

*Αφιερώνεται στους γονείς μου Γιώργο και Κλεοπάτρα  
στη σύζυγό μου Έλενα  
και στα παιδιά μου Γιώργο, Κλεοπάτρα και Βασίλη*



## Πρόλογος

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΡΑΙΑ

Τα Πιστωτικά Ιδρύματα είναι υποχρεωμένα να μετρούν τον κίνδυνο στον οποίο εκτίθενται. Η υποχρέωση αυτή καθορίζεται διεθνώς με βάση τους κανόνες-κατευθύνσεις που θέτει η Basel Committee on Banking Supervision (BCBS). Από την 1-1-2007 ισχύει το νέο πλαίσιο μέτρησης του κινδύνου των Πιστωτικών Ιδρυμάτων που βασίζεται στο “International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards (A Revised Framework), June 2004” ή αλλιώς Basel II της BCBS.

Η δημιουργία της Basel II ξεκίνησε στα τέλη της δεκαετίας του 1990 και ήταν το αποτέλεσμα διαβουλεύσεων μεταξύ των εποπτικών-ελεγκτικών αρχών, των πιστωτικών ιδρυμάτων, της πανεπιστημιακής κοινότητας και άλλων θεσμικών παραγόντων. Η Basel II κατά τη γνώμη μου χαρακτηρίζεται από την αναβάθμιση του ρόλου των εσωτερικών συστημάτων μέτρησης του κινδύνου των πιστωτικών ιδρυμάτων.

Η βελτίωση των συστημάτων αυτών είναι και ο τελικός στόχος της διατριβής. Για να επιτευχθεί ο στόχος αυτός αρχικά αναλύθηκαν οι τρόποι μέτρησης του κινδύνου αγοράς και του πιστωτικού κινδύνου των πιστωτικών ιδρυμάτων. Στη συνέχεια κατασκευάστηκε μία οικογένεια νέων στατιστικών μεθόδων μέτρησης του κινδύνου αγοράς και του πιστωτικού κινδύνου που υπό συνθήκες αποδίδουν καλύτερα σε σχέση με τις υπάρχουσες. Τέλος παρουσιάστηκαν τρόποι ενσωμάτωσης των νέων μεθόδων στα πληροφοριακά συστήματα μέτρησης του κινδύνου των πιστωτικών ιδρυμάτων.

Η παρούσα διδακτορική διατριβή πραγματοποιήθηκε υπό την επίβλεψη του Αναπληρωτή Καθηγητή, κ. Μιχάλη Σφακιανάκη τον οποίο επιθυμώ να ευχαριστήσω ολόψυχα για την επιστημονική, και όχι μόνο, συμπαράσταση, καθοδήγηση και δημιουργική βοήθεια που μου προσέφερε.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον Καθηγητή, κ. Γ. Αρτίκη καθώς και τον Καθηγητή, κ. Χρ. Καζαντζή για την πολύτιμη καθοδήγηση τους στην ολοκλήρωση και σύνταξη της διατριβής.

Τέλος δεν μπορώ να μην ευχαριστήσω το Τμήμα Οργάνωσης και Διοίκησης Επιχειρήσεων του Πανεπιστημίου Πειραιά, για την ευκαιρία που μου έδωσε να πραγματοποιήσω την συγκεκριμένη διατριβή, καθώς και τους Καθηγητές, κ. Γ. Οικονόμου, κ. Γ. Βασιλακόπουλο, κ. Χ. Γκότση και κ. Εμμ. Κονδύλη που ως μέλη της επταμελούς επιτροπής βοήθησαν με τις χρήσιμες παρατηρήσεις τους στην τελική διαμόρφωση της διατριβής.

Δημήτριος Γ. Βεργίνης

Πειραιάς, 2007

## Εισαγωγή

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΡΑΙΑ



## Περιεχόμενα

I.	Στόχοι της διατριβής .....	11
II.	Ανασκόπηση βιβλιογραφίας .....	13
III.	Δομή διατριβής .....	17

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΡΑΙΑ

## I. Στόχοι της διατριβής

Τα πιστωτικά ιδρύματα εμπορεύονται και επενδύουν σε χρηματοοικονομικά προϊόντα αναλαμβάνοντας τους παρακάτω βασικούς κινδύνους:

1. Πιστωτικό κίνδυνο (Credit Risk)
2. Κίνδυνο Αγοράς (Market Risk)
3. Λειτουργικό κίνδυνο (Operational risk)
4. Κίνδυνο Ρευστότητας (Liquidity Risk)

**Πιστωτικός κίνδυνος.** Ο κίνδυνος αυτός οφείλεται στο ενδεχόμενο κάποιος οφειλέτης να μην πληρώσει όλο ή μέρος της υποχρέωσης που έχει έναντι του πιστωτικού ιδρύματος.

**Γενικός πιστωτικός κίνδυνος.** Οφείλεται στο γεγονός ότι όσο πιο πολλά χρήματα έχει δανείσει ένα πιστωτικό ίδρυμα τόσο αυξάνει και το ποσό των χρημάτων που είναι πιθανόν να μην εισπράξει.

**Ειδικός πιστωτικός κίνδυνος.** Προέρχεται από το γεγονός ότι εάν ένας πελάτης δανειστεί ένα πολύ μεγάλο ποσό τότε αυξάνει η πιθανότητα να μην το επιστρέψει.

**Κίνδυνος αγοράς.** Σχετίζεται με την μεταβολή των τιμών των διάφορων χρηματοοικονομικών προϊόντων που διαπραγματεύονται στις αγορές.

**Κίνδυνος θέσης.** Σχετίζεται με την θέση που έχει πάρει το πιστωτικό ίδρυμα σε κάθε ένα από τα παρακάτω προϊόντα:

- Χρεωστικοί τίτλοι
- Μετοχές
- Παράγωγα
- Αναδοχή

**Λειτουργικός κίνδυνος.** Είναι ο κίνδυνος που προέρχεται από την ανεπάρκεια ή την αποτυχία μιας εσωτερικής διαδικασίας, ή ενός ανθρώπου ή ενός συστήματος ή από εξωτερικά γεγονότα. Εμπεριέχει το νομικό κίνδυνο αλλά όχι τον κίνδυνο στρατηγικής και τον κίνδυνο φήμης.

**Κίνδυνος ρευστότητας.** Έχει να κάνει με την πιθανότητα ένα πιστωτικό ίδρυμα να μην έχει τη δυνατότητα να καλύψει τις τρέχουσες ταμειακές του υποχρεώσεις και να αναγκαστεί να ρευστοποιήσει τίτλους καταγράφοντας ζημίες.

Η παρούσα διατριβή πραγματεύεται τη μέτρηση του κινδύνου αγοράς και του πιστωτικού κινδύνου των πιστωτικών ιδρυμάτων. Αναλύονται οι τρόποι μέτρησης των ανωτέρω κινδύνων τόσο από την οπτική των εποπτικών αρχών όσο και από την οπτική των πιστωτικών ιδρυμάτων. Σε κάθε περίπτωση βασικό εργαλείο για την μέτρηση του κινδύνου είναι το Value at Risk (VaR). Το VaR μας δίνει, τη χειρότερη ζημία που θα μπορούσαμε να υποστούμε από μια επένδυση (χρηματοοικονομικό προϊόν ή χαρτοφυλάκιο), για συγκεκριμένο χρονικό ορίζοντα και για συγκεκριμένο επίπεδο εμπιστοσύνης<sup>1</sup>. Το VaR είναι στην ουσία ένα ποσοστιαίο σημείο της κατανομής των αποδόσεων ενός χρηματοοικονομικού προϊόντος ή ενός χαρτοφυλακίου.

Για τον υπολογισμό του VaR χρησιμοποιούνται παραμετρικές ή μη παραμετρικές εκτιμήτριες ποσοστιαίων σημείων. Για την εφαρμογή των πρώτων απαιτείται γνώση του τύπου της κατανομής των αποδόσεων, ενώ οι δεύτερες δουλεύουν ανεξαρτήτως του τύπου της κατανομής των αποδόσεων, αλλά απαιτούν μεγάλο πλήθος παρατηρήσεων για να αποδώσουν ικανοποιητικά.

Οι παρατηρήσεις που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του VaR είναι ιστορικές αποδόσεις ή έχουν παραχθεί με προσομοίωση Monte Carlo και απαιτείται να είναι ανεξάρτητες και προερχόμενες από την ίδια κατανομή (independent and identical distributed, iid). Οι ιστορικές αποδόσεις όταν πηγαίνουν πολλά χρόνια πίσω είναι απίθανο να προέρχονται από την ίδια κατανομή.

**Ο πρώτος στόχος της διατριβής είναι η εισαγωγή νέων μεθόδων για την αντιμετώπιση / μετρίασμό των προβλημάτων της χρήσης των μη παραμετρικών εκτιμητριών ποσοστιαίου σημείου για τον υπολογισμό του VaR. Αυτό θα βοηθήσει τα πιστωτικά ιδρύματα να υπολογίζουν με μεγαλύτερη ακρίβεια τον κίνδυνο στον οποίο εκτίθενται.**

Ο δεύτερος στόχος της διατριβής είναι η παρουσίαση τρόπων ενσωμάτωσης των νέων μεθόδων στα συστήματα μέτρησης του κινδύνου των πιστωτικών ιδρυμάτων. Έτσι θα υπάρχει δυνατότητα να ωφεληθεί από τις νέες μεθόδους το σύνολο των χρηστών των συστημάτων μέτρησης του κινδύνου είτε αυτοί είναι απλοί διαπραγματευτές, είτε είναι στελέχη των τμημάτων ελέγχου και ρύθμισης του κινδύνου (middle – office) είτε είναι μέλη της ανώτατης διοίκησης που καθορίζει το προφίλ κινδύνου του πιστωτικού ιδρύματος.

## II. Ανασκόπηση βιβλιογραφίας

Η μέτρηση του κινδύνου των πιστωτικών ιδρυμάτων και οι τρόποι αντιμετώπισης του απασχολεί τόσο τα πιστωτικά ιδρύματα όσο και τις εποπτικές (ελεγκτικές) αρχές.

Οι κανόνες που θέτουν οι εποπτικές αρχές για την μέτρηση και την αντιμετώπιση των κινδύνων από τα πιστωτικά ιδρύματα πηγάζουν από το πλαίσιο που έχει ορίσει η Επιτροπή της Βασιλείας για την Εποπτεία των Τραπεζών (EBET) με το “International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards” (Ιούλιος 1988) και με το “Amendment to the Capital Accord to Incorporate Market Risks” (Ιανουάριος 1996).

Η EBET τον Ιούνιο του 1999 ξεκίνησε μια διαδικασία επανεξέτασης του παραπάνω πλαισίου. Η διαδικασία αυτή ξεκίνησε με προτάσεις της EBET , Ιανουάριος 2001 και Απρίλιος 2003 που κλήθηκαν να σχολιάσουν τόσο η χρηματοοικονομική κοινότητα (χρηματοοικονομικά ιδρύματα και ελεγκτές) όσο και η επιστημονική κοινότητα. Επιπλέον η EBET διεξήγαγε τρεις ποσοτικές μελέτες για να μπορέσει να εντοπίσει τις επιπτώσεις του προτεινόμενου αναθεωρημένου πλαισίου στο εποπτικό κεφάλαιο των πιστωτικών ιδρυμάτων. Τελικά τον Ιούνιο του 2004 παρουσιάστηκε το νέο πλαίσιο “International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards, A Revised Framework” . Το αναθεωρημένο πλαίσιο εφαρμόζεται από το τέλος του 2006.

Τα πιστωτικά ιδρύματα χρησιμοποιούν το VaR για τη μέτρηση του κινδύνου. Το VaR παρουσιάστηκε από την JP Morgan στις αρχές της δεκαετίας του 1990 και σύντομα έγινε

---

<sup>1</sup> Το επίπεδο εμπιστοσύνης καθορίζει ποια είναι η πιθανότητα η επένδυσή μας να έχει απόδοση χειρότερη του VaR.

το βασικό εργαλείο για την μέτρηση αρχικά του κινδύνου αγοράς και στη συνέχεια του πιστωτικού και του λειτουργικού κινδύνου.

Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του VaR χωρίζονται σε τρεις μεγάλες κατηγορίες:

1. Variance – Covariance μεθοδολογίες.

- Υπολογισμός των διασπορών και των συνδιασπορών των χρηματοοικονομικών προϊόντων του χαρτοφυλακίου.
- Εκτίμηση του VaR με τη χρήση εκτιμήτριας ποσοστιαίου σημείου της Κανονικής κατανομής.

2. Ιστορική προσομοίωση.

- Χρήση ιστορικών αποδόσεων.
- Εκτίμηση του VaR με τη χρήση **μη παραμετρικής εκτιμήτριας ποσοστιαίου σημείου**

3. Monte Carlo προσομοίωση.

- Εύρεση παρατηρήσεων με χρήση θεωρητικών μοντέλων και προσομοίωσης Monte Carlo.
- Εκτίμηση του VaR με τη χρήση **μη παραμετρικής εκτιμήτριας ποσοστιαίου σημείου**.

Εκτός από τις τρεις αυτές γενικές κατηγορίες αναφέρονται και άλλες μέθοδοι όπως η μέθοδο CAViaR, Conditional Autoregressive VaR, που παρουσιάστηκε το 1999 από τους Robert Engle και Simone Manganelli και η μέθοδο Extreme Value που παρουσιάστηκε το 1997 από τον Francois Longin.

Η JP Morgan αρχικά υπολόγισε το VaR χρησιμοποιώντας Variance – Covariance μεθοδολογίες. Η βασική προϋπόθεση της μεθόδου είναι ότι οι κατανομές των αποδόσεων των προϊόντων του χαρτοφυλακίου ακολουθούν κανονική κατανομή. Για τον υπολογισμό των παραμέτρων (πίνακας διασπορών / συνδιασπορών των κατανομών αποδόσεων των προϊόντων) της μεθόδου από τις ιστορικές αποδόσεις χρησιμοποιούνται GARCH μεθοδολογίες.

Υπάρχουν όμως αρκετές μελέτες<sup>2</sup> που αναφέρουν ότι οι αποδόσεις δεν ακολουθούν κανονική κατανομή. Για την επίλυση του προβλήματος αυτού αναφέρονται δύο μέθοδοι από τον Kevin Dowd (1998) και μία από τους Hull και White (1997).

Για τον υπολογισμό του VaR με χρήση της ιστορικής προσομοίωσης απαιτούνται πολλές σε πλήθος ιστορικές αποδόσεις. Αυτό δημιουργεί πρόβλημα καθώς υπάρχουν ενδείξεις ότι οι κατανομές των αποδόσεων μεταβάλλονται με τον χρόνο. Έχουν προταθεί τρεις μέθοδοι για την «εξομαλυνση» των ιστορικών αποδόσεων:

A) Η μέθοδος των Boudoukh, Richardson και Whitelaw (1998) αναθέτει βαρύτητες στις αποδόσεις δίνοντας μεγαλύτερη βαρύτητα στις πιο πρόσφατες.

B) Η μέθοδος των Hull και White (1998) χρησιμοποιεί την EWMA μέθοδο για να υπολογίσει τις ιστορικές διασπορές των αποδόσεων με τις οποίες «εξομαλύνει» τις αποδόσεις.

Γ) Η μέθοδος των Barone-Adesi, Giannopoulos και Vosper (1999) είναι ανάλογη με αυτή των Hull και White (1998) και χρησιμοποιεί GARCH μεθόδους για τον υπολογισμό των ιστορικών αποδόσεων.

Για τον υπολογισμό του VaR με χρήση προσομοίωσης Monte Carlo χρησιμοποιούνται θεωρητικά μοντέλα από τα οποία παράγονται οι παρατηρήσεις. Ο τρόπος αυτός υπολογισμού του VaR έχει μεγάλο κίνδυνο μοντέλου (model risk).

Η χρήση των μη παραμετρικών εκτιμητριών ποσοστιαίου σημείου για τον υπολογισμό του VaR έχει μελετηθεί εκτενώς, Hendricks (1996), Bulter και Schachter (1997), Boudoukh, Richardson και Whitelaw (1998), Lopez (1999), Gourieroux, Laurent και Scaillet (2000), Barone-Adesi και Giannopoulos (2001), Inui, Kijima και Kitano (2003). Οι εκτιμήτριες ποσοστιαίου σημείου που συνήθως χρησιμοποιούνται είναι το δειγματικό ποσοστιαίο σημείο (Sample Quantile) και οι Kernel εκτιμήτριες ποσοστιαίου σημείου.

Στην βιβλιογραφία αναφέρονται ένα πλήθος άλλων μη παραμετρικών εκτιμητριών ποσοστιαίου σημείου (ΕΠΣ), Perzen (1979), Reiss (1980), Kaigh & Lachenbruch (1982), Harrell και Davis (1982), Falk (1984), Yang (1985), Parrish (1990), Sheather και Marron (1990), Xiang (1995), Hyndman και Fan (1996) Bassi, Embrechts και Kafetzaki (1996)

---

<sup>2</sup> Π.χ. Mandelbrot (1963) και Fama (1965)

Beirlant και Matthys (2000). Από την μελέτη τους προκύπτει ότι η πιο αποδοτική μη παραμετρική ΕΠΣ σημείου είναι η εκτιμήτρια των Harrell και Davis.

Οι Pindyk και Rubinfeld (1998) αναφέρουν τα κριτήρια σύγκρισης εκτιμητριών με βασικότερα την μεροληψία και το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (MSE Mean Square Error). Όταν δεν είναι γνωστή η μητρική κατανομή για τον υπολογισμό της μεροληψίας και του MSE χρησιμοποιούνται μέθοδοι re-sampling (Quenouille 1949, Efron 1979, Huston και Ernst 2000). Όταν η μητρική κατανομή είναι γνωστή χρησιμοποιείται Monte Carlo προσομοίωση ή αριθμητική ολοκλήρωση (Teichroew 1956).

Με την παρούσα διατριβή εισάγεται μια νέα οικογένεια (SV) εκτιμητριών ποσοστιαίου σημείου. Κατασκευάστηκαν τρεις νέες εκτιμήτριες (SV1, SV2, SV3) ποσοστιαίου σημείου που ανήκουν στην οικογένεια αυτή. Η απόδοση των νέων εκτιμητριών εκτιμήθηκε με χρήση προσομοίωσης Monte Carlo και φαίνεται πως οι νέες μέθοδοι αποδίδουν καλύτερα από την εκτιμήτρια των Harrell και Davis για ποσοστιαία σημεία στις ουρές των κατανομών. Παρουσιάζεται επίσης και μία μεθοδολογία κατασκευής διαστημάτων εμπιστοσύνης για τις νέες εκτιμήτριες ποσοστιαίου σημείου που βασίζεται στη μέθοδο Jackknife.

Με τις νέες εκτιμήτριες υπολογίστηκε το VaR διαφόρων χρηματιστηριακών δεικτών, συναλλαγματικών ισοτιμιών και τιμών ευγενών μετάλλων. Χρησιμοποιήθηκε το στατιστικό Kupiec (1995) και το μέσο εποπτικό κεφάλαιο για τη σύγκριση των νέων ΕΠΣ με το δειγματικό ποσοστιαίο σημείο. Οι νέες ΕΠΣ υπολογίζουν τουλάχιστον με την ίδια ακρίβεια το VaR και απαιτούν μικρότερο μέσο εποπτικό κεφάλαιο.

Το VaR χρησιμοποιείται και για τον υπολογισμό του πιστωτικού κινδύνου. Εκτενής περιγραφή των διαφόρων μεθόδων υπολογισμού του πιστωτικού κινδύνου γίνεται από τους Crouhy, Galai και Mark (2000). Οι νέες ΕΠΣ ελέγχονται ως προς την ικανότητά τους να υπολογίσουν το VaR πιστοδοτικού χαρτοφυλακίου με χρήση προσομοίωσης Monte Carlo. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι οι νέες ΕΠΣ υπολογίζουν το VaR πιστοδοτικών χαρτοφυλακίων με αρκετά μεγαλύτερη ακρίβεια.



Τα πιστωτικά ιδρύματα χρησιμοποιούν συστήματα μέτρησης του κινδύνου που μπορεί να είναι από απλές εφαρμογές σε “spreadsheets” μέχρι και “enterprise-wide risk-management” (ERM) συστήματα. Τα συστήματα αυτά σκοπό έχουν να βοηθήσουν τα πιστωτικά ιδρύματα να διαχειριστούν τον κίνδυνο ξεκινώντας από το επίπεδο των διαπραγματευτών (dealers) και φτάνοντας στην ανώτατη διοίκηση. Επίσης τα συστήματα αυτά μπορεί να είναι RAROC (Risk-Adjusted Return On Capital) συστήματα που μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για την εκτίμηση της απόδοσης επενδύσεων, τμημάτων της επιχείρησης ή διαπραγματευτών. Η χρήση των νέων μεθόδων στο υπολογισμό του VaR δίνει τη δυνατότητα στα πιστωτικά ιδρύματα να υπολογίζουν με μεγαλύτερη ακρίβεια τον κίνδυνο στον οποίο εκτίθενται. Για να μπορέσουν άμεσα τα πιστωτικά ιδρύματα να χρησιμοποιήσουν τις νέες μεθόδους παρουσιάζονται τρόποι ενσωμάτωσης των νέων μεθόδων στα συστήματα μέτρησης του κινδύνου.

### III. Δομή διατριβής

Αρχικά αποτυπώνεται το θεσμικό-εποπτικό πλαίσιο μέτρησης του κινδύνου των πιστωτικών ιδρυμάτων όπως αυτό έχει διαμορφωθεί από την Επιτροπή της Βασιλείας για την Εποπτεία των Τραπεζών (Basel Committee on Banking Supervision) με το “International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards, A Revised Framework” (2004).

Στη συνέχεια αναλύονται οι μέθοδοι μέτρησης του κινδύνου αγοράς και του πιστωτικού κινδύνου των πιστωτικών ιδρυμάτων. Γίνεται αναφορά τόσο σε πρακτικές της αγοράς όσο και σε θεωρητικά μοντέλα.

Ακολούθως παρατίθεται η τεκμηρίωση<sup>3,4</sup> των νέων στατιστικών μεθόδων που συνίσταται τόσο στην στατιστική συλλογιστική μέσα από την οποία παράγονται αλλά και στον έλεγχο της απόδοσης τους (με χρήση Monte Carlo προσομοίωσης) σε σχέση με υπάρχουσες εναλλακτικές στατιστικές μεθόδους.

---

<sup>3</sup> “A New Family of Nonparametric Quantile Estimators”, M. E. Sfakianakis and D. G. Verginis, *Communications in Statistics – Simulation and Computation*, Vol 37, No 2

<sup>4</sup> “Confidence Intervals for Nonparametric Quantile Estimators”, D. G. Verginis, *HERCMA 2007*

Με τις νέες μεθόδους μετράται ο κίνδυνος αγοράς χρησιμοποιώντας πραγματικά δεδομένα<sup>5</sup> (χρηματιστηριακών δεικτών, συναλλαγματικών ισοτιμιών, τιμών των ευγενών μετάλλων) και ο πιστωτικός κίνδυνος με τη χρήση προσομοίωσης Monte Carlo. Αποδεικνύεται ότι οι νέες μέθοδοι αποδίδουν καλύτερα στις περισσότερες από τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν. Για την αξιολόγηση της απόδοσης των νέων μεθόδων βαρύνοντα λόγο έπαιξε το θεσμικό - εποπτικό πλαίσιο μέτρησης του κινδύνου των πιστωτικών ιδρυμάτων<sup>6</sup>.

Έπεται η διατύπωση τρόπων ενσωμάτωσης των νέων μεθόδων στα συστήματα μέτρησης του κινδύνου των πιστωτικών ιδρυμάτων, και δίδονται αλγόριθμοι υλοποίησης των νέων στατιστικών μεθόδων. Επιπλέον γίνεται αναφορά σε λογισμικό που κατασκευάστηκε για τις ανάγκες της διατριβής και υλοποιεί τους αλγόριθμους διευκολύνοντας την χρήση των νέων στατιστικών μεθόδων και την ενσωμάτωση τους στα συστήματα μέτρησης των κινδύνων των πιστωτικών ιδρυμάτων.

Τέλος συνοψίζονται τα ευρήματα της μελέτης και αναφέρονται τομείς για περαιτέρω έρευνα καθώς και εφαρμογές σε άλλα επιστημονικά πεδία, όπως στον Έλεγχο Ποιότητας<sup>7</sup>.

Η μελέτη έχει δομηθεί σε οχτώ κεφάλαια και 2 παραρτήματα.

## **1ο Κεφάλαιο. Το Εποπτικό πλαίσιο για τη μέτρηση του κινδύνου των πιστωτικών ιδρυμάτων**

Περιγράφεται σε αρκετά μεγάλο βάθος το εποπτικό πλαίσιο για τη μέτρηση των κινδύνων<sup>8</sup> των πιστωτικών ιδρυμάτων όπως αυτό διαμορφώνεται από 1/1/2007 με βάση

---

<sup>5</sup> «Σύγκριση μεθόδων Διασπορών - Συνδιασπορών και Εκτιμητριών Ποσοστιαίων σημείων για τον υπολογισμό του VaR Long και Short θέσεων σε μετοχές: Μελέτη της περίπτωσης του XAA» Μιχάλης Ε. Σφακιανάκης και Δημήτριος Γ. Βεργίνης (2005), proceedings of the 1<sup>st</sup> HSSS conference

<sup>6</sup> Συγκεκριμένα το εποπτικό πλαίσιο όπως αυτό διαμορφώνεται από 1/1/2007 με βάση τα “International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards” (Ιούλιος 1988), “Amendment to the Capital Accord to Incorporate Market Risks” (Ιανουάριος 1996) και “International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards, A Revised Framework” (Ιούνιος 2004) της Επιτροπής της Βασιλείας για την Εποπτεία των Τραπεζών.

<sup>7</sup> «Χρήση μη-παραμετρικών εκτιμητριών ποσοστιαίου σημείου για τον καθορισμό των Ορίων Ελέγχου των Χαρτών Ελέγχου Μέσης Τιμής», Μ. Ε. Σφακιανάκης και Δ. Γ. Βεργίνης, 20<sup>ο</sup> Πανελλήνιο Στατιστικό Συνέδριο 2007 – Κύπρος.

<sup>8</sup> Με βάση το εποπτικό πλαίσιο τα πιστωτικά ιδρύματα πρέπει να διατηρούν επαρκές κεφάλαιο για την κάλυψη από τρία είδη κινδύνων: α) τον κίνδυνο αγοράς, β) τον πιστωτικό κίνδυνο και γ) το λειτουργικό κίνδυνο.

τα “International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards” (Ιούλιος 1988), “Amendment to the Capital Accord to Incorporate Market Risks” (Ιανουάριος 1996) και “International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards, A Revised Framework” (Ιούνιος 2004) της Επιτροπής της Βασιλείας για την Εποπτεία των Τραπεζών.

## **2ο Κεφάλαιο. Value at Risk - Μέτρηση του κινδύνου αγοράς**

Το κεφάλαιο αυτό πραγματεύεται την μέτρηση του κινδύνου αγοράς. Το εργαλείο για την μέτρηση του κινδύνου αγοράς είναι το Value at Risk (VaR) και αναφέρονται διεξοδικά οι διάφορες μέθοδοι υπολογισμού του.

## **3ο Κεφάλαιο. Measuring Credit risk – Μέτρηση του πιστωτικού κινδύνου**

Η μέτρηση του πιστωτικού κινδύνου είναι το θέμα του τρίτου κεφαλαίου. Παρατίθενται τα συστατικά του πιστωτικού κινδύνου καθώς και οι τρόποι μέτρησής τους. Επιπλέον παρουσιάζονται τα πιο γνωστά και αντιπροσωπευτικά μοντέλα υπολογισμού του πιστωτικού κινδύνου.

## **4ο Κεφάλαιο. Εκτιμητριες ποσοστιαίου σημείου (quantile estimators)**

Η τεκμηρίωση των νέων στατιστικών μεθόδων βρίσκεται στο κεφάλαιο αυτό. Τόσο η στατιστική συλλογιστική μέσα από την οποία παράγονται αλλά και η διαδικασία ελέγχου της απόδοσης τους σε σχέση με υπάρχουσες εναλλακτικές στατιστικές μεθόδους αναφέρονται στο κεφάλαιο αυτό.

## **5ο Κεφάλαιο. Χρήση των νέων εκτιμητριών ποσοστιαίου σημείου στην μέτρηση του κινδύνου αγοράς των πιστωτικών ιδρυμάτων**

Η παρουσίαση των τρόπων χρήσης των νέων ΕΠΣ για την μέτρηση του κινδύνου αγοράς των πιστωτικών ιδρυμάτων καθώς και η διερεύνηση της απόδοσής τους γίνεται στο πέμπτο κεφάλαιο.

## **6ο Κεφάλαιο. Χρήση των νέων εκτιμητριών ποσοστιαίου σημείου στην μέτρηση του πιστωτικού κινδύνου των πιστωτικών ιδρυμάτων**

Η παρουσίαση των τρόπων χρήσης των νέων ΕΠΣ για την μέτρηση του πιστωτικού κινδύνου των πιστωτικών ιδρυμάτων καθώς και η διερεύνηση της απόδοσής τους γίνεται στο έκτο κεφάλαιο.

#### **7ο Κεφάλαιο. Ενσωμάτωση των νέων εκτιμητριών ποσοστιαίου σημείου στα συστήματα μέτρησης του κινδύνου των πιστωτικών ιδρυμάτων**

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τρόποι ενσωμάτωσης των νέων ΕΠΣ στα συστήματα μέτρησης του κινδύνου των πιστωτικών ιδρυμάτων καθώς και αλγόριθμοι υλοποίησης των στατιστικών μεθόδων και τα εργαλεία λογισμικού που δημιουργήθηκαν για να διευκολύνουν την χρήση των νέων στατιστικών μεθόδων και την ενσωμάτωση τους στα πληροφοριακά συστήματα μέτρησης των κινδύνων των πιστωτικών ιδρυμάτων.

#### **8ο Κεφάλαιο. Σύνοψη συμπερασμάτων**

Συνοψίζονται τα αποτελέσματα της μελέτης και αναφέρονται τομείς για περαιτέρω έρευνα καθώς και εφαρμογές σε άλλα επιστημονικά πεδία

#### **Παράρτημα Α.**

Στο παράρτημα αυτό περιέχονται όλα τα στοιχεία (πίνακες και γραφήματα) που σχετίζονται με την τεκμηρίωση των νέων στατιστικών μεθόδων (4ο Κεφάλαιο).

#### **Παράρτημα Β.**

Στο παράρτημα αυτό περιέχονται όλα τα στοιχεία (πίνακες και γραφήματα) που σχετίζονται με τον έλεγχο της απόδοσης των νέων πρακτικών για τη μέτρηση του κινδύνου αγοράς (5ο Κεφάλαιο).

## 1<sup>ο</sup> Κεφάλαιο

### **Το Εποπτικό πλαίσιο για τη μέτρηση του κινδύνου των πιστωτικών ιδρυμάτων**

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΡΑΙΑ

## Περιεχόμενα

1.	Το Εποπτικό πλαίσιο για τη μέτρηση του κινδύνου των πιστωτικών ιδρυμάτων .....	25
1.1.	Θεσμικό πλαίσιο και κίνδυνος αγοράς.....	26
1.1.1.	Το πλαίσιο μέτρησης του κινδύνου αγοράς.....	27
1.1.2.	Μέθοδοι μέτρησης του κινδύνου αγοράς.....	28
1.1.3.	Τυποποιημένη μέθοδος.....	28
1.1.4.	Εσωτερικά μοντέλα διαχείρισης κινδύνου.....	30
1.1.5.	Γενικά κριτήρια.....	30
1.1.6.	Ποιοτικοί κανόνες.....	31
1.1.7.	Παράγοντες κινδύνου.....	32
1.1.8.	Ποσοτικοί κανόνες.....	34
1.1.9.	Stress Testing.....	35
1.1.10.	Εξωτερική επικύρωση.....	37
1.1.11.	Συνδυασμός εσωτερικών μοντέλων και τυποποιημένης μεθοδολογίας.....	37
1.1.12.	Ειδικός κίνδυνος.....	38
1.2.	Θεσμικό πλαίσιο και πιστωτικός κίνδυνος.....	39
1.2.1.	Η τυποποιημένη μέθοδος μέτρησης του πιστωτικού κινδύνου.....	39
1.2.1.1.	Εξωτερικές αξιολογήσεις πιστοληπτικής ικανότητας.....	40
1.2.1.2.	Τεχνικές μείωσης του πιστωτικού κινδύνου.....	41
1.2.2.	Τα μοντέλα εσωτερικών διαβαθμίσεων.....	41
1.2.2.1.	Κατηγοριοποίηση των ανοιγμάτων (exposures).....	42
1.2.2.2.	Βασική (foundation) και προχωρημένη (advanced) μέθοδος.....	43
1.2.2.3.	Ελάχιστες απαιτήσεις για τη χρήση των IRB μεθοδολογιών.....	44
1.2.3.	Το πλαίσιο για την τιτλοποίηση (securitisation).....	57
1.2.3.1.	Σκοπός και ορισμοί των συναλλαγών που καλύπτονται κάτω από το πλαίσιο για την τιτλοποίηση.....	57
1.2.3.2.	Ορισμοί και γενική ορολογία.....	58
1.2.3.3.	Επιχειρησιακές απαιτήσεις για την αναγνώριση της μείωσης του κινδύνου.....	59
1.2.3.4.	Μεταχείριση των θέσεων τιτλοποίησης.....	61
1.2.3.4.1.	Υπολογισμός των κεφαλαιακών απαιτήσεων.....	61
1.2.3.4.2.	Επιχειρησιακές απαιτήσεις για τη χρήση εξωτερικών αξιολογήσεων πιστωτικού κινδύνου.....	62
1.2.3.4.3.	Τυποποιημένη μέθοδος.....	63
1.2.3.4.4.	IRB μέθοδος.....	63
1.3.	Θεσμικό πλαίσιο και λειτουργικός κίνδυνος (operational risk).....	65
1.3.1.	BIA μέθοδος.....	65
1.3.2.	Standardised Approach (SA).....	66
1.3.2.1.	Κριτήρια παροχής δικαιώματος χρήσης της Standardised Approach.....	68

1.3.3.	Advanced Measurement Approach (AMA) .....	69
1.3.3.1.	Κριτήρια παροχής δικαιώματος χρήσης της Advanced Measurement Approach .....	69
1.3.3.2.	Μείωση του κινδύνου .....	71
1.3.4.	Μερική χρήση .....	73



## 1. Το Εποπτικό πλαίσιο για τη μέτρηση του κινδύνου των πιστωτικών ιδρυμάτων

Οι εποπτικές αρχές<sup>9</sup> θεωρούν σαν ασπίδα για την αντιμετώπιση των κινδύνων των πιστωτικών ιδρυμάτων τα ίδια κεφάλαια τους. Το θεσμικό πλαίσιο όπως αυτό διαμορφώνεται σε παγκόσμιο, Ευρωπαϊκό και Ελληνικό επίπεδο ορίζει τα ίδια κεφάλαια<sup>10</sup> των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων καθώς και τα απαιτούμενα ίδια κεφάλαια για την αντιμετώπιση των κινδύνων που έχει αναλάβει. Στον πίνακα<sup>11</sup> 1-1 αναφέρονται οι σχετικές Ευρωπαϊκές και Ελληνικές διατάξεις.

<i>ΝΟΜΟΘΕΣΙΑ</i>	<i>ΕΥΡΩΠΑΪΚΗΣ ΕΝΩΣΗΣ</i>	<i>ΕΛΛΑΔΑΣ</i>	<i>ΠΙΣΤΩΤΙΚΑ ΙΔΡΥΜΑΤΑ</i>	<i>ΕΠΕΥ</i>
<i>I. ΟΡΙΣΜΟΣ ΙΔΙΩΝ ΚΕΦΑΛΑΙΩΝ</i>	ΟΔ./89/299/ΕΟΚ ΟΔ./91/633/ΕΟΚ		ΠΔΤΕ 2053/92	ΑΕΚ 104/8.4.97
<i>II. ΑΠΑΙΤΗΣΕΙΣ ΣΕ ΑΡΧΙΚΑ ΚΕΦΑΛΑΙΑ</i>	ΟΔ./89/646/ΕΟΚ ΟΔ./93/22/ΕΟΚ	Ν. 2396/96	Ν. 2076/92	Ν. 2396/96
<i>III. ΑΠΑΙΤΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΑΚΗΣ ΕΠΑΡΚΕΙΑΣ ΓΙΑ ΚΑΛΥΨΗ ΠΙΣΤΩΤΙΚΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ</i>	ΟΔ./89/647/ΕΟΚ ΟΔ./91/31/ΕΟΚ		ΠΔΤΕ 2054/92	ΑΕΚ 104/8.4.97
<i>IV. ΑΠΑΙΤΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΑΚΗΣ ΕΠΑΡΚΕΙΑΣ ΓΙΑ ΚΑΛΥΨΗ ΜΕΓΑΛΩΝ ΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΙΚΩΝ ΑΝΟΙΓΜΑΤΩΝ</i>	ΟΔ./92/121/ΕΟΚ		ΠΔΤΕ 2246/93	ΑΕΚ 104/8.4.97
<i>V. ΑΠΑΙΤΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΑΚΗΣ ΕΠΑΡΚΕΙΑΣ ΓΙΑ ΚΑΛΥΨΗ ΚΙΝΔΥΝΩΝ ΑΓΟΡΑΣ</i>	ΟΔ./93/6/ΕΟΚ	Ν. 2396/96	ΠΔΤΕ 2397/96	ΑΕΚ 104/8.4.97
<i>VI. ΕΠΟΠΤΕΙΑ ΧΡΗΜΑΤΟΠΙΣΤΩΤΙΚΩΝ ΙΔΡΥΜΑΤΩΝ ΣΕ ΕΝΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΒΑΣΗ</i>	ΟΔ./92/30/ΕΟΚ	Π.Δ. 267/95		ΑΕΚ 104/8.4.97

**Πίνακας 1-1 Θεσμικό πλαίσιο για τη μέτρηση του κινδύνου των πιστωτικών ιδρυμάτων**

Η παραπάνω νομοθεσία βασίζεται στο πλαίσιο που έχει ορίσει η Επιτροπή της Βασιλείας για την Εποπτεία των Τραπεζών (ΕΒΕΤ) με το “International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards” (Ιούλιος 1988) και με το “Amendment to the Capital Accord to Incorporate Market Risks” (Ιανουάριος 1996).

<sup>9</sup> Ο όρος εποπτικές αρχές χρησιμοποιείται εναλλακτικά με τον όρο ελεγκτικές αρχές

<sup>10</sup> Τα ίδια κεφάλαια για την αντιμετώπιση των κινδύνων είναι διαφορετικά από τα λογιστικά Ίδια Κεφάλαια = (Παθητικό – Υποχρεώσεις).

<sup>11</sup> Πηγή: Κ. Γαλιάτσος «Τραπεζική Διοίκηση» Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών Χρηματοοικονομική και Τραπεζική Μεταπτυχιακό πρόγραμμα σπουδών, Αθήνα 1999

Η EBET τον Ιούνιο του 1999 ξεκίνησε μια διαδικασία επανεξέτασης του παραπάνω πλαισίου. Η διαδικασία αυτή ξεκίνησε με προτάσεις της EBET , Ιανουάριος 2001 και Απρίλιος 2003 που κλήθηκαν να σχολιάσουν τόσο η χρηματοοικονομική κοινότητα (χρηματοοικονομικά ιδρύματα και ελεγκτές) όσο και η επιστημονική κοινότητα. Επιπλέον η EBET διεξήγαγε τρεις ποσοτικές μελέτες για να μπορέσει να εντοπίσει τις επιπτώσεις του προτεινόμενου αναθεωρημένου πλαισίου στο ελεγκτικό κεφάλαιο των τραπεζών. Τελικά τον Ιούνιο του 2004 παρουσιάστηκε το νέο πλαίσιο “International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards, A Revised Framework” . Το αναθεωρημένο πλαίσιο εφαρμόζεται από το τέλος του 2006.

Το αναθεωρημένο πλαίσιο αλλάζει τον τρόπο μέτρησης του ελεγκτικού κεφαλαίου για την κάλυψη από τον πιστωτικό κίνδυνο, ορίζει τρόπους μέτρησης του λειτουργικού κινδύνου, εισάγει κατευθυντήριες αρχές για τους ελεγκτές και θέτει προδιαγραφές διαφάνειας (disclosure requirements) και πειθαρχίας (market discipline) για τις τράπεζες.

Το νέο Ευρωπαϊκό πλαίσιο περί κεφαλαιακής επάρκειας των τραπεζών που ενσωματώνει το αναθεωρημένο πλαίσιο της EBET παρουσιάστηκε το 2004 με τη μορφή σχεδίου οδηγίας της Ευρωπαϊκής Επιτροπής (MARKT 1050/2004). Στην Ελλάδα τον Οκτώβριο του 2004 με πρωτοβουλία της Τράπεζας της Ελλάδος ξεκίνησε διαβούλευση για την εφαρμογή του νέου πλαισίου. Επιπλέον η Ευρωπαϊκή Επιτροπή Ελεγκτών του Τραπεζικού συστήματος (Committee of European Banking Supervisors CEBS) τον Ιούλιο του 2005 εξέδωσε προς σχολιασμό κείμενο οδηγιών για την υλοποίηση, επιβεβαίωση και αξιολόγηση των εσωτερικών συστημάτων μέτρησης του λειτουργικού και του πιστωτικού κινδύνου (Advanced Measurement και Internal Ratings Based Approaches).

Στη συνέχεια παρατίθεται συνοπτική περιγραφή των τρόπων υπολογισμού του ελεγκτικού κεφαλαίου όπως αυτό προκύπτει μετά την εισαγωγή του αναθεωρημένου πλαισίου της EBET.

### **1.1. Θεσμικό πλαίσιο και κίνδυνος αγοράς**

Το θεσμικό πλαίσιο για την προστασία από τον κίνδυνο αγοράς ορίζεται από το “Capital Accord to Incorporate Market Risk” (January 1996, updates to April 1998) της EBET.

### 1.1.1. Το πλαίσιο μέτρησης του κινδύνου αγοράς

Ο κίνδυνος αγοράς ορίζεται σαν ο κίνδυνος να υποστούμε ζημιά από θέσεις εντός και εκτός ισολογισμού λόγω αλλαγής των τιμών της αγοράς. Η μέτρηση του κινδύνου αγοράς γίνεται για:

- Εργαλεία που σχετίζονται με επιτόκια και μετοχές και ανήκουν στο χαρτοφυλάκιο συναλλαγών.
- Για όλες τις θέσεις σε ξένο συνάλλαγμα και σε commodities.

Το χαρτοφυλάκιο συναλλαγών αποτελείται από όλες τις θέσεις σε χρηματοοικονομικά εργαλεία που εσκεμμένα διατηρούνται για μικρό χρονικό διάστημα και / ή τις οποίες πήρε η τράπεζα με σκοπό να ωφεληθεί βραχυχρόνια από πραγματικές (arbitrage) και / ή αναμενόμενες (speculation) διαφορές ανάμεσα στις τιμές αγοράς και πώλησης, ή από άλλες μεταβολές τιμών ή επιτοκίων, και θέσεις σε χρηματοοικονομικά προϊόντα που παράγονται από matched principal brokering and market making, ή θέσεις που πάρθηκαν για αντιστάθμιση κινδύνου άλλων στοιχείων του χαρτοφυλακίου συναλλαγών.

Ακόμη στη μέτρηση του κινδύνου αγοράς μπορούν να συμπεριληφθούν εργαλεία που δεν ανήκουν στο χαρτοφυλάκιο συναλλαγών αλλά χρησιμοποιούνται εσκεμμένα για να αντισταθμίσουν θέσεις του χαρτοφυλακίου συναλλαγών<sup>12</sup>.

Αντίστοιχα εργαλεία που ανήκουν στο χαρτοφυλάκιο συναλλαγών αλλά αποσκοπούν στην αντιστάθμιση κινδύνου εργαλείων που ανήκουν στο τραπεζικό χαρτοφυλάκιο (banking portfolio) μπορούν να εξαιρεθούν από τη μέτρηση του κινδύνου αγοράς και να υπόκεινται μόνο σε μέτρηση πιστωτικού κινδύνου.

Για να υπάρχει ενιαία βάση για τη μέτρηση του κινδύνου αγοράς θα πρέπει πρώτα όλα τα στοιχεία του χαρτοφυλακίου αγοράς να αποτιμηθούν σε τρέχουσες τιμές (mark to market).

---

<sup>12</sup> Τα εργαλεία αυτά δεν υπόκεινται σε επιπλέον μέτρηση του ειδικού κινδύνου αλλά σε επιπλέον μέτρηση του πιστωτικού κινδύνου.

### 1.1.2. Μέθοδοι μέτρησης του κινδύνου αγοράς

Το θεσμικό πλαίσιο προβλέπει δύο μεθόδους μέτρησης του κινδύνου αγοράς από τα πιστωτικά ιδρύματα:

- Τυποποιημένη μέθοδος (standardised method)
- Εσωτερικά μοντέλα διαχείρισης κινδύνου (internal risk management models)

Τα πιστωτικά ιδρύματα είναι υποχρεωμένα να χρησιμοποιούν την τυποποιημένη μέθοδο, εναλλακτικά μπορούν να χρησιμοποιούν εσωτερικά μοντέλα ή μείγμα τυποποιημένης μεθόδου και εσωτερικών μοντέλων, εφόσον πληρούνται οι παρακάτω επτά ομάδες κριτηρίων:

1. Γενικά κριτήρια που αφορούν την επάρκεια του συστήματος διαχείρισης του κινδύνου.
2. Ποιοτικοί κανόνες για εσωτερική επίβλεψη της χρήσης των μοντέλων, ιδίως από τη διαχείριση.
3. Οδηγίες για τον καθορισμό των κατάλληλων παραγόντων κινδύνου.
4. Ποσοτικοί κανόνες που οριοθετούν τη χρήση των κοινών ελάχιστων στατιστικών παραμέτρων για τη μέτρηση του κινδύνου.
5. Οδηγίες για Stress Testing.
6. Διαδικασίες επικύρωσης για εξωτερική επίβλεψη της χρήσης των μοντέλων.
7. Κανόνες για τράπεζες που χρησιμοποιούν μείγμα της τυποποιημένης μεθόδου και εσωτερικών μοντέλων.

### 1.1.3. Τυποποιημένη μέθοδος

Η τυποποιημένης μεθόδου βασίζεται στη μεθοδολογία χωρισμού των χρηματοοικονομικών προϊόντων σε ομάδες ( “building-block” approach) και υπολογισμό του ειδικού κινδύνου και του γενικού κινδύνου αγοράς ξεχωριστά.

Στην τυποποιημένη μέθοδο συναντάμε τις παρακάτω κατηγορίες:

- **Κίνδυνος επιτοκίου.** Κίνδυνος που προέρχεται από θέσεις σε χρεόγραφα και άλλα συνδεδεμένα με επιτόκιο εργαλεία.

1. Ειδικός κίνδυνος πέντε κατηγορίες σε σχέση με τον εκδότη
  2. Γενικός κίνδυνος αγοράς δύο τρόποι
    - Με βάση τη λήξη (maturity).
    - Με βάση το duration.
  3. Τα παράγωγα επιτοκίου, εκτός των δικαιωμάτων, μετατρέπονται σε θέσεις στο υποκείμενο μέσο και στη συνέχεια υπολογίζουμε τον ειδικό και γενικό κίνδυνο με βάση τις γενικές οδηγίες.
- **Κίνδυνος μετοχών.** Κίνδυνος που προέρχεται από θέσεις σε μετοχές.
1. Ειδικός κίνδυνος
  2. Γενικός κίνδυνος
  3. Τα παράγωγα μετοχών, εκτός των δικαιωμάτων, μετατρέπονται σε θέσεις στο υποκείμενο μέσο και στη συνέχεια υπολογίζουμε τον ειδικό και γενικό κίνδυνο με βάση τις γενικές οδηγίες.
- **Κίνδυνος συναλλάγματος.** Κίνδυνος που προέρχεται από θέσεις σε συνάλλαγμα και χρυσό.
1. Μέτρηση της θέσης σε κάθε νόμισμα.
  2. Μέτρηση του κινδύνου συνδυάζοντας τις θετικές και αρνητικές θέσεις σε διαφορετικά νομίσματα.
- **Κίνδυνος commodities.** Κίνδυνος που προέρχεται από θέσεις σε commodities<sup>13</sup>, συμπεριλαμβανομένων των πολυτίμων μετάλλων, εκτός του χρυσού.
- **Κίνδυνος δικαιωμάτων.** Κίνδυνος που προέρχεται από θέσεις σε δικαιώματα.
1. Απλοποιημένη μέθοδος (simplified approach). Τη μέθοδο αυτή δικαιούνται να τη χρησιμοποιούν μόνο όσα πιστωτικά ιδρύματα μόνο αγοράζουν δικαιώματα.
  2. Ενδιάμεσοι μέθοδοι (intermediary approaches). Τις μεθόδους αυτές υποχρεούνται να τις χρησιμοποιούν όσοι γράφουν δικαιώματα.
    - Delta-plus μέθοδος.
    - Μέθοδος σεναρίου (scenario approach).

---

<sup>13</sup> Commodity είναι ένα φυσικό προϊόν που μπορεί να διαπραγματευτεί σε δευτερογενή αγορά.

#### **1.1.4. Εσωτερικά μοντέλα διαχείρισης κινδύνου.**

Η χρήση ενός εσωτερικού μοντέλου εξαρτάται από τη ρητή έγκριση της εποπτικής αρχής. Η εποπτική αρχή δίνει την έγκριση της μόνο όταν ικανοποιούνται οι επτά ομάδες κριτηρίων που αναφέρθηκαν παραπάνω.

Θα δούμε αναλυτικότερα τις επτά αυτές ομάδες κριτηρίων και επιπλέον τις ειδικές ρυθμίσεις για τον ειδικό κίνδυνο.

#### **1.1.5. Γενικά κριτήρια**

Τα γενικά κριτήρια που θα πρέπει να πληρούνται για να επιτραπεί από τις εποπτικές αρχές η χρήση εσωτερικών μοντέλων για τον υπολογισμό της κεφαλαιακής επάρκειας είναι:

- Το σύστημα διαχείρισης του κινδύνου της τράπεζας είναι σωστό ως προς τη σύλληψη του και έχει υλοποιηθεί σωστά.
- Η τράπεζα έχει κατά την άποψη των ελεγκτικών αρχών αρκετό προσωπικό, εκπαιδευμένο στη χρήση περίπλοκων μοντέλων για τη στελέχωση των μονάδων συναλλαγών, ρύθμισης κινδύνου (risk control), ελέγχου (audit) και αν είναι αναγκαίο του back office.
- Τα μοντέλα της τράπεζας έχουν, κατά την κρίση των ελεγκτικών αρχών, αποδείξει ότι μετράνε με καλή ακρίβεια τον κίνδυνο.
- Η τράπεζα τακτικά διενεργεί Stress Tests με βάση τις οδηγίες που θα δούμε παρακάτω.

Οι εποπτικές αρχές έχουν το δικαίωμα να απαιτήσουν μια περίοδο αρχικού ελέγχου και δοκιμών σε περιβάλλον παραγωγής πριν το μοντέλο να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της κεφαλαιακής επάρκειας.

### 1.1.6. Ποιοτικοί κανόνες

Οι εποπτικές αρχές θέτουν κάποια ποιοτικά κριτήρια τα οποία οι τράπεζες πρέπει να πληρούν πριν να τους επιτραπεί η χρήση εσωτερικών μοντέλων. Ο βαθμός κατά τον οποίο τα κριτήρια αυτά πληρούνται μπορεί να επηρεάσει το μέγεθος του πολλαπλασιαστικού παράγοντα (multiplication factor) που θα δούμε παρακάτω. Τα ποιοτικά κριτήρια περιλαμβάνουν:

- I. Η τράπεζα θα πρέπει να έχει μια ανεξάρτητη μονάδα ρύθμισης κινδύνου (risk control) που να είναι υπεύθυνη για τον σχεδιασμό και την υλοποίηση του συστήματος διαχείρισης κινδύνου της τράπεζας.
- II. Η μονάδα αυτή θα πρέπει να εφαρμόζει ένα τακτικό backtesting πρόγραμμα.
- III. Το Διοικητικό Συμβούλιο και τα διευθυντικά στελέχη θα πρέπει να εμπλέκονται ενεργά στην διαδικασία ρύθμισης του κινδύνου και θα πρέπει να αντιλαμβάνονται τη ρύθμιση του κινδύνου σαν ένα βασικό κομμάτι της δουλειάς στο οποίο πρέπει να αφιερωθούν σημαντικοί πόροι.
- IV. Το εσωτερικό μοντέλο μέτρησης του κινδύνου πρέπει να είναι σε μεγάλο βαθμό ενοποιημένο με την καθημερινή διαδικασία διαχείρισης του κινδύνου.
- V. Το σύστημα διαχείρισης του κινδύνου πρέπει να χρησιμοποιείται σε συμφωνία με τις εσωτερικές συναλλαγές και τα όρια έκθεσης.
- VI. Πρέπει να υπάρχει ένα καθημερινό και αυστηρό πρόγραμμα stress testing σε συμπλήρωμα στην ανάλυση κινδύνου που βασίζεται στο καθημερινό αποτέλεσμα του μοντέλου μέτρησης του κινδύνου της τράπεζας.
- VII. Οι τράπεζες πρέπει να έχουν μια διαδικασία για να εξασφαλίζουν τη συμβατότητα του συνόλου των καταγεγραμμένων εσωτερικών πολιτικών, ελέγχων και διαδικασιών με το σύστημα μέτρησης του κινδύνου.
- VIII. Μια ανεξάρτητη κριτική του συστήματος μέτρησης κινδύνου πρέπει να γίνεται ανά τακτά χρονικά διαστήματα από την εσωτερική επιθεώρηση της τράπεζας.
- IX. Επιπλέον ανά τακτά χρονικά διαστήματα θα πρέπει να γίνεται επιθεώρηση της όλης διαδικασίας διαχείρισης του κινδύνου η οποία να ελέγχει κατ' ελάχιστο τα παρακάτω:
  - Την επάρκεια της τεκμηρίωσης του συστήματος διαχείρισης κινδύνου καθώς και των διαδικασιών διαχείρισης κινδύνου.
  - Την οργάνωση της μονάδας ρύθμισης του κινδύνου.

- Την ενσωμάτωση των μέτρων μέτρησης του κινδύνου αγοράς στην καθημερινή διαχείριση του κινδύνου.
- Τη διαδικασία αποδοχής των μοντέλων τιμολόγησης με βάση τον κίνδυνο (risk pricing models) και των συστημάτων αποτίμησης που χρησιμοποιούνται από το προσωπικό του front-office και του back-office.
- Την επικύρωση οποιασδήποτε σημαντικής αλλαγής στη διαδικασία μέτρησης του κινδύνου.
- Το εύρος του κινδύνου αγοράς που συλλαμβάνεται από το μοντέλο μέτρησης του κινδύνου.
- Την ακεραιότητα του MIS (Management Information System).
- Την ακρίβεια και την πληρότητα των δεδομένων των θέσεων.
- Την πιστοποίηση της συνέπειας, της επικαιρότητας και της αξιοπιστίας των πηγών των δεδομένων που χρησιμοποιούνται από τα εσωτερικά μοντέλα.
- Την ακρίβεια και την καταλληλότητα των υποθέσεων για τη μεταβλητότητα (volatility) και τη συσχέτιση (correlation).
- Την ακρίβεια του υπολογισμού της αποτίμησης και του μετασχηματισμού του κινδύνου.
- Την πιστοποίηση της ακρίβειας των μοντέλων μέσω συχνών back tests όπως περιγράφεται στο “Supervisory Framework for the Use of Backtesting in Conjunction with the Internal Models Approach to Market Risk Capital Requirements”.

#### **1.1.7. Παράγοντες κινδύνου**

Ένα βασικό κομμάτι του εσωτερικού συστήματος μέτρησης κινδύνου είναι ο καθορισμός ενός κατάλληλου συνόλου παραγόντων κινδύνου αγοράς. Οι παράγοντες κινδύνου που περιέχονται σε ένα σύστημα μέτρησης κινδύνου πρέπει να είναι επαρκείς για να συλλάβουν τους κινδύνους του χαρτοφυλακίου της τράπεζας. Παρόλο που οι τράπεζες έχουν κάποια ευχέρεια στο να καθορίζουν τους παράγοντες κινδύνου για τα εσωτερικά μοντέλα τους, οι παρακάτω οδηγίες πρέπει να ακολουθούνται:



- Για τα *επιτόκια*, θα πρέπει να υπάρχει ένα σύνολο από παράγοντες κινδύνου για κάθε ένα από τα νόμισμα για τα οποία η τράπεζα έχει ευαίσθητες ως προς τα επιτόκια θέσεις.
  - Το σύστημα μέτρησης του κινδύνου πρέπει να μοντελοποιεί την καμπύλη αποδόσεων (yield curve) χρησιμοποιώντας κάποια γενικός αποδεκτή προσέγγιση. Για βασικές εκθέσεις σε μεταβολές των επιτοκίων στα σημαντικά νομίσματα και στις σημαντικές αγορές, οι τράπεζες πρέπει να μοντελοποιούν την καμπύλη αποδόσεων χρησιμοποιώντας τουλάχιστον έξι παράγοντες.
  - Το σύστημα μέτρησης του κινδύνου πρέπει να ενσωματώνει ξεχωριστούς παράγοντες κινδύνου για να συλλαμβάνει κίνδυνο ανοίγματος (spread risk)<sup>14</sup>.
- Για τις *ισοτιμίες των νομισμάτων* το σύστημα μέτρησης του κινδύνου πρέπει να ενσωματώνει παράγοντες κινδύνου που να αντιστοιχούν στα ανεξάρτητα ξένα νομίσματα στα οποία η τράπεζα έχει θέση.
- Για τις *τιμές των μετοχών*, πρέπει να υπάρχουν παράγοντες κινδύνου που να αντιστοιχούν σε κάθε χρηματιστήριο στο οποίο η τράπεζα έχει σημαντική θέση. Κατ' ελάχιστο θα πρέπει να υπάρχει ένας παράγοντας κινδύνου που να είναι σχεδιασμένος να συλλαμβάνει κινήσεις της αγοράς<sup>15</sup>.
- Για τις *τιμές των commodities* πρέπει να υπάρχει ένας παράγοντας κινδύνου για κάθε μια αγορά commodities στις οποίες η τράπεζα έχει σημαντική θέση.
  - Για τράπεζες με σχετικά μικρές θέσεις σε εργαλεία με υποκείμενο μέσο commodities ένας παράγοντας για κάθε commodity ή ακόμη, εάν οι συνολικές θέσεις είναι μικρές και ένας παράγοντας ανά κατηγορία αρκεί.
  - Για τράπεζες με μεγάλη δραστηριότητα σε αυτές τις αγορές πρέπει να ληφθεί υπόψη και η μεταβολή της απόδοσης ευκολίας (convenience yield) ανάμεσα στις θέσεις σε παράγωγα και σε ρευστές θέσεις.

---

<sup>14</sup> Πχ. μεταξύ ομολόγων και swaps.

<sup>15</sup> Μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένας γενικός δείκτης και οι θέσεις σε ανεξάρτητες μετοχές μπορούν να εκφραστούν με τη χρήση των βήτα ( $\beta$ ) τους.

### 1.1.8. Ποσοτικοί κανόνες

Οι τράπεζες θα έχουν ευελιξία στο να επινοήσουν την ακριβή μορφή των μοντέλων τους, αλλά οι παρακάτω ελάχιστοι κανόνες θα πρέπει να εφαρμόζονται για τον υπολογισμό της κεφαλαιακής τους επάρκειας.

- I. Το “Value-at-risk” πρέπει να υπολογίζεται καθημερινά.
- II. Για τον υπολογισμό του value-at-risk πρέπει να χρησιμοποιείται το 99% διάστημα εμπιστοσύνης.
- III. Η χρονική διάρκεια για την οποία θα υπολογίζεται το value-at-risk θα είναι 10 ημέρες. Οι τράπεζες που υπολογίζουν το value-at-risk για μικρότερες περιόδους μπορούν να χρησιμοποιούν την τετραγωνική ρίζα του χρόνου για να μετατρέψουν το value-at-risk.
- IV. Θα πρέπει να χρησιμοποιούνται τουλάχιστον ενός έτους ιστορικές παρατηρήσεις για τον υπολογισμό του value-at-risk.
- V. Οι τράπεζες θα πρέπει να ενημερώνουν τα δεδομένα τους το αργότερο κάθε τρεις μήνες και επίσης πρέπει να τα επανεκτιμούν όταν υπάρχει ανωμαλία στις αγορές. Οι εποπτικές αρχές μπορεί να ζητήσουν από μια τράπεζα να εκτιμήσει το value-at-risk χρησιμοποιώντας μικρότερη περίοδο παρατηρήσεων αν, κατά την κρίση των ελεγκτικών αρχών, αυτό δικαιολογείται από μία σημαντική αύξηση στην μεταβλητότητα των τιμών.
- VI. Οι τράπεζες δεν είναι υποχρεωμένες να χρησιμοποιούν κάποιο συγκεκριμένο τύπο μοντέλου. Αρκεί, το μοντέλο τους να συλλαμβάνει όλους τους βασικούς κινδύνους<sup>16</sup>.
- VII. Οι τράπεζες έχουν την ευχέρεια να αναγνωρίζουν εμπειρικές συσχετίσεις μέσα στις ευρείες κατηγορίες κινδύνου (πχ. συσχετίσεις μεταξύ επιτοκίων). Οι εποπτικές αρχές μπορεί επίσης να αναγνωρίσουν εμπειρικές συσχετίσεις μεταξύ παραγόντων κινδύνου που ανήκουν σε διαφορετικές ευρείες κατηγορίες κινδύνου (πχ. συσχετίσεις μεταξύ επιτοκίων και ισοτιμιών συναλλάγματος), εφόσον έχουν πεισθεί ότι το σύστημα μέτρησης των συσχετίσεων της τράπεζας είναι σωστό και έχει υλοποιηθεί με τιμιότητα (integrity).

---

<sup>16</sup> Βλέπε «Παράγοντες κινδύνου»

- VIII. Το μοντέλο της τράπεζας πρέπει να συλλαμβάνει με ακρίβεια τους ιδιαίτερους κινδύνους που σχετίζονται με δικαιώματα μέσα σε κάθε μία από τις ευρείες κατηγορίες κινδύνου. Τα παρακάτω κριτήρια πρέπει να ικανοποιούνται για την μέτρηση του κινδύνου των δικαιωμάτων:
- Το μοντέλο της τράπεζας πρέπει να συλλαμβάνει τα μη-γραμμικά χαρακτηριστικά των τιμών των δικαιωμάτων.
  - Οι τράπεζες πρέπει να μπορούν να υπολογίζουν τον κίνδυνο, από τα δικαιώματα ή από προϊόντα που έχουν χαρακτηριστικά δικαιωμάτων, που αντιστοιχεί σε ένα 10-ήμερο.
  - Κάθε σύστημα μέτρησης κινδύνου πρέπει να έχει ένα σύνολο παραγόντων κινδύνου που να συλλαμβάνει τις μεταβλητότητες των επιτοκίων και των τιμών των υποκείμενων μέσων.
- IX. Η τράπεζα πρέπει να ικανοποιεί κάθε ημέρα τις κεφαλαιακές απαιτήσεις όπως αυτές εκφράζονται από το μέγιστο από τα:
- Value-at-risk της προηγούμενης ημέρας
  - Μέσο όρο των value-at-risk των τελευταίων 60 ημερών επί το γινόμενο ενός πολλαπλασιαστικού παράγοντα.
- X. Ο πολλαπλασιαστικός παράγοντας ορίζεται από τις εποπτικές αρχές με βάση την εκτίμηση τους για την ποιότητα του συστήματος διαχείρισης του κινδύνου. Η ελάχιστη τιμή του πολλαπλασιαστικού παράγοντα είναι 3. Οι τράπεζες θα κληθούν να προσθέσουν στον πολλαπλασιαστικό παράγοντα μία τιμή μεταξύ του 0 και του 1 με βάση την εκ των υστέρων απόδοση του μοντέλου τους.
- XI. Οι τράπεζες που χρησιμοποιούν μοντέλα θα υπόκεινται επίσης και σε χρέωση κεφαλαίου για την κάλυψη του ειδικού κινδύνου των προϊόντων που συνδέονται με επιτόκια και μετοχές.

### 1.1.9. Stress Testing

Οι τράπεζες που χρησιμοποιούν εσωτερικά μοντέλα για να υπολογίσουν την κεφαλαιακή επάρκεια για την κάλυψη από τον κίνδυνο αγοράς πρέπει να έχουν ένα αυστηρό και περιεκτικό πρόγραμμα για Stress testing.

Τα σενάρια της τράπεζας που χρησιμοποιούνται για Stress testing πρέπει να καλύπτουν μια ποικιλία παραγόντων που μπορούν να δημιουργήσουν ασυνήθιστες ζημιές ή κέρδη στο χαρτοφυλάκιο συναλλαγών, η να κάνουν τη ρύθμιση του κινδύνου πολύ δύσκολη. Αυτοί οι παράγοντες περιλαμβάνουν γεγονότα μικρής πιθανότητας σε όλους τους τύπους κινδύνου, συμπεριλαμβανομένου των διαφόρων συστατικών του κινδύνου αγοράς, του πιστωτικού κινδύνου και του κινδύνου λειτουργίας (operational risk).

Τα Stress tests της τράπεζας πρέπει να βασίζονται και σε ποσοτικά και σε ποιοτικά κριτήρια, ενσωματώνοντας και τον κίνδυνο αγοράς και τις πλευρές της ρευστότητας σε διαταράξεις της αγοράς. Τα ποσοτικά κριτήρια πρέπει να υποδεικνύουν εύλογα stress σενάρια στα οποία η τράπεζα μπορεί να εκτεθεί. Τα ποιοτικά κριτήρια πρέπει να δίνουν έμφαση σε δύο κύριους στόχους, την εκτίμηση της δυνατότητας της τράπεζας να απορροφήσει μεγάλες ζημιές και την εύρεση τρόπων μέσω των οποίων η τράπεζα μπορεί να μειώσει τον κίνδυνο της και να διαφυλάξει κεφάλαια.

Οι τράπεζες πρέπει να συνδυάζουν τη χρήση των σεναρίων που υποδεικνύονται από τις εποπτικές αρχές με σενάρια που έχουν αναπτυχθεί από τις ίδιες τις τράπεζες. Οι εποπτικές αρχές μπορεί να ζητήσουν από τις τράπεζες να τους δώσουν πληροφορίες για Stress testing που αφορά τις τρεις παρακάτω κατηγορίες:

1. Σενάρια ελεγκτικών αρχών που δεν απαιτούν προσομοίωση από την τράπεζα. Οι τράπεζες πρέπει να έχουν πληροφορίες για τις μεγαλύτερες ζημιές που συνέβησαν στην περίοδο για την οποία ελέγχονται.
2. Σενάρια που απαιτούν προσομοίωση από την τράπεζα. Οι τράπεζες πρέπει να υποβάλλουν τα χαρτοφυλάκια τους σε μία σειρά από Stress σενάρια και να δώσουν στις εποπτικές αρχές τα αποτελέσματα. Τα σενάρια αυτά θα πρέπει να βασίζονται σε δεδομένα που έχουν αντληθεί από περιόδους αναταραχής (πχ. η κρίση του ERM το 1992 και το 1993) ή να επικεντρώνονται σε μεταβολές στην μεταβλητότητα και τις συσχετίσεις.
3. Σενάρια που αναπτύσσονται από την τράπεζα για να συλλάβουν τα ειδικά χαρακτηριστικά του χαρτοφυλακίου της.

### **1.1.10. Εξωτερική επικύρωση**

Η πιστοποίηση της ακρίβειας των μοντέλων από εξωτερικούς ελεγκτές και / ή τις εποπτικές αρχές πρέπει κατ' ελάχιστο να περιλαμβάνει τα παρακάτω βήματα:

1. Πιστοποίηση ότι η εσωτερική διαδικασία πιστοποίησης λειτουργεί με ικανοποιητικό τρόπο.
2. Διασφάλιση ότι η φόρμουλα που χρησιμοποιείται στην διαδικασία υπολογισμού και τιμολόγησης των δικαιωμάτων και άλλων σύνθετων εργαλείων πιστοποιείται από κατάλληλη μονάδα, η οποία θα πρέπει να είναι ανεξάρτητη από την περιοχή συναλλαγών.
3. Έλεγχος για το αν η δομή των εσωτερικών μοντέλων είναι επαρκής σε σχέση με τις δραστηριότητες της τράπεζας και τη γεωγραφική κάλυψη.
4. Έλεγχος των αποτελεσμάτων του backtesting του εσωτερικού συστήματος της τράπεζας, για να διασφαλιστεί ότι το μοντέλο δίνει αξιόπιστα μέτρα των πιθανών ζημιών.
5. Διασφάλιση του ότι η ροή των δεδομένων και οι διαδικασίες που σχετίζονται με το σύστημα διαχείρισης του κινδύνου είναι διάφανες και προσπελάσιμες.

### **1.1.11. Συνδυασμός εσωτερικών μοντέλων και τυποποιημένης μεθοδολογίας**

Εκτός και αν η έκθεση της τράπεζας σε έναν συγκεκριμένο παράγοντα κινδύνου όπως οι τιμές των commodities είναι ασήμαντος, οι τράπεζα που επιθυμεί να χρησιμοποιήσει εσωτερικά μοντέλα πρέπει να έχει ένα ολοκληρωμένο σύστημα μέτρησης του κινδύνου που συλλαμβάνει τις ευρείες κατηγορίες κινδύνου. Μια τράπεζα που έχει αναπτύξει ένα ή περισσότερα μοντέλα δε μπορεί να επιστρέψει στην τυποποιημένη μέθοδο. Οι τράπεζες που αρχίζουν να χρησιμοποιούν μοντέλα για μια ή περισσότερες κατηγορίες κινδύνων αναμένεται ότι θα επεκτείνουν τα μοντέλα τους σε όλους τους κινδύνους αγοράς. Όμως δεν υπάρχει συγκεκριμένο χρονικό όριο για τις τράπεζες που χρησιμοποιούν συνδυασμό των δυο μεθόδων για να μεταπηδήσουν ολοκληρωτικά στη χρήση εσωτερικών μοντέλων.

Οι παρακάτω όροι πρέπει να πληρούνται από τις τράπεζες που χρησιμοποιούν συνδυασμό των δύο μεθόδων:

1. Κάθε ευρεία κατηγορία κινδύνου πρέπει να αντιμετωπίζεται με τη χρήση μιας μόνο μεθόδου.
2. Όλα τα κριτήρια που αναφέρθηκαν μέχρι τώρα πρέπει να ικανοποιούνται από τα μοντέλα που χρησιμοποιούνται.
3. Οι τράπεζες δε πρέπει να μεταβάλλουν το συνδυασμό των δύο μεθόδων που χρησιμοποιούν χωρίς να αιτιολογήσουν την ενέργεια τους στις εποπτικές αρχές.
4. Κανένα στοιχείο του κινδύνου αγοράς δεν πρέπει να διαφύγει της μέτρησης.
5. Οι κεφαλαιακές χρεώσεις που υπολογίζονται με βάση τις δύο μεθόδους πρέπει να αθροίζονται.

#### 1.1.12. Ειδικός κίνδυνος

Οι τράπεζες που χρησιμοποιούν εσωτερικά μοντέλα θα επιτρέπεται να υπολογίζουν τον ειδικό κίνδυνο με τη χρήση εσωτερικών μοντέλων αν ικανοποιούν όλες τις ποσοτικές και ποιοτικές απαιτήσεις που ισχύουν και για τα μοντέλα υπολογισμού του γενικού κινδύνου και επιπλέον τα παρακάτω επιπρόσθετα κριτήρια. Οι τράπεζες που δε μπορούν να ικανοποιήσουν τα κριτήρια αυτά θα πρέπει να υπολογίζουν τον ειδικό κίνδυνο με τη βοήθεια της τυποποιημένης μεθόδου.

Επιπρόσθετα κριτήρια για τη χρήση εσωτερικών μοντέλων υπολογισμού του ειδικού κινδύνου:

1. Τα μοντέλα πρέπει να εξηγούν την ιστορική διακύμανση των τιμών στο χαρτοφυλάκιο.
2. Τα μοντέλα πρέπει ευαπόδεικτα να συλλαμβάνουν τη συγκέντρωση (μέγεθος και διαφορές στη σύνθεση)<sup>17</sup>.
3. Τα μοντέλα θα πρέπει να είναι εύρωστα και σε δυσμενή περιβάλλοντα.
4. Τέλος τα μοντέλα θα πρέπει να επικυρώνονται μέσα από backtesting που θα στοχεύει στο να εκτιμήσει αν ο ειδικός κίνδυνος μετράται με ακρίβεια.

Επιπλέον οι τράπεζες πρέπει να έχουν μεθοδολογίες που να τους επιτρέπουν να συλλαμβάνουν επαρκώς κινδύνους δυσμενών συμβάντων και χρεοκοπίας.

---

<sup>17</sup> Η τράπεζα πρέπει να μπορεί να δείξει ότι το μοντέλο είναι ευαίσθητο σε αλλαγές στην σύνθεση του χαρτοφυλακίου και ότι υψηλότερη κεφαλαιακή χρέωση αντιστοιχεί σε χαρτοφυλάκια με μεγαλύτερη συγκέντρωση.

Οι τράπεζες που ικανοποιούν τα κριτήρια αλλά δεν έχουν μεθοδολογίες που να τους επιτρέπουν να συλλαμβάνουν επαρκώς κινδύνους δυσμενών συμβάντων και χρεοκοπίας επιτρέπεται να χρησιμοποιούν τα εσωτερικά μοντέλα αλλά θα χρεώνονται με επιπλέον κεφάλαιο.

## **1.2. Θεσμικό πλαίσιο και πιστωτικός κίνδυνος**

Το θεσμικό πλαίσιο για την προστασία από τον πιστωτικό κίνδυνο θα καθορίζεται από τις αρχές του 2006 από το “International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards, A Revised Framework” (June 2004) της EBET.

Με βάση το νέο θεσμικό πλαίσιο οι τράπεζες θα έχουν πλέον τη δυνατότητα εκτός από την τυποποιημένη μέθοδο να χρησιμοποιήσουν και τα εσωτερικά συστήματα μέτρησης του κινδύνου για τον καθορισμό του ελεγκτικού κεφαλαίου. Επιπλέον οριοθετείται η χρήση τεχνικών μείωσης του πιστωτικού κινδύνου (credit risk mitigation) και η χρήση της τιτλοποίησης (securitisation).

### **1.2.1. Η τυποποιημένη μέθοδος μέτρησης του πιστωτικού κινδύνου**

Η βασική διαφορά της νέας τυποποιημένης μεθόδου για τη μέτρηση του πιστωτικού κινδύνου είναι η χρήση εξωτερικών εκτιμήσεων της πιστοληπτικής ικανότητας (εξωτερικών διαβαθμίσεων). Με βάση το νέο πλαίσιο οι απαιτήσεις δε θα σταθμίζονται πλέον με βάση μόνο το είδος τους αλλά και με την πιστοληπτική ικανότητα του αντισυμβαλλομένου. Κάθε απαίτηση θα σταθμίζεται<sup>18</sup> με βάρος από 0 έως 350% ή και παραπάνω εάν η εποπτικές αρχές το επιθυμούν.

Στην τυποποιημένη μέθοδο συναντάμε τις παρακάτω κατηγορίες ανοιγμάτων:

- Ανοίγματα έναντι κεντρικών κυβερνήσεων (sovereigns).
- Ανοίγματα έναντι νομικών προσώπου δημόσιου τομέα (Public Sector Entities PSEs) που δεν ανήκουν στην κεντρική κυβέρνηση.

---

<sup>18</sup> Η στάθμιση θα γίνεται με βάση το είδος και την πιστοληπτική ικανότητα του αντισυμβαλλομένου

- Ανοίγματα έναντι διεθνών αναπτυξιακών τραπεζών (multilateral development banks MDBs).
- Ανοίγματα έναντι πιστωτικών ιδρυμάτων.
- Ανοίγματα έναντι εταιριών τίτλων (securities firms).
- Ανοίγματα έναντι επιχειρήσεων.
- Ανοίγματα λιανικής τραπεζικής.
- Ανοίγματα εγγυημένα από κατοικίες.
- Ανοίγματα εγγυημένα από εμπορικά ακίνητα.
- Απαιτήσεις σε καθυστέρηση.
- Θέσεις εκτός ισολογισμού.
- Θέσεις σε τιτλοποίηση (securitisation exposure).
- Υπόλοιπα στοιχεία του ενεργητικού.

#### 1.2.1.1.Εξωτερικές αξιολογήσεις πιστοληπτικής ικανότητας

Οι εθνικές εποπτικές αρχές είναι υπεύθυνες να καθορίσουν εάν ένα ίδρυμα που παράγει αξιολογήσεις πιστοληπτικής ικανότητας (external credit assessment institution ECAI) ικανοποιεί τα παρακάτω κριτήρια. Οι εκτιμήσεις του ECAI μπορούν να αναγνωριστούν σε περιορισμένη βάση. Η διαδικασία αναγνώρισης των ECAI πρέπει να είναι δημόσια.

Κριτήρια για τα ECAI.

- Αντικειμενικότητα
- Ανεξαρτησία
- Διεθνή διαθεσιμότητα/ Διαφάνεια.
- Πληροφόρηση (disclosure)
- Πόροι
- Αξιοπιστία

Οι εποπτικές αρχές θα αντιστοιχίζουν τις κατηγορίες πιστοληπτικής ικανότητας στα βάρη στάθμισης κινδύνου.



### 1.2.1.2. Τεχνικές μείωσης του πιστωτικού κινδύνου

Επιτρέπεται στις τράπεζες να αναγνωρίσουν περισσότερα είδη τεχνικών μείωσης του πιστωτικού κινδύνου (credit risk mitigation CRM), για ελεγκτικούς σκοπούς σε σχέση με το πλαίσιο του 1988. Το πλαίσιο μείωσης του πιστωτικού κινδύνου διαφοροποιείται στην περίπτωση της μεθόδου των εσωτερικών διαβαθμίσεων. Οι μειώσεις από τον πιστωτικό κίνδυνο θα πρέπει να είναι δομημένες έτσι ώστε να έχουν νομική βεβαιότητα.

Τα είδη των μειώσεων που αναγνωρίζονται για την τυποποιημένη μέθοδο είναι τα παρακάτω:

- Εξασφαλίσεις (Collateral)
  - ο Απλή μέθοδος
  - ο Ευρεία μέθοδος
- Συμψηφισμός εντός ισολογισμού.
- Εγγυήσεις και πιστωτικά παράγωγα.

Κάθε είδος μείωσης έχει τα δικά της κριτήρια βάση των οποίων μπορεί να χρησιμοποιηθεί καθώς και τρόπο υπολογισμού της ελάφρυνσης σε ελεγκτικό κεφάλαιο.

Όταν υπάρχουν διαφορές στην ωρίμανση της CRM και της θέσης που μειώνει τότε η CRM δεν επιφέρει μείωση ελεγκτικού κεφαλαίου εάν η αρχική του διάρκεια ήταν μικρότερη από ένα έτος. Σε κάθε άλλη περίπτωση επιφέρει μερική μείωση του ελεγκτικού κεφαλαίου. Όταν χρησιμοποιείται η απλή μέθοδος εξασφαλίσεων τότε δεν επιτρέπεται διαφορά στην ωρίμανση.

### 1.2.2. Τα μοντέλα εσωτερικών διαβαθμίσεων

Το νέο πλαίσιο επιτρέπει στις τράπεζες να χρησιμοποιήσουν εσωτερικά μοντέλα διαβαθμίσεων (Internal Ratings-Based IRB). Τα μοντέλα αυτά ανάλογα με την περίπτωση θα πρέπει να είναι σε θέση να παράγουν συστατικά του πιστωτικού κινδύνου όπως μετρήσεις για την πιθανότητα αθέτησης υποχρέωσης (probability of default PD), την αναμενόμενη ζημία λόγω αθέτησης ως ποσοστό του χρηματοδοτικού ανοίγματος (loss given default LGD), το χρηματοδοτικό άνοιγμα (exposure given default) και την

πραγματική ωριμότητα (effective maturity M). Η IRB μεθοδολογία μετράει τη μη αναμενόμενη ζημία (unexpected loss UL) και τη αναμενόμενη ζημία (expected loss EL). Η UL χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό του ελεγκτικού κεφαλαίου ενώ η EL αφαιρείται από τα κεφάλαια της τράπεζας<sup>19</sup>.

### 1.2.2.1. Κατηγοριοποίηση των ανοιγμάτων (exposures)

Με βάση την IRB μεθοδολογία οι τράπεζες πρέπει να κατηγοριοποιήσουν τα στοιχεία του τραπεζικού χαρτοφυλακίου τους (banking-book) σε ευρείες κατηγορίες περιουσιακών στοιχείων (asset classes). Οι κατηγορίες αυτές έχουν διαφορετικά χαρακτηριστικά όσον αφορά τον πιστωτικό κίνδυνο. Μέσα σε ορισμένες από τις κατηγορίες υπάρχουν υποκατηγορίες. Οι κατηγορίες και υποκατηγορίες είναι οι παρακάτω:

1. Ανοίγματα έναντι επιχειρήσεων (Corporate exposures). Οι τράπεζες επιτρέπεται να διαχωρίσουν τις απαιτήσεις τους έναντι μικρομεσαίων επιχειρήσεων (Small and Medium sized Entities SME). Εντός της κατηγορίας αυτής περιέχονται και πέντε κατηγορίες ειδικού δανεισμού (Specialized Lending SL). Οι υποκατηγορίες SL αφορούν απαιτήσεις που α) έχουν δημιουργηθεί για την χρηματοδότηση και / ή την λειτουργία ενός περιουσιακού στοιχείου, β) η επιχείρηση δεν έχει άλλα αξιόλογα περιουσιακά στοιχεία ή δραστηριότητες, γ) η τράπεζα έχει σημαντικό βαθμό ελέγχου πάνω στο περιουσιακό στοιχείο. Οι υποκατηγορίες SL είναι οι ακόλουθες:
  - Χρηματοδότηση έργου (Project finance PF) . Η τράπεζα πληρώνεται και διασφαλίζεται κύρια από τα έσοδα του έργου.
  - Χρηματοδότηση περιουσιακού στοιχείου (Object finance OF). Η τράπεζα πληρώνεται και διασφαλίζεται κύρια από την παραχώρηση μέρους των εσόδων που προκύπτουν από την ενοικίαση του περιουσιακού στοιχείου.
  - Χρηματοδότηση εμπορευμάτων (Commodities finance CF). Δομημένος μικρής διάρκειας δανεισμός για την χρηματοδότηση αποθεμάτων,

---

<sup>19</sup> Όταν χρησιμοποιείται η IRB μεθοδολογία οι προβλέψεις δεν υπολογίζονται στο Tier 2 κεφάλαιο. Εάν η EL υπερβαίνει τις προβλέψεις τότε η διαφορά αφαιρείται από κατά 50% από το Tier 1 κεφάλαιο και κατά 50% από το Tier 2 κεφάλαιο

καταλόγων ή πληρωτέα για εμπορεύματα που διαπραγματεύονται σε χρηματιστήρια.

- Χρηματοδότηση ακίνητης περιουσίας (Income-producing real estate IPRE).
  - Υψηλού κινδύνου εμπορική ακίνητη περιουσία (High-volatility commercial real estate HVCRE).
2. Ανοίγματα έναντι κρατών και κεντρικών τραπεζών (Sovereign exposures).
  3. Ανοίγματα έναντι τραπεζών (Bank exposures).
  4. Ανοίγματα λιανικής τραπεζικής (Retail exposures). Είναι απαιτήσεις έναντι φυσικών προσώπων (πιστωτικές κάρτες, προσωπικά δάνεια, κτλ). Δάνεια απόκτησης στέγης και δάνεια σε μικρές επιχειρήσεις. Τα ανοίγματα λιανικής χωρίζονται σε τρεις υποκατηγορίες
    - Ανοίγματα εγγυημένα από κατοικίες (Exposures secured by residential property).
    - Περιστρεφόμενα ανοίγματα λιανικής (Qualifying revolving retail exposures QRRE).
    - Όλες τα υπόλοιπα ανοίγματα .
  5. Ανοίγματα σε μετοχικά κεφάλαια (Equity exposures).

#### 1.2.2.2.Βασική (foundation) και προχωρημένη (advanced) μέθοδος

Για κάθε μια από της παραπάνω κατηγορίες υπάρχουν τρία βασικά στοιχεία:

- Τα συστατικά κινδύνου (risk components)
  - ο Η πιθανότητα αθέτησης υποχρέωσης (Probability of default PD) που είναι ποσοστό.
  - ο Η ζημία λόγω αθέτησης (Loss given default LGD) που είναι ποσοστό.
  - ο Χρηματοδοτικό άνοιγμα τη στιγμή της αθέτησης της υποχρέωσης (Exposure at default EAD) που είναι ποσό.
  - ο Πραγματική ωρίμανση (Effective maturity M)
- Οι συναρτήσεις στάθμισης κινδύνου (risk-weight functions)
- Οι ελάχιστες απαιτήσεις για τη χρήση της IRB

Για πολλές από τις κατηγορίες υπάρχει η δυνατότητα να χρησιμοποιηθούν δύο μεθοδολογίες η βασική και η προχωρημένη. Με βάση τη βασική, σα γενικό κανόνα, οι τράπεζες εκτιμούν μόνες την PD και βασίζονται σε εκτιμήσεις των ελεγκτικών αρχών για τα υπόλοιπα συστατικά του κινδύνου. Στην προχωρημένη μέθοδο οι τράπεζες μπορούν να εκτιμούν από μόνες τους τα περισσότερα από τα PD, LGD, EAD και M, με την προϋπόθεση ότι πληρούν κάποια κριτήρια.

### **1.2.2.3.Ελάχιστες απαιτήσεις για τη χρήση των IRB μεθοδολογιών**

Για να επιτραπεί σε μια τράπεζα να χρησιμοποιήσει την IRB μεθοδολογία θα πρέπει να έχει ικανοποιήσει αρχικά αλλά και να συνεχίζει να ικανοποιεί σε συνεχή βάση κάποιες ελάχιστες προϋποθέσεις. Η βασική αρχή που διέπει αυτές τις προϋποθέσεις είναι τα συστήματα και οι διαδικασίες διαβάθμισης (rating systems) και εκτίμησης του κινδύνου να παρέχουν μια λογική εκτίμηση του πιστωτικού κινδύνου του δανειολήπτη και των χαρακτηριστικών της συναλλαγής, μια λογική διαφοροποίηση του κινδύνου και μια επαρκώς ακριβή και συνεπή εκτίμηση του κινδύνου. Οι ελάχιστες απαιτήσεις μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε 9 κατηγορίες:

#### *1. Σχεδιασμός του συστήματος διαβάθμισης (Rating system design)*

Το σύστημα διαβάθμισης περιλαμβάνει όλες τις μεθόδους, τις διαδικασίες, τους ελέγχους και τη συλλογή δεδομένων καθώς και το πληροφοριακό σύστημα που υποστηρίζουν την εκτίμηση των εσωτερικών διαβαθμίσεων κινδύνου και την ποσοτικοποίηση των εκτιμήσεων αθέτησης (default) και ζημίας. Εάν μια τράπεζα επιλέξει να χρησιμοποιεί πολλαπλά συστήματα, η λογική με βάση την οποία αντιστοιχίζει έναν δανειολήπτη σε κάποιο σύστημα διαβάθμισης πρέπει να είναι καταγεγραμμένη και να υλοποιείται με τρόπο που να απεικονίζει όσο το δυνατόν καλύτερα το επίπεδο κινδύνου του δανειολήπτη.

#### 1) Διαστάσεις διαβάθμισης.

Για ανοίγματα έναντι επιχειρήσεων, κρατών και τραπεζών πρέπει το σύστημα να υπολογίζει δύο διαστάσεις: α) τον κίνδυνο του δανειολήπτη, β) παράγοντες που

σχετίζονται με τη συναλλαγή (εγγυήσεις, τύπος συναλλαγής, κτλ). Για τις τράπεζες που χρησιμοποιούν την βασική IRB μέθοδο αυτή η απαίτηση μπορεί να ικανοποιηθεί με τη χρήση μιας βοηθητικής διάστασης (facility dimension) η οποία αντανακλά μαζί το δανειολήπτη και τους παράγοντες της συναλλαγής. Για τις τράπεζες που χρησιμοποιούν την προχωρημένη IRB μέθοδο οι διαβαθμίσεις των απαιτήσεων πρέπει να αντανακλούν μόνο το LGD.

Τα συστήματα διαβάθμισης για ανοίγματα λιανικής τραπεζικής πρέπει να προσανατολίζονται και στον κίνδυνο του δανειολήπτη και στο κίνδυνο της συναλλαγής και να αντιλαμβάνονται όλα τα σχετικά χαρακτηριστικά του δανειολήπτη και της συναλλαγής. Οι τράπεζες πρέπει να αντιστοιχίζουν κάθε απαίτηση λιανικής σε μια συγκεκριμένη δεξαμενή (pool). Οι τράπεζες πρέπει να αποδείξουν ότι η διαδικασία αυτή προσφέρει διαφοροποίηση του κινδύνου, ομαδοποιεί απαιτήσεις επαρκώς ομογενείς και επιτρέπει την ακριβή και συνεπή εκτίμηση των χαρακτηριστικών ζημίας σε επίπεδο δεξαμενής. Για κάθε δεξαμενή οι τράπεζες πρέπει να υπολογίζουν τα PD, LGD, και EAD.

## 2) Δομή διαβάθμισης

Για απαιτήσεις έναντι επιχειρήσεων, κρατών και τραπεζών πρέπει η τράπεζα να έχει τουλάχιστον 7 βαθμίδες για εξυπηρετούμενα δάνεια (non-defaulted) τους και μια για μη εξυπηρετούμενα δάνεια (defaulted). Οι εποπτικές αρχές μπορούν να απαιτήσουν από τράπεζες που δανείζουν σε δανειολήπτες με μεγάλη διαφορετικότητα όσον αφορά την πιστοληπτική ικανότητα να έχουν παραπάνω διαβαθμίσεις. Η βαθμίδα ενός δανειολήπτη είναι μια εκτίμηση του κινδύνου με βάση προκαθορισμένα και διακριτά κριτήρια από τον οποίο προκύπτουν εκτιμήσεις για την PD. Δεν υπάρχει συγκεκριμένο ελάχιστο πλήθος βοηθητικών βαθμών για τις τράπεζες που χρησιμοποιούν την προχωρημένη μέθοδο για την εκτίμηση του LGD.

Τα συστήματα διαβάθμισης για ανοίγματα λιανικής τραπεζικής πρέπει να παρέχουν ποσοτικές μετρήσεις των PD, LGD, και EAD κάθε δεξαμενής. Το επίπεδο διαφοροποίησης για την IRB μέθοδο θα πρέπει να διασφαλίζει ότι το πλήθος την

συναλλαγών σε μια συγκεκριμένη δεξαμενή είναι επαρκές για να επιτρέψει την παραγωγή και επικύρωση των PD, LGD, και EAD σε επίπεδο δεξαμενής.

### 3) Κριτήρια διαβάθμισης

Οι τράπεζες πρέπει να έχουν συγκεκριμένους ορισμούς, διαδικασίες και κριτήρια διαβάθμισης για να αντιστοιχίζουν τις απαιτήσεις σε βαθμίδες. Οι ορισμοί και τα κριτήρια θα πρέπει να είναι πειστικοί και διαισθητικά και να έχουν σαν αποτέλεσμα την λογική διαφοροποίηση του κινδύνου.

### 4) Ορίζοντας αντιστοίχισης διαβάθμισης

Παρότι ο χρονικός ορίζοντας που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της PD είναι ένα έτος οι τράπεζες αναμένεται να χρησιμοποιούν μεγαλύτερους χρονικούς ορίζοντες για των αντιστοίχιση της βαθμολογίας.

### 5) Χρήση των μοντέλων

Συστήματα πιστοληπτικής βαθμολόγησης (credit scoring models) και άλλες μηχανικές διαδικασίες επιτρέπονται στην αρχική ή σε μερική βάση αντιστοίχιση της βαθμίδας και μπορούν να παίξουν ρόλο στην εκτίμηση των PD, LGD, και EAD. Επαρκής ανθρώπινη κρίση και ανθρώπινη επίβλεψη είναι απαραίτητη για να διασφαλίσει ότι όλες οι σχετικές και σημαντικές πληροφορίες, συμπεριλαμβανομένων και αυτών που δεν εμπεριέχονται στους σκοπούς του μοντέλου, έχουν ληφθεί υπόψη και ότι το μοντέλο έχει χρησιμοποιηθεί σωστά. Οι τράπεζες πρέπει να πείσουν τις εποπτικές αρχές ότι ένα μοντέλο ή μια διαδικασία έχει καλή δυνατότητα πρόβλεψης και ότι οι απαιτήσεις σε ελεγκτικό κεφάλαιο δε θα διαταραχθούν σαν αποτέλεσμα της χρήσης του. Ακόμη οι τράπεζες πρέπει να εξετάζουν με λεπτομέρεια τα δεδομένα που χρησιμοποιούν στα στατιστικά μοντέλα πρόβλεψης αθέτησης ή ζημίας και να μπορούν να επιδείξουν ότι τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή του μοντέλου είναι αντιπροσωπευτικά του πληθυσμού των δανειοληπτών της τράπεζας. Όταν συνδυάζονται αποτελέσματα μοντέλων και ανθρώπινη κρίση θα πρέπει να υπάρχουν γραπτές οδηγίες για το πώς θα πρέπει να συνδυάζονται. Επιπλέον η τράπεζα πρέπει να έχει διαδικασίες

για εξέταση των αντιστοιχίσεων σε βαθμίδες που παράγονται από μοντέλα με εστίαση στην εύρεση και ελαχιστοποίηση των λαθών που σχετίζονται με γνωστές αδυναμίες των μοντέλων. Τέλος η τράπεζα θα πρέπει να έχει έναν τακτικό κύκλο επικύρωσης του μοντέλου που να περιέχει την παρακολούθηση της απόδοσης και της σταθερότητας του μοντέλου, επιθεώρηση των συσχετίσεων του μοντέλου και αντιπαραβολή των αποτελεσμάτων του μοντέλου με τις εκβάσεις.

#### 6) Τεκμηρίωση του σχεδιασμού των συστημάτων διαβάθμισης

Οι τράπεζες πρέπει να τεκμηριώσουν γραπτώς τον σχεδιασμό και τις λειτουργικές λεπτομέρειες των βαθμολογικών τους συστημάτων. Εάν η τράπεζα χρησιμοποιεί στατιστικά μοντέλα στη διαδικασία βαθμολόγησης πρέπει να τεκμηριώσει τις μεθοδολογίες της παρέχοντας μια λεπτομερή περιγραφή της θεωρίας, των υποθέσεων και ή των μαθηματικών ή εμπειρικών βάσεων της αντιστοίχισης σε βαθμούς των δανειοληπτών, τις απαιτήσεις ή τις δεξαμενές και τις πηγές δεδομένων που χρησιμοποιήθηκαν στην εκτίμηση του μοντέλου. Επιπλέον πρέπει να θεσπίσει μια στατιστική διαδικασία επικύρωσης του μοντέλου και να επισημάνει τυχόν καταστάσεις κατά τις οποίες το μοντέλο δε δουλεύει αποτελεσματικά.

### II. Λειτουργίες του συστήματος διαβάθμισης (*Risk rating system operations*)

#### 1) Κάλυψη των βαθμίδων

Όλες οι νομικές οντότητες έναντι των οποίων η τράπεζα έχει ανοίγματα (δανειολήπτες και εγγυητές) πρέπει να βαθμολογούνται ξεχωριστά. Οι τράπεζες πρέπει να έχουν πολιτικές αποδεκτές από τους ελεγκτές σχετικά με τον χειρισμό ξεχωριστών οντοτήτων σε ένα συνδεδεμένο όμιλο και περιπτώσεις κατά τις οποίες η ίδια βαθμίδα μπορεί να μην αντιστοιχίζεται σε κάποιες ή όλες τις σχετιζόμενες οντότητες.

#### 2) Ακεραιότητα της διαδικασίας διαβάθμισης

Για ανοίγματα έναντι επιχειρήσεων, κρατών και τραπεζών πρέπει οι βαθμίδες των δανειοληπτών και των συναλλαγών να ανανεώνονται τουλάχιστον σε ετήσια βάση.

Συγκεκριμένες πιστώσεις, ειδικά σε δανειολήπτες υψηλού κινδύνου και προβληματικές απαιτήσεις, πρέπει να εξετάζονται πιο συχνά. Επιπλέον οι τράπεζες πρέπει να ξεκινήσουν καινούργια διαδικασία διαβάθμισης εάν σοβαρές πληροφορίες για τον δανειολήπτη ή την συναλλαγή παρουσιαστούν.

Επίσης για τα ανοίγματα λιανικής τραπεζικής πρέπει η τράπεζα να επανεξετάζει τα PD, LGD και EAD των δεξαμενών καθώς και την κατάσταση των δανειοληπτών τουλάχιστον σε ετήσια βάση.

### 3) Παρακάμψεις

Για τις διαβάθμισης που βασίζονται σε κρίση ειδικών οι τράπεζες πρέπει ευκρινώς να περιγράψουν τις περιπτώσεις κατά τις οποίες τραπεζικοί υπάλληλοι μπορούν να παρακάμψουν τα αποτελέσματα της διαδικασίας διαβάθμισης, συμπεριλαμβανομένου του πώς και σε τι έκταση τέτοιες παρακάμψεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν και από ποιους.

### 4) Συντήρηση δεδομένων

Η τράπεζα πρέπει να συλλέγει και να αποθηκεύει δεδομένα για βασικά χαρακτηριστικά των δανειοληπτών και των συναλλαγών για να προσφέρει αποτελεσματική υποστήριξη στην εσωτερική της διαδικασία μέτρησης και διαχείρισης πιστωτικού κινδύνου, για να επιτρέψει την τράπεζα να ικανοποιήσει τις απαιτήσεις από τις εποπτικές αρχές και να εξυπηρετήσει σαν βάση για την αναφορά προς τους ελεγκτές.

Οι τράπεζες πρέπει να συντηρούν ιστορικές βαθμίδες για τους δανειολήπτες και τους εγγυητές. Οι χρήστες της προχωρημένης μεθόδου πρέπει επιπλέον να κρατούν μια πλήρη ιστορικότητα των LGD και EAD εκτιμήσεων που σχετίζονται με κάθε συναλλαγή και τα βασικά στοιχεία που χρησιμοποιήθηκαν για να παράγουν την εκτίμηση καθώς και το μοντέλο και τον υπάλληλο που τις παρήγαγε. Για τις απαιτήσεις λιανικής οι τράπεζες πρέπει να διατηρούν τα στοιχεία που χρησιμοποιήθηκαν για να αντιστοιχήσουν απαιτήσεις σε δεξαμενές και τα PD, LGD και EAD των δεξαμενών. Τέλος για defaulted απαιτήσεις οι τράπεζες πρέπει να κρατούν τα στοιχεία των



δεξαμενών στις οποίες οι απαιτήσεις είχαν αντιστοιχιστεί τον προηγούμενο χρόνο καθώς και τα πραγματοποιηθέντα LGD και EAD.

5) Προσομοίωση ακραίων (stress tests) καταστάσεων για την εκτίμηση της επάρκειας των κεφαλαίων

Μια IRB τράπεζα πρέπει να έχει διαμορφωμένες γερές διαδικασίες προσομοίωσης ακραίων καταστάσεων για την εκτίμηση της επάρκειας των κεφαλαίων της. Οι προσομοιώσεις ακραίων καταστάσεων πρέπει να σχετίζονται με πιθανά γεγονότα ή μελλοντικές αλλαγές στις οικονομικές συνθήκες που θα μπορούσαν να είχαν αρνητικές επιπτώσεις στις απαιτήσεις της τράπεζας. Επιπλέον οι τράπεζες θα πρέπει να διενεργούν προσομοιώσεις ακραίων καταστάσεων πιστωτικού κινδύνου για να εκτιμούν την επίδραση ορισμένων ειδικών συνθηκών στις IRB απαιτήσεις κεφαλαίων.

### *III. Διοίκηση της επιχείρησης και επίβλεψη (Corporate governance and oversight)*

1) Διοίκηση της επιχείρησης

Όλες οι βασικές πτυχές της διαδικασίας διαβάθμισης και της εκτίμησης πρέπει να εγκριθούν από διοικητικό συμβούλιο της τράπεζας ή από μία διορισμένη για αυτόν τον σκοπό επιτροπή από διευθυντικά στελέχη.

2) Έλεγχος πιστωτικού κινδύνου

Οι τράπεζες θα πρέπει να έχουν ανεξάρτητες μονάδες ελέγχου του πιστωτικού κινδύνου οι οποίες να είναι υπεύθυνες για τον σχεδιασμό ή την επιλογή, την υλοποίηση και την αποδοτικότητα των εσωτερικών συστημάτων διαβάθμισης.

3) Εσωτερική και εξωτερική επιθεώρηση

Εσωτερική επιθεώρηση ή μια εξ ίσου ανεξάρτητη λειτουργία θα πρέπει να εξετάζει τουλάχιστον σε ετήσια βάση το σύστημα διαβάθμισης της τράπεζας και τις λειτουργίες

του, συμπεριλαμβανομένων των λειτουργιών της πιστωτική λειτουργίας και των εκτιμήσεων των PD, LGD και EAD.

#### *IV. Χρήση των εσωτερικών διαβαθμίσεων (Use of internal ratings)*

Οι εσωτερικές διαβαθμίσεις και οι εκτιμήσεις αθέτησης και ζημίας πρέπει να παίζουν ουσιώδη ρόλο στην έγκριση πιστώσεων, στην διαχείριση του κινδύνου, στην εσωτερική κατανομή των κεφαλαίων και τις διοικητικές λειτουργίες της τράπεζας που χρησιμοποιεί την IRB μέθοδο. Συστήματα διαβάθμισης και εκτιμήσεις που έχουν σχεδιαστεί και υλοποιηθεί αποκλειστικά για την παραγωγή στοιχείων της IRB μεθόδου δεν είναι αποδεκτά,

#### *V. Ποσοτικοποίηση του κινδύνου (Risk quantification)*

##### 1) Ορισμός της αθέτησης υποχρέωσης

Μια αθέτηση υποχρέωσης συμβαίνει όταν ένα τουλάχιστον από τα παρακάτω έχει συμβεί

- Η τράπεζα θεωρεί ότι ο οφειλέτης είναι απίθανο να πληρώσει τις υποχρεώσεις του στην τράπεζα στο ακέραιο, χωρίς να καταφύγει η τράπεζα σε ενέργειες όπως ρευστοποίηση εγγυήσεων.
- Ο υπόχρεος έχει καθυστερήσει την πληρωμή για περισσότερες από 90 ημέρες.

##### 2) Επαναγήρανση (re-aging)

Η τράπεζα πρέπει να έχει διευκρινίσει και καταγράψει πολιτικές σε σχέση με την μέτρηση των ημερών καθυστέρησης και ειδικά σε σχέση με την επαναγήρανση των απαιτήσεων. Κατ' ελάχιστο η πολιτική επαναγήρανσης θα πρέπει να περιέχει α) τις αρχές έγκρισης και απαιτήσεις σε αναφορές β) ελάχιστη ηλικία μιας απαίτησης πριν να είναι επιτρεπτή η επαναγήρανσή της γ) επίπεδα παραπτωμάτων μιας απαίτησης στην οποία επιτρέπεται η επαναγήρανση δ) μέγιστο πλήθος επαναγήρανσεων ανά απαίτηση ε) επανεκτίμηση της δυνατότητας του οφειλέτη να αποπληρώσει.

### 3) Υπεραναλήψεις

Εξουσιοδοτημένες υπεραναλήψεις πρέπει να υπόκεινται σε πιστωτικά όρια τα οποία να έχουν γνωστοποιηθεί στους πελάτες. Υπεραναλήψεις πέραν του πιστωτικού ορίου πρέπει να παρακολουθούνται και εάν δεν επιστρέψουν κάτω από το πιστωτικό όριο μετά από 90 με 180 ημέρες θεωρούνται αθετήσεις υποχρέωσης.

### 4) Ορισμός της ζημίας

Ο ορισμός της ζημίας είναι η οικονομική ζημία. Όταν μετράμε την οικονομική ζημία όλοι οι σχετικοί παράγοντες πρέπει να λαμβάνονται υπόψη.

### 5) Απαιτήσεις για την εκτίμηση της PD

Για ανοίγματα έναντι επιχειρήσεων, κρατών και τραπεζών οι τράπεζες πρέπει να εκτιμούν την μέση PD κάθε βαθμίδας χρησιμοποιώντας πληροφορίες και τεχνικές που λαμβάνουν υπόψη μακρόχρονη εμπειρία. Οι τράπεζες μπορούν να α) να χρησιμοποιούν εσωτερική εμπειρία αθετήσεων για τον υπολογισμό της PD, β) να αντιστοιχίσουν τους εσωτερικούς βαθμούς σε βαθμούς κάποιου ECAI και να χρησιμοποιήσουν τις αντίστοιχες PD γ) να χρησιμοποιήσουν απλούς μέσους όρους των PD μεμονωμένων δανειοληπτών που έχουν εξαχθεί από στατιστικά μοντέλα πρόβλεψης αθέτησης. Σε κάθε περίπτωση τα ιστορικά στοιχεία που χρησιμοποιούνται θα πρέπει να έχουν έκταση τουλάχιστον 5 ετών.

Για τα ανοίγματα λιανικής τραπεζικής οι τράπεζες θα πρέπει να θεωρούν τα εσωτερικά στοιχεία σα βασική πηγή πληροφόρησης για να υπολογίζουν τα PD, LGD και EAD. Οι τράπεζες μπορούν να χρησιμοποιήσουν εξωτερικά στοιχεία με δεδομένο ότι μπορούν να επιδείξουν μια ισχυρή σχέση μεταξύ α) της διαδικασίας της τράπεζας για την αντιστοίχιση των απαιτήσεων σε δεξαμενές και την αντίστοιχη διαδικασία της εξωτερικής πηγής, και β) ανάμεσα στο εσωτερικό προφίλ κινδύνου της τράπεζας και των εξωτερικών δεδομένων. Σε κάθε περίπτωση τα ιστορικά στοιχεία που χρησιμοποιούνται θα πρέπει να έχουν έκταση τουλάχιστον 5 ετών. Τέλος οι τράπεζες ενθαρρύνονται να

προσαρμόσουν προς τα πάνω, για κάλυψη από τυχόν εποχικότητα, τις εκτιμήσεις τους για την PD.

#### 6) Απαιτήσεις για τις εκτιμήσεις των LGD

Η LGD μιας κατηγορίας δεν μπορεί να είναι μικρότερη από το μακροχρόνιο σταθμισμένο μέσο ποσοστό ζημίας σε περίπτωση αθέτησης που υπολογίζεται με βάση τη μέση οικονομική ζημία όλων των παρατηρημένων αθετήσεων της κατηγορίας. Επιπλέον οι τράπεζες πρέπει να λαμβάνουν υπόψη τους την πιθανότητα η LGD να είναι υψηλότερη του σταθμισμένου μέσου κατά τη διάρκεια μιας περιόδου κατά την οποία η πιστωτική ζημία είναι σημαντικά υψηλότερη από τον μέσο. Οι τράπεζες πρέπει να εξετάζουν την έκταση οποιασδήποτε εξάρτησης μεταξύ του κινδύνου του δανειολήπτη και του προμηθευτή της εγγύησης. Περιπτώσεις στις οποίες υπάρχει μεγάλη εξάρτηση καθώς και νομισματικές ασυμφωνίες μεταξύ της απαίτησης και της εγγύησης πρέπει να εξεταστούν συντηρητικά. Εκτιμήσεις για απαιτήσεις έναντι επιχειρήσεων, κρατών και τραπεζών πρέπει να βασίζονται κατ' ελάχιστο σε στοιχεία ενός πλήρους οικονομικού κύκλου και πάντως όχι σε περιόδους μικρότερες των 7 ετών. Αντίστοιχα για απαιτήσεις λιανικής η περίοδος πρέπει να είναι τουλάχιστον 5 έτη.

#### 7) Απαιτήσεις για τις εκτιμήσεις των EAD

Για τα εντός ισολογισμού ανοίγματα η εκτίμηση της τράπεζας πρέπει να μην είναι μικρότερη από το τρέχον αναληφθέν ποσό μετά τον εντός ισολογισμό συμψηφισμό. Οι τράπεζες που χρησιμοποιούν την προχωρημένη μέθοδο πρέπει να έχουν διαδικασίες για την εκτίμηση των EAD για θέσεις εκτός ισολογισμού. Αυτές θα πρέπει να προσδιορίζουν τις εκτιμήσεις για της EAD για κάθε είδους άνοιγμα. Η εκτίμηση των EAD θα πρέπει να είναι η εκτίμηση των μακροχρόνιων σταθμισμένων μέσων EAD για παρόμοιες κατηγορίες ανοιγμάτων και δανειοληπτών για μια επαρκώς μεγάλη χρονική περίοδο αλλά με ένα περιθώριο συντηρητικότητας. Εάν υπάρχει θετική συσχέτιση μεταξύ της συχνότητας αθέτησης και του μεγέθους της EAD τότε η εκτίμηση της EAD πρέπει να περιέχει μεγαλύτερο περιθώριο συντηρητικότητας. Τα κριτήρια βάση των οποίων οι εκτιμήσεις των EAD παράγονται θα πρέπει να είναι εύλογα και διαισθητικά και να υποστηρίζονται από αξιόπιστη εσωτερική ανάλυση των τραπεζών. Εκτιμήσεις για

απαιτήσεις έναντι επιχειρήσεων, κρατών και τραπεζών πρέπει να βασίζονται κατ' ελάχιστο σε στοιχεία ενός πλήρους οικονομικού κύκλου και πάντως όχι σε περιόδους μικρότερες των 7 ετών. Αντίστοιχα για απαιτήσεις λιανικής η περίοδος πρέπει να είναι τουλάχιστον 5 έτη.

8) Ελάχιστες απαιτήσεις για να ληφθούν υπόψη εξασφαλίσεις και πιστωτικά παράγωγα

- i. Κανόνες για απαιτήσεις σε επιχειρήσεις, κράτη και τράπεζες όπου εσωτερικές εκτιμήσεις για την LGD έχουν χρησιμοποιηθεί και κανόνες για ανοίγματα λιανικής τραπεζικής.

#### Εξασφαλίσεις

Όταν μια τράπεζα χρησιμοποιεί τις δικές της εκτιμήσεις για την LGD τότε μπορεί να αντικατοπτρίσει τις μειώσεις λόγω των εξασφαλίσεων μέσω προσαρμογών στη PD ή στην LGD. Για ανοίγματα λιανικής τραπεζικής όταν υπάρχουν εξασφαλίσεις είτε για την υποστήριξη ατομικών ανοιγμάτων είτε για την υποστήριξη μιας δεξαμενής ανοιγμάτων μια τράπεζα μπορεί να αντικατοπτρίσει τις μειώσεις λόγω των εξασφαλίσεων μέσω προσαρμογών στη PD ή στην LGD με την προϋπόθεση ότι αυτό γίνεται με συνέπεια. Σε κάθε περίπτωση τόσο ο δανειολήπτης όσο και ο εγγυητής πρέπει να διαβαθμίζονται τόσο αρχικά αλλά και σε διαρκή βάση. Σε καμία περίπτωση η τράπεζα δεν επιτρέπεται να αντιστοιχίσει PD και LGD σε ένα άνοιγμα τέτοιο ώστε το προσαρμοσμένο βάρος κινδύνου να είναι μικρότερο σε σχέση με ένα απευθείας άνοιγμα προς τον εγγυητή. Κριτήρια ή διαδικασίες διαβάθμισης δεν επιτρέπεται να λαμβάνουν υπόψη πιθανές ευνοϊκές επιδράσεις μη τέλει συσχέτισης μεταξύ γεγονότων αθέτησης του δανειολήπτη και του εγγυητή για τον υπολογισμό του ελάχιστου αναγκαίου ελεγκτικού κεφαλαίου. Δεν υπάρχουν περιορισμοί στα είδη των επιτρεπόμενων εγγυητών. Τα κριτήρια τα οποία χρησιμοποιεί μια τράπεζα για να προσαρμόσει με βάση τις εξασφαλίσεις τα PD και LGD μιας απαίτησης πρέπει να είναι προκαθορισμένα και ξεκάθαρα και να λαμβάνουν υπόψη τους την δυνατότητα και τη διάθεση του εγγυητή να εξυπηρετήσει την εξασφάλιση.

## Πιστωτικά παράγωγα

Οι ελάχιστες απαιτήσεις για τις εξασφαλίσεις ισχύουν και για τα πιστωτικά παράγωγα. Επιπλέον το προϊόν στο οποίο η προστασία βασίζεται δεν πρέπει να διαφέρει από το υποκείμενο προϊόν, εκτός εάν ικανοποιούνται οι συνθήκες που περιγράφονται στην τυποποιημένη μέθοδο.

ii. Για τράπεζες που χρησιμοποιούν LGD εκτιμήσεις της βασικής IRB.

Για τράπεζες που χρησιμοποιούν LGD εκτιμήσεις της βασικής IRB ισχύουν τα παραπάνω με δύο εξαιρέσεις:

- Οι τράπεζες δεν επιτρέπεται να αναπροσαρμόζουν την LGD
- Το εύρος των επιτρεπόμενων εγγυητών περιορίζεται στους εγγυητές που επιτρέπονται και στην τυποποιημένη μέθοδο.

9) Απαιτήσεις για τον προσδιορισμό των PD και LGD (ή EL) για αγορασμένα γραμμάτια πληρωμών (qualifying purchased receivables)

Η τράπεζα πρέπει να ομαδοποιήσει τα γραμμάτια σε επαρκώς ομοιογενείς δεξαμενές έτσι ώστε ακριβής και συνεπείς εκτιμήσεις των PD και LGD (ή EL) για ζημίες λόγω αθέτησης υποχρέωσης και EL για ζημίες λόγω dilution. Σε γενικές γραμμές ο διαχωρισμός σε ομάδες θα πρέπει να αντικατοπτρίζει τις διαδικασίες εγγυήσεων του πωλητή και τη ανομοιογένεια των πελατών του. Επιπλέον οι μέθοδοι και τα δεδομένα που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των PD, LGD και EL πρέπει να είναι συμβατά με τα υπάρχοντα επίπεδα μέτρησης του κινδύνου για τις απαιτήσεις λιανικής.

### *VI. Επικύρωση των εσωτερικών εκτιμήσεων (Validation of internal estimates)*

Οι τράπεζες πρέπει να επιδείξουν στις εποπτικές αρχές ότι η διαδικασία εσωτερικής επικύρωσης επιτρέπει να προσδιορίσει την απόδοση του εσωτερικού συστήματος διαβάθμισης και εκτίμησης του κινδύνου με συνέπεια. Οι τράπεζες πρέπει να συγκρίνουν συχνά τα ποσοστά αθέτησης που πραγματοποιήθηκαν με την PD για κάθε βαθμό και να επιδεικνύουν ότι τα πραγματοποιηθέντα ποσοστά είναι εντός των

αναμενόμενων ορίων. Για τη σύγκριση αυτή θα πρέπει να χρησιμοποιούν ιστορικά στοιχεία με όσο το δυνατόν μεγαλύτερο χρονικό εύρος που να εμπεριέχουν έναν ή περισσότερους οικονομικούς κύκλους.

#### *VII. Ελάχιστες απαιτήσεις για αναγνώριση επιπλέον εξασφαλίσεων.*

Οι τράπεζες που χρησιμοποιούν την βασική IRB μέθοδο και δεν ικανοποιούν τις απαιτήσεις για να χρησιμοποιούν δικές τους εκτιμήσεις για τα LGD και EAD πρέπει να ικανοποιούν τις απαιτήσεις της τυποποιημένης μεθόδου για να μπορούν να χρησιμοποιούν εξασφαλίσεις. Πρέπει να ικανοποιούν επιπλέον ελάχιστες προδιαγραφές για να μπορούν να χρησιμοποιούν επιπλέον τύπους εξασφαλίσεων.

#### *VIII. Απαιτήσεις για την αναγνώριση της χρηματοοικονομικής μίσθωσης (leasing)*

Έχουμε δύο ειδών χρηματοοικονομικής μίσθωσης:

1. Χρηματοοικονομική μίσθωση που εκθέτει την τράπεζα σε κίνδυνο υπολειπόμενης αξίας (ο κίνδυνος πιθανής ζημίας από την πτώση της αντικειμενικής αξίας του εξοπλισμού σε επίπεδα χαμηλότερα από την εκτιμώμενη υπολειπόμενη αξία στην αρχή της χρηματοοικονομικής μίσθωσης). Σε αυτή την περίπτωση οι προεξοφλημένες πληρωμές της χρηματοοικονομικής μίσθωσης θα λαμβάνουν στάθμιση κινδύνου ανάλογη με την PD του μισθωτή και θα χρησιμοποιείται ανάλογα με την περίπτωση LGD των ελεγκτικών αρχών ή της τράπεζας. Επιπλέον η υπολειπόμενη αξία θα σταθμίζεται με 100%.
2. Χρηματοοικονομική μίσθωση που δεν εκθέτει την τράπεζα σε κίνδυνο υπολειπόμενης αξίας. Σε αυτή την περίπτωση οι μισθώσεις θα έχουν την ίδια αντιμετώπιση με εγγυημένες απαιτήσεις. Οι ελάχιστες απαιτήσεις για τις εγγυημένες απαιτήσεις πρέπει να ικανοποιούνται και επιπλέον:
  - Θα πρέπει να υπάρχει ένα αξιόπιστο σύστημα διαχείρισης του κινδύνου του μισθωτή σε σχέση με τη χρήση του μισθωμένου περιουσιακού στοιχείου.
  - Θα πρέπει να υπάρχει ένα ισχυρό νομικό πλαίσιο που να αποδεικνύει την κυριότητα της τράπεζας πάνω στο περιουσιακό στοιχείο.
  - Η διαφορά ανάμεσα στο ποσοστό απόσβεσης του περιουσιακού στοιχείου και το ποσοστό απαξίωσης που περιέχεται στις πληρωμές της μίσθωσης δεν

πρέπει να είναι τόσο μεγάλη που να υπερτονίζει την CRM που αντιστοιχίζεται στο περιουσιακό στοιχείο.

#### *ΙΧ. Υπολογισμός του ελεγκτικού κεφαλαίου για ανοίγματα σε μετοχικά κεφάλαια.*

Για να επιτραπεί σε μία τράπεζα να χρησιμοποιήσει εσωτερικά μοντέλα πρέπει να μπορεί να επιδείξει στις εποπτικές αρχές ότι ικανοποιεί ορισμένα ελάχιστα ποσοτικά και ποιοτικά κριτήρια τόσο αρχικά όσο και σε συνεχή βάση. Τα ελάχιστα ποσοτικά κριτήρια:

- i. Η κεφαλαιακή χρέωση είναι ίση με την ενδεχόμενη ζημία στο χαρτοφυλάκιο της τράπεζας που θα προκύψει από μια υποτιθέμενη ακαριαία διαταραχή ίση με το 99στο ποσοστιαίο σημείο της διαφοράς ανάμεσα στην 4-μηνιαία απόδοση και ενός κατάλληλου επιτοκίου χωρίς κίνδυνο που έχει υπολογιστεί με βάση δείγματος μεγάλης διάρκειας.
- ii. Οι εκτιμώμενες ζημίες θα πρέπει να είναι αντιστοιχούν σε αντίξοες κινήσεις της αγοράς σχετικές με το μακροχρόνιο προφίλ του χαρτοφυλακίου της τράπεζας.
- iii. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί οποιοδήποτε μοντέλο VaR με την προϋπόθεση το μοντέλο να μπορεί συλλάβει επαρκώς όλους τους κινδύνους που ενσωματώνονται στις αποδόσεις του μετοχικού κεφαλαίου συμπεριλαμβανομένου του γενικού κινδύνου αγοράς και του ειδικού κινδύνου.
- iv. Οι τράπεζες μπορούν να χρησιμοποιούν τεχνικές μοντέλων όπως ανάλυση ιστορικού σεναρίου.
- v. Οι τράπεζες πρέπει να χρησιμοποιούν εσωτερικά μοντέλα που να είναι κατάλληλα για το προφίλ επικινδυνότητας και πολυπλοκότητας του χαρτοφυλακίου τους.
- vi. Συνδιασπορές μπορούν να χρησιμοποιηθούν μετά από έγκριση από τις εποπτικές αρχές.
- vii. Αντιστοίχιση μεμονωμένων θέσεων σε δείκτες αγοράς και παράγοντες επικινδυνότητας πρέπει να είναι εύλογη, διαισθητική και ξεκάθαρη.



- viii. Μπορούν να χρησιμοποιηθούν μοντέλα ενός παράγοντα ή πολλών παραγόντων ανάλογα με τη φύση των θέσεων.
- ix. Οι εκτιμήσεις της μεταβλητότητας των αποδόσεων των επενδύσεων σε μετοχικά κεφάλαια πρέπει να ενσωματώνουν όλα τα σχετικά και σημαντικά διαθέσιμα δεδομένα, πληροφορίες και μεθόδους.
- x. Πρέπει να υπάρχει πρόγραμμα προσομοίωσης ακραίων (stress tests) καταστάσεων τα οποία κατ' ελάχιστο θα χρησιμοποιούνται για να δώσουν πληροφορίες σχετικά με τις επιπτώσεις γεγονότων πέρα από το επίπεδο εμπιστοσύνης που χρησιμοποιείται στα εσωτερικά μοντέλα.

Επιπλέον οι τράπεζες θα πρέπει:

- Να έχουν θεσπίσει πολιτικές διαδικασίες και ελέγχους σε σχέση με την ανάπτυξη και χρήση των εσωτερικών μοντέλων.
- Να έχουν ένα γερό σύστημα πιστοποίησης της ακρίβειας και της συνέπειας των μοντέλων τους.
- Να έχουν τεκμηριώσει επαρκώς το μοντέλο και τις διαδικασίες χρήσης του.

### **1.2.3. Το πλαίσιο για την τιτλοποίηση (securitisation)**

#### **1.2.3.1. Σκοπός και ορισμοί των συναλλαγών που καλύπτονται κάτω από το πλαίσιο για την τιτλοποίηση**

Οι τράπεζες πρέπει να εφαρμόζουν το πλαίσιο για την τιτλοποίηση για τον καθορισμό του ελεγκτικού κεφαλαίου για θέσεις που προκύπτουν από παραδοσιακή ή συνθετική τιτλοποίηση.

Η παραδοσιακή τιτλοποίηση είναι μια δομή όπου οι χρηματικές ροές από μια υποκείμενη δεξαμενή απαιτήσεων χρησιμοποιείται για να εξυπηρετήσει τουλάχιστον δυο διαφορετικές στρωματοποιημένες θέσεις κινδύνου ή μερίδες που αντικατοπτρίζουν διαφορετικούς βαθμούς πιστωτικού κινδύνου. Οι πληρωμές στους επενδυτές εξαρτώνται από την επίδοση των υποκείμενων ανοιγμάτων, σε αντίθεση του να προέρχονται από μια υποχρέωση της οντότητας στην οποία αρχικά «ανήκαν» αυτά τα ανοίγματα.

Η συνθετική τιτλοποίηση είναι μια δομή με τουλάχιστον δυο διαφορετικές στρωματοποιημένες θέσεις κινδύνου ή μερίδες που αντικατοπτρίζουν διαφορετικούς βαθμούς πιστωτικού κινδύνου όπου ο πιστωτικός κίνδυνος μιας υποκείμενης δεξαμενής ανοιγμάτων έχει μεταφερθεί, καθ' ολοκληρία ή μερικώς, μέσα από ένα χρηματοδοτούμενο ή μη-χρηματοδοτούμενο πιστωτικό παράγωγο ή εξασφαλίσεις που εξυπηρετούν στην αντιστάθμιση του πιστωτικού κινδύνου του χαρτοφυλακίου. Αντίστοιχα, ο πιθανός κίνδυνος του επενδυτή εξαρτάται από την απόδοση της υποκείμενης δεξαμενής.

### **1.2.3.2.Ορισμοί και γενική ορολογία**

#### *Originating bank*

Για τις ανάγκες του υπολογισμού του ελεγκτικού κεφαλαίου ορίζεται σαν Originating bank, «Τράπεζα Δημιουργός» η τράπεζα που ικανοποιεί μία από τις δυο παρακάτω προϋποθέσεις:

- Η τράπεζα δημιούργησε απευθείας ή εμμέσως τα υποκείμενα ανοίγματα που περιέχονται στην τιτλοποίηση.
- Η τράπεζα είναι ανάδοχος ενός asset-backed commercial paper ή παρόμοιου προγράμματος το οποίο αποκτά θέσεις από τρίτες οντότητες. Μια τράπεζα θα θεωρείται ανάδοχος εάν στην πραγματικότητα ή κατ' ουσία διαχειρίζεται ή παρέχει συνιστά το πρόγραμμα, προωθεί το προϊόν στην αγορά ή προσφέρει ενισχύσεις ρευστότητας και / ή πιστωτικές ενισχύσεις.

#### *Special purpose entity (SPE)*

Μια οντότητα ειδικού σκοπού (SPE), είναι μια εταιρεία, τραστ, ή άλλη οντότητα που έχει οργανωθεί για έναν ειδικό σκοπό. Οι δραστηριότητες της SPE είναι περιορισμένες σε αυτές που χρειάζονται για να επιτύχει αυτόν τον σκοπό. Η δομή της είναι ανεξάρτητη για να απομονώσει την SPE από τον πιστωτικό κίνδυνο του δημιουργού ή του πωλητή του ανοίγματος.

#### *Asset-backed commercial paper (ABCP) programme*

Ένα ABCP κατ' εξοχήν εκδίδει commercial paper με μέγιστη αρχική διάρκεια ένα έτος που υποστηρίζεται από περιουσιακά στοιχεία ή άλλες θέσεις που κρατούνται από μία οντότητα ειδικού σκοπού (SPE).

### *Clean-up Call*

Το Clean-up Call είναι μια επιλογή που επιτρέπει στις ομολογίες της τιτλοποίησης να ανακληθούν πριν όλες τα υποκείμενα ανοίγματα ή οι ομολογίες έχουν αποπληρωθεί. Στην περίπτωση της παραδοσιακής τιτλοποίησης, αυτό γενικά επιτυγχάνεται με την επαναγορά των υπολειπόμενων ομολογιών όταν η ισορροπία της δεξαμενής ή οι υφιστάμενες ομολογίες έχουν πέσει κάτω από ένα συγκεκριμένο επίπεδο. Στην περίπτωση της συνθετικής τιτλοποίησης το Clean-up Call μπορεί να πάρει τη μορφή μιας ρήτρας που εξαφανίζει την πιστωτική προστασία.

### **1.2.3.3. Επιχειρησιακές απαιτήσεις για την αναγνώριση της μείωσης του κινδύνου.**

#### *Παραδοσιακή τιτλοποίηση*

Μια Τράπεζα Δημιουργός μπορεί να εξαιρεί παραδοσιακά τιτλοποιημένες απαιτήσεις από τον υπολογισμό του ελεγκτικού κεφαλαίου μόνο εάν ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

1. Σημαντικός πιστωτικός κίνδυνος που συνδέεται με τις τιτλοποιημένες απαιτήσεις έχει μεταφερθεί σε τρίτα μέρη.
2. Δεν διατηρεί άμεσο ή έμμεσο έλεγχο πάνω στα μεταφερόμενα ανοίγματα. Τα περιουσιακά στοιχεία είναι νομικά απομονωμένα από την τράπεζα με τέτοιο τρόπο ώστε τα ανοίγματα έχουν τοποθετηθεί πέρα από την προσπέλαση της τράπεζας και των πιστωτών της ακόμη και σε περιπτώσεις πτώχευσης. Αυτές οι προϋποθέσεις πρέπει να υποστηρίζονται και από γνωμοδότηση ενός πιστοποιημένου νομικού συμβούλου.
3. Οι ομολογίες που εκδίδονται δεν είναι υποχρεώσεις της τράπεζας.

4. Ο φορέας είναι μια Special Purpose Entity (SPE) και αυτοί που κρατούν τα δικαιώματα της οντότητας έχουν το δικαίωμα να τα ενεχυριάσουν ή να τα ανταλλάξουν χωρίς περιορισμούς.
5. Όσον αφορά στα Clean-up Calls πρέπει να ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες:
  - Η εξάσκηση ενός Clean-up Call δεν πρέπει να είναι υποχρεωτική κατ' ουσία αλλά πρέπει να είναι στη διακριτική ευχέρεια της τράπεζας.
  - Το Clean-up Call δε πρέπει να είναι δομημένο έτσι ώστε να αποφεύγεται η επιβάρυνση με ζημίες σε πιστωτικές ενισχύσεις ή σε θέσεις που έχουν οι επενδυτές ή να είναι δομημένο έτσι ώστε να προσφέρει πιστωτική ενίσχυση.
  - Το Clean-up Call πρέπει να εξασκείται μόνο όταν 10% ή λιγότερο του αρχικού χαρτοφυλακίου ή ομολογίες υπολείπονται.
6. Η τιτλοποίηση δεν περιέχει καμία ρήτρα που να μην ι) απαιτεί από την τράπεζα να μεταβάλει συστηματικά τα υποκείμενα ανοίγματα έτσι ώστε ο σταθμισμένος κίνδυνος του χαρτοφυλακίου να βελτιώνεται εκτός εάν αυτό επιτυγχάνεται πουλώντας περιουσιακά στοιχεία σε ανεξάρτητους και μη σχετιζόμενους τρίτους σε τιμές αγοράς, ιι) επιτρέπει την αύξηση σε μια διατηρημένη θέση κάλυψης πρώτης ζημίας ή πιστωτικής ενίσχυσης από την τράπεζα μετά την έναρξη της τιτλοποίησης, ή ιιι) αυξάνει την πληρωτέα απόδοση σε άλλους εκτός της τράπεζας για κάλυψη της διάβρωσης της πιστωτικής ποιότητας.

#### *Συνθετική τιτλοποίηση*

Για τα συνθετικά τιτλοποιημένα ανοίγματα η χρήση μεθόδων CRM για μείωση του κινδύνου των υποκείμενων ανοίγματα μπορεί να αναγνωριστεί για τον υπολογισμό του ελεγκτικού κεφαλαίου μόνο εάν ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες:

1. Οι CRM πρέπει να είναι συμβατές με τις απαιτήσεις που έχουν τεθεί για την τυποποιημένη μέθοδο.
2. Οι επιτρεπόμενες εξασφαλίσεις περιορίζονται σε αυτές που επιτρέπονται στην τυποποιημένη μέθοδο. Επιτρεπόμενες εξασφαλίσεις που έχουν ενεχυριαστεί από την SPE αναγνωρίζονται.
3. Οι επιτρεπόμενοι εγγυητές είναι αυτοί που επιτρέπονται στην τυποποιημένη μέθοδο.

4. Σημαντικός πιστωτικός κίνδυνος που συνδέεται με τις τιτλοποιημένες απαιτήσεις έχει μεταφερθεί σε τρίτα μέρη.
5. Τα εργαλεία που χρησιμοποιούνται για τη μεταφορά του κινδύνου δεν πρέπει να περιέχουν όρους ή προϋποθέσεις που περιορίζουν το ποσό του πιστωτικού κινδύνου που μεταφέρεται, τέτοιους σαν αυτούς που παρουσιάζονται στη συνέχεια
  - Ρήτρες που περιορίζουν σημαντικά την πιστωτική προστασία ή την μεταφορά του πιστωτικού κινδύνου.
  - Ρήτρες που απαιτούν από την τράπεζα να αλλάξει τις υποκείμενες απαιτήσεις για να βελτιώσει την πιστωτική ποιότητα της δεξαμενής.
  - Ρήτρες που αυξάνουν το κόστος της τράπεζας για πιστωτική προστασία σε ενδεχόμενη διάβρωση της ποιότητας της δεξαμενής.
  - Ρήτρες που αυξάνουν την απόδοση που αποδίδεται σε τρίτους για να αντισταθμιστεί ενδεχόμενη διάβρωση της ποιότητας της δεξαμενής.
  - Ρήτρες που εξασφαλίζουν την αύξηση σε μια διατηρημένη θέση κάλυψης πρώτης ζημίας ή πιστωτικής ενίσχυσης από την τράπεζα μετά την έναρξη της τιτλοποίησης
6. Πρέπει να υπάρχει γνωμοδότηση ενός πιστοποιημένου νομικού συμβούλου που να επιβεβαιώνει την δυνατότητα επιβολής των συμβολαίων σε όλες τις σχετικές δικαιοδοσίες.
7. Τα Clean-up Calls πρέπει να ικανοποιούν τις ίδιες συνθήκες με την παραδοσιακή τιτλοποίηση με μόνη διαφορά τη δυνατότητα εξάσκησης μόνο στην περίπτωση που 10% ή λιγότερο από την αρχική αξία του χαρτοφυλάκιο αναφοράς υπολείπεται.

#### **1.2.3.4.Μεταχείριση των θέσεων τιτλοποίησης**

##### **1.2.3.4.1. Υπολογισμός των κεφαλαιακών απαιτήσεων**

Οι τράπεζες πρέπει να διατηρούν ελεγκτικό κεφάλαιο για όλες της θέσεις τους σε τιτλοποίηση, συμπεριλαμβανομένων αυτών που προκύπτουν από την πρόβλεψη των CRM σε μια συναλλαγή τιτλοποίησης, επενδύσεις σε ομολογίες που υποστηρίζονται από περιουσιακά στοιχεία, διατήρησης μίας κατώτερης μερίδας και επέκταση μιας ευκολίας

ρευστότητας η πιστωτικής ενίσχυσης. Θέσεις τιτλοποίησης που ξαναγοράστηκαν ισοδυναμούν με διατηρημένες θέσεις.

Όταν μια τράπεζα πρέπει να αφαιρέσει μια θέση τιτλοποίησης από το ελεγκτικό κεφάλαιο, η αφαίρεση θα πρέπει να είναι κατά 50% από το Tier1 και 50% από το Tier2. Επιπλέον οι τράπεζες πρέπει να αφαιρούν από το Tier1 οποιαδήποτε αύξηση κεφαλαίου που προκύπτει από μια συναλλαγή τιτλοποίησης.

#### **1.2.3.4.2. Επιχειρησιακές απαιτήσεις για τη χρήση εξωτερικών αξιολογήσεων πιστωτικού κινδύνου.**

Τα επόμενα κριτήρια για τη χρήση εξωτερικών αξιολογήσεων πιστωτικού κινδύνου αφορούν τόσο την τυποποιημένη όσο και την IRB μέθοδο:

1. Για να μπορεί να χρησιμοποιηθεί για στάθμιση κινδύνου μια εξωτερική αξιολόγηση κινδύνου θα πρέπει να έχει λάβει υπόψη της και να αντανακλά το συνολικό ποσό του πιστωτικού κινδύνου που έχει η τράπεζα σε σχέση με όλες τις πληρωμές που της οφείλονται.
2. Η εξωτερική αξιολόγηση θα πρέπει να προέρχεται από ECAI εγκεκριμένο από την εθνική ελεγκτική αρχή (δες § 2.2.1.1 Εξωτερικές αξιολογήσεις πιστοληπτικής ικανότητας) και να είναι δημοσιοποιημένη.
3. Τα εγκεκριμένα ECAIs θα πρέπει να έχουν επιδείξει την εξειδίκευση τους στην εκτίμηση τιτλοποίησης.
4. Η τράπεζα θα πρέπει να χρησιμοποιεί εξωτερικές εκτιμήσεις πιστωτικού κινδύνου με τον ίδιο τρόπο σε όλες τις θέσεις τιτλοποίησης του ίδιου τύπου.
5. Όταν υπάρχει CRM και προσφέρεται απευθείας σε μία SPE από ένα εγκεκριμένο εγγυητή και αυτό είναι ενσωματωμένο σε μια εξωτερικές εκτιμήσεις τότε αυτή η εκτίμηση θα πρέπει να χρησιμοποιείται.
6. Εάν η CRM δεν προσφέρεται από μια SPE αλλά αντί αυτού εφαρμόζεται σε μια συγκεκριμένη θέση τιτλοποίησης μέσα σε μια δεδομένη δομή, η τράπεζα θα πρέπει να χειριστεί τη θέση αυτή σαν μη διαβαθμισμένη και μετά να λάβει υπόψη της τη CRM.

#### **1.2.3.4.3. Τυποποιημένη μέθοδος**

Οι τράπεζες που χρησιμοποιούν την τυποποιημένη μέθοδο για το τύπο των υποκείμενων ανοιγμάτων πρέπει να χρησιμοποιήσουν την τυποποιημένη μέθοδο και στην τιτλοποίηση.

Η στάθμιση κινδύνου μιας θέσης σε τιτλοποίηση υπολογίζεται πολλαπλασιάζοντας το ποσό της θέσης με την κατάλληλη στάθμιση κινδύνου που καθορίζεται σε σχέση με συγκεκριμένους πίνακες. Για θέσεις εκτός ισολογισμού οι τράπεζες πρέπει πρώτα να εφαρμόζουν έναν CCF. Για θέσεις με μακροχρόνια βαθμολογία B+ και κάτω και βραχυχρόνια βαθμολογία άλλη από A-1/P-1, A-2/P-2, A-3/P-3 θα πρέπει οι θέσεις να αφαιρούνται από το κεφάλαιο.

Οι μη διαβαθμισμένες θέσεις θα πρέπει να αφαιρούνται από το κεφάλαιο εκτός εάν:

1. Η θέση είναι οι ανώτερη στην τιτλοποίηση.
2. Η θέση βρίσκεται στη δεύτερη θέση ζημίας ή σε καλλίτερη σε ABCP προγράμματα και ικανοποιούνται συγκεκριμένα κριτήρια.
3. Η θέση είναι εγκεκριμένη πιστωτική ευκολία.

#### **1.2.3.4.4. IRB μέθοδος**

Οι τράπεζες που έχουν λάβει έγκριση να χρησιμοποιούν την IRB μέθοδο για τον τύπο των υποκείμενων απαιτήσεων που έχουν τιτλοποιηθεί πρέπει να χρησιμοποιήσουν για την τιτλοποίηση.

Εάν μια τράπεζα χρησιμοποιεί την τυποποιημένη μέθοδο για κάποια από τα είδη των υποκείμενων ανοιγμάτων και την IRB για κάποια άλλα είδη θα πρέπει γενικά να χρησιμοποιεί τη μέθοδο που χρησιμοποιείται στο μεγαλύτερο ποσοστό μέσα στη δεξαμενή. Η τράπεζα θα πρέπει να συμβουλευεται τις εποπτικές αρχές οι οποίες για να διασφαλίσουν κατάλληλα επίπεδα κεφαλαιακής επάρκειας μπορεί να αποφασίσουν διαφορετική μεταχείριση.

Όταν δεν υπάρχει συγκεκριμένη IRB μεταχείριση για τα υποκείμενα ανοίγματα οι τράπεζες δημιουργοί θα πρέπει να χρησιμοποιούν την τυποποιημένη μέθοδο για θέσης τιτλοποίησης και οι τράπεζες επενδυτές θα πρέπει να χρησιμοποιούν την Ratings-Based Approach (RBA).

Η RBA πρέπει να εφαρμόζεται όταν οι θέσεις έχουν διαβαθμιστεί ή μια διαβάθμιση για αυτές μπορεί να συναχθεί. Όταν δεν υπάρχει διαβάθμιση τότε είτε η Supervisory Formula (SF) είτε η Internal Assessment Approach (IAA) πρέπει να χρησιμοποιηθεί. Η IAA επιτρέπεται μόνο σε θέσεις που οι τράπεζες έχουν σε ABCP προγράμματα. Αυτές οι θέσεις πρέπει να ικανοποιούν συγκεκριμένα κριτήρια. Για πιστωτικές ευκολίες για τις οποίες καμία από αυτές τις μεθόδους δε μπορεί να χρησιμοποιηθεί υπάρχει άλλη μέθοδος. Επιπλέον, ειδική μεταχείριση έχουν εγκεκριμένες ευκολίες χρηματικών προκαταβολών. Όλες οι άλλες θέσεις πρέπει να αφαιρεθούν από το κεφάλαιο.

Για μία τράπεζα που χρησιμοποιεί την IRB μέθοδο για την τιτλοποίηση το μέγιστο ελεγκτικό κεφάλαιο για τις θέσεις σε τιτλοποίηση είναι ίσο με το κεφάλαιο που αντιστοιχεί στην IRB μέθοδο για τα υποκείμενα ανοίγματα.

#### *RBA*

Με βάση την RBA τα σταθμισμένα για κίνδυνο περιουσιακά στοιχεία καθορίζονται πολλαπλασιάζοντας τη θέση με έναν κατάλληλο συντελεστή που δίδεται σε πίνακες. Η στάθμιση για τον κίνδυνο εξαρτάται από i) από την εξωτερική διαβάθμιση ή μια διαθέσιμη επαγόμενη, ii) από το εάν η διαβάθμιση είναι βραχυχρόνια ή μακροχρόνια, iii) από τη granularity της υποκείμενης δεξαμενής και iv) από την ανωτερότητα της θέσης.

#### *IAA*

Με βάση την IAA η τράπεζα θα πρέπει να χρησιμοποιήσει τις δικές της εσωτερικές αξιολογήσεις για την πιστωτική ποιότητα των θέσεων σε ABCP προγράμματα με την προϋπόθεση ότι η διαδικασία αξιολόγησης ικανοποιεί ορισμένα κριτήρια. Στη συνέχεια οι εσωτερικές εκτιμήσεις αντιστοιχίζονται σε βαθμίδες ενός ECAI και αυτές χρησιμοποιούνται για να καθορίσουν την στάθμιση κινδύνου με βάση την RBA.



SF

Με βάση την SF τα σταθμισμένα για κίνδυνο περιουσιακά στοιχεία καθορίζονται πολλαπλασιάζοντας κεφαλαιακή χρέωση με 12.5. Με βάση την SF η κεφαλαιακή χρέωση εξαρτάται από δεδομένα που παρέχονται από την τράπεζα: την IRB κεφαλαιακή χρέωση εάν οι υποκείμενες απαιτήσεις δεν είχαν τιλοποιηθεί ( $K_{IRB}$ ), το επίπεδο πιστωτικής ισχυροποίησης του μεριδίου (L), και την πυκνότητα (T), το πλήθος των απαιτήσεων της δεξαμενής (N), και τη σταθμισμένη LGD της δεξαμενής.

### 1.3. Θεσμικό πλαίσιο και λειτουργικός κίνδυνος (operational risk)

Το θεσμικό πλαίσιο προβλέπει τη χρήση τριών μεθόδων για τον υπολογισμό του ελεγκτικού κεφαλαίου για τον λειτουργικό κίνδυνο:

- Basic Indicator Approach (BIA)
- Standardised Approach (SA)
- Advanced Measurement Approach (AMA)

#### 1.3.1. BIA μέθοδος

Οι τράπεζες που χρησιμοποιούν την BIA πρέπει να διατηρούν κεφάλαια για την κάλυψη από τον λειτουργικό κίνδυνο ίσο με το μέσο όρο των τριών τελευταίων ετών ενός σταθερού ποσοστού του θετικών ετήσιων μικτών εσόδων. Όταν το ετήσιο μικτό εισόδημα είναι μικρότερο ή ίσο του μηδενός πρέπει να αφαιρεθεί τόσο από τον αριθμητή όσο και από τον παρανομαστή.

$$K_{BIA} = [\sum (GI_{1...n} \times \alpha)] / n$$

$K_{BIA}$  = Η κεφαλαιακή χρέωση με βάση την BIA

GI = Τα μικτά εισοδήματα, όταν είναι θετικά, των προηγούμενων τριών ετών

n = Το πλήθος των προηγούμενων ετών για τα οποία τα GI ήταν θετικά

$\alpha=15\%$ , το οποίο έχει οριστεί από την επιτροπή

Σαν μικτά εισοδήματα θεωρούνται τα συμψηφισμένα έσοδα από τόκους συν τα συμψηφισμένα έσοδα που δεν προέρχονται από τόκους. Αυτό το μέτρο πρέπει i) να περιέχει οποιεσδήποτε προβλέψεις, ii) να περιέχει τις λειτουργικές δαπάνες iii) τα πραγματοποιημένα έσοδα / έξοδα από την πώληση ομολογιών του τραπεζικού χαρτοφυλακίου εξαιρούνται, iv) μη φυσιολογικά ή μη κανονικά στοιχεία όπως επίσης εισόδημα από ασφάλειες εξαιρείται.

### 1.3.2. Standardised Approach (SA)

Στην SA οι δραστηριότητες της τράπεζας χωρίζονται σε οχτώ κατηγορίες:

1. Corporate finance
2. Trading & sales
3. Retail banking
4. Commercial banking
5. Payment & settlement
6. Agency services
7. Asset management
8. Retail brokerage

Για κάθε κατηγορία το μικτό εισόδημα είναι ένας δείκτης που χρησιμοποιείται σαν προσέγγιση για την κλίμακα της επιχειρηματικής λειτουργίας και άρα της πιθανής κλίμακας του λειτουργικού κινδύνου της κατηγορίας. Η κεφαλαιακή χρέωση για κάθε κατηγορία υπολογίζεται πολλαπλασιάζοντας το μικτό εισόδημα με ένα παράγοντα (βήτα) που έχει αντιστοιχιστεί σε αυτήν την κατηγορία.

Η συνολική κεφαλαιακή χρέωση υπολογίζεται σαν ο τριετής μέσος όρος του απλού αθροίσματος του εποπτικού κεφαλαίου όλων των κατηγοριών για κάθε έτος. Σε οποιοδήποτε έτος αρνητικές κεφαλαιακές χρεώσεις σε οποιαδήποτε κατηγορία μπορούν να μειώσουν θετικές κεφαλαιακές χρεώσεις σε άλλες κατηγορίες χωρίς περιορισμούς. Όταν όμως η συνολική κεφαλαιακή χρέωση για ένα έτος είναι αρνητική τότε η συνολική κεφαλαιακή χρέωση για αυτό το έτος μηδενίζεται.

$$K_{TSA} = \left\{ \sum_{years 1-3} \max[\sum (GI_{1-8} \times \beta_{1-8})] \right\} / 3$$

$K_{TSA}$  = Η κεφαλαιακή χρέωση με βάση την SA

$GI_{1-8}$  = Τα μικτά εισοδήματα ενός έτους για κάθε μια κατηγορία

$\beta_{1-8}$  = Ένα σταθερό ποσοστό, καθορισμένο από την επιτροπή, για κάθε κατηγορία.

$\alpha$  = 15%, το οποίο έχει οριστεί από την επιτροπή

Κατηγορία	Παράγοντας βήτα
Corporate finance	18%
Trading & sales	18%
Retail banking	12%
Commercial banking	15%
Payment & settlement	18%
Agency services	15%
Asset management	12%
Retail brokerage	12%

**Πίνακας 2-2 Παράγοντας βήτα ανά κατηγορία δραστηριότητας**

Οι εθνικές εποπτικές αρχές μπορούν να επιλέξουν να επιτρέψουν στις τράπεζες να χρησιμοποιήσουν την Alternative Standardised Approach (ASA) με την προϋπόθεση ότι έχουν αποδείξει ότι η ASA προσφέρει μια βελτιωμένη βάση. Με βάση την ASA ο τρόπος κεφαλαιακής χρέωσης είναι ο ίδιος σε όλες τις κατηγορίες εκτός των retail και commercial banking. Για αυτές τις κατηγορίες τα δάνεια και οι προκαταβολές, πολλαπλασιασμένα με μια σταθερά  $m$ , αντικαθιστούν το μικτό εισόδημα.

$$K_{RB} = \beta_{RB} \times m \times LA_{RB}$$

$K_{RB}$  = Η κεφαλαιακή χρέωση με βάση την ASA για το retail banking

$\beta_{RB}$  = το βήτα για το retail banking

$LA_{RB}=0$  τριετής μέσος όρος του συνόλου των δανείων και των προκαταβολών για το retail banking

$m=0.035$

Επίσης στην ASA οι τράπεζες μπορούν να αθροίσουν τα δάνεια και τις προκαταβολές των δυο κατηγοριών και να χρησιμοποιήσουν σαν βήτα το 15%. Αντίστοιχα εάν δε μπορούν να διαχωρίσουν τις υπόλοιπες έξι κατηγορίες μπορούν να τις αθροίσουν χρησιμοποιώντας σαν βήτα το 18%.

### 1.3.2.1.Κριτήρια παροχής δικαιώματος χρήσης της Standardised Approach

Για να μπορεί μια τράπεζα να χρησιμοποιήσει την SA θα πρέπει να ικανοποιεί τα παρακάτω γενικά κριτήρια:

- Το συμβούλιο των διευθυντών και η ανώτατη διοίκηση είναι ενεργά εμπλεκόμενοι με την επίβλεψη του πλαισίου διαχείρισης του λειτουργικού κινδύνου.
- Η τράπεζα έχει ένα σύστημα διαχείρισης του λειτουργικού κινδύνου που είναι ορθό στη σύλληψη και έχει υλοποιηθεί με ακεραιότητα.
- Έχει επαρκείς πόρους στη χρήση της μεθόδου στις κύριες κατηγορίες όπως επίσης στις περιοχές ελέγχου και επίβλεψης.

Οι τράπεζες θα πρέπει να έχουν αναπτύξει συγκεκριμένες πολιτικές και να έχουν καταγράψει κριτήρια για την αντιστοίχιση του μικτού εισοδήματος στις τρέχουσες κατηγορίες της SA. Τα κριτήρια αυτά θα πρέπει να ελέγχονται και να προσαρμόζονται σε κάθε αλλαγή ή προσθήκη επιχειρησιακής λειτουργίας. Τα κριτήρια αυτά θα πρέπει να βασίζονται πάνω στις αρχές αντιστοίχισης όπως αυτές περιγράφονται στο παράρτημα 6 του κειμένου “International convergence of capital measurement and capital standards” (A revised framework June 2004) της επιτροπής.

Επιπλέον οι διεθνώς ενεργές τράπεζες που θέλουν να χρησιμοποιήσουν την SA θα πρέπει να ικανοποιούν τα παρακάτω ποιοτικά κριτήρια:

- Η τράπεζα πρέπει να έχει ένα σύστημα διαχείρισης του λειτουργικού κινδύνου με καθαρές αρμοδιότητες που να έχουν εκχωρηθεί σε μια μονάδα διαχείρισης του λειτουργικού κινδύνου.
- Σαν μέρος του εσωτερικού συστήματος αξιολόγησης του λειτουργικού κινδύνου, η τράπεζα πρέπει συστηματικά να παρακολουθεί σχετικά δεδομένα λειτουργικού κινδύνου συμπεριλαμβανομένων σημαντικών ζημιών.
- Πρέπει να υπάρχει συχνή αναφορά των λειτουργικών κινδύνων, συμπεριλαμβανομένων σημαντικών ζημιών, στην διεύθυνση και στην ανώτατη διοίκηση.
- Το σύστημα διαχείρισης του λειτουργικού κινδύνου πρέπει να είναι καλά τεκμηριωμένο και να υπάρχουν διαδικασίες διασφάλισης της λειτουργίας του με βάση τις τεκμηριωμένες διαδικασίες.
- Τόσο η διαδικασία διαχείρισης του λειτουργικού κινδύνου όσο και το σύστημα εκτίμησης πρέπει να υπόκεινται σε επαλήθευση και συχνή ανεξάρτητη επιθεώρηση.
- Το σύστημα εκτίμησης του λειτουργικού κινδύνου πρέπει να υπόκειται σε τακτικούς ελέγχους από εξωτερικούς ελεγκτές και / ή τις εποπτικές αρχές.

### **1.3.3. Advanced Measurement Approach (AMA)**

Με βάση την AMA το ελεγκτικό κεφάλαιο θα είναι ίσο με το μέτρο που θα παράγεται από το εσωτερικό σύστημα μέτρησης λειτουργικού κινδύνου της τράπεζας χρησιμοποιώντας κάποια συγκεκριμένα ποιοτικά και ποσοτικά κριτήρια<sup>20</sup>. Οι εποπτικές αρχές μπορούν να επιτρέψουν την ενσωμάτωση αιτιολογημένων εκτιμήσεων ωφελειών λόγω διαφοροποίησης σε επίπεδο ομίλου ή και σε επίπεδο θυγατρικής.

#### **1.3.3.1.Κριτήρια παροχής δικαιώματος χρήσης της Advanced Measurement Approach**

Για να μπορεί μια τράπεζα να χρησιμοποιήσει την AMA θα πρέπει να ικανοποιεί τα γενικά και ποιοτικά κριτήρια που αναφέρονται και στην SA.

---

<sup>20</sup> Το μοντέλο θα πρέπει να υπολογίζει τον κίνδυνο που αντιστοιχεί για ένα έτος και σε διάστημα εμπιστοσύνης 99,9%.

Το σύστημα θα πρέπει να εκτιμά μη αναμενόμενες ζημιές που βασίζονται στην συνδυασμένη χρήση εσωτερικών και εξωτερικών δεδομένων, αναλύσεις σεναρίου και ειδικών για ανά τράπεζα επιχειρησιακών και ελεγκτικών παραγόντων.

Επιπλέον των γενικών και ποιοτικών κριτηρίων η τράπεζα θα πρέπει να ικανοποιεί και τα παρακάτω ποσοτικά κριτήρια:

1. Οποιοδήποτε εσωτερικό σύστημα μέτρησης του λειτουργικού κινδύνου πρέπει να είναι συνεπές με το πεδίο του λειτουργικού κινδύνου όπως αυτό έχει οριστεί από την επιτροπή και τα είδη των ζημιών όπως ορίζονται στο παράρτημα 7 του κειμένου “International convergence of capital measurement and capital standards” (A revised framework June 2004):
  - i. Internal fraud
  - ii. External fraud
  - iii. Employment practices and workplace safety
  - iv. Clients, products & business practices
  - v. Damage to physical assets
  - vi. Business disruption and system failures
  - vii. Execution, delivery & process management
2. Οι εποπτικές αρχές θα απαιτήσουν από την τράπεζα να υπολογίσει το ελεγκτικό της κεφάλαιο σαν το άθροισμα των αναμενόμενων ζημιών (EL) και των μη αναμενόμενων ζημιών (UL), εκτός εάν η τράπεζα μπορεί να αποδείξει ότι αντιμετωπίζει ικανοποιητικά το EL στις εσωτερικές επιχειρησιακές πρακτικές της. Δηλαδή, για να βασιστεί το ελάχιστο ελεγκτικό κεφάλαιο μόνο στις UL πρέπει η τράπεζα να αποδείξει ότι έχει μετρήσει με ακρίβεια τις EL και έχει κρατήσει της ανάλογες προβλέψεις.
3. το σύστημα μέτρησης του κινδύνου θα πρέπει να συλλαμβάνει επαρκώς τους κύριους παράγοντες του λειτουργικού κινδύνου που επηρεάζουν την ουρά των εκτιμήσεων της ζημίας.
4. Τα μέτρα για εκτιμήσεις των διαφορετικών λειτουργικών κινδύνων πρέπει να προστίθενται για τον υπολογισμό του ελεγκτικού κεφαλαίου. Όμως στις τράπεζες μπορεί να επιτραπεί η χρήση εσωτερικώς καθορισμένων συνδιασπορών στις λειτουργικές ζημιές ανάμεσα σε ξεχωριστές εκτιμήσεις λειτουργικών ζημιών, με

την προϋπόθεση ότι η τράπεζα μπορεί να επιδείξει ότι τα συστήματα της που υπολογίζουν τις συνδιασπορές είναι σωστά έχουν υλοποιηθεί με ακεραιότητα και λαμβάνουν υπόψη τους την αβεβαιότητα που περιβάλλει οποιαδήποτε τέτοια εκτίμηση. Η τράπεζα πρέπει να επιβεβαιώνει τις υποθέσεις της για τις συνδιασπορές χρησιμοποιώντας κατάλληλες ποσοτικές και ποιοτικές τεχνικές.

5. Οποιοδήποτε σύστημα μέτρησης του λειτουργικού κινδύνου θα πρέπει να έχει τα παρακάτω βασικά χαρακτηριστικά:
  - i. Internal data
  - ii. External data
  - iii. Scenario analysis
  - iv. Business environment and internal control factors
6. Η τράπεζα πρέπει να έχει μια αξιόπιστη, καλώς τεκμηριωμένη και εξακριβώσιμη προσέγγιση για να σταθμίζει αυτά τα βασικά στοιχεία στο συνολικό σύστημα μέτρησης του λειτουργικού κινδύνου.

### 1.3.3.2.Μείωση του κινδύνου

Όταν μια τράπεζα χρησιμοποιεί την AMA μπορεί να αναγνωρίσει τις μειώσεις από τον λειτουργικό κίνδυνο που προκύπτουν από την χρήση ασφάλειας. Η ελάφρυνση θα περιορίζεται στο 20% του συνολικού ελεγκτικού κεφαλαίου που υπολογίζεται με βάση την AMA.

Η δυνατότητα της τράπεζας να αναγνωρίσει μείωση του λειτουργικού κινδύνου θα εξαρτάται από τα παρακάτω κριτήρια:

- Ο προμηθευτής της ασφάλειας έχει κατ' ελάχιστο βαθμολογηθεί με A για τη δυνατότητα πληρωμής απαιτήσεων.
- Η αρχική ασφάλεια θα πρέπει να έχει ισχύ κατ' ελάχιστο ετήσια. Για ασφάλειες με υπολειπόμενη διάρκεια μικρότερη του ενός έτους, η τράπεζα πρέπει να κάνει τα κατάλληλα haircuts που να αντανakλούν τον υπολειπόμενο χρόνο με όριο το 100% haircut για ασφάλειες με υπολειπόμενη διάρκεια μικρότερη των 90 ημερών.
- Η ασφάλεια έχει 90 ημέρες σαν ελάχιστη προθεσμία ειδοποίησης ακύρωσης.

- Η ασφάλεια δεν έχει εξαιρέσεις ή περιορισμούς που ενεργοποιούνται από εποπτικές πράξεις ή, στην περίπτωση μιας χρεοκοπημένης τράπεζας, που να αποκλείουν την τράπεζα, που παίρνει την κατοχή ή ρευστοποιεί από το να ανακτήσει τις ζημιές ή τα έξοδα που έκανε η τράπεζα, εκτός της περίπτωσης τα γεγονότα αυτά να έγιναν μετά την έναρξη της διαδικασίας κατοχής ή ρευστοποίησης, με δεδομένο ότι η ασφάλεια μπορεί να εξαιρέσει πρόστιμα, ποινές, ή ζημιές που προέκυψαν από εποπτικές ενέργειες.
- Οι υπολογισμοί μείωσης του κινδύνου πρέπει να αντικατοπτρίζουν την ασφαλιστική κάλυψη της τράπεζας με τρόπο που να είναι διάφανος στη σχέση του και στην συνέπεια του με την πραγματική πιθανότητα και συνέπεια της ζημίας που χρησιμοποιείται στο γενικό προσδιορισμό του λειτουργικού κινδύνου.
- Η ασφάλεια προσφέρεται από τρίτη οντότητα.
- Το πλαίσιο αναγνώρισης ασφάλειας είναι καλώς αιτιολογημένο και τεκμηριωμένο.
- Η τράπεζα δημοσιοποιεί μια περιγραφή της χρήσης της σε ασφάλειες για τους σκοπούς της ελάφρυνσης από τον λειτουργικό κίνδυνο.

Επίσης η μεθοδολογία της τράπεζας για την αναγνώριση της μείωσης του λειτουργικού κινδύνου με τη χρήση ασφάλειας πρέπει να συλλαμβάνει τα παρακάτω στοιχεία μέσω haircuts στο ποσό που της ασφάλειας που αναγνωρίζει:

- Τον υπολειπόμενο χρόνο εάν αυτός είναι μικρότερος του έτους.
- Τους όρους ακύρωσης της ασφάλειας.
- Την αβεβαιότητα των πληρωμών καθώς επίσης και πιθανές ανισορροπίες στην κάλυψη των ασφαλειών.



#### 1.3.4. Μερική χρήση

Μία τράπεζα θα μπορεί να χρησιμοποιεί την AMA σε κάποια κομμάτια της λειτουργίας της και την BIA ή την SA για το υπόλοιπο εφόσον ικανοποιούνται τα παρακάτω κριτήρια:

- Όλοι οι λειτουργικοί κίνδυνοι υπολογίζονται
- Η τράπεζα εκπληρώνει τις προϋποθέσεις της AMA για τα κομμάτια που υπολογίζονται με αυτήν και τις προϋποθέσεις των άλλων μεθόδων για τα κομμάτια που υπολογίζονται από αυτές.
- Την ημέρα την υλοποίησης της AMA ένα σημαντικό κομμάτι του λειτουργικού κινδύνου της τράπεζας υπολογίζεται από την AMA.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΔΑΛΙΑ

## 2<sup>ο</sup> Κεφάλαιο

### **Value at Risk - Μέτρηση του κινδύνου αγοράς**

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΔΑΛΙΑ

## Περιεχόμενα

2.	VaR - Μέτρηση του κινδύνου αγοράς .....	79
2.1.	Ορισμός του VaR.....	79
2.2.	VaR χαρτοφυλακίου.....	81
2.3.	Εργαλεία VaR χαρτοφυλακίου.....	82
2.4.	Υπολογισμός VaR με χρήση κανονικής κατανομής .....	84
2.5.	VaR διαφορετικών χρονικών περιόδων .....	88
2.6.	Αντιστοίχιση (mapping) σε παράγοντες κινδύνου .....	90
2.7.	Μέθοδοι υπολογισμού VaR .....	93
2.7.1.	Μέθοδος πίνακα διασπορών - συνδιασπορών (Variance - Covariance matrix method) .....	93
2.7.1.1.	Μέθοδος Delta Normal .....	95
2.7.1.1.1.	Χαρτοφυλάκια σταθερού εισοδήματος.....	96
2.7.1.1.2.	Γραμμικά παράγωγα .....	97
2.7.1.1.3.	Δικαιώματα (Options).....	98
2.7.1.1.4.	Χαρτοφυλάκια μετοχών .....	98
2.7.1.2.	Μέθοδοι Delta – Gamma .....	99
2.7.1.2.1.	Μέθοδος Delta – Gamma Normal.....	99
2.7.1.2.2.	Wilson’s Delta – Gamma μέθοδος.....	100
2.7.1.2.3.	Μέθοδος Delta – Gamma με διόρθωση ροπών .....	101
2.7.1.3.	Προσαρμογή για παχιές ουρές .....	101
2.7.1.4.	Υπολογισμός του $\Sigma$ .....	102
2.7.1.4.1.	Συλλογή των απαραίτητων ιστορικών στοιχείων.....	102
2.7.1.4.2.	Επεξεργασία των ιστορικών στοιχείων.....	104
2.7.1.4.3.	Κινητοί μέσοι.....	105
2.7.1.4.4.	GARCH εκτιμήσεις.....	105
2.7.1.4.5.	Εκθετικά σταθμισμένοι κινητοί μέσοι (Exponentially Weighted Moving Average) .....	106
2.7.1.4.6.	Υπονοούμενες διασπορές και συνδιασπορές (Implied Volatilities and Correlations) .....	107
2.7.2.	Ιστορική προσομοίωση (Historical Simulation).....	107
2.7.2.1.	Η μέθοδος των Boudoukh, Richardson και Whitelaw .....	109
2.7.2.2.	Η μέθοδος των Hull και White.....	110
2.7.2.3.	Η μέθοδος Filtered Historical Simulation των Barone-Adesi, Gianopoulos και Vosper .....	110
2.7.3.	Προσομοίωση Monte Carlo και παρόμοιες μέθοδοι .....	111
2.7.3.1.	Διαδικασίες προσομοίωσης της εξέλιξης των τιμών των προϊόντων.....	112
2.7.3.1.1.	Geometric Brownian Motion .....	112
2.7.3.1.2.	Χρήση της GBM για προσομοίωση της εξέλιξης των τιμών πολλών προϊόντων .....	113
2.7.3.2.	Άλλα μοντέλα προσομοίωσης της εξέλιξης των τιμών .....	114
2.7.3.3.	Ακρίβεια και επιτάχυνση των μοντέλων .....	115
2.7.3.4.	Bootstrap μέθοδος.....	116
2.7.3.5.	Προσομοίωση σεναρίου .....	117
2.7.4.	CAViaR.....	117

2.7.5.	Μέθοδος Extreme Value .....	122
2.7.5.1.	Μέθοδος Extreme Value με χρήση παραγόντων κινδύνου .....	123
2.7.5.2.	Μέθοδος Extreme Value για παράγωγα.....	124
2.7.5.3.	Απόδοση της μεθόδου Extreme Value.....	124
2.8.	Έλεγχοι μοντέλων υπολογισμού VaR (Backtesting).....	125
2.8.1.	Ανάγκη για έλεγχο των μοντέλων υπολογισμού του VaR .....	125
2.8.2.	Αποδόσεις του χαρτοφυλακίου και έλεγχοι των μοντέλων υπολογισμού VaR.....	127
2.8.3.	Μέθοδοι ελέγχου που βασίζονται στο ποσοστό αποτυχίας.....	127
2.8.4.	Μέθοδος υπό συνθήκη αποτυχιών του Christofferson.....	130
2.8.5.	Μέθοδος εκατοστημορίων VaR των Crnkovic-Drachman .....	131
2.8.6.	Έλεγχος εκτιμούμενου διαστήματος του Christofferson.....	132
2.8.7.	Παραμετρικά μοντέλα.....	132
2.8.8.	Έλεγχος εκτιμούμενης πιθανότητας του Lopez .....	133
2.8.9.	Εποπτικές αρχές και Backtesting .....	134

## 2. VaR - Μέτρηση του κινδύνου αγοράς

Τα πιστωτικά ιδρύματα, με βάση το θεσμικό πλαίσιο που αναλύθηκε στο 1<sup>ο</sup> κεφάλαιο, έχουν τη δυνατότητα να υπολογίσουν τα απαιτούμενα κεφάλαια για την κάλυψη από τον κίνδυνο αγοράς είτε χρησιμοποιώντας τυποποιημένες μεθόδους ή εσωτερικά μοντέλα. Οι τυποποιημένες μέθοδοι βασίζονται σε εκτιμήσεις των ελεγκτικών αρχών για το επίπεδο κινδύνου των διαφόρων θέσεων ενώ οι τράπεζες που χρησιμοποιούν εσωτερικά μοντέλα καλούνται να παράγουν με την χρήση των μοντέλων τις δικές τους εκτιμήσεις για το επίπεδο κινδύνου των διαφόρων θέσεων. Για τον κίνδυνο αγοράς οι τράπεζες που χρησιμοποιούν εσωτερικά μοντέλα πρέπει να μπορούν να υπολογίσουν το 99% VaR για χρονικό ορίζοντα 10 ημερών των θέσεων τους. Στη συνέχεια του κεφαλαίου θα παρουσιάσουμε τις διάφορες τεχνικές που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του VaR.

### 2.1.Ορισμός του VaR

Κάθε επένδυση έχει κάποια αναμενόμενη απόδοση<sup>21</sup>, όμως η επένδυση μπορεί να μην πραγματοποιήσει τελικά την αναμενόμενη απόδοση. Αυτό μπορεί να συμβεί επειδή η εξέλιξη των παραγόντων που καθορίζουν την απόδοση της επένδυσης δεν είναι βεβαία, υπάρχει δηλαδή αβεβαιότητα, υπάρχει κίνδυνος.

Όταν μια επένδυση πραγματοποιήσει μικρότερη απόδοση από την αναμενόμενη ο επενδυτής θα έχει μικρότερο όφελος από το αναμενόμενο μπορεί δε σε περίπτωση που έχουμε αρνητική απόδοση να χάσει μέρος του αρχικού κεφαλαίου.

Έτσι ένας επενδυτής θα πρέπει να γνωρίζει εκτός από την απόδοση μιας επένδυσης και τον κίνδυνο της.

---

<sup>21</sup> Αναμενόμενη απόδοση: μέση τιμή των πιθανών αποδόσεων  $E(r)$ .

Το πιο διαδεδομένο εργαλείο μέτρησης του κινδύνου μιας επένδυσης είναι η τυπική απόκλιση<sup>22</sup> ( $\sigma$ ) των δυνητικών αποδόσεων της. Όσο μεγαλύτερη είναι η τυπική απόκλιση των δυνητικών αποδόσεων μιας επένδυσης τόσο μεγαλύτερος είναι και ο κίνδυνος της επένδυσης.

Η τυπική απόκλιση των δυνητικών αποδόσεων μιας επένδυσης μας δίνει ένα μέτρο μέτρησης του κινδύνου μιας επένδυσης, όμως ο επενδυτής θα ενδιαφερόταν να γνωρίζει πόσο μεγάλος είναι αυτός ο κίνδυνος σε σχέση με την αναμενόμενη απόδοση. Για να μετρήσουμε τον κίνδυνο μιας επένδυσης σε σχέση με την αναμενόμενη απόδοση της χρησιμοποιούμε ένα άλλο εργαλείο που καλείται συντελεστής μεταβλητότητας (Coefficient of Variance CV) και μετράει τον κίνδυνο ανά μονάδα αναμενόμενης απόδοσης.

$$CV = \sigma / E(r)$$

Όμως και αυτό το εργαλείο δεν είναι αρκετό για να απαντήσει τα παρακάτω ερωτήματα ενός επενδυτή:

- Πόσο πιθανό είναι να έχω αρνητική απόδοση από την επένδυση μου σε ένα χρόνο;
- Ποιο είναι η ελάχιστη απόδοση που θα έχει η επένδυση μου σε ένα μήνα από τώρα;
- Πόσα χρήματα θα χρειαστώ επιπλέον για να υποστηρίξω την επένδυση (πχ. margin calls σε παράγωγα) μου για δύο εβδομάδες;

Την απάντηση σε αυτά αλλά και πιο σύνθετα ερωτήματα, που θα δούμε στη συνέχεια, μπορεί να τη δώσει ένα εργαλείο μέτρησης του κινδύνου που λέγεται Value At Risk (VaR).

Το VaR μας δίνει, τη χειρότερη ζημία που θα μπορούσε να έχει μια επένδυση, για συγκεκριμένο χρονικό ορίζοντα και για συγκεκριμένο επίπεδο εμπιστοσύνης<sup>23</sup> (1-p).

Ο τρόπος υπολογισμού του VaR μιας επένδυσης συνίσταται στα παρακάτω βήματα:

---

<sup>22</sup> Η τυπική απόκλιση είναι η τετραγωνική ρίζα της μέσης τιμή των τετραγώνων των διαφορών των δυνητικών αποδόσεων από την αναμενόμενη απόδοση.

<sup>23</sup> Το επίπεδο εμπιστοσύνης καθορίζει ποια είναι η πιθανότητα η επένδυση μας να έχει απόδοση χειρότερη του VaR.



1. Συλλογή ιστορικών στοιχείων των αποδόσεων της επένδυσης
2. Δημιουργία με την βοήθεια των ιστορικών στοιχείων της κατανομής των αποδόσεων της επένδυσης για συγκεκριμένο χρονικό ορίζοντα.
3. Χρησιμοποίηση της κατανομής των αποδόσεων της επένδυσης και την αξία  $W$  της επένδυσης, για τον υπολογισμό του VaR που αντιστοιχεί στο επίπεδο εμπιστοσύνης που επιθυμούμε.

Στη γενική περίπτωση έχουμε:

$$VaR_{(1-c)} = R^c * W \quad (1)$$

$W \rightarrow$  αρχική αξία της επένδυσης

$c \rightarrow$  επίπεδο σημαντικότητας (πιθανότητα η απόδοση να είναι μικρότερη από  $R^c$ )

## 2.2. VaR χαρτοφυλακίου

Είδαμε τι είναι το VaR και πως μπορούμε να το υπολογίσουμε όταν έχουμε μια επένδυση τι γίνεται όμως όταν έχουμε ένα χαρτοφυλάκιο στο οποίο έχουμε πολλές επενδύσεις.

Με ανάλογο τρόπο με αυτόν που είδαμε στην παράγραφο 3.1 μπορούμε να ορίσουμε και να υπολογίσουμε το VaR ενός χαρτοφυλακίου. Πιο συγκεκριμένα το VaR ενός χαρτοφυλακίου είναι η χειρότερη ζημιά που θα μπορούσε να έχει το χαρτοφυλάκιο, για συγκεκριμένο χρονικό ορίζοντα και για συγκεκριμένο επίπεδο εμπιστοσύνης.

Ο τρόπος υπολογισμού του VaR ενός χαρτοφυλακίου συνίσταται στα παρακάτω βήματα:

1. Συλλογή ιστορικών στοιχείων των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου
2. Δημιουργία με την βοήθεια των ιστορικών στοιχείων της κατανομής των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου για συγκεκριμένο χρονικό ορίζοντα.
3. Χρησιμοποίηση της κατανομής των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου και της αξία του, για τον υπολογισμό του VaR που αντιστοιχεί στο επίπεδο εμπιστοσύνης που επιθυμούμε.

Σχετικό (relative) VaR(mean) ενός χαρτοφυλακίου (ή μιας επένδυσης) είναι η χειρότερη ζημιά που θα μπορούσε να έχει το χαρτοφυλάκιο σε σχέση με την αναμενόμενη απόδοση, για συγκεκριμένο χρονικό ορίζοντα και για συγκεκριμένο επίπεδο εμπιστοσύνης.

Απόλυτο (absolute) VaR(zero) ενός χαρτοφυλακίου (ή μιας επένδυσης) είναι η χειρότερη ζημιά που θα μπορούσε να έχει το χαρτοφυλάκιο σε σχέση με το 0, για συγκεκριμένο χρονικό ορίζοντα και για συγκεκριμένο επίπεδο εμπιστοσύνης.

$$\text{VaR}(\text{mean}) = \text{VaR}(\text{zero}) - E(R)^{24}$$

### 2.3.Εργαλεία VaR χαρτοφυλακίου

Ένα χαρτοφυλάκιο δεν είναι τίποτα άλλο παρά πολλές διαφορετικές επενδύσεις (χρεόγραφα, καταθέσεις, ακίνητα, κλπ.) μαζί. Τις ξεχωριστές αυτές επενδύσεις που συνθέτουν το χαρτοφυλάκιο θα τις ονομάζουμε συστατικά του χαρτοφυλακίου.

Σε κάθε συστατικό  $j$  ενός χαρτοφυλακίου αντιστοιχεί ένας αριθμός  $w_j$  που καλείται βάρος και είναι η αξία του συστατικού  $W_j$  σε σχέση με την αξία του χαρτοφυλακίου  $W$  ή αλλιώς το ποσοστό συμμετοχής του συστατικού στο χαρτοφυλάκιο.

$$w_j = W_j / W \quad (2)$$

Στη συνέχεια θα δούμε πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το VaR και τα διάφορα εργαλεία του για να απαντήσουμε κάποια κρίσιμα ερωτήματα σε σχέση με τον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου μας.

#### Ερώτημα 1<sup>ο</sup>

Πόση μείωση στον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου μας έχουμε επιτύχει λόγω διαφοροποίησης<sup>25</sup>;

<sup>24</sup>  $E(R)$ : είναι η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου.

<sup>25</sup> Σύμφωνα με τη θεωρία χαρτοφυλακίου η διαφοροποίηση του χαρτοφυλακίου, που επιτυγχάνεται μέσω πολλών διαφορετικών επενδύσεων, οδηγεί σε μείωση του συνολικού κινδύνου του χαρτοφυλακίου.

### Εργαλεία:

Διαφοροποιημένο (Diversified) VaR χαρτοφυλακίου είναι το VaR που υπολογίζουμε όταν λάβουμε υπόψη την διαφοροποίηση του χαρτοφυλακίου.

Ατομικό (Individual) VaR ενός συστατικού ενός χαρτοφυλακίου είναι το VaR που έχει το συστατικό από μόνο του.

Μη διαφοροποιημένο (Undiversified) VaR χαρτοφυλακίου είναι το VaR που υπολογίζουμε αθροίζοντας τα ατομικά VaR των συστατικών ενός χαρτοφυλακίου.

### Απάντηση:

$\text{Μείωση του κινδύνου λόγω διαφοροποίησης χαρτοφυλακίου} =$ $(\text{Diversified VaR}) - (\text{Undiversified VaR})$
--

### Ερώτημα 2<sup>ο</sup>

Πόσο θα μεταβληθεί ο κίνδυνος του χαρτοφυλακίου μας αν αυξήσουμε κατά  $\alpha$  την θέση μας στο  $j$  συστατικό του χαρτοφυλακίου μας;

### Εργαλεία:

Οριακό (Marginal) VaR ( $\Delta VaR$ ) σε σχέση με ένα συστατικό  $A$  του χαρτοφυλακίου είναι η μεταβολή του VaR του χαρτοφυλακίου αν επενδυθεί ακόμη μια νομισματική μονάδα (πχ. ένα ευρώ) στο συστατικό  $A$ . Είναι δηλαδή η μερική παράγωγος του VaR ως προς το βάρος του συστατικού  $A$ .

Προσαυξημένο (Incremental) VaR είναι η μεταβολή του VaR που έχουμε λόγω μιας μεταβολής στη σύνθεση του χαρτοφυλακίου μας.

### Απάντηση:

Μεταβολή του VaR του χαρτοφυλακίου μετά από αύξηση κατά  $\alpha$  του βάρους του  $j$  συστατικού του χαρτοφυλακίου μας =  
Incremental VaR (μεταβολή  $j$  κατά  $\alpha$ )=  
 $\Delta VaR * \alpha^{26}$

### Ερώτημα 3<sup>ο</sup>

Σε ποιο συστατικό του χαρτοφυλακίου μας οφείλεται η μεγαλύτερη ζημία που μπορεί να υποστούμε;

### Εργασία:

Το VaR συστατικού (Component) είναι μια διαμέριση του VaR του χαρτοφυλακίου που μας δείχνει πόσο θα μεταβαλλόταν το VaR του χαρτοφυλακίου αν διαγραφόταν ένα συστατικό του.

### Απάντηση:

Συστατικό του χαρτοφυλακίου στο οποίο οφείλεται η μεγαλύτερη ζημία που μπορεί να υποστούμε =  
Max(Component VaR)

## 2.4.Υπολογισμός VaR με χρήση κανονικής κατανομής

Ο υπολογισμός του VaR ενός χαρτοφυλακίου γίνεται με τη βοήθεια του παρακάτω τύπου:

$$VaR = R^c * W \quad (3)$$

$W \rightarrow$  αρχική αξία της χαρτοφυλακίου

<sup>26</sup> Εδώ κάναμε την παραδοχή πως το  $\alpha$  ήταν σχετικά μικρό σε σχέση με την αρχική αξία του συστατικού αλλά και την αξία του χαρτοφυλακίου. Έτσι χρησιμοποιώντας το  $\Delta VaR$  που είναι μια γραμμική προσέγγιση του τρόπου μεταβολής του VaR του χαρτοφυλακίου σε σχέση με τη μεταβολή του βάρους ενός συστατικού παίρνουμε μια σχετικά καλή προσέγγιση του Incremental VaR

$c \rightarrow$  επίπεδο σημαντικότητας (πιθανότητα η απόδοση να είναι μικρότερη από  $R^c$ )

Η εύρεση του  $R^c$  γίνεται με την επίλυση της παρακάτω εξίσωσης:

$$P(x \leq R^c) = c \Rightarrow c = \int_{-\infty}^{R^c} f(x) dx \quad (4)$$

$x \rightarrow$  Μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κατανομή των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου

$c \rightarrow$  Επίπεδο σημαντικότητας

Η λύση της εξίσωσης (4) δεν είναι πάντοτε μια εύκολη διαδικασία καθώς η συνάρτηση  $f(x)$  δεν είναι γνωστή αλλά πρέπει να υπολογιστεί με τη βοήθεια ιστορικών στοιχείων αυτό έχει σαν αποτέλεσμα η  $f(x)$  να μη μπορεί να παρασταθεί με γενικό τύπο αλλά μόνο με αναλυτικό τρόπο (δηλαδή με πίνακα τιμών).

Αν όμως ξέραμε τον γενικό τύπο της συνάρτησης  $f(x)$  τότε θα μπορούσαμε να χρησιμοποιούμε μόνο αυτόν και όχι τον πίνακα τιμών της συνάρτησης πράγμα που απλοποιεί σε μεγάλο βαθμό την διαδικασία επίλυσης της εξίσωσης (4).

Ακόμη πιο εύκολα θα ήταν τα πράγματα αν η κατανομή των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου ακολουθούσε κανονική κατανομή τότε θα μπορούσαμε να παρακάμψουμε την  $f(x)$  και να λύνουμε την εξίσωση (4) χρησιμοποιώντας μόνο την τυπική απόκλιση  $\sigma$  και τη μέση τιμή  $\mu$  της κατανομή των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου

$$\text{Αν } X \sim N(\mu, \sigma^2), (1) \Rightarrow R^c = \mu - a\sigma$$

$a \rightarrow$  αντιστοιχεί στο  $c$  και το βρίσκουμε από πίνακες της  $N(0,1)$

Άρα κάνοντας την παραδοχή ότι οι αποδόσεις του χαρτοφυλακίου ακολουθούν κανονική κατανομή ο υπολογισμός του VaR συνίσταται στον υπολογισμό του  $\mu$  και του  $\sigma$  της κατανομής των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου.

Αν το χαρτοφυλάκιο έχει  $N$  συστατικά τότε:

$$\mu = \sum_{j=1}^N w_j * \mu_j \quad (5)$$

$\mu_j \rightarrow$  η μέση αναμενόμενη απόδοση του συστατικού  $j$

$$\sigma = \sum_{j=1}^N w_j^2 * \sigma_j^2 + 2 \sum_{j=1}^N \sum_{i>j} w_j * w_i * \sigma_{ji} \quad (6)$$

$\sigma_j \rightarrow$  η τυπική απόκλιση της απόδοσης του συστατικού  $j$

$\sigma_{ji} \rightarrow$  η συνδιασπορά των αποδόσεων των συστατικών  $j$  και  $i$ .

Άρα το VaR του χαρτοφυλακίου βρίσκεται πολύ εύκολα αν γνωρίζουμε τα  $\mu_j$ ,  $\sigma_j$ ,  $\sigma_{ji}$ .

Ακόμη με τη χρήση της κανονικής κατανομής μπορεί να απλοποιηθεί ο τρόπος υπολογισμού των εργαλείων του VaR

#### Μη διαφοροποιημένο (Undiversified) VaR

$$\sigma_p = \sum_{j=1}^N w_j * \sigma_j \quad (7)$$

$\sigma_p \rightarrow \sigma$  Χαρτοφυλακίου

$\sigma_j \rightarrow \sigma_j$  συστατικού

#### Οριακό (Marginal) VaR ( $\Delta VaR$ )

$$\sigma_{\Delta VaR} = \frac{\sigma_{ip}}{\sigma_p} = \beta_i * \sigma_p \quad (8)$$

$\beta_i \rightarrow$  το beta του συστατικού ως προς το χαρτοφυλάκιο

### VaR συστατικού (Component)

$$\sigma_{CVAR_j} = \Delta VAR_j * w_j * W = VAR * \beta_i * W_j \quad (9)$$

Προσαυξημένο (Incremental) VaR όταν η μεταβολή  $\alpha$  στη σύνθεση του χαρτοφυλακίου μας έγινε μόνο ως προς ένα συστατικό  $j$ .

$$\sigma_N^2 * W_N^2 = \sigma_p^2 * W^2 + 2 * \alpha * W * \sigma_{ip} + \alpha^2 * \sigma^2 \quad (10)$$

$\sigma_N \rightarrow$  τυπική απόκλιση των αποδόσεων του νέου χαρτοφυλακίου

Αν πάρουμε τη μερική παράγωγο ως προς  $\alpha$  και εξισώσουμε με το 0 δημιουργούμε μια εξίσωση που αν τη λύσουμε ως προς  $\alpha$  βρίσκουμε το  $\alpha^*$  που είναι το ποσό που θα έπρεπε να αυξηθεί η θέση μας στο συστατικό  $j$  για να έχουμε ελαχιστοποίηση<sup>27</sup> του VaR του χαρτοφυλακίου μας, το  $\alpha^*$  καλείται βέλτιστη εξισορρόπηση κινδύνου (best hedge).

$$\alpha^* = -W * \frac{\sigma_{jp}}{\sigma_j^2} = -W * \beta_j * \frac{\sigma_p^2}{\sigma_j^2} \quad (11)$$

Τέλος μια ακόμα ευκολία που μας παρέχει η κανονική κατανομή είναι η δυνατότητα να παίρνουμε από το  $R_1$  (επίπεδο σημαντικότητας  $c_1$ ) το  $R_2$  (επίπεδο σημαντικότητας  $c_2$ ).

---

<sup>27</sup> Το  $\alpha^*$  αποτελεί ελάχιστο καθώς ο συντελεστής ( $\sigma^2$ ) του  $\alpha^2$  είναι θετικός άρα τα κοίλα είναι προς τα πάνω

Το  $c_1$  αντιστοιχίζεται στο  $a_1$  με χρήση των πινάκων της  $N(0,1)$

Το  $c_2$  αντιστοιχίζεται στο  $a_2$  με χρήση των πινάκων της  $N(0,1)$

Τότε  $R_2 = \mu + (R_1 - \mu) * a_2 / a_1$

## 2.5. VaR διαφορετικών χρονικών περιόδων

Το VaR ενός χαρτοφυλακίου υπολογίζεται για συγκεκριμένο χρονικό ορίζοντα καθώς βασίζεται στην κατανομή των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου για το χρονικό αυτό ορίζοντα (ημερήσιο, μηναίο, κλπ.).

Ένα ερώτημα που τίθεται είναι πώς μπορούμε, αν ξέρουμε το VaR μιας χρονικής περιόδου να υπολογίσουμε το VaR μιας άλλης χρονικής περιόδου.

Όταν οι ημερήσιες αποδόσεις του χαρτοφυλακίου:

1. Είναι κανονικές κατανομές
2. Ισόνομες (με ίδια  $\mu$  και  $\sigma$ )

Τότε για να μετασχηματίσουμε το ημερήσιο VaR ενός χαρτοφυλακίου σε VaR χρονικής περιόδου  $T$  ημερών μπορούμε να επικεντρωθούμε στον μετασχηματισμό του ημερήσιου  $\sigma$  των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου σε  $\sigma_T$  (τυπική απόκλιση αποδόσεων χαρτοφυλακίου  $T$  ημερών).

Όταν επιπλέον οι ημερήσιες αποδόσεις του χαρτοφυλακίου είναι ανεξάρτητες<sup>28</sup>

---

<sup>28</sup> Η ανεξαρτησία ισχύει σε αποτελεσματικές αγορές.



ισχύει :

$$\sigma_T = \sqrt{T} * \sigma \quad (12)$$

Όταν όμως οι κατανομές των ημερήσιων αποδόσεων δεν είναι ανεξάρτητες αλλά συσχετίζονται τότε η παραδοχή της ανεξαρτησίας μπορεί να οδηγήσει σε υποεκτίμηση του VaR.

Έστω ότι οι κατανομές των ημερήσιων αποδόσεων δεν είναι ανεξάρτητες αλλά ισχύει:

$$X_t = \rho X_{t-1} + u_t$$

$X_t \rightarrow$  η απόδοση της ημέρας t

$X_{t-1} \rightarrow$  η απόδοση της ημέρας t-1

$u_t \rightarrow$  ακολουθεί  $N(\mu, \sigma)$

Τότε :

$$\sigma_T^2 = \sigma^2 [T + 2(T-1)\rho + 2(T-2)\rho^2 + \dots + 2(1)\rho^{T-1}] \quad (13)$$

Στον πίνακα 2-1 βλέπουμε τις διαφορές που προκύπτουν στον υπολογισμό του  $\sigma_T$  για  $T=10$  και για διάφορες τιμές του  $\rho$ .

$\rho$	$\sigma_T$
0	3,1622777
0,05	3,3085990
0,10	3,4634244
0,15	3,6275590
0,20	3,8019730

**Πίνακας 2-1 Τιμές του  $\sigma_T$  για  $T=10$  και για διάφορες τιμές του  $\rho$**

## 2.6. Αντιστοίχιση (mapping) σε παράγοντες κινδύνου

Όταν έχουμε ένα χαρτοφυλάκιο που έχει  $N$  συστατικά για να υπολογίσουμε το VaR του θα πρέπει να έχουμε συλλέξει ιστορικά στοιχεία των αποδόσεων των  $N$  συστατικών του.

Αυτό δεν είναι πάντοτε εύκολο επειδή το  $N$  μπορεί να είναι πολύ μεγάλο ή επειδή μπορεί να μην υπάρχουν ιστορικά στοιχεία για κάποια συστατικά.

Ακόμη όμως και αν ήταν διαθέσιμα όλα τα ιστορικά στοιχεία των  $N$  συστατικών του χαρτοφυλακίου μας η επεξεργασία τους θα ήταν μια επίπονη διαδικασία<sup>29</sup>.

Για να μπορέσουμε να παρακάμψουμε το πρόβλημα της συλλογής και επεξεργασίας ιστορικών στοιχείων για τα  $N$  συστατικά του χαρτοφυλακίου χρησιμοποιούμε μια τεχνική που καλείται αντιστοίχιση (mapping) των συστατικών του χαρτοφυλακίου σε παράγοντες κινδύνου (risk factors).

Σύμφωνα με αυτήν την τεχνική εντοπίζουμε κάποιους παράγοντες (δείκτες) που επηρεάζουν όλα ή κάποια ομάδα συστατικών (πχ. ομόλογα Ελληνικού Δημοσίου) του χαρτοφυλακίου. Οι παράγοντες αυτοί μπορεί να είναι ένας χρηματιστηριακός δείκτης, το 3-μηνο επιτόκιο των Έντοκων Γραμματίων του Ελληνικού Δημοσίου, κλπ.

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε κάθε ένα από τα συστατικά του χαρτοφυλακίου με μία θέση σε έναν ή περισσότερους παράγοντες.

Στόχος μας είναι:

1. Να περιορίσουμε το σύνολο των ιστορικών στοιχείων που απαιτούνται
2. Να ελαχιστοποιήσουμε όσο το δυνατόν το υπολογιστικό κόστος

Η χρησιμοποίηση της τεχνικής της αντιστοίχισης των συστατικών του χαρτοφυλακίου σε παράγοντες κινδύνου είναι μια διαδικασία που πρέπει να γίνεται με σύνεση καθώς εμπεριέχει τον κίνδυνο να οδηγηθούμε σε λανθασμένο υπολογισμό του VaR.

---

<sup>29</sup> Αν χρησιμοποιούμε κανονική κατανομή για τον υπολογισμό του VaR τότε πρέπει να υπολογίσουμε  $N$  διασπορές και  $N(N-1)/2$  συνδιασπορές.

Οι Tanya Styblo Beder, Michael Minnich, Hubert Shen και Jodi Stanton σε μια δημοσίευση τους στη “The Journal of Financial Engineering – Volume 7 – Number ¾ - Pages 289-309” με τον τίτλο “Vignettes on VaR” αναφέρονται στους κινδύνους που υπάρχουν από τη χρήση του mapping.

Χρησιμοποιούν 3 διαφορετικούς τρόπους mapping για τον υπολογισμό του VaR τεσσάρων διαφορετικών χαρτοφυλακίων μετοχών αξίας \$1.000.000 και αντιπαραβάλλουν τα αποτελέσματα με το VaR που υπολογίζουν με τη βοήθεια των πραγματικών θέσεων των μετοχών.

Πιο συγκεκριμένα χρησιμοποιούν τις παρακάτω μεθόδους mapping:

- Mapping στο δείκτη S&P 500.

( $VaR = \alpha W \sigma_m$  με  $\sigma_m \rightarrow$  η τυπική απόκλιση των αποδόσεων του δείκτη S&P 500).

- Mapping στο δείκτη S&P 500 με προσαρμογή beta.

( $VaR = \alpha W \beta_p \sigma_m$  με  $\beta_p \rightarrow$  το  $\beta$  του χαρτοφυλακίου)

- Mapping στον κλαδικό δείκτη.

( $VaR = \alpha W (w_1 \sigma_1 + w_2 \sigma_2 + \dots)^{1/2}$  με  $w_j, \sigma_j \rightarrow$  το βάρος για το δείκτη j και η τυπική απόκλιση του δείκτη j)

Τα αποτελέσματα δείχνουν πως οι τρεις παραπάνω μέθοδοι mapping δίνουν ανάλογο VaR σε σχέση με το VaR που υπολογίζεται με τη χρήση των πραγματικών θέσεων όταν το χαρτοφυλάκιο αποτελείται από θετικές (long) θέσεις σε 12 μετοχές Fortune 500 (χαρτοφυλάκιο 1 πίνακας 2-2)

Μέθοδος Mapping	95% VaR
S&P mapping	\$16.160
Beta	\$22.694
Industry mapping	\$16.482
Instrument level mapping	\$17.804

**Πίνακας 2-2 VaR διαφόρων μεθόδων mapping χαρτοφυλάκιο 1**

Όταν το χαρτοφυλάκιο απαρτίζεται από θετικές θέσεις σε μετοχές υψηλής τεχνολογίας μόνο η μέθοδος “Mapping στον κλαδικό δείκτη” δίνει συγκρίσιμα αποτελέσματα με το VaR που υπολογίζεται με τη χρήση των πραγματικών θέσεων (χαρτοφυλάκιο 2 πίνακας 2-3).

Μέθοδος Mapping	95% VaR
S&P mapping	\$16.160
Beta	\$24.205
Industry mapping	\$27.554
Instrument level mapping	\$31.639

**Πίνακας 2-3 VaR διαφόρων μεθόδων mapping χαρτοφυλάκιο 2**

Στον πίνακα 2-4 βλέπουμε τα VaR όταν το χαρτοφυλάκιο απαρτίζεται από θετικές και αρνητικές (short) θέσεις στις μετοχές του χαρτοφυλακίου 1. (χαρτοφυλάκιο 3) Καμία από τις μεθόδους mapping δε δίνει συγκρίσιμα αποτελέσματα με το VaR που υπολογίζεται με τη χρήση των πραγματικών θέσεων.

Μέθοδος Mapping	95% VaR
S&P mapping	\$0
Beta	\$1.480
Industry mapping	\$4.824
Instrument level mapping	\$6.665

**Πίνακας 2-4 VaR διαφόρων μεθόδων mapping χαρτοφυλάκιο 3**

Τέλος το χαρτοφυλάκιο 4 αποτελείται από θετικές και αρνητικές θέσεις στις μετοχές του χαρτοφυλακίου 2. Μπορούμε να δούμε (πίνακα 2-5) ότι και εδώ το VaR που υπολογίζεται με τη βοήθεια των mapping μεθόδων είναι πολύ διαφορετικό με αυτό που υπολογίζεται από τις πραγματικές θέσεις.

Μέθοδος Mapping	95% VaR
S&P mapping	\$0
Beta	\$2.391
Industry mapping	\$0
Instrument level mapping	\$8.215

**Πίνακας 2-5 VaR διαφόρων μεθόδων mapping χαρτοφυλάκιο 4**

## 2.7. Μέθοδοι υπολογισμού VaR

### 2.7.1. Μέθοδος πίνακα διασπορών - συνδιασπορών (Variance - Covariance matrix method)

Πριν προχωρήσουμε στην παρουσίαση αυτής της μεθόδου θα δούμε κάποιους χρήσιμους συμβολισμούς.

#### Απόδοση χαρτοφυλακίου

$$R_p = w_1 R_1 + w_2 R_2 + \dots + w_N R_N = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_N \end{bmatrix} = w' R \quad (14)$$

$w_j \rightarrow$  το βάρος του  $j$  συστατικού

$R_j \rightarrow$  η απόδοση του  $j$  συστατικού

#### Αναμενόμενη απόδοση χαρτοφυλακίου

$$E(R_p) = \mu_p = \sum_{j=1}^N w_j \mu_j \quad (15)$$

$\mu_j \rightarrow$  η αναμενόμενη ( $E(R_j)$ ) απόδοση του  $j$  συστατικού

#### Διασπορά των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου

$$\sigma_p^2 = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \dots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} & \dots & \sigma_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \sigma_{N3} & \dots & \sigma_N^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix} = w' \Sigma w \quad (16)$$

$\sigma_j^2 \rightarrow$  η διασπορά των αποδόσεων του  $j$  συστατικού.

$\sigma_{ij} \rightarrow$  η συνδιασπορά των αποδόσεων των συστατικών  $i$  και  $j$ .

$\Sigma \rightarrow$  ο πίνακας διασπορών συνδιασπορών των συστατικών του χαρτοφυλακίου.

### Διάνυσμα αξιών συστατικών

$$\chi = Ww$$

Ακόμη συναντάμε τους παρακάτω συμβολισμούς

$$\Sigma = S'RS \quad (17)$$

$R \rightarrow$  correlation matrix

$S \rightarrow$  Ένας πίνακας που στην κύρια διαγώνια έχει τις διασπορές των συστατικών και 0 στις άλλες θέσεις

$$VAR = \sqrt{x'(\alpha S'RS\alpha)x} = \sqrt{(x \times V)'R(x \times V)} \quad (18)$$

$V=(\alpha\sigma)$  ένα διάνυσμα μέσω του οποίου είναι δυνατός ο υπολογισμός του VaR. Το RiskMetrics παρέχει εκτιμήσεις του  $V$  και του  $R$ .

Η μέθοδος υπολογισμού του VaR με τη χρήση του πίνακα διασπορών συνδιασπορών των αποδόσεων των συστατικών του χαρτοφυλακίου βασίζεται στην παραδοχή ότι οι αποδόσεις των συστατικών του χαρτοφυλακίου, άρα και οι αποδόσεις του χαρτοφυλακίου, ακολουθούν κανονική κατανομή. Έτσι για τον υπολογισμό του VaR του χαρτοφυλακίου χρησιμοποιούμε τις διασπορές και συνδιασπορές των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου.

Τελικά ο υπολογισμός του **VaR<sup>30</sup>** του χαρτοφυλακίου γίνεται με τη χρήση της:

$$VAR_p = \alpha\sigma_p W = \alpha\sqrt{\chi'\Sigma\chi} \quad (19)$$

---

<sup>30</sup> Absolute VaR

$\alpha \rightarrow$  η τιμή βρίσκεται από τους πίνακες της  $N(0,1)$  και είναι ο αριθμός για τον οποίο η πιθανότητα μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί  $N(0,1)$  να είναι μικρότερη του  $-\alpha$  είναι  $c$  (επίπεδο σημαντικότητας).

Το **individual VaR** δίνεται από την:

$$VAR_i = \alpha \sigma_i |W_i| = \alpha \sigma_i |w_i| W$$

### **Marginal VaR**

$$\Delta VAR_i = \alpha (\beta_i \sigma_p) = \frac{VAR}{W} \beta_i \quad (20)$$

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_N \end{bmatrix} = \frac{\Sigma w}{(w' \Sigma w)} \quad (21)$$

#### **2.7.1.1. Μέθοδος Delta Normal**

Ο πιο εύκολος τρόπος υπολογισμού του VaR του χαρτοφυλακίου είναι μέσω της μεθόδου Delta Normal η οποία βασίζεται στη μέθοδο Variance - Covariance.

Η μέθοδος Delta Normal έχει τρία κύρια βήματα:

- Γραμμική αντιστοίχιση (mapping) των συστατικών του χαρτοφυλακίου σε παράγοντες κινδύνου (Risk Factors).
- Υπολογισμός του  $\Sigma$  των παραγόντων κινδύνου.
- Χρησιμοποίηση του  $\Sigma$  των παραγόντων κινδύνου (παραδοχή ότι οι αποδόσεις των παραγόντων κινδύνου ακολουθούν κανονική κατανομή) και της αντιστοίχισης των συστατικών για τον υπολογισμό του VaR.

Στη συνέχεια θα δούμε διάφορες εφαρμογές της μεθόδου Delta Normal.

Στόχος μας πάντοτε είναι η γραμμική αντιστοίχιση των θέσεων μας σε «πρωτογενείς» παράγοντες κινδύνου για τους οποίους έχουμε ιστορικά στοιχεία.

#### 2.7.1.1.1. Χαρτοφυλάκια σταθερού εισοδήματος

Οι πρωτογενείς παράγοντες κινδύνου που χρησιμοποιούνται σε αυτού του είδους τα χαρτοφυλάκια είναι συνήθως οι αποδόσεις των ομολόγων μηδενικού κουπονιού (Zero-coupon bonds).

Η αντιστοίχιση του χαρτοφυλακίου στους πρωτογενείς κινδύνους γίνεται μέσω τριών διαδικασιών<sup>31</sup>:

**Αντιστοίχιση κεφαλαίου (principal mapping).** Το χαρτοφυλάκιο αντιστοιχίζεται σε ομόλογο μηδενικού κουπονιού διάρκειας ίσης με τη μέση διάρκεια του χαρτοφυλακίου.

**Αντιστοίχιση Duration.** Το χαρτοφυλάκιο αντιστοιχίζεται σε ομόλογο μηδενικού κουπονιού διάρκειας ίσης με το Duration του χαρτοφυλακίου.

**Αντιστοίχιση ταμειακών ροών (Cash flows).** Αναλύουμε το χαρτοφυλάκιο σε ταμειακές ροές και κάθε ταμειακή ροή αντιστοιχίζεται σε ομόλογο μηδενικού κουπονιού ίδιας διάρκειας.

Η μέθοδος **principal mapping** είναι η πιο απλή δίνει όμως τα χειρότερα αποτελέσματα καθώς δε λαμβάνει υπόψη της πληρωμές των κουπονιών.

Η μέθοδος **duration mapping** δίνει καλύτερα αποτελέσματα όμως δε λαμβάνει υπόψη την μεταβλητότητα όλων των σημείων της καμπύλης αποδόσεων (yield curve).

Η μέθοδος **cash-flow mapping** δίνει τα καλύτερα αποτελέσματα καθώς λαμβάνει υπόψη τόσο τις πληρωμές των κουπονιών όσο και τη μεταβλητότητα όλων των σημείων της καμπύλης αποδόσεων (yield curve).

---

<sup>31</sup> “Value at Risk” Jorion, Mc Graw Hill second edition



### 2.7.1.1.2. Γραμμικά παράγωγα

#### Προθεσμιακά συμβόλαια συναλλάγματος

Οι πρωτογενείς παράγοντες κινδύνου που χρησιμοποιούνται σε αυτού του είδους τα συμβόλαια είναι η ισοτιμία συναλλάγματος καθώς και οι αποδόσεις των εγχώριων και των ξένων εντόκων γραμματίων.

$$\begin{aligned} & \text{Θετική θέση σε προθεσμιακό συμβόλαιο συναλλάγματος} = \\ & \quad \text{θετική θέση σε ξένο νόμισμα} \\ & \quad + \text{θετική θέση σε ξένο έντοκο γραμμάτιο} \\ & \quad + \text{αρνητική θέση σε εγχώριο έντοκο γραμμάτιο} \end{aligned}$$

#### Προθεσμιακά συμβόλαια επιτοκίου (Forward Rate Agreements)

Οι πρωτογενείς παράγοντες κινδύνου που χρησιμοποιούνται σε αυτού του είδους τα συμβόλαια είναι οι αποδόσεις των εντόκων γραμματίων.

$$\begin{aligned} & \text{Θετική θέση σε 6X12 FRA} = \\ & \quad \text{θετική θέση σε 6-μηνο έντοκο γραμμάτιο} \\ & \quad + \text{αρνητική θέση σε 12-μηνο έντοκο γραμμάτιο} \end{aligned}$$

#### Συμβόλαια ανταλλαγής επιτοκίου (Interest Rate Swaps)

Οι πρωτογενείς παράγοντες κινδύνου που χρησιμοποιούνται σε αυτού του είδους τα συμβόλαια είναι οι αποδόσεις των ομολόγων μηδενικού κουπονιού (Zero-coupon bonds).

Χρησιμοποιούνται δύο τρόποι αντιστοίχισης<sup>32</sup>:

- Συνδυασμένη θέση σε ομόλογα σταθερού και μεταβλητού επιτοκίου
- Χαρτοφυλάκιο μελλοντικών συμβολαίων

---

<sup>32</sup> “Value at Risk” Jorion, Mc Graw Hill second edition

### 2.7.1.1.3. Δικαιώματα (Options)

Οι πρωτογενείς παράγοντες είναι η τιμή του υποκείμενου μέσου και των εντόκων γραμματίων<sup>33</sup>.

$\begin{aligned} & \text{Θετική θέση σε δικαίωμα αγοράς} = \\ & \text{Θετική θέση αξίας } \Delta \text{ στο υποκείμενο μέσο} \\ & + \text{αρνητική θέση αξίας } (\Delta S - c) \text{ έντοκο γραμμάτιο} \end{aligned}$
--

$\Delta \rightarrow$  ο ρυθμός μεταβολής της τιμής του δικαιώματος σε σχέση με την τιμή του υποκείμενου μέσου.

$$\Delta = \frac{\partial c}{\partial S} \tag{22}$$

$c \rightarrow$  η τιμή του δικαιώματος αγοράς.

$S \rightarrow$  η spot τιμή του υποκείμενου μέσου.

Εδώ θα πρέπει να σημειωθεί ότι η γραμμική αντιστοίχιση του δικαιώματος στους παραπάνω παράγοντες κινδύνου είναι καλή όταν το  $N(d_1)$ <sup>34</sup> όπως αυτό ορίζεται στην φόρμουλα Black-Scholes παραμένει σχετικά σταθερό.

Δυστυχώς τα  $\Delta$  των δικαιωμάτων αλλάζουν δυναμικά και άρα η χρήση αυτής της γραμμικής αντιστοίχισης είναι σωστή μόνο για μικρές μεταβολές του υποκείμενου μέσου ή αν ο ρυθμός μεταβολής του  $\Delta$ <sup>35</sup> είναι μικρός.

### 2.7.1.1.4. Χαρτοφυλάκια μετοχών

---

<sup>33</sup> “Value at Risk” Jorion, Mc Graw Hill second edition

<sup>34</sup> Υπολογισμός τιμής δικαιώματος με χρήση της φόρμουλας Black-Scholes (Hull, John, 2000 “Options, Futures, and Other Derivatives”, Prentice-Hall)

<sup>35</sup> Ο ρυθμός μεταβολής του  $\Delta$ , γνωστός και ως  $\Gamma$ , είναι η δεύτερη παράγωγος της τιμής του δικαιώματος ως προς την τιμή του υποκείμενου μέσου.

Οι πρωτογενείς παράγοντες είναι οι τιμές των χρηματιστηριακών δεικτών.

Υπάρχουν οι παρακάτω μέθοδοι αντιστοίχισης του χαρτοφυλακίου στους πρωτογενείς κινδύνους<sup>36</sup>:

- **Αντιστοίχιση στο γενικό δείκτη (Index mapping).** Όλες οι θέσεις αντιστοιχίζονται σε θέσεις στο γενικό δείκτη.
- **Αντιστοίχιση στο δείκτη κατηγορίας (Industry mapping).** Όλες οι θέσεις αντιστοιχίζονται σε θέσεις στους δείκτες κατηγορίας.
- **Αντιστοίχιση βήτα (Beta mapping).** Χρησιμοποιούμε το  $\beta$  του χαρτοφυλακίου λαμβάνοντας υπόψη μόνο τον συστηματικό κίνδυνο του χαρτοφυλακίου.
- **Αντιστοίχιση διαγωνίου (Diagonal mapping).** Χρησιμοποιούμε το  $\beta$  του χαρτοφυλακίου καθώς και τον ειδικό κίνδυνο των συστατικών του χαρτοφυλακίου

Είδαμε στην παράγραφο 4.6 τους κινδύνους που εμπεριέχουν οι αντιστοιχίσεις αυτές.

#### 2.7.1.2. Μέθοδοι Delta – Gamma

Η γραμμική αντιστοίχιση που χρησιμοποιείται στη μέθοδο Delta-Normal δε δίνει καλά αποτελέσματα όταν οι αποδόσεις των συστατικών δεν έχουν γραμμική σχέση με τις αποδόσεις των παραγόντων κινδύνου. Η μέθοδοι Delta-Gamma είναι μέθοδοι που βασίζονται στη μέθοδο Variance – Covariance και προσπαθούν να βελτιώσουν τις εκτιμήσεις της Delta-Normal μεθόδου χρησιμοποιώντας προσεγγίσεις, των αποδόσεων των συστατικών, δευτέρας τάξης ως προς τις αποδόσεις των παραγόντων κινδύνου.

##### 2.7.1.2.1. Μέθοδος Delta – Gamma Normal

Η μέθοδος Delta-Gamma Normal έχει τρία κύρια βήματα:

- Αντιστοίχιση (mapping) των αποδόσεων των συστατικών του χαρτοφυλακίου σε αποδόσεις παραγόντων κινδύνου (Risk Factors) και στα τετράγωνα τους (δεύτερης τάξης).
- Υπολογισμός του  $\Sigma$  των παραγόντων κινδύνου.

---

<sup>36</sup> “Value at Risk” Jorion, Mc Graw Hill second edition

- Χρησιμοποίηση του  $\Sigma$  των παραγόντων κινδύνου (παραδοχή ότι οι αποδόσεις των παραγόντων κινδύνου καθώς και τα τετράγωνα τους ακολουθούν κανονική κατανομή) και της αντιστοίχισης των συστατικών για τον υπολογισμό του VaR.

Μια βασική παραδοχή της μεθόδου αυτής είναι ότι τόσο οι αποδόσεις όσο και τα τετράγωνα των αποδόσεων των παραγόντων κινδύνου ακολουθούν κανονική κατανομή. Αυτό είναι κάτι που δεν ισχύει σε καμία περίπτωση.

#### 2.7.1.2.2. Wilson's Delta – Gamma μέθοδος<sup>37</sup>

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το VaR ενός συστατικού (στο οποίο έχουμε θετική θέση) και έχουμε αντιστοιχίσει την απόδοση του  $dr$  στην απόδοση  $dS$  και στο τετράγωνο της απόδοσης  $(dS)^2$  ενός παράγοντα κινδύνου.

$$dr = \Delta dS + \frac{\Gamma (dS)^2}{2} \quad (23)$$

Αν η  $dS$  ακολουθεί κανονική κατανομή  $N(\mu, \sigma)$  τότε για συγκεκριμένο διάστημα εμπιστοσύνης  $c$  για την  $dS$  θα ισχύει:

Το  $\alpha$  βρίσκεται από πίνακες της  $N(0,1)$ .

Τότε :

$$\begin{aligned} -\alpha\sigma &\leq dS \leq \alpha\sigma \\ VAR &= W \max\left(\Delta\alpha\sigma + \frac{\Gamma(\alpha\sigma)^2}{2}, \Delta(-\alpha\sigma) + \frac{\Gamma(-\alpha\sigma)^2}{2}\right)S \end{aligned} \quad (24)$$

---

<sup>37</sup> “Beyond Value At Risk” Kevin Dowd

Η μέθοδος αυτή μπορεί να γενικευτεί και για τον υπολογισμό του VaR χαρτοφυλακίου αλλά γίνεται πολύπλοκη και χρονοβόρα.

### 2.7.1.2.3. Μέθοδος Delta – Gamma με διόρθωση ροπών<sup>38</sup>

Στη μέθοδο αυτή προσπαθούμε να διορθώσουμε το λάθος της εκτίμησης που προκύπτει από την παραδοχή της κανονικότητας των αποδόσεων και των τετραγώνων των αποδόσεων των παραγόντων κινδύνου της μεθόδου Delta-Gamma Normal.

Η μέθοδος συνίσταται στον:

- Υπολογισμό του VaR με τη χρήση της Delta-Gamma Normal μεθόδου.
- Χρησιμοποίηση του τύπου επέκτασης κατά Cornish-Fisher<sup>39</sup> για διόρθωση του VaR.

### 2.7.1.3. Προσαρμογή για παχιές ουρές

Η βασική προϋπόθεση της μεθόδου Variance – Covariance είναι ότι οι αποδόσεις των παραγόντων κινδύνου (ή των συστατικών αν δεν χρησιμοποιήσουμε αντιστοίχιση) ακολουθούν κανονική κατανομή. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να υποεκτιμούμε το VaR εάν πολύ μεγάλες ή πολύ μικρές αποδόσεις συμβαίνουν πιο συχνά απ' ό τι προβλέπει η κανονική κατανομή, όταν δηλαδή οι κατανομές των αποδόσεων έχουν πιο παχιές ουρές από την κανονική κατανομή.

Για να αντιμετωπίσουμε αυτό το πρόβλημα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κάποια από τις μεθόδους<sup>40</sup>:

- **Η μέθοδος τις μίξης των κανονικών κατανομών.** Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή η απόδοση ενός παράγοντα κινδύνου είναι το άθροισμα μιας κανονικής  $N(\mu_1, \sigma_1)$  κατανομής και του γινομένου μιας άλλης κανονικής κατανομής  $N(\mu_2, \sigma_2)$  με μία Bernoulli.

---

<sup>38</sup> “Beyond Value At Risk” Kevin Dowd

<sup>39</sup> Ο τύπος αυτός βασίζεται στο ότι μία κατανομή μπορεί πάντοτε να περιγραφεί με τη χρήση παραμέτρων μιας άλλης κατανομής.

<sup>40</sup> “Beyond Value At Risk” Kevin Dowd

- **Χρήση της Generalised Error Distribution.** Θεωρούμε ότι οι αποδόσεις ακολουθούν GED. Οι GED είναι μια οικογένεια κατανομών που αποτελούν γενίκευση της κανονικής. Μεταβάλλοντας τις παραμέτρους της GED μπορούμε να πάρουμε κατανομές με πιο παχιές ουρές από την κανονική κατανομή.

#### **2.7.1.4.Υπολογισμός του $\Sigma$**

Για την μέθοδο Variance Covariance ίσως το πιο δύσκολο και σημαντικό βήμα είναι ο υπολογισμός του πίνακα  $\Sigma$ . Ο πίνακας  $\Sigma$  υπολογίζεται με τη βοήθεια ιστορικών στοιχείων και υπάρχουν εταιρείες που παρέχουν εκτιμήσεις του  $\Sigma$  για διάφορους παράγοντες κινδύνου.

Ο υπολογισμός του πίνακα  $\Sigma$  μπορεί να χωριστεί σε δύο βήματα

- Συλλογή των απαραίτητων ιστορικών στοιχείων.
- Επεξεργασία των ιστορικών στοιχείων.

##### **2.7.1.4.1. Συλλογή των απαραίτητων ιστορικών στοιχείων.**

Η συλλογή των απαραίτητων ιστορικών στοιχείων μπορεί να παρουσιάσει δυσκολίες καθώς μπορεί να υπάρχουν κενά στα ιστορικά στοιχεία. Τα κενά αυτά μπορεί να οφείλονται σε αργίες συγκεκριμένων αγορών, σε αγορές με μικρή ρευστότητα ή σε νέα προϊόντα.

Για να μπορέσουμε να αντιμετωπίσουμε αυτό το πρόβλημα γεμίζουμε τα κενά χρησιμοποιώντας στατιστικές μεθόδους ή υπολογίζουμε τα στοιχεία του  $\Sigma$  χωρίς τη χρήση των τιμών που λείπουν.

Οι Tanya Styblo Beder, Michael Minnich, Hubert Shen και Jodi Stanton στη δημοσίευση τους στη “The Journal of Financial Engineering – Volume 7 – Number ¾ - Pages 289-309” με τον τίτλο “Vignettes on VaR” αναφέρονται στις τρεις μεθόδους που φαίνονται στον πίνακα 2-6.

**Αλγόριθμος Μεγιστοποίησης Προσδοκίας (RiskMetrics Expectation Maximization (EM)Algorithm).** Είναι ένας επαναληπτικός αλγόριθμος που προσπαθεί να γεμίσει τα κενά με τρόπο που εξασφαλίζει την συνέπεια των δεδομένων. Ειδικότερα τα κενά γεμίζονται με τις μέσες τιμές που κάποιος θα ανέμενε με βάση τα υπάρχοντα δεδομένα. Στη συνέχεια οι δεσμευμένες μέσες τιμές διασπορές και συνδιασπορές ξανά υπολογίζονται και η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι τα παλιά και τα νέα δεδομένα να παράγουν τις ίδιες παραμέτρους. Η JP Morgan χρησιμοποιεί για τον αλγόριθμο αυτό μέχρι και 50 σειρές δεδομένων τη φορά.

**Επιλογή υποκατάστατης απόδοσης (Substitute return selection).** Σύμφωνα με αυτήν την τεχνική οι τιμές που λείπουν γεμίζονται με δεδομένα από άλλες συσχετιζόμενες σειρές.

**Υπολογισμός κατά ζεύγη δεδομένων (Pairwise Data Calculation).** Εδώ δεν προσπαθούμε να υπολογίσουμε τα δεδομένα που λείπουν αλλά χρησιμοποιούμε μόνο τα δεδομένα που υπάρχουν (πχ αν έχουμε δύο προϊόντα A και B και για το A έχουμε 250 παρατηρήσεις ενώ για το B έχουμε 230 παρατηρήσεις υπολογίζουμε το  $\sigma_A$  με 250 παρατηρήσεις και τα  $\sigma_B$  και  $\sigma_{AB}$  με 230 παρατηρήσεις)

Μέθοδος	Υπέρ	Κατά
Αλγόριθμος Μεγιστοποίησης Προσδοκίας (RiskMetrics Expectation Maximization (EM)Algorithm)	Δίνει εκτιμήσεις μέγιστης πιθανοφάνειας των αποδόσεων	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Πιθανά μη θετικά ορισμένος πίνακας <math>\Sigma</math></li> <li>- Πιθανόν να δώσει λάθος αποτελέσματα όταν χρησιμοποιούνται λίγοι παράγοντες κινδύνου ή υπάρχει πολυσυγγραμμικότητα στις αποδόσεις</li> <li>- Μεροληπτικές εκτιμήσεις αν τα χαμένα (missing) δεδομένα δεν είναι τυχαία (random)</li> <li>- Χρονοβόρα</li> </ul>
Επιλογή υποκατάστατης απόδοσης (Substitute return selection)	Δουλεύει καλά όταν υπάρχουν ισχυρά συσχετιζόμενα προϊόντα.	Η μέθοδος αυτή δε δουλεύει απαραίτητα τόσο καλά όσο φαίνεται στο παράδειγμα.
Υπολογισμός κατά ζεύγη δεδομένων (Pairwise Data Calculation)	Εύκολη υλοποίηση	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Πιθανά μη θετικά ορισμένος πίνακας <math>\Sigma</math></li> <li>- Πιθανόν να δώσει λάθος αποτελέσματα όταν υπάρχουν λίγα κοινά ζεύγη δεδομένων</li> </ul>

**Πίνακας 2-6 Μέθοδοι εκτίμησης αγνώστων τιμών (missing values)**

Δοκιμάζοντας τις τρεις αυτές μεθόδους χρησιμοποίησαν τρία σενάρια:

- Σενάριο 1. Σποραδικά κενά στα δεδομένα.
- Σενάριο 2. Κενό έξι μηνών στην αρχή των δεδομένων.
- Σενάριο 3. Συνδυασμός των σεναρίων 1 και 2.

για τον υπολογισμό του VaR ενός χαρτοφυλακίου με ίσες θέσεις σε πέντε νομίσματα (JPY, GBP, FRF, ITL, IDR)<sup>41</sup>.

Οι αποκλίσεις των υπολογισμών σε σχέση με το πραγματικό VaR<sup>42</sup> φαίνονται στον πίνακα 2-7.

Μέθοδος	Σενάριο 1	Σενάριο 2	Σενάριο 3
EM algorithm	***	3.1%	***
Substitute Return Selection	-1.5%	0.2%	-0.9%
Pairwise Data Calculation	-0.2%	-0.3%	-0.5%

**Πίνακας 2-7 Απόδοση των μεθόδων εκτίμησης χαμένων τιμών.**

Τα \*\*\* υποδηλώνουν ότι με τα υπάρχοντα δεδομένα (5 + 10 παράγοντες κινδύνου) δεν ήταν δυνατή η εφαρμογή της μεθόδου.

#### 2.7.1.4.2. Επεξεργασία των ιστορικών στοιχείων.

Η πιο απλή προσέγγιση είναι να υποθέσουμε ότι οι διασπορές και συνδιασπορές παραμένουν σταθερές με το πέρασμα του χρόνου και να τις εκτιμήσουμε χρησιμοποιώντας τις δειγματικές διασπορές και συνδιασπορές.

Όμως αυτή η υπόθεση απέχει πολύ από την πραγματικότητα. Αυτό αποδεικνύεται εύκολα αρκεί κανείς να αναλογιστεί πως επηρεάστηκαν οι διασπορές και συνδιασπορές των ισοτιμιών των ευρωπαϊκών νομισμάτων κατά την κρίση του ERM (1992) αλλά και η διασπορά των αποδόσεων του Nikkei μετά το σεισμό στο Combe.

Τα πιο συνηθισμένα μοντέλα που χρησιμοποιούνται για να εκτιμηθεί ο πίνακας Σ λαμβανομένου υπόψη τη μεταβολή των διασπορών και συνδιασπορών με το πέρασμα του χρόνου είναι τα παρακάτω:

- Κινητοί Μέσοι

<sup>41</sup> Χρησιμοποίησαν ημερήσιες αποδόσεις ενός έτους τόσο για τα 5 νομίσματα όσο και για 10 επιπλέον παράγοντες κινδύνου.

<sup>42</sup> Αυτό που υπολογίστηκε με τη χρήση όλων των δεδομένων.



- GARCH εκτιμήσεις
- Εκθετικά σταθμισμένοι κινητοί μέσοι (Exponentially Weighted Moving Average)
- Υπονοούμενες διασπορές και συνδιασπορές (Implied Volatilities and Correlations)

#### 2.7.1.4.3. Κινητοί μέσοι

Το μοντέλο αυτό χρησιμοποιεί σταθερές στο πλήθος παρατηρήσεις για να υπολογίσει τον πίνακα  $\Sigma$ . Κάθε μέρα μια καινούργια παρατήρηση χρησιμοποιείται και η πιο παλιά παρατήρηση εξαιρείται. Το πιο συνηθισμένο πλήθος παρατηρήσεων είναι 20 και 60.

Οι παρατηρήσεις χρησιμοποιούνται χωρίς στάθμιση έτσι υπάρχει καθυστέρηση στο να αποτυπωθούν στην εκτίμηση του  $\Sigma$  οι πληροφορίες που μεταφέρουν οι νέες παρατηρήσεις. Τέλος όταν μια παλιά μη-κανονική παρατήρηση εξαιρεθεί υπάρχει σημαντική μεταβολή στην εκτίμηση του  $\Sigma$  που δεν δικαιολογείται από τις πρόσφατες παρατηρήσεις.

#### 2.7.1.4.4. GARCH εκτιμήσεις

Οι μέθοδοι GARCH<sup>43</sup> προσπαθούν να εκτιμήσουν τις διασπορές και τις συνδιασπορές χρησιμοποιώντας ένα μοντέλο εκτίμησης της παρακάτω μορφής:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \alpha_2 r_{t-2}^2 + \dots + \alpha_p r_{t-p}^2 + \lambda_1 \sigma_{t-1}^2 + \lambda_2 \sigma_{t-12}^2 + \dots + \lambda_q \sigma_{t-q}^2 \quad (25)$$

Το παραπάνω μοντέλο είναι ένα GARCH(p,q) μοντέλο.

Οι συντελεστές του μοντέλου συνήθως υπολογίζονται εφαρμόζοντας την μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει το GARCH(1,1) μοντέλο.

---

<sup>43</sup> Τα μοντέλα ARCH παρουσιάστηκαν από τον R. Engle το 1982 (“Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of U.K. inflation”, *Econometrica*, vol. 50, pp. 987-1008). Η γενίκευση των μοντέλων αυτών (GARCH) παρουσιάστηκε από τον Tim Bollerslev το 1986 (“Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity”, *Journal of Econometrics*, vol. 31, pp. 307-327)

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \lambda_1 \sigma_{t-1}^2 \quad (26)$$

Εδώ αν υποθέσουμε ότι το  $\sigma$  δε μεταβάλλεται με το χρόνο έχουμε

$$\sigma^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \lambda_1} \quad (27)$$

Άρα πρέπει  $\alpha_1 + \lambda_1 < 1$ . Το άθροισμα  $\alpha_1 + \lambda_1$  ονομάζεται επιμονή (persistence) και έχει να κάνει με την ταχύτητα που οι εκτιμήσεις επανέρχονται στην προηγούμενη κατάσταση τους μετά από μία μη-κανονική παρατήρηση. Όσο πιο μεγάλη η επιμονή τόσο πιο αργά χάνεται η επίδραση της μη-κανονικής παρατήρησης<sup>44</sup>.

Τα GARCH μοντέλα επιτρέπουν τόσο μεταβλητότητα των διασπορών όσο και ομαδοποίηση των διασπορών.

#### 2.7.1.4.5. Εκθετικά σταθμισμένοι κινητοί μέσοι (Exponentially Weighted Moving Average)

Τη μεθοδολογία αυτή την ακολουθεί η JP Morgan<sup>45</sup>. Η μέθοδος χρησιμοποιεί το παρακάτω μοντέλο:

$$\sigma_t^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1 - \lambda) r_{t-1}^2 \quad (28)$$

Η παράμετρος  $\lambda$  καλείται συντελεστής αποδυνάμωσης (decay factor).

Η EWMA μεθοδολογία είναι μια ειδική περίπτωση GARCH(1,1) με  $\alpha_0=0$  και  $\alpha_1+\lambda_1=1$

---

<sup>44</sup>“Value at Risk” Jorion, Mc Graw Hill second edition page 195

<sup>45</sup> JP Morgan’s RiskMetrics Technical Manual (1995)

Η JP Morgan χρησιμοποιεί  $\lambda=0,94$  για την εκτίμηση ημερήσιων διασπορών και συνδιασπορών και  $\lambda=0,97$  για την εκτίμηση μηνιαίων (25-ημερών) διασπορών και συνδιασπορών.

#### **2.7.1.4.6. Υπονοούμενες διασπορές και συνδιασπορές (Implied Volatilities and Correlations)**

Ένας άλλος τρόπος για να υπολογιστούν οι διασπορές και συνδιασπορές είναι με τη χρήση των τιμών των δικαιωμάτων. Οι τιμές των δικαιωμάτων αυξάνονται με την αύξηση της διασποράς των τιμών των υποκείμενων μέσων ή και των συνδιασπορών των υποκείμενων μέσων όταν πρόκειται για σύνθετα δικαιώματα. Έτσι κάθε χρονική στιγμή η τιμή των δικαιωμάτων αντικατοπτρίζει την άποψη της αγοράς για τις τιμές των διασπορών και των συνδιασπορών των τιμών των υποκείμενων μέσων.

Γνωρίζοντας τις τιμές των δικαιωμάτων μπορούμε να υπολογίσουμε τις διασπορές και συνδιασπορές των τιμών των υποκείμενων μέσων αντιστρέφοντας την φόρμουλα Black-Scholes<sup>46</sup>. Θα πρέπει να προσεχθεί το γεγονός ότι οι εκτιμήσεις των διασπορών και συνδιασπορών που παίρνουμε μ' αυτήν τη μέθοδο είναι οι μέσες διασπορές και συνδιασπορές μέχρι τη λήξη του δικαιώματος και όχι οι διασπορές και συνδιασπορές της επόμενης ημέρας.

#### **2.7.2. Ιστορική προσομοίωση (Historical Simulation)**

Η μέθοδος της ιστορικής προσομοίωσης βασίζεται σε ιστορικές αποδόσεις των συστατικών του χαρτοφυλακίου για τον υπολογισμό των ιστορικών αποδόσεων του χαρτοφυλακίου.

Πιο συγκεκριμένα η μέθοδος της ιστορικής προσομοίωσης συνίσταται στα ακόλουθα:

- Συλλογή ιστορικών αποδόσεων των συστατικών του χαρτοφυλακίου.
- Χρησιμοποίηση των ιστορικών αποδόσεων των συστατικών και των θέσεων του χαρτοφυλακίου για τον υπολογισμό των ιστορικών αποδόσεων του χαρτοφυλακίου και της ιστορικής κατανομής των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου.

---

<sup>46</sup> Η αντιστροφή δεν είναι εφικτή με αναλυτική μέθοδο για το λόγο αυτό χρησιμοποιούνται αριθμητικές μέθοδοι.

- Εκτίμηση του VaR με τη χρήση των ιστορικών αποδόσεων του χαρτοφυλακίου.

Η βασικότερη παραδοχή που κάνουμε όταν χρησιμοποιούμε την ιστορική προσομοίωση είναι ότι οι μελλοντικές αποδόσεις θα εξακολουθήσουν να συμπεριφέρονται όπως οι ιστορικές αποδόσεις. Αυτό όμως δεν είναι πάντοτε έτσι, πχ. πριν την κρίση του ERM (1992) η ιστορική προσομοίωση δε θα μπορούσε να προβλέψει τη μεταβλητότητα κατά τη διάρκεια της κρίσης καθώς οι ισοτιμίες ήταν σταθερές για πολύ καιρό. Όμως οι αγορές περίμεναν μεγάλες αλλαγές στις ισοτιμίες λόγω της διατήρησης των υψηλών επιτοκίων στη Γερμανία.

### **Πλεονεκτήματα:**

- Είναι εύκολη στην υλοποίηση.
- Δεν εξαρτάται από υποθέσεις για τις κατανομές των αποδόσεων.
- Δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε διασπορές και συνδιασπορές των αποδόσεων.
- Εφαρμόζεται για όλα τα προϊόντα και για όλες τις θέσεις λαμβάνοντας υπόψη όλους τους πιθανούς κινδύνους αγοράς.
- Ο υπολογισμός του VaR μπορεί να γίνει για οποιαδήποτε χρονική περίοδο.
- Λαμβάνει υπόψη πιθανές παχιές ουρές.
- Σαν υποπροϊόν παράγει την ιστορική κατανομή των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου που μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για άλλους λόγους.

### **Μειονεκτήματα:**

- Χρειαζόμαστε αρκετά μεγάλη ιστορικότητα για να έχουμε αξιόπιστα αποτελέσματα. Η εύρεση των ιστορικών στοιχείων είναι δύσκολη ιδίως για νέα προϊόντα.
- Η μέθοδος καθυστερεί να αποτυπώσει αλλαγές στην συμπεριφορά των αποδόσεων καθώς το πλήθος των ιστορικών παρατηρήσεων πρέπει να είναι αρκετά μεγάλο και έτσι οι νέες παρατηρήσεις (που θα μπορούσαν να αποτυπώσουν την αλλαγή) αργούν να επηρεάσουν την ιστορική κατανομή των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου και έτσι να μεταβάλουν το VaR.
- Η μέθοδος δίνει την ίδια βαρύτητα σε όλες τις παρατηρήσεις με αποτέλεσμα να επηρεάζεται η ιστορική κατανομή των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου όταν μια ασυνήθιστα μεγάλη παρατήρηση βγαίνει από τις παρατηρήσεις.

- Η μέθοδος είναι υπολογιστικά επίπονη για μεγάλα χαρτοφυλάκια.

Το βασικό πρόβλημα της ιστορικής προσομοίωσης είναι ότι ιστορικές παρατηρήσεις θα πρέπει να είναι ανεξάρτητες και η κατανομή τους να είναι σταθερή (stationary). Στη συνέχεια αναφέρονται τρεις μέθοδοι που αποσκοπούν στο να αντιμετωπίσουν το πρόβλημα της μη σταθερής κατανομής των αποδόσεων.

### 2.7.2.1. Η μέθοδος των Boudoukh, Richardson και Whitelaw

Οι Boudoukh, Richardson, και Whitelaw (1998) προσπάθησαν να συνδυάσουν την ιστορική προσομοίωση και τη μέθοδο της RiskMetrics. Δίνουν διαφορετική βαρύτητα στις ιστορικές παρατηρήσεις μειώνοντας την βαρύτητα όσο προχωρούμε στο παρελθόν. Η προσέγγιση αυτή αμβλύνει το πρόβλημα της καθυστερημένης αποτύπωσης των αλλαγών στην συμπεριφορά των αποδόσεων. Ακόμη μετριάξει το πρόβλημα του επηρεασμού της ιστορικής κατανομής των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου όταν μια ασυνήθιστα μεγάλη παρατήρηση βγει από τις παρατηρήσεις

Η μέθοδος τους συνίσταται σε τρία βήματα:

**Βήμα 1:** Έστω  $R(t)$  η απόδοση από τη χρονική στιγμή  $t-1$  στην χρονική στιγμή  $t$ . Σε κάθε μία από τις  $K$  πιο πρόσφατα αποδόσεις:  $R(t)$ ,  $R(t-1)$ , ...,  $R(t-K+1)$ , αντιστοιχίζονται τα βάρη  $[(1-\lambda)/(1-\lambda)^K]$ ,  $[(1-\lambda)/(1-\lambda)^K]\lambda$ , ...,  $[(1-\lambda)/(1-\lambda)^K]\lambda^{(K-1)}$  αντίστοιχα. Η σταθερά  $[(1-\lambda)/(1-\lambda)^K]$  διασφαλίζει απλά ότι τα βάρη αθροίζονται στη μονάδα.

**Βήμα 2:** Ταξινομήσε τις αποδόσεις σε αύξουσα σειρά.

**Βήμα 3:** Για να υπολογίσεις το  $\chi\%$  VaR του χαρτοφυλακίου, ξεκίνα από τη μικρότερη απόδοση και συνέχισε να συσσωρεύεις τα βάρη μέχρι να φτάσεις το  $\chi\%$ . Γραμμική παρεμβολή χρησιμοποιείται ανάμεσα σε γειτονικά σημεία για να επιτευχθεί ακριβώς το  $\chi\%$ .

### 2.7.2.2. Η μέθοδος των Hull και White

Οι Hull και White το 1998 παρουσίασαν μία νέα μέθοδο που όπως και η μέθοδος των Boudoukh, Richardson, και Whitelaw προσπαθεί να συνδυάσει την ιστορική προσομοίωση και τη μέθοδο της RiskMetrics. Οι Hull και White ξεκινάν από την παρατήρηση ότι η κατανομή των αποδόσεων όταν κλιμακωθεί (scale) από μια εκτίμηση της διασποράς της, συχνά είναι σταθερή. Έτσι προτείνουν τον μετασχηματισμό της  $h_t$  απόδοσης με βάση την εξίσωση (29).

$$h_t^* = \sigma_N \frac{h_t}{\sigma_t} \quad (29)$$

Με  $\sigma_t^2$  να είναι η ιστορική GARCH/EWMA εκτίμηση της διασποράς της ημερήσιας απόδοσης για την ημέρα  $t$  με βάση τα στοιχεία της ημέρας  $t-1$  και  $\sigma_N^2$  να είναι η ιστορική GARCH/EWMA εκτίμηση της διασποράς της ημερήσιας απόδοσης για την ημέρα  $N$  με βάση τα στοιχεία της ημέρας  $N-1$ .

$$\sigma_t^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1 - \lambda) h_{t-1}^2 \quad (30)$$

Στη συνέχεια το VaR υπολογίζεται με βάση τις  $h_j^*$ .

### 2.7.2.3. Η μέθοδος Filtered Historical Simulation των Barone-Adesi, Giannopoulos και Vosper

Οι Barone-Adesi, Giannopoulos και Vosper ξεκινούν από την παρατήρηση ότι για να κάνουμε τις ιστορικές μας παρατηρήσεις ανεξάρτητες και να προέρχονται από την ίδια κατανομή πρέπει να αφαιρέσουμε οποιεσδήποτε γραμμικές συσχετίσεις και συστάδες διασποράς (volatility clusters) υπάρχουν στο δείγμα. Οι γραμμικές συσχετίσεις μπορούν να αφαιρεθούν προσθέτοντας έναν MA (moving Average) όρο στην εξαρτημένη

εξίσωση του μέσου. Για να αφαιρεθούν οι συστάδες διασποράς είναι απαραίτητο να μοντελοποιήσουμε τη διαδικασία που τις γεννάει. Έτσι πρότειναν την εύρεση των συστάδων διασποράς μοντελοποιώντας τις αποδόσεις σαν GARCH διαδικασία. Επιπλέον πρότειναν την εισαγωγή και ενός MA όρου όταν χρειάζεται για να εξαλειφθεί οποιαδήποτε σειριακή συσχέτιση.

### 2.7.3. Προσομοίωση Monte Carlo και παρόμοιες μέθοδοι

Στην προσομοίωση Monte Carlo αντικειμενικός μας σκοπός είναι να προσομοιάσουμε τη стоχαστική διαδικασία που διέπει την εξέλιξη των τιμών των συστατικών του χαρτοφυλακίου. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε τη μελλοντική αξία των συστατικών του χαρτοφυλακίου μας, άρα και τη μελλοντική αξία του χαρτοφυλακίου. Αν επαναληφθεί αυτό πολλές φορές είναι εφικτή η δημιουργία της κατανομής της μελλοντικής αξίας του χαρτοφυλακίου και ο υπολογισμός του VaR του χαρτοφυλακίου.

Τα βήματα που ακολουθούμε στη διαδικασία προσομοίωσης Monte Carlo είναι τα παρακάτω:

- Αποφασίζουμε ποιες στοχαστικές διαδικασίες θα χρησιμοποιήσουμε για να προσομοιάσουμε την εξέλιξη των τιμών των συστατικών του χαρτοφυλακίου μας. Κάθε μια διαδικασία θα μας δίνει την μεταβολή της τιμής ενός συστατικού για μεταβολές του χρόνου.
- Χωρίζουμε το χρονικό ορίζοντα της πρόβλεψης του VaR σε  $n$  ίσα διαδοχικά χρονικά διαστήματα.
- Εφαρμόζουμε τις στοχαστικές διαδικασίες προσομοίωσης της εξέλιξης των τιμών των προϊόντων διαδοχικά για κάθε ένα από τα  $n$  χρονικά διαστήματα. Έτσι υπολογίζουμε την τιμή του προϊόντος στο τέλος του χρονικού ορίζοντα υπολογισμού του VaR (τιμή του προϊόντος μετά και την εφαρμογή στην στοχαστική διαδικασία και του  $n$ -οστού χρονικού διαστήματος). Χρησιμοποιούμε τις τιμές των προϊόντων (συστατικών) για να υπολογίσουμε την αξία του χαρτοφυλακίου.
- Επαναλαμβάνουμε το προηγούμενο βήμα πολλές φορές (πχ. 10.000 φορές).

- Χρησιμοποιούμε τις αξίες του χαρτοφυλακίου που προέκυψαν από τις επαναλήψεις της διαδικασίας προσομοίωσης για την κατασκευή της κατανομής της μελλοντικής αξίας του χαρτοφυλακίου.
- Υπολογίζουμε το VaR με τη βοήθεια της κατανομής της μελλοντικής αξίας του χαρτοφυλακίου που κατασκευάσαμε στο προηγούμενο βήμα.

### 2.7.3.1. Διαδικασίες προσομοίωσης της εξέλιξης των τιμών των προϊόντων

#### 2.7.3.1.1. Geometric Brownian Motion

Μια στοχαστική διαδικασία που χρησιμοποιείται συχνά για την προσομοίωση των τιμών ενός προϊόντος είναι η Geometric Brownian Motion (GBM).

Η αναλυτική της μορφή είναι:

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dZ_t \quad (31)$$

$S_t \rightarrow$  η τιμή του προϊόντος τη χρονική στιγμή  $t$

$dZ_t \rightarrow$  ακολουθεί  $N(0, dt)$

Αν τα  $\mu_t$  και  $\sigma_t$  θεωρήσουμε ότι είναι σταθερά<sup>47</sup> και ίσα με  $\mu$  και  $\sigma$  αντίστοιχα και μετασχηματίσουμε τη  $dZ_t$  σε  $\varepsilon(dt)^{1/2}$  με  $\varepsilon$  να ακολουθεί  $N(0,1)$  έχουμε:

$$(31) \Rightarrow dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t \varepsilon \sqrt{dt} \quad (32)$$

Άρα για μικρές μεταβολές του χρόνου  $dt$  έχουμε βρει μια σχέση που μας δίνει τις μεταβολές της τιμής του προϊόντος  $dS_t$  σε σχέση με την τρέχουσα τιμή  $S_t$  και μιας τυχαίας μεταβλητής  $\varepsilon$  που ακολουθεί  $N(0,1)$ <sup>48</sup>.

---

<sup>47</sup> Τα  $\mu_t$  και  $\sigma_t$  στη γενική περίπτωση θα μπορούσαν να υπολογίζονται με μία διαδικασία προσομοίωσης.

<sup>48</sup> Έτσι το πρόβλημα της προσομοίωσης της μεταβολής των τιμών του προϊόντος για μικρά χρονικά διαστήματα γίνεται ισοδύναμο με την επιλογή τυχαίων τιμών από τη  $N(0,1)$ . Αυτό επιτυγχάνεται με τη βοήθεια τυχαίων αριθμών.



Από τη (32) προκύπτει ότι η μέση τιμή της  $dS_t$  είναι  $\mu dt$  και η διασπορά της είναι  $\sigma^2 dt$ .

### 2.7.3.1.2. Χρήση της GBM για προσομοίωση της εξέλιξης των τιμών πολλών προϊόντων

Με τη βοήθεια της GBM μπορούμε να προσομοιώσουμε και την διακύμανση των τιμών πολλών προϊόντων μαζί.

$$dS_{t,j} = \mu S_{t,j} dt + \sigma S_{t,j} \varepsilon_j \sqrt{dt} \quad (33)$$

Εδώ μπορούμε να διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Οι μεταβολές των τιμών διαφορετικών προϊόντων να μη συσχετίζονται μεταξύ τους δηλαδή τα  $\varepsilon_j$  να είναι ασυσχέτιστα μεταξύ τους.
- Οι μεταβολές των τιμών διαφορετικών προϊόντων να συσχετίζονται μεταξύ τους δηλαδή  $\text{cov}(\varepsilon_j, \varepsilon_i) \neq 0$  με  $j \neq i$ .

Αν θέσουμε  $\varepsilon = (\varepsilon_j)$  το διάνυσμα των  $\varepsilon_j$ .

Τότε αν τα  $\varepsilon_j$  συσχετίζονται μεταξύ τους έχουμε ότι  $E(\varepsilon\varepsilon') = R$ .

Ο  $R$  είναι συμμετρικός πίνακας και μπορεί να γραφτεί με τη μορφή<sup>49</sup>  $R = TT'$

---

<sup>49</sup> Παραγοντοποίηση Cholesky

Τότε αν πάρουμε  $\eta=(\eta_i)$ , με  $\eta_i$  να ακολουθούν τη  $N(0,1)$  και  $\text{Cov}(\eta_i,\eta_j)=0$  για  $j \neq i$  και θέσουμε  $\varepsilon=\Gamma\eta$  έχουμε υπολογίσει το  $\varepsilon$  έτσι ώστε τα  $\varepsilon_j$  να ακολουθούν την  $N(0,1)$  και  $E(\varepsilon\varepsilon')=R$ .

### 2.7.3.2. Άλλα μοντέλα προσομοίωσης της εξέλιξης των τιμών

Το GBM προσομοιώνει καλά την εξέλιξη των τιμών των μετοχών και των ισοτιμιών αλλά δεν μπορεί να προσομοιώσει καλά την εξέλιξη των τιμών των ομολόγων και των εντόκων γραμματίων.

Δυο είναι οι ιδιαιτερότητες των ομολόγων και των εντόκων γραμματίων που δεν προσομοιώνονται από την GBM

- Στη λήξη τους η αξία τους είναι προκαθορισμένη.
- Οι μεταβολές στις τιμές τους οφείλονται στη μεταβολή των επιτοκίων. Τα επιτόκια όμως έχει παρατηρηθεί<sup>50</sup> ότι κινούνται γύρω από μια μέση τιμή, έτσι μεγάλη απομάκρυνση από αυτή τη μέση τιμή συνεπάγεται τάση για αντιστροφή της εξέλιξης των τιμών των επιτοκίων. Η GBM όμως προσομοιώνει τυχαίο περίπατο και όχι επαναφορά στη μέση τιμή.

Η γενική μορφή της διαδικασίας που χρησιμοποιείται για την προσομοίωση των επιτοκίων είναι η:

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma r_t^\gamma dz_t \quad (34)$$

Για  $\gamma=0$  η διαδικασία<sup>51</sup> περιγράφει κανονικά κατανομημένες μεταβολές στα επιτόκια.

Για  $\gamma=1$  η διαδικασία είναι lognormal.

---

<sup>50</sup>«Value at Risk» Jorion, Mc Graw Hill second edition

<sup>51</sup> Vasicek (1977)

Η διαδικασία αυτή μπορεί να γενικευτεί για πάνω από ένα παράγοντες κινδύνου με ανάλογο τρόπο με αυτόν για τη GBM.

Πχ. οι Brennan και Schwartz (1979) πρότειναν το παρακάτω μοντέλο δύο παραγόντων  $r$  (βραχυχρόνια επιτόκια) και  $l$  (μακροχρόνια επιτόκια).

$$\begin{aligned} dr_t &= \kappa_1(\theta_1 - r_t)dt + \sigma_1 r_t^\gamma dz_{t,1} \\ dl_t &= \kappa_2(\theta_2 - l_t)dt + \sigma_2 l_t^\gamma dz_{t,2} \end{aligned} \quad (35)$$

Στο παραπάνω μοντέλο μπορούμε να ενσωματώσουμε δικλείδα ασφαλείας που θα μας εξασφαλίσει ότι τα επιτόκια  $r$  δε θα απομακρυνθούν πολύ από τα επιτόκια  $l$ .

$$dr_t = \kappa_1(\theta_1 - (r_t - l_t))dt + \sigma_1 r_t^\gamma dz_{t,1} \quad (36)$$

Οι δικλείδες ασφαλείας θα μπορούσαν να γενικευτούν και σε μοντέλα με περισσότερους παράγοντες κινδύνου.

### 2.7.3.3. Ακρίβεια και επιτάχυνση των μοντέλων

Η ακρίβεια της μεθόδου αυξάνεται καθώς αυξάνεται το πλήθος των επαναλήψεων. Δυστυχώς όταν αυξάνονται τα συστατικά του χαρτοφυλακίου είναι δύσκολο να έχουμε πολλές επαναλήψεις καθώς οι υπολογισμοί είναι πολύ χρονοβόροι. Για να αντιμετωπιστεί αυτό το πρόβλημα έχουν προταθεί διάφοροι τρόποι επιτάχυνσης των υπολογισμών που εκτελούν τα μοντέλα.

Σύμφωνα με την **τεχνική της αντίθετης μεταβλητής** το πλήθος των επαναλήψεων μπορεί να διπλασιαστεί εάν χρησιμοποιήσουμε εκτός από τις μεταβλητές  $\varepsilon$  και τις  $-\varepsilon$ . Βέβαια το κόστος του υπολογισμού των τιμών των συστατικών του χαρτοφυλακίου καθώς και της αξίας του χαρτοφυλακίου διπλασιάζεται.

Ο **Glasserman (1999)** παρουσιάζει διάφορες τεχνικές που βασίζονται στο γεγονός ότι για τον υπολογισμό του VaR δεν ενδιαφερόμαστε να υπολογίσουμε το σύνολο της μελλοντικής κατανομής της αξίας του χαρτοφυλακίου μας αλλά τις ουρές της.

Η μέθοδος **Quasi – Monte Carlo** η οποία διαφέρει από την απλή Monte Carlo στον τρόπο με τον οποίο επιλέγονται τα  $\varepsilon$ . Στην απλή μέθοδο Monte Carlo η επιλογή των  $\varepsilon$  γίνεται εντελώς τυχαία με τη βοήθεια τυχαίων αριθμών. Στην Quasi-Monte Carlo η επιλογή των  $\varepsilon$  γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε να καλυφθεί όσο το δυνατό πιο συμμετρικά ο N-διάστατος χώρος από τον οποίο παράγονται τα  $\varepsilon$ . Σκοπός της μεθόδου είναι να βελτιώσει την ακρίβεια σε σχέση με το πλήθος των επαναλήψεων.

#### **2.7.3.4. Bootstrap μέθοδος**

Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή οι μελλοντικές αποδόσεις ενός προϊόντος επιλέγονται τυχαία από ένα σύνολο ιστορικών αποδόσεων του προϊόντος.

Το πλεονέκτημα της μεθόδου Bootstrap είναι ότι δε χρειάζεται να καθορίσουμε μια στοχαστική διαδικασία βάση της οποίας μεταβάλλονται οι τιμές του προϊόντος, άρα δε διατρέχουμε κίνδυνο το μοντέλο ή οι παράμετροι του να είναι λανθασμένοι. Ακόμη επειδή οι μελλοντικές αποδόσεις πηγάζουν κατευθείαν από τις ιστορικές αποδόσεις έχουν ενσωματωμένες οποιεσδήποτε παρεκκλίσεις από την κανονικότητα είχαμε στο παρελθόν.

Η ακρίβεια της μεθόδου αυξάνεται με την αύξηση του πλήθους των ιστορικών αποδόσεων και του πλήθους των επαναλήψεων.

Βέβαια εδώ έχουμε υποθέσει ότι οι ημερήσιες αποδόσεις είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Αν θα θέλαμε να υπάρχει εξάρτηση μεταξύ τους θα μπορούσαμε να μετασχηματίσουμε

τις ημερήσιες αποδόσεις με τη χρήση κάποιου μοντέλου πχ.  $\varepsilon_t = r_t / (h_t)^{1/2}$  με  $h_t$  να είναι η δεσμευμένη διασπορά από μια εκτιμώμενη GARCH διαδικασία.

#### 2.7.3.5. Προσομοίωση σεναρίου

Στην προσομοίωση σεναρίου<sup>52</sup> στόχος μας είναι να μειώσουμε το πλήθος των παραγόντων κινδύνου και να απλοποιήσουμε την κατανομή των αποδόσεων τους.

Το πλήθος των παραγόντων κινδύνου μπορεί να μειωθεί με τη χρήση της τεχνικής Principal Component Analysis. Με τη βοήθεια αυτής της μεθόδου εντοπίζουμε έναν ή περισσότερους ανεξάρτητους παράγοντες που μπορούν να ερμηνεύσουν μέσα από γραμμικές συναρτήσεις όλους τους παράγοντες κινδύνου.

Στη συνέχεια επιλέγουμε το πλήθος  $M$  των διακριτών τιμών κάθε παράγοντα και αντιστοιχίζουμε στις πιθανές τιμές του στις πιθανότητες της διωνυμικής κατανομής  $B(M, 1/2)$ .

Τέλος υπολογίζουμε για κάθε συνδυασμό των πιθανών τιμών των παραγόντων την αξία του χαρτοφυλακίου και κατασκευάζουμε την κατανομή των μελλοντικών αξιών του χαρτοφυλακίου απ' όπου υπολογίζουμε το VaR

#### 2.7.4. CAViaR

Οι Robert F. Engle και Simone Manganelli το 1999<sup>53</sup> παρουσίασαν μία νέα μέθοδο εκτίμησης του VaR. Τη νέα αυτή μέθοδο την ονόμασαν CAViaR, Conditional Autoregressive VaR.

Οι κλασικές μέθοδοι υπολογισμού του VaR συνίστανται σε τρία βήματα:

- Αποτίμηση χαρτοφυλακίου.

---

<sup>52</sup> Η μέθοδος παρουσιάστηκε το 1991 από τους Zamshidian και Zhu

<sup>53</sup> "CAViaR: Conditional Value At Risk By Quantile Regression", Robert F. Engle and Simone Manganelli, National Bureau Of Economics Research, Inc., Working Paper Series, Working Paper 7341

- Εκτίμηση της κατανομής των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου.
- Υπολογισμός του VaR με βάση την εκτιμώμενη κατανομή αποδόσεων του χαρτοφυλακίου.

Η βασική διαφοροποίηση των κλασικών μεθόδων υπολογισμού του VaR εντοπίζεται στο δεύτερο βήμα, δηλαδή στον τρόπο εκτίμησης της κατανομής των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου.

Η μέθοδος CAViaR προτείνει απευθείας τον υπολογισμό του VaR στο επίπεδο εμπιστοσύνης που επιθυμούμε αντί για τον υπολογισμό της κατανομής των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου.

Ο υπολογισμός του VaR γίνεται με τη βοήθεια μιας συνάρτησης. Ο τύπος της συνάρτησης αυτής προσδιορίζεται με εμπειρικό τρόπο. Το βασικό σημείο που θα πρέπει να έχουμε υπόψη μας είναι το εμπειρικό γεγονός ότι οι διασπορές των αποδόσεων τείνουν να ομαδοποιούνται (cluster) μέσα στο χρόνο, δηλαδή ότι οι αποδόσεις τείνουν να είναι αυτοσυσχετιζόμενες. Άρα το VaR που σχετίζεται άμεσα με την κατανομή των αποδόσεων θα πρέπει να είναι και αυτό αυτοσυσχετιζόμενο. Για το λόγο αυτό προτείνεται ένας δεσμευμένος αυτοπαλιδρομούμενος προσδιορισμός (conditional autoregressive quantile) του VaR ενός συγκεκριμένου επιπέδου εμπιστοσύνης, που καλείται Conditional Autoregressive Value at Risk (CAViaR.).

Ο γενικός τύπος του CAViaR είναι:

$$VAR_t = f(x_t, \beta_\theta) = \beta_0 + \sum_{i=1}^p \beta_i VAR_{t-i} + l(\beta_{p+1}, \dots, \beta_{p+q}; \Omega_{t-1}) \quad (37)$$

$\Omega_{t-1} \rightarrow$  το σύνολο των πληροφοριών που είναι γνωστές τη χρονική στιγμή  $t$ .

Στην πράξη ο παραπάνω γενικός τύπος μπορεί να απλοποιηθεί σε ένα μοντέλο πρώτου βαθμού:

$$VAR_t = \beta_0 + \beta_1 VAR_{t-1} + l(\beta_2, y_{t-1}, VAR_{t-1}) \quad (38)$$

$y_{t-1} \rightarrow$  η απόδοση του χαρτοφυλακίου που αντιστοιχούσε στο  $VAR_{t-1}$ .

Ο αυτοπαλινδρομούμενος όρος  $\beta_1 VAR_{t-1}$  εξασφαλίζει ότι το VaR μεταβάλλεται ομαλά με το πέρασμα του χρόνου.

Ο ρόλος του  $I(\beta_2, y_{t-1}, VAR_{t-1})$  εξασφαλίζει τη σύνδεση του  $VAR_t$  με το  $y_{t-1}$ . Δηλαδή μετράει πόσο πολύ πρέπει να μεταβληθεί το VaR με βάση την απόδοση  $y$ . Θα περιμέναμε το VaR να αυξάνεται όταν το  $y$  είναι πολύ αρνητικό, καθώς μια πολύ κακή ημέρα αυξάνει την πιθανότητα μιας ακόμη κακής ημέρας. Ακόμη μια πολύ μεγάλη απόδοση θα αύξανε το VaR σε αντιστοιχία με τα μοντέλα που βασίζονται στη διασπορά.

Οι Engle και Manganelli δοκιμάζουν 6 συναρτήσεις CAViaR:

#### **Adaptive:**

$$VAR_t = VAR_{t-1} + \beta[I(y_{t-1} \leq VAR_{t-1}) - \theta] \quad (39)$$

#### **Proportional Symmetric Adaptive:**

$$VAR_t = VAR_{t-1} + \beta_1 \max(|y_{t-1}| - VAR_{t-1}, 0) - \beta_2 \min(|y_{t-1}| - VAR_{t-1}, 0) \quad (40)$$

#### **Symmetric Absolute Value:**

$$VAR_t = \beta_0 + \beta_1 VAR_{t-1} + \beta_2 |y_{t-1}| \quad (41)$$

#### **Asymmetric Absolute Value:**

$$VAR_t = \beta_0 + \beta_1 VAR_{t-1} + \beta_2 |y_{t-1} - \beta_3| \quad (42)$$

### Asymmetric Slope:

$$VAR_t = \beta_0 + \beta_1 VAR_{t-1} + \beta_2 \max(y_{t-1}, 0) - \beta_3 \min(y_{t-1}, 0) \quad (43)$$

### Indirect GARCH(1,1):

$$VAR_t = (\beta_1 + \beta_2 VAR_{t-1}^2 + \beta_3 y_{t-1}^2)^{1/2} \quad (44)$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιούν Regression Quantile μοντέλα και βρίσκουν ότι οι παράμετροι  $\beta$  είναι η λύση της:

$$\max_{\beta_\theta} \frac{\sum_{t=1}^n \{ [I(y_t < f(x_t, \beta_\theta)) - \theta] [y_t - f(x_t, \beta_\theta)] \}}{n} \quad (45)$$

Την εύρεση των  $\beta$  που μεγιστοποιούν την παραπάνω συνάρτηση τα υπολογίζουν με τη χρήση ενός γενετικού αλγορίθμου, του Differential Evolutionary Genetic Algorithm των Price and Storn (1997).

Τον έλεγχο της υπόθεσης ότι τα  $\beta=0$  τον κάνουν με τη χρήση των στατιστικών LM και Wald<sup>54</sup>.

Τέλος για τον έλεγχο του μοντέλου ορίζουν τη συνάρτηση:

$$W_n \equiv \frac{n}{\theta(1-\theta)} [\hat{g}(0)]^2 (R\hat{\beta}_\theta - r) [R\hat{C}_n^{-1} A_n \hat{C}_n^{-1} R']^{-1} (R\hat{\beta}_\theta - r) \sim X^2_q$$

$$LM_n \equiv dn(\tilde{\beta}_\theta)' \tilde{C}_n^{-1} R' [R\tilde{C}_n^{-1} \tilde{A}_n \tilde{C}_n^{-1} R']^{-1} R\tilde{C}_n^{-1} d_n(\tilde{\beta}_\theta) \sim X^2_q$$

$$^{54} \hat{A}_n = n^{-1} \sum \nabla f_t(\hat{\beta}_\theta)' \nabla f_t(\hat{\beta}_\theta)$$

$$\hat{C}_n = n^{-1} \sum [f(x_t, \hat{\beta}_\theta)]^{-1} \nabla f_t(\hat{\beta}_\theta)' \nabla f_t(\hat{\beta}_\theta)$$

$$d_n(\tilde{\beta}_\theta) = n^{-1/2} \sum \nabla f_t(\tilde{\beta}_\theta)' H\tilde{u}_t(\tilde{\beta}_\theta)$$



$$Hit_{\theta} \equiv I(y_t < -VAR_t) - \theta \quad (46)$$

Στη συνέχεια τρέχουν την παλινδρόμηση:

$$Hit_t = \delta_0 + \delta_1 Hit_{t-1} + \dots + \delta_p Hit_{p-1} + \delta_{p+1} VAR_t + \delta_{p+2} I_{year1,t} + \dots + \delta_{p+1+n} I_{yearn,t} + u_t \quad (47)$$

Και με μορφή πινάκων:

$$Hit_t = X\delta + u_t, \quad ut = \begin{cases} -\theta & prob(1-\theta) \\ (1-\theta) & prob\theta \end{cases} \quad (48)$$

Για να είναι καλό το μοντέλο μας θα πρέπει το  $Hit_t$  να μην εξαρτάται από καμία από αυτές τις παραμέτρους άρα θα πρέπει να αποδεχτούμε την υπόθεση  $\delta=0$ .

Ο έλεγχος της υπόθεσης  $\delta=0$  γίνεται με τη βοήθεια του Dynamic Quantile:

$$\frac{\hat{\delta}_{OLS}' X' X \hat{\delta}_{OLS}}{\theta(1-\theta)} \sim X^2(p+n+2) \quad (49)$$

Για να ελέγξουν τη μέθοδο προσδιορισμού των  $\beta$  (για υπολογισμό του VaR σε επίπεδα εμπιστοσύνης 0.1%, 1%, 5% και 25%) έκαναν Monte Carlo προσομοίωση<sup>55</sup> που έβγαλε αρκετά καλά αποτελέσματα εκτός από την περίπτωση του επιπέδου εμπιστοσύνης 0.1%.

Τέλος χρησιμοποίησαν 3392 ημερήσιες παρατηρήσεις για την Genral Motors, την IBM και τον S&P 500 για να δοκιμάσουν τη μέθοδο. Χρησιμοποίησαν 2892 παρατηρήσεις για την εκτίμηση των παραμέτρων των μοντέλων CAViaR για επίπεδα εμπιστοσύνης 0.1%, 1%, 5% και 25%. Τις υπόλοιπες 500 παρατηρήσεις τις χρησιμοποίησαν για Backtesting.

<sup>55</sup> 1000 δείγματα των 3000 παρατηρήσεων με τη χρήση GARCH(1,1) και παραμέτρους (0.3, 0.05, 0.9)

Τα αποτελέσματα έδειξαν πως όλες οι συναρτήσεις CAViaR με εξαίρεση τις Adaptive και Proportional Symmetric Adaptive συμπεριφέρονται πολύ καλά ακόμα και στη μεγάλη πτώση του 1987.

### 2.7.5. Μέθοδος Extreme Value

Η μέθοδος αυτή παρουσιάστηκε το 1997 από τον Francois M Longin<sup>56</sup>. Βασίζεται στις ακραίες αρνητικές αποδόσεις του χαρτοφυλακίου που οφείλονται είτε σε ακραίες κινήσεις των τιμών λόγω διόρθωσης των αγορών είτε σε κατάρρευση του συστήματος. Το ενδιαφέρον με τις ακραίες τιμές είναι ότι η κατανομή τους δεν εξαρτάται από την κατανομή των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου. Έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε το VaR του χαρτοφυλακίου χωρίς να χρειάζεται να υπολογίσουμε την κατανομή των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου.

Η διαδικασία υπολογισμού του VaR χαρτοφυλακίου με τη μέθοδο Extreme Value συνίσταται στα παρακάτω βήματα:

1. Επιλέγουμε τη συχνότητα των αποδόσεων  $f$  που θα χρησιμοποιήσουμε πχ. ημερήσιες.
2. Κατασκευάζουμε την ιστορική χρονοσειρά των αποδόσεων  $R_t$  με  $t=1,2,\dots,N^{obs}$ .
3. Επιλέγουμε την περίοδο επιλογής των ελαχίστων αποδόσεων  $T$  ( $T=nf$ ).
4. Βρίσκουμε τις ελάχιστες αποδόσεις  $Z_n$ . χωρίζουμε τη χρονοσειρά των αποδόσεων σε διαδοχικά διαστήματα μήκους  $n$ . τότε  $Z_{n,j}=\text{minimal}(R_{n*(j-1)+1}, R_{n*(j-1)+2}, \dots, R_{n*j})$ . Το πλήθος των  $Z_n$  είναι  $N=[N^{obs}/n]$
5. Υπολογίζουμε τις παραμέτρους της ασυμπτωτικής κατανομής  $F_{Z_n}^{asympt}$  των ελαχίστων<sup>57</sup>. Οι τρεις παράμετροι  $\alpha_n$ ,  $\beta_n$ ,  $\tau$  και  $\theta$  υπολογίζονται με μεθόδους μέγιστης πιθανοφάνειας. Σε περίπτωση που τα δεδομένα μας δεν παρουσιάζουν ισχυρή συσχέτιση η παράμετρος  $\theta$  μπορεί να θεωρηθεί ίση με τη μονάδα.

<sup>56</sup> "From Value At Risk to stress testing: the Extreme Value approach", Center for Economic Policy Research, Discussion Paper Series No. 2161

<sup>57</sup> 
$$F_{z_n}^{asympt}(Z) = 1 - \exp\{-1(1 + \tau Z)^{\frac{\theta}{\tau}}\}$$

$$Z = \frac{(Z_n - \beta_n)}{\alpha_n}$$

6. Έλεγχος καλής προσαρμογής της  $F_{Z_n}^{asympt}$ . Για το έλεγχο χρησιμοποιούμε μια δοκιμασία<sup>58</sup> που αναπτύχθηκε από τον Sherman (1957) και προτείνεται από τον Gumbel (1958). Αν η  $F_{Z_n}^{asympt}$  δεν περάσει τη δοκιμασία επιστρέφουμε στο βήμα 3 και επιλέγουμε πιο μεγάλο T.
7. Επιλέγουμε την τιμή της πιθανότητας  $p^{ext}$  μια ελάχιστη απόδοση να μην υπερβαίνει το VaR. η πιθανότητα  $p^{ext}$  συνδέεται με το επίπεδο σημαντικότητας  $p$  με τη σχέση  $p^{ext} = (p^n)^\theta$  με  $\theta=1$  όταν δεν έχουμε ισχυρή συσχέτιση των  $Z_{n,j}$ .
8. Υπολογίζουμε το VaR με τη χρήση της σχέσης:

$$p^{ext} = 1 - F_{Z_n}^{asympt}(-VAR) = \exp \left[ - \left( 1 + \tau \left( \frac{-VAR - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^\tau \right]^{\frac{1}{\tau}} \Rightarrow \quad (50)$$

$$VAR = -\beta_n + \frac{\alpha_n}{\tau} \left[ 1 - \left( -\ln(p^{ext}) \right)^\tau \right]$$

### 2.7.5.1. Μέθοδος Extreme Value με χρήση παραγόντων κινδύνου

Όταν το χαρτοφυλάκιο μας αναλυθεί με βάση παράγοντες κινδύνου τότε το VaR δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$VAR = \sqrt{\sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q \rho_{ij} w_i w_j VAR_i VAR_j} \quad (51)$$

$w_j \rightarrow$  τα βάρη των παραγόντων κινδύνου.

$\rho_{ij} \rightarrow$  το correlation μεταξύ των ακραίων αποδόσεων των παραγόντων κινδύνου  $i$  και  $j$ .

$VAR_j \rightarrow$  το VaR του  $j$  παράγοντα κινδύνου.

Προσοχή πρέπει να δοθεί στην επιλογή των ακραίων τιμών. Για τους παράγοντες που το  $w_j$  είναι θετικό επιλέγουμε τις ελάχιστες αποδόσεις ενώ για παράγοντες που το  $w_j$  είναι αρνητικό επιλέγουμε τις μέγιστες αποδόσεις.

<sup>58</sup> Η δοκιμασία χρησιμοποιεί τη σειρά των ταξινομημένων ελαχίστων αποδόσεων που συμβολίζονται με  $(Z_n')$ :  $Z_{n,1}' \leq Z_{n,2}' \leq \dots \leq Z_{n,N}'$ . Το στατιστικό ελέγχου είναι το:

$$\Omega_N = \frac{1}{2} \left| F_{Z_n}^{asympt}(Z_{n,i+1}') - F_{Z_n}^{asympt}(Z_{n,j}') - \frac{1}{N+1} \right|, \text{ με } F_{Z_n}^{asympt}(Z_{n,0}') = 0 \text{ και } F_{Z_n}^{asympt}(Z_{n,N+1}') = 1 \text{ με}$$

$\Omega_n$  να ακολουθεί την  $N((N/(N+1))^{N+1}, (2e-5)/(e^2N))$ .

### 2.7.5.2. Μέθοδος Extreme Value για παράγωγα

Όταν θέλουμε να υπολογίσουμε το VaR ενός παραγώγου θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε δεδομένα για τα οποία ισχύει η υπόθεση της ουδετερότητας κινδύνου (risk neutrality) που είναι απαραίτητη για τον υπολογισμό της τιμής ενός παραγώγου με βάση την φόρμουλα Black\_Scholes.

Η risk-neutral ασυμπτωτική κατανομή των ακραίων αποδόσεων διαφέρει από την ιστορική (που εμείς μπορούμε να υπολογίσουμε) μόνο ως προς την παράμετρο  $\beta_n$ .

Συγκεκριμένα για τον υπολογισμό της FZnasymp δουλεύουμε όπως προηγουμένως και στο τέλος αλλάζουμε την παράμετρο  $\beta_n$  με την  $\beta_n^* = \beta_n - (\mu - r_0)$  με  $\mu = \eta$  αναμενόμενη απόδοση και  $r_0 = r_0$  επιτόκιο χωρίς κίνδυνο για την περίοδο  $f$ .

### 2.7.5.3. Απόδοση της μεθόδου Extreme Value

Ο Longin υπολόγισε το VaR του δείκτη S&P 500 για επίπεδα εμπιστοσύνης 50%, 95% και 99%, για 1 ημέρα και για 10 ημέρες με τη χρήση των παρακάτω μεθόδων:

Ιστορική προσομοίωση.

Delta-Normal.

GARCH(1,1).

EWMA με τις παραμέτρους του RiskMetrics.

Extreme Value.

Χρησιμοποίησε δεδομένα από τον Ιανουάριο του 1962 μέχρι το Δεκέμβριο του 1993. Τα αποτελέσματα έδειξαν τα παρακάτω:

- Η μέθοδος Extreme Value δίνει πολύ καλές εκτιμήσεις του VaR σε σχέση με την ιστορική προσομοίωση σε επίπεδα σημαντικότητας 50% και 95% πράγμα που υποδηλώνει ότι η μέθοδος δουλεύει σωστά. Επιπλέον με την Extreme Value μέθοδο μπορούμε να υπολογίσουμε και το VaR σε επίπεδα σημαντικότητας 99% πράγμα που δεν είναι εφικτό με την ιστορική προσομοίωση. Άρα η Extreme Value μπορεί να αντικαταστήσει την ιστορική προσομοίωση.

- Η μεγάλη απόκλιση της Delta-Normal από την ιστορική προσομοίωση σε επίπεδο εμπιστοσύνης 95% ανέδειξε τον κίνδυνο μοντέλου που διατρέχουμε όταν κάνουμε υποθέσεις για την κατανομή των αποδόσεων. Η Extreme Value μέθοδος δεν κάνει καμία υπόθεση για την κατανομή των αποδόσεων και άρα ο κίνδυνος μοντέλου περιορίζεται αισθητά.
- Οι μικρές τιμές για το VaR που υπολογίζονται με τις μεθόδους GARCH(1,1) και EWMA οφείλονται κύρια στη φύση των μεθόδων αυτών, οι οποίες σταθμίζουν τα δεδομένα δίνοντας μεγαλύτερη βαρύτητα στις νεώτερες παρατηρήσεις. Με τις μεθόδους αυτές διατρέχουμε κίνδυνο να έχουμε μεγάλη υπέρβαση του VaR σε περίοδο κρίσης. Η μέθοδος Extreme Value επικεντρώνεται στις ακραίες τιμές άρα το VaR που εκτιμά καλύπτει και περιόδους κρίσεων.

Ένα πρόβλημα δημιουργείται όταν χρειάζεται να υπολογίσουμε την κεφαλαιακή επάρκεια με βάση τους κανόνες της επιτροπής της Βασιλείας<sup>59</sup>. Ο Longin υπολόγισε ότι για μια θετική θέση στο S&P 500 αξίας \$100 η κεφαλαιακή επάρκεια με τη μέθοδο Extreme Value είναι \$21.84 ενώ η κεφαλαιακή επάρκεια χωρίς τη χρήση του VaR είναι 12% δηλαδή \$12.

## 2.8. Έλεγχοι μοντέλων υπολογισμού VaR (Backtesting)

### 2.8.1. Ανάγκη για έλεγχο των μοντέλων υπολογισμού του VaR

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε διάφορους τρόπους υπολογισμού του VaR. Είναι πλέον ξεκάθαρο πως δεν υπάρχει ένας συγκεκριμένος κανόνας για το πως θα πρέπει να υπολογίζεται το VaR. Τα εργαλεία είναι πολλά και όλα έχουν ιδιαιτερότητες, πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα. Φτάνουμε λοιπόν στο συμπέρασμα πως ο υπολογισμός του VaR είναι μια πολύ υποκειμενική διαδικασία. Όμως τελικά μέσα από

---

$$^{59} C_t = \text{Max} \left( \text{VaR}_{t-1}, (M+m) \frac{1}{60} \sum_{j=1}^{60} \text{VaR}_{t-j} \right)$$

$C_t \rightarrow$  κεφαλαιακή επάρκεια

$M \rightarrow 3$

$m \rightarrow$  από 0 έως 1

αυτήν την υποκειμενική διαδικασία παράγεται ένα προϊόν, το VaR και όπως σε κάθε προϊόν έτσι και στο VaR η αξία του εξαρτάται από την ποιότητά του.

Η ποιότητα του VaR θα μπορούσαμε να πούμε πως είναι το πόσο καλά προσεγγίζει την θεωρητική του τιμή όπως αυτή προκύπτει από τον ορισμό του VaR. Με άλλα λόγια θα θεωρούσαμε ποιοτικό ένα VaR που θα υπολογιζόταν μέσω ενός μοντέλου που αποδεδειγμένα παράγει VaR, το οποίο με πιθανότητα ίση με το επίπεδο σημαντικότητας φράσσει τις ζημιές του χαρτοφυλακίου μας.

Άρα η ανάγκη καθορισμού της ποιότητας του VaR μας οδηγεί πίσω στη μέθοδο υπολογισμού του VaR και συγκεκριμένα στην εύρεση μεθοδολογιών ελέγχου της. Ο πιο απλός τρόπος ελέγχου ενός μοντέλου υπολογισμού του VaR είναι εκ του αποτελέσματος, έλεγχος δηλαδή του κατά πόσον το VaR που παράγεται από το συγκεκριμένο μοντέλο δίνει ένα καλό κάτω φράγμα των ζημιών του χαρτοφυλακίου για το συγκεκριμένο επίπεδο εμπιστοσύνης.

Πριν προχωρήσουμε να δούμε τις μεθόδους που χρησιμοποιούνται για τον έλεγχο των μοντέλων υπολογισμού του VaR είναι σκόπιμο να εξηγήσουμε την έννοια καλό κάτω φράγμα που αναφέρθηκε στην προηγούμενη παράγραφο.

Η έννοια καλό κάτω φράγμα έχει δύο διαστάσεις:

- Το καλό κάτω φράγμα δεν είναι μεγαλύτερο από το αναγκαίο κάτω φράγμα. Δηλαδή θα πρέπει το VaR που υπολογίζεται από ένα μοντέλο να μην είναι μεγαλύτερο από το πραγματικό VaR γιατί τότε έχουμε υπερεκτίμηση του VaR. Η υπερεκτίμηση του VaR συνεπάγεται υπερεκτίμηση του κινδύνου η οποία οδηγεί σε δέσμευση περισσότερων κεφαλαίων απ' ότι πραγματικά χρειάζονται για την κάλυψη έναντι του κινδύνου με αποτέλεσμα να έχουμε μείωση της απόδοσης του χαρτοφυλακίου.
- Το καλό κάτω φράγμα δεν είναι μικρότερο από το αναγκαίο κάτω φράγμα. Δηλαδή θα πρέπει το VaR που υπολογίζεται από ένα μοντέλο να μην είναι μικρότερο από το πραγματικό VaR γιατί τότε έχουμε υποεκτίμηση του VaR. Η υποεκτίμηση του VaR συνεπάγεται υποεκτίμηση του κινδύνου η οποία οδηγεί σε δέσμευση λιγότερων κεφαλαίων απ' ότι πραγματικά χρειάζονται για την κάλυψη έναντι του κινδύνου με αποτέλεσμα να έχουμε αύξηση της πιθανότητας χρεοκοπίας.

### 2.8.2. Αποδόσεις του χαρτοφυλακίου και έλεγχοι των μοντέλων υπολογισμού VaR

Όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο ο έλεγχος των μοντέλων υπολογισμού του VaR θα επικεντρωθεί στο κατά πόσο, η πιθανότητα, οι ζημίες του χαρτοφυλακίου να υπερβαίνουν το κάτω φράγμα, που ορίζεται από το VaR, είναι μεγαλύτερη από το επίπεδο σημαντικότητας.

Είναι προφανές πως για να κάνουμε τον παραπάνω έλεγχο χρειάζεται να γνωρίζουμε τα κέρδη και τις ζημίες (P&L) του χαρτοφυλακίου μας. Εδώ μπαίνει το ερώτημα ποια είναι τα P&L του χαρτοφυλακίου μας.

Τα P&L του χαρτοφυλακίου μας μπορούν να οριστούν με τρεις τρόπους<sup>60</sup>:

- **Πραγματικά P&L** (actual P&L) που είναι αυτά που προκύπτουν από την μεταβολή της αξίας του χαρτοφυλακίου μας, τις ενδοημερήσιες συναλλαγές και άλλα λειτουργικά κέρδη και ζημίες.
- **Υποθετικά P&L** είναι αυτά που προκύπτουν από την διαφορά στην αξία του χαρτοφυλακίου<sup>61</sup> για το οποίο υπολογίστηκε το VaR.
- **Καθαρά P&L** είναι αυτά που προκύπτουν από τα πραγματικά P&L αν αφαιρεθούν όλα τα P&L που σχετίζονται με είδη που δεν αποτιμούνται σε τιμές αγοράς (non mark-to-market items).

Οι εποπτικές αρχές επιβάλουν οι έλεγχοι να γίνονται με βάση τα πραγματικά P&L ενώ πιο σωστό θα ήταν να χρησιμοποιούσαμε τα υποθετικά P&L.

### 2.8.3. Μέθοδοι ελέγχου που βασίζονται στο ποσοστό αποτυχίας

Η πιο απλή προσέγγιση είναι να βρούμε το ποσοστό των ζημιών που υπερβαίνουν το VaR και να το συγκρίνουμε με το επίπεδο εμπιστοσύνης.

Το ποσοστό των ζημιών που υπερβαίνουν το VaR καλείται ποσοστό αποτυχίας.

---

<sup>60</sup> “Value at Risk” Jorion, Mc Graw Hill second edition page 131

<sup>61</sup> Το χαρτοφυλάκιο αυτό μπορεί να διαφέρει από το τρέχον χαρτοφυλάκιο λόγω ενδοημερήσιων συναλλαγών.

Ποσοστό αποτυχίας =  $p^* = x/N$

$x \rightarrow$  το πλήθος των περιπτώσεων για τις οποίες το ποσοστό των ζημιών υπερβαίνει το VaR

$N \rightarrow$  το πλήθος των παρατηρήσεων

Η διαδικασία εφόσον ο υπολογισμός του VaR είναι σωστός ακολουθεί μια  $B(N,c)$  (διωνυμική) με  $1-c$  το επίπεδο εμπιστοσύνης.

Όταν το  $N$  αυξάνεται, από το κεντρικό οριακό θεώρημα έχουμε ότι:

$$z = \frac{x - cN}{\sqrt{c(1-c)N}} \approx N(0,1) \quad (52)$$

Άρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το παρακάτω διάστημα εμπιστοσύνης με επίπεδο σημαντικότητας  $\beta$  (που αντιστοιχεί σε τιμή  $\alpha$  βάση των πινάκων της  $N(0,1)$ ) για τον έλεγχο και αποδοχή της υπόθεσης ότι η  $x$  ακολουθεί  $B(N,c)$ .

$$-\alpha \leq \frac{x - cN}{\sqrt{c(1-c)N}} \leq \alpha \Rightarrow -\alpha\sqrt{c(1-c)N} + cN \leq x \leq \alpha\sqrt{c(1-c)N} + cN \quad (53)$$

Ο έλεγχος της υπόθεσης ότι η  $x$  ακολουθεί  $B(N,c)$  μ' αυτόν τον τρόπο μας δίνει έλεγχο μόνο στο σφάλμα τύπου 1 δηλαδή την πιθανότητα να απορρίψουμε την υπόθεση ενώ ισχύει.

Στη γενική περίπτωση θα θέλαμε να έχουμε έναν έλεγχο που θα ελαχιστοποιούσε τόσο το σφάλμα τύπου 1 όσο και το σφάλμα τύπου 2 (δηλαδή την πιθανότητα να δεχτούμε την υπόθεση ενώ είναι λανθασμένη).

Ο Kurić (1995) ανέπτυξε έναν έλεγχο που μας παρέχει διαστήματα εμπιστοσύνης 95% ελαχιστοποιώντας τόσο το σφάλμα τύπου 1 όσο και το σφάλμα τύπου 2. Ο έλεγχος βασίζεται στην τιμή του παρακάτω στατιστικού  $LR_{uc}$ :



$$LR_{uc} = -2 \ln \left[ (1-c)^{N-x} c^x \right] + 2 \ln \left[ \left( 1 - \frac{x}{N} \right)^{N-x} \left( \frac{x}{N} \right)^x \right] \quad (54)$$

Το  $LR_{uc}$  ακολουθεί  $X^2$  με ένα βαθμό ελευθερίας.

C	Διαστήματα εμπιστοσύνης 95% αποδοχής της υπόθεσης με χρήση N(0,1)			Διαστήματα εμπιστοσύνης 95% αποδοχής της υπόθεσης με χρήση $LR_{uc}$ <sup>62</sup>		
	N=255	N=510	N=1000	N=255	N=510	N=1000
0,01	$x < 6$	$1 < x < 9$	$4 < x < 17$	$x < 7$	$1 < x < 11$	$4 < x < 17$
0,025	$2 < x < 11$	$6 < x < 19$	$16 < x < 36$	$2 < x < 12$	$6 < x < 21$	$15 < x < 36$
0,05	$7 < x < 19$	$17 < x < 34$	$38 < x < 62$	$6 < x < 21$	$16 < x < 36$	$37 < x < 65$
0,075	$12 < x < 27$	$28 < x < 49$	$61 < x < 89$	$11 < x < 28$	$27 < x < 51$	$59 < x < 92$
0,1	$17 < x < 34$	$39 < x < 63$	$84 < x < 116$	$16 < x < 36$	$38 < x < 65$	$81 < x < 120$

**Πίνακας 2-8**

Βλέπουμε πως τα μήκη των διαστημάτων μικραίνουν καθώς το πλήθος των παρατηρήσεων αυξάνεται αλλά και καθώς το VaR μετατοπίζεται δεξιότερα (c αυξάνεται). Σε όλες τις περιπτώσεις ο απλός έλεγχος με χρήση της N(0,1) δίνει στενότερα διαστήματα.

C	Μήκη διαστημάτων εμπιστοσύνης 95% αποδοχής της υπόθεσης με χρήση N(0,1)/N			Μήκη διαστημάτων εμπιστοσύνης 95% της υπόθεσης με χρήση $LR_{uc}/N$		
	N=255	N=510	N=1000	N=255	N=510	N=1000
0,01	0,0235	0,0157	0,0130	0,0275	0,0196	0,0130
0,025	0,0353	0,0255	0,0200	0,0392	0,0294	0,0210
0,05	0,0471	0,0333	0,0240	0,0588	0,0392	0,0280
0,075	0,0588	0,0412	0,0280	0,0667	0,0471	0,0330
0,1	0,0667	0,0471	0,0320	0,0784	0,0529	0,0390

**Πίνακας 2-9 Μήκη διαστημάτων εμπιστοσύνης 95% με χρήση N(0,1) και  $LR_{uc}$**

Από τους παραπάνω πίνακες φαίνεται ότι για  $c=0,01$  και  $N=255$  έχουμε διαστήματα που δε μας αφήνουν να απορρίψουμε την υπόθεση ακόμη και όταν δεν παρατηρηθεί καμία αστοχία. Δηλαδή τα διαστήματα αυτά δε μας δίνουν καμία αίσθηση του αν το VaR που

<sup>62</sup> Πηγή "Value at Risk" Jorion, Mc Graw Hill second edition page 136

υπολογίζουμε υπερεκτιμά το VaR<sup>63</sup>. Για το λόγο αυτό είναι καλό να επιλέγεται για τον υπολογισμό του VaR  $c=0,05$ .

#### 2.8.4. Μέθοδος υπό συνθήκη αποτυχιών του Christofferson

Η προηγούμενη μέθοδος ελέγχει το ποσοστό αποτυχίας σε ένα πλήθος παρατηρήσεων (πχ. 255). Η μέθοδος αυτή δε μπορεί να εντοπίσει πιθανή μεταβολή του ποσοστού αποτυχίας στη διάρκεια της ελεγχόμενης περιόδου αφού δε λαμβάνει υπόψη της τη χρονική σειρά των παρατηρήσεων. Όμως θα μας ενδιέφερε να γνωρίζουμε, αν υπάρχει, μια μεταβολή του ποσοστού αποτυχίας καθώς αυτό θα σηματοδοτούσε μια αλλαγή στην ποιότητα του VaR που υπολογίζουμε. Τελικά η λογική αντίδραση θα ήταν να εντοπίσουμε τους λόγους αυτής της αλλαγής (πχ. αύξηση της μεταβλητότητας, αλλαγή στη σύνθεση του χαρτοφυλακίου, κλπ.) και να πάρουμε τα κατάλληλα μέτρα.

Ο Cristofferson (1998) έχει προτείνει έναν έλεγχο που μας δίνει τη δυνατότητα να εντοπίζουμε μεταβολές του ποσοστού αποτυχίας. Ο έλεγχος αυτός βασίζεται στην παραδοχή ότι οι αποτυχίες θα πρέπει να είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Περιγραφή της μεθόδου:

- Κάθε ημέρα θέτουμε έναν δείκτη αποτυχίας σε 1 αν έχουμε αποτυχία (οι ζημιές υπερβαίνουν το VaR) και 0 αλλιώς.
- Υπολογίζουμε τα  $N_{ij} = \{\text{πλήθος των ημερών που είχαμε δείκτη αποτυχίας } j \text{ και την προηγούμενη ημέρα είχαμε δείκτη αποτυχίας } i\}$
- Υπολογίζουμε τα  $\pi_i = \{\text{η πιθανότητα να έχουμε αποτυχία αν την προηγούμενη ημέρα είχαμε κατάσταση } i\}$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε την τιμή του παρακάτω στατιστικού  $LR_{ind}$ :

$$LR_{ind} = -2 \ln \left[ (1 - \pi)^{N_{00} + N_{10}} \pi^{N_{01} + N_{11}} \right] + 2 \ln \left[ (1 - \pi_0)^{N_{00}} \pi_0^{N_{01}} (1 - \pi_1)^{N_{10}} \pi_1^{N_{11}} \right] \quad (55)$$

---

<sup>63</sup> Όταν το VaR υπερεκτιμηθεί αναμένουμε να έχουμε λιγότερες αστοχίες από αυτές που αντιστοιχούν στο  $c$

Τέλος υπολογίζουμε την τιμή του στατιστικού

$$LR_{cc} = LR_{uc} + LR_{ind}$$

Το  $LR_{cc}$  ακολουθεί  $X^2$  με δύο βαθμούς ελευθερίας.

Θα απορρίπταμε την υπόθεση ότι το ποσοστό αποτυχίας είναι ίσο με  $c$ , με επίπεδο σημαντικότητας 95%, αν η τιμή του  $LR_{cc}$  ήταν μεγαλύτερη του 5,99

### 2.8.5. Μέθοδος εκατοστημορίων VaR των Crnkovic-Drachman

Η βασική ιδέα πίσω από τη μέθοδο αυτή είναι να χρησιμοποιούμε τα καθημερινά P&L για να βρούμε με βάση την εκτιμώμενη κατανομή της απόδοσης του χαρτοφυλακίου μας την πιθανότητα που είχαν να συμβούν.

Περιγραφή της μεθόδου<sup>64</sup>:

- Κάθε ημέρα υπολογίζουμε την κατανομή της απόδοσης του χαρτοφυλακίου μας (αυτό το κάνουμε για να υπολογίσουμε το VaR).
- Χρησιμοποιούμε τα P&L και τη χθεσινή κατανομή της απόδοσης του χαρτοφυλακίου μας για να υπολογίσουμε την πιθανότητα (εκατοστημόριο) τα P&L να ήταν μικρότερα από τα πραγματοποιηθείσα.
- Συλλέγουμε τα εκατοστημόρια.

Αν η μέθοδος πρόβλεψης της κατανομής της απόδοσης του χαρτοφυλακίου μας δουλεύει σωστά τότε τα εκατοστημόρια θα πρέπει:

- Να ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή  $U(0,1)$ .
- Να είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

Οι Crnkovic-Drachman προτείνουν τον έλεγχο του Kuiper για την καλή προσαρμογή στην  $U(0,1)$  και το στατιστικό BDS για τον έλεγχο της ανεξαρτησίας.

---

<sup>64</sup> “Beyond Value At Risk” Kevin Dowd, page 56

Τα αποτελέσματα αυτής της μεθόδου αρχίζουν να αλλοιώνονται όταν έχουμε κάτω από 1000 παρατηρήσεις και υπάρχει σοβαρό πρόβλημα με λιγότερες από 500 παρατηρήσεις<sup>65</sup>.

### **2.8.6. Έλεγχος εκτιμούμενου διαστήματος του Christofferson**

Η μέθοδος αυτή προτάθηκε το 1991 από τον Christofferson και είναι μια γενική μέθοδος ελέγχου εκτιμούμενων διαστημάτων<sup>66</sup>. Η μέθοδος αυτή αφενός λαμβάνει υπόψη τις συνθήκες<sup>67</sup> που χρησιμοποιήθηκαν για την εξαγωγή της πρόβλεψης και αφετέρου δίνει τη δυνατότητα να ξεχωρίσουμε τις συνέπειες των δυναμικών παραγόντων από τις συνέπειες της υπόθεσης για την κατανομή πιθανοτήτων που διέπει τις αποδόσεις. Έτσι αν η πρόβλεψη μας δεν περάσει τον έλεγχο θα ξέρουμε αν αυτό οφειλόταν σε ελλιπή διαχείριση των δυναμικών παραγόντων ή σε λάθος υποθέσεις για την κατανομή πιθανοτήτων που διέπει τις αποδόσεις ή και στα δύο.

### **2.8.7. Παραμετρικά μοντέλα**

Όλοι οι παραπάνω μέθοδοι ελέγχου δεν κάνουν καμία υπόθεση για την κατανομή των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου. Τα παραμετρικά μοντέλα κάνουν την υπόθεση ότι οι αποδόσεις του χαρτοφυλακίου ακολουθούν μια συγκεκριμένη κατανομή. Η πιο απλή περίπτωση είναι η κατανομή να είναι κανονική<sup>68</sup>.

Περιγραφή μεθόδου:

- Υπολογίζουμε την ημερήσια απόδοση ανά μονάδα κινδύνου  $e_t = r_t / s_t$  (με  $s_t$  συμβολίζουμε την εκτιμηθείσα τυπική απόκλιση της κατανομής των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου).

---

<sup>65</sup> Crnkovic and Drachman, 1995 page 5

<sup>66</sup> Το VaR είναι μια πρόβλεψη διαστήματος των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου μας με τη μορφή  $[VaR, +\infty)$

<sup>67</sup> πχ. υποθέσεις για τη διασπορά.

<sup>68</sup> Για μεγάλα χαρτοφυλάκια με μεγάλη διαφοροποίηση αυτό φαίνεται να είναι αληθές “Value at Risk” Jorion, Mc Graw Hill second edition page 144

- Υπολογίζουμε τη διασπορά των  $\varepsilon$  και τη πολλαπλασιάζουμε με το πλήθος των παρατηρήσεων  $T$ .

Τότε:

$$V(\varepsilon)T \approx X^2(T) \quad (56)$$

Το γινόμενο της διασποράς των  $\varepsilon$  με το  $T$  ακολουθεί  $X^2$  με  $T$  βαθμούς ελευθερίας.

Για μεγάλο πλήθος παρατηρήσεων έχουμε το παρακάτω 95% διάστημα εμπιστοσύνης:

$$1 - 1.96\sqrt{\frac{2}{T}} < V(\varepsilon) < 1 + 1.96\sqrt{\frac{2}{T}} \quad (57)$$

Η μέθοδος αυτή μπορεί να επεκταθεί και σε κατανομές με πιο παχιές ουρές απ' ότι η κανονική κατανομή αρκεί το  $\sigma$  να αρκεί για τη μέτρηση της διασκόρπισης των παρατηρήσεων<sup>69</sup>.

Το καλό με τη μέθοδο αυτή είναι ότι έχει πολύ μικρό σφάλμα τύπου 2.

### 2.8.8. Έλεγχος εκτιμούμενης πιθανότητας του Lopez

Το πρόβλημα με τις παραπάνω μεθόδους είναι ότι έχουν μεγάλο σφάλμα τύπου 2 ιδίως όταν το δείγμα είναι μικρό. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι μέθοδοι αυτοί είναι στατιστικοί μέθοδοι. Ο Lopez (1996) πρότεινε μια μη στατιστική μέθοδο ελέγχου. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή κατασκευάζουμε μια συνάρτηση ζημίας (loss function) και χρησιμοποιούμε αυτή τη συνάρτηση για να μετρήσουμε την απόδοση του μοντέλου μας.

Περιγραφή μεθόδου:

- Κάθε ημέρα συλλέγουμε την πιθανότητα  $p_i$  να έχουμε υπέρβαση του VaR (δηλαδή 1-το επίπεδο εμπιστοσύνης)..

---

<sup>69</sup> "Value at Risk" Jorion, Mc Graw Hill second edition page 143

- Υπολογίζουμε έναν δείκτη  $I_t$  θέτοντας 1 όταν έχουμε υπέρβαση του VaR και 0 αλλιώς.
- Ορίζουμε μια συνάρτηση ζημίας (loss function)  $F$ .
- Χρησιμοποιούμε τα  $1 - p_t$  και  $I_t$  για τον υπολογισμό της τιμής της  $F$ .
- Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή της  $F$  τόσο χειρότερο είναι το μοντέλο μας.

Ο Lopez χρησιμοποιεί την παρακάτω συνάρτηση<sup>70</sup>:

$$QPS = 2 \sum_{t=1}^T \frac{(p_t - I_t)^2}{T} \quad (58)$$

$T \rightarrow$  πλήθος των παρατηρήσεων

### 2.8.9. Εποπτικές αρχές και Backtesting

Οι εποπτικές αρχές επιβάλλουν στα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα που υπολογίζουν την κεφαλαιακή τους επάρκεια με βάση το VaR να ελέγχουν την ορθότητα των μοντέλων υπολογισμού του VaR.

Όταν το μοντέλο υπολογισμού του VaR αποδειχτεί αναξιόπιστο τότε οι εποπτικές αρχές επιβάλλουν τη διόρθωση του μοντέλου. Η επιβολή της διόρθωσης γίνεται εμμέσως μέσα από τη σταδιακή αύξηση του πολλαπλασιαστικού συντελεστή<sup>71</sup>  $m$ .

Πιο συγκεκριμένα η επιτροπή της Βασιλείας επιβάλλει για τον έλεγχο των μοντέλων υπολογισμού του VaR να χρησιμοποιούνται τα P&L ενός έτους. Η μέθοδος που

---

<sup>70</sup> Quadratic Probability Score

<sup>71</sup> Ο τρόπος υπολογισμού του ελεγκτικού κεφαλαίου με βάση το VaR δίδεται από τον τύπο

$$C_t = \text{Max} \left( \text{VaR}_{t-1}, (M + m) \frac{1}{60} \sum_{j=1}^{60} \text{VaR}_{t-j} \right).$$

Ουσιαστικά αυτός ο τύπος καθορίζει ότι το ελεγκτικό κεφάλαιο

μιας ημέρας  $t$  είναι ίσο με το μέγιστο από το VaR της ημέρας  $t$  και το μέσο VaR των τελευταίων 60 ημερών πολλαπλασιασμένο με το  $(M+m)$ . Το  $M=3$  και το  $m$  αυξάνεται βάση του πίνακα (2-10)

ακολουθείται είναι βασισμένη στο ποσοστό αποτυχίας. Η διαδικασία περιγράφεται ως εξής:

- Κάθε ημέρα καταγράφονται τα P&L.
- Αν οι ζημιές > VaR, τότε έχουμε αποτυχία.
- Το χρηματοπιστωτικό ίδρυμα κατατάσσεται με βάση τον πίνακα 2-10 ανάλογα με το πλήθος των αποτυχιών σε διάστημα ενός έτους (250 ημερών).

<b>ΖΩΝΕΣ καθορισμού της ποινής (αύξηση m) – Επιτροπή Βασιλείας</b>		
<b>Ζώνη</b>	<b>Πλήθος αποτυχιών</b>	<b>Αύξηση K</b>
<i>Πράσινη</i>	0 μέχρι 4	0
<i>Κίτρινη</i>	5	0,4
	6	0,5
	7	0,65
	8	0,75
	9	0,85
<i>Κόκκινη</i>	10+	1,00

**Πίνακας 2-10 Ζώνες καθορισμού της ποινής επί του K**

Όταν το πλήθος των αποτυχιών κατατάσσει το χρηματοπιστωτικό ίδρυμα στη κίτρινη ζώνη είναι στη διακριτική ευχέρεια των ελεγκτικών αρχών αν θα επιβάλουν τη ποινή (αύξηση του m). Όταν το χρηματοπιστωτικό ίδρυμα είναι στη κόκκινη ζώνη η επιβολή της ποινής είναι επιβεβλημένη.

Η επιτροπή της Βασιλείας κατατάσσει τις αποτυχίες σε τέσσερις κατηγορίες:

- **Βασική αξιοπιστία του μοντέλου.** Η αποτυχία συνέβη επειδή οι θέσεις δεν αναφέρθηκαν σωστά ή υπάρχει λάθος σε πρόγραμμα.
- **Η ακρίβεια του μοντέλου μπορεί να βελτιωθεί.** Η αποτυχία συνέβη επειδή το μοντέλο δε μετράει τον κίνδυνο με αρκετή ακρίβεια.
- **Ενδωμερήσιες κινήσεις.** Άλλαξαν οι θέσεις μέσα στην ημέρα.
- **Κακοτυχία.** Οι αγορές ήταν ιδιαιτέρως ευμετάβλητες οι ή συνδιασπορές άλλαξαν.

Όταν οι εποπτικές αρχές εντοπίζουν το είδος της αποτυχίας σε μία από τις δύο πρώτες κατηγορίες τότε η ποινή πρέπει να επιβάλλεται. Στην τρίτη περίπτωση οι εποπτικές αρχές πρέπει να το σκεφτούν αν θα επιβάλουν την ποινή. Τέλος οι αποτυχίες που ανήκουν στην τέταρτη κατηγορία μπορούν να εξαιρεθούν αν θεωρηθεί ότι είναι προϊόν

μη προβλέψιμης ανωμαλίας (ξαφνική αύξηση των επιτοκίων, φυσική καταστροφή, πολιτική ανωμαλία, κλπ.).



### 3<sup>ο</sup> Κεφάλαιο

## **Measuring Credit risk – Μέτρηση του πιστωτικού κινδύνου**



## Περιεχόμενα

3.	Measuring Credit risk – Μέτρηση του πιστωτικού κινδύνου.....	141
3.1.	Βασικές έννοιες και συστατικά του πιστωτικού κινδύνου .....	141
3.1.1.	Η πιθανότητα αθέτησης υποχρέωσης (Probability of default PD).....	142
3.1.2.	Χρηματοδοτικό άνοιγμα τη στιγμή της αθέτησης υποχρέωσης (Exposure at default EAD) ....	143
3.1.3.	Η ζημία λόγω αθέτησης (Loss given default LGD) .....	143
3.1.4.	Η ζημία σαν τυχαία μεταβλητή .....	144
3.1.4.1.	Αναμενόμενη ζημία (Expected Loss EL).....	145
3.1.4.2.	Μη αναμενόμενη ζημία (Unexpected Loss UL) .....	145
3.1.5.	Η ζημία χαρτοφυλακίου και ο συντελεστής συσχέτισης των PD των οφειλετών .....	146
3.1.6.	Χρήση του VaR για τον υπολογισμό του πιστωτικού κινδύνου .....	148
3.1.7.	Οικονομικό κεφάλαιο (Economic Capital EC) .....	149
3.2.	Διαβάθμιση (Rating) .....	150
3.3.	Βασικές κατηγορίες μοντέλων υπολογισμού του πιστωτικού κινδύνου. ....	152
3.3.1.	Μοντέλα αθέτησης υποχρέωσης(Default – Models DM) .....	153
3.3.2.	Μοντέλα αποτίμησης (Mark to Model – Models MTMM).....	154
3.3.2.1.	Μοντέλα προεξόφλησης συμβατικών χρηματικών ροών (Discounted Contractual Cash Flow DCCF).....	154
3.3.2.2.	Μοντέλα αποτίμησης εξουδετέρωσης κινδύνου (Risk-Neutral Valuation RNV) .....	155
3.4.	Τρόποι υπολογισμού των συστατικών του πιστωτικού κινδύνου .....	158
3.4.1.	Τρόποι υπολογισμού της πιθανότητα αθέτησης υποχρέωσης.....	158
3.4.2.	Τρόποι υπολογισμού της ζημίας λόγω αθέτησης .....	161
3.4.3.	Τρόποι υπολογισμού των πιθανοτήτων μετάβασης μεταξύ βαθμίδων πιστωτικής ποιότητας (Rating Migration RM) .....	162
3.4.4.	Τρόποι υπολογισμού των συσχετίσεων μεταξύ των κατανομών αθέτησης .....	164
3.5.	Τα κύρια μοντέλα της αγοράς για τον υπολογισμό του πιστωτικού κινδύνου.....	166
3.5.1.	CreditMetrics .....	166
3.5.1.1.	Υπολογισμός του credit-VaR ενός ομολόγου .....	167
3.5.1.2.	Υπολογισμός του credit-VaR χαρτοφυλακίου ομολόγων .....	169
3.5.1.3.	Υπολογισμός του credit-VaR παραγώγων .....	171
3.5.2.	KMV-Model.....	171
3.5.2.1.	Πραγματικές πιθανότητες αθέτησης (Expected Default Frequencies EDF) .....	172
3.5.2.2.	Αξία ομολόγου .....	174
3.5.2.3.	Συσχετίσεις μεταξύ των αποδόσεων των περιουσιακών στοιχείων. ....	176
3.5.3.	CreditRisk+ .....	177
3.5.4.	CreditPortfolioView (CPV).....	180



### **3. Measuring Credit risk – Μέτρηση του πιστωτικού κινδύνου**

Τα πιστωτικά ιδρύματα, με βάση το θεσμικό πλαίσιο που αναλύθηκε στο 1<sup>ο</sup> κεφάλαιο, έχουν τη δυνατότητα να υπολογίσουν τα απαιτούμενα κεφάλαια για την κάλυψη από τον πιστωτικό κίνδυνο είτε χρησιμοποιώντας την τυποποιημένη μέθοδο είτε τη μέθοδο των εσωτερικών διαβαθμίσεων (IRB). Η μέθοδος των εσωτερικών διαβαθμίσεων βασίζεται:

- σε εσωτερικά μοντέλα μέτρησης του πιστωτικού κινδύνου που ανάλογα με την περίπτωση θα πρέπει να είναι σε θέση να παράγουν κάποια ή όλα τα συστατικά του πιστωτικού κινδύνου (PD, LGD, EAD, UL και EL)
- και σε συναρτήσεις στάθμισης κινδύνου που παρέχονται από τις ελεγκτικές αρχές

Στη συνέχεια του κεφαλαίου θα παρουσιαστούν οι βασικές έννοιες και τα συστατικά του πιστωτικού κινδύνου, θα αναλυθούν τα μοντέλα υπολογισμού του πιστωτικού κινδύνου, τα μοντέλα που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των συστατικών του πιστωτικού κινδύνου και τέλος οι τρόποι ελέγχου – επικύρωσης των παραπάνω μοντέλων.

#### **3.1. Βασικές έννοιες και συστατικά του πιστωτικού κινδύνου**

Στο πρώτο κεφάλαιο αναφέρθηκε ότι ο πιστωτικός κίνδυνος οφείλεται στην πιθανότητα (μη βεβαιότητα) κάποιος οφειλέτης να μην πληρώσει όλο ή μέρος της υποχρέωσης που έχει έναντι του χρηματοπιστωτικού ιδρύματος.

Όταν αυτό συμβεί τότε η τράπεζα μπορεί να χάσει τόκους ή ακόμη και μέρος του κεφαλαίου που έχει δανείσει, δηλαδή η τράπεζα θα ζημιωθεί. Για να μπορέσουμε να μετρήσουμε τον πιστωτικό κίνδυνο αρκεί να μετρήσουμε τη ζημία αυτή.

Η ζημία αυτή έχει τα εξής συστατικά:

- Πιθανότητα αθέτησης υποχρέωσης
- Χρηματοδοτικό άνοιγμα τη στιγμή της αθέτησης υποχρέωσης
- Ποσοστό του χρηματοδοτικού ανοίγματος που θα απολέσει η τράπεζα

Στη συνέχεια θα δούμε ένα προς ένα τα συστατικά αυτά.

### 3.1.1. Η πιθανότητα αθέτησης υποχρέωσης (Probability of default PD)

Για να μπορέσουμε να ορίσουμε την πιθανότητα αθέτησης υποχρέωσης (Probability of default PD) θα πρέπει πρώτα να καθορίσουμε πότε έχουμε αθέτηση υποχρέωσης. Ο ορισμός της αθέτησης υποχρέωσης διαφέρει από τράπεζα σε τράπεζα<sup>72</sup>. Στην περίπτωση των ομολόγων, αθέτηση υποχρέωσης έχουμε όταν μια ομολογιακή έκδοση δεν καταβάλει μια πληρωμή τόκου ή όταν ο εκδότης υποβάλει αίτηση χρεοκοπίας ή όταν ανακοινωθεί αναδόμηση του (restructuring)<sup>73</sup>. Με βάση το “International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards, A Revised Framework” της EBET μια αθέτηση υποχρέωσης συμβαίνει όταν ένα τουλάχιστον από τα παρακάτω έχει συμβεί

- Η τράπεζα θεωρεί ότι ο οφειλέτης είναι απίθανο να πληρώσει τις υποχρεώσεις του στην τράπεζα στο ακέραιο, χωρίς να καταφύγει η τράπεζα σε ενέργειες όπως ρευστοποίηση εγγυήσεων.
- Ο υπόχρεος έχει καθυστερήσει την πληρωμή για περισσότερες από 90 ημέρες.

Είναι προφανές ότι η PD εξαρτάται από τον ορισμό της αθέτησης υποχρέωσης έχουμε δείξει ότι υπάρχουν πολλοί ορισμοί της αθέτησης υποχρέωσης και άρα θα πρέπει σε κάθε περίπτωση χρήσης του PD να είναι ξεκάθαρο πως έχει ορισθεί η αθέτηση υποχρέωσης.

Άλλος ένας παράγοντας από τον οποίο εξαρτάται η PD είναι ο χρονικός ορίζοντας για τον οποίο υπολογίζεται η PD. Είναι προφανές ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο χρονικός ορίζοντας τόσο μεγαλύτερη είναι και η PD. Άρα όταν αναφερόμαστε σε PD θα πρέπει να προσδιορίζουμε και το χρονικό ορίζοντα για τον οποίο έχει υπολογιστεί αυτή η PD. Στη συνέχεια θα θεωρούμε ότι η PD αναφέρεται σε χρονικό ορίζοντα ενός έτους εκτός εάν ρητώς αναφέρεται κάποια άλλη χρονική περίοδος.

---

<sup>72</sup> EBET “Credit Risk Modelling: Current Practices and Applications” Basle 1999

<sup>73</sup> J.B. Caouette, E. I. Altman και P. Narayanan “Managing Credit Risk” 1998

### 3.1.2. Χρηματοδοτικό άνοιγμα τη στιγμή της αθέτησης υποχρέωσης (Exposure at default EAD)

Το χρηματοδοτικό άνοιγμα τη στιγμή της αθέτησης υποχρέωσης (Exposure at default EAD) είναι το χρέος του οφειλέτη προς την τράπεζα τη στιγμή της αθέτησης υποχρέωσης. Για πολλά είδη πιστωτικών προϊόντων το άνοιγμα μιας τράπεζας δεν είναι γνωστό με βεβαιότητα εκ των προτέρων, αλλά μπορεί να εξαρτάται από την εμφάνιση τυχαίων μελλοντικών γεγονότων. Σαν παράδειγμα μπορεί να αναφερθεί ένας λογαριασμός με δυνατότητα υπερανάληψης μέχρι ποσού A. Είναι προφανές ότι σε περίπτωση αθέτησης υποχρέωσης το ποσό που ο οφειλέτης έχει κάνει ανάληψη είναι μικρότερο ή ίσο από A αλλά άγνωστο εκ των προτέρων.

Ένας πιο γενικός ορισμός<sup>74</sup> του EAD δίνεται από τον τύπο (1).

$$EAD = OUTST + \gamma COMM \quad (1)$$

Όπου ο όρος OUTST είναι το ποσό που είδη έχει πάρει ο οφειλέτης ο όρος COMM είναι το ποσό που η τράπεζα έχει δεσμευθεί να δανείσει στον οφειλέτη και το  $\gamma$  αντιστοιχεί στο ποσοστό του COMM που έχει πάρει ο οφειλέτης τη στιγμή της αθέτησης υποχρέωσης.

### 3.1.3. Η ζημία λόγω αθέτησης (Loss given default LGD)

Με δεδομένη την αθέτηση υποχρέωσης από έναν οφειλέτη είναι σημαντικό να γνωρίζουμε το μέγεθος της ζημίας που προκύπτει από αυτό το γεγονός. Για να μετρήσουμε το μέγεθος της ζημίας δε χρησιμοποιούμε απόλυτα νούμερα αλλά ποσοστό. Έτσι η ζημία λόγω αθέτησης (Loss given default LGD) είναι το πηλίκο της ζημίας προς το χρέος.

Η τράπεζες συνήθως θεωρούν ότι η LGD εξαρτάται από περιορισμένους σε πλήθος παράγοντες<sup>75</sup> που σχετίζονται με το είδος του χρηματοδοτικού προϊόντος και πιθανές

---

<sup>74</sup> C. Bluhm, L. Overbeck και C. Wagner “an introduction to Credit Risk Modelling”, 2003

εξασφαλίσεις. Σε ορισμένες περιπτώσεις η LGD μπορεί να θεωρηθεί προκαθορισμένη και γνωστή εκ των προτέρων ενώ σε άλλες περιπτώσεις θεωρείται τυχαία μεταβλητή. Στην τελευταία περίπτωση αρκετές φορές η κατανομή της LGD θεωρείται ότι προσεγγίζεται από μια βήτα κατανομή.

Σημαντικό επίσης ρόλο στον καθορισμό της LGD παίζει και ο ορισμός της ζημιάς. Η EBET ορίζει τη ζημία ως εξής: «Ο ορισμός της ζημιάς που θα χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της LGD είναι η οικονομική ζημία. Όταν μετριέται η οικονομική ζημία, όλοι οι σχετικοί παράγοντες πρέπει να λαμβάνονται υπόψη. Αυτό πρέπει να περιλαμβάνει σημαντικές προεξοφλητικές επιπτώσεις και σημαντικά άμεσα και έμμεσα κόστη που σχετίζονται με την συλλογή του χρέους.» Άρα η ζημία για την EBET είναι το συνολικό χρέος συν τα έξοδα (άμεσα και έμμεσα) συλλογής του χρέους συν τυχόν οποιοσδήποτε προεξοφλητικές ζημιές<sup>76</sup> μείον το ποσό που η τράπεζα τελικά θα εισπράξει.

#### 3.1.4. Η ζημία σαν τυχαία μεταβλητή

Με βάση τα παραπάνω η ζημία  $L$  για έναν δεδομένο χρονικό ορίζοντα ενός πιστοδοτικού προϊόντος δίδεται από τον τύπο (2).

$$L = LGD \times EAD \times 1_D \quad \text{με } 1_D \text{ Bernoulli} \quad P(D) = PD \quad (2)$$

Είναι προφανές ότι η  $L$  είναι μια τυχαία μεταβλητή που ορίζεται σε γινόμενο τριών άλλων τυχαίων μεταβλητών. Το γεγονός αυτό καθιστά τον υπολογισμό της κατανομής της αρκετά πιο δύσκολο από τον υπολογισμό της κατανομής των αποδόσεων που χρησιμοποιούμε στην περίπτωση του κινδύνου αγοράς.

Έχοντας ορίσει τη ζημία σε μία τυχαία μεταβλητή είναι προφανές ότι μπορούμε να βρούμε τη μέση τιμή της και τη διασπορά της.

---

<sup>75</sup> EBET “Credit Risk Modelling: Current Practices and Applications” Basle 1999

<sup>76</sup> Όταν ένα χρέος εξοφλείται πριν την ώρα του τότε καταβάλλονται μόνο οι δεδουλευμένοι τόκοι. Σε αυτή την περίπτωση η τράπεζα παίρνει ένα κεφάλαιο στα χέρια της που το είχε επενδυμένο με απόδοση  $\alpha$  (επιτόκιο του δανείου). Εάν τώρα επενδύσει ξανά αυτό το κεφάλαιο με επιτόκιο  $\beta < \alpha$  τότε η τράπεζα ζημιώνεται με τη διαφορά των τόκων.



### 3.1.4.1. Αναμενόμενη ζημία (Expected Loss EL)

Η μέση τιμή της  $L$  καλείται αναμενόμενη ζημία (Expected Loss EL) και δίδεται από τον τύπο (3)

$$EL = E(L) = E(LGD \times EAD \times 1_D) \quad (3)$$

Συνήθως ο υπολογισμός της EL απλοποιείται κάνοντας τις παραδοχές ότι οι LGD, EAD και η αθέτηση υποχρέωσης είναι ανεξάρτητες. Έτσι ο τύπος (4) είναι αυτός που μας δίνει συνήθως την EL.

$$EL = \overline{LGD} \times \overline{EAD} \times PD \quad (4)$$

Με  $\overline{LGD} = E(LGD)$  και  $\overline{EAD} = E(EAD)$ .

Οι τράπεζες πρέπει να υπολογίζουν την αναμενόμενη ζημία και να διατηρούν στον ισολογισμό τους κάτω από τις προβλέψεις αντίστοιχο κεφάλαιο.

### 3.1.4.2. Μη αναμενόμενη ζημία (Unexpected Loss UL)

Η τυπική απόκλιση της  $L$  καλείται μη αναμενόμενη ζημία (Unexpected Loss UL) και δίδεται από τον τύπο (5).

$$UL = \sqrt{V(L)} = \sqrt{V(LGD \times EAD \times 1_D)} \quad (5)$$

Κάνοντας τις υποθέσεις ότι οι LGD και η αθέτηση υποχρέωσης είναι ανεξάρτητες και η EAD δεν είναι τυχαία μεταβλητή αλλά γνωστή με βεβαιότητα ο τύπος (5) απλοποιείται δίνοντας τον τύπο (6).

$$UL = EAD \sqrt{PD \times (1 - PD) \times \overline{LGD}^2 + PD \times V(LGD)} \quad (6)$$

### 3.1.5. Η ζημία χαρτοφυλακίου και ο συντελεστής συσχέτισης των PD των οφειλετών

Στην περίπτωση που έχουμε ένα χαρτοφυλάκιο από πιστοδοτικά προϊόντα η ζημία χαρτοφυλακίου  $L_P$  για έναν δεδομένο χρονικό ορίζοντα δίδεται από την (7).

$$L_P = \sum_{i=1}^m L_i = \sum_{i=1}^m LGD_i \times EAD_i \times 1_{D_i} \quad (7)$$

Με  $L_i$ ,  $LGD_i$  και  $EAD_i$  να είναι η ζημία, η LGD και η EAD και του  $i$  προϊόντος, Ενώ η  $1_{D_i}$  συμβολίζει μια μεταβλητή που ακολουθεί κατανομή Bernoulli με  $p=PD_i$  όπου το  $PD_i$  είναι η πιθανότητα αθέτησης για τον οφειλέτη του πιστοδοτικού προϊόντος  $i$ .

Η μέση τιμή της  $L_P$  καλείται αναμενόμενη ζημία χαρτοφυλακίου (Expected Portfolio Loss  $EL_P$ ) και δίδεται από τον τύπο (8)

$$EL_P = E\left(\sum_{i=1}^m L_i\right) = \sum_{i=1}^m E(LGD_i \times EAD_i \times 1_{D_i}) \quad (8)$$

Όπως και στην περίπτωση του απλού προϊόντος ο υπολογισμός της  $EL_P$  απλοποιείται κάνοντας τις παραδοχές ότι οι  $LGD_i$ ,  $EAD_i$  και η αθέτηση υποχρέωσης είναι ανεξάρτητες για κάθε  $i$  προϊόν. Έτσι ο τύπος (9) είναι αυτός που μας δίνει συνήθως την  $EL_P$ .

$$EL_P = \sum_{i=1}^m \overline{LGD}_i \times \overline{EAD}_i \times PD_i \quad (9)$$

Με  $\overline{LGD}_i = E(LGD_i)$  και  $\overline{EAD}_i = E(EAD_i)$ .

Η μη αναμενόμενη ζημία του χαρτοφυλακίου (Unexpected Portfolio Loss  $UL_P$ ) είναι τυπική απόκλιση της  $L_P$  καλείται και δίδεται από τον τύπο (10).

$$UL_p = \sqrt{V(L_p)} = \sqrt{\sum_{i=1}^m V(LGD_i \times EAD_i \times 1_{D_i})} = \sum_{i=1}^m UL_i \rho_i \quad (10)$$

Όπου  $UL_i$  είναι η μη αναμενόμενη ζημία του  $i$  προϊόντος και  $\rho_i$  ο συντελεστής συσχέτισης του προϊόντος  $i$  με το υπόλοιπο πιστοδοτικό χαρτοφυλάκιο.

Εάν υποθέσουμε ότι οι  $EAD_i$  είναι σταθερές παίρνουμε την (11).

$$UL_p = \sqrt{V(L_p)} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m EAD_i \times EAD_j \times Cov(LGD_i \times 1_{D_i}, LGD_j \times 1_{D_j})} \quad (11)$$

Εάν επιπλέον θεωρήσουμε ότι οι  $LGD_i$  είναι σταθερές (όχι τυχαίες μεταβλητές) τότε έχουμε την (12).

$$UL_p^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m EAD_i \times EAD_j \times LGD_i \times LGD_j \times \sqrt{PD_i \times (1 - PD_i) \times PD_j \times (1 - PD_j)} \rho_{i,j} \quad (12)$$

Με  $\rho_{i,j} = Corr(1_{D_i}, 1_{D_j})$  να είναι ο συντελεστής συσχέτισης των PD των οφειλετών των  $i$  και  $j$  πιστοδοτικών προϊόντων.

Για να δούμε τον ρόλο του συντελεστή συσχέτισης μπορούμε να θέσουμε  $m=2$ ,  $EAD_1=EAD_2=1$  και  $LGD_1=LGD_2=100\%$  τότε η (12) μετασχηματίζεται στην (13).

$$UL_p^2 = p_1(1 - p_1) + p_2(1 - p_2) + 2\rho\sqrt{p_1(1 - p_2)p_2(1 - p_2)} \quad (13)$$

Με  $p_1=PD_1$ ,  $p_2=PD_2$  και  $\rho=\rho_{1,2}=\rho_{2,1}$ .

Η (13) αποτελείται από τρεις όρους, ο πρώτος όρος αντιστοιχεί στον κίνδυνο του πρώτου πιστοδοτικού προϊόντος (που προέρχεται από τον οφειλέτη του πρώτου πιστοδοτικού προϊόντος) ο δεύτερος στον κίνδυνο του δεύτερου πιστοδοτικού προϊόντος (που προέρχεται από τον οφειλέτη του δεύτερου πιστοδοτικού προϊόντος) και ο τρίτος στον κίνδυνο από τη συνδυασμένη επένδυση και στα δύο πιστοδοτικά προϊόντα.

Εάν  $\rho=0$  τότε το ενδεχόμενο ο ένας οφειλέτης να αθέτηση τις υποχρεώσεις του αφήνει αμετάβλητη την πιθανότητα να έχουμε αθέτηση υποχρέωσης και από το δεύτερο οφειλέτη. Στην περίπτωση αυτή ο τρίτος όρος της (13) εξαφανίζεται και κάποιος θα μπορούσε να πει ότι το  $\rho=0$  σημαίνει πλήρη διαφοροποίηση (diversification) του χαρτοφυλακίου.

Εάν  $\rho<0$  τότε το ενδεχόμενο ο ένας οφειλέτης να αθέτηση τις υποχρεώσεις του μειώνει την πιθανότητα να έχουμε αθέτηση υποχρέωσης και από τον άλλο οφειλέτη. Στην περίπτωση αυτή ο τρίτος όρος της (13) είναι αρνητικός και κάποιος θα μπορούσε να πει ότι η επένδυση στο ένα πιστοδοτικό προϊόν εξισορροπεί (hedge) τον κίνδυνο του άλλου πιστοδοτικού προϊόντος.

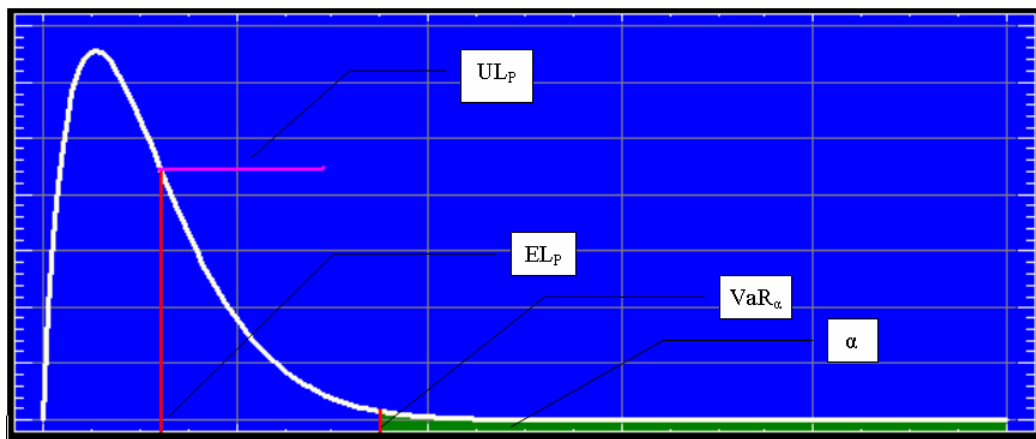
Εάν  $\rho>0$  τότε το ενδεχόμενο ο ένας οφειλέτης να αθέτηση τις υποχρεώσεις του αυξάνει την πιθανότητα να έχουμε αθέτηση υποχρέωσης και από τον άλλο οφειλέτη. Στην περίπτωση αυτή ο τρίτος όρος της (13) είναι θετικός και κάποιος θα μπορούσε να πει ότι η επένδυση στο ένα πιστοδοτικό προϊόν αυξάνει τον κίνδυνο του άλλου πιστοδοτικού προϊόντος.

### **3.1.6. Χρήση του VaR για τον υπολογισμό του πιστωτικού κινδύνου**

Η κατανομή της ζημίας χαρτοφυλακίου παρουσιάζει δεξιά Skewness και παχιές ουρές<sup>77</sup> σχήμα (3-1). Αυτό είναι λογικό εάν αναλογισθεί κανείς ότι υπάρχει μικρό περιθώριο κέρδους σε υποτιθέμενη άνοδο της πιστωτικής ποιότητας του οφειλέτη ενώ μπορεί να υπάρξει μεγάλη ζημία σε πιθανή πτώση της πιστωτικής ποιότητας του οφειλέτη.

---

<sup>77</sup> C. Bluhm, L. Overbeck και C. Wagner “An introduction to Credit Risk Modelling”, 2003



Εικόνα 3-1 Τυπική κατανομή ζημιών πιστοδοτικού χαρτοφυλακίου

Στο σχήμα (3-1) απεικονίζεται η  $EL_p$  και η  $UL_p$ . Με βάση την κατανομή αυτή μπορούμε να υπολογίσουμε το  $VaR_\alpha$  της  $L_p$ . Δηλαδή τη χειρότερη ζημία που θα μπορούσε να υποστεί το χαρτοφυλάκιο μας, για συγκεκριμένο χρονικό ορίζοντα και για συγκεκριμένο επίπεδο εμπιστοσύνης<sup>78</sup>  $(1-\alpha)$ . Στην περίπτωση του υπολογισμού του ελεγκτικού κεφαλαίου υπολογίζεται το 99,9% VaR για χρονικό ορίζοντα ένα έτος.

### 3.1.7. Οικονομικό κεφάλαιο (Economic Capital EC)

Όπως έχουμε είδη αναφέρει η EL θα πρέπει να υπολογίζεται από τις τράπεζες και να διατηρείται στον ισολογισμό τους κάτω από τις προβλέψεις αντίστοιχο κεφάλαιο. Όμως αυτό δεν είναι αρκετό για την κάλυψη των τραπεζών από τον πιστωτικό κίνδυνο. Έτσι πολλές τράπεζες εκτός της EL υπολογίζουν το επιπλέον της EL κεφάλαιο που είναι απαραίτητο για να διασφαλιστούν από τυχών πιστωτικές ζημιές. Το επιπλέον αυτό κεφάλαιο υπολογίζεται σε κάποια στάθμη εμπιστοσύνης και καλείται οικονομικό κεφάλαιο (Economic Capital). Έτσι το οικονομικό κεφάλαιο ορίζεται από την εξίσωση (14).

$$EC = VaR_\alpha - EL \quad (14)$$

<sup>78</sup> Το επίπεδο εμπιστοσύνης καθορίζει ποια είναι η πιθανότητα η ζημία να είναι μεγαλύτερη του VaR.

### 3.2. Διαβάθμιση (Rating)

Από τις αρχές του 20ού αιώνα είχαν ιδρυθεί στις Ηνωμένες Πολιτείες της Αμερικής εταιρείες που μετρούσαν την πιστωτική ποιότητα των ομολόγων. Οι πιο διάσημες από αυτές τις εταιρείες είναι η Moody's (1909) και η Standard's & Poor's (1923). Οι εταιρείες αυτές αντιστοιχίζουν τα ομόλογα σε βαθμίδες κάθε μία από τις οποίες υποδηλώνει ένα συγκεκριμένο επίπεδο πιστωτικής ποιότητας (πίνακας 3-1). Η διαδικασία αυτή λέγεται διαβάθμιση (Rating).

Long-Term Debt Rating Symbols

Interpretation	Moody's	Standard and Poor's Duff & Phelps Fitch
Highest quality	Aaa	AAA
High quality	Aa1	AA+
	Aa2	AA
	Aa3	AA-
Strong payment capacity	A1	A+
	A2	A
	A3	A-
Adequate payment capacity	Baa1	BBB+
	Baa2	BBB
	Baa3	BBB-
Likely to fulfill obligations, ongoing uncertainty	Ba1	BB+
	Ba2	BB
	Ba3	BB-
High-risk obligations	B1	B+
	B2	B
	B3	B-

The agencies assign ratings to securities below this level of risk (very near or actually in default); however, they use different categorization systems that are difficult to compare. Ratings of the different agencies are not easily comparable because they make very different distinctions among securities at or very near default

#### Πίνακας 3-1 Βαθμίδες πιστωτικής ποιότητας των πιο γνωστών εταιρειών διαβάθμισης<sup>79</sup>

Στις μέρες μας η διαδικασία διαβάθμισης έχει επεκταθεί. Έτσι πλέον εκτός των ομολόγων υπάρχει διαβάθμιση χωρών, πιστωτικών ιδρυμάτων, ασφαλιστικών εταιρειών και επιχειρήσεων και οι εταιρείες που παράγουν τις διαβαθμίσεις είναι πολλές (πίνακας 3-2).

Επιπλέον η σημασία των διαβαθμίσεων έχει αναβαθμιστεί και οι διαβαθμίσεις χρησιμοποιούνται από διάφορες εποπτικές αρχές<sup>80</sup>. Παράλληλα οι εταιρείες παραγωγής

<sup>79</sup> R. Cantor and F. Packer (1996) "Multiple Ratings and Credit Standards: Differences of Opinion in the Credit Rating Industry", Research and Market Analysis Group, Federal Reserve Bank of New York

διαβαθμίσεων πρέπει να πληρούν συγκεκριμένες προϋποθέσεις για να μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι διαβαθμίσεις τους για ελεγκτικούς σκοπούς<sup>81</sup>.

Year Ratings First Published	Credit Rating Agency	Home Country	Employees	Principal Ratings Area
1909	Moody's Investor Service ("Moody's")	USA	674	Full service
1922	Fitch Investors Service ("Fitch")	USA	200+	Full service
1923	Standard and Poor's Corporation ("S&P")	USA	700+	Full service
1972	Canadian Bond Rating Service ("CBRS")	Canada	26	Full service (Canada)
1974	Thomson Bank Watch ("Thom")	USA	40	Financial institutions
1975	Japanese Bond Rating Institute ("JBRI")	Japan	91	Full service (Japan)
1977	Dominion Bond Rating Service ("DBRS")	Canada	20	Full service (Canada)
1978	IBCA, Ltd ("IBCA")	UK	50	Financial institutions
1980	Duff and Phelps Credit Rating Co ("Duff")	USA	160	Full service
1985	Japanese Credit Rating Agency ("JCRA")	Japan	61	Full service (Japan)
1985	Nippon Investor Service Inc ("NIS")	Japan	70	Full service (Japan)

**Πίνακας 3-2 Μερικές γνωστές εταιρείες διαβάθμισης<sup>82</sup>**

Οι διαβαθμίσεις των διάφορων εταιρειών διαβάθμισης για μια συγκεκριμένη εταιρεία ή για ένα συγκεκριμένο ομόλογο είναι πολύ πιθανόν να διαφέρουν. Για το λόγο αυτό υπάρχει και ανάλογη πρόνοια στο νέο ελεγκτικό πλαίσιο<sup>83</sup> για τη μέτρηση του πιστωτικού κινδύνου<sup>84</sup>. Η διαφορά στις διαβαθμίσεις μπορεί να οφείλεται τόσο στην μέθοδο που κάθε εταιρεία χρησιμοποιεί<sup>85</sup> όσο και στο εάν μια διαβάθμιση έχει ζητηθεί

<sup>80</sup> Standardised Approach for measuring regulatory capital for Credit Risk (2004) "International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards, A Revised Framework", Basel Committee on Banking Supervision

<sup>81</sup> External credit assessments – The recognition process – Eligibility criteria (2004) "International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards, A Revised Framework", Basel Committee on Banking Supervision

<sup>82</sup> R. Cantor and F. Packer (1994) "The Credit Rating Industry", Federal Reserve Bank of New York Quarterly Review Summer-Fall 1994

<sup>83</sup> Credit Risk – The Standardised Approach, Implementation considerations, Multiple assessments (2004) "International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards, A Revised Framework", Basel Committee on Banking Supervision

<sup>84</sup> Μια μεθοδολογία ανάλυσης και συνδυασμού πολλαπλών διαβαθμίσεων για πιστωτικά ιδρύματα έχει προταθεί από τους E. Tabakis και A. Vinci (2002) "Analysing and combining multiple credit assessments of financial institutions", European Central Bank Working paper Series.

Μια μελέτη προσομοίωσης για το μέγεθος του ελεγκτικού κεφαλαίου με βάση την Standardised Approach for measuring regulatory capital for Credit Risk (2004) "International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards, A Revised Framework", Basel Committee on Banking Supervision και τη χρήση διαφορετικών εταιρειών διαβάθμισης έγινε από τον Patrick Van Roy (2005) "Credit Ratings and the Standardised Approach to Credit Risk in Basel II", European Central Bank Working paper Series.

<sup>85</sup> J.B. Caouette, E. I. Altman και P. Narayanan "Managing Credit Risk" 1998

από την εταιρεία που διαβαθμίζεται ή γίνεται με πρωτοβουλία της εταιρείας διαβάθμισης<sup>86</sup>.

### **3.3. Βασικές κατηγορίες μοντέλων υπολογισμού του πιστωτικού κινδύνου.**

Έχουμε ορίσει τη ζημία ενός πιστοδοτικού προϊόντος για ένα συγκεκριμένο χρονικό ορίζοντα σαν το γινόμενο τριών τυχαίων μεταβλητών, εξίσωση (2). Για να μπορέσουμε όμως να μελετήσουμε τα διάφορα μοντέλα μέτρησης του πιστωτικού κινδύνου πρέπει να γενικεύσουμε τον ορισμό αυτό, έτσι μπορούμε να πούμε ότι η πιστωτική ζημία ενός πιστοδοτικού προϊόντος στο τέλος ενός συγκεκριμένου χρονικού ορίζοντα είναι η διαφορά της τρέχουσας τιμής του προϊόντος από την μελλοντική τιμή του στο τέλος του χρονικού ορίζοντα<sup>87</sup>. Άρα η εκτίμηση της κατανομής της πιστωτικής ζημίας έχει να κάνει με την εκτίμηση της τρέχουσας τιμής του πιστοδοτικού προϊόντος και την εκτίμηση της κατανομής των μελλοντικών τιμών του προϊόντος στο τέλος του χρονικού ορίζοντα. Ο ακριβής ορισμός της τρέχουσας και της μελλοντικής τιμής έπεται από τη γενική ιδέα της πιστωτικής ζημίας που ενδιαφέρει τον κατασκευαστή του μοντέλου μέτρησης του πιστωτικού κινδύνου.

Με βάση τον ορισμό της πιστωτικής ζημίας έχουμε δυο ειδών μοντέλα τα μοντέλα αθέτησης (Default Model DM) και τα μοντέλα «αποτίμησης βάση μοντέλου της αξίας της πιστοδοτήσεως» (Mark-to-Model of Loan Value Model MTMM).

Στα μοντέλα αθέτησης η πιστωτική ζημία εμφανίζεται μόνο εάν μέχρι το τέλος του χρονικού ορίζοντα υπάρξει αθέτηση, σε κάθε άλλη περίπτωση δεν εμφανίζεται ζημία.

Στα μοντέλα αποτίμησης βάση μοντέλου της αξίας της πιστοδοτήσεως η πιστωτική ζημία μπορεί να προκληθεί εκτός από την αθέτηση και από την χειροτέρευση της πιστωτικής ποιότητας. Έτσι τα MTMM χειρίζονται το πιστοδοτικό χαρτοφυλάκιο σαν να

---

<sup>86</sup> Η «ηθική» και η αντικειμενικότητα των εταιρειών διαβάθμισης έχει τεθεί υπό αμφισβήτηση ακόμη και με επίσημη μορφή στο άρθρο των R. Cantor and F. Packer (1996) "Multiple Ratings and Credit Standards: Differences of Opinion in the Credit Rating Industry", Research and Market Analysis Group, Federal Reserve Bank of New York

<sup>87</sup> EBET "Credit Risk Modelling: Current Practices and Applications" Basle 1999



αποτιμάται στην αρχή και στο τέλος του χρονικού ορίζοντα με την πιστωτική ζημία να είναι η διαφορά τους.

### 3.3.1. Μοντέλα αθέτησης υποχρέωσης(Default – Models DM)

Στα μοντέλα αυτά καταγράφεται ζημία μόνο όταν υπάρξει αθέτηση, στην περίπτωση αυτή η πιστωτική ζημία θα είναι η διαφορά ανάμεσα στο πιστωτικό άνοιγμα της τράπεζας και την παρούσα αξία των πιθανών καθαρών εσόδων (πληρωμές από τον δανειστή μετά την αφαίρεση εξόδων).

Η τρέχουσα και η μελλοντική αξία των πιστοδοτικών προϊόντων θα είναι τέτοια ώστε σε περίπτωση μη αθέτησης η διαφορά τους θα είναι μηδέν ενώ σε περίπτωση αθέτησης η διαφορά τους θα είναι ίση με LGD ανά ευρώ τρέχουσας αξίας στην αρχή της περιόδου. Για παράδειγμα στην περίπτωση ενός απλού δανείου η τρέχουσα αξία του δανείου θα ήταν η λογιστική του αξία. Σε περίπτωση που δεν είχαμε αθέτηση η μελλοντική του αξία θα ήταν ίση με την μελλοντική λογιστική αξία συν το κεφάλαιο που καταβλήθηκε στη διάρκεια της χρονικής περιόδου. Εάν είχαμε αθέτηση τότε η μελλοντική αξία του προϊόντος θα ήταν ίση με ένα μείον την LGD ανά ευρώ τρέχουσας αξίας στην αρχή της περιόδου.

Η μαθηματική έκφραση της  $L$  και της  $L_p$  στην περίπτωση των DM δίδεται από τους τύπους (2) και (7) αντίστοιχα. Σημαντικό στοιχείο στη διαδικασία μέτρησης της πιστωτικής ζημίας είναι η PD των οφειλετών. Οι PD που χρησιμοποιούνται προέρχονται από συστήματα διαβάθμισης είτε εσωτερικά είτε εξωτερικά. Δηλαδή με τη χρήση κάποιου συστήματος διαβάθμισης κάθε οφειλέτης εντάσσεται σε μία βαθμίδα πιστωτικής ποιότητας στην οποία εκ των προτέρων έχει αντιστοιχιστεί με κάποιον τρόπο μια PD. Έτσι σε κάθε οφειλέτη και άρα σε κάθε προϊόν αντιστοιχίζεται μία PD από την οποία τελικά προκύπτει η  $L$ .

### **3.3.2. Μοντέλα αποτίμησης (Mark to Model – Models MTMM)**

Στα μοντέλα MTMM σε αντίθεση με τα DM καταγράφεται ζημία όχι μόνο όταν υπάρξει αθέτηση αλλά και στην περίπτωση που συμβεί κάποιο γεγονός που μεταβάλλει την πιστωτική ποιότητα του οφειλέτη.

Με βάση το MTMM τα προϊόντα αποτιμώνται με τη χρήση ενός μοντέλου αποτίμησης στην αρχή και στο τέλος της περιόδου. Η ζημία προκύπτει από τη διαφορά των δύο τιμών. Η πιθανή διαφορά των δύο αποτιμήσεων οφείλεται στην μεταβολή της πιστωτικής ποιότητας του οφειλέτη. Άρα στα MTMM εκτός από τη PD μας ενδιαφέρει να μετρήσουμε την διαφορά της πιστωτικής ποιότητας των οφειλετών.

Με βάση τον τρόπο που γίνεται η αποτίμηση των προϊόντων έχουμε δύο ειδών μοντέλα τα μοντέλα προεξόφλησης των συμβατικών χρηματικών ροών (Discounted Contractual Cash Flow DCCF) και τα μοντέλα αποτίμησης εξουδετέρωσης κινδύνου (Risk-Neutral Valuation) RNV.

#### **3.3.2.1. Μοντέλα προεξόφλησης συμβατικών χρηματικών ροών (Discounted Contractual Cash Flow DCCF)**

Στα DCCF μοντέλα η αποτίμηση ενός πιστοδοτικού προϊόντος γίνεται προεξοφλώντας τις μελλοντικές συμβατικές χρηματικές ροές του προϊόντος. Το σημαντικό σε αυτή την προσέγγιση είναι να καθοριστούν τα επιτόκια προεξόφλησης. Η διαδικασία καθορισμού των επιτοκίων προεξόφλησης γίνεται ως εξής:

- Αρχικά χρησιμοποιούνται εσωτερικά ή εξωτερικά συστήματα διαβάθμισης για να ενταχθεί ο οφειλέτης σε μια βαθμίδα πιστωτικής ποιότητας.
- Σε κάθε βαθμίδα πιστωτικής ποιότητας έχουν αντιστοιχιστεί τα επιτόκια προεξόφλησης των εταιρικών ομολόγων της αντίστοιχης πιστωτικής βαθμίδας που καθορίζονται από την αγορά. Αυτά τα επιτόκια προεξόφλησης χρησιμοποιούνται για την προεξόφληση των συμβατικών χρηματικών ροών.

Η αποτίμηση του προϊόντος στην αρχή της περιόδου είναι μια σχετικά απλή υπόθεση. Όμως από την αρχή της περιόδου δεν είναι γνωστό σε ποια βαθμίδα πιστωτικής

ποιότητας θα ενταχθεί ο οφειλέτης στο τέλος της περιόδου, καθώς κατά τη διάρκεια της περιόδου μπορεί να έχουν συμβεί γεγονότα που να μετέβαλαν την πιστωτική ποιότητα του οφειλέτη. Άρα η βαθμίδα πιστωτικής ποιότητας του οφειλέτη και άρα και το επιτόκιο προεξόφλησης των συμβατικών χρηματικών ροών του προϊόντος στο τέλος της περιόδου είναι μια τυχαία μεταβλητή. Έτσι για να μπορέσουμε να εκτιμήσουμε την μελλοντική αποτίμηση του προϊόντος θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τις πιθανότητες μετάβασης του οφειλέτη από την βαθμίδα πιστωτικής ποιότητας που βρίσκεται στην αρχή της περιόδου στη βαθμίδα πιστωτικής ποιότητας που θα βρίσκεται στο τέλος της περιόδου.

Έτσι εάν  $V_{t,j}$  είναι η αποτίμηση του προϊόντος τη χρονική στιγμή  $t$  δεδομένου ότι ανήκει στην  $j$  βαθμίδα πιστωτικής ποιότητας και  $p_{j,k}$  είναι η πιθανότητα μετάβασης από την  $j$  βαθμίδα πιστωτικής ποιότητας στην  $k$  βαθμίδα πιστωτικής ποιότητας κατά το χρονικό διάστημα από  $t$  μέχρι  $t+1$  τότε την αναμενόμενη ζημία τη χρονική στιγμή  $t$  με βάση την DCCF μέθοδο την δίνει ο τύπος (15).

$$EL_t = V_{t,j} - \sum_{k=1}^m p_{j,k} \times V_{t+1,k} \quad (15)$$

Όπου  $m$  είναι το πλήθος των βαθμίδων πιστωτικής ποιότητας. Το  $V_{t+1,1}$  με 1 τη βαθμίδα που αντιστοιχεί στην αθέτηση θα είναι ίσο με ένα μείον την LGD ανά ευρώ τρέχουσας αξίας στην αρχή της περιόδου όπως και στα DM.

### 3.3.2.2. Μοντέλα αποτίμησης εξουδετέρωσης κινδύνου (Risk-Neutral Valuation RNV)

Τα DCCF μοντέλα είναι εύκολα στη σύλληψη τους και στην υλοποίηση τους όμως έχουν δύο μειονεκτήματα:

- Για όλα τα δάνεια μίας εταιρείας θα χρησιμοποιηθεί το ίδιο προεξοφλητικό επιτόκιο ανεξάρτητα με το εάν στα δάνεια αντιστοιχούν διαφορετικές LGD (πχ λόγω ύπαρξης εξασφαλίσεων σε κάποια δάνεια).

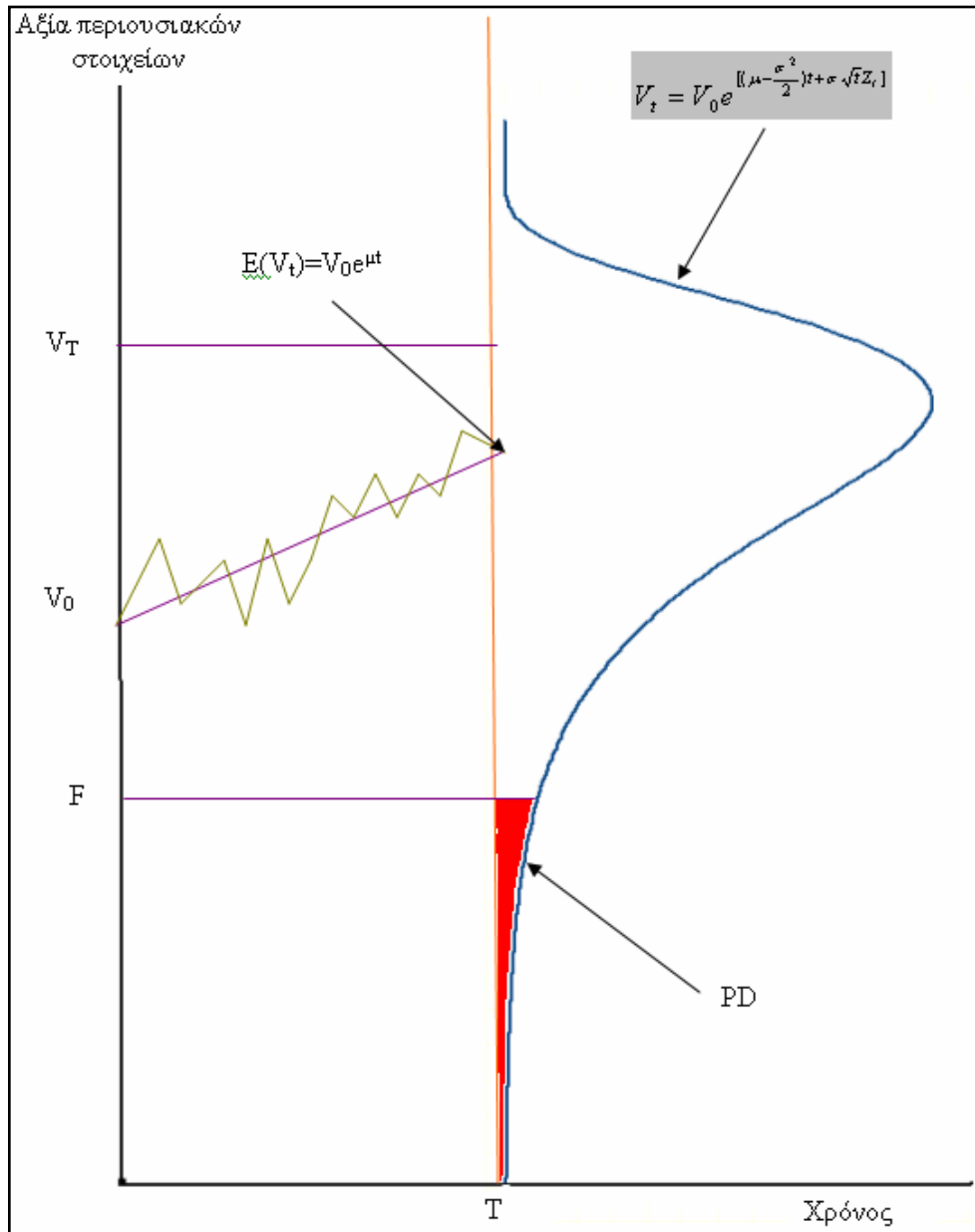
- Με βάση την χρηματοοικονομική θεωρία η τιμή ενός προϊόντος εξαρτάται από την συσχέτιση του προϊόντος με την αγορά. Στην περίπτωση της DCCF μεθόδου σε όλα τα δάνεια σε εταιρείες που ανήκουν στην ίδια βαθμίδα πιστωτικής ποιότητας αντιστοιχίζονται τα ίδια προεξοφλητικά επιτόκια ανεξάρτητα με την ευαισθησία των εταιρειών σε συστημικούς παράγοντες (πχ ύφεση).

Η μέθοδος RNV θέλοντας να αποφύγει τα παραπάνω προτείνει ένα δομικό (structural) μοντέλο της αξίας της εταιρείας και της χρεοκοπίας που βασίζεται πάνω στη δουλειά του Robert Merton.

Ο Robert Merton το 1974 πρότεινε έναν τρόπο αποτίμησης (option pricing approach) των δανείων της επιχείρησης με χρήση οπτιών. Με βάση τη θεωρία αυτή τα περιουσιακά στοιχεία της επιχείρησης  $V_t$  θεωρείται ότι ακολουθούν μια τυποποιημένη γεωμετρική Brownian κίνηση, εξίσωση (16).

$$V_t = V_0 e^{[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma \sqrt{t} Z_t]} \quad (16)$$

Με  $Z_t \sim N(0,1)$  και τα  $\mu$  και  $\sigma^2$  να είναι η μέση τιμή και η διασπορά της στιγμιαίας απόδοσης των περιουσιακών στοιχείων της επιχείρησης,  $dV_t/V_t$ . Δηλαδή η  $V_t$  ακολουθεί Lognormal κατανομή με μέση τιμή τη χρονική στιγμή  $t$ ,  $E(V_t) = V_0 e^{\mu t}$ . Επιπλέον γίνεται η υπόθεση ότι η επιχείρηση έχει μια πολλή απλή κεφαλαιακή δομή, καθώς το παθητικό της αποτελείται μόνο από τα ίδια κεφάλαια  $S$  και ένα zero-coupon πιστοδοτικό προϊόν με ονομαστική αξία  $F$  που ωριμάζει τη χρονική στιγμή  $T$ .



**Εικόνα 3-2 Το μοντέλο του Robert Merton**

Με βάση αυτό το πλαίσιο μια εταιρεία θα αθετήσει τις υποχρεώσεις της όταν η αξία των περιουσιακών της στοιχείων πέσει κάτω από το επίπεδο που χρειάζεται για να υποστηρίξει τα χρέη της (εικόνα 3-2).

«Στην *RNV* αντί να προεξοφλούνται συμβατικές χρηματικές ροές προεξοφλούνται εξαρτημένες πληρωμές: εάν μία πληρωμή ωριμάζει συμβατικά την ημέρα *t*, η πληρωμή που στην πραγματικότητα θα εισπράξει ο δανειστής θα είναι το συμβατικό ποσό μόνο εάν η εταιρεία δεν έχει αθετήσει τις υποχρεώσεις της μέχρι την ημέρα *t*, ο δανειστής εισπράττει

ένα ποσοστό της ονομαστικής αξίας του δανείου που είναι ίσο με  $1-LGD$  εάν η εταιρεία αθετήσει τις υποχρεώσεις της την ημέρα  $t$  και ο δανειστή δεν εισπράττει τίποτα ένα η εταιρεία αθετήσει τις υποχρεώσεις της πριν την ημέρα  $t$ . Έτσι μία πιστοδότηση προς μια εταιρεία μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα σύνολο παράγωγων συμβολαίων με υποκείμενο μέσο την αξία των περιουσιακών στοιχείων της εταιρείας. Η αξία της πιστοδότησης είναι το άθροισμα της παρούσας αξίας αυτών των παράγωγων συμβολαίων. Το προεξοφλητικό επιτόκιο που χρησιμοποιείται στην περίπτωση αυτή καθορίζεται χρησιμοποιώντας το άνευ κινδύνου (*risk-free*) επιτόκιο και το μέτρο αποτίμησης εξουδετέρωσης κινδύνου.

Το μέτρο αποτίμησης εξουδετέρωσης κινδύνου μπορεί να θεωρηθεί σαν η προσαρμογή που οφείλεται στις πιθανότητες αθέτησης σε κάθε χρονική περίοδο, οι οποίες ενσωματώνουν το επιμίσθιο κινδύνου της αγοράς (*market risk-premium*) που σχετίζεται με την  $PD$  της εταιρείας. Το μέγεθος της προσαρμογής εξαρτάται από την αναμενόμενη τιμή και τη διασπορά των περιουσιακών στοιχείων της εταιρείας. Εάν η απόδοση των περιουσιακών στοιχείων της εταιρείας μπορεί να μοντελοποιηθεί με τη χρήση του *Capital Asset Pricing Model (CAPM)* τότε η αναμενόμενη απόδοση μπορεί να εκφραστεί με βάση την αναμενόμενη απόδοση της αγοράς και τη συσχέτιση της εταιρείας με την αγορά. Έτσι, σε συμφωνία με την τυπική χρηματοοικονομική θεωρία, η αποτίμηση των πιστοδοτήσεων με βάση την *RNV* μέθοδο λαμβάνει υπόψη όχι μόνο τη  $PD$  της εταιρείας και τη  $LGD$  του προϊόντος αλλά και τη συσχέτιση της εταιρείας με την αγορά.»<sup>88</sup>

### **3.4. Τρόποι υπολογισμού των συστατικών του πιστωτικού κινδύνου**

Στις προηγούμενες παραγράφους έχουμε αναφερθεί είτε αμέσως (παράγραφο 3.1) είτε εμμέσως (παράγραφο 3.3) σε διάφορα συστατικά του κινδύνου. Στη συνέχεια θα παρουσιαστούν διάφοροι τρόποι υπολογισμού των συστατικών αυτών.

#### **3.4.1. Τρόποι υπολογισμού της πιθανότητα αθέτησης υποχρέωσης**

Υπάρχουν τέσσερις προσεγγίσεις στον υπολογισμό των πιθανοτήτων αθέτησης:

1. Υπολογισμός των  $PD$  με χρήση της μεθόδου του Robert Merton (εικόνα 3-2).

---

<sup>88</sup>EBET “Credit Risk Modelling: Current Practices and Applications” Basle 1999

2. Υπολογισμός των PD με χρήση του ανοίγματος των επιτοκίων (credit spread) εμπορεύσιμων πιστοδοτικών προϊόντων
3. Υπολογισμός των PD με χρήση των διαβαθμίσεων
4. Υπολογισμός των PD προσαρμόζοντας τις PD των διαβαθμίσεων στην τρέχουσα κατάσταση της οικονομίας

### *1. Υπολογισμός των PD με χρήση της μεθόδου του Robert Merton*

Στην εικόνα 3-2 φαίνεται ότι μια εταιρεία δε θα αθετήσει της υποχρεώσεις της τη χρονική στιγμή T εάν η αξία των περιουσιακών της στοιχείων είναι μικρότερη από το σύνολο του δανεισμού F της τη χρονική στιγμή T. Η πιθανότητα αυτή είναι η κόκκινη περιοχή στην εικόνα 3-2 και η μαθηματική της έκφραση δίδεται από τον τύπο (17)

$$PD = P(V_{Def} \geq V_T) = P(V_{Def} \geq V_0 e^{[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}Z_t]}) \quad (17)$$

### *2. Υπολογισμός των PD με χρήση του ανοίγματος των επιτοκίων (credit spread) εμπορεύσιμων πιστοδοτικών προϊόντων*

Η διαδικασία εύρεσης της PD με χρήση του ανοίγματος των επιτοκίων εμπορεύσιμων πιστοδοτικών προϊόντων.

Έστω ένα zero-coupon ομόλογο A με ονομαστική αξία (Face value) 100 ευρώ, με απόδοση στη λήξη  $r$  και με γνωστή LGD στη λήξη του και έστω PD είναι η πιθανότητα αθέτησης για χρονικό ορίζοντα μέχρι τη λήξη του. Έστω ακόμα ένα κρατικό ομόλογο (ομόλογο δίχως κίνδυνο) B με τα ίδια χαρακτηριστικά με το A και απόδοση στη λήξη  $r^*$ . Για το ομόλογο A στην λήξη του έχουμε δύο ενδεχόμενα α) να μην υπάρχει αθέτηση και τότε θα εισπραχθούν 100 ευρώ β) να υπάρξει αθέτηση και τότε θα εισπραχθούν  $(1 - LGD)100$  ευρώ. Τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την PD από τον τύπο (18).

$$\frac{100}{(1+r)} = \frac{100}{(1+r^*)} \times (1-PD) + \frac{(1-LGD) \times 100}{(1+r^*)} \times PD \Rightarrow$$

$$1+r^* = (1+r)(1-PD \times LGD) \Rightarrow$$

$$PD = \frac{1}{LGD} - \frac{1+r^*}{(1+r) \times LGD} \Rightarrow PD = \frac{r-r^*}{(1+r) \times LGD}$$
(18)

### 3. Υπολογισμός των PD με χρήση των διαβαθμίσεων

Οι διάφορες εταιρείες διαβάθμισης έχουν κατασκευάσει πίνακες στους οποίους αντιστοιχίζουν σε κάθε βαθμίδα πιστωτικής ποιότητας μια PD (πίνακας 3-1).

Βαθμίδα πιστωτικής ποιότητας	Έτη μετά την έκδοση	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
AAA		0	0	0,05	0,11	0,17	0,31	0,47	0,76	0,87	1
AA		0	0,02	0,07	0,15	0,27	0,43	0,62	0,77	0,85	0,96
A		0,04	0,12	0,21	0,36	0,56	0,76	1,01	1,34	1,69	2,06
BBB		0,24	0,54	0,85	1,52	2,19	2,91	3,52	4,09	4,55	5,03
BB		1,01	3,4	6,32	9,38	12,38	15,72	17,77	20,03	22,05	23,69
B		5,45	12,36	19,03	24,28	28,38	31,66	34,73	37,58	40,02	42,24
CCC		23,69	33,52	41,13	47,43	54,25	56,37	57,94	58,4	59,52	60,91

**Πίνακας 3-3 Standard & Poor's σωρευτική PD βασισμένη σε μέσες τιμές 1981 – 1998**

Οι πίνακες αυτοί κατασκευάζονται με τη χρήση ιστορικών δεδομένων. Έτσι στον πίνακα 3-3 η PD για μία εταιρεία που ανήκει στην A βαθμίδα πιστωτικής ποιότητας και χρονικό ορίζοντα 7 ετών είναι 1,01, το νούμερο αυτό αντιπροσωπεύει το ποσοστό των εταιρειών που αρχικά είχαν ενταχθεί στην βαθμίδα A και σε 7 χρόνια χρεοκόπησαν.

Οι PD δεν συμπίπτουν για όλες τις εταιρείες παροχής διαβαθμίσεων. Αυτό οφείλεται αφενός στο ότι κάθε εταιρεία έχει διαφορετική δεξαμενή ιστορικών δεδομένων και αφετέρου γιατί οι εταιρείες ακολουθούν διαφορετικές διαδικασίες υπολογισμού των PD. Οι διαφορές στις μεθοδολογίες υπολογισμού των PD για τα εταιρικά ομόλογα των Η.Π.Α. είναι οι<sup>89</sup>:

1. Χρήση ονομαστικής αξίας - χρήση αξίας έκδοσης
2. Χρήση πραγματικών διαβαθμίσεων - χρήση επαγόμενων διαβαθμίσεων

<sup>89</sup>J.B. Caouette, E. I. Altman και P. Narayanan "Managing Credit Risk" 1998



3. Χρήση μόνο ομολόγων εταιρειών εσωτερικού - χρήση ομολόγων εταιρειών εσωτερικού και εξωτερικού
4. Χρήση αρχικής διαβάθμισης - ομαδοποίηση σε διαβαθμίσεις ανεξάρτητα από την ηλικία του ομολόγου
5. Χρήση διαφορετικών χρονικών περιόδων

#### *4.Υπολογισμός των PD προσαρμόζοντας των PD των διαβαθμίσεων στην τρέχουσα κατάσταση της οικονομίας*

Για τον υπολογισμό των PD με χρήση των διαβαθμίσεων χρησιμοποιούνται ιστορικά στοιχεία που καλύπτουν πάνω από έναν κύκλο της οικονομίας. Όμως είναι λογικό όταν η οικονομία είναι σε ανοδική πορεία οι PD να πέφτουν ενώ όταν η οικονομία βρίσκεται σε ύφεση οι PD να αυξάνονται. Έτσι οι ιστορικές PD των διαβαθμίσεων υποτιμούν τις πραγματικές PD όταν η οικονομία βρίσκεται σε ύφεση και τις υπερτιμούν όταν η οικονομία βρίσκεται σε άνοδο. Για το λόγο αυτό υπάρχουν μέθοδοι που αναπροσαρμόζουν τις ιστορικές PD των διαβαθμίσεων με βάση την πορεία της οικονομίας. Για να επιτευχθεί αυτό χρησιμοποιούνται διάφοροι μακροοικονομικοί παράγοντες όπως ο πληθωρισμός, οι δείκτες ανεργίας και λοιπά.

#### **3.4.2. Τρόποι υπολογισμού της ζημίας λόγω αθέτησης**

Ο υπολογισμός της LGD δεν είναι μια εύκολη διαδικασία καθώς η LGD εξαρτάται από πολλούς παράγοντες όπως από την ποιότητα των εξασφαλίσεων, την αρχαιότητα (seniority) των απαιτήσεων της τράπεζας επί των περιουσιακών στοιχείων της εταιρείας και τα πιθανά έξοδα της τράπεζας για την συλλογή των απαιτήσεων της. Για αυτό το λόγο πολλές τράπεζες θεωρούν την LGD σαν μια τυχαία μεταβλητή και όχι σταθερά.

*«Για ένα σύνολο πιστοδοτικών προϊόντων με κοινά χαρακτηριστικά οι παράμετροι της κατανομής των LGD εκτιμώνται από δεξαμενές πληροφοριών που προέρχονται από πολλές πηγές όπως:*

- *Εσωτερικά ιστορικά στοιχεία για τις LGD*
- *Δεδομένα για ζημίες από αναφορές οργανισμών εμπορίου και δημοσιευμένες αναφορές των ελεγκτικών αρχών.*

- *Ιδιόκτητα στοιχεία συμβούλων*
- *Δημοσιοποιημένα, από εταιρείες διαβαθμίσεων, στοιχεία για τις ιστορικές LGD των εταιρικών ομολόγων.*
- *Διαισθητικές κρίσεις έμπειρων υπαλλήλων των τμημάτων χορηγήσεων.»<sup>90</sup>*

«Στην πραγματικότητα εάν και η LGD είναι ένα από τα βασικά χαρακτηριστικά του πιστωτικού κινδύνου υπάρχει, σε σχέση με άλλους παράγοντες του κινδύνου, όπως η PD, μικρή πρόοδος προς την εκλεπτυσμένη (sophisticated) μέτρηση της. Υπάρχουν πρωτοβουλίες (για παράδειγμα από την ISDA<sup>91</sup> και άλλους παρόμοιους οργανισμούς) για να φέρουν σε επαφή πολλές τράπεζες για να μοιραστούν γνώσεις σε σχέση με την πρακτική LGD εμπειρία τους καθώς και για τις σύγχρονες τεχνικές που χρησιμοποιούν για να την εκτιμήσουν από ιστορικά δεδομένα.»<sup>92</sup>

Πολλές φορές αντί των LGD δίδονται τα ποσοστά ανάκτησης (recovery rates RR) (πίνακας 3-2) που είναι ίσα με ένα μείον LGD.

Ranking	Recovery Rates	
	Average	Standard Deviation
Senior secured bank loans	0,70	0,21
Senior secured bonds	0,55	0,24
Senior unsecured bonds	0,51	0,26
Subordinated bonds	0,32	0,21
All bonds	0,45	0,27

**Πίνακας 3-4 Moody's Recovery Rates από 1977 – 1998, στοιχεία από ομόλογα στα οποία υπήρξε αθέτηση υποχρέωσης**

### 3.4.3. Τρόποι υπολογισμού των πιθανοτήτων μετάβασης μεταξύ βαθμίδων πιστωτικής ποιότητας (Rating Migration RM)

Η πιθανότητα μετάβαση μίας εταιρείας από μία βαθμίδα πιστωτικής ποιότητας σε μία άλλη βαθμίδα πιστωτικής ποιότητας μέσα σε μία χρονική περίοδο αναπαριστάται με τη βοήθεια πινάκων μετάβασης (Transition Matrixes) πίνακας 3-5. Έστω πίνακας

<sup>90</sup> EBET "Credit Risk Modelling: Current Practices and Applications" Basle 1999

<sup>91</sup> International Swaps and Derivatives Association

<sup>92</sup> J.B. Caouette, E. I. Altman και P. Narayanan "Managing Credit Risk" 1998

μετάβασης  $M=[m_{i,j}]$  τότε  $m_{i,j} = p(\text{μία εταιρεία που βρίσκεται στη βαθμίδα } i \text{ στην αρχή της χρονικής περιόδου να βρίσκεται στη βαθμίδα } j \text{ στο τέλος της χρονικής περιόδου}).$

Υπάρχουν δύο βασικές προσεγγίσεις στον υπολογισμό του πίνακα μετάβασης. Με βάση την πρώτη προσέγγιση για τον υπολογισμό του πίνακα μετάβασης δεν λαμβάνεται υπόψη η γενικότερη κατάσταση της οικονομίας ή ειδικότερα του τομέα της οικονομίας στον οποίο δραστηριοποιείται η εταιρεία. Τα  $m_{i,j}$  σε αυτή την περίπτωση προκύπτουν από ιστορικά στοιχεία μεταπτώσεων από τη μία βαθμίδα πιστωτικής ποιότητας στην άλλη. Τα ιστορικά στοιχεία αυτά συνήθως προέρχονται από μία χρονική περίοδο που καλύπτει έναν ή και περισσότερους πιστωτικούς κύκλους. Το γεγονός ότι τα  $m_{i,j}$  δεν αναπροσαρμόζονται ανάλογα με το σημείο του πιστωτικού κύκλου βρισκόμαστε αντισταθμίζεται εν μέρη από το γεγονός ότι η επίδραση της γενικότερης κατάστασης της οικονομίας στην εταιρεία αντικατοπτρίζεται στην εκάστοτε ενδεχόμενη αναβάθμιση ή υποβάθμιση της ακριβώς πριν την αρχή του χρονικού ορίζοντα.

Βαθμίδα πιστωτικής ποιότητας στην αρχή του έτους	Βαθμίδα πιστωτικής ποιότητας στην τέλος του έτους	Aaa	Aa	A	Baa	Ba	B	Caa	Def.	W
Aaa		0,8617	0,0945	0,0102	0	0,0003	0	0	0	0,0333
Aa		0,011	0,8605	0,0893	0,0031	0,0011	0,0001	0	0,0003	0,0346
A		0,0006	0,0285	0,8675	0,0558	0,0066	0,0017	0,0001	0,0001	0,0391
Baa		0,0006	0,0034	0,0664	0,81	0,0552	0,0097	0,0008	0,0016	0,0523
Ba		0,0003	0,0006	0,0054	0,0546	0,755	0,0818	0,0053	0,0132	0,0838
B		0,0001	0,0004	0,002	0,0056	0,0592	0,7593	0,0303	0,0641	0,079
Caa		0	0	0	0,0087	0,0261	0,0562	0,5701	0,2531	0,0858

Πίνακας 3-5 Moody's ενός έτους πίνακας μετάβασης W=Withdrawn<sup>93</sup>

Από την άλλη μεριά υπάρχουν μέθοδοι που συνδέουν την παραγωγή των πινάκων μετάβασης με την γενικότερη κατάσταση της οικονομίας. Στόχος των μεθόδων αυτών είναι να επιτύχουν την μεταβολή των πινάκων μετάπτωσης με τρόπο ώστε να αυξάνεται η πιθανότητα αναβάθμισης όταν η οικονομία βρίσκεται σε άνοδο και να αυξάνεται η πιθανότητα υποβάθμισης όταν η οικονομία βρίσκεται σε ύφεση. Αυτό επιτυγχάνεται με τη χρήση διάφορων μακροοικονομικών παραγόντων οι οποίοι μεταβάλλουν τον πίνακα

<sup>93</sup> Moody's Investors Service. Default and Recovery Rates of Corporate Bond Issuers: 2000, February 2001

μετάβασης ανάλογα με την πορεία της οικονομίας ή μέσω των τιμών των μετοχών που από τη φύση τους περιέχουν εκτιμήσεις για την πορεία της οικονομίας.

### 3.4.4. Τρόποι υπολογισμού των συσχετίσεων μεταξύ των κατανομών αθέτησης

Έστω  $G_i$  η τυχαία μεταβλητή που περιγράφει το ενδεχόμενο ένας οφειλέτης  $i$  να αθετήσει τις υποχρεώσεις του. Τότε εάν έχω ένα χαρτοφυλάκιο από  $m$  οφειλέτες το διάνυσμα  $G=(G_1, G_2, \dots, G_m)$  περιγράφει τα ενδεχόμενα να έχω αθέτηση από 0 έως  $m$  οφειλέτες. Είναι προφανές ότι η  $G$  είναι μια πολυδιάστατη τυχαία μεταβλητή.

Για τις  $G_i$  έχουμε είδη αναφέρει ότι μπορούμε να υποθέσουμε ότι ακολουθούν Bernoulli κατανομές με πιθανότητα επιτυχίας  $PD_i$   $B(1;PD_i)$ . Ένας άλλος τρόπος να περιγραφεί το ενδεχόμενο ένας οφειλέτης να αθετήσει τις υποχρεώσεις του είναι με τη χρήση της κατανομής Poisson  $Pois(\lambda_i)$ . Στην περίπτωση αυτή έχουμε  $PD_i = P[G_i \geq 1] = 1 - e^{-\lambda_i}$ .

Άρα και στην περίπτωση της Bernoulli και στην περίπτωση της Poisson η  $G_i$  εξαρτάται από μια και μοναδική παράμετρο την  $PD_i$  και η  $G$  από το διάνυσμα των παραμέτρων  $PD=(PD_1, PD_2, \dots, PD_m)$ .

#### *Bernoulli*

Έστω ότι η  $PD=(PD_1, PD_2, \dots, PD_m)=P=(P_1, P_2, \dots, P_m)$  είναι μια πολυδιάστατη τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί μια κατανομή με συνάρτηση κατανομής  $F$  με πεδίο ορισμού το  $[0,1]^m$ . Επιπλέον υποθέτουμε ότι οι εξαρτημένες, από μια πραγματοποίηση  $p=(p_1, p_2, \dots, p_m)$  του  $P$ , τυχαίες μεταβλητές  $G_i$  είναι ανεξάρτητες. Δηλαδή οι  $G_i | PD_i = p_i$  είναι ανεξάρτητες. Τότε έχουμε:

$$P[G_1 = g_1, G_2 = g_2, \dots, G_m = g_m] = \int \prod_{i=1}^m p_i^{g_i} (1 - p_i)^{1-g_i} dF(p_1, \dots, p_m) \quad (19)$$

με  $g_i \in \{0,1\}$

$$E[G_i] = E[P_i] \quad (20)$$

$$V[G_i] = E[P_i](1 - E[P_i]) \quad (21)$$

$$Cov[G_i, G_j] = E[G_i, G_j] - E[G_i]E[G_j] = Cov[P_i, P_j] \quad (22)$$

$$Corr[G_i, G_j] = \frac{Cov[P_i, P_j]}{\sqrt{E[P_i](1 - E[P_i])}\sqrt{E[P_j](1 - E[P_j])}} \quad (23)$$

### Poisson

Έστω ότι η  $\Lambda = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_m)$  είναι μια πολυδιάστατη τυχαία μεταβλητή<sup>94</sup> που ακολουθεί μια κατανομή με συνάρτηση κατανομής  $F$  με πεδίο ορισμού το  $[0, +\infty)^m$ . Επιπλέον υποθέτουμε ότι οι εξαρτημένες, από μια πραγματοποίηση  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$  του  $\Lambda$ , τυχαίες μεταβλητές  $G_i$  είναι ανεξάρτητες. Δηλαδή οι  $G_i | \Lambda_i = \lambda_i$  είναι ανεξάρτητες. Τότε έχουμε:

$$P[G_1 = g_1, G_2 = g_2, \dots, G_m = g_m] = \int_{[0, \infty)^m} e^{-(\lambda_1 + \dots + \lambda_m)} \prod_{i=1}^m \frac{\lambda_i^{g_i}}{g_i!} dF(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \quad (24)$$

με  $g_i \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$$E[G_i] = E[\Lambda_i] \quad (25)$$

$$V[G_i] = V[\Lambda_i] + E[\Lambda_i] \quad (26)$$

$$Cov[G_i, G_j] = E[G_i, G_j] - E[G_i]E[G_j] = Cov[\Lambda_i, \Lambda_j] \quad (27)$$

---

<sup>94</sup>  $PD_i = 1 - e^{-\Lambda_i}$

$$Corr[G_i, G_j] = \frac{Cov[P_i, P_j]}{\sqrt{V[\Lambda_i] + E[\Lambda_i]} \sqrt{V[\Lambda_j] + E[\Lambda_j]}} \quad (28)$$

### 3.5. Τα κύρια μοντέλα της αγοράς για τον υπολογισμό του πιστωτικού κινδύνου

Με βάση τα παραπάνω δομικά συστατικά του κινδύνου έχουν κατασκευαστεί ένα πλήθος μοντέλων υπολογισμού του πιστωτικού κινδύνου. Τα κυριότερα από αυτά (πίνακας 3-6)<sup>95</sup> θα εξεταστούν στη συνέχεια.

	<b>CreditMetrics</b>	<b>KMV-Model</b>	<b>CreditRisk+</b>	<b>CreditPortfolioView<sup>96</sup></b>
<b>Risk Driver</b>	Asset Value Process	Asset Value Process	Default Intensity	Macroeconomics Factors
<b>Definition of Risk</b>	Mark-to-Model	Distance to Default (DtD)	Default Risk only	Mark-to-Model
<b>Risk Scale</b>	Down/Upgrade and Default	DtD on continuous Scale	Default	Down/Upgrade and Default
<b>Transition Probabilities</b>	Historic Rating Changes	EDF-Concept, high migration probabilities	Not Implemented	Stochastic, Via Macro-factors
<b>Correlations</b>	Equity Value Factor Model	Asset Value Factor Models	Implicit by Sectors	Implicit by Macro-economy
<b>Severity (LGD)</b>	Stochastic (Beta-Distribution) and Fixed	Stochastic (Beta-Distribution) and Fixed	Deterministic LGD, Stochastic Modifications	Stochastic, Empirically Calibrated

**Πίνακας 3-6 Τα κύρια μοντέλα υπολογισμού του πιστωτικού κινδύνου και οι διαφορές τους**

#### 3.5.1. CreditMetrics

Το CreditMetrics έχει κατασκευαστεί από την JP Morgan το 1997 και βασίζεται στην ανάλυση των πιθανοτήτων μετάβασης μεταξύ βαθμίδων πιστωτικής ποιότητας. Το CreditMetrics μοντελοποιεί την μελλοντική κατανομή αξιών του χαρτοφυλακίου δανείων ή ομολόγων χρησιμοποιώντας τις πιθανότητες μετάβασης και θεωρώντας ότι τα μελλοντικά επιτόκια είναι γνωστά. Στην συνέχεια το πιστωτικό VaR (credit-VaR) του χαρτοφυλακίου είναι το ποσοστιαίο σημείο της κατανομής των αποδόσεων που αντιστοιχεί στο επιθυμητό επίπεδο εμπιστοσύνης.

<sup>95</sup> C. Bluhm, L. Overbeck και C. Wagner “An introduction to Credit Risk Modeling”, 2003

<sup>96</sup> Credit Portfolio View in the CPV-Macro mode. In the CPV-Direct mode, segment-specific default probabilities are drawn from a gamma distribution instead of simulating macroeconomic factors as input into a logit function representing a segment’s conditional default probability.

Οι δυσκολίες που έχει να αντιμετωπίσει το CreditMetrics σε σχέση με το RiskMetrics δηλαδή το μοντέλο υπολογισμού του credit-VaR σε σχέση με το μοντέλο υπολογισμού του market-VaR της JP Morgan είναι δύο. Πρώτον η κατανομή των αποδόσεων του πιστωτικού χαρτοφυλακίου είναι σίγουρα μη-κανονική (έχουμε μεγάλη Skewness και παχιές ουρές, δεξ § 4.1.6) και δεύτερον οι επιπτώσεις της διαφοροποίησης του χαρτοφυλακίου είναι πιο δύσκολο να μετρηθούν.

### 3.5.1.1. Υπολογισμός του credit-VaR ενός ομολόγου

Αρχικά επιλέγεται ο χρονικός ορίζοντας που συνήθως είναι ένα έτος. Στη συνέχεια επιλέγεται σύστημα διαβάθμισης του ομολόγου. Το σύστημα αυτό θα τροφοδοτήσει το μοντέλο με τις PD που αντιστοιχούν σε κάθε διαβάθμιση και με τις ιστορικές πιθανότητες μετάβασης μεταξύ διαβαθμίσεων. Το επόμενο βήμα είναι να επιλέξουμε τα μελλοντικά επιτόκια προεξόφλησης για κάθε βαθμίδα<sup>97</sup> και να ορίσουμε το RR σε περίπτωση αθέτησης. Τέλος χρησιμοποιώντας τα παραπάνω υπολογίζεται η κατανομή των αποδόσεων του ομολόγου στο τέλος του χρονικού ορίζοντα.

#### Παράδειγμα 3-1

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την κατανομή των αποδόσεων του senior unsecured ομολόγου O που λήγει σε τρία χρόνια και πληρώνει ετήσιο κουπόνι 10%. Σαν χρονικός ορίζοντας επιλέγεται το ένα έτος. Επιπλέον το ομόλογο O ανήκει στη βαθμίδα A με βάση το σύστημα διαβάθμισης της Standard & Poor's.

Η τιμή του ομολόγου στο τέλος του χρονικού ορίζοντα θα είναι  $V_R$  με R να συμβολίζει τη βαθμίδα στην οποία θα βρίσκεται το O στο τέλος του χρονικού ορίζοντα. Με βάση τα προεξοφλητικά επιτόκια του πίνακα 3-8 η τιμή του ομολόγου εάν αυτό παραμείνει στη βαθμίδα A θα είναι  $V_A = 120,7195$ .

---

<sup>97</sup> Τα μελλοντικά επιτόκια προεξόφλησης (Forward Discount Rate) μίας βαθμίδας είναι τα επιτόκια προεξόφλησης που θα ισχύουν για την βαθμίδα αυτή στο τέλος της χρονικής περιόδου. Το επιτόκιο που αντιστοιχίζονται σε κάθε βαθμίδα εξαρτώνται από το χωρίς κίνδυνο (risk-free) επιτόκιο και το επιτίμιο κινδύνου (risk-premium) που αντιστοιχεί στην βαθμίδα αυτή.

$$V_A = 10 + \frac{10}{1,0372} + \frac{110}{(1,0432)^2} = 120,7195 \quad (29)$$

Βαθμίδα πιστωτικής ποιότητας στην αρχή του έτους	Βαθμίδα πιστωτικής ποιότητας στο τέλος του έτους	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Def.
AAA		0,9081	0,0833	0,0068	0,0006	0,0012	0	0	0
AA		0,007	0,9065	0,0779	0,0064	0,0006	0,0014	0,0002	0
A		0,0009	0,0227	0,9105	0,0552	0,0074	0,0026	0,0001	0,0006
BBB		0,0002	0,0033	0,0589	0,86	0,053	0,0117	0,0111	0,0018
BB		0,0003	0,0014	0,0067	0,0773	0,8053	0,0884	0,01	0,0106
B		0	0,0011	0,0024	0,0043	0,0648	0,8347	0,0407	0,052
CCC		0,0022	0	0,0022	0,013	0,0238	0,1124	0,6485	0,1979

Πίνακας 3-7 Standard & Poor's ενός έτους πίνακας μετάβασης (Credit Week Απρίλιος 15, 1996)

	Έτος 1	Έτος 2
AAA	3,6	4,17
AA	3,65	4,22
A	3,72	4,32
BBB	4,1	4,67
BB	5,55	6,02
B	6,05	7,02
CCC	15,05	15,02

Πίνακας 3-8 One-year forward zero-curves, CreditMetrics JP Morgan

Βαθμίδα πιστωτικής ποιότητας στην τέλος του έτους	Πιθανότητα	Αθροιστική πιθανότητα	V <sub>R</sub>	Διαφορά στην τιμή ΔV
AAA	0,0009	0,0009	121,022	0,302473
AA	0,0227	0,0236	120,9201	0,200575
A	0,9105	0,9341	120,7195	0
BBB	0,0552	0,9893	120,0095	-0,71004
BB	0,0074	0,9967	117,3369	-3,38269
B	0,0026	0,9993	115,4719	-5,24768
CCC	0,0001	0,9994	101,8388	-18,8808
Default	0,0006	1	51	-69,7195

Πίνακας 3-9 Κατανομή των τιμών ομολόγων και αλλαγές στην τιμή για senior unsecured ομόλογο βαθμίδας A, σε ένα έτος

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζονται και τα υπόλοιπα V<sub>R</sub>. Ενώ εάν υπάρξει αθέτηση με βάση το RR του πίνακα 3-2 το V<sub>D</sub>=100\*0,51=51. Με βάση αυτά τα V<sub>R</sub> και τον πίνακα



μετάβασης 3-7 δημιουργείται ο πίνακας 3-9 που περιγράφει την μελλοντικές αποδόσεις του O.

Το credit-VaR σε στάθμη σημαντικότητας 99,9 % μπορεί να υπολογιστεί με χρήση παρεμβολής και είναι ίσο με 5,03249 νομισματικές μονάδες. Εάν το credit-VaR υπολογιστεί με χρήση κανονικής κατανομής τότε πρέπει πρώτα να υπολογιστούν τα  $\mu$  και  $\sigma$  της κατανομής. Έχουμε  $\mu=-0,11915$  και  $\sigma=1,723244$  και το credit-VaR είναι ίσο με 5,20611.

### 3.5.1.2. Υπολογισμός του credit-VaR χαρτοφυλακίου ομολόγων

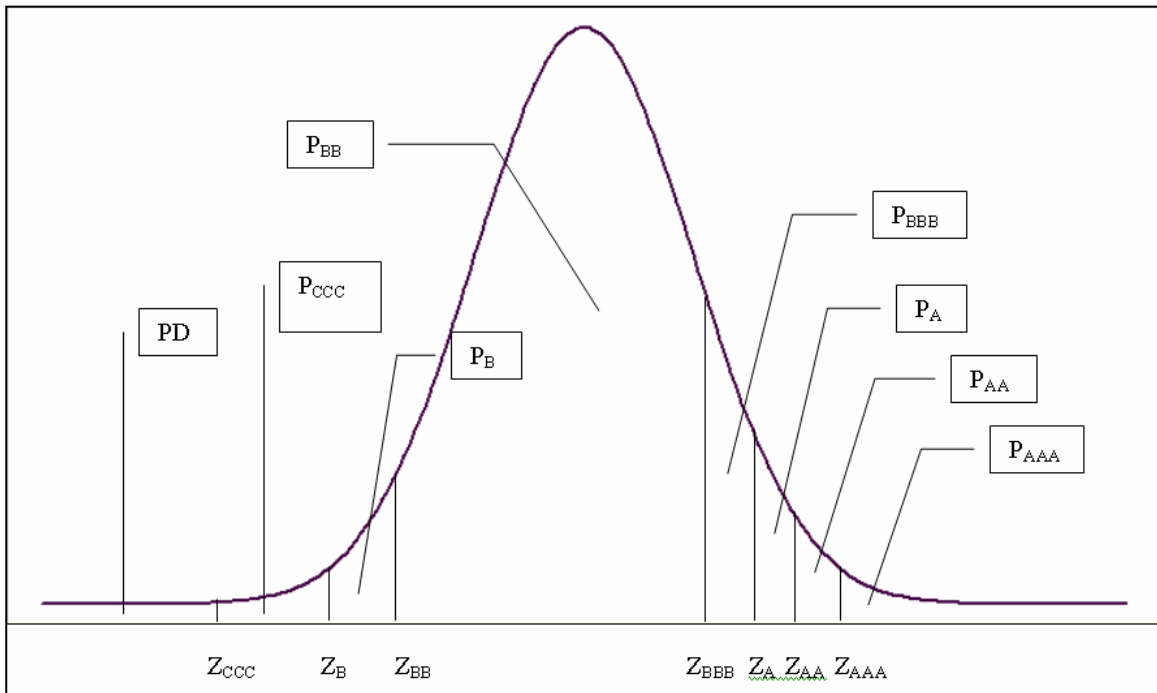
Για να υπολογίσουμε το credit-VaR του χαρτοφυλακίου εργαζόμαστε όπως και με το ένα ομόλογο με τη διαφορά ότι θα πρέπει να υπολογίσουμε τις κοινές πιθανότητες μετάβασης των ομολόγων του χαρτοφυλακίου. Αυτό επιτυγχάνεται με τη χρήση της θεωρίας του Robert Merton για την αξία των περιουσιακών στοιχείων της εταιρείας (εξίσωση 16 και εικόνα 3-2). Πιο συγκεκριμένα γίνεται η υπόθεση ότι η εταιρεία έχει μία απλή κεφαλαιακή δομή και τα περιουσιακά της στοιχεία V χρηματοδοτούνται μόνο από τα ίδια κεφάλαια και από ένα ομόλογο μηδενικού κουπονιού που ωριμάζει τη χρονική τιμή T και έχει ονομαστική αξία F. Έτσι αθέτηση έχουμε εάν η το V είναι μικρότερο του F, δηλαδή εάν η αξία των περιουσιακών στοιχείων της εταιρείας πέσει κάτω από ένα όριο που το συμβολίζουμε με  $V_{Def}=F$ . Με βάση το μοντέλο του Merton οι κανονικοποιημένες λογαριθμικές αποδόσεις για οποιαδήποτε περίοδο ακολουθούν  $N(0,1)$ . Με αυτές τις υποθέσεις η πιθανότητα αθέτησης αντιστοιχίζεται στο  $Z_{CCC}$  που ορίζεται από την εξίσωση (30).

$$\begin{aligned} PD &= P(V_t \leq V_{Def}) = P(V_0 e^{[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma \sqrt{t} Z_t]} \leq V_{Def}) \Rightarrow \\ PD &= P\left[\frac{\ln(V_{Def}/V_0) - (\mu - (\sigma^2/2))t}{\sigma \sqrt{t}} \geq Z_t\right] \equiv N(Z_{Def}) \end{aligned} \quad (30)$$

Σε όλα τα ομόλογα που ανήκουν στην ίδια βαθμίδα έχει αντιστοιχιστεί η ίδια PD και έτσι σε όλα αντιστοιχίζεται η ίδια  $Z_{CCC}$ . Με ανάλογο τρόπο υπολογίζεται και η  $Z_R$  που αντιστοιχεί στην πιθανότητα μετάβασης στη βαθμίδα R (εξίσωση 31).

$$\begin{aligned}
 PD + P_{CCC} &= P(V_t \leq V_B) = P(V_0 e^{[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma \sqrt{t} Z_t]} \leq V_B) = \\
 &P\left[\frac{\ln(V_B / V_0) - (\mu - (\sigma^2 / 2))t}{\sigma \sqrt{t}} \geq Z_t\right] \equiv N(Z_B)
 \end{aligned}
 \tag{31}$$

Σχηματικά η αντιστοίχιση αυτή φαίνεται στο σχήμα 3-3 για ένα ομόλογο BB.



**Εικόνα 3-3 Αντιστοίχιση  $Z_R$  στις βαθμίδες πιστωτική ποιότητας**

Η κοινή κατανομή των κανονικοποιημένων λογαριθμικών αποδόσεων όλων των ομολόγων είναι πολυδιάστατη κανονική. Έτσι οι κοινές πιθανότητες μετάβασης μπορούν να υπολογιστούν με χρήση των  $Z_R$  και των συσχετίσεων των περιουσιακών στοιχείων των εταιρειών<sup>98</sup>. Για τον υπολογισμό των συσχετίσεων των περιουσιακών στοιχείων χρησιμοποιούνται σαν προσεγγίσεις οι τιμές των μετοχών που διαπραγματεύονται σε χρηματιστήρια καθώς οι τιμές των περιουσιακών στοιχείων δεν είναι αμέσως διαθέσιμες. Όμως το πλήθος των συσχετίσεων για μεγάλα χαρτοφυλάκια είναι τεράστιο και για το

<sup>98</sup> Για μεγάλα χαρτοφυλάκια ο αναλυτικός υπολογισμός των πιθανοτήτων μετάβασης δεν είναι εφικτός για το λόγο αυτό χρησιμοποιείται Monte Carlo προσομοίωση για τον υπολογισμό της κατανομής των τιμών του χαρτοφυλακίου.

λόγο αυτό το CreditMetrics χρησιμοποιεί ανάλυση πολλαπλών παραγόντων. Έτσι κάθε οφειλέτης αντιστοιχίζεται στις χώρες και στους τομείς της οικονομίας που κατά καλλίτερο δυνατόν τρόπο καθορίζουν την απόδοση του. Ο χρήστης του μοντέλου καλείται να καθορίσει την βαρύτητα κάθε παράγοντα καθώς και τον ειδικό κίνδυνο της εταιρείας που δε συσχετίζεται με άλλους οφειλέτες ή δείκτες.

### **3.5.1.3.Υπολογισμός του credit-VaR παραγώγων**

Στην περίπτωση των ομολόγων των δανείων και άλλων πιστοδοτικών προϊόντων με προκαθορισμένες χρηματικές ροές το CreditMetrics ουσιαστικά προεξοφλεί αυτές τις χρηματικές ροές για να παράγει την κατανομή των τιμών του πιστοδοτικού προϊόντος. Όμως στην περίπτωση παραγώγων πιστοδοτικών προϊόντων όπως swaps και forwards οι μελλοντικές χρηματικές ροές εξαρτώνται από τα μελλοντικά επιτόκια. Σε αυτή την περίπτωση μπορεί ο κάτοχος του προϊόντος να είναι είτε πιστωτής είτε οφειλέτης. Προφανώς στην περίπτωση που είναι οφειλέτης (δηλαδή το παράγωγο προϊόν είναι out of the money) τον πιστωτικό κίνδυνο τον έχει ο αντισυμβαλλόμενος. Το CreditMetrics για να αντεπεξέλθει της δυσκολίας αυτής χρησιμοποιεί τη μέση έκθεση του προϊόντος μέχρι τη λήξη.

Τέλος το CreditMetrics υπολογίζει την αξία παραγώγων προϊόντων για δεδομένη βαθμίδα R αφαιρώντας από την μελλοντική αξία χωρίς κίνδυνο του προϊόντος την αναμενόμενη ζημία μέχρι τη λήξη του προϊόντος για τη βαθμίδα R. Η αναμενόμενη ζημία μέχρι τη λήξη του προϊόντος για τη βαθμίδα R υπολογίζεται σαν το γινόμενο της μέσης έκθεσης μέχρι τη λήξη επί την πιθανότητα αθέτησης μέχρι την λήξη για τη βαθμίδα R επί το LGD.

### **3.5.2. KMV-Model**

Στο KMV-Model η διαδικασία αθέτησης (default process) είναι ενδογενής και σχετίζεται με την κεφαλαιακή δομή της εταιρείας. Αθέτηση έχουμε όταν η αξία των περιουσιακών στοιχείων της εταιρείας πέσει κάτω από κάποιο κρίσιμο επίπεδο.

Το KMV-Model χρησιμοποιεί την ίδια γενική μεθοδολογία με το CreditMetrics. Η διαφορά του με το CreditMetrics έγκειται στο ότι αφενός υπολογίζει από μόνο του τις πιθανότητες μετάβασης και αθέτησης χρησιμοποιώντας το μοντέλο του Merton για να εκτιμήσει την πραγματική πιθανότητα αθέτησης για κάθε οφειλέτη. Αφετέρου δεν προεξοφλεί τις πραγματικές μελλοντικές ροές αλλά πρώτα τις ανάγει σε χρηματικές ροές άνευ κινδύνου και χρησιμοποιεί το επιτόκιο άνευ κινδύνου για να τις προεξοφλήσει.

### 3.5.2.1. Πραγματικές πιθανότητες αθέτησης (Expected Default Frequencies EDF)

Οι πραγματικές πιθανότητες αθέτησης (Expected Default Frequencies EDF) υπολογίζονται με βάση το KMV-Model σε τρία βήματα:

- Εκτίμηση της αγοραίας τιμής  $V_A$  και της διασποράς  $\sigma_A$  των περιουσιακών στοιχείων της εταιρείας.
- Υπολογισμός του μέτρου Distance to Default DtD.
- Αντιστοίχιση του DtD σε πραγματικές πιθανότητες αθέτησης χρησιμοποιώντας την βάση δεδομένων της KMV.

Για την εκτίμηση των  $V_A$  και  $\sigma_A$  χρησιμοποιείται η μέθοδος του Merton<sup>99</sup> για την αποτίμηση του εταιρικού χρέους. Επιπλέον γίνεται η παραδοχή ότι η κεφαλαιακή δομή της εταιρείας αποτελείται από μετοχές, βραχυχρόνιο δανεισμό που θεωρείται ισοδύναμο με ρευστό, μακροχρόνιο χρέος που θεωρείται ότι δεν έχει χρόνο ωρίμανσης και μετατρέψιμες προνομιούχες μετοχές. Με βάση τα παραπάνω η αξία των μετοχών της εταιρείας  $V_E$  και η διασποράς της  $\sigma_E$  δίδεται από τις εξισώσεις (32) και (33).

$$V_E = f(V_A, \sigma_A, K, c, r) \quad (32)$$

$$\sigma_E = g(V_A, \sigma_A, K, c, r) \quad (33)$$

Με  $K$  να είναι το ποσοστό της μόχλευσης (leverage),  $c$  να είναι το μέσο κουπόνι που πληρώνεται για το μακροχρόνιο χρέος και  $r$  το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο. Η  $V_E$  είναι

---

<sup>99</sup> Ο Merton ουσιαστικά χρησιμοποίησε την θεωρητική προσέγγιση των Black και Scholes για την αποτίμηση των options για την αποτίμηση του εταιρικού χρέους.

δεδομένη κάθε χρονική στιγμή όμως η  $\sigma_E$  είναι σχετικά ασταθής. Έτσι το σύστημα των (32) και (33) δεν μπορεί να λυθεί με αναλυτικό τρόπο. Για αυτό το λόγο το KMV-Model χρησιμοποιεί επαναληπτικές τεχνικές για την εκτίμηση των  $V_A$  και  $\sigma_A$ .

Η KMV έχει παρατηρήσει από ένα δείγμα αρκετών εκατοντάδων εταιρειών που αθέτησαν τις υποχρεώσεις τους ότι η αθέτηση γίνεται όταν η αξία των περιουσιακών στοιχείων της εταιρείας φτάσει σε ένα επίπεδο ανάμεσα στην αξία όλων των υποχρεώσεων και την αξία των βραχυχρόνιων υποχρεώσεων. Άρα η PD που υπολογίζεται από τον τύπο (17) ίσως δεν είναι ακριβής. Επιπλέον απώλεια στην ακρίβεια μέτρησης της PD από την (17) μπορεί να έχουμε και από την επίδραση άλλων παραγόντων όπως η μη-κανονικότητα των λογαριθμικών αποδόσεων των περιουσιακών στοιχείων, τις παραδοχές για την κεφαλαιακή διάρθρωση της εταιρείας καθώς και την δυνατότητα υπερανάληψης που πολλές εταιρείες έχουν. Για αυτούς τους λόγους η KMV έχει υλοποιήσει ένα ενδιάμεσο βήμα για τον υπολογισμό της PD. Το ενδιάμεσο αυτό βήμα συνίσταται στον υπολογισμό ενός δείκτη που καλείται Distance to Default (DtD) και την αντιστοίχιση του δείκτη αυτού σε μία PD.

Το DtD ορίζεται ως εξής:

STD βραχυχρόνιο χρέος

LTD μακροχρόνιο χρέος

DPT σημείο αθέτησης= $STD+1/2LTD$

DtD distance to default που είναι η απόσταση της αναμενόμενης αξίας των περιουσιακών στοιχείων της εταιρείας σε χρονικό ορίζοντα  $T$ ,  $E(V_T)$  από το DPT εκφρασμένο σε τυπικές αποκλίσεις των μελλοντικών αποδόσεων των περιουσιακών στοιχείων.

$$DtD = \frac{E(V_T) - DPT}{\sigma_A} \quad (34)$$

Η KMV αντιστοιχίζει το DtD σε μια PD. Η PD ή EDF όπως αναφέρεται από την KMV υπολογίζεται με βάση ιστορικά στοιχεία που η KMV έχει σε μια δική της βάση δεδομένων.

### 3.5.2.2. Αξία ομολόγου

Η KMV για τον υπολογισμό της αξίας του ομολόγου PV διαιρεί τις μελλοντικές χρηματικές ροές σε ροές ανεξάρτητες του κινδύνου  $PV_{RF}$  και σε ροές που υπόκεινται σε κίνδυνο  $PV_R$ . Οι ροές που είναι ανεξάρτητες από τον κίνδυνο προεξοφλούνται με το επιτόκιο άνευ κινδύνου. Οι ροές που υπόκεινται σε κίνδυνο αποτιμούνται με τη χρήση της μεθόδου των Martingale με χρήση της άνευ κινδύνου πιθανότητας Q ο οφειλέτης να αθετήσει τις υποχρεώσεις του στο τέλος της χρονικής περιόδου.

$$PV = PV_{RF} + PV_R \quad (35)$$

$$PV_{RF} = (1 - LGD) \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{(1 + r_i)^{t_i}} \quad (36)$$

$$PV_R = LGD \sum_{i=1}^n \frac{(1 - Q_i) C_i}{(1 + r_i)^{t_i}} \quad (37)$$

Η  $Q_i$  είναι η άνευ κινδύνου EDF στον χρονικό ορίζοντα  $t_i$ , η  $C_i$  είναι η συμβατική χρηματική ροή στο τέλος του χρονικού ορίζοντα  $t_i$  και το  $r_i$  είναι το επιτόκιο άνευ κινδύνου στον χρονικό ορίζοντα  $t_i$ .

Η άνευ κινδύνου EDF στο τέλος του χρονικού ορίζοντα T  $Q_T$  υπολογίζεται από την εξίσωση (38).

$$Q_T = N\left(N^{-1}(EDF) + \frac{(\mu - r)}{\sigma} \sqrt{T}\right) \quad (38)$$

Με το  $r$  να είναι το επιτόκιο άνευ κινδύνου τα  $\mu$  και  $\sigma$  να είναι η μέση αξία και η διασπορά της αξίας των περιουσιακών στοιχείων της εταιρείας.

Με βάση το CAPM έχουμε τις εξισώσεις (39)

$$\mu - r = \beta(\mu_M - r) \quad \beta = \frac{Cov(R, R_M)}{Var(R_M)} = \rho \frac{\sigma}{\sigma_M} \quad (39)$$

Με τα  $R_M$ ,  $\mu_M$  και  $\sigma_M$  να είναι η απόδοση της αγοράς η μέση απόδοση της αγοράς και η διασπορά των αποδόσεων της αγοράς και το  $\rho$  να είναι ο συντελεστής συσχέτισης της απόδοσης των περιουσιακών στοιχείων της εταιρείας με την απόδοση της αγοράς.

Άρα η (38) με χρήση των (39) μετασχηματίζεται στην (40).

$$Q_T = N(N^{-1}(EDF) + \rho \frac{(\mu_M - r)}{\sigma_M} \sqrt{T}) \quad (40)$$

Επειδή στην πράξη είναι δύσκολο να υπολογιστεί το  $\mu_M - r$  η KMV ενσωματώνει στην (40) το Sharpe ratio  $U$  και το  $\theta$  (εξίσωση (41)).

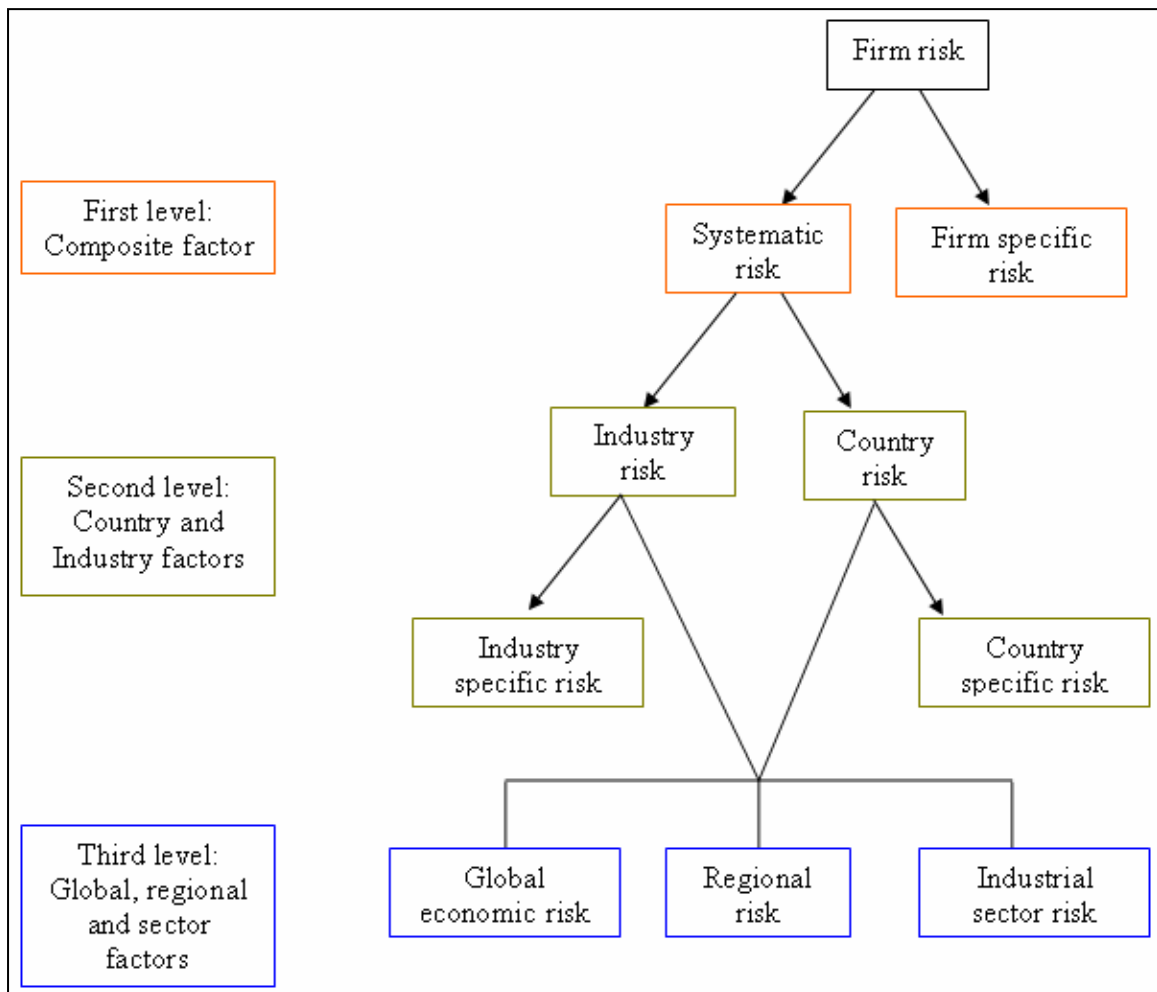
$$Q_T = N(N^{-1}(EDF) + \rho U T^\theta) \quad (41)$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιεί τον τύπο (35) μετασχηματισμένο για συνεχές προεξόφληση το συνεχές επιτόκιο προεξόφλησης που αντιστοιχεί στον οφειλέτη ( $\tilde{R}_i = \ln(1+R_i)$ ) και το συνεχές επιτόκιο προεξόφλησης άνευ κινδύνου ( $\tilde{r}_i = \ln(1+r_i)$ ) δημιουργώντας την (42). Από την (42) υπολογίσει τα  $U$  και  $\theta$  που παράγουν το μικρότερο τετραγωνικό σφάλμα .

$$\tilde{R}_i - \tilde{r}_i = -\frac{1}{t_i} \ln(1 - N(N^{-1}(EDF_{t_i}) + \rho U T^\theta) LGD) \quad (42)$$

### 3.5.2.3.Συσχετίσεις μεταξύ των αποδόσεων των περιουσιακών στοιχείων.

Όπως και το CreditMetrics έτσι και το KMV-Model υπολογίζει τις συσχετίσεις μεταξύ των αποδόσεων των περιουσιακών στοιχείων με τη χρήση ενός δομικού μοντέλου. Το μοντέλο που χρησιμοποιείται από την KNV είναι ένα μοντέλο πολλαπλών παραγόντων τριών επιπέδων εικόνα 3-4. Άρα η απόδοση  $r$  των περιουσιακών στοιχείων μίας εταιρείας στη γενική μορφή της δίδεται από το γενικό μοντέλο που περιγράφεται με τις εξισώσεις (43).



Εικόνα 3-4 Το KMV μοντέλο (τα τρία επίπεδα πολλοί παράγοντες)



$$\begin{aligned}
 r &= \alpha_1 CF + \varepsilon_1 \\
 CF &= \sum_{i=1}^{m_1} \beta_{1,i} C_i + \sum_{i=1}^{m_2} \beta_{2,i} I_i \\
 C_i &= \sum_{j=1}^n \gamma_{1,i,j} G_j + \sum_{j=1}^{n_2} \gamma_{2,i,j} R_j + \sum_{j=1}^{n_3} \gamma_{3,i,j} S_j + \varepsilon_{C,i} \\
 I_i &= \sum_{j=1}^{n_4} \gamma_{4,i,j} G_j + \sum_{j=1}^{n_5} \gamma_{5,i,j} R_j + \sum_{j=1}^{n_6} \gamma_{6,i,j} S_j + \varepsilon_{I,i}
 \end{aligned} \tag{43}$$

Με CF=Composite factor, C<sub>i</sub>=Country factors, I<sub>i</sub>=Industry factors, G<sub>j</sub>=Global economic factors, R<sub>j</sub>=Regional factors, S<sub>j</sub>=industrial Sector factors, ε<sub>1</sub>=Firm specific risk, ε<sub>c,i</sub>=Country i specific risk, ε<sub>i,i</sub>=Industry i specific risk.

Άρα οι συσχετίσεις μεταξύ των εταιρειών παράγονται από τις συσχετίσεις μεταξύ των παραγόντων.

### 3.5.3. CreditRisk+

Το CreditRisk+ είναι ένα αναλογικού τύπου μοντέλο (actuarial model) που βασίζεται πάνω σε μια τυπική ασφαλιστικό-μαθηματική προσέγγιση. Το CreditRisk+ θα μπορούσαμε να πούμε ότι είναι ένας τυπικός αντιπρόσωπος των μοντέλων που κάνουν χρήση της Poisson όπως αυτά αναλύθηκαν στην §4.4.4 «Τρόποι υπολογισμού των συσχετίσεων μεταξύ των κατανομών αθέτησης» με το μέσο ποσοστό αθετήσεων να ακολουθεί γάμα κατανομή.

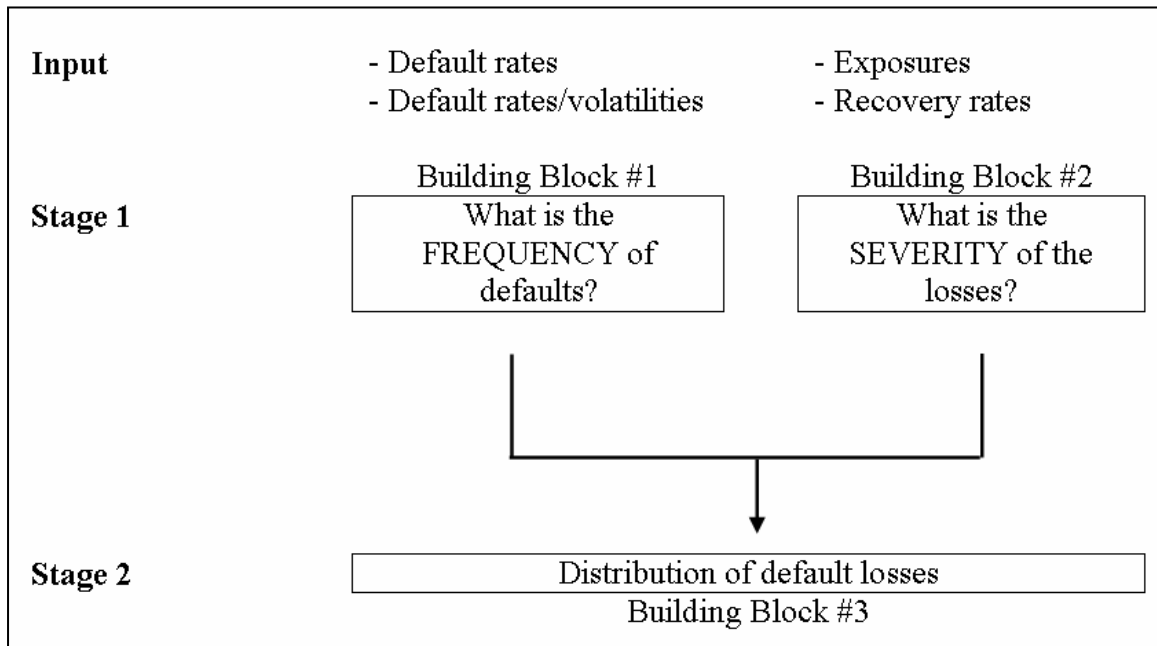
Ο τρόπος λειτουργίας του μοντέλου μπορεί να περιγραφεί από την εικόνα 3-5.

Στο Building block 1 χρησιμοποιείται η Poisson κατανομή για να περιγραφεί η κατανομή των αθετήσεων με την επιπλέον υπόθεση ότι το μέσο ποσοστό αθέτησης είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί τη γάμα κατανομή.

Το Building block 2 έχει να κάνει με τον υπολογισμό του μεγέθους της ζημίας. Το μέγεθος της ζημίας καθορίζεται από το άνοιγμα και το RR, δεν είναι τυχαία μεταβλητή

και υπολογίζεται εκτός του μοντέλου. Στην ορολογία του μοντέλου το άνοιγμα (Exposure) είναι ουσιαστικά η ζημία δηλαδή η υποχρέωση επί ένα μείον το RR.

Η κατανομή των ζημιών υπολογίζεται (Building block 3) ακολουθώντας την παρακάτω διαδικασία.



**Εικόνα 3-5 Το CreditRisk+ μοντέλο**

Τα ανοίγματα χωρίζονται σε ομάδες, με το άνοιγμα κάθε ομάδας να προσεγγίζεται από έναν αριθμό. Κάθε ομάδα αντιμετωπίζεται σαν ένα διαφορετικό χαρτοφυλάκιο πιστοδοτικών προϊόντων. Για κάθε ομάδα  $j$  ορίζονται τα:

Κοινό άνοιγμα σε $L$ μονάδες νομίσματος	$V_j$
Αναμενόμενη ζημία σε $L$ μονάδες νομίσματος	$\epsilon_j$
Αναμενόμενος αριθμός αθετήσεων	$\mu_j$
Αναμενόμενη ζημία για το $j$ προϊόν σε $L$ μονάδες νομίσματος	$\epsilon_j$

Άρα έχουμε τις εξισώσεις (44).

$$\begin{aligned}\varepsilon_j &= v_j \times \mu_\xi \Rightarrow \mu_j = \frac{\varepsilon_j}{v_j} \\ \varepsilon_j &= \sum_{A:v_A=v_j} \varepsilon_A \\ \mu_j &= \sum_{A:v_A=v_j} \frac{\varepsilon_A}{v_j}\end{aligned}\tag{44}$$

Η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της ζημίας για την ομάδα είναι  $j$  η  $G_j(z)$  που ορίζεται από την εξίσωση (45).

$$\begin{aligned}G_j(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(\text{Loss} = nL)z^{nv_j} = \sum_{n=0}^{\infty} P(n \text{ defaults})z^{nv_j} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu_j} \mu_j^n}{n!} z^{nv_j} = e^{-\mu_j + \mu_j z^{v_j}}\end{aligned}\tag{45}$$

Αντίστοιχα η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της ζημίας για όλο το χαρτοφυλάκιο  $G(z)$  ορίζεται από την εξίσωση (46).

$$G(z) = \prod_{j=1}^m e^{-\mu_j + \mu_j z^{v_j}} = e^{-\sum_{j=1}^m \mu_j + \sum_{j=1}^m \mu_j z^{v_j}}\tag{46}$$

Άρα από την (46) είναι πολύ εύκολο να παραχθεί η συνάρτηση της ζημίας του χαρτοφυλακίου (εξίσωση 47).

$$P(\text{Loss} = nL) = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n G(z)}{dz^n} \right|_{z=0}\tag{47}$$

Το CreditRisk+ προτείνει διάφορες επεκτάσεις του βασικού μοντέλου της μίας περιόδου και ενός παράγοντα. Έτσι το μοντέλο μπορεί να επεκταθεί για τον υπολογισμό της κατανομής των ζημιών σε δύο ή και περισσότερες περιόδους. Επιπλέον μπορεί να θεωρηθεί ότι τα ποσοστά αθέτησης παράγονται από κάποιους «παρασκηνιακούς» (background) παράγοντες ο καθένας από τους οποίους αντιπροσωπεύει έναν τομέα δραστηριοτήτων. Κάθε τέτοιος παράγοντας αντιπροσωπεύεται από μια τυχαία

μεταβλητή  $X_k$  η οποία είναι ο αριθμός των αθετήσεων στον τομέα  $k$  και η οποία υποθέεται ότι ακολουθεί τη γάμα κατανομή. Το μέσο ποσοστό αθετήσεων για κάθε οφειλέτη θεωρείται ότι είναι μια γραμμική συνάρτηση των παρασκηναικών παραγόντων  $X_k$ .

### 3.5.4. CreditPortfolioView (CPV)

Το CreditPortfolioView (CPV) χρησιμοποιεί μια μέθοδο μετασχηματισμού των πινάκων μετάβασης έτσι ώστε οι πιθανότητες αθέτησης και υποβάθμισης να αυξάνονται όταν η οικονομία βρίσκεται σε κάμψη ενώ αντίθετα σε περίοδο μεγέθυνσης της οικονομίας να μειώνονται οι πιθανότητες υποβάθμισης και αθέτησης.

Το CPV ξεκινάει από έναν Μαρκοβιανό πίνακα μετάβασης  $\tilde{M}=(\tilde{m}_{i,j})$  που βασίζεται σε ιστορικά στοιχεία της Moody's ή της Standard & Poor's. Οι πιθανότητες μετάβασης του πίνακα αυτού δεν εξαρτώνται από την κατάσταση της οικονομίας (unconditional transition probabilities)<sup>100</sup>. Επιπλέον ορίζονται  $m$  διαφορετικές «κατηγορίες»<sup>101</sup> κινδύνου που η κάθε μια αντιδρά με διαφορετικό τρόπο στις γενικότερες οικονομικές συνθήκες. Το CPV προσπαθεί να μεταβάλλει τον πίνακα μετάβασης χρησιμοποιώντας έναν αλγόριθμο μετατόπισης (shift algorithm) και αυτό για κάθε κατηγορία κινδύνου.

Ο αλγόριθμος μετατόπισης δουλεύει σε τρεις φάσεις:

Στην πρώτη φάση παράγεται μία εξαρτημένη πιθανότητα αθέτησης  $p_s$  για κάθε κατηγορία  $s$ . Αυτή η εξαρτημένη πιθανότητα είναι η ίδια για όλες τις βαθμίδες κινδύνου.

Στη δεύτερη φάση υπολογίζεται ένας δείκτης κινδύνου  $r_s$  που αντιπροσωπεύει τη κατάσταση της οικονομίας για την κατηγορία  $s$ .

$$r_s = \frac{P_s}{P_s} \quad (48)$$

---

<sup>100</sup> Οι unconditional πίνακες δημιουργούνται από ιστορικά στοιχεία που περιέχουν περισσότερους του ενός οικονομικού κύκλους και οι πιθανότητες μετάβασης είναι οι μέσες πιθανότητες μετάβασης.

<sup>101</sup> Οι κατηγορίες κινδύνου αναφέρονται σε χώρα και τομέα της οικονομίας.

με  $\tilde{p}_s$  να είναι η μη εξαρτημένη πιθανότητα αθέτησης της κατηγορίας  $s$ .

Στην τρίτη φάση υπολογίζεται ένας εξαρτημένος πίνακας μετάβασης  $M^{(s)}=(m_{i,j}^{(s)})$  με βάση την εξίσωση (49).

$$m_{i,j}^{(s)} = \alpha_{i,j}(r_s - 1) + \bar{m}_{i,j} \quad (49)$$

Οι συντελεστές μετατόπισης  $\alpha_{i,j}$  ορίζονται από το χρήστη του CPV<sup>102</sup>.

Με βάση τα παραπάνω όταν  $r_s < 1$  τότε έχουμε μείωση της πιθανότητας αθέτησης που σημαίνει ότι έχουμε ανάπτυξη της οικονομίας. Ενώ όταν  $r_s > 1$  τότε αυξάνεται η πιθανότητα αθέτησης δηλαδή υπάρχει ύφεση στην οικονομία.

Το CPV υποστηρίζει δύο τρόπους υπολογισμού των πιθανοτήτων αθέτησης  $p_s$ . Ο ένας τρόπος ονομάζεται CPV Macro και βασίζεται σε μακροοικονομικούς παράγοντες ενώ ο δεύτερος βασίζεται στην κατανομή γάμα και ονομάζεται CPV Direct.

#### *CPV Macro*

Σε κάθε κατηγορία  $s$  αντιστοιχίζεται ένας μακροοικονομικός δείκτης  $Y_{s,t}$ . Ο δείκτης αυτός είναι ένα σταθμισμένο άθροισμα κάποιων μακροοικονομικών παραγόντων  $X_{s,k,t}$ . Οι μακροοικονομικοί αυτοί παράγοντες μπορεί να είναι οι δείκτες πληθωρισμού, ο δείκτης ανεργίας, το ποσοστό μεταβολής του ΑΕΠ κτλ. Η τιμή των παραγόντων αυτών τη χρονική στιγμή  $t$  καθορίζεται με βάση ένα αυτοπαλινδρομούμενο μοντέλο τάξης  $t_0$ . Τέλος η  $p_s$  υπολογίζεται με βάση μια logit συνάρτηση (εξισώσεις (50)).

---

<sup>102</sup> Το CPV παρέχει κάποιους συντελεστές που μπορούν να χρησιμοποιηθούν εάν κάποιος δε θέλει να δημιουργήσει δικούς του.

$$\begin{aligned}
 Y_{s,t} &= w_{s,0} + \sum_{k=1}^K w_{s,k} X_{s,k,t} + \varepsilon_{s,t} \\
 \varepsilon_{s,t} &\sim N(0, \sigma_s) \\
 X_{s,k,t} &= \theta_{s,0} + \sum_{j=1}^{t_0} \theta_{k,j} X_{s,k,t-j} + e_{s,k,t} \\
 e_{s,k,t} &\sim N(0, \sigma_{e_{s,k,t}}) \\
 p_s &= \frac{1}{1 + e^{-Y_{s,t}}}
 \end{aligned} \tag{50}$$

### *CPV Direct*

Στην περίπτωση αυτή το μακροοικονομικό μοντέλο αντικαθίσταται από μια πολυδιάστατη γάμα κατανομή  $\Gamma=(\Gamma(\alpha_1, \beta_1), \dots, \Gamma(\alpha_m, \beta_m))$  όπου το ζευγάρι  $(\alpha_s, \beta_s)$  πρέπει να ορισθεί για κάθε κατηγορία  $s$ . Ένα βασικό θέμα στην προσέγγιση αυτή είναι να υπολογισθεί ο πίνακας συσχετίσεων της  $\Gamma$ . Οι παράμετροι  $(\alpha_s, \beta_s)$  κάθε κατηγορίας  $s$  εκτιμώνται από την μέση τιμή και τη διασπορά της  $p_s$  βάση των εξισώσεων (51).

$$X \sim \Gamma(\alpha, \beta) \Rightarrow (E(X) = \alpha\beta \quad \text{Var}(X) = \alpha\beta^2) \tag{51}$$

## 4<sup>ο</sup> Κεφάλαιο

### **Εκτιμήτριες ποσοστιαίου σημείου (quantile estimators)**





## Περιεχόμενα

4.	Εκτιμήτριες ποσοστιαίου σημείου (quantile estimators).....	187
4.1.	Επιθυμητές ιδιότητες εκτιμητριών .....	188
4.1.1.	Έλλειψη μεροληψίας (Lack of Bias).....	188
4.1.2.	Αποδοτικότητα (Efficiency).....	188
4.1.3.	Ελάχιστο μέσο τετραγωνικό σφάλμα (Mean Square Error MSE).....	188
4.1.4.	Συνέπεια (Consistency).....	189
4.2.	Εκτιμήτρια ποσοστιαίου σημείου κανονικής κατανομής.....	189
4.3.	Μη παραμετρικές εκτιμήτριες ποσοστιαίου σημείου.....	190
4.3.1.	Μία νέα μέθοδος παραγωγής εκτιμητριών ποσοστιαίου σημείου.....	192
4.3.2.	Διερεύνηση της αποτελεσματικότητας των νέων εκτιμητριών .....	195
4.3.2.1.	Επιλογή «μέτρων σύγκρισης».....	196
4.3.2.2.	Επιλογή εκτιμητριών που θα συγκριθούν .....	197
4.3.2.3.	Οριοθέτηση πεδίου σύγκρισης.....	200
4.3.2.4.	Τρόπος υπολογισμού των μέτρων σύγκρισης .....	202
4.3.2.5.	.Επεξεργασία-παρουσίαση αποτελεσμάτων και συμπεράσματα.....	205
4.3.2.5.1.	Γενικά συμπεράσματα.....	206
4.3.2.5.2.	Συμπεράσματα για μεγάλα δείγματα και για τις ουρές των κατανομών .....	211
4.3.2.5.3.	Γενικά συμπεράσματα.....	212
4.3.3.	Καθορισμός της πιο αποδοτικής SV σε κάθε περίπτωση.....	213
4.4.	Διαστήματα εμπιστοσύνης.....	215
4.4.1.	Γενικά για τα διαστήματα εμπιστοσύνης .....	215
4.4.2.	Διάστημα εμπιστοσύνης εκτιμήτριας ποσοστιαίου σημείου.....	216
4.5.	Κατασκευή διαστημάτων εμπιστοσύνης για τις νέες εκτιμήτριες.....	216
4.5.1.	Κανονικότητας της κατανομής των νέων εκτιμητριών .....	216
4.5.2.	Εκτίμηση της κατανομής των νέων εκτιμητριών με τη χρήση Jackknife .....	219

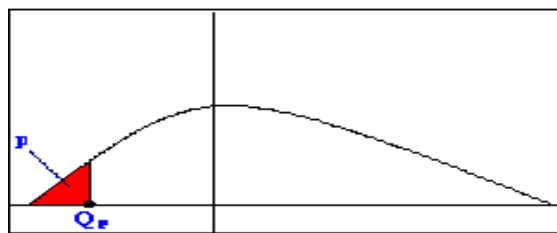


#### 4. Εκτιμήτριες ποσοστιαίου σημείου (quantile estimators)

Ας υποθέσουμε ότι  $X$  είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί μια κατανομή με συνάρτηση κατανομής  $F(x)$ . Τότε το  $p$  ποσοστιαίο σημείο (quantile) αυτής της κατανομής είναι το  $Q_p$  που ικανοποιεί την εξίσωση (1):

$$Q_p = F^{-1}(p) = \inf\{x : F(x) \geq p\} \quad (1)$$

Όταν η κατανομή της  $X$  δεν είναι γνωστή η λύση της (1) δεν είναι εφικτή και έτσι το  $Q_p$  πρέπει να εκτιμηθεί. Οι εκτιμήτριες (ή εκτιμητές) ποσοστιαίου σημείου είναι συναρτήσεις που μας επιτρέπουν να εκτιμήσουμε τα ποσοστημόρια μιας άγνωστης κατανομής χρησιμοποιώντας ένα τυχαίο δείγμα που προέρχεται από αυτήν την κατανομή<sup>103</sup>. Οι εκτιμήτριες ποσοστιαίου σημείου χωρίζονται σε δυο μεγάλες κατηγορίες στις παραμετρικές εκτιμήτριες ποσοστιαίου σημείου και στις μη παραμετρικές εκτιμήτριες. Οι παραμετρικές εκτιμήτριες είναι εκτιμήτριες που βασίζονται στην υπόθεση ότι η μητρική κατανομή είναι μιας συγκεκριμένης μορφής ή ανήκει σε μια συγκεκριμένη οικογένεια κατανομών, άρα μπορούν να χρησιμοποιηθούν μόνο όταν υπάρχουν ενδείξεις ότι η μητρική κατανομή είναι μιας συγκεκριμένης μορφής. Από την άλλη μεριά οι μη παραμετρικές εκτιμήτριες δε βασίζονται σε υποθέσεις σχετικά με την μορφή της μητρικής κατανομής και άρα μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε κάθε περίπτωση.



Εικόνα 4-1. Το  $p$  ποσοστιαίο σημείο  $Q_p$

<sup>103</sup> Εκτιμήτρια συνάρτηση ή εκτιμητής της παραμέτρου  $\theta$  καλείται μια στατιστική συνάρτηση  $T(\underline{X})$  που έχει πεδίο τιμών τον παραμετρικό χώρο  $\Omega$  και συμβολίζεται με  $\hat{\theta}$ . Η εκτιμήτρια συνάρτηση είναι τυχαία μεταβλητή. Η τιμή της εκτιμήτριας για ένα συγκεκριμένο τυχαίο δείγμα  $\underline{X}' = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  καλείται εκτίμηση της παραμέτρου  $\theta$ . (Κ. Μπαγιάτης και Φ. Κολυβά – Μαχαίρα, Μαθηματική Στατιστική, τόμος Ι – εκτιμητική, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης 1988)

#### 4.1.Επιθυμητές ιδιότητες εκτιμητριών <sup>104</sup>

##### 4.1.1. Έλλειψη μεροληψίας (Lack of Bias)

Μεροληψία (Bias) ενός εκτιμητή είναι η διαφορά της μέσης τιμής του εκτιμητή της παραμέτρου  $\theta$  από την παράμετρο  $\theta$ .

$$\text{Μεροληψία} = E(\bar{\theta}) - \theta$$

Όταν ένας εκτιμητής έχει μηδέν μεροληψία λέγεται αμερόληπτος (unbiased) εκτιμητής. Στην πράξη εάν ξέραμε την μεροληψία  $M$  μιας εκτιμητριας τότε θα μπορούσαμε να την καταστήσουμε αμερόληπτη αφαιρώντας απλώς την τιμή  $M$  από την εκτιμήτρια. Παρότι η μικρή ή η μηδενική μεροληψία είναι επιθυμητή για έναν εκτιμητή δε μας δίνει καμία πληροφορία για τη διασπορά του εκτιμητή.

##### 4.1.2. Αποδοτικότητα (Efficiency)

Ένας αμερόληπτος εκτιμητής της παραμέτρου  $\theta$  καλείται αποδοτικός (efficient) εκτιμητής εάν για δεδομένο μέγεθος δείγματος έχει τη μικρότερη διασπορά από όλους τους αμερόληπτους εκτιμητές της παραμέτρου  $\theta$ .

Πολλές φορές είναι δύσκολο να πούμε εάν ένας εκτιμητής είναι αποδοτικός ή όχι, έτσι είναι φυσικό να περιγράψουμε τους εκτιμητές σε σχέση με την σχετική αποδοτικότητά τους. Ένας αμερόληπτος εκτιμητής είναι πιο αποδοτικός από έναν άλλο εάν έχει μικρότερη διασπορά.

##### 4.1.3. Ελάχιστο μέσο τετραγωνικό σφάλμα (Mean Square Error MSE)

Υπάρχουν περιπτώσεις που κάποιος καλείται να επιλέξει μεταξύ εκτιμητών με διαφορετική μεροληψία και αποδοτικότητα. Όταν ο στόχος είναι να μεγιστοποιήσουμε την ακρίβεια, για παράδειγμα, ένας εκτιμητής με πολύ μικρή διασπορά και κάποια μεροληψία ίσως να είναι προτιμότερος από έναν αμερόληπτο εκτιμητή με μεγάλη

---

<sup>104</sup> Robert S. Pindyck and Daniel L. Rubinfeld, “Econometric models and economic forecasts” 4<sup>th</sup> Edition (1998).

διασπορά. Ένα κριτήριο που συνδυάζει την μεροληψία και την αποδοτικότητα είναι το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (Mean Square Error MSE).

$$MSE(\bar{\theta}) = E(\bar{\theta} - \theta)^2 = Bias(\bar{\theta})^2 + Var(\bar{\theta})$$

Εκτιμητές με μικρότερο MSE είναι προτιμότεροι από εκτιμητές με μεγαλύτερο MSE.

#### 4.1.4. Συνέπεια (Consistency)

Θα θέλαμε η εκτίμηση της παραμέτρου  $\theta$  να προσεγγίζει την  $\theta$  καθώς το μέγεθος του δείγματος μεγαλώνει. Ειδικότερα, ελπίζουμε ότι καθώς το μέγεθος του δείγματος μεγαλώνει πολύ, η πιθανότητα ότι η εκτίμηση του  $\theta$  θα διαφέρει από το  $\theta$  θα γίνεται όλο και μικρότερη. Με άλλα λόγια θέλουμε η εκτίμηση του  $\theta$  συγκλίνει κατά πιθανότητα<sup>105</sup> στο  $\theta$  καθώς το μέγεθος του δείγματος μεγαλώνει.

Μια εκτιμήτρια είναι συνεπής εάν η εκτίμηση της παραμέτρου  $\theta$  συγκλίνει κατά πιθανότητα στο  $\theta$  καθώς το μέγεθος του δείγματος μεγαλώνει.

Όταν το MSE τείνει στο 0 καθώς το μέγεθος του δείγματος μεγαλώνει τότε η εκτίμηση τείνει κατά πιθανότητα στο  $\theta$  και άρα η εκτιμήτρια είναι συνεπής. Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει πάντοτε.

#### 4.2. Εκτιμήτρια ποσοστιαίου σημείου κανονικής κατανομής

Όταν η μητρική κατανομή είναι η κανονική ( $N(\mu, \sigma^2)$ ) με συνάρτηση κατανομής  $FN(\mu, \sigma^2)$  τότε έχουμε:

$$Q_p = \inf\{x : F_{N(\mu, \sigma^2)}(x) \geq p\}$$

Όμως

---

<sup>105</sup> Η  $\bar{\theta}_n$  συγκλίνει κατά πιθανότητα στο  $\theta$  εάν για κάθε  $\delta > 0$ , υπάρχει  $n_0$  τέτοιο ώστε για κάθε δείγμα μεγέθους  $n > n_0$   $P(|\theta - \bar{\theta}_n| < \delta) = 1$

$$\inf\{x : F_{N(\mu, \sigma^2)}(x) \geq p\} = \inf\{x - \mu : F_{N(\mu, \sigma^2)}(x) \geq p\} + \mu = \\ \sigma \inf\{(x - \mu) / \sigma : F_{N(\mu, \sigma^2)}(x) \geq p\} + \mu$$

και

$$F_{N(\mu, \sigma^2)}(x) = F_{N(0,1)}((x - \mu) / \sigma)$$

Άρα

$$Q_p = \sigma \inf\{(x - \mu) / \sigma : F_{N(0,1)}((x - \mu) / \sigma) \geq p\} + \mu$$

Θέτοντας  $z = (x - \mu) / \sigma$  έχουμε:

$$Q_p = \sigma \inf\{z : F_{N(0,1)}(z) \geq p\} + \mu = \sigma \times z_p + \mu \quad (2)$$

Όπου  $z_p$  είναι το  $p$  ποσοστιαίο σημείο της  $N(0,1)$ .

Όταν δεν είναι γνωστά τα  $\mu$  και  $\sigma$  χρησιμοποιούμε την δειγματική μέση τιμή και τη δειγματική τυπική απόκλιση.

$$Q_p = s \times z_p + \bar{X} \quad (3)$$

Άρα για να εκτιμήσουμε το ποσοστιαίο σημείο ενός πληθυσμού όταν γνωρίζουμε ή μας επιτρέπεται να υποθέσουμε ότι αυτός ακολουθεί την κανονική κατανομή χρησιμοποιούμε την εξίσωση (2). Εάν επιπλέον δε γνωρίζουμε τη μέση τιμή και τη διασπορά του και έχουμε στη διάθεση μας ένα τυχαίο δείγμα του πληθυσμού τότε χρησιμοποιούμε την εκτιμήτρια που περιγράφεται από την εξίσωση (3).

#### 4.3.Μη παραμετρικές εκτιμήτριες ποσοστιαίου σημείου

Εστω ένα τυχαίο δείγμα  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  από μία τυχαία μεταβλητή  $X$  εάν το διατάξουμε κατ' αύξουσα σειρά μεγέθους κατασκευάζουμε το αντίστοιχο διατεταγμένο δείγμα:

$$(X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}) \quad \text{με} \quad X_{(i)} \leq X_{(j)} \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad i < j$$

Μια παραδοσιακή εκτιμήτρια του  $Q_p$  είναι το δειγματικό ποσοστιαίο σημείο (sample quantile SQ) που ορίζεται από την εξίσωση (4).

$$SQ_p = x_{([np]+1)} \quad (4)$$

Όπου το  $[np]$  είναι το ακέραιο μέρος του γινομένου  $n$  επί  $p$ . Στον πίνακα 4-1 παρατίθεται διάφορες εκτιμήτριες ποσοστιαίου σημείου που βασίζονται σε μία ή δυο παρατηρήσεις του διατεταγμένου δείγματος. Το βασικό πρόβλημα του δειγματικού ποσοστιαίου σημείου και γενικότερα των εκτιμητριών που βασίζονται σε μία ή δυο παρατηρήσεις του διατεταγμένου δείγματος είναι ότι έχουν μεγάλη διασπορά.

Όνομασία εκτιμήτριας	Εκτιμήτρια
Σταθμισμένος μέσος όρος στο $X_{([np])}$	$WA_p = (1 - np + [np])X_{([np])} + (np - [np])X_{([np]+1)}$
Σταθμισμένος μέσος όρος στο $X_{([np+0.5])}$	$WA_{1p} = (0.5 - np + [np])X_{([np])} + (0.5 + np - [np])X_{([np]+1)}$
Εμπειρική συνάρτηση κατανομής (CDF)	$ECDF_p = X_{([np])}$ αν $[np] = np$ και $X_{([np]+1)}$ αν $[np] < np$
Σταθμισμένος μέσος όρος στο $X_{([(n+1)p])}$	$WA_{1p} = (1 - (n+1)p + [(n+1)p])X_{([(n+1)p])} + ((n+1)p - [(n+1)p])X_{([(n+1)p]+1)}$
Lower empirical CDF	$LCDF_p = X_{([np])}$
Παρατήρηση πιο κοντά στο $np$	$CQ_p = X_{([np])}$ αν $np - [np] < 0.5$ αλλιώς $X_{([np]+1)}$

**Πίνακας 4-1 Εκτιμήτριες ποσοστιαίου σημείου με βασισμένες σε μία ή δύο παρατηρήσεις του διατεταγμένου δείγματος**

Μια προφανής βελτίωση του δειγματικού ποσοστιαίου σημείου και των συναφών μεθόδων μπορεί να επέλθει εάν χρησιμοποιηθεί ένας σταθμισμένος μέσος όρος όλου του διατεταγμένου δείγματος χρησιμοποιώντας μια κατάλληλη συνάρτηση στάθμισης. Αυτές οι εκτιμήτριες καλούνται L-estimators.

Μία δημοφιλής κατηγορία L-estimators είναι οι Kernel quantile estimators. Αν υποθέσουμε ότι η  $K$  είναι μία συνάρτηση (εξομάλυνσης) πυκνότητας πιθανότητας συμμετρική γύρω από το 0 και ότι  $h \rightarrow 0$  καθώς  $n \rightarrow +\infty$  και  $a_h$  είναι  $K_h(\cdot) = h^{-1} K(\cdot/h)$ . Τότε μία εκδοχή του Kernel quantile estimator μπορεί να δοθεί από την εξίσωση (5).

$$KQ_p = \sum_{i=1}^n \left[ \int_{(i-1)/n}^{i/n} K_h(t-p) dt \right] x_{(i)} \quad (5)$$

Οι Harrell και Davis (1982) παρουσίασαν μία εκτιμήτρια ποσοστιαίου σημείου που περιγράφεται από την εξίσωση (6). Η εκτιμήτρια αυτή είναι στη ουσία η bootstrap<sup>106</sup> εκτιμήτρια του  $E(x_{(n+1)p})$ .

$$HD_p = \sum_{k=1}^n w_k x_k \quad \mu\epsilon$$

$$w_k = \frac{1}{\beta\{(n+1)p, (n+1)(1-p)\}_{(k-1)/n}} \int_{(k-1)/n}^{k/n} y^{(n+1)p-1} (1-y)^{(n+1)(1-p)-1} dy \quad (6)$$

$$= I_{k/n}\{(n+1)p, (n+1)(1-p)\} - I_{(k-1)/n}\{(n+1)p, (n+1)(1-p)\}$$

το  $I_{k/n}\{(n+1)p, (n+1)(1-p)\}$  είναι η incomplete beta συνάρτηση.

Οι Kaigh και Lachenburch (1982) πρότειναν μία άλλη εκτιμήτρια ποσοστιαίου σημείου που περιγράφεται από την εξίσωση (7). Η εκτιμήτρια αυτή είναι ο μέσος όρος όλων των δειγματικών ποσοστιαίων σημείων όλων των δυνατών υπό-δειγμάτων του τυχαίου δείγματος που μπορούν να υπάρξουν, χωρίς επανάθεση, μεγέθους m.

$$KL_p = \sum_{s=1}^n w_s x_s \quad \mu\epsilon \quad w_s = \binom{s-1}{u-1} \binom{n-s}{m-u} \binom{n}{m}^{-1}, \quad u = [(m+1)p] \quad (7)$$

#### 4.3.1. Μία νέα μέθοδος παραγωγής εκτιμητριών ποσοστιαίου σημείου

<sup>106</sup> Η μέθοδος bootstrap παρουσιάστηκε από τον Efron το 1979. Έστω ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n της τυχαίας μεταβλητής X και μια εκτιμήτρια  $\bar{\Phi}$  της παραμέτρου  $\Phi$  της κατανομή της X. Η bootstrap μέθοδος συνίσταται στην εκλογή με επανάθεση όλων των δυνατών δειγμάτων μεγέθους n από το τυχαίο δείγμα μας και την παραγωγή εκτιμήσεων της  $\Phi$  με χρήση της  $\bar{\Phi}$  δημιουργώντας έτσι την bootstrapped κατανομή της  $\bar{\Phi}$ .



Όλες οι παραπάνω μη παραμετρικές εκτιμήτριες βασίζονται στο γεγονός ότι η δειγματική συνάρτηση κατανομής  $F_n(x) = n^{-1} \sum_{i=1}^n I(X_i < x)$  τείνει στην  $F(x)$  όταν το μέγεθος του δείγματος  $n \rightarrow +\infty$ . Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε μία νέα μέθοδο παραγωγής εκτιμητριών ποσοστιαίων σημείων που δε βασίζεται στη σύγκλιση της  $F_n(x)$ .

Έστω τυχαίο δείγμα  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  από μία συνεχή τυχαία μεταβλητή  $X$  και το αντίστοιχο διατεταγμένο δείγμα  $(x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)})$ . Με τη βοήθεια του διατεταγμένου δείγματος κατασκευάζουμε τα παρακάτω  $n+1$  διαστήματα.

$$S_0 = (L, x_{(1)}), S_1 = [x_{(1)}, x_{(2)}), \dots, S_{n-1} = [x_{(n-1)}, x_{(n)}), S_n = [x_{(n)}, U) \quad (8)$$

$U$  είναι το πάνω όριο της  $X$  και  $L$  είναι το κάτω όριο της  $X$ , τα  $L$  και  $U$  μπορεί να είναι ίσα με  $-\infty$  και  $+\infty$  αντίστοιχα. Είναι προφανές ότι το  $Q_p$  θα ανήκει σε ένα από αυτά τα διαστήματα. Ορίζουμε τις τυχαίες μεταβλητές  $\delta_i = \{1 \text{ εάν } x_i \leq X_p, 0 \text{ εάν } x_i > X_p\}$ , οι  $\delta_i$  ακολουθούν την κατανομή Bernoulli( $p$ ). Επίσης ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή  $N = \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_{n-1} + \delta_n$  με δεδομένο ότι οι  $\delta_i$  είναι ανεξάρτητες η τυχαία μεταβλητή  $N$  ακολουθεί την διωνυμική κατανομή ( $B(n,p)$ ).

Έτσι  $P(Q_p \in S_i) = P(N=i) = B(i;n,p)$ ,  $i=0,1,\dots,n$

Έστω η απαριθμητή τυχαία μεταβλητή  $\Psi_p(i) = Q'_{p,i}, i=0,1,\dots,n$ , όπου  $Q'_{p,i}$  είναι μια εκτίμηση της τυχαίας μεταβλητής  $Q_{p,i} = (Q_p | Q_p \in S_i)$ ,  $i=0,1,\dots,n$ . Μια εκτιμήτρια του  $Q_p$  παράγεται υπολογίζοντας το  $SV_p = E(\Psi_p)$ .

$$SV_p = E(\Psi_p) = \sum_{i=1}^{n+1} Q'_{p,i} B(i; n, p) \quad (9)$$

Με άλλα λόγια για να βρούμε μια εκτιμήτρια του  $Q_p$  αρκεί να αντιστοιχίσουμε σε κάθε  $S_i$  έναν αριθμό  $Q'_{p,i}$  που να εκτιμά το  $Q_p$  με δεδομένο ότι το  $Q_p$  ανήκει στο  $S_i$ . Έτσι η εκτιμήτρια του  $Q_p$  παράγεται σαν το γινόμενο των  $Q'_{p,i}$  με τα  $B(i;n,p)$ .

Στη συνέχεια θα παρουσιαστούν τρεις νέες εκτιμήτριες ποσοστιαίου σημείου που παράγονται με βάση την παραπάνω μεθοδολογία.

### Η πρώτη εκτιμήτρια (SV1<sub>p</sub>)

Θέτουμε  $Q'_{p,i} = (x_{(i)} + x_{(i+1)})/2$  για  $i=1,2,\dots,n-1$ .

Για να βρούμε τα  $Q'_{p,i}$  για  $i=0$  και  $n$  υποθέτουμε ότι:

$$Q'_{p,0} - Q'_{p,1} = Q'_{p,1} - Q'_{p,2} \Rightarrow Q'_{p,0} = 2Q'_{p,1} - Q'_{p,2} = \frac{2x_{(1)} + x_{(2)} - x_{(3)}}{2} \quad (10)$$

και ότι:

$$\begin{aligned} Q'_{p,n} - Q'_{p,n-1} &= Q'_{p,n-1} - Q'_{p,n-2} \Rightarrow \\ Q'_{p,n} &= 2Q'_{p,n-1} - Q'_{p,n-2} = \frac{2x_{(n)} + x_{(n-1)} - x_{(n-2)}}{2} \end{aligned} \quad (11)$$

Έτσι η SV1<sub>p</sub> δίνεται από τον εξίσωση (12)

$$\begin{aligned} SV1_p &= \frac{2B(0; n, p) + B(1; n, p)}{2} x_{(1)} + \frac{B(0; n, p)}{2} x_{(2)} - \frac{B(0; n, p)}{2} x_{(3)} \\ &+ \sum_{i=2}^{n-1} \frac{B(i; n, p) + B(i-1; n, p)}{2} x_{(i)} \\ &- \frac{B(n; p, n)}{2} x_{(n-2)} + \frac{B(n; p, n)}{2} x_{(n-1)} + \frac{2B(n; p, n) + B(n-1; p)}{2} x_{(n)} \end{aligned} \quad (12)$$

### Η δεύτερη εκτιμήτρια (SV2<sub>p</sub>)

Θέτουμε  $Q'_{p,i} = \sup(Y \in S_i)$  για  $i=0,1,2,\dots,n-1$ .

Για να βρούμε το  $Q'_{p,i}$  για  $i=n$  υποθέτουμε ότι:

$$Q'_{p,n} - Q'_{p,n-1} = Q'_{p,n-1} - Q'_{p,n-2} \Rightarrow Q'_{p,n} = 2Q'_{p,n-1} - Q'_{p,n-2} = 2x_{(n)} - x_{(n-1)} \quad (13)$$

Έτσι η  $SV2_p$  δίνεται από τον εξίσωση (14)

$$SV2_p = \sum_{i=0}^{n-1} B(i; n, p)x_{(i+1)} + (2x_{(n)} - x_{(n-1)})B(n; p, n) \quad (14)$$

### Η τρίτη εκτιμήτρια ( $SV3_p$ )

Θέτουμε  $Q'_{p,i} = \inf(Y \in S_i)$  για  $i=1,2,\dots,n$ .

Για να βρούμε το  $Q'_{p,i}$  για  $i=0$  υποθέτουμε ότι:

$$Q'_{p,0} - Q'_{p,1} = Q'_{p,1} - Q'_{p,2} \Rightarrow Q'_{p,0} = 2Q'_{p,1} - Q'_{p,2} = 2x_{(1)} - x_{(2)} \quad (15)$$

Έτσι η  $SV3_p$  δίνεται από τον εξίσωση (16)

$$SV3_p = \sum_{i=1}^n B(i; n, p)x_{(i)} + (2x_{(1)} - x_{(2)})B(0; p, n) \quad (16)$$

#### 4.3.2. Διερεύνηση της αποτελεσματικότητας των νέων εκτιμητριών

Θα θέλαμε να ξέρουμε αν και κάτω υπό ποιες προϋποθέσεις οι νέες μέθοδοι παράγουν καλλίτερες εκτιμήσεις από τις υπάρχουσες μεθόδους. Για το λόγο αυτό θα μελετήσουμε την αποτελεσματικότητα των νέων μεθόδων σε σχέση με τις υπάρχουσες μεθόδους βασιζόμενοι σε κάποια «μέτρα σύγκρισης». Στη συνέχεια θα εργαστούμε ως εξής:

1. Θα επιλέξουμε τα «μέτρα σύγκρισης».
2. Θα επιλέξουμε τις εκτιμήτριες που θα συγκριθούν
3. Θα οριοθετήσουμε το πεδίο σύγκρισης
4. Θα καθορίσουμε τον τρόπο υπολογισμού των μέτρων σύγκρισης
5. Τέλος θα επεξεργαστούμε τα αποτελέσματά και θα εξάγουμε συμπεράσματα

#### 4.3.2.1.Επιλογή «μέτρων σύγκρισης»

Όπως είδαμε νωρίτερα (§ 5.1) μερικές επιθυμητές ιδιότητες των εκτιμητριών είναι οι:

1. Έλλειψη μεροληψίας (Lack of Bias)
2. Αποδοτικότητα (Efficiency)
3. Ελάχιστο μέσο τετραγωνικό σφάλμα (Mean Square Error MSE)
4. Συνέπεια (Consistency)

Άρα είναι λογικό να βασίσουμε τα μέτρα σύγκρισης πάνω σε αυτές τις ιδιότητες των εκτιμητριών. Πιο συγκεκριμένα για κάθε εκτιμήτρια θα υπολογισθούν τα παρακάτω:

- Η μέση τιμή  $E_{K,n,p} = E(\bar{Q}_{n,p,K})$  της εκτιμήτριας  $K$  για μέγεθος δείγματος  $n$  για το  $p$  ποσοστιαίο σημείο.
- Η διασπορά  $V_{K,n,p} = Var(\bar{Q}_{n,p,K})$  της εκτιμήτριας  $K$  για μέγεθος δείγματος  $n$  για το  $p$  ποσοστιαίο σημείο.
- Η μεροληψία  $B_{K,n,p} = E_{K,n,p} - Q_p$  της εκτιμήτριας  $K$  για μέγεθος δείγματος  $n$  για το  $p$  ποσοστιαίο σημείο.
- Η απόλυτη μεροληψία  $AB_{K,n,p} = |B_{K,n,p}|$  της εκτιμήτριας  $K$  για μέγεθος δείγματος  $n$  για το  $p$  ποσοστιαίο σημείο.
- Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα  $MSE_{K,n,p} = (E_{K,n,p})^2 + V_{K,n,p}$  της εκτιμήτριας  $K$  για μέγεθος δείγματος  $n$  για το  $p$  ποσοστιαίο σημείο.

Καθώς θα αυξάνεται το  $n$  αναμένουμε να μειώνεται τόσο η  $V_{K,n,p}$  όσο και η  $B_{K,n,p}$  άρα και το  $MSE_{K,n,p}$  με αποτέλεσμα οι διαφορές των  $MSE_{K,n,p}$  για διαφορετικά μεγέθη δείγματος να μην είναι συγκρίσιμες, για το λόγο αυτό θα επιλεγεί μια εκτιμήτρια  $A$  σαν εκτιμήτρια αναφοράς (benchmark) και θα υπολογιστούν τα παρακάτω:

- Το σχετικό μέσο τετραγωνικό σφάλμα  $RMSE_{K,n,p} = MSE_{A,n,p} / MSE_{K,n,p}$  της εκτιμήτριας  $K$  για μέγεθος δείγματος  $n$  για το  $p$  ποσοστιαίο σημείο.

Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να δούμε πως συμπεριφέρονται το  $MSE_{K,n,p}$  μιας εκτιμήτριας σε σχέση με τις άλλες εκτιμήτριες καθώς αυξάνεται το μέγεθος του δείγματος.

Κάθε ένα από τα  $V_{K,n,p}$ ,  $B_{K,n,p}$ ,  $AB_{K,n,p}$ ,  $MSE_{K,n,p}$  και  $RMSE_{K,n,p}$  αποτελεί ένα μέτρο σύγκρισης των εκτιμητριών.

Η  $B_{K,n,p}$  σα μέτρο σύγκρισης μας δείχνει ουσιαστικά πόσο πολύ η εκτιμήτρια υποεκτιμά ( $AB_{K,n} < 0$ ) ή υπερεκτιμά ( $AB_{K,n} > 0$ ) το  $Q_p$ . Στην περίπτωση που το  $p$  είναι στο αριστερό άκρο της κατανομής ( $p < 0,5$ ) δε θα θέλαμε μια υποεκτίμηση του  $Q_p$  ενώ στην περίπτωση που το  $p$  είναι στο δεξιό άκρο της κατανομής ( $p > 0,5$ ) δε θα θέλαμε μια υπερεκτίμηση του  $Q_p$ <sup>107</sup>.

Η  $AB_{K,n,p}$  σα μέτρο σύγκρισης μας δείχνει ουσιαστικά πόσο πολύ η εκτιμήτρια αποκλίνει από το  $Q_p$ . Το  $AB_{K,n,p}$  θα φανεί χρήσιμο όταν θα μελετήσουμε την συνέπεια των εκτιμητριών. Ένα  $AB_{K,n,p}$  που τείνει στο 0 καθώς το  $n$  αυξάνεται χαρακτηρίζει μια συνεπή εκτιμήτρια

Η  $V_{K,n,p}$  σα μέτρο σύγκρισης μας επιτρέπει να εξετάσουμε την αποδοτικότητα μιας εκτιμήτριας. Εάν έχουμε κάποιες εκτιμήτριες με μηδενική μεροληψία τότε η πιο αποδοτική είναι αυτή με τη μικρότερη  $V_{K,n,p}$ .

Το  $MSE_{K,n,p}$  σα μέτρο σύγκρισης μας επιτρέπει να συνδυάσουμε τη  $B_{K,n,p}$  και τη  $V_{K,n,p}$  όταν η  $B_{K,n,p}$  δεν είναι μηδενική και άρα η  $V_{K,n,p}$  δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί από μόνη της. Προφανώς η εκτιμήτρια με το μικρότερο  $MSE_{K,n,p}$  είναι η καλλίτερη.

Το  $RMSE_{K,n,p}$  είναι μέτρο σύγκρισης με λειτουργία ανάλογη του  $MSE_{K,n,p}$  και μας βοηθάει να αποτυπώσουμε την μεταβολή των  $MSE_{K,n,p}$  καθώς αυξάνεται το  $n$ .

#### 4.3.2.2.Επιλογή εκτιμητριών που θα συγκριθούν

Οι εκτιμήτριες που θα συγκριθούν με τις νέες εκτιμήτριες θα πρέπει να είναι μη παραμετρικές καθώς οι νέες εκτιμήτριες είναι μη παραμετρικές. Θα επιλέξουμε την πιο

---

<sup>107</sup> Στη συνέχεια θα δούμε πως οι εκτιμήτριες ποσοστιαίου σημείου μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό του VaR. Όταν υπολογίζουμε το VaR θετικών (long) θέσεων τότε ουσιαστικά μας ενδιαφέρει το αριστερό άκρο της κατανομής των αποδόσεων και μια υποεκτίμηση του  $Q_p$  θα οδηγούσε σε υποεκτίμηση του VaR. Αντίθετα όταν υπολογίζουμε το VaR αρνητικών (short) θέσεων τότε ουσιαστικά μας ενδιαφέρει το δεξιό άκρο της κατανομής των αποδόσεων και μια υπερεκτίμηση του  $Q_p$  θα οδηγούσε σε υποεκτίμηση του VaR.

ευρέως διαδεδομένη μη παραμετρική εκτιμήτρια ποσοστιαίου σημείου και την πιο αποτελεσματική, με βάση τη βιβλιογραφία, μη παραμετρική εκτιμήτρια ποσοστιαίου σημείου.

### *Εύρεση της πιο αποτελεσματικής μεθόδου.*

Οι Hyndman και Fan το 1996 αναφέρουν ότι στα διάφορα στατιστικά πακέτα βρίσκουμε διαφορετικούς ορισμούς του δειγματικού ποσοστιαίου σημείου αλλά όλοι οι ορισμοί βασίζονται στη γενική μορφή που δίνεται από την εξίσωση (17) είναι δηλαδή εκτιμήτριες που χρησιμοποιούν μια ή δυο παρατηρήσεις του διατεταγμένου δείγματος. Ο Parrish το 1990 συνέκρινε<sup>108</sup> 8 εκτιμήτριες της μορφής (17) την εκτιμήτρια  $HD_p$  και την  $KL_p$  και τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι καλλίτερες μέθοδοι ήταν οι  $WA_p$ ,  $WA1_p$ ,  $ECDF_p$  και η  $HD_p$ .

Οι Reiss (1980), Falk (1984) και Xiang (1995) έδειξαν ότι οι Kernel quantile estimators είναι πιο αποδοτικές εκτιμήτριες από το δειγματικό ποσοστιαίο σημείο.

Ο Yang το 1985 πρότεινε μια καινούργια<sup>109</sup> Kernel εκτιμήτρια ποσοστιαίου σημείου και την συνέκρινε με την Kernel εκτιμήτρια που είχε προταθεί από τον Perzen (1979) και την  $KL_p$  μη καταφέροντας να αποδείξει ότι η νέα εκτιμήτρια συμπεριφέρεται πάντοτε καλύτερα από την  $KL_p$  ενώ παράλληλα απέφυγε να τη συγκρίνει με την  $HD_p$ .

Οι Sheather και Marron το 1990 συνέκριναν διάφορες Kernel εκτιμήτριες ποσοστιαίου σημείου, μεταξύ των οποίων και αυτή που προτάθηκε από τον Yang (1985), με τις  $HD_p$  και την  $KL_p$  και τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η  $KL_p$  σε γενικές γραμμές συμπεριφέρεται χειρότερα από τις Kernel εκτιμήτριες ενώ η  $HD_p$  στις περισσότερες περιπτώσεις (26 και 28 από τις 44) έχει μικρότερο MSE από τις καλλίτερες Kernel εκτιμήτριες.

Οι Harrell και Davis (1982) συνέκριναν την  $HD_p$  με το δειγματικό ποσοστιαίο σημείο και βρήκαν ότι η  $HD_p$  είναι πιο αποδοτική από το δειγματικό ποσοστιαίο σημείο.

---

<sup>108</sup> Χρησιμοποίησε εκτιμήσεις των ροπών και των συνδιασπορών των διατεταγμένων παρατηρήσεων για δείγματα που προέρχονται από την κανονική κατανομή με μεγέθη 2 έως 30. οι εκτιμήσεις αυτές προήλθαν από το “Variances and covariances of the normal order statistics for samples 2 to 50.” των Tietjen, Kahaner και Beckman.

<sup>109</sup> Ουσιαστικά πρότεινε μια καινούργια συνάρτησης εξομάλυνσης που εξαρτάται από έναν συντελεστή εξομάλυνσης και μια Bootstrap μεθοδολογία για τον καθορισμό του ποσοστού εξομάλυνσης.

Από τα παραπάνω φαίνεται πως η  $HD_p$  είναι μάλλον η πιο αποτελεσματική εκτιμήτρια ποσοστιαίου σημείου με βάση τη βιβλιογραφία.

***Εύρεση της πιο ευρέως χρησιμοποιούμενης μεθόδου.***

Όπως έχει ήδη αναφερθεί στα στατιστικά πακέτα χρησιμοποιούνται εκτιμήτριες ποσοστιαίου σημείου που ορίζονται με βάση την εξίσωση (17). Δηλαδή εκτιμήτριες που βασίζονται σε μία ή δύο παρατηρήσεις του διατεταγμένου δείγματος.

Ο Jorion στο βιβλίο του “Value at Risk” (2001) αναφέρεται μόνο στο δειγματικό ποσοστιαίο σημείο ενώ ο Dowd στο “Beyond Value at Risk” (1998) αναφέρεται και στους Kernel εκτιμητές.

Ο Hendricks το 1996 εκτιμά διάφορα μοντέλα υπολογισμού του VaR μεταξύ των οποίων την ιστορική προσομοίωση με χρήση του δειγματικού ποσοστιαίου σημείου.

Οι Gourieroux, Laurent και Scaillet το 2000 προχωρούν σε μία ανάλυση ευαισθησίας του VaR χρησιμοποιώντας και Kernel εκτιμήτριες ποσοστιαίου σημείου.

Οι Inui, Kijima και Kitano το 2003 σε εργασία τους που ασχολείται με την θετική μεροληψία των του VaR αναφέρονται στην  $HD_p$ .

Οι Bulter και Schachter το 1997 χρησιμοποιούν τόσο Kernel εκτιμήτριες όσο και το δειγματικό ποσοστιαίο σημείο για να υπολογίσουν το VaR.

Οι Barone-Adesi και Giannopoulos (2001) που αναφέρονται σε μη παραμετρικές μεθόδους εκτίμησης του VaR αναφέρουν μόνο το δειγματικό ποσοστιαίο σημείο.

Οι Boudoukh, Richardson και Whitelaw το 1998 πρότειναν μια υβριδική μέθοδο υπολογισμού του VaR βασισμένη πάνω στο δειγματικό ποσοστιαίο σημείο.

Άρα η πιο διαδεδομένη μη παραμετρική εκτιμήτρια υπολογισμού του ποσοστιαίου σημείου είναι το δειγματικό ποσοστιαίο σημείο. Όμως με βάση τον Parrish το 1990 η  $WA_p$  είναι πιο αποτελεσματική από την  $SQ_p$  και για αυτό θα προτιμηθεί.

Τελικά οι νέες εκτιμήτριες θα συγκριθούν με τις  $HD_p$  και  $WA_p$ .

$$\bar{Q}_p = (1-\gamma)X_{(j)} + \gamma X_{(j+1)} \quad \frac{j-m}{n} \leq p \leq \frac{j-m+1}{n} \quad , m \in R \quad , 0 \leq \gamma \leq 1 \quad (17)$$

#### 4.3.2.3. Οριοθέτηση πεδίου σύγκρισης

Οι παράμετροι που επηρεάζουν την αποτελεσματικότητα των εκτιμητριών ποσοστιαίου σημείου είναι οι ακόλουθες:

- Το  $p$
- Η μητρική κατανομή
- Το μέγεθος του δείγματος.

Στη συνέχεια θα οριοθετήσουμε το πεδίο σύγκρισης με βάση τις παραπάνω παραμέτρους.

#### ***p***

Θα μελετήσουμε τη συμπεριφορά των εκτιμητριών για 21 διαφορετικά  $p$  που καλύπτουν όλο το εύρος των δυνατών τιμών του  $p$ .

Συγκεκριμένα θα εξετάσουμε τα  $p$  που ανήκουν στο σύνολο  $\{0,01, 0,05, 0,1, 0,15, 0,2, 0,25, 0,3, 0,35, 0,4, 0,45, 0,5, 0,55, 0,6, 0,65, 0,7, 0,75, 0,8, 0,85, 0,9, 0,95, 0,99\}$

#### ***Μητρική κατανομή***

Σαν μητρικές κατανομές θα χρησιμοποιήσουμε κατανομές που χρησιμοποιήθηκαν για παρόμοιο σκοπό στο παρελθόν.



Οι Harrell και Davis (1982) συνέκριναν τον  $HD_p$  χρησιμοποιώντας την “Generalised Lambda Distribution” (GLD) όπως αυτή περιγράφεται από την εξίσωση (18).

$$F^{-1}(p) = \mu + \sigma \{p^a - (1-p)^b\} \quad (18)$$

Τα  $\mu$  και  $\sigma$  είναι παράμετροι που καθορίζουν τη θέση (location) και την κλίμακα της κατανομής. Οι Harrell και Davis έθεσαν  $\mu=0$  και  $\sigma=1$  και χρησιμοποίησαν σαν  $a$  και  $b$  έξι διαφορετικά ζευγάρια (Πίνακας 4-2)

$a$	$b$	Περιγραφή
1	1	Συμμετρική κατανομή με λεπτές ουρές
0,1349	0,1349	Σαν Κανονική
-0,1359	-0,1359	Συμμετρική με πολύ παχιές ουρές, σαν την Student's t με 5 βαθμούς ελευθερίας
-1	-1	Σαν Cauchy
0,0251	0,0953	Μη συμμετρική με μέτριες ουρές
0	0,0004	Σαν Εκθετική

**Πίνακας 4-2 Παράμετροι για τα  $a$  και  $b$  της GLD1 – GLD6 που χρησιμοποιήθηκαν από τους Harrell και Davis (1982)**

Ο Yang (1985) χρησιμοποίησε τις κατανομές Cauchy, Κανονική, Laplace (Double Exponential) και Εκθετική.

Κατανομή	Συντομογραφία	CDF
Κανονική με $\mu=0$ και $\sigma=1$ N(0,1)	N(0,1)	$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$
Εκθετική με $\lambda=1$	E(1)	$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$
Student's t με 5 βαθμούς ελευθερίας	T(5)	$F(x) = \frac{1}{2} + \left[ I\left(1; \frac{1}{2}, r, \frac{1}{2}\right) - I\left(\frac{r}{r+t^2}; \frac{1}{2}, r, \frac{1}{2}\right) \right] \text{sgn}(t)$ <sup>110</sup>
Lognormal με $M=0$ και $S=1$	LN(0,1)	$F(x) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \text{erf}\left(\frac{\ln x - M}{S\sqrt{2}}\right) \right]$ <sup>111</sup>
Laplace (double Exponential) με $\mu=0$ και $b=1$	DE(0,1)	$F(x) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \text{sgn}(x - \mu)(1 - e^{- x-\mu /b}) \right]$

**Πίνακας 4-3 Μητρικές κατανομές που θα χρησιμοποιηθούν στη σύγκριση**

Οι Sheather και Marron (1990) χρησιμοποίησαν τις κατανομές Κανονική, Laplace (Double Exponential), Lognormal και εκθετική

<sup>110</sup> Το  $I(z; a, b)$  είναι η κανονικοποιημένη βήτα συνάρτηση  $I(z; a, b) = B(z; a, b) / B(a, b)$  και το  $\text{sgn}(t)$  είναι το πρόσημο του  $t$

<sup>111</sup> Το  $\text{erf}(z)$  είναι η error function

Έτσι τελικά θα χρησιμοποιηθούν 5 διαφορετικές κατανομές, συμμετρικές και μη με λεπτές και παχιές ουρές. Οι πέντε κατανομές που αναφέρονται στον πίνακα (4-3).

### **Μέγεθος δείγματος**

Θα εξετάσουμε τόσο μικρά όσο και μεγάλα δείγματα ξεκινώντας από μέγεθος δείγματος 5 θα καταλήξουμε σε μέγεθος δείγματος 750.

Συγκεκριμένα θα εξετάσουμε μεγέθη δείγματος  $n$  που ανήκουν στο σύνολο  $\{5, 10, 15, 20, 25, 30, 45, 60, 100, 250, 500, 750\}$

#### **4.3.2.4. Τρόπος υπολογισμού των μέτρων σύγκρισης**

Τα βασικά μέτρα που πρέπει να υπολογιστούν είναι η  $E_{K,n,p}$  και η  $V_{K,n,p}$ . Με βάση αυτά τα μέτρα μπορούν να υπολογιστούν όλα τα άλλα. Ο υπολογισμός αυτών των μέτρων γίνεται με χρήση των τύπων (19) και (20).

$$E_{K,n,p} = \sum_{i=0}^n K_{p,i} E(x_{(i)}) \quad (19)$$

$$V_{K,n,p} = \sum_{i=0}^n K_{p,i} Var(x_{(i)}) + 2 \sum_{i=0}^n \sum_{j=i+1}^n K_{p,i} K_{p,j} Covariance(x_{(i)}, x_{(j)}) \quad (20)$$

Τα  $K_{p,i}$   $i=0, \dots, n$  είναι οι συντελεστές στάθμισης των παρατηρήσεων του διατεταγμένου δείγματος για την εκτιμήτρια  $K$ . Τα  $E(x_{(i)})$  και  $Var(X_{(i)})$  είναι η μέση τιμή και η διασπορά της  $i$  παρατήρησης του διατεταγμένου δείγματος, ενώ η  $Covariance(x_{(i)}, x_{(j)})$  είναι η συνδιασπορά των  $i$  και  $j$  παρατηρήσεων του διατεταγμένου δείγματος.

Όμως τα  $E(x_{(i)})$ ,  $Var(X_{(i)})$ <sup>112</sup> και  $Covariance(x_{(i)}, x_{(j)})$ <sup>113</sup> υπολογίζονται με βάση τους παρακάτω τύπους.

---

<sup>112</sup>  $Var(X_{(i)}) = E(x_{(i)}^2) - (E(x_{(i)}))^2$  με  $E(x_{(i)}^2)$  να είναι η ροπή δεύτερης τάξης της  $x_{(i)}$  γύρω από το 0.

<sup>113</sup>  $Covariance(x_{(i)}, x_{(j)}) = E(x_{(i)}, x_{(j)}) - E(x_{(i)})E(x_{(j)})$  με  $E(x_{(i)}, x_{(j)})$  να είναι η κοινή ροπή τάξης (1,1) των  $x_{(i)}$  και  $x_{(j)}$ .

$$E(x_{(i)}) = \frac{N!}{(i-1)!(N-i)!} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) [F(x)]^{i-1} [1-F(x)]^{N-i} dx \quad (21)$$

$$E(x_{(j)}^2) = \frac{N!}{(i-1)!(N-i)!} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) [F(x)]^{i-1} [1-F(x)]^{N-i} dx \quad (22)$$

$$E(x_{(i)}, x_{(j)}) = \frac{N!}{(i-1)!(j-i-1)!(N-j)!} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^y x y f(x) f(y) [F(x)]^{i-1} [1-F(y)]^{N-j} [F(y)-F(x)]^{j-i-1} dx dy \quad (23)$$

Με  $F(x)$  συμβολίζουμε την CDF της μητρικής κατανομής. Είναι προφανές ότι εάν γνωρίζουμε την  $F(x)$  μπορούμε να υπολογίσουμε τα  $E(x_{(i)})$ ,  $E(x_{(i)}^2)$  και  $E(x_{(i)}, x_{(j)})$ . Βέβαια ο υπολογισμός τους με αναλυτικές μεθόδους δεν είναι πάντοτε εφικτός, υπάρχουν όμως εναλλακτικές προσεγγίσεις:

- Υπολογισμός των  $E(x_{(i)})$ ,  $E(x_{(i)}^2)$  και  $E(x_{(i)}, x_{(j)})$  με χρήση αριθμητικής ολοκλήρωση. Ο Teichroew (1956) τις υπολόγισε για μεγέθη δείγματος ( $n$ ) μέχρι 20, όταν η μητρική κατανομή είναι η  $Normal(0,1)$ . Η μέθοδος αυτή είναι πολύ χρονοβόρα καθώς μεγαλώνει το  $n$ .
- Ένας δεύτερος τρόπος υπολογισμού των  $E(x_{(i)})$ ,  $E(x_{(i)}^2)$  και  $E(x_{(i)}, x_{(j)})$  είναι με τη χρήση Monte Carlo προσομοίωσης. Στη περίπτωση αυτή χρησιμοποιείται ένα μεγάλο πλήθος τυχαίων δειγμάτων από τη μητρική κατανομή, για κάθε δείγμα υπολογίζονται τα  $x_{(i)}$ ,  $x_{(i)}^2$  και  $x_{(i)}x_{(j)}$  και αθροίζονται για όλα τα δείγματα. Στο τέλος διαιρούμε τα αθροίσματα με το πλήθος των δειγμάτων.

Όταν δε γνωρίζουμε την  $F(x)$  ένας τρόπος υπολογισμού της είναι η χρήση μεθόδων re-sampling (πχ Bootstrap) με τις οποίες μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα πλήθος νέων δειγμάτων από ένα υπάρχον δείγμα. Στη συνέχεια δουλεύουμε όπως στην περίπτωση της Monte Carlo προσομοίωσης όταν η  $F(x)$  είναι γνωστή. Οι Huston και Ernst (2000) παρουσίασαν τύπους που απλοποιούν την εκτίμηση των  $E(x_{(i)})$ ,  $E(x_{(i)}^2)$  και  $E(x_{(i)}, x_{(j)})$  με τη χρήση της Bootstrap

Στην περίπτωση μας είναι γνωστή η μητρική κατανομή έτσι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είτε αριθμητική ολοκλήρωση είτε προσομοίωση Monte Carlo.

Για την κανονική κατανομή υπήρχαν διαθέσιμες<sup>114</sup> οι τιμές των  $E(x_{(i)})$ ,  $E(x_{(i)}^2)$  και  $E(x_{(i)}, x_{(j)})$  για μεγέθη δείγματος ( $n$ ) μέχρι και 20. Επιχειρήθηκε να υπολογιστούν οι τιμές των  $E(x_{(i)})$ ,  $E(x_{(i)}^2)$  και  $E(x_{(i)}, x_{(j)})$  για όλα τα υπό εξέταση μεγέθη δειγμάτων<sup>115</sup>. Δυστυχώς αυτή η προσπάθεια δεν ολοκληρώθηκε γιατί ήταν πάρα πολύ χρονοβόρα<sup>116</sup> και έτσι υπολογίστηκαν μόνο οι τιμές των  $E(x_{(i)})$ ,  $E(x_{(i)}^2)$  και  $E(x_{(i)}, x_{(j)})$  για  $n=25, 30, 45$  και  $60$ . Επιπλέον υπολογίστηκαν οι τιμές των  $E(x_{(i)})$ ,  $E(x_{(i)}^2)$  και  $E(x_{(i)}, x_{(j)})$  για μητρική κατανομή την Student's  $t$  με 5 βαθμούς ελευθερίας και για  $n=5, 10, 15, 20, 25, 30, 45$  και  $60$ .

Τελικά για όλες τις υπό εξέταση περιπτώσεις χρησιμοποιήθηκε Monte Carlo προσομοίωση με χρήση 10.000 δείγματα ανά περίπτωση.

Η προσομοίωση Monte Carlo έγινε με προγράμματα GAUSS 5.0.30 και η διαδικασία που ακολουθήθηκε ήταν η εξής:

**Βήμα 1** Για κάθε  $n$  βρέθηκαν  $n \times 10.000$  τυχαίοι ακέραιοι αριθμοί από το 0 έως το  $2^{32}-1$ . Οι τυχαίοι αριθμοί παρήχθησαν με χρήση της εντολής rndKMi η οποία υλοποιεί τον αλγόριθμο KISS-Monster<sup>117</sup> που έχει αναπτυχθεί από τον George Marsaglia. Ο αλγόριθμος KISS-Monster κατά δήλωση της εταιρείας Artech που κατασκευάζει το GAUSS (<http://www.Artech.com/random>) περνάει με επιτυχία όλους τους ελέγχους "DIEHARD"<sup>118</sup>.

**Βήμα 2** Οι τυχαίοι αυτοί αριθμοί διαιρέθηκαν με το  $2^{32}-1$  έτσι ώστε να προκύψουν  $n \times 10.000$  τυχαίοι αριθμοί από την ομοιόμορφη  $(0,1)$  κατανομή  $(U(0,1))$ .

**Βήμα 3** Για κάθε μία από τις μητρικές κατανομές που συμμετείχαν στην έρευνα οι τυχαίοι αριθμοί από την  $U(0,1)$  αντιστοιχίστηκαν σε τυχαίους αριθμούς από την μητρική

---

<sup>114</sup> Teichroew (1956)

<sup>115</sup> Τα προγράμματα GAUSS που κατασκευάστηκαν για την εκτέλεση της αριθμητικής ολοκλήρωσης καθώς και τα αποτελέσματα της αριθμητικής ολοκλήρωσης αναφέρονται στα παραρτήματα.

<sup>116</sup> Για τον υπολογισμό των 3660 τιμών των  $E(x_{(i)})$ ,  $E(x_{(i)}^2)$  και  $E(x_{(i)}, x_{(j)})$  για δείγμα μεγέθους 60 χρειάστηκε να χρησιμοποιηθούν δυο προσωπικοί υπολογιστές που δούλευαν ταυτόχρονα επί μία εβδομάδα. Κατά αναλογία για τον υπολογισμό των 88660 τιμών για δείγματα μεγέθους 100, 250 500 και 750 θα χρειαζόταν πάνω από 242 εβδομάδες ταυτόχρονης λειτουργίας των δύο παραπάνω υπολογιστών.

<sup>117</sup> "rndKMi generates random integers using a KISS+Monster algorithm developed by George Marsaglia. KISS initializes the sequence used in the recur-with-carry Monster random number generator" GAUSS 5.0.30 Language Reference

<sup>118</sup> Οι έλεγχοι "DIEHARD" είναι μία ομάδα στατιστικών ελέγχων που χρησιμοποιούνται στη μέτρηση της ποιότητας ενός συνόλου τυχαίων αριθμών. Έχουν αναπτυχθεί από τον George Marsaglia και δημοσιεύτηκαν για πρώτη φορά το 1995 σε ένα CD-ROM τυχαίων αριθμών.

κατανομή με τη χρήση της αντίστροφης συνάρτησης αθροιστικής πυκνότητας πιθανότητας (inverse Cumulative Distribution Function CDF) της μητρικής κατανομής.

**Βήμα 4** Οι  $n \times 10.000$  τυχαίοι αριθμοί για κάθε μία από τις υπό εξέταση κατανομές χρησιμοποιήθηκαν για να υπολογιστούν τα ποσοστιαία σημεία με όλες τις μεθόδους. Συνολικά υπολογίστηκαν 63.000.000 ( $12 \times 21 \times 5 \times 5 \times 10.000$ ) ποσοστιαία σημεία.

**Βήμα 5** Η μέση τιμή και η διασπορά των 10.000 ποσοστιαίων σημείων που υπολογίστηκαν για κάθε  $n$ ,  $p$ , μητρική κατανομή και ΕΠΣ χρησιμοποιήθηκαν για να υπολογιστούν η μεροληψία και το MSE.

#### 4.3.2.5..Επεξεργασία-παρουσίαση αποτελεσμάτων και συμπεράσματα

Σαν εκτιμήτρια αναφοράς για τον υπολογισμό του  $RMSE_{K,n,p}$  χρησιμοποιήθηκε η  $WA_p$  καθώς είναι η πιο ευρέως χρησιμοποιούμενη εκτιμήτρια ποσοστιαίου σημείου.

Τα μέτρα σύγκρισης για κάθε υπό εξέταση περίπτωση<sup>119</sup> παρατίθεται αναλυτικά σε πίνακες στο Παράρτημα. Για την πιο εύληπτη παρουσίαση των αναλυτικών αποτελεσμάτων χρησιμοποιήθηκαν γραφήματα<sup>120</sup>. Στα γραφήματα αυτά παρουσιάζονται ανά κατανομή και μέτρο σύγκρισης οι τιμές των μέτρων των υπό εξέταση εκτιμητριών για όλα τα  $p$  και μεγέθη δείγματος.

Επιπλέον για την πιο εύκολη επεξεργασία των αποτελεσμάτων έγινε ομαδοποίηση τους με βάση το  $p$  και το  $n$ .

Για τον υπολογισμό του VaR μας ενδιαφέρουν οι ουρές της κατανομής των αποδόσεων  $p \leq 0,1$  και  $p \geq 0,9$  έτσι για το  $p$  καθορίσαμε τρεις ομάδες:

- 1<sup>η</sup> ομάδα, η αριστερή ουρά. Στην ομάδα αυτή περιέχονται τα  $p$  από 0,01 έως 0,30
- 2<sup>η</sup> ομάδα, το μέσο κατανομής. Στην ομάδα αυτή περιέχονται τα  $p$  από 0,35 έως 0,65
- 3<sup>η</sup> ομάδα, η δεξιά ουρά. Στην ομάδα αυτή περιέχονται τα  $p$  από 0,70 έως 0,99

---

<sup>119</sup> Έχουμε (μεγέθη δείγματος)  $\times$  (πλήθος  $p$ )  $\times$  (πλήθος κατανομών) =  $12 \times 21 \times 5 = 1260$  διαφορετικές περιπτώσεις.

<sup>120</sup> Πλήρης κατάλογος με τα γραφήματα αυτά βρίσκεται στο Παράρτημα.

Δείγματα μεγέθους μέχρι 30 είναι πολύ συνηθισμένα στο πεδίο της βιολογίας αλλά και σε άλλα επιστημονικά πεδία όπου δείγματα μεγάλου πλήθους είναι πολλές φορές δύσκολο να βρεθούν<sup>121</sup>. Από την άλλη μεριά για τον υπολογισμό του VaR απαιτούνται δείγματα μεγέθους  $n \geq 250$ . Έτσι για το  $n$  καθορίσαμε τρεις ομάδες:

- 1<sup>η</sup> ομάδα, μικρά δείγματα. Στην ομάδα αυτή περιέχονται δείγματα μέχρι μεγέθους 30
- 2<sup>η</sup> ομάδα, μεσαία δείγματα. Στην ομάδα αυτή περιέχονται τα δείγματα μεγέθους 45, 60 και 150.
- 3<sup>η</sup> ομάδα, μεγάλα δείγματα. Στην ομάδα αυτή περιέχονται τα δείγματα μεγέθους 250, 500 και 750.

Επιπλέον οι μητρικές κατανομές χωρίστηκαν σε δύο κατηγορίες: α) συμμετρικές ( $N(0,1)$ ,  $T(5)$ ,  $DE(0,1)$ ) και β) μη συμμετρικές.

#### 4.3.2.5.1. Γενικά συμπεράσματα

##### Μεροληψία

Είναι προφανές ότι όταν χρησιμοποιούμε προσομοίωση Monte Carlo για να εκτιμήσουμε μια παράμετρο δε μπορούμε παρά να προσεγγίσουμε<sup>122</sup> την πραγματική τιμή της παραμέτρου. Άρα είναι μάλλον απίθανο να προκύψει μηδενική μεροληψία ακόμη και αν στην πραγματικότητα η μεροληψία είναι μηδενική. Για αυτό το λόγο θα μπορούσαμε να εισάγουμε την έννοια της σχεδόν μηδενικής μεροληψίας. Έτσι θα μπορούσαμε να ορίσουμε σα σχεδόν μηδενική μεροληψία κάθε μεροληψία που είναι μικρότερη από κάποιο όριο. Το όριο αυτό προφανώς θα έπρεπε να εξαρτάται τόσο από το πλήθος των δοκιμών της προσομοίωσης όσο και από το  $p$  και το  $n$  και ίσως και από τη μητρική κατανομή. Επιλέχτηκε όμως να μην χρησιμοποιηθεί αυτή η προσέγγιση καθώς δεν εντοπίστηκε βιβλιογραφία που να υποστηρίζει την προσέγγιση αυτή. Επιπλέον δεν ενδιαφέρει τόσο το να αποφανθούμε εάν μια εκτιμήτρια είναι αμερόληπτη ή όχι αλλά να συγκρίνουμε την μεροληψία των διάφορων εκτιμητριών.

---

<sup>121</sup> Πχ μήκος φαλαινών.

<sup>122</sup> Η προσέγγιση αυτή γίνεται τόσο καλλίτερη όσο αυξάνεται το πλήθος των δοκιμών.

Για κάθε μία από τις υπό εξέταση 1260 περιπτώσεις βρέθηκε η εκτιμήτρια που παρήγαγε τη μικρότερη απόλυτη μεροληψία. Στη συνέχεια για κάθε ένα από τους εννέα (3x3) συνδυασμούς των ομάδων του  $p$  και του  $n$  μετρήθηκαν για κάθε εκτιμήτρια οι περιπτώσεις για τις οποίες αυτή παρήγαγε τη μικρότερη μεροληψία. Τα αθροίσματα φαίνονται στον πίνακα 4-4.

Κατηγορία μητρικής κατανομής	Πλήθος περιπτώσεων που κάθε εκτιμήτρια παρήγαγε τη μικρότερη $AB_{κ,n,p}$		Εκτιμήτρια					
	Ομάδα $n$	Ομάδα $p$	HD	SV1	SV2	SV3	WA	
Συμμετρικές κατανομές	1	1	38	6	<b>51</b>	21	10	
		2	45	7	9	8	<b>57</b>	
		3	39	6	21	<b>49</b>	11	
	2	1	15	2	<b>37</b>	1	8	
		2	<b>30</b>	6	7	8	12	
		3	18	2	1	<b>35</b>	7	
	3	1	13			<b>40</b>	10	
		2	9	12	6	15	<b>21</b>	
		3	8			<b>53</b>	2	
Μη Συμμετρικές κατανομές	1	1		1		<b>56</b>	27	
		2				<b>84</b>		
		3	5	1	14	<b>62</b>	2	
	2	1			1		<b>28</b>	13
		2					<b>42</b>	
		3	1				<b>38</b>	3
	3	1	2	1			<b>28</b>	11
		2					<b>42</b>	
		3					<b>42</b>	
Σύνολο			223	45	186	612	194	

**Πίνακας 4-4 Πλήθος περιπτώσεων που κάθε εκτιμήτρια παρήγαγε τη μικρότερη  $AB_{κ,n,p}$**

Η SV2 έχει πιο συχνά τη μικρότερη απόλυτη μεροληψία όταν η μητρική κατανομή είναι συμμετρική και το  $p$  ανήκει στην πρώτη ομάδα (αριστερό κομμάτι της κατανομής). Η εκτιμήτρια SV3 έχει πιο συχνά τη μικρότερη μεροληψία όταν το  $p$  ανήκει στην τρίτη ομάδα (δεξιό κομμάτι της κατανομής) όταν η μητρική κατανομή είναι συμμετρική, αλλά και ανεξαρτήτως του  $p$  όταν η μητρική κατανομή είναι μη συμμετρική.

### Διασπορά

Συμπεράσματα με βάση τη διασπορά δε μπορούν να εξαχθούν όταν οι εκτιμήτριες δεν είναι αμερόληπτες. Στην περίπτωση μας οι εκτιμήτριες δεν έχουν μηδενική μεροληψία έτσι η διασπορά από μόνη της δε μπορεί να μας βοηθήσει να βγάλουμε συμπεράσματα.

## MSE

Για κάθε μία από τις υπό εξέταση 1260 περιπτώσεις βρέθηκε η εκτιμήτρια που παρήγαγε το μικρότερο MSE. Στη συνέχεια για κάθε ένα από τους εννέα (3x3) συνδυασμούς των ομάδων του p και του n μετρήθηκαν για κάθε εκτιμήτρια οι περιπτώσεις για τις οποίες αυτή παρήγαγε το μικρότερο MSE. Τα αθροίσματα φαίνονται στον πίνακα 4-5.

Κατηγορία μητρικής κατανομής	Πλήθος περιπτώσεων που κάθε εκτιμήτρια παρήγαγε τη μικρότερη MSE <sub>κ,η,ρ</sub>		Εκτιμήτρια					
	Ομάδα n	Ομάδα p	HD	SV1	SV2	SV3	WA	
Συμμετρικές κατανομές	1	1	6	30	<b>90</b>			
		2	22	<b>65</b>	20	19		
		3	5	30	1	<b>90</b>		
	2	1			7	<b>56</b>		
		2	3	<b>36</b>	12	12		
		3		8		<b>55</b>		
	3	1			8	<b>55</b>		
		2		<b>37</b>	9	17		
		3		2		<b>61</b>		
Μη Συμμετρικές κατανομές	1	1		14		<b>57</b>	13	
		2				<b>84</b>		
		3		9	1	<b>74</b>		
	2	1	1			<b>37</b>	4	
		2				<b>42</b>		
		3				<b>42</b>		
	3	1			3		<b>39</b>	
		2					<b>42</b>	
		3					<b>42</b>	
Σύνολο			37	249	244	713	17	

**Πίνακας 4-5 Πλήθος περιπτώσεων που κάθε εκτιμήτρια παρήγαγε τη μικρότερη**

Η SV2 έχει πιο συχνά το μικρότερο MSE όταν η μητρική κατανομή είναι συμμετρική και το p ανήκει στην πρώτη ομάδα (αριστερό κομμάτι της κατανομής). Η εκτιμήτρια SV3 έχει πιο συχνά το MSE όταν το p ανήκει στην τρίτη ομάδα (δεξιό κομμάτι της κατανομής) όταν η μητρική κατανομή είναι συμμετρική, αλλά και ανεξαρτήτως του p όταν η μητρική κατανομή είναι μη συμμετρική. Η SV1 έχει πιο συχνά το μικρότερο MSE όταν η μητρική κατανομή είναι συμμετρική και το p ανήκει στην πρώτη ομάδα (αριστερό κομμάτι της κατανομής).



## Συμπέρασμα

Όπως έχει αναφερθεί ικανή συνθήκη για να είναι μια εκτιμήτρια συνεπής είναι το MSE να τείνει στο 0 καθώς το  $n$  μεγαλώνει. Για να μπορέσουμε να έχουμε πιο εύληπτη εικόνα της τάσης των MSE καθώς μεγαλώνει το  $n$  κατασκευάστηκαν γραφήματα<sup>123</sup> που μετρούν στον κατακόρυφο άξονα το MSE και στον οριζόντιο το  $n$  και απεικονίζουν τα MSE των 5 εκτιμητριών για όλα τις υπό εξέταση περιπτώσεις. Το σύνολο των γραφημάτων αυτών βρίσκεται στο Παράρτημα. Από τη μελέτη των γραφημάτων αυτών είναι προφανές ότι το MSE σε κάθε περίπτωση και για κάθε εκτιμητή μικραίνει και προσεγγίζει το 0 καθώς το  $n$  αυξάνεται. Η ταχύτητα με την οποία το MSE προσεγγίζει το 0 εξαρτάται τόσο από τη μητρική κατανομή όσο και από το  $p$ . Παρατηρούμε ότι για  $p$  που αντιστοιχούν σε μη φραγμένες ουρές (πχ  $p=0.01$  για την κανονική κατανομή,  $p=0.99$  για την Lognormal) η σύγκλιση είναι πιο αργή και μάλιστα όσο πιο παχιές είναι οι ουρές τόσο πιο αργή είναι η σύγκλιση. Η συμπεριφορά αυτή συνάδει με τη συμπεριφορά του τυπικού σφάλματος του δειγματικού ποσοστιαίου σημείου που δίδεται από την εξίσωση<sup>124</sup> (24) και τον πίνακα (4-6).

$$se(WA_{pn}) = \sqrt{\frac{p(1-p)}{nf(Q_p)^2}} \quad (24)$$

Με  $f(x)$  να είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της μητρικής κατανομής.

---

<sup>123</sup> Κατασκευάστηκαν 132 γραφήματα για κάθε ένα από το  $p$  που ανήκουν στο  $\{0.01, 0.05, 0.1, 0.2, 0.35, 0.45, 0.55, 0.65, 0.80, 0.90, 0.95, 0.99\}$  και για κάθε υπό εξέταση κατανομή.

<sup>124</sup> Kendall, M. 1994, Kendall's advanced theory of statistics, Halsted Press, New York

Κατανομή	P	Q <sub>p</sub>	f(Q <sub>p</sub> )	Τυπικό σφάλμα (se) της WA <sub>n,n</sub>		
				n=250	n=500	n=750
<b>N(0,1)</b>	0,01	-2,326348	0,395253	0,236111	0,166955	0,136319
	0,05	-1,644854	0,397756	0,13365	0,094505	0,077163
	0,1	-1,281552	0,398166	0,108113	0,076448	0,062419
	0,25	-0,6744897	0,398449	0,08618	0,060939	0,049756
	0,4	-0,2533471	0,398515	0,080198	0,056708	0,046302
	0,6	0,2533471	0,398515	0,080198	0,056708	0,046302
	0,75	0,6744897	0,398449	0,08618	0,060939	0,049756
	0,9	1,281552	0,398166	0,108113	0,076448	0,062419
	0,95	1,644854	0,397756	0,13365	0,094505	0,077163
	0,99	2,326348	0,395253	0,236111	0,166955	0,136319
<b>E(1)</b>	0,01	1,005034E-02	0,996337	0,006356	0,004495	0,00367
	0,05	5,129329E-02	0,991658	0,01451	0,01026	0,008377
	0,1	0,1053605	0,987902	0,021082	0,014907	0,012172
	0,25	0,2876821	0,979139	0,036515	0,02582	0,021082
	0,4	0,5108256	0,970626	0,05164	0,036515	0,029814
	0,6	0,9162908	0,956264	0,07746	0,054772	0,044721
	0,75	1,386294	0,938713	0,109544	0,07746	0,063246
	0,9	2,302585	0,896242	0,189737	0,134164	0,109545
	0,95	2,995732	0,852856	0,275681	0,194936	0,159164
	0,99	4,60517	0,695365	0,629285	0,444972	0,363318
<b>T(5)</b>	0,01	-3,36493	0,010911	0,576745	0,40782	0,332984
	0,05	-2,015048	0,063797	0,216062	0,152779	0,124743
	0,1	-1,475884	0,12829	0,147897	0,104579	0,085389
	0,25	-0,7266868	0,280881	0,097501	0,068943	0,056292
	0,4	-0,2671809	0,363801	0,085167	0,060222	0,049171
	0,6	0,2671809	0,363801	0,085167	0,060222	0,049171
	0,75	0,7266868	0,280881	0,097501	0,068943	0,056292
	0,9	1,475884	0,12829	0,147897	0,104579	0,085389
	0,95	2,015048	0,063797	0,216062	0,152779	0,124743
	0,99	3,36493	0,010911	0,576745	0,40782	0,332984
<b>LN(0,1)</b>	0,01	9,765173E-02	0,002666	0,023057	0,016303	0,013312
	0,05	0,1930408	0,003847	0,0258	0,018243	0,014896
	0,1	0,2776062	0,006178	0,030013	0,021222	0,017328
	0,25	0,5094163	0,01837	0,043902	0,031043	0,025347
	0,4	0,7761984	0,043987	0,062249	0,044017	0,03594
	0,6	1,28833	0,125718	0,103321	0,073059	0,059653
	0,75	1,963031	0,27301	0,169175	0,119625	0,097673
	0,9	3,602225	0,58267	0,389448	0,275381	0,224848
	0,95	5,180252	0,655482	0,692339	0,489558	0,399722
	0,99	10,24047	0,270316	2,417881	1,7097	1,395964
<b>DE(0,1)</b>	0,01	-3,912023	0,347683	0,629285	0,444972	0,363318
	0,05	-2,302585	0,426428	0,275681	0,194936	0,159164
	0,1	-1,609438	0,448121	0,189737	0,134164	0,109545
	0,25	-0,6931472	0,469356	0,109545	0,07746	0,063246
	0,4	-0,2231435	0,478132	0,07746	0,054772	0,044721
	0,6	0,2231435	0,478132	0,07746	0,054772	0,044721
	0,75	0,6931472	0,469356	0,109545	0,07746	0,063246
	0,9	1,609438	0,448121	0,189737	0,134164	0,109545
	0,95	2,302585	0,426428	0,275681	0,194936	0,159164
	0,99	3,912023	0,347683	0,629285	0,444972	0,363318

Πίνακας 4-6 Τυπικό σφάλμα για την WA

#### 4.3.2.5.2. Συμπεράσματα για μεγάλα δείγματα και για τις ουρές των κατανομών

Με δεδομένο ότι οι νέες μέθοδοι θα χρησιμοποιηθούν στον υπολογισμό του VaR αλλά και του Credit risk θα εστιάσουμε περισσότερο στα αποτελέσματα για μεγάλα δείγματα ( $n= 250, 500$  και  $750$ ) και  $p$  στις ουρές ( $0,1 \geq p$  ή  $p \geq 0,9$ ). Για τον υπολογισμό του VaR μας ενδιαφέρουν οι συμμετρικές κατανομές και  $p \leq 0,1$  για πιστωτικές θέσεις (Long positions) και  $p \geq 0,9$  για χρεωστικές θέσεις (Short positions). Για τον υπολογισμό του πιστωτικού κινδύνου μας ενδιαφέρουν μη συμμετρικές κατανομές και ειδικότερα κατανομές με μεγάλη θετική ασυμμετρία (Positive Skewness) και  $p \leq 0,01$ .

Πλήθος περιπτώσεων που κάθε εκτιμήτρια παράγαγε τη μικρότερη $AB_{K,n,p}$			Εκτιμήτρια					Scope
Κατηγορία μητρικής κατανομής	N	P	HD	SV1	SV2	SV3	WA	
Συμμετρικές κατανομές	250, 500, 750	0,01 - 0,10	3		<b>24</b>			VaR - Long Positions
		0,90 - 0,99	1			<b>26</b>		VaR - Short Positions
Μη Συμμετρικές κατανομές με Positive Skewness	250, 500, 750	0,01	2	1		<b>3</b>		Credit Risk

**Πίνακας 4-7 Πλήθος περιπτώσεων που κάθε εκτιμήτρια παράγαγε τη μικρότερη  $AB_{K,n,p}$  για  $p$  στις ουρές και μεγάλα δείγματα**

Με βάση την μικρότερη απόλυτη BIAS η μέθοδος SV2 προκρίνεται για τον υπολογισμό του VaR πιστωτικών θέσεων και η SV3 για τον υπολογισμό του VaR χρεωστικών θέσεων αλλά και τον υπολογισμό του πιστωτικού κινδύνου.

Πλήθος περιπτώσεων που κάθε εκτιμήτρια παράγαγε τη μικρότερη $AB_{K,n,p}$		Εκτιμήτρια						Scope
Κατηγορία μητρικής κατανομής	N	P	HD	SV1	SV2	SV3	WA	
Συμμετρικές κατανομές	250, 500, 750	0,01 - 0,10			<b>27</b>			VaR - Long Positions
		0,90 - 0,99				<b>27</b>		VaR - Short Positions
Μη Συμμετρικές κατανομές με Positive Skewness	250, 500, 750	0,01		<b>3</b>		<b>3</b>		Credit Risk

**Πίνακας 4-8 Πλήθος περιπτώσεων που κάθε εκτιμήτρια παράγαγε τη μικρότερη  $MSE_{K,n,p}$  για  $p$  στις ουρές και μεγάλα δείγματα**

Με βάση το MSE η μέθοδος SV2 προκρίνεται για τον υπολογισμό του VaR πιστωτικών θέσεων και η SV3 για τον υπολογισμό του VaR χρεωστικών θέσεων. Για τον υπολογισμό του πιστωτικού κινδύνου προκρίνονται και η SV1 και η SV3.

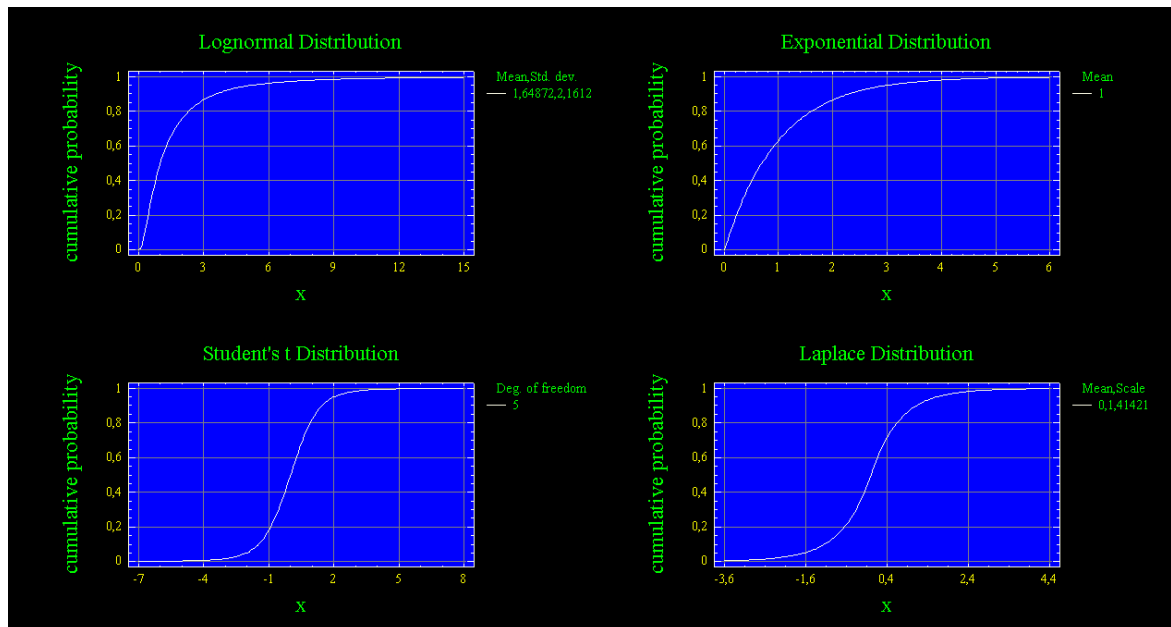
#### 4.3.2.5.3. Γενικά συμπεράσματα

Οι SV3 και SV2 είναι «δυϊκές» εκτιμήτριες που η μία συμπληρώνει την άλλη και αυτό φαίνεται και από τον τρόπο που δημιουργήθηκαν αλλά και από τα αποτελέσματα της μελέτης όπως αυτά παρουσιάζονται κυρίως μέσω των γραφημάτων. Πράγματι παρατηρούμε ότι όταν η SV3 έχει πάρα πολύ μικρό MSE η SV2 έχει μεγάλο και αντίστροφα.

Έτσι εδώ θα περίμενε κανείς όπως η SV3 είναι η καλλίτερη εκτιμήτρια για τη δεξιά ουρά έτσι και η SV2 θα ήταν η καλλίτερη εκτιμήτρια για την αριστερή ουρά. Τα αποτελέσματα όμως δε δίνουν ξεκάθαρο προβάδισμα στην SV2 για όλες τις περιπτώσεις.

Μελετώντας σε μεγαλύτερο βάθος τα αποτελέσματα διαπιστώθηκε ότι για τις συμμετρικές κατανομές όντως η SV2 στην αριστερή ουρά έχει ανάλογη συμπεριφορά με αυτήν της SV3 στη δεξιά ουρά. Όμως στην περίπτωση που δεν έχουμε συμμετρική

κατανομή<sup>125</sup> τότε η συμπεριφορά της SV2 στην αριστερή ουρά δεν είναι ίδια με τη συμπεριφορά της SV3 στη δεξιά ουρά.



Εικόνα 4-2. CDF των LN(0,1), E(1), T(5) και DE(0,1)

#### 4.3.3. Καθορισμός της πιο αποδοτικής SV σε κάθε περίπτωση

Είναι προφανές ότι οι SV εκτιμήτριες είναι οι καλλίτερες εκτιμήτριες σε όλες σχεδόν τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν στην §5.3.2 όμως ποια από αυτές είναι η πιο κατάλληλη εκτιμήτρια σε κάθε περίπτωση; Κοιτώντας πίσω στον ορισμό των SV εκτιμητριών είναι εύκολο να διακρίνουμε ότι η βασική διαφορά ανάμεσα τους έγκεινται στο πώς εκτιμάται το  $Q_{p,i}$ . Είναι λογικό η πιο αποτελεσματική εκτιμήτρια να είναι αυτή που χρησιμοποιεί την πιο κατάλληλη εκτίμηση του  $Q_{p,i}$ . Γενικά η πιο κατάλληλη σημειακή εκτίμηση μιας τυχάιας μεταβλητής είναι η μέση τιμή της. Άρα η πιο κατάλληλη ( $Q'_{p,i}$ ) σημειακή εκτίμηση του  $Q_{p,i}$  θα μπορούσε να ήταν η μέση τιμή του

<sup>125</sup> Σε μη συμμετρικές κατανομές η Skewness είναι διάφορη από το μηδέν.

$Q_{p,i}$  που δίδεται από την εξίσωση (25). Με βάση την εξίσωση (25)  $E(Q_{p,i})=(x_{(i)}+x_{(i+1)})/2$  εάν η πρώτη παράγωγος της  $f(x)$  στο  $S_i$  είναι ίση με το 0,  $E(Q_{p,i})>(x_{(i)}+x_{(i+1)})/2$  εάν η πρώτη παράγωγος της  $f(x)$  στο  $S_i$  είναι μεγαλύτερη από το 0 και  $E(Q_{p,i})<(x_{(i)}+x_{(i+1)})/2$  εάν η πρώτη παράγωγος της  $f(x)$  στο  $S_i$  είναι μικρότερη από το 0. Τώρα εάν λάβουμε υπόψη μας το γεγονός ότι το  $B(i;n,p)$  τείνει στο 0 καθώς το  $i$  κινείται μακριά από το  $[np]$  τότε το παρακάτω θεώρημα αποτελεί ένα κριτήριο για την επιλογή της καταλληλότερης SV εκτιμήτριας.

#### Θεώρημα 4-1

Εάν για κάθε  $i$  με  $B(i;n,p)$  αξιοσημείωτα  $\neq 0$   $F''(x) = 0 \quad \forall x \in S_i$  (η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι σταθερή) τότε η καταλληλότερη εκτιμήτρια ποσοστιαίου σημείου είναι η SV1.

Εάν για κάθε  $i$  με  $B(i;n,p)$  αξιοσημείωτα  $\neq 0$   $F''(x) > 0 \quad \forall x \in S_i$  (η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι αύξουσα) τότε η καταλληλότερη εκτιμήτρια ποσοστιαίου σημείου είναι η SV2 ή η SV1.

Εάν για κάθε  $i$  με  $B(i;n,p)$  αξιοσημείωτα  $\neq 0$   $F''(x) < 0 \quad \forall x \in S_i$  (η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι φθίνουσα) τότε η καταλληλότερη εκτιμήτρια ποσοστιαίου σημείου είναι η SV3 ή η SV1.

$$Q'_{p,i} = E(Q_{p,i}) = \frac{\int_{x_{(i)}}^{x_{(i+1)}} xf(x)dx}{\int_{x_{(i)}}^{x_{(i+1)}} f(x)dx} = \frac{\int_{x_{(i)}}^{x_{(i+1)}} xf(x)dx}{F(x_{(i+1)}) - F(x_{(i)})} \quad (25)$$

Το θεώρημα 4-1 εξηγεί την «συμμετρική» συμπεριφορά των SV2 και SV3 στις περιπτώσεις που εξετάστηκαν. Επιπλέον το θεώρημα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον περιορισμό της χρήσης της SV σε ορισμένες περιπτώσεις. Έτσι η χρήση της SV3 για τον υπολογισμό του 1% ημερήσιου VaR μίας πιστωτικής θέσης σε μία μετοχή δεν θα ήταν

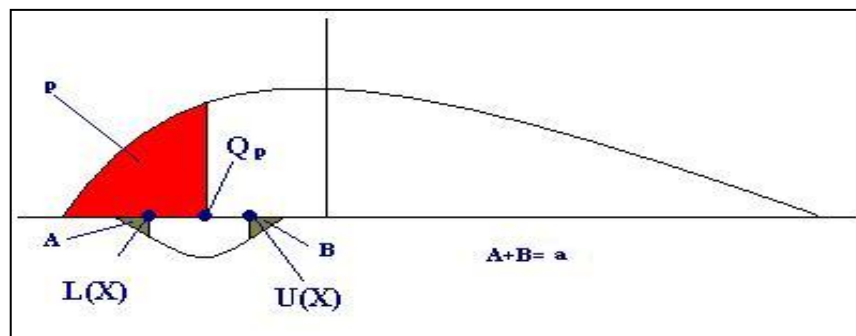
ενδεδειγμένη αφού η κατανομή των ημερήσιων αποδόσεων των μετοχών έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που είναι αύξουσα στην αριστερή ουρά. Ανάλογα η χρήση της SV2 για τον υπολογισμό του 1% ημερήσιου VaR μίας χρεωστικής θέσης σε μία μετοχή δεν θα ήταν ενδεδειγμένη αφού η κατανομή των ημερήσιων αποδόσεων των μετοχών έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που είναι φθίνουσα στη δεξιά ουρά. Τα συμπεράσματα αυτά συνάδουν και με τα συμπεράσματα της παραγράφου 5.3.2.5.2 .

#### 4.4. Διαστήματα εμπιστοσύνης

##### 4.4.1. Γενικά για τα διαστήματα εμπιστοσύνης

Θεωρούμε τις στατιστικές συναρτήσεις  $L(\underline{X})$  και  $U(\underline{X})$  τέτοιες ώστε  $L(\underline{X}) \leq U(\underline{X})$  και αριθμό  $a$  τέτοιο ώστε  $0 < a < 1$ . Το τυχαίο διάστημα  $[L(\underline{X}), U(\underline{X})]$  για το οποίο ισχύει  $P_{\theta}(L(\underline{X}) \leq \theta \leq U(\underline{X})) = 1 - a$ , για κάθε  $\theta$  καλείται διάστημα εμπιστοσύνης (δ.ε.) για την παράμετρο  $\theta$  με συντελεστή εμπιστοσύνης (σ.ε.)  $1 - a$ , ή πιο απλά  $(1 - a)$  100% δ.ε.. Η  $U(\underline{X})$  καλείται ανώτερο όριο εμπιστοσύνης για την παράμετρο  $\theta$ , με σ.ε.  $1 - a$  αν  $P_{\theta}(-\infty < \theta \leq U(\underline{X})) = 1 - a$ , για κάθε  $\theta$ . Η  $L(\underline{X})$  καλείται κατώτερο όριο εμπιστοσύνης για την παράμετρο  $\theta$ , με σ.ε.  $1 - a$  αν  $P_{\theta}(L(\underline{X}) \leq \theta < +\infty) = 1 - a$ , για κάθε  $\theta$ .

Τα  $L(\underline{X})$  και  $U(\underline{X})$  δεν είναι τίποτα άλλο από εκτιμήτριες των ποσοστιαίων σημείων  $(1 - a)/2$  και  $a/2$  της κατανομής της εκτιμήτριας της  $\theta$ . Άρα για να μπορέσουμε να βρούμε ένα διάστημα εμπιστοσύνης για την παράμετρο  $\theta$  θα πρέπει να έχουμε πολύ καλή γνώση της κατανομής της εκτιμήτριας της  $\theta$ .



Εικόνα 4-3. Το  $p$  ποσοστιαίο σημείο  $Q_p$  και το  $(1 - a)$  100% δ.ε.  $[L(\underline{X}), U(\underline{X})]$

#### 4.4.2. Διάστημα εμπιστοσύνης εκτιμήτριας ποσοστιαίου σημείου

Όταν η παράμετρος  $\theta$  είναι το  $Q_p$  και η μητρική κατανομή είναι συνεχής τότε μπορούμε να βρούμε ένα δ.ε. για τη  $\theta$  που δεν εξαρτάται από την μητρική κατανομή (κατανομή της τ.μ.  $X$ ). Αυτό το δ.ε. βασίζεται στο γεγονός ότι η πιθανότητα το  $Q_p$  να βρίσκεται ανάμεσα στο  $x_{(r)}$  και στο  $x_{(s)}$  δίνεται από την εξίσωση (25).

$$P\{x_{(r)} \leq Q_p \leq x_{(s)}\} = \pi(r, s, n, p) = I_p(r, n - r + 1) - I_p(s, n - s + 1) \quad (26)$$

Άρα δ.ε. με σ.ε.  $\geq 1 - \alpha$  για δεδομένο  $n$  και  $p$  παράγονται από την επιλογή των  $r$  και  $s$  κάνοντας το  $\pi \geq 1 - \alpha$ . Δεν υπάρχει κανόνας για την επιλογή των  $r$  και  $s$  αλλά είναι λογικό να προσπαθούμε να κάνουμε το  $s - r$  όσο το δυνατόν μικρότερο.

#### 4.5. Κατασκευή διαστημάτων εμπιστοσύνης για τις νέες εκτιμήτριες

Είναι σαφές ότι για να κατασκευάσουμε διαστήματα εμπιστοσύνης για μια εκτιμήτρια πρέπει να ξέρουμε καλά την κατανομή της εκτιμήτριας. Άρα θα αρχίσουμε με τη μελέτη των κατανομών των νέων εκτιμητριών.

##### 4.5.1. Κανονικότητας της κατανομής των νέων εκτιμητριών

Εάν οι εκτιμήτριες ακολουθούν κανονική κατανομή τότε η παραγωγή διαστημάτων εμπιστοσύνης συνίσταται στον υπολογισμό της μέσης τιμής και της διασποράς της εκτιμήτριας. Όμως είναι η κατανομή των εκτιμητριών SV1, SV2 και SV3 κανονική ή έστω ασυμπτωτικά κανονική; Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να απαντήσουμε το ερώτημα αυτό.

Το εάν ένα πεπερασμένο άθροισμα  $T_n = \sum_{i=1}^n c_{i,n} x_{(n)}$  διατεταγμένων παρατηρήσεων ενός δείγματος (όπως είναι οι SV1, SV2 και SV3) ακολουθεί ασυμπτωτικά κανονική κατανομή ή πιο γενικά κάτω από ποιες συνθήκες το  $T_n$  ακολουθεί ασυμπτωτικά κανονική κατανομή έχει απασχολήσει τους ερευνητές από τα μέσα του προηγούμενου αιώνα. Οι διάφορες προσεγγίσεις στο θέμα αυτό θέτουν είτε αυστηρές συνθήκες που



πρέπει να ικανοποιούν τα  $c_{i,n}$  και ασθενής συνθήκες για τη μητρική κατανομή ή το αντίστροφο. Οι πιο αξιοσημείωτες συνεισφορές στο πεδίο αυτό την δεκαετία του 1960 αναφέρονται από τον David (1981) και είναι των Bickel (1967), Chernoff και άλλοι (1967), Moore (1968), Govindarajulu (1968), Stigler (1969) και Shorack (1969).

Σε όλες αυτές τις ερευνητικές δουλειές ήταν βολικό να χρησιμοποιείται η αναπαράσταση της  $T_n$  που περιγράφεται από την εξίσωση (27).

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n j\left(\frac{i}{n}\right) x_{(i)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x J[P_n(x)] dP_n(x) \quad (27)$$

Όπου  $J(u)$  είναι μια συνάρτηση του  $u$  ( $0 \leq u \leq 1$ ) τέτοια ώστε  $J(i/n) = nc_{i,n}$  ( $1 \leq i \leq n$ ).

Ο Stigler το 1974 απέδειξε το θεώρημα 1 που καθορίζει πότε το  $T_n$  ακολουθεί ασυμπτωτικά την κανονική κατανομή χωρίς να ορίζει ιδιαίτερα αυστηρές συνθήκες για την μητρική κατανομή.

**Θεώρημα 1.** Θεωρούμε ότι  $E(x_1^2) < \infty$  και ότι η  $J(u)$  είναι φραγμένη και συνεχής. Τότε

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sigma^2(T_n) = \sigma^2(J, F) \quad (28)$$

Επίσης, εάν  $\sigma^2(J, F) > 0$ , τότε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (T_n - E(T_n)) / \sigma(T_n) \xrightarrow{\kappa.N} N(0,1) \quad (29)$$

$$\text{Με } \sigma^2(J, F) = 2 \iint_{-\infty < x < y < \infty} J[P(x)] J[P(y)] P(x) [1 - P(x)] dx dy$$

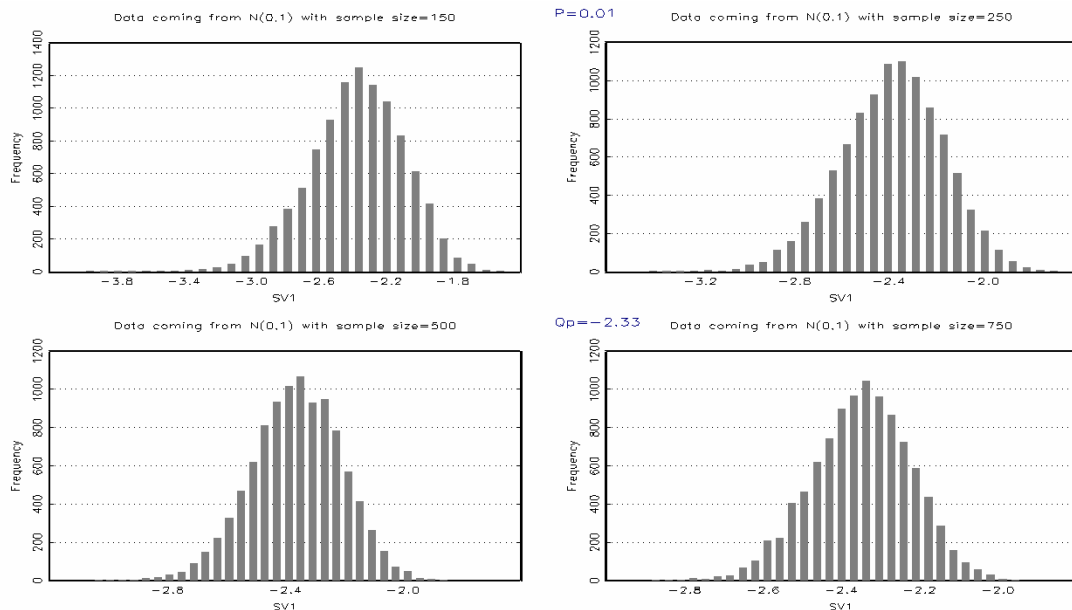
Εξίσου σημαντικό είναι να ξέρουμε πόσο γρήγορα συγκλίνει στην κανονική κατανομή το  $T_n$ . Το ερώτημα αυτό πρώτοι απάντησαν οι Rosenkrantz και O'Reilly το 1972, δείχνοντας ότι η διαφορά  $|F_n^*(x) - \Phi(x)|$  είναι τάξης  $n^{-1/4}$  με

$$F_n^*(x) = P\{(T_n - E(T_n)) / \sigma(T_n) \leq x\} \quad (30)$$

Αν ορίσουμε την  $J$  έτσι ώστε  $J(i/n) = nc_{i,n}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) και για  $x$  μεταξύ  $i/n$  και  $(i+1)/n$  η  $J(x)$  να βρίσκεται πάνω στην ευθεία που ενώνει τα  $(i/n, nc_{i,n})$  και τα  $((i+1)/n, nc_{i+1,n})$  τότε προφανώς η  $J$  είναι της μορφής που απαιτεί η εξίσωση (27). Επιπλέον η  $J$  είναι συνεχής. Άρα για να μπορεί να χρησιμοποιηθεί το θεώρημα 1 αρκεί να δείξουμε ότι είναι φραγμένη. Δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (nB(i; n, p)) < \infty \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, n\} \quad (31)$$

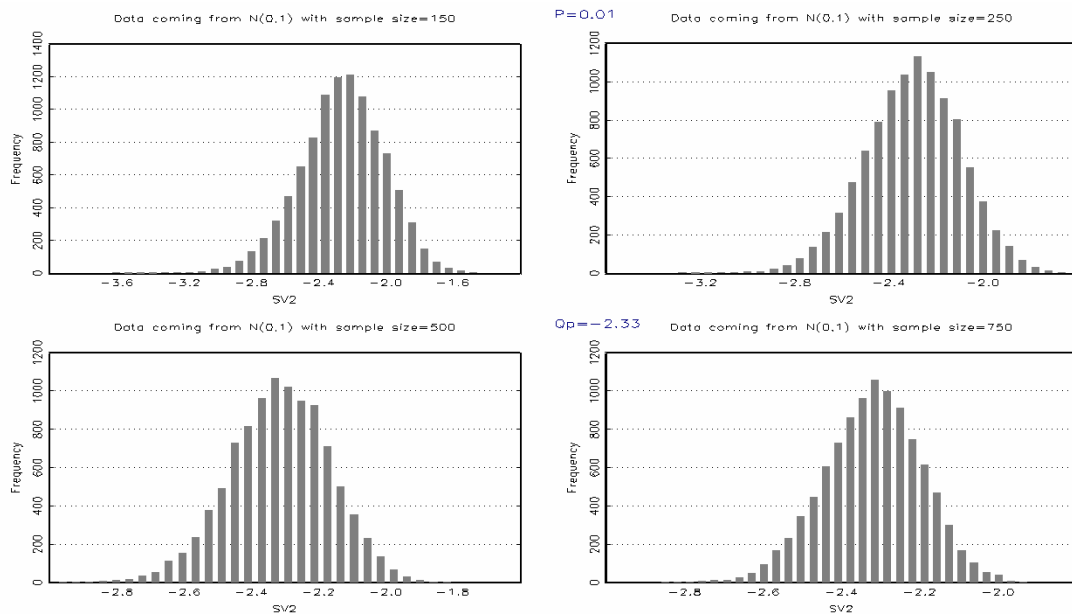
όμως το όριο του  $nB(i; n, p)$  τείνει στο  $\infty$  και άρα το θεώρημα 1 δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί.



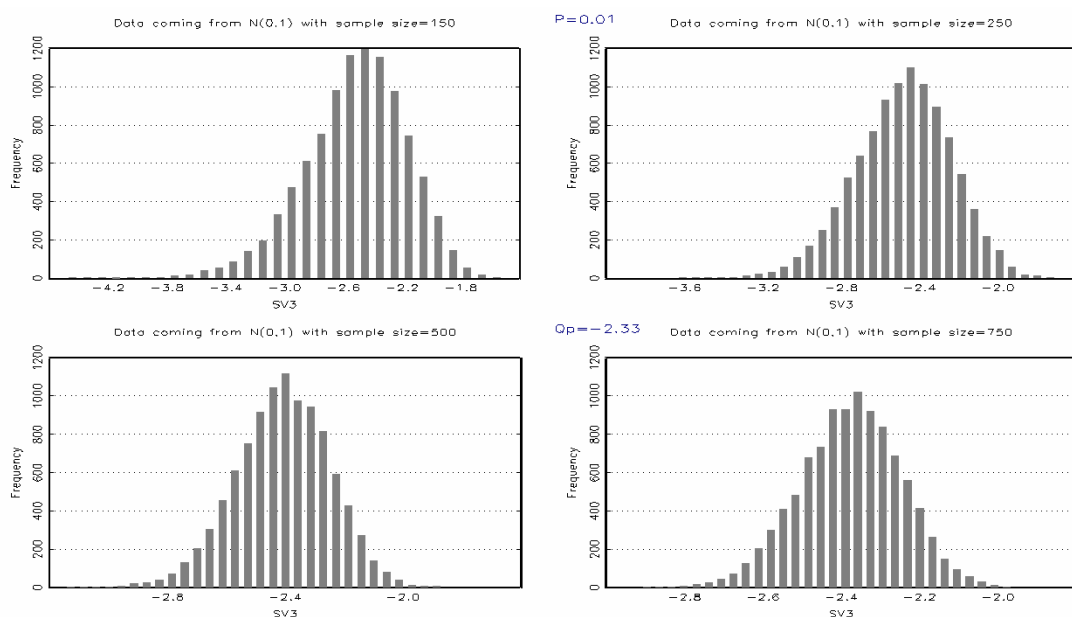
**Εικόνα 4-4. Ιστογράμματα για τα αποτελέσματα της προσομοίωσης για την  $N(0,1)$   $p=0,01$   $n=150, 250, 500$  και  $750$  για την  $SV1$**

Στη συνέχεια σχεδιάστηκαν ραβδογράμματα για τα 10000 αποτελέσματα που είχαμε από την προσομοίωση για όλες τις κατανομές και για  $p=0,01, 0,05, 0,1, 0,9, 0,95$  και  $0,99$  και για  $n=150, 250, 500$  και  $750$  (Εικόνες 4-3, 4-4 και 4-5) το σύνολο των οποίων βρίσκεται στο Παράρτημα. Από τα ραβδογράμματα αυτά είναι προφανές ότι η κατανομή

των SV1, SV2 και SV3 για τις εν λόγω τιμές του  $p$  και  $n$  δεν ακολουθούν κανονική κατανομή.



**Εικόνα 4-5. Ιστογράμματα για τα αποτελέσματα της προσομοίωσης για την  $N(0,1)$   $p=0,01$   $n=150, 250, 500$  και  $750$  για την SV2**



**Εικόνα 4-6. Ιστογράμματα για τα αποτελέσματα της προσομοίωσης για την  $N(0,1)$   $p=0,01$   $n=150, 250, 500$  και  $750$  για την SV3**

#### 4.5.2. Εκτίμηση της κατανομής των νέων εκτιμητριών με τη χρήση Jackknife

Έχοντας αποκλείσει την περίπτωση της κανονικής κατανομής θα προσπαθήσουμε να μελετήσουμε την κατανομή των  $SV_i$  με άλλον τρόπο. Στόχος είναι με δεδομένο ένα

δείγμα μεγέθους  $n$  από μια άγνωστη κατανομή να παραχθεί ένα διάστημα εμπιστοσύνης για την  $SV_i$ . Θα χρησιμοποιηθεί μια μέθοδο resampling έτσι ώστε από ένα δείγμα μεγέθους  $n$  να παραχθούν πολλά νέα δείγματα. Για κάθε ένα από τα νέα αυτά δείγματα θα υπολογιστούν οι τιμές της  $SV_i$  και θα κατασκευαστεί στην ουσία ένα δείγμα της  $SV_i$  το οποίο θα χρησιμοποιηθεί για να εκτιμηθούν τα  $L(x)$  και  $U(x)$ <sup>126</sup>.

Στη βιβλιογραφία υπάρχουν αρκετές μέθοδοι resampling οι πιο γνωστές είναι η Jackknife που παρουσιάστηκε από τον Quenouille το 1949 και η Bootstrap που παρουσιάστηκε από τον Efron το 1979. Στην Jackknife από δείγμα μεγέθους  $n$  παράγονται  $n$  δείγματα μεγέθους  $n-1$  αφαιρώντας κάθε φορά μια από τις αρχικές  $n$  παρατηρήσεις<sup>127</sup>. Στην Bootstrap από δείγμα μεγέθους  $n$  παράγονται  $n^n$  δείγματα μεγέθους  $n$  που είναι όλα τα πιθανά δείγματα μεγέθους  $n$  που μπορούν να παραχθούν από το αρχικό δείγμα χρησιμοποιώντας τυχαία δειγματοληψία με επανάθεση.

Εδώ θα χρησιμοποιηθεί η Jackknife. Θα εξετάσουμε τις  $N(0,1)$ ,  $T(5)$   $LN(0,1)$  και  $DE(0,1)$  κατανομές που χρησιμοποιήθηκαν και στη διερεύνηση της αποτελεσματικότητας των νέων εκτιμητριών (πίνακας 4-3) για  $p=0,01$ ,  $0,05$ ,  $0,95$  και  $0,99$  και  $n=250$ ,  $500$  και  $750$ . Μας ενδιαφέρει να δούμε εάν για τα  $n$  δείγματα μεγέθους  $n-1$  που παράγονται με την Jackknife η  $SV_i$  παράγει εκτιμήσεις που μπορεί να θεωρηθεί ότι παράγονται από δείγμα μεγέθους  $n$ . Με άλλα λόγια θα εξετάσουμε εάν οι κατανομές των  $SV_{i,n,p}$  και  $SV_{i,n-1,p}$  μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι ίδιες. Θα χρησιμοποιηθεί προσομοίωση Monte Carlo. Θα παραχθούν 10000 τυχαία δείγματα μεγέθους  $n=249$ ,  $499$  και  $749$  από τις πέντε κατανομές του πίνακα 4-3 και θα υπολογισθούν τα ποσοστιαία σημεία για  $p=0,01$ ,  $0,05$ ,  $0,95$  και  $0,99$  με τη χρήση των  $SV_i$ . Στη συνέχεια τις 10000 τιμές για κάθε  $SV_i$ ,  $p$ , κατανομή και για  $n=249$  θα ελεγχθεί εάν προέρχονται από την ίδια κατανομή με τις αντίστοιχες 10000 τιμές για  $n=250$  που παρήχθησαν κατά την προσομοίωση Monte Carlo που έγινε στην παράγραφο 6.3.2 «Διερεύνηση της αποτελεσματικότητας των νέων εκτιμητριών». Αντίστοιχοι έλεγχοι θα γίνουν για  $n=499$  και  $500$  και για  $n=749$  και  $750$ .

---

<sup>126</sup> Οι Efron και Tibshirani (1986) αναφέρουν διάφορες μεθόδους υπολογισμού των  $L(x)$  και  $U(x)$ , εδώ θα χρησιμοποιηθούν τα  $\alpha$  και  $1-\alpha$  ποσοστιαία σημεία.

<sup>127</sup> Υπάρχει και k-Jackknife όπου αφαιρούνται  $k$  παρατηρήσεις κάθε φορά.

Συνολικά θα εξεταστούν 144 ζευγάρια. Η κωδικοποίηση των υπό εξέταση δειγμάτων φαίνεται στον πίνακα 4-9. Η υπόθεση Χρησιμοποιήθηκε το κριτήριο Kolmogorov – Smirnov για δύο δείγματα για τον έλεγχο της υπόθεσης  $H_0$  έναντι της  $H_1$  με:

**$H_0$** : οι 10000 εκτιμήσεις  $SV[i][n][d][j]$  προέρχονται από την ίδια κατανομή με τις 10000 παρατηρήσεις  $SV[i][n-1][d][j]$

**$H_1$** : οι  $SV[i][n][d][j]$  και  $SV[i][n-1][d][j]$  προέρχονται από διαφορετικές κατανομές.

Για κάθε υπό εξέταση ζευγάρι τα αποτελέσματα (p-value) φαίνονται στον πίνακα 4-10.

Επιπλέον για κάθε ζευγάρι δημιουργήθηκαν τα παρακάτω γραφήματα:

- Κοινό ιστόγραμμα συχνοτήτων
- Κοινή γραφική παράσταση του ίχνους πυκνότητας (density trace) δηλαδή των εκτιμώμενων συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας.
- Κοινό Box και Whisker γράφημα.
- Κοινό γράφημα ποσοστιαίων σημείων δηλαδή της εκτιμώμενης CDF.

Τα παραπάνω γραφήματα για όλα τα ζευγάρια υπάρχουν στο παράρτημα.

Από τη μελέτη τόσο των γραφημάτων όσο και των p-values του κριτηρίου των Kolmogorov – Smirnov είναι προφανές ότι σε όλες στις υπό εξέταση περιπτώσεις δε μπορούμε να απορρίψουμε την υπόθεση ότι οι  $SV[i][n][d][j]$  και οι  $SV[i][n-1][d][j]$  προέρχονται από τον ίδιο πληθυσμό ακόμη και σε 90% στάθμη σημαντικότητας. Άρα μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος resampling που βασίζεται στην Jackknife για τον υπολογισμό διαστημάτων εμπιστοσύνης για την νέα μέθοδο.

Μέγεθος δείγματος	Εκτιμητήρια	P	Κατανομή
$[n]=250,500,750$ $[n-1]=249,499,749$	$[i]=1,2,3,4$	$[j]$	$[d]$
		$1 \rightarrow 0,01$	$1 \rightarrow N(0,1)$
		$2 \rightarrow 0,05$	$3 \rightarrow T(5)$
		$20 \rightarrow 0,95$	$4 \rightarrow LN(0,1)$
		$21 \rightarrow 0,99$	$5 \rightarrow DE(0,1)$
Οι 10000 εκτιμήσεις που παρήχθησαν με τη χρήση της $SV_i$ για το j ποσοστιαίο σημείο με τη χρήση 10000 τυχαίων δειγμάτων μεγέθους n από την κατανομή d συμβολίζονται με: $SV[i][n][d][j]$			
Οι 10000 εκτιμήσεις που παρήχθησαν με τη χρήση της $SV_i$ για το j ποσοστιαίο σημείο με τη χρήση 10000 τυχαίων δειγμάτων μεγέθους n-1 από την κατανομή d συμβολίζονται με: $SV[i][n-1][d][j]$			

**Πίνακας 4-9 Κωδικοποίηση εκτιμήσεων που παρήχθησαν με τη χρήση των  $SV_i$**

Εκτιμήτρια		P				
	Κατανομή	n / n-1	0,01	0,05	0,95	0,99
SV3	N(0,1)	250 / 249	0,61606	0,454062	0,370198	0,410577
		500 / 499	0,465432	0,149757	0,639868	0,812748
		750 / 749	0,192568	0,889813	0,746139	0,962622
	T(5)	250 / 249	0,332815	0,360576	0,245424	0,323925
		500 / 499	0,500765	0,306677	0,872165	962622
		750 / 749	0,957812	0,380007	0,780133	0,663719
	LN(0,1)	250 / 249	0,410577	0,390006	0,500765	0,639868
		500 / 499	0,298316	0,144994	0,639868	0,663719
		750 / 749	0,98877	0,823241	0,898173	0,557278
	DE(0,1)	250 / 249	0,604201	0,341886	0,400195	0,465432
		500 / 499	0,465432	0,18105	0,663719	0,627953
		750 / 749	0,913905	0,843563	0,898173	0,687522
SV2	Κατανομή N(0,1)	250 / 249	0,442893	0,298316	0,390006	0,687522
		500 / 499	0,323925	0,144994	0,604201	0,604201
		750 / 749	0,122992	0,843563	0,921258	0,947093
	T(5)	250 / 249	0,290128	0,351139	0,274263	0,802056
		500 / 499	0,734572	0,315212	0,934902	0,921258
		750 / 749	0,92826	0,454062	0,757598	0,663719
	LN(0,1)	250 / 249	0,306677	0,315212	0,557278	0,699374
		500 / 499	0,298316	0,111162	0,802056	0,604201
		750 / 749	0,791179	0,780133	0,872165	0,410577
	DE(0,1)	250 / 249	0,465432	0,370198	0,39006	0,802056
		500 / 499	0,410577	0,144994	0,823241	0,61606
		750 / 749	0,962622	0,791179	0,872165	0,410577
SV1	Κατανομή N(0,1)	250 / 249	0,360576	0,410577	0,477004	0,699374
		500 / 499	0,370198	0,135837	0,651794	0,711176
		750 / 749	0,164808	0,823241	0,812748	0,962622
	T(5)	250 / 249	0,274263	0,454062	0,230619	0,734572
		500 / 499	0,675633	0,380007	0,934902	0,9749
		750 / 749	0,952637	0,431924	0,66468	0,639868
	LN(0,1)	250 / 249	0,341886	0,28211	0,454062	0,952637
		500 / 499	0,210922	0,140355	0,687522	0,675633
		750 / 749	0,906206	0,757598	0,862902	0,410577
	DE(0,1)	250 / 249	0,351139	0,431924	0,477004	0,802056
		500 / 499	0,550799	0,149757	0,604201	0,722913
		750 / 749	0,978303	0,823241	0,88114	0,488781

**Πίνακας 4-10 P-values του κριτηρίου των Kolmogorov – Smirnov για δύο δείγματα για τα 144 υπό εξέταση ζευγάρια**

## **5<sup>ο</sup> Κεφάλαιο**

**Χρήση των νέων εκτιμητριών ποσοστιαίου σημείου στην μέτρηση του κινδύνου αγοράς των πιστωτικών ιδρυμάτων**





## Περιεχόμενα

5.	Χρήση των εκτιμητριών ποσοστιαίου σημείου στην μέτρηση του κινδύνου αγοράς των πιστωτικών ιδρυμάτων.....	227
5.1.	Χρήση εκτιμητριών ποσοστιαίου σημείου στον υπολογισμό του VaR.....	227
5.1.1.	Εμπειρική διερεύνηση της αποτελεσματικότητας των νέων εκτιμητριών στον υπολογισμό του VaR .....	228
5.1.1.1.	Πεδίο σύγκρισης για την εμπειρική διερεύνηση της αποτελεσματικότητας των νέων εκτιμητριών στον υπολογισμό του VaR.....	228
5.1.1.2.	Κριτήρια σύγκρισης για την εμπειρική διερεύνηση της αποτελεσματικότητας των νέων εκτιμητριών στον υπολογισμό του VaR.....	229
5.1.1.3.	Επεξεργασία-παρουσίαση αποτελεσμάτων και συμπεράσματα για την εμπειρική διερεύνηση της αποτελεσματικότητας των νέων εκτιμητριών στον υπολογισμό του VaR.....	230



## **5. Χρήση των εκτιμητριών ποσοστιαίου σημείου στην μέτρηση του κινδύνου αγοράς των πιστωτικών ιδρυμάτων**

Στο κεφάλαιο 2 παρουσιάστηκαν οι διάφορες μέθοδοι υπολογισμού του κινδύνου αγοράς. Στο κεφάλαιο 4 παρουσιάστηκαν τρεις νέες εκτιμήτριες ποσοστιαίου σημείου. Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστούν τρόποι με τους οποίους οι νέες εκτιμήτριες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να βελτιώσουν τις μεθόδους μέτρησης του κινδύνου αγοράς των πιστωτικών ιδρυμάτων.

### **5.1.Χρήση εκτιμητριών ποσοστιαίου σημείου στον υπολογισμό του VaR**

Είναι σαφές από τον ορισμό του VaR ότι ουσιαστικά το VaR είναι ένα ποσοστιαίο σημείο της κατανομής των αποδόσεων μιας επένδυσης για ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα. Άρα όλες οι μέθοδοι που είναι διαθέσιμες για τον υπολογισμό των ποσοστιαίων σημείων μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για τον υπολογισμό του VaR.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί στο κεφάλαιο 2 τόσο στην ιστορική προσομοίωση όσο και στην Monte Carlo προσομοίωση ο υπολογισμός του VaR γίνεται σε δύο βασικά βήματα:

1. Συλλογή – επεξεργασία παρατηρήσεων της κατανομής των αποδόσεων.
2. Υπολογισμός του VaR με τη χρήση της WA.

Οι νέες εκτιμήτριες υπολογισμού του  $p$  ποσοστιαίου σημείου διαπιστώθηκε μέσα από την προηγούμενη έρευνα ότι είναι πιο αποτελεσματικές από τις μεθόδους WA και HD για τον υπολογισμό ποσοστιαίων σημείων στις ουρές για μεγέθη δείγματος  $n=250, 500$  και  $750$ . Άρα οι νέες εκτιμήτριες θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν αντί της WA και να βελτιώσουν την ιστορική προσομοίωση και την Monte Carlo προσομοίωση. Πιο συγκεκριμένα και με βάση την προηγούμενη έρευνα προτείνεται αντί της χρήσης της WA η χρήση της SV2 για τον υπολογισμό του VaR θετικών (πιστωτικών, long) θέσεων (αριστερή ουρά της κατανομής των αποδόσεων) και η χρήση της SV3 για τον υπολογισμό του VaR αρνητικών (χρεωστικών, short) θέσεων (δεξιά ουρά της κατανομής των αποδόσεων). Η SV2 και SV3 έρχονται να αντικαταστήσουν την WA και δεν επηρεάζουν καθόλου το πρώτο βήμα των προσομοιώσεων.

### **5.1.1. Εμπειρική διερεύνηση της αποτελεσματικότητας των νέων εκτιμητριών στον υπολογισμό του VaR**

Θέλουμε να διερευνήσουμε εάν η χρήση των SV2 και SV3 αντί της WA για τον υπολογισμό του VaR έχει ως αποτέλεσμα την παραγωγή καλύτερων εκτιμήσεων του VaR. Στη συνέχεια θα εργαστούμε ως εξής:

1. Θα οριοθετήσουμε το πεδίο σύγκρισης
2. Θα επιλέξουμε τα κριτήρια σύγκρισης
3. Τέλος θα επεξεργαστούμε τα αποτελέσματά και θα εξάγουμε συμπεράσματα

#### **5.1.1.1.Πεδίο σύγκρισης για την εμπειρική διερεύνηση της αποτελεσματικότητας των νέων εκτιμητριών στον υπολογισμό του VaR**

Η παραγωγή εκτιμήσεων του VaR δεν επηρεάζεται μόνο από την εκτιμήτρια ποσοστιαίου σημείου που χρησιμοποιούμε αλλά και από τον τρόπο επεξεργασίας των παρατηρήσεων της κατανομής των αποδόσεων. Για να μπορέσουμε να απομονώσουμε όσο είναι δυνατόν την επίδραση της επεξεργασίας των παρατηρήσεων της κατανομής των αποδόσεων στον υπολογισμό του VaR θα χρησιμοποιήσουμε δύο διαφορετικές μεθόδους επεξεργασίας των παρατηρήσεων της κατανομής των αποδόσεων. Οι μέθοδοι αυτοί είναι η απλή ιστορική προσομοίωση (HS) και η μέθοδος των Hull και White (HW)<sup>128</sup>. Δηλαδή θα χρησιμοποιηθούν οι παρατηρήσεις της κατανομής των αποδόσεων αφενός χωρίς καμία επεξεργασία αλλά και «ρυθμισμένες» (adjusted) σε σχέση με τη μεταβολή της διασποράς. Επειδή στη γενική περίπτωση δε γνωρίζουμε εάν η κατανομή των αποδόσεων είναι συμμετρική ή όχι θα υπολογίσουμε το VaR τόσο για θετικές (πιστωτικές, long) θέσεις (αριστερή ουρά της κατανομής των αποδόσεων) όσο και για αρνητικές (χρεωστικές, short) θέσεις. Θα υπολογίσουμε το ημερήσιο VaR για επίπεδο εμπιστοσύνης 99% ( $p=0,01$ ) και 95% ( $p=0,05$ ) καθώς το 99% VaR 10-ημέρου<sup>129</sup> είναι αυτό που απαιτείται από τις ελεγκτικές αρχές και το 95% είναι το πιο συνηθισμένο<sup>130</sup> επίπεδο εμπιστοσύνης στην αγορά.

---

<sup>128</sup> Θα χρησιμοποιηθεί  $\lambda=0,94$ . Επιπλέον θα χρησιμοποιούνται οι 100 ιστορικές παρατηρήσεις που προηγούνται του παράθυρου υπολογισμού του VaR για τον υπολογισμό της πρώτης  $\sigma_1^2$ .

<sup>129</sup> Όπως έχουμε δει στο κεφάλαιο 2 το VaR 10-ημέρου ισούται με το ημερήσιο VaR πολλαπλασιασμένο με την τετραγωνική ρίζα του 10.

<sup>130</sup> Το 95% είναι αυτό που χρησιμοποιήθηκε αρχικά από την RiskMetrics όταν εισήγαγε το VaR.

Τα χρηματοοικονομικά προϊόντα τα οποία θα χρησιμοποιηθούν στην εμπειρική διερεύνηση είναι:

1. **Οι χρηματιστηριακοί δείκτες:** S&P 500, DAX, FTSE100, Nikkei 225, Swiss
2. **Οι συναλλαγματικές ισοτιμίες:** USD/EUR, GBP/EUR, CHF/EUR, JPY/EUR
3. **Οι τιμές της μετρητής (Spot price) των ευγενών μετάλλων:** Ασήμι, Πλατίνα, Παλλάδιο

Επιπλέον θα εξεταστούν και τα χαρτοφυλάκια:

1. **Χρηματιστηριακό.** Θα περιέχει τους παραπάνω χρηματιστηριακούς δείκτες σε ίσα μέρη με αποτίμηση σε EUR
2. **Συναλλάγματος.** Θα περιέχει USD, GBP, JPY και CHF σε ίσα μέρη.
3. **Ευγενών μετάλλων.** Θα περιέχει τα ασήμι, πλατίνα και παλλάδιο σε ίσα μέρη με αποτίμηση σε EUR

Τα ιστορικά στοιχεία που θα χρησιμοποιηθούν ξεκινάνε από την 4/1/1999 την ημέρα δηλαδή της εμφάνισης του ευρώ μέχρι τις 27/10/2005. Οι εκτιμήσεις του VaR θα παραχθούν με τη χρήση 250, 500 και 750 κυλιόμενων παρατηρήσεων.

#### **5.1.1.2.Κριτήρια σύγκρισης για την εμπειρική διερεύνηση της αποτελεσματικότητας των νέων εκτιμητριών στον υπολογισμό του VaR**

Στο κεφάλαιο 3 έχουμε αναφέρει τις διάφορες μεθόδους ελέγχου των μεθόδων υπολογισμού του VaR. Εδώ θα χρησιμοποιηθούν δύο από αυτές:

1. Η μέθοδος ελέγχου του Kupiec.
2. Η μέθοδος ελέγχου των εποπτικών αρχών.

Η πρώτη μέθοδος (Kupiec) είναι καθαρά μια στατιστική μέθοδος που παρέχει ένα θεωρητικό κριτήριο για το εάν μία μέθοδος υπολογισμού του VaR είναι σωστή ή όχι, όμως δε παρέχει τη δυνατότητα κατάταξης των μοντέλων.

Η δεύτερη μέθοδος συνδέει τη χρήση της μεθόδου με το πραγματικό ελεγκτικό κεφάλαιο που χρεώνει η μέθοδος. Πιο συγκεκριμένα χρησιμοποιώντας τον τύπο<sup>131</sup> (1) βρίσκουμε το πραγματικό ελεγκτικό κεφάλαιο που η χρήση μιας συγκεκριμένης μεθόδου συνεπάγεται.

---

<sup>131</sup> Ο τύπος υπολογισμού του ελεγκτικού κεφαλαίου

$$C_t = \text{Max} \left( \text{VAR}_{t-1}, (M + m) \frac{1}{60} \sum_{j=1}^{60} \text{VAR}_{t-j} \right) \quad (1)$$

Το M είναι ίσο με 3 και το m υπολογίζεται από τις υπερβάσεις του VaR τις τελευταίες 250 ημέρες με βάση τον πίνακα. (2-10). Ο τύπος (1) μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο για το VaR σε 1% επίπεδο εμπιστοσύνης (δηλαδή για  $p=0,01$  για θετικές θέσεις και για  $p=0,99$  για αρνητικές θέσεις). Το ελεγκτικό κεφάλαιο μας δίνει έναν τρόπο κατάταξης των μεθόδων υπολογισμού του VaR.

### 5.1.1.3. Επεξεργασία-παρουσίαση αποτελεσμάτων και συμπεράσματα για την εμπειρική διερεύνηση της αποτελεσματικότητας των νέων εκτιμητριών στον υπολογισμό του VaR

Για κάθε μία από τις υπό εξέταση περιπτώσεις υπολογίστηκε το στατιστικό του Kupiec<sup>132</sup> και στη συνέχεια το p-value του, δηλαδή η τιμή της  $X^2$  με ένα βαθμό ελευθερίας που αντιστοιχεί στην τιμή του στατιστικού.

Υπολογισμός του VaR με χρήση 250 ιστορικών παρατηρήσεων (n=250)					
Χρηματοοικονομικό Προϊόν	P	p-value για το στατιστικό του Kupiec			
		Ιστορική προσομοίωση		Μέθοδος Hull και White	
		SV	WA	SV	WA
DAX	0,01	0,0457071	0,4792462	0,0457071	0,4792462
	0,05	0,4847644	0,6688677	0,0184885	0,2620627
	0,95	0,1415209	0,58242	0,9999999	0,9999999
	0,99	0,4792444	0,9776911	0,9999999	0,9999999
FTSE 100	0,01	0,5441641	0,3296697	0,1962601	0,6733778
	0,05	0,8786223	0,9606187	0,4991913	0,4991913
	0,95	0,776032	0,776032	0,9999999	0,9999999
	0,99	0,8254991	0,196258	0,9999999	0,9999999
Nikkei 225	0,01	<b>0,9912807</b>	<b>0,9912807</b>	0,0700599	0,3466232
	0,05	0,9405798	0,960839	0,6315716	0,2187674
	0,95	0,9846127	0,9846127	0,9999999	0,9999999
	0,99	0,2040877	0,3466214	0,9999999	0,9999999
S&P 500	0,01	0,0973067	0,4379971	0,4379971	0,9238054
	0,05	0,7522277	0,7522277	0,4416032	0,2198771
	0,95	0,5923169	0,5923169	0,9999999	0,9999999
	0,99	0,1753647	0,4379954	0,9999999	0,9999999
Swiss	0,01	0,7140008	0,3372822	0,4490615	0,6686054
	0,05	0,9730364	0,9730364	0,0680853	0,1896041
	0,95	0,7673219	0,8259611	0,9999999	0,9999999

<sup>132</sup> Το στατιστικό του Kupiec δίνεται από τον τύπο  $LR_{uc} = -2 \ln[(1-c)^{N-x} c^x] + 2 \ln \left[ \left(1 - \frac{x}{N}\right)^{N-x} \left(\frac{x}{N}\right)^x \right]$  και ακολουθεί  $X^2$  με ένα βαθμό ελευθερίας

	0,99	0,6686041	0,6686041	0,9999999	0,9999999
Χρηματιστηριακό Χαρτοφυλάκιο	0,01	0,7463355	0,8746639	0,8746639	0,8746639
	0,05	0,434066	0,2187261	0,6138967	0,1018524
	0,95	0,6576567	0,7952128	0,9999999	0,9999999
	0,99	0,1984482	0,3228681	0,9999999	0,9999999
CHF/EUR	0,01	0,1596887	0,6831478	0,3556538	0,6831478
	0,05	0,1788378	0,4363179	0,2681556	0,2681556
	0,95	0,3543278	0,6492972	0,9999999	0,9999999
	0,99	0,2375709	0,533333	0,9999999	0,9999999
GBP/EUR	0,01	0,0503504	0,1518323	0,422552	0,422552
	0,05	0,2911051	0,2508193	0,4520009	0,1146246
	0,95	0,2508208	0,49886	0,9999999	0,9999999
	0,99	0,4225546	0,3485166	0,9999999	0,9999999
JPY/EUR	0,01	0,3849854	0,558353	0,6718554	0,192746
	0,05	0,4997067	0,8351812	0,1093616	0,0733237
	0,95	0,3399088	0,499708	0,9999999	0,9999999
	0,99	0,2042892	0,1927431	0,9999999	0,9999999
USD/EUR	0,01	0,5437753	0,0100341	0,5437753	0,383744
	0,05	0,1598929	0,1598929	0,2030982	0,1598929
	0,95	0,2893774	0,1139105	0,9999999	0,9999999
	0,99	0,0100371	0,8129995	0,9999999	0,9999999
Συναλλαγματικό Χαρτοφυλάκιο	0,01	0,4302063	0,0609014	0,5590285	0,5590285
	0,05	0,3694931	0,4752327	0,3301352	0,138426
	0,95	0,1018512	0,2564416	0,9999999	0,9999999
	0,99	0,1984482	0,3228681	0,9999999	0,9999999
Ασήμι	0,01	0,9171342	0,7440899	0,1355637	0,1355637
	0,05	0,1876554	0,4233238	0,3087749	0,62347
	0,95	0,6825562	0,7497243	0,9999999	0,9999999
	0,99	0,3850692	0,1381935	0,9999999	0,9999999
Παλλάδιο	0,01	0,4896251	0,2533443	0,6740893	0,4896251
	0,05	0,7791297	0,7791297	0,1735179	0,5254747
	0,95	0,0451441	0,0451441	0,9999999	0,9999999
	0,99	0,4896269	0,5570493	0,9999999	0,9999999
Πλατίνα	0,01	0,1739265	0,1739265	0,6123611	0,6123611
	0,05	0,5623927	0,5623927	0,3466912	0,4594813
	0,95	0,5623936	0,7985628	0,9999999	0,9999999
	0,99	0,3732947	0,3732947	0,9999999	0,9999999
Χαρτοφυλάκιο Ευγενών Μετάλλων	0,01	0,3228702	0,7463355	0,3228702	0,3228702
	0,05	0,920874	0,88857	0,7952122	0,7322015
	0,95	0,7952128	0,8470626	0,9999999	0,9999999
	0,99	0,1984482	0,0608992	0,9999999	0,9999999

**Πίνακας 5-1 Τα p-value για το στατιστικό μέτρο του Kupiec n=250**

Υπολογισμός του VaR με χρήση 500 ιστορικών παρατηρήσεων (n=500)					
Χρηματοοικονομικό Προϊόν	P	p-value για το στατιστικό του Kupiec			
		Ιστορική προσομοίωση		Μέθοδος Hull και White	
		SV	WA	SV	WA
DAX	0,01	0,690673	0,301625	0,045707	0,224554
	0,05	0,582419	0,582419	0,538551	0,336945
	0,95	0,53855	0,223435	0,9999999	0,9999999
	0,99	0,224552	0,045709	0,9999999	0,9999999
FTSE 100	0,01	0,544164	0,544164	0,32967	0,075526

	0,05	0,960619	0,974513	0,669301	0,669301
	0,95	0,878623	0,940995	0,9999999	0,9999999
	0,99	0,075528	0,075528	0,9999999	0,9999999
Nikkei 225	0,01	0,999953	0,999953	0,204086	0,07006
	0,05	0,999925	0,999925	0,336292	0,031887
	0,95	0,990854	0,984613	0,9999999	0,9999999
	0,99	0,592042	0,592042	0,9999999	0,9999999
S&P 500	0,01	0,437997	0,437997	0,823378	0,923805
	0,05	0,997891	0,997891	0,441603	0,441603
	0,95	0,993247	0,996154	0,9999999	0,9999999
	0,99	0,175365	0,660526	0,9999999	0,9999999
Swiss	0,01	0,714001	0,337282	0,188456	0,188456
	0,05	0,958468	0,973036	0,747816	0,681068
	0,95	0,413528	0,413528	0,9999999	0,9999999
	0,99	0,668604	0,926293	0,9999999	0,9999999
Χρηματιστηριακό Χαρτοφυλάκιο	0,01	0,55715	0,873919	0,320504	0,320504
	0,05	0,729023	0,729023	0,107848	0,107848
	0,95	0,844964	0,886935	0,9999999	0,9999999
	0,99	0,058277	0,058277	0,9999999	0,9999999
CHF/EUR	0,01	0,673684	0,879182	0,34134	0,673684
	0,05	0,788253	0,893634	0,405035	0,321085
	0,95	0,625372	0,625372	0,9999999	0,9999999
	0,99	0,52123	0,673683	0,9999999	0,9999999
GBP/EUR	0,01	0,671285	0,671285	0,139995	0,139995
	0,05	0,986823	0,990856	0,04161	0,476813
	0,95	0,825833	0,861381	0,9999999	0,9999999
	0,99	0,791429	0,791429	0,9999999	0,9999999
JPY/EUR	0,01	0,813001	0,701441	0,206248	0,383744
	0,05	0,896088	0,965878	0,022902	0,068767
	0,95	0,867557	0,919605	0,9999999	0,9999999
	0,99	0,010037	0,190814	0,9999999	0,9999999
USD/EUR	0,01	0,373295	0,373295	0,548167	0,808195
	0,05	0,677701	0,888796	0,132934	0,310758
	0,95	0,616113	0,677702	0,9999999	0,9999999
	0,99	0,179198	0,179198	0,9999999	0,9999999
Συναλλαγματικό Χαρτοφυλάκιο	0,01	0,320504	0,320504	0,432521	0,432521
	0,05	0,844964	0,792594	0,439244	0,335692
	0,95	0,844964	0,886935	0,9999999	0,9999999
	0,99	0,320502	0,320502	0,9999999	0,9999999
Ασήμι	0,01	0,979202	0,957645	0,401592	0,132825
	0,05	0,690327	0,612913	0,519294	0,615122
	0,95	0,99114	0,980389	0,9999999	0,9999999
	0,99	0,957645	0,747151	0,9999999	0,9999999
Παλλάδιο	0,01	0,019786	0,019786	0,805267	0,674089
	0,05	0,919534	0,88397	0,837614	0,837614
	0,95	0,328213	0,208843	0,9999999	0,9999999
	0,99	0,253346	0,301487	0,9999999	0,9999999
Πλατίνα	0,01	0,628425	0,187637	0,187637	0,187637
	0,05	0,841296	0,841296	0,300811	0,300811
	0,95	0,986399	0,99197	0,9999999	0,9999999
	0,99	0,905336	0,96691	0,9999999	0,9999999
Χαρτοφυλάκιο Ευγενών Μετάλλων	0,01	0,32287	0,746336	0,060901	0,32287



	0,05	0,945297	0,984772	0,88857	0,88857
	0,95	0,994436	0,994436	0,9999999	0,9999999
	0,99	0,746334	0,874663	0,9999999	0,9999999

**Πίνακας 5-2 Τα p-value για το στατιστικό μέτρο του Kupiec n=500**

Υπολογισμός του VaR με χρήση 750 ιστορικών παρατηρήσεων (n=750)					
Χρηματοοικονομικό Προϊόν	P	p-value για το στατιστικό του Kupiec			
		Ιστορική προσομοίωση		Μέθοδος Hull και White	
		SV	WA	SV	WA
DAX	0,01	0,690673	0,690673	0,479246	0,690405
	0,05	0,668868	0,668868	0,442513	0,442513
	0,95	0,104106	0,01849	0,668868	0,668868
	0,99	0,942239	0,89286	0,301628	0,52036
FTSE 100	0,01	0,709084	0,544164	0,19626	0,19626
	0,05	0,940995	0,974513	0,589746	0,499191
	0,95	0,974513	0,984025	0,776032	0,625893
	0,99	0,329672	0,329672	0,075528	0,075528
Nikkei 225	0,01	0,999953	0,999953	0,07006	0,346623
	0,05	0,999969	0,999969	0,336292	0,336292
	0,95	0,975027	0,975027	0,608273	0,608273
	0,99	0,78012	0,78012	0,204088	0,070058
S&P 500	0,01	0,662156	0,662156	0,924309	0,97441
	0,05	0,999452	0,999452	0,85885	0,894197
	0,95	0,996241	0,997941	0,276636	0,276636
	0,99	0,662154	0,662154	0,662154	0,662154
Swiss	0,01	0,830106	0,71563	0,446861	0,446861
	0,05	0,408238	0,692984	0,684935	0,684935
	0,95	0,311712	0,311712	0,293911	0,293911
	0,99	0,185844	0,185844	0,08641	0,185844
Χρηματιστηριακό Χαρτοφυλάκιο	0,01	0,201039	0,05828	0,201039	0,05828
	0,05	0,470381	0,470381	0,533711	0,439244
	0,95	0,919637	0,944388	0,53371	0,618116
	0,99	0,620783	0,620783	0,058277	0,058277
CHF/EUR	0,01	0,832011	0,832011	0,578662	0,832011
	0,05	0,771944	0,854186	0,089819	0,275021
	0,95	0,275022	0,596957	0,183505	0,275022
	0,99	0,83201	0,83201	0,205034	0,205034
GBP/EUR	0,01	0,604109	0,742143	0,521906	0,521906
	0,05	0,995482	0,998095	0,199081	0,173183
	0,95	0,998798	0,999257	0,764209	0,712122
	0,99	0,958023	0,958023	0,035052	0,434045
JPY/EUR	0,01	0,927501	0,984824	0,469676	0,29771
	0,05	0,998321	0,998321	0,310332	0,475804
	0,95	0,991199	0,991199	0,785079	0,785079
	0,99	0,964785	0,984824	0,299221	0,299221
USD/EUR	0,01	0,297361	0,643999	0,471393	0,299635
	0,05	0,73416	0,782969	0,24153	0,060363
	0,95	0,935986	0,935986	0,306067	0,472049
	0,99	0,643997	0,643997	0,297358	0,297358
Συναλλαγματικό Χαρτοφυλάκιο	0,01	0,743753	0,743753	0,859338	0,859338
	0,05	0,996654	0,996654	0,444402	0,230389
	0,95	0,996654	0,996654	0,358852	0,358852

	0,99	0,948061	0,948061	0,055653	0,555264
Ασήμι	0,01	0,999924	0,999788	0,184895	0,184895
	0,05	0,986439	0,979937	0,543813	0,543813
	0,95	0,9999999	0,9999999	0,294847	0,175321
	0,99	0,991969	0,98242	0,089347	0,089347
Παλλάδιο	0,01	0,326626	0,326626	0,912326	0,72188
	0,05	0,826501	0,826501	0,688164	0,688164
	0,95	0,129976	0,131026	0,688164	0,688164
	0,99	0,230462	0,230462	0,230462	0,230462
Πλατίνα	0,01	0,296363	0,296363	0,494339	0,014145
	0,05	0,880344	0,916839	0,712925	0,712925
	0,95	0,99936	0,99936	0,405635	0,515636
	0,99	0,998427	0,999942	0,887982	0,887982
Χαρτοφυλάκιο Ευγενών Μετάλλων	0,01	0,872418	0,947707	0,053028	0,053028
	0,05	0,996578	0,994067	0,883605	0,840696
	0,95	0,999738	0,999738	0,119832	1,32E-06
	0,99	0,983213	0,983213	0,315755	0,315755

**Πίνακας 5-3 Τα p-value για το στατιστικό μέτρο του Kupiec n=750**

Μελετώντας τα p-value για το στατιστικό του Kupiec διαπιστώνουμε τα παρακάτω όσον αφορά στην περίπτωση της ιστορικής προσομοίωσης:

- Για  $n=250$  δεν μπορούμε να απορρίψουμε την υπόθεση ότι τα ποσοστά αποτυχιών του VaR είναι ίσα με το  $p$  σε 99% επίπεδο εμπιστοσύνης τόσο για την SV όσο και για την WA. Αυτό ισχύει για όλες τις υπό εξέταση περιπτώσεις εκτός από την περίπτωση του Nikkei 225 και για  $p=0,01$ .
- Καθώς αυξάνεται το  $n$  αυξάνεται και το πλήθος των υπό εξέταση περιπτώσεων για τις οποίες δεν μπορούμε να δεχτούμε την υπόθεση ότι η WA παράγει ποσοστά αποτυχιών ίσα με το  $p$  ακόμη και σε 99% επίπεδο εμπιστοσύνης. Η ίδια παρατήρηση ισχύει και για την SV.

Για την μέθοδο των Hull και White καταλήγουμε στα παρακάτω συμπεράσματα:

- Για  $n=750$  δεν μπορούμε να απορρίψουμε την υπόθεση ότι η SV παράγει ποσοστά αποτυχιών ίσα με το  $p$  σε 95% επίπεδο εμπιστοσύνης για καμία από τις υπό εξέταση περιπτώσεις.
- Για  $n=750$  δεν μπορούμε να απορρίψουμε την υπόθεση ότι η WA παράγει ποσοστά αποτυχιών ίσα με το  $p$  σε 95% επίπεδο εμπιστοσύνης για καμία από τις υπό εξέταση περιπτώσεις εκτός από την περίπτωση του S&P 500 και για  $p=0,01$ .
- Καθώς μειώνεται το  $n$  αυξάνεται και το πλήθος των υπό εξέταση περιπτώσεων για τις οποίες δεν μπορούμε να δεχτούμε την υπόθεση ότι η WA παράγει

ποσοστά αποτυχιών ίσα με το  $p$  ακόμη και σε 99% επίπεδο εμπιστοσύνης. Η ίδια παρατήρηση ισχύει και για την SV.

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα συμπεραίνουμε ότι όταν χρησιμοποιείται η ιστορική προσομοίωση θα πρέπει να προτιμάται  $n=250$  και όταν χρησιμοποιείται η μέθοδος των Hull και White θα πρέπει να επιλέγεται  $n=750$ . Επιπλέον με βάση το κριτήριο του Kupiec σε όλες τις παραπάνω<sup>133</sup> περιπτώσεις η μέθοδος SV συμπεριφέρεται τουλάχιστον το ίδιο καλά με την WA και σε μια περίπτωση (μέθοδος των Hull και White, S&P 500  $p=0,01$   $n=750$ ) καλύτερα από την WA.

Στη συνέχεια για  $n=250$  και 750 και για  $p=0,01$  και 0,99 υπολογίστηκε το ελεγκτικό κεφάλαιο<sup>134</sup> που προκύπτει για κάθε ημέρα της υπό εξέταση περιόδου. Ακολούθως από το ελεγκτικό κεφάλαιο κάθε ημέρας υπολογίστηκε το μέσο ελεγκτικό κεφάλαιο που προκύπτει για κάθε μέθοδο.

Μέσο Ελεγκτικό Κεφάλαιο με χρήση 250 ιστορικών παρατηρήσεων ( $n=250$ )					
Χρηματοοικονομικό Προϊόν	P	Ιστορική προσομοίωση		Μέθοδος Hull και White	
		SV	WA	SV	WA
DAX	0,01	0,365737	0,373925	0,274257	0,26551
	0,99	0,368086	0,378085	0,010584	0,010584
FTSE 100	0,01	0,24339	0,248965	0,17475	0,177226
	0,99	0,249113	0,260028	0,006606	0,006606
Nikkei 225	0,01	0,264071	0,274628	0,289747	0,268482
	0,99	0,323368	0,346432	0,010991	0,010991
S&P 500	0,01	0,226901	0,238917	0,190001	0,184365
	0,99	0,20045	0,208711	0,007227	0,007227
Swiss	0,01	0,284916	0,291908	0,21046	0,210833
	0,99	0,27291	0,29559	0,007774	0,007774
Χρηματιστηριακό Χαρτοφυλάκιο	0,01	0,256026	0,268158	0,234321	0,228969
	0,99	0,262202	0,278231	0,00764	0,00764
CHF/EUR	0,01	0,05641	0,06072	0,059425	0,062352
	0,99	0,061061	0,065501	0,001984	0,001984
GBP/EUR	0,01	0,096406	0,099842	0,111835	0,117675
	0,99	0,092291	0,096565	0,003683	0,003683
JPY/EUR	0,01	0,139318	0,146395	0,158001	0,159786
	0,99	0,133739	0,143584	0,004803	0,004803
USD/EUR	0,01	0,136515	0,142669	0,163415	0,166199
	0,99	0,139784	0,145904	0,005148	0,005148
Συναλλαγματικό Χαρτοφυλάκιο	0,01	<b>0,085854</b>	<b>0,085729</b>	0,091786	0,094245
	0,99	0,083696	0,088387	0,003354	0,003354

<sup>133</sup> Δηλαδή όλες τις περιπτώσεις για  $n=250$  με χρήση ιστορικής προσομοίωσης και για  $n=750$  με χρήση της μεθόδου των Hull και White (HW).

<sup>134</sup> Το ελεγκτικό κεφάλαιο υπολογίζεται με βάση το 99% VaR δεκαημέρου.

Ασήμι	0,01	0,588385	0,660558	0,541123	0,569608
	0,99	0,449475	0,470263	0,01776	0,01776
Παλλάδιο	0,01	0,761715	0,827148	0,752983	0,810204
	0,99	0,69519	0,700246	0,032617	0,032617
Πλατίνα	0,01	0,320383	0,341424	0,303593	0,329159
	0,99	0,294248	0,307044	0,01049	0,01049
Χαρτοφυλάκιο Ευγενών Μετάλλων	0,01	0,350759	0,375069	0,351758	0,373485
	0,99	0,291045	0,308476	0,011497	0,011497

**Πίνακας 5-4 Μέσο ελεγκτικό κεφάλαιο n=250**

Μέσο Ελεγκτικό Κεφάλαιο με χρήση 750 ιστορικών παρατηρήσεων (n=750)					
Χρηματοοικονομικό Προϊόν	P	Ιστορική προσομοίωση		Μέθοδος Hull και White	
		SV	WA	SV	WA
DAX	0,01	0,557421	0,575326	0,250422	0,255723
	0,99	0,541716	0,546292	0,271965	0,281073
FTSE 100	0,01	0,369701	0,383307	0,151988	0,153543
	0,99	0,397593	0,403497	0,185656	0,187619
Nikkei 225	0,01	0,340728	0,346432	0,2439	0,244611
	0,99	0,353042	0,358176	0,272935	0,274625
S&P 500	0,01	0,350704	0,355034	0,178001	0,179268
	0,99	0,306119	0,313154	<b>0,172501</b>	<b>0,170784</b>
Swiss	0,01	0,454977	0,489671	0,194787	0,197281
	0,99	0,401489	0,410414	0,221022	0,222382
Χρηματιστηριακό Χαρτοφυλάκιο	0,01	0,379152	0,384301	0,198031	0,200572
	0,99	0,357645	0,364874	0,187581	0,191054
CHF/EUR	0,01	0,059375	0,061229	0,053203	0,054181
	0,99	0,064797	0,065834	0,064367	0,066285
GBP/EUR	0,01	0,103661	0,103911	0,095925	0,097123
	0,99	0,101085	0,102328	0,09331	0,094655
JPY/EUR	0,01	0,154525	0,157333	0,137095	0,141459
	0,99	0,151097	0,152899	0,142398	0,144921
USD/EUR	0,01	0,144707	0,145345	0,142904	0,14534
	0,99	0,152978	0,155512	0,147312	0,149259
Συναλλαγματικό Χαρτοφυλάκιο	0,01	0,088207	0,088553	<b>0,086131</b>	<b>0,085739</b>
	0,99	0,091749	0,094477	0,086223	0,088578
Ασήμι	0,01	0,465414	0,46668	0,492988	0,496781
	0,99	0,429076	0,437751	0,493346	0,510406
Παλλάδιο	0,01	0,709806	0,731496	0,709688	0,723754
	0,99	0,704998	0,739518	0,6358	0,637244
Πλατίνα	0,01	0,327466	0,340335	0,271951	0,276958
	0,99	0,332333	0,337543	0,292848	0,297478
Χαρτοφυλάκιο Ευγενών Μετάλλων	0,01	0,365736	0,37271	0,32569	0,328733
	0,99	0,325796	0,336334	0,294044	0,294717

**Πίνακας 5-5 Μέσο ελεγκτικό κεφάλαιο n=750**

Με βάση το μέσο ελεγκτικό κεφάλαιο προκύπτει ότι με τη χρήση της SV αντί της WA υπάρχει εξοικονόμηση ελεγκτικού κεφαλαίου σχεδόν σε κάθε υπό εξέταση περίπτωση. Η μέση εξοικονόμηση ελεγκτικού κεφαλαίου ανά είδος χρηματοοικονομικού προϊόντος κυμαίνεται από 1,05% έως 2% για n=750 (με χρήση της μεθόδου των Hull και White

(HW)). Ενώ για  $n=250$  (με χρήση της ιστορικής προσομοίωσης) κυμαίνετε από 3,1% έως 8,33%.

Μέση εξοικονόμηση ελεγκτικού κεφαλαίου από τη χρήση της SV αντί της WA για $n = 250$ με χρήση ιστορικής προσομοίωσης		
Είδος Χρηματοοικονομικού προϊόντος	P	
	0,01	0,99
Χρηματιστηριακοί δείκτες	3,37%	5,15%
Συναλλαγματικές Ισοτιμίες	3,91%	5,51%
Ευγενή Μέταλλα	8,33%	3,10%

**Πίνακας 5-6 Μέση εξοικονόμηση ελεγκτικού κεφαλαίου  $n=250$**

Μέση εξοικονόμηση ελεγκτικού κεφαλαίου από τη χρήση της SV αντί της WA για $n = 750$ με χρήση της μεθόδου των Hull και White (HW)		
Είδος Χρηματοοικονομικού προϊόντος	P	
	0,01	0,99
Χρηματιστηριακοί δείκτες	1,10%	1,05%
Συναλλαγματικές Ισοτιμίες	1,47%	2,00%
Ευγενή Μέταλλα	1,36%	1,34%

**Πίνακας 5-7 Μέση εξοικονόμηση ελεγκτικού κεφαλαίου  $n=750$**

Ένα εύλογο ερώτημα που δημιουργείται είναι ποια από τις δυο εναλλακτικές α)  $n=250$  και ιστορική προσομοίωση, β)  $n=750$  και μέθοδος των Hull και White (HW) είναι προτιμότερο να χρησιμοποιείται. Για να απαντηθεί το ερώτημα αυτό και έχοντας πάντα σαν κριτήριο το μέσο ελεγκτικό κεφάλαιο κατασκευάστηκε ο πίνακας 5-8. Στον πίνακα αυτόν αναφέρεται το μέσο ελεγκτικό κεφάλαιο τόσο για  $n=250$  με χρήση ιστορικής προσομοίωσης όσο και για  $n=750$  με χρήση της μεθόδου των Hull και White. Επιπλέον έχει υπολογισθεί η ποσοστιαία διαφορά των δύο εναλλακτικών. Με βάση τον πίνακα αυτό βλέπουμε ότι η εξοικονόμηση ελεγκτικού κεφαλαίου με τη χρήση της ιστορικής προσομοίωσης είναι της τάξης του 10% και του 36% για τις long και short θέσεις στον δείκτη S&P 500 ενώ για του άλλους χρηματιστηριακούς δείκτες η μέθοδος των Hull και White δεσμεύει από 25% έως 38% λιγότερο μέσο ελεγκτικό κεφάλαιο. Στην περίπτωση των συναλλαγματικών ισοτιμιών η κατάσταση δεν είναι τόσο ξεκάθαρη καθώς για την USD/EUR η μέθοδος των Hull και White δεσμεύει λιγότερο ελεγκτικό κεφάλαιο ενώ για τις ισοτιμίες CHF/EUR και GBP/EUR η ιστορική προσομοίωση δεσμεύει λιγότερο κεφάλαιο. Για την ισοτιμία JPY/EUR οι δύο μέθοδοι δεσμεύουν σχεδόν το ίδιο κεφάλαιο. Παρόμοια είναι και η κατάσταση για τα ευγενή μέταλλα καθώς για την Πλατίνα λιγότερο ελεγκτικό κεφάλαιο δεσμεύει η μέθοδος της ιστορικής προσομοίωσης, για το Ασήμι οι δύο μέθοδοι δεσμεύουν παραπλήσιο κεφάλαιο ενώ για το Παλλάδιο η μέθοδος των Hull και White δεσμεύει κατά μέσο όρο λιγότερο ελεγκτικό κεφάλαιο. Από τα παραπάνω είναι προφανές ότι δεν μπορεί να εξαχθεί με ασφάλεια κάποιο γενικό

συμπέρασμα για το ποια από τις δύο μεθόδους, ιστορική προσομοίωση n=250 και μέθοδος των Hull-White n=750 είναι προτιμότερη με βάση το μέσο ελεγκτικό κεφάλαιο που δεσμεύουν.

Είδος Χρηματοοικονομικού προϊόντος	P	Μέσο ελεγκτικό κεφάλαιο με χρήση της SV		Ποσοστιαία διαφορά μέσου ελεγκτικού κεφαλαίου με βάση την περίπτωση n=250 και χρήση ιστορικής προσομοίωσης
		n = 250 και ιστορική προσομοίωση	n = 750 και μέθοδος Hull και White (HW)	
S&P 500	0,01	0,226900674	0,250422038	10,37%
	0,99	0,200450336	0,271965405	35,68%
FTSE 100	0,01	0,243389765	0,151988011	-37,55%
	0,99	0,249112553	0,185655846	-25,47%
DAX	0,01	0,365736855	0,243900071	-33,31%
	0,99	0,368086249	0,27293534	-25,85%
Swiss	0,01	0,284916487	0,178001218	-37,53%
	0,99	0,272910151	0,172500937	-36,79%
Nikkei 225	0,01	0,264071242	0,194786787	-26,24%
	0,99	0,323368361	0,221022439	-31,65%
Χρηματιστηριακό Χαρτοφυλάκιο	0,01	0,256025945	0,198031044	-22,65%
	0,99	0,262202052	0,187580872	-28,46%
USD/EUR	0,01	0,136514861	0,053202742	-61,03%
	0,99	0,139784332	0,064367388	-53,95%
CHF/EUR	0,01	0,056409977	0,09592514	70,05%
	0,99	0,061061008	0,093310162	52,81%
JPY/EUR	0,01	0,139317809	0,137094522	-1,60%
	0,99	0,133738673	0,142397806	6,47%
GBP/EUR	0,01	0,096405649	0,142903856	48,23%
	0,99	0,092290829	0,147312288	59,62%
Συναλλαγματικό Χαρτοφυλάκιο	0,01	0,085853529	0,086131133	0,32%
	0,99	0,083696469	0,086222867	3,02%
Ασήμι	0,01	0,588384758	0,492987747	-16,21%
	0,99	0,449475141	0,493346463	9,76%
Πλατίνα	0,01	0,320383146	0,709688192	121,51%
	0,99	0,29424792	0,635800093	116,08%
Παλλάδιο	0,01	0,761715373	0,27195072	-64,30%
	0,99	0,695189915	0,292848494	-57,88%
Χαρτοφυλάκιο Ευγενών Μετάλλων	0,01	0,35075863	0,325689506	-7,15%
	0,99	0,291044894	0,294043607	1,03%

**Πίνακας 5-8 Διαφορά ελεγκτικού κεφαλαίου n=250 και ιστορική προσομοίωση – n=750 και μέθοδος των Hull και White**

## **6<sup>ο</sup> Κεφάλαιο**

**Χρήση των νέων εκτιμητριών ποσοστιαίου σημείου στην  
μέτρηση του πιστωτικού κινδύνου των πιστωτικών ιδρυμάτων**





### Περιεχόμενα

6.	Χρήση των εκτιμητριών ποσοστιαίου σημείου στην μέτρηση του πιστωτικού κινδύνου των πιστωτικών ιδρυμάτων.....	243
6.1.	Διερεύνηση με χρήση Monte Carlo προσομοίωσης της αποτελεσματικότητας των νέων εκτιμητριών στον υπολογισμό του πιστωτικού VaR.....	244
6.1.1.	Πεδίο σύγκρισης για την διερεύνηση με χρήση Monte Carlo προσομοίωσης της αποτελεσματικότητας των νέων εκτιμητριών στον υπολογισμό του πιστωτικού VaR.....	244
6.1.2.	Κριτήρια σύγκρισης για την διερεύνηση με χρήση Monte Carlo προσομοίωσης της αποτελεσματικότητας των νέων εκτιμητριών στον υπολογισμό του πιστωτικού VaR.....	247
6.1.3.	Επεξεργασία-παρουσίαση αποτελεσμάτων και συμπεράσματα για την διερεύνηση με χρήση Monte Carlo προσομοίωσης της αποτελεσματικότητας των νέων εκτιμητριών στον υπολογισμό του πιστωτικού VaR.....	247



## **6. Χρήση των εκτιμητριών ποσοστιαίου σημείου στην μέτρηση του πιστωτικού κινδύνου των πιστωτικών ιδρυμάτων**

Στο κεφάλαιο 3 παρουσιάστηκαν οι διάφορες μέθοδοι υπολογισμού του πιστωτικού κινδύνου. Στο κεφάλαιο 4 παρουσιάστηκαν τρεις νέες εκτιμήτριες ποσοστιαίου σημείου. Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστούν τρόποι με τους οποίους οι νέες εκτιμήτριες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να βελτιώσουν τις μεθόδους μέτρησης του πιστωτικού κινδύνου των πιστωτικών ιδρυμάτων.

Το ζητούμενο στη μέτρηση του πιστωτικού κινδύνου είναι η εκτίμηση της κατανομής των ζημιών των πιστοδοτικών χαρτοφυλακίων. Με βάση την εκτίμηση της κατανομής των ζημιών μπορεί να υπολογιστεί το πιστωτικό VaR. Ένας τρόπος να εκτιμήσουμε την κατανομή των ζημιών ενός πιστοδοτικού χαρτοφυλακίου είναι να υποθέσουμε ότι προσεγγίζεται επαρκώς από μια συγκεκριμένη κατανομή  $L$  και να προσπαθήσουμε να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους της κατανομής αυτής. Στη συνέχεια το πιστωτικό VaR προκύπτει με αναλυτικό τρόπο από την αναλυτική μορφή της αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας της  $L$  με δεδομένες τις παραμέτρους που έχουν ήδη εκτιμηθεί. Έχοντας υπόψη ότι η κατανομή των ζημιών των χαρτοφυλακίων πιστοδοτικών προϊόντων είναι δεξιά ασύμμετρη (right Skewness) και έχει παχιές ουρές<sup>134</sup> η  $L$  θα μπορούσε να προσεγγιστεί από τη Βήτα, τη Γάμα, τη F-κατανομή ή και από πλήθος άλλες κατανομές. Είναι προφανές ότι η επιλογή μιας συγκεκριμένης κατανομής εμπεριέχει έναν σοβαρό κίνδυνο η επιλογή να είναι λάθος (model-risk). Η εναλλακτική προσέγγιση είναι να υπολογισθεί το πιστωτικό VaR όχι με τη χρήση αναλυτικών μεθόδων αλλά με χρήση προσομοίωσης Monte Carlo.

Επίσης η προσομοίωση Monte Carlo για τον υπολογισμό της κατανομής των ζημιών χρησιμοποιείται πολύ συχνά (CreditMetrics, KMV-Model) όταν το μέγεθος του χαρτοφυλακίου είναι μεγάλο και δεν είναι εφικτός ο υπολογισμός της πραγματικής κατανομής του.

---

<sup>134</sup> EBET “Credit Risk Modelling: Current Practices and Applications” Basle 1999 και C. Bluhm, L. Overbeck και C. Wagner “An introduction to Credit Risk Modelling”, 2003

Όταν χρησιμοποιείται Monte Carlo προσομοίωση το πιστωτικό VaR εκτιμάται από το σύνολο των διαφορετικών ζημιών που υπολογίστηκαν με τη χρήση μιας εκτιμήτριας ποσοστιαίου σημείου. Το ποσοστιαίο σημείο που ενδιαφέρει είναι αυτό για  $p=0,999$ . Επειδή το  $p$  είναι πολύ μεγάλο αναμένεται ότι θα χρειαστούν πολλές παρατηρήσεις για την επαρκή εκτίμηση του VaR. Η χρήση των νέων ΕΠΣ θα μπορούσε να περιορίσει το πλήθος των απαιτούμενων παρατηρήσεων και να βελτιώσει την ταχύτητα υπολογισμού του VaR.

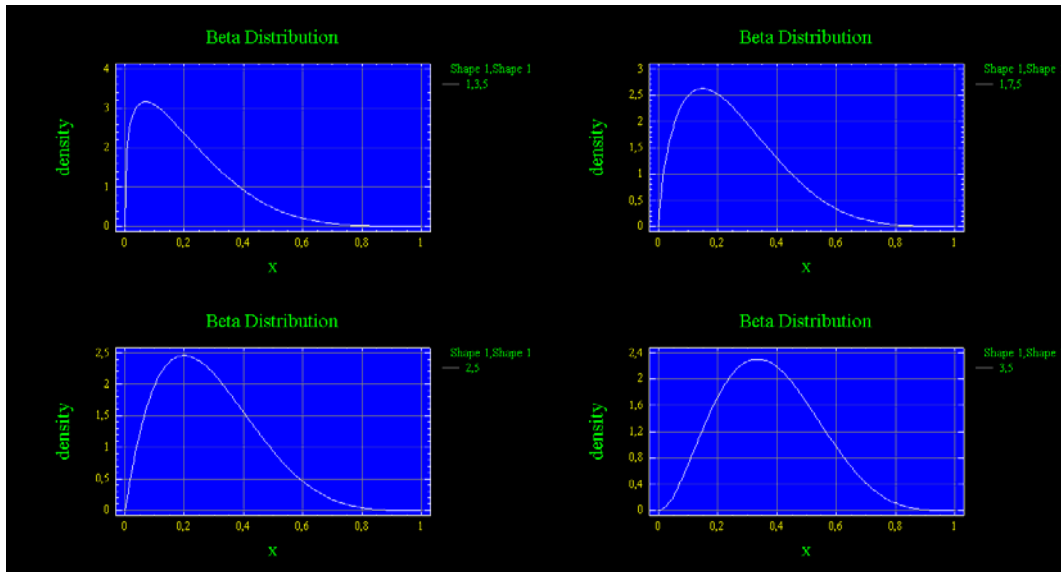
### **6.1.Διερεύνηση με χρήση Monte Carlo προσομοίωσης της αποτελεσματικότητας των νέων εκτιμητριών στον υπολογισμό του πιστωτικού VaR**

Θέλουμε να διερευνήσουμε εάν οι SV1, SV2 και SV3 εκτιμούν καλύτερα το πιστωτικό VaR σε σχέση με την WA και την HD. Στη συνέχεια θα εργαστούμε ως εξής:

1. Θα οριοθετήσουμε το πεδίο σύγκρισης
2. Θα επιλέξουμε τα κριτήρια σύγκρισης
3. Τέλος θα επεξεργαστούμε τα αποτελέσματά και θα εξάγουμε συμπεράσματα

#### **6.1.1. Πεδίο σύγκρισης για την διερεύνηση με χρήση Monte Carlo προσομοίωσης της αποτελεσματικότητας των νέων εκτιμητριών στον υπολογισμό του πιστωτικού VaR**

Οι κατανομή των ζημιών των πιστοδοτικών χαρτοφυλακίων είναι δεξιά ασύμμετρη και έχει παχιές ουρές, για το λόγο αυτό στην προσομοίωση θα εξετάσουμε δείγματα που προέρχονται από τέτοιου είδους κατανομές. Πιο συγκεκριμένα τα δείγματα θα προέρχονται από κατανομές Βήτα με παραμέτρους  $(\alpha, \beta)$  να παίρνουν τιμές από το σύνολο  $\{(1.3, 5), (1.7, 5), (2, 5), (3, 5)\}$ . Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας των τεσσάρων αυτών κατανομών φαίνονται στην εικόνα (6-1). Στον πίνακα 6-9 αναφέρονται η μέση τιμή, η διασπορά, η Skewness, η kurtosis καθώς και το 0,999 ποσοστιαίο σημείο των τεσσάρων παραπάνω κατανομών.



**Εικόνα 6-1** Γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας των Βήτα κατανομών που θα χρησιμοποιηθούν στην προσομοίωση Monte Carlo για την διερεύνηση της αποτελεσματικότητας των εκτιμητριών SV για τον υπολογισμό του πιστωτικού VaR

$\alpha$	B	$\mu$	$\sigma^2$	Skewness	Kurtosis	0,999 ποσοστιαίο σημείο
1,3	5	0,206349	0,022434	-0,94484	0,549936	0,775695801
1,7	5	0,253731	0,024591	-0,72204	0,082834	0,80267334
2	5	0,285714	0,02551	-0,59628	-0,12	0,818603516
3	5	0,375	0,026042	-0,30984	-0,41455	0,856231689

**Πίνακας 6-9** Η  $\mu$ ,  $\sigma^2$ , Skewness, Kurtosis και το 0,999 ποσοστιαίο σημείο των Βήτα κατανομών που θα χρησιμοποιηθούν στην προσομοίωση Monte Carlo για την διερεύνηση της αποτελεσματικότητας των εκτιμητριών SV για τον υπολογισμό του πιστωτικού VaR

Θα υπολογιστεί το ποσοστιαίο σημείο για  $p=0,999$  καθώς αυτό είναι που απαιτείται από το “International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards, A Revised Framework” της EBET.

Το μέγεθος δείγματος που θα χρησιμοποιηθεί πρέπει να είναι αρκετά μεγάλο καθώς αφενός το ποσοστιαίο σημείο βρίσκεται πολύ άκρη στη δεξιά ουρά της κατανομής και αφετέρου στη πραγματική διαδικασία υπολογισμού του πιστωτικού VaR το δείγμα αυτό θα υπολογιστεί με τη χρήση προσομοίωσης Monte Carlo (και όχι από ιστορικά στοιχεία)

άρα μπορεί να είναι αρκετά μεγάλο<sup>135</sup>. Έτσι θα χρησιμοποιηθούν δείγματα 1.000, 3.000 και 5.000 παρατηρήσεων.

Η προσομοίωση Monte Carlo έγινε με προγράμματα GAUSS 5.0.30 και η διαδικασία που ακολουθήθηκε ήταν η εξής:

**Βήμα 1** Για κάθε  $n$  (1.000, 3.000, 5.000) βρέθηκαν  $n \times 5.000$  τυχαίοι ακέραιοι αριθμοί από το 0 έως το  $2^{32}-1$ . Οι τυχαίοι αριθμοί παρήχθησαν με χρήση της εντολής rndKMί η οποία υλοποιεί τον αλγόριθμο KISS-Monster<sup>136</sup> που έχει αναπτυχθεί από τον George Marsaglia. Ο αλγόριθμος KISS-Monster κατά δήλωση της εταιρείας Artech που κατασκευάζει το GAUSS (<http://www.Artech.com/random>) περνάει με επιτυχία όλους τους ελέγχους “DIEHARD”<sup>137</sup>.

**Βήμα 2** Οι τυχαίοι αυτοί αριθμοί διαιρέθηκαν με το  $2^{32}-1$  έτσι ώστε να προκύψουν  $n \times 5.000$  τυχαίοι αριθμοί από την ομοιόμορφη (0,1) κατανομή ( $U(0,1)$ ).

**Βήμα 3** Για κάθε μία από τις μητρικές κατανομές που συμμετείχαν στην έρευνα οι τυχαίοι αριθμοί από την  $U(0,1)$  αντιστοιχίστηκαν σε τυχαίους αριθμούς από την μητρική κατανομή με τη χρήση της αντίστροφης συνάρτησης αθροιστικής πυκνότητας (inverse Cumulative Distribution Function CDF) της μητρικής κατανομής.

**Βήμα 4** Οι  $n \times 5.000$  τυχαίοι αριθμοί για κάθε μία από τις υπό εξέταση κατανομές χρησιμοποιήθηκαν για να υπολογιστούν τα ποσοστιαία σημεία με όλες τις μεθόδους. Συνολικά υπολογίστηκαν 300.000 ( $3 \times 4 \times 5 \times 5.000$ ) ποσοστιαία σημεία.

**Βήμα 5** Η μέση τιμή και η διασπορά των 5.000 ποσοστιαίων σημείων που υπολογίστηκαν για κάθε  $n$ , μητρική κατανομή και ΕΠΣ χρησιμοποιήθηκαν για να υπολογιστούν η μεροληψία και το MSE.

---

<sup>135</sup> Στην πραγματικότητα το μέγεθος του δείγματος στην προσομοίωση Monte Carlo «πληρώνεται» σε υπολογιστική ισχύ των υπολογιστών που εκτελούν την προσομοίωση και βεβαίως σε υπολογιστικό χρόνο.

<sup>136</sup> “rndKMί generates random integers using a KISS+Monster algorithm developed by George Marsaglia. KISS initializes the sequence used in the recur-with-carry Monster random number generator” GAUSS 5.0.30 Language Reference

<sup>137</sup> Οι έλεγχοι “DIEHARD” είναι μία ομάδα στατιστικών ελέγχων που χρησιμοποιούνται στη μέτρηση της ποιότητας ενός συνόλου τυχαίων αριθμών. Έχουν αναπτυχθεί από τον George Marsaglia και δημοσιεύτηκαν για πρώτη φορά το 1995 σε ένα CD-ROM τυχαίων αριθμών

### 6.1.2. Κριτήρια σύγκρισης για την διερεύνηση με χρήση Monte Carlo προσομοίωσης της αποτελεσματικότητας των νέων εκτιμητριών στον υπολογισμό του πιστωτικού VaR

Σαν κριτήρια θα χρησιμοποιηθούν αυτά που αναφέρονται και στην §5.3.2.1. πιο συγκεκριμένα θα χρησιμοποιηθούν τα :

- Η μέση τιμή  $E_{K,n,p} = E(\bar{Q}_{n,p,K})$  της εκτιμήτριας  $K$  για μέγεθος δείγματος  $n$  για το  $p$  ποσοστιαίο σημείο.
- Η διασπορά  $V_{K,n,p} = Var(\bar{Q}_{n,p,K})$  της εκτιμήτριας  $K$  για μέγεθος δείγματος  $n$  για το  $p$  ποσοστιαίο σημείο.
- Η μεροληψία  $B_{K,n,p} = E_{K,n,p} - Q_p$  της εκτιμήτριας  $K$  για μέγεθος δείγματος  $n$  για το  $p$  ποσοστιαίο σημείο.
- Η απόλυτη μεροληψία  $AB_{K,n,p} = |AB_{K,n,p}|$  της εκτιμήτριας  $K$  για μέγεθος δείγματος  $n$  για το  $p$  ποσοστιαίο σημείο.
- Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα  $MSE_{K,n,p} = (E_{K,n,p})^2 + V_{K,n,p}$  της εκτιμήτριας  $K$  για μέγεθος δείγματος  $n$  για το  $p$  ποσοστιαίο σημείο.
- Το σχετικό μέσο τετραγωνικό σφάλμα  $RMSE_{K,n,p} = RMSE_{A,n,p} / RMSE_{K,n,p}$  της εκτιμήτριας  $K$  για μέγεθος δείγματος  $n$  για το  $p$  ποσοστιαίο σημείο.

### 6.1.3. Επεξεργασία-παρουσίαση αποτελεσμάτων και συμπεράσματα για την διερεύνηση με χρήση Monte Carlo προσομοίωσης της αποτελεσματικότητας των νέων εκτιμητριών στον υπολογισμό του πιστωτικού VaR

Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης Monte Carlo<sup>138</sup> φαίνονται στους πίνακες 6-10 και 6-11.

Από τη μελέτη των πινάκων 6-10 και 6-11 προκύπτουν τα εξής γενικά συμπεράσματα:

- Τόσο η Bias όσο και το MSE για όλες τις μεθόδους και όλες τις μητρικές κατανομές μειώνονται καθώς το μέγεθος του δείγματος αυξάνεται. Αυτό είναι αναμενόμενο καθώς όσο μεγαλύτερο είναι το μέγεθος του δείγματος τόσο

---

<sup>138</sup> Στην προσομοίωση Monte Carlo χρησιμοποιήθηκαν 5000 τυχαία δείγματα σε κάθε περίπτωση. Δηλαδή το πλήθος των δειγμάτων ήταν  $5000 \times (\text{πλήθος διαφορετικών μεγεθών δείγματος}) \times (\text{πλήθος διαφορετικών κατανομών προέλευσης των τυχαίων δειγμάτων}) = 5000 \times 3 \times 4 = 60000$

περισσότερες πληροφορίες για τη μητρική κατανομή είναι διαθέσιμες για τον υπολογισμό του ποσοστιαίου σημείου.

- Όλες οι μέθοδοι αποδίδουν καλύτερα όσο πιο παχιά είναι η δεξιά ουρά της μητρικής κατανομής. Αυτό επίσης είναι λογικό καθώς όσο πιο παχιά είναι η ουρά της κατανομής τόσο περισσότερες τιμές της κατανομής γύρω από το 0.999 ποσοστιαίο σημείο της μητρικής κατανομής αναμένεται να περιέχονται στο δείγμα μας. Αυτό σημαίνει ότι καθώς η ουρά της κατανομής γίνεται πιο παχιά αυξάνουν και οι πληροφορίες για την ουρά που περιέχονται στο δείγμα μας και άρα βελτιώνονται οι εκτιμήσεις μας για τα ποσοστιαία σημεία που βρίσκονται στο άκρο της ουράς (0,999 ποσοστιαίο σημείο).

<b>Bias</b>			
<b>Sample Size</b>	<b>1.000</b>	<b>3.000</b>	<b>5.000</b>
<b>Distribution</b>	<b>SV1</b>		
<b>Beta(1.3,5)</b>	0,159900552	0,110798864	0,085539173
<b>Beta(1.7,5)</b>	0,141135011	0,097999855	0,075793042
<b>Beta(2,5)</b>	0,129997800	0,090377823	0,069971667
<b>Beta(3,5)</b>	0,103528611	0,072185487	0,056025323
	<b>SV2</b>		
<b>Beta(1.3,5)</b>	0,177365256	0,122728129	0,094066604
<b>Beta(1.7,5)</b>	0,156393315	0,108488467	0,083302966
<b>Beta(2,5)</b>	0,14396679	0,100016581	0,076879813
<b>Beta(3,5)</b>	0,114493403	0,079819882	0,061509576
	<b>SV3</b>		
<b>Beta(1.3,5)</b>	<b>0,132977364</b>	<b>0,096762276</b>	<b>0,077054049</b>
<b>Beta(1.7,5)</b>	<b>0,117473751</b>	<b>0,085661682</b>	<b>0,068319550</b>
<b>Beta(2,5)</b>	<b>0,108259492</b>	<b>0,079041160</b>	<b>0,063096583</b>
<b>Beta(3,5)</b>	<b>0,086321662</b>	<b>0,063209659</b>	<b>0,050566480</b>
	<b>HD</b>		
<b>Beta(1.3,5)</b>	0,153185763	0,111010126	0,084802200
<b>Beta(1.7,5)</b>	0,135205986	0,098193546	0,075154373
<b>Beta(2,5)</b>	0,124535484	0,090560147	0,069389818
<b>Beta(3,5)</b>	0,099176511	0,072338007	0,055573982
	<b>WA</b>		
<b>Beta(1.3,5)</b>	0,179213676	0,109181610	0,081598446
<b>Beta(1.7,5)</b>	0,158046855	0,096694364	0,072389518
<b>Beta(2,5)</b>	0,145501799	0,089241686	0,066877459
<b>Beta(3,5)</b>	0,115738190	0,071405165	0,053637837

**Πίνακας 6-10 Το Bias για κάθε υπό εξέταση περίπτωση τις προσομοίωσης Monte Carlo για την διερεύνηση της αποτελεσματικότητας των εκτιμητριών SV για τον υπολογισμό του πιστωτικού VaR**

Όσον αφορά την επιλογή της καλύτερης μεθόδου, σε κάθε περίπτωση που εξετάστηκε η SV3 έδωσε καλύτερες τιμές για τα Bias και MSE. Το ποσοστό μείωσης της Bias και του



MSE που επιτυγχάνεται από τη χρήση της SV3 σε σχέση με τη δεύτερη καλύτερη μέθοδο κυμαίνεται από 5,9% έως 15,2% για τη Bias και από 13,1% έως και 32,38% για το MSE. Η WA συμπεριφέρεται επίσης πολύ καλά καθώς είναι η δεύτερη καλύτερη μέθοδος σε όλες τις περιπτώσεις για μεγέθη δείγματος από 3000 και πάνω.

MSE			
Sample Size	1.000	3.000	5.000
Distribution	SV1		
Beta(1,3,5)	0,025773587	0,012398228	0,007404404
Beta(1,7,5)	0,020077424	0,009698711	0,005812620
Beta(2,5)	0,017032917	0,008248437	0,004953706
Beta(3,5)	0,010801583	0,005261527	0,003175339
	SV2		
Beta(1,3,5)	0,031646450	0,015177228	0,008945378
Beta(1,7,5)	0,024602951	0,011859010	0,007014632
Beta(2,5)	0,020847485	0,010078869	0,005974242
Beta(3,5)	0,013183747	0,006418863	0,003823694
	SV3		
Beta(1,3,5)	<b>0,017868135</b>	<b>0,009492291</b>	<b>0,006015568</b>
Beta(1,7,5)	<b>0,013943524</b>	<b>0,007438707</b>	<b>0,004728517</b>
Beta(2,5)	<b>0,011841412</b>	<b>0,006333014</b>	<b>0,004032894</b>
Beta(3,5)	<b>0,007527757</b>	<b>0,004049699</b>	<b>0,002589767</b>
	HD		
Beta(1,3,5)	0,023654013	0,012446207	0,007284053
Beta(1,7,5)	0,018425736	0,009737579	0,005720270
Beta(2,5)	0,015631426	0,008282159	0,004876067
Beta(3,5)	0,009912465	0,005284031	0,003127168
	WA		
Beta(1,3,5)	0,032313167	0,012043334	0,006796606
Beta(1,7,5)	0,025128795	0,009445095	0,005348082
Beta(2,5)	0,021296819	0,008044774	0,004564133
Beta(3,5)	0,013473486	0,005149647	0,002935141

**Πίνακας 6-11 Το MSE για κάθε υπό εξέταση περίπτωση της προσομοίωσης Monte Carlo για την διερεύνηση της αποτελεσματικότητας των εκτιμητριών SV για τον υπολογισμό του πιστωτικού VaR**

Η διαφορά της Bias της SV3 από τη δεύτερη καλύτερη μέθοδο							
Distribution	Sample Size	1.000		3.000		5.000	
		% Διαφορά	Δεύτερη καλύτερη μέθοδος	% Διαφορά	Δεύτερη καλύτερη μέθοδος	% Διαφορά	Δεύτερη καλύτερη μέθοδος
Beta(1,3,5)		-15,20%	HD	-12,83%	WA	-5,90%	WA
Beta(1,7,5)		-15,09%	HD	-12,88%	WA	-5,96%	WA
Beta(2,5)		-15,03%	HD	-12,91%	WA	-5,99%	WA
Beta(3,5)		-14,89%	HD	-12,97%	WA	-6,07%	WA

**Πίνακας 6-12 Ποσοστιαία διαφορά της Bias της SV3 από τη δεύτερη καλύτερη μέθοδο για κάθε υπό εξέταση περίπτωση τις προσομοίωσης Monte Carlo για την διερεύνηση της αποτελεσματικότητας των εκτιμητριών SV για τον υπολογισμό του πιστωτικού VaR**

Η διαφορά της MSE της SV3 από τη δεύτερη καλύτερη μέθοδο							
Distribution	Sample Size	1.000		3.000		5.000	
		% Διαφορά	Δεύτερη καλύτερη μέθοδος	% Διαφορά	Δεύτερη καλύτερη μέθοδος	% Διαφορά	Δεύτερη καλύτερη μέθοδος
Beta(1,3,5)		-32,38%	HD	-26,87%	WA	-12,98%	WA
Beta(1,7,5)		-32,15%	HD	-26,97%	WA	-13,10%	WA
Beta(2,5)		-32,01%	HD	-27,03%	WA	-13,17%	WA
Beta(3,5)		-31,68%	HD	-27,16%	WA	-13,34%	WA

**Πίνακας 6-13 Ποσοστιαία διαφορά της MSE της SV3 από τη δεύτερη καλύτερη μέθοδο για κάθε υπό εξέταση περίπτωση τις προσομοίωσης Monte Carlo για την διερεύνηση της αποτελεσματικότητας των εκτιμητριών SV για τον υπολογισμό του πιστωτικού VaR**

## 7ο Κεφάλαιο

### **Ενσωμάτωση των νέων εκτιμητριών ποσοστιαίου σημείου στα πληροφοριακά συστήματα μέτρησης του κινδύνου των πιστωτικών ιδρυμάτων**



## Περιεχόμενα

7.	Ενσωμάτωση των νέων εκτιμητριών ποσοστιαίου σημείου στα συστήματα μέτρησης του κινδύνου των πιστωτικών ιδρυμάτων .....	255
7.1.	Αλγόριθμοι υπολογισμού των νέων εκτιμητριών ποσοστιαίου σημείου .....	255
7.1.1.	Αλγόριθμος υπολογισμού διωνυμικών συντελεστών .....	256
7.1.2.	Αλγόριθμος υπολογισμού του $B(j;n,p)$ .....	257
7.1.3.	Αλγόριθμος υπολογισμού των σταθμίσεων της SV1 .....	258
7.1.4.	Αλγόριθμος υπολογισμού των σταθμίσεων της SV2 .....	259
7.1.5.	Αλγόριθμος υπολογισμού των σταθμίσεων της SV3 .....	259
7.1.6.	Αλγόριθμος υπολογισμού σταθμισμένου αθροίσματος .....	260
7.1.7.	Αλγόριθμος υπολογισμού της εκτιμήτριας SV1 .....	260
7.1.8.	Αλγόριθμος υπολογισμού της εκτιμήτριας SV2 .....	261
7.1.9.	Αλγόριθμος υπολογισμού της εκτιμήτριας SV3 .....	261
7.2.	Διαδικασία διαχείρισης του κινδύνου και συστήματα μέτρησης του κινδύνου των πιστωτικών ιδρυμάτων. ....	262
7.2.1.	Εποπτικές αρχές. ....	262
7.2.2.	Πιστωτικά ιδρύματα.....	265
7.3.	Ενσωμάτωση των νέων εκτιμητριών ποσοστιαίου σημείου στα πληροφοριακά συστήματα των πιστωτικών ιδρυμάτων.....	269
7.4.	Διεπαφές χρήσης των αλγορίθμων υπολογισμού των νέων εκτιμητριών ποσοστιαίου σημείου.....	272
7.4.1.	Excel Add-In SVQuantileEstimators.xla .....	273
7.4.2.	Web Service SVQuantileEstimators.aspx .....	276
7.4.3.	GAUSS βιβλιοθήκη SVQuantileEstimators.src .....	282



## 7. Ενσωμάτωση των νέων εκτιμητριών ποσοστιαίου σημείου στα συστήματα μέτρησης του κινδύνου των πιστωτικών ιδρυμάτων

Έχουμε δει στα κεφάλαια 5 και 6 πως οι εκτιμήτριες ποσοστιαίου σημείου που παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 4 μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την παραγωγή βελτιωμένων εκτιμήσεων του κινδύνου των πιστωτικών ιδρυμάτων. Στο κεφάλαιο αυτό θα προταθούν τρόποι ενσωμάτωσης των νέων εκτιμητριών ποσοστιαίου σημείου στα συστήματα υπολογισμού του κινδύνου των πιστωτικών ιδρυμάτων. Αρχικά θα παρουσιασθούν αλγόριθμοι υπολογισμού των νέων εκτιμητριών ποσοστιαίου σημείου. Στη συνέχεια θα μελετηθούν οι διάφοροι τρόποι ενσωμάτωσης των νέων εκτιμητριών ποσοστιαίου σημείου στα πληροφοριακά συστήματα των πιστωτικών ιδρυμάτων. Τέλος θα κατασκευαστεί λογισμικό που θα υλοποιεί τους αλγόριθμους και θα επιτρέπει την ενσωμάτωση των νέων εκτιμητριών ποσοστιαίου σημείου στα πληροφοριακά συστήματα των πιστωτικών ιδρυμάτων.

### 7.1. Αλγόριθμοι υπολογισμού των νέων εκτιμητριών ποσοστιαίου σημείου

Οι αλγεβρικοί τύποι που ορίζουν τις τρεις νέες εκτιμήτριες ποσοστιαίου σημείου (SV1, SV2, SV3) δίδονται από τις εξισώσεις (1), (2) και (3).

$$\begin{aligned}
 SV1_p = & \frac{2B(0; n, p) + B(1; n, p)}{2} x_{(1)} + \frac{B(0; n, p)}{2} x_{(2)} - \frac{B(0; n, p)}{2} x_{(3)} \\
 & + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{B(i; n, p) + B(i-1; n, p)}{2} x_{(i)} \\
 & - \frac{B(n; p, n)}{2} x_{(n-2)} + \frac{B(n; p, n)}{2} x_{(n-1)} + \frac{2B(n; p, n) + B(n-1; p)}{2} x_{(n)}
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$SV2_p = \sum_{i=0}^{n-1} B(i; n, p) x_{(i+1)} + (2x_{(n)} - x_{(n-1)}) B(n; p, n) \tag{2}$$

$$SV3_p = \sum_{i=1}^n B(i; n, p) x_{(i)} + (2x_{(1)} - x_{(2)}) B(0; p, n) \tag{3}$$

Το ζητούμενο είναι να κατασκευαστούν αλγόριθμοι υπολογισμού των SV1, SV2 και SV3. Το SV<sub>i</sub> είναι ένα σταθμισμένο άθροισμα των n διατεταγμένων παρατηρήσεων του δείγματος ( $x_{(j)}$ ,  $j=1,2,\dots,n$ ). Τα  $x_{(j)}$  δίδονται ενώ οι σταθμίσεις των  $x_{(j)}$  πρέπει να υπολογιστούν. Άρα ο αλγόριθμος υπολογισμού του SV<sub>i</sub> μπορεί να διαιρεθεί σε δύο τμήματα στο πρώτο τμήμα θα υπολογίζονται οι σταθμίσεις του αθροίσματος και στο δεύτερο τμήμα θα υπολογίζεται το σταθμισμένο άθροισμα. Για να υπολογισθούν οι σταθμίσεις πρέπει να μπορούν να υπολογισθούν τα  $B(j;n,p)$  δηλαδή οι τιμές της Διωνυμικής κατανομής, όπου j είναι ο αριθμός των επιτυχιών, n το σύνολο των δοκιμών και p η πιθανότητα επιτυχίας σε μία δοκιμή. Με το  $B(j;n,p)$  να δίδεται από την εξίσωση (4).

$$B(j;n,p) = \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \quad (4)$$

Με βάση τα παραπάνω μια bottom up προσέγγιση στη δημιουργία των ζητούμενων αλγορίθμων θα ξεκινούσε από τη δημιουργία ενός αλγορίθμου υπολογισμού του  $\binom{n}{j}$  και ενός αλγορίθμου υπολογισμού του  $B(j;n,p)$ , θα συνέχιζε με τη δημιουργία αλγορίθμου υπολογισμού των σταθμίσεων του σταθμισμένου αθροίσματος και θα ολοκληρωνόταν με τη κατασκευή ενός αλγορίθμου παραγωγής σταθμισμένου αθροίσματος.

Οι αλγόριθμοι που θα κατασκευαστούν δε θα ενσωματώνουν τεχνικές αμυντικού προγραμματισμού. Δηλαδή οι είσοδοι των αλγορίθμων θα θεωρείται ότι ικανοποιούν τις προδιαγραφές των αλγορίθμων. Επιλέχτηκε αυτός ο τρόπος κατασκευής για να περιοριστεί το μέγεθος των αλγορίθμων. Στη γενική περίπτωση που οι αλγόριθμοι αυτοί αποτελέσουν τη βάση για τη δημιουργία προγραμμάτων θα πρέπει να εμπλουτιστούν από κατάλληλες τεχνικές αμυντικού προγραμματισμού.

### 7.1.1. Αλγόριθμος υπολογισμού διωνυμικών συντελεστών

Το  $\binom{n}{j}$  είναι ίσο με το  $\frac{n!}{j!(n-j)!}$ . Όμως ο υπολογισμός του παραγοντικού είναι μια χρονοβόρα διαδικασία που γρήγορα οδηγεί σε μεγάλα αριθμούς και άρα και υπερχειλίσσεις (overflows) των περιοχών μνήμης των υπολογιστών έτσι είναι σκόπιμο να



απλοποιηθεί η παράσταση  $\frac{n!}{j!(n-j)!}$  πριν προχωρήσουμε στην κατασκευή του αλγορίθμου. Μια απλοποίηση της παραπάνω παράστασης δίδεται από τον τύπο (5).

$$\frac{n!}{j!(n-j)!} = \frac{(n-j+1) \dots * n}{(n-j)!} \quad (5)$$

Θα κατασκευάσουμε το ζητούμενο αλγόριθμο με βάση των τύπο (5).

### Αλγόριθμος N\_J

**Είσοδος:** n φυσικός αριθμός μεγαλύτερος του 0  
j φυσικός αριθμός μικρότερος ή ίσος του n

**Έξοδος:** x ρητός αριθμός μεγαλύτερος του 0

*procedure* N\_J(n,j)

x=1

*for* w = 0 *to* N-j-1 *step* 1

x=x\*((N-w)/(N-j-w))

*endfor*

*return*(x)

*endprocedure*

### 7.1.2. Αλγόριθμος υπολογισμού του B(j;n,p)

Ο αλγόριθμος αυτός θα πρέπει να υπολογίζει το B(j;n,p) με βάση την εξίσωση (4) και θα χρησιμοποιεί τον αλγόριθμο N\_J.

### Αλγόριθμος Bin

**Είσοδος :** n φυσικός αριθμός μεγαλύτερος του 0  
j φυσικός αριθμός μικρότερος ή ίσος του n  
p πραγματικός αριθμός που ανήκει στο διάστημα [0,1]

**Έξοδος:** x πραγματικός αριθμός που ανήκει στο διάστημα [0,1]

**Procedure** *Bin* (*j,n,p*)

$x = N\_J(n,j) * (p^j) * ((1-p)^{(n-j))};$

**return** (*x*);

**endprocedure**

### 7.1.3. Αλγόριθμος υπολογισμού των σταθμίσεων της SV1

Ο αλγόριθμος υπολογισμού των σταθμίσεων της SV1 θα βασιστεί στην εξίσωση (1)

#### Αλγόριθμος SV1\_J

**Είσοδος :** *n* φυσικός αριθμός μεγαλύτερος του 0

*j* φυσικός αριθμός μικρότερος ή ίσος του *n*

*p* πραγματικός αριθμός που ανήκει στο διάστημα [0,1]

**Έξοδος:** *x* πραγματικός αριθμός που ανήκει στο διάστημα [0,1]

**Procedure** *SV1\_J*(*j,n,p*)

**if** *j*>3 **and** *j*<*n*-2

$x = (Bin(j,n,p) + Bin(j-1,n,p))/2$

**elseif** *j*=1

$x = (2 * Bin(0,n,p) + Bin(1,n,p))/2$

**elseif** *j*=2

$x = (Bin(2,n,p) + Bin(1,n,p) + Bin(0,n,p))/2$

**elseif** *j*=3

$x = (Bin(3,n,p) + Bin(2,n,p) - Bin(0,n,p))/2$

**elseif** *j*=*n*-2

$x = (Bin(n-3,n,p) + Bin(n-2,n,p) - Bin(n,n,p))/2$

**elseif** *j*=*n*-1

$x = (Bin(n-2,n,p) + Bin(n-1,n,p) + Bin(n,n,p))/2$

**else**

$x = (Bin(n-1,n,p) + Bin(n,n,p))/2$

**endif**

**return** (*x*)

**endprocedure**

#### 7.1.4. Αλγόριθμος υπολογισμού των σταθμίσεων της SV2

Ο αλγόριθμος υπολογισμού των σταθμίσεων της SV2 θα βασιστεί στην εξίσωση (2)

##### Αλγόριθμος SV2\_J

**Είσοδος :**  $n$  φυσικός αριθμός μεγαλύτερος του 0  
 $j$  φυσικός αριθμός μικρότερος ή ίσος του  $n$   
 $p$  πραγματικός αριθμός που ανήκει στο διάστημα  $[0,1]$

**Έξοδος:**  $x$  πραγματικός αριθμός που ανήκει στο διάστημα  $[0,1]$

*Procedure* SV2\_J( $j,n,p$ )

*if*  $j=n$

$$x = 2 * Bin(n,n,p) + Bin(n-1,n,p)$$

*elseif*  $j=n-1$

$$x = Bin(n-2,n,p) - Bin(n,n,p)$$

*else*

$$x = Bin(j-1,n,p)$$

*endif*

*return* ( $x$ )

*endprocedure*

#### 7.1.5. Αλγόριθμος υπολογισμού των σταθμίσεων της SV3

Ο αλγόριθμος υπολογισμού των σταθμίσεων της SV3 θα βασιστεί στην εξίσωση (3)

##### Αλγόριθμος SV3\_J

**Είσοδος :**  $n$  φυσικός αριθμός μεγαλύτερος του 0  
 $j$  φυσικός αριθμός μικρότερος ή ίσος του  $n$   
 $p$  πραγματικός αριθμός που ανήκει στο διάστημα  $[0,1]$

**Έξοδος:**  $x$  πραγματικός αριθμός που ανήκει στο διάστημα  $[0,1]$

*Procedure* SV3\_J( $j,n,p$ )

*if*  $j=1$

$$x = 2 * Bin(0,n,p) + Bin(1,n,p)$$

*elseif*  $j=2$

$x = Bin(2, n, p) - Bin(0, n, p)$

*else*

$x = Bin(j, n, p)$

*endif*

*return* (  $x$  )

*endprocedure*

### 7.1.6. Αλγόριθμος υπολογισμού σταθμισμένου αθροίσματος

#### Αλγόριθμος $W\_S$

**Είσοδος :**  $w$  σταθμίσεις, πίνακας πραγματικών αριθμών διάστασης  $n$   
 $x$  πίνακας πραγματικών αριθμών διάστασης  $n$   
 $n$  φυσικός αριθμός

**Έξοδος:**  $s$  πραγματικός αριθμός

*Procedure*  $W\_S(w, x, n)$

$s = 0$

*for*  $i = 1$  *to*  $n$  *step*  $1$

$s = s + (w[i] * x[i])$

*endfor*

*return* (  $s$  )

*endprocedure*

### 7.1.7. Αλγόριθμος υπολογισμού της εκτιμήτριας $SV1$

#### Αλγόριθμος $SV1$

**Είσοδος :**  $n$  φυσικός αριθμός μεγαλύτερος του  $0$   
 $p$  πραγματικός αριθμός που ανήκει στο διάστημα  $[0, 1]$   
 $x$  πίνακας πραγματικών αριθμών διάστασης  $n$

**Έξοδος:**  $s$  πραγματικός αριθμός

*Procedure*  $SV1(n, p, x)$

```
for  $i=1$  to  $n$  step 1  
     $sv=SV1\_J(n,p,i)$   
endfor  
 $s=W\_S(sv,x,n)$   
return ( $s$ )  
endprocedure
```

### 7.1.8. Αλγόριθμος υπολογισμού της εκτιμήτριας SV2

#### Αλγόριθμος SV2

**Είσοδος :**  $n$  φυσικός αριθμός μεγαλύτερος του 0  
 $p$  πραγματικός αριθμός που ανήκει στο διάστημα  $[0,1]$   
 $x$  πίνακας πραγματικών αριθμών διάστασης  $n$

**Έξοδος:**  $s$  πραγματικός αριθμός

```
Procedure  $SV2(n,p,x)$   
for  $i=1$  to  $n$  step 1  
     $sv=SV2\_J(n,p,i)$   
endfor  
 $s=W\_S(sv,x,n)$   
return ( $s$ )  
endprocedure
```

### 7.1.9. Αλγόριθμος υπολογισμού της εκτιμήτριας SV3

#### Αλγόριθμος SV3

**Είσοδος :**  $n$  φυσικός αριθμός μεγαλύτερος του 0  
 $p$  πραγματικός αριθμός που ανήκει στο διάστημα  $[0,1]$   
 $x$  πίνακας πραγματικών αριθμών διάστασης  $n$

**Έξοδος:**  $s$  πραγματικός αριθμός

```
Procedure  $SV3(n,p,x)$   
for  $i=1$  to  $n$  step 1  
     $sv=SV3\_J(n,p,i)$ 
```

*endfor*

$s = W\_S(sv, x, n)$

*return* (  $s$  )

*endprocedure*

## **7.2. Διαδικασία διαχείρισης του κινδύνου και συστήματα μέτρησης του κινδύνου των πιστωτικών ιδρυμάτων.**

### **7.2.1. Εποπτικές αρχές.**

Η διαδικασία διαχείρισης του κινδύνου των πιστωτικών ιδρυμάτων αποκτά όλο και μεγαλύτερη σημασία. Ο Alan Greenspan σχετικά με τις διαδικασίες των πιστωτικών ιδρυμάτων για τη διαχείριση του κινδύνου αναφέρει “Ο χρόνος και τα γεγονότα δείχνουν ότι παρά την πολυπλοκότητα των συναλλαγών και την διατεινόμενη εμπειρία (*sophistication*) των συστημάτων διαχείρισης, είναι **οι φτωχοί ποιοτικοί παράγοντες** – δηλαδή, η έλλειψη βασικών πολιτικών και ελέγχων- που πολύ συχνά υπονομεύουν τις τράπεζες. ...

Στις επόμενες δεκαετίες, οι ελεγκτές θα πρέπει να προσαρμοστούν στις νέες τεχνολογίες και στις συνεχώς αυξανόμενης πολυπλοκότητας αγορές. Μια γενιά πριν ο ισολογισμός του προηγούμενου μήνα μιας τράπεζας ήταν μια λογική εκτίμηση της τρέχουσας κατάστασης του ιδρυματος. Σήμερα, για κάποιες τράπεζες, οι ισολογισμοί της προηγούμενης ημέρας είναι σχεδόν παρωχημένοι. Τον 21ο αιώνα αυτό θα είναι αληθές για τις περισσότερες τράπεζες.

**Οι εποπτικές αρχές στο μέλλον θα υποχρεωθούν να βασίζονται πολύ περισσότερο στο πληροφοριακό σύστημα διαχείρισης κινδύνου της τράπεζας για την προστασία από ζημιές. Εμείς οι ελεγκτές θα εμπλακούμε περισσότερο στην αξιολόγηση των διαδικασιών διαχείρισης κινδύνου παρά των αποτελεσμάτων.** ”<sup>139</sup>

Υπάρχουν αρκετά παραδείγματα όπου πιστωτικά ιδρύματα αντιμετώπισαν σημαντικότητα προβλήματα από την έλλειψη ή ελλιπή τήρηση των διαδικασιών διαχείρισης του κινδύνου. Το πιο γνωστό είναι η περίπτωση της Τράπεζας Barings. Ο Nick Leeson, ένας 28-χρονος trader που εργαζόταν στην θυγατρική της Barings στην Σιγκαπούρη, δημιούργησε μεγάλες μη εξουσιοδοτημένες (not authorised) θέσεις (7

---

<sup>139</sup> Global Risk Management "Presentation by Alan Greenspan – Supervisory Approach - Conclusion ", Group of Thirty, Washington, DC 1996

δισεκατομμύρια δολάρια) σε futures στον Nikkei. Επιπλέον πούλησε 35.000 δικαιώματα put και call δημιουργώντας ένα straddle, στοιχηματίζοντας στη σταθερότητα του Nikkei. Το γεγονός ότι η Barings δεν είχε εγκατεστημένο ένα αρκετά εξελιγμένο σύστημα διαχείρισης κινδύνου και το γεγονός ότι ο Leeson είχε αρμοδιότητες τόσο στο front-office όσο και στο back-office του έδωσε τη δυνατότητα να διατηρεί μεγάλες ανοικτές θέσεις τις οποίες έκρυβε σε έναν ειδικό λογαριασμό φάντασμα με αριθμό «88888». Η **πτώση του Nikkei** (από 19.000 → 17.000) λόγω του σεισμού στο Kobe (17 Ιανουαρίου 1995) οδήγησε την τράπεζα σε χρεοκοπία στις 27 Φεβρουάριο του 1995. Η ζημιά ήταν τελικά περίπου **1.3 δισεκατομμύρια δολάρια**.

Οι εποπτικές αρχές έχουν πλέον θεσπίσει ποιοτικούς κανόνες<sup>140</sup> σε σχέση με τη διαδικασία διαχείρισης του κινδύνου οι βασικότεροι είναι:

- I. Το πιστωτικό ίδρυμα θα πρέπει να έχει μια ανεξάρτητη μονάδα ρύθμισης κινδύνου (risk control) που να είναι υπεύθυνη για τον σχεδιασμό και την υλοποίηση του συστήματος διαχείρισης κινδύνου της τράπεζας.
- II. Η μονάδα αυτή θα πρέπει να εφαρμόζει ένα τακτικό backtesting πρόγραμμα.
- III. Το Διοικητικό Συμβούλιο και τα διευθυντικά στελέχη θα πρέπει να εμπλέκονται ενεργά στην διαδικασία ρύθμισης του κινδύνου και θα πρέπει να αντιλαμβάνονται τη ρύθμιση του κινδύνου σαν ένα βασικό κομμάτι της δουλειάς στο οποίο πρέπει να αφιερωθούν σημαντικοί πόροι.
- IV. Το εσωτερικό μοντέλο μέτρησης του κινδύνου πρέπει να είναι σε μεγάλο βαθμό ενοποιημένο με την καθημερινή διαδικασία διαχείρισης του κινδύνου.
- V. Το σύστημα διαχείρισης του κινδύνου πρέπει να χρησιμοποιείται σε συμφωνία με τις εσωτερικές συναλλαγές και τα όρια έκθεσης.
- VI. Πρέπει να υπάρχει ένα καθημερινό και αυστηρό πρόγραμμα stress testing σε συμπλήρωμα στην ανάλυση κινδύνου που βασίζεται στο καθημερινό αποτέλεσμα του μοντέλου μέτρησης του κινδύνου της τράπεζας.
- VII. Οι τράπεζες πρέπει να έχουν μια διαδικασία για να εξασφαλίζουν τη συμβατότητα του συνόλου των καταγεγραμμένων εσωτερικών πολιτικών, ελέγχων και διαδικασιών με το σύστημα μέτρησης του κινδύνου.

---

<sup>140</sup> “International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards, A Revised Framework”

- VIII. Μια ανεξάρτητη κριτική του συστήματος μέτρησης κινδύνου πρέπει να γίνεται ανά τακτά χρονικά διαστήματα από την εσωτερική επιθεώρηση της τράπεζας.
- IX. Επιπλέον ανά τακτά χρονικά διαστήματα θα πρέπει να γίνεται επιθεώρηση της όλης διαδικασίας διαχείρισης του κινδύνου η οποία να ελέγχει κατ' ελάχιστο τα παρακάτω:
- Την επάρκεια της τεκμηρίωσης του συστήματος διαχείρισης κινδύνου καθώς και των διαδικασιών διαχείρισης κινδύνου.
  - Την οργάνωση της μονάδας ρύθμισης του κινδύνου.
  - Την ενσωμάτωση των μέτρων μέτρησης του κινδύνου αγοράς στην καθημερινή διαχείριση του κινδύνου.
  - Τη διαδικασία αποδοχής των μοντέλων τιμολόγησης με βάση τον κίνδυνο (risk pricing models) και των συστημάτων αποτίμησης που χρησιμοποιούνται από το προσωπικό του front-office και του back-office.
  - Την επικύρωση οποιασδήποτε σημαντικής αλλαγής στη διαδικασία μέτρησης του κινδύνου.
  - Το εύρος του κινδύνου αγοράς που συλλαμβάνεται από το μοντέλο μέτρησης του κινδύνου.
  - Την ακεραιότητα του MIS (Management Information System).
  - Την ακρίβεια και την πληρότητα των δεδομένων των θέσεων.
  - Την πιστοποίηση της συνέπειας, της επικαιρότητας και της αξιοπιστίας των πηγών των δεδομένων που χρησιμοποιούνται από τα εσωτερικά μοντέλα.
  - Την ακρίβεια και την καταλληλότητα των υποθέσεων για τη μεταβλητότητα (volatility) και τη συσχέτιση (correlation).
  - Την ακρίβεια του υπολογισμού της αποτίμησης και του μετασχηματισμού του κινδύνου.
  - Την πιστοποίηση της ακρίβειας των μοντέλων μέσω συχνών back tests όπως περιγράφεται στο “Supervisory Framework for the Use of Backtesting in Conjunction with the Internal Models Approach to Market Risk Capital Requirements”.



### 7.2.2. Πιστωτικά ιδρύματα

Η διαδικασία της μέτρησης του κινδύνου των πιστωτικών ιδρυμάτων απαιτεί τη χρησιμοποίηση μεγάλων όγκων ιστορικών δεδομένων και πολύ συχνά πολύπλοκους υπολογισμούς. Επιπλέον η χρήση της προσομοίωσης Monte Carlo μπορεί να είναι πολύ συχνή στη διαδικασία αυτή. Η προσομοίωση Monte Carlo είναι μια επίπονη διαδικασία ακόμη και στην πιο απλή της μορφή καθώς πρέπει να επαναληφθούν οι ίδιοι υπολογισμοί<sup>141</sup> χιλιάδες φορές. Αν λάβουμε υπόψη μας και το γεγονός ότι κατά τη διαδικασία μέτρησης του κινδύνου πρέπει να είναι διαθέσιμα και τα στοιχεία του χαρτοφυλακίου του πιστωτικού ιδρύματος τότε αντιλαμβανόμαστε πως η όλη διαδικασία είναι πολύπλοκη και απαιτεί πολλούς πόρους.

Όμως η μέτρηση του κινδύνου δεν αρκεί. Παραδείγματα σαν της Barings αλλά και οι οδηγίες των εποπτικών αρχών πιέζουν τα πιστωτικά ιδρύματα για τη δημιουργία διαδικασιών διαχείρισης του κινδύνου τους.

Τα πιστωτικά ιδρύματα έχοντας συνειδητοποιήσει την κρισιμότητα και την πολυπλοκότητα της διαχείρισης του κινδύνου τους προσπαθούν να υποβοηθήσουν τη διαδικασία αυτή με τη χρήση “Enterprise-wide Risk Management”<sup>142</sup> (ERM) συστημάτων. Τα ERM συστήματα μπορεί να έχουν και RAROC (Risk adjusted return on capital ) δυνατότητες. Τα RAROC συστήματα παρέχουν εκτός από τη διαχείριση κινδύνου και δυνατότητες αξιολόγησης της απόδοσης (performance evaluation). Έτσι τα RAROC συστήματα μπορούν να βοηθήσουν στο να κατανεμηθεί το διαθέσιμο κεφάλαιο του πιστωτικού ιδρύματος σε συγκεκριμένα τμήματα ή διαπραγματευτές με βάση την σταθμισμένη με τον κίνδυνο απόδοσή τους. Η λογική του RAROC είναι ότι μια επένδυση δεν πρέπει να την βλέπουμε μονόπλευρα λαμβάνοντας υπόψη μόνο την αναμενόμενη ή ιστορική απόδοσή της, αλλά πρέπει να συνυπολογίζεται και ο κίνδυνος που την συνοδεύει, άρα και το κεφάλαιο που πρέπει να διατηρούμε για να προστατευτούμε από τον κίνδυνο αυτό.

---

<sup>141</sup> Οι ίδιοι αυτοί υπολογισμοί δίνουν διαφορετικά αποτελέσματα κάθε φορά καθώς ένας ή και περισσότεροι αριθμοί που συμμετέχουν στους υπολογισμούς είναι τυχαίοι και παράγονται με τη χρήση γεννήτριας τυχαίων αριθμών.

<sup>142</sup> Jorion 2001

Το να εφαρμοστεί ένα ενιαίο σύστημα διαχείρισης κινδύνου σε όλο το πιστωτικό ίδρυμα μπορεί να είναι μια μεγάλη τεχνολογική πρόκληση. Το πιστωτικό ίδρυμα θα πρέπει να πάρει αρχικά μια μεγάλη απόφαση για το εάν θα αναπτύξει μόνο του (in-house) το σύστημα ή θα το πάρει έτοιμο (out-source). Ορισμένα πιστωτικά ιδρύματα θεωρούν ότι η διαχείριση του κινδύνου είναι στρατηγικής σημασίας και πρέπει το σύστημα διαχείρισης του κινδύνου να αναπτυχθεί εσωτερικά (in-house). Αυτό δίνει τη δυνατότητα της πλήρους προσαρμογής του συστήματος στις ανάγκες του πιστωτικού ιδρύματος και της διαφοροποίησης από τους ανταγωνιστές.

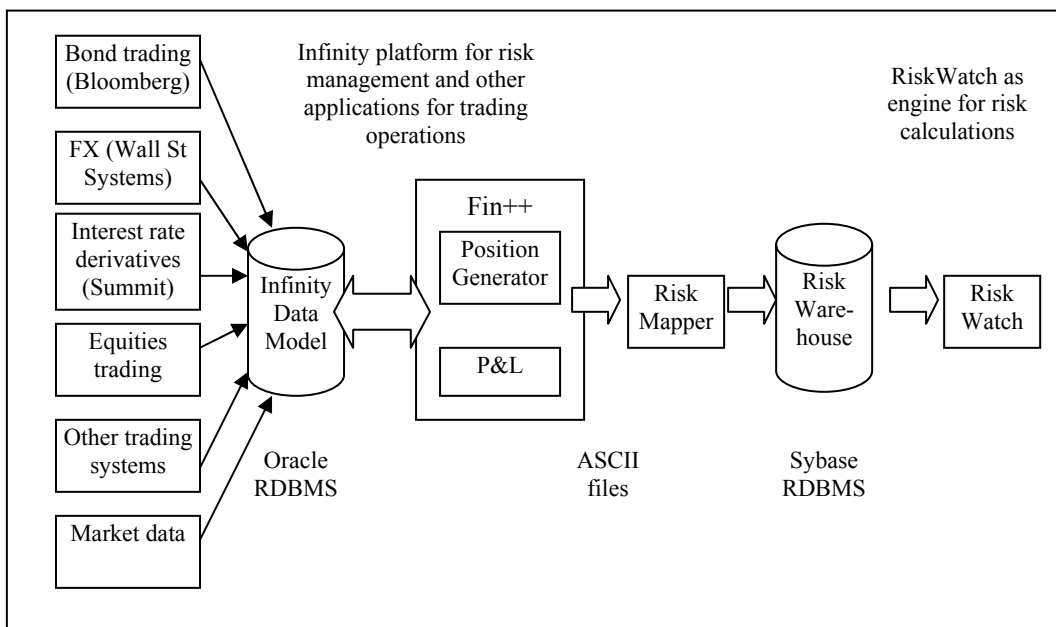
Εταιρείες λογισμικού που έχουν αντιληφθεί την ανάγκη των τραπεζών για συστήματα μέτρησης του κινδύνου παρέχουν εδώ και χρόνια έτοιμες λύσεις (πίνακας 7-1). Τα προϊόντα αυτών των εταιρειών μπορούν να ομαδοποιηθούν ανά λειτουργικότητα σε τρεις ομάδες.

- Τα “front-to-back office” συστήματα που αρχικά ήταν συστήματα αποτίμησης και συστήματα σύναψης συμφωνιών (deals) και εξελίχθηκαν σε ολοκληρωμένα συστήματα σύναψης και διεκπεραίωσης συμφωνιών.
- Τα συστήματα ρύθμισης του κινδύνου (middle-office systems) που χρησιμοποιούνται από τα ανεξάρτητα τμήματα ρύθμισης (middle-office) του κινδύνου για να παρακολουθούν τους διαπραγματευτές και τον συνολικό κίνδυνο του πιστωτικού ιδρύματος.
- Τα συστήματα διαπραγμάτευσης (trading systems ή front-office systems) που χρησιμοποιούνται από τους διαπραγματευτές για να τιμολογήσουν συμφωνίες και για να παρακολουθούν τις τρέχουσες θέσεις.

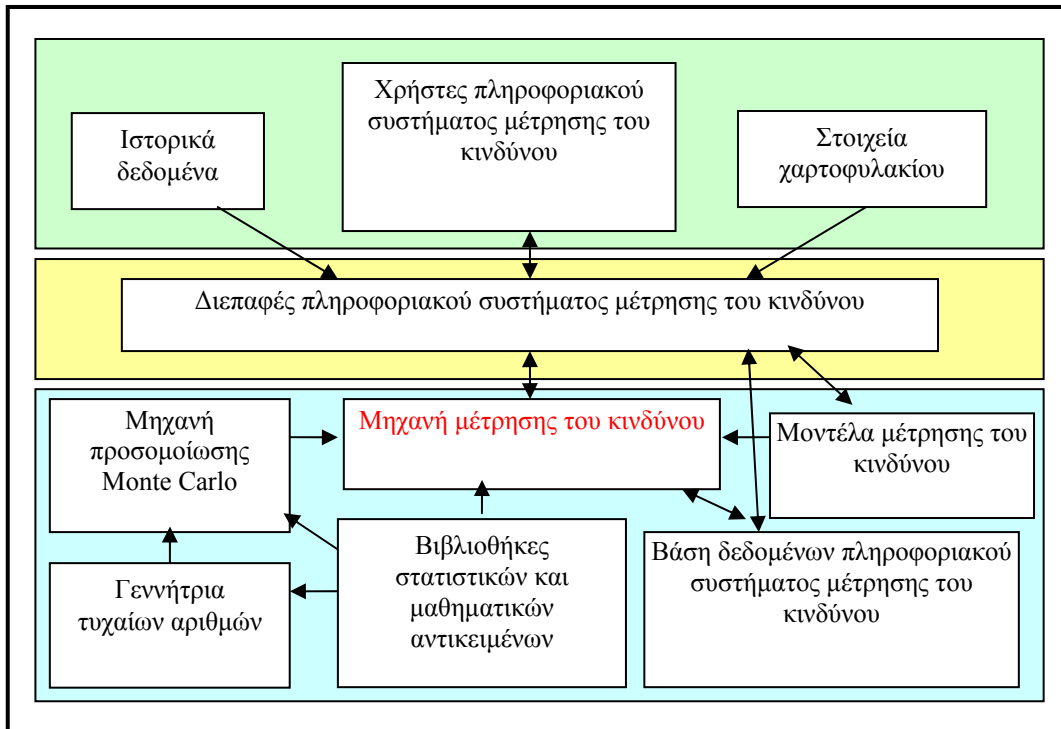
Τα ERM συστήματα δεν έχουν μία συγκεκριμένη μορφή και μπορεί να αποτελούνται από ένα σύνολο άλλων υποσυστημάτων. Στην εικόνα 7-1 περιγράφεται το ERM σύστημα της Commerzbank. Ένα τυπικό ERM σύστημα θα μπορούσε να είναι αυτό της εικόνας 7-2. Αυτό το σύστημα χωρίζεται σε τρία επίπεδα. Το πρώτο επίπεδο περιλαμβάνει τους χρήστες του ERM συστήματος και τις πηγές παροχής των δεδομένων εισόδου. Οι χρήστες του ERM συστήματος είναι α) η ανώτερη διοίκηση β) οι διαχειριστές κινδύνου και γ) οι διαπραγματευτές. Οι πληροφορίες που οι διάφοροι χρήστες του ERM συστήματος αντλούν από το σύστημα καταγράφονται στον πίνακα 7-2.

Company	Software	Operating System	Credit Risk	VaR implementation
<b>Front-to-Back Office</b>				
Brady plc	Trinity	Unix, NT		V-cov, hist, MC
Infinity	/ Panorama	Unix	Integrated	V-cov, hist, MC
Sunquard				
Summit Systems	Summit	Unix, NT	Integrated	V-cov, hist, MC
Theoretics	Targa	Win		V-cov, MC
<b>Middle Office</b>				
Alogorithmics	RiskWatch	Unix	Integrated	V-cov, hist, MC
Axiom	RiskMonitor	Unix, Win	Integrated	V-cov, hist, MC
MKIRisk	CARMA	Unix, NT	Integrated	V-cov, hist, MC
Reuters	Sailfish	Unix, Win		V-cov, hist
<b>Front Office</b>				
RiskMetrics	Fourfifteen	Excel		V-cov
Fin. Assoc.	Engin. Outlook	Excel		V-cov, MC
NBRM	Universal	Excel		V-cov, MC

**Πίνακας 7-1 Συστήματα μέτρησης του κινδύνου, πηγή Jorion (2001)**



**Εικόνα 7-1 ERM σύστημα της Commerzbank, πηγή Meridien Research**



**Εικόνα 7-2 Τυπικό ERM σύστημα**

Το δεύτερο επίπεδο περιλαμβάνει τις διεπαφές του ERM συστήματος. Οι διεπαφές αυτές συνδέουν το τρίτο επίπεδο με το πρώτο επίπεδο. Οι διεπαφές αυτές είναι διεπαφές χρηστών (Graphical User Interface GUI, Character Mode Interface, Command Line Interface, κτλ), διεπαφές προγραμμάτων (Application Program to Program Communication APPC), διεπαφές δεδομένων (αρχεία, βάσεις δεδομένων). Με τη χρήση αυτών των διεπαφών μπορεί ο χρήστης να ζητάει και να παίρνει πληροφορίες σχετικά με το επίπεδο του κινδύνου προϊόντων ή χαρτοφυλακίων και μπορεί να παραμετροποιεί τη μηχανή μέτρησης του κινδύνου (πχ επίπεδο εμπιστοσύνης) και τα μοντέλα μέτρησης του κινδύνου (πχ συντελεστές πολύ-παραγοντικών μοντέλων). Επιπλέον μέσω αυτών των διεπαφών μπορεί το ERM σύστημα να επικοινωνεί με άλλα συστήματα (πχ SAP, TREMA's Finance Kit, κτλ) που θα του παρέχουν δεδομένα (ιστορικά δεδομένα, στοιχεία χαρτοφυλακίου). Τέλος με τη χρήση αυτών των διεπαφών το ERM σύστημα μπορεί να αντλεί δεδομένα από αρχεία και βάσεις δεδομένων.

Users	Level of Detail	Information	Main Features	Timing
Senior managers	Firm-wide	P&L, positions, VaR	Clarity and brevity, few factors, firm-wide scenarios	Daily; weekly
Risk managers	Firm-wide, dept.-wide, books	P&L, positions, VaR	Drill-down capability, scenarios, sensitivity analysis, regulatory reports	Daily; intraday
Dealers	Book level	P&L, positions, limits, VaR	Single-deal analysis, pricing, hedging, marginal VaR	Real time

**Πίνακας 7-2 Πληροφορίες που οι χρήστες του ERM συστήματος αντλούν από το σύστημα, πηγή Jorion (2001)**

Το τρίτο επίπεδο αποτελείται από έναν πυρήνα που καλείται μηχανή μέτρησης του κινδύνου. Ο πυρήνας αυτός συντονίζει την παραγωγή των μετρήσεων του κινδύνου. Εκτός του πυρήνα στο επίπεδο αυτό υπάρχουν τα μοντέλα μέτρησης του κινδύνου που περιγράφουν<sup>143</sup> ακριβώς τα δεδομένα που πρέπει να χρησιμοποιηθούν και τις ενέργειες που πρέπει να γίνουν από τον πυρήνα για να μετρηθεί ο κίνδυνος ενός προϊόντος ή ενός χαρτοφυλακίου. Ο πυρήνας χρησιμοποιεί την μηχανή προσομοίωσης Monte Carlo όταν αυτό απαιτείται από το μοντέλο και μαθηματικά και στατιστικά αντικείμενα που βρίσκονται σε μία βιβλιοθήκη. Τέλος, ο πυρήνας καταγράφει τις ενέργειες και τα αποτελέσματα σε μία βάση δεδομένων. Σε αυτή τη βάση δεδομένων είναι αποθηκευμένο και το προφίλ ασφάλειας του συστήματος (χρήστες και κωδικοί ασφαλείας, προνόμια χρήσης, κτλ).

### **7.3. Ενσωμάτωση των νέων εκτιμητριών ποσοστιαίου σημείου στα πληροφοριακά συστήματα των πιστωτικών ιδρυμάτων.**

Οι νέες εκτιμήτριες ποσοστιαίου σημείου μπορούν να βελτιώσουν τη μέτρηση τόσο του κινδύνου αγοράς όσο και του πιστωτικού κινδύνου και η ενσωμάτωση τους στο ERM σύστημα του πιστωτικού ιδρύματος θα βοηθήσει στο σωστότερο υπολογισμό του κινδύνου του.

<sup>143</sup> Η περιγραφή των μοντέλων θα μπορούσε να γίνει με χρήση XML αρχείων που είναι εύκολα μεταφέρσιμα μεταξύ των διαφορετικών συστημάτων

Όμως η πολυμορφία των ERM συστημάτων δεν επιτρέπει την διατύπωση ενός ενιαίου τρόπου ενσωμάτωσης των νέων ΕΠΣ. Για το λόγο αυτό θα παρουσιαστεί ένας τρόπος ενσωμάτωσης των νέων ΕΠΣ στο τυπικό ERM σύστημα που παρουσιάστηκε στην προηγούμενο τμήμα της διατριβής (Εικόνα 7-2).

Η ενσωμάτωση των νέων μεθόδων θα γίνει σε δύο στάδια α) ένταξη των νέων ΕΠΣ στη βιβλιοθήκη μαθηματικών και στατιστικών αντικειμένων του ERM συστήματος β) δημιουργία νέων μοντέλων μέτρησης του κινδύνου ή τροποποίηση των υπαρχόντων μοντέλων, έτσι ώστε να ενσωματώνουν τη χρήση των νέων αντικειμένων με βάση τις προτάσεις του πέμπτου και έκτου κεφαλαίου

Η ένταξη των νέων μεθόδων υπολογισμού του ποσοστιαίου σημείου σαν νέα αντικείμενα στην βιβλιοθήκη μαθηματικών και στατιστικών αντικειμένων είναι μια διαδικασία που εξαρτάται από το είδος της βιβλιοθήκης. Το είδος της βιβλιοθήκης καθορίζεται τόσο από το λειτουργικό σύστημα στο οποίο «ζει» ο πυρήνας του ERM συστήματος, όσο και από τη γλώσσα προγραμματισμού στην οποία έχει γραφεί. Ένας τρόπος να παρακάμψουμε αυτή την ιδιαιτερότητα είναι να καταστήσουμε διαθέσιμες τις νέες μεθόδους μέσα από Web Services<sup>144</sup>. Η κλήση ενός Web Service από έναν χρήστη γίνεται απλά μέσα από έναν Web Browser όμως η κλήση ενός Web Service από ένα πρόγραμμα προϋποθέτει κατάλληλη υποδομή από το πρόγραμμα. Στην περίπτωση μας η υποδομή αυτή θα πρέπει να προϋπάρχει ή να δημιουργηθεί στον πυρήνα του ERM συστήματος.

Τα νέα μοντέλα μέτρησης κινδύνου που πρέπει να δημιουργηθούν θα βασίζονται σε υπάρχοντα μοντέλα. Ουσιαστικά η μόνη αλλαγή που απαιτείται αφορά στην ΕΠΣ που χρησιμοποιεί το μοντέλο. Εάν θεωρήσουμε: α) ότι τα μοντέλα μέτρησης του κινδύνου περιγράφονται με xml αρχεία, β) ότι έχουν αναπτυχθεί Web Services που υλοποιούν τις νέες ΕΠΣ και γ) ότι ο πυρήνας του ERM συστήματος έχει τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσει Web Services τότε στην Εικόνα 7-3 παρουσιάζεται ένα xml έγγραφο

---

<sup>144</sup> Τα Web Services δίνουν τη δυνατότητα να χρησιμοποιούνται υπηρεσίες από προγράμματα και χρήστες που «ζουν» σε απομακρυσμένα συστήματα. Τα Web Services μας δίνουν την ευκολία να χρησιμοποιήσουμε μια υπηρεσία χωρίς να μας ενδιαφέρει πώς και από ποιόν παράγεται αυτή η υπηρεσία. Έτσι ένα πρόγραμμα ή ένας χρήστης που «ζει» σε ένα περιβάλλον MS Windows μπορεί να χρησιμοποιεί μέσω Web Service μια υπηρεσία που παρέχεται από ένα άλλο σύστημα πχ ένα IBM Main Frame.

που περιγράφει την ιστορική προσομοίωση με χρήση των νέων ΕΠΣ. Στο έγγραφο αυτό καταγράφεται:

- i. το όνομα του μοντέλου (**ModelName Historic Simulation SV**)
- ii. ο τύπος του μοντέλου (**ModelType Historic Simulation**)
- iii. το πλήθος των παρατηρήσεων θα χρησιμοποιηθούν (**Data\_Window 250**)
- iv. για θετικές θέσεις (**Long**)
  - a. το p (**0,01**)
  - b. το όνομα της ΕΠΣ που θα χρησιμοποιηθεί (**SV2**)
  - c. ο τύπος του προγράμματος που υλοποιεί την ΕΠΣ (**Web Service**)
  - d. οι παράμετροι (όνομα, τύπος) κλήσης του προγράμματος που υλοποιεί την ΕΠΣ (**<J>int</J><N>int</N><P>float</P>**)
  - e. οι τιμές (όνομα, τύπος) που επιστρέφονται από την κλήση του προγράμματος που υλοποιεί την ΕΠΣ (**<SV2Result>double</SV2Result>**)
- v. για αρνητικές θέσεις (**Short**)
  - a. το p (**0,99**)
  - b. το όνομα της ΕΠΣ που θα χρησιμοποιηθεί (**SV3**)
  - c. ο τρόπος χρησιμοποίησης του προγράμματος που υλοποιεί την ΕΠΣ (**Web Service**)
  - d. οι παράμετροι κλήσης του προγράμματος που υλοποιεί την ΕΠΣ (**<J>int</J><N>int</N><P>float</P>**)
  - e. οι τιμές που επιστρέφονται από την κλήση του προγράμματος που υλοποιεί την ΕΠΣ (**<SV3Result>double</SV3Result>**)

Η μηχανή μέτρησης κινδύνου του ERP συστήματος θα μεταφράσει το xml έγγραφο σε ενέργειες που θα πρέπει να κάνει για να υπολογίσει το VaR μιας θέσης χρησιμοποιώντας ιστορικής προσομοίωσης. Για θετικές θέσεις θα υπολογίσει το VaR με χρήση της SV2 και για αρνητικές με χρήση της SV3.

```
<?xml version="1.0" encoding="utf-8" ?>
-<UniPi_ERM_System>
  <ModelName>Historic Simulation SV</ModelName>
  <ModelType>Historic Simulation</ModelType>
  <Data_Window>250</Data_Window>
  -<Parameters>
    - <Long>
      <P>0,01</P>
      - <Quantile_Estimator>
        <Name>SV2</Name>
        <Type>Web Service</Type>
        <U_R_L>http://127.0.0.1/websevice/SV_QE_WebService/SVQ
        uantileEstimators.asmx? op=SV2</U_R_L>
        - <SOAPRequest_Parameters>
          <J>int</J>
          <N>int</N>
          <P>float</P>
        </SOAPRequest_Parameters>
        - <SOAPResponse_Parameters>
          <SV2Result>double</SV2Result>
        </SOAPResponse_Parameters>
      </Quantile_Estimator>
    </Long>
    - <Short>
      <P>0,99</P>
      - <Quantile_Estimator>
        <Name>SV3</Name>
        <Type>Web Service</Type>
        <U_R_L>http://127.0.0.1/websevice/SV_QE_WebService/SVQ
        uantileEstimators.asmx? op=SV3</U_R_L>
        - <SOAPRequest_Parameters>
          <J>int</J>
          <N>int</N>
          <P>float</P>
        </SOAPRequest_Parameters>
        - <SOAPResponse_Parameters>
          <SV3Result>double</SV3Result>
        </SOAPResponse_Parameters>
      </Quantile_Estimator>
    </Short>
  </Parameters>
</UniPi_ERM_System>
```

Εικόνα 7-3 Xml έγγραφο περιγραφής μοντέλου μέτρησης κινδύνου

#### 7.4.Διεπαφές χρήσης των αλγορίθμων υπολογισμού των νέων εκτιμητριών ποσοστιαίου σημείου

Για να μπορέσουν να χρησιμοποιηθούν οι νέες εκτιμήτριες υπολογισμού ποσοστιαίου σημείου θα πρέπει να κατασκευαστούν μονάδες λογισμικού<sup>145</sup> που να υλοποιούν τους αλγόριθμους που δημιουργήθηκαν στην §7.1. Αυτές οι μονάδες λογισμικού θα πρέπει να

<sup>145</sup> Ο όρος μονάδες λογισμικού χρησιμοποιείται εναλλακτικά των όρων προγράμματα, βιβλιοθήκες συναρτήσεων και αντικείμενων και Web Services.



μπορούν να κληθούν από χρήστες ή και «προγράμματα». Για να διευκολυνθεί η χρήση των νέων μεθόδων κατασκευάστηκαν μονάδες λογισμικού που υλοποιούν τους πιο πάνω αλγορίθμους και παρέχουν διαφορετικές διεπαφές.

Οι μονάδες λογισμικού που κατασκευάστηκαν είναι:

- Το Excel Add-In με όνομα SVQuantileEstimators.xla
- Το Web Service με όνομα SVQuantileEstimators.aspx
- Η GAUSS βιβλιοθήκη με όνομα SVQuantileEstimators.src

Οι παραπάνω μονάδες λογισμικού δίνουν τη δυνατότητα μέσα από διαφορετικά προγραμματιστικά περιβάλλοντα να δημιουργηθούν οι σταθμίσεις που αντιστοιχούν στις SV1, SV2, και SV3. Η χρήση των σταθμίσεων αυτών επαφίεται στον προγραμματιστή που μπορεί να επιλέξει, ανάλογα με το σχεδιασμό του πληροφοριακού συστήματος που υλοποιεί, να χρησιμοποιήσει τις σταθμίσεις για να εκτιμήσει άμεσα ένα ποσοστιαίο σημείο ή να αποθηκεύσει τις σταθμίσεις για μελλοντική χρήση.

#### 7.4.1. Excel Add-In SVQuantileEstimators.xla

Το Excel Add-In SVQuantileEstimators.dll περιέχει τις πιο κάτω συναρτήσεις:

SV1(j,n,p) → Επιστρέφει την στάθμιση j της εκτιμήτριας SV1 για τον υπολογισμό του p ποσοστιαίου σημείου με μέγεθος δείγματος n

SV2(j,n,p) → Επιστρέφει την στάθμιση j της εκτιμήτριας SV2 για τον υπολογισμό του p ποσοστιαίου σημείου με μέγεθος δείγματος n

SV3(j,n,p) → Επιστρέφει την στάθμιση j της εκτιμήτριας SV3 για τον υπολογισμό του p ποσοστιαίου σημείου με μέγεθος δείγματος n

Bin(j,n,p) → Επιστρέφει την τιμή  $B(j;n,p)$  δηλαδή την τιμή της Διωνυμικής κατανομής, όπου j είναι ο αριθμός των επιτυχιών, n το σύνολο των δοκιμών και p η πιθανότητα επιτυχίας σε μία δοκιμή.

NJ(n,j) → Επιστρέφει την τιμή του διωνυμικού συντελεστή  $\binom{n}{j}$ .

Η χρήση των πιο πάνω συναρτήσεων είναι εφικτή μετά την εγκατάσταση και ενεργοποίηση του Excel Add-In SVQuantileEstimators.xla μέσα από το MS Excel.

Οι πιο πάνω συναρτήσεις έχουν υλοποιηθεί με τη χρήση της γλώσσας προγραμματισμού Visual Basic.

```
Function NJ(N As Integer, J As Integer) As Double
```

```
Dim w As Integer
```

```
Dim X As Double
```

```
X = 1
```

```
For w = 0 To N - J - 1
```

```
    X = X * ((N - w) / (N - J - w))
```

```
Next
```

```
NJ = X
```

```
End Function
```

```
Function Bin(J As Integer, N As Integer, P As Single) As Double
```

```
Dim X As Double
```

```
X = NJ(N, J) * (P ^ J) * ((1 - P) ^ (N - J))
```

```
Bin = X
```

```
End Function
```

```
Function SV1(J As Integer, N As Integer, P As Single) As Double
```

```
Dim X As Double
```

```
If J > 3 And J < N - 2 Then
```

```
    X = (Bin(J, N, P) + Bin(J - 1, N, P)) / 2
```

```
ElseIf J = 1 Then
```

```
    X = (2 * Bin(0, N, P) + Bin(1, N, P)) / 2
```

```
ElseIf J = 2 Then
```

```
    X = (Bin(2, N, P) + Bin(1, N, P) + Bin(0, N, P)) / 2
```

```
ElseIf J = 3 Then
```

$$X = (\text{Bin}(3, N, P) + \text{Bin}(2, N, P) - \text{Bin}(0, N, P)) / 2$$

ElseIf J = N - 2 Then

$$X = (\text{Bin}(N - 3, N, P) + \text{Bin}(N - 2, N, P) - \text{Bin}(N, N, P)) / 2$$

ElseIf J = N - 1 Then

$$X = (\text{Bin}(N - 2, N, P) + \text{Bin}(N - 1, N, P) + \text{Bin}(N, N, P)) / 2$$

Else

$$X = (\text{Bin}(N - 1, N, P) + \text{Bin}(N, N, P)) / 2$$

End If

SV1 = X

End Function

Function SV2(J As Integer, N As Integer, P As Single) As Double

Dim X As Double

If J = N Then

$$X = 2 * \text{Bin}(N, N, P) + \text{Bin}(N - 1, N, P)$$

ElseIf J = N - 1 Then

$$X = \text{Bin}(N - 2, N, P) - \text{Bin}(N, N, P)$$

Else

$$X = \text{Bin}(J - 1, N, P)$$

End If

SV2 = X

End Function

Function SV3(J As Integer, N As Integer, P As Single) As Double

Dim X As Double

If J = 1 Then

$$X = 2 * \text{Bin}(0, N, P) + \text{Bin}(1, N, P)$$

ElseIf J = 2 Then

$$X = \text{Bin}(2, N, P) - \text{Bin}(0, N, P)$$

Else

$$X = \text{Bin}(J, N, P)$$

End If

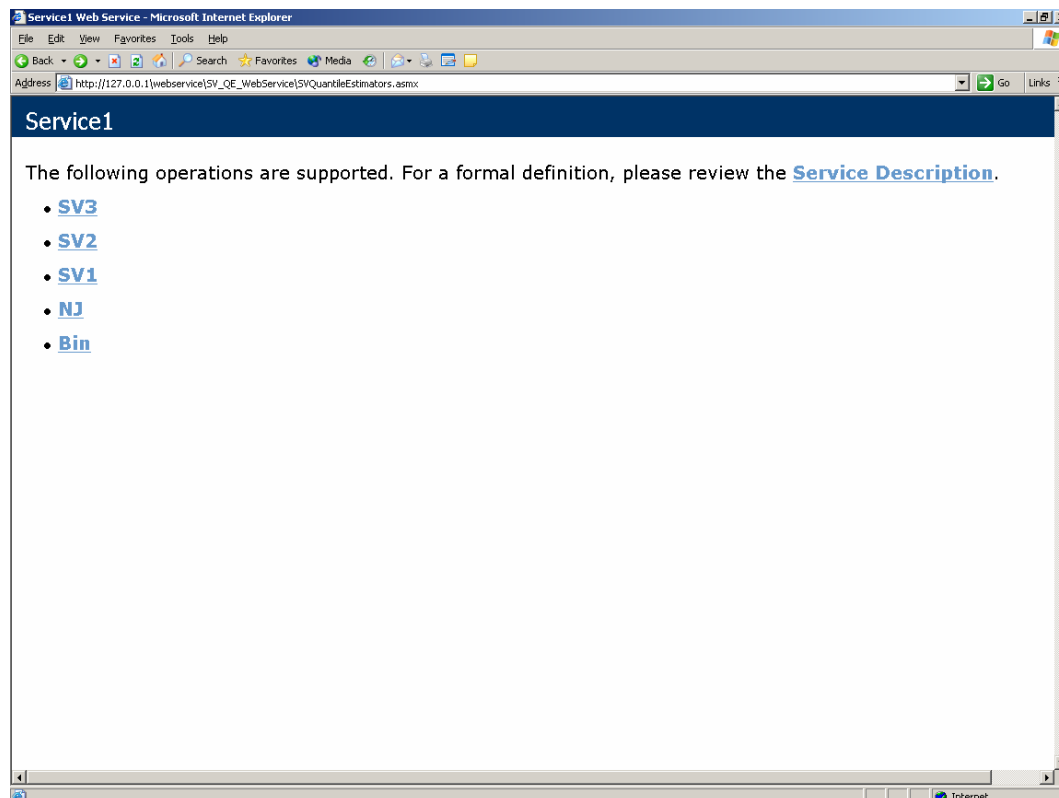
SV3 = X

End Function

#### 7.4.2. Web Service SVQuantileEstimators.aspx

To Web Service SVQuantileEstimators.aspx δίνει τις λειτουργίες (Εικόνα 7-2):

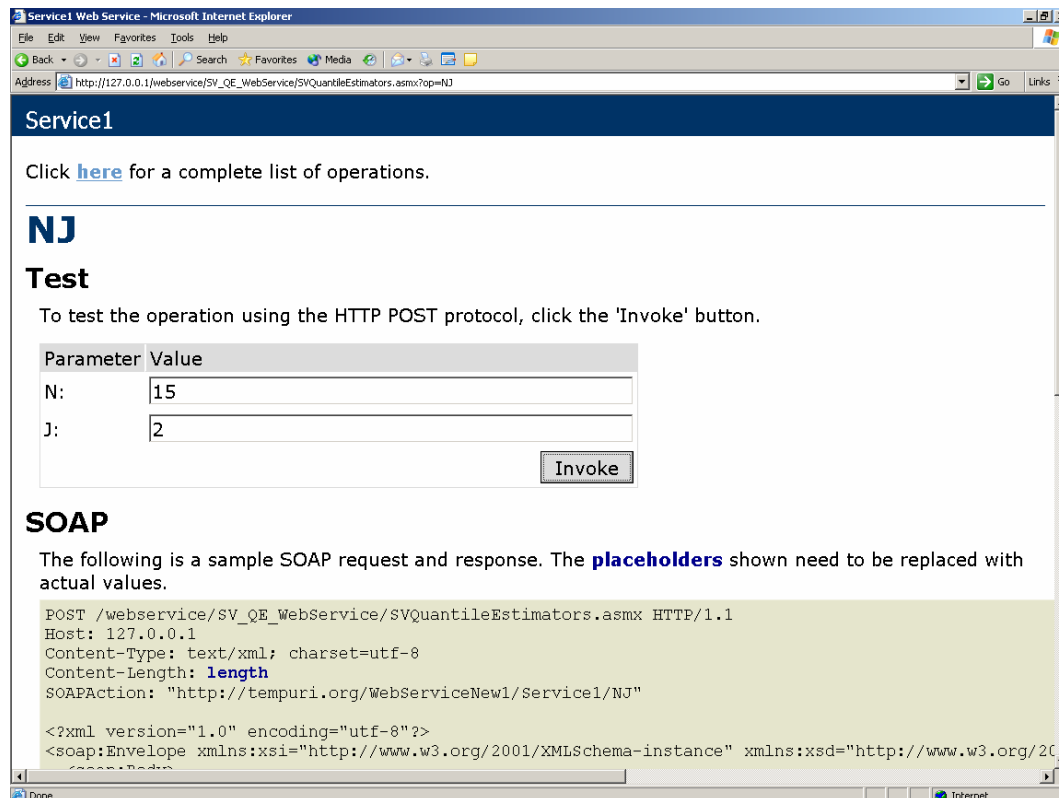
- NJ Παράμετροι:  $n, j$  Επιστρέφει: το διωνυμικό συντελεστή
- Bin Παράμετροι:  $j, n, p$  Επιστρέφει: την τιμή  $B(j; n, p)$
- SV1 Παράμετροι:  $j, n, p$  Επιστρέφει: την  $j$  στάθμιση της SV1
- SV2 Παράμετροι:  $j, n, p$  Επιστρέφει: την  $j$  στάθμιση της SV2
- SV3 Παράμετροι:  $j, n, p$  Επιστρέφει: την  $j$  στάθμιση της SV3



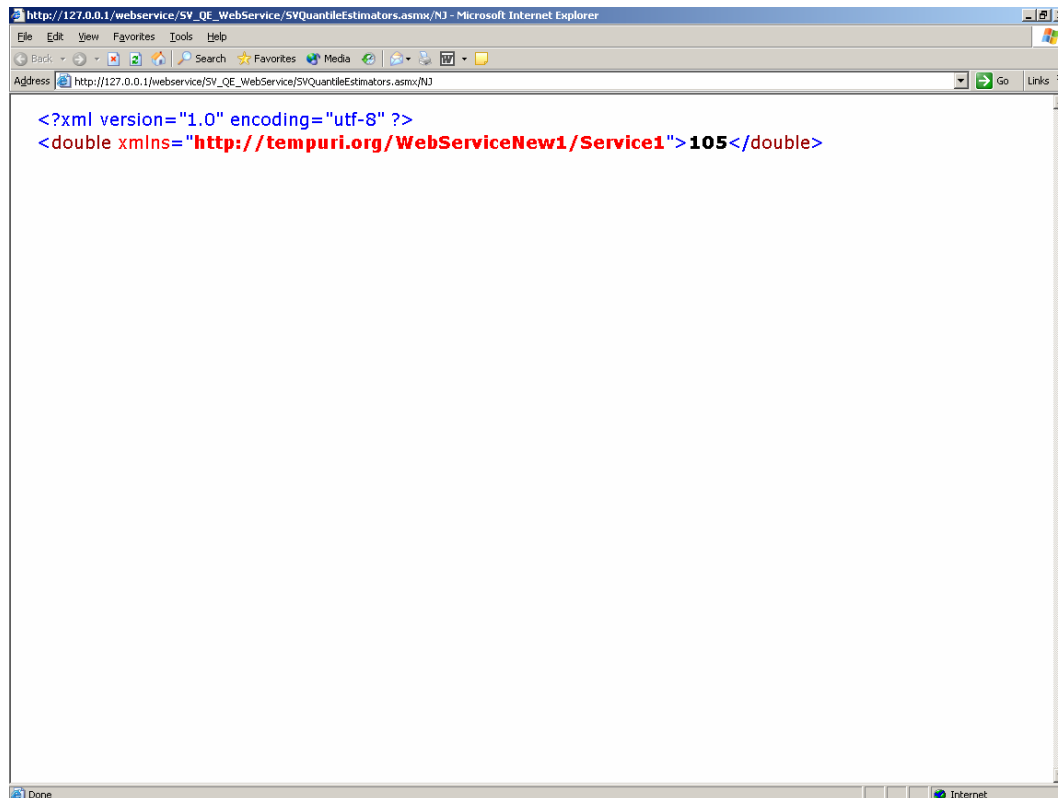
**Εικόνα 7-4** Λειτουργίες (Operations) του Web Service SVQuantileEstimators.aspx

To Web Service SVQuantileEstimators.aspx μπορεί να χρησιμοποιηθεί από οποιοδήποτε πρόγραμμα υποστηρίζει επικοινωνία με χρήση Web Service. Ένας εύκολος τρόπος να το δοκιμάσουμε είναι μέσα από έναν Web Browser (Εικόνα 7-3). Επιλέγοντας οποιαδήποτε

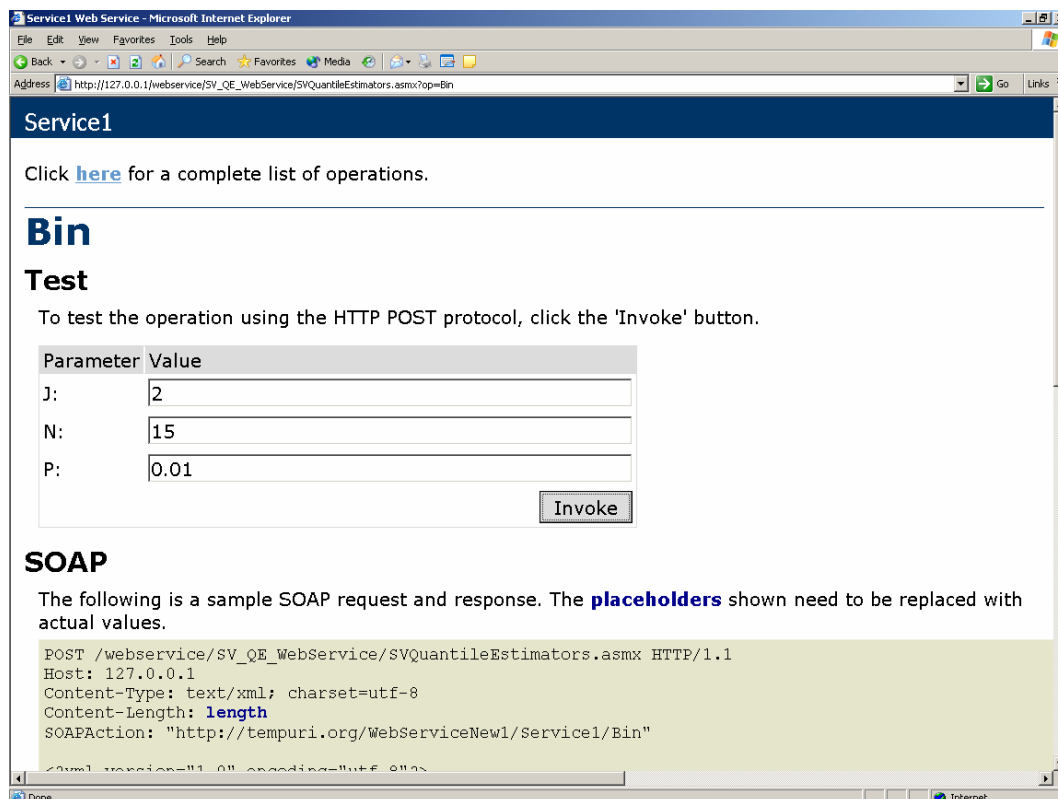
από τις λειτουργίες του (Operations) εμφανίζεται στον Web Browser μία διεπαφή μέσα από την οποία μπορούμε να περάσουμε τιμές (Εικόνα 7-5, 7-7, 7-9, 7-11, 7-13) και να προκαλέσουμε την διενέργεια της λειτουργίας (Πλήκτρο Invoke). Το Web Service απαντάει στέλνοντας στον Web Browser ένα XML Document που είναι ορατό μέσα από τον Web Browser (Εικόνα 7-6, 7-8, 7-10, 7-12, 7-14)



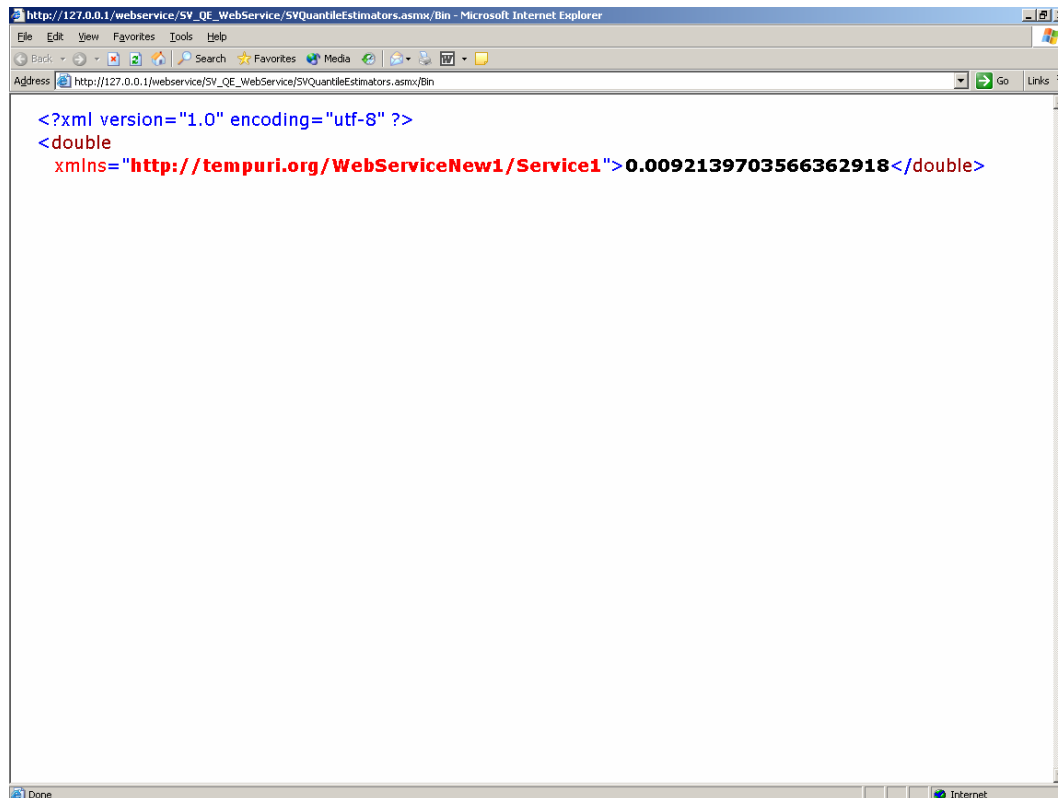
Εικόνα 7-5 Διεπαφή Λειτουργίας (Operation) NJ



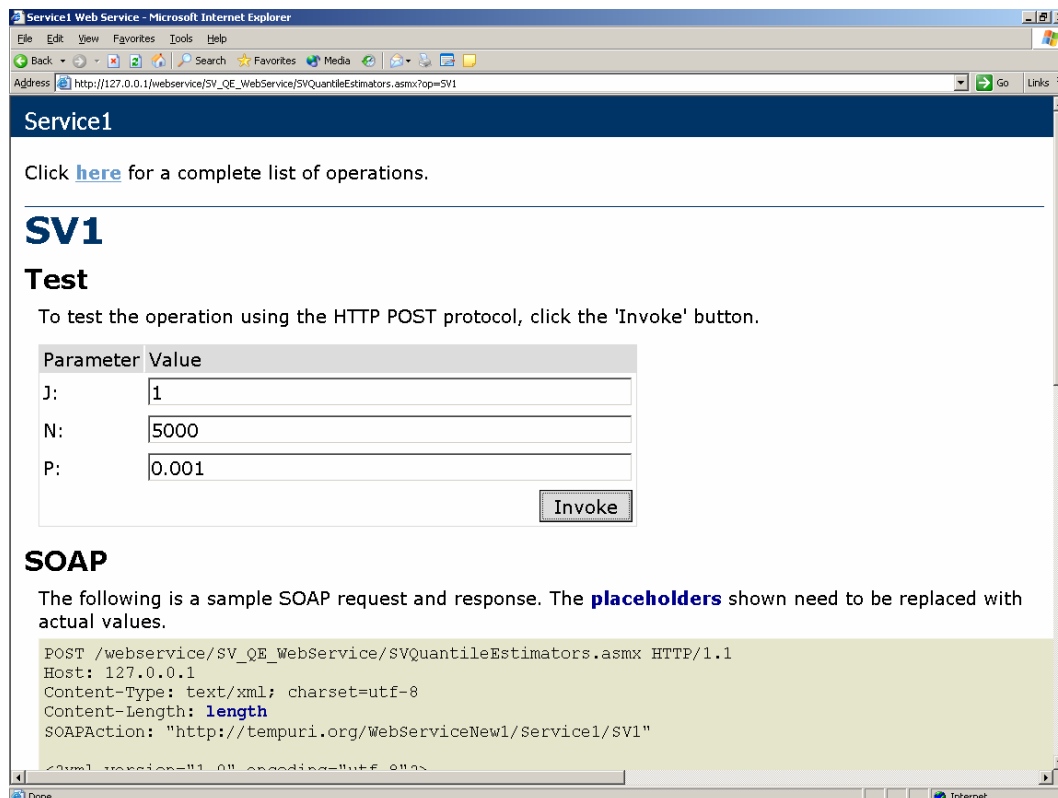
Εικόνα 7-6 Αποτέλεσμα κλήσης της Λειτουργίας (Operation) NJ



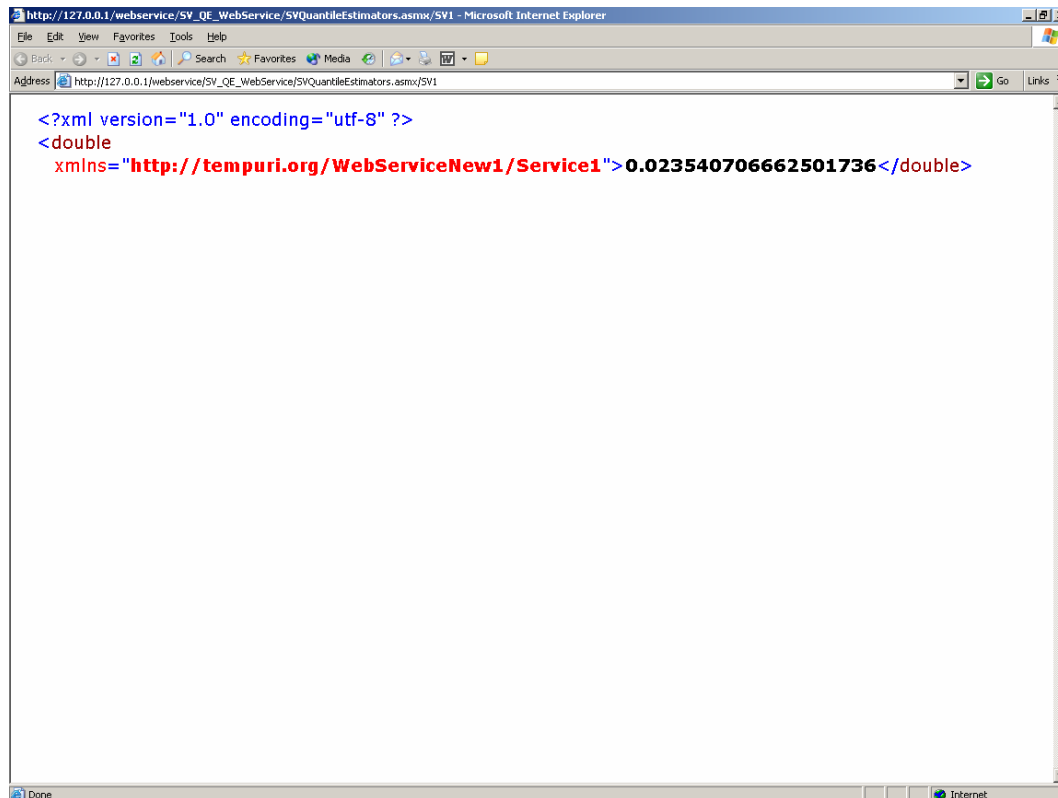
Εικόνα 7-7 Διεπαφή Λειτουργίας (Operation) Bin



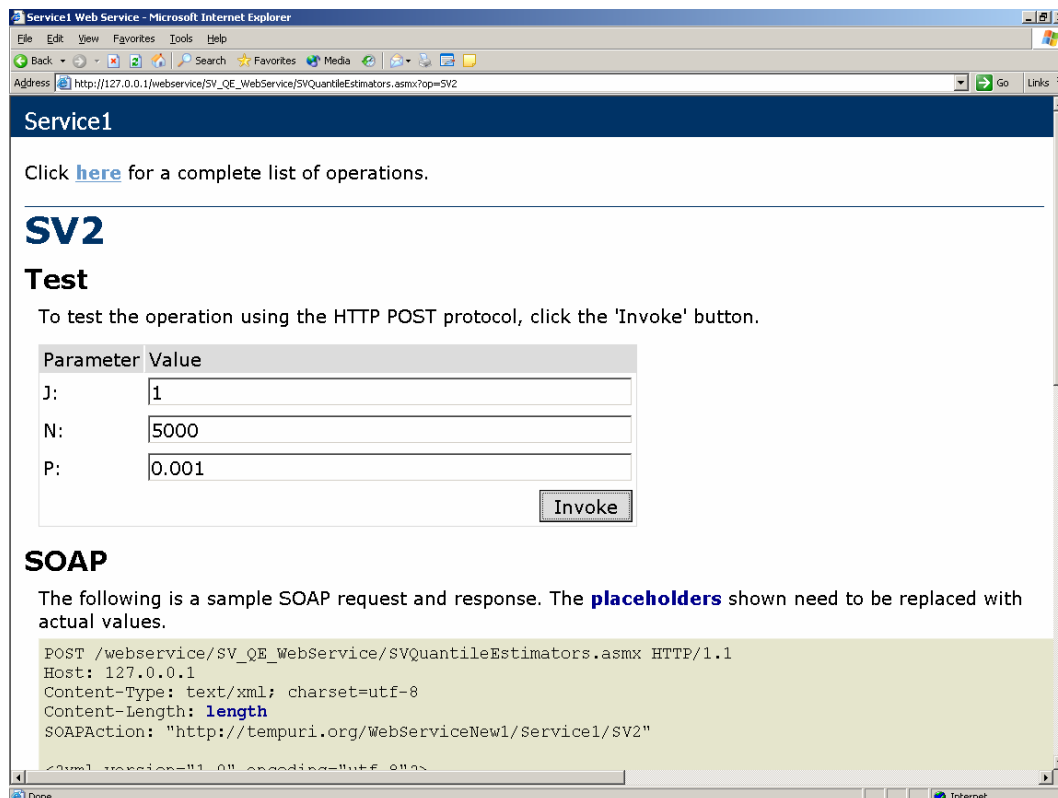
Εικόνα 7-8 Αποτέλεσμα κλήσης της Λειτουργίας (Operation) Bin



Εικόνα 7-9 Διεπαφή Λειτουργίας (Operation) SV1

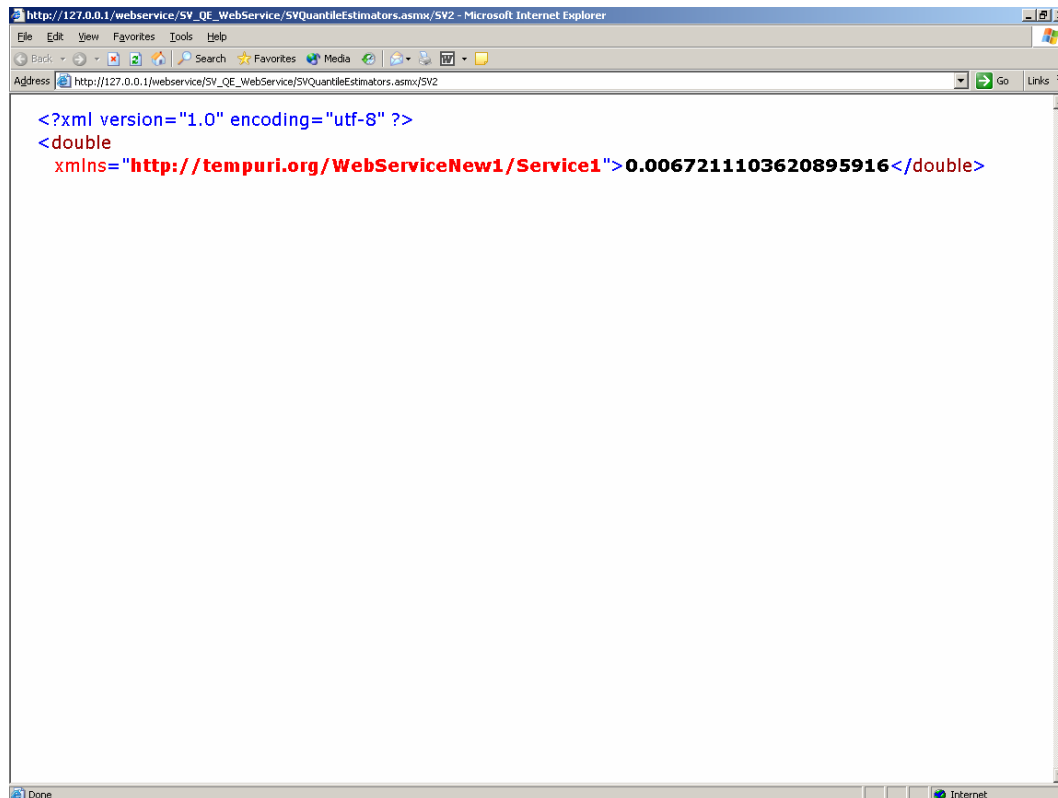


Εικόνα 7-10 Αποτέλεσμα κλήσης της Λειτουργίας (Operation) SV1

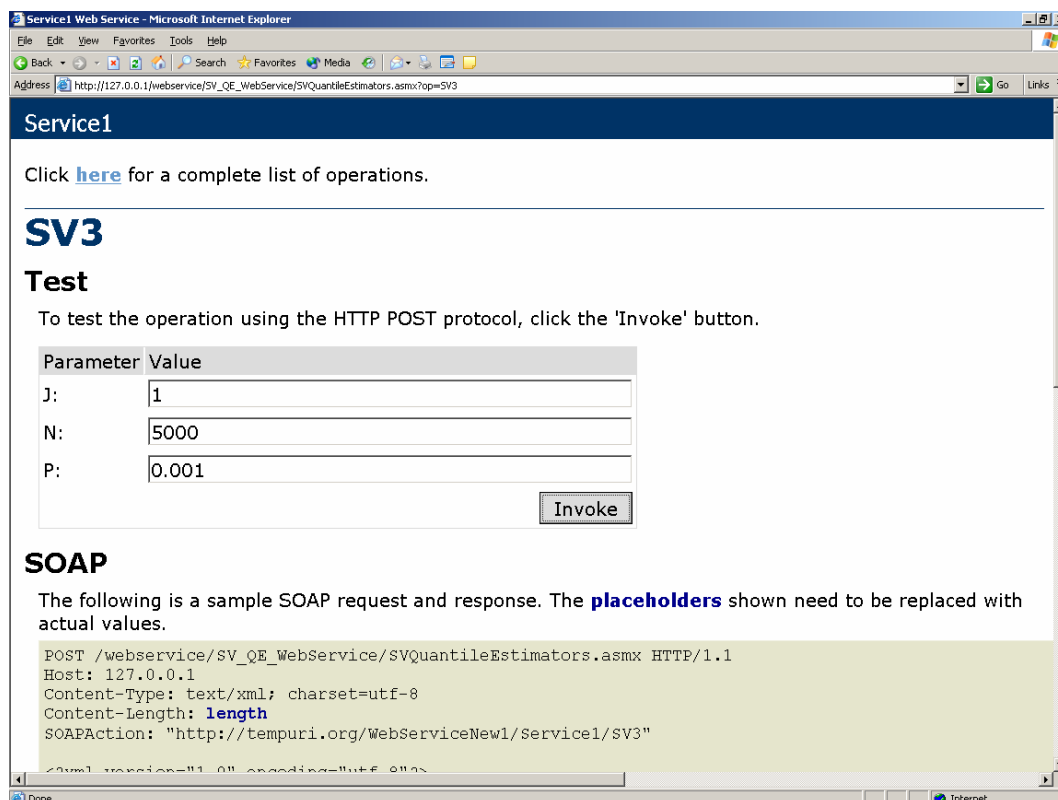


Εικόνα 7-11 Διεπαφή Λειτουργίας (Operation) SV2

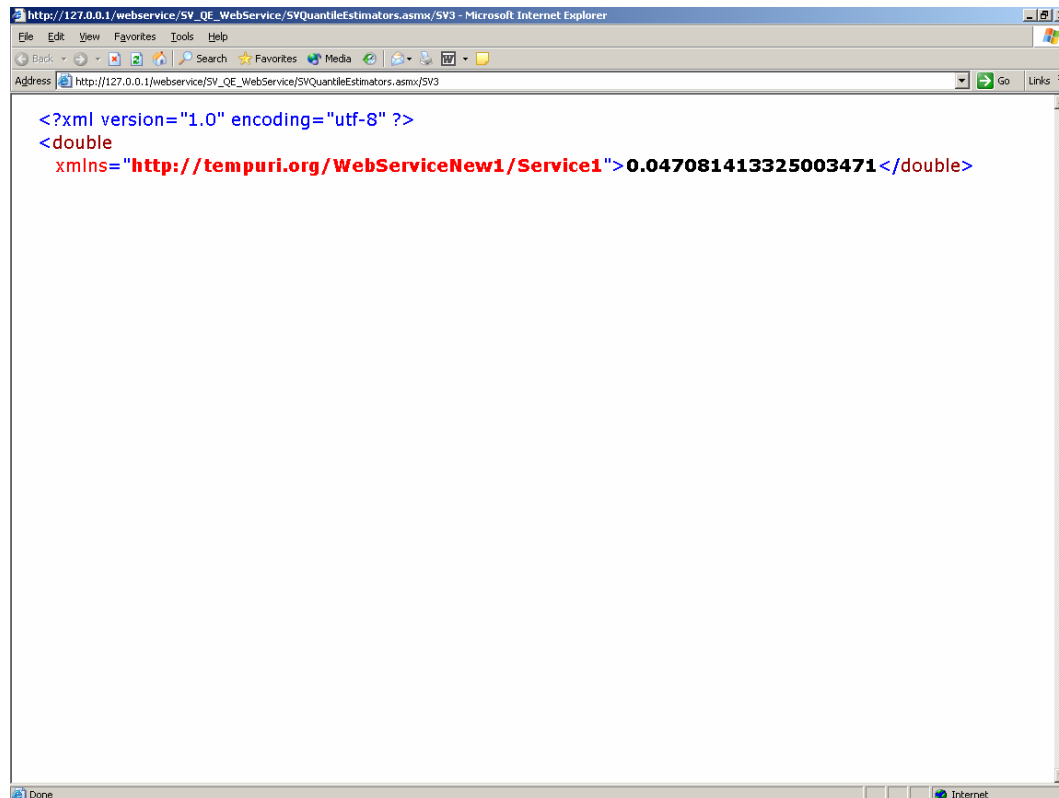




Εικόνα 7-12 Αποτέλεσμα κλήσης της Λειτουργίας (Operation) SV2



Εικόνα 7-13 Διεπαφή Λειτουργίας (Operation) SV3



Εικόνα 7-14 Αποτέλεσμα κλήσης της Λειτουργίας (Operation) SV3

#### 7.4.3. GAUSS βιβλιοθήκη SVQuantileEstimators.src

Μέσα στην GAUSS βιβλιοθήκη SVQuantileEstimators.src υπάρχουν οι παρακάτω procedures:

SV1(j,n,p) → Επιστρέφει την στάθμιση j της εκτιμήτριας SV1 για τον υπολογισμό του p ποσοστιαίου σημείου με μέγεθος δείγματος n

SV2(j,n,p) → Επιστρέφει την στάθμιση j της εκτιμήτριας SV2 για τον υπολογισμό του p ποσοστιαίου σημείου με μέγεθος δείγματος n

SV3(j,n,p) → Επιστρέφει την στάθμιση j της εκτιμήτριας SV3 για τον υπολογισμό του p ποσοστιαίου σημείου με μέγεθος δείγματος n

Bin(j,n,p) → Επιστρέφει την τιμή B(j;n,p) δηλαδή την τιμή της Διωνυμικής κατανομής, όπου j είναι ο αριθμός των επιτυχιών, n το σύνολο των δοκιμών και p η πιθανότητα επιτυχίας σε μία δοκιμή.

NJ(n,j) → Επιστρέφει την τιμή του διωνυμικού συντελεστή  $\binom{n}{j}$ .

```

/*****/
/** Calculate Binomial Coefficient *****/
/*****/

proc NJ(n,j);
local w;
x=1;
for w ( 0, N-j-1, 1);
    x=x*((N-w)/(N-j-w));
endfor;
retp(x);
endp;
/*****/
/** Routine for Calculating Binomial Distribution **/
/*****/

proc Bin (j,n,p);
local x;
x=NJ(n,j) * (p^j) * ((1-p)^(n-j));
retp( x );
endp;
/*****/
/** Routine for calculating SV1 weights **/
/*****/

proc SV1(n,p,j);
if (j>3 and j<n-2);
    x=(Bin(j,n,p)+Bin(j-1,n,p))/2;
elseif (j==1);
    x= (2*Bin(0,n,p)+Bin(1,n,p))/2;
elseif (j==2);
    x= (Bin(2,n,p)+Bin(1,n,p)+Bin(0,n,p))/2;
elseif (j==2);
    x= (Bin(3,n,p)+Bin(2,n,p)-Bin(0,n,p))/2;
elseif (j==n-2);
    x= (Bin(n-3,n,p)+Bin(n-2,n,p)-Bin(n,n,p))/2;

```

```
elseif (j==n-1);  
    x = (Bin(n-2,n,p)+Bin(n-1,n,p)+Bin(n,n,p))/2;  
else;  
    x = (Bin(n-1,n,p)+Bin(n,n,p))/2;  
endif;  
retp( x );  
endp;  
/*****/  
/** Routine for calculating SV2 weights **/  
/*****/  
proc SV2(n,p,j);  
if (j==n);  
    x = 2*Bin(n,n,p)+Bin(n-1,n,p);  
elseif (j==n-1);  
    x = Bin(n-2,n,p)-Bin(n,n,p);  
else;  
    x=Bin(j-1,n,p);  
endif;  
retp( x );  
endp;  
/*****/  
/** Routine for calculating SV3 weights **/  
/*****/  
proc SV3(n,p,j);  
if (j==1);  
    x = 2*Bin(0,n,p)+Bin(1,n,p);  
elseif (j==2);  
    x = Bin(2,n,p)-Bin(0,n,p);  
else;  
    x=Bin(j,n,p);  
endif;  
retp( x );  
endp;
```

## **8ο Κεφάλαιο**

### **Σύνοψη συμπερασμάτων**



## Περιεχόμενα

8.	Σύνοψη συμπερασμάτων.....	289
8.1.	Θέματα προς περαιτέρω διερεύνηση.....	293





## 8. Σύνοψη συμπερασμάτων

Τα πιστωτικά ιδρύματα εμπορεύονται και επενδύουν σε χρηματοοικονομικά προϊόντα αναλαμβάνοντας τους παρακάτω βασικούς κινδύνους:

1. Πιστωτικό κίνδυνο (Credit Risk)
2. Κίνδυνο Αγοράς (Market Risk)
3. Λειτουργικό κίνδυνο (Operational risk)
4. Κίνδυνο Ρευστότητας (Liquidity Risk)

Έγινε ανάλυση των τρόπων μέτρησης του κινδύνου αγοράς και του πιστωτικού κινδύνου των πιστωτικών ιδρυμάτων τόσο από την οπτική των εποπτικών αρχών όσο και από την οπτική των πιστωτικών ιδρυμάτων. Από την ανάλυση αυτή προέκυψε το συμπέρασμα ότι το βασικό εργαλείο για την μέτρηση του κινδύνου είναι το Value at Risk (VaR).

Το VaR μας δίνει, τη χειρότερη ζημία που θα μπορούσαμε να υποστούμε από μια επένδυση (χρηματοοικονομικό προϊόν ή χαρτοφυλάκιο), για συγκεκριμένο χρονικό ορίζοντα και για συγκεκριμένο επίπεδο εμπιστοσύνης<sup>146</sup>. Το VaR είναι στην ουσία ένα ποσοστιαίο σημείο της κατανομής των αποδόσεων ενός χρηματοοικονομικού προϊόντος ή ενός χαρτοφυλακίου. Έτσι προέκυψε το δεύτερο συμπέρασμα που είναι το ότι πρωτεύοντα ρόλο στην μέτρηση του κινδύνου των πιστωτικών ιδρυμάτων παίζει ο υπολογισμός ενός ποσοστιαίου σημείου  $Q_p$  της ουράς μιας κατανομής  $F$ . Η  $F$  στη μέτρηση του κινδύνου αγοράς είναι η κατανομή των αποδόσεων του χρηματοοικονομικού προϊόντος. Ενώ, στη μέτρηση του πιστωτικού κινδύνου και του λειτουργικού κινδύνου, η  $F$  είναι η κατανομή της ζημίας.

Όταν γίνεται η παραδοχή ότι η  $F$  ανήκει σε συγκεκριμένη οικογένεια κατανομών (πχ είναι κανονική κατανομή) τότε ο υπολογισμός του ποσοστιαίου σημείου γίνεται με τη χρήση παραμετρικών εκτιμητριών ποσοστιαίου σημείου. Αρχικά υπολογίζονται οι τιμές κάποιων χαρακτηριστικών παραμέτρων της οικογένειας (πχ μέση τιμή και διασπορά στην περίπτωση της κανονικής κατανομής) και στη συνέχεια υπολογίζεται το ποσοστιαίο σημείο  $Q_p$  με χρήση της παραμετρικής εκτιμήτριας ποσοστιαίου σημείου.

---

<sup>146</sup> Το επίπεδο εμπιστοσύνης καθορίζει ποια είναι η πιθανότητα η επένδυση μας να έχει απόδοση χειρότερη του VaR.

Όταν δεν γίνεται καμία παραδοχή για τον τύπο της κατανομής  $F$  τότε χρησιμοποιούνται μη παραμετρικές εκτιμήτριες ποσοστιαίου σημείου για τον υπολογισμό του  $Q_p$ . Από την μελέτη της βιβλιογραφίας σχετικά με τις μη παραμετρικές εκτιμήτριες ποσοστιαίου σημείου προέκυψε το συμπέρασμα ότι η πιο αποδοτική εκτιμήτρια είναι η εκτιμήτρια των Harrell και Davis ( $HD_p$ ) ενώ η πιο ευρέως χρησιμοποιούμενη είναι το δειγματικό ποσοστιαίο σημείο ( $SQ_p$ ).

Από την βιβλιογραφία προκύπτει ότι για τον υπολογισμό του VaR όταν χρησιμοποιούνται μη παραμετρικές εκτιμήτριες ποσοστιαίου σημείου συνήθως επιλέγεται η  $WA_p$  (weighted average at  $X_{(np)}$ ). Όμως η  $WA_p$  απαιτεί μεγάλο πλήθος ιστορικών παρατηρήσεων για να αποδώσει. Αυτό δημιουργεί πρόβλημα καθώς οι κατανομές των αποδόσεων των χρηματοοικονομικών προϊόντων δεν παραμένουν σταθερές.

Ο πρώτος στόχος της διατριβής ήταν η εισαγωγή νέων μεθόδων για την αντιμετώπιση / μετριασμό των προβλημάτων της χρήσης των μη παραμετρικών εκτιμητριών ποσοστιαίου σημείου για τον υπολογισμό του VaR έτσι ώστε τα πιστωτικά ιδρύματα να υπολογίζουν με μεγαλύτερη ακρίβεια τον κίνδυνο στον οποίο εκτίθενται.

Το αποτέλεσμα ήταν η παρουσίαση μίας νέας οικογένειας (SV) μη παραμετρικών εκτιμητριών ποσοστιαίου σημείου.

Κατασκευάστηκαν τρεις νέες μη παραμετρικές εκτιμήτριες ποσοστιαίου σημείου οι: SV1, SV2 και SV3 και διερευνήθηκε η απόδοσή τους σε σχέση με την απόδοση των  $WA_p$  και  $HD_p$  (Harrell and Davis) με τη χρήση Monte Carlo προσομοίωσης. Διαπιστώθηκε ότι σε αρκετές περιπτώσεις οι νέες μέθοδοι υπερτερούν των παραδοσιακών μεθόδων<sup>147</sup>.

---

<sup>147</sup> “A New Family of Nonparametric Quantile Estimators”, M. E. Sfakianakis and D. G. Verginis, *Communications in Statistics – Simulation and Computation* Volume37 No2 2008

Ειδικότερα για τον υπολογισμό του VaR, δηλαδή για υπολογισμό ποσοστιαίου σημείου στην ουρά της κατανομής και με μέγεθος δείγματος από 250 έως 750<sup>148</sup> η SV2 για θετικές θέσεις (long) και η SV3 για αρνητικές θέσεις (short) υπερτερούν των άλλων εκτιμητριών.

Διερευνήθηκε η κατανομή των SV1, SV2 και SV3 με σκοπό την κατασκευή διαστημάτων εμπιστοσύνης και προτάθηκε μία διαδικασία κατασκευής διαστημάτων εμπιστοσύνης για τις SV εκτιμήτριες.

Διατυπώθηκε ένα γενικό κριτήριο που καθορίζει τις συνθήκες κάτω από τις οποίες μπορεί να αποκλειστεί η χρήση κάποιων εκ των SV1, SV2 και SV3, υπέρ των άλλων.

Διερευνήθηκε η απόδοση των SV2 και SV3 για τον υπολογισμό του VaR θετικών και αρνητικών θέσεων αντίστοιχα. Χρησιμοποιήθηκαν πραγματικά δεδομένα χρηματοοικονομικών προϊόντων για τον υπολογισμό του ημερήσιου VaR τόσο με τη χρήση ιστορικής προσομοίωσης (HS) όσο και με την μέθοδο των Hull και White (HW). Διαπιστώθηκε α) ότι είναι προτιμότερη η χρήση λιγότερων (250) παρατηρήσεων όταν χρησιμοποιείται η HS, β) είναι προτιμότερη η χρήση περισσότερων (750) παρατηρήσεων όταν χρησιμοποιείται η HW. Οι νέες μέθοδοι, με βάση το κριτήριο Kupiec, υπολόγισαν το VaR τουλάχιστον με την ίδια ακρίβεια σε σχέση με την  $WA_p$ . Ενώ απαιτούν σε κάθε περίπτωση μικρότερο μέσο εποπτικό κεφάλαιο.

Έγινε μελέτη προσομοίωσης Monte Carlo από την οποία προέκυψε ότι η SV3 υπολογίζει το VaR πιστοδοτικών χαρτοφυλακίων με μεγαλύτερη ακρίβεια (είχε μικρότερο απόλυτο Bias και μικρότερο MSE) σε σχέση με τις SV1, SV2, HD και WA.

Η διαδικασία διαχείρισης του κινδύνου του πιστωτικού ιδρύματος αποκτά όλο και μεγαλύτερη σημασία. Οι εποπτικές αρχές με το “International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards, A Revised Framework” (2004, εφαρμογή από 1/1/2007) θεσπίζουν ποιοτικούς κανόνες σε σχέση με τη διαδικασία διαχείρισης του κινδύνου.

---

<sup>148</sup> Οι εποπτικές αρχές απαιτούν την χρησιμοποίηση τουλάχιστον 250 ημερήσιων αποδόσεων για τον υπολογισμό του VaR

Τα πιστωτικά ιδρύματα έχοντας συνειδητοποιήσει την κρισιμότητα και την πολυπλοκότητα της διαχείρισης του κινδύνου τους προσπαθούν να υποβοηθήσουν τη διαδικασία αυτή με τη χρήση “Enterprise-wide Risk Management”<sup>149</sup> (ERM) συστημάτων. Τα ERM συστήματα μπορεί να έχουν και RAROC (Risk adjusted return on capital ) δυνατότητες. Τα RAROC συστήματα παρέχουν εκτός από τη διαχείριση κινδύνου και δυνατότητες αξιολόγησης της απόδοσης (performance evaluation).

Εταιρείες λογισμικού που έχουν αντιληφθεί την ανάγκη των τραπεζών για συστήματα μέτρησης του κινδύνου παρέχουν εδώ και χρόνια έτοιμες λύσεις. Τα προϊόντα αυτών των εταιρειών μπορούν να ομαδοποιηθούν ανά λειτουργικότητα σε τρεις ομάδες α) τα “front-to-back office” συστήματα, β) τα συστήματα ρύθμισης του κινδύνου (middle-office systems) και γ) τα συστήματα διαπραγμάτευσης (trading systems ή front-office systems).

Στο έβδομο κεφάλαιο της διατριβής παρουσιάστηκε ένα τυπικό ERM σύστημα που χωρίζεται σε τρία επίπεδα α) χρήστες του ERM συστήματος και πηγές δεδομένων εισόδου, β) διεπαφές και γ) πυρήνας . Οι χρήστες του ERM συστήματος είναι α) η ανώτερη διοίκηση β) οι διαχειριστές κινδύνου και γ) οι διαπραγματευτές.

Οι νέες εκτιμήτριες ποσοστιαίου σημείου μπορούν να βελτιώσουν τη μέτρηση τόσο του κινδύνου αγοράς όσο και του πιστωτικού κινδύνου. Η ενσωμάτωση τους στο ERM σύστημα του πιστωτικού ιδρύματος θα βοηθήσει στο σωστότερο υπολογισμό του κινδύνου του. Όμως η πολυμορφία των ERM συστημάτων δεν επιτρέπει την διατύπωση ενός ενιαίου τρόπου ενσωμάτωσης των νέων ΕΠΣ. Για το λόγο αυτό παρουσιάστηκε ένας τρόπος ενσωμάτωσης των νέων ΕΠΣ στο τυπικό ERM σύστημα που παρουσιάστηκε στην §7.2.2. Η ενσωμάτωση γίνεται σε δύο στάδια α) ένταξη των νέων ΕΠΣ στη βιβλιοθήκη μαθηματικών και στατιστικών αντικειμένων του ERM συστήματος β) δημιουργία νέων μοντέλων μέτρησης του κινδύνου ή τροποποίηση των υπάρχοντων μοντέλων έτσι ώστε να ενσωματώνουν τη χρήση των νέων αντικειμένων με βάση τις προτάσεις του πέμπτου και έκτου κεφαλαίου

---

<sup>149</sup> Jorion 2001

Τέλος κατασκευάστηκαν αλγόριθμοι για τον υπολογισμό των SV και δημιουργήθηκε λογισμικό που τους υλοποιεί και διευκολύνει την ενσωμάτωσή τους στα ERM συστήματα των πιστωτικών ιδρυμάτων.

### 8.1. Θέματα προς περαιτέρω διερεύνηση

Με αφετηρία την μελέτη αυτή μπορούν να διερευνηθούν περαιτέρω τα ακόλουθα θέματα.

Η βασική μεθοδολογία με βάση την οποία κατασκευάστηκαν οι SV εκτιμήτριες αντιστοιχίζει σε κάθε ένα από τα  $S_i$  μια σημειακή εκτίμηση  $Q'_{p,i}$  της τυχαίας μεταβλητής  $Q_{p,i} = (Q_p | Q_p \in S_i)$ . Έτσι η SV1 δημιουργήθηκε θέτοντας  $Q'_{p,i} = (x_{(i)} + x_{(i+1)})/2$  η SV2 θέτοντας  $Q'_{p,i} = \sup(Y \in S_i)$  και η SV3 θέτοντας  $Q'_{p,i} = \inf(Y \in S_i)$ . Με τον ίδιο τρόπο θα μπορούσαν να δημιουργηθούν και άλλες SV εκτιμήτριες θέτοντας διαφορετικές τιμές στην  $Q'_{p,i}$ . Για κάθε μια από τις νέες SV εκτιμήτριες θα μπορούσε να γίνει διερεύνηση των περιπτώσεων για τις οποίες αποδίδουν καλύτερα από τις άλλες εκτιμήτριες ποσοστιαίου σημείου χρησιμοποιώντας μεθοδολογία ανάλογη με αυτή του κεφαλαίου 4.

Το θεώρημα 4-1 δίνει έναν κανόνα με βάση τον οποίο μία εκ των SV εκτιμητριών μπορεί να αποκλεισθεί, σαν λιγότερο αποτελεσματική, υπέρ των άλλων SV εκτιμητριών. Η συλλογιστική πίσω από το θεώρημα αυτό θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί σαν αφετηρία για την κατασκευή μίας SV εκτιμήτριας ποσοστιαίου σημείου με δυναμικά μεταβαλλόμενους συντελεστές. Τα  $Q'_{p,i}$  της εκτιμήτριας αυτής δε θα καθορίζονται α priori αλλά θα διαμορφώνονται δυναμικά μετά από επεξεργασία του υπό εξέταση δείγματος.

Η διαδικασία κατασκευής διαστημάτων εμπιστοσύνης για τις SV θα μπορούσε να γενικευτεί. Έτσι θα μπορούσε να δημιουργηθεί μία διαδικασία κατασκευής διαστημάτων για όλες τις μη παραμετρικές εκτιμήτριες ποσοστιαίων σημείων<sup>150</sup>.

---

<sup>150</sup> “Confidence Intervals for Nonparametric Quantile Estimators”, D. G. Verginis, *HERCMA 2007*

Η διερεύνηση της απόδοσης των νέων ΕΠΣ για τον υπολογισμό του VaR πιστοδοτικών χαρτοφυλακίων έγινε με χρήση προσομοίωσης Monte Carlo, θα ήταν χρήσιμο να διερευνηθεί η απόδοση των νέων ΕΠΣ και με χρήση πραγματικών πιστοδοτικών χαρτοφυλακίων, ίσως σε συνεργασία με κάποιο Ελληνικό πιστωτικό ίδρυμα.

Ο λειτουργικός κίνδυνος (Operational Risk), τα τελευταία χρόνια, έχει απασχολήσει τα πιστωτικά ιδρύματα αλλά και τις εποπτικές αρχές<sup>151</sup>. Οι μεθοδολογίες μέτρησης του λειτουργικού κινδύνου βρίσκονται σε εξέλιξη. Ένα βασικό πρόβλημα είναι η συγκέντρωση ιστορικών δεδομένων αλλά και οι προϋποθέσεις κάτω από τις οποίες τα πιστωτικά ιδρύματα μπορούν να χρησιμοποιήσουν ξένα ιστορικά δεδομένα. Σε κάθε περίπτωση η μέτρηση του λειτουργικού κινδύνου δεν διαφέρει στην ουσία από τη μέτρηση του κινδύνου της αγοράς και του πιστωτικού κινδύνου. Έτσι το ζητούμενο είναι ο υπολογισμός της κατανομής των λειτουργικών ζημιών και η εύρεση ενός ποσοστιαίου σημείου<sup>152</sup> της κατανομής αυτής. Ως εκ τούτου οι SV εκτιμήτριες θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν και για τον υπολογισμό του λειτουργικού κινδύνου. Η απόδοση των SV εκτιμητριών στον υπολογισμό του λειτουργικού κινδύνου εξαρτάται από την κατανομή των λειτουργικών ζημιών και θα μπορούσε να διερευνηθεί χρησιμοποιώντας την μεθοδολογία του κεφαλαίου 6.

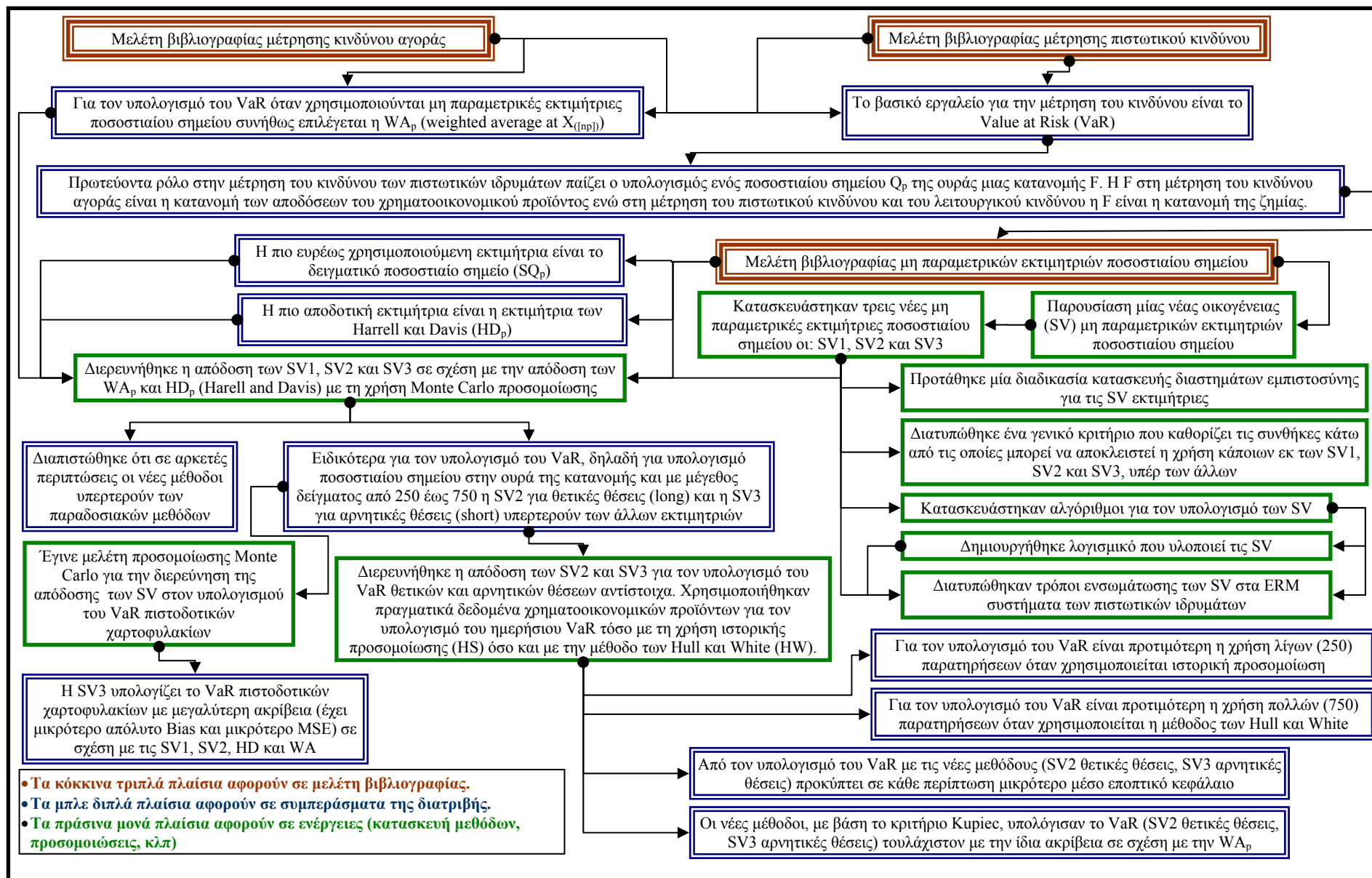
Η χρήση των εκτιμητριών ποσοστιαίου σημείου είναι πολύ διαδεδομένη σε πολλούς επιστημονικούς τομείς. Είναι προφανές πως η διερεύνηση της απόδοσης των SV σε σχέση με τις εκτιμήτριες ποσοστιαίου σημείου που χρησιμοποιούνται στα διάφορα επιστημονικά πεδία είναι μια διαδικασία που μπορεί να δώσει αξιόλογα αποτελέσματα<sup>153</sup>.

---

<sup>151</sup> “International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards, A Revised Framework” EBET Ιούνιος του 2004.

<sup>152</sup> Οι εποπτικές αρχές ορίζουν  $p=0,999$

<sup>153</sup> «Χρήση μη-παραμετρικών εκτιμητριών ποσοστιαίου σημείου για τον καθορισμό των Ορίων Ελέγχου των Χαρτών Ελέγχου Μέσης Τιμής», Μ. Ε. Σφακιανάκης και Δ. Γ. Βεργίνης, 20<sup>ο</sup> Πανελλήνιο Στατιστικό Συνέδριο 2007 – Κύπρος.



### 8-1 Ενέργειες και συμπεράσματα στα πλαίσια της διατριβής





Συγγραφέας	Έτος
<p><b>Τίτλος</b></p> <p><b>Περιοδικό - Εκδότης</b></p>	
Alade J. A. Value at Risk Systems and Their Application in Integrated Risk <i>Journal of Academy of Business and Economics, 3/1/2004</i>	2004
Altman I. E., A. Resti, A. Sironi The Link Between Default and Recovery Rates: Effects on the Procyclicality of Regulatory Capital Ratios <i>BIS Working Papers, No 113</i>	2002
Altman I. E., A. Resti, A. Sironi Analyzing and Explaining Default Recovery Rates <i>Report Submitted to "The International Swaps &amp; Derivatives Association"</i>	2001
Aparicio J. and E. Keskiner A Review of Operational Risk Quantitative Methodologies within the Basel II Framework <i>Accenture Technology Labs</i>	2004
Ayache A., P. A. Forsyth, K. R. Vetzal Valuation of Convertible Bonds With Credit Risk <i>The Journal of Derivatives, Fall 2003</i>	2003
Barder R. J., M. L. Copper Immunization Using Principal Component Analysis <i>The Journal of Portfolio Management</i>	1996
Barone-Adesi G., K. Giannopoulos Non-parametric VaR techniques. Myths and Realities <i>Economic Notes by Banca Monte dei Paschi di Siena SpA, Vol. 30, No. 2-2001, Pages 167-181</i>	2001
Barone-Adesi G., K. Giannopoulos and L. Vosper VaR Without Correlations for Portfolios of Derivatives <i>The Journal of Futures Markets, Vol. 19, No. 5, pages 583-602</i>	1999
Barone-Adesi G., K. Giannopoulos and L. Vosper Filtering Historical Simulation. Backtest Analysis. <i>Working Paper, University of Westminster, March</i>	2000
Basel Committee on Banking Supervision International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards ( A Revised Framework), June 1999 <i>BIS</i>	1999
Basel Committee on Banking Supervision International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards (July 1998, Updated to April 1998) <i>BIS</i>	1998

<b>Συγγραφέας</b>	<b>Έτος</b>
<b>Τίτλος</b>	
<b>Περιοδικό - Εκδότης</b>	
Basel Committee on Banking Supervision Amendment to the Capital Accord to Incorporate Market Risks (January 1996, updated to April 1998)	1998
<i>BIS</i>	
Basel Committee on Banking Supervision International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards, A Revised Framework	2004
<i>BIS</i>	
Basel Committee on Banking Supervision Credit Risk modeling Current Practices and Applications	1999
<i>BIS</i>	
Basel Committee on Banking Supervision International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards	1988
<i>BIS</i>	
Basel Committee on Banking Supervision The Quantitative Impact Study for Operational Risk: Overview of Individual Loss Data and Lessons Learned	2002
<i>BIS</i>	
Basel Committee on Banking Supervision Studies on the Validation of Internal Rating Systems	2005
<i>BIS</i>	
Basel Committee on Banking Supervision Implementation of Basel II: Practical Considerations	2004
<i>BIS</i>	
Basel Committee on Banking Supervision Operational Risk Management	1998
<i>BIS</i>	
Basel Committee on Banking Supervision Sound Credit Risk Assessment and Valuation for Loans	2006
<i>BIS</i>	
Basel Committee on Banking Supervision Treatment of Potential Exposure for Off-Balance-Sheet Items	1995
<i>BIS</i>	
Basel Committee on Banking Supervision Supervisory Framework for the Use of "Backtesting" in Conjunction with the Internal Models Approach to Market Risk Capital Requirements	1996
<i>BIS</i>	

Συγγραφέας	Έτος
<b>Τίτλος</b> <b>Περιοδικό - Εκδότης</b>	
Basel Committee on Banking Supervision An Internal-Based Approach to Market Risk Capital Requirements <i>BIS</i>	1995
Bassi F., P. Embrechts, M. Kafetzaki A Survival Kit on Quantile Estimation <i>Swiss Federal Institute of Technology</i>	1996
Baud N., A. Frachot and T. Roncalli How to Avoid Over-estimating Capital Charge for Operational Risk? <i>Groupe de Recherche Operationnelle, Credit Lyonnais, France</i>	2002
Baud N., A. Frachot and T. Roncalli Internal data, external data and consortium data for operational risk measurement: How to pool data properly? <i>Groupe de Recherche Operationnelle, Credit Lyonnais, France</i>	2002
Beder S. T. VaR: Seductive But Dangerous <i>Financial Analysts Journal 51, Pages 12-24</i>	1995
Beder S. T. Report Card on Value at Risk: High Potential but Slow Starter <i>Bank. Accounting &amp; Finance, Vol. 10, No. 1 (Fall), pages 14-25.</i>	1996
Beder S. T., M. Minnich, H. Shen, J. Stanton Vignettes on VAR <i>The Journal of Financial Engineering-Volume 7-Number 3/4 Pages 289-309</i>	1998
Beirlant J., G. Matthys Quantile Estimation for Heavy-Tailed Data <i>Presentation (UCS)</i>	2000
Benninga S. and Z. Wiener Value-at-Risk (VaR) <i>Mathematician Education and Research Vol. 7 No. 4</i>	1998
Beran R. Jackknife Approximations to Bootstrap Estimates <i>The Annals of Statistics, Vol. 12, No. 1, 10-118</i>	1984
Berenson M. L., D. M. Levine Basic Business Statistics <i>Prentice-Hall</i>	1999

Συγγραφέας	Έτος
<b>Τίτλος</b> <b>Περιοδικό - Εκδότης</b>	
Berkowitz J., P. Christoffersen, D. Pelletier Evaluating Value at Risk Models with Desk-Level Data <i>www.GloriaMundi.org</i>	2005
Bielecki R. T., M. Rutkowski Credit Risk: Modeling , Valuation and Hedging <i>Springer</i>	2002
Billingsley P. Probability and Measures <i>John Wiley &amp; Sons, INC</i>	1986
Blanchard O. Macroeconomics <i>Prentice-Hall</i>	1997
Bluhm C., L. Overbeck, C. Wagner An Introduction to Credit Risk Modeling <i>Chapman &amp; Hall/CRC Financial Mathematics Series</i>	2003
Bollerslev T. Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity <i>Journal of Econometrics, 31, 307-327</i>	1986
Bollerslev T., R. Y. Chou, K. F. Kroner ARCH Modeling in Finance: A review of the Theory and Empirical Evidence <i>Journal of Econometrics, Vol. 52, Issues 1-2, Pages 5-59</i>	1992
Boudoukh J., M. Richardson, F. Whitelaw The Best of Both Worlds <i>Risk 11, Pages 64-67</i>	1998
Butler C. Mastering Value at Risk <i>Financial Times Pitman Publishing</i>	1999
Butler S. J., Schachter B. Estimating Value at Risk with a Precision Measure by Combining Kernel Estimation with Historical Simulation <i>Review of Derivatives Research, January 1998, Pages: 371-390</i>	1997
Cantor R., F. Packer Multiple Ratings and Credit Standards: Differences of Opinion in the Credit rating Industry <i>Federal Reserve Bank of New York, Staff Reports, Number 12</i>	1996

Συγγραφέας	Έτος
<b>Τίτλος</b> <b>Περιοδικό - Εκδότης</b>	
Cantor R., F. Packer The Credit Rating Industry <i>Federal Reserve Bank of New York Quarterly Review / Summer-Fall 1994</i>	1994
Caouette B. J., E. I. Altman, P. Narayanan Managing Credit Risk <i>John Wiley &amp; Sons, INC</i>	1998
Cartellieri U., A. Greenspan The William Taylor Memorial Lecture No. 3: Global Risk Management <i>Group of Thirty</i>	1996
Chapelle A., Y. Crama, G. Hubner and J.-P. Peters Basel II and Operational Risk: Implications for risk measurement and management in the financial sector <i>National Bank of Belgium, Working papers - Research series</i>	2004
Charemza W. W., D. F. Deadman New Directions in Econometric Practice 2nd <i>Edward Elgar</i>	1997
Chen A., N. Ju, S. Mazumdar, and A. Verma Correlated Default Risks and Bank Regulations <i>Journal of Money Credit and Banking, Vol. 38, No. 2, Pages 375 - 398</i>	2006
Chen J. E., W. D. Kelton Quantile and Histogram Estimation <i>Proceedings of the 2001 Winter Simulation Conference</i>	2001
Christoffersen P., J. Hahn, A. Inoue Testing and Comparing Value at Risk Measures <i>Cirano Scientific Series, 2001s-03</i>	2001
Committee of European Banking Supervisors Guidelines on the Implementation, Validation and Assessment of Advanced Measurement (AMA) and Internal Ratings Based (IRB) Approaches <i>CEBS CP 10, 11 July 2005</i>	2005
Committee on the Global Financial System Credit Risk Transfer <i>BIS</i>	2003
Crouhy M., D. Galai, R. Mark A Comparative Analysis of Current Credit Risk Models <i>Journal of Banking &amp; Finance 24, Pages 59-117</i>	2000

Συγγραφέας	Έτος
<b>Τίτλος</b> <b>Περιοδικό - Εκδότης</b>	
David D. H. Order Statistics <i>John Wiley &amp; Sons, INC</i>	1981
Diebold F. X., T. A. Gunther and A. S. Tay Evaluating Density Forecasts <i>International Economic Review, 39, Pages 863-883</i>	1998
Dowd K. Beyond Value at Risk <i>John Wiley &amp; Sons, INC</i>	1998
Duffie D. and J. Pan An overview of the Value at Risk <i>Journal of Derivatives, 4, Spring, Pages 7-49</i>	1997
Dunn L. C. Precise Simulated Percentiles in a Pinch <i>The American Statistician, Vol. 45, No. 3, Pages 207-211</i>	1991
Efron B. Bootstrap Methods: Another Look at the Jackknife <i>The Annals of Statistics, Vol. 7, No. 1, Pages 1-16</i>	1979
Efron B., G. Gong A Leisurely Look at the Bootstrap, the Jackknife, and Cross-Validation <i>The American Statistician, Vol. 31, No. 1, Pages 36-48</i>	1983
Efron B., R. Tibshirani Bootstrap Methods for Standard Errors, Confidence Intervals, and Other measures of Statistical Accuracy <i>Statistical Science, Vol. 1, No. 1, Pages 54-75</i>	1986
El Jahel L., W. Perraudin, P. Sellin Value at Risk for Derivatives <i>Sveriges Riksbank Working Paper Series No. 45, December 1997</i>	1997
Engle F. E. Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation <i>Econometrica, Vol. 50, No. 4, Pages 987-1008</i>	1982
Engle F. E., H. White Cointegration, Causality, and Forecasting <i>Oxford University Press</i>	1999

Συγγραφέας	Έτος
<b>Τίτλος</b> <b>Περιοδικό - Εκδότης</b>	
Engle F. R., S. Manganelli CAViaR: Conditional Value at Risk by Quantile Regression <i>National Bureau of Economic Research, Inc, Working Paper Series No. 7341</i>	1999
Fabozzi J. F. Investment Management <i>Prentice-Hall</i>	1999
Falk M. Relative Deficiency of Kernel Type Estimators of Quantiles <i>The Annals of Statistics, Vol. 12, No. 1, Pages 261-268</i>	1984
Fama E. F. The Behavior of Stock –Market Prices <i>The Journal of Business, Vol. 38, No. 1, January- Pages 34-105</i>	1965
Feridum M. Value at Risk: Any Lessons from the Crash of Long-Term Capital Management (LTCM)? <i>Journal of Business Administration Online, Vol. 4, No. 1</i>	2005
Fontnouvelle P., J. Jordan and E. Rosengren Implication of alternative operational risk modeling techniques <i>National Bureau of Economic Research, Working Paper 11103</i>	2005
Frachot A., P. Georges and T. Roncalli Loss Distribution Approach for operational risk <i>Groupe de Recherche Operationnelle, Credit Lyonnais, France</i>	2001
Gourieroux C., A. Monfort (Translated by Q. Vuong) Statistics and Econometric Models I <i>Cambridge University Press</i>	1995
Gourieroux C., A. Monfort (Translated by Q. Vuong) Statistics and Econometric Models II <i>Cambridge University Press</i>	1995
Hanley J. and D. Teltch The PDF of a Function of a Random Variable: Teaching its Structure by Transforming Formalism into Intuition <i>The American Statistician, Vol. 60, No. 1, February 2006 Pages.61-67</i>	2006
Harrell F. E., C. E. Davis A New Distribution-Free Quantile Estimator <i>Biometrika, Vol. 69, Issue 3 (Dec., 1982), Pages 635-640</i>	1982

Συγγραφέας	Έτος
<b>Τίτλος</b> <b>Περιοδικό - Εκδότης</b>	
Harter L. H. Expected Values of Normal Order Statistics <i>Biometrika, Vol. 48, No. 1/2, Pages 151-165</i>	1961
Hartigan A. J. Using Subsample Values as Typical Values <i>Journal of American Statistical Association Dec. 1969, Vol. 64, No. 328, Theory and Methods, Pages 1301-1317</i>	1969
Hayford D. M., A. G. Malliaris Monetary Policy and the U.S. Stock Market <i>Economic Inquiry, Vol. 42, No. 3, July 2004, Pages 387-401</i>	2004
Hendricks D. Evaluation of Value at Risk Models Using Historical Data <i>Economic Policy Review, Federal Reserve Bank of New York, April, Pages 36-69</i>	1996
Himino R. Basel II - Towards a New Common Language <i>BIS Quarterly Review, September 2004, Pages 41-49</i>	2004
Hiwatashi J. and H. Ashida Advancing Operational Risk Management Using Japanese Banking Experiences <i>Federal Reserve Bank of Chicago</i>	2002
Hollander M., D. A. Wole Nonparametric Statistical Methods <i>John Wiley &amp; Sons, INC</i>	1973
Holton A. G. Close Form Value at Risk <i>Contingency Analysis</i>	1996
Holton A. G. Subjective Value-at-Risk <i>Financial Engineering News, 1 (1), 1 8-9, 11</i>	1997
Hosking R. M. J., L-moments: Analysis and Estimation of Distributions using Linear Combinations of Order Statistics <i>Royal Statistical Society, Vol. 52, No. 1, Pages 105-124</i>	1990
Hull C. J. Futures and Options Markets <i>Prentice-Hall</i>	1998



Συγγραφέας	Έτος
<b>Τίτλος</b> <b>Περιοδικό - Εκδότης</b>	
Hull J., A. White Value at Risk When Daily Changes in Market Variables are Not Normally Distributed <i>Journal of Derivatives, Vol. 5, No. 3, Pages 9-19</i>	1998
Hull J., A. White Incorporating Volatility Updating into the Historical Simulation Method for Value at Risk <i>Journal of Risk 1, Pages 5-19</i>	1998
Huston D. A., M. D. Ernst The Exact Bootstrap Mean and Variance of an L-Estimator <i>Journal of Royal Statistical Society, Series B (Statistical Methodology), Vol. 62, No. 1, Pages 89-94</i>	2000
Hyndman J. R., Y. Fan Sample Quantiles in Statistical Packages <i>The American Statistician (Statistical Computing), Vol. 50, No 4, Pages 361-365</i>	1996
Inui K., M. Kijima, A. Kitano VaR is Subject to a Significant Positive Bias	2003
Jackson P., D. J. Maude, W. Perraudin Bank Capital and Value At Risk <i>Bank of England 1998</i>	1998
Jakobsen S. Measuring Value at Risk for Mortgage Backed Securities <i>Risk Management in Volatile Financial Markets Pages 185-206</i>	1996
Jorion P. Value at Risk <i>McGraw-Hill</i>	2001
Kaigh W. D. & P. A. Lachenbruch A generalized quantile estimator <i>Communications in Statistics</i>	1982
Kendall G. M. The Advanced Theory of Statistics II 5th <i>Hafner Publishing Company</i>	1952
Kendall G. M. The Advanced Theory of Statistics I 5th <i>Hafner Publishing Company</i>	1952

Συγγραφέας	Έτος
<b>Τίτλος</b> <b>Περιοδικό - Εκδότης</b>	
Kiesel R., W. Perraudin, A. Taylor An Extremes Analysis of VARs for Emerging Market Benchmark Bonds <i>Birkbeck College</i>	2000
Kisgen D. Credit Ratings and Capital Structure <i>The Journal of Finance , Volume 61: Issue 1, Pages 1035 - 1072</i>	2006
Kleijnen P. C. J. Statistical Techniques in Simulation II <i>Marcel Dekker, INC</i>	1974
Kleijnen P. C. J. Statistical Techniques in Simulation I <i>Marcel Dekker, INC</i>	1974
Kuczmariski G. J., P. R. Rosenbaum Quantile Plots, Partial Orders, and Financial Risk <i>The American Statistician, Vol. 53, No. 3, Pages 239-246</i>	1999
Kupiec P. Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models <i>Journal of Derivatives 2, Pages 73-84</i>	1995
Law A. & D. Kelton Simulation Modeling and Analysis 3rd edition <i>McGraw-Hill International Series (Industrial Engineering Series)</i>	2000
Lehmann L. E., H. J. M. D'Abbrera Nonparametrics <i>Holden-Day, INC</i>	1975
Leippold M., P. Vanini The Quantification of Operational Risk <i>Available at SSRN: <a href="http://ssrn.com/abstract=481742">http://ssrn.com/abstract=481742</a> or DOI: 10.2139/ssrn.481742</i>	2003
Longin M. F. From Value at Risk to Stress Testing: The Extreme Value Approach <i>Journal of Banking and Finance, Vo. 24, No. 7, July 2000, pages. 1097-1130</i>	2000
Longin M. F. The Asymptotic Distribution of Extreme Stock Market Returns <i>The Journal of Business, Vol. 69, Issue 3 (Jul., 1996), Pages 383-408</i>	1996

Συγγραφέας	Έτος
<b>Τίτλος</b> <b>Περιοδικό - Εκδότης</b>	
Lopez A. J. Regulatory Evaluation of Value at Risk Models <i>Journal of Risk 1, Pages 37-63</i>	1999
Mandelbrot B. The Variation of Certain Speculative Prices <i>The Journal of Business, Vol 36., No. 4, October, Pages 349-419</i>	1963
Miller G. R. The Jackknife - A Review <i>Biometrika, Vol. 61, No. 1, Pages 1-15</i>	1974
Miller G. R. Jr. Jackknifing Variances <i>The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 39, No. 2, Pages 567-582</i>	1968
Minnich M. A Primer on Value at Risk <i>Capital Market Risk Advisors</i>	1998
Mori A., M. Ohsawa, T. Shimizu Calculation of Value at Risk and Risk/Return Simulation <i>Institute for Monetary and Economic Studies, Bank of Japan (Discussion Paper Series, Discussion Paper 96-E-8)</i>	1996
Mukerjee H. An Improved Monotone Conditional Quantile Estimator <i>The Annals of Statistics, Vol. 21, No. 2, 924-942</i>	1993
Odders-White E. and M. Ready Credit Ratings and Stock Liquidity <i>Review of Financial Studies, Vol. 19, Issue 1, Pages 119-157</i>	2006
Ong K. M. (Edited) Credit Ratings <i>Risk Books</i>	2003
Palepu K., V. Bernard, P. Healy Introduction to Business Analysis & Valuation <i>South - Western College Publishing</i>	1997
Parr C. W. A Note on the Jackknife, the Bootstrap and the Delta Method Estimators of Bias and Variance <i>Biometrika, Vol. 70, No. 3, Pages 719-722</i>	1983

Συγγραφέας	Έτος
<b>Τίτλος</b> <b>Περιοδικό - Εκδότης</b>	
Parr C. W., W. R. Schucany Jackknifing L-Statistics with Smooth Weight Functions <i>Journal of American Statistical Association Sep. 1982, Vol. 77, No. 379, Theory and Methods, Pages 629-638</i>	1982
Parrish S. R. Comparison of Quantile Estimators in Normal Sampling <i>Biometrics, Vol. 46, No. 1, Pages 247-257</i>	1990
Parzen E. Nonparametric Statistical Data Modeling <i>Journal of American Statistical Association Mar. 1979, Vol. 74, No. 365, Theory and Methods, Pages 105-121</i>	1979
Pindyk S. R., D. L. Rubinfeld Econometric Models and Economic Forecasts <i>McGraw-Hill</i>	1998
Politis N, D., J. P. Romano The Stationary Bootstrap <i>Journal of American Statistical Association Dec., 1994, Vol. 89, No. 428, Theory and Methods, Pages 1303-1313</i>	1994
Pritsker M. The Hidden Dangers of Historical Simulation <i>Finance and Economics Discussion Series, 2001-27</i>	2001
Pritsker M. Evaluating Value at Risk Methodologies: Accuracy versus Computational Time <i>Journal of Financial Services Research (Oct/Dec), 201-241</i>	1997
Randles H. R. Some Themes in Nonparametric Statistics <i>Available at <a href="http://www.math.niu.edu/NPAR/jsmpapers2001.htm">http://www.math.niu.edu/NPAR/jsmpapers2001.htm</a></i>	2001
Raymond R. Central Banking and Market Volatility <i>The Marjolin Lecture</i>	1995
Reiss D. R. Estimation of Quantiles in Certain Nonparametric Models <i>The Annals of Statistics, Vol. 8, No. 1, 87-105</i>	1980
Risk Metrics RiskMetrics-Technical Document Fourth Edition <i>JP Morgan/Reuters December 17, 1996</i>	1995

Συγγραφέας	Έτος
<p><b>Τίτλος</b></p> <p><b>Περιοδικό - Εκδότης</b></p>	
<p>Risk Metrics</p> <p>Introduction to RiskMetrics Fourth Edition</p> <p><i>JP Morgan November 21, 1995</i></p>	1995
<p>Sfakianakis M., and D.Verginis</p> <p>A New Family of Nonparametric Quantile Estimators</p> <p><i>Communications in Statistics - Simulation and Computation, Volume 37, No 2</i></p>	2008
<p>Sfakianakis M., and D.Verginis</p> <p>A Behavioral Analysis of Interest Rates in Euro Area</p> <p><i>Risk Management, Managerial Finance, Volume 28-No.5, Pages 1-19</i></p>	2002
<p>Shao J.</p> <p>On Resampling Methods for Variance and Bias Estimation in Linear Models</p> <p><i>The Annals of Statistics, Vol. 16, No. 3, 986-1008</i></p>	1988
<p>Shao J.</p> <p>The Efficiency and Consistency of Approximations to the Jackknife Variance Estimations</p> <p><i>Journal of American Statistical Association Mar. 1989, Vol. 84, No. 405, Theory and Methods, Pages 114-119</i></p>	1989
<p>Shao J., C. F. J. Wu</p> <p>A General Theory for Jackknife Variance Estimation</p> <p><i>The Annals of Statistics, Vol. 17, No. 3, 1176-1197</i></p>	1989
<p>Sheather J. S., J. S. Marron</p> <p>Kernel Quantile Estimators</p> <p><i>Journal of American Statistical Association June 1990, Vol. 85, No. 410, Theory and Methods, Pages 410-416</i></p>	1990
<p>Simonoff S. J.</p> <p>The Relative Importance of Bias and Variability in the Estimation of the Variance of a Statistic</p> <p><i>The Statistician, Vol. 42, No.1, Pages 3-7</i></p>	1993
<p>Sinkey F. J. JR</p> <p>Commercial Bank Financial Management 5th Edition</p> <p><i>Prentice-Hall</i></p>	1998
<p>Stigler M. S.</p> <p>Linear Functions of Order Statistics with Smooth Weight Functions</p> <p><i>The Annals of Statistics, Vol. 2, No. 4, 676-693</i></p>	1974
<p>Tabakis E., A. Vinci</p> <p>Analysing and Combining Multiple Credit Assessments of Financial Institutions</p> <p><i>ECB Working Papers, No 123</i></p>	2002

Συγγραφέας	Έτος
<b>Τίτλος</b> <b>Περιοδικό - Εκδότης</b>	
Tarashev N., K. Tsatsaronis, D. Karampatos Investor's Attitude Towards Risk: What can we Learn from Options <i>BIS Quarterly Review, June 2003, Pages 57-66</i>	2003
Tavakoli M. J. Credit Derivatives <i>John Wiley &amp; Sons, INC</i>	1998
Teichroew D. Tables of Expected Values of Order Statistics and Products of Order Statistics for Sample Sizes Twenty and Less from the Normal Distribution <i>The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 27, No. 2, Pages 410-426</i>	1956
Van Roy P. Credit Ratings and the Standardised Approach to Credit Risk in Basel II <i>ECB Working Papers, No 517</i>	2005
Verginis D. Confidence intervals for nonparametric quantile estimators <i>8th HERCMA Conference 2007</i>	2007
Walsh E. J. Handbook of Nonparametric Statistics <i>D. Van Nostrand Company, INC</i>	1962
Yang S.-S. A smooth Nonparametric Estimator of a Quantile Function <i>Journal of American Statistical Association Dec. 1985, Vol. 80, No. 392, Theory and Methods, Pages 1004-1011</i>	1985
Zhang X. Information Uncertainty and Stock Returns <i>The Journal of Finance, Volume 61: Issue 1, Pages 105 - 137</i>	2006
Ασημακόπουλος Α. Ν. Σημειώσεις Διδασκαλίας Προσομοίωσης <i>Πανεπιστήμιο Πειραιώς</i>	2004
Βασιλείου Δ. Ανάλυση και Διαχείριση Επενδύσεων <i>ΟΠΑ</i>	1999
Βασιλείου Δ. Χρηματοοικονομική Διοίκηση <i>ΟΠΑ</i>	1999

Συγγραφέας	Έτος
<p><b>Τίτλος</b></p> <p><b>Περιοδικό - Εκδότης</b></p>	
<p>Βεργίνης Δ.</p> <p>Value at Risk</p> <p><i>Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Χρηματοοικονομικής και Τραπεζικής, Διπλωματική Εργασία, Αθήνα Απρίλιος 2001</i></p>	2001
<p>Γκότσης Χ.</p> <p>Τεχνολογικές Εφαρμογές στη Λειτουργία των Τραπεζών</p> <p><i>Εκδόσεις Αθ. Σταμούλη</i></p>	2007
<p>Κούνια Σ., Φ. Κολυβά - Μαχαίρα, Κ. Μπαγιάτη, Ε. Μπόρα - Σέντα</p> <p>Εισαγωγή στη Στατιστική</p> <p>ΑΠΘ</p>	1985
<p>Κουνιά Σ., Χ. Μωυσιάδη</p> <p>Πιθανότητες I</p> <p>ΑΠΘ</p>	1985
<p>Κουνιά Σ., Χ. Μωυσιάδη</p> <p>Πιθανότητες II</p> <p>ΑΠΘ</p>	1985
<p>Μπαγιάτης Κ., Φ. Κολυβά-Μαχαίρα</p> <p>Μαθηματική Στατιστική I</p> <p>ΑΠΘ</p>	1988
<p>Μπαγιάτης Κ., Φ. Κολυβά-Μαχαίρα</p> <p>Μαθηματική Στατιστική II</p> <p>ΑΠΘ</p>	1988
<p>Σφακιανάκης Μ.</p> <p>Πρακτική Πληροφορική και Εφαρμογές 2η Έκδοση</p> <p><i>Εκδόσεις Πατάκη</i></p>	2002
<p>Σφακιανάκης Μ.</p> <p>Εφαρμογές Προσομοίωσης Monte Carlo</p> <p><i>Εκδόσεις Πατάκη</i></p>	1999
<p>Σφακιανάκης Μ., και Δ. Βεργίνης</p> <p>Σύγκριση μεθόδων Variance-Covariance και Εκτιμητριών Ποσοστιαίων Σημείων για τον υπολογισμό του VaR Long και Short θέσεων σε μετοχές. Η περίπτωση του XAA</p> <p><i>Πρώτο Συνέδριο της Ελληνικής Εταιρείας Συστημικών Μελετών</i></p>	2005
<p>Σφακιανάκης Μ., και Δ. Βεργίνης</p> <p>Χρήση μη-παραμετρικών εκτιμητριών ποσοστιαίου σημείου για τον καθορισμό των Ορίων Ελέγχου των Χαρτών Ελέγχου Μέσης Τιμής</p> <p><i>Ελληνικό Στατιστικό Ινστιτούτο - 20ο Πανελλήνιο Στατιστικό Συνέδριο Κύπρος</i></p>	2007

<b>Συγγραφέας</b>	<b>Έτος</b>
<b>Τίτλος</b> <b>Περιοδικό - Εκδότης</b>	
Τράπεζα της Ελλάδος, Διεύθυνση Εποπτείας Πιστωτικού Συστήματος Έγγραφο Διαβούλευσης VII: Θέματα που άπτονται της Υλοποίησης της <i>Τράπεζα της Ελλάδος</i>	2005
Τράπεζα της Ελλάδος, Διεύθυνση Εποπτείας Πιστωτικού Συστήματος Έγγραφο Διαβούλευσης V: Βασικές Προϋποθέσεις για την Ανάπτυξη της Μεθόδου των Εσωτερικών Διαβαθμίσεων (Μ.Ε.Δ.) <i>Τράπεζα της Ελλάδος</i>	2005
Τράπεζα της Ελλάδος, Διεύθυνση Εποπτείας Πιστωτικού Συστήματος Έγγραφο Διαβούλευσης. IV: Τιτλοποίηση Απαιτήσεων <i>Τράπεζα της Ελλάδος</i>	2004
Τράπεζα της Ελλάδος, Διεύθυνση Εποπτείας Πιστωτικού Συστήματος Λειτουργικός Κίνδυνος <i>Τράπεζα της Ελλάδος</i>	2004
Τράπεζα της Ελλάδος, Διεύθυνση Εποπτείας Πιστωτικού Συστήματος Έγγραφο Διαβούλευσης: Εποπτική Αντιμετώπιση Ορισμένων Επιπτώσεων της Εφαρμογής των Διεθνών Λογιστικών Προτύπων (ΔΛΠ) από τα Πιστωτικά Ιδρύματα <i>Τράπεζα της Ελλάδος</i>	2005
Τράπεζα της Ελλάδος, Διεύθυνση Εποπτείας Πιστωτικού Συστήματος Έγγραφο Διαβούλευσης VI: Λειτουργικός Κίνδυνος, Μέθοδοι του Βασικού Δείκτη και Τυποποιημένη <i>Τράπεζα της Ελλάδος</i>	2005
Τράπεζα της Ελλάδος, Διεύθυνση Εποπτείας Πιστωτικού Συστήματος Έγγραφο Διαβούλευσης III: Τεχνικές Μείωσης Πιστωτικού Κινδύνου <i>Τράπεζα της Ελλάδος</i>	2004
Τράπεζα της Ελλάδος, Διεύθυνση Εποπτείας Πιστωτικού Συστήματος Έγγραφο Διαβούλευσης I: Τυποποιημένη Μέθοδος <i>Τράπεζα της Ελλάδος</i>	2004
Τράπεζα της Ελλάδος, Διεύθυνση Εποπτείας Πιστωτικού Συστήματος Έγγραφο Διαβούλευσης II: Μέθοδος των Εσωτερικών Διαβαθμίσεων (Μ.Ε.Δ.) <i>Τράπεζα της Ελλάδος</i>	2004