ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ – ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΠΜΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

# ΑΛΓΟΡΙΘΜΙΚΗ & ΕΞΕΛΙΚΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΝΑΣΟΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΥ

ΕΠΙΒΛΕΨΗ:
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΤΣΙΧΡΙΝΤΖΗΣ

ΑΘΗΝΑ, 2012

# Πανεπιστήμιο Πειραιώς – Τμήμα Πληροφορικής

Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Πληροφορική»

**Μεταπτυχιακή Διατριβή**

| | |
|---|---|
| Τίτλος Διατριβής | Αλγοριθμικη & Εξελικτική Θεωρία Παιγνίων |
| Ονοματεπώνυμο Φοιτητή | Αθανασίου – Σιούλας Αθανάσιος |
| Πατρώνυμο | Φώτιος |
| Αριθμός Μητρώου | ΜΠΠΛ/ 06036 |
| Επιβλέπων | Καθηγητής Τσιχριντζής Γεώργιος |

Ημερομηνία Παράδοσης **ΑΠΡΙΛΙΟΣ, 2012**

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

**Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή**

| | | |
|---|---|---|
| (υπογραφή) | (υπογραφή) | (υπογραφή) |
| Όνομα Επώνυμο<br>Βαθμίδα | Όνομα Επώνυμο<br>Βαθμίδα | Όνομα Επώνυμο<br>Βαθμίδα |

# ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η Θεωρία Παιγνίων κατέχει πλέον εξέχουσα θέση σε διάφορους επιστημονικούς τομείς, ενώ το ερευνητικό ενδιαφέρον που παρουσιάζει, αντί να κοπάζει ολοένα και αυξάνεται. Μιλώντας για Θεωρία Παιγνίων, ουσιαστικά αναφερόμαστε σε μοντέλα κατανόησης φαινομένων, συμπεριφορών και καταστάσεων, τα οποία παρατηρούνται όταν κάποιες εγωιστικές οντότητες (παίχτες) με στρατηγικές και συμφέροντα αλληλεπιδρούν. Ξεκίνησε ως ένας απλός κλάδος της οικονομικής επιστήμης και κατέληξε στις μέρες μας να χαρακτηρίζεται ως μια θεωρία ικανή να ενοποιήσει όλες τις κοινωνικές επιστήμες. Αυτό συμβαίνει τόσο εξαιτίας της πληθώρας των προβλημάτων – παιχνιδιών, με τα οποία καταπιάνεται και αναλύει, όσο και εξαιτίας της λύσης που προβάλει. Αλλά κυρίως λόγω της αλήθειας, που προκύπτει από την ανάλυση και κατανόηση των παιχνιδιών, η οποία δεν είναι άλλη από το γεγονός ότι η επιδίωξη του ατομικού συμφέροντος δεν θα καταφέρει ποτέ να προάγει μια γενικότερη κοινωνική ευημερία και τελικά μόνο ζημία μπορεί να επιφέρει στο κοινωνικό σύνολο και κατ' επέκταση στο ίδιο το άτομο.

Η έκφραση της αλήθειας αυτής, καθώς και η μέθοδος και τα εργαλεία, που προσφέρονται κυρίως μέσω της Θεωρίας Υπολογισμού για την επίτευξή της, αποτελεί τον βασικό στόχο της παρούσας μελέτης. Έτσι παρουσιάζεται το ιστορικό, επιστημονικό υπόβαθρο, η δημιουργία και η εξέλιξή της από Θεωρία Παιγνίων σε Αλγοριθμική και Εξελικτική Θεωρία Παιγνίων. Για την καλύτερη και ευκολότερη κατανόησή της παρουσιάζονται συγκεκριμένα παραδείγματα, δίνονται λύσεις προβλημάτων σε αλγοριθμικό επίπεδο και αναλύονται έννοιες και προβλήματα, σε επίπεδο τέτοιο, ώστε να μπορούν να γίνουν αντιληπτές από τον καθένα ανεξαρτήτου εκπαιδευτικής κατάρτισης.

Αρχικά λοιπόν παρουσιάζονται κάποια ιστορικά στοιχεία, ώστε να γίνει αντιληπτό το επιστημονικό πλαίσιο της εποχής της θεμελίωσης της Θεωρίας Παιγνίων και διασαφηνίζονται ορισμένες βασικές έννοιες, απαραίτητες για την περεταίρω κατανόησή της. Έπειτα ακολουθεί η επεξήγηση του θεωρήματος minimax και η ανάλυση του παιχνιδιού «Το Δίλημμα του Κρατουμένου». Το πρώτο αποτελεί τον θεμέλιο λίθο ενασχόλησης των οικονομολόγων με παιχνίδια δύο παιχτών, ενώ το δεύτερο είναι το αντιπροσωπευτικότερο παιχνίδι της θεωρίας σε επίπεδο δομής, ισορροπίας και κατανόησής της.

Στη συνέχεια γίνεται μια εκτενή αναφορά στην κλασική Θεωρία Παιγνίων, όπου παρουσιάζονται οι εκλπηκτικές ιδέες του θεμελιωτή της Θεωρίας Παιγνίων John F. Nash, το Θεωρήμα και το σπουδαιότερο όλων την Ισορροπία Nash, η οποία αποτελεί ως σήμερα τη λύση ή την κατάληξη των εκάστοτε προβλημάτων ή παιχνιδιών αντίστοιχα. Ακολουθεί αναφορά στην εξέλιξη ή εκλέπτυνση που είχαν κάποιες από τις βασικές ιδέες και προβλήματα που έθεσε ο Nash, σε θεωρητικό αλλά και αλγοριθμικό επίπεδο.

Στα επόμενα δύο κεφάλαια παρουσιάζονται η Αλγοριθμική και η Εξελικτική Θεωρία Παιγνίων. Όσον αφορά την πρώτη, επεξηγούνται βασικές έννοιες και εργαλεία, όπως η Πολυπλοκότητα των αλγορίθμων αναζήτησης ισορροπιών Nash, και ο Αλγοριθμικός Σχεδιασμός Μηχανισμών (AMD), ο οποίος κρίνεται πλέον απαραίτητος για την καλύτερη απόδοση και έκβαση πολύπλοκων δικτύων και καταστάσεων. Παρουσιάζονται επίσης τα σημαντικότερα σύγχρονα προβλήματα, τα οποία αποτελούν πολύ σημαντικό πεδίο έρευνας, όπως ο Χρωματισμός Γραφημάτων, η Διαδικτυακή Ισορροπία και η Συμφόρηση Δικτύου. Τέλος αναλύονται οι εξελικτικοί αλγόριθμοι και οι φυσικές διαδικασίες, τις οποίες μιμούνται, με συγκεκριμένα παραδείγματα.

Η παρούσα μελέτη ολοκληρώνεται με απτά παραδείγματα και εφαρμογές της Θεωρίας Παιγνίων που βιώνουμε ή μπορούμε να αντιληφθούμε όλοι στη καθημερινότητά μας. Με τον τρόπο αυτό και με τα συμπεράσματα που ακολουθούν, η παρούσα διατριβή αποβλέπει στην εξύμνηση της σπουδαιότητας της Θεωρίας Παιγνίων και στην ευαισθητοποίηση του εκάστοτε αναγνώστη, ώστε να γίνει πραγματικότητα η πρακτική ενασχόληση όλων μας με την εν λόγω θεώρια για ένα καλύτερο και κοινωνικά πιο ανθρώπινο περιβάλλον.

# ABSTRACT

The Theory of Games possesses henceforth distinguished place in various scientific sectors, while the inquiring interest that it presents, is rather increased than diminished over the years. Speaking for Theory of Games, substantially we were reported in models of comprehension of phenomena, behaviors and situations, which are observed when some selfish entities (players) with strategies and interests interact. It began as one simple branch of economic science and it led to our days to be characterized as a theory capable to unify all social sciences. This happens not only because of the abundance of problems - games, with which it deals with and analyzes, but also because of the solution that it appears. But mainly because of the truth, that results from the analysis and comprehension of games, which is not other than the fact that the objective of individual interest will never accomplish to promote social prosperity and finally it can only makes things worst for the society and therefore the individual himself.

The expression of this truth, as well as the method and the tools, which are offered mainly via the Theory of Calculation, constitutes the main objective of this study. Thus is presented historical, scientific background, the creation and development from Theory of Games to Algorithmic and Evolutionary Game Theory. For better and easier comprehension are presented specific examples, are given solutions of problems in algorithmic level and analyzed concepts and problems, in such a level, so that they can be understood from anyone regardless educational training.

Initially are presented certain historical elements, in order to be clear the scientific frame of the season of foundation of Game Theory and are explained certain basic concepts, essential for understanding later on. Then it follows the explanation of minimax theorem and the analysis of the game “The Prisoner‘s Dilemma”. The first one is the reason why economists started dealing with games of two players, while the second one is the most represented game of Game Theory in terms of structure, equilibrium and comprehension.

Afterwards there is an extensive report in the classic Game Theory, where are presented the amazing ideas of perhaps the founding father of Game Theory, John F. Nash, his theorem and more important of all Nash Equilibrium, which constitutes until today the solution or the conclusion of each problem or game respectively. It follows a report in the development or refinement in some basic ideas and problems that Nash placed, in theoretical but also algorithmic level.

In the next two chapters are presented the Algorithmic and Evolutionary Game Theory. Firstly, are explained basic concepts and tools, like the Complexity of algorithms searching Nash Equilibrium and the Algorithmic Mechanism Design (AMD), which is considered nowadays essential for a better result of complicated networks or situations. Also there are presented the most important contemporary problems, which constitute a very important field of research, like the Graph Coloring, Internet Equilibrium and the Network Congestion. Finally is analyzed the evolutionary algorithms and the natural processes, which they imitate, with specific examples.

The present study is completed with tangible examples and applications of Game Theory that we experience or can perceive in our day life. In addition to the conclusion section that follows, the present study aims at the glorification of importance of Game Theory and at the sensitization of each reader, so that any of us would be able to make its practices a reality, for a better and socially more human environment.

Στον γιο μου Ιάσονα,
Τη γυναίκα μου Χριστιάνα
Και τους γονείς μου,
Για τη στήριξη και την υπομονή τους

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑΣ

# ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το φυσικό περιβάλλον αποτελεί το μεγαλύτερο και καλύτερο εργαστήριο πειραμάτων. Πράγματι, για να σοφιστούν και να επεξεργαστούν μια θεωρία, οι επιστήμονες συνήθως ξεκινούν παρατηρώντας τα φυσικά φαινόμενα, στη συνέχεια αφαιρούν τα μη ουσιώδη στοιχεία και έπειτα εξάγουν τα κατάλληλα συμπεράσματα και προβλέψεις. Αυτό ακριβώς έκανε και ο Τζον Νας, παρατήρησε πώς συμπεριφέρονται οι άνθρωποι σε διάφορες καταστάσεις, έφτιαξε ένα απλοποιημένο σχήμα των σχέσεων και των ενεργειών τους και επεξεργάστηκε κάποιες εξισώσεις που τις περιέγραφαν. Έτσι δημιουργούσε ουσιαστικά ένα νέο μαθηματικό πεδίο, κλάδο της οικονομικής επιστήμης, που ονομάστηκε «Θεωρία Παιγνίων».

Το γεγονός αυτό συνέβει τη δεκαετία του 50 σε μία εποχή, όπου στις τότε υπάρχουσες θεωρίες κοινωνικής συνοχής και ευημερίας, άρχισαν να γίνονται εμφανή τα σημάδια της επερχόμενης παρακμής τους. Οι συνεχιστές του Νας στις δεκαετίες που ακολούθησαν εξέλιξαν, διέδοσαν και εφάρμοσαν την εν λόγω θεωρία σε πολλούς και διάφορους τομείς. Συνέπεια αυτού και σε συνδιασμό με το γενικότερο κλίμα παγκοσμιοποίησης, καθώς και συνεργασίας και συνέργειας μεταξύ των επιστημών, που επικρατεί τα τελευταία χρόνια, η Θεωρία Παιγνίων καταφέρνει να συναρπάζει τις καρδιές όλων, μικρών και μεγάλων, απλών ή επιστημονικά εξειδικευμένων ανθρώπων. Άλλωστε δεν είναι τυχαίο ότι εξαιτίας της έχουν ληφθεί πέντε βραβεία Νόμπελ οικονομικών και ένα βραβείο Όσκαρ κινηματογραφικής ταινίας.

Καμία άλλη επιστημονικά γενική θεωρία, εκτός ίσως από τη θεωρία της Σχετικότητας, δεν έχει λάβει τόση μεγάλη προσοχή, ούτε είχε τόση μεγάλη απήχηση και αποδοχή στο ευρύ κοινό. Ακόμα και θεωρίες όπως αυτή του «Ιστορικού Υλισμού», της «Θεωρία του Χάους», δεν μπορούν να ξεπεράσουν τη πληθώρα εφαρμογών και κλάδων, οι οποίοι όχι μόνο χρησιμοποιούν αλλά κάποιες φόρες εξαρτώνται κιόλας από τη Θεωρία Παιγνίων. Εύκολα λοιπόν αναρωτιέται κανείς πως είναι δυνατόν μια φαινομενικά απλή θεωρία να έχει κατακτήσει τόσα πολλά.

Η απάντηση βρίσκεται ακριβώς στην απλότητά της και στην εξύψωση της ορθολογιστικής σκέψης, την οποία εμπνέει. Η Θεωρία Παιγνίων ασχολείται απολκλειστικά με τον άνθρωπο και τις οντότητες τις οποίες εκείνος απαρτίζει (επιχειρήσεις, συνεταιρισμούς, κοινωνικές ομάδες, κράτος κ.ο.κ) αναλύοντας τη συμπεριφορά τους. Με άλλα λόγια όλοι ήμαστε παίχτες και οι οποιεσδήποτε κοινωνικες ή οικονομικές δραστηριότητες αποτελούν ένα παιχνίδι. Στόχος της είναι να αναλύει στρατηγικές και να προβλέπει συμπεριφορές με βασικό κριτήριο ότι οι παίχτες που συμμετέχουν είναι ορθολογιστές. Τελικά αυτό που πετυχαίνει είναι αξιοθαύμαστο. Αποδεικνύει πως όλα τα παίγνια της κοινωνίας (και όχι μόνο) διαθέτουν ορθολογικές λύσεις και συνάμα προάγει την ατομική ευημερία μέσω της ευημερίας του συνόλου και της κοινωνίας και όχι μέσω του ιδιοτελούς συμφέροντος.

Με άλλα λόγια η Θεωρία Παιγνίων μπορεί να θέσει τα θεμέλια μιας καλύτερης κοινωνικής συμπεριφοράς από όλους μας και να συνδράμει τα μέγιστα στη δημιουργία πιο βιώσιμων κοινωνιών. Έκει ακριβώς έγκειτε και το μεγαλείο της, στο γεγονός δηλαδή, ότι όχι μόνο αποτελεί τη φορμαλιστική αποτύπωση ή επίλυση ενός προβλήματος, αλλά συγχρόνως έχει την ικανότητα να το προάγει σε τρόπο σκέψης και ιδεολογία, θέτοντας παράλληλα βασικούς κανόνες ανθρώπινης ή ευρύτερα κοινωνικής συμπεριφοράς.

Χαρακτηριστικός είναι ο συλλογισμός του Αριστοτέλη, στο έργο του «Πολιτικά», όσον αφορά την «πόλη» και τον «πολίτη» ως «όλον» και «μέρος» αντίστοιχα. Θέτει ως απαραίτητη προϋπόθεση για να υπάρξει το μέρος να υπάρχει το όλον, δηλαδή η πόλις, γιατί μόνο μέσα σε αυτή τα μέρη (η οικογένεια, το χωριό και το κάθε επιμέρους άτομο-πολίτης) πραγματώνουν τον σκοπό της ύπαρξής τους, το «τέλος» τους, ενώ έξω απ' αυτήν τα μέρη μένουν ανολοκλήρωτα. Αν χαθεί η πόλη, τότε θα είναι λειτουργικά ανύπαρκτοι και οι πολίτες, γιατί αποτελούν οργανικό και αναπόσπαστο μέρος της, καθώς μόνο η πόλη μπορεί να τους προσφέρει την ύψιστη αυτάρκεια. Η πόλη λοιπόν είναι το όλον προς το οποίο τείνουν τα άτομα για να πραγματώσουν τον σκοπό της ύπαρξής τους και ότι η αυτάρκεια της πόλης μπορεί να διασφαλίσει την αυτάρκεια των μερών. Έτσι όπως αποφθεγματικά αναφέρει «Ο άνθρωπος είναι ον φύσει κοινωνικό και πολιτικό. Αυτός που μπορεί να ζήσει μακριά απ' τις ανθρώπινες κοινωνίες είναι είτε θηρίο είτε θεός».

Κάπου εδώ τίθεται το ερώτημα του κατά πόσο εύκολα εφαρμόζεται η θεωρία αυτή σε πολύπλοκα προβλήματα και στις απαιτήσεις που αναλογούν στον σύγχρονο τρόπο ζωής. Εντούτις είναι γεγονός ότι όσο εξελίσεται η τεχνολογία, η σπουδαιότητα ενασχόλησης με την Θεωρία Παιγνίων ολοένα και αυξάνεται. Αυτό ακριβώς είναι και το αισιόδοξο της όλης υπόθεσης και συμβαίνει διότι μαζί με την

τεχνολογία εξελίσεται και η ίδια η Θεωρία, δίνοντάς έτσι στους επιστήμονες τη δυνατότητα και τα κατάλληλα εργαλεία, ώστε να μπορέσουν να εφαρμόσουν τα αξιώματα και τις λύσεις που προσφέρουν η Αλγοριθμική και η Εξελικτική Θεωρία Παιγνίων.

Οι τελευταίες προσφέρουν μια τεράστια γκάμα εφαρμογών που καλύπτουν πολλά και διαφορετικά πεδία καθημερινής ζωής και επιστημονικής δραστηριότητας. Από επιτραπέζια παιχνίδια και καθημερινά κοινωνικά διλήμματα εώς πολύπλοκα προβλήματα αναζήτησης και διαδικτυακές καταστάσεις συμφόρισης, καθώς και από εξελικτικούς αλγόριθμους εώς τεχνητή νοημοσύνη και πρακτικές εφαρμογές παιχνιδιών που εξηγούν καταστάσεις της Θεωρίας των Κβάντων. Σ' αυτήν την ευέλικτη, σχεδόν οικουμενική εφαρμοστικότητά της, οφείλει μεγάλο μέρος της σπουδαιότητας και της φήμης της, η οποία είναι απολύτως δικαιολογημένη, εφόσον ποτέ άλλοτε ο ανθρώπινος νους δεν είχε συλλάβει μια θεωρία με τόσο μεγαλεπήβολες, συναρπαστικές και συγχρόνως ελπιδοφόρες εκφάνσεις.

Εν κατακλείδι, η Αλγοριθμική και Εξελικτική Θεωρία Παιγνίων είναι μια θεωρία με ευγενή, ανθρωπιστικά συμπεράσματα και αναμφισβήτητα αξίζει την προσοχή και σοβαρότητά μας. Ας της δώσουμε λοιπόν όλοι την ευκαιρία και τη θέση που της αρμόζει στη ζωή μας, άλλωστε είναι το λιγότερο που μπορούμε να κάνουμε απέναντι στη φύση που μας ορίζει ως οντότητες αλλά και μας περιβάλλει.

*«Είναι αδύνατο να βελτιωθεί ο κόσμος εάν πρώτα δεν βελτιωθεί ο άνθρωπος»*

*Πλάτωνας*

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ..... 2
1.1 ΙΣΤΟΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ..... 2
1.2 ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ & ΠΑΙΓΝΙΟ ..... 2
1.3 ΔΙΑΚΡΙΣΕΙΣ ΠΑΙΓΝΙΩΝ ..... 4
1.4 ΘΕΩΡΗΜΑ MINIMAX ..... 5
1.5 ΤΟ ΔΙΛΗΜΜΑ ΤΟΥ ΚΡΑΤΟΥΜΕΝΟΥ ..... 7
2 ΙΣΟΡΟΠΙΑ NASH ΚΑΙ ΕΞΕΛΙΞΗ ..... 11
2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ..... 11
2.2 ΜΙΑ ΥΠΕΡΟΧΗ ΙΔΕΑ ..... 11
2.3 ΘΕΩΡΗΜΑ ΚΑΙ ΙΣΟΡΟΠΙΑ ..... 14
2.4 ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ LEMKE-HOWSON ..... 15
2.5 Η ΕΞΕΛΙΞΗ ..... 17
2.5.1 Bayes-Nash ..... 17
2.5.2 Υποπαιγνιακά Τέλεια Ισορροπία Nash(SPNE) ..... 18
2.6 ΘΕΩΡΙΑ ΤΡΕΜΑΜΕΝΟΥ ΧΕΡΙΟΥ ..... 20
2.7 TIT FOR TAT ..... 21
3 ΑΛΓΟΡΙΘΜΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ ..... 24
3.1 ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ ..... 24
3.2 P ΚΑΙ NP ..... 25
3.3 Η ΚΛΑΣΗ PPAD ..... 26
3.4 ΧΡΩΜΑΤΙΣΜΟΣ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ ..... 28
3.5 ΣΕΙΡΙΑΚΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΧΡΩΜΑΤΙΣΜΟΥ ..... 29
3.6 ALGORITHMIC MECHANISM DESIGN (AMD) ..... 30
3.7 ΔΙΑΔΙΚΤΥΟ ..... 32
3.8 ΔΙΑΔΙΚΤΥΑΚΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ..... 33
3.9 ΤΟ ΠΑΧΝΙΔΙ ΤΗΣ ΔΡΟΜΟΛΟΓΗΣΗΣ ..... 34
3.10 ΕΞΙΣΟΡΡΟΠΙΣΗ ΦΟΡΤΙΟΥ ΚΑΙ ΚΟΣΤΟΣ ΑΝΑΡΧΙΑΣ ..... 35
3.11 ΥΠΑΡΞΗ ΑΓΝΩΝ ΙΣΟΡΡΟΠΙΩΝ NASH ..... 36
4 ΕΞΕΛΙΚΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ ..... 39
4.1 ΘΕΩΡΙΑ ΕΞΕΛΙΞΗΣ ..... 39
4.2 ΕΞΕΛΙΚΤΙΚΟΙ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ..... 40
4.3 ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ..... 42
5 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ, ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ..... 45
5.1 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ..... 45
5.2 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ..... 47
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ..... 49
ΒΙΒΛΙΑ ..... 49
ΑΡΘΡΑ ..... 49
ΕΡΓΑΣΙΕΣ ..... 50
ΣΥΝΔΕΣΜΟΙ ..... 50
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ..... 52
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1 ..... 52
ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ MINIMAX ..... 52
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2 ..... 54
ΠΑΙΓΝΙΑ 2 ΠΑΙΧΤΩΝ ΜΗΔΕΝΙΚΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ..... 54

# 1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

## 1.1 ΙΣΤΟΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Ο άνθρωπος, ο οποίος έμεινε γνωστός ως ο πατέρας της «Θεωρίας Παιγνίων» είναι χωρίς αμφιβολία ο John Von Neumann (1903 - 1957). Με ένα άρθρο του το 1928 στο Mathematish Annalen, το οποίο είχε να κάνει με την στρατηγική που θα ακολουθούσαν οι συμμετέχοντες σε κάποια παιχνίδια έτσι ώστε να νικήσουν τους αντιπάλους τους, κατάφερε να ορίσει τη σχέση μεταξύ της Θεωρίας Παιγνίων και του Γραμμικού Προγραμματισμού. Η εδραίωση της Θεωρίας Παιγνίων ως ξεχωριστής οικονομικής θεωρίας τότε ήρθε 16 χρόνια αργότερα, όταν ο παραπάνω μαθηματικός σε συνεργασία με τον Oscar Morgenstern (1902 - 1977) εξέδωσαν το μνημειώδες βιβλίο «Theory of Games and Economic Behaviour» (Θεωρία Παιγνίων και Οικονομική Συμπεριφορά). Αργότερα ο George B. Dantzig (1914 - 2005) ανέπτυξε την θεωρία Simplex (1947) του γραμμικού προγραμματισμού και έτσι δόθηκε η δυνατότητα να επιλυθούν πολλά προβλήματα της Θεωρίας Παιγνίων.

Η παγκοσμίου διάδοση της φήμης της Θεωρίας Παιγνίων και η περαιτέρω επέκτασή της σε πεδία διαφόρων επιστημών οφείλεται αναντίρρητα στον Αμερικανό μαθηματικό John Forbes Nash (1928 -), στη ζωή του οποίου βασίστηκε και η κινηματογραφική ταινία «Beautiful Mind». Η γενίκευση της ως τότε θεωρίας σε παιχνίδια μη μηδενικού αθροίσματος πλέον και η εισαγωγή της έννοιας της «Ισορροπίας», γνωστή ως Ισορροπία του Nash (1951), η οποία πρόσφερε λύση σε μεγάλο εύρος παιχνιδιών, διεύρυνε εντυπωσιακά τα όρια αντίληψης της Θεωρίας Παιγνίων. Μετά τη δημοσίευσή της άρχισαν να δημιουργούνται παιγνιοθεωριτικά μοντέλα στην οικονομική και πολιτική επιστήμη, αλλά και στην ψυχολογία.

Το 1965 ο οικονομολόγος Ράινχαρντ Ζέλτεν (1930 -) εξέλιξε ακόμη περισσότερο τις δυνατότητες της Θεωρίας Παιγνίων τελοιοποιώντας την Ισορροπία του Nash σε προβλήματα με δυναμικά παχνίδια (Subgame Perfect Nash Equilibrium) και εισάγωντας με την σειρά του την Ισορροπία του Τρεμάμενου Χεριού (trembling hand perfect equilibrium). Εξίσου σημαντική ήταν η συμβολή του John Charles Harsanyi (1920 - 2000), ο οποίος ανέπτυξε τις αρχές που διέπουν παχνίδια με ατελή πληροφόριση (Incomplete Information), αλλά και του John Maynard Smith (1920 - 2004) που εδραίωσε την ένοια της εξελικτικά σταθερής στρατηγικής.

Με το βραβείο της Σουηδικής Ακαδημίας Επιστημών στην μνήμη του Άλφρεντ Νομπέλ (Alfred Bernhard Nobel) τιμήθηκαν το 1994 οι John Forbes Nash, Ράινχαρντ Ζέλτεν, και John Charles Harsanyi για την προσφορά τους στην ανάλυση ισορροπιών μη συνεργατικών παιγνίων. Το ίδιο βραβείο κέρδισαν το 2005 οι θεωρητικοί των παιγνίων Thomas Schelling και Robert Aumann για τις Οικονομικές Επιστήμες.

Τις τελευταίες δεκαετίες είναι αρκετοί οι επιστήμονες που εξέλιξαν και εφάρμοσαν τις αρχές της Θεωρίας Παιγνίων σε διάφορους επιστημονικούς κλάδους, ώστε να διαμορφοθεί η γνώση και η αντίληψη που έχουμε σήμερα. Για την ορθότερη κατανόηση της θεωρίας είναι απαραίτητο να διασαφηνιστούν αρχικά κάποιες βασικές έννοιες.

## 1.2 ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ & ΠΑΙΓΝΙΟ

Σύμφωνα με το λεξικό ο όρος παίγνιο ή παιχνίδι, όπως έχουμε συνηθήσει να τον ακούμε στη καθομιλουμένη, είναι «οποιαδήποτε ενέργεια δεν έχει πρακτικό σκοπό, αλλά προσφέρει ευχαρίστηση, γιατί είναι διασκεδαστική» ή «οποιαδήποτε δραστηριότητα πραγαμτοποιείται σύμφωνα με ορισμένους κανόνες, αποσκοπώντας στη διασκέδαση ή στην απόκτηση χρημάτων»[1]. Ουσιαστικά λέγοντας παίγνιο εννοούμε τη κατάσταση κατά την οποία δύο ή περισσότεροι παίκτες (N≥2)ενεργούν, σύμφωνα πάντα με κάποιους κανόνες ή περιορισμούς, δημιουργώντας καταστάσεις ανταγωνιστικών αλληλεξαρτήσεων.

Η Θεωρία Παιγνίων αναλύει τις εν λόγω αλληλεπιδράσεις των παιχνιδιών και εξετάζει τον τρόπο με τον οποίο λαμβάνονται οι εκάστοτε αποφάσεις των παιχτών που συμμετέχουν και συνήθως αποσκοπούν στην μεγιστοποίηση των προσωπικών τους στόχων. Ο παίχτης

[1] Λεξικό Μπαμπινιώτης (2002)

λοιπόν, αποτελεί μία αυτόνομη μονάδα λήψης αποφάσεων και έχει σαφή αντικειμενικό σκοπό, που δεν είναι άλλος από την μεγιστοποίηση της προσωπικής «συνάρτησης ωφέλειάς του», η οποία δεν εξαρτάται μόνο από τις δικές του αποφάσεις, αλλά και από τις ενέργειες των υπολοίπων παιχτών. Για την επίτευξη αυτού του σκοπού είναι υποχρεωμένος να αποφασίσει και να προκρίνει μία σειρά από τις πραγματοποιήσιμες επιλογες που του προσφέρονται από το σύνολο των κανόνων και των περιορισμών του παιχνιδιού, καθώς και από τις ενδεχόμενες ενέργειες των υπολοίπων παιχτών. Με απλά λόγια πρέπει να καθορίσει τις στρατηγική που θα ακολουθήσει.

Στρατηγική ενός παίχτη είναι το σύνολο των κανόνων, οι οποίοι ορίζουν ποια από τις δυνατές επιλογές που έχει στη διάθεσή του πρέπει να ακολουθήσει ως το τέλος του παιχνιδιού, έχοντας πάντοτε υπόψη του όλες τις πληροφορίες που σχετίζονται με τις κινήσεις του εκάστοτε παίχτη. Η έννοια της στρατηγικής του παίχτη (οντότητα) είναι παρόμοια σε όλα τα επίπεδα ανταγωνισμού, είτε πρόκειτε για άτομα και απλά καθημερινά παιχνίδια, είτε για επιχειρήσεις και καταστάσεις οικονομικών αλληλεξαρτήσεων, είτε για κράτη και διπλωματικά συμφέροντα κ.ο.κ.

Η Θεωρία Παιγνίων αναζητεί στρατηγικές που θα μεγιστοποιήσουν ή αντίστροφα θα ελαχιστοποιήσουν κάποια συγκεκριμένη συνάρτηση. Σύμφωνα με τη δομή του παιχνιδιού οι παίχτες ακολούθουν και τις ανάλογες στρατηγικές. Σε ορισμένες περιπτώσεις παιχνιδιών οι στρατηγικές που ακολουθούνται είναι αμιγής, με την έννοια ότι οι αποφάσεις, λύσεις που προκρίνονται είναι διακριτές (π.χ ή την 1 ή την 2,…). Υπάρχουν όμως και οι περιπτώσεις όπου έχουμε να κάνουμε με τις λεγόμενες μικτές στρατηγικές. Στις τελευταίες γίνεται ένας συνδιασμός προκριθέντων δυνατών επιλογών, από τις οποίες μία τουλαχιστον προοθείται και αυτή συνήθως δεν παίρνει ακέραιες τιμές.

Η στρατηγική είναι άμεσα συνδεδεμένη με το αποτέλεσμα του παιχνιδιού, το οποίο εξαρτάται απο τις στρατηγικές που ακολουθεί ο εκάστοτε παίχτης. Ειδικότερα, η απόρροια του παιχνιδιού για τον παίχτη εξαρτάται τόσο από τη στρατηγική του όσο και από τις στρατηγικές που θα ακολουθήσουν και οι υπόλοιποι παίχτες. Σε περίπτωση που βρεθεί η «Άριστη Στρατηγική» όλων των παιχτών, τότε έχουμε τη λύση του παιχνιδιού, αυτό που σε αρκετές περιπτώσεις ονομάζουμε «σημείο ισορροπίας».

Για να φτάσουμε ως τη λύση πρέπει αρχικά να ληφθούν υπόψιν κάποιες παραδοχές. Η Θεωρία Παιγνίων δανείζεται θεμελιώδη αποτελέσματα της θεωρίας αποφάσεων και βασίζει την έρευνά της σε εγωιστικές συμπεριφορές οντοτήτων, όποιες και αν είναι αυτές (άνθρωποι, επιχειρήσεις κ.ο.κ). Το γεγονός αυτό συνεπάγεται ότι στα πλαίσια της έρευνάς της υπονοείται η ορθολογική συμπεριφορά των παιχτών της, Αν και η έννοια του ορθολογισμού απαιτεί περαιτέρω ανάλυση, κυρίως εξαιτίας της υποκειμενικότητάς της, είναι σημαντική για την Θεωρία Παιγνίων η υπόθεση ότι κάθε παίχτης που συμμετέχει σε ένα παιχνίδι είναι απαραίτητα «λογικός» και σε αρκετες περιπτώσεις και ευφυής.

Οι τελευταίος είναι εκείνος που γνωρίζει τα πάντα σχετικά με το Παίγνιο στο οποίο λαμβάνει μέρος και χρησιμοποιεί τις γνώσεις του κατάλληλα για την εξαγωγή έλλογων συμπερασμάτων και την ανάληψη των αποφάσεών του. Ενώ λογικός είναι εκείνος ο παίχτης που λαμβάνει τις αποφάσεις του σύμφωνα πάντα με την επίτευξη των προσωπικων του στόχων και τον τρόπο που ενεργούν και οι υπόλοιποι παίχτες. Μόνο έτσι θα καταφέρει τη βασική του επιδίωξη, που δεν είναι άλλη από τη μεγιστοποίηση της προσωπικής του συνάρτησης ωφέλειας.

Μια συνάρτηση ωφέλειας δίνει αριθμητικές τιμές σε αποτελέσματα με τέτοιο τρόπο ώστε το αποτέλεσμα που προτιμάται περισσότερο από όλα να έχει την υψηλότερη αριθμητική τιμή και εκείνο που προτιμάται λιγότερο από όλα να έχει την μικρότερη αριθμητική τιμή. Με τον τρόπο αυτό η επιλογή της δράσης που ικανοποιεί καλύτερα τις προτιμήσεις ενός ατόμου είναι ισοδύναμη με την επιλογή της δράσης με την υψηλότερη αριθμητική τιμή ή τον δείκτη ωφέλειας.

Όπως γίνεται φανερό η Θεωρία Παιγνίων απαρτίζεται από μια συλογή αναλυτικών εργαλείων που έχουν σχεδιαστεί για να μας βοηθήσουν στην κατανόηση φαινομένων που παρατηρούμε σε πεδία διαφόρων επιστημών στα οποία συμμετέχουν οντότητες με προσωπικές στρατηγικές και συμφέροντα. Ασχολείται με την ύπαρξη "σημείων ισορροπίας" μεταξύ των οντοτήτων αυτών, τις μεθόδους σύγκλισης προς αυτές τις ισορροπίες, καθώς και

διάφορα ποιοτικά χαρακτηριστικά τους που προκύπτουν ως συνέπεια της εγωιστικής συμπεριφοράς των οντοτήτων ενός παιχνιδιού.

Η Αλγοριθμική Θεωρία Παιγνίων, είναι η μελέτη των φαινομένων αυτών από την οπτική γωνία ενός επιστήμονα της Πληροφορικής. Δεν ερευνά απλά, φορμαλιστικά την ύπαρξη ισορροπιών μεταξύ των οντοτήτων που συμμετέχουν, αλλά και τον εντοπισμό μιας τέτοιας ισορροπίας σε αποδοτικό χρόνο, τη συγκλίση σε κάποια από αυτές όσο το δυνατόν ταχύτερα, τη διάκριση των ισορροπιών που είναι περισσότερο επιθυμητές για ένα σύστημα από άλλες, καθώς και τον σχεδιασμό αποδοτικών μηχανισμων που επηρεάζουν το παιχνίδι προς όφελος του συστήματος, κ.λπ. Με απλά λόγια επιδιώκει να διαφωτίσει και να επιλύσει, παραθέτοντας κατάλληλους και αποδοτικούς αλγόριθμους, προβλήματα και ερωτήματα που προκύπτουν στα διάφορα παίγνια.

## 1.3 ΔΙΑΚΡΙΣΕΙΣ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

Τα απλά παιχνίδια που όλοι γνωρίζουμε, αλλά και εκείνα που βιώνουμε καθημερινά χωρίς καν να αντιλαμβανόμαστε, αποτελούν ουσιαστικά ένα υποσύνολο της γκάμας των παιχνιδιών με τα οποία καταπιάνεται η Θεωρία Παιγνίων και καλείται να αναλύσει. Είναι πραγματικά τεράστιο το πλήθος των κοινωνικών, πολιτικών, οικονομικών και άλλων καταστάσεων, οι οποίες προκαλούν ανταγωνιστικές αλληλεξαρτήσεις μεταξύ δύο ή περισσοτέρων οντοτήτων, παιχτών και απαιτούν την ύπαρξη στρατηγικών ενεργειών. Όπως, λοιπόν οι καταστάσεις, έτσι και τα παίγνια ποικίλουν ανάλογα με τους κανόνες και τα κριτήρια που τα χαρακτηρίζουν κάθε φορά.

Ένας από τους βασικούς διαχωρισμούς παιγνιδιών έγκειτε στο πλήθος των παιχτών που απαρτίζουν το παιχνίδι. Γενικά η Θεωρία Παιγνίων διέπεται από την παραδοχή ότι υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός παιχτών $n \geq 2$. Στη περίπτωση όπου ο αριθμός των παιχτών είναι δύο ($n=2$), τότε έχουμε να κάνουμε με *παιχνίδια 2-παιχτών*. Πάνω σε αυτή τη μορφή παιχνιδιών έχουν βασιστεί οι περισσότερες μελέτες λόγω της απλότητας και βολικότητάς της, από απόψη μεγέθους ανάλυσης. Άλλωστε αποτελεί τη μορφή παιχνιδιών που είναι εύκολο να κατανοηθεί από όλους, ανεξαρτήτου εκπαιδευτικής κατάρτησης. Όταν ένα παιχνίδι απαρτίζεται από τρεις ή περισσότερους παίχτες τότε αναφερόμαστε σε *παιχνίδια n-παιχτών*. Αξίζει εδώ να σημειωθεί ότι στη φορμαλιστική ανάλυση ενός παιχνιδιού τριών παιχτών και άνω αυξάνεται αισθητά ο βαθμός δυσκολίας αποτύπωσης του και απαιτεί γνώσεις μαθηματικών για την πλήρη κατανόησή τους.

Μία ακόμη διάκριση παιχνιδιών είναι αυτή που τα ξεχωρίζει σε *παίγνια τέλειας* ή *ατελούς πληροφόρησης*. Σε ένα παίγνιο τέλειας πληροφόρησης οι παίχτες είναι σε θέση να γνωρίζουν εκτός από τους κανόνες και τους περιορισμούς του παιχνιδιού και τις κινήσεις ή τις ενέργειες των υπολοίπων παιχτών. Από την άλλη πλευρά, σε ένα παίγνιο ατελούς πληροφόρησης αυτή η γνώση δεν υφίσταται. Οι εμπλεκόμενοι παίχτες δεν είναι πλήρως ενημερωμένοι για τις αποφάσεις και τις αντιδράσεις των άλλων παιχτών.

Σημαντικός επίσης είναι και ο διαχωρισμός των παιχνιδιών σε *στρατηγικά ή κανονικά* και σε *εκτενή* ή *εκτεταμένα*. Ένα στρατηγικό ή κανονικό παίγνιο ή παίγνιο σε στρατηγική μορφή είναι το μοντέλο παιγνίου όπου κάθε παίχτης επιλέγει το πλάνο δράσης του, δηλαδή τη στρατηγική που θα ακολουθήσει καθ' όλη τη διάρκεια του παιχνιδιού, μόνο μία φορά και μάλιστα η επιλογή αυτή είναι ταυτόχρονη για όλους τους παίχτες. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι στα στρατηγικά παίγνια κανένας από τους συμμετέχοντες παίχτες δε γνωρίζει τη στρατηγική που έχουν επιλέξει οι υπόλοιποι. Αντίθετα, ένα παίγνιο σε εκτεταμένη μορφή είναι το παιχνίδι που καθορίζει τις δυνατές αλληλεπιδράσεις που δημιουργούνται από τις εκάστοτε συμπεριφορές των εμπλεκομένων παιχτών. Δηλαδή, ο κάθε παίχτης μπορεί να αλλάξει πλάνο δράσης κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού, ανάλογα με τις αποφάσεις και τις ενέργειες των υπολοίπων.

Τα παίγνια διακρίνονται επίσης σε *παίγνια μηδενικού* και *μη μηδενικου αθροίσματος*. Παίγνια μηδενικού αθροίσματος είναι εκείνα κατά τα οποία το κέρδος ή η οφέλεια που αποδίδει η στρατηγική ενός παίχτη, είναι ίση με τη ζημιά ενός άλλου ή των υπολοίπων παιχτών. Συνεπώς όσο ο ένας κερδίζει, τόσο ο άλλος πληρώνει. Όταν αυτό δε συμβαίνει λόγω του οτι κάποιες πληρωμές λαμβάνουν χώρα σε ένα τρίτο μέρος τότε πρόκειται για παίγνιο μη μηδενικού αθροίσματος.

Τέλος πολύ σημαντική είναι η διάκριση σε *συνεργατικό* και *μη συνεργατικό παίγνιο*. Όπως έχει διατυπωθεί παραπάνω στη Θεωρία Παιγνίων ο κάθε παίχτης αντιπροσωπεύει μία ξεχωριστή οντότητα, η οποία λαμβάνει αποφάσεις με γνώμονα την αριστοποίηση των οφελειών της. Στα μη συνεργατικά παιχνίδια, οι οντότητες αυτές ενεργούν εντελώς ατομικά, χωρίς δηλαδή την παραμικρή συννενόηση, συνεργασία μεταξύ τους καθ' όλη τη διάρκεια του παιχνιδιού. Αντιθέτως, στα συνεργατικά παιχνίδια, οι παίχτες συνεργάζονται μεταξύ τους σε βαθμό που μπορεί να συγκροτηθεί ακόμα και ομάδα, ώστε να ληφθεί μία απόφαση προς όφελος της ομάδας και να καθοριστεί μία ενιαία στρατηγική δράσης.

## 1.4 ΘΕΩΡΗΜΑ MINIMAX

Η κατανόηση της Θεωρίας Παιγνίων φυσικά προκείπτει μέσα από απλά παραδείγματα παιχνιδιών. Για το λόγο αυτό παρατείθεται ένα στρατηγικό παιχνίδι δύο παιχτών μηδενικού αθροίσματος (δεδομένου ότι εάν αθροίσουμε τα κέρδη του κερδισμένου και τις ζημίες του χαμένου το άθροισμα είναι μηδενικό). Αυτός ο τύπος παιχνιδιού είναι η βάση πάνω στην οποία ο John von Neumann έχτισε τη θεωρία του, μία θεωρία χρήσιμη σε ανταγωνιστικές καταστάσεις όπου το "κέρδος" του ενός είναι η "ζημία" του άλλου.

Ο von Neumann αντιμετώπισε αυτές τις "συγκρούσεις", μεταξύ δύο παικτών μηδενικού αθροίσματος, ως προβλήματα που έπρεπε να "επιλυθούν". Αυτό και έκανε: βρήκε τη "λύση" τους. Τι σημαίνει όμως η φράση "λύση του παιγνίου"; Μπορούμε να τη θεωρήσουμε ως μια πρόβλεψη για το πώς θα συμπεριφερθούν οι παίκτες εφόσον η συμπεριφορά τους είναι "έξυπνη"', εφόσον δηλαδή πράττουν με τρόπο που να μεγιστοποιεί τις πιθανότητές τους να κερδίσουν (ή, αντίστοιχα, ελαχιστοποιεί τις πιθανότητες να χάσουν). Η μεγαλοφυΐα του von Neumann φαίνεται από το θεώρημα (γνωστό ως θεώρημα minimax)[2] με το οποίο απέδειξε τη γενικότητα της προτεινόμενης λύσης.

Στον πίνακα 1.1 παρουσιάζεται μια μήτρα αμοιβών δύο παιχτων, του Α και του Β. Ο παίχτης Α μπορεί να κινηθεί μεταξύ των επιλογών $A_1$ και $A_2$, ενώ ο παίχτης $B_1$ και $B_2$. Σύμφωνα με τα παραπάνω οι ενδεικτικές τιμές του πίνακα αντιπροσωπεύουν το κέρδος του παίχτη Α και επομένως τη ζημιά του παίχτη Β.

| A \ B | $B_1$ | $B_2$ |
|---|---|---|
| $A_1$ | 9 | 3 |
| $A_2$ | 5 | 4 |

***Πίνακας 1.1***

Αν ο Α ακολουθήσει την $A_1$ και ο Β τη $B_1$, το κέρδος του Α θα είναι 9, όση και η ζημιά του Β, ενώ αν ο Β ακολουθήσει τη $B_2$ η ζημιά του του θα είναι 3 όσο και το κέρδος του Α. Αντίστοιχα αν ο Α ακολουθήσει την $A_2$ και ο Β τη $B_1$ το κέρδος του Α θα είναι 5, όση και η ζημιά του Β, ενώ αν ο Β ακολουθήσει τη $B_2$ η ζημιά του θα είναι 4, όσο και το κέρδος του Α. Να σημειωθεί ότι η μήτρα αμοιβών του Β είναι η αρνητική μήτρα αμοιβών του Α.

Κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού οι παίχτες γνωρίζουν τόσο τις δικές τους δυνατές επιλογές, όσο και τις επιλογές του αντιπάλου τους. Σκοπός του Α είναι η επίτευξη του μέγιστου δυνατού κέρδους και του Β τις ελάχιστης δυνατής ζημιάς. Αν ο Α επιλέξει την $A_1$ το ελάχιστο κέρδος του θα είναι 3, ενώ με τη στρατηγική $A_2$ θα πρέπει να είναι ικανοποιημένος

[2] Το Θεώρημα του ελαχίστου –μεγίστου (minimax theorem) αποτέλεσε ένα βασικό κανόνα αποφάσης που χρισημοποιείται και σήμερα στη Θεωρία Αποφάσεων, στη Θεωρία Πσιγνίων, στη Στατιστική, στην Οικονομική Θεωρία και στη Φιλοσοφία. Στο Παράρτημα 1 παρουσιάζεται ένας ενδεικτικός αλγόριθμος "minmax"

από το κέρδος 4. Αντίστοιχα αν ο Β επιλέξει τη $B_1$ κινδυνεύει να χάσει μέχρι και 9, ένω με τη στρατηγική $B_2$ η μέγιστη ζημιά του θα είναι 4. Εφόσον ο Α επιδιώκει το μέγιστο δυνατό κέρδος και ο Β την ελάχιστη δυνατή ζημιά, λογικά παντά, ο Α θα υοθετήσει τη στρατηγική $A_2$ αναμένοντας κέρδος 4 και ο Β τη στρατηγική $B_2$ με αναμενόμενη ζημιά 4. Αυτές είναι και οι άριστες στρατηγικές του παιχνιδιου ($A_2$ ,$B_2$) που συνθέτουν και την λύση ή αλλιώς τη τιμή του παιχνιδιού.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι ο Α δε θα ακολουθήσει τη λύση $A_1$, κερδίζει περισσότερα με την επιλογή $A_2$. Το ελάχιστο κέρδος για τις επιλογές του Α θα είναι:

Επιλογή $A_1$: ελάχιστο (min) κέρδος 3

Επιλογή $A_2$: ελάχιστο (min) κέρδος 4

Το μέγιστο των ελαχίστων κερδών του Α θα είναι 4, δηλαδή maximin A = 4

Αντίστοιχα γνωρίζοντας όλα αυτά ο Β θα ακολουθήσει τη στρατηγική $B_2$, γιατί αυτή του αποφέρει την ελάχιστη ζημιά του. Η μέγιστη ζημιά στις επιλογές του Β είναι:

Επιλογη $B_1$: μέγιστη (max) ζημιά 9

Επιλογη $B_2$: μέγιστη (max) ζημιά 4

Οπότε το ελάχιστο των μέγιστων ζημιών του Β θα είναι 4, δηλαδή minimax = 4

Επειδή αντικειμενικός σκοπός του παίχτη Α είναι η επίτευξη του μέγιστου δυνατού κέρδους και του Β είναι η ελάχιστη δυνατή ζημιά, ο Α θα ακολουθήσει τη στρατηγική maximin και ο Β τη στρατηγική minimax. Αν $\Pi_{ij}$ η μήτρα αμοιβών του παιχνιδιού και i=1,2 και j = 1,2 έχουμε:

$$\text{maximin } \Pi_{ij} = \Pi_{2,2} = 4$$

$$\text{minimax } \Pi_{ij} = \Pi_{2,2} = 4$$

οπότε

$$\text{maximin } \Pi_{ij} = \text{minimax } \Pi_{ij} = V = 4 \quad (1)$$

Τελικά αποδεικνύεται ότι λύση του παιχνιδιού (V) δίνεται από την επιλογή ($A_2$, $B_2$)[3].

Όσο και αν επεκτείνουμε το συγκεκριμένο παιχνίδι και όσα παιχνίδια και αν παρακολουθήσουμε που βασίζονται στην ίδια λογική, η σχέση (1) θα ισχύει σχεδόν πάντα.

Τελικά ο von Neumann μας απέδειξε με σχεδόν τέλειο τρόπο ότι ***για κάθε παιχνίδι μηδενικού αθροίσματος δύο παιχτών με πεπερασμένες, αμιγής στρατηγικές, υπάρχει μία τιμή V, τέτοια ώστε (a) γνωρίζοντας τη στρατηγική του παιχτη 2, η καλύτερη δυνατή αμοιβή του παίχτη 1 είναι V και (b) γνωρίζοντας τη στρατηγική του παιχτή 1, η καλύτερη στρατηγική του παίχτη 2 είναι πάλι V[4].*** Πρόκειται για το πρώτο θεώρημα το οποίο ανακάλυψε μια κοινή ιδιότητα ανάμεσα σε μια τεράστια κατηγορία παιγνίων ή αντιπαραθέσεων (τα στρατηγικά παίγνια δύο παικτών μηδενικού αθροίσματος). Το θεώρημα του νοη Neumann αποτέλεσε το θεμέλιο λίθο της θεωρίας παιγνίων.

Πληθώρα τέτοιου είδους παιχνίδιων συναντάμε όλοι στην απλή καθημερινή μας ζωή ακόμα και αν δεν το αντιλαμβανόμαστε. Σχεδόν κάθε λογής παιχνίδι κατά το οποίο η νίκη του ενός αυτόματα σημαίνει την ήττα του άλλου μπορεί να θεωρηθεί ως παίγνιο μηδενικού αθροίσματος. Παράδειγμα τέτοιων καθημερινών παιχνιδιών είναι το τάβλί, το σκάκι, η μονόπωλη, το «πέτρα – ψαλίδι – χαρτί» κ.α.

Αποδεδειγμένα υπάρχουν και περιπτώσεις ειδικά όταν έχουμε να κάνουμε με μικτές στρατηγικές όπου η ισότητα της σχέσης (1) δεν ισχύει απόλυτα. Μία γενικότερη λοιπόν αποτύπωση του θεωρήματος σε προβλήματα με παιχνίδια μηδενικού αθροίσματος είναι: maximin $\Pi_{ij} \leq$ minimax $\Pi_{ij}$.[5]

Πολλοί ήταν οι ερευνητές σε διάφορους επιστημονικούς τομείς που ασχολήθηκαν με το εν λόγω θεώρημα τα χρόνια που ακολούθησαν, παίρνωντας τη βασική δομή του νοη Neumann, εξελίσσοντας ή εμπεριστατόνοντάς το. Τη πρώτη μεγάλη διαφορά έκανε ο

[3] Γεωργίου Σ. Οικονόμου, Ειδικού Επιστήμονα ΑΒΣΘ και ΑΠΘ, «Θεωρία Παιγνίων», Θεσσαλονίκη 1978, σελ. 5-6.

[4] Theory of Games and Economic Behavior, John Von Neumann and Oskar Morgenstern, Princeton university press, 1953, σελ. 102-103

[5] Παρατείθεται στο Παράρτημα 2 συγκεκριμένο παράδειγμα για τέτοιες περιπτώσεις.

Kneser[6], ενώ τη δεκαετία που ακολούθησε ξεχώρησε το θεώρημα Sion[7] και η εργασία του Wu[8], που καθιέρωσε το πρώτο Θεώρημα minimax σε τοπολογικά διαστήματα. Το 1974, από μια διαφορετική προσέγγιση, ο Tuy[9] απέδειξε ένα νέο τοπολογικό minimax θεώρημα στο ίδιο πνεύμα, αλλά πολύ ισχυρότερο από το θεώρημα Wu, δεδομένου ότι περιείχε τα σημαντικότερα αποτελέσματα, τα οποία χρησιμοποιούνται ακόμα και σήμερα στον επιστημονικό τομέα[10].

## 1.5 ΤΟ ΔΙΛΗΜΜΑ ΤΟΥ ΚΡΑΤΟΥΜΕΝΟΥ

Το πιο διαδεδομένο και αντιπροσωπευτικό παιχνίδι της ουσίας την οποία πραγματεύεται η Θεωρία Παιγνίων είναι αναμφισβήτητα το λεγόμενο «Δίλημμα του Κρατουμένου». Αποτελεί το καθεαυτό παράδειγμα για να μπορέσει ο καθένας να κατανοήσει την έννοια του Παιγνίου, της Θεωρίας και της Ισορροπίας. Το Δίλημμα του Κρατουμένου είναι θεμελιώδες πρόλβημα της Θεωρίας Παιγνίων και καταδεικνύει το λόγο, για τον οποίο δύο άνθρωποι που συμμετέχουν σε ένα παιχνίδι, είναι πιθανότερο να μη λειτουργήσουν συνεργατικά ακόμα και όταν ουσιαστικά αυτό είναι που τους συμφέρει. Το εν λόγω πρόβλημα παρουσιάστηκε αρχικά από τους Merrill Flood και Melvin Dresher όπου εργάζονταν στη RAND[11] το 1950. Ο Albert W. Tucke[12] ήταν αυτός όμως που τυποποίησε το παιχνίδι με τις αμοιβές της ποινής φυλάκισης και του έδωσε το πασίγνωστο όνομα «Διλήμμα του Κρατουμένου». Το πρόβλημα έχει ως εξής:

Δύο ύποπτοι για ένα έγκλημα συλλαμβάνονται από την αστυνομία. Η αστυνομία διαθέτει ανεπαρκείς αποδείξεις εναντίον τους, με αποτέλεσμα να μην μπορεί να τους καταδικάσει, και χωρίζοντας και τους δύο φυλακισμένους, επισκέπτεται κάθε έναν από αυτούς χωριστά για να διαπραγματευτεί μαζί τους, ώστε να αποσπάσει ομολογία. Αν κάποιος ομολογήσει εις βάρος του άλλου, ουσιαστικά καταδόσει τον άλλον, ενώ ο άλλος παραμείνει σιωπήλός, τότε αυτός που ομολόγησε αφήνεται ελέυθερος και εκείνος που τήρησε τη σιωπή του λαμβάνει ποινή κάθειρξης 10 ετών. Αν και οι δύο παραμείνουν σιωπηλοί τότε επιβάλεται και στους δύο ποινή κάθειρξης μόλις 6 μηνών λόγω έλληψης στοιχείων. Ενώ αν ομολογήσουν και οι δύο, ο ένας εις βάρος του άλλου τότε και οι δύο θα πρέπει να εκτίσουν από 5 χρόνια φυλάκιση. Σε κάθε κρατούμενο δίνονται οι απαραίτητες διαπιστεύσεις ότι ο άλλος δε θα μάθει ποτέ για την ομολογία εις βάρος του. Ο πάρακάτω πίνακας είναι η απόδοση του παιχνιδιού σε μήτρα αμοιβών.

| **Κρατούμενος Β** / **Κρατούμενος Α** | **Ομολογία Β** | **Σιωπή Β** |
|---|---|---|
| **Ομολογία Α** | (5,5) | (0,10) |
| **Σιωπή Α** | (10,0) | (0,5 , 0,5) |

***Πίνακας 1.2***

[6] Hellmuth Kneser (April 16, 1898 – August 23, 1973), γερμανός μαθηματικός με μεγάλη συνεισφορά στην άλγεβρα και στην τοπολογία

[7] Στη Θεωρία Παιγνίων το “Sion's minimax theorem” αποτελεί τη γενίκευση του θεωρήματος minimax του John von Neumann

[8] Wen-Tsun Wu (1919 - ), κινέζος μαθηματικός

[9] Hoàng Tụy (1927 - ), βιετναμέζος μαθηματικός

[10] “Pareto Optimality, Game Theory and Equilibria”, Hoang Tuy, Springer, 2008, σελ. 4

[11] Ο οργανισμός RAND (Research ANd Development) είναι ένας μη κερδοσκοπικός οργανισμός που ασχολείται με διάφορα επιστημονικά πεδία σε παγκόσμιο επίπεδο. Αρχικά δημιουργήθηκε για να προσφέρει αποτελέσματα επιστημονικών ερευνών και αναλύσεων στις Ηνωμένες Πολιτείες Αμερικής.

[12] Albert William Tucker (1905 –1995), Καναδο-Αμερικανός μαθηματικός οποίος είχε σημαντικές συνεισφορές στην Τοπολογία, στη Θεωρία Παιγνίων και στο μη Γραμμικό Προγραμματισμό

Όπως είναι φανερό οι κρατούμενοι βρίσκονται αντιμέτωποι με ένα φοβερό δίλημμα, να ομολογήσουν ή να απαρνηθούν τις κατηγορίες. Και τους δύο σίγουρα τους συμφέρει να αποποιηθούν την οποιαδήποτε συμμετοχή στο έγκλημα. Χωρίς όμως να γνωρίζει ο καθένας τι σκέφτεται ο άλλος να κάνει είναι πολύ μεγάλη η πιθανότητα ενώ ο ένας μείνει σιωπηλός, ο άλλος να ομολογήσει επιδιώκοντας έτσι την ελευθερία του. Υποθέτοντας ότι και οι δύο παίχτες σκέφτονται ορθολογικά και δεν υπάρχει η οποιαδήποτε συνεργασία μεταξύ τους, είναι βέβαιο ότι θα προσπαθήσουν να ελαχιστοποιήσουν τις ποινή τους, δηλαδή θα επιδιώξουν το προσωπικό τους όφελος εις βάρος του κοινού οφέλους ως τη κυρίαρχη στρατηγική τους. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα αυτό σημαίνει ότι και οι δύο κρατούμενοι θα επιλέξουν τη λύση της ομολογίας, με αποτέλεσμα τελικά να μοιραστούν τη ποινή των δέκα ετών που αναλογεί στο έγλημα που διαπράχθηκε. Είναι λίγο παράδοξο και όμως πραγματικό το γεγονός ότι ενώ το σημείο ισορροπίας των δύο παιχτών προς το κοινό τους όφελος έπρεπε να είναι το (Σιωπή Α , Σιωπή Β), τελικά οι δύο παίχτες ισορροπούν στο σημείο (Ομολογία Α , Ομολογία Β).

Από την παραπάνω αναλυση του παιχνιδιού προκύπτουν συγκεκριμένες παραδοχές για τον εκάστοτε παίχτη (κρατούμενο). Έστω ότι με τον όρο Σ ορίζεται η επιλογή του να παραμείνει σιωπηλός, κάτι που αν πράξουν και οι δύο θα καρποθούν την καλύτερη δυνατή αμοιβή ενώ με τον όρο Ο να ομολογήσει εναντίον του αντιπάλου του, γεγονός το οποίο θα επιφέρει και στους δύο το ισάξιο μοίρασμα της ποινής. Επίσης το Κ (Κέρδος) εκφράζει το ενδεχόμενο της ελευθερίας του παίχτη όταν εκείνος ομολογήσει και ο αντίπαλός του παραμείνει σιωπηλός και το Π (Πληρωμή) το ακριβώς αντίστροφο. Είναι φανερό πως στο συγκεκριμένο παιχνίδι θα ισχύει η παρακάτω ανισότητα:

$$K > \Sigma > O > \Pi \quad (1)$$

Συνεπώς δεν υπάρχει καμία αμφιβολία πώς η κυρίαρχη στρατηγική για τον εκάστοτε παίχτη είναι να ομολογήσει εναντίον του άλλου με το ενδεχόμενο εκείνος να μην πράξει το ίδιο, ακόμα και όταν αυτή η στρατηγική δύναται να επιφέρει το σχεδόν χειρότερο αποτέλεσμα.

Παρόλο που το συγκεκριμένο παιχνίδι, εξαιτίας της φύσης του δεν επιδέχεται επανάληψη, μπορεί να παιχτεί μόνο μία φορά, είναι πάρα πολλά τα παιχνίδια παρόμοιας φύσεως τα οποία δύναται να έχουν επαναλήψεις. Τίθεται λοιπόν εύλογα το ερώτημα κατά πόσο ισχύουν τα παραπάνω και σε αυτές τις περιπτώσεις.

Εάν έχει γνωστοποιθεί στους παίχτες πόσες φορές πρόκειται να επαναληφθεί το παιχνίδι, τότε είναι βέβαιο ότι το παιχνίδι θα έχει ακριβώς τα ίδια αποτελέσματα με το παράδειγμα που αναφέρθηκε , το Δίλημμα του Κρατουμένου. Αυτό βασίζεται στο γεγονός ότι στην τελευταία επανάληψη ο εκάστοτε παίχτης θα λειτουργήσει, όπως θα λειτουργούσε αν το παιχνίδι πραγματοποιούνταν για μία και μόνο φορά. Με άλλα λόγια ο κάθε παίχτης θα ενεργήσει σύμφωνα με αυτό που προστάζει η κυρίαρχη στρατηγική του. Εφόσον γίνεται λόγος για λογικούς παίχτες σε μη συνεργατικά παιχνίδια είναι επόμενο να εφαρμοστεί η ίδια λογική σε όλες τις επαναλήψεις του παιχνιδιού.

Στην περίπτωση όπου οι επαναλήψεις είναι άπειρες ή έστω άγνωστες, τότε η λογική αυτή δεν θα λειτουργίσει, γιατί πολύ απλά ο παίχτης δεν γνωρίζει πότε το παιχνίδι θα τελειώσει για να καθορίσει τη στρατηγική του. Πάντα θα υπαρχεί στο μυαλό του μία ακόμα επανάληψη. Σε πειράματα που έγιναν πάντως, με πραγμάτικούς παίχτες – ανθρώπους σε παιχνίδια πολλών απαναλήψεων, αποδείχτηκε ότι οι παίχτες κατά κύριο λόγο δεν συνεργάζονται, ακόμα και όταν γνωρίζουν ότι ο αντίπαλός τους πρόκειται να συνεργαστεί. Το τίτλο της καλύτερης στρατηγικής για τέτοιου είδους παιχνίδια, έχει κερδίσει η γνωστή στρατηγική “Tit-for-Tat”[13], κατά την οποία, σύμφωνα πάντα με το προαναφερθέν παράδειγμά, στο πρώτο γύρο παραμένει σιωπηλός και έπειτα λειτουργεί με τον τρόπο που λειτούργησε ο αντίπαλός του στο προηγούμενο γύρο.

Βέβαια αν και το συγκεκριμένο παράδειγμα αναφέρεται στην περίπτωση της μη συνεργασίας μεταξύ των παιχτών, ακόμα και αν αυτή υπήρχε το τελικό αποτέλεσμα δεν θα επηρεαζόταν. Δηλαδή ακόμα και αν οι δύο παίχτες είχαν τη δυνατότητα να συννενοηθούν πριν αποφασίσουν την αντίδρασή τους στην επερχόμενη πρόταση της αστυνομίας, η κυρίαρχη στρατηγική τους δεν θα αλλάζε, με την έννοια ότι και πάλι τον εκάστοτε παίχτη τον

[13] Το 1979 ο Robert Axelrod διοργάνωσε διαγωνισμό καλώντας όσους είχαν εμβαθύνει στη Θεωρία Παιγνίων να ανταγωνιστούν τις στρατηγικές τους για μη στρατηγικά Παίγνια πολλών επαναλήψεων.

συνέφερε να ομολογήσει ειδικά από τη στιγμή που θα γνώριζε ότι ο αντίπαλός τους θα παρέμενε σταθερός στη σιωπή του. Το σημείο ισορροπίας λοιπόν θα είναι το ίδιο και στις δύο περιπτώσεις αντιμετώπισης του παιχνιδιού, χωρίς φυσικά αυτό να σημαίνει ότι έτσι θα συμβαίνει πάντα. Υπάρχει σαφής διαχωρισμός μεταξύ συνεργατικών και μη συνεργατικών παιχνιδιών και η συγκεκριμένη περίπτωση δεν αποτελεί γενίκευση της θεωρίας.

Το Δίλλημα του Κρατουμένου αν και φαίνεται συγκεκριμένο, μπορεί κάλλιστα να επεκταθεί σε πληθώρα παραδειγμάτων που αφορούν αλληλεπιδράσεις ανθρώπων και επιχειρήσεων, ακόμα και διακρατικών συμπεριφορών. Δεν είναι καθόλου τυχαίο το γεγονος ότι ενδιαφέρει δίαφορες Κοινωνικές Επιστήμες όπως τα οικονομικά, η πολιτική και η κοινωνιολογία, καθώς επίσης και Βιολογικές Επιστήμες όπως η ηθικολογία και η εξελικτική βιολογία. Πολλές φυσικές διαδικασίες μεταφράζονται σε πρότυπα στα οποία διάφοροι παίχτες συμμετέχουν σε ατελείωτα παιχνίδια του Διλήμματος του Κρατουμένου. Αυτή η ευρεία δυνατότητα εφαρμογής του παιχνιδιού εκφράζει την ουσιαστική σημασία του.

Το μεγαλύτερο φάσμα εφαρμογής του παιχνιδιού και της ισορροπίας που εκφράζει βρίσκεται στην Οικονομική Επιστήμη και ειδικότερα σε καταστάσεις πλήρους ανταγωνισμού μεταξύ δύο επιχειρήσεων. Κλασικό παράδειγμα είναι η απόφαση για διαφήμιση ενός εφάμιλου προϊόντος μεταξύ δύο εταιρειών της Α και της Β. Η αποτελεσματικότητα της διαφήμισης της εταιρείας Α καθορίζεται εν μέρει από τη διαφήμιση που πραγματοποιήθηκε από την εταιρεία Β. Επιπλέον, το κέρδος που προέρχεται από τη διαφήμιση για την εταιρεία Β επηρεάζεται με τη διαφήμιση που πραγματοποιείται από την εταιρεία Α. Εάν και η εταιρεία Α αλλά και η εταιρεία Β επιλέξουν να διαφημίσουν το προϊόν τους κατά τη διάρκεια μιας δεδομένης περιόδου, ουσιαστικά η διαφήμιση θα ακυρώσει μέρος των απολαβών τους ή οι απολαβές θα παραμείνουν σταθερές, ενώ οι δαπάνες θα αυξηθούν λόγω κόστους. Και οι δύο εταιρίες θα ωφελούνταν από μια μείωση της διαφήμισης. Εντούτοις, αν η εταιρεία Β επιλέξει να μην διαφημίσει, η εταιρεία Α θα μπορούσε να ωφεληθεί πολύ με τη διαφήμιση. Το βέλτιστο, λοιπόν ποσό δαπάνης για διαφήμιση από μια εταιρία εξαρτάται άμεσα από το ποσοστό δαπάνης που χορηγεί για διαφήμιση η άλλη. Παρόλο που η καλύτερη στρατηγική εξαρτάται από αυτό που η άλλη εταιρία επιλέγει και δεν υπάρχει καμία κυρίαρχη στρατηγική, η έκβαση του αποτελέσματος είναι παρόμοια, δεδομένου ότι και τις δύο εταιρίες θα τις σύμφερε να διαφημίσουν λιγότερο το προϊόν τους, ενώ τελικά καταλήγουν σε ένα ατέρμονο κυνήγι προσδοκόμενου οφέλους μέσω της διαφήμισης, το οποίο εκφράζεται απο το σχεδόν χειρότερο δυνατό σημείο ισορροπίας. Μερικές φορές οι συνεταιριστικές συμπεριφορές προκύπτουν στις επιχειρησιακές καταστάσεις

Στη πολιτική επιστήμη το Δίλλημα του Κρατουμένου χρησιμοποιείται συχνά για να εξηγήσει το πρόβλημα δύο κρατών που συμμετέχουν σε έναν αγώνα δρόμου επενδύσεων στρατιωτικών όπλων. Και οι δύο θα διαλογιστούν ότι έχουν δύο επιλογές, είτε να αυξήσουν τις στρατιωτικές δαπάνες είτε να κάνουν μια συμφωνία για να μειώσουν ή να παγώσουν τις επενδύσεις για τα στρατιωτικά όπλα. Καθένα κράτος θα ωφεληθεί από τη στρατιωτική επέκταση ανεξάρτητα από αυτό που το άλλο κράτος κάνει, επομένως και οι δύο κλίνουν προς τη στρατιωτική επέκταση. Το παράδοξο είναι ότι και τα δύο κράτη ενεργούν λογικά, αλλά παράγουν προφανώς ένα παράλογο αποτέλεσμα, εφόσον και τα δύο θα συνέφερε τουλάχιστον οικονομικά να μην προβούν σε καμία περαιτέρω δαπάνη για στρατιωτικά όπλα.

Στις περιβαλλοντικές μελέτες, το Δίλλημα του Κρατουμένου εμφανίζεται σε κρίσεις όπως η παγκόσμια αλλαγή κλίματος. Όλες οι χώρες θα ωφεληθούν από ένα σταθερό κλίμα, αλλά κάθε χώρα χωριστά είναι συχνά διστακτική να συγκρατήσει ή να ελαττώσει τις εκπομπές του CO2, κυρίως λόγω οικονομικού κόστους ή άλλων κοινωνικοπολιτικών αντιδράσεων. Το όφελος για μία μεμονωμένη χώρα η οποία διατηρεί την τρέχουσα συμπεριφορά της είναι μεγαλύτερο από το όφελος που προκείπτει αν όλες οι χώρες άλλαζαν τη συμπεριφορά τους. Έτσι εξηγείται το σημερινό αδιέξοδο σχετικά με την παγκόσμια αλλαγή κλίματος.

Μία άλλη εφαρμογή του Διλήμματος του Κρατουμένου αφορά τον αθλητισμό και ειδικότερα την απόφαση εαν θα χρησιμοποιηθούν φάρμακα τα οποία ενισχύουν την απόδοση των αθλητών. Δεδομένου ότι τα φάρμακα ασκούν περίπου ίση επίδραση σε κάθε αθλητή, είναι προς όφελος όλων των αθλητών το γεγονός ότι κανένας αθλητής δεν θα πάρει τα εν λόγω φάρμακα (λόγω των παρενεργειών που προκαλούν). Εντούτοις, εάν κάποιος αθλητής πάρει τα φάρμακα για να αυξήσει την απόδοσή του, θα αποκτήσει ένα σαφές πλεονέκτημα σε σχέση με τους υπόλοιπους, εκτός κι αν όλοι οι άλλοι αθλητές κάνουν ακριβώς το ίδιο πράγμα.

Σε αυτή την περίπτωση, το πλεονέκτημα που προσδίδουν τα φάρμακα ουσιαστικά εξαλείφεται, αλλά τα μειονεκτήματα (παρενέργειες) που προκαλούν παραμένουν.

Γίνεται φανερό πως ο καθένας μας μπορεί να σκαρφιστεί αμέτρητες εφαρμογές του συγκεκριμένου παιχνιδιού σε καθημερινές ή επιστημονικές καταστάσεις. Γι αυτόν ακριβώς το λογό και έχει τεράστια απήχηση σε θεωρητικούς και μη η Θεωρία Παιγνίων. Άλλωστε μέσω αυτού μπορούν όλοι ανεξεραίτως γνώσης ή ειδίκευσης να κατανοήσουν την ομορφιά της ενασχόλησης με την Θεωρία Παιγνίων και την περαιτέρω εξέλιξή της.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑΣ

# 2 ΙΣΟΡΟΠΙΑ NASH ΚΑΙ ΕΞΕΛΙΞΗ

## 2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Δεν υπάρχει αμφιβολία για την αξία της συνεισφοράς του νοη Neumann. Όπως δεν υπάρχει αμφιβολία ότι η θεωρία παιγνίων του νοη Neumann δεν θα είχε μέλλον χωρίς τις δύο μεγαλοφυείς ιδέες του John Nash ιδέες που την άλλαξαν ριζικά και πάνω στις οποίες χτίστηκε η σημερινή θεωρία των παιγνίων. Από πολύ νωρίς, ως φοιτητής στο Princeton University ο John Nash κατάφερε και δημιούργησε μια νέα βάση της θεωρίας παιγνίων, αποδεικνύοντας θεωρήματα τα οποία έδωσαν τη κατάλληλη τροφή σε αυτόν και τους συνεχιστές του έργου του να υποστηρίξουν ότι δεν υπάρχει κοινωνικό φαινόμενο το οποίο να μην μπορεί να το αναλύσει διεξοδικά η θεωρία των παιγνίων. Ουσιαστικά, ο John Nash με τρία άρθρα του μεταξύ του 1950 και του 1953 υποστήριξε ότι μπορεί να δώσει λύση σε όλα τα παίγνια που απαρτίζουν το κοινωνικό γίγνεσθαι.

Η πρώτη ιδέα βοήθησε τον Nash να απεγκλωβίσει τη θεωρία από τα παίγνια μηδενικού αθροίσματος στα οποία είχε τελματωθεί η προσέγγιση του von Neumann. Η δεύτερη ιδέα τον οδήγησε στην επέκταση της προσέγγισής του στον τομέα των διαπραγματεύσεων. Έκτοτε, η θεωρία παιγνίων δύναται να αναλύει καταστάσεις όπου τα εμπλεκόμενα μέρη έχουν την ευχέρεια να κάθονται γύρω από το τραπέζι και να καταλήγουν σε αμοιβαία επικερδείς συμφωνίες. Αυτές οι δύο ιδέες μαζί ενέπνευσαν τον κύκλο των παιγνιοθεωρητικών που ακολούθησαν τον Nash, να ασχοληθούν συστηματικά (α) με "συγκρούσεις" μη - μηδενικού αθροίσματος και (β) με διαπραγματευτικά προβλήματα επιλύσιμα στο πλαίσιο συμφωνιών όπου τα συμβαλλόμενα μέρη δέχονται την επιβολή και επιτήρηση των συμφωνημένων από το Κράτος, τα δικαστήρια, το Διεθνές Δίκαιο κ.τ.λ. (π.χ. συλλογικές συμβάσεις μεταξύ συνδικάτων και εργοδοτών, διακρατικές συμφωνίες).

Ξάφνου, οι δύο μεγαλοφυείς ιδέες του Nash μετέτρεψαν τη θεωρία παιγνίων σε μια γενική προσέγγιση όλων των κοινωνικών καταστάσεων, στο βαθμό που μια "κοινωνική κατάσταση" προκύπτει ως προϊόν αλληλεπίδρασης των ορθολογικών επιλογών και συμπεριφορών που στόχο έχουν την εξυπηρέτηση δεδομένων συμφερόντων. Εάν ισχύουν όλα αυτά καταλαβαίνει κανείς γιατί παιγνιοθεωρητικοί όπως ο Roger Myerson[14] πρεσβεύουν την αισιόδοξη άποψη ότι η θεωρία παιγνίων μετά τον Nash είναι (ή θα έπρεπε να είναι) η κοινή βάση της επιστημονικής μελέτης όλων των κοινωνικών φαινομένων.

Το σημαντικότερο όλων είναι βέβαια το γεγονός ότι ο Nash μέσω των ιδεών του παρέθεσε και τις λύσεις που προκύπτουν, στα πλαίσια πάντα ορθολογικών συμπεριφορών, ως σύστημα ισοροπίας του εκάστοτε παιχνιδιού, γνωστές ως Ισοροπίες Nash. Δυστυχώς όσο αισιόδοξο κι αν ακούγεται αυτό, σε αρκετές οικονομικοκοινωνικές καταστάσεις των ημερών μας είναι εξαιρετικά δύσκολο (εώς και αδύνατο ορισμένες φορές) να αποδοθεί υπολογιστικά σε ικανοποιητικό χρόνο. Εύλογα λοιπόν αναδύεται το ερώτημα της τάξεως της πολυπλοκότητας για την εύρεση μιας Ισοροπίας Nash σε ένα πρόβλημα – παιχνίδι ν παιχτών. Πολλοί είναι οι επιστήμονες που έχουν επιδοθεί στο κυνήγι εύρεσης ικανοποιητικών αλγορίθμων που επιλύουν το σημείο Ισοροπίας Nash σε γραμικό ή πολυωνυμικό χρόνο, κάποιοι εκ των οποίων παρουσιάζονται παρακάτω.

## 2.2 ΜΙΑ ΥΠΕΡΟΧΗ ΙΔΕΑ

Η επιρροή του von Neumann, όσον αφορά τον τρόπο λύσης ενός παιγνίου ήταν εμφανής μέχρι και την εποχή του Nash. Η μέθοδος δηλαδή επίλυσης με τρόπο τέτοιο, ώστε να ικανοποιείται η μεγιστοποίηση της προσωπικής ωφέλειας του παίχτη, ήταν η επικρατούσα άποψη της περιόδου εκείνης και δεν λάμβανε σε καμία περίπτωση υπόψην της τις υποκειμενικές προσδοκίες που ενδεχομένως υφίστανται στους εκάστοτε παίχτες. Το τελευταίο ήταν και αυτό που κίνησε το ενδιαφέρον του Nash, ο οποίος κατάφερε να αποκολληθεί από τη τετριμμένη μέθοδο και να σκαρφιστεί μια νέα μορφή λύσης. Η λύση αυτή

[14] Roger Bruce Myerson, αμερικανικός οικονομολόγος βραβευμένος με Νόμπελ (2007) μαζί με τους Leonid Hurwicz και Eric Maskin για την συμβολή τους στην ανάπτυξη των θεμελίων της θεωρίας “Mechanism Design Theory”.

του Nash είχε την ιδιαιτερότητα να αναφέρεται σε παίγνια μηδενικού ή μη μηδενικού αθροίσματος και πάνω από όλα είχε να κάνει με τις προσδοκίες των συμμετεχόντων παιχτών.

Με άλλα λόγια ο Nash έθεσε το γεγονός ότι η λύση των παιγνίων δεν είναι τίποτε άλλο από μια ισορροπία, η οποία απορρέει από τον συνδιασμό των ενεργειών ή των στρατηγικών επιλογών των παιχτών και των υποκειμενικών προσδοκιών οι οποίες δύναται να τους ωθήσουν σε αυτές τις ενέργειες. Κλασικό παράδειγμα, από το οποίο μπορεί κανείς να αντιληφθεί τη σημασία των προσδοκιών στη διαμόρφωση της βέλτιστης στρατηγικής επιλογής είναι ένα παιχνίδι σκάκι. Η στρατηγική που θα ακολουθήσει ένας παίχτης είναι άρρηκτα συνδεδεμένη από τις κινήσεις που προσμένει ότι θα πραγματοποιήσει ο αντίπαλος παίχτης. Αν υποθέσουμε ότι και οι δύο παίχτες θεωρούν τον αντίπαλό τους ορθολογικό παίχτη, τότε εν τέλει η κίνηση του «λευκού» παίκτη εξαρτάται από το τι προσδοκά ο «λευκός» ότι προσδοκά ο «μαύρος» ότι προσδοκά ο «λευκός» ότι προσδοκά ο «μαύρος» κ.ο.κ.

Για να γίνει περισσότερο κατανοητή η "λύση" των παιγνίων έτσι όπως την σκαρφίστηκε και την παρουσίασε ο Nash ακολουθεί η παρακάτω ανάλυση ενός απλού παιγνίου μεταξύ δύο παιχτών, το οποίο κάλλιστα θα μπορούσε να είναι αντιπροσωπευτικό διαφόρων επιστημών, οικονομικής, πολιτικής, κοινωνικής. Έστω ότι ισχύουν οι δύο παρακάτω μήτρες αμοιβών για δύο παίχτες.

| | B1 | B2 | B3 |
|---|---|---|---|
| A1 | +100,99 | 0,0 | 99,100- |
| A2 | 0,0 | +1 | 0,0 |
| A3 | 99,100- | 0,0 | +100,99 |

***Πίνακας 2.1***

| | B1 | B2 | B3 |
|---|---|---|---|
| A1 | +2,1 | O,O | 1,2- |
| A2 | O,O | 1000,1000- | 0,0 |
| A3 | 1,2- | 0,0 | +2,1 |

***Πίνακας 2.2***

Δύο παίκτες καλούνται να επιλέξουν μεταξύ τριών στρατηγικών. Στο μενού της ο Α έχει τις Α1, Α2 και Α3 ενώ ο Β τις στρατηγικές Β1, Β2 και Β3. Σε αυτό το παίγνιο υπάρχει μια ισορροπία Nash: ο Α επιλέγει τη στρατηγική Α2 και ο Β τη στρατηγική Β2. Ας δούμε γιατί ο συνδυασμός στρατηγικών (Α2, Β2) είναι ισορροπία Nash ενώ οι υπόλοιποι δεν είναι παρόλο που μερικοί από αυτούς είναι προτιμότεροι και για τους δύο παίκτες. Σύμφωνα με το Nash το αποτέλεσμα (Α1, Β1) δεν μπορεί να θεωρηθεί ισορροπία του παιγνίου, επειδή τουλάχιστον ένας παίκτης θα μετάνιωνε για την επιλογή του μετά το πέρας του παιχνιδιού. Εάν επέλεγαν Α1 και Β1, ο Α δε θα είχε πρόβλημα με την επιλογή του, μιας και η στρατηγική Α1 είναι πράγματι η βέλτιστη απόκριση στη στρατηγική Β1 του Β. (Παρατηρούμε ότι, εφόσον ο Β επιλέγει τη Β1, ο Α λαμβάνει 100 εάν επιλέξει την Α1, 0 εάν επιλέξει την Α2 και 99 εάν επιλέξει την Α3. Άρα, η βέλτιστη στρατηγική του επιλογή όταν ο Β επιλέγει τη Β1 είναι πράγματι η Α1.) Ο Β όμως θα μετάνιωνε για την επιλογή του (Β1) εάν παρατηρούσε ότι ο Α επέλεξε την Α1, καθώς η βέλτιστη απόκριση στην Α1 του Α είναι η Β3. (Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση που Α επιλέξει την Α1, ο Β δύναται να λάβει 99 εάν επιλέξει τη Β1, 0 εάν επιλέξει τη Β2 και 100 εάν επιλέξει την Α3. Συνεπώς η βέλτιστη στρατηγική του επιλογή όταν ο Α επιλέγει την Α1 είναι όχι η Β1 αλλά η Β3. Άρα, από τη στιγμή που ο Β θα μετάνιωνε για τη Β1 όταν ο Α επιλέγει την Α1, ο συνδυασμός στρατηγικών (Α1, Β 1) δεν μπορεί να είναι ισορροπία Nash.

Το ίδιο ισχύει για κάθε ένα συνδυασμό (ή σύνολο) στρατηγικών με μια μόνο εξαίρεση: τις στρατηγικές (Α2, Β2). Εάν επιλέξουν αυτό το συνδυασμό δεν θα μετανιώσει κάποιος από τους δύο παίκτες για την επιλογή του. Ο Α δε θα μετανιώσει μιας και η Α2 είναι η βέλτιστη απόκριση στη Β2. (Παρατηρούμε ότι, εφόσον ο Β επιλέγει τη Β2, ο Α λαμβάνει 0 εάν επιλέξει την Α1, 1 εάν επιλέξει την Α2 και 0 εάν επιλέξει την Α3. Η βέλτιστη στρατηγική του επιλογή όταν ο Β επιλέγει τη Β2 είναι συνεπώς η Α2.) Όμως το ίδιο ισχύει σε αυτή την περίπτωση και για τον Β! Εφόσον επέλεξε ο Α την Α2, η βέλτιστη απόκριση του Β είναι η Β2. (Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση που ο Α επιλέξει την Α2, ο Β λαμβάνει 0 εάν επιλέξει τη Β1, 1 εάν επιλέξει τη Β2 και 0 εάν επιλέξει την Α3. Άρα, η βέλτιστη στρατηγική του επιλογή όταν ο Α επιλέγει την Α2 είναι η Β2.)

Πιο αναλυτικά, έχουμε τις εξής πιθανές προσδοκίες του Α με τις αντίστοιχες βέλτιστες αποκρίσεις τους (δηλαδή, τις βέλτιστες στρατηγικές του επιλογές):

1. Ο Α προσδοκά ότι ο Β θα επιλέξει Β1. Τότε η βέλτιστη επιλογή της είναι η Α1.
2. Ο Α προσδοκά ότι ο Β θα επιλέξει Β2. Τότε η βέλτιστη επιλογή του είναι η Α2.
3. Ο Α προσδοκά ότι ο Β θα επιλέξει Β3. Τότε η βέλτιστη επιλογή του είναι η Α3.

Οι αντίστοιχες προσδοκίες και βέλτιστες επιλογές του Β έχουν ως εξής:

4. Ο Β προσδοκά ότι ο Α θα επιλέξει Α1. Τότε η βέλτιστη επιλογή του είναι η Β3.
5. Ο Β προσδοκά ότι ο Α θα επιλέξει Α2. Τότε η βέλτιστη επιλογή του είναι η Β2.
6. Ο Β προσδοκά ότι ο Α θα επιλέξει Α3. Τότε η βέλτιστη επιλογή του είναι η Β1.

Δεν είναι δύσκολο να διακρίνουμε ότι οι μοναδικές επιλογές που επιβεβαιώνουν τις προσδοκίες και των δύο είναι ο συνδυασμός (Α2, Β2) η προσδοκία (2) του Α και η (5) του Β. Στον πίνακα 2.1 σημειώθηκε με θετικό πρόσημο (+) στο αποτέλεσμα (Α1, Β1) η προσδοκία (1), υποδηλώνοντας με αυτό ότι η Α1 είναι η βέλτιστη απόκριση του Α στη Β1 του Β. Το ίδιο θετικό πρόσημο (+) στο αποτέλεσμα (Α2, Β2) δείχνει ότι η βέλτιστη απόκριση του Α στη Β2 είναι η Α2. Τέλος, προστέθηκε άλλο ένα τέτοιο θετικό πρόσημο στο αποτέλεσμα (Α3, Β3) υποδεικνύοντας έτσι ότι η Α3 είναι η βέλτιστη απόκριση του Α στη Β3 του Β. Με αυτό τον τρόπο, αμέσως διακρίνονται οι βέλτιστες αποκρίσεις του Α σε κάθε μια από τις στρατηγικές επιλογές του Β. Η ίδια λογική αλλά με αρνητικά πρόσημα (-) ακολουθήθηκέ και για τις βέλτιστες επιλογές του Β. Έτσι, το αποτέλεσμα (Α1, Β3) περιέχει ένα αρνητικό πρόσημο (-) επειδή η Β3 αποτελεί τη βέλτιστη απόκριση του Β στη στρατηγική Α1 του Α. Το ίδιο ισχύει για το αποτέλεσμα (Α2, Β2), δεδομένου ότι η Β2 είναι η βέλτιστη απόκριση του Β στην Α2 του Α και, τέλος, στο αποτέλεσμα (Α3, Β1) καθώς η βέλτιστη απόκριση του Β στην Α3 του Α είναι η στρατηγική Β1. Με αυτό τον τρόπο γίνεται εύκολα εμφανής η λύση του παιγνίου κατά τον Nash ή αλλιώς η ισορροπία του. Πρόκειται για το αποτέλεσμα, δηλαδή τον συνδυασμό των στρατηγικών, μια για τον κάθε παίκτη όπου συμπίπτουν οι αναμενόμενες προσδοκίες για τον εκάστοτε αντίπαλο. Τα ίδια ακριβώς συμπεράσματα απορρέουν και από το παίγνιο του πίνακα 2.2. Και σε αυτό, η μοναδική ισορροπία Nash είναι το αποτέλεσμα των στρατηγικών επιλογών (Α2, Β2)[15].

Πρακτικά η λύση που αποδίδεται στα παραπάνω παιχνίδια κάποιες φορές δύναται να είναι η καλύτερη δυνατή ή η πιο κερδοφόρα για τον εκάστοτε παίχτη, ενώ κάποιες άλλες είναι η χειρότερη δυνατή ή η πιο ζημιοφόρα. Αναδύεται, λοιπόν, εύλογα το ερώτημα του κατά πόσο μπορεί η φαινομενικά χειρότερη δυνατή λύση ενός παιγνίου, από άποψη κέρδους των παιχτών, ουσιαστικά να αποτελεί την πραγματική του λύση, την ισοροπία του.

Η απάντηση του Nash είναι πως η δομή του συγκεκριμένου παιγνίου είναι τέτοια που τους ωθεί στην παγίδα του ανταγωνισμού. Οποιοδήποτε καθημερινό δρώμενο στη ζωή μας, από ένα απλό παιδικό παιχνίδι, εώς ένα πολύπλοκο κοινωνικο-οικονομικό σύστημα, μπορεί κάλλιστα να εμπεριέχει και να απαιτεί κάποιες φορές, ατομικές ανταγωνιστικές συμπεριφορές. Άλλωστε η κεντρική ιδέα του αγοραίου ανταγωνισμού σύμφωνα με τον οικονομολόγο Adam Smith είναι το γεγονός ότι, οι έμποροι και οι εκάστοτε επιχειρήσεις καταλήγουν τελικά σε μηδενικά οικονομικά κέρδη, ακριβώς επειδή προσπαθούν να τα μεγιστοποιήσουν χαμηλώνοντας τις τιμές τους. Την ιδέα αυτή εξέλιξε και απέδοσε ο Nash σε ολόκληρο το επιστημονικό φάσμα.

Κάθε παίχτης ενός παιχνιδιού, όποιο κι αν είναι αυτό, προσδοκά να μεγιστοποιήσει την προσωπική του συνάρτηση οφέλειας και πάνω σ' αυτό τον γνόμωνα καταστρώνει τις στρατηγικές του. Λαμβάνοντας υπόψιν το γεγονός ότι σκέφτεται και ενεργεί ορθολογικά και αυτός, αλλά και οι υπόλοιποι συμμετέχοντες στο παιχνίδι, περιμένει ακριβώς το ίδιο μ' αυτόν να πράξουν και οι άλλοι παίχτες. Ο εκάστοτε παίχτης, λοιπόν, θα ακολουθήσει εκείνη την

[15] «Η ΣΥΝΕΙΣΦΟΡΑ ΤΟΥ JOHN NASH ΣΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΠΑΙΓΝΙΩΝ», Σέμκογλου Βασιλική, Διπλ. Εργασία, Τ.Ε.Ι. Δυτικής Μακεδονίας, σελ. 25-27.

στρατηγική, για την οποία δεν θα μετανοιώσει μετά, σύμφωνα πάντα από τις προσδοκίες και τις στρατηγικές που προσμένει από τους υπόλοιπους παίχτες. Η διαδικασία αυτή από τη φύση της δημιουργεί ένα ανταγωνιστικό σύστημα συμπεριφορών, ένα παιχνίδι, το οποίο αναγκαστικά θα καταλήξει σε μια έμμεσα συνεναιτική λύση. Η ουσία είναι ότι αν κάθε παίχτης λειτουργίσει αποκλειστικά ατομικά, αποβλέποντας στο προσωπικό του κέρδος και όχι στο κέρδος που απορρέει ως μέλος του συστήματος, τότε βραχυπρόθεσμα ή μακροπρόθεσμα θα ζημιωθεί, θα μετανοιώσει για την απόφασή του. Η πραγματική λύση θα δοθεί όταν όλα τα μέλη του συστήματος λειτουργήσουν με βάση το καλό του συνόλου και το κέρδος που απορρέει μέσα από αυτό. Αυτή η λύση είναι και η Ισοροπία για τον Nash.

## 2.3 ΘΕΩΡΗΜΑ ΚΑΙ ΙΣΟΡΟΠΙΑ

Η Ισοροπία Nash, όπως αυτή αποδόθηκε για τα παιχνίδια μη μηδενικού αθροίσματος, είχε μεγάλο αντίκτυπο στην επιστημονική κοινότητα της εποχής, για πολλούς και διάφορους λόγους. Η διαφοροποίηση του ιδιωτικού με το συλλογικό συμφέρον, καθώς και η αλληλένδετη σχέση τους που απορρέει μέσα από τις καταστάσεις ένος συστήματος, παιχνιδιού βρήκε επιτέλους τη λύση του. Απέδειξε ότι το προσωπικό όφελος, ακόμα και αν βραχυπρόθεσμα ή άμεσα φαίνεται ευοίωνο τελικά μακροπρόθεσμα θα επέλθει ή θα πρέπει να αναδυθεί μέσω του συλλογικού συμφέροντος. Πρόκειται για ένα καίριο πλεονέκτημα της θεωρίας Nash (από τη σκοπιά της κοινωνικής θεωρίας γενικότερα) μιας και με αυτό το αποτέλεσμα αναδεικνύεται το πόσο επισφαλές είναι το συλλογικό συμφέρον, καθώς και πόσο ιδιαίτερα παρακινδυνευμένο είναι να υποθέτουμε, δίχως ιδιαίτερη μελέτη, την ταύτιση του ιδιωτικού και του συλλογικού συμφέροντος. Ο Nash απέδειξε ότι μια ισορροπία μεταξύ ιδιωτικών προσδοκιών και πράξεων μπορεί να αποβεί μοιραία για όλους κάτι που το ζούμε καθημερινά καθώς, π.χ., πράξεις που αποβλέπουν αποκλειστικά στο ιδιωτικό συμφέρον καταστρέφουν μέρα με τη μέρα το περιβάλλον.

Δύναται να ορίσουμε με απλά λόγια την Ισοροπία Nash ως ένα σύνολο στρατηγικών, μια για κάθε παίκτη, ∑α για τον Α, ∑β για την Β, ∑γ για τον Γ κ.ο.κ. Το σύνολο αυτών των στρατηγικών (∑α, ∑β, ∑γ,... ) αποτελεί ισορροπία Nash εφόσον η ∑α είναι η καλύτερη "απάντηση" στις στρατηγικές (∑β, ∑γ,... ) των υπολοίπων, η ∑β είναι η καλύτερη "απάντηση" στις στρατηγικές (∑α, ∑γ,...) των υπολοίπων κ.ο.κ. Αυτό σημαίνει ότι κάθε παίχτης επιλέγει μια στρατηγική από την οποία δεν μπορεί να αποκλίνει μονομερώς. Σε μια ισοροπία Nash κάθε παίχτης έχει επιλέξει μια στρατηγική και δεν μπορεί να αυξήσει την αναμενόμενη ωφέλειά του αν αλλάξει τη στρτηγική του, δεδομένου ότι οι υπόλοιποι παίχτες διατηρήσουν τις στρατηγικές τους.

Φορμαλιστικά μια Ισοροπία Nash για το παίγνιο $A = [N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N_i}]$ είναι ένα περίγραμμα στρατηγικών $s \in X_{i \in N} S_i$, τέτοιο ώστε, για κάθε παίχτη $i \in N$,

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i}) \ \forall s'_i \in S_i.$$ [16]

Όπως φαίνεται και από τον παραπάνω ορισμό, Η ισορροπία Nash δεν περιορίζεται σε μια μόνο κατηγορία παιγνίων αλλά αφορά όλα τα παίγνια μεταξύ *n* ατόμων, τα οποία όμως ανήκουν σε ένα πεπερασμένο σύνολο. Είναι μια γενική λύση και αυτή της η γενικότητα την καθιστά αρκετά σημαντική. Μπορεί κάλλιστα οποιοσδήποτε μελετήσει τη λύση του von Neumann στα παίγνια μηδενικού αθροίσματος, να αντιληφθεί ότι ουσιαστικά πρόκειτε για ισορροπία Nash με άλλα λόγια. Η μέθοδος δηλαδή minimax (ή maximin) του von Neumann απέδωσε μια λύση επειδή αποτελεί υποπερίπτωση της πολύ γενικότερης ισορροπίας. Γι αυτό και η εν λόγο λύση πολύ σύντομα θεωρήθηκε απλά ως μια ακόμα ισορροπία Nash.

Ο Nash δεν σταμάτησε όμως εκεί την έρευνα του, με αποτέλεσμα να καταφέρει να αποδείξει ότι σε κάθε στρατηγικό παίγνιο υπάρχει τουλάχιστον μια ισοροπία Nash, εφόσον πάντα οι στρατηγικές επιλογές για τον εκάστοτε παίχτη είναι πεπερασμένες σε αριθμό. Η τελευταία πρόταση αποτελεί το γνωστό σε όλους μας *Θεώρημα Nash*.

[16] «Αλγοριθμική και Εξελικτική Θεωρία Παιγνίων», Παναγιώτα Ν. Παναγοπούλου, Διπλωμτική Εργασία, Πάτρα, 2008, σελ. 21.

Για την επίτευξή του ο Nash χρησιμοποίησε ως βάση το Θεώρημα Brouwer[17] ή αλλιώς Θεώρημα Σταθερών Σημείων. Μια κοινώς αποδεκτή πρόταση, ακόμα και στις μέρες μας, για την ύπαρξη ενός τουλάχιστον σταθερού σημείου σε οποιαδήποτε συνεχές συνάρτηση, η οποία αποτέλεσε ανα τα χρόνια τη βάση για διάφορα γενικά θεωρήματα σταθερών ή υπαρκτών σημείων και ισοροπιών σε όλο το φάσμα των επιστημών. Με απλά μαθηματικά μπορεί να διατυπώθεί ως το γεγονός ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f : K \rightarrow K$, όπου $K \subset \mathbb{R}$ και είναι ένα μη κενό, κυρτό και συμπαγές σύνολο(ή σφαίρα), έχει ένα τουλαχιστον σταθερό σημείο, δηλαδή υπάρχει ένα $x \in K$, τέτοιο ώστε $f(x)=x$.

Με αυτό το γεγονός ως αφετερία και με έναν πιο σύνθετο μαθηματικό συλλογισμό, ο Nash υπέδειξε στην επιστημονική κοινότητα της εποχής εκείνης την αλήθεια που πρέσβευε η θεωρία του. Αρχικά αποτέλεσε μια σπουδαία συμβολή στη μετέπειτα εξέλιξη των μαθηματικών. Προσέφερε μια νέα προσέγγιση στο Θεώρημα σταθερών σημείων του Brouwer και συνέβαλε τα μέγιστα στην τοπολογία. Μεγάλη ήταν η συνεισφορά του στην ανάπτυξη της θεωρίας των κυρτών σωμάτων και παρακίνησε ή ακόμα και κατέυθυνε τις οικονομικές εφαρμογές του γραμμικού προγραμματισμού. Ενέπνευσε τις συνεισφορές του Wald[18] στην θεωρία των στατιστικών αποφάσεων και άλλα πολλά. Ουσιαστικά ο Nash, χωρίς να το έχει καταλάβει, είχε ανακαλύψει κατί πολύ πιο σημαντικό και πολύ πιο μεγάλο από αυτό που και ο ίδιος έψαχνε.

## 2.4 ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ LEMKE-HOWSON

Παρά την αναμφισβήτητη ύπαρξη ισορροποιών Nash σε πεπερασμένα παίγνια, ο υπολογισμός μιας τέτοιας ισορροπίας, καθώς και η πολυπλοκότητά του, παρέμενε για πολλά χρόνια άγνωστα στην επιστημονική κοινότητα της εποχής και αποτελούσαν το βασικότερο στοιχείο αναζήτησης. Όπως είναι λογικό κανένας επιστήμονας δε μπορεί να αρκεστεί στο γεγονός απλά ότι υπάρχει λύση. Έπρεπε λοιπόν να απαντηθεί το εύλογο ερώτημα του ποιά είναι αυτή η λύση και πόσο χρόνο χρειάζεται για να βρεθεί. Φυσικά υπήρχε η λύση του μέγιστου-ελάχιστου(minmax), αλλά αυτή αφορούσε μόνο παιχνίδια μηδενικού αθροίσματος, αν και ακόμα και γι αυτήν, εκείνη την εποχή, δεν είχε λυθεί το θέμα της πολυπλοκότητας για πολλούς παίχτες.

Το μεγάλο βήμα για την επίλυση του ερωτήματος που βασάνιζε τους επιστήμονες τότε, το έκαναν μια δεκαετία περίπου (1964) μετά την πρωτοποριακή δουλειά του Nash, οι μαθηματικοί Lemke και Howson. Κατάφεραν να δημιουργήσουν έναν αλγόριθμο, ο οποίος υπολογίζει μια ισορροπία Nash για ένα οποιοδήποτε πεπερασμένο παίγνιο μεταξύ δύο παιχτών. Ο αλγόριθμός τους τερματίζει σε πεπερασμένο χρόνο αρκεί, οι οφέλειες των παιχτών να είναι ρητοί αριθμοί. Αποτελεί μια εναλλακτική απόδειξη του θεωρήματος του Nash, και φέρνει στην επιφάνεια με έναν μάλλον εντυπωσιακό τρόπο τα ζητήματα πολυπλοκότητας που περιλαμβάνονται στην επίλυση Nash. Η παρουσίασή της είναι πολύ απλούστερη στην περίπτωση των συμμετρικών παιχνιδιών, χωρίς αυτό να σημαίνει την οποιαδήποτε απώλεια της γενικότητας που εκπροσωπεί.

Ο αλγόριθμος Lemke-Howson (χάριν συντομίας LH) βρίσκει μια ισορροπία Nash, και ουσιαστικά δηλώνει μια στοιχειώδη απόδειξη, ότι οι ισορροπίες Nash υπάρχουν. Ο αλγόριθμος LH ακολουθεί μια πορεία (αποκαλούμενη πορεία LH) των ζευγαριών των κορυφών (X, Y) του $P \times Q$, τα οποία αποτελούν κάποια στοιχειώδη γραφήματα αποδόσεων (ή πίνακες). Ξεκινά από το ζευγάρι (0,0) και τερματίζει σε μια ισορροπία Nash. Η πορεία του LH είναι ένα διαδοχικό πέρασμα από τις άκρες του P και του Q, αποδίδοντας και από μία ετικέτα από κάθε κορυφή που περνάει. Η πορεία από τις κορυφές του P δίνεται από το σύνολο των ετικετών M, και του Q δίνεται από το σύνολο των ετικετών N.

Ο αλγόριθμος LH αρχίζει από (0, 0) στο $P \times Q$. Το στιγμιότυπο αυτό καλείται τεχνητή ισορροπία και δεν αντιπροσωπεύει μια ισορροπία Nash του παιχνιδιού, επειδή το διάνυσμα

[17] Luitzen Egbertus Jan Brouwer, (27/2/1881 – 2/12/1966), Ολλανδός μαθηματικός και φιλόσοφος των μαθηματικών, απόφοιτος του Πανεπιστημίου του Άμστερνταμ. Ασχολήθηκε κυρίως με την Τοπολογία.

[18] Abraham Wald (October 31, 1902 – December 13, 1950), μαθηματικός με μεγάλη συνεισφορά στη Θεωρία Αποφάσεων, την Οικονομετρία, τη Γεωμετρία και ιδρυτής της έννοιας της Διαδοχικής Ανάλυσης στο πεδίο της στατιστικής.

μηδέν δεν μπορεί να είναι διάνυσμα μικτής στρατηγικής. Μια αρχική ελεύθερη επιλογή του αλγορίθμου LH είναι μια καθαρή στρατηγική K ενός παίχτη, ονομάζεται ελλείπουσα ετικέτα και έπεται αμέσως μετά το στιγμιότυπο (X, Y) = (0, 0). Στο σημείο τέλους της αντίστοιχης κορυφής (του P εάν K ∈ M, του Q εάν K ∈ N), ο αλγόριθμος αφήνει την K και δίνει μια νέα ετικέτα (l), εξετάζοντας αν είναι ήδη παρούσα σε κάποιο άλλο γραφήμα αποδόσεων. Εάν ισχύει αυτό τότε ο αλγόριθμος μεταφέρεται στο άλλο γράφημα, διαλέγει μια νέα ετικέτα και συνεχίζει την ίδια διαδικασία μέχρι να βρει την ελλείπουσα ετικέτα. Έτσι ολοκληρώνει έχοντας βρεί μια ισορροπία Nash. Διαφορετικά, επαναλαμβάνει τη διδικασία της διπλής ετικέτας στο άλλο γράφημα και συνεχίζει.

Από την άποψη του παιχνιδιού, τα πρώτα δύο βήματα του LH ανέρχονται σε λήψη μιας καθαρής στρατηγικής (που δίνεται από την ελλείπουσα ετικέτα K, για παράδειγμα του παίκτη 1) και εξετάζοντας την καλύτερη δυνατή απάντησή του, για παράδειγμα j, το οποίο καθορίζει ένα καθαρό ζευγάρι στρατηγικής (K, j). Εάν αυτό δεν είναι ήδη μια ισορροπία, η καλύτερη απάντηση i στο j δεν είναι K, έτσι ώστε το i είναι μια διπλή ετικέτα, και δίνεται η πιθανότητα να υπάρχει μια καλύτερη απάντηση από το K. Με άλλα λόγια η διπλή ετικέτα μπορεί να έχει δύο διαφορετικά αποτελέσματα. Δύναται λοιπόν να είναι η καλύτερη απάντηση στη στρατηγική του αντιπάλου ή μια αγνή στρατηγική, η πιθανότητα βελτίωσης της οποίας, οδηγείτε στο μηδέν βγάζοντας τον αλγόριθμο από τη διαδικασία ψαξίματος της καλύτερης δυνατής απάντησης.

Με απλή καθημερινή γλώσσα θα μπορούσαμε να ορίσουμε τον αλγόριθμο Lemke-Howson κάπως έτσι:

**ΕΙΣΟΔΟΣ :** Ένα παιχνίδι διπίνακα (A,B) (διμητρώο), μη εκφυλισμένο.

**ΕΞΟΔΟΣ :** Μία ισορροπία Nash.

**ΜΕΘΟΔΟΣ :** Διάλεξε, όρισε ένα K ϵ M ⊆ N.

**ΒΗΜΑ 1 :** Ξεκίνα με (X, Y) = (0, 0) ϵ P × Q. Ασε την ετικέτα K από το X του P εάν K ∈ M, από το Y του Q εάν K ∈ N

**ΒΗΜΑ 2 (ΒΡΟΧΟΣ) :** Όρισε νέο ζευγάρι (X,Y). Διάλεξε νέα ετικέτα και ονόμασέ την l. Αν l=K, τότε τερμάτισε και όρισε το στιγμιότυπο (X,Y) ως μια Ισορροπία Nash, αλλιώς ρίξε την l στον άλλον πίνακα (γράφημα) και επανέλαβε[19].

Είναι εμφανές ότι το σημείο εκκίνησης του αλγορίθμου (X,Y) = (0,0), το οποίο αποτελεί ουσιαστικά μια τεχνητή ισορροπία, δίνεται εξ ορισμού, δεν βρίσκεται. Αν υποτεθεί ότι σε ένα παιχνίδι υπάρχει μία Ισορροπία Nash και η τεχνητή ισορροπία και δοθεί ως σημείο εκκίνησης το στιγμιότυπο (X,Y), το οποίο είναι η ισορροπία, τότε η διαδρομή LH, που θα ακολουθήσει ο αλγόριθμος, θα καταλήξει ως σημείο ισορροπίας στο (X,Y) = (0,0). Επομένως μπορούμε να χρησιμποιήσουμε τον αλγόριθμο όσες φορές χρειαστεί, ώστε να μας επιστρέψει όλες τις πιθανές Ισορροπίες Nash ενός παιχνιδιού.

Ο αλγόριθμος LH ολοκληρώνει, και βρίσκει μια ισορροπία Nash. Δεδομένου του γεγονότος ότι το P × Q έχει μόνο πεπερασμένα ζευγάρια κορυφών, είναι επόμενο και ο αλγόριθμος να χρειαστεί πεπερασμένο χρόνο για να ολοκληρώσει. Πολύ αργότερα αποδείχθηκε ότι στη χειρότερη περίπτωση τα ζευγάρια των κορυφών δύναται να είναι εκθετικά ως προς το M και το N, το οποίο σημαίνει ότι θα είναι εκθετικός και ο χρόνος που απαιτείτε από τον αλγόριθμο, για να τερματίσει[20][21]. Εδώ ακριβώς έγκειτε και το θέμα της πολυπλοκότητας του αλγορίθμου και κατά συνέπεια το θέμα της πολυπλοκότητας εύρεσης μιας Ισορροπίας Nash, το οποίο θα αναλυθεί διεξοδικότερα σε επόμενη ενότητα.

Βέβαια, όπως και η εύρεση της Ισορροπίας Nash, έτσι και η απόδειξη της λειτουργίας του αλγορίθμου, μπορεί να αποδοθεί με λίγο πιο προχωρημένα μαθηματικά. Το επίπεδο της πολυπλοκότητας του αλγορίθμου, σε καμία περίπτωση δεν μπορεί να μειώσει τη σπουδαιότητ του. Η δημιουργία του αποτελεί ορόσημο στην εξελικτική πορεία της γενικότητας

[19] "Algorithmic Game Theory", Noam Nisan, Tim Roughgarden, ΄ Eva Tardos, Vijay V. Vazirani, 2007, Cambridge University Press, το συγκεκριμένο κείμενο έχει γραφτεί από τον Bernhard von Stengel, σελ 62

[20] Rahul Savani και Bernhard von Stengel, 2004

[21] «Αλγοριθμική και Εξελικτική Θεωρία Παιγνίων», Παναγιώτα Ν. Παναγοπούλου, Διπλωμτική Εργασία, Πάτρα, 2008, σελ. 28.

που εκφράζει η Θεωρία Παιγνίων και θεμέλιο λίθο στην αναγωγή της, όσον αφορά το επίπεδο υπολογισμού των λύσεων της, από Θεωρία Παιγνίων σε Αλγοριθμική Θεωρία Παιγνίων.

## 2.5 Η ΕΞΕΛΙΞΗ

Πολλοί ήταν οι μελετητές και οι επιστήμονες που ασχολήθηκαν με τα παραπάνω τα χρόνια που ακολούθησαν, αλλοί με κάπως σημαντική συμβολή, άλλοι με λιγότερη. Παρ' αυτά θα μπορούσε να πεί κανείς ότι η Θεωρία Παιγνίων, με τις ιδέες του Nash σε κεντρικό ρόλο παρέμεινε σε μία σχετική στασιμότητα εξέλιξης για τις επόμενες δύο περίπου δεκαετίες. Ενώ ήδη από τα τέλη της δεκαετίας του '70 είχαν αρχίσει τα πρώτα βασικά σημάδια εξέλιξης, από τη δεκαετία του '80 και έπειτα εμφανίζεται ως η «Επιστήμη της Κοινωνίας», με σπουδαίο πλήθος εφαρμογών σε πολλούς κλάδους. Βασικοί συντελεστές σ' αυτή την τροπή και κατά κάποιο τρόπο άξιοι συνεχιστές του Nash ήταν αρχικά οι John Harsanyi[22] και Reinhard Selten[23].

Οι τελευταίοι ποτέ δεν έκρυψαν ότι δεν έκαναν τίποτα διαφορετικό από το να ακολουθήσουν τις οδηγίες που ουσιαστικά τους είχε κληροδοτήσει ο Nash μέσα από τα άρθρα και τις θεωρίες του. Πράγματι ο Nash είχε ουσιαστικά ορίσει, μεσω του τρόπου που είχε λειτουργήσει, ποια πορεία έπρεπε να ακολουθηθεί για την περαιτέρω εξέλιξη της θεωρίας του και της πρακτικής εφαρμογής της. Η πορεία αυτή δεν ήταν άλλη από την ενασχόληση με τα οποιαδήποτε προβλήματα ή ατέλειες που μπορεί να δημιουργούνταν από την ύπαρξη πολλαπλών ισορροπιών Nash. Ήταν λοιπόν απαραίτητο με κάποιο τρόπο να καθοριστούν τα κατάλληλα κριτήρια και μέθοδοι, σύμφωνα με τα οποία θα μπορούσε να διελευκανθεί το ποια ισορροπία ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα και ποια όχι. Έτσι κατάφεραν να μειωθεί αισθητά ο αριθμός των ισορροπιών και κατά συνέπεια να εξομαλυνθει η απροσδιοροστία του Nash.

Με γνώμονα το τελευταίο και μεγάλη προσήλωση στη δουλειά τους οι Harsanyi και Selten κατάφεραν να διαδραματίσουν πολύ σπουδαίο ρόλο στην εξέλιξη των θεωριών του John Nash. Η πρώτη σημαντική συμβολή αφορά τον Harsanyi, ο οποίος εδραίωσε την ιδέα να εισαχθεί στην ανάλυση των παιχνιδιών η αβεβαιότητα των παικτών. Εξίσου σημαντική ήταν και συμβολή του Selten, ο οποίος μελέτησε επιμελώς την εξέλιξη ενός παιχνιδιού στο χρόνο ή την επανάληψή του, προσδίδοντας έτσι νέα δυναμική στη θεωρία αλλά και στην έννοια της ισορροπίας των παιχνιδιών.

### 2.5.1 Bayes-Nash

Ένα από τα πιο χαρακτηριστικά προβλήματα της θεωρίας του Nash μπορεί εύκολα να το εντοπίσει κανείς σε εκτενή ή επαναλαμβανόμενα στρατηγικά παίγνια. Στη μελέτη τέτοιου είδους παιχνιδιών είναι πολύ πιθανό ή μάλλον το πιθανότερο να εμφανιστούν παραπάνω από μια ισορροπίες Nash, γεγονός που καθιστά πολύ δύσκολο το ξεσκαρτάρισμα των ουσιαστικών ή μη ισορροπιών του παιχνιδιού, δημιουργώντας έτσι το πρόβλημα της απροσδιοριστίας. Φυσικά ο Nash είχε προτείνει έναν τρόπο επίλυσης αυτού του προβλήματος, εισάγωντας την έννοια της πιθανότητας και του μέσου όρου. Όταν λοιπόν ουσιαστικά δεν μπορούσε να ορίσει τι θα γίνει σε ένα παιχνίδι, προσπαθούσε να εξηγήσει με τι πιθανότητα θα πράξουν οι παίχτες και να εξάγει ένα αποτέλεσμα κατά μέσο όρο. Η σκέψη αυτή του Nash αν και πραγματικά μεγαλοφυής, εντούτις δεν ήταν δυνατόν να αποτελέσει ικανοποιητική λύση, ειδικά σε παίγνια αμιγών στρατηγικών.

Το ουσιώδες αυτό αδύνατο σημείο της θεωρίας του Nash επεξεργάστηκε και τελικά εκμεταλεύτηκε ο Harsanyi μετατρέποντάς το σε πλεονέκτημα. Η θεωρία ως τότε συντηρούσε την ιδέα ότι όλοι οι συμμετέχοντες παίχτες γνωρίζουν πολύ καλά τα κίνητρα και τις οφέλειες των αντιπάλων τους σε οποιοδήποτε πιθανό αποτέλεσμα. Κάτι τέτοιο βέβαια δεν έχει καμία σχέση με την πραγματικότητα, στην οποία ο κάθε παίχτης έχει τη δυνατότητα να γνωρίζει πολύ καλύτερα τι είναι προτιμότερο γι αυτόν από ότι οι υπόλοιποι παίχτες. Το γεγονός αυτό

[22] John Harsanyi (1920-2000) Ούγγρος οικονομολόγος, εισηγητής των γνωστών Bayesian Games
[23] Reinhard Selten (1930 - ) Γερμανός οικονομολόγος, πατέρας της πειραματικής οικονομικής θεωρίας

χρησιμοποίησε και ανέπτυξε ο Harsanyi, εισάγωντας μια επιπλέον ιδιότητα στους παίχτες, την ιδιότητα του χαρακτήρα ή της προσωπικότητας των παιχτών. Θεώρησε ότι ο κάθε ένας από τους n παίχτες μπορεί να έχει m διαφορετικές "προσωπικότητες", δηλαδή m διαφορετικές αποδόσεις ή ωφέλειες/ χρησιμότητες από το κάθε ένα πιθανό αποτέλεσμα του παιγνίου.

Έτσι ο Harsanyi κατάφερε να συνδιάσει την αβεβαιότητα που αφορά το χαρακτήρα και τα κίνητρα των παικτών προσθέτοντάς την στη στρατηγική αβεβαιότητα που είχε ήδη αναλύσει ο Nash, δημιουργώντας με αυτόν το τρόπο μια νέα διευρυμένη έννοια ισορροπίας Nash, τη λεγόμενη ισορροπία Bayes-Nash. Η κεντρική ιδέα της έννοιας της ισορροπίας δεν αλλάζει, δηλαδή η ισορροπία συνεχίζει να αποτελεί το σύνολο των στρατηγικών των εκάστοτε παιχτών, μόνο που αυτή τη φορά η απόφαση για την κατάλληλη επιλογή στρατηγικής του κάθε παίχτη, λαμβάνεται σύμφωνα με τις προσδοκίες του για τα κίνητρα ή την προσωπικότητα των αντιπάλων του. Με απλά λόγια η ισορροπία Bayes-Nash του Harsanyi δεν ήταν τελικά τίποτα άλλο από την ισορροπία Nash αυτού του παιχνιδιού, όχι μόνο μεταξύ παικτών, αλλά και των πιθανών τους χαρακτήρων.

Ο συλλογισμός του Harsanyi συμβαδίζει απόλυτα με την έννοια του ορθολογισμού, η οποία και αποτελεί βασική παραδοχή της θεωρίας παιγνίων. Οι παίχτες ουσιαστικά δεν έχουν λόγο να συμπεριφερθούν σύμφωνα με τις πιθανότητες που υποδεικνύει ο Nash, εφόσον πιστέψουν ότι οι αντίπαλοί τους θα ακολουθήσουν τη συμβουλή του Nash. Δεν είναι λοπόν, πειστικό το επιχείρημα ότι τα άτομα επιλέγουν μεταξύ των πολλαπλών στρατηγικών ισορροπίας που έχουν στη διάθεσή τους με συγκεκριμένες πιθανότητες. Αυτό που συμβαίνει είναι ότι οι παίκτες είναι αβέβαιοι για το χαρακτήρα των αντιπάλων τους και επιλέγουν ανάλογα με τις προσδοκίες τους. Οπότε, οι παίκτες δεν επιλέγουν πιθανότητες. Άλλοι επιλέγουν τη μια στρατηγική, άλλοι την άλλη. Συνολικά, όμως, είναι σαν κάποια από τις στρατηγικές να επιλέγεται κατά μέσο όρο.

Αυτή η παρέμβαση του Harsanyi ενίσχυσε σημαντικά τη θεωρία του Nash. Έδωσε νέα πνοή στη μέθοδο Nash και στους θιασώτες της τη δυνατότητα να ισχυριστούν, πως η θεωρία παιγνίων παρουσιάζει τη μοναδική αφήγηση των κοινωνικών φαινομένων και ταυτόχρονα να την επεκτείνουν σε νέα προβλήματα και καταστάσεις. Μπορεί σε ορισμένα παίγνια να μην ξέρουμε τι θα πράξουν επακριβώς τα ορθολογικά άτομα, όμως γνωρίζουμε τις πιθανότητες με τις οποίες θα ενστερνιστούν όλες τις διαθέσιμες στρατηγικές.

### 2.5.2 Υποπαιγνιακά Τέλεια Ισορροπία Nash(SPNE)

Η δεύτερη μεγάλη εξέλιξη της θεωρίας του Nash οφείλεται στον Reinhard Selten. Συνεισφορά του ήταν η μετεξέλιξη της ισορροπίας Nash από τα στατικά παίγνια στα δυναμικά δηλαδή, από παίγνια που λαμβάνουν χώρα σε μια και μοναδική στιγμή, σε παίγνια που εξελίσσονται στον χρόνο. Και πάλι η ιδέα για αυτή την εξέλιξη ανήκει στο Nash, ο οποίος εξήγησε γιατί η επανάληψη ενός παιγνίου αλλάζει τη στρατηγική του δομή. Ο Selten όμως ήταν αυτός που περιέγραψε διεξοδικά τις αλλαγές αυτές και κατάφερε να επεκτείνει την έννοια της ισορροπίας Nash θέτοντας έναν απλό όρο: οι στρατηγικές που βρίσκονται σε ισορροπία να παραμένουν σε ισορροπία και όταν το παίγνιο εξετάζεται στιγμή προς στιγμή (ή στάδιο προς στάδιο). Επίπλέον, σε παίγνια με πεπερασμένο χρονικό ορίζοντα, ο Selten εισήγαγε τη λογική της λεγόμενης οπισθογενούς επαγωγής.

Εν συντομία και με απλά λόγια η όλη θεώρηση του Selten έχει να κάνει με την αντίστροφη ανάλυση ενός παιχνιδιού στάδιο προς στάδιο. Η ανάλυση αρχίζει από το τελευταίο στάδιο, έπειτα προχωρά στο αμέσως επόμενο και συνεχίζει μέχρι το πρώτο, εξετάζοντάς πάντα ως ξεχωριστά παιχνίδια, ή υποπάιγνια του αρχικού, βρίσκοντας την ισορροπία σε κάθε υποπαίγνιο χωριστά. Έτσι δημιουργείται μια νέα μορφή ισορροπίας, η Υποπαιγνιακά Τέλεια Ισορροπία Nash. Πρόκειται για την ισορροπία Nash η οποία επιβιώνει της σταδιακής ανάλυσης εκεί που πολλές από τις υπόλοιπες ισορροπίες Nash δεν αντέχουν τη ροή του πραγματικού χρόνου. Με αυτόν το τρόπο μπορεί να επιλυθεί το βασικό πρόβλημα της ύπαρξης πολλαπλών ισορροπιών σε ένα παιχνίδι και ενισχύεται σημαντικά η έννοιας της ισορροπίας ώς ουσιαστική λύση ενός παιχνιδιού.Το παρακάτω παιχνίδι εξηγεί, στη βάση ενός απλού παραδείγματος, την προσέγγιση του Selten.

Φιλόσοφος συλλαμβάνεται με την κατηγορία ότι σκέφτεται πολύ και πιστεύει λίγο. Ο Μέγας Ιεροεξεταστής απαγγέλλει την εξής κατηγορία: «Σήμερα, ημέρα Κυριακή, σε καταδικάζω να ριχτείς στην πυρά. Δε θα σου πω ποια μέρα θα καείς. Δύο μόνο θα σου πω:

- Η εκτέλεσή σου θα γίνει το πολύ μέχρι και την επόμενη Κυριακή, και
- Θα γίνει μια μέρα που δε θα είσαι απόλυτα σίγουρος, στη βάση ενός ορθολογικού σκεπτικού, ότι θα καείς εκείνη την μέρα.

Με το που ακούει την καταδίκη του, ο αιρετικός φιλόσοφος χαμογελάει, σίγουρος ότι γλίτωσε. Ο λόγος που κατέληξε σε αυτό το αισιόδοξο συμπέρασμα έχει πανομοιότυπη δομή με την ισορροπία SPNE[24] του Selten. Εφαρμόζει την οπισθογενή επαγωγή και αναλύει το παίγνιο που έστησε ο ιεροεξεταστής στάδιο- προς-στάδιο. Το κάθε στάδιο είναι η κάθε μέρα της ερχόμενης εβδομάδας (μεταξύ της αρχικής και της επόμενης Κυριακής και οι εναλλακτικές, ανά μέρα, των παικτών ιεροεξεταστής και φιλόσοφος είναι, αντίστοιχα: «Τον καίω σήμερα ή δεν τον καίω;» και «Θα με κάψει σήμερα ή δεν θα με κάψει;». Η οπισθογενής επαγωγή σημαίνει ότι ο φιλόσοφος θα αρχίσει την ανάλυση του δυναμικού αυτού παιγνίου από το τελευταίο στάδιο.

Ας πούμε ότι ζει μέχρι τα μεσάνυχτα του Σαββάτου. Σκέφτεται ο φιλόσοφος:

«Αφού έζησα και σήμερα, και δεδομένου του πρώτου όρου του ιεροεξεταστή (δηλαδή ότι θα με κάψει το πολύ μέχρι και αύριο) είναι σίγουρο ότι θα πεθάνω αύριο. Ναι, αλλά σύμφωνα με τον δεύτερο όρο, από τη στιγμή που είμαι σίγουρος για αυτό, δεν μπορεί να με κάψει την επόμενη Κυριακή. Άρα. εάν ζήσω μέχρι τα μεσάνυχτα του ερχόμενου Σαββάτου, θα έχω γλιτώσει. Όμως το ίδιο επιχείρημα με οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ούτε το Σάββατο μπορεί να με κάψει μιας και, έχοντας αποκλείσει την Κυριακή ως πιθανή μέρα θανάτου μου, τα μεσάνυχτα της Παρασκευής θα είμαι σίγουρος ότι θα πεθάνω το Σάββατο, το οποίο σημαίνει ότι δεν μπορεί να με κάψει το Σάββατο, κ.ο.κ. Ούτε την Παρασκευή μπορεί, ούτε την Πέμπτη, ούτε την Τετάρτη, κλπ. Συνεπώς, θα ζήσω!" Εάν το παίγνιο αυτό είχε στατική μορφή, τότε υπάρχουν πολλές ισορροπίες Nash, δηλαδή απροσδιοριστία. Όταν όμως το παίγνιο εκτυλίσσεται στον πραγματικό χρόνο (και οι επιλογές των παικτών δε γίνονται ταυτόχρονα και σε μια χρονική στιγμή), οι παίκτες γνωρίζουν εξαρχής πώς θα αλληλοπαρατηρούνται στη διάρκεια της εβδομάδας και αυτό τους οδηγεί σε διαφορετικά συμπεράσματα. Τότε, ενεργοποιείται η οπισθογενής επαγωγική ανάλυση του παιγνίου (στάδιο-προς- στάδιο), που στην προκειμένη περίπτωση, κατασταλάζει στην απόρριψη όλων των ισορροπιών Nash πλην μίας, της SPNE του Selten.

Η βασική αρχή της όλης θεωρίας του Selten έγκειτε στην εξής πρόταση:

**Ορισμός** (Selten 1965): Μια ισορροπία Nash είναι Υποπαιγνιακά Τέλεια Ισορροπία εάν οι στρατηγικές των φορέων αποτελούν μια ισορροπία Nash σε κάθε υποπαίγνιο[25].

Η απροσδιοριστία λοιπόν και η δυσνόητη, μέσω της θεωρίας των πιθανοτήτων, λύσης των πολλαπλών Ισορροπιών Nash, άρχισε πλέον να συγκεκριμενοποιείται και να μεταφέρεται από τη σφαίρα του πιθανού σε λογικά και πρακτικά πλαίσια. Η ισορροπία σε δυναμικά και στρατηγικά παιγνίδια αποτελεί στην ουσία τη λύση σε προβλήματα, τα οποία μπορούν να αναχθούν ακόμα και στην καθημερινότητα. Η εύρεση λοιπόν, της λύσης σε τέτοιου είδους παιχνίδια είναι αρκετά σημαντική και υλοποιήθηκε με τη βοήθεια της θεωρίας αλγορίθμων.

**Αλγόριθος** (Υποπαιγνιακά Τέλεια Ισορροπία)

**Inpout**: Ένα εκτενές/δυναμικό παιχνίδι.

**Output**: Μια Υποπαιγνιακά Τέλεια Ισορροπία Nash του παιχνιδιού[26].

**Μέθοδος**: Εξέτασε, κατά αυξανόμενη σειρά συνυπολογισμού, κάθε υποπαίγνιου του παιχνιδιού, βρες μια ισορροπία Nash του υποπαίγνιου και αντικαταστήσε το υποπαίγνιο με έναν νέο τελικό κόμβο, ο οποίος έχει τις πληρωμές της ισορροπίας.

Σε ένα παιχνίδι με τέλεια πληροφόρηση, κάθε κόμβος είναι η ρίζα ενός υποπαίγνιου. Κατόπιν ο παραπάνω αλγόριθμος χρησιμοποιεί τη γνωστή, γραμμική μέθοδος της οπισθογενούς

[24] Subgame Perfect Nash Equilibrium
[25] “A Primer in Game Theory”, Robert Gibbons, σελ. 124
[26] “Algorithmic Game Theory”, Noam Nisan, Tim Roughgarden, ΄ Eva Tardos, Vijay V. Vazirani, 2007, Cambridge University Press, το συγκεκριμένο κείμενο έχει γραφτεί από τον Bernhard von Stengel, σελ 68

επαγωγής, κατά πολλούς γνωστός και ως «αλγόριθμος Zermelo». Επειδή το εκάστοτε υποπαίγνιο περιλαμβάνει μόνο έναν παίχτη σε κάθε επανάληψη, μια αιτιοκρατική κίνηση είναι βέλτιστη, γεγονός το οποίο δείχνει ότι σε οποιοδήποτε παιχνίδι (υποπαίγνιο) με τέλεια πληροφόρηση υπάρχει ισορροπία Nash, όπου κάθε παίκτης χρησιμοποιεί μια καθαρή στρατηγική. Αντιθέτως στα παιχνίδια με ατελή πληροφόρηση, για να επιτευχθεί μια Υποπαιγνιακά Τέλεια Ισορροπία μπορεί να απαιτούνται μικτές στρατηγικές.

Αυτές οι δύο σημαντικές εξελίξεις της ισορροπίας Nash (η ισορροπία BayesNash του Harsanyi και η SPNE του Selten) έδωσαν το έναυσμα, για την εκρηκτική αισιοδοξία των δεκαετιών του 1970 και του 1980, η οποία κατοχύρωσε τη Θεωρία Παιγνίων ως τη κυρίαρχη και αντιπροσωπευτικότερη θεωρία όλων των κοινωνικών επιστημών. Δεν υπάρχει σήμερα τομέας της κοινωνικής θεωρίας ο οποίος να μην έχει επηρεαστεί από τις ιδέες του Nash και των επιγόνων του. Αυτό οφείλεται μεν στη δύναμη αυτών των ιδεών αλλά οφείλεται εξίσου και στη σκληρή δουλειά των Harsanyi και Selten να πείσουν τους διστακτικούς κοινωνικούς επιστήμονες ότι η θεωρία του Nash είναι όχι μόνο "αισθητικά" ελκυστική, αλλά και ότι δε θα βουλιάζει στο τέλμα της απροσδιοριστίας. Δεν ήταν ούτε τυχαίο, ούτε άδικο, ότι το 1994 οι Nash, Harsanyi και Selten μοιράστηκαν το βραβείο Νόμπελ Οικονομικών.

## 2.6 ΘΕΩΡΙΑ ΤΡΕΜΑΜΕΝΟΥ ΧΕΡΙΟΥ

Πολλές φορές στα παίγνια παρατηρείται η εξής περίεργη κατάσταση: οι παίκτες επιλέγουν στρατηγικές που δεν μοιάζουν λογικές, δεν μεγιστοποιούν δηλαδή την αναμενόμενη για αυτούς ωφέλεια. Επιπρόσθετα, όταν οι παίκτες προσπαθούν να βρουν την λύση σε ένα παίγνιο, μπορούν να το καταφέρουν μόνο όταν υποθέσουν πως οι άλλοι παίκτες δεν συμπεριφέρονται με τρόπο λογικό. Το απροσδόκητο αυτό γεγονός ονομάζεται παράδοξο της οπισθογενούς επαγωγής.

Η συνεισφορά του οικονομολόγου R.Selten, όσον αφορά στην εξέλιξη της Θεωρίας Παιγνίων, δεν έγκειτε μόνο στην Υποπαιγνιακά Τέλεια Ισορροπία Nash (SPNE), αλλά και στην ενασχόλησή του με το εν λόγω παράδοξο. Αντιλήφθηκε αυτό το παράδοξο και πρότεινε ένα δυνατό τρόπο για να αποφευχθεί, επιννοώντας την έννοια του τρεμάμενου χεριού. Σύμφωνα με αυτήν, υπάρχει μια μικρή πιθανότητα η απόφαση που θα λάβει ένας παίκτης και η στρατηγική που τελικά θα ακολουθήσει να διαφέρουν. Έτσι, ο παίκτης μπορεί να αποφάσισει να κάνει μία συγκεκριμένη ενέργεια αλλά κατά την διάρκεια της εκτέλεσής της, το χέρι του γλιστράει (ή αντίστοιχα τρέμει) και τελικά εκτελεί μια διαφορετική ενέργεια.

Η θεωρία του Τρεμάμενου Χεριού οδήγησε σε μία εκλέπτυνση της γνωστής εώς τότε ισορροπίας Nash που ονομάζεται Τέλεια Ισορροπία Nash (PNE). Μία τέλεια ισορροπία Nash λαμβάνει υπόψην την πιθανότητα να ακολουθήσει ένας παίκτης στρατηγική διαφορετική με αυτή που υπαγορεύει η εκάστοτε ισορροπία Nash. Αυτό συμβαίνει ως αποτέλεσμα του τρεμάμενου χεριού του παίκτη, το οποίο τον αναγκάζει με μία μικρή πιθανότητα να επιλέξει διαφορετική στρατηγική από αυτήν που πραγματικά θέλει. Η ιδέα αυτή, το γεγονός δηλαδή πως η απόφαση ενός παίκτη και η πράξη που τελικά ακολουθεί μπορεί να διαφέρουν, ερμηνεύεται με διάφορους τρόπους. Το τρεμάμενο χέρι αρχικά μοντελοποιεί την περίπτωση που ένας παίκτης έχει την πεποίθηση πως κάποιος άλλος παίκτης μπορεί ναι μεν να είναι λογικός και εφυής, αλλά παρόλο που παίρνει την σωστή απόφαση δεν μπορεί να την υλοποιήσει σωστά. Μοντελοποιεί επίσης την πεποίθηση όπου δεν έχει εκτιμήσει καλά την συνάρτηση ωφελείας των άλλων παικτών.

Γίνεται λοιπόν φανερό από τα παραπάνω, ότι η συγκεκριμένη θεωρία αναφέρεται στη περίπτωση όπου έχουμε να κάνουμε με δυναμικά παιχνίδια, στα οποία οι εκάστοτε παίχτες λαμβάνουν τις αποφάσεις τους σύμφωνα με μικτές στρατηγικές που έχουν καταστρώσει. Η έννοια της δυναμικότητας του παιχνιδιού, έγκειτε στο γεγονός ότι κάθε παίχτης μπορεί να αλλάξει τις αποφάσεις του ανάλογα με τις ενέργειες του αντιπάλου του. Μία λάθος η μη προβλέψιμη ενέργεια είναι ικανή να διαμορφώσει μια εντελώς διαφορετική εικόνα που είχε κάποιος για το παιχνίδι. Σε ένα τέτοιο λοιπόν, p-δυναμικό παίγνιο, υπάρχει ο περιορισμός πως οι παίκτες μπορούν να επιλέξουν μόνο πλήρως μικτές στρατηγικές. Μία πλήρως μικτή στρατηγική αναθέτει θετική πιθανότητα σε κάθε αγνή στρατηγική. Έτσι, αν ο παίκτης i διαλέξει την στρατηγική si ∈ Si τότε τελικά παίζει την στρατηγική αυτή με πιθανότητα 1 − p και κάθε άλλη στρατηγική με πιθανότητα p ομοιμόμορφα κατανεμημένη πάνω στο Si \ si.

Τυπικά θα μπορούσε να οριστεί πως για ένα παίγνιο G, ένα διάνυσμα στρατηγικών s είναι Τέλεια Ισορροπία Nash αν υπάρχει μία ακολουθία p-δυναμικών παιχνιδιών τα οποία συγκλίνουν στο G και για τα οποία υπάρχει μία ακολουθία ισορροπιών Nash η οποία συγκλίνει στην s[27].

Πέραν όμως του τυπικού μέρους, είναι εμφανές ότι η έννοια του τρεμάμενου χεριού αγγίζει και αντιπροσωπεύει μια πραγματικότητα, την οποία βιώνουμε καθημερινά και πολύ απλά δεν έχουμε μπει ποτέ στη διαδικασία να την ερμηνεύσουμε κατά αυτόν τον τρόπο. Γι αυτόν ακριβώς το λόγο και μπορεί κάλλιστα να χρησιμοποιηθεί για να προσεγγιστεί το φαινόμενο της κοινωνικής μάθησης. Οι παίκτες, δηλαδή στη συγκεκριμένη περίπτωση οι άνθρωποι, πρέπει να μάθουν με κάποιον τρόπο τις στρατηγικές που αντιστοιχούν σε ισορροπίες Nash στα παίγνια που παίζουν στην καθημερινή τους ζωή. Έρευνες έχουν δείξει πως ακόμα και πολύ απλά παίγνια όπως το δίλημμα του κρατουμένου, το οποίο αναλύσαμε στο προηγούμενο καφάλαιο, χρειάζονται μία διαδικασία μάθησης μέχρι οι παίκτες να καταφέρουν να ισορροπήσουν. Έτσι όταν κάποιος παίκτης έχει την πεποίθηση πως οι άλλοι παίκτες δεν ξέρουν ακόμα τις στρατηγικές που αντιστοιχούν σε ισορροπίες Nash, αυτό αφαιρεί το κίνητρό του να παίξει ο ίδιος σύμφωνα με την ισορροπία Nash. Το γεγονός αυτό εγείρει ενδιαφέρουσες ερωτήσεις, όπως το πως μπορεί ένας άπειρος παίκτης να μάθει τις ισορροπίες Nash αν οι πιο έμπειροι παίκτες δεν παίζουν σύμφωνα με αυτές. Παρατηρούμε λοιπόν σύμφωνα με τα παραπάνω πως η έννοια του Τρεμάμενου Χέριου, αν και μία πολύ απλή παιγνιοθεωρητική έννοια, θίγει πολλά και ενδιαφέροντα ζητήματα του ευρύτερου επιστημονικού κλάδου (κοινωνικού, οικονομικού κ.ο.κ.).

## 2.7 TIT FOR TAT

Η έξαψη και το ενδιαφέρον που προκάλεσαν οι Harsanyi και Selten με τις ιδέες τους πάνω στις θεωρίες και έννοιες του Nash, οδήγησε πολλούς επιστήμονες στη μελέτη και περαιτέρω διεύρυνση της Θεωρίας Παιγνίων. Το αντιπροσωπευτικότερο παράδειγμα όλων, όσον αφορά το επίπεδο κατανόησης της εν λόγω θεωρίας, το οποίο αναλύθηκε στο πρώτο κεφάλαιο, το Δίλημμα του Κρατουμένου, ήταν και είναι η βάση πάνω στην οποία στηρίχτηκαν πληθώρα θεωριών και εξελίξεων.

Είναι γεγονός λοιπόν ότι στο συγκεκριμένο πρόβλημα - παιχνίδι, οι παίχτες ισορροπούν σε μια λύση, η οποία δεν είναι βέλτιστη. Σε συνδιασμό και με την δυναμική που του προσδίδει μια ενδεχόμενη ύπαρξη επανάληψης του παιχνιδιού, κάτι που συμβαίνει πολύ συχνά σε πραγματικά δεδομένα σε τέτοιου είδους παιχνίδια, γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι για να υπάρξει η οποιαδήποτε καλύτερη δυνατή λύση είναι αναγκαίο να ακολουθηθεί μια αλληλουχία στρατηγικών που θα διδάξουν στον αντίπαλο ότι το βέλτιστο αποτέλεσμα είναι αυτό που είναι καλύτερο και για τους δύο.

Το θέμα λοιπόν αυτό απασχόλησε έντονα τους ερευνητές την επόμενη δεκαετία, αν και η εύρεση βέλτιστου αλγόριθμου είναι πολύ δύσκολη, λόγω του πλήθους των διαφορετικών συνθηκών αλλά και της διαφορετικής ιδιοσυγκρασίας των παικτών. Παρόλο που δεν υπάρχει μια στρατηγική που να είναι βέλτιστη υπό κάθε συνθήκη, υπάρχει μια που έχει πολύ καλά αποτελέσματα σε μεγάλη ποικιλία καταστάσεων και είναι η στρατηγική Tit For Tat.

Στα τέλη της δεκαετίας του ’70 ο Robert Axelrod κάλεσε σε ένα διαγωνισμό στρατηγικής διάφορους παιγνιθεωρητικούς επιστήμονες και μη, ώστε να βγει ένα συμπέρασμα για την καλύτερη δυνατή στρατηγική σε τέτοιου είδους προβλήματα. Έθεσε το πρόβλημα του Διλήμματος του Κρατουμένου σε επανάληψη και όρισε τους εξής κανόνες για τον διαγωνισμό:

1) Το παιχίδι να εξελίσεται μεταξύ ζευγαριών παιχτών(όχι πάνω από δύο παίχτες)
2) Σε κάθε επανάληψη ο κάθε παίχτης έχει δύο διαφορετικές επιλογές να κάνει: Συνεργασία ή Επίθεση
3) Οι αμοιβές των στρατηγικών ήταν συγκεκριμένες πριν ακόμα ξεκινήσει το παιχνίδι και τις γνώριζαν όλοι οι παίχτες

[27]«Το Παίγνιο Εξισορρόπησης Φορτίου με Τρεμάμενο Χέρι», Απόστολος Κ. Φίλλιπας, Διπλαματική Εργασία, Πάτρα, 2011, σελ. 23

4) Σε κάθε επανάληψη όλοι οι παίχτες έχουν πρόσβαση στην ιστορία του παιχνιδιού τους εώς εκείνη τη στιγμή.

Στις διάφορες στρατηγικές που παρουσιάστηκαν εκείνη που ξεχώρησε ήταν η Tit For Tat (TFT), ένα πρόγραμμα κατά το οποίο η πρώτη κίνηση του παίκτη είναι πάντα η Συνεργασία, ενώ στη συνέχεια μιμείται τη στρατηγική που ακολούθησε ο αντίπαλος στον προηγούμενο «γύρο» του παιγνίου[28]. Άφού δημοσίευσε τα αποτελέσματα, τα οποία είχαν εξαιρετικα μεγάλη απήχηση, ο R. Axelrod οργάνωσε και δεύτερο διαγωνισμό με 62 συμμετοχές, όπου νικήτρια στρατηγική και πάλι βγήκε η TFT!

Παρακάτω παρουσιάζεται ένα απλό παράδειγμα για την καλύτερη κατανόηση της στρατηγικής. Έστω δύο παίκτες ο Π1 και ο Π2. Ο Π1 ακολουθεί κάποια στρατηγική που θεωρεί βέλτιστη ενώ ο Π2 ακολουθεί τη μέθοδο Tit For Tat. Στον επόμενο πίνακα βλέπουμε τις κινήσεις τους στους πρώτους πέντε «γύρους» του παιγνίου. Παρατηρούμε ότι ο Π2 αρχικά συνεργάζεται και μετά απλώς αντιγράφει την κίνηση που έκανε ο αντίπαλος στον προηγούμενο «γύρο».

| | 1ος | 2ος | 3ος | 4ος | 5ος |
|---|---|---|---|---|---|
| Π1 | Επίθεση | Συνεργασία | Συνεργασία | Επίθεση | Επίθεση |
| Π2 | Συνεργασία | Επίθεση | Συνεργασία | Συνεργασία | Επίθεση |

***Πινακας 2.3***

Ένας απλός αλγόριθμος σε ψευδοκώδικα για την Tit For Tat είναι ο ακόλουθος :

```
#define DEFECT 0
#define COOPERATE 0
All_D ( ) {
return DEFECT
}
Tit_for_Tat (int partner_last_move) {
if ( partner_last_move == DEFECT )
return DEFECT
else
return COOPERATE
}
```

Μια παραλλαγή της Tit For Tat είναι η Tit For Two Tats. Σε αυτή τη μέθοδο ο παίκτης που την ακολουθεί ξεκινά με συνεργασία και επιτίθεται μόνο μετά από δύο συνεχόμενες επιθέσεις του αντιπάλου ενώ συνεργάζεται αμέσως μόλις συνεργαστεί ο αντίπαλος. Η πρώτη στήλη του ακόλουθου πίνακα περιέχει τα ζεύγη των δύο προηγούμενων κινήσεων του αντιπάλου ενώ η δεύτερη περιέχει την αντίδραση του παίκτη που παίζει με Tit For Two Tats.

| **Ζεύγη Κινήσεων** | **Αντίδραση** |
|---|---|
| Συνεργασία, Συνεργασία | Συνεργασία |
| Συνεργασία, Επίθεση | Συνεργασία |
| Επίθεση,Συνεργασία | Συνεργασία |
| Επίθεση, Επίθεση | Επίθεση |

***Πίνακας 2.4***

Είναι φανερό ότι η Tit For Tat ουσιαστικά αποτελεί μάλλον μια διαφορετική προσέγγιση, μέθοδο κοινωνικής συμπεριφορας και μάλιστα προς όφελος του κοινωνικού

[28] "The Further Evolution Of Cooperetion", Robert Axelrod and Douglas Dion, Article, Sience, 1988

συνόλου, διότι τελικά η βασική της απόρροια είναι η προαγωγή της συνεργασίας. Επιπλέον η δυνατότητα εφαρμογής της σε μεγάλη γκάμα κοινωνικών, οικονομικών και πολιτικών παιχνιδιών την καθιστά βασική προϋπόθεση εξέλιξης του οποιουδήποτε κοινωνικού συνόλου. Άλλωστε όπως και ο ίδιος ο Axelrod είπε «Οι άνθρωποι, χρησιμοποιώντας τη λογική διορατικότητα και την ικανότητά τους να διαμορφώνουν το κόσμο γύρω τους, έχουν τη δυνατότητα να προάγουν τη συνεργασία.»[29]

[29] "The Evolution Of Cooperetion", Robert Axelrod, Article, Basic Books, 1984

# 3 ΑΛΓΟΡΙΘΜΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

## 3.1 ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ

Είναι σαφές ότι από την έκρηξη που προκάλεσε το βιβλίο «Theory of Games and Economic Behaviour» των John Von Neumann και Oskar Morgenstern το 1947 μέχρι και τη δεκαετία του ’80, ο τρόπος με τον οποίο βλέπανε και αντιλαμβανόντουσαν οι επιστήμονες, αλλά και οι απλοί πλέον άνθρωποι, τη Θεωρία Παιγνίων άλλαξε ριζικά. Από ένα απλό παρακλάδι της οικονομικής θεωρίας, κατάφερε τελικά να θέσει και να εξηγήσει τους κανόνες συμπεριφοράς που διέπουν την ανθρώπινη κοινωνία και πολιτική. Η ανάγκη για επίλυση όλο και πολυπλοκότερων προβλημάτων ή παιχνιδιών που εκφράζουν αυτά, ήταν αδύνατο να αφήσει ανεπηρέαστη τη θεωρία υπολογισμού.

Όπως είναι φανερό και από την παρούσα μελέτη, οι διάφοροι επιστήμονες και ερευνητές στην προσπάθειά τους να επιτύχουν την εύρεση της σωστής ισορροπίας Nash στα εκάστοτε παιχνίδια ή προβλήματα που αντιμετώπιζαν, άρχισαν να χρησιμοποιούν αλγόριθμους και υπολογιστηκές μηχανές. Ήταν λοιπόν αναπόφευκτο αργά ή γρήγορα να τεθεί το ερώτημα της πολυπλοκότητας που διέπει αυτούς τους αλγορίθμους. Όσο αυξάνεται η δυσκολία εύρεσης μιας ισορροπίας, τόσο αυξάνεται και η κλάση πολυπλοκότητας κάποιων αλγόριθμων που είχαν δημιουργηθεί, καθιστώντας ορισμένους από αυτούς ακατάλληλους. Είναι σημαντικό στο σημείο αυτό να διασαφηνιστούν κάποιες βασικές έννοιες.

Η θεωρία πολυπλοκότητας είναι το μέρος εκείνο της θεωρίας υπολογισμού, το οποίο ασχολείται με την κοστολόγηση των πόρων που απαιτούνται για την αλγοριθμική επίλυση ενός προβλήματος. Επομένως η θεωρία πολυπλοκότητας αποτελεί βασικό δομικό λίθο της ανάλυσης αλγορίθμων και κεντρικό γνωστικό πεδίο της επιστήμης υπολογιστών[30].

Οι συνηθέστεροι πόροι για τους οποίους ενδιαφερόμαστε είναι ο *χρόνος*, οπότε μιλάμε για τη χρονική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου, δηλαδή πόσα «βήματα» χρειάζεται να εκτελέσει ο αλγόριθμος για να υλοποιειθεί συναρτήσει της εισόδου του, και ο *χώρος*, οπότε μιλάμε για τη χωρική πολυπλοκότητα, δηλαδή πόσο χώρο (μνήμη) χρειάζεται ο αλγόριθμος συναρτήσει της εισόδου του. Εκτός από αυτούς τους πόρους, κατά περίπτωση, μπορεί να ενδιαφερόμαστε και για άλλους, όπως για παράδειγμα πόσοι παράλληλοι επεξεργαστές χρειάζονται για να λυθεί ένα πρόβλημα παράλληλα.

Η θεωρία πολυπλοκότητας ταξινομεί τα προβλήματα σε κλάσεις(σύνολα) ισοδυναμίας που ορίζουν ότι τα προβλήματα στην ίδια κλάση έχουν την ίδια δυσκολία. Ιδιαιτέρου ενδιαφέροντος στο πλαίσιο αυτό ειναι οι κλάσεις P(Deterministic Polynomial Time) και NP(Non Deterministic Polynomial Time). Γενικά θα μπορούσαμε να πούμε ότι η κλάση P περιλαμβάνει τα περισσότερα προβλήματα της NP. Θα προχωρήσουμε σε πιο τυπικούς ορισμούς οι οποιοι επαλυθεύουν τη διαίσθηση ότι $P \subseteq NP$. Θα πρέπει να τονιστεί εδώ ότι οι κλάσεις P και NP αφορούν κατά κύριο λόγο προβλήματα απόφασης, δηλαδή προβλήματα στα οποία καλούμαστε να απαντήσουμε μια συγκεκριμένη ερώτηση με ΝΑΙ ή ΟΧΙ.

Πολύ βασικές για θεωρία τη πολυπλοκότητας είναι οι έννοιες της αναγωγής και της πληρότητας, οι οποίες σχετίζονται με το γεγονός ότι, συγκεκριμένα προβλήματα συνοψίζουν τη δυσκολία μιας ολόκληρης κλάσης πολυπλοκότητας. Συγκεκριμένα, ένα πρόβλημα συνοψίζει τη δυσκολία μιας κλάσης πολυπλοκότητας αν μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι τουλάχιστον τόσο δύσκολο να λυθεί όσο κάθε άλλο πρόβλημα της κλάσης. Ένα τέτοιο πρόβλημα λέγεται *δύσκολο* (hard) για τη συγκεκριμένη κλάση, και αν έχει την επιπλέον ιδιότητα να ανήκει στην κλάση, λέγεται *πλήρες* (complete). Οι έννοιες της αναγωγής και της πληρότητας χρησιμοποιούνται πολύ συχνά για να διατυπωθούν εικασίες όσον αφορά το αποτέλεσμα ενός προβλήματος και να αποδειχθούν θεωρήματα για τις σχέσεις των κλάσεων πολυπλοκότητας.

Τα πλήρη προβλήματα αποτελούν μια κεντρική έννοια και ένα πολύ σημαντικό μεθοδολογικό εργαλείο για τη θεωρία πολυπλοκότητας. Η πολυπλοκότητα ενός υπολογιστικού προβλήματος θεωρείται ότι έχει καθοριστεί όταν αυτό αποδειχθεί πλήρες για κάποια κλάση. Από την άλλη πλευρά, τα πλήρη προβλήματα συνοψίζουν την υπολογιστική

[30] Wikipedia

δυσκολία όλων των προβλημάτων κάθε κλάσης και αποτελούν το σύνδεσμο των κλάσεων πολυπλοκότητας με τη θεωρία αλγορίθμων και τις εφαρμογές της επιστήμης των υπολογιστών.

## 3.2 P ΚΑΙ NP

Η κλάση P(Polynomial) είναι μια από τις σημαντικότερες κλάσεις πολυπλοκότητας και αποτελεί την κλάση των προβλημάτων εκείνων που μπορούν να λυθούν αποδοτικά από μια υπολογιστική συσκευή. Εξίσου σημαντική είναι η κλάση μη ντετερμινιστικής χρονικής πολυπλοκότητας και, σίγουρα, μία από τις σημαντικότερες κλάσεις πολυπλοκότητας που έχουν ποτέ οριστεί, είναι η κλάση **NP**(nondeterministic polynomial time). Παρόμοια με την κλάση **P**, το **NP** ορίζεται σαν το σύνολο των προβλημάτων που μπορούν να λυθούν σε πολυωνυμικό, μη ντετερμινιστικό χρόνο.

Οι κλάσεις αυτές δημιουργήθηκαν κυρίως εξαιτίας της ανάγκης να χαρακτηριστεί η αποδοτικότητα κάποιων αλγορίθμων, σε χώρο και χρόνο, πάνω στα λεγόμενα προβλήματα αναζήτησης. Το βασικό χαρακτηριστικό σε ένα πρόβλημα αναζήτησης είναι το γεγονός ότι οποιαδήποτε προτεινόμενη λύση μπορεί να ελεγχθεί γρήγορα, υπό την έννοια ότι υπάρχει ένας ικανός αλγόριθμος ελέγχου C, ο οποίος δέχεται ως είσοδο ένα συγκεκριμένο στιγμιότυπο I, καθώς επίσης και μια προτεινόμενη λύση S, και δίνει ώς έξοδο «Αληθές» (True) εάν και μόνο εάν το S είναι πραγματικά μια λύση για το στιγμιότυπο I. Επιπλέον ο χρόνος του C (I,S) ορίζεται από ένα πολυώνυμο I, το οποίο αποτελεί και το μήκος του στιγμιότυπου.

Όλα τα προβλήματα αναζήτησης θα μπορούσαν κάλλιστα να ανήκουν στην κλάση NP. Παρ' όλα αυτά, υπάρχουν πολλά παραδείγματα προβλημάτων αναζήτησης του NP που δύναται να λυθούν σε πολυωνυμικό χρόνο. Σε τέτοιες περιπτώσεις, υπάρχει ένας αλγόριθμος που παίρνει ως είσοδο ένα στιγμιότυπο I και το τρέχει για τον πολυωνυμικό χρόνο του I. Εάν για το I βρεθεί μια λύση, ο αλγόριθμος την επιστρέφει, διαφορετικά επιστρέφει το γεγονός ότι δεν υπάρχει. Η κατηγορία όλων των προβλημάτων αναζήτησης που μπορούν να λυθούν στον πολυωνυμικό χρόνο είναι η P.

Υπήρξε μεγάλη διαφιλονικία κατα το παρελθόν κατά πόσο το P = NP ή το P ≠ NP, μέσω της οποίας τελικά βγήκε το συμπέρασμα ότι P⊆NP και για να λειτούργησει αποδοτικά ένας αλγόριθμος πάνω σε ένα NP πρόβλημα, είναι απαραίτητο να γίνει μείωση ή διχοτόμιση του προβλήματος, ώστε αυτό να μπει στη σφαίρα της κλάσης P. Το μέγαλο ερωτηματικό όμως, έγκειται στην περίπτωση όπου ένα πρόβλημα χαρακτηρίζεται ως NP-πλήρες, όπως το γνωστό 'satisfiability problem', το οποίο φαίνεται να αντιστέκεται αποτελεσματικά στην εύρεση μιας αποδοτικής λύσης.

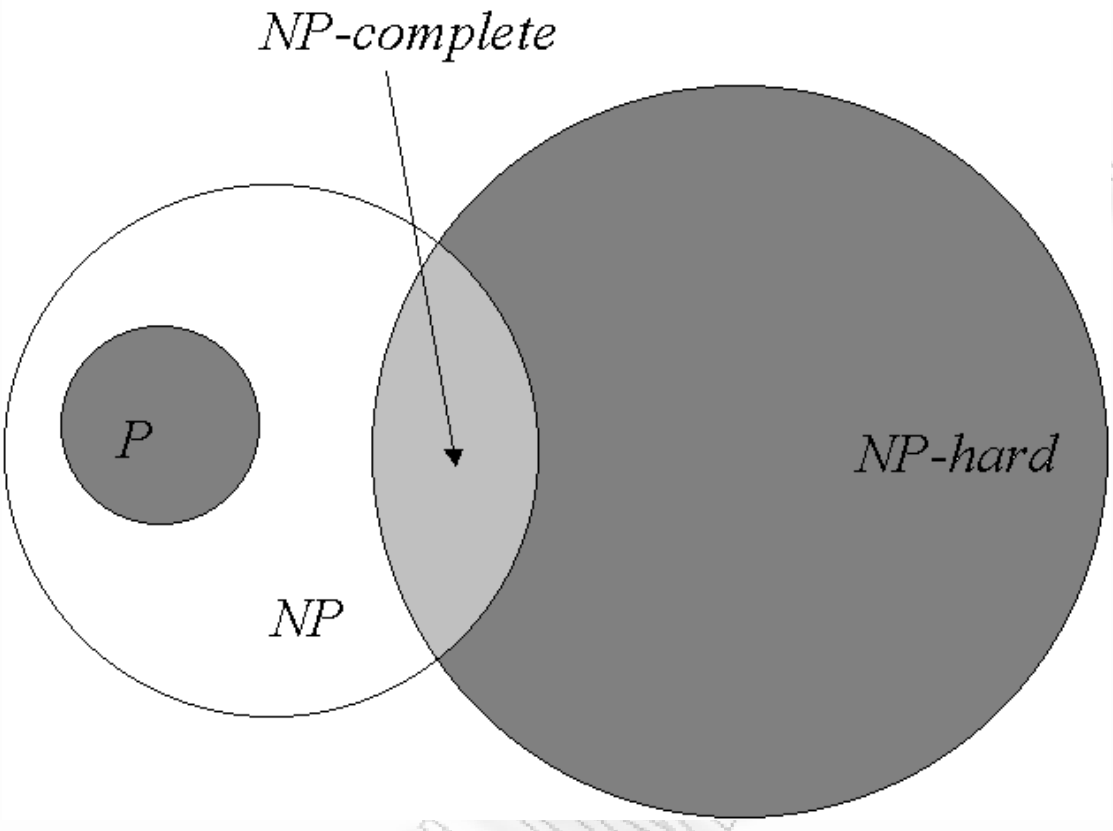
Ένας απλός ορισμός για τέτοιου είδους προβλήματα θα μπορούσε να είναι: *Ένα πρόβλημα αναζήτησης είναι NP-πλήρες εάν η μείωση όλων των υπολοίπων προβλημάτων αναζήτησης οδηγούν σε αυτό*[31].

Αρχικά, για τους ερευνητές και η εύρεση μιας ισορροπίας Nash αποτελούσε ένα παρόμοιο με το satisfiability(SAT) πρόβλημα, NP-πλήρες. Τελικά με την πάροδο των χρόνων η άποψη αυτή ανατράπηκε από διάφορους επιστήμονες, με κύριο εκπρόσωπο ένα διακεκριμένο έλληνα επιστήμονα, τον Χρήστο Παπαδημητρίου[32]. Σύμφωνα και με τον τελευταίο τα προβλήματα όπως αυτό του Nash, για το οποίο μια λύση είναι εγγυημένο ότι θα υπάρξει απαιτούν πιό εξειδικευμένη και λεπτή ανάλυση πολυπλοκότητας - και η τελική διάγνωση θα πρέπει απαραιτήτως να είναι λιγότερο αυστηρή από την NP-πληρότητα.

Το παρακάτω σχήμα (3,1) υποδεικνύει τη σχέση των κλάσεων που αναφέρθηκαν.

[31] 'Algorithms', S. Dasgupta, C. H. Papadimitriou, U. V. Vazirani, 2006, σελ. 259

[32] Ο Χρήστος Χαρίλαος Παπαδημητρίου είναι καθηγητής στο τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών στο Πανεπιστήμιο Μπέρκλεϋ στην Καλιφόρνια




*Σχημα 3,1*

Στη μελέτη της πολυπλοκότητας του προβλήματος εύρεσης μιας ισορροπίας Nash, το πιο λογικό θα ήταν αρχικά να εξεταστεί η απόδειξη Nash (1951) και να γίνει απολύτως αντιληπτό πώς η ύπαρξη αυτή καθιερώνεται. Το γεγονός όμως, ότι η απόδειξη Nash ουσιαστικά στηρίζεται στο θεώρημα Σταθερών Σημείων του Brouwer, δυστυχώς καθιστά μη εποικοδομητική την εν λόγω απόδειξη και το όλο εγχείρημα δεν μπορεί να μας δώσει το επιδιωκόμενο προβάδισμα. Ο λόγος είναι ότι το θεώρημα αυτό είναι γνωστό για τη μη κατασκευαστική του φύση, και η εύρεση ενός “Brouwer fixpoint” αποτελεί αποδεδειγμένα πλέον ένα σκληρό πρόβλημα, υπό την εξειδικευμένη έννοια που έχει αναφερθεί ανωτέρω, το δεδομένο δηλαδή ότι στη περίπτωση του Nash μια τουλάχιστον λύση είναι εγγυημένο ότι υπάρχει.

## 3.3 Η ΚΛΑΣΗ PPAD

Το πρόβλημα του καθορισμού της κλάσης εκείνης, που είναι ικανή να αντιπροσωπέυσει τη πολυπλοκότητα ενός αλγορίθμου εύρεσης μιας ισορροπίας Nash ήρθε να λύσει το 1994 ο Χ. Παπαδημητρίου, με τη δημιουργία της κλάσης PPAD (Polynomial Parity Argument (Directed case)). Για να το επιτύχει και να το αποδείξει χρησιμοποίησε κατευθυνόμενα γραφήματα με τη λογική που χρησιμοποιούνται ακόμα και σήμερα για την λύση και ερμηνεία διαφόρων προβλημάτων, όπως το SAT που αναφέρθηκε πιο πάνω.

Η λογική που ακολούθησε δεν είναι άλλη από αυτή που ήδη αναφέρθηκε για τα NP-πλήρη προβλήματα, τη μείωση δηλαδή ενός προβλήματος A σε ένα αντίστοιχο, αλλά μικρότερης ενδεχομένος πολυπλοκότητας πρόβλημα B. Για την επίτευξη αυτής της μείωσης, είναι αναγκαία η εύρεση ενός αλγορίθμου ικανού να μεταμορφώσει οποιοδήποτε στιγμιότυπο του A σε ένα ισότιμο στιγμιότυπο του B, μεταφράζοντας παράλληλα κάθε λύση που προκύπτει από τα στιγμιότυπα του B, ως τις αντίστοιχες λύσεις που απορρέουν από τα αρχικά στιγμιότυπα του A.

Υιοθετώντας αυτή τη στρατηγική και σύμφωνα και με τον ορισμό που δόθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, μπορεί κανείς να ισχυριστεί ότι: *Ένα πρόβλημα αναζήτησης είναι PPAD εάν η μείωση όλων των υπολοίπων προβλημάτων αναζήτησης οδηγούν στο πρόβλημα END OF THE LINE*[33], το οποίο και ανέλυσε ο Παπαδημητρίου με αρκετά απλό τρόπο.

Έστω ότι ορίζουμε μια κορυφή σε μια κατευθυνόμενη γραφική παράσταση ως ασταθή, εάν ο αριθμός των ακρών που εισέρχονται σε αυτήν διαφέρει από τον αριθμό των ακρών που απομακρύνονται από αυτήν. Εφόσον λοιπόν ισχύει ότι *σε μια κατευθυνόμενη γραφική παράσταση υπάρχει μια ασταθή κορυφή, τότε σίγουρα θα υπάρχει τουλάχιστον άλλη μια παρόμοια ασταθή κορυφή στο συγκεκριμένο γράφημα*. Αυτό είναι το λεγόμενο **επιχείρημα ισότητας** σε κατευθυνόμενα γραφήματα (parity argument for directed graphs)[34].

Έτσι ένας αλγόριθμος για ένα τέτοιο πρόβλημα αναζήτησης θα είχε τα εξής βασικά στοιχεία:

**Είσοδος:** Μια κατευθυνόμενη γραφική παράσταση G και μια συγκεκριμένη ασταθή κορυφή του G.

**Έξοδος:** Κάποια άλλη ασταθή κορυφή

Είναι εμφανές ότι προτού καν να αρχίσει ο αλγόριθμος να ψάχνει το G, το επιχείρημα ισότητας μας βεβαιώνει ότι ψάχνουμε για κάτι που υπάρχει πραγματικά. Εάν για το G δινόταν ένας κατάλογος των κορυφών και των ακρών του, το πρόβλημα θα μπορούσε να λυθεί αρκετά ικανοποιητικά. Ας υποτεθεί όμως ότι δίνεται μια γραφική παράσταση που είναι πάρα πολύ μεγάλη για να καταγραφθεί πλήρως, οπότε πρέπει να δημιουργηθεί το κατάλληλο πρόγραμμα που να λέει κάθε φορά εάν μια άκρη υπάρχει ή όχι.

Πιο συγκεκριμένα, ας υποτεθεί ότι το G έχει $2^n$ κορυφές. Αυτόματα το μέγεθος του προβλήματος γίνεται τεράστιο. Για απλότητα, θεωρούμε ότι κάθε κορυφή έχει το πολύ μια εισερχόμενη άκρη και το πολύ μια εξερχόμενη άκρη, με βαθμό εισόδου 0 και αντίστοιχα βαθμό εξόδου1. Οι άκρες του G δύναται να παρουσιαστούν από δύο κυκλώματα Boole[35], του πολυωνυμικού μεγέθους στο n. Συνεπώς ορίζονται τα κυκλώματα P και S (για τον προκάτοχο και το διάδοχο των ακρών). Η σύμβασή μας είναι ότι υπάρχει μια κατευθυνόμενη άκρη από την κορυφή u στην κορυφή u΄, εάν δοθεί ως εισαγωγή η κορυφή u, το S εξάγει ως αποτελέσμα τη u΄ και αντίστροφα, αν δοθει εισαγωγή u΄, το P εξάγει ως αποτελέσμα τη u. Έστω ότι κάποια στιγμή λοιπόν βρεθεί μια συγκεκριμένη, αναγνωρίσιμη κορυφή (η οποία θα προβάλλεται από μια σειρά τύπου 00....0), η οποία έχει μια εξερχόμενη άκρη αλλά καμία εισερχόμενη άκρη, οπότε κατ' αυτόν το τρόπο είναι ασταθής. Με τον περιορισμό ότι πρέπει να υπάρχει το πολύ μια εισερχόμενη και μιας εξερχόμενη άκρη, η κατευθυνόμενη γραφική παράσταση ουσιαστικά αποτελείται από ζευγάρια πορειών και κύκλων, συνεπώς ακολουθώντας ο αλγόριθμος την πορεία που αναφέρθηκε εώς και τον τελευταίο κόμβο, ουσιαστικά θα μας οδηγούσε τελικά σε μια λύση. Αναμφισβήτητα βέβαια για να προκύψει μια τέτοια λύση μπορεί να χρειαστεί εκθετικός χρόνος[36].

Το αξιοσημείωτο είναι ότι ο Παπαδημητρίου δεν έμεινε έκει, αφού απέδειξε ότι όποιο πρόβλημα ανάγεται σε πολυωνυμικό χρόνο στο End Of The Line πρόβλημα ανήκει στην κλάση PPAD, κατέληξε στο συμπέρασμα ότι αν στο ίδιο πρόβλημα μπορεί να γίνει η αντίστροφη αναγωγή, επίσης σε πολυωνυμικό χρόνο, τότε το πρόβλημα αυτό ανήκει στην κλάση PPAD-πλήρες. Ύστερα από όλα αυτά τα δεδομένα, όσον αφορά την έρευνα πάνω

[33] The Complexity of Computing a Nash Equilibrium, Constantinos Daskalakis, Paul W. Goldberg, Christos H. Papadimitriou, SICOMP, 2008

[34] "On the Complexity of the Parity Argument and Other Inefficient Proofs of Existence," C. H. Papadimitriou, Journal of Computer and System Sciences, 1994

[35] Ο μαθηματικός Τζορτζ Μπουλ (*George Boole*, 1815-1864) παρουσίασε το 1847 μια άλγεβρα με μεταβλητές δύο τιμών (που καλούνται "λογικές μεταβλητές"). Ουσιαστικά παρουσίασε με τα μαθηματικά της εποχής του την Αριστοτέλεια λογική του *είναι* ή *δεν είναι*. Σήμερα η άλγεβρα αυτή ονομάζεται άλγεβρα Μπουλ, ή δυαδική άλγεβρα, ή διακοπτική άλγεβρα και έχει βρει ευρεία εφαρμογή στην σχεδίαση του λογισμικού και των κυκλωμάτων των ηλεκτρονικών υπολογιστών, επειδή είναι ιδανική για χειρισμό λογικών συναρτήσεων και πράξεων στο δυαδικό σύστημα.

[36] Three-Player Games Are Hard, Constantinos Daskalakis, Christos H. Papadimitriou, Electronic Colloquium on Computational Complexity, 2005

στην πολυπλοκότητα ενός αλγορίθμου που αναζητά ένα σημείο ισορροπίας Nash, όπως ήταν φυσικό αλλάξανε εντελώς.

Δύο ανεξάρτητες μεταξύ τους εργασίες των Chen[37] και Deng[38] η μια και Daskalakis[39], Goldberg[40] και Papadimitriou η άλλη το 2005, απέδειξαν η καθε μία με διαφορετικό τρόπο ότι το πρόβλημα 3-Nash (δηλαδή, το πρόβλημα υπολογισμού μιας ισορροπίας Nash σε ένα παίγνιο με 3 παίχτες) είναι PPAD-πλήρες. Αντίστοιχες έρευνες από τους τελευταίους τον επόμενο χρόνο, απέδειξαν τελικά ότι και 4-Nash είναι PPAD-πλήρες, όπως και το 2-Nash, το οποίο αποδείκτηκε τελικά από Chen και Deng χρησιμοποιώντας μια αναγωγη από το 3-Dimensonal Brower.

Η στροφή που έγινε τα επόμενα χρόνια, από τους εκάστοτε ερευνητές προς την εύρεση ισορροπίας διαφόρων παιχνιδιών, τα οποία αποτυπώνονται γραφηματικά, είναι κάτι παραπάνω από εμφανή. Ανάλογη φυσικά κλίση έλαβε και ο τομέας της κατασκευής των αλγορίθμων εκείνων, οι οποίοι είναι κατάλληλοι για να αναζητήσουν ή να κατασκευάσουν μια ισορροπία Nash. Έτσι η πληροφορική ήρθε να ολοκληρώσει και να εφαρμόσει, δίνοντας πραγματικές λύσεις, τη στυγνή αποτύπωση των μαθηματικών στα διάφορα προβλήματα. Ενδεικτικά παρατείθεται ένας αλγόριθμος της λογικής αυτής, ο οποίος κατασκευάζει μια γνήσια ισορροπία Nash σε κατευθυνόμενο γράφημα.

begin
for each player $u \in V0$ do
Δώσε στον παίχτη u οποιαδήποτε στρατηγική από το σύνολο *Su*;
endfor
for $i = 1$ to $kG$ do
for each player $v \in Vi \setminus V_i$-1 do
- Βρες το σύνολο βέλτιστων αποκρίσεων του παίχτη u που αντιστοιχεί στις στρατηγικές των παιχτών από τους οποίους εξαρτάται $N(u) \subseteq Vi$-1;
- Δώσε στον παίχτη u οποιαδήποτε στρατηγική από το σύνολο αυτό;

endfor
endfor
end[41]

## 3.4 ΧΡΩΜΑΤΙΣΜΟΣ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Σαφέστατα η θεωρία παιγνίων έχει συμβάλει τα μέγιστα στην ανάπτυξη και ανάλυση προσεγγιστικών αλγορίθμων, ικανών για την επίλυση υπολογιστικά δύσκολων προβλημάτων. Ένα από αυτά και ίσως το πιο πολυσυζητημένο είναι το πρόβλημα χρωματισμού γραφημάτων, Το εν λόγω προβλημα αποτελεί αναμφισβήτητα ένα από τα πλέον θεμελιώδη προβήματα της θεωρίας υπολογισμού, είναι ένα ενεργό πεδίο έρευνας αλλά ταυτόχρονα έχει και πολλές πρακτικές εφαρμογές. Αποτελεί σημαντική πρόκληση για θεωρητική μελέτη, ενώ μπορεί και να μοντελοποιήσει πολλά πρακτικά προβλήματα όπως το πρόβλημα του προγραμματισμού εργασιών, της δέσμευσης καταχωρητών, το πρόβλημα του *pattern matching*, και προβλήματα *puzzle* όπως το *sudoku*.

---

[37] Κινέζος φυσικομαθηματικός με phd στην πληροφορική, Computer Science Department of Columbia University

[38] Κινέζος καθηγητής οικονομικών και πληροφορικής στο Department of Computer Science, University of Liverpool

[39] Ο Κωνσταντίνος (Κωστής) Δασκαλάκης (γεν. 1981) είναι επίκουρος καθηγητής του Τμήματος Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Πληροφορικής του Μ.Ι.Τ

[40] Βρετανός καθηγητής πληροφορικής στο Department of Computer Science of the University of Liverpool

[41] «Το πρόβλημα της ύπαρξης Γνήσιας Ισορροπίας Nash σε γραφηματικά παίγνια», Κωνσταντίνος Δασκαλάκης, Διπλωματική Εργασία για το Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2004

Όπως είναι γνωστό το πρόβλημα του χρωματισμού τυχαίων γραφημάτων ανήκει στην κατηγορία των δυσεπίλυτων προβλημάτων. Για αυτό το λόγο έχουν αναπτυχθεί και αρκετές ευριστικές μέθοδοι που προσεγγίζουν το χρωματικό αριθμό ενός τυχαίου γραφήματος. Σε γενικές γραμμές όμως ο χρωματισμός ενός γραφήματος είναι η απόδοση χρωμάτων στις κορυφές του έτσι ώστε να μην υπάρχουν γειτονικές κορυφές με το ίδιο χρώμα και συνάμα το συνολικό πλήθος των χρωμάτων που χρησιμοποιούμε να είναι το ελάχιστο δυνατό.

Η κεντρική ιδέα που συνδέει ένα γραφηματικά αποτυπωμένο πρόβλημα με τη θεωρία παιγνίων έχει να κάνει με τον ορισμό ενός κατάλληλου παιχνιδιού, κατά το οποίο το σύνολο των παιχτών του ανταποκρίνεται στο σύνολο των κορυφών και αντίστοιχα το σύνολο των ενεργειών στο σύνολο των χρωμάτων. Με αυτή τη λογική γίνεται εφικτή η εύρεση αγνών ισορροπιών Nash, από τις οποίες προκύπτουν ενδιαφέρουσες ιδιότητες. Βασικότερες από αυτές είναι το γεγονός ότι αντιστοιχούν σε ορθούς χρωματισμούς του γραφήματος, δηλαδή σε εφικτές λύσεις του προβλήματος του χρωματισμού, και επιπλέον μπορούν να υπολογιστούν σε πολυωνυμικό χρόνο.

Ένα γράφημα συμβολίζεται ως G(V,E), όπου V είναι το σύνολο των κορυφών και E το σύνολο των πλευρών του G. Ονομάζεται k -χρωματίσιμο αν μπορεί να χρωματιστεί με k χρώματα. Ένα γράφημα G ονομάζεται k -χρωματικό αν είναι k - χρωματίσιμο αλλά δεν είναι (k-1) χρωματίσιμο, το k λέγεται χρωματικός αριθμός και συμβολίζεται με χ(G). Εάν ένα γράφημα G είναι k χρωματίσιμο τότε χ(G) ≤ k. Εάν ένα γράφημα G είναι k χρωματικό τότε χ(G) = k. Εάν ένα γράφημα G μπορεί να χρωματιστεί με s > χ(G) χρώματα, τότε μπορεί να χρωματιστεί και με c χρώματα, όπου χ(G) = k < c < s.

## 3.5 ΣΕΙΡΙΑΚΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΧΡΩΜΑΤΙΣΜΟΥ

Η δυσκολία εύρεσης αξιόλογης λύσης (σε ικανοποιητικό πάντα χώρο και χρόνο) του προβήματος του χρωματισμού των κορυφών ενός τυχαίου γραφήματος, ανάγκασε τους ερευνητές να αναπτύξουν ορισμένες προσεγγιστικές μεθόδους. Μία βασική προσεγγιστική μέθοδος χρωματισμού είναι η λεγόμενη σειριακή μέθοδος, η οποία λειτουργεί βασιζόμενη στην φιλοσοφία των άπληστων αλγορίθμων. Αυτό σημαίνει ότι η μέθοδος αποφασίζει στο επόμενο βήμα για το χρωματισμό μιας κορυφής με βάση το τοπικό βέλτιστο, χωρίς να λαμβάνει υπόψην της το ολικό βέλτιστο.

Η σειριακή μέθοδος λειτουργεί με τον εξής απλό τρόπο. Ως πρώτο βήμα όλες οι κορυφές του γραφήματος αριθμούνται από 1 ως *n*, καθώς και τα δυνατά διαθέσιμα χρώματα αριθμούνται από 1 ως *n*. Στην συνέχεια οι κορυφές του γραφήματος χρωματίζονται μία προς μία, ανάλογα με την σειρά που εξετάζονται. Η κορυφή που εξετάζεται κάθε φορά χρωματίζεται με το ελάχιστο χρώμα που είναι διαθέσιμο, δηλαδή με το χρώμα που δεν έχει χρησιμοποιηθεί για τον χρωματισμό των γειτονικών κορυφών της και έχει την ελάχιστη επιτρεπτή τιμή μεταξύ των αριθμών 1 ως *n*. Παρακάτω παρουσιάζεται ψευδοκώδικας για καλύτερη κατανόηση της λειτουργίας του αλγορίθμου.

**Είσοδος** : Μια τυχαία αρίθμηση των κορυφών του γραφήματος *G*
**Έξοδος** : Ένας χρωματισμός του γραφήματος.
**1.** Θέσε *i* := 1.
**2.** Θέσε *c* := 1.
**3.** Ταξινόμησε τα χρώματα των γειτονικών κορυφών της κορυφής *u*i κατά μη φθίνουσα τάξη και ονόμασε *L*i τη λίστα αυτή.
**4.** Αν το χρώμα c δεν ανήκει στην λίστα *L*i, τότε χρωμάτισε την κορυφή *u*i με το χρώμα *c*. Πήγαινε στο βήμα 6.
**5.** Θέσε *c* := *c* + 1, πήγαινε στο βήμα 4.
**6.** Αν *i* < *n* τότε θέσε *i* := *i* +1 και πήγαινε στο βήμα 2, αλλιώς ο αλγόριθμος τερματίζει[42].

Παρατηρούμε ότι ο παραπάνω αλγόριθμος δέχεται ως είσοδο μια τυχαία αρίθμηση των κορυφών ενός γραφήματος *G*. Επίσης γνωρίζουμε ότι οι *n* κορυφές ενός γραφήματος μπορούν να αριθμηθούν με *n*! τρόπους. Συμπερασματικά αν ο «Σειριακός» αλγόριθμος τρέξει σε ένα γράφημα και εξετάσει κάθε φορά με διαφορετική σειρά τις κορυφές του γραφήματος

[42] Αλγοριθμοι Κατασκευης και Μελετη Προβληματων Χρωματισμου Κλασεων Τελειων Γραφηματων, Δήμητρα Τσάμη, διπλωματική εργασία, 2010, σελ 36-37

τότε είναι πολύ πιθανό να προκύψουν διαφορετικοί χρωματισμοί για το ίδιο γράφημα. Όπως είναι φανερό ο αλγόριθμος δεν μπορεί να θεωρηθεί εξαιρετικά αποδοτικός, αλλά υποδεικνύει με πολύ απλό τρόπο τις βασικές πλευρές του προβλήματος χρωματισμού ενός γραφήματος και τα λογικά εμπόδια αποδοτικής επίλυσής του.

Πάνω στην ίδια εγωιστική λογική απόδοσης χρώματος των κορυφών ενός γραφήματος, που μόλις αναφέρθηκε, στηρίζεται και αλγόριθμος "selfishsteps", ο οποίος είναι αποδοτικότερος, αλλά πιο περίπλοκος. Αναγκαία προϋπόθεση η ύπαρξη ή η δημιουργία ενός περιγράμματος αγνών στρατηγικών, που να αποτελεί έναν ορθό χρωματισμό των κορυφών ένος γραφήματος G, μέσω μιας διαδικασίας ακολουθίας εγωιστικών βημάτων. Ο αλγόριθμος συνοπτικά έχει ως εξής:

**Είσοδος :** γράφημα G=(V,E) με σύνολο κορυφών V = $\{u_1, u_2 \ldots u_n\}$ και ένα σύνολο χρωμάτων X = $\{x_1, x_2 \ldots x_n\}$

**Έξοδος :** Μια αγνή ισορροπία Nash c για το Γ(G)

Begin

For i = 1 to n do $x_{ui} = x_i$

While υπάρχει ανικανοποίητη κορυφή

βρες μια ανικανοποίητη κορυφή u Є V

βρες ένα χρώμα x Є X τέτοιο ώστε $\lambda_u(x, c_{-u}) > \lambda_u(c)$

θέσε cu = x

End

Ο selfishsteps υπολογίζει για κάθε γράφημα G μια αγνή ισορροπία Nash του παιγνίου Γ(G) και απομένως έναν ορθό χρωματισμό των κορυφών του G. Η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου είναι πολυωνυμική εφόσον αποδεικνύεται ότι τερματίζει μετά από O(n*a(G)) εγωιστικά βήματα[43]. Επιπλέον κάθε εγωιστικό βήμα μπορεί να πραγματοποιηθεί σε $O(n^2)$, αφου υπάρχουν n κορυφές που μπορούν να εκτελέσουν ένα εγωιστικό βήμα και κάθε κορυφή μπορεί να επιλέξει ανάμεσα σε n διαθέσιμα χρώματα. Τέλος a(G) < n, οπότε η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου είναι $O(n^4)$.

Η πολυπλοκότητα του προβλήματος χρωματισμού των κορυφών ενός γραφήματος (χρησιμοποιώντας το ελάχιστο δυνατό πλήθος χρωμάτων) θεωρείται ότι ανήκει στη κλάση NP-δύσκολο. Ενώ το πρόβλημα απόφασης για το αν ένα γράφημα G μπορεί να χρωματιστεί ορθά με k χρώματα είναι NP-πλήρες (Karp, 1972)[44]. Επιπλέον έχει αποδειχθεί[45] ότι δεν υπάρχει πολυωνυμικός αλγόριθμος χρωματισμού των κορυφών ενός γραφήματος που να επιτυγχάνει λόγο προσέγγισης $\Omega(n^{1-E})$, για οποιαδήποτε σταθερά E>0, εκτός εάν NP⊆co-NP. Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει ένας αλγόριθμος που να υπολογίζει ένα σωστό χρωματισμό για κάθε γράφημα G χρησιμοποιώντας $\Omega(n^{1-E})$ * x(G) χρώματα, εκτός εάν NP⊆co-NP. Ο καλυτερος γνωστός πολυωνυμικός αλγόριθμος που γνωρίζουμε σήμερα επιτυγχάνει λόγο προσέγγισης $O(n(\log \log n)^2=(\log n)^3)$[46] και οφείλεται στον Halldorsson[47].

## 3.6 ALGORITHMIC MECHANISM DESIGN (AMD)

Είναι ολοφάνερο ότι τις τελευταίες δεκαετίες ο τομέας της πληροφορικής και οι εφαρμογές του υφίσταται ραγδαία, ανεξέλεγκτη ανάπτυξη καθημερινά, με αποτέλεσμα μαζί με αυτόν να αυξάνονται και οι ανάγκες του. Η ιδιότητα αυτή πολύ γρήγορα έκανε την πληροφορική

[43] «Αλγοριθμική και Εξελικτική Θεωρία Παιγνίων», Παναγιώτα Ν. Παναγοπούλου, Διπλωμτική Εργασία, Πάτρα, 2008, σελ. 107

[44] Richard Manning Karp, (1935), Αμερικανός επίστημονας και θεωρητικός της Πληροφορικής, Καθηγητής στο University of California, Berkeley

[45] Feige, U., & Kilian, J. (1998). Zero knowledge and the chromatic number. Journal of Computer and System Sciences, 57

[46] http://www.dcs.gla.ac.uk/~pat/jchoco/clique/papers/approxCol.pdf ή "A still better performance guarantee for approximate graph coloring ", Magnh M. Halldorsson, Information Processing Letters 45 (1993) 19-33, 1993

[47] Καθηγητής Πληροφορικής στο Reykjavik University

απαραίτητο κομάτι των άλλων επιστημών δημιουργώντας έτσι μια έντονη σχέση αλληλεπίδρασης. Μια από τις απόρροιες αυτής της σχέσης, και δη με την οικονομική επιστήμη, αποτελεί και η ευρέως διαδεδομένη έννοια του Αλγοριθμικού Σχεδιασμού Μηχανισμών (Algorithmic Mechanism Design ή AMD).

Ο AMD ουσιαστικά καταλήγει να είναι ένας μηχανισμός, ο οποίος στήνει ένα παιχνίδι σύμφωνα με τις διδαχές της Θεωρίας Παιγνίων, μόνο που στη περίπτωσή του ο στόχος και ο προορισμός του είναι πολύ πιο σημαντικός από την απλή ανάλυση συμπεριφορών σε ανταγωνιστικές καταστάσεις. Θέτει συνήθως ευγενείς στόχους, όπως η μεγιστοποίηση της ευημερίας στο σύνολο μιας κοινωνίας ή μιας ομάδας, έπειτα σχεδιάζεται ένα παιχνίδι (αμοιβές και σύνολα στρατηγικών) με τέτοιο τρόπο, ώστε οι εκάστοτε παίχτες, οι οποίοι συμετέχουν στο παιχνίδι, να θεωρούν ότι απλά παρακινούνται από ίδιο συμφέρον, ενώ τελικά να καταλήγουν στους στόχους του σχεδιαστή του παιχνιδιού. Δεν είναι τυχαίο άλλωστε το γεγονός ότι ο Ισραηλινός Καθηγητής Noam Nisan τον ονόμαζε «Αντίστροφη Θεωρία Παιγνίων».

Αρχικά ο AMD ξεκίνησε ως πεδίο της οικονομικής θεωρίας, μάλλον μοναδικό μέσα στα οικονομικά με προοπτική εφαρμοσμένης μηχανικής. Κατά αυτή την έννοια ξεκίνησε σχεδιάζοντας απλούς οικονομικούς μηχανισμούς, αλλά πολύ γρήγορα επεκτάθηκε και σε άλλους επιστημονικούς τομείς. Ο τρόπος σχεδιασμού πλέον, συνδιάζει τα αξιώματα της Θεωρίας Παιγνίων με την λογική που ακολουθούν οι επιστήμονες της Πληροφορικής όταν σχεδιάζουν αλγόριθμους πρωτόκολλα ή διάφορα συστήματα και εφαρμογές. Ο λόγος ύπαρξής του βέβαια είναι πολύ πιο σπουδαίος και έγκειται στην έννοια της κοινωνικής επιλογής, δηλαδή στη συνάθροιση των προτιμήσεων των διαφορετικών συμμετεχόντων προς μια ενιαία κοινή απόφαση, ως προτεραιότητα για τον οποιδήποτε σχεδιασμό, με γνώμονα πάντα το καλύτερο για το σύνολο. Ο οποιοσδήποτε σχεδιασμός με τη σειρά του δημιουργείται λαμβάνοντας υπόψην πάντα τις προσωπικές προτιμήσεις του εκάστοτε συμμετέχοντα, παίχτη, ο οποίος θεωρείται ότι λειτουργεί σε λογικά πλάισια.

Αυτή η διαδικασία της συνάθροισης των προσωπικών προτιμήσεων μπορεί να εκφραστεί και να εφαρμοστεί σε πληθώρα σεναρίων που ιφύστανται στην οικονομική επιστήμη καθώς επίσης και σε άλλους επιστημονικούς τομείς όπως η πολιτική και η κοινωνική επιστήμη. Τα παραπάνω θα γίνουν περισσότερο κατανοητα με μερικά βασικά παραδείγματα:

Εκλογές: Στις βουλευτικές εκλογές κάθε ψηφοφόρος έχει τις προτιμήσεις του μεταξύ των διαφορετικών υποψηφίων, και η έκβαση των εκλογών είναι μια ενιαία κοινωνική επιλογή.

Αγορές: Η κλασσική οικονομική θεωρία αναλαμβάνει συνήθως την ύπαρξη και τη λειτουργία μιας «τέλειας αγοράς». Στην πραγματικότητα, φυσικά, διαπραγματεύεται αποκλειστικά τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των ανθρώπων και μεταξυ των επιχειρήσεων, ακολουθώντας τις περισσότερες φορές γνωστά οικονομικά «πρωτόκολλα». Κάθε συμμετέχων σε μια τέτοια αλληλεπίδραση έχει τις προτιμήσεις του, αλλά η έκβαση είναι μια ενιαία κοινωνική επιλογή: η αναδιανομή των αγαθών και των χρημάτων.

Δημοπρασίες: Κατά γενική ομολογία, όσο περισσότεροι αγοραστές και πωλητές βρίσκονται σε ένα χώρο, όπου λαμβάνουν χώρα διάφορες αγοραπωλησίες, τόσο περισσότερο η κατάσταση εκεί αγγίζει το σενάριο της τέλειας αγοράς. Η ακριβώς αντίθετη κατάσταση συμβαίνει όταν υπάρχει μόνο ένας ενιαίος πωλητής, δηλαδή μμιλάμε για δημοπρασία. Οι κανόνες της δημοπρασίας καθορίζουν την κοινωνική επιλογή: η ταυτότητα του νικητή.

Κυβερνητική πολιτική: Οι κυβερνήσεις πρέπει συνήθως να λάβουν αποφάσεις που έχουν επιπτώσεις σε ένα πλήθος ανθρώπων με διαφορετικούς τρόπους: Θα έπρεπε μια ορισμένη γέφυρα να χτιστεί; Πόση ρύπανση θα έπρεπε να επιτρέψουμε; Πώς θα έπρεπε να ρυθμίσουμε κάποιους τομείς, για την εξασφάλιση της ευημερίας των πολιτών; Σαφώς κάθε πολίτης έχει ένα διαφορετικό σύνολο προτιμήσεων αλλά μια ενιαία κοινωνική επιλογή γίνεται από την κυβέρνηση[48].

[48] “Algorithmic Game Theory”, Noam Nisan, Tim Roughgarden, ΄ Eva Tardos, Vijay V. Vazirani, 2007, Cambridge University Press, το συγκεκριμένο κείμενο έχει γραφτεί από τον Noam Nisan

Με τα χρόνια ο AMD έκανε αισθητή τη παρουσία του σε διάφορους επιστημονικούς τομείς, αλλά κυρίως στην οικονομική επιστήμη, από όπου και ξεκίνησε από τον Noam Nisan[49], και στην πληροφορική. Εννοιολογικά, μπορεί κανείς να εξετάσει δύο διαφορετικούς τύπους κινήτρων: εκείνους που χρησιμοποιούν τα οικονομικά για να λύσουν ζητήματα πληροφορικής και εκείνους που χρησιμοποιούν την πληροφορική για να λύσουν οικονομικά ζητήματα:

Στη πρώτη περίπτωση εξετάζεται ο εκάστοτε αλγοριθμικός σχεδιασμός μηχανισμών σε περιβάλλον δικτύου υπολογιστών, όπως η δρομολόγιση μηνυμάτων, η κατανομή μνήμης και πόρων, ο σχεδιασμός βελτίωσης χρόνου απόκρισης αιτημάτων τελικών χρηστών. Έτσι λειτουργώντας σε ένα περιβάλλον με πολλαπλούς κατόχους πόρων ή των αιτημάτων, ένας αλγόριθμος πρέπει να λάβει υπόψη του τις διαφορετικές προτιμήσεις των εντελώς διαφορετικών κατόχων, υποθέτοντας την εγωιστική στρατηγική συμπεριφορά κάθε συμμετέχοντος.

Αντίστοιχα στη δεύτερη περίπτωση αρκεί να εξετάστει μια απλή οικονομική αλληλεπίδρασή: κάποιος τύπος αγοράς, μιας δημοπρασίας, μιας αλυσίδας εφοδιασμού, κ.λπ. Δεδομένου ότι το Διαδίκτυο γίνεται πανταχού παρόν, αυτή η αλληλεπίδραση θα εφαρμοστεί συχνά μέσα από κάποια αυτοματοποιημένη πλατφόρμα. Σε μια τέτοια διαδικασία συνεπάγεται μεγάλος βαθμός δυσκολία, ιδιαιτερότητας και πολυπλοκότητας, που αντιμετωπίζονται από ένα εξαιρετικά καλοσχεδιασμένο λογισμικό. Ο σχεδιασμός του οποίου συχνά καλείται Σχεδιασμός Ηλεκτρονικής Αγοράς (Electronic Market Design ή EMD).

Συνεπως και το AMD και το EMD μπορούν να βασιστούν στον τομέα του σχεδιασμού μηχανισμών που εφαρμόζεται στις σύνθετες αλγοριθμικές τοποθετήσεις. Τα τελευταία χρόνια έχουν γίνει αξιόλογες έρευνες πάνω στο τομέα αυτό, με αποτέλεσμα να δημιουργηθουν ενδιαφέρουσες αλληλεπιδράσεις μεταξύ των εν λόγω μηχανισμών και της θεωρητικής επιστήμης της πληροφορικής. Η περιοχή αυτή είναι πάρα πολύ περίπλοκη και αναπτυγμένη, γεγονός που κάνει φανερό ότι οι περαιτέρω ευκαιρίες αυθονούν.

## 3.7 ΔΙΑΔΙΚΤΥΟ

Η άνθηση του διαδικτύο στις μέρες μας, το καθιστά μια από τις καλύτερες δυνατές εφαρμογές της θεωρίας του AMD. Δεδομένου ότι η επιρροή του Διαδικτύου αυξήθηκε, έγινε σαφές ότι πολλά σενάρια που συμβαίνουν εκεί μπορούν επίσης να αντιμετωπισθούν ως περιπτώσεις κοινωνικής επιλογής στις στρατηγικές τοποθετήσεις. Το κύριο νέο συστατικό που βρίσκεται στο Διαδίκτυο είναι ότι είναι πλέον προσωπικό και χρησιμοποιείται από τα διαφορετικά συμβαλλόμενα μέρη με τους διαφορετικούς στόχους και τις προτιμήσεις τους. Αυτές οι προτιμήσεις, και η συμπεριφορές που προκαλούν, πρέπει να ληφθούν υπόψη από κάθε πρωτόκολλο, σε ένα περιβάλλον όπως του διαδικτύου. Σε αυτή τη περίπτωση κρίνεται αναγκαία η ύπαρξη κάποιου είδους «πρωτοκόλλου», το οποίο θα συλλέγει τις προτιμήσεις των διαφορετικών συμμετεχόντων και θα τις αθροίζει σε μια κοινωνική επιλογή. Αυτή ουσιαστικά θα είναι και η έκβαση της λειτουργίας του πρωτοκόλλου.

Το σύνθετο κοινωνικοοικονομικό πλαίσιο του διαδικτύου μπορεί να έχει βαθιά επιρροή στη διαδικασία διαμόρφωσης σχεδιασμού όσον αφορά τη πληροφορική. Παραδοσιακά, τα πλεονεκτήματα ή η προσαρμοστηκότητα μιας καινούριας εφαρμογής (ένας νέος μεταγλωτηστής (compiler) για παράδειγμα, θα κρινόταν ανάλογα με το χρόνο και το χώρο που απαιτεί ώστε να υλοποιήσει τις διαδικασίες του, καθώς επίσης την αξιοπιστία του και τη δυνατότητα χρησιμοποίησής του. Τα κριτήρια αυτά αποτελούν απαραίτητη προϋπόθεση για να είναι μια καινούρια εφαρμογη επιτυχημένη, και οι θεωρητικοί προσπάθησαν και προσπαθούν να αναπτύξουν τις κατάλληλες μεθοδολογίες για την σωστή πρόβλεψη και τη βελτιστοποίηση αυτών των κριτηρίων.

Στα πλαίσια του διαδικτύου, τέτοιες ιδιότητες λένε μόνο ένα μικρό μέρος της ιστορίας. Εάν μια εφαρμογή (ένα νέο πρωτόκολλο ελέγχου συμφόρησης, ένα προτωποριακό σε δυνατότητες πρόγραμμα αποθήκευσης, ένας καινούριος αλγόριθμος δρομολόγησης, κ.λπ.). καταδεικνύεται ως αυτή με τις καλύτερες και ανώτερες δυνατές λειτουργίες, αυτό απαραιτήτως

[49] Noam Nisan, Ισραηλινός καθηγητής του τμήματος Computer Science στο Hebrew University of Jerusalem

δεν σημαίνει ότι θα είναι και επιτυχής. Για να είναι μία εφαρμογή επιτυχημένη πρέπει να υπάρξει μια πορεία που οδηγεί από τη παρούσα, νέα κατάσταση, στην επικράτησή της. Αυτή η πορεία πρέπει να διαθέτει τα σωστά κίνητρα, τα οποία θα παρακινήσουν όλα τα είδη διαφορετικών συμβαλλομένων, ώστε να την υιοθετήσουν, να την εφαρμόσουν, να τη χρησιμοποιήσουν, να αλληλεπιδράσουν με αυτήν, ή εντέλει απλά να την ανεχτούν. Ελλείψει μιας τέτοιας πορείας, ακόμη και το πιό έξυπνο, γρήγορο και αξιόπιστο νεοφερμένο λογισμικό μπορεί να μείνει ως ένα νέο λογισμικό και τίποτα παραπάνω. Είναι φανερό ότι όσον αφορά το διαδίκτυο, η πλοιονότητα των προβλημάτων αποτελούν ουσιαστικά σχεδιασμό μηχανισμών.

## 3.8 ΔΙΑΔΙΚΤΥΑΚΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ

Η τεράστια εξέλιξη του διαδικτύου δεν ήταν δυνατό να αφήσει αδιάφορους του παιγνιοθεωρητικούς ερευνητές, όσον αφορά τη μοντελοποίηση της ισορροπίας του. Ας πάρουμε όμως τα πράγματα από την αρχή. Το εύρος ζώνης διαδικτύου είναι σχετικά μικρό και η κατανομή του στον εκάστοτε χρήστη επιτυγχάνεται διαμέσω του πρωτοκόλλου TCP/IP, το οποίο αποτελεί ένα πρωτόκολλο ελέγχου συμφόρησης.

Η λειτουργία του έχει ως εξής σε απλή μορφή. Αν ένα προηγούμενο σύνολο πακέτων περάσει, αύξησε το μέγεθος του συνόλου κατά ένα, αν όχι τότε μείωσε το στο μισό. Αυτό το δαιμόνια απλό σχέδιο προς το παρών φαίνεται να λειτουργεί ομαλά και οι χρήστες του δεν φαίνονται πρόθυμοι να το εγκαταλείψουν για κάτι διαφορετικό, αλλά η προέλευση αυτής της προτοφανούς επιτυχίας και συναίνεσης δεν γίνεται εύκολα κατανοητή. Έτσι γιεννέται το ερώτημα, σε ποιού είδους παιχνίδι το πρωτόκολλο ελέγχου συμφόρησης αποτελεί ισορροπία Nash.

Εάν θεωρήσουμε τον έλεγχο συμφόρησης διαδικτύου ως παιχνίδι, τότε είναι βέβαιο ότι η ισορροπία του δεν επιτυγχάνεται από μια απλή περισυλλογή πακέτων ή πόρων, αλλά από την αλληλεπίδραση και την προσαρμογή τους σε ένα περιβάλλον όπου οι όροι, καθώς και οι παίκτες, αλλάζουν ραγδαία και οι αλλαγές αυτές που υφίστανται επηρρεάζουν άμεσα τη στρατηγική τους και το κόστος της. Οι παραδοχές αυτές είναι λογικό να οδηγούν σε περιπλοκότερες έννοιες ισορροπιών, οι οποίες είναι ουσιαστικά καταλληλότερες για τα πλαίσια μελέτης του διαδικτύου.

Τα παιχνίδια λοιπόν αυτά προϋποθέτουν ότι οι παίκτες που συμμετέχουν δεν δύναται να διαπραγματευτούν αλλά και να αντισταθμίσουν τις αμοιβές τους, λαμβάνοντας ο ένας πληρωμές από τον άλλον. Η συνεργατική θεωρία παιγνίων θεωρεί ένα παιχνίδι με n παίκτες ως ένα σύνολο από $2^n$ -1 πιθανούς συνασπισμούς, κάθε ένας από τους οποίους, αν τους ονομάσουμε S, μπορεί να επιτύχει μια συγκεκριμένη αξία u(S), δηλαδή το καλύτερο δυνατό άθροισμα αμοιβών μεταξύ των παιχτών στο S, ενάντια στη χειρότερη δυνατή περίπτωση συμπεριφοράς των παιχτών [n]-S. Το βασικό πρόβλημα είναι τώρα πώς να διαιρέσει κανείς τις συνολικές αμοιβές u(n) σε n παιχτών. Διάφορες έννοιες δίκαιης κατανομής έχουν προταθεί κατά καιρούς, ως επίλυση του προβλήματος. Άλλες έχουν υπερασπιστεί και άλλες έχουν επικριθεί κατά τη διάρκεια των προηγούμενων δεκαετιών, όπως η αξία Shapley[50], ο πυρήνας (the nucleolus), η λύση των Von Neumann-Morgenstern και πολλές άλλες. Ο πυρήνας είναι ίσως η πιό διαισθητική θεωρία (και συγγενέστερη στην έννοια ισορροπίας) και επίσης η πιό συντηρητική. Κατά τη θεώρησή του ένα διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$ με το x [n] = u([n]) ανήκει στον πυρήνα εάν x[S] ≥ u([S]) για όλο το S, Δηλαδή το x, που θεωρείται ως προτεινόμενος διαχωρισμός της συνολικης αμοιβής u([n]) μεταξύ των παιχτών n, είναι δίκαιο σύμφωνα με τις διδαχές της θεωρίας εάν κανενός είδους συνασπισμός δεν έχει κίνητρο επιτυχίας από μόνος του.

Το διαδίκτυο φαίνεται σαν ένα ραδιουργό θέατρο της συνεργατικής θεωρίας παιγνίων. Χρησιμοποιείται και χτίζεται από χιλιάδες μεγάλες και μικρές οντότητες (αυτόνομα συστήματα), συνεργάζεται με αξιοθαύμαστη αποτελεσματικότητα και καταφέρνει να επεξεργαστεί και να παραδώσει τις συνεχόμενες και εναλλασόμενες ροές πακέτων που

[50] Shapley value, ονομάζεται προς τιμή Lloyd Shapley, που την εισήγαγε ως έννοια το 1953 και αποτελεί μια έννοια λύσης στη συνεταιριστική θεωρία παιγνίων. Σε κάθε συνεταιριστικό παιχνίδι ορίζει μια μοναδική διανομή (μεταξύ των παικτών) ενός συνολικού πλεονάσματος που παράγεται από το συνασπισμό όλων των παικτών

δημιουργούνται και που ολοκληρώνονται σε κάθε μια από αυτές τις οντότητες. Έστω ότι λαμβάνεται μια γραφική παράσταση με τους κόμβους v (τα αυτόνομα συστήματα), ένα συμμετρικό n x n πλέγμα κυκλοφορίας F, όπου f(i,j) είναι το σύνολο των απαιτήσεων κίνησης μεταξύ των πελατών του i και των πελατών του j, και μια χωρητικότητα Ci για κάθε κόμβο. Εάν το S είναι το σύνολο των κόμβων, τότε υπάρχει ένα υπογράφημα που προκαλείται από το S ως ένα εμπορικό κέντρο, δίκτυο με τις χωρητικότητες των κόμβων και τις απαιτήσεις των προϊόντων που δίνονται από τις καταχωρήσεις του F. Έτσι το u(S) αποτελεί το μέγιστο σύνολο ροών σε αυτό το δίκτυο, γεγονός που το καθορίζει ώς ένα συνεργατικό παιχνίδι[51].

Μία γενική διαδικτυακή ισορροπία έγκειται στην εύρεση μιας βέλτιστης λύσης για το πρόβλημα ροών στο σύνολο του διαδικτύου, τέτοια ώστε οι λαμβανόμενες αμοιβές από τους κόμβους να αναταποκρίνονται στο σύνολο ροών του δικτύου u(S).

## 3.9 ΤΟ ΠΑΧΝΙΔΙ ΤΗΣ ΔΡΟΜΟΛΟΓΗΣΗΣ

Η θεωρητική προσέγγιση της θεωρίας παιγνίων για τη δρομολόγηση θέτει ως βασική προϋπόθεση την ύπαρξη μιας πηγής δρομολόγησης, όπου η διαδρομή για την ροή των πακέτων πληροφοριών που κυκλοφορούν στο διαδίκτυο, αποφασίζεται από μια πηγή. Η πηγή δρομολόγησης δεν μπορεί να είναι οποιαδήποτε, αλλά υπάρχει η δυνατότητα επιλογής ανάμεσα στις πηγές δρομολόγησης IPv4 και IPv6. Η δρομολόγηση συνδέεται άμεσα με τον έλεγχο συμφόρησης, επειδή ο τελικός αποδέκτης της πληροφορίας δύναται να έχει πληθώρα διαδρομών που καταλήγουν στον προορισμό του και σε κάθε διαδρομή τα επίπεδα κίνησης της κυκλοφορίας των πακέτων είναι διαφορετικά. Επομένως εάν μια πηγή επιλέξει μια πορεία που είναι ήδη υπερφορτωμένη αυτό όχι μόνο θα καθυστερήσει την παράδοση της πληροφορίας της αλλά και μπορεί επίσης να προκαλέσει τη συμφόρηση σε ολόκληρο το δίκτυο.

Υπάρχουν δύο τύποι πηγών δρομολόγησης: ο τύπος της εγωιστικής δρομολόγησης, όπου κάθε χρήστης αποφασίζει τη διαδρομή που θα ακολουθήσει με μοναδικό του κριτήριο το προσωπικό του όφελος και η συντονισμένη δρομολόγιση, όπου οι διαδρομές για όλους τους χρήστες αποφασίζονται με τέτοιο τρόπο ώστε να γίνεται εφικτό το μέγιστο κοινωνικό όφελος της εκάστοτε περίπτωσης. Δεδομένου ότι ένας χρήστης μπορεί εύκολα να αποφασίσει να μην ακολουθήσει ένα συμφωνηθέν πρωτόκολλο η εγωιστική δρομολόγηση έχει πολύ καλύτερη απόδοση σε σχέση με αυτή της συντονισμένης δρομολόγησης και δεδομένου ότι μια αργοπορία της κυκλοφορίας της κίνησης, στην περίπτωση μιας ισορροπία Nash στην εγωιστική δρομολόγηση, είναι ουσιαστικά η μισή αργοπορία της κυκλοφορίας που μπορεί να υπάρξει κατά τη συντονισμένη δρομολόγηση μεταξύ πάντα των ίδιων ζευγαριών πηγών προορισμού.

Ο στόχος ενός επιτυχημένου μηχανισμού είναι να κατασκευαστεί ένα παιχνίδι έτσι ώστε η ισορροπία Nash όπου επιτυγχάνεται να είναι πάντα βέλτιστη. Πολλές διαφορετικές στρατηγικές μπορούν να χρησιμοποιηθούν για το σκοπό αυτόν, αλλά η απαίτηση μιας πρωτεύοντος απόφασης είναι κοινή μεταξύ αυτών των στρατηγικών. Σε μια μελέτη τους, οι Y.A Korillas, A.A Lazar, A. Orda[52], υποδείκνυαν ένα σχεδιασμό όπου το βέλτιστο σημείο ισορροπίας επιτυγχάνεται κατά τη διάρκεια της λειτουργίας του δικτύου. Οι στόχοι της προσέγγισής τους ήταν να βελτιστοποιήσουν τις αποφάσεις δρομολόγησης ενός δικτύου έτσι ώστε η καθυστέρηση του να ελαχιστοποιείται.

Το πρότυπο αυτό ουσιαστικά προσδιορίζει δύο οντότητες: τους μη συνεταιριστικούς χρήστες που μοιράζονται διάφορες παράλληλες συνδέσεις με βασικό τους στόχο να δρομολογίσουν αποτελεσματικά την προσωπική τους κυκλοφορία σε έναν κοινό προορισμό, ενώ η άλλη οντότητα, η οποία καλείται και ως διαχειριστής, ο όποιος με τη σειρά του έχει τη δυνατότητα να παρακολουθηθεί τη μη συνεταιριστική συμπεριφορά των χρηστών και βασικός του στόχος είναι η γενικότερη βελτιστοποίηση της απόδοσης του δικτύου. Ο διαχειριστής είναι σε θέση να προβλέψει τις απαντήσεις των χρηστών και επιλέγει τη κατάλληλη στρατηγική έτσι

[51] Algorithms, Games, and the Internet, Christos H. Papadimitriou, STOC '01 Proceedings of the thirty-third annual ACM symposium on Theory of computing, ISBN 1-58113-349-9, 2001

[52] Y.A Korillas, A.A Lazar, A Orda, Acheiving Network Optima Using Stackelberg Routing IEEE/ACM Transactions on Networking, Vol 5,No 1, February 1997

ώστε να επιτυγχάνεται η βέλτιστη δυνατή απόδοση του δικτύου. Επίσης πρέπει να αποτελεί έναν ηγέτη και οι υπόλοιποι χρήστες τους οπαδούς του. Ως εκ τούτου ο ηγέτης καθορίζει μια στρατηγική δρομολόγησης που είναι βέλτιστη για το δίκτυο και οι οπαδοί συγκλίνουν σε αυτήν. Είναι γνωστό ότι μια ισορροπία που επιτυγχάνεται με αυτό τον τρόπο καλείται σαν ισορροπία Stackelberg[53], η οποία είναι μια πρόσθετη περίπτωση της ισορροπίας Nash.

Η στρατηγική δρομολόγησης του δαχειριστή καθορίζεται εφ' όσον δεν αλλάζουν οι στρατηγικές δρομολόγησης των μη συνεταιριστικών χρηστών. Επιπλέον οι μη συνεταιριστικοί χρήστες ρυθμίζουν τις στρατηγικές δρομολόγησής τους σύμφωνα με τις στρατηγικές των άλλων χρηστών και του διαχειριστή προκειμένου να ελαχιστοποιηθεί το κόστος τους. Έχει αποδειχθεί[54] ότι η ισορροπία Nash που επιτυγχάνεται έτσι είναι πάντα μοναδική. Σε αυτό το σημείο πρέπει να τονιστεί ότι μια ισορροπία Stackelberg δεν είναι επιθυμητή από τη στιγμή που ένας πολύ δυνατός χρήστης δύναται να προκαλέσει ένα σημείο ισορροπίας το οποίο αυτός επιθυμεί. Γι αυτό και ο διαχειριστής εδώ διαδραματίζει έναν πολύ σημαντικό κοινωνικό ρόλο, ο οποίος δεν είναι απλά αποδεκτός αλλά σε μεγάλο βαθμό και επιθυμητός.

Οι συγκεντρωτικοί τύποι σχεδιασμένων μηχανισμών όπως ο AMD που αναφέρθηκε παραπάνω είναι πολύ δύσκολο να αποδόσουν τα αναμενόμενα σε πολλές από τις συνθήκες που επικρατούν στο διαδίκτυο πλέον. Για το λόγο αυτό και δημιουργήθηκε ο Αλγοριθμικός Σχεδιασμός Μηχανισμών Διανομής ή Κατανομής (Distributed Algorithmic Mechanism Design ή αλλίως DAMD), σε μια προσπάθεια να βρεθούν εκείνοι οι μηχανισμοί, που θα καταφέρουν να ανιχνεύσουν και να επεξεργαστούν τις αλλόκοτες συμπεριφορές που επικρατούν στο διαδίκτυο χωρίς να προκαλέσουν τις οποιεσδήποτε τροποποιήσεις στα πρωτόκολλα του. Οι AMD και DAMD έχουν εφαρμοστεί επιτυχώς σε προβλήματα όπως η κατανομή στόχου και η Δρομολόγιση Χαμηλού Κόστους (Low Cost Routing), η οποία βασίζεται στο προτώκολλο BGP. Θεωρητικά αυτές οι τεχνικές μπορούν επίσης να εφαρμοστούν στον έλεγχο συμφόρησης, για τον οποίο υπάρχει εκτενή αναφορά παρακάτω, και πολύ περισσότερο ο DAMD, η φιλοσοφία του οποίου έγκειτε στο να μπορεί να αντιλαμβάνεται τα χαρακτηριστικά κατανομής που υφίστανται στο διαδίκτυο. Δυστυχώς βέβαια, σε πολλές περιπτώσεις, οι αρκετά υψηλές υπολογιστικές πολυπλοκότητες που ενυπάρχουν εκεί, αποτελούν τροχοπέδη ακόμα και για τον DAMD.

## 3.10 ΕΞΙΣΟΡΡΟΠΙΣΗ ΦΟΡΤΙΟΥ ΚΑΙ ΚΟΣΤΟΣ ΑΝΑΡΧΙΑΣ

Οποτεδήποτε έχουμε ένα σύνολο εργασιών το οποίο πρέπει να εκτελεστεί χρησιμοποιώντας ένα σύνολο πόρων, όπως ακριβώς συμβαίνει στο διαδίκτυο προκύπτει το πρόβλημα εξισορρόπησης φορτίου. Στο κλασικό αυτό πρόβλημα, ουσιαστικά ζητείται μία ανάθεση των εργασιών στους πόρους, τέτοια ώστε να τους εκμεταλλευόμαστε με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη αποδοτικότητα. Στην επιστήμη των Υπολογιστών, η εξισορρόπηση φορτίου αντιμετωπίζεται παραδοσιακά ως πρόβλημα βελτιστοποίησης. Ο σκοπός συνήθως είναι η ελαχιστοποίηση του μέγιστου φορτίου ανάμεσα σε όλες τις μηχανές. Το πρόβλημα αυτό έχει μελετηθεί εκτενώς και έχουν προταθεί αλγόριθμοι, οι οποίοι το λύνουν.

Εξετάζοντας το πρόβλημα εξισορρόπησης φορτίου από παιγνιοθεωρητική σκοπιά, παρατηρεί κανείς την λειτουργία πολλών δικτύων και κατανεμημένων συστημάτων. Για παράδειγμα, στο διαδίκτυο οι εργασίες μπορεί να είναι μεγάλα αρχεία τα οποία οι χρήστες θέλουν να κατεβάσουν από εξυπηρετητές, που εδώ παίζουν τον ρόλο των πόρων. Οι χρήστες συμπεριφέρονται εγωιστικά, δηλαδή ενδιαφέρονται μόνο για την ελαχιστοποίηση χρόνου που απαιτείται για την ολοκλήρωση της εργασίας τους. Ο μεγάλος αριθμός των χρηστών καθιστά δύσκολη την παρουσία μίας κεντρικής αρχής που θα μπορούσε να αναθέτει τις εργασίες στους διαθέσιμους πόρους με τρόπο αποδοτικό. Ο αριθμός των χρηστών και η φύση των εργασιών τους δεν αυξάνει μόνο την δυσκολία του συντονισμού τους αλλά και την δυσκολία υπολογισμού μίας αποδοτικής ανάθεσης σε εύλογο χρόνο.

---

[53] Το πρότυπο ηγεσίας Stackelberg είναι ένα στρατηγικό παιχνίδι στα οικονομικά, κατά το οποίο η εταιρία ηγετών κινείται πρώτη και έπειτα κινούνται οι εταιρίες ακόλουθοί της. Ονομάστηκε έτσι από το γερμανό οικονομολόγο Heinrich Freiherr von Stackelberg(1905-1946)

[54] Y.A Korillas, A.A Lazar, A. Orda, “Acheiving Network Optima Using Stackelberg Routing” IEEE/ACM Transactions on Networking, Vol 5,No 1, February 1997

Συγκεκριμενοποιώντας, ας θεωρήσουμε ότι υφισταται ένα Παίγνιο Εξισορρόπησης Φορτίου, το οποίο αποτελείται από:

- ένα σύνολο Μηχανών [m] = {1, 2, . . . ,m}. Η μηχανή j έχει ταχύτητα sj
- ένα σύνολο Παικτών [n] = {1, 2, . . . , n}. Ο παίκτης i έχει εργασία βάρους wi

Αν θεωρήθει πως s1 = s2 = . . . = sm τότε έχουμε το μοντέλο των ταυτόσημων μηχανών. Σε κάθε άλλη περίπτωση ασχολούμαστε με το μοντέλο των συσχετιζόμενων μηχανών. Κάθε φορά που παίζεται το παίγνιο οι παίκτες αναθέτουν την εργασία τους σε κάποια μηχανή. Βλέπουμε λοιπόν πως το σύνολο [m] αποτελεί και σύνολο στρατηγικών, ίδιο για κάθε παίκτη. Τελικά προκύπτει μία ανάθεση A : [n] → [m]. Άρα αν A(i) = j τότε ο παίκτης i αναθέτει την εργασία του στην μηχανή j.

Για κάθε ανάθεση ορίζουμε τα εξής:

• το φορτίο της μηχανής j υπό την ανάθεση A, lj =∑ wi / sj, i∈[n], A(i)=j

• το κοινωνικό κόστος της ανάθεσης A, cost(A) = makespan(A) = max lj, ∀j∈[m]

Το κοινωνικό κόστος είναι μία μετρική μονάδα μη ωφελιμιστικού χαρακτήρα. Χρησιμοποιώντας την ως αντικειμενική συνάρτηση στη παρούσα ανάλυση, γίνεται ταυτόχρονα αντιληπτό το πρόβλημα από πλευράς δικαιοσύνης, αλλά και αποδοτικότητας. Η δικαιοσύνη εξασφαλίζεται για τους χρήστες του συστήματος αφού ελαχιστοποιώντας το κοινωνικό κόστος, ελαχιστοποιείται ουσιαστικά το μεγάλο φορτίο και συνεπώς τον μεγάλο υπολογιστικό χρόνο σε οποιαδήποτε μηχανή.

Φυσικά, οι παίκτες μπορούν να χρησιμοποιούν μικτές στρατηγικές, δηλαδή να διαλέγουν με τρόπο πιθανοτικό την μηχανή στην οποία θα αναθέσουν την εργασία τους. Έστω p(j,i) η πιθανότητα με την οποία ο παίκτης i αναθέτει την εργασία του στην μηχανή j. Όλες οι πιθανότητες για όλους τους παίκτες, ορίζουν το διάνυσμα στρατηγικών P = p(j,i)i∈[n], j∈[m], το οποίο ουσιαστικά αποτελεί το σύνολο ή αλλιώς το περίγραμμα στρατηγικών P, το οποίο φορμαλιστικά εκφράζεται με το ακόλουθο τρόπο:

$$E[l_j] = \sum w_i p(j,i) / s_j,\ i \in [n]$$

$$cost(P) = E[cost(A)] = E[\max l_j],\ j \in [m]$$

Το κόστος της αναρχίας είναι μία από τις πιο ενδιαφέρουσες έννοιες μέτρισης της αποδοτικότητα του παιγνίου εξισορρόπησης φορτίου. Οι εγωιστικοί και λογικοί παίκτες φτάνουν σε μία ισορροπία Nash. Ένα εύλογο ερωτηματικό που προκυπτει είναι πόσο μη αποδοτική είναι η ισορροπία Nash, συγκρινόμενη πάντα με μία εξιδανικευμένη κατάσταση όπου οι παίκτες θα συνεργάζονταν αλτρουιστικά, πιθανόν συντονιζόμενοι από μία κεντρική αρχή, με τον κοινό σκοπό να ελαχιστοποιήσουν το συνολικό κόστος. Το κόστος της Αναρχίας προσφέρει μία ανάλυση χειρότερης περίπτωσης για την εύρεση της σχέσης μεταξύ της βέλτιστης ανάθεσης και της χειρότερης ισορροπίας Nash, ως προς το κοινωνικό κόστος. Η έννοια αυτή παρουσιάστηκε για πρώτη φορά από τους Koutsoupias[55] και Papadimitriou[56].

**Ορισμός 3.1. Το Κόστος της Αναρχίας** Για m ∈ N, συμβολίζουμε με G(m) το σύνολο όλων των παιγνίων εξισορρόπησης φορτίου με m μηχανές. Για G ∈ G(m), συμβολίζουμε με Nash(G) το σύνολο όλων των διανυσμάτων στρατηγικών τα οποία αποτελούν ισορροπίες Nash για το G. Με opt(G) συμβολίζουμε την ανάθεση με το ελάχιστο κοινωνικό κόστος ανάμεσα σε όλες τις δυνατές αναθέσεις. Τότε το κόστος της Αναρχίας ορίζεται ως:

$$PoA(m) = \max_{(G \in G(m))} \max_{(P \in Nash(G))} cost(P) / opt(G)$$ [57]

## 3.11 ΥΠΑΡΞΗ ΑΓΝΩΝ ΙΣΟΡΡΟΠΙΩΝ NASH

Σύμφωνα με το θεώρημα του Nash για κάθε παίγνιο υπάρχει τουλάχιστον μία ισορροπία Nash. Στην γενική περίπτωση όμως, δεν υπάρχει πάντα αγνή Ισορροπία Nash, όπως για

[55] Ηλίας Κουτσουπιάς, Καθηγητής Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Αθηνών

[56] E. Koutsoupias and C. Papadimitriou. Worst-case equilibria. In Proceedings of the 16th annual conference on Theoretcal aspects of computer science, Springer-Verlag, 1999, σελ. 404-413

[57] Το Παίγνιο Εξισορρόπησης Φορτίου με Τρεμάμενο Χέρι, Απόστολος Κ. Φίλιππας, Πανεπιστήμιο Πατρών, 2011 σελ. 27

παράδειγμα στα παίγνια μηδενικού αθροίσματος. Αρχίζουμε με τις συνθήκες που πρέπει να ισχύουν για να είναι μία ανάθεση (διάνυσμα αγνών στρατηγικών) αγνή Ισορροπία Nash.

Για ένα ευκολότερο και πιο κατανοητό παράδειγμα θα εξεταστεί η περίπτωση όπου έχουμε να κάνουμε με ταυτόσημες μηχανές, σε αυτήν την εκδοχή, θεωρείτε πως κάθε μηχανή έχει την ίδια ταχύτητα, και συνεπώς μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας πως $s1 = s2 = . . . = sm = 1$. Αν συμβολίσουμε λοιπόν, με c(j, i) το κόστος που θα αντιμετωπίσει ο παίκτης i αν υπό την ανάθεση A επιλέξει την μηχανή j, τότε μια ανάθεση A (διάνυσμα αγνών στρατηγικών) είναι ισορροπία Nash αν και μόνο αν $\forall i \in [n] : \forall k \in [m] : c(A(i), i) \leq c(k, i)$. Βλέπουμε λοιπόν πως σε μία αγνή ισορροπία Nash, κανένας παίκτης δεν μπορεί να μειώσει την καθυστέρηση που υφίσταται μετακινώντας την εργασία του σε κάποια άλλη μηχανή.

Τα παίγνια εξισορρόπησης φορτίου σε ταυτόσημες μηχανές έχουν την εξής ενδιαφέρουσα ιδιότητα, η οποία αποδείχθηκε το 2002[58]:

**Ιδιότητα:** *Κάθε στιγμιότυπο του παιγνίου εξισορρόπησης φορτίου σε ταυτόσημες μηχανές έχει τουλάχιστον μία αγνή ισορροπία Nash*

Μία ανάθεση A έχει ως αποτέλεσμα ένα ταξινομημένο διάνυσμα βαρών $\lambda = (\lambda 1, . . . , \lambda m)$, όπου με λj συμβολίζουμε το φορτίο της μηχανής η οποία έχει το j-οστό μεγαλύτερο φορτίο. Αν η ανάθεση A δεν είναι ισορροπία Nash, αυτό σημαίνει πως υπάρχει ένας παίκτης i ο οποίος μπορεί να εκτελέσει ένα βήμα βελτίωσης, δηλαδή μπορεί να ελαττώσει το κόστος που υφίσταται μετακινώντας την εργασία του σε μία άλλη μηχανή.

Αρκεί να δειχθεί πως το διάνυσμα φορτίου που προκύπτει αφότου ο παίκτης i εκτελέσει το βήμα βελτίωσης είναι λεξικογραφικά μικρότερο από το προηγούμενο διάνυσμα φορτίου. Αν κάτι τέτοιο γίνει φανερό, αυτό σημαίνει πως οι παίκτες φτάνουν σε μία αγνή ισορροπία Nash μετά από έναν πεπερασμένο αριθμό βημάτων.

Έστω λοιπόν πως δοθέντος ενός ταξινομημένου διανύσματος βαρών $(\lambda 1, . . . , \lambda m)$, ο παίκτης i εκτελεί ένα βήμα βελτίωσης και μετακινεί την εργασία του από την μηχανή j στην μηχανή k. Οι δείκτες j, k χρησιμοποιούνται σύμφωνα με την θέση τους στο ταξινομημένο διάνυσμα βαρών. Συνεπώς πριν το βήμα βελτίωσης ίσχυε $\lambda j > \lambda k$. Το βήμα βελτίωσης που εκτέλεσε ο παίκτης i έχει ως αποτέλεσμα το φορτίο της μηχανής j να ελαττωθεί και το φορτίο της μηχανής k να αυξηθεί. Όμως μετά το βήμα βελτίωσης, η μηχανή k πρέπει να συνεχίσει να έχει μικρότερο φορτίο από την μηχανή j, αλλιώς ο παίκτης i δεν θα είχε μετακινήσει την εργασία του εκεί, αφού δεν θα μείωνε το κόστος του.

Έτσι, μπορούμε να πούμε πως μετά από το βήμα βελτίωσης ο αριθμός των μηχανών με φορτίο τουλάχιστον λj έχει μειωθεί. Επιπλέον, τα φορτία οποιασδήποτε άλλης μηχανής με φορτίο τουλάχιστον λj δεν έχουν μεταβληθεί. Συνεπώς, το βήμα βελτίωσης μας δίνει ενα νέο ταξινομημένο διάνυσμα βαρών το οποίο είναι λεξικογραφικά μικρότερο από το $(\lambda 1, . . . , \lambda m)$.

Συνεπώς οποιαδήποτε ακολουθία βημάτων βελτίωσης θα οδηγήσει τελικά σε μία αγνή ισορροπία Nash. Παρόλα αυτά, αν οι παίκτες δεν συγκλίνουν στην ισορροπία Nash σε εύλογο χρονικό διάστημα, τότε τελικά μπορεί και να μην έχει σημασία αν η ισορροπία αυτή υπάρχει και είναι αποδοτική. Έτσι ανακύπτει με τρόπο φυσικό η ερώτηση για το πόσα βήματα βελτίωσης χρειάζονται μέχρι να οδηγηθούμε σε μία ισορροπία Nash. Σύμφωνα με το επόμενο θεώρημα, θα δούμε πως υπάρχει μία μικρή ακολουθία βημάτων βελτίωσης που μας οδηγεί από οποιαδήποτε αρχική ανάθεση σε μία αγνή ισορροπία Nash.

Αρχικά ορίζουμε πως ένας παίκτης είναι ικανοποιημένος (ή κορεσμένος) αν δεν μπορεί να μειώσει το κόστος του αποκλίνοντας μονομερώς από την τρέχουσα ανάθεση και μετακινώντας την εργασία του σε κάποια άλλη μηχανή. Σύμφωνα με την πολιτική βέλτιστης απόκρισης - μέγιστου φορτίου ενεργοποιούμε έναν παίκτη κάθε φορά. Πρώτα θα ενεργοποιούμε τον παίκτη με την εργασία με το μέγιστο φορτίο ανάμεσα από τους μη ικανοποιημένους παίκτες. Ένας ενεργός παίκτης παίζει μία στρατηγική βέλτιστης απόκρισης, μετακινεί δηλαδή την εργασία του στην μηχανή με το ελάχιστο φορτίο.

[58] The structure and complexity of nash equilibria for a selfish routing game. Automata, Language and Programming, D. Fotakis, S. Kontogiannis, E. Koutsoupias, M. Mavronicolas, and P. Spirakis., 2002,σελ. 785–785.

**Θεώρημα 4.5.** *Έστω A : [n] → [m] μία οποιαδήποτε αρχική ανάθεση n εργασιών σε m ταυτόσημες μηχανές. Αρχίζοντας από την ανάθεση , η πολιτική βέλτιστης απόκρισης μέγιστου φορτίου φτάνει σε μία αγνή ισορροπία Nash αφότου κάθε παίκτης ενεργοποιηθεί το πολύ μια φορά.*

Για να αποδειχθεί κάτι τέτοιο απαιτείται καταρχήν να θεωρηθεί πως όταν ένας παικτης i ∈ [n] ενεργοποιείται και παίζει την βέλτιστη απόκρισή του, τότε αυτός ο παίκτης δεν θα γίνει ποτέ ξανά μη ικανοποιημένος. Ο ισχυρισμός αυτός οδηγεί άμεσα στο παραπάνω θεώρημα. Ακολουθούν δύο αρκετά σημαντικές παρατηρήσεις, οι οποίες ισχύουν μόνο για την περίπτωση των ταυτοσήμων μηχανών.

Παρατηρείται λοιπόν πως μία βέλτιστη απόκριση δεν μειώνει σε καμία περίπτωση το ελάχιστο φορτίο ανάμεσα στις μηχανές. Συνέπεια της παρατήρησης αυτής είναι πως ένας ικανοποιημένος παίκτης μπορεί γίνει μη ικανοποιημένος μόνο σε μία περίπτωση: όταν κάποιος άλλος παίκτης μετακινήσει την εργασία του στην ίδια μηχανή που έχει επιλέξει ο παίκτης αυτός. Τότε το φορτίο της μηχανής αυτής αυξάνεται και είναι πιθανόν ο παίκτης να περάσει πάλι στην κατάσταση της μη ικανοποίησης.

Έστω πως ο παίκτης k ενεργοποιείται μετά τον παίκτη i, και μετακινεί την εργασία του στην ίδια μηχανή στην οποία ο παίκτης i έχει αναθέσει την εργασία του. Έστω j∗ η μηχανή αυτή. Για τις μηχανές j ∈ [m], συμβολίζουμε με lj το φορτίο της μηχανής j ακριβώς μετά από την βέλτιστη απόκριση του παίκτη k. Αφού η ανάθεση της εργασίας του παίκτη k στην μηχανή j∗ είναι βέλτιστη απόκριση και ισχύει wk ≤ wi λόγω της πολιτικής βέλτιστης απόκρισης μέγιστου φορτίου, τότε για κάθε j ∈ [m] ισχύει:

$$\lambda j* \leq \lambda j + wk \leq \lambda j + wi$$

Συνεπώς, έπειτα από την βέλτιστη απόκριση του παίκτη k, ο παίκτης i παραμένει ικανοποιημένος στην μηχανή j∗ αφού δεν μπορεί να μειώσει το κόστος του μετακινώντας την εργασία του σε οποιαδήποτε άλλη μηχανή. Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί πως η σειρά ενεργοποίησης των παικτών είναι ζωτικής σημασίας για τον χρόνο που χρειάζεται για να φτάσουν σε μία ισορροπία Nash. Για παράδειγμα, αν ενεργοποιηθεί ο παίκτης με το ελάχιστο δυνατό βάρος ανάμεσα από τους μη ικανοποιημένους παίκτες, τότε υπάρχουν στιγμιότυπα του παιγνίου όπου χρειάζεται εκθετικός αριθμός βέλτιστων αποκρίσεων για να φτάσουμε σε κατάσταση ισορροπίας.

# 4 ΕΞΕΛΙΚΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

Τις τελευταίες δεκαετίες, παρατηρείται ένα συνεχώς αυξανόμενο ενδιαφέρον για την ανάπτυξη συστημάτων, τα οποία επιλύουν προβλήματα που βασίζονται στις αρχές της Φυσικής Εξέλιξης. Τα συστήματα αυτού του είδους λειτουργούν διατηρώντας έναν πληθυσμό κωδικοποιημένων πιθανών λύσεων του προβλήματος που προσπαθούμε να επιλύσουμε και εφαρμόζοντας πάνω σε αυτόν διάφορες διαδικασίες, εμπνευσμένες από τη βιολογική εξέλιξη. Έτσι, περνώντας από γενιά σε γενιά, τα συστήματα αυτά δημιουργούν συνεχώς νέους πληθυσμούς πιθανών λύσεων εξελίσσοντας τους προηγούμενους πληθυσμούς.

Οι Γενετικοί Αλγόριθμοι (Genetic Algorithms) είναι ένα παράδειγμα τέτοιου συστήματος που μαζί με τον Εξελικτικό Προγραμματισμό (Evolutionary Programming.), τις Στρατηγικές Εξέλιξης (Evolution Strategies), τα Συστήματα Ταξινόμησης (Classifier Systems) και το Γενετικό Προγραμματισμό (Genetic Programming) αποτελούν μια κατηγορία συστημάτων επίλυσης προβλημάτων που είναι ευρύτερα γνωστή με τον όρο Εξελικτικοί Αλγόριθμοι (Evolutionary Algorithms).

Η πρώτη εμφάνιση των Γενετικών Αλγόριθμων, με τους οποίους και ξεκίνησε η εξελικτική διαδικασία, χρονολογείται στις αρχές του 1950, όταν διάφοροι επιστήμονες από το χώρο της βιολογίας αποφάσισαν να χρησιμοποιήσουν υπολογιστές στην προσπάθειά τους να προσομοιώσουν πολύπλοκα βιολογικά συστήματα. Η συστηματική τους ανάπτυξη όμως, που οδήγησε στην μορφή με την οποία είναι γνωστοί σήμερα, πραγματοποιήθηκε στις αρχές του 1970 από τον John Holland[59] και τους συνεργάτες

του στο Πανεπιστήμιο του Michigan.

## 4.1 ΘΕΩΡΙΑ ΕΞΕΛΙΞΗΣ

Η θεωρία της Εξέλιξης των Ειδών (Evolution of Species) που αναπτύχθηκε από τον Δαρβίνο[60] στα μέσα του περασμένου αιώνα, προκάλεσε μεγάλη αναστάτωση, αφού ερχόταν σε σύγκρουση με τις επικρατούσες θρησκευτικές αντιλήψεις περί προέλευσης της ζωής. Με την πάροδο ενός και πλέον αιώνα, ο θόρυβος αυτός δεν έχει κοπάσει πλήρως, όμως η θεωρία έχει γίνει αποδεκτή από το σύνολο των επιστημόνων, γιατί κατόρθωσε να πείσει και να δώσει ικανοποιητικές απαντήσεις σε θεμελιώδη ερωτήματα. Σκοπός της θεωρίας αυτής είναι να δώσει μια εξήγηση για το φαινόμενο της ζωής, την προέλευσή της και τις βασικές λειτουργίες της.

Η βασική ιδέα που κρύβεται πίσω από τους γενετικούς αλγόριθμους είναι η μίμηση των μηχανισμών της βιολογικής εξέλιξης που συναντόνται στη φύση. Ας πάρουμε, για παράδειγμα, τους λαγούς και τον τρόπο που αναπαράγονται και εξελίσσονται από γενιά σε γενιά[61]. Έστω ότι αρχίζουμε να παρατηρούμε ένα συγκεκριμένο πληθυσμό από λαγούς σε ένα οικοσύστημα. Όπως είναι φυσικό, κάποιοι από αυτούς θα είναι πιο γρήγοροι και πιο εύστροφοι από άλλους. Αυτοί οι λαγοί έχουν περισσότερες πιθανότητες να επιβιώσουν στο φυσικό τους περιβάλλον από ότι κάποιοι πιο αργοί ή λιγότεροι έξυπνοι λαγοί. Φυσικά δεν είναι λίγοι οι αργοί ή λιγότεροι έξυπνοι λαγοί που καταφέρνουν να επιβιώνουν εξαιτίας της τύχης ή άλλων περιβαντολλογικών παραγώντων. Όλοι αυτοί οι λαγοί που επιβίωσαν θα αρχίσουν την παραγωγή της επόμενης γενιάς τους, η οποία θα συνδιάζει με ποικίλους τρόπους όλα τα χαρακτηριστικά των μελών της προηγούμενης. Έτσι κάποιοι αργοί λαγοί θα αναμιχθούν με κάποιους γρήγορους, κάποιοι γρήγοροι με άλλους γρήγορους, εύστροφοι με

[59] John Henry Holland (1929 - ). Αμερικανικός επιστήμονας και καθηγητής της ψυχολογίας, της ηλεκτρικής εφαρμοσμένης μηχανικής και της πληροφορικής στο Πανεπιστήμιο του Michigan, Ann Arbor. Είναι πρωτοπόρος στα πολυσύνθετα συστήματα και τη μη γραμμική επιστήμη. Έμεινε γνωστός ως ο πατέρας των γενετικών αλγορίθμων

[60] Charles Robert Darwin (1809 - 1882). Βρετανός φυσιοδίφης, συλλέκτης και γεωλόγος ο οποίος έμεινε διάσημος στην ιστορία ως ο θεμελιωτής της θεωρίας της εξέλιξης, καθώς και ως εισηγητής του μηχανισμού της φυσικής επιλογής, μέσω του οποίου πρότεινε ότι συντελείται η εξέλιξη

[61] Κλασικό παράδειγμα της διαδικασίας της εξέλιξης από τον πολωνό καθηγητή πληροφορικής Zbigniew Michalewicz, που αναφέρει στο βιβλίο του “Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs”

κάποιους μη εύστροφους κ.ο.κ. Με αυτό τον τρόπο δημιουργείτε σταδιακά ένας πληθυσμός που κατά μέσο όρο είναι εξυπνότερος και ταχύτερος από τους προγόνους του. Ευτυχώς όμως για τη διατήρηση της φυσικής ισορροπίας και τα υπόλοιπα ζώα υφίστανται την ίδια διαδικασία εξέλιξης από γενιά σε γενιά, διαφορετικά οι λαγοί θα γίνονταν υπερβολικά γρήγοροι και έξυπνοι για να μπορούν να τους πιάσουν.

Εκτός από την επιλογή, ο άλλος σημαντικός παράγοντας που αναγνωρίζει ο Δαρβίνος για την εξέλιξη, είναι η ύπαρξη μικρών, προφανώς τυχαίων και έμμεσων αποκλίσεων ανάμεσα στους φαινοτύπους (phenotypes) των οργανισμών, δηλαδή τα φυσικά και πνευματικά χαρακτηριστικά όπως χρώμα ματιών, ύψος, μέγεθος εγκέφαλου, ευφυία κλπ., τα οποία καθορίζουν και τον τρόπο ανταπόκρισης και φυσικής ενσάρκωσης των γονέων και των παιδιών τους. Οι μεταλλάξεις αυτές υπερισχύουν μέσα από την επιλογή, εάν αποδείξουν την αξία τους στις συνθήκες του παρόντος περιβάλλοντος· διαφορετικά, χάνονται. Η κινητήρια δύναμη της επιλογής δίνεται από την φυσική διαδικασία της αναπαραγωγής απογόνων. Υπό ευνοϊκές περιβαντολλογικές συνθήκες, το μέγεθος του πληθυσμού αυξάνεται εκθετικά, μια διαδικασία, η οποία περιορίζεται από τους πεπερασμένους διαθέσιμους πόρους. Όταν οι πόροι δεν επαρκούν για να στηρίξουν όλα τα άτομα του πληθυσμού, τότε ευνοούνται όλοι εκείνοι οι οργανισμοί οι οποίοι εκμεταλεύονται πιο αποτελεσματικά τους διαθέσιμους πόρους.

Σήμερα, η άποψη αυτή είναι γενικά αποδεκτή ως η σωστή μακροσκοπική εξήγηση της εξέλιξης. Ωστόσο, η σύγχρονη βιοχημεία και γενετική επέκτειναν την θεωρία του Δαρβίνου με τη βοήθεια μικροσκοπικών ανακαλύψεων που αφορούν τους μηχανισμούς της κληρονομικότητας. Η θεωρία που απορρέει από τις ανακαλύψεις αυτές ονομάζεται Συνθετική Θεωρία της Εξέλιξης (Synthetic Theory of Evolution) ή, κάποιες φορές, Νεοδαρβινισμός (Neodarwinism).

## 4.2 ΕΞΕΛΙΚΤΙΚΟΙ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ

Η προσπάθεια δημιουργίας τεχνητής νοημοσύνης και τεχνητής ζωής ανάγεται στις αρχές ακόμη της εξέλιξης των υπολογιστών. Από τις πρώτες ημέρες ακόμη της δημιουργίας τους, οι Η/Υ δεν χρησίμευαν μόνο για τον υπολογισμό της τροχιάς βλημάτων και την αποκρυπτογράφηση στρατιωτικών κωδικών, αλλά και για την μοντελοποίηση του εγκεφάλου, την μίμηση της διαδικασίας μάθησης και την προσομοίωση της βιολογικής εξέλιξης. Τα τελευταία χρόνια υπήρξε μία σημαντική έξαρση της έρευνας στο χώρο των υπολογιστών με ερεθίσματα και κίνητρα από τον χώρο της βιολογίας. Η μοντελοποίηση του εγκεφάλου οδήγησε στην ανάπτυξη του χώρου των "νευρωνικών δικτύων" (neural networks), η μίμηση των διαδικασιών μάθησης οδήγησε στην "μηχανική μάθηση" (machine learning) και η προσομοίωση της φυσικής εξέλιξης στην ανάπτυξη των "εξελικτικών αλγόριθμων" (evolutionary algorithms).

Η κεντρική ιδέα δημιουργίας ενός εξελικτικού αλγορίθμου, όπως και κάθε αλγόριθμου, είναι η επίλυση ενός προβλήματος και στη συγκεκριμένη περίπτωση μιλάμε για προβλήματα ανίχνευσης – αναζήτησης. Ο σχεδιασμός τους βασίζεται στα μοντέλα των φυσικών διαδικασιών εξέλιξης και στους μηχανισμούς της φυσικής επιλογής και της επικράτησης του ισχυρότερου. Έτσι προσπαθούν να προσομοιώσουν όσο το δυνατόν καλύτερα τη διαίσθηση της ανθρώπινης ανίχνευσης και να καταφέρουν την εξαγωγή ικανοποιητικών αποτελεσμάτων σε προβλήματα αναζήτησης και βελτιστοποίησης. Αξίζει να σημειωθεί ότι υπάρχουν διάφορα εξελικτικά υπολογιστικά μοντέλα τα οποία όμως βασίζονται στις ίδιες αρχές, δηλ. στις αρχές προσομοίωσης της εξέλιξης ατομικών δομών μέσω των διαδικασιών της επιλογής και της αναπαραγωγής.

Ανέκαθεν το ουσιαστικότερο σημείο και συνάμα επιθυμητή κατάληξη στην έρευνα των ΕΑ ήταν η αποδοτικότερη δυνατή ευρωστία. Με τον όρο ευρωστία εννοείται η ισορροπία ανάμεσα στην ικανότητα επίλυσης συγκεκριμένων προβλημάτων από την μια μεριά και στην αποτελεσματικότητα που απαιτείται για την επιβίωση σε πολλά διαφορετικά περιβάλλοντα από την άλλη. Αυτό σημαίνει ότι όσο εύρωστο είναι ένα τεχνητό σύστημα, τόσο αποδοτικότερο είναι είτε στιγμιαία είτε σε βάθος χρόνου, γεγονός που το καθιστά προσαρμοστικότερο σε φυσικές αλλαγές και ικανότερο να αντιμετωπίσει τα οποιαδήποτε προβλήματα μπορεί να προκύψουν. Αναμφισβήτητο παράδειγμα επιθυμητών επιπέδων ευρωστίας αποτελεί η ίδια η φύση και τα διάφορα αυτόνομα βιολογικά συστήματά της, όπου

γίνονται εύκολα αντιληπτές οι ικανότητες αυτοεπισκευής, προσαρμοστικότητας και επιβίωσης σε οποιεσδήποτε είδους αλλαγές στο οικείο περιβάλλον

Πιο συγκεκριμένα, οι ΕΑ διατηρούν ένα πληθυσμό ατόμων, δομών τον οποίο εξελίσσουν σύμφωνα με κάποιους κανόνες επιλογής και κάποιους τελεστές, όπως ανασυνδυασμός και μετάλλαξη. Κάθε άτομο του πληθυσμού αντιπροσωπεύει ένα σημείο του χώρου των πιθανών λύσεων ενός συγκεκριμένου προβλήματος. Επίσης περιέχει και κάποια γνώση για τους κανόνες του περιβάλλοντος του προβλήματος. Σε κάθε άτομο του πληθυσμού αντιστοιχείται ένα μέτρο της ποιότητας που διαθέτει στο συγκεκριμένο περιβάλλον του προβλήματος το οποίο αντιμετωπίζεται και το οποίο τυποποιείται ή κωδικοποιείται μέσω κάποιας συνάρτησης ποιότητας. Κατά την επιλογή η προσοχή εστιάζεται σε άτομα υψηλής ποιότητας αξιοποιώντας την διαθέσιμη πληροφορία μέσω της ποιότητας των ατόμων. Ο ανασυνδυασμός και η μετάλλαξη διαταράσσουν την δομή των ατόμων παρέχοντας δυνατότητες διερεύνησης του χώρου. Οι ΕΑ είναι αρκετά πολύπλοκοι έτσι ώστε να παρέχουν εύρωστους και αποτελεσματικούς μηχανισμούς αναζήτησης αν και φαίνονται πολύ απλοϊκοί από την πλευρά ενός βιολόγου.

Ο αρχικός πλυθησμός ενός ΕΑ συνήθως αρχικοποιείται σε τυχαίες τιμές και εξελίσσεται προς διαδοχικά καλύτερες περιοχές του χώρου αναζήτησης μέσω των προαναφερθέντων (λίγο ή πολύ) τυχαίων διαδικασιών της επιλογής, του ανασυνδιασμού και της μετάλαξης. Το περιβάλλον αποδίδει πληροφορίες σχετικά με την ποιότητα των νέων σημείων αναζήτησης, ενώ η διαδικασία επιλογής ευνοεί τα άτομα με καλύτερη ποιότητα να αναπαράγονται συχνότερα από τα άλλα άτομα του πλυθησμού. Ο μηχανισμός ανασυνδιασμού επιτρέπει τη μίξη της πληροφορίας που μεταφέρουν οι γονείς στους απογόνους και η μετάλλαξη εισάγει νεα στοιχεία, καινοτομίες στον πληθυσμό.

Παρακάτω ακολουθεί ένας απλός τύπος ΕΑ, ο οποίος ακολουθεί τη δομή που μόλις περιγράφθηκε. Δηλαδή αρχικοποιεί τον πληθυσμό του σε τυχαίες τιμές, αν και μπορεί να χρησιμοποιηθεί προηγούμενη γνώση του πεδίου εφαρμογής (εάν υπάρχει) για να επηρεάσει την αρχικοποίηση του πληθυσμού. Ακολουθεί η αξιολόγηση (evaluation) του πληθυσμού αποδίδοντας αντίστοιχες τιμές ποιότητας (fitness) σε κάθε άτομο του πληθυσμού στο συγκεκριμένου. Η αξιολόγιση γίνεται μέσω της συνάρτησης ποιότητας, η οποία μπορεί να είναι πολύ απλή, όπως ο υπολογισμός μιας απλής συνάρτησης, ή εξαιρετικά πολύπλοκη, όπως η εκτέλεση μιας πολύπλοκης προσομοίωσης. Η επιλογή (selection) συνήθως υλοποιείται σε δύο βήματα, επιλογή γονέων και έπειτα επιβίωση αυτών. Κατά την επιλογή των γονέων καθορίζεται ποια άτομα θα γίνουν γονείς και πόσους απογόνους - παιδιά θα αποκτήσουν.

```
procedure EA;
        {
        t = 0;
        initialize population P(t);
        evaluate P(t);
        until (done)
                {
                t = t + 1;
                parent_selection P(t);
                recombine P(t);
                mutate P(t);
                evaluate P(t);
                survive P(t);
                }
        }
```
[62]

[62] «Εξελικτικοί Αλγόριθμοι», Παναγιώτης Αδαμίδης, Διπλωματική Εργασία ΤΕΙ Θεσσαλονίκης, 1999, σελ. 5

Οι απόγονοι δημιουργούνται μέσω ανασυνδυασμού των γονέων δηλαδή με την ανταλλαγή πληροφορίας μεταξύ των γονέων και μέσω μετάλλαξης η οποία διαταράσσει περαιτέρω τους απογόνους. Ακολουθεί η χρήση της συνάρτησης ποιότητας για την αξιολόγηση των απογόνων και τελικά η επιλογή των ατόμων του πληθυσμού που θα επιβιώσουν στην επόμενη γενιά. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται εξελικτικός κύκλος (evolutionary cycle).

## 4.3 ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ

Ήδη από την εποχή που άρχισαν να μορφοποιούνται και να μελετώνται τα νευρωνικά δίκτυα ξεκίνησε η διαδικασία αλληλεπίδρασης των εξελικτικών αλγορίθμων και της θεωρίας παιγνίων. Με το πέρασμα των δεκαετιών και την ανάπτυξή τους οι δύο αυτές θεωρίες άρχισαν να αποτελούν αναπόσπαστο κομμάτι η μία της άλλης, ειδικά σε ορισμένους τύπους προβλημάτων, οι οποίοι μπορούν να αποδοθούν και μέσα από το πρίσμα της θεωρίας παιγνίων.

Όπως έχει γίνει κατανοητό από τα γραφόμενα παραπάνω, θεμελιώδες στοιχείο της θεωρίας παιγνίων και της αντίληψης λειτουργίας των διαφόρων παιχνιδιών, είναι η εύρεση ισορροπίας Nash. Λέγοντας παιχνίδια συνήθως εννοούμε πεπερασμένα στρατηγικά παίγνια, των οποίων το πρόβλημα εντοπισμού των σημείων ισορροπίας κατά Nash, επιδέχεται έναν αριθμό εναλλακτικών μορφοποιήσεων. Ο υπολογισμός αυτών των σημείων αποτελεί ένα δύσκολο πρόβλημα. Επιπλέον, σε αρκετές εφαρμογές, ένας αλγόριθμος που υπολογίζει ένα μόνο σημείο ισορροπίας δεν είναι ικανοποιητικός. Ακόμα και αν η ισορροπία αυτή αποτελεί τέλεια ισορροπία (Perfect Equilibrium) του παιχνιδιού, ή ικανοποιεί κάποιο άλλο κριτήριο από αυτά που έχουν προταθεί σαν τροποποιήσεις της ισορροπίας Nash, δεν μπορεί να εξαληφθεί η πιθανότητα ύπαρξης κάποιου άλλου πιο εμφανούς σημείου ισορροπίας.

Το πρόβλημα εντοπισμού των σημείων ισορροπίας κατά Nash μπορεί να μορφοποιηθεί ως ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης. Η μορφοποίηση αυτή μας επιτρέπει να θεωρήσουμε τρεις μεθόδους υπολογιστικής νοημοσύνης για την επίλυση του προβλήματος, συγκεκριμένα τις Εξελικτικές Στρατηγικές με Προσαρμοστικό Μητρώο Συνδιασποράς (ΕΣ-ΠΜΣ) , τη μέθοδο Βελτιστοποίησης Σμήνους Σωματιδίων (ΒΣΣ) και το Διαφοροεξελικτικό αλγόριθμο (ΔΕ). Οι μέθοδοι αυτοί ανήκουν στην ευρεία κατηγορία των στοχαστικών μεθόδων βελτιστοποίησης και είναι ικανές να αντιμετωπίσουν μη – παραγωγήσιμες, μη γραμμικές συναρτήσεις με πολλαπλούς τοπικούς ελαχιστοποιητές. Αξιοποιούν ένα πληθυσμό πιθανών λύσεων, οι οποίες εξερευνούν ταυτόχρονα το χώρο αναζήτησης. Κάθε μέλος του πληθυσμού προσαρμόζει τη θέση του προς πιο υποσχόμενες περιοχές του χώρου αναζήτησης, η οποίες στην περίπτωση της ελαχιστοποίησης χαρακτηρίζονται από χαμηλότερες συναρτησιακές τιμές.

Η βασική φιλοσοφία και δομή λοιπόν ενός ΕΑ, ο οποίος αναζητά σημεία ισορροπίας σε ένα παιχνίδι και προτείνει τις εκάστοτε λύσεις είναι:

Βήμα 1. Για τον εντοπισμό ενός ολικού ελαχίστου της αντικειμενικής συνάρτησης (σημείο ισορροπίας κατά Nash) εφαρμόζεται μια από τις μεθόδους βελτιστοποίησης.

Βήμα 2. Κάθε ελάχιστο που εντοπίζεται αποθηκεύεται.

Βήμα 3. Αν δεν έχει ξεπεραστεί ο προκαθορισμένος αριθμός επανεκκινήσεων εφαρμόζεται η τεχνική πολλαπλής εκκίνησης, ή η τεχνική παρεκκλίνουσας τροχιάς. Διαφορετικά τερματίζεται ο αλγόριθμος.

Στο σημείο αυτό αξίζει να γίνει μια εκτενέστερη περιγραφή του τρόπου λειτουργίας των μεθόδων που αναφέρθηκαν παραπάνω, συγκεκριμένα του Διαφοροεξελικτικού Αλγορίθμου, και ακολουθεί ένας αλγόριθμος στις αρχικές του διαδικασίες.

Οι Διαφοροεξελικτικοί Αλγόριθμοι (ΔΕ) είναι απλοί και συγχρόνως πολύ δυνατοί αλγόριθμοι που χρησιμοποιούν και εξελίσουν έναν πληθυσμό από υποψήφιες λύσεις έτσι ώστε να μπορέσουν να βρουν το ολικό ελάχιστο της υπό-εξέταση συνάρτησης (αντικειμενικής συνάρτησης). Αντίθετα με τις Εξελικτικές Στρατηγικές που βασίζονται στην έξοδο μιας προκαθορισμένης πιθανότητας κατανομής, οι ΔΕ εκτελούν τη διαδικασία της μετάλλαξης με τις διαφορές τυχαίων ζευγαριών από άτομα που ανήκουν στον πληθυσμό $x_{r1}-x_{r2}$. Προφανώς, η κατανομή αυτών των διανυσμάτων διαφορών καθορίζεται από την κατανομή των ίδιων των

ατόμων του πληθυσμού. Τα πλεονεκτήματα που παρουσιάζει η εφαρμογή των ΔΕ σε προβλήματα ολικής βελτιστοποίησης συνοψίζονται παρακάτω:

- Γρήγοροι, απλοί, εύκολοι για χρήση και τροποποιήσεις
- Αποτελεσματικοί, με ιδιαίτερες ικανότητες για ολική βελτιστοποίηση
- Εγγενής παράλληλη διαδικασία
- Η ακρίβειά τους περιορίζεται από την ακρίβεια των αριθμών κινητής υποδιαστολής
- Αποδοτικοί, χρησιμοποιώντας μόνο O(n) διαδικασίες, χωρίς να υπολογίζουν διαδικασίες ταξινόμησης ή πολλαπλασιασμού μητρώων
- Χρησιμοποιούν αυτο-αναφερόμενες μεταλλάξεις και δεν χρειάζεται να προκαθοριστεί κάποια συγκεκριμένη κατανομή
- Μπορούν εύκολα και αποδοτικά να εφαρμοστούν σε ακέραια, διακριτά και μικτής βελτιστοποίησης προβλήματα
- Δεν απαιτούν η αντικειμενική συνάρτηση να είναι παραγωγίσιμη
- Λειτουργούν σε επίπεδες επιφάνειες
- Λειτουργούν σε προβλήματα με θόρυβο και με αντικειμενικές συναρτήσεις που μεταβάλλονται δυναμικά με το χρόνο
- Μπορούν να παρέχουν πολλές λύσεις σε ένα μόνο τρέξιμο
- Μπορούν να παρέχουν εξελικτικές λύσεις για παιχνίδια και προσομοιώσεις
- Τέλος, είναι αποτελεσματικοί σε προβλήματα μη γραμμικού προγραμματισμού με περιορισμούς, και σε συνεργασία με συναρτήσεις πέναλτι

Οι ΔΕ είναι τυπικοί Εξελικτικοί Αλγόριθμοι, οι οποίοι δημιουργούν αρχικά ένα τυχαίο κατανεμημένο αρχικό πληθυσμό $P_{G=0}$ από NP D-διάστατα διανύσματα $x_{i,j,G}$. Μετά την αρχικοποίηση, ο πληθυσμός υποβάλλεται σε επαναλαμβανόμενες γενιές, δηλαδή δημιουργεί επαναλήψεις G=1, 2, . . . , Gmax όπου σε κάθε γενιά εκτελούνται οι διαδικασίες της μετάλλαξης, του επανασυνδιασμού, και της επιλογής. Οι ΔΕ εφαρμόζουν την διαδικασία της μετάλλαξης αλλά και του επανασυνδιασμού για τη δημιουργία ενός «παιδιού» ή ενός δοκιμαστικού (trial) διανύσματος $u_{j,i,G+1}$ για κάθε «πατέρα» διάνυσμα $x_{j,i,G}$ όπως φαίνεται και στο παρακάτω πρόγραμμα :

Επέλεξε τυχαία $r_1, r_2, r_3 \in \{1, 2, . . . , NP\}$,

(με τον περιορισμό $r_1 \neq r_2 \neq r_3 \neq i$)

$j_{rand} = int(rand_i[0, 1]D) + 1$

```
for (j = 1; j <= D; j = j + 1) {
        if (rand_j[0, 1] < CR_orj = j_rand) {
        u_j,i,G+1 = v_j,i,G+1 = x_j,r3,G + F(x_j,r1,G − x_j,r2,G)
        } else {
        u_j,i,G+1 = x_j,i,G
        } //endif
} //endfor
```
[63]

Ο όρος $rand_j[0, 1]$ αναπαριστά μια ομοιόμορφη κατανεμημένη τυχαία μεταβλητή η οποία παίρνει τιμές στο διάστημα ανάμεσα στο μηδέν και στο ένα. Ο υποδείκτης j υποδεικνύει ότι μια καινούρια τυχαία τιμή θα δημιουργηθεί για κάθε τιμή του j. Οι δείκτες $r_1$, $r_2$ και $r_3$ είναι τυχαία επιλεγμένοι δείκτες από τον πληθυσμό που διαφέρουν μεταξύ τους και από το δείκτη i, που αναφέρεται στο άτομο το τρέχων «πατέρα». Επομένως, το μέγεθος του πληθυσμού, NP θα πρέπει να είναι μεγαλύτερο του 3. Οι μεταβλητές F και CR είναι μεταβλητές που η τιμή τους καθορίζεται από το χρήστη. Επειδή αναπαριστά μια πιθανότητα, η μεταβλητή CR κυμαίνεται από το 0 εως το 1, ενώ η παράμετρος F είναι ένας διαβαθμιζόμενος παράγοντας

[63] «Εκπαίδευση Τεχνητών Νευρωνικών Δικτύων, με την χρήση Εξελικτικών Αλγορίθμων, σε σειριακά και κατανεμημένα συστήματα», Μιχαήλ Γ. Επιτροπάκης, Διπλωματική Εργασία, Πανεπιστήμιιο Πατρών, 2008, σελ. 36

που τυπικά παίρνει τιμές στο διάστημα (0, 1+). Σύμφωνα με τα παραπάνω παρατηρείται ότι όταν η τυχαία τιμή $rand_j[0, 1]$ είναι μικρότερη της παραμέτρου CR ή $j = j_{rand}$, η παράμετρος του διανύσματος παιδιού είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των τρίων τυχαία επιλεγμένων διανυσμάτων, διαφορετικά η παράμετρος του διανύσματος παιδιού κληρονομείται απευθείας από τον πατέρα του. Η συνθήκη ότι $\forall j = j_{rand}$ συμπεριλαμβάνεται με σκοπό να διασφαλίσει ότι τα διανύσματα παιδιά που προκύπτουν θα διαφέρουν από τους γονείς τους τουλάχιστο κατά μια παράμετρο.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑΣ

# 5 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ, ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

## 5.1 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Όπως γίνεται φανερό από τα αναγραφόμενα εώς τώρα, η Θεωρία Παιγνίων αποτελεί πλέον βασικό εργαλείο κατανόησης και αντιμετώπισης προβλημάτων σε κλάδους διαφόρων επιστημών. Ουσιαστικά δεν υπάρχει την εποχή μας κάποιος τομέας επιστημονικός ή μη που να μην περιλαμβάνει μια γκάμα προβλημάτων, η αποδοτική λύση ή η εξήγηση των οποίων να προέρχεται μέσω μιας παιγνιοθεωριτικής προσέγγισης. Είναι λοιπόν πραγματικά αμέτρητα τα τα προβλήματα εκείνα, στα οποία βρίσκουν εφαρμογή η Αλγοριθμική και η Εξελικτική πλέον Θεωρία Παιγνίων. Αξίζει να αναφερθούν μερικά αληθινά παραδείγματα, τα οποία είτε έχουν συμβεί είτε λαμβάνουν χώρα καθημερινά στη ζωή μας.

Είναι γεγονός ότι η Θεωρία Παιγνίων ξεκίνησε και ανδρώθηκε ως κλάδος της Οικονομικής Επιστήμης, στην οποία και εφαρμόζεται ακατάπαυστα ακόμα και τώρα, όπου ολόκληροι κλάδοι στηρίζονται στις μεθόδους της, όπως π.χ. η βιομηχανική οργάνωση (industrial organisation), ο σχεδιασμός μηχανισμών (mechanism design) με σπουδαιότερο υποκλάδο τον σχεδιασμό δημοπρασιών (auctions) κ.α. Μια συγκεκριμένη περίπτωση στην οποία, κατά τη διάρκεια ενός μη συνεργατικού παιχνιδιού, αναπτύχθηκε μια μορφή συνεργασίας είναι οι πλειστηριασμοί συχνοτήτων τηλεφωνίας που προκηρύσσονταν στις ΗΠΑ από το 1994. Αρχικά όλα έβαιναν καλώς, αλλά το 1997 κάτι άλλαξε. Εκείνη τη χρονιά το αμερικανικό κράτος κέρδισε από τις πωλήσεις των συχνοτήτων μόλις το 1% του ποσού που είχε προβλέψει: σαν να λέμε ότι βγάζοντας ένα σπίτι σε πλειστηριασμό θα κέρδιζε κάποιος 5.000 ευρώ αντί για 500.000. Αν οι εταιρείες που πλειοδοτούσαν συναγωνίζονταν η μία την άλλη σε κάθε συχνότητα χωριστά, θα ανέβαζαν πολύ τη ζήτηση και συνεπώς θα η τελική τιμή θα ήταν πολύ ακριβή. Άρχισαν λοιπόν να ανταλλάσσουν σινιάλα με ένα ευφυές σύστημα που οι διοργανωτές της δημοπρασίας δεν είχαν προβλέψει: για τις εταιρείες που συμμετείχαν στη δημοπρασία δεν είχε μεγάλη διαφορά να ξοδέψουν 1.537.000 δολάρια ή 1.537.385… όμως η δεύτερη προσφορά περιείχε ένα μήνυμα προς τους άλλους, το οποίο αναφερόταν στη συχνότητα που προτιμούσε αυτός που έκανε την προσφορά. Χρησιμοποιώντας αυτόν τον κώδικα, οι συμμετέχοντας στη δημοπρασία κατάφεραν να συμφωνήσουν χωρίς ποτέ να συναντηθούν.

Μετά από λίγα χρόνια όμως, μια άλλη δημοπρασία για δικαιώματα κινητής τηλεφωνίας που έγινε στην Αγγλία οργανώθηκε από ειδικούς στη θεωρία παιγνίων, οι οποίοι εμπόδισαν αυτές τις παράνομες συνεννοήσεις: η προσφορά στρογγυλοποιούνταν εξαλείφοντας τα τρία τελευταία ψηφία, άρα τα 1.537.385 δολάρια γίνονταν 1.537.000. Ξέσπασε έτσι το αντίθετο αποτέλεσμα: καθώς ανέβαιναν οι προσφορές, οι συμμετέχοντες πείθονταν αμοιβαία για την αξία των δημοπρατούμενων αδειών και ανέβαζαν την προσφορά. Αυτό το σοβαρότατο «παιχνίδι» μας διδάσκει ότι, για να έχει όφελος ο δημοπράτης σε έναν πλειστηριασμό, πρέπει να εμποδίσει τη συνεργασία, διαφορετικά κινδυνεύει να βρεθεί σε ένα παιχνίδι τελείως διαφορετικό από αυτό που είχε διοργανώσει[64].

Πραγματικά στην Οικονομική επιστήμη δεν υπάρχει περιορισμός στα πεδία εφαρμογής της θεωρίας παιγνίων. Πολύ βασική είναι η συμβολή της στην ανάλυση του ολιγοπωλιακού ανταγωνισμού στο πεδίο των επιχειρήσεων, στην διαδικασία λήψης αποφάσεων ανάμεσα σε επιχειρήσεις, ανάμεσα σε εργαζομένους και εργοδότες, στην ανάλυση κόστους αλλά και κέρδους, ειδικά στο επίπεδο της ανάγκης λήψης απόφασης για την χρησιμοποίησης μεθόδων μάρκετινγκ και διαφήμισης και πολλά άλλα.

Εξίσου πολλά παραδείγματα μπορεί κανείς να απαριθμίσει και σε κοινωνιολογικό επίπεδο και ειδικότερα στη καθημερινή κοινωνική συμπεριφορά που βιώνουμε όλοι. Απλά καθημερινά κοινωνικά φαινόμενα όπου η ισορροπία Nash και το παιχνίδι που εκφράζεται μέσα από αυτήν είναι πασιφανές. Μερικά κλασικά τέτοια παραδείγματα είναι τα παρακάτω.

Αφήνοντας τα σκουπίδια έξω τις ημέρες που η συλλογή τους δεν είναι εφικτή, κρατάμε καθαρό το σπίτι μας -ατομικό συμφέρον- αλλά, επειδή τελικά ο καθένας κάνει το ίδιο, λερώνουμε αφόρητα τον δρόμο του σπιτιού μας και βάζουμε σε κίνδυνο την υγεία μας.

[64] Περιοδικό Focus, τευχος 94 Δεκέμβριος 2007

Παρκάροντας σε σημεία που εμποδίζουμε την κίνηση είναι κατ' αρχήν βολικό, αλλά τελικά, επειδή όλοι κάνουμε το ίδιο και επικρατεί αναρχία, η κυκλοφορία οχημάτων και πεζών είναι επικίνδυνη για όλους. Ακριβώς το ίδιο ισχύει κι όταν επιλέγουμε να πάμε στο κέντρο της πόλης με το αυτοκίνητό μας και όχι με τα μέσα μαζικής μεταφοράς. Κτίζοντας αυθαίρετες κατασκευές ωφελούμαστε ατομικά, αλλά όταν όλοι κάνουμε το ίδιο καταλήγουμε να ζούμε σε μία άσχημη και μη ανθρώπινη πόλη. Αποφεύγοντας να πληρώσουμε φόρους, κερδίζουμε ατομικά, αλλά τελικά, επειδή όλοι κάνουμε το ίδιο, ζημιωνόμαστε ζώντας σε μία φτωχότερη χώρα που δεν μπορεί να μας προσφέρει αυτά που θα θέλαμε (και που θα ήμασταν διατεθειμένοι να πληρώσουμε για να τα έχουμε).

Το παράδοξο είναι ότι, ενώ όλοι κατ' αρχήν θα συμφωνούσαν να λειτουργήσουν με κάποιους θεμιτούς κώδικες κοινωνικής συμπεριφοράς και να τηρήσουν τη συνεργασία για το καλό όλων, πάντα θα είναι εκ των υστέρων προς το συμφέρον κάποιου να μην τηρήσει τη συμφωνία συνεργασίας. Αυτό ακριβώς το γεγονός εκφράζει και η ισορροπία Nash.

Η ζωή στην Ελλάδα είναι δύσκολη και όλοι νιώθουν ότι τίποτα δεν δουλεύει σωστά, ενώ οι περισσότεροι περνάνε ατομικά καλά, διότι η Ελλάδα είναι η χώρα όπου η αντικοινωνική συμπεριφορά είναι παντού. Ενώ όλοι θα ήμασταν καλύτερα αν ακολουθούσαμε μια συμπεριφορά συνεργασίας, τελικά ο καθένας κοιτάει μόνο τον εαυτό του και είμαστε όλοι χειρότερα. Παρκάρουμε όπου θέλουμε, πετάμε τα σκουπίδια όπου βρούμε, κτίζουμε ό, τι μας βολεύει, δεν πληρώνουμε φόρους και προστατεύουμε τα μικροσυμφέροντά μας σε βάρος όλων των άλλων.

Αντίστοιχου πλήθους και ενδιαφέροντος είναι και τα εκάστοτε πολιτικά παιχνίδια. Ίσως το πιο αντιπροσωπευτικό από αυτά, λόγω και της εθνικότητάς μας, τα ελληνοτουρκικά και πιο συγκεκριμένα το ατέρμονο κυνήγι του στρατιωτικού εξοπλισμού. Παίρνοντας ως πρότυπο το γνωστό παιχνίδι του διλήμματος του κρατουμένου, τοποθετώντας στη θέση των κατηγορουμένων την Ελλάδα και την Τουρκία και θέτοντας ως δυνατές στρατηγικές την συνεχόμενη αγορά νέων στρατιωτικών εξοπλισμών, αντιλαμβάνεται εύκολα κανείς ότι ο πίνακας αμοιβών αλλά και η τελική ισορροπία που επέρχεται σε αυτό το παιχνίδι είναι αντίστοιχη του διλήμματος του κρατουμένου. Και οι δύο χώρες ενώ θα μπορούσαν κάλλιστα να εξοικονομούν πολλά χρηματικά κεφάλαια και να προσφέρουν τα μέγιστα για την κοινωνική πρόνοια των πολιτών τους, αντίθετα μπαίνουν σε ένα αέναο κύκλο εξοπλισμού στρατιωτικών όπλων, οποίος ζημιώνει και τις δύο.

Τέτοιου είδους πολιτικά ή διπλωματικά παιχνίδια, με δύο ή και περισσότερους παίχτες, τα οποία επιφέρουν τα χειρότερα δυνατά αποτελέσματα για τους πολίτες μιας χώρας ή ακόμα και για ολόκληρη την ανθρωπότητα έχουν συμβεί και συμβαίνουν καθημερινά. Η ανεξέλεγκτη δημιουργία πυρηνικών όπλων, ο ψύχρός πόλεμος, η εκάστοτε αντιδικία κυβέρνησης – αντιπολίτευσης για κάποιο νέο νομοσχέδιο, το γνωστό σε όλους μας «μνημόνιο», αποτελούν παιχνίδια με στρατηγικές που αποβλέπουν στο μερικό συμφέρον και όχι στο κοινό. Απόρροια αυτών ένας παγκόσμιως αναβρασμός με κύρια έκφραση την αγανάκτηση για την καταστροφή της φύσης και την καταπάτηση ανθρωπίνων δικαιωμάτων.

Εφαρμοσμένη παιγνιοθεωρητική θεώρηση μπορεί να βρει κανείς και στον τομέα της ιατρικής και της ψυχολογίας. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι το πρόβλημα του διλήμματος του ιατρού. Η ουσία του έγκειτε στο γεγονός ότι ο γιατρός έχει έναν ασθενή, για τον οποίο δεν υπάρχει επίσημα γνωστό φάρμακο για τα συμπτώματά του. Έτσι ο γιατρός θα πρέπει να αποφασίσει αν θα ακολουθήσει τη μέθοδο της placebo[65] θεραπείας ή θα εξηγήσει στον ασθενή ότι δεν υπάρχει γνωστή θεραπεία. Η φορμαλιστική προσέγγιση του προβλήματος αυτού μέσω της θεωρίας παιγνίων αποδεικνύει, ότι η επιλογή του να δοθεί θεραπεία placebo αποτελεί την καλύτερη στρατηγική επιλογή και των δύο παιχτών (γιατρού-ασθενή), διότι περιορίζει τις ζημιές και για τους δύο. Είναι επίσης και η μοναδική λύση αυτού του παιγνίου με κυρίαρχη στρατηγική.

Στο πλαίσιο της ψυχολογίας οι επιστήμονες, με τη βοήθεια της θεωρίας παιγνίων, έχουν εξηγήσει πολλά και διάφορα διαπροσωπικά παιχνίδια, όπως πρόσφατα ερμηνεύσανε

[65] Με το όρο placebo εννοούμε τα «μη ειδικά αίτια» και το «φαινόμενο προσδοκίας του υποκειμένου», αλλά ακριβής μετάφραση στα ελληνικά δεν υπάρχει. Είναι η βελτίωση των συμπτωμάτων ενός ασθενούς από μια οποιαδήποτε εικονική, αποτελεσματική, ουδέτερη, αδρανή, θεραπευτική προσέγγιση, μόνο και μόνο επειδή ο ασθενής πιστεύει ότι αυτή έχει καλό αποτέλεσμα συτο πρόβλημα του.

το λόγο, για τον οποίο δεν πρέπει να βιάζεται κανείς στο φλερτ. Η συγκεκριμένη μελέτη, που δημοσιεύθηκε στο βιολογικό περιοδικό «Journal of Theoretical Biology», έγινε από ερευνητές του Πανεπιστημιακού Κολεγίου του Λονδίνου (UCL), υπό τον καθηγητή μαθηματικών, Robert Seymour[66], του πανεπιστημίου του Warwick και της Σχολής Οικονομικών και Πολιτικών Επιστημών του Λονδίνου (LSE) υπό τον δρ. Peter Sozou[67]. Τελικά απέδειξαν ότι οι 'καλύτεροι' και πιο ταιριαστοί παρτενέρ επιθυμούν να γνωρίζονται περισσότερο χρόνο προτού προχωρήσουν περαιτέρω τη σχέση τους.

Παρόμοια παραδείγματα εμφανίζονται και στον αθλητισμό , όπου η θεωρία παιγνίων διαφωτίζει το γιατί η χρήση απαγορευμένων ουσιών αποτελεί ορθολογική επιλογή για τους επαγγελματίες αθλητές. Τα φάρμακα που χρησιμοποιούνται είναι πολύ αποτελεσματικά ενώ η ανίχνευσή τους αποδεικνύεται δύσκολη έως αδύνατη· και τα οφέλη της επιτυχίας είναι υψηλά. Καθώς λοιπόν όλο και περισσότεροι αθλητές τα χρησιμοποιούν, ένας «καθαρός» αθλητής ενδέχεται να καταστεί τόσο μη ανταγωνιστικός ώστε να διακινδυνεύσει να αποκλειστεί από την ομάδα του.

Φυσικά δεν υπάρχει περιορισμός εφαρμογών της θεωρίας παιγνίων στη πληθώρα τυχερών ή επιτραπέζιων παιχνιδιών, όπως είναι το πόκερ ή το σκάκι αντίστοιχα. Για το τελευταίο μάλιστα είχε φτιαχτεί (1996) ειδικό υπολογιστικό μηχάνημα (Deep Blue)[68] με εξελιγμένους επεξεργαστές, ώστε να μπορει να επεξεργάζεται ένα τεράστιο σύνολο συνδιασμών και στρατηγικών, ώστε να μπορεί να λαμβάνει τη βέλτιστη δυνατή απόφαση ενέργειας απέναντι σε ένα λογικό παίχτη.

Αξιοσημείωτη είναι η αλγοριθμική εφαρμογή της στρατηγικής Tit For Tat όσον αφορά τις μηχανές ανταλλαγής αρχείων peer to peer, όπως η BitTorrent. Όταν ένας συνδεδεμένος χρήστης κατεβάζει από άλλους χρήστες, αλλά δεν αφήνει οι άλλοι να κατεβάσουν από αυτόν, τότε η BitTorrent του κόβει την σύνδεση με τους άλλους χρήστες, ελαφραίνει το δίκτυο και δίνει έτσι αποδοτικότερο κατέβασμα στους υπόλοιπους χρήστες που συνεργάζονται. Βέβαια δίνει πάντα τη δυνατότητα για νέα ευκαιρία συνεργίας σε όλους.

Τέλος σημαντικό είναι να γίνει μια αναφορά στο βασικό ρόλο που έπαιξε η θεωρία παιγνίων και δη η εξελικτική θεωρία παιγνίων, στη διαμόρφωση και ανάπτυξη κάποιων επιμέρους τομέων της βιολογίας, όπως η εξελικτική βιολογία, η βιοπληροφορική, η μοριακή βιολογία κ.α. Οι ερευνητές σε μια προσπάθειά τους να εφαρμόσουν τη θεωρία σε μοντέλα θεμελιωδών μικροβιολογικών δομών, ανακάλυψαν πως μικροσκοπικά μόρια RNA μπορεί πράγματι να εμπλακούν σε απλά παιχνίδια δύο παικτών. Γεγονός, το οποίο μεταξύ άλλων, παρακίνησε να εξεταστεί αν υπάρχει κάποια σύνδεση ανάμεσα στη θεωρία παιγνίων και το πιο θεμελιώδες επίπεδο βασικής επιστήμης, την κβαντική φυσική.

## 5.2 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Λαμβάνοντας υπόψιν τα παραπάνω γίνεται έυκολα αντιληπτό ότι μπορεί ο οποιοσδήποτε και ανά πάσα στιγμή να ερμηνέυσει και να εξηγήσει οποιουδήποτε είδους πρόβλημα, απλό ή σύνθετο, καθημερινό ή εκλεπτισμένο, υπό το πρίσμα της Θεωρίας Παιγνίων και των συνεχώς αναπτυσσόμενων μορφών της. Η δυνατότητα αυτή έγκειτε στην ικανότητά της να αναλύει τον τρόπο λήψης αποφάσεων σε καταστάσεις (παιχνίδια) στρατηγικής αλληλεπίδρασης (σύγκρουσης και συνεργασίας) και επιπλέον να εξηγεί συμπεριφορές και τον τρόπο λειτουργίας των εκάστοτε παιχτών.

Η σπουδαιότητα της έχει γίνει ευρέως αποδεκτή από επιφανείς επιστήμονες, ερευνητές διαφόρων επιστημονικών κλάδων ανά το πέρασμα των τελευταίων δεκαετιών. Η έκρηξη ενδιαφέροντος που προκάλεσαν οι υπέροχες ιδέες του μαθηματικού και οικονομολόγου John Forbes Nash Jr. και ιδιαίτερα η έννοια της ισορροπίας που ανέπτυξε το 1950, αποτελούν ακόμα και σήμερα το θεμέλιο λίθο της εν λόγω θεωρίας. Ενώ με την

[66] Robert M. Seymour, Βρετανός καθηγητής μαθηματικών με ερευνητική δραστηριότητα στην μαθηματική βιολογία και την Εξελικτική Θεωρία Παιγνίων

[67] Dr Peter D Sozou, Βρετανός καθηγητής του Warwick Medical School και LSE Centre for Philosophy of Natural and Social Science

[68] Deep blue, υπολογιστής που αναπτύχθηκε από τη IBM για να παίζει σκάκι. Στις 11 Μαΐου 1997, η μηχανή κέρδισε σε μια σειρα έξι παιχνιδιών τον παγκόσμιο πρωταθλητη Garry Kasparov

περαιτέρω εξέλιξή της έχει καταφέρει όχι μόνο να κατακτήσει αλλά και να διαμορφώσει ολόκληρους επιστημονικούς κλάδους.

Η Θεωρία Παιγνίων αναμφισβήτητα είναι από τις πιο πολυσηζητημένες και αμφιλεγόμενες σύγχρονες θεωρείες. Δεν είναι τυχαίο το γεγονός ότι ο Αμερικανός νομπελίστας οικονομολόγος Roger Bruce Myerson συγκρίνει τη σπουδαιότητα της ανακάλυψής της, με την ανακάλυψη του DNA και τη θεωρία αυτή καθ' αυτή με εκείνη της Θεωρίας των Πάντων. Όσο για την ισορροπία Nash και τα μηνύματα που πρεσβεύει η έκφρασή της σε κάθε είδους προβλήματα, λέει χαρακτηριστικά: «Θεωρώ την ισορροπία Nash ως ένα εργαλείο που παράγει προβλέψεις για το πως θα επιλέξουν ορθολογικά άτομα. Ένα τέτοιο εργαλείο έχει ιδιαίτερη αξία όταν προσπαθείς να επανασχεδιάσεις την κοινωνία και τους θεσμούς της. Εάν μια προτεινόμενη αλλαγή στην δομή ενός «κοινωνικού παιγνίου» θα δημιουργούσε καλύτερες ισορροπίες Nash από τις τωρινές (χρησιμοποιώντας κριτήριο της επιλογής σου περί του τι εστί «καλύτερο» κοινωνικό αποτέλεσμα), τότε αξίζει αυτή η αλλαγή»[69].

Η τελευταία πρόταση του καθηγητή είναι αναμφίβολα και μια μέγιστη αλήθεια την οποία πρεσβεύει η Θεωρία Παιγνίων και συνάμα προάγεται από την παρούσα μελέτη. Η τάση των παικτών οποιουδήποτε παιχνιδιού για τη μεγιστοποίηση της προσωπικής τους οφέλειας ή ικανοποίησης του ατομικού συμφέροντος αποφέρει τα χειρότερα δυνατά αποτελέσματα για ολόκληρο το κοινωνικό σύνολο ή ομάδα του παιχνιδιού. Οι επιπτώσεις γίνονται ολοένα και πιο φανερές όχι μόνο σε μικρά κοινωνικά κύτταρα, όπως είναι η οικογένεια, αλλά ακόμα και μεγάλες αστικές κοινωνίες και κατ΄επέκταση σε εθνικό ή και πανανθρώπινο επίπεδο.

Από αρχαιοτάτων χρόνων ο Αριστοτέλης στο έργο του Πολιτικά είχε εκφράσει την πεποίθηση ότι ο «καλός πολίτης» είναι εκείνος οποίος επιδιώκει την ατομική του ευημερία μέσω ευημερίας του κοινωνικού συνόλου, στο οποίο ανήκει, και όχι μέσω της επιδίωξης του ατομικού του συμφέροντος. Το τρόπο τη μέθοδο αλλά και τα εργαλεία για να επιτευχθεί αυτό μας τα δίνει απλόχερα η Θεωρία Παιγνίων. Όπως είδαμε και παραπάνω η Εξελικτική και η Αλγοριθμική Θεωρία Παιγνίων αποτελούν αναμφισβήτητα τα κατάλληλα εργαλεία για να μπορέσουμε με την πρώτη να κατανοήσουμε τους κανόνες και τις λειτουργίες, που διέπουν την τελειότητα της φύσης και να τους προσαρμόσουμε, όσο το δυνατόν καλύτερα, στις ανθρώπινες κοινωνίες, ενώ με τη δεύτερη να επιλύσουμε έστω και σε επίπεδο απόφασης ακόμα και προβλήματα, τα οποία θεωρητικά είναι άλυτα.

Η Θεωρία Παιγνίων λοιπόν δεν ασχολείται μόνο με τη φιλοσοφική διάσταση των παραπάνω συμπεριφορών, αλλά και με την ανάλυση και τη δημιουργία συνθηκών ή μηχανισμών που θα περιορίσουν τα ατομικά κίνητρα και θα καταστήσουν τη συνεργασία ανθρώπων σταθερή εκ των υστέρων, άρα διατηρήσιμη, επιτυγχάνοντας έτσι κέρδος για κάθε άτομο και κυρίως για το σύνολο. Με άλλα λόγια η μελέτη και η πρακτική εφαρμογή των συμπερασμάτων της Θεωρίας Παιγνίων αποσκοπεί στο να μας κάνει, καταρχήν ατομικά πολύ καλύτερους ανθρώπους, και κατα συνέπεια να δημιουργήσει πολύ πιο ανθρώπινες κοινωνίες.

[69] Συνέντευξη στον Έλληνα οικονομολόγο και καθηγητή του Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών Γιάννη Βαρουφάκη

# ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

## ΒΙΒΛΙΑ

Pareto Optimality, Game Theory and Equilibria, Hoang Tuy, Springer, ISBN 978-0-387-77246-2, 2008

Algorithmic Game Theory, Noam Nisan, Tim Roughgarden, Eva Tardos, Vijay V. Vazirani, Cambridge University Press, ISBN 978-0-521-87282-9, 2007

A Primer in Game Theory, Robert Gibbons, Pearson Education Limited, ISBN 978-0-7450-1159-2, 1992

The structure and complexity of nash equilibria for a selfish routing game. Automata, Language and Programming, D. Fotakis, S. Kontogiannis, E. Koutsoupias, M. Mavronicolas, and P. Spirakis., 2002

Θεωρια Παιγνιων. Η Θεωρία που Φιλοδοξεί να Ενοποιήσει τις Κοινωνικές Επιστήμες, Γιάννης Βαρουφάκη, Εκδόσεις Δαρδανός, 2006

Algorithms, S. Dasgupta, C. H. Papadimitriou, and U. V. Vazirani, McGraw-Hill, ISBN 0073523402, 2006

A Guide to Game Theory, Fiona Carmichael, Pearson Education Limited, ISBN 0-273-68496-5, 2005

Theory of Games and Economic Behavior, John Von Neumann and Oskar Morgenstern, princeton university press, 1953

Λεξικό Μπαμπινιώτης (2002)

## ΑΡΘΡΑ

The Further Evolution Of Cooperetion, Robert Axelrod and Douglas Dion, Article, Sience, 1988

The Evolution Of Cooperetion, Robert Axelrod, Article, Basic Books, 1984

The Complexity of Computing a Nash Equilibrium, Constantinos Daskalakis, Paul W. Goldberg, Christos H. Papadimitriou, SICOMP, 2008

On the Complexity of the Parity Argument and Other Inefficient Proofs of Existence, C. H. Papadimitriou, Journal of Computer and System Sciences, 1994

Three-Player Games Are Hard, Constantinos Daskalakis, Christos H. Papadimitriou, Electronic Colloquium on Computational Complexity, 2005

A still better performance guarantee for approximate graph coloring, Magnh M. Halldorsson, Information Processing Letters 45 (1993) 19-33, 1993

Y.A Korillas, A.A Lazar, A Orda, Acheiving Network Optima Using Stackelberg Routing IEEE/ACM Transactions on Networking, Vol 5,No 1, February 1997

Worst-case equilibria, E. Koutsoupias and C. Papadimitriou, In Proceedings of the 16th annual conference on Theoretcal aspects of computer science, Springer-Verlag, 1999

Feige, U., & Kilian, J. (1998). Zero knowledge and the chromatic number. Journal of Computer and System Sciences, 57

Θεωρία παιγνίων, Περιοδικό Focus, τευχος 94 Δεκέμβριος 2007

Algorithms, Games, and the Internet, Christos H. Papadimitriou, STOC '01 Proceedings of the thirty-third annual ACM symposium on Theory of computing, ISBN 1-58113-349-9, 2001

Foundations of Economics and Web Science, Spyros Kontogiannis and Paul Spirakis 12th PanHellenic Conf. on Informatics (PCI2008), 2008

An Algorithmic Game Theory Primer, Tim Roughgarden, 5th IFIP International Conference on Theoretical Computer Science (TCS), 2008

3-Nash is PPAD-Complete, Xi Chen and Xiaotie Deng, Electronic Colloquium on Computational Complexity, Report No. 134, 2005

Simple Search Methods For Finding A Nash Equilibrium, Ryan Porter, Eugene Nudelman, and Yoav Shoham1, Article provided by Elsevier in its journal Games and Economic Behavior, pages 642-662, 2008

## ΕΡΓΑΣΙΕΣ

Αλγοριθμική και Εξελικτική Θεωρία Παιγνίων, Παναγιώτα Ν. Παναγοπούλου, Πανεπιστήμιο Πατρών , Πάτρα, 2008

Θεωρία Παιγνίων, Γεωργίου Σ. Οικονόμου, Ειδικού Επιστήμονα ΑΒΣΘ και ΑΠΘ, Θεσσαλονίκη 1978

Η συνεισφορα του John Nash στην θεωρια των παιγνιων, Σέμκογλου Βασιλική, Διπλ. Εργασία, Τ.Ε.Ι. Δυτικής Μακεδονίας

Το πρόβλημα της ύπαρξης Γνήσιας Ισορροπίας Nash σε γραφηματικά παίγνια, Κωνσταντίνος Δασκαλάκης, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 2004

Εξελικτικοί Αλγόριθμοι, Παναγιώτης Αδαμίδης, ΤΕΙ Θεσσαλονίκης, 1999

Εκπαίδευση Τεχνητών Νευρωνικών Δικτύων, με την χρήση Εξελικτικών Αλγορίθμων, σε σειριακά και κατανεμημένα συστήματα, Μιχαήλ Γ. Επιτροπάκης, Πανεπιστήμιο Πατρών, 2008

Τα μυστηριωδη φαινομενα : Placebo και Nocebo, Θεόδωρος Π. Δασκαλόπουλος, 2006

Γενετικοί Αλγόριθμοι και Εφαρμογές, Σπυρίδων Λυκοθανάσης, ISBN: 960–538–175–3, Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστημιο, Πάτρα, 2001

Θεωρία Παιγνίων, Εισαγωγή της στη στρατηγική σκεψή. Εφαρμογή στις διεθνείς σχέσεις και συγκρούσεις, Νικολάου Σαλπιγγίδη, Πανεπιστήμιο Μακεδονίας, 2010

Το Παίγνιο Εξισορρόπησης Φορτίου με Τρεμάμενο Χέρι, Απόστολος Κ. Φίλιππας, Πανεπιστήμιο Πατρών, 2011

Αλγοριθμοι Κατασκευης και Μελετη Προβληματων Χρωματισμου Κλασεων Τελειων Γραφηματων, Δήμητρα Τσάμη, διπλωματική εργασία, 2010

## ΣΥΝΔΕΣΜΟΙ

http://www.dcs.gla.ac.uk/~pat/jchoco/clique/papers/approxCol.pdf/

http://www.econ.uoi.gr/metaptixiakes_spoudes/ergasies%20Msc/2006_07/patsia/patsia.pdf/

http://dss.ucsd.edu/~vcrawfor/TaNeaArticle.html/

http://en.wikipedia.org/

http://rdmst.blogspot.com/

http://invenio.lib.auth.gr/

http://el.wikipedia.org/

http://www.scribd.com/

http://news.kathimerini.gr/4dcgi/_w_articles_economy_2_23/05/2010_402044/

http://journals.cambridge.org/action/login;jsessionid=5A6FA4577BE91885AFFCAB328256DA38.journals/

http://www.gametheorystrategies.com/

http://www.springer.com/

http://www.cs.berkeley.edu/

http://dl.acm.org/

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

# ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1

## ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ MINIMAX

Το βέλτιστο παιχνίδι για έναν minimax αλγόριθμο είναι ένα αιτιοκρατικό, δύο παικτών, παιχνίδι μηδενικού αθροίσματος με τέλεια πληροφόρηση. Συμπεριλαμβάνει πολλά κοινά παιχνίδια, όπως το σκάκι. Σε αυτόν τον τύπο παιχνιδιού, δύο παίκτες αναλαμβάνουν σειρά εκ περιτροπής κερδίζοντας μία θέση κάθε φορά. Και οι δύο παίκτες έχουν πλήρη πληροφόρηση για το περιβάλλον του παιχνιδιού, συμπεριλαμβανομένων των ενεργειών του άλλου παίκτη. Και οι δύο παίχτες δεν μπορούν να κερδίσουν, πρέπει να υπάρξει είτε νίκη είτε ισσοπαλία. Αυτό σημαίνει ότι οι τιμές ωφέλειας των παικτών στο τέλος του παιχνιδιού είναι πάντα ίσες και αντίθετες.

Ο minimax αλγόριθμος υπολογίζει μια βέλτιστη απόφαση, η οποία είναι ένας πρόσθετος τύπος προβλήματος αναζήτησης με τα συγκεκριμένα συστατικά. Η αρχική κατάσταση είναι η θέση και οι πληροφορίες πινάκων στις οποίες ο φορέας κινείται πρώτα. Η μέθοδος Successors επιστρέφει έναν κατάλογο ζευγαριών (κίνηση) που κάθε ένα δείχνει μια νόμιμη κίνηση και τη θέση, κατάσταση που προκύπτει. Η τελική δοκιμή καθορίζει πότε το παιχνίδι τελειώνει. Οι θέσεις που λαμβάνονται στο τέλος καλούνται τελικές καταστάσεις. Η μέθοδος utility ορίζει μια αριθμητική αξία στις τελικές καταστάσεις. Παραδείγματος χάριν, εάν οι επιλογές είναι κερδίζω, χάνω, ή φέρνω ισσοπαλία, οι τελικές τιμές να είναι +1, -1, και 0. Αυτές οι θάσεις και νόμιμες κινήσεις διαμορφώνουν το δέντρο παιχνιδιών του παιχνιδιού.

Σε μια κανονική αναζήτηση, η βέλτιστη λύση είναι απλά μια ακολουθία κινήσεων που οδηγεί σε μια θέση. Η αναζήτηση σε ένα παιχνίδι πολλών παιχτών είναι διαφορετική επειδή οι κινήσεις του άλλου τον παίκτη πρέπει να ληφθούν υπόψη κατά απόφαση μιας ακολουθίας κινήσεων. Επομένως, max πρέπει να εκφράζει μια στρατηγική, που να διευκρινίζει την max κίνηση στην αρχική κατάσταση, οι max κινήσεις απορρέουν από όλες τις πιθανές αντιδράσεις που μπορεί να έχει το min σχετικά με την εκάστοτε κίνηση. Αυτό συμβαίνει σε κάθε ενδεχόμενη κίνηση ή αλλαγή κατάστασης. Μια βέλτιστη στρατηγική οδηγεί σε αυτήν την περίπτωση σε τόσο αποδοτικό αποτέλεσμα όσο οποιαδήποτε άλλη στρατηγική σε ένα παιχνίδι ενάντια σε έναν αλάνθαστο αντίπαλο.

Στο δέντρο παιχνιδιών που προκύπτει από το Minimax αλγόριθμο, κάθε επίπεδο αντιπροσωπεύει μια κίνηση max ή min. Λαμβάνοντας υπόψη ένα δέντρο, η βέλτιστη η στρατηγική μπορεί να καθοριστεί με την εξέταση της minimax αξίας κάθε κόμβου. Αυτή η αξία είναι το utility (για max) της ύπαρξης σε μια καθορισμένη κατάσταση, υποθέτοντας πάντα ότι και οι δύο παίχτες λειτουργούν βέλτιστα. Η minimax αξία της τελικής κατάστασης είναι το utility της. Εφόσον υπάρχει η δυνατότητα επιλογής, το max επιλέγει να κινηθεί προς μια κατάσταση της μέγιστης αξίας και το min επιλέγει μια κατάσταση ελάχιστης αξίας.

MINIMAX-VALUE(n) =

UTLITY(n) if n is a terminal state

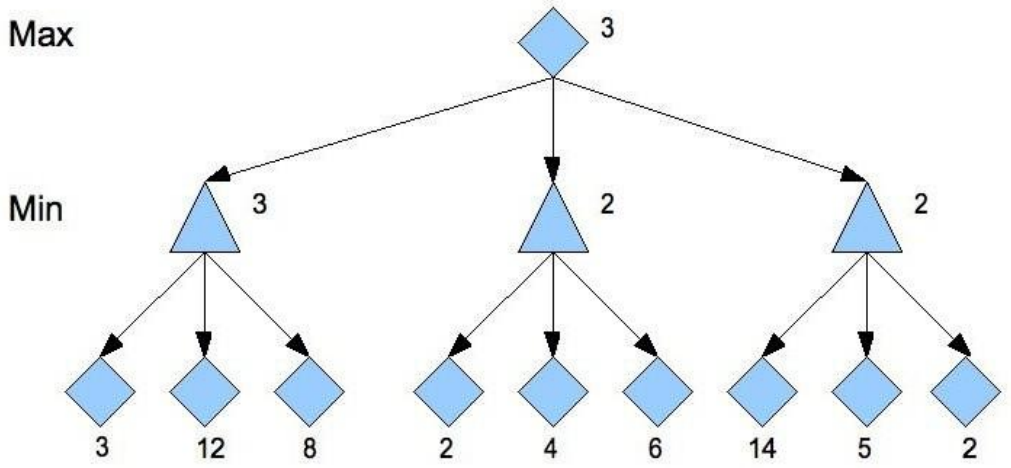
max$s \in$Successors(n) MINIMAX-VALUE(S) if n is a MAX node

min$s \in$Successors(n) MINIMAX-VALUE(s) if n is a MIN node

Ο αλγόριθμος minimax υπολογίζει κατ' επανάληψη τη minimax απόφαση για τη τρέχουσα θέση, κατάσταση όπως και τις minimax τιμές κάθε θέσης, κατάστασης. Αναδρομικά διαπερνά όλους τους κόμβους του δέντρου παιχνιδιών, και έπειτα αναζητά τις minimax τιμές για να δώσει την τελική αξία.

Στο παρακάτω παράδειγμα, ο minimax αλγόριθμος έχει υπολογίσει όλες τις utility τιμές για μία ολοκληρωμένη κίνηση. Οι τελικές max τιμές παρουσιάζονται στο επίπεδο τρία. Το max υποθέτει ότι το min παίζει βέλτιστα, δηάδί ότι το min θα επιλέξει τις χαμηλότερες τιμές για

όλες τις πιθανές κινήσεις. Αυτό σημαίνει ότι οι τρεις κινήσεις που μπορεί να πραγματοποιήσει το max, οι υψηλότερες utility τιμές που μπορεί να επιλέξει, είναι 3, 2, ή 2. Ως max τιμή τελικά θα επιλεχθεί η τιμή 3, η υψηλότερη αυτών των τιμών.




Ο αλγόριθμος επιστρέφει τη τιμή που αντιστοιχεί στην καλύτερη δυνατή κίνηση (δηλ. η κίνηση που οδηγεί στην έκβαση με την καλύτερη αξία (utility). Η min αξία και η max αξία διαπερνούν ολόκληρο το δέντρο παιχνιδιών ώστε να καθορίσουν την τιμή της θέσης, κατάστασης.

```
function Minmax Decision(state) returns some_action
        inputs: state, current_state
                v ← Max-Value(state)
        return the action in Successors(state) with value n
function Max-Value(state) returns some_utility_value
        if Terminal-Test(state) then return Utility(state)
                v ← ∞
        for a, s in Successors(state) do
                v ← Max(v, Min-Value(s))
        return v
function Min-Value(state) returns some_utility_value
        if Terminal-Test(state) then return Utility(state)
                v ← ∞
        for a in Successors(state) do
                v ← Min(v, Max-Value(s))
        return v
```

# ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2

## ΠΑΙΓΝΙΑ 2 ΠΑΙΧΤΩΝ ΜΗΔΕΝΙΚΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ

Το κέρδος όλων των παικτών για κάθε δυνατό συνδυασμό στρατηγικών τους έχει σταθερό άρθροισμα. Τα συμφέροντα των παικτών στην περίπτωση αυτή είναι διαμετρικά αντίθετα. Το παιχνίδι μπορεί να παρασταθεί μόνο από τα κέρδη (αποτελέσματα) του Α. Όταν ο Α μεγιστοποιεί το δικό του κέρδος τότε ελαχιστοποιεί του Β και αντίστροφα όταν ο Β ελαχιστοποιεί το κέρδος του Α τότε μεγιστοποιεί το δικό του.

Έστω το παιχνίδι :

| | B→ | | | Min |
|---|---|---|---|---|
| A↓ | 8 | 8 | 2 | 2 |
| | 5 | 6 | 6 | 5 |
| | 3 | 5 | 7 | 3 |
| Max | 8 | 8 | 2 | |

Στο παράδειγμα

- max min = max {2,5,3} = 5
- min max = min {8,8,7} = 7

Ο Α παίζοντας 2 εξασφαλίζει κέρδος 5 (το μέγιστο εξασφαλισμένο κέρδος). Ο Β παίζοντας 3 περιορίζει τον Α σε κέρδος το πολύ 7. Προφανώς ο Α δεν μπορεί να εξασφαλίσει μεγαλύτερο κέρδος από αυτό στο οποίο με βεβαιότητα του έχει περιορίσει ο Β. Στην πράξη εάν ο Α παίξει 2 και ο Β 3, ο Α θα κερδίσει 6 (κάτι μεταξύ 5 και 7). Και ο Α και ο Β αισθάνονται ότι υπάρχει κενό μεταξύ 5 και 7 που μπορούν να εκμεταλλευθούν.

**<u>Μικτες Στρατηγικές</u>**

| | B→ | | | |
|---|---|---|---|---|
| A↓ | $\alpha_{11}$ | - | - | $\alpha_{1n}$ |
| | - | | | |
| | - | | | |
| | - | | | |
| | - | | | |
| | - | | | |
| | - | | | |
| | $\alpha_{m1}$ | - | - | $\alpha_{mn}$ |

Έστω ότι ο Α παίζει τις m στρατηγικές του με πιθανότητα x1, ..., xm αντίστοιχα.

$$0 \le x_i \le 1 \qquad {}_i = \sum x_i = 1$$

Τότε το προσδοκώμενο κέρδος του Α απέναντι στη στρατηγική 1 του Β είναι:

$$E_1 = x_1 \alpha_{11} + x_2 \alpha_{21} + \ldots + x_m \alpha_{m1}$$

και ανάλογα απέναντι στις στρατηγικές 2, ¼ , n του Β:

$$E_2 = x_1 \alpha_{12} + x_2 \alpha_{22} + \ldots + x_m \alpha_{m2}$$

$$E_n = x_1 \alpha_{1n} + \ldots + x_m \alpha_{mn}$$

Ο Α θέλει να επιλέξει τα x1, ¼ , xm έτσι ώστε να μεγιστοποιήσει το ελάχιστο από τα $E_1, \dots, E_n$ (max min).

Έστω: V = min {$E_1, \dots, E_i$}

Τότε ο Α έχει να λύσει το πρόβλημα:

max V όταν $V \le E_i \ \forall i = 1, \dots, n$

ή το πρόβλημα: **(Π1)** max V όταν:

$\alpha_{11}x_1 + \dots + \alpha_{m1}x_m - V \ge 0$

$\alpha_{12}x_1 + \dots + \alpha_{m2}x_m - V \ge 0$

...

$\alpha_{1n}x_1 + \dots + \alpha_{mn}x_m - V \ge 0$

$x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1$

$x_1, \dots, x_m \ge 0$

Όμοια ο Β μπορεί να παίξει τις n στρατηγικές του με πιθανότητες $y_1, \dots, y_n$ αντίστοιχα.

$0 \le y_i \le 1$ y 1 $\quad i = \sum y_i = 1$

Τότε το προσδοκώμενο κέρδος του Α απέναντι στη στρατηγική 1 του Α είναι αντίστοιχα:

$Z_1 = \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \dots + \alpha_{1n}y_n$

...

$Z_m = \alpha_{m1}y_1 + \dots + \alpha_{mn}y_n$

Ο Β θέλει να προσδιορίσει τα $y_1, \dots, y_m$ έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το μέγιστο από τα $Z_1, \dots, Z_n$ (min max).

Πρέπει λοιπόν να λύσει το πρόβλημα:

min W

W = max {$Z_1, \dots, Z_m$}

ή:

**(Π2)** min W ό τ α ν

$\alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \dots + \alpha_{1n}x_m - W \le 0$

...

$\alpha_{m1}y_1 + \dots + \alpha_{mn}y_n - W \le 0$

$y_1 + y_2 + \dots + y_n = 1$

$y_1, \dots, y_n \ge 0$

Τα προβλήματα (Π1) και (Π2) είναι δυικά μεταξύ τους και επομένως:

max V = min W

Αυτό σημαίνει ότι το κενό που υπήρχε μεταξύ max min σε καθαρές στρατηγικές γεφυρώνεται και επομένως ότι κανείς από τους δύο παίκτες δεν μπορεί να επιτύχει κάτι καλύτερο. Άρα οι δύο παίκτες βρίσκονται σε **σημείο ισορροπίας**.

**<u>Παράδειγμα:</u>**

| | **B→** | | **Min** |
|---|---|---|---|
| **A↓** | 5 | 4 | 4 |
| | 3 | 6 | 3 |
| **Max** | 5 | 6 | |

Ο παίκτης Α έχει να λύσει το πρόβλημα: **(Π1)** max V όταν

$5x_1 + 3x_2 - V \ge 0$

$4x_1 + 6x_2 - V \ge 0$

$x_1 + x_2 = 1$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

V ελεύθερο

Ο παίκτης Β έχει να λύσει το πρόβλημα: **(Π2)** min W όταν

$5y1 + 4y2 - W \leq 0$
$3y1 + 6y2 - W \leq 0$
$y1 + y2 = 1$
$y1 \geq 0, y2 \geq 0$
W ε λ ε ύ θ ε ρ ο

Τα προβλήματα (Π1) και (Π2) αποτελούν ένα ζευγάρι δυικών προβλημάτων. Το (Π1) διαδοχικά γράφεται θέτοντας $x1 = p, x2 = 1-p$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| max V | ή | max V | ή | max V |
| $5p + 3(1-p) - V \geq 0$ | | $2p - V \geq -3$ | | $2p - V - s1 = -3$ |
| $4p + 6(1-p) - V \geq 0$ | | $-2p - V \geq -6$ | | $-2p - V - s2 = -6$ |
| $0 \leq p \leq 1$ | | $0 \leq p \leq 1$ | | $0 \leq p \leq 1$ |
| | | | | $s1 \geq 0, s2 \geq 0$ |

$y \alpha s1 - cs1 = 2/4 \geq 0$
$y \alpha s2 - cs2 = 2/4 \geq 0$
Η λύση είναι άριστη και επαληθεύει τον περιορισμό $p \leq 1$.

Αντίστοιχα το (Π2) διαδοχικά γράφεται θέτοντας $y1 = q, y2 = 1-q$

| | | |
|---|---|---|
| min W | ή | min W |
| $q - W \leq -4$ | | $q - W + t1 = -4$ |
| $-3q - W \leq -6$ | | $-3q - W + t2 = -6$ |
| $0 \leq q \leq 1$ | | $0 \leq q \leq 1$ |
| | | $t1 \geq 0, t2 \geq 0$ |

$y \alpha t1 - ct1 = -3/4 \leq 0$
$y \alpha t2 - ct2 = -1/4 \leq 0$

Η λύση είναι άριστη και επαληθεύει τον περιορισμό $p \leq 1$.

Στο παράδειγμα παρατηρούμε ότι:

**Σε καθαρές στρατηγικές:**
max min = α12 = 4
min max = $\alpha$ 11 = 5

**Σε μικτές στρατηγικές:**
max V = min W = 18/4 = 4,5.

Άρα γενικά ισχύει:

**max min < min max**