

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

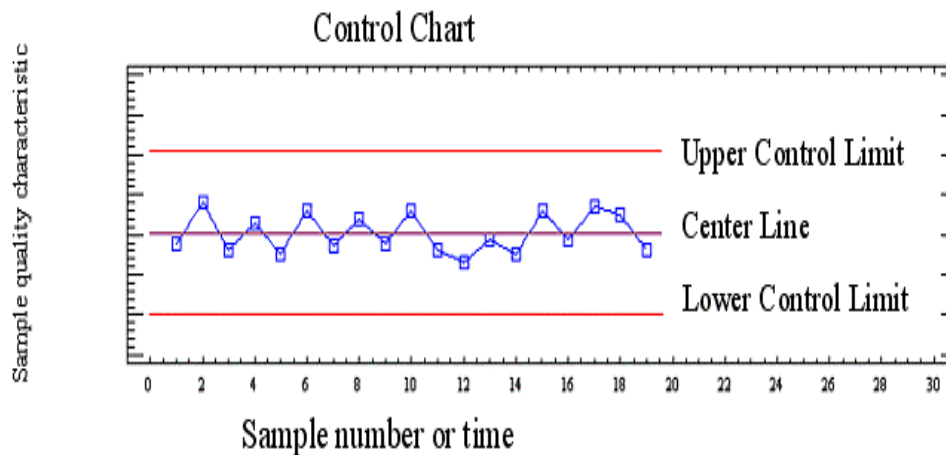
Μέσο μήκος ροής στα διαγράμματα ελέγχου τύπου *Shewhart*

1.1 Διάγραμμα ελέγχου τύπου *Shewhart*

Στις παραγωγικές διεργασίες μας ενδιαφέρει η παρακολούθηση της συμπεριφορά μιας κρίσιμης ποσότητας ενός (μετρήσιμου) χαρακτηριστικού X (τυχαία μεταβλητή) των προϊόντων που παράγονται (για παράδειγμα το χαρακτηριστικό X μπορεί να είναι μήκος, βάρος, όγκος προϊόντων, κ.τ.λ.). Η διαδικασία παρακολούθησης της κρίσιμης ποσότητας βασίζεται σε μετρήσεις του χαρακτηριστικού X (τυχαία μεταβλητή), όπως προκύπτουν από την επιλογή τυχαίων δειγμάτων προϊόντων από την παραγωγή σε διαφορετικές χρονικές στιγμές στα οποία αντιστοιχούν τυχαία δείγματα τιμών του χαρακτηριστικού X μεγέθους n , έστω τα $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots$, όπου $X_t = (X_{t1}, \dots, X_{tm})$, $t \geq 1$. Χρησιμοποιώντας τα τυχαία δείγματα $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots$ υπολογίζουμε την τιμή $W_t = g(\mathbf{X}_t)$, $t = 1, 2, \dots$, μιας κατάλληλης στατιστικής συνάρτησης (τυχαίας μεταβλητής) που εκτιμά (συνήθως αμερόληπτη εκτιμήτρια) την κρίσιμη ποσότητα που μας ενδιαφέρει (π.χ. μέση τιμή, διακύμανση, κτλ.). Έτσι η (διαχρονική) παρακολούθηση της συμπεριφοράς της κρίσιμης ποσότητας επιτυγχάνεται με την παρακολούθηση των τιμών που λαμβάνει η στατιστική συνάρτηση W στα διάφορα δείγματα.

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι ενδιαφερόμαστε να παρακολουθήσουμε τη συμπεριφορά της μέσης τιμής της διαμέτρου X των κυλίνδρων που παράγει μια μηχανή. Για το σκοπό αυτό επιλέγονται τυχαία δείγματα μεγέθους n ($n \geq 1$) κυλίνδρων από την παραγωγή της μηχανής σε διαφορετικά χρονικά διαστήματα. Έτσι είναι φυσικό να χρησιμοποιήσουμε τη στατιστική συνάρτηση $W_t = g(\mathbf{X}_t) = (X_{t1} + X_{t2} + \dots + X_{tn})/n$ (η οποία είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του μέσου της X) για την παρακολούθηση της συμπεριφοράς της μέσης τιμής.

Ένα τυπικό διάγραμμα ελέγχου τύπου *Shewhart* είναι μια γραφική παράσταση με την ακόλουθη μορφή.



Διάγραμμα 1.1: Ένα τυπικό διάγραμμα ελέγχου τύπου *Shewhart*

Στο Διάγραμμα 1.1 εκτός από τις παρατηρούμενες τιμές W_i που έχουν απεικονιστεί με σημεία (τετραγωνάκια) τα οποία έχουν συνδεθεί με μια τεθλασμένη γραμμή, έχουν σχεδιαστεί και άλλες τρεις γραμμές. Η κεντρική γραμμή (*center line, CL*) ή μέσο επίπεδο της διεργασίας παριστάνει συνήθως τη μέση τιμή (*mean value*) της W όπως προκύπτει από τη λειτουργία μιας εντός (στατιστικού) ελέγχου διεργασίας δηλαδή μιας διεργασίας που λειτουργεί μόνο με την παρουσία φυσικής μεταβλητότητας (*chance causes of variation*). Οι δύο άλλες γραμμές που εμφανίζονται στο παραπάνω διάγραμμα ονομάζονται άνω και κάτω όρια ελέγχου του διαγράμματος (*upper and lower control limits, UCL and LCL*). Όσο οι τιμές της W βρίσκονται εντός των ορίων ελέγχου και η συμπεριφορά τους είναι “τυχαία” μπορούμε να υποθέσουμε ότι η διεργασία παραμένει εντός ελέγχου και δεν χρειάζεται να προβούμε σε κάποια διορθωτική ενέργεια. Αν όμως κάποιο σημείο βρεθεί εκτός των ορίων ελέγχου, τότε λέμε ότι υπάρχει ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου και πρέπει να προχωρήσουμε σε έρευνα για να ανακαλύψουμε τις ειδικές αιτίες μεταβλητότητας (*assignable causes of variation*), οι οποίες είναι υπεύθυνες για αυτή τη συμπεριφορά, και αν κριθεί απαραίτητο να προβούμε σε διορθωτικές ενέργειες. Ωστόσο, θα πρέπει να σημειώσουμε ότι ακόμη και στην περίπτωση που όλα τα σημεία του διαγράμματος βρίσκονται εντός των ορίων ελέγχου, αλλά συμπεριφέρονται με ένα συστηματικό ή μη τυχαίο τρόπο, τότε και αυτό αποτελεί ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου. Ως (ακραίο) παράδειγμα μπορούμε να αναφέρουμε την περίπτωση όπου όλα τα απεικονιζόμενα σημεία του Διαγράμματος 1.1

βρίσκονται μεταξύ την κεντρικής γραμμής και του κάτω ορίου ελέγχου.

Στο ακόλουθο πλαίσιο δίνεται ένα γενικό μοντέλο, το μοντέλο ορίων σίγμα (*sigma limits model*), για την κατασκευή ενός διαγράμματος ελέγχου τύπου *Shewhart*.

Μοντέλο ορίων σίγμα		
<i>UCL</i>	=	$m_w + Ls_w$
<i>Center Line</i>	=	m_w
<i>LCL</i>	=	$m_w - Ls_w$

Οι ποσότητες m_w και s_w δηλώνουν τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της στατιστικής συνάρτησης W που απεικονίζεται στο διάγραμμα ελέγχου (συνήθως γίνεται η υπόθεση ότι ακολουθεί κανονική κατανομή $W \sim N(m_w, s_w^2)$). Η ποσότητα L δηλώνει την απόσταση των ορίων ελέγχου από την κεντρική γραμμή σε μονάδες τυπικής απόκλισης. Συνήθως θέτουμε $L=3$, οπότε και ομιλούμε για διαγράμματα ελέγχου τύπου *Shewhart* με $3s$ όρια ελέγχου.

Εκτός από το μοντέλο ορίων σίγμα για την κατασκευή διαγραμμάτων ελέγχου τύπου *Shewhart*, υπάρχει και το μοντέλο ορίων πιθανότητας (*probability limits model*), το οποίο παρουσιάζεται στο ακόλουθο πλαίσιο (μοντέλο ορίων πιθανότητας $a/2$) για κανονική ή προσεγγιστικά κανονική κατανομή της W .

Μοντέλο ορίων πιθανότητας $a/2$		
<i>UCL</i>	=	$m_w + z_{a/2}s_w$
<i>Center Line</i>	=	m_w
<i>LCL</i>	=	$m_w - z_{a/2}s_w$

Στις ΗΠΑ χρησιμοποιούνται αποκλειστικά τα $3s$ όρια ελέγχου, ενώ στη Μεγάλη Βρετανία και σε άλλες δυτικές χώρες χρησιμοποιούνται όρια με πιθανότητα 0.001 ($a/2 = 0.001$). Στην παρούσα φάση θα χρησιμοποιήσουμε αποκλειστικά $3s$ όρια.

Στα διαγράμματα ελέγχου τύπου *Shewhart* διακρίνουμε δύο μεγάλες κατηγορίες ανάλογα με το αν το χαρακτηριστικό X του προϊόντος είναι συνεχής ή διακριτή τυχαία μεταβλητή. Αν η τυχαία μεταβλητή X είναι συνεχής με μέση τιμή m και διακύμανση s^2 ,

τότε υπάρχουν διαγράμματα ελέγχου τύπου *Shewhart* για την παρακολούθηση της μέσης τιμής και της διασποράς της X . Στην περίπτωση που η τυχαία μεταβλητή X είναι διακριτή υπάρχουν διαγράμματα ελέγχου τύπου *Shewhart* για την παρακολούθηση του ποσοστού (και του αριθμού) των ελαττωματικών προϊόντων που αποδίδει η παραγωγική διεργασία, καθώς επίσης και για τον αριθμό (και το μέσο αριθμό) των ελαττωμάτων (ατελειών) σε μια μονάδα ελέγχου (για περισσότερες λεπτομέρειες δείτε Αντζουλάκος (2003), Δαμιανού (1996), Καφφές (1996)).

Το πιο απλό και πλέον διαδεδομένο διάγραμμα ελέγχου τύπου *Shewhart* είναι το διάγραμμα ελέγχου για την παρακολούθηση της μέσης τιμής ενός συνεχούς χαρακτηριστικού X , το οποίο και θα αναπτύξουμε εν συντομία στην επόμενη παράγραφο μέσω ενός παραδείγματος.

1.2 Διάγραμμα ελέγχου τύπου *Shewhart* για τη μέση τιμή ενός συνεχούς χαρακτηριστικού

Στον Πίνακα 1.1 παρουσιάζονται μετρήσεις μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X , η οποία δηλώνει την εσωτερική διάμετρο κυλινδρικών εμβόλων όπως προέκυψαν από την επιλογή 10 τυχαίων δειγμάτων μεγέθους δύο από την παραγωγή ενός εργοστασίου. Έστω ότι υπό συνθήκες φυσικής μεταβλητότητας (εντός ελέγχου διεργασία) η κατανομή της X είναι κανονική κατανομή με $m = 10$, $s = 0.25$ και ενδιαφερόμαστε να παρακολουθήσουμε τη συμπεριφορά της μέσης τιμής m της X .

Πίνακας 1.1: Δεδομένα για την επίδειξη ενός διαγράμματος ελέγχου τύπου *Shewhart*

Δείγμα	Πρώτη μέτρηση	Δεύτερη μέτρηση	Μέση τιμή
1	9.84422	9.62656	9.73539
2	9.80879	9.93767	9.87323
3	10.50880	9.37680	9.94280
4	9.94629	10.2645	10.10540
5	9.55296	10.09280	9.82288
6	9.58023	9.71789	9.64906
7	9.40171	10.15210	9.77691
8	9.59285	9.95854	9.77570
9	9.54142	9.62176	9.58159
10	10.66530	10.23660	10.45095

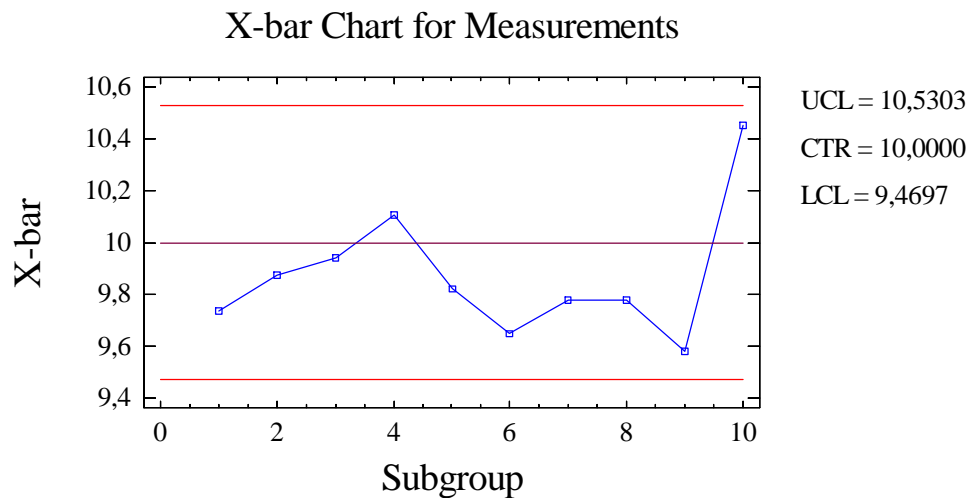
Χρησιμοποιώντας ως εκτίμηση της μέσης τιμής m της διεργασίας σε κάθε δείγμα το δειγματικό μέσο του αντίστοιχου δείγματος $W_t = \bar{X}_t = (X_{t1} + X_{t2})/2$, έχουμε ότι

$$W_t = \bar{X}_t \sim N(m_{\bar{X}_t}, s_{\bar{X}_t}^2), \quad m_{W_t} = m_{\bar{X}_t} = m = 10, \quad s_{W_t}^2 = s_{\bar{X}_t}^2 = s^2/2 = 0.03125, \quad 1 \leq t \leq 10.$$

Κατασκευάζοντας ένα διάγραμμα ελέγχου τύπου *Shewhart* με $3s$ όρια ελέγχου, όπου απεικονίζονται τα σημεία (t, W_t) , έχουμε ότι

$$CL = m_w = 10, \quad UCL = m_w + 3s_w = 10.5303 \quad \text{και} \quad LCL = m_w - 3s_w = 9.4697,$$

ενώ το διάγραμμα έλεγχο που προκύπτει είναι το ακόλουθο.



Διάγραμμα 1.2: Διάγραμμα ελέγχου τύπου *Shewhart* για τα δεδομένα του Πίνακα 1.1

Εφόσον όλα τα σημεία του διαγράμματος βρίσκονται εντός των ορίων ελέγχου μπορούμε να ισχυριστούμε ότι ο μέσος δεν έχει αλλάξει (μετατοπιστεί) και επομένως η παραγωγική διεργασία είναι εντός στατιστικού ελέγχου.

Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελεί μια σειρά από ελέγχους υποθέσεων (10 το πλήθος) που αφορούν τη μέση τιμή ενός κανονικού πληθυσμού. Πράγματι, αν X_1, X_2, \dots, X_n είναι ένα τυχαίο δείγμα από ένα πληθυσμό που περιγράφεται από μια κανονική κατανομή, τότε για τον έλεγχο της υπόθεσης

$$H_0 : m = m_0 - H_1 : m \neq m_0 \quad (s \text{ γνωστό})$$

σε επίπεδο σημαντικότητας α , η περιοχή απόρριψης K (κρίσιμη περιοχή) της μηδενικής υπόθεσης είναι η εξής:

$$K: \bar{X} > m_0 + z_{a/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \quad \text{ή} \quad \bar{X} < m_0 - z_{a/2} \frac{S}{\sqrt{n}}.$$

Επιλέγοντας $z_{a/2} = 3$ δηλαδή $a = 0.0027$, τότε για το παράδειγμά μας ($m_0 = 10$, $s = 0.25$, $n = 2$), έχουμε ότι

$$K: \bar{X} > 10.5303 \quad \text{ή} \quad \bar{X} < 9.4697$$

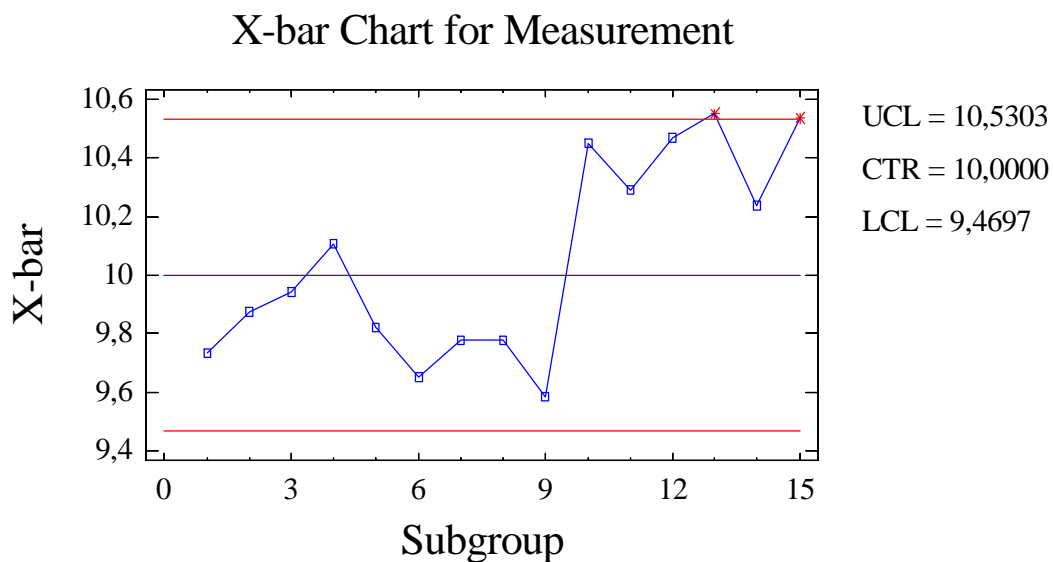
και επομένως τα όρια του διαγράμματος ελέγχου συμπίπτουν με τις δύο τιμές που καθορίζουν την κρίσιμη περιοχή K . Εφόσον τα σημεία $W_i = \bar{X}_i = (X_{i1} + X_{i2})/2$ βρίσκονται εντός των ορίων ελέγχου αυτό σημαίνει ότι σε κάθε έλεγχο (ένας για κάθε δείγμα), η τιμή της αντίστοιχης ποσότητας \bar{X} δε βρίσκεται στην κρίσιμη περιοχή και συνεπώς δεν μπορούμε να απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση σε επίπεδο σημαντικότητας $a = 0.0027$.

Στη συνέχεια επιλέξαμε άλλα 5 δείγματα από την παραγωγική διαδικασία (σε μεταγενέστερες χρονικές στιγμές), η οποία όμως λόγω κάποιας εσφαλμένης ρύθμισης της μηχανής που παράγει τα έμβολα (εμφάνιση ειδικής μεταβλητότητας), παράγει κυλίνδρους με $m = 10.5$ και $s = 0.25$. Τα επιπρόσθετα δεδομένα παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα.

Πίνακας 1.2: Επιπρόσθετα δεδομένα

Δείγμα	Πρώτη μέτρηση	Δεύτερη μέτρηση	Μέση τιμή
11	10.2548	10.3272	10.291
12	10.29200	10.65150	10.47175
13	10.60560	10.50070	10.55315
14	10.16910	10.30080	10.23495
15	10.51150	10.56130	10.5364

Το διάγραμμα ελέγχου που προκύπτει παρουσιάζεται στη συνέχεια.



Διάγραμμα 1.3: Διάγραμμα ελέγχου τύπου *Shewhart* για τα δεδομένα των Πινάκων 1.1,1.2

Από το παραπάνω διάγραμμα προκύπτει καθαρά ότι έχουμε ενδείξεις που δηλώνουν ότι ο μέσος της διεργασίας έχει μετατοπιστεί σε υψηλότερο επίπεδο και επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η διεργασία βρίσκεται εκτός στατιστικού ελέγχου.

1.3 Μέσο μήκος ροής στα διαγράμματα ελέγχου

Μια βασική έννοια που σχετίζεται με τα διαγράμματα ελέγχου είναι το μέσο μήκος ροής *ARL* (*average run length*) του διαγράμματος. Η τυχαία μεταβλητή T που δηλώνει το πλήθος των σημείων που πρέπει να σχεδιαστούν σε ένα διάγραμμα ελέγχου έως ότου πάρουμε ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας, ονομάζεται μήκος ροής (*run length*) του διαγράμματος. Το μέσο μήκος ροής *ARL* ορίζεται ως ο αναμενόμενος αριθμός των σημείων που πρέπει να σχεδιαστούν στο διάγραμμα έως ότου λάβουμε για πρώτη φορά ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας δηλαδή $ARL = E(T)$.

Στα διαγράμματα ελέγχου τύπου *Shewhart* με απεικονιζόμενη ποσότητα τη W , η οποία έχει εντός ελέγχου μέσο m , τυπική απόκλιση S και συνάρτηση κατανομής $F_0(\cdot)$,

έχουμε ότι η πιθανότητα p_0 εμφάνισης ενός σημείου του διαγράμματος εκτός των ορίων ελέγχου είναι ίση με

$$p_0 = 1 - P(LCL \leq W \leq UCL) = 1 - F_0(m + Ls) + F_0((m - Ls) -)$$

και επομένως το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής είναι ίσο με

$$ARL_0 = \frac{1}{p_0},$$

εφόσον το μήκος ροής T ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με πιθανότητα επιτυχίας p_0 . Φυσικά για μια διεργασία που βρίσκεται εντός ελέγχου θέλουμε να έχουμε μεγάλη τιμή για το ARL_0 , έτσι ώστε να μειωθεί ο αριθμός των λανθασμένων ενδείξεων εκτός ελέγχου διεργασίας ή αλλιώς ο αριθμός των λανθασμένων συναγερμών (*false alarms*).

Για μια εκτός ελέγχου διεργασία, όπου η συνάρτηση κατανομή της τυχαίας μεταβλητής W είναι ίση με $F_1(\cdot)$, έχουμε ότι η πιθανότητα p_1 εμφάνισης ενός σημείου εκτός των ορίων ελέγχου του διαγράμματος είναι ίση με

$$p_1 = 1 - P(LCL \leq W \leq UCL) = 1 - F_1(m + Ls) + F_1((m - Ls) -)$$

και επομένως το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής είναι ίσο με

$$ARL_1 = \frac{1}{p_1}.$$

Φυσικά για μια διεργασία που βρίσκεται εκτός ελέγχου θέλουμε να έχουμε μικρή τιμή για το ARL_1 , έτσι ώστε να μειωθεί ο αριθμός των δειγμάτων (και συνεπώς ο χρόνος) που απαιτούνται για να γίνει αντιληπτό ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου.

Αν για την τυχαία μεταβλητή W είναι γνωστό ότι $W \sim N(m, s^2)$, τότε έχουμε ότι το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής είναι ίσο με

$$ARL_0 = \frac{1}{p_0} = \frac{1}{2\Phi(-L)},$$

αφού

$$\begin{aligned} p_0 &= 1 - P(LCL \leq W \leq UCL \mid W \sim N(m, s^2)) \\ &= 1 - P(m - Ls \leq W \leq m + Ls \mid W \sim N(m, s^2)) \\ &= 1 - \Phi(L) + \Phi(-L) = 2\Phi(-L). \end{aligned}$$

Για $L = 3$ προκύπτει ότι

$$ARL_0 \cong \frac{1}{0.0027} \cong 370.$$

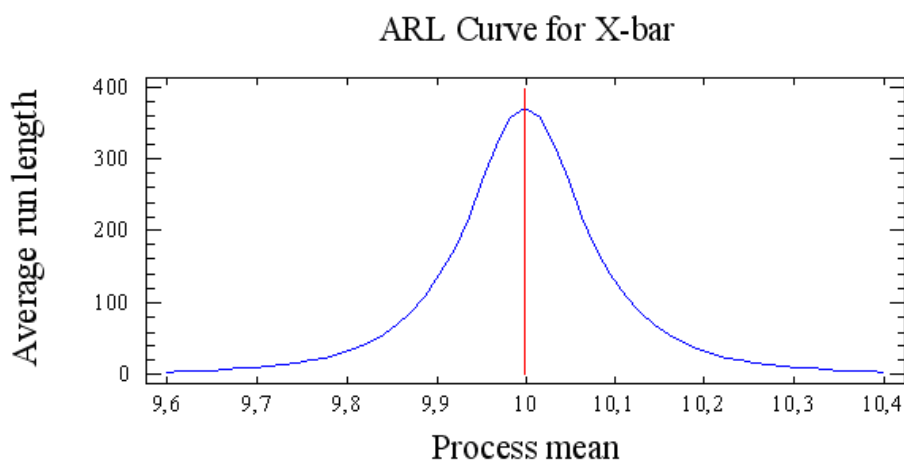
Αν κατά τη διάρκεια της παραγωγικής διεργασίας η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής W μετατοπιστεί από τη θέση m στη θέση $m^* = m + ds$ (μετατόπιση εκφρασμένη σε μονάδες τυπικής απόκλισης) και η διακύμανσή της δεν αλλάξει, τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} p_1 &= 1 - P(LCL \leq W \leq UCL \mid W \sim N(m + ds, s^2)) \\ &= 1 - P(m - Ls \leq W \leq m + Ls \mid W \sim N(m + ds, s^2)) \\ &= 1 - \Phi(L - d) + \Phi(-L - d) = 2 - \Phi(L - d) - \Phi(L + d) \end{aligned}$$

και επομένως

$$ARL_1 = \frac{1}{p_1} = \frac{1}{2 - \Phi(L - d) - \Phi(L + d)}.$$

Στο ακόλουθο διάγραμμα δίνεται η γραφική παράσταση του μέσου μήκους ροής ARL για το παράδειγμα που δώσαμε στην παράγραφο 1.3 ($W \sim N(10, (0.25)^2 / 2)$), συναρτήσει της μετατόπισης του μέσου m .

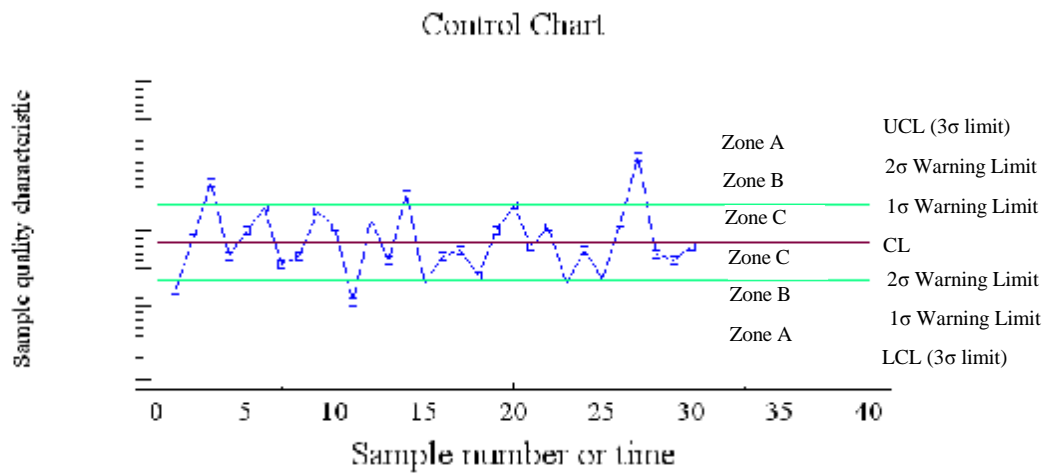


Διάγραμμα 1.4: Γραφική παράσταση του μέσου μήκους ροής ARL για $W \sim N(10, (0.25)^2/2)$

Η χρήση του ARL ως μέτρου για την περιγραφή της απόδοσης ενός διαγράμματος ελέγχου έχει υποστεί αρκετή κριτική τα τελευταία χρόνια, γιατί το ARL που παρατηρείται στην πράξη διαφέρει συνήθως αρκετά από το “θεωρητικό” ARL (είτε είναι αρκετά μεγαλύτερο είτε είναι αρκετά μικρότερο). Αυτό συμβαίνει επειδή η κατανομή του μήκους ροής T είναι μια γεωμετρική κατανομή και συνεπώς η μέση τιμή της δεν μπορεί να θεωρηθεί ως αντιπροσωπευτικό μέτρο κεντρικής τάσης της κατανομής, ιδίως για μικρές τιμές του p , αφού σε αυτή την περίπτωση η διακύμανση της γεωμετρικής κατανομής είναι αρκετά μεγάλη. Έτσι κρίνεται αναγκαίο η μέση τιμή της T ($E(T) = ARL$) να συνοδεύεται από την διακύμανση της T ή ακόμα και από ποσοστιαία σημεία της.

1.4 Κανόνες ευαισθητοποίησης ενός διαγράμματος ελέγχου τύπου *Shewhart*

Από μελέτες έχει διαπιστωθεί ότι για μικρές μετατοπίσεις του μέσου m της W (έως και 1.5σ) το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής ARL του διαγράμματος ελέγχου τύπου *Shewhart* δεν είναι ικανοποιητικό (είναι αρκετά μεγάλος αριθμός). Για να κάνουμε περισσότερο ευαίσθητο ένα διάγραμμα ελέγχου τύπου *Shewhart* με 3σ όρια ως προς την ικανότητά του να ανιχνεύει πιο γρήγορα εκτός ελέγχου διεργασίες, εκτός από τη σχεδίαση των ορίων ελέγχου, σχεδιάζουμε επίσης και προειδοποιητικά όρια εσωτερικά των ορίων ελέγχου, όπως δείχνει και το διάγραμμα που ακολουθεί.



Διάγραμμα 1.5: Διάγραμμα ελέγχου τύπου *Shewhart* και προειδοποιητικά όρια

Τα προειδοποιητικά όρια χρησιμοποιούνται για την ανάπτυξη κανόνων ευαισθητοποίησης (*sensitizing rules*), οι οποίοι περιγράφουν ενδεχόμενα που σχετίζονται με την εμφάνιση ειδικών ακολουθιών σημείων (*patterns*) σε ένα διάγραμμα ελέγχου. Στην περίπτωση που συμβεί το ενδεχόμενο που περιγράφει ο κανόνας, τότε θεωρούμε ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου, χωρίς απαραίτητα όμως να έχουμε κάποιο σημείο του διαγράμματος εκτός των ορίων ελέγχου (*UCL* και *LCL*).

Οι σημαντικότεροι κανόνες που χρησιμοποιούνται για την ευαισθητοποίηση ενός διαγράμματος ελέγχου τύπου *Shewhart* είναι οι ακόλουθοι:

- Κανόνας 1. Ένα σημείο εκτός των ορίων ελέγχου
- Κανόνας 2. Δύο από τρία συνεχόμενα σημεία στην Ζώνη *A* (σε μια από τις δύο ζώνες *A*)
- Κανόνας 3. Τέσσερα από πέντε συνεχόμενα σημεία πέραν της Ζώνης *C* (σε μια από τις δύο περιοχές)
- Κανόνας 4. Οκτώ συνεχόμενα σημεία στην ίδια μεριά (επάνω ή κάτω) της κεντρικής γραμμής
- Κανόνας 5. Έξι συνεχόμενα σημεία σε αύξουσα ή φθίνουσα διάταξη

- Κανόνας 6. Δεκαπέντε συνεχόμενα σημεία στην ολική Ζώνη C
- Κανόνας 7. Δεκατέσσερα συνεχόμενα σημεία σε εναλλασσόμενη μορφή “πάνω-κάτω”
- Κανόνας 8. Οκτώ συνεχόμενα σημεία εκτός της ολικής Ζώνης C
- Κανόνας 9. Οποιαδήποτε ασυνήθιστη ή μη τυχαία ακολουθία σημείων
- Κανόνας 10. Ένα ή περισσότερα σημεία κοντά στα προειδοποιητικά όρια ή τα όρια ελέγχου

Οι πρώτοι τέσσερις κανόνες είναι γνωστοί ως *Western Electric Rules*. Η χρήση πολλών κανόνων ταυτοχρόνως θα πρέπει να γίνεται με ιδιαίτερη προσοχή, γιατί ένας μεγάλος αριθμός λανθασμένων συναγερμών συνεπάγεται και με αντίστοιχο αριθμό λανθασμένων διακοπών της παραγωγικής διαδικασίας για την ανίχνευση ειδικών αιτιών μεταβλητότητας, με αποτέλεσμα την αύξηση του κόστους παραγωγής.

Επίσης η χρήση πολλών κανόνων ταυτοχρόνως καθιστά εξαιρετικά δύσκολο τον υπολογισμό του μέσου μήκους ροής *ARL* του διαγράμματος ελέγχου. Η πρώτη σημαντική εργασία που αντιμετώπισε το προαναφερθέν πρόβλημα με ένα ενοποιητικό τρόπο ήταν των Champ και Woodall (1987). Στην επόμενη παράγραφο θα αναπτύξουμε την αναγκαία θεωρία για τον υπολογισμό του μέσου μήκους ροής *ARL* ενός διαγράμματος ελέγχου τύπου *Shewhart* υπό την παρουσία κανόνων ευαισθητοποίησης χρησιμοποιώντας μια παρόμοια προσέγγιση που βασίζεται σε πρόσφατες εργασίες των Fu (1996), Koutras (1997), και Antzoulakos (1999, 2001)).

1.5 Ανάλυση του χρόνου αναμονής ενός σχηματισμού

Έστω $\{X_t, t \geq 1\}$ μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με σύνολο τιμών $A = \{a_1, a_2, \dots, a_l\}$, $l \geq 2$ και έστω ότι

$$P(X_t = a_i) = p_i, \quad 1 \leq i \leq l, \quad t \geq 1.$$

Η τυχαία μεταβλητή X_t θα καλείται t -οστή δοκιμή. Ας θεωρήσουμε επίσης ένα ενδεχόμενο E για το οποίο μπορούμε να απαντήσουμε στο ερώτημα αν αυτό έχει συμβεί στην t -οστή δοκιμή της πεπερασμένης ακολουθίας X_1, X_2, \dots, X_t και ότι το ενδεχόμενο E συμβαίνει τουλάχιστον μια φορά με πιθανότητα 1 σε μια επαρκώς μεγάλη ακολουθία δοκιμών. Επίσης ας συμβολίσουμε με T την τυχαία μεταβλητή που δηλώνει το χρόνο αναμονής εμφάνισης του ενδεχομένου E για πρώτη φορά ($R_T = \{1, 2, \dots\}$).

Στην περίπτωση που το ενδεχόμενο E μπορεί να γραφεί αναλυτικά συναρτήσει στοιχείων του συνόλου $A = \{a_1, a_2, \dots, a_l\}$ (για παράδειγμα $E = \{a_1 a_3 a_1\}$ που είναι ένα απλός σχηματισμός ή $E = E_1 \cup E_2 = \{a_1 a_3 a_1\} \cup \{a_1 a_3 a_2\} = \{a_1 a_3 a_1, a_1 a_3 a_2\}$ που είναι ένας σύνθετος σχηματισμός), η μελέτη της τυχαίας μεταβλητής T μπορεί να γίνει με χρήση της μεθόδου της εμφύτευσης της τυχαίων μεταβλητών X_t σε μια ομογενή διακριτή αλυσίδα *Markov*. Στη συνέχεια θα περιγράψουμε τη λειτουργία αυτής της μεθόδου δανειζόμενοι στοιχεία από τις εργασίες των Fu (1996), Koutras and Alexandrou (1997) και Antzoulakos (2001).

1.5.1 Η περίπτωση του απλού σχηματισμού

Έστω ότι $A = \{a_1, a_2, \dots, a_l\}$ και $E = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_m}$. Αποσυνθέτουμε το ενδεχόμενο E στα ακόλουθα m κομμάτια (όσο και το μήκος του ενδεχομένου)

$$2 \equiv a_{i_1}, \quad 3 \equiv a_{i_1} a_{i_2}, \quad \dots, \quad m+1 \equiv a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_m}$$

(τους αριθμούς $2, 3, \dots, m$ τους αποκαλούμε ταμπέλες των αντίστοιχων κομματιών). Ορίζουμε μια διακριτή ομογενή αλυσίδα *Markov* $\{Y_t, t \geq 1\}$ με χώρο καταστάσεων $\Omega = \{1, 2, \dots, m, m+1\}$, όπου η κατάσταση $m+1$ είναι απορροφητική. Η $\{Y_t, t \geq 1\}$ λειτουργεί παράλληλα με την ακολουθία $\{X_t, t \geq 1\}$ και οι καταστάσεις στις οποίες μεταβαίνει σε κάθε βήμα της καθορίζονται σύμφωνα με τον ακόλουθο κανόνα.

Κανόνας: Η Y_t βρίσκεται στην κατάσταση j , $2 \leq j \leq m+1$, αν το μέγιστο τελικό κομμάτι της ακολουθίας $X_1 X_2, \dots, X_t$, μετρώντας προς τα πίσω, αντιστοιχεί στο κομμάτι $a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_j}$,

δηλαδή $X_{t-j+1} = a_{i_1}, X_{t-j+2} = a_{i_2}, \dots, X_t = a_{i_j}$. Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση καθορίζουμε ως τιμή της Y_t την τιμή 1.

Οι αρχικές πιθανότητες

$$\boldsymbol{\pi}'_1 = [p_1, p_2, \dots, p_m, p_{m+1}] = [P(Y_1 = 1), P(Y_1 = 2), \dots, P(Y_1 = m), P(Y_1 = m+1)]$$

και ο πίνακας πιθανοτήτων μεταπήδησης πρώτης τάξης

$$\mathbf{P} = (p_{ij})_{(m+1) \times (m+1)} = \left[\begin{array}{cccccc|c} p_{11} & p_{12} & \mathbf{L} & p_{1j} & \mathbf{L} & p_{1m} & p_{1,m+1} \\ p_{21} & p_{22} & \mathbf{L} & p_{2j} & \mathbf{L} & p_{2m} & p_{2,m+1} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & & \mathbf{M} & & \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ p_{i1} & p_{i2} & \mathbf{L} & p_{ij} & \mathbf{L} & p_{im} & p_{i,m+1} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & & \mathbf{M} & & \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ p_{m1} & p_{m2} & \mathbf{L} & p_{mj} & \mathbf{L} & p_{mm} & p_{m,m+1} \\ \hline 0 & 0 & \mathbf{L} & 0 & \mathbf{L} & 0 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R} & (\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{1} \\ \mathbf{0}' & 1 \end{array} \right]_{(m+1) \times (m+1)}$$

της αλυσίδας μπορούν να προκύψουν εύκολα συναρτήσεις των πιθανοτήτων

$$P(X_t = a_i) = p_i, \quad 1 \leq i \leq l.$$

Σύμφωνα με τα προαναφερθέντα, αν ισχύει ότι $Y_n = m+1$, τότε έχει συμβεί το ενδεχόμενο $\{T \leq n\}$ δηλαδή

$$P(T \leq n) = P(Y_n = m+1), \quad n = 1, 2, \dots$$

Συνεπώς μπορούμε να γράψουμε ότι

$$P(T \leq n) = P(Y_n = m+1) = \boldsymbol{\pi}'_1 \mathbf{P}^{n-1} \mathbf{e}_{m+1}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

όπου $\mathbf{e}_{m+1} = (0, 0, \dots, 0, 1)'$.

Επίσης

$$P(T > n) = 1 - P(T \leq n) = P(Y_n \neq m+1) = \boldsymbol{\pi}'_1 \mathbf{P}^{n-1} (\mathbf{1} - \mathbf{e}_{m+1}) \quad n = 1, 2, \dots$$

Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι

$$\mathbf{P}^n = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}^n & (\mathbf{I} - \mathbf{R}^n) \mathbf{1} \\ \hline \mathbf{0}' & 1 \end{array} \right], \quad n = 1, 2, \dots,$$

οπότε μπορούμε να γράψουμε ότι

$$P(T > n) = \boldsymbol{\alpha}'_1 \mathbf{R}^{n-1} \mathbf{1} \quad n = 1, 2, \dots,$$

όπου

$$\boldsymbol{\alpha}'_1 = [p_1, p_2, \dots, p_m] = [P(Y_1 = 1), P(Y_1 = 1), \dots, P(Y_1 = m)].$$

Για τη μέση τιμή και τη διακύμανση της τυχαίας μεταβλητής T έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα: Η ροπογεννήτρια $M(s)$, η μέση τιμή $E(T)$ και η δεύτερη ροπή $E(T^2)$ της τυχαίας μεταβλητής T δίνονται από τις σχέσεις

$$(i) \quad M(s) = E(e^{sT}) = e^s [1 + (e^s - 1) \boldsymbol{\alpha}'_1 (\mathbf{I} - e^s \mathbf{R})^{-1} \mathbf{1}]$$

$$(ii) \quad E(T) = 1 + \boldsymbol{\alpha}'_1 (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} \mathbf{1}$$

$$(iii) \quad E(T^2) = 1 + \boldsymbol{\alpha}'_1 (3\mathbf{I} - \mathbf{R}) (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-2} \mathbf{1}$$

Απόδειξη: Για τη ροπογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής T έχουμε τα ακόλουθα

$$M(s) = E(e^{sT}) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{sn} P(T = n) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{sn} [P(T > n-1) - P(T > n)]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} e^{sn} P(T > n-1) - \sum_{n=1}^{\infty} e^{sn} P(T > n) = e^s + \sum_{n=2}^{\infty} e^{sn} P(T > n-1) - \sum_{n=1}^{\infty} e^{sn} P(T > n)$$

$$\begin{aligned}
&= e^s + \sum_{n=1}^{\infty} e^{s(n+1)} P(T > n) - \sum_{n=1}^{\infty} e^{sn} P(T > n) = e^s + e^s \sum_{n=1}^{\infty} e^{sn} P(T > n) - \sum_{n=1}^{\infty} e^{sn} P(T > n) \\
&= e^s + e^s \sum_{n=1}^{\infty} e^{sn} P(T > n) - \sum_{n=1}^{\infty} e^{sn} P(T > n) = e^s + (e^s - 1) \sum_{n=1}^{\infty} e^{sn} P(T > n) \\
&= e^s + (e^s - 1) \sum_{n=1}^{\infty} e^{sn} \mathbf{a}'_1 \mathbf{R}^{n-1} \mathbf{1} = e^s + e^s (e^s - 1) \mathbf{a}'_1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} (e^s \mathbf{R})^n \right) \mathbf{1} \\
&= e^s [1 + (e^s - 1) \mathbf{a}'_1 (\mathbf{I} - e^s \mathbf{R})^{-1} \mathbf{1}].
\end{aligned}$$

Η μέση τιμή $E(T)$ και η δεύτερη ροπή $E(T^2)$ της τυχαίας μεταβλητής T προκύπτουν εύκολα από τις σχέσεις

$$E(T) = \left. \frac{d}{ds} M(s) \right|_{s=0}, \quad E(T^2) = \left. \frac{d^2}{ds^2} M(s) \right|_{s=0}$$

κάνοντας χρήση της ιδιότητας

$$\frac{d}{ds} (\mathbf{I} - e^s \mathbf{R})^{-1} = e^s \mathbf{R} (\mathbf{I} - e^s \mathbf{R})^{-2}.$$

Αξίζει να σημειώσουμε ότι η μέση τιμή $E(T)$ μπορεί να προκύψει και ως ακολούθως:

$$E(T) = \sum_{n=0}^{\infty} P(T > n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P(T > n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{a}'_1 \mathbf{R}^{n-1} \mathbf{1} = 1 + \mathbf{a}'_1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{R}^n \right) \mathbf{1} = 1 + \mathbf{a}'_1 (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} \mathbf{1}.$$

Παράδειγμα: Έστω ότι $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $E = \{a_1 a_3 a_1\}$ και

$$P(X_i = a_i) = p_i = i/6, \quad 1 \leq i \leq 3.$$

Τότε $m = 4$ και $2 \equiv a_1$, $3 \equiv a_1 a_3$, $4 \equiv a_1 a_3 a_1$.

Στην περίπτωση που παρατηρηθεί η ακολουθία

$$X_1 X_2 X_3 X_4 X_5 X_6 X_7 \dots = a_2 a_1 a_1 a_3 a_1 a_3 a_2 \dots,$$

τότε έχουμε ότι $T = 5$ και

$$Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 Y_5 Y_6 Y_7 \dots = 1223444\dots$$

Οι αρχικές πιθανότητες είναι ίσες με

$$\boldsymbol{\pi}'_1 = [p_1, p_2, p_3, p_4] = [P(Y_1 = 1), P(Y_1 = 2), P(Y_1 = 3), P(Y_1 = 4)] = [1 - p_1, p_1, 0, 0] = [5/6, 1/6, 0, 0]$$

και ο πίνακας πιθανοτήτων μεταπήδησης πρώτης τάξης είναι ο ακόλουθος

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1-p_1 & p_1 & 0 & 0 \\ p_2 & p_1 & p_3 & 0 \\ 1-p_1 & 0 & 0 & p_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/6 & 1/6 & 0 & 0 \\ 2/6 & 1/6 & 3/6 & 0 \\ 5/6 & 0 & 0 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R} & (\mathbf{I}-\mathbf{R})\mathbf{1} \\ \hline \mathbf{0}' & 1 \end{array} \right].$$

Επίσης

$$\boldsymbol{\alpha}'_1 = [p_1, p_2, p_3] = [5/6, 1/6, 0, 0]$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 5/6 & 1/6 & 0 \\ 2/6 & 1/6 & 3/6 \\ 5/6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P(T > n) = \boldsymbol{\alpha}'_1 \mathbf{R}^{n-1} \mathbf{1} = [5/6, 1/6, 0, 0] \begin{bmatrix} 5/6 & 1/6 & 0 \\ 2/6 & 1/6 & 3/6 \\ 5/6 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$M(s) = e^s [1 + (e^s - 1) \boldsymbol{\alpha}'_1 (\mathbf{I} - e^s \mathbf{R})^{-1} \mathbf{1}] = e^s \left(1 + (e^s - 1) \frac{72 + 5e^s}{72 - 72e^s + 6e^{2s} - 5e^{3s}} \right)$$

$$E(T) = 1 + \boldsymbol{\alpha}'_1 (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} \mathbf{1} = 78$$

$$E(T^2) = 1 + \boldsymbol{\alpha}'_1 (3\mathbf{I} - \mathbf{R})(\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-2} \mathbf{1} = 11802.$$

1.5.2 Η περίπτωση του σύνθετου σχηματισμού

Στην περίπτωση που το ενδεχόμενο E είναι σύνθετο δηλαδή

$$E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_r,$$

όπου τα ενδεχόμενα E_i ($1 \leq i \leq r$) είναι απλά, μπορούμε να εφαρμόσουμε τη γενική μέθοδο που περιγράψαμε στην Παράγραφο 1.5.1 με την ακόλουθη διαφοροποίηση ως προς την αποσύνθεση του ενδεχομένου E σε κομμάτια (η υπόλοιπη φιλοσοφία παραμένει η ίδια). Αποσυνθέτουμε κάθε απλό ενδεχόμενο σε κομμάτια. Από το σύνολο των κομματιών που προκύπτουν, απομακρύνουμε τυχόν επαναλήψεις δηλαδή από τα κομμάτια που εμφανίζονται περισσότερες από μια φορές κρατάμε μόνο ένα. Επίσης για να μειωθούν οι ταμπέλες που θα χρησιμοποιήσουμε για την κατασκευή του πίνακα πιθανοτήτων μεταπήδησης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κοινή ταμπέλα (μια ταμπέλα) για τις r το πλήθος ταμπέλες που οδηγούν στην εμφάνιση του ενδεχομένου E (κάθε μια από αυτές αντιστοιχεί στο πλήρες μήκος του ενδεχομένου E_i ($1 \leq i \leq r$)).

Η εφαρμογή της παραπάνω μεθοδολογίας θα παρουσιαστεί στην επόμενη παράγραφο, όπου θα μελετήσουμε το μέσο μήκος ροής στα διαγράμματα ελέγχου τύπου *Shewhart* με χρήση κανόνων ευαισθητοποίησης.

1.6 Υπολογισμός του μέσου μήκους ροής στα διαγράμματα ελέγχου τύπου *Shewhart* υπό την παρουσία κανόνων ευαισθητοποίησης.

Οι κανόνες ευαισθητοποίησης ενός διαγράμματος ελέγχου τύπου *Shewhart*, στο οποίο απεικονίζεται μια τυχαία μεταβλητή W με εντός ελέγχου μέσο m και τυπική απόκλιση S ($LCL = m - LS$, $UCL = m + LS$), μπορούν να κωδικοποιηθούν με τον ακόλουθο τρόπο σύμφωνα με τους Champ και Woodall (1987). Ο συμβολισμός $T(k, m, a, b)$ θα δηλώνει ότι k από m διαδοχικά σημεία του διαγράμματος βρίσκονται στο διάστημα $(m + aS, m + bS)$, $a < b$. Έτσι στο σύννητες διάγραμμα ελέγχου τύπου *Shewhart* ($L = 3$) ο Κανόνας 1 της Παραγράφου 1.4, ο οποίος είναι ο κλασικός κανόνας λήψης ένδειξης εκτός ελέγχου διεργασίας, μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$C_1 = \{T(1,1,-\infty,-3), T(1,1,3,\infty)\}$$

και ο Κανόνας 2 της Παραγράφου 1.4 μπορεί να αποδοθεί ως

$$C_2 = \{T(2,3,-3,-2), T(2,3,2,3)\}.$$

Οι Champ και Woodall (1987) μελέτησαν τους ακόλουθους κανόνες ευαισθητοποίησης:

$$1^{\text{ος}} \text{ Κανόνας: } C_1 = \{T(1,1,-\infty,-3), T(1,1,3,\infty)\}$$

$$2^{\text{ος}} \text{ Κανόνας: } C_2 = \{T(2,3,-3,-2), T(2,3,2,3)\}$$

$$3^{\text{ος}} \text{ Κανόνας: } C_3 = \{T(4,5,-3,-1), T(4,5,1,3)\}$$

$$4^{\text{ος}} \text{ Κανόνας: } C_4 = \{T(8,8,-3,0), T(8,8,0,3)\}$$

$$5^{\text{ος}} \text{ Κανόνας: } C_5 = \{T(2,2,-3,-2), T(2,2,2,3)\}$$

$$6^{\text{ος}} \text{ Κανόνας: } C_6 = \{T(5,5,-3,-1), T(5,5,1,3)\}$$

$$7^{\text{ος}} \text{ Κανόνας } C_7 = \{T(1,1,-\infty,-3.09), T(1,1,3.09, \infty)\}$$

$$8^{\text{ος}} \text{ Κανόνας: } C_8 = \{T(2,3,-3.09,-1.96), T(2,3,-1.96,3.09)\}$$

$$9^{\text{ος}} \text{ Κανόνας: } C_9 = \{T(8,8,-3.09,0), T(8,8,0,3.09)\} .$$

Με το συμβολισμό

$$C_{ij\dots k} = C_i \cup C_j \cup \dots \cup C_k$$

δηλώνεται ένα διάγραμμα ελέγχου τύπου *Shewhart* το οποίο δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας, όταν συμβεί τουλάχιστον ένα ενδεχόμενο από αυτά που περιγράφουν οι κανόνες C_i, C_j, \dots, C_k . Ο κανόνας $C_{ij\dots k}$ ονομάζεται σύνθετος κανόνας.

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τον πίνακα που έδωσαν οι Champ και Woodall (1987) για το μέσο μήκος ροής ενός διαγράμματος ελέγχου τύπου *Shewhart* ($LCL = m - 3s$, $UCL = m + 3s$) υπό την παρουσία κανόνων ευαισθητοποίησης και υπό την υπόθεση ότι η απεικονιζόμενη τυχαία μεταβλητή W ακολουθεί κατανομή $N(m + ds, s^2)$ (εντός ελέγχου μέσος και τυπική απόκλιση m και s αντιστοίχως).

Πίνακας 1.3. Μέσο μήκος ροής για διαγράμματα ελέγχου τύπου *Shewhart* με χρήση κανόνων ευαισθητοποίησης

ARL														
C_1	C_7	C_{12}	C_{78}	C_{15}	C_{13}	C_{14}	C_{79}	C_{16}	C_{123}	C_{156}	C_{124}	C_{789}	C_{134}	C_{1456}
370.40	499.62	225.44	239.75	278.03	166.05	152.73	170.41	349.38	132.89	266.82	122.05	122.05	105.78	133.21
308.43	412.01	177.56	185.48	222.59	120.70	110.52	120.87	279.53	97.86	208.82	89.14	89.14	76.01	6.37
200.08	262.19	104.46	106.15	134.17	63.88	59.76	63.80	165.48	52.93	119.47	48.71	48.71	40.95	51.94
119.67	153.86	57.92	57.80	75.27	33.99	33.64	35.46	89.07	28.70	63.70	27.49	27.49	23.15	29.01
71.55	90.41	33.12	32.75	42.96	19.78	21.07	22.09	48.40	16.93	34.96	17.14	17.14	14.62	17.94
43.89	54.55	20.01	19.70	25.61	12.66	15.58	15.26	27.74	10.95	20.43	11.73	11.73	10.19	12.19
27.82	34.03	12.81	12.62	16.06	8.84	10.90	11.42	17.05	6.78	12.83	8.61	8.61	7.66	8.90
18.25	21.97	8.69	8.58	10.60	6.62	8.60	9.05	11.28	5.76	8.65	6.63	6.63	6.08	6.84
12.38	14.68	6.21	6.16	7.36	5.24	7.03	7.44	7.98	4.54	6.22	5.27	5.27	5.01	5.42
8.69	10.15	4.66	4.64	5.36	4.33	5.85	6.24	5.97	3.73	4.71	4.27	4.27	4.24	4.39
6.30	7.25	3.65	3.65	4.07	3.68	4.89	5.25	4.67	3.14	3.72	3.50	3.50	3.65	3.61
4.72	5.36	2.96	2.98	3.22	3.18	4.08	4.41	3.78	2.70	3.04	2.91	2.91	3.17	3.01
3.65	4.08	2.48	2.51	2.64	2.78	3.38	3.67	3.14	2.35	2.55	2.47	2.47	2.77	2.54
2.90	3.20	2.13	2.17	2.22	2.43	2.81	3.05	2.64	2.07	2.19	2.13	2.13	2.43	2.19
2.38	2.59	1.87	1.91	1.93	2.14	2.35	2.54	2.26	1.85	1.91	1.87	1.87	2.14	1.91
2.00	2.15	1.68	1.71	1.70	1.89	1.99	2.14	1.95	1.67	1.70	1.68	1.68	1.89	1.70

δ: Μετατόπιση του εντός ελέγχου μέσου m σε μονάδες τυπικής απόκλισης

Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα έχουμε ότι το μέσο μήκος ροής μειώνεται για μικρές μετατοπίσεις του μέσου, στην περίπτωση που χρησιμοποιούμε τον κανόνα C_1 (ή τον ισοδύναμο κανόνα C_7) μαζί με ένα τουλάχιστον επιπρόσθετο κανόνα ευαισθητοποίησης, σε σχέση με την αποκλειστική χρησιμοποίηση του κλασικού κανόνα C_1 . Παρατηρούμε επίσης ότι σε αυτή την περίπτωση, μειώνεται και το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής που ισοδυναμεί με αύξηση των λανθασμένων συναγερωμένων. Ωστόσο μπορούμε να επιτύχουμε οποιοδήποτε εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής αυξάνοντας απλά το πλάτος (L) των ορίων ελέγχου.

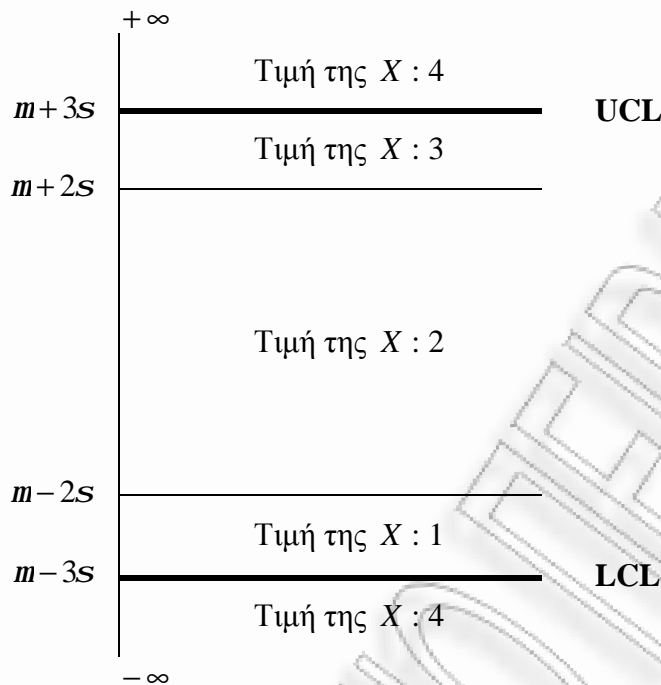
Στη συνέχεια θα επιδείξουμε τη μεθοδολογία της Παραγράφου 1.5 για την εξαγωγή των τιμών του μέσου μήκους ροής του Πίνακα 1.3 που αντιστοιχούν στους κανόνες C_{12} και C_{14} . Επιπρόσθετα θα δώσουμε και τη διακύμανση του μήκους ροής.

1.6.1 Μελέτη του σύνθετου κανόνα C_{12}

Ας θεωρήσουμε ένα διάγραμμα ελέγχου τύπου *Shewhart* με 3σ όρια ελέγχου, στο οποίο απεικονίζονται διαδοχικές τιμές $\{W_t, t \geq 1\}$ της τυχαίας μεταβλητής W η οποία έχει εντός ελέγχου κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$. Ο σύνθετος κανόνας C_{12} μπορεί να γραφεί ως

$$C_{12} = C_1 \cup C_2 = \{T(1,1, -\infty, -3), T(1,1, 3, \infty), T(2,3, -3, -2), T(2,3, 2, 3)\}.$$

Χωρίζουμε το διάγραμμα ελέγχου τύπου *Shewhart* με 3σ όρια ελέγχου στις ζώνες που φαίνονται στο ακόλουθο διάγραμμα.



Διάγραμμα 1.6: Ζώνες του διαγράμματος ελέγχου *Shewhart* για τον κανόνα C_{12} .

Για κάθε τιμή της τυχαίας μεταβλητής W που απεικονίζεται στο διάγραμμα ελέγχου, για την οποία υποθέτουμε ότι ακολουθεί κατανομή $N(m+ds, s^2)$ (για $d=0$ έχουμε εντός ελέγχου διεργασία), ορίζουμε μια διακριτή τυχαία μεταβλητή X με τιμές που καθορίζονται στον ακόλουθο πλαίσιο (δείτε επίσης Διάγραμμα 1.6).

Τιμή της W	Τιμή της X
$(m-3s, m-2s)$	1
$(m-2s, m+2s)$	2
$(m+2s, m+3s)$	3
$(-\infty, m-3s) \cup (m+3s, +\infty)$	4

Η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X καθορίζεται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$p_1 = P(X = 1) = P(m - 3s < W < m - 2s) = \Phi(-2 - d) - \Phi(-3 - d)$$

$$p_2 = P(X = 2) = P(m - 2s < W < m + 2s) = \Phi(2 - d) - \Phi(-2 - d)$$

$$p_3 = P(X = 3) = P(m + 2s < W < m + 3s) = \Phi(3 - d) - \Phi(2 - d)$$

$$p_4 = P(X = 4) = P(-\infty < W < m - 3s) + P(m + 3s < W < +\infty) = \Phi(-3 - d) + 1 - \Phi(3 - d).$$

Είναι προφανές από την παραπάνω ανάλυση, ότι η διαδικασία απεικόνισης των σημείων $\{W_t, t \geq 1\}$ στο διάγραμμα ελέγχου είναι ισοδύναμη με μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών $\{X_t, t \geq 1\}$ που κατανέμονται όπως η τυχαία μεταβλητή X που ορίσαμε παραπάνω. Ο αριθμός των σημείων που πρέπει να απεικονιστούν στο διάγραμμα ελέγχου, έως ότου πάρουμε ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας, ισοδυναμεί με τον αριθμό T των δοκιμών της ακολουθίας $\{X_t, t \geq 1\}$ που πρέπει να εκτελεστούν έως ότου συμβεί για πρώτη φορά το σύνθετο ενδεχόμενο

$$E = \{4, 11, 121, 131, 33, 313, 323\},$$

οπότε και θα έχουμε ότι $ARL = E(T)$.

Για τη μελέτη της τυχαίας μεταβλητής T ακολουθούμε τη μεθοδολογία της Παραγράφου 1.5.

Αποσυνθέτοντας το ενδεχόμενο E παίρνουμε τα ακόλουθα κομμάτια

$$4, 1, 11, 1, 12, 121, 1, 13, 131, 3, 33, 3, 31, 313, 3, 32, 323.$$

Απομακρύνουμε τα κομμάτια που επαναλαμβάνονται καταλήγουμε στα ακόλουθα

$$4, 1, 11, 12, 121, 13, 131, 3, 33, 31, 313, 32, 323.$$

Εισάγουμε το κομμάτι 2 (είναι το κομμάτι που αντιστοιγήθηκε στην ταμπέλα 1 της γενικής μεθοδολογίας) και καταλήγουμε στα ακόλουθα κομμάτια

$$2, 4, 1, 11, 12, 121, 13, 131, 3, 33, 31, 313, 32, 323.$$

Στα παραπάνω κομμάτια αντιστοιχούμε τις ταμπέλες

$1 \equiv 1, 2 \equiv 2, 3 \equiv 3, 4 \equiv 12, 5 \equiv 13, 6 \equiv 31, 7 \equiv 32, 8 \equiv \{4, 11, 121, 131, 33, 313, 323\}$
όπου στην ταμπέλα 8 (η οποία θα παίζει το ρόλο της απορροφητικής κατάστασης)

αντιστοιχούμε όλα τα κομμάτια που οδηγούν στην εμφάνιση του ενδεχομένου E .

Για την αντίστοιχη αλυσίδα Markov $\{Y_t, t \geq 1\}$ έχουμε ότι οι αρχικές πιθανότητες είναι οι ακόλουθες

$$\boldsymbol{\pi}'_1 = [p_1, p_2, \dots, p_7, p_8] = [P(Y_1 = 1), P(Y_1 = 2), \dots, P(Y_1 = 7), P(Y_1 = 8)] = [p_1, p_2, p_3, 0, 0, 0, 0, p_4]$$

και ο πίνακας πιθανοτήτων μεταπήδησης πρώτης τάξης είναι ίσος με

$$\mathbf{P} = \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 0 & p_2 & p_3 & 0 & 0 & p_1 + p_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & p_2 & p_3 + p_4 \\ 0 & p_2 & p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 + p_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & p_1 + p_3 + p_4 \\ 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & p_1 + p_3 + p_4 \\ p_1 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 + p_4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R} & (\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{1} \\ \mathbf{0}' & 1 \end{array} \right]_{8 \times 8}$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα της Παραγράφου 1.5 λαμβάνουμε τον ακόλουθο πίνακα (δείτε Παράρτημα, Πρόγραμμα 1).

Πίνακας 1.4: Μέση τιμή και διακύμανση του μήκους ροής για τον κανόνα C_{12}

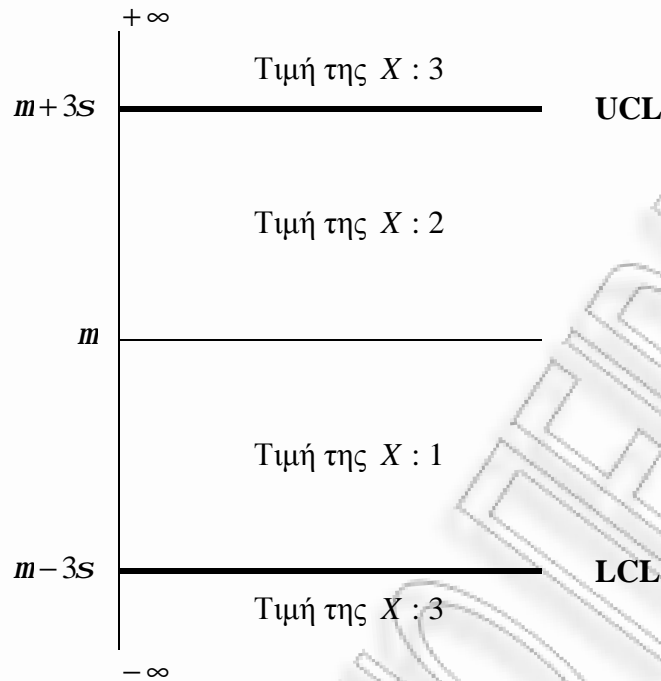
δ	ARL= $E(T)$	$E(T^2)$	Var(T)
0	225.438	101167.	50344.2
0.2	177.555	62662.	31136.2
0.4	104.456	21582.2	10671.1
0.6	57.9203	6573.97	3219.21
0.8	33.1243	2117.4	1020.18
1.	20.005	755.022	354.821
1.2	12.8134	300.402	136.219
1.4	8.6891	132.933	57.4327
1.6	6.21293	64.9727	26.3722
1.8	4.6601	34.7886	13.0721
2.	3.64636	20.2351	6.93909
2.2	2.95979	12.6808	3.92044
2.4	2.47886	8.49225	2.3475
2.6	2.13133	6.02783	1.48524
2.8	1.87291	4.49719	0.98939
3.	1.67577	3.49797	0.68977

1.6.2 Μελέτη του σύνθετου κανόνα C_{14}

Ο σύνθετος κανόνας C_{14} μπορεί να γραφεί ως

$$C_{14} = C_1 \cup C_4 = \{T(1,1,-\infty,-3), T(1,1,3,\infty), T(8,8,-3,0), T(8,8,0,3)\}.$$

Χωρίζουμε το διάγραμμα ελέγχου τύπου *Shewhart* με 3σ όρια ελέγχου στις ζώνες που φαίνονται στο ακόλουθο διάγραμμα.



Διάγραμμα 1.7: Ζώνες του διαγράμματος ελέγχου τύπου *Shewhart* για τον κανόνα C_{14} .

Για κάθε τιμή της τυχαίας μεταβλητής W που απεικονίζεται στο διάγραμμα ελέγχου, για την οποία υποθέτουμε ότι ακολουθεί κατανομή $N(m+ds, s^2)$ (για $d=0$ έχουμε εντός ελέγχου διεργασία), ορίζουμε μια διακριτή τυχαία μεταβλητή X με τιμές που καθορίζονται στον ακόλουθο πλαίσιο (δείτε επίσης Διάγραμμα 1.7).

Τιμή της W	Τιμή της X
$(m-3s, m)$	1
$(m, m+3s)$	2
$(-\infty, m-3s) \cup (m+3s, +\infty)$	3

Η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X καθορίζεται από τις σχέσεις

$$p_1 = P(X = 1) = P(m-3s < W < m) = \Phi(-d) - \Phi(-3-d)$$

$$p_2 = P(X = 2) = P(m < W < m+3s) = \Phi(3-d) - \Phi(-d)$$

$$p_3 = P(X = 3) = P(-\infty < W < m-3s) + P(m+3s < W < +\infty) = \Phi(-3-d) + 1 - \Phi(3-d).$$

Είναι προφανές από την παραπάνω ανάλυση ότι η διαδικασία απεικόνισης των σημείων $\{W_t, t \geq 1\}$ στο διάγραμμα ελέγχου είναι ισοδύναμη με μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών $\{X_t, t \geq 1\}$ που κατανέμονται όπως η τυχαία μεταβλητή X που ορίσαμε παραπάνω. Ο αριθμός των σημείων που πρέπει να απεικονιστούν στο διάγραμμα ελέγχου έως ότου πάρουμε ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας ισοδυναμεί με τον αριθμό T των δοκιμών της ακολουθίας $\{X_t, t \geq 1\}$ που πρέπει να εκτελεστούν έως ότου συμβεί για πρώτη φορά το σύνθετο ενδεχόμενο

$$E = \{3, 11111111, 22222222\}.$$

Αποσυνθέτοντας το ενδεχόμενο E παίρνουμε τα ακόλουθα 17 κομμάτια

$$\begin{aligned} & 3, \\ & 1, 11, 111, 1111, 11111, 111111, 1111111, 11111111, \\ & 2, 22, 222, 2222, 22222, 222222, 2222222, 22222222, 222222222. \end{aligned}$$

Στα παραπάνω κομμάτια αντιστοιχούμε τις ταμπέλες

$$\begin{aligned} 1 &\equiv 1, & 2 &\equiv 11, & 3 &\equiv 111, & 4 &\equiv 1111, & 5 &\equiv 11111, & 6 &\equiv 111111, & 7 &\equiv 1111111, \\ 8 &\equiv 2, & 9 &\equiv 22, & 10 &\equiv 222, & 11 &\equiv 2222, & 12 &\equiv 22222, & 13 &\equiv 222222, & 14 &\equiv 2222222, \\ 15 &\equiv \{3, 11111111, 22222222\}, \end{aligned}$$

όπου η ταμπέλα 15 θα παίζει το ρόλο της απορροφητικής κατάστασης.

Για την αντίστοιχη αλυσίδα *Markov* $\{Y_t, t \geq 1\}$, έχουμε ότι οι αρχικές πιθανότητες είναι οι ακόλουθες

$$\begin{aligned} \pi'_1 &= [p_1, p_2, \dots, p_7, p_8, p_9, \dots, p_{14}, p_{15}] \\ &= [P(Y_1 = 1), P(Y_1 = 2), \dots, P(Y_1 = 7), P(Y_1 = 8), P(Y_1 = 9), \dots, P(Y_1 = 14), P(Y_1 = 15)] \\ &= [p_1, 0, \dots, 0, p_2, 0, \dots, 0, p_3], \end{aligned}$$

ενώ ο πίνακας πιθανοτήτων μεταπήδησης πρώτης τάξης είναι ίσος με

$$\mathbf{P} = \left[\begin{array}{cccccc|cccccc|c}
 0 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 \\
 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 \\
 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 + p_3 \\
 \hline
 p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 \\
 p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 \\
 p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & p_3 \\
 p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & p_3 \\
 p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & p_3 \\
 p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & p_3 \\
 p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 + p_3 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c}
 \mathbf{R} & (\mathbf{I}-\mathbf{R})\mathbf{1} \\
 \hline
 \mathbf{0}' & 1
 \end{array} \right]_{15 \times 15}$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα της Παραγράφου 1.5 λαμβάνουμε τον ακόλουθο πίνακα (δείτε Παράρτημα, Πρόγραμμα 2).

Πίνακας 1.5: Μέση τιμή και διακύμανση του μήκους ροής για τον κανόνα C_{14}

δ	ARL= $E(T)$	$E(T^2)$	Var (T)
0	152.73	45416.7	22090.2
0.2	110.517	23496.4	11282.3
0.4	59.7597	6628.85	3057.63
0.6	33.636	1984.12	852.741
0.8	21.0738	725.694	281.59
1.	14.5781	322.683	110.162
1.2	10.8962	169.082	50.3545
1.4	8.60405	100.827	26.7977
1.6	7.03341	66.0921	16.6232
1.8	5.85131	46.0497	11.8118
2.	4.89071	33.0677	9.14867
2.2	4.07616	23.8631	7.24798
2.4	3.38291	17.0305	5.58642
2.6	2.80753	11.9685	4.08624
2.8	2.34751	8.34255	2.83175
3.	1.99233	5.85427	1.88487

Κλείνοντας το παρόν κεφάλαιο τονίζουμε ότι οι Πίνακες 1.4 και 1.5 βρίσκονται σε πλήρη συμφωνία με αντίστοιχα αποτελέσματα του Πίνακα 1.3 των Champ και Woodall (1987). Επίσης η μελέτη των υπόλοιπων σύνθετων κανόνων του Πίνακα 1.3 μπορεί να γίνει με αντίστοιχο τρόπο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Μέσο μήκος ροής στα διαγράμματα ελέγχου τύπου *CUSUM*

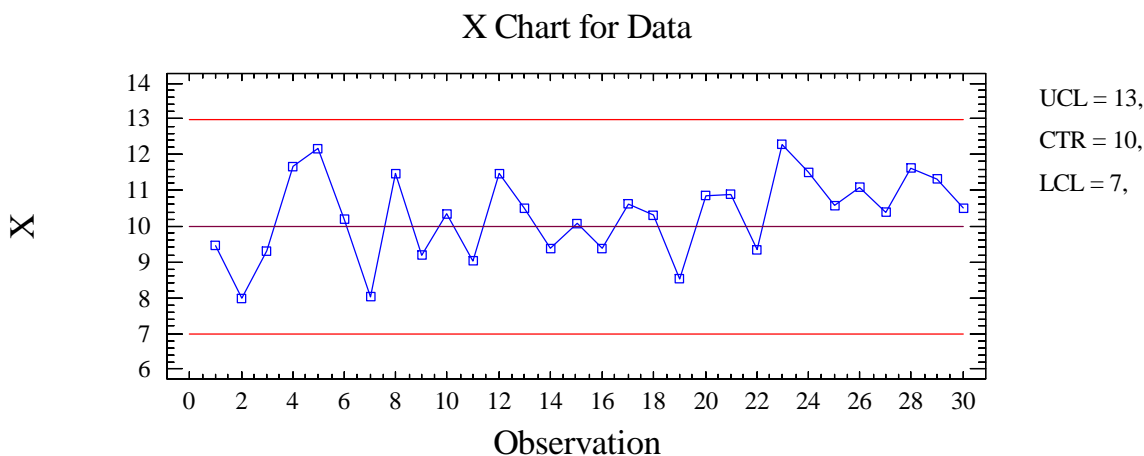
2.1 Διάγραμμα συσσωρευμένων αποκλίσεων

Προτού δώσουμε τον ορισμό ενός διαγράμματος ελέγχου συσσωρευμένων αθροισμάτων (*cumulative sum control chart or CUSUM control chart*), κρίνεται αναγκαίο να δώσουμε ένα παράδειγμα για να περιγράψουμε την ανάγκη εισαγωγής ενός τέτοιου τύπου διαγράμματος ελέγχου. Ας θεωρήσουμε μια εντός ελέγχου διεργασία, η οποία παράγει προϊόντα στα οποία η τιμή X ενός ποιοτικού χαρακτηριστικού τους ακολουθεί την κατανομή $N(10, 1)$. Στον Πίνακα 2.1 δίνονται 30 τιμές (δείτε Montgomery (2001)) της τυχαίας μεταβλητής X για τις οποίες γνωρίζουμε ότι οι πρώτες 20 προέρχονται από την κατανομή $N(10, 1)$, ενώ οι υπόλοιπες 10 προέρχονται από την κατανομή $N(11, 1)$. Μπορούμε λοιπόν να ισχυριστούμε τα πρώτα 20 δεδομένα προέρχονται από μια εντός ελέγχου διεργασία (με εντός ελέγχου μέσο $m_0 = 10$ και τυπική απόκλιση $s = 1$), ενώ τα υπόλοιπα 10 προέρχονται από την ίδια διεργασία, η οποία όμως είναι πλέον εκτός ελέγχου λόγω μετατόπισης του μέσου στη θέση $m_1 = 11$.

Πίνακας 2.1: Δεδομένα για την επίδειξη ενός διαγράμματος συσσωρευμένων αποκλίσεων

Παρατήρηση	X_i	Παρατήρηση	X_i
1	9.45	16	9.37
2	7.99	17	10.62
3	9.29	18	10.31
4	11.66	19	8.52
5	12.16	20	10.84
6	10.18	21	10.90
7	8.04	22	9.33
8	11.46	23	12.29
9	9.20	24	11.50
10	10.34	25	10.60
11	9.03	26	11.08
12	11.47	27	10.38
13	10.51	28	11.62
14	9.40	29	11.31
15	10.08	30	10.52

Κατασκευάζοντας το \bar{X} διάγραμμα ελέγχου (Διάγραμμα 2.1) για την παρακολούθηση του μέσου επιπέδου της διεργασίας ($CL = m_0 = 10$, $UCL = m_0 + 3s = 13$, $LCL = m_0 - 3s = 7$) παρατηρούμε ότι το \bar{X} διάγραμμα ελέγχου δε δίνει ένδειξη ότι το μέσο επίπεδο της διεργασίας μετατοπίστηκε σε υψηλότερο επίπεδο. Το γεγονός αυτό δικαιολογείται επειδή η μετατόπιση του μέσου της διεργασίας είναι της τάξης μιας τυπικής απόκλισης ($m_1 - m_0 = 1 \cdot s$) και όπως γνωρίζουμε τα διαγράμματα ελέγχου τύπου *Shewhart* είναι αποτελεσματικά για μετατοπίσεις του μέσου της τάξης τουλάχιστον δύο τυπικών αποκλίσεων. Ωστόσο θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι από τα τελευταία 10 σημεία του διαγράμματος τα 9 από αυτά βρίσκονται υπεράνω της κεντρικής γραμμής.



Διάγραμμα 2.1: \bar{X} διάγραμμα ελέγχου για τα δεδομένα του Πίνακα 2.1

Όταν μας ενδιαφέρει να ανιχνεύσουμε μικρές μετατοπίσεις του μέσου της διεργασίας, τότε χρησιμοποιούμε διαγράμματα συσσωρευμένων αποκλίσεων. Στα διαγράμματα των συσσωρευμένων αποκλίσεων, η ανίχνευση μετατοπίσεων του μέσου επιπέδου της διεργασίας επιτυγχάνεται με την απεικόνιση των σημείων (t, D_t) , $t \geq 1$, τα οποία έχουν ως τεταγμένες D_t συσσωρευμένες αποκλίσεις των παρατηρήσεων X_i από μια τιμή C δηλαδή

$$D_t = \sum_{i=1}^t (X_i - C) = X_t - C + D_{t-1}, \quad t \geq 1, \quad D_0 = 0.$$

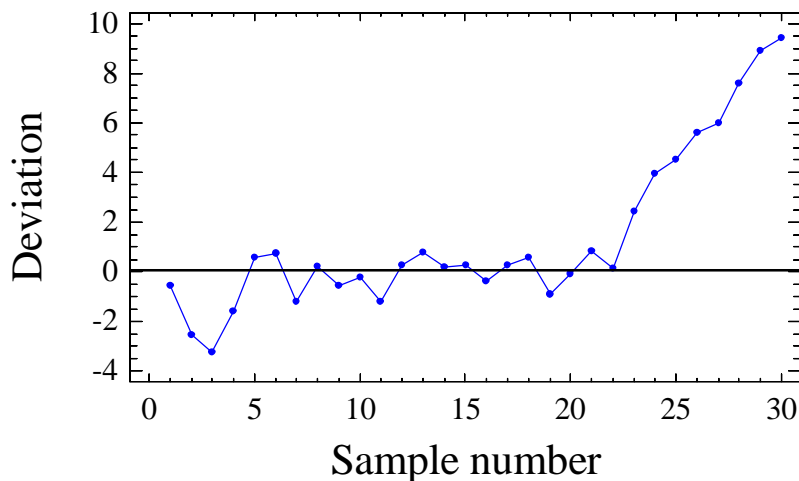
Στον ακόλουθο πίνακα δίνονται οι τεταγμένες D_i για τα δεδομένα του Πίνακα 2.1 για $C = m_0 = 10$.

Πίνακας 2.2: Συσσωρευμένες αποκλίσεις των δεδομένων του Πίνακα 2.1 για $C = m_0 = 10$

Παρατήρηση	X_i	$X_i - C$	D_i	Παρατήρηση	X_i	$X_i - C$	D_i
1	9.45	-0.55	-0.55	16	9.37	-0.63	-0.37
2	7.99	-2.01	-2.56	17	10.62	0.62	0.25
3	9.29	-0.71	-3.27	18	10.31	0.31	0.56
4	11.66	1.66	-1.61	19	8.52	-1.48	-0.92
5	12.16	2.16	0.55	20	10.84	0.84	-0.08
6	10.18	0.18	0.73	21	10.90	0.90	0.82
7	8.04	-1.96	-1.23	22	9.33	-0.67	0.15
8	11.46	1.46	0.23	23	12.29	2.29	2.44
9	9.20	-0.80	-0.57	24	11.50	1.50	3.94
10	10.34	0.34	-0.23	25	10.60	0.60	4.54
11	9.03	-0.97	-1.20	26	11.08	1.08	5.62
12	11.47	1.47	0.27	27	10.38	0.38	6.00
13	10.51	0.51	0.78	28	11.62	1.62	7.62
14	9.40	-0.60	0.18	29	11.31	1.31	8.93
15	10.08	0.08	0.26	30	10.52	0.52	9.45

Έτσι λοιπόν το διάγραμμα των συσσωρευμένων αποκλίσεων που προκύπτει είναι το ακόλουθο.

Plot of cumulative deviations vs sample number



Διάγραμμα 2.2: Διάγραμμα συσσωρευμένων αποκλίσεων των δεδομένων του Πίνακα 2.1 για $C = m_0 = 10$

Επειδή η τιμή C είναι ίση με τον εντός ελέγχου μέσο m_0 της διεργασίας, αναμένουμε ότι όσο η διεργασία παραμένει εντός ελέγχου οι συσσωρευμένες αποκλίσεις θα πρέπει να κινούνται γύρω από την τιμή 0. Από τη στιγμή που ο μέσος μετατοπιστεί στη θέση $m_1 > m_0$ (ή στη θέση $m_1 < m_0$), τότε οι συσσωρευμένες αποκλίσεις D_t αναμένεται να παρουσιάσουν μια ανοδική (καθοδική) κίνηση. Συνεπώς, η μετατόπιση του μέσου της διεργασίας στα διαγράμματα των συσσωρευμένων αποκλίσεων ανιχνεύεται από την εμφάνιση ανοδικής ή καθοδικής τάσης των σημείων του διαγράμματος.

Ωστόσο πρέπει να παρατηρήσουμε ότι το παραπάνω διάγραμμα δεν έχει όρια ελέγχου. Για την κατασκευή παρόμοιων διαγραμμάτων με όρια ελέγχου έχουν προταθεί δύο προσεγγίσεις. Η προσέγγιση μέσω διαστημάτων απόφασης (*decision interval approach*), η οποία θα παρουσιαστεί στην επόμενη παράγραφο, και η προσέγγιση μέσω της V-μάσκας (*V-mask approach*), η οποία δεν θα παρουσιαστεί αφού έχει αρκετά μειονεκτήματα (δείτε Montgomery (2001)). Για τη μέθοδο της V-μάσκας ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στις εργασίες των Barnard (1959), Johnson (1961), Oakland (1997) και Montgomery (1991).

2.2. Διαγράμματα ελέγχου τύπου CUSUM

Ας θεωρήσουμε μία εντός ελέγχου διεργασία, η οποία παράγει προϊόντα στα οποία η τιμή X ενός ποιοτικού χαρακτηριστικού τους την οποία θέλουμε να παρακολουθήσουμε, έχει μέση τιμή m_0 και τυπική απόκλιση s . Από τη διεργασία λαμβάνονται μεμονωμένες παρατηρήσεις X_t , $t \geq 1$ και μας ενδιαφέρει να ανιχνεύσουμε μετατοπίσεις του μέσου της διεργασίας της μορφής $m_1 = m_0 \pm ds$ ($d > 0$). Τα δίπλευρα (συμμετρικά) διαγράμματα ελέγχου τύπου CUSUM (*two-sided CUSUMS*) με διαστήματα απόφασης εισήχθησαν από τον Page (1954). Στα διαγράμματα αυτά απεικονίζονται ταυτόχρονα οι δύο ακόλουθες στατιστικές συναρτήσεις

$$S_t^+ = \max[0, X_t - (m_0 + K) + S_{t-1}^+], \quad S_0^+ = 0,$$

$$S_t^- = \min[0, X_t - (m_0 - K) + S_{t-1}^-], \quad S_0^- = 0.$$

Οι τιμές των ποσοτήτων S_0^+ και S_0^- ονομάζονται τιμές εκκίνησης (*headstart values*). Η ποσότητα K (≥ 0) ονομάζεται τιμή αναφοράς (*reference value*) και η πιο συνηθισμένη τιμή της δίνεται από τη σχέση

$$K = \frac{dS}{2} = \frac{|m_1 - m_0|}{2} = kS, \quad k = d/2.$$

Η ποσότητα S_i^+ συσσωρεύει τις αποκλίσεις των παρατηρήσεων X_i από την ποσότητα $m_0 + K$, από τη στιγμή που θα εμφανιστεί θετική απόκλιση, και συνεπώς μπορεί να θεωρηθεί κατάλληλη για τον έλεγχο της υπόθεσης

$$H_0 : m = m_0 \quad \text{—} \quad H_1^+ : m = m_1 = m_0 + dS, \quad d > 0,$$

αφού μεγάλες θετικές τιμές της S_i^+ οδηγούν στην αποδοχή της υπόθεσης H_1^+ .

Ανάλογα, η ποσότητα S_i^- συσσωρεύει τις αποκλίσεις των παρατηρήσεων X_i από την ποσότητα $m_0 - K$, από τη στιγμή που θα εμφανιστεί αρνητική απόκλιση, και συνεπώς η ποσότητα S_i^- μπορεί να θεωρηθεί κατάλληλη για τον έλεγχο της υπόθεσης

$$H_0 : m = m_0 \quad \text{—} \quad H_1^- : m = m_1 = m_0 - dS, \quad d > 0,$$

αφού μικρές αρνητικές τιμές της S_i^- οδηγούν στην αποδοχή της υπόθεσης H_1^- .

Η απόφασή μας για το ποια από τις δύο εναλλακτικές υποθέσεις H_1^+ και H_1^- θα αποδεχθούμε ή όχι σε κάθε βήμα της διαδικασίας, θα εξαρτηθεί από το αν ισχύει η σχέση

$$S_i^+ > H \quad \text{ή} \quad \text{η σχέση} \quad S_i^- < -H,$$

όπου H μια θετική σταθερά ($H > 0$).

Η πιο συνηθισμένη τιμή της H είναι η εξής

$$H = hS, \quad h = 4,5.$$

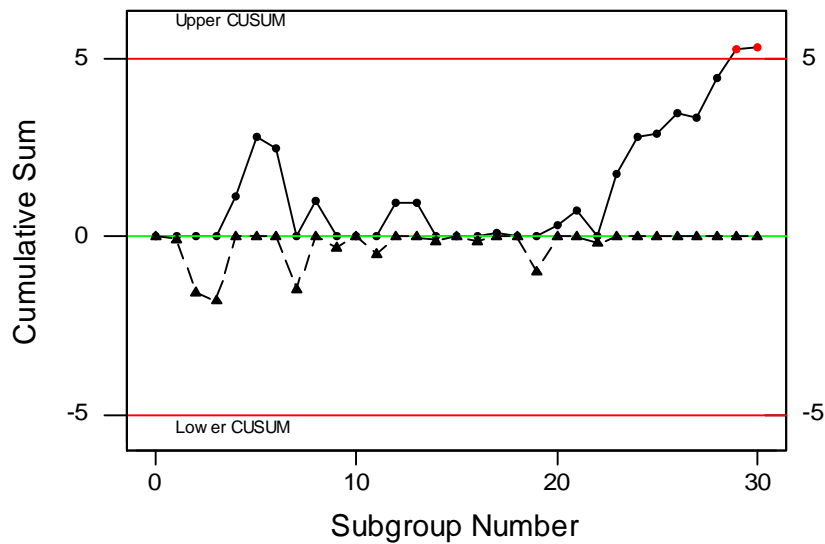
Η ποσότητα H ονομάζεται διάστημα απόφασης (*decision interval*). Φυσικά αν μία από τις δύο εναλλακτικές υποθέσεις H_1^+ ή H_1^- γίνει αποδεκτή, τότε θεωρούμε ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου λόγω μετατόπισης του μέσου της διεργασίας σε υψηλότερο ή χαμηλότερο επίπεδο αντίστοιχα.

Για τα δεδομένα του Πίνακα 2.1 έχουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα για τις ποσότητες S_7^+ και S_7^- για $K = |m_1 - m_0|/2 = |10 - 11|/2 = 0.5$ (επίσης $k = 0.5$).

Πίνακας 2.3: Συσσωρευμένα αθροίσματα των δεδομένων του Πίνακα 1.1 για $K = 0.5$

Παρατήρηση	X_t	$X_t - (m_0 + K)$	S_t^+	$X_t - (m_0 - K)$	S_t^-
1	9.45	-1.05	0	-0.05	-0.05
2	7.99	-2.51	0	-1.51	-1.56
3	9.29	-1.21	0	-0.21	-1.77
4	11.66	1.16	1.16	2.16	0
5	12.16	1.66	2.82	2.66	0
6	10.18	-0.32	2.50	0.68	0
7	8.04	-2.46	0.04	-1.46	-1.46
8	11.46	0.96	1	1.96	0
9	9.20	-1.30	0	-0.30	-0.30
10	10.34	-0.16	0	0.84	0
11	9.03	-1.47	0	-0.47	-0.47
12	11.47	0.97	0.97	1.97	0
13	10.51	0.01	0.98	1.01	0
14	9.40	-1.10	0	-0.10	-0.10
15	10.08	-0.42	0	0.58	0
16	9.37	-1.13	0	-0.13	-0.13
17	10.62	0.12	0.12	1.12	0
18	10.31	-0.19	0	0.81	0
19	8.52	-1.98	0	-0.98	-0.98
20	10.84	0.34	0.34	1.34	0
21	10.90	0.40	0.74	1.40	0
22	9.33	-1.17	0	-0.17	-0.17
23	12.29	1.79	1.79	2.79	0
24	11.50	1.00	2.79	2.00	0
25	10.60	0.10	2.89	1.10	0
26	11.08	0.58	3.47	1.58	0
27	10.38	-0.12	3.35	0.88	0
28	11.62	1.12	4.47	2.12	0
29	11.31	0.81	5.28	1.81	0
30	10.52	0.02	5.30	1.02	0

Για $H = 5S = 5$ (επίσης $h = 5$), το διάγραμμα ελέγχου τύπου *CUSUM* (S_t^+ και S_t^- στο ίδιο διάγραμμα) είναι το ακόλουθο.



Διάγραμμα 2.3: Διάγραμμα ελέγχου τύπου *CUSUM* για τα δεδομένα του Πίνακα 2.1 για $K = 0.5$ και $H = 5$

Από το παραπάνω διάγραμμα προκύπτει ότι $S_{29}^+ > 5$ και συνεπώς η διεργασία είναι εκτός ελέγχου λόγω της μετατόπισης του μέσου της διεργασίας σε υψηλότερο επίπεδο.

Στη γενική περίπτωση, τόσο η τιμή αναφοράς K όσο και το διάστημα απόφασης H , μπορούν να διαφέρουν σε ένα δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου τύπου *CUSUM*. Τότε λέμε ότι έχουμε ένα μη συμμετρικό διάγραμμα ελέγχου τύπου *CUSUM*. Επίσης οι τιμές εκκίνησης S_0^+ και S_0^- δεν είναι υποχρεωτικό να είναι ίσες με το 0. Όταν $0 < S_0^+ < H$ ή/και $-H < S_0^- < 0$ μιλάμε για εφαρμογή της μεθόδου της άμεσης αρχικής αντίδρασης (*fast initial response*). Συνεπώς στη γενική περίπτωση σε ένα δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου τύπου *CUSUM* απεικονίζονται οι ποσότητες

$$S_t^+ = \max[0, X_t - (m_0 + K^+) + S_{t-1}^+], \quad 0 \leq S_0^+ < H^+,$$

$$S_t^- = \min[0, X_t - (m_0 + K^-) + S_{t-1}^-], \quad H^- < S_0^- \leq 0,$$

όπου $K^+ > 0$, $H^+ > 0$, $K^- < 0$, $H^- < 0$.

Το μη συμμετρικό διάγραμμα ελέγχου τύπου *CUSUM* δίνει σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας τη χρονική στιγμή t , αν $S_t^+ > H^+ > 0$ ή $S_t^- < H^- < 0$. Φυσικά αν μας ενδιαφέρει να ανιχνεύσουμε αποκλειστικά μετατοπίσεις του μέσου σε υψηλότερο (χαμηλότερο) επίπεδο στο διάγραμμα ελέγχου τύπου *CUSUM* θα απεικονιστεί μόνο η ποσότητα S_t^+ (S_t^-) και το διάστημα απόφασης H^+ (H^-). Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι έχουμε μονόπλευρα διαγράμματα ελέγχου συσσωρευμένων αθροισμάτων (*one-sided CUSUM*).

Στη βιβλιογραφία αναφέρονται επίσης και τα τυποποιημένα διαγράμματα ελέγχου *CUSUM* όπου χρησιμοποιούνται οι τυποποιημένες τιμές

$$Y_t = \frac{X_t - m_0}{s}, \quad t \geq 1.$$

Σε αυτή την περίπτωση είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι σε ένα δίπλευρο συμμετρικό διάγραμμα ελέγχου τύπου *CUSUM* απεικονίζονται οι στατιστικές συναρτήσεις

$$S_t^+ = \max[0, Y_t - k + S_{t-1}^+]$$

$$S_t^- = \min[0, Y_t + k + S_{t-1}^-]$$

και αν $S_t^+ > h$ ($S_t^- < -h$), τότε ο μέσος της διεργασίας έχει μετατοπιστεί σε υψηλότερο (χαμηλότερο) επίπεδο.

Τα διαγράμματα ελέγχου τύπου *CUSUM* μπορούν να χρησιμοποιηθούν και στην περίπτωση που δεν έχουμε μεμονωμένες παρατηρήσεις, αλλά δείγματα μεγέθους $n > 1$. Σε αυτή την περίπτωση η ποσότητα X_t θα πρέπει να αντικατασταθεί με την ποσότητα \bar{X}_t (δηλαδή με το μέσο του t δείγματος) και η ποσότητα s με την ποσότητα s/\sqrt{n} . Έτσι στο δίπλευρο συμμετρικό διάγραμμα ελέγχου τύπου *CUSUM* απεικονίζονται οι στατιστικές συναρτήσεις

$$S_t^+ = \max[0, \bar{X}_t - (m_0 + K) + S_{t-1}^+]$$

$$S_t^- = \min[0, \bar{X}_t - (m_0 - K) + S_{t-1}^-],$$

$$\text{όπου } K = k \frac{S}{\sqrt{n}}, \quad H = h \frac{S}{\sqrt{n}}.$$

2.3 Αντιστοιχία διαγραμμάτων ελέγχου τύπου *CUSUM* και ακολουθιακών ελέγχων

Έστω X_1, X_2, \dots ένα τυχαίο δείγμα από ένα πληθυσμό $f(x; J)$. Ο ακολουθιακός έλεγχος λόγω πιθανοφάνειας (*sequential probability ratio test*) που πρότεινε ο Wald (1947) για τον έλεγχο της υπόθεσης

$$H_0 : J = J_0 \quad \text{—} \quad H_1 : J = J_1,$$

όπου τα σφάλματα a (τύπου I) και b (τύπου II) είναι προκαθορισμένα, έχει ως ακολούθως:

Σχηματίζουμε σε κάθε βήμα ελέγχου $n \geq 1$ το λόγο των πιθανοφανειών

$$I_n(\mathbf{x}) \equiv I_n = \frac{L_n(\mathbf{x}; J_1)}{L_n(\mathbf{x}; J_0)} = \frac{\prod_{i=1}^n f(x_i; J_1)}{\prod_{i=1}^n f(x_i; J_0)}$$

και στη συνέχεια με τη βοήθεια δύο κατάλληλων κρίσιμων τιμών A και B , με $A < 1 < B$, αποφασίζουμε για την αποδοχή ή την μη αποδοχή της H_0 σε κάθε βήμα ελέγχου σύμφωνα με το ακόλουθο πλαίσιο.

Κατάσταση στο n -οστό βήμα ελέγχου	Απόφαση
$A < I_n < B$	Η δειγματοληψία συνεχίζεται
$I_n \leq A$	Αποδοχή της H_0
$I_n \geq B$	Αποδοχή της H_1

Για τις κρίσιμες τιμές A και B μπορεί να αποδειχθεί ότι ικανοποιούν τις σχέσεις

$$A \geq \frac{b}{1-a}, \quad B \leq \frac{1-b}{a},$$

ενώ στην πράξη χρησιμοποιούνται οι τιμές

$$A = \frac{b}{1-a}, \quad B = \frac{1-b}{a}.$$

Για τον έλεγχο

$$H_0 : m = m_0 \quad \text{—} \quad H_1^+ : m = m_1 = m_0 + ds, \quad d > 0,$$

με προκαθορισμένα σφάλματα a και b , που αφορά το μέσο ενός κανονικού πληθυσμού με γνωστή διακύμανση S^2 έχουμε ότι

$$I_n = \exp\left(\frac{d}{S} \sum_{i=1}^n (X_i - m_0) - \frac{nd^2}{2}\right).$$

Συνεπώς αποφασίζουμε για τον έλεγχο σύμφωνα με αυτά που δίνονται στο ακόλουθο πλαίσιο.

Κατάσταση στο n -οστό βήμα ελέγχου	Απόφαση
$\frac{S}{d} \left(\ln A + \frac{nd^2}{2} \right) < \sum_{i=1}^n (X_i - m_0) < \frac{S}{d} \left(\ln B + \frac{nd^2}{2} \right)$	Η δειγματοληψία συνεχίζεται
$\sum_{i=1}^n (X_i - m_0) \leq \frac{S}{d} \left(\ln A + \frac{nd^2}{2} \right)$	Αποδοχή της H_0
$\sum_{i=1}^n (X_i - m_0) \geq \frac{S}{d} \left(\ln B + \frac{nd^2}{2} \right)$	Αποδοχή της H_1^+

Για $K = \frac{sd}{2}$ το παραπάνω πλαίσιο παίρνει την ακόλουθη μορφή.

Κατάσταση στο n -οστό βήμα ελέγχου	Απόφαση
$\frac{S}{d} \ln A < \sum_{i=1}^n (X_i - (m_0 + K)) < \frac{S}{d} \ln B$	Η δειγματοληψία συνεχίζεται
$\sum_{i=1}^n (X_i - (m_0 + K)) \leq \frac{S}{d} \ln A$	Αποδοχή της H_0
$\sum_{i=1}^n (X_i - (m_0 + K)) \geq \frac{S}{d} \ln B$	Αποδοχή της H_1^+

Στον ποιοτικό έλεγχο δεν μας ενδιαφέρει η αποδοχή της H_0 (αφού μας ενδιαφέρει να ανιχνεύουμε μόνο εκτός ελέγχου διεργασίες). Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι στον ακολουθιακό έλεγχο έχουμε ότι $b \equiv 0$, οπότε $\ln B = \ln(1/a) = -\ln a$.

Έτσι λοιπόν θέτοντας $H = -\frac{S}{d} \ln a$, έχουμε ότι η H_1^+ γίνεται δεκτή στο n -οστό βήμα ελέγχου όταν για πρώτη φορά

$$\sum_{i=1}^n (X_i - (m_0 + K)) \geq H.$$

Είναι πλέον προφανές ότι το (άνω) μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου τύπου *CUSUM* μπορεί να θεωρηθεί σαν μια σειρά από Y το πλήθος ακολουθιακών ελέγχους λόγω πιθανοφάνειας με άνω όριο το H και κάτω όριο το 0, όπου όλοι οι όροι της σειράς εκτός από τον τελευταίο καταλήγουν στο κάτω όριο (δείτε Διάγραμμα 2.3).

Ανάλογα συμπεράσματα ισχύουν και για το δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου τύπου *CUSUM*, όπου ο ακολουθιακός έλεγχος που μας ενδιαφέρει είναι

$$H_1^- : m = m_1 = m_0 - ds, \quad H_0 : m = m_0, \quad H_1^+ : m = m_1 = m_0 + ds, \quad d > 0,$$

ο οποίος και μελετήθηκε από τον Armitage (1950) (για περισσότερες λεπτομέρειες δείτε (Αντζουλάκος (2003))).

2.4 Μέσο μήκος ροής στα διαγράμματα ελέγχου τύπου *CUSUM*

Για τον υπολογισμό του μέσου μήκους ροής *ARL* στα διαγράμματα ελέγχου τύπου *CUSUM* έχουν προταθεί δύο μεθοδολογίες (α) η μέθοδος των ολοκληρωτικών εξισώσεων και (β) και η μέθοδος των Μαρκοβιανών αλυσίδων. Η μέθοδος των ολοκληρωτικών εξισώσεων καταλήγει σε μια ακριβή ολοκληρωτική εξίσωση που ικανοποιεί το *ARL*, η οποία λύνεται με προσεγγιστικές μεθόδους. Η μέθοδος των Μαρκοβιανών αλυσίδων ξεκινάει με μια προσεγγιστική εξίσωση που ικανοποιεί το *ARL* για την οποία βρίσκεται ακριβής λύση.

2.4.1. Η μέθοδος των ολοκληρωτικών εξισώσεων

Στη μέθοδο των ολοκληρωτικών εξισώσεων, ως μέσο για τον υπολογισμό του *ARL* σε ένα (άνω) μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου τύπου *CUSUM*, έχουν αναφερθεί διάφοροι συγγραφείς. Ο πρώτος που χρησιμοποίησε αυτή τη μέθοδο ήταν ο Page (1954). Στην παράγραφο αυτή θα αναφερθούμε στις βασικότερες προσεγγίσεις που έχουν γίνει με αυτή τη μέθοδο.

Οι συμβολισμοί που θα χρησιμοποιήσουμε είναι οι ακόλουθοι:

$L(z)$: Μέσο μήκος ροής ενός (άνω) μονόπλευρου διαγράμματος ελέγχου τύπου *CUSUM* με τιμή εκκίνησης z , $0 \leq z < H$

$P(z)$: Πιθανότητα κατάληξης ενός μονοπατιού που ξεκινά από την τιμή z σε τιμή μικρότερη ή ίση με το 0

$N(z)$: Μέσος αριθμός δείγματος (*average sample number*) ενός μονοπατιού που ξεκινά από την τιμή z .

Σύμφωνα με αυτά που αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο, ένας ακολουθιακός έλεγχος που ξεκινά από την τιμή z είναι ένα μονοπάτι (*path*) σημείων του (άνω) μονόπλευρου διαγράμματος ελέγχου τύπου *CUSUM* που το πρώτο σημείο του μονοπατιού ξεκινά από τη τιμή z και το μονοπάτι καταλήγει είτε στο κάτω όριο 0 είτε στο άνω όριο H . Συνεπώς στην ποσότητα $L(z)$ αντιστοιχούν μια σειρά από Y το πλήθος μονοπατία,

όπου το πρώτο μονοπάτι ξεκινά από την τιμή z και τα υπόλοιπα ξεκινούν από τη τιμή 0, εκτός από το τελευταίο που καταλήγει στο άνω όριο H .

Αρχικά θα αναφερθούμε στην προσέγγιση που ακολούθησε ο Watherill (1977).

Η προσέγγιση του Watherill (1977)

Ο Watherill (1977), χρησιμοποίησε (άνω) μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου τύπου *CUSUM* με απεικονιζόμενη ποσότητα, την

$$S_t^+ = \max[0, X_t - C + S_{t-1}^+], \quad S_0^+ = z, \quad 0 \leq z < H$$

(αναγνωρίζουμε, σύμφωνα με αυτά που έχουμε ήδη αναφέρει, ότι ο Watherill (1977) έθεσε $C = m_0 + K$). Ο κανόνας απόφασης βάσει του οποίου μία διεργασία ανακηρύσσεται εκτός ελέγχου, λόγω μετατόπισης του μέσου σε υψηλότερο επίπεδο, είναι η στιγμή κατά την οποία το συσσωρευμένο άθροισμα S_t^+ για πρώτη φορά υπερβαίνει το άνω όριο ελέγχου H . Αν σε κάποια χρονική στιγμή t το συσσωρευμένο άθροισμα έχει τιμή ίση με z , $0 \leq z < H$, και η επόμενη παρατήρηση είναι η X , τότε το συσσωρευμένο άθροισμα την επόμενη χρονική στιγμή θα είναι ίσο με $z + X - c$, αν $z + X - C > 0$, ή θα είναι ίσο με 0, αν $z + X - C \leq 0$.

Ας θεωρήσουμε ένα ακολουθιακό έλεγχο που ξεκινά από την τιμή z . Τότε υπάρχουν οι κάτωθι περιπτώσεις για την κατάσταση που θα βρεθεί ο ακολουθιακός έλεγχος στο επόμενο βήμα ελέγχου.

Ενδεχόμενο	Συσσωρευμένο άθροισμα	Αποτέλεσμα
$X \leq C - z$	0	Ο έλεγχος καταλήγει στο κάτω όριο
$C - z < X < H + C - z$	$z + X - C$	Ο έλεγχος βρίσκεται σε εξέλιξη
$X \geq H + C - z$	H	Ο έλεγχος καταλήγει στο άνω όριο

Χρησιμοποιώντας τα ενδεχόμενα του παραπάνω πίνακα, ο Watherill (1977) κατέληξε σε ολοκληρωτικές εξισώσεις που ικανοποιούν οι ποσότητες $P(z)$, $N(z)$ και $L(z)$.

Ακολουθώς θα επιδείξουμε την ολοκληρωτική εξίσωση που ικανοποιεί η πιθανότητα $P(z)$. Συμβολίζοντας με $f(x)$ και $F(x)$ τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και τη συνάρτηση κατανομής της X , αντίστοιχα, έχουμε ότι το πρώτο ενδεχόμενο έχει πιθανότητα ίση με $F(C-z)$ να πραγματοποιηθεί. Αν συμβεί το δεύτερο ενδεχόμενο, τότε υπάρχει μια επιπλέον πιθανότητα ίση με $P(z+X-C)$ για κάθε $C-z < X < H+C-z$ να καταλήξει ο έλεγχος στο κάτω όριο. Το τρίτο ενδεχόμενο δεν έχει σχέση με την πιθανότητα $P(z)$.

Συνοψίζοντας έχουμε ότι σε ένα ακολουθιακό έλεγχο που ξεκινά από την τιμή z ισχύει ότι

$$P(z) = F(C-z) + \int_{C-z}^{H+C-z} P(z+x-C)f(x)dx$$

ή ισοδύναμα

$$P(z) = F(C-z) + \int_0^H P(y)f(y+C-z)dy .$$

Με παρόμοιο τρόπο προκύπτουν οι ολοκληρωτικές εξισώσεις

$$N(z) = 1 + \int_0^H N(y)f(y+C-z)dy$$

και

$$L(z) = 1 + L(0)F(C-z) + \int_0^H L(y)f(y+C-z)dy .$$

Αφού βρεθούν οι λύσεις για τα $P(0)$ και $N(0)$, τότε το $L(0)$ δίνεται από τη σχέση

$$L(0) = \frac{N(0)}{1 - P(0)} .$$

Η παραπάνω σχέση για το $L(0)$ μπορεί να δικαιολογηθεί και ως ακολούθως:

Έχουμε ήδη αναφέρει ότι το (άνω) μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου τύπου *CUSUM* μπορεί να θεωρηθεί σαν μια σειρά από Y το πλήθος ακολουθιακών ελέγχους λόγω πιθανοφάνειας με άνω όριο το H και κάτω όριο το 0 . Ο αριθμός Y των ακολουθιακών

ελέγχων που θα γίνουν (όλοι ξεκινούν από την τιμή 0), ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με

$$P(Y = y) = \{P(0)\}^{y-1} \{1 - P(0)\}, \quad y = 1, 2, \dots$$

Συνεπώς, κατά μέσο όρο, θα πραγματοποιηθούν $\{1 - P(0)\}^{-1}$ ακολουθιακοί έλεγχοι, εκ των οποίων μόνο ο τελευταίος καταλήγει στο άνω όριο H . Ο μέσος αριθμός δείγματος κάθε ακολουθιακού ελέγχου είναι ίσος με $N(0)$ ο οποίος μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$N(0) = \{1 - P(0)\}N_H(0) + P(0)N_0(0),$$

όπου $N_H(0)$ είναι ο μέσος αριθμός δείγματος ενός ακολουθιακού ελέγχου που καταλήγει στο άνω όριο H και $N_0(0)$ είναι ο μέσος αριθμός δείγματος ενός ακολουθιακού ελέγχου που καταλήγει στο κάτω όριο 0.

Άρα λοιπόν μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\begin{aligned} L(0) &= \{[1 - P(0)]^{-1} - 1\} \cdot N_0(0) + 1 \cdot N_H(0) \\ &= \frac{1}{1 - P(0)} [\{1 - P(0)\}N_H(0) + P(0)N_0(0)] = \frac{N(0)}{1 - P(0)}. \end{aligned}$$

Η προσέγγιση του Van Dobben de Bruyn (1968)

Ο Van Dobben de Bruyn (1968) έδωσε τη δική του εκδοχή για την ολοκληρωτική εξίσωση, η οποία ικανοποιεί το μέσο μήκος ροής $L(z)$. Χρησιμοποίησε μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου τύπου *CUSUM* με απεικονιζόμενη την παρακάτω ποσότητα

$$S_t^+ = \max[0, X_t - (m_0 + K) + S_{t-1}^+] = \max[0, Y_t + S_{t-1}^+], \quad S_0^+ = z, \quad 0 \leq z < H.$$

Ο κανόνας απόφασης βάσει του οποίου μια διεργασία ανακηρύσσεται εκτός ελέγχου, είναι η στιγμή κατά την οποία το συσσωρευμένο άθροισμα S_t^+ για πρώτη φορά υπερβαίνει το άνω όριο ελέγχου H . Η ολοκληρωτική εξίσωση που παρουσίασε ο Van Dobben de Bruyn (1968) για την ποσότητα $L(z)$ είναι

$$L(z) = 1 + L(0) \int_{-\infty}^{-z} dF(y) + \int_{-z}^{H-z} L(z+y) dF(y),$$

όπου $F(\cdot)$ συμβολίζει τη συνάρτηση κατανομής των παρατηρήσεων $Y_t = X_t - (m_0 + K)$ και τα ολοκληρώματα θεωρούνται ολοκληρώματα Stieltjes.

Στην περίπτωση που οι παρατηρήσεις Y_t προέρχονται από μια συνεχή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(\cdot)$, έχουμε ότι η παραπάνω σχέση παίρνει τη μορφή

$$L(z) = 1 + L(0) \int_{-\infty}^{-z} f(y) d(y) + \int_{-z}^{H-z} f(y) L(z+y) dy.$$

Ο Van Dobben de Bruyn (1968) έδωσε την ακόλουθη ερμηνεία στην παραπάνω ολοκληρωτική εξίσωση: το μέσο μήκος ροής $L(z)$ είναι ίσο με 1 (η επόμενη παρατήρηση) συν την πιθανότητα ότι η επόμενη παρατήρηση Y θα επιστρέψει το μονοπάτι κάτω από το 0 (δηλαδή όταν η επόμενη παρατήρηση Y βρεθεί στο διάστημα $(-\infty, -z)$) πολλαπλασιασμένη με το μέσο μήκος ροής από τη θέση 0 (δηλαδή $L(0)$), συν το ολοκλήρωμα πάνω στην πιθανότητα ότι το μονοπάτι στην επόμενη παρατήρηση θα βρεθεί στο σημείο $0 < z+y < H$ (δηλαδή όταν η επόμενη παρατήρηση Y βρεθεί στο διάστημα $(-z, H-z)$) πολλαπλασιασμένη με το μέσο μήκος ροής από τη θέση $z+y$ (δηλαδή $L(z+y)$).

Η παραπάνω ολοκληρωτική εξίσωση μπορεί να γραφεί επίσης στη μορφή

$$L(z) = 1 + L(0)F(-z) + \int_0^H f(x-z)L(x)dx, \quad 0 \leq z < H,$$

η οποία δεν είναι άλλη από την ολοκληρωτική εξίσωση που διατύπωσε ο Page (1954).

Ο Van Dobben de Bruyn (1968) έδωσε τα κάτω και άνω φράγματα για το $L(0)$, τα οποία είναι τα ακόλουθα

$$\frac{1}{1-F(0)} \leq L(0) \leq \frac{1}{1-F(H)}.$$

Επίσης παρουσίασε και τις ολοκληρωτικές εξισώσεις για τις ποσότητες $N(z)$ και $P(z)$ που είναι οι ακόλουθες

$$P(z) = F(-z) + \int_0^H P(x)f(x-z)dx, \quad 0 \leq z < H$$

και

$$N(z) = 1 + \int_0^H N(x)f(x-z)dx, \quad 0 \leq z < H.$$

Η προσέγγιση των Ewan και Kemp (1960)

Οι Ewan and Kemp (1960) χρησιμοποίησαν (άνω) μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου τύπου *CUSUM* με απεικονιζόμενη ποσότητα την

$$S_t^+ = \max[0, X_t - C + S_{t-1}^+], \quad S_0^+ = z, \quad 0 \leq z < H.$$

Ο κανόνας απόφασης βάσει του οποίου μια διεργασία ανακηρύσσεται εκτός ελέγχου είναι η στιγμή κατά την οποία το συσσωρευμένο άθροισμα S_t^+ για πρώτη φορά υπερβαίνει το άνω όριο ελέγχου H . Παρατηρούμε ότι η στατιστική S_t^+ είναι ίδια με αυτή της προσέγγισης του Wetherill (1977).

Οι Ewan and Kemp (1960) εξέτασαν την περίπτωση που οι παρατηρήσεις X_t προέρχονται από μια διακριτή μη αρνητική τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας $f(\cdot)$ και συνάρτηση κατανομής $F(\cdot)$. Σε αυτή την περίπτωση οι εξισώσεις που ικανοποιούν οι ποσότητες $P(z)$, $N(z)$ και $L(z)$ για ακέραιες τιμές των ποσοτήτων z , c και H είναι οι ακόλουθες:

$$P(z) = F(C-z) + \sum_{y=1}^{H-1} P(y)f(y+C-z)$$

$$N(z) = 1 + \sum_{y=1}^{H-1} N(y)f(y+C-z)$$

$$L(z) = 1 + L(0)F(C-z) + \sum_{y=1}^{H-1} L(y)f(y+C-z).$$

Οι παραπάνω εξισώσεις είναι ουσιαστικά οι εξισώσεις του Wetherill (1977) εκφρασμένες στη διακριτή περίπτωση.

Για τον υπολογισμό του μέσου μήκους ροής $L(0)$ που δίνεται από τη σχέση

$$L(0) = \frac{N(0)}{1-P(0)},$$

οι Ewan and Kemp (1960) έδωσαν την ακόλουθη προσεγγιστική λύση

$$P(0) \cong \frac{\begin{vmatrix} F(C) & K_2 \\ F(C-H) & K_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{vmatrix}}, \quad N(0) \cong \frac{\begin{vmatrix} b_1 & K_2 \\ b_2 & K_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{vmatrix}},$$

όπου

$$K_1 = 1 + \frac{e^{wH} [F(H+C)*-F(c)] - e^{-wC} [G(H+C)*-G(C)]}{1 - e^{wH}}$$

$$K_2 = \frac{e^{-wC} [G(H+C)*-G(C)] - F(H+C)*-F(C)}{1 - e^{wH}}$$

$$K_3 = \frac{e^{wH} \{F(C)*-F(C-H) - e^{-wC} [G(C)*-G(C-H)]\}}{1 - e^{wH}}$$

$$K_4 = 1 - \frac{F(C)*-F(C-H) - e^{-w(C-H)} [G(C)*-G(C-H)]}{1 - e^{wH}}$$

$$b_1 = 1 - \frac{K_2 H + M(H+C)*-M(C) - C[F(H+C)*-F(C)]}{m - C}$$

$$b_2 = 1 - \frac{(1 - K_4)H + M(C)^* - M(C - H) - (C - H)[F(C)^* - F(C - H)]}{m - C}$$

$$F(a) = \sum_{x=0}^a f(x), \quad M(a) = \sum_{x=0}^a xf(x), \quad G(a) = \sum_{x=0}^a e^{wx} f(x)$$

$$F(a)^* = F(a-1), \quad M(a)^* = M(a-1), \quad G(a)^* = G(a-1).$$

Σημειώνουμε ότι τιμή m είναι η διάμεσος της X , ενώ η ποσότητα w είναι μια πραγματική μη αρνητική ρίζα της εξίσωσης

$$\sum_{x=0}^{\infty} e^{ux} f(x) = e^{uC}.$$

Οι Ewan and Kemp (1960) έδωσαν επίσης και τις ακόλουθες προσεγγιστικές σχέσεις για τις ποσότητες $P(z)$ και $N(z)$

$$P(z) \cong \frac{[P(H) - P(0)e^{wH}] + [P(0) - P(H)e^{wz}]}{1 - e^{-wH}}$$

$$N(z) \cong \frac{N(H) - N(0)e^{wH} + \frac{H}{m - C} + \left(N(0) - N(H) - \frac{H}{m - C} \right) e^{wz} - z}{(m - C)(1 - e^{wH})}.$$

Οι παραπάνω τύποι ισχύουν και στην περίπτωση που οι παρατηρήσεις X_i προέρχονται από μια κανονική κατανομή (δείτε Kemp (1958)). Φυσικά σε αυτή την περίπτωση οι εξισώσεις που ικανοποιούν οι ποσότητες $P(z)$, $N(z)$ και $L(z)$ είναι οι εξισώσεις του Wetherill (1977), οπότε και οι ποσότητες $F(a)$, $M(a)$ και $G(a)$ δίνονται από τις σχέσεις

$$F(a) = \int_{-\infty}^a f(x)dx, \quad M(a) = \int_{-\infty}^a xf(x)dx, \quad G(a) = \int_{-\infty}^a e^{wx} f(x)dx.$$

Ακόμα έχουμε

$$F(a)^* = F(a), \quad M(a)^* = M(a), \quad G(a)^* = G(a),$$

όπου ποσότητα w , έχουμε μια πραγματική μη αρνητική ρίζα της εξίσωσης

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ux} f(x) dx = e^{uC}.$$

2.4.2 Η μέθοδος των αλυσίδων *Markov*

Ο υπολογισμός του μέσου μήκους ροής *ARL* σε ένα διάγραμμα ελέγχου τύπου *CUSUM* με χρήση αλυσίδων *Markov* προτάθηκε από τους Brook και Evans (1972). Οι Brook και Evans (1972) χρησιμοποίησαν (άνω) μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου τύπου *CUSUM* με απεικονιζόμενη ποσότητα την

$$S_t^+ = \max[0, X_t - C + S_{t-1}^+], \quad S_0^+ = z, \quad 0 \leq z < H.$$

Ο κανόνας απόφασης βάσει του οποίου μια διεργασία ανακηρύσσεται εκτός ελέγχου είναι η στιγμή κατά την οποία το συσσωρευμένο άθροισμα S_t^+ υπερβαίνει για πρώτη φορά το άνω όριο ελέγχου H . Η μέθοδος που πρότειναν οι Brook και Evans (1972) μπορεί να εφαρμοστεί για διακριτές αλλά και για συνεχείς τυχαίες μεταβλητές. Οι δύο περιπτώσεις θα παρουσιαστούν ξεχωριστά και ειδικά για τη συνεχή περίπτωση θα αναπτυχθούν τύποι που αναφέρονται στην εργασία των Champ και Ridgon (1991). Για περαιτέρω βελτιώσεις της μεθόδου των Brook και Evans (1972), ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στις εργασίες των Lucas and Crosier (1982) και Woodall (1983, 1984).

A. Διακριτές τυχαίες μεταβλητές - Brook και Evans (1972)

Σε αυτή την περίπτωση θεωρούμε ότι οι ποσότητες C και H είναι μη αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί και ότι οι παρατηρήσεις μας X_t κατανέμονται όπως η διακριτή τυχαία μεταβλητή X . Η διεργασία θεωρείται ότι είναι εντός ελέγχου για όσο διάστημα οι παρατηρούμενες τιμές X_t της X παραμένουν μικρότερες από την τιμή C και επομένως $S_t^+ = 0$ ($S_0^+ = 0$). Από τη στιγμή όμως που θα παρατηρηθεί θετική διαφορά $X_j - C$, για κάποιο j , τότε προβαίνουμε στον υπολογισμό του συσσωρευμένου αθροίσματος

$$S_t^+ = \sum_{i=j}^t (X_i - C), \quad t \geq j.$$

Αν το συσσωρευμένο άθροισμα επιστρέψει στην τιμή 0, τότε η διεργασία θεωρείται εντός στατιστικού ελέγχου. Αν όμως το συσσωρευμένο άθροισμα φθάσει ή ξεπεράσει το άνω όριο ελέγχου H , τότε η διεργασία θεωρείται εκτός στατιστικού ελέγχου. Συνεπώς, οι τεταγμένες του τυχαίου περιπάτου που ακολουθεί το συσσωρευμένο άθροισμα S_t^+ του διαγράμματος ελέγχου τύπου *CUSUM* με αρχική τιμή $S_0^+ = 0$, ανήκουν στο σύνολο $\{0,1,2,\dots,H-1\}$, εκτός από την τελευταία τεταγμένη που είναι τουλάχιστον ίση με H . Έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα παραπάνω συνιστούν μια διακριτή αλυσίδα Markov με χώρο καταστάσεων το σύνολο $\{0,1,2,\dots,H\}$, ενώ οι πιθανότητες μεταπήδησης p_{ij} από την κατάσταση i στην κατάσταση j δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$p_{i0} = P(i - C + X \leq 0) = P(X \leq C - i), \quad i = 0,1,\dots,H-1$$

$$p_{iH} = P(i - C + X \geq H) = P(X \geq C + H - i), \quad i = 0,1,\dots,H-1$$

$$p_{ij} = P(i - C + X = j) = P(X = C + j - i), \quad i = 0,1,\dots,H-1, \quad j = 1,2,\dots,H-1.$$

Σημειώνουμε ότι η κατάσταση H είναι απορροφητική κατάσταση.

Έτσι λοιπόν ο πίνακας των πιθανοτήτων μεταπήδησης διαστάσεων $(H+1) \times (H+1)$ είναι ο ακόλουθος

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & \mathbf{L} & p_{0j} & \mathbf{L} & p_{0,H-1} & p_{0H} \\ p_{10} & p_{11} & \mathbf{L} & p_{1j} & \mathbf{L} & p_{1,H-1} & p_{1H} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & & \mathbf{M} & & \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ p_{i0} & p_{i1} & \mathbf{L} & p_{ij} & \mathbf{L} & p_{i,H-1} & p_{iH} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & & \mathbf{M} & & \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ p_{H-1,0} & p_{H-1,1} & \mathbf{L} & p_{H-1,j} & \mathbf{L} & p_{H-1,H-1} & p_{H-1,H} \\ 0 & 0 & \mathbf{L} & 0 & \mathbf{L} & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(H+1) \times (H+1)}$$

και σε αναλυτική μορφή γίνεται

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P(X \leq C) & P(X = C+1) & \mathbf{L} & P(X = C+j) & \mathbf{L} & P(X = C+H-1) & P(X \geq C+H) \\ P(X \leq C-1) & P(X = C) & \mathbf{L} & P(X = C+j-1) & \mathbf{L} & P(X = C+H-2) & P(X \geq C+H-1) \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & & \mathbf{M} & & \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ P(X \leq C-i) & P(X = C+1-i) & \mathbf{L} & P(X = C+j-i) & \mathbf{L} & P(X = C+H-1-i) & P(X \geq C+H-i) \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & & \mathbf{M} & & \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ P(X \leq C-H+1) & P(X = C-H+2) & \mathbf{L} & P(X = C+j-H+1) & \mathbf{L} & P(X = C) & P(X \geq C+1) \\ 0 & 0 & \mathbf{L} & 0 & \mathbf{L} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Θέτοντας $p_r = P(X = C+r)$ και $F_r = P(X \leq C+r)$, ο παραπάνω πίνακας παίρνει τη μορφή που έδωσαν οι Brook και Evans (1972), η οποία είναι η ακόλουθη

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} F_0 & p_1 & p_2 & \mathbf{L} & p_j & \mathbf{L} & p_{H-1} & 1-F_{H-1} \\ F_{-1} & p_0 & p_1 & & p_{j-1} & & p_{H-2} & 1-F_{H-2} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & & \mathbf{M} & & \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ F_{-i} & p_{1-i} & p_{2-i} & \mathbf{L} & p_{j-i} & \mathbf{L} & p_{H-1-i} & 1-F_{H-1-i} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & & \mathbf{M} & & \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ F_{1-H} & p_{2-H} & p_{3-H} & \mathbf{L} & p_{j-(H-1)} & \mathbf{L} & p_0 & 1-F_0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{L} & 0 & \mathbf{L} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Έστω N_i τυχαία μεταβλητή, η οποία δηλώνει τον αριθμό των βημάτων που απαιτούνται για να μεταβεί το παραπάνω σύστημα από την κατάσταση i ($0 \leq i \leq H-1$) στην απορροφητική κατάσταση H δηλαδή

$$N_i = \min\{t : S_t^+ \geq H, S_0^+ = i\}.$$

Έστω

$$m_i^{(s)} = E[N_i^{(s)}] = E[N_i(N_i-1)\mathbf{L}(N_i-s+1)],$$

η καθοδική παραγοντική ροπή s -τάξης της τυχαίας μεταβλητής N_i .

Για $s = 2, 3, \dots$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} m_i^{(s)} &= \sum_{r=s}^{\infty} r^{(s)} P(N_i = r) = \sum_{r=s}^{\infty} r^{(s)} \sum_{j=0}^{H-1} p_{ij} P(N_i = r-1) \\ &= \sum_{j=0}^{H-1} p_{ij} \sum_{r=s}^{\infty} r^{(s)} P(N_j = r-1) = \sum_{j=0}^{H-1} p_{ij} (m_j^{(s)} + s m_j^{(s-1)}). \end{aligned}$$

Η παραπάνω σχέση σε μορφή γινομένου πινάκων είναι η ακόλουθη

$$(\mathbf{I} - \mathbf{R})\boldsymbol{\mu}^{(s)} = s\mathbf{R}\boldsymbol{\mu}^{(s-1)}, \quad s = 2, 3, \dots$$

δηλαδή

$$\boldsymbol{\mu}^{(s)} = s\{(\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1}\mathbf{R}\}\boldsymbol{\mu}^{(s-1)} = s\{(\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} - \mathbf{I}\}\boldsymbol{\mu}^{(s-1)}, \quad s = 2, 3, \dots,$$

όπου \mathbf{I} είναι ο μοναδιαίος πίνακας διαστάσεων $H \times H$, και

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & \mathbf{L} & p_{0,H-1} \\ p_{10} & p_{11} & \mathbf{L} & p_{1,H-1} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ p_{H-1,0} & p_{H-1,1} & \mathbf{L} & p_{H-1,H-1} \end{bmatrix}_{H \times H}, \quad \boldsymbol{\mu}^{(s)} = \begin{bmatrix} E[N_0^{(s)}] \\ E[N_1^{(s)}] \\ \vdots \\ E[N_{H-1}^{(s)}] \end{bmatrix}_{H \times 1}.$$

Ο πίνακας \mathbf{R} διαστάσεων $H \times H$ προκύπτει από τον πίνακα \mathbf{P} με διαγραφή της τελευταίας γραμμής και της τελευταίας στήλης.

Για $s = 1$ μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι $(\mathbf{I} - \mathbf{R})\boldsymbol{\mu} = \mathbf{1}$

δηλαδή

$$\boldsymbol{\mu} = (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1}\mathbf{1},$$

όπου

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^{(1)} = \begin{bmatrix} E[N_0] \\ E[N_1] \\ \mathbf{M} \\ E[N_{H-1}] \end{bmatrix}_{H \times 1}, \quad \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \mathbf{M} \\ 1 \end{bmatrix}_{H \times 1}.$$

Το πρώτο στοιχείο του διανύσματος $\boldsymbol{\mu}$ μας δίνει το μέσο μήκος ροής του διαγράμματος ελέγχου τύπου $CUSUM$ για $S_0^+ = 0$, ενώ τα υπόλοιπα στοιχεία του διανύσματος $\boldsymbol{\mu}$ μας δίνουν το μέσο μήκος ροής για $S_0^+ = z$, $z = 1, 2, \dots, H - 1$

($E[N_0] = L[0], E[N_1] = L[1], \dots, E[N_{H-1}] = L[H - 1]$).

Η μέθοδος που ανέπτυξαν οι Brook και Evans (1972), επιτρέπει και τον υπολογισμό της κατανομής του μήκους ροής (*run length*) του διαγράμματος ελέγχου.

Το διάγραμμα ελέγχου τύπου *CUSUM*

$$S_i^+ = \max[0, X_i - C + S_{i-1}^+], \quad S_0^+ = i, \quad i = 0, 1, \dots, H-1,$$

δίνει σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας όταν για πρώτη φορά ικανοποιηθεί η ανίσωση

$$S_{N_i}^+ \geq H.$$

Η τυχαία μεταβλητή N_i ονομάζεται μήκος ροής του παραπάνω διαγράμματος ελέγχου τύπου *CUSUM* (το διάγραμμα ξεκινά από τη θέση $S_0^+ = i$). Από τη θεωρία των στοχαστικών ανελίξεων προκύπτει ότι η τελευταία στήλη του πίνακα \mathbf{P}^r δίνει τις πιθανότητες $P(N_i \leq r)$ για $i = 0, 1, \dots, H-1$.

Γράφοντας τον πίνακα \mathbf{P} στη μορφή

$$\mathbf{P} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R} & \mathbf{p}_H \\ \hline \mathbf{0}' & 1 \end{array} \right]_{(H+1) \times (H+1)},$$

όπου

$$\mathbf{0}' = [0, 0, \dots, 0]_{(1 \times H)}, \quad \mathbf{p}_H = \begin{bmatrix} p_{0H} \\ p_{1H} \\ \mathbf{M} \\ p_{H-1,H} \end{bmatrix}_{H \times 1}$$

προκύπτει ότι

$$\mathbf{P}^r = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}^r & (\mathbf{I} - \mathbf{R}^r)\mathbf{1} \\ \hline \mathbf{0}^T & 1 \end{array} \right], \quad r = 1, 2, \dots$$

Συνεπώς για το διάνυσμα

$$\mathbf{F}_r = \begin{bmatrix} P(N_0 \leq r) \\ P(N_1 \leq r) \\ \mathbf{M} \\ P(N_{H-1} \leq r) \end{bmatrix}_{H \times 1}$$

έχουμε ότι

$$\mathbf{F}_r = (\mathbf{I} - \mathbf{R}^r)\mathbf{1}.$$

Για το διάνυσμα

$$\mathbf{L}_r = \begin{bmatrix} P(N_0 = r) \\ P(N_1 = r) \\ \mathbf{M} \\ P(N_{H-1} = r) \end{bmatrix}_{H \times 1},$$

έχουμε ότι

$$\mathbf{L}_1 = \mathbf{F}_1 = (\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{1}$$

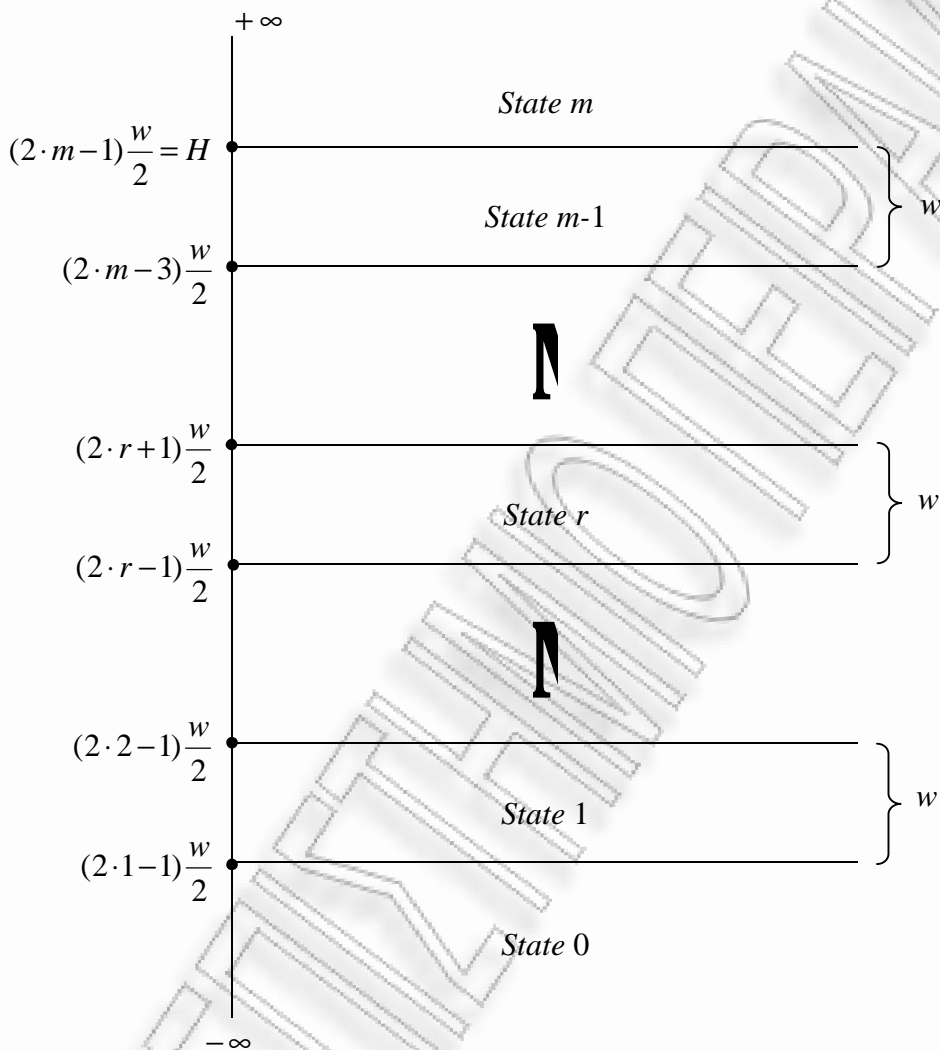
$$\mathbf{L}_r = \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_{r-1} = \mathbf{R}^{r-1}(\mathbf{I} - \mathbf{R}^r)\mathbf{1} = \mathbf{R}\mathbf{L}_{r-1}, \quad r = 2, 3, \dots$$

B. Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές - Brook και Evans (1972), Champ και Ridgon (1991)

Σε αυτή την περίπτωση θεωρούμε ότι οι ποσότητες C και H είναι πραγματικοί θετικοί αριθμοί και ότι οι παρατηρήσεις μας X_t κατανομονται όπως η συνεχής τυχαία μεταβλητή X . Η μέθοδος που περιγράψαμε για διακριτές τυχαίες μεταβλητές μπορεί εύκολα να γενικευθεί έτσι ώστε να συμπεριλάβει και την περίπτωση των συνεχών τυχαίων μεταβλητών. Για να επιτευχθεί αυτό πρέπει να χωρίσουμε το διάστημα $(-\infty, +\infty)$ του διαγράμματος ελέγχου τύπου *CUSUM* σε $m+1$ ζώνες. Σε κάθε μία θα αντιστοιχεί μια κατάσταση της αλυσίδας Markov, ενώ όλες μαζί θα χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων μεταπήδησης. Φυσικά η τελευταία ζώνη θα είναι η $[H, +\infty)$, στην οποία όταν εισέλθει το συσσωρευμένο άθροισμα θα έχουμε σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας. Για τον υπολογισμό του πλάτους w των εσωτερικών ζωνών οι Brook και Evans (1972) πρότειναν τον τύπο

$$w = \frac{2H}{2m-1}.$$

Οι $m+1$ το πλήθος ζώνες που χωρίζεται το διάγραμμα ελέγχου δίνεται στο ακόλουθο διάγραμμα



Διάγραμμα 2.4: Ζώνες του διαγράμματος ελέγχου τύπου *CUSUM* για την εφαρμογή της μεθόδου της αλυσίδας *Markov*

Τα διαστήματα που αντιστοιχούν στις παραπάνω ζώνες και οι καταστάσεις της αλυσίδας *Markov* που αντιστοιχούν σε κάθε ζώνη περιγράφονται στον Πίνακα 2.4 που ακολουθεί.

Πίνακας 2.4: Ζώνες του διαγράμματος ελέγχου τύπου *CUSUM* και αντίστοιχες καταστάσεις της αλυσίδας *Markov*

Ζώνη	Κατάσταση	Μέσος της ζώνης
$(-\infty, (0 + \frac{1}{2})w]$	0	-
$((0 + \frac{1}{2})w, (1 + \frac{1}{2})w]$	1	w
\mathbb{N}	\mathbb{N}	\mathbb{N}
$((i - 1 + \frac{1}{2})w, (i + \frac{1}{2})w]$	i	iw
\mathbb{N}	\mathbb{N}	\mathbb{N}
$((m - 2 + \frac{1}{2})w, (m - 1 + \frac{1}{2})w]$	$m - 1$	$(m - 1)w$
$((m - 1 + \frac{1}{2})w, +\infty)$	m	-

Για το (άνω) μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου τύπου *CUSUM*

$$S_t^+ = \max[0, X_t - C + S_{t-1}^+], \quad S_0^+ = z, \quad 0 \leq z < H,$$

η πιθανότητα μεταπήδησης p_{ij} από την κατάσταση i στην κατάσταση j , για $i = 0, 1, \dots, m - 1$, και για $j = 1, 2, \dots, m - 1$ μπορεί να υπολογιστεί ως ακολούθως

$$\begin{aligned} p_{ij} &= P\left[\left(j - 1 + \frac{1}{2}\right)w < S_t^+ \leq \left(j + \frac{1}{2}\right)w \mid \left(i - 1 + \frac{1}{2}\right)w < S_{t-1}^+ \leq \left(i + \frac{1}{2}\right)w\right] \\ &= P\left[\left(j - \frac{1}{2}\right)w < X_t - C + S_{t-1}^+ \leq \left(j + \frac{1}{2}\right)w \mid \left(i - \frac{1}{2}\right)w < S_{t-1}^+ \leq \left(i + \frac{1}{2}\right)w\right]. \end{aligned}$$

Υποθέτοντας ότι η τιμή του συσσωρευμένου αθροίσματος S_{t-1}^+ είναι ίση με το μέσο του διαστήματος

$$\left[\left(i - \frac{1}{2} \right) w, \left(i + \frac{1}{2} \right) w \right]$$

δηλαδή για $S_{t-1}^+ = iw$, έχουμε ότι

$$p_{ij} = P \left[\left(j - \frac{1}{2} \right) w < X_t - C + iw \leq \left(j + \frac{1}{2} \right) w \right] = P \left[\left(j - i - \frac{1}{2} \right) w + C < X_t \leq \left(j - i + \frac{1}{2} \right) w + C \right]$$

Αν συμβολίσουμε με $f_X(x)$ την κοινή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των παρατηρήσεών μας X_t , τότε η παραπάνω πιθανότητα παίρνει τη μορφή

$$p_{ij} = \int_{(j-i-1/2)w-C}^{(j-i+1/2)w-C} f_X(x) dx = \int_{(j-1/2)w}^{(j+1/2)w} f_X(y-iw+C) dy.$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούν να προκύψουν και οι υπόλοιπες πιθανότητες μεταπήδησης.

Συγκεντρωτικά λοιπόν έχουμε ότι

$$p_{i0} = \int_{-\infty}^{w/2} f_X(y-iw+C) dy, \quad i = 0, 1, \dots, m-1,$$

$$p_{ij} = \int_{(j-1/2)w}^{(j+1/2)w} f_X(y-iw+C) dy, \quad i = 0, 1, \dots, m-1, \quad j = 1, 2, \dots, m-1,$$

$$p_{im} = \int_H^{+\infty} f_X(y-iw+C) dy, \quad i = 0, 1, \dots, m-1,$$

$$p_{mm} = 1, \quad p_{mj} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m-1.$$

Έτσι λοιπόν ο πίνακας των πιθανοτήτων μεταπήδησης διαστάσεων $(m+1) \times (m+1)$ παίρνει τη μορφή

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & \mathbf{L} & p_{0j} & \mathbf{L} & p_{0,m-1} & p_{0m} \\ p_{10} & p_{11} & \mathbf{L} & p_{1j} & \mathbf{L} & p_{1,m-1} & p_{1m} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & & \mathbf{M} & & \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ p_{i0} & p_{i1} & \mathbf{L} & p_{ij} & \mathbf{L} & p_{i,m-1} & p_{im} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & & \mathbf{M} & & \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ p_{m-1,0} & p_{m-1,1} & \mathbf{L} & p_{m-1,j} & \mathbf{L} & p_{m-1,m-1} & p_{m-1,m} \\ 0 & 0 & \mathbf{L} & 0 & \mathbf{L} & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(m+1) \times (m+1)}$$

Θέτοντας

$$p_r = P(rw - w/2 < X - C \leq rw + w/2)$$

και

$$F_r = P(X - C \leq rw + w/2),$$

ο παραπάνω πίνακας παίρνει τη μορφή που έδωσαν οι Brook και Evans (1972) (δείτε προηγούμενη παράγραφο).

Για την ανάλυση της συνεχούς περίπτωσης μπορούν να εφαρμοστούν τα αποτελέσματα που δώσαμε και στη διακριτή περίπτωση.

Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δοθεί στον υπολογισμό του μέσου μήκους ροής σε ένα μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου τύπου *CUSUM* με αυθαίρετη τιμή εκκίνησης. Η μεθοδολογία των αλυσίδων *Markov* στη συνεχή περίπτωση με τη χρησιμοποίηση $m+1$ καταστάσεων (ζώνες) δίνει (προσεγγιστική) απάντηση για το μέσο μήκος ροής με τιμές εκκίνησης που αντιστοιχούν στους μέσους των ζωνών. Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το μέσο μήκος ροής για οποιαδήποτε τιμή εκκίνησης z , τότε σύμφωνα με τους Lucas και Crossier (1982) πρέπει να χρησιμοποιήσουμε παρεμβολή δευτέρου βαθμού.

Πιο αναλυτικά, εφαρμόζουμε τη μέθοδο των Μαρκοβιανών αλυσίδων για n διαφορετικές τιμές του m (έστω οι τιμές m_i , $i = 1, 2, \dots, n$) και συλλέγουμε για κάθε τιμή του m_i τρεις τιμές του μέσου μήκους ροής με τιμές εκκίνησης τις πιο κοντινές στην τιμή εκκίνησης z . Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε παρεμβολή δεύτερου βαθμού για τον προσεγγιστικό υπολογισμό του *ARL* με τιμή εκκίνησης z (έστω ARL_i , $i = 1, 2, \dots, n$).

Στα n ζευγάρια (m_i, ARL_i) που συλλέγουμε προσαρμόζουμε με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων την καμπύλη

$$y = A + B/x^2 + C/x^4,$$

οπότε και το μέσο μήκος ροής με τιμή εκκίνησης είναι ίσο με A .

2.4.3. Προσομοίωση του μέσου μήκους ροής μέσω τεχνικών ελάττωσης της διακύμανσης

Οι Jun και Choi (1993) θεώρησαν το διάγραμμα ελέγχου τύπου *CUSUM*

$$S_i^+ = \max[0, X_i - C + S_{i-1}^+], \quad S_0^+ = 0$$

και όρισαν την τυχαία μεταβλητή

$$N_0 = N = \min\{i : S_i^+ \geq H, S_0^+ = 0\},$$

η οποία δηλώνει το μήκος ροής του παραπάνω διαγράμματος.

Προφανώς το μέσο μήκος ροής *ARL* του διαγράμματος είναι ίσο με

$$ARL = E(N).$$

Όταν έχουμε στη διάθεσή μας μια σειρά από r ανεξάρτητες παρατηρήσεις της τυχαίας μεταβλητής N (μέσω προσομοίωσης), έστω τις N_1, N_2, \dots, N_r , τότε μπορούμε να γράψουμε ότι

$$ARL = E(N) \cong \bar{N} = \frac{\sum_{i=1}^r N_i}{r}$$

και

$$Var(N) \cong S^2 = \frac{\sum_{i=1}^r (N_i - \bar{N})^2}{r-1}.$$

Οι Jun και Choi (1993) επίσης παρατήρησαν ότι $Var(N) \cong [E(N)]^2$, οπότε και ο πρωτογενής εκτιμητής (*raw estimator*) N του $ARL = E(N)$ θα έχει μεγάλη διακύμανση για μεγάλες τιμές του N και συνεπώς θα έχει μειωμένη αξιοπιστία.

Οι Jun και Choi (1993) πρότειναν δύο τεχνικές ελάττωσης της διακύμανσης για τον υπολογισμό του μέσου μήκους ροής *ARL* στα διαγράμματα ελέγχου τύπου *CUSUM* μέσω προσομοίωσης για τον ακατέργαστο εκτιμητή. Η πρώτη τεχνική βασίζεται στον εκτιμητή κινδύνου (*hazard estimator*), ενώ η δεύτερη τεχνική βασίζεται στον κυκλικό εκτιμητή (*cycle estimator*).

Εκτιμητής κινδύνου

Ο πρωτογενής εκτιμητής N μπορεί να βελτιωθεί χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της ρυθμιστικής μεταβλητής (*control variate*). Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο (για περισσότερες λεπτομέρειες δείτε Fieler και Hartley (1954) και Lavenberg και Welch (1981)), αν μια τυχαία μεταβλητή Y (ρυθμιστική μεταβλητή) είναι ισχυρά συσχετισμένη με τη N και γνωρίζουμε τη μέση τιμή της, τότε για κάθε σταθερά a ο ρυθμιστικός εκτιμητής δίνεται από τη σχέση

$$N(a) = N + a(Y - E(Y)).$$

Η καλύτερη επιλογή για τη σταθερά a , με την έννοια ότι ελαχιστοποιείται η $Var(N(a))$, είναι η

$$a^* = \frac{-Cov(N, Y)}{Var(Y)}.$$

Για μια αλυσίδα Markov $\{S_t, t \geq 0\}$ με χώρο καταστάσεων Ω και B ένα υποσύνολο του Ω , ο συνολικός κίνδυνος (total hazard) Y για το δοθέν σύνολο καταστάσεων B ορίζεται ως

$$Y = \sum_{t=1}^N \Lambda_t,$$

όπου $\Lambda_t = P(N = t | S_0, \dots, S_{t-1})$ και $N = \min\{t > 0 : S_t \in B\}$.

Ο Ross (1990) πρότεινε τη χρήση του συνολικού κινδύνου ως ρυθμιστικής μεταβλητής και έδειξε ότι

$$E(Y) = 1.$$

Για το διάγραμμα ελέγχου τύπου *CUSUM* έχουμε ότι

$$\Lambda_t = P(N = t | S_{t-1}^+) = P(S_t^+ \geq H | S_{t-1}^+) = P(X_t - C + S_{t-1}^+ \geq H) = \bar{F}_X(C + H - S_{t-1}^+)$$

$$(\bar{F}_X(x) = P(X \geq x))$$

και

$$Y = \sum_{t=1}^N \bar{F}_X(C + H + S_{t-1}).$$

Συνεπώς ο εκτιμητής κινδύνου δίνεται από τη σχέση

$$N(a) = N + a(Y - 1),$$

όπου

$$a = \frac{-\text{Cov}(N, Y)}{\text{Var}(Y)}.$$

Έτσι για την εκτίμηση του $ARL = E(N)$ χρησιμοποιούμε μια σειρά από r προσομοιωμένα ζεύγη δεδομένων $(N_1, Y_1), (N_2, Y_2), \dots, (N_r, Y_r)$ και έχουμε ότι

$$ARL = E(N) \cong \bar{N} + a(\bar{Y} - 1),$$

όπου

$$a = \frac{-\left(\sum_{i=1}^r N_i Y_i - r\bar{N}\bar{Y}\right)}{\sum_{i=1}^r Y_i^2 - r\bar{Y}^2}.$$

Κυκλικός εκτιμητής

Ένας άλλος τρόπος εκτίμησης του ARL μέσω προσομοίωσης, στηρίζεται στην έννοια του κύκλου C (τυχαία μεταβλητή), ο οποίος συμβαίνει είτε όταν το συσσωρευμένο άθροισμα υπερβαίνει το H είτε όταν συσσωρευμένο άθροισμα επιστρέφει στην τιμή 0, δηλαδή

$$C = \min\{t : S_t = 0 \text{ ή } S_t \geq H\}.$$

Τότε το ARL υπολογίζεται από τη σχέση

$$ARL = E(N) = \frac{E(C)}{p}, \quad p = P(S_C \geq H).$$

Για να υπολογίσουμε το ARL χρειάζεται να εκτιμήσουμε τη μέση τιμή $E(C)$ και την πιθανότητα p . Οι Jun and Choi (1993) χρησιμοποίησαν την μέθοδο του εκτιμητή

κινδύνου που παρουσιάσαμε προηγουμένως για την εκτίμηση των δύο προαναφερθέντων ποσοτήτων.

Για την εκτίμηση της μέσης τιμής κατέληξαν στον ακόλουθο εκτιμητή

$$C(a) = C + a(Z - 1),$$

όπου

$$a = \frac{-Cov(N, Y)}{Var(Y)}, \quad Z = \sum_{t=1}^c (\bar{F}_X(C + H - S_{t-1}) + F(C - S_{t-1})),$$

ενώ για την εκτίμηση της πιθανότητας p κατέληξαν στην ποσότητα Q που δίνεται από τον τύπο

$$Q = \sum_{t=1}^c \bar{F}_X(C + H - S_{t-1}).$$

2.4.4. Υπολογισμός του μέσου μήκους ροής σε δίπλευρα διαγράμματα ελέγχου τύπου *CUSUM*

Στις προηγούμενες παραγράφους αναπτύξαμε μεθοδολογίες για τον υπολογισμό του μέσου μήκους ροής για το άνω μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου τύπου *CUSUM*

$$S_t^+ = \max[0, X_t - C^+ + S_{t-1}^+], \quad S_0^+ = z^+,$$

όπου $C^+ \geq 0$, $H^+ > 0$, $0 \leq z^+ < H^+$.

Ας συμβολίσουμε με $ARL^+(d, z^+)$ το μέσο μήκος ροής του παραπάνω διαγράμματος ελέγχου όταν ο μέσος μετατοπιστεί ds μονάδες υψηλότερα.

Αντίστοιχα, για το κάτω μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου τύπου *CUSUM*

$$S_t^- = \min[0, X_t - C^- + S_{t-1}^-], \quad S_0^- = z^-,$$

όπου $C^- < 0$, $H^- < 0$, $H^- < z^- \leq 0$, ας συμβολίσουμε με $ARL^-(d, z^-)$ το μέσο μήκος ροής του παραπάνω διαγράμματος ελέγχου όταν ο μέσος μετατοπιστεί $-ds$ μονάδες χαμηλότερα.

Για $-C^- = C^+$, $-H^- = H^+$ και $-z^- = z^+ = z$, για λόγους συμμετρίας, έχουμε ότι

$$ARL^+(d, z) = ARL^-(d, -z).$$

Για το μέσο μήκος ροής του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου τύπου *CUSUM* (συνδυασμός των δύο παραπάνω διαγραμμάτων) έχουν αναπτυχθεί σχέσεις που επιτρέπουν τον υπολογισμό του από τις αντίστοιχες ποσότητες των μονόπλευρων διαγραμμάτων ελέγχου τύπου *CUSUM*.

Για $z^+ = z^- = 0$ και για $C^+ - C^- \geq |H^+ + H^-|$ ο Van Dobben de Bruyn (1968) έδειξε ότι το μέσο μήκος ροής $ARL(d,0)$ του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου τύπου *CUSUM* ικανοποιεί τη σχέση

$$\frac{1}{ARL(d,0)} = \frac{1}{ARL^+(d,0)} + \frac{1}{ARL^-(d,0)}$$

δηλαδή

$$ARL(d,0) = \frac{ARL^+(d,0) \cdot ARL^-(d,0)}{ARL^+(d,0) + ARL^-(d,0)}$$

Πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή στον παραπάνω τύπο, αφού η ποσότητα $ARL^-(d,0)$ αντιστοιχεί στο μέσο μήκος ροής του κάτω μονόπλευρου διαγράμματος ελέγχου τύπου *CUSUM*, όταν ο μέσος μετατοπιστεί ds μονάδες υψηλότερα.

Οι Lucas και Crossier (1982) έδειξαν ότι για δίπλευρα συμμετρικά διαγράμματα ελέγχου τύπου *CUSUM* ($C^+ = -C^- = C$, $H^+ = -H^-$, $z^+ = -z^- = z$), όταν $z \leq c + H/2$, το μέσο μήκος ροής $ARL(d,z)$ του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου τύπου *CUSUM* ικανοποιεί τη σχέση:

$$ARL(d,z) = \frac{ARL^+(d,z) \cdot ARL^-(d,0) + ARL^+(d,0) \cdot ARL^-(d,-z) - ARL^+(d,0) \cdot ARL^-(d,0)}{ARL^+(d,0) + ARL^-(d,0)}$$

Στις περιπτώσεις που οι δύο παραπάνω τύποι δεν μας καλύπτουν για τον υπολογισμό του $ARL(d,z)$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των αλυσίδων Markov προσαρμοσμένη σε δίπλευρο διάγραμμα ελέγχου τύπου *CUSUM* (για περισσότερες λεπτομέρειες δείτε Lucas και Crossier (1982) και Woodall (1984)).

2.5 Υπολογισμός του μέσου μήκους ροής στα διαγράμματα ελέγχου τύπου *CUSUM*

Ακολουθώς δίνουμε συγκεντρωτικούς πίνακες με την ακριβή του *ARL* για μονόπλευρα και για συμμετρικά δίπλευρα διαγράμματα ελέγχου τύπου *CUSUM* με την υπόθεση ότι οι παρατηρήσεις X_t που έχουμε από την εντός ελέγχου διεργασία κατανέμονται κανονικά με μέσο m_0 και διακύμανση s^2 ($X_t \sim N(m_0, s^2)$).

Το άνω μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου τύπου *CUSUM* αναφέρεται στη στατιστική συνάρτηση

$$S_t^+ = \max[0, X_t - (m_0 + K) + S_{t-1}^+], \quad 0 \leq S_0 = z < H,$$

όπου οι παρατηρήσεις X_t είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με κοινό μέσο m_0 . Η παραπάνω στατιστική συνάρτηση είναι κατάλληλη για τον έλεγχο της υπόθεσης

$$H_0 : m = m_0 \quad \text{—} \quad H_1^+ : m = m_1 = m_0 + ds, \quad d > 0$$

και το μέσο μήκος ροής του διαγράμματος συμβολίζεται με $ARL^+(d, z)$.

Το κάτω μονόπλευρο διάγραμμα ελέγχου τύπου *CUSUM* αναφέρεται στη στατιστική συνάρτηση

$$S_t^- = \min[0, X_t - (m_0 - K) + S_{t-1}^-], \quad -H \leq -S_0 = -z < 0$$

όπου οι παρατηρήσεις X_t είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με κοινό μέσο m_0 . Η παραπάνω στατιστική συνάρτηση είναι κατάλληλη για τον έλεγχο της υπόθεσης

$$H_0 : m = m_0 \quad \text{—} \quad H_1^- : m = m_1 = m_0 - ds, \quad d > 0$$

και το μέσο μήκος ροής του διαγράμματος συμβολίζεται με $ARL^-(d, -z)$. Πίνακες για την ποσότητα $ARL^-(d, -z)$ δεν παρουσιάζονται, αφού από τη σχέση $ARL^-(d, -z) = ARL^+(d, z)$.

Στο δίπλευρο (συμμετρικό) διάγραμμα ελέγχου τύπου *CUSUM* απεικονίζονται ταυτοχρόνως οι δύο στατιστικές συναρτήσεις S_t^+ και S_t^- . Το δίπλευρο διάγραμμα είναι κατάλληλο για τον έλεγχο της υπόθεσης

$$H_0 : m = m_0 \quad \text{—} \quad H_1 : m = m_1 = m_0 \pm ds, \quad d > 0$$

και το μέσο μήκος ροής του διαγράμματος συμβολίζεται με $ARL(d, z)$.

Στους πίνακες που ακολουθούν, λαμβάνουμε το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής για $d = 0$ και το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής για $d \neq 0$.

Πίνακας 2.5: Μέσο μήκος ροής $ARL^+(d, z)$: $z = 0$

ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ		d						
H/s	K/s	0	0.25	0.50	0.75	1.00	1.50	2.00
2.50	0.25	13.6	11.2	7.7	5.4	4.1	2.7	2.1
4.00	0.25	38.5	24.7	13.2	8.4	6.1	3.9	2.9
6.00	0.25	125.4	50.3	20.9	12.4	8.7	5.5	4.1
8.00	0.25	368.5	83.6	28.8	16.4	11.4	7.1	5.2
10.00	0.25	1.36.6	124.6	36.8	20.4	14.1	8.7	6.4
2.00	0.50	19.3	15.2	9.6	6.3	4.4	2.7	2.0
3.00	0.50	158.8	36.2	17.2	9.7	6.4	3.7	2.7
4.00	0.50	167.7	74.2	26.6	13.3	8.4	4.7	3.3
5.00	0.50	465.7	139.5	38.0	17.0	10.4	5.7	4.0
6.00	0.50	1.279.2	249.3	51.3	20.9	12.4	6.7	4.7
1.50	0.75	21.3	17.2	11.0	7.0	4.8	2.7	1.9
2.25	0.75	69.9	46.0	22.0	11.6	7.1	3.7	2.5
3.00	0.75	221.5	111.0	39.3	17.3	9.7	4.7	3.1
3.75	0.75	688.5	251.7	65.6	24.2	12.4	5.7	3.7
4.50	0.75	2.133.0	552.6	105.1	32.1	15.2	6.7	4.3
1.00	1.00	17.6	10.4	10.4	6.5	4.7	2.6	1.8
1.50	1.00	16.9	20.3	20.3	11.5	7.1	3.5	2.2
2.00	1.00	129.4	37.9	37.9	18.1	10.0	4.4	2.7
2.50	1.00	358.8	67.8	67.8	27.1	13.4	5.4	3.2
3.00	1.00	982.7	117.3	117.3	39.5	17.4	6.4	3.7
3.50	1.00	2.680.3	199.4	199.4	55.7	21.8	7.4	4.2
0.70	1.50	33.9	28.4	18.9	11.8	7.6	3.7	2.2
1.10	1.50	92.1	71.4	40.9	22.3	12.7	5.2	2.8
1.50	1.50	274.9	191.6	91.6	42.4	21.1	7.1	3.5
1.90	1.50	881.5	536.2	208.3	80.4	34.3	9.4	4.3
2.30	1.50	2.953.4	1.524.6	474.3	151.0	54.5	12.0	5.0

Πίνακας 2.6: Μέσο μήκος ροής $ARL(d, z) : z = 0$

ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ		d						
H/s	K/s	0	0.25	0.50	0.75	1.00	1.50	2.00
2.50	0.25	27.3	13.4	8.00	5.4	4.1	2.7	2.1
4.00	0.25	77.1	26.7	13.3	8.4	6.1	3.9	2.9
6.00	0.25	250.8	51.3	20.9	12.4	8.7	5.5	4.1
8.00	0.25	737.0	84.0	28.8	16.4	11.4	7.1	5.2
10.00	0.25	2.073.1	124.7	36.7	20.4	14.1	8.7	6.4
2.00	0.50	38.5	18.2	10.0	6.3	4.4	2.7	2.0
3.00	0.50	117.6	39.5	17.4	9.7	6.4	3.7	2.7
4.00	0.50	335.5	77.1	26.7	13.3	8.4	4.7	3.3
5.00	0.50	931.5	141.7	38.0	17.0	10.4	5.7	4.0
6.00	0.50	2.558.5	250.8	51.3	20.9	12.4	6.7	4.7
1.50	0.75	42.6	21.1	11.6	7.1	4.8	2.7	1.9
2.25	0.75	139.7	51.5	22.4	11.7	7.1	3.7	2.5
3.00	0.75	443.0	117.6	39.5	17.4	9.7	4.7	3.1
3.75	0.75	1.377.2	259.0	65.7	24.2	12.4	5.7	3.7
4.50	0.75	4.266.0	560.2	105.1	32.1	15.2	6.7	4.3
1.00	1.00	35.3	19.2	11.2	7.0	4.7	2.6	1.8
1.50	1.00	93.9	42.6	21.1	11.7	7.1	3.5	2.2
2.00	1.00	258.7	94.4	38.5	18.2	10.0	4.4	2.7
2.50	1.00	716.4	206.0	68.2	27.1	13.4	5.4	3.2
3.00	1.00	1.965.4	443.0	117.6	39.5	17.4	6.4	3.7
3.50	1.00	5.360.5	944.5	199.6	55.7	21.8	7.4	4.2
0.70	1.50	66.7	36.0	20.3	12.1	7.6	3.7	2.2
1.10	1.50	184.3	86.4	42.7	22.5	12.7	5.2	2.8
1.50	1.50	549.8	221.5	93.9	42.6	21.1	7.1	3.5
1.90	1.50	1.762.9	595.8	211.0	80.5	34.3	9.4	4.3
2.30	1.50	5.906.7	1.639.4	477.1	151.1	54.5	12.0	5.0

Πίνακας 2.7: Μέσο μήκος ροής $ARL^+(d, z)$: $z = H/2s$

ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ			d						
H/s	K/s	z	0	0.25	0.50	0.75	1.00	1.50	2.00
2.50	0.25	1.25	22.87	10.32	5.668	3.664	2.667	1.760	1.368
4.00	0.25	2.00	66.57	20.25	8.991	5.291	3.700	2.354	1.770
6.00	0.25	3.00	225.4	38.76	13.48	7.382	5.054	3.169	2.372
8.00	0.25	4.00	684.3	63.25	17.86	9.416	6.390	3.967	2.940
10.00	0.25	5.00	1972.0	93.75	22.13	11.43	7.724	4.767	3.509
2.00	0.50	1.00	34.40	15.19	7.785	4.626	3.126	1.873	1.395
3.00	0.50	1.50	108.0	33.39	13.25	6.755	4.208	2.353	1.680
4.00	0.50	2.00	316.4	66.57	20.25	8.991	5.291	2.862	2.014
5.00	0.50	2.50	895.9	124.9	28.76	11.24	6.348	3.372	2.362
6.00	0.50	3.00	2492.	225.4	38.76	13.48	7.382	3.875	2.703
1.50	0.75	0.75	39.44	18.70	9.747	5.658	3.659	2.015	1.431
2.25	0.75	1.12	131.9	46.22	18.72	9.004	5.140	2.499	1.670
3.00	0.75	1.50	426.6	108.0	33.39	13.25	6.755	3.010	1.950
3.75	0.75	1.87	1345.0	242.8	56.40	18.36	8.428	3.528	2.251
4.50	0.75	2.25	4193.0	534.0	91.74	24.32	10.12	4.043	2.560
1.00	1.00	0.50	33.54	17.18	10.04	6.084	3.982	2.135	1.466
1.50	1.00	0.75	89.74	39.44	18.70	9.747	5.658	2.608	1.657
2.00	1.00	1.00	250.2	88.45	34.40	15.19	7.785	3.126	1.873
2.50	1.00	1.25	639.9	195.9	61.68	22.87	10.32	3.664	2.107
3.00	1.00	1.50	1934.0	426.6	108.0	33.39	13.25	4.208	2.353
3.50	1.00	1.75	5292.0	918.9	185.9	47.59	16.56	4.752	2.606
0.70	1.50	0.35	66.43	34.92	19.31	11.27	6.966	3.204	1.887
1.10	1.50	0.55	181.2	83.78	40.61	20.79	11.36	4.279	2.225
1.50	1.50	0.75	542.8	216.1	89.74	39.44	18.70	5.658	2.608
1.90	1.50	0.95	1748.0	585.2	203.5	75.30	30.51	7.325	3.020
2.30	1.50	1.15	5871.0	1619.0	464.3	142.8	48.99	9.260	3.447

Πίνακας 2.8: Μέσο μήκος ροής $ARL(d, z) : z = H/2s$

ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ			d						
H/s	K/s	z	0	0.25	0.50	0.75	1.00	1.50	2.00
2.50	0.25	1.25	9.236	7.553	5.083	3.515	2.624	1.755	1.367
4.00	0.25	2.00	28.03	17.36	8.682	5.240	3.690	2.354	1.770
6.00	0.25	3.00	100.0	36.77	13.38	7.372	5.053	3.169	2.372
8.00	0.25	4.00	315.9	62.16	17.83	9.414	6.390	3.967	2.940
10.00	0.25	5.00	936.2	93.21	22.12	11.43	7.724	4.767	3.509
2.00	0.50	1.00	15.13	11.79	7.178	4.487	3.086	1.869	1.395
3.00	0.50	1.50	49.19	29.33	12.88	6.694	4.195	2.352	1.680
4.00	0.50	2.00	148.7	62.70	20.06	8.968	5.287	2.862	2.014
5.00	0.50	2.50	430.4	121.7	28.67	11.24	6.347	3.372	2.362
6.00	0.50	3.00	1215.0	222.9	38.71	13.48	7.382	3.875	2.703
1.50	0.75	0.75	18.15	14.51	8.997	5.498	3.617	2.010	1.430
2.25	0.75	1.12	62.08	40.02	18.16	8.918	5.121	2.497	1.670
3.00	0.75	1.50	205.2	100.3	33.03	13.21	6.747	3.009	1.949
3.75	0.75	1.87	656.9	234.1	56.19	18.34	8.425	3.528	2.251
4.50	0.75	2.25	2068.0	524.6	91.62	24.31	10.12	4.042	2.560
1.00	1.00	0.50	15.89	13.44	9.118	5.882	3.931	2.131	1.466
1.50	1.00	0.75	42.82	32.22	17.35	9.597	5.627	2.606	1.657
2.00	1.00	1.00	120.8	77.40	33.57	15.10	7.767	3.125	1.873
2.50	1.00	1.25	341.9	180.3	61.02	22.81	10.31	3.663	2.107
3.00	1.00	1.50	952.6	405.5	107.5	33.35	13.25	4.208	2.353
3.50	1.00	1.75	2621.0	890.8	185.5	47.57	16.56	4.752	2.606
0.70	1.50	0.35	32.57	27.22	17.90	11.02	6.917	3.202	1.886
1.10	1.50	0.55	89.02	68.64	38.71	20.55	11.33	4.278	2.225
1.50	1.50	0.75	267.9	185.8	37.31	39.22	18.67	5.657	2.608
1.90	1.50	0.95	866.4	524.6	200.6	75.13	30.49	7.325	3.020
2.30	1.50	1.15	2920.0	1502.0	461.1	142.7	48.98	9.260	3.447

Πίνακας 2.9: Μέσο μήκος ροής $ARL^+(d, z)$: $z = H/3s$

ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ			d						
H/s	K/s	z	0	0.25	0.50	0.75	1.00	1.50	2.00
2.50	0.25	0.83	25.00	11.70	6.60	4.30	3.20	2.10	1.60
4.00	0.25	1.30	72.40	23.40	10.90	6.50	4.60	2.90	2.20
6.00	0.25	2.00	240.3	44.90	16.60	9.30	6.40	4.00	2.90
8.00	0.25	2.60	718.70	74.00	22.60	12.20	8.30	5.10	3.70
10.00	0.25	3.30	2041.2	109.70	28.03	14.80	10.00	6.10	4.50
2.00	0.50	0.60	36.70	16.70	8.90	5.40	3.70	2.20	1.60
3.00	0.50	1.00	113.30	36.40	15.10	8.00	5.10	2.80	2.00
4.00	0.50	1.30	328.40	72.40	23.40	10.90	6.50	3.60	2.50
5.00	0.50	1.60	920.40	134.90	33.50	13.90	8.00	4.30	3.00
6.00	0.50	2.00	2539.0	240.30	44.90	16.60	9.30	4.90	3.40
1.50	0.75	0.50	40.90	19.70	10.50	6.20	4.10	2.30	1.60
2.25	0.75	0.75	136.20	48.80	20.40	10.10	5.90	2.90	1.90
3.00	0.75	1.0	436.80	113.30	36.40	15.10	8.00	3.60	2.30
3.75	0.75	1.25	1367.1	252.50	61.30	21.00	10.10	4.30	2.80
4.50	0.75	1.50	4249.9	550.60	99.10	28.00	12.20	5.00	3.20
1.00	1.00	0.30	34.40	18.50	10.60	6.50	4.30	2.30	1.60
1.50	1.00	0.50	91.80	40.90	19.70	10.50	6.20	2.90	1.80
2.00	1.00	0.60	255.60	92.00	36.70	16.70	8.90	3.70	2.20
2.50	1.00	0.83	710.30	201.70	65.10	25.00	11.70	4.30	2.50
3.00	1.00	1.00	1956.0	436.80	113.30	36.40	15.10	5.10	2.80
3.50	1.00	1.16	5347.0	936.00	194.00	51.80	19.00	5.80	3.20
0.70	1.50	0.23	67.00	35.40	19.70	11.60	7.20	3.40	1.40
1.10	1.50	0.36	182.70	85.00	41.60	21.50	11.90	4.60	1.60
1.50	1.50	0.50	546.60	218.90	91.80	40.90	19.70	6.20	1.80
1.90	1.50	0.63	1757.2	591.40	207.60	78.00	32.30	8.20	2.10
2.30	1.50	0.76	5897.0	1632.4	472.10	147.40	51.80	10.40	2.40

Πίνακας 2.10: Μέσο μήκος ροής $ARL(d, z) : z = H/3s$

ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ			d						
H/s	K/s	z	0	0.25	0.50	0.75	1.00	1.50	2.00
2.50	0.25	0.83	11.03	9.20	6.20	4.30	3.20	2.10	1.60
4.00	0.25	1.30	33.08	22.30	10.70	6.50	4.60	2.90	2.20
6.00	0.25	2.00	114.90	43.70	16.60	9.30	6.40	4.00	2.90
8.00	0.25	2.60	350.10	73.60	22.60	12.20	8.30	5.10	3.70
10.00	0.25	3.30	1004.6	109.70	28.30	14.80	10.00	6.10	4.50
2.00	0.50	0.60	17.40	13.70	8.40	6.30	4.40	2.20	1.60
3.00	0.50	1.00	54.50	32.90	14.90	7.90	5.00	2.80	2.00
4.00	0.50	1.30	160.70	69.30	23.30	10.90	6.50	3.60	2.50
5.00	0.50	1.60	454.70	132.50	33.50	13.90	8.00	4.30	3.00
6.00	0.50	2.00	1206.3	238.70	44.90	16.60	9.30	4.90	3.40
1.50	0.75	0.50	19.60	15.70	9.90	6.10	4.00	2.30	1.60
2.25	0.75	0.75	66.30	43.10	20.00	10.10	5.90	2.90	1.90
3.00	0.75	1.0	215.30	106.40	36.20	15.10	8.00	3.60	2.30
3.75	0.75	1.25	678.50	244.80	61.20	21.00	10.10	4.30	2.80
4.50	0.75	1.50	2116.9	542.70	99.00	28.00	12.20	5.00	3.20
1.00	1.00	0.30	16.80	15.00	10.40	6.30	4.30	2.30	1.60
1.50	1.00	0.50	44.80	35.70	20.30	10.40	6.20	2.90	1.80
2.00	1.00	0.60	126.20	81.40	37.90	16.70	8.90	3.70	2.20
2.50	1.00	0.83	352.10	186.90	67.80	24.90	11.70	4.30	2.50
3.00	1.00	1.00	973.40	417.00	113.00	36.40	15.10	5.10	2.80
3.50	1.00	1.16	2666.7	910.10	193.80	51.80	19.00	5.80	3.20
0.70	1.50	0.23	33.10	27.70	18.30	11.60	7.20	3.40	1.40
1.10	1.50	0.36	90.50	70.00	39.70	21.30	11.90	4.60	1.60
1.50	1.50	0.50	271.50	188.80	89.40	40.70	19.70	6.20	1.80
1.90	1.50	0.63	875.80	531.60	204.90	77.80	32.30	8.20	2.10
2.30	1.50	0.76	2945.40	1518.4	469.90	147.80	52.10	10.60	2.40

Πίνακας 2.11: Μέσο μήκος ροής $ARL^+(d, z)$: $z = H/4s$

ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ			d						
H/s	K/s	z	0	0.25	0.50	0.75	1.00	1.50	2.00
2.50	0.25	0.625	25.70	12.20	7.00	4.60	3.40	2.20	1.70
4.00	0.25	1.000	74.00	24.40	11.60	7.00	5.00	3.20	2.40
6.00	0.25	1.500	244.80	47.30	18.00	10.20	7.00	4.40	3.20
8.00	0.25	2.000	726.40	77.60	24.50	13.20	9.000	5.60	4.10
10.00	0.25	2.500	2056.30	115.40	30.90	16.30	11.00	6.80	4.90
2.00	0.50	0.50	37.10	17.10	9.10	5.60	3.80	2.30	1.70
3.00	0.50	0.75	115.00	37.50	15.80	8.50	5.40	3.10	2.10
4.00	0.50	1.00	331.20	74.00	24.40	11.60	7.00	3.90	2.50
5.00	0.50	1.25	925.00	137.30	34.90	14.80	8.60	4.60	3.00
6.00	0.50	1.50	2548.90	244.80	47.30	18.00	10.20	5.40	3.50
1.50	0.75	0.3750	41.40	20.20	10.80	6.50	4.30	2.40	1.70
2.25	0.75	0.5625	137.50	49.80	21.10	10.60	6.30	3.10	2.10
3.00	0.75	0.7500	439.40	115.00	37.50	15.80	8.50	3.90	2.50
3.75	0.75	0.9375	1371.80	255.20	62.90	22.10	10.80	4.70	3.00
4.50	0.75	1.1250	4258.00	554.90	101.40	29.40	13.20	5.50	3.50
1.00	1.00	0.250	34.60	18.60	10.70	6.60	4.40	2.40	1.60
1.50	1.00	0.375	92.50	41.40	20.20	10.80	6.50	3.10	1.90
2.00	1.00	0.500	256.40	92.50	37.10	17.10	9.10	3.80	2.30
2.50	1.00	0.625	712.90	203.40	66.20	25.70	12.20	4.60	2.70
3.00	1.00	0.750	1960.40	439.40	115.00	37.50	15.80	5.40	3.10
3.50	1.00	0.875	5553.70	939.80	196.20	53.200	19.90	6.20	3.50
0.70	1.50	0.175	67.20	35.60	19.80	11.70	7.30	3.40	2.00
1.10	1.50	0.275	183.20	85.40	41.90	21.80	12.20	4.80	2.50
1.50	1.50	0.375	547.80	219.90	92.50	41.40	20.20	6.50	3.10
1.90	1.50	0.475	1759.6	5931.10	208.90	78.90	32.90	8.50	3.70
2.30	1.50	0.575	5901.50	1635.50	474.10	148.80	52.70	10.90	4.30

Πίνακας 2.12: Μέσο μήκος ροής $ARL(d, z)$: $z = H/4s$

ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ			δ						
H/s	K/s	z	0	0.25	0.50	0.75	1.00	1.50	2.00
2.50	0.25	0.625	12.10	9.90	6.60	4.60	3.40	2.20	1.70
4.00	0.25	1.000	35.5	22.30	11.50	7.00	5.00	3.20	2.40
6.00	0.25	1.500	119.30	46.10	18.00	10.20	7.00	4.40	3.20
8.00	0.25	2.000	358.00	77.20	24.50	13.30	9.00	5.60	4.10
10.00	0.25	2.500	1019.8	115.30	30.90	16.40	11.10	6.80	4.90
2.00	0.50	0.50	17.900	14.00	8.70	5.50	3.80	2.30	1.70
3.00	0.50	0.75	56.20	34.10	15.60	8.50	5.40	3.10	2.10
4.00	0.50	1.00	163.50	71.10	24.40	11.60	7.00	3.90	2.50
5.00	0.50	1.25	459.20	135.00	34.90	14.80	8.60	4.60	3.00
6.00	0.50	1.50	1269.70	243.20	47.20	18.00	10.20	5.40	3.50
1.50	0.75	0.3750	20.20	16.20	10.20	6.40	4.20	2.40	1.760
2.25	0.75	0.5625	67.70	44.20	20.70	10.60	6.30	3.10	2.10
3.00	0.75	0.7500	217.90	108.20	37.30	15.80	8.50	3.90	2.50
3.75	0.75	0.9375	683.20	247.70	62.80	22.10	10.80	4.70	3.00
4.50	0.75	1.1250	2125.00	547.20	101.40	29.50	13.20	5.50	3.50
1.00	1.00	0.250	34.60	18.60	10.70	6.60	4.40	2.40	1.60
1.50	1.00	0.375	92.50	41.40	20.20	10.80	6.40	3.10	1.90
2.00	1.00	0.500	256.40	92.50	37.10	17.10	9.10	3.80	2.30
2.50	1.00	0.625	712.90	203.40	66.20	25.70	12.20	4.60	2.70
3.00	1.00	0.750	1960.40	439.40	115.00	37.50	15.80	5.40	3.10
3.50	1.00	0.875	5553.70	939.80	196.20	53.200	19.90	6.20	3.50
0.70	1.50	0.175	33.20	27.90	18.50	11.50	7.30	3.40	2.00
1.10	1.50	0.275	91.00	70.40	40.10	21.60	12.10	4.80	2.50
1.50	1.50	0.375	272.90	189.90	92.20	41.30	20.10	6.50	
1.90	1.50	0.475	878.20	533.50	206.20	78.80	32.90	8.50	3.10
2.30	1.50	0.575	2948.20	1520.5	474.30	148.70	52.70	10.9	3.70
									4.30

Για να επιδείξουμε τη μεθοδολογία των αλυσίδων *Markov* ας υποθέσουμε ότι οι παρατηρήσεις μας X_t κατανέμονται κανονικά με μέση τιμή m_0 και τυπική απόκλιση S ($X_t \sim N(m_0, S^2)$).

Επίσης έστω

$$H/S = H = 4, \quad K/S = K = 0.5, \quad S_0 = z = 0.$$

Για διάφορες τιμές του m έχουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα για το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής ($d = 0$) του άνω μονόπλευρου διαγράμματος ελέγχου τύπου *CUSUM* με $S_0 = z = 0$ και με $S_0 = H/2S = z = 2$, τα οποία παρουσιάζονται στους πίνακες που ακολουθούν

Πίνακας 2.13: Εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής $ARL^+(0,0)$ για διάφορες τιμές του m

m	w	$ARL^+(0,0)$
5	0.888889	297.589
10	0.421053	326.032
15	0.275862	331.293
20	0.205128	333.102
Ακριβής τιμή: $ARL^+(0,0) = 335.5$		

Πίνακας 2.14: Εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής $ARL^+(0,2)$ για διάφορες τιμές του m

m	w	$s = [m/2] \cdot w$	$ARL^+(0,s)$
5	0.888889	1.77778	294.229
10	0.421053	2.10526	304.721
15	0.275862	1.93103	314.065
20	0.205128	2.05128	312.91
100	0.040201	2.01005	316.047
Ακριβής τιμή: $ARL^+(0,2) = 316.4$			

(δείτε Παράρτημα, Πρόγραμμα 3).

Αντίστοιχα, για τον υπολογισμό του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής για $d = 0.25$ έχουμε, αντίστοιχα, τους δύο ακόλουθους πίνακες για $S_0 = z = 0$ και $S_0 = H/2s = z = 2$.

Πίνακας 2.15: Εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής $ARL^+(0.25,0)$ για διάφορες τιμές του m

m	w	$ARL^+(0.25,0)$
5	0.888889	73.5537
10	0.421053	76.2337
15	0.275862	76.7118
20	0.205128	76.875
40	0.101265	77.0287
Ακριβής τιμή: $ARL^+(0.25,0) = 77.1$		

Πίνακας 2.16: Εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής $ARL^+(0.25,2)$ για διάφορες τιμές του m

m	w	$s = [m/2] \cdot w$	$ARL^+(0.25,s)$
5	0.888889	1.77778	65.5071
10	0.421053	2.10526	64.6831
15	0.275862	1.93103	66.9518
20	0.205128	2.05128	65.8367
40	0.101265	2.025316	66.2528
Ακριβής τιμή: $ARL^+(0.25,2) = 66.6$			

(δείτε Παράρτημα, Πρόγραμμα 4).

Για τον υπολογισμό του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής $ARL(0.25,2)$ στο δίπλευρο συμμετρικό διάγραμμα ελέγχου τύπου *CUSUM* με

$$H/s = H = 4, \quad K/s = K = 0.5, \quad S_0 = H/2s = z = 2,$$

θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο:

$$ARL(0.25,2) = \frac{ARL^+(0.25,2) \cdot ARL^-(0.25,0) + ARL^+(0.25,0) \cdot ARL^-(0.25,-2) - ARL^+(0.25,0) \cdot ARL^-(0.25,0)}{ARL^+(0.25,0) + ARL^-(0.25,0)},$$

ο οποίος για λόγους συμμετρίας μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$ARL(0.25,2) = \frac{ARL^+(0.25,2) \cdot ARL^+(-0.25,0) + ARL^+(0.25,0) \cdot ARL^+(-0.25,2) - ARL^+(0.25,0) \cdot ARL^+(-0.25,0)}{ARL^+(0.25,0) + ARL^+(-0.25,0)}$$

Γνωρίζουμε ήδη ότι

$$ARL^+(0.25,0) = 77.1, \quad ARL^+(0.25,2) = 66.6.$$

Χρησιμοποιώντας τους δύο ακόλουθους πίνακες

Πίνακας 2.17: Εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής $ARL^+(-0.25,0)$ για διάφορες τιμές του m

m	w	$ARL^+(-0.25,0)$
20	0.205128	1980.76
40	0.101265	1998.47
80	5.03144×10^{-2}	2002.81
160	2.50783×10^{-2}	2003.88
Ακριβής τιμή: $ARL^+(-0.25,0) = 2007.9$		

Πίνακας 2.18: Εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής $ARL^+(-0.25,2)$ για διάφορες τιμές του m

m	w	$s = [m/2] \cdot w$	$ARL^+(-0.25,s)$
20	0.205128	2.05128	1939.82
40	0.101265	2.02532	1959.03
80	5.03144×10^{-2}	2.01258	1964.14
160	2.50783×10^{-2}	2.00627	1965.69
Ακριβής τιμή: $ARL^+(-0.25,2) = 1969.9$			

(δείτε Παράρτημα, Πρόγραμμα 5), προκύπτει ότι

$$ARL^+(-0.25,0) = 2007.9, \quad ARL^+(-0.25,2) = 1969.9.$$

Συνεπώς

$$ARL(0.25,2) = 62.732$$

(δείτε Πίνακα 2.8).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΑΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Μέσο μήκος ροής στα διαγράμματα ελέγχου τύπου EWMA

3.1 Διάγραμμα ελέγχου τύπου EWMA

Ας θεωρήσουμε μια εντός ελέγχου διεργασία, η οποία παράγει προϊόντα, στα οποία η τιμή X ενός ποιοτικού χαρακτηριστικού τους που θέλουμε να παρακολουθήσουμε, έχει μέση τιμή m_0 και τυπική απόκλιση s . Από τη διεργασία λαμβάνονται ανεξάρτητες μεμονωμένες παρατηρήσεις X_t , $t \geq 1$ και μας ενδιαφέρει να ανιχνεύσουμε μετατοπίσεις του μέσου της διεργασίας της μορφής $m_t = m_0 \pm ds$. Στα διαγράμματα ελέγχου εκθετικά σταθμισμένου κινητού μέσου ή απλά διαγράμματα ελέγχου τύπου EWMA (*exponentially weighted moving average*), τα οποία εισήχθησαν από τον Roberts (1959), απεικονίζεται η στατιστική συνάρτηση

$$Z_t = (1-I)Z_{t-1} + I X_t, \quad t \geq 1, \quad 0 < I \leq 1.$$

Για την εκκίνηση του παραπάνω σχεδίου EWMA απαιτείται ο καθορισμός της τιμής εκκίνησης Z_0 , η οποία συνήθως λαμβάνεται ίση με m_0 ($Z_0 = m_0$) ή γενικότερα λαμβάνεται ίση με μια τιμή στόχο (*target value*) T ($Z_0 = T$). Χρησιμοποιώντας διαδοχικά τον παραπάνω τύπο παίρνουμε

$$\begin{aligned} Z_t &= (1-I)Z_{t-1} + I X_t \\ &= (1-I)[(1-I)Z_{t-2} + I X_{t-1}] + I X_t \\ &= (1-I)^2 Z_{t-2} + I(1-I)^1 X_{t-1} + I(1-I)^0 X_t \end{aligned}$$

M

$$= (1-I)^t Z_0 + I(1-I)^{t-1} X_1 + I(1-I)^{t-2} X_2 + \dots + I(1-I)X_{t-1} + I(1-I)^0 X_t$$

$$= (1-I)^t Z_0 + I \sum_{i=1}^t (1-I)^{t-i} X_i.$$

Παρατηρούμε ότι η ποσότητα Z_t αποτελεί ένα σταθμισμένο μέσο των παρατηρήσεων $Z_0, X_1, X_2, \dots, X_{t-1}, X_t$ με αντίστοιχα βάρη $(1-I)^t, I(1-I)^{t-1}, I(1-I)^{t-2}, \dots, I(1-I)^1, I$ (τα βάρη αθροίζουν στη μονάδα). Τα βάρη $I(1-I)^{t-i}$ των ποσοτήτων X_i φθίνουν γεωμετρικά καθώς προχωρούμε από την παρατήρηση X_t προς την παρατήρηση X_1 και συνεπώς η τιμή της παραμέτρου I απεικονίζει τη σπουδαιότητα που δίνουμε στις νέες (μεγάλη τιμή για το I) ή στις παλαιότερες (μικρή τιμή για το I) παρατηρήσεις. Για αυτό το λόγο, ο Roberts (1959) ονόμασε τα διαγράμματα που βασίζονται στη ποσότητα Z_t ως διαγράμματα ελέγχου γεωμετρικού κινητού μέσου (*geometric moving average control charts*). Στις μέρες μας βέβαια έχει επικρατήσει ο όρος διαγράμματα ελέγχου τύπου *EWMA*.

Για το μέσο και τη διακύμανση της στατιστικής συνάρτησης Z_t ($Z_0 = m_0$) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} m_{Z_t} &= E\left((1-I)^t Z_0 + I \sum_{i=1}^t (1-I)^{t-i} X_i\right) \\ &= (1-I)^t m_0 + I m_0 \sum_{i=1}^t (1-I)^{t-i} = (1-I)^t m_0 + m_0(1 - (1-I)^t) = m_0 \end{aligned}$$

και

$$s_{Z_t}^2 = \text{Var}\left((1-I)^t Z_0 + I \sum_{i=1}^t (1-I)^{t-i} X_i\right) = I^2 s^2 \sum_{i=1}^t [(1-I)^2]^{t-i} = s^2 \left(\frac{I}{2-I}\right) [1 - (1-I)^{2t}].$$

Συνεπώς, λαμβάνοντας υπόψη τη φιλοσοφία κατασκευής ενός διαγράμματος ελέγχου τύπου *Shewhart*, στο διάγραμμα ελέγχου τύπου *EWMA*, απεικονίζεται η τιμή της στατιστικής συνάρτησης Z_t και τα όρια ελέγχου δίνονται από τις σχέσεις

$$UCL = m_{z_t} + LS_{z_t} = m_0 + LS \sqrt{\frac{I}{2-I} [1 - (1-I)^{2t}]}$$

$$CL = m_{z_t} = m_0$$

$$LCL = m_{z_t} - LS_{z_t} = m_0 - LS \sqrt{\frac{I}{2-I} [1 - (1-I)^{2t}]}$$

Αξίζει να σημειώσουμε ότι για $I = 1$ το διάγραμμα ελέγχου τύπου *EWMA* ανάγεται στο αντίστοιχο διάγραμμα ελέγχου τύπου *Shewhart*. Επίσης παρατηρούμε ότι τα όρια ελέγχου του παραπάνω διαγράμματος είναι μεταβλητά ($I \neq 1$). Ωστόσο η ποσότητα $(1-I)^{2t}$ τείνει στο μηδέν καθώς το t αυξάνει, οπότε σε σχετικά σύντομο χρονικό διάστημα, τα όρια ελέγχου σταθεροποιούνται και δίνονται από τις σχέσεις:

$$UCL = m_{z_t} + LS_{z_t} = m_0 + LS \sqrt{\frac{I}{2-I}}$$

$$LCL = m_{z_t} - LS_{z_t} = m_0 - LS \sqrt{\frac{I}{2-I}}$$

Αν και η μέθοδος των διαγραμμάτων ελέγχου τύπου *EWMA* αναπτύχθηκε για μεμονωμένες παρατηρήσεις μπορεί να τροποποιηθεί άμεσα έτσι ώστε να καλύψει και την περίπτωση όπου έχουμε δείγματα μεγέθους $n > 1$. Σε αυτή την περίπτωση η ποσότητα X_t θα πρέπει να αντικατασταθεί με την ποσότητα \bar{X}_t (δηλαδή με το μέσο του t δείγματος) και η ποσότητα s με την ποσότητα s/\sqrt{n} . Συνεπώς στο διάγραμμα ελέγχου απεικονίζεται η ποσότητα

$$Z_t = (1-I)Z_{t-1} + I \bar{X}_t, \quad 0 < I \leq 1,$$

με όρια ελέγχου

$$UCL = m_{z_t} + Ls_{z_t} = m_0 + L \frac{s}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{I}{2-I} [1 - (1-I)^{2t}]}$$

$$CL = m_{z_t} = m_0$$

$$LCL = m_{z_t} - Ls_{z_t} = m_0 - L \frac{s}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{I}{2-I} [1 - (1-I)^{2t}]}$$

Τα διαγράμματα ελέγχου τύπου *EWMA* χρησιμοποιούνται, όπως και τα διαγράμματα ελέγχου τύπου *CUSUM*, όταν θέλουμε να εντοπίσουμε μικρές μετατοπίσεις του μέσου της διεργασίας. Το πλεονέκτημα των διαγραμμάτων ελέγχου τύπου *EWMA* έναντι των *CUSUM* είναι ότι δεν είναι ευαίσθητα στην υπόθεση της κανονικότητας των παρατηρήσεων και για το λόγο αυτό είναι ιδανικά στην περίπτωση που έχουμε μεμονωμένες παρατηρήσεις.

Για την επίδειξη ενός διαγράμματος ελέγχου τύπου *EWMA* θα χρησιμοποιήσουμε τα δεδομένα του Πίνακα 2.1 του Κεφαλαίου 2. Για $Z_0 = m_0 = 10$, $s = 1$, $I = 0.1$ και $L = 2.7$, προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας για τις τιμές Z_t , που θα απεικονιστούν στο διάγραμμα ελέγχου.

Πίνακας 3.1: Δεδομένα για την επίδειξη ενός διαγράμματος ελέγχου τύπου *EWMA*

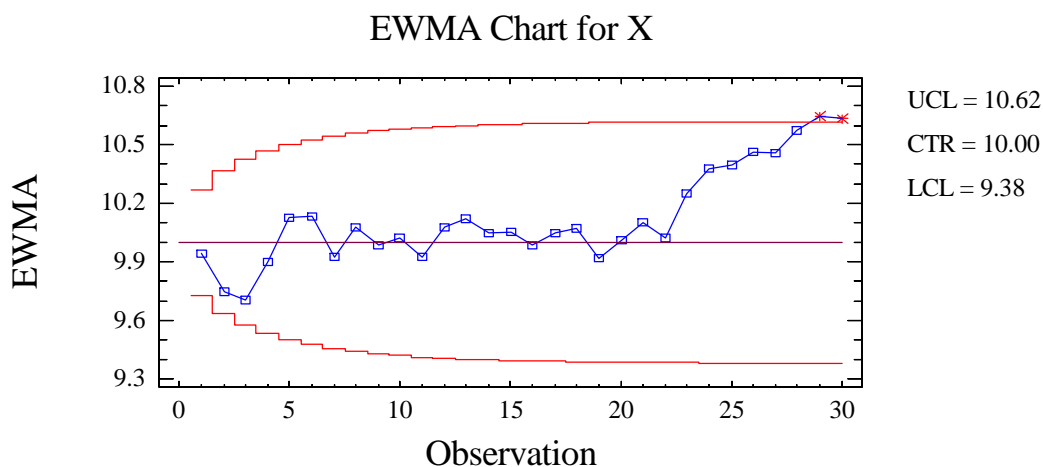
Παρατήρηση	X_i	Z_i	Παρατήρηση	X_i	Z_i
1	9.45	9.4500	16	9.37	9.98426
2	7.99	9.4950	17	10.62	10.0478
3	9.29	9.0355	18	10.31	10.0740
4	11.66	9.9920	19	8.52	9.9186
5	12.16	10.2530	20	10.84	10,0108
6	10.18	10.3070	21	10.90	10.0997
7	8.04	9.2167	22	9.33	10.0227
8	11.46	10.755	23	12.29	10.2495
9	9.20	9.8796	24	11.50	10.3745
10	10.34	10.232	25	10.60	10.3971
11	9.03	9.2384	26	11.08	10.4654
12	11.47	10.9785	27	10.38	10.4568
13	10.51	10.1216	28	11.62	10.5731
14	9.40	10.0495	29	11.31	10.6468
15	10.08	10.0525	30	10.52	10.6341

Τα σταθεροποιημένα όρια ελέγχου ($t \rightarrow \infty$) είναι:

$$UCL = m_0 + Ls \sqrt{\frac{I}{2-I}} = 10 + 2.7 \cdot 1 \cdot \sqrt{\frac{0.1}{(2-0.1)}} = 10.62$$

$$LCL = m_0 - Ls \sqrt{\frac{I}{2-I}} = 10 - 2.7 \cdot 1 \cdot \sqrt{\frac{0.1}{(2-0.1)}} = 9.38,$$

ενώ το διάγραμμα ελέγχου τύπου *EWMA* που προκύπτει ακολουθεί στη συνέχεια.



Διάγραμμα 3.1: Διάγραμμα ελέγχου τύπου *EWMA* για τα δεδομένα του Πίνακα 3.1

Στο συγκεκριμένο διάγραμμα παρατηρούμε ότι μετά την 23^η παρατήρηση διαφαίνεται μια μετατόπιση του μέσου της διεργασίας σε υψηλότερο επίπεδο, η οποία γίνεται αντιληπτή στην 29^η παρατήρηση.

Βασικό μειονέκτημα των διαγραμμάτων ελέγχου τύπου *EWMA* είναι ότι δε γίνεται εύκολη η ερμηνεία τους, σε σχέση μάλιστα με τα διαγράμματα ελέγχου τύπου *Shewhart*. Επίσης ο Yashcin (1987) παρατήρησε ότι όταν οι τιμές *EWMA* βρίσκονται προς τη μία μεριά της κεντρικής τιμής και η μετατόπιση του μέσου πραγματοποιείται από την άλλη μεριά, τότε υπάρχει καθυστέρηση στον εντοπισμό της μετατόπισης.

Παρ' όλα τα μειονεκτήματα των διαγραμμάτων ελέγχου τύπου *EWMA*, η εφαρμογή τους, ιδιαίτερα την τελευταία δεκαετία, είναι ευρέως διαδεδομένη, γεγονός που τα καθιστά από τα πλέον χρήσιμα εργαλεία του Στατιστικού Ποιοτικού Ελέγχου. Για ενδιαφέρουσες εφαρμογές των διαγραμμάτων ελέγχου τύπου *EWMA* δείτε Muth (1960), Brown (1962) και Freunf (1962).

3.2 Σχεδιασμός διαγράμματος ελέγχου τύπου *EWMA*

Ο σχεδιασμός ενός διαγράμματος ελέγχου τύπου *EWMA* δηλαδή η βέλτιστη επιλογή των παραμέτρων I και L , εξαρτάται σχεδόν αποκλειστικά από το μέσο μήκος ροής *ARL* του διαγράμματος. Γενικά η τιμή του *ARL* πρέπει να είναι μεγάλη όταν η διεργασία

λειτουργεί κοντά στην τιμή στόχο T , ενώ πρέπει να είναι μικρή όταν συμβαίνει το αντίθετο.

Ακολουθώς δίνουμε ένα ενδεικτικό πίνακα με τιμές για το μέσο μήκος ροής σε διαγράμματα ελέγχου τύπου $EWMA$ όπου η μετατόπιση του μέσου είναι εκφρασμένη σε μονάδες τυπικής απόκλισης (d) για διάφορες τιμές των παραμέτρων I και L . Ο πίνακας έχει κατασκευαστεί με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής ARL_0 να είναι ίσο με 500 (δείτε Montgomery (2001)).

Πίνακας 3.2: Τυπικές τιμές του μέσου μήκους ροής στα διαγράμματα ελέγχου τύπου $EWMA$

d	$L=3.054$ $\lambda=0.40$	$L=2.998$ $\lambda=0.25$	$L=2.962$ $\lambda=0.20$	$L=2.814$ $\lambda=0.10$	$L=2.615$ $\lambda=0.05$
0.00	500	500	500	500	500
0.25	224	170	150	106	84.1
0.50	71.2	48.2	41.8	31.3	28.8
0.75	28.4	20.1	18.2	15.9	16.4
1.00	14.3	11.1	10.5	10.3	11.4
1.50	5.9	5.5	5.5	6.1	7.1
2.00	3.5	3.6	3.7	4.4	5.2
2.50	2.5	2.7	2.9	3.4	4.2
3.00	2.0	2.3	2.4	2.9	3.5
4.00	1.4	1.7	1.9	2.2	2.7

Για την επιλογή των I , L καθορίζουμε πρώτα το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής και τη μετατόπιση του μέσου της διεργασίας που θέλουμε να ανιχνεύσουμε, και κατόπιν επιλέγουμε τα I και L από διαθέσιμους πίνακες με κριτήριο το μικρότερο εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής.

Στην πράξη επιλέγεται I , τέτοιο ώστε $0.05 \leq I \leq 0.25$, με πιο δημοφιλείς επιλογές τις $I = 0.05$, $I = 0.10$ και $I = 0.20$, ενώ για το L παίρνουμε συνήθως ότι $L = 3$.

Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσουμε ότι τα διαγράμματα ελέγχου τύπου $EWMA$ είναι ανώτερα των διαγραμμάτων τύπου $CUSUM$ για ανίχνευση μεγάλων μετατοπίσεων του μέσου, ιδιαίτερα για $I > 0.10$.

Για το σχεδιασμό ενός διαγράμματος ελέγχου τύπου *EWMA* οι Lucas και Saccucci (1990) πρότειναν τη χρήση του ακόλουθου πίνακα που περιέχει βέλτιστες τιμές των παραμέτρων I και L για συγκεκριμένες τιμές των d και ARL_0 .

Πίνακας 3.3: Σχεδιασμός διαγράμματος ελέγχου *EWMA*

		ARL_0					
		100	300	500	1000	2000	5000
$d = 0.5$	λ	0.07-0.06	0.06-0.05	0.05	0.04	0.04-0.03	0.03
	L	2.015-1.954	2.462-2.399	2.616	2.817	3.069-2.989	3.299
	ARL_{min}	17.3	24.9	28.7	34.3	40.1	47.7
$d = 1$	λ	0.19-0.16	0.15-0.14	0.15-0.12	0.13-0.10	0.12-0.10	0.09
	L	2.346-2.295	2.723-2.707	2.907-2.858	3.113-3.059	3.317-3.283	3.538
	ARL_{min}	6.97	9.14	10.2	11.7	13.2	15.2
$d = 2$	λ	0.52-0.47	0.42-0.38	0.37-0.36	0.35-0.31	0.32-0.28	0.29-0.26
	L	2.538-2.526	2.895-2.885	3.047-3.044	3.253-3.241	3.445-3.433	3.686-3.677
	ARL_{min}	2.62	3.23	3.51	3.90	4.29	4.81
$d = 3$	λ	0.81-0.77	0.74-0.71	0.70-0.66	0.66-0.59	0.61-0.53	0.53-0.47
	L	2.572-2.569	2.931-2.930	3.086-3.084	3.286-3.283	3.477-3.473	3.714-3.711
	ARL_{min}	1.45	1.72	1.86	2.06	2.26	2.51
$d = 4$	λ	1.00-0.85	0.97-0.84	0.95-0.85	0.91-0.80	0.91-0.75	0.84-0.72
	L	2.576-2.573	2.935-2.934	3.090-3.089	3.290-3.289	3.480-3.480	3.719-3.718
	ARL_{min}	1.08	1.16	1.21	1.29	1.39	1.53

Σε κάθε τιμή του εντός ελέγχου μέσου μήκους ροής ARL_0 και της μετατόπισης d του μέσου της διεργασίας, αντιστοιχεί μια ελάχιστη τιμή του ARL , ARL_{min} , για το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής που δίνεται στον παραπάνω πίνακα μαζί με τις αντίστοιχες τιμές των ποσοτήτων I και L , για τις οποίες επιτυγχάνεται το συγκεκριμένο ARL_{min} . Όταν οι ελάχιστες τιμές ARL_{min} επιτυγχάνονται σε διαστήματα τιμών των I , L τότε στον πίνακα παρουσιάζονται τα διαστήματα αυτά. Το σχέδιο *EWMA*, το οποίο σχεδιάζεται με τη μικρότερη τιμή του I του διαστήματος, παρέχει μεγαλύτερη προστασία σε μικρές μετατοπίσεις του μέσου της διεργασίας. Αντίθετα, το σχέδιο *EWMA*, το οποίο σχεδιάζεται με τη μεγαλύτερη τιμή του I του διαστήματος, παρέχει μεγαλύτερη προστασία σε μεγαλύτερες μετατοπίσεις του μέσου της διεργασίας.

3.3 Υπολογισμός του μέσου μήκους ροής στα διαγράμματα ελέγχου τύπου EWMA

Όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 2 για τον υπολογισμό του μέσου μήκους ροής ARL στα διαγράμματα ελέγχου τύπου $CUSUM$ έχουν προταθεί δύο μεθοδολογίες (α) η μέθοδος των ολοκληρωτικών εξισώσεων και (β) η μέθοδος των Μαρκοβιανών αλυσίδων. Οι δύο αυτές μεθοδολογίες έχουν προταθεί και για τον υπολογισμό του μέσου μήκους ροής ARL στα διαγράμματα ελέγχου τύπου $EWMA$, τις οποίες και θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια.

3.3.1 Η μέθοδος των ολοκληρωτικών εξισώσεων

Η μέθοδος των ολοκληρωτικών εξισώσεων ως μέσο για τον υπολογισμό του ARL στα διαγράμματα ελέγχου τύπου $EWMA$, παρουσιάστηκε από τον Crowder (1987). Ας υποθέσουμε ότι έχουμε στη διάθεσή μας μια ακολουθία από ανεξάρτητες και ισόνομες παρατηρήσεις X_t , $t \geq 1$, με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$, συνάρτηση κατανομής $F(\cdot)$, μέσο $m=0$ και διακύμανση $\sigma^2=1$. Επίσης θεωρούμε ότι στο διάγραμμα ελέγχου $EWMA$ απεικονίζεται η στατιστική συνάρτηση

$$Z_t = (1-I)Z_{t-1} + I X_t, \quad Z_0 = u, \quad t \geq 1, \quad 0 < I \leq 1.$$

Τα σταθεροποιημένα όρια ελέγχου είναι τα ακόλουθα

$$UCL = L\sqrt{\frac{I}{2-I}} = h, \quad LCL = -L\sqrt{\frac{I}{2-I}} = -h.$$

Με $N(u)$ συμβολίζουμε το μήκος ροής (*run length*) του διαγράμματος και έστω

$$P(n, u) = P(N(u) = n), \quad n \geq 1.$$

Για την πιθανότητα $P(1, u)$ έχουμε

$$\begin{aligned} P(1, u) &= P(|(1-I)u + IX_1| > h) \\ &= 1 - P(-h \leq (1-I)u + IX_1 \leq h) = 1 - \left[F\left(\frac{h - (1-I)u}{I}\right) - F\left(\frac{-h - (1-I)u}{I}\right) \right]. \end{aligned}$$

Για $n \geq 2$, η πιθανότητα $P(n, u)$ προκύπτει ως εξής:

η πρώτη παρατήρηση X_1 πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση $|(1-I)u + IX_1| \leq h$ και το διάγραμμα ελέγχου τύπου EWMA συνεχίζοντας από τη θέση $(1-I)u + IX_1$ πρέπει να έχει μήκος ροής ίσο με $n-1$ για κάθε τέτοιο X_1 .

Συνεπώς,

$$P(n, u) = \int_{\{|(1-I)u + Ix| \leq h\}} P(n-1, (1-I)u + Ix) f(x) dx = \frac{1}{I} \int_{-h}^h P(n-1, x) f\left(\frac{x - (1-I)u}{I}\right) dx.$$

Στη συνέχεια ορίζουμε τη σειρά

$$G_l(u) = \sum_{n=1}^{\infty} g(n+l)P(n, u),$$

η οποία παριστάνει το μέσο της τυχαίας μεταβλητής $g(N(u)+l)$ ($g(\cdot)$ μια πραγματική συνάρτηση).

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} G_0(u) &= \sum_{n=1}^{\infty} g(n)P(n, u) = g(1)P(1, u) + \sum_{n=2}^{\infty} g(n)P(n, u) \\ &= g(1) \cdot P(1, u) + \frac{1}{I} \int_{-h}^h \sum_{n=2}^{\infty} g(n)P(n-1, x) f\left(\frac{x - (1-I)u}{I}\right) dx \\ &= g(1) \cdot P(1, u) + \frac{1}{I} \int_{-h}^h G_1(x) f\left(\frac{x - (1-I)u}{I}\right) dx \\ &= g(1) \left[1 - F\left(\frac{h - (1-I)u}{I}\right) + F\left(\frac{-h - (1-I)u}{I}\right) \right] + \frac{1}{I} \int_{-h}^h G_1(x) f\left(\frac{x - (1-I)u}{I}\right) dx. \end{aligned}$$

Το μέσο μήκος ροής $L(u)$ του διαγράμματος ελέγχου τύπου $EWMA$ δηλαδή

$$L(u) = E(N(u)) = \sum_{n=1}^{\infty} nP(n, u) = G_0(u) \Big|_{g(x)=x}$$

δηλαδή προκύπτει από τη σειρά $G_0(u)$ για $g(x) = x$.

Για $g(x) = x$ έχουμε ότι

$$G_1(x) = 1 + L(x),$$

οπότε

$$L(u) = G_0(u) \Big|_{g(x)=x} = 1 - F\left(\frac{h - (1-I)u}{I}\right) + F\left(\frac{-h - (1-I)u}{I}\right) + \frac{1}{I} \int_{-h}^h (1 + L(x)) f\left(\frac{x - (1-I)u}{I}\right) dx$$

δηλαδή

$$L(u) = 1 + \frac{1}{I} \int_{-h}^h L(x) f\left(\frac{x - (1-I)u}{I}\right) dx.$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι μια *Fredholm* ολοκληρωτική εξίσωση δεύτερου είδους.

Εργαζόμενοι με τη συνάρτηση $g(x) = x^2$, μπορούμε να εξάγουμε τη διακύμανση, έστω $V(u)$, του μήκους ροής $N(u)$, η οποία ικανοποιεί την ολοκληρωτική εξίσωση

$$V(u) = 1 + \frac{2}{I} \int_{-h}^h L(x) f\left(\frac{x - (1-I)u}{I}\right) dx + \frac{1}{I} \int_{-h}^h V(x) f\left(\frac{x - (1-I)u}{I}\right) dx.$$

Επίσης, εργαζόμενοι με τη συνάρτηση $g(x) = e^{tx}$, μπορούμε να εξάγουμε τη ροπογεννήτρια, έστω $M(t, u)$, του μήκους ροής $N(u)$, η οποία ικανοποιεί την ολοκληρωτική εξίσωση

$$e^{-t} M(t, u) = 1 - F\left(\frac{h - (1-I)u}{I}\right) + F\left(\frac{-h - (1-I)u}{I}\right) + \frac{1}{I} \int_{-h}^h M(t, x) f\left(\frac{x - (1-I)u}{I}\right) dx$$

3.3.2 Η μέθοδος των αλυσίδων *Markov*

Η μέθοδος των αλυσίδων *Markov* για τον υπολογισμό του μέσου μήκους ροής στα διαγράμματα ελέγχου τύπου *EWMA* παρουσιάστηκε από τους Lucas και Saccucci (1990) (δείτε επίσης Champ Ridgon (1991)). Η εφαρμογή αυτής της μεθόδου στα διαγράμματα ελέγχου τύπου *EWMA* είναι αντίστοιχη με αυτή των διαγραμμάτων ελέγχου τύπου *CUSUM*.

Υπενθυμίζουμε ότι στο διάγραμμα ελέγχου τύπου *EWMA* απεικονίζεται η στατιστική συνάρτηση

$$Z_t = (1 - I)Z_{t-1} + I X_t, \quad Z_0 = m_0, \quad t \geq 1, \quad 0 < I \leq 1,$$

όπου m_0 είναι ο εντός ελέγχου μέσος της διεργασίας. Χωρίς βλάβη της γενικότητας των αποτελεσμάτων που θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια, θεωρούμε ότι $m_0 = 0$ και ότι οι τυχαίες μεταβλητές X_t , $t \geq 1$, είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$, με μέσο m και διακύμανση $S^2 = 1$.

Τα σταθεροποιημένα όρια του διαγράμματος είναι ίσα με

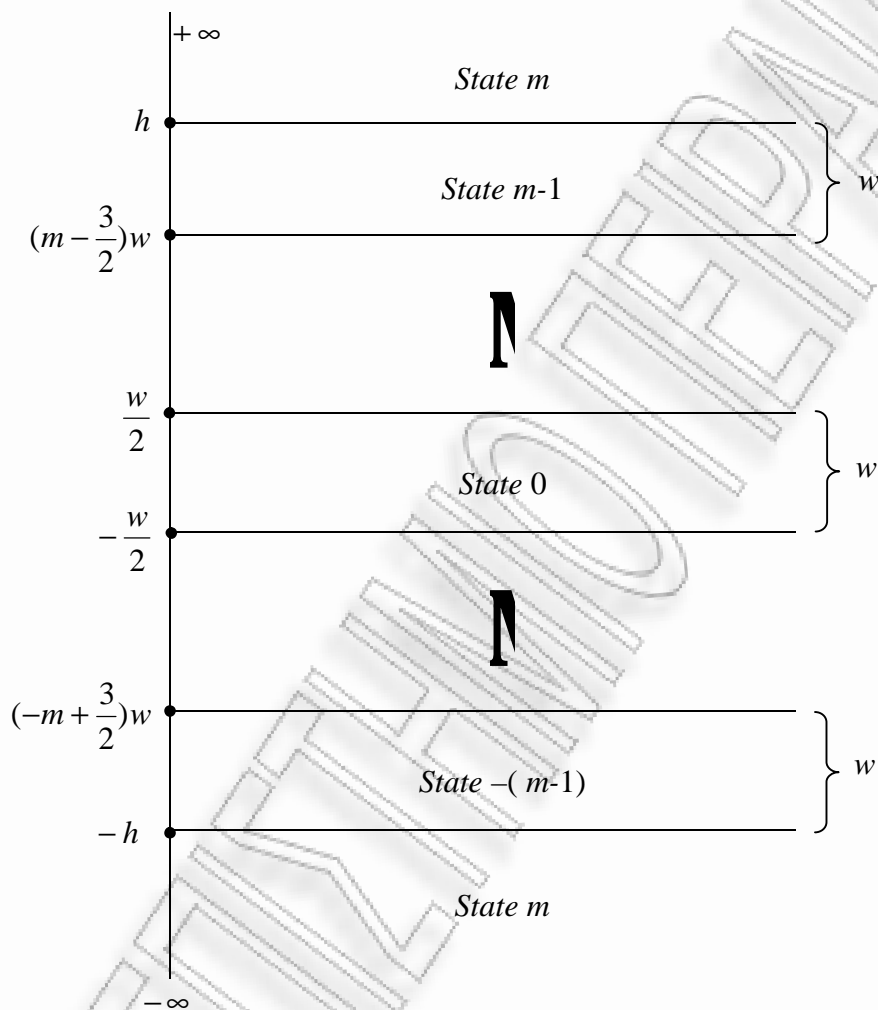
$$UCL = L\sqrt{\frac{I}{2-I}} = h, \quad LCL = -L\sqrt{\frac{I}{2-I}} = -h.$$

Για την εφαρμογή της μεθόδου των αλυσίδων *Markov* χωρίζουμε το διάστημα $(-\infty, +\infty)$ του διαγράμματος ελέγχου τύπου *EWMA* σε $2m+1$ ζώνες που σε κάθε μια αντιστοιχεί μια κατάσταση της αλυσίδας *Markov* και οι ζώνες θα χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων μεταπήδησης της αλυσίδας. Φυσικά η πρώτη ζώνη θα είναι η $(-\infty, -h]$ και η τελευταία ζώνη η $(h, +\infty]$ (όταν εισέρχεται το Z_t σε αυτές τις δύο ζώνες έχουμε σήμα εκτός ελέγχου διεργασίας).

Για τον υπολογισμό του πλάτους w των $2m-1$ εσωτερικών ζωνών οι Lucas και Saccucci (1990) πρότειναν τον τύπο

$$w = \frac{2h}{2m-1}.$$

Οι $2m + 1$ το πλήθος ζώνες που χωρίζεται το διάγραμμα ελέγχου τύπου *EWMA* δίνονται στο διάγραμμα που ακολουθεί.



Διάγραμμα 3.2: Ζώνες του διαγράμματος ελέγχου τύπου *EWMA* για την εφαρμογή της μεθόδου των αλυσίδων *Markov*

Τα διαστήματα που αντιστοιχούν στις παραπάνω ζώνες και οι καταστάσεις της αλυσίδας *Markov* που αντιστοιχούν σε κάθε ζώνη περιγράφονται στον ακόλουθο πίνακα

Πίνακας 3.4: Ζώνες του διαγράμματος ελέγχου τύπου *EWMA* και αντίστοιχες καταστάσεις της αλυσίδας *Markov*

Ζώνη	Κατάσταση	Μέσος της ζώνης
$\left(\left(0 - \frac{1}{2}\right)w, \left(0 + \frac{1}{2}\right)w \right]$	0	0
$\left(\left(1 - \frac{1}{2}\right)w, \left(1 + \frac{1}{2}\right)w \right]$	1	w
$\left(\left(-1 - \frac{1}{2}\right)w, \left(-1 + \frac{1}{2}\right)w \right]$	-1	$-w$
\mathbb{N}	\mathbb{N}	\mathbb{N}
$\left(\left(i - \frac{1}{2}\right)w, \left(i + \frac{1}{2}\right)w \right]$	i	iw
$\left(\left(-i - \frac{1}{2}\right)w, \left(-i + \frac{1}{2}\right)w \right]$	$-i$	$-iw$
\mathbb{N}	\mathbb{N}	\mathbb{N}
$\left(\left(m - 1 - \frac{1}{2}\right)w, \left(m - 1 + \frac{1}{2}\right)w \right]$	$m - 1$	$(m - 1)w$
$\left(\left(- (m - 1) - \frac{1}{2}\right)w, \left(- (m - 1) + \frac{1}{2}\right)w \right]$	$- (m - 1)$	$- (m - 1)w$
$(h, +\infty)$ ή $(-\infty, -h]$	m	-

Η πιθανότητα μεταπήδησης p_{ij} από την κατάσταση i στην κατάσταση j , για $i, j = 0, 1, \dots, (m - 1)$ μπορεί να υπολογιστεί ως ακολούθως

$$p_{ij} = P \left[\left(j - \frac{1}{2} \right) w < Z_t \leq \left(j + \frac{1}{2} \right) w \mid \left(i - \frac{1}{2} \right) w < Z_{t-1} \leq \left(i + \frac{1}{2} \right) w \right].$$

Υποθέτοντας ότι η τιμή της στατιστικής Z_{t-1} είναι ίση με το μέσο του διαστήματος

$$\left[\left(i - \frac{1}{2} \right) w, \left(i + \frac{1}{2} \right) w \right]$$

δηλαδή $Z_{t-1} = iw$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} p_{ij} &= P\left(\left(j - \frac{1}{2} \right) w < (1-I)iw + IX_t \leq \left(j + \frac{1}{2} \right) w \right) \\ &= P\left(\frac{(j-1/2)w - (1-I)iw}{I} < X_t \leq \frac{(j+1/2)w - (1-I)iw}{I} \right) \\ &= \int_{\{(j-1/2)w - (1-I)iw\}/I}^{\{(j+1/2)w - (1-I)iw\}/I} f_X(x) dx. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό

$$IX = y - (1-I)iw,$$

είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι

$$p_{ij} = \frac{1}{I} \int_{(j-1/2)w}^{(j+1/2)w} f_X\left(\frac{y - (1-I)iw}{I} \right) dy.$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούν να προκύψουν και οι υπόλοιπες πιθανότητες μεταπήδησης.

Συγκεντρωτικά λοιπόν έχουμε

$$p_{ij} = \frac{1}{I} \int_{(j-1/2)w}^{(j+1/2)w} f_X\left(\frac{y - (1-I)iw}{I} \right) dy, \quad i, j = 0, \pm 1, \dots, \pm(m-1),$$

$$p_{im} = \frac{1}{I} \int_{-\infty}^{-h} f_X\left(\frac{y - (1-I)iw}{I} \right) dy + \frac{1}{I} \int_h^{+\infty} f_X\left(\frac{y - (1-I)iw}{I} \right) dy, \quad i = 0, \pm 1, \dots, \pm(m-1)$$

$$p_{mj} = 0, \quad i = 0, \pm 1, \dots, \pm(m-1), \quad p_{mm} = 1.$$

Έτσι ο πίνακας των πιθανοτήτων μεταπήδησης διαστάσεων $2m \times 2m$ παίρνει τη μορφή

$$\mathbf{P} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|c} P_{-m+1,-m+1} & P_{-m+1,-m+2} & \mathbf{L} & P_{-m+1,0} & \mathbf{L} & P_{-m+1,m-1} & P_{-m+1,m} \\ P_{-m+2,-m+1} & P_{-m+2,-m+2} & \mathbf{L} & P_{-m+2,0} & \mathbf{L} & P_{-m+2,m-1} & P_{-m+2,m} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & & \mathbf{M} & & \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ P_{0,-m+1} & P_{0,-m+2} & \mathbf{L} & P_{00} & \mathbf{L} & P_{0,m-1} & P_{0,m} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & & \mathbf{M} & & \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ P_{m-1,-m+1} & P_{m-1,-m+2} & \mathbf{L} & P_{m-1,0} & \mathbf{L} & P_{m-1,m-1} & P_{m-1,m} \\ \hline 0 & 0 & \mathbf{L} & 0 & \mathbf{L} & 0 & 1 \end{array} \right]_{2m \times 2m}$$

ο οποίος ισοδύναμα γράφεται ως

$$\mathbf{P} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R} & \mathbf{p}_{2m-1} \\ \hline \mathbf{0}' & 1 \end{array} \right]_{(H+1) \times (H+1)},$$

όπου

$$\mathbf{0}' = [0, 0, \dots, 0]_{1 \times (2m-1)}, \quad \mathbf{p}_{2m-1} = \begin{bmatrix} P_{-m+1,m} \\ P_{-m+2,m} \\ \mathbf{M} \\ P_{m-1,m} \end{bmatrix}_{(2m-1) \times 1}.$$

Ο υπολογισμός του μέσου μήκους ροής του διαγράμματος ελέγχου τύπου *EWMA* γίνεται με τη μεθοδολογία που αναπτύξαμε στο Κεφάλαιο 2. Ας συμβολίσουμε με N_u , $u = 0, \pm 1, \dots, \pm(m-1)$ την τυχαία μεταβλητή που δηλώνει το μήκος ροής του διαγράμματος ελέγχου τύπου *EWMA* για $Z_0 = iw$ και ας θέσουμε

$$\mathbf{L}_n = \begin{bmatrix} P(N_{-(m-1)} = n) \\ \mathbf{M} \\ P(N_0 = n) \\ \mathbf{M} \\ P(N_{(m-1)} = n) \end{bmatrix}_{(2m-1) \times 1}.$$

Τότε

$$\mathbf{L}_1 = (\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{1}, \quad \mathbf{L}_n = \mathbf{R}\mathbf{L}_{n-1}, \quad n = 2, 3, \dots$$

Επίσης, το διάνυσμα

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} E(N_{-(m-1)}) \\ \mathbf{M} \\ E(N_0) \\ \mathbf{M} \\ E(N_{m-1}) \end{bmatrix}_{(2m-1) \times 1}$$

υπολογίζεται από τη σχέση

$$\boldsymbol{\mu} = (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} \mathbf{1}.$$

Στη συνήθη περίπτωση $Z_0 = m_0 = 0 = 0 \cdot w$, έχουμε ότι το μέσο μήκος ροής είναι ίσο με $E(N_0)$. Φυσικά η παραπάνω μεθοδολογία προσεγγίζει το μέσο μήκος ροής για συγκεκριμένη τιμή του m , η οποία γίνεται ολοένα και καλύτερη αυξάνοντας την τιμή του m .

3.4 Υπολογισμός του μέσου μήκους ροής στα διαγράμματα ελέγχου τύπου EWMA

Υποθέτουμε ότι στο διάγραμμα ελέγχου τύπου EWMA απεικονίζεται η στατιστική συνάρτηση

$$Z_t = (1 - I)Z_{t-1} + I X_t, \quad Z_0 = m_0 = 0, \quad t \geq 1, \quad 0 < I \leq 1,$$

όπου m_0 είναι ο εντός ελέγχου μέσος της διεργασίας και ότι οι παρατηρήσεις X_t , $t \geq 1$, είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με κατανομή $N(d, 1)$. Αν οι παρατηρήσεις μας ακολουθούν κανονική κατανομή (ή οποιαδήποτε άλλη κατανομή), τότε χρησιμοποιούμε την αντίστοιχη τυποποιημένη κατανομή για τις ανάγκες του διαγράμματος. Ως όρια του διαγράμματος λαμβάνονται τα σταθεροποιημένα όρια

$$UCL = L\sqrt{\frac{I}{2-I}} = h, \quad LCL = -L\sqrt{\frac{I}{2-I}} = -h.$$

Ακολουθως δίνονται πίνακες για το μέσο μήκος ροή του διαγράμματος ελέγχου τύπου EWMA για διάφορες τιμές των L , I . Για μετατόπιση του εντός ελέγχου μέσου $m_0 = 0$ στη θέση $m_1 = m_0 + dS = d$, το μέσο μήκος ροής δίνεται στη αντίστοιχη γραμμή του d . Φυσικά η γραμμή που αντιστοιχεί στο $d = 0$ δίνει το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής

Πίνακας 3.5: Μέσο μήκος ροής για διαγράμματα ελέγχου τύπου EWMA

d	$L = 2.00$						$L = 2.25$					
	I						I					
	1.00	0.75	0.50	0.25	0.10	0.05	1.00	0.75	0.50	0.25	0.10	0.05
0.00	21.98	22.88	26.45	38.56	73.28	127.53	40.90	42.25	47.78	67.46	125.10	215.39
0.25	19.13	18.86	20.12	24.83	34.49	43.94	34.53	33.07	33.48	37.86	47.50	56.78
0.50	13.70	12.34	11.89	12.74	15.53	18.79	23.23	19.78	17.62	17.03	19.12	22.52
0.75	9.21	7.86	7.29	7.62	9.36	11.64	14.67	11.64	9.93	9.49	11.02	13.44
1.00	6.25	5.26	4.91	5.24	6.62	8.38	9.41	7.31	6.30	6.27	7.63	9.55
1.25	4.40	3.76	3.95	3.59	5.13	6.56	6.29	4.95	4.42	4.62	5.84	7.42
1.50	3.24	2.84	2.80	3.19	4.20	5.41	4.41	3.58	3.34	3.66	4.74	6.08
1.75	2.49	2.26	2.29	2.68	3.57	4.62	3.24	2.75	2.68	3.04	4.01	5.17
2.00	2.00	1.88	1.95	2.32	3.12	4.04	2.49	2.21	2.23	2.61	3.48	4.51
2.25	1.67	1.61	1.70	2.06	2.78	3.61	2.00	1.85	1.92	2.30	3.09	4.02
2.50	1.45	1.42	1.51	1.85	2.52	3.26	1.67	1.60	1.69	2.07	2.79	3.63
2.75	1.29	1.29	1.37	1.69	2.32	2.99	1.45	1.42	1.51	1.88	2.55	3.32
3.00	1.19	1.19	1.26	1.55	2.16	2.76	1.29	1.29	1.38	1.73	2.36	3.06
3.25	1.12	1.13	1.18	1.43	2.03	2.56	1.19	1.19	1.27	1.59	2.21	2.85
3.50	1.07	1.08	1.12	1.32	1.93	2.39	1.12	1.13	1.19	1.48	2.09	2.66
3.75	1.04	1.05	1.08	1.24	1.83	2.26	1.07	1.08	1.13	1.37	1.99	2.49
4.00	1.02	1.03	1.05	1.17	1.73	2.15	1.04	1.05	1.08	1.28	1.91	2.34

<i>d</i>	<i>L</i> = 2.5						<i>L</i> = 2.75					
	<i>l</i>						<i>l</i>					
	1.00	0.75	0.50	0.25	0.10	0.05	1.00	0.75	0.50	0.25	0.10	0.05
0.00	80.52	82.49	91.17	124.18	223.35	379.40	167.80	170.64	184.56	242.20	420.78	702.19
0.25	65.77	61.07	58.33	59.66	66.59	73.98	132.28	119.08	107.13	98.32	96.17	98.23
0.50	41.49	33.26	27.16	23.28	23.63	26.64	78.12	59.04	43.97	32.89	29.50	3.150
0.75	24.61	18.05	13.96	11.96	12.95	15.41	43.51	29.47	20.44	15.34	15.20	17.56
1.00	19.92	10.57	8.27	7.52	8.75	10.79	24.91	16.03	11.19	9.11	9.99	12.11
1.25	9.46	6.75	5.52	5.39	6.60	8.31	14.96	9.58	7.04	6.29	7.42	9.25
1.50	6.30	4.65	4.03	4.18	5.31	6.78	9.46	6.24	4.92	4.78	5.92	7.51
1.75	4.41	3.43	3.14	3.43	4.46	5.75	6.30	4.39	3.72	3.86	4.94	6.34
2.00	3.24	2.67	2.57	2.92	3.86	5.00	4.41	3.28	2.98	3.25	4.26	5.49
2.25	2.49	2.17	2.18	2.56	3.42	4.43	3.24	2.59	2.49	2.82	3.75	4.86
2.50	2.00	1.83	1.90	2.29	3.07	4.00	2.49	2.13	2.14	2.51	3.37	4.37
2.75	1.67	1.59	1.69	2.08	2.80	3.64	2.00	1.81	1.88	2.27	3.06	3.98
3.00	1.45	1.41	1.82	1.91	2.57	3.36	1.67	1.58	1.68	2.09	2.81	3.66
3.25	1.29	1.29	1.39	1.77	2.39	3.12	1.45	1.41	1.53	1.93	2.60	3.39
3.50	1.19	1.19	1.28	1.64	2.24	2.92	1.29	1.29	1.40	1.80	2.42	3.17
3.75	1.12	1.13	1.20	1.52	2.13	2.74	1.19	1.20	1.29	1.69	2.27	2.99
4.00	1.07	1.08	1.13	1.42	2.04	2.58	1.12	1.13	1.21	1.57	2.16	2.82

<i>d</i>	<i>L</i> = 3.00						<i>L</i> = 3.50					
	<i>l</i>						<i>l</i>					
	1.00	0.75	0.50	0.25	0.10	0.05	1.00	0.75	0.50	0.25	0.10	0.05
0.00	340.04	374.50	397.56	502.90	842.15	1379.35	2149.34	2157.99	2227.34	2640.16	4106.29	6464.60
0.25	281.15	245.76	205.54	171.09	144.75	134.86	1502.76	1245.90	951.18	624.78	385.49	281.09
0.50	155.22	110.95	75.35	48.45	37.41	37.37	723.81	468.68	267.36	123.43	64.72	54.56
0.75	81.22	50.92	31.46	20.16	17.90	19.95	33.40	182.12	88.70	38.68	25.33	25.63
1.00	43.89	25.64	15.74	11.15	11.38	13.51	160.95	78.05	35.97	17.71	14.79	16.60
1.25	24.96	14.26	9.21	7.39	8.32	10.23	81.80	37.15	17.64	10.48	10.37	12.32
1.50	14.97	8.72	6.11	5.47	6.57	8.26	43.96	19.63	10.19	7.25	8.00	9.84
1.75	9.47	5.80	4.45	4.34	5.45	6.94	24.96	11.46	6.70	5.52	6.54	8.21
2.00	6.30	4.15	3.47	3.62	4.67	6.00	19.47	7.33	4.86	4.47	5.55	7.06
2.25	4.41	3.16	2.84	3.11	4.10	5.30	9.47	5.08	3.78	3.77	4.83	6.21
2.50	3.24	2.52	2.41	2.75	3.67	4.76	6.30	3.76	3.10	3.28	4.29	5.56
2.75	2.49	2.09	2.10	2.47	3.32	4.32	4.41	2.94	2.63	2.91	3.87	5.03
3.00	2.00	1.79	1.87	2.26	3.05	3.97	3.24	2.40	2.30	2.63	3.54	4.60
3.25	1.67	1.57	1.69	2.09	2.82	3.67	2.49	2.03	2.05	2.41	3.26	4.25
3.50	1.45	1.41	1.53	1.95	2.62	3.22	2.00	1.76	1.85	2.23	3.03	3.95
3.75	1.29	1.29	1.41	1.84	2.45	3.42	1.67	1.56	1.69	2.10	2.84	3.69
4.00	1.19	1.20	1.31	1.73	2.30	3.04	1.45	1.40	1.55	1.99	2.66	3.47

Για να επιδείξουμε τη μεθοδολογία των αλυσίδων *Markov* για τον υπολογισμό του μέσου μήκους ροής στα διαγράμματα ελέγχου τύπου *EWMA* θα χρησιμοποιήσουμε το Πρόγραμμα 6 του Παραρτήματος για $L = 3$, $I = 0.25$, $d = 0.25$. Ενδεικτικός είναι ο ακόλουθος πίνακας με τιμές για το μέσο μήκος ροής για διάφορες τιμές του m

Πίνακας 3.6: Μέσο μήκος ροής για $L = 3$, $I = 0.25$, $d = 0.25$

m	ARL
5	156.35
10	167.529
20	170.232
50	170.959
Ακριβής τιμή: $ARL = 171.09$	

(δείτε Παράρτημα, Πρόγραμμα 6).