήλ.)	20000—22000	7000—8300	40—60
Σίδηρος (χυτός)	7500—13000	5000	12—23
Ὕαλος	5000—8000	2000—3000	80
Χαλκός	10000—13000	3900—4800	40
Χάλυψ	20000—22000	8000—8300	80—130
Χρυσός	7600—8100	2800	27
Ψευδάργυρος	8500—13000	2800—4700	13
Καουτσούκ	0,02—0,08	—	—

§ 45. Ἀντοχὴ καὶ σκληρότης ὑλικῶν. α) ***Γραφικὴ παράστασις ἀντοχῆς ὑλικοῦ.*** Ἂν βάσει τῶν ἐξαγομένων πειραματικῆς ἐρεύνης παραστήσωμεν γραφικῶς (σχ. 100) τὴν ἐξάρτησιν τῆς παραμορφώσεως, π.χ. τῆς ἐπιμηκύνσεως ῥάβδου, (καταγράφοντες τὰς τιμάς της εἰς σύστημα ὀρθογωνίων συντεταγμένων ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν X), ἀπὸ τὴν δύναμιν, ἡ ὁποία τὴν προκαλεῖ (καταγράφοντες τὰς ἀντιστοίχους τιμάς της ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν Ψ), παρατηροῦμεν ὅτι ὁ νόμος τοῦ Hooke ἰσχύει μέχρις ἑνὸς ὁρίου (τὸ ὁποῖον παρέχεται ὑπὸ τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν ἐπιμηκύνσεως καὶ δυνάμεως ποὺ καθορίζουν τὸ σημεῖον A). Τὸ ὅριον τοῦτο καλεῖται ***ὅριον ἀναλογίας*** μεταξὺ δυνάμεως καὶ ἐπιμηκύνσεως. Μὲ τὸ ὅριον τοῦτο συμπίπτει συνήθως, ***χωρὶς ὅμως τοῦτο νὰ εἶναι ἀναγκαῖον, τὸ ὅριον ἐλαστικότητος***, τ.ἔ. τὸ ὅριον μέχρι τοῦ ὁποίου ἡ προκαλουμένη ἐπιμήκυνσις ἐξαφανίζεται, ὅταν παύσῃ νὰ ἐνεργῇ ἡ δύναμις ποὺ τὴν προεκάλεσε. Πέραν τοῦ ὁρίου ἐλαστικότητος ἡ προκαλουμένη ἐπιμήκυνσις δὲν ὑποχωρεῖ, ὅταν παύσῃ ἡ ἐπενέργεια τῆς δυνάμεως, δηλαδὴ τὸ ὑλικὸν ὑφίσταται μόνιμον παραμόρφωσιν. Εἰς τὴν περιοχὴν τῶν μονίμων παραμορφώσεων δὲν ὑφίσταται ἀναλογία μεταξὺ δυνάμεως καὶ παραμορφώσεως, ἀλλὰ παρατηρεῖται ὅτι ἡ αὔξησις τῆς παραμορφώσεως εἶναι ἀνωτέρας τάξεως συγκριτικῶς πρὸς τὴν αὔξησιν τῆς δυνάμεως. Τοῦτο γίνεται μέχρις ἑνὸς ὁρίου (σημεῖον B), τὸ ὁποῖον καλεῖται ***ὅριον διαρροῆς***, διότι ἀπὸ τοῦ σημείου τούτου ἀρχίζει τὸ ὑλικὸν νὰ διαρρέη, ἤτοι νὰ αὐξάνη τὴν παραμόρφωσίν του (π. χ. ἐπιμήκυνσιν τῆς ράβδου) χωρὶς νὰ γίνεται αἰσθητὴ αὔξησις τῆς ἐντάσεως τῆς ἐνεργούσης δυνάμεως. Τὸ ὑλικὸν γίνεται τότε *πλαστικόν*. Ἀπὸ τὸ ὅριον πλαστικότητος (σημεῖον C) καὶ πέραν εἰς μικρὰν ἐπὶ πλέον αὔξησιν τῆς δυνάμεως παρουσιάζεται δυσαναλόγως μεγάλη παραμόρφωσις ποὺ καταλήγει εἰς θραῦσιν τοῦ ὑλικοῦ. Τὸ ὅριον μέχρι τοῦ ὁποίου πρέπει νὰ φθάση ἡ παραμόρφωσις, διὰ νὰ λάβη χώραν θραῦσις, καλεῖται ὅριον **ἀντοχῆς** (σημεῖον D) τοῦ ὑλικοῦ. Ἡ καταπόνησις ποὺ πρέπει νὰ ὑποστῇ τὸ ὑλικὸν καί, εἰδικώτερα, ἡ δύναμις μὲ τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἐφελκύεται ράβδος ἐγκαρσίας τομῆς ἴσης μὲ 1 mm², διὰ νὰ θραυσθῇ, καλεῖται Ἀντοχὴ ἢ Ἀνθεκτικότης τῆς ράβδου· (εἰς τὸν παραπάνω πίνακα παρέχεται ἡ ἀντοχὴ εἰς kg*/mm²).



Σχ. 100


Σχ. 101

Ἀπὸ τὰς θέσεις ποὺ κατέχουν τὰ σημεῖα A, B, C, D ἐπὶ τῆς ὡς ἄνω παραστατικῆς γραμμῆς τοῦ σχ. 100 καὶ γενικώτερα ἀπὸ τὴν μορφὴν τῆς γραμμῆς ταύτης διακρίνεται εὐκόλως, ἂν τὸ ὑλικὸν εἶναι συνεκτικὸν ἢ πλαστικὸν ἢ εὔθρυπτον. Ἔτσι π.χ. αἱ γραμμαὶ τοῦ σχ. 101 ἀντιστοιχοῦν ἡ μὲν κατωτέρα εἰς ὑλικὸν εὔθρυπτον, ἡ μεσαία εἰς πλαστικὸν καὶ ἡ ἀνωτέρα εἰς συνεκτικόν.

β) Σκληρότης. Τὰ διάφορα ὑλικὰ προβάλλουν διαφορετικὴν ἀντίστασιν εἰς τὴν χάραξίν των ὑπὸ ἄλλων. Λέμε ὡς ἐκ τούτου ὅτι ἓν ὑλικὸν ἔχει σκληρότητα διάφορον τῆς σκληρότητος ποὺ ἔχει ἄλλο. Ἔτσι π.χ. ἡ σκληρότης τοῦ ἀνθρωπίνου ὄνυχος εἶναι μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν σκληρότητα τοῦ γύψου, διότι χαράσσει αὐτὸν καὶ μικροτέραν τοῦ ἀσβεστίτου, διότι χαράσσεται ἀπὸ αὐτόν. Πρὸς μέτρησιν τῆς σκληρότητος χρησιμοποιεῖται *ἡ σκληρομετρικὴ κλίμαξ τοῦ* **Mohr**. Εἰς αὐτὴν ἔχουν ἐμπειρικῶς καταταχθῆ εἰς σειρὰν δέκα διάφορα ὑλικά, τοιαῦτα, ὥστε ἕκαστον ἐξ αὐτῶν χαράσσει τὸ προηγούμενον καὶ χαράσσεται ὑπὸ τοῦ ἑπομένου του. Ἡ σκληρότης ἑκάστου τῶν ὑλικῶν τούτων παρέχεται ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν ποὺ ἔχει τοῦτο εἰς τὴν σειρὰν κατατάξεως. Τὰ ὑλικὰ τῆς κλίμακος ταύτης μὲ τὴν σειρὰν ποὺ ἔχουν αἱ σκληρότητές των εἶναι :

1. Τάλκης, 2. Γύψος, 3. Ἀσβεστίτης, 4. Φθορίτης, 5. Ἀπατίτης,

6. Ἄστριος, 7. Χαλαζίας, 8. Τοπάζιον, 9. Κορούνδιον, 10. Ἀδάμας. Ἔτσι, ἂν δοθὲν ὑλικὸν χαράσσῃ τὸν χαλαζίαν καὶ χαράσσεται ἀπὸ τὸ τοπάζιον, θὰ ἔχῃ σκληρότητα μεταξὺ 7 καὶ 8, ἂς ποῦμε 7,5. — Ἡ σκληρομετρικὴ αὐτὴ κλίμαξ χρησιμοποιεῖται εἰς τὴν Ὀρυκτολογίαν. Εἰς τὴν Τεχνικὴν ἔχει εἰσαχθῇ πρὸς ἐκτίμησιν τῆς σκληρότητος ἡ μέθοδος Brinell. Κατ' αὐτὴν σφαῖρα ἀπὸ σκληρυνθέντα χάλυβα τοποθετεῖται ἐπὶ ἐπιπέδου ἐπιφανείας τοῦ σώματος, τοῦ ὁποίου ζητεῖται νὰ καθορισθῇ ἡ σκληρότης. Ἂν τὴν σφαῖραν ταύτην πιέσωμεν ἐπὶ τοῦ σώματος μὲ δύναμιν K θὰ βυθισθῇ εἰς αὐτὸ καὶ θὰ ἀποτυπώσῃ κύκλον διαμέτρου d. Τὸ πηλίκον K/d παρέχει μέτρον τῆς σκληρότητος τοῦ σώματος.

§ 46. Τριβή. α) Γνωρίζομεν ἀπὸ τὴν καθημερινὴν πεῖραν ὅτι κάθε σῶμα ποὺ κινεῖται ἐπὶ τῆς Γῆς, π.χ. μία σφαῖρα ποὺ κυλίεται ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, ἐπιβραδύνει ἀργὰ ἢ γρήγορα τὴν κίνησίν του καὶ τελικῶς σταματᾷ, ἐνῶ, λόγω τῆς ἀδρανείας του, ἔπρεπε νὰ συνεχίζῃ τὴν κίνησίν του εὐθυγράμμως καὶ ἰσοταχῶς. Ἡ κίνησις ὀχήματος ἐξασφαλίζεται μὲ συνεχῆ ἐπενέργειαν προωστικῆς δυνάμεως, ἡ ὁποία κατορθώνει νὰ ἀναπτύξῃ μίαν τελικῶς σταθερὰν ταχύτητα· ἐκ τούτου συνάγεται ὅτι παρὰ τὴν συνεχῆ ἐπίδρασιν σταθερᾶς δυνάμεως ἡ ἐπιτάχυνσις δὲν εἶναι σταθερά, ἀλλὰ ἐλαττώνεται ὀλίγον κατ' ὀλίγον καὶ ὅταν ἡ ταχύτης φθάσει εἰς τὴν ὁρικήν της τιμήν, γίνεται μηδέν. Ὥστε κατὰ τὴν κίνησιν σώματος ἐπάνω εἰς ἄλλο ἀναφαίνεται δύναμις, ἡ ὁποία ἀντιτίθεται εἰς τὴν κίνησιν. Ἡ δύναμις αὐτὴ εἶναι ἡ *τριβή*. Μὲ ἄλλα λόγια ἡ τριβὴ εἶναι μία δύναμις ποὺ ἀναφαίνεται κατὰ τὴν κίνησιν στερεοῦ σώματος ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ἄλλου καὶ ἐνεργεῖ ἀντιθέτως πρὸς τὴν δύναμιν ποὺ προάγει τὴν κίνησιν. Ἡ ἔντασις τῆς τριβῆς εἶναι ἴση μὲ τὴν ἔντασιν τῆς δυνάμεως ποὺ χρειάζεται νὰ ἐνεργῇ συνεχῶς ἐπὶ τοῦ κινουμένου σώματος, διὰ νὰ διατηρῆται ἡ κίνησις χωρὶς ἐπιτάχυνσιν. Ἀντιστοίχως πρὸς τὸ ἂν σύρεται ἢ κυλίεται τὸ κινούμενον σῶμα, διακρίνομεν τριβήν: 1) *ὀλισθήσεως*, 2) *κυλίσεως*.

β) Τριβόμετρον. Πρὸς μέτρησιν τῆς τριβῆς μπορεῖ νὰ χρησιμεύσῃ τὸ τριβόμετρον τοῦ Coulomb (σχ. 102, 103, 104)· τοῦτο εἶναι τράπεζα ἐπὶ τῆς ὁποίας τοποθετεῖται ὁριζοντίως πλὰξ τοῦ ἑνὸς σώματος. Ἐπάνω εἰς αὐτὴν σύρεται τὸ δεύτερον σῶμα μὲ σχοινίον ποὺ περνάει διὰ τῆς αὔλακος παγίας τροχαλίας καὶ φέρει εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον του δίσκον, εἰς τὸν ὁποῖον τοποθετοῦνται σταθμά. Κανονίζομεν ὥστε τὰ σταθμὰ ποὺ θέτομεν λίγο - λίγο εἰς τὸν δίσκον, νὰ γίνουν μόλις ὅσα χρειάζονται διὰ νὰ γίνεται ἡ ὀλίσθησις τοῦ συρομένου σώματος ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς ὁριζοντίας πλακὸς χωρὶς καμμίαν ἐπιτάχυνσιν τῆς κινήσεως. Τὸ βάρος τότε τῶν σταθμῶν μᾶς δίδει τὴν ἔντασιν τῆς τριβῆς.

γ) Συντελεστὴς τῆς τριβῆς ὀλισθήσεως. Ἀπὸ τὰς μετρήσεις αὐτὰς διὰ διάφορα ὑλικὰ εὑρίσκομεν ὅτι κατὰ τὴν ὀλίσθησιν στερεοῦ σώματος ἐπὶ ἄλλου χωρὶς μεσολάβησιν λιπαντικῆς οὐσίας ἡ τριβὴ (ξηρὰ τριβὴ) εἶναι ἀνάλογος τοῦ βάρους τοῦ συρομένου σώματος (καὶ γενικώτερον τῆς δυνάμεως ποὺ πιέζει τὸ ἓν σῶμα ἐπὶ τοῦ ἄλλου), δὲν ἐξαρτᾶται ὅμως ἀπὸ τὴν ταχύτητα τῆς κινήσεως, οὔτε

Σχ. 102

Σχ. 103

Σχ. 104

ἀπὸ τὴν ἔκτασιν τῆς ἐφαπτομένης ἐπιφανείας, ὅπως ἀποδεικνύεται πειραματικῶς ἐκ τοῦ ὅτι ἔχομεν τὴν αὐτὴν τριβὴν διὰ τὸ αὐτὸ σύστημα σωμάτων, ὅταν ταῦτα ὀλισθαίνουν εἴτε τὸ ἓν κατόπιν τοῦ ἄλλου (σχ. 103), εἴτε τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου (σχ. 104). Ἔτσι ἂν παραστήσωμεν μὲ R τὴν τριβὴν καὶ μὲ N τὴν δύναμιν ποὺ πιέζει τὸ ἓν σῶμα ἐπὶ τοῦ ἄλλου, θὰ εἶναι : $R = \eta . N$ ἢ $\eta = R/N$ (60)

Τὸν συντελεστὴν τῆς ἀναλογίας η μεταξὺ τριβῆς R καὶ δυνάμεως N τὸν ὀνομάζομεν ***συντελεστὴν τριβῆς***. Οὗτος ἔχει τὰς φυσικὰς διαστάσεις (0, 0, 0) καθαροῦ ἀριθμοῦ καὶ χαρακτηρίζει τὰ προστριβόμενα ὑλικὰ ὡς καὶ τὴν ἐπεξεργασίαν τῶν ἐφαπτομένων ἐπιφανειῶν. Ἔτσι εὑρίσκεται ὅτι ὁ συντελεστὴς τριβῆς εἶναι :

0,2 —0,48	διὰ	ξύλον	ἐπὶ	ξύλου	καὶ μὲ λιπαντικὴν οὐσίαν 0,06—0,08
0,15—0,24	»	μέταλλον	»	μετάλλου	» » » » 0,06—0,11
0,3 —0,54	»	δέρμα	»	»	» » » » 0,14
0,016—0,032	»	σίδηρον	»	πάγου	

Ὁ συντελεστὴς τριβῆς μπορεῖ νὰ μετρηθῇ ἁπλούστερα μὲ κεκλιμένον ἐπίπεδον, τοῦ ὁποίου μποροῦμε νὰ μεταβάλλωμεν τὴν γωνίαν κλίσεως α (σχ.46). Τοποθετοῦμεν τὸ σῶμα, τοῦ ὁποίου θέλομεν νὰ προσδιορίσωμεν τὴν τριβήν, ἐπὶ τῆς κεκλιμένης ἐπιφανείας καὶ μεταβάλλομεν τὴν γωνίαν κλίσεως ὀλίγον κατ' ὀλίγον, μέχρις ὅτου φθάσῃ νὰ ὀλισθαίνῃ τὸ σῶμα χωρὶς ἐπιτάχυνσιν. Εἶναι τότε ἡ μὲν παράλληλος πρὸς τὴν κεκλιμένην ἐπιφάνειαν συνιστῶσα τοῦ βάρους B τοῦ σώματος, ἤτοι ἡ δύναμις B.ημα, ἴση μὲ τὴν τριβὴν R, ἡ δὲ κάθετος πρὸς τὴν κεκλιμένην ἐπιφάνειαν συνιστῶσα τοῦ βάρους, ἤτοι ἡ δύναμις B.συνα, ἴση μὲ τὴν δύναμιν N, ποὺ πιέζει τὸ σῶμα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας. Ἔτσι ὁ λόγος (B ημα):(B.συνα)=ημα:συνα=εφα, θὰ εἶναι ἴσος μὲ $R/N = \eta$ καὶ ἑπομένως θὰ ἔχωμεν : $\eta =$ εφα (60')

Ἂν ὀνομάσωμεν ***γωνίαν τριβῆς*** τὴν γωνίαν κλίσεως α, κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ σῶμα ὀλισθαίνει ἐπὶ τῆς κεκλιμένης ἐπιφανείας χωρὶς ἐπιτάχυνσιν, τὸ παραπάνω ἐξαγόμενον μᾶς λέει ὅτι : ***ὁ συντελεστὴς τριβῆς εἶναι ἴσος μὲ τὴν ἐφαπτομένην τῆς γωνίας τριβῆς.***

Ἡ τριβὴ ὀφείλεται κυρίως εἰς τὰς παραμενούσας ἀνωμαλίας ποὺ παρουσιάζουν ἀκόμη καὶ ἐπιμελῶς λειανθεῖσαι ἐπιφάνειαι σωμάτων. Κατὰ τὴν ὀλίσθησιν αἱ ἀνωμαλίαι αὐταὶ πρέπει νὰ ὑπερπηδῶνται δι' ἀνυψώσεως τοῦ ὀλισθαίνοντος σώματος ὑπεράνω αὐτῶν· ἀκριβῶς δι' αὐτὸ ἡ τριβὴ εἶναι ἀνάλογος τοῦ βάρους τοῦ ὀλισθαίνοντος σώματος. Τὸ ὅτι ἡ τριβὴ εἶναι σχεδὸν ἀνεξάρτητος τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας ἐπαφῆς ἐξηγεῖται ἐκ τοῦ ὅτι τὸ πλῆθος τῶν σημείων ἐπαφῆς τοῦ ἑνὸς σώματος ἐπὶ τοῦ ἄλλου ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ὑπεράνω αὐτῶν βάρους τοῦ σώματος. Ἐκτὸς τούτου παίζουν ρόλον εἰς τὴν τριβὴν καὶ αἱ μοριακαὶ δυνάμεις συναφείας. Τοῦτο ἀποδεικνύεται ἐκ τοῦ ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν ***ἐξαιρέτου*** λειάνσεως τῶν ἐπιφανειῶν δύο ἐφαπτομένων πλακῶν ἡ τριβὴ ὄχι μόνον δὲν ἐλαττώνεται, ἀλλὰ τουναντίον γίνεται ἰδιαζόντως μεγάλη, οὕτως ὥστε νὰ καταντᾷ νὰ συνάπτωνται στερεὰ μεταξύ των αἱ δύο πλάκες λόγω τῶν δυνάμεων συναφείας.

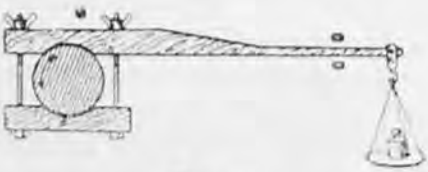
δ) Ἐπίδρασις λιπαντικῶν. Ἂν μεταξὺ τῶν ἐφαπτομένων ἐπιφανειῶν παρεμβληθῇ λιπαντικὴ οὐσία, τότε καὶ αἱ ἀνωμαλίαι τῶν ἐπιφανειῶν καὶ αἱ δυνάμεις συναφείας ἐλαττώνονται. Εἰς τὴν περίπτωσιν δηλαδὴ μεσολαβήσεως λιπαντικῆς οὐσίας, ἐμποδίζεται ἡ ἄμεσος ἐπαφὴ τῶν στερεῶν καὶ ἡ κατατριβὴ τῶν ἀνωμαλιῶν τοῦ ὑλικοῦ τῶν ξηρῶν ἐπιφανειῶν. Ἀντ' αὐτῆς προβάλλει ἀντίστασιν εἰς τὴν κίνησιν ἡ ***ἐσωτερική***, ὅπως λέμε, ***τριβὴ*** (πρβλ. § 60) μεταξὺ τῶν μορίων τοῦ ὑγροῦ λιπαντικοῦ μέσου. Ἕνεκα τούτου εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ***ἡ τριβὴ εἶναι ἀνάλογος καὶ τῶν ἐφαπτομένων ἐπιφανειῶν καὶ τῶν ταχυτήτων τῆς ὀλισθήσεως.***

ε) Τριβὴ κυλίσεως. Ὅταν τὸ σῶμα (κύλινδρος, σφαῖρα, τροχὸς) ***στρεφόμενον περὶ ἄξονα***, προχωρεῖ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ἄλλου, ἀναφαίνεται εἰς τὰς θέσεις ἐπαφῆς τῶν δύο ἐπιφανειῶν ***τριβὴ κυλίσεως***. Ἡ τριβὴ κυλίσεως εἶναι πολὺ μικροτέρα τῆς τριβῆς ὀλισθήσεως. Ἡ πειραματικὴ ἔρευνα διαπιστώνει δι' αὐτὴν ὅτι εἶναι ***ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς ἀκτῖνος τῆς κυκλικῆς τομῆς τοῦ κυλιομένου σώματος.***

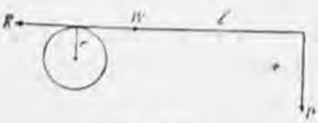
Εἰς τοὺς ἄξονας τῶν τροχῶν ὀχημάτων ἢ κινητήρων ἔχομεν τριβὴν ὀλισθήσεως, ὅταν ἡ μεταξύ των ἐπαφὴ εἶναι ἄμεσος. Διὰ νὰ τὴν ἐλαττώσωμεν, παρεμβάλλομεν εἰς τὰς ἐπαφὰς λιπαντικὰς οὐσίας. Μεγαλυτέραν ὅμως ἐλάττωσιν τῆς τριβῆς ἐπιτυγχάνομεν διὰ παρεμβολῆς ***κυλιομένων*** σφαιρ.δίων μεταξὺ τῶν προστριβομένων ἐπιφανειῶν (ἔνσφαιροι τριβεῖς, roulement).

στ) Σημασία τῆς τριβῆς. Ἡ ἀνάπτυξις τῆς τριβῆς κατὰ τὴν κίνησιν γίνεται μὲ κατανάλωσιν τῆς κινητικῆς ἐνεργείας τοῦ κινουμένου σώματος. Τὸ μέρος τῆς κινητικῆς ἐνεργείας ποὺ ἀχρηστεύεται λόγῳ τῆς τριβῆς μεταβάλλεται εἰς ἄτακτον κινητικὴν ἐνέργειαν τῶν μορίων τοῦ σώματος, ἤτοι εἰς θερμότητα. Ἕνεκα τούτου ἡ τριβὴ εἰς τὰς μηχανὰς σημαίνει ἀπώλειαν μηχανικοῦ ἔργου. Εἶναι λοιπὸν εὔλογον ὅτι ἐπιδιώκεται εἰς τοιαύτας περιπτώσεις ἡ ἐλάττωσις τῆς τριβῆς. Ὡς τόσο ὑπάρχουν περιπτώσεις, εἰς τὰς ὁποίας ἡ τριβὴ ὄχι μόνον δὲν εἶναι ἀνεπιθύμητος, ἀλλὰ τοὐναντίον εἶναι αὐτόχρημα ἓν σύνδρομον φαινόμενον ζωτικῆς ἀνάγκης. Κάθε στερέωσις ἢ σύνδεσις σωμάτων μὲ καρφιὰ ἢ βίδες κλπ. στηρίζεται εἰς τὴν τριβήν. Τὸ δέσιμο κόμβων ἢ τὸ ράψιμο θὰ ἦτο ἀδύνατον χωρὶς τριβήν· ἀκόμη καὶ τὸ βάδισμά μας θὰ ἦτο προβληματικὸν χωρὶς τὴν τριβὴν (ἀρκεῖ νὰ σκεφθῶμεν πόσον δύσκολον γίνεται, λόγῳ τῆς ἐλαττώσεως τῆς τριβῆς, ἐπὶ δρόμων σκεπασμένων μὲ παγωμένο χιόνι).

Ἐφαρμογὴν τῆς τριβῆς ἔχομεν εἰς τὴν μέτρησιν τῆς ἰσχύος μηχανῆς μὲ τὸν *χαλινὸν* Prony (σχ. 105). Τὸ ὄργανον ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ξυλίνας σιαγόνας, μεταξὺ τῶν ὁποίων ὑπάρχει κυλινδρικὴ ἐκσκαφή, ὥστε νὰ εἶναι δυνατὸν νὰ ἐφαρμόζωνται εἰς τὸν περιστρεφόμενον κυλινδρικὸν ἄξονα τῆς μηχανῆς.



Σχ. 105



Σχ. 106

Προκειμένου νὰ μετρήσωμεν τὴν ἰσχὺν τῆς μηχανῆς, ὅταν αὕτη περιστρέφῃ τὸν κυλινδρικὸν ἄξονα μὲ καθωρισμένον ἀριθμὸν στροφῶν κατὰ δευτερόλεπτον, συσφίγγομεν μὲ κοχλίας τὰς σιαγόνας τοῦ ὀργάνου ἐπὶ τοῦ περιστρεφομένου κυλινδρικοῦ ἄξονος τόσον, ὥστε διὰ τὸν καθωρισμένον ἀριθμὸν στροφῶν ν [sec^{-1}] τὸ βάρος P ποὺ κρεμῶμεν εἰς τὸ ἄκρον ὁριζοντίου στελέχους, ποὺ ἀποτελεῖ ἐπέκτασιν τῆς ἄνω σιαγόνος, νὰ ἰσορροπῆται ἀκριβῶς. Ἂν εἶναι l τὸ μῆκος τοῦ ὁριζοντίου στελέχους (ἀπὸ τὴν θέσιν ἐπαφῆς μὲ τὴν περιφέρειαν τοῦ ἄξονος μέχρι τῆς θέσεως, ὅπου ἐξαρτᾶται τὸ βάρος) καὶ r ἡ ἀκτὶς τοῦ περιστρεφομένου κυλινδρικοῦ ἄξονος (σχ. 106), τότε εἰς τὴν περίπτωσιν ἰσορροπίας ἡ ροπὴ περιστροφῆς $P.l$ τοῦ βάρους ὡς πρὸς τὸν ἄξονα, ἴση μὲ τὴν ροπὴν $W.r$ τῆς τριβῆς ποὺ ἀναφαίνεται εἰς τὴν ἐπαφὴν τῶν σιαγόνων πρὸς τὸν ἄξονα, θὰ ἐξουδετερώνῃ ἀκριβῶς τὴν ροπὴν περιστροφῆς $K.r$ τῆς δυνάμεως ποὺ καταβάλλεται ὑπὸ τῆς μηχανῆς, διὰ νὰ ἔχῃ ὁ ἄξων της τὰς καθωρισμένας στροφὰς ν [sec^{-1}]. Ἔτσι θὰ ἔχωμεν (βλέπε σχῆμα 106): $P.l = W\,r = K.r$ καὶ $K = P.l/r$. Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν λαμβάνομεν τὴν ἰσχὺν L, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὴν δύναμιν K ἐπὶ τὸ διάστημα, κατὰ τὸ ὁποῖον μετακινεῖται τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς της εἰς χρόνον 1 sec, ἤτοι ἐπὶ τὴν γραμμικὴν ταχύτητα υ σημείου τῆς περιφερείας τοῦ περιστρεφομένου κυλινδρικοῦ σώματος τῆς μηχανῆς. Ἑπομένως θὰ εἶναι : $L=K.\upsilon=P.l\ \upsilon/r=P.l.2\pi r\nu/r$· ἤτοι : $L=2\pi\nu.P.l$ (61)

Προβλήματα

112) Πόσον βάρος πρέπει νὰ κρεμάσωμεν εἰς σῦρμα, μήκους 2 m καὶ ἐγκαρσίας τομῆς 0,4 mm², διὰ νὰ ἐπιμηκυνθῇ τοῦτο κατὰ 0,5 mm, ἂν τὸ μέτρον ἐλαστικότητος τοῦ ὑλικοῦ εἶναι 20800 kp/mm²; ('Απ. $0,5.0,4.20800/2.10^3$ kp).

113) Ράβδος ἀπὸ ξύλον ἐλάτης μὲ ἐγκαρσίαν τομὴν 1,5 cm² διασπᾶται, ὅταν ἐφελκυσθῇ μὲ δύναμιν 1200 kp. Ποῖον τὸ μέτρον ἀντοχῆς τοῦ ξύλου τούτου; ('Απ. 8 Kp/mm²).

114. Ράβδος ἀπὸ σφυρήλατον σίδηρον, τετραγωνικῆς ἐγκαρσίας τομῆς, προορίζεται νὰ ἀντέχῃ εἰς καταπόνησιν κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ μήκους της, ποὺ μπορεῖ νὰ φθάσῃ τὰ 2000 kp. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ πλευρὰ τῆς τομῆς της, ἂν ὡς μέτρον ἀσφαλείας ληφθῇ τὸ $1/5$ τῆς κατωτέρας τιμῆς τοῦ εἰς τὸν πίνακα μέτρου ἀντοχῆς τοῦ ὑλικοῦ τούτου; ['Απ. $\sqrt{2000:(40/5)}$ mm].

115. Ράβδος ἀπὸ χάλυβα, ἐγκαρσίας τετραγωνικῆς τομῆς 0,64 cm² καὶ μήκους 32 cm στερεώνεται ὁριζοντίως εἰς τὸ ἓν ἄκρον της ἐπὶ ἀκλονήτου στηρίγματος. Ποῖον τὸ βέλος κάμψεως, ἂν εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον τῆς ῥάβδου κρεμάσωμεν βάρος 5 kp καὶ ποῖον θὰ ἦτο τοῦτο, ἂν ἡ ῥάβδος ἐστηρίζετο εἰς τὰ δύο ἄκρα της καὶ τὸ βάρος ἐκρέματο εἰς τὸ μέσον της; ('Απ. 8 mm, καὶ 0,5 mm).

116. Πόσον εἶναι τὸ μέτρον ἐλαστικότητος ὑλικοῦ, ἂν σύρμα ἐκ τούτου μήκους 10 m καὶ τομῆς 0,4 mm² ἐπιμηκύνεται κατὰ 2,5 mm, ὅταν ἐφελκύεται μὲ 2,08 Kp; ('Απ. 20800 kp/mm²).

117. Σύρμα, μήκους 3,14 m καὶ τομῆς 0,785 mm², στερεώνεται μὲ τὸ ἓν ἄκρον του εἰς ἀκλόνητον στήριγμα, ἀπὸ τὸ ὁποῖον κρέμεται πρὸς τὰ κάτω· εἰς τὸ κατώτερον ἄκρον τοῦ σύρματος ἐφαρμόζεται ῥοπὴ στρέψεως τοῦ σύρματος ἴση μὲ 0,5 kp.mm, ἡ ὁποία ἐπιφέρει στρέψιν κατὰ γωνίαν 2 rd. Ποῖον τὸ μέτρον στρέψεως; ('Απ. $F=2.0,5.3140/3,14.0,5^4.2=8000$ kp/mm²).

118. Μὲ ξύλινον κοχλίαν ποὺ ἔχει βῆμα ὕψους 2 cm καὶ ἀκτῖνα τῆς ἀτράκτου 5 cm, ἰσορροπεῖται ἀντίστασις 45 kp. Πόση εἶναι ἡ πρὸς τοῦτο καταβαλλομένη δύναμις, ἂν ὁ συντελεστὴς τριβῆς εἶναι 0,3; ['Απ. $45(2+2.3,14.5.0,3):(2.3,14.5-2.0,3)$ kp].

119. Ἀτμομηχανὴ βάρους 45 τόννων ἀναπτύσσει ἐπὶ ὁριζοντίας τροχιᾶς ταχύτητα 25 m/sec εἰς χρόνον 30 sec. Πόση εἶναι ἡ πρὸς τοῦτο ἐνεργοῦσα δύναμις, ἂν ὁ συντελεστὴς τριβῆς εἶναι $1/150$; ['Απ. $(1/150.45000+45000.25/30)$ kp].

120. Ποία εἶναι ἡ ἰσχὺς ἀτμομηχανῆς, ἡ ὁποία σύρει ἁμαξοστοιχίαν βάρους 150 t ἐπὶ ὁριζοντίας τροχιᾶς μὲ ταχύτητα 30 m/sec, ἂν ὁ συντελεστὴς τριβῆς εἶναι 0,005; ('Απ. 200 ἵπποι).

121. Ποίαν ἰσχὺν ἔχει μηχανή, εἰς τὴν ὁποίαν ὁ κυλινδρικὸς ἄξων κάνει 10 στροφὰς κατὰ δευτερόλεπτον, ἂν εἰς αὐτὴν ὁ χαλινὸς Prony ἰσορροπῆται μὲ βάρος 1,59 kp κρεμασμένον εἰς τὸ ἄκρον βραχίονος τῆς σιαγόνος μήκους 1,5 m; ('Απ. 2 ἵπποι).

122. Ποῖος εἶναι ὁ συντελεστὴς τριβῆς, ὅταν σῶμα βαλλόμενον ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου μὲ ταχύτητα $\upsilon_0=8,94$ m/sec ὀλισθαίνει ἐπ' αὐτοῦ εἰς μῆκος s=200 m, μέχρις ὅτου σταματήσῃ; ['Απ. $\eta=R/B=m\gamma/m g=(\upsilon_0^2/2s):g$].

123. Σῶμα μάζης m=500 gr, κείμενον ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιφανείας, σύρεται ἐπ' αὐτῆς μὲ σταθερὰν δύναμιν καὶ διανύει διάστημα s=54 m εἰς χρόνον t=3 sec. Πόση εἶναι ἡ ἐνεργοῦσα ἐπὶ τοῦ σώματος κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς κινήσεως σταθερὰ δύναμις, ἂν ὁ συντελεστὴς τριβῆς κατὰ τὴν ὀλίσθησιν αὐτὴν

εἶναι $\eta=0{,}3$; ['Απ. $m(g.\eta+2s/t^2)$].

124. Αὐτοκίνητον, τὸ ὁποῖον κινεῖται ἐπὶ ὁριζοντίου δρόμου μὲ ταχύτητα $\upsilon=75$ km/h διακόπτει ἀποτόμως τὴν λειτουργίαν τῆς μηχανῆς του καὶ σταματᾶ τότε εἰς ἀπόστασιν $s=750$ m. Ποῖος εἶναι ὁ συντελεστὴς τριβῆς; ['Απ. $\eta=(\upsilon^2:2s)/g$).

VIII. Μηχανικὴ ἠρεμούντων ὑγρῶν (ὑδροστατική)

§ 47. Ἰδιομορφίαι τῶν ὑγρῶν. ***α) Διακριτικὰ τῶν ὑγρῶν.*** Τὰ ὑγρὰ διακρίνονται ἀπὸ τὰ στερεὰ οὐσιαστικῶς ἐκ τοῦ ὅτι τὰ μόριά των ὀλισθαίνουν πολὺ εὔκολα τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου καὶ συνεπῶς δὲν χρειάζεται νὰ καταβληθῇ ἔργον διὰ τὴν μεταβολὴν τοῦ σχήματός των, ἀρκεῖ ἡ μεταβολὴ αὐτὴ νὰ γίνεται ἀρκετὰ βραδέως. Μόνον εἰς ταχείας μεταβολὰς τοῦ σχήματος προβάλλεται ἀντίστασις, τὴν ὁποίαν ὀνομάζομεν ***ἰξῶδες*** τοῦ ὑγροῦ. Μερικὰ σώματα, ὅπως εἶναι ἡ ἄσφαλτος, τὸ βουλοκέρι κ.ἄ., ἔχουν τόσον μεγάλο ἰξῶδες ὥστε νὰ παρουσιάζουν ἐνδιαμέσους ἰδιότητας μεταξὺ συνήθων εὐκινήτων ὑγρῶν καὶ στερεῶν ἀμόρφων σωμάτων. Ἔτσι ἡ ἄσφαλτος εἰς βίαια κτυπήματα θρυμματίζεται ὡς στερεόν, ἐνῶ, ἂν ἀφεθῇ ἐπὶ πολὺ ἐπάνω εἰς ὁριζοντίαν ἐπιφάνειαν, ἐξαπλώνεται σιγὰ - σιγὰ ἐπ' αὐτῆς ὡς ὑγρόν· εἶναι λοιπὸν εὔλογον ὅτι σώματα ὡς ἡ ἄσφαλτος χαρακτηρίζονται ὡς ὑγρὰ μὲ μεγάλο ἰξῶδες, ἀφοῦ ἡ ταχύτης τῆς μεταβολῆς τοῦ σχήματος παρέχει τὸ ἰξῶδες ὑγροῦ Εἰς τὴν εὐκινησίαν τῶν μορίων των τὰ ὑγρὰ ὁμοιάζουν μὲ τὰ ἀέρια καὶ χαρακτηρίζονται ἀπὸ κοινοῦ μὲ αὐτὰ ὡς ***ρευστά***. διακρίνονται ὅμως οὐσιωδῶς ἀπ' αὐτὰ ἐκ τοῦ ὅτι τὰ ὑγρὰ σκορπίζονται κατὰ σταγόνας, εἶναι, λέμε, ***στάζοντα ρευστά***, ἐνῶ τὰ ἀέρια ἐκφεύγουν κατὰ μεμονωμένα μόρια.

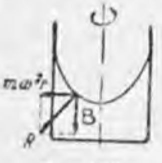
Ἀντιθέτως πρὸς τὸ εὐμετάβολον τοῦ σχήματός των τὰ ὑγρὰ παρουσιάζουν ἐξαιρέτως μεγάλην ἀντίστασιν εἰς κάθε ἐλάττωσιν τοῦ ὄγκου των. Πρέπει νὰ τὰ συμπιέσωμεν μὲ πολὺ μεγάλας δυνάμεις διὰ νὰ προκαλέσωμεν μόλις αἰσθητὴν ἐλάττωσιν τοῦ ὄγκου. Ἔτσι χρειάζεται πίεσις 1000 ἀτμοσφαιρῶν (πρβλ. § 55) διὰ νὰ ἐπιτευχθῇ ἐλάττωσις τοῦ ὄγκου ὕδατος κατὰ 5 %. Ἐπὶ πλέον καὶ ἡ μικρὰ αὐτὴ ἐλάττωσις τοῦ ὄγκου ἐξαφανίζεται ἐξ ὁλοκλήρου μόλις παύσῃ νὰ ἐνεργῇ ἡ πίεσις. Ἔχουν λοιπὸν τὰ ὑγρὰ ἀπόλυτον ἐλαστικότητα ὄγκου. Λόγῳ τῆς τόσον ὀλίγον αἰσθητῆς συμπιεστικότητός των τὰ ὑγρὰ θεωροῦνται πρακτικῶς ὡς ***ἀσυμπίεστα***.

Σχετικῶς μὲ τὴν τακτοποίησιν καὶ τὴν κινητικὴν κατάστασιν τῶν μορίων των τὰ ὑγρὰ παίρνουν μιὰ διάμεσον θέσιν μεταξὺ στερεῶν καὶ ἀερίων. Κατὰ συνέπειαν τῆς μεγάλης πυκνότητος ποὺ παρουσιάζει ἡ διάταξις τῶν μορίων ὑγροῦ (εἰς τοῦτο ὀφείλεται τὸ πρακτικῶς ἀσυμπίεστον τῶν ὑγρῶν) δὲν μπορεῖ νὰ κινοῦνται ταῦτα, ὅπως εἰς τὰ ἀέρια, κατὰ πάσας τὰς δυνατὰς διευθύνσεις εὐθυγράμμως μὲ μοναδικὸν αἴτιον ἀλληλεπαλλήλων μεταβολῶν διευθύνσεως τὰς μεταξύ των συγκρούσεις. Ἐξ ἄλλου ἡ ἐνέργεια τῆς θερμικῆς κινήσεως (§ 41,5) τῶν μορίων εἶναι εἰς τὰ ὑγρὰ τόσον μεγάλη, ὥστε νὰ μὴ ἐπαρκοῦν αἱ μεταξὺ τῶν μορίων δυνάμεις διὰ τὸν περιορισμὸν τῆς κινήσεως αὐτῆς εἰς βαθμόν, ὥστε νὰ μπορῆ νὰ διαμορφώνεται καλῶς διατεταγμένον πλέγμα, ὅπως γίνεται εἰς τὴν κρυσταλλικὴν κατάστασιν. Εἰς τοὺς κρυστάλλους εἴδαμε ὅτι τὰ μόρια πάλλονται περὶ σταθερὰς θέσεις ἰσορροπίας. Εἰς τὰ ὑγρὰ ἡ τακτοποίησις τῶν μορίων ἔχει διαταραχθῆ καὶ χαλαρωθῆ τόσον, ὥστε τὰ πλάτη τῶν παλμῶν, ποὺ περιορίζονται ἀπὸ τὰς συγκρούσεις μὲ τὰ γειτονικά των, καθίστανται ἀκανόνιστα καὶ ἐπιτρέπουν νὰ λαμβάνη χώραν συχνὴ ἐναλλαγὴ θέσεων. Διὰ τοῦτο μποροῦμε νὰ θεωρήσωμεν τὴν κίνησιν τῶν μορίων εἰς τὸ ὑγρὸν ὡς μίαν ἀκανόνιστον παλμικὴν κίνησιν περὶ *ὁλονὲν μετακινουμένην* θέσιν ἰσορροπίας. Παρὰ τὴν μεγάλην αὐτὴν εὐκινησίαν τῶν μορίων δὲν ἔχομεν ἀκόμη εἰς τὰ ὑγρὰ τὴν πλήρη ἀταξίαν ποὺ ὑπάρχει εἰς τὰς κινήσεις τῶν μορίων τῶν ἀερίων· ὑπάρχει μᾶλλον μιὰ *τακτοποίησις ἀμέσου γειτονίας*, δηλ. τακτοποίησις κατὰ τὴν ὁποίαν τὰ γύρω ἀπὸ ἓν ἕκαστον τῶν μορίων εἶναι κατὰ ἕνα τρόπον κανονικῶς διατεταγμένα. Ἡ τακτοποίησις ὅμως ποὺ δείχνουν τὰ μόρια εἰς κάποιαν θέσιν τοῦ ὑγροῦ δὲν εἶναι ἡ αὐτὴ εἰς ἄλλην θέσιν αὐτοῦ καὶ δι' αὐτὸ ὁμιλοῦμεν περὶ *τακτοποιήσεως ἀμέσου γειτονίας* (σταγονιδίων). Εἰς τὰ στερεὰ ἡ τακτοποίησις τῶν μορίων ἐπεκτείνεται εἰς μεγάλας περιοχὰς καὶ εἶναι ἰδανική· εἰς τὰ ὑγρὰ περιορίζεται εἰς τὸν ἄμεσον περίγυρον τοῦ θεωρουμένου μορίου καὶ εἶναι ὑπὸ διαρκῆ κλονισμόν. Ἡ ἐγγὺς τακτοποίησις ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὰς μεταξὺ τῶν μορίων δυνάμεις, τὴν πυκνότητα τῆς συσκευασίας τῶν μορίων καὶ τὴν ἐνέργειαν τῆς θερμικῆς κινήσεως αὐτῶν.

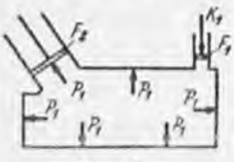
β) Ἐλευθέρα ἐπιφάνεια ὑγροῦ. Ἡ ἐλευθέρα ἐπιφάνεια ὑγροῦ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὰς ἐπενεργούσας ἐξωτερικὰς δυνάμεις. Τὰ σωματίδια τοῦ ὑγροῦ διατηροῦν ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοιούτων δυνάμεων τὴν κίνησίν των μέχρις ὅτου διαταχθοῦν ἐπὶ ἐπιφανείας καθέτου πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς ἐξωτερικῆς δυνάμεως, διότι τότε δὲν ἠμποροῦν νὰ μετακινηθοῦν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας. Εἰς τὴν περίπτωσιν π.χ. ποὺ τὸ ὑγρὸν εὑρίσκεται εἰς ἰσορροπίαν μέσα εἰς εὐρὺ δοχεῖον καὶ δὲν ὑφίσταται τὴν ἐπίδρασιν ἄλλης δυνάμεως παρὰ μόνον τοῦ βάρους του, ἡ ἐλευθέρα ἐπιφάνεια τοῦ ὑγροῦ θὰ εἶναι ὁριζοντία, διότι τότε τὸ βάρος τυχόντος μορίου ποὺ ἐνεργεῖ κατακορύφως πρὸς τὰ κάτω (καθέτως πρὸς τὴν ὁριζοντίαν ἐπιφάνειαν), ἐξουδετερώνεται ἀπὸ τὴν συνισταμένην τῶν μοριακῶν δυνάμεων τῶν γύρω του ἄλλων μορίων, ἡ ὁποία (συνισταμένη) ἔχει λόγω τῆς συμμετρικῆς διατάξεως, διεύθυνσιν κάθετον ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν (ὡς πρὸς τὴν καμπύλωσιν ποὺ παρατηρεῖται εἰς τὰς θέσεις ἐπαφῆς τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ μὲ τὰ τοιχώματα τοῦ δοχειου, πρὸ πάντων εἰς στενοὺς σωλῆνας· πρβλ. § 52).

Ἂν πλὴν τοῦ βάρους ἐνεργοῦν ἐπὶ τοῦ ὑγροῦ καὶ ἄλλαι δυνάμεις, τότε θὰ ἀποκαθίσταται ἰσορροπία, ὅταν ἡ ἐλευθέρα ἐπιφάνεια εἶναι κάθετος πρὸς τὴν συνισταμένην αὐτῶν. Ἔτσι, ἂν τοποθετήσωμεν κυλινδρικὸν δοχεῖον μὲ ὑγρὸν ἐπὶ τοῦ ἄξονος φυγοκεντρικῆς μηχανῆς καὶ θέσωμεν τοῦτο εἰς περιστροφήν, τότε ἐκτὸς τοῦ βάρους ἐνεργεῖ ἐπὶ τῶν μορίων τοῦ ὑγροῦ καὶ ἡ φυγόκεντρος δύναμις καὶ κατὰ συνέπειαν ἡ ἐπιφάνεια καμπυλώνεται, ὥστε νὰ εἶναι πάλιν κάθετος ἐπὶ τῆς συνισταμένης R (σχ. 107) τοῦ βάρους B καὶ τῆς φυγοκέντρου δυνάμεως $m\omega^2 r$. Ὅσον περισσότερον ἀπέχουν ἀπὸ τὸν ἄξονα τὰ σωματίδια τοῦ ὑγροῦ, τόσον μεγαλυτέρα εἶναι εἰς αὐτὰ ἡ φυγόκεντρος δύναμις $m\omega^2 r$, καὶ τόσον περισσότερον πλησιάζει πρὸς τὴν ὁριζοντίαν διεύθυνσιν ἡ συνισταμένη· συνεπῶς τόσον περισσότερον ἀνυψώνεται πρὸς τὴν κατακόρυφον ἡ ἐλευθέρα ἐπιφάνεια. (Ἔτσι λαμβάνει τὴν μορφὴν παραβολοειδοῦς ἐκ περιστροφῆς).

§ 48. **Πίεσις ἐπιφερομένη ἔξωθεν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ὑγροῦ.** ***α) Ἀρχὴ τοῦ*** Pascal. Γεμίζομεν μὲ ὕδωρ δοχεῖον ποὺ φέρει δύο ἀνοίγματα (σχ. 108), καὶ κλείομεν καθὲν ἀπὸ τὰ ἀνοίγματα αὐτὰ μὲ ἔμβολον ποὺ μπορεῖ νὰ ὀλισθαίνῃ ὑδατοστεγῶς κατὰ μῆκος τῶν τοιχωμάτων τοῦ φρασσομένου ἀνοίγματος. Ἂν ἐπὶ τοῦ ἐμβόλου ποὺ φράσσει τὸ ἄνοιγμα ἐπιφανείας F_1 ἐνεργεῖ καθέτως ἡ δύναμις k_1, παρατηροῦμεν ὅτι, διὰ νὰ ὑπάρχῃ ἰσορροπία, πρέπει νὰ ἐνεργῇ ἐπὶ τοῦ ἄλλου ἐμβόλου ποὺ φράσσει τὸ ἄνοιγμα ἐπιφανείας F_2 δύναμις k_2 τόση, ὥστε νὰ εἶναι: $k_1 : F_1 = k_2 : F_2$ ἢ $k_1 : k_2 = F_1 : F_2$ ἢ $k_1 . F_2 = k_2 . F_1$ (62)



Σχ. 107



Σχ. 108

Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο γίνεται εὐνόητον, ἂν σκεφθῶμεν ὅτι, ἐπειδὴ τὸ ὑγρὸν εἶναι πρακτικῶς ἀσυμπίεστον καὶ ἀποτελεῖται ἀπὸ εὐκίνητα μόρια, ἡ πιεστικὴ δύναμις k_1 ποὺ εἰσωθεῖ τὸ ἔμβολον F_1 κατὰ διάστημα s_1 θὰ ἀναγκάσῃ τὸ ἔμβολον F_2 νὰ ἐξωθηθῇ κατὰ διάστημα s_2 τόσον, ὥστε ἡ ἐλάττωσις τοῦ ὄγκου κατὰ $F_1 . s_1$ ποὺ προκαλεῖ ἡ εἰσώθησις τοῦ ἑνὸς ἐμβόλου νὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν αὔξησιν αὐτοῦ κατὰ $F_2 . s_2$ ποὺ γίνεται μὲ τὴν ἐξώθησιν τοῦ ἄλλου. Θὰ εἶναι λοιπόν: $F_1 . s_1 = F_2 . s_2$. Ἀλλὰ ἡ δύναμις k_1 ποὺ ἐνεργεῖ ἐπὶ τοῦ πρώτου ἐμβόλου ἐπὶ διάστημα s_1 παρέχει ἔργον $k_1 s_1$, τὸ ὁποῖον κατὰ τὴν ἀρχὴν διατηρήσεως τοῦ ἔργου πρέπει νὰ εἶναι ἴσον μὲ ἐκεῖνο ποὺ ἐκδηλώνεται εἰς τὸ δεύτερον ἔμβολον, ποὺ ὑποχωρεῖ μὲ δύναμιν k_2 ἐπὶ διάστημα s_2, ἤτοι πρέπει νὰ εἶναι καί: $k_1 s_1 = k_2 s_2$. Ἐκ τῶν δύο τούτων ἐξισώσεων προκύπτει: $k_1 : F_1 = k_2 : F_2$, ἤτοι τὸ ὡς ἄνω πειραματικῶς διαπιστούμενον ἐξαγόμενον.

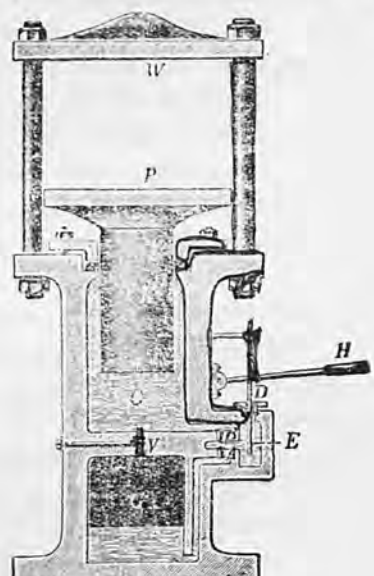
Ἐκ τούτου προκύπτει ὅτι τὸ πηλίκον $k : F = p$ τυχούσης πιεστικῆς δυνάμεως διὰ τῆς ἐπιφανείας, ἐπὶ τῆς ὁποίας ἐπιφέρεται, ἐκδηλώνεται μὲ τὴν αὐτὴν τιμὴν εἰς κάθε θέσιν τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ. Τοῦτο μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τὸν ὁρισμὸν τοῦ μεγέθους τῆς ***πιέσεως***. Ὀνομάζομεν δηλαδὴ ***πίεσιν*** p ***τὴν ἐπὶ τῆς μονάδος ἐπιφανείας*** ($1\ cm^2$) ***καθέτως ἐνεργοῦσαν δύναμιν*** k, ἤτοι: $p = k / F$ (62′)

Ἔτσι τὸ παραπάνω ἐξαγόμενον, ποὺ χαρακτηρίζεται ὡς Ἀρχὴ τοῦ

Pascal, πρὸς τιμὴν τοῦ πρώτου κατὰ τὸ 1648 διατυπώσαντος αὐτό, ἐκφράζεται ὡς ἑξῆς : ***Κάθε πίεσις, ἡ ὁποία ἐπιφέρεται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ὑγροῦ, μεταδίδεται διὰμέσου τῆς μάζης τοῦ ὑγροῦ μετὰ τῆς αὐτῆς ἐντάσεως πρὸς ὅλας τὰς διευθύνσεις.***

β) Μονάδες μετρήσεως τῆς πιέσεως. Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν ποὺ ἐδώσαμεν εἰς τὸ μέγεθος τῆς πιέσεως προκύπτει ὅτι τοῦτο ἔχει τὰς διαστάσεις δυνάμεως κατὰ μονάδα ἐπιφανείας καὶ θὰ μετρᾶται ὑπὸ μονάδος, ἡ ὁποία εἰς τὸ σύστημα cgs θὰ εἶναι ἡ δύνη κατὰ τετραγωνικὸν ἑκατοστόμετρον (dyn/cm^2) Τὴν μονάδα αὐτὴν τὴν λέμε m i c r o b a r, ἐπειδὴ εἶναι πολὺ μικρὰ καὶ τὴν θεωροῦμεν ὡς τὸ ἑκατομμυριοστὸν τῆς $1\ Bar = 10^6\ dyn/cm^2$. Εἰς τὸ τεχνικὸν μετρικὸν σύστημα λαμβάνεται ὡς μονὰς μετρήσεως τῆς πιέσεως τὸ βάρος χιλιογράμμου κατὰ τετραγωνικὸν μέτρον ($1 kg^*/m^2$). Περισσότερον κοινόχρηστοι εἶναι αἱ μονάδες ποὺ καθορίζονται βάσει τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως (πρβλ. § 55, δ).

Ἀπὸ τὴν ἐξήγησιν ποὺ ἐδόθη εἰς τὴν Ἀρχὴν τοῦ Pascal εἶναι εὐνόητον ὅτι ἡ πίεσις ποὺ ἐπιφέρεται ἔξωθεν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας F ὑγροῦ, δηλ. ἡ πίεσις ποὺ ἐπιφέρει ὁποιαδήποτε δύναμις K (πλὴν τοῦ βάρους τοῦ ὑγροῦ) ἐκδηλώνεται μὲ τὴν αὐτὴν τιμὴν K/F εἰς κάθε ἄλλην θέσιν ὄχι μόνον τῆς ἐπιφανείας, ἀλλὰ καὶ ὅλης τῆς μάζης τοῦ ὑγροῦ.

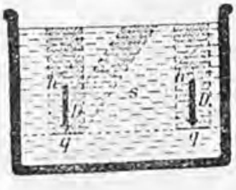


Σχ. 109

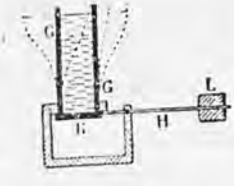
γ) Ὑδραυλικὸν πιεστήριον. Ἐφαρμογὴν τῆς Ἀρχῆς τοῦ Pascal ἔχομεν εἰς τὸ ***ὑδραυλικὸν πιεστήριον*** (σχ. 109). Ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο κυλινδρικὰ δοχεῖα C καὶ E, ποὺ συγκοινωνοῦν μεταξύ των καὶ κλείουν ὑδατοστεγῶς μὲ ἔμβολα, D τὸ ἓν καὶ K τὸ ἄλλο, τὰ ὁποῖα μποροῦν νὰ ἀναβαινοκαταβαίνουν. Ὅταν τὸ ἔμβολον D ἀνασύρεται, εἰσρέει ὕδωρ εἰς τὸ δοχεῖον E διὰ βαλβῖδος, ποὺ ἀνοίγει πρὸς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ δοχείου. Κατὰ τὴν ἐπακολουθοῦσαν εἰσώθησιν τοῦ ἐμβόλου κλείει ἡ βαλβὶς αὕτη καὶ ἀνοίγεται ἄλλη ἐκ τοῦ E πρὸς τὸ C ποὺ θέτει τὸ δοχεῖον E εἰς συγκοινωνίαν μὲ τὸ C. Ἔτσι τὸ ὕδωρ ἐξωθεῖται ἀπὸ τὸ E πρὸς τὸ C καὶ πιέζει τὸ ἔμβολον αὐτοῦ K πρὸς τὰ ἔξω. Ἡ δύναμις μὲ τὴν ὁποίαν ἐξωθεῖται τὸ ἔμβολον K εἶναι τόσες φορὲς μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν δύναμιν ποὺ εἰσωθεῖ τὸ D, ὅσες φορὲς εἶναι μεγαλυτέρα ἡ ἐγκαρσία τομὴ F τοῦ K ἀπὸ τὴν f τοῦ D. Ἀντιστοίχως ἡ μετατόπισις h τοῦ K εἶναι τὶς ἴδιες φορὲς (F/f) μικροτέρα ἀπὸ τὴν μετατόπισιν H τοῦ D καὶ ἑπομένως καὶ ὁ ὄγκος f.H τοῦ ὑγροῦ, ποὺ ἐκτοπίζεται μὲ τὴν εἰσώθησιν τοῦ D, εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν ὄγκον F.h, ποὺ παραχωρεῖται εἰς τὸ ὑγρὸν μὲ τὴν ἐξώθησιν τοῦ K. Διὰ νὰ εἶναι λοιπὸν μεγαλυτέρα ἡ πιεστικὴ δύναμις ποὺ ἐκδηλώνεται εἰς τὸ K, λόγῳ τῆς ἐπὶ τοῦ D ἐνεργούσης δινάμεως, πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἐγκαρσία τομὴ τοῦ D πολλὲς φορὲς μικροτέρα τῆς τοῦ K. Ἐπὶ πλέον πιέζομεν τὸ ἔμβολον D διὰ μοχλοῦ H. Ἂν εἶναι α ὁ μοχλοβραχίων τῆς δυνάμεως Δ, ποὺ ἐφαρμόζεται πιεστικῶς εἰς τὸ ἄκρον τοῦ μοχλοῦ H, β ὁ μοχλοβραχίων τῆς θέσεως ποὺ συνάπτεται ὁ μοχλὸς μὲ τὸ ἔμβολον D καὶ ν ἡ ***σχέσις μεταβιβάσεως***, δηλ. ὁ λόγος τῆς ἐγκαρσίας τομῆς F τοῦ ἐμβόλου K πρὸς τὴν f τοῦ D, ἡ δύναμις k, μὲ τὴν ὁποίαν θὰ ἐξωθῆται τὸ ἔμβολον K, θὰ εἶναι : $k=\Delta.(F/f)\,(\alpha/\beta)=\Delta.\nu.\alpha/\beta$ (53)

§ 49. Ὑδροστατικὴ πίεσις. α) Ὀνομάζομεν ***ὑδροστατικὴν πίεσιν*** τὴν πίεσιν ποὺ ἐξασκεῖ κάθε ὑγρὸν λόγῳ ***τοῦ βάρους του*** ἐπὶ οἱασδήποτε ὁριζοντίας ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν ἔχει ὡς βάσιν του. Ἡ πίεσις αὐτὴ ἐνεργεῖ κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ βάρους (κατακορύφως πρὸς τὰ κάτω) καὶ παρέχεται ἀπὸ τὸ βάρος τῆς στήλης τοῦ ὑγροῦ, ἡ ὁποία ἐπικάθηται κατακορύφως ἐπὶ τῆς μονάδος τῆς θεωρουμένης ἐπιφανείας (σχ. 110). Ἂν λοιπὸν εἶναι h [cm] ἡ ἀπόστασις τῆς ἐπιφανείας q ἀπὸ τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ καὶ s [p/cm^3] τὸ εἰδικὸν βάρος αὐτοῦ, τότε θὰ ἀσκῆται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας πιεστικὴ δύναμις : $D=q.h.s$ καὶ ἑπομένως ἡ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ὑδροστατικὴ πίεσις θὰ εἶναι : $p=D/q=h.s$ [p/cm^2] ἢ [gr^*/cm^2] (64)
Τὴν πίεσιν αὐτὴν ὑφίσταται οἱαδήποτε ἐπιφάνεια ποὺ θεωρεῖται εἰς τὸ αὐτὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον καὶ ὅταν τὸ ἐπ' αὐτῆς ὑγρὸν θεωρηθῇ μὲ ὁποιανδήποτε κλίσιν (σχ. 110), ἀρκεῖ ὅτι ἡ κατακόρυφος ἀπόστασις τῆς ἐπιφανείας ἀπὸ τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ εἶναι ἡ αὐτὴ h. Ἂν, ὅπως γίνεται, τὸ εἰδικὸν βάρος s ἐκφράζεται εἰς gr^*/cm^3 ἢ p/cm^3 καὶ τὸ ὕψος εἰς cm, ἡ πίεσις θὰ παρέχεται εἰς p/cm^2. Διὰ νὰ τὴν ἔχωμεν εἰς μb (microbar=dyn/cm^2), λαμβάνομεν ἀντὶ τοῦ εἰδικοῦ βάρους s τὴν πυκνότητα ρ τοῦ ὑγροῦ εἰς gr/cm^3. Τότε, ἐπειδὴ εἶναι : $s=\rho.g$, θὰ ἔχωμεν : $p=h.\rho\,g$ [μb] (64′)

β) ***Πίεσις ἐπὶ τοῦ πυθμένος***. Ὁ καθορισμὸς αὐτὸς τῆς ὑδροστατικῆς πιέσεως ὁδηγεῖ εἰς τὸ ἐκ πρώτης ὄψεως παράδοξον ἐξαγόμενον, ὅτι δηλαδή : ***Ἡ πιεστικὴ δύναμις ποὺ ἐνεργεῖ ἐπὶ πυθμένων τῆς αὐτῆς ἐπιφανείας εἰς δοχεῖα τῶν πλέον διαφόρων σχημάτων, εἶναι ἡ αὐτὴ δι' ὅλους τοὺς πυθμένας, ἐφόσον τὰ δοχεῖα γεμίζουν μὲ τὸ αὐτὸ ὑγρὸν μέχρι τοῦ αὐτοῦ (κατακορύφου) ὕψους ὑπὲρ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ πυθμένος***. Τὸ συμπέρασμα τοῦτο, γνωστὸν ὡς ***ὑδροστατικὸν παράδοξον***, μπορεῖ νὰ ἐπαληθευθῇ μὲ πείραμα, τὴν διάταξιν τοῦ ὁποίου παριστάνει τὸ σχῆμα 111. Εἰς τὴν πρὸς τοῦτο χρησιμοποιουμένην συσκευὴν τοῦ Haldat ὁ δίσκος B, ποὺ μπορεῖ νὰ λάβῃ τὴν θέσιν πυθμένος διαδοχικῶς εἰς σωλῆνας G, (G τῶν πλέον διαφόρων σχημάτων, ἀλλὰ μὲ τὸ ***αὐτὸ*** κατώτερον ἄνοιγμα ποὺ ἐφαρμόζεται σταθερῶς εἰς τὸ πλαίσιον τῆς συσκευῆς) κρατεῖται ἐπὶ τοῦ βραχίονος ἑνὸς διπλεύρου μοχλοῦ, εἰς τὸν ἄλλον βραχίονα Η τοῦ ὁποίου μπορεῖ νὰ μετακινῆται τὸ βάρος L. Διὰ μίαν ὡρισμένην θέσιν τοῦ βάρους L ἐπὶ τοῦ μοχλοβραχίονος Η, εὑρίσκομεν ὅτι ὁ πυθμὴν Β ἀποσπᾶται λόγω τῆς ἐπ' αὐτοῦ ὑδροστατικῆς πιέσεως, ὅταν τὸ ὕψος τοῦ αὐτοῦ ὑγροῦ εἰς ὁποιοδήποτε ἐκ τῶν διαδοχικῶς στερεουμένων εἰς τὴν συσκευὴν δοχείων G, G ἀποκτᾶ μίαν ὡρισμένην τιμήν, τὴν αὐτὴν εἰς ὅλα τὰ δοχεῖα,



Σχ. 110



Σχ. 111

Σχ. 112

ἀνεξαρτήτως τοῦ ἂν τὸ πρὸς τοῦτο ποσὸν τοῦ ὑγροῦ εἶναι διάφορον (ἔχει διάφορον βάρος) εἰς τὰ διάφορα δοχεῖα

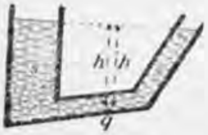
Τὸ παράδοξον ἔγκειται εἰς τὸ ὅτι διὰ τὸ αὐτὸ ὕψος τοῦ ὑγροῦ ὁ αὐτὸς πυθμὴν πιέζεται μὲ δύναμιν διάφορον τοῦ βάρους τοῦ ὑγροῦ εἰς τὰ καθέκαστα δοχεῖα· (τὸ βάρος τοῦ περιεχομένου ὑγροῦ εἶναι ἴσον μὲ τὴν δύναμιν ποὺ πιέζει τὸν πυθμένα μόνον εἰς ὄρθιον ***κυλινδρικὸν*** δοχεῖον, ἐνῶ εἶναι μικρότερον αὐτῆς, ἂν τὸ δοχεῖον στενεύῃ πρὸς τὰ ἄνω καὶ μεγαλύτερον, ἂν διευρύνεται ἢ ἁπλῶς κλίνει). Τοῦτο ὅμως κατανοεῖται, ἂν σκεφθῶμεν ὅτι, ὅταν τὸ δοχεῖον διευρύνεται πρὸς τὰ ἄνω καὶ συνεπῶς περιέχει ὑγρὸν μεγαλυτέρου βάρους, ἀναλαμβάνεται τὸ ἐπὶ πλέον βάρος ἀπὸ τὰ τοιχώματα τοῦ δοχείου, ἐνῶ, ὅταν τὸ δοχεῖον στενεύῃ, προστίθεται εἰς τὸ βάρος τοῦ ὑγροῦ καὶ πιεστικὴ δύναμις ποὺ ὑφίστανται τὰ τοιχώματα

γ) ***Πλευρικὴ πίεσις***. Λόγω τῆς μεταδόσεως κάθε πιέσεως καθ' ὅλας τὰς διευθύνσεις, εἶναι εὐνόητον ὅτι καὶ ἡ ἐκ τοῦ βάρους τοῦ ὑγροῦ προερχομένη πίεσις θὰ ἐξασκῆται καθέτως καὶ ἐπὶ πάσης ἐπιφανείας Q (σχ. 112) μὲ ὁποιανδήποτε κλίσιν βρεχομένης ὑπὸ τοῦ ὑγροῦ. Ἔτσι καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ πιεστικὴ δύναμις D ποὺ ἀσκεῖται ἐπὶ τυχούσης ἐπιφανείας Q, θεωρουμένης ἐντὸς ὑγροῦ εἰδικοῦ βάρους s, θὰ παρέχεται ἀπὸ τὴν σχέσιν : $D = Q.H.s$, εἰς τὴν ὁποίαν ὅμως τώρα τὸ ὕψος Η, τῆς ὑπὲρ τὴν ἐπιφάνειαν στήλης τοῦ ὑγροῦ, καθορίζεται ἀπὸ τὴν ***ἀπόστασιν τοῦ κ.β.*** τῆς πιεζομένης ἐπιφανείας ἀπὸ τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ.

Τὸ ὅτι ὡς ὕψος τῆς στήλης ὑγροῦ, ποὺ τὸ βάρος της παρέχει τὴν δύναμιν, ἡ ὁποία πιέζει τὴν ἐπιφάνειαν, πρέπει νὰ ληφθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ κ.β. τῆς θεωρουμένης ἐπιφανείας ἀπὸ τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ, προκύπτει εὔκολα, ἂν θεωρήσωμεν ὅλην τὴν ἐπιφάνειαν τεμαχισμένην εἰς πολὺ μικρὰ τεμαχίδια $q_1, q_2, \ldots$ τότε τὰ ὕψη τῶν στηλῶν τοῦ ὑγροῦ διὰ τὰ καθέκαστα στοιχεῖα τῆς ἐπιφανείας Q θὰ εἶναι $h_1, h_2, \ldots$ καὶ συνεπῶς ἡ δύναμις ποὺ πιέζει τὴν ἐπιφάνειαν, ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δυνάμεων ποὺ πιέζουν τὰ καθέκαστα στοιχεῖα αὐτῆς, θὰ εἶναι: $Q.H.s = q_1h_1s + q_2h_2s + \ldots$, ὅθεν: $Q.H = q_1h_1 + q_2h_2 + \ldots$ Εἰς τὴν σχέσιν αὐτὴν τὸ δεύτερον μέλος παρέχει τὸ ἄθροισμα τῶν ροπῶν τῶν καθέκαστα στοιχείων ὡς πρὸς τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν. Συνεπῶς καὶ τὸ πρῶτον ἐκφράζει τὴν ροπὴν ὁλοκλήρου τῆς ἐπιφανείας Q ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. Ἀλλὰ τότε, σύμφωνα μὲ τὸ θεώρημα ροπῶν, πρέπει τὸ H νὰ δίδεται μὲ τὴν ἀπόστασιν τοῦ κ.β. τῆς ἐπιφανείας ἀπὸ τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ.

Μὲ τὸν αὐτὸν κανόνα καθορίζεται καὶ ἡ πιεστικὴ δύναμις ποὺ ἀσκεῖται ὑπὸ τοῦ ὑγροῦ ἐπὶ τυχόντος τοιχώματος τοῦ δοχείου, εἰς τὸ ὁποῖον περιέχεται. Εἶναι προφανὲς ὅτι ἡ πίεσις (πιεστικὴ δύναμις κατὰ μονάδα ἐπιφανείας) δὲν εἶναι ἡ αὐτὴ εἰς ὅλας τὰς θέσεις πλευρικοῦ τοιχώματος, ἀφοῦ αἱ καθέκαστα θέσεις τοῦ τοιχώματος ἔχουν διάφορον ἀπόστασιν ἀπὸ τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ. Ἀλλὰ δι' ἑκάστην θέσιν τοῦ θεωρουμένου τοιχώματος ἰσχύει ἡ σχέσις (64).

§ 50. Ἀρχὴ τῶν συγκοινωνούντων δοχείων. ***α) Συγκοινωνοῦντα δοχεῖα μὲ ὑγρὸν τῆς αὐτῆς πυκνότητος.*** Κατὰ συνέπειαν τῆς ὑδροστατικῆς πιέσεως, ἂν χύσωμεν ὑγρὸν τῆς αὐτῆς πυκνότητος εἰς συγκοινωνοῦντα δοχεῖα, ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ, ὅταν ἰσορροπεῖ, θὰ εὑρίσκεται εἰς ὅλα τὰ δοχεῖα ταῦτα εἰς τὸ αὐτὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον (σχ. 113). Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο καθίσταται εὐνόητον, ἂν σκεφθῶμεν ὅτι τυχοῦσα ἐπιφάνεια q ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ πρέπει, διὰ νὰ ἰσορροπῇ, νὰ δέχεται ἑκατέρωθέν της ἴσας καὶ ἀντιθέτους πιέσεις, ἤτοι νὰ εἶναι: $s.h = s.h'$ καὶ $h = h'$ (65)



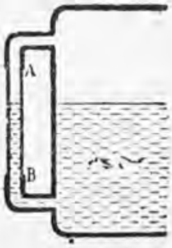
Σχ. 113

ἂν s παριστάνῃ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὑγροῦ καὶ h καὶ h' τὰ ἀπὸ τῆς θεωρουμένης θέσεως ὕψη τοῦ ὑγροῦ εἰς τὰ συγκοινωνοῦντα δοχεῖα.

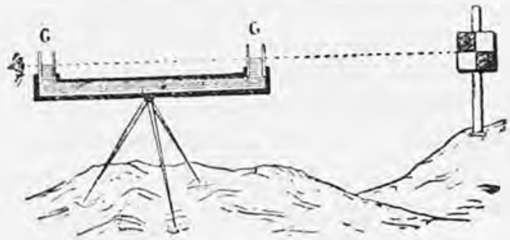
β) Συγκοινωνοῦντα δοχεῖα μὲ ὑγρὰ διαφόρων πυκνοτήτων Ἂν εἰς δύο συγκοινωνοῦντα δοχεῖα ἔχωμεν δύο διάφορα μὴ ἀναμιγνυόμενα ὑγρά, εἰδικῶν βαρῶν s καὶ S, εὑρίσκομεν, ὅταν ἐπέλθῃ ἰσορροπία, ὅτι ***τὰ ὕψη των*** h ***καὶ*** H, ἤτοι αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τὴν ἐπιφάνειαν ἐπαφῆς τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ἑνὸς καὶ τοῦ ἄλλου ὑγροῦ, ***εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν εἰδικῶν των βαρῶν***, διότι, ἂν πάλιν θεωρήσωμεν τυχοῦσαν ἐπιφάνειαν q (σχ. 114), πρέπει κατὰ τὴν ἰσορροπίαν νὰ δέχεται ἀμφοτέρωθεν ἴσας πιέσεις, ἤτοι νὰ εἶναι: $(h_0 + h).s = h_0\,s + H.S$ ἢ $h.s = H.S$ καὶ $h : H = S : s$ (65')

Σχ. 115

γ) *Ἐφαρμογαί*. Ἐφαρμογὴν τῆς ἀρχῆς συγκοινωνούντων δοχείων ἔχομεν εἰς τὸν δείκτην στάθμης τοῦ ὑγροῦ (σχ. 115), τ.ἔ. διαφανῆ σωλῆνα ΑΒ συγκοινωνοῦντα μὲ λέβητα ἢ δεξαμενὴν ὑγροῦ. Ἐκ τοῦ ὕψους τῆς στάθμης τοῦ ὑγροῦ ποὺ βλέπομεν εἰς τὸν σωλῆνα συνάγομεν ἀμέσως τὸ ὕψος ποὺ ἔχει τὸ ὑγρὸν



Σχ. 115

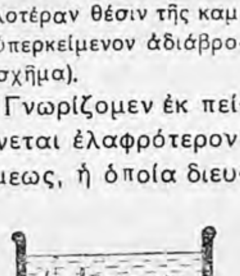


Σχ. 116

εἰς τὴν δεξαμενήν.—Εἰς τὴν *ὑδροστάθμην* (σχ. 116) πάλιν σύμφωνα μὲ τὴν ἀρχὴν τῶν συγκοινωνούντων δοχείων, ἔχομεν ἁπλοῦν ὄργανον διὰ τὴν σκόπευσιν ὁριζοντίων διευθύνσεων. — Μὲ τὴν αὐτὴν ἀρχὴν ἐπίσης ἐξηγεῖται ἡ ἀνάβλυσις ὕδατος ἀπὸ Ἀρτεσιανὰ φρέατα. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ ὕδωρ ποὺ ἔχει συρρεύσει μεταξὺ δύο ἀδιαβρόχων στρωμάτων τοῦ ἐξωτερικοῦ φλοιοῦ τῆς Γῆς (σχ. 117), μπορεῖ, ἂν τὰ στρώματα αὐτὰ ἔχουν καμφθῆ, νὰ ἀναπηδήσῃ, ὅταν εἰς χαμηλοτέραν θέσιν τῆς καμπῆς διατρυπηθῇ τὸ ὑπερκείμενον ἀδιάβροχον στρῶμα (βλέπε σχῆμα).

Σχ. 117

§ 51. Ἀρχὴ τοῦ Ἀρχιμήδους. *α) Ἄνωσις*. Γνωρίζομεν ἐκ πείρας ὅτι κάθε σῶμα ποὺ βυθίζεται εἰς ὑγρὸν γίνεται ἐλαφρότερον· τοῦτο σημαίνει ὅτι ὑφίσταται τὴν ἐπίδρασιν δυνάμεως, ἡ ὁποία διευθύνεται ἀντιθέτως πρὸς τὸ βάρος του, ἤτοι κατακορύφως ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω. Τὴν δύναμιν αὐτὴν τὴν λέμε *ἄνωσιν*. Ἡ ἄνωσις εἶναι καὶ αὐτὴ ἀποτέλεσμα τῆς πιέσεως ποὺ ἀσκεῖ τὸ ὑγρὸν λόγῳ τοῦ βάρους του. Ἂν δηλαδὴ θεωρήσωμεν σῶμα βυθισμένον εἰς ὑγρὸν (σχ. 118), εἰδικοῦ βάρους s, θὰ ὑφίσταται εἰς κάθε στοιχεῖον τῆς ἐπιφανείας του τὴν ἐπίδρασιν πιεστικῶν δυνάμεων. Αἱ ὁριζόντιαι συνιστῶσαι τούτων εἰς τὰ καθέκαστα ὁριζόντια ἐπίπεδα θὰ ἐξουδετερώνωνται ἀμοιβαίως ὡς ἴσαι καὶ ἀντίθετοι. Αἱ κατακόρυφοι ὅμως συνιστῶσαι εἶναι μεγαλύτεραι ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω, ἀπὸ τὰς ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω, ἐπειδὴ αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ εἶναι μεγαλύτεραι, προκειμένου περὶ τῶν κατωτέρων στοιχείων ἐπιφανείας τοῦ σώματος ἀπὸ ἐκείνας ποὺ



Σχ. 118

ἔχουν τὰ ἀνώτερα στοιχεῖα ἐπιφανείας αὐτοῦ. Φανταζόμεθα τὸ σῶμα χωρισμένον εἰς τριχοδιαμετρικοὺς κατακορύφους κυλίνδρους μὲ ὕψη $h_1, h_2, \ldots, h_\nu'$ εἰς τυχόντα ἀπὸ τοὺς κυλίνδρους αὐτοὺς (τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος παριστάνεται μὲ h_i') ἐνεργεῖ πιεστικὴ δύναμις ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω ἴση μὲ : $q.(h_i+h_i').s$ καὶ ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω μὲ : $q\,h_i.s$ (ἂν μὲ h_i παραστήσωμεν τὴν ἀπόστασιν τῆς ἄνω βάσεως τοῦ κυλίνδρου ἀπὸ τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ). Ἔτσι συνολικὰ ὑφίσταται ὁ κύλινδρος τὴν ἐπίδρασιν πιεστικῆς δυνάμεως : $\boldsymbol{\alpha}=q(h_i+h_i').s-qh_is=qh_i's$, ἡ ὁποία τὸν ὠθεῖ ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω. Τὸ σύνολον τῶν ἀνώσεων τῶν κυλίνδρων παρέχει τὴν ἄνωσιν ποὺ ὑφίσταται τὸ σῶμα. Εἶναι λοιπὸν ἡ ἄνωσις τοῦ σώματος : $\boldsymbol{A}=\Sigma\boldsymbol{\alpha}=\Sigma qh_i's=s\Sigma qh_i'=s.V_\sigma=s.V_\upsilon=\boldsymbol{B}_\upsilon$ (66)

(V_σ = ὄγκος σώματος, V_υ = ὄγκος ἐκτοπιζομένου ὑγροῦ, B_υ = βάρος ὑγροῦ).

Ἤτοι : ***Ἡ ἄνωσις ποὺ ὑφίσταται σῶμα, βυθιζόμενον εἰς ὑγρόν, εἶναι ἴση μὲ τὸ βάρος τοῦ ὑγροῦ, τὸ ὁποῖον ἐκτοπίζεται ἀπὸ τὸ σῶμα.***

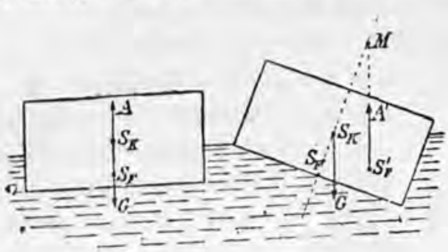
Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο διετυπώθη τὸ πρῶτον ἀπὸ τὸν Ἀρχιμήδην τὸ 222 π.Χ. καὶ χαρακτηρίζεται διὰ τοῦτο ὡς ***Ἀρχὴ τοῦ Ἀρχιμήδους***. Διὰ τὴν πειραματικὴν ἀπόδειξιν αὐτῆς μποροῦμε νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὸν ζυγὸν τοῦ σχ. 121, τὸν ὁποῖον ὀνομάζομεν ***ὑδροστατικόν***. Κάτω ἀπὸ τὴν βραχυτέραν πλάστιγγα κρέμεται κυλινδρικὸν δοχεῖον καὶ ὑπ' αὐτὸ κύλινδρος, ποὺ εἶναι ἀκριβῶς ἴσος μὲ τὴν χωρητικότητα τοῦ δοχείου. Ὅταν μὲ τὴν βύθισιν τοῦ κυλίνδρου εἰς τὸ ὑγρὸν δοχείου διαταραχθῇ ἡ ἰσορροπία τοῦ ζυγοῦ, εὑρίσκομεν ὅτι διὰ νὰ τὴν ἐπαναφέρωμεν ἀρκεῖ νὰ γεμίσωμεν τὸ κυλινδρικὸν δοχεῖον μὲ ὑγρόν. Τοῦτο ἀποδεικνύει ὅτι ἡ ἄνωσις εἶναι ἴση μὲ τὸ βάρος τοῦ ἐκτοπιζομένου ἀπὸ τὸν κύλινδρον ὑγροῦ.

β) Συνέπειαι τῆς Ἀνώσεως. 1. Ἂν ἐπὶ τοῦ ἑνὸς δίσκου ζυγοῦ ἰσορροπήσωμεν μὲ σταθμὰ ποὺ θέτομεν εἰς τὸν ἄλλον δίσκον δοχεῖον μὲ ὑγρὸν καὶ μετὰ τοῦτο βυθίσωμεν τὴν χεῖρα μας εἰς τὸ ὑγρόν, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἰσορροπία τοῦ ζυγοῦ διαταράσσεται καὶ ὁ ζυγὸς κλίνει πρὸς τὸν δίσκον ποὺ ἔχει τὸ δοχεῖον μὲ τὸ ὑγρόν· τοῦτο ἐξηγεῖται μὲ τὸ ὅτι κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς δράσεως καὶ ἀντιδράσεως τὸ βυθιζόμενον σῶμα (τὸ χέρι μας), ὑφιστάμενον τὴν ἄνωσιν, ἀσκεῖ εἰς τὸ ὑγρὸν ἴσην καὶ ἀντίθετον δύναμιν, ἤτοι ὠθεῖ τὸ δοχεῖον μὲ τὸ ὑγρὸν πρὸς τὰ κάτω μὲ δύναμιν ἴσην μὲ τὸ βάρος τοῦ ἐκτοπιζομένου ὑγροῦ, (δηλ. μὲ τὴν ἄνωσιν).

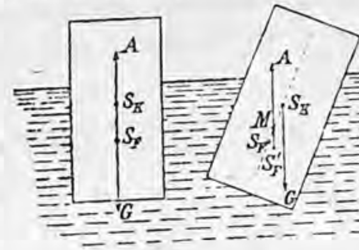
2. Ἂν εἶναι V ὁ ὄγκος σώματος, σ τὸ εἰδικὸν βάρος αὐτοῦ καὶ s τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὑγροῦ, εἰς τὸ ὁποῖον βυθίζεται τὸ σῶμα, εἶναι εὐνόητον ὅτι τὸ σῶμα θὰ καταπέσῃ εἰς τὸ ὑγρόν, ἂν τὸ βάρος του $B=V.\sigma$ εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἀνώσεως (δηλαδὴ τοῦ βάρους ἴσου ὄγκου ὑγροῦ), ἤτοι τοῦ $V.s$ καὶ συνεπῶς, ἂν εἶναι : $\sigma>s$, ἤτοι

ἂν τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ σώματος εἶναι μεγαλύτερον τοῦ εἰδικοῦ βάρους τοῦ ὑγροῦ. Τὸ σῶμα θὰ αἰωρῆται εἰς τὸ ὑγρόν, ἂν εἶναι $\sigma = s$. Τέλος, ἂν εἶναι $\sigma < s$, τὸ σῶμα θὰ ἐπιπλέῃ εἰς τὸ ὑγρόν. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ σῶμα ἰσορροπεῖ ἐπάνω εἰς τὸ ὑγρόν, βυθιζόμενον εἰς αὐτὸ τόσον, ὥστε τὸ βάρος ὅλου τοῦ σώματος νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ βάρος τοῦ ὑγροῦ ποὺ ἐκτοπίζεται ἀπὸ τὸ βυθιζόμενον εἰς τὸ ὑγρὸν μέρος τοῦ σώματος.

3. Προκειμένου περὶ πλοίων δὲν ἀρκεῖ νὰ ἐπιπλέουν ἐπὶ τῆς θαλάσσης, ἀλλὰ πρέπει νὰ παραμένουν καὶ ὄρθια ἐπ' αὐτῆς καὶ μάλιστα κατὰ τρόπον, ὥστε ἡ ὀρθία θέσις νὰ εἶναι τρόπον τινὰ θέσις εὐσταθοῦς ἰσορροπίας, δηλ. θέσις πρὸς τὴν ὁποίαν τείνουν νὰ ἐπανέλθουν, ὅταν κατὰ τοὺς κλυδωνισμοὺς ἐκτρέπονται ἀπὸ αὐτήν. Εἰς κάθε θέσιν τοῦ ἐπιπλέοντος σώματος ἐνεργοῦν ἐπ' αὐτοῦ, ἀφ' ἑνὸς τὸ βάρος του G (εἰς τὸ κέντρον βάρους S_K τοῦ σώματος) καὶ ἀφ' ἑτέρου ἡ ἄνωσις A (εἰς τὸ κέντρον τῆς ἀνώσεως S_F) (σχ. 119, 120). Ἂν αἱ δύο αὐταὶ ἴσαι καὶ ἀντιθέτου φορᾶς δυνάμεις ἐνεργοῦν ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ἐξουδετερώνονται ἀμοιβαίως καὶ τὸ σῶμα ἰσορροπεῖ. Ἂν ὅμως, ὅπως συμβαίνει εἰς πᾶσαν ταλάντευσιν, τὸ κέντρον τῆς ἀνώσεως S_F μετατοπίζεται σχετικῶς πρὸς τὸ ἐπιπλέον σῶμα, αἱ δύο ἴσαι καὶ ἀντίθετοι δυνάμεις δὲν ἐνεργοῦν ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ἀλλὰ ἀποτελοῦν ζεῦγος, τὸ ὁποῖον προκαλεῖ περιστροφὴν



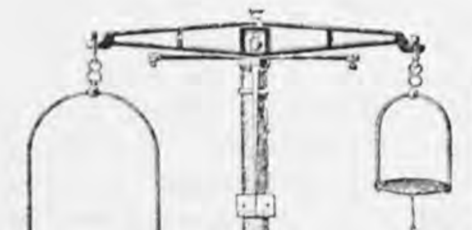
Σχ. 119



Σχ. 120

τοῦ σώματος. Πρέπει ὅθεν νὰ ληφθῇ πρόνοια, ὥστε ἡ ἀναφαινομένη ροπὴ περιστροφῆς νὰ ἐπαναφέρῃ τὸ σῶμα εἰς τὴν ὀρθίαν θέσιν, ἤτοι πρέπει τὸ ζεῦγος ποὺ ἀποτελοῦν τὸ βάρος G καὶ ἡ ἄνωσις A νὰ εἶναι ***ζεῦγος ἐπαναφορᾶς*** καὶ ὄχι ***ζεῦγος ἀνατροπῆς***. Πρὸς καθορισμὸν τῆς ἀναγκαίας συνθήκης ποὺ καθορίζει πότε τὸ ἀναπτυσσόμενον ζεῦγος περιστροφῆς εἶναι τοιοῦτο ἐπαναφορᾶς καὶ πότε ἀνατροπῆς, θεωροῦμεν τὴν θέσιν ποὺ ἔχει τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῆς γραμμῆς δράσεως τῆς ἀνώσεως μὲ τὴν ***γραμμὴν συμμετρίας*** τοῦ ἐπιπλέοντος σώματος. (Ἡ γραμμὴ αὐτὴ συμπίπτει μὲ τὴν εὐθεῖαν ποὺ ἑνώνει τὸ κ.β. μὲ τὸ κ. ἀνώσεως, ὅταν τὸ σῶμα ἰσορροπεῖ ἐπὶ τοῦ ὑγροῦ). Τὸ σημεῖον τοῦτο καλεῖται ***μετάκεντρον M***. Εἰς τὴν περίπτωσιν ποὺ τὸ μετάκεντρον κατὰ τὰς ταλαντεύσεις κεῖται ὑψηλότερον τοῦ κ.β. τοῦ σώματος (σχ. 119), τὸ ἀναπτυσσόμενον ζεῦγος εἶναι τοιοῦτο ἐπαναφορᾶς· ἀντιθέτως, ὅταν τὸ μετάκεντρον M εἶναι χαμηλότερον τοῦ κ.β. s_κ τοῦ σώματος (σχ. 120), τὸ ἀναπτυσσόμενον ζεῦγος προκαλεῖ ἀνατροπήν. Πρὸς ἐξασφάλισιν τῆς ἐπιθυμητῆς συνθήκης φροντίζομεν νὰ εἶναι τὸ κ.β. τοῦ πλοίου ἀρκετὰ χαμηλά, ὥστε καθ' ὅλας τὰς ἐνδεχομένας ταλαντεύσεις νὰ μὴ προκύπτει περίπτωσις νὰ εὑρεθῇ τοῦτο ὑψηλότερον τοῦ μετακέντρου. Ὡς τόσο λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν, προκειμένου περὶ πλοίων, ὅτι δὲν πρέπει ἡ καταβίβασις τοῦ κ.β. νὰ γίνεται πέραν τοῦ ἀναγκαίου διὰ τὴν ἐπαναφορὰν ὁρίου, διότι ὅσον χαμηλότερον εὑρίσκεται τὸ κ.β. τοῦ πλοίου, τόσον μεγαλύτερον εἶναι τὸ πλάτος τῶν ταλαντεύσεων καὶ συνεπῶς τόσον ἐνοχλητικώτερος ὁ πλοῦς.

γ) ***Προσδιορισμὸς τοῦ εἰδικοῦ βάρους σώματος διὰ τῆς ἀνώσεως.*** Ἂν προσδιορίσωμεν τὸ βάρος B ἑνὸς σώματος εἰς τὸν ἀέρα καὶ τὸ βάρος B′ τοῦ αὐτοῦ σώματος βυθισμένου εἰς ὕδωρ, εἶναι προφανὲς ὅτι ἡ διαφορὰ B—B′ μᾶς δίδει τὴν ἄνωσιν A, ἤτοι τὸ βάρος B_u ὕδατος ποὺ ἔχει ὄγκον V_u ἴσον μὲ τὸν ὄγκον V τοῦ σώματος. Ἀλλὰ τὸ βάρος B_u τοῦ ὕδατος (ἀκριβέστερον, ὅταν τοῦτο εἶναι ἀπεσταγμένον καὶ θερμοκρασίας 4° C) εἶναι ἀριθμητικῶς ἴσον μὲ τὸν ὄγκον του V_u καὶ συνεπῶς μὲ τὸν ὄγκον V τοῦ σώματος. Ἔτσι τὸ εἰδικὸν βάρος σ τοῦ σώματος, ἤτοι τὸ πηλίκον τοῦ βάρους του B διὰ τοῦ ὄγκου του V θὰ εἶναι: $\sigma = B/V = B/V_u = B/B_u = B/A = B/(B-B')$ (67)
Προκειμένου περὶ ὑγροῦ x προσδιορίζομεν πρῶτον τὴν ἄνωσιν A_u ποὺ ὑφίσταται τυχὸν σῶμα βυθιζόμενον εἰς ὕδωρ καὶ ἔπειτα τὴν ἄνωσιν A_x τοῦ αὐτοῦ σώματος εἰς τὸ ὑγρὸν x. Τότε τὸ εἰδικὸν βάρος σ τοῦ ὑγροῦ x θὰ εἶναι: $\sigma = B_x : V_x = B_x : B_u = A_x : A_u$ (67′)
Κατὰ ταῦτα τὸ εἰδικὸν βάρος μπορεῖ νὰ προσδιορισθῇ ταχύτητα διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως ὑδροστατικοῦ ζυγοῦ (σχ. 121), ἀφοῦ μὲ αὐτὸν μποροῦμε νὰ προσδιορίσωμεν τὸ βάρος τοῦ σώματος πρῶτον εἰς τὸν ἀέρα καὶ ἔπειτα βυθισμένου εἰς τὸ ὑγρόν. Δι᾽ ἀμεσωτέραν λῆψιν τοῦ εἰδικοῦ βάρους ὑγροῦ χρησιμεύουν ὄργανα ποὺ καλοῦνται ***ἀραιόμετρα***. Εἶναι ὅπως δείχνει τὸ σχ. 122 ἐπιμήκη κλειστὰ ὑάλινα σώματα ποὺ εἰς τὸ κατώτερον ἄκρον περιέχουν κατάλληλον πλήρωσιν, ὥστε νὰ βυθίζωνται εἰς ἀπεσταγμένον ὕδωρ (θερμοκρασίας 4° C), εἴτε μέχρι τῆς κατωτάτης θέσεως τοῦ βαθμολογημένου τμήματος τοῦ ὀργάνου, εἴτε μέχρι τῆς ἀνωτάτης. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν χρησιμεύουν δι᾽ ὑγρὰ ποὺ ἔχουν εἰδικὸν βάρος μεγαλύτερον τῆς μονάδος (τοῦ εἰδικοῦ βάρους τοῦ ὕδατος). Εἰς τὴν δευτέραν δι᾽ ὑγρὰ εἰδικοῦ βάρους μικροτέρου τῆς μονάδος. Δι᾽ ἁπλῆς ἀναγνώσεως τῆς ὑποδιαιρέσεως, μέχρι τῆς

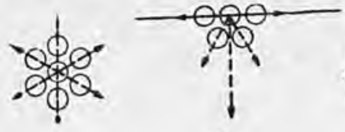


Σχ. 121

Σχ. 122

ὁποίας βυθίζεται τὸ ὄργανον εἰς τὸ ὑπὸ ἐξέτασιν ὑγρόν, παρέχεται τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὑγροῦ. Εἰς εἰδικὰς περιπτώσεις ἡ βαθμολογία τοῦ ὀργάνου γίνεται εἰς βαθμοὺς ποὺ παρέχουν τὴν συγκέντρωσιν διαλύματος (οἰνοπνευματόμετρα, σακχαρόμετρα, γαλακτόμετρα).

§ 52. **Ἐπιφανειακὴ τάσις.** α΄) Ἂν ἀφήσωμεν μὲ προσοχὴν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ἠρεμοῦντος ὕδατος βελόνην ἢ ξυριστικὴν λεπίδα ποὺ φέρει λεπτὸν ἐπίστρωμα λίπους, παρατηροῦμεν ὅτι παρὰ τὸ ὅτι ἔχουν εἰδικὸν βάρος μεγαλύτερον τοῦ εἰδικοῦ βάρους τοῦ ὕδατος δὲν βυθίζονται εἰς τὸ ὕδωρ, ἀλλὰ κρατοῦνται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας του. Εἰς ἠρεμοῦντα ὕδατα παρατηροῦνται ἔντομα ποὺ τρέχουν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος χωρὶς νὰ βυθίζωνται. Ἀρκεῖ ὅμως εἰς τὰς περιπτώσεις ταύτας νὰ διασπασθῇ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὕδατος καὶ τὸ σῶμα ποὺ στηρίζεται ἐπ᾿ αὐτῆς βυθίζεται. Ἀπὸ τὰς παρατηρήσεις αὐτὰς προκύπτει ὅτι ἡ ἐπιφάνεια ἑνὸς ὑγροῦ ὁμοιάζει πρὸς τεντωμένην λεπτὴν μεμβράνην ποὺ ἐπικαλύπτει τὴν μᾶζαν τοῦ ὑγροῦ. Ἡ ἰδιότης αὐτὴ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας ὑγροῦ εἶναι συνέπεια τῶν μεταξὺ τῶν μορίων του ἑλκτικῶν δυνάμεων (§ 42, β). Κάθε μόριον εἰς τὸ ***ἐσωτερικὸν*** τοῦ ὑγροῦ (σχ. 123α) ὑφίσταται ἀπὸ τὰ γύρω του μόρια ἕλξεις, αἱ ὁποῖαι ἐξουδετερώνονται ἀμοιβαίως. Ἂν ὅμως τὸ θεωρούμενον μόριον εὑρίσκεται εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ (σχ. 123β), τότε θὰ ἕλκεται ἀπὸ ἄλλα μόρια μόνον ἀπὸ τὴν πλευρὰν ποὺ συνορεύει μὲ τὴν μᾶζαν τοῦ ὑγροῦ, ὄχι ὅμως καὶ ἀπὸ τὴν συνορεύουσαν μὲ τὸν ἀέρα· εἰς τὴν περίπτωσιν λοιπὸν αὐτὴν προκύπτει συνισταμένη τῶν ἑλκτικῶν δυνάμεων, ποὺ ἀσκοῦνται ἀπὸ τὰ γειτονικά του μόρια, ἡ ὁποία διευθύνεται πρὸς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ ὑγροῦ.



a b

α Σχ. 123 β

Σχ. 124

Ἡ δύναμις αὐτὴ ὑφίσταται μόνον διὰ τὰ μόρια ἑνὸς λεπτοτάτου στρώματος τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας λόγω τῆς πολὺ μικρᾶς ἀκτῖνος δράσεως τῶν μοριακῶν δυνάμεων. Ἔτσι, προκειμένου νὰ ἀχθῇ ἓν μόριον ἀπὸ τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ ὑγροῦ εἰς τὴν ἐπιφάνειαν αὐτοῦ πρέπει νὰ ὑπερνικηθῇ ἡ δύναμις αὐτή, ἤτοι νὰ καταβληθῇ ἔργον. Κατὰ συνέπειαν τὰ μόρια τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας ὑγροῦ ἔχουν ἓν ὡρισμένον ποσὸν δυναμικῆς ἐνεργείας σχετικὰ πρὸς τὰ εὑρισκόμενα εἰς τὸ ἐσωτερικόν. Μὲ ἄλλα λόγια ἡ ἐπιφάνεια ἑνὸς ὑγροῦ εἶναι ἕδρα δυναμικῆς ἐνεργείας. Τὴν τιμὴν τῆς δυναμικῆς αὐτῆς ἐνεργείας καθ᾿ ἕκαστον τετραγωνικὸν ἑκατοστόμετρον τῆς ἐπιφανείας, τὴν λέγομεν ***ἐπιφανειακὴν τάσιν [α]***· ὅθεν ἡ ἐπιφανειακὴ τάσις θὰ μετρᾶται μὲ μονάδα τό: ἔργιον κατὰ τετραγωνικὸν ἑκατοστόμετρον (erg/cm^2).

Εἰς τὴν ἐπιφανειακὴν τάσιν ὀφείλεται τὸ ὅτι τὰ εἰς τὸν ἀέρα σταγονίδια ὑγροῦ ἔχουν σφαιρικὸν σχῆμα. Ὅσον μεγαλύτεραι εἶναι αἱ δυνάμεις συνοχῆς ποὺ ἀσκοῦνται μεταξὺ τῶν μορίων ἑνὸς ὑγροῦ, τόσον μεγαλυτέρα θὰ εἶναι καὶ ἡ ἐπιφανειακὴ τάσις τοῦ ὑγροῦ. Ἔτσι π.χ. εἰς τὸν ὑδράργυρον ποὺ ἡ συνοχὴ τῶν μορίων του εἶναι σχετικῶς μεγάλη, παρατηροῦμεν τὸν σχηματισμὸν μεγαλυτέρων σφαιρικῶν σταγόνων.

β) Τὸ σφαιρικὸν σχῆμα ποὺ λαμβάνουν ὁμοιομόρφως γύρωθεν πιεζόμεναι σταγόνες ὑγροῦ ἐξηγεῖται μὲ τὸ ὅτι τὸ σχῆμα τοῦτο μπορεῖ νὰ τὸ διατηρήσῃ **εὐσταθῶς** ὁ ὄγκος τοῦ ὑγροῦ τῆς σταγόνος· μὲ ἄλλα λόγια τὸ σφαιρικὸν σχῆμα ἀνταποκρίνεται εἰς κατάστασιν εὐσταθοῦς ἰσορροπίας, ἤτοι κατάστασιν εἰς τὴν ὁποίαν ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια ἔχει τὴν κατὰ τὸ δυνατὸν μικροτέραν τιμήν· (ὡς γνωστὸν εἰς πᾶσαν ἐκτροπὴν σώματος ἀπὸ τὴν θέσιν εὐσταθοῦς ἰσορροπίας (§ 26) ἀναφαίνονται δυνάμεις ποὺ ἀντιτίθενται εἰς τὴν ἐκτροπὴν καὶ συνεπῶς αὐξάνεται ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια τοῦ σώματος). Διὰ νὰ εἶναι ὅμως ἡ δυναμικὴ ἐνέργεια ποὺ προέρχεται ἀπὸ τὴν ἐπιφανειακὴν τάσιν ὅσον τὸ δυνατὸν μικροτέρα, πρέπει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὄγκου τῆς σταγόνος νὰ εἶναι ἐπιφάνεια σφαίρας, ἀφοῦ εἰς τὸ σῶμα τοῦτο ἔχομεν διὰ τὸν αὐτὸν ὄγκον τὴν μικροτέραν ἐπιφάνειαν.

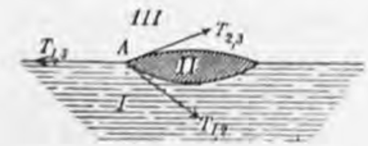
γ) Εἰς πλαίσιον σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου, τὸ ὁποῖον διαμορφώνομεν μὲ ἁρμόζουσαν κάμψιν σύρματος (σχ. 124), ἡ μία ἐκ τῶν πλευρῶν μπορεῖ νὰ ὀλισθαίνῃ κατὰ μῆκος τῶν ἑκατέρωθέν της πλευρῶν καὶ νὰ πλησιάζῃ ἢ ἀπομακρύνεται ἀπὸ τὴν ἀπέναντί της πλευράν. Βυθίζομεν τὸ πλαίσιον εἰς ὑγρὸν (π.χ. εἰς διάλυμα σάπωνος) καὶ ἔπειτα τὸ ἀνασύρωμεν ἔξω αὐτοῦ ἀπὸ τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ποὺ εὑρίσκεται ἀπέναντι τῆς κινητῆς. Ἔτσι σχηματίζεται μεταξὺ τῶν πλευρῶν τοῦ πλαισίου ὑμήν, ὁ ὁποῖος τεντώνεται ἀπὸ τὸ βάρος τῆς κινητῆς πλευρᾶς καὶ μικρὸν πρόσθετον βάρος ποὺ ἀναρτῶμεν εἰς τὸ μέσον της (βλ. σχῆμα). Εὑρίσκεται τότε ὅτι **ἀντιστοίχως πρὸς τὸ εἶδος τοῦ ὑγροῦ καὶ τὸ μῆκος τῆς κινητῆς πλευρᾶς ἡ ἔντασις τῆς δυνάμεως k** (εἰς τὸ πείραμά μας τὸ βάρος τῆς κινητῆς πλευρᾶς μὲ τὸ πρόσθετον βάρος) **ἔχει μίαν ὡρισμένην τιμὴν διὰ τὴν κατάστασιν ἰσορροπίας**. Ἂν γίνῃ μικροτέρα ὁ ὑμὴν συμμαζεύεται καὶ ἀνασύρει τὴν κινητὴν πλευρὰν μέχρις ὅτου τὴν φέρει εἰς ἐπαφὴν μὲ τὴν ἀπέναντί της. Ἂν ἀντιθέτως ἡ τιμὴ τῆς k εἶναι μεγαλυτέρα τῆς καθοριζομένης ἀπὸ τὸ εἶδος τοῦ ὑγροῦ καὶ τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς, ἡ πλευρὰ κατέρχεται καὶ ὁ ὑμὴν διασπᾶται. Ἡ πειραματικὴ αὐτὴ διαπίστωσις ὁδηγεῖ εἰς τὸν καθορισμὸν τῆς σχέσεως εἰς κάθε περίπτωσιν μεταξὺ ἐπιφανειακῆς τάσεως καὶ δυνάμεως ποὺ ἀναφαίνεται ἐξ αὐτῆς. Ὅταν δηλαδὴ ἡ δύναμις k ἔχει τὴν ἔντασιν ποὺ ἰσορροπεῖ τὴν ἐκ τῆς ἐπιφανειακῆς τάσεως προερχομένην ἀντίθετον δύναμιν, εἶναι εὐνόητον ὅτι διὰ μίαν ἐπαύξησιν τοῦ ὑμένος ἀντιστοιχοῦσαν εἰς ὀλίσθησιν τῆς πλευρᾶς κατὰ διάστημα μήκους x, παράγεται ἔργον ἴσον μὲ k x. (Τὸ ἔργον τοῦτο εἶναι ἀναγκαῖον διὰ νὰ ἔλθουν ἐκ τοῦ ἐσωτερικοῦ τοῦ ὑγροῦ ὑμένος εἰς τὴν ἐπιφάνειαν αὐτοῦ τὰ μόρια ποὺ θὰ τὴν ἐπαυξήσουν). Ἂν εἶναι μ τὸ μῆκος τῆς κινητῆς πλευρᾶς, ἡ αὔξησις τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑμένος θὰ εἶναι μ.x δι' ἑκάστην τῶν δύο ὄψεών του (προσθίας καὶ ὀπισθίας)· ὅθεν συνολικῶς: 2.μ.x. Ἂν, ὅπως εἴπαμε παραπάνω εἶναι [α] ἡ ἐπιφανειακὴ τάσις, ἤτοι ἡ εἰς τὴν μονάδα ἐπιφανείας ἀντιστοιχοῦσα ἐνέργεια, εἶναι προφανὲς ὅτι εἰς τὴν αὔξησιν τῆς ἐπιφανείας κατὰ 2.μ.x θὰ ἀντιστοιχῇ ἔργον: 2μ.x [α]. Εἶναι λοιπόν: k.x=2μx[α] ἢ k=2μ[α] καὶ συνεπῶς [α]=k/2μ (68)

δ) Ἀπὸ τὴν σχέσιν (68) προκύπτει ὅτι ἡ ἐπιφανειακὴ τάσις [α] μπορεῖ νὰ μετρηθῇ καὶ μὲ τὴν δύναμιν, ἡ ὁποία πρέπει νὰ ἐνεργῇ κατὰ μονάδα μήκους ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ διὰ νὰ ὑφίσταται ἰσορροπία. Ἔτσι ἡ ἐπιφανειακὴ τάσις ἀντὶ νὰ ἐκφράζεται εἰς erg/cm², συνηθέστερα δίδεται εἰς dyn/cm.

ε) Ἡ δύναμις k καὶ συνεπῶς ἡ ἀντίστασις ποὺ προβάλλει ὁ ὑμὴν εἰς τὴν ἐπαύξησιν τῆς ἐπιφανείας του εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς δυνάμεως μήκους x τοῦ ὑμένος. Εἶναι λοιπὸν τελείως διάφορος τῆς ἀντιστάσεως ποὺ προβάλλει ἐλαστικὴ μεμβράνη κατὰ τὸν ἐφελκυσμόν της, ὅπου ὡς γνωστόν, ἡ ἀντίστασις εἶναι ἀνάλογος τοῦ μήκους κατὰ τὸ ὁποῖον ἐφελκύεται. Ἡ διαφορὰ μεταξὺ ἐλαστικῆς δυνάμεως καὶ τῆς συνελκτικῆς δυνάμεως τῆς ἐπιφανειακῆς τάσεως καταφαίνεται καὶ ἀπὸ τὴν σύγκρισιν μιᾶς σαπουνόφουσκας μὲ ἕνα ἐλαστικὸ μπαλόνι. Καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις τὸ σφαιρικὸν σχῆμα δίδεται ἀπὸ ἐμφυσσώμενον ἀέρα. Ἀλλά, ἐνῶ εἰς τὸ μπαλόνι ἡ πίεσις αὐξάνεται, ὅταν αὐξάνεται ἡ ἀκτίς του (ὅσον περισσότερον φουσκώνεται), εἰς τὴν σαπουνόφουσκαν διαπιστώνεται ὅτι ὅσον μεγαλυτέρα εἶναι ἡ ἀκτίς, τόσον μικροτέρα εἶναι ἡ πίεσις τοῦ ἀέρος ποὺ περικλείει. Ἀπόδειξις τούτου εἶναι τὸ ὅτι εἰς περιπτώσεις, κατὰ τὰς ὁποίας ἔχομεν σαπουνόφουσκες διαφόρου μεγέθους ποὺ ἐφάπτονται ἡ μία τῆς ἄλλης, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ μέρος τοῦ τοιχώματος, ὅπου γίνεται ἡ ἐπαφή, εἶναι κοῖλον πρὸς τὴν μεγαλυτέραν. Ἀπόδειξιν ἐπίσης τοῦ ὅτι ἡ πίεσις εἶναι μεγαλυτέρα εἰς τὴν μικροτέραν σαπουνόφουσκαν παρέχει καὶ ἡ παρατήρησις ὅτι, ἂν εἰς τὰ δύο ἄκρα σωληνίσκου, ποὺ περὶ τὸ μέσον του φέρει στρόφιγγα, σχηματίσωμεν δύο διαφόρου μεγέθους πομφόλυγας καὶ μετὰ τοῦτο φέρωμεν δι' ἁρμοζούσης στροφῆς τῆς στρόφιγγος εἰς ἐπικοινωνίαν τὶς δύο σαπουνόφουσκες, ἡ μεγαλυτέρα ἀπορροφᾶ τὴν μικροτέραν. Ἡ ἰδιοτυπία αὐτὴ γίνεται κατανοητή, ἂν σκεφθῶμεν ὅτι ὅσον αὐξάνεται ἡ ἀκτὶς τῆς σαπουνόφουσκας τόσον ἐλαττώνεται ἡ καμπυλότης της καὶ ἑπομένως τόσον ἐλαττώνεται ἡ διαφορὰ πιέσεως μεταξὺ ἐσωτερικῆς καὶ ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας τῆς σαπουνόφουσκας, δεδομένου ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν ἀκτῖνος ἀπείρως μεγάλης, ὁπότε ὁ ὑμὴν εἶναι ἐπίπεδος, ἡ πίεσις εἶναι ἡ αὐτὴ καὶ εἰς τὰς δύο ὄψεις του. Ἔτσι ἡ ἐπὶ πλέον πίεσις (ὑπερπίεσις) τῆς σαπουνόφουσκας εἶναι μεγαλυτέρα ὅσον μικροτέρα εἶναι ἡ ἀκτίς της, ἐνῶ εἰς τὸ μπαλόνι ἡ ὑπερπίεσις ποὺ ἔχει εἰς τὸ ἐσωτερικόν του γίνεται μεγαλυτέρα ὅσον περισσότερον φουσκώνεται.

στ') Ἀπὸ μετρήσεις τῆς ἐπιφανειακῆς τάσεως εἰς τὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ ὑγρὸν συνορεύει μὲ ἀέρα, εὑρίσκεται ὅτι εἶναι: εἰς τὸ ὕδωρ 73 dyn/cm, εἰς τὸν ὑδράργυρον 500, εἰς τὸ οἰνόπνευμα 22, εἰς τὸ ἐλαιόλαδον 33 κλπ. Εἰς τὴν ἐπιφάνειαν ἐπαφῆς ἐλαιολάδου μὲ ὕδωρ κατέρχεται εἰς 20 dyn/cm. Γενικὰ ἡ τιμὴ τῆς ἐπιφανειακῆς τάσεως ἑνὸς ὑγροῦ εἶναι διάφορος ἀντιστοίχως πρὸς τὸ ὑλικὸν ποὺ συνορεύει μὲ τὴν θεωρουμένην ἐπιφάνειαν καὶ εἶναι τόσον μικροτέρα ὅσον μεγαλυτέρα εἶναι ἡ συνάφεια τῶν μορίων τοῦ θεωρουμένου ὑγροῦ πρὸς τὰ μόρια τοῦ συνορεύοντος.

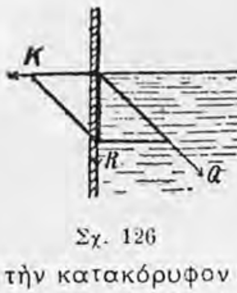
ζ) Θεωροῦμεν σταγόνα ἐλαίου II (σχ. 125) ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ὕδατος I. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἔχομεν τρεῖς ὁρικὰς ἐπιφανείας, ἤτοι 1) τὴν ὁρικὴν ἐπιφάνειαν ὕδατος - ἀέρος (I—III), 2) τὴν ὕδατος - ἐλαίου (I—II) καὶ 3) τὴν ἐλαίου - ἀέρος (II - III), αἱ ὁποῖαι συναντῶνται εἰς μίαν ὁρικὴν γραμμὴν τῆς σταγόνος ἐλαίου. Εἰς κάθε σημεῖον A τῆς γραμμῆς αὐτῆς ἐνεργοῦν λόγω τῶν ἐπιφανειακῶν τάσεων τρεῖς δυνάμεις, ἤτοι ἡ $T_{1,3}$ (ὕδατος - ἀέρος), ἡ $T_{1,2}$ (ὕδατος - ἐλαίου) καὶ ἡ $T_{2,3}$ (ἐλαίου - ἀέρος). Διὰ νὰ εὑρίσκεται εἰς ἰσορροπίαν τὸ σημεῖον A, πρέπει κάθε μιὰ ἐκ τῶν δυνάμεων τούτων νὰ εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος τῆς συνισταμένης τῶν δύο ἄλλων. Ὅταν συμβαίνει τοῦτο, τὸ ἐπισταζόμενον ὑγρὸν συγκρατεῖται ὑπὸ μορφὴν σταγόνος. Ἂν ὅμως μία ἐκ τῶν τριῶν ὡς ἄνω δυνάμεων τῆς ἐπιφανειακῆς τάσεως εἶναι μεγαλυτέρα τῆς συνισταμένης τῶν ἄλλων δύο, ὅπως συμβαίνει εἰς τὴν περίπτωσιν σταγόνος ἐλαίου ἐπισταζομένου ἐπὶ ὕδατος, δὲν μπορεῖ νὰ ὑπάρξῃ ἰσορροπία. Ἡ ἐπὶ πλέον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων ἔντασις τῆς $T_{1,3}$ σύρει πρὸς τὰ ἔξω τὰ μόρια ποὺ κεῖνται εἰς τὴν ὁρικὴν γραμμὴν τῆς σταγόνος καὶ μὲ αὐτὰ καὶ τὰ ὑπόλοιπα μόρια τῆς σταγόνος· ἔτσι ἡ σταγὼν τοῦ ἐλαίου ἐξαπλώνεται ὅλο καὶ περισσότερον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος· ἂν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὕδατος εἶναι πολὺ μεγάλη τότε ἡ ἐξάπλωσις τῆς σταγόνος ἐλαίου ἐπ' αὐτῆς θὰ προχωρήσῃ μέχρις ὅτου τὸ πάχος τοῦ ἐπιστρώματος ἐλαίου γίνῃ ἴσον μὲ τὴν διάμετρον ἑνὸς μορίου τοῦ ἐλαίου· θὰ ἐξαπλώνεται λοιπὸν ἐπὶ τοῦ φέροντος ὑγροῦ στρῶμα τοῦ ἐπικαθημένου ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ μόρια μιᾶς σειρᾶς. Ἐπειδὴ τὸ ὕδωρ ἔχει σχετικῶς μεγάλην ἐπιφανειακὴν τάσιν, παρατηροῦμεν ὅτι ὅλα σχεδὸν τὰ ἐπιπλέοντα εἰς αὐτὸ ὑγρὰ ἐξαπλώνονται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος καὶ κηλιδώνουν τὴν καθαρότητα αὐτῆς. Ὁμοία κηλίδωσις τῆς ἐπιφανείας παρατηρεῖται εἰς τὸν ὑδράργυρον, ἂν στάξουν ἐπ' αὐτοῦ σταγόνες ἄλλων ὑγρῶν, ἐπειδὴ καὶ ἡ ἐπιφανειακὴ τάσις τοῦ ὑδραργύρου εἶναι πολὺ μεγάλη.



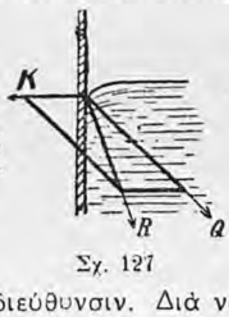
Σχ. 125

Ὅταν ἡ ἐπιφάνεια ὕδατος ἔχει κηλιδωθῆ μὲ ἔλαιον, ἐπέρχεται πτῶσις τῆς ἐπιφανειακῆς τάσεως τόσον μεγαλυτέρα, ὅσον μεγαλυτέρα εἶναι ἡ συγκέντρωσις τῆς κηλιδώσεως. Ἡ πρὸς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ ὑγροῦ ἐνεργοῦσα κάθετος πίεσις τῆς ἐπιφανειακῆς τάσεως ἐνεργεῖ ἰσχυρότερον εἰς τὰς θέσεις, ὅπου ἡ ἐπιφάνεια εἶναι περισσότερον καμπυλωμένη καὶ τείνει νὰ ἐλαττώσῃ τὴν καμπύλωσιν. Εἰς τὴν περίπτωσιν κυματώσεως τῆς κηλιδωθείσης δι' ἐλαίου ἐπιφανείας ὕδατος εἰς τὴν ράχιν τοῦ κύματος θὰ γίνεται ἐλάττωσις τῆς κηλιδώσεως λόγω αὐξήσεως τῆς ἐπιφανείας ἐπὶ τῆς ὁποίας ἐξαπλώνεται ἡ κηλίδωσις. Κατὰ συνέπειαν τούτου προκαλεῖται αὔξησις τῆς ἐπιφανειακῆς τάσεως, ἡ ὁποία ἀντιτίθεται εἰς τὴν ἐπαύξησιν τῆς καμπυλώσεως, ἤτοι εἰς τὸν σχηματισμὸν κύματος μεγαλυτέρας καμπυλώσεως. Ἡ κηλίδωσις λοιπὸν τῆς ἐπιφανείας ὕδατος δι' ἐλαίου τείνει νὰ καταπνίξῃ τὸν σχηματισμὸν ἰσχυρῶς καμπυλωμένων κυμάτων, ἤτοι κυμάτων πού «στάζουν» καὶ δυσχεραίνουν τὸν πλοῦν τῶν πλοίων. Ἀντιθέτως εἰς τὰ μακρόσυρτα καὶ ὁμαλῶς ἐκτεινόμενα κύματα ὕδατος ἡ κηλίδωσις ἐλαίου δὲν ἀσκεῖ σημαντικὴν ἐπίδρασιν· τὰ κύματα ὅμως αὐτὰ παρὰ τὰς μεγάλας διαστάσεις των δὲν εἶναι ὀχληρὰ εἰς τὴν ναυσιπλοΐαν, διότι ἀνεβοκατεβάζουν ἐπάνω των τὸ πλοῖον καὶ τοῦ παρέχουν ἥσυχον πλοῦν.

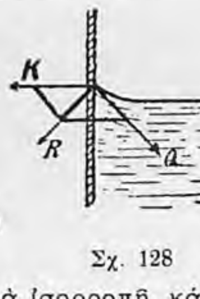
η) Γωνία συνεπαφῆς. Θεωροῦμεν τὴν ἐπιφάνειαν ὑγροῦ εἰς τὰς θέσεις, ὅπου αὕτη ἔρχεται εἰς ἐπαφὴν μὲ τὰ τοιχώματα τοῦ δοχείου, εἰς τὸ ὁποῖον περιέχεται τὸ ὑγρόν. Τὰ μόρια τοῦ ὑγροῦ πλησίον τοῦ τοιχώματος τοῦ δοχείου ὑπόκεινται εἰς ἐπίδρασιν δύο δυνάμεων, ἤτοι: πρῶτον τῆς δυνάμεως K (σχ. 126), πού προέρχεται ἐκ τῆς ἕλξεως τῶν μορίων τοῦ τοιχώματος (δύναμις συναφείας) καὶ δεύτερον τῆς Q, πού προέρχεται ἐκ τῆς ἕλξεως τῶν γειτονικῶν μορίων τοῦ ὑγροῦ (δύναμις συνοχῆς). Ἡ πρώτη τῶν δυνάμεων τούτων ἔχει ὁριζοντίαν διεύθυνσιν, ἐνῶ ἡ Q διευθύνεται πρὸς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ ὑγροῦ μὲ διεύθυνσιν πού σχηματίζει γωνίαν 45° μὲ τὴν ὁριζον-



Σχ. 126



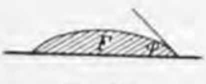
Σχ. 127



Σχ. 128

τίαν ἢ τὴν κατακόρυφον διεύθυνσιν. Διὰ νὰ ἰσορροπῇ κάθε ἓν ἀπὸ τὰ μόρια αὐτὰ ἐπὶ ὁριζοντίας ἐπιφανείας πρέπει ἡ συνισταμένη R τῶν δύο ὡς ἄνω δυνάμεων νὰ διευθύνεται κατακορύφως, ἤτοι νὰ ἔχῃ τὴν διεύθυνσιν τοῦ βάρους τοῦ μορίου. Διὰ νὰ συμβαίνῃ τοῦτο, πρέπει νὰ εἶναι, ὅπως φαίνεται ἐκ τοῦ σχήματος 126: $R=K$ καὶ $R^2=K^2$ ἢ $2K^2=Q^2$ ἢ $Q=K\sqrt{2}$. Εἰς τὴν μοναδικὴν λοιπὸν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ δύναμις πού προέρχεται ἐκ τῆς συνοχῆς τῶν μορίων τοῦ ὑγροῦ εἶναι ἀκριβῶς ἴση μὲ τὸ $\sqrt{2}$πλάσιον τῆς δυνάμεως πού ὀφείλεται εἰς τὴν συνάφειαν μεταξὺ ὑγροῦ καὶ τοιχώματος καὶ μόνον τότε ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὑγροῦ διατηρεῖ τὴν ὁριζοντιότητα καὶ εἰς τὰς θέσεις ἐπαφῆς μὲ τὰ τοιχώματα τοῦ δοχείου. Ἂν ὅμως, ὅπως συμβαίνει εἰς τὴν πραγματικότητα, εἶναι: $Q \neq K\sqrt{2}$ ἡ συνισταμένη τῶν K καὶ Q δὲν διευθύνεται κατακορύφως καὶ συνεπῶς ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὑγροῦ καμπυλώνεται πλησίον τῶν τοιχωμάτων τοῦ δοχείου. Καὶ ἂν μὲν εἶναι $Q > K\sqrt{2}$ (σχ. 127) ἡ συνισταμένη R διευθύνεται πρὸς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ ὑγροῦ καὶ συνεπῶς ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὑγροῦ πλησίον τοῦ δοχείου (πού, διὰ νὰ ἔχωμεν ἰσορροπίαν, πρέπει νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν R) καμπυλώνεται πρὸς τὰ ἔξω, ἤτοι θὰ εἶναι κυρτή· ἂν ἀντιθέτως εἶναι : $Q < K\sqrt{2}$ (σχ. 128) ἡ K διευθύνεται πρὸς τὰ ἔξω τῆς μάζης τοῦ ὑγροῦ καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὑγροῦ καμπυλώνεται πρὸς τὸ ὑγρόν, ἤτοι θὰ εἶναι κοίλη. Ἡ πρώτη περίπτωσις ἐμφανίζεται εἰς τὴν συνεπαφὴν ὑδραργύρου μὲ τοίχωμα ὑαλίνου δοχείου, ἡ δευτέρα εἰς τὴν ὕδατος—ὑάλου.

Καλοῦμεν ***γωνίαν συνεπαφῆς*** τὴν γωνίαν φ (σχ. 129 καὶ 130), ποὺ σχηματίζει ἡ ἐλευθέρα ἐπιφάνεια ὑγροῦ μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τοιχώματος, μὲ τὸ ὁποῖον ἔρχεται εἰς ἐπαφήν. Ἡ γωνία αὐτὴ εἶναι ὀξεῖα καὶ τείνει πρὸς τὸ 0 ὅταν αἱ δυνάμεις συνοχῆς εἶναι μικρότεραι ἀπὸ τὰς δυνάμεις συναφείας. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ ὑγρὸν ἐξαπλώνεται ὡς λεπτὸν ἐπίστρωμα ἐπὶ ὅλης τῆς ἐπιφανείας τοῦ στερεοῦ τοιχώματος· λέμε τότε ὅτι τὸ τοίχωμα βρέχεται ἀπὸ τὸ ὑγρόν, ὅπως συμβαίνει π.χ. εἰς τὴν περίπτωσιν ὕδατος ἐπὶ ὑαλίνης πλακὸς (σχ. 129). Ὅσον περισσότερον καθαρὰ εἶναι ἡ ὑαλίνη πλάξ, τόσον ὀξυτέρα εἶναι ἡ γωνία συνεπαφῆς φ' εἰς πλάκας ποὺ ἔχουν ἐπαλειφθῆ μὲ λίπος ἡ γωνία συνεπαφῆς μὲ ὕδωρ ἔχει πολὺ μεγαλύτερον ἄνοιγμα.



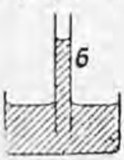
Σχ. 129

Σχ. 130

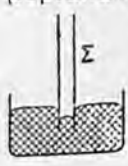
Εἰς τὴν περίπτωσιν ποὺ αἱ δυνάμεις συνοχῆς ὑπερτεροῦν πολὺ τῶν δυνάμεων συναφείας, (τὸ στερεὸν δὲν βρέχεται ἀπὸ τὸ ὑγρὸν) σχηματίζονται σταγόνες τοῦ ὑγροῦ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ στερεοῦ, αἱ ὁποῖαι ἔχουν σφαιρικὸν σχῆμα, πλατυνόμεναι περισσότερον ἢ ὀλιγώτερον λόγῳ τοῦ βάρους των. Ἡ γωνία συνεπαφῆς φ εἶναι τότε ἀμβλεῖα καὶ τείνει νὰ φθάσῃ τὰς 180°. Ἔτσι γίνεται π.χ. εἰς τὴν περίπτωσιν ὑδραργύρου ἐπὶ ὑαλίνης πλακὸς (σχ. 130).

θ) ***Τριχοειδές.*** Τὰ φαινόμενα ποὺ διεπραγματεύθημεν πάρα πάνω ἐκδηλώνονται ἐντυπωσιακώτερον εἰς ὑγρὰ περιεχόμενα εἰς σωλῆνας πολὺ μικρᾶς διαμέτρου, τοὺς ὁποίους ὀνομάζομεν ***τριχοειδεῖς***. Ἂν βυθίσωμεν τὸ κατώτερον τμῆμα τριχοειδοῦς ὑαλίνου σωλῆνος εἰς ὕδωρ, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὕδατος εἰς τὸν σωλῆνα εἶναι κοίλη καὶ ἀνέρχεται ὑψηλότερον ἀπὸ τὴν ὁριζοντίαν ἐπιφάνειαν, εἰς τὴν ὁποίαν φθάνει τὸ γύρω του ὕδωρ (σχ. 131). Τὸ ἐπὶ πλέον ὕψος τοῦ ὕδατος εἰς τὸν τριχοειδῆ σωλῆνα εἶναι τόσον μεγαλύτερον, ὅσον στενώτερος εἶναι ὁ σωλήν. Ἂν ὁ ὑάλινος τριχοειδὴς σωλὴν βυθισθῇ εἰς ὑδράργυρον, ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ εἰς τὸν σωλῆνα εἶναι κυρτὴ καὶ κεῖται χαμηλότερον τῆς ὁριζοντίας ἐπιφανείας τοῦ γύρω του ὑγροῦ (σχ. 132). Καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ παρατηρούμενος ὑποβιβασμὸς τοῦ ὕψους τοῦ ὑγροῦ εἰς τὸν τριχοειδῆ σωλῆνα εἶναι τόσον μεγαλύτερος, ὅσον στενώτερος εἶναι ὁ σωλήν.

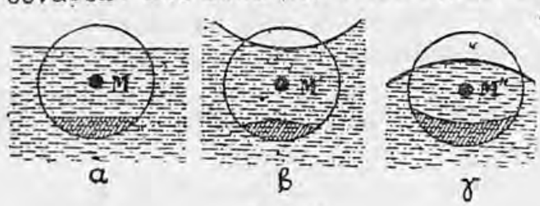
Διὰ τὴν ἐξήγησιν τῶν φαινομένων τούτων θεωροῦμεν εἰς κάθε μίαν ἀπὸ τὰς τρεῖς περιπτώσεις — α) $Q=K\sqrt{2}$, β) $Q>K\sqrt{2}$, καὶ γ) $Q<K\sqrt{2}$ — τυχὸν μόριον Μ, Μ', Μ'' (σχ. 133) πλησίον τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ, δηλαδὴ εἰς ἀπόστασιν ἀπ' αὐτῆς μικροτέραν τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας δράσεως τῶν μοριακῶν δυνάμεων. Ἂν τὸ μόριον περιεβάλλετο πανταχόθεν εἰς ὅλην τὴν ἔκτασιν τῆς γύρω του σφαίρας δράσεως μοριακῶν δυνάμεων ἀπὸ ἄλλα μόρια τοῦ ὑγροῦ, εἶναι



Σχ. 131



Σχ. 132



Σχ. 133

φανερὸν ὅτι αἱ ἕλξεις ποὺ θὰ ὑφίστατο ἀπὸ αὐτὰ θὰ ἐξουδετερώνοντο ἀμοιβαίως. Ἐπειδὴ ὅμως εὑρίσκεται πλησίον τῆς ἐπιφανείας ἀπομένει μέρος τῆς σφαίρας δράσεως (εἰς τὸ σχῆμα σημειώνεται τὸ μέρος αὐτὸ μὲ πυκνοτέραν διαγράμμισιν), εἰς τὸ ὁποῖον εὑρίσκονται μόρια τὰ ὁποῖα δὲν ἔχουν ἀντίστοιχα ἀντιθέτου ἐπενεργείας ἐπὶ τοῦ θεωρουμένου μορίου· ἕνεκα τούτου ἀσκεῖται ὑπὸ τῶν μορίων τούτων συνισταμένη δύναμις ποὺ διευθύνεται πρὸς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ ὑγροῦ. Ἀποτέλεσμα τέτοιων δυνάμεων ποὺ ἀσκοῦνται ἐπὶ τῶν μορίων τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ, εἶναι, ὡς ἐλέχθη, ἡ ἐπιφανειακὴ τάσις τοῦ ὑγροῦ. Ἂν συγκρίνωμεν τὰ τμήματα τῶν σφαιρῶν δράσεως μοριακῶν δυνάμεων, τῶν ὁποίων τὰ μόρια ἐπιδροῦν χωρὶς ἐξουδετέρωσιν ἐπὶ τῶν καθέκαστα μορίων τῆς ἐπιφανείας, βλέπομεν ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν ἐπιπέδου ἐπιφανείας ($Q=K\sqrt{2}$) εἶναι μεγαλύτερα τῶν εἰς τὴν περίπτωσιν κοίλης ἐπιφανείας ($Q<K\sqrt{2}$) καὶ μικρότερα τῶν τῆς κυρτῆς ($Q>K\sqrt{2}$). Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ ἐπιφανειακὴ τάσις εἶναι εἰς τὴν περίπτωσιν κοίλης ἐλευθέρας ἐπιφανείας ($Q<K\sqrt{2}$) μικροτέρα (καὶ φυσικὰ τόσον μικροτέρα ὅσον μεγαλυτέρα εἶναι ἡ καμπυλότης) καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν κυρτῆς ἐπιφανείας ($Q>K\sqrt{2}$) μεγαλυτέρα (καὶ φυσικὰ τόσον μεγαλυτέρα ὅσον καὶ ἡ καμπυλότης εἶναι μεγαλυτέρα) τῆς εἰς τὴν περίπτωσιν ἐπιπέδου ἐπιφανείας ($Q=K\sqrt{2}$). Ἔτσι εἰς τὴν περίπτωσιν ποὺ ὁ τριχοειδὴς σωλὴν βυθίζεται εἰς ὑγρόν, ἀπὸ τὸ ὁποῖον βρέχεται ($Q<K\sqrt{2}$), ἡ ἐπιφανειακὴ τάσις τοῦ ὑγροῦ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ σωλῆνος θὰ εἶναι μικροτέρα (λόγω τῆς μεγαλυτέρας καμπυλώσεως τῆς κοίλης ἐλευθέρας ἐπιφανείας) τῆς ἐπιφανειακῆς τάσεως γύρω ἀπὸ τὸν σωλῆνα. Κατὰ συνέπειαν θὰ συνέλκεται τὸ γύρω ἀπὸ τὸν σωλῆνα ὑγρὸν ἰσχυρότερον ἀπὸ ὅσον συνέλκεται τὸ ἐντὸς τοῦ σωλῆνος καὶ ὡς ἐκ τούτου θὰ ἀνέρχεται εἰς τὸν σωλῆνα, μέχρις ὅτου τὸ βάρος τῆς ἐπὶ

πλέον στήλης τοῦ ὑγροῦ εἰς τὸν σωλῆνα ἰσορροπήσει τὴν λόγω τῆς μεγαλυτέρας ἐπιφανειακῆς τάσεως μεγαλυτέραν δύναμιν συνέλξεως τοῦ περὶ τὸν σωλῆνα ὑγροῦ.

Ἂν εἶναι h τὸ ἐπὶ πλέον ὕψος τοῦ ὑγροῦ εἰς τὸν σωλῆνα, ρ ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐσωτερικοῦ τοῦ σωλῆνος, σ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὑγροῦ καὶ [α] ἡ ἐπιφανειακή του τάσις, τότε τὸ βάρος τῆς ἐπὶ πλέον στήλης τοῦ ὑγροῦ εἶναι: $\pi.\rho^2.h.\sigma$ καὶ ἡ ἰσορροπουμένη ὑπ' αὐτοῦ ἐπὶ πλέον δύναμις συνέλξεως λόγω τῆς ἐπιφανειακῆς τάσεως: $2\pi\rho[\alpha]$ καὶ ἐπομένως εἶναι: $\pi\rho^2 h\sigma = 2\pi\rho[\alpha]$· ὅθεν: $h = 2[\alpha]:\rho\sigma$ καὶ $[\alpha] = {}^1/_2 h.\rho\sigma$ (68') Μὲ τὴν σχέσιν αὐτὴν μποροῦμε νὰ προσδιορίσωμεν τὴν τιμὴν τῆς ἐπιφανειακῆς τάσεως ὑγροῦ.

Ἐκδηλώσεις τοῦ τριχοειδοῦς ἔχομεν εἰς τὴν ἀπορροφητικὴν δρᾶσιν στυποχάρτου, σπόγγων κλπ. ὡς καὶ (κατὰ μέγα μέρος) εἰς τὴν ἀνύψωσιν τῶν χυμῶν εἰς τὰ φυτὰ διὰ τῶν τριχοειδῶν ἀγγείων των.

Προβλήματα

125. Ἡ *σχέσις μεταβιβάσεως*, τ.ἔ. ὁ λόγος μεταξὺ τῶν πιεστικῶν ἐπιφανειῶν τῶν δύο ἐμβόλων ὑδραυλικοῦ πιεστηρίου, εἶναι 0,01. Ποίαν πιεστικὴν δύναμιν ἀσκεῖ τὸ μεγάλο ἔμβολον, ὅταν τὸ μικρὸν ὠθεῖται διὰ μέσου μονοπλεύρου μοχλοῦ, εἰς τὸν ὁποῖον ὁ βραχίων τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἐμβόλου εἶναι 5 cm καὶ ὁ τῆς καταβαλλομένης δυνάμεως 2 kp ἀνέρχεται εἰς 35 cm; ('Απ. 1400 kp).

126. Εἰς κλειστὸν κυλινδρικὸν δοχεῖον, κυκλικῆς βάσεως 20 cm² καὶ ὕψους 30 cm, ἐφαρμόζεται ἐπὶ τῆς ἄνω κυκλικῆς ἐπιφανείας κατακόρυφος σωλὴν ἐγκαρσίας τομῆς 1 cm². Ἂν τὸ δοχεῖον καὶ ἐν συνεχείᾳ ὁ σωλὴν γεμισθοῦν μὲ ὕδωρ μέχρις ὕψους 2 m ὑπὲρ τὸν πυθμένα, μὲ πόσην δύναμιν πιέζεται ὁ πυθμὴν καὶ πόσον εἶναι τὸ βάρος τοῦ ὕδατος; ('Απ. 4000 p καὶ 770 p).

127. Δοχεῖον κλειστὸν μὲ πυθμένα σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου, μήκους 4 cm καὶ πλάτους 5 cm, ἔχει ὕψος 20 cm. Εἰς τὸ ἄνω σκέπασμα τοῦ δοχείου ἐφαρμόζεται σωλὴν ἐγκαρσίας τομῆς 4 cm². Ἐὰν τὸ δοχεῖον πληρωθῇ τελείως μὲ ὑδράργυρον καὶ ὑπὲρ αὐτὸν χύσωμεν εἰς τὸν σωλῆνα ὕδωρ μέχρις ὕψους 3 m, πόση εἶναι ἡ πιεστικὴ δύναμις ποὺ ἐνεργεῖ α) εἰς τὸν πυθμένα, β) εἰς ἑκάστην τῶν δύο διαφόρων πλευρικῶν ἐπιφανειῶν καὶ γ) εἰς τὸ σκέπασμα τοῦ δοχείου; ('Απ. α) 11400 p, β) 34800 p καὶ 43600 p, γ) 6000 p).

128. Ποίαν πίεσιν ὑφίσταται πῶμα, τὸ ὁποῖον κλείει κυκλικὴν ὀπὴν εἰς δοχεῖον μὲ ὕδωρ ὕψους 3,2 m ὑπὲρ τὸ κέντρον τῆς ὀπῆς; ('Απ. 320 p/cm²).

129. Εἰς συγκοινωνοῦντα δοχεῖα χύνομεν ὑδράργυρον (εἰδ. βάρους 13,6) καὶ μετ' αὐτὸν γλυκερίνην ἀραιωθεῖσαν μὲ ὕδωρ. Ἂν τὰ ὕψη τῶν ὑγρῶν ὑπὲρ τὴν διαχωριστικὴν των ἐπιφάνειαν εἶναι 136 cm τῆς γλυκερίνης καὶ 12 cm τοῦ ὑδραργύρου, πόσον εἶναι τὸ εἰδ. βάρος τῆς ληφθείσης γλυκερίνης; ('Απ. 1,2 p/cm³)

130. Πόσον εἶναι τὸ βάρος σώματος, τὸ ὁποῖον ἔχει ὄγκον 36000 cm³ καὶ βυθίζεται εἰς ὕδωρ μόνον κατὰ τὸ $^1/_3$ τοῦ ὄγκου του; ('Απ. 12 kp).

131. Ὑάλινον κυλινδρικὸν σῶμα ὑφίσταται ἄνωσιν 3,22 p εἰς τὸ ὕδωρ καὶ 3,5 p εἰς τὸ ἔλαιον. Ποῖον τὸ εἰδ. βάρος τοῦ ἐλαίου; ('Απ. 0,96 p/cm³).

132. Μὲ ὑδροστατικὸν ζυγὸν εὑρίσκεται ὅτι τὸ βάρος τεμαχίου μαρμάρου εἶναι εἰς τὸν ἀέρα 84 gr* καὶ ὑπὸ τὸ ὕδωρ 30 gr*. Πόσον εἶναι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ μαρμάρου τούτου; ('Απ. 2,8 p/cm³)

133. Ὁ στέφανος ποὺ ἐδόθη εἰς τὸν Ἀρχιμήδην, διὰ νὰ ἐξακριβώσῃ τὴν νοθείαν τοῦ χρυσοῦ μὲ ἄργυρον, ἐζύγιζεν εἰς τὸν ἀέρα 10 kp καὶ ὑπὸ τὸ ὕδωρ 9,375 kp. Ὑπὸ ποίαν ἀναλογίαν πρέπει νὰ ἦσαν ἀναμεμιγμένα τὰ δύο μέταλλα, ἂν τὸ εἰδικὸν βάρος εἶναι εἰς τὸν χρυσὸν 19,16 καὶ εἰς τὸν ἄργυρον 10,47 p/cm^3; (Ἀπ. Ἂν εἶναι τὸ βάρος τοῦ χρυσοῦ x καὶ τοῦ ἀργύρου y, θὰ εἶναι: $x+y=10$ καὶ $x/19,25+y/10,47=10-9,376$, ὅθεν : $x=7,573$ καὶ $y=2,427$ kp).

134. Πόσον βάρος ξύλου δρυός, εἰδ. βάρους 0,7 p/cm^3, πρέπει νὰ συνδεθῇ μὲ 500 gr* σιδήρου, εἰδ. βάρους 7,8 p/cm^3, διὰ νὰ ἔχῃ τὸ συγκροτούμενον σύνθετον σῶμα, εἰδ. βάρος 2,5 p/cm^3; [Ἀπ. 500.0,7(7,8—2,5) : 7,8(2,5—0,7) gr*].

135. Τεμάχιον φελλοῦ, βάρους 30 gr, προσδένεται εἰς τεμάχιον μολύβδου τὸ ὁποῖον ζυγίζει, βυθισμένον εἰς ὕδωρ, 110 gr. Πόσον εἶναι τὸ εἰδ. βάρος τοῦ φελλοῦ, ἂν τὰ δύο τεμάχια μαζί, ζυγίζουν βυθισμένα εἰς ὕδωρ, 15 gr.; [Ἀπ. 30:(30+110—15)=0,24 p/cm^3].

136. Βυθίζομεν τὸ ὑπὸ τοῦ σχ. 124 παριστώμενον πλαίσιον εἰς διάλυμα σάπωνος καὶ τὸ ἀνασύρωμεν μὲ λεπτὸν νῆμα ποὺ ἔχομεν προσδέσει εἰς τὸ μέσον τῆς ἀπέναντι τοῦ κινητοῦ συρματιδίου πλευρᾶς. Εὑρίσκομεν τότε ὅτι ὁ λεπτὸς ὑμὴν ποὺ σχηματίζεται μεταξὺ τῶν πλευρῶν τοῦ πλαισίου ἰσορροπεῖ, ὅταν εἰς τὸ βάρος 52 mp τοῦ κινητοῦ συρματιδίου προσθέσωμεν καὶ βάρος 310 mp. Ποία ἡ ἐπιφανειακὴ τάσις τοῦ ὑμένος, ἂν τὸ μῆκος τοῦ κινητοῦ συρματιδίου εἶναι 5,5 cm; (Ἀπ. Σύμφωνα μὲ τὸν τύπον (68) εἶναι : [α]=(53+310):2.55 mp/mm).

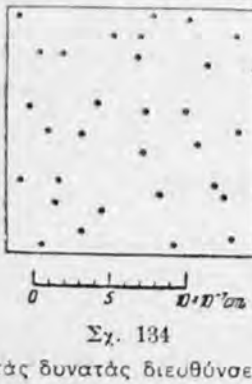
137. Ἐπὶ ἠρεμούσης ἐπιφανείας διαλύματος σάπωνος κεῖται θηλειὰ ἐμβαδοῦ 160 mm^2 καὶ περιμέτρου 60 mm. Ἐὰν διὰ βελόνης σχίσωμεν τὸν περιβαλλόμενον ἀπὸ τὴν θηλειὰν ὑμένα, ἡ θηλειὰ σύρεται ἀπὸ τὸν γύρω της ὑμένα καὶ τεντώνεται λαμβάνουσα σχῆμα κυκλικόν. Ποῖον τὸ παραγόμενον ἔργον, ἂν ἡ ἐπιφανειακὴ τάσις τοῦ ὑγροῦ εἶναι 3,3 mp/mm; (Ἀπ. [(60^2:4π)—160].3,3 mp.mm)

138. Τριχοειδὴς σωλὴν ποὺ ἔχει βάρος 180 mp ζυγίζει 385 mp, ὅταν περιέχει στήλην ὑδραργύρου μήκους 30 mm. Ἂν ὁ σωλὴν (κενὸς ὑδραργύρου) βυθισθῇ εἰς λεκάνην ὕδατος, τὸ ὕδωρ εἰς τὸν σωλῆνα εἶναι 37,5 mm ὑψηλότερον τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος τῆς λεκάνης. Πόση εἶναι ἡ ἐπιφανειακὴ τάσις τοῦ ὕδατος; [Ἀπ. Κατὰ τὸν τύπον (68'): $[\alpha]=\frac{1}{2}.37,5.1.\sqrt{(385-180):3,14.30.13,6}=7,5$ mp/mm].

IX. Μηχανικὴ ἠρεμούντων ἀερίων (Ἀεροστατική)

§ 53 **Ἰδιομορφίαι τῶν ἀερίων.** ***α) Βάρος καὶ μᾶζα ἀερίων.*** Ἡ πυκνότης τῆς ὕλης εἰς τὰ ἀέρια ἔχει πολὺ μικρὰς σχετικῶς τιμάς. Ἂν ἰσορροπήσωμεν εἰς εὐπαθῆ ζυγὸν ὑάλινον δοχεῖον, τὸ ὁποῖον εἶναι ***κενὸν*** ἀέρος καὶ ἀφήσωμεν ἐπειτα (μὲ τὸ ἄνοιγμα στρόφιγγος ποὺ φέρει τὸ δοχεῖον) νὰ εἰσρεύσῃ εἰς αὐτὸ ἀτμοσφαιρικὸς ἀήρ, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ὁ ζυγὸς κλίνει πρὸς τὸ μέρος τοῦ πληρωθέντος μὲ ἀέρα δοχείου. Διὰ νὰ ἐπαναφέρωμεν τὴν ἰσορροπίαν τοῦ ζυγοῦ, πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὴν πλάστιγγα τῶν σταθμῶν βάρος ἴσον μὲ τὸ βάρος τοῦ ἀέρος ποὺ εἰσῆλθεν εἰς τὸ δοχεῖον. Ἔτσι εὑρίσκομεν ὅτι διὰ χωρητικότητα τοῦ δοχείου ἴσην μὲ 1 λίτρ. (1 dm^3) ὁ περιεχόμενος εἰς αὐτὸ ἀὴρ εἰς συνήθη θερμοκρασίαν καὶ πίεσιν ἔχει βάρος μόλις 1,25 gr* περίπου. Αἱ πυκνότητες διαφόρων ἀερίων ὑπὸ τὴν αὐτὴν θερμοκρασίαν καὶ τὴν αὐτὴν πίεσιν ἔχουν μεταξύ των λόγους ἴσους μὲ τοὺς λόγους τῶν μοριακῶν βαρῶν τῶν θεωρουμένων ἀερίων. Εἰς τὴν διαπίστωσιν αὐτὴν ἐβασίσθη ὁ νόμος τοῦ Avogadro (§ 40, δ) καὶ αἱ κατὰ συνέπειαν τούτου προκύπτουσαι τιμαὶ τοῦ ἑνιαίου δι' ὅλα τὰ ἀέρια μοριακοῦ ὄγκου (εἶναι 22,4 l ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας θερμοκρασίας καὶ πιέσεως) καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μορίων ($N=6{,}024.10^{23}$) ποὺ περιέχονται εἰς ἕκαστον γραμμομόριον (mol). Ἔτσι εἰς 1 καὶ μόνον κυβικὸν ἑκατοστόμετρον (cm^3) ἀερίου ὑπὸ θερμοκρασίαν 0° C καὶ πίεσιν 760 mm Hg (πρβλ. § 55,γ) εὑρίσκεται ὅτι περιέχονται ($6{,}024.10^{23} : 22400=$) $2{,}7.10^{19}$ μόρια (μὲ ἄλλας λέξεις 27 τρισεκατομμύρια τρισεκατομμυρίων! μόρια). Παρὰ τὸ τόσον μεγάλο πλῆθος τῶν μορίων ποὺ περιέχονται εἰς κάθε κυβικὸν ἑκατοστόμετρον τοῦ χώρου ποὺ περιέχει τὸ ἀέριον, ἀφήνονται μεταξὺ τῶν μορίων κενοὶ χῶροι, οἱ ὁποῖοι συγκριτικὰ μὲ τὸ μέγεθος τῶν καθέκαστα μορίων εἶναι πολὺ μεγάλοι. Τὸ σχ. 134 παρέχει ὑπὸ τὴν τεραστίαν μεγέθυνσιν 1:2000000 μίαν στιγμιαίαν εἰκόνα τῶν μορίων τοῦ ἀέρος ἑνὸς δωματίου. Μόλις τὸ $^1/_{1000}$ περίπου τοῦ χώρου κατέχεται ἀπὸ τὰ μόρια, τὰ ὑπόλοιπα 0,999 τοῦ χώρου ἀποτελοῦν διάκενα μεταξὺ τῶν μορίων. Ὥστε τὰ μόρια ἑνὸς ἀερίου εὑρίσκονται εἰς μεγάλας ***σχετικῶς μὲ τὸ μέγεθός των*** ἀπ' ἀλλήλων ἀποστάσεις, ἀντιθέτως πρὸς τὰ ὑγρὰ καὶ στερεά, ὅπου ταῦτα συγκρατοῦνται εἰς πολὺ μικροτέρας μεταξύ των ἀποστάσεις. Ἔτσι εἶναι εὐεξήγητον ὅτι τὰ ἀέρια ἔχουν μικρὰς πυκνότητας καὶ μποροῦν νὰ συμπιέζωνται πολύ.

β) Εὐκινησία τῶν μορίων ἀερίου. Αἱ σχετικῶς μεγάλαι ἀποστάσεις μεταξὺ τῶν μορίων ἀερίου ἔχουν ὡς συνέπειαν, ὅτι αἱ μεταξὺ τῶν μορίων συνεκτικαὶ δυνάμεις εἶναι πολὺ ἀσθενεῖς καὶ ὡς ἐκ τούτου τὰ καθέκαστα μόρια κινοῦνται ἐλευθέρως πρὸς ὅλας τὰς δυνατὰς διευθύνσεις. Ἔτσι ἐξαπλώνονται εἰς κάθε χῶρον, ὅπου μποροῦν νὰ εἰσδύσουν· μποροῦν λοιπὸν νὰ αὐξάνουν τὸν ὄγκον των ἀπεριορίστως. Τοῦτο ἀποτελεῖ οὐσιώδη διάκρισιν τῶν ἀερίων ἀπὸ τὰ ὑγρά, ἡ ὁποία ἐκδηλώνεται μὲ τὸ ὅτι τὰ ἀέρια οὔτε ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν ἔχουν, οὔτε εἰς ὡρισμένον ὄγκον αὐτοπεριορίζονται, οὔτε σταγόνας (πολυμοριακὰ συγκροτήματα) σχηματίζουν. — Παρὰ ταῦτα τὰ ἀέρια ὁμοιάζουν πρὸς τὰ ὑγρά, διότι καὶ αὐτὰ ὅπως καὶ ἐκεῖνα δὲν ἔχουν ὡρισμένον σχῆμα (στεροῦνται, ὅπως λέμε, ἐλαστικότητος σχήματος). Ἐπὶ πλέον πρέπει καὶ εἰς τὰ ἀέρια νὰ ἰσχύῃ ἡ Ἀρχὴ τοῦ Pascal, ὅτι δηλαδὴ κάθε πίεσις ποὺ ἐπιφέρεται εἰς κάποιαν θέσιν τῆς μάζης ἀερίου διαδίδεται μὲ τὴν αὐτὴν ἔντασιν καθ' ὅλας τὰς διευθύνσεις διὰ μέσου τῆς μάζης τοῦ ἀερίου.



Σχ. 134

Σχ. 135

Κατὰ συνέπειαν τοῦ ὅτι αἱ μεταξὺ τῶν μορίων ἀερίου ἑλκτικαὶ δυνάμεις εἶναι ἐξαφανιστικῶς μικραί, αἱ κινήσεις των γίνονται ἐλεύθερα πρὸς ὅλας τὰς δυνατὰς διευθύνσεις μὲ ταχύτητας ποὺ μεταβάλλονται ἀπὸ στιγμῆς εἰς στιγμὴν ἐξ αἰτίας συγκρούσεώς των μὲ ἄλλα μόρια ἢ μὲ τὰ τοιχώματα τῶν δοχείων ποὺ τὰ περιέχουν. Ἔτσι αἱ τροχιαὶ ποὺ διατρέχουν τὰ καθέκαστα μόρια ἀερίου εἶναι πολύπλοκοι τεθλασμέναι (zig-zag) γραμμαί, ὅπως δείχνεται παραστατικὰ εἰς τὸ σχ. 135. Καθὲν ἀπὸ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα τῶν τροχιῶν τούτων ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ διάστημα ποὺ διανύεται ἀπὸ μόριον μεταξὺ δύο ἀλλεπαλλήλων προσκρούσεων. Τὸ διάστημα τοῦτο, ***κατὰ μέσον ὅρον*** πολὺ μικρόν, τὸ λέμε ***μέσον μῆκος ἐλευθέρου δρόμου***. Διὰ μόρια τοῦ ἀέρος ποὺ μᾶς περιβάλλει ὑπολογίζεται νὰ εἶναι κάπου 10^{-8} cm.

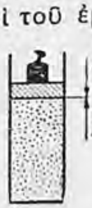
Ἡ ταχύτης μὲ τὴν ὁποίαν κινεῖται ἕκαστον μόριον, εἶναι γενικῶς πολὺ μεγάλη. Δὲν εἶναι ἡ αὐτὴ δι' ὅλα τὰ μόρια ἑνὸς ἀερίου, ἀλλ' ἔχει διαφόρους τι-

μάς εἰς τὰ διάφορα μόρια· τῶν τιμῶν τούτων ἡ κατὰ μέσον ὅρον ἐπικρατεστέ-
ρα καλεῖται ***μέση ταχύτης*** ($\overline{v}$) ***τῶν μορίων*** δοθέντος ἀερίου καὶ εἶναι τόσον με-
γαλυτέρα. ὅσον μικροτέραν πυκνότητα ἔχει τὸ ἀέριον καὶ ὅσον ὑψηλοτέρα εἶναι
ἡ θερμοκρασία. Ἔτσι π.χ. ἡ μέση ταχύτης ($\overline{v}$) τῶν μορίων ἀτμοσφαιρικοῦ
ἀέρος ὑπὸ θερμοκρασίαν δωματίου εἶναι κάπου 500 m/sec, ἐνῶ εἰς τὸ ὑδρογό-
νον φθάνει εἰς 1800 m/sec. Κατὰ συνέπειαν τῆς πολὺ μικρᾶς πυκνότητος καὶ
τῆς πολὺ μεγάλης εὐκινησίας τῶν μορίων εἰς τὰ ἀέρια ***ἡ διάχυσις*** γίνεται πολὺ
ταχύτερον ἀπὸ ὅ,τι γίνεται εἰς τὰ ὑγρά. Διαφυγὴ φωταερίου ἢ ἀτμοῦ ὀσμηρᾶς
οὐσίας γίνεται ταχύτατα αἰσθητὴ εἰς μεγάλας σχετικῶς ἀποστάσεις.

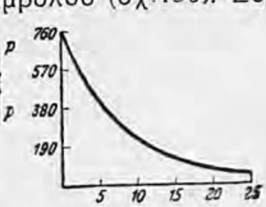
§ 54. Πίεσις ἀερίου. ***α) Νόμος*** Boyle - Mariotte. Κάθε ἀέριον ἐξασκεῖ ἐπὶ τῶν τοιχωμάτων ποὺ τὸ περικλείουν πίεσιν, ἡ ὁποία προέρχεται ἐκ τῶν πολυαρίθμων προσκρούσεων τῶν μορίων τοῦ ἀερίου ἐπὶ τῶν τοιχωμάτων. Κάθε μόριον ποὺ προσπίπτει ἐλαστι-κῶς ἐπὶ τοῦ τοιχώματος καὶ ὑφίσταται ἀνάκλασιν, μεταβάλλει τὴν ἐπιφορὰν ἢ ὁρμήν του (mv=k.t), ἀφοῦ μεταβάλλει τὴν φορὰν τῆς ταχύτητός του. Συνεπῶς ἐξασκεῖ ἐπὶ τοῦ τοιχώματος ὠστικὴν δύ-ναμιν ἀντίστοιχον πρὸς τὴν μεταβολὴν τῆς ὁρμῆς του. Τὸ σύνολον τῶν ὠθισμῶν τούτων ἐνεργεῖ ὡς μία συνεχὴς δύναμις, ἤτοι ὡς μία ὁμοιόμορφος πίεσις ἐπὶ τοῦ τοιχώματος. Ὅσον ταχύτερα καὶ συχνότερα προσπίπτουν τὰ μόρια ἐπὶ τῶν τοιχωμάτων, τόσον μεγα-λυτέρα εἶναι ἡ πίεσις. Ἔτσι ἡ πίεσις ἀερίου αὐξάνεται μὲ τὸν ἀριθ-μὸν καὶ τὴν μέσην ταχύτητα τῶν μορίων του, ἤτοι μὲ τὴν πυκνότητα καὶ τὴν θερμοκρασίαν τοῦ ἀερίου.

Ἡ πίεσις αὐτὴ ποὺ ἐκδηλώνει τὸ ἀέριον κατὰ συνέπειαν τῶν ἀτάκτων (μὲ μεταβαλλομένας ἀπὸ στιγμῆς εἰς στιγμὴν κατευθύνσεις) κινήσεων τῶν μορίων του, κινήσεων ποὺ συνιστοῦν τὴν θερμικὴν κατάστασιν τοῦ σώματος, εἶναι χαρακτηριστικὸν φαινόμενον τῆς ἀερίας καταστάσεως. Εἰς τὰ ὑγρὰ δὲν ἐκδηλώνεται τέτοια πίεσις, διότι εἰς αὐτὰ τὰ μόρια συγκρατοῦνται ὑπὸ τῶν μεσομοριακῶν δυνάμεων εἰς ὡρισμένας ἀπ' ἀλλήλων ἀποστάσεις.

Εἰς κύλινδρον ποὺ κλείεται ἀεροστεγῶς μὲ ἔμβολον, τὸ ὁποῖον μπορεῖ νὰ ὀλισθαίνῃ κατὰ μῆκος τοῦ τοιχώματος, ἐγκλείομεν ποσό-τητα ἀερίου καὶ ἰσορροποῦμεν τὴν πίεσιν αὐτοῦ (ἐνεργοῦσαν καὶ ἐπὶ τοῦ ἐμβόλου) μὲ βάρη ποὺ θέτομεν ἐπὶ τοῦ ἐμβόλου (σχ. 136). Εὑρί-σκομεν τότε ὅτι, ὅταν τὸ ἔμβολον εἰσωθεῖται καὶ ἀναγκάζει τὸ ἀέριον νὰ ἐλαττώσῃ τὸν ὄγκον του, τὰ ἀπαι-τούμενα διὰ τὴν ἐξισορρόπησιν τῆς πιέσεως βάρη αὐξάνονται· τοὐναν-τίον, ὅταν τὸ ἔμβολον ἀνασύρεται καὶ ὁ ὄγκος τοῦ ἀερίου αὐξάνεται,



Σχ. 136



Σχ. 137

ἡ πίεσίς του ἀντιστοίχως ἐλαττώνεται. Μὲ ἀκριβεῖς πειραματικὰς μετρήσεις εὑρίσκομεν ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν ποὺ ἡ θερμοκρασία μένει σταθερὰ (ἰσόθερμος μεταβολὴ) ***αἱ πιέσεις ποὺ ἐξασκεῖ μία ὡρισμένη ποσότης ἀερίου εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν ὄγκων ποὺ καταλαμβάνει τὸ ἀέριον***. Γραφικὴν παράστασιν τῆς σχέσεως αὐτῆς παρέχει ἡ καμπύλη τοῦ σχ. 137, τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν, ἂν ἑνώσωμεν τὰ διαδοχικὰ σημεῖα, ἕκαστον τῶν ὁποίων καθορίζεται ἀπὸ ζεῦγος ἀντιστοίχων τιμῶν τῆς πιέσεως καὶ τοῦ ὄγκου δοθείσης ποσότητος ἀερίου. Πρὸς τοῦτο καταγράφομεν τὰς διαδοχικὰς ἀντιστοίχους τιμὰς εἰς τοὺς ἄξονας ὀρθογωνίων συντεταγμένων, ἤτοι εἰς τὸν ἄξονα τῶν Ψ τὰς πιέσεις καὶ εἰς τὸν Χ τοὺς ὄγκους. Τὸν νόμον τοῦτον διετύπωσε τὸ 1662 ὁ Boyle καὶ τὸ 1676 ὁ Mariotte (ὁ δεύτερος χωρὶς νὰ ἔχῃ γνῶσιν τῆς ἀνακαλύψεως τοῦ πρώτου). Ἂν p παριστάνῃ τὴν πίεσιν καὶ V τὸν ὄγκον μιᾶς ποσότητος ἀερίου, ὁ ἀνωτέρω νόμος ἐκφράζεται ὑπὸ τῆς σχέσεως: διὰ σταθερὰν θερμοκρασίαν εἶναι: $p\,V = \text{σταθερόν}$. (69)

Πρὸς ἀκριβεστέραν πειραματικὴν ἐπαλήθευσιν τοῦ νόμου Boyle-Mariotte μπορεῖ νὰ χρησιμεύσῃ ἡ συσκευὴ τοῦ σχ. 138. Εἰς αὐτὴν ἐπὶ κατακορύφως στημένου μετρικοῦ κανόνος στερεώνεται ὑάλινος σωλήν, μήκους περίπου 50 cm, τοῦ ὁποίου τὸ ἀνώτερον ἄνοιγμα κλείεται μὲ στρόφιγγα h. Εἰς τὸ ἄλλο ἄνοιγμα τοῦ σωλῆνος ἐφαρμόζεται παχύτοιχος σωλὴν ἀπὸ καουτσούκ. Τὸ ἄλλο ἄκρον τοῦ ἐλαστικοῦ τούτου σωλῆνος ἐφαρμόζεται εἰς τὸ κατώτερον ἄνοιγμα ἄλλου ὑαλίνου σωλῆνος ὁ ὁποῖος μπορεῖ νὰ ἀνασύρεται ἢ καταβιβάζεται κατὰ μῆκος τοῦ μετρικοῦ κανόνος. Μὲ τὴν σύνδεσιν τῶν δύο ὑαλίνων σωλήνων διὰ μέσου τοῦ ἐλαστικοῦ σχηματίζεται συνεχὴς Uειδὴς σωλήν, τὸν ὁποῖον γεμίζομεν μὲ ὑδράργυρον τόσον, ὥστε νὰ φθάνῃ ἡ ἐπιφάνειά του μέχρι σχεδὸν τοῦ μέσου ἑκάστου τῶν δύο ὑαλίνων σωλήνων, ὅταν καὶ εἰς τοὺς δύο εὑρίσκεται εἰς τὸ αὐτὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον. Κλείομεν τότε τὴν στρόφιγγα h τοῦ πρώτου ὑαλίνου σωλῆνος καὶ ἀποχωρίζομεν ἔτσι μίαν ὡρισμένην ποσότητα ἀέρος ποὺ ἐγκλείεται εἰς τὸν ὑπὸ τὴν στρόφιγγα καὶ μέχρι τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑδραργύρου χῶρον τοῦ σωλῆνος. Ἂν κατόπιν ἀναβιβάσωμεν τὸν ἀνοικτὸν σωλῆνα ἡ ἀποκλεισθεῖσα ποσότης ἀέρος ὑφίσταται πίεσιν ἐπαυξηθεῖσαν κατὰ τὴν πίεσιν τῆς στήλης ὑδραργύρου ποὺ ἔχει ὕψος τὴν διαφορὰν ὑψῶν τῶν ἐλευθέρων ἐπιφανειῶν τοῦ ὑδραργύρου εἰς τὰ δύο σκέλη τοῦ Uειδοῦς σωλῆνος. Ἂν ἀντιθέτως καταβιβάσωμεν τὸν ἀνοικτὸν σωλῆνα, τότε ἡ πίεσις τῆς ἀποκλεισθείσης ὑπὸ τὴν στρόφιγγα ποσότητος ἀέρος γίνεται μικροτέρα κατὰ τὴν πίεσιν τῆς στήλης ὑδραργύρου ποὺ ἔχει ὕψος καὶ πάλιν τὴν διαφορὰν ὑψῶν

Σχ. 138

τῶν δύο ἐλευθέρων ἐπιφανειῶν τοῦ ὑδραργύρου. Ἀντιστοίχως πρὸς τὰς ἔτσι ἐπιβαλλομένας μεταβολὰς τῆς πιέσεως γίγονται μεταβολαὶ τοῦ ὄγκου τῆς ἀποκλεισθείσης ποσότητος τοῦ ἀέρος, τὰς ὁποίας παρατηροῦμεν εἰς τὴν μετρικὴν κλίμακα ποὺ ἔχει χαραχθῆ εἰς τὸν κανόνα, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἔχει στερεωθῆ ὁ ὑάλινος σωλὴν μὲ τὴν στρόφιγγα. Ἡ συσχέτισις τῶν ἔτσι εὑρισκομένων ἀντιστοίχων τιμῶν πιέσεως καὶ ὄγκου ἐπαληθεύει μὲ μεγάλην προσέγγισιν τὴν σχέσιν (69).

Ὁ νόμος αὐτὸς ἰσχύει αὐστηρῶς διὰ τὰ λεγόμενα ***ἰδανικὰ ἢ τέλεια ἀέρια*** δηλαδὴ ἀέρια, εἰς τὰ ὁποῖα τὰ καθέκαστα μόρια ἔχουν ὄγκους ἐκμηδενισμένους συγκρατικῶς πρὸς τοὺς μεταξύ των κενοὺς χώρους καὶ δὲν ὑπόκεινται εἰς ἑλκτικὰς μεταξύ των δυνάμεις. Τὰ πραγματικὰ ἀέρια δὲν ἀνταποκρίνονται αὐστηρῶς εἰς τοὺς περιορισμοὺς τούτους, πλησιάζουν ὅμως πρὸς τὰ ἰδανικὰ τόσον περισσότερον, ὅσον μικροτέρα γίνεται ἡ πυκνότης των (ὅσον ἀραιότερα εἶναι).

β) ***Μερικὴ πίεσις***. Δοθέντος ὅτι ἡ πίεσις ἀερίου εἶναι ἀποτέλεσμα τῆς προσκρούσεως τῶν μορίων του ἐπὶ τοῦ τοιχώματος, εἶναι εὐνόητον ὅτι αὕτη θὰ εἶναι ἀνάλογος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μορίων. Ἂν ἔχωμεν μῖγμα διαφόρων ἀερίων, καθὲν ἀπὸ τὰ ἀέρια ποὺ ἀποτελοῦν τὸ μῖγμα θὰ ἐξασκῇ πίεσιν ἀνάλογον τοῦ πλήθους τῶν μορίων του καὶ ἡ ***μερικὴ πίεσις*** ἑκάστου τῶν συστατικῶν τοῦ μίγματος δὲν ἐπηρεάζεται ἐκ τῆς παρουσίας τῶν ἄλλων συστατικῶν. Εἶναι δηλαδὴ τόση, ὅση θὰ ἦτο, ἂν μόνον του τὸ θεωρούμενον συστατικὸν κατεῖχε τὸν ὄγκον ποὺ καταλαμβάνει τὸ μῖγμα. Ἔτσι ἡ ὁλικὴ πίεσις τοῦ μίγματος εἶναι ἄθροισμα τῶν μερικῶν πιέσεων τῶν καθέκαστα συστατικῶν του.

§ 55. Ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις.— α) ***Πίεσις ἀερίου προερχομένη ἐκ τοῦ βάρους του***. Ἐκτὸς τῆς παραπάνω πιέσεως κάθε ἀέριον ἀσκεῖ καὶ ἄλλην ἀνάλογον πρὸς τὴν τῶν ὑγρῶν, δηλ. πίεσιν ὀφειλομένην εἰς τὸ βάρος του. Ἡ πίεσις αὐτὴ αὐξάνεται μὲ τὸ ὕψος τῆς στήλης τοῦ ἀερίου· εἰς κάθε ὅμως θέσιν λόγῳ τῆς καθ' ὅλας τὰς διευθύνσεις μεταδόσεώς της ἐκδηλώνεται τόσον ὡς ***πίεσις πυθμένος*** ὅσον καὶ ὡς ***πλευρικὴ*** καὶ ἀκόμη ὡς ***ἄνωσις***. Ἔτσι κάθε σῶμα ποὺ περιβάλλεται ἀπὸ ἀέριον ὑφίσταται ἄνωσιν ἴσην μὲ τὸ βάρος τοῦ ἐκτοπιζομένου ἀερίου, ὅπως ἀντιστοίχως γίνεται εἰς τὰ ὑγρὰ (§ 51, α).

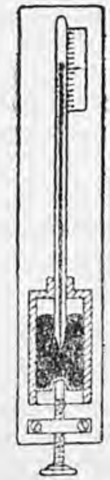
β) ***Ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις***. Εἰδικώτερον κάθε σῶμα ποὺ εὑρίσκεται μέσα εἰς τὴν ἀτμόσφαιραν (τὸν ἀέρα ποὺ περιβάλλει τὴν Γῆν) ὑφίσταται τὴν πίεσιν αὐτῆς. Αὕτη εἶναι ἴση μὲ τὸ βάρος τῆς στήλης ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρος, ἡ ὁποία στηρίζεται ἐπὶ 1 cm^2 τῆς θεωρουμένης ἐπιφανείας καὶ ὑψώνεται κατακορύφως μέχρι τῶν ἀνωτάτων ὁρίων ἐκτάσεως τῆς ἀτμοσφαίρας. Τὴν πίεσιν αὐτὴν (ἀρκετὰ σημαντικὴν) δὲν τὴν αἰσθανόμεθα, διότι ἐνεργεῖ ὁμοιομόρφως ἐξ ὅλων τῶν πλευρῶν. Πρῶτος ἀπέδειξε τὴν σημαντικὴν ἔντασίν της ὁ Otto von Guericke μὲ περιορισμὸν τῆς ἐπενεργείας της ἐπὶ τῆς μιᾶς μόνον πλευρᾶς τῆς ἐπιφανείας σώματος. Πρὸς τοῦτο ἔλαβε δύο κοῖλα ἡμισφαίρια (ἡμισφαίρια τοῦ Μαγδεμβούργου), τὰ ὁποῖα ἐφήρμοσε ἐπ' ἀλλήλων ἀεροστεγῶς καὶ ἀπὸ τὴν ἀποτελεσθεῖσαν ἔτσι κοίλην σφαῖραν ἀφήρεσε τὸν ἀέρα. Τότε τὰ ἡμισφαίρια ὑπόκεινται μόνον εἰς τὴν ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν ποὺ ἀσκεῖται μόνον ἐπὶ τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας καὶ προσκολλῶνται τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου τόσον ἰσχυρῶς, ὥστε εἶναι δύσκολον νὰ ἀποσπασθοῦν τὸ ἓν ἀπὸ τὸ ἄλλο. (εἰς τὸ πείραμα τοῦ Μαγδεμβούργου 8 ἵπποι, σύροντες κατ' ἀντιθέτους φορὰς δὲν ἠδυνήθησαν νὰ ἀποσπάσουν τὸ ἓν ἡμισφαίριον ἀπὸ τὸ ἄλλο. Μὲ τὸ ἄνοιγμα τῆς στρόφιγγος καὶ τὴν εἰσροὴν ἀέρος εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῶν ἡμισφαιρίων ἀπεσπῶντο εὐκόλως τὸ ἓν ἀπὸ τὸ ἄλλο).

*γ) **Μέτρον τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως.*** Ἀκριβὲς μέτρον τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως παρέχεται μὲ τὸ πείραμα τοῦ Torricelli (1643). Κατ' αὐτὸ λαμβάνομεν σωλῆνα ὑάλινον μήκους 1 περίπου μέτρου, τὸν γεμίζομεν μὲ ὑδράργυρον καί, κλείοντες μὲ τὸν δάκτυλον τὸ ἀνοικτὸν ἄκρον του, τὸν ἀναστρέφομεν καὶ βυθίζομεν τὸ ἄκρον τοῦτο εἰς λεκάνην ποὺ περιέχει ὑδράργυρον (σχ. 139). Ἂν μετὰ τοῦτο ἀποσύρομεν τὸν δάκτυλον ὁ ὑδράργυρος τοῦ σωλῆνος χύνεται εἰς τὴν λεκάνην μόνον μέχρις ὅτου φθάσῃ νὰ εἶναι εἰς τὸν σωλῆνα περὶ τὰ 76 cm ὑψηλότερον ἀπὸ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑδραργύρου τῆς λεκάνης. Τοῦτο ὀφείλεται προφανῶς εἰς τὸ ὅτι ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑδραργύρου τῆς λεκάνης ἐνεργεῖ ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις, ἐνῶ ὑπεράνω τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑδραργύρου εἰς τὸν σωλῆνα ἀπομένει χῶρος κενός, τὸ ***Τοριχέλλειον κενόν***, (ἂν παραβλέψωμεν ὡς μηδαμινὴν ποσότητα τὰ ἴχνη ἀτμῶν ὑδραργύρου). Κατὰ συνέπειαν ἡ στήλη τοῦ ὑδραργύρου εἰς τὸν σωλῆνα ἐξασκεῖ πίεσιν, ἡ ὁποία ἰσορροπεῖ τὴν πίεσιν τῆς ἀτμοσφαίρας. Ἂν ἐκτρέψωμεν τὸν σωλῆνα ἀπὸ τὴν κατακόρυφον διεύθυνσίν του, βλέπομεν (σχ. 139) ὅτι ὁ ὑδράργυρος προχωρεῖ εἰς αὐτὸν τόσον, ὥστε νὰ εἶναι πάλιν τὸ κατακόρυφον ὕψος του ὑπὲρ τὴν ἐπιφάνειάν του εἰς τὴν λεκάνην ὅσον καὶ εἰς τὴν ὀρθίαν θέσιν τοῦ σωλῆνος. Εἶναι λοιπὸν ***ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις ἴση μὲ τὸ βάρος τῆς στήλης ὑδραργύρου ποὺ βασίζεται ἐπὶ τῆς μονάδος ἐπιφανείας*** **(1 cm^2)** ***καὶ ἔχει ὕψος κυμαινόμενον περὶ τὰ*** **76 cm**, ἀντιστοίχως πρὸς τὸ ὕψος καὶ τὴν κατάστασιν τῆς ἀτμοσφαίρας. Εἰς τὸ ὕψος τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης καὶ ὑπὸ ὡρισμένην κατάστασιν τῆς ἀτμοσφαίρας, τὴν ὁποίαν θεωροῦμεν ὡς ***κανονικήν***, ἔχομεν τὴν πίεσιν ποὺ ὀνομάζομεν ***κανονικὴν ἀτμοσφαιρικὴν ἢ πίεσιν μιᾶς φυσικῆς ἀτμοσφαίρας*** **(1 Atm)** ἴσην μὲ τὴν πίεσιν στήλης Hg ὕψους 760 mm.

δ) ***Μονάδες μετρήσεως πιέσεως.*** Τὴν πίεσιν αὐτὴν τὴν λαμβάνομεν ὡς μονάδα μετρήσεως πιέσεων· ἡ σχέσις της μὲ τὴν ὁρισθεῖσαν εἰς τὴν § 48 μονάδα (1 dyn/cm^2), τὴν ὁποίαν ὠνομάσαμεν microbar (μB), εὑρίσκεται εὔκολα ὅτι εἶναι: $1\ \text{Atm} = 76\text{cm}\cdot 13{,}6\text{gr}^*/\text{cm}^3 = 1033\ \text{gr}^*/\text{cm}^2 = 1033.981\ \text{dyn/cm}^2 = 1{,}0132.10^6\mu\text{B} = 1{,}0132\ \text{Bar}$.— Διὰ τὴν μέτρησιν μικρῶν πιέσεων εἶναι εὐχρηστοτέρα ἡ μονὰς 1/760 Atm, ἤτοι ἡ πίεσις στήλης Hg ὕψους 1 mm. τὴν μονάδα αὐτὴν τὴν σημειώνομεν μέ : 1 mmHg καὶ συνηθέστερον μέ : 1 Torr (πρὸς τιμὴν τοῦ Torricelli). Εἰς τὴν Τεχνικὴν ἀντὶ τῆς φυσικῆς ἀτμοσφαίρας (1 Atm) λαμβάνεται ἡ ***τεχνητὴ ἀτμόσφαιρα*** (1at) ἴση μὲ : $1 kg^*/cm^2$ καὶ ἑπομένως μὲ 0,981 Bar.

δ) ***Βαρόμετρα.*** Πρὸς καθορισμὸν τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως ποὺ ἔχομεν εἴς τινα τόπον κατά τινα χρόνον μεταχειριζόμεθα ὄργανα, τὰ ὁποῖα καλοῦμεν ***βαρόμετρα.*** Τὰ ἀκριβέστερα τούτων εἶναι τὰ ὑδραργυρικά· ἡ κατασκευή των γίνεται σύμφωνα μὲ τὴν συσκευὴν τοῦ πειράματος τοῦ Torricelli. Ὁ κατακόρυφος σωλήν, εἰς τὸν ὁποῖον ὑψώνεται ἡ στήλη τοῦ ὑδραργύρου ποὺ ἰσορροπεῖ τὴν ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν, στερεώνεται ἐπὶ καταλλήλου πλαισίου (σχ. 140), ἐπὶ τοῦ ὁποίου χαράσσονται μετρικαὶ ὑποδιαιρέσεις ποὺ μᾶς δίδουν δι' ἀμέσου ἀναγνώσεως τὸ ὕψος τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης ὑπὲρ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑδραργύρου εἰς τὸ δοχεῖον. Τὸ δοχεῖον τοῦ βαρομέτρου τούτου ἔχει πυθμένα ἀπὸ δέρμα ποὺ διὰ κοχλίου b μπορεῖ νὰ ἀνυψώνεται ἢ καταβιβάζεται, ὥστε ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὑδραργύρου εἰς τὸ δοχεῖον νὰ ἔρχεται εἰς τὸ 0 τῆς μετρικῆς κλίμακος, προκειμένου νὰ γίνῃ ἡ ἀνάγνωσις τῆς ὑποδιαιρέσεως, ὅπου φθάνει ἡ στήλη τοῦ ὑδραργύρου εἰς τὸν σωλῆνα.

Σχ. 139



Σχ. 140

Σχ. 141

Σχ. 142

Ὑδραργυρικὸν ἐπίσης βαρόμετρον εἶναι καὶ τὸ ***σιφωνοειδὲς*** τοιοῦτο ποὺ παριστάνει τὸ σχ. 141, ἀπὸ τὸ ὁποῖον φαίνεται καὶ ἡ λειτουργία του. Εὐχρηστότερα εἶναι τὰ *μεταλλικὰ* βαρόμετρα. Εἰς αὐτὰ (σχ. 142) κύριον μέρος ἀποτελεῖ μετάλλινον τύμπανον Μ κενὸν ἀέρος, τοῦ ὁποίου ἡ ἄνω ἐπιφάνεια ἔχει κυματοειδῆ μορφὴν καὶ μπορεῖ ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως νὰ κοιλαίνεται ἐλαστικῶς περισσότερον ἢ ὀλιγώτερον, ἀντιστοίχως πρὸς τὴν ἔντασιν τῆς πιέσεως ποὺ ὑφίσταται. Τὰς διακυμάνσεις αὐτὰς τῆς κοιλάνσεως τοῦ καλύμματος Κ παρακολουθεῖ δείκτης ποὺ συνδέεται μὲ σύστημα μοχλῶν καὶ μᾶς δίδει τὴν ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν εἰς μετρικὴν κλίμακα, ἡ ὁποία ἔχει χαραχθῆ εἰς τὸ ὄργανον κατὰ σύγκρισιν πρὸς τὰς ἐνδείξεις ὑδραργυρικοῦ βαρομέτρου. Ἂν αἱ μετακινήσεις τοῦ δείκτου καταγράφωνται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου ποὺ στρέφεται μὲ ὡρολογιακὸν μηχανισμόν, λαμβάνομεν διάγραμμα ὅλων τῶν τιμῶν ποὺ ἔλαβε διαδοχικῶς ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις κατὰ τὴν διάρκειαν μιᾶς χρονικῆς περιόδου. Τὸ ὄργανον τότε καλεῖται *βαρογράφος*.

ε) ***Μεταβολαὶ τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως***. Ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις εἰς ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν τόπον ὑφίσταται διακυμάνσεις κατὰ τὴν διαρροὴν τοῦ χρόνου. Αἱ διακυμάνσεις αὐταὶ ὀφείλονται εἰς τὰς διαφορετικὰς συνθήκας ποὺ ἐπικρατοῦν εἰς τὴν ἀτμόσφαιραν κατὰ τοὺς διαφόρους χρόνους. Εἶναι μὲ ἄλλα λόγια συνάρτησις τῶν καιρικῶν συνθηκῶν. Ἕνεκα τούτου αἱ διακυμάνσεις τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως μποροῦν νὰ χρησιμεύσουν ὡς βασικὸν στήριγμα διὰ τὴν παρακολούθησιν καιρικῶν μεταβολῶν (προγνώσεως τοῦ καιροῦ). Ἔτσι π.χ. βαθμιαία καὶ συνεχὴς ἀνύψωσις τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως προμηνύει βελτίωσιν, ἐνῶ ἡ ἀπότομος πτῶσις τῆς βαρομετρικῆς στήλης χειροτέρευσιν τοῦ καιροῦ.

Εἰς διαφόρους τόπους ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις μεταβάλλεται πρωτίστως μετὰ τοῦ ὕψους τοῦ τόπου ὑπὲρ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης. Στήλη ἀέρος ποὺ ἔχει βάσιν 1 cm^2 καὶ ὕψος 10m ἔχει βάρος γύρω ἀπὸ 1,2 gr^*, ἂν εὑρίσκεται ἀμέσως ὑπὲρ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης καὶ ὑπὸ συνήθη θερμοκρασίαν. Τότε δι᾿ ἀνύψωσιν 10m ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις καταπίπτει κατὰ 1,2 gr^*/cm^2, ἤτοι 0,9 mmHg ἢ Torr. Ἂν ὁ ἀὴρ ἦτο ἀσυμπίεστος, ὅπως τὰ ὑγρά, ἡ ἐλάττωσις τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως θὰ ἦτο ἀνάλογος τῆς αὐξήσεως τοῦ ὕψους. Ἐπειδὴ ὅμως δὲν συμβαίνει τοῦτο, ἀλλὰ σύμφωνα μὲ τὸν νόμον Boyle-Mariotte ὁ ὄγκος τοῦ ἀέρος αὐξάνεται μετὰ τοῦ ὕψους, διότι ἐλαττώνεται ἡ πίεσις, θὰ ἐλαττώνεται καὶ ἡ πυκνότης του, ὅταν αὐξάνεται τὸ ὕψος. Ἔτσι ἡ ἐλάττωσις τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως κατὰ μονάδα αὐξήσεως τοῦ ὕψους ($-\Delta p/\Delta h$), δὲν εἶναι σταθερά, ὅπως εἰς τὰ ὑγρά, ἀλλὰ εἶναι μικροτέρα, ὅταν μετρᾶται εἰς μεγαλύτερα ὕψη. Ἡ μεταβολὴ τῆς πιέσεως μετὰ τοῦ ὕψους παρέχεται ἀπὸ τὴν καμπύλην ποὺ μᾶς ἐνθυμίζει τὴν τοῦ σχ. 137, ἡ ὁποία μᾶς ἔδωσε γραφικὴν παράστασιν τοῦ νόμου Boyle-Mariotte.

στ) ***Ἔκτασις καὶ στρώματα τῆς ἀτμοσφαίρας***. Ἡ διαπίστωσις ὅτι εἰς τὴν κατάστασιν ἰσορροπίας ἡ πυκνότης τοῦ ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρος ἐλαττώνεται, ὅταν αὐξάνεται τὸ ὑπὲρ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης ὕψος, καθίσταται εὐνόητος, ἂν ληφθῆ ὑπ' ὄψιν ἡ σύγχρονος ἐπίδρασις τοῦ βάρους καὶ τῆς θερμικῆς κινήσεως τῶν μορίων τοῦ ἀέρος. Ἂν τὰ μόρια δὲν ὑφίσταντο τὴν ἕλξιν τῆς Γῆς θὰ ἐσκορπίζοντο εἰς τὸ ἄπειρον διάστημα καὶ ἡ Γῆ θὰ ἔμενε χωρὶς Ἀτμόσφαιραν. Λόγῳ ὅμως τῆς ἕλξεως ὁ ἀὴρ κρατεῖται γύρω ἀπὸ τὴν Γῆν καὶ τόσον πυκνότερος ὅσον πλησιέστερον εὑρίσκεται πρὸς τὴν Γῆν. Ἂν πάλιν τὰ μόρια δὲν εἶχαν θερμικὴν κίνησιν (μὴ περιοριζομένην σημαντικῶς ἀπὸ μεσομοριακὰς δυνάμεις) θὰ κατέπιπτον ὡς κονιορτὸς ἐπὶ τῆς Γῆς καὶ θὰ συνεσωρεύοντο γύρω ἀπὸ αὐτήν, σχηματίζοντα στρῶμα πάχους κάπου 10 m. Λόγῳ ὅμως τῆς θερμικῆς κινήσεως ἐξαπλώνονται γύρω ἀπὸ τὴν Γῆν χωρὶς καὶ νὰ ἐκφεύγουν ἀπὸ τὴν ἕλξιν της (διὰ νὰ μποροῦσαν νὰ ἐκφύγουν ἀπὸ τὴν ἕλξιν τῆς Γῆς, θὰ ἔπρεπε κάθε μόριον νὰ ἔχῃ ταχύτητα τουλάχιστον 11 km/sec, ἐνῶ αἱ ταχύτητες τῆς θερμικῆς κινήσεως κυμαίνονται γύρω ἀπὸ ὀλίγας ἑκατοντάδας μέτρων κατὰ δευτερόλεπτον). Ἀνώτατον ὅριον τοῦ ὕψους τῆς ἀτμοσφαίρας δὲν μπορεῖ νὰ καθορισθῇ ἀκριβῶς· εἰς τὸ ὕψος 5,5 km ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις καταπίπτει εἰς τὸ ἥμισυ τῆς ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς Γῆς τιμῆς της· εἰς 11 km γίνεται τὸ $1/4$ αὐτῆς κ.ο.κ. Ἔτσι ἀκόμη καὶ εἰς τὸ ὕψος ἑκατοντάδων χιλιομέτρων πρέπει νὰ ὑπάρχουν μόρια ἀέρος. Τοῦτο εἶναι σύμφωνον καὶ μὲ τὸ ὅτι παρατηρεῖται **διαπύρωσις** μετεωριτῶν, ἤτοι σωμάτων ποὺ μὲ πολὺ μεγάλας ταχύτητας εἰσδύουν εἰς τὴν ἀτμόσφαιραν καὶ λόγῳ τῆς προσκρούσεώς των μὲ μόρια αὐτῆς διαπυρώνονται καὶ φωτοβολοῦν.

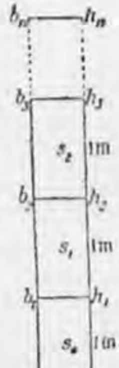
Ὁ ἀὴρ εἶναι μῖγμα διαφόρων ἀερίων μὲ ἀρκετὰ σταθερὰν ἑκατοστιαίαν ἀναλογίαν τῶν συστατικῶν εἰς ἀρκετὰ μεγάλας περιοχὰς ὕψους. Ἔτσι εἰς τὰ κατώτερα στρώματα ἀποτελεῖται κατ' ὄγκον ἀπὸ 78 % ἄζωτον, 21 % ὀξυγόνον, κάπου 1 % ἀργόν, ἴχνη ἄλλων εὐγενῶν ἀερίων, 0,03 % διοξείδιον ἄνθρακος καὶ μικρὸν (ἀλλ' εὐρύτατα κυμαινόμενον) ποσὸν ὑδρατμῶν. Ἡ ἐπὶ μέρους πίεσις ἑκάστου τῶν συστατικῶν του ἀνταποκρίνεται πρὸς τὴν ἀναλογίαν αὐτοῦ εἰς τὸ μῖγμα· ἂν δηλαδὴ εἶναι b ἡ ὁλικὴ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις τότε 0,21 b εἶναι ἡ πίεσις τοῦ ὀξυγόνου τοῦ ἀέρος, 0,78 b ἡ τοῦ ἀζώτου κλπ. Κατὰ συνέπειαν, ἂν ἀπὸ μίαν ποσότητα ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρος ποὺ ἔχομεν ἐγκλείσει εἰς ὡρισμένον χῶρον, ἀφαιρέσωμεν ἓν τῶν συστατικῶν του, (π.χ. τὸ ὀξυγόνον, δεσμεύοντες τοῦτο μὲ χημικὰς μεθόδους, ὅπως γίνεται εἰς τὴν ὑπεράνω ὕδατος καῦσιν φωσφόρου, τοῦ ὁποίου τὸ παραγόμενον πεντοξείδιον δὲν παραμένει εἰς τὸ μῖγμα, ἀλλ' ἀπορροφᾶται ὑπὸ τοῦ ὕδατος), παρατηροῦμεν ὅτι ἡ πίεσις, καταπίπτει κατὰ τὸ ποσοστὸν ποὺ κατεῖχε τὸ συστατικὸν τοῦτο (προκειμένου π.χ. περὶ ἀφαιρέσεως τοῦ ὀξυγόνου, ἡ πίεσις b ἐλαττοῦται κατὰ 0.21 b).

Εἰς τὸν ἀτμοσφαιρικὸν ἀέρα καὶ περισσότερον εἰς τὰ κατώτερα στρώματα του δὲν ἀποκαθίσταται ποτὲ μόνιμος ἰσορροπία καὶ τοῦτο διότι ὑφίσταται συνεχῶς διακυμάνσεις τῆς θερμοκρασίας του λόγῳ τῆς διαρκῶς μεταβαλλομένης θερμάνσεως ποὺ προέρχεται κυρίως ἐκ τῆς ἡλιακῆς ἀκτινοβολίας. Κατὰ συνέπειαν τῶν διακυμάνσεων τούτων παράγονται πρὸς ἐξισορρόπησιν ἀτμοσφαιρικὰ φαινόμενα, ἄνεμοι καὶ θύελλαι, ποὺ συνοδεύονται ἀπὸ βροχάς, χιόνας ἢ χάλαζαν. Τὰ φαινόμενα αὐτὰ λαμβάνουν χώραν εἰς στρώματα τῆς ἀτμοσφαίρας μέχρις ὕψους κάπου 10 km. Τὸ τμῆμα τοῦτο τῆς ἀτμοσφαίρας τὸ λέμε **τροπόσφαιραν**. Εἰς ἀκόμη ὑψηλότερα στρώματα μέχρις ὕψους 60 km ἡ θερμοκρασία εἶναι σταθερὰ καὶ δι' αὐτὸ δὲν ἔχομεν οὔτε ἀνέμους οὔτε νέφη. Τὸ ἀπὸ 10 μέχρις 60 km ὕψους τμῆμα τοῦτο τῆς ἀτμοσφαίρας ὀνομάζεται **στρατόσφαιρα**. Πέραν τοῦ ὕψους τῶν 60 km ἔχομεν τὴν **ἰονόσφαιραν**. Εἰς τὸ τμῆμα τοῦτο αἱ ὑπεριώδεις ἀκτῖνες τῆς ἡλιακῆς ἀκτινοβολίας προκαλοῦν ἰσχυρὸν ἰονισμὸν (παραγωγὴν ἰόντων) καὶ μεταβάλλουν τὸ ὀξυγόνον εἰς ὄζον.

*ζ) **Βαρομετρικὸς τύπος τοῦ ὕψους.*** Πρὸς εὕρεσιν τῆς σχέσεως μεταξὺ ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως καὶ ὕψους θεωροῦμεν κατακόρυφον στήλην ἀέρος βασιζομένην ἐπὶ ἐπιφανείας $1\,dm^2$ καὶ χωριζομένην εἰς ἴσα τμήματα, καθὲν τῶν ὁποίων ἔχει ὕψος $1m$ (σχ. 143). Δι' ἀνύψωσιν ἀπὸ τῆς στάθμης h_0 εἰς τὴν h_1, ἤτοι ἀνύψωσιν $1m$, τὸ βαρόμετρον μᾶς δεἰχνει πτῶσιν τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως ἀπὸ b_0 εἰς b_1· τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ ὑδραργυρικὴ στήλη ποὺ ἰσορροπεῖ τὴν ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν ἐλαττώνεται κατά: $(b_0-b_1)(mm)=0{,}01\,(b_0-b_1)\,(dm)$ καὶ ἐπομένως ἐλαττώνεται καὶ τὸ βάρος τῆς στήλης κατά: $0{,}01\,(b_0-b_1).\,13{,}595\,(Kg^*)$, ἂν $13{,}595\,(Kg^*/dm^3)$ εἶναι τὸ εἰδ. βάρος τοῦ Hg. Ἡ ἐλάττωσις αὐτὴ ὀφείλεται εἰς τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ βάρους τοῦ κατωτάτου τμήματος τῆς θεωρουμένης στήλης ἀέρος, ἤτοι τοῦ βάρους $10s_0\,(kg^*)$, ἂν s_0 εἶναι τὸ εἰδ. βάρος εἰς τὸ τμῆμα τοῦτο τῆς στήλης, ποὺ σύμφωνα μὲ τὴν θεώρησίν μας ἔχει ὄγκον $10\,dm^3$. Ἐπομένως θὰ εἶναι: $10s_0=0{,}01\,(b_0-b_1)\,13{,}595$. Ἂν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι τὸ εἰδ. βάρος s ἀέρος ὑπὸ θερμοκρασίαν 0°C καὶ πίεσιν $b=760$ (Torr) εἶναι $0{,}001293\,(kg^*/dm^3)$ καὶ ***ὑποτεθῇ ὅτι ἡ θερμοκρασία τῆς θεωρουμένης στήλης εἶναι ἡ αὐτὴ καθ' ὅλην τὴν ἔκτασιν*** (ὁπότε ἰσχύει ὁ νόμος Boyle Mariotte) θὰ ἔχωμεν: $s_0 : s = b_1 : b$ καὶ $s_0 = s\,b_1 : b$ ἢ $s_0 = 0{,}001293 b_1 : 760$. Θέτομεν τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ s_0 εἰς τὴν παραπάνω σχέσιν καὶ λαμβάνομεν: $10.0{,}001293 b_1 : 760 = 0{,}01\,(b_0-b_1) 13{,}595$ ὅθεν: $b_1 = b_0\,76.13{,}595 : (0{,}1293+76.13{,}595) = b_0\,0{,}999875$. Καθ' ὅμοιον τρόπον προκύπτει: $b_2 = b_1.0{,}999875 = b_0\,0{,}999875^2$, $b_3 = b_0.0{,}999875^3$ καὶ $b_n = b_0 0{,}999875^n = b_0 \kappa^n$ ἂν μὲ κ παραστήσωμεν τὴν σταθερὰν 0,999875. Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν λαμβάνομεν: $(1:\kappa)^n = b_0 : b_n$ καὶ $n\,\lambda o\gamma(1:\kappa) = \lambda o\gamma\, b_0 - \lambda o\gamma\, b_n$. Ἂν ἀντὶ τοῦ n θέσωμεν τὸ ἴσον του $h_n - h_0$ προκύπτει:

$$h_n - h_0 = (\lambda o\gamma b_0 - \lambda o\gamma b_n) : \lambda o\gamma(1:\kappa) = 18400(\lambda o\gamma b_0 - \lambda o\gamma b_n). \qquad (70)$$

Ἔτσι φθάνομεν εἰς σχέσιν (70) μὲ τὴν ὁποίαν μποροῦμε νὰ προσδιορίζωμεν τὴν διαφορὰν ὕψους $(h_n : h_0)$ ἀπὸ τὴν διαφορὰν τῶν λογαρίθμων τῶν ἀντιστοίχων ἐνδείξεων βαρομέτρου $(\lambda o\gamma\, b_0 - \lambda o\gamma\, b_n)$. Εἰς τὸν τύπον τοῦτον ἐφθάσαμεν ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ἡ θερμοκρασία εἶναι ἡ αὐτὴ καθ' ὅλην τὴν ἔκτασιν τῆς στήλης. Τοῦτο ὅμως δὲν συμβαίνει εἰς τὴν πραγματικότητα, ὅταν μάλιστα ἡ διαφορὰ ὕψους εἶναι ἀρκετὰ μεγάλη. Διὰ τοῦτο καὶ ὁ τύπος αὐτὸς δὲν παρέχει ἀκριβῆ ἐξαγόμενα διὰ μεγάλας διαφορὰς ὕψους. Πρὸς διόρθωσιν τῆς ἀνακριβείας αὐτῆς λαμβάνομεν ὑπ' ὄψιν τὰς θερμοκρασίας Θ_0 καὶ Θ_n τῶν δύο τόπων ποὺ ἔχουν ἀντιστοίχως ὕψη h_0 καὶ h_n καὶ ἐνδείξεις τοῦ βαρομέτρου b_0 καὶ b_n. Μὲ τὴν συμπλήρωσιν αὐτὴν ὁ τύπος λαμβάνει τὴν μορφήν:



Σχ. 143

Σχ. 144

Σχ. 145

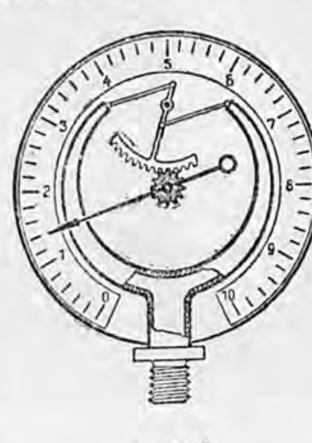
$$h_n - h_0 = 18400\,(2.273+\Theta_0+\Theta_n).(\lambda o\gamma\, b_0 - \lambda o\gamma\, b_n) : 2.273 \qquad (70')$$

Πέραν τούτου πρέπει νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν καὶ τὸ γεωγραφικὸν πλάτος φ καὶ πρὸς τοῦτο ὁ τύπος συμπληρώνεται διὰ μεγαλυτέραν ἀκρίβειαν ὡς ἑξῆς.

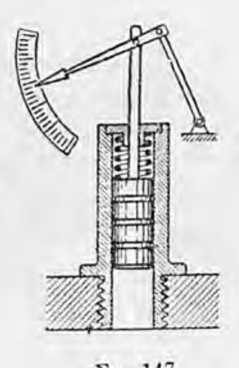
$$h_n - h_0 = 18430\,(2.273+\Theta_0+\Theta_n)(1+0{,}0026\ \sigma\upsilon\nu\ 2\varphi)(\lambda o\gamma b_0 - \lambda o\gamma\, b_n) : 2.273 \qquad (70'')$$

56. Μανόμετρα. Πρὸς μέτρησιν τῆς πιέσεως ἀερίου ποὺ περιέχεται εἰς ὡρισμένον χῶρον χρησιμοποιοῦμεν ὄργανα τὰ ὁποῖα ὀνομάζομεν *μανόμετρα*. Τοιαῦτα εἶναι : α) ***Τὸ ἀνοικτὸν μανόμετρον*** Τοῦτο ἀποτελεῖται ἀπὸ ἀνοικτὸν σωλῆνα ποὺ ἔχει καμφθῆ Uειδῶς (σχ. 144) καὶ φέρει κατὰ μῆκος τῶν σκελῶν του μετρικὰς ὑποδιαιρέσεις. Χύνομεν εἰς τὸν σωλῆνα ὑδράργυρον (διὰ μεγαλυτέραν εὐπάθειαν ἀντὶ ὑδραργύρου λαμβάνεται ὕδωρ ἢ ἄλλο ὑγρὸν μικροῦ εἰδικοῦ βάρους) μέχρις ἑνὸς ὡρισμένου ὕψους (τοῦ αὐτοῦ φυσικὰ καὶ εἰς τὰ δύο σκέλη) ὅπου ἔχει σημειωθεῖ τὸ 0 τῆς μετρικῆς κλίμακος. Ἂν τώρα συνδέσωμεν τὸ ἓν τῶν σκελῶν τοῦ ὀργάνου μὲ τὸν χῶρον, ὅπου εὑρίσκεται τὸ ἀέριον, τοῦ ὁποίου θέλομεν νὰ μετρήσωμεν τὴν πίεσιν, ἡ διαφορὰ ὕψους τοῦ ὑγροῦ εἰς τὰ δύο σκέλη παρέχει τὴν διαφορὰν ποὺ ἔχει ἡ πίεσις τοῦ ἀερίου ἀπὸ τὴν ἀτμοσφαιρικήν. Μὲ τὸ μανόμετρον τοῦτο δὲν μποροῦμε νὰ μετρήσωμεν μεγάλας πιέσεις, διότι θὰ ἔπρεπε νὰ ἔχωμεν ἀντιστοίχως μεγάλα μήκη τῆς διαφορᾶς ὕψους τῶν στηλῶν ὑδραργύρου. β) ***Τὸ κλειστὸν μανόμετρον.*** Εἰς τοῦτο τὸ σκέλος εἰς τὸ ὁποῖον ἀνέρχεται ὁ ὑδράργυρος ὑπὸ τὴν πίεσιν τοῦ ἀερίου εἶναι κλειστὸν (σχ. 145) καὶ ἑπομένως συμπιέζεται εἰς αὐτὸ ὁ ἀὴρ ποὺ ἔχει ἀποκλεισθῆ ὑπὲρ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑδραργύρου. Ἀπὸ τὴν ἐλάττωσιν τοῦ ὄγκου ποὺ γίνεται ἔτσι εἰς τὴν ἀποκλεισθεῖσαν ποσότητα ἀέρος, συνάγεται κατὰ τὸν νόμον Boyle Mariotte ἡ πίεσίς του καὶ συνεπῶς καὶ ἡ πίεσις τοῦ ἀερίου ποὺ εὑρίσκεται εἰς τὸν χῶρον, μὲ τὸν ὁποῖον συνεδέθη τὸ ὄργανον μὲ τὸ ἀνοικτὸν ἄκρον τοῦ σωλῆνος.

γ) ***Τὰ μεταλλικὰ μανόμετρα.*** Εἶναι ὀλιγώτερον εὐαίσθητα, ἀλλὰ πολὺ εὐχρηστότερα. Τὸ σχ. 146 παριστάνει ἓν τοιοῦτο. Ἀποτελεῖται ἀπὸ μεταλλίνην θήκην, εἰς τὸ σκέπασμα τῆς ὁποίας ἔχουν καταγραφῆ ὑποδιαιρέσεις μετρικῆς κλίμακος. Εἰς τὴν θήκην ἔχει τοποθετηθῆ κλειστὸς κατάλληλος σωλὴν ποὺ κάμπεται κυκλικῶς. Τὸ ἄνοιγμα τοῦ ὀργάνου θέτει εἰς ἐπικοινωνίαν τὸν σωλῆνα αὐτὸν μὲ τὸν χῶρον, ὅπου εὑρίσκεται τὸ ἀέριον, τοῦ ὁποίου ζητεῖται νὰ καθορισθῆ ἡ πίεσις. Ὑπὸ τὴν πίεσιν τοῦ ἀερίου ὁ σωλὴν



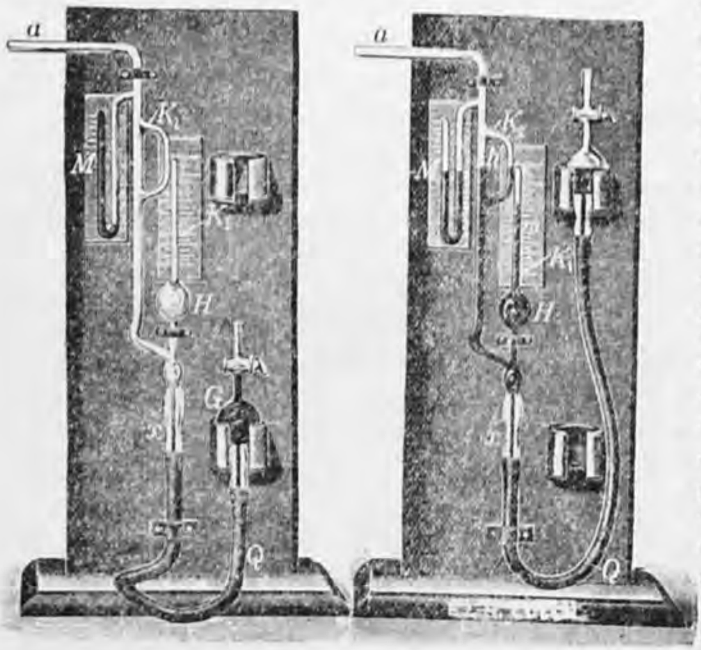
Σχ. 146



Σχ. 147

πάει νὰ ἐλαττώση τὴν καμπύλωσίν του καὶ κατὰ τὸν ἐλαστικὸν τοῦτον μετασχηματισμόν του στρέφει διὰ συστήματος μοχλῶν ὀδοντωτὸν τροχόν, εἰς τὸν ἄξονα τοῦ ὁποίου ἔχει στερεωθῆ δείκτης. Ἀπὸ τὴν θέσιν ποὺ παίρνει ὁ δείκτης ἐμπρὸς εἰς τὴν μετρικὴν κλίμακα παρέχεται ἡ ζητουμένη πίεσις τοῦ ἀερίου. Ἄλλην μορφὴν μεταλλικοῦ μανομέτρου δείχνει τὸ σχ. 147. Εἰς αὐτὸ τὸ ἀέριον πιέζει ἔμβολον ποὺ κρατεῖται μὲ ἐλατήριον. Κατὰ τὴν μετακίνησιν τοῦ ἐμβόλου παρασύρεται ἐνώπιον ὑποδιαιρέσεων μετρικῆς κλίμακος δείκτης ποὺ συνδέεται καταλλήλως μὲ τὸ ἔμβολον.

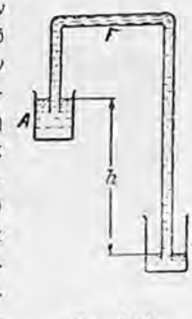
δ) ***Μανόμετρον*** Mac - Leod (***κενόμετρον***). Τοῦτο χρησιμεύει εἰδικῶς διὰ τὴν μέτρησιν πολὺ χαμηλῶν πιέσεων. Πρὸς τοῦτο συνδέεται τὸ ὄργανον (σχ. 148) μὲ τὸν χῶρον, ὅπου εὑρίσκεται τὸ ὑπὸ χαμηλὴν πίεσιν ἀέριον. Ἡ σύνδεσις γίνεται διὰ τοῦ σωλῆνος α, ὁ ὁποῖος διακλαδίζεται εἰς τὸ ***κολοβόν***, ὅπως τὸ λέμε, ***βαρόμετρον*** Μ καὶ εἰς τὸν τριχοειδῆ σωλῆνα K_2, τοῦ ὁποίου ἡ διάμετρος ἐγκαρσίας τομῆς εἶναι ὅση καὶ ἡ τοῦ παραπλεύρως σωλῆνος K_1, ποὺ εἶναι κλειστὸς εἰς τὸ ἄνω ἄκρον του καὶ φέρει κατὰ μῆκος του μετρικὰς ὑποδιαιρέσεις. Εἰς τὸ κάτω ἄκρον ὁ K_1 σχηματίζει σφαιρικὴν διόγκωσιν Η, ἡ ὁποία συγκοινωνεῖ μὲ τὸν ἐκ τοῦ α ἐρχόμενον σωλῆνα καὶ τὴν συνέχειάν του, τὸν στενὸν σωλῆνα x· ὁ τελευταῖος συνδέεται δι' ἐλαστικοῦ παχυτοίχου σωλῆνος Q μὲ τὸ σφαιρικὸν δοχεῖον G, τὸ ὁποῖον εἶναι πλῆρες ὑδραργύρου καὶ κλείει μὲ στρόφιγγα. Ἀρχικῶς ἡ σφαῖρα G εὑρίσκεται εἰς τὸ κατώτερον στήριγμά της (σχ.148α), οἱ δὲ



α Σχ. 148 β

ὑάλινοι σωλῆνες τοῦ ὀργάνου εἶναι κενοὶ ὑδραργύρου καὶ γεμίζουν μὲ ἀέριον τοῦ χώρου, μὲ τὸν ὁποῖον συγκοινωνεῖ τὸ ὄργανον διὰ τοῦ σωλῆνος α. Ὅταν ἡ σφαῖρα G ἀνυψωθῆ εἰς τὸ ἀνώτερον στήριγμά της (σχ. 148 β), ὁ ὑδράργυρος ἀνέρχεται εἰς τοὺς σωλῆνας καὶ τὸ μέρος τοῦ ἀερίου ποὺ ἀποκλείεται εἰς τὴν σφαιρικὴν διόγκωσιν Η καὶ τὸν σωλῆνα K_1 συμπιέζεται εἰς τὸ ἀνώτερον τμῆμα τοῦ σωλῆνος τούτου. Ἀναγιγνώσκεται τότε εἰς τὴν μετρικὴν κλίμακα ἡ διαφορὰ ὕψους h τῆς ὑδραργυρικῆς στήλης εἰς τοὺς δύο τριχοειδεῖς σωλῆνας K_1 καὶ K_2 καὶ ἀπὸ αὐτὴν προσδιορίζεται ἡ πίεσις τοῦ συμπιεσθέντος εἰς τὸν K_1 ἀερίου. Μὲ βάσιν τὸν λόγον τῆς χωρητικότητος τῆς σφαίρας H πρὸς τὴν χωρητικότητα τοῦ σωλῆνος K_1 ὑπολογίζεται σύμφωνα μὲ τὸν νόμον Boyle - Mariotte πόση ἦτο ἡ πίεσις τοῦ ἀερίου πρὸ τῆς ἀνυψώσεως τοῦ σφαιρικοῦ δοχείου G. Ἡ βαθμολογία τοῦ ὀργάνου ποὺ ἔχει καταγραφῆ εἰς τὴν μετρικὴν κλίμακα m ἔχει κανονισθῆ νὰ παρέχῃ ἀμέσως τὴν ζητουμένην πίεσιν, χωρὶς νὰ χρειάζεται νὰ γίνουν οἱ ὑπολογισμοί. Ἔτσι κατορθώνεται νὰ μετρῶνται πιέσεις τῆς τάξεως μεγέθους 10^{-6} Torr.

§ 57. **Σίφων.** Εἶναι ἀνοικτὸς σωλὴν ποὺ κάμπτεται εἰς σχῆμα U (σχ. 149) μὲ σκέλη ἄνισα. Χρησιμεύει διὰ τὴν μεταφορὰν ὑγροῦ ἀπὸ δοχεῖον A, ὅπου εὑρίσκεται, εἰς ἄλλο B, ὅπου ἡ στάθμη του (ἐλευθέρα ἐπιφάνεια) κεῖται χαμηλότερον. Πρὸς τοῦτο βυθίζεται τὸ ἀνοικτὸν ἄκρον τοῦ βραχυτέρου σκέλους τοῦ σωλῆνος εἰς τὸ ὑγρὸν ποὺ θέλομεν νὰ μεταγγίσωμεν καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο ἄκρον τοῦ μακροτέρου σκέλους ἀναρροφῶμεν τὸ ὑγρὸν καὶ τὸ ἀφήνομεν νὰ ἐκρέῃ εἰς τὸν χῶρον ὅπου πρόκειται νὰ τὸ μεταφέρωμεν. Ἡ μετάγγισις θὰ συνεχισθῇ μόνη της, ἐφόσον ἡ ἐλευθέρα ἐπιφάνεια τοῦ ὑγροῦ εἰς τὸ δοχεῖον A, ὁπόθεν ἀφαιρεῖται, κεῖται ὑψηλότερον ἀπὸ τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν τοῦ δοχείου B, ὅπου ἐκρέει τὸ ὑγρόν. Ἡ διαφορὰ ὕψους h τῶν δύο ἐλευθέρων ἐπιφανειῶν ρυθμίζει τὴν ταχύτητα τῆς ἐκροῆς. Ὅταν ἑπομένως ἡ στάθμη τοῦ ὑγροῦ εἰς τὸ δοχεῖον, ὅπου ἐκρέει, φθάσει εἰς τὸ αὐτὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον μὲ τὴν στάθμην τοῦ ὑγροῦ εἰς τὸ δοχεῖον, ὁπόθεν ἐκρέει διὰ μέσου τοῦ σίφωνος, ἡ μετάγγισις σταματᾷ. Τὸ ὅτι ἡ διαφορὰ ὕψους h τῶν ἐλευθέρων ἐπιφανειῶν εἶναι ἡ αἰτία τῆς ροῆς τοῦ ὑγροῦ διὰ μέσου τοῦ σίφωνος καθίσταται εὐνόητον, ἂν σκεφθῶμεν ὅτι ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις ποὺ ἐνεργεῖ ἐξ ἴσου καὶ εἰς τὰς δύο ἐπιφανείας A καὶ B ἐλαττώνεται εἰς τὴν B κατὰ τὴν ὑδροστατικὴν πίεσιν στήλης τοῦ ὑγροῦ ὕψους h καὶ συνεπῶς ἡ πίεσις ἔχει ἀνωτέραν τιμὴν εἰς τὴν θέσιν A ἀπὸ ἐκείνην ποὺ ἔχει εἰς τὴν θέσιν B καὶ τόσον ἀνωτέραν ὅσον μεγαλύτερον εἶναι τὸ ὕψος h· θὰ ρέῃ λοιπὸν τὸ ὑγρὸν ἀπὸ τὴν θέσιν A πρὸς τὴν B ὅπου εἶναι μικροτέρα πίεσις, μέχρις ὅτου ἐκμηδενισθῇ ἡ διαφορὰ πιέσεως, ἤτοι τὸ ὕψος h.



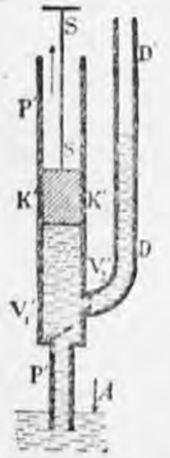
Σχ. 149

§ 58. Ἀντλίαι. α) ***Ὑδραντλίαι.*** Εἶναι συσκευαὶ μὲ τὰς ὁποίας μεταφέρομεν ὑγρὰ ἀπὸ ἑνὸς χώρου εἰς ἄλλον ποὺ κεῖται ὑψηλότερον. Μεταξὺ τῶν διαφόρων τύπων ὑδραντλιῶν διακρίνομεν:

1. ***Τὰς ἀναρροφητικάς.*** Εἰς αὐτὰς ἡ ἀνύψωσις τοῦ ὑγροῦ γίνεται διὰ τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως. Ἔτσι εἰς τὴν παριστανομένην ἀπὸ τὸ σχ. 150 εἰς κυλινδρικὸν δοχεῖον PP, τοῦ ὁποίου τὸ κατώτερον ἄνοιγμα συγκοινωνεῖ μὲ τὸ πρὸς ἀνέλκυσιν ὑγρόν, π.χ. τὸ ὕδωρ φρέατος, κινεῖται παλινδρομικῶς κατὰ μῆκος τοῦ τοιχώματος τοῦ κυλίνδρου διάτρητον ἔμβολον KK. τὸ ἄνοιγμα τοῦ ἐμβόλου κλείεται μὲ βαλβῖδα ποὺ ἀνοίγει ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω. Δευτέρα ὁμοία βαλβὶς (ποὺ ἀνοίγει δηλαδὴ καὶ αὐτὴ ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω) φράσσει τὸ κατώτερον ἄνοιγμα τοῦ κυλίνδρου. Ὅταν τὸ ἔμβολον ἀνασύρεται, μένει κλειστὴ ἡ βαλβὶς τοῦ ἀνοίγματός του, διότι σχηματίζεται κενὸν κάτωθεν τοῦ ἐμβόλου καὶ ἑπομένως ἡ πίεσις ἐνεργεῖ ἐκ τῶν ἄνω πρὸς

τὰ κατω, ἤτοι κατὰ διεύθυνσιν ποὺ δὲν ἀνοίγει ἡ βαλβίς.᾽Αντιθέτως ἀνοίγει τότε ἡ βαλβὶς τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου καὶ τὸ ὑγρόν, μὲ τὸ ὁποῖον συγκοινωνεῖ ὁ κύλινδρος, εἰσορμᾷ εἰς αὐτὸν πιεζόμενον ἀπὸ τὴν ἀτμόσφαιραν ποὺ ἐπικάθηται ἐπὶ τοῦ ὑγροῦ. Κατὰ τὴν ἀμέσως ἐπακολουθοῦσαν εἰσώθησιν τοῦ ἐμβόλου εἰς τὸν κύλινδρον κλείνει ἡ βαλβὶς τοῦ πυθμένος τοῦ κυλίνδρου καὶ ἀνοίγει ἡ κλείουσα τὸ τρῆμα τοῦ ἐμβόλου. Τὸ ὕδωρ τοῦ φρέατος ἔρχεται ὑπεράνω τοῦ ἐμβόλου καὶ ἀνασύρεται μετ᾽ αὐτοῦ εἰς τὸν κύλινδρον μέχρι τοῦ πλευρικοῦ ἀνοίγματος R, διὰ τοῦ ὁποίου ἐκρέει εἰς τὸν χῶρον, ὅπου θέλομεν νὰ τὸ ἀναβιβάσωμεν. Τὸ ὅτι τὸ ὑγρὸν φθάνει εἰς τὸν ὑπὲρ τὴν βαλβῖδα τοῦ κυλίνδρου χῶρον ***πιεζόμενον ὑπὸ τῆς ἀτμοσφαίρας***, ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα ὅτι τοῦτο δὲν μπορεῖ νὰ ἀναβιβασθῇ μὲ τὴν ἀντλίαν αὐτὴν ὑψηλότερον ἀπὸ ὅσον μπορεῖ νὰ κρατηθῇ στήλη τοῦ ὑγροῦ διὰ τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως. Προκειμένου π.χ. δι᾽ ὑδράργυρον τὸ μέγιστον ὕψος ὅπου μπορεῖ νὰ ἀναρροφηθῇ μὲ τὴν ἀντλίαν αὐτὴν δὲν μπορεῖ νὰ ὑπερβῇ τὰ 76 cm᾽ δι᾽ ὕδωρ τὸ ὕψος τοῦτο δὲν μπορεῖ νὰ ὑπερβῇ τὰ $0{,}76 . 13{,}6 = 10{,}33$ m κ.ο.κ. Εἰς τὴν πραγματικότητα τὸ ὕψος, μέχρι τοῦ ὁποίου μπορεῖ νὰ ἀναρροφηθῇ ὑγρόν, εἶναι πολὺ μικρότερον, διότι τὸ ὑπὲρ τὴν βαλβῖδα κενὸν δὲν εἶναι πλῆρες. Πρακτικῶς τὸ ὕδωρ δὲν ἀναβιβάζεται μὲ τὰς τελειοτέρας τῶν ἀντλιῶν τούτων περισσότερον τῶν 8 μέτρων.

Σχ. 150



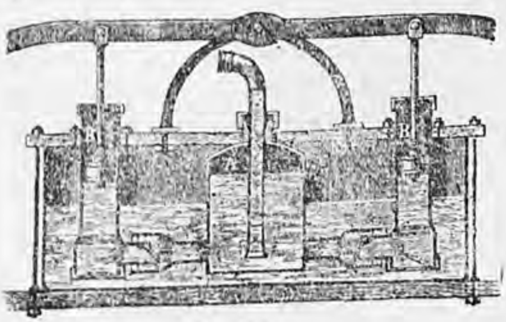
Σχ. 151

2. ***Τὰς καταθλιπτικάς.*** Εἰς αὐτὰς (ὅπως δείχνει τὸ σχ. 151) τὸ ἔμβολον εἶναι πλῆρες καὶ τὸ ὑγρὸν ποὺ γεμίζει τὸν κύλινδρον κατὰ τὴν ἀνάσυρσιν τοῦ ἐμβόλου ἐξωθεῖται κατὰ τὴν ἐπακολουθοῦσαν εἰσώθησιν εἰς τὸν πλευρικὸν κατακόρυφον σωλῆνα DD διὰ βαλβῖδος V_2 ποὺ ἀνοίγει πρὸς αὐτόν. Ἔτσι μπορεῖ νὰ ἀναβιβασθῇ εἰς ὅσον ὕψος φθάνει ὁ πλευρικὸς σωλήν, ἀρκεῖ νὰ ἐνεργήσῃ ἐπὶ τοῦ ἐμβόλου ἡ ἀπαιτουμένη πιεστικὴ δύναμις.

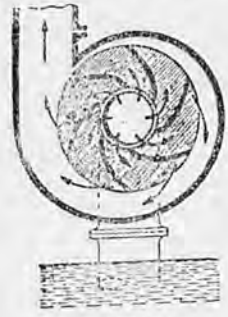
3. ***Τὰς συνθέτους*** ὅπως εἶναι ἡ ***πυροσβεστικὴ*** ποὺ δείχνει τὸ σχ. 152. Μὲ αὐτὰς ἐπιτυγχάνεται ἡ ὑπὸ ἀρκετὰ μεγάλην πίεσιν συνεχὴς ἐκροὴ ὕδατος ἀπὸ σωλῆνα ποὺ προσαρμόζεται εἰς τὸ ἄνοιγμα τοῦ θαλάμου Α τῆς ἀντλίας. Εἰς τὸν θάλαμον τοῦτον εἰσρέει τὸ ἐκ τῆς δεξαμενῆς ἀντλούμενον διὰ δύο καταθλιπτικῶν ὑδραντλιῶν Β,Β ὕδωρ καὶ πιεζόμενον ἀπὸ τὸν ὑπεράνω αὐτοῦ ἀέρα ἐξωθεῖται μὲ πίεσιν εἰς τὸν σωλῆνα DD'.

4. ***Τὰς φυγοκεντρικάς.*** (σχ. 153), εἰς τὰς ὁποίας ἀντὶ ἐμβόλου καὶ βαλβίδων

ἔχομεν θήκην τυμπανοειδῆ, εἰς τὴν ὁποίαν περιστρέφεται ἄξων, ἐπὶ τοῦ ὁποίου εἶναι στερεωμένα πτερύγια. Μὲ τὴν περιστροφὴν τοῦ ἄξονος μὲ τὰ πτερύγια ὁ ἀὴρ



Σχ. 152



Σχ. 153

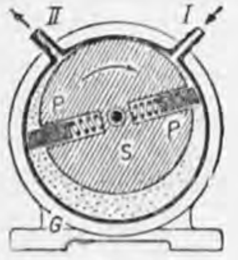
ἐξωθεῖται πρὸς περιφερειακὸν ἄνοιγμα τοῦ τυμπάνου καὶ εἰς τὴν θέσιν του ἔρχεται ὕδωρ ἐκ τῆς δεξαμενῆς, μὲ τὴν ὁποίαν συγκοινωνεῖ τὸ τύμπανον διὰ σωλῆνος.

β) Ἀεραντλίαι. Μὲ αὐτὰς μποροῦμε νὰ μεταφέρωμεν ἀέρια ἀπὸ ἕνα χῶρον εἰς ἄλλον, νὰ ἐκκενώσωμεν κλειστὸν δοχεῖον ἀπὸ τὸν ἀέρα (ἢ ἄλλο ἀέριον) ποὺ περιέχει καὶ νὰ συμπιέσωμεν ἀέρα (ἢ ἄλλο ἀέριον) εἰς κλειστὸν δοχεῖον. Ἡ μεγάλη σημασία ποὺ ἔχει διὰ τὴν σύγχρονον Φυσικὴν ἡ παραγωγὴ ***προχωρημένου κενοῦ*** (ὅπως λέμε τὴν ἀφαίρεσιν κάθε ἀερίου) εἰς κλειστοὺς σωλῆνας, ὡδήγησεν εἰς τὴν ἐπινόησιν ἀεραντλιῶν διαφόρων τύπων, ἐκ τῶν ὁποίων περιγράφομεν ἐδῶ:

1. *Τὴν διὰ φλεβὸς ὕδατος* (σχ. 154) Εἰς αὐτὴν διοχετεύεται ρεῦμα ὕδατος διὰ σωλῆνος ποὺ στενεύει εἰς τὸ κατώτερον ἄκρον του· ἕνεκα τούτου τὸ ὕδωρ τῆς φλεβὸς ποὺ παρέχει τὸ στένωμα τοῦ σωλῆνος ἐκρέει μὲ μεγαλυτέραν ταχύτητα καὶ κατὰ τὸν νόμον τοῦ Bernoulli (πρβλ. § 63) μὲ μικροτέραν πίεσιν. Ἂν ὁ χῶρος γύρω ἀπὸ τὸ στένωμα τεθῇ εἰς ἐπικοινωνίαν μὲ τὸν κλειστὸν χῶρον, ἀπὸ τὸν ὁποῖον θέλομεν νὰ ἀπορροφήσωμεν ἀέρα, θὰ προσρέῃ εἰς τὸν χῶρον αὐτὸν (ὅπως δείχνεται εἰς τὸ σχῆμα μὲ τὰ βέλη) ἀὴρ ἐκ τοῦ δοχείου, μὲ τὸ ὁποῖον συνδέεται διὰ σωλῆνος τὸ ὄργανον. Ἔτσι τὸ ὕδωρ τῆς φλεβὸς θὰ παρασύρει καὶ ἀέρα ἐκ τοῦ κλειστοῦ δοχείου. Μὲ κατάλληλον ρύθμισιν τῆς ταχύτητος τοῦ προσρέοντος ὕδατος καὶ τοῦ στενώματος τῆς φλεβὸς μπορεῖ νὰ φθάσῃ ἡ ἀραίωσις τοῦ ἀερίου τοῦ κλειστοῦ δοχείου μέχρις ὅτου ἡ πίεσίς του νὰ γίνῃ ἴση μὲ τὴν τάσιν κεκορεσμένου ὑδρατμοῦ (πρβλ. Θερμαντικὸν § 32,ι), ἤτοι ἀντιστοίχως πρὸς τὴν θερμοκρασίαν μέχρι 10 ἕως 20 Torr

Σχ. 154

γ) Τὴν περιστροφικήν. Μὲ αὐτὴν ἐπιτυγχάνεται πολὺ περισσότερον προχωρημένη ἐκκένωσις, φθάνουσα μέχρι 10^{-3} Torr. Ἀποτελεῖται ἀπὸ τύμπανον G (σχ. 155), μέσα εἰς τὸ ὁποῖον στρέφεται ἐκκεντρικῶς τοποθετημένος κύλινδρος S. Ἡ τυμπανοειδὴς θήκη τῆς ἀντλίας ἔχει δύο ἀνοίγματα I, II μὲ τὰ ὁποῖα μπορεῖ νὰ τεθῇ εἰς ἐπικοινωνίαν, τὸ μὲν μὲ τὸν χῶρον, ἀπὸ τὸν ὁποῖον ἀπορροφᾶται τὸ ἀέριον, τὸ δὲ μὲ ἐκεῖνον, εἰς τὸν ὁποῖον ἐκρέει. Ἑκατέρωθεν τοῦ ἄξονος περιστροφῆς ὁ κύλινδρος φέρει σχισμάς, εἰς τὰς ὁποίας ἐφαρμόζονται οἱ σύρται P,P ποὺ δι' ἐλατηρίων ἐξωθοῦνται, ὥστε νὰ ἐφάπτονται συνεχῶς (κατὰ τὴν περιστροφὴν τοῦ κυλίνδρου) εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοίχωμα τοῦ τυμπάνου. Μὲ τὴν ἐκκεντρικὴν τοποθέτησιν τοῦ κυλίνδρου ὁ μετὰ τὸν ὀχετὸν I ἐλεύθερος χῶρος τοῦ τυμπάνου αὐξάνεται συνεχῶς κατὰ τὴν περιστροφὴν τοῦ κυλίνδρου, ἐνῶ ὁ πρὸ τοῦ ὀχετοῦ II ἐλαττώνεται συνεχῶς λόγῳ τῶν συρτῶν P,P. Ἔτσι τὸ ἀέριον τοῦ χώρου, μὲ τὸ ὁποῖον συγκοινωνεῖ ὁ ὀχετὸς I, θὰ ἀραιώνεται συνεχῶς, ἐνῶ εἰς τὸν χῶρον, μὲ τὸν ὁποῖον συγκοινωνεῖ ὁ ὀχετὸς II, θὰ προσφυσᾶται συνεχῶς ἀέριον, *ὅταν* ὁ κύλινδρος περιστρέφεται.



Σχ. 155

Σημ. Ἡ ἀντλία αὐτὴ εἶναι μία μορφὴ τοῦ ἑνὸς ἐκ τῶν δύο βασικῶν τύπων ποὺ ἀπὸ τοῦ 1900 ἐπενοήθησαν ἀπὸ τὸν Gaede. Διὰ τὸν ἄλλον τύπον, ***τὴν ἀντλίαν διαχύσεως***, μὲ τὴν ὁποίαν ἐπιτυγχάνεται κενὸν μέχρι 10^{-6} Torr, γίνεται λόγος εἰς οἰκειότερον μέρος τῆς Φυσικῆς.

Προβλήματα

139) Μὲ πόσην δύναμιν πιέζεται ὑπὸ τῆς ἀτμοσφαίρας ἡ ἐπιφάνεια σώματος ἀνθρώπου, ἂν ἡ ἔκτασις αὐτῆς εἶναι 1,4 m^2; (Ἀπ. 14462 Kp).

140) Πόσον θὰ ἦτο τὸ ὕψος τῆς ἀτμοσφαίρας, ἂν ἡ πυκνότης της ἦτο ἡ αὐτὴ (0,001293 gr/cm^3) καθ' ὅλην της τὴν ἔκτασιν; (Ἀπ. 10,33:0,001293=8 Km.).

141) Πόσον ὄγκον θὰ καταλαμβάνῃ ὑπὸ κανονικὴν ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν ποσὸν ἀέρος, τὸ ὁποῖον ὑπὸ πίεσιν 720 Torr ἔχει ὄγκον 2 l. (Ἀπ. 1,89 l).

142) Ποῖον εἶναι τὸ ὕψος τόπου ὑπὲρ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης, ἂν τὸ βαρόμετρον (ποὺ εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης δεικνύει 760 Torr) εἰς τὸν θεωρούμενον τόπον ἰσορροπεῖ εἰς 720 mmHg; (Ἀπ. 432,4 m).

143) Ποία ἡ διαφορὰ ὕψους μεταξὺ δύο τόπων εἰς γεωγραφικὸν πλάτος 43°, ἂν ἡ θερμοκρασία εἶναι 15,5° καὶ ἡ πίεσις 754,2 Torr εἰς τὸν ἕνα τόπον καὶ ἀντιστοίχως 4,6° καὶ 602,4 Torr εἰς τὸν ἄλλον; (Ἀπ. 1872,15 m).

144) Ὑπὸ ποίαν πίεσιν εὑρίσκεται ἀέριον κλεισμένον εἰς δοχεῖον, τὸ ὁποῖον τιθέμενον εἰς ἐπικοινωνίαν μὲ ἀνοικτὸν μανόμετρον ἀνυψώνει τὴν εἰς τὸ ἐλεύθερον σκέλος στήλην ὑδραργύρου κατὰ 570 mm, ὅταν ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις εἶναι 730 Torr; (Ἀπ. 1,767 Kp/cm^2).

145) Ὁ χῶρος τοῦ κυλίνδρου ἀεραντλίας μὲ ἔμβολον καὶ βαλβῖδας (κατασκευασμένης κατ' ἀναλογίαν πρὸς ἀντίστοιχον ὑδραντλίαν) εἶναι (ὅταν τὸ ἔμβολον ἔχει συρθῆ μέχρι τοῦ ἄκρου τοῦ κυλίνδρου) ἴσος μὲ α, ἐνῶ ὁ χῶρος τοῦ δοχείου, ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἀφαιρεῖται τὸ ἐγκλειόμενον ἀέριον, μαζὶ μὲ τὸν χῶρον τοῦ σωλῆνος τῆς συγκοινωνίας δοχείου καὶ κυλίνδρου εἶναι β. Πόση θὰ γίνῃ ἡ πυκνότης d τοῦ ἀερίου μετὰ ν ἀνελκύσεις τοῦ ἐμβόλου; (Ἀπ. $d_\nu = d[\beta:(\alpha+\beta)]^\nu$

146) Δύο τελείως ὅμοια ***σιφώνια*** (ἔτσι λέμε σωληνοειδῆ ὑάλινα ὄργανα ὡς τὰ κοινὰ σταγονόμετρα) βυθίζονται μὲ τὸ στενὸν των ἄνοιγμα πρὸς τὰ κάτω τὸ ἓν εἰς ὕδωρ καὶ τὸ ἄλλο εἰς ὑδράργυρον μέχρι τοῦ αὐτοῦ ὕψους. Ἐὰν ἀποφράξωμεν τὸ ἄλλο ἄνοιγμα ἑκάστου τούτων διὰ τοῦ δακτύλου καὶ ἀνασύρωμεν καὶ τὰ δύο ἐκ τῶν ὡς ἄνω ὑγρῶν, πόσον ὑψηλοτέρα θὰ εἶναι ἡ συγκρατουμένη στήλη ὕδατος ἀπὸ τὴν τοῦ ὑδραργύρου; (Ἀπ. 13,6 φοράς).

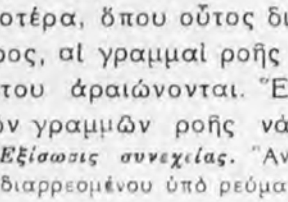
X. Μηχανικὴ ρευμάτων (Ὑδροδυναμικὴ καὶ Ἀεροδυναμική)

§ 59. Ρεύματα. α) ***Ρευστά***. Εἰς τὰ προηγηθέντα δύο τελευταῖα κεφάλαια ἐπραγματεύθημεν φαινόμενα ἰσορροπίας, τὸ μὲν εἰς τὰ ὑγρά, τὸ δὲ εἰς τὰ ἀέρια. Ἀπὸ τὴν μελέτην αὐτῶν προκύπτει ὅτι παρ' ὅλας τὰς διαφορὰς ἐκδηλώσεως τῶν φαινομένων τούτων ὑπάρχουν καὶ πολλαὶ ὁμοιότητες, ὅπως τὸ ὅτι καὶ εἰς τὰ ὑγρὰ καὶ εἰς τὰ ἀέρια τὰ μόρια μποροῦν νὰ μετακινοῦνται καὶ νὰ μεταδίδουν κάθε πίεσιν (εἴτε ἔξωθεν ἐπιφερομένην, εἴτε ἐκ τοῦ βάρους των προερχομένην) πρὸς ὅλας τὰς διευθύνσεις καὶ κατὰ συνέπειαν νὰ ἀσκοῦν ἄνωσιν εἰς σώματα ποὺ περιβάλλουν. Αἱ ὁμοιότητες μεταξὺ ὑγρῶν καὶ ἀερίων γίνονται περισσότερον ἔκδηλοι εἰς τὰ φαινόμενα τῆς κινήσεώς των, κινήσεως τὴν ὁποίαν ὀνομάζομεν ***ροὴν*** ἢ ***ρεῦμα***. Ἕνεκα τούτου ἐξετάζομεν μαζὶ τὰ ρεύματα τῶν ὑγρῶν καὶ τῶν ἀερίων, ποὺ διὰ τοῦτο τὰ χαρακτηρίζομεν ἀπὸ κοινοῦ ὡς ***ρευστά***. Ἡ σύμπτωσις τῶν νόμων εἰς τοὺς ὁποίους ὑπόκεινται τὰ ρεύματα εἶναι πληρεστέρα, ἐφόσον ἡ ταχύτης μετακινήσεως τῶν ἀερίων παραμένει πολὺ μικροτέρα ἐκείνης ποὺ ἔχει ὁ ἦχος εἰς τὸν ἀέρα (δηλ. τῶν 340 m/s), διότι τότε δὲν λαμβάνουν χώραν σημαντικαὶ συμπιέσεις καὶ ἔτσι μποροῦν νὰ ὁμοιάζουν τὰ ἀέρια μὲ τὰ ὑγρὰ ποὺ, ὅπως εἴπαμε, εἶναι πρακτικῶς ἀσυμπίεστα. Πέραν τούτου διὰ τὴν ἁπλότητα τῆς θεωρήσεως παραβλέπομεν εἰς τὴν ἐξέτασιν ὡρισμένων φαινομένων τῶν ρευμάτων τὴν ***ἐσωτερικὴν τριβὴν*** (δηλαδὴ τὸ ἀποτέλεσμα τῶν δυνάμεων ποὺ ἐνεργοῦν μεταξὺ τῶν μορίων) καὶ εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτὰς γίνεται λόγος περὶ ***ἰδανικῆς ροῆς*** καὶ ***ἰδανικῶν ρευστῶν***.

β) ***Γραμμαὶ ροῆς***. Εἰς ρεῦμα ὕδατος ἢ ἄλλου ρευστοῦ ρίπτομεν παρασυρόμενα ὑπ' αὐτοῦ καὶ δυνάμενα νὰ παρατηρῶνται σωματίδια (π.χ. κόνιν ἀπὸ ἀλουμίνιον) καὶ παρακολουθοῦμεν τὰς κινήσεις τῶν σωματιδίων μὲ φωτογραφίσεις τῆς ροῆς. Φωτίζοντες τὴν ροὴν ἀνὰ χρονικὰ διαστήματα μικρᾶς διαρκείας, λαμβάνομεν δι' ἕκαστον σωματίδιον ἀποτύπωσιν βραχείας γραμμῆς, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ διάστημα ποὺ διανύεται ἀπὸ τὸ σωματίδιον κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ φωτισμοῦ. Ἀπὸ τὸ μῆκος τῆς γραμμῆς καὶ τὸν χρόνον φωτισμοῦ ἐξάγεται ἡ ταχύτης τῆς κινήσεως τοῦ σωματιδίου καὶ συνεπῶς ἡ ταχύτης τοῦ ρεύματος εἰς τὴν θέσιν, ὅπου εὑρίσκεται τὸ σωματίδιον. Αἱ βραχύταται αὐταὶ γραμμαὶ ἀποτελοῦν τμήματα μακροτέρων, τὰς ὁποίας ὀνομάζομεν ***γραμμὰς ροῆς***. Μὲ αὐτὰς ἀποκτῶμεν ἄμεσον ἀντίληψιν τῆς κινητικῆς καταστάσεως τοῦ ρευστοῦ. Εἰς κάθε θέσιν τοῦ ρευστοῦ ἡ διεύθυνσις τοῦ ρεύματος δίδεται ἀπὸ τὴν ἐφαπτομένην τῆς γραμμῆς ροῆς εἰς τὴν θέσιν ταύτην. Εἰς θέσεις ὅπου αἱ γραμμαὶ ροῆς εἶναι πυκνότεραι, ἡ ταχύτης τοῦ ρεύματος εἶναι μεγαλυτέρα. Τοῦτο συνάγεται καὶ ἐκ τῆς παρατηρήσεως ρεύματος διὰ μέσου σωλῆνος a b c (σχ. 156) μεταβαλλομένης εὐρύτητος. Ἂν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν, ὅτι τὸ ρευστὸν δὲν εἶναι συμπιεστὸν καὶ ἐπομένως δὲν μπορεῖ, οὔτε νὰ συμπυκνώνεται εἰς κάποιαν θέσιν, οὔτε νὰ ἀραιώνεται εἰς ἄλλην, εἶναι εὐνόητον ὅτι θὰ διέρχεται καθ' ἑκάστην μονάδα χρόνου τὸ αὐτὸ ποσὸν ρεστοῦ δι' οἱανδήποτε ἐγκαρσίας τομῆς τοῦ σωλῆνος. Ὅσον ρευστὸν προσρέει εἰς τὴν διατομὴν τῆς θέσεως b, τόσον θὰ ἐκρέῃ ἀπὸ τὴν διατομὴν τῆς θέσεως c κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον. Κατὰ συνέπειαν ἡ ταχύτης τῆς ροῆς πρέπει νὰ εἶναι μεγαλυτέρα εἰς τὴν θέσιν b, ὅπου ὁ σωλὴν εἶναι στενώτερος, καὶ μικροτέρα, ὅπου οὗτος διευρύνεται. Ὅπου ὅμως ὁ σωλὴν εἶναι στενώτερος, αἱ γραμμαὶ ροῆς θὰ συμπυκνώνωνται, ἐνῶ εἰς τὰς διευρύνσεις του ἀραιώνονται. Ἕνεκα τούτου μποροῦμε ἀπὸ τὴν πυκνότητα τῶν γραμμῶν ροῆς νὰ συναγάγωμεν τὴν ταχύτητα αὐτῆς.

γ') Ἐξίσωσις συνεχείας. Ἂν εἶναι F ἡ ἐπιφάνεια τῆς ἐγκαρσίας τομῆς σωλῆνος, διαρρεομένου ὑπὸ ρεύματος ταχύτητος v (σχ. 157), πρέπει ***καθ' ἕκαστον δευτερόλεπτον*** νὰ προσπερνᾷ τὴν ἐπιφάνειαν F ὄγκος ρευστοῦ ἴσος μὲ: v.F. Τὸ ποσὸν τοῦτο τοῦ ρευστοῦ παρέχει τὴν ***ἔντασιν*** I τοῦ ρεύματος. Εἶναι λοιπόν:

Σχ. 156



Σχ. 157

Σχ. 158

$$I = v\,F. \tag{71}$$

Ἀλλὰ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος εἶναι ἡ αὐτὴ καθ' ὅλον τὸ μῆκος τοῦ σωλῆνος, ἀφοῦ ὅσον ρευστὸν προσρέει εἰς τυχοῦσαν διατομὴν F τοῦ σωλῆνος τόσον ἐκρέει ἐξ αὐτῆς κατὰ μονάδα χρόνου. Εἶναι λοιπόν: $v.F = \text{σταθ.}$ ἢ $v_1\,F_1 = v_2.F_2$ (71')

Ἤτοι: ***Ἡ ταχύτης ρεύματος διὰ μέσου σωλῆνος εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς διατομῆς τοῦ σωλῆνος.*** Τὴν σχέσιν (71') τὴν λέμε ***ἐξίσωσιν συνεχείας τοῦ ρεύματος.***

§ 60. Ἐσωτερικὴ τριβὴ καὶ ἰξῶδες ρευστοῦ *α) Συντελεστὴς ἐσωτερικῆς τριβῆς.*

Εἰς κάθε ρευστὸν μπορεῖ νὰ μεταβληθῇ τὸ σχῆμα χωρὶς νὰκαταβληθῇ ἔργον, ἀρκεῖ νὰ γίνεται ἡ μεταβολὴ ἀρκετὰ βραδέως. Ἂν ὅμως ἡ ἐπιβαλλομένη μεταβολὴ γίνεται μὲ σχετικῶς μεγάλην ταχύτητα, τότε προβάλλεται ***ἀντίστασις***, ἡ ὁποία εἶναι ἀνάλογος τῆς ταχύτητος, μὲ τὴν ὁποίαν γίνεται ἡ μεταβολὴ καὶ ***ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ εἶδος τοῦ ρευστοῦ***. Διὰ τὴν ἐξάρτησιν αὐτὴν κάθε ρευστὸν χαρακτηρίζεται ἀπὸ μέγεθος, τὸ ὁποῖον ὀνομάζομεν ***ἰξῶδες*** αὐτοῦ. Θεωροῦμεν ρευστὸν μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων πλακῶν, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία (ἡ κατωτέρα) μένει ἀκίνητος ἐνῶ ἡ ἄλλη (ἡ ἀνωτέρα) (σχ. 158) μετακινεῖται παραλλήλως πρὸς τὴν πρώτην μὲ ταχύτητα v. Κατὰ τὴν μετακίνησιν ταύτην χρειάζεται νὰ ὑπερνικηθῇ ἡ ἀντίστασις ποὺ προέρχεται ἀπὸ τὴν τριβήν, ἡ ὁποία ἀναφαίνεται μεταξὺ τῶν ἐπαλλήλων στρωμάτων τοῦ ὑγροῦ λόγω τῶν δυνάμεων ποὺ ἀσκοῦνται μεταξὺ τῶν μορίων του. Ἔτσι τὰ στρώματα τοῦ ὑγροῦ ποὺ εὑρίσκονται εἰς ἄμεσον ἐπαφὴν μὲ τὰς πλάκας εἶναι προσκεκολλημένα εἰς αὐτάς. Τὸ ἀνώτατον ποὺ ἀκολουθεῖ τὴν κινουμένην πλάκα F ἔχει τὴν ταχύτητα αὐτῆς v, ἐνῶ τὸ κατώτατον μένει ἀκίνητον ἐπὶ τῆς κατωτέρας πλακός. Τὰ ἐνδιάμεσα στρώματα θὰ ἔχουν διαφόρους ταχύτητας ποὺ αὐξάνονται βαθμηδὸν ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω. Ἕκαστον στρῶμα μετακινεῖται μὲ ταχύτητα μεγαλυτέραν ἀπὸ ἐκείνην ποὺ ἔχει τὸ κάτωθεν αὐτοῦ στρῶμα. Ἔτσι τὰ καθέκαστα στρώματα τοῦ ρευστοῦ ὀλισθαίνουν τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου καὶ σχηματίζουν ροήν, ἡ ὁποία λέγεται ***στρωτή***. Ὥστε κατὰ τὴν μετατόπισιν ταύτην ἀναφαίνεται τριβή, ἕνεκα τοῦ ὅτι τὸ ὑπερκείμενον ἑκάστοτε στρῶμα ἐπιταχύνεται σχετικῶς πρὸς τὸ ὑποκείμενον. Ἡ τριβὴ αὕτη τείνει νὰ ἐξισώση τὰς ταχύτητας τῶν ἐπαλλήλων στρωμάτων τοῦ ὑγροῦ καὶ ὀνομάζεται ***ἐσωτερικὴ τριβή***. Ἡ δύναμις k, ἡ ὁποία ἀπαιτεῖται διὰ τὴν μετακίνησιν τῆς πλακὸς εἶναι ἀνάλογος τῆς ἐπιφανείας της F καὶ τῆς ταχύτητός της v καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογος τοῦ πάχους x τοῦ μεταξὺ τῶν πλακῶν στρώματος τοῦ ρευστοῦ ἢ τῆς ἀποστάσεως μεταξὺ τῶν δύο πλακῶν. Θὰ εἶναι λοιπόν: $k = \eta F v/x$ (72)

Εἰς τὴν σχέσιν αὐτὴν ὁ συντελεστὴς ἀναλογίας η παρέχει σταθεράν, χαρακτηριστικὴν δι' ἕκαστον εἶδος ρευστοῦ, καὶ καλεῖται ***συντελεστὴς ἐσωτερικῆς τριβῆς ἢ ἰξῶδες τοῦ ρευστοῦ***. Ὡς προκύπτει ἐκ πειραματικῶν μετρήσεων τὸ ἰξῶδες ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν θερμοκρασίαν καὶ ἐνῶ εἰς τὰ ἀέρια αὐξάνεται μετ' αὐτῆς, εἰς τὰ ὑγρὰ ἐλαττώνεται, ὅταν ὑψώνεται ἡ θερμοκρασία.

β) Κλίσις τῆς ταχύτητος ροῆς. Τὸ πηλίκον v/x παρέχει τὴν μεταβολὴν ποὺ πάσχει ἡ ταχύτης ἀπὸ σημείου εἰς σημεῖον ἀπέχον καθέτως πρὸς τὴν διεύθυνσίν της ἀπόστασιν ἴσην μὲ τὴν μονάδα μήκους. Ὀνομάζομεν τὸ μέγεθος τοῦτο ***κλίσιν τῆς ταχύτητος*** καὶ τὸ ἐκφράζομεν δι' ἑκάστην θέσιν τῆς ροῆς, μὲ τὸ διαφορικὸν πηλίκον dv/dx. Ἐξ ἄλλου τὸ πηλίκον k/F ποὺ παρέχει τὴν δύναμιν, ἡ ὁποία ἐνεργεῖ κατὰ μονάδα ἐπιφανείας μεταξὺ δύο στρωμάτων τοῦ ρευστοῦ, παραλλήλων πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς ροῆς, ὀνομάζεται ***τάσις ὀλισθήσεως*** τ τοῦ ἑνὸς στρώματος ὡς πρὸς τὸ ἄλλο. Μὲ τὴν χρησιμοποίησιν τῶν ἐννοιῶν τούτων ἔχομεν: $\tau = k/F = \eta\, dv/dx$ (72').

Ἤτοι: ***Ἡ τάσις ὀλισθήσεως εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἰξώδους ἐπὶ τὴν κλίσιν ταχύτητος τοῦ ρεύματος.*** Βάσει τῆς σχέσεως (72') ***τὸ ἰξῶδες*** η ***ρευστοῦ παρέχεται ἀπὸ τὴν δύναμιν (εἰς δύνας), ἡ ὁποία ἐνεργεῖ ἐπὶ τῆς μονάδος*** (1 cm²) ***ἐπιφανείας τοῦ ρευστοῦ, ὅταν τοῦτο ἔχει κλίσιν ταχύτητος ἴσην μὲ τὴν μονάδα,*** τ. ἔ. ὅταν στρῶμα τοῦ ρευστοῦ κινεῖται παραλλήλως πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς ροῆς μὲ ταχύτητα 1 cm/sec ὡς πρὸς ἄλλο στρῶμα, ἀπέχον τοῦ πρώτου καθέτως πρὸς τὴν διεύθυνσίν του ἀπόστασιν ἴσην μὲ 1 cm. Ἡ μονὰς τοῦ μεγέθους τούτου ὀνομάζεται Poise (P) πρὸς τιμὴν τοῦ Poiseuille.

Ἔτσι τὸ ἰξῶδες ὕδατος θερμοκρασίας 20° C εἶναι 0,01 P· τοῦτο σημαίνει ὅτι διὰ νὰ ὀλισθήση μὲ ταχύτητα 10 cm/sec ὑαλίνη πλὰξ ἐμβαδοῦ 100 cm² ἐπὶ στρώματος ὕδατος πάχους 0,001 cm, πρέπει νὰ ἐνεργῇ παραλλήλως δύναμις k ἴση μέ: 0,01 [P] 100 [cm²].10 [cm/sec] / 0,001 [cm]=10.000 [dyn] ἢ περίπου 10 g*.

§ 61. Νόμος τῆς ροῆς καὶ εἴδη αὐτῆς α) ***Νόμος τοῦ*** Poiseuille. Τὸ ἰξῶδες ἐκδηλώνεται περισσότερον, ὅταν τὸ ρευστὸν διέρχεται διὰ μέσου στενῶν σωλήνων καὶ μάλιστα τριχοειδῶν. Προκειμένου νὰ ὑπερνικηθῇ κατὰ τὴν διαρροὴν ταύτην ἡ τριβή, ἀπαιτεῖται νὰ ὑφίσταται διαφορὰ πιέσεως (p_1-p_2) τοῦ ὑγροῦ μεταξὺ τῶν δύο ἄκρων τοῦ σωλῆνος. Ὅσον μεγαλυτέρα εἶναι ἡ διαφορὰ αὐτὴ πιέσεως, τόσον μεγαλυτέρα εἶναι καὶ ἡ ταχύτης ροῆς. Ἂν εἶναι r ἡ ἀκτὶς καὶ l τὸ μῆκος τοῦ σωλῆνος, ὁ ὄγκος V τοῦ ρευστοῦ, τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τοῦ σωλῆνος εἰς χρόνον t, εὑρίσκεται ὅτι εἶναι: $V=\pi r^4(p_1-p_2)t/8\eta l$ (73)

Ὁ νόμος ποὺ ἐκφράζεται ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν καλεῖται ***νόμος τοῦ*** Poiseuille. Ἂν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι τὸ πηλίκον V/t, ἤτοι ὁ ὄγκος τοῦ ρευστοῦ ποὺ διαρρέει τὸν σωλῆνα εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου, εἶναι ἡ ἔντασις I τοῦ ρεύματος καὶ ὀνομάσωμεν ***ἀντίστασιν*** R τὸ πηλίκον $8\eta l/\pi r^4$, θὰ ἔχωμεν: $I=(p_1-p_2)/R$. (73′)

Μὲ τὴν διατύπωσιν αὐτὴν ὁ νόμος τοῦ Poisseuille προβάλλεται ὡς εἰδικὴ περίπτωσις γενικωτέρου νόμου ποὺ ἰσχύει εἰς κάθε ρεῦμα (ὅπως συμβαίνει ἀντιστοίχως διὰ τὸν νόμον τοῦ Ohm ποὺ ἰσχύει διὰ τὸ ἠλεκτρικὸν ρεῦμα). Κατ' αὐτόν: Ἡ ἔντασις I ***ρεύματος εἶναι ἀνάλογος τῆς αἰτίας ποὺ τὸ προκαλεῖ*** (ἐδῶ τῆς διαφορᾶς πιέσεως p_1-p_2) ***καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς ἀντιστάσεως*** R ***ποὺ συναντᾷ τὸ ρεῦμα κατὰ τὴν διαδρομήν του.*** Δι' ἓν καὶ τὸ αὐτὸ ρευστὸν (η=σταθ.) ἡ ἀντίστασις R ($=8\eta l/\pi r^4$) εἶναι ἀνάλογος τοῦ μήκους l τοῦ σωλῆνος καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς τετάρτης δυνάμεως τῆς ἀκτῖνος (r^4) τῆς ἐγκαρσίας τομῆς τοῦ σωλῆνος, διὰ μέσου τοῦ ὁποίου γίνεται ἡ ροή.

β) ***Εἴδη ροῆς.*** Ὁ νόμος ποὺ ἐκφράζεται ὑπὸ τῆς σχέσεως (73) ἰσχύει εἰς περιπτώσεις, κατὰ τὰς ὁποίας ἡ ταχύτης κάθε σημείου τοῦ ρεύματος δὲν ὑπερβαίνει ὡρισμένην ἑκάστοτε τιμήν. Τὴν ὁρικὴν αὐτὴν τιμὴν τῆς ταχύτητος τὴν ὀνομάζομεν ***κρίσιμον***. Ἐφόσον ἡ ταχύτης κάθε σημείου τῆς ροῆς παραμένει κατωτέρα τῆς κρισίμου ὀνομάζομεν τὴν ροὴν ***νηματικήν***. Κατ' αὐτὴν τὸ στρῶμα τοῦ ὑγροῦ ποὺ ἐφάπτεται ἀμέσως τῶν τοιχωμάτων τοῦ σωλῆνος παραμένει προσκεκολλημένον ἐπ' αὐτῶν καὶ συνεπῶς ἔχει ταχύτητα μηδέν. Μετ' αὐτὸ ἐπάλληλα στρώματα μέχρι τοῦ ἄξονος τοῦ σωλῆνος ἔχουν ταχύτητας βαθμηδὸν αὐξανομένας μετὰ τῆς ἀποστάσεώς των ἀπὸ τὰ τοιχώματα τοῦ σωλῆνος. Κατὰ τὴν κίνησιν ταύτην τὰ καθέκαστα στρώματα τοῦ ὑγροῦ ὀλισθαίνουν τὸ ἓν πρὸς τὸ ἄλλο καὶ προστρίβονται τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου, χωρὶς ὅμως νὰ εἰσδύουν τὸ ἓν εἰς τὸ ἄλλο. Τὴν κίνησιν αὐτὴν τοῦ ρεύματος τὴν λέμε καὶ *στρωτήν*.

Ὅταν ἡ ταχύτης εἰς κάποιαν θέσιν τοῦ ὑγροῦ ὑπερβῇ τὴν κρίσιμον τιμήν της, ἡ νηματικὴ ροὴ διαταράσσεται, τὰ καθέκαστα στρώματα τοῦ ὑγροῦ δὲν κινοῦνται πλέον παραλλήλως πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ σωλῆνος, ἀλλ' ἀναδεύονται τὸ ἓν μὲ τὸ ἄλλο. Τότε ἡ ροὴ γίνεται *τυρβώδης*. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ ἀντίστασις ἀποβαίνει σημαντικῶς μεγαλυτέρα καὶ συνεπῶς ἡ ἔντασις αὐτοῦ γίνεται μικροτέρα ἀπὸ ἐκείνην ποὺ καθορίζεται ὑπὸ τῆς σχέσεως (73')

§ 62. Ταχύτης ροῆς καὶ στατικὴ πίεσις ρεύματος. ***α) Ἀντίδρασις ἐκρέοντος ὑγροῦ.*** Στηρίζομεν δοχεῖον πλῆρες ὑγροῦ (σχ. 160) ἐπὶ εὐκινήτου ὁριζοντίας βάσεως. Ἂν εἰς χαμηλὸν σημεῖον Α τοῦ πλευρικοῦ του τοιχώματος ἀνοίξωμεν ὀπήν, ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἐκρέει τὸ ὑγρόν, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ δοχεῖον κινεῖται ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου ἀντιθέτως πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς ἐκροῆς. Τοῦτο συμβαίνει, διότι τώρα ἡ πιεστικὴ δύναμις ποὺ ἐνεργεῖ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ τοιχώματος ἀκριβῶς ἀπέναντι τῆς ὀπῆς Α δὲν πλέον ἐξουδετερώνεται καὶ συνεπῶς παρασύρει κατὰ τὴν διεύθυνσιν καὶ

Σχ. 159

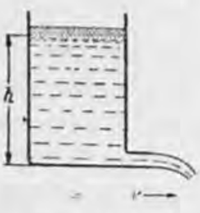
Σχ. 160

φοράν της τὸ δοχεῖον. Τὴν ἐκδήλωσιν τῆς δυνάμεως ταύτης τὴν λέμε *ἀντίδρασιν* ἐκρέοντος ὑγροῦ. Ἐφαρμογὴν αὐτῆς ἔχομεν εἰς τὸν ὑδροστρόβιλον τοῦ Segner (σχ. 159). Εἰς αὐτὸν ἐκρέει τὸ ὑγρὸν κυλινδρικοῦ δοχείου, στρεπτοῦ περὶ κατακόρυφον ἄξονα, ἀπὸ σωλῆνας ἐφηρμοσμένους πλευρικῶς παρὰ τὴν βάσιν του καὶ καμπτομένους πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος. Ἔτσι ἡ ἀντίδρασις τοῦ ἐκρέοντος ὑγροῦ θέτει εἰς περιστροφὴν τὸ κυλινδρικὸν δοχεῖον κατὰ φορὰν ἀντίθετον τῆς φορᾶς τῆς ἐκροῆς.

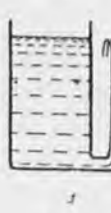
β) Ταχύτης ἐκροῆς. Θεωροῦμεν τὴν ἐκροὴν ὑγροῦ ποὺ περιέχεται εἰς δοχεῖον ἀπὸ ὀπὴν ποὺ ἀνοίγομεν παρὰ τὴν βάσιν τοῦ δοχείου. (σχ. 161) Μὲ τὴν ἐκροήν τῆς μάζης m τοῦ ὑγροῦ, καταπίπτει ἡ στάθμη κατὰ τὸ ὕψος h (ὅσον ἀπέχει ἡ ὀπὴ ἀπὸ τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν) καὶ συνεπῶς ἐλαττώνεται ἡ δυναμική της ἐνέργεια κατὰ mgh. Εἰς τὴν θέσιν τῆς ἔτσι ἐξαφανιζομένης δυναμικῆς ἐνεργείας ἐμφανίζεται εἰς τὴν ἐκρέουσαν μᾶζαν m κινητικὴ ἐνέργεια $\frac{1}{2}mv^2$, ἂν v εἶναι ἡ ταχύτης μὲ τὴν ὁποίαν γίνεται ἡ ἐκροή. Κατὰ τὴν ἀρχὴν διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας πρέπει νὰ εἶναι : $mgh = \frac{1}{2} m v^2$ ὅθεν : $v = \sqrt{2gh}$. (74) Ἀπὸ τὴν τιμὴν αὐτὴν τῆς ταχύτητος v ἐκροῆς προκύπτει ὅτι αὕτη εἶναι ἴση μὲ τὴν ταχύτητα ποὺ ἀποκτᾷ κάθε σῶμα, τὸ ὁποῖον πίπτει ἐλευθέρως ἀπὸ ὕψους h [βλέπε § 11, γ. ἐξίσ.(5'')] Μὲ τὴν ταχύτητα αὐτὴν τὸ ἐκρέον ὑγρὸν θὰ ἀνυψώνετο μέχρις ὕψους h ἀπὸ τὴν ὀπήν, ἂν ἡ ἐκροή του ἐγένετο κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω (σχ. 162) ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ἡ ἀναπήδησις δὲν ἐμποδίζεται ἀπὸ τὴν ἀντίστασιν τοῦ διασχιζομένου ἀέρος. Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο, γνωστὸν ἀπὸ τὸν Ἥρωνα τὸν Ἀλεξανδρινὸν περὶ τὰ 100 μ. Χ., διετύπωσε τὸ 1646 ὁ Torricelli ὡς ἑξῆς : ***Ἡ ταχύτης ἐκροῆς ὑγροῦ εἶναι τόση, ὅση θὰ ἦτο ἂν τὰ καθέκαστα μόρια τοῦ ὑγροῦ ἔπιπτον ἐλευθέρως ἀπὸ τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ μέχρι τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, ὅπου εὑρίσκεται τὸ ἄνοιγμα τῆς ἐκροῆς.***

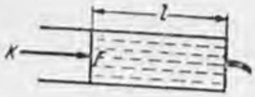
γ) ***Ἐνέργεια τῆς πιέσεως.*** Ἡ ἐκροὴ τοῦ ρευστοῦ γίνεται ἀπὸ τὴν ὀπήν, ἐπειδὴ εἰς τὴν θέσιν αὐτὴν ἡ πίεσις ἐκ τῶν ἔσω πρὸς τὰ ἔξω εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἐκ τῶν ἔξω πρὸς τὰ ἔσω (κατὰ τὴν πίεσιν στήλης τοῦ ὑγροῦ ὕψους h). Ἡ διαφορὰ Δp τῶν πιέσεων τούτων καθορίζει τὴν δύναμιν, ἡ ὁποία ἐπιφέρει τὴν ἐκροὴν τοῦ ὑγροῦ μὲ ταχύτητα v. Ἂν εἶναι ρ ἡ πυκνότης τοῦ ὑγροῦ, g ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος καὶ h τὸ ὕψος τῆς ὑπὲρ τὴν ὀπὴν στήλης τοῦ ὑγροῦ, ἡ Δp θὰ εἶναι ἴση μὲ : $\rho . g . h$ (βλ. ἐξίσ. 64). Ἑπομένως θὰ εἶναι : $g h = \Delta p / \rho$ καὶ ἂν θέσωμεν τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ gh εἰς τὴν (74) θὰ ἔχωμεν : $v = \sqrt{2 \Delta p / \rho}$ ὅθεν : $\Delta p = \frac{1}{2} \rho v^2$ (75) Ὥστε : ***Ἡ διαφορὰ πιέσεως ποὺ προκαλεῖ τὴν ἐκροὴν ρευστοῦ εἶναι ἴση μὲ τὴν κινητικὴν ἐνέργειαν, τὴν ὁποίαν ἀποκτᾷ ἡ μᾶζα τῆς μονάδος ὄγκου τοῦ ρευστοῦ.***

Κατὰ ταῦτα κάθε ὑγρὸν λόγω τῆς πιέσεως ὑπὸ τὴν ὁποίαν εὑρίσκεται ἐγκλείει ἐνέργειαν. Τὴν ἐνέργειαν αὐτὴν ποὺ τὴν λέμε ***ἐνέργειαν τῆς πιέσεως***, τὴν ὀφείλει εἰς τὴν πίεσιν τῆς στήλης τοῦ ὑγροῦ, ἡ ὁποία ὑψώνεται (κατακορύφως) ἀπὸ τὴν θέσιν ἐκροῆς μέχρι τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ. Μπορεῖ ὅμως νὰ τὴν ὀφείλει καὶ εἰς ὁποιανδήποτε ἄλλην πίεσιν ποὺ ἐπιφέρεται ἔξωθεν ἐπὶ τοῦ ὑγροῦ. Γενικὰ ὀνομάζομεν τὴν πίεσιν, εἰς τὴν ὁποίαν ὀφείλει τὴν δυναμικήν του ἐνέργειαν ***στατικὴν πίεσιν*** τοῦ ρεύματος. Ἔτσι π.χ. εἰς τὸ κυλινδρικὸν δοχεῖον τοῦ σχ. 163 τὸ ὑγρὸν ὄγκου V ἐξωθεῖται ἀπὸ τὸ δοχεῖον δι' ἐμβόλου ἐγκαρσίας τομῆς F, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐνεργεῖ καθέτως δύναμις K. Ἂν εἶναι l τὸ μῆκος τοῦ κυλίνδρου, κατὰ τὸ ὁποῖον προχωρεῖ τὸ ἔμβολον ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως K διὰ τὴν ἐκροὴν τοῦ περιεχομένου ὑγροῦ, ὄγκου V, τὸ ἔργον τῆς δυνάμεως θὰ εἶναι : $A = K\,l$ καὶ ἂν ἀντὶ τῆς δυνάμεως K θέσωμεν τὴν στατικὴν πίεσιν p ἐπὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας F, θὰ ἔχωμεν : $A = p . F . l = p . V$. (76) ἤτοι : ***Ἡ ἐνέργεια A τῆς πιέσεως εἶναι ἴση μὲ τὴν πίεσιν p τοῦ ὑγροῦ ἐπὶ τὸν***



Σχ. 161


Σχ. 162



Σχ. 163

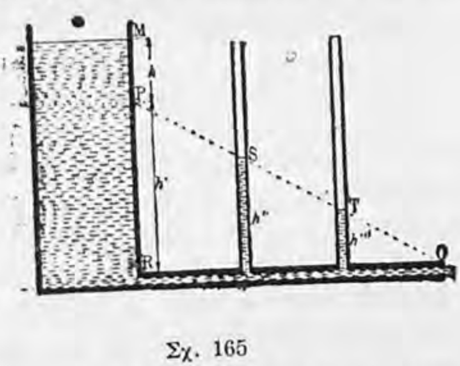
ὄγκον του V. Ἡ ἐνέργεια αὐτὴ ἐμφανίζεται κατὰ τὴν ἐξώθησιν τοῦ ὑγροῦ ἐκ τοῦ δοχείου ὡς κινητικὴ ἐνέργεια τῆς μάζης m τοῦ ὑγροῦ ποὺ ἐκρέει μὲ ταχύτητα v. Εἶναι λοιπόν: $p.V=\frac{1}{2}mv^2$ καὶ $p=\frac{1}{2}v^2\,(m:V)=\frac{1}{2}\rho v^2$.

Σχ. 164

δ) ***Συστολὴ φλεβός.*** Ἂν θεωρήσωμεν τὴν ἔντασιν I τῆς ροῆς, ἤτοι τὸ ποσὸν τοῦ ὑγροῦ ποὺ ἐκρέει ἀπὸ τὴν ὀπὴν (σχ. 164) εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου (1sec) εὑρίσκομεν εὔκολα [βλ. καὶ σχέσιν (71)] ὅτι θὰ εἶναι: $I = q\sqrt{2gh}$ (77)

Ἡ ἔτσι ὑπολογιζομένη ἔντασις τοῦ ρεύματος εὑρίσκεται ὅτι εἶναι μεγαλυτέρα τῆς πειραματικῶς μετρουμένης. Τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὸ ὅτι τὰ μόρια τοῦ ὑγροῦ ποὺ ἐκ τῶν πλαγίων προσρέουν εἰς τὴν ὀπήν, προκαλοῦν συστολὴν τῆς ἐγκαρσίας τομῆς τῆς ἐκρεούσης ὑγρᾶς φλεβὸς καὶ ἔτσι ἡ ἐγκαρσία τομὴ δὲν εἶναι πλέον ἴση μὲ τὸ ἄνοιγμα q τῆς ὀπῆς, ἀλλὰ μικροτέρα (κάπου 0,62q)· τὸ φαινόμενον αὐτὸ χαρακτηρίζεται μὲ τὸν ὅρον «contractio venae» δηλ. ***συστολὴ φλεβός.***

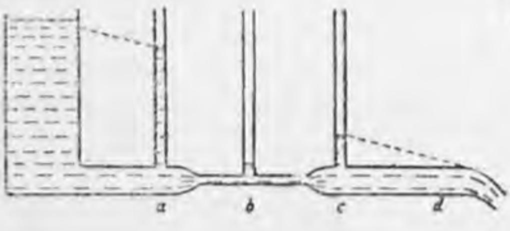
ε) ***Ἐκροὴ διὰ μέσου ὁριζοντίου σωλῆνος.*** Ἂν τὸ ὑγρὸν δοχείου δὲν ἐκρέῃ ἀπ' εὐθείας ἀπὸ τὴν ὀπὴν τοῦ τοιχώματος τοῦ δοχείου, ἀλλὰ διὰ μέσου ἐπιμήκους σωλῆνος RO (σχ. 165) ποὺ προσαρμόζεται ὁριζοντίως εἰς ὀπὴν παρὰ τὸν πυθμένα τοῦ δοχείου, τότε μέρος τῆς πιέσεως ποὺ ἀσκεῖ ἡ στήλη τοῦ ὑγροῦ εἰς τὸ δοχεῖον διατίθεται πρὸς ὑπερνίκησιν τῆς τριβῆς τοῦ ὑγροῦ μὲ τὰ τοιχώματα τοῦ σωλῆνος. Ἕνεκα τούτου τὸ ὑγρὸν ἐκρέει ἀπὸ τὸ ἄκρον O τοῦ σωλῆνος μὲ ταχύτητα μικροτέραν ἀπὸ ἐκείνην, μὲ τὴν ὁποίαν θὰ ἐξέρρεε ἀμέσως ἀπὸ τὴν ὀπήν. Ἡ ἐλάττωσις αὐτὴ τῆς ταχύτητος ἐκροῆς σημαίνει ὅτι καὶ ἡ πίεσις τοῦ ὑγροῦ εἰς τὸ ἄκρον τοῦ ὁριζοντίου σωλῆνος εἶναι μικροτέρα καὶ μάλιστα τόσον μικροτέρα ὅσον μακρότερος εἶναι ὁ σωλήν. Πειραματικὴν τούτου ἀπόδειξιν λαμβάνομεν, ἂν εἰς διαφόρους θέσεις κατὰ μῆκος τοῦ ὁριζοντίου σωλῆνος ἀνοίξωμεν ὀπὰς καὶ εἰς αὐτὰς ἐφαρμόσωμεν κατακορύφους σωλῆνας S, T. Παρατηροῦμεν τότε ὅτι τὸ ὑγρὸν ἀνέρχεται εἰς αὐτοὺς εἰς ὕψη h'', h''', τὰ ὁποῖα ἐλαττώνονται βαθμηδόν, ἐφόσον πλησιάζομεν πρὸς τὸ ἀνοικτὸν ἄκρον O τοῦ ὁριζοντίου σωλῆνος, ἄν, ὅπως δείχνει τὸ σχ. 165, τὸ ἄνοιγμα τοῦ σωλῆνος εἶναι τὸ αὐτὸ καθ' ὅλον τὸ μῆκος. Ἔτσι ἂν σύρωμεν εὐθεῖαν ST ποὺ ἐφάπτεται τῶν ἐλευθέρων ἐπιφανειῶν τοῦ ὑγροῦ εἰς τοὺς κατακορύφους σωλῆνας, αὐτὴ θὰ ἔχῃ τόσην κλίσιν, ὥστε, προεκτεινομένη, νὰ διέρχεται διὰ τοῦ ἄκρου O τοῦ ὁριζοντίου σωλῆνος. Ἡ προέκτασις τῆς εὐθείας αὐτῆς



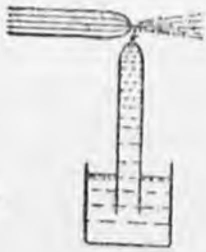
Σχ. 165

πρὸς τὸ μέρος τοῦ δοχείου χωρίζει τὸ ὅλον ὕψος MR τοῦ εἰς αὐτὸ ὑγροῦ εἰς δύο τμήματα, τά : RP=h′ καὶ PM=h. Ἐξ αὐτῶν τὸ πρῶτον h′ καθορίζει τὸ μέρος τῆς πιέσεως ποὺ διατίθεται πρὸς ὑπερνίκησιν τῆς τριβῆς εἰς τὸν σωλῆνα ἐκροῆς καὶ τὸ λέμε ***ὕψος ἀντιστάσεως ἢ πιέσεως***, ἐνῶ τὸ δεύτερον h καὶ μόνον αὐτὸ κανονίζει τὴν ταχύτητα v τῆς ἐκροῆς σύμφωνα μὲ τὴν σχέσιν (74) καὶ λέγεται ***ὕψος ταχύτητος ἢ ἐλευθέρας πτώσεως***.

Ἂν ὁ ὁριζόντιος σωλὴν στενεύει κατά τινα θέσιν b (σχ. 166) τοῦ μήκους του, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ πτῶσις τῆς πιέσεως εἶναι εἰς τὴν θέσιν αὐτὴν μεγαλυτέρα ἀπὸ ἐκείνην ποὺ παρατηρεῖται ὄχι μόνον πρό, ἀλλὰ καὶ μετὰ τὸ στένευμα, ἂν βέβαια μετὰ τοῦτο διευρύνεται πάλιν ὁ σωλήν. Ἀλλὰ σύμφωνα μὲ τὴν σχέσιν (71) εἰς θέσεις ὅπου ὁ σωλὴν εἶναι στενώτερος ($F_1<F$) πρέπει ἡ ταχύτης ροῆς νὰ εἶναι μεγαλυτέρα ($v_1>v$). Κατὰ συνέπειαν: ***Εἰς θέσεις μεγαλυτέρας***



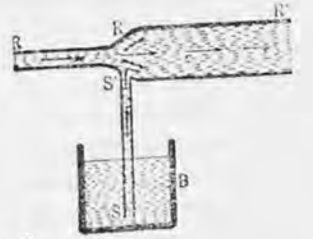
Σχ. 166



Σχ. 167

ταχύτητος τῆς ροῆς ἡ πίεσις τοῦ ρευστοῦ εἶναι μικροτέρα. Ἐκ τούτου προκύπτει ὅτι, ἂν ἡ ταχύτης τῆς ροῆς αὐξηθῇ πέραν ὡρισμένης δι' ἑκάστην περίπτωσιν τιμῆς, φθάνομεν εἰς πτῶσιν τῆς πιέσεως τόσον μεγάλην, ὥστε νὰ γίνῃ αὕτη μικροτέρα τῆς περὶ τὸ ρευστὸν ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως. Θὰ ἐμφανισθῇ λοιπὸν τότε εἰς τὴν θέσιν τῆς ροῆς, ὅπου συμβαίνει τοῦτο, ἀναρροφητικὴ δρᾶσις. Ἔτσι εἰς τὴν περίπτωσιν ποὺ ἐκφυσᾶται ρεῦμα ἀέρος διὰ στενῆς ὀπῆς, ὅπως γίνεται εἰς ψεκαστῆρα (σχ. 167), ἀναπτύσσεται ἀναρροφητικὴ δρᾶσις πρὸς τὴν ὀπήν. Τοῦτο γίνεται, διότι ὁ ἐκφυσσώμενος ἀὴρ λαμβάνει μετὰ τὴν ἔξοδόν του ἐκ τῆς ὀπῆς τὴν πίεσιν τῆς ἀτμοσφαίρας εἰς τὴν ὁποίαν διαχέεται· συνεπῶς θὰ ἔχῃ κατὰ τὴν δίοδόν του ἀπὸ τὴν ὀπὴν πίεσιν μικροτέραν τῆς ἀτμοσφαιρικῆς καὶ ὡς ἐκ τούτου θὰ ἀσκῆται ἀναρρόφησις πρὸς τὴν ὀπήν.

Ἂν λοιπὸν πλησίον τῆς στενῆς ὀπῆς ἐκφυσύσεως ἐκβάλλει τὸ στενὸν ἄνοιγμα κατακορύφου σωλῆνος, ὁ ὁποῖος ἔχει τὸ ἄλλο του ἄκρον βυθισμένον εἰς ὑγρόν, θὰ ἀναρροφᾶται δι' αὐτοῦ τὸ ὑγρὸν μέχρι τοῦ στενοῦ του ἄνω ἀνοίγματος καὶ θὰ διασκορπίζεται τοῦτο ἀπὸ τὸν ἐκφυσώμενον ἐκ τῆς στενῆς ὀπῆς ἀέρα. Εἰς τὴν ἀναρροφητικὴν δρᾶσιν ρεύματος ἀποτόμως μεταβαλλομένης ταχύτητος ροῆς βασίζεται καὶ ἡ λειτουργία ὑδραντλίας μὲ ρεῦμα ἀτμοῦ τῆς ὁποίας τὸ διάγραμμα παρέχει τὸ σχ. 168. Ὁμοίως καὶ ἡ λειτουργία τοῦ λύχνου Bunsen κ. ἄ.



Σχ. 168

§ 63 Ἐξίσωσις Bernoulli. *α) Τύπος ἐκφράσεως τοῦ νόμου.* Διὰ τὴν ἀναλυτικὴν ἔκφρασιν τῆς σχέσεως μεταξὺ στατικῆς πιέσεως καὶ ταχύτητος τοῦ ρεύματος ἰσχύει ἡ διατυπωθεῖσα ὑπὸ τοῦ Bernoulli ἐξίσωσις ποὺ ἀποτελεῖ θεμελιώδη σχέσιν τῆς ὑδροδυναμικῆς. Ἂν p παριστάνῃ τὴν στατικὴν πίεσιν τοῦ ρεύματος, ϱ τὴν πυκνότητα τοῦ ρευστοῦ, v τὴν ταχύτητα τῆς ροῆς, g τὴν ἐπιτάχυνσιν τῆς βαρύτητος καὶ h τὸ ὕψος, κατὰ τὸ ὁποῖον καταπίπτει ἡ στάθμη τοῦ ἐκρέοντος ὑγροῦ, θὰ εἶναι :

$$p+\varrho gh+{}^1/_2\varrho v^2=p_0 \text{ (σταθερόν)} \qquad (78)$$

Ἂν ἡ ροὴ εἶναι ὁριζοντία ($h=0$), θὰ ἔχωμεν: $p+{}^1/_2\varrho v^2=p_0$ (78′)

Ἕκαστος τῶν ὅρων τούτων τῆς ἐξισώσεως Bernoulli ἔχει τὰς διαστάσεις δυνάμεως κατὰ μονάδα ἐπιφανείας, δηλαδὴ πιέσεως. Πρὸς διάκρισιν ὀνομάζομεν τὴν p ***στατικὴν πίεσιν***, τὴν ϱgh ***πίεσιν ὕψους***, τὴν ${}^1/_2\varrho v^2$ ***δυναμικὴν πίεσιν***, καὶ τὴν p_0 ***συνολικήν***. Ἔτσι ἡ ἐξίσωσις Bernoulli μᾶς λέγει: ***Εἰς κάθε ρεῦμα ἡ συνολικὴ πίεσις, ἤτοι τὸ ἄθροισμα στατικῆς, δυναμικῆς καὶ πιέσεως ὕψους, ἔχει σταθερὰν τιμὴν*** p_0. Εἰδικώτερον εἰς ***ὁριζοντίαν*** ροὴν τὸ ἄθροισμα στατικῆς καὶ δυναμικῆς πιέσεως ($p+{}^1/_2\varrho v^2$) εἶναι σταθερόν.

Ἂν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως (78) διαιρεθοῦν διὰ ϱg, θὰ λάβωμεν τὴν σχέσιν :

$$p/\varrho g+h+v^2/2g=\text{σταθ.} \qquad (78'')$$

Ὑπὸ τὴν μορφὴν αὐτὴν κάθε ὅρος τῆς ἐξισώσεως ἔχει τὰς διαστάσεις μήκους. Ὀνομάζομεν τὸ $p/\varrho g$ ***ὕψος τῆς πιέσεως***, διότι σύμφωνα μὲ τὴν σχέσιν (64′) παρέχει τὸ ὕψος ποὺ πρέπει νὰ ἔχῃ τὸ ὑγρὸν διὰ νὰ ἀσκῇ πίεσιν p, τὸ h ***ὕψος θέσεως*** καὶ τὸ $v^2/2g$ ***ὕψος τῆς ταχύτητος***, διότι σύμφωνα μὲ τὴν (74) εἶναι τὸ ὕψος ἀπὸ τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ κατέρχεται τὸ ὑγρὸν διὰ νὰ ἐκρέῃ μὲ ταχύτητα v. Ἔτσι ὁ νόμος ἐκφράζεται ὡς ἑξῆς: ***Τὸ ἄθροισμα τῶν ὑψῶν 1) πιέσεως 2) θέσεως καὶ 3) ταχύτητος εἰς κάθε ρεῦμα εἶναι σταθερόν.***

β) ***Ἐφαρμογαὶ τοῦ νόμου.*** Ἐφαρμόζομεν τὴν ἐξίσωσιν (78) εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἐκροῆς ὑγροῦ ἀπὸ ὀπὴν δοχείου (βλ. σχ. 161), ἡ ὁποία εὑρίσκεται χαμηλότερον τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ εἰς τὸ δοχεῖον ὑγροῦ κατὰ h. Ἂν λάβωμεν ὑπ᾽ ὄψιν ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ στατικὴ πίεσις p εἶναι ἡ αὐτὴ (ἴση μὲ τὴν ἀτμοσφαιρικὴν b) καὶ εἰς τὴν ὀπὴν ἐκροῆς καὶ εἰς τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν καὶ ὅτι εἰς τὴν ὀπὴν ἐκροῆς θὰ εἶναι μηδὲν ἡ πίεσις ὕψους ($h=0$), ἐνῶ εἰς τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν θὰ εἶναι μηδὲν ἡ δυναμικὴ πίεσις, διότι κατὰ μίαν θεωρουμένην στιγμὴν ἡ πτῶσις τῆς στάθμης τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας εἶναι ἀνεπαίσθητος ($v=0$), θὰ ἔχωμεν: ($b+0+{}^1/_2\rho v^2$) εἰς τὴν ὀπὴν ἐκροῆς εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα: ($b+\rho gh+0$) εἰς τὴν ἐλευθ. ἐπιφάνειαν·

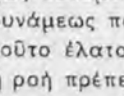
ὅθεν : $v=\sqrt{2gh}$, ἤτοι φθάνομεν τὴν ἐξίσ. (74) (§ 62, β.)

Ἂν θεωρήσωμεν ἀέριον κλεισμένον εἰς δοχεῖον ὑπὸ πίεσιν p_1 μεγαλυτέραν τῆς ἔξω τοῦ δοχείου p_2 καὶ ἀνοίξωμεν μικρὰν ὀπὴν εἰς τὸ δοχεῖον, θὰ ἐξέρχεται ἐξ αὐτοῦ ἀέριον μὲ ταχύτητα v. Ἔτσι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ ἀέριον ἔχει ἐντὸς τοῦ δοχείου στατικὴν πίεσιν p_1 καὶ δυναμικὴν 0 $(v=0)$, ἐνῶ εἰς τὴν ὀπὴν ἔχει στατικὴν πίεσιν p_2 καὶ δυναμικὴν $^1/_2\,\rho v^2$. Ἡ πίεσις ὕψους θὰ εἶναι ἡ αὐτὴ καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν : $p_1=p_2+{}^1/_2\,\rho v^2$ ὅθεν : $v=\sqrt{2\,(p_1-p_2):\rho}$ (78″)
Ἤτοι : δι᾽ ὡρισμένην διαφορὰν πιέσεως (p_1-p_2) ἡ ταχύτης ἐκφυγῆς ἀερίου εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τῆς πυκνότητος τοῦ ἀερίου.

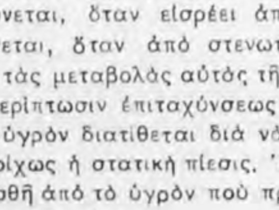
γ) ***Ἑρμηνεία τοῦ νόμου***. Ἡ ἐξίσωσις Bernoulli προκύπτει ἀπὸ τὴν ἀρχὴν διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας. Τὸ ῥεῦμα πλὴν τῆς κινητικῆς του ἐνεργείας $^1/_2\,mv^2$ ἐγκλείει καὶ ἐνέργειαν τῆς πιέσεως ποὺ ἀσκεῖ τὸ ὑγρὸν ἴσην μὲ pV [βλ. ἐξίσ (76)]. Ἐπὶ πλέον εἰς τὴν περίπτωσιν μὴ ὁριζοντίας ῥοῆς $(h>0)$ ἐγκλείεται καὶ θέσει ἐνέργεια, ἴση μὲ mgh. Εἰς κάθε μεταβολὴν τῆς ῥοῆς τὸ σύνολον τῆς ἐνεργείας παραμένει σταθερὸν καὶ συνεπῶς εἶναι : $^1/_2\,mv^2+pV+mgh=$ σταθ. Ἂν ἀναγάγωμεν τὴν σταθερὰν αὐτὴν ἐνέργειαν εἰς τὴν μονάδα ὄγκου τοῦ ὑγροῦ, θὰ ἔχωμεν : $^1/_2\,(m:V)\,v^2+p(V:V)+(m:V)gh=$ σταθ. ἤτοι : $^1/_2\,\rho v^2+p+\rho gh=p_0$ (78)

Πρὸς κατανόησιν τῆς σχέσεως ποὺ ἐκφράζει ἡ ἐξίσωσις Bernoulli σκεπτόμεθα ὅτι, ὅταν τὸ ὑγρὸν διαρρέει σωλῆνα, ὁ ὁποῖος εἰς κάποιαν θέσιν του στενεύει, θὰ ἔχωμεν μεγαλυτέραν ταχύτητα ῥοῆς εἰς τὴν θέσιν αὐτήν. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι τὸ ὑγρὸν ἐπιταχύνεται, ὅταν εἰσρέει ἀπὸ εὐρυτέραν θέσιν πρὸς στενωτέραν καὶ ἐπιβραδύνεται, ὅταν ἀπὸ στενωτέραν προχωρεῖ εἰς εὐρυτέραν θέσιν τοῦ σωλῆνος. Διὰ τὰς μεταβολὰς αὐτὰς τῆς ταχύτητος ἐνεργοῦν ἀντιστοίχως δυνάμεις. Εἰς τὴν περίπτωσιν ἐπιταχύνσεως τῆς ῥοῆς μέρος τῆς πιεστικῆς δυνάμεως ποὺ ἀσκεῖ τὸ ὑγρὸν διατίθεται διὰ νὰ ἐπιταχύνῃ τὸ ῥεῦμα καὶ διὰ τοῦτο ἐλαττοῦται ἀντιστοίχως ἡ στατικὴ πίεσις. Ἀντιθέτως διὰ νὰ ἐπιβραδυνθῇ ἡ ῥοὴ πρέπει νὰ ἐμποδισθῇ ἀπὸ τὸ ὑγρὸν ποὺ προηγεῖται μὲ μικροτέραν ταχύτητα καὶ τοῦτο θὰ αὐξήσῃ τὴν πίεσιν.

δ) ***Μέτρησις τῆς πιέσεως καὶ τῆς ταχύτητος τοῦ ῥεύματος***. Ἂν κρατήσωμεν ἐμπόδιον εἰς τὴν πορείαν τοῦ ῥεύματος, τὸ ῥευστὸν ποὺ προσκρούει ἐπ᾽ αὐτοῦ συνωθεῖται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἐμποδίου, διασπᾶται καὶ διαρρέει γύρω ἀπὸ τὸ ἐμπόδιον (σχ. 169). Εἰς τὴν μετωπικὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐμποδίου, ὅπου προσκρούει τὸ ῥεῦμα, γίνεται ἀνακοπὴ τῆς πορείας τοῦ ῥεύματος καὶ ἡ ταχύτης του v μηδενίζεται. Ἑπομένως εἰς τὴν θέσιν αὐτὴν ἡ δυναμικὴ πίεσις $(^1/_2\,\rho v^2)$ εἶναι μηδὲν καὶ ἡ ὁλικὴ πίεσις τοῦ ῥεύματος εἶναι ἴση (προκειμένου περὶ ὁριζοντίας ῥοῆς) μὲ τὴν στατικήν του πίεσιν. Πρὸς μέτρησιν αὐτῆς μπορεῖ νὰ χρησιμεύσῃ σωλὴν κεκαμμένος κατ᾽ ὀρθὴν γωνίαν (σχ. 170)· βυθίζομεν τὸ ὁριζόντιον σκέλος του εἰς τὸ ὑγρὸν οὕτως, ὥστε τὸ ἄνοιγμα τοῦ σωλῆνος νὰ στρέφεται πρὸς τὸ ῥεῦμα. Εἰς τὸ κατακόρυφον σκέλος τὸ ὑγρὸν θὰ ἀνέλθῃ μέχρις ὡρισμένου εἰς ἑκάστην περίπτωσιν ὕψους. Τὸ βάρος τῆς στήλης τοῦ ὑγροῦ ποὺ θὰ παρατηρήσωμεν τότε εἰς τὸν κατακόρυφον σωλῆνα, παρέχει τὴν πίεσιν εἰς θέσιν ἀνακοπῆς, ἡ ὁποία, ὅπως εἴπομεν, εἶναι ἴση μὲ τὴν συνολικὴν πίεσιν p_0 τοῦ ῥεύματος. Ἐὰν ἔχω-



Σχ. 169



Σχ. 170

μεντοποθετήσει εἰς ἄλλην θέσιν τῆς ὁριζοντίας ροῆς μανόμετρον ἢ ἁπλῶς κατακόρυφον σωλῆνα, εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ ὕψους τῆς στήλης τοῦ ὑγροῦ εἰς αὐτὸν τὴν στατικὴν πίεσιν p τοῦ ρεύματος. Ἐκ τῶν δύο τούτων πιέσεων εὑρίσκομεν τὴν δυναμικὴν πίεσιν τοῦ ρεύματος ($^1/_2\ \varrho v^2$), διότι σύμφωνα μὲ τὴν ἐξίσωσιν (78') θὰ εἶναι: $^1/_2\ \varrho v^2 = p_0 - p$ καὶ $v = \sqrt{2(p_0 - p) : \varrho}$.

§ 64. Ἀντίστασις διασχιζομένου ρευστοῦ. α) ***Ὁρικὴ ταχύτης.*** Ἀφήνομεν μικρὸν σφαιρίδιον νὰ βυθισθῇ εἰς ὑγρὸν (πρὸς καλυτέραν παρακολούθησιν τὸ εἰδικὸν βάρος τῆς ὕλης τοῦ σφαιριδίου νὰ μὴ εἶναι πολὺ μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ εἰδ βάρος τοῦ ὑγροῦ καὶ τὸ ἰξῶδες τοῦ ὑγροῦ νὰ εἶναι ἀρκετὰ αἰσθητόν). Παρατηροῦμεν τότε ὅτι ἡ καταβύθισις τοῦ σφαιριδίου γίνεται στὴν ἀρχὴ μὲ ἐπιταχυνομένην κίνησιν, τῆς ὁποίας ἡ ἐπιτάχυνσις ἐλαττώνεται ἀπὸ στιγμῆς εἰς στιγμὴν καὶ γρήγορα γίνεται μηδέν, ὁπότε ἡ κίνησις τῆς καταπτώσεως συνεχίζεται μὲ σταθερὰν ταχύτητα, τὴν ὁποίαν ὀνομάζομεν ***ὁρικὴν ταχύτητα*** τῆς θεωρουμένης περιπτώσεως. Ἡ διαπίστωσις αὐτὴ εἶναι εὐεξήγητος, ἂν σκεφθῶμεν ὅτι κατὰ τὴν κίνησίν του αὐτὴν τὸ σφαιρίδιον πρέπει νὰ διασπᾷ τὴν συνοχὴν τῶν μορίων τοῦ ὑγροῦ καὶ γενικώτερον νὰ ὑπερνικᾷ τὴν ἐσωτερικὴν τριβὴν αὐτοῦ. (§ 60). Μὲ ἄλλα λόγια κατὰ τὴν κίνησιν σώματος διὰ μέσου ρευστοῦ προβάλλεται ὑπὸ τοῦ διασχιζομένου ρευστοῦ ***ἀντίστασις***, ἡ ὁποία ἀντιτίθεται εἰς τὴν κινοῦσαν δύναμιν ποὺ εἰς τὴν περίπτωσίν μας εἶναι τὸ βάρος τοῦ σφαιριδίου ἠλαττωμένον κατὰ τὴν ἄνωσιν. Ἀλλὰ ἐνῶ τὸ βάρος τοῦ καταβυθιζομένου σφαιριδίου καὶ ἡ ἄνωσις ἔχουν μίαν ὡρισμένην τιμήν, ἡ ἀντίστασις τοῦ διασχιζομένου ὑγροῦ αὐξάνεται ἀπὸ στιγμῆς εἰς στιγμήν, ἐπειδὴ αὐξάνεται ἡ ταχύτης v ποὺ ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ βάρους ἀποκτᾷ τὸ καταβυθιζόμενον σῶμα εἰς τὰς διαδοχικὰς χρονικὰς στιγμάς. Ἔτσι ὀλίγον μετὰ τὴν ἔναρξιν τῆς καταβυθίσεως ἡ ἀντίστασις τοῦ μέσου φθάνει τὴν τιμὴν τῆς κινούσης δυνάμεως καὶ ἀπὸ τῆς στιγμῆς αὐτῆς ἡ κίνησις συνεχίζεται μὲ σταθερὰν ταχύτητα (τὴν ὁρικήν). Κατὰ ταῦτα ἡ ὁρικὴ ταχύτης σώματος διασχίζοντος ρευστὸν εἶναι ἡ ταχύτης ποὺ ἀποκτᾷ τὸ σῶμα τὴν στιγμήν, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ἀντίστασις τοῦ μέσου φθάνει τὴν τιμὴν τῆς κινούσης δυνάμεως. Παραδείγματα ὁμοίας κινήσεως ἔχομεν εἰς τὸ κατακάθισμα ἰλύος ποὺ αἰωρεῖται εἰς θολὸν ὕδωρ, εἰς τὴν πτῶσιν σταγόνων βροχῆς διὰ μέσου τοῦ ἀέρος, εἰς τὴν ἀπόθεσιν κονιορτοῦ ἐπὶ ἐπίπλων κλειστοῦ δωματίου κλπ.

β) ***Νόμοι τῆς ἀντιστάσεως.*** Ἀπὸ ὅσα εἴπαμε προκύπτει ὅτι ἡ ὁρικὴ ταχύτης εἶναι διάφορος εἰς τὰς διαφόρους περιπτώσεις. Ὅσον μεγαλυτέρα εἶναι ἡ κινοῦσα δύναμις (εἰς τὴν περίπτωσιν πτώσεως: τὸ βάρος) ποὺ ἐνεργεῖ ἐπὶ τοῦ σώματος, τόσον μεγαλυτέρα πρέπει νὰ γίνῃ ἡ ταχύτης του, διὰ νὰ λάβῃ ἡ ἀντίστασις τοῦ μέσου τιμὴν ἴσην μὲ τὴν τῆς κινούσης δυνάμεως. Εἰς περιπτώσεις ποὺ ἡ ὁρικὴ ταχύτης δὲν ἔχει μεγάλην τιμήν, ἡ ροὴ τοῦ διασχιζομένου ρευστοῦ θὰ εἶναι ***στρωτή***. (§ 60, α). Κατ' αὐτὴν τὸ στρῶμα τοῦ ὑγροῦ ποὺ ἐπικαλύπτει ἀμέσως τὸ στερεὸν παραμένει προσκολλημένον ἐπ' αὐτοῦ καὶ παρασύρεται μαζί του κατὰ τὴν κίνησίν του. Τὸ ἑπόμενον κατὰ σειρὰν στρῶμα παρασύρεται ὀλιγώτερον, τὸ τρίτον ἀκόμη ὀλιγώτερον κ.ο.κ. μέχρις ἀπωτέρων στρωμάτων, ὅπου ἡ κίνησις τοῦ στερεοῦ δὲν ἀσκεῖ ἐπίδρασιν (τὰ στρώματα αὐτὰ δὲν ἐπηρεάζονται κινητικῶς ἀπὸ τὴν κίνησιν τοῦ στερεοῦ διὰ μέσου τοῦ ὑγροῦ). Ἔτσι προσδίδεται κινητικὴ ἐνέργεια ***μόνον*** εἰς τὸ ἄμεσον περιβάλλον τοῦ κινουμένου στερεοῦ. Ἀφοῦ ὅμως τὸ στρῶμα ὑγροῦ ποὺ ἐπικαλύπτει τὸ κινούμενον στερεὸν παρασύρεται ἀπὸ αὐτὸ κατὰ τὴν κίνησίν του, εἶναι εὐνόητον ὅτι ἡ ἀντίστασις ποὺ προβάλλεται εἰς τὴν κίνησιν αὐτὴν ὀφείλεται μόνον εἰς τὴν ἀντίστασιν ποὺ προβάλλεται κατὰ τὴν ὀλίσθησιν ἑνὸς στρώματος ὑγροῦ ὡς πρὸς παρακείμενόν του, δηλαδὴ εἰς τὴν ἐσωτερικὴν τριβὴν τοῦ ὑγροῦ. Ἔτσι: ***ἡ ἀντίστασις τοῦ μέσου εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς ὕλης καὶ τῆς ὑφῆς τῆς ἐπιφανείας τοῦ στερεοῦ (ὄχι ὅμως καὶ τῆς μορφῆς καὶ ἐκτάσεως αὐτῆς), καὶ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ ἰξῶδες (συντελεστὴν ἐσωτερικῆς τριβῆς τοῦ ὑγροῦ)***. Διὰ τὴν περίπτωσιν τῆς κινήσεως σφαίρας, ἀκτῖνος r, διὰ μέσου ὑγροῦ, ἰξώδους η, μὲ ταχύτητα (ὁρικὴν) v, ὄχι μεγάλην, ἡ ἀντίστασις W παρέχεται κατὰ τὸν Stokes ἀπὸ τὴν σχέσιν: $W=6\pi\eta r v$ (79)

Κατ' αὐτήν ποὺ, ὅπως εἴπαμε, ἰσχύει διὰ μικρὰς ταχύτητας, ἡ ἀντίστασις εἶναι ***ἁπλῶς*** ἀνάλογος τῆς ταχύτητος. Ἂν ἡ κινοῦσα δύναμις εἶναι τὸ βάρος B τῆς σφαίρας (καταβύθισις σφαιριδίου εἰς ἰξῶδες ὑγρόν), ἡ ὁρικὴ ταχύτης v θὰ εἶναι ἐκείνη ποὺ ἔχει τὸ σφαιρίδιον, ὅταν ἡ ἀντίστασις W τοῦ ὑγροῦ γίνῃ ἴση μὲ τὸ βάρος B ἠλαττωμένον κατὰ τὴν ἄνωσιν A ποὺ ὑφίσταται ἡ σφαῖρα εἰς τὸ ὑγρόν. Ἂν λοιπὸν εἶναι ρ ἡ πυκνότης τῆς σφαίρας καὶ ρ' ἡ τοῦ ὑγροῦ, θὰ ἔχωμεν: $W=B-A=V.\rho.g-V\rho' g=V(\rho-\rho')g={}^4/_3\pi r^3(\rho-\rho')g$ καὶ ἂν τὴν τιμὴν αὐτὴν τῆς W τὴν θέσωμεν εἰς τὴν σχέσιν (79), θὰ λάβωμεν: ${}^4/_3\pi r^3(\rho-\rho')g=6\pi\eta r v$ ὅθεν: $v={}^2/_9 r^2(\rho-\rho')g:\eta$ (80)

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν προκύπτει ὅτι ἡ ταχύτης καταβυθίσεως σφαίρας εἰς ὑγρὸν εἶναι ἀνάλογος τοῦ τετραγώνου τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογος τοῦ ἰξώδους τοῦ ρευστοῦ.

Διὰ μέσας ταχύτητας (εἰς τὸν ἀέρα θεωροῦμεν τοιαύτας τὰς μικροτέρας τῆς ταχύτητος ἤχου (340 m/s) μέχρις ὀλίγων μέτρων κατὰ δευτερόλεπτον) καὶ σώματα ***μετωπικῆς ἐπιφανείας*** F (ὡς τοιαύτην χαρακτηρίζομεν τὴν ***μεγίστην ἐγκαρσίαν***, δηλ. κάθετον πρὸς τὴν φορὰν τῆς κινήσεως, τομὴν τοῦ σώματος) εὑρίσκεται ὅτι ἡ ἀντίστασις W τοῦ μέσου παρέχεται ἀπὸ τὴν σχέσιν: $W=f.F\,\rho v^2/2$. (81)

ἤτοι : εἶναι ἀνάλογος τῆς μετωπικῆς ἐπιφανείας F καὶ τῆς δυναμικῆς πιέσεως ($^1/_2 \rho v^2$) ἢ καὶ ἀνάλογος τῆς πυκνότητος ρ καὶ τοῦ τετραγώνου τῆς ταχύτητος (v^2).

Ὁ συντελεστὴς ἀναλογίας l ἔχει τιμὴν ποὺ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν μορφὴν τοῦ σώματος. Εὑρίσκεται π.χ. ὅτι εἰς τὸν ἀέρα εἶναι : 1,4 εἰς σῶμα σχήματος ἡμισφαιρίου μὲ προσθίαν ἐπιφάνειαν τὴν κυκλικήν του βάσιν, 1,1 εἰς λεπτὴν κυκλικὴν πλάκα, 0,22 εἰς σφαῖραν, 0,056 εἰς σῶμα σχήματος καταπιπτούσης σταγόνος, 0,2 εἰς τὸ σῶμα ἀεροσκάφους κλπ. Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος W ἐκφράζεται εἰς kp, ὅταν ἡ ταχύτης v δίδεται εἰς m/s καὶ ἡ πυκνότης ρ, ἴση μὲ τὸ τὸ εἰδικὸν βάρος σ τοῦ ἀέρος διὰ τῆς ἐπιταχύνσεως τῆς βαρύτητος g, λαμβάνεται κατὰ προσέγγισιν ἴση μὲ $^1/_8$ (=1,293/9,81) kp/m^3).

Ὅταν ἡ ταχύτης αὐξάνεται πέραν ὡρισμένου δι' ἑκάστην περίπτωσιν ὁρίου, ἡ ροὴ γίνεται *τυρβώδης*. Τὸ σχ. 171 παριστάνει μίαν συνήθη περίπτωσιν τυρβώδους ροῆς, δηλαδὴ τὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν ἀποσπῶνται ἀπὸ τὸ κινούμενον στερεὸν καὶ ἀφήνονται ὄπισθεν αὐτοῦ στροβιλισμοὶ τοῦ διασχιζομένου ρευστοῦ. Ἐπειδὴ εἰς τοὺς στροβιλισμοὺς τούτους τὸ ρευστὸν κινεῖται περιστροφικῶς, εἶναι προφανὲς ὅτι ἡ πρὸς τοῦτο κινητικὴ ἐνέργεια περιστροφῆς παρέχεται εἰς τὸ διασχιζόμενον ρευστὸν ἀπὸ τὴν κινητικὴν ἐνέργειαν τοῦ στερεοῦ. Χρειάζεται συνεπῶς εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν νὰ ἐνεργῇ ἐπὶ τοῦ στερεοῦ πρόσθετος δύναμις πρὸς παραγωγὴν τοῦ ἐπὶ πλέον ἔργου ποὺ θὰ ἐμφανισθῇ ὡς ἐνέργεια τῆς κινήσεως τῶν στροβιλισμῶν.

Σχ. 171

Κατὰ συνέπειαν τοῦ ὅτι ἡ ἐνέργεια τῆς περιστροφῆς τῶν στροβιλισμῶν εἶναι ἡ πέραν ὡρισμένου ὁρίου κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ στερεοῦ πρέπει : ***Ἡ ταχύτης περιστροφῆς τῶν στροβιλισμῶν νὰ εἶναι ἀνάλογος τῆς ταχύτητος τοῦ στερεοῦ.*** Ἐξ ἄλλου, ἐπειδὴ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τῶν στροβιλισμῶν αὐξάνεται μὲ τὴν πυκνότητα τοῦ ρευστοῦ, ἡ ἀντίστασις τῆς ροῆς θὰ εἶναι ἀνάλογος τῆς πυκνότητος τοῦ ρευστοῦ καὶ τοῦ τετραγώνου τῆς ταχύτητος (βλ. ἐξίσ. 81).

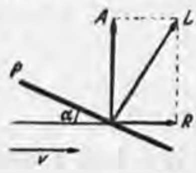
γ) ***Μορφὴ σώματος πρὸς ἐλάττωσιν τῆς ἀντιστάσεως.*** Οἱ στροβιλισμοὶ τοῦ ρευστοῦ καὶ ἡ ἀντίστασις ποὺ προβάλλεται εἰς τὴν κίνησιν ἔχουν τὴν αὐτὴν ἐκδήλωσιν εἴτε τὸ σῶμα διασχίζει μὲ ὡρισμένην ταχύτητα ἠρεμοῦν ὑγρόν, εἴτε τὸ ὑγρὸν περιρρέει μὲ τὴν αὐτὴν ταχύτητα σῶμα στερεὸν ποὺ ἠρεμεῖ. Ἡ ἐνέργεια στροβιλώσεως τοῦ γύρω ἀπὸ τὸ στερεὸν ρευστοῦ μεταβάλλεται διὰ τριβῆς ἐξ ὁλοκλήρου εἰς θερμότητα καὶ χάνεται εἰς τὸ περιβάλλον. Εἶναι συνεπῶς ἀνεπιθύμητος ὁ σχηματισμὸς στροβιλώσεως. Ἕνεκα τούτου καταβάλλεται προσπάθεια νὰ καταπνιγῇ ἡ παραγωγὴ στροβιλώσεων. Εἰς τοῦτο βοηθεῖ ἡ προσιδιάζουσα διαμόρφωσις τοῦ στερεοῦ. Ἡ σχετικὴ πειραματικὴ ἔρευνα ἔχει διαπιστώσει ὅτι ὀξεῖαι ἀκμαὶ τοῦ στερεοῦ εὐνοοῦν τὸν σχηματισμὸν στροβιλώσεων καὶ πρέπει ὡς ἐκ τούτου νὰ ἀποφεύγωνται. Ἡ καταλληλοτέρα μορφὴ ποὺ πρέπει νὰ δίδεται εἰς σῶμα προωρισμένον νὰ κινῆται μὲ τὴν μικροτέραν κατὰ τὸ δυνατὸν ἀντίστασιν τοῦ διασχιζομένου ρευστοῦ εἶναι ἡ ἰχθυοειδὴς μορφὴ ἢ ἡ μορφὴ σταγόνων βροχῆς ἢ πούρου. Τὴν μορφὴν αὐτὴν «ἀεροδυναμικὴν» τὴν βλέπομεν εἰς τὸ σκάφος ἀεροπλάνων, αὐτοκινήτων, πλοίων κλπ. ποὺ θέλομεν νὰ κινοῦνται μὲ μεγάλην ταχύτητα ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν κινητηρίων δυνάμεων κατὰ τὸ δυνατὸν μικροτέρων. Ὁ σχηματισμὸς στροβιλώσεων ὀφείλεται εἰς τὴν ἐσωτερικὴν τριβὴν τοῦ ρευστοῦ. Ἐμφανίζεται συνεπῶς ὄχι μόνον κατὰ τὴν πρόσκρουσιν τοῦ ρεύματος ἐπὶ στερεοῦ ἐμποδίου, ἀλλὰ καὶ ὅταν συναντῶνται δύο ρεύματα μὲ διαφόρους ταχύτητας, ὅπως π.χ. εἰς τὴν συμβολὴν δύο ποταμῶν. Οἱ στροβιλισμοὶ ἔχουν μίαν κάποιαν ὀκαμψίαν καὶ διὰ τοῦτο εἶναι ἐπικίνδυνοι εἰς τοὺς ἐμπίπτοντας εἰς αὐτούς.

δ) ***Ἀριθμὸς*** Reynolds. Ἡ ἀκριβὴς τιμὴ τοῦ συντελεστοῦ f ἀντιστάσεως τοῦ μέσου ἔχει μεγάλην σημασίαν διὰ τὴν διαμόρφωσιν ἀεροπλοίων, ὑποβρυχίων κλπ. Αἱ μετρήσεις ὅμως εἰς σκάφη μὲ πλῆρες τὸ κανονικόν των μέγεθος εἶναι πολὺ δαπανηρὰ καὶ διὰ τοῦτο γίνονται αἱ πειραματικαὶ ἔρευναι εἰς γεωμετρικῶς ὅμοια ὑποδείγματα μὲ πολὺ μικροτέρας διαστάσεις. Αἱ πειραματικαὶ μετρήσεις εἰς τὰ ὑποδείγματα ἀντικαθιστοῦν πλήρως τὰς εἰς τὰ ἀντίστοιχα σώματα κανονικοῦ μεγέθους, διότι εἰς γεωμετρικῶς ὅμοια σώματα ὑπὸ ὡρισμένους ὅρους καὶ τὰ ρεύματα γύρω ἀπὸ τὰ σώματα χαρακτηρίζονται ἀπὸ γεωμετρικῶς ὁμοίας γραμμὰς ροῆς. Ἡ ***μηχανική***, ὅπως τὴν λέμε, ***ὁμοιότης*** αὐτὴ ὑφίσταται πάντοτε, ὅταν αἱ θεωρούμεναι περιπτώσεις ἔχουν τὸν αὐτὸν ***ἀριθμὸν*** Reynolds. Μὲ τὸ ὄνομα αὐτὸ χαρακτηρίζομεν ἕνα καθαρὸν ἀριθμόν, Re, (*) ὁ ὁποῖος εἰς κάθε περίπτωσιν προκύπτει ἀπὸ τὸ γινόμενον τῆς ἐξεχούσης γραμμικῆς διαστάσεως μ τοῦ σώματος (συνήθως μιᾶς διαμέτρου) ἐπὶ τὴν ταχύτητα κινήσεώς του ἐν σχέσει πρὸς τὸ ρευστὸν καὶ ἐπὶ τὴν πυκνότητα $\rho(=\sigma/g)$ τοῦ ρευστοῦ, διῃρημένην διὰ τοῦ ἰξῶδους η αὐτοῦ, ἤτοι εἶναι: $Re=\mu.v.\rho/\eta=\mu\ v/\kappa$, ἂν μὲ κ παραστήσωμεν τὸ πηλίκον η/ρ, τὸ ὁποῖον ὀνομάζομεν ***κινηματικὸν ἰξῶδες*** τοῦ ρευστοῦ· (τοῦτο εἶναι διὰ τὸν ἀέρα 0,14 καὶ διὰ τὸ ὕδωρ 0,01 cm^2/s). Μὲ τὸν καθαρὸν αὐτὸν ἀριθμὸν μποροῦμε νὰ συγκρίνωμεν ἀμέσως ἐξαγόμενα πειραματικῶν μετρήσεων μὲ γεωμετρικῶς ὅμοια σώματα εἰς ἀέρα ἢ ὕδωρ ἢ ἄλλο ὑγρόν. Ἔτσι προκύπτει ἀπὸ μέτρησιν μὲ σφαῖραν διαμέτρου $d_1=1cm$ ποὺ κινεῖται εἰς ὕδωρ μὲ ταχύτητα $v_1=5cm/s$ ὁ αὐτὸς συντελεστὴς ἀντιστάσεως μὲ ἐκεῖνον ποὺ ἔχει σφαῖρα διαμέτρου $d_2=5cm$, ἡ ὁποία κινεῖται εἰς ἀέρα μὲ ταχύτητα $v_2=14cm/s$, διότι ὁ ἀριθμὸς Re εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν εἶναι (5.14/0,14) ἴσος μὲ τὸν εἰς τὴν πρώτην (1.5/0,01)

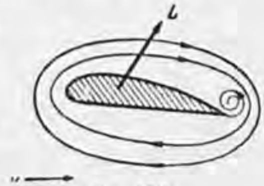
ε) ***Φαινόμενον τοῦ*** Magnus. Εἰς κύλινδρον ποὺ περιστρέφεται ἐντὸς ρεύματος περὶ ἄξονα διερχόμενον διὰ τῶν κέντρων τῶν δύο κυκλικῶν του βάσεων, παρατηροῦμεν τὴν ἐμφάνισιν δυνάμεως, ἡ ὁποία τὸν σύρει καθέτως πρὸς τὴν διεύθυνσιν τοῦ ρεύματος καὶ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἄξονος περιστροφῆς. Τὸ φαινόμενον τοῦτο, γνωστὸν μὲ τὸ ὄνομα τοῦ Magnus, ἔχει τὴν αἰτίαν του εἰς τὴν ἐσωτερικὴν τριβὴν τοῦ ρευστοῦ, ἕνεκα τῆς ὁποίας αἱ γραμμαὶ ροῆς πυκνώνονται πρὸς τὸ μέρος τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου, ὅπου ἡ περιστροφὴ ἔχει τὴν αὐτὴν φορὰν μὲ τὸ ρεῦμα καὶ ἀραιώνονται πρὸς τὸ ἐκ διαμέτρου ἀντίθετον, ὅπου ἡ φορὰ τῆς περιστροφῆς εἶναι ἀντίθετος τοῦ ρεύματος. Κατὰ συνέπειαν ἡ πίεσις εἰς τὸ ἓν μέρος τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας εἶναι ἀντιστοίχως μικροτέρα τῆς εἰς τὸ ἄλλο. Ἔτσι ὁ περιστρεφόμενος κύλινδρος ὠθεῖται πρὸς τὸ μέρος τῆς μικροτέρας πιέσεως, ἤτοι ὑφίσταται εἶδος ἀνώσεως ἀπὸ δύναμιν, τὴν ὁποίαν ὡς ἐκ τούτου καλοῦμεν ***δυναμικὴν ἄνωσιν***. Περίπτωσιν τοῦ φαινομένου Magnus ἔχομεν εἰς τὸ παιγνίδι τῆς πετοσφαίρας, ὅταν ἡ κίνησίς της γίνεται μὲ κύλισιν εἰς τὸν ἀέρα.

(*) Βλέπε: Ν. Θεοδώρου, «Ἐπιτομὴ τῆς Νεωτέρας Φυσικῆς» σελ. 28.

§ 65. Βασικαὶ ἔννοιαι τῆς ἀεροπορίας. *α) Δυναμικὴ ἄνωσις καὶ ἀντίστασις.* Τὸ ὅ,τι σώματα (τὰ ἀερόστατα) ποὺ τὸ βάρος των εἶναι μικρότερον ἀπὸ τὸ βάρος ἴσου ὄγκου ἀέρος, ἀνυψώνονται εἰς τὴν ἀτμόσφαιραν, ἀποτελεῖ συνέπειαν τῆς ἀρχῆς τοῦ Ἀρχιμήδους ποὺ ἰσχύει εἰς τὰ ἀέρια ὅπως καὶ εἰς τὰ ὑγρά. Ἡ ἀνύψωσις ὅμως τῶν ἀεροπλάνων ἔχει τὴν αἰτίαν της εἰς τὴν ἀντίστασιν ποὺ ἐνεργεῖ εἰς τὸ σῶμα κατὰ τὴν κίνησίν του εἰς τὸν ἀέρα. Ἂν εἰς ρεῦμα ἀέρος κρατήσωμεν πλάκα R (σχ. 172) ποὺ ἡ ἐπιφάνειά της κλίνει πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς ταχύτητος v τοῦ ρεύματος ὑπὸ γωνίαν α (τὴν ὁποίαν ὀνομάζομεν *γωνίαν προσβολῆς*), διαπιστώνομεν ὅτι ἡ πλὰξ ὑφίσταται τὴν ἐπίδρασιν δυνάμεως L, τὴν ὁποίαν ὀνομάζομεν *ἀεροδύναμιν*. Ἡ ἔντασις καὶ ἡ διεύθυνσις τῆς ἀεροδυνάμεως ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν γωνίαν προσβολῆς. Θεωροῦμεν τὴν δύναμιν L ἀναλελυμένην εἰς δύο συνιστώσας, τὴν μίαν A μὲ διεύθυνσιν κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω καὶ τὴν ἄλλην R μὲ φορὰν τὴν τοῦ ρεύματος. Ἡ πρώτη ἐνεργεῖ ἀντιθέτως πρὸς τὸ βάρος τῆς πλακὸς καὶ ἐπιφέρει ἄνωσιν αὐτῆς Τὴν λέμε *δυναμικὴν ἄνωσιν*. Αὐτὴ ἐνεργεῖ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς πλακός, ποὺ τὴν λέμε *φέρουσαν ἐπιφάνειαν*. Ἡ ἄλλη συνιστῶσα R σύρει τὴν φέρουσαν ἐπιφάνειαν κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ρεύματος· τὴν λέμε *δυναμικὴν ἀντίστασιν*. Ἂν ἡ φέρουσα ἐπιφάνεια εἶναι πτέρυξ ἀεροπλάνου πρέπει ἡ δυναμικὴ ἀντίστασις νὰ ἐξουδετερώνεται ἀπὸ ἀντίθετον προωστικὴν καὶ εἶναι προφανὲς ὅτι δι' εὐνοϊκωτέρους ὅρους πτήσεως πρέπει ἡ ἀνάλυσις τῆς ἀεροδυνάμεως νὰ δίδη ὅσον τὸ δυνατὸν μεγαλυτέραν συνιστῶσαν τῆς δυναμικῆς ἀνώσεως καὶ κατὰ τὸ δυνατὸν μικροτέραν τὴν τῆς ἀντιστάσεως. Τοῦτο ἐξαρτᾶται ἀπὸ κατάλληλον διαμόρφωσιν τῆς φερούσης ἐπιφανείας. Ἡ σχετικὴ πειραματικὴ ἔρευνα διαπιστώνει ὅτι ἡ πρὸς τοῦτο διαμόρφωσις εἶναι τοιαύτη, ὥστε ἡ γωνία προσβολῆς τῆς πτέρυγος (ἤτοι ἡ γωνία ποὺ σχηματίζει μὲ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον ἡ εὐθεῖα ποὺ ἑνώνει σημεῖον τοῦ μετώπου μὲ σημεῖον τῆς οὐρᾶς τῆς πτέρυγος) εἶναι περὶ τὰς 15°.



Σχ. 172



Σχ. 173

β) Στρόβιλος ἐκκινήσεως καὶ ρεῦμα ἀνυψώσεως. Ἂν κρατήσωμεν πτέρυγα ἀεροπλάνου εἰς ρεῦμα ἀέρος ἢ σύρωμεν αὐτὴν διὰ μέσου ἠρεμοῦντος ἀέρος οὕτως, ὥστε ἡ πτέρυξ νὰ διασχίζη τὸν ἀέρα μὲ σχετικὴν ταχύτητα v (σχ. 173), σχηματίζεται εἰς τὸ ὄπισθεν ἄκρον τῆς πτέρυγος στρόβιλος μὲ φορὰν περιστροφῆς ἀντίθετον τῆς τῶν δεικτῶν ὡρολογίου. Ὁ σχηματισμὸς αὐτὸς λέγεται *στρόβιλος* *ἐκκινήσεως* καὶ εἶναι μοναδικός, ἤτοι δὲν ἀκολουθεῖται ἀπὸ ἄλλον, ὅταν κατὰ τὴν προχώρησιν τῆς πτέρυγος εἰς τὸν ἀέρα ἀποσπασθῇ ἀπὸ τὸ ἄκρον αὐτῆς καὶ συμπαρασυρθῇ εἰς τὸ ρεῦμα. Κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον λαμβάνει χώραν κυκλικὴ κίνησις τοῦ ἀέρος γύρω ἀπὸ τὴν φέρουσαν πτέρυγα μὲ φορὰν περιστροφῆς ἀντίθετον τῆς τοῦ στροβίλου ἐκκινήσεως. Κατὰ συνέπειαν τούτου ἐλαττώνεται, ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 173, ἡ ταχύτης v τοῦ ρεύματος κάτωθεν τῆς πτέρυγος καὶ αὐξάνεται ἡ ἄνωθεν αὐτῆς. Ἀντιστοίχως σύμφωνα μὲ τὴν ἐξίσωσιν Bernoulli θὰ αὐξάνεται ἡ πίεσις ἐπὶ τῆς κάτω ἐπιφανείας τῆς πτέρυγος καὶ θὰ ἐλαττώνεται ἡ ἐπὶ τῆς ἄνω. Ἔτσι ἡ φέρουσα πτέρυξ πιέζεται ἐκ τῶν κάτω καὶ ἀναρροφᾶται πρὸς τὰ ἄνω, μὲ ἄλλα λόγια ὑφίσταται τὴν ἐπίδρασιν δυναμικῆς ἀνώσεως κατὰ συνέπειαν τῆς ἀεροδυνάμεως L. (βλέπε σχῆμα). Ἀλλὰ διὰ τὴν ἐμφάνισιν ἀεροδυνάμεως καὶ συνεπῶς δυναμικῆς ἀνώσεως πρέπει ἡ φέρουσα πτέρυξ νὰ κινῆται σχετικῶς πρὸς τὸν περιβάλλοντα ἀέρα μὲ ταχύτητα v. Τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὴν ἐσωτερικὴν τριβὴν τοῦ ἀέρος. Ἂν θεωρήσωμεν τὴν μετακίνησιν τῆς φερούσης πτέρυγος εἰς ἰδανικὸν ἀέριον, ἤτοι ἀέριον χωρὶς ἐσωτερικὴν τριβήν, δὲν μπορεῖ νὰ σχηματίζεται οὔτε στρόβιλος ἐκκινήσεως οὔτε ρεῦμα στροφῆς περὶ τὴν πτέρυγα, ἄρα οὔτε ἄνωσις γίνεται. Ἡ ἀνακύκλωσις ρεύματος γύρω ἀπὸ τὴν φέρουσαν πτέρυγα εἶναι συνέπεια τοῦ στροβίλου ἐκκινήσεως, διότι κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς διατηρήσεως στροφορμῆς (§ 37) πρέπει εἰς τὴν περιστροφικὴν ὁρμὴν τοῦ στροβίλου ἐκκινήσεως νὰ ἀντιτίθεται ἡ ἴση καὶ ἀντίθετος ὁρμὴ περιστροφῆς τοῦ περὶ τὴν πτέρυγα κυκλικοῦ ρεύματος.

γ) Δυνάμεις ποὺ ἐνεργοῦν εἰς τὸ ἀερόπλοιον. Εἰς τὸ ἀερόπλοιον ποὺ πετᾷ ὁριζοντίως ἐνεργοῦν τρεῖς δυνάμεις, ἤτοι τὸ βάρος του B, ἡ προωστικὴ δύναμις F τῆς ἕλικος καὶ ἡ ἀεροδύναμις L· ἡ τελευταία αὐτὴ ἀναλύεται εἰς τὴν δυναμικὴν ἄνωσιν A καὶ τὴν ἀντίστασιν W. Ὅταν ὑφίσταται ἰσορροπία, ἤτοι τὸ ἀερόπλοιον προχωρεῖ ὁριζοντίως μὲ σταθερὰν ταχύτητα v, θὰ εἶναι $A = B$ καὶ $F = W$. Διὰ τὸν καθορισμὸν τῆς ἀντιστάσεως W πρέπει νὰ προστεθῇ εἰς τὴν ἀντίστασιν W_π τῶν πτερύγων καὶ ἡ W_σ τῶν ἄλλων μερῶν τοῦ σώματος τοῦ ἀεροπλοίου. Σχετικῶς μὲ αὐτὴν ὀνομάζομεν ***ἐπιζημίαν ἐπιφάνειαν*** F_0 τὸ ἐμβαδὸν ἐπιπέδου τετραγωνικῆς πλακὸς (ὅπου, ὅπως εἴπαμε παραπάνω, ὁ συντελεστὴς ἀντιστάσεως εἰς ἀέρα εἶναι $f = 1{,}2$), εἰς τὴν ὁποίαν προβάλλεται ἀντίστασις ἴση μὲ ἐκείνην ποὺ προβάλλεται ἀπὸ τὰ ἄλλα μέρη (πλὴν τῶν πτερύγων) τοῦ σώματος τοῦ ἀεροπλοίου ποὺ δὲν παρέχουν ἄνωσιν. Ἀντιστοίχως πρὸς τὴν κατασκευὴν καὶ τὸ μέγεθος τοῦ ἀεροπλοίου ἡ F_0 ἔχει τιμὰς ἀπὸ $0{,}3\,m^2$ μέχρις $1{,}3\,m^2$. Μὲ τὴν εἰσαγωγὴν τῆς ἐννοίας F_0 θὰ εἶναι: $W_\sigma = 1{,}2 F_0 q$, ἂν μὲ q παραστήσωμεν τὴν δυναμικὴν πίεσιν $\frac{1}{2}\rho v^2$ (§ 63,α).

Ὅταν τὸ ἀερόπλοιον παύει νὰ ὑφίσταται τὴν προωστικὴν δύναμιν τῆς ἕλικος (σταματᾷ τὸν κινητῆρα του), συνεχίζει τὴν κίνησίν του μὲ διεύθυνσιν κλίνουσαν κατὰ γωνίαν φ πρὸς τὸ ἔδαφος (κάνει πτῆσιν κατολισθήσεως). Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἐνεργοῦν πλέον δύο μόνον δυνάμεις, ἤτοι τὸ βάρος B καὶ ἡ ἀεροδύναμις L. Διὰ νὰ ὑφίσταται λοιπὸν τώρα ἰσορροπία, πρέπει ἡ ἀεροδύναμις L νὰ εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος τοῦ βάρους B, ἑπομένως νὰ διευθύνεται κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω. Ἔτσι εἰς τὴν πτῆσιν κατολισθήσεως αἱ συνιστῶσαι τῆς ἀεροδυνάμεως L, ἤτοι ἡ ἄνωσις A καὶ ἡ ἀντίστασις W, πρέπει νὰ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι καὶ ἀντίθετοι πρὸς συνιστώσας τοῦ βάρους B, ἤτοι νὰ εἶναι: $A = B\,\text{συν}\varphi$ καὶ $W = B\,\eta\mu\varphi$ καὶ συνεπῶς $W/A = \varepsilon\varphi\varphi$. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ γωνία κατολισθήσεως εἶναι τόσον μικροτέρα (τὸ ἀερόπλοιον διανύει τόσον μεγαλύτερον διάστημα χωρὶς κινητῆρα), ὅσον μικρότερος εἶναι ὁ λόγος W/A.

Ὅταν τὸ ἀερόπλοιον κάνει στροφὴν (διατρέχει καμπυλόγραμμον τροχιὰν) πλὴν τοῦ βάρους του B, τῆς προωστικῆς δυνάμεως F τῆς ἕλικος καὶ τῆς ἀεροδυνάμεως L ἐνεργεῖ εἰς αὐτὸ ἐπὶ πλέον καὶ ἡ φυγόκεντρος δύναμις K. Ἡ τελευταία αὐτὴ φέρεται καθέτως πρὸς τὴν προωστικὴν δύναμιν F καὶ πρὸς τὸ βάρος B καὶ ἔχει σημεῖον ἐφαρμογῆς τὸ κ.β. τοῦ σώματος. Ἂν εἶναι R ἡ συνισταμένη τῶν B καὶ K καὶ ἡ F ἰσορροπεῖ τὴν συνιστῶσαν W τῆς ἀεροδυνάμεως, ἤτοι τὴν ἀντίστασιν, πρέπει ἡ ἄλλη συνιστῶσα τῆς ἀεροδυνάμεως, ἤτοι ἡ ἄνωσις A, νὰ ἰσορροπῇ τὴν R, ἤτοι νὰ εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος τῆς συνισταμένης τῶν B καὶ K. Πρὸς τοῦτο τὸ ἀερόπλοιον λαμβάνει τὴν ἁρμόζουσαν κλίσιν πρὸς τὴν ἀκτῖνα καμπυλότητος τῆς διατρεχομένης τροχιᾶς.

δ) Ἡ προωστικὴ δύναμις τῶν ἀεροπλάνων. Εἰς τὰ ἀεροπλάνα ἡ κίνησις πρὸς τὰ ἐμπρὸς ἐπιβάλλεται ἀπὸ τὴν ἑλκτικὴν δύναμιν ποὺ ἀσκεῖ ἡ *ἕλιξ* εἰς τὸ σκάφος. Μὲ τὴν περιστροφὴν δηλ. τῆς ἕλικος εἰς τὸν ἀέρα ἀναφαίνεται ἐπ' αὐτῆς ἀεροδύναμις, ὅπως γίνεται εἰς τὴν φέρουσαν ἐπιφάνειαν κινουμένης πτέρυγος. Εἰς τὴν ἕλικα ὅμως ἡ συνιστῶσα τῆς ἀεροδυνάμεως, ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν δυναμικὴν ἄνωσιν τῆς πτέρυγος, ἔχει διεύθυνσιν παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα περιστροφῆς της καὶ συνεπῶς σύρει τὸ ἀεροπλάνον κατὰ τὴν διεύθυνσιν αὐτοῦ, ἤτοι πρὸς τὰ ἐμπρός. (Ἡ ἕλιξ ἐφηρμόσθη κατὰ πρῶτον εἰς τὰ πλοῖα· τὴν ἐπινόησε τὸ 1827 ὁ Ressel, ἀλλ' ἐτέθη εἰς ἐφαρμογὴν μετὰ τὸ 1833 ποὺ παρεχωρήθη εἰς χρηματοδότας τῆς κατασκευῆς της). Τελείως διάφορος εἶναι ἡ ἀρχὴ ἐπὶ τῆς ὁποίας βασίζεται ἡ προώθησις τῶν *ἀεριοπροωθουμένων* καὶ τῶν *πυραύλων*. Εἰς αὐτὰ ἡ προώθησις προέρχεται ἀπὸ τὴν ἀντίδρασιν εἰς ἀκτῖνα τῶν ἀερίων τῶν καυσίμων του ὑλικῶν ποὺ ἐκφεύγει μὲ μεγάλην ταχύτητα διὰ μέσου αὐλοῦ τοῦ σκάφους (βλ. § 69, ε)· οὐσιώδης διαφορὰ μεταξὺ τῶν δύο τελευταίων τύπων ἀεροπλοίων εἶναι τὸ ὅτι εἰς τὰ ἀεριοπροωθούμενα τὸ πρὸς καῦσιν τοῦ κινητηρίου ὑλικοῦ *ἀναγκαῖον ὀξυγόνον* λαμβάνεται ἀπὸ τὸν ἀτμοσφαιρικὸν ἀέρα, ἐνῶ εἰς τὸν πύραυλον πρέπει νὰ εἶναι ἀποθηκευμένον εἰς τὸ σκάφος. Ἡ οὐσιώδης αὐτὴ διαφορὰ ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα ὅτι τὰ ἀεριοπροωθούμενα μποροῦν νὰ προχωροῦν μόνον ἐντὸς τῆς ἀτμοσφαίρας (ὅπως καὶ τὰ ἀεροπλάνα), ἐνῶ οἱ πύραυλοι μποροῦν νὰ προχωρήσουν καὶ ἔξω τῆς ἀτμοσφαίρας (διαστημόπλοια). Τὰ ἀεριοπροωθούμενα καὶ οἱ πύραυλοι εἶναι κατάλληλα μέσα ἐπικοινωνίας μόνον μετὰ τὴν ἀνάπτυξιν ὑπερηχητικῶν ταχυτήτων· συνεπῶς δὲν μποροῦν νὰ ἀντικαταστήσουν τὰ ἀεροπλάνα εἰς ταξείδια παρὰ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς Γῆς.

Προβλήματα

147. Εἰς ὑδροστρόβιλον Segner (βλ. σχ. 160) μὲ 6 ὁριζοντίους σωλῆνας ἐκροῆς τὸ ὕδωρ εἰς τὸν περιστρεφόμενον κύλινδρον φθάνει εἰς ὕψος 1,5 m ὑπὲρ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον τῶν σωλήνων ἐκροῆς. Ἂν τὸ ἄνοιγμα ἐκροῆς ἑκάστου σωλῆνος ἀπέχῃ 0,5 m ἀπὸ τὸν ἄξονα περιστροφῆς καὶ ἡ ἐγκαρσία τομὴ ἑκάστης φλεβὸς ἐκροῆς εἶναι 0,8 cm^2, πόση εἶναι ἡ ροπὴ περιστροφῆς ποὺ ἐνεργεῖ ἐπὶ τοῦ στροβίλου; (Ἀπ. $6 \cdot 1{,}5 \cdot 1000 \cdot 0{,}00008 \cdot 0{,}5 = 0{,}36$ mkg*).

148. Μὲ ποίαν ταχύτητα ἐκρέει ὕδωρ ἀπὸ ὀπὴν ἀνοίγματος 3 cm^2, ἂν εἰς 1 h ἐκχύνωνται ἀπ' αὐτὴν 720 l ὕδατος καὶ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ contractio venae εἶναι 0,62 του ἀνοίγματος τῆς ὀπῆς ; ('Απ. $0{,}72 : 0{,}62 \cdot 0{,}0003 \cdot 3600 = 1{,}075$ m/s).

149. Πόση εἶναι ἡ ἔντασις I καὶ πόση ἡ ταχύτης v ρεύματος εἰς ὁριζόντιον σωλῆνα τομῆς 1,8 cm^2 ἀπὸ τὸν ὁποῖον ἐκρέει καθ' ὥραν ὕδωρ 900 l καὶ ἀπὸ ποῖον ὕψος πρέπει νὰ φθάνη εἰς τὸ ἄνοιγμα ἐκροῆς τὸ ὕδωρ τοῦτο ; ('Απ. $I = 900 : 3600 = 0{,}25$ l/s, $v = 250 : 1{,}8$ cm/s καὶ $h = v^2 : 2g$).

150. Εἰς πόσον χρόνον θὰ κενωθῇ κυλινδρικὸν δοχεῖον, τομῆς $f = 0{,}06 m^2$, ἀπὸ τὸ ὕδωρ ποὺ γεμίζει τὸ δοχεῖον μέχρις ὕψους $h = 1{,}3$m, ἂν εἰς τὸν πυθμένα του ἀνοίξωμεν ὀπὴν ἐπιφανείας $q = 10 cm^2$, ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἐκβάλλει φλὲψ μὲ συστολὴν 0,62 ; ('Απ. $t = f \cdot h : 0{,}62 q \cdot \bar{v} = f \cdot h : 0{,}62 q \sqrt{2gh}/2$).

151. Δοχεῖον Mariotte, (ἤτοι φιάλη κυλινδρική, ἡ ὁποία ἔχει παρὰ τὸν πυθμένα της ὀπὴν ἐκροῆς καὶ πωματίζεται μὲ διάτρητον πῶμα διὰ μέσου τοῦ ὁποίου διέρχεται ἀνοικτὸς σωλὴν ποὺ μπορεῖ νὰ ἀνασύρεται ἢ εἰσωθῆται οὕτως, ὥστε τὸ ἄκρον του ἐντὸς τῆς φιάλης νὰ εὑρίσκεται ὅσον θέλομεν ὑψηλότερον ἀπὸ τὴν ὀπὴν ἐκροῆς), περιέχει 10 l ὕδατος ποὺ γεμίζει τὸ δοχεῖον μέχρις ὕψους 30 cm ἀπὸ τὴν ὀπὴν ἐκροῆς. Ἂν τὸ ἄκρον τοῦ σωλῆνος εἰς τὸ δοχεῖον εὑρίσκεται 6 cm ὑψηλότερον τῆς ὀπῆς ἐκροῆς, ποία θὰ εἶναι ἡ μέχρις ὡρισμένης στάθμης (ποίας ;) τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας σταθερὰ (διατί ;) ταχύτης ἐκροῆς τοῦ ὑγροῦ καὶ μετὰ πόσον χρόνον θὰ κενωθῇ τὸ δοχεῖον, ἂν ἡ ἐγκαρσία τομὴ τῆς φλεβὸς ἐκροῆς εἶναι 0,7 cm^2 ('Απ. Κατ' ἐφαρμογὴν τῆς ἐξισώσεως Bernoulli, τὸ μὲν εἰς τὸ ἄκρον τοῦ σωλῆνος, τὸ δὲ εἰς τὴν ὀπὴν προκύπτει : $v = \sqrt{2 \cdot 981 \cdot 6}$ cm/s καὶ $t = 8000 : 0{,}7\sqrt{2 \cdot 981 \cdot 6} + 2000 : 0{,}7(\sqrt{2 \cdot 981 \cdot 6}/2)$sec]

152. Ἐξαεριστὴρ ἔχει διάμετρον 52 mm καὶ παροχὴν 5,4m^3 κατὰ πρωτόλεπτον. Μὲ ποίαν ταχύτητα ἐκφεύγει ὁ ἀὴρ ἀπὸ τὸ ἄνοιγμα τοῦ ἀεριστῆρος ; ('Απ. $5{,}4/60 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}26^2$ m/s).

153. Εἰς ὑδροκινητῆρας, ἤτοι μηχανὰς διαφόρων τύπων (ὑδραυλικοὺς τροχούς, ὑδροστροβίλους), ὅπου διὰ καταλλήλων μηχανολογικῶν συναρμολογήσεων χρησιμοποιεῖται ἡ ἐνέργεια προσρέοντος ὕδατος, τὸ ὕδωρ προσκρούει ἐπὶ τῶν πτερυγίων στρεπτοῦ τροχοῦ καὶ παρέχει ἐκεῖ τὴν ἐνέργειαν ποὺ ἐγκλείει, Ποία θὰ εἶναι κατὰ ταῦτα ἡ ἰσχὺς L ὑδροκινητῆρος, εἰς τὸν ὁποῖον προσπίπτει κατὰ δευτερόλεπτον ποσὸν ὕδατος 300 kg*, ποὺ καταπίπτει ἀπὸ ὕψος 7,5 m ; ('Απ. 2250 mkg*/sec ἢ 30 ἵπ.).

154. Μὲ ποίαν ταχύτητα θὰ εἰσρέῃ τὸ εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα ὕδωρ εἰς τὸν ὀχετὸν τοῦ ὑδροκινητῆρος, ἂν ἐκρέῃ ἀπὸ αὐτὸν μὲ ταχύτητα 2 m/s, προκειμένου νὰ ἔχῃ ὁ κινητὴρ τὴν αὐτὴν ἰσχύν ; ('Απ. $2250 = (300\, v^2 : 2 \cdot 981) - (300 \cdot 2^2 : 2 \cdot 9{,}81)$ ὅθεν λαμβάνεται ἡ v εἰς m/s).

155. Πρὸς καθορισμὸν τῆς ταχύτητος ἐκροῆς ἀερίου βάσει τοῦ τύπου (74) τὸ h παρέχεται ἀπὸ τὸ ὕψος στήλης ὑγροῦ ποὺ ἰσορροπεῖ τὴν πίεσιν τοῦ ἀερίου πολ]σμένον ἐπὶ τὸν λόγον τῆς πυκνότητος τοῦ ὑγροῦ πρὸς τὴν πυκνότητα τοῦ ἀερίου. Πόση ἐπομένως εἶναι ἡ ταχύτης μὲ τὴν ὁποίαν εἰσρέει ἀτμοσφαιρικὸς ἀὴρ εἰς κενὸν χῶρον ; ('Απ. $\sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}76 \cdot 13{,}6/0{,}001293}$ m/s).

156. Μὲ ποίαν ταχύτητα ἐκφεύγει εἰς κανονικὴν ἀτμόσφαιραν ἀὴρ κλεισμένος εἰς δοχεῖον ὑπὸ πίεσιν 1,5 Atm ; ('Απ. $\sqrt{2 \cdot 981 \cdot 13{,}6 \cdot 76 : 0{,}001293 \cdot 1{,}5}$ cm/sec).

157. Μὲ ποίαν ταχύτητα φθάνει εἰς τὸ ἔδαφος ἀλεξίπτωτον μὲ συνολικὸν βάρος 100 kg*, ἂν ἡ μετωπικὴ ἐπιφάνεια του εἶναι 20 m^2 καὶ ὁ συντελεστὴς ἀντιστάσεως εἶναι $f = 1{,}4$; ('Απ. $\sqrt{2.100.9{,}81/1{,}4.20.1{,}293}$ m/s).

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

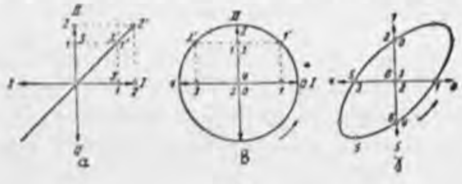
ΑΚΟΥΣΤΙΚΗ

Εἰς τὸ μέρος τοῦτο ἐξετάζονται φαινόμενα ποὺ ἀνάγονται εἰς διαταράξεις τοῦ περιβάλλοντος, αἱ ὁποῖαι διεγείρουν τὸ αἰσθητήριον ὄργανον τῆς ἀκοῆς· Ἀλλὰ διὰ τὴν ἑρμηνείαν τῶν ἀκουστικῶν φαινομένων καὶ πέραν τούτων μεγάλου πλήθους ὀπτικῶν, ἠλεκτρικῶν καὶ ἄλλων εἶναι ἀπαραίτητος ἡ σπουδὴ τῶν ταλαντώσεων, καθόσον τὰ φαινόμενα αὐτὰ ὀφείλονται εἰς τοιούτου εἴδους διαταράξεις. Θὰ διαπραγματευθῶμεν ἐδῶ τὰς μηχανικάς, δηλαδὴ ἐλαστικὰς ταλαντώσεις στερεῶν, ὑγρῶν ἢ ἀερίων σωμάτων καὶ ἐπειδὴ αἱ ταλαντώσεις αὗται κατ' ἀρκετὰ ἐκτεταμένην περιοχὴν συχνοτήτων διεγείρουν ἀκουστικὰ αἰσθήματα εἶναι φυσικὸν νὰ ὑπάγεται εἰς τὸ μέρος τοῦτο καὶ ἡ ἐξέτασις αὐτῶν. Ἔτσι θὰ ἐξετασθοῦν ἐδῶ αἱ ταλαντώσεις καὶ εἰδικώτερον τὰ ἀκουστικὰ φαινόμενα.

XI. Ταλαντώσεις καὶ Κυμάνσεις.

§ 66. Σύνθεσις ταλαντώσεων. α) ***Ταλαντώσεις κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας***. Ἡ ἐξετασθεῖσα εἰς τὴν § 31,γ ἁπλῆ ἁρμονικὴ κίνησις εἶναι ἡ ἁπλουστάτη μορφὴ ταλαντώσεως. Θὰ ἐξετάσωμεν τώρα περιπλοκωτέρας ταλαντώσεις ποὺ προέρχονται ἀπὸ τὴν σύνθεσιν περισσοτέρων ἁπλῶν. Θεωροῦμεν πρὸς τοῦτο καὶ πάλιν τὴν κίνησιν ἐκκρεμοῦς. Γενικὰ ἡ αἰώρησις ἐκκρεμοῦς μπορεῖ νὰ διαγράφῃ περίπλοκον τροχιάν. Εἰς τὴν ξεχωριστὴν περίπτωσιν ποὺ ἡ ταλάντωσις γίνεται ἐπὶ μιᾶς μόνον διευθύνσεως (ἢ ἑνὸς ἐπιπέδου), λέμε ὅτι τὸ σῶμα ἐκτελεῖ ***γραμμικῶς πεπολωμένην*** ταλάντωσιν. Ἂν τὸ σῶμα ἐκτελῇ συγχρόνως περισσοτέρας ἁπλᾶς ταλαντώσεις, προκύπτει μία συνισταμένη ταλάντωσις, ἡ ὁποία καθορίζεται σύμφωνα μὲ τὸν κανόνα τοῦ παραλληλογράμμου (§ 9,β), δηλ. μὲ τὸ ἀνυσματικὸν ἄθροισμα τῶν ἐπισωρευομένων κινήσεων (ἀρχὴ τῆς ἐπισωρεύσεως κινήσεων).

Ἂν ἐπιβάλωμεν εἰς σῶμα νὰ ἐκτελῇ συγχρόνως δύο καθέτους πρὸς ἀλλήλας γραμμικῶς πεπολωμένας ταλαντώσεις τοῦ αὐτοῦ πλάτους καὶ τῆς αὐτῆς συχνότητος (τοῦτο συμβαίνει π.χ. ὅταν εἰς ἐπίμηκες ἔλασμα, στερεωμένον κατακορύφως εἰς τὸ ἓν ἄκρον του (βλ. σχ. 70), προκαλέσωμεν ὠθισμὸν κατὰ τρόπον, ὥστε νὰ ταλαντεύεται τοῦτο συγχρόνως τόσον κατὰ τὴν διεύθυνσιν ἐμπρός—ὀπίσω, ὅσον καὶ κατὰ τὴν δεξιὰ—ἀριστερὰ) τότε κάθε σημεῖον τοῦ σώματος (σφαιρίδιον προσκεκολλημένον εἰς τὸ ἐλεύθερον ἄκρον τῆς ράβδου) διαγράφει γενικῶς ἐλλειπτικὴν τροχιὰν (σχ. 174). Ἡ μορφὴ τῆς ἐλλείψεως ποὺ διαγράφει ὁ ταλαντωτὴς ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὰ πλάτη καὶ ἀπὸ τὴν ***διαφορὰν φάσεως*** ποὺ ὑπάρχει μεταξὺ τῶν δύο ταλαντώσεων. Διαφορὰν φάσεως θεωροῦμεν τὴν διαφορὰν χρόνου ποὺ ἐμφανίζει ἡ μὲ τὴν αὐτὴν φορὰν διέλευσις τοῦ ταλαντωτοῦ διὰ τῶν θέσεων ἠρεμίας κατὰ τὰς δύο ἁπλᾶς ταλαντώσεις. Ἡ διαφορὰ φάσεως ἐκφράζεται μὲ κλάσμα τῆς περιόδου ἢ μὲ μέτρον γωνίας. Ἂν π χ. δύο ταλαντώσεις γίνωνται συνεχῶς μὲ τὴν αὐτὴν φορὰν καὶ ἑπομένως διέρχωνται ταυτοχρόνως διὰ τῶν θέσεών των ἠρεμίας ὡς καὶ τῶν θέσεων τῶν σημείων ἀναστροφῆς, ἡ διαφορὰ φάσεως αὐτῶν εἶναι 0. Δύο ταλαντωταὶ ποὺ ἔχουν πάντοτε ἀντιθέτους φορὰς κατὰ τὴν διέλευσιν των διὰ τῶν θέσεων ἠρεμίας καὶ φθάνουν ταυτοχρόνως εἰς τὰ ἀντίθετα σημεῖα ἀναστροφῆς, θὰ ἔχουν διαφορὰν φάσεως π ἢ 180° ἢ T/2.



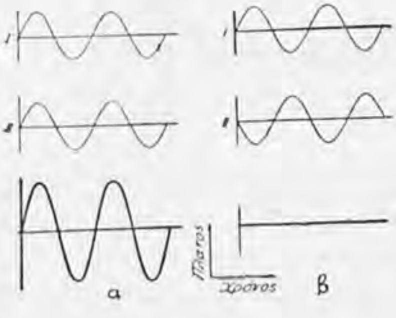
α β γ

Σχ. 174

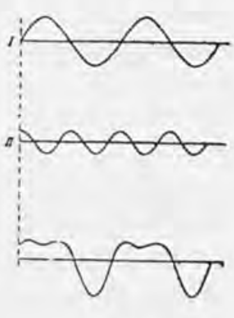
Εἰς τὸ σχῆμα 174α οἱ δύο ταλαντωταὶ I καὶ II περνοῦν συγχρόνως διὰ τῆς θέσεως ἠρεμίας 0 καὶ φθάνουν ἕκαστος μετὰ 1/8 τῆς περιόδου εἰς τὸ ἀντίστοιχον σημεῖον 1 τῆς τροχιᾶς του, μετὰ 2T/8 εἰς τὸ 2, μετὰ 3T/8 εἰς τὸ 3 κ.ο.κ. Αἱ δύο αὗται ταλαντώσεις ἔχουν διαφορὰν φάσεως 0 καὶ ὅπως φαίνεται ἐκ τοῦ σχήματος ἡ συνισταμένη αὐτῶν διέρχεται ἀντιστοίχως διὰ τῶν σημείων 0, 1′, 2′, 3′,... καὶ εἶναι μία εὐθύγραμμος ταλάντωσις. Ἂν αἱ δύο ταλαντώσεις ἔχουν διαφορὰν φάσεως π/2 (σχ. 174β), τότε τὴν στιγμὴν ποὺ ἡ ταλάντωσις I ἔχει φθάσει εἰς τὸ σημεῖον ἀναστροφῆς 0, ἡ II μόλις τότε διέρχεται διὰ τοῦ σημείου ἠρεμίας 0. μετὰ T/8 ἡ I εὑρίσκεται εἰς τὸ σημεῖον 1 τῆς ὁριζοντίας διαμέτρου ποὺ παριστάνει τὴν τροχιάν της καὶ ἡ II εἰς τὸ 1 τῆς κατακορύφου διαμέτρου. Μετὰ 2T/8 ἑκάστη τῶν ταλαντώσεων φθάνει εἰς τὴν θέσιν 2 τῆς τροχιᾶς της, ἡ ὁποία διὰ μὲν τὴν ταλάντωσιν II εἶναι σημεῖον ἀναστροφῆς διὰ δὲ τὴν I σημεῖον τῆς θέσεως ἰσορροπίας. Ἡ συνισταμένη κίνησις, ὅπως φαίνεται ἐκ τῆς γραμμῆς ποὺ συνδέει τὰ σημεῖα 1′, 2,3′,....., εἶναι κυκλική, καὶ συνεπῶς εἰς τὴν θεωρουμένην περίπτωσιν ἔχομεν κυκλικὴν ταλάντωσιν. Τέλος εἰς τὴν περίπτωσιν ποὺ αἱ συντιθέμεναι ταλαντώσεις ἔχουν τυχοῦσαν διαφορὰν φάσεως (μεταξὺ 0 καὶ π/2) προκύπτει ἐλλειπτικὴ ταλάντωσις, ἡ μορφὴ τῆς ὁποίας πλησιάζει πρὸς τὴν κυκλικὴν τόσον περισσότερον, ὅσον περισσότερον ἡ διαφορὰ φάσεως πλησιάζει πρὸς π/2. Ἔτσι ἡ ἐλλειπτικὴ ταλάντωσις τοῦ σχ. 174γ ἀντιστοιχεῖ εἰς συνισταμένην δύο ἁπλῶν ταλαντώσεων ποὺ ἔχουν διαφορὰν φάσεως π/4 ἢ T/8.

Κατ' ἀντιστροφὴν εἶναι δυνατὸν ἑκάστην τῶν ἀνωτέρω ταλαντώσεων νὰ τὴν θεωρήσωμεν ἀναλελυμένην εἰς δύο ἐπ' ἀλλήλας καθέτους ἁπλᾶς ταλαντώσεις, τῶν ὁποίων τὰς διευθύνσεις μποροῦμε νὰ λάβωμεν κατὰ βούλησιν. Εἰς τὴν ἐλλειπτικὴν π.χ. ταλάντωσιν μποροῦμε νὰ λάβωμεν ὡς συνιστώσας ταλαντώσεις τὰς κατὰ τὰς διευθύνσεις τῶν δύο ἀξόνων της, ἀρκεῖ νὰ ἔχουν διαφορὰν φάσεως μεταξὺ 0 καὶ π/2 ἢ ἀκόμη καὶ π/2, ἂν τὰ πλάτη τῶν συνιστωσῶν εἶναι διάφορα.

β) Ταλαντώσεις τῆς αὐτῆς διευθύνσεως Συμβολή. Εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν αἱ συνιστῶσαι ταλαντώσεις ἔχουν τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν, ἡ συνισταμένη των προκύπτει δι' ἁπλῆς ἀλγεβρικῆς προσθέσεως τῶν τεταγμένων τῶν συνιστωσῶν. Ἔτσι ἂν δύο ἁπλαῖ ταλαντώσεις ἔχουν τὴν αὐτὴν συχνότητα καὶ τὸ αὐτὸ πλάτος, ἡ προκύπτουσα ἐκ τῆς συνθέσεώς των ταλάντωσις θὰ εἶναι καὶ αὐτὴ τῆς αὐτῆς συχνότητος ἀλλὰ διπλασίου πλάτους, ἂν δὲν ὑπάρχῃ διαφορὰ φάσεως μεταξὺ τῶν συνιστωσῶν (σχ. 175α)· ἂν ὅμως αἱ συντιθέμεναι ταλαντώσεις ἔχουν διαφορὰν φάσεως π ἢ 180° (σχ. 175 β), θὰ ἀναιροῦνται ἀμοιβαίως, ἤτοι ἡ μία θὰ ἀποσβύνῃ τὴν ἄλλην.



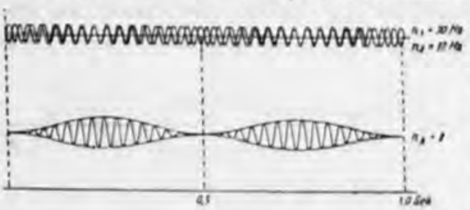
Σχ. 175


Σχ. 176

Τὸ φαινόμενον τῆς ἐπισωρεύσεως ταλαντώσεων τῆς αὐτῆς διευθύνσεως τὸ ὀνομάζομεν ***συμβολήν***. Ἡ ἐπισώρευσις δύο ταλαντώσεων I καὶ II (σχ. 176) ποὺ ἔχουν διαφόρους συχνότητας καὶ διάφορα πλάτη παρέχει μορφὴν ταλαντώσεως πολύπλοκον, ἡ ὁποία ἐξαρτᾶται πολὺ καὶ ἀπὸ τὴν διαφορὰν φάσεως.

γ) ***Ἁρμονικὴ ἀνάλυσις***. Διὰ τῆς ἐπιπροσθήκης καταλλήλου ἐπιλογῆς περισσοτέρων ἡμιτονοειδῶν ταλαντώσεων μποροῦμε νὰ λάβωμεν ταλαντώσεις ὁποιασδήποτε θέλομεν μορφῆς. Ἕνεκα τούτου ἀντιστρόφως μποροῦμε νὰ θεωρήσωμεν κάθε ὁσονδήποτε πολύπλοκον ταλάντωσιν ὡς μίαν ἐπιπροσθήκην σειρᾶς ἡμιτονοειδῶν ταλαντώσεων· τὴν ἀνάλυσιν αὐτὴν μιᾶς συνθέτου ταλαντώσεως τὴν λέμε ***ἁρμονικὴν ἀνάλυσιν*** αὐτῆς. Κατ' αὐτὴν χαρακτηρίζομεν τὴν συνιστῶσαν ταλάντωσιν ποὺ ἔχει τὴν χαμηλοτέραν συχνότητα ὡς τὴν ***βασικὴν*** ἢ ***θεμελιώδη*** ταλάντωσιν (ἀκουστικῶς: ***θεμελιώδη τόνον***). Αἱ συχνότητες ὅλων τῶν ἄλλων συνιστωσῶν εἶναι ἀκέραια πολλαπλάσια τῆς συχνότητος τῆς θεμελιώδους ταλαντώσεως, ἡ ὁποία παρέχεται ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν περιόδων τοῦ ἀναλυομένου διαμορφώματος. Αἱ ταλαντώσεις τῶν ὑψηλοτέρων συχνοτήτων χαρακτηρίζονται ὡς ***ἀνώτεροι ἁρμονικοὶ τοῦ θεμελιώδους***.

δ) ***Διακροτήματα***. Ἂν θεωρήσωμεν τὴν συμβολὴν δύο ταλαντώσεων τοῦ αὐτοῦ πλάτους καὶ διαφόρων συχνοτήτων, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ προκύπτουσα ταλάντωσις θὰ παρίσταται ὑπὸ καμπύλης μὲ κανονικῶς κυμαινόμενον πλάτος, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν ***καμπύλην διακροτήματος***. Ἡ συχνότης τῆς διακυμάνσεως τοῦ συνισταμένου πλάτους ἢ ἡ συχνότης τοῦ διακροτήματος εἶναι ἴση μὲ τὴν διαφορὰν τῶν συμβαλλουσῶν ταλαντώσεων. Ἂν π.χ. ἐπιπροσθέσωμεν ταλάντωσιν συχνότητος 30 Hz εἰς τοιαύτην τῶν 32 Hz (σχ. 177), τὸ πλάτος τῆς συνισταμένης ταλαντώσεως θὰ παρουσιάζῃ καθ' ἕκαστον δευτερόλεπτον (32—30=) 2 μέγιστα καὶ 2 ἐλάχιστα.Ἔτσι ἂν ἀφήσωμεν νὰ



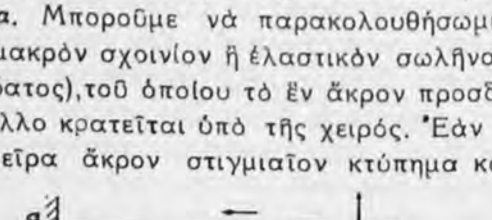
Σχ. 177

συμβάλλουν οἱ τόνοι (ἁπλοῖ ἦχοι) δύο διαπασῶν ποὺ διαφέρουν πολὺ ὀλίγον εἰς τὴν συχνότητα τῆς ταλαντώσεως, θὰ ἀκούσωμεν μίαν περιοδικὴν ***διόγκωσιν*** καὶ ***ἐξασθένισιν*** τοῦ συνισταμένου ἦχου.

§ 67. Κυμάνσεις. α) ***Μηχανισμὸς τῆς παραγωγῆς κύματος.*** Εἰς ἐλαστικὸν σῶμα τὰ ἐλάχιστα σωματίδια (μόρια ἢ ἄτομα) συγκρατοῦνται δι' ἠλεκτρικῶν δυνάμεων ὡς δι' ἐλατηρίων (βλ. σχ. 95) εἰς ὡρισμένας θέσεις ἰσορροπίας. Κάθε ἄτομον λοιπὸν παριστάνει στοιχειῶδες ἐκκρεμὲς μὲ χαρακτηριστικὴν δι' αὐτὸ συχνότητα ταλαντώσεως.

Ἐὰν ἀναγκασθῇ ἓν σωματίδιον νὰ ἐκτελέσῃ ταλάντωσιν περὶ τὴν θέσιν τῆς ἠρεμίας του θὰ προκαλέσῃ διαταραχὴν εἰς τὰ γειτονικά του σωματίδια. Ἕνεκα τούτου μεταπίπτουν καὶ αὐτά, τὸ ἓν μετὰ τὸ ἄλλο, εἰς ταλάντωσιν. Ἔτσι μεταδίδεται ἡ ταλάντωσις εἰς τὸ ἐλαστικὸν μέσον. Ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν μετάδοσίν της κατὰ μίαν ὡρισμένην διεύθυνσιν, παρατηροῦμεν ὅτι ἕκαστον νέον σωματίδιον ἀρχίζει τὴν ταλάντωσίν του ὀλίγον ἀργότερον ἀπὸ τὸ ἀμέσως πρὸ αὐτοῦ. Ἔτσι τὸ ἐλαστικὸν μέσον (εἰς ἓν σημεῖον τοῦ ὁποίου ἐπιβάλλεται ἐκτροπὴ ἀπὸ τὴν θέσιν ἠρεμίας του) παρουσιάζει κατά τινα στιγμὴν διαμόρφωσιν, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν ***κύμανσιν τοῦ μέσου.***

β) ***Ἐγκάρσια κύματα.*** Μποροῦμε νὰ παρακολουθήσωμεν τὴν ἀνάπτυξιν κύματος εἰς μακρὸν σχοινίον ἢ ἐλαστικὸν σωλῆνα (ἀκόμη καλύτερον: πλήρη ὕδατος),τοῦ ὁποίου τὸ ἓν ἄκρον προσδένεται ἐπὶ στηρίγματος καὶ τὸ ἄλλο κρατεῖται ὑπὸ τῆς χειρός. Ἐὰν ἐπιφέρωμεν εἰς τὸ πρὸς τὴν χεῖρα ἄκρον στιγμιαῖον κτύπημα καθέτως πρὸς τὴν διεύθυνσιν τοῦ σχοινίου (σχ. 178), θὰ παρατηρήσωμεν νὰ μεταδίδεται ἡ ἐπενεχθεῖσα διατάραξις κατὰ μῆκος τοῦ σχοινίου πρὸς τὸ ἄλλο ἄκρον του μὲ ὡρισμένην ταχύτητα.Ἐπὶ τῆς



Σχ. 178

πεπερασμένης αὐτῆς ταχύτητος τῆς μεταδόσεως τῆς διαταράξεως στηρίζεται ἡ δυνατότης τῆς παραγωγῆς προχωρούντων ἐλαστικῶν κυμάτων· ἂν ἡ ἐπενεχθεῖσα εἰς τὸ ἓν ἄκρον διατάραξις διεδίδετο ἀκαριαίως, τὸ σχοινίον θὰ ἐξετρέπετο κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ κτυπήματος ἑνιαίως ὡς μία ἄκαμπτος στερεὰ ράβδος.

Ἂν ἐπιβάλωμεν ταλάντωσιν εἰς τὸ ἄκρον ποὺ κρατῶμεν εἰς τὴν χεῖρα μας, μετακινοῦντες αὐτὸ ρυθμικῶς ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω καὶ τανάπαλιν, θὰ παρατηρήσωμεν νὰ μεταδίδεται ἡ ταλάντωσις διαδοχικῶς εἰς τὰ ὑπόλοιπα μέρη τοῦ σχοινίου πρὸς τὸ ἄλλο ἄκρον του. Ἡ ταλάντωσις εἰς τὰ καθέκαστα σημεῖα τοῦ σχοινίου ἀρχίζει τόσον βραδύτερον, ὅσον περισσότερον ἀπέχουν ἀπὸ ἐκεῖνο ποὺ τὴν ὑπέστη ἀρχικῶς. Ἔτσι προκύπτει ἡ μορφὴ προχωροῦντος συρμοῦ κυμάτων, τὰ ὁποῖα ὀνομάζομεν ***ἐγκάρσια***, ἐφόσον αἱ ταλαντώσεις γίνονται καθέτως πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς μεταδόσεώς των.

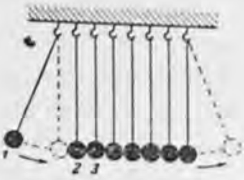
γ) ***Ταχύτης διαδόσεως κύματος.*** Ὅταν τὸ σημεῖον A_0 ποὺ ὑπεβλήθη ἀρχικῶς εἰς ταλάντωσιν ἔχῃ συμπληρώσει ἕνα πλήρη παλμόν, ἡ διατάραξις ἔχει φθάσει εἰς τὸ A_1. Εἰς τὸ σχ. 178β τὸ A_0 ἔχει συμπληρώσει τρεῖς πλήρεις ταλαντώσεις καὶ ἡ διατάραξις ἔχει φθάσει εἰς τὸ A_3. ***Τὴν ἀπόστασιν*** $A_0A_1 = A_1A_2 = A_2A_3 \ldots$ ***μεταξὺ δύο ἀμέσως διαδοχικῶν σημείων ποὺ ἔχουν τὴν αὐτὴν φάσιν κινήσεως***, δηλ. διέρχονται ταυτοχρόνως διὰ τῶν σημείων ἠρεμίας των μὲ τὴν αὐτὴν φορὰν τῆς κινήσεως, ***τὴν λέμε μῆκος κύματος*** λ. Τὸ μῆκος κύματος εἶναι λοιπὸν ἴσον πρὸς τὴν ἀπόστασιν μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ἐξάρσεων τοῦ κύματος—***κυματοβουνῶν***—ἢ δύο διαδοχικῶν ***κυματοκοιλάδων***. Ὁ χρόνος T ποὺ χρειάζεται διὰ τὴν συμπλήρωσιν μιᾶς πλήρους ταλαντώσεως ἢ διὰ τὴν προχώρησιν τοῦ κύματος κατὰ ἓν μῆκος του καλεῖται ***διάρκεια τῆς ταλαντώσεως ἢ περίοδος***. Ἂν εἶναι c ἡ ταχύτης διαδόσεως τοῦ κύματος, τότε θὰ εἶναι: $\lambda = cT$ ἢ $c = \lambda/T$ (83)
Καὶ ἂν ν εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ταλαντώσεων κατὰ δευτερόλεπτον ἢ ὁ ἀριθμὸς τῶν κυμάτων ποὺ περιέχονται εἰς τὸ κατὰ δευτερόλεπτον διάστημα τῆς ἐξαπλώσεως τοῦ κύματος, μὲ μίαν λέξιν: ***ἡ συχνότης***, θὰ εἶναι: $\nu = 1/T$ ἢ $T = 1/\nu$ καὶ συνεπῶς: $c = \nu\lambda$ (83′)

Παρακολουθοῦντες τὴν διάδοσιν τοῦ κύματος κατὰ μῆκος τοῦ σχοινίου, ἔχομεν τὴν ἐντύπωσιν ὅτι τοῦτο προχωρεῖ ὡς ὅλον ὀφιοειδῶς. Ἡ παρατήρησις αὐτὴ δεικνύει ὅτι κατὰ τὴν διάδοσιν τοῦ κύματος δὲν μετακινεῖται ὕλη, ἀλλὰ μόνον ἡ ἐνέργεια τῆς ταλαντώσεως.

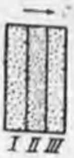
δ) ***Ἐξίσωσις κύματος.*** Θεωροῦμεν τεμαχίδιον τοῦ ἐλαστικοῦ μέσου τὸ ὁποῖον ἠρεμεῖ εἰς ἀπόστασιν x ἐπὶ τῆς διευθύνσεως κατὰ τὴν ὁποίαν μεταδίδεται ἡ ἀρχικὴ διατάραξις. Ἂν εἶναι t′ ὁ χρόνος ποὺ χρειάζεται ἡ διατάραξις, μεταδιδομένη μὲ ταχύτητα c, διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὴν ἀπόστασιν x, θὰ εἶναι $x = ct'$ καὶ $t' = x/c$. Ἂν ἐξ ἄλλου εἶναι t ὁ χρόνος ποὺ χρειάζεται ἡ ἀρχικὴ διατάραξις διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὸ σωματίδιον καὶ νὰ τὸ ἀπομακρύνῃ καθέτως πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς διαδόσεως εἰς ἀπόστασιν y ἀπὸ τὴν θέσιν τῆς ἠρεμίας του, τότε θὰ εἶναι $t - t'$ ὁ χρόνος ποὺ ἀπαιτεῖται μόνον διὰ τὴν ἐκτροπὴν y. Ἑπομένως σύμφωνα μὲ τὴν σχέσιν (35) πρέπει νὰ εἶναι:

$$y = \alpha\eta\mu 2\pi\nu(t - t') = \alpha\eta\mu 2\pi\nu(t - x/c) = \alpha\eta\mu 2\pi(\nu t - \nu x/c) = \alpha\eta\mu 2\pi(\nu t - x/\lambda) \qquad (84)$$

ε) ***Διαμήκη κύματα*** "Αν αἱ ταλαντώσεις γίνωνται κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς μεταδόσεώς των, διὰ μέσου τοῦ ἐλαστικοῦ σώματος, χαρακτηρίζομεν τὰ προκύπτοντα κύματα ὡς ***διαμήκη***. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην μεταδίδεται διὰ μέσου τοῦ σώματος ποσὸν κινήσεως ἢ ἀκολουθία ἐπιφορῶν. Τὴν μεταφορὰν αὐτὴν ποσῶν κινήσεως ἀπὸ σημείου εἰς σημεῖον ἀπεικονίζει πολὺ καλὰ πείραμα μὲ σειρὰν ἐλαστικῶν σφαιρῶν ἀνηρτημένων οὕτως, ὥστε νὰ εὑρίσκωνται ἡ μία παρὰ τὴν ἄλλην ἐφαπτόμεναι ἀλλήλων ἐλαφρῶς. Ἀνυψώνομεν τὴν πρώτην ἐκ τῶν σφαιρῶν, τὴν 1 (σχ. 179), καὶ τὴν ἀφήνομεν νὰ καταπέσῃ. Μόλις αὕτη προσκρούσῃ ἐπὶ τῆς 2, παραμένει στάσιμος σύμφωνα μὲ τοὺς νόμους τῆς ἐλαστικῆς κρούσεως (§ 23, ε), παραδίδουσα τὴν ἐπιφοράν της (ὁρμὴν) εἰς τὴν 2. Ἡ 2 τὴν μεταβιβάζει εἰς τὴν 3, αὕτη εἰς τὴν 4 κ.ο.κ. μέχρι τῆς τελευταίας, ἡ ὁποία λόγῳ τούτου ἀνυψώνεται (θεωρητικῶς μὲ τὴν αὐτὴν ἐπιφοράν), διὰ



Σχ. 179



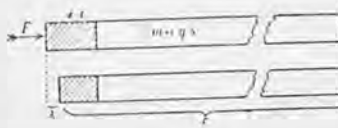
Σχ. 180

νὰ καταπέσῃ ἐν συνεχείᾳ καὶ προκαλέσῃ μεταβίβασιν τῆς ἐπιφορᾶς κατ' ἀντίθετον φοράν. Κατὰ ταῦτα ἡ ἐπιφορὰ κυμαίνεται ἀπὸ τοῦ ἑνὸς ἄκρου τῆς σειρᾶς μέχρι τοῦ ἄλλου καὶ τανάπαλιν καὶ τὸ κῦμα τοῦτο μεταδίδεται μὲ ταχύτητα, ἴσην μὲ τὴν ταχύτητα τοῦ ἤχου.

Εἰς τυχὸν ἐλαστικὸν σῶμα ποὺ κρούεται ἅπαξ ἢ περιοδικῶς ἡ μεταβίβασις τῆς ἐπιφορᾶς κατὰ παρόμοιον τρόπον γίνεται διὰ τῶν μορίων ἢ ἀτόμων, ἀκολουθοῦσα τὴν διεύθυνσιν τῆς ἀρχικῶς ἐνεργησάσης δυνάμεως. "Αν π.χ. τὰ μόρια ἀερίου ἢ ὑγροῦ ποὺ περικλείεται εἰς στοιχεῖον τοῦ χώρου (σχ. 180) ὑποστοῦν αἰφνίδιον ὠθισμόν, ἐπιφερόμενον ἐπὶ στρώματος I μὲ διεύθυνσιν ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά, θὰ προσκρούσουν ἐπὶ τῶν παρακειμένων μορίων τοῦ ἑπομένου στρώματος II. Προκαλεῖται τότε μία στιγμιαία ἀραίωσις εἰς τὸ στρῶμα I καὶ συμπύκνωσις ἢ ὑπερπίεσις εἰς τὸ II. Ἕνεκα τούτου ἀπωθοῦνται πάλιν πρὸς τὰ ὀπίσω τὰ ἐκ τοῦ I προερχόμενα μόρια, ἐνῷ ὁ ὠθισμὸς μεταβιβάζεται περαιτέρω εἰς τὰ μόρια τοῦ στρώματος III. Ἔτσι ὁ ὠθισμὸς μεταδίδεται διὰ μέσου τοῦ ἀερίου, συνοδευόμενος ἀπὸ στιγμιαίαν συμπύκνωσιν. Ἐὰν οἱ ὠθισμοὶ ἐπαναλαμβάνωνται μὲ κανονικὸν ρυθμόν, θὰ λάβωμεν ἐπιμήκη κύμανσιν τοῦ ἀερίου μὲ ἐναλλασσόμενα πυκνώματα καὶ ἀραιώματα. Τὰ ἐλαστικὰ ἐπιμήκη κύματα μὲ συχνότητας, περιλαμβανομένας εἰς μίαν ἀρκετὰ μεγάλην περιοχὴν τιμῶν συχνότητος, διεγείρουν τὸ αἰσθητήριον τῆς ἀκοῆς, ἤτοι γίνονται αἰσθητὰ ὡς ἦχοι. Τὸ χαρακτηρίζομεν λοιπὸν ὡς ***ἠχητικὰ κύματα***. Ἡ ταχύτης διαδόσεως αὐτῶν θὰ εἶναι ***ἡ ταχύτης διαδόσεως τοῦ ἤχου***.

στ) ***Ἡ ταχύτης διαδόσεως τῶν ἐλαστικῶν κυμάτων.*** Ἡ παραγωγὴ κύματος ὀφείλεται οὐσιαστικῶς εἰς τὸ ὅτι εἰς κάθε μετατόπισιν ἀτόμου ἀπὸ τὴν θέσιν ἰσορροπίας του ἀναφαίνονται δυνάμεις, αἱ ὁποῖαι θέτουν εἰς κίνησιν τὰ γειτονικὰ ἄτομα. Ἡ ταχύτης λειτουργίας τοῦ μηχανισμοῦ τούτου συζεύξεως, δηλαδὴ ἡ ταχύτης διαδόσεως ἑνὸς ἐλαστικοῦ κύματος, ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὰς δυνάμεις συζεύξεως τ. ἔ. ἀπὸ τὴν ἐλαστικότητα τοῦ σώματος καὶ ἀπὸ τὴν μᾶζαν αὐτοῦ. Ὅσον μεγαλύτεραι εἶναι αἱ ἐλαστικαὶ δυνάμεις καὶ ὅσον μικρότεραι εἶναι αἱ μᾶζαι, τόσον μεγαλύτεραι εἶναι αἱ ἐπιταχύνσεις, μὲ τὰς ὁποίας τὰ γειτονικὰ ἄτομα ὑποχωροῦν εἰς τὰς δυνάμεις ὠθισμοῦ. Εἰδικῶς διὰ τὰ διαμήκη ἢ ἠχητικὰ κύματα κατὰ μῆκος ραβδομόρφου σώματος εὑρίσκεται ὅτι εἶναι: $c=\sqrt{E/s}$ (85) ἂν c παριστάνῃ τὴν ταχύτητα E τὸ μέτρον ἐλαστικότητος καὶ s τὴν πυκνότητα.

Εἰς τὴν σχέσιν αὐτὴν καταλήγομεν θεωροῦντες τὴν διάδοσιν τῆς ἐπιφορᾶς κατὰ μῆκος ἐλαστικῆς ράβδου, εἰς τὸ ἄκρον τῆς ὁποίας ἐπιφέρομεν στιγμιαίαν κροῦσιν μὲ δύναμιν F (σχ. 181), ἔχουσαν τὴν διεύθυνσιν τῆς ράβδου. Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ ράβδος ἔχει τόσον μῆκος, ὥστε ἡ εἰς τὸ ἓν ἄκρον της προκαλουμένη διὰ τῆς κρύσεως ἐπιφορὰ φθάνει εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον μετὰ 1 ἀκριβῶς δευτερόλεπτον· τότε τὸ μῆκος τῆς ράβδου l εἶναι ἀριθμητικῶς ἴσον μὲ τὴν ταχύτητα c μεταδόσεως τῆς ἐπιφορᾶς. Ἂν εἶναι q ἡ ἐγκαρσία τομὴ καὶ s ἡ πυκνότης τῆς ὕλης τῆς ράβδου, ἡ μᾶζα m αὐτῆς θὰ εἶναι: $m=l.q.s=c.q.s$. Ἡ κατὰ τὸν στοιχειώδη χρόνον Δt ἐνεργοῦσα κρουστικὴ δύναμις F ἐπιβραχύνει ἓν ὡρισμένον στοιχεῖον μήκους Δx τῆς ράβδου (εἰς τὸ σχῆμα σημειώνεται τοῦτο μὲ διαγράμμισιν) κατὰ τὸ μικρὸν μῆκος λ. Εἰς τὸ τέλος τῆς κρούσεως τὸ στοιχεῖον μήκους Δx ἔχει τὸ εἰς κατώτερον μέρος τοῦ σχήματος μὲ διαγράμμισιν διακρινόμενον βραχύτερον μῆκος. Ἡ ἐλαστικὴ διάτασις, τὴν ὁποίαν ἐν συνεχείᾳ ὑφίσταται τὸ τμῆμα τοῦτο, προκαλεῖ συμπίεσιν τοῦ ἀμέσως ἑπομένου στοιχείου μήκους τῆς ράβδου· αὐτὸ πάλιν ἐν συνεχείᾳ διατείνεται καὶ συμπιέζει τὸ ἑπόμενόν του στοιχεῖον μήκους κ.ο.κ. προχωρεῖ ἡ συμπύκνωσις ὁλονὲν πρὸς τὸ ἄλλο ἄκρον τῆς ράβδου καὶ φθάνει εἰς αὐτὸ ἀκριβῶς μετὰ 1 sec (ἕνεκα τοῦ ὅτι ἐλήφθη ἀντιστοίχως τὸ μῆκος l τῆς ράβδου ἴσον μὲ c). Κατὰ ταῦτα ὅλη ἡ ράβδος προωθεῖται εἰς 1 sec κατὰ τὸ διάστημα λ, ἤτοι προσλαμβάνει ταχύτητα λ. Σύμφωνα μὲ τὴν (§ 28, στ) ἡ ἐπιφορὰ $F.\Delta t$ τῆς κρουστικῆς δυνάμεως εἶναι: $F.\Delta t=m.\lambda$. Ἀλλὰ ἡ δύναμις F εἶναι ἐκείνη ἡ ὁποία προκαλεῖ εἰς τὸ στοιχεῖον μήκους Δx τῆς ράβδου τὴν ἐλαστικὴν ἐπιβράχυνσιν λ καὶ σύμφωνα μὲ τὴν (§ 44, δ) εἶναι ἴση μέ: $Eq\lambda/\Delta x$. Συνεπῶς εἶναι: $(E.q.\lambda/\Delta x).\Delta t=c\,q\,s.\lambda$ ὅθεν $c.\Delta x/\Delta t=E/s$.

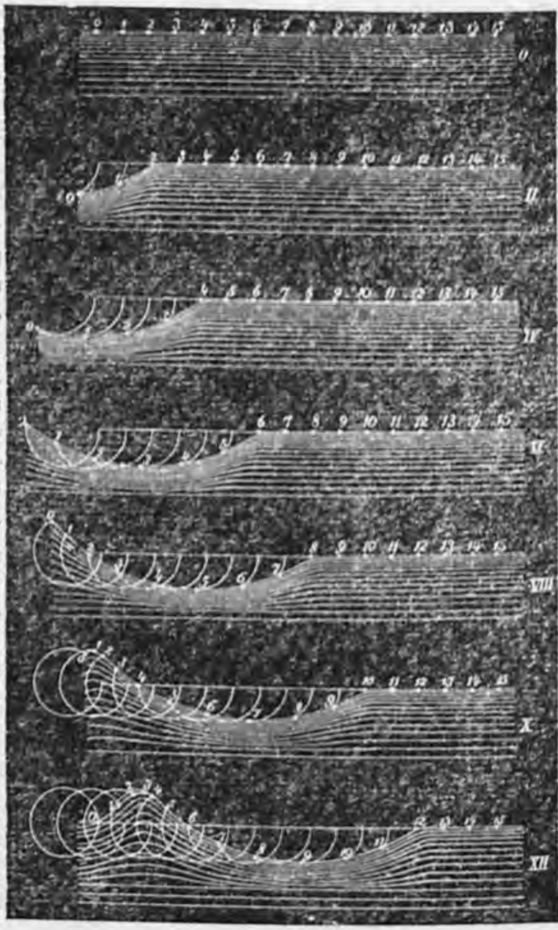


Σχ. 181

Τὸ πηλίκον $\Delta x/\Delta t$ εἶναι ἡ ταχύτης μὲ τὴν ὁποίαν προχωρεῖ ἡ ἐπιφορὰ εἰς τὸ στοιχεῖον μήκους Δx, διότι εἰς τὸν χρόνον Δt ἡ ἐπιφορὰ ἐπεκτείνεται μέχρι τοῦ μήκους Δx τῆς ράβδου. Ἡ ταχύτης ὅμως αὐτὴ πρέπει νὰ συμπίπτῃ μὲ τὴν ταχύτητα c τῆς διαδόσεως τῆς ἐπιφορᾶς εἰς ὅλην τὴν ράβδον. Ἔτσι ἡ παραπάνω σχέσις γίνεται: $c^2=E/s$ καὶ συνεπῶς $c=\sqrt{E/s}$ (85)

Διὰ νὰ λάβωμεν τὴν ταχύτητα c εἰς cm/sec πρέπει νὰ λάβωμεν τὴν τιμὴν τοῦ E ὄχι εἰς kg^*/mm^2, ὅπως δίδεται εἰς τοὺς σχετικοὺς πίνακας, ἀλλὰ εἰς dyn/cm^2, πρέπει δηλ. νὰ πολ/σωμεν τὴν εἰς τοὺς πίνακας τιμὴν τοῦ E ἐπὶ 981.10^5.

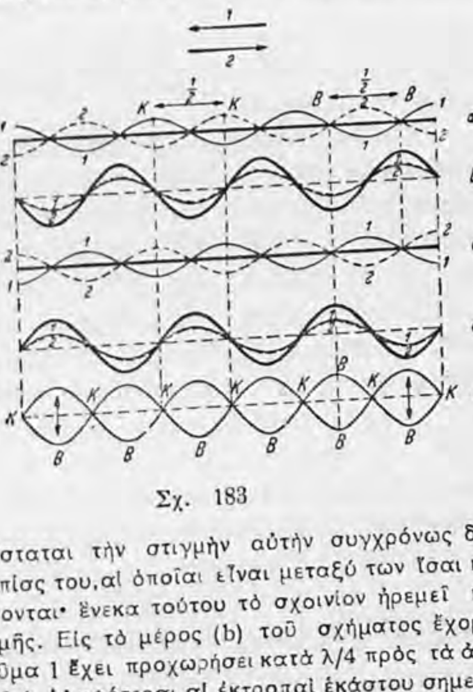
ζ) Κύματα ἐπιφανείας ὕδατος. Ἰδιάζουσαν μορφὴν ἔχουν τὰ κύματα ποὺ παρατηροῦνται εἰς τὴν ἐπιφάνειαν ὕδατος, ὅταν καταφέρεται ἐπ' αὐτῆς πλῆγμα, π.χ. ἀφήνεται νὰ καταπέσῃ ἐπ' αὐτῆς λίθος, ποὺ προκαλεῖ διατάραξιν τῆς ἰσορροπίας. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὰ καθέκαστα μόρια τοῦ ὑγροῦ διατρέχουν τὸ ἓν μετὰ τὸ ἄλλο διαδοχικῶς μίαν κυκλικὴν περιφέρειαν κάθετον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ, ὅπως ἀπέδειξαν τὸ 1826 οἱ ἀδελφοὶ Weber. Εἰς τὸ σχ. 182 παρέχεται μία κάθετος ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τομή, κατὰ μῆκος τῆς ὁποίας εἰς τὰς διαδοχικὰς στιγμὰς μιᾶς περιόδου ἐξαπλώνεται ἡ διατάραξις, ἀποτέλεσμα τῆς ὁποίας εἶναι ἡ διαμόρφωσις τοῦ κύματος. Τὰ κύματα αὐτὰ δὲν ἔχουν τὴν αἰτίαν των εἰς ἐλαστικὰς δυνάμεις, ἀλλὰ εἰς τὸ βάρος ἕνεκα τοῦ ὁποίου τείνει νὰ ἐξαλειφθῆ ἡ προκαλουμένη διαφορὰ στάθμης μεταξὺ ἑκάστου τῶν ὑφισταμένων τὴν διαταραξιν μορίων καὶ τῶν ἀμέσως γειτονικῶν του· ἔτσι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ βαρύτης ἀναλαμβάνει τὸν ρόλον συζεύξεως ἑκάστου μορίου μὲ τὰ γειτονικά του. Ἐκτὸς ταύτης εἰς τὴν διαμόρφωσιν τοῦ κύματος τούτου παίζει ρόλον καὶ ἡ ἐπιφανειακὴ τάσις. Ἡ ταχύτης διαδόσεως τῶν κυμάτων τούτων εἶναι διάφορος εἰς τὰς καθέκαστα περιπτώσεις ἐξαρτωμένη περισσότερον ἢ ὀλιγώτερον ἀπὸ τὸ μῆκος κύματος ὅσον καὶ ἀπὸ τὸ βάθος τοῦ ὕδατος. Ἔτσι παρατηρεῖται ταχύτης 10 ἕως 15 m/sec εἰς θαλάσσια κύματα (προκαλούμενα ἀπὸ ἰσχυρὸν ἄνεμον) ποὺ φθάνουν νὰ ἔχουν μῆκος κύματος 50—150 m καὶ πλάτος μέχρι κάπου 10 m. Ἀξιοσημείωτον εἶναι ὅτι εἰς τὰ κύματα αὐτὰ αἱ κυματοκοιλάδες δὲν ἔχουν ὁμοίαν διαμόρφωσιν μὲ τὰ κυματόβουνα. Εἶναι δηλαδὴ τὰ κυματόβουνα βραχύτερα καὶ ἀποτομώτερα ἀπὸ τὰς κυματοκοιλάδας.



Σχ. 182. Σχηματισμὸς κυμάτων ὕδατος μὲ κυκλικὴν ταλάντωσιν τῶν καθέκαστα σωματιδίων.

η) Στάσιμα κύματα. Θεωροῦμεν καὶ πάλιν τὰ κύματα κατὰ μῆκος τεντωμένου σχοινίου (σχ. 178). Ὁ συρμὸς κυμάτων τὰ ὁποῖα ἀναχωροῦν ἀπὸ τὸ κρατούμενον εἰς τὴν χεῖρα ἄκρον τοῦ σχοινίου, ὅταν φθάση εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον ποὺ ἔχει προσδεθῆ εἰς στήριγμα, ὑφίσταται ἀνάκλασιν καὶ ἐπιστρέφει ὀπίσω. Ἂν τὸ ἄκρον εἰς τὸ ὁποῖον γίνεται ἡ ἀνάκλασις στηρίζεται εἰς σῶμα μεγαλυτέρας μάζης (π.χ. εἰς τοῖχον), παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἐπιστρέφον κῦμα ἀναστρέφεται σχετικῶς πρὸς τὸ προσπῖπτον, ἑπομένως κατὰ τὴν ἀνάκλασιν εἰς σταθερὸν ἄκρον λαμβάνει χώραν μεταβολὴ φάσεως κατὰ 180° ἢ κατὰ ἥμισυ μῆκος κύματος. Ἂν ὅμως ἔχωμεν προσδέσει τὸ ἕτερον ἄκρον τοῦ κυμαινομένου σχοινίου εἰς τὸ ἄκρον λεπτοῦ νήματος (δηλ. σώματος μικροτέρας μάζης), τοῦ ὁποίου τὸ ἄλλο ἄκρον ἔχει προσδεθῆ εἰς ἀκλόνητον στήριγμα, ἡ ἀνάκλασις κατὰ μῆκος τοῦ σχοινίου γίνεται μὲ τὴν αὐτὴν φάσιν. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἐπειδὴ μέρος τῆς ἐνεργείας τοῦ κυμαινομένου σχοινίου ἀποδίδεται εἰς τὸ νῆμα, τὸ ἀνακλώμενον εἰς τὸ σχοινίον κῦμα θὰ εἶναι ἀσθενέστερον. Τὸ νῆμα λόγω τῆς προλαμβανομένης ἐνεργείας θὰ διατρέχεται ἀπὸ κῦμα, τὸ ὁποῖον γενικῶς θὰ ἔχῃ ἄλλην ταχύτητα διαδόσεως.

Κινοῦμεν συνεχῶς τὸ εἰς τὴν χεῖρα μας ἄκρον τοῦ σχοινίου μὲ ρυθμὸν ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω καὶ τανάπαλιν, ἀναγκάζομεν δηλαδὴ τοῦτο νὰ ταλαντώνεται συνεχῶς. Τότε κάθε σημεῖον τοῦ σχοινίου περιπίπτει εἰς ταλάντωσιν ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῶν δύο κυμάτων ποὺ κατ' ἀντιθέτους φορὰς διέρχονται δι' αὐτοῦ. Ἕνεκα τούτου κάθε σημεῖον θὰ ἐκτελῇ κίνησιν, ἡ ὁποία εἶναι γεωμετρικὸν ἄθροισμα τῶν δύο ἐπὶ μέρους κινήσεων, εἰς τὰς ὁποίας ὑπόκειται ἀπὸ καθὲν χωριστὰ τῶν δύο κυμάτων, δηλαδὴ τοῦ ἀρχικῶς διεγειρομένου καὶ τοῦ ἀνακλωμένου. Κατὰ συνέπειαν τῆς ἐπιπροσθήκης αὐτῆς ἢ συμβολῆς τῶν δύο κυματοσυρμῶν προκύπτει δι' ἕκαστον σημεῖον τοῦ σχοινίου ἰδιάζουσα μορφὴ ταλαντώσεως, τὴν ὁποίαν ἐξετάζομεν βάσει τοῦ σχ. 183. Ἔστω ὅτι τὸ κῦμα 1 πορεύεται ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ καὶ τὸ 2 ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά. Εἰς τὸ ἀνώτερον μέρος (a) τοῦ σχήματος ἀπεικονίζεται ἡ στιγμή, κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ κῦμα 1 μόνον του θὰ ἔδιδε εἰς τὸ σχοινίον τὴν μορφὴν τῆς καμπύλης 1, ἐνῷ μόνον του τὸ κῦμα 2 θὰ τοῦ ἔδιδε τὴν μορφὴν τῆς διακεκομμένης γραμμῆς 2. Ἔτσι ἕκαστον σημεῖον τοῦ σχοινίου ὑφίσταται τὴν στιγμὴν αὐτὴν συγχρόνως δύο ἐκτροπὰς ἐκ τῆς θέσεως τῆς ἰσορροπίας του, αἱ ὁποῖαι εἶναι μεταξύ των ἴσαι καὶ ἀντίθετοι καὶ συνεπῶς ἐξουδετερώνονται· ἕνεκα τούτου τὸ σχοινίον ἠρεμεῖ καὶ ἔχει τὴν μορφὴν τῆς παχείας γραμμῆς. Εἰς τὸ μέρος (b) τοῦ σχήματος ἔχομεν τὴν στιγμὴν κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ κῦμα 1 ἔχει προχωρήσει κατὰ λ/4 πρὸς τὰ ἀριστερὰ καὶ τὸ 2 κατὰ λ/4 πρὸς τὰ δεξιά. Ἀμφότεραι αἱ ἐκτροπαὶ ἑκάστου σημείου ποὺ ἐπιβάλλονται ἀπὸ τὰ δύο θεωρούμενα κύματα, ἴσαι μεταξύ των, ἔχουν τώρα τὴν αὐτὴν φορὰν καὶ ἑπομένως παρέχουν ἐκτροπὴν διπλασίαν δι' ἕκαστον σημεῖον· ἕνεκα τούτου τὸ σχοινίον ἔχει κατὰ τὴν στιγμὴν ταύτην τὴν μορφὴν τῆς παχείας ἡμιτονοειδοῦς καμπύλης. Εἰς τὸ (c) παριστάνεται ἡ μορφὴ τοῦ σχοινίου κατὰ τὴν στιγμὴν ποὺ τὸ κῦμα 1 ἔχει προχωρήσει πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἀκόμη λ/4 καὶ τὸ 2 πρὸς τὰ δεξιὰ ἐπίσης ἄλλο ἓν λ/4. Εἰς τὸ (d) παρέχεται ἡ μορφὴ τοῦ σχοινίου κατὰ τὴν στιγμὴν ποὺ ἐπακολουθεῖ μετ' ἄλλο 1/4 τῆς περιόδου, ἤτοι τὴν στιγμὴν ἀπὸ τῆς ὁποίας ἀρχίζει εἰς ἕκαστον σημεῖον ἡ ἐπανάληψις τῆς περιοδικῆς κινήσεώς του.



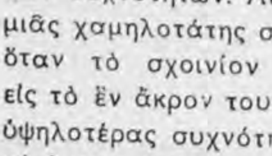
Σχ. 183

Ἐκ τῆς θεωρήσεως αὐτῆς βλέπομεν ὅτι κατὰ τὴν συμβολὴν ταύτην δύο κατ' ἀντιθέτους φορὰς συναντωμένων κυμάτων ὑπάρχουν σημεῖα Κ, τὰ ὁποῖα παραμένουν διαρκῶς εἰς ἠρεμίαν· τὰ σημεῖα αὐτὰ τὰ λέμε ***δεσμοὺς*** ἢ ***κόμβους***. Μεταξὺ τούτων κεῖνται αἱ ***κοιλίαι τῶν παλμῶν*** μὲ σημεῖα διαρκοῦς κινήσεως, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ ἐκτροπὴ εἶναι μεγίστη εἰς τὰ μέσα τῶν κοιλιῶν.

Ἡ ἀπόστασις ἀπὸ ἑνὸς κόμβου μέχρι τοῦ ἑπομένου ἢ ἀπὸ κοιλίας εἰς κοιλίαν εἶναι ἴση μὲ τὸ $^1/_2$ τοῦ μήκους κύματος. Ἐπειδὴ τόσον τὰ σημεῖα διαρκοῦς ἠρεμίας ὅσον καὶ τὰ τῆς διαρκοῦς κινήσεως εἶναι συνεχῶς τὰ αὐτά, ἤτοι δὲν μετατίθενται ὀνομάζομεν τὰ κύματα τῆς μορφῆς αὐτῆς ***στάσιμα***. Εἰς τὸ μέρος (ε) τοῦ σχήματος παρέχονται αἱ δύο καμπύλαι, ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται τὰ σημεῖα ἀναστροφῆς τῆς ἰδιαζούσης αὐτῆς μορφῆς παλμῶν.

Εἶναι εὐνόητον ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν σχοινίου, τοῦ ὁποίου τὸ ἓν ἄκρον ἔχει προσδεθῆ εἰς ἀκλόνητον στήριγμα καὶ τὸ ἄλλο ἐκτελεῖ ταλάντωσιν, τὸ σχηματιζόμενον στάσιμον κῦμα θὰ παρουσιάζει κόμβον εἰς τὸ ἀμετακίνητον ἄκρον καὶ κοιλίαν εἰς τὸ ὑφιστάμενον τὴν ταλάντωσιν.

§ 68 Ἰδιοσυχνότης ταλαντωτοῦ. ***α) Θεμελιώδεις καὶ ἁρμονικαὶ ταλαντώσεις.*** Κάθε σῶμα ποὺ διαγείρεται εἰς ταλάντωσιν χαρακτηρίζεται ἀπὸ ὡρισμένην δι' αὐτὸ συχνότητα τῆς ταλαντώσεως, τὴν ὁποίαν ὀνομάζομεν ***ἰδιοσυχνότητα*** τοῦ παλλομένου σώματος. Ἂν διεγερθῆ τὸ σχοινίον τοῦ σχ. 183 μὲ τὸν προσιδιάζοντα ρυθμόν, σχηματίζεται στάσιμον κῦμα, εἰς τὸ ὁποῖον τὰ καθέκαστα σημεῖα τοῦ σχοινίου (πλὴν τῶν δεσμῶν) ἐκτελοῦν ταλαντώσεις ὡρισμένων συχνοτήτων. Αἱ συχνότητες αὐταὶ εἶναι ἀκέραια πολλαπλάσια μιᾶς χαμηλοτάτης συχνότητος, ***τῆς θεμελιώδους***, τὴν ὁποίαν ἔχουν, ὅταν τὸ σχοινίον παρουσιάζει δεσμὸν τοῦ στασίμου κύματος εἰς τὸ ἓν ἄκρον του καὶ κοιλίαν εἰς τὸ ἄλλο. Αἱ ταλαντώσεις μὲ ὑψηλοτέρας συχνότητας ποὺ μπορεῖ νὰ ἐπιβληθοῦν εἰς τὸ σχοινίον μὲ ἀντιστοίχως προσήκουσαν διέγερσιν ἔχουν συχνότητας ποὺ εἶναι ἀκέραια πολλαπλάσια τῆς θεμελιώδους καὶ παρέχουν τοὺς ***ἀνωτέρους ἁρμονικοὺς*** τῆς θεμελιώδους ταλαντώσεως.

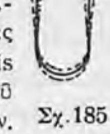


Σχ. 184

Διεγείρομεν διὰ καταλλήλου κρούσεως πρὸς ἐκτέλεσιν ἐγκαρσίων παλμῶν χορδὴν τεντωμένην μεταξὺ δύο ἀκλονήτων ὑποστηριγμάτων Α,Β (σχ. 184). Ἀντιστοίχως πρὸς τὸν τρόπον διεγέρσεως ἡ χορδὴ ἐκτελεῖ εἴτε τὸν θεμελιώδη παλμόν, εἴτε τοὺς ἀνωτέρους ἁρμονικούς αὐτοῦ. Κατὰ τὸν πρῶτον ἡ χορδὴ παρουσιάζει εἰς τὸ μέσον της κοιλίαν τοῦ στασίμου κύματος μεταξὺ τῶν δύο δεσμῶν ποὺ ἀναγκαίως σχηματίζονται εἰς τὰ δύο ἄκρα της Διὰ τὴν παραγωγὴν

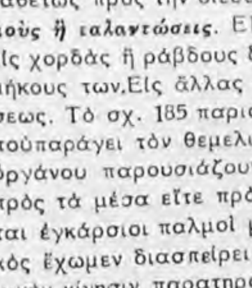
ἀνωτέρων ἁρμονικῶν ἡ χορδὴ παρουσιάζει καὶ ἄλλους ἐνδιαμέσους δεσμοὺς Γ—Γ, Δ—Γ, Δ, Ε (σχ. 184) μὲ ἀντιστοίχους κοιλίας. Ὅταν ἡ χορδὴ ἐκτελεῖ τὴν θεμελειώδη ταλάντωσιν (ἄνω μέρος τοῦ σχήματος), τὸ μῆκος τοῦ παραγομένου κύματος λ εἶναι ἴσον μὲ τὸ διπλάσιον τοῦ μήκους τῆς χορδῆς μ καὶ ἑπομένως ἡ συχνότης ν τῆς ταλαντώσεως ἐν σχέσει πρὸς τὴν ταχύτητα c τῆς διαδόσεως τοῦ κύματος κατὰ μῆκος τῆς χορδῆς δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου : $\nu = c/\lambda = c/2\mu$ (86)
Κατ' ἀναλογίαν αἱ συχνότητες τῶν ἀνωτέρων ἁρμονικῶν θὰ εἶναι : $\nu_2 = 2c/2\mu$, $\nu_3 = 3c/2\mu$, $\nu_4 = 4c/2\mu$ κ.ο.κ. ἤτοι αἱ ἀνώτεραι ταλαντώσεις ἔχουν συχνότητας 2, 3, 4 ..φορὰς μεγαλυτέρας τῆς τοῦ θεμελιώδους.

β) Μορφαὶ ταλαντώσεως. Εἰς τὴν ἀνωτέρω περίπτωσιν ἡ χορδὴ πάλλεται καθέτως πρὸς τὴν διεύθυνσιν τοῦ μήκους της. Ἐκτελεῖ, ὅπως λέμε, ***ἐγκαρσίους παλμοὺς ἢ ταλαντώσεις***. Εἶναι ὡς τόσο δυνατὸν διὰ προστριβῆς νὰ προκαλέσωμεν εἰς χορδὰς ἢ ράβδους διαμήκεις παλμούς, ἤτοι παλμοὺς κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ μήκους των. Εἰς ἄλλας περιπτώσεις ἔχομεν συνθετωτέρας μορφὰς τῆς ταλαντώσεως. Τὸ σχ. 185 παριστάνει τὴν μορφὴν τῆς παλμικῆς κινήσεως εἰς διαπασῶν πούπαράγει τὸν θεμελιώδη παλμόν του· τὰ ἐλεύθερα ἄκρα τοῦ ἠχητικοῦ τούτου ὀργάνου παρουσιάζουν κοιλίας παλόμενα συγχρόνως καὶ τὰ δύο, εἴτε πρὸς τὰ μέσα εἴτε πρὸς τὰ ἔξω. Εἰς πλάκας καὶ μεμβράνας παράγονται ἐγκάρσιοι παλμοὶ μὲ πολὺ πολυπλοκωτέρας μορφάς. Ἂν ἐπὶ πλακὸς ἔχωμεν διασπείρει λεπτοτάτην ἄμμον καὶ τὴν διεγείρωμεν εἰς παλμικὴν κίνησιν, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἄμμος συσσωρεύεται καθ' ὡρισμένας γραμμὰς (τὰς γραμμὰς δεσμῶν) ποὺ παρέχουν τὰ σχήματα Chladnis (Σχ. 186). Αἱ θέσεις συσσωρεύσεως ἄμμου εἶναι θέσεις δεσμῶν τοῦ στασίμου κύματος, ἤτοι θέσεις ὅπου κρατεῖται ἡ πλὰξ εἰς ἠρεμίαν. Ἀκόμη πολυπλοκώτεραι καθίστανται αἱ μορφαὶ τῶν παλμῶν εἰς καμπυλωμένας ἐπιφανείας, ὡς π.χ. εἰς κώδωνας καὶ ποτήρια.



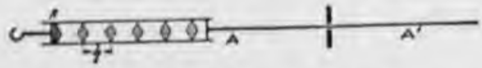
Σχ. 185

Εἰς τὰ στερεὰ σώματα μποροῦν νὰ παράγωνται καὶ διαμήκη κύματα καὶ ἐγκάρσια· διότι ἂν φαντασθῶμεν μόριον τοῦ στερεοῦ ποὺ πάλλεται ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ καὶ τἀνάπαλιν, τοῦτο θὰ ὠθῇ τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς γραμμῆς γειτονικά του μόρια καὶ θὰ ἐπιβάλλῃ οὕτω διαμήκεις παλμοὺς εἰς τὸ σῶμα· ἐκτὸς ὅμως τούτου λόγῳ τῆς συνδέσεώς του πρὸς τὰ ὑπερκείμενα καὶ ὑποκείμενα γειτονικά του μόρια θὰ μεταδίδῃ καὶ εἰς αὐτὰ παλμικὴν κίνησιν καὶ ὡς ἐκ τούτου τὸ σῶμα θὰ ἐμφανίζῃ καὶ ἐγκαρσίους παλμούς. Εἰς τὰ ὑγρὰ ὅμως καὶ τὰ ἀέρια τὸ παλλόμενον ὁριζοντίως μόριον μόνον τὰ ἐπὶ τῆς διευθύνσεως ταύτης γειτονικὰ μόρια θὰ διεγείρῃ εἰς παλμόν, ἐνῶ τὰ ὑπεράνω ἢ ὑποκάτω γειτονικὰ δὲν παρασύρονται εἰς παλμούς, ἀφοῦ δὲν ὑπάρχει σύνδεσις στερεὰ μετ' αὐτῶν. Διὰ τοῦτο τὰ ὑγρὰ καὶ ἀέρια μποροῦν νὰ πάλλωνται πρακτικῶς μόνον κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἰδίας των κινήσεως, ἤτοι νὰ ἐκτελοῦν διαμήκεις ταλαντώσεις. Τὰ κύματα τῆς ἐπιφανείας ὕδατος ἐμφανίζουν (ἰδιοτύπους) ἐγκαρσίας ταλαντώσεις, αἱ ὁποῖαι ὀφείλονται εἰς τὴν βαρύτητα καὶ ἑπομένως δὲν εἶναι ἐλαστικὰ κύματα (§ 67, ζ). Εἰς τὸ ἐσωτερικὸν ὅμως τοῦ ὑγροῦ μποροῦν νὰ εἰσδύσουν μόνον τὰ ἐλαστικὰ διαμήκη κύματα.



Σχ. 186

γ) Σχηματισμοὶ κόνεως κατὰ Kundt. Τὰ στάσιμα κύματα ποὺ διαμορφώνονται εἰς περιωρισμένην στήλην ἀέρος εἶναι εὔκολον νὰ παρατηρηθοῦν μὲ τὴν βοήθειαν τῶν σχηματισμῶν κόνεως κατὰ τὴν μέθοδον τοῦ Kundt. Κατ' αὐτὴν λαμβάνομεν σωλῆνα ὑάλινον, τοῦ ὁποίου τὸ ἓν ἄκρον κλείεται μὲ ἔμβολον Κ (σχ. 187) καὶ τὸ ἄλλο μὲ δίσκον φελλοῦ, εἰς τὸν ὁποῖον στηρίζεται τὸ ἄκρον μεταλλίνης ράβδου στερεωμένης εἰς τὸ μέσον της. Ἂν προστρίψωμεν τὴν ράβδον καὶ τὴν διεγείρωμεν ὥστε νὰ παράγῃ διαμήκεις παλμούς, τότε τὰ ἄκρα τῆς ράβδου θὰ ἀποτελοῦν κοιλίας τοῦ στασίμου κύματος ποὺ τὴν διατρέχει. Τοῦτο θὰ μεταδοθῇ διὰ τοῦ δισκίου τοῦ φελλοῦ εἰς τὴν στήλην ἀέρος ποὺ ἐγκλείει ὁ σωλήν, καὶ διὰ πρεπούσας θέσεις τοῦ ἐμβόλου θὰ λάβῃ καὶ αὐτὴ τὴν μορφὴν στασίμου κύματος μὲ δεσμοὺς εἰς τὰ ἄκρα· τοῦτο θὰ ἔχῃ συμβῆ, ὅταν θὰ ἀποδίδεται ὑπὸ τοῦ σωλῆνος ἐνισχυμένος ὁ ἦχος τῆς διεγερθείσης ράβδου.



Σχ. 187. Σωλὴν τοῦ Kundt

Ἂν εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ σωλῆνος ἔχῃ διασκορπισθῇ κόνις φελλοῦ, θὰ σχηματισθοῦν ἰδιάζουσαι συσσωρεύσεις καὶ ἀραιώσεις τῆς κόνεως, ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τοὺς δεσμοὺς καὶ τὰς κοιλίας τοῦ στασίμου κύματος τῆς στήλης τοῦ ἀέρος. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ἀπόστασις μεταξὺ δύο διαδοχικῶν συσσωρεύσεων κόνεως (δεσμῶν τοῦ στασίμου κύματος) εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ μήκους κύματος, προκύπτει ἐκ τῆς σχέσεως $\nu = c/\lambda$ ἡ συχνότης ν τοῦ κύματος, ἂν εἶναι γνωστὴ ἡ ταχύτης c διαδόσεώς του εἰς τὸν ἀέρα. Κατὰ τὴν θεμελιώδη διαμήκη κύμανσιν τῆς ράβδου τὸ μῆκος κύματος λ' εἶναι ἴσον μὲ τὸ διπλάσιον (2μ) τοῦ μήκους τῆς ράβδου· ἐπομένως ἡ ταχύτης διαδόσεως τοῦ κύματος, ἤτοι τοῦ ἀποδιδομένου ἤχου, θὰ εἶναι εἰς τὴν ράβδον: $c' = \nu\lambda' = \nu . 2\mu = 2\mu\nu = 2\mu c/\lambda$. Ἐκ τῶν μετρήσεων τούτων εὑρίσκεται ὅτι ἡ ταχύτης c' εἰς στερεὰ σώματα εἶναι σημαντικῶς μεγαλυτέρα τῆς εἰς τὸν ἀέρα c.

δ) Θεμελιώδης ταλάντωσις στήλης ἀέρος περιεχομένου εἰς σωλῆνα κλειστὸν κατὰ τὸν ἓν ἄκρον του. Ἂν παραχθοῦν στάσιμα κύματα εἰς τὴν στήλην ἀέρος ποὺ περιέχεται εἰς σωλῆνα κλειστὸν κατὰ τὸν ἓν ἄκρον του, εἶναι προφανὲς ὅτι εἰς τὸ κλειστὸν ἄκρον θὰ ἔχωμεν ***δεσμὸν τῆς κινήσεως*** τῶν μορίων, δηλαδὴ δεσμὸν τῆς ταχύτητος καὶ τοῦ πλάτους. Εἰς τὸ ἀνοικτὸν ἄκρον τοῦ σωλῆνος σχηματίζεται τότε ***κοιλία τῆς κινήσεως***. Ἀντιθέτως, ἐπειδὴ εἰς τὸ ἀνοικτὸν ἄκρον διατηρεῖται ἡ σταθερὰ πυκνότης τοῦ ἀέρος, θὰ ἔχωμεν εἰς τὴν θέσιν αὐτὴν δεσμὸν τῆς πυκνότητος καὶ πιέσεως τοῦ ἀέρος. Ὥστε εἰς τὰ στάσιμα διαμήκη κύματα (τοῦτο ἰσχύει καὶ διὰ τὰ ἐλαστικὰ κύματα στερεῶν) οἱ δεσμοὶ πιέσεως καὶ πυκνότητος συμπίπτουν μὲ τὰς κοιλίας τῆς κινήσεως καὶ ἀντιστρόφως. Ὅπου λοιπὸν ἡ πίεσις καὶ ἡ πυκνότης ἔχουν τὴν μεγίστην των διακύμανσιν, ἐκεῖ τὰ μόρια παραμένουν διαρκῶς ἐν ἠρεμίᾳ καὶ ἀντιστρόφως εἰς τὰς θέσεις ὅπου τὰ μόρια κινοῦνται ζωηρότερον, ἐκεῖ ἡ διακύμανσις τῆς πυκνότητος καὶ πιέσεως τοῦ ἀέρος εἶναι ἐλαχίστη.

§ 69. Ἀναγκαστικοὶ παλμοί. ***Συντονισμός.*** Ἂν διεγείρωμεν ἅπαξ σύστημα ποὺ μπορεῖ νὰ κάνῃ ταλαντώσεις, π.χ. ἓν ἐκκρεμές, ἐκτελεῖ τοῦτο ταλάντωσιν ὡρισμένης συχνότητος—τῆς ***ἰδίας συχνότητος*** τοῦ συστήματος— μὲ πλάτος βαθμηδὸν μειούμενον καὶ τοῦτο ἐκφράζομεν λέγοντες ὅτι ἐκτελεῖ *ἀποσβυνομένας* ταλαντώσεις. Ἂν ἡ ἐξωτερικὴ δύναμις ποὺ διεγείρει τὴν παλμικὴν κίνησιν τοῦ συστήματος ρυθμισθῇ νὰ ἐνεργῇ πάλιν καὶ πάλιν περιοδικῶς, τὸ σύστημα θὰ ἐκτελῇ παλμοὺς τῆς συχνότητος ποὺ ἔχει ἡ ἐπαναλαμβανομένη συνεχῶς ἐπίδρασις τῆς διεγειρούσης δυνάμεως. Λέγομεν ὅτι τὸ σύστημα ἐκτελεῖ *ἐξηναγκασμένας* ταλαντώσεις. Ἂν συμβῇ ὥστε ἡ συχνότης τῶν ἐξηναγκασμένων ταλαντώσεων νὰ εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν ἰδιοσυχνότητα τοῦ διεγειρομένου συστήματος, τὸ πλάτος τῶν ταλαντώσεων θὰ αὐξάνεται ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν προκύπτει *συντονισμὸς* τῆς ταλαντώσεως. Εἰδικώτερον ὀνομάζομεν τὸ φαινόμενον *συνήχησιν*, προκειμένου περὶ ταλαντώσεως ποὺ διεγείρει ἀκουστικὸν αἴσθημα.

Κατὰ συνέπειαν τοῦ συντονισμοῦ μπορεῖ ἀκόμη καὶ ἕνα παιδάκι νὰ ἐπιβάλῃ εἰς βαρεῖαν αἰώραν τὴν ἐκτέλεσιν αἰωρήσεων μεγάλου πλάτους, ἀρκεῖ νὰ προσδίδῃ τοὺς διαδοχικῶς ἐπιφερομένους ὠθισμοὺς μὲ τὴν προσιδιάζουσαν συχνότητα καὶ κατὰ τὴν πρέπουσαν χρονικὴν στιγμήν. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἀντιθέτως δὲν πρέπει τὰ διὰ μιᾶς γεφύρας κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον διερχόμενα ἄτομα νὰ ἔχουν τὸν αὐτὸν ρυθμὸν βηματισμοῦ, διότι κινδυνεύει τότε (λόγω τοῦ αὐξανομένου πλάτους ταλαντώσεων) νὰ ὑποχωρήσῃ ἡ γέφυρα.

Τὰ φαινόμενα συντονισμοῦ παίζουν σπουδαῖον ρόλον εἰς τὰς ἠλεκτρικὰς κυμάνσεις παντὸς εἴδους ὡς καὶ εἰς τὴν ἀκουστικήν. Ἂν πλησίον ἠχοῦντος (διεγερθέντος εἰς παλμικὰς κινήσεις) διαπασῶν φέρομεν ἄλλο, διεγείρεται καὶ εἰς αὐτὸ παλμικὴ κίνησις διὰ τῶν περιοδικῶν διακυμάνσεων τῆς πιέσεως τοῦ περιβάλλοντος ἀέρος, τὰς ὁποίας προκαλεῖ τὸ ἠχοῦν διαπασῶν. Ἡ διέγερσις τοῦ δευτέρου διαπασῶν εἶναι γενικῶς ἀσθενής· ἂν ὅμως τοῦτο ἔχει ἰδιοσυχνότητα ἴσην πρὸς τὴν τοῦ ἠχοῦντος, λαμβάνει χώραν συνήχησις καὶ τὸ δεύτερον διαπασῶν ἠχεῖ ἐντόνως. Την πρὸς τοῦτο ἐνέργειαν λαμβάνει τοῦτο, ὅπως εἶναι φυσικόν, ἀπὸ τὰ δι' αὐτοῦ διερχόμενα ἠχητικὰ κύματα.

Διὰ μίαν προσεκτικωτέραν ἔρευναν τοῦ φαινομένου τοῦ συντονισμοῦ θεωροῦμεν βαρὺ σφαιρίδιον ἐξηρτημένον ἐκ τοῦ ἄκρου νήματος (ἐκκρεμές). Ἂν ἐκτρέψωμεν τὸ σφαιρίδιον ἀπὸ τὴν θέσιν τῆς ἠρεμίας του καὶ τὸ ἀφήσωμεν ἐλεύθερον θὰ ἐκτελῇ αἰωρήσεις, τῶν ὁποίων ἡ συχνότης εἶναι κατὰ ἀναπτυχθέντα εἰς τὰ περὶ ἐκκρεμοῦς (§ 81,γ) : $v_0=1/2\pi\sqrt{l/g}$. Ἂν ἡ ἐκτρέπουσα τὸ σφαιρίδιον δύναμις ἐνεργῇ περιοδικῶς ἐπ' αὐτοῦ μὲ συχνότητα ν πολὺ μικροτέραν τῆς ὑπὸ τοῦ ὡς ἄνω τύπου καθοριζομένης v_0, θὰ ἐξαναγκασθῇ τὸ σφαιρίδιον νὰ αἰωρῆται μὲ τὴν χαμηλωτέραν αὐτὴν συχνότητα ν. Αὐξάνομεν τὴν συχνότητα ν τῆς περιοδικῆς ἐπενεργείας τῆς διεγειρούσης δυνάμεως μέχρι τῆς τιμῆς v_0 καὶ παρατηροῦμεν ὅτι τότε τὸ πλάτος τῶν διαδοχικῶν αἰωρήσεων αὐξάνεται πολύ, ἔστω καὶ ἂν ἡ ἐκτρέπουσα δύναμις ἔχει πολὺ μικρὰν ἔντασιν· ἂν δὲν ὑπῆρχεν ἀποσβεστικὴ δύναμις τῶν αἰωρήσεων καὶ ἐξηκολούθη νὰ εἶναι ἡ ἰδιοσυχνότης v_0 ἀκόμη καὶ διὰ μεγάλα πλάτη ἀκριβῶς ἁρμονική, θὰ ἔπρεπε τὰ πλάτη τῶν διαδοχικῶν αἰωρήσεων νὰ ηὔξανον ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον καὶ νὰ κατεστρέφετο τελικῶς τὸ σύστημα (καταστροφὴ ἐκ συντονισμοῦ). Ὅταν ἡ συχνότης ν αὐξηθῇ πέραν τῆς v_0 τὰ πλάτη τῶν αἰωρήσεων τοῦ ἐκκρεμοῦς καταπίπτουν ταχέως καὶ τελικῶς τὸ σφαιρίδιον παραμένει ἐν ἠρεμίᾳ, ἐπειδὴ τοῦτο λόγω τῆς ἀδρανείας του δὲν μπορεῖ νὰ παρακολουθήσῃ τὴν συχνότητα τῆς ἐπενεργείας τῆς διεγειρούσης δυνάμεως.

Ὁ συντονισμὸς εἶναι τόσον περισσότερον ἔκδηλος, ὅσον μικροτέρα εἶναι
ἡ ἀπόσβεσις. Διὰ νὰ αὐξάνεται τὸ πλάτος τῶν παλμῶν λόγῳ συντονισμοῦ τῆς
περιοδικότητος τῆς ἐπιδράσεως τῆς διεγειρούσης δυνάμεως πρέπει αὕτη νὰ ἐπι-
δρᾷ ἐπὶ τοῦ παλλομένου συστήματος, ὄχι μόνον μὲ τὴν πρέπουσαν συχνότητα,
ἀλλὰ καὶ μὲ τὴν ὀρθὴν ἑκάστοτε φάσιν τοῦ παλμοῦ, δηλαδὴ πάντοτε ἔτσι ποὺ
νὰ ἐπιταχύνῃ προσθετικῶς τὴν κίνησιν. Εἰς τὴν περίπτωσιν π.χ. τῆς αἰώρας πρέ-
πει οἱ ὠθισμοὶ νὰ γίνωνται, ὅταν ἡ αἰώρα εὑρίσκεται εἰς τὸ ἀκρότατον σημεῖον
τῆς ἐκτροπῆς της καὶ ἀρχίζῃ νὰ κινῆται πρὸς τὴν θέσιν τῆς ἠρεμίας.

§ 70. ***Παλμοὶ συζεύξεως.*** Λαμβάνομεν δύο ὅμοια ἐκκρεμῆ καὶ τὰ συνδέο-
μεν μὲ εὐπαθὲς ἐλατήριον (σχ. 188) ἂν διεγείρωμεν τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν, τὸ I, εἶναι
αὐτονόητον ὅτι τοῦτο θὰ ἐπιδράσῃ ἐπὶ τοῦ δευτέρου (τοῦ συντον-
ιζομένου)· τὸ τὸ δεύτερον πάλιν ἀφοῦ διεγερθῇ ὑπὸ τοῦ διεγείρον-
τος I θὰ ἐπηρεάσῃ κατ' ἀντιστροφὴν τοῦτο καὶ ὡς ἐκ τούτου παρα-
τηροῦμεν τὸ ἑξῆς ἐντυπωσιακὸν φαινόμενον: Τὸ ἐκκρεμὲς II θὰ
αὐξάνῃ ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον τὰ πλάτη τῆς αἰωρήσεώς του, ἐνῷ
τὸ I θὰ τὰ ἐλαττώνῃ μέχρις ὅτου φθάσῃ νὰ ἠρεμήσῃ τελείως. Κα-
τόπιν ἀρχίζει πάλιν σιγὰ-σιγὰ νὰ αἰωρῆται τὸ I μὲ πλάτη βαθμηδὸν

Σχ. 188

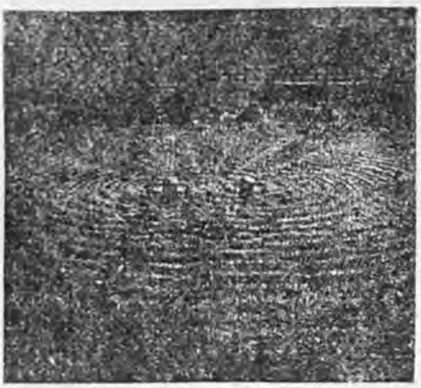
αὐξανόμενα καὶ νὰ ἐλαττώνωνται τὰ πλάτη τοῦ II μέχρις ὅτου φθάσῃ τοῦτο νὰ ἠρε-
μήσῃ τελείως. Ἐν συνεχείᾳ ἐπαναλαμβάνεται πάλιν ἡ ἐναλλαγὴ αὐτὴ κατὰ τὸν
αὐτὸν τρόπον. Ἔτσι ἡ ἐνέργεια μεταβιβάζεται ἀπὸ τὸ ἓν ἐκκρεμὲς εἰς τὸ ἄλλο καὶ
τανάπαλιν, μὲ ἄλλα λόγια, ταλαντεύεται μεταξὺ τῶν δύο συνεζευγμένων ἐκκρε-
μῶν, μέχρις ὅτου λόγῳ ἀποσβέσεως ἀποδοθῇ εἰς τὸ περιβάλλον, ὁπότε παραμέ-
νουν καὶ τὰ δύο ἐκκρεμῆ εἰς ἠρεμίαν. Ἡ μεταβίβασις τῆς ἐνεργείας ἀπὸ τοῦ ἑνὸς ἐκ-
κρεμοῦς εἰς τὸ ἄλλο γίνεται τόσον ταχύτερον, ὅσον στερεωτέρα εἶναι ἡ σύζευξις.

§ 71. Ἐξάπλωσις τῶν κυμάτων. ***α) Μέτωπον καὶ ἀκτῖνες ἐξαπλώσεως κύματος.*** Ἐὰν εἰς ἓν σημεῖον τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας ὕδατος, ἠρεμοῦντος εἰς εὐρεῖαν λεκάνην, προκαλέσωμεν παλμικὴν διατάραξιν, ρίπτοντες π.χ. λιθάριον ἔκ τινος ὕψους, παρατηροῦμεν ὅτι αὕτη διαδίδεται ἀκτινικῶς γύρω ἀπὸ τὸ διαταραχθὲν σημεῖον καὶ ἔτσι σχηματίζονται κυμάτια, τὰ ὁποῖα ἐξαπλώνονται κυκλικῶς περὶ τὸ σημεῖον τῆς διαταράξεως. Τεμάχιον φελλοῦ ποὺ ἐπιπλέει ἐπὶ τοῦ ὕδατος ἀνέρχεται καὶ κατέρχεται εἰς τὴν θέσιν του, ὅταν δι' αὐτοῦ διέρχεται ἀλληλοδιαδόχως τὸ κυματόβουνον καὶ ἡ κυματοκοιλὰς τοῦ ἐξαπλουμένου κύματος. Ἐκ τούτου προκύπτει ὅτι ἡ ἐξάπλωσις κύματος γίνεται χωρὶς μεταφορὰν μαζῶν ὕδατος κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἐξαπλώσεως τοῦ κύματος. Τοῦτο ἰσχύει, ἐφ' ὅσον τὸ πλάτος τῆς ταλαντώσεως εἶναι μικρὸν ἐν σχέσει πρὸς τὸ μῆκος τοῦ κύματος· ἂν ***δὲν*** συμβαίνῃ τοῦτο, λαμβάνει χώραν προώθησις τῆς μάζης τοῦ ὕδατος κατὰ τὴν διεύθυνσιν ἐξαπλώσεως τοῦ κύματος· ἕνεκα τούτου παρατηροῦμεν νὰ ἐκβάλλωνται εἰς τὰς ἀκτὰς σώματα ἐπιπλέοντα ἐπὶ ἰσχυρῶς κυματώδους θαλάσσης.

Κάθε ἐπιφάνεια ποὺ περιλαμβάνει τὰ σημεῖα τῆς αὐτῆς φάσεως τῆς ταλαντώσεως ὀνομάζεται ***ἐπιφάνεια κύματος*** ἢ ***μέτωπον κύματος.*** Εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν κυμάτων ὕδατος αἱ ἐπιφάνειαι κύματος, π.χ. ὅλα τὰ κυματόβουνα, εἶναι κύκλοι· εἰς κύματα ἐξαπλούμενα καθ' ὅλας τὰς διευθύνσεις τοῦ χώρου μὲ τὴν αὐτὴν ταχύτητα εἶναι σφαιρικαὶ ἐπιφάνειαι. Καθέτως πρὸς τὰς ἐπιφανείας κύματος, ἤτοι *κατὰ τὰς ἀκτῖνας ἐξαπλώσεως κύματος*, (σχ. 189), γίνεται ἡ μεταβίβασις τῆς ἐνεργείας ταλαντώσεως τῆς θέσεως ἀρχικῆς διαταράξεως. Εἰς ἕνα το μέα τοῦ συστήματος κυμάτων μποροῦμε νὰ θεωρῶμεν τὴν ἐπιφάνειαν κύματος ὡς ἐπίπεδον μὲ τόσον μεγαλυτέραν προσέγγισιν, ὅσον μικρότερον εἶναι τὸ ἄνοιγμα τοῦ τομέως ἢ ὅσον μεγαλυτέρα εἶναι ἡ ἀπομάκρυνσις ἀπὸ τὴν θέσιν ἐκπορεύσεως, *τὸ κέντρον* z τῶν κυμάτων. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν γίνεται λόγος περὶ *ἐπιπέδου κύματος*.

Σχ. 189

β) ***Συμβολὴ κυμάτων***. Διαταράσσομεν τώρα περιοδικῶς μὲ τὸν αὐτὸν ρυθμὸν δύο θέσεις τῆς ἐπιφανείας ὕδατος π.χ μὲ τὸ νὰ καταφέρωνται ἐπ' αὐτῆς δύο εἰς σταθερὰν ἀπόστασιν μεταξύ των συνδεδεμένα στερεῶς σφαιρίδια. Τότε ἐξ ἑκάστου τῶν δύο σημείων τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος ἀναχωροῦν κύματα, τὰ ὁποῖα κατὰ τὴν ἐξάπλωσίν των συναντῶνται (σχ. 190) καὶ διεισδύουν τὸ ἓν εἰς τὸ ἄλλο σύστημα. Εἰς πάντα τὰ σημεῖα, τῶν ὁποίων αἱ δύο ἀποστάσεις ἀπὸ τὸ κέντρον διεγέρσεως ἔχουν διαφορὰν 1/2 μῆκος κύματος ἢ περιττὸν πολλαπλάσιον τούτου—$(2n+1)\lambda/2$ — τὰ συμβάλλοντα δύο κύματα ἀναιροῦνται ἀμοιβαίως (τὰ κυματόβουνα τοῦ ἑνὸς συστήματος ἀναιροῦν τὰς κυματοκοιλάδας τοῦ ἄλλου) καὶ συνεπῶς διατηρεῖται ἠρεμία.



Σχ. 190. Συμβολὴ κυμάτων ὕδατος

Ἔτσι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ οὕτω διεγειρομένου εἰς κύμανσιν ὕδατος παρουσιάζει τὴν ὑπὸ τοῦ σχ. 190 παριστανομένην μορφήν. Αἱ γραμμαὶ ποὺ συνδέουν τὰ ὡς ἄνω εἰς ἠρεμίαν παραμένοντα σημεῖα τοῦ ὕδατος εἶναι ***ὑπερβολαί*** *.

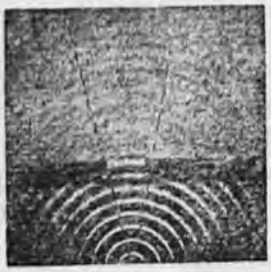
γ) Παράθλασις. Τοποθετοῦμεν εἰς κάποιαν ἀπόστασιν ἀπὸ κέντρον ἐξαπλώσεως κυμάτων ἐμπόδιον (π.χ. ἐπιμήκη σανίδα), τὸ ὁποῖον φέρει ἄνοιγμα (ὀπὴν ἢ σχισμήν). Ἂν τὸ εὖρος τοῦ ἀνοίγματος εἶναι ἀρκετὰ μεγάλο ἐν συγ-

---

* Ὡς ὑπερβολὴ χαρακτηρίζεται ἡ καμπύλη, τῆς ὁποίας ἕκαστον σημεῖον ἀπέχει ἀπὸ δύο σταθερὰ σημεῖα—*τὰς ἑστίας*—ἀποστάσεις, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὴν αὐτὴν διαφοράν. Ἂν 2α εἶναι ἡ σταθερὰ διαφορὰ τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου τῆς ὑπερβολῆς ἀπὸ τὰς δύο ἑστίας αὐτῆς, e ἡ μεταξὺ τῶν δύο ἑστιῶν ἀπόστασις καὶ εἶναι β ἴσον μὲ $\sqrt{e^2-a^2}$, ἰσχύει διὰ κάθε σημεῖον τῆς καμπύλης ποὺ ἔχει συντεταγμένας x καὶ y ἡ ἐξίσωσις: $x^2/\alpha^2-y^2/\beta^2=1$].

κρίσει πρὸς τὸ μῆκος τοῦ κύματος, τὸ ὁποῖον ἔρχεται ἐκ τοῦ κέντρου διαταράξεως (σχ. 191), παρατηροῦμεν ὅτι μετὰ τὸ ἄνοιγμα διαδίδεται τομεὺς ὁμοκέντρων κυμάτων, περιοριζόμενος κατὰ προσέγγισιν ἀπὸ εὐθείας γραμμάς, ***τὰς ἀκτῖνας διαδόσεως*** τοῦ κύματος. Αἱ ἀκτῖνες αὐταὶ συγκλίνουν πρὸς τὸ κέντρον ἐκπορεύσεως τῶν κυμάτων, μὲ ἄλλα λόγια συναντῶνται ὅλαι εἰς τὸ κέντρον τῆς ἀρχικῆς διαταράξεως, τὸ ὁποῖον ὡς ἐκ τούτου χαρακτηρίζεται ὡς ***κέντρον ἀκτινοβολίας***. Τὰ ὅρια τοῦ τομέως δὲν εἶναι τελείως εὐκρινῆ, ἐπειδὴ τὰ κύματα ἐκτείνονται κάπως πέραν τῶν ἑκατέρωθεν περιοριστικῶν ἀκτίνων. Τὴν ἐπέκτασιν αὐτὴν τῶν κυμάτων πέραν τῶν περιοριστικῶν ἀκτίνων τὴν λέμε ***παράθλασιν***.

Σχ. 191



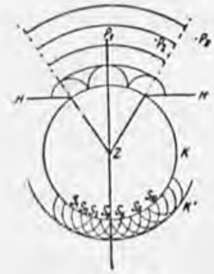
Σχ. 192

Σχ. 193

Ἡ παράθλασις γίνεται περισσότερον ἔκδηλος, ὅσον μικρότερον εἶναι τὸ εὖρος τοῦ ἀνοίγματος ἐν συγκρίσει πρὸς τὸ μῆκος κύματος. Ἔτσι εἰς τὴν περίπτωσιν ποὺ ὑποδεικνύει τὸ σχ. 192 τὸ ἄνοιγμα τῆς ὀπῆς εἶναι μόνον τριπλάσιον τοῦ μήκους κύματος, εἰς δὲ τὴν τοῦ σχ. 193 ἔχει καταστῆ τοῦτο μικρότερον τοῦ μήκους κύματος. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ὀπὴ ἀποτελεῖ πλέον σημεῖον συναντήσεως τῶν ἀκτίνων διαδόσεως τῶν κυμάτων πέραν αὐτῆς. Ἐπέχει λοιπὸν θέσιν κέντρου ἀκτινοβολίας τῶν ἐξαπλουμένων ἡμικυκλικῶν κυμάτων.

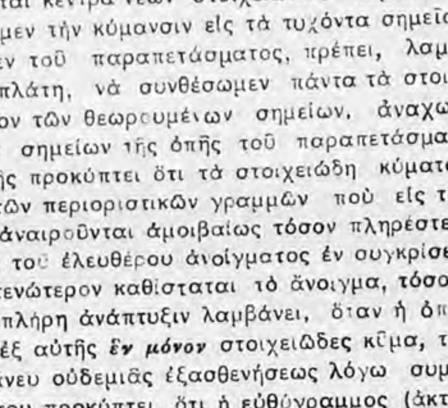
δ) ***Ἀρχὴ τοῦ* Huygens.** Ἡ παρατήρησις αὐτὴ κατὰ τὴν ὁποίαν τὰ σωματίδια ὕδατος ποὺ κεῖνται εἰς τὸ ἄνοιγμα ἀποτελοῦν σημεῖα ἐκπομπῆς νέων κυκλικῶν κυμάτων, μπορεῖ νὰ γενικευθῆ καὶ νὰ διατυπωθῆ ὑπὸ τὴν μορφὴν τῆς ὑπὸ τοῦ Huygens ἐκφρασθείσης ἀρχῆς: ***Κάθε σημεῖον ποὺ διεγείρεται ὑπὸ κύματος καθίσταται κέντρον ἐκπορεύσεως ἑνὸς νέου στοιχειώδους σφαιρικοῦ κύματος*** (εἰς τὴν θεωρηθεῖσαν περίπτωσιν κυμάτων ἐπιφανείας ὕδατος τὸ διεγειρόμενον σωματίδιον καθίσταται κέντρον ἐκπορεύσεως στοιχειώδους κυκλικοῦ κύματος). Ἡ ἀρχὴ τοῦ Huygens γίνεται εὐνόητος, ἂν σκεφθῶμεν ὅτι κάθε σωματίδιον ποὺ προσβάλλεται ἀπὸ τὸ ἀρχικὸν κῦμα ἐκτελεῖ περιοδικὴν ταλάντωσιν καὶ ἑπομένως ἐπηρεάζει τὸ περιβάλλον κατὰ τὸν αὐτὸν ἀκριβῶς τρόπον, ὅπως καὶ τὸ ἀρχικῶς διαταραχθὲν τεμαχίδιον καὶ συνεπῶς δρᾷ ὡς κέντρον κυμάτων.

Ἂν εἶναι Ζ (σχ. 194) τὸ κέντρον τοῦ ἀρχικοῦ κύματος, τοῦ ὁποίου τὸ μέτωπον κατὰ μίαν ὡρισμένην χρονικὴν στιγμὴν φθάνει εἰς τὴν σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν Κ, πρέπει πάντα τὰ σημεῖα αὐτῆς S_1, S_2, S_3 .... νὰ πάλλωνται μὲ τὴν αὐτὴν φάσιν καὶ συνεπῶς νὰ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἐπιφανείας κύματος. Ἀπὸ καθὲν τῶν σημείων τούτων ἀναχωροῦν νέα «συμφωνοῦντα» στοιχειώδη κύματα δηλ. κύματα ἔχοντα τὴν αὐτὴν φάσιν. Τὸ συνισταμένον κῦμα ποὺ προκύπτει ἐκ τῆς συμβολῆς ὅλων τούτων τῶν στοιχειωδῶν κυμάτων εἶναι ἡ περικλείουσα αὐτὰ σφαιρικὴ ἐπιφάνεια Κ', εἰς τὴν ὁποίαν θὰ ἔφθανε κατὰ τὴν αὐτὴν στιγμὴν καὶ τὸ ἐκ τοῦ Ζ ἀπ' εὐθείας ἐρχόμενον κῦμα.



Σχ. 194

Ὅταν λοιπὸν τὸ σφαιρικὸν κῦμα ἐξαπλώνεται ἀκωλύτως, ἡ θεώρησις κατὰ τὴν ἀρχὴν Huygens εἶναι περιττή. Ἄλλως ὅμως ἔχει τὸ πρᾶγμα, ἂν ἡ ἐξάπλωσις τοῦ κύματος περιορίζεται ὑπὸ ἐμποδίων. Ἂν τότε τὸ κῦμα εἶναι ἐλεύθερον νὰ προσπεράσῃ τὸ ἐμπόδιον διὰ μέσου ἀνοίγματος, τὰ τεμαχίδια τοῦ ὕδατος ποὺ κεῖνται εἰς τὸ ἄνοιγμα καθίστανται κέντρα νέων στοιχειωδῶν κυμάτων. Διὰ νὰ καθορίσωμεν τὴν κύμανσιν εἰς τὰ τυχόντα σημεῖα P_1, P_2, κλπ. ὄπισθεν τοῦ παραπετάσματος, πρέπει, λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὰς φάσεις καὶ τὰ πλάτη, νὰ συνθέσωμεν πάντα τὰ στοιχειώδη κύματα ποὺ φθάνουν εἰς ἕκαστον τῶν θεωρουμένων σημείων, ἀναχωροῦντα ταυτοχρόνως ἐκ τῶν καθέκαστα σημείων τῆς ὀπῆς τοῦ παραπετάσματος (ἐμποδίου). Ἐκ τῆς συνθέσεως αὐτῆς προκύπτει ὅτι τὰ στοιχειώδη κύματα εἰς τὸν ***χῶρον τῆς σκιᾶς*** (δηλαδὴ ἔξω τῶν περιοριστικῶν γραμμῶν ποὺ εἰς τὸ σχῆμα ἔχουν χαραχθῆ διακεκομμένα) ἀναιροῦνται ἀμοιβαίως τόσον πληρέστερον, ὅσον μεγαλύτερον εἶναι τὸ εὖρος τοῦ ἐλευθέρου ἀνοίγματος ἐν συγκρίσει πρὸς τὸ μῆκος τοῦ κύματος. Ὅσον στενώτερον καθίσταται τὸ ἄνοιγμα, τόσον ἰσχυροτέρα γίνεται ἡ παράθλασις· τὴν πλήρη ἀνάπτυξιν λαμβάνει, ὅταν ἡ ὀπὴ εἶναι τόσον μικρά, ὥστε νὰ προέρχεται ἐξ αὐτῆς ***ἓν μόνον*** στοιχειῶδες κῦμα, τὸ ὁποῖον τότε θὰ ἐξαπλώνεται πλήρως (ἄνευ οὐδεμιᾶς ἐξασθενήσεως λόγῳ συμβολῆς) ὄπισθεν τοῦ ἐμποδίου. Ἐκ τούτου προκύπτει ὅτι ἡ εὐθύγραμμος (ἀκτινική) ἐξάπλωσις τῆς κυματικῆς ἐνεργείας βασίζεται ἐπὶ ἑνὸς λίαν περιπλόκου φαινομένου συμβολῆς, κατὰ τὸ ὁποῖον ἡ κυματικὴ ἐνέργεια ἐξουδετερώνεται εἰς τὰς γύρω ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν τῆς πορείας θέσεις. Ἂν εἰς τὸν δρόμον ἐξαπλώσεως ἐπιπέδου κύματος φέρωμεν ἐμπόδιον, τὸ ὁποῖον ἀντὶ μιᾶς ἔχει σειρὰν ὁλόκληρον ἀπὸ ὀπάς, τὰ ἀπὸ ἑκάστην τούτων προερχόμενα στοιχειώδη κύματα συμβάλλουν μεταξύ των καὶ παρέχουν νέον ἐπίπεδον κῦμα.



Σχ. 195

ε) ***Ἀνάκλασις καὶ διάθλασις κυμάτων.*** Ἂν προσπέσῃ ἐπίπεδον κῦμα ἐπὶ τῆς χωριστικῆς δύο διαφόρων μέσων ἐπιφανείας, τότε μέρος τῆς προσπιπτούσης κυμάνσεως ἀναστρέφει τὴν διεύθυνσιν τῆς πορείας του ἐντὸς τοῦ μέσου ποὺ κινεῖται, ἐνῷ ἄλλο μέρος εἰσδύει εἰς τὸ ἄλλο μέσον. Λέμε τότε ὅτι τὸ πρῶτον μέρος τῆς κυμάνσεως ***ἀνακλᾶται***, ἐνῷ τὸ δεύτερον ***διαθλᾶται***. Θεωροῦμεν ἔτσι τὸ μέτωπον κύματος $A_1 A_3$ (σχ. 195) τὸ ὁποῖον κατὰ τὴν περαιτέρω πορείαν του συναντᾷ τὴν διαχωριστικὴν ἐπιφάνειαν δύο διαφόρων μέσων. Ἂν ἡ πρόσπτωσις γίνεται πλαγίως, τότε τὰ σημεῖα O_1, O_2, O_3 τῆς διαχωριστικῆς ἐπιφανείας διεγείρονται πρὸς ἐκπομπὴν νέων στοιχειωδῶν κυμάτων ὄχι συγχρόνως, ἀλλὰ τὸ ἓν μετὰ τὸ ἄλλο."Οταν δηλ. τὸ σημεῖον A_1 τοῦ μετωπικοῦ κύματος ἔχει φθάσει εἰς τὸ O_1 τῆς διαχωριστικῆς ἐπιφανείας καὶ ἀρχίζει νὰ τὸ διεγείρῃ, τὸ A_2 εὑρίσκεται ἀκόμη εἰς τὸ A καὶ μέχρις ὅτου φθάσει τοῦτο εἰς O_2, ἀπὸ τὸ O_1 (καὶ κατ'ἀναλογίαν ἀπὸ τὰ ἄλλα μεταξὺ O_1 καὶ O_2 σημεῖα τῇ χωριστικῆς ἐπιφανείας) ἔχει ἐκπεμφθῆ στοιχειῶδες κῦμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ἐξαπλωθῆ εἰς ἀπόστασιν: $O_1C = AO_2$. "Ετσι τὸ ἀνακλώμενον κῦμα ἔχει τώρα μέτωπον καθοριζόμενον ἀπὸ τὰ σημεῖα O_2,C (καὶ λοιπὰ διάμεσα) εἰς τὰ ὁποῖα ἡ φάσις εἶναι ἡ αὐτή. Τὸ νέον λοιπὸν μέτωπον κύματος παρέχεται ἀπὸ τὴν ἐπιφάνειαν O_2C. Καθέτως πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν ταύτην φέρεται ἡ διεύθυνσις τῆς νέας ἐξαπλώσεως τοῦ κύματος. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα τῶν τριγώνων O_1O_2A καὶ O_1O_2C προκύπτει ἡ ἰσότης τῶν γωνιῶν $AO_1O_2 = \alpha'$ καὶ $CO_2O_1 = \beta'$. Μὲ τὴν γωνίαν α' εἶναι ἴση ἡ ***γωνία προσπτώσεως*** α καὶ μὲ τὴν β' ἡ ***γωνία ἀνακλάσεως*** α τοῦ κύματος, ἐπειδὴ αὗται ἀνὰ δύο ἔχουν τὰς πλευράς των καθέτους ἐπ' ἀλλήλας. Ἑπομένως εἶναι καὶ ***ἡ γωνία ἀνακλάσεως ἴση μὲ τὴν γωνίαν προσπτώσεως*** (νόμος τῆς ἀνακλάσεως).

Προκειμένου τώρα διὰ τὴν εἰς τὸ δεύτερον μέσον εἰσδύσασαν κύμανσιν, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ταχύτης v_2 διαδόσεως εἰς αὐτὸ εἶναι γενικῶς διάφορος τῆς ταχύτητος v_1 εἰς τὸ πρῶτον μέσον. "Αν, ὅπως θεωρεῖται εἰς τὸ σχῆμα, εἶναι $v_2 < v_1$, τότε εἰς τὸν χρόνον t ποὺ χρειάζεται τὸ σημεῖον A τοῦ εἰς τὸ πρῶτον μέσον μετώπου κύματος, διὰ νὰ φθάσῃ μέχρι τῆς διαχωριστικῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ σημεῖον O_2 (διανυομένου διαστήματος $AO_2 = v_1t_1$), τὸ O_1 τοῦ αὐτοῦ μετώπου ἔχει προχωρήσει εἰς τὸ δεύτερον μέσον μέχρι τοῦ σημείου D, (διανυομένου διαστήματος $O_1D = v_2t$.) "Ετσι τὸ νέον μέτωπον κύματος εἰς τὸ δεύτερον μέσον εἶναι τὸ O_2D. Ἐκ τῶν γωνιῶν $\alpha = \alpha'$ καὶ $\beta = \beta''$ $(= O_1O_2D)$ προκύπτει καὶ

$$\frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\beta} = \frac{\eta\mu\alpha'}{\eta\mu\beta''} = \frac{AO_2}{O_1D} = \frac{v_1t}{v_2t} = \frac{v_1}{v_2}$$

Εἶναι λοιπὸν ὁ λόγος τοῦ ἡμιτόνου τῆς γωνίας προσπτώσεως πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας διαθλάσεως ἴσος μὲ τὸν λόγον τῆς ταχύτητος v_1 εἰς πρῶτον μέσον πρὸς τὴν ταχύτητα v_2 εἰς τὸ δεύτερον, ἤτοι σταθερός (νόμος τῆς διαθλάσεως).

XII. Ἀκουστικὰ φαινόμενα

§ 72 Παραγωγὴ καὶ μετάδοσις ἤχων. α) ***Ἦχοι.*** Τὰ αἴτια ποὺ διεγείρουν ἀκουστικὰ αἰσθήματα τὰ λέμε ***ἤχους***. Οὗτοι ὀφείλονται εἰς παλμικὰς κινήσεις ἐλαστικῶν σωμάτων στερεῶν ἢ ἀερίων καὶ σπανιώτερον ὑγρῶν. Αἱ συχνότητες τῶν ἐλαστικῶν παλμικῶν κινήσεων ποικίλλουν ἀπὸ κλάσματα τοῦ 1 Hz (Herz), ἤτοι 1 παλμοῦ κατὰ δευτερόλεπτον (sec^{-1}), μέχρι ὁλοκλήρων ἑκατομμυρίων Hz. Πολὺ μικρᾶς συχνότητος εἶναι αἱ ταλαντώσεις ποὺ προκαλοῦνται ἀπὸ κινητῆρας, ἀνέμους, σεισμικὰς δονήσεις τοῦ ἐδάφους καὶ τῶν ἐπ' αὐτοῦ οἰκοδομημάτων. Ἐκ τῆς τόσον ἐκτεταμένης περιοχῆς συχνοτήτων τῶν ἐλαστικῶν ταλαντώσεων μόνον ἓν περιωρισμένον τμῆμα αὐτῶν διεγείρει ἀκουστικὰ αἰσθήματα καὶ μπορεῖ νὰ ἐκδηλώνεται ὡς ἦχος. "Οταν ἡ συχνότης τῆς ἐλαστικῆς ταλαντώσεως εἶναι μεγαλυτέρα ἑνὸς ὁρίου, δὲν διεγείρεται πλέον ἀκουστικὸν αἴσθημα. Λέμε τότε ὅτι αἱ ταλαντώσεις αὐταὶ παράγουν ***ὑπερήχους***. Ἐξ ἄλλου καὶ αἱ ταλαντώσεις μὲ συχνότητας κάτω μιᾶς ὡρισμένης τιμῆς παύουν νὰ διεγείρουν ἀκουστικὸν αἴσθημα καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέμε ὅτι πρόκειται περὶ *ὑποήχων*.

β) ***Μετάδοσις ἤχων***. Ἡ παλμικὴ κίνησις ἠχογόνου σώματος μεταδίδεται εἰς τὸν περὶ αὐτὸ ἀέρα καὶ παράγει εἰς αὐτὸν ἀλληλοδιαδοχικὰ πυκνώματα καὶ ἀραιώματα (διαμήκη ἐλαστικὰ κύματα), τὰ ὁποῖα φθάνουν εἰς τὸ οὖς καὶ τὸ διεγείρουν, ἐφόσον ἡ συχνότης των ποικίλλει μεταξὺ τῶν κατὰ τ' ἀνωτέρω ὁρικῶν τιμῶν τῶν ἠχητικῶν συχνοτήτων. Διὰ τὴν μετάδοσιν λοιπὸν ἤχου εἶναι ἀπαραίτητος ἡ μεσολάβησις ὑλικοῦ σώματος (συνήθως ἀέρος). Κώδων κρουόμενος ὑπὸ τὸν κώδωνα ἀεραντλίας παύει νὰ ἀκούεται, ὅταν ἀφαιρεθῇ ὁ γύρω του ἀήρ, ἐφόσον δὲν μεσολαβεῖ μεταξὺ τοῦ ἠχοῦντος κώδωνος καὶ τοῦ ὠτὸς ἐλαστικὸν ὑλικόν. Σύνηθες μέσον μεταδόσεως τοῦ ἤχου εἶναι ὁ ἀήρ· εἰς τοῦτον τὰ ἠχητικὰ κύματα διαδίδονται τόσον καλύτερον, ὅσον ἡσυχώτερος εἶναι (ἀπηλλαγμένος ἀπὸ ρεύματα ποὺ γεννῶνται κατ' ἀνομοιόμορφον θέρμανσιν αὐτοῦ· δι' αὐτὸ ἀκούομεν εὐκρινέστερον τὴν νύκτα παρὰ τὴν ἡμέραν). Τὰ μαλακὰ καὶ ἀραιὰ σώματα (τάπητες, κουρτίνες) ἀπορροφοῦν τὰ προσπίπτοντα ἐπ' αὐτῶν ἠχητικὰ κύματα (πρβλ. στ).

γ) ***Ταχύτης μεταδόσεως ἤχου***. Δεδομένου ὅτι ὁ ἦχος ὀφείλεται εἰς ταλαντώσεις, αἱ ὁποῖαι μεταδίδονται διὰ μέσου ἐλαστικῶν σωμάτων (ὡς εἶναι ὁ ἀήρ, τὸ ὕδωρ, τὸ ἔδαφος) ὑπὸ μορφὴν διαμήκων κυμάτων, ἡ ταχύτης μεταδόσεώς του θὰ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν ἐλαστικότητα τοῦ μέσου (§ 67,στ).

1. Ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα μπορεῖ νὰ προσδιορισθῇ εὔκολα μὲ μέτρησιν τοῦ χρόνου, εἰς τὸν ὁποῖον τὰ ἠχητικὰ κύματα διατρέχουν τὴν ἀπόστασιν μεταξὺ ἠχογόνου πηγῆς καὶ παρατηρητοῦ ποὺ δέχεται τὸν ἦχον. Ἔτσι οἱ Humbolt καὶ Arago ἐπέτυχον ἤδη ἀπὸ τοῦ 1822 νὰ προσδιορίσουν ἀκριβῶς τὴν ταχύτητα τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα μὲ τὸ νὰ μετροῦν τὸν χρόνον ποὺ ἐμεσολάβει μεταξὺ τῆς λάμψεως καὶ τοῦ κρότου πυροβόλου, τὸ ὁποῖον ἐξεπυρσοκρότει εἰς ἀκριβῶς μετρημένην ἀπόστασιν· (ἐπειδὴ λάμψις καὶ κρότος παράγονται συγχρόνως κατὰ τὴν ἐκπυρσοκρότησιν καὶ ἐπειδὴ ἡ λάμψις μπορεῖ νὰ θεωρηθῇ ὡς μεταδιδομένη αὐτοστιγμεὶ εἰς ἀποστάσεις ὡς ἡ ἀπὸ τοῦ πυροβόλου, διὰ τοῦτο ὁ χρόνος ποὺ μεσολαβεῖ μεταξὺ λάμψεως καὶ κρότου πρέπει νὰ εἶναι ὁ χρόνος ποὺ χρειάζεται ὁ ἦχος (κρότος) διὰ νὰ διατρέξῃ τὴν ἀπόστασιν ἀπὸ τὸ πυροβόλον). Ἀπὸ τὰς πειραματικὰς αὐτὰς μετρήσεις εὑρίσκεται ὅτι ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς συχνότητος τῆς ταλαντώσεως, εἰς τὴν ὁποίαν ὀφείλεται, ὡς καὶ ἀπὸ τὴν πίεσιν τοῦ ἀέρος, ἀλλ' ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν θερμοκρασίαν αὐτοῦ. Κατὰ ταῦτα ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς ἀέρα κανονικῆς ὑγρασίας ὑπὸ θερμοκρασίαν Θ, ἐκφρα-

ζομένην εἰς βαθμοὺς κλίμακος Κελσίου, εἶναι: $c=331\sqrt{1+0{,}004\,\Theta}$.

Ὅταν τὸ ἠχογόνον σῶμα κινεῖται μὲ *ὑπερηχητικὴν* ταχύτητα (ὅπως συμβαίνει εἰς βλήματα, ἀεριοπροωθούμενα, πυραύλους) ἀκούομεν κατὰ τὴν διέλευσιν τοῦ σώματος τὸν κανονικὸν κρότον αὐτοῦ καὶ μετ' ὀλίγον ἕνα ὑπόκωφον κρότον. Τοῦτο προέρχεται ἐκ τοῦ ὅτι ὁ κρότος ποὺ παράγεται κατὰ τὴν διάσχισιν τοῦ ἀέρος ἀπὸ βλῆμα ἔρχεται μετ' αὐτὸ κατὰ τὴν κίνησίν του. Ἐκτὸς τούτου τὰ καθέκαστα σημεῖα τῆς τροχιᾶς τοῦ βλήματος καθίστανται σημεῖα ἐκπομπῆς σφαιρικῶν κυμάτων, τὰ ὁποῖα ἐξαπλώνονται πρὸς ὅλας τὰς διευθύνσεις μὲ τὴν κανονικὴν ταχύτητα τοῦ ἤχου. Ἔτσι προκύπτει περιοχὴ ἤχου περικλειομένη ἀπὸ κωνικὸν μανδύαν (σχ. 196). Ὁ πρῶτος κρότος ποὺ ἀκούομεν ὀφείλεται εἰς τὰ κύματα αὐτά, ἐνῶ ὁ δεύτερος παράγεται ἀπὸ τὰ ἐρχόμενα μετὰ τὸ βλῆμα ἠχητικὰ κύματα.

2. Προκειμένου περὶ ἄλλων ὑλικῶν μέσων, εὑρέθη ὅτι ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου ἔχει διαφόρους τιμάς, ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὰς παρεχομένας εἰς τὸν ἑπόμ. πίνακα:

Σχ. 196

Πίναξ τιμῶν ταχύτητος ἤχου	εἰς m/sec
Εἰς τὸν ἀέρα ὑπὸ θερμοκρ. 0°C	331
» ὑδρογόνον » »	1261
» διοξείδον ἄνθρακος » »	250
» ὕδωρ » » 15°C	1450
» θάλασσαν » » »	1503
» ὕαλον περὶ τὰ	5000
» φελλὸν » »	500
» χάλυβα » »	5000
» ἀργίλιον » »	5104
» καουτσοὺκ	25 70

Θεωρητικὰ ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τυχὸν ὑλικὸν ὑπολογίζεται σύμφωνα μὲ τὴν σχέσιν (85): $c=\sqrt{E/\varrho}$. Κατ' αὐτὴν ὑπολογίζεται ὅτι θὰ εἶναι π.χ. εἰς τὸν μόλυβδον: $c=\sqrt{1800\ (\mathrm{kg^*/mm^2})/11{,}3\ (\mathrm{g/cm})^3}=1250$ m/sec

Πειραματικῶς ἡ αὐτὴ ταχύτης εὑρίσκεται ἴση μὲ: 1300 m/s. Ἡ προσέγγισις τῆς θεωρητικῶς προκυπτούσης τιμῆς πρὸς τὴν πειραματικῶς προσδιοριζομένην εἶναι τόση, ὥστε νὰ μὴ τίθεται ὑπὸ ἀμφισβήτησιν ἡ ἰσχὺς τοῦ τύπου (85).— Προκειμένου περὶ ὑγρῶν, ὁ καθορισμὸς τῆς ταχύτητος ἤχου θεωρητικῶς γίνεται μὲ τὸν αὐτὸν τύπον, ἂν ἀντὶ τοῦ μέτρου ἐλαστικότητος E τῶν στερεῶν λάβωμεν τὸ μέτρον συμπιεστικότητος τῶν ὑγρῶν, δηλ. τὸ ἀντίστροφον τοῦ συντελεστοῦ συμπιέσεως, ἤτοι τῆς συστολῆς ποὺ ὑφίσταται ἡ μονὰς ὄγκου τοῦ ὑγροῦ ὑπὸ τὴν πίεσιν μιᾶς ἀτμοσφαίρας. Ἔτσι π.χ. διὰ τὸ ὕδωρ ποὺ ἔχει συντελεστὴν συμπιέσεως 0,00005 (Atm^{-1}) καὶ ἑπομένως μέτρον συμπιεστικότητος 20000 (Atm) θὰ εἶναι:

$$c=\sqrt{20.000(\mathrm{Atm})/1\ (\mathrm{gr/cm^3})}=\sqrt{20000.1{,}013.10^6(\mathrm{dyn.cm^{-2}})/(\mathrm{gr\ cm^{-3}})}=1450\mathrm{m/sec}.$$

Εἰς τὰ ἀέρια τέλος πρὸς ὑπολογισμὸν τῆς ταχύτητος μεταδόσεως τοῦ ἤχου πρέπει ἀντὶ τοῦ E τοῦ τύπου (85) νὰ ληφθῇ ἡ πίεσις p τοῦ ἀερίου, διότι, ὅπως τὸ μέτρον ἐλαστικότητος στερεοῦ παρέχει τὴν δύναμιν ποὺ θὰ ἐπέφερε ἐπιβράχυνσιν ἴσην πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ μήκους ράβδου τομῆς ἴσης μὲ τὴν μονάδα, ἔτσι καὶ ἡ πίεσις τοῦ ἀερίου, ἐφαρμοζομένη ἐκ νέου ἐπ' αὐτοῦ, παρέχει τὴν δύναμιν ποὺ, ἐνεργοῦσα ἐπὶ ἀερίος στήλης τομῆς $1\mathrm{cm}^2$, θὰ ἐπέφερε ἐπιβράχυνσιν τῆς στήλης εἰς τὸ ἥμισυ της. Θὰ εἶναι ἑπομένως $c=\sqrt{p/\varrho}$. Αἱ κατὰ τὸν τύπον αὐτὸν ὑπολογιζόμεναι ταχύτητες ὑπολείπονται τῶν πειραματικῶς προσδιοριζομένων, ἐπειδὴ τὰ παραγόμενα ἠχητικὰ κύματα συνοδεύονται ἀπὸ *ἀδιαβατικὰς* μεταβο-

λὰς τοῦ ἀερίου, κατὰ τας ὁποίας ἡ μεταξὺ πιέσεως καὶ ὄγκου σχέσις δὲν
καθορίζεται ἀπὸ τὸν νόμον Boyle-Mariotte (§ 54,α), ἀλλὰ ἀπὸ τὸν τοῦ Poisson,
κατὰ τὸν ὁποῖον εἶναι $pV^{\kappa} =$ σταθ. (βλ. Θερμαντικὸν § 33,γ). Δι' ἱκανοποιητικὴν
συμφωνίαν τῶν ὑπολογιζομένων τιμῶν πρὸς τὰς πειραματικῶς καθοριζομένας
πρέπει ὁ ὑπολογισμὸς νὰ γίνεται κατὰ τὸν τύπον ποὺ διετύπωσε τὸ 1816 ὁ
Laplace : $c=\sqrt{p_0(1+0,004\theta)c_p/c_v \cdot \varrho}$ ὅπου $c_p/c_v (=\kappa)$ παριστάνει τὸν λόγον τῆς
εἰδικῆς θερμότητος τοῦ ἀερίου ὑπὸ σταθερὰν πίεσιν πρὸς τὴν ὑπὸ σταθερὸν ὄγκον.

δ) ***Φαινόμενα ἀνακλάσεως ἤχου Ἠχὼ καὶ Ἀντήχησις.*** Ὅταν κατὰ
τὴν ἐξάπλωσίν του γύρω ἀπὸ τὴν ἠχητικὴν πηγήν, ὁ ἦχος συναντᾶ
μέσον ἄλλης πυκνότητος (τοῖχον, κλυτεῖς βουνῶν) ἀνακλᾶται ἐπὶ τῆς
ἐπιφανείας τούτου σύμφωνα μὲ τὸν νόμον ποὺ ἀνεπτύχθη εἰς τὴν §71,ε.
Ἂν ἡ ἀπόστασις τοῦ ἐμποδίου εἶναι μεγαλυτέρα τῶν 17 μέτρων, ὁ
ἐξ ἀνακλάσεως ἦχος ἀκούεται μετὰ τὴν ἀπόσβεσιν τοῦ μεταισθήμα-
τος (ποὺ διαρκεῖ 0,1 sec) τοῦ ἀπ' εὐθείας ἤχου. Ἕνεκα τούτου ἀ-
κούεται τότε νὰ ἐπαναλαμβάνεται ὁ ἀπ' εὐθείας ἦχος Τὸ φαινόμε-
νον τοῦτο ὀνομάζεται ***ἠχώ***. Ἂν ἡ ἀπόστασις εἶναι μικροτέρα καὶ ὁ
ἐξ ἀνακλάσεως ἦχος ἔρχεται εἰς τὸ οὖς, ἐνῶ ἀκόμη ὑφίσταται τὸ με-
ταίσθημα τοῦ ἀπ' εὐθείας ἤχου, λαμβάνει χώραν ἀνάμιξις τοῦ ἑνὸς
μὲ τὸν ἄλλον, τὴν ὁποίαν ὀνομάζομεν ***ἀντήχησιν***. Ἡ ἀντήχησις εἶναι
ἐξυπηρετική, ὅταν, ὅπως γίνεται εἰς μικρὰς αἰθούσας, ὁ ἐξ ἀνακλά-
σεως ἦχος φθάνει εἰς τὸ οὖς τόσον σύντομα μετὰ τὸν ἀπ' εὐθείας,
ὥστε νὰ τὸν γεμίζη καὶ νὰ τὸν ἐνισχύη· (χωρὶς ἀντήχησιν, ὅπως γί-
νεται εἰς ἀνοικτὸν χῶρον, ἡ φωνὴ εἶναι «κούφια»). Εἰς μεγάλας
ὅμως αἰθούσας ἡ ἀντήχησις φθάνει τόσον ἀργά, ὥστε νὰ τὴν προ-
λαμβάνη ἑπόμενος ἀπ' εὐθείας ἦχος, μὲ τὸν ὁποῖον συνακουομένη
προκαλεῖ σύγχυσιν. Ἕνεκα τούτου ἐπιδιώκεται τότε ἡ ἀπόσβεσις τῆς
ἀντηχήσεως καὶ πρὸς τοῦτο ἐπενδύονται αἱ αἴθουσαι αὐταὶ μὲ μα-
λακὰ ὑφάσματα (κουρτίνες) ποὺ ἀπορροφοῦν τοὺς προσπίπτοντας
ἐπ' αὐτῶν ἤχους· (εἰς εὐρείας αἰθούσας, π.χ. ἐκκλησσίας, εἶναι δύ-
σκολον νὰ συνομιλήσουν δύο ἄτομα ποὺ στέκονται μακρὰν τὸ ἓν
ἀπὸ τὸ ἄλλο, ὅταν ἡ αἴθουσα εἶναι κενή, ἐνῶ, ὅταν εἶναι πλήρης
ἀκροατῶν, δὲν συμβαίνει τοῦτο, διότι ἡ ἀντήχησις ἀπορροφᾶται)

Ἡ ἀνάκλασις ἤχου εὑρίσκει ἐφαρμογὴν εἰς ἀκουστικὰ κέρατα, ἤτοι σω-
λῆνας τοιαύτης μορφῆς, ὥστε οἱ εἰς τὸ ἓν ἄνοιγμά των παραγόμενοι ἦχοι νὰ ἀνα-
κλῶνται εἰς τὰ τοιχώματά των καὶ νὰ παίρνουν τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἄξονος τοῦ
σωλῆνος μὲ τὴν ὁποίαν νὰ ἐξέρχωνται ἀπὸ ἄλλο ἄνοιγμα καὶ νὰ φθάνουν εἰς
μεγάλας ἀποστάσεις κατὰ τὴν διεύθυνσιν αὐτήν. Ἐφαρμογὴν ἐπίσης τῆς ἀνα-
κλάσεως ἤχου ἔχομεν εἰς τὸ ***ἠχοβυθόμετρον***, ἤτοι ὄργανον ποὺ σημειώνει τὸν ἀπ'
εὐθείας ἦχον ποὺ παράγεται εἰς τὰ ὕφαλα τοῦ πλοίου καὶ μετὰ χρόνον t τὴν
ἐπανάληψιν αὐτοῦ ἐξ ἀνακλάσεως εἰς τὸν πυθμένα τῆς θαλάσσης. (Γνωστοῦ
ὄντος ὅτι ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὴν θάλασσαν εἶναι 1503 m/s, ὑπολογίζομεν
τὸ βάθος x, ἂν λάβωμεν τὸν χρόνον t εἰς sec, μὲ τὸν τύπον : $x=1503 . t/2$ m).

ε) ***Διάθλασις ἤχου.*** Ὅταν ὁ ἦχος κατὰ τὴν ἐξάπλωσίν του εἰσδύει ἀπὸ ἑνὸς μέσου εἰς ἄλλο, ὅπου ἡ ταχύτης τῆς διαδόσεως του εἶναι διάφορος, ὑφίσταται μεταβολὴν τῆς διευθύνσεως τῶν ἀκτίνων διαδόσεώς του σύμφωνα μὲ τὸν νόμον τῆς διαθλάσεως ποὺ ἐκφράζει ἡ σχέσις : $\eta\mu\alpha_1 : \eta\mu\alpha_2 = c_1 : c_2$ (§ 71,ε). Εἰς διαδοχικὰ στρώματα τοῦ ἀέρος μὲ βαθμηδὸν μεταβαλλομένην θερμοκρασίαν (ἑπομένως καὶ πυκνότητα ὡς καὶ ταχύτητα διαδόσεως τοῦ ἤχου) λαμβάνει χώραν, ὅπως καὶ εἰς τὸ φῶς, συνεχὴς καμπύλωσις τῶν ἀκτίνων διαδόσεως τοῦ ἤχου. Τοῦτο ἔχει μεγάλην σημασίαν διὰ τὴν ἀπόστασιν, εἰς τὴν ὁποίαν γίνεται αἰσθητὸς ὁ ἦχος. Ἂν ἡ θερμοκρασία τοῦ ἀέρος αὐξάνεται μετὰ τοῦ ὕψους, τότε ἀκτὶς διαδόσεως ἤχου ποὺ ἔχει πλαγίαν διεύθυνσιν πρὸς τὰ ἄνω ἀλλάζει διεύθυνσιν (ἀπομακρυνομένη συνεχῶς τῆς καθέτου εἰς ἑκάστην τῶν διαδοχικῶν θέσεων προσπτώσεως) μέχρις ὅτου λάβῃ διεύθυνσιν ποὺ σχηματίζει γωνίαν διαθλάσεως 90°. Τότε πλέον δὲν μπορεῖ νὰ εἰσδύσῃ εἰς τὸ ἀραιότερον μέσον, ἀλλ' ἐπιστρέφει ὁλικῶς εἰς τὸ ἐξ οὗ προέρχεται, ἤτοι ὑφίσταται, ὅπως λέμε, ***ὁλικὴν ἀνάκλασιν***, καὶ ἐπιστρέφει μὲ κατοπτρικὴν συμμετρίαν πάλιν πρὸς τὸ ἔδαφος (σχ. 197). Ἐπειδὴ ὁ ἦχος εἰς τὰ ἀνώτερα στρώματα τῆς ἀτμοσφαίρας ἀπορροφᾶται πολὺ ὀλιγώτερον ἀπ' ὅ,τι ὁ παρὰ τὸ ἔδαφος διαδιδόμενος, διὰ τοῦτο ἡ ἀπόστασις, εἰς τὴν ὁποίαν μπορεῖ νὰ εἶναι αἰσθητὰ τὰ ἐξ ὁλικῆς ἀνακλάσεως ἠχητικὰ κύματα, εἶναι πολὺ μεγαλυτέρα τῆς ἀποστάσεως ποὺ φθάνουν τὰ παρὰ τὸ ἔδαφος. Ἔτσι ἐξηγεῖται τὸ φαινόμενον ποὺ παρατηρεῖται εἰς σφοδρὰς ἐκρήξεις, κατὰ τὸ ὁποῖον γύρω ἀπὸ ἠχογόνον πηγὴν Ο, ὅπου ἀκούεται ὁ παρὰ τὸ ἔδαφος διαδιδόμενος ἦχος, ἀκολουθεῖ περιοχή, εἰς τὴν ὁποίαν δὲν ἀκούεται (ζώνη σιγῆς) καὶ μετ' αὐτὴν (εἰς μεγαλυτέραν ἀπόστασιν) ἄλλη (εἰς τὸ σχῆμα πέραν τῶν 200 km) ὅπου ἀκούεται πάλιν ὁ ἦχος, φθάνων ἐκεῖ δι' ὁλικῆς ἀνακλάσεως.

Σχ. 197

στ) Ἀπορρόφησις ἤχων. Τὰ ἠχητικὰ κύματα ὑφίστανται εἰς τὸν ἀέρα (διὰ μέσου τοῦ ὁποίου διαδίδονται) βαθμιαίαν ἐλάττωσιν τῆς κινητικῆς των ἐνεργείας μέχρι τελείας ἀποσβέσεως, ἕνεκα τῆς ἐσωτερικῆς τριβῆς τῶν παλλομένων σωματιδίων τοῦ ἀέρος. Ἡ ἀπόσβεσις τῶν ἠχητικῶν κυμάτων γίνεται πολὺ ταχύτερον, ὅταν προσπίπτουν εἰς πορώδη καὶ μαλακὰ σώματα, ὡς εἶναι οἱ τάπητες, τὰ πιλήματα κ.ἄ. Τὸ φαινόμενον αὐτὸ τὸ λέμε ***ἀπορρόφησιν*** καὶ εἴδαμε παραπάνω ὅτι τὸ χρησιμοποιοῦμεν πρὸς ἀπόσβεσιν τῆς ἀντηχήσεως.

ζ) Παράθλασις ἤχου. Ὅπως εἴπαμε (§ 71,γ) διὰ τὴν ἐκδήλωσιν φαινομένων παραθλάσεως πρέπει αἱ διαστάσεις ἀνοίγματος ἢ ἐμποδίου νὰ εἶναι τῆς αὐτῆς τάξεως μεγέθους μὲ τὸ μῆκος κύματος τῆς κυμάνσεως. Ἔτσι εἰς τὰ ἠχητικὰ κύματα ποὺ τὰ μήκη των εἶναι τῆς τάξεως μεγέθους μέτρου (εἶναι π.χ. $\lambda = 3$m εἰς ἦχον 100 Hz καὶ $\lambda = 0{,}3$ m, εἰς τοιοῦτον 1000 Hz, ἐνῶ εἰς τὸ φῶς δὲν ὑπερβαίνει τὰ ὀλίγα δέκατα τοῦ μικροῦ), ἡ παράθλασις γίνεται κατὰ κανόνα αἰσθητή. Ἀκούομεν τοὺς ἤχους ὄπισθεν τοίχων ἢ παραπετασμάτων, ἐνῶ δὲν βλέπομεν τὸ ἠχογόνον σῶμα. Τοῦτο γίνεται διότι, ὁ ἦχος παραθλᾶται γύρω ἀπὸ τὰ συνήθη ἐμπόδια, τῶν ὁποίων αἱ διαστάσεις δὲν εἶναι πολὺ μεγάλαι σχετικῶς πρὸς τὸ μῆκος κύματος τοῦ ἤχου. Λόγω παραθλάσεων καὶ διαχύσεων (πολλαπλῶν ἀκανονίστων ἀνακλάσεων) ποὺ ὑφίστανται τὰ ἠχητικὰ κύματα εἰς θέσεις τοῦ ἀέρος ποὺ θερμαίνονται ἀκανονίστως ἢ ἔχουν ὑγρασίαν διάφορον τῆς τοῦ περιβάλλοντος, ἡ ἠχητικὴ ἐνέργεια κατὰ τὴν διεύθυνσιν ποὺ γίνονται αἱ παραθλάσεις ἐλαττώνεται. Ἕνεκα τούτου ἡ ἐμβέλεια τοῦ ἤχου, ἤτοι ἡ ἀπόστασις μέχρι τῆς ὁποίας φθάνουν τὰ ἠχητικὰ κύματα) εἶναι μεγαλυτέρα κατὰ τὴν νύκτα ἢ καὶ νεφοσκεπεῖς ἡμέρας, ὁπότε ἡ παράγουσα τὰς ἀνωμαλίας αὐτὰς ἡλιακὴ ἀκτινοβολία δὲν ὑπάρχει. Ἀντιθέτως, ὅταν βρέχῃ ἢ χιονίζῃ, ἀκούομεν ἀσθενέστερον διὰ τὴν αὐτὴν αἰτίαν. Ὑάλινον ποτήριον, κρουόμενον κενὸν ἢ πλῆρες ἀμιγοῦς ὑγροῦ κουδουνίζει, ἐνῷ, ἂν εἶναι γεμᾶτο μὲ ἀεριοῦχον ὑγρὸν (μπύραν), ἠχεῖ ὑποκώφως λόγῳ ἐξασθενίσεως τῶν ἠχητικῶν κυμάτων εἰς τὰς φυσαλίδας τοῦ ἀερίου ποὺ ἐγκλείει.

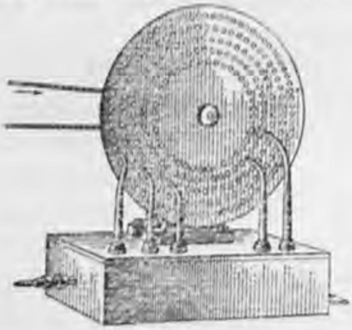
§ 73. Ἠχοαισθήματα. ***α) Θόρυβοι καὶ κρότοι, τόνοι καὶ φθόγγοι.*** Ἀπὸ τὰ αἰσθήματα ποὺ μᾶς διεγείρουν τὰ ἠχητικὰ κύματα διακρίνομεν τοὺς ἤχους εἰς θορύβους καὶ κρότους καὶ εἰς τόνους καὶ φθόγγους. Κάθε ***θόρυβος*** προέρχεται ἀπὸ τὴν σύγχρονον ἐπίδρασιν ἀκανονίστως συνεξαρτημένων ταλαντώσεων, αἱ ὁποῖαι ὡς ἐκ τούτου παράγουν ἠχητικὸν κῦμα χωρὶς περιοδικότητα. Ὡς ***κρότον*** αἰσθανόμεθα τὴν ἀπότομον καὶ μικρᾶς διαρκείας ταλάντωσιν πυκνότητος τοῦ ἀέρος, ἓν εἶδος «ὠθισμοῦ ἤχου».

Ἀντιθέτως ὡς ***τόνους*** χαρακτηρίζομεν τοὺς ἤχους ποὺ ὀφείλονται ἕκαστος εἰς μίαν ἁπλῆν ἁρμονικὴν ἢ ἡμιτονοειδῆ ταλάντωσιν ὡρισμένης συχνότητος. Ἦχος ποὺ προέρχεται ἀπὸ σύγχρονον παραγωγὴν περισσοτέρων ἡμιτονοειδῶν ταλαντώσεων μὲ τυχούσας συχνότητας ὀνομάζεται ***μῖγμα τόνων***. Ἂν οἱ ἐπὶ μέρους τόνοι τοῦ μίγματος εἶναι ἁρμονικοί, ἤτοι ἔχουν ἕκαστος συχνότητα, ἡ ὁποία εἶναι ἁπλοῦν πολ/σιον τῆς συχνότητος ἑνὸς ἐξ αὐτῶν, τοῦ ***θεμελιώδους*** τόνου, ὁ συνιστάμενος ἦχος καλεῖται ***φθόγγος***. Φθόγγοι μὲ θεμελιώδεις διαφόρων συχνοτήτων ἀποτελοῦν ***μίγματα φθόγγων***.

Ἀπὸ τὸν δοθέντα καθορισμὸν εἶναι εὔλογον ὅτι ἡ περαιτέρω ἐξέτασις ἀφορᾷ εἰς τοὺς τόνους καὶ φθόγγους, ἀφοῦ εἰς αὐτοὺς ὑπάρχουν κανονικότητες ποὺ μποροῦν νὰ μελετηθοῦν.

β) Αἰσθητικότης τοῦ ὠτός. Εἶναι ἐκπληκτικὸν ὅτι κάθε φθόγγος εἶναι τελείως ἀνεξάρτητος ἀπὸ τὰς διαφορὰς φάσεων μεταξὺ τῶν καθέκαστα ἐπὶ μέρους ταλαντώσεων ποὺ συνιστοῦν τὸν φθόγγον. Τὸ οὖς λοιπὸν δὲν ἀντιδρᾷ εἰς τὰς φάσεις ἢ τὴν συνισταμένην μορφὴν τῆς ταλαντώσεως, ἀλλὰ μόνον εἰς τὰ πλάτη τῶν ἐπὶ μέρους ταλαντώσεων. Τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὸ οὐσιῶδες διὰ τὴν πρόσληψιν ἤχων συστατικὸν τοῦ ὠτός, ἤτοι τὴν ***βασικὴν μεμβράνην,*** ἐπὶ τῆς ὁποίας βασίζονται πολυάριθμοι μικροσκοπικοὶ στυλίσκοι, ποὺ συνολικῶς ἀπαρτίζουν τὸ ***ὄργανον*** τοῦ Corti. Εἰς ἕκαστον στυλίσκον εἶναι τὸ ἄκρον μιᾶς νευρικῆς ἰνὸς ἐξ ἐκείνων ποὺ ἀναχωροῦν ἀπὸ τὸ εἰδικὸν διὰ τὴν ἀκοὴν κέντρον τοῦ ἐγκεφάλου. Κάθε στυλίσκος ἀντιστοίχως πρὸς τὸ μῆκος καὶ τὸ πάχος του (ποὺ εἶναι διάφορα εἰς τοὺς διαφόρους στυλίσκους) ἔχει ὡρισμένην ***ἰδιοσυχνότητα.*** Ἔτσι κάθε φθόγγος διεγείρει εἰς ταλάντωσιν τοὺς στυλίσκους ποὺ πάλλονται μὲ ἰδιοσυχνότητας ἴσας μὲ τὰς συχνότητας τῶν ἐπὶ μέρους τόνων ποὺ ἀποτελοῦν τὸν φθόγγον καὶ γενικώτερον τὸν σύνθετον ἦχον. Ἐπομένως τὸ διεγειρόμενον ἀκουστικὸν αἴσθημα ἀνταποκρίνεται πρὸς τὰς συχνότητας τῶν ταλαντώσεων ποὺ ἀποτελοῦν τὸν φθάνοντα εἰς τὸ οὖς ἦχον.

γ) Ὕψος τόνου. Τοὺς ἤχους τοὺς διακρίνομεν ἀπὸ τὴν ὀξύτητα ἢ βαρύτητα, ἀπὸ τὸ ἂν εἶναι ***ὑψηλοὶ*** ἢ ***χαμηλοί***. Τὸ γνώρισμα αὐτὸ τὸ λέμε ***ὕψος*** τοῦ ἤχου. Θὰ ἐξετάσωμεν τὸ γνώρισμα τοῦτο εἰς τοὺς ἁπλοῦς ἤχους, ἤτοι τοὺς τόνους. Πρὸς τοῦτο χρησιμοποιοῦμεν ὄργανον ποὺ ὀνομάζομεν ***σειρῆνα δι' ὀπῶν***. Τοῦτο ἀποτελεῖται ἀπὸ δίσκον, εἰς τὸν ὁποῖον κατὰ μῆκος συγκεντρικῶν περιφερειῶν ἔχουν ἀνοιγῆ ὀπαὶ εἰς ἴσας μεταξύ των ἀποστάσεις (σχ. 198)· ἔτσι εἰς ἑκάστην περιφέρειαν ἐντάσσεται ὡρισμένος ἀριθμὸς ὀπῶν ποὺ εἶναι μεγαλύτερος, ὅσον μεγαλυτέρα εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας. Ἔμπροσθεν ἑκάστης σειρᾶς ὀπῶν ἐκβάλλει αὐλός, διὰ μέσου τοῦ ὁποίου προσφυσσᾶται ἰσχυρὸν ρεῦμα ἀέρος. Ὅταν ὁ δίσκος περιστρέφεται, τὸ ρεῦμα τοῦ ἀέρος ὑφίσταται ἀλληλοδιαδόχως διακοπὰς καὶ ἀποκαταστάσεις ἀντιστοίχως πρὸς τὸ ἂν πρὸ τοῦ αὐτοῦ διέρχεται πλῆρες ἢ διάτρητον μέρος τοῦ δίσκου. Ἕνεκα τούτου εἰς τὴν ἄλλην ὄψιν τοῦ δίσκου ὁ ἀὴρ θὰ δέχεται μὲ ὡρισμένην ἑκάστοτε συχνότητα ὠθισμοὺς καὶ θὰ σχηματίζη ἀλληλοδιαδοχικὰ πυκνώματα καὶ ἀραιώματα ὡρισμένης περιοδικότητος. Ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν στροφῶν τοῦ δίσκου κατὰ δευτερόλεπτον καὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν ὀπῶν τῆς σειρᾶς, εἰς τὴν ὁποίαν γίνεται ἡ προσφύσησις τοῦ ἀερίου ρεύματος, εὑρίσκομεν τὸν κατὰ δευτερόλεπτον ἀριθμὸν τῶν πυκνωμάτων καὶ ἀραιωμάτων τοῦ ἀέρος, ἤτοι τὴν συχνότητα τῆς ταλαντώσεως. Ἔτσι εὑρίσκεται ὅτι ***τὸ ὕψος τοῦ παραγομένου τόνου εἶναι ἀνάλογον τῆς συχνότητος τῆς ταλαντώσεως***.



Σχ. 198

δ) Ὕψος τόνου ἠχητικῆς πηγῆς ποὺ πλησιάζει ἢ ἀπομακρύνεται. Ὁ ἦχος τῆς σειρῆνος ἀτμομηχανῆς ποὺ κινεῖται σχετικῶς πρὸς ἀκροατὴν ἀκούεται νὰ γίνεται ὑψηλότερος, ὅταν ἡ σειρὴν πλησιάζη καὶ χαμηλότερος, ὅταν ἀπομακρύνεται ἀπὸ τὸν ἀκροατήν. Τὸ φαινόμενον αὐτὸ ἐμελετήθη κατὰ πρῶτον ἀπὸ τὸν Doppler (1803—1853) καὶ διὰ τοῦτο χαρακτηρίζεται ὡς ***Ἀρχὴ τοῦ*** Doppler. Ἔχει γενικὴν ἰσχὺν εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις κατὰ τὸν χρόνον ποὺ πηγὴ ἐκπομπῆς κυμάτων μεταβάλλει τὴν ἀπόστασίν της ἀπὸ τὸν παρατηρητὴν (ἀκροατήν). Ἰσχύει δηλαδὴ πάντοτε ὅτι: ***ἡ συχνότης τῆς κυμάνσεως ποὺ διεγείρει αἰσθητήρια ὄργανα τοῦ παρατηρητοῦ γίνεται ὅλο καὶ μεγαλυτέρα, ἂν ἐλαττώνεται ἡ ἀπόστασις καὶ μικροτέρα, ἂν αὐξάνεται.***

Πρὸς ἐξήγησιν τοῦ φαινομένου Doppler θεωροῦμεν: 1. ***Ἠχογόνον πηγὴν ποὺ κινεῖται, πλησιάζουσα ἢ ἀπομακρυνομένη, σχετικῶς πρὸς ἀκίνητον παρατηρητήν.*** Ὅταν ἡ πηγὴ ἐκπομπῆς τόνου συχνότητος ν ***πλησιάζει*** πρὸς ἠρεμοῦντα παρατηρητὴν μὲ ταχύτητα c_π, τὰ ν μήκη κύματος ποὺ θὰ ἐγέμιζαν τὸ διάστημα c_η ποὺ διανύει ὁ ἦχος κατὰ δευτερόλεπτον συμμαζεύονται εἰς τὸ διάστη-

μα ($c_\eta - c_\pi$)· ἔτσι τὸ μῆκος κύματος $\lambda (= c_\eta / \nu)$ θὰ γίνεται: $\lambda' = (c_\eta - c_\pi) / \nu =$
$= (c_\eta : \nu) [1 - (c_\pi : c_\eta)]$. Ἀντιστοίχως ἡ συχνότης $(\nu = c_\eta / \lambda)$ θὰ γίνεται:
$\nu' = c_\eta : \lambda'$ καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι: $c_\eta : \nu' = (c_\eta : \nu) [1 - (c_\pi : c_\eta)]$, ἤτοι: (87)
$\nu' = \nu : [1 - (c_\pi / c_\eta)]$, δηλ. $\nu' > \nu$.
Εἶναι λοιπὸν ἡ συχνότης ν' τοῦ τόνου ποὺ δέχεται ὁ παρατηρητὴς μεγαλυτέρα
τῆς συχνότητος ν τοῦ τόνου ποὺ παράγει ἡ πηγή. Ἂν ἡ πηγὴ ***ἀπομακρύνεται***
ἀπὸ ἠρεμοῦντα παρατηρητήν, θὰ εἶναι ἀντιστοίχως: $\nu' = \nu : [1 + (c_\pi : c_\eta)]$ (87′)
ἤτοι: τὸ ὕψος τόνου ἀπομακρυνομένης πηγῆς γίνεται χαμηλότερον τοῦ παρα-
γομένου ὑπὸ τῆς πηγῆς. 2. ***Παρατηρητὴν ποὺ πλησιάζει ἢ ἀπομακρύνεται μὲ***
ταχύτητα c_π ***σχετικῶς πρὸς ἀκινητοῦσαν πηγήν, ἡ ὁποία παράγει τόνον συχνότη-***
τος ν. Ἂν εἶναι πάλιν c_η ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου καὶ λ τὸ μῆκος τῶν ἐκπεμπομέ-
νων κυμάτων, φθάνουν εἰς τὸ οὖς τοῦ παρατηρητοῦ, ὅταν εἶναι ἀκίνητος, ν κύ-
ματα καθ' ἕκαστον δευτερόλεπτον καὶ συνεπῶς εἶναι: $\nu = c_\eta / \lambda$. Ὅταν ὅμως
ὁ παρατηρητὴς πλησιάζει πρὸς τὴν ἀκίνητον πηγὴν μὲ ταχύτητα c_π, θὰ δέχεται
οὗτος κατὰ δευτερόλεπτον ν' κύματα, ἤτοι ὅσα χωροῦν εἰς τὸ διάστημα c_η καὶ
εἰς τὸ c_π· ἑπομένως ἡ συχνότης ν' τοῦ τόνου ποὺ δέχεται ὁ πλησιάζων τὴν
πηγὴν παρατηρητὴς θὰ εἶναι πάλιν: $\nu' > \nu$., διότι εἶναι:
$\nu' = (c_\eta + c_\pi) : \lambda$ ἢ $\nu' = (c_\eta : \lambda) [1 + (c_\pi : c_\eta)] = \nu (1 + c_\pi / c_\eta)$ (88)

Ἀντιθέτως, ἂν ὁ παρατηρητὴς ἀπομακρύνεται θὰ εἶναι: $\nu' < \nu$,
διότι εἶναι ἀντιστοίχως: $\nu' = \nu (1 - c_\pi / c_\eta)$. (88′)

ε) Ἔντασις ἤχου. Τὸ αἴσθημα ποὺ διεγείρει ὁ ἦχος ἐξαρτᾶται
καὶ ἀπὸ τὴν ***ἔντασιν*** αὐτοῦ. Διὰ τὸν καθορισμὸν τῆς ἐντάσεως
ἤχου, ἀναχωροῦμεν ἀπὸ τὴν ἔννοιαν τῆς ***ἰσχύος L*** ἠχογόνου πηγῆς.
Ὀνομάζομεν ***ἰσχὺν ἠχογόνου πηγῆς τὸ ποσὸν τῆς ἐνεργείας ταλαντώ-***
σεως ποὺ ἐκπέμπεται ἀπὸ τὴν πηγὴν εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου. Ἔτσι,
ὅπως ἰσχύει γενικῶς, ἡ ἰσχὺς ἠχογόνου πηγῆς θὰ ἐκφράζεται εἰς
erg/sec ἢ τὸ πολλαπλάσιον αὐτοῦ Joule/sec, ἤτοι εἰς Watt Βάσει
τοῦ ὁρισμοῦ τούτου τῆς ἰσχύος ἠχογόνου πηγῆς, ***ἡ ἔντασις I τοῦ***
παραγομένου ἤχου εἶναι τὸ ποσὸν ἐνεργείας ποὺ εἰς τὴν μονάδα τοῦ
χρόνου (1 sec) διέρχεται διὰ τῆς μονάδος ἐπιφανείας (1 cm²) ποὺ
κρατεῖται καθέτως πρὸς τὴν ἀκτῖνα διαδόσεως τοῦ ἠχητικοῦ κύματος.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον ἡ ἔντασις ἤχου ἔχει ὡς μονάδα μετρήσεώς της
τό: 1[Watt/cm²]. Ἂν θεωρήσωμεν κέντρον ἐκπομπῆς παλμικῆς κινήσεως, ἐπει-
δὴ αὕτη εἰς ἰσότροπον μέσον διαδίδεται ὁμοιομόρφως πρὸς ὅλας τὰς γύρω τοῦ
κέντρου διευθύνσεις, θὰ φθάσῃ μετὰ χρόνον t_1 εἰς τὴν ἐπιφάνειαν σφαίρας
ἀκτῖνος $r_1 = ct_1$ καὶ θὰ ἔχῃ εἰς τὴν ἀπόστασιν αὐτὴν ἀπὸ τὸ κέντρον ἔντασιν
$I_1 = L/4\pi r_1^2$ (ἂν L εἶναι ἡ ἰσχὺς τῆς ἠχογόνου πηγῆς ποὺ εὑρίσκεται εἰς τὸ θεω-
ρούμενον κέντρον)· μετὰ χρόνον t_2 ἡ παλμικὴ κίνησις θὰ ἔχῃ ἐξαπλωθῆ ἐπὶ τῆς
ἐπιφανείας σφαίρας ἀκτῖνος $r_2 = ct_2$ καὶ θὰ ἔχῃ εἰς τὴν ἀπόστασιν αὐτὴν ἔντα-
σιν: $I_2 = L/4\pi r_2^2$. Ἐκ τούτων προκύπτει: $I_1 : I_2 = r_2^2 : r_1^2$ (89)
ἤτοι: ***Ἡ ἔντασις τοῦ ἤχου εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τοῦ τετραγώνου τῆς ἀπο-***
στάσεως ἀπὸ τὴν ἠχογόνον πηγήν.

Ἡ κατὰ ταῦτα ταχεῖα ἐλάττωσις τῆς ἐντάσεως ἤχου ποὺ γίνεται, ὅταν
αὐξάνεται ἡ ἀπόστασις, ἰσχύει, ὅταν ὁ ἦχος διαδίδεται ὁμοιομόρφως πρὸς ὅλας

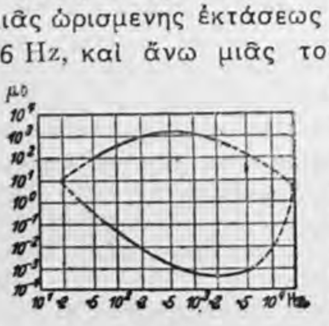
τὰς διευθύνσεις. Ἂν ὅμως τὰ ἠχητικὰ κύματα ὑποχρεώνωνται νὰ διαδίδωνται μόνον κατὰ μίαν διεύθυνσιν, π.χ. κατὰ μῆκος κυλινδρικοῦ σωλῆνος, ἡ ἔντασις τοῦ ἤχου δὲν ἐξασθενίζει παρὰ μόνον λόγω τῶν τριβῶν. Εἰς τοῦτο βασίζεται ἡ χρῆσις ***ἀκουστικῶν σωλήνων***, διὰ μέσου τῶν ὁποίων ἡ φωνὴ μπορεῖ νὰ ἀκουσθῇ εἰς μεγάλας ἀποστάσεις. Ἐξ ἄλλου, ἂν θεωρήσωμεν τὴν ἐνέργειαν καὶ μετ' αὐτῆς τὴν ἔντασιν τῆς ἠχογόνου πηγῆς καὶ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι αὕτη ὑπὸ μορφὴν κινητικῆς ἐνεργείας τῆς παλλομένης μάζης m εἶναι $^1/_2mv^2$, ὅπου $v=2\pi a/T$, ἂν a εἶναι τὸ πλάτος καὶ T ἡ περίοδος τῆς ταλαντώσεως, θὰ ἔχωμεν:

$$^1/_2\,mv^2=2\pi^2ma^2/T^2 \qquad (90)$$

Ὅθεν: ***ἡ ἐνέργεια ταλαντώσεως καὶ μετ' αὐτῆς ἡ ἔντασις ἤχου εἶναι ἀνάλογος τοῦ τετραγώνου τοῦ πλάτους τῆς ταλαντώσεως εἰς τὴν ὁποίαν ὀφείλεται ὁ ἦχος.***

Ἀλλὰ τὸ πλάτος τῆς ταλαντώσεως τοῦ ἀέρος εἶναι πλάτος τῆς μεταβολῆς τῆς πιέσεως ποὺ γίνεται εἰς τὸν ἀέρα μὲ τὸν σχηματισμὸν πυκνωμάτων καὶ ἀραιωμάτων (§67, ε). Ἔτσι ***ἡ ἔντασις ἤχου μπορεῖ νὰ συναχθῇ ἀπὸ τὸ πλάτος τῆς περιοδικῆς μεταβολῆς (πλάτος διακυμάνσεως) τῆς πιέσεως***, τὴν ὁποίαν, ὅπως ξέρουμε (§ 48,β), μετρᾶμε μὲ μονάδα τὸ microbar $[\mu b]=10^{-6}\,[Bar]=1[dyn/cm^2]$.

στ') Ἀκουστότης. Ἡ ἔντασις τοῦ ἀκουστικοῦ αἰσθήματος ποὺ διεγείρεται ἀπὸ ἦχον, μὲ μίαν λέξιν ἡ ***ἀκουστότης***, ἐξαρτᾶται, ὅπως εἶναι εὐνόητον, ἀπὸ τὴν ἔντασιν τοῦ ἤχου ἢ τὸ ἀνάλογον πρὸς αὐτὴν μέγεθος τοῦ πλάτους μεταβολῆς τῆς πιέσεως τοῦ ἀέρος ποὺ φέρει τὰ ἠχητικὰ κύματα εἰς τὸ οὖς. Ἡ ἐλαχίστη ἔντασις ἤχου ἢ τὸ ἐλάχιστον πλάτος διακυμάνσεως τῆς πιέσεως ἀέρος ποὺ ἀπαιτεῖται διὰ νὰ διεγερθῇ ἀκουστικὸν αἴσθημα προσδιορίζει τὸ ***κατώφλιον ἀκουστότητος***· τὸ ἀνώτατον ἐξ ἄλλου ὅριον τοῦ πλάτους διακυμάνσεως τῆς πιέσεως, πέραν τοῦ ὁποίου δὲν διεγείρεται ἀκουστικὸν αἴσθημα, ἀλλὰ τοιοῦτο πόνου, παρέχει τὸ ***κατώφλιον πόνου***. Μεταξὺ τῶν δύο τούτων ὁρικῶν τιμῶν τοῦ πλάτους διακυμάνσεως τῆς πιέσεως ἐκτείνεται ἡ ἀκουστότης ἤχου. Αὕτη δὲν εἶναι ἡ αὐτὴ δι' ὅλους τοὺς ἤχους, ἀλλ' ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὰ ὕψη αὐτῶν. Τὰ δύο ὅρια πλησιάζουν (ἡ ἀκουστότης ἐλαττώνεται καὶ τέλος παύει) εἰς ἤχους μικροτέρων ὑψῶν (ὑποήχους) καὶ τοιούτους μεγαλυτέρων (ὑπερήχους) μιᾶς ὡρισμενης ἐκτάσεως ὑψῶν. Κάτω ὡρισμένης τιμῆς ὕψους κάπου 16 Hz, καὶ ἄνω μιᾶς τοιαύτης, κάπου 16.000 Hz, αἱ ταλαντώσεις τοῦ ἐλαστικοῦ μέσου δὲν διεγείρουν ἀκουστικὸν αἴσθημα.



Σχ. 199

ζ) Πεδίον ἀκουστότητος. Παριστάνομεν γραφικῶς τὴν ὡς ἄνω συνάρτησιν, σημειώνοντες εἰς τὸν ἄξονα τῶν Χ ὀρθογωνίων συντεταγμένων (σχ. 199) τιμὰς τῆς συχνότητος (εἰς Hz) καὶ εἰς τὸν ἄξονα τῶν Ψ τὰς καθέκαστα ἀντιστοίχους δύο ὡς ἄνω ὁρικὰς τιμὰς τοῦ πλάτους μεταβολῆς τῆς πιέσεως (ἐκπεφρασμένης εἰς μb = microbar) μεταξὺ τῶν ὁποίων ὑφίσταται ἀκουστότης. Λαμβάνομεν ἔτσι δύο καμπύλας, τὴν μίαν διὰ τὰς μεγίστας τιμὰς ἀκουστότητος (κατώφλιον πόνου) καὶ τὴν ἄλλην διὰ τὰς ἐλαχίστας (κατώφλιον ἀκουστότητος).

Ἡ ἐπιφάνεια ποὺ περικλείουν αἱ δύο αὗται καμπύλαι ὁρίζει τὸ ***πεδίον ἀκουστότητος***, ἤτοι περιοχὴν ἐλαστικῶν ταλαντώσεων ποὺ διεγείρουν ἀκουστικὸν αἴσθημα. Ὅπως φαίνεται εἰς τὴν γραφικὴν αὐτὴν παράστασιν, ἡ μεγίστη ἀκουστότης ἀντιστοιχεῖ εἰς ἤχους συχνότητος γύρω ἀπὸ 2000 Hz. (Δι' ἦχον ὕψους 60 Hz ἀπαιτεῖται πλάτος διακυμάνσεως τῆς πιέσεως μεγαλύτερον τῶν 0,5 μb, ἐνῷ διὰ τοιοῦτον τῶν 2000 Hz ἀρκεῖ τὸ χιλιοστὸν τοῦ πλάτους τούτου, διὰ νὰ γίνῃ ἀκουστός. Καὶ ἐνῷ διὰ τὸν ἦχον τῶν 50 Hz παύει ἡ διέγερσις ἀκουστικοῦ αἰσθήματος, ὅταν τὸ πλάτος διακυμάνσεως τῆς πιέσεως ὑπερβῇ τὰ 100 μb, διὰ τοιοῦτον τῶν 2000 Hz πρέπει νὰ ὑπερβῇ τοῦτο τὰ 1000 μb διὰ νὰ μὴ διεγείρῃ ἀκουστικὸν αἴσθημα, ἀλλὰ τοιοῦτο πόνου).

η) Μέτρησις ἀκουστότητος. Ἡ ἱκανότης τοῦ ὠτὸς νὰ ἀντιλαμβάνεται ἤχους τῶν ἐπικρατεστέρων συχνοτήτων (ἤτοι ἤχους ὕψους ἀπὸ 250 μέχρις 4000 Hz) ἐκτείνεται εἰς πλάτη διακυμάνσεως τῆς πιέσεως ἀπὸ 10^{-4} μέχρι 10^{3} μb. Εἰς τὰ πλάτη αὐτὰ ἀντιστοιχοῦν ἐντάσεις ἤχου ἀπὸ 10^{-16} μέχρι 10^{-3} Watt/cm², ἤτοι ἐντάσεις, τῶν ὁποίων ἡ ἀνωτάτη εἶναι κάπου 10^{13} φορὰς μεγαλυτέρα τῆς κατωτάτης. Τοῦτο προέρχεται ἐκ τοῦ ὅτι ἡ ἔντασις τοῦ ὑποκειμενικοῦ αἰσθήματος ἑνὸς τόνου (ἠχοαισθήματος) μεταβάλλεται πολὺ ἀδρανέστερον ἀπὸ τὴν ἐνέργειαν τοῦ προσπίπτοντος ἠχητικοῦ κύματος, δηλαδὴ ἀπὸ τὴν ἔντασιν τοῦ ἤχου ἢ τὴν ἀντικειμενικῶς μετρουμένην ἔντασιν τῆς διεγέρσεως. Σχετικῶς ἰσχύει μὲ ἀρκετὴν προσέγγισιν ὁ ψυχοφυσικὸς νόμος Weber–Fechner, κατὰ τὸν ὁποῖον: ἡ ***ἀκουστότης*** A ***εἶναι ἀνάλογος τοῦ λογαρίθμου τῆς ἐντάσεως ἤχου I, μετρουμένης μὲ μονάδα τὴν ἔντασιν I_0 ποὺ πρέπει νὰ ἔχῃ ἦχος κατ' ἐλάχιστον, διὰ νὰ εἶναι ἀκουστός.*** Εἶναι λοιπόν:

$$A = \text{σταθ. λογ.} \, (I/I_0) \qquad (91)$$

Σύμφωνα μὲ τὸν νόμον τοῦτον ὁρίζεται ἡ μονὰς ἀκουστότητος, ἡ ὁποία ὀνομάζεται διεθνῶς phon ἀπὸ τὴν ἑλληνικὴν λέξιν φωνή. Διὰ τὸν καθορισμὸν τοῦ phon, λαμβάνεται ὡς βάσις τόνος ὕψους 1000 Hz καὶ ἐντάσεως I ἴσης πρὸς τὸ 10πλάσιον τοῦ κατωφλίου ἐρεθίσματος, ἤτοι τῆς ἐντάσεως I_0 ποὺ πρέπει κατ' ἐλάχιστον νὰ ἔχῃ ὁ τόνος τοῦ ὕψους τούτου διὰ νὰ γίνῃ ἀκουστός. Εἰς τὸν τόνον τοῦτον δίδεται τιμὴ ἀκουστότητος ἴση μὲ 10 phon. Εἰσάγομεν τὴν τιμὴν αὐτὴν εἰς τὴν σχέσιν (91) ἀντὶ τῆς σταθ. καὶ θὰ ἔχωμεν:

$$A = 10 \, \text{λογ} \, (I/I_0) \ \text{phon} \qquad (91')$$

Κατὰ ταῦτα τὸ κατώτατον ὅριον ἐντάσεως ἀκουστοῦ ἤχου (κατώφλιον ἐρεθίσματος), $I = I_0$, θὰ ἔχῃ ἀκουστότητα: $A_0 = 10 \, \text{λογ} \, 1 = 0$ phon. Δι' ἦχον ἐντάσεως $I = 100 \, I_0$ ἡ ἀκουστότης θὰ εἶναι: $A_{100} = 10 \, \text{λογ} \, 100 = 20$ phon, διὰ $I = 1000 \, I_0$ θὰ εἶναι: $A_{1000} = 10 \, \text{λογ} \, 1000 = 30$ phon κ.ο.κ. Ἐκ τούτου προκύπτει ὅτι: Ἐρέθισμα (ἦχος) ἐντάσεως 100πλασίας τῆς I_0 τοῦ κατωφλίου ἐρεθίσματος ἔχει ἀκουστότητα μόλις 2πλασίαν τῆς ἀκουστότητος τοῦ κατωφλίου τοῦ ἐρεθίσματος. Ἔτσι π.χ. 10 συριγμοί, καθεὶς τῶν ὁποίων ἔχει ἀκουστότητα 90 phon, παρέχουν, ἀκουόμενοι μαζί, ἕνα συριγμὸν ἀκουστότητος μόνον 100 phon. Τὸ ὅτι δηλ. κάθε συριγμὸς ἔχει ἀκουστότητα $A = 90$ phon, σημαίνει ὅτι ἔχει ἔντασιν I ποὺ σύμφωνα μὲ τὴν σχέσιν (91') θὰ εἶναι: $90 = 10 \, \text{λογ} \, (I/I_0)$ ἢ $\text{λογ} \, (I/I_0) = 9$ ἢ $I/I_0 = 10^9$ καὶ $I = 10^9 \, I_0$. Ἐπομένως οἱ 10 συριγμοὶ θὰ ἔχουν μαζὶ ἔντασιν: $10 \, I = 10.10^9 \, I_0 = 10^{10} \, I_0$ καὶ ἀκουστότητα: $A = 10 \, \text{λογ} \, (10^{10} \, I_0/I_0) = 10 \, . \, \text{λογ} \, 10^{10} = 10 \, . \, 10 = 100$ phon. Ἡ ἔντασις λοιπὸν τοῦ ἀκουστικοῦ αἰσθήματος εἰς τὸ θεωρούμενον παράδειγμα ἐλαττώνεται μόνον κατὰ 10 %, ἂν ἀπὸ τοὺς 10 συριγμοὺς ἀφήσωμεν μόνον τὸν ἕνα. Ἡ μεγίστη ἀκουστότης, ἐκείνη δηλαδὴ ἄνω τῆς ὁποίας ἔχομεν αἴσθημα πόνου καὶ ὄχι ἀκοῆς, εἶναι 130 phon, διότι ὁ λόγος I/I_0 τῶν ἐντάσεων τῶν ἀντιστοίχων ἤχων μπορεῖ νὰ γίνῃ τὸ πολὺ ἴσος μὲ 10^{13}. Εἰς τὴν ἀκουστότητα 0 phon τοῦ βασικοῦ τόνου τῶν 1000 Hz ἀντιστοιχεῖ ἔντασις 10^{-16} Watt/cm² ἢ πλάτος τῆς πιέσεως 2.10^{-4} dyn/cm². Εἰς τὸν ἑπόμενον πίνακα παρέχονται τιμαὶ τῆς ἀκουστότητος γνωστῶν ἤχων καὶ αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῶν σχετικῶν ἐντάσεων.

Πηγαὶ ἤχων	Ἀκουστότης Α εἰς phon	Σχετικὴ ἔντασις I/I_0	Πηγαὶ ἤχων	Ἀκουστότης Α εἰς phon	Σχετικὴ ἔντασις I/I_0
Μόλις ἀκουστός	0	1	Κραυγή	80	10^8
Ψυθιρισμός	10 - 20	10 - 100	Σφῦρα	100	10^{10}
Ὁμιλία	60	10^6	Κρότος ἀεροπλάν.	100 - 120	10^{10}-10^{12}
			ἀλγεινὸς κρότος	130	10^{13}

θ) Ἀνάλυσις ἤχου. Εἴδαμε εἰς τὴν § 69 ὅτι κάθε ταλαντωτὴς μπορεῖ νὰ μεταβιβάσῃ τὴν ταλάντωσίν του εἰς ἄλλο σῶμα καὶ ὠνομάσαμεν τὸ φαινόμενον αὐτὸ συντονισμόν. Εἰδικώτερον προκειμένου περὶ ἠχητικῶν ταλαντώσεων γίνεται λόγος περὶ *συνηχήσεως*. Ἔτσι διαπασῶν ποὺ ἔχει διεγερθῆ καὶ ἠχεῖ, ἀκούεται ἐντονώτερον, (ἀλλὰ ἐπὶ βραχύτερον χρόνον), ὅταν στηριχθῆ τὸ στέλεχός του εἴτε ἐπὶ τραπέζης, εἴτε (ἀκόμη διαρκέστερον) ἐπὶ κιβωτίου μὲ προσιδιαζούσας διαστάσεις, τοιαύτας ὥστε ἡ ἰδιοσυχνότης τῆς ταλαντώσεώς του νὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν συχνότητα (ὕψος) τοῦ τόνου τοῦ διαπασῶν. Ἡ τράπεζα ἢ ἄλλα σώματα (κιβώτια μουσικῶν ὀργάνων) ποὺ συνηχοῦν μὲ ὁποιουσδήποτε τόνους ἀποτελοῦν ***ἠχεῖα γενικοῦ συντονισμοῦ***, ἐνῶ τὰ ἰδιάζοντα εἰς ἕνα ἕκαστον τόνον κιβώτια τῶν διαπασῶν ἢ μικρὰ δοχεῖα διαφόρων μορφῶν (ἀντηχεῖα Helmholzt) εἶναι ***ἠχεῖα ἐπιλογῆς συντονισμοῦ***. Μὲ χρησιμοποίησιν τοιούτων μποροῦμε νὰ προσδιορίσωμεν εἰς ἕνα φθόγγον ἢ μῖγμα τόνων τοὺς καθέκαστα τόνους ἀπὸ τοὺς ὁποίους ἀποτελεῖται. Ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ πλησιάσωμεν διαδοχικῶς εἰς τὴν ἠχογόνον πηγὴν διάφορα ἠχεῖα ἐπιλογῆς (ἑκάστου τῶν ὁποίων εἶναι γνωστὴ ἡ ἰδιοσυχνότης). Ἐκ τῶν συνηχούντων τότε ἠχείων συνάγονται οἱ τόνοι ποὺ ἀποτελοῦν τὸν ἦχον τῆς πηγῆς. Τὴν διαδικασίαν μὲ τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν τοὺς καθέκαστα τόνους ποὺ συνιστοῦν σύνθετον ἦχον τὴν λέμε ***ἀνάλυσιν ἤχου***.

ι) Χροιὰ φθόγγων. Τὸ γνώρισμα μὲ τὸ ὁποῖον διακρίνομεν ἀπ' ἀλλήλων φθόγγους τοῦ αὐτοῦ θεμελιώδους ποὺ παρέχονται ἀπὸ διαφόρους πηγάς, π.χ. τοὺς φθόγγους βιολιοῦ ἀπὸ ἐκείνους τοῦ πιάνου ἢ πλαγιαύλου κλπ., ὀνομάζεται ***χροιά***. Ἀπὸ τὴν ἀνάλυσιν τῶν ἤχων εὑρίσκεται ὅτι ἡ χροιὰ ὀφείλεται εἰς τὸ εἶδος καὶ τὸ πλῆθος τῶν ἁρμονικῶν ποὺ συνοδεύουν τὸν θεμελιώδη εἰς τὰ διάφορα μουσικὰ ὄργανα.

ια) ***Αἴσθησις τῆς διευθύνσεως ἤχου.*** Διὰ κάθε ἦχον ποὺ ἀκούομεν ἔχομεν τὴν ἱκανότητα νὰ καθορίσωμεν ἀρκετὰ ἀκριβῶς τὴν διεύθυνσιν ἀπὸ τὴν ὁποίαν μᾶς ἔρχεται. Τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὴν ἱκανότητα νὰ διακρίνωμεν μικρὰς διαφορὰς χρόνου ποὺ μεσολαβοῦν μεταξὺ τῆς διεγέρσεως τοῦ ἑνὸς καὶ τοῦ ἄλλου ὠτός.

Ὅταν τὰ ἠχητικὰ κύματα φθάνουν εἰς τὸ ἓν οὖς ἐνωρίτερον ἀπὸ τὸ ἄλλο κατὰ χρόνον μικρότερον τῶν 0,05 χιλιοστοδευτερολέπτων (ms), ἔχομεν τὴν ἐντύπωσιν ὅτι ἡ ἠχητικὴ πηγὴ εὑρίσκεται ἀκριβῶς εἰς τὸ μέσον ἔμπροσθεν ἢ ὄπισθεν ἡμῶν. Διὰ μεγαλυτέρας ὅμως τιμὰς τῆς διαφορᾶς χρόνων διεγέρσεως τοῦ ἑνὸς ὠτὸς μετὰ τὸ ἄλλο ἀντιλαμβανόμεθα ὅτι ὁ ἦχος μᾶς ἔρχεται ἐκ τῶν πλαγίων καὶ τόσον πλαγιώτερον, ὅσον μεγαλυτέρα εἶναι ἡ διαφορὰ αὐτή. Ἡ ἐντύπωσις μεγίστης πλαγιότητος (ὁ ἦχος μᾶς ἔρχεται ἀκριβῶς ἀπὸ τὰ δεξιὰ ἢ ἀπὸ τὰ ἀριστερὰ) γεννᾶται, ὅταν ἡ ὡς ἄνω διαφορὰ χρόνου εἶναι 0,6 ms, ἴση δηλ. μὲ τὸν χρόνον ποὺ χρειάζεται ὁ ἦχος διὰ νὰ διατρέξῃ τὴν ἀπόστασιν τοῦ ἑνὸς ὠτὸς ἀπὸ τὸ ἄλλο (ἤτοι 21 cm). Πρὸς αὔξησιν τῆς διακρίσεως μικροτέρας πλαγιότητος (μέχρι 0,3°) χρησιμεύουν ἀκουστικὰ κέρατα (ἐπιμήκεις κωνικοὶ σωλῆνες), τὰ ὁποῖα τοποθετοῦνται εἰς τὰ ὦτα καὶ αὐξάνουν τὴν μεταξύ των ἀπόστασιν.

§ 74. **Βασικαὶ ἔννοιαι μουσικῆς θεωρήσεως ἤχων.** *α) Μουσικὴ κλῖμαξ.* Λαμβάνομεν δίσκον σειρῆνος δι' ὀπῶν (βλ. σχ. 198) μὲ ὀκτὼ ὁμοκέντρους σειράς, ἑκάστη τῶν ὁποίων εἶναι ὁμοιομόρφως ἀνεπτυγμένη ἐπὶ περιφερείας κύκλου τόσον μικροτέρας ἀκτῖνος, ὅσον μικρότερος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ὀπῶν τῆς σειρᾶς καὶ κανονίζομεν νὰ ἔχωμεν τὰς διαδοχικὰς σειράς: 24, 27, 30, 32, 36, 40, 45, 48 ὀπῶν.

Θέτομεν τώρα εἰς περιστροφικὴν κίνησιν τὸν δίσκον τῆς σειρῆνος καὶ διευθύνομεν τὸ προσφυσσώμενον ἰσχυρὸν ρεῦμα ἀέρος διαδοχικῶς εἰς ἑκάστην τῶν σειρῶν. Ἀκούομεν τότε ὀκτὼ τόνους, βαθμηδὸν αὐξανομένου ὕψους, ἡ ἀκολουθία τῶν ὁποίων ἔχει τὸν αὐτὸν χαρακτῆρα δι' ὁποιανδήποτε ταχύτητα περιστροφῆς (σταθερὰν δι' ἑκάστην ἀκολουθίαν). Ὀνομάζομεν αὐτὴν τὴν ἀκολουθίαν τόνων ***μείζονα διατονικὴν κλίμακα*** καὶ ἐπισημαίνομεν τὰς διαδοχικὰς βαθμίδας αὐτῆς μέ:

Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	do
πρώτην	δευτέραν	τρίτην	τετάρτην	πέμπτην	ἕκτην	ἑβδόμην	ὀγδόην

Ἂν ὁ δίσκος κάνει ν στροφὰς κατὰ δευτερόλεπτον τὰ ὕψη (ἀριθμὸς παλμῶν κατὰ δευτερόλεπτον) τῶν ὡς ἄνω τόνων θὰ εἶναι ἀντιστοίχως: 24ν, 27ν, 30ν, 32ν, 36ν, 40ν, 45ν, 48ν. Διὰ ν=11 τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς τοὺς καθέκαστα τόνους τῆς διατονικῆς κλίμακος ὕψη: 264, 297, 330, 352, 396, 440, 495, 528 Hz ἀποτελοῦν τὴν ἀκολουθίαν τόνων ποὺ λαμβάνεται ὡς βάσις καὶ δύναται νὰ ἐπεκτείνεται ἑκατέρωθεν μὲ ἐπανάληψιν τῆς αὐτῆς ἀκολουθίας τόνων, ἕκαστος τῶν ὁποίων εἶναι ἡ ὀγδόη (ἔχει διπλάσιον ὕψος) τοῦ ἀντιστοίχου του εἰς τὴν ἀμέσως προηγουμένην ἀκολουθίαν. Δι' ὑψηλοτέρας ἀκολουθίας χρησιμοποιεῖται ἡ ἐπισήμανσις: do, re, mi κλπ. — $\overline{\text{do}}$, $\overline{\text{re}}$, $\overline{\text{mi}}$ κλπ. — $\overline{\overline{\text{do}}}$, $\overline{\overline{\text{re}}}$, $\overline{\overline{\text{mi}}}$ κ.ο.κ. καὶ διὰ χαμηλοτέρας: $\underline{\text{Do}}$, $\underline{\text{Re}}$, $\underline{\text{Mi}}$ κλπ. — $\underline{\underline{\text{Do}}}$, $\underline{\underline{\text{Re}}}$, $\underline{\underline{\text{Mi}}}$, κ.ο.κ. Ὡς ἀφετηρία τοῦ καθορισμοῦ τῶν ὑψῶν τῶν τόνων τῆς βασικῆς ἀκολουθίας ἔχει καθορισθῆ συμβατικῶς τὸ ὕψος τοῦ τόνου La τῆς βασικῆς ἀκολουθίας ἴσον μὲ 440 Hz.

β) Διαστήματα τόνων. Κατὰ τὴν σύγχρονον ἀκρόασιν δύο τόνων τῆς αὐτῆς ἐντάσεως τὸ ἀκουστικὸν αἴσθημα εἶναι περισσότερον ἢ ὀλιγώτερον εὐχάριστον ἢ δυσάρεστον ἀντιστοίχως πρὸς τὸν λόγον τῶν ὑψῶν τῶν συνακουομένων τόνων καὶ δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν διαφορὰν αὐτῶν. Καλοῦμεν τὸν λόγον τῶν ὑψῶν δύο τόνων ***διάστημα*** αὐτῶν. Ἂν οἱ δύο τόνοι διεγείρουν εὐχάριστον συναίσθημα, ὅταν ἀκούωνται μαζί, λέμε ὅτι ἔχομεν ***συμφωνίαν***, ἐνῶ ἀντιθέτως γίνεται λόγος περὶ ***διαφωνίας***. Ἡ συμφωνία εἶναι πληρεστέρα, ὅσον μικρότεροι εἶναι οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ ποὺ ἀποτελοῦν τοὺς ὅρους τοῦ λόγου ὁ ὁποῖος παρέχει τὸ διάστημα τῶν συνακουομένων τόνων. Ἔτσι ἡ πληρεστέρα συμφωνία (λέγεται καὶ ***ὁμοφωνία***) παρέχεται ἀπὸ τόνους τοῦ αὐτοῦ ὕψους, ἤτοι διαστήματος 1 : 1. Μετ' αὐτὴν κατὰ σειρὰν πληρότητος ἔρχονται αἱ συμφωνίαι διαστήματος: ***ὀγδόης*** (ἤτοι τοῦ λόγου τοῦ ὕψους

τῆς ὀγδόης πρὸς τὸ ὕψος τοῦ τονικοῦ) 2:1, ***πέμπτης*** 3:2, ***τετάρτης*** 4:3, ***ἕκτης***
5:3. ***μεγάλης τρίτης*** (ἤτοι τρίτης εἰς τὴν ἀνωτέρω μείζονα κλίμακα) 5:4 καὶ ***μι-***
κρᾶς τρίτης (ἤτοι τρίτης εἰς τὴν κατωτέρω καθοριζομένην μικρὰν κλίμακα) 6:5.
Εἰς τὰς τελευταίας ἡ συμφωνία ἀρχίζει νὰ εἶναι ἀμφίβολος καὶ ἔχει χαρακτῆρα
σαφοῦς διαφωνίας εἰς τὰ διαστήματα ***δευτέρας*** 9:8 ἢ 10:9 ἢ 16:15 (αἱ διάφοροι
τιμαὶ προκύπτουν, ὅταν μεταβάλλεται ὁ τονικὸς τῆς κλίμακος) καὶ ***ἑβδόμης*** 15:8.
Ἂν ἀναζητήσωμεν τὰ μεταξὺ κάθε δύο διαδοχικῶν τόνων διαστήματα εὑρίσκομεν
ὅτι εἰς τοὺς τόνους : Do Re Mi Fa Sol La Si do
ἀντιστοιχοῦν διαστήματα : $^9/_8$ $^{10}/_9$ $^{16}/_{15}$ $^9/_8$ $^{10}/_9$ $^9/_8$ $^{16}/_{15}$
Τὸ διάστημα $^9/_8$ χαρακτηρίζεται ὡς ***μέγας τόνος*** (Τ), τὸ κάπως μικρότερον $^{10}/_9$ ὡς
μικρὸς τόνος (τ) καὶ τὸ σημαντικῶς ἀκόμη μικρότερον $^{16}/_{15}$ ὡς ***ἡμιτόνιον*** (Η).
Κατὰ ταῦτα εἰς τὴν μείζονα διατονικὴν κλίμακα ἔχομεν τὴν ἀκολουθίαν διαστη-
μάτων: Τ, τ, Η, Τ, τ, Τ, Η. Τὸ διάστημα μεταξὺ μικροῦ τόνου καὶ ἡμιτονίου,
10/9 : 16/15=25/24 ὀνομάζεται ***μικρὸν ἡμιτόνιον*** (η), ἐνῶ τὸ ἀκόμη μικρότερον
μεταξὺ μεγάλου καὶ μικροῦ τόνου, 9/8 : 10/9=81/80, λέγεται ***κόμμα***.

γ) Ἄλλαι κλίμακες. Ἂν ἐπιχειρήσωμεν νὰ συνθέσωμεν κλίμακα τοῦ αὐτοῦ
χαρακτῆρος, λαμβάνοντες ὡς ἀφετηρίαν (τονικὸν) ὄχι τὸν Do, ἀλλὰ ἄλλον, π.χ.
τὴν πέμπτην τοῦ Do, ἤτοι τὸν Sol, εὑρίσκομεν ὅτι ἔχομεν ἀκολουθίαν διαστημά-
των: 10/9, 9/8, 16/15, 9/8, 10/9, 16/15, 10/9. Ἡ ἀκολουθία αὐτὴ συμφωνεῖ κατὰ τὰ
ἄλλα (ἂν παραβλέψωμεν ὡς ἀσήμαντον τὴν διαφορὰν κόμματος) μὲ τὴν ἀκολου-
θίαν ποὺ ἔχομεν μὲ τονικὸν τὸν Do, ἀλλὰ παρουσιάζει τὴν σημαντικὴν διαφορὰν
ὅτι ἡ ἑβδόμη αὐτοῦ δὲν προκύπει μὲ διάστημα μεγάλου τόνου (ὅπως γίνεται εἰς
τὴν ἑβδόμην τοῦ τονικοῦ Do), ἀλλὰ μὲ τοιοῦτο ἡμιτονίου 16/15. Ὁμοίας διαφορὰς
εἰς τὴν ἀκολουθίαν τῶν διαστημάτων εὑρίσκομεν, ὅταν λαμβάνομεν ὡς τονικὸν
ἄλλον τόνον τῆς σειρᾶς τῆς μείζονος διατονικῆς κλίμακος. Διὰ τὴν ἄμβλυνσιν τῶν
διαφορῶν τούτων εἰσάγομεν καὶ ἄλλους τόνους μεταξὺ κάθε δύο διαδοχικῶν τό-
νων τῆς ἀρχικῆς διατονικῆς κλίμακος, ὅταν οὗτοι ἔχουν διάστημα μεγάλου ἢ μι-
κροῦ τόνου. Οἱ ἔτσι πρὸς συμπλήρωσιν τῆς κλίμακος εἰσαγόμενοι τόνοι εἶναι, εἴτε
κατὰ ἓν μικρὸν ἡμιτόνιον ὑψηλότεροι τῶν προηγουμένων των, εἴτε κατὰ μικρὸν
ἡμιτόνιον χαμηλότεροι τῶν ἑπομένων των. Τοῦτο ἐκφράζεται συμβατικῶς μὲ τὸ
ὅτι οἱ συμπληρωματικοὶ τόνοι προκύπτουν, εἴτε ***δι' ἀνυψώσεως εἰς δίεσιν*** [συμβο-
λικῶς σημειώνεται τοῦτο μὲ πρόταξιν τοῦ συμβόλου (♯)] εἴτε ***δι' ὑποβιβασμοῦ
εἰς ὕφεσιν*** [σημειώνομεν τοῦτο μὲ πρόταξιν τοῦ συμβόλου (♭)], τῶν τόνων μεταξὺ
τῶν ὁποίων ἔχομεν διαστήματα μεγάλου ἢ μικροῦ τόνου (9/8 ἢ 10/9). (Ἡ δίεσις
τόνου ἔχει ὕψος ἴσον μὲ 25/24 τοῦ κανονικοῦ του, ἐνῶ ἡ ὕφεσις εἶναι τόνος μὲ
ὕψος 24/25 τοῦ κανονικοῦ). Ἔτσι προκύπτει ἡ ***χρωματικὴ*** κλῖμαξ μὲ τοὺς ἀκολού-
θους 12 τόνους ποὺ τὰ μεταξύ των διαστήματα εἶναι ἡμιτόνια. Θὰ ἔχωμεν δηλ.
τοὺς τόνους:

Do ♯Do Re ♯Re Mi Fa ♯Fa Sol ♯Sol La ♯La Si do
ἢ Do ♭Re Re ♭Mi Mi Fa ♭Sol Sol ♭La La ♭Si Si do μὲ ὕ-
ψη: 264 264.$^{25}/_{24}$ 297 297 $^{25}/_{24}$ 330 352 352.$^{25}/_{24}$ 396 396.$^{25}/_{24}$ 440 440.$^{25}/_{24}$ 495 528 Hz
ἢ 264 297.$^{24}/_{25}$ 297 330 $^{24}/_{25}$ 330 352 396.$^{24}/_{25}$ 396 440.$^{24}/_{25}$ 440 495.$^{24}/_{25}$ 495 528 Hz

Ακριβέστερον θεωρούμενα τὰ διαστήματα δὲν εἶναι ἀντιστοίχως τὰ αὐτὰ κατὰ τοὺς δύο τρόπους συνθέσεως τῆς χρωματικῆς κλίμακος (δηλ. συνθέσεως εἴτε μὲ διέσεις, εἴτε μὲ ὑφέσεις)· ἐπειδὴ ὅμως τὸ διάστημά των εἶναι τῆς τάξεως μεγέθους κόμματος, μπορεῖ εἰς ὄργανα ποὺ παράγουν σταθεροὺς φθόγγους (πιάνο, ἁρμόνιον ὄργανον κ.ἄ.) νὰ συμπίπτουν εἰς ἕνα τόνον.

Ἐπεκτείνοντες τὴν ἀπάμβλυνσιν τῶν διαφορῶν τῶν διαστημάτων διαιροῦμεν τὸ ὅλον διάστημα 2 : 1 μιᾶς ὀγδόης εἰς 12 ἴσα διαστήματα, καθὲν τῶν ὁποίων πρέπει νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὴν δωδεκάτην ρίζαν τοῦ 2, ἀφοῦ σύμφωνα μὲ τὸν καθορισμόν των πρέπει νὰ εἶναι $\delta^{12}=2$. Ἔτσι προκύπτει ἰσοδιαστηματικὴ κλῖμαξ ποὺ τὴν λέμε ***συγκεκραμένην ἰσοτονικήν***.

§ 75. **Πηγαὶ ἤχων.** *α)* ***Γενικά.*** Τὰ διάφορα ὄργανα παραγωγῆς ἤχων εἶναι σώματα στερεὰ (πλάκες, κώδωνες, ράβδοι, χορδαὶ) ἢ στήλαι ἀέρος (§ 68) (σάλπιγγες, αὐλοὶ καὶ γενικῶς ***ἠχητικοὶ σωλῆνες***), ποὺ διεγείρονται καὶ παράγουν στάσιμα κύματα, τῶν ὁποίων αἱ συχνότητες εἶναι τοιαῦται ἠχητικῶν κυμάτων. Τὰ κύματα αὐτὰ μεταδίδονται εἰς τὸν γύρω ἀέρα καὶ φθάνουν εἰς τὸ οὖς. Ἰδανικὴν πηγὴν ἀκτινοβολίας θὰ παρεῖχε σφαῖρα ποὺ θὰ μποροῦσε νὰ συστέλλεται καὶ διαστέλλεται μὲ ἀντίστοιχον πρὸς τὰς διαστάσεις της περιοδικότητα. Εἰς τὴν τρόπον τινα «ἀναπνέουσαν» αὐτὴν σφαῖραν ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας θὰ ἔκαναν ταλαντώσεις τῆς αὐτῆς φάσεως καὶ ἑπομένως θὰ ἐξέπεμπον τελείως συμμετρικὰ σφαιρικὰ κύματα. Ἀλλὰ τέτοια πηγὴ ἤχων δὲν ἔχει πραγματοποιηθῆ. Αἱ ἰσχυρότεραι σήμερον πηγαὶ ἠχητικῆς ἀκτινοβολίας εἶναι ἠλεκτρομαγνητικῶς διεγειρόμεναι πλάκες μὲ πάχος ποὺ δὲν μπορεῖ νὰ ὑπερβαίνη τὰ ὀλίγα ἑκατοστόμετρα. Αἱ ράβδοι καὶ ἀκόμη περισσότερον αἱ χορδαὶ εἶναι πολὺ ἀσθενεῖς πηγαὶ ἠχητικῆς ἐνεργείας, διότι αἱ ἐπιφάνειαι των εἶναι σχετικῶς πολὺ μικραὶ καὶ τὰ ἐκ τῶν καθέκαστα σημείων των ἐκπεμπόμενα κύματα συμβάλλουν καὶ παραθλῶνται κατὰ τρόπον, ὥστε κατὰ μέγα μέρος αὐτῶν νὰ ἀλληλοαναιροῦνται. Ἐξ ἄλλου καὶ ἡ ἀπ' εὐθείας εἰς τὸν ἀέρα μεταβίβασις τῆς ἠχητικῆς των ἐνεργείας παραμένει μικρά, διότι ἡ πυκνότης τοῦ ἀέρος εἶναι σχετικῶς μικρά. Ἕνεκα τούτου ἐνισχύονται οἱ ἦχοι τῶν χορδῶν μὲ τὸ νὰ διεγείρωνται ἐνώπιον κιβωτίων (ἠχείων) γενικῆς συνηχήσεως (§ 73,θ), ὅπως γίνεται εἰς τὰ διάφορα μουσικὰ ὄργανα (βιολί, πιάνο, μαντολῖνο, κιθάρα κλπ.). Αἱ πολὺ μεγαλύτεραι ἐπιφάνειαι τῶν ἠχείων μεταδίδουν ταλαντώσεις εἰς μεγαλυτέρους ὄγκους ἀέρος καὶ συνεπῶς ἐνισχύουν πολὺ τοὺς ἤχους. Εἶναι εὐνόητον ὅτι τώρα ἡ ἀπόσβεσις θὰ εἶναι πολὺ ταχυτέρα, ἀφοῦ ἡ αὐτὴ ἠχητικὴ ἐνέργεια ἐκπέμπεται μὲ μεγαλυτέραν ἰσχύν. (Διαπασῶν ποὺ ἠχεῖ διατηρεῖ τὴν ἀσθενῆ ἠχητικήν του ἐκδήλωσιν ἐπὶ περισσότερον χρόνον, ὅταν κρατεῖται ἀπὸ τὸ στέλεχός του, παρὰ τὴν ἐνισχυμένην τοιαύτην ποὺ ἔχει, ὅταν στηρίζεται ἐπὶ ἠχείου).

Εἶναι αὐτονόητον ὅτι τὰ γενικῆς ἐνισχύσεως ἠχεῖα πρέπει νὰ πάλλωνται μὲ ὅλας τὰς ἠχητικὰς συχνότητας καὶ νὰ μὴ ἔχουν ***ἰδιοσυχνότητας*** ταλαντώσεως ποὺ θὰ παρέφθειραν τοὺς πρὸς ἐνίσχυσιν ἤχους. Ἔτσι μπορεῖ ἓν μεγάφωνον νὰ μᾶς ἀποδίδη χωρὶς παραμόρφωσιν τὴν φωνὴν καὶ τὴν μουσικήν, ἂν δι' ὅλην τὴν περιοχὴν τῶν ἐνισχυομένων ταλαντώσεων εἶναι ἀπηλλαγμένον ἰδιοταλαντώσεως. Ἡ περιοχὴ αὐτὴ ἐκτείνεται διὰ τὴν φωνὴν γύρω ἀπὸ 100 μέχρι 400 Hz καὶ διὰ τὴν μουσικὴν ἀπὸ 16 μέχρι 4000 Hz διὰ τὸ πλουσιώτερον μουσικὸν ὄργανον, ὁποῖον εἶναι τὸ *Ὄργανον*.

Ἡ ἰσχὺς τῶν διαφόρων πηγῶν ἤχου κυμαίνεται ἀπὸ ἑκατομμυριοστῶν μέχρι ἑκατοντάδος ὁλοκλήρων W. Εἶναι π.χ. εἰς συνήθη συνομιλίαν κάπου 7.10^{-6}, εἰς δυνατὴν κραυγὴν περὶ τὰ 2.10^{-3}, εἰς βιολὶ (fortissimo) 10^{-3}, εἰς *ὄργανον* μέχρι 10 καὶ εἰς μεγάφωνον μέχρι 100 Watt.

β) Νόμοι παλλομένων χορδῶν. Ὁ φθόγγος ποὺ ἀποδίδει χορδὴ (τεντωμένον ἐλαστικὸν νῆμα) ὅταν μὲ ἀντίστοιχον διέγερσιν πάλλεται μὲ τὰς μορφὰς τοῦ σχ. 184 εὑρίσκεται πειραματικῶς ὅτι ἔχει ὕψος ν ποὺ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογον τοῦ μήκους μ καὶ τῆς διαμέτρου δ τῆς ἐγκαρσίας τομῆς τῆς χορδῆς, ἀνάλογον τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τῆς δυνάμεως k ποὺ τεντώνει τὴν χορδὴν καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογον τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τῆς πυκνότητος ρ τῆς ὕλης τῆς χορδῆς.

Μὲ τὰς πειραματικὰς αὐτὰς διαπιστώσεις συμφωνεῖ καὶ ὁ θεωρητικῶς ἐξαγόμενος τύπος ποὺ διετυπώθη τὸ 1716 ὑπὸ τοῦ Taylor. Κατ' αὐτόν, ἂν εἶναι ν ἡ συχνότης (τὸ ὕψος) τοῦ παραγομένου ὑπὸ τῆς χορδῆς τόνου, μ τὸ μῆκος αὐτῆς μεταξὺ τῶν δύο ἀκραίων σημείων της ὅπου ἔχει στερεωθῆ (σημείων δεσμῶν τοῦ στασίμου κύματος), δ ἡ διάμετρος τῆς ἐγκαρσίας της τομῆς, ρ ἡ πυκνότης τῆς ὕλης ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἀποτελεῖται ἡ χορδὴ καὶ k ἡ δύναμις ποὺ τὴν τεντώνει, θὰ εἶναι:

$$\nu = \frac{1}{\mu\delta}\sqrt{\frac{k}{\pi.\rho}} \qquad (92)$$

Εἰς τὴν σχέσιν αὐτὴν φθάνομεν, ἂν βασισθῶμεν εἰς τὸν τύπον (85) $c=\sqrt{E/\rho}$ καὶ ἀντικαταστήσωμεν εἰς αὐτὸν τὴν ταχύτητα c διὰ τῆς συχνότητος ν τοῦ στασίμου κύματος κατὰ τὸν τύπον (86), ὁπότε εἶναι $c=2\mu\nu$ καὶ ἑπομένως:

$\nu=\dfrac{1}{2\mu}\sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$. Ἀντικαθιστῶμεν τώρα εἰς τὴν σχέσιν αὐτὴν τὸ μέτρον ἐλαστικότητος E μὲ τὸ κατὰ τὸν ὁρισμόν του (§ 44. δ) ἴσον πηλίκον τῆς τεινούσης δυνάμεως k διὰ τῆς ἐγκαρσίας τομῆς $q(=\pi\delta^2/4)$ τῆς χορδῆς καὶ λαμβάνομεν:

$$\nu=(1/2\mu).\sqrt{4k/\pi\delta^2\rho} \text{ ἢ } \nu=(2/2\mu\delta)\sqrt{k/\pi\rho} =(1/\mu.\delta)\sqrt{k/\pi\rho} \text{ ἤτοι τὴν σχέσιν} \qquad (92)$$

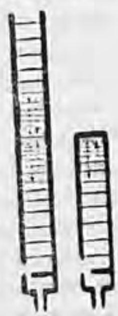
Ἡ σχέσις (92) μπορεῖ νὰ ἐκφρασθῆ καὶ μὲ τὴν μορφὴν ποὺ προκύπτει, ἂν τεθῆ: $\varrho = m/V = m/(\mu\pi\delta^2 : 4) = 4m/\mu\pi\delta^2$, ὁπότε λαμβάνομεν:

$$\nu=\frac{1}{2\mu}\sqrt{\frac{4kV}{\pi\delta^2 m}}=\frac{1}{2\mu}\sqrt{\frac{4k\pi\delta^2\mu}{4\pi\delta^2 m}}=\frac{1}{2\mu}\sqrt{\frac{k}{m/\mu}}=\frac{1}{2\mu}\sqrt{\frac{k}{d}} \qquad (92')$$

ἂν μὲ d παραστήσωμεν τὴν ***γραμμικὴν πυκνότητα***, ἤτοι τὴν εἰς τὴν μονάδα μήκους τῆς χορδῆς περιεχομένην μᾶζαν. Σύμφωνα μὲ τὴν τελευταίαν σχέσιν τὸ ὕψος τόνου εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογον τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τῆς γραμμικῆς πυκνότητος. (Παχύτεραι χορδαὶ ὑπὸ τὰς αὐτὰς κατὰ τὰ ἄλλα συνθήκας παρέχουν τόνους χαμηλοτέρους ἀπὸ ἐκείνους ποὺ παρέχουν λεπτότεραι).

γ) Ἠχητικοὶ σωλῆνες. Ἰδιαζούσης σημασίας πηγὰς παραγωγῆς ἤχων ἀποτελοῦν γενικῶς σωλῆνες, εἰς τοὺς ὁποίους ἡ ἐγκλειομένη στήλη ἀέρος περιπίπτει διὰ καταλλήλου διεγέρσεως εἰς διαμήκεις ταλαντώσεις ὁμοιάζουν ἔτσι μὲ ράβδους ποὺ διεγείρονται κατὰ τρόπον, ὥστε νὰ κάνουν διαμήκεις (καὶ ὄχι ἐγκαρσίας) ταλαντώσεις. (§ 68,β). Φυσῶμεν εἰς τὰ χείλη τοῦ ἑνὸς ἀνοίγματος σωλῆνος ποὺ εἶναι ἀνοικτὸς ἑκατέρωθεν καὶ ἀκούομεν φθόγγον, τοῦ ὁποίου ὁ θεμελιώδης τόνος ἔχει ὕψος τόσον μεγαλύτερον, ὅσον βραχύτερος εἶναι ὁ σωλήν. Ἂν φράξωμεν τὸ ἄλλο ἄνοιγμα τοῦ σωλῆνος (φέροντες π.χ. πρὸ αὐτοῦ τὴν παλάμην), ὁ φθόγγος ποὺ ἀκούομεν (ὑπὸ τὰς αὐτὰς κατὰ τὰ λοιπὰ συνθήκας) εἶναι κατὰ μίαν ὀγδόην χαμηλότερος τοῦ προηγουμένου. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ συχνότης τοῦ σχηματιζομένου εἰς ἀνοικτὸν σωλῆνα στασίμου κύματος εἶναι διπλασία τῆς τοῦ κλειστοῦ. Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο ἐξηγεῖται, ἂν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸν θεμελιώδη τόνον στάσιμον κῦμα πρέπει ἀναγκαίως νὰ παρουσιάζῃ κοιλίας εἰς τὰ δύο ἄκρα καὶ δεσμὸν εἰς τὸ μέσον, ὅταν ὁ σωλὴν εἶναι ἀνοικτὸς ἑκατέρωθεν, ἐνῷ, ὅταν οὗτος εἶναι κλειστὸς εἰς τὸ ἓν ἄκρον του, θὰ ἔχωμεν ἐκεῖ δεσμὸν καὶ εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον (τὸ ἀνοικτὸν) κοιλίαν· ἔτσι τὸ μῆκος κύματος λ τοῦ θεμελιώδους θὰ εἶναι εἰς τὸν ἀνοικτὸν σωλῆνα ἴσον μὲ τὸ διπλάσιον τοῦ μήκους του μ, ἐνῷ εἰς τὸν κλειστὸν θὰ εἶναι: $\lambda = 4\mu$. Ἀντιστοίχως ἡ συχνότης $\nu (= c/\lambda)$ θὰ εἶναι εἰς τὸν ἀνοικτὸν σωλῆνα: $c/2\mu$ καὶ εἰς τὸν κλειστόν: $c/4\mu$, ἤτοι: *εἰς τὸν ἀνοικτὸν διπλασία τῆς εἰς τὸ κλειστόν*. Διὰ βιαιοτέρας προσφυσήσεως τὸ ὕψος τοῦ ἤχου ἀνέρχεται καὶ τοῦτο σημαίνει ὅτι παράγονται ἀνώτεροι ἁρμονικοὶ τοῦ θεμελιώδους τόνου. Δεδομένου ὅτι εἰς ἀνοικτὸν σωλῆνα θὰ ἔχωμεν πάντοτε κοιλίας τοῦ στασίμου κύματος εἰς τὰ δύο ἄκρα, ἐνῷ εἰς τὸν κλειστὸν θὰ ἔχωμεν πάντοτε δεσμὸν εἰς τὸ ἓν ἄκρον καὶ κοιλίαν εἰς τὸ ἄλλο, εἶναι εὐνόητον ὅτι τὸ μῆκος τοῦ στασίμου κύματος διὰ τοὺς παραγομένους ἁρμονικοὺς θὰ εἶναι κατὰ σειράν: $2\mu/2$, $2\mu/3$, $2\mu/4$ ..... εἰς τὸν ἀνοικτὸν καὶ $4\mu/3$, $4\mu/5$, $4\mu/7$ ..... εἰς τὸν κλειστόν. Ἀντιστοίχως αἱ συχνότητες (ὕψη) τῶν ἁρμονικῶν κατὰ σειρὰν θὰ εἶναι εἰς τὸν ἀνοικτὸν σωλῆνα: $2c/2\mu$, $3c/2\mu$, $4c/2\mu$ ..... καὶ εἰς τὸν κλειστὸν $3c/4\mu$, $5c/4\mu$, $7c/4\mu$, ... ἤτοι: ***Εἰς τὸν ἀνοικτὸν σωλῆνα παράγονται ὅλοι κατὰ σειρὰν οἱ ἁρμονικοὶ τοῦ θεμελιώδους, ἐνῷ εἰς τὸν κλειστὸν μόνον οἱ περιττῆς τάξεως.***

Μὲ τὴν ὡς ἄνω νομιμότητα παράγονται φθόγγοι ἀπὸ σωλῆνας διαφόρων μορφῶν, τοὺς ὁποίους καλοῦμεν *ἠχητικούς*. Τοὺς διακρίνομεν ἀντιστοίχως πρὸς τὸν τρόπον διεγέρσεως εἰς σωλῆνας μὲ *χεῖλος* καὶ τοιούτους μὲ *γλωττίδα*. Εἰς τοὺς πρώτους τὸ ἐκ τοῦ θαλάμου, ὅπου προσφυσσᾶται, προερχόμενον ρεῦμα ἀέρος προσπίπτει ἐπὶ ὀξείας ἀκμῆς (σχ. 200), ἡ ὁποία ἔτσι εὑρίσκεται εἰς θέσιν συναντήσεως ρευμάτων μὲ διαφόρους ταχύτητας. Κατὰ συνέπειαν (§ 64γ) σχηματίζονται στρόβιλοι, οἱ ὁποῖοι ἀποσπῶνται ὁ εἷς μετὰ τὸν ἄλλον μὲ κανονικὴν διαδοχικότητα, παραχωροῦντες ὁ εἷς εἰς τὸν ἄλλον τὴν θέσιν του ἐπὶ τῆς ἀκμῆς. Ἔτσι τὸ ρεῦμα ἀέρος προσκρούει περιοδικῶς ἐπὶ τῆς ἐξωτερικῆς καὶ τῆς ἐσωτερικῆς ὄψεως τῆς ἀκμῆς καὶ παράγει εἰς τὴν στήλην τοῦ ἀέρος τοῦ σωλῆνος διακυμάνσεις τῆς πιέσεως· ἀπὸ αὐτὰς διεγείρεται ταλάντωσις τῆς στήλης ἀέρος μὲ τὴν προσιδιάζουσαν συχνότητα. Εἰς τοὺς μετὰ γλωττίδος ἡ δίοδος ἀπὸ τὸν θάλαμον προσφυσήσεως πρὸς τὸν σωλῆνα φράσσεται μὲ φύλλον ἐλάσματος (τὴν γλωττίδα)· ἔτσι διεγείρονται εἰς τὴν γλωττίδα ἐγκάρσιαι ταλαντώσεις, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ὡς ἐπακόλουθον νὰ κλείεται καὶ νὰ ἀνοίγεται περιοδικῶς ἡ δίοδος μὲ τὴν συχνότητα τῆς ταλαντώσεως τῆς γλωττίδος. Ἂν ἔχῃ ρυθμισθῇ ὥστε καὶ ἡ στήλη τοῦ ἀέρος τοῦ σωλῆνος νὰ ἔχῃ τὴν αὐτὴν συχνότητα ταλαντώσεως, θὰ διεγερθῇ αὕτη πρὸς ταλάντωσιν καὶ σχηματισμὸν ἠχητικῶν κυμάτων. Πρὸς σωλῆνας μὲ γλωττίδα μπορεῖ νὰ παραβληθῇ ὁ λάρυγξ μὲ τὰς *φωνητικὰς χορδάς*. Αὗται ὡς διπλῆ γλωττὶς περιπίπτουν εἰς ταλάντωσιν, ὅταν διὰ μέσου τῆς μεταξύ των σχισμῆς διέρχεται ρεῦμα ἀέρος. Τὸ στόμα καὶ αἱ ρινικαὶ κοιλότητες παίζουν τὸν ρόλον ἀντηχείων, τὰ ὁποῖα ἀντιστοίχως πρὸς τὸ σχῆμα καὶ τὴν θέσιν τῆς γλώσσης καὶ τῶν ὀδόντων ἐνισχύουν κατὰ διάφορον τρόπον τοὺς διαφόρους τόνους ποὺ ἀποτελοῦν τὴν φωνὴν καὶ διαμορφώνουν τοὺς ἐκφωνουμένους φθόγγους.



Σχ. 200

§ 76. Ὑπερῆχοι. Εἰς τὴν σύγχρονον φυσικὴν ἔρευναν παρατηρεῖται νὰ αὐξάνῃ ἡ σημασία ποὺ ἀποδίδεται εἰς τοὺς ὑπερήχους, τὰς ἐλαστικὰς δηλαδὴ ταλαντώσεις, τῶν ὁποίων αἱ συχνότητες ἐκτείνονται ἀπὸ 20000 Hz μέχρι ἑκατοντάδων ἑκατομμυρίων Hz. Ἡ παραγωγὴ τοιούτων ταλαντώσεων ἐπιτυγχάνεται πρὸ πάντων μὲ διαμήκεις ταλαντώσεις κρυστάλλων χαλαζίου. Ἐπειδὴ δηλ. εἰς πλάκα τοῦ κρυστάλλου τούτου παρατηρεῖται ὅτι ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν ἠλεκτροδυναμικοῦ (πρβλ. Ἠλεκτρισμὸν) συστέλλεται ἢ διαστέλλεται ἀντιστοίχως πρὸς τὴν φορὰν τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου, μποροῦμε νὰ προκαλέσωμεν διαμήκεις ταλαντώσεις, ἂν εἰς τὴν πλάκα ἐφαρμόσωμεν ἐναλλασσομένην τάσιν (διαφορὰν ἠλεκτροδυναμικοῦ), ἀρκεῖ ἡ ἰδιοσυχνότης τῆς ταλαντώσεως τῆς πλακὸς νὰ συμπίπτῃ μὲ τὴν συχνότητα ἐναλλαγῆς τῆς τάσεως (περίπτωσις συντονισμοῦ). Ἐκτὸς ἀπὸ τὸν τρόπον αὐτὸν μποροῦμε νὰ διεγείρωμεν ὑπερηχητικὰς ταλαντώσεις καὶ βάσει τῆς ἰδιότητος ποὺ ἔχουν σιδηρομαγνητικαὶ ράβδοι νὰ μεταβάλλουν τὸ μῆκος των κατὰ τὴν μαγνήτισίν των. Ἔτσι ράβδος ἀπὸ νικέλιον μέσα εἰς πηνίον ποὺ διαρρέεται ἀπὸ ἐναλλασσόμενον ρεῦμα προσδιαζούσης συχνότητος περιπίπτει εἰς διαμήκεις ταλαντώσεις. Ὁ τρόπος αὐτὸς προσδιάζει κυρίως διὰ τὴν παραγωγὴν ἰσχυρῶν ταλαντώσεων μέχρι κάπου 60000 Hz.

Ἐπειδὴ οἱ πομποὶ ὑπερηχητικῆς ἀκτινοβολίας μποροῦν νὰ ἀκτινοβολοῦν σημαντικὰ ποσὰ ἐνεργείας, εἶναι δυνατὸν εἰς τὰ σώματα ποὺ προσβάλλονται ἀπὸ ὑπερηχητικὰ κύματα νὰ ἐμφανίζωνται πολὺ μεγάλαι διαφοραὶ πιέσεως (μέχρις ὁλοκλήρων ἀτμοσφαιρῶν) καὶ ἕνεκα τῆς ὑψηλῆς συχνότητος καὶ πολὺ μεγάλαι ἐπιταχύνσεις (μέχρι ἑκατομμυριοπλασίου τῆς ἐπιταχύνσεως τῆς βαρύτητος), αἱ ὁποῖαι ἐπὶ πλέον ἀλλάσσουν τὰς διευθύνσεις των μὲ τὴν συχνότητα τῆς ταλαντώσεως. Κατὰ τὴν διαδικασίαν αὐτὴν μπορεῖ εἰς τὰς θέσεις τῆς μεγαλυτέρας ἐντάσεως νὰ προκύψῃ διάνοιξις τοῦ ὑγροῦ καὶ σχηματισμὸς κενῶν κοίλων χώρων (Kavitation). Εἰς τὰς κοιλότητας αὐτὰς εἰσρέουν κατὰ τὰς φάσεις τῶν πυκνωμάτων μὲ μεγάλην σφοδρότητα τὰ διαλελυμένα εἰς τὸ ὑγρὸν ἀέρια. Εἰς τὴν ἰδιοτυπίαν αὐτὴν τῶν ὑπερήχων βασίζονται αἱ ἰδιάζουσαι ἐπιδράσεις των. Ἔτσι μποροῦμε μὲ ὑπερήχους νὰ ἀπαλλάξωμεν ὑγρὰ ἢ τήγματα μετάλλων ἀπὸ διαλελυμένα ἀέρια ἢ νὰ σχηματίσωμεν γαλακτώματα ὑγρῶν μὴ ἀναμιγνυομένων (ἐλαίου καὶ ὕδατος ἢ ὑδραργύρου καὶ ὕδατος). Ἐπίσης μπορεῖ νὰ κονιοποιοῦνται ὑγρὰ καὶ κατὰ τὸν τρόπον αὐτὸν νὰ σχηματίζωνται νέφη. Ἀντιθέτως λαμβάνονται ἀπὸ αἰωρούμενα εἰς τὸν ἀέρα σωματίδια συσσωρεύσεις τῶν τεμαχιδίων. Μικρὰ ζῷα (ψάρια, βάτραχοι) γίνονται ἀνάπηρα ἢ καὶ φονεύονται μὲ ὑπερήχους. Ἡ ἐπίδρασίς των ἐπὶ τῶν βακτηρίων καὶ τῶν ἰῶν εἶναι ἀκόμη εἰς τὸ στάδιον τῶν ἐρευνῶν. Ἡ διαπίστωσις ὅτι ἐργαλεῖον χωρὶς ἐλάττωμα ἔχει μεγάλην διαπερατότητα ἀπὸ ὑπερήχους καὶ ὅτι κάθε σχισμὴ ἢ κοιλότης ἀνακλᾷ σχεδὸν ἐξ ὁλοκλήρου τὸν ἦχον παρέχει τὴν δυνατότητα νὰ ὑποβάλλωνται ταῦτα εἰς ἐξέτασιν χωρὶς καμμίαν βλάβην. Τοῦτο ἔχει τόσον μεγαλυτέραν σημασίαν, καθόσον ἡ ἔρευνα μὲ ἀκτῖνας Röntgen δὲν εἶναι δυνατὴ εἰς πολὺ παχέα ὄργανα.

Προβλήματα

161. Σπειροειδὲς ἐλατήριον ἰσορροπεῖ, κρεμασμένον ἀπὸ τὸ ἓν ἄκρον του
κατακορύφως πρὸς τὰ κάτω, μὲ μικρὸν βάρος ποὺ φέρει εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον του.
Ἂν συρθῆ πρὸς τὰ κάτω ἐντὸς τῶν ὁρίων τῆς ἐλαστικότητός του καὶ ἀφοῦ ἐπιμη-
κυνθῆ ἔτσι κατὰ a=10 cm, ἀφεθῆ ἔπειτα ἐλεύθερον, περιπίπτει εἰς ταλάντωσιν συ-
χνότητος $\nu = 15\ \mathrm{min}^{-1}$. Πόση θὰ εἶναι ἡ ἐκτροπὴ y ἀπὸ τὴν θέσιν ἰσορροπίας
μετὰ χρόνον t=0,5 sec ἀπὸ τῆς στιγμῆς διελεύσεως διὰ τῆς θέσεως ἠρεμίας; Μὲ
ποίαν γωνιακὴν ταχύτητα ω πρέπει νὰ περιστρέφεται σῶμα διὰ νὰ ἔχη περίοδον
ἴσην μὲ τὴν τῆς αἰωρήσεως (Ἀπ. $y = \alpha\eta\mu(2\pi\nu t) = 7{,}07$ cm, $\omega = 2\pi\ 15/60\ \mathrm{sec}^{-1}$).

162. Ὁ κραδασμὸς ταλαντωτοῦ συχνότητος ν=435 Hz διαδίδεται μὲ τα-
χύτητα c=330 m/sec. Ποία ἡ περίοδος T τοῦ κραδασμοῦ καὶ τὸ μῆκος λ τοῦ
παραγομένου κύματος ; (Ἀπ. T=0,0023 sec καὶ λ=75,9 cm).

16. Ποία ἡ ταχύτης c διαδόσεως κύματος μήκους λ=0,766 m καὶ συχνό-
τητος ν=435 Hz ; (Ἀπ. ν=333 m/sec).

164. Εἰς ἐγκάρσιον κῦμα θεωροῦμεν τὴν στιγμὴν t=T/4, κατὰ τὴν ὁποίαν
τὸ κέντρον ἐκπομπῆς τῆς κυμάνσεως ἔχει τὴν μεγίστην του ἐκτροπὴν a ἀπὸ
τὴν θέσιν ἰσορροπίας. Ποίαν ἀπόστασιν x ἀπὸ τὴν ἀφετηρίαν ἔχει σωματίδιον,
τὸ ὁποῖον κατὰ τὴν ὡς ἄνω στιγμὴν ἔχει ἐκτροπὴν ἀπὸ τὴν θέσιν ἠρεμίας
y=a/3 ; (Ἀπ. Κατὰ τὴν (84) θὰ εἶναι : $a/3 = a\ \eta\mu\ [\,2\pi(T/4T - x/\lambda)\,]$ καὶ $x = 0{,}2\,\lambda$).

165. Ποία ἡ ταχύτης ἤχου εἰς ἀέρα θερμοκρασίας 15° C ; (Ἀπ. 340 m/s).

166. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος κύματος τόνου α) εἰς χάλυβα, β) εἰς ὕδωρ, ἂν
εἰς τὸν ἀέρα εἶναι τοῦτο $\lambda_\alpha = 1$ m ; (Ἀπ. $\lambda_x = \lambda_\alpha \cdot c_x / c_\alpha$ καὶ $\lambda_\upsilon = \lambda_\alpha \cdot c_\upsilon / c_\alpha$).

167. Μὲ ποῖον ὕψος ἀκούεται τὸ σφύριγμα ἀτμομηχανῆς, ἡ ὁποία α) ἀ-
πομακρύνεται β) πλησιάζει μὲ ταχύτητα 10 m/sec, ἂν ὁ παραγόμενος ἀπὸ αὐ-
τὴν τόνος ἔχη συχνότητα 500 Hz ; (Ἀπ. α) 485 Hz β) 515 Hz).

168. Εἰς σωλῆνα Kundt μὲ ὑαλίνην ῥάβδον μήκους μ=1 m, στερεωμένην
εἰς τὸ μέσον της, εὑρέθη ὅτι οἱ σωροὶ κόνεως φελλοῦ ποὺ σχηματίζονται, ὅταν
ἡ ῥάβδος διεγερθῆ νὰ παράγη διαμήκεις ταλαντώσεις, ἀπέχουν μεταξύ των
$\alpha_1 = 5{,}8$ cm, ὅταν ὁ σωλὴν περιέχη ἀέρα καὶ $\alpha_2 = 1{,}8$ cm, ὅταν εἶναι πλήρης φω-
ταερίου. Ποία εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου α) εἰς τὴν ὕαλον c_υ β) εἰς τὸ φωταέ-
ριον c_φ, ἂν ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα εἶναι $c_\alpha = 340$ m/sec ; Ποῖον εἶναι
τὸ ὕψος τοῦ παραγομένου τόνου ; (Ἀπ. $c_\upsilon = c_\alpha\ 2\mu/\lambda_\alpha$, $c_\varphi = 540$ m/sec, ν=25 Hz).

169. Πόση θὰ εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς ὑδρογόνον, λαμβανομένου
ὑπ' ὄψιν ὅτι εἰς τὸν ἀέρα εἶναι 332 m/s καὶ ὅτι ἡ σχετικὴ πυκνότης τοῦ ὑδρο-
γόνου ὡς πρὸς ἀέρα εἶναι 0,0693 ; (Ἀπ. 1261,1 m/sec).

170) Κατὰ τὴν συνακρόασιν δύο τόνων ποὺ ἔχουν διάστημα ἡμιτονίου
(16/15). ἀντιλαμβανόμεθα 87 διακροτήματα εἰς 16 sec. Ποῖοι εἶναι οἱ τόνοι ;
(Ἀπ. $\nu_2/\nu_1 = 16/15$ καὶ $\nu_2 - \nu_1 = 87/16$).

171. Μὲ ποίαν συχνότητα ἀκούεται ὁ τόνος σειρῆνος ὕψους 850 Hz, ἀπὸ
διαβάτην κινούμενον ὡς πρὸς αὐτὴν μὲ ταχύτητα 16 m/sec ; (Ἀπ. Ἂν πλησιάζη
850 Hz καὶ ἂν ἀπομακρύνεται 810 Hz).

172. Ποῖον τὸ ὕψος τοῦ θεμελιώδους χορδῆς μήκους 0,8 m, πάχους 3mm
καὶ πυκνότητος 0,9 gr/cm³, ὅταν αὕτη τεντώνεται μὲ βάρος 8 kg* (Ἀπ. 69,42 Hz).

173. Ποῖον μῆκος πρέπει νὰ ἔχη ἠχητικὸς σωλὴν διὰ νὰ παρέχη θεμελιώ-
δη τόνον συχνότητος 130,5 Hz, ἂν ὁ σωλὴν εἶναι α) ἀνοικτὸς β) κλειστός ;
(Ἀπ. α) 1,303 m β) 0,6515 m).

174. Νὰ προσδιορισθοῦν τὰ ὕψη τῶν καθέκαστα τόνων μιᾶς ὀγδόης χρω-
ματικῆς κλίμακος, ἂν τονικὸς αὐτῆς εἶναι ὁ τόνος la=440 Hz. (Ἀπ. do μὲ
440.3/5 Hz, ♯ do μὲ 440.3/5.25/24, ♭re μὲ 440.3/5.9/8.24/25 κλπ.).

ΑΛΦΑΒΗΤΙΚΟΝ ΕΥΡΕΤΗΡΙΟΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ *

* Οἱ παρὰ τὰς λέξεις ἀριθμοὶ παρέχουν σελίδας τοῦ βιβλίου.