ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ
ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

# ΜΕΜΕΙΓΜΕΝΕΣ ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΕΣ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΑ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΑ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ

Σπύρος Μ. Τζανίνης

**Διπλωματική Εργασία**

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

**Πειραιάς**
**Απρίλιος 2012**

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ
ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

# ΜΕΜΕΙΓΜΕΝΕΣ ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΕΣ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΑ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΑ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ

Σπύρος Μ. Τζανίνης

**Διπλωματική Εργασία**

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

**Πειραιάς**
**Απρίλιος 2012**

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ'αριθμ. $5^{\eta}$/11.04.11 συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Νικόλαος Μαχαιράς (Επιβλέπων),
- Κωνσταντίνος Πολίτης,
- Δημήτριος Στέγγος.

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

# UNIVERSITY OF PIRAEUS

## DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

## POSTGRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT


# MIXED RENEWAL PROCESSES WITH APPLICATIONS IN ACTUARIAL MODELS


by
Spyros M. Tzaninis


**MSc Dissertation**

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management.


**Piraeus, Greece**
**April 2012**

*Στους γονείς μου,*
*Κατερίνα και Μιχάλη.*
*Στην Αλέκα.*

# Ευχαριστίες

Κατ'αρχάς θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον επιβλέποντα την παρούσα διπλωματική εργασία κύριο Νικόλαο Μαχαιρά για την αμέριστη συμπαράστασή του και την πολύτιμη καθοδήγηση που μου προσέφερε κατά τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω και τα άλλα δύο μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής, κύριο Κωνσταντίνο Πολίτη και κύριο Δημήτριο Στέγγο για την επίβλεψή τους. Ακόμη θα ήθελα να ευχαριστήσω το τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης που μου έδωσε την δυνατότητα να ασχοληθώ με την εν λόγω εργασία.

# Περίληψη

Στην παρούσα εργασία διερευνούνται οι μεμειγμένες ανανεωτικές στοχαστικές διαδικασίες και κάποιες εφαρμογές τους σε αναλογιστικά υποδείγματα. Επειδή οι μεμειγμένες διαδικασίες Poisson είναι η απλούστερη ειδική περίπτωση των μεμειγμένων ανανεωτικών διαδικασιών αρχικά γίνεται μία συγκριτική βοηθητική μελέτη των διάφορων ορισμών των μεμειγμένων διαδικασιών Poisson. Εν συνεχεία, μελετάται ο ορισμός του Huang για μεμειγμένες ανανεωτικές διαδικασίες, εξετάζονται διάφορες ιδιότητες τους και μεταξύ άλλων παρουσιάζεται αναλυτικά ένα αποτέλεσμα του Huang, ότι μία μεμειγμένη ανανεωτική στοχαστική διαδικασία είναι Μαρκοβιανή ακριβώς τότε, όταν είναι μεμειγμένη διαδικασία Poisson. Επιπλέον δίνεται ένας δεύτερος ορισμός για τις μεμειγμένες ανανεωτικές στοχαστικές διαδικασίες και κάποιοι χαρακτηρισμοί τους μέσω disintegrations και ανταλλαξιμότητας. Ως συνέπεια αυτών των χαρακτηρισμών, αποδεικνύεται ότι στις περισσότερες περιπτώσεις που μας ενδιαφέρουν στην Θεωρία Πιθανοτήτων οι δύο ορισμοί συμπίπτουν. Μία δεύτερη συνέπεια είναι ένα αποτέλεσμα ύπαρξης της εργασίας [26] για μεμειγμένες ανανεωτικές διαδικασίες, που ταυτόχρονα προσφέρει μία κατασκευαστική μέθοδο για αυτές. Ως εφαρμογή της κατασκευαστικής μεθόδου, δίνονται κάποια παραδείγματα κατασκευής μεμειγμένων ανανεωτικών διαδικασιών με ακριβή υπολογισμό των αντίστοιχων disintegrations. Τέλος παρουσιάζονται και κάποιες εφαρμογές σε αναλογιστικά υποδείγματα.

# Abstract

The mixed renewal processes are investigated and some applications of the above in actuarial models are given. Since, mixed Poisson processes are the simplest case of the mixed renewal ones we first conduct a comparitive study of the various definitions of mixed Poisson processes. Next, Huang's definition for mixed renewal processes is studied, several properties of them are investigated and Hung's result that a mixed renewal process is a Markovian one if and only it is a mixed Poisson one. Furhtermore, a second definition for mixed renewal processes is given and some characterizations of mixed renewal processes in terms of disintegrations and of exchangeability are provided. As consequence of these characterizations, it is shown that the two definitions are coincide in the most cases of applications in Probability Theory. As a second consequence, an existence result of [26] for mixed renewal processes, providing at the same time a constructive method for them is presented. As an application some concrete examples of mixed renewal processes are given and the corresponding disintegrated measures are explicitely computed. Finally, some applications to actuarial models are given.

# Περιεχόμενα

**Εισαγωγή** **1**

**1 Βασικές Έννοιες και Ορισμοί** **3**

**2 Επισκόπηση Κάποιων Εννοιών της Κλασσικής Θεωρίας Κινδύνου** **9**
2.1 Το Υπόδειγμα . . . 9
2.2 Η Σ.Δ. Άφιξης των Απαιτήσεων . . . 10
2.3 Η Σ.Δ. του Αριθμού των Απαιτήσεων . . . 13
2.4 Η Διαδικασία Poisson . . . 15

**3 Σύγκριση ορισμών της Μεμειγμένης Διαδικασίας Poisson** **17**
3.1 Κάποια χρήσιμα αποτελέσματα . . . 17
3.2 Ορισμοί για την μεμειγμένη διαδικασία Poisson . . . 23
3.3 Σύγκριση των ορισμών της μεμειγμένης διαδικασίας Poisson . . . 25

**4 Οι μεμειγμένες ανανεωτικές διαδικασίες κατα Huang** **41**
4.1 Ορισμός της MRP και χαρακτηρισμός της . . . 41
4.2 Μαρκοβιανές MRPs . . . 48
4.3 Περισσότερα για την ιδιότητα $E$ . . . 59
4.4 MRPs και ιδιότητα $E^*$ . . . 68

**5 Ένας επιπλέον ορισμός για τις Μεμειγμένες Ανανεωτικές Διαδικασίες** **73**
5.1 Χαρακτηρισμός MRPs μέσω disintegrations . . . 73
5.2 Ανταλλαξιμότητα και κ.δ.π. . . . 78
5.3 Σύγκριση ορισμών της MRP . . . 79
5.4 Ύπαρξη και κατασκευή MRPs . . . 81

**6 Εφαρμογές στα Αναλογιστικά** **87**
6.1 Το Υπόδειγμα . . . 87
6.2 Εφαρμογές . . . 88
6.3 Συμπεράσματα . . . 91

**Παραρτήματα** **93**

**Α΄ Βασικές έννοιες Θεωρίας Μέτρου** **95**

**Β΄ Το Θεώρημα Μονότονης Κλάσης** **99**

**Γ΄ Τοπολογικές Έννοιες** **105**

**Δ΄ Το Θεώρημα de Finetti** **107**

**Βιβλιογραφία** **109**

# Κατάλογος Συντομογραφιών

**μ.χ.**: μετρήσιμος χώρος
**χ.μ., χ.π.**: χώρος μέτρου, χώρος πιθανότητας
$\sigma$.**μ.μ.**: σύνολο μηδενικού μέτρου
$\sigma$.**β.**: σχεδόν βέβαια
**τ.μ.**: τυχαία μεταβλητή
$\sigma$.**κ.(π.)**: συνάρτηση κατανομής (πιθανότητας)
$\sigma$.**(π.)π.**: συνάρτηση (πυκνότητας) πιθανότητας
$\sigma$.**δ.**: στοχαστική διαδικασία
$\mathbf{Exp}(\theta)$: εκθετική κατανομή με παράμετρο $\theta$
$\mathbf{Ga}(n, \theta)$: γάμμα κατανομή με παραμέτρους $n$ και $\theta$
MPP: μεμειγμένη διαδικασία Poisson
MRP: μεμειγμένη ανανεωτική στοχαστική διαδικασία

# Εισαγωγή

Αντικείμενο της παρούσας εργασίας αποτελεί η μελέτη των μεμειγμένων ανανεωτικών στοχαστικών διαδικασιών και κάποιες εφαρμογές τους σε αναλογιστικά υποδείγματα.
Οι μεμειγμένες ανανεωτικές στοχαστικές διαδικασίες (για συντομία MRPs) αποτελουν μία ειδική κλάση στοχαστικών διαδικασιών, οι οποίες γενικεύουν τις ανανεωτικές στοχαστικές διαδικασίες.
Στο *Κεφάλαιο 1* παραθέτουμε βασικές έννοιες και ορισμούς, ενώ στο *Κεφάλαιο 2* παραθέτουμε μια σύντομη επισκόπηση εννοιών της Θεωρίας Κινδύνου. Στην ενότητας 2.2 ορίζονται οι στοχαστικές διαδικασίες του χρόνου άφιξης των απαιτήσεων και των ενδιάμεσων χρόνων εμφάνισης των ενδεχομένων (βλ. Ορισμούς 2.2.1 και 2.2.2 αντίστοιχα) και εξετάζεται η σχέση που έχουν, ενώ στην ενότητα 2.3 αναφέρουμε την έννοια της στοχαστικής διαδικασίας του αριθμού των απαιτήσεων (βλ. Ορισμούς 2.3.1) και παραθέτουμε κάποια γνωστά αποτελέσματα για αυτήν, τα οποία θα χρησιμοποιηθούν στην εργασία. Τέλος στην ενότητα 2.4 εξειδικεύουμε τα αποτελέσματα των δύο προηγούμενων ενοτήτων για το κλασσικό υπόδειγμα της Θεωρίας Κινδύνου.
Στο *Κεφάλαιο 3* εξετάζεται η σχέση διαφόρων ορισμών για την μεμειγμένη διαδικασία Poisson (για συντομία MPP), που αποτελλεί βάση για την κατανόηση των MRPs. Αρχικά, στην ενότητα 3.1 δίνουμε έναν ορισμό για τις σημειακές διαδικασίες (βλ. Ορισμός 3.1.3) και αποδεικνύουμε ότι αυτός ο ορισμός είναι ισοδύναμος με τον ορισμό της στοχαστικής διαδικασίας του αριθμού των απαιτήσεων (βλ. Λήμμα 3.1.4). Στη συνέχεια ορίζουμε την μεμειγμένη κατανομή Poisson (βλ. Ορισμός 3.1.9). Στην ενότητα 3.2 παραθέτουμε τέσσερις από τους ορισμούς για την MPP που βρήκαμε στην βιβλιογραφία (βλ. [10] και [32]). Τέλος στην ενότητα 3.3 εξετάζουμε τη σχέση που έχουν οι ορισμοί που δόθηκαν στην προηγούμενη ενότητα και καταλήγουμε σε ένα θεώρημα χαρακτηρισμού για τις MPPs (βλ. Θεώρημα 3.3.7), στο οποίο αποδεικνύεται η ισοδυναμία των Ορισμών 3.2.2 και 3.2.6 όπως και εκείνη των 3.2.3 και 3.2.4, αλλά παραμένει ανοικτό το πρόβλημα της ισοδυναμίας των ορισμών.
Στο *Κεφάλαιο 4* μελετάμε τις MRPs σύμφωνα με τον ορισμό του Huang [15]. Στην ενότητα 4.1 αρχικά δίνουμε τον ορισμό των ιδιοτήτων $E$ και $E^*$ και εν συνεχεία ένα ελαφρώς διαφορετικό ορισμό από εκείνον που έδωσε ο Huang (βλέπε [15] Definition 3) για τις MRPs, όπως εκείνος δώθηκε στην εργασία [26] Definition 2.5, και ο λόγος για τον οποίο χρησιμοποιούμε τον συγκεκριμένο ορισμό (βλ. Παρατήρηση 4.1.4). Η ενότητα κλείνει με την απόδειξη ενός πρώτου χαρακτηρισμού για τις MRPs μέσω της ιδιότητας $E$ (βλ. Πόρισμα 4.1.8). Στην ενότητα 4.2 εξετάζουμε τη σχέση των MRPs και της Μαρκοβιανής

ιδιότητας (βλ. Θεώρημα 4.2.2). Τέλος στις ενότητες 4.3 και 4.4 εξετάζεται περεταίρω η σχέση των MRPs με τις ιδιότητες $E$ και $E^*$.

Στο *Κεφάλαιο 5* δίνεται ένας δεύτερος ορισμός για τις MRPs, όπως δόθηκε στην εργασία [26] Definition 2.4, και εξετάζεται η σχέση του συγκεκριμένου ορισμού τόσο με τον ορισμό που δώσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο όσο και με τον ορισμό που έδωσε ο Huang. Στην ενότητα 5.1 ορίζονται διάφορα είδη disintegrations (βλ. Ορισμοί 5.1.4) μέσω των οποίων δίνουμε έναν χαρακτηρισμό για τις MRPs (βλ. Πρόταση 5.1.13). Στην ενότητα 5.2 ορίζουμε την έννοια της ανταλλαξιμότητας και παραθέτουμε ένα γενικό θεώρημα χαρακτηρισμού για οικογένειες μετρήσιμων απεικονήσεων μέσω της ανταλλαξιμότητας το οποίο καταδεικνύει την σημαντική σχέση μεταξύ ανταλλαξιμότητας και κ.δ.π. και το οποίο γενικεύει το θεώρημα de Finetti (βλ. Παρατήρηση 5.2.2 **(b)**). Στην ενότητα 5.3 παραθέτουμε ένα γενικό θεώρημα χαρακτηρισμού των MRPs μέσω disintegrations, κ.δ.π. και ανταλλάξιμων $\sigma$.δ. και συγκρίνει τους δύο ορισμούς που έχουν δωθεί για τις MRPs (βλ. Θεώρημα 5.3.2). Εδώ αποδεικνύεται ότι στις περισσότερες περιπτώσεις εφαρμογών της Θεωρίας Πιθανοτήτων οι δύο ορισμοί που δώθηκαν για τις MRPs συμπίπτουν. Τέλος στην ενότητα 5.4 δίνουμε ένα θεώρημα κατασκευής MRPs μέσω disintegrations(βλ. Θεώρημα 5.4.1), κάνουμε μία αναφορά στα πλεονεκτήματα αυτής της μεθόδου σε σχέση με άλλες μεθόδους κατασκευής στοχαστικών διαδικασιών (βλ. Παρατήρηση 5.4.2) και δίνουμε παραδείγματα κατασκευής MRPs $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Σε αυτά τα παραδείγματα υπολογίζουμε επίσης τη πιθανότητα $P$ ως προς την οποία η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι MRP, όπως επίσης και τις disintegrations για σχεδόν όλα τα $\Theta$.

Τέλος στο *Κεφάλαιο 6* αφού περιγράψουμε το υπόδειγμα εφαρμογής των MRPs στην Θεωρία Κινδύνου αναφέρουμε αρχικά ένα παράδειγμα στο οποίο υπολογίζουμε την αναμενόμενη τιμή για μία MRP την οποία συγκρίνουμε με την αναμενόμενη τιμή μίας αντίστοιχης MPP. Στη συνέχεια περιγράφουμε ένα παράδειγμα που προέρχεται από το [34] και αναφέρεται σε κάποια υποδείγματα αντικατάστασης για τα οποία οι χρόνοι ζωής των συνιστωσών είναι ανταλλάξιμες (δηλαδή MRPs) στοχαστικές διαδικασίες χωρίς να είναι ισόνομες και ανεξάρτητες.

# Κεφάλαιο 1

# Βασικές Έννοιες και Ορισμοί

Στο παρόν κεφάλαιο παραθέτουμε ορισμένες εισαγωγικές έννοιες και κάποιους βασικούς συμβολισμούς και ορισμούς που χρησιμοποιούνται στην παρούσα εργασία.
Με $\mathbb{N}$ συμβολίζεται το σύνολο $\{1, 2, \ldots\}$ όλων των φυσικών αριθμών , με $\mathbb{Z}$ το σύνολο όλων των ακεραίων αριθμών, με $\mathbb{Q}$ το σύνολο όλων των ρητών αριθμών και με $\mathbb{R}$ το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών. Επίσης χρησιμοποιούνται τα εξής σύμβολα: $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{N}_m := \{1, 2, \ldots, m\}$, $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $\mathbb{Q}^* := \mathbb{Q}\setminus\{0\}$, $\mathbb{R}^* := \mathbb{R}\setminus\{0\}$ και $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Ομοίως ορίζονται και οι συμβολισμοί $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Z}_+^*$ και $\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{Q}_+^*$.
Έστω $\Omega$ σύνολο και $A, B \subseteq \Omega$. Με $A^c$ ή $\Omega\setminus A := \{x \in \Omega : x \notin A\}$ συμβολίζεται το **συμπλήρωμα του** $A$ (σε σχέση με το $\Omega$), με $A \uplus B$ συμβολίζεται η ένωση δύο ξένων μεταξύ τους συνόλων και με $\biguplus_{i\in I} A_i$ συμβολίζεται η ένωση μιας οικογένειας $\{A_i\}_{i\in I}$ ($I \neq \varnothing$) ξένων ανά δύο υποσυνόλων του $\Omega$. Τα στοιχεία μίας $\sigma$-άλγεβρας $\Sigma$ καλούνται **ενδεχόμενα**, ενώ για κάθε $A \in \Sigma$ με $\chi_A$ συμβολίζουμε την **δείκτρια συνάρτηση** του (ενδεχομένου) $A$. Ας θεωρήσουμε επίσης ένα σύστημα υποσυνόλων $\mathcal{G}$ του $\Omega$. **Η ελάχιστη $\sigma$-άλγεβρα** υποσυνόλων του $\Omega$ που περιέχει το $\mathcal{G}$ συμβολίζεται με $\sigma(\mathcal{G})$ και ονομάζεται **η $\sigma$-άλγεβρα η παραγόμενη από το** $\mathcal{G}$, ενώ το $\mathcal{G}$ ονομάζεται **γεννήτορας** της $\sigma(\mathcal{G})$. Μία $\sigma$-άλγεβρα $\mathcal{A}$ είναι **αριθμήσιμα παραγόμενη** εάν υπάρχει μία αριθμήσιμη οικογένεια $\mathcal{G}$ υποσυνόλων του $\Omega$ για την οποία ισχύει $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{G})$. Τέλος, με $\mathfrak{B}$ και $\mathfrak{B}((\alpha, \beta))$, όπου $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$, συμβολίζουμε την Borel $\sigma$-άλγεβρα υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ και $(\alpha, \beta)$, αντίστοιχα.
Μια οικογένεια $\{B_j\}_{j\in I}$ ονομάζεται **διαμέριση** του $\Omega$, αν
- $B_j \cap B_k = \varnothing$ για κάθε $j, k \in I$ ώστε $j \neq k$ και
- $\bigcup_{j\in I} B_j = \Omega$.

Οι τελευταίες δύο ιδιότητες συνοπτικά συμβολίζονται ως εξής: $\biguplus_{j\in I} B_j = \Omega$. Αν επί πλέον η $\{B_j\}_{j\in I}$ είναι μια οικογένεια στο $\Sigma$, τότε αυτή ονομάζεται μια **$\Sigma$-μετρήσιμη διαμέριση** του $\Omega$.
Στο εξής κι εφόσον δεν δηλώνεται διαφορετικά θεωρούμε έναν χ.μ. $(\Omega, \Sigma, \mu)$.
Ένα σύνολο $N \in \Sigma$ ονομάζεται **σύνολο μηδενικού μέτρου** ($\sigma.\mu.\mu.$) ή **σύνολο $\mu$-μηδενικού μέτρου** ($\mu - \sigma.\mu.\mu.$) ή **$\mu$-μηδενικό σύνολο** αν και μόνο αν $\mu(N) = 0$. Το σύνολο όλων των $\mu - \sigma.\mu.\mu.$ συμβολίζεται με $\Sigma_0$.
Στο εξής κι εφόσον δεν δηλώνεται διαφορετικά θεωρούμε έναν χ.π. $(\Omega, \Sigma, P)$. Ένα μέτρο

πιθανότητας $P$ ονομάζεται **τέλειο** αν για κάθε τυχαία μεταβλητή $X$ στον $\Omega$ υπάρχει ένα σύνολο Borel $B \subseteq X(\Omega) := \{X(\omega) : \omega \in \Omega\}$ τέτοιο ώστε, $P(X^{-1}(B)) = 1$.

Μία τ.μ. $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ ονομάζεται **ολοκληρώσιμη** (ως προς το μέτρο $P$) αν $\int |f| dP < \infty$. Με $\mathcal{L}^1(P)$ (αντ. $\mathcal{L}^1_+(P)$) συμβολίζεται το σύνολο όλων των ολοκληρώσιμων (αντ. μη αρνητικών $P - \sigma.\beta.$, ολοκληρώσιμων) συναρτήσεων $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$. Ακόμη με $\mathcal{L}^2(P)$ συμβολίζεται αντίστοιχα το σύνολο όλων των **τετραγωνικά ολοκληρώσιμων** – δηλαδή όλων των τ.μ. $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ ώστε $\int f^2 dP < \infty$ – **συναρτήσεων**.

Μια συνάρτηση $F : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ ονομάζεται **συνάρτηση κατανομής πιθανότητας** ($\sigma.\kappa.\pi.$) αν είναι , αύξουσα, δεξιά συνεχής, $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ και $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.

Για μια τ.μ. $X : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ η συνολοσυνάρτηση $P_X : \mathfrak{B} \longmapsto \mathbb{R}$ με τύπο

$$P_X(B) := P(X^{-1}(B)) \quad \text{για κάθε} \quad B \in \mathfrak{B}$$

είναι πιθανότητα και ονομάζεται **κατανομή (πιθανότητας)** της τ.μ. $X$. Μάλιστα, αν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $P_X(\{x\}) = 1$, τότε η $P_X$ ονομάζεται **εκφυλισμένη κατανομή (πιθανότητας)** (*degenerate (probability) distribution*). Η $P_X$ (αντ. η τ.μ. $X$) παράγει την **συνάρτηση κατανομής πιθανότητας** ($\sigma.\kappa.\pi.$) $F_X : \mathbb{R} \longmapsto [0,1]$ **της τ.μ.** $X$, που ορίζεται από τον τύπο

$$F_X(x) := P_X\big((-\infty, x]\big) = P(X \leq x) \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Η $F_X$ είναι πράγματι $\sigma.\kappa.\pi.$ (βλ. π.χ. [30], Πρόταση 1.4.9). Η $\sigma.\kappa.\pi.$ $F_X$ μίας τ.μ. $X$ ικανοποιεί την σχέση

$$P_X(B) = P(X \in B) = \lambda_{F_X}(B), \forall B \in \mathfrak{B} \tag{1.1}$$

όπου $\lambda_{F_X}(B)$ είναι το μέτρο Lebesgue-Stieltjes που επάγεται από την $F_X$ ( βλ. π.χ. [30], Πρόταση 1.4.10 για τον ορισμό του μέτρου Lebesgue-Stieltjes και για την απόδειξη της (1.1) ).

Μια $\sigma.\kappa.\pi.$ $F : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ (αντ. μια τ.μ. $X : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ με $\sigma.\kappa.\pi.$ $F_X = F$) ονομάζεται:

• **Διακριτή**, αν αυτή (αντ. η $\sigma.\kappa.\pi.$ της $Q$) είναι της μορφής

$$F(x) = \sum_{k \in K : k \leq x} f(k) \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R},$$

για κάποιο αριθμήσιμο σύνολο $K \subseteq \mathbb{R}$ και για κάποια Borel μετρήσιμη συνάρτηση $f : K \longmapsto \mathbb{R}_+$. Η $f$ ονομάζεται με τη σειρά της **συνάρτηση πιθανότητας** ($\sigma.\pi.$) της $F$ (αντ. της $X$).

• **Συνεχής**, αν η $F$ είναι συνεχής συνάρτηση (αντ. η $\sigma.\kappa.\pi.$ $F_X$ της $Q$).

•**Απόλυτα Συνεχής**, αν αυτή (αντ. η $\sigma.\kappa.\pi.$ $F_X$ της $Q$) είναι της μορφής

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R},$$

για κάποια Borel μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}_+$ .

Η $f$ ονομάζεται με τη σειρά της **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας** ($\sigma.\pi.\pi.$)

της $F$ (αντ. της $X$). Προφανώς, αν η τ.μ. $X$ είναι απόλυτα συνεχής, τότε θα είναι και συνεχής. Επειδή στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε μόνο με (διακριτές και) απόλυτα συνεχείς τ.μ., στο εξής γράφοντας «συνεχής τ.μ.» θα εννοούμε «απόλυτα συνεχής τ.μ.». Ακόμη, θα λέμε ότι η τ.μ. $X$ με σύνολο τιμών $R_X$ **ακολουθεί την κατανομή** $\mathbf{K}(\theta)$ με παραμετρικό διάνυσμα $\theta := (\theta_1, \ldots, \theta_m) \in \mathbb{R}^m$, όπου $m \in \mathbb{N}$ , και θα συμβολίζουμε για το αντίστοιχο μέτρο πιθανότητας $P_X = \mathbf{K}(\theta)$ αν

$$P_X(B) = \int_B f_X(x)\chi_{R_X}\nu(dx) = \int_{B\cap R_X} f_X(x)\nu(dx) \quad \text{για κάθε} \quad B \in \mathfrak{B},$$

όπου $f_X$ η αντίστοιχη $\sigma.(\pi.)\pi.$, και $\nu$ είναι το αριθμητικό μέτρο επάνω στο $\mathbb{N}$ ή το μέτρο του Lebesgue $\lambda$ επάνω στο $\mathbb{R}$ ανάλογα με το αν η τ.μ. $X$ είναι συνεχής ή διακριτή. Αν η τ.μ. $X$ είναι διακριτή, τότε το ολοκλήρωμα γίνεται άθροισμα ή σειρά, ανάλογα με το αν το $R_X$ είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο, αντίστοιχα.

Έστω$(\Omega, \Sigma, \mu)$ και $(\Theta, T, \nu)$ χ.μ.. Ένα $R \subseteq \Omega\times\Theta$ ονομάζεται **μετρήσιμο ορθογώνιο (του** $\Omega \times \Theta$**)**, αν γράφεται $R = A \times B$, όπου $A \in \Sigma$ και $B \in T$. Επί πλέον, η $\sigma$-άλγεβρα που παράγεται από την οικογένεια των μετρήσιμων ορθογωνίων λέγεται $\sigma$**-άλγεβρα γινόμενο** των $\Sigma$ και $T$ και συμβολίζεται με $\Sigma \otimes T$.

Έστω επίσης ο χ.μ. $(\Omega \times \Theta, \Sigma \otimes T, \rho)$. Το μέτρο $\rho$ ονομάζεται **μέτρο γινόμενο των** $\mu$ **και** $\nu$ και συμβολίζεται με $\mu \otimes \nu$ αν και μόνο αν για κάθε $A \in \Sigma$ και $B \in T$ ικανοποιεί την ιδιότητα $\rho(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$.

Εαν $I$ είναι ένα οποιοδήποτε μη κενό σύνολο δεικτών και $\{(\Omega_i, \Sigma_i, P_i)\}_{i\in I}$ είναι μία οικογένεια χ.π., τότε για κάθε $\emptyset \neq J \subseteq I$ συμβολίζουμε με $(\Omega_J, \Sigma_J, P_J)$ τον χ.π.-γινόμενο $\otimes_{i\in J}(\Omega_i, \Sigma_i, P_i) := \Big(\prod_{i\in J}\Omega_i, \otimes_{i\in J}\Sigma_i, \otimes_{i\in J}P_i\Big)$. Αν $(\Omega, \Sigma, P)$ είναι ένας χ.π. συμβολίζουμε με $P^I$ την πιθανότητα-γινόμενο στον $\Omega^I$ και με $\Sigma^I$ το πεδίο ορισμού της $P^I$.

Για μια τ.μ. $X : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ το ολοκλήρωμα

$$\mathbb{E}X := \mathbb{E}[X] := \int XdP = \int_\Omega X(\omega)P(d\omega) = \int_\Omega X(\omega)dP(\omega)$$

(εφόσον υπάρχει στο $\overline{\mathbb{R}}$) ονομάζεται η **μέση τιμή** ή η **αναμενόμενη τιμή** ή η **μαθηματική ελπίδα** της τ.μ. $X$. Ειδικά αν $X \in \mathcal{L}^1(P)$ τότε η $\mathbb{E}[X] \in \mathbb{R}$, δηλαδή είναι ένας αριθμός.

Τα ενδεχόμενα $A_1, \ldots, A_n \in \Sigma \quad (n \in \mathbb{N} : n \geq 2)$ ονομάζονται **ανεξάρτητα** αν

$$P\Big(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\Big) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j}), \quad \text{για κάθε} \quad 1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n \quad \text{και για κάθε} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Οι τ.μ. $X_1, \ldots, X_n : \Omega \longmapsto \mathbb{R} \quad (n \in \mathbb{N} : n \geq 2)$ ονομάζονται **ανεξάρτητες** αν για κάθε ακολουθία $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}_n}$ πραγματικών αριθμών τα ενδεχόμενα $\{X_k \leq \alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}_n}$ είναι ανεξάρτητα. Ισοδύναμα, οι τ.μ. $X_1, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $\{B_k\}_{k\in\mathbb{N}_n}$ στοιχείων της $\mathfrak{B}$ τα ενδεχόμενα $\{X_k \in B_k\}_{k\in\mathbb{N}_n}$ είναι ανεξάρτητα (βλ. π.χ. [30], Παρατήρηση 3.2.5(b)). Ακόμη πιο γενικά, μια άπειρη οικογένεια τ.μ. ονομάζεται **ανεξάρτητη** αν και μόνο αν κάθε πεπερασμένη υποοικογένειά της είναι ανεξάρτητη.

Οι $\sigma$-υποάλγεβρες $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n \quad (n \in \mathbb{N} : n \geq 2)$ της $\Sigma$ ονομάζονται **ανεξάρτητες** αν για κάθε $k \in \mathbb{N}_n$ και για κάθε $A_k \in \Sigma_k$ τα $A_1, \ldots, A_n$ είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα. Γενικότερα, μια άπειρη οικογένεια $\sigma$-υποαλγεβρών της $\Sigma$ ονομάζεται **οικογένεια ανεξάρτητων $\sigma$-υποαλγεβρών της** $\Sigma$ αν και μόνο αν οποιεσδήποτε και οσεσδήποτε, πεπερασμένες στο πλήθος, από αυτές είναι ανεξάρτητες.
Μία οικογένεια $\{\Sigma_i\}_{i\in I}$ $\sigma$-υποαλγεβρών της $\Sigma$ ονομάζεται **$P$-υπό συνθήκη ανεξάρτητη** της $\sigma$-υποάλγεβρας $\mathcal{F} \subseteq \Sigma$, αν $\forall n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$ έχουμε

$$P(E_1 \cap \ldots \cap E_n|\mathcal{F}) = \prod_{j=1}^{n} P(E_j|\mathcal{F}) \quad P|\mathcal{F} - \sigma.\beta.$$

$\forall j \leq n \ \ \forall E_j \in \Sigma_{i_j}$ όπου τα $i_1, \ldots, i_n$ είναι διακριτά στοιχεία του $I$.
Μία οικογένεια $\Sigma$-$T$-μετρήσιμων απεικονήσεων $\{X_i\}_{i\in I}$ από τον $\Omega$ στον $\Upsilon$ είναι:
• **$P$-υπό συνθήκη ανεξάρτητη** επάνω στην $\sigma$-υποάλγεβρα $\mathcal{F}$ της $\Sigma$ , αν η οικογένεια $\sigma\left(\{X_i\}\right)_{i\in I}$ είναι $P$-υπό συνθήκη ανεξάρτητη επάνω στην $\mathcal{F}$,και
• **$P$-υπό συνθήκη ισόνομη** επάνω στην $\sigma$-υποάλγεβρα $\mathcal{F}$ της $\Sigma$ αν,

$$P(F \cap X_i^{-1}(B)) = P(F \cap X_j^{-1}(B)),$$

για $i, j \in I$ , $F \in \mathcal{F}$ και $B \in T$.
Επί πλέον, για κάθε τ.μ. $X : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ θέτουμε

$$\sigma(X) := X^{-1}(\mathfrak{B}) := \{X^{-1}(B) : B \in \mathfrak{B}\}.$$

Τότε, η $\sigma(X)$ είναι μια $\sigma$-άλγεβρα στο $\Omega$ που ονομάζεται η **$\sigma$-άλγεβρα στο $\Omega$ η παραγόμενη από την** $X$ και ισχύει $\sigma(X) \subseteq \Sigma$. Γενικότερα, για μια οικογένεια $\{X_j\}_{j\in I}$ τ.μ., όπου $I$ σύνολο δεικτών, ορίζουμε

$$\sigma\big(\{X_j\}_{j\in I}\big) := \sigma\Bigg(\bigcup_{j\in I} \sigma(X_j)\Bigg).$$

Η $\sigma\big(\{X_j\}_{j\in I}\big)$ ονομάζεται η $\sigma$-άλγεβρα η παραγόμενη από την οικογένεια $\{X_j\}_{j\in I}$.
Μία οικογένεια $\{X_t\}_{t\in T}$ τ.μ. ονομάζεται **ανεξάρτητη** μιας οικογένειας $\{\Sigma_i\}_{i\in I}$ $\sigma$-υποαλγεβρών της $\Sigma$, όπου $T, I \neq \varnothing$ σύνολα δεικτών, αν για κάθε πεπερασμένο αριθμό τ.μ. $X_{t_1}, \ldots, X_{t_m}$ και $\sigma$-υποαλγεβρών $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$ της $\Sigma$ $(m, n \in \mathbb{N})$, οι $\sigma$-υποάλγεβρες $\sigma(X_{t_1}), \ldots, \sigma(X_{t_m}), \Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$ είναι ανεξάρτητες.
Αν οι $P, Q$ είναι κατανομές πιθανότητας επάνω στον μ.χ. $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, τότε η κατανομή πιθανότητας με τύπο

$$(P * Q)(B) := \int_{\mathbb{R}} P(B - y)dQ(y) \quad \text{για κάθε} \quad B \in \mathfrak{B},$$

όπου $B - y := \{z - y : z \in B\}$, ονομάζεται η **συνέλιξη** των $P, Q$. Επίσης για $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε ως την **$n$-οστη συνέλιξη** της $P$, την κατανομή πιθανότητας $P^{*(n+1)} := P^n * P$, όπου $P^{*0}$ (εκφυλισμένη) κατανομή που ικανοποιεί την $P^{*0}(\{0\}) = 1$. Ομοίως, ορίζεται και η συνέλιξη δύο $\sigma$.κ.π. $F, G$ ή δύο $\sigma$.(π.)π. $f, g$. Τέλος, σημειώνουμε ότι αν $n \in \mathbb{N}$ και η $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}_n}$ είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων τ.μ. με αντίστοιχες κατανομές πιθανότητας (επάνω στον μ.χ. $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$) $\{P_{X_k}\}_{k\in\mathbb{N}_n}$, τότε από τον ορισμό της συνέλιξης άμεσα έχουμε ότι

$$P_{X_0+\cdots+X_n} = P_{X_0} * \cdots * P_{X_n} = (P_{X_0} * \cdots * P_{X_{n-1}}) * P_{X_n}.$$

Μία οικογένεια $\{X_j\}_{j\in I}$, όπου $I$ ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο (βλ. π.χ. [29], Ορισμός 1.19), μετρήσιμων συναρτήσεων $X_j : \Omega \longmapsto \overline{\mathbb{R}}$ $(j \in I)$ ονομάζεται **$\sigma$.δ.** ($\sigma$.δ.) ή **στοχαστική ανέλιξη**. Επί πλέον, αν το $I$ είναι ένα υπεραριθμήσιμο υποσύνολο του $\overline{\mathbb{R}}$ τότε λέμε ότι η $\{X_j\}_{j\in I}$ είναι μια $\sigma$.δ. **συνεχούς χρόνου**, ενώ αν το $I \subseteq \mathbb{Z}$, τότε λέμε ότι η $\{X_j\}_{j\in I}$ είναι μια $\sigma$.δ. **διακριτού χρόνου**.
Μια $\sigma$.δ. $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι:
• μια $\sigma$.δ. **ανεξάρτητων προσαυξήσεων** ή έχει **ανεξάρτητες προσαυξήσεις** αν για κάθε $m \in \mathbb{N}_0$, $t_0, t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$ ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$, οι **προσαυξήσεις** $X_{t_j} - X_{t_{j-1}}$ $(j \in \mathbb{N}_m \cup \{0\})$ είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες.
• μια $\sigma$.δ. **στάσιμων προσαυξήσεων** ή έχει **στάσιμες προσαυξήσεις** αν για κάθε $m \in \mathbb{N}_0$, $h \in \mathbb{R}_+$ και $t_0, t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ η οικογένεια των προσαυξήσεων $\{X_{t_j+h} - X_{t_{j-1}+h}\}_{j\in\mathbb{N}_m\cup\{0\}}$ έχει την ίδια κατανομή με την $\{X_{t_j} - X_{t_{j-1}}\}_{j\in\mathbb{N}_m\cup\{0\}}$, δηλαδή αν και μόνο αν για κάθε $j \in \mathbb{N}_m \cup \{0\}$ και για κάθε $h \in \mathbb{R}_+$ ισχύει $P_{X_{t_j+h}-X_{t_{j-1}+h}} = P_{X_{t_j}-X_{t_{j-1}}}$.
Έστω $\{X_t\}_{t\in I}$ μία $\sigma$.δ. με ολικά διατεταγμένο σύνολο δεικτών $I$ έτσι ώστε για κάθε $t \in I$ το σύνολο $R_{X_t}$ της $X_t$ να είναι αριθμήσιμο σύνολο. Η $\{X_t\}_{t\in I}$ ονομάζεται **Μαρκοβιανή $\sigma$.δ.** ή **$\sigma$.δ. Markov** ή θα λέμε ότι ικανοποιεί την **Μαρκοβιανή ιδιότητα**, εάν για οποιοδήποτε $n \in \mathbb{N}$, $t_1 < \ldots < t_n < t, t_j, t \in I$ για κάθε $j = 1, \ldots n$ και $i_1, \ldots, i_n, k \in R_{X_t}$ ισχύει

$$P\left(X_{n+1} = x_{n+1} | \bigcap_{i=1}^{n} \{X_i = x_i\}\right) = P\left(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n\right).$$

Για κάθε ενδεχόμενο $B \in \Sigma$ τέτοιο ώστε $P(B) \neq 0$ και τ.μ. $X : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$, το ολοκλήρωμα της τ.μ. $X$ ως προς την δεσμευμένη πιθανότητα $P_B$ συμβολίζεται με

$$\mathbb{E}_B[X] := \mathbb{E}[X|B] := \int_B X dP_B$$

και (εφόσον υπάρχει στο $\overline{\mathbb{R}}$) ονομάζεται **η δεσμευμένη μέση τιμή της (τ.μ.) $X$ δοθέντος του (ενδεχομένου)** $B$.Μία οικογένεια $\{\Sigma_j\}_{j\in I}$ $\sigma$-υποαλγεβρών της $\Sigma$ ονομάζεται **διύλιση** αν και μόνο αν για κάθε $j, k \in I$ με $j < k$ ισχύει $\Sigma_j \subseteq \Sigma_k$.
Μία $\sigma$.δ. $\{X_j\}_{j\in I}$ λέμε ότι είναι **προσαρμοσμένη σε μία διύλιση** $\{\Sigma_j\}_{j\in I}$ αν και μόνο αν για κάθε $j \in I$ η τ.μ. $X_j$ είναι $\Sigma_j$-μετρήσιμη.
Η $\{T_j\}_{j\in I}$ με $T_j = \sigma\big(\{X_k : k \leq j\}\big)$ για κάθε $j \in I$ ονομάζεται **η κανονική διύλιση για την** $\{X_j\}_{j\in I}$. Προφανώς, κάθε $\sigma$.δ. $\{X_j\}_{j\in I}$ είναι προσαρμοσμένη στην κανονική της διύλιση.Μια $\sigma$.δ. $\{X_j\}_{j\in I}$ ονομάζεται **ένα martingale ως προς τη διύλιση** $\{\Sigma_j\}_{j\in I}$ ή **ένα** $\{\Sigma_j\}_{j\in I}$**-martingale** (ή η οικογένεια $\{(X_j, \Sigma_j)\}_{j\in I}$ ονομάζεται **ένα martingale**) αν και μόνο αν ισχύουν τα εξής:

**($\mathbf{m_1}$)** Η $\{X_j\}_{j\in I}$ είναι προσαρμοσμένη στη (διύλιση) $\{\Sigma_j\}_{j\in I}$.

**($\mathbf{m_2}$)** Για κάθε $j \in I$ η $X_j \in \mathcal{L}^1(P)$.

**($\mathbf{m_3}$)** Για κάθε $j, k \in I$ με $j \leq k$ ισχύει $\mathbb{E}[X_k|\Sigma_j] = X_j \quad P|\Sigma_j - \sigma.\beta.$.

Τέλος, σημειώνουμε ότι για την υπόλοιπη εργασία κι εφόσον δεν δηλώνεται διαφορετικά, θεωρούμε έναν σταθερό χ.π. $(\Omega, \Sigma, P)$.

# Κεφάλαιο 2

# Επισκόπηση Κάποιων Εννοιών της Κλασσικής Θεωρίας Κινδύνου

Αντικείμενο αυτού του κεφαλαίου είναι μία σύντομη αναφορά σε κάποιες βασικές έννοιες και αποτελέσμάτα της Θεωρίας Κινδύνου. Έτσι, αρχικά σκιαγραφούμε ένα υπόδειγμα της διαχρονικής εξέλιξης του χαρτοφυλακίου των κινδύνων μιας ασφαλιστικής επιχείρησης, θέτοντας το γενικό πλαίσιο αναφοράς του παρόντος κεφαλαίου (βλ. Ενότητα 2.1). Έπειτα, προχωράμε στην επισκόπιση κάποιων ιδιοτήτων των $\sigma$.δ. άφιξης των απαιτήσεων και του αριθμού των απαιτήσεων (βλ. Ενότητες 2.2 και 2.3, αντίστοιχα). Τέλος αναφέρουμε βασικά αποτελέσματα σχετικά με τη διαδικασία Poisson(βλ. Ενότητα 2.4), που αποτελεί την βάση για την κατανόηση τόσο της μεμειγμένης διαδικασίας Poisson όσο και των μεμειγμένων ανανεωτικών διαδικασιών.

## 2.1 Το Υπόδειγμα

Για την ανάπτυξη ενός υποδείγματος που θα μοντελοποιεί το χαρτοφυλακίου των κινδύνων μιας ασφαλιστικής επιχείρησης, αναφέρουμε αρχικά τις ακόλουθες έννοιες,

- την $\sigma$.δ. άφιξης των απαιτήσεων (*claim arrival process*),
- την $\sigma$.δ. του αριθμού των απαιτήσεων (*claim number process*), και,
- την $\sigma$.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων (*claim interarrival process*).

Θα δούμε ότι και οι τρείς στοχαστικές διαδικασίες σχετίζονται μεταξύ τους και μάλιστα γνωρίζοντας την μία μπορούμε να καθορίσουμε τις υπόλοιπες.
Ας θεωρήσουμε ένα χαρτοφυλάκιο κινδύνων που ασφαλίζονται από κάποια ασφαλιστική εταιρεία. Οι ασφαλισμένοι πληρώνουν ασφάλιστρα έναντι των κινδύνων που αντιμετωπίζουν και οι οποίοι αν παραγματοποιηθούν προξενούν απαιτήσεις έναντι της εταιρίας, η οποία με τη σειρά της καλείται να τις εξοφλήσει . Το χαρτοφυλάκιο μπορεί να αποτελείται από έναν και μοναδικό ή περισσότερους κινδύνους.
Υποθέτουμε επιπλέον ότι οι απαιτήσεις λαμβάνουν χώρα τυχαία και σε έναν άπειρο χρονικό ορίζοντα ξεκινώντας στο χρόνο μηδέν, έτσι ώστε

- καμιά απαίτηση να μην λαμβάνει χώρα στο χρόνο μηδέν, και

- να μην συμβαίνουν δύο (ή περισσότερες) απαιτήσεις, ταυτόχρονα.

Η υπόθεση της μη ταυτόχρονης πραγματοποίησης δύο (ή περισσότερων) απαιτήσεων φαίνεται ότι μπορεί να γίνει χωρίς βλάβη της γενικότητας. Πράγματι, δεν πρέπει να παρουσιάζεται κάποιο σημαντικό πρόβλημα όταν το χαρτοφυλάκιο είναι μικρό. Όμως, όταν το χαρτοφυλάκιο είναι μεγάλο, εξαρτάται από το είδος της υπό εξέταση ασφάλισης για το αν αυτή η υπόθεση είναι πράγματι αποδεκτή ,π.χ δύο ασφαλισμένοι από το ίδιο χαρτοφυλάκιο ασφάλισης αυτοκινήτων να εμπλακούν σε ένα δυστύχημα μεταξύ τους και να υπάρχει μερική ευθύνη και από τους δύο .
Πάντως, η υπόθεση της μη ταυτόχρονης εμφάνισης δύο απαιτήσεων ακόμα κι όταν κρίνεται ως μη αποδεκτή, μπορεί να διατηρηθεί, αλλάζοντας ελαφρώς την οπτική μας, δηλαδή, με το να θεωρήσουμε τα γεγονότα (που προκαλούν την έγερση) απαίτησης (όπως αυτοκινητιστικά δυστυχήματα) αντί των ατομικών απαιτήσεων. Ο αριθμός των ατομικών απαιτήσεων που εγείρονται για ένα συγκεκριμένο γεγονός απαίτησης μπορεί τότε να ερμηνευτεί ως το μέγεθος του γεγονότος απαίτησης.
Στις επόμενες ενότητες αυτού του κεφαλαίου μοντελοποιούμε τις προηγούμενες ιδέες σε ένα *πιθανοθεωρητικό* υπόδειγμα.

## 2.2 Η Σ.Δ. Άφιξης των Απαιτήσεων

Στην παρούσα ενότητα θα ορίσουμε τόσο την $\sigma$.δ. άφιξης των απαιτήσεων όσο και την $\sigma$.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων και παραθέτουμε κάποια χρήσιμα αποτελέσματα χωρίς απόδειξη.

**Ορισμός 2.2.1** Η ακολουθία $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ τ.μ. είναι μια $\sigma$.δ. **άφιξης των απαιτήσεων** αν υπάρχει σύνολο μηδενικής πιθανότητας $\Omega_T \in \Sigma$ τέτοιο ώστε για κάθε $\omega \in \Omega \setminus \Omega_T$ να ισχούν τα εξής:

**($\mathbf{t_1}$)** $T_0(\omega) = 0$, και

**($\mathbf{t_2}$)** $T_{n-1}(\omega) < T_n(\omega)$ για κάθε $n \geq 1$.

Επιπλέον, το $P$-μηδενικό σύνολο $\Omega_T$ ονομάζεται το **$P$-μηδενικό σύνολο εξαίρεσης** της $\sigma$.δ. άφιξης των απαιτήσεων $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Προφανώς για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η τ.μ. $T_n$ είναι θετική κάτι που είναι άμεση συνέπεια του ορισμού.

**Ορισμός 2.2.2** Έστω $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ $\sigma$.δ. άφιξης των απαιτήσεων. Η ακολουθία $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, όπου $W_n := T_n - T_{n-1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι η $\sigma$.δ. **ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων**

Από τους δύο παραπάνω ορισμούς άμεσα έπεται για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ότι η τ.μ. $W_n$ είναι θετική, καθώς και ότι ισχύει η σχέση

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} W_i. \tag{2.1}$$

Ερμηνεύοντας, τώρα, τους Ορισμούς 2.2.1 και 2.2.2 σε όρους του υποδείγματος που σκιαγραφήσαμε στην προηγούμενη ενότητα σημειώνουμε τα εξής:

- Η $T_n$ είναι η τ.μ. που δηλώνει τον χρόνο εμφάνισης της $n$-οστής απαίτησης.
- Η $W_n$ είναι η τ.μ. που δηλώνει τον χρόνο αναμονής μεταξύ της $(n-1)$-οστής και της $n$-οστής απαίτησης.
- Με πιθανότητα ένα **καμία** απαίτηση δεν εγείρεται στον χρόνο μηδέν και δύο (ή παραπάνω) απαιτήσεις **δεν εμφανίζονται ταυτόχρονα**.

Παρατηρούμε, λοιπόν, πως οι Ορισμοί 2.2.1 και 2.2.2 βρίσκουν άμεση φυσική ερμηνεία, αφού προφανώς οι χρόνοι άφιξης και οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης των απαιτήσεων θα είναι θετικοί, ενώ λογικά η απαίτηση $n$ θα εμφανίζεται σε χρόνο μεταγενέστερο αυτού στον οποίο εμφανίζεται η απαίτηση $n-1$.
Για το υπόλοιπο αυτού του κεφαλαίου και εφόσον δεν δηλώνεται διαφορετικά, θεωρούμε την $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ως μια $\sigma$.δ. άφιξης των απαιτήσεων και την $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ως την αντίστοιχη $\sigma$.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το $P$-μηδενικό σύνολο εξαίρεσης της $\sigma$.δ. άφιξης των απαιτήσεων είναι το κενό σύνολο, δηλαδή $\Omega_T := \varnothing \in \Sigma$.
Από τον Ορισμό 2.2.2 και την (2.1), είναι προφανές ότι η $\sigma$.δ. άφιξης των απαιτήσεων και η $\sigma$.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων αλληλοκαθορίζονται. Η σχέση τους γίνεται ξεκάθαρη από τα ακόλουθα αποτελέσματα.

**Λήμμα 2.2.3** *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύουν τα εξής:*

*(i)* $\sigma\big(\{T_k\}_{k\in\{0,1,\ldots,n\}}\big) = \sigma\big(\{W_k\}_{k\in\{1,\ldots,n\}}\big)$.

*(ii) Για τα τυχαία διανύσματα $\mathbf{T_n}, \mathbf{W_n} : \Omega \longmapsto \mathbb{R}^n$ με τύπο*

$$\mathbf{T_n}(\omega) := (T_1, \ldots, T_n)'(\omega) = (T_1(\omega), \ldots, T_n(\omega))'$$

*και*

$$\mathbf{W_n}(\omega) := (W_1, \ldots, W_n)'(\omega) = (W_1(\omega), \ldots, W_n(\omega))'$$

*για κάθε $\omega \in \Omega$, αντίστοιχα, καθώς και για τον $n \times n$-πίνακα $\mathbf{M_n} = [m_{ij}]$ με*

$$m_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{αν } i \geq j \\ 0 & \text{αν } i < j \end{cases}$$

*έχουμε:*

(a) *Ο* $\mathbf{M_n}$ *είναι αντιστρέψιμος και ικανοποιεί την σχέση* $\det(\mathbf{M_n}) = 1$, *και*

(b) $\mathbf{T_n} = \mathbf{M_n} \circ \mathbf{W_n}$ *καθώς και* $\mathbf{W_n} = \mathbf{M_n^{-1}} \circ \mathbf{T_n}$.

Για την απόδειξη του παραπάνω Λήμματος βλ. π.χ [24] Λήμμα 3.2.3.

Από το (i) έπεται το συμπέρασμα ότι η πληροφορία που είναι διαθέσιμη από την γνώση της $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι ίδια με την πληροφορία που προκύπτει από την γνώση της $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ενώ από το (ii) προκύπτει ότι αν γνωρίζουμε τις τιμές της μίας μπορούμε πολύ εύκολα να υπολογίσουμε και τις τιμές της άλλης μέσω ενός πίνακα.

**Λήμμα 2.2.4** *Οι κατανομές των τυχαίων διανυσμάτων του Λήμματος 2.2.3 ικανοποιούν για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *τα εξής:*

$$P_{\mathbf{T_n}} = (P_{\mathbf{W_n}})_{\mathbf{M_n}} \quad \textit{και} \quad P_{\mathbf{W_n}} = (P_{\mathbf{T_n}})_{\mathbf{M_n^{-1}}}.$$

Στις υποθέσεις που κάναμε για το υπόδειγμα που αναπτύχθηκε στην Ενότητα 2.1 η πιθανότητα να προκύψουν ταυτόχρονα δύο ή και περισσότερες απαιτήσεις είναι ίση με μηδέν, αυτό όμως δεν αποκλείουν την δυνατότητα πραγματοποίησης απείρως πολλών απαιτήσεων σε πεπερασμένο χρόνο, κάτι που μας οδηγεί πολύ φυσικά στον ακόλουθο ορισμό.

**Ορισμός 2.2.5** Το ενδεχόμενο $\{\sup_{n\in\mathbb{N}} T_n < \infty\}$ ονομάζεται **έκρηξη**.

Παρακάτω παραθέτουμε δύο αποτελέσματα που αναφέρονται στην πιθανότητα της έκρηξης.

**Λήμμα 2.2.6** *Αν* $\sup_{n\in\mathbb{N}} E[T_n] < \infty$, *τότε η πιθανότητα της έκρηξης ισούται με ένα.*

**Πόρισμα 2.2.7** *Αν* $\sum_{n=1}^{\infty} E[W_n] < \infty$, *τότε η πιθανότητα της έκρηξης ισούται με ένα.*

Για την απόδειξη των δύο παραπάνω αποτελεσμάτων βλ. π.χ [24] Λήμμα 3.2.6 και Πόρισμα 3.2.7 αντίστοιχα.
Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφέρουμε ότι κατά την ανάπτυξη ενός υποδείγματος για μια συγκεκριμένη ασφαλιστική επιχείρηση, μια από τις πρώτες αποφάσεις που πρέπει να ληφθεί είναι η απόφαση για το αν θα πρέπει να θεωρήσουμε την πιθανότητα έκρηξης ίση με το μηδέν ή όχι. Αυτή φυσικά είναι μια απόφαση που αφορά την σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων. Το ακόλουθο Λήμμα δεν είναι τίποτε άλλο πέρα από μία εφαρμογή του Λήμματος 2.2.4 και μας βοηθάει να καταλάβουμε καλύτερα τη σχέση που έχουν οι στοχαστικές διαδικασίες $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ και $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

**Λήμμα 2.2.8** *Έστω* $\theta \in (0,\infty)$. *Αν η σ.δ.* $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων είναι ανεξάρτητη, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

*(i)* $P_{W_n} = \mathbf{Exp}(\theta)$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.

*(ii)* $P_{T_n} = \mathbf{Ga}(n,\theta)$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.

*Σε αυτήν την περίπτωση και για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *ισχύει ότι* $\mathbb{E}[W_n] = 1/\alpha$ *και* $\mathbb{E}[T_n] = n/\alpha$, *και η πιθανότητα της έκρηξης ισούται με μηδέν.*

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [32] Lemma 1.2.2.

## 2.3 Η Σ.Δ. του Αριθμού των Απαιτήσεων

Στην παρούσα ενότητα εισάγουμε την σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων και αποδεικνύουμε ότι οι σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων και του αριθμού των απαιτήσεων καθορίζουν η μία την άλλη (και κατέπέκταση την σ.δ ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων). Παραθέτουμε ακόμη δύο αποτελέσματα που αναφέρονται στο πως συνδέεται η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων με την πιθανότητα της έκρηξης. Τέλος, ορίζουμε τις έννοιες της προσαύξησης, των ανεξάρτητων και των στάσιμων προσαυξήσεων για την σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων.

**Ορισμός 2.3.1** Μία οικογένεια $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ τ.μ. ονομάζεται σ.δ. **του αριθμού των απαιτήσεων** αν υπάρχει ένα σύνολο μηδενικής πιθανότητας $\Omega_N \in \Sigma$ τέτοιο ώστε για κάθε $\omega \in \Omega \setminus \Omega_N$ να ισχούν τα εξής:

**(n1)** $N_0(\omega) = 0$,

**(n2)** $N_t(\omega) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ για κάθε $t \in (0, \infty)$,

**(n3)** $N_t(\omega) = \inf_{s\in(t,\infty)} N_s(\omega)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$,

**(n4)** $\sup_{s\in[0,t)} N_s(\omega) \leq N_t(\omega) \leq \sup_{s\in[0,t)} N_s(\omega) + 1$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, και

**(n5)** $\sup_{t\in\mathbb{R}_+} N_t(\omega) = \infty$.

Επί πλέον, το $P$-μηδενικό σύνολο $\Omega_N$ ονομάζεται το $P$-**μηδενικό σύνολο εξαίρεσης** της σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$.

Μία σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων ονομάζεται από ορισμένους συγγραφείς και *σημειακή διαδικασία*

Θέλοντας να δώσουμε μια φυσική ερμηνεία στον παραπάνω ορισμό σημειώνουμε τα εξής:

- Η $N_t$ είναι η τ.μ. που δηλώνει τον πλήθος των απαιτήσεων που εμφανίζονται στο χρονικό διάστημα $[0, t]$.

- $P$-σχεδόν βέβαια όλες οι τροχιές της $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ξεκινούν από το μηδέν (βλ. **(n1)**), είναι δεξιά συνεχείς (βλ. **(n3)**), αυξάνουν με άλματα μοναδιαίου ύψους στα σημεία ασυνέχειας (βλ. **(n2)** και **(n4)** ), και τείνουν στο άπειρο (βλ. **(n5)**).

Παρατηρούμε, λοιπόν, πως σε χρόνο μηδέν δεν έχουμε καμία απαίτηση, ενώ με το πέρασμα του χρόνου ο αριθμός των απαιτήσεων αυξάνει. Μάλιστα, όταν αυτό γίνεται στο χρονικό διάστημα $(t, t+\varepsilon)$, η αύξηση δεν είναι μεγαλύτερη της μίας απαίτησης, αφού από τις υποθέσεις του υποδείγματός μας σχεδόν βέβαια δύο ή περισσότερες απαιτήσεις δεν εμφανίζονται ταυτόχρονα.

Όπως αναφέρθηκε και στην αρχή της παρούσας ενότητας η σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων και η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων καθορίζουν η μία την άλλη, μαθηματικά η παραπάνω πρόταση μεταφράζεται στα δύο ακόλουθα θεωρήματα.

**Θεώρημα 2.3.2** *Αν $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι μια σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων και για κάθε $\omega \in \Omega$ και $t \in \mathbb{R}_+$ θέσουμε*

$$N_t(\omega) := \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{T_n \le t\}}(\omega), \tag{2.2}$$

*τότε για την $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ισχύουν τα εξής:*

*(i) Η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων τέτοια ώστε $\Omega_N = \Omega_T$, και*

*(ii) Για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ και $\omega \in \Omega \setminus \Omega_T$ ισχύει*

$$T_n(\omega) = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : N_t(\omega) = n\}. \tag{2.3}$$

**Θεώρημα 2.3.3** *Αν $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων και για κάθε $\omega \in \Omega$ και $n \in \mathbb{N}_0$ θέσουμε $T_n(\omega) := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : N_t(\omega) = n\}$, τότε για την $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ισχύουν τα εξής:*

*(i) Η $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι μια σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων τέτοια ώστε $\Omega_T = \Omega_N$, και*

*(ii) Για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $\omega \in \Omega \setminus \Omega_N$ ισχύει $N_t(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{T_n \le t\}}(\omega)$.*

Για την απόδειξη των παραπάνω δύο αποτελεσμάτων βλ. π.χ [24] Θεώρημα 3.3.2 και Θεώρημα 3.2.3 αντίστοιχα.

Για το υπόλοιπο αυτού του κεφαλαίου, θεωρούμε την $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ως μια σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων, την $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ως μια σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων που παράγεται από την σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων και την $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ως την σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων, που παράγεται από την σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων.
Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι το $P$-μηδενικό σύνολο εξαίρεσης της σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων,(και άρα και το $P$-μηδενικό σύνολο εξαίρεσης της σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων αφού $\Omega_T = \Omega_N$) είναι το κενό σύνολο, δηλαδή $\Omega_T = \Omega_N = \varnothing$.
Εξαιτίας της παραπάνω υπόθεσης, παίρνουμε δύο απλές, αλλά πολύ χρήσιμες ισότητες, που καταδεικνύουν το ότι ορισμένα ενδεχόμενα που καθορίζονται από την σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων μπορούν να ερμηνευτούν (ισοδύναμα) ως ενδεχόμενα που καθορίζονται από την σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων κι αντίστροφα.

**Λήμμα 2.3.4** *Για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ και για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ ισχύουν τα εξής:*

*(i)* $\{N_t \ge n\} = \{T_n \le t\}$.

*(ii)* $\{N_t = n\} = \{T_n \le t\} \setminus \{T_{n+1} \le t\} = \{T_n \le t < T_{n+1}\}$.

Για την απόδειξη βλ. π.χ [24] Λήμμα 3.3.4.
Άμεση συνέπεια του (i) του Λήμματος 2.3.4 αποτελεί το παρακάτω αποτέλεσμα.

**Λήμμα 2.3.5** *Ισχύει* $\sigma\big(\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}\big) = \sigma\big(\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}\big)$.

Μία πρώτη εφαρμογή του Λήμματος 2.3.4 είναι η σύνδεση του ενδεχομένου της έκρηξης με την σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων, κάτι που φαίνεται στα παρακάτω δύο αποτελέσματα.

**Λήμμα 2.3.6** *Για την πιθανότητα της έκρηξης ισχύει*

$$P\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} T_n < \infty\right) = P\left(\bigcup_{t\in\mathbb{N}}\{N_t = \infty\}\right) = P\left(\bigcup_{t\in(0,\infty)}\{N_t = \infty\}\right).$$

Για την απόδειξη βλ. π.χ [32] Lemma 2.1.4.

**Πόρισμα 2.3.7** *Αν η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων έχει πεπερασμένες αναμενόμενες τιμές τότε η πιθανότητα της έκρηξης είναι ίση με το μηδέν.*

Για την απόδειξη βλ. π.χ [32] Corollary 2.1.5.

Όπως θα διαπιστώσουμε και στα επόμενα κεφάλαια, η μελέτη της σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων θα βασιστεί σε σημαντικό βαθμό στις ιδιότητες των προσαυξήσεών της, οι οποίες ορίζονται ως ακολούθως.
Στο σημείο αυτό κρίνεται σκόπιμο να ορίσουμε τις έννοιες της προσαύξησης του αριθμού των απαιτήσεων στο διάστημα $(s,t]$, των στάσιμων αλλά και των ανεξάρτητων προσαυξήσεων.
Για κάθε $s,t\in\mathbb{R}_+$ με $s\le t$ η **προσαύξηση** της σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ στο διάστημα $(s,t]$ ορίζεται από την

$$N_t - N_s := \sum_{n=1}^{\infty}\chi_{\{s<T_n\le t\}}. \tag{2.4}$$

Επειδή, μάλιστα, για κάθε $\omega\in\Omega$ ισχύει $N_0(\omega)=0$ και $T_n(\omega)>0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ η (2.4) βρίσκεται σε συμφωνία με τον τρόπο με τον οποίο ορίστηκε η τ.μ. $N_t$ στο Θεώρημα 2.3.2. Επί πλέον, για κάθε $\omega\in\Omega$ και για κάθε $s,t\in\mathbb{R}_+$ με $s\le t$ έχουμε ότι

$$N_t(\omega) = (N_t - N_s)(\omega) + N_s(\omega), \tag{2.5}$$

που ισχύει ακόμα κι αν το $N_s(\omega)$ απειρίζεται.

## 2.4 Η Διαδικασία Poisson

Στην παρούσα ενότητα ορίζουμε τη διαδικασία Poisson και δίνουμε κάποια αρχικά αποτελέσμα που αφορούν τις κατανομές των στοχαστικών διαδικασιών $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$,$\{N_t\}_{n\in\mathbb{R}_+}$ και $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

**Ορισμός 2.4.1** Η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια (**ομογενής**) **διαδικασία Poisson** με παράμετρο $\theta\in(0,\infty)$ εάν έχει ανεξάρτητες και ισόνομες προσαυξήσεις και για κάθε $t\in(0,\infty)$ ισχύει $P_{N_t} = \mathbf{P}(\theta t)$.

Άμεση συνέπεια του Ορισμού είναι ότι μία σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων με ανεξάρτητες προσαυξήσεις έχει στάσιμες προσαυξήσεις αν και μόνο αν

$$P_{N_{t+h}-N_t} = P_{N_h}$$

για όλα τα $t, h \in \mathbb{R}_+$.

**Ορισμός 2.4.2** Η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{\widetilde{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια **τυπική διαδικασία Poisson** αν για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ η $\widetilde{N}_t$ ακολουθεί την Poisson με παράμετρο 1.

**Λήμμα 2.4.3** *Έστω $\theta \in (0, \infty)$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

*(i)* $P_{T_n} = \mathbf{Ga}(n, \theta)$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.

*(ii)* $P_{N_t} = \mathbf{P}(\theta t)$ *για κάθε* $t \in (0, \infty)$.

*Σε αυτήν την περίπτωση ισχύει* $\mathbb{E}[T_n] = n/\theta$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *και* $\mathbb{E}[N_t] = \theta t$ *για κάθε* $t \in (0, \infty)$.

Για την απόδειξη βλ π.χ [32] Lemma 2.2.1
Το παρακάτω πόρισμα είναι άμεση συνέπεια των προηγούμενων των Λημμάτων 2.2.8 και 2.4.3 και δηλώνει ότι αν οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης των απαιτήσεων είναι (ισόνομα) εκθετικά κατανεμημένοι και ανεξάρτητοι έπεται ότι ο αριθμός των απαιτήσεων ακολουθεί μια κατανομή Poisson και αντίστροφα.

**Πόρισμα 2.4.4** *Έστω $\theta \in (0, \infty)$. Αν η σ.δ. $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων είναι ανεξάρτητη, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

*(i)* $P_{W_n} = \mathbf{Exp}(\theta)$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.

*(ii)* $P_{N_t} = \mathbf{P}(\theta t)$ *για κάθε* $t \in (0, \infty)$.

Το ακόλουθο θεώρημα χαρακτηρισμού είναι το πρώτο από μία σειρά θεωρημάτων χαρακτηρισμού που θα ακολουθήσουν στα υπόλοιπα κεφάλαια

**Θεώρημα 2.4.5** *Έστω $\theta \in (0, \infty)$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

*(i) Η σ.δ ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ανεξάρτητη και ικανοποιεί τη συνθήκη $P_{W_n} = \mathbf{Exp}(\theta)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

*(ii) Η σ.δ αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία διαδικασία Poisson με παράμετρο $\theta$.*

*(iii) Η σ.δ αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις και ικανοποιεί τη συνθήκη $\mathbb{E}[N_t] = \theta t$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$.*

*(iv) Η σ.δ $\{N_t - \theta t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ένα martingale.*

Για απόδειξη βλ. π.χ. [32] Theorem 2.3.4 .

# Κεφάλαιο 3

# Σύγκριση ορισμών της Μεμειγμένης Διαδικασίας Poisson

Αντικείμενο του παρόντος κεφαλαίου είναι η συγκριτική μελέτη των ορισμών της μεμειγμένης διαδικασίας Poisson ( MPP για συντομία) που αποτελεί γενίκευση της διαδικασία Poisson. Στη ενότητα 3.1 δίνεται ένας ορισμός απλών σημειακών διαδικασιών που υπάρχει στη βιβλιογραφία ( βλ. π.χ [10] Definition 3.2) και αποδυκνύεται, ότι κάτω από κάποιες ασθενείς συνθήκες ο εν λόγω ορισμός είναι ισοδύναμος με το φαινομενικά διαφορετικό Ορισμό 2.3.1 που επίσης υπάρχει στη βιβλιογραφία. Τέλος γίνεται μία σύντομη αναφορά στην μεμειγμένη κατανομή Poisson. Στην ενότητα 3.2 δίνονται τέσσερις ορισμοί για την MPP των οποίων τη σχέση μελετάμε στην ενότητα 3.3 η οποία κλείνει με ένα θεώρημα χαρακτηρισμού για τις MPP ( βλ. Θεώρημα 3.3.7) και με ένα ανοικτό ερώτημα.

## 3.1 Κάποια χρήσιμα αποτελέσματα

**Ορισμός 3.1.1** Μία συνάρτηση $\nu = \{\nu(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+} \in \mathbb{N}^{\mathbb{R}_+}$ ονομάζεται **απαριθμήτρια συνάρτηση** αν ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες

**(pp1)** $\nu(0) = 0$

**(pp2)** $\nu(t)$ είναι ένας ακέραιος αριθμός για κάθε $t < \infty$

**(pp3)** $\nu(\cdot)$ είναι μία μη φθίνουσα και δεξιά συνεχής συνάρτηση.

Το σύνολο που αποτελείται από όλες τις απαριθμήτριες συναρτήσεις συμβολίζεται με $\mathcal{N}$ ενώ με $\mathcal{A}(\mathcal{N})$ συμβολίζεται η σ-άλγεβρα που παράγεται από τις προβολές των συναρτήσεων $\nu$, δηλαδή ,

$$\mathcal{A}(\mathcal{N}) := \sigma\{\nu(t) \le y : \nu \in \mathcal{N}, t \ge 0, y < \infty\}.$$

Αν επιπλεόν η $\nu$ έχει την ιδιότητα

**(pp4)** $\nu(t) - \nu(t-\varepsilon) = 0 \quad \text{ή} \quad 1 \quad \text{για} \quad \varepsilon \to 0,$

τότε η απαριθμήτρια συνάρτηση ονομάζεται **απλή**. Με $\mathcal{N}_s$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των απλών απαριθμητριών συναρτήσεων ενώ με $\mathcal{A}(\mathcal{N}_s)$ συμβολίζεται η σ-άλγεβρα που παράγεται από τις προβολές των συναρτήσεων $\nu \in \mathcal{N}_s$, δηλαδή

$$\mathcal{A}(\mathcal{N}_s) := \sigma(\{\nu(t) \leq y : \nu \in \mathcal{N}_s, t \geq 0, y < \infty\}).$$

**Παρατήρηση 3.1.2** Ισχύει

$$\mathcal{A}(\mathcal{N}) = \sigma\{\nu(t) \leq y : \nu \in \mathcal{N}, t \geq 0, y < \infty\} = \mathfrak{B}(\mathbb{N})^{\mathbb{R}_+} \cap \mathcal{N} \subseteq \mathfrak{B}(\mathbb{N}^{\mathbb{R}_+}) \cap \mathcal{N} = \mathfrak{B}(\mathcal{N}).$$

Πράγματι, γενικά έχουμε ότι $\mathfrak{B}(\mathbb{N})^{\mathbb{R}_+} \subseteq \mathfrak{B}(\mathbb{N}^{\mathbb{R}_+})$, επομένως ισχύει $\mathfrak{B}(\mathbb{N})^{\mathbb{R}_+} \cap \mathcal{N} \subseteq \mathfrak{B}(\mathbb{N}^{\mathbb{R}_+}) \cap \mathcal{N}$. Έστω $\mathcal{T}$ η τοπολογία η οποία παράγει την $\sigma$-άλγεβρα $\mathfrak{B}(\mathbb{N}^{\mathbb{R}_+})$ και $\mathcal{T}_\mathcal{N} := \mathcal{T} \cap \mathcal{N}$ η σχετική τοπολογία η οποία παράγει την $\sigma$-άλγεβρα $\mathfrak{B}(\mathcal{N})$. Για κάθε $G \in \mathcal{T}_\mathcal{N}$ υπάρχει ένα σύνολο $F \in \mathcal{T}$ τέτοιο ώστε $G = F \cap \mathcal{N} \in \mathfrak{B}(\mathbb{N}^{\mathbb{R}_+}) \cap \mathcal{N}$. Άρα $\sigma(\mathcal{T}_\mathcal{N}) = \mathfrak{B}(\mathcal{N}) \subseteq \mathfrak{B}(\mathbb{N}^{\mathbb{R}_+}) \cap \mathcal{N}$. Για την απόδειξη της αντίστροφης σχεσης ορίζουμε $\mathcal{D} := \{A \in \sigma(\mathcal{T}) \cap \mathcal{N} : A \in \sigma(\mathcal{T} \cap \mathcal{N})\}$. Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι η οικογένεια $\mathcal{D}$ είναι μία κλάση Dynkin και ότι είναι κλειστή ως προς τις πεπερασμένες τομές. Επομένως από το Θεώρημα Β′.3 έπεται ότι $\mathcal{D} = \sigma(\mathcal{T}) \cap \mathcal{N}$, άρα $\sigma(\mathcal{T}) \cap \mathcal{N} \subseteq \sigma(\mathcal{T} \cap \mathcal{N})$, δηλαδή $\mathfrak{B}(\mathcal{N}) \supseteq \mathfrak{B}(\mathbb{N}^{\mathbb{R}_+}) \cap \mathcal{N}$. Από τα παραπάνω έπεται ότι $\mathfrak{B}(\mathcal{N}) = \mathfrak{B}(\mathbb{N}^{\mathbb{R}_+}) \cap \mathcal{N}$.

Ο παρακάτω ορισμός είναι μία ελαφρά γενίκευση του ορισμού των σημειακών και απλών σημειακών διαδικασιών που υπάρχει στο [10] Definition 3.2.

**Ορισμοί 3.1.3** **(a)** Μία **σημειακή διαδικασία** είναι μία απεικόνιση $N : \Omega \longmapsto \mathbb{N}^{\mathbb{R}_+}$ τέτοια, ώστε να υπάρχει ένα σύνολο $\Omega_N \in \Sigma_0$ με την ιδιότητα $N(\omega) \in \mathcal{N}$ για κάθε $\omega \notin \Omega_N$ και ώστε η $N$ να είναι $\Sigma$-$\mathcal{A}(\mathcal{N})$-μετρήσιμη. Το $\Omega_N$ ονομάζεται μηδενικό σύνολο εξαίρεσης της $N$.
**(b)** Μία σημειακή διαδικασία $N$ με μηδενικό σύνολο εξαίρεσης $\widetilde{\Omega}_N$ ονομάζεται **απλή σημειακή διαδικασία** αν είναι $\Sigma$-$\mathcal{A}(\mathcal{N}_s)$-μετρήσιμη και $N(\omega) \in \mathcal{N}_s$ για κάθε $\omega \notin \widetilde{\Omega}_N \supseteq \Omega_N$.

Το ακόλουθο Λήμμα συγκρίνει τους Ορισμούς 2.3.1 και 3.1.3 **(b)** για τις σημειακές διαδικασίες.

**Λήμμα 3.1.4** *Για μία μη φραγμένη σ.δ. $N = \{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ με μηδενική πιθανότητα έκρηξης οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

*(i) Η $N$ είναι μία απλή σημειακή διαδικασία.*

*(ii) Η $N$ είναι μία σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων.*

**Απόδειξη.** *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)* Έστω ότι η $N$ απλή σημειακή διαδικασία. Σύμφωνα με τον Ορισμό 3.1.3 η $N$ ικανοποιεί τις συνθήκες **(pp1)**-**(pp4)**. Αφού η $N(\omega)$ ικανοποιεί την **(pp1)** έπεται ότι θα υπάρχει ένα σύνολο μηδενική πιθανότητας $\Omega_1 \in \Sigma_0$ έτσι ώστε για κάθε $\omega \in \Omega \setminus (\Omega_1)$ να ικανοποιεί την **(n1)**. Επιπλέον από την **(pp2)** έπεται ότι θα υπάρχει ένα σύνολο $\Omega_2 \in \Sigma_0$ έτσι ώστε για κάθε $\omega \in \Omega \setminus (\Omega_2)$ να ισχύει $N_t(\omega) \in \mathbb{N}_0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$. Αλλά από την **(pp3)** έπεται ότι η $N$ είναι αύξουσα συνάρτηση και για κάθε $\omega \in \Omega \setminus \Omega_1$ και $t = 0$ ισχύει ότι $N_0(\omega) = 0$. Επομένως για κάθε $\omega \in \Omega \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$ και $t \in \mathbb{R}_+$ έπεται ότι $N_t(\omega) \in \mathbb{N}_0$ και άρα έπεται η **(n2)** αφού $\mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Προφανώς αφού η $N$ ικανοποιεί την **(pp3)** έπεται ότι θα είναι δεξιά συνεχής, επομένως υπάρχει ένα σύνολο $\Omega_3 \in \Sigma_0$ έτσι ώστε για κάθε $\omega \in \Omega \setminus (\Omega_3)$ να ικανοποιεί την **(n3)** για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$. Αντίστοιχα από την **(pp4)** έπεται ότι θα υπάρχει ένα σύνολο $\Omega_4 \in \Sigma_0$ έτσι ώστε για κάθε $\omega \in \Omega \setminus (\Omega_4)$ ισχύει

$$\sup_{s\in[0,t)} N_s(\omega) \leq N_t(\omega) \leq \sup_{s\in[0,t)} N_s(\omega) + 1$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$.Τέλος αφού η $N$ είναι αύξουσα και αφού από την υπόθεση μας είναι μία μη φραγμένη ακολουθία έπεται ότι θα υπάρχει ένα σύνολο $\Omega_5 \in \Sigma_0$ έτσι ώστε για κάθε $\omega \in \Omega \setminus \Omega_5$ να ισχύει η **(n5)**. Άρα για κάθε $\omega \in \Omega \setminus \Omega_N$, όπου $\Omega_N = \bigcup_{i=1}^{5} \Omega_i$ η $N$ είναι μία σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων.
*(ii)* $\Rightarrow$ *(i)* Έστω ότι η $N$ είναι μία σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων. Αρχικά θα πρέπει να δείξουμε ότι ισχύουν οι συνθήκες **(pp1)**-**(pp4)**. Παρατηρούμε ότι από την **(n1)** έπεται προφανώς η **(pp1)**. Από την **(n2)** έπεται ότι $N_t(\omega) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ για όλα τα $\omega \in \Omega$, αλλά από την υπόθεση μας έχουμε ότι η $N$ έχει μηδενική πιθανότητα έκρηξης και άρα $P(N_t = \infty) = 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$. Επομένως έπεται η **(pp2)**. Τέλος είναι προφανές ότι από τις συνθήκες **(n3)** και **(n4)** έπονται οι **(pp3)** και **(pp4)**.
Μένει να δείξουμε ότι η $N$ είναι μία μετρήσιμη απεικόνιση από τον χώρο $(\Omega, \Sigma, )$ στον $\big(\mathcal{N}_s, \mathcal{A}(\mathcal{N}_s)\big)$. Αρχικά παρατηρούμε ότι από τις ιδιότητες **(n3)** και **(n4)** η $N_t : \Omega \longmapsto \mathbb{N}$ είναι μία $\Sigma$-$\mathcal{P}(\mathbb{N})$-μετρήσιμη συνάρτηση. Θεωρούμε την απεικονιση $N_J : \Omega \longmapsto \mathbb{N}^J$, όπου το σύνολο $J := \{t_1, \cdots, t_n\}$ είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}_+$ και $\pi_{Jt_j} : \mathbb{N}^J \longmapsto \mathbb{N}$ είναι είναι η κανονική προβολή για κάθε $j \in \{1, \cdots, n\}$.
**(a)** Η $N_J$ είναι μία $\Sigma$-$\mathcal{P}(\mathbb{N}^J)$-μετρήσιμη απεικόνιση.
Πράγματι έστω $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}^J)$, όπου $J = \{t_1, \ldots, t_n\}$, ώστε $A = \mathbb{N}^{J_1} \times B \times \mathbb{N}^{J_2}$ με $J_1 = \{t_1, \ldots, t_{k-1}\}$, $J_2 = \{t_{k+1}, \ldots, t_n\}$ και $B \subseteq \mathbb{N}$. Τότε

$$(N_J)^{-1}(A) = (N_J)^{-1}(\mathbb{N}^{J_1} \times B \times \mathbb{N}^{J_2}) = (N_J)^{-1}\big(\pi_{Jt}^{-1}(B)\big) = N_t^{-1}(B) \in \Sigma.$$

Θεωρούμε το κυλινδρικό σύνολο $C = \prod_{i\in J} D_i \in \mathcal{P}(\mathbb{N}^J)$ με $D_i \in (\mathbb{N})$ για κάθε $i \in J$. Τότε

$$\begin{aligned}(N_J)^{-1}(C) &= (N_J)^{-1}\left(\prod_{i\in J} D_i\right) = (N_J)^{-1}\left(\bigcap_{i\in J} \pi_{Jt_i}^{-1}(D_i)\right) \\ &= \bigcap_{i\in J} N_J^{-1}(\pi_{Jt_i}^{-1}(D_i)) = \bigcap_{i\in J} N_t^{-1}(D_i) \in \Sigma.\end{aligned}$$

Αν με $\mathcal{C}$ συμβολίσουμε το σύνολο όλων των μετρήσιμων κυλίνδρων της $\mathcal{P}(\mathbb{N}^J)$ είναι προφανές ότι $\sigma(\mathcal{C}) = P(\mathbb{N}^J)$ και ότι $(N_J)^{-1}(\mathcal{C}) \subseteq \Sigma$. Επομένως από την Πρόταση Α΄.6 έπεται ότι η $N_J$ είναι μία $\Sigma$-$\mathcal{P}(\mathbb{N}^J)$-μετρήσιμη συνάρτηση.

$\square$

**(b)** Η $N$ είναι μία $\Sigma$-$\mathcal{A}(\mathcal{N}_s)$-μετρήσιμη απεικόνιση.
Χρησιμοποιώντας το βήμα **(a)** θα δείξουμε ότι η απεικόνιση $N : \Omega \longmapsto \mathcal{N}_s$ είναι μετρήσιμη. Θεωρούμε τις κανονικές προβολές $\pi_J : \mathcal{N}_s \longmapsto \mathbb{N}^J$ ,όπου $J := \{t_1, \cdots, t_n\} \subseteq \mathbb{R}_+$ και ένα κυλινδρικό σύνολο $C_J = \prod_{j\in J} B_j \times \mathbb{N}^{\mathbb{R}_+\setminus J} \in \mathcal{A}(\mathcal{N}_s)$. Τότε από το βήμα **(a)** έπεται ότι

$$\begin{aligned} N^{-1}(C_J) &= N^{-1}\left(\prod_{i\in I} B_i\right) = N^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} \pi_J^{-1}(B_i)\right) \\ &= \bigcap_{j\in I} N^{-1}\left(\pi_J^{-1}(B_i)\right) = \bigcap_{j\in I} N_J^{-1}(B_i) \in \Sigma. \end{aligned}$$

Επομένως αν με $\mathcal{C}_s$ συμβολίσουμε το σύνολο όλων των μετρήσιμων κυλίνδρων της $\mathcal{A}(\mathcal{N}_s)$ είναι προφανές ότι $\sigma(\mathcal{C}_s) = \mathcal{A}(\mathcal{N}_s)$ και ότι $N^{-1}(\mathcal{C}_s) \subseteq \Sigma$. επομένως από την Πρόταση Α΄.6 έπεται ότι η $N$ είναι μία $\Sigma$-$\mathcal{A}(\mathcal{N}_s)$-μετρήσιμη συνάρτηση.

$\square$

**Παρατήρηση 3.1.5** Εναλλακτικά η απόδειξη του Λήμματος 3.1.4 μπορεί να γίνει χωρίς τη χρήση της Πρότασης Α΄.6 αλλά με ένα επιχείρημα μονότονης κλάσης.

Για τους παρακάτω τρείς ορισμούς όπως επίσης και για την Πρόταση 3.1.10 βλέπε Grandell [10].

**Ορισμός 3.1.6** Μία απλή Μαρκοβιανή σημειακή διαδικασία $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ καλείται **διαδικασία γέννησης**, έντασης $\kappa_n(t)$, εάν , για κάθε $t > 0$ ισχύει

$$p_{m,n}(t, t+h) = \begin{cases} 1 - \kappa_m(t)\,h + o(h) & , n = m \\ \kappa_m(t)\,h + o(h) & , n = m+1 \\ o(h) & , n > m+1 \end{cases}$$

για $h \to 0_+$,όπου $p_{m,n}(t, t+h)$ είναι η πιθανότητα μετάβασης από την κατάσταση $m$ τη χρονική στιγμή $t$ στην κατάσταση $n$ τη χρονική στιγμή $t+h$ και $\kappa_m(t)$ είναι μη αρνητικές και συνεχείς συναρτήσεις και $o(h)$ τέτοια ώστε $\lim_{h\to\infty} \frac{o(h)}{h} = 0$.

**Ορισμός 3.1.7** Μία απλή σημειακή διαδικασία $N$ καλείται **διαδικασία Poisson έντασης** $\theta$, με κατανομή $\Pi_\theta : \mathcal{A}(\mathcal{N}_s) \longmapsto \mathbb{R}$, αν

**(a)** η $N_t$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις και

**(b)** η $N_t - N_s$ ακολουθεί την κατανομή $\mathbf{P}(\theta(t-s))$.

Για $n = 1, 2 \ldots$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, $0 = k_0 \leq k_1 \leq \ldots \leq k_n$, και

$$B := \{\nu \in \mathcal{N}_s : \nu(t_1) = k_1, \ldots, \nu(t_n) = k_n\} \in \mathcal{A}(\mathcal{N}_s)$$

ισχύει

$$\Pi_\theta(B) = \prod_{i=1}^{n} \frac{(\theta(t_i - t_{i-1}))^{k_i - k_{i-1}}}{(k_i - k_{i-1})!} \cdot e^{-(t_i - t_{i-1})\theta}.$$

**Παρατηρήσεις 3.1.8** **(a)**Η παραπάνω ισότητα είναι πολύ εύκολα να αποδειχθεί. Πράγματι για $n = 0, 1, \ldots$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, $0 = k_0 \leq k_1 \leq \ldots \leq k_n$ αν θεωρήσουμε το σύνολο

$$B' = \{\nu \in \mathcal{N}_s : \nu(t_1) - \nu(t_0) = k_1 - k_0, ..., \nu(t_n) - \nu(t_{n-1}) = k_n - k_{n-1}\},$$

παρατηρούμε ότι $B = B' \in \mathcal{A}(\mathcal{N}_s)$. Για το σύνολο $B'$ μπορούμε να βρούμε σύνολα της μορφής $B_i' := \{\nu \in \mathcal{N}_s : \nu(t_i) - \nu(t_{i-1}) = k_i - k_{i-1}\}$ τέτοια ώστε,

$$B' = \bigcap_{i=1}^{n} B_i'.$$

Επιπλέον παρατηρούμε ότι τα σύνολα $B_i'$ είναι σύνολα τα οποία περιέχουν τις προσαυξήσεις μίας διαδικασίας Poisson οι οποίες σύμφωνα με τον ορισμό είναι ανεξάρτητες. Επομένως,

$$\begin{aligned} \Pi_\theta(B) &= \Pi_\theta(B') = \Pi_\theta\Big(\bigcap_{i=0}^{n} B_i'\Big) = \prod_{i=1}^{n} \Pi_\theta(B_i') \\ &= \prod_{i=1}^{n} \frac{(\theta(t_i - t_{i-1}))^{k_i - k_{i-1}}}{(k_i - k_{i-1})!} \cdot e^{-(t_i - t_{i-1})\theta}, \end{aligned}$$

αφού από τον ορισμό έχουμε ότι οι προσαυξήσεις ακολουθούν την κατανομή Poisson.
**(b)** Έστω $N = \{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ μία σημειακή διαδικασία. Αν η $N$ είναι Poisson σύμφωνα με τον Ορισμό 2.4.1 ή τον Ορισμό 3.1.7 τότε είναι μη φραγμένη και με μηδενική πιθανότητα έκρηξης. Το τελευταίο διότι $\mathbb{E}_P[N_t] < \infty$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$.
**(c)** Από το **(b)** έπεται ότι αν η $N = \{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ είναι μία διαδικασία Poisson σύμφωνα με τον Ορισμό 2.4.1 ή με τον Ορισμό 3.1.7, τότε και στις δύο περιπτώσεις η $N$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Λήμματος 3.1.4. Άρα στις $\sigma.\delta.$ Poisson σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς οι έννοιες "απλή σημειακή διαδικασία" και "$\sigma.\delta.$ άφιξης των απαιτήσεων" συμπίπτουν.

**Ορισμός 3.1.9** Η τυχαία μεταβλητή $N_t$ ακολουθεί την **μεμειγμένη κατανομή Poisson**, (συμβολισμός MP$(t, U)$), με δομική κατανομή (structure distribution) $U$ εάν,

$$p_k(t) := P(N_t = k) = \mathbb{E}\left[\frac{(\Theta t)^k}{k!} \cdot e^{-\Theta t}\right] = \int_{0-}^{\infty} \frac{(\theta t)^k}{k!} \cdot e^{-\theta t} U(d\theta), \quad k = 0, 1, \ldots.$$

**Πρόταση 3.1.10** *Έστω $N_t$ μια διακριτή τυχαία μεταβλητή η οποία ακολουθεί την $MP(t, U)$, όπου $U$ είναι η κατανομή της μη αρνητικής τυχαίας μεταβλητής $\Theta$ με μέσο $\mu_\Theta$ και διασπορά $\sigma^2_\Theta$. Τότε:*

*(i)* $\mathbb{E}\left[N_t\right] = t\mu_\Theta$

*(ii)* $Var\left[N_t\right] = t\mu_\Theta + t^2\sigma^2_\Theta$

*(iii)* $\frac{1}{t}P\left(N_t > n\right) = \int_0^\infty \frac{(\theta t)^n}{n!}e^{-\theta t}\left(1 - U\left(\theta\right)\right)d\theta$

*(iv) Η πιθανογενήτρια συνάρτηση $G_{N_t}\left(s\right)$ της $N_t$ δίνεται από τη σχέση:*

$$G_{N_t}\left(s\right) := \mathbb{E}\left[s^{N_t}\right] = \hat{u}\left(t\left(1-s\right)\right), \quad s \leq 1,$$

*όπου $\hat{u}\left(v\right) = \int_{0-}^\infty e^{-\theta v}dU\left(\theta\right)$ ο μετασχηματισμός Laplace της $U$.*

*Επιπλέον για $x \geq 0$ και για $n = 0, 1, ...$ αν γενικεύσουμε τον Ορισμό 3.1.9, δηλαδή*

$$P\left(\Theta \leq x, N_t = n\right) := \int_{0-}^x \frac{(\theta t)^n}{n!}e^{-\theta t}U\left(d\theta\right).$$

*Τότε,*

*(v)* $P\left(\Theta \leq x | N_t = n\right) = \frac{\int_{0-}^x \theta^n e^{-\theta t}U(d\theta)}{\int_{0-}^\infty \theta^n e^{-\theta t}U(d\theta)}$

*(vi)* $\mathbb{E}\left[\Theta | N_t = n\right] = \frac{\int_{0-}^\infty \theta^{n+1} e^{-\theta t}dU(\theta)}{\int_{0-}^\infty \theta^n e^{-\theta t}dU(\theta)}$

**Απόδειξη.** *(i)* Έχουμε ότι $\mathbb{E}\left[N_t\right] = \mathbb{E}\left[E\left[N_t|\Theta\right]\right] = \mathbb{E}\left[\Theta t\right]$, αφού από την υπόθεση έχουμε ότι δοθέντος της $\Theta$ η κατανομή της $N_t$ είναι Poisson με παράμετρο $\Theta t$. Επομένως

$$\mathbb{E}\left[N_t\right] = \mathbb{E}\left[\Theta t\right] = t\mathbb{E}\left[\Theta\right] = t\mu_\Theta.$$

*(ii)* Διαδοχικά έχουμε

$$Var\left[N_t\right] = \mathbb{E}\left[Var\left[N_t|\Theta\right]\right] + Var\left[\mathbb{E}\left[N_t|\Theta\right]\right] = \mathbb{E}\left[\Theta t\right] + Var\left[\Theta t\right]$$

Άρα:

$$Var\left[N_t\right] = t\mu_\Theta + t^2\sigma^2_\Theta$$

*(iii)* Ισχύει:

$$
\begin{aligned}
P\left(N_t > n\right) &= \int_0^\infty \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(\theta t)^k}{k!} e^{-\theta t} dU\left(\theta\right) = -\int_0^\infty \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(\theta t)^k}{k!} e^{-\theta t} \left(1 - U\left(\theta\right)\right)' d\theta \\
&= \left[\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(\theta t)^k}{k!} e^{-\theta t} \left(1 - U\left(\theta\right)\right)\right]_0^\infty \\
&\quad + \int_0^\infty \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{(\theta t)^k}{k!} e^{-\theta t}\right)' \left(1 - U\left(\theta\right)\right) d\theta \\
&= \int_0^\infty \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{(\theta t)^k}{k!} e^{-\theta t}\right)' \left(1 - U\left(\theta\right)\right) d\theta \\
&= \int_0^\infty t \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{(\theta t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\theta t} - \frac{(\theta t)^k}{k!} e^{-\theta t}\right)\right) \left(1 - U\left(\theta\right)\right) d\theta \\
&= t \int_0^\infty \frac{(\theta t)^n}{n!} e^{-\theta t} \left(1 - U\left(\theta\right)\right) d\theta
\end{aligned}
$$

Που αποδεικνύει το ζητούμενο.
*(iv)* Για την πιθανογεννήτρια συνάρτηση της τυχαίας ματαβλητής $N_t$ θα έχουμε

$$
\begin{aligned}
G_{N_t}\left(s\right) &= \mathbb{E}\left[s^{N_t}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k\left(t\right) \\
&= \int_{0-}^\infty \sum_{k=0}^{\infty} s^k \frac{(\theta t)^k}{k!} e^{-\theta t} dU\left(\theta\right) = \int_{0-}^\infty e^{s\theta t} e^{-\theta t} dU\left(\theta\right) \\
&= \hat{u}\left(t\left(1 - s\right)\right)
\end{aligned}
$$

*(v)* Διαδοχικά έχουμε:

$$
P(\Theta \le x | N_t = n) = \frac{P(\Theta \le x, N_t = n)}{P(N_t = n)} = \frac{\int_{0-}^x \frac{(\theta t)^n}{n!} e^{-\theta t} U(d\theta)}{\int_{0-}^\infty \frac{(\theta t)^n}{n!} e^{-\theta t} U(d\theta)} = \frac{\int_{0-}^x \theta^n e^{-\theta t} U(d\theta)}{\int_{0-}^\infty \theta^n e^{-\theta t} U(d\theta)}.
$$

*(vi)* Από την παραπάνω ισότητα προκύπτει,

$$
\mathbb{E}[\Theta | N_t = n] := \int_0^\infty x dP(\Theta \le x | N_t = n) = \frac{\int_{0-}^\infty \theta^{n+1} e^{-\theta t} U(d\theta)}{\int_{0-}^\infty \theta^n e^{-\theta t} U(d\theta)}.
$$

□

## 3.2 Ορισμοί για την μεμειγμένη διαδικασία Poisson

**Ορισμοί 3.2.1** Η $\sigma.\delta$ αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ έχει:

(a) **υπο συνθήκη ανεξάρτητες προσαυξήσεις** δεδομένης της τυχαίας μεταβλητής $\Theta$ εάν, για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $t_0, t_1, ..., t_m \in \mathbb{R}_+$ με $0 = t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_m$, η οικογένεια των προσαυξήσεων $\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}}\}_{j\in\{1,...,m\}}$ είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητη δεδομένης της $\Theta$, και

(b) **υπό συνθήκη στάσιμες προσαυξήσεις** δεδομένης της $\Theta$ εάν, για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $0 = t_0, t_1, ..., t_m, h \in \mathbb{R}_+$ με $t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_m$, η οικογένεια των προσαυξήσεων $\{N_{t_j+h} - N_{t_{j-1}+h}\}_{j\in\{1,...,m\}}$ έχει την ίδια υπό συνθήκη κατανομή δεδομένης της $\Theta$ με την οικογένεια $\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}}\}_{j\in\{1,...,m\}}$.

**Ορισμός 3.2.2** Η $\sigma.\delta$ αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία **μεμειγμένη διαδικασία Poisson με δομική παράμετρο** $\Theta$ (MPP($\Theta$) για συντομία), εάν για δοσμένη τυχαία μεταβλητή $\Theta$ με την ιδιότητα $P_\Theta\big((0,\infty)\big) = 1$ η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει υπό συνθήκη ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις δοσμένης της $\Theta$ και για κάθε $t \in (0,\infty)$ ισχύει,

$$P_{N_t|\Theta} = \mathbf{P}\,(\Theta t) \quad P|\sigma(\Theta) - \sigma.\beta.$$

**Ορισμός 3.2.3** Μία διαδικασία γεννήσεως $N := \{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ καλείται **μεμειγμένη διαδικασία Poisson κατά Lundberg με δομική παράμετρο** $U$ (L-MPP($U$) για συντομία), έαν η $N_t$ ακολουθεί την κατανομή MP($t, U$) για κάθε $t \geq 0$ και για κάποια κατανομή $U$.

**Ορισμός 3.2.4** Μία σημειακή διαδικασία $N := \{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ καλείται **μεμειγμένη διαδικασία Poisson με δομική παράμετρο** $U$ (MPP($U$) για συντομία), εάν η κατανομή της δίνεται από τη σχέση

$$P_N\,(B) = \int_0^\infty \Pi_\theta\,(B)\,U\,(d\theta)\,, \quad \forall B \in \mathcal{A}\,(\mathcal{N}_s)\,,$$

όπου $\Pi_\theta : \mathcal{A}(\mathcal{N}_s) \longmapsto \mathbb{R}$ η κατανομή μίας διαδικασίας Poisson, $P_N : \mathcal{A}(\mathcal{N}_s) \longmapsto \mathbb{R}$ η συνάρτηση κατανομής της σημειακής διαδικασίας $N$ και $\mathcal{N}$ , $\mathcal{A}\,(\mathcal{N}_s)$ είναι όπως αυτά ορίσθηκαν στον Ορισμό 3.1.1.

**Παρατήρηση 3.2.5** Αν η $N := \{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια MPP($U$) τότε είναι απλή σημειακή διαδικασία.

Πράγματι, μια σημειακή διαδικασία $N$ είναι απλή αν $P_N(\mathcal{N}_s) = 1$, αφού $\mathcal{N}_s \in \mathcal{A}\,(\mathcal{N}_s)$. Επομένως, εφαρμόζοντας τον Ορισμό 3.2.4 έχουμε

$$P_N(\mathcal{N}_s) = \int_{0-}^\infty \Pi_\theta(\mathcal{N}_s)U\,(d\theta) = \int_{0-}^\infty dU\,(\theta) = 1.$$

Άρα η $N$ είναι μια απλή σημειακή διαδικασία.

**Ορισμός 3.2.6** Έστω $\Theta$ μία τυχαία μεταβλητή και $\widetilde{N} := \{\widetilde{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μία τυπική διαδικασία Poisson οι οποίες είναι ανεξάρτητες. Η σημειακή διαδικασία $N := \{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ με $N := \widetilde{N} \circ \Theta$, όπου $(\widetilde{N} \circ \Theta)_t := \widetilde{N}_{\Theta t}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, ονομάζεται **s-μεμειγμένη διαδικασία Poisson με παράμετρο** $\Theta$ (s-MPP($\Theta$) για συντομία).

Αφού σύμφωνα με την Παρατήρηση 3.2.5 κάθε MPP($U$) είναι απλή, έπεται ότι κάθε s-MPP($\Theta$) είναι απλή.

**Σχόλια 3.2.7** Ο Ορισμός 3.2.2 υπάρχει στο βιβλίο του K.D. Schmidt [32] Chapter 4.2 σελ. 87, ενώ οι Ορισμοί 3.2.3, 3.2.4 και 3.2.6 αναφέρονται στο βιβλίο του J. Grandell [10] σελ. 61, Definition 4.2 και Definition 4.3 αντίστοιχα. Ο Ορισμός 3.2.4 είναι ελαφρά τροποποιημένος σε σχέση με εκείνον του Grandell αφού στον Ορισμό 3.2.4 θεωρούμε ως βασικό χώρο τον $\mathcal{N}_s$ αντί του $\mathcal{N}$ που χρησιμοποιείται στο [10]. Ο Ορισμός 3.2.3 έχει εισαχθεί από τον Lundberg ( βλ. [23] σελ. 72). Στην βιβλιογραφία τόσο ο ορισμός του Lundberg όσο και ο Ορισμός 3.2.4 έχουν χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό αποτελεσμάτων, τα οποία σύμφωνα με τον Grandell συμφωνουν. Παρ'ολα αυτά δεν είχε εξεταστεί η ισοδυναμία των ορισμών μέχρι το 1981. Το 1981 ο Albrecht απέδειξε την εν λόγω ισοδυναμία στο [1].

## 3.3 Σύγκριση των ορισμών της μεμειγμένης διαδικασίας Poisson

*Για όλη την ενότητα που ακολουθεί η τυχαία μεταβλητή $\widetilde{N}_t$ ακολουθεί την τυπική Poisson, εκτός και αν αναφέρεται διαφορετικά.*
Το παρακάτω πόρισμα είναι άμεση συνέπεια του Λήμματος 3.1.4 και αφορά τις μεμειγμένες διαδικασίες Poisson

**Πόρισμα 3.3.1** Για μία μεμειγμένη διαδικασία Poisson (σύμφωνα με οποιοδήποτε από τους Ορισμούς 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4 και 3.2.6) $N = \{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(i) Η $N$ είναι μία απλή σημειακή διαδικασία.

(ii) Η $N$ είναι μία σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων.

**Απόδειξη.** Είναι γνωστό ότι στους Ορισμούς 3.2.3, 3.2.4 και 3.2.6 η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ικανοποιεί την συνθήκη **(pp2)** του Ορισμού 3.1.1, άρα η πιθανότητα έκρηξης είναι μηδενική. Στον Ορισμό 3.2.2 ισχύει ότι $P_{N_t|\Theta=\theta}(N_t = \infty) = 0$ για $P_\Theta$-σχεδόν όλα τα $\theta \in \mathbb{R}_+$, αφού $\mathbb{E}_{P_{N_t|\Theta=\theta}}[N_t] < \infty$ για $P_\Theta$-σχεδόν όλα τα $\theta \in \mathbb{R}_+$. Επομένως έχουμε ότι

$$P(N_t = \infty) = \int P_{N_t|\Theta=\theta}(N_t = \infty)P_\Theta(d\theta) = 0.$$

Άρα κάθε MPP έχει μηδενική πιθανότητα έκρηξης. Σύμφωνα με την Παρατήρηση 3.1.8 **(c)** η $N$ είναι πάντα μή φραγμένη. Έτσι μπορούμε να εφαρμόσουμε το Λήμμα 3.1.4 για να ολοκληρωθεί η απόδειξη.

□

**Πρόταση 3.3.2** *Οι Ορισμοί 3.2.3 και 3.2.4 είναι ισοδύναμοι.*

**Απόδειξη.** Ορισμός 3.2.3 ⇒ Ορισμό 3.2.4. Θεωρούμε τον μετασχηματισμό Laplace της U

$$\hat{u}(t) := \int_{0-}^{\infty} e^{-\theta t} U(d\theta).$$

**(a)** Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $t \geq 0$ ισχύει $p_n(t) = (-1)^n \frac{t^n}{n!} \hat{u}^{(n)}(t)$.
Πράγματι, αφού η $N_t$ ακολουθεί την MP$(t, U)$ για κάθε $t \geq 0$ και για κάποια κατανομή U έπεται ότι,

$$p_n(t) := P(N_t = n) = \int_{0-}^{\infty} \frac{(\theta t)^n}{n!} \cdot e^{-\theta t} U(d\theta).$$

Άρα

$$p_n(t) = \frac{t^n}{n!} \int_{0-}^{\infty} \theta^n e^{-\theta t} U(d\theta) \tag{3.1}$$

Από γνωστή πρόταση για τους μετασχηματισμούς Laplace (βλ π.χ. [7] **(ii)** σελ. 450) έπεται ότι αν $\hat{u}(t) = \int_{0-}^{\infty} e^{-st} U(ds)$ τότε

$$\int_{0-}^{\infty} s^n e^{-st} U(ds) = (-1)^n \hat{u}^{(n)}(t) \tag{3.2}$$

Επομένως σύμφωνα με τα παραπάνω από την (3.1) έπεται ότι

$$p_n(t) = \frac{t^n}{n!} \int_{0-}^{\infty} \theta^n e^{-\theta t} U(d\theta) \overset{(3.2)}{=} \frac{t^n}{n!} (-1)^n \hat{u}^{(n)}(t).$$

**(b)** Για κάθε $t \geq 0$ και $n \in \mathbb{N}$ ισχύει η αναδρομική σχέση

$$p_n'(t) = \frac{\hat{u}^{(n+1)}(t)}{\hat{u}^{(n)}(t)} p_n(t) - \frac{\hat{u}^{(n)}(t)}{\hat{u}^{(n-1)}(t)} p_{n-1}(t),$$

με αρχική τιμή

$$p_0'(t) = \frac{\hat{u}'(t)}{\hat{u}(t)} p_0(t).$$

Πράγματι από το **(a)** για $n = 0$ προκύπτει ότι $p_0(t) = \hat{u}(t)$ και παραγωγίζοντας έχουμε

$$p_0'(t) = \hat{u}'(t) = \frac{\hat{u}'(t)}{\hat{u}(t)} p_0(t).$$

Επιπλέον για κάθε $n \in \mathbb{N}$ από το **(a)** παραγωγίζοντας ως προς $t$ προκύπτει ότι

$$p_n'(t) = \left[(-1)^n \frac{t^n}{n!} \hat{u}^{(n)}(t)\right]' = (-1)^n \frac{t^n}{n!} \hat{u}^{(n+1)}(t) + (-1)^n n \frac{t^{n-1}}{n!} \hat{u}^{(n)}(t).$$

Δηλαδή

$$p_n'(t) = (-1)^n \frac{t^n}{n!} \hat{u}^{(n+1)}(t) + (-1)^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \hat{u}^{(n)}(t). \tag{3.3}$$

Από το σχέση **(a)** επιπλέον έχουμε ότι

$$\frac{p_n(t)}{\hat{u}^{(n)}(t)} = (-1)^n \frac{t^n}{n!}, \quad n > 0,$$

και

$$\frac{p_{n-1}(t)}{\hat{u}^{(n-1)}(t)} = (-1)^{n-1} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, \quad n > 1.$$

Επομένως από την (3.3) έπεται ότι

$$p_n'(t) = \frac{\hat{u}^{(n+1)}(t)}{\hat{u}^{(n)}(t)} p_n(t) + (-1)(-1)^{n-1} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \hat{u}^{(n)}(t).$$

Δηλαδή

$$p_n'(t) = \frac{\hat{u}^{(n+1)}(t)}{\hat{u}^{(n)}(t)} p_n(t) - \frac{\hat{u}^{(n)}(t)}{\hat{u}^{(n-1)}(t)} p_{n-1}(t), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

**(c)** Για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ και $t \geq 0$ η ένταση της διαδικασίας γεννήσεως $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ δίνεται από τον τύπο

$$\kappa_n(t) = \frac{\int_0^\infty \theta^{n+1} e^{-\theta t} dU(\theta)}{\int_0^\infty \theta^n e^{-\theta t} dU(\theta)}.$$

Πράγματι, αφού από την υπόθεση έχουμε ότι η $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ είναι μια διαδικασία γεννήσεως έπεται ότι η πιθανότητα μετάβασης θα ικανοποιεί τις τις εξισώσεις των Chapman-Kolmogorov

$$p_{m,n}(s, t+h) = \sum_{k=0}^{n} p_{m,k}(s,t) p_{k,n}(t, t+h). \tag{3.4}$$

Για $m = 0, s = 0$ και $n = 0$ από την (3.4) έπεται ότι

$$p_0(t+h) = \sum_{k=0}^{0} p_k(t) p_{k,0}(t, t+h) = p_0(t) p_{0,0}(t, t+h) = p_0(t)\big(1 - \kappa_0(t)h + o(h)\big).$$

Άρα

$$p_0(t+h) - p_0(t) = -p_0(t)\kappa_0(t)h + o(h).$$

Από την παραπάνω σχέση τελικά για $n=0$ προκύπτει

$$p_0'(t) = -\kappa_0(t)\, p_0(t)\,. \tag{3.5}$$

Αντίστοιχα για $m=0, s=0$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$ από την (3.4) έπεται ότι

$$\begin{aligned} p_n(t+h) &= \sum_{k=0}^{n} p_k(t)p_{k,n}(t,t+h) \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} p_k(t)p_{k,n}(t,t+h) + p_{n-1}(t)p_{n-1,n}(t,t+h) + p_n(t)p_{n,n}(t,t+h) \\ &= p_{n-1}(t)\big(\kappa_{n-1}(t)h + o(h)\big) + p_n(t)\big(1-\kappa_n(t)h + o(h)\big) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-2} p_k(t)p_{k,n}(t,t+h). \end{aligned}$$

Άρα

$$p_n(t+h) - p_n(t) = -p_n(t)\,\kappa_n(t)\,h + p_{n-1}(t)\,\kappa_{n-1}(t)\,h + o(h)\,.$$

Από την τελευταία σχέση για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τελικά προκύπτει ότι

$$p_n'(t) = -\kappa_n(t)\,p_n(t) + \kappa_{n-1}(t)\,p_{n-1}(t)\,. \tag{3.6}$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις που αποδειχθήκαν στο **(b)** και (3.5),(3.6) και αφού μία διαδικασία γεννήσεως χαρακτηρίζεται μοναδικά από τις συναρτήσεις $\kappa_n(t)$, έπεται ότι

$$\kappa_0(t) = -\frac{\hat{u}'(t)}{\hat{u}(t)} \quad \text{και} \quad \kappa_n(t) = -\frac{\hat{u}^{(n+1)}(t)}{\hat{u}^{(n)}(t)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Δηλαδή

$$\kappa_n(t) = -\frac{\hat{u}^{(n+1)}(t)}{\hat{u}^{(n)}(t)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \tag{3.7}$$

Από τη σχέση (3.7) και το **(a)** έπεται ότι

$$\begin{aligned} \kappa_n(t) &= -\frac{\hat{u}^{(n+1)}(t)}{\hat{u}^{(n)}(t)} \\ &= -\frac{(-1)^{-(n+1)}\int_0^\infty \theta^{n+1}e^{-\theta t}U(d\theta)}{(-1)^{-n}\int_0^\infty \theta^n e^{-\theta t}U(d\theta)} \end{aligned}$$

άρα

$$\kappa_n(t) = \frac{\int_0^\infty \theta^{n+1}e^{-\theta t}dU(\theta)}{\int_0^\infty \theta^n e^{-\theta t}U(d\theta)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

**(d)** Έστω ότι $N_s = m \in \mathbb{N}_0$ καθώς και η σημειακή διαδικασία $\{N_t^*\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ η οποία για κάθε $t, s \geq 0$ ορίζεται από τη σχέση

$$N_t^* = N_{s+t} - N_s.$$

Η $\{N_t^*\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια διαδικασία γεννήσεως για την οποία ισχύει ότι

$$\kappa_n^*(t) = \kappa_{m+n}(s+t).$$

Πράγματι

$$\begin{aligned} p_{n,n}^*(t,t+h) &= P(N_{t+h}^* = n | N_t^* = n) \\ &= P(N_{s+t+h} - N_s = n | N_{s+t} - N_s = n) \\ &= P(N_{s+t+h} = n+m | N_{s+t} = n+m) \\ &= p_{m+n,m+n}(s+t, s+t+h). \end{aligned}$$

Αλλά από την υπόθεση μας έχουμε ότι η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια διαδικασία γεννήσεως επομένως έπεται ότι

$$\kappa_n^*(t) = \kappa_{m+n}(s+t).$$

Επομένως η $\{N_t^*\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια διαδικασία γεννήσεως αφού μία διαδικασία γεννήσεως καθορίζεται μονοσήμαντα από τις εντάσεις της και αντιστόφως.
**(e)** Η $\{N_t^*\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία μεμειγμένη διαδικασία Poisson με συνάρτηση πιθανότητας

$$p_n^*(t) = p_{m,n+m}(s, s+t),$$

για κάθε $n, m \in \mathbb{N}_0$ και $t, s \in \mathbb{R}_+$ και με δομική παράμετρο

$$U^*(x) = \frac{\int_{0-}^{x} \theta^m e^{-\theta s} U(d\theta)}{\int_{0-}^{\infty} \theta^m e^{-\theta s} U(d\theta)}.$$

Πράγματι

$$p_n^*(t) = P(N_t^* = n) = P(N_{s+t} = m+n | N_s = m) = p_{m,m+n}(s, s+t).$$

Από τις σχέσεις που αποδείχθηκαν στα **(c)** και **(d)** και αφού η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία διαδικασία γέννησης έπεται ότι

$$\kappa_n^*(t) \quad = \quad \kappa_{m+n}(s+t) = \frac{\int_{0-}^{\infty} \theta^{m+n+1} e^{-\theta(s+t)} U(d\theta)}{\int_{0-}^{\infty} \theta^{m+n} e^{-\theta(s+t)} U(d\theta)} = \frac{\int_{0-}^{\infty} \theta^{n+1} e^{-\theta t} U^*(d\theta)}{\int_{0-}^{\infty} \theta^{n} e^{-\theta t} U^*(d\theta)},$$

όπου $U^*(x) = \frac{\int_{0-}^{x} \theta^m e^{-\theta s} U(d\theta)}{\int_{0-}^{\infty} \theta^m e^{-\theta s} U(d\theta)}$. Επομένως η $\{N_t^*\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια MPP$(U^*)$.
**(f)** Για κάθε $n, m \in \mathbb{N}_0$ με $m \leq n$ και $t, s \in \mathbb{R}_+$ ισχύει ότι

$$p_{m,n}(s,t) = \frac{n!}{m!(n-m)!}\Big(\frac{s}{t}\Big)^m \Big(1-\frac{s}{t}\Big)^{n-m} \frac{p_n(t)}{p_m(s)}.$$

Πράγματι, από το **(e)** έπεται ότι $p_{m,n}(s,t) = p^*_{n-m}(t-s)$. Επομένως, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $\{N_t^*\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια MPP$(U^*)$ έπεται ότι

$$\begin{aligned}
p_{m,n}(s,t) &= p^*_{n-m}(t-s) = \int_{0-}^{\infty} \frac{(\theta(t-s))^{n-m}}{(n-m)!} \cdot e^{-\theta(t-s)} U^*(d\theta) \\
&= \frac{\int_{0-}^{\infty} \frac{\theta^n (t-s)^{n-m}}{(n-m)!} e^{-\theta t} U(d\theta)}{\int_{0-}^{\infty} \theta^m e^{-\theta s} U(d\theta)} = \frac{(t-s)^{n-m}}{(n-m)!} \cdot \frac{\int_{0-}^{\infty} \theta^n e^{-\theta t} U(d\theta)}{\int_{0-}^{\infty} \theta^m e^{-\theta s} U(d\theta)} \\
&\overset{(3.2)}{=} \frac{(t-s)^{n-m}}{(n-m)!} \cdot \frac{(-1)^n \hat{u}^{(n)}(t)}{(-1)^m \hat{u}^{(m)}(t)} = \frac{(t-s)^{n-m}}{(n-m)!} \cdot \frac{n!}{m!} \cdot \frac{s^m}{t^n} \cdot \frac{p_n(t)}{p_m(s)} \\
&= \frac{s^m}{t^n} \cdot (t-s)^{n-m} \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \frac{p_n(t)}{p_m(s)} \\
&= \left[\frac{s^m}{t^n} \sum_{k=0}^{n-m} \frac{(n-m)!}{k!(n-m-k)!} t^{n-m-k} (-1)^k s^k\right] \frac{n!}{m!(n-m)!} \frac{p_n(t)}{p_m(s)} \\
&= \left[\frac{s^m}{t^n}\Big(t^{n-m} + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{(n-m)!}{k!(n-m-k)!} t^{n-m-k} (-1)^k s^k\Big)\right] \frac{n!}{m!(n-m)!} \frac{p_n(t)}{p_m(s)} \\
&= \left[\frac{s^m}{t^m} + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{(n-m)!}{k!(n-m-k)!} t^{-m-k} (-1)^k s^{k+m}\right] \frac{n!}{m!(n-m)!} \frac{p_n(t)}{p_m(s)} \\
&= \left[\frac{s^m}{t^m}\Big(1 + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{(n-m)!}{k!(n-m-k)!} (-1)^k \frac{s^k}{t^k}\Big)\right] \frac{n!}{m!(n-m)!} \frac{p_n(t)}{p_m(s)} \\
&= \left[\Big(\frac{s}{t}\Big)^m \sum_{k=1}^{n-m} \frac{(n-m)!}{k!(n-m-k)!} (1)^{n-m-k} (-1)^k) \Big(\frac{s}{t}\Big)^k\right] \frac{n!}{m!(n-m)!} \frac{p_n(t)}{p_m(s)}.
\end{aligned}$$

Επομένως

$$p_{m,n}(s,t) = \frac{n!}{m!(n-m)!}\Big(\frac{s}{t}\Big)^m \Big(1-\frac{s}{t}\Big)^{n-m} \cdot \frac{p_n(t)}{p_m(s)},$$

για κάθε $n, m \in \mathbb{N}_0$ με $m \leq n$ και $t, s \in \mathbb{R}_+$.
**(g)** Για κάθε σύνολο $B \in \mathcal{A}(\mathcal{N}_s)$, της μορφής

$$B = \{\nu \in \mathcal{N}_s : \nu(t_1) = k_1, \nu(t_2) = k_2, ..., \nu(t_n) = k_n\}, \tag{3.8}$$

για κάθε $0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n \in \mathbb{R}_+$ και $k_1 \leq \ldots \leq k_n \in \mathbb{N}_0$ , ισχύει

$$P_N(B) = \int_{0-}^{\infty} \Pi_\theta(B) U\left(d\theta\right), \quad \forall B \in \mathcal{A}\left(\mathcal{N}_s\right) \quad \text{της μορφής} \quad (3.8).$$

Πράγματι, αρχικά κάνοντας χρήση της Μαρκοβιανής ιδιότητας και της **(f)** έπεται

$$\begin{aligned}
P_N(B) &= p_{k_1}(t_1)p_{k_1,k_2}(t_1,t_2)p_{k_2,k_3}(t_2,t_3)\cdots p_{k_{n-1},k_n}(t_{n-1},t_n) \\
&= p_{k_1}(t_1)\frac{k_2!}{k_1!(k_2-k_1)!}\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{k_1}\left(1-\frac{t_1}{t_2}\right)^{k_2-k_1}\frac{p_{k_2}(t_2)}{p_{k_1}(t_1)} \\
&\quad \cdot\frac{k_3!}{k_2!(k_3-k_2)!}\left(\frac{t_2}{t_3}\right)^{k_2}\left(1-\frac{t_2}{t_3}\right)^{k_3-k_2}\frac{p_{k_3}(t_3)}{p_{k_2}(t_2)} \\
&\quad \cdots\frac{k_n!}{k_{n-1}!(k_n-k_{n-1})!}\left(\frac{t_{n-1}}{t_n}\right)^{k_{n-1}}\left(1-\frac{t_{n-1}}{t_n}\right)^{k_n-k_{n-1}}\frac{p_{k_n}(t_n)}{p_{k_{n-1}}(t_{n-1})} \\
&= p_{k_n}(t_n)\left(\frac{k_2!}{k_1!(k_2-k_1}\frac{k_3!}{k_2!(k_3-k_2}\cdots\frac{k_n!}{k_{n-1}!(k_n-k_{n-1}}\right)\left(\frac{t_1^{k_1}}{t_2^{k_1}}\frac{t_2^{k_2}}{t_3^{k_2}}\cdots\frac{t_{n-1}^{k_{n-1}}}{t_n^{k_{n-1}}}\right) \\
&\quad \left(\frac{(t_2-t_1)^{k_2-k_1}}{t_2^{k_2-k_1}}\frac{(t_3-t_2)^{k_3-k_2}}{t_3^{k_3-k_2}}\cdots\frac{(t_n-t_{n-1})^{k_n-k_{n-1}}}{t_n^{k_n-k_{n-1}}}\right) \\
&= \left(p_{k_n}(t_n)\frac{k_n!}{k_1!}\prod_{j=2}^{n}\frac{1}{(k_j-k_{j-1})!}\right)\left(\frac{t_1^{k_1}}{t_n^{k_{n-1}}}t_2^{k_2-k_1}t_3^{k_3-k_2}\cdots t_{n-1}^{k_{n-1}-k_{n-2}}\right) \\
&\quad \left(\frac{(t_2-t_1)^{k_2-k_1}}{t_2^{k_2-k_1}}\frac{(t_3-t_2)^{k_3-k_2}}{t_3^{k_3-k_2}}\cdots\frac{(t_n-t_{n-1})^{k_n-k_{n-1}}}{t_n^{k_n-k_{n-1}}}\right) \\
&= p_{k_n}(t_n)\frac{k_n!}{k_1!}\frac{t_1^{k_1}}{t_n^{k_n}}\prod_{j=2}^{n}\frac{(t_j-t_{j-1})^{k_j-k_{j-1}}}{(k_j-k_{j-1})!}.
\end{aligned}$$

Άρα

$$P_N(B) = p_{k_n}(t_n)\frac{k_n!}{t_n^{k_n}}\prod_{j=1}^{n}\frac{(t_j-t_{j-1})^{k_j-k_{j-1}}}{(k_j-k_{j-1})!}. \tag{3.9}$$

Αλλά από το **(a)** έπεται ότι

$$p_{k_n}\left(t_n\right) = (-1)^{k_n}\frac{t_n^{k_n}}{k_n!}\hat{u}^{(k_n)}\left(t_n\right)$$

και άρα

$$p_{k_n}\left(t_n\right)\frac{k_n!}{t_n^{k_n}} = (-1)^{k_n}\,\hat{u}^{(k_n)}\left(t_n\right).$$

Επομένως η σχέση (3.9) θα γίνει

$$\begin{aligned}
P_N(B) &= \left( (-1)^{k_n} \hat{u}^{(k_n)}(t_n) \right) \left( \prod_{j=1}^{n} \frac{(t_j - t_{j-1})^{k_j - k_{j-1}}}{(k_j - k_{j-1})!} \right) \\
&\overset{(3.2)}{=} \left( \int_{0-}^{\infty} \theta^{k_n} e^{-\theta t_n} dU(\theta) \right) \left( \prod_{j=1}^{n} \frac{(t_j - t_{j-1})^{k_j - k_{j-1}}}{(k_j - k_{j-1})!} \right) \\
&= \left( \int_{0-}^{\infty} \prod_{j=1}^{n} \theta^{k_j - k_{j-1}} e^{-\theta (t_j - t_{j-1})} dU(\theta) \right) \left( \prod_{j=1}^{n} \frac{(t_j - t_{j-1})^{k_j - k_{j-1}}}{(k_j - k_{j-1})!} \right) \\
&= \int_{0-}^{\infty} \prod_{j=1}^{n} \frac{(\theta(t_j - t_{j-1}))^{k_j - k_{j-1}}}{(k_j - k_{j-1})!} \cdot e^{-\theta(t_j - t_{j-1})} dU(\theta). \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

Άρα από την (3.10) και λαμβάνοντας υπ'οψιν την Παρατήρηση 3.1.8 έπεται ότι

$$P_N(B) = \int_{0-}^{\infty} \Pi_\theta(B) U(d\theta), \quad \forall B \in \mathcal{A}(\mathcal{N}_s) \quad \text{της μορφής} \quad (3.8). \qquad (3.11)$$

**(j)** Η σχέση (3.11) ισχύει για κάθε σύνολο μέσα στο $\mathcal{A}(\mathcal{N}_s)$.
Πράγματι, θεωρούμε την οικογένεια $\mathcal{C}$ των στοιχείων της $\mathcal{A}(\mathcal{N}_s)$ που είναι της μορφής (3.8). Θεωρούμε επίσης την οικογένεια υποσυνόλων $\mathcal{D}$ της $\mathcal{N}_s$ η οποία ορίζεται ως

$$\mathcal{D} := \left\{ B \in \mathcal{A}(\mathcal{N}_s) : P_N(B) = \int_{0-}^{\infty} \Pi_\theta(B) U(d\theta) \right\}$$

Η οικογένεια $\mathcal{D}$ είναι μιά κλάση Dynkin.
Πράγματι

**(Dyn1)** Αφού η $\mathcal{A}(\mathcal{N}_s)$ από υπόθεση είναι μια σ-άλγεβρα έπεται ότι $\emptyset \in \mathcal{A}(\mathcal{N}_s)$, οπότε

$$P_N(\emptyset) = \int_{0-}^{\infty} \Pi_\theta(\emptyset) U(d\theta).$$

Επομένως, $\emptyset \in \mathcal{D}$.

**(Dyn2)** Έστω $A \in \mathcal{D}$, τότε προφανώς $A \in \mathcal{A}(\mathcal{N}_s)$ και άρα $A^c \in \mathcal{A}(\mathcal{N}_s)$, οπότε διαδοχικά θα έχουμε

$$\begin{aligned}
P_N(A^c) &= P_N(\mathcal{N}_s \setminus A) = P_N(\mathcal{N}_s) - P_N(A) = 1 - P_N(A) \\
&= 1 - \int_{0-}^{\infty} \Pi_\theta(A) U(d\theta) = \int_{0-}^{\infty} \Big( 1 - \Pi_\theta(A) \Big) U(d\theta) \\
&= \int_{0-}^{\infty} \Big( \Pi_\theta(\mathcal{N}_s) - \Pi_\theta(A) \Big) U(d\theta) = \int_{0-}^{\infty} \Pi_\theta(A^c) U(d\theta),
\end{aligned}$$

απ'οπου έπεται ότι $A^c \in \mathcal{D}$.

**(Dyn3)** Θεωρούμε την ακολουθία $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ανά δύο ξένων συνόλων της $\mathcal{D}$ για την οποία ισχύει ότι $\biguplus_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}(\mathcal{N}_s)$. Διαδοχικά λοιπόν έχουμε

$$\begin{aligned} P_N\Big(\biguplus_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} P_N(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{0-}^{\infty} \Pi_\theta(A_n)U(d\theta) \\ &= \int_{0-}^{\infty} \sum_{n\in\mathbb{N}} \Pi_\theta(A_n)U(d\theta) = \int_{0-}^{\infty} \Pi_\theta\Big(\biguplus_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big)U(d\theta). \end{aligned}$$

Επομένως, $\biguplus_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$.

Σύμφωνα με τις **(Dyn1)**,**(Dyn2)**,**(Dyn3)** έπεται ότι η $\mathcal{D}$ είναι μία κλάση Dynkin. Η οικογένεια $\mathcal{C}$ αποτελείται από τους γεννήτορες της σ-άλγεβρας $\mathcal{A}(\mathcal{N}_s)$, οπότε $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A}(\mathcal{N}_s)$. Επιπλέον η $\mathcal{C}$ είναι κλειστή ως προ τις πεπερασμένες τομές, αφού τομή μετρήσιμων κυλίνδρων είναι μετρήσιμος κύλινδρος. Παρατηρούμε επίσης ότι $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$ αφού για κάθε $A \in \mathcal{C}$ από την (3.11) έπεται ότι

$$P_N(A) = \int_{0-}^{\infty} \Pi_\theta(A)\, U(d\theta).$$

Επομένως από το Θεώρημα Β΄.3 έπεται ότι

$$\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{D} = \mathcal{A}(\mathcal{N}_s),$$

οπότε, για κάθε $A \in \mathcal{A}(\mathcal{N}_s)$ ισχύει η (3.11).

Ορισμός 3.2.4 $\Rightarrow$ Ορισμό 3.2.3. Για να δείξουμε την αντίστροφη κατεύθυνση πρέπει αρχικά δείξουμε ότι η σημειακή διαδικασία $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια διαδικασία γεννήσεως καθώς και ότι η $N_t$ ακολουθεί την MP$(t, U)$ για κάθε $t \geq 0$ και για κάποια κατανομή U.
Σύμφωνα με τη Παρατήρηση 3.2.5 η σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι απλή.
**(k)** Η διαδικασία $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια μαρκοβιανή σημειακή διαδικασία.
Πράγματι, έστω $B \in \mathcal{A}(\mathcal{N}_s)$ και $\{A_{t_1}, ..., A_{t_m}\}$ μια ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}(\mathcal{N}_s)$ με $t_1 < \cdots < t_m$ . Τότε

$$\begin{aligned} P_N\Big(B|\bigcap_{j=i}^{m} A_j\Big) &= \int_{0-}^{\infty} \Pi_\theta\Big(B|\bigcap_{j=i}^{m} A_j\Big)U(d\theta) \\ &= \int_{0-}^{\infty} \Pi_\theta(B|A_m)U(d\theta) = P_N(B|A_m), \end{aligned}$$

αφού η διαδικασία Poisson είναι μια μαρκοβιανή διαδικασία και άρα

$$\Pi_\theta\left(B|\bigcap_{j=i}^{m} A_j\right) = \Pi_\theta(B|A_m).$$

Επομένως η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια μαρκοβιανή σημειακή διαδικασία.
**(m)** Η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ικανοποιεί τις σχέσεις

$$(3.12)\quad p_{m,n}\left(t,t+h\right)=P(N_{t+h}=n|N_t=m)=\begin{cases}1-h\cdot\mu_\Theta+o\left(h\right) & ,n=m\\ \\ h\cdot\mu_\Theta+o\left(h\right) & ,n=m+1\\ \\ o\left(h\right) & ,n>m+1\end{cases},$$

όπου $\mu_\Theta$ είναι η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής $\Theta$.
Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}P(N_t=n|N_s=m) &= \frac{1}{P(N_s=m)}P(N_t=n,N_s=m)\\ &= \frac{1}{P(N_s=m)}\ P(N_t-N_s=n-m,N_s=m)\\ &= \frac{1}{P(N_s=m)}\int_{0-}^{\infty}\int_{0-}^{\infty}\Pi_\theta(N_t-N_s=n-m,N_s=m)U\left(d\theta\right)U\left(d\theta\right)\\ &= \frac{1}{P(N_s=m)}\int_{0-}^{\infty}\int_{0-}^{\infty}\Pi_\theta(N_{t-s}=n-m)\Pi_\theta(N_s=m)U\left(d\theta\right)U\left(d\theta\right)\\ &= \frac{1}{P(N_s=m)}\int_{0-}^{\infty}\Pi_\theta(N_{t-s}=n-m)U(d\theta)\cdot\int_{0-}^{\infty}\Pi_\theta(N_s=m)U(d\theta)\\ &= \frac{P(N_{t-s}=n-m)\cdot P(N_s=m)}{P(N_s=m)}.\end{aligned}$$

Άρα

$$(3.13)\qquad P(N_t=n|N_s=m)=P(N_{t-s}=n-m).$$

Επομένως από την (3.13) έχουμε

$$\begin{aligned}P(N_{t+h}=n|N_t=n) &= P(N_{t+h-t}=n-n)=P(N_h=0)\\ &= \int_{0-}^{\infty}\frac{(\theta h)^0}{0!}e^{-\theta h}U\left(d\theta\right)=\int_{0-}^{\infty}\big(1-\theta h+o(h)\big)U(d\theta)\\ &= \int_{0-}^{\infty}U\left(d\theta\right)-h\int_{0-}^{\infty}\theta U\left(d\theta\right)+o\left(h\right)\int_{0-}^{\infty}U\left(d\theta\right).\end{aligned}$$

Άρα

$$P(N_{t+h}=n|N_t=n)=1-h\cdot\mu_\Theta+o(h),$$

δηλαδή για $m = n$ η σχέση (3.12) ικανοποιείται.
Επιπλέον από την (3.13) έχουμε

$$\begin{aligned}
P(N_{t+h} = n | N_t = n-1) &= P(N_{t+h-t} = n - (n-1)) = P_N(N_h = 1) \\
&= \int_{0-}^{\infty} \frac{\theta h}{1!} \cdot e^{-\theta h} U\,(d\theta) = \int_{0-}^{\infty} \theta h \cdot \Big(1 - \theta h + o\,(h)\Big) U\,(d\theta) \\
&= h \cdot \int_{0-}^{\infty} \theta U\,(d\theta) - h^2 \cdot \int_{0-}^{\infty} \theta^2 U\,(d\theta) + h \cdot o(h) \cdot \int_{0-}^{\infty} \theta U\,(d\theta)\,.
\end{aligned}$$

Άρα

$$P(N_{t+h} = n | N_t = n-1) = h \cdot \mu_\Theta + o(h),$$

δηλαδή για $m + 1 = n$ η σχέση (3.12) ικανοποιείται. Τέλος από την (3.13) έχουμε,

$$\begin{aligned}
P(N_{t+h} = n | N_t = m) &= P(N_{t+h-t} = n - m) = \sum_{k=2}^{\infty} P(N_h = k) \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} \int_{0-}^{\infty} \frac{(\theta h)^k}{k!} \cdot e^{-\theta h} U\,(d\theta) = \int_{0-}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\theta h)^k}{k!} \cdot e^{-\theta h} U\,(d\theta) \\
&= \int_{0-}^{\infty} o\,(h)\, U\,(d\theta) = o\,(h)\,.
\end{aligned}$$

Άρα

$$P(N_{t+h} = n | N_t = m) = o(h),$$

δηλαδή για $m + 1 < n$ η σχέση (3.12) ικανοποιείται.
**(1)** Η $N_t$ ακολουθεί την MP$(t, U)$ για κάθε $t \geq 0$ και για κάποια κατανομή $U$.
Πράγματι, θεωρούμε τα σύνολα

$$B_k := \{N_t = k\} \quad \text{και} \quad \widetilde{B_k} = \{N(\omega) \in \mathcal{N}_s : N_t(\omega) = k, \omega \in \Omega\}\,,$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και για κάποιο $k \in \mathbb{N}_0$. Τότε $B_k \in \Sigma$, $\widetilde{B_k} \in \mathcal{A}(\mathcal{N}_s)$ και

$$\begin{aligned}
P(B_k) = P_N(\widetilde{B_k}) &= \int_{0-}^{\infty} \Pi_\theta(\widetilde{B_k}) U\,(d\theta) \\
&= \int_{0-}^{\infty} \frac{(\theta(t - t_0))^{k-k_0}}{(k-k_0)!} e^{-\theta(t-t_0)} U(d\theta).
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$P(B_k) = P_N(\widetilde{B_k}) = \int_{0-}^{\infty} \frac{(\theta t)^k}{k!} \cdot e^{-\theta t} U(d\theta). \tag{3.14}$$

Σημειώνουμε ότι ενώ $B \in \mathcal{A}(\mathcal{N}_s)$ το ενδεχόμενο $\{N \in B\} \in \Sigma$.
Άρα από τις **(k)**,**(l)** και **(m)** έπεται ότι η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία διαδικασία γεννήσεως η οποία ακολουθεί την $\mathrm{MP}(t, U)$ για κάθε $t \geq 0$ και για κάποια κατανομή $U$.

□

**Παρατηρήσεις 3.3.3** **(a)** Η παραπάνω απόδειξη βρέθηκε μη ολοκληρωμένη στο βιβλιο [10] σελ. 61-63, στο οποίο υπάρχει απόδειξη μέχρι το βήμα **(g)**. Σύμφωνα με τον Grandell το κενό το οποίο υπήρχε καλύφθηκε από τον Albrecht στο [1]. Δυστυχώς δεν κατέστη δυνατό να βρούμε τη συγκεκριμένη δημοσίευση, για αυτό τον λόγο παραθέτουμε μία απόδειξη που θεωρούμε ότι είναι στο πνεύμα της απόδειξης του Albrecht.
**(b)** Σημειώνουμε ότι αν ισχύει οποιοσδήποτε από τους Ορισμούς 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4 και 3.2.6 για την $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ τότε έχουμε μηδενική πιθανότητα έκρηξης. Επομένως σύμφωνα με το Πόρισμα 3.3.1 οι Ορισμοί 2.3.1 και 3.1.3 **(b)** είναι ισοδύναμοι, δηλαδή μία $\sigma.\delta.$ του αριθμού των απαιτήσεων είναι ακριβώς μία απλή σημειακή διαδικασία. Επομένως στις Προτάσεις 3.3.4 και 3.3.6 όπως επίσης και στο Θεώρημα 3.3.7 οι έννοιες $\sigma.\delta.$ του αριθμού των απαιτήσεων και απλή σημειακή διαδικασία ταυτίζονται.

**Πρόταση 3.3.4** *Οι Ορισμοί 3.2.2 και 3.2.6 είναι ισοδύναμοι.*

**Απόδειξη.** Ορισμός 3.2.2 $\Rightarrow$ Ορισμό 3.2.6. Έστω ότι η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ είναι μιά μεμειγμένη διαδικασία Poisson με παράμετρο $\Theta$ η οποία ικανοποιεί τον Ορισμό 3.2.2. Αφού η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ικανοποιεί τον Ορισμό 3.2.2 έπεται ότι θα έχει υπο συνθήκη στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις και ότι για κάθε $t \geq 0$ θα ισχύει η ισότητα $P_{N_t|\Theta} = \mathbf{P}(t\Theta)$ , $P|\sigma(\Theta) - \sigma.\beta.$ Ισοδύναμα για κάθε $t > 0$ και $B \in \mathcal{A}(\mathcal{N}_s)$ έχουμε

$$P_{N_t|\Theta}(B) = \sum_{n\in B\cap\mathbb{N}_0} e^{-t\Theta}\frac{(t\Theta)^n}{n!}, \quad P|\sigma(\Theta) - \sigma.\beta,$$

απ'οπου έπεται ότι

$$P_{N_{\frac{t}{\Theta}}|\Theta}(B) = \sum_{n\in B\cap\mathbb{N}_0} e^{-t}\frac{(t)^n}{n!}, \quad P|\sigma(\Theta) - \sigma.\beta,$$

και ισοδύναμα

$$P_{N_{\frac{t}{\Theta}}|\Theta}(B) = \mathbf{P}(1)(B), \quad P|\sigma(\Theta) - \sigma.\beta. \tag{3.15}$$

Αν για κάθε $t \geq 0$ θέσουμε $\widetilde{N}_t := N_{\frac{t}{\Theta}}$ ισοδύναμα παίρνουμε ότι $\widetilde{N}_{t\Theta} = N_t$ για κάθε $t > 0$. Επιπλέον από την (3.15) για κάθε $t > 0$ έχουμε

$$P_{\widetilde{N}_{t|\Theta}} = P_{\widetilde{N}_t}, \quad P|\sigma(\Theta) - \sigma.\beta. \tag{3.16}$$

**(a)** Δύο τυχαίες μεταβλητές X,Y είναι ανεξάρτητες, αν

$$P_{X|Y} = P_X, \quad P|\sigma(Y) - \sigma.\beta. \tag{3.17}$$

Πράγματι, έστω ότι ισχύει η (3.17). Τότε για κάθε $A\times B \in \mathfrak{B}\times\mathfrak{B}$ η από κοινού κατανομή των X και Y θα είναι

$$\begin{aligned} P_{(X,Y)}(A\times B) &= P\big(X^{-1}(A)\cap Y^{-1}(B)\big) = \int \mathbb{E}_P[\chi_{X^{-1}(A)}\chi_{Y^{-1}(B)}|\sigma(Y)]dP \\ &= \int_{Y^{-1}(B)} P_{X|Y}(A)dP \overset{(3.17)}{=} P_X(A)\int_{Y^{-1}(B)} dP \\ &= P_X(A)P_Y(B) = \big(P_X\otimes P_Y\big)(A\times B). \end{aligned}$$

Θεωρούμε την οικογένεια $\mathcal{D}$ υποσυνόλων του $\mathfrak{B}\otimes\mathfrak{B}$ με

$$\mathcal{D} = \big\{E\in\mathfrak{B}\otimes\mathfrak{B} : P_{(X,Y)}(E) = \big(P_X\otimes P_Y\big)(E)\big\}.$$

Προφανώς $\mathfrak{B}\times\mathfrak{B}\subseteq\mathcal{D}$. Η οικογένεια $\mathcal{D}$ είναι μία κλάση Dynkin. Πράγματι
**(Dyn1)** Προφανώς $\emptyset\in\mathcal{D}$ αφού,

$$P_{(X,Y)}(\emptyset) = 0 \;=\; P_X(\emptyset)P_Y(\emptyset) = \big(P_X\otimes P_Y\big)(\emptyset)$$

**(Dyn2)** Επιπλέον για κάθε $A\in\mathcal{D}$ έχουμε,

$$\begin{aligned} \big(P_X\otimes P_Y\big)(\mathbb{R}\setminus A) &= \big(P_X\otimes P_Y\big)(\mathbb{R}) - \big(P_X\otimes P_Y\big)(A) \\ &= P_{(X,Y)}(\mathbb{R}) - P_{(X,Y)}(A) = P_{(X,Y)}(\mathbb{R}\setminus A). \end{aligned}$$

Επομένως για κάθε $A\in\mathcal{D}$ έπεται ότι $A^c\in\mathcal{D}$.
**(Dyn3)** Θεωρούμε την ακολουθία $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ανά δύο ξένων συνόλων της $\mathcal{D}$. Διαδοχικά λοιπόν έχουμε,

$$\big(P_X\otimes P_Y\big)(\biguplus_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\big(P_X\otimes P_Y\big)(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P_{(X,Y)}(A_n) = P_{(X,Y)}(\biguplus_{n\in\mathbb{N}} A_n).$$

Επομένως για κάθε ακολουθία ξένων ανά δύο ενδεχομένων της $\mathcal{D}$ ανήκει στην $\mathcal{D}$.
Άρα σύμφωνα με τις **(Dyn1)**,**(Dyn2)**,**(Dyn3)** η $\mathcal{D}$ είναι μία κλάση Dynkin.
Επιπλέον το σύνολο $\mathfrak{B}\times\mathfrak{B}$ είναι κλειστό για τις πεπερασμένες τομές. Επομένως εφαρμόζοντας το Θεώρημα Β΄.3 έπεται ότι $\mathfrak{B}\otimes\mathfrak{B} = \mathcal{D}$ . Άρα οι τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι ανεξάρτητες.
Από το **(a)** και την (3.16) έπεται ότι για κάθε $t>0$ οι τυχαίες μεταβλητές $\widetilde{N}_t$ και Θ είναι ανεξάρτητες. Επιπλέον, $P_{\widetilde{N}_t} = \mathbf{P}(1)$ για κάθε $t>0$ και επομένως η $\{\widetilde{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις. Επίσης σύμφωνα με το Λήμμα 3.1.4 η σ.δ $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι απλή, επομένως η σ.δ $\{\widetilde{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι απλή. Άρα η $\{\widetilde{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ικανοποιεί τον Ορισμό 3.2.6.
Ορισμός 3.2.6 ⇒ Ορισμό 3.2.2. Έστω ότι η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία MPP υπό τον Ορισμό 3.2.6 , δηλαδή $N_t = \widetilde{N}_{t\Theta}$ για κάθε $t\geq 0$, όπου $\{\widetilde{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια διαδικασία Poisson με

παράμετρο 1 ανεξάρτητη της τυχαίας μεταβλητής Θ. Επομένως για κάθε $0 \leq s < t$ έπεται ότι,

$$P_{(\widetilde{N}_s, \widetilde{N}_t - \widetilde{N}_s)} = P_{\widetilde{N}_t - \widetilde{N}_s} \otimes P_{\widetilde{N}_s}.$$

Η παραπάνω σχέση αν λάβουμε υπ'οψην μας το **(a)** θα γίνει,

$$P_{(\widetilde{N}_s, \widetilde{N}_t - \widetilde{N}_s)|\Theta} = P_{\widetilde{N}_t - \widetilde{N}_s|\Theta} \otimes P_{\widetilde{N}_s|\Theta}, \quad P|\sigma(\Theta) - \sigma.\beta.,$$

οπότε λαμβάνοντας υπ'οψη την (3.16) και την $\widetilde{N}_{t\Theta} = N_t$ προκύπτει,

$$P_{(N_s, N_t - N_s)|\Theta} = P_{N_t - N_s|\Theta} \otimes P_{N_s|\Theta}, \quad P|\sigma(\Theta) - \sigma.\beta.$$

Επομένως, η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει υπο συνθήκη ανεξάρτητες προσαυξήσεις υπο το μέτρο $P$. Επιπλέον για κάθε $t \geq 0$ έχουμε ότι $P_{\widetilde{N}_t|\Theta} = \mathbf{P}(1), \quad P|\sigma(\Theta) - \sigma.\beta.$, οπότε, $P_{N_t|\Theta} = \mathbf{P}(t\Theta), \quad P|\sigma(\Theta) - \sigma.\beta.$. Από τα παραπάνω έπεται ότι η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει υπό συνθήκη στάσιμες προσαυξήσεις υπο το μέτρο $P$.
Σύμφωνα με όλα τα παραπάνω έπεται ότι η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ικανοποιεί τον Ορισμό 3.2.2.

□

**Παρατήρηση 3.3.5** Η απόδειξη της παραπάνω πρότασης υπάρχει στο [27] (βλ. Remark 0.41). Η ισοδυναμία είναι γνωστή για στοχαστικές διαδικασίες Cox ( βλ. π.χ. [11]) όπου παρουσιάζεται μία εντελώς διαφορετική απόδειξη.

**Πρόταση 3.3.6** *Ο Ορισμός 3.2.4 έπεται από τον Ορισμό 3.2.2.*

**Απόδειξη.** Έστω ότι η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ικανοποιεί τον Ορισμό 3.2.2, δηλαδή έχει υπό συνθήκη ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις και για κάθε $t > 0$ ικανοποιεί τη σχέση,

$$P_{N_t|\Theta} = \mathbf{P}(t\Theta), \quad P|\sigma(\Theta) - \sigma.\beta.$$

Θεωρούμε το σύνολο

$$B = \{N_{t_1} = k_1, N_{t_2} = k_2, ..., N_{t_n} = k_n\}. \tag{3.18}$$

Για το σύνολο B διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned} B &= \{N_{t_1} = k_1, N_{t_2} = k_2, ..., N_{t_n} = k_n\} = \bigcap_{i=1}^{n} \{N_{t_i} = k_i\} \\ &= \left\{N_{t_1} - N_{t_0} = k_1 - k_0, N_{t_2} - N_{t_1} = k_2 - k_1, ..., N_{t_n} - N_{t_{n-1}} = k_n - k_{n-1}\right\} \\ &= \bigcap_{i=1}^{n} \left\{N_{t_i} - N_{t_{i-1}} = k_i - k_{i-1}\right\} \in \Sigma. \end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
P\Big(\bigcap_{i=1}^{n}\{N_{t_i}=k_i\}\Big) &= P\Big(\bigcap_{i=1}^{n}\big\{N_{t_i}-N_{t_{i-1}}=k_i-k_{i-1}\big\}\Big)\\
&= \int_\Omega P\Big(\bigcap_{i=1}^{n}\big\{N_{t_i}-N_{t_{i-1}}=k_i-k_{i-1}\big\}\,|\Theta(\omega)\Big)P_\Theta\big(d\Theta(\omega)\big)\\
&= \int_{\mathbb{R}_+} P\Big(\bigcap_{i=1}^{n}\big\{N_{t_i}-N_{t_{i-1}}=k_i-k_{i-1}\big\}\,|\Theta(\omega)=\theta\Big)P_\Theta\big(d\theta\big).
\end{aligned}$$

Αλλά από υπόθεση έχουμε ότι η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει υπο συνθήκη ανεξάρτητες προσυαξήσεις, άρα

$$P\Big(\bigcap_{i=1}^{n}\{N_{t_i}=k_i\}\Big)=\int_{\mathbb{R}_+}\prod_{i=1}^{n}P\Big(N_{t_i}-N_{t_{i-1}}=k_i-k_{i-1}|\Theta(\omega)=\theta\Big)P_\Theta(d\theta).$$

Επιπλέον από την υπόθεση ισχύει ότι

$$P_{N_t|\Theta}=\mathbf{P}(t\Theta),\quad P|\sigma(\Theta)-\sigma.\beta$$

και επομένως για κάθε $0\le s<t$ θα έχουμε

$$P_{N_t-N_s|\Theta}=\mathbf{P}\big((t-s)\Theta\big),\quad P|\sigma(\Theta)-\sigma.\beta$$

Άρα,

$$P\Big(\bigcap_{i=1}^{n}\{N_{t_i}=k_i\}\Big)=\int_{\mathbb{R}_+}\prod_{i=1}^{n}e^{\theta(t_i-t_{i-1})}\cdot\frac{\big(\theta(t_i-t_{i-1})\big)^{k_i-k_{i-1}}}{(k_i-k_{i-1})!}P_\Theta(d\theta). \tag{3.19}$$

Έστω $B:=\{N_{t_1}=k_1,\ldots,N_{t_n}=k_n\}$ και $\widetilde{B}:=\{N\in\mathcal{N}_s:N_{t_1}(\omega)=k_1,\ldots,N_{t_n}(\omega)=k_n,\omega\in\Omega\}$. Τότε $B\in\Sigma$ και $\widetilde{B}\in\mathcal{A}(\mathcal{N}_s)$ από την (3.19) έπεται ότι

$$P(B)=P_N(\widetilde{B})=\int_{\mathbb{R}_+}\Pi_\theta(\widetilde{B})P_\Theta(d\theta)\quad\text{για κάθε}\quad B\quad\text{της μορφής (3.18)}.$$

Με ένα επιχείρημα μονότονης κλάσης όπως στο βήμα **(j)** της απόδειξης της Πρότασης 3.3.2 αποδεικνύεται ότι

$$P(B)=P_N(\widetilde{B})=\int_{\mathbb{R}_+}\Pi_\theta(\widetilde{B})P_\Theta(d\theta)\quad\text{για κάθε}\quad B\in\Sigma.$$

□

Άμεση συνέπεια των παραπάνω τριών προτάσεων αλλά και του Λήμματος 3.1.4 είναι το ακόλουθο θεώρημα χαρακτηρισμού για τις μεμειγμένες διαδικασίες Poisson.

**Θεώρημα 3.3.7** *Για μία σ.δ.* $N := \{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *θεωρούμε τους ακόλουθους ισχυρισμούς:*

*(i)* *Υπάρχει τ.μ.* $\Theta : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$, *ώστε η* $N$ *να είναι MPP*($\Theta$).

*(ii)* *Υπάρχει κατανομή* $U$, *ώστε η* $N$ *να είναι L-MPP*($U$).

*(iii)* *Υπάρχει κατανομή* $U$, *ώστε η* $N$ *να είναι MPP*($U$)

*(iv)* *Υπάρχει τ.μ* $\Theta : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ *και μία τυπική σ.δ. Poisson* $\widetilde{N} = \{\widetilde{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *ανεξάρτητη της* $\Theta$, *ώστε η* $N$ *να είναι s-MPP*($\Theta$).

*Για τους παραπάνω ισχυρισμούς ισχύουν τα εξής:(i)* $\Longleftrightarrow$ *(iv),(ii)* $\Longleftrightarrow$ *(iii),(i)* $\Longrightarrow$ *(iii).*

**Ερώτημα 3.3.8** Το παραπάνω Θεώρημα δεν μας δίνει απάντηση για την ισοδυναμία των διάφορων Ορισμών για την μεμειγμένη διαδικασία Poisson καθώς παραμένει ακόμα ανοικτό το πρόβλημα της ισοδύναμία των ισχυρισμών *(i)* και *(iii)* του παραπάνω Θεωρήματος.

# Κεφάλαιο 4

# Οι μεμειγμένες ανανεωτικές διαδικασίες κατα Huang

Τα αποτελέσματα του παρόντος κεφαλαίου οφείλονται στον Huang [15].

## 4.1 Ορισμός της MRP και χαρακτηρισμός της

*Έστω* $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *μια σημειακή σ.δ. ορισμένη στον χώρο* $(\Omega, \Sigma,\ P)$.

**Ορισμός 4.1.1** Η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει την **ανταλλάξιμη ιδιότητα** $E$, αν για κάθε θετικό ακέραιο $k$, με $P\left(N_t = k\right) > 0$, η πιθανότητα

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{k}\{W_i \le w_i\}\,|N_t = k\right)$$

είναι συμμετρική ως προς τα $w_1, ..., w_k$.

**Ορισμός 4.1.2** Η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει την **ισχυρά ανταλλάξιμη ιδιότητα** $E^*$ , αν για κάθε θετικό ακέραιο $k$, με $P\left(N_t = k\right) > 0$, η πιθανότητα

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{k}\{W_i \le w_i\}\,, t - \sum_{i=1}^{k} W_i \le w_{k+1}|N_t = k\right)$$

είναι συμμετρική ως προς τα $w_1, ..., w_{\kappa+1}$.

**Ορισμός 4.1.3** Η σημειακή διαδικασία $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ καλείται $\nu$-**μεμειγμένη ανανεωτική διαδικασία** ($\nu$-MRP για συντομία) σχετιζόμενη με την οικογένεια $\{P_{\tilde{y}}\}_{\tilde{y}\in\widetilde{\Upsilon}}$, εάν για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και για κάθε $w_1, \ldots, w_k$ ισχύει η συνθήκη

$$P\Big(\bigcap_{i=1}^{k}\{W_i \le w_i\}\Big) = \int \prod_{i=1}^{k} P_{\tilde{y}}\big(W_i \le w_i\big)\nu(d\tilde{y})$$

όπου $\{P_{\tilde{y}}\}_{\tilde{y}\in\widetilde{\Upsilon}}$ είναι μία οικογένεια μέτρων πιθανότητας στη $\Sigma$ και $\nu$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας στη $B\left(\widetilde{\Upsilon}\right) := \sigma\left(\{P_{\cdot}(E) : E \in \Sigma\}\right)$ τέτοιο ώστε για $\nu$ σχεδόν όλα τα $\tilde{y} \in \widetilde{\Upsilon}$ η διαδικασία $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ να είναι $P_{\tilde{y}}$- ισόνομη.

Στον Ορισμό 4.1.3 αν για $\nu$-σχεδόν όλα τα $\tilde{y} \in \widetilde{\Upsilon}$ ισχύει

$$F_{\tilde{y}}(x) := P_{\tilde{y}}(W_i \leq x) = 1 - e^{\theta(\tilde{y})x}, x \geq 0$$

για κάποιο $\theta(\tilde{y}) > 0$ και αν για $\nu$-σχεδόν όλα τα $\tilde{y} \in \widetilde{\Upsilon}$ η $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι $P_{\tilde{y}}$-ανεξάρτητη τότε η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία μεμειγμένη διαδικασία Poisson σύμφωνα με τον Ορισμό 3.2.4.

Έστω $\lim_{t\to\infty} N_t = Z \;\; P-\sigma.\beta$, το οποίο προφανώς και υπάρχει καθώς η $N_t$ από υπόθεση είναι αύξουσα. Θεωρούμε την δίτιμη τυχαία μεταβλητή τυχαία μεταβλητή $\eta$ για την οποία ισχύει,

$$\eta = \begin{cases} 1 & , Z < \infty \\ 0 & , Z = \infty \end{cases},$$

με $P(\eta = 1) = q$ και $P(\eta = 0) = p := 1 - q$. Η τυχαία μεταβλητή $\eta$ μπορεί να συνδεθεί με την $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ με τον ακόλουθο τρόπο,

$$Z = \begin{cases} Z_1 & , \eta = 1 \\ \infty & , \eta = 0 \end{cases},$$

όπου $Z_1$ είναι μία μη αρνητική τυχαία μεταβλητή με $P[Z_1 < \infty] = 1$.

**Παρατήρησεις 4.1.4 (a)** Ο Ορισμός 4.1.3 είναι ελαφρώς τροποποιημένος από τον ορισμό που βάζει ο Huang (βλ. [15] Section 1, Definition 3, σελ. 16) και στον οποίο δεν αναφέρεται σαφώς ότι η $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι $P_{\tilde{y}}$-ισόνομη για $\nu$-σχεδόν όλα τα $\tilde{y} \in \widetilde{\Upsilon}$. Αλλά η υποθεση αυτή είναι ουσιώδης και πρέπει να συμπεριληφθεί στον ορισμό καθώς είναι απαραίτητη για την απόδειξη του πορίσματος της σελίδας 20 του Huang [15].
Πράγματι, θεωρούμε την $\sigma.\delta.$ $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ του Παραδείγματος 5.4.4, όπου δεν ισχύει η παραπάνω υπόθεση. Τότε $q := P(Z < \infty) = 0 < 1$, όπου $Z$ είναι το σχεδόν βέβαιο όριο της $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ για $t \longrightarrow \infty$. Υποθέτουμε, αν είναι δυνατόν, ότι το πόρισμα της σελίδας 20 του Huang [15] ισχύει. Τότε κάτω από την δέσμευσητου ενδεχομένου $\{Z = \infty\}$ η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει την ιδιότητα $E$, αφού η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία MRP κατά Huang, άρα η $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ θα είναι ανταλλάξιμη, άτοπο σύμφωνα με το Παράδειγμα 5.4.4.
**(b)** Στον ορισμό του Huang (βλ. [15] Section 1, Definition 3, σελ. 16) υποτίθεται ότι η σημειακή διαδικασία $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ παίρνει τιμές στο $\mathbb{N}_0$ (δηλαδή δεν παίρνει την τιμή $\infty$). Αυτό είναι ισοδύναμο με την ασθενή συνθήκη, ότι η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει μηδενική πιθανότητα έκρηξης, δηλαδή $P(\sup_{n\in\mathbb{N}} T_n < \infty) = 0$ ή $P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{N_t = \infty\}) = 0$ (βλ. π.χ. [32], Section 1.1, σελ. 7, Lemma 2.1.4).
**(c)** Επίσης οι σημειακές διαδικασίες που θεωρούνται από τον Huang [15] υποτίθεται, ότι είναι επιπλέον **διαχωρίσιμες**. Ο συνήθης ορισμός των διαχωρίσιμων στοχαστικών διαδικασιών είναι ο εξής : Μία $\sigma.\delta.$ $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι διαχωρίσιμη, αν υπάρχει ένα αριθμήσιμο σύνολο δεικτών $G$ έτσι, ώστε για κάθε $\omega \in \Omega$ το σύνολο $\{(u, X_u(\omega)) : u \in G\}$ να

είναι πυκνό στο $\{(t, X_t(\omega)) : t \in \mathbb{R}_+\}$. Κάθε τέτοιο σύνολο $G$ ονομάζεται **σύνολο διαχωρισιμότητας** για την $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$.
Όμως αν η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι δεξιά συνεχής, τότε το $\mathbb{Q}_+$ είναι ένα σύνολο διαχωρισιμότητας της $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Επομένως η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι πάντα διαχωρίσιμη, αφού είναι δεξιά συνεχής, και άρα η υπόθεση του Huang [15], ότι η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι διαχωρίσιμη φαίνεται να είναι περιττή.

**Λήμμα 4.1.5** *Έστω $q > 0$. Εάν η πιθανότητα $P\left(\bigcap_{i=1}^k \{W_i \leq w_i\} | Z = k\right)$ είναι συμμετρική ως προς τα $w_1, \ldots, w_k$ για κάθε $k \geq 1$, τότε δοθέντος ότι $\eta = 1$, η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει την ιδιότητα E.*

**Απόδειξη.** Για κάθε $k \geq 1$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{i=1}^k \{W_i \leq w_i\}, N_t = k, \eta = 1\right) &= P\left(\bigcap_{i=1}^k \{W_i \leq w_i\}, T_k \leq t < T_{k+1}, \eta = 1\right) \\ &= P\left(\bigcap_{i=1}^k \{W_i \leq w_i\}, \sum_{i=1}^k W_i \leq t < \sum_{i=1}^{k+1} W_i, Z \geq k\right), \end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα προκύπτει άμεσα από Λήμμα 2.3.4. Εφαρμόζοντας όμως τον νόμο ολικής πιθανότητας στην πιο πάνω σχέση έπεται ότι

$$\begin{aligned} &P\left(\bigcap_{i=1}^k \{W_i \leq w_i\}, N_t = k, \eta = 1\right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} P\left(\bigcap_{i=1}^k \{W_i \leq w_i\}, \sum_{i=1}^k W_i \leq t < \sum_{i=1}^{k+1} W_i | Z = k + j\right) \cdot P(Z = k + j). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Από την υπόθεση μας όμως έχουμε ότι το δεξί μέλος της σχέσης (4.1) είναι συμμετρικό ως προ τα $w_1, ..., w_k$,επομένως και το αριστερό της μέλος θα είναι συμμετρικό ως προς τα $w_1, ..., w_k$ από που και το συμπέρασμα.

□

**Λήμμα 4.1.6** *Για κάθε $k \geq 1$,*

$$\lim_{t\to\infty} |P(A, N_t = k) - P(A, Z = k)| = 0$$

*ομοιόμορφα στο $A \in \Sigma$.*

**Απόδειξη.** Δοθέντος ότι $\eta = 1$ ,τότε $\lim_{t\to\infty} N_t = Z_1, \quad P - \sigma.\beta.$. Επιπλέον αφού οι $N_t$ και $Z_1$ παίρνουν μόνο ακέραιες τιμές έπεται ότι

$$\lim_{u\to\infty} P(N_t = Z_1, \forall t \geq u) = 1. \tag{4.2}$$

Πράγματι

$$
\begin{aligned}
& \lim_{u\to\infty} P(N_t = Z_1, \forall t \geq u) = 1 \\
\iff & \forall \langle u_n \rangle_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{στο} \quad \mathbb{R}_+, \left[ \lim_{n\to\infty} u_n = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(N_{t_n} = Z_1, \forall t_n \geq u_n) = 1 \right].
\end{aligned}
$$

Όμως για $A_n := \{N_{t_n} = Z_1 : t_n \geq u_n\}$ έπεται ότι η ακολουθία $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα, άρα

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P(N_{t_n} = Z_1 : t_n \geq u_n) &= P\left( \lim_{n\in\mathbb{N}} \{N_{t_n} = Z_1 : t_n \geq u_n\} \right) \\
&= 1, \quad \text{διότι} \quad \lim_{n\to\infty} N_{t_n} = Z_1.
\end{aligned}
$$

Επομένως για κάθε $A \in \Sigma$ από την (4.2) έπεται ότι

$$
\begin{aligned}
&|P(A, N_t = k) - P(A, Z_1 = k)| = |P\big((A \cap \{N_t = k\}) \setminus (A \cap \{Z_1 = k\})\big)| \\
&\quad = |P\big((A \cap \{N_t = k\}) \cap (A \cap \{Z_1 = k\})^c\big)| = |P\big((A \cap \{N_t = k\}) \cap (A^c \cup \{Z_1 \neq k\})\big)| \\
&\quad = |P\big(A \cap \{N_t = k\} \cap \{Z_1 \neq k\}\big)| \\
&\quad = |P\big((A \cap \{N_t = k\} \cap \{Z_1 \neq k\}) \setminus (A \cap \{N_t \neq k\} \cap \{Z_1 = k\})\big)| \\
&\quad = |P\big(A \cap \{N_t = k\} \cap \{Z_1 \neq k\}) - P(A \cap \{Z_1 = k\} \cap \{N_t \neq k\}\big)| \\
&\quad = |P\big((A \cap \{N_t = k\} \cap \{Z_1 \neq k\}) \cap (A^c \cup \{N_t = k\} \cup \{Z_1 \neq k\})\big)| \\
&\quad = |P\big(A \cap \{N_t = k\} \cap \{Z_1 \neq k\}\big)| \leq 2P(N_t \neq Z_1) \to 0,
\end{aligned}
$$

καθώς $t \to \infty$.
Για $\eta = 0$ έπεται ότι $\lim_{t\to\infty} N_t = Z = \infty$ και είναι προφανές ότι

$$
\lim_{t\to\infty} |P(A, N_t = k_t) - P(A, Z = \infty)| = 0
$$

όπου $k_t$ μία αύξουσα και μη φραγμένη συνάρτηση του $t$.

□

**Λήμμα 4.1.7** *Έστω $q < 1$, τότε δοθέντος $\eta = 0$ η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει την ιδιότητα $E$ αν και μόνο αν η $P\left(\bigcap_{i=1}^k \{W_i \leq w_i\} | \eta = 0\right)$ είναι συμμετρική ως προ τα $w_1, ..., w_k$ για κάθε $k \geq 1$.*

**Απόδειξη.** Έστω ότι δοθέντος $\eta = 0$ η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει την ιδιότητα $E$. Τότε

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{i=1}^{k}\{W_i \le w_i\}\right) &= \sum_{j=0}^{\infty} P\left(\bigcap_{i=1}^{k}\{W_i \le w_i\}, N_t = k+j\right) \\ &\quad + P\left(\bigcap_{i=1}^{k}\{W_i \le w_i\}, N_t < k\right). \end{aligned}$$

Αν πάρουμε το όριο του δεξιού μέλους της παραπάνω σχέσης για t να τείνει στο άπειρο προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{i=1}^{k}\{W_i \le w_i\}\right) &= \lim_{t\to\infty}\sum_{j=0}^{\infty} P\left(\bigcap_{i=1}^{k}\{W_i \le w_i\}, N_t = k+j\right) \\ &\quad + \lim_{t\to\infty} P\left(\bigcap_{i=1}^{k}\{W_i \le w_i\}, N_t < k\right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} P\left(\bigcap_{i=1}^{k}\{W_i \le w_i\}, lim_{t\to\infty}N_t = k+j\right) \\ &\quad + P\left(\bigcap_{i=1}^{k}\{W_i \le w_i\}, lim_{t\to\infty}N_t < k\right). \end{aligned}$$

Δηλαδή

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{k}\{W_i \le w_i\}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} P\left(\bigcap_{i=1}^{k}\{W_i \le w_i\}, lim_{t\to\infty}N_t = k+j\right). \tag{4.3}$$

Αλλά το δεξί μέλος της (4.3) είναι συμμετρικό από όπου και το συμπέρασμα.
Αντιστρόφως, έστω ότι η $P\left(\bigcap_{i=1}^{k}\{W_i \le w_i\}|\eta = 0\right)$ είναι συμμετρική ως προ τα $w_1, ..., w_k$ για κάθε $k \ge 1$. Τότε διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{i=1}^{k}\{W_i \le w_i\}, N_t = k, \eta = 0\right) &= P\left(\bigcap_{i=1}^{k}\{W_i \le w_i\}, N_t = k|\eta = 0\right)\cdot P(\eta = 0) \\ &= p\cdot P\left(\bigcap_{i=1}^{k}\{W_i \le w_i\}, N_t = k|\eta = 0\right), \end{aligned}$$

όπου $p := 1 - q$. Άρα

$$\begin{aligned} &P\left(\bigcap_{i=1}^{k}\{W_i \le w_i\}, N_t = k, \eta = 0\right) \\ &\quad = p\cdot P\left(\bigcap_{i=1}^{k}\{W_i \le w_i\}, \sum_{i=1}^{k} W_i \le t < \sum_{i=1}^{k+1} W_i|\eta = 0\right). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Από την υπόθεσή μας όμως το δεξί μέλος της (4.4) είναι συμμετρικό ως προς τα $w_1, ..., w_k$, από όπου και το συμπέρασμα.

$\square$

Κάνοντας χρήση του Λήμματος 4.1.7 και του Θεωρήματος de Finetti (βλ. Παράρτημα Δ΄) προκύπτει το ακόλουθο Πόρισμα που χαρακτηρίζει τις μεμειγμένες ανανεωτικές διαδικασίες,

**Πόρισμα 4.1.8** *Έστω ότι το μέτρο πιθανότητας $P$ είναι τέλειο και η $\Sigma$ είναι αριθμήσιμα παραγόμενη. Αν $q < 1$, τότε δοθέντος $\eta = 0$, η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει την ιδιότητα $E$ αν και μόνο αν είναι μία $\nu$-MRP.*

**Απόδειξη.** Έστω $q < 1$ και ότι δοθέντος του $\eta = 0$ η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει την ιδιότητα $E$. Ισοδύναμα από το Λήμμα 4.1.7 η $P\left(\bigcap_{i=1}^k \{W_i \le w_i\} \,|\eta = 0\right)$ είναι συμμετρική ως προ τα $w_1, ..., w_k$ για κάθε $k \ge 1$ επομένως είναι μία ανταλλάξιμη $\sigma$.δ. και σύμφωνα με το θεώρημα de Finetti (βλ. Θεώρημα Δ΄.1 και Θεώρημα 5.3.2)η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ θα είναι μία $\nu$-MRP.
Αντιστρόφως αν η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία $\nu$-MRP έπεται άμεσα το συμπέρασμα. $\square$

**Παρατήρηση 4.1.9** Η υπόθεση, ότι το $P$ είναι τέλειο και η $\Sigma$ αριθμήσιμα παραγόμενη, δεν υπάρχει στο αντίστοιχο αποτέλεσμα του Huang. Όμως τουλάχιστον η υπόθεση, ότι το $P$ είναι τέλειο είναι ουσιώδης για ένα τέτοιο αποτέλεσμα (βλ. [26], Remark 2.3 **(b)** και Θεώρημα 5.3.2).

Το παρακάτω θεώρημα είναι άμεση συνέπεια των τριών Λημμάτων που αποδειχθηκαν σε αυτή την ενότητα.

**Θεώρημα 4.1.10** *(i) Έστω $0 < q < 1$, τότε η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει την ιδιότητα $E$ αν και μόνο αν η $P\big(\bigcap_{i=1}^k \{W_i \le w_i\}|\eta = j\big)$ είναι συμμετρική ως προς τα $w_1, \cdots, w_k$ για $k \ge 1$ και $j = 0, 1$.*

*(ii) Έστω $q > 0$, τότε οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες*

- **(a)** *δοθέντος $\eta = 1$ η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει την ιδιότητα $E$,*
- **(b)** *η $P(\bigcap_{i=1}^k \{W_i \le w_i\} \,|Z = k)$ είναι συμμετρική ως προς τα $w_1, ..., w_k$ για κάθε $k \ge 1$,*
- **(c)** *για κάθε $k \ge 1$, δοθέντος ότι $Z = k$ η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει την ιδιότητα $E$.*

**Απόδειξη.** *(i)* Έστω ότι η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει την ιδιότητα $E$, τότε για $\eta = 1$ ισχύει

$$P\left(\bigcap_{i=1}^k \{W_i \le x_i\} \,|\eta = 1\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^k \{W_i \le w_i\} \,|\lim_{t\to\infty} N_t = k\right),$$

για κάποιο $k \geq 1$. Λόγω του Λήμματος 4.1.6 έπεται ότι

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{k} \{W_i \leq x_i\} \,|\eta = 1\right) = \lim_{t\to\infty} P\left(\bigcap_{i=1}^{k} \{W_i \leq x_i\} \,|N_t = k\right). \tag{4.5}$$

Το δεξί μέλος της (4.5) από την υπόθεση μας είναι συμμετρικό ως προς τα $w_1, ..., w_k$. Επομένως η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ δοθέντος του $\eta$ έχει την ιδιότητα $E$.
Αντιστρόφως, έστω ότι για $\eta = 1$ η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει την ιδιότητα $E$. Από το Λήμμα 4.1.6 προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} P\left(\bigcap_{i=1}^{k} \{W_i \leq w_i\} \,|N_t = k\right) &= P\left(\bigcap_{i=1}^{k} \{W_i \leq w_i\} \,|\lim_{t\to\infty} N_t = k\right) \\ &= P\left(\bigcap_{i=1}^{k} \{W_i \leq w_i\} \,|\eta = 1\right). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Επομένως αφού το δεξί μέλος της (4.6) είναι συμμετρικό, το ίδιο ισχύει και για το αριστερό μέλος. Για $\eta = 0$ η απόδειξη του *(i)* είναι συνέπεια του Λήμματος 4.1.7.
*(ii)* **(a)**$\Rightarrow$ **(b)**. Έστω ότι δοθέντος $\eta = 1$ η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει την ιδιότητα $E$ ή ισοδύναμα ότι η $P\left(\bigcap_{i=1}^{k} \{W_i \leq w_i\} \,|\eta = 1\right)$ είναι συμμετρική ως προς τα $w_1, ..., w_k$ για κάθε $k \geq 1$. Επομένως

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{i=1}^{k} \{W_i \leq x_i\} \,|Z = k\right) &= P\left(\bigcap_{i=1}^{k} \{W_i \leq w_i\} \,|\lim_{t\to\infty} N_t = k\right) \\ &= P\left(\bigcap_{i=1}^{k} \{W_i \leq w_i\} \,|\eta = 1\right). \end{aligned}$$

Άρα ισχύει το **(b)**.
**(b)**$\Rightarrow$ **(c)**. Από την υπόθεση μας έπεται ότι η $P(\bigcap_{i=1}^{k} \{W_i \leq x_i\} \,|Z = k)$ είναι συμμετρική ως προς τα $w_1, ..., w_k$ για κάθε $k \geq 1$, αλλά

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{i=1}^{k} \{W_i \leq w_i\} \,|Z = k\right) &= P\left(\bigcap_{i=1}^{k} \{W_i \leq w_i\} \,|\lim_{t\to\infty} N_t = k\right) \\ &= \lim_{t\to\infty} P\left(\bigcap_{i=1}^{k} \{W_i \leq w_i\} \,|N_t = k\right), \end{aligned}$$

λόγω Λήμματος 4.1.5. Αλλά από τις παραπάνω ισότητες παρατηρούμε ότι η $P(\bigcap_{i=1}^{k} \{W_i \leq x_i\} \,|N_t = k)$ είναι συμμετρική ως προς τα $w_1, ..., w_k$ για κάθε $k \geq 1$ και επομένως ισχύει το **(c)**.

**(c)⇒ (a)**. Έστω ότι για κάθε $k \geq 1$, δοθέντος ότι $Z = k$ η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει την ιδιότητα $E$, επομένως

$$\begin{aligned}
P\Big(\bigcap_{i=1}^{k}\{W_i \leq w_i\}\,|\eta = 1\Big) &= P\Big(\bigcap_{i=1}^{k}\{W_i \leq w_i\}\,|\lim_{t\to\infty} N_t = Z_1\Big)\\
&= P\Big(\bigcap_{i=1}^{k}\{W_i \leq x_i\}\,|Z = Z_1\Big)\\
&= P\Big(\bigcap_{i=1}^{k}\{W_i \leq x_i\}\,|Z = k\Big),
\end{aligned}$$

για κάποιο $k \in \mathbb{N}$. Αλλά το δεξί μέλος της παραπάνω ισότητας από την υπόθεση μας είναι συμμετρικό ως προς τα $w_1, ..., w_k$ επομένως ισχύει το **(a)**.

□

## 4.2 Μαρκοβιανές MRPs

Το ακόλουθο θεώρημα χαρακτηρίζει Μαρκοβιανές ανανεωτικές στοχαστικές διαδικασίες και βρέθηκε στο [15] Theorem 2 στο οποίο όμως δεν δίνεται απόδειξη. Επείδη το Θεώρημα 4.2.2 απότελεί γενίκευση αυτού κρίνεται σκόπιμο να παραθέσουμε μια απόδειξη.

**Θεώρημα 4.2.1** *Αν $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία ανανεωτική σ.δ. η οποία ορίζεται μέσω της στοχαστικής διαδικασίας των ενδιάμεσων χρόνων εμφάνισης των απαιτήσεων $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ της οποίας η συνάρτηση κατανομής $F(t)$ υποθέτουμε ότι είναι απολύτα συνεχής, τότε η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία διαδικασία Markov αν και μόνο αν είναι μία διαδικασία Poisson.*

**Απόδειξη** Για κάθε $0 < u < t$ και $v > 0$ θεωρούμε την πιθανότητα $P(N_{t-u} = N_t = N_{t+v} = 1)$. Από την υπόθεση μας η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία διαδικασία Markov επομένως

$$\begin{aligned}
P(N_{t-u} = N_t = N_{t+v} = 1) &= P(N_{t+v} = 1|N_t = N_{t-u} = 1)P(N_{t-u} = N_t = 1)\\
&= P(N_{t+v} = 1|N_t = 1)P(N_{t-u} = N_t = 1),
\end{aligned}$$

άρα

$$\frac{P(N_{t-u} = N_t = N_{t+v} = 1)}{P(N_{t-u} = N_t = 1)} = \frac{P(N_t = N_{t+v} = 1)}{P(N_t = 1)},$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{P(N_{t-u} = N_{t+v} = 1)}{P(N_{t-u} = N_t = 1)} = \frac{P(N_t = N_{t+v} = 1)}{P(N_t = 1)}. \tag{4.7}$$

Ισοδύναμα από την σχέση (2.1) και το Λήμμα 2.3.4, η (4.7) μπορεί να γραφει στην ακόλουθη μορφή

$$\frac{P(W_1 \leq t-u < t+v < W_1+W_2)}{P(W_1 \leq t-u < t < W_1+W_2)} = \frac{P(W_1 \leq t < t+v < W_1+W_2)}{P(W_1 \leq t < W_1+W_2)}$$

και κάνοντας χρήση της γνωστής από την Θεωρια Συνόλων σχέση

$$A \cap B = A \setminus (A \cap B^c)$$

για $A, B$ δύο σύνολα έπεται ότι

$$\begin{aligned} &\frac{P(W_1 \leq t-u) - P(W_1 \leq t-u, t+v \geq W_1+W_2)}{P(W_1 \leq t-u) - P(W_1 \leq t-u, t \geq W_1+W_2)} \\ &\qquad\qquad = \frac{P(W_1 \leq t) - P(W_1 \leq t, t+v \geq W_1+W_2)}{P(W_1 \leq t < W_1+W_2)} \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα ότι

$$\begin{aligned} &\frac{P(W_1 \leq t-u) - P(W_1 \leq t-u, t+v-W_1 \geq W_2)}{P(W_1 \leq t-u) - P(W_1 \leq t-u, t-W_1 \geq W_2)} \\ &\qquad\qquad = \frac{P(W_1 \leq t) - P(W_1 \leq t, t+v-W_1 \geq W_2)}{P(W_1 \leq t) - P(t \geq W_1+W_2)} \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\frac{\int_0^{t-u} F(dx) - \int_0^{t-u}\int_0^{t+v-x} F(dy)F(dx)}{\int_0^{t-u} F(dx) - \int_0^{t-u}\int_0^{t-x} F(dy)F(dx)} = \frac{\int_0^t F(dx) - \int_0^t\int_0^{t+v-x} F(dy)F(dx)}{\int_0^t F(dx) - \int_0^t F(t-x)F(dx)}$$

άρα

$$\frac{\int_0^{t-u} G(t+v-x)G(dx)}{\int_0^{t-u} G(t-x)G(dx)} = \frac{\int_0^t G(t+v-x)G(dx)}{\int_0^t G(t-x)G(dx)}, \tag{4.8}$$

όπου $G := 1-F$. Παρατηρούμε ότι το δεξί μέλος της (4.8) είναι ανεξάρτητο της παραμέτρου $u$ επομένως και η παράγωγος του ως προς $u$ θα είναι ίση με 0. Επομένως εξισώνοντας την παράγωγο του αριστερού μέλους της (4.8) με το μηδέν έπεται ότι

$$\begin{aligned} &\Big[G(u+v)G'(t-u)\Big]\Big[\int_0^{t-u} G(t-x)G(dx)\Big] \\ &\quad -\Big[\int_0^{t-u} G(t+v-x)G(dx)\Big]\Big[G(u)G'(t-u)\Big] = 0 \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$\text{(4.9)} \qquad \frac{\int_0^{t-u} G(t+v-x)G(dx)}{\int_0^{t-u} G(t-x)G(dx)} = \frac{G(u+v)G'(t-u)}{G(u)G'(t-u)}.$$

Αφού το αριστερό μέλος της (4.9) είναι ανεξάρτητο του $u$ το ίδιο θα ισχύει και για το δεξί, επομένως για $u=0$ και $u=t$ προκύπτει η ισότητα

$$\frac{G(t+v)G'(0)}{G(t)G'(0)} = \frac{G(v)G'(t)}{G(0)G'(t)}$$

ή ισοδύναμα

$$\text{(4.10)} \qquad \frac{G(t+v)G'(0)}{G(v)G'(t)} = \frac{G(t)G'(0)}{G'(t)}.$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία αφου παρατηρούμε ότι το δεξί μέλος της (4.10) είναι ανεξάρτητο του $v$ έπεται ότι

$$\frac{G(t+v)G'(0)}{G(v)G'(t)} = \frac{G'(t+v)G'(0)}{G'(v)G'(t)}.$$

Το δεξί μέλος της παραπάνω σχέση είναι ανεξάρτητο του $v$ επομένως για $v=0$ τελικά προκύπτει ότι

$$\text{(4.11)} \qquad \frac{G(t+v)G'(0)}{G(v)G'(t)} = \frac{G(t)G'(0)}{G'(t)} = \frac{G'(t)G'(0)}{G'(0)G'(t)} = 1$$

αφού τα $W_i$ είναι ισόνομα. Από την (4.11) έπεται ότι

$$G(t)G'(0) - G'(t) = 0, \forall t > 0$$

ή ισοδύναμα ότι

$$G(t) = e^{G'(0)t}, \forall t > 0.$$

Επομένως, για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ η σ.δ. των ενδιάμεσων χρόνων $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ θα ικανοποιεί την σχέση $P_{W_n} = \mathbf{Exp}(G'(0))$ και άρα σύμφωνα με το Πόρισμα 2.4.4 η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ θα είναι μία διαδικασία Poisson.

$\square$

**Θεώρημα 4.2.2** *Αν η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια $\nu$-MRP με σχετιζόμενη οικογένεια μέτρων πιθανότητας $\{P_{\tilde{y}}\}_{\tilde{y}\in\widetilde{\Upsilon}}$ και επιπλέον, υποθέτουμε ότι*

*$(*)$ για σχεδόν όλα τα $\tilde{y} \in \widetilde{\Upsilon}$, η $F_{\tilde{y}}(t)$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο $(0,\infty)$ και $0 < F'_{\tilde{y}}(t) < C$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $C < \infty$.*

*Τότε η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια διαδικασία Markov αν και μόνο αν η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια MPP($U$).*

**Απόδειξη.** Έστω ότι η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία MPP. Από την Πρόταση 3.3.2 έπεται ότι η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία MPP σύμφωνα με τον Ορισμό 3.2.3 και άρα μία διαδικασία Markov. Αντιστρόφως, έστω ότι η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία Μαρκοβιανή MRP. Από τη συνθήκη $(*)$ έχουμε ότι για κάθε $t > 0$ ισχύει ότι $0 < F_{\tilde{y}}(t) < 1$, σ.β. . Ισχύει

$$P(N_t = 1) = \mathbb{E}_\nu\Big[\int_0^t (1 - F_{\tilde{y}}(t-s))F'_{\tilde{y}}(s)ds\Big]. \tag{4.12}$$

Πράγματι

$$\begin{aligned}
P(N_t = 1) &= \int P_{\tilde{y}}(N_t = 1)\nu(d\tilde{y}) = \int P_{\tilde{y}}(T_1 \le t < T_2)\nu(d\tilde{y}) \\
&= \int P_{\tilde{y}}(T_1 \le t) - P_{\tilde{y}}(T_2 \le t)\nu(d\tilde{y}) \\
&= \int P_{\tilde{y}}(T_1 \le t)\nu(d\tilde{y}) - \int P_{\tilde{y}}(T_2 \le t)\nu(d\tilde{y}) \\
&= \int P_{\tilde{y}}(W_1 \le t)\nu(d\tilde{y}) - \int P_{\tilde{y}}(W_1 + W_2 \le t)\nu(d\tilde{y}) \\
&= \int F_{\tilde{y}}(t)\nu(d\tilde{y}) - \int F_{\tilde{y}}^{2*}(t)\nu(d\tilde{y}) = \mathbb{E}_\nu[F_{\tilde{y}}(t) - F_{\tilde{y}}^{2*}(t)] \\
&= \mathbb{E}_\nu\big[F_{\tilde{y}}(t) - \int_0^t F_{\tilde{y}}(t-s)dF_{\tilde{y}}(s)\big] = \mathbb{E}_\nu\big[\int_0^t dF_{\tilde{y}}(s) - \int_0^t F_{\tilde{y}}(t-s)dF_{\tilde{y}}(s)\big].
\end{aligned}$$

Επομένως

$$P(N_t = 1) = \mathbb{E}_\nu\Big[\int_0^t (1 - F_{\tilde{y}}(t-s))F'_{\tilde{y}}(s)ds\Big],$$

απ'οπου παρατηρούμε ότι $P(N_t = 1) > 0$, για κάποια $t > 0$. Δουλεύοντας με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι $P(N_t = 2) > 0$.

Πράγματι

$$\begin{aligned}
P(N_t=2) &= \int P_{\tilde{y}}(N_t=2)\nu(d\tilde{y}) = \int P_{\tilde{y}}(T_2 \le t < T_3)\nu(d\tilde{y}) \\
&= \int P_{\tilde{y}}(T_2 \le t) - P_{\tilde{y}}(T_3 \le t)\nu(d\tilde{y}) \\
&= \int P_{\tilde{y}}(T_2 \le t)\nu(d\tilde{y}) - \int P_{\tilde{y}}(T_3 \le t)\nu(d\tilde{y}) \\
&= \int P_{\tilde{y}}(W_1+W_2 \le t)\nu(d\tilde{y}) - \int P_{\tilde{y}}(W_1+W_2+W_3 \le t)\nu(d\tilde{y}) \\
&= \int F_{\tilde{y}}^{2*}(t)\nu(d\tilde{y}) - \int F_{\tilde{y}}^{3*}(t)\nu(d\tilde{y}) = \mathbb{E}_\nu[F_{\tilde{y}}^{2*}(t) - F_{\tilde{y}}^{3*}(t)] \\
&= \mathbb{E}_\nu\Big[\int_0^t F_{\tilde{y}}(t-x)F_{d\tilde{y}}(s) - \int_0^t F_{\tilde{y}}^{2*}(t-x)F_{\tilde{y}}(dx)\Big] \\
&= \mathbb{E}_\nu\Big[\int_0^t \big(F_{\tilde{y}}(t-x) - F_{\tilde{y}}^{2*}(t-x)\big)F_{\tilde{y}}(dx)\Big] \\
&= \mathbb{E}_\nu\Big[\int_0^t \Big(\int_0^{t-x} F_{\tilde{y}}(dy) - \int_0^{t-x} F_{\tilde{y}}(t-x-\omega)F_{\tilde{y}}(d\omega)\Big)F_{\tilde{y}}(dx)\Big].
\end{aligned}$$

Επομένως

$$P(N_t=2) = \mathbb{E}_\nu\Big[\int_0^t\int_0^{t-x} \big(1-F_{\tilde{y}}(t-x-\omega)\big)F_{\tilde{y}}(d\omega)F_{\tilde{y}}(dx)\Big],$$

απ'οπου παρατηρούμε ότι $P(N_t=2)>0$, για κάποια $t>0$.
Για κάθε $0<u<t$ και $v>0$ θεωρούμε την πιθανότητα $P(N_{t-u}=N_t=N_{t+v}=1)$. Από την υπόθεση μας η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία διαδικασία Markov επομένως

$$\begin{aligned}
P(N_{t-u}=N_t=N_{t+v}=1) &= P(N_{t+v}=1|N_t=N_{t-u}=1)P(N_{t-u}=N_t=1) \\
&= P(N_{t+v}=1|N_t=1)P(M_{t-u}=M_t=1),
\end{aligned}$$

άρα

$$\frac{P(N_{t-u}=N_t=N_{t+v}=1)}{P(N_{t-u}=N_t=1)} = \frac{P(N_t=N_{t+v}=1)}{P(N_t=1)},$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{P(N_{t-u}=N_{t+v}=1)}{P(N_{t-u}=N_t=1)} = \frac{P(N_t=N_{t+v}=1)}{P(N_t=1)}. \tag{4.13}$$

Ισοδύναμα από την σχέση (2.1) και το Λήμμα 2.3.4, η (4.13) μπορεί να γραφει στην ακόλουθη μορφή

$$\frac{P(W_1 \leq t-u < t+v < W_1+W_2)}{P(W_1 \leq t-u < t < W_1+W_2)} = \frac{P(W_1 \leq t < t+v < W_1+W_2)}{P(W_1 \leq t < W_1+W_2)}$$

και κάνοντας χρήση της γνωστής από την Θεωρια Συνόλων σχέση

$$A \cap B = A \setminus (A \cap B^c)$$

για $A, B$ δύο σύνολα έπεται ότι

$$\begin{aligned}&\frac{P(W_1 \leq t-u) - P(W_1 \leq t-u, t+v \geq W_1+W_2)}{P(W_1 \leq t-u) - P(W_1 \leq t-u, t \geq W_1+W_2)}\\ &\qquad\qquad = \frac{P(W_1 \leq t) - P(W_1 \leq t, t+v \geq W_1+W_2)}{P(W_1 \leq t < W_1+W_2)}\end{aligned}$$

ή ισοδύναμα ότι

$$\begin{aligned}&\frac{P(W_1 \leq t-u) - P(W_1 \leq t-u, t+v-W_1 \geq W_2)}{P(W_1 \leq t-u) - P(W_1 \leq t-u, t-W_1 \geq W_2)}\\ &\qquad\qquad = \frac{P(W_1 \leq t) - P(W_1 \leq t, t+v-W_1 \geq W_2)}{P(W_1 \leq t) - P(t \geq W_1+W_2)}\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\begin{aligned}&\frac{\mathbb{E}_\nu[\int_0^{t-u} F_{\tilde{y}}(dx)] - \mathbb{E}_\nu[\int_0^{t-u}\int_0^{t+v-x} F_{\tilde{y}}(dy)F_{\tilde{y}}(dx)]}{\mathbb{E}_\nu[\int_0^{t-u} F_{\tilde{y}}(dx)] - \mathbb{E}_\nu[\int_0^{t-u}\int_0^{t-x} F_{\tilde{y}}(dy)F_{\tilde{y}}(dx)]}\\ &\qquad\qquad = \frac{\mathbb{E}_\nu[\int_0^{t} F_{\tilde{y}}(dx)] - \mathbb{E}_\nu[\int_0^{t}\int_0^{t+v-x} F_{\tilde{y}}(dy)F_{\tilde{y}}(dx)]}{\mathbb{E}_\nu[\int_0^{t} F_{\tilde{y}}(dx)] - \mathbb{E}_\nu[\int_0^{t} F_{\tilde{y}}(t-x)F_{\tilde{y}}(dx)]}\end{aligned}$$

άρα

$$\frac{\mathbb{E}_\nu\Big[\int_0^{t-u} G_{\tilde{y}}(t+v-x)G_{\tilde{y}}(dx)\Big]}{\mathbb{E}_\nu\Big[\int_0^{t-u} G_{\tilde{y}}(t-x)G_{\tilde{y}}(dx)\Big]} = \frac{\mathbb{E}_\nu\Big[\int_0^{t} G_{\tilde{y}}(t+v-x)G_{\tilde{y}}(dx)\Big]}{\mathbb{E}_\nu\Big[\int_0^{t} G_{\tilde{y}}(t-x)G_{\tilde{y}}(dx)\Big]}. \tag{4.14}$$

Παρατηρούμε ότι το δεξί μέλος της (4.14) είναι ανεξάρτητο της παραμέτρου $u$ επομένως και η παράγωγος του ως προς $u$ θα είναι ίση με 0. Επομένως, εξισώνοντας την παράγωγο του αριστερού μέλους της (4.14) με το μηδέν και εφαρμόζοντας το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης έχουμε ότι

$$\mathbb{E}_\nu\Big[G_{\tilde{y}}(u+v)G'_{\tilde{y}}(t-u)\Big]\mathbb{E}_\nu\Big[\int_0^{t-u} G_{\tilde{y}}(t-x)G_{\tilde{y}}(dx)\Big]$$

$$-\mathbb{E}_\nu\Big[\int_0^{t-u} G_{\tilde{y}}(t+v-x)G_{\tilde{y}}(dx)\Big]\mathbb{E}_\nu\Big[G_{\tilde{y}}(u)G'_{\tilde{y}}(t-u)\Big]=0$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{\mathbb{E}_\nu[\int_0^{t-u} G_{\tilde{y}}(t+v-x)G_{\tilde{y}}(dx)]}{\mathbb{E}_\nu[\int_0^{t-u} G_{\tilde{y}}(t-x)G_{\tilde{y}}(dx)]}=\frac{\mathbb{E}_\nu[G_{\tilde{y}}(u+v)G'_{\tilde{y}}(t-u)]}{\mathbb{E}_\nu[G_{\tilde{y}}(u)G'_{\tilde{y}}(t-u)]}. \tag{4.15}$$

Αφού το αριστερό μέλος της (4.15) είναι ανεξάρτητο του $u$ το ίδιο θα ισχύει και για το δεξί, επομένως για $u=0$ και $u=t$ προκύπτει η ισότητα

$$\frac{\mathbb{E}_\nu[G_{\tilde{y}}(t+v)G'_{\tilde{y}}(0)]}{\mathbb{E}_\nu[G_{\tilde{y}}(t)G'_{\tilde{y}}(0)]}=\frac{\mathbb{E}_\nu[G_{\tilde{y}}(v)G'_{\tilde{y}}(t)]}{\mathbb{E}_\nu[G_{\tilde{y}}(0)G'_{\tilde{y}}(t)]}$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{\mathbb{E}_\nu[G_{\tilde{y}}(t+v)G'_{\tilde{y}}(0)]}{\mathbb{E}_\nu[G_{\tilde{y}}(v)G'_{\tilde{y}}(t)]}=\frac{\mathbb{E}_\nu[G_{\tilde{y}}(t)G'_{\tilde{y}}(0)]}{\mathbb{E}_\nu[G'_{\tilde{y}}(t)]}. \tag{4.16}$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία αφου παρατηρούμε ότι το δεξί μέλος της (4.16) είναι ανεξάρτητο του $v$ έπεται ότι

$$\frac{\mathbb{E}_\nu[G_{\tilde{y}}(t+v)G'_{\tilde{y}}(0)]}{\mathbb{E}_\nu[G_{\tilde{y}}(v)G'_{\tilde{y}}(t)]}=\frac{\mathbb{E}_\nu[G'_{\tilde{y}}(t+v)G'_{\tilde{y}}(0)]}{\mathbb{E}_\nu[G'_{\tilde{y}}(v)G'_{\tilde{y}}(t)]}.$$

Το δεξί μέλος της παραπάνω σχέση είναι ανεξάρτητο του $v$ επομένως για $v=0$ τελικά προκύπτει ότι

$$\frac{\mathbb{E}_\nu[G_{\tilde{y}}(t+v)G'_{\tilde{y}}(0)]}{\mathbb{E}_\nu[G_{\tilde{y}}(v)G'_{\tilde{y}}(t)]}=\frac{\mathbb{E}_\nu[G_{\tilde{y}}(t)G'_{\tilde{y}}(0)]}{\mathbb{E}_\nu[G'_{\tilde{y}}(t)]}=\frac{\mathbb{E}_\nu[G'_{\tilde{y}}(t)G'_{\tilde{y}}(0)]}{\mathbb{E}_\nu[G'_{\tilde{y}}(0)G'_{\tilde{y}}(t)]}=1 \tag{4.17}$$

αφού τα $W_i$ είναι ισόνομα.
Αντίστοιχα, για κάθε $0<u<t, v>0, w>0$, θεωρούμε την πιθανότητα $P(N_{t-u}=N_t=N_{t+v}=1, N_{t+v+w}=2)$ η οποία ισοδύναμα από την Μαρκοβιανή ιδιότητα μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\begin{aligned}&P(N_{t-u}=N_t=N_{t+v}=1, N_{t+v+w}=2)\\&\quad=P(N_{t+v+w}=2|N_{t-u}=N_t=N_{t+v}=1)\cdot P(N_{t-u}=N_t=N_{t+v}=1)\\&\quad=P(N_{t+v+w}=2|N_{t+v}=1)\cdot P(N_{t-u}=N_t=N_{t+v}=1).\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\frac{P(N_{t-u} = N_t = N_{t+v} = 1, N_{t+v+w} = 2)}{P(N_{t-u} = N_t = N_{t+v} = 1)} = \frac{P(N_{t+v} = 1, N_{t+v+w} = 2)}{P(N_{t+v} = 1)}.$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned}(4.18)\qquad &\frac{P(N_{t-u} = N_{t+v} = 1, N_{t+v+w} = 2)}{P(N_{t-u} = N_t = 1)}\\ &\qquad = \frac{P(N_{t+v} = 1, N_{t+v+w} = 2)}{P(N_{t+v} = 1)} \cdot \frac{P(N_t = N_{t+v} = 1)}{P(N_t = 1)}.\end{aligned}$$

Το αριστερό μέλος της (4.18) από την σχέση (2.1) και το Λήμμα 2.3.4 μπορεί να γραφει στην ακόλουθη μορφή

$$\begin{aligned}
&\frac{P(N_{t-u} = N_{t+v} = 1, N_{t+v+w} = 2)}{P(N_{t-u} = N_t = 1)}\\
&\quad = \frac{P(W_1 \le t-u < W_1 + W_2 \le t+v+w < W_1 + W_2 + W_3)}{P(W_1 \le t-u < t < W_1 + W_2)}\\
&\quad = \frac{P(W_1 \le t-u, t+v < W_1 + W_2 \le t+v+w)}{P(W_1 \le t-u) - P(W_1 \le t-u, W_1 + W_2 \le t)}\\
&\qquad - \frac{P(W_1 \le t-u, t+v < W_1 + W_2 \le t+v+w, W_1 + W_2 + W_3 \le t+v+w)}{P(W_1 \le t-u) - P(W_1 \le t-u, W_1 + W_2 \le t)}\\
&\quad = \frac{P(W_1 \le t-u, t+v-W_1 < W_2 \le t+v+w-W_1)}{P(W_1 \le t-u) - P(W_1 \le t-u, W_2 \le t-W_1)}\\
&\qquad - \frac{P(W_1 \le t-u, t+v-W_1 < W_2 \le t+v+w-W_1, W_3 \le t+v+w-W_1-W_2)}{P(W_1 \le t-u) - P(W_1 \le t-u, W_2 \le t-W_1)}\\
&\quad = \frac{\mathbb{E}\Big[\int_0^{t-u}\int_{t+v-x}^{t+v+w-x} F_{\tilde{y}}(dy)F_{\tilde{y}}(dx)\Big]}{\mathbb{E}\Big[\int_0^{t-u} F_{W_1}(dx)\Big] - \mathbb{E}\Big[\int_0^{t-u}\int_0^{t-x} F_{\tilde{y}}(dy)F_{\tilde{y}}(dx)\Big]}\\
&\qquad - \frac{\mathbb{E}\Big[\int_0^{t-u}\int_{t-x}^{t+v+w-x}\int_0^{t+v+w-x-y} F_{\tilde{y}}(dz)F_{\tilde{y}}(dy)F_{\tilde{y}}(dx)\Big]}{\mathbb{E}\Big[\int_0^{t-u} F_{\tilde{y}}(dx)\Big] - \mathbb{E}\Big[\int_0^{t-u}\int_0^{t-x} F_{\tilde{y}}(dy)F_{\tilde{y}}(dx)\Big]}\\
&\quad = \frac{\mathbb{E}_\nu\Big[\int_0^{t-u}\int_{t+v-x}^{t+v+w-x} G_{\tilde{y}}(t+v+w-x-y)G_{\tilde{y}}(dy)G_{\tilde{y}}(dx)\Big]}{\mathbb{E}_\nu\Big[\int_0^{t-u} G_{\tilde{y}}(t-x)G_{\tilde{y}}(dx)\Big]}\\
&\quad = \frac{\mathbb{E}_\nu\Big[\int_0^{t-u} G_{\tilde{y}}^{2*}(t+v+w-x)G_{\tilde{y}}(dy)G_{\tilde{y}}(dx)\Big]}{\mathbb{E}_\nu\Big[\int_0^{t-u} G_{\tilde{y}}(t-x)G_{\tilde{y}}(dx)\Big]}.
\end{aligned}$$

Άρα

$$\frac{P(N_{t-u}=N_{t+v}=1, N_{t+v+w}=2)}{P(N_{t-u}=N_t=1)} = \frac{\mathbb{E}_\nu\Big[\int_0^{t-u} G_{\tilde{y}}^{2*}(t+v+w-x)G_{\tilde{y}}(dx)\Big]}{\mathbb{E}_\nu\Big[\int_0^{t-u} G_{\tilde{y}}(t-x)G_{\tilde{y}}(dx)\Big]}$$

Αντίστοιχα το δεξί μέλος της (4.18) από την σχέση (2.1) και το Λήμμα 2.3.4 μπορεί να γραφει στην ακόλουθη μορφή

$$\begin{aligned}
&\frac{P(N_{t+v}=1, N_{t+v+w}=2)}{P(N_{t+v}=1)} \cdot \frac{P(N_t=N_{t+v}=1)}{P(N_t=1)} \\
&\quad= \frac{P(W_1 \le t+v < W_1+W_2 \le t+v+w < W_1+W_2+W_3)}{P(W_1 \le t+v < W_1+W_2)} \\
&\qquad \cdot \frac{P(W_1 \le t < t+v < W_1+W_2)}{P(W_1 \le t < W_1+W_2)} \\
&\quad= \Bigg(\frac{P(W_1 \le t+v < W_1+W_2 \le t+v+w)}{\mathbb{E}_\nu\Big[\int_0^{t+v} G_{\tilde{y}}(t+v-x)G_{\tilde{y}}(dx)\Big]} \\
&\qquad - \frac{P(W_1 \le t+v < W_1+W_2 \le t+v+w, W_1+W_2+W_3 \le t+v+w)}{\mathbb{E}_\nu\Big[\int_0^{t+v} G_{\tilde{y}}(t+v-x)G_{\tilde{y}}(dx)\Big]}\Bigg) \\
&\qquad \cdot \frac{P(W_1 \le t) - P(W_1 \le t, W_1+W_2 \le t+v)}{\mathbb{E}_\nu\Big[\int_0^{t} G_{\tilde{y}}(t-x)G_{\tilde{y}}(dx)\Big]} \\
&\quad= \frac{\mathbb{E}_\nu\Big[\int_0^{t+v}\int_{t+v-x}^{t+v+w-x} G_{\tilde{y}}(t+v+w-x-y)G_{\tilde{y}}(dy)G_{\tilde{y}}(dx)\Big]}{\mathbb{E}_\nu\Big[\int_0^{t+v} G_{\tilde{y}}(t+v-x)G_{\tilde{y}}(dx)\Big]} \\
&\qquad \cdot \frac{\mathbb{E}_\nu\Big[\int_0^{t} G_{\tilde{y}}(t+v-x)G_{\tilde{y}}(dx)\Big]}{\mathbb{E}_\nu\Big[\int_0^{t} G_{\tilde{y}}(t-x)G_{\tilde{y}}(dx)\Big]}.
\end{aligned}$$

Επομένως η (4.18) γράφεται στην μορφή

$$\begin{aligned}
(4.19)\ &\frac{\mathbb{E}_\nu\Big[\int_0^{t-u} G_{\tilde{y}}^{2*}(t+v+w-x)G_{\tilde{y}}(dx)\Big]}{\mathbb{E}_\nu\Big[\int_0^{t-u} G_{\tilde{y}}(t-x)G_{\tilde{y}}(dx)\Big]} \\
&\quad= \frac{\mathbb{E}_\nu\Big[\int_0^{t+v} G_{\tilde{y}}^{2*}(t+v+w-x)G_{\tilde{y}}(dx)\Big]}{\mathbb{E}_\nu\Big[\int_0^{t+v} G_{\tilde{y}}(t+v-x)G_{\tilde{y}}(dx)\Big]} \cdot \frac{\mathbb{E}_\nu\Big[\int_0^{t} G_{\tilde{y}}(t+v-x)G_{\tilde{y}}(dx)\Big]}{\mathbb{E}_\nu\Big[\int_0^{t} G_{\tilde{y}}(t-x)G_{\tilde{y}}(dx)\Big]}.
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι το δεξί μέλος της (4.19) είναι ανεξάρτητο της παραμέτρου $u$ επομένως και η παράγωγος του ως προς $u$ θα είναι ίση με 0. Επομένως, εξισώνοντας την παράγωγο του αριστερού μέλους της (4.14) με το μηδέν και εφαρμόζοντας το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\nu\Big[G_{\tilde{y}}^{2*}(u+v+w)G'_{\tilde{y}}(t-u)\Big]\mathbb{E}_\nu\Big[\int_0^{t-u} G_{\tilde{y}}(t-x)G_{\tilde{y}}(dx)\Big]\\ -\mathbb{E}_\nu\Big[\int_0^{t-u} G_{\tilde{y}}^{2*}(t+v+w-x)G_{\tilde{y}}(dx)\Big]\mathbb{E}_\nu\Big[G_{\tilde{y}}(u)G'_{\tilde{y}}(t-u)\Big]=0\end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{\mathbb{E}_\nu\Big[\int_0^{t-u} G_{\tilde{y}}^{2*}(t+v+w-x)G_{\tilde{y}}(dx)\Big]}{\mathbb{E}_\nu\Big[\int_0^{t-u} G_{\tilde{y}}(t-x)G_{\tilde{y}}(dx)\Big]}=\frac{\mathbb{E}_\nu\Big[G_{\tilde{y}}^{2*}(u+v+w)G'_{\tilde{y}}(t-u)\Big]}{\mathbb{E}_\nu\Big[G_{\tilde{y}}(u)G'_{\tilde{y}}(t-u)\Big]}. \tag{4.20}$$

Αφού το αριστερό μέλος της (4.20) είναι ανεξάρτητο του $u$ το ίδιο θα ισχύει και για το δεξί, επομένως για $u=0$ και $u=t$ προκύπτει η ισότητα

$$\frac{\mathbb{E}_\nu\Big[G_{\tilde{y}}^{2*}(t+v+w)G'_{\tilde{y}}(0)\Big]}{\mathbb{E}_\nu\Big[G_{\tilde{y}}(t)G'_{\tilde{y}}(0)\Big]}=\frac{\mathbb{E}_\nu\Big[G_{\tilde{y}}^{2*}(v+w)G'_{\tilde{y}}(t)\Big]}{\mathbb{E}_\nu\Big[G'_{\tilde{y}}(t)\Big]}$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{\mathbb{E}_\nu\Big[G_{\tilde{y}}^{2*}(t+v+w)G'_{\tilde{y}}(0)\Big]}{\mathbb{E}_\nu\Big[G_{\tilde{y}}^{2*}(v+w)G'_{\tilde{y}}(t)\Big]}=\frac{\mathbb{E}_\nu\Big[G_{\tilde{y}}(t)G'_{\tilde{y}}(0)\Big]}{\mathbb{E}_\nu\Big[G'_{\tilde{y}}(t)\Big]}. \tag{4.21}$$

Το δεξί μέλος της (4.21) είναι ίσο με 1 λόγω της (4.17) και άρα θα είναι ανεξάρτητο κάθε παραμέτρου. Επιπλέον αφού για τη παράγωγο μίας συνέλιξης ισχύει $(f*g)'=f'*g=f*g'$ παραγωγίζοντας ως προς $v$ την (4.21) και εξισώνοντας την παράγωγο του δεξιού μέλος της με το μηδέν, λόγω του Θεωρήματος Κυριαρχημένης Σύγκλισης προκύπτει

$$\begin{aligned}&\frac{\mathbb{E}_\nu\Big[G_{\tilde{y}}^{2*}(t+v+w)G'_{\tilde{y}}(0)\Big]}{\mathbb{E}_\nu\Big[G_{\tilde{y}}^{2*}(v+w)G'_{\tilde{y}}(t)\Big]}\\ &\qquad=\frac{\mathbb{E}_\nu\Big[G'_{\tilde{y}}*G_{\tilde{y}}(t+v+w)G'_{\tilde{y}}(0)\Big]}{\mathbb{E}_\nu\Big[G'_{\tilde{y}}*G_{\tilde{y}}(v+w)G'_{\tilde{y}}(t)\Big]}\\ &\qquad=\frac{\mathbb{E}_\nu\Big[\int_0^{t+v+w} G'_{\tilde{y}}(t+v+w-x)G_{\tilde{y}}(x)G'_{\tilde{y}}(0)dx\Big]}{\mathbb{E}_\nu\Big[\int_0^{v+w} G'_{\tilde{y}}(v+w-x)G_{\tilde{y}}(x)G'_{\tilde{y}}(t)dx\Big]}=1.\end{aligned} \tag{4.22}$$

Παραγωγίζοντας την τελευταία ισότητα της (4.22) ως προς $w$ προκύπτει

$$\frac{\mathbb{E}_\nu\Big[\int_0^{t+v+w} G'_{\tilde{y}}(t+v+w-x)G_{\tilde{y}}(x)G'_{\tilde{y}}(0)dx\Big]}{\mathbb{E}_\nu\Big[\int_0^{v+w} G'_{\tilde{y}}(v+w-x)G_{\tilde{y}}(x)G'_{\tilde{y}}(t)dx\Big]} = \frac{\mathbb{E}_\nu\Big[G'_{\tilde{y}}(0)G_{\tilde{y}}(t+v+w)G'_{\tilde{y}}(0)\Big]}{\mathbb{E}_\nu\Big[G'_{\tilde{y}}(0)G_{\tilde{y}}(v+w)G'_{\tilde{y}}(t)\Big]} = 1$$

και για $w = 0$ από την παραπάνω ισότητα προκύπτει

$$\mathbb{E}_\nu\Big[G_{\tilde{y}}(t+v)\big(G'_{\tilde{y}}(0)\big)^2\Big] = \mathbb{E}_\nu\Big[G_{\tilde{y}}(v)G'_{\tilde{y}}(t)G'_{\tilde{y}}(0)\Big]. \tag{4.23}$$

Αλλά από την σχέση (4.17) λόγω της ανεξαρτησίας των $W_i$ έπεται ότι

$$\mathbb{E}_\nu\Big[\big(G'_{\tilde{y}}(t)\big)^2\Big] = \mathbb{E}_\nu\Big[G'_{\tilde{y}}(t)G_{\tilde{y}}(0)G_{\tilde{y}}(t)\Big]. \tag{4.24}$$

Επιπλέον από τη σχέση (4.23) για $v \to 0$ έπεται αρχικά ότι

$$\mathbb{E}_\nu\Big[G_{\tilde{y}}(t)\big(G'_{\tilde{y}}(0)\big)^2\Big] = \mathbb{E}_\nu\Big[G'_{\tilde{y}}(t)G'_{\tilde{y}}(0)\Big]$$

και λόγω της ανεξαρτησίας των $W_i$ έπεται ότι

$$\mathbb{E}_\nu\Big[\big(G_{\tilde{y}}(t)G'_{\tilde{y}}(0)\big)^2\Big] = \mathbb{E}_\nu\Big[G'_{\tilde{y}}(t)G_{\tilde{y}}(t)G'_{\tilde{y}}(0)\Big]. \tag{4.25}$$

Από τις (4.24) και (4.25) προκύπτει ότι

$$\mathbb{E}_\nu\Big[\big(G_{\tilde{y}}(t)G'_{\tilde{y}}(0)\big)^2\Big] + \mathbb{E}_\nu\Big[\big(G'_{\tilde{y}}(t)\big)^2\Big] = 2\mathbb{E}_\nu\Big[G'_{\tilde{y}}(t)G_{\tilde{y}}(t)G'_{\tilde{y}}(0)\Big], \forall t > 0$$

ή ισοδύναμα

$$\mathbb{E}_\nu\Big[\big(G_{\tilde{y}}(t)G'_{\tilde{y}}(0) - G'_{\tilde{y}}(t)\big)^2\Big] = 0, \forall t > 0.$$

Αλλά $\big(G_{\tilde{y}}(t)G'_{\tilde{y}}(0) + G'_{\tilde{y}}(t)\big)^2$ είναι θετικό για κάθε $t > 0$, άρα

$$G_{\tilde{y}}(t)G'_{\tilde{y}}(0) - G'_{\tilde{y}}(t) = 0, \forall t > 0.$$

Επομένως

$$G_{\tilde{y}}(t) = e^{G'_{\tilde{y}}(0)t}$$

για κάθε $t > 0$ και για σχεδόν όλα τα $\tilde{y} \in \widetilde{\Upsilon}$, που αποδεικνύει το ζητούμενο.

$\square$

Από το παραπάνω θεώρημα προκύπτει το ακόλουθο ερώτημα.

**Ερώτημα 4.2.3** Έστω $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μία $\nu$-MRP με σχετιζόμενη οικογένεια μέτρων πιθανότητας $\{P_{\tilde{y}}\}_{\tilde{y}\in\widetilde{\Upsilon}}$. Κάτω από ποιές προϋποθέσεις ισχύει η ισοδυναμία

η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι Markov αν και μόνο αν είναι MPP($\Theta$) ?

Μία θετική απάντηση στο παραπάνω ερώτημα θα έδινε επίσης μία θετική απάντηση στο Ερώτημα 3.3.8, και αντιστρόφως.

## 4.3 Περισσότερα για την ιδιότητα $E$

**Θεώρημα 4.3.1** *Έστω ότι η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία διαδικασία Markov. Τότε,*

*(i) δοθέντος $\eta = j$, $j = 0, 1$ η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι υπό συνθήκη Markov*

*(ii) δοθέντος $\eta = 1$ και $Z_1 = k$ η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι υπό συνθήκη Markov.*

*Επιπλέον για κάθε $0 < t_1 < ... < t_m < \infty$,$0 \leq n_1 \leq ... \leq n_m$, ισχύει,*

*(iii)*

$$\frac{P\Big(\bigcap_{i=1}^m \{N_{t_i} = n_i\} \,|\eta = 0\Big)}{P\Big(N_{t_m} = n_m|\eta = 0\Big)} = \frac{P\Big(\bigcap_{i=1}^m \{N_{t_i} = n_i\} \,|\eta = 1\Big)}{P\Big(N_{t_m} = n_m|\eta = 1\Big)},$$

*αν $P(\bigcap_{i=1}^m \{N_{t_i} = n_i\} \,|\eta = j) > 0, \quad j = 0, 1.$*

*(iv)*

$$\frac{P\Big(\bigcap_{i=1}^m \{N_{t_i} = n_i\} \,|Z_1 \neq k, \eta = 1\Big)}{P\Big(N_{t_m} = n_m|Z_1 \neq k, \eta = 1\Big)} = \frac{P\Big(\bigcap_{i=1}^m \{N_{t_i} = n_i\} \,|Z_1 = k, \eta = 1\Big)}{P\Big(N_{t_m} = n_m|Z_1 = k, \eta = 1\Big)},$$

*όποτε $P\Big(\bigcap_{i=1}^m \{N_{t_i} = n_i\} \,|Z_1 \neq k, \eta = 1\Big)$ και $P\Big(\bigcap_{i=1}^m \{N_{t_i} = n_i\} \,|Z_1 = k, \eta = 1\Big)$ είναι θετικές.*

**Απόδειξη.** *(i)* Για $\eta = 0$, $0 < t_1 < \ldots < t_m < t < \infty$ και $0 \leq n_1 \leq \ldots \leq n_m < k_t$ έχουμε

$$\begin{aligned}
&P\Big(N_{t_m} = n_m| \bigcap_{i=1}^{m-1} \{N_{t_i} = n_i\}, \eta = 0\Big) \\
&= \frac{P\Big(\bigcap_{i=1}^m \{N_{t_i} = n_i\}, \eta = 0\Big)}{P\Big(\bigcap_{i=1}^{m-1} \{N_{t_i} = n_i\}, \eta = 0\Big)} = \frac{P\Big(\bigcap_{i=1}^m \{N_{t_i} = n_i\}, \lim_{t\to\infty} N_t = Z\Big)}{P\Big(\bigcap_{i=1}^{m-1} \{N_{t_i} = n_i\}, \lim_{t\to\infty} N_t = Z\Big)} \\
&= \frac{\lim_{t\to\infty} P\Big(\bigcap_{i=1}^m \{N_{t_i} = n_i\}, N_t = k_t\Big)}{\lim_{t\to\infty} P\Big(\bigcap_{i=1}^{m-1} \{N_{t_i} = n_i\}, N_t = k_t\Big)} \\
&= \frac{\lim_{t\to\infty} P\Big(N_t = k_t| \bigcap_{i=1}^m \{N_{t_i} = n_i\}\Big) P\Big(\bigcap_{i=1}^m \{N_{t_i} = n_i\}\Big)}{\lim_{t\to\infty} P\Big(N_t = k_t| \bigcap_{i=1}^{m-1} \{N_{t_i} = n_i\}\Big) P\Big(\bigcap_{i=1}^{m-1} \{N_{t_i} = n_i\}\Big)}.
\end{aligned}$$

Αλλά από την υπόθεση η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι Markov επομένως,

$$P\Big(N_t = k_t | \bigcap_{i=1}^{m} \{N_{t_i} = n_i\}\Big) = P\Big(N_t = k | N_{t_m} = n_m\Big)$$

και

$$P\Big(N_t = k_t | \bigcap_{i=1}^{m-1} \{N_{t_i} = n_i\}\Big) = P\Big(N_t = k | N_{t_{m-1}} = n_{m-1}\Big).$$

Άρα

$$P\Big(N_{t_m} = n_m | \bigcap_{i=1}^{m-1} \{N_{t_i} = n_i\}, \eta = 0\Big)$$

$$= \frac{\lim_{t\to\infty} P\Big(N_t = k_t | N_{t_m} = n_m\Big) P\Big(\bigcap_{i=1}^{m} \{N_{t_i} = n_i\}\Big)}{\lim_{t\to\infty} P\Big(N_t = k_t | N_{t_{m-1}} = n_{m-1}\Big) P\Big(\bigcap_{i=1}^{m-1} \{N_{t_i} = n_i\}\Big)}$$

$$= \frac{\lim_{t\to\infty} P\Big(N_t = k_t | N_{t_m} = n_m\Big) P\Big(N_{t_m} = n_m, \bigcap_{i=1}^{m-1} \{N_{t_i} = n_i\}\Big)}{\lim_{t\to\infty} P\Big(N_t = k_t | N_{t_{m-1}} = n_{m-1}\Big) P\Big(\bigcap_{i=1}^{m-1} \{N_{t_i} = n_i\}\Big)}$$

$$= \frac{\lim_{t\to\infty} P\Big(N_t = k_t | N_{t_m} = n_m\Big)}{\lim_{t\to\infty} P\Big(N_t = k_t | N_{t_{m-1}} = n_{m-1}\Big)} \cdot P\Big(N_{t_m} = n_m | N_{t_{m-1}} = n_{m-1}\Big)$$

$$= \frac{\lim_{t\to\infty} P\Big(N_t = k_t | N_{t_m} = n_m\Big) P\Big(N_{t_m} = n_m, N_{t_{m-1}} = n_{m-1}\Big)}{\lim_{t\to\infty} P\Big(N_t = k_t | N_{t_{m-1}} = n_{m-1}\Big) P\Big(N_{t_{m-1}} = n_{m-1}\Big)}$$

$$= \frac{\lim_{t\to\infty} P\Big(N_t = k_t | N_{t_m} = n_m, N_{t_{m-1}} = n_{m-1}\Big) P\Big(N_{t_m} = n_m, N_{t_{m-1}} = n_{m-1}\Big)}{\lim_{t\to\infty} P\Big(N_t = k_t | N_{t_{m-1}} = n_{m-1}\Big) P\Big(N_{t_{m-1}} = n_{m-1}\Big)}$$

$$= \frac{\lim_{t\to\infty} P\Big(N_t = k_t, N_{t_m} = n_m, N_{t_{m-1}} = n_{m-1}\Big)}{\lim_{t\to\infty} P\Big(N_t = k_t, N_{t_{m-1}} = n_{m-1}\Big)} = \frac{P\Big(\eta = 0, N_{t_m} = n_m, N_{t_{m-1}} = n_{m-1}\Big)}{P\Big(\eta = 0, N_{t_{m-1}} = n_{m-1}\Big)}.$$

Επομένως

$$P\left(N_{t_m}=n_m|\bigcap_{i=1}^{m-1}\{N_{t_i}=n_i\},\eta=0\right)=P\left(N_{t_m}=n_m|N_{t_{m-1}}=n_{m-1},\eta=0\right),$$

δηλαδή η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ δοθέντος $\eta=0$ είναι μία διαδικασία Markov.

Αντίστοιχα για $\eta=1$, $0<t_1<\ldots<t_m<t<\infty$ και $0\leq n_1\leq\ldots\leq n_m<k$ έχουμε

$$\begin{aligned}
&P\left(N_{t_m}=n_m|\bigcap_{i=1}^{m-1}\{N_{t_i}=n_i\},\eta=1\right)\\
&=\frac{P\left(\bigcap_{i=1}^{m}\{N_{t_i}=n_i\},\eta=1\right)}{P\left(\bigcap_{i=1}^{m-1}\{N_{t_i}=n_i\},\eta=1\right)}=\frac{P\left(\bigcap_{i=1}^{m}\{N_{t_i}=n_i\},Z=k\right)}{P\left(\bigcap_{i=1}^{m-1}\{N_{t_i}=n_i\},Z=k\right)}\\
&=\frac{P\left(\bigcap_{i=1}^{m}\{N_{t_i}=n_i\},\lim_{t\to\infty}N_t=k\right)}{P\left(\bigcap_{i=1}^{m-1}\{N_{t_i}=n_i\},\lim_{t\to\infty}N_t=k\right)}=\frac{\lim_{t\to\infty}P\left(\bigcap_{i=1}^{m}\{N_{t_i}=n_i\},N_t=k\right)}{\lim_{t\to\infty}P\left(\bigcap_{i=1}^{m-1}\{N_{t_i}=n_i\},N_t=k\right)}\\
&=\frac{\lim_{t\to\infty}P\left(N_t=k|\bigcap_{i=1}^{m}\{N_{t_i}=n_i\}\right)}{\lim_{t\to\infty}P\left(N_t=k|\bigcap_{i=1}^{m-1}\{N_{t_i}=n_i\}\right)}\cdot\frac{P\left(\bigcap_{i=1}^{m}\{N_{t_i}=n_i\}\right)}{P\left(\bigcap_{i=1}^{m-1}\{N_{t_i}=n_i\}\right)}
\end{aligned}$$

Αλλά από την υπόθεση η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι Markov επομένως,

$$P\left(N_t=k|\bigcap_{i=1}^{m}\{N_{t_i}=n_i\}\right)=P\left(N_t=k|N_{t_m}=n_m\right)$$

και,

$$P\left(N_t=k|\bigcap_{i=1}^{m-1}\{N_{t_i}=n_i\}\right)=P\left(N_t=k|N_{t_{m-1}}=n_{m-1}\right).$$

Άρα

$$P\left(N_{t_m}=n_m|\bigcap_{i=1}^{m-1}\{N_{t_i}=n_i\},\eta=1\right)$$

$$=\frac{\lim_{t\to\infty}P\left(N_t=k|N_{t_m}=n_m\right)P\left(\bigcap_{i=1}^{m}\{N_{t_i}=n_i\}\right)}{\lim_{t\to\infty}P\left(N_t=k|N_{t_{m-1}}=n_{m-1}\right)P\left(\bigcap_{i=1}^{m-1}\{N_{t_i}=n_i\}\right)}$$

$$=\frac{\lim_{t\to\infty}P\left(N_t=k|N_{t_m}=n_m\right)}{\lim_{t\to\infty}P\left(N_t=t|N_{t_{m-1}}=n_{m-1}\right)}\cdot P\left(N_{t_m}=n_m|N_{t_{m-1}}=n_{m-1}\right)$$

$$=\frac{\lim_{t\to\infty}P\left(N_t=k|N_{t_m}=n_m\right)P\left(N_{t_m}=n_m,N_{t_{m-1}}=n_{m-1}\right)}{\lim_{t\to\infty}P\left(N_t=k|N_{t_{m-1}}=n_{m-1}\right)P\left(N_{t_{m-1}}=n_{m-1}\right)}$$

$$=\frac{\lim_{t\to\infty}P\left(N_t=k|N_{t_m}=n_m,N_{t_{m-1}}=n_{m-1}\right)P\left(N_{t_m}=n_m,N_{t_{m-1}}=n_{m-1}\right)}{\lim_{t\to\infty}P\left(N_t=k|N_{t_{m-1}}=n_{m-1}\right)P\left(N_{t_{m-1}}=n_{m-1}\right)}$$

$$=\frac{\lim_{t\to\infty}P\left(N_t=k,N_{t_m}=n_m,N_{t_{m-1}}=n_{m-1}\right)}{\lim_{t\to\infty}P\left(N_t=k,N_{t_{m-1}}=n_{m-1}\right)}$$

$$=\frac{P\left(\eta=1,N_{t_m}=n_m,N_{t_{m-1}}=n_{m-1}\right)}{P\left(\eta=1,N_{t_{m-1}}=n_{m-1}\right)}.$$

Επομένως

$$P\left(N_{t_m}=n_m|\bigcap_{i=1}^{m-1}\{N_{t_i}=n_i\},\eta=1\right)=P\left(N_{t_m}=n_m|N_{t_{m-1}}=n_{m-1},\eta=1\right),$$

δηλαδή η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ δοθέντος $\eta=1$ είναι μία διαδικασία Markov.
*(ii)* Η *(ii)* προκύπτει άμεσα από το *(i)*.
*(iii)* Για τις χρονικές στιγμές $t_1<...<t_m<\infty$ ισχύει,

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{m}\{N_{t_i}=n_i\}|\eta=0\right)=P\left(\bigcap_{i=1}^{m}\{N_{t_i}=n_i\}|\eta=1\right),$$

και

$$P\Big(N_{t_m} = n_m | \eta = 0\Big) = P\Big(N_{t_m} = n_m | \eta = 1\Big).$$

Πράγματι, έστω ότι

$$P\Big(\bigcap_{i=1}^{m} \{N_{t_i} = n_i\} \,|\eta = 0\Big) \neq P\Big(\bigcap_{i=1}^{m} \{N_{t_i} = n_i\} \,|\eta = 1\Big)$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{P\Big(\bigcap_{i=1}^{m} \{N_{t_i} = n_i\}, \eta = 0\Big)}{P(\eta = 0)} \neq \frac{P\Big(\bigcap_{i=1}^{m} \{N_{t_i} = n_i\}, \eta = 1\Big)}{P(\eta = 1)}.$$

Τότε διαδοχικά έχουμε

$$P\Big(\bigcap_{i=1}^{m} \{N_{t_i} = n_i\}, \eta = 0\Big) \cdot P(\eta = 1) \neq P\Big(\bigcap_{i=1}^{m} \{N_{t_i} = n_i\}, \eta = 1\Big) \cdot P(\eta = 0),$$

ή

$$P\Big(\bigcap_{i=1}^{m} \{N_{t_i} = n_i\}, \eta = 0\Big) \cdot q \neq P\Big(\bigcap_{i=1}^{m} \{N_{t_i} = n_i\}, \eta = 1\Big) \cdot p,$$

άρα

$$P\Big(\bigcap_{i=1}^{m} \{N_{t_i} = n_i\}, \eta = 0\Big) \cdot (1-p) \neq P\Big(\bigcap_{i=1}^{m} \{N_{t_i} = n_i\}, \eta = 1\Big) \cdot p,$$

επομένως

$$P\Big(\bigcap_{i=1}^{m} \{N_{t_i} = n_i\}, \eta = 0\Big) \neq \Big[P\Big(\bigcap_{i=1}^{m} \{N_{t_i} = n_i\}, \eta = 0\Big) + P\Big(\bigcap_{i=1}^{m} \{N_{t_i} = n_i\}, \eta = 1\Big)\Big] \cdot p.$$

Δηλαδή

$$P\Big(\bigcap_{i=1}^{m} \{N_{t_i} = n_i\}, \eta = 0\Big) \neq p \cdot P\Big(\bigcap_{i=1}^{m} \{N_{t_i} = n_i\}\Big). \tag{4.26}$$

Αντίστοιχα προκύπτει ότι

$$P\Big(\bigcap_{i=1}^{m} \{N_{t_i} = n_i\}, \eta = 1\Big) \neq q \cdot P\Big(\bigcap_{i=1}^{m} \{N_{t_i} = n_i\}\Big). \tag{4.27}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (4.26) και (4.27), παίρνουμε

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{m}\{N_{t_i}=n_i\}\right)\neq P\left(\bigcap_{i=1}^{m}\{N_{t_i}=n_i\},\eta=0\right)+P\left(\bigcap_{i=1}^{m}\{N_{t_i}=n_i\},\eta=1\right),$$

κάτι που είναι άτοπο. Επομένως

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{m}\{N_{t_i}=n_i\}\,|\eta=0\right)=P\left(\bigcap_{i=1}^{m}\{N_{t_i}=n_i\}\,|\eta=1\right). \tag{4.28}$$

Αντίστοιχα ας υποθέσουμε ότι

$$P\Big(N_{t_m}=n_m|\eta=0\Big)\neq P\Big(N_{t_m}=n_m|\eta=1\Big),$$

ή ισοδύναμα ότι

$$\frac{P\Big(N_{t_m}=n_m,\eta=0\Big)}{P(\eta=0)}\neq\frac{P\Big(N_{t_m}=n_m,\eta=1\Big)}{P(\eta=1)}.$$

Τότε διαδοχικά έχουμε

$$P(N_{t_m}=n_m,\eta=0)\cdot P(\eta=1)\neq P(N_{t_m}=n_m,\eta=1)\cdot P(\eta=0)$$

ή

$$P(N_{t_m}=n_m,\eta=0)\cdot q\neq P(N_{t_m}=n_m,\eta=1)\cdot p$$

άρα

$$P(N_{t_m}=n_m,\eta=0)\cdot(1-p)\neq P(N_{t_m}=n_m,\eta=1)\cdot p$$

επομένως

$$P(N_{t_m}=n_m,\eta=0)\neq\Big[P(N_{t_m}=n_m,\eta=0)+P(N_{t_m}=n_m,\eta=1)\Big]\cdot p.$$

Άρα

$$P(N_{t_m}=n_m,\eta=0)\neq p\cdot P(N_{t_m}=n_m). \tag{4.29}$$

Αντίστοιχα προκύπτει ότι

$$P(N_{t_m}=n_m,\eta=1)\neq q\cdot P(N_{t_m}=n_m). \tag{4.30}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (4.29) και (4.30), προκύπτει

$$P(N_{t_m}=n_m)\neq P(N_{t_m}=n_m,\eta=0)+P(N_{t_m}=n_m,\eta=1),$$

κάτι που είναι άτοπο. Επομένως,

$$P(N_{t_m} = n_m | \eta = 0) = P(N_{t_m} = n_m | \eta = 1). \tag{4.31}$$

Τελικά από τις (4.28) και (4.31) προκύπτει το ζητούμενο.
*(iv)* Παρατηρούμε ότι τα ενδεχόμενα $\{Z = k, \eta = 1\}$ και $\{Z_1 = k\}$ είναι ίσα, άρα,

$$P\Big(N_{t_i} = n_i | Z = k, \eta = 1\Big) = P\Big(N_{t_i} = n_i | Z_1 = k\Big),$$

για κάθε $i = 1, \dots, m$. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με εκείνη που χρησιμοποιήθηκε στην απόδειξη του *(iii)* έχουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα.

□

Στο παρακάτω θεώρημα έχουμε προσθέσει τις υποθέσεις για το $P$ και την $\Sigma$ σε σχέση με το αντίστοιχο Theorem 5 του Huang [15] αφου αυτό είναι απαραίτητο (βλ. Παρατήρηση 4.1.9).

**Θεώρημα 4.3.2** *Έστω ότι το μέτρο πιθανότητας $P$ είναι τέλειο και η $\Sigma$ είναι αριθμήσιμα παραγόμενη. Επιπλέον, έστω ότι $0 \le q < 1$, ότι η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια διαδικασία Markov που ικανοποιεί την ιδιότητα $E$ και ισχύει η ιδιότητα $(*)$ τότε δοθέντος $\eta = 0$ η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία μεμειγμένη διαδικασία Poisson και $q = 0$ .*

**Απόδειξη.** Δοθέντος $\eta = 0$, αφού η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει την ιδιότητα $E$ έπεται από το Πόρισμα 4.1.8 ότι θα είναι μια $\nu$-MRP. Από το Θεώρημα 4.3.1 *(i)* έπεται ότι αφού η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία διαδικασία Markov θα είναι και υπό συνθήκη Markov δοθέντος $\eta = 0$. Άρα από το Θεώρημα 4.2.2 η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ δοθέντος $\eta = 0$ θα είναι μία MPP($U$).
Έστω ότι $q \neq 0$ τότε $p = P(\eta = 0) = P(\lim_{t\to\infty} N_t = \infty) < 1$ αλλά η MPP είναι μία μη φραγμένη και αύξουσα ακολουθία για την οποία ισχύει ότι $\sup_{t\in\mathbb{R}_+} N_t = \infty, \quad P-\sigma.\beta$ και επομένως πρέπει να ισχύει ότι $p = 1$ και άρα $q = 0$.

□

Έστω $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μία διαδικασία Markov με $q = 1$. Από το Θεώρημα 4.3.1 δοθέντος ότι $Z_1 = k$ η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ εξακολουθεί να είναι μια διαδικασία Markov, επομένως για κάθε k με $P(Z_1 = k) > 0$ μπορούμε να ορίσουμε τις **εντάσεις** ,

$$\lambda_i(t) := \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} P(N_{t+h} - N_t = 1 | N_t = i, Z_1 = k), \quad \forall t > 0, \quad 0 \le i \le k-1.$$

**Θεώρημα 4.3.3** *Έστω ότι $N_t \uparrow K, \quad P-\sigma.\beta$ καθώς $t \to \infty$, όπου $K \in \mathbb{N}$. Αν η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι Markov με εντάσεις $\lambda_i(t), \quad i = 0, 1, ..., K-1$ και επιπλέον έχει και την ιδιότητα $E$ τότε για $n < K$,*

*(i)*

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{T_i \le t_i\} | N_t = n\right) = \frac{n!}{t^n} \int_0^{t_1} \int_{x_1}^{t_2} \cdots \int_{x_{n-1}}^{t_n} dx_n \cdots dx_2 dx_1$$

*(ii)*

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{T_i \le t_i\}, N_t = K\right)$$
$$= \int_0^{t_1}\cdots\int_{x_{K-1}}^{t_K}\left(\prod_{j=0}^{K-1}\lambda_j\left(x_K\right)e^{\int_0^{x_K}\lambda_0(t)}\right)dx_K\cdots dx_1$$

**Θεώρημα 4.3.4** *Έστω $q = 1$. Αν η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι Markov με εντάσεις $\lambda_{ki}(t) > 0$ για κάθε $t > 0$ και $k \ge 1$ με $P(Z_1 = k) > 0$ και $0 \le i \le k-1$. Τότε αν η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει την ιδιότητα $E$ έπεται ότι υπάρχει ένα ακριβώς $k \ge 1$ με $P(Z_1 = k) = 1$.*

**Απόδειξη.** Έστω $p_k := P(Z_1 = k)$ και $n = \min\{k \ge 1 : p_k > 0\}$. Έστω ότι $p_k > 0$ για κάποιο $k \ge n+1$ και ότι η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει την ιδιότητα $E$. Τότε για κάθε $0 < t_1 < t_2$ από το Θεώρημα 4.3.1 έπεται ότι

$$\frac{P(N_{t_1} = N_{t_2} = n, Z_1 > n)}{P(N_{t_2} = n, Z_1 > n)} = \frac{P(N_{t_1} = N_{t_2} = n|Z_1 = n)}{P(N_{t_2} = n|Z_1 = n)}, \tag{4.32}$$

στη περίπτωση όπου και οι δύο παρονομαστές είναι θετικοί.
Το αριστερό μέλος της σχέσης (4.32) μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$\frac{\sum_{k=n+1}^{\infty} p_k P(N_{t_1} = N_{t_2} = n|Z_1 = k)}{\sum_{k=n+1}^{\infty} P(N_{t_2} = n|Z_1 = k)}.$$

Ο αριθμητής του παραπάνω κλάσματος μπορεί να γραφεί στην ακόλουθη μορφή

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{\infty} p_k P(N_{t_1} = N_{t_2} = n|Z_1 = k) &= \sum_{k=n+1}^{\infty} p_k \lim_{t\to\infty} P(N_{t_1} = N_{t_2} = n|N_t = k) \\
&= \sum_{k=n+1}^{\infty} p_k \lim_{t\to\infty} P(T_n \le t_1 < t_2 < T_{n+1}|N_t = k) \\
&= \sum_{k=n+1}^{\infty} p_k \lim_{t\to\infty} P(T_n \le t_1|N_t = k) \\
&= \sum_{k=n+1}^{\infty} p_k \lim_{t\to\infty} P(\bigcap_{i=1}^{n}\{T_i \le t_1\}|N_t = k),
\end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισότητα έπεται από το Λήμμα 2.3.4. Επομένως εφαρμόζοντας το *(i)* του Θεωρήματος 4.3.3 έπεται ότι

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{\infty} p_k P(N_{t_1} = N_{t_2} = n | Z_1 = k) &= \sum_{k=n+1}^{\infty} p_k \lim_{t\to\infty} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{T_i \le t_1\} | N_t = k\right) \\
&= \sum_{k=n+1}^{\infty} p_k \lim_{t\to\infty} \cdot \frac{k!}{t^k} \int_0^{t_1} \cdots \int_{w_{n-1}}^{t_1} dw_n \cdots dw_1 \\
&= \sum_{k=n+1}^{\infty} p_k \lim_{t\to\infty} \frac{k!}{t^k} \int_0^{t_1} \cdots \int_{w_{n-2}}^{t_1} (t_1 - w_{n-1}) dw_{n-1} \cdots dw_1 \\
&= \sum_{k=n+1}^{\infty} p_k \lim_{t\to\infty} \frac{k!}{t^k} \int_0^{t_1} \cdots \int_{w_{n-3}}^{t_1} (\frac{t_1^2}{2} - t_1 w_{n-2} \\
&\quad + \frac{w_{n-2}^2}{2}) dw_{n-2} \cdots dw_1 = \cdots = \sum_{k=n+1}^{\infty} p_k \lim_{t\to\infty} \frac{k!}{t^k} \frac{t_1^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Αντίστοιχα για τον παρονομαστή του κλάσματος εφαρμόζοντας το *(i)* του Θεωρήματος 4.3.3 έπεται ότι

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{\infty} p_k P(N_{t_2} = n | Z_1 = k) &= \sum_{k=n+1}^{\infty} p_k \lim_{t\to\infty} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{T_i \le t_2\} | N_t = k\right) \\
&= \sum_{k=n+1}^{\infty} p_k \lim_{t\to\infty} \cdot \frac{k!}{t^k} \int_0^{t_2} \cdots \int_{w_{n-1}}^{t_2} dw_n \cdots dw_1 \\
&= \sum_{k=n+1}^{\infty} p_k \lim_{t\to\infty} \frac{k!}{t^k} \int_0^{t_2} \cdots \int_{w_{n-2}}^{t_2} (t_2 - w_{n-1}) dw_{n-1} \cdots dw_1 \\
&= \sum_{k=n+1}^{\infty} p_k \lim_{t\to\infty} \frac{k!}{t^k} \int_0^{t_2} \cdots \int_{w_{n-3}}^{t_2} (\frac{t_2^2}{2} - t_2 w_{n-2} \\
&\quad + \frac{w_{n-2}^2}{2}) dw_{n-2} \cdots dw_1 = \cdots = \sum_{k=n+1}^{\infty} p_k \lim_{t\to\infty} \frac{k!}{t^k} \frac{t_2^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{k=n+1}^{\infty} p_k P(N_{t_1} = N_{t_2} = n | Z_1 = k)}{\sum_{k=n+1}^{\infty} P(N_{t_2} = n | Z_1 = k)} &= \frac{\sum_{k=n+1}^{\infty} p_k \lim_{t\to\infty} \frac{k!}{t^k} \frac{t_1^n}{n!}}{\sum_{k=n+1}^{\infty} p_k \lim_{t\to\infty} \frac{k!}{t^k} \frac{t_2^n}{n!}} \\
&= \frac{\frac{t_1^n}{n!} \lim_{t\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} p_k \frac{k!}{t^k}}{\frac{t_2^n}{n!} \lim_{t\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} p_k \frac{k!}{t^k}} \\
&= (\frac{t_1}{t_2})^n.
\end{aligned}$$

Αντίστοιχα το δεξί μέλος της μέλος της σχέσης (4.32) μπορεί να γραφεί ως

$$\frac{P(N_{t_1}=N_{t_2}=n, Z_1=n)}{P(N_{t_2}=n, Z_1=n)},$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{\lim_{t\to\infty} P(\bigcap_{i=1}^n \{T_i \le t_1\}, N_t=n)}{\lim_{t\to\infty} P(\bigcap_{i=1}^n \{T_i \le t_2\}, N_t=n)},$$

επομένως εφαρμόζοντας το *(ii)* του Θεωρήματος 4.3.3 έπεται ότι

$$\frac{P(N_{t_1}=N_{t_2}=n, Z_1=n)}{P(N_{t_2}=n, Z_1=n)} = \frac{\lim_{t\to\infty}\int_0^{t_1}\cdots\int_{w_{K-1}}^{t_1}\left(\prod_{j=0}^{K-1}\lambda_j\left(w_K\right)e^{\int_0^{w_K}\lambda_0(t)}\right)dw_K\cdots dw_1}{\lim_{t\to\infty}\int_0^{t_2}\cdots\int_{w_{K-1}}^{t_2}\left(\prod_{j=0}^{K-1}\lambda_j\left(w_K\right)e^{\int_0^{w_K}\lambda_0(t)}\right)dw_K\cdots dw_1}.$$

Είναι όμως προφανές ότι το παραπάνω κλάσμα δεν μπορεί να είναι ίσο με $(\frac{t_1}{t_2})^n$, άρα

$$\frac{P(N_{t_1}=N_{t_2}=n, Z_1>n)}{P(N_{t_2}=n, Z_1>n)} \neq \frac{P(N_{t_1}=N_{t_2}=n|Z_1=n)}{P(N_{t_2}=n|Z_1=n)},$$

κάτι το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεση μας, άρα $p_k=0$ για κάθε $k\ge n+1$. Επομένως, $p_k>0$ μόνο για $k=n$, δηλαδή $P(Z_1=n)$ ή ισοδύναμα υπάρχει ακριβώς ένα $k\in\mathbb{N}$ ώστε $P(Z_1=k)=1$.

□

## 4.4 MRPs και ιδιότητα $E^*$

Στα παρακάτω θεωρήματα έχουμε προσθέσει τις υποθέσεις για το $P$ και την $\Sigma$ σε σχέση με τα αντίστοιχα Lemma 4 και Theorem 5 του Huang [15] αφου αυτό είναι απαραίτητο (βλ. Παρατήρηση 4.1.9).

**Λήμμα 4.4.1** *Έστω ότι το μέτρο πιθανότητας $P$ είναι τέλειο και η $\Sigma$ είναι αριθμήσιμα παραγόμενη και η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει την ιδιότητα $E^*$. Τότε $q=0$ και άρα η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ν-MRP.*

**Απόδειξη.** Έστω ότι $P(Z_1=k)>0$ για κάποιο $k\ge 1$. Από την υπόθεση έχουμε ότι η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει την ιδιότητα $E^*$ επομένως για κάθε $w_1, w_{k+1}>0$ ισχύει

$$\begin{aligned} P(W_1\le w_1, N_t=k) &= P(T_k\le t<T_{k+1}, W_1\le w_1, N_t=k) \\ &= P(0\le t-\sum_{i=1}^k W_i < w_{k+1}, W_1\le w_1, N_t=k). \end{aligned}$$

Επομένως

$$P(W_1 \le w_1, N_t = k) = P\left(0 \le t - \sum_{i=1}^{k} W_i \le w_1, N_t = k\right) \tag{4.33}$$

όπου το $w_1$ είναι αρκετά μεγάλο και τέτοιο ώστε $P(W_1 \le w_1, Z_1 = k) > 0$. Παίρνοντας το όριο για $t \to \infty$ και στα δύο μέλη της σχέσης (4.33) και κάνοντας χρήση του Λήμματος 4.1.6 προκύπτει ότι

$$\lim_{t\to\infty} P(W_1 \le w_1, N_t = k) = \lim_{t\to\infty} P\left(0 \le t - \sum_{i=1}^{k} W_i \le w_1, N_t = k\right)$$

$$\Rightarrow \quad P(W_1 \le w_1, \lim_{t\to\infty} N_t = k) = P\left(0 \le t - \sum_{i=1}^{k} W_i \le w_1, \lim_{t\to\infty} N_t = k\right).$$

Από το αριστερό μέλος της παραπάνω σχέσης έπεται ότι

$$\begin{aligned} P(W_1 \le w_1, \lim_{t\to\infty} N_t = k) &= P(W_1 \le w_1, Z_1 = k) \\ &= P(W_1 \le w_1, Z = k, \eta = 1) \\ &= P(W_1 \le w_1, Z = k | \eta = 1) P(\eta = 1) \\ &= P(W_1 \le w_1, Z_1 = k) P(\eta = 1). \end{aligned}$$

Άρα

$$\lim_{t\to\infty} P(W_1 \le w_1, N_t = k) = qP(W_1 \le w_1, Z_1 = k).$$

Αντίθετα το όριο του δεξιού μέλους της (4.33) για $t \to \infty$ είναι το μηδέν, κάτι που μας οδηγεί σε άτοπο. Επομένως $P(Z_1 = k) = 0$ και άρα $q = 0$. Επιπλέον αφού $q = 0$ από το Λήμμα 4.1.7 και το Πόρισμα 4.1.8 έπεται ότι η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία μεμειγμένη ανανεωτική διαδικασία. $\square$

**Θεώρημα 4.4.2** *Έστω ότι το μέτρο πιθανότητας $P$ είναι τέλειο και η $\Sigma$ είναι αριθμήσιμα παραγόμενη. Αν η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει την ιδιότητα $E^*$ και ικανοποιεί και την συνθήκη $(*)$ τότε είναι μία μεμειγμένη διαδικασία Poisson.*

**Απόδειξη.** Από το προηγούμενο λήμμα έπεται ότι η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ θα είναι μία $\nu$-MRP. Θεωρούμε επίσης ότι η συνάρτηση κατανομής των ενδιάμεσων χρόνων
$F(\cdot) \in \left\{F_{\tilde{y}} : F_{\tilde{y}}(0) = 0, \tilde{y} \in \widetilde{\Upsilon}\right\}$. Από την συνθήκη $(*)$ έπεται ότι $P(N_t = 3) > 0$.

Πράγματι,

$$\begin{aligned}
P(N_t = 3) &= \int P_{\tilde{y}}(N_t = 3)\nu(d\tilde{y}) \\
&= \int P_{\tilde{y}}(T_3 \le t < T_4)\nu(d\tilde{y}) \\
&= \int P_{\tilde{y}}(T_3 \le t) - P_{\tilde{y}}(T_4 \le t)\nu(d\tilde{y}) \\
&= \int P_{\tilde{y}}\Big(\sum_{i=1}^{3} W_i \le t\Big) - P_{\tilde{y}}\Big(\sum_{i=1}^{4} W_i \le t\Big)\nu(d\tilde{y}) \\
&= \mathbb{E}_\nu[F_{\tilde{y}}^{3*}(t) - F_{\tilde{y}}^{4*}(t)] \\
&= \mathbb{E}_\nu\Big[\int_0^t F_{\tilde{y}}^{2*}(t-x)F_{\tilde{y}}(dx) - \int_0^t F_{\tilde{y}}^{3*}(t-x)F_{\tilde{y}}(dx)\Big] \\
&= \mathbb{E}_\nu\Big[\int_0^t \big(F_{\tilde{y}}^{2*}(t-x) - F_{\tilde{y}}^{3*}(t-x)\big)F_{\tilde{y}}(dx)\Big] \\
&= \mathbb{E}_\nu\Big[\int_0^t \big(\int_0^{t-x} F_{\tilde{y}}^{*}(t-x-z)F_{\tilde{y}}(dz) - \int_0^{t-x} F_{\tilde{y}}^{2*}(t-x-z)F_{\tilde{y}}(dz)\big)F_{\tilde{y}}(dx)\Big] \\
&= \mathbb{E}_\nu\Big[\int_0^t \int_0^{t-x} \big(F_{\tilde{y}}^{*}(t-x-z) - F_{\tilde{y}}^{2*}(t-x-z)\big)F_{\tilde{y}}(dz)F_{\tilde{y}}(dx)\Big] \\
&= \mathbb{E}_\nu\Big[\int_0^t \int_0^{t-x} \big(\int_0^{t-x-z} F_{\tilde{y}}(dz) \\
&\quad - \int_0^{t-x-z} F_{\tilde{y}}(t-x-y-w)F_{\tilde{y}}(dw)\big)F_{\tilde{y}}(dz)F_{\tilde{y}}(dx)\Big]
\end{aligned}$$

Άρα

$$P(N_t = 3) = \mathbb{E}_\nu\Big[\int_0^t \int_0^{t-x} \int_0^{t-x-z} \big(1 - F_{\tilde{y}}(t-x-z-w)\big)F_{\tilde{y}}(dw)F_{\tilde{y}}(dz)F_{\tilde{y}}(dx)\Big],$$

απ'οπου παρατηρούμε ότι $P(N_t = 3) > 0$ , για κάποια $t > 0$.
Για κάθε $0 < x + w + z < t$ από την ιδιότητα $E^*$ έπεται ότι

$$P\Big(W_1 \le x, W_2 \le w, W_3 \le z, N_t = 3\Big) = P\Big(W_1 \le x, W_2 \le w, t - \sum_{i=1}^{3} W_i \le z, N_t = 3\Big)$$

ή ισοδύναμα σύμφωνα με τα παραπάνω

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\nu\Big[\int_0^x\int_0^w\int_0^z G_{\tilde{y}}(t-W_1-W_2-W_3)G_{\tilde{y}}(dW_3)G_{\tilde{y}}(dW_2)G_{\tilde{y}}(dW_1)\Big]\\
=\;&\mathbb{E}_\nu\Big[\int_0^x\int_0^w\int_{t-W_1-W_2-z}^{t-W_1-W_2} G_{\tilde{y}}(t-W_1-W_2-W_3)G_{\tilde{y}}(dW_3)G_{\tilde{y}}(dW_2)G_{\tilde{y}}(dW_1)\Big].
\end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης πρώτα ως προς $x$, λόγω του Θεωρήματος Κυριαρχημένης Σύγκλισης προκύπτει

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\nu\Big[\int_0^w\int_0^z G_{\tilde{y}}(t-x-W_2-W_3)G_{\tilde{y}}(dW_3)G'_{\tilde{y}}(x)G_{\tilde{y}}(dW_3)G_{\tilde{y}}(dW_2)\Big]\\
&\quad=\mathbb{E}_\nu\Big[\int_0^w\int_{t-W_1-W_2-z}^{t-W_1-W_2} G_{\tilde{y}}(t-x-W_2-W_3)G'_{\tilde{y}}(x)G_{\tilde{y}}(dW_3)G_{\tilde{y}}(dW_2)\Big].
\end{aligned}$$

Επιπλέον παραγωγίζοντας ως προς $w$, λόγω του Θεωρήματος Κυριαρχημένης Σύγκλισης έχουμε

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\nu\Big[\int_0^z G_{\tilde{y}}(t-x-w-W_3)G'_{\tilde{y}}(x)G'_{\tilde{y}}(w)G_{\tilde{y}}(dW_3)\Big]\\
&\quad=\mathbb{E}_\nu\Big[\int_{t-W_1-W_2-z}^{t-W_1-W_2} G_{\tilde{y}}(t-x-\omega-W_3)G'_{\tilde{y}}(x)G'_{\tilde{y}}(\omega)G_{\tilde{y}}(dW_3)\Big].
\end{aligned}$$

Τέλος παραγωγίζοντας ως προς $z$ και θέτοντας όπου $t-x-w-z$ το $v$, λόγω του Θεωρήματος Κυριαρχημένης Σύγκλισης, προκύπτει

$$\mathbb{E}_\nu[G_{\tilde{y}}(v)G'_{\tilde{y}}(x)G'_{\tilde{y}}(w)G'_{\tilde{y}}(z)]=\mathbb{E}_\nu[G'_{\tilde{y}}(v)G'_{\tilde{y}}(x)G'_{\tilde{y}}(w)G_{\tilde{y}}(z)]. \tag{4.34}$$

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της σχέση (4.34) ως προς $x$ από 0 εως $u$ προκύπτει

$$\int_0^u \mathbb{E}_\nu[G_{\tilde{y}}(v)G'_{\tilde{y}}(x)G'_{\tilde{y}}(w)G'_{\tilde{y}}(z)]dx \;=\; \int_0^u \mathbb{E}_\nu[G'_{\tilde{y}}(v)G'_{\tilde{y}}(x)G'_{\tilde{y}}(w)G'_{\tilde{y}}(z)]$$

δηλαδή

$$\mathbb{E}_\nu\Big[\int_0^u G_{\tilde{y}}(v)G'_{\tilde{y}}(x)G'_{\tilde{y}}(w)G'_{\tilde{y}}(z)dx\Big]=\mathbb{E}_\nu\Big[\int_0^u G'_{\tilde{y}}(v)G'_{\tilde{y}}(x)G'_{\tilde{y}}(w)G'_{\tilde{y}}(z)dx\Big].$$

Άρα

$$\mathbb{E}_\nu\big[G_{\tilde{y}}(v)G_{\tilde{y}}(u)G'_{\tilde{y}}(w)G'_{\tilde{y}}(z)\big]=\mathbb{E}_\nu\big[G'_{\tilde{y}}(v)G_{\tilde{y}}(u)G'_{\tilde{y}}(w)G'_{\tilde{y}}(z)\big]. \tag{4.35}$$

Αντικαθιστώντας αρχικά $u=v, w=z=0$ στην (4.35) παίρνουμε

$$\mathbb{E}_\nu\big[G^2_{\tilde{y}}(v)\big(G'_{\tilde{y}}(0)\big)^2\big]=\mathbb{E}_\nu\big[G'_{\tilde{y}}(v)G_{\tilde{y}}(v)G'_{\tilde{y}}(0)\big]. \tag{4.36}$$

Αν επιπλέον αντικαταστήσουμε πάλι στην (4.35) $w = v, u = z = 0$ παίρνουμε

$$\mathbb{E}_\nu\big[G_{\tilde{y}}(v)G'_{\tilde{y}}(v)G'_{\tilde{y}}(0)\big] = \mathbb{E}_\nu\big[\big(G'_{\tilde{y}}(v)\big)^2\big]. \tag{4.37}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (4.36)και (4.37) προκύπτει

$$\mathbb{E}_\nu\big[G^2_{\tilde{y}}(v)\big(G'_{\tilde{y}}(0)\big)^2\big] + \mathbb{E}_\nu\big[\big(G'_{\tilde{y}}(v)\big)^2\big] = 2\mathbb{E}_\nu\big[G_{\tilde{y}}(v)G'_{\tilde{y}}(v)G'_{\tilde{y}}(0)\big]$$

και άρα

$$\mathbb{E}_\nu\big[G'_{\tilde{y}}(v) - G'_{\tilde{y}}(0)G_{\tilde{y}}(v)\big]^2 = 0,$$

ή ισοδύναμα αφού $\big[G'_{\tilde{y}}(v) - G'_{\tilde{y}}(0)G_{\tilde{y}}(v)\big]^2 > 0$ για κάθε $v > 0$

$$G'_{\tilde{y}}(v) = G'_{\tilde{y}}(0)G_{\tilde{y}}(v),$$

για κάθε $v > 0$ και για σχεδόν όλα τα $\tilde{y} \in \widetilde{\Upsilon}$,οπότε

$$G_{\tilde{y}}(v) = e^{G'_{\tilde{y}}(0)v},$$

για κάθε $v > 0$ και για σχεδόν όλα τα $\tilde{y} \in \widetilde{\Upsilon}$. Άρα η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία μεμειγμένη διαδικασία Poisson.

□

# Κεφάλαιο 5

# Ένας επιπλέον ορισμός για τις Μεμειγμένες Ανανεωτικές Διαδικασίες

*Για το παρών κεφάλαιο η τριάδα $(\Omega, \Sigma, P)$ είναι ένας χώρος πιθανότητας, ενώ τα ζεύγη $(\Upsilon, T)$ και $(\Xi, Z)$ είναι μετρήσιμοι χώροι.*
Τα αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου περιέχονται στην εργασία [26] σε πιο γενική μορφή.

## 5.1 Χαρακτηρισμός MRPs μέσω disintegrations

Αρχικά παραθέτουμε του ορισμούς διάφορων ειδών disintegration χρήσιμων για τον χαρακτηρισμό των MRPs μέσω αυτών που δίνεται στο παρών εδάφιο.

**Ορισμός 5.1.1** Ένας $T$-$\Sigma$-**πυρήνας Markov** είναι μία συνάρτηση $k$ από τον $T \times \Omega$ στον $\mathbb{R}$ που ικανοποιεί τις συνθήκες:

**(k1)** Η συνολοσυνάρτηση $k(\cdot, \omega)$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας στον $T$ για κάθε σταθερό $\omega \in \Omega$.

**(k2)** Η συνάρτηση $\omega \longmapsto k(B, \omega)$ είναι $\Sigma$-μετρήσιμη για κάθε σταθερό $B \in T$.

Παρατηρούμε ότι το μέτρο $P$ δεν εμπλέκεται στον παραπάνω ορισμό, άρα ένας $T$-$\Sigma$-πυρήνας Markov ορίζεται για κάθε δύο μετρήσιμους χώρους $(\Omega, \Sigma)$ και $(\Upsilon, T)$.
Θεωρούμε μία $\Sigma$-$T$-μετρήσιμη απεικόνιση από τον $\Omega$ στον $\Upsilon$ και μία $\sigma$-υποάλγεβρα $\mathcal{F}$ της $\Sigma$.

**Ορισμοί 5.1.2** **(a)** Μία **υπό συνθήκη κατανομή της $X$ επάνω στη $\sigma$-υποάλγεβρα $\mathcal{F}$ της** $\Sigma$ είναι ένας $T$-$\mathcal{F}$-πυρήνας Markov $k$ που ικανοποιεί για κάθε $B \in T$ την ακόλουθη σχέση,

$$k(B, \cdot) = P(X^{-1}(B)|\mathcal{F})(\cdot), \quad P|\mathcal{F} - \sigma.\beta.$$

Συμβολισμός $k := P_{X|\mathcal{F}}$.
**(b)** Έστω $\Theta$ μία $\Sigma$-$Z$-μετρήσιμη συνάρτηση από τον $\Omega$ στον $\Xi$. Αν $\mathcal{F} = \sigma(\Theta)$, η συνάρτηση $P_{X|\Theta} = P_{X|\sigma(\Theta)}$ καλείται **υπό συνθήκη κατανομή της $X$ δοθείσης της $\Theta$**.

**Παρατήρηση 5.1.3** Για κάθε $T$-$Z$-πυρήνα Markov $k$ η απεικόνιση $K(\Theta)$ από τον $T\times\Omega$ στον $\mathbb{R}$ η οποία ορίζεται ως,

$$K(\Theta)(B,\omega) := (k(B,\cdot)\circ\Theta)(\omega),$$

για κάθε $B \in T$ και $\omega \in \Omega$, είναι ένας $T$-$\sigma(\Theta)$-πυρήνας Markov.

**Ορισμοί 5.1.4** **(a)** Έστω $Q$ ένα μέτρο στην $T$. Μία οικογένεια $\{P_y\}_{y\in\Upsilon}$ μέτρων πιθανότητας στην $\Sigma$ ονομάζεται **disintegration** του $P$ επάνω στο $Q$ εαν:

**(d1)** Για κάθε $D \in \Sigma$ η απεικόνιση $y \longmapsto P_y(D)$ είναι $T$-μετρήσιμη.

**(d2)** $\int P_y(D)\,Q(dy) = P(D), \quad \forall D \in \Sigma.$

Εάν $f : X \longmapsto \Upsilon$ είναι μία απεικόνιση, ώστε $P\circ f^{-1} := P_f = Q$ δηλαδη, $P_f(B) = P(f^{-1}(B)) = Q(B)$ για κάθε $B \in T$ (inverse-measure-preserving function), μία **disintegration** $\{P_y\}_{y\in\Upsilon}$ του $P$ επάνω στο $Q$ ονομάζεται **συνεπής** με την $f$ εαν για κάθε $B \in T$ η ισότητα $P_y(f^{-1}(B)) = 1$ ισχύει για $Q$ σχεδόν όλα τα $y \in B$.
**(b)**Έστω $M$ ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στην $\sigma$-άλγεβρα $\Sigma\otimes T$ έτσι ώστε τα μέτρα $P$ και $Q$ να είναι τα περιθώρια του (δηλαδή $M\circ\pi_1^{-1} = P$ και $M\circ\pi_2^{-1} = Q$ όπου $\pi_1$ και $\pi_2$ οι κανονικές προβολές). Υποθέτουμε επιπλεόν ότι για κάθε $y \in \Upsilon$, υπάρχει ένα μέτρο πιθανότητας $P_y$ στην $\Sigma$ το οποίο ικανοποιεί τις ιδιότητες:

**(D1)** Για κάθε $A \in \Sigma$ η απεικόνιση $y \longmapsto P_y(A)$ είναι $T$-μετρήσιμη.

**(D2)** $M(A\times B) = \int_B P_y(A)\,Q(dy)\,, \quad \forall A\times B \in \Sigma\times T.$

Τότε η $\{P_y\}_{y\in\Upsilon}$ ονομάζεται **κανονική δεσμευμένη πιθανότητα-γινόμενο** (product regular conditional probability)(κ.δ.π-γινόμενο για συντομία) επάνω στην $\Sigma$ για το $M$ ως προς το $Q$.
**(c)** Έστω $\mathcal{F}$ μία $\sigma$-υποάλγεβρα της $\Sigma$ και $R := P|\mathcal{F}$ ο περιορισμός του μέτρου $P$ στην $\mathcal{F}$. Μία **κανονική δεσμευμένη πιθανότητα** ( regural conditional probability)(κ.δ.π. για συντομία) του $P$ επάνω στο $R$ είναι μία οικογένεια $\{P_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ μέτρων πιθανότητας στην $\Sigma$ που ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

**(sf1)** Για κάθε $E \in \Sigma$ η απεικόνιση $\omega \longmapsto P_\omega(E)$ είναι $\mathcal{F}$-μετρήσιμη.

**(sf2)** $\int_F P_\omega(E)\,R(d\omega) = P(E\cap F)$ για κάθε $F \in \mathcal{F}$ και $E \in \Sigma$.

**Παρατήρηση 5.1.5** Εάν η $\sigma$-άλγεβρα $\Sigma$ είναι αριθμήσιμα παραγόμενη και το $P$ είναι τέλειο υπάρχουν πάντα μία disintegration του $P$ επάνω στο $Q$ συνεπής με κάθε απεικόνιση $f$ από το $\Omega$ στο $\Upsilon$ ώστε $P_f = Q$, μία κ.δ.π-γινόμενο και μία κ.δ.π. (βλέπε [12] Θεώρημα 6).

Η παρακάτω πρόταση συνδέει τις disintegrations με τις κανονικές δεσμευμένες πιθανότητες.

**Πρόταση 5.1.6** *Αν $\{P_y\}_{y\in\Upsilon}$ είναι μια disintegration του $P$ επάνω στο $Q$ και $f$ είναι μία απεικόνιση από το $\Omega$ στο $\Upsilon$ ώστε $P_f = Q$ τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

*(i)* *Η $\{P_y\}_{y\in\Upsilon}$ είναι συνεπής με την $f$.*

*(ii)* $P(A \cap f^{-1}(B)) = \int_B P_y(A)Q(dy)$, *για κάθε* $A \in \Sigma$ *και* $B \in T$.

*(iii)* *Για κάθε* $A \in \Sigma \quad \mathbb{E}_P[\chi_A|\sigma(f)] = P_{\cdot}(A) \circ f \quad P|\sigma(f) - \sigma.\beta.$

**Απόδειξη.** *(i)$\Longrightarrow$(ii)* Το συμπέρασμα προκύπτει άμεσα από το **(d2)** του ορισμού των disintegrations και από το γεγονός ότι η $\{P_y\}_{y\in\Upsilon}$ είναι συνεπής με την $f$.
*(ii)$\Longrightarrow$(i)* Έστω ότι ισχύει η *(ii)*, τότε για $A = f^{-1}(B)$, όπου $B \in T$ έπεται ότι

$$P(f^{-1}(B)) = \int_B P_y(f^{-1}(B))Q(dy),$$

ισοδύναμα

$$\int \chi_B(y)[1 - P_y(f^{-1}(B))]Q(dy) = 0$$

άρα

$$P_y(f^{-1}(B)) = 1 \quad \text{για} \quad Q-\text{σχεδόν όλα τα} \quad y \in B,$$

αφού $\chi_B(y)[1 - P_y(f^{-1}(B))] \geq 0$ για κάθε $y \in \Upsilon$ και $B \in T$, άρα η *(i)* έπεται.
*(ii)$\Longleftrightarrow$(iii)* Η ισοδυναμία είναι προφανής.

$\square$

*Από δω και κάτω η $\Theta$ είναι μία $\Sigma$-$Z$-μετρήσιμη απεικόνιση από το $\Omega$ στο $\Xi$, και θα γράφουμε "δεσμευμένη" αντί "δεσμευμένη δοθείσης της $\Theta$" όταν η δέσμευση αναφέρεται ως προς $\Theta$. Για το υπόλοιπο αυτού του κεφαλαίου η $\{P_\theta\}_{\theta\in\Xi}$ είναι μία disintegration συνεπής με την $\Theta$ εκτός και αν αναφέρεται διαφορετικά.*
Η σημειακή διαδικασία $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία $P$-**ανανεωτική** $\sigma$.**δ.** με τους ενδιάμεσους χρόνους να ακολουθούν την κατανομή $\mathbf{K}(\theta_0)$, όπου $\theta_0 \in \Xi$ παράμετρος, αν η ακολουθία $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ανεξάρτητη και $\mathbf{K}(\theta_0)$-ισόνομη για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπό το μέτρο $P$. Ο ακόλουθος ορίσμός της μεμειγμένης ανανεωτικής στοχαστικής διαδικασίας είναι στο πνεύμα του Ορισμού της μεμειγμένης διαδικασίας Poisson με παράμετρο $\Theta$ (βλέπε [32] Παράγραφος 4.2 σελ. 87).
Ο παρακάτω ορισμός για τις μεμειγμένες ανανεωτικές διαδικασίες γενικεύει έναν αντίστοιχο ορισμό για τις μεμειγμένες διαδικασίες Poisson που υπάρχει στη βιβλιογρφία (βλ. π.χ [32] Chapter 4). Φαίνεται πιό κατάλληλος για την Θεωρία Κινδύνου, αφού περιλαμβάνει την δομική παράμετρο $\Theta$, που στην Θεωρία Κινδύνου παριστάνει την δομή των μή ομογενών χαρτοφυλακίων κινδύνου.

**Ορισμός 5.1.7** Μία σημειακή διαδικασία $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ονομάζεται **μεμειγμένη ανανεωτική διαδικασία** (για συντομία MRP) στον $(\Omega, \Sigma, P)$ με παράμετρο την απεικόνιση $\Theta$ και υπό συνθήκη κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων $\mathbf{K}(\Theta)$ (συμβ. $(P, \mathbf{K}(\Theta))$-MRP), εάν η $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι $P$-υπό συνθήκη ανεξάρτητη και

$$P_{W_n|\Theta} = \mathbf{K}(\Theta) \quad P|\sigma(\Theta) - \sigma.\beta,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

**Λήμμα 5.1.8** *Εάν $\{k_i\}_{i\in I}$ είναι μία οικογένεια $T$-$Z$-πυρήνων Markov, τότε για κάθε $i \in I$ και για κάθε σταθερό $B \in T$ τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

*(i)* $P_{X_i|\Theta}(B, \cdot) = K_i(\Theta)(B, \cdot), \quad P|\sigma(\Theta)\sigma.\beta.$

*(ii)* $P_\theta(X^{-1}(B)) = k_i(B, \theta)$, *για $P_\Theta$-σχεδόν όλα τα $\theta \in \Xi$.*

Για την απόδειξη βλέπε [26] Lemma 2.7.

**Λήμμα 5.1.9** *Η οικογένεια $\{X_i\}_{i\in I}$ είναι $P$-υπό συνθήκη ανεξάρτητη αν και μόνο αν είναι $P_\theta$-ανεξάρτητη για $P_\Theta$ σχεδόν όλα τα $\theta \in \Xi$.*

**Απόδειξη.** Έστω ότι η οικογένεια $\{X_i\}_{i\in I}$ είναι $P$-υπό συνθήκη ανεξάρτητη. Ισοδύναμα έχουμε ότι

$$\int_{\Theta^{-1}(D)} P\Big(\bigcap_{j=1}^{m}\{X_{i_j} \in B_j|\Theta\Big)dP = \int_{\Theta^{-1}(D)} \prod_{j=1}^{m} P\Big(\{X_{i_j} \in B_j\}|\Theta\Big)dP,$$

για $m \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_m \in I$ με $i_k \neq i_j$ για $k \neq j$ και $B_j \in T$ για κάθε $j \leq m$ και $D \in Z$. Αλλά από το *(iii)* της Πρότασης 5.1.6 ισοδύναμα προκύπτει ότι

$$\int_{\Theta^{-1}(D)} P_{\cdot}\Big(\bigcap_{j=1}^{m}\{X_{i_j} \in B_j\Big) \circ \Theta dP = \int_{\Theta^{-1}(D)} \prod_{j=1}^{m}\Big[P_{\cdot}\Big(\{X_{i_j} \in B_j\}\Big) \circ \Theta\Big]dP,$$

ή ισοδύναμα

$$\int_D P_\theta\Big(\bigcap_{j=1}^{m}\{X_{i_j} \in B_j\}\Big)P_\Theta(d\theta) = \int_D \prod_{j=1}^{m} P_\theta\Big(\{X_{i_j} \in B_j\}\Big)P_\Theta(d\theta).$$

Ισοδύναμα από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι για $P_\Theta$-σχεδόν όλα τα $\theta \in \Xi$ η οικογένεια $\{X_i\}_{i\in I}$ είναι $P_\theta$-ανεξάρτητη.

□

**Πόρισμα 5.1.10** *Έστω $\mathcal{F}$ μία $\sigma$-υποάλγεβρα της $\Sigma$ και μία κ.δ.π $\{P_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ για το μέτρο $P$ επάνω στο $R := P|\mathcal{F}$. Τότε η οικογένεια $\{X_i\}_{i\in I}$ είναι $P$-υπό συνθήκη ανεξάρτητη επάνω στην $\mathcal{F}$ αν και μόνο αν είναι $P_\omega$-ανεξάρτητη για $R$-σχεδόν όλα τα $\omega \in \Omega$.*

Για την απόδειξη βλέπε [26] Corollary 2.10.

Το παρακάτω αποτέλεσμα ανάγει την υπο συνθήκη ανεξαρτησία και ισονομία μίας σ.δ. ως προς ένα μέτρο $P$ σε κανονική ανεξαρτησία και ισονομία ως προς σχεδόν όλα τα μέτρα $P_\theta$ μίας disintegration $\{P_\theta\}_{\theta\in\Xi}$. Το εν λόγω αποτέλεσμα είναι η βάση για την απόδειξη της Πρότασης 5.1.13, δηλαδή του κύριου αποτελέσματος της ενότητας 5.1.

**Πρόταση 5.1.11** *Η οικογένεια $\{X_i\}_{i\in I}$ είναι $P$-υπό συνθήκη ανεξάρτητη και ισόνομη αν και μόνο αν είναι $P_\theta$-ανεξάρτητη και ισόνομη για $P_\Theta$ σχεδόν όλα τα $\theta \in \Xi$.*

Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια των Λημμάτων 5.1.8 και 5.1.9.

**Πόρισμα 5.1.12** *Αν $\mathcal{F}$, $\{P_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ και $R$ είναι όπως στο Πόρισμα 5.1.10, τότε η οικογένεια $\{X_i\}_{i\in I}$ είναι $P$-υπό συνθήκη ανεξάρτητη και ισόνομη αν και μόνο αν είναι $P_\omega$-ανεξάρτητη και ισόνομη για $R$ σχεδόν όλα τα $\omega \in \Omega$.*

Για την απόδειξη βλέπε [26] Corollary 2.12.

Από την Πρόταση 5.1.11 προκύπτει και το κύριο αποτέλεσμα αυτής της ενότητας με τη μορφή μίας πρότασης το οποίο είναι ένας χαρακτηρισμός των μεμειγμένων ανανεωτικών διαδικασιών μέσω disintegration

**Πρόταση 5.1.13** *Η σημειακή διαδικασία $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία $(P,\mathbf{K}(\Theta))$-MRP αν και μόνο αν είναι μία $(P_\theta,\mathbf{K}(\theta))$-RP για $P_\Theta$-σχεδόν όλα τα $\theta \in \Xi$.*

**Απόδειξη.** Αφού από την υπόθεση μας η σημειακή διαδικασία $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία $(P,\mathbf{K}(\Theta))$-MRP έπεται ότι η σ.δ. των ενδιάμεσων χρόνων $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ θα είναι $P$-υπό συνθήκη ανεξάρτητη και θα ικανοποιεί την συνθήκη $P_{W_n|\Theta} = \mathbf{K}(\Theta)$,
$P|\sigma(\Theta)-$σ.β. Άλλά από την Πρόταση 5.1.11 ισοδύναμα έχουμε ότι για $P_\Theta$-σχεδόν όλα τα $\theta \in \Xi$ η $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι $P_\theta$-ανεξάρτητη και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ικανοιποεί τη συνθήκη $(P_\theta)_{W_n} = \mathbf{K}(\theta)$ ισοδύναμα δηλαδή η σημειακή διαδικασία $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ $(P_\theta,\mathbf{K}(\theta))$-RP για $P_\Theta$-σχεδόν όλα τα $\theta \in \Xi$.

□

**Πόρισμα 5.1.14** *Έστω Αν $\mathcal{F}$, $\{P_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ και $R$ είναι όπως στο Πόρισμα 5.1.10. Τότε η $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι $P$-υπό συνθήκη ανεξάρτητη και ισόνομη επάνω στην $\mathcal{F}$ με δεσμευμένη κατανομή πιθανότητας $\mathbf{K}(id_\Omega) = P_{W_n|\mathcal{F}}$ $P|\mathcal{F}$-σ.β. για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αν και μόνο αν η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία $(P_\omega,\mathbf{K}(\Omega))$-RP για $R$-σχεδόν όλα τα $\omega \in \Omega$ αν και μόνο αν είναι μία $(P,\mathbf{K}(id_\Omega))$-MRP.*

## 5.2 Ανταλλαξιμότητα και κ.δ.π.

Μεταξύ των υπό συνθήκη ανεξάρτητων τ.μ. είναι φυσικό να δώσουμε ιδιαίτερη προσοχή σε εκείνες που είναι υπό συνθήκες ισόνομες. Προκύπτει ότι αυτές έχουν έναν ιδιαίτερα ενδιαφέροντα χαρακτηρισμό ως οι "ανταλλάξιμες" οικογένειες τ.μ. (Θεώρημα 5.2.2). Το κύριο αποτέλεσμα αυτής της ενότητας είναι το Θεώρημα 5.2.2, που γενικεύει το φημισμένο θεώρημα de Finetti (βλ. Παράρτημα Δ′) και καταδεικνύει το θεμελειακό ρόλο των κ.δ.π. στην θεωρία των ανταλλάξιμων σ.δ..

**Ορισμός 5.2.1** Μία οικογένεια $\{X_i\}_{i\in I}$ $\Sigma$-$T$-μετρήσιμων απεικονίσεων από το $\Omega$ στο $\Upsilon$ καλείται **ανταλλάξιμη** υπό το μέτρο $P$ ή $P$-**ανταλλάξιμη** αν για κάθε $r\in\mathbb{N}$ ισχύει,

$$P\Big(\bigcap_{k=1}^{r} X_{i_k}^{-1}(B_k)\Big) = P\Big(\bigcap_{k=1}^{r} X_{j_k}^{-1}(B_k)\Big),$$

με $i_1,\dots i_r\in I$ και $j_1,\dots,j_r\in I$ διαφορετικά ανά δύο μεταξύ τους και $B_k\in T$ για κάθε $k\le r$.

**Θεώρημα 5.2.2** *Έστω $\{X_i\}_{i\in I}$ μία οικογένεια $\Sigma$-$T$-μετρήσιμων απεικονίσεων από το $\Omega$ στο $\Upsilon$. Θεωρούμε τις παρακάτω προτάσεις :*

*(i) Η $\{X_i\}_{i\in I}$ είναι $P$-ανταλλάξιμη.*

*(ii) Υπάρχει μία σ-υποάλγεβρα $\mathcal{F}$ της $\Sigma$ έτσι ώστε η $\{X_i\}_{i\in I}$ είναι $P$-υπο συνθήκη ανεξάρτητη και ισόνομη ως προς την $\mathcal{F}$.*

*(iii) Υπάρχει μία σ-υποάλγεβρα $\mathcal{F}$ της $\Sigma$ έτσι ώστε,*

- **(a)** *η $\{X_i\}_{i\in I}$ να είναι $P$-υπό συνθήκη ισόνομη πάνω στην $\mathcal{F}$,*
- **(b)** *αν $J$ είναι ένα μη κενό και πεπερασμένο υποσύνολο του $I$ και $B_j\in T$ για κάθε $j\in J$, τότε*

$$P\Big(\bigcap_{i\in J} X_i^{-1}(B_i)\Big) = \int\prod_{i\in J} P\Big(X_i^{-1}(B_i)|\mathcal{F}\Big)dP.$$

*(iv) Υπάρχει μία σ-υποάλγεβρα $\mathcal{F}$ της $\Sigma$ και μία οικογένεια $\{Q_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ από μέτρα πιθανότητας στην $T$ τέτοια ώστε $\omega\longmapsto Q_\omega(B)$ είναι $\mathcal{F}$-μετρήσιμη για κάθε σταθερό $B\in T$ και*

$$\int_F Q_\omega^I(H)R(d\omega) = P(F\cap X^{-1}(H))$$

*για κάθε $H\in T^I$ και $F\in\mathcal{F}$, όπου $R:=P|\mathcal{F}$ και $X:\Omega\longmapsto\Upsilon^I$.*

*(v) Υπάρχει μία σ-υποάλγεβρα $\mathcal{F}$ της $\Sigma$ και μία κ.δ.π $\{P_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ για το $P$ επάνω στο $R:=P|\mathcal{F}$ έτσι ώστε η $\{X_i\}_{i\in I}$ να είναι $P_\omega$-ανεξάρτητη και ισόνομη για $R$-σχεδόν όλα τα $\omega\in\Omega$.*

*(vi) Υπάρχει ένα σύνολο $\tilde{\Upsilon}$, μία οικογένεια $\{P_{\tilde{y}}\}_{\tilde{y}\in\tilde{\Upsilon}}$ μέτρων πιθανότητας στην $\Sigma$ και ένα μέτρο πιθανότητας $\nu$ στην $B(\tilde{\Upsilon}) := \sigma\{P_{\cdot}(E) : E \in \Sigma\}$ έτσι ώστε για κάθε $r \in \mathbb{N}$ και $i_1, \ldots, i_r \in I$ και $B_1, \ldots B_r \in T$ να ισχύει η συνθήκη,*

$$P\Big(\bigcap_{k=1}^{r} X_{i_k}^{-1}(B_k)\Big) = \int \prod_{k=1}^{r} P_{\tilde{y}}(X_{i_k}^{-1}(B_k))\nu(d\tilde{y}).$$

*Τότε (i)$\Longleftrightarrow$(ii)$\Longleftrightarrow$(iii), (iv)$\Longrightarrow$(i) και (v)$\Longrightarrow$(vi)$\Longrightarrow$(i). Αν ισχύει οποιαδήποτε από τις συνθήκες (i) εως (vi) τότε τα μέτρα $P_{X_i} := P \circ X_i^{-1}$ είναι ίσα μεταξύ τους για κάθε $i \in I$. Επιπλέον αν το μέτρο $P_{X_i}$ είναι τέλειο για κάθε $i \in I$ και η $T$ είναι αριθμήσιμα παραγόμενη τότε (i)$\Longleftrightarrow$(ii)$\Longleftrightarrow$(iii)$\Longleftrightarrow$(iv). Αν επι πλεόν και η $\Sigma$ είναι αριθμήσιμα παραγόμενη τότε όλοι οι ισχυρισμοί (i) εως (vi) είναι ισοδύναμοι.*

Για την απόδειξη βλέπε [26] Theorem 3.3.

Μία ενδιαφέρουσα ειδική περίπτωση του Θεωρήματος 5.2.2 που συνήθως συναντάμε στις εφαρμογές είναι εκείνη όπου το $\Omega$ είναι το γινόμενο $\Upsilon^I$.

**Πόρισμα 5.2.3** Έστω ότι η $T$ είναι αριθμήσιμα παραγόμενη, το μέτρο $P$ είναι τέλειο, $\Omega = \Upsilon^I$, όπου $I$ ένα μη κενό σύνολο δεικτών και $\Sigma = \sigma(\{\pi_i\}_{i\in I})$, όπου $\pi_i$ είναι οι κανονικές προβολές από το $\Omega$ στο $\Upsilon$. Τότε οι ισχυρισμοί *(i)* εώς *(vi)* του Θεωρήματος 5.2.2 με $\pi_i$ στη θέση των $X_i$ είναι ισοδύναμοι.

**Απόδειξη.** Το μέτρο $P$ είναι τέλειο αν και μόνο αν κάθε ένα από τα περιθώρια $P_{\pi_i}$ είναι τέλειο (βλ. [9], Proposition 451E(a) και Proposition 454A(b)(iii)). Άρα το συμπέρασμα έπεται άμεσα από το Θεώρημα 5.2.2. □

**Παρατηρήσεις 5.2.4** **(a)** Η υπόθεση "$P_{X_i}$ τέλειο" του Θεωρήματος 5.2.2 ισχύει για τις συνήθισμένες εφαρμογές της Θεωρίας Πιθανοτήτων, αφού αν ο $\Upsilon$ πολωνικός χώρος τότε κάθε $P_{X_i}$ είναι τέλειο (βλέπε [26] Παρατήρηση 3.6).
**(b)** Το πιό γενικευμένο Θεώρημα de Finetti που υπάρχει στην βιβλιογραφία μας λέει, ότι για κάθε άπειρη ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ που παίρνουν τιμές σε έναν τυπικό χώρο Borel (δηλαδή $(\Upsilon, \mathfrak{B}(\Upsilon))$ είναι ισομορφικός με τον $(A, \mathfrak{B}(A))$, όπου $A \in \mathfrak{B}$) οι συνθήκες *(i)*,*(ii)* και *(iv)* του Θεωρήματος 5.2.2 είναι ισοδύναμες. Επομένως το Θεώρημα 5.2.2 γενικεύει ακόμη περισσότερο την υπάρχουσα γενίκευση του Θεωρήματος de Finetti (βλέπε [26] Remark 3.6).

## 5.3 Σύγκριση ορισμών της MRP

Το κύριο αποτέλεσμα της παρούσας ενότητας είναι το Θεώρημα 5.3.2 που δίνει χαρακτηρισμούς των MRPs μέσω disintegrations, κ.δ.π. και ανταλλάξιμων σ.δ. και συγκρίνει τους δύο ορισμούς που έχουν δωθεί για τις MRPs.

**Πρόταση 5.3.1** *Έστω $\Upsilon$ ένας πολωνικός χώρος που αποτελείται από τουλάχιστον δύο στοιχεία, $T = (\Upsilon)$ και $(\Xi, Z) = (\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d)$ για κάποιο $d \in \mathbb{N}$. Εάν η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια $P$-ανταλλάξιμη ακολουθία από $\Sigma$-$\mathfrak{B}(\Upsilon)$-μετρήσιμες απεικονίσεις από το $\Omega$ στο $\Upsilon$, τότε υπάρχει μία $\Sigma$-$\mathfrak{B}^d$-μετρήσιμη απεικόνιση $\Theta$ από το $\Omega$ στον $\mathbb{R}^d$ έτσι ώστε η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ να είναι $P$-υπο συνθήκη ανεξάρτητη και ισόνομη δοθείσης της $\Theta$.*

Για την απόδειξη βλέπε [26] Proposition 3.7.

**Θεώρημα 5.3.2** *Θεωρούμε τις παρακάτω προτάσεις :*

*(i)* *Υπάρχει μία $\Sigma$-$Z$-μετρήσιμη απεικόνιση $\Theta$ από το $\Omega$ στο $\Xi$ έτσι ώστε η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να είναι $(P, \mathbf{K}(\Theta))$-MRP.*

*(ii)* *Υπάρχει μία $\Sigma$-$Z$-μετρήσιμη απεικόνιση $\Theta$ από το $\Omega$ στο $\Xi$, μία disintegration $\{P_\theta\}_{\theta\in\Xi}$ του $P$ επάνω στο $P_\Theta$ συνεπής με την απεικόνιση $\Theta$ και μία οικογένεια $\{\mathbf{K}(\theta)\}_{\theta\in\Xi}$ μέτρων πιθανότητας στην $\mathfrak{B}$ με την συνάρτηση $\theta \longmapsto \mathbf{K}(\theta)(B)$ να είναι $Z$-μέτρήσιμη για κάθε σταθερό $B \in \mathfrak{B}$ έτσι ώστε $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να είναι $(P_\theta, \mathbf{K}(\theta))$-RP για $P_\Theta$-σχεδόν όλα τα $\theta \in \Xi$.*

*(iii)* *Η σ.δ. $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι $P-$ανταλλάξιμη.*

*(iv)* *Υπάρχει μία σ-υποάλγεβρα $\mathcal{F}$ της $\Sigma$ και μία οικογένεια $\{Q_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ από μέτρα πιθανότητας στην $\mathfrak{B}$ τέτοια ώστε η απεικόνιση $\omega \longmapsto Q_\omega(B)$ είναι $\mathcal{F}$-μετρήσιμη για κάθε σταθερό $B \in \mathfrak{B}$ και*

$$\int_F Q_\omega^{\mathbb{N}}(H) R(d\omega) = P(F \cap W^{-1}(H))$$

*για κάθε $H \in \mathfrak{B}^{\mathbb{N}}$ και $F \in \mathcal{F}$, όπου $W = (W_1, \ldots, W_n, \ldots)$ και $Q_\omega^{\mathbb{N}}$ δηλώνει το μέτρο γινόμενο $\otimes_{n\in\mathbb{N}} P_n$ με $P_n := Q_\omega$ των $Q_\omega$ για $n \in \mathbb{N}$.*

*(v)* *Υπάρχει μία σ-υποάλγεβρα $\mathcal{F}$ της $\Sigma$ και μία κ.δ.π $\{S_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ για το $P$ επάνω στο $R := P|\mathcal{F}$ και μία οικογένεια $\{\mathbf{K}(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ μέτρων πιθανότητας στην $\mathfrak{B}$ με την συνάρτηση $\omega \longmapsto \mathbf{K}(\omega)(B)$ να είναι $\mathcal{F}$-μέτρήσιμη για κάθε σταθερό $B \in \mathfrak{B}$ έτσι ώστε $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να είναι $(S_\omega, \mathbf{K}(\omega))$-RP για $R$-σχεδόν όλα τα $\omega \in \Omega$.*

*(vi)* *Υπάρχει ένα σύνολο $\tilde{\Upsilon}$, μία οικογένεια $\{S_{\tilde{y}}\}_{\tilde{y}\in\tilde{\Upsilon}}$ μέτρων πιθανότητας στην $\Sigma$ και ένα μέτρο πιθανότητας $\nu$ στην $B(\tilde{\Upsilon}) := \sigma\{S.(E) : E \in \Sigma\}$ έτσι ώστε η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να είναι μία $\nu$-MRP σχετιζόμενη με την $\{S_{\tilde{y}}\}_{\tilde{y}\in\tilde{\Upsilon}}$.*

*(vii)* *Υπάρχει ένα σύνολο $\tilde{\Upsilon}$, μία οικογένεια $\{S_{\tilde{y}}\}_{\tilde{y}\in\tilde{\Upsilon}}$ μέτρων πιθανότητας στην $\Sigma$ και ένα μέτρο πιθανότητας $\nu$ στην $B(\tilde{\Upsilon}) := \sigma\{S.(E) : E \in \Sigma\}$ έτσι ώστε για κάθε $r \in \mathbb{N}$ και $i_1, \ldots, i_r \in I$ και $w_1, \ldots w_r \in \mathbb{R}$ να ισχύει η συνθήκη,*

$$P\Big(\bigcap_{k=1}^{r}\{W_k \le w_k\}\Big) = \int \prod_{k=1}^{r} S_{\tilde{y}}(W_k \le w_k)\nu(d\tilde{y}).$$

*Τότε (i)$\Longrightarrow$(iii)$\Longleftrightarrow$(iv), (ii)$\Longrightarrow$(i), (ii)$\Longrightarrow$(iv), και (ii)$\Longrightarrow$(v)$\Longrightarrow$(vi)$\Longrightarrow$(vii).*
*Αν επιπλέον το $P$ είναι τέλειο και η $\Sigma$ είναι αριθμήσιμα παραγόμενη τότε (iv)$\Longleftrightarrow$(v). Εαν και η $Z$ είναι αριθμήσιμα παραγόμενη τότε και (i)$\Longleftrightarrow$(ii). Εάν το $P$ είναι τέλειο η $\Sigma$ είναι αριθμήσιμα παραγόμενη και $(\Xi, Z) = (\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d)$ τότε οι ισχυρισμοί (i) εως (vi) είναι ισοδύναμοι.*

Η απόδειξη είναι συνέπεια της Πρότασης 5.1.13 του Θεωρήματος 5.2.2 και της Πρότασης 5.3.2. Για περισσότερες λεπτομέρειες βλ. [26] Theorem 3.8.

**Παρατήρηση 5.3.3** Σημειώνουμε ότι οι πιό ενδιαφέρουσες εφαρμογές της Θεωρίας Πιθανοτήτες εχουν τις ρίζες τους στη περίπτωση των τυπικών χώρων Borel (standard Borel space) (βλ. Παράρτημα Γ′ για τον ορισμό), επομένως των χώρων που πάντα ικανοποιούν τις υποθέσεις του παραπάνω θεωρήματος σε ό,τι αφορά τα $P$, $\Sigma$ και $(\Xi, Z)$.

## 5.4 Ύπαρξη και κατασκευή MRPs

Παραθέτουμε ένα θεώρημα ύπαρξης και κατασκευής MRPs με δοσμένες κ.π. της αντίστοιχης διαδικασίας των ενδιάμεσων χρόνων άφιξης απαιτήσεων και τη δομικής παραμέτρου $\Theta$ . Η κατασκευή στηρίζεται στην Πρόταση 5.1.13 και στο Θεώρημα 5.3.2.

*Για την παρούσα ενότητα θέτουμε $\widetilde{\Omega} := \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\Omega := \widetilde{\Omega} \times \Xi$, $\widetilde{\Sigma} := \mathfrak{B}(\widetilde{\Omega})$ και $\Sigma := \widetilde{\Sigma} \otimes Z$.*

**Θεώρημα 5.4.1** *Έστω $\mu$ ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στη σ-άλγεβρα $Z$ και ότι για κάθε σταθερό $\theta \in \Xi$ τα $Q_n(\theta)$ είναι μέτρα πιθανότητας επάνω στην $\mathfrak{B}$ με $Q_n(\theta) = \mathbf{K}(\theta)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου για κάθε σταθερό $B \in \mathfrak{B}$ η συνάρτηση $\mathbf{K}(\cdot)(B) : \Xi \longmapsto \mathbb{R}$ είναι $Z$-μετρήσιμη και $\mathbf{K}(\cdot)((0,\infty)) = 1$. Τότε*

*(i) υπάρχει μία απεικόνιση $\Theta$ από τον $\Omega$ στον $\Xi$, μία οικογένεια από μέτρα πιθανότητας $\{P_\theta\}_{\theta\in\Xi}$ επάνω στην $\Sigma$, ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας $P$ επάνω στη $\Sigma$ τέτοι ώστε $P_\Theta = \mu$ και $\{P_\theta\}_{\theta\in\Xi}$ είναι μία disintegration επάνω στο $\mu$ συνεπής με την $\Theta$, και μία $(P, \mathbf{K}(\Theta))$-MRP $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, της οποίας η επαγόμενη σ.δ. των ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ικανοποιεί την συνθήκη*

$$(P_\theta)_{W_n} = Q_n(\theta) \quad \text{για κάθε} \quad n \in \mathbb{N}$$

*εαν το $\theta \in \Xi$ είναι σταθερό*

*(ii) υπάρχει πάντα μία οικογένεια $\{S_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ μέτρων πιθανότητας επάνω στην $\Sigma$ και μία $\nu$-MRP $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ σχετιζόμενη με την $\{S_\omega\}_{\omega\in\Omega}$, όπου $\nu = P|B(\Omega)$, της οποίας η επαγόμενη σ.δ. των ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ικανοποιεί την συνθήκη*

$$(S_\omega)_{W_n} = Q_n(\Theta(\omega)) \quad \text{για κάθε} \quad n \in \mathbb{N}$$

*εαν το $\omega \in \Omega$ είναι σταθερό.*

**Ιδέα της απόδειξης του (*i*)** . **(a)** Σταθεροποιούμε ένα αυθαίρετο $\theta \in \Xi$. Θέτουμε $\tilde{P}_\theta := \otimes_{n\in\mathbb{N}} Q_n(\theta)$ και $\tilde{W}_n(\omega) := \omega_n = \pi_n(\omega)$ για κάθε $\omega \in \tilde{\Omega}$ και $n \in \mathbb{N}$, όπου $\pi_n$ είναι η κανονική προβολή από τον $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ επάνω στον $\mathbb{R}$. Τότε $(\tilde{P}_\theta)_{\tilde{W}_n} = Q_n(\theta)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
**(b)** Με ένα επιχείρημα μονότονης κλάσης έπεται ότι για σταθερό $E \in \widetilde{\Sigma}$ η συνάρτηση $\theta \longmapsto \widetilde{P}_\theta(E)$ είναι $Z$-μετρήσιμη.
**(c)** Θέτουμε $\widetilde{P}(E) := \int \widetilde{P}_\theta(E)\mu(d\theta)$ για κάθε $E \in \widetilde{\Sigma}$. Τότε το $\widetilde{P}$ είναι μέτρο πιθανότητας επάνω στην $\widetilde{\Sigma}$ και $\{\widetilde{P}_\theta\}_{\theta\in\Xi}$ είναι μία disintegration του $\widetilde{P}$ επάνω στο $\mu$.
**(d)** Θέτουμε

$$P(E) := \int \widetilde{P}_\theta(E^\theta)\mu(d\theta) \quad \forall E \in \Sigma$$

όπου $E^\theta := \{\omega \in \widetilde{\Omega} : (\omega,\theta) \in E\}$. Τότε το $P$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στην $\Sigma$ ώστε η $\{\widetilde{P}_\theta\}_{\theta\in\Xi}$ να είναι κ.δ.π-γινόμενο επάνω στην $\widetilde{\Sigma}$ για το $P$ ως προς το $\mu$.
**(e)** θέτουμε $P_\theta := \widetilde{P}_\theta \otimes \delta_\theta$ για κάθε $\theta \in \Xi$, όπου $\delta_\theta$ είναι το μέτρο Dirac επάνω στην $Z$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $W_n := \widetilde{W}_n \circ \pi_{\widetilde{\Omega}}$, όπου $\pi_{\widetilde{\Omega}}$ είναι η κανονική προβολή από το $\Omega$ στο $\widetilde{\Omega}$. Τότε η $\{P_\theta\}_{\theta\in\Xi}$ είναι μία disintegration του $P$ επάνω στο $\mu$ συνεπής με την κανονική προβολή $\pi_\Xi$ από το $\Omega$ στο $\Xi$ (βλ. [25] Lemma 2.4), και η $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι $P_\theta$-ανεξάρτητη και $(P_\theta)_{W_n} = \mathbf{K}(\theta)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
**(f)** Θέτουμε $\Theta := \pi_\Xi$. Τότε $P_\Theta = \mu$. θέτουμε $T_n := \sum_{k=1}^n W_k$ για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ και $N_t = \sum_{n=1}^\infty \chi_{\{T_n \le t\}}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$. Τότε η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία $(P, \mathbf{K}(\theta))$-MRP.
Το *(ii)* έπεται από το *(i)*.

Για περισσότερο λεπτομέρειακή απόδειξη βλ. [26] Theorem 4.1.

**Παρατηρήσεις 5.4.2** Το παραπάνω θεώρημα σε σχέση με άλλη θεωρήματα κατασκευής σ.δ. μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε MRPs χώρις κάποια ιδιαίτερη υπόθεση όπως απαιτούν οι δύο μεθοδολογίες που ακολουθούν:
**(a)** Με το Θεώρημα Ύπαρξης του Kolmogorov δίνεται μία κατασκευαστική μέθοδος για Μαρκοβιανές σ.δ. (βλ. [9] 455A). Αλλά αφου μία $\nu$-MRP δεν είναι γενικά μία Μαρκοβιανή διαδικασία (βλ. [15] Theorem 3) η μέθοδος του Kolmogorov δεν μπορεί να εφαρμοστεί για οποιαδήποτε $\nu$-MRP και επομένως λόγω του Θεωρήματος 5.3.2 για οποιαδήποτε $(P, \mathbf{K}(\Theta))$-MRP.
**(b)** Η κατασκευή των μεμειγμένων διαδικασιών Poisson, όπως αυτή έχει δωθεί από τον Lundberg, απαιτεί η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να είναι μία διαδικασία γεννήσεως (βλ. [10] σελ. 61-63). Αλλά από το **(a)** έπεται ότι γενικά μία MRP δεν είναι μία διαδικασία Markov, επομένως δεν μπορεί γενικά να είναι μία διαδικασία γεννήσεως, συνεπώς δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε ούτε αυτή την μέθοδο.

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 5.4.1 υπολογίζουμε τα μέτρα πιθανότητας $P_\theta$ ($\theta \in \mathbb{R}^d$) μίας disintegration $\{P_\theta\}_{\theta\in\mathbb{R}^d}$, όπως επίσης το μέτρο πιθανότητας $P$ και κατασκευάζουμε στα παρακάτω παραδείγματα κάποιες ενδιαφέρουσες MRPs ως προς $P$ που δεν είναι MPP. Για αυτό το σκοπό θυμίζουμε ότι με $\beta_d$ συμβολίζεται ο περιορισμός του μέτρου Lebesgue $\lambda_d$ στην $\mathfrak{B}^{\mathbb{R}^d}$, ενώ ο περιορισμός του $\beta_d$ στην $\mathfrak{B}(A)$ για $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ συμβολίζεται πάλι με $\beta_d$ . Για $d = 1$ γράφουμε $\beta := \beta_1 := \lambda|\mathfrak{B}(\mathbb{R})$, όπου $\lambda$ είναι το μέτρο του Lebesgue στον $\mathbb{R}$.

**Παράδειγμα 5.4.3** Έστω ότι $Q_n(\theta) = \mathbf{Ga}(\theta, 1/2)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε σταθερό $\theta > 0$, και $\mu = \mathbf{Ga}(\gamma, \alpha)$. Τότε οι υποθέσεις του Θεωρήματος 5.4.1 ικανοποιούνται για $(\Xi, Z) = \big(\mathbb{R}, \mathfrak{B}\big)$, με $\mu((0,\infty)) = 1$.
Επομένως τα μέτρα πιθανότητας $\widetilde{P}$ και $P$ στις $\widetilde{\Sigma} = \mathfrak{B}(\widetilde{\Omega})$ και $\Sigma = \mathfrak{B}(\Omega)$ αντίστοιχα, όπου $\widetilde{\Omega} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ και $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}$, καθώς και οι disintegrations $\{\widetilde{P}_\theta\}_{\theta \in \Xi}$ και $\{P_\theta\}_{\theta \in \Xi}$ μπορούν να υπολογιστούν. Επιπλέον, υπάρχει μία τυχαία μεταβλητή $\Theta$ στον $\Omega$ έτσι ώστε $P_\Theta = \mathbf{Ga}(\gamma, \alpha)$.
**(a)** Αρχικά υπολογίζουμε τα μέτρα πιθανότητας επάνω στους μετρήσιμους κυλίνδρους. Με $\widetilde{\mathcal{C}}$ συμβολίζουμε την οικογένεια όλων των μετρήσιμων κυλίνδρων $\widetilde{B} \in \mathfrak{B}(\widetilde{\Omega})$ δηλαδή όλων των συνόλων $\widetilde{B} \subseteq \widetilde{\Omega}$ που μπορούν να εκφραστούν στην μορφή $\prod_{n \in \mathbb{N}} \widetilde{B_n}$, όπου $\widetilde{B_n} \in \mathfrak{B}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\widetilde{L} = \{n \in \mathbb{N} : \widetilde{B_n} \neq \mathbb{R}\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο. Θέτουμε $\widetilde{C_n} = \widetilde{B_n}$ για κάθε $n \in \widetilde{L}$. Τότε $\widetilde{B} = \prod_{k \in \widetilde{L}} \widetilde{C_k} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N} \setminus \widetilde{L}}$. Με τον ίδιο τρόπο ορίζεται η οικογένεια $\mathcal{C}$ των μετρήσιμων κυλίνδρων $B \in \mathfrak{B}(\Omega)$. Επομένως

$$\widetilde{P}_\theta(\widetilde{B}) = (\otimes_{n \in \mathbb{N}} Q_n(\theta)(\widetilde{B})) = \prod_{k \in \widetilde{L}} Q_k(\theta)(\widetilde{C}_k) = \sqrt{\frac{\theta}{\pi}} \prod_{k \in \widetilde{L}} \int_{\widetilde{C}_k} \omega_k^{-\frac{1}{2}} e^{-\theta \omega_k} \beta(d\omega_k) \tag{5.1}$$

για κάθε $\theta > 0$, επομένως

$$\widetilde{P}(\widetilde{B}) = \int \sqrt{\frac{\theta}{\pi}} \prod_{k \in \widetilde{L}} \int_{\widetilde{C}_k} \omega_k^{-\frac{1}{2}} e^{-\theta \omega_k} \beta(d\omega_k) P_\Theta(d\theta).$$

Θεωρούμε τώρα τους μετρήσιμους κυλίνδρους $\widetilde{B} \times E \in \widetilde{\mathcal{C}} \times \mathfrak{B}$. Από την (5.1), παίρνουμε

$$P_\theta(\widetilde{B} \times E) = \widetilde{P}_\theta(\widetilde{B}) \delta_\theta(E) = \chi_E(\theta) \sqrt{\frac{\theta}{\pi}} \prod_{k \in \widetilde{L}} \int_{\widetilde{C}_k} \omega_k^{-\frac{1}{2}} e^{-\theta \omega_k} \beta(d\omega_k)$$

για κάθε $\theta > 0$, επομένως

$$P(\widetilde{B} \times E) = \frac{\gamma^\alpha}{\Gamma(\alpha)\sqrt{\pi}} \int_E \left[ \prod_{k \in \widetilde{L}} \int_{\widetilde{C}_k} \omega_k^{-\frac{1}{2}} e^{-\theta(\gamma + \omega_k)} \beta(d\omega_k) \right] \theta^{\alpha - \frac{1}{2}} \beta(d\theta).$$

Κατά συνέπεια έχουμε υπολογίσει τα $P(B)$ και $P_\theta(B)$ για κάθε κυλινδρικό σύνολο $B \in \mathcal{C}$.
**(b)** Έστω $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{C}$ η κανονική βάση της Ευκλείδιας τοπολογίας $\mathcal{E}^{\mathbb{N}} \times \mathcal{E}$, η οποία αποτελείται από σύνολα που μπορούν αν εκφραστούν στην μορφή $\prod_{n \in \mathbb{N}} G_n$, όπου $G_n \in \mathcal{E}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και ότι το σύνολο $L := \{n \in \mathbb{N} : G_n \neq \mathbb{R}\}$ είναι πεπερασμένο. Με $\mathcal{U}_f$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των πεπερασμένων ενώσεων στοιχείων της $\mathcal{U}$, και με $\mathcal{H}$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των μη κενών προς τα πάνω κατευθυνόμενων οικογενειών της $\mathcal{U}_f$.
Εάν $G \in \mathcal{E}^{\mathbb{N}} \times \mathcal{E}$ τότε

$$\mathcal{V}_G := \{V \in \mathcal{U}_f : V \subseteq G\}$$

ανήκει στην $\mathcal{H}$ και $\bigcup \mathcal{V}_G = G$. Αφού $(\Omega, \mathcal{E}^{\mathbb{N}} \times \mathcal{E})$ είναι ένας πολωνικός χώρος έπεται ότι τα μέτρα $P$ και $P_\theta$ είναι $\tau$-προσθετικά (βλ. π.χ [9] Theorem 414O). Ως συνέπεια

$$P(G) = \sup_{V \in \mathcal{V}_G} P(V) \quad \text{και} \quad P_\theta(G) = \sup_{V \in \mathcal{V}_G} P_\theta(V) \quad \text{για κάθε} \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{5.2}$$

Επιπλέον αφού κάθε μέτρο επάνω σε ένα πολωνικό χώρο είναι εσωτερικά κανονικό ως προς τα κλειστά σύνολα (βλ. π.χ [9] Theorem 412E), προκύπτει ότι αυτό ισχύει για τα μέτρα $P$ και $P_\theta$ (για $\theta \in \mathbb{R}$), επομένως από την Πρόταση Α΄.10 έπεται ότι τα μέτρα αυτά θα είναι εξωτερικά κανονικά ως προς τα ανοικτά σύνολα. Επομένως χρησιμοποιώντας την (5.2) έχουμε

$$P(E) = \inf_{G \in \mathcal{E}^{\mathbb{N}} \times \mathcal{E}, G \supseteq E} \; \sup_{V \in \mathcal{V}_G} P(V) \quad \text{για κάθε} \quad E \in \mathfrak{B}(\Omega),$$

και

$$P_\theta(E) = \inf_{G \in \mathcal{E}^{\mathbb{N}} \times \mathcal{E}, G \supseteq E} \; \sup_{V \in \mathcal{V}_G} P_\theta(V) \quad \text{για κάθε} \quad E \in \mathfrak{B}(\Omega) \quad \text{και όλα τα} \quad \theta \in \mathbb{R}_+.$$

Ακολουθεί ένα παράδειγμα που δείχνει ότι η συνεπαγωγή *(vii)$\Longrightarrow$(vi)* του Θεωρήματος 5.3.2 δεν ισχύει γενικά. Το ίδιο παράδειγμα δείχνει ότι η υπόθεση ότι η διαδικασία $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ στον Ορισμό 4.1.3 του Huang [15] είναι $P_{\tilde{y}}$-ισόνομη είναι αναγκαία, αφού αλλιώς σύμφωνα με το παρακάτω παράδειγμα, η $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ δεν μπορεί να είναι $P$-ανταλλάξιμη, άρα δεν μπορεί π.χ. να ισχύει το πόρισμα του Huang (βλ. [15] σελ. 20) όπως και άλλα αποτελέσματα του [15] (βλ. επίσης Παρατήρηση 4.1.4 **(a)** ).

**Παράδειγμα 5.4.4** Έστω ότι $Q_n(\theta) = \mathbf{Exp}(n\theta)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε σταθερό $\theta > 0$ και $\mu = \mathbf{Ga}(2,1)$. Τότε όλες οι υποθέσεις του Θεωρήματος 5.4.1 εκτός από την

$$Q_n(\theta) = \mathbf{K}(\theta) \quad \text{για κάθε} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{και για κάθε σταθερό} \quad \theta \in \Xi$$

ικανοποιούνται για $(\Xi, Z) = \big((0,\infty), \mathfrak{B}\big((0,\infty)\big)\big)$. Σε αυτή την περίπτωση η $\mathbf{K}(\theta)$ αντικαθίσταται από την $\mathbf{K}(n\theta) := \mathbf{Exp}(n\theta)$.

Ακολουθώντας την ίδια λογική με την απόδειξη του Θεωρήματος 5.4.1 παίρνουμε μία $\sigma$.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης απαιτήσεων $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ η οποία είναι $P_\theta$-ανεξάρτητη για κάθε $\theta > 0$ και ικανοποιεί τις ισότητες $W_n = \pi_n$ και $(P_\theta)_{W_n} = \mathbf{K}(n\theta)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε σταθερό $\theta > 0$.

Συνεπώς η $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μία $\sigma$.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης απαιτήσεων η οποία είναι $P_\theta$-ανεξάρτητη για κάθε σταθερό $\theta > 0$, αλλά η οποία ικανοποιεί την σχέση

$$P\Big(\bigcap_{k=1}^{r} \{W_k \leq w_k\}\Big) = \int \prod_{k=1}^{r} P_\theta(W_k \leq w_k)\, \nu(d\theta),$$

όπου $\nu = P_\Theta | B\big((0,\infty)\big)$ και $B\big((0,\infty)\big) = \sigma(\{P.(E) : E \in \Sigma\})$.

Συνεπώς, η $\sigma$.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ που παράγεται από την ακολουθία των κανονικών προβολών $\{\pi_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ δεν είναι μία $\nu$-MRP σχετιζόμενη με την

$\{P_\theta\}_{\theta\in\Xi}$, όπου $\nu = P_\Theta|B\big((0,\infty)\big) = \mu|B\big((0,\infty)\big)$. Επι πλέον η $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι $P$-ανταλλάξιμη.
Πράγματι, αφού έχουμε υποθέσει ότι $(P_\theta)_{W_n} = \mathbf{K}(n\theta) = \mathbf{Exp}(n\theta)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε σταθερό $\theta > 0$, τότε θα ισχύει $(P_\theta)_{W_1} = \mathbf{Exp}(\theta)$ και $(P_\theta)_{W_2} = \mathbf{Exp}(2\theta)$ για κάθε σταθερό $\theta > 0$. Επομένως για κάθε $w_1, w_2 \in \mathbb{R}_+$ έπεται ότι

$$\begin{aligned} P(W_1 \le w_1, W_2 \le w_2) &= 2\int_0^\infty (1-e^{-\theta w_1})(1-e^{-2\theta w_2})e^{-2\theta}d\theta \\ &= w_2(w_2+1)^{-1} - 2[(w_1+2)^{-1} + (w_1+2w_2+2)^{-1}], \end{aligned}$$

παρατηρούμε ομως ότι $P(W_1 \le 2, W_2 \le 1) = \frac{1}{3} \ne \frac{2}{7} = P(W_1 \le 1, W_2 \le 2)$.

# Κεφάλαιο 6

# Εφαρμογές στα Αναλογιστικά

## 6.1 Το Υπόδειγμα

Στο κλασσικό υπόδειγμα της Θεωρίας Κινδύνου η $\sigma.\delta.$ του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία (ομογενής) διαδικασία Poisson, η οποία είναι η πιό απλή ανανεωτική $\sigma.\delta.$ με εκθετικά κατανεμημένους ενδιάμεσους χρόνους $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ εμφάνισης των ενδεχομένων .
Το επόμενο βήμα μετά το κλασσικό υπόδειγμα είναι το λεγόμενο ανανεωτικό. Σύμφωνα με το συγκεκριμένο υπόδειγμα η $\sigma.\delta.$ του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ επάγεται από μία $\sigma.\delta.$ $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ των ενδιάμεσων χρόνων εμφάνισης ενδεχομένων η οποία υποθέτουμε ότι είναι ανεξάρτητη και ισόνομη.
Το μεγαλύτερο μειονέκτημα των δύο παραπάνω μοντέλων είναι ότι δεν μπορούμε να μελετήσουμε ένα μη ομογενές χαρτοφυλάκιο κινδύνου. Για να γίνει η οποιαδήποτε μελέτη θα πρέπει να σπάσουμε το χαρτοφυλάκιο σε μικρότερα ομογενή και να μελετήσουμε το καθένα ξεχωριστά. Ήταν εμφανές λοιπόν ότι στα σύγχρονα Ασφαλιστικά και Χρηματοοικονομικά μαθηματικά έπρεπε να αναπτυχθεί ένα υπόδειγμα το οποίο να έχει την δυνατότητα να μελετήσει ένα μη ομογενές χαρτοφυλάκιο. Αρχικά μελετήθηκε μία γενίκευση του κλασσίκού υπόδειγμα στο οποίο η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία μεμιγμένη διαδικασία Poisson. Το 1970 από τον C.O. Segerdahl ( βλ. [33] σελ. 164) προτάθηκε η εφαρμογή των MRPs σε αναλογιστικά υποδείγματα, ένα μεμειγμένο ανανεωτικό υπόδειγμα δηλαδή, με σκοπό την βελτίωση του ήδη υπάρχοντος υπόδειγμα με τις μεμειγμένες διαδικασίες Poisson.
Θεωρούμε ένα μή ομογενές χαρτοφυλάκιο κινδύνων και υποθέτουμε περαιτέρω ότι το μη ομογενές χαρτοφυλάκιο είναι μία μίξη μικρότερων ομογενών , ίδιου μεγέθους , παρόμοιων ιδιοτήτων , αλλά εμφανώς διακριτών χαρτοφυλακίων. Επιπλέον υποθέτουμε ότι κάθε ομογενές χαρτοφυλάκιο μπορεί να χαρακτηριστεί από την πραγματοποίηση μίας τυχαίας μεταβλητής Θ. Αυτό σημαίνει ότι η κατανομή της Θ αντιπροσωπεύει την δομή του μη ομογενούς χαρτοφυλακίου.Σε αυτή την περίπτωση οι ιδιότητες της κατανομής της $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ καθορίζονται από εκείνες της υπο συνθήκης κατανομής δοθείσης της τυχαίας μεταβλητής Θ και από τις ιδιότητες της Θ. Συνεπώς η Θ και η κατανομή της $P_\Theta$ λέγονται **δομική παράμετρος** και **δομική κατανομή** του χαρτοφυλακίου.
Ένα καλό παράδειγμα για να καταλάβουμε πως λειτουργεί το μεμειγμένο ανανεωτικό υπό-

δειγμα είναι εκείνο του χαρτοφυλακίου ασφάλισης οχημάτων. Ας υποθέσουμε επιπλέον ότι τα μη ομογενές χαρτοφυλάκιο μας αποτελείται από δύο μικρότερο ομογενή εκ των οποίων το ένα αποτελείται από συμβόλαια ασφάλισης που αφορούν νέους οδηγούς με γρήγορο αυτοκίνητο, και το δεύτερο αποτελείται από συμβόλαια ασφάλισης που αφορούν έμπειρους οδηγούς με οικογενειακό αυτοκίνητο. Στην παρούσα περίπτωση η τυχαία μεταβλητή $\Theta$ παίρνει δύο τιμές, $\theta_1$ και $\theta_2$ για το πρώτο και δεύτερο χαρτοφυλάκιο αντίστοιχα. Έτσι σε αντίθεση με το κλασσικό ή το ανανεωτικό υπόδειγμα με τα οποία θα είχαμε να μελετήσουμε δύο χαρτοφυλάκια με αντίστοιχες παραμέτρους $\theta_1$ και $\theta_2$ στην περίπτωση του μεμειγμένου ανανεωτικού υποδείγματος μπορούμε να μελετήσουμε το σύνολο του χαρτοφυλακίου μελετώντας ένα με παράμετρο $\Theta = (\theta_1, \theta_2)$.

## 6.2 Εφαρμογές

**(a)** Στις σελίδες που ακολουθούν σκοπός μας είναι να υπολογίσουμε και να συγκρίνουμε τις αναμενόμενες τιμές ένός υποδείγματος στο οποίο η $\sigma$.δ. του αριθμού των απαιτήσεων είναι μία MPP($\Theta$) και ενός άλλου στο οποίο η $\sigma$.δ. του αριθμού των απαιτήσεων είναι μία $(P, \mathbf{K}(\Theta))$-MRP με την ίδια δομική παράμετρο.
Έστω ότι η $\sigma$.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία $(P, \mathbf{K}(\Theta))$-MRP για την οποία η $\sigma$.δ. των ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι υπο συνθήκη ανεξάρτητη και για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ ικανοποιεί την σχέση

$$P_{W_n|\Theta} = \mathbf{K}(\Theta) = \mathbf{Ga}(2, \Theta) \quad P|\sigma(\Theta) - \sigma.\beta.,$$

δηλαδή για κάθε τιμή $\theta$ της τυχαίας μεταβλητής $\Theta$ ισχύει

$$\mathbf{K}(\theta)(t) = 1 - \theta t e^{-\theta t} \quad \text{και} \quad \mathbf{k}(\theta)(t) := \mathbf{K}'(\theta)(t) = \theta^2 t e^{-\theta t} \quad t \geq 0.$$

Η τυχαία μεταβλητή $\Theta$ παίρνει θετικές τιμές. Θεωρούμε επιπλέον την $\sigma$.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{\widetilde{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ η οποία υποθέτουμε ότι είναι μία μεμειγμένη διαδικασία Poisson με δομική παράμετρο $\Theta$. Η $\{\widetilde{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ επιπλέον είναι και μία $(P, \mathbf{K}(\Theta))$-MRP για την οποία η $\sigma$.δ. των ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων $\{\widetilde{W}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι υπο συνθήκη ανεξάρτητη και για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ ικανοποιεί την σχέση

$$P_{\widetilde{W}_n|\Theta} = \mathbf{K}(\Theta) = \mathbf{Exp}(\Theta) \quad P|\sigma(\Theta) - \sigma.\beta.,$$

δηλαδή για κάθε τιμή $\theta$ της τυχαίας μεταβλητής $\Theta$ ισχύει

$$\mathbf{K}_1(\theta)(t) = 1 - e^{-\theta t} \quad \text{και} \quad \mathbf{k}_1(\theta)(t) := \mathbf{K}_1'(\theta)(t) = \theta e^{-\theta t} \quad t \geq 0.$$

Υποθέτουμε επιπλέον ότι και στις δύο περιπτώσεις έχουμε την ίδια τυχαία μεταβλητή $\Theta$ με συνάρτηση κατανομής $U$ και μέση τιμή $\mu_\Theta$.
Θα υπολογίσουμε και θα συγκρίνουμε τις μέσες τιμές των $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και $\{\widetilde{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$.
Οι υπολογισμοί για την $\{\widetilde{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ παραλείπονται καθώς τα αποτελέσματα είναι γνωστά.
Για κάθε τιμή $\theta$ της τυχαίας μεταβλητής $\Theta$ θα έχουμε

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[N_t|\Theta=\theta] &= \sum_{n=0}^{\infty} nP(N_t=n) = \sum_{n=0}^{\infty} nP(T_n \le t < T_{n-1}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n(P(T_n \le t) - P(T_{n-1} \le t)) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} nP(T_n \le t) - \sum_{n=0}^{\infty} nP(T_{n+1} \le t) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} nP\Big(\sum_{i=1}^{n} W_i \le t\Big) - \sum_{n=0}^{\infty} nP\Big(\sum_{i=1}^{n+1} W_i \le t\Big) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n\mathbf{K}^{n*}(\theta)(t) - \sum_{n=0}^{\infty} n\mathbf{K}^{(n+1)*}(\theta)(t),
\end{aligned}
$$

όπου $\mathbf{K}^{n*}(\theta)(t) = \mathbf{Ga}(2n,\theta)$ και $\mathbf{K}^{(n+1)*}(\theta)(t) = \mathbf{Ga}(2n+2,\theta)$ , αφού οι $W_i$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες για $\Theta=\theta$. Τότε

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathbb{E}[N_t|\Theta=\theta] &= \frac{d}{dt}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} n\mathbf{K}^{n*}(\theta)(t) - \sum_{n=0}^{\infty} n\mathbf{K}^{(n+1)*}(\theta)(t)\Big) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n\frac{d}{dt}\mathbf{K}^{n*}(\theta)(t) - \sum_{n=0}^{\infty} n\frac{d}{dt}\mathbf{K}^{(n+1)*}(\theta)(t) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n\mathbf{k}^{n*}(\theta)(t) - \sum_{n=0}^{\infty} n\mathbf{k}^{(n+1)*}(\theta)(t) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n\theta e^{-\theta t}\frac{(\theta t)^{2n-1}}{(2n-1)!} - \sum_{n=0}^{\infty} n\theta e^{-\theta t}\frac{(\theta t)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \theta e^{-\theta t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\theta t)^{2n-1}}{(2n-1)!} = \theta e^{-\theta t}\sinh(\theta t) \\
&= \theta e^{-\theta t}\frac{e^{\theta t}-e^{-\theta t}}{2}.
\end{aligned}
$$

Επομένως

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[N_t|\Theta=\theta] &= \int_0^t \theta e^{-\theta s}\frac{e^{\theta s}-e^{-\theta s}}{2}ds = \int_0^t \theta\frac{1-e^{-2\theta s}}{2}ds \\
&= \frac{\theta t}{2} - \frac{1-e^{-2\theta t}}{4},
\end{aligned}
$$

άρα

$$\mathbb{E}[N_t|\Theta] = \frac{\Theta t}{2} - \frac{1-e^{-2\Theta t}}{4}. \tag{6.1}$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[N_t] &= \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}[N_t|\Theta]\Big] = \mathbb{E}\Big[\frac{\Theta t}{2} - \frac{1-e^{-2\Theta t}}{4}\Big] = \mathbb{E}\Big[\frac{\Theta t}{2}\Big] - E\Big[\frac{1-e^{-2\Theta t}}{4}\Big] \\
&= \frac{t\mathbb{E}[\Theta]}{2} - \frac{1-\mathbb{E}[e^{-2\Theta t}]}{4}
\end{aligned}$$

άρα

$$\mathbb{E}[N_t] = \frac{t\mu_\Theta}{2} - \frac{1-\hat{u}(2t)}{4}, \tag{6.2}$$

όπου $\hat{u}$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace της τυχαίας μεταβλητής $\Theta$.
Για την $\{\widetilde{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ απο γνωστό θεώρημα ( βλ. π.χ. [32] Lemma 4.2.5) η μεσή τιμή της θα είναι ίση με

$$\mathbb{E}[\widetilde{N}_t] = t\mu_\Theta. \tag{6.3}$$

Επομένως από τις σχέσεις (6.2) και (6.3) είναι προφανές ότι

$$\mathbb{E}[N_t] < \mathbb{E}[\widetilde{N}_t].$$

**(b)** Οι ανταλλάξιμες στοχαστικές διαδικασίες έχει βρεθεί ότι έχουν εφαρμογή στην μοντελοποίηση καταστάσεων ζωής (βλ. Shanthikumar [34]). Σε μερικά **υποδείγματα αντικατάστασης** (replacement models) οι χρόνοι ζωής των συνιστωσών δεν υποτίθενται ισόνομοι και ανεξάρτητοι, όμως η συνάρτηση κατανομής τους παραμένει αμετάβλητη σε κάθε μετάθεση.
Ένα τέτοιο σύστημα λέγεται **consecutive-$k$-out-of-$n$:$F$** και αποτελείται μία ακολουθία $n$ συνιστωσών. Το σύστημα καταρέει τότε και μόνο τότε αν $k$ ή περισσότερες συνεχόμενες συνιστώσες χαλάσουν. Το σύστημά μας είναι s-ανταλλάξιμο και για κάθε μετάθεση $\sigma = \{\sigma(1), \ldots, \sigma(n)\}$ του $\{1, \ldots, 2\}$ ισχύει

$$F_\sigma(\mathbf{t}) = P(T_{\sigma(1)} \leq t_1, \ldots, T_{\sigma(n)} \leq t_n) = F(\mathbf{t}), \mathbf{t} > 0$$

όπου $\mathbf{t} = (t_1, \cdots, t_n)$ και $T_i$ είναι ο χρόνος ζωής της συνιστώσας $i$. Με $M_t$ ορίζουμε την $\sigma$.δ. του αριθμού των συνιστωσών του συστήματος που έχουν χαλάσει μέχρι το χρόνο $t$ και για την οποία ισχύει

$$p_j(t) = P(M_t = j) := \frac{n!}{j!(n-j)!} P(T_1 \leq t, \ldots, T_j \leq t, T_{j+1} > t, \ldots, T_n > t).$$

Θεωρούμε επιπλέον την δίτιμη τυχαία μεταβλητή $X_t^i$ η οποία θα παίρνει την τιμή 1 αν η συνιστώσα $i$ λειτουργία στο χρόνο $t$, και την τιμή 0 διαφορετικά. Σε αυτή την περίπτωση η αθροιστική συνάρτηση κατανομής του χρόνου ζωής του συστήματος μας θα είναι

$$H(t) = 1 - \sum_{j=0}^{n} \frac{j!(n-j)!}{n!} p_j(t).$$

Είναι προφανές ότι το παραπάνω υπόδειγμα, το οποίο βρίσκει εφαρμογές κυρίως σε δίκτυα, θα μπορούσε να περιγράψει και θέματα αναλογιστικού ενδιαφέροντος. Στην περίπτωση των ασφαλειών ζωής θα μπορούσαμε να μοντελοποιήσουμε οικογενειακά προγράμματα ζωής ή θανάτου. Είναι σαφές ότι στα πλαίσια μίας οικογένειας οι χρόνοι ζωής δεν είναι και δεν πρέπει να θεωρούνται ανεξάρτητοι, μπορούμε όμως να υποθέσουμε ότι είναι ότι το σύστημα αυτό είναι $s$-ανταλλάξιμοι.

Ας υποθέσουμε το παρακάτω απλό παράδειγμα ενός συμβολαίου θανάτου. Θεωρούμε μία οικογένεια η οποία αποτελείται από τρία άτομα και η οποία συνάπτει σε χρόνο $t = 0$ ένα συμβόλαιο θανάτου με μία ασφαλιστική εταιρία το οποίο καθορίζει ότι σε περίπτωση θανάτου ακριβώς δύο μελών της οικογένειας μέχρι τον χρόνο $\widetilde{T}$ ο επιζών θα λάβει μία αποζημείωση ύψους $c$ νομισματικών μονάδων. Είναι προφανές ότι για μία ασφαλιστική εταιρία αυτό το συμβόλαιο άντιπροσωπεύει ένα consecutive-2-out-of-3:$F$ σύστημα. Η πιθανότητα το συμβόλαιο αυτό να εκτελεστεί σε χρόνο $t < \widetilde{T}$ είναι

$$p_2(t) = P(M_t = 2) = \frac{3!}{2!(3-2)!} P(T_1 \leq t, T_2 \leq t, T_3 > t) = 3P(T_1 \leq t, T_2 \leq t, T_3 > t)$$

ενώ η πιθανότητα να μην εκτελεστεί είναι

$$p_0(t) + p_1(t) = 3P(T_1 \leq t, T_2 > t, T_3 > t) + P(T_1 > t, T_2 > t, T_3 > t).$$

Επομένως, αν $Z_t = c$ για κάθε $t < \widetilde{T}$ είναι η συνάρτηση αποπληρωμής του συμβολαίου τότε η μέση αναμενόμενη ζημία για την ασφαλιστική εταιρία για κάθε $t < \widetilde{T}$ θα είναι

$$\mathbb{E}[Z_t] = 3cP(T_1 \leq t, T_2 \leq t, T_3 > t).$$

## 6.3 Συμπεράσματα

Ας πάμε τα παραπάνω αποτελέσματα ένα βήμα πιό κάτω. Θεωρούμε ένα μή ομογενές χαρτοφυλάκιο κινδύνων, για τα οποία η σ.δ. του μεγέθους απαιτήσεων $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι η ίδια. Θεωρούμε επιπλέον τις σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και $\{\widetilde{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι όπως ορίστηκαν στην προηγούμενη ενότητα. Σύμφωνα με τα παραπάνω θα προκύψουν δύο τυχαία αθροίσματα, το $S_t := \sum_{k=1}^{N_t} X_k$ και το $\widetilde{S}_t := \sum_{k=1}^{\widetilde{N}_t} X_k$, που θα περιγράφουν τις συνολικές αποζημειώσεις του χαρτοφυλακίου. Η μέση τιμή $S$ γενικά είναι

$$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X]$$

( βλ. [32] Lemma 5.2.10). Άρα $\mathbb{E}[N_t] < \mathbb{E}[\widetilde{N}_t]$. Είναι προφανές από τα παραπάνω ότι όταν το χαρτοφυλάκιο περιγράφεται από μία $(P, \mathbf{K}(\Theta))$-MRP έχουμε μικρότερη αναμενόμενη τιμή συνολικών αποζημειώσεων σε σχέση με εκείνη που παίρνουμε από την MPP.
Για $\kappa \in (0, \infty)$, $u \in (0, \infty)$ και $t \in \mathbb{R}_+$ ορίζουμε την σ.δ. του αποθεματικού για το χαρτοφυλάκιο αυτό της ασφαλιστικής εταιρίας με αρχικό κεφάλαιο $u$ και ρυθμό είσπραξης ασφαλίστρων $\kappa t$

$$R_t^u := u + \kappa t - S_t.$$

Αφού αναφερόμαστε στο ίδιο χαρτοφυλάκιο έχουμε ότι το αρχικό κεφάλαιο $u$ και ο ρυθμός είσπραξης ασφαλίστρων $\kappa t$ είναι ίδιος. Είναι προφανές ότι το αναμενόμενο αποθεματικό που πρέπει να κρατάει η ασφαλιστική επιχείρηση όταν μοντελοποιούμε με $(P, \mathbf{K}(\Theta))$-MRP είναι σταθερά μεγαλύτερο από εκείνο που πρέπει να κρατάει η εταιρία όταν το το χαρτοφυλάκιο μοντελοποιείται από την MPP($\Theta$). Σύμφωνα με τα παραπάνω η μοντελοποίηση με $(P, \mathbf{K}(\Theta))$-MRP προσφέρει μεγαλύτερη ασφάλεια στην εταιρία. Επιπλέον, αν υποθέσουμε ότι η ασφαλιστική είναι στο επίπεδο της μελέτης για την δημιουργία ενός νέου χαρτοφυλακίου, και έχει στατιστικά μεγέθη τα οποία προσπαθεί να μοντελοποιήσει, η μοντελοποίηση με MRP θα οδηγούσε σε μικρότερο αρχικό κεφάλαιο ή σε μικρότερο ρυθμό είσπραξης ασφαλίστρων. Αύτο θα είχε ως αποτέλεσμα το αποθεματικό του χαρτοφυλακίου να είναι στο ίδιο επίπεδο με το αντίστοιχο στη περίπτωση που το μοντελοποιούσαμε με MPP($\Theta$), ενω είτε θα είχε χαμηλότερο αρχικό κεφάλαιο είτε θα ήταν πίο ανταγωνιστική στην αγορά λόγω χαμηλότερων ασφαλίστρων.
Επιπλέον, μέσω των μεμειγμένων ανανεωτικών στοχαστικών διαδικασιών μπορούμε να αναπτύξουμε ένα υπόδειγμα στα πλαίσια της οδηγίας Solvency II στο οποίο το **Solvency Capital Requirement** (SCR) θα ήταν μικρότερο από εκείνο που θα προέκυπτε από το τυπικό υπόδειγμα που προτείνεται, ελαφρύνοντας οικονομικά την ασφαλιστική εταιρία. Η μοντελοποίηση των λειτουργικών κινδύνων γίνεται μέσω της MPP($\Theta$). Το επιπλέον ποσό το οποίο πρέπει να έχει στο αποθεματικό της η ασφαλιστική ορίζεται ως ένα ποσοστό επί της μέσης αναμενώμενης ζημίας από λειτουργικούς κινδύνους. Επομένως αν στο υπόδειγμά μας η $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ είχε υποτεθεί ότι έιναι μία $(P, \mathbf{K}(\Theta))$-MRP και όχι MPP($\Theta$) αυτό θα είχε ως αποτέλεσμα οι υποχρεώσεις τις ασφαλιστικής να ήταν μικρότερες.

# Παραρτήματα

Α΄. Βασικές έννοιες Θεωρίας Μέτρου

Β΄. Το Θεώρημα της Μονότονης Κλάσης

Γ΄. Τοπολογικές Έννοιες

Δ΄. Το Θεώρημα de Finetti

# Παράρτημα Α΄

# Βασικές έννοιες Θεωρίας Μέτρου

**Ορισμός Α΄.1** Έστω $\Omega$ ένα σύνολο. Μία $\sigma$-άλγεβρα υποσυνόλων του $\Omega$ είναι ένα σύστημα $\Sigma$ υποσυνόλων του $\Omega$, ώστε

**(a)** $\Omega \in \Sigma$

**(b)** για κάθε $E \in \Sigma$, το συμπλήρωμα του $\Omega \setminus E$ ανήκει στο $\Sigma$,

**(c)** για κάθε ακολουθία $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στο $\Sigma$, η ένωση της $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ ανήκει στο $\Sigma$.

**Ορισμός Α΄.2** Ένας **χώρος μέτρου** είναι μία τριάδα $(\Omega, \Sigma, \mu)$, όπου

**(a)** $\Omega$ είναι ένα σύνολο

**(b)** $\Sigma$ είναι μίασ-άλγεβρα υποσυνόλων του $\Omega$

**(c)** $\mu : \Sigma \longmapsto [0, \infty]$ είναι μία συνολοσυνάρτηση, ώστε

- **(α)** $\mu(\emptyset) = 0$,
- **(β)** για κάθε ακολουθία $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων της $\Sigma$ με $E_i \cap E_j = \emptyset$ για κάθε $i \neq j \in \mathbb{N}$ ισχύει $\mu\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\big) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(E_n)$.

Αν το $\mu$ είναι τέτοιο ώστε $\mu(\Omega) = 1$ τότε αυτό ονομάζεται **μέτρο πιθανότητας ή πιθανότητα** και συμβολίζεται συνήθως με $P$. Συνακόλουθα, ο αντίστοιχος χ.μ. ονομάζεται **χώρος πιθανότητας** (χ.π.) και συμβολίζεται με $(\Omega, \Sigma, P)$. Αν το $\mu$ είναι τέτοιο ώστε $\mu(\Omega) < \infty$, τότε αυτό ονομάζεται **πεπερασμένο μέτρο** και αν υπάρχει $\{\Omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στο $\Sigma$ με $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το $\mu(\Omega_n) < \infty$, τότε αυτό ονομάζεται **$\sigma$-πεπερασμένο μέτρο** και ο αντίστοιχος χ.μ. **χώρος πεπερασμένου ή $\sigma$-πεπερασμένου μέτρου**.

**Ορισμός Α′.3** Αν $\Upsilon$ είναι ένα σύνολο και $T$ μια $\sigma$-άλγεβρα στο $\Upsilon$, μία συνάρτηση $f : \Omega \longmapsto \Upsilon$ ονομάζεται $\Sigma$-$T$-**μετρήσιμη** ή απλώς **μετρήσιμη** αν και μόνο αν για κάθε $B \in T$ ισχύει $f^{-1}(B) \in \Sigma$. Ειδικά, αν $\Upsilon = \mathbb{R}$ και $T = \mathfrak{B}$, τότε η $f$ ονομάζεται **τυχαία μεταβλητή (τ.μ.)**, ενώ αν $\Upsilon = \mathbb{R}^n$ και $T = \mathfrak{B}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, τότε η $f$ ονομάζεται **($n$-διάστατο) τυχαίο διάνυσμα**.

**Ορισμός Α′.4** Μία οικογένεια $\mathcal{A}$ υποσυνόλων ενός συνόλου $\Omega$ λέγεται **άλγεβρα** στο $\Omega$ αν ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες

(i) $\Omega \in \mathcal{A}$

(ii) αν $A \in \mathcal{A}$, τότε $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$

(iii) αν $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, τότε $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$.

**Πρόταση Α′.5** *Έστω $\mathcal{A}$ μία άλγεβρα στο $\Omega$. Αν ισχύει μία από τις παρακάτω προτάσεις τότε η $\mathcal{A}$ είναι μία $\sigma$-άλγεβρα.*

*(i) Για κάθε αύξουσα ακολουθία $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στην $\mathcal{A}$ ισχύει $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.*

*(ii) Για κάθε φθίνουσα ακολουθία $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στην $\mathcal{A}$ ισχύει $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.*

*(iii) Για κάθε ακολουθία $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ξένων ανά δύο στοιχείων της $\mathcal{A}$ ισχύει $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.*

**Πρόταση Α′.6** *Έστω $(\Omega, \Sigma)$ και $(\Upsilon, T)$ δύο μετρήσιμοι χώροι και μία απεικόνιση $f : \Omega \longmapsto \Upsilon$. Τότε*

*(i) η $\{B \subset \Upsilon : f^{-1}(B) \in \Sigma\}$ είναι μία $\sigma$-άλγεβρα στο $\Upsilon$, και*

*(ii) αν $\mathcal{C}$ είναι οικογένεια υποσυνόλων του $\Upsilon$ ώστε $\sigma(\mathcal{C}) = T$, τότε η $f$ είναι $\Sigma$-$T$-μετρήσιμη αν και μόνο αν $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \Sigma$.*

**Ορισμός Α′.7** Η τετράδα $(\Omega, \mathcal{T}, \mathfrak{B}(\Omega), P)$ λέγεται **τοπολογικός χώρος πιθανότητας**, αν $(\Omega, \mathcal{T})$ είναι ένας τοπολογικός χώρος, $\mathfrak{B}(\Omega)$ είναι η $\sigma$-άλγεβρα Borel του $\Omega$, δηλαδή η ελάχιστη $\sigma$-άλγεβρα που παράγεται από την τοπολογία $\mathcal{T}$, και $(\Omega, \mathfrak{B}(\Omega), P)$ είναι ένας χώρος πιθανότητας.

**Ορισμοί Α′.8** Έστω $(\Omega, \mathcal{T}, \mathfrak{B}(\Omega), P)$ ένας τοπολογικός χώρος πιθανότητας. Τότε το μέτρο $P$ είναι:

(a) **εσωτερικά κανονικό ως προς τα κλειστά υποσύνολα του** $\Omega$, αν για κάθε $E \in \mathfrak{B}(\Omega)$ ισχύει

$$P(E) = \sup\{P(C) : C \subseteq E \quad \text{και} \quad \Omega \setminus C \in \mathcal{T}\},$$

(b) **εξωτερικά κανονικό ως προς τα ανοιχτά υποσύνολα του** $\Omega$, αν για κάθε $G \in \mathfrak{B}(\Omega)$ ισχύει

$$P(E) = \inf\{P(G) : G \supseteq E \quad \text{και} \quad G \in \mathcal{T}\}$$

.

**Ορισμοί Α΄.9** Η πιθανότητα $P$ ονομάζεται **$\tau$-προσθετική** αν για κάθε μη κενή προς τα πάνω κατευθυνόμενη οικογένεια ανοικτών συνόλων $\mathcal{G}$ ισχύει

$$P\left(\bigcup \mathcal{G}\right) = \sup\{P(G) : G \in \mathcal{G}\}.$$

**Πρόταση Α΄.10** *Αν το μέτρο $P$ είναι εσωτερικά κανονικό ως προς τα κλειστά υποσύνολα του $\Omega$ τότε είναι και εξωτερικά κανονικό ως προς τα ανοιχτά υποσύνολα του $\Omega$*

**Απόδειξη.** Διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned}
\inf\{P(G) : G \in \mathcal{T}, G \supseteq E\} &= \inf\{1 - P(F) : F^c \in \mathcal{T}, F \subseteq E^c\} \\
&= 1 - \sup\{P(F) : F^c \in \mathcal{T}, F \subseteq E^c\} = 1 - P(E^c).
\end{aligned}$$

Άρα

$$P(E) = \inf\{P(G) : G \in \mathcal{T}, G \supseteq E\}$$

απ'οπου έπεται το συμπέρασμα.

□

# Παράρτημα Β΄

# Το Θεώρημα Μονότονης Κλάσης

Σε αυτό το παράρτημα παρουσιάζουμε δύο θεωρήματα για $\sigma$-άλγεβρες. Τα θεωρήματα αυτά (ιδιαιτέρως το Θεώρημα Μονότονης Κλάσης) είναι μέρος της βασικής τεχνικής αποδείξεων των Μετροθεωρητικών Πιθανοτήτων και έχουν πολλές και μεγάλου φάσματος εφαρμογές.

**Λήμμα Β΄.1** *Έστω $\Omega$ ένα σύνολο και $\mathcal{D}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του $\Omega$. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα*

*(i)* **(Dyn1)** $\Omega \in \mathcal{D}$

**(Dyn2)** $B \setminus A \in \mathcal{D}$, *για* $A, B \in \mathcal{D}$ *και* $A \subseteq B$

**(Dyn3)** $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$, *για κάθε αύξουσα ακολουθία* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *υποσυνόλων στο* $\mathcal{D}$.

*(ii)* **(Dyn1)** $\emptyset \in \mathcal{D}$

**(Dyn2)** $\Omega \setminus A \in \mathcal{D}$, *για κάθε* $A \in \mathcal{D}$

**(Dyn3)** $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$, *για κάθε ακολουθία* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ξένων ανα δύο υποσυνόλων στο* $\mathcal{D}$.

**Απόδειξη.** *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)* Έστω ότι ισχύει η *(i)*. Τότε αφού $\Omega \in \mathcal{D}$ και σύμφωνα με την δεύτερη ιδιότητα της *(i)* έπεται ότι $\emptyset = \Omega \setminus \Omega \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{D}$. Επίσης για $\Omega, A \in \mathcal{D}$ με $A \subseteq \Omega$ πάλι από την ίδια ιδιότητα θα έχουμε ότι $\Omega \setminus A \in \mathcal{D}$. Ας είναι Α,Β δύο ξένα μεταξύ τους υποσύνολα του $\Omega$, τότε $A \subseteq \Omega \setminus B$ αφού $\forall \omega \in \Omega$ έχουμε

$$\omega \in A \Rightarrow \omega \notin B \Rightarrow \omega \in \Omega \setminus B.$$

Επομένως αφού το $\omega$ ήταν αυθαίρετο προκύπτει ότι $A \subseteq \Omega \setminus B$. Επιπλέον από τα παραπάνω και την δεύτερη ιδιότητα έπεται ότι $(\Omega \setminus B) \setminus A \in \mathcal{D}$. Αλλά $(\Omega \setminus B) \setminus A = X \setminus (A \cup B)$. Πράγματι έστω $\omega \in \Omega$ τότε διαδοχικά έχουμε:

$$\omega \in (\Omega \setminus B) \setminus A \Leftrightarrow \omega \in \Omega \setminus B, \omega \notin A \Leftrightarrow \omega \in \Omega, \omega \notin B, \omega \notin A \Leftrightarrow \omega \in \Omega, \omega \notin A \cup B,$$

δηλαδή ισοδύναμα προκύπτει ότι $\omega \in \Omega \setminus (A \cup B)$. Άρα $\forall \omega \in \Omega$ έπεται ότι

$$(\Omega \setminus B) \setminus A = \Omega \setminus (A \cup B) .$$

Επομένως και το συμπλήρωμα του συνόλου $(\Omega \setminus B) \setminus A$ που είναι το σύνολο $(A \cup B)$ θα ανήκει στην οικογένεια $\mathcal{D}$.
Θεωρούμε την οικογένεια $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ξένων ανα δύο στοιχείων της $\mathcal{D}$, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έπεται ότι η οικογένεια $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} := \{\bigcup_{i\leq n} A_i\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία αύξουσα ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{D}$. Επομένως,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left( \bigcup_{i\leq n} A_i \right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}.$$

*(ii)⇒(i)* Έστω ότι η *(ii)* ισχύει, τότε προφανώς αφού $\emptyset \in \mathcal{D} \Rightarrow \Omega \setminus \emptyset = \Omega \in \mathcal{D}$. Ας είναι $A$,$B$ δύο σύνολα της οικογένειας $\mathcal{D}$ για τα οποία ισχύει ότι $A \subseteq B$ τότε το $\Omega \setminus B \in \mathcal{D}$ και $\Omega \setminus B \cap A = \emptyset$ επομένως $A \cup (\Omega \setminus B) \in \mathcal{D}$ ως ένωση ξένων στοιχείων της $\mathcal{D}$. Αλλά

$$A \cup (\Omega \setminus B) = (\Omega \setminus A \cup B) = \Omega \setminus (B \setminus A)$$

δηλαδή

$$\big(X \setminus (B \setminus A)\big)^c = B \setminus A \in \mathcal{D}.$$

Έστω $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μία αύξουσα ακολουθία στοιχείων της οικογένειας $\mathcal{D}$, τότε τα σύνολα $A_0, A_1 \setminus A_0, A_2 \setminus A_1, \ldots$ δημιουργούν την ακολουθία $\{A_n \setminus A_{n-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ ξένων ανά δύο συνόλων στο $\mathcal{D}$ επομένως

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n / A_{n-1}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$$

□

**Ορισμός Β΄.2** Εάν ένα σύνολο $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ικανοποιεί τις συνθήκες *(i)* ή *(ii)* του Λήμματος Β΄.1 τότε λέγεται **κλάση Dynkin** υποσυνόλων του $\Omega$.

**Ορισμός Β΄.3** *(**Θεώρημα Μονότονης Κλάσης**) Έστω $\Omega$ ένα σύνολο και $\mathcal{D}$ μία κλάση Dynkin υποσυνόλων του $\Omega$. Υποθέτουμε ότι το σύνολο $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{D}$ είναι τέτοιο, ώστε $I \cap J \in \mathcal{I}$ για όλα τα $I, J \in \mathcal{I}$. Τότε η $\mathcal{D}$ περιέχει την $\sigma(\mathcal{I})$.*

**Απόδειξη.** **(a)** Έστω $\mathfrak{S}$ η οικογένεια όλων των κλάσεων Dynkin υποσυνόλων του $\Omega$ που περιέχουν το $\mathcal{I}$. Είναι εύκολο να δείξουμε, χρησιμοποιώντας το *(i)* και *(ii)* του Λήμματος Β΄.1, ότι η τομή $\Xi = \bigcap \mathfrak{S}$ είναι επίσης μία κλάση Dynkin. Αφού $\mathcal{D} \in \mathfrak{S}$, θα έχουμε $\Xi \subseteq \mathcal{D}$.
**(b)** Αν $H \in \Xi$ τότε η οικογένεια

$$\Xi_H := \{E \in \Xi : E \cap H \in \Xi\}$$

είναι μία κλάση Dynkin. Πράγματι
**(Dyn1)** $\Omega \cap H = H \in \Xi$ και άρα $\Omega \in \Xi_H$.
**(Dyn2)** Έστω $A, B \in \Sigma_\Xi$ με $A \subseteq B$. Τότε $A \cap H$,$B \cap H \in \Xi$ και $A \cap H \subseteq B \cap H$. Συνεπώς

$$(B \setminus A) \cap H = (B \cap H) \setminus (A \cap H) \in \Xi$$

και άρα $B \setminus A \in \Xi$.
**(Dyn3)** Έστω $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μία αύξουσα ακολουθία στην $\Xi_H$. Παρατηρούμε ότι το σύνολο $\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\big) \cap H$ μπορεί να γραφεί στην μορφή $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \cap H)$ και ότι η ακολουθία $\{A_n \cap H\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα ακολουθία στοιχείων της $\Xi$. Επομένως, αφού η $\Xi$ είναι μία κλάση Dynkin, έπεται ότι $\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\big) \cap H \in \Xi$, δηλαδή $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Xi_H$.
**(c)** Αν $\Xi_H \supseteq \mathcal{I}$, τότε $\Xi_H \in \mathfrak{S}$ και $\Xi_H = \Xi$.
Πράγματι, αν $\Xi_H \supseteq \mathcal{I}$, αφού η $\Xi_H$ είναι μία κλάση Dynkin από το **(b)**, προκύπτει ότι $\Xi_H \in \mathfrak{S}$ επομένως $\Xi_H = \Xi$.
**(d)** Για κάθε $G, H \in \Xi$ ισχύει $G \cap H \in \Xi$.
Έστω $I, J \in \mathcal{I}$ αυθαίρετα σύνολα. Είναι γνωστό ότι $I \cap J \in \mathcal{I}$. Αφού το $I \in \mathcal{I}$ είναι αυθαίρετο, έπεται ότι$\Xi_J \supseteq \mathcal{I}$, επομένως από το **(c)** έχουμε $\Xi_J = \Xi$ και $H \in \Xi_J$, δηλαδή $H \cap J \in \Xi$. Αφού το $J \in \mathcal{I}$ είναι αυθαίρετο, έπεται ότι $\Sigma_H \supseteq \mathcal{I}$, επομένως πάλι από το **(c)** έχουμε $\Xi_H = \Xi$ και $G \in \Xi_H$, δηλαδή $G \cap H \in \Xi$.
**(e)** $\emptyset \in \Xi$ και $G \cup H \in \Xi$ για κάθε $G, H \in \Xi$.
Πράγματι, αφού η $\Xi$ είναι κλάση Dynkin από το Λήμμα Β΄.1 έπεται ότι $\emptyset \in \Xi$. Επίσης για κάθε $G, H \in \Xi$ έχουμε

$$G \cup H = \Omega \setminus \big((\Omega \setminus G) \cap (\Omega \setminus H)\big) \in \Xi,$$

όπου η τελευταία σχέση είναι συνέπεια του **(d)** και του Λήμματος Β΄.1.
**(f)** Για κάθε ακολουθία $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων της $\Xi$ ισχύει $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n \in \Xi$.
Πράγματι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $H_n := \bigcup_{i\leq n} G_i$. Από το **(e)** έπεται ότι $H_n \in \Xi$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Όμως η $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα ακολουθία στην $\Xi$ και έτσι

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n \in \Xi$$

αφού η $\Xi$ είναι κλάση Dynkin.
**(g)** $\sigma(\mathcal{I}) \subseteq \Xi \subseteq \mathcal{D}$.
Πράγματι, από τα **(a)** και **(f)** έπεται ότι η $\Xi$ είναι μία $\sigma$-άλγεβρα υποσυνόλων του $\Omega$, που περιέχει το $\mathcal{I}$. Άρα $\sigma(\mathcal{I}) \subseteq \Xi \subseteq \mathcal{D}$.

□

**Παρατήρηση Β΄.4** Η ονομασία κλάση Dynkin ή σύστημα Dynkin έχει προταθεί από τον H. Bauer (βλ. [3]) προς τιμή του E.B. Dynkin (1924 - ), ο οποίος χρησιμοποιεί αυτή την έννοια με την ονομασία λ-σύστημα στο βιβλίο του για στοχαστικές διαδικασίες (1959). Αυτά τα συστήματα συνόλων είχαν ήδη χρησιμοποιηθεί από τον W. Sierpinski (βλ. [35] σελ. 710-714).

**Πόρισμα Β΄.5** *Έστω $\Omega$ ένα σύνολο και $\mu,\nu$ δύο μέτρα στο $\Omega$ με πεδία ορισμού τις $\sigma$-άλγεβρας $\Sigma$ και $T$ αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι $\mu(\Omega) = \nu(\Omega) < \infty$ και ότι η οικογένεια $\mathcal{I} \subseteq \Sigma \cap T$ είναι κλειστή ως προς τι πεπερασμένες τομές, ώστε $\mu(I) = \nu(I)$ για κάθε $I \in \mathcal{I}$. Τότε $\mu|\sigma(\mathcal{I}) = \nu|\sigma(\mathcal{I})$.*

**Απόδειξη.** **(a)** Η οικογένεια

$$\mathcal{D} := \{H \in \Sigma \cap T : \mu(H) = \nu(H)\}$$

είναι μία κλάση Dynkin υποσυνόλων του $\Omega$.
Πράγματι,
**(Dyn1)** Προφανώς $\emptyset \in \mathcal{D}$.
**(Dyn2)** Γιά κάθε $A \in \mathcal{D}$ ισχύει $A^c \in \mathcal{D}$, αφού για κάθε $A \in \mathcal{D}$ έχουμε

$$\mu(A^c = \mu(\Omega) - \mu(A) = \nu(\Omega) - \nu(A) = \nu(A^c).$$

**(Dyn3)** Για κάθε ακολουθία $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ξένων ανά δύο στοιχείων της $\mathcal{D}$ ισχύει $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$, αφού

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \nu(A_n) = \nu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big).$$

**(b)** $\mu|\sigma(\mathcal{I}) = \nu|\sigma(\mathcal{I})$.
Πράγματι, αφού $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{D}$ από το Θεώρημα Β΄.3 έπεται ότι $\sigma(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{D}$, δηλαδή $\mu|\sigma(\mathcal{I}) = \nu|\sigma(\mathcal{I})$.

□

**Πόρισμα Β΄.6** *Έστω $\mu$ και $\nu$ δύο μέτρα στον $\mathbb{R}^d$, όπου $d \geq 1$, ώστε να ορίζονταθ και να συμπίπτουν επάνω σε όλα τα διαστήματα της μορφής*

$$(-\infty, a] = \{x : x \leq \alpha\} = \{(x_1, \ldots, x_d) : x_i \leq \alpha_i \forall i \leq d\}$$

*για $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{R}^d$. Υποθέτουμε ότι $\mu(\mathbb{R}^d) < \infty$. Τότε τα $\mu$ και $\nu$ συμπίπτουν επάνω στην $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$.*

**Απόδειξη.** Θέτουμε $\Omega := \mathbb{R}^d$ και έστω $\mathcal{I}$ το σύνολο των διαστημάτων $(-\infty, \alpha]$. Τότε $I \cap J \in \mathcal{I}$ για όλα τα $I, J \in \mathcal{I}$ αφού $(-\infty, \alpha] \cap (-\infty, \beta] = (-\infty, \alpha \wedge \beta]$, όπου $\alpha \wedge \beta := (\min\{\alpha_1, \beta_1\}, \ldots, \min\{\alpha_d, \beta_d\})$ αν $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d), \beta = (\beta 1, \ldots, \beta d) \in \mathbb{R}^d$. Επίσης, θέτοντας $n := (n, \ldots, n) \in \mathbb{N}^d$, έχουμε

$$\nu(\mathbb{R}^d) = \lim_{n\to\infty} \nu\big((-\infty, n]\big) = \lim_{n\to\infty} \mu\big((-\infty, n]\big) = \mu(\mathbb{R}^d).$$

Επομένως ικανοποιούνται όλες οι συνθήκες του Πορίσματος Β΄.5 και έτσι $\mu|\sigma(\mathcal{I}) = \nu|\sigma(\mathcal{I})$. Όμως $\sigma(\mathcal{I}) = \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ (βλ. π.χ [8], Lemma 121J).

□

**Θεώρημα Β΄.7** *Έστω ένα σύνολο $\Omega$ και $\mathcal{A}$ μία άλγεβρα υποσυνόλων του $\Omega$. Υποθέτουμε $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ είναι μία οικογένεια συνόλων τέτοια ώστε*

**(α)** $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{E}$ *για κάθε αύξουσα ακολουθία $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στην $\mathcal{E}$,*

**(β)** $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{E}$ *για κάθε φθίνουσα ακολουθία $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στην $\mathcal{E}$,*

**(γ)** $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}$.

*Τότε η $\mathcal{E}$ περιέχει την σ-άλγεβρα υποσυνόλων του $\Omega$ που παράγεται από την $\mathcal{A}$.*

**Απόδειξη.** **(a)** Έστω $\mathfrak{S}$ η κλάση όλων των οικογενειών $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ που ικανοποιούν τις συνθήκες **(α)**-**(β)**. Τότε η τομή τους $Z \bigcap \mathfrak{S}$ θα ικανοποιεί επίσης τις ιδιότητες **(α)**-**(γ)** αφού $\mathcal{E} \in \mathfrak{S}$ και $Z \subseteq \mathcal{E}$.
**(b)** Εάν $H \in Z$, τότε

$$Z_H = \{E : E \in Z, E \cap H \in Z\}$$

ικανοποιεί τις συνθήκες **(α)**-**(β)**.
Πράγματι, αν $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία αύξουσα ακολουθία στην $Z_H$, τότε η $\{A_n \cap H\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία αύξουσα ακολουθία στην $Z$, άρα

$$\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \cap H = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap H) \in Z$$

επομένως $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in Z_H$. Αντίστοιχα, αν $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία φθίνουσα ακολουθία στην $Z_H$, τότε η $\{B_n \cap H\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία φθίνουσα ακολουθία στην $Z$, άρα

$$\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\Big) \cap H = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (B_n \cap H) \in Z$$

επομένως $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in Z_H$. Επιπλέον, αν $E \cap H \in Z$ για κάθε $E \in \mathcal{A}$, έτσι ώστε η $Z_H$ να ικανοποιεί και την συνθήκη **(γ)**. Τότε $Z_H \in \mathfrak{S}$ και θα πρέπει να είναι ίση με την $Z$.
**(c)** Αν $E \cap H \in Z$ για κάθε $E \in \mathcal{A}$, τότε η $Z_H$ ικανοποιεί την **(γ)** και ισχύει $Z_H \in \mathfrak{S}$ και $Z_H = Z$.
Προφανώς, αν για κάθε $E \in \mathcal{A}$ ισχύει $E \cap H \in Z$, τότε $E \in Z_H$, δηλαδή ισχύει η **(γ)**. Συνεπώς $Z_H \in \mathfrak{S}$ και $Z \subseteq Z_H$. Από την τελευταία σχέση μαζί με την $Z \supseteq Z_H$ έπεται ότι $Z_H = Z$.
**(d)** Για κάθε $G, H \in Z$ ισχύει $G \cap H \in Z$.
Πράγματι, έστω $E, F \in \mathcal{A}$. Τότε $E \cap F \in \mathcal{A}$. Αφού το $E$ είναι αυθαίρετο, από την **(c)** έπεται ότι $Z_F = Z$ και $H \in Z_F$, δηλαδή $H \cap F \in Z$. Αφού το $F$ είναι αυθαίρετο, πάλι από την **(c)** προκύπτει ότι $Z_H = Z$ και $G \in Z_H$, δηλαδή $G \cap H \in Z$'
**(e)** $Z^* = \{\Omega \setminus H : H \in Z\} \in \mathfrak{S}$.
Πράγματι, έστω $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μία αύξουσα ακολουθία στοιχείων του $Z^*$, τότε η $\{\Omega \setminus A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ θα είναι μία φθίνουσα ακολουθία στην $Z$. Άρα

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\Omega \setminus A_n) \in Z^*.$$

Αντίστοιχα, έστω $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μία φθίνουσα ακολουθία στοιχείων του $Z^*$, τότε η $\{\Omega\setminus B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ θα είναι μία αύξουσα ακολουθία στην $Z$. Άρα

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \Omega \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\Omega \setminus B_n) \in Z^*.$$

Έστω $E \in \mathcal{A}$ τότε $\Omega \setminus E \in \mathcal{A}$ άρα $\Omega \setminus E \in Z$ και επομένως $E \in Z^*$.
**(f)** Από τα βήματα **(c)**, **(d)** και **(e)** και αφού $\Omega \in Z$ και το $Z$ είναι κλειστό ως προς τις μονότονες ενώσεις έπεται ότι το $Z$ είναι μία $\sigma$-άλγεβρα υποσυνόλων του $\Omega$ . Επομένως η $\sigma$-άλγεβρα που παράγεται από την $\mathcal{A}$ περιέχεται στην $\Sigma$ και επομένως στην $\mathcal{E}$.

□

**Σημειώσεις και Σχόλια Β′.8** **(a)** Τα Θεωρήματα Β′.3 και Β′.7 σχετίζονται με το ερώτημα :
αν $\mathcal{I}$ είναι μία οικογένεια υποσυνόλων ενός συνόλου $\Omega$, τι πράξεις πρέπει να κάνουμε για να χτίσουμε την $\sigma$-άλγεβρα που παράγεται από το $\mathcal{I}$;
Για αυθαίρετο $\mathcal{I}$, χρειάζονται τα συμπληρώματα και οι ενώσεις ακολουθιών. Τα παραπάνω θεωρήματα μας λένε ότι, αν το $\mathcal{I}$ έχει μία κάποια (αλγεβρική) δομή, τότε μπορούμε να χτίσουμε την $\sigma(\mathcal{I})$ με λιγότερες πράξεις, π.χ. αν το $\mathcal{I}$ είναι μία άλγεβρα υποσυνόλων, τότε οι μονοτονικές ενώσεις και τομές είναι αρκετές.
**(b)** Το θεώρημα Β′.7 υπάρχει σε μία παρόμοια μορφή στον J. von Neumann [28] σελ. 87 Theorem 10.1.3. Ο A. Rosenthal [31] σελ. 970-971 χρησιμοποιεί διάφορους δυνατούς ορισμούς των συνόλων Borel και παρατηρεί ότι ο H. Lebesgue είχε ήδη αποδείξη μία μορφή του Θεωρήματος Β′.7 για $\Omega = \mathbb{R}^d$ και $\mathcal{I}^d$ την οικογένεια των ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$, το 1905.

# Παράρτημα Γ′

# Τοπολογικές Έννοιες

**Ορισμός Γ′.1** Έστω $\Omega$ ένα μη κενό σύνολο και μία απεικόνιση $d : \Omega \times \Omega \longmapsto [0, \infty)$. Η απεικόνιση $d$ καλείται **μετρική σχέση επί του** $\Omega$ αν ικανοποιεί τα ακόλουθα αξιώματα

(i) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$ για κάθε $x, y \in \Omega$

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ για κάθε $x, y \in \Omega$

(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ για κάθε $x, y, z \in \Omega$.

Το διατεταγμένο ζεύγος $(\Omega, d)$ καλείται **μετρικός χώρος**.

**Ορισμός Γ′.2** Μία ακολουθία $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ σημείων του μετρικού χώρου $(\Omega, d)$ καλείται **ακολουθία Cauchy** αν για κάθε $\varepsilon$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ με $n, m > n_0$ να ισχύει $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

**Ορισμός Γ′.3** Ένας μετρικός χώρος $(\Omega, d)$ καλείται **πλήρης** αν κάθε ακολουθία Cauchy του χώρου $\Omega$ συγκλίνει σε κάποιο σημείο του $\Omega$.

**Ορισμός Γ′.4** Μία οικογένεια $\mathcal{T}$ υποσυνόλων ενός μη κενού συνόλου $\Omega$ καλείται **τοπολογία** επί του $\Omega$ αν ικανοποιεί τα παρακάτω αξιώματα

(i) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{T}$

(ii) η οικογένεια $\mathcal{T}$ είναι κλειστή ως προς τις πεπερασμένες τομές

(iii) η οικογένεια $\mathcal{T}$ είναι κλειστή ως προς τις (αυθαίρετες) ενώσεις.

Αν η $\mathcal{T}$ είναι μία τοπολογία επί του $\Omega$, τότε το ζεύγος $(\Omega, \mathcal{T})$ καλείται **τοπολογικός χώρος**.

**Ορισμός Γ΄.5** Ένα υποσύνολο $A$ ενός τοπολογικού χώρου $(\Omega, \mathcal{T})$ καλείται **πυκνό** στον $\Omega$ εάν $clA = \Omega$, όπου $clA := \bigcap\{F : F^c \in \mathcal{T}, A \subseteq F\}$ είναι η **κλειστότητα** (closure) ή η **κλειστή θήκη** του $A$.

**Ορισμός Γ΄.6** Ένας τοπολογικός χώρος $(\Omega, \mathcal{T})$ καλείται $T_2$-**χώρος** ή **χώρος Hausdorff** αν για κάθε δύο, διάφορα μεταξύ τους, σημεία $x$ και $y$ του $\Omega$ υπάρχουν $U, V \in \mathcal{T}$, έτσι ώστε $U \cap V = \emptyset$, $x \in U$ και $y \in V$.

**Ορισμός Γ΄.7** Ένας τοπολογικός χώρος $(\Omega, \mathcal{T})$ καλείται **διαχωρίσιμος** αν υπάρχει ένα αριθμήσιμο υποσύνολο $A$ του $\Omega$ το οποίο να είναι πυκνό στον $\Omega$.

**Ορισμός Γ΄.8** Έστω $(\Omega, \mathcal{T}_X)$ και $(\Upsilon, \mathcal{T}_\Upsilon)$ δύο τοπολογικοί χώροι και μία απεικόνιση $f : \Omega \longmapsto \Upsilon$. Αν η απεικόνιση $f$ είναι αμφισυνεχής, $1-1$ και επί τότε καλείται **ομοιομορφισμός** και οι αντίστοιχοι τοπολογικοί χώροι θα καλούνται **ομοιομορφικοί**.

**Ορισμός Γ΄.9** Ένας διαχωρίσιμος τοπολογικός χώρος $(\Omega, \mathcal{T})$ ομοιομορφικός με έναν πλήρη μετρικό χώρο καλείται **πολωνικός χώρος**.

**Ορισμός Γ΄.10** Ένας μετρήσιμος χώρος $(\Omega, \Sigma)$ λέγεται **τυπικός χώρος Borel** (standard Borel space) αν είναι ισομορφικός με έναν χώρο $(A, \mathfrak{B}(A))$ όπου $A$ ένα Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}$, δηλαδή αν υπάρχει $A \in \mathfrak{B}$ και συνάρτηση $f : \Omega \longmapsto A$ ώστε η $f$ να είναι $1-1$ και επί και $\Sigma$-$\mathfrak{B}(A)$-μετρήσιμη και η $f^{-1}$ να είναι $\mathfrak{B}(A)$-$\Sigma$-μετρήσιμη .

# Παράρτημα Δ΄

# Το Θεώρημα de Finetti

Το φημισμένο κλασσκό Θεώρημα de Finetti (1931) λέει ότι μία ανταλλάξιμη ακολουθία τυχαίων μεταβλητών με τιμές στο $\{0,1\}$ είναι μία μονοσήμαντα ορισμένη μίξη ανεξάρτητων και ισοκατανεμημένων ακολουθιών Bernoulli. Ακριβέστερα:
έστω $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών με τιμές στο $\{0,1\}$ και έστω ότι ισχύει η ισότητα

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_{\sigma(1)}, \ldots, X_n = x_{\sigma(n)})$$

για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in \{0,1\}$ και για όλες τις μεταθέσεις $\sigma$ του $\{1, \ldots, n\}$. Τότε υπάρχει ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας $\mu$ επάνω στο $[0,1]$ ώστε

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \int_0^1 \theta^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}\mu(d\theta).$$

Έχουν βρεθεί πολλές γενικεύσεις και παρόμοια αποτελέσματα μέχρι σήμερα. Υπάρχουν επίσης διάφορα εξαιρετικά άρθρα επισκόπησης, βλέπε π.χ. τα άρθρα των Kingman [18] (1984), Diaconis και Freedman [4] (1984), Aldous [2] (1985) και Lauritzen [22] (1984).
Ένας πρώτος στόχος ήταν η επέκταση του θεωρήματος de Finetti από το $\{0,1\}$ σε περισσότερο γενικούς χώρους καταστάσεων. Ο ίδιος ο de Finetti [13] (1937) γενίκευσε το θεώρημα του για χώρο καταστασεων το $\mathbb{R}$. Αρκετά χρόνια αργότερα ο Dynkin [6] (1953) αντικατέστησε το $\mathbb{R}$ με πιό γενικούς χώρους που είναι (κατά κάποια έννοια) διαχωρίσιμοι. Μία πολύ ικανοποιητική γενίκευση έγινε από τους Hewitt και Savage [16] (1955). Αυτοί απέδειξαν, ότι ο χώρος $\{0,1\}$ μπορεί να αντικατασταθεί από οποιονδήποτε συμπαγή τοπολογικό χώρο Haussdorf, αποτέλεσμα που μπορεί να επεκταθεί π.χ. σε πολωνικούς ή τοπικά συμπαγείς χώρους. Οι Dubius και Freedman [5] (1979) απέδειξαν ότι γενικά το Θεώρημα de Finetti δεν ισχύει χωρίς κάποιες τοπολογικές υποθέσεις.
Η πιό γενική μορφή (πριν το αποτέλεσμα του [26]) του Θεωρήματος de Finetti είναι η εξής (βλ. π.χ Kallenberg [17], Theorem 1.1)

**Θεώρημα Δ΄.1** *Έστω $(\Omega, \Sigma, P)$ χώρος πιθανότητας, $\Upsilon$ ένας τυπικός χώρος Borel και $T$ μία σ-άλγεβρα υποσυνόλων του $\Upsilon$. Αν επιπλέον $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία ακολουθία $\Sigma$-$T$-μετρήσιμων απεικονίσεων τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

*(i)* *Η* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *είναι ανταλλάξιμη.*

*(ii)* *Υπάρχει μία σ-υποάλγεβρα* $\mathcal{F}$ *της* $\Sigma$ *ώστε η* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *να είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητη και ισοκατανεμημένη δοθείσης της* $\mathcal{F}$.

*(iii)* *Υπάρχει μία σ-υποάλγεβρα* $\mathcal{F}$ *της* $\Sigma$ *και μία οικογένεια* $\{Q_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ *μέτρων πιθανότητας επάνω στην* $T$, *ώστε η συνάρτηση* $\omega \longmapsto Q_\omega(B)$ *να είναι* $\mathcal{F}$*-μετρήσιμη για κάθε σταθερό* $B \in T$ *και να ισχύει*

$$\int_F Q_\omega^I(H)R(d\omega) = P(F\cap X^{-1}(H))$$

*για κάθε* $H \in T^I$ *και* $F \in \mathcal{F}$, *όπου* $R := P|\mathcal{F}$ *και* $X := (X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots)$.

# Βιβλιογραφία


[1] P. Albrecht: *Über einige Eigenshaften des gemischten Poissonprozesses*, Mitt. Ver. Schweiz. Vers. Math. 81, 241-250.

[2] D.J. Aldous: *Exchangeability and related topics*, ECOLE D'ETE DE PROBABILITES DE SAINT-FLOUR XIII , 1983

[3] H. Bauer: *Mass und Integrationstheorie*,Berlin-New York: W. de Gruyter und Co. 1990,2. Aull 1992

[4] P. Diaconis and N. Freedman: *Partial Exchangeability and Sufficiency*, Proc. Indian Stat. Inst. Golden Jubilee Int'l. Conf.

[5] L. Dubius and N. Freedman: *Exchangeable processes need not be mixtures of independent, identically distributed random variables*, Z. Warhrsch. verw, Gebrete 48 115-132 (1979).

[6] E.B. Dynkin: *Klassy okvivalentnyh Slučaǐ reličin*, Uspehi Matematičedkih Nauk 8 vol. 54, 125-134 (1953)

[7] W. Feller: *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Volume 2*. 2nd ed. Wiley, New York (1970)

[8] D.H. Fremlin: *Measure Theory*,Volume I (2001).

[9] D.H. Fremlin: *Measure Theory*,Volume IV (2003).

[10] J. Grandell: *Mixed Poisson Processes*, Monographs on Statistics and Applied Probability, Chapman-Hall (1997).

[11] J. Grandell: *Doubly Stochastic Poisson Processes*,Lecture Notes in Mathematics, Sprienger-Verlag (1976).

[12] A.M. Faden: *The existence of regular conditional probabilities: Necessary and sufficient conditions*,Ann. Prob. 13 (No. 1),288-298 (1985).

[13] B. de Finetti: *La Privision: ses lois logiques, ses sources subjectives*, Annales de l'Institut Henri Poincare 7 1-68, english translation: "Foresight: its Logical Laws,

Its Subjective Sources," in H. E. Kyburg and H. E. Smokler (eds), Studies in Subjective Probability, 99-158 New York: Wiley ,2nd edition (1980).

[14] Σ. Ηλιάδης : *Σημειώσεις Γενικής Τοπολογίας: Μέρος Α, Πανεπιστήμιο Πατρών*, (2005).

[15] W.J. Huang: *On the Characterization of Point Processes with the Exchangeable and Markov Properties*, Sankhya, Volume 52, Series A, Pt. 1, pp. 16-27 (1990).

[16] E. Hewitt and L.J Savage: *Symmetric measures on Cartesian products*, Transactions of the American Mathematical Society, 80:470•501

[17] O. Kallenberg: *Probabilistic Symmetries and Invariance Principles*, Springer (2005).

[18] J. Kingman: *Uses of Exchangeability*, Ann. Probab. 6 ,183-197 (1978). Stat.: Applications and New Directions , J. K. Ghosh and J. Roy (eds.), Indian Statistical Institute, Calcutta, 205-236 (1984). Springer Series Lecture Notes in Mathematics, 1985, Volume 1117/1985, 1-198 (1985).

[19] Γ. Κουμουλλής και Σ. Νεγρεπόντης : *Θεωρία Μέτρου*, Εκδόσεις Συμμετρία (1991).

[20] Μ. Κούτρας : *Εισαγωγή στις Πιθανότητες,Θεωρία και Εφαρμογές: Μέρος Ι*, Εκδόσεις Σταμούλη, Πειραιάς, (2005).

[21] Μ. Κούτρας : *Εισαγωγή στις Πιθανότητες,Θεωρία και Εφαρμογές: Μέρος ΙΙ*, Εκδόσεις Σταμούλη, Πειραιάς, (2005).

[22] S.L. Lauritzen: *Extreme point models in statistics*, Scand. J. Statist. 11, 65-91 (1984).

[23] O. Lundberg: *On random processes and their applcation tosickness and accident statistics*, 1st ed. 1940, Almqvist och Wiksell, Uppsala (1964).

[24] Δ.Π. Λυμπερόπουλος : *Martingales στη Θεωρία Κινδύνου με Εφαρμογές στα Χρηματοοικονομικά*, Διπλωματική εργασία, (2006).

[25] D.P. Lyberopoulos and N.D. Macheras : *A construction of mixed Poisson Processes via Disintegrations*,to appear in Math. Slovaka

[26] D.P. Lyberopoulos and N.D. Macheras : *Some characterizations and a construction of mixed renewal processes*, preprint of 2011.

[27] D.P. Lyberopoulos and N.D. Macheras: *On various definitions of mixed Poisson processes*, preprint of 2011.

[28] J. von Neuman: *Functional operators, Vol I: Measures and Integrals*, Princeton, N.J, Princeton Univ. Press (1950)

[29] N.Δ. Μαχαιράς : *Σημειώσεις Πραγματικής Ανάλυσης*, Πειραιάς 2005.

[30] N.Δ. Μαχαιράς : *Σημειώσεις Στοχαστικής Ανάλυσης*, Πειραιάς 2006.

[31] A. Rosenthal: *Neuere Untersuchunejen über Funktionen reeller Veränderliehen*, Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften II,3, Art. II C9. Leipzig-Berlin:B.G Teubner (1924).

[32] K.D. Schmidt: *Lectures on Risk Theory*, B.G. Teubner, Stuttgart (1996).

[33] C.O. Segerdahl: *Stochastic Processes and Practical Working Models or Why is the Polya process approach defective in modern practice and how to cope with its deficiencies*, Skand. AktuarTidskr., 146-166 (1970).

[34] J.G. Shanthikumar: *Lifetime Deistribution of Consecutive-k-out-of-n:F Systems With Exchangeable Lifitimes*, IEEE Transactions on Reliability, Vol. R-34, NO 5. (1985).

[35] W. Sierpinski: *Euvres choisis,Tome II*, Warszawa, PWN-Editions Scientifiques de Palague (1975).