ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ & ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
Π.Μ.Σ. ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ & ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Από Κοινού Διαχείριση Περιουσιακών Στοιχείων και Υποχρεώσεων Συνταξιοδοτικών Σχημάτων σε Στοχαστικό Περιβάλλον Επιτοκίων

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΟΥ ΚΑΡΑΠΟΥΡΝΟΥ ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΥ

Πειραιάς, Ιούνιος 2013

Η συγκεκριμένη μεταπτυχιακή εργασία στοχεύει στην μελέτη των τρόπων διαχείρισης περιουσιακών στοιχείων από την πλευρά των συνταξιοδοτικών ταμείων, σε συνθήκες στοχαστικού περιβάλλοντος, δηλαδή αβεβαιότητας γύρω από τα επιτόκια. Παρουσιάζουμε αρχικά τις επενδυτικές δυνατότητες και προτιμήσεις των συνταξιοδοτικών ταμείων, παρέχοντας μια εικόνα στον αναγνώστη γύρω από τις επενδυτικές επιλογές αυτών, σκιαγραφώντας επιπλέον τις αιτίες που προκαλούν αυτές τις επενδυτικές επιλογές και τους λόγους που είναι ελκυστικές για τα ταμεία.

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε κάποια μέτρα κινδύνου και μια κατηγοριοποίηση των παραγόντων που προκαλούν κίνδυνο στην σημερινή εποχή. Επιπρόσθετα, εξηγούμε την έννοια της ανοσοποίησης απέναντι στον κίνδυνο, παρουσιάζοντας και κάποια μοντέλα τα οποία χρησιμοποιούνται προκειμένου να την επιτύχουμε.

Παρακάτω εξετάζουμε την βελτιστοποίηση των δυναμικών στρατηγικών διαπραγμάτευσης και κάνουμε μια επισκόπηση κάποιων κανόνων απόφασης για την εξισορρόπηση χαρτοφυλακίων. Επιπλέον, μελετούμε την στοχαστική αφοσίωση διατυπωμένη ως μοντέλο βελτιστοποίησης δυναμικών στρατηγικών δανειοληπτικών και δανειοδοτικών αποφάσεων, καθώς και το στοχαστικό γραμμικό προγραμματισμό ως ευρύτερο εργαλείο χρηματοοικονομικών μοντέλων.

Στο τελευταίο κεφάλαιο παρουσιάζουμε κάποια πρακτικά αποτελέσματα μοντέλων που έχουμε αναφέρει νωρίτερα, με την χρήση ενός υψηλού επιπέδου συστήματος μοντελοποίησης μαθηματικών προβλημάτων, της GAMS (General Algebraic Modeling System).

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σε πολλές χώρες στον κόσμο αντιμετωπίζεται μια υπάρχουσα ή επερχόμενη κρίση συνταξιοδότησης. Οι χώρες αυτές γνωρίζουν ότι έχουν μια μεγάλη πρόκληση στα χέρια τους, σχετικά με την λειτουργία της κατάστασης των συνταξιοδοτικών συστημάτων. Ο συνδυασμός ενός ταχέως μεταβαλλόμενου πληθυσμού καθώς και τα ποσοστά γονιμότητας που είναι αρκετά χαμηλότερα από τα ποσοστά αναπλήρωσης, αλλά και διάφοροι άλλοι παράγοντες, έχουν οδηγήσει σε μια εντυπωσιακή αύξηση του λόγου εξάρτησης σε πολλές χώρες. Την ίδια στιγμή πολλά ιδιωτικά συστήματα του κλάδου αντιμετωπίζουν σοβαρές δυσκολίες χρηματοδότησης ως αποτέλεσμα των φτωχών αποδόσεων του χρηματιστηρίου, της πτωτικής πορείας των επιτοκίων καθώς και της αύξησης της μακροζωίας. Τα προβλήματα του συνταξιοδοτικού γίνονται όλο και πιο πολύπλοκα και παρότι που υπάρχουν πολλοί άνθρωποι με εμπειρία στο τομέα των συντάξεων, η εμπειρία τους τείνει να είναι μονοδιάστατη.

Οι παροχές των ταμείων διακρίνονται σε δύο κατηγορίες: εφάπαξ παροχές και σύνταξη. Η σύνταξη είναι μια ροή πληρωμών που ξεκινά όταν κάποιος συνταξιοδοτείται και συνεχίζεται μέχρι να πεθάνει. Με άλλα λόγια, η σύνταξη προβλέπει την εγγύηση του εισοδήματος μετά τη συνταξιοδότηση, για όσο καιρό βρίσκεται στη ζωή ο συνταξιοδοτούμενος.

Η σύνταξη έχει ως εκ τούτου δύο βασικούς σκοπούς. Ο πρώτος είναι η εξομάλυνση της κατανάλωσης δηλαδή, να παρέχεται ένα εισόδημα κατά τη συνταξιοδότηση. Ο δεύτερος είναι η ασφάλιση, ιδίως όσον αφορά τούς κινδύνους μακροβιότητας. Η δημόσια πολιτική από την άλλη μπορεί να έχει δύο συμπληρωματικούς στόχους για ένα συνταξιοδοτικό σύστημα. Ο πρώτος είναι η ανακούφιση από τη φτώχεια: δηλαδή μια κοινωνία στην οποία οι συνταξιούχοι θα έχουν ένα ελάχιστο εγγυημένο επίπεδο διαβίωσης μετά τη συνταξιοδότηση. Ο δεύτερος στόχος είναι μια κοινωνία, που μπορεί να επιθυμεί να διανείμει πρόσθετους πόρους πάνω από το επίπεδο της φτώχειας σε ορισμένα μέλη της. Υπάρχουν μεταξύ άλλων δύο κύρια σχήματα συντάξεων. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε τους νέους εργαζόμενους να πληρώνουν από το εισόδημα τους το οποίο ονομάζεται αυτοχρηματοδοτούμενο ή pay-as-you-go (PAYG) συνταξιοδοτικό σύστημα. Στη δεύτερη περίπτωση, κάθε γενιά των εργαζομένων πρέπει να αποταμιεύει (επί εισοδήματος από την εργασία τους) για τις συντάξεις του, σε ένα κεφαλαιοποιητικό συνταξιοδοτικό σύστημα. Η σύνταξη προβλέπει την οικονομική λειτουργία της μεταφοράς εισοδήματος (και επομένως την κατανάλωση) από τα χρόνια εργασίας στα έτη συνταξιοδότησης. Υπάρχει βέβαια ο κίνδυνος οι πραγματικές πληρωμές των συντάξεων που θα καταβληθούν, να είναι μικρότερες από τις αναμενόμενες. Επιπρόσθετα υπάρχει πάντα η πιθανότητα η σύνταξη να μην καταβάλλεται καθόλου, λόγω ενός αφερέγγυου συνταξιοδοτικού συστήματος. Για το λόγο αυτό άλλωστε μιλάμε για υπόσχεση συνταξιοδότησης και όχι για την εγγύηση των συντάξεων.

1.1 ΧΡΕΟΓΡΑΦΑ ΣΤΑ ΟΠΟΙΑ ΕΠΕΝΔΥΟΥΝ ΤΑ ΤΑΜΕΙΑ

Τα ταμεία μπορούν να επενδύουν σε τίτλους χρηματαγοράς με ωριμάνσεις λιγότερες του ενός έτους. Το πιο σημαντικό παράδειγμα είναι οι καταθέσεις της χρηματαγοράς καθώς και τα διαπραγματεύσιμα πιστοποιητικά καταθέσεων. Οι καταθέσεις της χρηματαγοράς, είναι σταθερού επιτοκίου προθεσμιακές καταθέσεις μέχρι ενός έτους στις τράπεζες. Δεν είναι διαπραγματεύσιμες, έτσι δεν μπορούν να ρευστοποιηθούν πριν από τη λήξη. Τα επιτόκια από τις καταθέσεις καθορίζονται και σχετίζονται με το LIBID (London inter-bank bid rate). Οι τόκοι και το κεφάλαιο πληρώνονται εφάπαξ στην περίοδο ωρίμανσης. Μια άλλη κατηγορία τίτλων χρηματαγοράς είναι τα repos (repurchase agreements), δηλαδή συμφωνίες επαναγοράς. Αυτά περιλαμβάνουν δανεισμό μετρητών με την χρήση κυβερνητικών ομολόγων ως εγγύηση, δηλαδή το ομόλογο πωλείται έναντι μετρητών με την συμφωνία να επαναγοραστεί στο μέλλον.

Ένας άλλος τίτλος χρηματαγοράς που χρησιμοποιείται συχνά ως επενδυτικό εργαλείο είναι οι μετοχές. Οι μετοχές είναι μερίδια στα οποία διαιρείται το κεφάλαιο μιας εταιρείας, και ενσωματώνουν τα δικαιώματα του μετόχου, τα οποία πηγάζουν από την συμμετοχή του. Οι μετοχές διαχωρίζονται σε αυτές που διαπραγματεύονται στο χρηματιστήριο (διαπραγματεύσιμες) και σε αυτές που δεν διαπραγματεύονται (μη διαπραγματεύσιμες). Τα κέρδη των επιχειρήσεων που εκδίδουν τις μετοχές μοιράζονται στους μετόχους.

Τελευταία περίπτωση επενδυτικού εργαλείου που θα αναφέρουμε είναι τα ομόλογα του δημοσίου. Υπάρχουν διαφορετικοί τύποι ομολόγων, στους οποίους θα αναφερθούμε εκτενέστερα παρακάτω, αλλά γενικά τα ομόλογα είναι χρεόγραφα για τα οποία ο εκδότης αναλαμβάνει την υποχρέωση να καταβάλει κάποιο αντίτιμο συνήθως μετά από μια συγκεκριμένη χρονική διάρκεια.

Σε αυτό το σημείο θα παρουσιάσουμε συνοπτικά την τιμολόγηση εργαλείων της χρηματαγοράς[1], δηλαδή επενδυτικών εργαλείων, χρησιμοποιώντας ως παράδειγμα τα Treasury Bills (TBs), τα οποία είναι βραχυπρόθεσμα έντοκα γραμμάτια, στα οποία ο κάτοχος πληρώνεται την ονομαστική τους αξία στη λήξη.

1.2 ΟΜΟΛΟΓΑ ΚΑΙ ΔΑΝΕΙΑ

Λέγοντας, λοιπόν ομόλογο εννοούμε ένα δάνειο το οποίο «αγοράζει» ένας επενδυτής από κάποιον οικονομικό παράγοντα (π.χ. το κράτος). Το δάνειο αυτό χρησιμοποιείται για τη δημιουργία ρευστότητας από το αποταμιευτικό κοινό προς τον εκδότη. Αν για παράδειγμα το κράτος έχει ανάγκη ρευστότητας, θα εκδώσει ένα κρατικό ομόλογο. Το ομόλογο, θα αγοραστεί από τους επενδυτές, παρέχοντας την απαραίτητη ρευστότητα στο κράτος. Από την πλευρά του το κράτος, θα επιστρέψει τα χρήματα σταδιακά και με τους όρους του συγκεκριμένου ομολόγου. Πρόκειται λοιπόν, για μια εναλλακτική μορφή δανεισμού, που είναι χρήσιμη για την κάλυψη μεσοπρόθεσμων ή μακροπρόθεσμων αναγκών του εκδότη (εταιρειών, οργανισμών ή του κράτους).

[1] Blake, D. (2000) Financial Market Analysis, John Wiley & Sons, Ltd, Chichester.

Βασικά χαρακτηριστικά των ομολόγων αποτελούν τα παρακάτω:

- Το τοκομερίδιο ή κουπόνι **(coupon):** Το επιτόκιο που καταβάλλεται στον κάτοχο του ομολόγου, ανά εξάμηνο, ανά έτος κ.λ.π.
- Η απόδοση **(yield):** Το καθαρό κέρδος από την αγορά των ομολόγων, το οποίο βασίζεται πάνω στην τιμή αγοράς και το επιτόκιο που θα λαμβάνεται.
- Η απόδοση στη λήξη **(yield to maturity):** Η απόδοση ενός ομολόγου από την ημερομηνία αγοράς έως την ημερομηνία λήξης του. Πρόκειται για ένα πιο σύνθετο και πιο ακριβή υπολογισμό, πράγμα που βοηθάει στη σύγκριση ανάμεσα σε ομόλογα με διαφορετικές περιόδους ισχύος (και λήξης).
- Η απόδοση κατά την ημερομηνία εξαγοράς **(yield to call):** Η απόδοση που αποφέρει ένα ομόλογο από την ημερομηνία αγοράς μέχρι την ημερομηνία εξαγοράς του.

1.3 ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΟΜΟΛΟΓΩΝ

Θα μπορούσε κανείς να αναφέρει πολλούς και διαφορετικούς τρόπους κατηγοριοποίησης των ομολόγων. Εμείς παρακάτω θα αναφέρουμε ενδεικτικά κάποιους από αυτούς, οι οποίοι μάλιστα είναι και οι κυριότεροι:

- Κρατικά ή εταιρικά ανάλογα με την ιδιότητα του εκδότη τους.
- Σταθερού-κυμαινόμενου-επιτοκίου
- Με κουπόνι ή χωρίς κουπόνι είσπραξης
- Μάκρο-Μέσο-Βραχύ-πρόθεσμα ανάλογα με την διάρκεια τους

Ο εκδότης του ομολόγου επίσης είναι ένας σημαντικός παράγοντας που πρέπει να εξεταστεί από το δανειστή. Η σταθερότητα του εκδότη είναι η μοναδική εγγύηση που έχει ο δανειστής για το αν θα πάρει τα χρήματά του πίσω. Για παράδειγμα, η ασφάλεια που παρέχει το κράτος είναι πολύ μεγαλύτερη από την ασφάλεια ενός ιδρύματος ή μια εταιρίας.

Όπως καταλαβαίνει κάποιος εύκολα, το κράτος μπορεί να πληρώσει οποιαδήποτε στιγμή χρειαστεί ακόμα και ανεβάζοντας τη φορολογία. Από την άλλη πλευρά, μια εταιρία θα πρέπει να συνεχίσει να έχει κέρδη, το οποίο δεν είναι πάντα δυνατό. Ο δανειολήπτης κατατάσσεται σε μια σχετική κλίμακα πιστοληπτικού κινδύνου. Έτσι, ο εκδότης του ομολόγου μπορεί να εκτιμήσει το κίνδυνο μιας τέτοιας επένδυσης, βλέποντας τη σχετική επίδοση του εκδότη. Ανάλογα με την πιστοληπτική αξιολόγηση που λαμβάνει ένα ομόλογο κατηγοριοποιείται σε υψηλής ή χαμηλής φερεγγυότητας. Η πιστοληπτική ικανότητα των ομολόγων είναι άμεσα συνδεδεμένη με την απόδοσή τους. Τα ομόλογα χαμηλής πιστοληπτικής ικανότητας έχουν υψηλότερη απόδοση σε σχέση με αυτή των ομολόγων καλύτερης πιστοληπτικής ικανότητας. Μερικά ομόλογα έχουν χαρακτηριστικά δικαιώματος (option). Τέτοια ομόλογα αποτελούν για παράδειγμα, οι μετατρέψιμες ομολογίες (π.χ. ομόλογα που μπορούν να μετατραπούν σε άλλους τύπους ομολόγων ή σε μετοχές).

Τα ομόλογα μπορούν επίσης να διαφοροποιηθούν με βάση τον εκδότη τους. Για παράδειγμα τα περισσότερα ομόλογα στο Ηνωμένο Βασίλειο εκδίδονται από τη Βρετανική κυβέρνηση για τη χρηματοδότηση και τη διαχείριση του εθνικού χρέους και είναι κοινώς γνωστά ως gilts. Έπειτα, υπάρχουν και ομόλογα που εκδίδονται από τις δημόσιες αρχές του Ηνωμένου Βασιλείου, και ιδιαίτερα από τις τοπικές. Αυτά τα ομόλογα έχουν εξασφαλισμένα τα έσοδα των τοπικών αρχών και γενικά δεν διασφαλίζονται από την κυβέρνηση. Η διάρκεια αυτών των ομόλογων είναι συνήθως μεταξύ ενός και πέντε ετών, παρότι τα περισσότερα είναι ομόλογα λήξης ενός έτους και είναι γνωστά ως yearling bonds. Τέλος οι εταιρείες από την πλευρά τους εκδίδουν και αυτές ομόλογα, τα οποία είναι γνωστά και ως εταιρικά ομόλογα. Υπάρχουν αρκετές κλάσεις εταιρικών ομολόγων. Τα χρεόγραφα παρόλο αυτά αποτελούν τον οποίο ασφαλή τρόπο εταιρικού χρέους, μιας και είναι εξασφαλισμένα είτε από μια προκαθορισμένη είτε από μια κυμαινόμενη χρέωση απέναντι στα περιουσιακά στοιχεία μιας εταιρείας.

Η επένδυση μέσω των ομολόγων φυσικά κρύβει κάποιους κινδύνους που ο επενδυτής πρέπει να τους λάβει σοβαρά υπόψη του. Οι ακόλουθοι παράγοντες μπορεί να επηρεάσουν αρνητικά την πορεία μιας τέτοιας επένδυσης.

- Επενδύσεις με σταθερό επιτόκιο μπορούν να επηρεαστούν αρνητικά από τον πληθωρισμό.
- Ομόλογα σταθερού η κυμαινόμενου επιτοκίου κινούνται αντίστροφα από τις τιμές των επιτοκίων. Έτσι, αυξήσεις των επιτοκίων που συντελούνται στην διεθνή αγορά προκαλούν μείωση στις τιμές των ομολόγων.
- Αν επίσης η οικονομική φερεγγυότητα του εκδότη είναι χαμηλή υπάρχει κίνδυνος αδυναμίας αποπληρωμής.

Καλό είναι λοιπόν ο επενδυτής να καθορίζει την επενδυτική του στρατηγική, πριν κάνει την επιλογή του ομολόγου. Τα ομόλογα μακροπρόθεσμης λήξης είναι υψηλότερης απόδοσης άρα είναι περισσότερο ελκυστικά. Όμως, αυτή η κατηγορία ομολόγων είναι περισσότερο επιρρεπής στους προαναφερόμενους κινδύνους. Αν ο σκοπός της επένδυσης είναι η είσπραξη σταθερού εισοδήματος και η διαφύλαξη του αρχικού κεφαλαίου, ο επενδυτής θα πρέπει να αναζητήσει ομόλογα μικρότερης διάρκειας. Η επένδυση σε ομόλογα με διαφορετική ημερομηνία λήξης μειώνει την επίδραση της μεταβολής των επιτοκίων. Τέλος, με επένδυση σε ομολογιακό αμοιβαίο κεφάλαιο, υπάρχει ωφέλεια από όλα τα πλεονεκτήματα των αμοιβαίων κεφαλαίων, όπως η εύκολη ρευστοποίηση των ομολόγων.

1.4 ΜΕΤΟΧΕΣ

Υπάρχουν διάφοροι τύποι μετοχών που μπορεί να κατέχει μια επιχείρηση, όπως ορίζεται από την ιδρυτική πράξη και το καταστατικό της. Ο σημαντικότερος τύπος είναι οι κοινές μετοχές. Οι μέτοχοι είναι οι νόμιμοι ιδιοκτήτες της επιχείρησης και έχουν προνόμια όπως δικαίωμα ψήφου καθώς και το δικαίωμα να λαμβάνουν μερίσματα και προνόμια σε περίπτωση που εκδοθούν νέες μετοχές.

Τα περισσότερα συνταξιοδοτικά ταμεία έχουν επενδύσει το μεγαλύτερο μέρος των χαρτοφυλακίων τους σε μετοχές (δηλ. μετοχές εισηγμένες στο Χρηματιστήριο), αλλά τα τελευταία χρόνια βλέπουμε ότι επενδύουν σε κεφάλαια και σε μη εισηγμένες μετοχές. Σε ορισμένες περιπτώσεις, οι κίνδυνοι είναι μεγάλοι, αλλά μεγάλες ενδέχεται να είναι και οι πιθανές μακροπρόθεσμες ανταμοιβές. Τα συνταξιοδοτικά ταμεία επενδύουν επίσης σε μετοχές στο εξωτερικό.

Μια άλλη σημαντική κατηγορία μετοχών είναι οι προνομιούχες μετοχές. Ειδικότερα, προτιμούνται μετοχές που προσφέρουν σχετικά σταθερό μέρισμα. Οι προνομιούχες μετοχές δεν εγγυώνται την καταβολή του μερίσματος, και τα μερίσματα δεν χρειάζεται να καταβληθούν αν τα κέρδη της επιχείρησης δεν είναι αρκετά, ώστε να τα χρηματοδοτήσει. Η προνομιούχος μετοχή προσφέρει απλά ένα προβάδισμα στους κατόχους της έναντι των κατόχων κοινών μετοχών, όσον αφορά τη λήψη μερίσματος και τη λήψη του προϊόντος της εκκαθάρισης σε περίπτωση διάλυσης της επιχείρησης, αλλά συνήθως υπάρχει στέρηση του δικαιώματος ψήφου και συμμετοχής στη διαχείριση της επιχείρησης.

Όταν μια επιχείρηση έχει εκδώσει μετοχές και έχει κέρδη, μπορεί να μοιράσει μέρος των κερδών αυτών στους μετόχους της με την μορφή μερίσματος, που αντιστοιχεί σε κάποιο ποσό ανά μετοχή.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι μια επιχείρηση πληρώνει μερίσματα μία φορά το χρόνο. Στην πραγματικότητα, συνήθως κάνει δύο πληρωμές μερίσματος ανά έτος: μια ενδιάμεση και μια τελική. Ας υποθέσουμε επίσης, ότι ο επενδυτής προτίθεται να αγοράσει το μερίδιο, να το διακρατήσει για ένα έτος και να το πωλήσει στο τέλος αυτού του έτους. Αναμένει να λάβει μέρισμα στο τέλος του έτους, όπως επίσης και την τιμή της μετοχής εκείνη την στιγμή. Προκειμένου να απολαύσει αυτή την απόδοση θα είναι διατεθειμένος να πληρώσει την παρακάτω δίκαιη τιμή για την μετοχή σήμερα:

$$P_0^S = \frac{E(d_1)}{1+r} + \frac{E(P_1^S)}{1+r} \qquad (1.1)$$

όπου:

$\mathbf{P_0^S}$ = δίκαιη τιμή της μετοχής

$\mathbf{E(d_1)}$= αναμενόμενο ετήσιο μέρισμα ανά μετοχή στο τέλος του έτους 1

$\mathbf{E(P_1^S)}$ = αναμενόμενη τιμή της μετοχής στο τέλος του έτους 1

r = προεξοφλητικό επιτόκιο προσδιορισμένο από την αγορά που απαιτείται για μια επιχείρηση με αυτή την κατηγορία κινδύνου.

Επίσης θα πρέπει να ισχύει:

$$E(P_1^S) = \frac{E(d_2)}{1+r} + \frac{E(P_2^S)}{1+r} \qquad (1.2)$$

Αντικαθιστώντας τώρα την εξίσωση (1.1) στην (1.2) θα έχουμε:

$$P_0^S = \frac{E(d_1)}{1+r} + \frac{E(d_2)}{(1+r)2} + \frac{E(P_2^S)}{(1+r)2} \quad (1.3)$$

όπου:

$E(d_2)$= αναμενόμενο ετήσιο μέρισμα ανά μετοχή στο τέλος του έτους 2

$E(P_2^S)$ = αναμενόμενη τιμή της μετοχής στο τέλος του έτους 2

Με επαναλαμβανόμενη αντικατάσταση των εξισώσεων όπως η (1.2) για $E(P_2^S)$,$E(P_3^S)$ κλπ., στην (1.3), έχουμε:

$$P_0^S = \sum_{t=1}^{T} \square \quad (1.4)$$

όπου d_t είναι το μέρισμα ανά μετοχή στο έτος t. Καθώς το T → ∞, η εξίσωση (1.4) γίνεται:

$$P_0^S = \sum_{t=1}^{\infty} \square \quad (1.5)$$

δεδομένου ότι υποθέτουμε ότι ο δεύτερος όρος στην δεξιά πλευρά της εξίσωσης (1.4) εξαφανίζεται καθώς T → ∞, που θα προκύψει, εάν $E(P_\infty^S)$ είναι πεπερασμένο (δηλαδή να αποκλείσουμε διάφορα είδη κερδοσκοπίας).

Για προνομιούχες μετοχές όπου η προτιμώμενη τιμή μερίσματος είναι γνωστή, η εξίσωση (1.5) *γίνεται:*

$$P_{(0)}^s = \frac{d}{r} \quad (1.6)$$

όπου d είναι το προκαθορισμένο ετήσιο μέρισμα και r το προεξοφλητικό επιτόκιο.

Τα ομόλογα και οι μετοχές είναι και τα δύο χρεόγραφα, η διαφορά είναι ότι οι κάτοχοι μετοχών έχουν μερίδιο στην εταιρία της οποίας τις μετοχές κατέχουν. Αντίθετα, οι κάτοχοι ομολόγων είναι απλοί δανειστές του εκάστοτε εκδότη. Επίσης, τα ομόλογα έχουν συνήθως καθορισμένη διάρκεια (περίοδο ωρίμανσης) και μετά από αυτήν εξαγοράζονται. Οι μετοχές μπορούν να είναι και αορίστου χρόνου.

1.5 ΦΟΡΕΙΣ ΣΥΛΛΟΓΙΚΩΝ ΕΠΕΝΔΥΣΕΩΝ

Οι κύριες κατηγορίες φορέων συλλογικών επενδύσεων παρουσιάζονται παρακάτω:

1.5.1 ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΚΕΦΑΛΑΙΑ ΚΑΙ ΑΝΟΙΧΤΟΥ ΤΥΠΟΥ ΕΠΕΝΔΥΤΙΚΟΙ ΦΟΡΕΙΣ

Ένα αμοιβαίο κεφάλαιο[2], είναι ένα χρηματοπιστωτικός θεσμός που επενδύει σε τίτλους από εταιρείες. Οι υπεύθυνοι για τη λειτουργία και τη

[2] Blake, D., Lehmann, B. and Timmermann, A. (1999) Allocation dynamics and pension fund performance. Journal of Business, 72, 429–462.

διαχείριση του αμοιβαίου κεφαλαίου χρεώνουν ένα ποσό για τις υπηρεσίες τους. Ο διαχειριστής, συνήθως είναι μια τράπεζα ή μια ασφαλιστική εταιρεία η οποία αναλαμβάνει την επιμέλεια και κρατά ενήμερους τους κατόχους. Το αμοιβαίο κεφάλαιο δεν επιτρέπεται να δανείσει πόρους προκειμένου να επενδυθούν σε χρεόγραφα, αυτό σημαίνει ότι δεν μπορεί να αναμειχθεί σε μόχλευση.

Τα αμοιβαία κεφάλαια εκδίδουν μονάδες (units), που αντιπροσωπεύουν απαιτήσεις έναντι των περιουσιακών στοιχείων του αμοιβαίου κεφαλαίου. Οι μονάδες αυτές θα πρέπει να τιμολογούνται ώστε να ισούνται με τη καθαρή αξία ενεργητικού ανά μονάδα. Το αμοιβαίο κεφάλαιο επενδύσεων είναι αμοιβαίο κεφάλαιο ανοικτού τύπου, πράγμα που σημαίνει ότι, μπορεί να δημιουργήσει ή να ακυρώσει μονάδες όποτε το επιτρέψουν οι συνθήκες της ζήτησης. Επίσης ένα αμοιβαίο κεφάλαιο επενδύσεων μπορεί να ειδικεύεται σε διάφορους τομείς της αγοράς ή να ακολουθεί διαφορετικούς στόχους επενδύσεων. Εναλλακτικά, ένα ισορροπημένο αμοιβαίο κεφάλαιο θα επενδυθεί σε μεγάλο βαθμό σε όλους τους τομείς και θα στοχεύει στην επίτευξη υψηλών εισοδημάτων από κάποια κεφαλαιακή υπερτίμηση.

Τα συνταξιοδοτικά ταμεία έχουν την τάση να επενδύουν σε αμοιβαία κεφάλαια που απαλλάσσονται από εταιρικό φόρο και φόρο κεφαλαιουχικών κερδών. Αποτελούν ένα κατάλληλο επενδυτικό σχήμα για μικρά συνταξιοδοτικά ταμεία, δεδομένου ότι τους δίνεται έτσι η δυνατότητα να πάρουν τα μέγιστα οφέλη από τη διαφοροποίηση στο χαμηλότερο κόστος. Επίσης υπάρχουν αμοιβαία κεφάλαια που επιτρέπουν σε ένα μικρό, ή ακόμη και μεσαίου μεγέθους ταμείο να επενδύσει σε ακίνητα.

1.5.2 ΕΤΑΙΡΙΕΣ ΕΠΕΝΔΥΣΕΩΝ

Μια εταιρία επενδύσεων αποτελεί ένα χρηματοπιστωτικό ίδρυμα, το οποίο επενδύει σε τίτλους άλλων εταιρειών, κάνοντας χρήση των κεφαλαίων και των αποθεματικών τις. Ένας μέτοχος έχει έμμεσο συμφέρον στο υποκείμενο χαρτοφυλάκιο τίτλων. Όπως και τα αμοιβαία κεφάλαια, οι εταιρίες επενδύσεων ειδικεύονται σε διαφορετικούς τομείς της αγοράς ή επιδιώκουν διαφορετικούς επενδυτικούς στόχους.

Το 1965, ο διαχωρισμός στο επίπεδο των επενδύσεων εισήχθη με δύο τύπους μετοχικού κεφαλαίου, τις μετοχές εισοδήματος και τις κεφαλαιουχικές (συνήθως με τη μορφή του μηδενικού μερίσματος των προνομιούχων μετοχών), καθώς επίσης και με μια καθορισμένη διάρκεια, συνήθως είκοσι ετών. Κατά τη διάρκεια ζωής αυτών των εταιριών, οι μετοχές εισοδήματος απολαμβάνουν όλο το εισόδημα από το υποκείμενο χαρτοφυλάκιο, και οι κεφαλαιουχικές μετοχές δικαιούνται όλα τα περιουσιακά στοιχεία. Όταν η εταιρεία ρευστοποιείται, οι μετοχές εισοδήματος αποπληρώνονται στην ονομαστική τους αξία και το υπόλοιπο αποπληρώνεται στους μετόχους κεφαλαιουχικών μετοχών. Οι βασικές διαφορές μεταξύ των επενδυτικών εταιριών και των αμοιβαίων κεφαλαίων είναι οι εξής:

Οι εταιρείες επενδύσεων έχουν αμοιβαία κεφάλαια κλειστού τύπου, δηλαδή, έχουν ένα συγκεκριμένο αριθμό μετοχών που μπορεί να αυξηθεί μόνο διαμέσου ενός δικαιώματος. Επίσης μπορούν να χρησιμοποιούν τη μόχλευση (δηλαδή, δανείζονται για να αγοράσουν περισσότερους τίτλους), ενώ τα αμοιβαία κεφάλαια δεν επιτρέπεται να δανειστούν. Οι τιμές των μετοχών σε εταιρείες επενδύσεων καθορίζονται από τις δυνάμεις της αγοράς, όπως συμβαίνει άλλωστε και με τις μετοχές όλων των εταιριών. Αντίθετα, οι τιμές μονάδων των αμοιβαίων κεφαλαίων έχουν οριστεί ίσες με την καθαρή αξία ενεργητικού του υποκείμενου χαρτοφυλακίου. Οι τιμές μετοχών των εταιριών επενδύσεων διαφέρουν κατά πολύ από τη καθαρή αξία του ενεργητικού, για την ακρίβεια συνήθως διαπραγματεύονται σε μεγάλη έκπτωση από αυτή. Οι εταιρείες επενδύσεων παρέχουν μια εναλλακτική επενδυτική λύση για τα συνταξιοδοτικά ταμεία, κυρίως τα μικρά, ώστε να ασχολούνται με διαφοροποίηση χαμηλού κόστους. Επιπλέον, η έκπτωση τιμής στην καθαρή αξία ενεργητικού των περισσότερων μετοχών τους, τις μετατρέπει σε ένα συμφέρον εργαλείο αγοράς τίτλων ως προς τον κίνδυνο.

1.5.3 ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΑ ΠΡΟΪΟΝΤΑ

Ένα ταμείο μπορεί να επενδύσει σε σύγχρονα ασφαλιστικά προϊόντα μέσω συλλογικών επενδυτικών φορέων ασφαλιστικών εταιριών ζωής. Οι φορείς αυτοί χρησιμοποιούνται για την επένδυση των ασφαλίστρων, από τα πρακτορεία συνταξιοδοτικών προγραμμάτων καθορισμένων εισφορών και άλλων προϊόντων ζωής, όπως συμβολαίων προικοδότησης. Μια σειρά από εταιρείες παροχής χρηματοοικονομικών υπηρεσιών έχουν εγκατεστημένα πρακτορεία ασφαλειών ζωής προκειμένου να εκτελέσουν τα DC (Defined Contribution), δηλαδή καθορισμένης εισφοράς συνταξιοδοτικά προγράμματα. Ένα από τα πλεονεκτήματα αυτών είναι οι μελλοντικές φορολογικές ελαφρύνσεις στην τιμή μονάδας του ασφαλισμένου κεφαλαίου. Η φύση των πρακτορειών ζωής επιτρέπει σε ένα πάροχο να προσφέρει ένα ευρύτερο φάσμα υπηρεσιών, όπως τα εγγυημένα κεφάλαια, καθώς και η κάλυψη ζωής και προσόδων.

Οι πολιτικές προικοδότησης είναι ένας συνδυασμός ενός σωρευτικού κεφαλαίου και μιας χρόνιας ασφαλιστικής πολιτικής. Το σωρευτικό κεφάλαιο έχει αποδόσεις που διανέμονται με τη μορφή των ετήσιων μπόνους, τα οποία, αφού χορηγηθούν, δεν μπορούν να αφαιρεθούν, και επίσης έχει ένα τελικό επίδομα το οποίο γενικά αντιπροσωπεύει ένα μεγάλο ποσοστό της συνολικής απόδοσης. Τα ασφαλιζόμενα κεφάλαια και οι πολιτικές προικοδότησης βρίσκονται υπό την προστασία του Συστήματος Αποζημίωσης Χρηματοοικονομικών Υπηρεσιών, το οποίο θα καταβάλει μέρος της αξίας στην περίπτωση όπου μια ασφαλιστική εταιρεία κηρύξει πτώχευση.

1.5.4 ΕΙΣΗΓΜΕΝΑ ΚΕΦΑΛΑΙΑ ΚΑΙ ΕΓΓΥΗΜΕΝΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΚΕΦΑΛΑΙΑ

Τα εισηγμένα κεφάλαια είναι συνδυασμός κεφαλαίων με μετοχές οι οποίες διαπραγματεύονται στο χρηματιστήριο. Η ιστορία τους ξεκινάει το 1993 στις

Ηνωμένες Πολιτείες Αμερικής. Τα εγγυημένης ανάπτυξης κεφάλαια ή (εγγυημένα κεφάλαια) εγγυώνται την επιστροφή μιας ελάχιστης κεφαλαιακής αξίας (π.χ. 98% της αρχικής επένδυσης), ανεξάρτητα από τι συμβαίνει στην αξία των υποκείμενων επενδύσεων. Υπάρχουν δύο τύποι τέτοιων κεφαλαίων. Ο πρώτος τύπος είναι επενδύσεις βασισμένες είτε σε μετρητά είτε σε ομολόγα, που χρησιμοποιούν μέρος από την αρχική επένδυση, μαζί με το εισόδημα που δημιουργείται από τα μετρητά ή το χαρτοφυλάκιο ομολόγων, για να αγοράσουν το δικαιώματα προαίρεσης αγοράς (call option) για ένα μετοχικό δείκτη, όπως ο FTSE 100. Σε αυτή τη μορφή το προϊόν μερικές φορές ονομάζεται (equitized cash portfolio). Ο συνδυασμός των ομολόγων με τα δικαιώματα προαίρεσης αγοράς, δίνει πλήρη προστασία έναντι των πτώσεων της χρηματαγοράς, αλλά αφήνει ανοικτό κάποιο περιθώριο ανόδου αν η χρηματαγορά ανεβαίνει.

Ο δεύτερος τύπος εγγυημένου κεφαλαίου διαμορφώνεται με γνώμονα την ισότητα και χρησιμοποιεί μέρος της αρχικής επένδυσης, μαζί με το εισόδημα που δημιουργείται από την καθαρή θέση του χαρτοφυλακίου, για να αγοράσει δικαιώματα πώλησης (put options) σε ένα μετοχικό δείκτη, όπως ο FTSE 100. Ο συνδυασμός των μετοχών με τα δικαιώματα πώλησης δίνει ολοκληρωμένη προστασία έναντι των πτώσεων της αξίας της χρηματιστηριακής αγοράς, αλλά αφήνει ανοικτό κάποιο περιθώριο ανόδου αν το χρηματιστήριο ανεβαίνει. Η αξία του εγγυημένου προϊόντος σε αυτή τη δεύτερη περίπτωση ισούται με το άθροισμα των τιμών των μετοχών και των δικαιωμάτων πώλησης που διακρατούνται στο χαρτοφυλάκιο.

1.5.5 ΕΜΠΡΑΓΜΑΤΑ ΠΕΡΙΟΥΣΙΑΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Μέχρι τώρα μελετήσαμε τα κυριότερα χρηματοοικονομικά περιουσιακά στοιχεία, τα οποία ένα συνταξιοδοτικό ταμείο θα μπορούσε να διακρατά στο χαρτοφυλάκιο του. Δύναται όμως να επενδύσει και σε εμπράγματα περιουσιακά στοιχεία, κατά κύριο λόγο ακίνητα, γη και συλλεκτικά είδη.

1.6 ΑΚΙΝΗΤΑ

Οι κύριες κατηγορίες των ακινήτων στα οποία τα συνταξιοδοτικά ταμεία επενδύουν είναι βιομηχανικά, εμπορικά και γραφεία. Δεν έχουν την τάση να επενδύουν σε κατοικίες και διαμερίσματα. Μεγάλα κεφάλαια προτιμούν τις άμεσες επενδύσεις σε ακίνητα, ενώ μικρά κεφάλαια προτιμούν έμμεσες επενδύσεις μέσω αμοιβαίων κεφαλαίων ακινήτων .

Οι κύριοι στόχοι των άμεσων επενδύσεων σε ακίνητα είναι η επίτευξη ενός σταθερού εισοδήματος από ενοίκια καθώς και η επίτευξη κέρδους από την άνοδο των τιμών των ακινήτων. Μεγάλα κεφάλαια τείνουν να επιλέγουν τις επενδύσεις τους για την επίτευξη του τελευταίου στόχου, ενώ τα μικρά κεφάλαια φαίνεται να συγκρατούνται περισσότερο. Όλα τα κεφάλαια προτιμούν να ενοικιάζουν την περιουσία τους σε φερέγγυους ενοικιαστές, κυρίως δημόσιες επιχειρήσεις και

δημόσιες αρχές, και αυτή τους η προτίμηση επηρεάζει το είδος του ακινήτου που επενδύουν. Με άλλα λόγια, ο ενοικιαστής είναι εξίσου σημαντικός με την ιδιοκτησία από επενδυτικής άποψης.

1.7 ΓΗ

Στη δεκαετία του 1970, τα συνταξιοδοτικά ταμεία έκαναν σημαντικές επενδύσεις στον τομέα των γεωργικών οικοπέδων, και ιδιαίτερα στον τομέα των ενοικιάσεων. Η γεωργική γη τείνει να είναι μια ελκυστική επένδυση, όταν ο πληθωρισμός είναι υψηλός: η ανατίμηση στην αξίας της γης αντισταθμίζει ικανοποιητικά τις χαμηλές καθαρές αποδόσεις που παρουσιάζουν αυτές οι επενδύσεις. Σε αντίθετη περίπτωση, τα χρηματοοικονομικά περιουσιακά προγράμματα έχουν την τάση να παράγουν υψηλότερες πραγματικές αποδόσεις από ότι η γη.

1.8 ΣΥΛΛΕΚΤΙΚΑ ΕΙΔΗ

Τα συλλεκτικά αντικείμενα είναι το όνομα που δίνεται σε μικρά φυσικά περιουσιακά στοιχεία των οποίων η αξία αναμένεται να αυξηθεί με το χρόνο. Τα συλλεκτικά αντικείμενα περιλαμβάνουν συνεπώς τα έργα τέχνης, πολύτιμα μέταλλα, πορσελάνη, κοσμήματα, χαλιά, έπιπλα, σπάνια γραμματόσημα, κέρματα, αρχαιότητες, εκλεκτής ποιότητας κρασιά, και ούτω καθεξής.

1.9 ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ ΠΡΟΪΟΝΤΩΝ

Τα πιο γνωστά παράγωγα προϊόντα είναι :

α) Τα Προθεσμιακά Συμβόλαια (Forward Contracts)

β) τα Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης (Future Contracts)

γ) τα Δικαιώματα Προαίρεσης (Options)

δ) τα Swaps ή (Σύμβαση Ανταλλαγής)

α. Προθεσμιακά Συμβόλαια (Forward Contracts)

Τα Προθεσμιακά Συμβόλαια (ΠΣ) αποτελούν την απλούστερη μορφή παραγώγου. Τέτοια συμβόλαια συνήθως πραγματοποιούνται μεταξύ δύο αντισυμβαλλομένων για παράδειγμα μεταξύ δύο χρηματοοικονομικών ιδρυμάτων ή μεταξύ δύο μεγάλων εταιρειών και συνήθως η διαπραγμάτευση τους γίνεται εκτός χρηματιστηριακής αγοράς. Σύμφωνα με τους όρους του συμβολαίου ο ένας αντισυμβαλλόμενος συμφωνεί να αγοράσει μια ποσότητα ενός συγκεκριμένου αγαθού σε μια προκαθορισμένη τιμή σε ένα προκαθορισμένο χρονικό σημείο στο μέλλον και ο δεύτερος αντισυμβαλλόμενος είναι υποχρεωμένος να πουλήσει τη συγκεκριμένη ποσότητα του αγαθού στη προκαθορισμένη τιμή στο προκαθορισμένο χρονικό σημείο στο μέλλον.

β. Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης (Future Contracts)

Ένα Συμβόλαιο Μελλοντικής Εκπλήρωσης (ΣΜΕ), όπως και η περίπτωση των Προθεσμιακών Συμβολαίων, αποτελεί μία διμερή συμφωνία μεταξύ δύο αντισυμβαλλομένων. Από τους αντισυμβαλλομένους, ο ένας οφείλει να αγοράσει (long position) και ο άλλος να πουλήσει (short position) δηλαδή μία προκαθορισμένη ποσότητα ενός αγαθού, σε μία προκαθορισμένη ημερομηνία στο μέλλον, σε μία προκαθορισμένη τιμή συναλλαγής. Το μέρος που έχει θέση long αναμένει άνοδο της τιμής του αγαθού ενώ αντίθετα το μέρος που έχει θέση short αναμένει πτώση στη τιμή του αγαθού. Τα ΣΜΕ συναλλάσσονται καθημερινά σε κάποιο οργανωμένο χρηματιστήριο όπως π.χ. στο Χρηματιστήριο Παραγώγων Αθηνών. Οι δύο αντισυμβαλλόμενοι σε ένα ΣΜΕ οφείλουν να καταθέσουν ένα ποσό σε μορφή εγγύησης σε ένα συγκεκριμένο λογαριασμό που τους ανοίγει η χρηματιστηριακή τους. Ο λογαριασμός αυτός ονομάζεται margin account και το ποσοστό της εγγύησης αποτελεί ένα μέρος της αξίας της συναλλαγής.

γ. Δικαιώματα Προαίρεσης (Options)

Δικαίωμα (αλλά όχι την υποχρέωση) να αγοράσει (ή να πωλήσει) από τον πωλητή του δικαιώματος μία προκαθορισμένη ποσότητα ενός αγαθού, σε μία προκαθορισμένη ημερομηνία στο μέλλον, σε μία προκαθορισμένη τιμή συναλλαγής. Ο πωλητής του δικαιώματος, αυτός δηλαδή που έχει θέση short στο δικαίωμα, σε αντίθεση με τον αγοραστή, είναι υποχρεωμένος να πουλήσει (ή να αγοράσει ανάλογα με το δικαίωμα) τη συγκεκριμένη προκαθορισμένη ποσότητα του αγαθού, στη προκαθορισμένη ημερομηνία στο μέλλον, στη προκαθορισμένη τιμή συναλλαγής.Δικαίωμα προαίρεσης (Option) είναι ένα συμβόλαιο μεταξύ δύο αντισυμβαλλομένων το οποίο όμως έχει μια πιο σύνθετη μορφή από αυτή των Futures ή των Forwards.

δ. Swap ή (Σύμβαση Ανταλλαγής)

Swap ή Σύμβαση Ανταλλαγής αποτελεί μια συμφωνία μεταξύ δύο συμβαλλομένων για ανταλλαγή μελλοντικών χρηματοροών (legs) με τρόπο που έχουν προκαθορίσει μεταξύ τους. Τα χρηματικά ποσά που ανταλλάσσονται μπορεί να αναφέρονται σε διαφορετικά νομίσματα και σταθερά ποσά. Αλλιώς μπορεί ένα σταθερό ποσό να ανταλλάσσεται με ένα μεταβαλλόμενο, αβέβαιο ποσό ή το ποσό πληρωμής στο ένα νόμισμα να είναι σταθερό ενώ στο άλλο μεταβαλλόμενο. Υπάρχουν 4 διαφορετικές κατηγορίες swaps οι οποίες είναι οι εξής:

- Συμβάσεις Ανταλλαγής Επιτοκίων (interest rates swap)
- Συμβάσεις Ανταλλαγής Νομισμάτων (currency swap)
- Συμβάσεις Ανταλλαγής Εμπορευμάτων (commodities swap)
- Συμβάσεις Ανταλλαγής Μετοχών (equity swap)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ΜΕΤΡΑ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΚΑΙ ΑΝΟΣΟΠΟΙΗΣΗ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ ΑΠΕΝΑΝΤΙ ΣΤΟ ΚΙΝΔΥΝΟ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι να εισάγουμε κάποια βασικά χαρακτηριστικά της μέτρησης του κινδύνου και της διαχείρισης του. Ως κίνδυνο γενικά μπορούμε να ορίσουμε μια στατιστική κατανομή που περιγράφει τις πιθανότητες των διάφορων επιπέδων των μελλοντικών αναμενόμενων αποδόσεων. Συνηθίζεται να υποθέτουμε κανονική κατανομή αλλά αυτό συμβαίνει απλά και μόνο για λόγους απλούστευσης. Μια διαφορά από την καθημερινή έννοια της λέξης κίνδυνος είναι ότι η πραγματική έκβαση μιας επένδυσης, μπορεί να είναι είτε καλύτερη είτε χειρότερη από το αναμενόμενο αποτέλεσμα της, αλλά παρόλο αυτά και στις δύο περιπτώσεις αυτή την «άγνοια του πραγματικού αποτελέσματος» μπορούμε να την χαρακτηρίσουμε ως κίνδυνο. Κατά συνέπεια ο κίνδυνος δύναται να είναι τόσο θετικός όσο και αρνητικός, ανάλογα με το αν τα αποτελέσματα για έναν επενδυτή είναι θετικά ή αρνητικά.

Μιλώντας γενικά για διαχείριση κινδύνου, συνήθως αναφερόμαστε σε αρνητικό κίνδυνο, δηλαδή κίνδυνο ο οποίος μπορεί να προκαλέσει αρνητικά αποτελέσματα για τον επενδυτή, και σκοπός μας είναι να τον διαχειριστούμε, ελαχιστοποιώντας τον και θωρακίζοντας το χαρτοφυλάκιο μας απέναντι σε τέτοιες αρνητικές μεταβολές.

Θα πρέπει να προχωρήσουμε βέβαια σε μια κατηγοριοποίηση των παραγόντων που δημιουργούν κίνδυνο στη σημερινή χρηματοοικονομική και χρηματιστηριακή αγορά, καθώς επίσης και να ορίσουμε μέτρα για τον κίνδυνο, δηλαδή τρόπους με τους οποίους μπορούμε να μετρήσουμε ή καλύτερα να υπολογίσουμε τον κίνδυνο. Αμέσως μετά θα αναφερθούμε σε μοντέλα

ανοσοποίησης απέναντι στο κίνδυνο, καθώς και σε μοντέλα αντιστοίχισης των χρηματοροών.

2.1 ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΚΑΙ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ

Θα μελετήσουμε την μέτρηση του κινδύνου του επιτοκίου στην τιμή ενός ομολόγου. Η ευαισθησία της εξίσωσης της τιμής στις οριακές μεταβολές του επιτοκίου μπορεί να ορίσει ένα μέτρο του κινδύνου. Ας θεωρήσουμε μια γενική εξίσωση τιμολόγησης της μορφής $p_i = \Phi_i$(z) για το ομόλογο i, όπου z είναι μια ανεξάρτητη μεταβλητή που υπόκειται σε απρόβλεπτες και απροσδιόριστες μεταβολές. Η μοναδική πηγή κινδύνου για την τιμή ενός ομολόγου είναι η μεταβλητή z.

Μια εκτίμηση πρώτης τάξης των μεταβολών στην τιμή του ομολόγου λόγω μεταβολών στο z, μπορεί να δοθεί από την πρώτη παράγωγο δηλαδή ως εξής:

$$D_i = \frac{\partial \varphi_{i(z)}}{\partial_z} \tag{2.1}$$

Το z θα μπορούσε να είναι είτε η απόδοση ή το στιγμιαίο επιτόκιο, μιας και τυπικά είναι ένα διάνυσμα όπως και η δομή των επιτοκίων (term structure). Ως εκ τούτου απαιτείται να καθορίσουμε τις μερικές παραγώγους ως προς κάθε ένα από τα στοιχεία του διανύσματος, ή να καθορίσουμε με κάποιο τρόπο ταυτόχρονες μεταβολές σε όλα τα στοιχεία του διανύσματος. Οπότε ορίζουμε αναλυτικότερα την μεταβλητή z και τις μεταβολές της και παρέχουμε αυστηρούς ορισμούς των παραγώγων της τιμής.

2.1.1 DOLLAR DURATION

Θεωρώντας μια δομή των επιτοκίων της μορφής r_t=r για όλα τα t=1,2,3,…,T η dollar duration [3]του ομολόγου i θα δίνεται από τον τύπο:

$$D_i^{DOL} = \frac{dP_i}{d_r} = -\sum_{t=1}^{T} \frac{tF_{ti}}{(1+r)^{t+1}} \tag{2.2}$$

σε διακριτό χρόνο ή από τον τύπο :

$$D_i^{DOL} = \frac{dP_i}{d_r} = -\sum_{t=1}^{T} tF_{ti}\, e^{-rt} \tag{2.3}$$

σε συνεχή χρόνο όπου dP_i είναι μεταβολή της τιμής του i ομολόγου, d_r η μεταβολή του επιτοκίου, F_{ti} είναι οι πληρωμές ή χρηματοροές που έχει το κάθε

[3] Coleman, T. "A Guide to Duration, DV01, and Yield Curve Risk Transformations". Social Science Research Network. Retrieved 22 January 2013.

ομόλογο i την κάθε χρονική στιγμή t και e^{-rt} είναι ο συντελεστής προεξόφλησης υπό το επιτόκιο r σε συνεχή χρόνο.

Η dollar duration μετράται σε μονάδες χρόνου * μονάδες τιμής. Οπότε αποτελεί ένα απόλυτο μέτρο των μεταβολών της τιμής. Αν δύο ομόλογα έχουν χρηματοροές με την ίδια περίοδο αλλά οι πληρωμές του ενός ομολόγου είναι δύο φορές μεγαλύτερες από τις πληρωμές του άλλου τότε το πρώτο θα έχει διπλάσια dollar duration. Είναι λοιπόν προτιμότερο να έχουμε ένα σχετικό μέτρο της ευαισθησίας της τιμής, μιας και το σχετικό εύρος των χρηματοροών παίζει ρόλο και όχι η απόλυτη τιμή τους. Ένα τέτοιο μέτρο μπορεί να δοθεί από την:

2.1.2 MODIFIED DURATION (ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ)

Θεωρώντας μια δομή των επιτοκίων της μορφής r_t=r για όλα τα t=1,2,3,…,T η τροποποιημένη διάρκεια του ομολόγου i, με τιμή P_i θα δίνεται από τον τύπο:

$$D_i^{MOD} = -\frac{dp_i}{d_r}\Big/P_i = \frac{1}{P_i}\sum_{t=1}^{T}\frac{tF_{ti}}{(1+r)^{t+1}} \qquad (2.4)$$

σε διακριτό χρόνο ή από τον τύπο:

$$D_i^{MOD} = -\frac{dp_i}{d_r}\Big/P_i = \qquad (2.5)$$

σε συνεχή χρόνο όπου dP_i είναι μεταβολή της τιμής του i ομολόγου, d_r η μεταβολή του επιτοκίου, F_{ti} είναι οι πληρωμές ή χρηματοροές που έχει το κάθε ομόλογο i την κάθε χρονική στιγμή t, e^{-rt} είναι ο συντελεστής προεξόφλησης υπό το επιτόκιο r σε συνεχή χρόνο και P_i είναι η τιμή του ομολόγου i.

Η τροποποιημένη διάρκεια είναι μετρημένη σε μονάδες χρόνου συμβατικά ας θεωρήσουμε σε χρόνια. Μπορούμε να γράψουμε ότι: Η dollar duration και η τροποποιημένη διάρκεια θεωρούν μια flat δομή των επιτοκίων. Μπορούμε όμως να γενικεύσουμε αυτούς τους ορισμούς, και η γενίκευση δίνεται από την διάρκεια Fischer-Weil, η οποία παραδοσιακά ορίζεται σε συνεχή χρόνο. Θα δώσουμε τον ορισμό τόσο σε συνεχή όσο και σε διακριτό χρόνο.

2.1.3 FISCHER- WEIL ΔΙΑΡΚΕΙΑ

Ας υποθέσουμε ότι η δομή των επιτοκίων $\{r_t\}$ για t= 1,2,..,T υπόκειται σε μια παράλληλη μικρή μεταβολή Δr { r_t + Δr } για κάθε t=1,2,…,T. Η τιμή ενός ομολόγου i

κάτω από την συγκεκριμένη δομή των επιτοκίων είναι P_i και η ευαισθησία της τιμής στις παράλληλες μεταβολές δίνεται από τον τύπο της Fischer- Weil διάρκειας:

$$D_i^{FW} = -\frac{dP_i}{dr}\Big/P_i = \frac{1}{P_i}\sum_{t=1}^{T}\frac{tF_{ti}}{(1+r_t)^{t+1}} \qquad (2.6)$$

σε διακριτό χρόνο ή,

$$D_i^{FW} = -\frac{dP_i}{dr}\Big/P_i = \frac{1}{P_i}\sum_{t=1}^{T} tF_{ti}e^{-r_t t} \qquad (2.7)$$

σε συνεχή χρόνο όπου dP_i είναι μεταβολή της τιμής του i ομολόγου, d_r η μεταβολή του επιτοκίου, F_{ti} είναι οι πληρωμές ή χρηματοροές που έχει το κάθε ομόλογο i την κάθε χρονική στιγμή t, e^{-rt} είναι ο συντελεστής προεξόφλησης υπό το επιτόκιο r σε συνεχή χρόνο, P_i είναι η τιμή του ομολόγου i και r_t το στιγμιαίο επιτόκιο κάθε χρονική στιγμή t.

2.1.4 MACAULAY ΔΙΑΡΚΕΙΑ

Θεωρώντας ότι η απόδοση στην ωρίμανση ενός ομολόγου i είναι y_i, η Macaulay διάρκεια δίνεται από τον τύπο:

$$D_i^{MAC} = \frac{\sum_{t=1}^{T} t\frac{F_{ti}}{(1+y_i)^t}}{\sum_{t=1}^{T}\frac{F_{ti}}{(1+y_i)^t}} \qquad (2.8)$$

y_i

όπου είναι η απόδοση στην ωρίμανση ενός ομολόγου και F_{ti} είναι οι πληρωμές ή χρηματοροές που έχει το κάθε ομόλογο i την κάθε χρονική στιγμή t.

Η Macaulay[4] διάρκεια μετράται σε μονάδες χρόνου. Ο παρανομαστής εκφράζει την παρούσα αξία των χρηματοροών του ομολόγου, προεξοφλημένη με την απόδοση του ομολόγου. Ο αριθμητής είναι το σταθμισμένο άθροισμα των παρουσών αξιών των χρηματοροών F_{ti}, όπου κάθε χρηματοροή είναι προεξοφλημένη την χρονική στιγμή t=0 από την απόδοση του ομολόγου και σταθμισμένη από την χρονική στιγμή στην οποία καταβλήθηκε.

Η διάρκεια γενικά και σε όλες μορφές που την είδαμε είναι η κλίση της καμπύλης τιμής απόδοσης $P_i=\Phi_i(z)$ σε ένα συγκεκριμένο σημείο. Αυτή η κλίση παρέχει μια γραμμική προσέγγιση της καμπύλης. Μια πιο ακριβής αναπαράσταση

[4] Macaulay, F. (1938), The Movements of Interest Rates. Bond Yields and Stock Prices in the United States since 1856.

μπορεί να δοθεί μέσω ενός αναπτύγματος Taylor δευτέρας τάξης, σε αυτή την καμπύλη.

$$\Delta P_i \cong \frac{\partial \Phi_i(z)}{\partial z}\Delta z + \quad (2.9)$$

όπου P_i συμβολίζει την τιμή στο σημείο z_o, ΔP_i είναι η μεταβολή της τιμής όταν το z μεταβάλλεται από το z_0 στο $z_0 + \Delta z$, $\frac{\partial \Phi_i(z)}{\partial z}$ είναι η πρώτη παράγωγος της καμπύλης της τιμής ως προς μεταβολές της απόδοσης, $\frac{\partial^2 \Phi_i(z)}{\partial z^2}$ είναι η δεύτερη παράγωγος της τιμής ως προς μεταβολές της απόδοσης, δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της πρώτης παραγώγου και Δz είναι η μεταβολή του z.

2.1.5 ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ

Ας υποθέσουμε ότι η δομή των επιτοκίων $\{r_t\}$ για t= 1,2,...,T υπόκειται σε μια παράλληλη μικρή μεταβολή Δr { r_t + Δr } για κάθε t=1,2,...,T, τέτοια ώστε dr_t = dr = Δr για κάθε t=1,2,...,T. Η τιμή ενός ομολόγου i κάτω από την συγκεκριμένη δομή των επιτοκίων είναι P_i, και η κυρτότητα του ομολόγου δίνεται από τον τύπο:

$$Q_i = \frac{d^2 P_i}{dr^2} / P_i = \frac{1}{P_i}\sum_{t=1}^{T}\frac{t(t+1)F_{ti}}{(1+r_t)^{t+2}} \quad (2.10)$$

σε διακριτό χρόνο ή

$$Q_i = \frac{1}{P_i}\sum_{t=1}^{T} t^2 F_{ti} e^{-r_t t} \quad (2.11)$$

σε συνεχή χρόνο όπου Q_i συμβολίζει την κυρτότητα[5] του ομολόγου i, P_i συμβολίζει την τιμή στο σημείο z_o, F_{ti} είναι οι πληρωμές του ομολόγου i την χρονική στιγμή t, r_t είναι το στιγμιαίο επιτόκιο την χρονική στιγμή t, και $\frac{d^2 P_i}{dr^2}$ είναι η δεύτερη παράγωγος της τιμής ως προς την μεταβολή του επιτοκίου.

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι στην περίπτωση που έχουμε επίπεδη δομή επιτοκίων η κυρτότητα είναι ισοδύναμη με την πρώτη παράγωγο της dollar duration σταθμισμένης με την τιμή.

[5] Zenios S.(1993), Financial Optimization , Cambridge University Press

$$Q_i = \qquad (2.12)$$

όπου $\frac{dD_i^{DOL}}{dr}$ είναι η πρώτη παράγωγος της δολλαροδιάρκειας ως προς το επιτόκιο και P_i είναι η τιμή του i ομολόγου.

Η δεύτερης τάξης προσέγγιση Taylor της καμπύλης των τιμών μεταβάλλεται για μικρές και παράλληλες μετατοπίσεις του επιτοκίου και αυτό μπορούμε να το γράψουμε σε όρους διάρκειας και κυρτότητας με τον παρακάτω τύπο:

$$\Delta P_i \cong -D_i^{FW} P_i \Delta_r + \frac{Q_i P_i}{2} (\Delta_r)^2 \qquad (2.13)$$

όπου P_i συμβολίζει την τιμή στο σημείο z_o, ΔP_i είναι η μεταβολή της τιμής όταν το z μεταβάλλεται από το z_0 στο z_0 +Δz, , είναι η διάρκεια Fischer-Weil, Q_i είναι η κυρτότητα του ομολόγου i και Δ_r είναι η μεταβολή του επιτοκίου.

Τα μέτρα του κινδύνου που δίνονται παραπάνω έχουν όλα μια ξεκάθαρη οικονομική ερμηνεία. Μετρούν την ευαισθησία της τιμής ενός ομολόγου σε προκαθορισμένες μεταβολές του επιτοκίου, δηλαδή σε μικρές και παράλληλες μετατοπίσεις. Οπότε μετρούν μόνο καθορισμένου - εισοδήματος αγοραίο κίνδυνο τιμής (fixed-income market price risk). Σήμερα αυτά τα μέτρα δεν θεωρούνται επαρκή και έχουν κατασκευαστεί πιο εξελιγμένα μέτρα κινδύνου.

2.2 ΚΑΤΑ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ ΔΟΜΗΣ ΤΟΥ ΕΠΙΤΟΚΙΟΥ

Οι μικρές και παράλληλες μετατοπίσεις είναι ανεπαρκείς προκειμένου να περιγράψουν μεταβολές στην δομή των επιτοκίων σε μοντέρνες αγορές σταθερού εισοδήματος. Πολλές φορές τα μακρινής και κοντινής ωρίμανσης ομόλογα δεν είναι τέλεια συσχετισμένα και το shape risk είναι σημαντικό. Θα εισάγουμε παρακάτω μια μέθοδο για να περιγράφουμε τέτοιες μεταβολές, κάνοντας έτσι πιο εύκολη την χρήση γενικών μέτρων κινδύνου τα οποία συλλαμβάνουν καλύτερα τις μεταβολές στις σύγχρονες αγορές σταθερού εισοδήματος.

2.2.1 ΚΥΡΙΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΗΣ ΔΟΜΗΣ ΤΩΝ ΕΠΙΤΟΚΙΩΝ.

Έστω ότι το $\tilde{r} = (\tilde{r})_{t=1}^{T}$ είναι η τυχαία μεταβλητή του στιγμιαίου επιτοκίου και έστων ότι ο Q είναι ο T$\times$ T πίνακας συνδιακυμάνσεων. Ένα ιδιοδιάνυσμα του Q είναι το διάνυσμα $\beta_j = (\beta_{jt})_{t-1}^{T}$ τέτοιο ώστε $Q\beta_j = \lambda_j \beta_j$ για κάποια σταθερά λ_j η οποία ονομάζεται ιδιοτιμή του Q. Η τυχαία μεταβλητή $f_j = \sum_{t=1}^{T} \beta_{jt} r_t$ είναι ένα κύριο στοιχείο της δομής των επιτοκίων. Το πρώτο κύριο στοιχείο είναι εκείνο που αντιστοιχεί στην μεγαλύτερη ιδιοτιμή, το δεύτερο εκείνο που αντιστοιχεί στην

δεύτερη μεγαλύτερη κτλ. Προκειμένου να αντιληφθούμε γιατί τα κύρια στοιχεία είναι χρήσιμα θα δείξουμε ότι μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να προσεγγίσουν την διακύμανση ενός χαρτοφυλακίου βαρών. Όταν ο αριθμός των ιδιοδιανυσμάτων $j = 1,2, \dots, K$ είναι αρκετά μικρότερος από το T, τότε αυτή η προσέγγιση εμπεριέχει σημαντική μείωση στο μέγεθος του πίνακα συνδιακυμάνσεων που χρησιμοποιείται για την εκτίμηση της διακύμανσης του χαρτοφυλακίου. Ακόμα και όταν $K = T$ δεν χρησιμοποιούμε όλα τα ιδιοδιανύσματα, αλλά ακολουθούμε κατά κάποιο τρόπο ένα κανόνα επιλογής. Τυπικά τα ιδιοδιανύσμτα υπολογίζονται μέχρι τα κύρια στοιχεία να εξηγήσουν κάποιο αυθαίρετα μεγάλο ποσοστό της διακύμανσης. Για παράδειγμα, ίσως να θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε μόνο τα k πρώτα ιδιοδιανύσματα έτσι ώστε το $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j$ να είναι μεγαλύτερο από το 99% της διακύμανσης.

Ας θεωρήσουμε τώρα την τυχαία μεταβλητή απόδοση ενός χαρτοφυλακίου.

$$R(x;\tilde{r}) = \sum_{t=1}^{T} \tilde{r}_t x_t \tag{2.14}$$

με σταθμιστές $\Psi\ \beta\Phi\rho\eta\ x_t$ στην απόδοση $\tilde{r}_t$ τέτοια ώστε $\sum_{t=1}^{T} x_t = 1$. Θέλουμε να προσεγγίσουμε την διακύμανση του χαρτοφυλακίου $\sigma^2(x) = x^T Q\, x$ όπου το Q είναι ο πίνακας συνδιακυμάνσεων, χρησιμοποιώντας έναν πίνακα Q^* μειωμένης διάστασης χωρίς σημαντική απώλεια της μεταβλητότητας. Αντικαθιστούμε την αρχική μεταβλητή $\tilde{r}$ από τον παράγοντα $\tilde{f}_j = \sum_{t=1}^{T} \beta_{jt} \tilde{r}_t$. Αυτό είναι ισοδύναμο με το να δημιουργήσουμε ένα νέο σύνθετο περιουσιακό στοιχείο j ως ένα χαρτοφυλάκιο βαρών β_{jt}. Η διακύμανση του $\tilde{f}_j$ δίνεται από $\sigma_j^2 = \sigma^2(\beta_j) = \beta_j^T Q\, \beta_j$. Θέλουμε να επιλέξουμε το β_j έτσι ώστε η διακύμανση του $\tilde{f}_j$ να μεγιστοποιείται υπό έναν περιορισμό κανονικοποίησης $\beta_j^T \beta_j = 1$. Αν αυτή η διακύμανση μεγιστοποιείται τότε το ίδιο ισχύει και για το άθροισμα των τετραγωνικών συσχετίσεων του $\tilde{f}_1$ με τις τυχαίες μεταβλητές $\tilde{r}_t$, και ο παράγοντας $\tilde{f}_j$ αποτελεί μια καλή προσέγγιση των επιτοκίων.

Οι πρώτης τάξης συνθήκες βελτιστοποίησης εφαρμοσμένες στο πρόβλημα ελαχιστοποίησης της διακύμανσης που παρουσιάζεται παρακάτω

$$\min_{\beta_j} \beta_j^T Q\, \beta_j \tag{2.15}$$

$$s.t.\ \beta_j^T \beta_j = 1 \tag{2.16}$$

επιβάλλουν ότι η κλίση της αντικειμενικής συνάρτησης είναι μια σταθμισμένη συνάρτηση της κλίσης του περιορισμού. Ως εκ τούτου το β_j θα πρέπει να ικανοποιεί:

$$Q\beta_j = \lambda_j \beta_j \tag{2.17}$$

όπου λ_j είναι ο πολλαπλασιαστής Lagrange συνδεμένος με τον περιορισμό, β_j είναι ένα χαρτοφυλάκιο βαρών και Q ένας πίνακας διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων.

Το διάνυσμα β_j που ικανοποιεί την εξίσωση ονομάζεται ιδιοδιάνυσμα του Q και το λ είναι η ιδιοτιμή. Επομένως διαλέγοντας ένα διάνυσμα β_j του Q για να αποκτήσουμε την μετασχηματισμένη μεταβλητή $\tilde{f}_j$, μεγιστοποιούμε την διακύμανση της μετασχηματισμένης μεταβλητής. Πράγματι έχουμε $\underset{\beta_j}{\sigma^2(\beta_j)} = \lambda_j$. Αν

κατασκευάσουμε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο αποτελείται από βάρη
τότε η διακύμανση του θα είναι λ_j. Οπότε χρησιμοποιώντας μόνο το πρώτο κύριο παράγοντα ως μετασχηματισμένη μεταβλητή μπορούμε να εξηγήσουμε το $\frac{\lambda_1}{\sigma^2(x)}$ % της διακύμανσης του αρχικού χαρτοφυλακίου.

Επαναλαμβάνοντας την διαδικασία για όλα τα K ιδιοδιανύσματα λαμβάνουμε μια μοναδιαίας τιμής διάσπαση του πίνακα:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{B\Lambda B^T} \tag{2.18}$$

όπου $B = (\beta_1\ \beta_2 \dots \beta_K)$, $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_K)$, (η μήτρα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων. Να σημειώσουμε ότι ο *B* είναι ένας ορθογώνιος πίνακας, που σημαίνει ότι αντίστροφος του ισούται με τον ανάστροφο του, αφού εκ κατασκευής $BB^T = I$ όπου I είναι η μοναδιαία μήτρα. Η διάσπαση (2.18) είναι μια γενίκευση της εξίσωσης ιδιοδιανύσματος (2.17), από ένα ιδιοδιάνυσμα σε πολλά.

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα χαρτοφυλάκιο με βάρη β_j σε κάθε ένα από τα K στοιχεία. Η διακύμανση του χαρτοφυλακίου δίνεται από $\sum_{j=1}^{K} \sigma_j^2$, δεδομένου ότι τα στοιχεία είναι ορθογώνια. Εκ κατασκευής των ιδιοδιανυσμάτων αυτό είναι ίσο με το $\sum_{j=1}^{K} \lambda_j$. Αν χρησιμοποιήσουμε $k < K$ στοιχεία θα αποκτήσουμε ένα χαρτοφυλάκιο με διακύμανση που θα δίνεται από τον τύπο $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j$. Ένα ποσοστό

$\sum_{j=k+1}^{K}\lambda_j \Big/ \sum_{j=1}^{k}\lambda_j$ της διακύμανσης του αρχικού χαρτοφυλακίου δεν θα αντιπροσωπευτεί.

Αν συμβολίσουμε $B_K = (\beta_1\ \beta_2 \dots . \beta_K)$ τον πίνακα των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχεί στις πρώτες K μεγαλύτερες ιδιοτιμές, και $\Lambda_K = diag(\ \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_K\ )$, μπορούμε να προσεγγίσουμε τον πίνακα διακυμάσνεων-συνδιακυμάνσεων από το $\hat{Q} = B_K \Lambda_K B_K^T$. Χρησιμοποιώντας την διάσπαση μοναδιαίας τιμής του πίνακα συνδιακυμάνσεων γράφουμε την διακύμανση του χαρτοφυλακίου ως:

$$\sigma^2(x) = x^T Q\ x = x^T B \Lambda B^T x \qquad (2.19)$$

Και αυτό μπορεί να προσεγγιστεί από

$$\sigma^2(x) \approx x^T \hat{Q}\ x \qquad (2.20)$$

όπου $\sigma^2(x)$ είναι η διακύμανση του χαρτοφυλακίου, B ο ορθογώνιος πίνακας των βαρών, x το διάνυσμα των σταθμίσεων x_t, και $\hat{Q} = B_K \Lambda_K B_K^T$. Όμως τι σημαίνει μια μεταβολή στο j-ιοστό κύριο παράγοντα για τις μεταβολές του $\tilde{r}$. Αν έχουμε $\tilde{f} = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \dots . \tilde{f}_k)$ το διάνυσμα των k ανεξάρτητων κύριων παραγόντων, έχουμε ότι $\tilde{f} = B^T \tilde{r}$ και από την στιγμή που το $BB^T = I$ έχουμε επίσης ότι $\tilde{r} = B\tilde{f}$, και τα T τυχαία επιτόκια εκφράζονται ως γραμμικοί συνδυασμοί των K στοιχείων. Μια μοναδιαία μεταβολή στο j-ιοστό στοιχείο θα προκαλέσει μια μεταβολή ίση με β_{jt} σε επιτόκιο r_t και οι μεταβολές όλων των στοιχείων έχουν ένα σωρευτικό αποτέλεσμα στα επιτόκια.

Οπότε μια μοναδιαία μεταβολή στο j-ιοστό στοιχείο σημαίνει μια μεταβολή β_{jt} για κάθε στιγμιαίο επιτόκιο r_t. Από την στιγμή που τα στοιχεία είναι ανεξάρτητα, μπορούμε να εκφράσουμε την συνολική μεταβολή του r_t από τον τύπο:

$$\Delta r_t = \sum_{j=1}^{k} \beta_{jt} \Delta f_j \qquad (2.21)$$

όπου K είναι ο αριθμός των στοιχείων που προσδιορίζονται από την ανάλυση των ιδιοδιανυσμάτων, β_{jt} το βάρος της μεταβολής σε επιτόκιο r_t και η μεταβολή των κυρίων παραγόντων όπως τα έχουμε ορίσει παραπάνω. Βάρη των στοιχείων ονομάζονται οι συντελεστές β_{jt} και μετρούν την ευαισθησία των r_t σε μεταβολές του j-ιοστού στοιχείου.

ΜΟΝΤΕΛΟ 2.1 Μοντέλο Αντιστοίχισης Χρηματοροών[6]

Μοντέλο Αντιστοίχισης Χρηματοροών

[6] Zenios S.(1993), Financial Optimization , Cambridge University Press

$$\text{Minimize} \quad \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}_{0i}\, x_i$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{i=1}^{n} F_{ti}\, X_i \geq L_t \quad \text{για όλα τα } t = 1,\ldots,T$$

$$x \geq 0.$$

$$F_{ti}$$

όπου $\mathbf{P}_{0i}$ είναι η τιμή αγοράς του i ομολόγου, είναι οι πληρωμές του ομολόγου i την χρονική στιγμή t, x_i είναι οι εκμεταλλεύσεις και L_t είναι η αξία του παθητικού.

ΜΟΝΤΕΛΟ 2.2 Μοντέλο Αντιστοίχισης Χρηματοροών Με Επανεπένδυση[7]

Μοντέλο Αντιστοίχισης Χρηματοροών Με Επανεπένδυση

Το πλεόνασμα που δημιουργείται στην πρώτη περίοδο δίνεται από το $u_1^+ = \sum_{i=1}^{n} F_{i1} x_i - L_1$. Από τον περιορισμό όμως $\sum_{i=1}^{n} F_{ti}\, X_i \geq L_t$ συνεπάγεται ότι αυτή η ποσότητα είναι μη αρνητική. Διατηρώντας αυτή την ποσότητα από την περίοδο 1 στην περίοδο 2 λαμβάνοντας όμως υπόψιν το μελλοντικό επιτόκιο επανεπένδυσης $(1+f_{12})$ παίρνουμε τον περιορισμό της δεύτερης περιόδου και το μοντέλο θα είναι:

$$\text{Minimize} \quad \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}_{0i}\, x_i$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{i=1}^{n} F_{ti}\, X_i \geq L_t \quad \text{για όλα τα } t = 1,\ldots,T$$

$$x \geq 0.$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i}\, X_i + (1 + f_{11})\left(\sum_{i=1}^{n} F_{1i}\, X_i - L_1\right) \geq L_2$$

Υπολογίζουμε τώρα πόσο είναι το πλεόνασμα στην περίοδο t=2, κρατάμε το πλεόνασμα για την περίοδο t=3 και λαμβάνουμε επίσης υπόψιν μας το μελλοντικό επιτόκιο επανεπένδυσης μεταξύ της περιόδου 2 και 3. Επαναλαμβάνουμε αυτή την διαδικασία μέχρι την περίοδο T, δηλαδή την λήξη του χρονικού ορίζοντα υπό το μελλοντικό επιτόκιο $(1+ f_{t,t+1})$ και έτσι προκύπτει η παρακάτω εξίσωση:

$$\sum_{i=1}^{n} \left[[F_{1i}] \; X_i \prod_{t=1}^{T-1} [(1) + f_{t,t+1}) + F_{2i}\, X_i \prod_{t=2}^{T-1} [(1) + f_{t,t+1}) \ldots + F_{Ti} X_i \right] \geq$$

---

[7] Zenios S.(1993), Financial Optimization , Cambridge University Press

$$L_1 1 \prod_1(t=1)^{\dagger}(T-1)[(1) + f_{t,t+1}) + L_1 2 \prod_1(t=2)^{\dagger}(T-1)[(1) + f_{t,t+1}) \ldots + L_T \quad (2.22)$$

Αυτή η έκφραση υποδηλώνει ότι η μελλοντική αξία των περιουσιακών στοιχείων στο τέλος του χρονικού ορίζοντα, θα είναι τουλάχιστον ίση με την μελλοντική αξία του παθητικού. Διαιρούμε και τις δύο πλευρές με την σταθερά $\prod_{t=0}^{T-1}[(1+f_{t,t+1}])$ προκειμένου να παραχθεί μια σχέση στην οποία η παρούσα αξία των περιουσιακών στοιχείων θα πρέπει να είναι ίση με την παρούσα αξία του παθητικού. Αν το πλεόνασμα μπορεί να επανεπενδυθεί στα υποθετικά επιτόκια, τότε το παθητικό θα χρηματοδοτηθεί πλήρως μέσω των χρηματοροών που δημιουργούνται από τα περιουσιακά στοιχεία, ή μέσω του πλεονάσματος που έχει προκύψει από προηγούμενες περιόδους. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί αν η παρούσα αξία εισροών των περιουσιακών στοιχείων ισούται με την παρούσα αξία των εκροών του παθητικού, όπου στις χρηματοροές των περιουσιακών στοιχείων προφανώς συμπεριλαμβάνουμε τα περιουσιακά στοιχεία που λήγουν.

ΜΟΝΤΕΛΟ 2.3 Μοντέλο Αντιστοίχισης Χρηματοροών (Γενίκευση)[8]

Μοντέλο Αντιστοίχισης Χρηματοροών (Γενίκευση)

Η παρακάτω γενίκευση επιτρέπει αρνητικές χρηματοροές δηλαδή δανεισμό στο μοντέλο μας. Η συγκεκριμένη κατάσταση προφανώς είναι πιο ρεαλιστική σε σχέση με το προηγούμενο μοντέλο, παρότι όπως αναφέραμε και νωρίτερα καταλήγουμε στις ίδιες συνθήκες. Τέτοιες καταστάσεις εμφανίζονται όταν υπάρχουν επενδύσεις στις οποίες απαιτείται μια ακολουθία προκαταβολικών πληρωμών πριν να υπάρξει μια θετική χρηματοροή. Έτσι τροποποιούμε το αρχικό μοντέλο και εισάγουμε μια μεταβλητή v_0 την οποία ορίζουμε να είναι το ύψος των μετρητών που απαιτούνται για τις επενδύσεις.

Minimize v_0

subject to $\sum_{i=1}^{n} F_{0i} + v_0 \geq 0$

$\sum_{i=1}^{n} F_{ti} X_i \geq L_t$ για όλα τα t= 1,…,T

x≥ 0

Έτσι παράγουμε την γενικευμένη έκφραση στην οποία, αν όλα τα περιουσιακά στοιχεία έχουν θετικές χρηματοροές F_{ti} σε περιόδους μετά την περίοδο t= 0, τότε το $\sum_{i=1}^{n} F_{0i} x_i$, είναι το ποσό που

[8] Zenios S.(1993), Financial Optimization , Cambridge University Press

πρέπει να πληρωθεί σήμερα προκειμένου να μπορέσουμε να λάβουμε μελλοντικές χρηματοροές. Αυτό είναι το κόστος του χαρτοφυλακίου και η λύση v_0 σε αυτό το γενικευμένο μοντέλο, είναι το minimum του $\sum_{i=1}^{n} F_{0i} x_i$, το οποίο όπως άλλωστε προαναφέραμε είναι ίσο με την τιμή του χαρτοφυλακίου που χρησιμοποιήσαμε στην αντικειμενική συνάρτηση του αρχικού μοντέλου.

Παρόλο αυτά δεν είναι σίγουρο ότι η αναγκαία συνθήκη θα συνεχίσει να ισχύει ακόμα και αν τα επιτόκια αλλάξουν. Για να συμβεί αυτό θα πρέπει και τα δύο μέλη της εξίσωσης $\sum_{i=1}^{n} P_i X_i = P_L$ να αλλάξουν κατά την ίδια ποσότητα όταν η δομή του επιτοκίου αλλάζει. Μια πρώτης τάξης εκτίμηση της μεταβολής της παρούσας αξίας των χρηματοροών, είτε ενός περιουσιακού στοιχείου είτε ενός παθητικού, με μεταβολή στο επιτόκιο μετράται από την διάρκεια. Οπότε μια αναγκαία συνθήκη πρώτης τάξης για την ανοσοποίηση χαρτοφυλακίου είναι ότι η διάρκεια των περιουσιακών στοιχείων πρέπει να αντιστοιχεί στην διάρκεια των υποχρεώσεων.

2.3 ΑΝΟΣΟΠΟΙΗΣΗ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ (PORTFOLIO IMMUNIZATION)

Οι μετατοπίσεις της καμπύλης αποδόσεων ως αποτέλεσμα της μεταβολής των επιτοκίων, θεωρείται από τους διαχειριστές χαρτοφυλακίου ομολόγων ως μια τεράστια πηγή κινδύνου. Προκειμένου να εξασφαλίσουν ότι το χαρτοφυλάκιο ομολόγων παραμένει ανεπηρέαστο από τις αλλαγές στα επιτόκια ακολουθούν μια συγκεκριμένη στρατηγική που καλείται ανοσοποίηση[9] (immunization). Όπως είδαμε και προηγουμένως η διάρκεια είναι το μέτρο ευαισθησίας της τιμής σε μια μεταβολή επιτοκίων. Η τεχνική της ανοσοποίησης επιχειρεί υπό μιαν έννοια, να εξαλείψει την ευαισθησία της τιμής, σε πιθανές απροσδόκητες αλλαγές των επιτοκίων, αντιστοιχώντας (matching) την διάρκεια του χαρτοφυλακίου ομολόγων με την διάρκεια της υποχρέωσης (liability).

2.3.1 ΑΝΑΓΚΑΙΑ ΣΥΝΘΗΚΗ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΝΟΣΟΠΟΙΗΣΗ

$$\sum_{i=1}^{n} P_i X_i = P_L \qquad (2.23)$$

όπου στο αριστερό μέλος έχουμε την παρούσα αξία των περιουσιακών στοιχείων και στο δεξί την αξία των υποχρεώσεων.

Υπό αυτή την συνθήκη και επιπροσθέτως θεωρώντας ότι η τιμή των επιτοκίων επανεπένδυσης δεν αλλάζει από αυτή που έχουμε υποθέσει, οι χρηματοροές του χαρτοφυλακίου θα αντιστοιχούν με τις χρηματοροές των υποχρεώσεων. Εξετάσαμε το παράδειγμα του πλεονάσματος αλλά στην ίδια συνθήκη θα καταλήγαμε ακόμα και αν επιτρέπαμε στο μοντέλο μας δανεισμό,

[9] Stulz, René M. (2003). Risk Management & Derivatives (1st ed.). Mason, Ohio: Thomson South-Western.

περίπτωση κατά την οποία θα δημιουργήσουμε ένα ελάχιστα διαφορετικό μοντέλο το οποίο γράφεται ως εξής:

2.3.2 ΣΥΝΘΗΚΗ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΝΟΣΟΠΟΙΗΣΗ

$$\sum_{i=1}^{n} D_i^{FW} P_i X_i = D_L^{FW} P_L \qquad (2.24)$$

Το παρακάτω μοντέλο εγγυάται μηδενική έκθεση στον κίνδυνο της αγοράς για μικρές και παράλληλες μετατοπίσεις του επιτοκίου και μόνο.

ΜΟΝΤΕΛΟ 2.4. Μοντέλο Ανοσοποίησης Χαρτοφυλακίου[10]

Μοντέλο Ανοσοποίησης Χαρτοφυλακίου

F(x) είναι η αντικειμενική συνάρτηση, P_L είναι η παρούσα αξία των υποχρεώσεων, D_i^{FW} είναι η Fischer-Weil διάρκεια του i-οστού περιουσιακού στοιχείου και D_L^{FW} είναι η Fischer-Weil διάρκεια των υποχρεώσεων.

Maximize F(x)

subject $\sum_{i=1}^{n} P_i X_i = P_L$

$$\sum_{i=1}^{n} D_i^{FW} P_i X_i = D_L^{FW} P_L$$

$x \geq 0$

Το θέμα της επιλογής της αντικειμενικής συνάρτησης χρειάζεται εξέταση. Η αντικειμενική συνάρτηση όμως που συναντάμε πιο συχνά, είναι η απόδοση του χαρτοφυλακίου, η οποία προσεγγίζεται από την παρακάτω μαθηματική έκφραση:

$$Y_p \cong \frac{\sum_{i=1}^{n} D_i^{FW} P_i Y_i X_i}{\sum_{i=1}^{n} D_i^{FW} P_i X_i} \qquad (2.25)$$

Από την στιγμή που ο παρανομαστής είναι σταθερός και ίσος με το D_L^{FW} από τον περιορισμό $\sum_{i=1}^{n} D_i^{FW} P_i X_i = D_L^{FW} P_L$ το μοντέλο ανοσοποίησης του χαρτοφυλακίου

[10] Zenios S.(1993), Financial Optimization , Cambridge University Press

μπορεί να λυθεί ως ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού που μεγιστοποιεί το γραμμικό συνδυασμό.

$$\sum_{i=1}^{n} D_i^{FW} P_i Y_i X_i \qquad (2.26)$$

Για να δούμε πως το βασικό μοντέλο μπορεί να επεκταθεί σκεφτόμαστε τους παράγοντες που είναι υπό τον έλεγχο μας και τους παράγοντες που δεν φαίνονται καθαρά από το μοντέλο. Ο κίνδυνος του επιτοκίου από παράλληλες μετατοπίσεις είναι υπό τον έλεγχο μας μέσω της αντιστοίχισης της διάρκειας (duration matching). Παρόλο' αυτά ο κίνδυνος που αναδύεται από μεταβολές στη μορφή του επιτοκίου δεν είναι υπό τον έλεγχο μας.

Ας θεωρήσουμε ένα ανοσοποιημένο χαρτοφυλάκιο δομημένο ώστε να χρηματοδοτήσει μια και μοναδική πληρωμή μετά από μια δεκαετία. Ένα χαρτοφυλάκιο αντιστοιχισμένης διάρκειας μπορεί να τοποθετηθεί μαζί με ένα συνδυασμό ενός 15 έτους ομολόγου και μετρητών. Αν το επιτόκιο έχει ανοδική πορεία τότε η αξία του χαρτοφυλακίου περιουσιακών στοιχείων θα μειωθεί γρηγορότερα από τις υποχρεώσεις, προκαλώντας μια αρνητική καθαρή θέση. Φυσικά θα έχουμε μια θετική καθαρή θέση αν το επιτόκιο μειωθεί.

Ένας άλλος τρόπος να αντιληφθούμε το πρόβλημα είναι να αναγνωρίσουμε ότι η σχέση τιμής-απόδοσης είναι κυρτή και όχι γραμμική. Ως εκ τούτου ενώ για παράλληλες μετατοπίσεις της καμπύλης των επιτοκίων, τα περιουσιακά στοιχεία και οι μετοχές κινούνται παράλληλα, λόγω του περιορισμού αντιστοιχισμένης διάρκειας, για μεγαλύτερες μεταβολές τα περιουσιακά στοιχεία και οι μετοχές θα αποκλίνουν, αν έχουν διαφορετικές σχέσεις τιμής - απόδοσης.

Επιβάλλουμε και μια αναγκαία συνθήκη δεύτερης τάξης, ώστε να είμαστε σίγουροι ότι η καμπύλη τιμής-απόδοσης των περιουσιακών στοιχείων, φράσει από πάνω την καμπύλη τιμής-απόδοσης των μετοχών. Αυτό το καταφέρνουμε επιβάλλοντας τον παρακάτω περιορισμό κυρτότητας στο χαρτοφυλάκιο, όπου Q_L είναι η κυρτότητα των μετοχών.

ΜΟΝΤΕΛΟ 2.5 Μοντέλο Ανοσοποίησης Χαρτοφυλακίου Με Περιορισμό Κυρτότητας[11]

Μοντέλο Ανοσοποίησης Χαρτοφυλακίου Με Περιορισμό Κυρτότητας

Maximize F(x)

subject $\sum_{i=1}^{n} P_i X_i = P_L$

$$\sum_{i=1}^{n} D_i^{FW} P_i X_i = D_L^{FW} P_L$$

[11] Zenios S.(1993), Financial Optimization , Cambridge University Press

$x \geq 0$

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i P_i X_i \geq Q_L P_L$$

Όπου F(x) είναι η αντικειμενική συνάρτηση, P_L είναι η παρούσα αξία των υποχρεώσεων, D_i^{FW} είναι η Fischer-Weil διάρκεια του i-οστού περιουσιακού στοιχείου και D_L^{FW} είναι η Fischer-Weil διάρκεια των υποχρεώσεων, Q_i του i ομόλογου.

Οι μεταβολές της αξίας των υποχρεώσεων εξαιτίας της μη γραμμικότητας της σχέσης τιμής και απόδοσης είναι (δεδομένου του επιπέδου εγκυρότητας που προσφέρει μια δεύτερης τάξης προσέγγιση στην καμπύλη κυρτότητας) μικρότερες, από τις μεταβολές των περιουσιακών στοιχείων, και ως εκ τούτου το παθητικό θα συνεχίσει να χρηματοδοτείται.

Οι περιορισμοί κυρτότητας αποτελούν επίσης μια θεραπεία για τον κίνδυνο μεταβλητότητας. Μεγάλες μεταβολές στην δομή των επιτοκίων θα προκαλέσουν κατάρρευση στις συνθήκες πρώτης τάξης. Ωστόσο, επιβάλλοντας στην κυρτότητα του χαρτοφυλακίου να είναι μη αρνητική, είμαστε βέβαιοι ότι η ελάχιστη καθαρή θέση λαμβάνει χώρα υπό το τρέχων επιτόκιο. Πιθανές μεταβολές στα επιτόκια δύναται μόνο να αυξήσουν την καθαρή θέση. Επιπρόσθετα οι περιορισμοί κυρτότητας είναι σημαντικοί, όταν τίτλοι με ενσωματωμένα δικαιώματα αγοραπωλησίας (options) περιλαμβάνονται στο χαρτοφυλάκιο. Τέτοιοι τίτλοι δύναται να έχουν αρνητική κυρτότητα και είναι σημαντικό ότι η κυρτότητα του χαρτοφυλακίου παραμένει θετική. Σε αυτή την περίπτωση τα μοντέλα ανοσοποίησης, χτίζονται βασισμένα στην option adjusted duration και την option adjusted convexity.

2.4. ΑΝΟΣΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΤΑ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ (FACTOR IMMUNIZATION)

Η ανοσοποίηση κατά παράγοντες είναι μια βελτιωμένη τεχνική ανοσοποίησης η οποία αντιμετωπίζει τον κίνδυνο μορφής (shape risk). Αυτό επιτυγχάνεται χαλαρώνοντας την υπόθεση ότι τα επιτόκια μετατοπίζονται παράλληλα, κάτι το οποίο υπονοείται από την χρήση της διάρκειας για την ανοσοποίηση χαρτοφυλακίου. Χρησιμοποιούμε ένα γραμμικό παραγοντικό μοντέλο όπως αυτό που προκύπτει από την κατά παράγοντες ανάλυση της δομής του επιτοκίου.

Αυτό το μοντέλο αντιπροσωπεύει ένα ουσιαστικό ποσοστό των μεταβολών του επιτοκίου, και όχι μόνο των μεταβολών που συμβαίνουν λόγω των παράλληλων μετατοπίσεων. Η ευαισθησία των τιμών των ομολόγων λόγω των μεταβολών των παραγόντων δίνεται από τον παρακάτω ορισμό:

2.4.1 ΚΑΤΑ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ (FACTOR MODIFIED DURATION)

Να θυμηθούμε ότι η τιμή του ομολόγου δίνεται από τον τύπο:

$$P_i = \sum_{t=1}^{T} F_{ti} e^{-r_t t} \qquad (2.27)$$

όπου F_{ti} είναι οι πληρωμές του ομολόγου i την χρονική στιγμή t, r_t είναι το στιγμιαίο επιτόκιο την χρονική στιγμή t και $e^{-r_t t}$ ο συντελεστής προεξόφλησης υπό r_t

το επιτόκιο .

Οι μεταβολές στην δομή των επιτοκίων εκφράζονται ως ένας γραμμικός συνδυασμός k ανεξάρτητων παραγόντων.

$$\Delta_{rt} = \sum_{j=1}^{k} B_{jt} \Delta f_j + \varepsilon_t \qquad (2.28)$$

όπου το ε_t είναι το σφάλμα το οποίο υποθέτουμε ότι κατανέμεται κανονικά και έχει μηδενικό μέσο, δηλαδή $E(\varepsilon_t)=0$, Δf_j η μεταβολή των κυρίων στοιχείων, B_{jt} τα βάρη. Η μεταβολή της τιμής του ομολόγου λόγω μεταβολών του j-ιοστού παράγοντα προκύπτει από την ολική παράγωγο της εξίσωσης (2.27)

$$\Delta P_i = -\sum_{t=1}^{T} F_{ti} t e^{-r_t t} \Delta_{rt} \qquad (2.29)$$

όπου ΔP_i είναι η μεταβολή στην τιμή του i ομολόγου, F_{ti} είναι οι πληρωμές του ομολόγου i την χρονική στιγμή t, $e^{-r_t t}$ ο συντελεστής προεξόφλησης υπό το r_t

επιτόκιο και Δ_{rt} η μεταβολή των επιτοκίων.

Αντικαθιστώντας σε αυτή την έκφραση την σχέση (2.28) και αγνοώντας τον διαταρακτικό όρο θα πάρουμε την σχέση:

$$\Delta P_i = -\sum_{t=1}^{T} F_{ti} t e^{-r_t t} \sum_{j=1}^{k} B_{jt} \Delta f_j \qquad (2.30)$$

όπου ΔP_i είναι η μεταβολή στην τιμή του i ομολόγου, F_{ti} είναι οι πληρωμές του ομολόγου i την χρονική στιγμή t, $e^{-r_t t}$ ο συντελεστής προεξόφλησης υπό το r_t

επιτόκιο , B_{jt} τα βάρη και Δf_j η μεταβολή του j-ιοστού παράγοντα.

∂f_j

Οι παράγοντες είναι ανεξάρτητοι και ως εκ τούτου $\partial f_i /$ όταν j≠ j΄. Οπότε για μικρές αλλά όχι απαραίτητα παράλληλες, μετατοπίσεις των επιτοκίων καταλήγουμε στην σχέση ευαισθησίας των τιμών των ομολόγων ως προς τις μεταβολές του j-ιοστού παράγοντα της παραπάνω εξίσωσης:

$$\frac{\partial P_i}{\partial f_j} = -\sum_{t=1}^{T} F_{ti} t B_{jt} e^{-r_t t} \qquad (2.31)$$

όπου $\frac{\partial P_i}{\partial f_j}$ είναι η παράγωγος της τιμής του i ομολόγου ως προς τον j-ιοστό παράγοντα, F_{ti} είναι οι πληρωμές του ομολόγου i την χρονική στιγμή t, $e^{-r_t t}$ ο r_t

συντελεστής προεξόφλησης υπό το επιτόκιο και B_{jt} τα βάρη.

Η κατά παράγοντες τροποποιημένη διάρκεια του ομολόγου i ως προς τον παράγοντα f_j είναι ορισμένη ως η σχετική ευαισθησία της τιμής σταθμισμένη από την τιμή του ομολόγου.

$$k_{ij} = -\frac{\frac{\partial P_i}{\partial f_j}}{P_i} = \frac{1}{P_i}\sum_{t=1}^{T} F_{ti} t B_{jt} e^{-r_t t} \qquad (2.32)$$

όπου k_{ij} είναι η κατά παράγοντες τροποποιημένη διάρκεια του ομολόγου i ως προς τον παράγοντα Δf_j , $\frac{\partial P_i}{\partial f_j}$ είναι η παράγωγος της τιμής του i ομολόγου ως προς τον j-ιοστό παράγοντα, P_i είναι η τιμή του i ομολόγου, F_{ti} είναι οι πληρωμές του ομολόγου i την χρονική στιγμή t, $e^{-r_t t}$ ο συντελεστής προεξόφλησης r_t

υπό το επιτόκιο και B_{jt} τα βάρη.

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι αν τα επιτόκια μετατοπιστούν παράλληλα έχουμε μόνο ένα μοναδικό παράγοντα με βάρος β_{1t}=1. Η κατά παράγοντες τροποποιημένη διάρκεια τότε απλοποιείται στην απλή τροποποιημένη διάρκεια που έχουμε αναλύσει παραπάνω.

Οι ανεξάρτητοι παράγοντες θεωρούνται τυπικά τα βασικά συστατικά του πίνακα συσχέτισης των επιτοκίων. Δεν λαμβάνουμε υπόψιν όλα τα Κ βασικά συστατικά, αλλά αντί αυτού υπολογίζουμε τα πρώτα k με τις μεγαλύτερες ιδιοτιμές μέχρι κάποιο συγκεκριμένο ποσοστό της διακύμανσης των επιτοκίων να εξηγηθεί.

Το γεγονός ότι χρησιμοποιούμε μόνο k βασικά συστατικά εξηγεί το διαταρακτικό όρο ε_t (2.28) ο οποίος είναι απών από τη παρακάτω εξίσωση όπου όλοι οι K παράγοντες χρησιμοποιούνται.

$$\hat{\Delta} r_t = \sum_{j=1} \beta_{jt} \Delta f_j \qquad (2.33)$$

όπου είναι η μεταβολή των επιτοκίων, β_{jt} τα βάρη και η μεταβολή του j-ιοστού παράγοντα.

2.4.2 ΚΑΤΑ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ

Η κατά παράγοντες τροποποιημένη κυρτότητα ως προς τον j-ιοστό παράγοντα ορίζεται από την σχέση:

$$Q_{ij} = -\frac{\frac{\partial^2 P_i}{\partial f^2{}_j}}{P_i} \qquad (2.34)$$

όπου Q_{ij} είναι η κατά παράγοντες τροποποιημένη κυρτότητα του i ομολόγου, $\frac{\partial^2 P_i}{\partial f^2{}_j}$ είναι η παράγωγος της τιμής του i ομολόγου ως προς τον j-ιοστό παράγοντα και P_i είναι η τιμή του i ομολόγου.

2.4.3 ΑΝΟΣΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΤΑ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ ΜΕ ΚΡΑΤΙΚΑ ΟΜΟΛΟΓΑ

Μια δεδομένη μεταβολή στα επιτόκια θα επηρεάσει όλες τις τιμές των ομολόγων. Μια αύξηση στο επιτόκιο ενός έτους, θα αφομοιώσει την αξία οποιασδήποτε πληρωμής γίνει σε ένα έτος, ανεξάρτητα από το ποιο ομόλογο κάνει αυτή την πληρωμή, ή εάν η πληρωμή αντανακλά κεφάλαιο ή κουπόνι. Ως εκ τούτου, οι τιμές των ομολόγων επηρεάζονται συστηματικά από αλλαγές στους παράγοντες, που εξηγούν μεταβολές στο επιτόκιο, ενώ είναι πιθανόν να αντισταθμίζουν την επιρροή των μεταβολών των παραγόντων.

Εναρκτήριο σημείο για την διαμόρφωση ενός μοντέλου ανοσοποίησης κατά παράγοντες είναι η αναγκαία συνθήκη για την ανοσοποίηση, δηλαδή ότι η παρούσα αξία των περιουσιακών στοιχείων ισούται με την παρούσα αξία των υποχρεώσεων.

$$\sum_{i=1}^{n} P_i x_i = P_L \qquad (2.35)$$

όπου $P_i x_i$ είναι η παρούσα αξία των περιουσιακού στοιχείου i και P_L είναι η παρούσα αξία των υποχρεώσεων.

Απαιτούμε αυτή η ισότητα να διατηρείται όταν οι παράγοντες μεταβάλλονται. Παίρνοντας πρώτες παραγώγους ως προς τους παράγοντες έχουμε:

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial(\sum_{i=1}^{n}[P_i x_i)]}{\partial f_j} df_j = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial P_L}{\partial f_j} df_j \qquad (2.36)$$

όπου $P_i x_i$ είναι η παρούσα αξία των περιουσιακού στοιχείου i, P_L είναι η παρούσα αξία των υποχρεώσεων, df_j είναι η μεταβολή του j-ιοστού παράγοντα.

Εφόσον όμως από εκ κατασκευής οι μεταβολές των παραγόντων df_j είναι ανεξάρτητες, η παραπάνω εξίσωση θα ισχύει για κάθε παράγοντα. Οι συντελεστές του df_j θα πρέπει να είναι ίσοι για κάθε j=1,2,…,k.

$$\frac{\partial(\sum_{i=1}^{n} P_i x_i)}{\partial f_j} = \frac{\partial P_L}{\partial f_j} \qquad (2.37)$$

Ο όρος $\frac{\partial P_i}{\partial f_j}$ είναι το αρνητικό της κατά παράγοντες τροποποιημένης διάρκειας k_{ij} πολλαπλασιασμένης από την τιμή του τίτλου P_i και έχουμε τις παρακάτω συνθήκες πρώτης τάξης για την ανοσοποίηση κατά παράγοντες.

2.4.4 ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΝΟΣΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΤΑ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ

$$\sum_{i=1}^{n} P_i x_i k_{ij} = P_L k_{Lj} \quad \text{για όλα τα j=1,2,.....,k} \qquad (2.38)$$

όπου είναι η κατά παράγοντες τροποποιημένη διάρκεια των περιουσιακών στοιχείων και k_{Lj} είναι η κατά παράγοντες τροποποιημένη διάρκεια των υποχρεώσεων, $P_i x_i$ είναι η παρούσα αξία των περιουσιακού στοιχείου i και P_L είναι η παρούσα αξία των υποχρεώσεων. Λαμβάνοντας δεύτερες παραγώγους στην $\sum_{i=1}^{n} P_i x_i$

$= P_L$ ως προς τους παράγοντες, και σημειώνοντας ότι $\partial^2 P / \partial f_j \partial f'_j$ όποτε $j \neq j'$ από την στιγμή που οι παράγοντες είναι ανεξάρτητοι, έχουμε :

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial^2(\sum_{i=1}^{n}[P_i x_i)]}{\partial f_j^2} df_j^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial^2 P_L}{\partial f_j^2} df_j^2 \qquad (2.39)$$

όπου $P_i x_i$ είναι η παρούσα αξία των περιουσιακού στοιχείου i, P_L είναι η παρούσα αξία των υποχρεώσεων, df_j είναι η μεταβολή του j-ιοστού παράγοντα.

Δηλώνοντας την κατά παράγοντες τροποποιημένη κυρτότητα των υποχρεώσεων ως Q_{Lj} έχουμε τις ακόλουθες συνθήκες δεύτερης τάξης για την ανοσοποίηση κατά παράγοντες.

2.4.5 ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΝΟΣΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΤΑ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ

$$\sum_{i=1}^{n} P_i x_i Q_{ij} = Q_{Lj} P_L \quad \text{για όλα τα j=1,2,...,k} \qquad (2.40)$$

όπου $P_i x_i$ είναι η παρούσα αξία των περιουσιακών στοιχείων i, P_L είναι η παρούσα αξία των υποχρεώσεων, Q_{Lj} είναι η κατά παράγοντες τροποποιημένη κυρτότητα των υποχρεώσεων και Q_{ij} η κατά παράγοντες τροποποιημένη κυρτότητα του i ομολόγου.

Το παρακάτω μοντέλο εγγυάται μηδενική αγοραία έκθεση απέναντι στους παράγοντες. Εάν επιλεχθούν επαρκείς παράγοντες να αντιπροσωπεύουν ένα μεγάλο ποσοστό της διακύμανσης των επιτοκίων, τότε το παρακάτω μοντέλο δημιουργεί ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο έχει μηδενική αγοραία έκθεση υπό τις περισσότερες μεταβολές των επιτοκίων.

ΜΟΝΤΕΛΟ 2.6 Μοντέλο Ανοσοποίησης Κατά Παράγοντες[12]

Μοντέλο Ανοσοποίησης Κατά Παράγοντες

Maximize $F(x)$

subject to $\sum_{i=1}^{n} P_i x_i = P_L$

$\sum_{i=1}^{n} P_i x_i k_{ij} = P_L k_{Lj}$ για όλα τα j=1,2,.....,k

$x \geq 0$

όπου $F(x)$ είναι η αντικειμενική συνάρτηση την οποία μεγιστοποιούμε, $P_i x_i$ είναι η παρούσα αξία των περιουσιακών στοιχείων i, P_L είναι η παρούσα αξία των υποχρεώσεων, k_{Lj} είναι η κατά παράγοντες τροποποιημένη διάρκεια των

[12] Zenios S.(1993), Financial Optimization , Cambridge University Press

υποχρεώσεων και k_{ij} είναι η κατά παράγοντες τροποποιημένη διάρκεια των περιουσιακών στοιχείων.

Σε αυτό το μοντέλο μπορούμε να επιβάλλουμε περιορισμούς κυρτότητας προκειμένου να αποκτήσουμε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο ικανοποιεί την συνθήκη δεύτερης τάξης. Αυτός ο περιορισμός επιβάλλεται ως ανισότητα.

$$\sum_{i=1}^{n} P_i x_i Q_{ij} \geq Q_{Lj} P_L \quad \text{για όλα τα } j=1,2,\ldots,k \qquad (2.41)$$

όπου $P_i x_i$ είναι η παρούσα αξία των περιουσιακού στοιχείου i, P_L είναι η παρούσα αξία των υποχρεώσεων, Q_{Lj} είναι η κατά παράγοντες τροποποιημένη κυρτότητα των υποχρεώσεων και Q_{ij} η κατά παράγοντες τροποποιημένη κυρτότητα του i ομολόγου.

Ο λόγος που επιτρέπουμε μεγαλύτερη κυρτότητα κατά παράγοντες στα περιουσιακά στοιχεία από ότι στις υποχρεώσεις είναι απλός. Για τα ομόλογα οι κυρτότητες των παραγόντων είναι θετικές. Ο ανισοτικός περιορισμός επιβάλλει μια μη αρνητική καθαρή κυρτότητα χαρτοφυλακίου με μηδενική καθαρή διάρκεια σε τρέχουσες τιμές. Αν οι παράγοντες αλλάξουν η καθαρή αξία του χαρτοφυλακίου θα γίνει θετική. Απαιτείται προσοχή στην επιβολή του περιορισμού δεύτερης τάξης για χρεόγραφα με αρνητική κυρτότητα. Τα μοντέλα ανοσοποίησης για τίτλους με ενσωματωμένα *options* και αρνητική κυρτότητα βασίζονται στην option adjusted duration και στην option adjusted convexity.

2.5 OPTION ADJUSTED DURATION

Η πρώτη παράγωγος της τιμής ενός ομολόγου σταθερού εισοδήματος που λαμβάνει υπόψιν της τις ενσωματωμένες επιλογές εκτιμάται βήμα βήμα ως εξής:

Βήμα 0: Ορίζουμε ένα δειγματικό χώρο Ω_0 για τις περιπτώσεις της δομής των p επιτοκίων. Κάθε σενάριο $l \in \Omega_0$ και συμβαίνει με πιθανότητα τέτοια ώστε το $\sum_{l \in \Omega_0} p^l = 1$ και η δομή των επιτοκίων λαμβάνει την τιμή $r_0^l = \left(r_{0t}^l\right)_{t=1}^{T}$. Οι

περιπτώσεις θα πρέπει να είναι εύλογες με δεδομένη την δομή των επιτοκίων. Αυτό σημαίνει ότι οι τιμές των risk free ομολόγων θα πρέπει να είναι ίσες με τις παρατηρημένες τιμές της αγοράς, και το option adjusted premium για τα risk free ομόλογα θα είναι ίσο με την μονάδα. Ο τύπος από όπου προκύπτει η λύση για το option adjusted premium δ_i είναι:

$$P_{0i} = \quad (2.42)$$

όπου p^l η πιθανότητα υλοποίησης του l σεναρίου, $F_{ti(r^l)}$ οι πληρωμές του ομολόγου i την χρονική στιγμή t υπό το επιτόκιο r^l, r_t^l το επιτόκιο την χρονική στιγμή t του σεναρίου l , δ_i είναι το option adjusted premium.

Βήμα 1: Μετατοπίζουμε την δομή των επιτοκίων κατά Δr και ορίζουμε ένα νέο δειγματικό χώρο Ω_+ για περιπτώσεις οι οποίες είναι εύλογες υπό την μετατοπισμένη δομή των επιτοκίων. Κάθε περίπτωση $l \in \Omega_+$ συμβαίνει με πιθανότητα p^l και η δομή των επιτοκίων παίρνει την τιμή $r_+^l = \left(r_{+t}^l\right)_{t=1}^T$.

Βήμα 2: Υπολογίζουμε την option adjusted price

$$P_{+i} = \sum_{l \in \Omega_+} p^l \sum_{t=1}^{T} \frac{F_{ti(r^l_+)}}{\left(1 + r_{t+}^l \widehat{\delta_i}\right)^t} \quad (2.43)$$

όπου p^l η πιθανότητα υλοποίησης του l σεναρίου, $F_{ti(r^l)}$ οι πληρωμές του ομολόγου i την χρονική στιγμή t υπό το επιτόκιο r^l, r_t^l το επιτόκιο την χρονική στιγμή t του σεναρίου l , $\widehat{\delta_i}$ είναι η λύση για το option adjusted premium.

Βήμα 3: Μετατοπίζουμε την δομή των επιτοκίων κατά Δr και ορίζουμε ένα νέο δειγματικό χώρο Ω_- για περιπτώσεις οι οποίες είναι εύλογες υπό την μετατοπισμένη δομή των επιτοκίων. Κάθε περίπτωση $l \in \Omega_-$ συμβαίνει με πιθανότητα p^l και η δομή των επιτοκίων παίρνει την τιμή $r_-^l = \left(r_{-t}^l\right)_{t=1}^T$.

Βήμα 4: Υπολογίζουμε την option adjusted price

$$P_{-i} = \sum_{l \in \Omega_-} p^l \sum_{t=1}^{T} \frac{F_{ti(r^l_-)}}{\left(1 + r_{t-}^l \widehat{\delta_i}\right)^t} \quad (2.44)$$

όπου p^l η πιθανότητα υλοποίησης του l σεναρίου, $F_{ti(r^l)}$ οι πληρωμές του ομολόγου i την χρονική στιγμή t υπό το επιτόκιο r^l, r_t^l το επιτόκιο την χρονική στιγμή t του σεναρίου l , $\widehat{\delta_i}$ είναι η λύση για το option adjusted premium.

Βήμα 5: Η option adjusted διάρκεια του χρεογράφου θα δίνεται από :

$$\Delta_i^{OA} = \frac{P_{+i} - P_{-i}}{2\Delta_r} \quad (2.45)$$

Αυτή η εξίσωση υπολογίζει μια προσέγγιση πεπερασμένης διαφοράς της πρώτης παραγώγου της τιμής του ομολόγου, υπό μικρές και παράλληλες μετατοπίσεις της δομής των επιτοκίων κατά $\pm\Delta r$.

2.6 OPTION ADJUSTED CONVEXITY

Από τις ποσότητες που εκτιμήθηκαν στον υπολογισμό της option adjusted duration εκτιμούμε την option adjusted convexity ως εξής:

$$C_i^{OA} = \frac{P_{+i} - 2P_{0i} + P_{-i}}{(\Delta[r])^2} \quad (2.46)$$

όπου C_i^{OA} η option adjusted convexity, P_{+i} και P_{-i} η option adjusted price υπό τα διαφορετικά σετ σεναρίων, και $(\Delta[r])^2$ δεύτερης τάξης μεταβολή του επιτοκίου.

Αυτή είναι μια πεπερασμένη προσέγγιση διαφοράς της δεύτερης παραγώγου του ομολόγου ως προς μικρές και παράλληλες μετατοπίσεις του επιτοκίου. Ακόμη όμως και έτσι όταν χειριζόμαστε σύνθετους τίτλους οι υποθέσεις των παράλληλων μετατοπίσεων είναι απλοϊκές. Παρακάτω θα δούμε μοντέλα που μας παρέχουν πολύ καλύτερα εργαλεία μοντελοποίησης.

2.7 ΑΝΟΣΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΤΑ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ ΓΙΑ ΕΤΑΙΡΙΚΑ ΟΜΟΛΟΓΑ

Οι τεχνικές της κατά παράγοντες ανοσοποίησης μπορούν να επεκταθούν προκειμένου να αντισταθμίσουν μεταβολές στις αποδόσεις των εταιρικών ομολόγων εκτός από το επιτόκιο και το *shape risk*. Η ανάλυση του κινδύνου στην αγορά εταιρικών ομολόγων είναι ένα σημαντικό θέμα στην διαχείριση κινδύνου. Θα μπορούσαμε να επικαλεστούμε το μοντέλο της κατά παράγοντες ανοσοποίησης που είχαμε αναφέρει παραπάνω προκειμένου να αναλύσουμε την δομή των αποδόσεων στα εταιρικά ομόλογα. Ωστόσο στην περίπτωση των εταιρικών ομολόγων χειριζόμαστε πολλαπλές πιστωτικές κλάσεις.

Οι αποδόσεις είναι συσχετισμένες τόσο ανάμεσα σε ομόλογα με διαφορετικές ωριμάνσεις, αλλά επίσης και σε ομόλογα με διαφορετικές πιστωτικές αξιολογήσεις. Ο πίνακας 2.1 δείχνει τις συσχετίσεις μεταξύ των αποδόσεων των ομολόγων διαφορετικών ωριμάνσεων, με αξιολογήσεις από AAA μέχρι B3. Πρέπει να προσέξουμε για παράδειγμα, την υψηλή συσχέτιση των αποδόσεων των ομολόγων AAA και B3 με 10ετής περιόδους ωρίμανσης, αλλά επίσης και την σημαντική συσχέτιση μεταξύ των 10ετών AAA και των εξαμηνιαίων B3. Αυτές οι συσχετίσεις πρέπει να ληφθούν σοβαρά υπόψιν σε μια αποτελεσματική στρατηγική ανοσοποίησης.

Σε αυτό το κομμάτι θα αναπτύξουμε πρώτα ένα μοντέλο το οποίο αντιμετωπίζει τις αξιολογικές κατατάξεις των ομολόγων ως ανεξάρτητες. Θα παρατηρήσουμε ότι αυτό το μοντέλο έχει κάποια πλεονεκτήματα. Αμέσως μετά θα αναπτύξουμε ένα μοντέλο το οποίο ανοσοποιεί απέναντι σε μεταβολές στις αποδόσεις πολλαπλά συσχετισμένων αξιολογικών κατατάξεων.

Πίνακας 2.1[13] (Εβδομαδιαίες συσχετίσεις αποδόσεων των ομολόγων AAA και B3 από Μάρτιο 1992 εώς Ιούνιο του 1999.)

	6M AAA	1Y AAA	2Y AAA	5Y AAA	7Y AAA	10Y AAA	6M B3	1Y B3	2Y B3	5Y B3	7Y B3	10Y B3
(AAA)												
6M	1.00											
1Y	0.96	1.00										
2Y	0.93	0.97	1.00									
5Y	0.92	0.94	0.98	1.00								
7Y	0.94	0.93	0.97	0.99	1.00							
10Y	0.90	0.93	0.96	0.98	0.99	1.00						
(B3)												
6M	0.62	0.58	0.57	0.55	0.54	0.55	1.00					
1Y	0.63	0.64	0.63	0.61	0.60	0.60	0.98	1.00				
2Y	0.72	0.73	0.74	0.73	0.72	0.71	0.93	0.96	1.00			
5Y	0.82	0.84	0.87	0.88	0.87	0.87	0.75	0.80	0.89	1.00		
7Y	0.81	0.83	0.85	0.88	0.88	0.88	0.65	0.71	0.81	0.96	1.00	
10Y	0.83	0.85	0.86	0.88	0.88	0.89	0.66	0.70	0.80	0.95	0.96	1.00

2.7.1 ΚΑΤΑ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ ΑΝΟΣΟΠΟΙΗΣΗ ΜΕ ΑΣΥΣΧΕΤΙΣΤΕΣ ΠΙΣΤΟΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΕΙΣ

Οι μεταβολές στους παράγοντες της καμπύλης των αποδόσεων μια αξιολογικής κλάσης ομολόγων επηρεάζει συστηματικά τις τιμές των ομολόγων σε αυτή την αξιολογική κλάση. Είναι οπότε πιθανόν να αντισταθμίσουμε την επιρροή της μεταβολής των παραγόντων. Ξεκινάμε με ένα μοντέλο να αντισταθμίσουμε ασυσχέτιστες μεταβολές αποδόσεων εντός μιας αξιολογικής κλάσης, και μετά προχωράμε με ένα μοντέλο το οποίο θα χειριστεί και την ύπαρξη συσχετίσεων.

Έστω ότι το C είναι ο αριθμός των αξιολογικών κλάσεων και ας υποθέσουμε ότι το c συμβολίζει την c-ιοστή πιστοληπτική κατάταξη. Οι παράμετροι στην εξίσωση δίκαιης αξίας του ομολόγου είναι η :

$$P^c{}_i = \sum_{t=1}^{T} F^c{}_{ti} e^{-r^c{}_t t} \qquad (2.47)$$

όπου $P^c{}_i$ είναι η τιμή του i ομολόγου με c-ιοστή πιστοληπτική κατάταξη, είναι οι πληρωμές του ομολόγου i c-ιοστής πιστοληπτικής κατάταξης την χρονική στιγμή t, $r^c{}_t$.

$e^{-r^c{}_t t}$ ο συντελεστής προεξόφλησης υπό το επιτόκιο

[13] Πηγή: May 2005 Research Quarterly published by the Bond Market Association, NY and www.bondmarkets.com

Ένα γραμμικό μοντέλο για τις μεταβολές των αποδόσεων ενός ομολόγου με κατάταξη c παίρνει την παρακάτω μορφή.

$$(\Delta)_{y^c t} = \sum_{j=1}^{k} \beta^c{}_{jt} d_{f^c{}_j} + \varepsilon_t \qquad (2.48)$$

όπου υποθέτουμε ότι k ανεξάρτητοι παράγοντες εξηγούν τις μεταβολές των αποδόσεων κάθε κλάσης, $\beta^c{}_{jt}$ είναι τα αντίστοιχα βάρη των παραγόντων, $d_{f^c{}_j}$ είναι η μεταβολή των παραγόντων ομολόγου κλάσης c, και ε_t είναι ο διαταρακτικός όρος. Υποθέτουμε ότι οι k ανεξάρτητοι παράγοντες εξηγούν τις μεταβολές των επιτοκίων και είναι επαρκείς για όλες τις κλάσεις. Φυσικά οι παράγοντες θα είναι τυπικά διαφορετικοί για κάθε κλάση, αλλά περίπου 3 με 4 παράγοντες είναι συνήθως επαρκείς για να εξηγήσουν ένα σημαντικό ποσοστό των μεταβολών των αποδόσεων σε κάθε κλάση. Η ευαισθησία των τιμών των ομολόγων για μεταβολές των παραγόντων δίνεται από τον τύπο:

$$\frac{\partial P^c{}_i}{\partial f^c{}_j} = -\sum_{t=1}^{T} F^c{}_{ti} \beta^c{}_{jt} t e^{-r^c{}_t t} \qquad (2.49)$$

όπου $\frac{\partial P^c{}_i}{\partial f^c{}_j}$ η μεταβολή της τιμής του i ομολόγου c κλάσης ως προς την μεταβολή του j παράγοντα, $F^c{}_{ti}$ είναι οι πληρωμές του ομολόγου i c-ιοστής πιστοληπτικής κατάταξης την χρονική στιγμή t, $e^{-r^c{}_t t}$ ο συντελεστής προεξόφλησης υπό το $r^c{}_t$

επιτόκιο και $\beta^c{}_{jt}$ είναι τα αντίστοιχα βάρη των παραγόντων.

Η κατά παράγοντες τροποποιημένη διάρκεια των ομολόγων ως προς ως προς τον j παράγοντα είναι η σχετική ευαισθησία των τιμών

$$k^c{}_{ij} = -\frac{\frac{\partial P^c{}_i}{\partial f^c{}_j}}{P^c{}_i} = \qquad (2.50)$$

όπου $\frac{\partial P^c{}_i}{\partial f^c{}_j}$ η μεταβολή της τιμής του i ομολόγου c κλάσης ως προς την μεταβολή του j παράγοντα, $F^c{}_{ti}$ είναι οι πληρωμές του ομολόγου i c-ιοστής πιστοληπτικής κατάταξης την χρονική στιγμή t, $e^{-r^c{}_t t}$ ο συντελεστής προεξόφλησης υπό το

r^c_t

επιτόκιο , β^c_{jt} είναι τα αντίστοιχα βάρη των παραγόντων και P^c_i είναι η τιμή του i ομολόγου με c-ιοστή πιστοληπτική κατάταξη.

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα χαρτοφυλάκιο περιουσιακών στοιχείων με διακρατήσεις x^c_i στο ομόλογο i με πιστοληπτική αξιολόγηση c, και ας θεωρήσουμε επίσης για ευκολία τον ίδιο αριθμό ομολόγων σε κάθε κλάση, έστω n. Η αναγκαία συνθήκη για ανοσοποίηση είναι:

$$\sum_{i=1}^{c}\sum_{i=1}^{n} P^c_i x^c_i = P_L \qquad (2.51)$$

όπου x^c_i είναι οι διακρατήσεις από το ομόλογο i πιστοληπτικής κατάταξης c, P^c_i είναι η τιμή του i ομολόγου με c-ιοστή πιστοληπτική κατάταξη και P_L είναι η παρούσα αξία των υποχρεώσεων.

Αυτή η συνθήκη πρέπει να ισχύει όταν οι παράγοντες μεταβάλλονται. Παίρνουμε παραγώγους ως προς τους παράγοντες και από τα δύο μέλη της εξίσωσης και απαιτούμε οι ευαισθησίες και των δύο μελών ως προς τον κάθε παράγοντα f_{jc} να είναι ίσες, προκειμένου να καταλήξουμε σε μια αναγκαία συνθήκη πρώτης τάξης.

$$\sum_{i=1}^{n} k^c_{ij} P_i x^c_i = k^c_{ij} P_L \qquad (2.52)$$

k

για όλα τα j=1,…, και c=1,2,...,C

όπου k^c_{jL} είναι το βάρος του παράγοντα j για τις υποχρεώσεις ως προς την αξιολογική κλάση c, k^c_{ij} είναι το βάρος του παράγοντα j για τα περιουσιακά στοιχεία ως προς την αξιολογική κλάση c, x^c_i είναι οι διακρατήσεις από το ομόλογο i πιστοληπτικής κατάταξης c, P^c_i είναι η τιμή του i ομολόγου με c-ιοστή πιστοληπτική κατάταξη και P_L είναι η παρούσα αξία των υποχρεώσεων.

Αν υποθέσουμε ότι η υποχρέωση έχει μια αξιολόγηση ας πούμε C=1 , τότε το μοντέλο βελτιστοποίησης θα γραφτεί ως εξής:

ΜΟΝΤΕΛΟ 2.7 Μοντέλο Για Την Ανοσοποίηση Με Ασυσχέτιστες Πιστοληπτικές Αξιολογικές Κλάσεις[14]

[14] Zenios S.(1993), Financial Optimization , Cambridge University Press

Minimize $F(x)$

subject to $\sum_{i=1}^{c}\sum_{i=1}^{n} p^{c}{}_{i} x^{c}{}_{i} = P_L$

$$\sum_{i=1}^{n} k^{c}{}_{ij} P^{c}{}_{i} x^{c}{}_{i} = \begin{cases} k^{1}_{jL} P_L \text{ για ολα τα } j = 1, \dots, k, c = 1 \\ 0, \text{για ολα τα} j = 1, \dots, k, c = 2, \dots, C \end{cases}$$

x≥ 0.

όπου $F(x)$ είναι η αντικειμενική συνάρτηση την οποία μεγιστοποιούμε, $k^{c}{}_{jL}$ είναι το βάρος του παράγοντα j για τις υποχρεώσεις ως προς την αξιολογική κλάση c, $k^{c}{}_{ij}$ είναι το βάρος του παράγοντα j για τα περιουσιακά στοιχεία ως προς την αξιολογική κλάση c, $x^{c}{}_{i}$ είναι οι διακρατήσεις από το ομόλογο i πιστοληπτικής $P^{c}{}_{i}$

κατάταξης c, είναι η τιμή του i ομολόγου με c-ιοστή πιστοληπτική κατάταξη και P_L είναι η παρούσα αξία των υποχρεώσεων.

Οι περιορισμοί επιβάλλουν το $x^{c}{}_{i}$=0 για κάθε i όταν το c$\neq 1$. Οπότε οι διακρατήσεις ομολόγων στα περιουσιακά στοιχεία με αξιολογήσεις διαφορετικές από τον στόχο c=1 αποκλείονται. Αυτοί οι περιορισμοί μπορούν να χαλαρώσουν ώστε να επιτρέπουν κάποια έκθεση σε πιστωτικό κίνδυνο:

$$\sum_{i=1}^{n} k^{c}{}_{ij} P^{c}{}_{i} x^{c}{}_{i} = k^{1}_{jL} P_L \text{ για } c = 1 \tag{2.53}$$

$$\underline{k^{c}} \leq \sum_{i=1}^{n} k^{c}{}_{ij} x^{c}{}_{i} \leq \overline{k^{c}} \text{για ολα τα } c = 2, \dots, C \tag{2.54}$$

όπου $\underline{k^{c}}$ είναι αντίστοιχα η μικρότερη και μεγαλύτερη ποσότητα ομολόγων που μας επιτρέπει το μοντέλο μας να διακρατούμε προκειμένου να υπάρχει κάποια έκθεση σε πιστωτικό κίνδυνο, $k^{c}{}_{jL}$ είναι το βάρος του παράγοντα j για τις υποχρεώσεις ως προς την αξιολογική κλάση c, $k^{c}{}_{ij}$ είναι το βάρος του παράγοντα j για τα περιουσιακά στοιχεία ως προς την αξιολογική κλάση c, $x^{c}{}_{i}$ είναι οι

$P^c{}_i$

διακρατήσεις από το ομόλογο i πιστοληπτικής κατάταξης c,
είναι η τιμή του i ομολόγου με c-ιοστή πιστοληπτική κατάταξη και P_L είνα η παρούσα αξία των υποχρεώσεων.

Οι παράμετροι $\underline{k^c}$ και $\overline{k^c}$ περιορίζουν την έκθεση στον πιστωτικό κίνδυνο παραγόντων που επηρεάζουν τις πιστοληπτικές κλάσεις διαφορετικές από την κλάση στόχο, για την οποία ο κίνδυνος έχει αντισταθμιστεί.

2.7.2 ΚΑΤΑ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ ΑΝΟΣΟΠΟΙΗΣΗ ΜΕ ΣΥΣΧΕΤΙΣΜΕΝΕΣ ΠΙΣΤΟΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΕΙΣ

Εξετάζουμε την περίπτωση όπου οι πιστοληπτικές κλάσεις είναι συχετισμένες και θεωρούμε ένα μοντέλο ανοσοποίησης. Προκειμένου να προσδιορίσουμε τους παράγοντες που επηρεάζουν την καμπύλη των αποδόσεων διαφορετικών αξιολογικών κλάσεων εκτελούμε βασική ανάλυση στοιχείων στον πίνακα συσχετίσεων που βλέπουμε στο (πίνακα 2.1). Ο πάνω αριστερά και ο κάτω δεξιά τριγωνικός υποπίνακας είναι οι συσχετίσεις σε μεταβολές των αποδόσεων των χρεογράφων εντός της ίδιας αξιολογικής κλάσης, ενώ ο κάτω αριστερά τετραγωνικός υποπίνακας είναι ο πίνακας συσχετίσεων των αποδόσεων των χρεογράφων με διαφορετική αξιολογική κλάση. Όταν υποθέτουμε ότι οι αξιολογικές κλάσεις είναι ασυσχέτιστες, όπως κάναμε στην προηγούμενη ανάλυση μας, η ανάλυση στοιχείων εκτελείται για κάθε τριγωνικό υποπίνακα ανεξάρτητα.

Για τα μοντέλα που θα μελετήσουμε τώρα η ανάλυση εκτελείται στον συνολικό πίνακα. Αυτή η ανάλυση προσδιορίζει k παράγοντες οι οποίοι από κοινού επηρεάζουν μεταβολές των αποδόσεων των ομολόγων διαφορετικών ωριμάνσεων για όλες τις κλάσεις. Εάν υποθέσουμε ότι το $x^c{}_{ij}$ συμβολίζει την κατά παράγοντες τροποποιημένη διάρκεια του ομολόγου i με πιστοληπτική αξιολόγηση c του j παράγοντα, και ότι το K_{Lj} συμβολίζει την κατά παράγοντες τροποποιημένη διάρκεια των υποχρεώσεων έχουμε το παρακάτω μοντέλο:

ΜΟΝΤΕΛΟ 2.8 Μοντέλο Για Την Ανοσοποίηση Με Συσχετισμένες Πιστοληπτικές Αξιολογικές Κλάσεις[15]

Μοντέλο Για Την Ανοσοποίηση Με Συσχετισμένες Πιστοληπτικές Αξιολογικές Κλάσεις

Minimize

$$\sum_{c=1}^{C}\sum_{i=1}^{n} P^{c}{}_{i}\, x^{c}{}_{i}$$

subject to $= P_L$

$$\sum_{i=1}^{n} k^{c}{}_{ij} P^{c}{}_{i}\, x^{c}{}_{i} = K_{Lj} P_L$$

για όλα τα j=1,2,….,k, c=1,2,…C

$$x \geq 0$$

όπου $F(x)$ είναι η αντικειμενική συνάρτηση την οποία μεγιστοποιούμε, $k^{c}{}_{jL}$ είναι το βάρος του παράγοντα j για τις υποχρεώσεις ως προς την αξιολογική κλάση c, $k^{c}{}_{ij}$ είναι το βάρος του παράγοντα j για τα περιουσιακά στοιχεία ως προς την αξιολογική κλάση c, $x^{c}{}_{i}$ είναι οι διακρατήσεις από το ομόλογο i πιστοληπτικής κατάταξης c, $P^{c}{}_{i}$ είναι η τιμή του i ομολόγου με c-ιοστή πιστοληπτική κατάταξη και P_L είναι η παρούσα αξία των υποχρεώσων.

[15] Zenios S.(1993), Financial Optimization , Cambridge University Press

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ ΜΕ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟ

3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο παρών κεφάλαιο εξετάζουμε τη βελτιστοποίηση των δυναμικών στρατηγικών διαπραγμάτευσης. Οι επενδυτές εξισορροπούν δυναμικά το χαρτοφυλάκιό τους σε κάποιες διακριτές ημερομηνίες συναλλαγών στο μέλλον, με βάση τη πληροφορία. Στην αρχή θα κάνουμε μια επισκόπηση κάποιων απλών κανόνων απόφασης για την εξισορρόπηση χαρτοφυλακίων. Έπειτα θα μελετήσουμε την στοχαστική αφοσίωση η οποία είναι διατυπωμένη ως ένα απλό μοντέλο, για τη βελτιστοποίηση δυναμικών στρατηγικών βραχυπρόθεσμων δανειοληπτικών και δανειοδοτικών αποφάσεων. Τέλος ο στοχαστικός γραμμικός προγραμματισμός παρουσιάζεται ως ένα ευέλικτο εργαλείο για τη διαμόρφωση ενός ευρύτερου φάσματος χρηματοοικονομικών μοντέλων.

3.2 ΥΠΟΒΑΘΡΟ ΓΙΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

Πολλά οικονομικά προβλήματα λήψης αποφάσεων περιλαμβάνουν ροές παθητικού που επεκτείνονται στο μέλλον. Για παράδειγμα, ο ορίζοντας σχεδιασμού για τα περισσότερα ασφαλιστικά προϊόντα επεκτείνεται πέρα από μια δεκαετία, για τα συνταξιοδοτικά ταμεία είναι περισσότερο από τριάντα χρόνια και για τους φορείς κοινωνικής ασφάλισης μπορεί να φτάσει μέχρι και πενήντα. Είναι εύλογο υπό αυτά τα δεδομένα, να διερευνούνται δυναμικές στρατηγικές που επιτρέπουν στους διαχειριστές χαρτοφυλακίων να εξισορροπήσουν το χαρτοφυλάκιό τους σε κάποιες διακριτές ημερομηνίες διαπραγμάτευσης στο μέλλον, με βάση τις νέες πληροφορίες. Η χρήση διακριτού χρόνου είναι η πλέον κατάλληλη για την μοντελοποίηση των δυναμικών στρατηγικών.

Μια δυναμική στρατηγική είναι μια ακολουθία από αποφάσεις αγορών και πωλήσεων, συμπεριλαμβανομένων του βραχυπρόθεσμου δανεισμού και της δανειοδότησης. Κατά την εκτέλεση μιας τέτοιας στρατηγικής, ο διαχειριστής πρέπει να πληρώσει το κόστος των συναλλαγών, αντιμετωπίζει περιορισμούς πίστωσης, και μια διαφορά μεταξύ των επιτοκίων δανεισμού και των επιτοκίων χορηγήσεων. Περιορισμοί μπορούν επίσης να επιβληθούν, σχετικά με τη σύνθεση του χαρτοφυλακίου λόγω των κανονιστικών περιορισμών ή της εταιρικής πολιτικής. Οι αποφάσεις που αφορούν το χαρτοφυλάκιο μπορούν να γίνουν σε έναν πεπερασμένο αριθμό σημείων στο χρόνο, που ονομάζονται ημερομηνίες συναλλαγών, και εκτείνονται από σήμερα έως και την τελευταία ημερομηνία πριν από το τέλος του ορίζοντα προγραμματισμού. Υποθέτουμε ότι δε συμβαίνει τίποτα μεταξύ των ημερομηνιών συναλλαγών, δηλαδή δεν υπάρχουν αποφάσεις για

επενδύσεις χαρτοφυλακίου, και δεν υπάρχουν καταβολές από κουπόνια ή μερίσματα.

3.3 ΔΟΜΕΣ ΠΛΕΓΜΑΤΩΝ

Οι τιμές των χρεογράφων και των υποχρεώσεων κατά την αρχική ημερομηνία t = 0 είναι γνωστές, αλλά οι μελλοντικές τιμές και οι μελλοντικές υποχρεώσεις είναι αβέβαιες. Υποθέτουμε ότι σε κάθε μελλοντική ημερομηνία διαπραγμάτευσης ένας πεπερασμένος αριθμός των καταστάσεων της οικονομίας είναι εφικτός. Σε κάθε κατάσταση της οικονομίας καθορίζονται μοναδικά οι τιμές των χρεογράφων και η αξία των υποχρεώσεων. Ένα διωνυμικό πλέγμα, όπως αυτό που απεικονίζεται στο Σχήμα3.1, απεικονίζει μια κατάσταση της οικονομίας σε διαφορετικές ημερομηνίες συναλλαγών. Οι κόμβοι στο πλέγμα αντιπροσωπεύουν καταστάσεις της οικονομίας, και οι συνδέσεις (κλάδοι) αντιπροσωπεύουν κατά πιθανότητα μεταβάσεις μεταξύ των καταστάσεων της οικονομίας. Ο όρος διωνυμικό δείχνει ότι μόνο δύο μεταβάσεις είναι δυνατές κατά την επόμενη χρονική περίοδο, δηλαδή όταν ξεκινάει κανείς από οποιαδήποτε δεδομένη κατάσταση της οικονομίας μεταβαίνει είτε σε μια ανοδική είτε σε μια καθοδική κατάσταση της οικονομίας. Ο όρος πλέγμα, δείχνει ότι μεταβάσεις επανασυνδέονται, και μία «ανοδική» κίνηση ακολουθείται από μια "καθοδική" κίνηση και οδηγεί στην ίδια κατάσταση της οικονομίας όπως και μια "καθοδική" κίνηση που ακολουθείται από μια «ανοδική» κίνηση. Ως αποτέλεσμα αυτής της ιδιότητας μια δεδομένη κατάσταση της οικονομίας μπορεί να επιτευχθεί από περισσότερες της μιας κατάστασης της οικονομίας σε προηγούμενες ημερομηνίες συναλλαγών. Οι καταστάσεις της οικονομίας σε ένα πλέγμα συμβολίζονται με s και ο δειγματικός χώρος των πιθανών καταστάσεων της οικονομίας σε χρόνο διαπραγμάτευσης t συμβολίζεται με $\sum_{t}$.

3.3.1 ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΔΟΜΩΝ

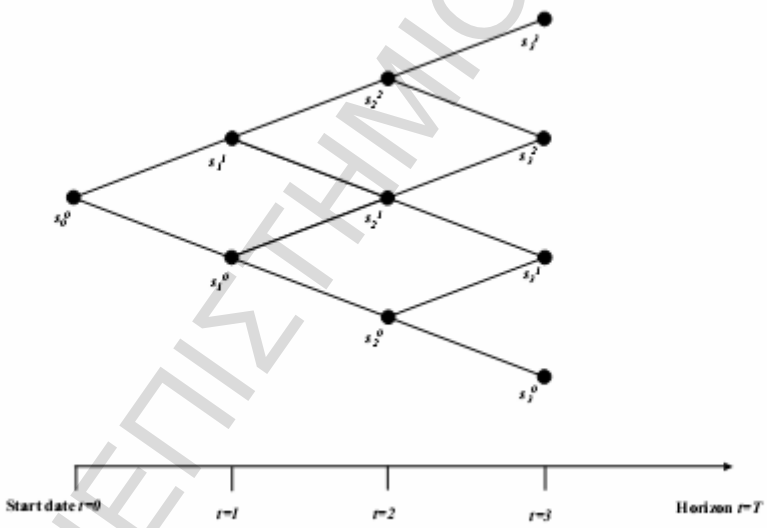
Ένα μονοπάτι μεταξύ των καταστάσεων της οικονομίας από t = 0 έως T είναι μια ακολουθία $(s_0, s_1, \ldots\ldots s_T) \in \sum_{0} \times \sum_{1} \times \cdots \ldots \sum_{T}$. Μια τέτοια ακολουθία καταστάσεων της οικονομίας είναι ένα σενάριο και συμβολίζεται με l . Κάθε κατάσταση της οικονομίας στο $\sum_{t}$ δεν μπορεί να επιτευχθεί από κάθε κατάσταση της οικονομίας στο $\sum_{t-1}$, την αμέσως προηγούμενη περίοδο. Για παράδειγμα, στο διωνυμικό πλέγμα Σχήμα 3.2 παρατηρούμε ότι το s_2^0 μπορεί να επιτευχθεί από το s_1^0 αλλά όχι από το s_1^1. Δεδομένου μιας κατάστασης της

οικονομίας s σε χρόνο διαπραγμάτευσης $t < T$, συμβολίζουμε με s^+ το σύνολο όλων των καταστάσεων της οικονομίας που μπορούν να υλοποιηθούν με θετική πιθανότητα σε χρόνο $t + 1$. Αυτά ονομάζονται τα διάδοχα των καταστάσεων της οικονομίας του s . Αντίθετα, κάθε κατάσταση της οικονομίας s στην χρονική στιγμή $t > 0$ μπορεί να επιτευχθεί από τουλάχιστον μια κατάσταση της οικονομίας την χρονική στιγμή $t - 1$, το οποίο καλείται ο προκάτοχος του s και συμβολίζεται με s^-. Ξεκινώντας από ένα δεδομένο s την χρονική στιγμή $t - 1$ ένα σενάριο l επισκέπτεται μόνο ένα από τα διάδοχα s την χρονική στιγμή t και αυτό το s συμβολίζεται με $n_t(l)$. Για παράδειγμα, σε ένα σενάριο l που περιγράφεται από την ακολουθία $(s_0, s_1, \ldots\ldots s_T)$ έχουμε ότι

$$n_1(l) = s_1, n_2(l) = s_2$$

$n_0(l) = s_0$, και ούτω καθεξής. Ο δείκτης χρόνου του n θα καταπέσει όταν δεν υπάρχει καμία ασάφεια.

Σχήμα[16]3.1: Το διωνυμικό πλέγμα (recombining) σε τρεις ημερομηνίες συναλλαγών.

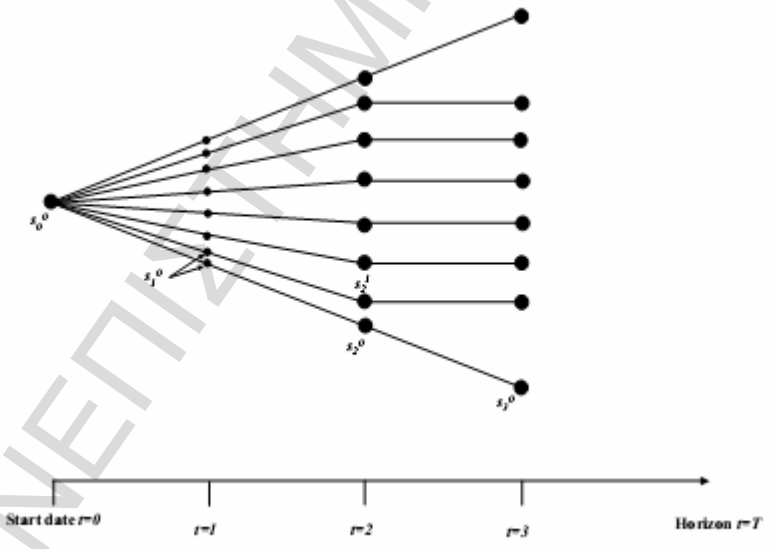


Τα σενάρια μπορούν να έχουν κοινές καταστάσεις της οικονομίας μέχρι μια ορισμένη ημερομηνία διαπραγμάτευσης στο μέλλον. Για παράδειγμα, τα μονοπάτια $(s_0^0, s_1^0, s_2^0, s_3^0)$ και $(s_0^0, s_1^0, s_2^1, s_3^1)$ από το παράδειγμα μας, έχουν κοινές καταστάσεις της οικονομίας μέχρι την ημερομηνία των συναλλαγών $t = 1$. Τα σενάρια στο Σχήμα 3.2 είναι ανεξάρτητα το ένα από το άλλο, με εξαίρεση την κοινή αρχική κατάσταση s_0^0. Το σύνολο των σεναρίων που αγνοούν τις πληροφορίες σχετικά με τα κοινά στοιχεία των καταστάσεων της οικονομίας αποτελούν ένα δέντρο σεναρίων. Τα μοντέλα βελτιστοποίησης σεναρίων που βασίζονται σε μη

[16] Chapter 6 of Zenios S.(1993), Financial Optimization , Cambridge University Press.

επανασυνδεδεμένα σενάρια, επιτρέπουν μόνο μια ημερομηνία διαπραγμάτευσης την χρονική στιγμή $t = 0$ και οι στρατηγικές διαπραγμάτευσης είναι μοναδιαίας περιόδου. Για να μοντελοποιήσουμε δυναμικές στρατηγικές διαπραγμάτευσης σε μια δομή γραμμικών σεναρίων, ερχόμαστε αντιμέτωποι με ένα δίλλημα. Είτε δεν επιτρέπουμε συναλλαγές σε περιόδους $t > 0$, με εξαίρεση τις βραχυπρόθεσμες ταμειακές ροές δανεισμού για την κάλυψη των ελλειμμάτων και πλεονασμάτων δανεισμού όπου επιτρέπουμε συναλλαγές σε περιόδους $t > 0$, που μπορεί να διαφέρουν μεταξύ των σεναρίων, ακόμη και όταν έχουν κοινές καταστάσεις της οικονομίας. Η πρώτη επιλογή είναι σαφώς περιοριστική, δεδομένου ότι δεν παρέχει στους επενδυτές την ευελιξία της αναπροσαρμογής του χαρτοφυλακίου τους, καθώς νέες πληροφορίες καθίστανται διαθέσιμες. Μπορούν μόνο να αντιδρούν στις νέες πληροφορίες με βραχυπρόθεσμο δανεισμό ή δανειοδότηση. Η δεύτερη επιλογή είναι η χαλάρωση του πραγματικού προβλήματος. Στην πραγματικότητα οι στρατηγικές διαπραγμάτευσης δεν μπορούν να εξαρτώνται από το τι θα συμβεί στο μέλλον, και όταν τα δύο σενάρια μοιράζονται την ίδια ιστορία μέχρι τη χρονική στιγμή t, τότε η βέλτιστη στρατηγική διαπραγμάτευσης μέχρι τη χρονική στιγμή αυτή, πρέπει να είναι πανομοιότυπη και για τα δύο μονοπάτια. Οι αποφάσεις που δεν είναι ίδιες μέχρι την χρονική στιγμή t παραβιάζουν τη λογική απαίτηση για απουσία διόρασης.

Σχήμα[17] 3.2: Δένδρο γραμμικών σεναρίων (non recombining) που προέρχεται από ένα διωνυμικό πλέγμα με τρεις ημερομηνίες συναλλαγών.



3.4 ΔΕΝΤΡΑ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΩΝ

Στρατηγικές διαπραγμάτευσης που ικανοποιούν τη λογική απαίτηση για ανεξαρτησία από την ύστερη γνώση, καλούνται μη-προσδοκώμενες. Για τη μοντελοποίηση μη-προσδοκώμενων δυναμικών στρατηγικών ορίζουμε τα σενάρια

[17] Chapter 6 of Zenios S.(1993), Financial Optimization , Cambridge University Press.

σε ένα δέντρο-ενδεχομένων, βλ. Σχήμα 3.3. Οι πληροφορίες για τα κοινά στοιχεία των καταστάσεων της οικονομίας περιέχονται στη δομή του δέντρου-ενδεχομένων και οι καταστάσεις της οικονομίας αποθηκεύουν νέες πληροφορίες που φθάνουν στην αντίστοιχη χρονική στιγμή διαπραγμάτευσης.

Ένα δέντρο-ενδεχομένων μπορεί να αναπαρασταθεί επίσημα ως ένα κατευθυνόμενο γράφημα $\mathcal{G} = (\Sigma, \mathcal{E})$ όπου οι κόμβοι Σ δηλώνουν το χρόνο και οι συνδέσεις (ή κλάδοι) $\mathcal{E}$ υποδεικνύουν πιθανές μεταβάσεις μεταξύ των καταστάσεων της οικονομίας, καθώς ο χρόνος εξελίσσεται. Κατά τη χρονική στιγμή t οι καταστάσεις της οικονομίας συμβολίζονται με $\sum_t \square = \{s_t^v | v = 1,2, \ldots . . S_t\}$, όπου S_t είναι ο αριθμός των πιθανών καταστάσεων της οικονομίας την χρονική στιγμή t. Ως εκ τούτου $\sum \square = \bigcup_{t=0}^{T} \Sigma_t$ και $\mathcal{E} \subset \sum \square \times \sum \square$. Τα στοιχεία του $\mathcal{E}$ συμβολίζονται από τα διατεταγμένα ζεύγη $(s_t^{v(t)}, s_{t+1}^{v(t+1)})$ όπου καταδεικνύουμε ρητά την εξάρτηση του v από το t. Η διάταξη των κόμβων καταδεικνύει ότι το $s_{t+1}^{v(t+1)}$ τη χρονική στιγμή $t+1$ μπορεί να επιτευχθεί από το $s_t^{v(t)}$ την χρονική στιγμή t. Το $s_{t+1}^{v(t+1)}$ αποτελεί το διάδοχο και το $s_t^{v(t)}$ τον προκάτοχο. Αυτό σημαίνει ότι $s_t^{v(t)+} = s_{t+1}^{v(t+1)}$ και ότι $s_{t+1}^{v(t+1)-} = s_t^{v(t)}$.

Ένα δένδρο-ενδεχομένων έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

και το s_0^0 είναι γνωστό ως κόμβος ρίζα, και δεν έχει προκάτοχο.

β)Κάθε κατάσταση της οικονομίας $s_t^{v(t)}$ έχει ένα μοναδικό προκάτοχο από το σύνολο των καταστάσεων της οικονομίας, $\sum_{t-1} \square$ για κάθε $t = 1, 2, \ldots T$. Η μοναδικότητα των προκατόχων συνεπάγεται ότι το γράφημα $\mathcal{G}$ δεν έχει κύκλους.

3.5 ΣΕΝΑΡΙΑ

Ένα σενάριο είναι ένα μονοπάτι του γραφήματος $\mathcal{G} = (\Sigma, \mathcal{E})$ που απεικονίζει ένα δένδρο ενδεχομένων και υποδηλώνεται από την ακολουθία $\left\{s_0^{v(0)}, s_1^{v(1)}, \ldots s_{\tau_l}^{v(\tau_l)}\right\}$ τέτοια ώστε, $s_t^{v(t)}, s_{t+1}^{v(t+1)} \in \mathcal{E}$ για όλα τα $t = 0,1, \ldots \tau_l$, $\tau_l < T$ όπου τ_l είναι η τελευταία ημερομηνία διαπραγμάτευσης στο σενάριο l,

με την σχετική πιθανότητα $p^l \geq 0$. Κάθε σενάριο συμβολίζεται με l από ένα δειγματικό χώρο ξ και οι πιθανότητες πρέπει πληρούν την ισότητα .

Γενικά έχουμε ότι $\tau_l < T$ για όλα τα σενάρια. Ωστόσο όταν χειριζόμαστε χρεόγραφα τα οποία μπορούν να χρεοκοπήσουν, ο χρόνος χρεοκοπίας είναι μια τυχαία μεταβλητή και η χρήση χρονικών οριζόντων εξαρτάται από τα σενάρια που είναι ουσιώδης. Αυτή η θεώρηση επίσης ισχύει και για περιπτώσεις χρεογράφων με ενσωματωμένα Αμερικανικού τύπου δικαιώματα (American type options) .

Ο ορισμός των σεναρίων με τη χρήση δέντρων ενδεχομένων, δείχνει σαφώς ότι ορισμένα σενάρια μπορούν να έχουν κοινές καταστάσεις της οικονομίας μέχρι μια συγκεκριμένη ημερομηνία συναλλαγών. Για παράδειγμα στο Σχήμα 3.3 παρατηρούμε ότι τέσσερα σενάρια μοιράζονται κοινές καταστάσεις της οικονομίας s_0^0 , s_0^1 μέχρι και την χρονική στιγμή $t = 1$, ενώ άλλα τέσσερα μοιράζονται s_0^0 , s_1^1. Μια δυναμική στρατηγική διαπραγμάτευσης για τα πρώτα τέσσερα σενάρια μπορεί να διαφέρει σε ημερομηνίες διαπραγμάτευσης $t > 1$, αλλά το χαρτοφυλάκιο που εξισορροπείται την χρονική στιγμή $t = 1$, πρέπει να είναι το ίδιο για τα σενάρια αυτά καθώς μοιράζονται την ίδια κατάσταση της οικονομίας s_1^1. Στο δέντρο ενδεχομένων είναι καθαρό ότι οι καταστάσεις της οικονομίας s_2^0 , s_2^1 μοιράζονται τον ίδιο προκάτοχο.

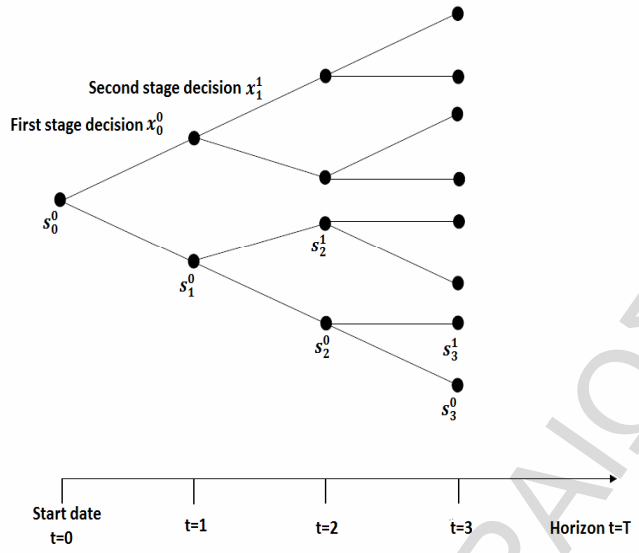
Θα εξετάσουμε δυναμικές στρατηγικές που χρησιμοποιούν τόσο γραμμικές δομές σεναρίων όσο και δέντρα-ενδεχομένων. Οι μεταβλητές ελέγχου μας για δυναμικές στρατηγικές σε ένα δέντρο-ενδεχομένων αυξάνουν γραμμικά με τον αριθμό των ημερομηνιών συναλλαγών. Το μέγεθος των δυναμικών μοντέλων στα δέντρα ενδεχομένων αυξάνεται εκθετικά με τον αριθμό των ημερομηνιών. Οι στρατηγικές που αναπτύσσονται σε γραμμικά σενάρια είναι εύκολο να υπολογιστούν, αλλά υπάρχουν απλουστεύσεις που οδηγούν σε υπό-βέλτιστες αποφάσεις. Οι στρατηγικές στα δέντρα ενδεχομένων είναι υπολογιστικά δύσκολο να εκτιμηθούν, αλλά οδηγούν σε βέλτιστες αποφάσεις.

Θα εξετάσουμε τρεις διαφορετικές προσεγγίσεις για την μοντελοποίηση δυναμικών στρατηγικών. Πρώτα θα εισάγουμε περιληπτικά κανόνες απόφασης για τον καθορισμό των δυναμικών στρατηγικών, αμέσως μετά θα διατυπώσουμε τα μοντέλα στοχαστικής αφοσίωσης τα οποία θα είναι μια επέκταση των γνωστών ντετερμινιστικών μοντέλων αφοσίωσης. Αυτά τα μοντέλα βελτιστοποιούν μια δυναμική στρατηγική δανεισμού και δανειοδότησης με μετρητά σε δέντρο γραμμικού σεναρίου, χωρίς όμως να προνοούν επανεξισορρόπηση χαρτοφυλακίου.

Τέλος θα αναπτύξουμε μοντέλα δυναμικών στρατηγικών με δέντρα-ενδεχομένων χρησιμοποιώντας στοχαστικό προγραμματισμό. Αυτά τα μοντέλα οδηγούν σε βέλτιστες στρατηγικές λαμβάνοντας επίσης υπόψιν την δυνατότητα επανεξισορρόπησης χαρτοφυλακίου.

Σχήμα[18] 3.3: Δέντρο-ενδεχομένων που προέρχονται από ένα διωνυμικό πλέγμα με τρεις ημερομηνίες συναλλαγών.

[18] Chapter 6 of Zenios S.(1993), Financial Optimization , Cambridge University Press.



3.6 ΚΑΝΟΝΕΣ ΑΠΟΦΑΣΗΣ ΓΙΑ ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ

Οι δυναμικές στρατηγικές χαρτοφυλακίου μπορούν να προσδιοριστούν μέσω απλών κανόνων. Καθώς περισσότερες πληροφορίες φθάνουν σε μια γραμμική δομή σεναρίων, τα χαρτοφυλάκια εξισορροπούνται σύμφωνα με τους κανόνες. Δεν υπάρχει τίποτα βέλτιστο σχετικά με τις δυναμικές στρατηγικές που βασίζονται σε κανόνες λήψης αποφάσεων, αλλά είναι εύκολο να καθοριστούν και να υπολογιστούν, και λειτουργούν καλά σε ορισμένες συνθήκες. Οι κανόνες απόφασης είναι επίσης διαισθητικά ελκυστικοί, δεδομένου ότι είναι εύκολο να μεταδοθούν στους διαχειριστές χαρτοφυλακίων και να εφαρμοστούν στην πράξη. Επιπρόσθετα, χρησιμεύουν στην διερεύνηση θεμάτων που περιβάλλουν την βελτιστοποίηση των δυναμικών στρατηγικών, και συχνά χρησιμοποιούνται σαν σημεία αναφοράς με τα οποία συγκρίνονται οι βελτιστοποιημένες δυναμικές στρατηγικές. Θεωρούμε τέσσερις κανόνες αποφάσεων:

1. Buy and hold (Αγοράς και διακράτησης)

2. Constant Mix (Σταθερής μίξης)

3. Constant Proportion (Σταθερής αναλογίας)

4.Option based portfolio insurance (Ασφάλιση χαρτοφυλακίου βασισμένη στα δικαιώματα)

3.6.1 ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ ΑΓΟΡΑΣ ΚΑΙ ΔΙΑΚΡΑΤΗΣΗΣ (BUY-AND-HOLD STRATEGY)

Μια buy-and-hold στρατηγική καθορίζει το ποσοστό του αρχικού πλούτου που επενδύεται υπό το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου, και το υπόλοιπο ποσοστό επενδύεται σε ένα περιουσιακό στοιχείο με ρίσκο την χρονική στιγμή $t = 0$. Αυτό το χαρτοφυλάκιο διακρατάται μέχρι την ωρίμανση υπό όλα τα σενάρια, οπότε δεν

υπάρχει τίποτα δυναμικό αναφορικά με αυτή την στρατηγική εκτός από το ότι η αξία του χαρτοφυλακίου ποικίλει ανάλογα με τα σενάρια.

Υποθέτοντας ένα αρχικό πλούτο V_0 το χαρτοφυλάκιο παίρνει την τιμή

$$V_{pt}^{s} = V_0 x_0 + V_0 (1 - x_0) I_{t-1}^{s} \quad (3.1)$$

όπου V_{pt}^{s} είναι η αξία του χαρτοφυλακίου στην χρονική στιγμή διαπραγμάτευσης t στη κατάσταση της οικονομίας s, V_0 είναι ο αρχικός πλούτος, x_0 είναι το ποσοστό του αρχικού πλούτου που επενδύσαμε στο μηδενικού ρίσκου περιουσιακό στοιχείο, $1 - x_0$ είναι το ποσοστό του αρχικού πλούτου που επενδύσαμε στο περιουσιακό στοιχείο με κίνδυνο και I_{t-1}^{s} η συνολική απόδοση της αγοράς από την προηγούμενη κατάσταση της οικονομίας s^- στην ημερομηνία διαπραγμάτευσης t έως την κατάσταση s στην ημερομηνία διαπραγμάτευσης t-1.

3.6.2 ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ ΣΤΑΘΕΡΗΣ ΜΙΞΗΣ (CONSTANT MIX STRATEGY)

Μια στρατηγική σταθερής μίξης καθορίζει ότι το ποσοστό του περιουσιακού στοιχείου χωρίς κίνδυνο V_{ft}^{s} και το περιουσιακό στοιχείο με κίνδυνο V_{lt}^{s}, ως προς το σύνολο του πλούτου του χαρτοφυλακίου πρέπει να παραμείνει σταθερό σε όλες τις ημερομηνίες διαπραγμάτευσης t και σε όλες τις καταστάσεις της οικονομίας s. Καθώς ο δείκτης της αγοράς διακυμαίνεται, το χαρτοφυλάκιο πρέπει να εξισορροπείται, έτσι ώστε το μείγμα των περιουσιακών στοιχείων με κίνδυνο και χωρίς κίνδυνο να παραμένει σταθερό. Συγκεκριμένα, αν ο δείκτης της αγοράς μειώνεται, το χαρτοφυλάκιο εξισορροπείται από την πώληση των περιουσιακών στοιχείων χωρίς κίνδυνο και την αγορά περιουσιακών στοιχείων με κίνδυνο, διατηρώντας έτσι την έκθεση του χαρτοφυλακίου στο δείκτη της αγοράς. Αντιστρόφως, εάν ο δείκτης αγοράς ανέβει, τότε τα περιουσιακά στοιχεία υψηλού κινδύνου πωλούνται και αγοράζονται περιουσιακά στοιχεία χωρίς κίνδυνο, μειώνοντας έτσι την έκθεση στον δείκτη κινδύνου στο αρχικό του επίπεδο. Αυτή είναι μια πραγματικά δυναμική στρατηγική καθώς το χαρτοφυλάκιο εξισορροπείται ανάλογα με τις αλλαγές στην αγορά.

Η αρχική αξία του χαρτοφυλακίου δίδεται από τον τύπο:

$$V_0 = V_0 x_0 + V_0 (1 - x_0) \quad (3.2)$$

όπου V_0 είναι ο αρχικός πλούτος, x_0 είναι το ποσοστό του αρχικού πλούτου που επενδύσαμε στο μηδενικού κινδύνου περιουσιακό στοιχείο, $1 - x_0$ είναι το ποσοστό του αρχικού πλούτου που επενδύσαμε στο περιουσιακό στοιχείο με κίνδυνο.

Σε κάποια μελλοντική ημερομηνία διαπραγμάτευσης t και δεδομένου μιας κατάστασης της οικονομίας s τα κομμάτια του χατοφυλακίου με κίνδυνο και χωρίς κίνδυνο δίδονται αντιστοίχως απο:

$$V_{ft}^{s} = V_{p(t-1)}^{s^-} x_0 \quad (3.3)$$

$$V_{ft}^{s} = V_{1}p(t-1)^{1}(s^{1-})\,(1 - x_{1}0\quad)I_{t-1}^{s} \qquad (3.4)$$

όπου V_{ft}^{s} είναι η αξία του χαρτοφυλακίου εξαιτίας της επένδυσης σε μηδενικού κινδύνου περιουσιακά στοιχεία, $V_{p(t-1)}^{s^{-}}$ είναι η συνολική αξία του χαρτοφυλακίου την προηγούμενη χρονική στιγμή διαπραγμάτευσης t-1 στην προηγούμενη κατάσταση της οικονομίας s^{-}, x_{0} είναι το ποσοστό του αρχικού πλούτου που επενδύσαμε στο μηδενικού κινδύνου περιουσιακό στοιχείο, $1 - x_{0}$ είναι το ποσοστό του αρχικού πλούτου που επενδύσαμε στο περιουσιακό στοιχείο με κίνδυνο, I_{t-1}^{s} η συνολική απόδοση της αγοράς από την προηγούμενη κατάσταση της οικονομίας s^{-} στην ημερομηνία διαπραγμάτευσης t έως την κατάσταση s στην ημερομηνία διαπραγμάτευσης t-1, V_{ft}^{s} είναι η αξία του χαρτοφυλακίου εξαιτίας της επένδυσης σε περιουσιακά στοιχεία με κίνδυνο.

Ωστόσο αν ο δείκτης αγοράς αποκλίνει από την μονάδα, το χαρτοφυλάκιο πρέπει να εξισορροπηθεί ώστε τα κομμάτια του χαρτοφυλακίου χωρίς κίνδυνο και με κίνδυνο να δίνονται αντίστοιχα από τους τύπους:

$$x_{0}$$

$$V_{ft}^{s} = V_{pt}^{s}x_{0} = (V_{p(t-1)}^{s^{-}}x_{0} + V_{1}p(t-1)^{1}(s^{1-})\,(1 - x_{1}0\quad)I_{t-1}^{s}\quad) \qquad (3.5)$$

$$V_{1}It^{1}s = V_{1}pt^{1}s\,(1 - x_{1}0\quad) = (V_{p(t-1)}^{s^{-}}x_{0} + V_{1}p(t-1)^{1}(s^{1-})\,(1 - x_{1}0\quad)I_{t-1}^{s}\quad) \qquad (3.6)$$

Είναι εύκολο επίσης να διαπιστώσουμε ότι με αυτή την εξισορρόπηση, το ποσοστό της αξίας χωρίς κίνδυνο ως προς την συνολική αξία, παραμένει σταθερό από την περίοδο t στην $t-1$.

3.6.3 ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ ΣΤΑΘΕΡΗΣ ΑΝΑΛΟΓΙΑΣ (CONSTANT PROPORTION STRATEGY)

Η στρατηγική αυτή προσδιορίζει ένα σταθερό ποσοστό των διαθεσίμων που επενδύονται σε επισφαλές περιουσιακό στοιχείο, και καθώς η αξία των περιουσιακών στοιχείων του χαρτοφυλακίου αλλάζει, το χαρτοφυλάκιο εξισορροπείται ώστε η αναλογία των επισφαλών περιουσιακών στοιχείων να παραμένει σταθερή. Στην πραγματικότητα, μια στρατηγική σταθερής αναλογίας παρέχει ένα κάτω φράγμα, κάτω από το οποίο δεν επιτρέπεται να πέσει η αξία των περιουσιακών στοιχείων.

Ως εκ τούτου, εάν με g υποδηλώνεται το κάτω φράγμα, αυτή η στρατηγική περιγράφεται από την ακόλουθη σχέση η οποία πρέπει να ισχύει για κάθε χρονική περίοδο t και για κάθε κατάσταση της οικονομίας s : όπου V_{pt}^{s} συμβολίζεται η αξία των περιουσιακών στοιχείων του χαρτοφυλακίου.

)	(3.7)

όπου $\underline{g}$ είναι το κάτω φράγμα, είναι η συνολική αξία των περιουσιακών στοιχείων του χαρτοφυλακίου, V_{It}^{s} είναι η αξία του χαρτοφυλακίου εξαιτίας της επένδυσης σε περιουσιακά στοιχεία με κίνδυνο και μ είναι μια σταθερά.

Αξίζει να σημειωθεί ότι μια στρατηγική Αγοράς και Διακράτησης είναι μια ειδική περίπτωση της στρατηγικής σταθερής αναλογίας, αν θέσουμε $\mu = 1$ και το κάτω φράγμα ίσο με την αρχική επένδυση στο ασφαλές περιουσιακό στοιχείο. Οι στρατηγικές σταθερής μίξης επίσης είναι ειδικές περιπτώσεις, όπου το κάτω φράγμα ισούται με μηδέν και το μ ποικίλει.

Στην περίπτωση των στρατηγικών σταθερής αναλογίας καθώς μειώνετε η αξία των περιουσιακών στοιχείων του χαρτοφυλακίου τα περιουσιακά στοιχεία με κίνδυνο πωλούνται. Αντίστροφα καθώς η αξία του χαρτοφυλακίου αυξάνεται η έκθεση σε περιουσιακά στοιχεία με κίνδυνο αυξάνεται. Το χαρτοφυλάκιο θα μπορεί να ανταποκριθεί αρκετά καλά στο κάτω φράγμα, ακόμα και σε δριμείς πτώσεις της αγοράς, εκτός αν η πτώση της αγοράς συμβαίνει τόσο γρήγορα που το χαρτοφυλάκιο δεν προλαβαίνει να εξισορροπηθεί. Μάλιστα όσο η πτώση της αγοράς είναι μικρότερη από το φράγμα θα επιτυγχάνεται. Αξίζει τέλος να σημειώσουμε ότι εάν μεγάλος όγκος επενδυτών, ή επενδυτές με πολύ μεγάλες θέσεις ακολουθούν αυτή την στρατηγική, οι ενέργειες τους θα επιδεινώσουν την πτώση μιας ήδη πτωτικής αγοράς.

3.6.4 ΑΣΦΑΛΙΣΗ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ ΒΑΣΙΣΜΕΝΗ ΣΤΑ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΑ (OPTION BASED PORTFOLIO INSURANCE)

Η στρατηγική αυτή ασχολείται με την επίτευξη ενός κάτω φράγματος-στόχου για το χαρτοφυλάκιο στο τέλος ενός επενδυτικού ορίζοντα. Αυτός ο στόχος συνεπάγεται ένα κάτω φράγμα για κάθε προηγούμενη χρονική περίοδο, προεξοφλημένο με το ασφαλές επιτόκιο. Οι συγκεκριμένες στρατηγικές καθορίζουν ένα χαρτοφυλάκιο από ασφαλή και επισφαλή περιουσιακά στοιχεία, έτσι ώστε οι αποδόσεις τους να ταιριάζουν με αυτές ενός χαρτοφυλακίου που αποτελείται από ασφαλή περιουσιακά στοιχεία και δικαιώματα προαίρεσης αγοράς. Συγκεκριμένα, το ασφαλές περιουσιακό στοιχείο διακρατείται ίσο με το κάτω φράγμα, ενώ όποια υπερβάλλουσα αξία πάνω από το κάτω φράγμα επενδύεται σε δικαιώματα προαίρεσης αγοράς.

3.7 ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΑΦΟΣΙΩΣΗ

Θα θεωρήσουμε τώρα ένα μοντέλο για τη βελτιστοποίηση των δυναμικών στρατηγικών. Το στοχαστικό μοντέλο αφοσίωσης που θα αναπτύξουμε βελτιστοποιεί τις αποφάσεις βραχυπρόθεσμων δανείων και χορηγήσεων καθώς προκύπτουν νέες πληροφορίες, αλλά δεν επιτρέπει επανεξισορρόπηση του χαρτοφυλακίου. Οι αποφάσεις την χρονική στιγμή $t = 0$ είναι βελτιστοποιημένες μαζί με αποφάσεις βραχυπρόθεσμου δανεισμού και δανειοδότησης σε μελλοντικές ημερομηνίες διαπραγμάτευσης. Η βελτιστοποίηση λαμβάνει χώρα σε ένα δέντρο γραμμικών σεναρίων. Μπορεί να δούμε την στοχαστική αφοσίωση ως μια

βελτιστοποιημένη στρατηγική Αγοράς και Διακράτησης με μια δυναμική συνιστώσα των δανειοληπτικών και δανειοδοτικών πράξεων. Το μοντέλο αποτελεί μια επέκταση των ντετερμινιστικών μοντέλων αφοσίωσης χαρτοφυλακίου με την προσθήκη ότι ενσωματώνει την αβεβαιότητα των τιμών και των ταμειακών ροών μέσω των σεναρίων. Με αυτό τον τρόπο η στοχαστική αφοσίωση επεκτείνει το πεδίο εφαρμογής της κλασικής αφοσίωσης χαρτοφυλακίου, περαιτέρω από ότι επιτυγχάνεται με την ανοσοποίηση χαρτοφυλακίου.

Το σημείο εκκίνησης για την ανάπτυξη του μοντέλου είναι οι αναγκαίες συνθήκες για την ανοσοποίηση, που γενικεύουμε εδώ για την περίπτωση που η αξία των περιουσιακών στοιχείων και των υποχρεώσεων εξαρτώνται από το σενάριο. Λαμβάνοντας υπόψη πιθανές καταστάσεις της οικονομίας των βραχυπρόθεσμων επιτοκίων r_{ft}^{s}, $s \in \sum_{t}$ στις περιόδους διαπραγμάτευσης $t \in T$ ορίζουμε τους συντελεστές προεξόφλησης ως :

$$\mathbf{d}_{T}^{l} = \prod_{t=0}^{T} \frac{1}{1 + \mathbf{r}_{ft}^{n(l)}} \qquad (3.8)$$

όπου $n(l)$ υποδηλώνει τη κατάσταση οικονομίας που επισκέφθηκε από το $\mathbf{r}_{ft}^{n(l)}$

μονοπάτι l την περίοδο t , καθώς το t κυμαίνεται από 0 έως τ και είναι το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο υπό το $n(l)$. Η παρούσα αξία του περιουσιακού στοιχείου i στο σενάριο l δίνεται από:

$$\mathbf{P}_{0i}^{l} = \sum_{t=1}^{T} \mathbf{d}_{t}^{l} \mathbf{F}_{ti}^{n(l)} \qquad (3.9)$$

όπου $\mathbf{F}_{ti}^{n(l)}$ είναι οι πληρωμές του περιουσιακού στοιχείου i την χρονική στιγμή t, υπό το $n(l)$ και $\mathbf{d}_{T}^{l}$ είναι οι συντελεστές προεξόφλησης όπως τους έχουμε ορίσει παραπάνω. Η αναμενόμενη παρούσα αξία των περιουσιακών στοιχείων i δίνεται από το τύπο P_{0i}^{l}=και αυτή είναι ίση με την τιμή αγοράς P_{0i} με μηδενικό προσαρμοσμένο περιθώριο προαίρεσης (zero option adjusted spread).

Η παρούσα αξία των υποχρεώσεων στο σενάριο l δίδεται από:

$$\mathbf{P}_{L}^{l} = \sum_{t=1}^{T} \mathbf{d}_{t}^{l} \mathbf{L}_{t}^{l} \qquad (3.10)$$

όπου είναι οι συντελεστές προεξόφλησης όπως τους έχουμε ορίσει παραπάνω και $\mathbf{L}_{t}^{l}$ είναι οι καταβολές των υποχρεώσεων.

Σημειώνουμε ότι οι ίδιοι συντελεστές προεξόφλησης χρησιμοποιούνται τόσο για τα περιουσιακά στοιχεία όσο και για τις υποχρεώσεις. Η υπονοούμενη παραδοχή εδώ είναι ότι το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο δανεισμού για την χρηματοδότηση ελλειμμάτων, και το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο δανειοδότησης για την επένδυση του πλεονάσματος είναι το ίδιο. Αυτή την υπόθεση θα την χαλαρώσουμε λίγο παρακάτω. Προκειμένου το χαρτοφυλάκιο να παραμείνει αφοσιωμένο σε όλα τα σενάρια, επιβάλλουμε μια συνθήκη ανοσοποίησης για κάθε σενάριο ως εξής:

3.8 ΑΝΑΓΚΑΙΑ ΣΥΝΘΗΚΗ ΓΙΑ ΑΝΟΣΟΠΟΙΗΣΗ ΜΕ ΣΕΝΑΡΙΑ

$$\sum_{i=1}^{n} P_{0i}^{l}\, x_i = P_L^l \text{ για όλα τα } l \in \Omega \qquad (3.11)$$

όπου P_{0i}^{l} είναι η παρούσα αξία του περιουσιακού στοιχείου i υπό το σενάριο l την χρονική στιγμή 0, x_i είναι η διακράτηση του περιουσιακού στοιχείου i και P_L^l είναι η παρούσα αξία των υποχρεώσεων υπό το σενάριο l.

Υπό αυτή τη συνθήκη, η παρούσα αξία του χαρτοφυλακίου των περιουσιακών στοιχείων είναι ίση με τη παρούσα αξία των υποχρεώσεων σε όλα τα σενάρια. Υποθέτοντας απεριόριστο δανεισμό και δανειοδότηση, στα βραχυπρόθεσμα επιτόκια, το χαρτοφυλάκιο παραμένει αφοσιωμένο υπό όλα τα σενάρια. Αυτή η συνθήκη μπορεί να είναι αδύνατο να ικανοποιηθεί για όλα τα σενάρια. Αντί να αναζητείται μια λύση που να ισχύει σε όλα τα σενάρια για το μοντέλο στοχαστικής αφοσίωσης, όταν το χαρτοφυλάκιο περιουσιακών στοιχείων ξεπερνά τις υποχρεώσεις, έναντι του κινδύνου όταν το χαρτοφυλάκιο υστερεί. Η παρούσα αξία του χαρτοφυλακίου στοιχείων ενεργητικού και παθητικού, με συμμετοχές ενεργητικού x_0 την χρονική στιγμή $t = 0$ και έκθεση παθητικού $L^l = (L_t^l)_{t=0}^{T}$ σε ένα σενάριο l δίνεται από:

$$-P_L^l \qquad (3.12)$$

όπου $V(x; P^l)$ είναι η παρούσα αξία του χαρτοφυλακίου υποχρεώσεων και περιουσιακών στοιχείων, P_{0i}^{l} είναι η παρούσα αξία του περιουσιακού στοιχείου i υπό το σενάριο l την χρονική στιγμή 0, x_{0i} είναι η διακράτηση του περιουσιακού στοιχείου i την χρονική στιγμή 0 και P_L^l είναι η παρούσα αξία των υποχρεώσεων υπό το σενάριο l.

Έστω οι μεταβλητές y_+^l και y_-^l οι οποίες δηλώνουν αντιστοίχως, τις

$$y_+^l = \max[0, \sum_i (i = 1)^n P_i 0i^l \; x_i 0i - P_L^l] \qquad (3.13)$$

$$y_-^l = \max[0, P_i L^l - \sum_i (i = 1)^n P_i 0i^l \; x_i 0i] \qquad (3.14)$$

$$-\, y_-^l \qquad (3.15)$$

Επομένως, η μεταβλητή y_+^l είναι μη μηδενική σε αυτά τα σενάρια, όταν η αξία των περιουσιακών στοιχείων υπερβαίνει την αξία των υποχρεώσεων. Αυτή η μεταβλητή μετρά τις προοπτικές ανόδου του χαρτοφυλακίου στην εκπλήρωση των υποχρεώσεων στόχου. Η μεταβλητή y_-^l είναι μη μηδενική, όταν η τιμή του περιουσιακού στοιχείου είναι μικρότερη από την αξία των υποχρεώσεων, και μετρά τον πτωτικό κίνδυνο του χαρτοφυλακίου να πληρεί τις υποχρεώσεις στόχου. Το παρακάτω μοντέλο εξετάζει το εφικτό σύνορο για την στοχαστική αφοσίωση χαρτοφυλακίου, με έναν αρχικό προϋπολογισμό v_0.

Μοντέλο[19] 3.1 Μοντέλο PUT/CALL Εφικτού Συνόρου Για Στοχαστική Αφοσίωση

Μοντέλο PUT/CALL Εφικτού Συνόρου Για Στοχαστική Αφοσίωση

$$\text{Maximize} \sum_{l\epsilon\Omega} p^l y_+^l$$

$$\text{Subject to} \sum_{i=1}^{n} p_{0i}^l x_{0i} \leq u_0$$

$$\sum_{l\epsilon\Omega} p^l y_-^l \leq \omega$$

$$y_+^l, y_-^l \geq 0$$

όπου είναι μια μηδενική μεταβλητή όταν η αξία των περιουσιακών στοιχείων υπερβαίνει την αξία των υποχρεώσεων, y_-^l είναι μια μη μηδενική μεταβλητή όταν η τιμή του περιουσιακού στοιχείου είναι μικρότερη από την αξία των υποχρεώσεων, p_{0i}^l είναι η παρούσα αξία του περιουσιακού στοιχείου i υπό το σενάριο l την χρονική στιγμή 0, x_{0i} είναι η διακράτηση του περιουσιακού στοιχείου i την χρονική στιγμή 0 και p_L^l είναι η παρούσα αξία των υποχρεώσεων υπό το σενάριο l.

Με αυτή τη σύνθεση δεν υπάρχει καμία εγγύηση ότι μόνο μία από τις μεταβλητές y_+^l, y_-^l θα είναι μη-μηδενική για κάθε σενάριο l. Για οποιαδήποτε εφικτή αξία η εξίσωση των μεταβλητών θα εξακολουθεί να ικανοποιείται, αν προσθέσουμε μια αυθαίρετη τιμή y_+^l, y_-^l, υποθέτοντας ότι η ίδια τιμή προστίθεται και στις δύο μεταβλητές για κάθε σενάριο l. Πράγματι, προκειμένου να μεγιστοποιηθεί η αντικειμενική συνάρτηση, θα αυξήσουμε την βέλτιστη λύση αυθαίρετα κατά y_+^l, ενώ ταυτόχρονα, θα αυξηθεί κατά y_-^l. Ωστόσο, όταν ο περιορισμός της $\sum_{l\epsilon\Omega} p^l y_-^l \leq \omega$ είναι ενεργός, δεν είναι εφικτό να αυξήσουμε αυθαίρετα y_-^l, και ως εκ τούτου $y_+^l, και\ y_-^l$ θα είναι ίσα με τις μέγιστες τιμές που ορίζονται από την (3.13) - (3.14).

[19] Zenios S.(1993), Financial Optimization , Cambridge University Press.

Μια αυστηρή διατύπωση του μοντέλου, με τις μεταβλητές όπως ορίζονται σε (3,13) - (3,14), προϋποθέτει ότι έχουμε προσθέσει τους συμπληρωματικούς περιορισμούς $y_+^l . y_-^l = 0$ για κάθε $l \in \Omega$. Αυτοί είναι μη γραμμικοί περιορισμοί που περιπλέκουν σημαντικά το μοντέλο. Στην πράξη, επειδή θέλουμε να οικοδομήσουμε ένα αφοσιωμένο χαρτοφυλάκιο με το μικρότερο πτωτικό κίνδυνο, θέτουμε ω τις μικρές τιμές και ο περιορισμός $\sum_{l \in \Omega} p^l y_-^l \leq$ ω είναι ενεργός, αποφεύγοντας την ανάγκη να προσθέσουμε μη γραμμικούς περιορισμούς.

Το Μοντέλο 3.1 προεξοφλεί τόσο τα περιουσιακά στοιχεία όσο και τις υποχρεώσεις με το ίδιο επιτόκιο και στοχεύει σε μηδενική καθαρή έκθεση την χρονική στιγμή $t = 0$. Η μηδενική καθαρή έκθεση επιτυγχάνεται για ω = 0 ωστόσο, για την τιμή αυτή το μοντέλο μπορεί να είναι μη εφικτό. Το μοντέλο είναι μια έκδοση των μοντέλων αγοράς/πώλησης που θυσιάζει το περιθώριο ανόδου έναντι του κινδύνου αρνητικών εξελίξεων παραβιάζοντας την αναγκαία συνθήκη για την ανοσοποίηση με σενάρια. Προκειμένου να ικανοποιηθεί η αναγκαία συνθήκη πρέπει να εισάγουμε δανεισμό και χορηγήσεις, χρησιμοποιώντας τα βραχυπρόθεσμα επιτόκια που ισχύουν σε διαφορετικές ημερομηνίες διαπραγμάτευσης $t = 0,1, \dots T$ και σε διαφορετικές καταστάσεις της οικονομίας $s \in \sum_t$. Η στοχαστική αφοσίωση επιτυγχάνεται ακολουθώντας μια δυναμική στρατηγική αποφάσεων δανεισμού και δανειοδότησης. Αυτές οι αποφάσεις προσδιορίζονται μονοσήμαντα από το αρχικό χαρτοφυλάκιο x_0 και το s σε κάθε ημερομηνία διαπραγμάτευσης t .

Ένα στοχαστικό μοντέλο αφοσίωσης με δυνατότητα δανειοληψίας και δανειοδότησης διατυπώνεται ως εξής.

Μοντέλο[20] 3.2 Μοντέλο Ελαχιστοποίησης Αρχικού Κόστους (Stochastic dedication)

Μοντέλο Ελαχιστοποίησης Αρχικού Κόστους

Minimize u_0

Subject to $\sum_{i=1}^{n} F_{0i} x_{0i} + u_0 + u_0^- = L_0^0 + u_{t-1}^{-s-}$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{(t-1)i}^{s} x_{0i} + (1 + r_{f(t-1)}^{s}) u_{t-1}^{+s-} + u_t^{-s} = L_t^s + + (1 + r_{f(t-1)}^{s} + \delta)$$

Για όλα τα t=1,…,T, s ,

[20] Chapter 6 of Zenios S.(1993), Financial Optimization , Cambridge University Press.

$$\mathbf{u}^{-} \geq 0$$

.

x, ,

όπου $\mathbf{u_0}$ είναι το αρχικό κόστος της επένδυσης, $\mathbf{x}$είναι η διακράτηση του F_{0i}

περιουσιακού στοιχείου i την χρονική στιγμή 0, είναι οι πληρωμές του περιουσιακού στοιχείου i την χρονική στιγμή 0, και $\mathbf{L_0^0}$ είναι η παρούσα αξία των υποχρεώσεων την χρονική στιγμή 0 και $\mathbf{r^s_{f(t-1)}}$ είναι το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο την χρονική στιγμή t-1 υπό το σενάριο s.

Πρέπει να θέσουμε ρητά $u_T^{-s} = 0$ για να αποφύγουμε δανεισμό την τελευταία χρονική περίοδο, αφού το μοντέλο δεν έχει μηχανισμό να ξανά πληρώνει δάνεια που εκρεμμούν την περίοδο T .

Το μοντέλο ακολουθεί πιστά τη διατύπωση του κλασικού μοντέλου αφοσίωσης χαρτοφυλακίου. Η πρώτη εξίσωση $\sum_{i=1}^{n} F_{0i}\mathbf{x_{0i}} + \mathbf{u_0} + \mathbf{u_0^{-0}}$ =$\mathbf{L_0^0}$ + είναι η λογιστική εξίσωση ταμειακών ροών σε $t = 0$ και οι εξισώσεις $\mathbf{u_{t-1}^{-s-}}$

$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F^S_{(t-1)i}\, x_{0i} + (1 + r^s_{f(t-1)})u_{t-1}^{+s-}}$ +$\mathbf{u_t^{-s}}$=$\mathbf{L_t^s}$++ (1+$\mathbf{r^s_{f(t-1)}}$ + δ) Για όλα τα t=1,…,T, με s αντιστοιχούν τις ταμειακές ροές από τα περιουσιακά στοιχεία με εκείνες των υποχρεώσεων, σε μελλοντική ημερομηνία διαπραγμάτευσης και σε όλες τις καταστάσεις της οικονομίας. Μια παρόμοια διατύπωση μεγιστοποιεί την αναμενόμενη απόδοση ορίζοντα.

Μοντέλο[21] 3.3 Μοντέλο Αναμενόμενων Αποδόσεων Ορίζοντα

Μοντέλο Αναμενόμενων Αποδόσεων Ορίζοντα

Maximize $\sum_{l\epsilon\Omega} \mathbf{p^l u_T^{+s}}$

[21] Chapter 6 of Zenios S.(1993), Financial Optimization , Cambridge University Press.

Subject to $\sum_{i=1}^{n} F_{0i}^{l} x_{0i} + u_0 + u_0^{-0} = L_0^0 +$

u_{t-1}^{-s-}

$\sum_{i=1}^{n} F_{(t-1)i}^{S} x_{0i} + (1 + r_{f(t-1)}^{s})u_{t-1}^{+s-}$ $+u_t^{-s} = L_t^s + + (1+ r_{f(t-1)}^{s} + \delta)$

Για όλα τα t=1,…,T, s ,

$u^- \geq 0$

.

x, ,

όπου είναι το τελικό πλεόνασμα, p^l είναι η πιθανότητα υλοποίησης του l σεναρίου, x_{0i} είναι η διακράτηση του περιουσιακού στοιχείου i την χρονική στιγμή F_{0i}

0, είναι οι πληρωμές του περιουσιακού στοιχείου i την χρονική στιγμή 0, και L_0^0 είναι η παρούσα αξία των υποχρεώσεων την χρονική στιγμή 0 και $r_{f(t-1)}^{s}$ είναι το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο την χρονική στιγμή t-1 υπό το σενάριο s.

3.9 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Θα εξετάσουμε τώρα τα μοντέλα για δυναμικές στρατηγικές χαρτοφυλακίου ορισμένες και βελτιστοποιημένες σε δέντρα-ενδεχομένων. Τα μοντέλα αυτής της παραγράφου αναπτύσσουν πραγματικά δυναμικές στρατηγικές, που είναι βέλτιστες και ικανοποιούν τους λογικούς μη-αναμενόμενους περιορισμούς. Η εξισορρόπηση του χαρτοφυλακίου επιτρέπεται καθώς νέα πληροφόρηση είναι διαθέσιμη και οι αποφάσεις του χαρτοφυλακίου δεν εξαρτώνται από «μαντείες».

Ο στοχαστικός προγραμματισμός είναι εκείνο το μαθηματικό εργαλείο προγραμματισμού που διευκολύνει τη βελτιστοποίηση των δυναμικών στρατηγικών στα δέντρα-ενδεχομένων. Θα εισάγουμε τα βασικά στοιχεία του στοχαστικού προγραμματισμού και στη συνέχεια θα διαμορφώσουμε ένα κανονικό μοντέλο για τη διαχείριση χαρτοφυλακίου.

Για να βοηθήσουμε στην κατανόηση των προβλημάτων στοχαστικού προγραμματισμού, πρέπει πρώτα να εξετάσουμε ένα απλό πρόβλημα σχεδιασμού υπό συνθήκες αβεβαιότητας, όπως το πρόβλημα του εφημεριδοπώλη.

Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε δύο ειδικές περιπτώσεις στοχαστικών προγραμμάτων, τα διορατικά (anticipative) και τα προσαρμοστικά (adaptive) μοντέλα. Τέλος, συνδυάζουμε αυτά τα δύο στην πιο γενική διατύπωση του

μοντέλου καταφύγιο, που είναι το πιο κατάλληλο για τις περισσότερες χρηματοοικονομικές εφαρμογές.

3.9.1 ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ ΕΦΗΜΕΡΙΔΟΠΩΛΗ (THE NEWSVENDOR PROBLEM)

Σε μια γωνιά του δρόμου ένας νεαρός επιχειρηματίας πουλάει εφημερίδες τις οποίες αγοράζει από ένα τοπικό διανομέα κάθε πρωί. Τις πουλάει με σκοπό κέρδος P_0^+ ανά μονάδα, και τυχόν εφημερίδες που περισσεύουν στο τέλος της ημέρας πωλούνται ως απορρίμματα χάρτου, στην οποία περίπτωση υπάρχει μια καθαρή ζημία P_0^- ανά μονάδα. Η ζήτηση για εφημερίδες είναι μια τυχαία μεταβλητή $\bar{\xi}$ η οποία ανήκει σε ένα χώρο πιθανότητας, που συμβολίζεται με $\Xi = \{\xi \in \mathbb{R} | 0 \leq \xi \leq \infty\}$ και με συνάρτηση κατανομής πιθανότητας $P(\bar{\xi})$. Το πρόβλημα είναι να επιλέξει το βέλτιστο αριθμό των εφημερίδων x που θα πρέπει να αγοράσει από τον τοπικό διανομέα.

Μια προσέγγιση για την μοντελοποίηση της κατάστασης αυτής είναι να θεωρήσει ένα x βέλτιστο, όταν αυτό μεγιστοποιεί το αναμενόμενο κέρδος. Το κέρδος είναι συνάρτηση του x και της τυχαίας μεταβλητής ζήτησης $\bar{\xi}$. Έστω ότι η $F(x;\bar{\xi})$ είναι η συνάρτηση κέρδους:

$$F(x;\bar{\xi}) = \begin{cases} P_0^+ x & \text{εαν } x \leq \bar{\xi} \\ P_0^+ \bar{\xi} - P_0^- (x - \bar{\xi}) & \text{εαν } x > \bar{\xi} \end{cases} \tag{3.16}$$

όπου P_0^+ είναι το κέρδος ανά μονάδα, P_0^- είναι η ζημία ανά μονάδα, x ο βέλτιστος αριθμός εφημερίδων, $\bar{\xi}$ μια τυχαία μεταβλητή που παίρνει τιμές στον χώρο πιθανότητας που έχουμε ορίσει παραπάνω.

Η αναμενόμενη τιμή της συνάρτησης κέρδους είναι το ολοκλήρωμα ως προς την συνάρτηση κατανομής:

$$E[F(x;\bar{\xi})] = \int_{\Xi} F(x;\bar{\xi})\, dP(\bar{\xi}) = \int_0^x [(P_0^+ \bar{\xi} - P_0^-(x - \bar{\xi}))\, dP(\bar{\xi}) + \int_x^{\infty} P_0^+ x\, dP(\bar{\xi}) \tag{3.17}$$

και το μαθηματικό μοντέλο για το πρόβλημα του εφημεριδοπώλη είναι το ακόλουθο πρόβλημα βελτιστοποίησης ως προς το x .

Maximize $E[F(x;\bar{\xi})]$

Subject to $x \geq 0$

Αυτό είναι ένα απλό παράδειγμα ενός προβλήματος προγραμματισμού υπό συνθήκες αβεβαιότητας.Είναι ένα προσαρμοστικό μοντέλο, δεδομένου ότι οι

αποφάσεις προσαρμόζουν όσο περισσότερες πληροφορίες είναι διαθέσιμες, δηλαδή καθώς οι εφημερίδες πωλούνται σε πελάτες που αγοράζουν κατά τη διάρκεια της ημέρας. Το μοντέλο έχει καθορισμένο καταφύγιο (recourse), πράγμα που σημαίνει ότι η αντίδραση στην ζήτηση που παρατηρείται είναι σταθερή. Δηλαδή, ο αριθμός των εφημερίδων που πωλούνται με σκοπό το κέρδος καθορίζεται μοναδικά από τον αριθμό των πελατών. Το ίδιο ισχύει και για το πλεόνασμα που δημιουργείται στο τέλος της ημέρας, το οποίο πωλείται ως απορρίμματα χάρτου με ζημιά. Άλλες μορφές δράσεων καταφυγίου θα ήταν δυνατές, όπως η αγορά συμπληρωματικών εφημερίδων σε υψηλότερο κόστος αργότερα κατά τη διάρκεια της ημέρας, ή η επιστροφή εφημερίδων πριν από το τέλος της ημέρας, σε τιμή υψηλότερη από εκείνη του χαρτιού για πέταμα. Αυτό το απλό, σταθερό μοντέλο καταφύγιο, δεν επιτρέπει τέτοιες σκέψεις, και επίσης προϋποθέτει ότι όλες οι προτιμήσεις κινδύνου συλλαμβάνονται από την αναμενόμενη τιμή του κέρδους. Σε υψηλότερες ροπές της κατανομής της συνάρτησης κέρδους $F(x;\xi)$ αγνοούνται. Η επόμενη ενότητα παρουσιάζει μαθηματικά μοντέλα για το σχεδιασμό υπό συνθήκες αβεβαιότητας σε πιο περίπλοκες καταστάσεις.

3.10 ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ (CANONICAL STOCHASTIC PROGRAMMING PROBLEMS)

Το επόμενο πρόβλημα είναι η κανονική διατύπωση του στοχαστικού προγραμματισμού:

Minimize $E[f_0(x;\xi)]$

Subject to $E[f_j(x;\xi)]=0$ για όλα τα j=1,2,…,m,

$x \in X$.

Χρησιμοποιούνται οι εξής συμβολισμοί: $x \in \mathbf{R}^n$ είναι το διάνυσμα των μεταβλητών απόφασης, ξ είναι ένα τυχαίο διάνυσμα στο χώρο $\Xi \subset \mathbf{R}^N$ και $P = P(\xi)$ είναι μια κατανομή πιθανότητας στον $\mathbf{R}^N$. Επίσης f_0: $\mathbf{R}^n \times \Xi \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, f_j: $\mathbf{R}^n \times \Xi \to \mathbf{R}, j = 1,2,\ldots\ldots,m,$ και $X \subset \mathbf{R}^n$ είναι ένα κλειστό σύνολο. Ανισοτικοί περιορισμοί μπορούν να ενσωματωθούν σε αυτή την διατύπωση με την χρήση βοηθητικών (slack) μεταβλητών.

Οι συναρτήσεις προσδοκιών

$$E[f_j(x;\xi)]=\int_{\Xi} f_j(x;\xi)\, dP(\xi) \qquad (3.18)$$

θεωρούνται πεπερασμένες για όλα τα $j = 1,2,\ldots\ldots m$, εκτός αν το σύνολο $\{\xi | f_0(x;\xi) = +\infty\}$ έχει μη μηδενική πιθανότητα, στην οποία περίπτωση $E[f_0(x;\xi) = +\infty]$. Το εφικτό σύνολο θεωρούμε ότι είναι μη κενό.

Το παραπάνω μοντέλο αποτελεί ένα μη γραμμικό πρόβλημα προγραμματισμού, του οποίου οι περιορισμοί και οι αντικειμενικές συναρτήσεις

αναπαριστώνται από ολοκληρώματα. Μεγάλο μέρος της θεωρίας του στοχαστικού προγραμματισμού ασχολείται με τον προσδιορισμό των ιδιοτήτων αυτών των συναρτήσεων ολοκληρωμάτων, και την εκπόνηση κατάλληλων προσεγγίσεων για την εκτίμηση τους. Ο υπολογισμός των λύσεων για αυτά τα μη γραμμικά προγράμματα, ενέχει σοβαρές προκλήσεις, αφού η εκτίμηση των ολοκληρωμάτων μπορεί να είναι μια εξαιρετικά δύσκολη υπόθεση, ειδικά όταν οι συναρτήσεις προσδοκιών είναι πολυδιάστατες.

Υπάρχουν ακόμη και περιπτώσεις, που τα ολοκληρώματα δεν είναι ούτε διαφορίσιμα, ούτε κυρτά ούτε καν συνεχή. Μια ευρεία κατηγορία των στοχαστικών μοντέλων προγραμματισμού, ωστόσο, μπορούν να διαμορφωθούν ως μεγάλης κλίμακας γραμμικά ή μη γραμμικά προγράμματα με ένα ειδικά δομημένο πλέγμα περιορισμών.

3.10.1 ΤΑ ΔΙΟΡΑΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ (ANTICIPATIVE MODELS)

Εξετάζουμε την κατάσταση όπου μια απόφαση x πρέπει να ληφθεί σε ένα αβέβαιο κόσμο, όπου η αβεβαιότητα περιγράφεται από το τυχαίο διάνυσμα $\bar{\xi}$. Η απόφαση δεν μπορεί με κανένα τρόπο να εξαρτάται από τις μελλοντικές παρατηρήσεις, αντίθετα ο συνετός σχεδιασμός πρέπει να προβλέπει πιθανές μελλοντικές υλοποιήσεις του τυχαίου διανύσματος. Σε διορατικά μοντέλα η εφικτότητα εκφράζεται σε όρους πιθανοθεωρητικών περιορισμών. Για παράδειγμα καθορίζεται, από ένα επίπεδο αξιοπιστίας α, όπου $0 \leq \alpha \leq 1$ και οι περιορισμοί εκφράζονται με τη μορφή:

$$P\left(\bar{\xi} \mid g_j\left(x; \bar{\xi}\right) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots m\right) \geq \alpha, \tag{3.19}$$

$$g_j : \mathbb{R}$$

$$\text{όπου} \qquad x \Xi \rightarrow \mathbb{R}, j = 1, 2, \ldots m. \tag{3.20}$$

όπου $\bar{\xi}$ τυχαίο διάνυσμα που παίρνει τιμές σε ένα χώρο πιθανότητας και α το επίπεδο αξιοπιστίας δηλαδή μια σταθερά με τιμές ανάμεσα στο 0 και το 1.

Αυτός ο περιορισμός μπορεί φτάσει στην μορφή του γενικού μοντέλου της προηγούμενης ενότητας, ορίζοντας το f_j ως εξής:

$$f_j\left(x; \bar{\xi}\right) = \begin{cases} a - 1 & \text{εαν } g_j\left(x; \bar{\xi}\right) = 0 \\ a & \text{αλλιώς} \end{cases} \tag{3.21}$$

Η αντικειμενική συνάρτηση μπορεί επίσης να είναι ενός διαφορετικού τύπου αξιοπιστίας, όπως $P\{\xi \mid g_1 0\ (x; \xi \leq \gamma\}$, όπου $g_0 : \mathbb{R}^n \times \Xi \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ και το γ είναι σταθερά.

Ένα διορατικό μοντέλο επιλέγει μια πολιτική που οδηγεί σε κάποια επιθυμητά χαρακτηριστικά των λειτουργιών των περιορισμών και των

αντικειμενικών συναρτήσεων υπό τις υλοποιήσεις του τυχαίου διανύσματος. Στο παραπάνω παράδειγμα, είναι επιθυμητό ότι η πιθανότητα παραβίασης ενός περιορισμού είναι μικρότερη από την προκαθορισμένη τιμή ορίου a . Η ακριβής τιμή του a εξαρτάται από την εφαρμογή στο χέρι, το κόστος της παραβίασης των περιορισμών, και άλλα παρόμοια ζητήματα.

3.10.2 ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ (ADAPTIVE MODELS)

Σε ένα προσαρμοστικό μοντέλο οι παρατηρήσεις που σχετίζονται με την αβεβαιότητα γίνονται διαθέσιμες πριν να ληφθεί μια απόφαση x , έτσι ώστε η βελτιστοποίηση να λαμβάνει χώρα σε ένα περιβάλλον εκμάθησης. Εννοείται ότι οι παρατηρήσεις παρέχουν μόνο μερική πληροφόρηση σχετικά με τις τυχαίες μεταβλητές, διότι διαφορετικά το μοντέλο απλά θα περίμενε να παρατηρηθούν οι τιμές των τυχαίων μεταβλητών, και στη συνέχεια να αποφασίσει x μέσω επίλυσης ενός ντετερμινιστικού μαθηματικού προγράμματος. Σε αντίθεση με αυτή την κατάσταση έχουμε το άλλο άκρο, όπου όλες οι παρατηρήσεις γίνονται αφού η απόφαση x έχει ληφθεί, καθώς και το μοντέλο γίνεται διορατικό. Έστω $\mathcal{A}$ είναι η συλλογή όλων των σχετικών πληροφοριών, που θα μπορούσαν να είναι διαθέσιμες με μια παρατήρηση. Το $\mathcal{A}$ είναι ένα υποπεδίο του πεδίου σ από όλα τα πιθανά

ενδεχόμενα, που δημιουργούνται από το σύνολο Ξ του τυχαίου διανύσματος . Οι αποφάσεις x εξαρτώνται από τα γεγονότα που θα μπορούσαν να παρατηρηθούν, και το x έχει ονομαστεί $\mathcal{A}$ -προσαρμοσμένο ή $\mathcal{A}$ -μετρήσιμο. Χρησιμοποιώντας την δεσμευμένη αναμενόμενη τιμή ως προς το $\mathcal{A}$, $E(\cdot|\mathcal{A})$, το προσαρμοστικό στοχαστικό πρόγραμμα μπορεί να γραφτεί ως εξής:

Μοντέλο[22] 3.4 Μοντέλο Ελαχιστοποίησης Δεσμευμένης Αναμενόμενης Τιμής

[22] Zenios S.(1993), Financial Optimization , Cambridge University Press.

Μοντέλο Ελαχιστοποίησης Δεσμευμένης Αναμενόμενης Τιμής

Minimize E $[f_0(x(\xi)) \mid \mathcal{A}]$

Subject to E $[f_j(x(\xi)) \mid \mathcal{A}]=0$ για όλα τα j=1,2,…,m

$x(\bar{\xi}) \in X$

όπου E $[f_0(x(\xi)) \mid \mathcal{A}]$ η αντικειμενική συνάρτηση προσδοκιών, x οι αποφάσεις, $\mathcal{A}$ είναι ένα υποπεδίο του πεδίου σ από όλα τα πιθανά ενδεχόμενα και $\bar{\xi}$ τυχαίο διάνυσμα που παίρνει τιμές σε ένα χώρο πιθανότητας.

Η απεικόνιση $x: \Xi \to X$ είναι τέτοια ώστε το $x(\bar{\xi})$ να είναι $\mathcal{A}$ -μετρήσιμο. Αυτό το πρόβλημα μπορεί να αντιμετωπιστεί με την επίλυση των ακολούθων ντετερμινιστικών προγραμμάτων για κάθε $\bar{\xi}$:

Μοντέλο[23] 3.5 Ντετερμινιστικό Μοντέλο Ελαχιστοποίησης Δεσμευμένης Αναμενόμενης Τιμής

Ντετερμινιστικό Μοντέλο Ελαχιστοποίησης Δεσμευμένης Αναμενόμενης Τιμής

Minimize E $[f_0(x;\cdot) \mid \mathcal{A}](\bar{\xi})$

Subject to E $[f_j(x;\cdot) \mid \mathcal{A}](\bar{\xi})=0$ για όλα τα j=1, 2,…, m,

$x \in X$

όπου E $[f_0(x(\xi)) \mid \mathcal{A}]$ η αντικειμενική συνάρτηση προσδοκιών, x οι αποφάσεις, $\mathcal{A}$ είναι ένα υποπεδίο του πεδίου σ από όλα τα πιθανά ενδεχόμενα και $\bar{\xi}$ τυχαίο διάνυσμα που πέρνει τιμές σε ένα χώρο πιθανότητας.

[23] Zenios S.(1993), Financial Optimization , Cambridge University Press.

Οι δύο ακραίες περιπτώσεις (δηλαδή, η πλήρης πληροφόρηση όπου $\mathcal{A} = \sum^{\square}$ ή η καθόλου πληροφόρηση) αξίζουν ειδικής μνείας. Η περίπτωση της μηδενικής πληροφόρησης συρρικνώνει το μοντέλο στη μορφή του διορατικού μοντέλου. Στην περίπτωση που υπάρχει πλήρης πληροφόρηση, (Μοντέλο 3.4), αυτό είναι γνωστό ως το μοντέλο κατανομής. Ο στόχος σε αυτή την τελευταία περίπτωση είναι να χαρακτηριστεί η κατανομή των τιμών της βέλτιστης αντικειμενικής συνάρτησης. Οι ακριβείς τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης και η βέλτιστη πολιτική x, καθορίζονται μετά την παρατήρηση των υλοποιήσεων του τυχαίου διανύσματος $\bar{\xi}$. Οι πιο ενδιαφέρουσες καταστάσεις προκύπτουν όταν καθίσταται διαθέσιμη μερική πληροφόρηση, ενώ ήδη κάποιες αποφάσεις έχουν ληφθεί.

3.10.3 ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΑΤΑΦΥΓΙΟΥ (RECOURSE MODELS)

Το μοντέλο καταφυγίου συνδυάζει τα διορατικά και προσαρμοστικά μοντέλα σε ένα κοινό μαθηματικό πλαίσιο. Το πρόβλημα επιδιώκει μια πολιτική που όχι μόνο αναμένει μελλοντικές παρατηρήσεις, αλλά λαμβάνει επίσης υπόψη ότι οι παρατηρήσεις γίνονται σχετικά με την αβεβαιότητα όσο περνάει ο καιρός, και ως εκ τούτου μπορεί να προσαρμοστεί με τη λήψη αποφάσεων καταφυγίου (Recourse). Για παράδειγμα, ένας διαχειριστής χαρτοφυλακίου καθορίζει τη σύνθεση ενός χαρτοφυλακίου, λαμβάνοντας υπόψιν τόσο τις μελλοντικές κινήσεις των τιμών των μετοχών, όσο και το ότι το χαρτοφυλάκιο θα πρέπει να εξισορροπηθεί καθώς οι τιμές αλλάζουν (adaptation). Η δύο σταδίων-έκδοση του μοντέλου αυτού είναι δεκτική σε διατυπώσεις, ως μεγάλης κλίμακας μη γραμμικό-πρόγραμμα με ειδική διάρθρωση της μήτρας περιορισμών. Για τη διαμόρφωση των δύο σταδίων του στοχαστικού προγράμματος καταφύγιο, χρειαζόμαστε δύο διανύσματα για τις μεταβλητές απόφασης, ώστε να γίνει διάκριση μεταξύ προληπτικής πολιτικής και προσαρμοστικής πολιτικής. Θα ακολουθήσουμε την παρακάτω σημειογραφία:

Το $x \in \mathbf{R}^{n_0}$ υποδηλώνει το διάνυσμα αποφάσεων του πρώτου σταδίου. Οι αποφάσεις αυτές λαμβάνονται πριν να παρατηρηθούν οι τυχαίες μεταβλητές και είναι αναμενόμενες. Το $y(\bar{\xi}) \in \mathbf{R}^{n_1}$ υποδηλώνει το διάνυσμα αποφάσεων δευτέρου σταδίου. Οι αποφάσεις αυτές λαμβάνονται, αφού οι τυχαίες μεταβλητές έχουν παρατηρηθεί. Είναι περιορισμένες από αποφάσεις που λαμβάνονται σε πρώτο στάδιο, και εξαρτώνται από υλοποίηση του τυχαίου διανύσματος $\bar{\xi}$.

Διατυπώνουμε το πρόβλημα του δευτέρου σταδίου με τον ακόλουθο τρόπο. Μόλις ληφθεί μια πρώτου σταδίου απόφαση x, κάποια υλοποίηση του τυχαίου διανύσματος μπορεί να παρατηρηθεί. Έστω $q(y(\bar{\xi}); \bar{\xi})$ συμβολίζει την συνάρτηση κόστους για τις αποφάσεις δεύτερου σταδίου, και έστω $\{T(\bar{\xi}), W(\bar{\xi}), h(\bar{\xi}) | \bar{\xi} \in \Xi\}$ είναι οι παράμετροι του μοντέλου. Αυτές οι παράμετροι είναι συναρτήσεις του τυχαίου διανύσματος $\bar{\xi}$ και είναι, ως εκ τούτου, τυχαίες παράμετροι. T είναι η μήτρα της τεχνολογίας διάστασης $n_1 \times m_0$, η οποία

περιέχει τους συντελεστές που μετατρέπουν την απόφαση πρώτου σταδίου x σε πόρους για το πρόβλημα δεύτερου σταδίου. Ο όρος "τεχνολογία" αναφέρεται στο γεγονός, ότι είναι συνήθεις οι αλλαγές στην τεχνολογία που καθορίζουν τις επιπτώσεις των σημερινών αποφάσεων στις μελλοντικές αποφάσεις. W είναι η μήτρα καταφύγιο διάστασης $n_1 \times m_1$, που επιβάλλει περιορισμούς στις μελλοντικές αποφάσεις. h είναι το δεύτερου-σταδίου διάνυσμα πόρων διάστασης n_1. Το πρόβλημα δευτέρου-σταδίου επιδιώκει μια πολιτική $y(\xi)$ που βελτιστοποιεί το κόστος της απόφασης του δεύτερου σταδίου για μια δεδομένη τιμή της απόφασης του πρώτου σταδίου x. Συμβολίζουμε τη βέλτιστη τιμή του προβλήματος του δεύτερου σταδίου ως Q*(x;*ξ). Αυτή η τιμή εξαρτάται από τις τυχαίες παραμέτρους και από την τιμή των μεταβλητών *x* του πρώτου σταδίου. Q*(x;*ξ) είναι η βέλτιστη τιμή, για κάθε δεδομένο ω, του ακόλουθου μη γραμμικού προγράμματος:

$$\text{Minimize } q(y(\bar{\xi});\bar{\xi})$$

$$\text{Subject to } W(\bar{\xi})y(\bar{\xi})=h(\bar{\xi})-T(\bar{\xi})x$$

$$y(\bar{\xi}) \geq 0$$

όπου $y(\xi)$ είναι το διάνυσμα αποφάσεων δευτέρου σταδίου, x οι αποφάσεις, $\bar{\xi}$ τυχαίο διάνυσμα που παίρνει τιμές σε ένα χώρο πιθανότητας.

Αν αυτό το πρόβλημα δεύτερου σταδίου δεν είναι εφικτό, τότε θέτουμε Q*(x;*ξ) $= +\infty$. Το παραπάνω μοντέλο είναι ένα μοντέλο προσαρμογής στο οποίο το $y(\xi)$ είναι η απόφαση καταφύγιο και Q*(x;*ξ) είναι η συνάρτηση κόστους καταφύγιο. Το δύο σταδίων στοχαστικό πρόγραμμα με καταφύγιο είναι ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης στις μεταβλητές πρώτου σταδίου x, το οποίο βελτιστοποιεί το άθροισμα του κόστους των αποφάσεων πρώτου σταδίου $f(x)$ και το αναμενόμενο κόστος αποφάσεων του δεύτερου σταδίου. Είναι γραμμένο ως εξής:

$$\text{Minimize } f(x) + E[Q(x;\bar{\xi})]$$

$$\text{Subject to } Ax = b$$

$$x \geq 0$$

όπου το A είναι ένας $n_0 \times m_0$ πίνακας συντελεστών περιορισμών, και b είναι ένα n_0-διάνυσμα που υποδηλώνει τους διαθέσιμους πόρους κατά το πρώτο στάδιο. Συνδυάζοντας τα δύο προηγούμενα μοντέλα προκύπτει το ακόλουθο :

Μοντέλο Στοχαστικού Προγραμματισμού Δυο Σταδίων .

$$\text{Minimize } f(x) + E[\text{Min } \{ q(y(\bar{\xi});\bar{\xi}) \mid T(\bar{\xi})x + W(\bar{\xi})y(\bar{\xi}) = h(\bar{\xi}), y(\bar{\xi}) \geq 0\}]$$

$$\text{Subject to } Ax = b$$

$$x \geq 0$$

όπου $y(\xi)$ είναι το διάνυσμα αποφάσεων δευτέρου σταδίου, x οι αποφάσεις, $\bar{\xi}$ τυχαίο διάνυσμα που παίρνει τιμές σε ένα χώρο πιθανότητας.

Έστω ότι $K_1 = \{x \in \mathbb{R}_+^{n_0} | Ax = b\}$ συμβολίζει το εφικτό σύνολο για το πρόβλημα του πρώτου σταδίου. Έστω επίσης $K_2 = \left\{x \in \mathbb{R}_+^{n_0} \middle| E\left[Q\left(x;\bar{\xi}\right)\right] \leq +\infty\right\}$ δηλώνουν το σύνολο των επαγόμενων περιορισμών. Αυτό είναι το σύνολο αποφάσεων του πρώτου σταδίου x για το οποίο το πρόβλημα δεύτερου σταδίου είναι εφικτό. Το προηγούμενοπρόβλημα έχει πλήρες καταφύγιο, εάν $K_2 = \mathbb{R}^{n_0}$, δηλαδή, αν το πρόβλημα δεύτερου σταδίου είναι εφικτό για οποιαδήποτε τιμή του x .

Το πρόβλημα έχει σχετικά ολοκληρωμένο καταφύγιο εάν $K_1 \subseteq K_2$, δηλαδή εάν το πρόβλημα δευτέρου σταδίου είναι εφικτό για κάθε τιμή των μεταβλητών του πρώτου σταδίου που ικανοποιούν τους περιορισμούς πρώτου σταδίου. Το απλό καταφύγιο αναφέρεται στην περίπτωση που η μήτρα πόρων $W(\xi) = I$ και οι περιορισμοί πόρων παίρνουν την απλή μορφή $I_{y+}(\bar{\xi}) - I_{y-}(\bar{\xi}) = h(\bar{\xi}) - T(\bar{\xi})x$ όπου I είναι η ταυτοτική μήτρα, και το διάνυσμα πόρων $y(\xi)$ είναι γραμμένο ως $y(\xi) = y_+(\xi) - y_-(\xi)$ με τα $y_+(\bar{\xi}), y_-(\bar{\xi}) \geq 0$ σχεδόν βέβαια.

3.11 ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΝΤΕΤΕΡΜΙΝΙΣΤΙΚΟΥ ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΥ

Θεωρούμε τώρα την περίπτωση όπου το τυχαίο διάνυσμα $\bar{\xi}$ έχει μια διακριτή και πεπερασμένη κατανομή, και . Τα στοιχεία ξ^l του Ξ είναι σενάρια με δείκτη l από το δειγματικό χώρο σεναρίων Ω . Υπάρχει ένα-προς-ένα αντιστοιχία μεταξύ των σεναρίων στο Ξ και το δειγματικό χώρο σεναρίων Ω . Συμβολίζουμε με p^l την πιθανότητα υλοποίησης του l –οστού σεναρίου ξ^l. Για κάθε, $l \in \Omega$

$$\mathbf{p}^l = \text{Prob}(\bar{\xi} = \xi^l) = \text{Prob}$$

$$\left\{\left(q\overline{y;(\xi)}, W(\bar{\xi}), h(\bar{\xi}), T(\bar{\xi})\right) = \left(q\left(y;\xi^l\right), W\left(\xi^l\right), h(\xi^l), T(\xi^l)\right)\right\}$$

Όπου για όλα $l \in \Omega$ και $\sum_{l \in \Omega} p^l = 1$ (3.22)

[24] Zenios S.(1993), Financial Optimization , Cambridge University Press.

Η αναμενόμενη τιμή του προβλήματος βελτιστοποίησης δεύτερου σταδίου μπορεί να εκφραστεί ως:

$$E[Q(x;\bar{\xi})]= \tag{3.23}$$

Για κάθε υλοποίηση του τυχαίου διανύσματος $\xi^l, l \in \Omega$, λαμβάνεται μια διαφορετική απόφαση δευτέρου σταδίου $y(\xi^l)$, η οποία μπορεί να συμβολιστεί για ευκολία ως y^l. Το πρόβλημα δευτέρου σταδίου που προκύπτει μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\begin{aligned} &\text{Minimize} \\ &\text{Subject to} \\ &\mathbf{y}^l \geq 0 \end{aligned} \tag{3.24}$$

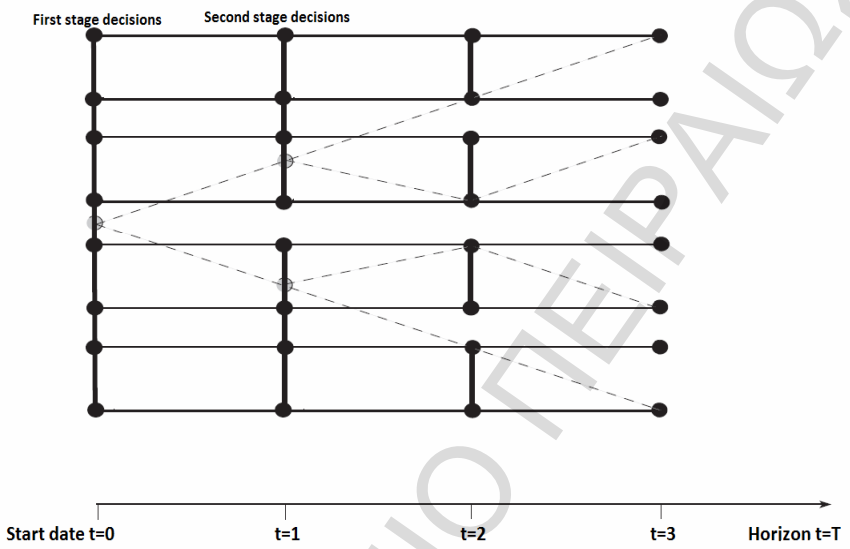
Συνδυάζοντας τώρα (3.23) και (3.24) μπορούμε να αναδιατυπώσουμε το στοχαστικό μη-γραμμικό πρόγραμμα του μοντέλου 3.6 ως το ακόλουθο μεγάλης κλίμακας ντετερμινιστικό ισοδύναμο μη-γραμμικό πρόγραμμα:

$$\begin{aligned} &\text{Minimize } f(x) + \sum_{l \in \Omega} \mathbf{p}^l \\ &\text{Subject to } Ax = b \\ &+ \quad \text{για όλα τα } l \in \Omega \\ &x \geq 0 \\ &\mathbf{y}^l \geq 0 \quad \text{για όλα τα } l \in \Omega \end{aligned} \tag{3.25}$$

Οι παραπάνω περιορισμοί για το ντετερμινιστικό ισοδύναμο πρόγραμμα μπορούν να συνδυαστούν σε μία εξίσωση μήτρας με δομή block.

$$\begin{pmatrix} A & & & \\ T(\xi^1) & W(\xi^1) & & \\ T(\xi^2) & & W(\xi^2) & \\ \vdots & & & \vdots \\ T(\xi^N) & & & W(\xi^N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ h(\xi^1) \\ h(\xi^2) \\ \vdots \\ h(\xi^N) \end{pmatrix} \tag{3.26}$$

Σχήμα 3.4: Διαχωρισμός ενός δένδρου-ενδεχομένων σε γραμμικά σενάρια: οι διακεκομμένες γραμμές δείχνουν το δέντρο-ενδεχομένων, οι συνεχείς γραμμές δείχνουν τα γραμμικά σενάρια και οι παχιές γραμμές χρησιμοποιούνται για να υποδηλώσουν την παρουσία των περιορισμών μη προβλεψιμότητας.



3.12 ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΧΩΡΙΖΟΜΕΝΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Η απαίτηση μη-προβλεψιμότητας, ότι μια απόφαση δεν μπορεί να εξαρτάται από πληροφορίες που φθάνουν σε μεταγενέστερα χρονικά διαστήματα, οδηγεί στο παραπάνω μοντέλο στο οποίο η απόφαση πρώτου σταδίου x είναι κοινή για όλα τα επόμενα σενάρια. Μια ισοδύναμη παρουσίαση, η οποία είναι διαισθητικά πιο ελκυστική, είναι να επιτρέψουμε διαφορετικές αποφάσεις πρώτου σταδίου x^l για κάθε σενάριο $l \in \Omega$, αλλά έτσι αναγκάζουμε αυτές τις μεταβλητές να είναι ίσες μεταξύ τους με πρόσθετους ρητούς περιορισμούς.

Μπορούμε να κατανοήσουμε καλύτερα αυτή τη νέα διατύπωση στο πλαίσιο ενός δένδρου-ενδεχομένων. Το δέντρο χωρίζεται σε γραμμικά σενάρια οποτεδήποτε υπάρχει branching state (διακλάδωση). Έτσι δημιουργούνται πολλαπλά split-states (χωριζόμενες καταστάσεις οικονομίας), αλλά οι νέες καταστάσεις οικονομίας που αντιστοιχούν στην ίδια χρονική περίοδο και στην ίδια κατάσταση της οικονομίας από το δέντρο-ενδεχομένων, επιβάλλεται να συμπίπτουν. Το Σχήμα 3.4 απεικονίζει τη γραμμική δομή σεναρίου που προέρχεται από τη διάσπαση του δέντρου του Σχήματος 3.3. Τα split-states (χωριζόμενες καταστάσεις οικονομίας),που πρέπει να συμπίπτουν συνδέονται με παχιές συμπαγείς γραμμές.

Με τη χρήση των χωριζόμενων μεταβλητών x^l μπορούμε να ορίσουμε το μοντέλο στοχαστικού προγραμματισμού δύο σταδίων ως ακολούθως:

Μοντέλο[25] 3.7 Μοντέλο Χωριζομένων Μεταβλητών Στοχαστικού Προγραμματισμού Δύο Σταδίων

Μοντέλο Χωριζομένων Μεταβλητών Στοχαστικού Προγραμματισμού Δύο Σταδίων

$$subject\ to \quad Ax = b$$

$$T(\xi^l)x^l + W(\xi^l)y^l = h(\xi^l), for\ all\ l \in \Omega$$

$$x = x^l, \gamma\iota\alpha\ \acute{o}\lambda\alpha\ \tau\alpha\ l \in \Omega$$

$$x^l, y^l \geq 0\ , \gamma\iota\alpha\ \acute{o}\lambda\alpha\ \tau\alpha\ \ l \in \Omega$$

$$x$$

y^l οι αποφάσεις δευτέρου σταδίου, οι αποφάσεις πρώτου σταδίου, x το διάνυσμα των αποφάσεων, $\bar{\xi}$ τυχαίο διάνυσμα που παίρνει τιμές σε ένα χώρο πιθανότητας, p^l είναι η πιθανότητα υλοποίησης του l σεναρίου, $f(x)$ είναι το άθροισμα του κόστους των αποφάσεων πρώτου σταδίου, A είναι ένας $n_0 \times m_0$ πίνακας συντελεστών περιορισμών, και b είναι ένα n_0-διάνυσμα που υποδηλώνει τους διαθέσιμους πόρους κατά το πρώτο στάδιο.

Οι περιορισμοί $\mathbf{x = x^l, \gamma\iota\alpha\ \acute{o}\lambda\alpha\ \tau\alpha\ l \in \Omega}$ είναι περιορισμοί μη-προβλεψιμότητας. Αναγκάζουν τις χωριζόμενες μεταβλητές να είναι ίσες μεταξύ τους.

Να σημειώσουμε επίσης ότι μια εναλλακτική διαμόρφωση των περιορισμών μη-προβλεψιμότητας, θα ήταν να θέσουμε τις χωριζόμενες μεταβλητές κατά ζεύγη ίσες μεταξύ τους. Δηλαδή θα μπορούσαμε να γράψουμε τον όρο της αντικειμενικής συνάρτησης $f(x)$ ως $f(x^1)$, να γράψουμε τους περιορισμούς πρώτου σταδίου ως $Ax^1 = b$ και να ενδυναμώσουμε τους περιορισμούς μη προβλεψιμότητας:

[25] Zenios S.(1993), Financial Optimization , Cambridge University Press.

(3.27)

3.13 ΜΟΝΤΕΛΑ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΣΤΑΔΙΩΝ

Το πρόβλημα καταφύγιο δεν περιορίζεται στην διατύπωση του ως πρόβλημα δύο σταδίων. Είναι επίσης δυνατόν οι παρατηρήσεις να λαμβάνουν χώρα σε T διαφορετικά στάδια και να συλλαμβάνονται στα σύνολα πληροφόρησης $\{A_t\}_{t=1}^{T}$ με $A_1 \subset A_2 \ldots . \subset A_T$. Τα στάδια αντιστοιχούν σε χρονικές στιγμές, όταν κάποιες πληροφορίες αποκαλύπτονται και μπορεί να ληφθεί μια απόφαση.

Στο πλαίσιο ενός δέντρου-ενδεχομένων, τα στάδια αντιστοιχούν σε ημερομηνίες διαπραγμάτευσης και η πληροφόρηση περιέχεται στις καταστάσεις της οικονομίας. Όλες οι πληροφορίες στο σύνολο A_1 περιέχονται στα S_1. Οι πληροφορίες στο σύνολο A_2 περιέχονται στα S_2 , τα οποία με τη σειρά τους είναι τα s που είναι εφικτά από το S_1 . Ως εκ τούτου, όλη η πληροφόρηση που υπάρχει στο σύνολο A_1 υπάρχει επίσης και στο σύνολο A_2 και δεν χάνεται καθόλου πληροφόρηση. Ένα στοχαστικό πρόγραμμα καταφύγιο, θα έχει ένα πρόβλημα καταφύγιο στο στάδιο τ δεσμευμένο στην πληροφόρηση που παρέχεται από τις καταστάσεις της οικονομίας S_τ, το οποίο περιέχει όλη την πληροφόρηση που παρέχεται από τις καταστάσεις της οικονομίας, για $t = 1,2, \ldots, \tau$. Το πρόγραμμα επίσης προβλέπει την πληροφόρηση και σε μελλοντικά $\sum_{t}$, για $t = \tau + 1,2, \ldots, T$

Το πρόγραμμα πολλαπλών σταδίων, το οποίο επεκτείνει το Μοντέλο Δύο Σταδίων (3.6) διατυπώνεται ως ένα πρόβλημα «φωλιασμένης» βελτιστοποίησης :

Μοντέλο[26] 3.8 Μοντέλο Στοχαστικού Προγραμματισμού Πολλαπλών Σταδίων

Μοντέλο Στοχαστικού Προγραμματισμού Πολλαπλών Σταδίων

$$\text{Minimize} \quad f(y_0) + E\left[\min_{y_1 \in \mathbb{R}_+^{m_1}} q_1(y_1; \bar{\xi}_1) + \cdots E\left[\min_{y_T \in \mathbb{R}_+^{m_T}} q_T(y_T; \xi_T)\right] \ldots\right]$$

,

$$T_0(\bar{\xi})\, y_0 + W_1 y_1 \left(\bar{\xi}_1\right) = h_1(\bar{\xi}),$$

[26] Zenios S.(1993), Financial Optimization , Cambridge University Press.

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{T_{T-1}(\bar{\xi})y_{T-1} + W_T y_T [(\bar{\xi})_T] = h_T(\bar{\xi}), \qquad y_0 \geq 0,\ y_t [(\bar{\xi})_t] \geq 0, \qquad t = 1, 2, \ldots, T, a.s.}$$

όπου $\bar{\xi}$ τυχαίο διάνυσμα που παίρνει τιμές σε ένα χώρο πιθανότητας, $\mathbf{f(y_0)}$ είναι $\mathbf{h_0}$

το άθροισμα του κόστους των αποφάσεων πρώτου σταδίου, και $\mathbf{W_0}$, ,
$\mathbf{y_0}$ διανύσματα t μεταβλητών που ικανοποιούν τον περιορισμό.

Για την περίπτωση των διακριτών και πεπερασμένων κατανομών πιθανότητας, είναι και πάλι δυνατό να διατυπωθεί το μοντέλο πολλαπλών σταδίων σε ένα ντετερμινιστικό ισοδύναμο μεγάλης κλίμακας μη-γραμμικό πρόγραμμα.

3.14 ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΓΙΑ ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ

Εξετάζουμε τώρα την βελτιστοποίηση των δυναμικών στρατηγικών χαρτοφυλακίου σε δέντρο-ενδεχομένων. Σε κάθε ημερομηνία διαπραγμάτευσης ο διαχειριστής πρέπει να αξιολογεί τις συνθήκες της αγοράς (όπως για παράδειγμα τις τιμές και τα επιτόκια), οι οποίες υπερισχύουν στην τρέχουσα κατάσταση της οικονομίας. Ο διαχειριστής επίσης οφείλει να αξιολογεί τις πιθανές διακυμάνσεις στα επιτόκια, τις τιμές και τις χρηματοροές σε πιθανές καταστάσεις της οικονομίας την επόμενη διαπραγματευτική περίοδο. Αυτό σημαίνει, ότι η πληροφόρηση σε επερχόμενές καταστάσεις της οικονομίας οφείλει να αξιολογείται.

Οι πληροφορίες αυτές ενσωματώνονται σε μια σειρά από συναλλαγές για αγορά ή πώληση κινητών αξιών, και βραχυπρόθεσμο δανεισμό ή δανειοδότηση. Κατά την επόμενη ημέρα διαπραγμάτευσης ο διαχειριστής χαρτοφυλακίου κατέχει ένα «σκληραγωγημένο» χαρτοφυλάκιο και είναι αντιμέτωπος με ένα νέο σύνολο πιθανών μελλοντικών κινήσεων. Ο διαχειριστής οφείλει να ενσωματώσει την νέα πληροφόρηση, έτσι ώστε οι συναλλαγές να μπορούν να εκτελεστούν. Το μοντέλο προσδιορίζει μια ακολουθία επενδυτικών αποφάσεων σε διακριτό χρόνο διαπραγμάτευσης. Οι αποφάσεις λαμβάνονται στην αρχή της κάθε χρονικής περιόδου. Ο διαχειριστής χαρτοφυλακίου ξεκινά με ένα χαρτοφυλάκιο και μια σειρά σεναρίων για τις επερχόμενές καταστάσεις της οικονομίας, οι οποίες ενσωματώνονται σε μια επενδυτική απόφαση. Η σύνθεση του τρέχοντος χαρτοφυλακίου εξαρτάται από συναλλαγές στο προηγούμενο σημείο απόφασης και στο σενάριο που υλοποιήθηκε στο μεσοδιάστημα. Ένα άλλο σύνολο των επενδυτικών αποφάσεων ενσωματώνει τόσο τη τρέχουσα κατάσταση του χαρτοφυλακίου όσο και νέες πληροφορίες για το μελλοντικά σενάρια. Θα παρουσιάσουμε αμέσως ένα μοντέλο στοχαστικού προγραμματισμού για δυναμικές στρατηγικές.

3.15 ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

Υπάρχουν δύο βασικοί περιορισμοί στα περισσότερα μοντέλα στοχαστικού προγραμματισμού για βελτιστοποίηση χαρτοφυλακίων. Ο πρώτος θεωρεί τις ταμειακές ροές για τα ασφαλή περιουσιακά στοιχεία, δηλαδή μετρητά, και ο άλλος είναι μια εξίσωση του ισοζυγίου απογραφής για κάθε τίτλο ή περιουσιακό στοιχείο σε όλες τις ημερομηνίες διαπραγμάτευσης και για όλες τις καταστάσεις της οικονομίας. Το (Σχήμα 3.5) παρουσιάζει την ροή των μετρητών και το (Σχήμα 3.6) την απογραφή των κατηγοριών περιουσιακών στοιχείων.

Εμείς διατυπώνουμε τα χαρακτηριστικά του μοντέλου για $t = 0$ και για τις μελλοντικές ημερομηνίες διαπραγμάτευσης $0 \leq t \leq T$. Για $t = 0$ έχουμε, κατά την ορολογία του στοχαστικού προγραμματισμού, το πρόβλημα πρώτου σταδίου. Οι μεταβλητές για τις μελλοντικές ημερομηνίες διαπραγμάτευσης είναι οι t-σταδίου μεταβλητές και χρησιμοποιούνται για την μοντελοποίηση του μοντέλου καταφυγίου.

3.15.1 ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ ΠΡΩΤΟΥ ΣΤΑΔΙΟΥ

Στο πρώτο στάδιο όλες οι τιμές είναι γνωστές με βεβαιότητα και επίσης γνωρίζουμε τη σύνθεση του χαρτοφυλακίου. Για κάθε κατηγορία τίτλου ή περιουσιακού στοιχείου $i \in \bigcup \square$ στο χαρτοφυλάκιο έχουμε ένα περιορισμό ισοζυγίου απογραφής.

(3.28)

όπου η αρχική απογραφή, $b_0 = (b_{01}, \dots \dots \dots b_{0n})$ το αρχικό απόθεμα κάθε κατηγορίας περιουσιακών στοιχείων, $\mathbf{x_{0i}^0}$ οι αρχικές αγορές και $\mathbf{y_{0i}^0}$ οι αρχικές πωλήσεις όπως φαίνεται και στο παρακάτω Σχήμα 3.6

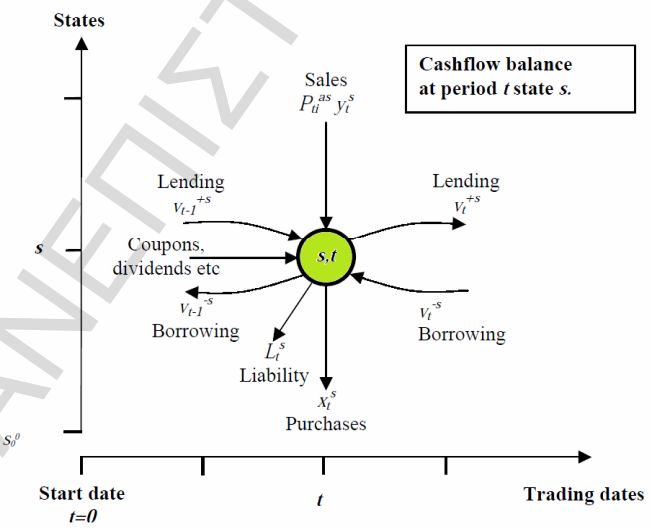
Η εξίσωση του ισοζυγίου ταμειακών ροών, προσδιορίζει ότι η αρχική προικοδότηση σε ασφαλή περιουσιακά στοιχεία, καθώς και τα έσοδα από ρευστοποίηση μέρους του υφιστάμενου χαρτοφυλακίου, είναι ίσα με το ποσό που επενδύθηκε για την αγορά των νέων τίτλων συν την πληρωμή των υποχρεώσεων και του ποσού που επενδύθηκε στο περιουσιακό στοιχείο χωρίς κίνδυνο, δηλ.,

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P_{0i}^{b0}} \mathbf{y_{0i}^0} + \mathbf{v_0} + \mathbf{v_0^{-0}} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P_{0i}^{a0}}\ \mathbf{x_{0i}^0} + \mathbf{v_0^{+0}} + \mathbf{L_0^0} \qquad (3.29)$$

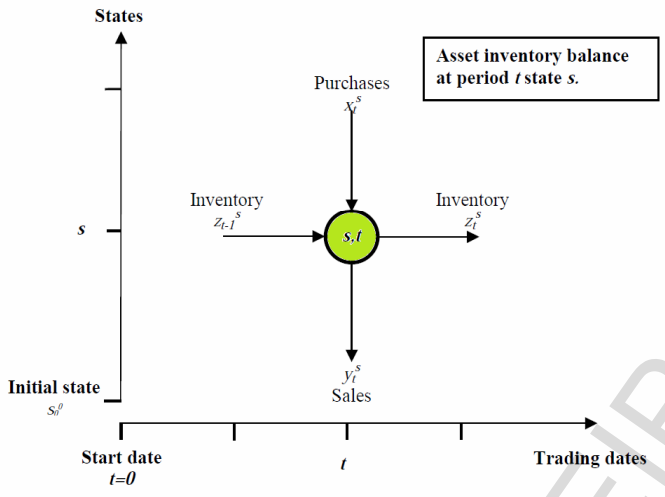
3.15.2 ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ ΔΙΑΧΡΟΝΙΚΩΝ ΣΤΑΔΙΩΝ

Οι αποφάσεις που λαμβάνονται σε μελλοντικές ημερομηνίες διαπραγμάτευσης $t = 1, 2, \dots, T$ είναι δεσμευμένες στο $s \in \sum_{t} \square$. Ως εκ τούτου, σε κάθε χρονική περίοδο έχουμε ένα σύνολο περιορισμών για κάθε κατάσταση της οικονομίας. Αυτές οι αποφάσεις εξαρτώνται επίσης από τις επενδυτικές αποφάσεις που λαμβάνονται κατά τις προηγούμενες ημερομηνίες διαπραγμάτευσης $t-1$ σε προκάτοχο s^-.

Σχήμα 3.5: Ροή μετρητού στοιχείων σε ένα μοντέλο στοχαστικού προγραμματισμού για δυναμικές στρατηγικές χαρτοφυλακίου σε ημερομηνία διαπραγμάτευσης t σε κατάσταση της οικονομίας s.



Σχήμα[27] 3.6: Απογραφή περιουσιακών στοιχείων σε ένα μοντέλο στοχαστικού προγραμματισμού για δυναμικές στρατηγικές χαρτοφυλακίου σε ημερομηνία διαπραγμάτευσης t σε κατάσταση της οικονομίας s .



Οι εξισώσεις ισοζυγίου απογραφής περιουσιακών στοιχείων, περιορίζουν το ποσό του κάθε χρεογράφου που πουλιέται ή μένει στο χαρτοφυλάκιο να είναι ίσο με το οφειλόμενο ποσό της ονομαστικής αξίας που μεταφέρθηκε από την προηγούμενη ημερομηνία διαπραγμάτευσης, καθώς και οποιοδήποτε ποσό αγοράζεται κατά την τρέχουσα ημερομηνία διαπραγμάτευσης. Υπάρχει ένας περιορισμός για κάθε χρεόγραφο $i \in \bigcup$ και για κάθε κατάσταση της οικονομίας $s \in \sum_t$.

(3.30)

Όπου το α υποδηλώνει τους παράγοντες απόσβεσης, z_{ti}^s το ισοζύγιο απογραφής των περιουσιακών στοιχείων, x_{ti}^s οι αγορές και y_{ti}^s οι πωλήσεις.

Το ισοζύγιο χρηματοροών απαιτεί το ποσό που επενδύεται στην αγορά των νέων τίτλων και στα ασφαλή περιουσιακά στοιχεία, να είναι ίσο με το εισόδημα που δημιουργείται από το υφιστάμενο χαρτοφυλάκιο κατά την περίοδο διακράτησης, συν τυχόν ταμειακές ροές από πωλήσεις και μετρητά που επανεπενδύθηκαν κατά την προηγούμενη περίοδο στο προκάτοχο s^-, μείον τις πληρωμές υποχρεώσεων, δείτε την κορυφή στο Σχήμα 3.5. Υπάρχει ένας περιορισμός για κάθε κατάσταση της οικονομίας $s \in \sum_t$.

[27] Chapter 6.6 of Zenios S.(1993), Financial Optimization , Cambridge University Press.

$$\sum_{I=1}^{n} F^{s}_{(t-1)i} z^{s^-}_{(t-1)i} + \sum_{i=1}^{n} P^{bs}_{ti} y^{s}_{ti} + \left(1 + r^{s}_{f(t-1)}\right) v^{+s^-}_{t-1} = L^{s}_{t} + \sum_{i=1}^{n} P^{as}_{ti} x^{s}_{ti} + v^{+s}_{t} \quad (3.31)$$

όπου $F^{s}_{(t-1)i}$ οι χρηματοροές που επενδύθηκαν την περίοδο t-1, $z^{s^-}_{(t-1)i}$ το ισοζύγιο απογραφής την περίοδο t-1, P^{bs}_{ti} η αξία των πωλήσεων, y^{s}_{ti} οι x^{s}_{ti}

πωλήσεις, οι αγορές, η αξία των αγορών, L^{s}_{t} η αξία των υποχρεώσεων, $r^{s}_{f(t-1)}$ το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο μηδενικού ρίσκου την προηγούμενη περίοδο, το πλεόνασμα της τρέχουσας περιόδου.

Αυτός ο περιορισμός λαμβάνει υπόψιν επενδύσεις σε ακίνδυνα περιουσιακά στοιχεία, κατά την προηγούμενη χρονική περίοδο και στο προκάτοχό state, αλλά όχι δανεισμό. Ο δανεισμός όμως, μπορεί να ενσωματωθεί σε αυτήν την εξίσωση με την εισαγωγή της μεταβλητής v_t^{-s}. Ο δανεισμός θα συμβάλει στην ταμειακή πλευρά εισροής στο αριστερό μέρος της εξίσωσης, αλλά ο δανεισμός από προηγούμενες χρονικές περιόδους πρέπει να πληρωθεί πίσω, σε επερχόμενες περιόδους. Αυτό θα αυξήσει τις ταμειακές εκροές στη δεξιά πλευρά της παραπάνω εξίσωσης. Η εξίσωση του ισοζυγίου ταμειακών ροών με το δανεισμό και την επανεπένδυση σε κάθε κατάσταση της οικονομίας $s \in \sum_{t}$ γράφεται ως ακολούθως:

$$\sum_{i=1}^{n} F^{s}_{(t-1)i} z^{s^-}_{(t-1)i} + \sum_{i=1}^{n} P^{bs}_{ti} y^{s}_{ti} + \left(1 + r^{s}_{f(t-1)}\right) v^{+s^-}_{t-1} + v^{-s}_{t}$$
$$= L^{s}_{t} + \sum_{i=1}^{n} P^{as}_{ti} x^{s}_{ti} + v^{+s}_{t} + \left(1 + r^{s}_{f(t-1)} + \delta\right) v^{s^-}_{t-1} \quad (3.32)$$

όπου το δ είναι το spread ανάμεσα στο βραχυπρόθεσμο επιτόκιο δανεισμού και δανειοδότησης και v^{-s}_{t} το ποσό δανεισμού, $F^{s}_{(t-1)i}$ οι χρηματοροές που επενδύθηκαν την περίοδο t-1, $z^{s^-}_{(t-1)i}$ το ισοζύγιο απογραφής την περίοδο t-1, P^{bs}_{ti} x^{s}_{ti}

η αξία των πωλήσεων, y^{s}_{ti} οι πωλήσεις, οι αγορές, η αξία των αγορών, L^{s}_{t} η αξία των υποχρεώσεων, $r^{s}_{f(t-1)}$ το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο μηδενικού ρίσκου την προηγούμενη περίοδο, το πλεόνασμα της τρέχουσας περιόδου.

3.15.3 ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ ΣΤΟ ΤΕΛΟΣ ΤΟΥ ΧΡΟΝΙΚΟΥ ΟΡΙΖΟΝΤΑ

Στο τέλος του ορίζοντα σχεδιασμού αξιολογούμε τον τελικό πλούτο του χαρτοφυλακίου. Αυτό θα εξαρτηθεί από τις συμμετοχές σε διάφορες κατηγορίες περιουσιακών στοιχείων συμπεριλαμβανομένων των μετρητών καθώς και των καταστάσεων της οικονομίας. Όπου δίνεται από τον τύπο:

(3.33)

όπου $\mathbf{W_T^s}$ είναι ο πλούτος του χαρτοφυλακίουστο τέλος του χρονικού ορίζοντα, το πλεόνασμα στο τέλος του χρονικού ορίζοντα, $\mathbf{P_{Ti}^{bs}}$ η τιμή των πωλήσεων στο τέλος του χρονικού ορίζοντα και $\mathbf{z_{Ti}^s}$ οι πωλήσεις.

3.15.4 ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Για να ενσωματωθεί η αποστροφή προς τον κίνδυνο στην δυναμική στρατηγική χαρτοφυλακίου εισάγουμε μια συνάρτηση χρησιμότητας για τον τελικό πλούτο. Η αντικειμενική συνάρτηση του μοντέλου βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου, μεγιστοποιεί την αναμενόμενη χρησιμότητα του τελικού πλούτου

(3.34)

όπου p^s είναι η πιθανότητα που σχετίζεται με τη κατάστασης της οικονομίας s στο $\sum_t$, είναι ο τελικός πλούτος που δίδεται από την εξίσωση (3.33) και το U συμβολίζει την συνάρτηση χρησιμότητας.

Γενικά αυτή δεν είναι η μοναδική συνάρτηση χρησιμότητας που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε. Υπάρχουν και άλλες επιλογές που ενδέχεται να είναι πιο κατάλληλες για κάποιες εφαρμογές. Για παράδειγμα μια συχνή επιλογή κατάλληλης αντικειμενικής συνάρτησης που γίνεται για τα συνταξιοδοτικά ταμεία και εν γένει για σταθερές υποχρεώσεις, είναι να ελαχιστοποιήσουμε το αναμενόμενο κόστος χρηματοδότησης.

Σε γενικές γραμμές η δημιουργία μιας αντικειμενικής συνάρτησης για τους επενδυτές για μεγάλους χρονικούς ορίζοντες είναι ένα δύσκολο κομμάτι. Πρώτον πρέπει να εκτιμηθεί η βραχυπρόθεσμη έναντι της μακροπρόθεσμης διαπραγμάτευσης. Δεύτερον η αβεβαιότητα για εκτεταμένες χρονικές περιόδους περιπλέκει την διαδικασία λήψης αποφάσεων. Η επιλογή μιας αντικειμενικής συνάρτησης που συμφιλιώνει τις θεωρίες προτιμήσεων των επενδυτών και τις συναρτήσεις χρησιμότητας, είναι το πιο σημαντικό βήμα στην διαδικασία μοντελοποίησης. Παρακάτω παρουσιάζουμε συνολικά το μοντέλο στοχαστικού προγραμματισμού για δυναμικές στρατηγικές.

Μοντέλο[28] 3.9 Μοντέλο Στοχαστικού Προγραμματισμού για Δυναμικές Στρατηγικές

Μοντέλο Στοχαστικού Προγραμματισμού για Δυναμικές Στρατηγικές

[28] Zenios S.(1993), Financial Optimization , Cambridge University Press.

subject to: $$\sum_{i=1}^{n} P_{0i}^{b0} y_{0i}^{0} + v_0 + v_0^{-0} = \sum_{i=1}^{n} P_{0i}^{a0}\, x_{0i}^{0} + v_0^{+0} + L_0^{0},$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{(t-1)i}^{s} z_{(t-1)i}^{s^-} + \sum_{i=1}^{n} P_{ti}^{bs} y_{ti}^{s} + \left(1 + r_{f(t-1)}^{s}\right) v_{t-1}^{+s^-} + v_t^{-s} = \sum_{i=1}^{n} P_{ti}^{as}\, x_{ti}^{s} + v_t^{+s} + \left(1 + r_{f(t-1)}^{s} + \delta\right) v_{t-1}^{s^-} +$$

$$\textit{για όλα τα}\ \ t \in T, s \in \sum_{t} \square, i \in U,$$

Όπου p^s είναι η πιθανότητα που σχετίζεται με την κατάσταση της οικονομίας s στο $\sum_{t} \square$, να είναι ο τελικός πλούτος που δίδεται από την εξίσωση , το U συμβολίζει την συνάρτηση χρησιμότητας, $F_{(t-1)i}^{s}$ οι χρηματοροές που επενδύθηκαν την περίοδο t-1, $z_{(t-1)i}^{s^-}$ το ισοζύγιο απογραφής την περίοδο t-1, P_{ti}^{bs} η αξία των x_{ti}^{s}

πωλήσεων, y_{ti}^{s} οι πωλήσεις, οι αγορές, η αξία των αγορών, L_t^s η αξία των υποχρεώσεων, $r_{f(t-1)}^{s}$ το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο μηδενικού ρίσκου την προηγούμενη περίοδο, το πλεόνασμα της τρέχουσας z_{0i}^{0}

περιόδου, η αρχική απογραφή, b_{0i} το αρχικό απόθεμα κάθε κατηγορίας περιουσιακών στοιχείων, x_{0i}^{0} οι αρχικές αγορές και y_{0i}^{0} οι αρχικές πωλήσεις, α υποδηλώνει τους παράγοντες απόσβεσης, z_{ti}^{s} το ισοζύγιο απογραφής των περιουσιακών στοιχείων, το πλεόνασμα στο τέλος του χρονικού ορίζοντα και P_{Ti}^{bs} η τιμή των πωλήσεων στο τέλος του χρονικού ορίζοντα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η GAMS σχεδιάστηκε συγκεκριμένα για την ανάλυση γραμμικών, μη γραμμικών εφαρμογών αλλά και μικτών προβλημάτων βελτιστοποίησης ακέραιων αριθμών. Το σύστημα είναι ιδιαίτερα χρήσιμο για μεγάλα και πολυσύνθετα προβλήματα. Επιτρέπει στο χρήστη να επικεντρωθεί στο πρόβλημα του μοντέλου με το να καταστήσει την οργάνωσή του απλή. Ο χρήστης μπορεί να αλλάξει τη διατύπωση γρήγορα και εύκολα μετατρέποντας ένα γραμμικό πρόβλημα σε μη γραμμικό χωρίς μεγάλη δυσκολία.

Με τη GAMS ο χρήστης δεν χρειάζεται να σκεφτεί για τα καθαρώς τεχνικά προβλήματα όπως οι υπολογισμοί διευθύνσεων, οι αναθέσεις αποθήκευσης, ο σύνδεσμος υπορουτίνων, και ο έλεγχος εισόδου-εξόδου. Έτσι αυξάνεται ο

διαθέσιμος χρόνος για να κατανοήσει την επεξεργασία του μοντέλου και την ανάλυση των αποτελεσμάτων.

Θα εξετάσουμε αναλυτικά τα προβλήματα βελτιστοποίησης των προηγούμενων κεφαλαίων χρησιμοποιώντας την γλωσσά προγραμματισμού GAMS και την βιβλιοθήκη FINLIB.

- Μοντέλο αντιστοίχισης χρηματοροών (Dedication Model)

- Μοντέλο αντιστοίχισης χρηματοροών με επανεπένδυση. (Dedication Model with borrowing)

- Μοντέλο ανοσοποίησης χαρτοφυλακίου.(Immunization Model)

- Μοντέλο ανοσοποίησης κατά παράγοντες. (Factor Immunization Model)

- Μοντέλο ελαχιστοποίησης αρχικού κόστους. (Stochastic Dedication)

- Μοντέλο αναμενόμενων αποδόσεων ορίζοντα. (Stochastic Dedication Model with borrowing and lending)

Θα μελετήσουμε τις αντιδράσεις των παραπάνω μοντέλων σε πιθανές μεταβολές τόσο των υποχρεώσεων όσο και των επενδύσεων. Επιπρόσθετα θα τα συγκρίνουμε μελετώντας τα κοινά στοιχεία και τις διαφορές, πάντα υπό καθεστώς όμοιων μεταβολών.

4.1 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Πίνακας 4.0 Στοιχεία Υποχρεώσεων Ομολόγων.

Χρονολογία	Υποχρεώσεις με 5% ετησίως	Υποχρεώσεις με 7,5% ετησίως	Υποχρεώσεις με 10% ετησίως
2012	100000	100000	100000
2013	105000	107500	110000

2014	110250	115563	121000
2015	115763	124230	133100
2016	121551	133547	146410
2017	127628	143563	161051
2018	134010	154330	177156
2019	140710	165905	194872
2020	147746	178348	214359
2021	155133	191724	235795

Θεωρούμε χαρτοφυλάκιο 10 ομολόγων, όπως παρουσιάζεται στο πίνακα 4.1, έχοντας την δυνατότητα να επιλέξουμε την επένδυση μας.

Πίνακας 4.1 Στοιχεία Χαρτοφυλακίου Ομολόγων .

Ομόλογα	Στοιχεία ομολόγων	Price	Maturity	Coupon
1	*DS-5-15	100	2015	5
2	DS-6-13	100	2013	6
3	DS-5-14	100	2014	5
4	DS-6-15	100	2015	6
5	DS-7-16	100	2016	7
6	DS-5-17	100	2017	5
7	DS-6-18	100	2018	6
8	DS-5-19	100	2019	5
9	DS-6-20	100	2020	6
10	DS-6-21	100	2021	6

*Όπου DS-5-15 είναι ένα ομόλογο με επιτόκιο 5% και λήγει το 2015.

4.1.1 ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗΣ ΧΡΗΜΑΤΟΡΟΩΝ

Πίνακας 4.1 Στοιχεία Χαρτοφυλακίου Ομολόγων.

Ομόλογα	Στοιχεία ομολόγων	Price	Maturity	Coupon
1	DS-5-15	100	2015	5
2	DS-6-13	100	2013	6
3	DS-5-14	100	2014	5

4	DS-6-15	100	2015	6
5	DS-7-16	100	2016	7
6	DS-5-17	100	2017	5
7	DS-6-18	100	2018	6
8	DS-5-19	100	2019	5
9	DS-6-20	100	2020	6
10	DS-6-21	100	2021	6

Μοντέλο Αντιστοίχισης Χρηματοροών

$$\text{Minimize} \quad \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P_{01}} x_i$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{i=1}^{n} F_{ti} \, X_i \geq L_t \quad \text{για όλα τα } t = 1,\ldots,T$$

$$x \geq 0.$$

$$F_{ti}$$

όπου $\mathbf{P_{0i}}$ είναι η τιμή αγοράς του i ομολόγου, είναι οι πληρωμές του ομολόγου i την χρονική στιγμή t, x_i είναι οι εκμεταλλεύσεις και L_t είναι η αξία του παθητικού.

Θα μελετήσουμε αρχικά την περίπτωση, όπου η αύξηση των υποχρεώσεων είναι 5% ετησίως. Παρατηρούμε ότι το ύψος της αρχικής επένδυσης ανέρχεται στο ποσό ύψους: 855.371,543 ευρώ. Με βάση το συγκεκριμένο μοντέλο γίνεται επένδυση στα ακόλουθα ομόλογα:

Πίνακας 4.2 Ποσά επένδυσης και στάθμιση ομολόγων στα επιλεγμένα ομόλογα με αύξηση υποχρεώσεων 5% ετησίως.

Χαρτοφυλάκιο ομολόγων	Ποσά επένδυσης	Στάθμιση ομολόγου w_i
DS-6-13	108.720,868	12,7%
DS-6-15	66.941,375	7,8%
DS-7-16	402.258,464	47%
DS-6-20	131.098,950	15%
DS-6-21	146.351,887	17%

Επιπλέον μελετούμε την περίπτωση όπου η αύξηση των υποχρεώσεων είναι 7,5% ετησίως. Παρατηρούμε ότι το ύψος της αρχικής επένδυσης ανέρχεται στο

ποσό ύψους: 962.586,671 ευρώ. Με βάση το συγκεκριμένο μοντέλο γίνεται επένδυση στα ακόλουθα ομόλογα:

Πίνακας 4.3 Ποσά επένδυσης και στάθμιση ομολόγων στα επιλεγμένα ομόλογα με αύξηση υποχρεώσεων 7.5% ετησίως.

Χαρτοφυλάκιο ομολόγων	Ποσά επένδυσης	Στάθμιση ομολόγου w_i
DS-6-13	102.342,427	10,6%
DS-6-15	68.082,594	7%
DS-7-16	453.275,142	47%
DS-6-20	158.014,810	16,4%
DS-6-21	180.871,698	18,8%

Τέλος μελετούμε την περίπτωση όπου η αύξηση των υποχρεώσεων είναι 10% ετησίως. Παρατηρούμε ότι το ύψος της αρχικής επένδυσης ανέρχεται στο ποσό ύψους: 1.084.186,327 ευρώ. Με βάση το συγκεκριμένο μοντέλο γίνεται επένδυση στα ακόλουθα ομόλογα:

Πίνακας 4.4 Ποσά επένδυσης και στάθμιση ομολόγων στα επιλεγμένα ομόλογα με αύξηση υποχρεώσεων 10% ετησίως.

Χαρτοφυλάκιο ομολόγων	Ποσά επένδυσης	Στάθμιση ομολόγου w_i
DS-6-13	94.189,510	8,7%
DS-6-15	68.607,116	6%
DS-7-16	509.307,518	47%
DS-6-20	189.634,069	17,4%
DS-6-21	222.448,113	20%

Παρατηρούμε ότι η αύξηση στο ρυθμό μεταβολής της υποχρέωσης, οδηγεί σε μείωση θέσεων στα ακόλουθα ομόλογα DS-6-13, DS-6-15 και σε αύξηση θέσεων στα ομόλογα DS-6-20, DS-6-21 σε αντίθεση με το ομόλογο DS-7-16 όπου βλέπουμε ότι παραμένει στα ίδια επίπεδα και απορροφά το 47% της επένδυσης μας.

Πίνακας 4.5 Σύγκριση ομολόγων με γνώμονα την αύξηση υποχρεώσεων.

Χαρτοφυλάκιο	**Στάθμιση**	**Στάθμιση**	**Στάθμιση**

ομολόγων	ομολόγου w_i με αύξηση υποχρεώσεων 5%	ομολόγου w_i με αύξηση υποχρεώσεων 7,5%	ομολόγου w_i με αύξηση υποχρεώσεων 10%
DS-6-13	12,7%	10,6%	8,7%
DS-6-15	7,8%	7%	6%
DS-7-16	47%	47%	47%
DS-6-20	15%	16,4%	17,4%
DS-6-21	17%	18,8%	20%

Το ομόλογο DS-6-13 παρουσιάζει μείωση επένδυσης 2,1% και 4%, όταν έχουμε αντίστοιχα αύξηση των υποχρεώσεων σε 7,5% και 10%.

Το ομόλογο DS-6-15 παρουσιάζει μείωση επένδυσης 0,8% και 1,8% όταν έχουμε αντίστοιχα αύξηση των υποχρεώσεων σε 7,5% και 10%.

Το ομόλογο DS-6-20 παρουσιάζει αύξηση επένδυσης 1,4% και 2,4% όταν έχουμε αντίστοιχα αύξηση των υποχρεώσεων σε 7,5% και 10%.

Το ομόλογο DS-6-21 παρουσιάζει αύξηση επένδυσης 1,8% και 3% όταν έχουμε αντίστοιχα αύξηση των υποχρεώσεων σε 7,5% και 10%.

4.1.2 ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗΣ ΧΡΗΜΑΤΟΡΟΩΝ ΜΕ ΕΠΑΝΕΠΕΝΔΥΣΗ

Πίνακας 4.1 Στοιχεία Χαρτοφυλακίου Ομολόγων

Ομόλογα	Στοιχεία ομολόγων	Price	Maturity	Coupon
1	DS-5-15	100	2015	5
2	DS-6-13	100	2013	6
3	DS-5-14	100	2014	5
4	DS-6-15	100	2015	6
5	DS-7-16	100	2016	7
6	DS-5-17	100	2017	5
7	DS-6-18	100	2018	6
8	DS-5-19	100	2019	5
9	DS-6-20	100	2020	6
10	DS-6-21	100	2021	6

Η παρακάτω γενίκευση επιτρέπει αρνητικές χρηματοροές δηλαδή δανεισμό στο μοντέλο μας. Η συγκεκριμένη κατάσταση προφανώς είναι πιο ρεαλιστική σε σχέση με το προηγούμενο μοντέλο. Τέτοιες καταστάσεις εμφανίζονται όταν υπάρχουν επενδύσεις στις οποίες απαιτείται μια ακολουθία προκαταβολικών πληρωμών πριν να υπάρξει μια θετική χρηματοροή. Έτσι τροποποιήσαμε το αρχικό μοντέλο και εισήγαμε μια μεταβλητή v_0 την οποία ορίσαμε να είναι το τελευταίο ύψος του μετρητού που απαιτείται για να πληρωθούν επενδύσεις.

Minimize v_0

subject to $\sum_{i=1}^{n} F_{0i} + v_0 \geq 0$

$\sum_{i=1}^{n} F_{ti} X_i \geq L_t$ για όλα τα t= 1,….,T

x≥ 0.

F_{ti}

όπου $\mathbf{P_{0i}}$ είναι η τιμή αγοράς του i ομολόγου, είναι οι πληρωμές του ομολόγου i την χρονική στιγμή t, x_i είναι οι εκμεταλλεύσεις και L_t είναι η αξία του παθητικού.

Αρχικά θα μελετήσουμε την περίπτωση, όπου η αύξηση των υποχρεώσεων είναι 5% ετησίως. Παρατηρούμε ότι το ύψος της αρχικής επένδυσης ανέρχεται στο ποσό ύψους: 1.090.770 ευρώ. Με βάση το συγκεκριμένο μοντέλο γίνεται επένδυση στα ακόλουθα ομόλογα:

Πίνακας 4.6 Ποσά επένδυσης και στάθμιση ομολόγων στα επιλεγμένα ομόλογα με αύξηση υποχρεώσεων 5% ετησίως.

Χαρτοφυλάκιο ομολόγων	Ποσά επένδυσης	Στάθμιση ομολόγου w_i
DS-6-13	250.000	22,9%
DS-7-16	250.000	22,9%
DS-6-18	194.420	17,8%
DS-6-20	250.000	22,9%
DS-6-21	146.350	13,5%

Πίνακας 4.7 Περιγραφή περιόδων δανεισμού και πλεονάσματος καθώς και παρουσίαση ποσών δανεισμού.

Περιόδους δανεισμού	Ποσό δανεισμού	Περιόδους πλεονάσματος	Ποσό πλεονάσματος
2012	240.830	2012	-
2013	42.335,686	2013	-
2014	102.180	2014	-
2015	171.130	2015	-
2016	-	2016	-
2017	92.181,914	2017	-
2018	1.860,532	2018	-
2019	118.900	2019	-
2020	-	2020	-

Επιπρόσθετα μελετούμε την περίπτωση όπου η αύξηση των υποχρεώσεων είναι 7,5% ετησίως. Παρατηρούμε ότι το ύψος της αρχικής επένδυσης ανέρχεται στο ποσό ύψους: 1.196.620 ευρώ. Με βάση το συγκεκριμένο μοντέλο γίνεται επένδυση στα ακόλουθα ομόλογα:

Πίνακας 4.8 Ποσά επένδυσης και στάθμιση ομολόγων στα επιλεγμένα ομόλογα με αύξηση υποχρεώσεων 7.5% ετησίως.

Χαρτοφυλάκιο ομολόγων	Ποσά επένδυσης	Στάθμιση ομολόγου w_i
DS-6-13	250.000	20,9%
DS-7-16	250.000	20,9%
DS-6-18	220.400	18,4%
DS-6-20	250.000	20,9%
DS-6-21	226.220	18,9%

Πίνακας 4.9 Περιγραφή περιόδων δανεισμού και πλεονάσματος καθώς και παρουσίαση ποσών δανεισμού.

Περιόδους δανεισμού	Ποσό δανεισμού	Περιόδους πλεονάσματος	Ποσό πλεονάσματος
2012	239.140	2012	-
2013	36.692,774	2013	-
2014	95.159.983	2014	-
2015	165.800	2015	-
2016	-	2016	-
2017	101.770	2017	-

2018	-	2018	-
2019	137.330	2019	-
2020	45.346,705	2020	-

Τέλος μελετούμε την περίπτωση κατά την οποία η αύξηση των υποχρεώσεων είναι 10% ετησίως. Παρατηρούμε ότι το ύψος της αρχικής επένδυσης ανέρχεται στο ποσό ύψους: 2.102.950 ευρώ. Με βάση το συγκεκριμένο μοντέλο γίνεται επένδυση στα ακόλουθα ομόλογα:

Πίνακας 4.10 Ποσά επένδυσης και στάθμιση ομολόγων στα επιλεγμένα ομόλογα με αύξηση υποχρεώσεων 10% ετησίως.

Χαρτοφυλάκιο ομολόγων	Ποσά επένδυσης	Στάθμιση ομολόγου w_i
DS-5-15	102.950	4,8%
DS-6-13	250.000	11,9%
DS-6-15	250.000	11,9%
DS-7-16	250.000	11,9%
DS-5-17	250.000	11,9%
DS-6-18	250.000	11,9%
DS-5-19	250.000	11,9%
DS-6-20	250.000	11,9%
DS-6-21	250.000	11,9%

Πίνακας 4.11 Περιγραφή περιόδων δανεισμού και πλεονάσματος καθώς και παρουσίαση ποσών δανεισμού και πλεονάσματος.

Περιόδους δανεισμού	Ποσό δανεισμού	Περιόδους πλεονάσματος	Ποσό πλεονάσματος
2012	235.670	2012	-
2013	-	2013	12.839,156
2014	-	2014	-
2015	-	2015	327.490
2016	-	2016	531.680
2017	288.100	2017	-
2018	175.040	2018	-
2019	87.917,818	2019	-
2020	27.551.887	2020	-

Στον Πίνακα 4.11 μπορούμε σαφώς να παρατηρήσουμε ότι η μεταβολή των υποχρεώσεων από 7,5% σε 10%, μας οδήγησε τόσο σε λιγότερες περιόδους δανεισμού όσο και σε περιόδους πλεονάσματος, οι οποίες δεν υπήρχαν νωρίτερα.

Πίνακας 4.12 Σύγκριση ομολόγων με γνώμονα την αύξηση υποχρεώσεων.

Χαρτοφυλάκιο ομολόγων	**Στάθμιση ομολόγου w_i με αύξηση υποχρεώσεων 5%**	**Στάθμιση ομολόγου w_i με αύξηση υποχρεώσεων 7,5%**	**Στάθμιση ομολόγου w_i με αύξηση υποχρεώσεων10%**
DS-5-15	-	-	4,8%
DS-6-13	20,9%	22,9%	11,9%
DS-6-15	-	-	11,9%
DS-7-16	20,9%	22,9%	11,9%
DS-5-17	-	-	11,9%
DS-6-18	18,4%	17,8%	11,9%
DS-5-19	-	--	11,9%
DS-6-20	20,9%	22,9%	11,9%
DS-6-21	18,9%	13,5%	11,9%

4.1.3 ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΝΟΣΟΠΟΙΗΣΗΣ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ

Πίνακας 4.1 Στοιχεία Χαρτοφυλακίου Ομολόγων.

Ομόλογα	Στοιχεία ομολόγων	Price	Maturity	Coupon
1	DS-5-15	100	2015	5
2	DS-6-13	100	2013	6
3	DS-5-14	100	2014	5
4	DS-6-15	100	2015	6
5	DS-7-16	100	2016	7
6	DS-5-17	100	2017	5
7	DS-6-18	100	2018	6
8	DS-5-19	100	2019	5
9	DS-6-20	100	2020	6
10	DS-6-21	100	2021	6

Μοντέλο Ανοσοποίησης Χαρτοφυλακίου

F(x) είναι η αντικειμενική συνάρτηση, P_L είναι η παρούσα αξία των υποχρεώσεων, D_i^{FW} είναι η Fischer-Weil διάρκεια του i-οστού περιουσιακού στοιχείου και D_L^{FW} είναι η Fischer-Weil διάρκεια των υποχρεώσεων.

$$\text{Maximize} \quad \sum_{i=1}^{n} D_i^{FW} P_i Y_i X_i$$

$$\text{subject} \quad \sum_{i=1}^{n} P_i X_i = P_L$$

$$\sum_{i=1}^{n} D_i^{FW} P_i X_i = D_L^{FW} P_L$$

$$x \geq 0$$

Το συγκεκριμένο μοντέλο χωρίζεται σε δύο υποκατηγορίες μοντέλων. Στο πρώτο δεν λαμβάνεται υπόψιν η κυρτότητα σε αντίθεση με το δεύτερο. Θα παρουσιάσουμε πρώτα τα αποτελέσματα για το Μοντέλο Ανοσοποίησης Χαρτοφυλακίου, όπου μεγιστοποιείται η αντικειμενική συνάρτηση F(x), χωρίς να λαμβάνουμε υπόψιν την κυρτότητα.

Αρχικά μελετούμε αύξηση υποχρεώσεων 5% ετησίως. Παρατηρούμε ότι το ύψος της αρχικής επένδυσης ανέρχεται στο ποσό ύψους : 953.600 ευρώ. Με βάση το συγκεκριμένο μοντέλο γίνεται επένδυση στα ακόλουθα ομόλογα:

Πίνακας 4.13 Ποσά επένδυσης και στάθμιση ομολόγων στα επιλεγμένα ομόλογα με αύξηση υποχρεώσεων 5% ετησίως.

Χαρτοφυλάκιο ομολόγων	Ποσά επένδυσης	Στάθμιση ομολόγου w_i
DS-6-13	443.390	46,5%
DS-6-21	510.210	53,5%

Επιπλέον μελετούμε αύξηση υποχρεώσεων 7,5% ετησίως. Παρατηρούμε ότι το ύψος της αρχικής επένδυσης ανέρχεται στο ποσό ύψους : 1.060.520 ευρώ. Με βάση το συγκεκριμένο μοντέλο γίνεται επένδυση στα ακόλουθα ομόλογα:

Πίνακας 4.14 Ποσά επένδυσης και στάθμιση ομολόγων στα επιλεγμένα ομόλογα με αύξηση υποχρεώσεων 7,5% ετησίως.

Χαρτοφυλάκιο ομολόγων	Ποσά επένδυσης	Στάθμιση ομολόγου w_i

DS-6-13	460.090	43,4%
DS-6-21	600.430	56,6%

Τέλος μελετούμε αύξηση υποχρεώσεων 10% ετησίως. Παρατηρούμε ότι το ύψος της αρχικής επένδυσης ανέρχεται στο ποσό ύψους :1.181.750 ευρώ. Με βάση το συγκεκριμένο μοντέλο γίνεται επένδυση στα ακόλουθα ομόλογα:

Πίνακας 4.15 Ποσά επένδυσης και στάθμιση στα επιλεγμένα ομόλογα με αύξηση υποχρεώσεων 10% ετησίως.

Χαρτοφυλάκιο ομολόγων	Ποσά επένδυσης	Στάθμιση ομολόγου w_i
DS-6-13	476.770	40,3%
DS-6-21	704.980	59,7%

Παρατηρούμε ότι η αύξηση στο ρυθμό μεταβολής της υποχρέωσης, οδηγεί σε μείωση θέσεων στο ομόλογο DS-6-13 και σε αύξηση θέσεων στο ομόλογο DS-6-21.

Πίνακας 4.16 Σύγκριση ομολόγων με γνώμονα την αύξηση υποχρεώσεων.

Χαρτοφυλάκιο ομολόγων	**Στάθμιση ομολόγου w_i με αύξηση υποχρεώσεων 5%**	**Στάθμιση ομολόγου w_i με αύξηση υποχρεώσεων 7,5%**	**Στάθμιση ομολόγου w_i με αύξηση υποχρεώσεων10%**
DS-6-13	46,5%	43,4%	40,3%
DS-6-21	53,5%	56,6%	59,7%

Το ομόλογο DS-6-13 εμφανίζει μείωση επένδυσης 3,1% και 6,2% σε αντίστοιχη αύξηση των υποχρεώσεων σε 7,5% και 10%.

Το ομόλογο DS-6-21 εμφανίζει αύξηση επένδυσης 3,1% και 6,2% σε αντίστοιχη την αύξηση των υποχρεώσεων σε 7,5% και 10%.

Μοντέλο Ανοσοποίησης Χαρτοφυλακίου Με Περιορισμό Κυρτότητας

$$\text{Maximize} \sum_{i=1}^{n} D_i^{FW} P_i Y_i X_i$$

$$\text{subject} \sum_{i=1}^{n} P_i X_i = P_L$$

$$\sum_{i=1}^{n} D_i^{FW} P_i X_i = D_L^{FW} P_L$$

$$x \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i P_i X_i \geq Q_L P_L$$

Όπου F(x) είναι η αντικειμενική συνάρτηση, P_L είναι η παρούσα αξία των υποχρεώσεων, D_i^{FW} είναι η Fischer-Weil διάρκεια του i-οστού περιουσιακού στοιχείου και D_L^{FW} είναι η Fischer-Weil διάρκεια των υποχρεώσεων, Q_i του i ομόλογου.

Σε αυτό το σημείο, θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα για το Μοντέλο Ανοσοποίησης Χαρτοφυλακίου Με Περιορισμό Κυρτότητας, στο οποίο μεγιστοποιείται η αντικειμενική συνάρτηση F(x) υπό έναν ακόμα περιορισμό, τον περιορισμό κυρτότητας, ο οποίος είναι ένας περιορισμός δεύτερης τάξης.

Αρχικά θα μελετήσουμε αύξηση υποχρεώσεων 5% ετησίως**.** Παρατηρούμε ότι το ύψος της αρχικής επένδυσης ανέρχεται στο ποσό ύψους : 1.008.551,360 ευρώ. Με βάση το συγκεκριμένο μοντέλο γίνεται επένδυση στα ακόλουθα ομόλογα:

Πίνακας 4.17 Ποσά επένδυσης και στάθμιση ομολόγων στα επιλεγμένα ομόλογα με αύξηση υποχρεώσεων 5% ετησίως.

Χαρτοφυλάκιο ομολόγων	Ποσά επένδυσης	Στάθμιση ομολόγου w_i
DS-5-17	997.530,643	98.9%
DS-6-18	11.020,717	1,1%

Επιπλέον θα μελετήσουμε αύξηση υποχρεώσεων 7,5% ετησίως. Παρατηρούμε ότι το ύψος της αρχικής επένδυσης ανέρχεται στο ποσό ύψους : 1.060.060 ευρώ. Με βάση το συγκεκριμένο μοντέλο γίνεται επένδυση στα ακόλουθα ομόλογα:

Πίνακας 4.18 Ποσά επένδυσης και στάθμιση ομολόγων στα επιλεγμένα ομόλογα με αύξηση υποχρεώσεων 7.5% ετησίως.

Χαρτοφυλάκιο ομολόγων	Ποσά επένδυσης	Στάθμιση ομολόγου w_i
DS-7-16	322.900,522	30,46%
DS-6-18	737.157,780	69,54%

Τέλος θα μελετήσουμε αύξηση υποχρεώσεων 10% ετησίως. Παρατηρούμε ότι το ύψος της αρχικής επένδυσης ανέρχεται στο ποσό ύψους : 1.186.600 ευρώ. Με βάση το συγκεκριμένο μοντέλο γίνεται επένδυση στα ακόλουθα ομόλογα:

Πίνακας 4.19 Ποσά επένδυσης και στάθμιση ομολόγων στα επιλεγμένα ομόλογα με αύξηση υποχρεώσεων 10% ετησίως.

Χαρτοφυλάκιο ομολόγων	Ποσά επένδυσης	Στάθμιση ομολόγου

		w_i
DS-5-17	222.410	18,8%
DS-6-18	964.190	81,2%

Παρατηρούμε ότι μια αύξηση στο ρυθμό μεταβολής της υποχρέωσης, οδηγεί σε μείωση θέσεων στο ομόλογο DS-5-17 και σε αύξηση θέσεων στο ομόλογο DS-6-18.

Πίνακας 4.20 Σύγκριση ομολόγων με γνώμονα την αύξηση υποχρεώσεων.

Χαρτοφυλάκιο ομολόγων	**Στάθμιση ομολόγου w_i με αύξηση υποχρεώσεων 5%**	**Στάθμιση ομολόγου w_i με αύξηση υποχρεώσεων 7,5%**	**Στάθμιση ομολόγου w_i με αύξηση υποχρεώσεων10%**
DS-5-17	98.9%	30,46%	18,8%
DS-6-18	1,1%	69,54%	81,2%

Το ομόλογο DS-5-17 παρουσιάζει σημαντική μείωση επένδυσης 68,44% και 80,1% για αντίστοιχη αύξηση των υποχρεώσεων σε 7,5% και 10%.

Το ομόλογο DS-6-21 παρουσιάζει σημαντική αύξηση επένδυσης 68,44% και 80,1% για αντίστοιχη αύξηση των υποχρεώσεων σε 7,5% και 10%.

4.1.4 ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΝΟΣΟΠΟΙΗΣΗΣ ΚΑΤΑ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ

Πίνακας 4.1 Στοιχεία Χαρτοφυλακίου Ομολόγων.

Ομόλογα	Στοιχεία ομολόγων	Price	Maturity	Coupon
1	DS-5-15	100	2015	5
2	DS-6-13	100	2013	6
3	DS-5-14	100	2014	5
4	DS-6-15	100	2015	6
5	DS-7-16	100	2016	7
6	DS-5-17	100	2017	5

7	DS-6-18	100	2018	6
8	DS-5-19	100	2019	5
9	DS-6-20	100	2020	6
10	DS-6-21	100	2021	6

Μοντέλο Ανοσοποίησης Κατά Παράγοντες

Maximize $F(x)$

subject to $\sum_{i=1}^{n} P_i x_i = P_L$

$\sum_{i=1}^{n} P_i x_i k_{ij} = P_L k_{Lj}$ για όλα τα j=1,2,.....,k

$x \geq 0$

όπου $F(x)$ είναι η αντικειμενική συνάρτηση την οποία μεγιστοποιούμε, $P_i x_i$ είναι η παρούσα αξία των περιουσιακών στοιχείων i, P_L είναι η παρούσα αξία των υποχρεώσεων, k_{Lj} είναι η κατά παράγοντες τροποποιημένη διάρκεια των υποχρεώσεων και k_{ij} είναι η κατά παράγοντες τροποποιημένη διάρκεια των περιουσιακών στοιχείων.

Το συγκεκριμένο μοντέλο χωρίζεται σε δύο κατηγορίες μοντέλων. Στο πρώτο δεν λαμβάνεται υπόψιν η κυρτότητα ενώ στο δεύτερο λαμβάνεται. Αρχικά θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα για το πρώτο μοντέλο όπου μεγιστοποιεί την F(x) χωρίς να λαμβάνει υπόψιν την κυρτότητα.

Μελετούμε πρώτα αύξηση υποχρεώσεων 5% ετησίως. Παρατηρούμε ότι το ύψος της αρχικής επένδυσης ανέρχεται στο ποσό ύψους: 966.339,794 ευρώ. Με βάση το συγκεκριμένο μοντέλο γίνεται επένδυση στα ακόλουθα ομόλογα:

Πίνακας 4.21 Ποσά επένδυσης και στάθμιση ομολόγων στα επιλεγμένα ομόλογα με αύξηση υποχρεώσεων 5% ετησίως.

Χαρτοφυλάκιο ομολόγων	Ποσά επένδυσης	Στάθμιση ομολόγου w_i

DS-6-13	245.698,813	25,4%
DS-7-16	232.660,189	24%
DS-5-19	280.569,619	29,1%
DS-6-21	207.411,173	21,5%

Επιπλέον μελετούμε αύξηση υποχρεώσεων 7,5% ετησίως. Παρατηρούμε ότι το ύψος της αρχικής επένδυσης ανέρχεται στο ποσό ύψους : 1.075.622,805 ευρώ. Με βάση το συγκεκριμένο μοντέλο γίνεται επένδυση στα ακόλουθα ομόλογα:

Πίνακας 4.22 Ποσά επένδυσης και στάθμιση ομολόγων στα επιλεγμένα ομόλογα με αύξηση υποχρεώσεων 7,5% ετησίως.

Χαρτοφυλάκιο ομολόγων	Ποσά επένδυσης	Στάθμιση ομολόγου w_i
DS-6-13	238.177,597	22,2%
DS-7-16	257.495,176	23,9%
DS-5-19	326.609,072	30,4%
DS-6-21	253.340,960	23,5%

Τέλος μελετούμε αύξηση υποχρεώσεων 10% ετησίως. Παρατηρούμε ότι το ύψος της αρχικής επένδυσης ανέρχεται στο ποσό ύψους : 1.199.754,782 ευρώ. Με βάση το συγκεκριμένο μοντέλο γίνεται επένδυση στα ακόλουθα ομόλογα:

Πίνακας 4.23 Ποσά επένδυσης και στάθμιση ομολόγων στα επιλεγμένα ομόλογα με αύξηση υποχρεώσεων 10% ετησίως.

Χαρτοφυλάκιο ομολόγων	Ποσά επένδυσης	Στάθμιση ομολόγου w_i
DS-6-13	229.234,758	19,1%
DS-7-16	282.184,437	23,5%
DS-5-19	380.712,412	31,7%
DS-6-21	307.623,175	25,7%

Παρατηρεί κανείς ότι μια αύξηση στο ρυθμό μεταβολής της υποχρέωσης, οδηγεί σε μείωση θέσεων στα ομόλογα DS-6-13 και DS-7-16, αντίθετα μπορεί κανείς να διακρίνει μια αύξηση θέσεων στα ομόλογα DS-5-19 και DS-6-21 .

Πίνακας 4.24 Σύγκριση ομολόγων με γνώμονα την αύξηση υποχρεώσεων.

Χαρτοφυλάκιο ομολόγων	**Στάθμιση ομολόγου w_i με αύξηση υποχρεώσεων 5%**	**Στάθμιση ομολόγου w_i με αύξηση υποχρεώσεων 7,5%**	**Στάθμιση ομολόγου w_i με αύξηση υποχρεώσεων 10%**
DS-6-13	25,4%	22,2%	19,1%
DS-7-16	24%	23,9%	23,5%
DS-5-19	29,1%	30,4%	31,7%
DS-6-21	21,5%	23,5%	25,7%

Το ομόλογο DS-6-13 παρουσιάζει μείωση επένδυσης κατά 3,2% και 6,3% για αντίστοιχη αύξηση των υποχρεώσεων σε 7,5% και 10%.

Το ομόλογο DS-7-16 παρουσιάζει μείωση επένδυσης 0,1% και 0,5% για αντίστοιχη αύξηση των υποχρεώσεων σε 7,5% και 10%.

Το ομόλογο DS-5-19 παρουσιάζει αύξηση επένδυσης 1,3% και 2,6% για αντίστοιχη αύξηση των υποχρεώσεων σε 7,5% και 10%.

Το ομόλογο DS-6-21 παρουσιάζει αύξηση επένδυσης 2% και 4,2% για αντίστοιχη αύξηση των υποχρεώσεων σε 7,5% και 10%.

Μοντέλο Ανοσοποίησης Κατά Παράγοντες Με Κυρτότητα

Maximize $F(x)$

subject to $\sum_{i=1}^{n} P_i x_i = P_L$

$\sum_{i=1}^{n} P_i x_i Q_{ij} \geq Q_{Lj} P_L$ για όλα τα j=1,2,...,k

$\sum_{i=1}^{n} P_i x_i k_{ij} = P_L k_{Lj}$ για όλα τα j=1,2,.....,k

$x \geq 0$

όπου $F(x)$ είναι η αντικειμενική συνάρτηση την οποία μεγιστοποιούμε, $P_i x_i$ είναι η παρούσα αξία των περιουσιακών στοιχείων i, P_L είναι η παρούσα αξία των υποχρεώσεων, k_{Lj} είναι η κατά παράγοντες τροποποιημένη διάρκεια των υποχρεώσεων και k_{ij} είναι η κατά παράγοντες τροποποιημένη διάρκεια των περιουσιακών στοιχείων. Σε αυτό το μοντέλο μπορούμε να επιβάλλουμε περιορισμούς κυρτότητας προκειμένου να αποκτήσουμε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο ικανοποιεί την συνθήκη δεύτερης τάξης.

Θα παρουσιάσουμε επίσης αποτελέσματα για το Μοντέλο Ανοσοποίησης Κατά Παράγοντες Με Κυρτότητα, όπου μεγιστοποιείται η F(x) λαμβάνοντας όμως υπόψιν και τον περιορισμό κυρτότητας.

Αρχικά μελετούμε αύξηση υποχρεώσεων 5% ετησίως**.** Παρατηρούμε ότι το ύψος της αρχικής επένδυσης ανέρχεται στο ποσό ύψους : 984461,585 ευρώ. Με βάση το συγκεκριμένο μοντέλο γίνεται επένδυση στα ακόλουθα ομόλογα:

Πίνακας 4.25 Ποσά επένδυσης και στάθμιση ομολόγων στα επιλεγμένα ομόλογα με αύξηση υποχρεώσεων 5% ετησίως.

Χαρτοφυλάκιο ομολόγων	Ποσά επένδυσης	Στάθμιση ομολόγου w_i
DS-6-13	278.418,973	28,2%
DS-6-15	39.977,856	4,1%
DS-5-17	175.012,670	17,8%
DS-5-19	329.172,045	33,4%
DS-6-21	161.860,041	16,5%

Επιπλέον μελετούμε αύξηση υποχρεώσεων 7,5% ετησίως. Παρατηρούμε ότι το ύψος της αρχικής επένδυσης ανέρχεται στο ποσό ύψους : 1.095.063.525 ευρώ. Με βάση το συγκεκριμένο μοντέλο γίνεται επένδυση στα ακόλουθα ομόλογα:

Πίνακας 4.26 Ποσά επένδυσης και στάθμιση ομολόγων στα επιλεγμένα ομόλογα με αύξηση υποχρεώσεων 7.5% ετησίως.

Χαρτοφυλάκιο ομολόγων	Ποσά επένδυσης	Στάθμιση ομολόγου w_i
DS-6-13	266.763,218	24,3%
DS-6-15	66.533,815	6,1%
DS-5-17	170.546,397	15,6%
DS-5-19	388.051,652	35,4%
DS-6-21	203.168,443	18,6%

Τέλος μελετούμε αύξηση υποχρεώσεων 10% ετησίως. Παρατηρούμε ότι το ύψος της αρχικής επένδυσης ανέρχεται στο ποσό ύψους : 1.220.480,794 ευρώ. Με βάση το συγκεκριμένο μοντέλο γίνεται επένδυση στα ακόλουθα ομόλογα:

Πίνακας 4.27 Ποσά επένδυσης και στάθμιση ομολόγων στα επιλεγμένα ομόλογα με αύξηση υποχρεώσεων 10% ετησίως.

Χαρτοφυλάκιο ομολόγων	Ποσά επένδυσης	Στάθμιση ομολόγου w_i
DS-6-13	253.121,550	20,7%

DS-6-15	94.653,837	7,7%
DS-5-17	164.320,147	13,6%
DS-5-19	455.510,280	37,3%
DS-6-21	252.874,980	20,7%

Το ομόλογο DS-6-13 παρουσιάζει μείωση επένδυσης 3,9% και 7,5% για αντίστοιχη αύξηση των υποχρεώσεων σε 7,5% και 10%.

Το ομόλογο DS-5-17 παρουσιάζει μείωση επένδυσης 2,2% και 4,2% για αντίστοιχη αύξηση των υποχρεώσεων σε 7,5% και 10%

Το ομόλογο DS-6-15 παρουσιάζει αύξηση επένδυσης 2% και 3,6% για αντίστοιχη αύξηση των υποχρεώσεων σε 7,5% και 10%.

Το ομόλογο DS-5-19 παρουσιάζει αύξηση επένδυσης 1% και 3,9% για αντίστοιχη αύξηση των υποχρεώσεων σε 7,5% και 10%.

Το ομόλογο DS-6-21 παρουσιάζει αύξηση επένδυσης 2,1% και 4,2% για αντίστοιχη αύξηση των υποχρεώσεων σε 7,5% και 10%.

Παρατηρούμε ότι η αύξηση στο ρυθμό μεταβολής της υποχρέωσης, οδηγεί σε μείωση θέσεων στα ομόλογα DS-6-13 και DS-5-17. Αντίθετα διακρίνουμε μια αύξηση θέσεων στα ομόλογα DS-6-15 , DS-5-19 και DS-6-21.

Πίνακας 4.28 Σύγκριση ομολόγων με γνώμονα την αύξηση υποχρεώσεων.

Χαρτοφυλάκιο ομολόγων	**Στάθμιση ομολόγου w_i με αύξηση υποχρεώσεων 5%**	**Στάθμιση ομολόγου w_i με αύξηση υποχρεώσεων 7,5%**	**Στάθμιση ομολόγου w_i με αύξηση υποχρεώσεων 10%**
DS-6-13	28,2%	24,3%	20,7%
DS-6-15	4,1%	6,1%	7,7%
DS-5-17	17,8%	15,6%	13,6%
DS-5-19	33,4%	35,4%	37,3%
DS-6-21	16,5%	18,6%	20,7%

4.1.5 ΜΟΝΤΕΛΟ ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΑΡΧΙΚΟΥ ΚΟΣΤΟΥΣ (STOCHASTIC DEDICATION)

Πίνακας 4.1 Στοιχεία Χαρτοφυλακίου Ομολόγων.

Ομόλογα	Στοιχεία ομολόγων	Price	Maturity	Coupon
1	DS-5-15	100	2015	5
2	DS-6-13	100	2013	6
3	DS-5-14	100	2014	5
4	DS-6-15	100	2015	6
5	DS-7-16	100	2016	7
6	DS-5-17	100	2017	5
7	DS-6-18	100	2018	6
8	DS-5-19	100	2019	5
9	DS-6-20	100	2020	6
10	DS-6-21	100	2021	6

Μοντέλο Ελαχιστοποίησης Αρχικού Κόστους

Minimize $\mathbf{u_0}$

Subject to $\sum_{i=1}^{n} F_{0i}\, x_{0i} + u_0 + u_0^{-0} = L_0^0 +$

u_{t-1}^{-s-}

$\sum_{i=1}^{n} F_{(t-1)i}^{S}\, x_{0i} + (1 + r_{f(t-1)}^{s})u_{t-1}^{+s^-}$ $+u_t^{-s} = L_t^s ++ (1+ r_{f(t-1)}^{s} + \delta)$

Για όλα τα t=1,…,T, s ,

$u^- \geq 0$

-

x, ,

όπου u_0 είναι το αρχικό κόστος της επένδυσης, x_{0i} είναι η διακράτηση του F_{0i}

περιουσιακού στοιχείου i την χρονική στιγμή 0, είναι οι πληρωμές του περιουσιακού στοιχείου i την χρονική στιγμή 0, και L_0^0 είναι η παρούσα αξία των υποχρεώσεων την χρονική στιγμή 0 και $r_{f(t-1)}^s$ είναι το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο την χρονική στιγμή t-1 υπό το σενάριο s.

Αρχικά θα μελετήσουμε την περίπτωση αύξησης των υποχρεώσεων κατά 5% ετησίως. Παρατηρούμε ότι το ύψος της αρχικής επένδυσης ανέρχεται στο ποσό ύψους: 951.406,33 ευρώ. Με βάση το συγκεκριμένο μοντέλο γίνεται επένδυση στα ακόλουθα ομόλογα:

Πίνακας 4.29 Ποσά επένδυσης και στάθμιση ομολόγων στα επιλεγμένα ομόλογα με αύξηση υποχρεώσεων 5% ετησίως.

Χαρτοφυλάκιο ομολόγων	Ποσά επένδυσης	Στάθμιση ομολόγου w_i
DS-5-15	250.000	26,3%
DS-6-13	25.278,936	2,6%
DS-7-16	250.000	26,3%
DS-6-20	176.127,390	18,5%
DS-6-21	250.000	26,3%

Επιπλέον μελετούμε την περίπτωση αύξησης των υποχρεώσεων κατά 7,5% ετησίως. Παρατηρούμε ότι το ύψος της αρχικής επένδυσης ανέρχεται στο ποσό ύψους: 1.060.340,01 ευρώ. Με βάση το συγκεκριμένο μοντέλο γίνεται επένδυση στα ακόλουθα ομόλογα:

Πίνακας 4.30 Ποσά επένδυσης και στάθμιση ομολόγων στα επιλεγμένα ομόλογα με αύξηση υποχρεώσεων 7,5% ετησίως.

Χαρτοφυλάκιο ομολόγων	Ποσά επένδυσης	Στάθμιση ομολόγου w_i
DS-5-15	250.000	23,575%
DS-6-13	60.340,010	5,7%
DS-7-16	250.000	23,575%

DS-6-20	250.000	23,575%
DS-6-21	250.000	23,575%

Τέλος μελετούμε την περίπτωση αύξησης των υποχρεώσεων κατά 10% ετησίως. Παρατηρούμε ότι το ύψος της αρχικής επένδυσης ανέρχεται στο ποσό ύψους: 1.187.904,66 ευρώ.

Με βάση το συγκεκριμένο μοντέλο γίνεται επένδυση στα ακόλουθα ομόλογα:

Πίνακας 4.31 Ποσά επένδυσης και στάθμιση ομολόγων στα επιλεγμένα ομόλογα με αύξηση υποχρεώσεων 10% ετησίως.

Χαρτοφυλάκιο ομολόγων	Ποσά επένδυσης	Στάθμιση ομολόγου w_i
DS-5-15	250.000	21,15%
DS-6-13	179.296,237	15,33%
DS-7-16	250.000	21,15%
DS-5-19	8.608,427	0,07%
DS-6-20	250.000	21,15%
DS-6-21	250.000	21,15%

Παρατηρούμε ότι η αύξηση στο ρυθμό μεταβολής της υποχρέωσης, οδηγεί σε μείωση θέσεων στα ακόλουθα ομόλογα DS-5-15, DS-7-16, DS-6-21 και σε αύξηση θέσεων στα ομόλογα DS-6-13, DS-6-20. Το ομόλογο DS-6-20 παρουσιάζει μια πτώση επένδυσης όταν αυξάνονται οι υποχρεώσεις από 7,5% σε 10%. Στο ομόλογο DS-5-19 παρατηρούμε ότι επενδύονται κεφάλαια μόνο στην αύξηση υποχρεώσεων από 7,5% σε 10%.

Πίνακας 4.32 Σύγκριση ομολόγων με γνώμονα την αύξηση υποχρεώσεων.

Χαρτοφυλάκιο ομολόγων	**Στάθμιση ομολόγου w_i με αύξηση υποχρεώσεων 5%**	**Στάθμιση ομολόγου w_i με αύξηση υποχρεώσεων 7,5%**	**Στάθμιση ομολόγου w_i με αύξηση υποχρεώσεων 10%**

DS-5-15	26,3%	23,575%	21,15%
DS-6-13	2,6%	5,7%	15,33%
DS-7-16	26,3%	23,575%	21,15%
DS-5-19	-	-	0,07%
DS-6-20	18,5%	23,575%	21,15%
DS-6-21	26,3%	23,575%	21,15%

Το ομόλογο DS-5-15 παρουσιάζει μείωση επένδυσης κατά 2,725% και 5,15% αντίστοιχα, με την αύξηση των υποχρεώσεων σε 7,5% και 10%.

Το ομόλογο DS-7-16 παρουσιάζει μείωση επένδυσης 2,725% και 5,15% αντίστοιχα, με την αύξηση των υποχρεώσεων σε 7,5% και 10%.

Το ομόλογο DS-6-21 παρουσιάζει μείωση επένδυσης 2,725% και 5,15% αντίστοιχα, με την αύξηση των υποχρεώσεων σε 7,5% και 10%.

Το ομόλογο DS-6-13 παρουσιάζει αύξηση επένδυσης 3,1% και 12,73% αντίστοιχα, με την αύξηση των υποχρεώσεων σε 7,5%

Το ομόλογο DS-6-20 παρουσιάζει αύξηση επένδυσης 5,075% αντίστοιχα, με την αύξηση των υποχρεώσεων από 5% σε 7,5% και μείωση επένδυσης 2,425% αντίστοιχα, με την αύξηση των υποχρεώσεων από 7,5% σε 10%.

4.1.6 ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΗΣ ΑΠΟΔΟΣΗΣ ΟΡΙΖΟΝΤΑ

Πίνακας 4.1 Στοιχεία Χαρτοφυλακίου Ομολόγων

Ομόλογα	Στοιχεία ομολόγων	Price	Maturity	Coupon
1	DS-5-15	100	2015	5
2	DS-6-13	100	2013	6
3	DS-5-14	100	2014	5
4	DS-6-15	100	2015	6
5	DS-7-16	100	2016	7
6	DS-5-17	100	2017	5
7	DS-6-18	100	2018	6
8	DS-5-19	100	2019	5
9	DS-6-20	100	2020	6
10	DS-6-21	100	2021	6

Μοντέλο Αναμενόμενης Απόδοσης Ορίζοντα

Maximize $\sum_{l \in \Omega} p^l u_T^{+s}$

Subject to $\sum_{i=1}^{n} F_{0i}^l x_{0i} + u_0 + u_0^{-0} = L_0^0 +$

u_{t-1}^{-s-}

$\sum_{i=1}^{n} F_{(t-1)i}^S x_{0i} + (1 + r_{f(t-1)}^s) u_{t-1}^{+s-} + u_t^{-s} = L_t^s + + (1 + r_{f(t-1)}^s + \delta)$

Για όλα τα t=1,…,T, s ,

$u^- \geq 0$

.

X, ,

όπου είναι το τελικό πλεόνασμα, p^l είναι η πιθανότητα υλοποίησης του l σεναρίου, x_{0i} είναι η διακράτηση του περιουσιακού στοιχείου i την χρονική στιγμή F_{oi}

0, είναι οι πληρωμές του περιουσιακού στοιχείου i την χρονική στιγμή 0, και L_0^0 είναι η παρούσα αξία των υποχρεώσεων την χρονική στιγμή 0

και $r^s_{f(t-1)}$ είναι το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο την χρονική στιγμή t-1 υπό το σενάριο s.

Αρχικά θα μελετήσουμε την περίπτωση όπου ο διαταραχτικός όρος των υποχρεώσεων ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή (μ=0.8, δ=1.4). Παρατηρούμε ότι το ύψος της αρχικής επένδυσης ανέρχεται στο ποσό ύψους: 688.404,35 ευρώ. Με βάση το συγκεκριμένο μοντέλο γίνεται επένδυση στα ακόλουθα ομόλογα:

Πίνακας 4.33 Ποσά επένδυσης και στάθμιση ομολόγων όπου ο διαταραχτικός παράγοντας των υποχρεώσεων ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή (μ=0.8, δ=1.4).

Χαρτοφυλάκιο ομολόγων	Ποσά επένδυσης	Στάθμιση ομολόγου w_i
DS-5-15	156.830	22,8%
DS-6-15	53.907,674	8%
DS-7-16	51.232,179	7,4%
DS-5-17	83.651,031	12%
DS-6-18	6.353,467	1%
DS-6-20	155.680	22,6%
DS-6-21	180.750	26,2%

Αρχικά θα μελετήσουμε την περίπτωση όπου ο πολλαπλασιαστικός παράγοντας των υποχρεώσεων ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή (μ=0.8, δ=1.5). Παρατηρούμε ότι το ύψος της αρχικής επένδυσης ανέρχεται στο ποσό ύψους: 911.880,20 ευρώ. Με βάση το συγκεκριμένο μοντέλο γίνεται επένδυση στα ακόλουθα ομόλογα:

Πίνακας 4.34 Ποσά επένδυσης και στάθμιση ομολόγων όπου ο πολλαπλασιαστικός παράγοντας των υποχρεώσεων ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή (μ=0.8, δ=1.5).

Χαρτοφυλάκιο ομολόγων	Ποσά επένδυσης	Στάθμιση ομολόγου w_i
DS-5-15	169.100	18,5%
DS-6-15	49.464,490	5,4%
DS-7-16	62.127,258	6,8%
DS-5-17	66.388,454	7,3%
DS-6-20	193.440	21,2%
DS-6-21	190.610	21%

Επιπλέον θα μελετήσουμε την περίπτωση όπου ο διαταραχτικός παράγοντας των υποχρεώσεων ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή (μ=0.9, δ=1.5). Παρατηρούμε ότι το ύψος της αρχικής επένδυσης ανέρχεται στο ποσό ύψους: 555.117,09 ευρώ. Με βάση το συγκεκριμένο μοντέλο γίνεται επένδυση στα ακόλουθα ομόλογα:

Πίνακας 4.35 Ποσά επένδυσης και στάθμιση ομολόγων όπου ο διαταραχτικός παράγοντας των υποχρεώσεων ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή (μ=0.9, δ=1.5).

Χαρτοφυλάκιο ομολόγων	Ποσά επένδυσης	Στάθμιση ομολόγου w_i
DS-5-15	172.180	31%
DS-6-15	59.813,628	10,7%
DS-7-16	42.503,670	7,6%
DS-5-17	95.984,252	17,3%
DS-6-18	12.629,637	2,3%
DS-5-19	11.915,901	2,1%
DS-6-20	160.090	29%
DS-6-21	194.100	31%

Πίνακας 4.36 Σύγκριση ομολόγων με γνώμονα την αύξηση των διαταραχτικών παραγόντων των υποχρεώσεων όπου ακολουθούν ομοιόμορφες κατανομές.

Χαρτοφυλάκιο ομολόγων	**Στάθμιση ομολόγου w_i με** ομοιόμορφη κατανομή (0.8,1.4)	**Στάθμιση ομολόγου w_i με** ομοιόμορφη κατανομή (0.8,1.5)	**Στάθμιση ομολόγου w_i με** ομοιόμορφη κατανομή (0.9,1.5)
DS-5-15	22,8%	22,4%	23,7%
DS-6-15	8%	8%	7,7%
DS-7-16	7,4%	6,7%	6,8%
DS-5-17	12%	14,7%	14,7%
DS-6-18	1%	0,4	0,8%
DS-6-20	22,6%	20,55%	20,4%
DS-6-21	26,2%	27,25%	25,9

Παρατηρούμε ότι η αύξηση των διαταραχτικών παραγόντων των υποχρεώσεων οδηγεί σε μείωση θέσεων στα ακόλουθα ομόλογα (DS-5-15, DS-6-15, DS-7-16, DS-5-17, DS-6-20, DS-6-21) και το ομόλογο DS-6-18 δεν δέχεται καθόλου στάθμιση επένδυσης, όταν αλλάζει η ομοιόμορφη κατανομή από (μ=0.8, δ=1.4) σε (μ=0.8, δ=1.5).

Αντίθετα η αύξηση των διαταραχτικών παραγόντων των υποχρεώσεων οδηγεί σε αύξηση θέσεων στα ακόλουθα ομόλογα (DS-5-15, DS-6-15, DS-7-16, DS-5-17, DS-6-20,DS-6-21) όταν αλλάζει η ομοιόμορφη κατανομή από (μ=0.8, δ=1.5) σε (μ=0.9, δ=1.5) και επιπρόσθετα επενδύονται και πόσα στα ομόλογα DS-6-18, DS-5-19.

4.1.7 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΟΝΤΕΛΩΝ

Κάνοντας μια σύγκριση μεταξύ του Μοντέλου Αντιστοίχισης Χρηματοροών και του Μοντέλου Αντιστοίχισης Χρηματοροών με Επανεπένδυση, παρατηρούμε ότι με μια αύξηση των υποχρεώσεων της τάξης του 10% έχουμε:

Πίνακας 4.37 Σύγκριση των μοντέλων (Α.Χ) και (Α.Χ.Μ.Ε).

Χαρτοφυλάκιο ομολόγων (Α.Χ)	Στάθμιση ομολόγου w_i	Χαρτοφυλάκιο ομολόγων (Α.Χ.Μ.Ε)	Στάθμιση ομολόγου w_i
DS-6-13	8,7%	DS-5-15	4,8%
DS-6-15	6%	DS-6-13	11,9%
DS-7-16	47%	DS-6-15	11,9%
DS-6-20	17,4%	DS-7-16	11,9%
DS-6-21	20%	DS-5-17	11,9%
		DS-6-18	11,9%
		DS-5-19	11,9%
		DS-6-20	11,9%
		DS-6-21	11,9%

Στο μοντέλο αντιστοίχισης χρηματοροών ο επενδύτης έχει ρίξει το βάρος κυρίως σε 3 ομόλογα, εκ των οποίων το ένα απορροφά σχεδόν τη μισή επένδυση όπως φαίνεται στο παραπάνω πίνακα, σε αντίθεση με το μοντέλο αντιστοίχισης χρηματοροών με επανεπένδυση όπου βλέπουμε μια διασπορά του κινδύνου επενδύοντας σχεδόν παντού με την ιδία βαρύτητα, όπως φαίνεται στον πίνακα δημιουργώντας μια πιο ασφαλή επένδυση με το πλεονέκτημα βέβαια και του δανεισμού.

Επιπλέον θα συγκρίνουμε το μοντέλο Αντιστοίχισης Χρηματοροών (Α.Χ) με το δεύτερο Μοντέλο Ανοσοποίησης (Δ.Μ.Α.) το οποίο μεγιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση F(x) λαμβάνοντας υπόψιν την κυρτότητα. Επιλέγουμε την περίπτωση όπου οι υποχρεώσεις είναι κοινές και αυξημένες κατά 10%.

Πίνακας 4.38 Σύγκριση των μοντέλων Αντιστοίχισης Χρηματοροών (Α.Χ) και του Δεύτερου Μοντέλου Ανοσοποίησης (Δ.Μ.Α.).

Χαρτοφυλάκιο ομολόγων (Α.Χ)	Στάθμιση ομολόγου w_i	Χαρτοφυλάκιο ομολόγων (Δ.Μ.Α.)	Στάθμιση ομολόγου w_i
DS-6-13	8,7%	DS-5-17	18,8%
DS-6-15	6%	DS-6-18	81,2%
DS-7-16	47%		
DS-6-20	17,4%		
DS-6-21	20%		

Παρατηρούμε ότι στο μοντέλο Ανοσοποίησης επενδύεται όλο το ποσό σε δύο ομόλογα και το 81,2% συγκεκριμένα στο ομόλογο DS-6-18. Σε αντίθεση στην περίπτωση του Μοντέλου Αντιστοίχισης Χρηματοροών υπάρχει μια σχετική διασπορά του κινδύνου σχεδόν της μισής επένδυσης. Επιπρόσθετα βλέπουμε ότι το κάθε μοντέλο επενδύει σε διαφορετικά ομόλογα.

Παρακάτω θα συγκρίνουμε το Δεύτερο Μοντέλο Ανοσοποίησης (Δ.Μ.Α) και το Δεύτερο Μοντέλο Κατά Παράγοντες Ανοσοποίησης (Δ.Μ.ΚΠ.Α) λαμβάνοντας υπόψιν την κυρτότητα.

Πίνακας 4.39 Σύγκριση του Δεύτερου Μοντέλου Κατά Παράγοντες Ανοσοποίησης (Δ.Μ.ΚΠ.Α) και του Δεύτερου Μοντέλου Ανοσοποίησης (Δ.Μ.Α.).

Χαρτοφυλάκιο ομολόγων (Δ.Μ.ΚΠ.Α)	**Στάθμιση ομολόγου w_i**	**Χαρτοφυλάκιο ομολόγων (Δ.Μ.Α)**	**Στάθμιση ομολόγου w_i**
DS-6-13	24,3%	DS-7-16	30,46%
DS-6-15	6,1%	DS-6-18	69,54%
DS-5-17	15,6%		
DS-5-19	35,4%		
DS-6-21	18,6%		

Τέλος θα συγκρίνουμε δύο στοχαστικά μοντέλα, το Μοντέλο Ελαχιστοποίησης Αρχικού Κόστους (Μ.Ε.Α.Κ.) και το Μοντέλο Αναμενόμενης Απόδοσης Ορίζοντα (Μ.Α.Α.Ο.). Θα κάνουμε την σύγκριση των μοντέλων με γνώμονα την αύξηση των υποχρεώσεων σε 10% και την αύξηση των διαταραχτικών παραγόντων των υποχρεώσεων οι οποίοι θα ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή (μ=0.9, δ=1.5).

Πίνακας 4.40 Σύγκριση μοντέλων (Μ.Ε.Α.Κ.) - (Μ.Α.Α.Ο.) με γνώμονα την αύξηση υποχρεώσεων καθώς και με γνώμονα την αύξηση των διαταραχτικών παραγόντων των υποχρεώσεων όπου ακολουθούν ομοιόμορφες κατανομές.

Χαρτοφυλάκιο ομολόγων (Μ.Ε.Α.Κ.)	**Στάθμιση ομολόγου w_i με αύξηση υποχρεώσεων10%**	**Χαρτοφυλάκιο ομολόγων (Μ.Α.Α.Ο.)**	**Στάθμιση ομολόγου w_i με** ομοιόμορφη κατανομή (0.9,1.5)
DS-5-15	21,15%	DS-5-15	23,7%
DS-6-13	15,33%	DS-6-15	7,7%
DS-7-16	21,15%	DS-7-16	6,8%
DS-5-19	0,07%	DS-5-17	14,7%
DS-6-20	21,15%	DS-6-18	0,8%
		DS-6-20	20,4%
		DS-6-21	25,9%

Παρατηρούμε ότι και τα δύο μοντέλα επενδύουν στα ακόλουθα ομόλογα DS-5-15, DS-7-16, DS-5-19, DS-6-20, DS-6-21 με διαφορετικά βάρη επένδυσης. Στο Μοντέλο Αναμενόμενης Απόδοσης Ορίζοντα επενδύονται κεφάλαια και στο ομόλογο DS-6-13, ενώ στο Μοντέλο Αναμενόμενης Απόδοσης Ορίζοντα επενδύονται κεφάλαια και στα ομόλογα DS-6-15, DS-5-17, DS-6-18 .

Πίνακας 4.41 Σύγκριση του Δεύτερου Μοντέλου Ανοσοποίησης (Δ.Μ.Α.) με το Μοντέλο Αναμενόμενης Απόδοσης Ορίζοντα (Μ.Α.Α.Ο.) με γνώμονα την αύξηση υποχρεώσεων καθώς και με γνώμονα την αύξηση των διαταραχτικών παραγόντων των υποχρεώσεων όπου ακολουθούν ομοιόμορφες κατανομές.

Χαρτοφυλάκιο ομολόγων (Μ.Α.Α.Ο)	**Στάθμιση ομολόγου w_i**	**Χαρτοφυλάκιο ομολόγων (Δ.Μ.Α)**	**Στάθμιση ομολόγου w_i**
DS-5-15	23,7%	DS-7-16	30,46%
DS-6-15	7,7%	DS-6-18	69,54%
DS-7-16	6,8%		
DS-5-17	14,7%		
DS-6-18	0,8%		
DS-6-20	20,4%		
DS-6-21	25,9%		

Το Μοντέλο Αναμενόμενης Απόδοσης Ορίζοντα (Μ.Α.Α.Ο.) αποτελεί μια επέκταση των ντετερμινιστικών μοντέλων αφοσίωσης χαρτοφυλακίου, με την ενσωμάτωση της αβεβαιότητας των τιμών και των ταμειακών ροών μέσω των σεναρίων. Με αυτό τον τρόπο η στοχαστική αφοσίωση επεκτείνει το πεδίο εφαρμογής της κλασικής αφοσίωσης χαρτοφυλακίου, περαιτέρω από ότι επιτυγχάνεται με την ανοσοποίηση χαρτοφυλακίου.

Μπορούμε να διαπιστώσουμε άλλωστε, ότι το Μ.Α.Α.Ο παρουσιάζει μια διασπορά στην επένδυση σε ποικίλα ομόλογα, σε σχέση με το Δ.Μ.Α, το οποίο περιορίζει τις επιλογές του σε δύο ομόλογα. Προφανώς το συγκεκριμένο γεγονός καταδεικνύει ότι το χαρτοφυλάκιο ομολόγων (Μ.Α.Α.Ο) είναι ποιοτικότερο και με λιγότερη έκθεση σε αγοραίο κίνδυνο.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία προσπαθήσαμε να δώσουμε μια εικόνα γύρω από την λειτουργία των συνταξιοδοτικών ταμείων, όσον αφορά στις επενδυτικές τους επιλογές, παρέχοντας επίσης μια εποπτεία των εργαλείων και των μοντέλων που χρησιμοποιούνται στην χρηματοοικονομική βελτιστοποίηση.

Ποια μοντέλα είναι αυτά που χρησιμοποιούνται από τα συνταξιοδοτικά ταμεία, πως ανοσοποιούν ένα χαρτοφυλάκιο απέναντι στον κίνδυνο, πως φτιάχνουν ένα αφοσιωμένο χαρτοφυλάκιο και με ποια μέτρα υπολογίζουν τον κίνδυνο είναι βασικά ερωτήματα του συγκεκριμένου ερευνητικού πεδίου, τα οποία φιλοδοξεί να διαλευκάνει η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία.

Τέλος με την χρήση της G.A.M.S. προσπαθήσαμε, χρησιμοποιώντας στοιχεία για διαφορετικά ομόλογα να παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα των μοντέλων που αναλύσαμε θεωρητικά στα προηγούμενα κεφάλαια.

Επιπρόσθετα κάναμε μια σύγκριση των αποτελεσμάτων διαφορετικών μοντέλων και καταδείξαμε τις διαφοροποιήσεις μεταξύ τους αλλά και τα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα του καθενός.

Τα μοντέλα που συγκρίναμε και εισήγαμε τα δεδομένα των ομολόγων μας είναι τα παρακάτω:

- Μοντέλο αντιστοίχισης χρηματοροών (Dedication Model)

- Μοντέλο αντιστοίχισης χρηματοροών με επανεπένδυση. (Dedication Model with borrowing)

- Μοντέλο ανοσοποίησης χαρτοφυλακίου.(Immunization Model)

- Μοντέλο ανοσοποίησης κατά παράγοντες. (Factor Immunization Model)

- Μοντέλο ελαχιστοποίησης αρχικού κόστους. (Stochastic Dedication)

- Μοντέλο αναμενόμενων αποδόσεων ορίζοντα. (Stochastic Dedication Model with borrowing and lending)

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Bertocchi,M., Giacommetti, R., Zenios, S.A., (2005), Risk factor analysis and portfolio immunization in the corporate bond market, European Journal of Operational Research 161,pp.348-363.
2. Black, F. and Scholes, M. (1973) The pricing of options and corporate liabilities.Journal of Political Economy, 81, 637–654.
3. Blake, D. (2000) Financial Market Analysis, John Wiley & Sons, Ltd, Chichester.
4. Blake, D., Lehmann, B. and Timmermann, A. (1999) Allocation dynamics and pension fund performance. Journal of Business, 72, 429–462.
5. Coleman, T. "A Guide to Duration, DV01, and Yield Curve Risk Transformations". Social Science Research Network. Retrieved 22 January 2013.
6. Constantinides G., (August 1976). "Stochastic Cash Management with Fixed and Proportional Transaction Costs," Management Science, INFORMS, vol. 22(12), pp. 1320-1331.
7. Constantinides G., (November 1979). "Multiperiod Consumption and Investment Behavior with Convex Transactions Costs," Management Science, INFORMS, vol. 25(11), pp. 1127-1137.
8. Cox, J., Ross, S. and Rubinstein, M. (1979) Option pricing: a simplified approach. Journal of Financial Economics, 7, 229–263.
9. Dahl, H., (1993) ,A flexible approach to interest rate risk management", in Financial Optimization (S.A. Zenios ed.), Cambridge University Press, pp.189-209.
10. Dahl, H., (1993).,A flexible approach to interest-rate risk management. In S.A. Zenios, editor,Financial Optimization, pages 189–209. Cambridge University Press
11. Granito, M. R., (1984), Bond Portfolio Immunization.
12. Jaeger, L. (2001) The Benefits of Alternative Investment Strategies in the Institutional Portfolio, Swiss Alternative Investments Group, November.

13. Kenneth, G., (August 1986) Forecasting GNMA Prepayment Speeds: Methodology and Implications for Price, Yield, Duration and Convexity.
14. Litterman R., José A. Scheinkman and Laurence Weiss, (1988), Volatility and the yield curve, The Journal of Fixed Income,pp.49-53.
15. Litterman, R., and T. Iben, (1991), Corporate bond valuation and the term structure of credit spreads, Journal of Portfolio Management 17, 52-65.
16. Macaulay, F. (1938), The Movements of Interest Rates. Bond Yields and Stock Prices in the United States since 1856, New York: National Bureau of Economic Research.
17. Marrison, C. (2002), The Fundamentals of Risk Measurement, Boston, MA: McGraw-Hill, pp. 57–58
18. R.L. D'Ecclesia and S.A. Zenios (1994), " Risk factor analysis and portfolio immunization in the Italian bond market " ,The Journal of Fixed Income, September,pp.51-58.
19. R.S. Hiller and J. Eckstein. Stochastic dedication: Designing fixed income portfolios using massively parallel Benders decomposition. Management Science, 39(11):1422–1438, 1993.
20. Randall S. Hiller, Eckstein J., (Nov.,1993),Stochastic Dedication: Designing Fixed Income Portfolios Using Massively Parallel Benders Decomposition , Vol. 39, No. 11 , pp. 1422-1438.
21. Redington, F. M. (1952). Review of the Principles of Life Office Valuations. Journal of the Institute of Actuaries, vol. 78, pages 286-340.
22. Reitano, R.,(1992) "Non-Parallel Yield Curve Shifts and Immunization." Journal of Portfolio Management Volume 18. Number 3 36-43.
23. Schneeweis, T., Spurgen, R. and Karvas, V. (2000) Alternative Investments in Institutional Portfolios, Alternative Investment Management Association August.
24. Stoll, H. (1969) The relationship between put and call option prices. Journal of Finance, 24, 802–824.
25. Zenios S.(1993), Financial Optimization , Cambridge University Press.
26. Zipkin P., Critical Number Policies for Inventory Models with Periodic Data, Management Science 1989 35:71-80.