

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΙΝΟΥΜΕΝΟΥ ΜΕΣΟΥ

Ανθούλα Ν. Τσίπη

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των
απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού
Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική.

Πειραιάς

Οκτώβριος, 2012

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ
ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΙΝΟΥΜΕΝΟΥ ΜΕΣΟΥ

Ανθούλα Ν. Τσίπη

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των
απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού
Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική.

Πειραιάς

Οκτώβριος, 2012

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη ΓΣΕΣ του τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμόν 5 /11-4-2011 συνεδρίαση του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική.

Τα μέλη της τριμελούς επιτροπής ήταν:

Αντζουλάκος Δημήτριος, Αναπληρωτής Καθηγητής (Επιβλέπων)

Ευαγγελάρας Χαράλαμπος, Επίκουρος Καθηγητής

Μπερσίμης Σωτήρης, Λέκτορας

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS



**DEPARTMENT OF STATISTIC AND INSURANCE
SCIENCE**

**POSTGRADUATE PROGRAM IN APPLIED
STATISTICS**

MOVING AVERAGE CONTROL CHARTS

By

Tsipi N. Anthoulla

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance

Science of the University of Piraeus in fulfillment

of the requirements for the degree of Master of Science

in Applied Statistics.

Piraeus, Greece

October, 2012.

Στην οικογένεια μου.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΡΑΙΑ

Ευχαριστίες

Στο σημείο αυτό θέλω να ευχαριστήσω θερμά :

- Τον κ. Δημήτριο Αντζουλάκο (επιβλέποντα καθηγητή) για την άψογη συνεργασία και την πραγματική βοήθεια που μου προσέφερε για την ολοκλήρωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας, καθώς επίσης και τα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς επιτροπής τον κ. Ευαγγελάρα Χαράλαμπο και τον κ. Μπερσίμη Σωτήριο για την επίβλεψή της.
- Την οικογένεια μου, τους φίλους μου και όσους είναι δίπλα μου και με στηρίζουν στην επίτευξη των στόχων μου.

Περίληψη

Τα διαγράμματα ελέγχου χρησιμοποιούνται ευρέως στην βιομηχανία για την παρακολούθηση της ποιότητας μιας παραγωγικής διεργασίας. Εκτός από τα κλασικά διαγράμματα ελέγχου Shewhart, υπάρχουν επίσης τα διαγράμματα ελέγχου με μνήμη, που είναι πιο αποτελεσματικά στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων της διεργασίας, όπως είναι τα διαγράμματα ελέγχου CUSUM, EWMA, και του κινούμενου μέσου.

Σκοπός της διπλωματικής είναι να καταγράψει τα σημαντικότερα αποτελέσματα που έχουν παρουσιαστεί στη σύγχρονη βιβλιογραφία γύρω από τα διαγράμματα ελέγχου του κινούμενου μέσου.

Abstract

Control charts have been widely used in industry to monitor the quality of a manufacturing process. Except from the classical Shewhart control charts, there are also control charts with memory that are more efficient in detecting small process shifts such as the CUSUM , the EWMA and the Moving Average control charts.

The purpose of this thesis is to write down the most important results that have been presented in modern literature about moving average control charts.

РАСЧЕТНО ТЕРА

Κατάλογος Σημμάτων

| | |
|--|----|
| ✚ Σχήμα 1.1 Τυπικό διάγραμμα ελέγχου Shewhart | 3 |
| ✚ Σχήμα 1.2 \bar{X} διάγραμμα ελέγχου για τα δεδομένα του Πίνακα 1.1 | 5 |
| ✚ Σχήμα 1.3. Διάγραμμα ελέγχου CUSUM για τα δεδομένα του Πίνακα 1.2..... | 29 |
| ✚ Σχήμα 1.4. Διάγραμμα ελέγχου EWMA για τα δεδομένα του Πίνακα 1.3..... | 33 |
| ✚ Σχήμα 2.1. Διάγραμμα ελέγχου απλού κινούμενου μέσου MA για τα δεδομένα του Πίνακα 2.1..... | 40 |
| ✚ Σχήμα 2.2. Διάγραμμα ελέγχου διπλού κινούμενου μέσου DMA για τα δεδομένα του Πίνακα 2.4 | 47 |
| ✚ Σχήμα 2.3. Διάγραμμα κινούμενου μέσου για την από κοινού παρακολούθηση της μέσης τιμής και της διακύμανσης..... | 55 |
| ✚ Σχήμα 2.4. Βέλτιστη τιμή για το k δοθέντος του w και του ARL_0 στο MA διάγραμμα ελέγχου ($w = 1,2,3$)..... | 67 |
| ✚ Σχήμα 2.5. Βέλτιστη τιμή για το k δοθέντος του w και του ARL_0 στο MA διάγραμμα ελέγχου ($w = 4,5,6,7,8$)..... | 68 |
| ✚ Σχήμα 2.6. Βέλτιστη τιμή για το k δοθέντος του w και του ARL_0 στο MA διάγραμμα ελέγχου ($w = 9,10, \dots, 14$)..... | 69 |
| ✚ Σχήμα 2.7. Βέλτιστη τιμή για το k δοθέντος του w και του ARL_0 στο MA διάγραμμα ελέγχου ($w = 15,16, \dots, 30$)..... | 70 |
| ✚ Σχήμα 2.8 Σύνθετο διάγραμμα Shewhart –MA | 74 |
| ✚ Σχήμα 3.1. Διάγραμμα ελέγχου κινούμενου μέσου για τα δεδομένα του Πίνακα 3.1 ($k = 2$)..... | 79 |
| ✚ Σχήμα 3.2. p διάγραμμα ελέγχου για τα δεδομένα του Πίνακα 3.1..... | 79 |
| ✚ Σχήμα 3.3. Διάγραμμα ελέγχου κινούμενου μέσου για τα δεδομένα του Πίνακα 3.1 ($k = 3$)..... | 80 |
| ✚ Σχήμα 3.4. Διάγραμμα ελέγχου κινούμενου μέσου για τα δεδομένα του Πίνακα 3.1 ($k = 4$)..... | 80 |
| ✚ Σχήμα 3.5. Poisson διάγραμμα ελέγχου κινούμενου μέσου για τα δεδομένα του Πίνακα 3.3 ($k = 2$)..... | 87 |
| ✚ Σχήμα 3.6. c διάγραμμα ελέγχου για τα δεδομένα του Πίνακα 3.3..... | 88 |
| ✚ Σχήμα 3.7. Poisson διάγραμμα ελέγχου κινούμενου μέσου για τα δεδομένα του Πίνακα 3.3 ($k = 3$)..... | 88 |
| ✚ Σχήμα 3.8. Poisson διάγραμμα ελέγχου κινούμενου μέσου για τα δεδομένα του Πίνακα 3.3 ($k = 4$)..... | 89 |
| ✚ Σχήμα 3.9. DMA διάγραμμα ελέγχου για τα δεδομένα του Πίνακα 3.4..... | 95 |
| ✚ Σχήμα 3.10. np διάγραμμα ελέγχου για τα δεδομένα του Πίνακα 3.4..... | 95 |

Κατάλογος Πινάκων

| | |
|---|----|
| ✚ Πίνακας 1.1. Δεδομένα για την επίδειξη X διαγράμματος..... | 15 |
| ✚ Πίνακας 1.2. Δεδομένα για επίδειξη διαγράμματος ελέγχου CUSUM ($K = 0.5$ και $H = 5$)..... | 28 |
| ✚ Πίνακας 1.3. Δεδομένα για επίδειξη διαγράμματος ελέγχου EWMA ($\lambda = 0.1$ και $L = 2.7$)..... | 32 |
| ✚ Πίνακας 2.1. Δεδομένα για την επίδειξη του διαγράμματος ελέγχου απλού κινούμενου μέσου | 39 |
| ✚ Πίνακας 2.2. Τιμές του L για το DMA διάγραμμα ελέγχου για δεδομένο ARL_0 και k | 43 |
| ✚ Πίνακας 2.3. Τιμές του ARL για το DMA και το MA διάγραμμα ελέγχου ($ARL_0 = 200$)..... | 45 |
| ✚ Πίνακας 2.4. Δεδομένα για την επίδειξη του διαγράμματος ελέγχου διπλού απλού κινούμενου μέσου (DMA chart)..... | 46 |
| ✚ Πίνακας 2.5. Όρια ελέγχου του διαγράμματος DMA για τα δεδομένα του Πίνακα 2.4..... | 47 |
| ✚ Πίνακας 2.6. Δεδομένα για την επίδειξη του από κοινού διαγράμματος ελέγχου κινούμενου μέσου για την παρακολούθηση της μέσης τιμής και της διακύμανσης..... | 52 |
| ✚ Πίνακας 2.7. Υπολογισμοί για την κατασκευή από κοινού διαγράμματος ελέγχου..... | 54 |
| ✚ Πίνακας 2.8. Τιμές ARL για το από κοινού διάγραμμα ελέγχου κινούμενου μέσου ($ARL_0 = 250, n = 5$)..... | 56 |
| ✚ Πίνακας 2.9. Τιμές ARL για το διάγραμμα ελέγχου MaxEWMA ($ARL_0 = 250, n = 5$)..... | 57 |
| ✚ Πίνακας 2.10. Τιμές ARL για CUSUM, EWMA και WMA διαγράμματα ελέγχου ($ARL_0 = 100$)..... | 61 |
| ✚ Πίνακας 2.11. Τιμές ARL για CUSUM, EWMA και WMA διάγραμμα ελέγχου ($ARL_0 = 400$)..... | 62 |
| ✚ Πίνακας 2.12. Τιμές των a, b για τον υπολογισμό του βέλτιστου εύρους w δοθέντος του ARL_0 του MA διαγράμματος ελέγχου $\log_{10} w = a - b \log_{10} \Delta$ | 66 |
| ✚ Πίνακας 2.13. Υπολογισμός του $ARL_{0,MA}$ του MA διαγράμματος συναρτήσει του ARL_0 του σύνθετου MA Shewhart διαγράμματος: $ARL_{0,MA} = a + b \times ARL_0$ | 72 |
| ✚ Πίνακας 2.14. Τιμές του $ARL_{0,MA}$ του MA διαγράμματος για $w = 2, 3, \dots, 30$ | 73 |
| ✚ Πίνακας 3.1. Δεδομένα για την επίδειξη του διαγράμματος ελέγχου κινούμενου μέσου για το ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων..... | 77 |
| ✚ Πίνακας 3.2. Τιμές ARL για το p διάγραμμα ελέγχου και του κινούμενου μέσου p-διαγράμματος ελέγχου για $p_0 = 0.1$ και $n = 100$ | 81 |
| ✚ Πίνακας 3.3. Δεδομένα για την επίδειξη του Poisson διαγράμματος ελέγχου κινούμενου μέσου..... | 86 |

| | |
|---|----|
| ✦ Πίνακας 3.4. Τιμές ARL για το c διάγραμμα ελέγχου και του Poisson διαγράμματος ελέγχου κινούμενου μέσου για $c = 1, 3, 6, 10, 16$ | 90 |
| ✦ Πίνακας 3.5. Δεδομένα για την επίδειξη του DMA διαγράμματος ελέγχου για τον αριθμό των ελαττωματικών προϊόντων..... | 93 |
| ✦ Πίνακας 3.6. Τιμές ARL για τα np , MA , και DMA διαγράμματα ελέγχου | 96 |

Περιεχόμενα

| | |
|---|------------|
| Περίληψη | |
| Abstract | |
| Κατάλογος Σχημάτων | ii |
| Κατάλογος Πινάκων | iii |
| Κεφάλαιο 1ο: Εισαγωγή στα διαγράμματα ελέγχου | 1 |
| 1.1 Δομή της Διπλωματικής Εργασίας | 1 |
| 1.2 Εισαγωγή | 1 |
| 1.2.1 Ο Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας | 1 |
| 1.2.2 Περιγραφή και Χρήση ενός Διαγράμματος Ελέγχου | 2 |
| 1.2.3 Διαγράμματα ελέγχου Φάσης I και Φάσης II | 5 |
| 1.2.4 Ταξινόμηση Διαγραμμάτων ελέγχου | 6 |
| 1.3 Εκτίμηση της μέσης τιμής και της διασποράς ενός συνεχούς χαρακτηριστικού | 7 |
| 1.3.1 Η περίπτωση των μεμονωμένων παρατηρήσεων | 7 |
| 1.3.2 Η περίπτωση των δειγμάτων | 8 |
| 1.4 Διαγράμματα ελέγχου Shewhart | 10 |
| 1.4.1 Διαγράμματα ελέγχου Shewhart για μεταβλητές | 10 |
| 1.4.2 Διάγραμμα ελέγχου Shewhart για τη διασπορά | 16 |
| 1.4.3 Διαγράμματα ελέγχου Shewhart για ιδιότητες | 19 |
| 1.5 Διαγράμματα ελέγχου με μνήμη | 25 |
| 1.5.1 Αθροιστικά διαγράμματα ελέγχου (CUSUM) | 27 |
| 1.5.2 Διαγράμματα ελέγχου τύπου EWMA | 30 |
| 1.6 Μέσο μήκος ροής στα διαγράμματα ελέγχου | 33 |
| Κεφάλαιο 2ο : Διαγράμματα ελέγχου κινούμενου μέσου για συνεχή χαρακτηριστικά | 36 |
| 2.1 Εισαγωγή | 36 |
| 2.2 Διάγραμμα ελέγχου απλού κινούμενου μέσου (MA) για τη μέση τιμή | 36 |
| 2.3 Διάγραμμα ελέγχου διπλού κινούμενου μέσου (DMA) για τη μέση τιμή | 41 |
| 2.4 Διάγραμμα ελέγχου κινούμενου μέσου για την από κοινού παρακολούθηση της μέσης τιμής και της διακύμανσης | 48 |
| 2.5 Διαγράμματα ελέγχου σταθμισμένου κινούμενου μέσου (WMA) | 58 |
| 2.6 Διαγράμματα ελέγχου κινούμενων μέσων σε ομάδες (GMA) | 62 |
| 2.7 Σχεδιασμός διαγραμμάτων ελέγχου κινούμενου μέσου | 64 |
| 2.7.1 Το βέλτιστο διάγραμμα ελέγχου κινούμενου μέσου | 65 |
| 2.7.2 Το βέλτιστο σύνθετο διάγραμμα ελέγχου MA-Shewhart | 70 |
| Κεφάλαιο 3ο Διαγράμματα ελέγχου κινούμενου μέσου για ιδιότητες | 75 |
| 3.1 Εισαγωγή | 75 |
| 3.2 Διάγραμμα ελέγχου κινούμενου μέσου για την παρακολούθηση του ποσοστού των ελαττωματικών προϊόντων. | 75 |

| | | |
|-----|---|----|
| 3.3 | Poisson διάγραμμα ελέγχου κινούμενου μέσου για την παρακολούθηση του αριθμού των ελαττωμάτων ανά μονάδα επιθεώρησης | 84 |
| 3.4 | Διάγραμμα διπλού κινούμενου μέσου για τον αριθμό των ελαττωματικών προϊόντων | 91 |
| | Βιβλιογραφία | 98 |
| | Ελληνική Βιβλιογραφία | 98 |
| | Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία | 98 |

1.1 Δομή της Διπλωματικής Εργασίας

Στο πρώτο κεφάλαιο της εργασίας δίνονται κάποιες απαραίτητες εισαγωγικές πληροφορίες για τα διαγράμματα ελέγχου και τα χαρακτηριστικά τους. Στο ίδιο κεφάλαιο παρουσιάζονται συνοπτικά τα κλασικά διαγράμματα ελέγχου Shewhart για μεταβλητές και για ιδιότητες καθώς επίσης και τα διαγράμματα ελέγχου τύπου CUSUM και EWMA. Κύρια πηγή για το Κεφάλαιο 1 είναι ο Αντζουλάκος (2003).

Στο δεύτερο κεφάλαιο της εργασίας παρουσιάζονται αναλυτικά οι μέθοδοι που έχουν αναπτυχθεί στην σύγχρονη βιβλιογραφία γύρω από τα διαγράμματα ελέγχου κινούμενου μέσου (moving averages control chart) και αφορούν την παρακολούθηση συνεχών χαρακτηριστικών (μεταβλητές). Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι προσεγγίσεις που έχουν αναπτυχθεί γύρω από τα διαγράμματα κινούμενου μέσου και αφορούν την παρακολούθηση διακριτών χαρακτηριστικών (ιδιότητες).

1.2 Εισαγωγή

1.2.1 Ο Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας

Για τις επιχειρήσεις αποτελεί στρατηγικής σημασίας το επίπεδο ποιότητας των προϊόντων που παράγονται από τις διάφορες παραγωγικές διεργασίες και εστιάζουν στην χρησιμοποίηση μεθόδων του στατιστικού ελέγχου ποιότητας. Ένας ορισμός για την ποιότητα δίνεται μέσω του διεθνούς προτύπου **ISO 8402**, όπου με τον όρο «**ποιότητα**» εννοούμε το σύνολο των ιδιοτήτων και των χαρακτηριστικών ενός προϊόντος, διαδικασίας ή υπηρεσίας που καθορίζουν την ικανότητα ανταπόκρισης σε δηλωμένες ή εννοούμενες ανάγκες. Η διασφάλιση και η βελτίωση της ποιότητας των παραγόμενων προϊόντων επιτυγχάνεται από έναν ολοκληρωμένο σύνολο τεχνικών και μεθόδων, τον **Έλεγχο Ποιότητας** ή **Ποιοτικό Έλεγχο**.

Ο Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας περιλαμβάνει (α) τον **Σχεδιασμό και Ανάλυση Πειραμάτων** (*Design of Experiments*), (β) τον **Στατιστικό Έλεγχο Διεργασιών** (*Statistical Process Control - SPC*), και (γ) **Δειγματοληψία Αποδοχής** (*Acceptance Sampling*). Η αρχική ανάπτυξη του ελέγχου παραγωγικής διεργασίας οφείλεται στον

Walter Shewhart, ο οποίος σχεδίασε απλές στατιστικές τεχνικές και αντίστοιχα διαγράμματα ελέγχου και πρότεινε τρόπους βελτίωσης της ποιότητας με εξάλειψη των αιτιών συστηματικών μεταβολών των παραμέτρων των παραγωγικών διεργασιών. Τα διαγράμματα που πρότεινε ο Shewhart εξακολουθούν μέχρι και σήμερα να αποτελούν τα ευρύτερα χρησιμοποιούμενα εργαλεία για τον έλεγχο της ομαλής λειτουργίας των παραγωγικών διεργασιών.

Το κύριο αντικείμενο του Στατιστικού Ελέγχου Διεργασιών είναι η έγκαιρη ανίχνευση της εμφάνισης ειδικών αιτιών μεταβλητότητας σε μια διεργασία έτσι ώστε να προχωρήσουμε σε έρευνα και να προβούμε στις απαραίτητες διορθωτικές ενέργειες προτού κατασκευαστούν αρκετά προϊόντα μη συμμορφούμενα με τις προδιαγραφές. Με τον όρο μη συμμορφούμενο ή ελαττωματικό προϊόν ονομάζουμε το προϊόν για το οποίο τουλάχιστον ένα ποιοτικό χαρακτηριστικό έχει τιμή η οποία βρίσκεται εκτός των ορίων προδιαγραφών του, δηλαδή παρουσιάζει ένα ελάττωμα ή ατέλεια. Ανάλογα με τον αριθμό και την σοβαρότητα των ελαττωμάτων (ατελειών) που παρουσιάζει ένα προϊόν μπορεί να χαρακτηριστεί συμμορφούμενο ή μη ελαττωματικό και να προωθηθεί προς πώληση στην αγορά.

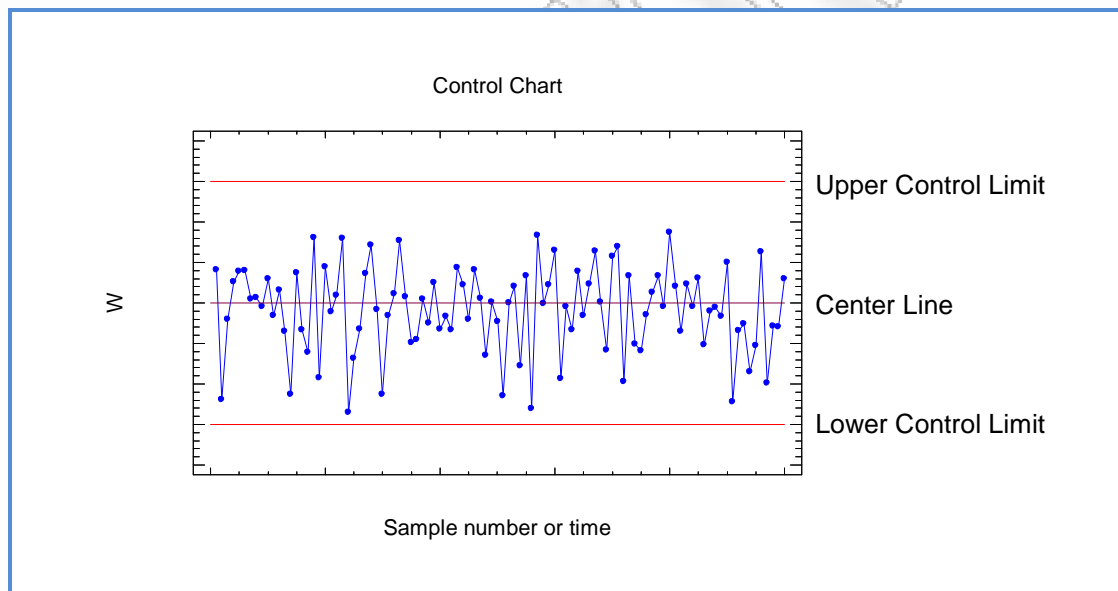
1.2.2 Περιγραφή και Χρήση ενός Διαγράμματος Ελέγχου

Στις παραγωγικές διεργασίες μας ενδιαφέρει η παρακολούθηση της συμπεριφοράς μιας κρίσιμης ποσότητας ενός (μετρήσιμου) χαρακτηριστικού X (τυχαία μεταβλητή) των προϊόντων που παράγονται (για παράδειγμα το χαρακτηριστικό X μπορεί να είναι μήκος, βάρος, όγκος προϊόντων κ.λ.π). Η διαδικασία παρακολούθησης της κρίσιμης ποσότητας βασίζεται σε μετρήσεις του χαρακτηριστικού X (τυχαία μεταβλητή), όπως προκύπτουν από την επιλογή τυχαίων δειγμάτων προϊόντων από την παραγωγή σε διαφορετικές χρονικές στιγμές στα οποία αντιστοιχούν τυχαία δείγματα τιμών του χαρακτηριστικού X , έστω τα X_1, X_2, \dots . Χρησιμοποιώντας τα τυχαία δείγματα X_1, X_2, \dots υπολογίζουμε την τιμή $W_t = g(X_t)$, $t=1,2,\dots$, μιας κατάλληλης στατιστικής συνάρτησης (τυχαίας μεταβλητής) που εκτιμά (συνήθως αμερόληπτη εκτιμήτρια) την κρίσιμη ποσότητα που μας ενδιαφέρει (π.χ. μέση τιμή ή διακύμανση της X). Έτσι η διαχρονική παρακολούθηση της συμπεριφοράς της κρίσιμης ποσότητας επιτυγχάνεται

με την παρακολούθηση των τιμών που λαμβάνει η στατιστική συνάρτηση W στα διάφορα δείγματα.

Για παράδειγμα ας υποθέσουμε ότι ενδιαφερόμαστε να παρακολουθήσουμε τη συμπεριφορά της μέσης τιμής διαμέτρου X των κυλίνδρων που παράγει μια μηχανή. Για το σκοπό αυτό επιλέγονται τυχαία δείγματα μεγέθους n ($n > 1$) κυλίνδρων από την παραγωγή της μηχανής σε διαφορετικά χρονικά διαστήματα και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη στατιστική συνάρτηση $W_t = g(\mathbf{X}_t) = (X_{t,1} + X_{t,2} + \dots + X_{t,m})/n$ (η οποία είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του μέσου της X) για την παρακολούθηση της συμπεριφοράς της μέσης τιμής.

Ένα τυπικό διάγραμμα ελέγχου Shewhart είναι μια γραφική παράσταση με την ακόλουθη μορφή όπως παρουσιάζεται στο **Σχήμα 1.1**.



Σχήμα 1.1. Τυπικό διάγραμμα ελέγχου Shewhart

Στο διάγραμμα εκτός από τις παρατηρούμενες τιμές της W , που έχουν απεικονιστεί με σημεία (συμπαγή κυκλάκια) τα οποία έχουν συνδεθεί με μια τεθλασμένη γραμμή, έχουν σχεδιαστεί και άλλες τρεις γραμμές. Η κεντρική γραμμή (center line, CL) ή μέσο επίπεδο της διεργασίας παριστάνει συνήθως τη μέση (mean value) της W όπως προκύπτει από τη λειτουργία μιας εντός (στατιστικού) ελέγχου διεργασίας, δηλαδή μιας διεργασίας που λειτουργεί μόνο με την παρουσία φυσικής μεταβλητότητας

(chance causes of variation). Οι δυο ακραίες γραμμές που εμφανίζονται στο διάγραμμα ονομάζονται άνω και κάτω όρια ελέγχου (upper and lower control limit, UCL and LCL).

Όσο οι τιμές της W βρίσκονται εντός των ορίων ελέγχου και η συμπεριφορά τους είναι «τυχαία» μπορούμε να υποθέσουμε ότι η διεργασία παραμένει εντός ελέγχου και δεν χρειάζεται να προβούμε σε κάποια διορθωτική ενέργεια. Αν όμως κάποιο σημείο βρεθεί εκτός των ορίων ελέγχου λέμε ότι υπάρχει ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου οπότε αντιμετωπίζουμε κατάσταση συναγερμού (alarm) και πρέπει να προχωρήσουμε σε έρευνα για να ανακαλύψουμε τις ειδικές αιτίες μεταβλητότητας (assignable causes of variation) που είναι υπεύθυνες για αυτήν την συμπεριφορά και αν κριθεί απαραίτητο να προβούμε σε διορθωτικές ενέργειες. Επίσης θα πρέπει να σημειώσουμε ότι ακόμη και στην περίπτωση που όλα τα σημεία του διαγράμματος βρίσκονται εντός των ορίων ελέγχου αλλά συμπεριφέρονται με ένα συστηματικό ή μη τυχαίο τρόπο τότε και αποτελεί ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου. Ως (ακραίο) παράδειγμα μπορούμε να αναφέρουμε την περίπτωση όπου όλα τα σημεία βρίσκονται μεταξύ της κεντρικής γραμμής και του κάτω ορίου ελέγχου.

Στο ακόλουθο πλαίσιο δίνεται ένα γενικό μοντέλο, το μοντέλο ορίων σίγμα για την κατασκευή ενός διαγράμματος ελέγχου.

Μοντέλο ορίων L σίγμα

$$UCL = \mu_w + L\sigma_w$$

$$CL = \mu_w$$

$$LCL = \mu_w - L\sigma_w$$

Το μ_w και το σ_w δηλώνουν τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της στατιστικής συνάρτησης W που απεικονίζεται στο διάγραμμα ελέγχου, η οποία εκτιμά την κρίσιμη ποσότητα του προϊόντος που θέλουμε να παρακολουθήσουμε, ενώ ο αριθμός L δηλώνει την απόσταση των ορίων ελέγχου από την κεντρική γραμμή σε μονάδες τυπική απόκλισης της W .

Για την αποτελεσματική χρήση ενός τέτοιου διαγράμματος ελέγχου θα πρέπει η W να ακολουθεί κανονική κατανομή. Όταν $L = 3$ τότε αναφερόμαστε για κατασκευή ορίων

ελέγχου τριών σίγμα (three sigma control limits, ή 3σ). Για μεγάλες τιμές του L η απόσταση των ορίων ελέγχου από την κεντρική γραμμή μεγαλώνει και έτσι μειώνεται ο κίνδυνος (ρίσκο, πιθανότητα) να βρεθεί ένα σημείο του διαγράμματος εκτός των ορίων ελέγχου.

Σε αναλογία με την ορολογία που χρησιμοποιείται στους ελέγχους στατιστικών υποθέσεων, λέμε ότι μειώνεται η πιθανότητα σφάλματος τύπου I (ή ρίσκο α) όμως, ταυτόχρονα αυξάνεται ή πιθανότητα σφάλματος τύπου II (ή ρίσκο β). Για μικρές τιμές του L έχουμε τα αντίθετα αποτελέσματα.

Για όρια ελέγχου 3σ και κανονική κατανομή της στατιστικής συνάρτησης W , όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου, η πιθανότητα να πάρει η W τιμή εκτός των ορίων ελέγχου είναι ίση με $\alpha=0.0027$. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι ένας εσφαλμένος συναγερμός συμβαίνει (κατά μέσο όρο) 27 φορές ανά 10000 σημεία του διαγράμματος ελέγχου. Επίσης για εντός ελέγχου διεργασίες η πιθανότητα να βρεθεί ένα σημείο πέραν του LCL (UCL) είναι 0.00135.

Εκτός από το μοντέλο ορίων σίγμα για την κατασκευή διαγραμμάτων ελέγχου Shewhart, υπάρχει και το μοντέλο ορίων πιθανότητας που παρουσιάζεται στο ακόλουθο πλαίσιο (μοντέλο ορίων πιθανότητας a) (με w_a συμβολίζεται το άνω a ποσοστιαίο σημείο της W).

| | | |
|-------------------------------|----------------|---------------------|
| Μοντέλο ορίων πιθανότητας a | | |
| $UCL = w_{a/2}$ | $CL = w_{0.5}$ | $LCL = w_{1-(a/2)}$ |

1.2.3 Διαγράμματα ελέγχου Φάσης I και Φάσης II.

Στην βιβλιογραφία υπάρχουν δυο φάσεις για τον έλεγχο μιας παραγωγικής διεργασίας με την χρήση διαγραμμάτων ελέγχου, η Φάση I και η Φάση II.

- **Φάση I:** Σε αυτήν τη φάση τα διαγράμματα ελέγχου χρησιμοποιούνται αναδρομικά για να ελέγξουν αν η διεργασία ήταν εντός ή εκτός ελέγχου εξετάζοντας δείγματα που συλλέχθηκαν σε παρελθόντα χρόνο. Σε αυτήν την φάση τα διαγράμματα ελέγχου βοηθούν τον διαχειριστή να φέρει την διεργασία

εντός στατιστικού ελέγχου. Όταν αυτό επιτευχθεί τα διαγράμματα ελέγχου που προκύπτουν (κεντρική γραμμή και όρια ελέγχου) είναι κατάλληλα για την παρακολούθηση της μελλοντικής συμπεριφοράς της διεργασίας. Αυτή η χρήση των διαγραμμάτων ελέγχου αναφέρεται και ως **αναδρομική** (retrospective).

- **Φάση II:** Σε αυτή την φάση τα διαγράμματα ελέγχου χρησιμοποιούνται προκειμένου να ελέγχουμε συνεχώς αν η διεργασία παραμένει εντός ελέγχου. Στη φάση αυτή ο διαχειριστής έχει στα χέρια του ένα πολύτιμο εργαλείο μέσω του οποίου είναι δυνατόν να παρακολουθεί συνεχώς την παραγωγική διεργασία και να ανιχνεύει εγκαίρως μια πιθανή αλλαγή στο μέσο επίπεδο των χαρακτηριστικών που καθορίζουν την ποιότητα του παραγόμενου προϊόντος. Δηλαδή σε κάθε χρονική περίοδο που ένα δείγμα λαμβάνεται από την διεργασία ο διαχειριστής παίρνει μια απάντηση στο ερώτημα “παραμένει η διεργασία εντός ελέγχου;”. Σε αυτήν την φάση ο διαχειριστής αδιαφορεί για τον τρόπο με τον οποίο το μέσο επίπεδο της διεργασίας έχει εκτιμηθεί ή ήταν γνωστό εκ των προτέρων.

1.2.4 Ταξινόμηση Διαγραμμάτων ελέγχου.

Ανάλογα με ορισμένα χαρακτηριστικά τους τα διαγράμματα ελέγχου μπορούν να ταξινομηθούν σε πολλές κατηγορίες. Έτσι έχουμε τις εξής βασικές κατηγορίες:

- (a) Ανάλογα με το είδος της μεταβλητής που περιγράφει το ποιοτικό χαρακτηριστικό έχουμε διαγράμματα ελέγχου για **μεταβλητές** (control charts for variables) και διαγράμματα ελέγχου για **ιδιότητες** (control charts for attributes).
- (b) Εάν το μέγεθος των δειγμάτων είναι μεγαλύτερο της μονάδας αναφερόμαστε σε διαγράμματα ελέγχου για **δείγματα/υποομάδες** (*control charts for rational subgroups*), ενώ αν λαμβάνονται δείγματα μετρήσεων μεγέθους ένα τότε αναφερόμαστε σε διαγράμματα ελέγχου για **μεμονωμένες παρατηρήσεις** (*control charts for individual observations*).
- (c) Αν οι μετρήσεις που λαμβάνονται αφορούν ένα ποιοτικό χαρακτηριστικό αναφερόμαστε σε **μονομεταβλητά** διαγράμματα ελέγχου ενώ αν οι μετρήσεις αναφέρονται σε περισσότερα χαρακτηριστικά αναφερόμαστε σε **πολυμεταβλητά** διαγράμματα ελέγχου.

- (d) Αν οι μετρήσεις που λαμβάνονται ακολουθούν μια γνωστή κατανομή τότε αναφερόμαστε σε **παραμετρικά** διαγράμματα ελέγχου ενώ στην αντίθετη περίπτωση αναφερόμαστε σε **μη-παραμετρικά** διαγράμματα ελέγχου.
- (e) Αν λαμβάνεται υπόψη μόνο το τρέχον δείγμα αναφερόμαστε σε **διαγράμματα ελέγχου χωρίς μνήμη** (Shewhart type control charts), ενώ αν λαμβάνονται υπόψη και προηγούμενα δείγματα αναφερόμαστε σε **διαγράμματα ελέγχου με μνήμη** (CUSUM & EWMA control charts)

1.3 Εκτίμηση της μέσης τιμής και της διασποράς ενός συνεχούς χαρακτηριστικού.

Στις περιπτώσεις που δεν είναι γνωστές οι παράμετροι του συνεχούς ποιοτικού χαρακτηριστικού της διεργασίας (μέση τιμή και διακύμανση), όπως στην **Φάση II**, απαιτείται η εκτίμησή τους.

1.3.1 Η περίπτωση των μεμονωμένων παρατηρήσεων

Έστω X_1, X_2, \dots, X_n ανεξάρτητες μεμονωμένες παρατηρήσεις από ένα πληθυσμό με άγνωστη μέση τιμή μ και άγνωστη διακύμανση σ^2 . Ένας αμερόληπτος εκτιμητής της μέσης τιμής μ είναι ο δειγματικός μέσος

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

και μια αμερόληπτη εκτίμηση της διακύμανσης σ^2 είναι η δειγματική διακύμανση

$$\hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

Αν υποθέσουμε τώρα ότι το τυχαίο δείγμα X_1, X_2, \dots, X_n προέρχεται από κανονικό πληθυσμό $N(\mu, \sigma^2)$ μπορούμε να βρούμε αμερόληπτους εκτιμητές της τυπικής απόκλισης σ . Τέτοιες είναι οι εκτιμήσεις

$$\hat{\sigma} = \frac{R}{d_2(n)} = \frac{X_{(n)} - X_{(1)}}{d_2(n)}, \quad \hat{\sigma} = \frac{S}{c_4(n)} = \frac{\sqrt{S^2}}{c_4(n)}$$

Οι ποσότητες $d_2(n)$ και $c_4(n)$ είναι σταθερές και εξαρτώνται από το μέγεθος του δείγματος και μπορούν να βρεθούν σε βιβλία ποιοτικού ελέγχου.

1.3.2 Η περίπτωση των δειγμάτων

Έστω ότι έχουμε στη διάθεση μας m ανεξάρτητα τυχαία δείγματα μεγέθους n το καθένα, τα $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$, $1 \leq i \leq m$, από έναν κανονικό πληθυσμό $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ με άγνωστη μέση τιμή μ και άγνωστη διακύμανση σ^2 .

- **Εκτίμηση του μ**

Έστω $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_m$ οι δειγματικοί μέσοι των m δειγμάτων και ας θέσουμε

$$\bar{\bar{X}} = \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \dots + \bar{X}_m}{m} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij}}{mn}.$$

Η ποσότητα $\bar{\bar{X}}$ έχει την κατανομή $N(\mu, \sigma^2/nm)$ και χρησιμοποιείται ως εκτίμηση του μ (αμερόληπτη και συνεπής εκτιμήτρια του μ), δηλαδή $\hat{\mu} = \bar{\bar{X}}$. Αξίζει να σημειώσουμε ότι

$$E(\bar{\bar{X}}) = \mu, \quad V(\bar{\bar{X}}) = \sigma^2/nm$$

ανεξάρτητα από την κατανομή του X .

- **Εκτίμηση του σ μέσω του εύρους R**

Έστω R_1, R_2, \dots, R_m τα εύρη των m δειγμάτων, δηλαδή

$$R_i = X_{i(n)} - X_{i(1)}, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Θέτουμε

$$\bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_m}{m}$$

και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $\mu_{R_i} = \sigma d_2(n)$, προκύπτει ότι $E(\bar{R}) = \sigma d_2(n)$. Έτσι η ποσότητα $\bar{R}/d_2(n)$ είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της ποσότητας σ , και χρησιμοποιείται ως εκτίμησή της, δηλαδή

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2(n)}.$$

- **Εκτίμηση του σ μέσω της δειγματικής τυπικής απόκλισης S**

Έστω S_i η ποσότητα που ορίζεται από

$$S_i = \sqrt{S_i^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Θέτοντας

$$\bar{S} = \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_m}{m}$$

και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $\mu_{S_i} = \sigma c_4(n)$ προκύπτει ότι $E(\bar{S}) = \sigma c_4(n)$. Έτσι η ποσότητα $\bar{S}/c_4(n)$ είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της ποσότητας σ και χρησιμοποιείται ως εκτίμηση της, δηλαδή

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{S}}{c_4}.$$

- **Εκτίμηση του σ μέσω της δειγματικής διακύμανσης S^2**

Έστω $S_1^2, S_2^2, \dots, S_m^2$ οι ποσότητες που ορίζονται από τη σχέση

$$S_i^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2, \quad 1 \leq i \leq m$$

για τις οποίες είναι γνωστό ότι $\mu_{S_i^2} = E(S_i^2) = \sigma^2$. Η ποσότητα $\sqrt{S^2}$ όπου

$$\bar{S}^2 = \frac{S_1^2 + S_2^2 + \dots + S_m^2}{m}$$

αν και δεν είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του σ χρησιμοποιείται αρκετές φορές (λόγω του ότι έχει μικρότερο μέσο τετραγωνικό σφάλμα από την $\bar{S}/c_4(n)$) ως εκτίμηση της ποσότητας σ , δηλαδή $\hat{\sigma} = \sqrt{\bar{S}^2}$.

1.4 Διαγράμματα ελέγχου Shewhart

1.4.1 Διαγράμματα ελέγχου Shewhart για μεταβλητές

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε περιληπτικά τα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart για τη μέση τιμή και τη διασπορά ενός συνεχούς ποιοτικού χαρακτηριστικού X της παραγωγικής διεργασίας που μας ενδιαφέρει να παρακολουθήσουμε.

1.4.1.1 Διαγράμματα ελέγχου Shewhart για τη μέση τιμή

1.4.1.1.1 Διαγράμματα ελέγχου Shewhart Φάσης II (μ, σ γνωστά)

Ας υποθέσουμε ότι η κατανομή του χαρακτηριστικού X ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ και έστω $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$, $i \geq 1$, τυχαία δείγματα μεγέθους n από το χαρακτηριστικό X . Ο δειγματικός μέσος

$$W_i = \bar{X}_i = \frac{X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{in}}{n}$$

ακολουθεί την κατανομή $N(\mu, \sigma^2/n)$ και απεικονίζεται στο επονομαζόμενο \bar{X} διάγραμμα ελέγχου. Τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή του διαγράμματος σε αυτήν την περίπτωση δίνονται στο ακόλουθο πλαίσιο.

| |
|----------------------------------|
| \bar{X} διάγραμμα |
| Φάση II – Όρια ελέγχου 3σ |
| $UCL = \mu + A\sigma$ |
| $CL = \mu$ |
| $LCL = \mu - A\sigma$ |

$$\text{όπου } A = \frac{3}{\sqrt{n}}.$$

1.4.1.1.2 Διαγράμματα ελέγχου Shewhart Φάσης II (μ, σ γνωστά) για μεμονωμένες παρατηρήσεις

Σε ορισμένες περιπτώσεις το μέγεθος του δείγματος είναι ίσο με 1 (αυτόματη επιθεώρηση παραγόμενων προϊόντων παραγόμενων προϊόντων, μικρός ρυθμός παραγωγής, κτλ..). Σε αυτή την περίπτωση ομιλούμε για διαγράμματα ελέγχου για μεμονωμένες η ατομικές παρατηρήσεις (individuals observations). Οι μέθοδοι που αναπτύχθηκαν στις προηγούμενες ενότητες δεν μπορούν να εφαρμοστούν και χρειάζονται κατάλληλη τροποποίηση.

Ας υποθέσουμε ότι η κατανομή του χαρακτηριστικού X των προϊόντων που παράγονται ακολουθεί κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ με μ και σ γνωστά. Το διάγραμμα ελέγχου για την παρακολούθηση της μέσης τιμής για μεμονωμένες παρατηρήσεις δίνεται από το ακόλουθο πλαίσιο

| |
|----------------------------------|
| \bar{X} διάγραμμα |
| Φάση II – Όρια ελέγχου 3σ |
| $UCL = \mu + 3\sigma$ |
| $CL = \mu$ |
| $LCL = \mu - 3\sigma$ |

Στο διάγραμμα απεικονίζονται πλέον οι μεμονωμένες παρατηρήσεις X_i ($W_i = X_i, i \geq 1$).

1.4.1.1.3 Διαγράμματα ελέγχου Φάσης I (μ, σ άγνωστα)

Στην πράξη οι ποσότητες με μ και σ είναι άγνωστες οπότε πρέπει να εκτιμηθούν. Για το σκοπό αυτό παίρνουμε m ανεξάρτητα προκαταρκτικά τυχαία δείγματα μεγέθους n το καθένα $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$, $1 \leq i \leq m$, για να εκτιμήσουμε τις ποσότητες μ και σ , υποθέτοντας ότι η επιλογή των προκαταρκτικών δειγμάτων έγινε όταν η διεργασία ήταν εντός ελέγχου (συνήθως $m = 20 - 25$ και $n = 4 - 6$).

Στην ανάλυση που ακολουθεί υποθέτουμε ότι το χαρακτηριστικό X ακολουθεί την κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ με (μ, σ) άγνωστα και έχουμε τα ακόλουθα. Ως εκτίμηση του μ έχουμε τη στατιστική συνάρτηση

$$\mu = \bar{\bar{X}}$$

και ως εκτίμηση του σ έχουμε τις ακόλουθες στατιστικές συναρτήσεις

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}, \quad \hat{\sigma} = \frac{\bar{S}}{c_4}, \quad \hat{\sigma} = \sqrt{S^2}.$$

Επομένως ανάλογα με την εκτίμηση που χρησιμοποιούμε για την τυπική απόκλιση προκύπτει διαφορετικό διάγραμμα ελέγχου για την μέση τιμή.

Για $\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}$ έχουμε το ακόλουθο πλαίσιο με τα όρια ελέγχου και την κεντρική γραμμή του διαγράμματος.

| |
|--|
| \bar{X} διάγραμμα |
| Φάση I – Όρια ελέγχου 3σ Μέθοδος R |
| $UCL = \bar{\bar{X}} + A_2 \bar{R}$ $CL = \bar{\bar{X}}$ $LCL = \bar{\bar{X}} - A_2 \bar{R}$ |

όπου η σταθερά $A_2 = \frac{3}{d_2 \sqrt{n}}$.

Για $\hat{\sigma} = \frac{\bar{S}}{c_4}$ έχουμε το ακόλουθο πλαίσιο με τα όρια ελέγχου και την κεντρική γραμμή του διαγράμματος.

| |
|--|
| \bar{X} διάγραμμα |
| Φάση I – Όρια ελέγχου 3σ Μέθοδος S |

$$UCL = \bar{\bar{X}} + A_3 \bar{S}$$

$$CL = \bar{\bar{X}}$$

$$LCL = \bar{\bar{X}} - A_3 \bar{S}$$

όπου η σταθερά $A_3 = \frac{3}{c_4 \sqrt{n}}$.

Τέλος, για $\hat{\sigma} = \sqrt{S^2}$ τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή του διαγράμματος συνοψίζονται στο ακόλουθο πλαίσιο.

\bar{X} διάγραμμα

Φάση I – Όρια ελέγχου 3σ
Μέθοδος S^2

$$UCL = \bar{\bar{X}} + A\sqrt{S^2}$$

$$CL = \bar{\bar{X}}$$

$$LCL = \bar{\bar{X}} - A\sqrt{S^2}$$

όπου η σταθερά $A = \frac{3}{\sqrt{n}}$.

1.4.1.1.4 Διαγράμματα ελέγχου Φάσης I (μ, σ άγνωστα) για μεμονωμένες παρατηρήσεις

Στην περίπτωση που οι ποσότητες μ και σ είναι άγνωστες πρέπει να εκτιμηθούν.

Αν έχουμε στην διάθεση μας τυχαίο δείγμα μεγέθους m από το χαρακτηριστικό X , το $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_m)$, η εκτίμηση του μέσου δίνεται από τη σχέση

$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_m}{m}$ και $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2 / m)$. Για την εκτίμηση του σ ,

θέτοντας $\overline{MR} = \frac{MR_1 + MR_2 + \dots + MR_m}{m-1}$ όπου

$$MR_i = |X_i - X_{i-1}| = \max(X_{i-1}, X_i) - \min(X_{i-1}, X_i) \quad i \geq 2$$

έχουμε ότι $E(MR) = sd_2$, οπότε η ποσότητα $E(\overline{MR}) = \sigma d_2$, οπότε η ποσότητα είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της ποσότητας σ , δηλαδή

$$\hat{\sigma} = \frac{\overline{MR}}{d_2}$$

Έτσι, χρησιμοποιώντας τις παρακάτω εκτιμήσεις, το πλαίσιο για το \bar{X} διάγραμμα στην περίπτωση των μεμονωμένων παρατηρήσεων για σ και μ άγνωστα δίνεται από τις σχέσεις στο ακόλουθο πλαίσιο

| |
|---|
| \bar{X} διάγραμμα |
| Φάση I – Όρια ελέγχου $3\sigma^2$ |
| $UCL = \bar{X} + 3 \frac{\overline{MR}}{d_2}$ |
| $CL = \bar{X}$ |
| $LCL = \bar{X} - 3 \frac{\overline{MR}}{d_2}$ |

Αξίζει να σημειώσουμε ότι μια αποτελεσματική εκτίμηση της τυπικής απόκλισης σ προκύπτει χρησιμοποιώντας τη σχέση $\hat{\sigma} = S/c_4$ (όπου η σταθερά c_4 υπολογίζεται για $n = m$) όπου

$$S = \sqrt{\frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2}$$

1.4.1.1.5 Εφαρμογή για την κατασκευή διαγράμματος ελέγχου Shewhart για την μέση τιμή

Στον Πίνακα 1.1. παρουσιάζονται οι μετρήσεις ενός χαρακτηριστικού που περιγράφεται από μια συνεχή τυχαία μεταβλητή όπως προέκυψαν από την επιλογή 10 τυχαίων δειγμάτων μεγέθους δύο $n=2$. Έστω ότι, υπό συνθήκες φυσικής μεταβλητότητας (εντός ελέγχου διεργασίας), η κατανομή του χαρακτηριστικού X είναι η κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu=10$ και τυπική απόκλιση $\sigma=0.25$, και ότι ενδιαφερόμαστε να παρακολουθήσουμε τη συμπεριφορά της μέσης τιμής της X .

Πίνακας 1.1: Δεδομένα για την επίδειξη X διαγράμματος

| Δείγμα | Πρώτη μέτρηση | Δεύτερη Μέτρηση | Μέση τιμή |
|--------|---------------|-----------------|-----------|
| 1 | 9.84422 | 9.62656 | 9.73539 |
| 2 | 9.80879 | 9.93767 | 9.87323 |
| 3 | 10.50880 | 9.37680 | 9.94280 |
| 4 | 9.94629 | 10.2645 | 10.10540 |
| 5 | 9.55296 | 10.09280 | 9.82288 |
| 6 | 9.58023 | 9.71789 | 9.64906 |
| 7 | 9.40171 | 10.15210 | 9.77691 |
| 8 | 9.59285 | 9.95854 | 9.77570 |
| 9 | 9.54142 | 9.62176 | 9.58159 |
| 10 | 10.66530 | 10.23660 | 10.45095 |

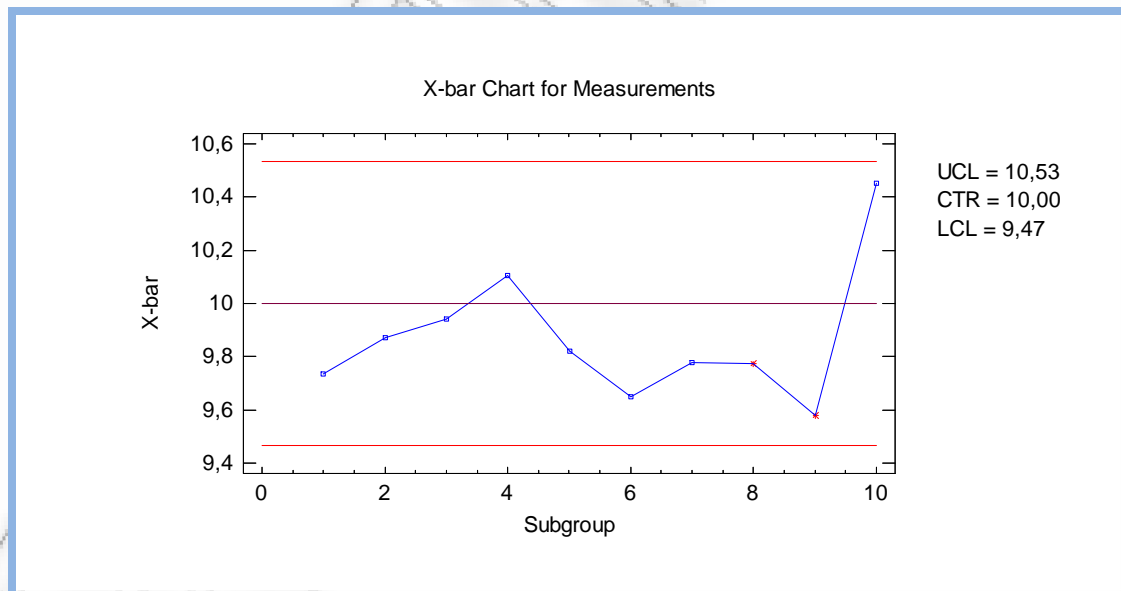
Κατασκευάζοντας το \bar{X} διάγραμμα ελέγχου Φάσης II με τρία σίγμα όρια ελέγχου (απεικονιζόμενη ποσότητα η $W = \bar{X}$) έχουμε ότι

$$CL = \mu = 10,$$

$$UCL = \mu + A\sigma = 10 + (3/\sqrt{2}) \times 0.25 = 10.5303,$$

$$LCL = \mu - A\sigma = 10 - (3/\sqrt{2}) \times 0.25 = 9.4697.$$

Το διάγραμμα ελέγχου δίνεται στο ακόλουθο σχήμα (**Σχήμα 1.2**).



Σχήμα 1.2: \bar{X} διάγραμμα ελέγχου για τα δεδομένα του Πίνακα 1.1

Εφόσον όλα τα σημεία του διαγράμματος βρίσκονται εντός των ορίων ελέγχου μπορούμε να ισχυριστούμε ότι ο μέσος δεν έχει αλλάξει (μετατοπιστεί) και επομένως η διεργασία είναι εντός στατιστικού ελέγχου.

1.4.2 Διάγραμμα ελέγχου Shewhart για τη διασπορά

1.4.2.1 Διάγραμμα ελέγχου Shewhart Φάσης II (σ γνωστό).

Στην παρούσα παράγραφο θα αναπτύξουμε την κατασκευή διαγραμμάτων ελέγχου τύπου Shewhart για την παρακολούθηση της διασποράς ενός συνεχούς χαρακτηριστικού. Υποθέτουμε ότι το χαρακτηριστικό X ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ και ότι έχουμε στην διάθεσή μας τα ανεξάρτητα τυχαία δείγματα $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$, $i \geq 1$, από το χαρακτηριστικό X .

- ***R* διάγραμμα ελέγχου**

Θέτοντας $W_i = R_i = X_{i(n)} - X_{i(1)}$ έχουμε ότι $\mu_{R_i} = \sigma d_2$ και $\sigma_{R_i} = \sqrt{V(R_i)} = \sigma d_3$. Συνεπώς ένα διάγραμμα ελέγχου για την διασπορά του ποιοτικού χαρακτηριστικού X μπορεί να βασιστεί σε ένα διάγραμμα όπου η απεικονιζόμενη ποσότητα θα είναι το εύρος R_i των δειγμάτων που ως γνωστό είναι ένα μέτρο διασποράς της X . Το μοντέλο τριών σίγμα θα έχει όρια ελέγχου και κεντρική γραμμή τα ακόλουθα:

$$UCL = \mu_{R_i} + 3\sigma_{R_i} = (d_2 + 3d_3)\sigma, \dots \quad CL = \mu_{R_i} = d_2\sigma, \dots \quad LCL = \mu_{R_i} - 3\sigma_{R_i} = (d_2 - 3d_3)\sigma$$

Θέτοντας $D_1 = d_2 - 3d_3$ και $D_2 = d_2 + 3d_3$ προκύπτει το ακόλουθο πλαίσιο

| |
|--|
| R διάγραμμα |
| Φάση II – Όρια ελέγχου 3σ |
| $UCL = D_2\sigma \quad CL = d_2\sigma \quad LCL = D_1\sigma$ |

- ***S* διάγραμμα ελέγχου**

Θέτοντας $W_i = S_i$, όπου

$$S_i = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}, \quad 1 \leq i \leq m$$

έχουμε ότι

$$\mu_{s_i} = E(S_i) = \sigma c_4, \quad \sigma_{s_i} = \sqrt{V(S_i)} = \sigma \sqrt{1 - c_4^2}.$$

Επομένως ένα διάγραμμα ελέγχου για την διασπορά του χαρακτηριστικού X μπορεί να βασιστεί σε ένα διάγραμμα όπου οι απεικονιζόμενες ποσότητες θα είναι οι δειγματικές τυπικές αποκλίσεις S_i που είναι το πιο σύνηθες μέτρο διασποράς της X .

Το μοντέλο με τα 3σ όρια ελέγχου προκύπτει από τις παρακάτω σχέσεις

$$UCL = \mu_{s_i} + 3\sigma_{s_i} = (c_4 + 3\sqrt{1 - c_4^2})\sigma, \dots CL = \mu_{s_i} = c_4\sigma, \dots LCL = \mu_{s_i} - 3\sigma_{s_i} = (c_4 - 3\sqrt{1 - c_4^2})\sigma$$

Θέτοντας $B_6 = c_4 + 3\sqrt{1 - c_4^2}$ και $B_5 = c_4 - 3\sqrt{1 - c_4^2}$ προκύπτει το ακόλουθο πλαίσιο

| |
|----------------------------------|
| S διάγραμμα |
| Φάση II – Όρια ελέγχου 3σ |
| $UCL = B_6\sigma$ |
| $CL = c_4\sigma$ |
| $LCL = B_5\sigma$ |

- **S^2 διάγραμμα ελέγχου**

Θέτοντας $W_i = S_i^2$, όπου

$$S_i^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2, \quad 1 \leq i \leq m$$

έχουμε ότι

$$P\left(\frac{(n-1)}{\sigma^2} \chi_{n-1;1-a/2}^2 \leq S_i^2 \leq \frac{(n-1)}{\sigma^2} \chi_{n-1;a/2}^2\right) = 1 - a.$$

Επομένως ένα διάγραμμα ελέγχου για τη διασπορά μπορεί να βασιστεί σε ένα διάγραμμα όπου η απεικονιζόμενη ποσότητα θα είναι η δειγματική διακύμανση S_i^2

που είναι ένα μέτρο διασποράς της X . Τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή του διαγράμματος δίνεται στο ακόλουθο πλαίσιο:

| | | |
|---|------------------------|--|
| S^2 διάγραμμα | | |
| Φάση II – Όρια ελέγχου πιθανότητας | | |
| $UCL = \frac{(n-1)}{\sigma^2} \chi_{n-1; a/2}^2, \dots$ | $CL = \sigma^2, \dots$ | $LCL = \frac{(n-1)}{\sigma^2} \chi_{n-1; 1-a/2}^2$ |

1.4.2.2 Διαγράμματα ελέγχου Φάσης I (σ άγνωστο).

Συνήθως η ποσότητα σ είναι άγνωστη επομένως θα πρέπει να εκτιμηθεί παίρνοντας τυχαία προκαταρκτικά δείγματα. Για το σκοπό αυτό παίρνουμε m ανεξάρτητα προκαταρκτικά τυχαία δείγματα μεγέθους n το καθένα $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$, $1 \leq i \leq m$, για να εκτιμήσουμε το σ , υποθέτοντας ότι η επιλογή των προκαταρκτικών δειγμάτων έγινε όταν η διεργασία ήταν εντός ελέγχου. Στην ανάλυση που ακολουθεί υποθέτουμε ότι το χαρακτηριστικό X ακολουθεί την κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$.

- **R διάγραμμα ελέγχου**

Χρησιμοποιώντας ως εκτίμηση του σ την ποσότητα $\hat{\sigma} = \bar{R}/d_2$ προκύπτει το ακόλουθο πλαίσιο

| | | |
|----------------------------------|----------------|---------------------|
| R διάγραμμα | | |
| Φάση II – Όρια ελέγχου 3σ | | |
| $UCL = D_4 \bar{R}$ | $CL = \bar{R}$ | $LCL = D_3 \bar{R}$ |

όπου $D_3 = 1 - 3 \frac{d_3}{d_2}$, $D_4 = 1 + 3 \frac{d_3}{d_2}$

- **S διάγραμμα ελέγχου**

Χρησιμοποιώντας ως εκτίμηση της ποσότητας σ την $\hat{\sigma} = \bar{S}/c_4$, τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή του διαγράμματος δίνεται στο ακόλουθο πλαίσιο:

| |
|--|
| S διάγραμμα |
| Φάση I – Όρια ελέγχου 3σ |
| $UCL = B_4\bar{S}$ $CL = \bar{S}$ $LCL = B_3\bar{S}$ |

όπου $B_3 = 1 - \frac{3}{c_4}\sqrt{1-c_4^2}$, $B_4 = 1 + \frac{3}{c_4}\sqrt{1-c_4^2}$.

- S^2 διάγραμμα ελέγχου

Χρησιμοποιώντας ως εκτίμηση του σ^2 την ποσότητα $\hat{\sigma}^2 = \bar{S}^2$ τότε τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή του διαγράμματος δίνεται στο ακόλουθο πλαίσιο.

| |
|--|
| S^2 διάγραμμα |
| Φάση I – Όρια ελέγχου πιθανότητας |
| $UCL = \frac{\bar{S}^2}{(n-1)} \chi_{n-1; a/2}^2$ $CL = \bar{S}^2$ $LCL = \frac{\bar{S}^2}{(n-1)} \chi_{n-1; 1-a/2}^2$ |

1.4.3 Διαγράμματα ελέγχου Shewhart για ιδιότητες.

Σε αρκετές περιπτώσεις ταξινομούμε ένα προϊόν σαν *ελαττωματικό ή μη συμμορφούμενο* (defective or nonconforming) αν τουλάχιστον ένα ποιοτικό χαρακτηριστικό του έχει τιμή ή οποία βρίσκεται εκτός των ορίων προδιαγραφών. Σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι το προϊόν παρουσιάζει τουλάχιστον ένα ελάττωμα ή ατέλεια (defect or nonconformity). Ο αριθμός των ελαττωματικών προϊόντων μιας παραγωγικής διεργασίας, όπως και ο αριθμός των ελαττωμάτων ενός προϊόντος, είναι ποιοτικά χαρακτηριστικά που περιγράφονται με διακριτές τυχαίες μεταβλητές οι οποίες στα πλαίσια του Στατιστικού Ελέγχου Ποιότητας ονομάζονται *ιδιότητες* (attributes).

Τρία είναι τα βασικά διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart για ιδιότητες (attributes control charts). Το πρώτο αφορά το ποσοστό (ή αναλογία ή κλάσμα) p των ελαττωματικών προϊόντων μιας παραγωγικής διεργασίας γνωστό ως p διάγραμμα ελέγχου, ενώ για τον αριθμό των ελαττωματικών προϊόντων χρησιμοποιείται το np διάγραμμα ελέγχου. Το δεύτερο αφορά το συνολικό αριθμό των ελαττωμάτων σε μια μονάδα επιθεώρησης (inspection unit) γνωστό ως c διάγραμμα ελέγχου. Τέλος το τρίτο διάγραμμα αφορά το μέσο αριθμό των ελαττωμάτων ανά μονάδα επιθεώρησης γνωστό ως u διάγραμμα ελέγχου. Ως μονάδα επιθεώρησης μπορεί να είναι το ίδιο το προϊόν, ένα τμήμα του προϊόντος είτε ακόμα ένα σύνολο προϊόντων.

1.4.3.1 Διάγραμμα ελέγχου Shewhart για το ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων.

Στην παρούσα παράγραφο θα αναπτύξουμε την κατασκευή διαγράμματος τύπου Shewhart για την παρακολούθηση της συμπεριφοράς του ποσοστού των ελαττωματικών ή μη συμμορφούμενων προϊόντων μιας παραγωγικής διεργασίας. Με τον όρο ποσοστό ελαττωματικών προϊόντων ορίζουμε το πηλίκο του αριθμού των ελαττωματικών προϊόντων δια του συνολικού αριθμού των παραγόμενων προϊόντων.

1.4.3.1.1 Διαγράμματα ελέγχου Φάσης II (p γνωστό)

Η κατασκευή ενός διαγράμματος ελέγχου για το ποσοστό p των ελαττωματικών προϊόντων μιας διεργασίας βασίζεται στη διωνυμική κατανομή. Ας υποθέσουμε ότι το ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων είναι γνωστό και ίσο με p και ότι από την παραγωγή επιλέγουμε ανεξάρτητα τυχαία δείγματα μεγέθους n προϊόντων το καθένα. Ας συμβολίσουμε με X_{ij} ($i \geq 1, 1 \leq j \leq n$) την τυχαία μεταβλητή με τιμές 1 και 0 ανάλογα με αν το αντίστοιχο προϊόν είναι ελαττωματικό ή όχι. Για την τυχαία μεταβλητή X_{ij} έχουμε ότι $X_{ij} \sim B(1, p)$ ενώ για την τυχαία μεταβλητή $X_i = X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{in}$ που δηλώνει τον αριθμό των ελαττωματικών προϊόντων στο δείγμα έχουμε ότι $X_i \sim B(n, p)$. Για την τυχαία μεταβλητή

$$W_i = p_i = \frac{X_i}{n}, \quad i \geq 1$$

που δηλώνει το ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων στο i δείγμα, ισχύει ότι

$$\mu_{w_i} = p, \quad \sigma_{w_i}^2 = \frac{p(1-p)}{n}.$$

Έτσι μπορούμε να αναπτύξουμε ένα διάγραμμα ελέγχου για την παρακολούθηση του ποσοστού των ελαττωματικών προϊόντων στο οποίο θα απεικονίζεται η τιμή της $W_i = p_i = X_i/n$ στα διάφορα δείγματα που συλλέγουμε από την παραγωγική διεργασία. Τα όρια του διαγράμματος και η κεντρική γραμμή συνοψίζονται στο ακόλουθο πλαίσιο:

| |
|--------------------------------------|
| p διάγραμμα |
| Φάση II - Όρια ελέγχου 3σ |
| $UCL = p + 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ |
| $CL = p$ |
| $LCL = p - 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ |

Η κατασκευή ενός διαγράμματος για την παρακολούθηση του αριθμού των ελαττωματικών προϊόντων επιτυγχάνεται με την βοήθεια της τυχαίας μεταβλητής X_i ($i \geq 1$). Στο διάγραμμα ελέγχου απεικονίζεται η τιμή της στατιστικής συνάρτησης $W_i = X_i/n$ έναντι των i δειγμάτων που συλλέγονται από την παραγωγή. Τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή του διαγράμματος δίνεται στο ακόλουθο πλαίσιο.

| |
|----------------------------------|
| np διάγραμμα |
| Φάση II - Όρια ελέγχου 3σ |
| $UCL = np + 3\sqrt{np(1-p)}$ |
| $CL = np$ |
| $LCL = np - 3\sqrt{np(1-p)}$ |

1.4.3.1.2 Διαγράμματα ελέγχου Φάσης I (p άγνωστο)

Στις περιπτώσεις που το ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων είναι άγνωστο θα πρέπει να το εκτιμήσουμε από m προκαταρκτικά δείγματα μεγέθους n το καθένα.

Έστω ότι τα δείγματα αυτά είναι τα $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{im})$, $1 \leq i \leq m$. Θέτουμε

$$p_i = \frac{X_i}{n} = \frac{X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{im}}{n}$$

$$\bar{P} = \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_m}{m} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_m}{mn} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij}}{mn}$$

Προφανώς $E(\bar{P}) = p$ και επομένως έχουμε το ακόλουθο πλαίσιο:

| |
|--|
| p διάγραμμα |
| Φάση I – Όρια ελέγχου 3σ |
| $UCL = \bar{P} + 3\sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{P})}{n}}, \dots, CL = \bar{P}, \dots, LCL = \bar{P} - 3\sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{P})}{n}}$ |

Για το np διάγραμμα τα όρια ελέγχου Φάσης I και η κεντρική γραμμή του δίνονται στο ακόλουθο πλαίσιο

| |
|---|
| np διάγραμμα |
| Φάση I – Όρια ελέγχου $3\text{-}\sigma$ |
| $UCL = n\bar{P} + 3\sqrt{\bar{P}(1-\bar{P})}$ |
| $CL = n\bar{P}$ |
| $LCL = n\bar{P} - 3\sqrt{\bar{P}(1-\bar{P})}$ |

1.4.3.2 Διαγράμματα ελέγχου Shewhart για τον αριθμό και το μέσο αριθμό των ελαττωμάτων.

Στην παρούσα παράγραφο θα αναπτύξουμε την κατασκευή διαγράμματος για την παρακολούθηση του (συνολικού) αριθμού των ελαττωμάτων σε μια μονάδα επιθεώρησης και για το μέσο αριθμό ελαττωμάτων ανά μονάδα επιθεώρησης. Η βασική υπόθεση που θα κάνουμε είναι ότι ο (συνολικός) αριθμός ελαττωμάτων

(πιθανόν διαφορετικών τύπων) σε μια μονάδα επιθεώρησης ακολουθεί την κατανομή **Poisson**. Επιπλέον απαιτείται οι μονάδες επιθεώρησης να είναι ίδιες.

1.4.3.2.1 Διαγράμματα ελέγχου φάσης II (c γνωστό).

Ας υποθέσουμε ότι ο αριθμός X των ελαττωμάτων που εμφανίζονται σε μια μονάδα επιθεώρησης ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο c . Έτσι μπορούμε να αναπτύξουμε ένα διάγραμμα ελέγχου για την παρακολούθηση του αριθμού των ελαττωμάτων των μονάδων επιθεώρησης στο οποίο θα απεικονίζεται η τιμή της $W_i = X_i$ στις διάφορες μονάδες επιθεώρησης που επιλέγουμε από την παραγωγή. Τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή του διαγράμματος συνοψίζονται στο ακόλουθο πλαίσιο.

| |
|--|
| c διάγραμμα |
| Φάση II – Όρια ελέγχου 3σ |
| $UCL = c + 3\sqrt{c}$ $CL = c$ $LCL = c - 3\sqrt{c}$ |

Τώρα, ας θεωρήσουμε ότι από την παραγωγή επιλέγουμε ανεξάρτητα τυχαία δείγματα μεγέθους n μονάδων το καθένα και ας συμβολίσουμε με X_{ij} ($i \geq 1$, $1 \leq j \leq n$) την τυχαία μεταβλητή που δηλώνει τον αριθμό ελαττωμάτων της αντίστοιχης μονάδας επιθεώρησης. Για την τυχαία μεταβλητή X_{ij} έχουμε ότι $X_{ij} \sim P(c)$, ενώ για την τυχαία μεταβλητή $X_i = X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{in}$ που δηλώνει το συνολικό αριθμό των ελαττωμάτων στο i δείγμα έχουμε ότι $X_i \sim P(nc)$.

Για την τυχαία μεταβλητή $U_i = X_i / n$ που δηλώνει το μέσο αριθμό των ελαττωμάτων ανά μονάδα επιθεώρησης στο i δείγμα έχουμε ότι

$$\mu_{U_i} = c, \quad \sigma_{U_i}^2 = \frac{c}{n}.$$

Επομένως μπορούμε να αναπτύξουμε ένα διάγραμμα ελέγχου για την παρακολούθηση του μέσου αριθμού των ελαττωμάτων ανά μονάδα επιθεώρησης σε κάθε δείγμα στο οποίο θα απεικονίζεται η τιμή της $U_i = X_i / n$ στα διάφορα δείγματα

που επιλέγουμε από την παραγωγή. Τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή του διαγράμματος ελέγχου συνοψίζονται ακόλουθο πλαίσιο

| |
|--|
| u διάγραμμα |
| Φάση II – Όρια ελέγχου 3σ |
| $UCL = c + 3\sqrt{\frac{c}{n}}$ $CL = c$ $LCL = c - 3\sqrt{\frac{c}{n}}$ |

1.4.3.2.2 Διαγράμματα ελέγχου Φάσης I (c άγνωστο)

Όσον αφορά το c διάγραμμα, όταν η παράμετρος c της κατανομής Poisson είναι άγνωστη, τότε θα πρέπει να εκτιμηθεί από τις πληροφορίες που θα μας δώσουν m προκαταρκτικές μονάδες επιθεώρησης. Ας συμβολίσουμε με X_i τον αριθμό των ελαττωμάτων της i μονάδας επιθεώρησης ($1 \leq i \leq m$). Θέτοντας

$$\bar{C} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_m}{m}$$

έχουμε ότι $E(\bar{C}) = c$. Η ποσότητα \bar{C} χρησιμοποιείται ως εκτίμηση της ποσότητας c , δηλαδή $\hat{c} = \bar{C}$. Επομένως τα όρια ελέγχου φάσης I και η κεντρική γραμμή του διαγράμματος δίνεται στο ακόλουθο πλαίσιο.

| |
|--|
| c διάγραμμα |
| Φάση I – Όρια ελέγχου 3σ |
| $UCL = \bar{C} + 3\sqrt{\bar{C}} \quad CL = \bar{C} \quad LCL = \bar{C} - 3\sqrt{\bar{C}}$ |

Στην περίπτωση του u διαγράμματος η παράμετρος c της κατανομής Poisson θα εκτιμηθεί από τις πληροφορίες που θα μας δώσουν m ανεξάρτητα προκαταρκτικά δείγματα μεγέθους n μονάδων επιθεώρησης το καθένα, έστω τα $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$, $1 \leq i \leq m$. Θέτουμε

$$U_i = \frac{X_i}{n} = \frac{X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{im}}{n}, \quad 1 \leq i \leq m,$$

$$\bar{U} = \frac{U_1 + U_2 + \dots + U_m}{m} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_m}{mn} = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m X_{ij}}{mn}.$$

Τότε $E(\bar{U}) = c$ και επομένως η ποσότητα \bar{U} χρησιμοποιείται ως εκτίμηση της ποσότητας c , δηλαδή $\hat{c} = \bar{U}$. Επομένως τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή του διαγράμματος δίνονται στο ακόλουθο πλαίσιο.

| |
|---|
| u διάγραμμα |
| Φάση I – Όρια ελέγχου 3σ |
| $UCL = \bar{U} + 3\sqrt{\frac{\bar{U}}{n}}$ |
| $CL = \bar{U}$ |
| $LCL = \bar{U} - 3\sqrt{\frac{\bar{U}}{n}}$ |

1.5 Διαγράμματα ελέγχου με μνήμη

Στα διαγράμματα ελέγχου Shewhart απεικονίζονται τιμές που βασίζονται στις μετρήσεις κάθε δείγματος χωρίς να λαμβάνουν υπόψη τους μετρήσεις από προηγούμενα δείγματα. Για το λόγο αυτό τα διαγράμματα ελέγχου Shewhart χαρακτηρίζονται ως διαγράμματα ελέγχου χωρίς μνήμη (control charts without memory). Τα διαγράμματα ελέγχου Shewhart είναι πολύ χρήσιμα στην ανίχνευση μετατοπίσεων του μέσου για τιμές μεγαλύτερες του 1.5σ .

Μια άλλη κατηγορία διαγραμμάτων είναι τα διαγράμματα ελέγχου με μνήμη (control charts with memory). Στην κατηγορία αυτή ανήκουν τα διαγράμματα ελέγχου τύπου CUSUM, τα διαγράμματα ελέγχου τύπου EWMA, και τα διαγράμματα ελέγχου κινούμενου μέσου (MA) με τα οποία και θα ασχοληθούμε εκτενώς στην συγκεκριμένη εργασία. Τα διαγράμματα ελέγχου με μνήμη χρησιμοποιούνται κυρίως στην Φάση II, όταν δηλαδή θέλουμε να παρακολουθούμε συνεχώς την συμπεριφορά

ενός χαρακτηριστικού μιας παραγωγικής διεργασίας, του οποίου οι παράμετροι είναι ήδη γνωστές ή έχουν εκτιμηθεί σε προηγούμενο στάδιο.

Τα διαγράμματα ελέγχου με μνήμη, ονομάζονται έτσι διότι ο σχεδιασμός ενός σημείου στο διάγραμμα ελέγχου βασίζεται σε πληροφορίες που δίνει όχι μόνο το πρόσφατο δείγμα αλλά και προγενέστερα δείγματα. Τα διαγράμματα αυτά εμφανίζουν πολύ καλές ιδιότητες στην απόδοση τους όσον αφορά την παρακολούθηση της παραγωγικής διεργασίας, κυρίως λόγω του ότι ανιχνεύουν γρηγορότερα πολύ μικρές μετατοπίσεις. Στη συνέχεια δίνεται το βασικό πλαίσιο που διέπει τη στατιστική συνάρτηση που απεικονίζεται στα διαγράμματα ελέγχου με μνήμη.

Ας θεωρήσουμε μια παραγωγική διεργασία από την οποία λαμβάνονται τυχαία δείγματα $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots$ της μορφής

$$\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in}), \quad i \geq 1.$$

Ας υποθέσουμε ότι σε κάθε τυχαίο δείγμα αντιστοιχείται η στατιστική συνάρτηση $g(\mathbf{X}_i)$. Τότε στο διάγραμμα ελέγχου με μνήμη απεικονίζονται τα σημεία (t, Y_t) , όπου η γραμμική στατιστική συνάρτηση $Y_t, t \geq 0$, δίνεται από τη σχέση

$$Y_0 = a_0,$$

$$Y_1 = a_1 + b_1^{(1)} g(\mathbf{X}_1),$$

$$Y_2 = a_2 + b_1^{(2)} g(\mathbf{X}_1) + b_2^{(2)} g(\mathbf{X}_2),$$

⋮

$$Y_t = a_t + \sum_{i=1}^t b_i^{(t)} g(\mathbf{X}_i) = a_t + b_1^{(t)} g(\mathbf{X}_1) + b_2^{(t)} g(\mathbf{X}_2) + \dots + b_t^{(t)} g(\mathbf{X}_t)$$

⋮

(σχέση 1.5)

1.5.1 Αθροιστικά διαγράμματα ελέγχου (CUSUM)

Στα διαγράμματα ελέγχου τύπου CUSUM με βάση τη σχέση 1.5 στην προηγούμενη παράγραφο απεικονίζεται η στατιστική συνάρτηση

$$Y_t = \sum_{i=1}^t [g(\mathbf{X}_i) - Y_0] = [g(\mathbf{X}_t) - Y_0] + Y_{t-1} = -tY_0 + \sum_{i=1}^t g(\mathbf{X}_i)$$

όπου Y_0 είναι μια τιμή στόχος. Συνεπώς

$$a_t = -tY_0, \quad b_i^{(t)} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, t.$$

Ειδικότερα, ας θεωρήσουμε ότι έχουμε μια διεργασία με εντός ελέγχου μέσο μ_0 και τυπική απόκλιση σ . Έστω ότι από τη διεργασία λαμβάνονται μεμονωμένες παρατηρήσεις της τυχαίας μεταβλητής X_t , $t \geq 1$ και μας ενδιαφέρει να ανιχνεύσουμε μετατοπίσεις του μέσου της διεργασίας της μορφής $\mu_1 = \mu_0 \pm \delta\sigma$ ($\delta > 0$). Στα δίπλευρα διαγράμματα CUSUM (Page (1954)) απεικονίζονται ταυτόχρονα οι δυο ακόλουθες συναρτήσεις

$$S_t^+ = \max[0, X_t - (\mu_0 + K) + S_{t-1}^+], \quad S_0^+ = 0,$$

$$S_t^- = \min[0, X_t - (\mu_0 - K) + S_{t-1}^-], \quad S_0^- = 0.$$

Οι τιμές των ποσοτήτων S_0^+ και S_0^- ονομάζονται τιμές εκκίνησης (headstart values).

Η ποσότητα K ονομάζεται **τιμή αναφοράς** (reference value) και συνήθως δίνεται από τη σχέση

$$K = \frac{\sigma\delta}{2} = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{2} = k\sigma, \quad k = \delta/2$$

Η ποσότητα S_t^+ μπορεί να θεωρηθεί κατάλληλη για τον έλεγχο της υπόθεσης

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{—} \quad H_1^+ : \mu = \mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma, \quad \delta > 0$$

αφού μεγάλες (θετικές) τιμές της S_t^+ οδηγούν στην αποδοχή της υπόθεσης H_1^+ .

Ανάλογα, η ποσότητα S_t^- μπορεί να θεωρηθεί κατάλληλη για τον έλεγχο της υπόθεσης

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{---} \quad H_1^- : \mu = \mu_1 = \mu_0 - \delta\sigma, \quad \delta > 0$$

αφού (μικρές) αρνητικές τιμές της S_t^- οδηγούν στην αποδοχή της υπόθεσης H_1^- .

Για το ποια από τις δύο εναλλακτικές υποθέσεις H_1^+ και H_1^- θα αποδεχθούμε ή όχι σε κάθε βήμα της διαδικασίας η απόφασή μας θα εξαρτηθεί από το αν ισχύει $S_t^+ > H$ ή $S_t^- < -H$, όπου H μια θετική σταθερά που συνήθως δίνεται από τη σχέση

$$H = h\sigma$$

και ονομάζεται **διάστημα απόφασης** (*decision interval H*). Στην πράξη έχουμε ότι $H = 4 \cdot \sigma$ ή $H = 5 \cdot \sigma$. Φυσικά αν μια από τις δύο εναλλακτικές υποθέσεις H_1^+ , H_1^- γίνει αποδεκτή τότε θεωρούμε ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου λόγω μετατόπισης του μέσου της διεργασίας

Για την επίδειξη του διαγράμματος ελέγχου τύπου CUSUM θα χρησιμοποιήσουμε 30 παρατηρήσεις από την κανονική κατανομή (βλ. Montgomery (2005)), οι πρώτες 20 παρατηρήσεις ακολουθούν την κατανομή $N(10,1)$, ενώ οι τελευταίες 10 παρατηρήσεις προέρχονται από την κατανομή $N(11,1)$.

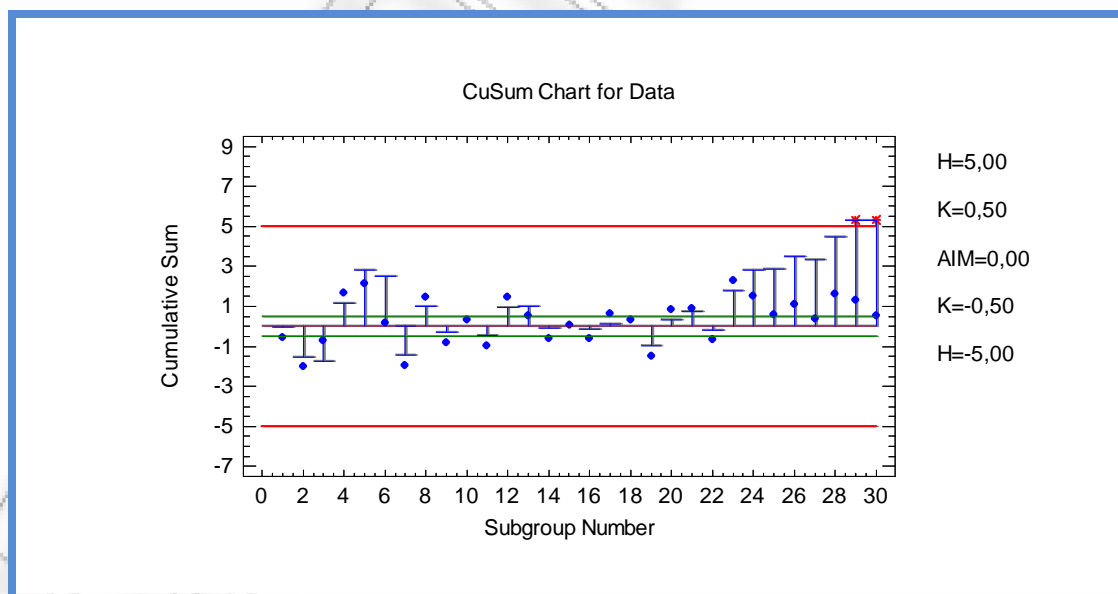
Στον ακόλουθο πίνακα δίνονται τα δεδομένα αυτά και τα αποτελέσματα για τις ποσότητες S_t^+ και S_t^- για $K = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{2} = \frac{|10 - 12|}{2} = 0.5$ (επίσης $k=0.5$ και $h=5$).

Πίνακας 1.2. Δεδομένα για επίδειξη διαγράμματος ελέγχου CUSUM
($K = 0.5$ και $H = 5$)

| Δείγμα | X_t | $X_t - (\mu_0 + K)$ | S_t^+ | $X_t - (\mu_0 - K)$ | S_t^- |
|--------|-------|---------------------|---------|---------------------|---------|
| 1 | 9.45 | -1.05 | 0 | -0.05 | -0.05 |
| 2 | 7.99 | -2.51 | 0 | -1.51 | -1.56 |
| 3 | 9.29 | -1.21 | 0 | -0.21 | -1.77 |
| 4 | 11.66 | 1.16 | 1.16 | 2.16 | 0 |
| 5 | 12.16 | 1.66 | 2.82 | 2.66 | 0 |
| 6 | 10.18 | -0.32 | 2.5 | 0.68 | 0 |
| 7 | 8.04 | -2.46 | 0.04 | -1.46 | -1.46 |
| 8 | 11.46 | 0.96 | 1 | 1.96 | 0 |
| 9 | 9.2 | -1.3 | 0 | -0.3 | -0.3 |
| 10 | 10.34 | -0.16 | 0 | 0.84 | 0 |
| 11 | 9.03 | -1.47 | 0 | -0.47 | -0.47 |

| | | | | | |
|----|-------|-------|------|-------|-------|
| 12 | 11.47 | 0.97 | 0.97 | 1.97 | 0 |
| 13 | 10.51 | 0.01 | 0.98 | 1.01 | 0 |
| 14 | 9.4 | -1.1 | 0 | -0.1 | -0.1 |
| 15 | 10.08 | -0.42 | 0 | 0.58 | 0 |
| 16 | 9.37 | -1.13 | 0 | -0.13 | -0.13 |
| 17 | 10.62 | 0.12 | 0.12 | 1.12 | 0 |
| 18 | 10.31 | -0.19 | 0 | 0.81 | 0 |
| 19 | 8.52 | -1.98 | 0 | -0.98 | -0.98 |
| 20 | 10.84 | 0.34 | 0.34 | 1.34 | 0 |
| 21 | 10.9 | 0.4 | 0.74 | 1.4 | 0 |
| 22 | 9.33 | -1.17 | 0 | -0.17 | -0.17 |
| 23 | 12.29 | 1.79 | 1.79 | 2.79 | 0 |
| 24 | 11.5 | 1 | 2.79 | 2 | 0 |
| 25 | 10.6 | 0.1 | 2.89 | 1.1 | 0 |
| 26 | 11.08 | 0.58 | 3.47 | 1.58 | 0 |
| 27 | 10.38 | -0.12 | 3.35 | 0.88 | 0 |
| 28 | 11.62 | 1.12 | 4.47 | 2.12 | 0 |
| 29 | 11.31 | 0.81 | 5.28 | 1.81 | 0 |
| 30 | 10.52 | 0.02 | 5.3 | 1.02 | 0 |

Το διάγραμμα ελέγχου CUSUM (με το στατιστικό πακέτο Statgraphics) δίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Σχήμα 1.3. Διάγραμμα ελέγχου CUSUM για τα δεδομένα του Πίνακα 1.2

Από το παραπάνω διάγραμμα προκύπτει ότι $S_{29}^+ > 5$ και συνεπώς η διεργασία είναι εκτός ελέγχου λόγω μετατόπισης του μέσου διεργασίας σε υψηλότερο επίπεδο.

Στις περιπτώσεις που το μέγεθος δείγματος $n > 1$ χρησιμοποιούμε την μέση τιμή του δείγματος, δηλαδή η ποσότητα X_t θα πρέπει να αντικατασταθεί με την ποσότητα \bar{X}_t (το μέσο του t δείγματος) και η ποσότητα σ με την ποσότητα σ/\sqrt{n} . Έτσι στο δίπλευρο συμμετρικό διάγραμμα τύπου CUSUM απεικονίζονται οι συναρτήσεις

$$S_t^+ = \max[0, \bar{X}_t - (\mu_0 + K) + S_{t-1}^+], \quad S_0^+ = 0,$$

$$S_t^- = \min[0, \bar{X}_t - (\mu_0 - K) + S_{t-1}^-], \quad S_0^- = 0$$

όπου

$$K = k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad H = h \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

1.5.2 Διαγράμματα ελέγχου τύπου EWMA

Στα διαγράμματα ελέγχου τύπου EWMA με βάση τη σχέση 1.5 απεικονίζεται η στατιστική συνάρτηση

$$Y_t = (1 - \lambda)Y_{t-1} + \lambda g(\mathbf{X}_t) = \dots = (1 - \lambda)^t Y_0 + \lambda \sum_{i=1}^t (1 - \lambda)^{t-i} g(\mathbf{X}_i), \quad 0 < \lambda \leq 1,$$

όπου Y_0 είναι μια τιμή στόχος. Συνεπώς

$$a_t = (1 - \lambda)^t Y_0, \quad b_i^{(t)} = \lambda(1 - \lambda)^{t-i}, \quad i = 1, 2, \dots, t.$$

Τα διαγράμματα ελέγχου τύπου EWMA, εισήχθησαν για πρώτη φορά από τον Roberts (βλ. (Roberts (1959,1966)), έχουν **μη περιορισμένη και μη ομοιόμορφη μνήμη** αφού λαμβάνουν πληροφορίες από όλα τα προηγούμενα δείγματα και το καθένα από αυτά έχει διαφορετική βαρύτητα.

Ειδικότερα η συνάρτηση $g(\mathbf{X}_t)$ για **μεμονωμένες** παρατηρήσεις είναι συνήθως η ταυτοτική συνάρτηση οπότε σε αυτή την περίπτωση απεικονίζεται στο διάγραμμα η ποσότητα

$$Z_t = (1 - \lambda)Z_{t-1} + \lambda X_t, \quad 0 < \lambda \leq 1.$$

Για μια διεργασία με εντός ελέγχου μέσο μ_0 και διακύμανση σ^2 έχουμε συνήθως ότι $Z_0 = \mu_0$. Τότε

$$Z_t = (1-\lambda)Z_{t-1} + \lambda X_t = (1-\lambda)^t Z_0 + \lambda \sum_{i=1}^t (1-\lambda)^{t-i} X_i..$$

Για το μέσο και τη διακύμανση της στατιστικής συνάρτησης Z_t έχουμε ότι ($Z_0 = \mu_0$)

$$\mu_{Z_t} = \mu_0, \quad \sigma_{Z_t}^2 = \sigma^2 \left(\frac{\lambda}{2-\lambda} \right) [1 - (1-\lambda)^{2t}].$$

Συνεπώς η κατασκευή ενός διαγράμματος ελέγχου για το μέσο της διεργασίας θα μπορούσε να βασιστεί στην ποσότητα Z_t . Στο διάγραμμα ελέγχου τύπου *EWMA* θα απεικονίζεται η τιμή της στατιστικής συνάρτησης Z_t , τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή δίνονται στο ακόλουθο πλαίσιο

| Όρια ελέγχου διάγραμμα <i>EWMA</i> |
|---|
| $UCL = \mu_{Z_t} + L\sigma_{Z_t} = \mu_0 + L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} (1 - (1-\lambda)^{2t})}$ |
| $CL = \mu_{Z_t} = \mu_0$ |
| $LCL = \mu_{Z_t} - L\sigma_{Z_t} = \mu_0 - L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} (1 - (1-\lambda)^{2t})}$ |

Αν και η μέθοδος των διαγραμμάτων *EWMA* αναπτύχθηκε για μεμονωμένες παρατηρήσεις μπορεί να τροποποιηθεί άμεσα έτσι ώστε να καλύψει και την περίπτωση όπου έχουμε δείγματα μεγέθους $n > 1$. Σε αυτή την περίπτωση η ποσότητα X_t θα πρέπει να αντικατασταθεί με την ποσότητα \bar{X}_t (δηλαδή με το μέσο του t δείγματος) και η ποσότητα σ με την ποσότητα σ/\sqrt{n} . Συνεπώς στο διάγραμμα ελέγχου απεικονίζεται η ποσότητα

$$Z_t = (1-\lambda)Z_{t-1} + \lambda \bar{X}_t, \quad 0 < \lambda \leq 1$$

με όρια ελέγχου και κεντρική γραμμή που δίνονται στο επόμενο πλαίσιο

Όρια ελέγχου διαγράμματος EWMA για $n > 1$

$$UCL = \mu_{Z_t} + L\sigma_{Z_t} = \mu_0 + L \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} (1 - (1-\lambda)^{2t})},$$

$$CL = \mu_{Z_t} = \mu_0,$$

$$LCL = \mu_{Z_t} - L\sigma_{Z_t} = \mu_0 - L \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} (1 - (1-\lambda)^{2t})}$$

Τα διαγράμματα ελέγχου τύπου EWMA χρησιμοποιούνται, όπως και τα διαγράμματα ελέγχου τύπου CUSUM, όταν θέλουμε να εντοπίσουμε μικρές μετατοπίσεις του μέσου της διεργασίας. Το πλεονέκτημα των διαγραμμάτων ελέγχου EWMA έναντι των CUSUM είναι ότι δεν είναι ευαίσθητα στην υπόθεση της κανονικότητας των παρατηρήσεων και για το λόγο αυτό είναι ιδανικά στην περίπτωση που έχουμε μεμονωμένες παρατηρήσεις.

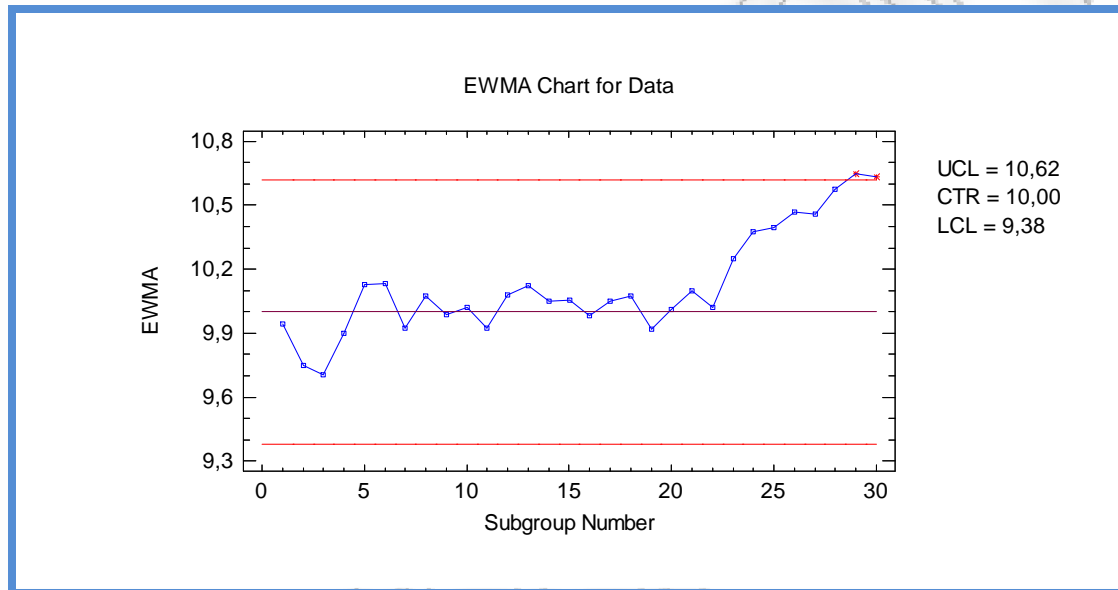
Για την επίδειξη ενός διαγράμματος EWMA θα χρησιμοποιήσουμε τα δεδομένα του Πίνακα 1.2 για τα οποία έχουμε $Z_0 = \mu_0 = 10$, $\sigma = 1$ και θέτουμε $\lambda = 0.1$ και $L = 2.7$. Στον παρακάτω πίνακα 1.5.2 δίνονται τα δεδομένα αυτά καθώς και οι τιμές Z_t που θα απεικονιστούν στο διάγραμμα EWMA.

Πίνακας 1.3. Δεδομένα για επίδειξη διαγράμματος ελέγχου EWMA
($\lambda = 0.1$ και $L = 2.7$)

| Δείγμα | X_t | Z_t | Δείγμα | X_t | Z_t |
|-----------|-------|--------|-----------|-------|---------|
| 1 | 9.45 | 9.45 | 16 | 9.37 | 9.98426 |
| 2 | 7.99 | 9.495 | 17 | 10.62 | 10.0478 |
| 3 | 9.29 | 9.0355 | 18 | 10.31 | 10.074 |
| 4 | 11.66 | 9.992 | 19 | 8.52 | 9.9186 |
| 5 | 12.16 | 10.253 | 20 | 10.84 | 10.0108 |
| 6 | 10.18 | 10.307 | 21 | 10.9 | 10.0997 |
| 7 | 8.04 | 9.2167 | 22 | 9.33 | 10.0227 |
| 8 | 11.46 | 10.755 | 23 | 12.29 | 10.2495 |
| 9 | 9.2 | 9.8796 | 24 | 11.5 | 10.3745 |
| 10 | 10.34 | 10.232 | 25 | 10.6 | 10.3971 |
| 11 | 9.03 | 9.2384 | 26 | 11.08 | 10.4654 |

| | | | | | |
|----|-------|---------|----|-------|---------|
| 12 | 11.47 | 10.9785 | 27 | 10.38 | 10.4568 |
| 13 | 10.51 | 10.1216 | 28 | 11.62 | 10.5731 |
| 14 | 9.4 | 10.0495 | 29 | 11.31 | 10.6468 |
| 15 | 10.08 | 10.0525 | 30 | 10.52 | 10.6341 |

Το EWMA διάγραμμα ελέγχου (με το στατιστικό πακέτο Statgraphics) δίνεται στο ακόλουθο σχήμα.(Σχήμα1.4)



Σχήμα 1.4. Διάγραμμα ελέγχου EWMA για τα δεδομένα του Πίνακα 1.3

1.6 Μέσο μήκος ροής στα διαγράμματα ελέγχου

Μια βασική έννοια που σχετίζεται με τα διαγράμματα ελέγχου είναι το μέσο μήκος ροής ARL (average run length). Η τυχαία μεταβλητή T που δηλώνει το πλήθος των σημείων που πρέπει να σχεδιαστούν σε ένα διάγραμμα ελέγχου έως ότου πάρουμε ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου ονομάζεται μήκος ροής (run length) του διαγράμματος. Η ποσότητα ARL δηλώνει τον αναμενόμενο αριθμό των σημείων (δειγμάτων) που πρέπει να σχεδιαστούν στο διάγραμμα έως ότου λάβουμε για πρώτη ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου, δηλαδή $ARL = E(T)$. Στα διαγράμματα ελέγχου Shewhart, με απεικονιζόμενη ποσότητα την W ή οποία έχει εντός ελέγχου μέση τιμή μ , τυπική απόκλιση σ και συνάρτηση κατανομής $F_0(\cdot)$ έχουμε ότι η

πιθανότητα p_0 εμφάνισης ενός σημείου του διαγράμματος εκτός των ορίων ελέγχου είναι ίση με

$$p_0 = 1 - P(LCL \leq W \leq UCL) = 1 - F_0(\mu + L\sigma) + F_0((\mu - L\sigma) -)$$

και το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής είναι ίσο με

$$ARL_0 = \frac{1}{p_0}$$

αφού το μήκος ροής T ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με πιθανότητα επιτυχίας p_0 .

Για παράδειγμα, αν για την τυχαία μεταβλητή W είναι γνωστό ότι $W \sim N(\mu, \sigma^2)$, τότε έχουμε ότι το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής είναι ίσο με

$$ARL_0 = \frac{1}{p_0} = \frac{1}{2\Phi(-L)}$$

και για 3σ όρια ελέγχου παίρνουμε

$$ARL_0 = \frac{1}{0.0027} \cong 370.$$

Για μια διεργασία που βρίσκεται εντός ελέγχου θέλουμε να έχουμε μεγάλη τιμή για το ARL_0 έτσι ώστε να μειωθεί ο αριθμός των λανθασμένων ενδείξεων εκτός ελέγχου διεργασίας ή αλλιώς ο αριθμός των λανθασμένων συναγερωμών (false alarms).

Για μια εκτός ελέγχου διεργασία, όπου η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής W είναι ίση με $F_1(\cdot)$, έχουμε ότι η πιθανότητα p_1 εμφάνισης ενός σημείου εκτός των ορίων ελέγχου του διαγράμματος είναι ίση με

$$p_1 = 1 - P(LCL \leq W \leq UCL) = 1 - F_1(\mu + L\sigma) + F_1((\mu - L\sigma) -)$$

και το εκτός μέσο μήκος ροής είναι ίσο με

$$ARL_1 = \frac{1}{p_1}.$$

Προφανώς για μια διεργασία που βρίσκεται εκτός ελέγχου θέλουμε να έχουμε μικρή τιμή για το ARL_1 , έτσι ώστε να μειωθεί ο αριθμός των δειγμάτων (και συνεπώς ο χρόνος) που απαιτούνται για να γίνει αντιληπτό ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΑΙΑ

Κεφάλαιο 2^ο : Διαγράμματα ελέγχου κινούμενου μέσου για συνεχή χαρακτηριστικά

2.1 Εισαγωγή

Τις τελευταίες δεκαετίες αναπτύσσονται νέες τεχνικές αλλά και επεκτάσεις των ήδη διαθέσιμων διαγραμμάτων ελέγχου που στόχο έχουν την βελτιστοποίηση της απόδοσής τους στην παρακολούθηση της διεργασίας. Στο κεφάλαιο αυτό της εργασίας θα αναφερθούμε στις κυριότερες τεχνικές που έχουν αναπτυχθεί και αφορούν επεκτάσεις του διαγράμματος ελέγχου κινούμενου μέσου (*moving average control chart*) για την παρακολούθηση της μέσης τιμής και της διασποράς μιας διεργασίας. Στην διεθνή βιβλιογραφία είναι περιορισμένη η αναφορά στα διαγράμματα ελέγχου κινούμενου μέσου σε σχέση με τα υπόλοιπα διαγράμματα ελέγχου με μνήμη όπως τα CUSUM και τα EWMA.

Παρόλα αυτά τα τελευταία χρόνια κάποιοι ερευνητές μελετούν τις ιδιότητες των διαγραμμάτων ελέγχου κινούμενου μέσου και έχουν προτείνει νέες προσεγγίσεις που αφορούν τη βελτίωση της αποτελεσματικότητας των διαγραμμάτων αυτών. Στην συνέχεια της εργασίας θα παρουσιαστούν λεπτομερώς κάποιες από αυτές τις προσεγγίσεις, ενώ για περαιτέρω πληροφορίες για τα διαγράμματα ελέγχου κινούμενου μέσου ο αναγνώστης μπορεί να συμβουλευθεί τη βιβλιογραφία στο τέλος της εργασίας.

2.2 Διάγραμμα ελέγχου απλού κινούμενου μέσου (MA) για τη μέση τιμή

Με βάση την σχέση 1.5 των διαγραμμάτων ελέγχου με μνήμη που δόθηκε στην Ενότητα 1.5, στο διάγραμμα ελέγχου κινούμενου μέσου απεικονίζεται η στατιστική συνάρτηση

$$M_i = Y_i = \frac{1}{k} \sum_{r=i-k+1}^i g(\mathbf{X}_r) = \frac{g(\mathbf{X}_{i-k+1}) + g(\mathbf{X}_{i-k+2}) + \dots + g(\mathbf{X}_i)}{k}$$

που αντιστοιχεί στην περίπτωση

$$a_r = 0, \quad b_r^{(i)} = \begin{cases} k^{-1}, & r = i - k + 1, i - k + 2, \dots, i \\ 0, & r < i \end{cases}$$

Τα διαγράμματα ελέγχου κινούμενου μέσου έχουν περιορισμένη και ομοιόμορφη μνήμη αφού βασίζονται σε πληροφορίες που δίνουν τα πιο πρόσφατα k δείγματα και το καθένα από αυτά έχει την ίδια βαρύτητα $b = 1/k$.

Η συνάρτηση $g(\cdot)$ για μεμονωμένες παρατηρήσεις είναι συνήθως η ταυτοτική συνάρτηση οπότε σε αυτήν την περίπτωση απεικονίζεται στο διάγραμμα η ποσότητα

$$MA_i = \frac{X_{i-k+1} + X_{i-k+2} + \dots + X_i}{k}, \quad i \geq k.$$

Για μια διεργασία εντός ελέγχου με μέση τιμή μ_0 και διακύμανση σ^2 προκύπτει λόγω ανεξαρτησίας των παρατηρήσεων ότι

$$E(MA_i) = \mu_0, \quad V(MA_i) = \frac{1}{k^2} \sum_{r=i-k+1}^i V(X_r) = \frac{1}{k^2} \sum_{r=i-k+1}^i \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{k}.$$

Επομένως, αν θεωρήσουμε ότι η τιμή στόχος για τον μέσο της διεργασίας είναι μ_0 τότε για περιόδους $i \geq k$, η κεντρική γραμμή και τα όρια ελέγχου του διαγράμματος του κινούμενου μέσου είναι τα

$$UCL = \mu_0 + L \frac{\sigma}{\sqrt{k}}, \quad CL = \mu_0, \quad LCL = \mu_0 - L \frac{\sigma}{\sqrt{k}}$$

όπου η σ είναι η εντός ελέγχου τυπική απόκλιση και L είναι μια σταθερά και δηλώνει την απόσταση των ορίων ελέγχου από την κεντρική γραμμή σε μονάδες τυπικής απόκλισης της απεικονιζόμενης στατιστικής συνάρτησης ελέγχου. Όταν $L = 3$ τότε με βάση το πιο πάνω πλαίσιο παίρνουμε τα όρια ελέγχου *τριών σίγμα*.

Για περιόδους $i < k$, δεν έχουμε αρκετές παρατηρήσεις για να υπολογίσουμε τον πλήρη κινούμενο μέσο εύρους k , και επομένως η στατιστική συνάρτηση ορίζεται ως ο μέσος όρος των πρώτων i παρατηρήσεων, δηλαδή

$$MA_i = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_i}{i}, \quad i = 1, 2, \dots, k - 1.$$

Σε αυτή την περίπτωση τα όρια ελέγχου του διαγράμματος για το σημείο MA_i είναι προφανώς τα

$$UCL = \mu_0 + L \frac{\sigma}{\sqrt{i}}, \quad LCL = \mu_0 - L \frac{\sigma}{\sqrt{i}}$$

Η διαδικασία ελέγχου μιας διεργασίας μπορεί να περιγραφεί ως εξής:

1. Γίνεται ο υπολογισμός του νέου κινούμενου μέσου MA_i καθώς κάθε νέα παρατήρηση X_i γίνεται διαθέσιμη.
2. Στη συνέχεια απεικονίζουμε στο διάγραμμα το MA_i έναντι του i μαζί με τα άνω και κάτω όρια ελέγχου του διαγράμματος.
3. Τέλος συμπεραίνουμε ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου αν κάποιο από τα MA_i βρεθεί εκτός των ορίων ελέγχου.

Τα διαγράμματα ελέγχου μπορούν εύκολα να τροποποιηθούν έτσι ώστε να μπορούν χρησιμοποιηθούν για οποιοδήποτε σταθερό μέγεθος δείγματος n . Σε αυτήν την περίπτωση χρησιμοποιείται η στατιστική συνάρτηση

$$MA_i = \begin{cases} \frac{\bar{X}_{i-k+1} + \bar{X}_{i-k+2} + \dots + \bar{X}_i}{k}, & i \geq k \\ \frac{\bar{X}_1 + \dots + \bar{X}_i}{i}, & i < k. \end{cases}$$

Για $i \geq k$ έχουμε ότι

$$E(MA_i) = \mu_0, \quad V(MA_i) = \frac{1}{k^2} \sum_{r=i-k+1}^i V(\bar{X}_r) = \frac{1}{k^2} \sum_{r=i-k+1}^i \frac{\sigma^2}{n} = \frac{\sigma^2}{nk}.$$

Έτσι τα «σταθεροποιημένα» όρια ελέγχου ($i \geq k$) και η κεντρική γραμμή είναι τα

$$UCL = \mu_0 + L \frac{\sigma}{\sqrt{nk}}, \quad CL = \mu_0, \quad LCL = \mu_0 - L \frac{\sigma}{\sqrt{nk}}.$$

Για $i < k$ έχουμε ότι

$$E(MA_i) = \mu_0, \quad V(MA_i) = \frac{1}{i^2} \sum_{r=1}^i V(\bar{X}_r) = \frac{1}{i^2} \sum_{r=1}^i \frac{\sigma^2}{n} = \frac{\sigma^2}{ni}$$

και επομένως τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή για τα πρώτα $k-1$ σημεία του διαγράμματος είναι τα

$$UCL = \mu_0 + L \frac{\sigma}{\sqrt{ni}}, \quad CL = \mu_0, \quad LCL = \mu_0 - L \frac{\sigma}{\sqrt{ni}}.$$

Τα διαγράμματα ελέγχου κινούμενου μέσου είναι πιο αποτελεσματικά από τα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων της υπό παρακολούθηση παραμέτρου της διεργασίας. Ωστόσο δεν είναι τόσο αποτελεσματικά όσο τα διαγράμματα ελέγχου τύπου CUSUM και EWMA για αυτό και η χρήση τους είναι σχετικά περιορισμένη. Σε γενικές γραμμές το μέγεθος της μετατόπισης που ενδιαφερόμαστε να ανιχνεύσουμε σχετίζεται αντίστροφα με το εύρος k του κινούμενου μέσου, δηλαδή μικρότερες μετατοπίσεις μπορούν να ανιχνευθούν πιο αποτελεσματικά από μεγαλύτερου εύρους κινούμενους μέσους, εις βάρος ωστόσο της γρήγορης απόκρισης του διαγράμματος σε μεγάλες μετατοπίσεις.

Για να δείξουμε τον σχεδιασμό ενός διαγράμματος απλού κινούμενου μέσου για την παρακολούθηση του μέσου μιας διεργασίας θα χρησιμοποιήσουμε τα δεδομένα που χρησιμοποιήσαμε αρχικά στην ενότητα 1.5.1 (πίνακας 1.1). Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι παρατηρήσεις αυτές καθώς και οι κινούμενοι μέσοι που έχουν υπολογιστεί για εύρος $k = 5$.

Πίνακας 2.1. Δεδομένα για την επίδειξη του διαγράμματος ελέγχου απλού κινούμενου μέσου (MA chart)

| i | x_i | MA_i | i | x_i | MA_i |
|-----|-------|--------|-----|-------|--------|
| 1 | 9.45 | 9.45 | 16 | 9.37 | 10.166 |
| 2 | 7.99 | 8.72 | 17 | 10.62 | 9.996 |
| 3 | 9.29 | 8.91 | 18 | 10.31 | 9.956 |
| 4 | 11.66 | 9.5975 | 19 | 8.52 | 9.78 |
| 5 | 12.16 | 10.11 | 20 | 10.84 | 9.932 |
| 6 | 10.18 | 10.256 | 21 | 10.9 | 10.238 |
| 7 | 8.04 | 10.266 | 22 | 9.33 | 9.98 |
| 8 | 11.46 | 10.7 | 23 | 12.29 | 10.376 |
| 9 | 9.2 | 10.208 | 24 | 11.5 | 10.972 |
| 10 | 10.34 | 9.844 | 25 | 10.6 | 10.924 |
| 11 | 9.03 | 9.614 | 26 | 11.08 | 10.96 |
| 12 | 11.47 | 10.3 | 27 | 10.38 | 11.17 |
| 13 | 10.51 | 10.11 | 28 | 11.62 | 11.036 |
| 14 | 9.4 | 10.15 | 29 | 11.31 | 10.998 |
| 15 | 10.08 | 10.098 | 30 | 10.52 | 10.982 |

Θα σχεδιάσουμε προσεκτικά ένα διάγραμμα ελέγχου απλού κινούμενου μέσου για τα παραπάνω δεδομένα χρησιμοποιώντας εύρος $k=5$. Οι παρατηρήσεις x_i στον παραπάνω πίνακα είναι για περιόδους $1 \leq i \leq 30$. Η στατιστική συνάρτηση που απεικονίζεται στο διάγραμμα ελέγχου κινούμενου μέσου είναι η

$$MA_i = \frac{X_{i-4} + X_{i-3} + \dots + X_i}{5}$$

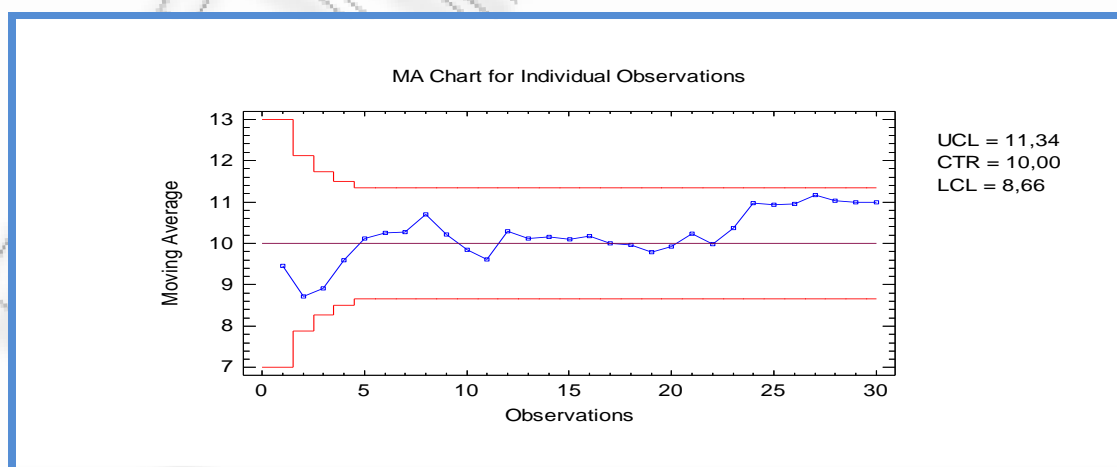
για $i \geq 5$. Τα όρια ελέγχου τριών σίγμα μπορούν εύκολα να υπολογιστούν με βάση τις σχέσεις που δώσαμε προηγουμένως, και εφόσον $\mu_0 = 10$ και $\sigma = 1.0$, παίρνουμε

$$UCL = \mu_0 + \frac{3\sigma}{\sqrt{k}} = 10 + \frac{3 * (1.0)}{\sqrt{5}} = 11.34,$$

$$LCL = \mu_0 - \frac{3\sigma}{\sqrt{k}} = 10 - \frac{3 * (1.0)}{\sqrt{5}} = 8.66.$$

Τα παραπάνω όρια για MA_i ισχύουν για περιόδους $i \geq 5$. Για περιόδους $i < 5$, η απεικονιζόμενη στατιστική συνάρτηση είναι η $MA_i = (X_1 + \dots + X_i)/i$ και τα όρια ελέγχου δίνονται από την σχέση $\mu_0 \pm 3\sigma/\sqrt{i}$ ($i=1,2,3,4$). Μια εναλλακτική προσέγγιση που αποφεύγει την χρήση ειδικών ορίων ελέγχου για τις περιόδους $i < k$, είναι η χρησιμοποίηση ενός κλασικού διαγράμματος ελέγχου Shewhart μέχρις ότου ληφθούν δείγματα από k περιόδους.

Παρακάτω δίνεται το διάγραμμα ελέγχου κινούμενου μέσου μέσω του στατιστικού πακέτου Statgraphics.



Σχήμα 2.1. Διάγραμμα ελέγχου απλού κινούμενου μέσου MA για τα δεδομένα του Πίνακα 2.1

Παρατηρούμε ότι για τα παραπάνω δεδομένα δεν υπάρχουν σημεία στο διάγραμμα που να υπερβαίνουν τα όρια ελέγχου. Παρατηρούμε ότι τα όρια ελέγχου στις αρχικές περιόδους $i < 5$, είναι πλατύτερα σε σχέση με τα σταθεροποιημένα όρια ελέγχου. Αξίζει να σημειώσουμε ότι οι ποσότητες MA_r και MA_m για $|r-m| < k$ είναι συσχετισμένες και έτσι υπάρχει αντικειμενική δυσκολία να ερμηνεύσουμε πρότυπα στο διάγραμμα ελέγχου κινούμενου μέσου.

Κλείνοντας την παρούσα παράγραφο σημειώνουμε ότι στην βιβλιογραφία δεν υπάρχει ακριβής τύπος που να δίνει τον υπολογισμό του ARL για ένα γενικό διάγραμμα ελέγχου κινούμενου μέσου. Στις περισσότερες εργασίες στην βιβλιογραφία χρησιμοποιούνται προσεγγίσεις για τον υπολογισμό του ARL οι οποίες προκύπτουν με μεθόδους προσομοίωσης. Από τις λίγες εργασίες που ασχολούνται με την μελέτη του ARL στα διαγράμματα κινούμενου μέσου δίνοντας (κυρίως άνω και κάτω φράγματα) αναφέρουμε τους Roberts (1959, 1966), Lai (1974), Böhm & Hackl (1990), Ross (1999), Zhang et al(2004)

2.3 Διάγραμμα ελέγχου διπλού κινούμενου μέσου (DMA) για τη μέση τιμή

Το διάγραμμα ελέγχου διπλού κινούμενου μέσου (double moving average control chart- DMA chart) είναι μια προσέγγιση που στόχο έχει την βελτίωση της απόδοσης του διαγράμματος ελέγχου απλού κινούμενου μέσου (MA chart). Η προσέγγιση αυτή εισήχθη από τους Khoo & Wong (2008) οι οποίοι στηρίχθηκαν σε προηγούμενη εργασία των Shamma & Shamma (1992)), και Zhang & Chen (2005)). Οι προαναφερθέντες εισήγαγαν κάποια νέα διαγράμματα ελέγχου τα διαγράμματα DEWMA (double exponentially moving average control chart), τα οποία αποτελούν μια επέκταση του διαγράμματος ελέγχου EWMA..

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια παραγωγική διεργασία εντός ελέγχου και έστω $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots$ οι δειγματικοί μέσοι των (ανεξάρτητων) δειγμάτων μεγέθους n που λαμβάνονται από τη διεργασία, δηλαδή $\bar{X}_i = (X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{in})/n$.

Όπως αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο η στατιστική συνάρτηση που δηλώνει τον κινούμενο μέσο εύρους k την χρονική περίοδο i είναι η ακόλουθη

$$MA_i = \begin{cases} \frac{\bar{X}_{i-k+1} + \bar{X}_{i-k+2} + \dots + \bar{X}_i}{k}, & i \geq k \\ \frac{\bar{X}_1 + \dots + \bar{X}_i}{i}, & i < k. \end{cases}$$

Το διάγραμμα του διπλού κινούμενου μέσου (DMA) βασίζεται στον υπολογισμό του κινούμενου μέσου των κινούμενων μέσων. Η στατιστική συνάρτηση του διπλού κινούμενου μέσου (DMA) με εύρος k την χρονική περίοδο i δίνεται από τη σχέση

$$DMA_i = \begin{cases} \frac{MA_{i-k+1} + MA_{i-k+2} + \dots + MA_i}{k}, & i \geq k \\ \frac{MA_1 + \dots + MA_i}{i}, & i < k. \end{cases}$$

Για μια διεργασία εντός ελέγχου με μέση τιμή μ_0 και διακύμανση σ^2 προκύπτει ότι ο μέσος της στατιστικής συνάρτησης DMA_i για $i \geq k$ (και ενώ η διεργασία είναι εντός ελέγχου) δίνεται από τη σχέση

$$E(DMA_i) = \frac{1}{k} E\left(\sum_{j=i-k+1}^i MA_j\right) = \frac{1}{k} (k\mu_0) = \mu_0.$$

Το ίδιο μπορεί να δειχθεί και στις περιπτώσεις που το $i < k$. Η διακύμανση της στατιστικής συνάρτησης DMA_i για $k > 2$ δίνεται (σύμφωνα με τους Khoo & Wong (2008)) από τη σχέση

$$Var(DMA_i) = \begin{cases} \frac{\sigma^2}{ni^2} \sum_{j=1}^i \frac{1}{j}, & i \leq k \\ \frac{\sigma^2}{nk^2} \left[\sum_{j=i-k+1}^{k-1} \frac{1}{j} + \frac{i-k+1}{k} \right], & k < i < 2k-1 \\ \frac{\sigma^2}{nk^2}, & i \geq 2k-1 \end{cases}$$

Σημειώνεται ότι για $k = 2$, η ποσότητα $Var(DMA_i)$ υπολογίζεται χρησιμοποιώντας μόνο την πρώτη και τρίτη γραμμή της παραπάνω εξίσωσης.

Τα όρια ελέγχου του διαγράμματος DMA για $k > 2$ είναι τα εξής:

$$UCL/LCL = \begin{cases} \mu_0 \pm \frac{L\sigma}{i\sqrt{n}} \sqrt{\sum_{j=1}^i \frac{1}{j}}, & i \leq k \\ \mu_0 \pm \frac{L\sigma}{k\sqrt{n}} \sqrt{\sum_{j=i-k+1}^{k-1} \frac{1}{j} + \frac{i-k+1}{k}}, & k < i < 2k-1 \\ \mu_0 \pm \frac{L\sigma}{k\sqrt{n}}, & i \geq 2k-1. \end{cases}$$

Τα όρια ελέγχου του διαγράμματος DMA για $k=2$ υπολογίζονται με βάση στην πρώτη και τρίτη γραμμή της παραπάνω σχέσης. Το L η σταθερά που δηλώνει την απόσταση των ορίων ελέγχου από την κεντρική γραμμή και επομένως καθορίζει τη εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής του διαγράμματος. Παρακάτω δίνονται οι τιμές του L για επιλεγμένες τιμές του εντός ελέγχου μέσου μήκους ροής για διάφορες τιμές του k που έχουν ληφθεί μέσω προσομοίωσης από τους Khoo & Wong (2008). Η κατανομή των παρατηρήσεων X_{ij} ($i \geq 1, 1 \leq j \leq n$) θεωρούμε ότι είναι η $N(\mu, \sigma^2)$. Σημειώνεται ότι οι τιμές του Πίνακα 2.2 ισχύουν ανεξαρτήτως της τιμής του μεγέθους των δειγμάτων.

Πίνακας 2.2. Τιμές του L για το DMA διάγραμμα ελέγχου για δεδομένο ARL_0 και k

| ARL ₀ | L | | | | | |
|------------------|---------|---------|---------|---------|----------|----------|
| | $k = 2$ | $k = 3$ | $k = 4$ | $k = 5$ | $k = 10$ | $k = 15$ |
| 100 | 3.064 | 3.474 | 3.778 | 4.136 | 4.836 | 5.213 |
| 150 | 3.245 | 3.695 | 4.055 | 4.444 | 5.313 | 5.776 |
| 200 | 3.361 | 3.844 | 4.238 | 4.649 | 5.668 | 6.349 |
| 250 | 3.453 | 3.959 | 4.376 | 4.805 | 5.924 | 6.638 |
| 300 | 3.528 | 4.050 | 4.491 | 4.923 | 6.125 | 7.086 |
| 350 | 3.594 | 4.131 | 4.587 | 5.029 | 6.312 | 7.442 |
| 370 | 3.616 | 4.160 | 4.623 | 5.066 | 6.337 | 7.487 |
| 400 | 3.646 | 4.187 | 4.665 | 5.121 | 6.431 | 7.728 |
| 450 | 3.691 | 4.251 | 4.727 | 5.192 | 6.553 | 7.996 |
| 500 | 3.731 | 4.303 | 4.787 | 5.256 | 6.658 | 8.038 |
| 550 | 3.770 | 4.349 | 4.837 | 5.313 | 6.755 | 8.104 |
| 600 | 3.801 | 4.389 | 4.882 | 5.364 | 6.847 | 8.332 |
| 650 | 3.831 | 4.427 | 4.930 | 5.408 | 6.930 | 8.484 |
| 700 | 3.859 | 4.459 | 4.967 | 5.451 | 7.002 | 8.639 |

| | | | | | | |
|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 750 | 3.886 | 4.495 | 5.010 | 5.491 | 7.069 | 8.683 |
| 800 | 3.908 | 4.522 | 5.041 | 5.527 | 7.118 | 8.726 |
| 850 | 3.932 | 4.551 | 5.073 | 5.564 | 7.178 | 8.779 |
| 900 | 3.949 | 4.575 | 5.102 | 5.606 | 7.233 | 8.832 |
| 950 | 3.969 | 4.601 | 5.132 | 5.639 | 7.285 | 8.891 |
| 1000 | 3.991 | 4.627 | 5.158 | 5.667 | 7.324 | 9.003 |

Εάν η μέση τιμή μ_0 και η διακύμανση σ^2 της κατανομής της διεργασίας είναι άγνωστες τότε εκτιμώνται από m προκαταρκτικά δείγματα με τη βοήθεια των γνωστών σχέσεων

$$\hat{\mu}_0 = \bar{\bar{X}} = \sum_{i=1}^m \frac{\bar{X}_i}{m}, \quad \hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2} = \frac{\sum_{i=1}^m R_i / m}{d_2} \left(\text{ή } \hat{\sigma} = \frac{\bar{S}}{c_4} = \frac{\sum_{i=1}^m S_i / m}{c_4} \right).$$

Στην περίπτωση των μεμονωμένων παρατηρήσεων, εάν οι τιμές μ_0 και σ^2 δεν είναι διαθέσιμες τότε εκτιμώνται από m προκαταρκτικές μεμονωμένες παρατηρήσεις με τη βοήθεια των γνωστών σχέσεων

$$\hat{\mu}_0 = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^m X_i}{m}, \quad \hat{\sigma} = \frac{\overline{MR}}{1.128} = \frac{\sum_{i=2}^m MR_i / (m-1)}{1.128} \left(\text{ή } \hat{\sigma} = \frac{S}{c_4} \right)$$

όπου $MR_i = |X_i - X_{i-1}|$, $i = 2, 3, \dots, m$, και $S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2}{m-1}}$ η δειγματική τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων.

Ο ακόλουθος πίνακας περιέχει τιμές του ARL του MA και του DMA διαγράμματος ελέγχου για διάφορες μετατοπίσεις δ του μέσου μιας διεργασίας που περιγράφεται από την κατανομή $N(\delta, 1)$. Για $\delta = 0$ έχουμε εντός ελέγχου διεργασία. Το ARL_0 είναι ίσο με 200 ενώ οι τιμές του ARL δίνονται για $n = 1, 5, 10$ και $k = 2, 3, 4, 5, 10, 15$. Οι τιμές στις παρενθέσεις αντιστοιχούν στο MA διάγραμμα ελέγχου.

Πίνακας 2.3. Τιμές του ARL για το DMA και το MA διάγραμμα ελέγχου
($ARL_0 = 200$)

| n | Μετατόπιση δ | $k = 2$ | $k = 3$ | $k = 4$ | $k = 5$ | $k = 10$ | $k = 15$ |
|-----|------------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| | | $L = 3.361$ | $L = 3.844$ | $L = 4.238$ | $L = 4.649$ | $L = 5.668$ | $L = 6.349$ |
| 1 | 0 | 199.8 (200.1) | 199.9 (199.9) | 199.8 (199.9) | 199.6 (200.1) | 200.1 (200.4) | 200.2 (200.3) |
| | 0.2 | 141.4 (147.4) | 128.7 (137.5) | 117.7 (128.8) | 104.4 (123.0) | 90.1 (98.0) | 71.5 (87.5) |
| | 0.4 | 72.8 (82.5) | 59.1 (69.1) | 50.7 (59.3) | 38.5 (52.7) | 34.9 (38.2) | 25.7 (32.0) |
| | 0.6 | 38.2 (44.7) | 28.3 (34.5) | 24.1 (28.4) | 17.4 (25.0) | 16.9 (18.2) | 15.5 (15.8) |
| | 0.8 | 20.7 (25.2) | 16.0 (18.6) | 14 (15.8) | 10.4 (14.1) | 13.0 (10.7) | 12.1 (9.5) |
| | 1.0 | 12.7 (15.2) | 10.1 (11.7) | 9.2 (9.8) | 7.6 (8.8) | 10.2 (7.1) | 10.7 (6.5) |
| | 1.5 | 5.2 (5.8) | 4.8 (4.7) | 4.9 (4.2) | 5.1 (4.0) | 6.8 (3.5) | 8.2 (3.3) |
| | 2.0 | 3.0 (3.0) | 3.2 (2.7) | 3.5 (2.5) | 3.9 (2.5) | 4.9 (2.3) | 6.1 (2.1) |
| 5 | 0 | 199.7 (199.5) | 199.9 (202.0) | 201.8 (201.8) | 198.2 (199.2) | 195.2 (197.9) | 199.7 (199.7) |
| | 0.2 | 61.9 (70.8) | 48.5 (57.7) | 42.0 (48.8) | 30.7 (43.7) | 29.6 (30.9) | 29.4 (26.5) |
| | 0.4 | 16.2 (19.6) | 12.5 (15.0) | 11.2 (12.4) | 8.7 (11.0) | 11.3 (8.6) | 14.2 (7.7) |
| | 0.6 | 6.5 (7.6) | 5.7 (6.0) | 5.7 (5.3) | 5.7 (4.9) | 7.5 (4.3) | 9.4 (4.0) |
| | 0.8 | 3.7 (3.9) | 3.7 (3.3) | 4.0 (3.1) | 4.4 (3.0) | 5.5 (2.7) | 6.5 (2.5) |
| | 1.0 | 2.6 (2.4) | 2.8 (2.2) | 3.1 (2.1) | 3.5 (2.1) | 4.3 (2.0) | 4.9 (1.8) |
| | 1.5 | 1.6 (1.3) | 1.8 (1.3) | 2.0 (1.3) | 2.2 (1.3) | 2.7 (1.2) | 3.0 (1.2) |
| | 2.0 | 1.1 (1.0) | 1.3 (1.0) | 1.4 (1.0) | 1.6 (1.0) | 2.0 (1.0) | 2.2 (1.0) |
| 10 | 0 | 199.6 (198.3) | 199.9 (202.4) | 198.0 (198.7) | 199.0 (199.8) | 194.7 (198.0) | 197.7 (201.1) |
| | 0.2 | 33.8 (40.4) | 22.5 (31.1) | 21.9 (25.6) | 15.4 (22.5) | 17.4 (16.3) | 19.5 (14.4) |
| | 0.4 | 7.4 (8.6) | 6.3 (6.7) | 6.1 (5.9) | 6.0 (5.5) | 8.0 (4.7) | 10.2 (4.3) |
| | 0.6 | 3.3 (3.4) | 3.4 (2.9) | 3.7 (2.8) | 4.1 (2.7) | 5.2 (2.5) | 6.0 (2.3) |
| | 0.8 | 2.2 (1.9) | 2.5 (1.8) | 2.7 (1.8) | 3.0 (1.8) | 3.7 (1.7) | 4.2 (1.6) |
| | 1.0 | 1.7 (1.4) | 1.9 (1.4) | 2.1 (1.4) | 2.3 (1.3) | 2.9 (1.3) | 3.2 (1.2) |
| | 1.5 | 1.1 (1.0) | 1.2 (1.0) | 1.3 (1.0) | 1.5 (1.0) | 1.9 (1.0) | 2.1 (1.0) |
| | 2.0 | 1.0 (1.0) | 1.0 (1.0) | 1.0 (1.0) | 1.0 (1.0) | 1.2 (1.0) | 1.5 (1.0) |

Οι τιμές του ARL στον παραπάνω πίνακα υπολογίστηκαν μέσω προσομοίωσης βασισμένοι στον μέσο όρο 5000 επαναληπτικών δοκιμών (βλ. Khoo & Wong (2008)). Με βάση τις τιμές του παραπάνω πίνακα γίνεται αντιληπτό ότι το DMA διάγραμμα έχει καλύτερη απόδοση στην περίπτωση των μεμονωμένων παρατηρήσεων σε σχέση με το MA διάγραμμα. Ειδικότερα όταν $k=3$ και $n=1$ οι τιμές του ARL είναι $\{1.28, 5.9, 28.3, 16.0\}$ για μετατόπιση $\delta \in \{0.2, 0.4, 0.6, 0.8\}$ όταν οι αντίστοιχες τιμές του ARL είναι $\{1.37, 69.10, 34.5, 18.6\}$. Για μεγάλες μετατοπίσεις το DMA διάγραμμα είναι ελαφρώς λιγότερο ευαίσθητο σε σχέση με το MA διάγραμμα, όπως $\delta \geq 1.5$.

Για ομαδοποιημένα δεδομένα το DMA διάγραμμα παραμένει πιο ευαίσθητο σε σχέση με το MA όσον αφορά τις μικρές μετατοπίσεις, αλλά για τις μέτριες μετατοπίσεις τα δυο διαγράμματα είναι σχεδόν συγκρίσιμα. Για τις μεγάλες μετατοπίσεις το MA διάγραμμα είναι ελαφρώς πιο ευαίσθητο σε σχέση με το DMA διάγραμμα. Γενικότερα και για τα δυο διαγράμματα, για το ίδιο μέγεθος μετατόπισης δ , οι τιμές του ARL_1 μειώνονται καθώς αυξάνεται η τιμή του εύρους k .

Στη συνέχεια δίνουμε ένα παράδειγμα εφαρμογής του DMA διαγράμματος ελέγχου όταν το $k=5$. Θα χρησιμοποιήσουμε τα δεδομένα του Πίνακα 2.1. Εφαρμόζοντας τον ορισμό του DMA_i προκύπτει ο παρακάτω πίνακας.

Πίνακας 2.4. Δεδομένα για την επίδειξη του διαγράμματος ελέγχου διπλού απλού κινούμενου μέσου (DMA chart)

| i | x_i | MA_i | DMA_i | i | x_i | MA_i | DMA_i |
|-----|-------|--------|---------|-----|-------|--------|---------|
| 1 | 9.45 | 9.45 | 9.45 | 16 | 9.37 | 10.166 | 10.1648 |
| 2 | 7.99 | 8.72 | 9.085 | 17 | 10.62 | 9.996 | 10.104 |
| 3 | 9.29 | 8.91 | 9.0267 | 18 | 10.31 | 9.956 | 10.0732 |
| 4 | 11.66 | 9.5975 | 9.1694 | 19 | 8.52 | 9.78 | 9.9992 |
| 5 | 12.16 | 10.11 | 9.3575 | 20 | 10.84 | 9.932 | 9.966 |
| 6 | 10.18 | 10.256 | 9.5187 | 21 | 10.9 | 10.238 | 9.9804 |
| 7 | 8.04 | 10.266 | 9.8279 | 22 | 9.33 | 9.98 | 9.9772 |
| 8 | 11.46 | 10.7 | 10.1859 | 23 | 12.29 | 10.376 | 10.0612 |
| 9 | 9.2 | 10.208 | 10.308 | 24 | 11.5 | 10.972 | 10.2996 |

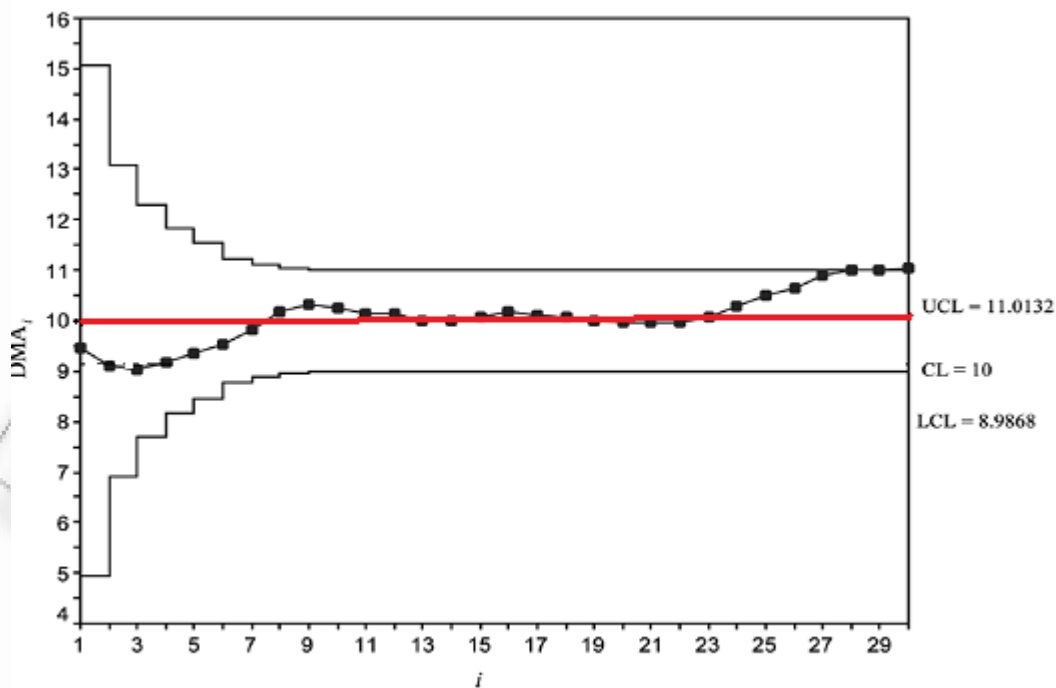
| | | | | | | | |
|----|-------|--------|---------|----|-------|--------|---------|
| 10 | 10.34 | 9.844 | 10.2548 | 25 | 10.6 | 10.924 | 10.498 |
| 11 | 9.03 | 9.614 | 10.1264 | 26 | 11.08 | 10.96 | 10.6424 |
| 12 | 11.47 | 10.3 | 10.1332 | 27 | 10.38 | 11.17 | 10.8804 |
| 13 | 10.51 | 10.11 | 10.0152 | 28 | 11.62 | 11.036 | 11.0124 |
| 14 | 9.4 | 10.15 | 10.0036 | 29 | 11.31 | 10.998 | 11.0176 |
| 15 | 10.08 | 10.098 | 10.0544 | 30 | 10.52 | 10.982 | 11.0292 |

Θα χρησιμοποιήσουμε $ARL_0 = 370$ οπότε από τον Πίνακα 2.2 προκύπτει ότι $L = 5.066$. Οι τιμές των ορίων υπολογίζονται με τους τύπου που δόθηκαν προηγουμένως και συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα (επαναλαμβάνουμε εδώ ότι $\mu_0 = 10$ και $\sigma = 1.0$).

Πίνακας 2.5. Όρια ελέγχου του διαγράμματος DMA για τα δεδομένα του Πίνακα 2.4

| i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | ≥ 9 |
|-------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|----------|
| UCL | 15.0660 | 13.1023 | 12.2865 | 11.8280 | 11.5310 | 11.2340 | 11.1022 | 11.0382 | 11.0132 |
| LCL | 4.9340 | 6.8977 | 7.7135 | 8.1720 | 8.4690 | 8.7660 | 8.8978 | 8.9618 | 8.9868 |

Στην συνέχεια δίνεται και το DMA διάγραμμα ελέγχου



Σχήμα 2.2. Διάγραμμα ελέγχου διπλού κινούμενου μέσου DMA για τα δεδομένα του Πίνακα 2.4 (Πηγή βλ. Khoo & Wong (2008))

Παρατηρούμε ότι ο 29^{05} και 30^{05} διπλός κινούμενος μέσος υπερβαίνουν το άνω όριο ελέγχου του διαγράμματος και επομένως έχουμε ένδειξη για εκτός ελέγχου διεργασία στην 29^{01} και την 30^{01} παρατήρηση.

2.4 Διάγραμμα ελέγχου κινούμενου μέσου για την από κοινού παρακολούθηση της μέσης τιμής και της διακύμανσης.

Συνήθως χρησιμοποιούνται δυο ξεχωριστά διαγράμματα ελέγχου, ένα για την παρακολούθηση της μέσης τιμής και ένα για τη διασπορά μιας διεργασίας. Ωστόσο τα τελευταία 20 χρόνια έχουν προταθεί αρκετά διαγράμματα ελέγχου για την ταυτόχρονη παρακολούθηση της μέσης τιμής και της διασποράς μιας διεργασίας. Η από κοινού παρακολούθηση της μέσης τιμής και της διακύμανσης της διεργασίας έχει μεγαλύτερη σημασία όταν και οι δυο παράμετροι μετατοπίζονται ταυτοχρόνως. Τέτοιου είδους διαγράμματα μπορούν να βρεθούν στις εργασίες των Chen et al. (2001,2004), Gan (2000), Gan et al. (2004), Zhang & Wu (2006), Costa & Rahim (2006), και Khoo & Yap (2005).

Στην παρούσα παράγραφο θα αναπτύξουμε το διάγραμμα ελέγχου κινούμενου μέσου που πρότειναν οι Khoo & Yap (2005) για την ταυτόχρονη παρακολούθηση της μέσης τιμής και της διακύμανσης μια παραγωγικής διεργασίας.

Έστω ότι οι παρατηρήσεις μας είναι της μορφής X_{ij} ($i \geq 1$, $1 \leq j \leq n_i$), δηλαδή έχουμε δείγματα μεγέθους n_i , και θεωρούμε ότι $X_{ij} \sim N(\mu + a\sigma, \beta\sigma)$. Οι τιμές $a=0$ και $\beta=1$ δηλώνουν μια διεργασία είναι εντός ελέγχου. Έστω επίσης $\bar{X}_i = (X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{in_i}) / n_i$ (ο δειγματικός μέσος του i δείγματος) και $S_i^2 = \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2 / (n_i - 1)$ (η δειγματική διακύμανση του i δείγματος). Για $i \geq 1$, ορίζουμε τις στατιστικές συναρτήσεις

$$U_i = \frac{\bar{X}_i - \mu}{\sigma / \sqrt{n_i}} \sim N(0,1)$$

$$V_i = \Phi^{-1} \left\{ H_{n_i-1} \left(\frac{(n_i-1)S_i^2}{\sigma^2} \right) \right\} \sim N(0,1)$$

όπου $\Phi(\cdot)$ και H_n η συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής κατανομής και η συνάρτηση κατανομής της χι-τετράγωνο κατανομής με n βαθμούς ελευθερίας, αντίστοιχα. Οι στατιστικές συναρτήσεις U_i και V_i είναι ανεξάρτητες διότι οι \bar{X}_i , S_i^2 είναι ανεξάρτητες. Τώρα θέτουμε

$$L_i = \begin{cases} \frac{U_{i-k+1} + U_{i-k+2} + \dots + U_i}{k}, & i \geq k \\ \frac{U_1 + \dots + U_i}{i}, & i < k \end{cases}$$

και

$$M_i = \begin{cases} \frac{V_{i-k+1} + V_{i-k+2} + \dots + V_i}{k}, & i \geq k \\ \frac{V_1 + \dots + V_i}{i}, & i < k. \end{cases}$$

Ορίζουμε την στατιστική συνάρτηση W_i

$$W_i = \max\{|L_i|, |M_i|\}, \quad i \geq 1$$

Η στατιστική συνάρτηση W_i θα παίρνει μεγάλες τιμές όταν ο μέσος της διεργασίας έχει μετατοπιστεί από την εντός ελέγχου τιμή μ και/ή όταν η διακύμανση της διεργασίας έχει αυξηθεί ή μειωθεί. Η συνάρτηση πυκνότητας της W_i για την εντός ελέγχου περίπτωση, δίνεται από τον τύπο

$$f(w) = 4\sqrt{k}\varphi(w\sqrt{k})[2\Phi(w\sqrt{k})-1], \quad w \geq 0$$

όπου $\varphi(\cdot)$ η συνάρτηση πυκνότητας της τυπικής κανονικής κατανομής. Εφόσον το W_i παίρνει μόνο μη αρνητικές τιμές, τότε το από κοινού διάγραμμα ελέγχου κινουμένου μέσου, στο οποίο απεικονίζεται το W_i , χρειάζεται μόνο άνω όριο ελέγχου UCL. Αν υποθέσουμε ότι το σφάλμα τύπου I που ορίζεται από την διοίκηση και

βασίζεται σε κάποιους προκαθορισμένους παράγοντες είναι a , τότε το άνω όριο ελέγχου UCL από τη λύση της εξίσωσης

$$\int_{UCL}^{\infty} f(w)dw = a.$$

Προτείνεται η χρήση του παραπάνω UCL ακόμα και όταν το $i < k$ για να απλοποιηθεί ο χειρισμός του διαγράμματος ελέγχου αλλά και οι σχετικοί υπολογισμοί.

Για την εφαρμογή του από κοινού διαγράμματος ελέγχου κινουμένου μέσου μπορούν να ακολουθήσουμε τα επόμενα βήματα:

1. Αν οι παράμετροι της διεργασίας είναι άγνωστοι τότε εκτιμώνται από m προκαταρκτικά δείγματα ως ακολούθως: Η μέση τιμή της διεργασίας μ εκτιμάται από το μέσο $\bar{\bar{X}}$ των δειγματικών μέσων των δειγμάτων. Η τυπική απόκλιση σ εκτιμάται με το \bar{R}/d_2 ή το \bar{S}/c_4 , όπου $\bar{R} = (R_1 + R_2 + \dots + R_m)/m$ ο μέσος των δειγματικών ευρών και $\bar{S} = (S_1 + S_2 + \dots + S_m)/m$ ο μέσος των δειγματικών τυπικών αποκλίσεων. Επίσης $d_2 = d_2(\bar{n})$ και $c_4 = c_4(\bar{n})$ όπου $\bar{n} = [(n_1 + n_2 + \dots + n_m)/m]$.
2. Υπολογίζουμε U_i, V_i, L_i, M_i και W_i για κάθε δείγμα.
3. Καθορίζουμε το άνω όριο UCL χρησιμοποιώντας την σχέση $\int_{UCL}^{\infty} f(w)dw = a$ όπου a το επιθυμητό σφάλμα τύπου Ι.
4. Όταν $W_i \leq UCL$, σχεδιάζουμε στο διάγραμμα ένα σημείο “♦” έναντι του i . Όταν $W_i > UCL$, τότε εξετάζουμε τις τιμές τα $|L_i|$ και $|M_i|$ σε σχέση με το UCL. Αν μόνο το $|L_i|$ είναι μεγαλύτερο από το UCL τότε (α) σχεδιάζουμε στο διάγραμμα το “ m^+ ” έναντι του i όταν ισχύει $U_i > 0$ για να δηλώσουμε ότι αυξήθηκε ο μέσος της διεργασίας, και (β) σχεδιάζουμε στο διάγραμμα το “ m^- ” όταν ισχύει $U_i < 0$ για να δηλώσουμε ότι μειώθηκε ο μέσος της διεργασίας. Ομοίως, αν μόνο το $|M_i|$ μεγαλύτερο από το UCL, τότε (α) σχεδιάζουμε στο διάγραμμα το “ v^+ ” έναντι του i όταν ισχύει $V_i > 0$ για να δηλώσουμε ότι αυξήθηκε η διακύμανση της διεργασίας, και (β) σχεδιάζουμε στο διάγραμμα το “ v^- ” όταν ισχύει $V_i < 0$ για να δηλώσουμε ότι μειώθηκε η διακύμανση της διεργασίας. Στην περίπτωση

που $|L_i| > UCL$ και $|M_i| > UCL$ τότε σχεδιάζουμε στο διάγραμμα “++”, “+-”, “-+”, “--”, όταν $U_i > 0$ και $V_i > 0$, $U_i > 0$ και $V_i < 0$, $U_i < 0$ και $V_i > 0$, $U_i < 0$ και $V_i < 0$, αντίστοιχα.

5. Ελέγχουμε για ειδικές αιτίες μεταβλητότητας για κάθε σημείο του διαγράμματος που δίνει σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας και προβαίνουμε σε διορθωτικές ενέργειες όταν εντοπιστούν.

Τα παραπάνω βήματα είναι σχεδόν ίδια με αυτά που πρότεινε ο Chen (2001) για το διάγραμμα MaxEWMA, που έχει σχεδιαστεί για τον ίδιο σκοπό.

Για την επίδειξη του διαγράμματος κινούμενου μέσου για την από κοινού παρακολούθηση μέσης τιμής και της διακύμανσης θα χρησιμοποιήσουμε τα δεδομένα του ακόλουθου πίνακα (Khoο & Yap (2005)). Τα δεδομένα είναι προϊόν προσομοίωσης, όπου το μέγεθος των δειγμάτων είναι $n=10$. Τα πρώτα 10 δείγματα προέρχονται από την τυπική κανονική κατανομή $N(0,1)$, ενώ τα υπόλοιπα 20 δείγματα προέρχονται από την τυπική κανονική κατανομή $N(2,1)$, δηλαδή στα 20 τελευταία δείγματα υπάρχει μια μετατόπιση 2 τυπικών αποκλίσεων στο μέσο της διεργασίας. Το άνω όριο ελέγχου UCL για $k=2$, $ARL_0=250$ (ή ισοδύναμα $\alpha=0.004$) είναι ίσο με $UCL=2.184$.

Πίνακας 2.6. Δεδομένα για την επίδειξη του από κοινού διαγράμματος ελέγχου κινούμενου μέσου για την παρακολούθηση της μέσης τιμής και της διακύμανσης

| i | X_1 | X_2 | X_3 | X_4 | X_5 | X_6 | X_7 | X_8 | X_9 | X_{10} |
|-----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|----------|
| 1 | 1.40419 | - | 0.62378 | 1.48897 | 0.45396 | 0.65258 | - | - | - | 0.53134 |
| 2 | 0.08156 | 1.33234 | 1.14637 | 0.72117 | 1.81601 | 0.91188 | 1.24454 | 0.93233 | 0.97555 | 0.73460 |
| 3 | 0.62110 | 0.93517 | 0.07999 | 1.07643 | 0.74178 | 1.23196 | 0.54332 | 0.63879 | 2.33532 | 1.55475 |
| 4 | 0.84830 | 0.82822 | 0.43123 | 1.55849 | 1.36902 | 1.27909 | 0.28323 | 0.04942 | 0.85034 | 0.88612 |
| 5 | 0.48129 | 0.17953 | 0.40607 | 0.39867 | 0.10161 | 2.05353 | 1.56319 | 1.73291 | 0.84125 | 0.39092 |
| 6 | 0.52331 | 0.09230 | 0.30874 | 0.27836 | 1.51086 | 1.63932 | 1.12956 | 0.42330 | 2.07589 | 0.79158 |
| 7 | 1.41050 | 0.85971 | 0.10043 | 0.36952 | 0.28367 | 0.18397 | 0.74651 | 0.01976 | 0.81936 | 2.24250 |
| 8 | 2.47341 | 0.86127 | 0.59129 | 232.920 | 0.86893 | 0.62951 | 0.46079 | 1.36998 | 0.11649 | 0.03326 |
| 9 | 1.08401 | 0.70485 | 0.06507 | 1.12018 | 1.22561 | 0.93494 | 0.50465 | 2.33476 | 0.00109 | 0.04823 |
| 10 | 1.73973 | 0.77292 | 0.74095 | 0.92114 | 1.37807 | 0.93036 | 0.47303 | 0.56748 | 0.01769 | 0.38999 |
| 11 | 2.58526 | 1.03315 | 1.70337 | 1.99287 | 1.35150 | 0.68870 | 0.39959 | 1.98453 | 1.22397 | 2.93195 |
| 12 | 1.33902 | 2.29539 | 1.41630 | 2.64644 | 1.40399 | 3.00406 | 1.01225 | 2.51074 | 3.47670 | 2.47811 |
| 13 | 1.60169 | 3.04521 | 1.75973 | 1.45824 | 2.96729 | 2.94259 | 2.37487 | 0.79247 | 0.79196 | 3.82282 |
| 14 | 1.67021 | 3.21573 | 1.73381 | 2.96594 | 1.11272 | 3.20001 | 2.26889 | 2.35132 | 1.08259 | 1.28056 |
| 15 | 5.22059 | 0.50911 | 2.72359 | 1.38498 | 4.08010 | 2.40928 | 1.66169 | 2.32102 | 2.35081 | 1.55245 |
| 16 | 2.84893 | 1.62393 | 1.32246 | 2.71625 | 2.02706 | 3.26422 | 1.61860 | 0.88696 | 0.96883 | 2.18407 |
| 17 | 1.08520 | 2.83776 | 1.20539 | 2.73500 | 1.32257 | 1.90864 | 3.74804 | 3.01492 | 2.27033 | 2.13530 |
| 18 | 2.48794 | 2.25904 | 1.08899 | 0.89845 | 2.44780 | 3.50502 | 3.19717 | 1.96697 | 1.54655 | 2.56612 |
| 19 | 3.15138 | 2.85929 | 1.22394 | 2.81094 | 2.56456 | 1.15132 | 0.35493 | 2.80012 | 1.97862 | 1.15483 |
| 20 | 2.67716 | 1.04951 | 2.34084 | 1.78834 | 1.48725 | 2.94217 | 3.53725 | 1.89119 | 2.89972 | 1.58912 |
| 21 | 1.87183 | 2.10675 | 0.50371 | 1.32180 | 1.74717 | 2.81819 | 3.36747 | 0.93880 | 2.68662 | 0.77521 |
| 22 | 0.52057 | 1.93663 | 2.54131 | 2.95178 | 2.32960 | 2.41533 | 0.57413 | 0.40099 | 2.22946 | 2.11635 |
| 2 | 2.34484 | 1.51283 | 1.62272 | 2.45751 | 1.58473 | 1.74360 | 1.95536 | 2.83353 | 3.70448 | 2.75166 |

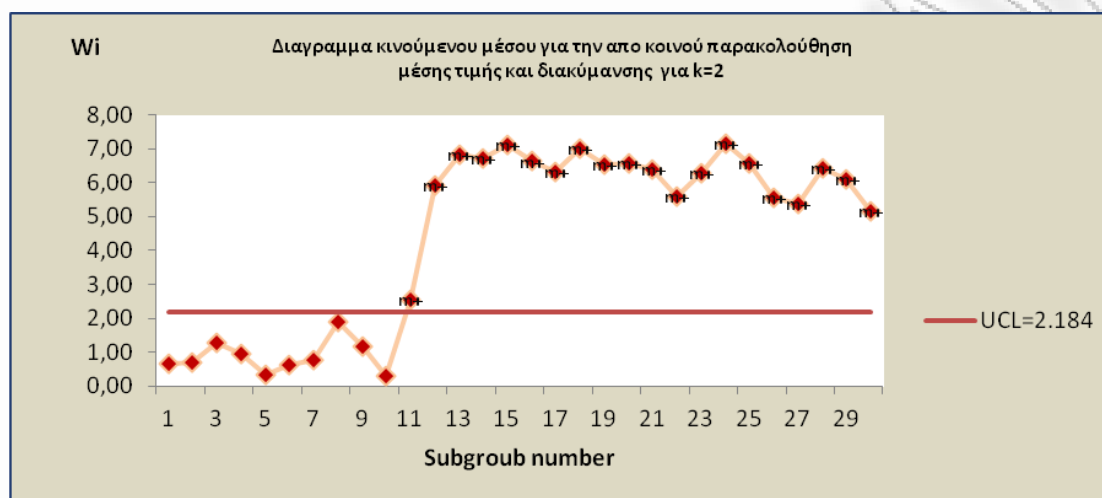
| | | | | | | | | | | |
|---|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 3 | | | | | | | | | | |
| 2 | 2.48350 | 3.29196 | 3.64117 | 1.79925 | 1.66064 | 1.56584 | 0.57378 | 1.82083 | 3.85656 | 2.02457 |
| 4 | | | | | | | | | | |
| 2 | 1.43795 | 1.73224 | 2.89960 | 2.96312 | - | 2.44656 | 1.79739 | 2.10433 | 2.48272 | 1.05954 |
| 5 | | | | | 0.16716 | | | | | |
| 2 | - | 0.84359 | 1.32637 | 3.23095 | 1.93724 | 2.12542 | 0.29865 | 2.72562 | 1.65516 | 2.51705 |
| 6 | 0.21495 | | | | | | | | | |
| 2 | 1.69968 | 2.23103 | 1.87843 | 1.22661 | 1.46368 | - | 2.07914 | 3.34640 | 0.92855 | 3.28407 |
| 7 | | | | | | 0.50423 | | | | |
| 2 | 2.40377 | 2.04421 | 2.01975 | 1.76785 | 3.08220 | 1.33693 | 1.56067 | 3.85554 | 4.66412 | 0.22054 |
| 8 | | | | | | | | | | |
| 2 | 0.22198 | 1.74976 | 2.61588 | 2.01443 | 2.14331 | 0.65864 | 0.30881 | 2.10167 | 2.33884 | 1.37348 |
| 9 | | | | | | | | | | |
| 3 | 2.21198 | 1.26033 | 0.57856 | 1.18758 | 1.36119 | 3.05481 | 1.65610 | 1.60715 | 3.38908 | 0.73112 |
| 0 | | | | | | | | | | |

Στον ακόλουθο πίνακα υπάρχουν όλοι οι απαραίτητοι υπολογισμοί για την κατασκευή του διαγράμματος.

Πίνακας 2.7. Υπολογισμοί για την κατασκευή από κοινού διαγράμματος ελέγχου

| i | \bar{X}_i | S_i | U_i | V_i | L_i | M_i | W_i |
|-----|-------------|-----------|------------|---------|------------|----------|-----------|
| 1 | 0.0923230 | 1.1194244 | 0.2919510 | 0.6523 | 0.2919510 | 0.65230 | 0.6523000 |
| 2 | 0.0162290 | 1.1378474 | 0.0513206 | 0.7270 | 0.1716358 | 0.68965 | 0.6896500 |
| 3 | -0.8275049 | 0.8313272 | -2.6168003 | -0.5760 | -1.2827398 | 0.07550 | 1.2827398 |
| 4 | 0.2296883 | 0.9771887 | 0.7263382 | 0.0612 | -0.9452310 | -0.25740 | 0.9452310 |
| 5 | -0.1371550 | 1.1022178 | -0.4337222 | 0.5820 | 0.1463080 | 0.32160 | 0.3216000 |
| 6 | 0.2362322 | 1.1184412 | 0.7470318 | 0.6483 | 0.1566548 | 0.61515 | 0.6151500 |
| 7 | 0.2536689 | 0.9777747 | 0.8021715 | 0.0637 | 0.7746017 | 0.35600 | 0.7746017 |
| 8 | 0.9434631 | 0.8811788 | 2.9834923 | -0.3539 | 1.8928319 | -0.14510 | 1.8928319 |
| 9 | -0.2095902 | 1.0840246 | -0.6627824 | 0.5075 | 1.1603549 | 0.07680 | 1.1603549 |
| 10 | 0.0213859 | 0.9706722 | 0.0676282 | 0.0336 | -0.2975771 | 0.27055 | 0.2975771 |
| 11 | 1.5894890 | 0.8064008 | 5.0264056 | -0.6890 | 2.5470169 | -0.32770 | 2.5470169 |
| 12 | 2.1583000 | 0.8192987 | 6.8251439 | -0.6305 | 5.9257747 | -0.65975 | 5.9257747 |
| 13 | 2.1556870 | 1.0308993 | 6.8168808 | 0.2874 | 6.8210124 | -0.17155 | 6.8210124 |
| 14 | 2.0881780 | 0.8363384 | 6.6033986 | -0.5537 | 6.7101397 | -0.13315 | 6.7101397 |
| 15 | 2.4213620 | 1.3644913 | 7.6570190 | 1.6192 | 7.1302088 | 0.53275 | 7.1302088 |
| 16 | 1.7687390 | 1.1773582 | 5.5932438 | 0.8860 | 6.6251314 | 125.260 | 6.6251314 |
| 17 | 2.2263150 | 0.8719388 | 7.0402262 | -0.3948 | 6.3167350 | 0.24560 | 6.3167350 |
| 18 | 2.1964050 | 0.8425369 | 6.9456425 | -0.5258 | 6.9929343 | -0.46030 | 6.9929343 |
| 19 | 1.9340070 | 1.1165443 | 6.1158671 | 0.6406 | 6.5307548 | 0.05740 | 6.5307548 |
| 20 | 2.2202550 | 0.7846952 | 7.0210628 | -0.7885 | 6.5684650 | -0.07395 | 6.5684650 |
| 21 | 1.8137550 | 0.9475597 | 5.7355969 | -0.0652 | 6.3783299 | -0.42685 | 6.3783299 |
| 22 | 1.7214170 | 1.0934516 | 5.4435985 | 0.5461 | 5.5895977 | 0.24045 | 5.5895977 |
| 23 | 2.2511260 | 0.7057275 | 7.1186855 | -1.1596 | 6.2811420 | -0.30675 | 6.2811420 |
| 24 | 2.2718100 | 1.0389712 | 7.1840940 | 0.3213 | 7.1513897 | -0.41915 | 7.1513897 |
| 25 | 1.8756290 | 0.9448816 | 5.9312597 | -0.0768 | 6.5576768 | 0.12225 | 6.5576768 |
| 26 | 1.6445100 | 1.0942076 | 5.2003972 | 0.5493 | 5.5658285 | 0.23625 | 5.5658285 |
| 27 | 1.7633360 | 1.1240346 | 5.5761580 | 0.6710 | 5.3882776 | 0.61015 | 5.3882776 |
| 28 | 2.2955580 | 1.2848084 | 7.2591918 | 1.3106 | 6.4176749 | 0.99080 | 6.4176749 |
| 29 | 1.5526800 | 0.8692349 | 4.9100053 | -0.4067 | 6.0845985 | 0.45195 | 6.0845985 |
| 30 | 1.7037900 | 0.9266464 | 5.3878571 | -0.1555 | 5.1489312 | -0.28110 | 5.1489312 |

Το διάγραμμα ελέγχου κινούμενου μέσου για την από κοινού παρακολούθηση της μέσης τιμής και της διακύμανσης της παραγωγικής διεργασίας με εύρος $k = 2$) για τα παραπάνω δεδομένα είναι το ακόλουθο,



Σχήμα 2.3. Διάγραμμα κινούμενου μέσου για την από κοινού παρακολούθηση της μέσης τιμής και της διακύμανσης

Με βάση το παραπάνω διάγραμμα ελέγχου κινούμενου μέσου παρατηρούμε ότι έχουμε ένδειξη εκτός ελέγχου για την διεργασία ήδη από το 11^ο δείγμα η οποία οφείλεται στην μετατόπιση (αύξηση) της μέσης τιμής. Όλα τα σημεία μετά το 11^ο δείγμα βρίσκονται υψηλότερα από το άνω όριο ελέγχου UCL το οποίο είναι λογικό αφού στα 20 τελευταία δείγματα υπάρχει μετατόπιση του μέσου μεγέθους 2 τυπικών αποκλίσεων.

Αναφέραμε προηγουμένως ότι το από κοινού διάγραμμα ελέγχου μέσου που πρότεινε οι Khoo και Yap (2007) βασίστηκε στο διάγραμμα ελέγχου MaxEWMA που πρότεινε οι Chen και συν. (2001) για την κοινή παρακολούθηση της μέσης τιμής και της διακύμανσης της παραγωγικής διεργασίας. Οι Khoo και Yap (2007) σύγκριναν την απόδοση του δικού τους διαγράμματος ελέγχου με το διάγραμμα ελέγχου MaxEWMA των Chen et al. (2001) για $ARL_0 = 250$ και $n = 5$. Οι τιμές ARL του παρακάτω πίνακα, που αναφέρονται στο από κοινού διάγραμμα ελέγχου των Khoo και Yap (2007), προέκυψαν με προσομοίωση.

Πίνακας 2.8. Τιμές ARL για το από κοινού διάγραμμα ελέγχου κινούμενου μέσου
($ARL_0 = 250, n = 5$)

| b | | α | | | | | | | | | |
|------|------------------|--------|--------|--------|-------|------|------|------|------|------|------|
| | | 0 | 0.10 | 0.25 | 0.50 | 0.75 | 1.00 | 1.25 | 1.50 | 2.00 | 2.50 |
| 0.25 | k=2 UCL=2.185 | 1.33 | 1.33 | 1.33 | 1.33 | 1.32 | 1.12 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |
| 0.50 | | 13.99 | 13.99 | 13.99 | 13.58 | 7.15 | 1.96 | 1.13 | 1.08 | 1.00 | 1.00 |
| 0.75 | | 142.53 | 140.45 | 123.32 | 36.19 | 6.80 | 2.27 | 1.31 | 1.07 | 1.00 | 1.00 |
| 1.00 | | 248.82 | 198.99 | 82.13 | 16.67 | 5.12 | 2.33 | 1.46 | 1.16 | 1.01 | 1.00 |
| 1.05 | | 151.90 | 128.85 | 59.91 | 14.63 | 4.87 | 2.33 | 1.49 | 1.18 | 1.01 | 1.00 |
| 1.50 | | 5.64 | 5.50 | 4.95 | 3.71 | 2.64 | 1.89 | 1.48 | 1.25 | 1.06 | 1.01 |
| 2.00 | | 1.79 | 1.78 | 1.74 | 1.65 | 1.53 | 1.39 | 1.27 | 1.18 | 1.07 | 1.02 |
| 0.25 | k=3 UCL=1.784 | 1.05 | 1.05 | 1.05 | 1.05 | 1.04 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |
| 0.50 | | 6.02 | 6.02 | 5.99 | 5.36 | 2.38 | 1.18 | 1.02 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |
| 0.75 | | 82.66 | 81.47 | 67.52 | 15.80 | 3.33 | 1.47 | 1.11 | 1.02 | 1.00 | 1.00 |
| 1.00 | | 243.56 | 182.37 | 58.80 | 10.26 | 3.28 | 1.68 | 1.22 | 1.07 | 1.00 | 1.00 |
| 1.05 | | 147.28 | 117.09 | 43.79 | 9.25 | 3.23 | 1.70 | 1.24 | 1.08 | 1.00 | 1.00 |
| 1.50 | | 4.13 | 4.06 | 3.75 | 2.82 | 2.03 | 1.55 | 1.28 | 1.14 | 1.03 | 1.00 |
| 2.00 | | 1.53 | 1.51 | 1.49 | 1.41 | 1.32 | 1.23 | 1.16 | 1.10 | 1.04 | 1.01 |
| 0.25 | w=4 UCL=1.545 | 1.01 | 1.01 | 1.01 | 1.01 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |
| 0.50 | | 3.67 | 3.66 | 3.59 | 2.94 | 1.47 | 1.06 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |
| 0.75 | | 54.13 | 52.70 | 42.92 | 9.00 | 2.23 | 1.24 | 1.05 | 1.01 | 1.00 | 1.00 |
| 1.00 | | 241.21 | 165.36 | 44.85 | 7.21 | 2.45 | 1.42 | 1.13 | 1.04 | 1.00 | 1.00 |
| 1.05 | | 140.83 | 104.03 | 34.05 | 6.60 | 2.45 | 1.44 | 1.15 | 1.04 | 1.00 | 1.00 |
| 1.50 | | 3.33 | 3.28 | 3.00 | 2.31 | 1.72 | 1.37 | 1.17 | 1.09 | 1.01 | 1.00 |
| 2.00 | | 1.34 | 1.34 | 1.32 | 1.27 | 1.21 | 1.15 | 1.11 | 1.07 | 1.02 | 1.00 |
| 0.25 | k=5 UCL=1.382 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |
| 0.50 | | 2.63 | 2.62 | 2.54 | 1.98 | 1.20 | 1.02 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |
| 0.75 | | 38.89 | 37.87 | 29.61 | 5.63 | 1.74 | 1.15 | 1.03 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |
| 1.00 | | 231.27 | 144.18 | 34.95 | 5.32 | 2.03 | 1.28 | 1.09 | 1.02 | 1.00 | 1.00 |
| 1.05 | | 133.58 | 92.33 | 27.44 | 5.00 | 2.04 | 1.29 | 1.10 | 1.03 | 1.00 | 1.00 |
| 1.50 | | 2.75 | 2.72 | 2.46 | 1.92 | 1.53 | 1.27 | 1.12 | 1.06 | 1.01 | 1.00 |
| 2.00 | | 1.24 | 1.24 | 1.23 | 1.19 | 1.15 | 1.11 | 1.08 | 1.05 | 1.01 | 1.00 |

Ο ακόλουθος πίνακας αφορά το MaxEWMA διάγραμμα ελέγχου και τον έδωσαν οι Chern et al. (2001).

Πίνακας 2.9. Τιμές ARL για το διάγραμμα ελέγχου MaxEWMA ($ARL_0 = 250, n = 5$)

| | | α | | | | | |
|--|------|----------|-------|------|------|-----|-----|
| | | b | 0.0 | 0.25 | 0.5 | 1.0 | 2.0 |
| $\lambda=0.05$ $K=2.45$ $K_1=2.61$ $K_2=2.60$ | 0.25 | 4.0 | 3.9 | 4.0 | 3.9 | 2.1 | |
| | 0.50 | 6.9 | 6.9 | 6.8 | 4.5 | 2.3 | |
| | 1.00 | 251.6 | 24.1 | 9.9 | 4.6 | 2.4 | |
| | 1.50 | 8.6 | 8.2 | 7.1 | 4.6 | 2.5 | |
| | 2.00 | 4.4 | 4.4 | 4.2 | 3.7 | 2.5 | |
| | 0.25 | 3.2 | 3.2 | 3.2 | 3.2 | 2.0 | |
| $\lambda=0.10$ $K=2.78$ $K_1=2.81$ $K_2=2.86$ | 0.50 | 5.9 | 5.9 | 5.7 | 3.7 | 2.0 | |
| | 1.00 | 251.3 | 25.0 | 8.8 | 3.9 | 2.0 | |
| | 1.50 | 7.3 | 6.9 | 5.8 | 3.7 | 2.1 | |
| | 2.00 | 3.6 | 3.6 | 3.5 | 3.0 | 2.0 | |
| | 0.25 | 2.7 | 2.7 | 2.7 | 2.7 | 2.0 | |
| $\lambda=0.20$ $K=3.03$ $K_1=2.96$ $K_2=3.14$ | 0.50 | 5.4 | 5.4 | 5.2 | 3.1 | 1.8 | |
| | 1.00 | 249.2 | 31.4 | 8.6 | 3.3 | 1.7 | |
| | 1.50 | 6.4 | 6.0 | 4.9 | 3.1 | 1.7 | |
| | 2.00 | 3.0 | 2.9 | 2.8 | 2.4 | 1.6 | |
| | 0.25 | 2.4 | 2.4 | 2.4 | 2.4 | 1.2 | |
| $\lambda=0.30$ $K=3.14$ $K_1=3.02$ $K_2=3.35$ | 0.50 | 5.7 | 5.6 | 5.4 | 2.9 | 1.3 | |
| | 1.00 | 252.6 | 40.2 | 9.4 | 3.0 | 1.4 | |
| | 1.50 | 6.3 | 5.8 | 4.6 | 2.8 | 1.5 | |
| | 2.00 | 2.7 | 2.6 | 2.5 | 2.1 | 1.4 | |
| | 0.25 | 2.3 | 2.3 | 2.3 | 2.2 | 1.0 | |
| $\lambda=0.50$ $K=3.22$ $K_1=3.07$ $K_2=3.64$ | 0.50 | 8.4 | 8.2 | 8.0 | 2.8 | 1.0 | |
| | 1.00 | 250.5 | 61.8 | 12.8 | 3.0 | 1.2 | |
| | 1.50 | 6.3 | 5.8 | 4.5 | 2.6 | 1.3 | |
| | 2.00 | 2.4 | 2.4 | 2.2 | 1.9 | 1.3 | |
| | 0.25 | 2.9 | 2.9 | 2.9 | 2.8 | 1.0 | |
| $\lambda=0.80$ $K=3.24$ $K_1=3.09$ $K_2=3.88$ | 0.50 | 26.4 | 27.0 | 26.5 | 5.1 | 1.0 | |
| | 1.00 | 251.4 | 98.9 | 24.4 | 3.6 | 1.1 | |
| | 1.50 | 7.1 | 6.5 | 4.9 | 2.6 | 1.2 | |
| | 2.00 | 2.3 | 2.3 | 2.1 | 1.8 | 1.2 | |
| | 0.25 | 6.1 | 6.1 | 6.0 | 5.9 | 1.0 | |
| $\lambda=1.00$ $K=3.25$ $K_1=3.09$ $K_2=3.95$ | 0.50 | 68.5 | 69.0 | 68.5 | 17.8 | 1.0 | |
| | 1.00 | 251.9 | 129.7 | 38.4 | 5.1 | 1.1 | |
| | 1.50 | 8.3 | 7.6 | 5.8 | 2.9 | 1.2 | |
| | 2.00 | 2.5 | 2.4 | 2.2 | 1.8 | 1.2 | |

Από τη σύγκριση των δύο πινάκων προκύπτει ότι για $k = 5$ το από κοινού διάγραμμα ελέγχου κινούμενου μέσου είναι καλύτερο από το MaxEWMA όταν $(a,b) = (0.25,1)$ και $\lambda = 0.05, 0.10$ και 0.20 . Συνολικά τα άλλα σχήματα με $k = 2, 3$ και 4 δείχνουν και αυτά καλή συμπεριφορά.

2.5 Διαγράμματα ελέγχου σταθμισμένου κινούμενου μέσου (WMA)

Μια άλλη προσέγγιση για την βελτίωση της απόδοσης του διαγράμματος ελέγχου κινούμενου μέσου πρότεινε ο Sparks (2004a). Η προσέγγιση αυτή βασίζεται στη χρήση σταθμισμένων κινούμενων μέσων και φαίνεται να έχει πλεονεκτήματα στην έγκαιρη ανίχνευση μετατοπίσεων, και ιδιαίτερα όταν το μέγεθος της μετατόπισης που θέλουμε να ανιχνεύσουμε είναι ήδη γνωστό. Το νέο αυτό διάγραμμα, που αποτελεί επέκταση (extension) του διαγράμματος του απλού κινούμενου μέσου, και είναι γνωστό ως διάγραμμα ελέγχου σταθμισμένου κινούμενου μέσου (weighted moving averages chart, WMA).

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια παραγωγική διεργασία, από την οποία λαμβάνουμε τις παρατηρήσεις y_t του χαρακτηριστικού που μελετάμε. Ας θεωρήσουμε ότι οι y_t είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν την κανονική κατανομή με μέση τιμή $E(y_t)$ και διακύμανση σ^2 , και έστω ότι η τιμή στόχος για τη μέση τιμή είναι T .

Η γενική μορφή της στατιστικής συνάρτησης που απεικονίζεται στο WMA διάγραμμα ελέγχου είναι η

$$\bar{y}_{t,k} = \frac{\sum_{j=t-k+1}^t w_j y_j}{\sum_{j=t-k+1}^t w_j}$$

όπου $w_j > 0$ για όλα τα j .

Η επιλογή των κατάλληλων βαρών w_j είναι δύσκολη και για τον λόγο αυτό ο Sparks (2004a) πρότεινε τις δύο ακόλουθες επιλογές:

1. **Βάρη ως γραμμική συνάρτηση του χρόνου:** Ας υποθέσουμε ότι $E(y_{t-k+1})=T$ για $i < 1$ και $E(y_{t-i+1})=T+(k-i+1)r\sigma$ για όλα τα $i=1,2,\dots,m$ και $r \neq 0$, τότε

$$\tilde{y}_{t,k} = \sum_{j=t-k+1}^t \frac{2(j-t+k)y_j}{k(k+1)}$$

Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε ότι $m=3$ και ότι οι τιμές y_i είναι οι -0.22 , -0.05 , -0.31 , -0.61 , -1.58 , 1.38 , 1.71 . Τότε, για $k=3$ οι πρώτοι σταθμισμένοι κινούμενοι μέσοι είναι οι εξής:

$$\tilde{y}_{3,3} = \frac{2 \times [1 \times (-0.22) + 2 \times (-0.05) + 3 \times (-0.31)]}{[3 \times 4]} = -0.208$$

$$\tilde{y}_{4,3} = \frac{2 \times [1 \times (-0.05) + 2 \times (-0.31) + 3 \times (-0.61)]}{[3 \times 4]} = -0.417.$$

Οι τιμές των επόμενων σταθμισμένων κινούμενων μέσων είναι οι -1.045 , 0.062 , 1.052 . Το διάγραμμα WMA ελέγχει την μνήμη μεταβάλλοντας την τιμή του k , όπου μικρές τιμές του k δίνουν λιγότερη μνήμη στις παρελθοντικές παρατηρήσεις.

2. **Βάρη ως εκθετική συνάρτηση του χρόνου:** Ο Sparks (2004a) πρότεινε την ακόλουθη στατιστική συνάρτηση

$$\tilde{y}_{t,k,\lambda} = \sum_{j=t-k+1}^t \frac{(1-\lambda)\lambda^{t-j}y_j}{1-\lambda^k}.$$

Για παράδειγμα έστω ότι έχουμε $\lambda=0.8$, $k=3$ και οι τιμές των y_i είναι οι -0.22 , -0.05 , -0.31 , -0.61 . Τότε οι πρώτοι δυο εκθετικοί σταθμισμένοι κινούμενοι μέσοι είναι οι

$$\tilde{y}_{3,3,0.8} = \frac{0.8^3 \times (-0.22) + 0.8^2 \times (-0.05) + 0.8 \times (-0.31)}{0.8 + 0.8^2 + 0.8^3} = -0.201$$

$$\tilde{y}_{4,3,0.8} = \frac{0.8^3 \times (-0.05) + 0.8^2 \times (-0.31) + 0.8 \times (-0.61)}{0.8 + 0.8^2 + 0.8^3} = -0.365.$$

Για τη λήψη σήματος εκτός ελέγχου διεργασίας ο Sparks (2004a) πρότεινε τα ακόλουθα:

1. **WMA με γραμμικές σταθμίσεις:** Για μια κατάλληλη σταθερά $h_k > 0$, ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας λαμβάνεται όταν

$$\tilde{y}_{t,k} > \mu + \sigma \times h_k \sqrt{(2k+1)/(3k(k+1))}$$

ή

$$\tilde{y}_{t,k} < \mu - \sigma \times h_k \sqrt{(2k+1)/(3k(k+1))}$$

2. **WMA με εκθετικές σταθμίσεις:** Για μια κατάλληλη σταθερά $h_{k,\lambda} > 0$, ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας λαμβάνεται όταν

$$\tilde{y}_{t,k,\lambda} > \mu + \sigma \times h_{k,\lambda} \sqrt{(1-\lambda^{2k})/(1-\lambda^2)}$$

ή

$$\tilde{y}_{t,k,\lambda} < \mu - \sigma \times h_{k,\lambda} \sqrt{(1-\lambda^{2k})/(1-\lambda^2)}$$

Οι τιμές των σταθερών h_k και $h_{k,\lambda}$ καθορίζονται με τέτοιο τρόπο ώστε να επιτυγχάνουμε συγκεκριμένο ARL_0 .

Ο Sparks (2004a) σύγκρινε την απόδοση του WMA διαγράμματος ελέγχου με τα διαγράμματα ελέγχου CUSUM και EWMA μέσω προσομοίωσης

Στους δύο πίνακες που ακολουθούν δίνονται τα αποτελέσματα από τέσσερα WMA διαγράμματα με τα αντίστοιχα βέλτιστα CUSUM και EWMA διαγράμματα ελέγχου για ανίχνευση μετατοπίσεων του μέσου κατά δ τυπικές αποκλίσεις για εντός ελέγχου ARL ίσο με 100 και 400. Ειδικότερα:

1. **Εντός ελέγχου $ARL=100$:** Τέσσερα WMA διαγράμματα, δύο με εκθετικές και δύο με γραμμικές σταθμίσεις, συγκρίνονται με το διάγραμμα CUSUM με $k=0.5$ και το EWMA με $\lambda=0.20$ (τα διαγράμματα σχεδιάστηκαν έτσι ώστε να είναι βέλτιστα για μετατόπιση μιας τυπικής απόκλισης). Παρατηρούμε ότι το διάγραμμα 2 έχει το μικρότερο ARL από τα διαγράμματα 1 έως 6 για μετατοπίσεις μεγαλύτερες της μιας τυπικής απόκλισης, ενώ το διάγραμμα 1 έχει το μικρότερο ARL για μετατόπιση μιας τυπικής απόκλισης.

2. Εντός ελέγχου $ARL=400$: Τέσσερα διαγράμματα WMA, δύο με εκθετικές και δύο με γραμμικές σταθμίσεις, συγκρίνονται με το διάγραμμα CUSUM με $k = 0.5$ και το EWMA με $\lambda = 0.15$ (τα διαγράμματα σχεδιάστηκαν έτσι ώστε να είναι βέλτιστα για μετατόπιση μιας τυπικής απόκλισης). Παρατηρούμε ότι και εδώ τα διαγράμματα WMA είναι συγκρίσιμα με το CUSUM και το EWMA. Το διάγραμμα 7 έχει το μικρότερο ARL από τα διαγράμματα 7 έως 12 για μετατοπίσεις μεγαλύτερες της μιας τυπικής απόκλισης, ενώ το διάγραμμα 8 έχει το μικρότερο ARL για μετατόπιση ίση με μια τυπική απόκλιση.

Πίνακας 2.10. Τιμές ARL για CUSUM, EWMA και WMA διαγράμματα ελέγχου ($ARL_0 = 100$)

| | WMA | | | | CUSUM | EWMA |
|----------|---------------------------------------|----------------|-----------------------------|------------------------------|--------------|-------------|
| | Γραμμικές σταθμίσεις | | Εκθετικές σταθμίσεις | | | |
| | $k = 7$ | $k = 9$ | $k = 9$ $\lambda = 0.85$ | $k = 10$ $\lambda = 0.87$ | | |
| h | $h_7 = 2.4003$ | $h_9 = 2.3449$ | $h_{9,0.85} = 2.4411$ | $h_{10,0.87} = 2.3278$ | $h = 3.5110$ | $h = 2.366$ |
| δ | Τιμές ARL για εντός ελέγχου $ARL=100$ | | | | | |
| | Διάγραμμα 1 | Διάγραμμα 2 | Διάγραμμα 3 | Διάγραμμα 4 | Διάγραμμα 5 | Διάγραμμα 6 |
| 0 | 100.09 | 100.13 | 100.05 | 100.22 | 100.90 | 100.91 |
| 0.25 | 50.75 | 53.90 | 48.18 | 49.60 | 52.89 | 48.22 |
| 0.50 | 20.42 | 22.30 | 19.22 | 19.89 | 21.66 | 19.51 |
| 0.75 | 10.66 | 11.33 | 10.31 | 10.51 | 11.44 | 10.62 |
| 1.00 | 6.77 | 6.99 | 6.83 | 6.84 | 7.40 | 6.99 |
| 1.25 | 5.03 | 4.98 | 5.17 | 5.10 | 5.41 | 5.16 |
| 1.50 | 4.03 | 3.91 | 4.21 | 4.11 | 4.86 | 4.09 |
| 1.75 | 3.40 | 3.27 | 3.56 | 3.46 | 3.52 | 3.40 |
| 2.00 | 2.97 | 2.82 | 3.11 | 3.01 | 3.02 | 2.93 |
| 2.25 | 2.65 | 2.50 | 2.76 | 2.68 | 2.65 | 2.58 |
| 2.50 | 2.40 | 2.28 | 2.50 | 2.42 | 2.38 | 2.33 |
| 2.75 | 2.20 | 2.09 | 2.29 | 2.21 | 2.17 | 2.12 |
| 3.00 | 2.05 | 1.93 | 2.12 | 2.05 | 2.00 | 1.97 |

Πίνακας 2.11. Τιμές ARL για CUSUM, EWMA και WMA διάγραμμα ελέγχου
($ARL_0 = 400$)

| | WMA | | | | CUSUM | EWMA |
|----------|---|------------------|------------------------------|-------------------------------|--------------|------------------|
| | Γραμμικές σταθμίσεις | | Εκθετικές σταθμίσεις | | | |
| | $k = 10$ | $k = 12$ | $k = 10$ $\lambda = 0.87$ | $k = 13$ $\lambda = 0.895$ | $k = 0.5$ | $\lambda = 0.15$ |
| h | $h_{10} = 2.8443$ | $h_{12} = 2.807$ | $h_{13,0.895} = 2.662$ | $h_{10,0.87} = 2.860$ | $h = 4.85$ | $h = 2.826$ |
| δ | Τιμές ARL για εντός ελέγχου $ARL = 400$ | | | | | |
| | Διάγραμμα 7 | Διάγραμμα 8 | Διάγραμμα 9 | Διάγραμμα 10 | Διάγραμμα 11 | Διάγραμμα 12 |
| 0 | 399.99 | 400.03 | 399.98 | 400.05 | 400.68 | 400.14 |
| 0.25 | 139.27 | 127.72 | 131.80 | 117.19 | 126.73 | 110.24 |
| 0.50 | 40.55 | 36.76 | 38.16 | 33.67 | 36.11 | 32.72 |
| 0.75 | 17.23 | 16.09 | 16.54 | 15.34 | 16.41 | 15.59 |
| 1.00 | 9.78 | 9.51 | 9.66 | 9.52 | 10.16 | 9.72 |
| 1.25 | 6.72 | 6.77 | 6.80 | 7.00 | 7.19 | 7.00 |
| 1.50 | 5.20 | 5.38 | 5.34 | 5.59 | 5.60 | 5.47 |
| 1.75 | 4.31 | 4.48 | 4.45 | 4.69 | 4.59 | 4.50 |
| 2.00 | 3.71 | 3.88 | 3.83 | 3.85 | 3.91 | 3.84 |
| 2.25 | 3.29 | 3.43 | 3.37 | 3.58 | 3.41 | 3.37 |
| 2.50 | 2.95 | 3.10 | 3.03 | 3.22 | 3.04 | 3.00 |
| 2.75 | 2.69 | 2.83 | 2.75 | 2.93 | 2.75 | 2.72 |
| 3.00 | 2.48 | 2.61 | 2.53 | 2.70 | 2.52 | 2.50 |

2.6 Διαγράμματα ελέγχου κινούμενων μέσων σε ομάδες (GMA)

Ο Sparks (2003) πρότεινε ένα διάγραμμα ελέγχου κινούμενων μέσων (a group of moving averages control chart) το οποίο είναι ικανό να ανιχνεύει ένα εύρος μετατοπίσεων του μέσου μιας διεργασίας. Το διάγραμμα αυτό περιλαμβάνει μια ομάδα διαγραμμάτων ελέγχου (απλών) κινούμενων μέσων (group of moving averages control charts, GMA) διαφορετικού εύρους το καθένα. Λόγω του ότι οι κινούμενοι μέσοι διαφορετικού εύρους διατηρούν διάφορα επίπεδα μνήμης από τις προγενέστερες παρατηρήσεις, τα διαγράμματα αυτού του είδους έχουν πολύ καλή

απόδοση σε σχέση με το μέσο μήκος ροής τους (ARL) γενικά για ένα εύρος μετατοπίσεων του μέσου της διεργασίας.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια παραγωγική διεργασία, από την οποία λαμβάνουμε τις παρατηρήσεις y_t του χαρακτηριστικού που μελετάμε. Ας θεωρήσουμε ότι οι παρατηρήσεις y_t είναι ανεξάρτητες με μέση τιμή $E(y_t)$ και διακύμανση σ^2 . Ένας απλός κινούμενος μέσος εύρους k για την χρονική στιγμή t ορίζεται ως

$$\bar{y}_{t/k} = \frac{y_{t-k+1} + \dots + y_{t-1} + y_t}{k}.$$

Αν συμβολίσουμε με T την εντός ελέγχου μέση τιμή της διεργασίας (η διακύμανση παραμένει πάντα σταθερή) τότε η αντίστοιχη τυποποιημένη τιμή Z δίνεται από τη σχέση

$$Z_{t/k} = \frac{\sqrt{k}(\bar{y}_{t/k} - T)}{\sigma}.$$

Για αρκετά μεγάλα k , τα $Z_{t/k}$ ακολουθούν προσεγγιστικά την τυπική κανονική κατανομή. Μπορούμε να επιλέξουμε διάφορα εύρη για τους κινούμενους μέσους έτσι ώστε από κοινού να είναι αποδοτικοί στην ανίχνευση μικρών αλλά και μεγάλων μετατοπίσεων του μέσου. Ας υποθέσουμε ότι χρησιμοποιούμε τα εύρη $k_1 < k_2 < \dots < k_g$. Η στατιστική συνάρτηση ελέγχου είναι η

$$\max(|Z_{t/k_1}|, |Z_{t/k_2}|, \dots, |Z_{t/k_g}|)$$

και ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας έχουμε όταν

$$\max(|Z_{t/k_1}|, |Z_{t/k_2}|, \dots, |Z_{t/k_g}|) > h_{all}$$

όπου h_{all} είναι το κοινό όριο ελέγχου για όλα τα εύρη.

Ωστόσο επιτρέποντας διαφορετικό όριο ελέγχου για κάθε εύρος, δηλαδή να παίρνουμε ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας όταν

$$|Z_{t/k_i}| > h_i,$$

για κάποιο i ($i=1,2,\dots,g$), τότε το GMA διάγραμμα γίνεται πιο αποτελεσματικό, αλλά και πιο πολύπλοκο. Αυξάνοντας το h_i από h_{all} για τα μικρά k_i και μειώνοντας το h_i από h_{all} για μεγάλα k_i η διαδικασία ανταποκρίνεται καλύτερα στην ανίχνευση

μικρών μετατοπίσεων, αλλά με κόστος την μείωση της αποτελεσματικότητας στην ανίχνευση μεγάλων μετατοπίσεων.

Ο Sparks (2003) μελέτησε αναλυτικά την απόδοση του GMA διαγράμματος ελέγχου και διαπίστωσε ότι παρουσιάζει πλεονεκτήματα έναντι των διαγραμμάτων ελέγχου CUSUM και EWMA (για περισσότερες λεπτομέρειες ο αναγνώστης παραπέμπεται στο άρθρο του Sparks (2003)).

Κλείνοντας την παρούσα παράγραφο σημειώνουμε ότι ο Sparks (2004b) ανέπτυξε μια παρόμοια μέθοδο για τους σταθμισμένους κινούμενους μέσους WMA (δείτε, Sparks 2004a). Ανέπτυξε δηλαδή ένα διάγραμμα που περιλαμβάνει μια ομάδα σταθμισμένων κινούμενων μέσων, το διάγραμμα GWMA, για την παρακολούθηση ενός εύρους μετατοπίσεων του μέσου της παραγωγικής διεργασίας.

2.7 Σχεδιασμός διαγραμμάτων ελέγχου κινούμενου μέσου

Στην εργασία των Wong et al. (2004) παρουσιάστηκε μια τεχνική βέλτιστου σχεδιασμού του διαγράμματος ελέγχου (απλού) κινούμενου μέσου (MA) χρησιμοποιώντας μεθόδους προσομοίωσης. Στο ίδιο άρθρο περιγράφεται και η τεχνική για το σχεδιασμό ενός βέλτιστου σύνθετου MA-Shewhart διαγράμματος ελέγχου, το οποίο αυξάνει την ευαισθησία του διαγράμματος MA σε μεγάλες μετατοπίσεις του μέσου της διεργασίας. Τα αποτελέσματά τους παρουσιάζονται περιληπτικά στη συνέχεια. Σημειώνεται ότι η απεικονιζόμενη στατιστική συνάρτηση στο MA διάγραμμα ελέγχου εύρους w είναι η

$$MA_i = \begin{cases} \frac{\bar{X}_{i-w+1} + \bar{X}_{i-w+2} + \dots + \bar{X}_i}{w}, & i \geq w \\ \frac{\bar{X}_1 + \dots + \bar{X}_i}{i}, & i < w. \end{cases}$$

και τα όρια ελέγχου που χρησιμοποίησαν οι Wong et al. (2004) είναι της ακόλουθης μορφής:

$$UCL/LCL = \mu_0 \pm k \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{\min(w,i)}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Ως συνήθως τα μ_0 και σ_0 δηλώνουν την εντός ελέγχου μέση τιμή και διακύμανση της διεργασίας και το n είναι το μέγεθος των δειγμάτων. Ο σχεδιασμός είναι βέλτιστος (εύρεση βέλτιστης τιμής για το w) για ανίχνευση μετατοπίσεων του μέσου της μορφής $\Delta\sigma_0/\sqrt{n}$ δοθέντος του ARL_0 . (το Δ δηλώνει το μέγεθος της μετατόπισης σε μονάδες τυπικής απόκλισης του δειγματικού μέσου).

2.7.1 Το βέλτιστο διάγραμμα ελέγχου κινούμενου μέσου

Η διαδικασία που ανέπτυξαν οι Wong et al. (2004) περιλαμβάνει τα τέσσερα ακόλουθα βήματα για τον σχεδιασμό του MA διαγράμματος ελέγχου:

1. Καθόρισε την τιμή του εντός ελέγχου μέσου μήκους ροής ARL.
2. Επέλεξε την μικρότερη μετατόπιση $\Delta\sigma_0/\sqrt{n}$ του μέσου της διεργασίας που πρόκειται να ανιχνευτεί γρήγορα.
3. Καθόρισε το εύρος w του κινούμενου μέσου στο οποίο αντιστοιχεί το μικρότερο εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής για τη συγκεκριμένη μετατόπιση του μέσου.
4. Με βάση την τιμή του εύρους w του κινούμενου μέσου από το Βήμα 3, καθόρισε την σταθερά k για την οποία το διάγραμμα κινούμενου μέσου έχει το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής που καθορίστηκε στο Βήμα 1.

Στο άρθρο τους οι Wong et al. (2004) παρουσίασαν ένα πίνακα που δίνεται στη συνέχεια προκειμένου να εντοπιστεί η βέλτιστη τιμή του εύρους w δοθέντος του ARL_0 και του Δ . Η τιμή του w προκύπτει από τη σχέση

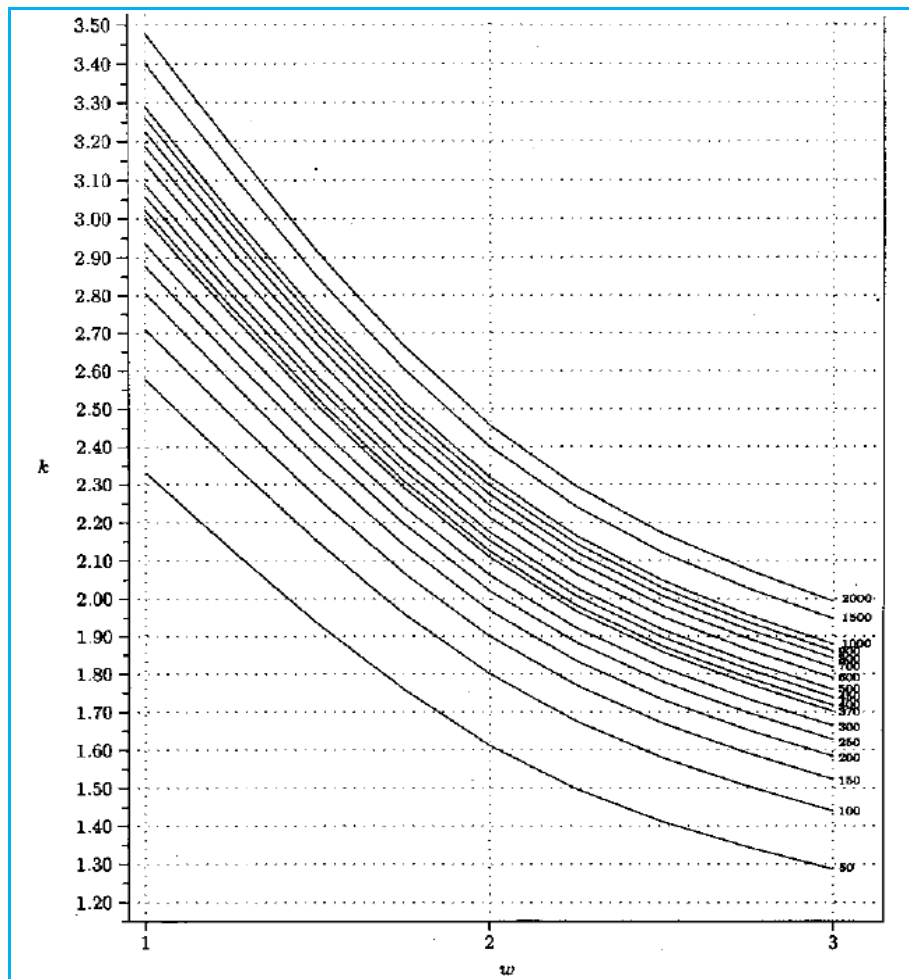
$$\log_{10} w = a - b \log_{10} \Delta$$

όπου οι τιμές των a , b δίνονται στον ακόλουθο πίνακα.

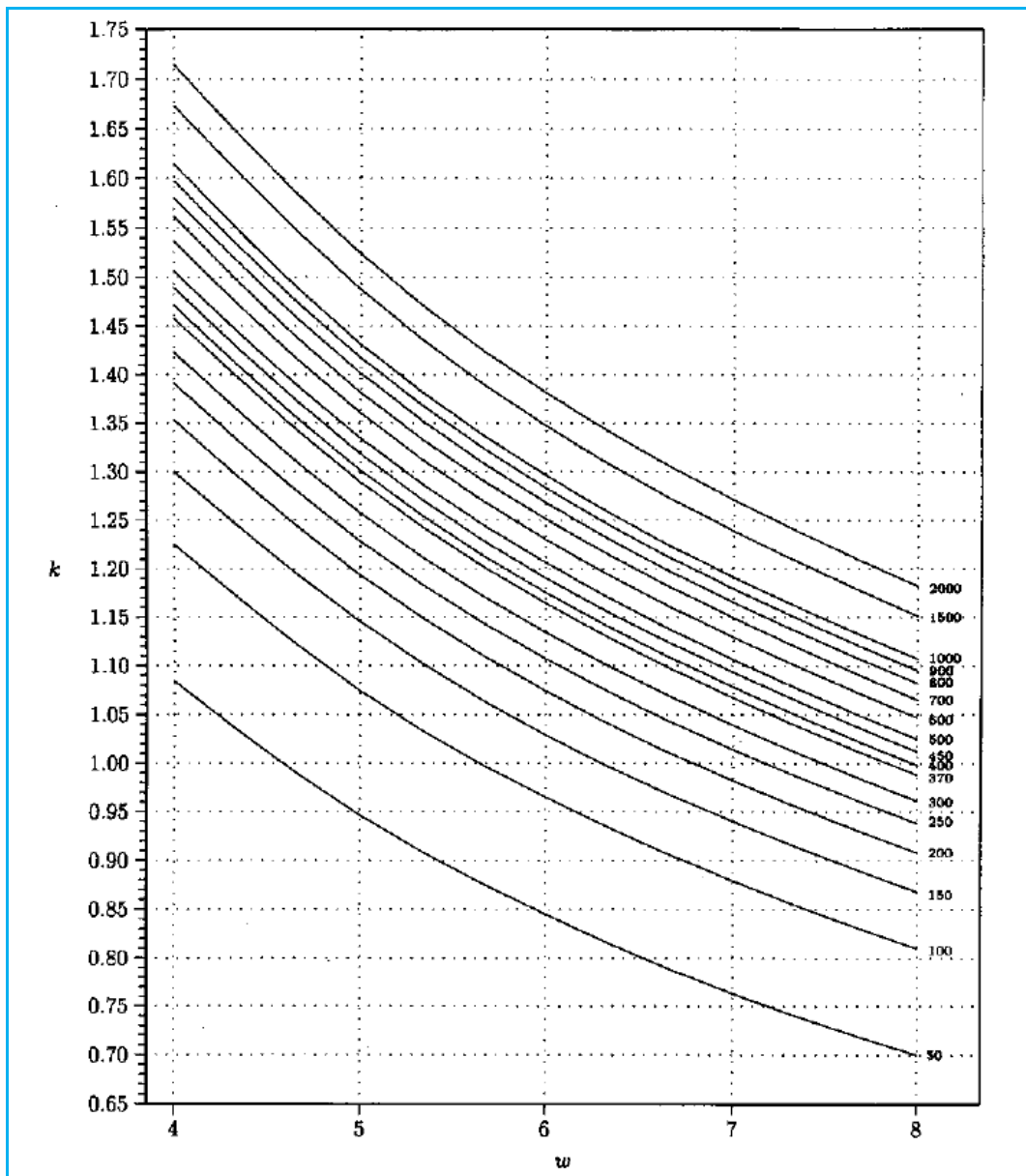
Πίνακας 2.12. Τιμές των a , b για τον υπολογισμό του βέλτιστου εύρους w δοθέντος του ARL_0 : του MA διαγράμματος ελέγχου $\log_{10} w = a - b \log_{10} \Delta$

| ARL_0 | Συντελεστής a | Συντελεστής b |
|---------|-----------------|-----------------|
| 50 | 0.724 | 1.39 |
| 100 | 0.802 | 1.42 |
| 200 | 0.914 | 1.64 |
| 250 | 0.940 | 1.67 |
| 300 | 0.948 | 1.66 |
| 370 | 0.973 | 1.64 |
| 400 | 0.993 | 1.66 |
| 500 | 1.00 | 1.67 |
| 600 | 1.01 | 1.68 |
| 700 | 1.02 | 1.67 |
| 800 | 1.04 | 1.70 |
| 900 | 1.04 | 1.67 |
| 1000 | 1.07 | 1.78 |
| 1500 | 1.10 | 1.77 |
| 2000 | 1.09 | 1.63 |

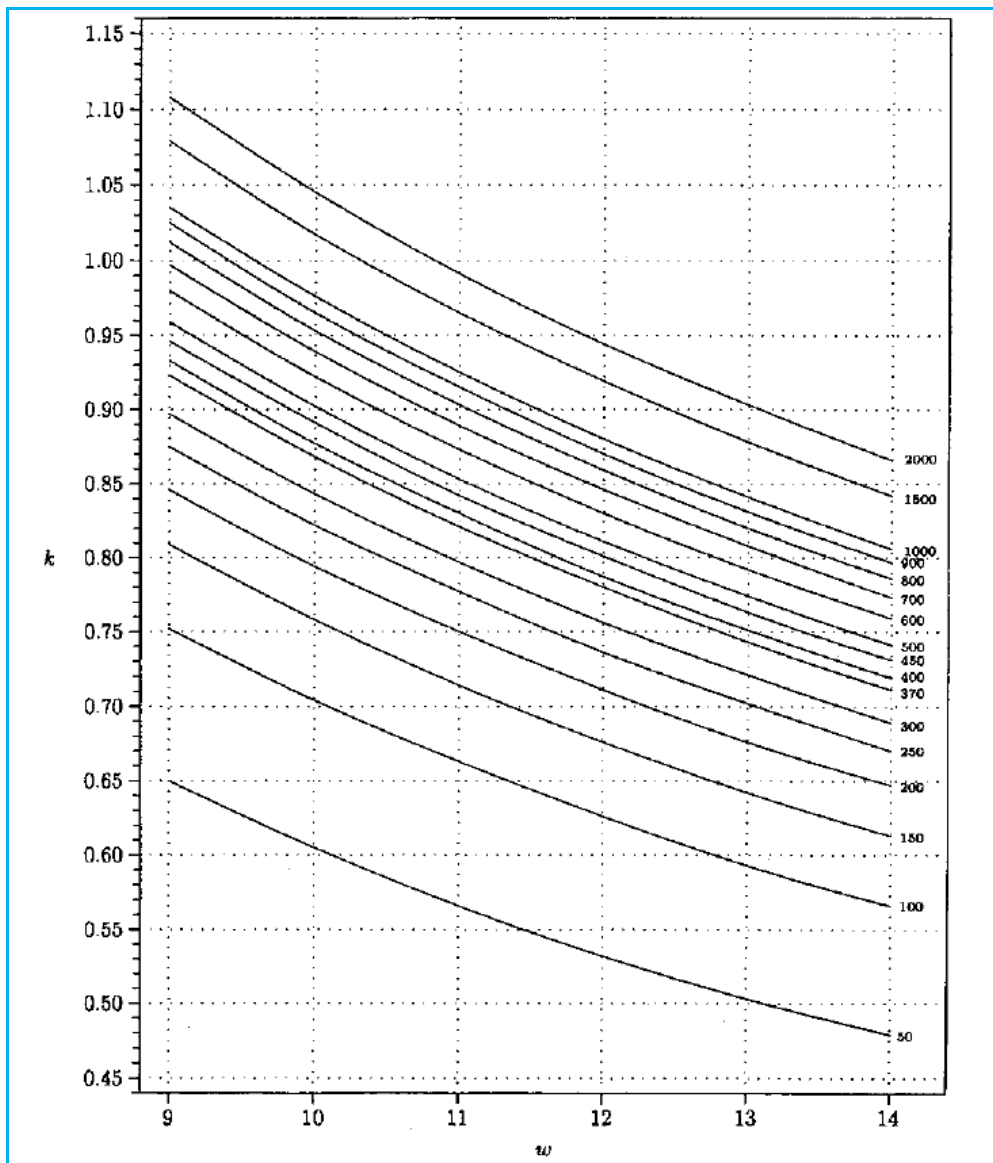
Από τη στιγμή που είναι διαθέσιμο το βέλτιστο εύρος w οι Wong et al. (2004) έδωσαν κατάλληλα διαγράμματα για τον εντοπισμό της κατάλληλης τιμής του k δοθέντος του w και του ARL_0 . Τα διαγράμματα που έδωσαν είναι τα ακόλουθα.



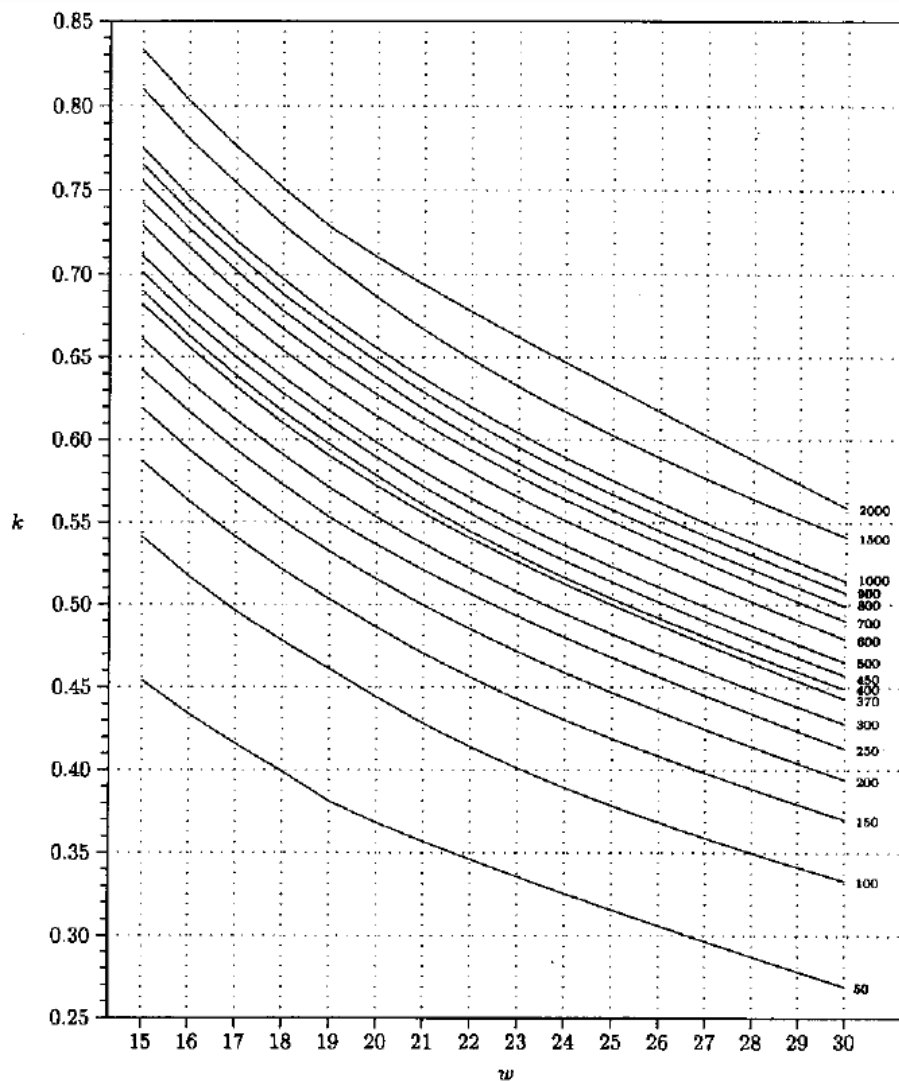
Σχήμα 2.4. Βέλτιστη τιμή για το k δοθέντος του w και του ARL_0 στο MA διάγραμμα ελέγχου ($w = 1, 2, 3$) [πηγή Wong et al. (2004)].



Σχήμα 2.5. Βέλτιστη τιμή για το k δοθέντος του w και του ARL_0 στο MA διάγραμμα ελέγχου ($w = 4,5,6,7,8$) [πηγή Wong et al. (2004)].



Σχήμα 2.6. Βέλτιστη τιμή για το k δοθέντος του w και του ARL_0 στο MA διάγραμμα ελέγχου ($w = 9, 10, \dots, 14$) [πηγή Wong et al. (2004)].



Σχήμα 2.7. Βέλτιστη τιμή για το k δοθέντος του w και του ARL_0 στο MA διάγραμμα ελέγχου ($w = 15, 16, \dots, 30$) [πηγή Wong et al. (2004)].

2.7.2 Το βέλτιστο σύνθετο διάγραμμα ελέγχου MA-Shewhart

Εφόσον το διάγραμμα ελέγχου κινούμενου μέσου είναι ευαίσθητο στις μικρές και μέτριες μετατοπίσεις του μέσου της διεργασίας, οι Wong et al. (2004) πρότειναν ένα σύνθετο MA-Shewhart διάγραμμα ελέγχου, για να αυξήσουν την ευαισθησία του διαγράμματος κινούμενου μέσου και στις μεγάλες μετατοπίσεις.

Τα όρια ελέγχου του σύνθετου διαγράμματος ελέγχου MA-Shewhart είναι τα

$$\mu_0 \pm k_s \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$

για το διάγραμμα ελέγχου το Shewhart, και τα

$$\mu_0 \pm k_M \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\min(w,i)}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \quad i = 1, 2, \dots$$

για το MA διάγραμμα ελέγχου. Στο σύνθετο διάγραμμα απεικονίζεται ο δειγματικός μέσος \bar{X}_i για $i = 1, 2, \dots$ στο \bar{X} διάγραμμα ελέγχου, και η στατιστική συνάρτηση MA_i στο MA διάγραμμα ελέγχου. Η διεργασία θεωρείται ότι είναι εκτός ελέγχου αν ένα σημείο βρεθεί εκτός των ορίων ελέγχου είτε στο Shewhart \bar{X} διάγραμμα ελέγχου, είτε στο διάγραμμα ελέγχου MA.

Η κατασκευή του σύνθετου διαγράμματος γίνεται με τα ακόλουθα έξι βήματα:

1. Καθόρισε την τιμή του εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής ARL_0 του σύνθετου MA-Shewhart διαγράμματος ελέγχου.
2. Υπολόγισε το αντίστοιχο εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής $ARL_{0,MA}$ του MA διαγράμματος ελέγχου για $w = 2, 3, \dots, 30$ χρησιμοποιώντας τον Πίνακα 2.9.
3. Επέλεξε την μικρότερη μετατόπιση $\Delta\sigma_0/\sqrt{n}$ του μέσου της διεργασίας που πρόκειται να ανιχνευτεί γρήγορα από το MA διάγραμμα ελέγχου.
4. Για κάθε ζευγάρι $(w, ARL_{0,MA})$ που βρέθηκε στο βήμα 2 καθόρισε την μετατόπιση $\Delta\sigma_0/\sqrt{n}$ στην οποία το MA διάγραμμα ελέγχου είναι βέλτιστο χρησιμοποιώντας τον Πίνακα 2.8. Τελικά επέλεξε το ζευγάρι $(w, ARL_{0,MA})$ με Δ το οποίο είναι πιο κοντά στην μικρότερη μετατόπιση $\Delta\sigma_0/\sqrt{n}$ που αποφασίστηκε στο Βήμα 3.
5. Με δεδομένο το ζευγάρι $(w, ARL_{0,MA})$ καθόρισε την σταθερά k_M του MA διαγράμματος ελέγχου χρησιμοποιώντας τις καμπύλες των Σχημάτων 2.4-2.7.
6. Χρησιμοποιώντας ως εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής για το διάγραμμα ελέγχου Shewhart το ίδιο εντός ελέγχου ARL με αυτό που χρησιμοποιήθηκε στο MA διάγραμμα ελέγχου (δηλαδή το $ARL_{0,MA}$) καθόρισε τη σταθερά k_s του διαγράμματος Shewhart.

Πίνακας 2.13. Υπολογισμός του $ARL_{0,MA}$ του MA διαγράμματος συναρτήσει του ARL_0 του σύνθετου MA-Shewhart διαγράμματος: $ARL_{0,MA} = a + b \times ARL_0$

| Εύρος w | Συντελεστής a | Συντελεστής b |
|-----------|-----------------|-----------------|
| 2 | 20.2 | 1.78 |
| 3 | 18.2 | 1.87 |
| 4 | 18.2 | 1.91 |
| 5 | 16.1 | 1.93 |
| 6 | 13.8 | 1.94 |
| 7 | 13.4 | 1.94 |
| 8 | 12.8 | 1.95 |
| 9 | 11.3 | 1.95 |
| 10 | 11.5 | 1.96 |
| 11 | 10.1 | 1.96 |
| 12 | 9.33 | 1.96 |
| 13 | 8.32 | 1.96 |
| 14 | 7.69 | 1.97 |
| 15 | 7.09 | 1.97 |
| 16 | 6.53 | 1.97 |
| 17 | 5.88 | 1.97 |
| 18 | 5.55 | 1.97 |
| 19 | 4.92 | 1.97 |
| 20 | 3.80 | 1.97 |
| 30 | 2.12 | 1.98 |

Κλείνουμε την παρούσα παράγραφο δίνοντας ένα παράδειγμα εφαρμογής του σύνθετου MA-Shewhart διαγράμματος ελέγχου. Θα χρησιμοποιήσουμε τα δεδομένα του Montgomery (2001, σελ. 213, 219) που αναφέρονται σε μετρήσεις διαμέτρου δακτυλιδιών πιστονιών σε χιλιοστά (40 δείγματα μεγέθους 5 με $\mu_0 = 74.001$ και $\sigma_0 = 0.01$). Έστω ότι θέλουμε να έχουμε $ARL_0 = 250$ για το σύνθετο MA-Shewhart διάγραμμα ελέγχου. Χρησιμοποιώντας τον Πίνακα 2.9 υπολογίζουμε το $ARL_{0,MA}$ του MA διαγράμματος ελέγχου για $w = 2, 3, \dots, 30$. Έτσι προκύπτει το ακόλουθο πλαίσιο.

Πίνακας 2.14. Τιμές του $ARL_{0,MA}$ του MA διαγράμματος για $w = 2, 3, \dots, 30$

| | | | | | | | | | | |
|--------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| w | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| $ARL_{0,MA}$ | 425 | 450 | 460 | 466 | 470 | 473 | 475 | 477 | 478 | 479 |
| Δ | 2.61 | 2.05 | 1.73 | 1.51 | 1.35 | 1.24 | 1.14 | 1.06 | 1.0 | 0.94 |
| w | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 30 |
| $ARL_{0,MA}$ | 481 | 482 | 484 | 485 | 486 | 487 | 487 | 489 | 490 | 492 |
| Δ | 0.89 | 0.85 | 0.82 | 0.78 | 0.75 | 0.73 | 0.70 | 0.68 | 0.66 | 0.52 |

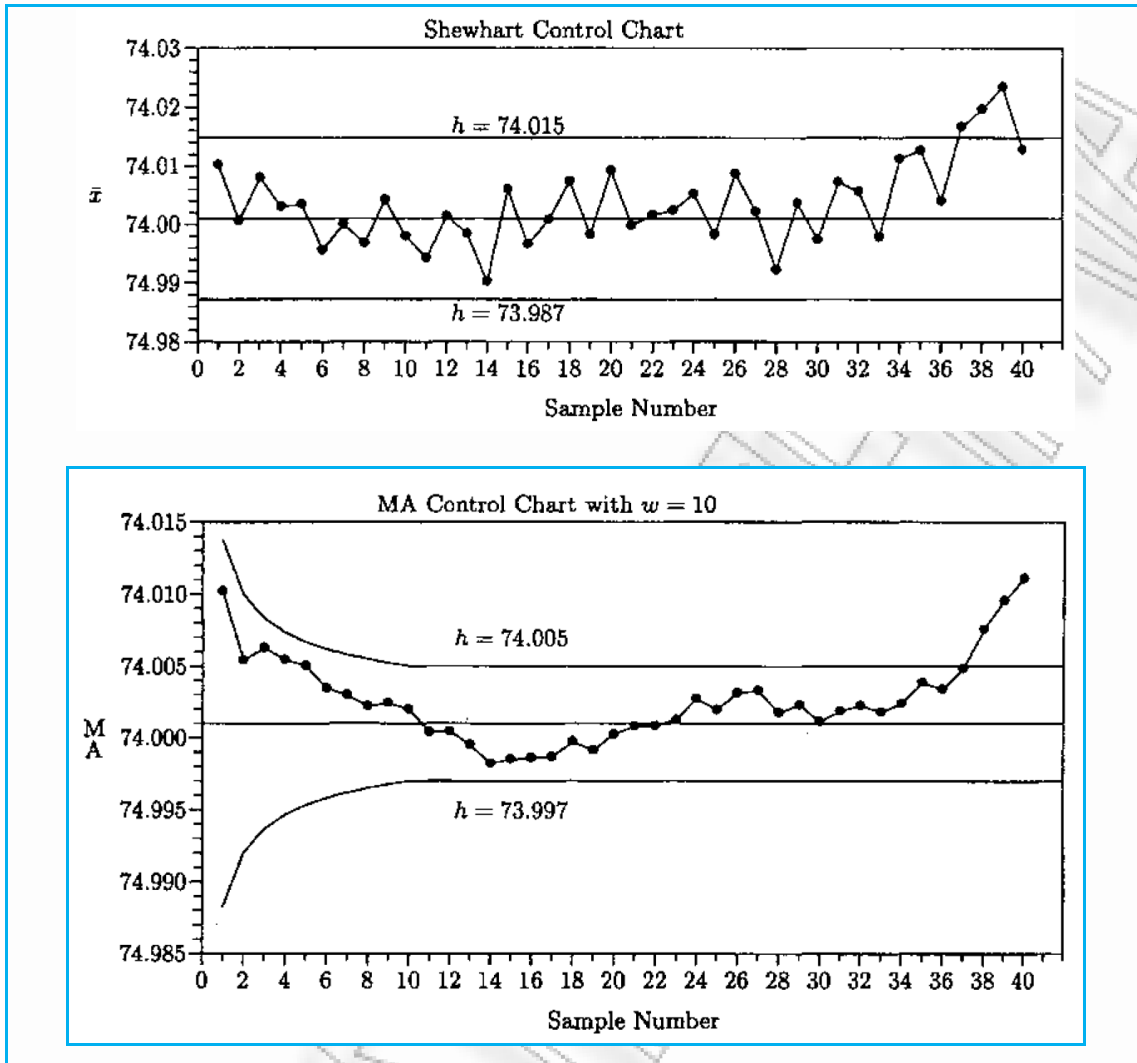
Για κάθε ζεύγος $(w, ARL_{0,MA})$ του παραπάνω πλαισίου υπολογίζουμε το αντίστοιχο βέλτιστο Δ με τη βοήθεια του Πίνακα 2.8 ($\log_{10} \Delta = (\log_{10} w - a)/(-b)$). Έτσι προκύπτουν οι τιμές του Δ του παραπάνω πλαισίου. Αν υποθέσουμε ότι θέλουμε το MA διάγραμμα ελέγχου να ανιχνεύει γρήγορα μετατοπίσεις με $\Delta = 1$, τότε από το παραπάνω πλαίσιο παίρνουμε ότι το βέλτιστο ζεύγος $(w, ARL_{0,MA})$ είναι το $w = 10$ και $ARL_{0,MA} = 478$. Για αυτό το ζεύγος, από το Σχήμα 2.6 παίρνουμε ότι $k_M = 0.9$. Τέλος για το Shewhart διάγραμμα έχουμε ότι για $ARL_{0,S} = 478$ πρέπει να πάρουμε $k_S = 3.08$. Έτσι τα όρια ελέγχου του σύνθετου διαγράμματος ελέγχου MA-Shewhart είναι τα

$$74.001 \pm 3.08 \frac{0.01}{\sqrt{5}}$$

για το διάγραμμα ελέγχου το Shewhart, και τα

$$74.001 \pm 0.9 \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{\min(10, i)}} \frac{0.01}{\sqrt{5}}, \quad i = 1, 2, \dots$$

για το MA διάγραμμα ελέγχου. Τα δύο διαγράμματα είναι τα ακόλουθα



Σχήμα 2.8 Σύνθετο διάγραμμα Shewhart-MA (Πηγή βλ. Wong at all (2004))

Παρατηρούμε ότι έχουμε σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας για πρώτη φορά στο 38^ο δείγμα.

**Κεφ.3: Διαγράμματα ελέγχου κινούμενου μέσου
για ιδιότητες**

3.1 Εισαγωγή

attributes)
CUSUM, EWMA
CUSUM EWMA

Gan (1990,
1993), Reynolds & Stoumbos Woodall (1997).

3.2 Διάγραμμα ελέγχου κινούμενου μέσου για την παρακολούθηση του ποσοστού των ελαττωματικών προϊόντων.

Khoo (2004a),

Shewhart

p-
 $X_i, (i \geq 1)$ i n $X_i \sim b(n, p).$

$$p_i = \frac{X_i}{n}, \quad i \geq 1$$

$$E(p_i) = p, \quad Var(p_i) = \frac{p(1-p)}{n}.$$

$k \quad p_1, p_2, \dots \quad i$

$$M_i = \begin{cases} \frac{p_{i-k+1} + p_{i-k+2} + \dots + p_i}{k}, & i \geq k \\ \frac{p_1 + \dots + p_i}{i}, & i < k. \end{cases}$$

(3.1)

$$M_i \quad i \geq k$$

$$\begin{aligned} E(M_i) &= E\left(\frac{1}{k} \sum_{j=i-k+1}^i p_j\right) \\ &= \frac{1}{k} \sum_{j=i-k+1}^i E(p_j) \\ &= \frac{1}{k} (kp) \\ &= p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(M_i) &= \text{Var}\left(\frac{1}{k} \sum_{j=i-k+1}^i p_j\right) = \frac{1}{k^2} \left(\sum_{j=i-k+1}^i \text{Var}(p_j)\right) \\ &= \frac{1}{k^2} \left[k \left(\frac{p(1-p)}{n}\right)\right] \\ &= \frac{p(1-p)}{kn} \end{aligned}$$

$i < k$

$$E(M_i) = p, \quad \text{Var}(M_i) = \frac{p(1-p)}{in}$$

3σ

LCL_M, UCL_M

$i \geq k,$

CL

$$\begin{aligned}
 UCL_M &= p + 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{kn}} \\
 CL &= p \\
 LCL_M &= p - 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{kn}}
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

$i < k$

$$\begin{aligned}
 UCL_M &= p + 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{in}} \\
 CL_M &= p \\
 LCL_M &= p - 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{in}}
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

target value) p

Khoo

(

(n, p_0)

20

(n, p_1) .

$n = 500, p_0 = 0.10$

p

$p_1 = 0.13$

Πίνακας 3.1.

| i | X_i | $p_i = \frac{X_i}{n}$ | M_i ($k = 2$) | i | X_i | $p_i = \frac{X_i}{n}$ | M_i ($k = 2$) |
|-----|-------|-----------------------|----------------------|-----|-------|-----------------------|----------------------|
| 1 | 49 | 0.0980 | 0.0980 | 16 | 55 | 0.1100 | 0.1310 |
| 2 | 59 | 0.1180 | 0.1080 | 17 | 64 | 0.1280 | 0.1190 |
| 3 | 52 | 0.1040 | 0.1110 | 18 | 67 | 0.1340 | 0.1310 |
| 4 | 58 | 0.1160 | 0.1100 | 19 | 68 | 0.1360 | 0.1350 |
| 5 | 58 | 0.1160 | 0.1160 | 20 | 76 | 0.1520 | 0.1440 |
| 6 | 42 | 0.0840 | 0.1000 | 21 | 66 | 0.1320 | 0.1420 |
| 7 | 41 | 0.0820 | 0.0830 | 22 | 77 | 0.1540 | 0.1430 |

| | | | | | | | |
|----|----|--------|---------|----|----|--------|--------|
| 8 | 44 | 0.0880 | 0.0850 | 23 | 66 | 0.1320 | 0.1430 |
| 9 | 52 | 0.1040 | 0.0960 | 24 | 58 | 0.1160 | 0.1240 |
| 10 | 41 | 0.0820 | 0.0930 | 25 | 60 | 0.1200 | 0.1180 |
| 11 | 66 | 0.1320 | 0.1070 | 26 | 72 | 0.1440 | 0.1320 |
| 12 | 69 | 0.1380 | 0.1350* | 27 | 63 | 0.1260 | 0.1350 |
| 13 | 65 | 0.1300 | 0.1340 | 28 | 69 | 0.1380 | 0.1320 |
| 14 | 65 | 0.1300 | 0.1300 | 29 | 80 | 0.1600 | 0.1490 |
| 15 | 76 | 0.1520 | 0.1410 | 30 | 60 | 0.1200 | 0.1400 |

(k = 2)

(3.1)

(3.2) (3.3)

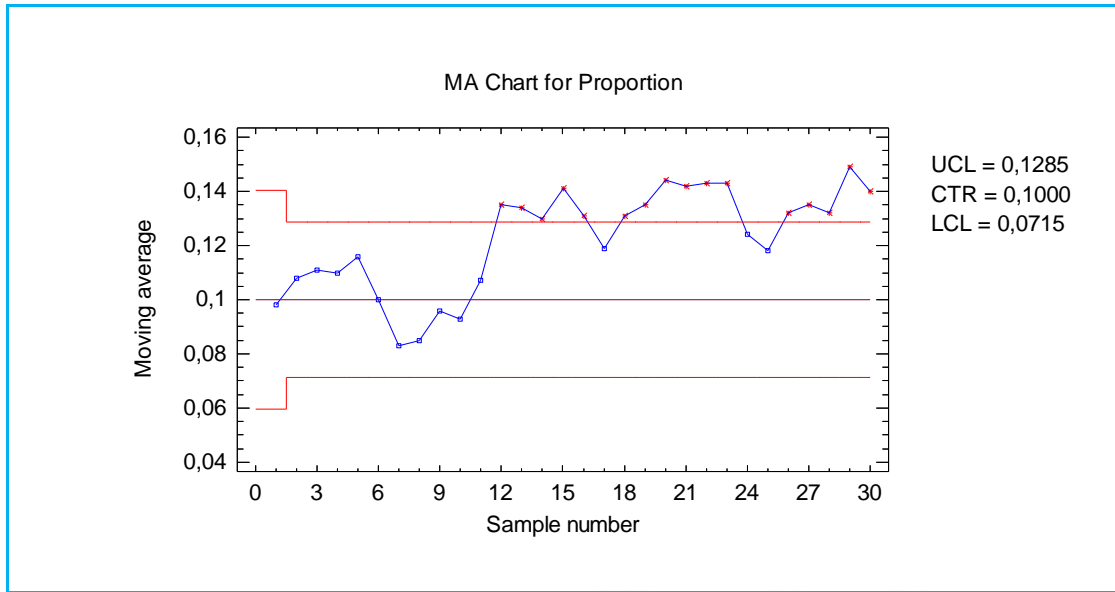
$$UCL_M = p_0 + 3\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{kn}} = 0.1 + 3\sqrt{\frac{0.1(1-0.1)}{2*500}} = 0.1285$$

$$LCL_M = p_0 - 3\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{kn}} = 0.1 - 3\sqrt{\frac{0.1(1-0.1)}{2*500}} = 0.0715$$

$i \geq 2$

$i = 1$

$UCL_M = 0.1402$ $LCL_M = 0.0598$.

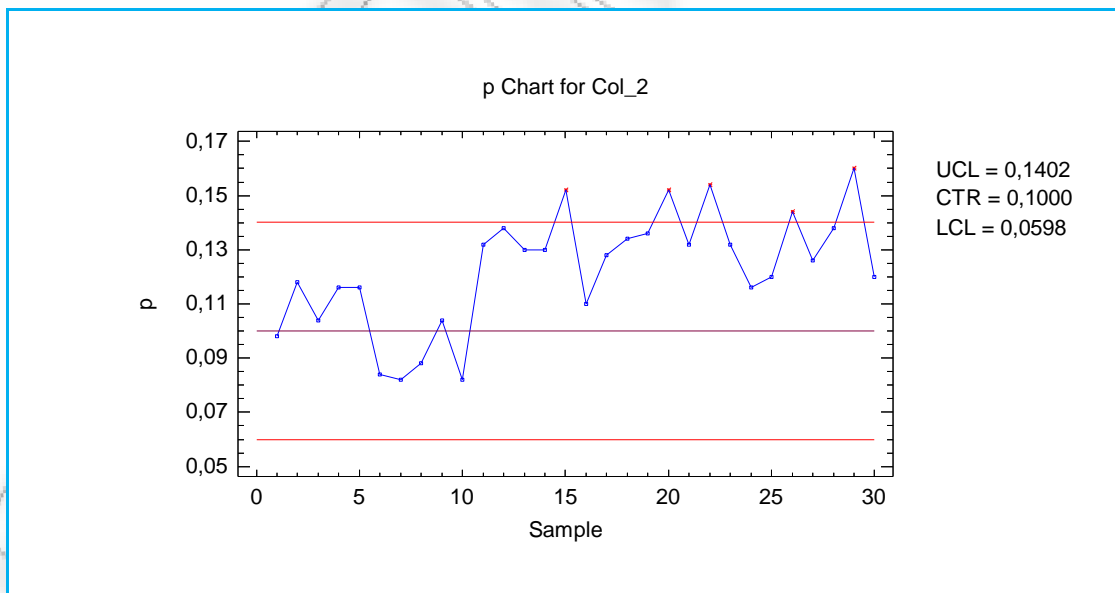


Σχήμα 3.1.

.1

($k = 2$)

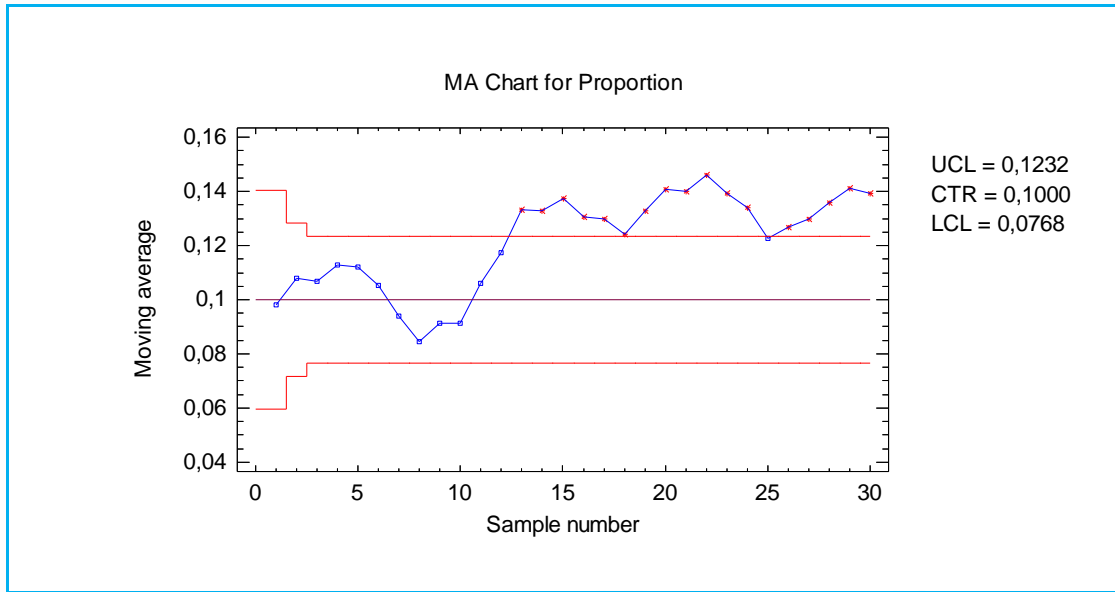
p



Σχήμα 3.2. p

.1

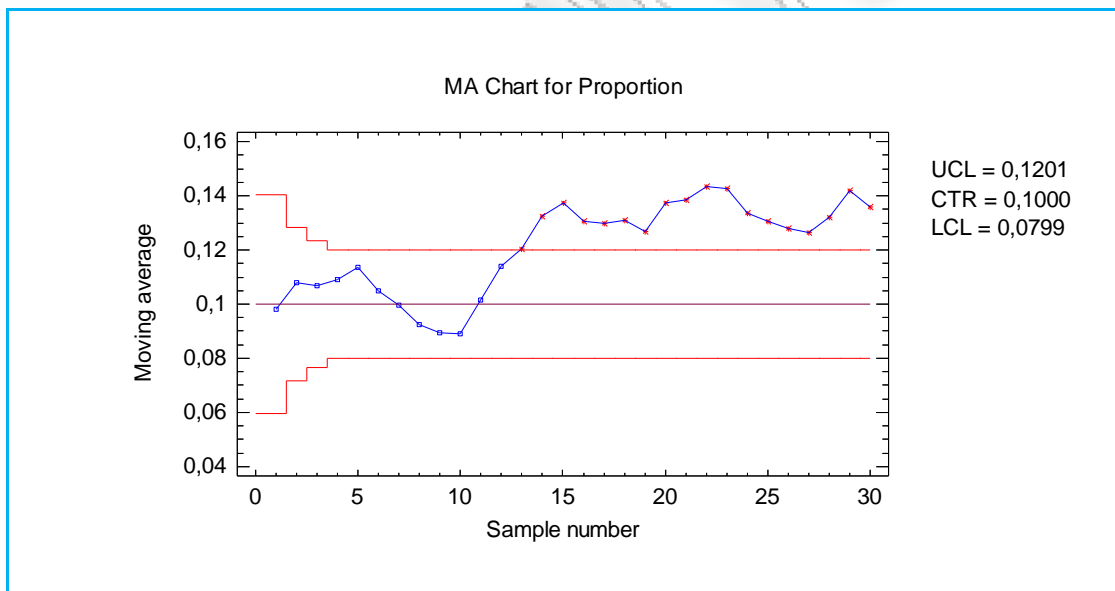
$k = 3,$



Σχήμα 3.3.

($k = 3$)

.1



Σχήμα 3.4.

($k = 4$)

.1

k

$k=2, k=3, k$

, 13 , 13

p

15

ARL).

Khoo (2004a)

ARL

p

Πίνακα

3.2

ARL

Πίνακας 3.2.

ARL

p

p -

$p_0 = 0.1$

$n = 100$.

| Κινούμενος μέσος p -διάγραμμα ελέγχου | | | | | |
|---|----------------|--------|--------|--------|--------|
| p_i | p -διάγραμμα | $k=2$ | $k=3$ | $k=4$ | $k=5$ |
| 0.01 | 2.00 | 1.50 | 1.50 | 1.50 | 1.50 |
| 0.03 | 8.30 | 2.25 | 2.18 | 2.21 | 2.21 |
| 0.08 | 30.09 | 6.14 | 3.78 | 3.50 | 3.60 |
| 0.10 | 201.21 | 87.80 | 49.63 | 32.48 | 23.56 |
| 0.12 | 370.37 | 370.40 | 370.40 | 370.40 | 370.40 |
| 1.15 | 62.58 | 35.04 | 23.56 | 17.70 | 14.38 |
| 0.18 | 7.61 | 3.95 | 3.24 | 3.18 | 3.32 |
| 0.20 | 2.52 | 1.83 | 1.86 | 1.94 | 1.99 |
| 0.22 | 1.67 | 1.45 | 1.49 | 1.26 | 1.52 |
| 0.25 | 1.31 | 1.24 | 1.26 | 1.09 | 1.26 |
| 0.28 | 1.09 | 1.08 | 1.09 | 1.02 | 1.09 |
| 0.30 | 1.02 | 1.02 | 1.01 | 1.01 | 1.02 |
| 0.35 | 1.01 | 1.01 | 1.00 | 1.00 | 1.01 |
| 0.40 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |
| 0.45 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |
| 0.50 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |

p

p

$p_1 < p_0$

p

k

Khoo (2004a)

ARL p

$1/ARL$

\hat{p}_1

p

$$\begin{aligned} \frac{1}{ARL} &= P\left(\frac{\hat{p}_1 - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} > UCL_p\right) + P\left(\frac{\hat{p}_1 - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} < LCL_p\right) \\ &= P\left(\frac{\hat{p}_1 - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} > p + 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) + P\left(\frac{\hat{p}_1 - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} < p - 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) \\ &= P\left[\hat{p}_1 > \left(p + 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)\left(\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) + p\right] + P\left[\hat{p}_1 < \left(p - 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)\left(\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) + p\right] \\ &= P\left[Z > \frac{\left(p + 3\sqrt{p(1-p)/n}\right)\left(\sqrt{p(1-p)/n}\right) + p - p_1}{\sqrt{p_1(1-p_1)/n}}\right] + P\left[Z < \frac{\left(p - 3\sqrt{p(1-p)/n}\right)\left(\sqrt{p(1-p)/n}\right) + p - p_1}{\sqrt{p_1(1-p_1)/n}}\right] \end{aligned}$$

$$ARL = \frac{1}{a+b}$$

$$a = P\left[Z > \frac{\left(p + 3\sqrt{p(1-p)/n}\right)\left(\sqrt{p(1-p)/n}\right) + p - p_1}{\sqrt{p_1(1-p_1)/n}}\right]$$

$$b = P\left[Z < \frac{\left(p - 3\sqrt{p(1-p)/n}\right)\left(\sqrt{p(1-p)/n}\right) + p - p_1}{\sqrt{p_1(1-p_1)/n}}\right]$$

ARL

$$ARL = n$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n} = \left(\frac{1}{n}\right)P(\quad \quad \quad i < k) \\
& \quad + \left[\frac{n-(k-1)}{n}\right]P(\quad \quad \quad i \geq k) \\
& = \left(\frac{1}{n}\right)\left\{\sum_{i=1}^{k-1}\left[P\left(\frac{\sum_{j=1}^i \hat{p}_{j,1}}{i} > UCL_i\right) + P\left(\frac{\sum_{j=1}^i \hat{p}_{j,1}}{i} < UCL_i\right)\right]\right\} \\
& \quad + \left[\frac{n-(k-1)}{n}\right]\left[P\left(\frac{1}{k} \sum_{j=i-k+1}^i \hat{p}_{j,1} > UCL_k\right) + P\left(\frac{1}{k} \sum_{j=i-k+1}^i \hat{p}_{j,1} < UCL_k\right)\right] \\
& = \left(\frac{1}{n}\right)\left\{\sum_{i=1}^{k-1}\left[P\left(\frac{\sum_{j=1}^i \hat{p}_{j,1} - ip_1}{\sqrt{ip_1(1-p_1)}/n} > \frac{i(p_0 + 3\sqrt{p_0(1-p_0)/in}) - ip_1}{\sqrt{ip_1(1-p_1)}/n}\right) + P\left(\frac{\sum_{j=1}^i \hat{p}_{j,1} - ip_1}{\sqrt{ip_1(1-p_1)}/n} < \frac{i(p_0 + 3\sqrt{p_0(1-p_0)/in}) - ip_1}{\sqrt{ip_1(1-p_1)}/n}\right)\right]\right\} \\
& \quad + \left[\frac{n-(k-1)}{n}\right]\left[P\left(\frac{\sum_{j=1}^i \hat{p}_{j,1} - kp_1}{\sqrt{kp_1(1-p_1)}/n} > \frac{kUCL_k - kp_1}{\sqrt{kp_1(1-p_1)}/n}\right) + P\left(\frac{\sum_{j=1}^i \hat{p}_{j,1} - kp_1}{\sqrt{kp_1(1-p_1)}/n} < \frac{kLCL_k - kp_1}{\sqrt{kp_1(1-p_1)}/n}\right)\right] \\
& = \left(\frac{1}{n}\right)\left\{\sum_{i=1}^w\left[P\left(Z > \frac{i(p_0 + 3\sqrt{p_0(1-p_0)/in}) - p_1}{\sqrt{ip_1(1-p_1)}/n}\right) + P\left(Z < \frac{i(p_0 - 3\sqrt{p_0(1-p_0)/in}) - p_1}{\sqrt{ip_1(1-p_1)}/n}\right)\right]\right\} \\
& \quad + \left[\frac{n-(k-1)}{n}\right]\left[P\left(Z > \frac{k(p_0 + 3\sqrt{p_0(1-p_0)/kn}) - p_1}{\sqrt{kp_1(1-p_1)}/n}\right) + P\left(Z < \frac{k(p_0 - 3\sqrt{p_0(1-p_0)/kn}) - p_1}{\sqrt{kp_1(1-p_1)}/n}\right)\right] \\
& ARL = \left\{1 - \sum_{i=1}^{k-1}\left[P\left(Z > \frac{i(p_0 + 3\sqrt{p_0(1-p_0)/in}) - p_1}{\sqrt{ip_1(1-p_1)}/n}\right) + P\left(Z < \frac{i(p_0 + 3\sqrt{p_0(1-p_0)/in}) - p_1}{\sqrt{ip_1(1-p_1)}/n}\right)\right]\right\} \\
& \quad \times \left\{\left[P\left(Z > \frac{k(p_0 + 3\sqrt{p_0(1-p_0)/kn}) - p_1}{\sqrt{kp_1(1-p_1)}/n}\right) + P\left(Z < \frac{k(p_0 + 3\sqrt{p_0(1-p_0)/kn}) - p_1}{\sqrt{kp_1(1-p_1)}/n}\right)\right]^{-1} + k - 1\right\}.
\end{aligned}$$

3.3 Poisson διάγραμμα ελέγχου κινούμενου μέσου για την παρακολούθηση του αριθμού των ελαττωμάτων ανά μονάδα επιθεώρησης

c

c

Khoo (2004b)

$C_i \ (i \geq 1)$

i

k

$$M_i = \begin{cases} \frac{C_{i-k+1} + C_{i-k+2} + \dots + C_i}{k}, & i \geq k \\ \frac{C_1 + \dots + C_i}{i}, & i < k. \end{cases}$$

$C_i \sim P(c)$

$i \geq k$

$$\begin{aligned} E(M_i) &= E\left(\frac{1}{k} \sum_{j=i-k+1}^i C_j\right) \\ &= \frac{1}{k} \sum_{j=i-k+1}^i E(C_j) \\ &= \frac{1}{k}(kc) \\ &= c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(M_i) &= \text{Var}\left(\frac{1}{k} \sum_{j=i-k+1}^i C_j\right) = \frac{1}{k^2} \left(\sum_{j=i-k+1}^i \text{Vqr}(C_j)\right) \\
 &= \frac{1}{k^2} \left(\sum_{j=i-k+1}^i c\right) \\
 &= \frac{1}{k^2} kc \\
 &= \frac{c}{k}.
 \end{aligned}$$

$i < k$

$$E(M_i) = c, \quad \text{Var}(M_i) = \frac{c}{i}.$$

3σ
 CL

LCL_M, UCL_M

$i \geq k,$

$$UCL_M = c + 3\sqrt{\frac{c}{k}}, \quad CL_M = c, \quad LCL_M = c - 3\sqrt{\frac{c}{k}}.$$

$i < k$

$$UCL_M = c + 3\sqrt{\frac{c}{i}}, \quad CL_M = c, \quad LCL_M = c - 3\sqrt{\frac{c}{i}}.$$

$c,$

$$\bar{C} = \frac{\sum_{i=1}^m C_i}{m}$$

C_1, C_2, \dots, C_m

m

Poisson

Πίνακα 3.3

Khoo (2004b)

c

0

$(d=1)$

$15 + \sqrt{15}.$

Poisson

$k = 2, 3$

M_i

Πίνακας 3.3.

Poisson

| i | c_i | $M_i (k = 2)$ | $M_i (k = 3)$ | $M_i (k = 4)$ |
|-----|-------|---------------|---------------|---------------|
| 1 | 17 | 17 | 17 | 17 |
| 2 | 21 | 19 | 19 | 19 |
| 3 | 17 | 19 | 18.33 | 18.33 |
| 4 | 10 | 13.5 | 16 | 16.25 |
| 5 | 15 | 12.5 | 14 | 15.75 |
| 6 | 19 | 17 | 14.67 | 15.25 |
| 7 | 12 | 15.5 | 15.33 | 14 |
| 8 | 18 | 15 | 16.33 | 16 |
| 9 | 16 | 17 | 15.33 | 16.25 |
| 10 | 17 | 16.5 | 17 | 15.75 |
| 11 | 20 | 18.5 | 17.57 | 17.75 |
| 12 | 18 | 19 | 18.33 | 17.75 |
| 13 | 26 | 22 | 21.33 | 20.25 |
| 14 | 26 | 26 | 23.33 | 22.5 |
| 15 | 8 | 17 | 20 | 19.5 |
| 16 | 27 | 17.5 | 20.33 | 21.75 |
| 17 | 19 | 23 | 18 | 20 |
| 18 | 27 | 23 | 24.33 | 20.25 |
| 19 | 14 | 20.5 | 20 | 21.75 |
| 20 | 18 | 16 | 19.67 | 19.5 |

$k = 2$

$i \geq 2$

$$UCL_M = c + 3\sqrt{\frac{c}{w}} = 15 + 3\sqrt{\frac{15}{2}} = 23.22$$
$$CL_M = c = 15$$
$$LCL_M = c - 3\sqrt{\frac{c}{w}} = 15 - 3\sqrt{\frac{15}{2}} = 6.78$$

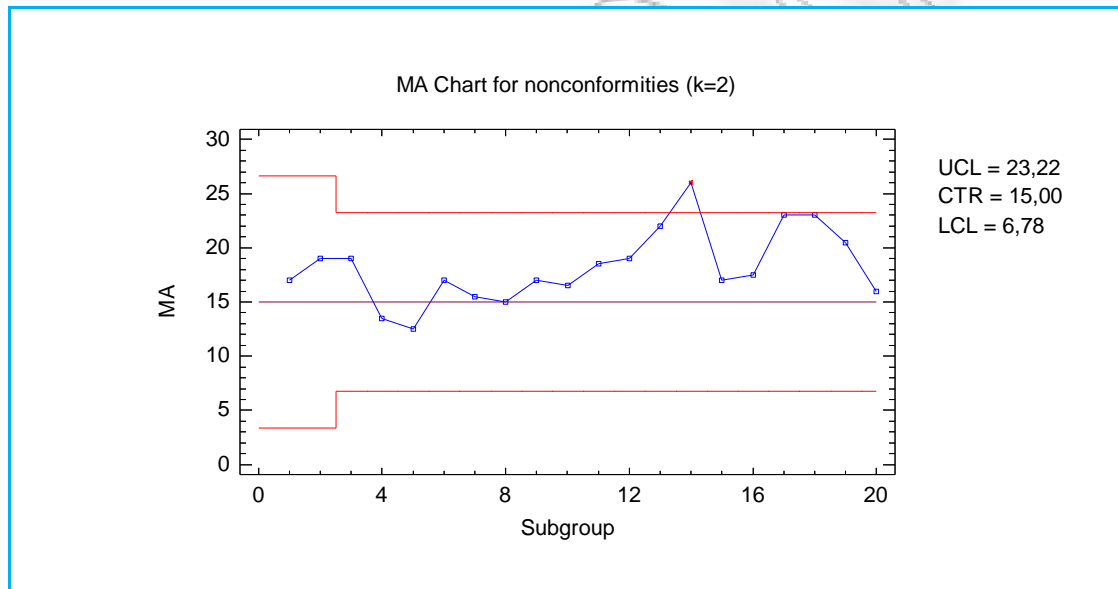
$i = 1$

$UCL_M = 26.6189$

$LCL_M = 3.3810$

Poisson

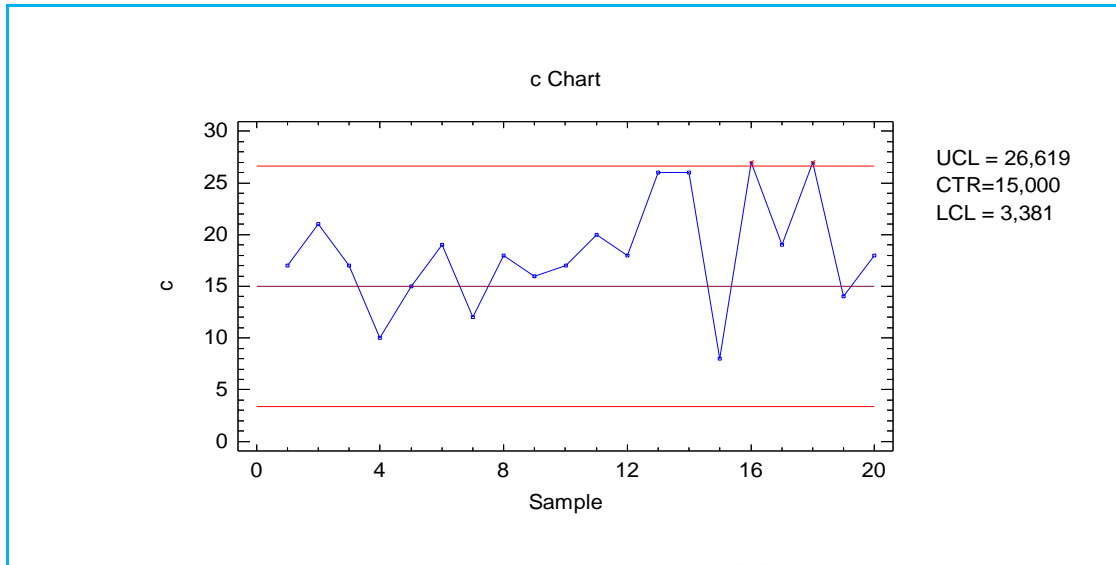
$k = 2$



Σχήμα 3.5. Poisson

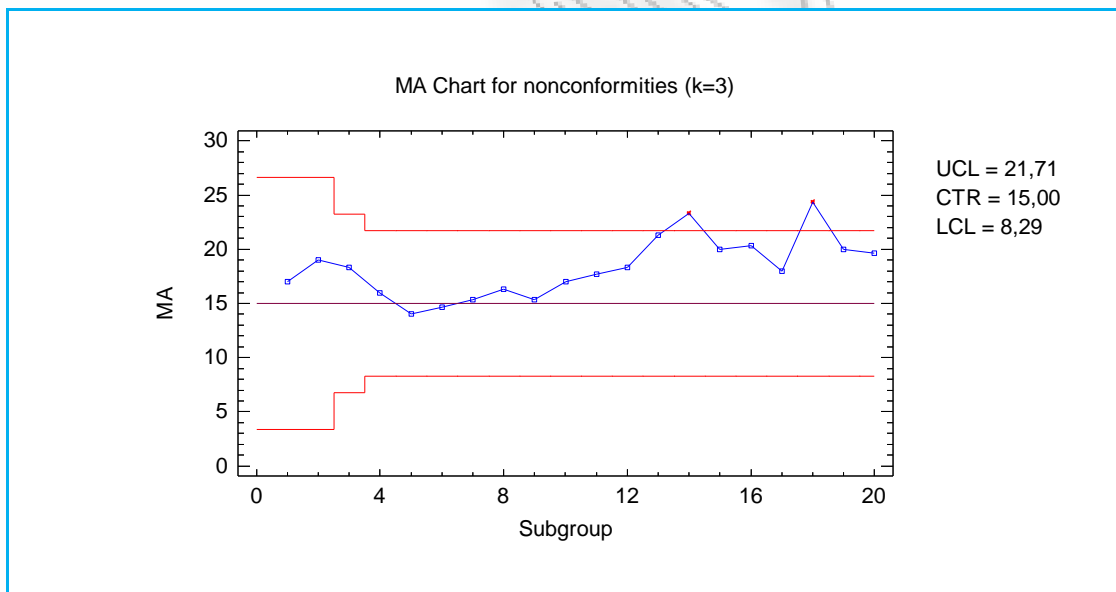
.3 ($k = 2$)

c



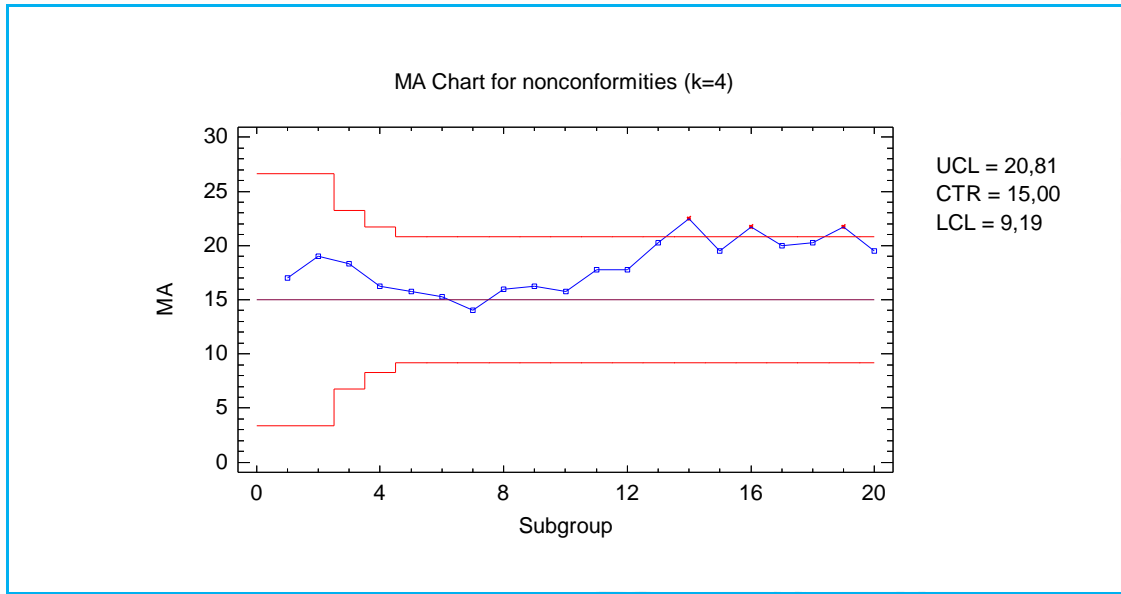
Σχήμα 3.6. c

$k = 3, 4$



Σχήμα 3.7. Poisson

.3 ($k = 3$)



Σχήμα 3.8. Poisson

.3 ($k = 4$)

Khoo (2004b)

ARL

c

Πίνακα

3.4

Πίνακας 3.4.

ARL c

Poisson

c = 1, 3, 6, 10, 16.

| c = 1 | | | | | c = 3 | | | | c = 6 | | | |
|----------|---------|---------------|-------|-------|---------|-------------|---------------|-------|---------|-------|-------|-------|
| d | c-chart | | | | c-chart | | | | c-chart | | | |
| | | k=2 | k=3 | k=4 | | k=2 | k=3 | k=4 | | k=2 | k=3 | k=4 |
| 0 | 284.5 | 263.7* | 349.9 | 522.1 | 275.7 | 317.2 | 523.4 | 455.3 | 287.7 | 361.2 | 338.3 | 396.9 |
| 0.5 | 54.8 | 37.7 | 39.6 | 44.5 | 58.1 | 46.1 | 53 | 43.1 | 63.8 | 55.2 | 45.6 | 45.3 |
| 0.7 5 | 30 | 20.3 | 20.4 | 21.3 | 31.4 | 23.2 | 25.1 | 20.3 | 47.7 | 37.3 | 30.1 | 29 |
| 1 | 18.6 | 12.4 | 12 | 12.4 | 18.9 | 14.4 | 13.6 | 11.4 | 22 | 16.2 | 12.9 | 12 |
| 1.2 5 | 12.8 | 8.6 | 8.2 | 8.3 | 12.5 | 8.8 | 8.6 | 7.5 | 13 | 9.2 | 7.5 | 7.2 |
| 1.5 | 9.2 | 6.4 | 6 | 6 | 8.8 | 6.2 | 6.1 | 5.4 | 10.3 | 7 | 5.9 | 5.6 |
| 2 | 5.5 | 3.9 | 3.8 | 3.7 | 5 | 3.7 | 3.6 | 3.4 | 5.6 | 4.1 | 3.6 | 3.5 |
| 2.5 | 3.7 | 2.8 | 2.8 | 2.7 | 3.2 | 2.6 | 2.5 | 2.5 | 3 | 2.4 | 2.3 | 2.3 |
| 3 | 2.7 | 2.2 | 2.2 | 2.2 | 2.3 | 2 | 2 | 1.9 | 2.2 | 1.9 | 1.8 | 1.8 |
| c = 10 | | | | | c = 16 | | | | | | | |
| d | c-chart | | | | c-chart | | | | | | | |
| | | k=2 | k=3 | k=4 | | k=2 | k=3 | k=4 | | | | |
| 0 | 295.8 | 379.3 | 423.4 | 366.9 | 449.1 | 294* | 375.1* | 559.5 | | | | |
| 0.5 | 77.3 | 69.8 | 65 | 53.6 | 99.5 | 53.4 | 53 | 59.8 | | | | |
| 0.7 5 | 38.1 | 30 | 26.3 | 21.6 | 51.7 | 26.1 | 24.2 | 24.9 | | | | |
| 1 | 21.4 | 16 | 13.5 | 11.2 | 28.6 | 14.3 | 12.9 | 12.9 | | | | |
| 1.2 5 | 16.6 | 12 | 10.1 | 8.6 | 17.4 | 9 | 8 | 7.8 | | | | |
| 1.5 | 10.3 | 7.1 | 6.1 | 5.5 | 11.5 | 6.1 | 5.5 | 5.3 | | | | |
| 2 | 4.9 | 3.6 | 3.3 | 3.1 | 5.7 | 3.4 | 3.2 | 3.1 | | | | |
| 2.5 | 3.2 | 2.5 | 2.4 | 2.3 | 3.3 | 2.3 | 2.2 | 2.2 | | | | |
| 3 | 2.1 | 1.8 | 1.8 | 1.8 | 2.2 | 1.8 | 1.8 | 1.7 | | | | |

Poisson

ARL

ARL

ARL

*

c

3.4 Διάγραμμα διπλού κινούμενου μέσου για τον αριθμό των ελαττωματικών προϊόντων.

Shewhart

$$n \quad np$$

Areerong & Sukparungsee

Khoo & Wong (2008).

$$X_1, X_2, \dots$$

$$X_i \sim b(n, p)$$

$$p \quad p = p_0 \quad p_0 \quad p_1 \quad p_1 > p_0, \quad np$$

$$X_i$$

$$np_0 \pm 3\sqrt{np_0(1-p_0)}$$

np

$$MA_i = \begin{cases} \frac{X_{i-k+1} + X_{i-k+2} + \dots + X_i}{k}, & i \geq k \\ \frac{X_1 + \dots + X_i}{i}, & i < k. \end{cases}$$

$i \geq k$

$$E(MA_i) = \frac{1}{k} E\left(\sum_{j=i-k+1}^i MA_j\right) = \frac{1}{k} (knp_0) = np_0$$

$$Var(MA_i) = \frac{1}{k^2} Var\left(\sum_{j=i-k+1}^i MA_j\right) = \frac{1}{k} (knp_0(1-p_0)) = \frac{np_0(1-p_0)}{k}$$

$$UCL/LCL = np_0 \pm 3\sqrt{\frac{np_0(1-p_0)}{k}}$$

$i < k$

$$UCL/LCL = np_0 \pm 3\sqrt{\frac{np_0(1-p_0)}{i}}$$

DMA

DMA

k

i

$$DMA_i = \begin{cases} \frac{MA_{i-k+1} + MA_{i-k+2} + \dots + MA_i}{k}, & i \geq k \\ \frac{MA_1 + \dots + MA_i}{i}, & i < k. \end{cases}$$

DMA_i

$i \geq k$

$$E(DMA_i) = \frac{1}{k} E\left(\sum_{j=i-k+1}^i MA_j\right) = \frac{1}{k} (knp_0) = np_0.$$

$i < k$

DMA_i $k > 2$

Areepong &

Sukparungsee (2011))

$$Var(DMA_i) = \begin{cases} \frac{np_0(1-p_0)}{i^2} \sum_{j=1}^i \frac{1}{j}, & i \leq k \\ \frac{np_0(1-p_0)}{k^2} \left[\sum_{j=i-k+1}^{k-1} \frac{1}{j} + \frac{i-k+1}{k} \right], & k < i < 2k-1 \\ \frac{np_0(1-p_0)}{k^2}, & i \geq 2k-1 \end{cases}$$

$k = 2$

$Var(DMA_i)$

DMA $k > 2$

$$UCL/LCL = \begin{cases} np_0 \pm L \sqrt{\frac{np_0(1-p_0)}{i^2} \sum_{j=1}^i \frac{1}{j}}, & i \leq k \\ np_0 \pm L \sqrt{\frac{np_0(1-p_0)}{k^2} \left[\sum_{j=i-k+1}^{k-1} \frac{1}{j} + \frac{i-k+1}{k} \right]}, & k < i < 2k-1 \\ np_0 \pm L \sqrt{\frac{np_0(1-p_0)}{k^2}}, & i \geq 2k-1. \end{cases}$$

DMA $k=2$

L

np

DMA

10

(n, p_0) ,

20

(n, p_1) .

$n=500, p_0=0.10$

p

$p_1=0.13$

np

$k=2$

Πίνακας 3.5.

DMA

| i | X_i | MA_i ($k=2$) | DMA_i ($k=2$) | i | X_i | MA_i ($k=2$) | DMA_i ($k=2$) |
|-----------|-------|---------------------|----------------------|-----------|-------|---------------------|----------------------|
| 1 | 49 | 49 | 49 | 16 | 55 | 65.5 | 68 |
| 2 | 59 | 54 | 51.5 | 17 | 64 | 59.5 | 62.5 |
| 3 | 52 | 55.5 | 54.75 | 18 | 67 | 65.5 | 62.5 |
| 4 | 58 | 55 | 55.25 | 19 | 68 | 67.5 | 66.5 |
| 5 | 58 | 58 | 56.5 | 20 | 76 | 72 | 69.75 |
| 6 | 42 | 50 | 54 | 21 | 66 | 71 | 71.5 |
| 7 | 41 | 41.5 | 45.75 | 22 | 77 | 71.5 | 71.25 |
| 8 | 44 | 42.5 | 42 | 23 | 66 | 71.5 | 71.5 |
| 9 | 52 | 48 | 45.25 | 24 | 58 | 62 | 66.75 |
| 10 | 41 | 46.5 | 47.25 | 25 | 60 | 59 | 60.5 |
| 11 | 66 | 53.5 | 50 | 26 | 72 | 66 | 62.5 |

| | | | | | | | |
|-----------|----|------|-------|-----------|----|------|-------|
| 12 | 69 | 67.5 | 60.5 | 27 | 63 | 67.5 | 66.75 |
| 13 | 65 | 67 | 67.25 | 28 | 69 | 66 | 66.75 |
| 14 | 65 | 65 | 66 | 29 | 80 | 74.5 | 70.25 |
| 15 | 76 | 70.5 | 67.75 | 30 | 60 | 70 | 72.25 |

$$i = 1$$

$$UCL_1 = np_0 + 3\sqrt{\frac{np_0(1-p_0)}{1^2} \sum_{j=1}^1 \frac{1}{j}} = np_0 + 3\sqrt{np_0(1-p_0)} = 500 * 0.1 + 3\sqrt{500 * 0.1(1-0.1)} = 70.1246$$

$$LCL_1 = np_0 - 3\sqrt{\frac{np_0(1-p_0)}{1^2} \sum_{j=1}^1 \frac{1}{j}} = np_0 - 3\sqrt{np_0(1-p_0)} = 500 * 0.1 - 3\sqrt{500 * 0.1(1-0.1)} = 29.8754$$

$$i = 2$$

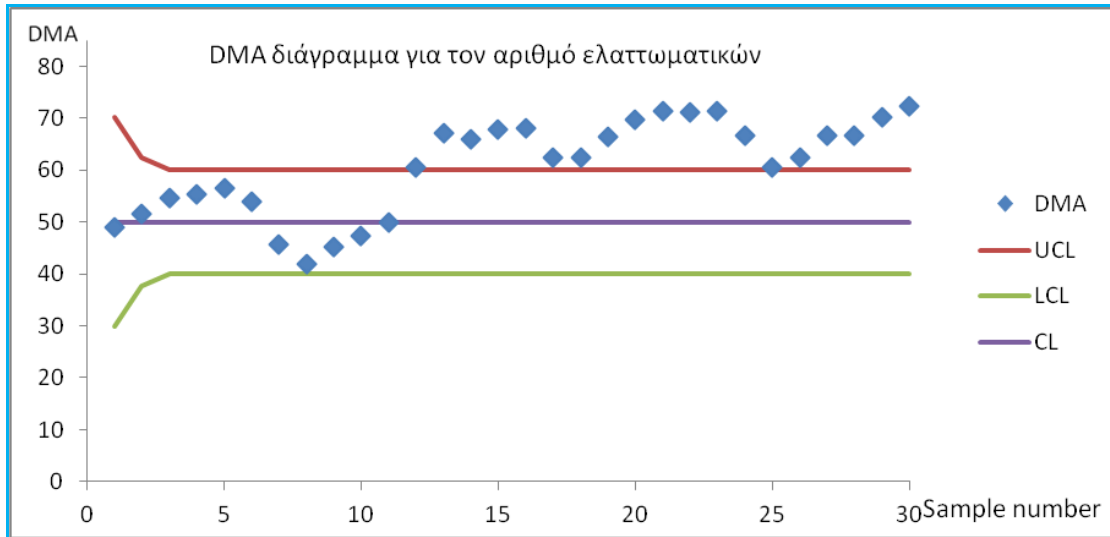
$$UCL_2 = np_0 + 3\sqrt{\frac{np_0(1-p_0)}{2^2} \sum_{j=1}^2 \frac{1}{j}} = np_0 + 3\sqrt{\frac{np_0(1-p_0)}{4} \left(1 + \frac{1}{2}\right)} = 500 * 0.1 + 3\sqrt{\frac{500 * 0.1(1-0.1)}{4} \left(1 + \frac{1}{2}\right)} = 62.3238$$

$$LCL_2 = np_0 - 3\sqrt{\frac{np_0(1-p_0)}{2^2} \sum_{j=1}^2 \frac{1}{j}} = np_0 - 3\sqrt{\frac{np_0(1-p_0)}{4} \left(1 + \frac{1}{2}\right)} = 500 * 0.1 - 3\sqrt{\frac{500 * 0.1(1-0.1)}{4} \left(1 + \frac{1}{2}\right)} = 37.6762$$

$$i \geq 3$$

$$UCL = np_0 + 3\sqrt{\frac{np_0(1-p_0)}{2^2}} = 60.0623$$

$$LCL = np_0 - 3\sqrt{\frac{np_0(1-p_0)}{2^2}} = 39.9377$$



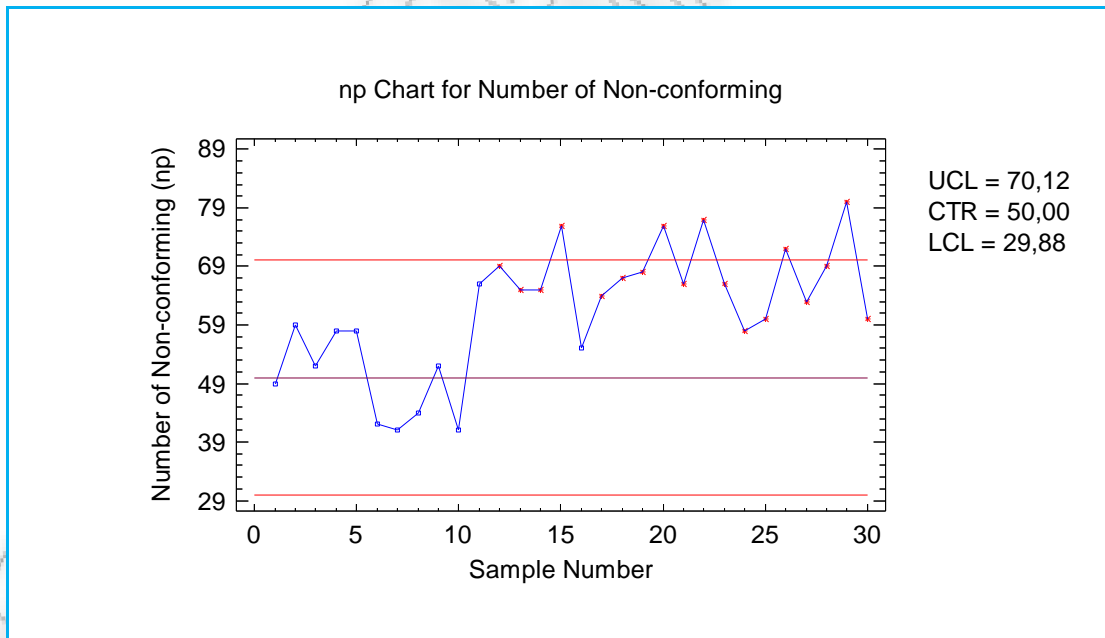
Σχήμα 3.9. DMA

.4

np-

DMA

np



Σχήμα 3.10. np

.4

np

15

DMA

$n = 100$ $ARL_0 = 370$. ARL $np, MA, DMA,$
DMA $L = 2.9984$.

Πίνακας 3.6. ARL np, MA, DMA

| | | | MA | | DMA | |
|-----|--------|---------|---------------|---------------|---------|----------------|
| n | p | np | $k = 2$ | $k = 3$ | $k = 1$ | $k = 2$ |
| 100 | 0.02 | 370.398 | 370.398 | 370.398 | 370.398 | 370.370 |
| | 0.025 | 98.0295 | 74.4752 | 59.6019 | 98.0295 | 50.6071 |
| | 0.027 | 60.0202 | 41.1259 | 30.9959 | 60.0202 | 25.9213 |
| | 0.030 | 31.7591 | 19.7234 | 14.3492 | 31.7591 | 12.4553 |
| | 0.033 | 18.7653 | 11.1365 | 8.1893 | 18.7653 | 7.6823 |
| | 0.035 | 13.9162 | 8.1780 | 6.1648 | 13.9162 | 6.1321 |
| | 0.040 | 7.6008 | 4.5863 | 3.7708 | 7.6008 | 4.2788 |
| | 0.050 | 3.4313 | 2.3952 | 2.2968 | 3.4313 | 3.0691 |
| | 0.070 | 1.6046 | 1.4332 | 1.4864 | 1.6046 | 2.3980 |
| | 0.100 | 1.1144 | 1.1035 | 1.1109 | 1.1144 | 2.1026 |
| n | p | np | $k = 2$ | $k = 3$ | $k = 1$ | $k = 2$ |
| 150 | 0.020 | 370.398 | 370.398 | 370.398 | 370.398 | 370.370 |
| | 0.025 | 84.6748 | 59.3018 | 45.0696 | 84.6748 | 37.2232 |
| | 0.027 | 48.7990 | 30.6212 | 22.0592 | 48.7990 | 18.2984 |
| | 0.030 | 24.2102 | 13.9137 | 9.9242 | 24.2102 | 8.8998 |
| | 0.033 | 13.7442 | 7.7259 | 5.7631 | 13.7442 | 5.7707 |
| | 0.035 | 10.0219 | 5.6934 | 4.4441 | 10.0219 | 4.7728 |
| | 0.040 | 5.3708 | 3.3010 | 2.9045 | 5.3708 | 3.5669 |
| | 0.050 | 2.4701 | 1.8802 | 1.9035 | 2.4701 | 2.7304 |
| | 0.0700 | 1.2910 | 1.2349 | 1.2612 | 1.2910 | 2.2272 |
| | 0.1000 | 1.0320 | 1.0310 | 1.0317 | 1.0320 | 2.0310 |

DMA

a MA np p.

ARL DMA Areepong Sukparungsee (2011)

Khoo (2004a)

p_1 p_0

:

$$ARL = [1 - \sum_{i=1}^k (a_i + b_i)](c + d)^{-1} + 2w - 1$$

$$a_i = P \left(Z > \frac{np_0 + H \sqrt{\frac{np_0(1-p_0) \sum_{j=1}^i \left(\frac{1}{j}\right)}{i^2}} - np_1}{\sqrt{\frac{np_1(1-p_1)}{i^2}}} \right)$$

$$b_i = P \left(z < \frac{np_0 - H \sqrt{\frac{np_0(1-p_0) \sum_{j=1}^i \left(\frac{1}{j}\right)}{i^2}} - np_1}{\sqrt{\frac{np_1(1-p_1)}{i^2}}} \right)$$

$$c = P \left(Z > \frac{np_0 + H \sqrt{\frac{np_0(1-p_0)}{k^2}} - np_1}{\sqrt{\frac{np_1(1-p_1)}{k^2}}} \right), \quad d = P \left(Z > \frac{np_0 - H \sqrt{\frac{np_0(1-p_0)}{k^2}} - np_1}{\sqrt{\frac{np_1(1-p_1)}{k^2}}} \right).$$

Βιβλιογραφία

Ελληνική Βιβλιογραφία

1. (2003).

Ξενόγλωσση βιβλιογραφία

1. Abdu, A.A., Khoo, M.B.C., Lim, S.K. (2009). A comparison of the performances of Various Single Variable Charts, In: 10th Islamic Countries Conference on Statistical Science, 20-23 December 2009, Cairo, Egypt.
2. Areepong, Y., Sukparungsee, S. (2011). An analytical ARL of Binomial Double Moving Average Chart, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 73(4), 477-488.
3. (1990). Improved Bounds for the Average Run Length of Control Charts based on Finite Weighted Sums, *The Annals of Statistics*, vol.18(4). 1895-1899.
4. Chen, G., Cheng, S.W., Xie, H. (2001). Monitoring process mean and variability with one EWMA chart, *Journal of Quality Technology*, 33:223-233.
5. Chen, G., Cheng, S.W., Xie, H. (2004). A new EWMA control chart for monitoring both location and dispersion, *Quality Technology & Quantitative Management*, 1:217-231.
6. Chen, Y.-S., Yang, Y.-M. (2002). for economic design of moving average control chart for a continuous flow process, *European Journal of Operational Research*, 143:600-610.
7. Chen, Y.-S., Yu, F.-J. (2003). Determination of Optimal Design Parameters of Moving Average Control Charts, *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 21:397-402.
8. Costa, A. F. B., Rahim, M. A. (2006). A single EWMA chart for monitoring process mean and process variance, *Quality Technology & Quantitative Management*, 3:295-305.
9. Gan, F. F. (2000). Joint monitoring of process mean and variance based on the exponentially weighted moving average statistical process monitoring schemes, *Statistical Process Monitoring and Optimization*, Marcel Dekker, New York.
10. Gan, F. F., Ting, K. W., Chang, T.C. (2004). Interval charting schemes for joint monitoring of process mean and variance, *Quality and Reliability Engineering International*, 20:291-303.
11. Gan, F.F. (1990). Monitoring Poisson observation using modified exponentially weighted moving average control charts, *Communication in Statistics-Simulation and Computation*, vol.19(1):103-124.

12. Gan, F.F. (1993). An optimal design of CUSUM control charts for binomial counts, *Journal of Applied Statistics*, 20(4):445-460.
13. Khoo, M. B. C. (2004a). A Moving Average Control Chart for Monitoring the Fraction Non-conforming, *Quality and Reliability Engineering International*, 20:617-635.
14. Khoo, M. B. C. (2004b). Poisson Moving Average versus c Chart for Nonconformities, *Quality Engineering*, 16(4):525-534.
15. Khoo, M. B. C., Wong, V.H. (2008). A Double Moving Average Control Chart, *Communication in Statistics-Simulation and Computation*, 37(8):1696-1708.
16. Khoo, M. B. C., Yap, P. W. (2005). Joint monitoring of process mean and variability with a single moving average control chart, *Quality Engineering*, 17, 51-65.
17. Lai, T. L. (1974). Control Charts based on Weighted Sums, *The Annals of Statistics*, vol.2 (1), 134-147.
18. Montgomery, D.C. (2005). *Introduction to Statistical Quality Control*, 5th ed., John Wiley & Sons, Inc., New York.
19. Reynolds JR., M.R, Stoumbos, Z.G. (1999): A Cusum chart for monitoring a proportion when inspecting continuously, *Journal of Quality Technology*, 31(1): 87-108.
20. Reynolds JR., M.R, Stoumbos, Z.G. (2000): A general approach to modeling Cusum charts for a proportion, *IIE Transactions*, 32(6): 515-535.
21. Roberts, S. W. (1959). Control Charts Based on Geometric Moving Averages, *Technometrics*, 1, 239-250.
22. Roberts, S.W. (1966). A comparison of some Control Charts Procedure, *Technometrics*, 8(3):411-430.
23. Ross, S.M.(1999). Average Run Lengths for Moving Average Control Charts, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 13: 209-220.
24. Shamma, S.E., Shamma, A. K. (1992). Development and evaluation of control charts using double exponentially weighted moving averages, *International Journal of Quality and Reliability Management*, 9(1):18-25.
25. Sparks, R.S. (2003). A Group of Moving Averages Control Plan for Signaling Varying Location Shifts, *Quality Engineering*, 15(4):519-532.
26. Sparks, R.S. (2004a). Weighted moving averages: an efficient plan for monitoring specific location shifts, *International Journal of Production Research*, 42(12):2521-2528.
27. Sparks, R.S. (2004b). A Group of Weighted Moving Averages: An efficient plan for monitoring a range of process changes, *International Journal of Production Research*, 42(13):2627-2638.
28. Wong, B.H, Gan, F.F., Chang, T.C. (2004). Designs of moving average control chart, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 74(1):47-62.
29. Woodall, W. H., (1997). Control charts based on attribute data: Bibliography and Review, *Journal of Quality Technology*, 29(2):172-183.

30. Zhang, L., Chen, G., (2005). An extended EWMA mean chart. *Quality Technology and Quantitative Management*, 2(1):39-52.
31. Zhang, L., Lai, C.D., Govindaraju, K., Bebbington, M.,(2004) A note on Average Run Lengths of Moving Average Control Charts, *Economic Quality Control*, 19(1):23-27.
32. Zhang, S., Wu, Z., (2006). Monitoring the process mean and variance using a weighted loss function CUSUM scheme with variable sampling intervals. *IIE Transactions*, 38:377-387.