



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ**

**UNIVERSITY OF PIRAEUS**

**ΣΧΟΛΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**  
**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**  
**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ**  
**ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΚΙΝΔΥΝΩΝ**

**<<ΑΚΡΙΒΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΙΣ**  
**ΡΟΠΕΣ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΣΤΟ ΚΛΑΣΙΚΟ**  
**ΠΡΟΤΥΠΟ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΙΝΔΥΝΩΝ>>**

**ΖΟΡΜΠΑ Μ. ΦΩΤΕΙΝΗ**

**Διπλωματική Εργασία**

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής  
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των  
απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού  
Διπλώματος στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διαχείριση Κινδύνων

Πειραιάς

Μάρτιος, 2023



Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη ΓΣΕΣ του τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμόν ..... συνεδρίαση του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της επιτροπής ήταν:

- Αναπληρωτής Καθηγητής Πολίτης Κωνσταντίνος (Επιβλέπων)
- Αναπληρωτής Καθηγητής Τζαβελάς Γεώργιος
- Αναπληρωτής Καθηγητής Ψαρράκος Γεώργιος

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

UNIVERSITY OF PIRAEUS

**SCHOOL OF FINANCE AND STATISTICS**

**DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE**

**ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT**

**<< EXACT AND RECURSIVE RELATIONS FOR THE  
MOMENTS OF TIME UNTIL RUIN IN THE CLASSICAL  
RISK MODEL >>**

**ZORBA M. FOTEINI**

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance

Science of the University of Piraeus in partial

fulfilment of the requirements for the degree of

Master of Science in

Actuarial Science and Risk Management

Piraeus, Greece

March 2023

This thesis was approved unanimously by the three-member Commission of Inquiry appointed by the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus No..... Meeting in accordance with the laws of the Postgraduate Program in Actuarial Science and Risk Management Committee members were:

- Associate Professor Politis Konstantinos (Supervisor)
- Associate Professor Tzavelas Georgios
- Associate Professor Psarrakos Georgios

The approval of the thesis by the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus does not imply acceptance of the opinions of the author

*Στους γονείς μου  
Μιχαήλ και Βικτωρία,*

*και στα αδέρφια μου  
Νικόλα και Παντελή*

## Ευχαριστίες

Ιδιαίτερες ευχαριστίες για τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κύριο Κωνσταντίνο Πολίτη ο οποίος με στήριξε και με καθοδήγησε σε όλη την διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας ενώ παράλληλα με βοήθησε να ασχοληθώ σε ερευνητικό επίπεδο με ένα ιδιαίτερα ενδιαφέρον κομμάτι της θεωρίας κινδύνων. Τον ευχαριστώ για την στήριξη και την υπομονή του διότι χωρίς την πολύτιμη συμβολή του δεν θα ήταν εφικτή η ολοκλήρωση της εργασίας.

Καθώς επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω και τους καθηγητές της τριμελούς επιτροπής, κύριο Ψαρράκο Γ και κύριο Τζαβελά για την σημαντική βοήθεια και την επίβλεψη τους.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου και τη γιαγιά μου την Αλεξάνδρα που είναι πάντα δίπλα μου και με υποστηρίζουν σε όλες μου τις επιλογές.

Ένα μεγάλο ευχαριστώ στο Στέφανο για τη βοήθεια του στην παρούσα εργασία αλλά και γιατί είναι δίπλα μου όλα αυτά τα χρόνια.

Τέλος, θέλω να αφιερώσω αυτή τη διπλωματική πέραν από την οικογένεια μου και στον αείμνηστο παππού μου Παντελή στον οποίο οφείλω πολλά.

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η αναλογιστική επιστήμη είναι ο κλάδος ο οποίος εφαρμόζει στατιστικές και μαθηματικές μεθόδους για να εκτιμήσει τον κίνδυνο της αβεβαιότητας σε μελλοντικά γεγονότα σε ασφαλιστικές, χρηματοοικονομικές επενδύσεις και σε άλλους κλάδους και να τον ελαχιστοποιήσει. Η θεωρία χρεοκοπίας, που αποτελεί κλάδο της θεωρίας κινδύνων, με τα κατάλληλα μαθηματικά μοντέλα μας περιγράφει τις ποσότητες για την πιθανότητα χρεοκοπίας και μελετάει την κατανομή του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείματος τη στιγμή της χρεοκοπίας.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα γίνει μελέτη για την ελλειμματική τυχαία μεταβλητή που αναφέρεται στο χρόνο,  $T$ , όπου θα συμβεί η χρεοκοπία στο κλασσικό πρότυπο. Ενδιαφέρον έχει να εξεταστεί η τυχαία μεταβλητή που προκύπτει  $T_c$  (ο χρόνος χρεοκοπίας, δοθέντος, ότι θα συμβεί η χρεοκοπία) η οποία είναι μη ελλειμματική και δεν είναι γνωστή η πυκνότητα της. Γενικά είναι δύσκολο να προσδιοριστούν αυτές οι ροπές με ακριβή υπολογισμό, για αυτό το λόγο χρησιμοποιούνται προσεγγίσεις. Για τη συγκεκριμένη εργασία θα προσπαθήσουμε να εξετάσουμε τις δεσμευμένες ροπές του χρόνου χρεοκοπίας και ποσότητες που συνδέονται με τις τρεις πρώτες ροπές της μεταβλητής  $T_c$ , όπως ο συντελεστής μεταβλητότητας και ο συντελεστής ασυμμετρίας μέσω παραδειγμάτων και διαγραμμάτων. Αυτό θα γίνει με τη βοήθεια του μαθηματικού πακέτου Mathematica και της γλώσσας προγραμματισμού R.

Διάφορες προσεγγίσεις έχουν χρησιμοποιηθεί για τη μελέτη και τις ιδιότητες των πιθανοτήτων χρεοκοπίας στο χρόνο. Οι έρευνες του Gerber (1987) και των Dufresne & Gerber (1988) επικεντρώνονται στην ανάλυση της έκφρασης για την πιθανότητα χρεοκοπίας και στη συνάρτηση της κατανομής του πλεονάσματος πριν από το χρόνο χρεοκοπίας. Υπάρχουν μέθοδοι για τον υπολογισμό και προσέγγιση των ροπών και της πυκνότητας  $T_c$  (Dickson & Waters, 2002), όμως η πιο ακριβής προσέγγιση είναι του De Vylder (1978). Το μέγεθος των αποζημιώσεων στα παραδείγματα που θα εξεταστούν είναι είτε συνδυασμός Εκθετικών κατανομών είτε Γάμμα κατανομών.



## ABSTRACT

Actuarial science is the branch of Economics & Mathematics that applies statistical and mathematical methods to estimate the risk of uncertainty in future events in insurance, financial investments and other industries with the purpose of minimizing it. Ruin theory, is a branch of risk theory, which uses the appropriate mathematical models to describe certain quantities such as the probability of ruin, the distribution of the surplus before ruin and the deficit at the time of ruin.

In this thesis, the random variable corresponding to the time of ruin  $T$ , will be studied according to the classical risk model. A critical point of interest is the study of the random variable  $T_c$  (the time of ruin, given that ruin occurs), which is non-defective, and its density is not known. It is generally difficult to determine its moments in an explicit form, so approximations are used. For this thesis, we will examine the moments of the time of ruin and quantities associated with the first three moments of the random variable  $T_c$ , such as the variability coefficient and the asymmetry coefficient through examples and diagrams, by using the mathematical package Mathematica and the R programming language.

Various approximations have been used through time in order to study the properties of ruin probabilities. Research by Gerber (1987) and Dufresne & Gerber (1988) focuses on formulating expression for the probability of ruin and the distribution function of the surplus before the time of ruin. There are methods for calculating and approximating the moments and density of  $T_c$  (Dickson & Waters, 2002), with the most accurate approach being that of De Vylder (1978). The claim size distribution can be either a combination of Exponential distributions or Gamma distributions.

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Περίληψη. . . . .	8
Abstract . . . . .	9
Πίνακας Βασικών Συμβόλων. . . . .	11
Κεφάλαιο 1. Εισαγωγή. . . . .	12
Κεφάλαιο 2. Βασικές έννοιες στις Στοχαστικές Ανελίξεις. . . . .	13
2.1 Εισαγωγή. . . . .	13
2.2 Απαριθμήτρια Στοχαστική Ανέλιξη . . . . .	13
2.3 Ανανεωτικές Ανελίξεις. . . . .	15
2.4 Συλλογικό Πρότυπο . . . . .	16
2.5 Κατανομή Συνολικών Αποζημιώσεων. . . . .	18
2.6 Κατανομή Poisson. . . . .	20
2.7 Αναδρομικός τύπος Panjer. . . . .	21
Κεφάλαιο 3. Κλασσικό Πρότυπο. . . . .	24
3.1 Εισαγωγή. . . . .	24
3.2 Βασικές Έννοιες . . . . .	24
3.3 Συντελεστής Προσαρμογής. . . . .	28
3.4 Παραδείγματα. . . . .	31
Κεφάλαιο 4. Πιθανότητα χρεοκοπίας στο Κλασσικό Πρότυπο. . . . .	35
4.1 Εισαγωγή. . . . .	35
4.2 Κλιμακωτά Ύψη . . . . .	35
4.3 Εκθετικές Αποζημιώσεις. . . . .	38
4.4 Μείξη Εκθετικών Κατανομών. . . . .	41
4.5 Προσέγγιση De Vylder. . . . .	44
4.6 Προσέγγιση τύπου Tijms. . . . .	47
Κεφάλαιο 5 Ροπές του χρόνου χρεοκοπίας . . . . .	50
5.1 Εισαγωγή. . . . .	50
5.2 Ο χρόνος τη στιγμή της χρεοκοπίας. . . . .	51
5.3 Υπολογισμός της πιθανότητας για τη στιγμή της χρεοκοπίας. . . . .	55
5.4 Μελέτη ροπών για Διάφορες κατανομές . . . . .	56
5.5 Αναδρομική σχέση με την προσέγγιση De Vylder. . . . .	57
5.6 Εφαρμογές . . . . .	59
Παράρτημα . . . . .	80
Βιβλιογραφία. . . . .	95

## ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΜΒΟΛΩΝ

Ζημία	$F$
Ακολουθία χρόνων άφιξης	$Y_i$
Ενδιάμεσοι χρόνοι	$W_k$
Συνολική ζημία	$S(t)$
Ύψος ζημίας	$V_i$
Ανέλιξη Poisson	$\{N(t)\}_{t \geq 0}$
Ροπές ενδιάμεσων χρόνων	$a_k$
Ανανεωτική συνάρτηση	$m(t)$
k-τάξης συνέλιξη $F$	$F^{*k}$
Συνολικές απαιτήσεις	$S$
Ατομική Αποζημίωση	$X_i$
Πλήθος απαιτήσεων	$N$
Συνολική αποζημίωση	$G(x)$
Κλάση κατανομών	$(a, b, 0)$
Στοχαστική ανέλιξη πλεονάσματος	$U(t)$
Πιθανότητα χρεοκοπίας	$\psi(u)$
Μέση τιμή	$\mu_1$
Περιθώριο ασφαλείας	$\theta$
Χρόνος χρεοκοπίας	$T$
Καθαρό κέρδος	$c$
Αποθεματικό	$u$
Χρεοκοπία στην πρώτη απαίτηση	$\psi_1(u)$
Προσέγγιση De Vylder	$\psi_{DV}(u)$

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## Εισαγωγή

Ο αναλογισμός έγινε επίσημη μαθηματική επιστήμη στα τέλη του 17<sup>ου</sup> αιώνα με τη ζήτηση να αυξάνεται για μακροπρόθεσμες ασφαλιστικές καλύψεις που απαιτούσαν τη διάθεση χρημάτων, όπως επιδόματα θανάτου. Το γεγονός αυτό απαιτεί την εκτίμηση μελλοντικών ενδεχόμενων γεγονότων όπως τα ποσοστά θνησιμότητας κάθε ηλικίας, καθώς και μαθηματικές τεχνικές για την προεξόφλησης κεφαλαίων.

Στο Κεφάλαιο 2 γίνεται μια εισαγωγή στη θεωρία πιθανοτήτων, στις στοχαστικές ανελίξεις στο συλλογικό πρότυπο και στην κατανομή των συνολικών αποζημιώσεων. Μελετάμε την κατανομή Poisson η οποία εκφράζει την πιθανότητα να συμβούν διάφορα γεγονότα σε σταθερό διάστημα χρόνου και με σταθερό ρυθμό τα οποία είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Γίνεται αναφορά στον αναδρομικό τύπο του Panjer για την κατανομή πιθανότητας μιας σύνθετης τυχαίας μεταβλητής.

Στο Κεφάλαιο 3 περιγράφεται το κλασσικό πρότυπο και τις βασικές έννοιες που πρέπει να γνωρίζουμε για τη χρεοκοπία. Η θεωρία χρεοκοπίας μελετά σε ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο τα λειτουργικά έσοδα και έξοδα της εταιρείας σε σχέση με το χρόνο. Η στοχαστική ανέλιξη του πλεονάσματος και ο χρόνος είναι το βασικά για την μελέτη της χρεοκοπίας.

Στο Κεφάλαιο 4 δίνονται ορισμοί για τα κλιμακωτά ύψη που ακολουθούν γεωμετρική κατανομή, πως υπολογίζεται η ακριβής πιθανότητα χρεοκοπίας, με εκθετική κατανομή δίνονται ακριβή αποτελέσματα. Μελετάμε την ανισότητα Lundberg και τις προσεγγίσεις De Vylder και Tijms. Επιπλέον δίνονται παραδείγματα για καλύτερη κατανόηση.

Στο Κεφάλαιο 5 αναλύεται το θέμα της εργασίας όπου είναι οι ροπές του χρόνου χρεοκοπίας. Οι ροπές αποτελούν ειδική περίπτωση της συνάρτησης της προεξοφλημένης ποινής (discounted penalty function) που ορίστηκε από τους Gerber και Shiu (1998). Θέλουμε να μελετήσουμε τη στιγμή της χρεοκοπίας και να υπολογίσουμε τις ροπές του  $T_c$  για ακριβή στιγμή αλλά και για προσεγγιστική με την προσέγγιση του De Vylder. Παρουσιάζονται παραδείγματα και διαγράμματα για το θεωρητικό περιεχόμενο του κεφαλαίου.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

### Βασικές έννοιες στις Στοχαστικές ανελίξεις

#### 2.1 Εισαγωγή

Στη θεωρία πιθανοτήτων οι στοχαστικές ανελίξεις αποτελούν προέκτασή της διότι έχουν να κάνουν με οικογένειες τυχαίων μεταβλητών και χρησιμοποιούνται ευρύτερα όπως στην οικονομία, την ιατρική, τη βιολογία. Ένα σύνολο από μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών μπορεί να αποτελεί την ίδια ποσότητα σε διαδοχικές τιμές που αλλάζουν σε σχέση με τη χρονική στιγμή.

Η θεωρία κινδύνων βασίζεται στην έννοια της στοχαστικής ανέλιξης η οποία περιγράφει τη διαδοχική εμφάνιση ζημιών σε ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο. Με τις στοχαστικές διαδικασίες έχουμε τη δυνατότητα να γίνει μοντελοποίηση του αποθέματος της εταιρείας ώστε να δοθεί αποζημίωση, και να παρακολουθεί η πορεία του πλεονάσματος με την πάροδο του χρόνου.

**Ορισμός 2.1.1.** Μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών  $\{X_t\}_{t \in T}$ , όπου  $T$  είναι ένα σύνολο, λέγεται **στοχαστική ανέλιξη** (σ.α.) ή στοχαστική διαδικασία (σ.δ.). Η παράμετρος  $t$  ονομάζεται δεικτοσύνολο και συνήθως συμβολίζει το χρόνο.

Το σύνολο  $T$  μπορεί να είναι είτε μη αριθμήσιμο π.χ. ένα διάστημα  $[0, \infty]$  και να λέμε πως έχουμε στοχαστική ανέλιξη συνεχούς χρόνου είτε να είναι αριθμήσιμο π.χ.  $T = \{0, 0.5, 1, \dots\}$  και τότε να έχουμε μια στοχαστική ανέλιξη διακριτού χρόνου. Ο συμβολισμός  $X_t$  είναι για να δηλώνει την τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) στη χρονική στιγμή  $t$  που μας ενδιαφέρει. Επίσης υπάρχει ταξινόμηση ανάλογα με τις τιμές που παίρνει μια σ.α..

#### 2.2 Απαριθμήτρια Στοχαστική Ανέλιξη

Δύο σημαντικές ιδιότητες που μπορεί να έχει μια σ.α. σχετικά με τις προσαυξήσεις της δηλαδή τις ποσότητες  $X_t - X_s$  σε διάστημα  $(s, t]$  :

- **Ανεξάρτητες προσαυξήσεις** (independent increments) έχουμε όταν τα γεγονότα σε ξένα μεταξύ τους χρονικά διαστήματα είναι τυχαίες μεταβλητές ανεξάρτητες μεταξύ τους.
- **Στάσιμες προσαυξήσεις** (stationary increments) έχουμε όταν η κατανομή της ποσότητας  $X_t - X_s$  δεν εξαρτάται από το  $t$ , αλλά μόνο από τη διαφορά  $t - s$ .

Σημαντική στοχαστική διαδικασία αποτελεί η ανέλιξη Poisson  $\{N(t)_{t \geq 0}\}$  η οποία είναι μια απαριθμήτρια ανέλιξη δηλαδή είναι αύξουσα με πιθανότητα ένα και οι τιμές είναι ακέραιες και μη αρνητικές.

**Ορισμός 2.2.1.** Η στοχαστική ανέλιξη  $\{N(t)\}_{t \geq 0}$  ονομάζεται **ανέλιξη Poisson** όταν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

- $N(0) = 0$
- Σε ένα μικρό χρονικό διάστημα πλάτους  $h$ , μπορεί να συμβεί το πολύ ένα γεγονός με πιθανότητα ανάλογη του πλάτους του διαστήματος. Δηλαδή

$$P(N(t+h) = n+j | N(t) = n) = \begin{cases} \lambda h + o(h), & j = 1 \\ 1 - \lambda h + o(h), & j = 0 \\ 0, & j \geq 2 \end{cases} \quad (2.1)$$

όπου το  $o(h)$  υποδηλώνει μια ποσότητα που συγκλίνει στο μηδέν γρηγορότερα από το  $h$  όταν  $h \rightarrow 0$  και το  $\lambda$  είναι το rate (ένταση ή ρυθμός) της ανέλιξης Poisson.

- Τα γεγονότα που συμβαίνουν σε ένα φραγμένο χρονικό διάστημα μετά τη χρονική στιγμή  $t$  είναι ανεξάρτητα από τον αριθμό των γεγονότων μέχρι εκείνη τη χρονική στιγμή δηλαδή για κάθε  $t \leq s < u$  η τ.μ.  $N(u)-N(t)$  είναι ανεξάρτητη της μεταβλητής  $N(t)$ .

Η ανέλιξη Poisson είναι απαριθμήτρια ανέλιξη  $\{N(t)\}_{t \geq 0}$  πάντα ικανοποιεί τη σχέση (2.1) και έχει στάσιμες και ανεξάρτητες προσauξήσεις.

Μια ανέλιξη Poisson ορίζει μια ακολουθία από τ.μ.  $Y_1, Y_2, \dots$ , η οποία λέγεται **ακολουθία των χρόνων άφιξης** κάποιου γεγονότος με τον εξής τρόπο:

$$Y_1 = \inf\{t: N(t) = 1\}$$

$$Y_2 = \inf\{t: N(t) = 2\}$$

...

$$Y_k = \inf\{t: N(t) = k\}$$

δηλαδή η τ.μ. μας παριστάνει το χρόνο που γίνεται το  $k$ -γεγονός.

Έτσι με την παραπάνω ακολουθία έχουμε τη δυνατότητα να ορίσουμε μια νέα ακολουθία τυχαίων μεταβλητών  $\{W_k: k=1,2,\dots\}$  ως εξής:

$$W_1 = Y_1$$

$$W_2 = Y_2 - Y_1$$

...

$$W_k = Y_k - Y_{k-1}$$

Ο χρόνος από την εμφάνιση του  $(k-1)$  γεγονότος και του  $k$ -γεγονότος είναι η τυχαία μεταβλητή την οποία μελετούμε. Οι μεταβλητές  $W_1, W_2, \dots, W_k$  ονομάζονται **ενδιάμεσοι χρόνοι ή χρόνοι αναμονής** της ανέλιξης  $\{N(t)\}$ . Μπορούμε να δούμε πως ενώ οι τυχαίες μεταβλητές  $Y_i, W_k$ , είναι συνεχείς η  $N(t)$  είναι διακριτή τ.μ..

Βασικές ιδιότητες της ανέλιξης Poisson:

- Για σταθερό  $t$  η τ.μ.  $N(t)$  ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο  $\lambda t$

$$P[N(t) = k] = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

- Οι ενδιάμεσοι χρόνοι  $W_1, W_2, \dots, W_k$  είναι ισόνομες και ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές οι οποίες ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο  $\lambda$ .

Στην αναλογιστική επιστήμη αναφερόμαστε στον όρο ζημιά (claim) ως ένα ζημιογόνο γεγονός που προκλήθηκε σε ένα άτομο ή σε κάποιο περιουσιακό στοιχείο. Με άλλα λόγια μπορούμε να πούμε πως είναι οι απαιτήσεις των ασφαλισμένων προς την ασφαλιστική εταιρεία η οποία θα δώσει αποζημίωση. Έστω  $N(t)$  το πλήθος των ζημιών σε διάστημα  $[0, t]$  και με  $\{W_k: k=1, 2, \dots\}$  οι χρόνοι εμφάνισης των ζημιών. Το ύψος  $m$ -ζημιάς το συμβολίζουμε ως  $V_m$ . Η συνολική ζημιά για το χρόνο δίνεται από τον τύπο

$$S(t) = \sum_{i=1}^N V_i.$$

Ο χρόνος μεταξύ των ζημιών  $\{W_k: k=1, 2, \dots\}$  και τα ύψη  $\{V_m: m=1, 2, \dots\}$  είναι ακολουθίες τυχαίων μεταβλητών, έτσι θέτουμε  $W_k = Y_k - Y_{k-1}$  για  $k=1, 2, \dots$ . Οι ενδιάμεσοι χρόνοι  $\{W_k: k=1, 2, \dots\}$  όπου αποτελούν ακολουθία έχουν κατανομή

$$A(x) = P[W_k \leq x]$$

Οι ροπές των ενδιάμεσων χρόνων συμβολίζονται ως

$$a_k = E[W_1^k] = \int_0^{\infty} y^k dA(x)$$

Έχουμε υποθέσει πως τα ύψη των ζημιών είναι  $\{V_m: m=1, 2, \dots\}$  αποτελούν μια ακολουθία από ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και έχουν κατανομή

$$F(x) = P[V_1 \leq x],$$

και η ουρά της κατανομής αυτής  $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ .

Οι ροπές των ζημιών είναι

$$b_k = E[V_1^k] = \int_0^{\infty} y^k dF(x).$$

### 2.3 Ανανεωτικές ανελίξεις

**Ορισμός 2.3.1.** Μια απαριθμήτρια ανελίξη  $\{N(t)\}_{t \geq 0}$  όπου οι ενδιάμεσοι χρόνοι είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και ισόνομες λέγεται **ανανεωτική ανελίξη**.

Η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων μπορεί να είναι μια από τις παρακάτω κατανομές Weibull, Pareto, Gamma, Γεωμετρική, Λογαριθμοκανονική.

Μαθηματικά η  $N(t)$  ορίζεται από τη σχέση

$$N(t) = \max\{n: Y_n \leq t\}$$

όπου  $Y_n$  είναι ο χρόνος άφιξης του  $n$ -οστού γεγονότος.

Για κάθε ακέραιο  $n$  και  $t \geq 0$  ισχύει ,

$$N(t) \geq n \text{ όταν } Y_n \leq t.$$

(2.2)

Ο αναμενόμενος αριθμός των γεγονότων σε διάστημα  $[0, t]$  παριστάνεται από την ανανεωτική συνάρτηση  $m(t) = E[N(t)]$ .

**Πρόταση 2.3.1.** Μία ανανεωτική ανέλιξη  $\{N(t)\}_{t \geq 0}$  όπου η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων είναι  $F$  και έστω η ανανεωτική συνάρτηση είναι  $m(t) = E[N(t)]$ . Τότε η για κάθε  $t \geq 0$  ικανοποιεί τη σχέση

$$m(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F^{*k}(t) \quad (2.3)$$

όπου το  $F^{*k}$  είναι η  $k$ -τάξης συνέλιξη της  $F$ .

**Απόδειξη** Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.2) και εφόσον τα ενδεχόμενα είναι ισοδύναμα θα έχουν και την ίδια πιθανότητα δηλαδή

$$P(N(t) \geq n) = P(Y_n \leq t).$$

Αν αθροίσουμε όλες τις θετικές τιμές του  $n$  θα έχουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(N(t) \geq k) = \sum_{n=1}^{\infty} P(Y_n \leq t).$$

Η ποσότητα  $N(t)$  είναι διακριτή τ.μ. για κάθε τιμή του  $t$ . Επομένως από τη τελευταία σχέση το αριστερό μέλος ισούται με  $E[N(t)]$ . Άρα παίρνουμε ότι

$$E(N(t)) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{*n}(t)$$

για το λόγο ότι  $Y_n = W_1 + \dots + W_n$ , όπου  $W_n$  είναι ανεξάρτητες τ.μ. και ακολουθούν την κατανομή  $F$ . Συνεπώς η κατανομή της  $Y_n$  θα  $n$  είναι συνέλιξη  $F^{*n}$ .

## 2.4 Συλλογικό Πρότυπο

Για ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο το οποίο θα τεθεί σε ισχύ εξετάζουμε τη λειτουργία του σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα. Αυτό που ενδιαφέρει περισσότερο την ασφαλιστική εταιρεία είναι το συνολικό ποσό που θα καταβάλει για τις απαιτήσεις στο συγκεκριμένο διάστημα παρά στο κάθε ζημιωτικό γεγονός που προκαλείται από τους ασφαλισμένους. Για το συνολικό ποσό των αποζημιώσεων που καλείται να πληρώσει η εταιρεία, εξαρτάται από τα εξής:

- τον αριθμό των απαιτήσεων που θα έχει η εταιρεία
- το μέγεθος των απαιτήσεων.

Τα μεγέθη των ατομικών αποζημιώσεων είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και ακολουθούν την κατανομή  $F$ , που μπορεί να είναι ή διακριτή ή συνεχής.

Οι **συνολικές απαιτήσεις** συμβολίζονται ως  $S$ , είναι μια σύνθετη τυχαία μεταβλητή, και δίνονται από τη σχέση :



$$S_N = \begin{cases} X_1 + X_2 + \dots + X_N, & \text{αν } N = 1, 2, \dots \\ 0, & \text{αν } N = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

Αλλιώς

$$S_N = \begin{cases} \sum_{i=1}^N X_i, & \text{αν } N = 1, 2, \dots \\ 0, & \text{αν } N = 0 \end{cases}$$

Για τις ατομικές αποζημιώσεις  $X_i$  η μέση τιμή και η διακύμανση δίνονται από τους ακόλουθους τύπους  $E(X_i) = \mu$ ,  $Var(X_i) = \sigma^2$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots$

Όταν η τ.μ.  $N$  είναι διακριτή ανεξάρτητη από τις  $X_i$  τότε η μέση τιμή και η διακύμανση της σύνθετης τ.μ.  $S$  ορίζεται από τη σχέση (2.4) και είναι αντίστοιχα ίσες με

$$E(S) = E(N)E(X_i) \quad (2.5)$$

$$Var(S) = E(N)\sigma^2 + \mu^2 Var(N) \quad (2.6)$$

(Χατζηκωνσταντινίδης 2021) .

### Εφαρμογή 2.4.1.

Έστω το μοντέλο συλλογικού κινδύνου

$$S_N = \begin{cases} X_1 + X_2 + \dots + X_N, & \text{αν } N = 1, 2, \dots \\ 0, & \text{αν } N = 0 \end{cases}$$

όπου

- το πλήθος  $N$  των απαιτήσεων για ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα ακολουθεί διωνυμική κατανομή με παραμέτρους  $n=18$  και  $p=0.4$
- η κατανομή του μεγέθους  $X_i$  των αποζημιώσεων ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή 3.

Ζητείται να βρεθεί μέση τιμή και η διακύμανση των συνολικών απαιτήσεων  $S$ .

### Λύση

Η μέση τιμή των συνολικών απαιτήσεων είναι

$$E(S) = E(N)E(X_i)$$

Αρχικά βρίσκουμε τη μέση τιμή των απαιτήσεων

$$E(N) = np = 7.2$$

Αντικαθιστούμε στη σχέση (2.5)

$$E(S) = 21.6$$

Η διακύμανση των αποζημιώσεων  $X_i$  είναι

$$\text{Var}(X_i) = \left(\frac{1}{\text{rate}}\right)^2 = 9$$

Και η διακύμανση των απαιτήσεων είναι

$$\text{Var}(N) = np(1 - p) = 4.32$$

Επομένως η διακύμανση των συνολικών απαιτήσεων  $S$  ισούται με

$$\text{Var}(S) = 103.68.$$

(Παράρτημα 1<sup>ο</sup> (a))

## 2.5 Κατανομή συνολικών αποζημιώσεων

Η κατανομή της τ.μ.  $S$  παριστάνει το μέγεθος των συνολικών αποζημιώσεων στο συλλογικό πρότυπο.

Η συνάρτηση κατανομής της  $S$  από (2.4) ικανοποιεί την

$$G(x) = P(S \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n F^{*n}(x), \quad x \geq 0,$$

Όπου

$$F^{*n} = P(X_1 + X_2 + \dots + X_n \leq x).$$

$$\text{Εδώ για } n = 0, F^{*0}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Η  $S$  είναι μικτή κατανομή. Η πυκνότητα της κατανομής των συνολικών απαιτήσεων όταν οι απαιτήσεις ακολουθούν συνεχή κατανομή ικανοποιεί τον τύπο

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n f^{*n}(x), \quad x > 0,$$

για  $x = 0$  ισχύει  $g(0) = P[f(0)]$ .

Όταν η  $F$  είναι διακριτή κατανομή ικανοποιείται από τον τύπο

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n f^{*n}(x), \quad x = 1, 2, \dots$$

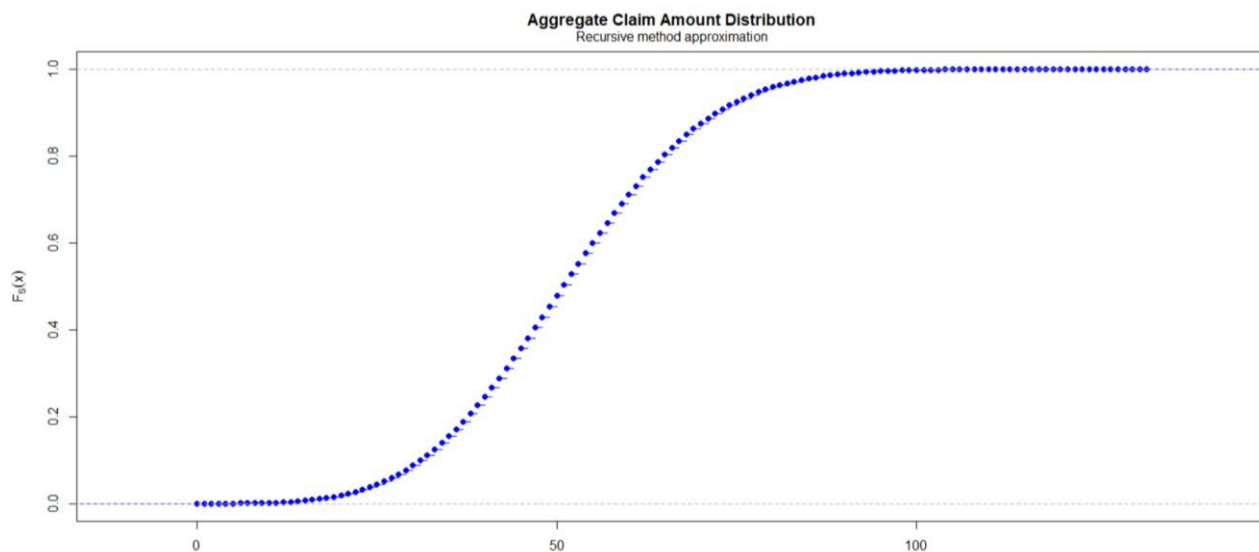
όπου  $f^{*n}(x) = P(x_1 + x_2 + \dots + x_n = x)$ . (Χατζηκωνσταντινίδης 2021)

## Εφαρμογή 2.5.1

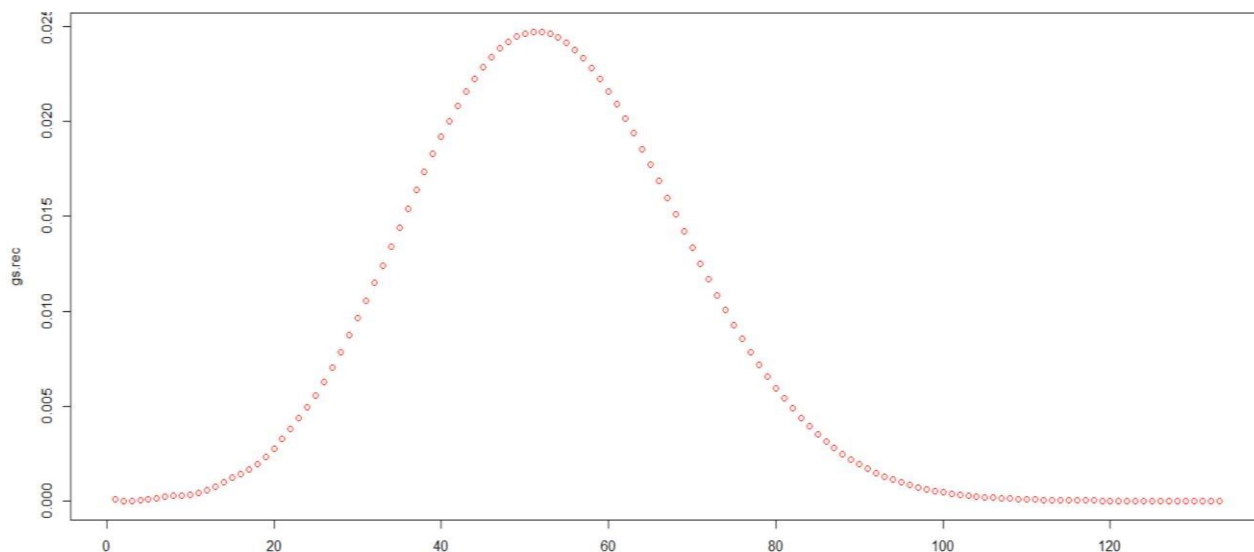
### (Συνέχεια της εφαρμογής 2.4.1)

Στον επόμενο πίνακα δίνονται οι τιμές των  $g(x)$ ,  $G(x)$  για διαφορετικά  $x$  οι οποίες έχουν υπολογιστεί με τη γλώσσα προγραμματισμού R.

$x$	$g(x)$	$G(x)$
0.00	0.00010	0.00010
0.25	0.00000	0.00010
0.50	0.00001	0.00010
0.75	0.00003	0.00010
1.00	0.00008	0.00010
1.25	0.00014	0.00010
1.50	0.00021	0.00010
1.75	0.00027	0.00010
2.00	0.00030	0.00011



Σχήμα 2.4.1. Γραφική παράσταση της  $G(x)$ .



Σχήμα 2.4.2. Γραφική παράσταση της  $g(x)$ .

(Παράρτημα 1<sup>ο</sup> (b))

## 2.6 Κατανομή Poisson

Η **κατανομή Poisson** είναι η συνηθέστερη κατανομή που χρησιμοποιείται στο συλλογικό πρότυπο για την τυχαία μεταβλητή  $N$  που δηλώνει το πλήθος των αποζημιώσεων. Έτσι θεωρούμε ότι  $N \sim Poi(\lambda)$  για κάποιο  $\lambda > 0$ . Η κατανομή της  $S$  σε αυτήν την περίπτωση είναι μια σύνθετη Poisson. Για τη ροπή  $k$ -τάξης της κατανομής  $F$  θέτουμε  $\mu_k = E(X_i^k)$ , η μέση τιμή και η διακύμανση προκύπτει από τις σχέσεις (2.5) και (2.6). Πιο συγκεκριμένα για τη μέση τιμή της  $S$  παίρνουμε ότι

$$E(S) = E(N)E(X_i) = \lambda\mu_1,$$

αντίστοιχα για τη διακύμανση

$$Var(S) = E(N)(\mu_2 - \mu_1^2) + \mu_1^2 Var(N) = \lambda\mu_2,$$

εφόσον ισχύει  $E(N) = Var(N) = \lambda$ .

Η δεύτερη ροπή της S γύρω από το μηδέν είναι

$$E(S^2) = [E(S)]^2 + Var(S) = (\lambda\mu_1)^2 + \lambda\mu_2.$$

Η ροπογεννήτρια της σύνθετης Poisson έχει τύπο

$$M_S(t) = \exp[\lambda M_X(t) - 1].$$

Ο τύπος αποδεικνύεται ως εξής: Έστω πως η N ακολουθεί Poisson με παράμετρο  $\lambda$ .

Η ροπογεννήτρια της N είναι

$$M_N(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}, t \in R,$$

η ροπογεννήτρια της σύνθετης τ.μ. S είναι

$$M_S(t) = M_N(\ln M_X(t)) = e^{\lambda(M_X(t) - 1)}.$$

Όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν F κατανομή και η Poisson έχει παράμετρο  $\lambda$ , τότε και η σύνθετη Poisson θα έχει παραμέτρους F και  $\lambda$ .

## 2.7 Αναδρομικός τύπος Panjer

Γενικά, δεν είναι εύκολος ο υπολογισμός της κατανομής των συνολικών αποζημιώσεων. Γι' αυτό το λόγο υπάρχει ένας αναδρομικός τύπος που μπορεί να υπολογίσει την κατανομή αυτή όταν οι ατομικές απαιτήσεις έχουν τιμές ακέραιες και μη αρνητικές. Ο τύπος χρησιμοποιείται όταν η κατανομή ανήκει σε μια ειδική κατηγορία διακριτών κατανομών.

**Ορισμός 2.7.1** Μια διακριτή κατανομή  $\{p_n: n = 0, 1, 2, \dots\}$  ορισμένη στο σύνολο των μη αρνητικών ακέραιων θα λέμε ότι ανήκει στην κλάση κατανομών  $(a, b, 0)$  όταν η συνάρτηση πιθανότητας της κατανομής αυτής ικανοποιεί τον αναδρομικό τύπο

$$p_n = \left(a + \frac{b}{n}\right) p_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.7)$$

Τα  $a, b$  είναι πραγματικοί αριθμοί, ενώ το 0 δικαιολογείται από το γεγονός ότι για  $n=1$ , η αναδρομική σχέση ξεκινά από το δεξιό μέλος με την πιθανότητα  $p_0$ . Για κάθε κατανομή που ανήκει σε αυτή την κλάση θα πρέπει να έχει θετική μάζα πιθανότητας στο μηδέν δηλαδή  $p_0 > 0$ .

Οι κατανομές που ανήκουν στην κλάση αυτή είναι οι εξής :

- Διωνυμική κατανομή
- Αρνητική διωνυμική κατανομή
- Poisson κατανομή
- Γεωμετρική κατανομή (ειδική περίπτωση της αρνητικής διωνυμικής).

Πιο αναλυτικά μπορούμε να δούμε τον παρακάτω πίνακα.

Distribution	a	b	$p_0$
Διωνυμική	$-\frac{q}{1-q}$	$(m+1) * \left(\frac{q}{1-q}\right)$	$(1-q)^m$
Αρνητική διωνυμική	$\frac{\beta}{1+\beta}$	$(r-1) * \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)$	$(1+\beta)^{-r}$
Poisson	0	$\lambda$	$e^{-\lambda}$
Γεωμετρική	$\frac{\beta}{1+\beta}$	0	$(1+\beta)^{-r}$

( Willmot 2012, Loss Models: From Data to Decisions, 4th Edition)

Η αναδρομική σχέση (2.7) ονομάζεται και τύπος Panjer. Στον τύπο του Panjer υποθέτουμε πως στο συλλογικό πρότυπο οι ατομικές αποζημιώσεις έχουν τιμές στο σύνολο  $\{0,1,2,\dots\}$

Η απόδειξη του αναδρομικού τύπου του Panjer στηρίζεται στην ακόλουθη πρόταση.

**Πρόταση 2.7.1** Έστω η  $N$  τ.μ. που παίρνει ακέραιες και μη αρνητικές τιμές με συνάρτηση πιθανότητας

$\{p_n: n = 0,1,2 \dots\}$  και πιθανογεννήτρια

$$P_N(d) = \sum_{n=0}^{\infty} d^n p_n.$$

Έστω πως η συνάρτηση πιθανότητας της  $N$  ανήκει στην κλάση  $(a,b,0)$  ώστε να ισχύει η (2.7).

Τότε η συνάρτηση της ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$P'_N(d) = ad P'_N(d) + (a+b)P_N(d).$$

**Απόδειξη** Αρχικά παίρνουμε την πιθανογεννήτρια συνάρτηση στην παρακάτω μορφή

$$P_N(d) = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d^n p_n$$

Μετά την παραγωγή της παραπάνω σχέσης και της σχέσης (2.7) για τις πιθανότητες προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} P'_N(d) &= \sum_{n=1}^{\infty} n d^{n-1} p_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n d^{n-1} (a + n^b) p_{n-1} \\ &= a \sum_{n=1}^{\infty} n d^{n-1} p_{n-1} + b \sum_{n=1}^{\infty} d^{n-1} p_{n-1}. \end{aligned}$$

Για τον πρώτο όρο στο παραπάνω άθροισμα, έχουμε ότι ισούται με

$$\begin{aligned} a \sum_{n=1}^{\infty} n d^{n-1} p_{n-1} &= a \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) d^{n-1} p_{n-1} + a \sum_{n=1}^{\infty} d^{n-1} p_{n-1} \\ &= ad P'_N + a P_N \end{aligned}$$

Επομένως το αποτέλεσμα αποδείχθηκε.

Ορίζουμε στη συνέχεια  $g(x) = P(S = x)$  για  $x = 0, 1, 2, \dots$

Η πιθανότητα  $g(x)$ , είναι ο αρχικός τύπος που εκφράζει το ενδεχόμενο οι απαιτήσεις του χαρτοφυλακίου να είναι μηδέν, από το νόμο ολικής πιθανότητας ισχύει η σχέση

$$g(0) = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n f_0^n = P_N[f(0)]$$

η τ.μ.  $f$  έχει μάζα πιθανότητας στο σημείο μηδέν τη  $f(0) = P(x = 0)$  και είναι συνεχής στο διάστημα  $(0, \infty)$ .

Ειδικές περιπτώσεις

$$g(0) = \frac{p_0}{\left(1 - (f(0)a)^{1 + \frac{b}{a}}\right)} \quad \text{για } a \neq 0$$

και

$$g(0) = p_0 * \exp(f(0) * b) \quad \text{για } a = 0$$

Ο τελικός αναδρομικός τύπος του Panjer είναι

$$g(x) = \frac{1}{1 - af(0)} \sum_{y=1}^x \left(a + \frac{by}{x}\right) f(y) g(y - x) \quad x = 1, 2, \dots$$

αφού  $g(0) = 0$ ,  $\forall x < 0$ . (Χατζηκωνσταντινίδης 2021)

### Εφαρμογή 2.6.1.

Με τα δεδομένα της εφαρμογής 2.4.1. βρίσκουμε τον παρακάτω πίνακα.

$x$	Panjer Poisson
0	0.00010
1	0.00000
2	0.00011
3	0.00014
4	0.00022
5	0.00036
6	0.00057
7	0.00084
8	0.00114
9	0.00147
10	0.00189

(Παράρτημα 1<sup>ο</sup> (c))

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

### Κλασσικό πρότυπο

#### 3.1 Εισαγωγή

Στην αρχή της λειτουργίας ενός χαρτοφυλακίου υπάρχει αβεβαιότητα ως προς τα έξοδα για αυτό είναι απαραίτητη η χρήση της στοχαστικής ανέλιξης πλεονάσματος, η οποία θα εξηγηθεί παρακάτω. Το πρόβλημα της χρεοκοπίας έχει διάφορες μορφές ως προς το χρόνο, δηλαδή εάν ο χρόνος που μελετάται για τα έξοδα και έσοδα της εταιρείας είναι διακριτός ή συνεχής, πεπερασμένος ή άπειρος. Πιο εύκολο υπολογισμό και αναλυτικά αποτελέσματα έχουμε όταν η χρεοκοπία μελετάται σε άπειρο και συνεχή χρόνο. Το 1903 ο αναλογιστής Filip Lundberg ασχολήθηκε με τη χρεοκοπία σε συνεχή χρόνο όταν εισήγαγε την έννοια του κλασσικού προτύπου. Στη διδακτορική του διατριβή “Approximations of the probability functions/ Reinsurance of Collective Risks” χρησιμοποίησε τη σύνθετη διαδικασία Poisson. Το 1930 ο Harald Cramer, μαθηματικός και αναλογιστής, βασιζόμενος στη διατριβή του Lundberg ενσωμάτωσε τη θεωρία στοχαστικών διαδικασιών. Έτσι έχουμε δύο αποτελέσματα τα οποία είναι σημαντικά για την πιθανότητα χρεοκοπίας, την ανισότητα Lundberg και τον ασυμπτωτικό τύπο Cramer-Lundberg στο πρότυπο το οποίο ονομάστηκε κλασσικό πρότυπο της θεωρίας κινδύνου.

Στο μοντέλο αυτό εξετάζουμε πώς οι συνολικές αποζημιώσεις μεταβάλλονται στο χρόνο σύμφωνα με μια σύνθετη ανέλιξη Poisson θεωρώντας ότι η ένταση ασφαλιστρών είναι  $c > 0$ .

#### 3.2 Βασικές έννοιες

**Ορισμός 3.2.1** Η στοχαστική ανέλιξη του πλεονάσματος  $\{U(t): t \geq 0\}$  ορίζεται για κάθε  $t \geq 0$  από την σχέση

$$U(t) = u + P(t) - S(t) \quad (3.1)$$

ή

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

όπου  $P(t)$  είναι το συνολικό ασφάλιστρο στο διάστημα  $[0,t]$ , το  $u$  είναι το αποθεματικό της εταιρείας για το συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο και  $S(t)$  είναι η σύνθετη ανέλιξη Poisson. Το  $U(t)$  ονομάζεται αποθεματικό ή πλεόνασμα τη χρονική στιγμή  $t$  ενώ το  $U(0)=u$  καλείται αρχικό αποθεματικό. Για συγκεκριμένο  $t$ , η  $S(t)$  και η  $U(t)$  είναι τυχαιές μεταβλητές .

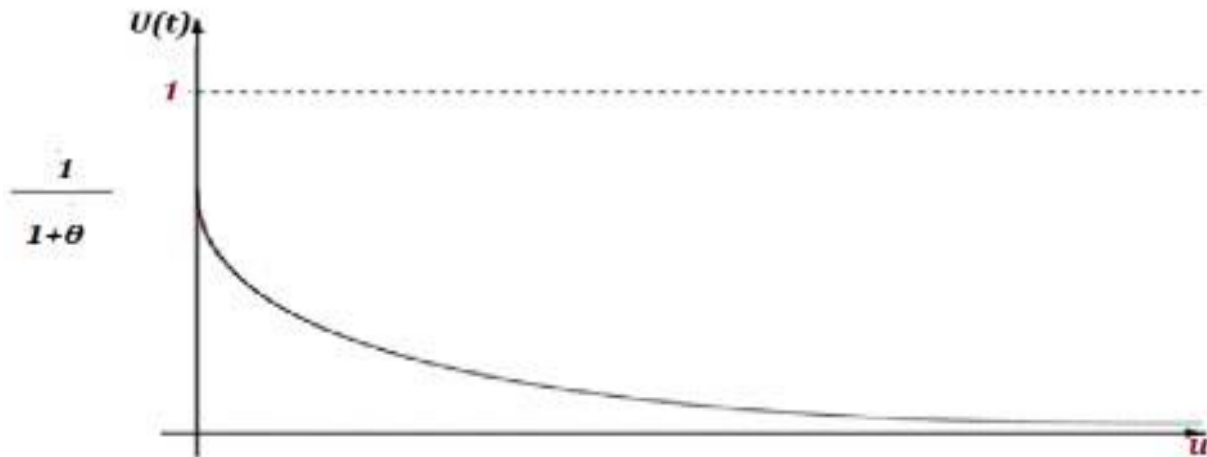
Αρχικά ορίζουμε τα συνολικά ασφάλιστρα ως  $P(t)=ct$  στη μονάδα του χρόνου , η  $P(t)$  είναι γραμμική συνάρτηση,  $c > 0$  είναι σταθερά που ονομάζεται ένταση ασφαλιστρου.

**Ορισμός 3.2.2** Η πιθανότητα χρεοκοπίας σε άπειρο χρόνο με αρχικό αποθεματικό  $u$  ορίζεται από τη σχέση:

$$\psi(u) = P[U(t) < 0 , \text{για κάποιο } t \geq 0 | U(0) = u]$$

Η συνάρτηση  $\psi(u)$  ως συνάρτηση του αρχικού αποθεματικού είναι φθίνουσα, ενώ επίσης ισχύει ότι  $\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) = 0$





**Σχήμα 3.1** Γραφική παράσταση της πιθανότητας χρεοκοπίας (Πολίτης 2021)

Η πιθανότητα μη χρεοκοπίας ορίζεται από τη σχέση :

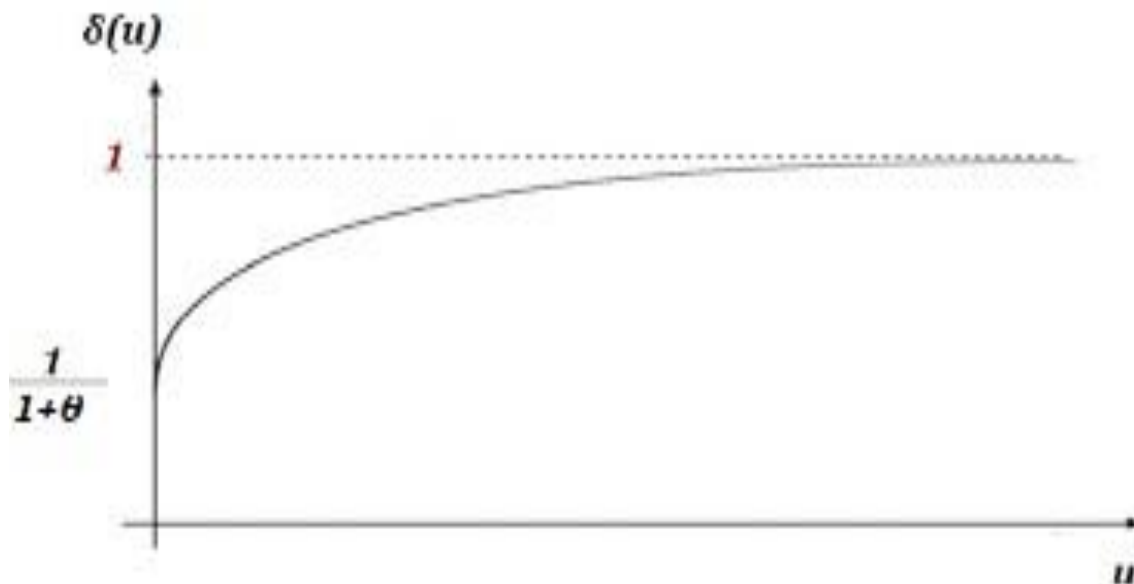
$$\delta(u) = 1 - \psi(u), \quad u \geq 0 .$$

Η τ.μ. μπορεί να είναι συνεχής ή διακριτή, αύξουσα συνάρτηση και  $\lim_{u \rightarrow \infty} \delta(u) = 1$ . Επίσης αντιστοιχεί σε μια μεικτή κατανομή αφού  $\delta(0) > 0$  η πιθανότητα μη χρεοκοπίας είναι θετική για μηδενικό αρχικό αποθεματικό.

Στο κλασικό πρότυπο η συνάρτηση  $\delta(u)$  ικανοποιεί την εξίσωση

$$\delta'(u) = \frac{\lambda}{c} \delta(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u \delta(u-x)f(x)dx.$$

η οποία λέγεται ολοκληροδιαφορική εξίσωση για τη συνάρτηση  $\delta(u)$ .(Πολίτης 2017)



**Σχήμα 3.2** Πιθανότητα μη χρεοκοπίας (Πολίτης 2021)

Στο κλασσικό μοντέλο μια βασική υπόθεση είναι η συνθήκη του καθαρού κέρδους η οποία αναφέρει ότι θα πρέπει να ισχύει :

$$c > \lambda \mu_1 . \quad (3.2)$$

Το  $\lambda$  είναι η ένταση της ανέλιξης Poisson,  $\lambda = \frac{E[N(t)]}{t}$ , και είναι ο μέσος αριθμός των αποζημιώσεων στη μονάδα του χρόνου. Στην εταιρεία τα έσοδα θα πρέπει να είναι μεγαλύτερα από τα έξοδα σε κάθε χρονική στιγμή, ώστε το αναμενόμενο κέρδος να είναι θετικό και η εταιρεία να μην κινδυνεύει από μια βέβαιη χρεοκοπία. Ο όρος χρεοκοπίας δεν είναι κυριολεκτικός έχει περισσότερο την έννοια της φερεγγυότητας σε ένα χαρτοφυλάκιο. Έτσι δίνεται ο παρακάτω ορισμός.

**Πρόταση 3.2.1** Στο κλασσικό μοντέλο, έστω  $\lambda$  η ένταση της ανέλιξης Poisson όπου περιγράφει τις αφίξεις των απαιτήσεων και  $c$  η ένταση ασφαλιστρού. Τότε η πιθανότητα  $\psi_1(u)$  να συμβεί η χρεοκοπία με την πρώτη απαίτηση ισούται με

$$\psi_1(u) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} [1 - F(u) + ct] dt,$$

όπου  $F$  η συνάρτηση κατανομής για το μέγεθος των αποζημιώσεων .

**Απόδειξη** (Πολίτης 2017)

**Ορισμός 3.2.3.** Στο κλασσικό μοντέλο το **περιθώριο ασφαλείας** ή συντελεστής ασφαλείας  $\theta$  (premium loading factor), ορίζεται από τη σχέση

$$\theta = \frac{c}{\lambda \mu_1} - 1,$$

όπου  $0 < \theta < 1$ .

Η ποσότητα αυτή εκφράζει το αναμενόμενο ποσοστό κέρδους για τον ασφαλιστή. Στην πράξη  $0 < \theta < 1$  αλλιώς ένα χαρτοφυλάκιο με  $\theta > 1$  θεωρείται μη ανταγωνιστικό.

**Ορισμός 3.2.4** Ο **χρόνος χρεοκοπίας** είναι η χρονική στιγμή όπου το πλεόνασμα θα γίνει για πρώτη φορά αρνητικό , ορίζεται ως εξής:

$$T = \begin{cases} 0, & \inf\{t: U(t) < 0\} \\ \infty, & \text{αν } U(t) \geq 0 \forall t \geq 0 \end{cases}$$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας σε πεπερασμένο χρόνο ισούται με

$$\psi(u, t) = P(T \leq t).$$

Ο χρόνος χρεοκοπίας είναι μια ελλειμματική τυχαία μεταβλητή, με συνάρτηση πυκνότητας  $w$  ,

$$w(u, t) = \frac{\partial}{\partial t} \psi(u, t).$$

Ο χρόνος χρεοκοπίας με θετική πιθανότητα μπορεί να πάρει την τιμή άπειρο

$$P(P < \infty) < 1 \text{ ή } P(T = \infty) > 0.$$

Επίσης ισχύει η σχέση

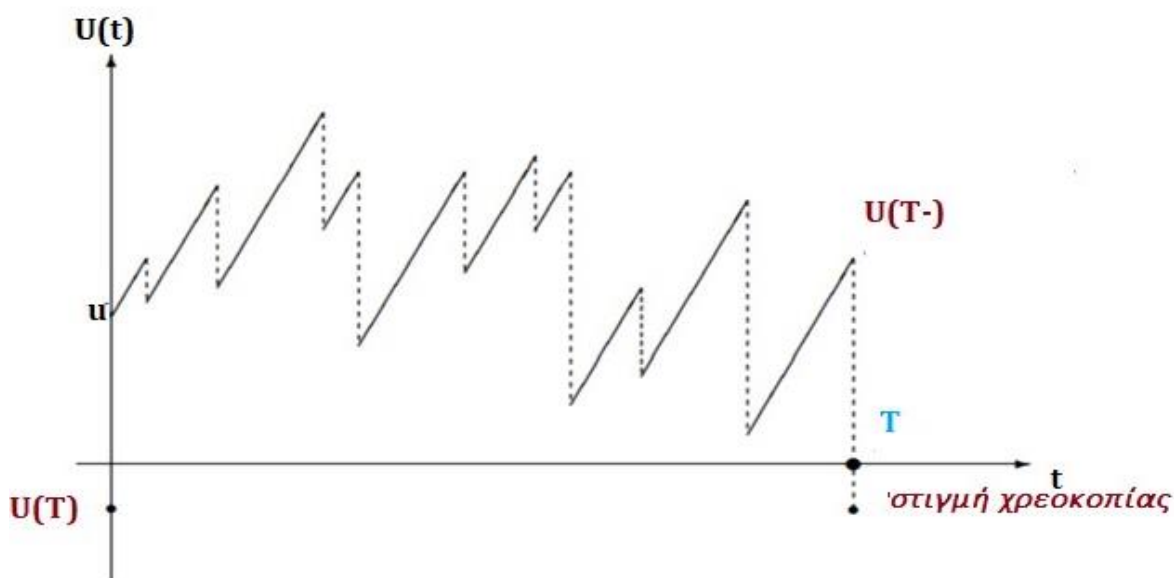
$$P(T = \infty) = P(U(t) > 0 \forall t) = 1 - \psi(u) = \delta(u).$$

Αυτό συμβαίνει όταν ισχύει  $c > \lambda \mu_1$  και η εταιρεία δεν κινδυνεύει με βεβαιότητα από τη χρεοκοπία.

Το έλλειμα τη στιγμή  $T$  της χρεοκοπίας ισούται με  $U(T)$  και θα πρέπει να παίρνει μία αρνητική τιμή.

Επιπλέον η τ.μ.  $U(T^-)$  μας δείχνει το μέγεθος του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και παίρνει μόνο θετικές τιμές, ορίζεται από τη σχέση:

$$U(T^-) = \lim_{t \rightarrow T^-} U(t).$$



**Σχήμα 3.3** Ο χρόνος χρεοκοπίας, το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία και το έλλειμα τη στιγμή της χρεοκοπίας. (Πολίτης 2021)

Στη συνέχεια δίνουμε μια πρόταση για μια ανανεωτική εξίσωση την οποία ικανοποιεί η πιθανότητα μη χρεοκοπίας  $\delta(u)$ .

**Πρόταση 3.2.2.** Στο κλασσικό μοντέλο η  $\delta(u)$  μας δίνει την πιθανότητα μη χρεοκοπίας και ικανοποιεί την εξίσωση

$$\delta(u) = \delta(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^u \delta(u-x) \bar{F}(x) dx, \quad u \geq 0 \quad (3.3)$$

όπου  $F(x) = 1 - \bar{F}(x)$  η ουρά κατανομής των αποζημιώσεων.

Μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα μη χρεοκοπίας όταν το αποθεματικό είναι μηδέν,  $\delta(0)$ .

Αρχικά παίρνουμε τα όρια για  $u \rightarrow \infty$  και στα δύο μέλη της (3.3) :

$$1 = \lim_{u \rightarrow \infty} \delta(u) = \delta(0) + \frac{\lambda}{c} \lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u \delta(u-x) \bar{F}(x) dx \quad (3.4)$$

Έτσι παρατηρούμε ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \delta(u - x) = 1$$

και

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u \bar{F}(x) dx = \int_0^{\infty} \bar{F}(x) dx = \mu_1.$$

Αλλάζοντας τη σειρά των ορίων και ολοκληρώνοντας την (3.3) παίρνομε την πιθανότητα μη χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό μηδέν, η οποία είναι ίση με

$$1 = \delta(0) + \frac{\lambda * \mu_1}{c}. \quad (3.5)$$

Για το περιθώριο ασφαλείας  $\theta$  ισχύει ότι

$$\theta = \frac{c}{\lambda \mu_1} - 1 \Rightarrow 1 + \theta = \frac{c}{\lambda \mu_1}. \quad (3.6)$$

Μπορούμε να εκφράσουμε την ποσότητα  $\delta(0)$  συναρτήσει του  $\theta$ ,

$$\delta(0) = 1 - \frac{1}{1+\theta} = \frac{\theta}{1+\theta}$$

Έτσι η πιθανότητα χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό είναι ίση με

$$\psi(0) = \frac{1}{1+\theta}$$

Επομένως η σχέση (3.3) με τη βοήθεια της (3.5) γίνεται

$$\delta(u) = 1 - \frac{\lambda \mu_1}{c} + \frac{\lambda}{c} \int_0^u \delta(u-x) \bar{F}(x) dx$$

η οποία είναι μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση.

### 3.3. Συντελεστής προσαρμογής

Ο συντελεστής προσαρμογής είναι η θετική σταθερά  $R$  που ικανοποιεί την εξίσωση

$$\int_0^{\infty} e^{Rx} dH(x) = \frac{c}{\lambda \mu_1} = 1 + \theta$$

Ορίζουμε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής  $H(x)$  ως

$$H(x) = \frac{1}{\mu_1} \int_0^x \bar{F}(y) dy.$$

Η (3.3) γίνεται

$$\delta(u) = 1 - \frac{\lambda \mu_1}{c} + \frac{\lambda \mu_1}{c} \int_0^u \delta(u-x) dH(x).$$

Ο συντελεστής προκύπτει από τη λύση της εξίσωσης

$$M(r) = 1 + (1 + \theta)\mu_1 r,$$

ή ισοδύναμα

$$M(r) = 1 + \frac{cr}{\lambda}.$$

Η εξίσωση αυτή

- δε μπορεί να έχει αρνητικές ρίζες
- έχει το πολύ μια θετική ρίζα

και ονομάζεται **εξίσωση Lundberg**. Εδώ η  $M(r)$  είναι η ροπογεννήτρια της κατανομής των αποζημιώσεων.

Η ροπογεννήτρια  $M(r)$  είναι αύξουσα και κυρτή συνάρτηση ως προς  $r$ , ενώ ισχύει ότι

$$\lim_{r \rightarrow 0} M(r) = 1, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} M(r) = \infty.$$

Στην περίπτωση που η ροπογεννήτρια  $M(r)$  απειρίζεται για κάθε  $r > 0$  τότε ο συντελεστής προσαρμογής δεν υπάρχει. Αυτό συμβαίνει όταν η κατανομή των αποζημιώσεων έχει βαριά ουρά.

Ο συντελεστής προσαρμογής έχει ένα **άνω φράγμα**

$$R < \frac{2\theta\mu_1}{\mu_2}.$$

Το οποίο αποδεικνύεται ως εξής:

Ο συντελεστής ικανοποιεί την σχέση

$$\lambda + cR = \lambda M(R)$$

Έστω οι αποζημιώσεις έχουν πυκνότητα  $f$  τότε παίρνουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} \lambda + cR &= \lambda \int_0^{\infty} e^{Rx} f(x) dx \\ &> \lambda \int_0^{\infty} \left(1 + Rx + \frac{1}{2}R^2 x^2\right) f(x) dx \\ &= \lambda \left[ \int_0^{\infty} f(x) dx + \int_0^{\infty} Rxf(x) dx + \int_0^{\infty} R^2 x^2 f(x) dx \right] \\ &= \lambda \left(1 + R\mu_1 + \frac{1}{2}R^2\mu_2\right) \end{aligned}$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει το εξής

$$2(c - \lambda\mu_1)R > \lambda R^2\mu_2$$

Λύνοντας ως προς  $R$ , για το οποίο ξέρουμε πως παίρνει μόνο θετικές τιμές, έχουμε

$$R < \frac{2(c-\lambda\mu_1)}{\lambda\mu_2}$$

Αντικαθιστώντας

$$c = (1 + \theta)\lambda\mu_1$$

προκύπτει το ζητούμενο άνω φράγμα.

Οι κύριοι λόγοι που ο συντελεστής προσαρμογής είναι σημαντικός είναι οι εξής :

- η **ανισότητα Lundberg**

$$\psi(u) \leq e^{-Ru} \quad \text{για κάθε } u \geq 0$$

Η ανισότητα συνδέει τη πιθανότητα χρεοκοπίας με το συντελεστή προσαρμογής και δίνει ένα άνω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας . Για την ανισότητα δίνονται οι ερμηνείες:

- Όσο μεγαλύτερο συντελεστή προσαρμογής έχουμε τόσο μικρότερη θα είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας ,
- Όσο μεγαλύτερο το αρχικό κεφάλαιο έχουμε, τόσο μικρότερη θα είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας.
- ο **ασυμπτωτικός τύπος Cramer-Lundberg**

$$\psi(u) \sim Ce^{-Ru} \quad \text{όπου } u \rightarrow \infty, \text{ για κάποιο } C > 0$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{Ce^{-Ru}}$$

Η σταθερά  $C$  υπολογίζεται ως εξής:

$$C = \frac{\theta\mu_1}{R \int_0^\infty x e^{Rx} \bar{F}(x) dx}, \quad C > 0, \quad (3.7)$$

(Dickson 2017).

Η **θεμελιώδης εξίσωση του Lundberg** είναι μια πιο γενική εξίσωση της μορφής

$$cs + \lambda f(s) - (\lambda + \delta) = 0$$

Ισοδύναμα,

$$\lambda \hat{f}(s) = \lambda + \delta - cs.$$

Το  $\delta \geq 0$  είναι η ένταση του επιτοκίου στην αγορά.

Εδώ

$$\hat{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sy} f(y) dy$$

ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας, (Gerber & Shui 1998). Ο μετασχηματισμός Laplace  $\hat{f}(s)$  μιας συνάρτησης  $f(s)$  υπάρχει αν η συνάρτηση είναι συνεχής. Για  $\delta > 0$  η εξίσωση έχει μια θετική ρίζα

$$\rho = \rho(\delta). \quad (3.8)$$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας μπορεί να υπολογιστεί με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace, με την εξής διαδικασία:

$$\hat{\psi}(u) = \frac{\hat{H}(s)}{1 + \theta - \hat{f}(s)}$$

όπου

$$\bar{H}(s) = 1 - \left(\frac{1}{\mu_1}\right) \int_0^s \bar{F}(y) dy$$

και

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{\mu_1} \bar{F}(s).$$

### 3.4. Παραδείγματα

**Παράδειγμα 3.4.1.** Σε ένα κλασικό μοντέλο η κατανομή των αποζημιώσεων έχει πυκνότητα

$$f(x) = 4e^{-4x}, x \geq 0.$$

Δίνονται  $c = 3$  ένταση ασφαλιστρού, και  $\lambda = 8$  η ένταση ανέλιξης Poisson, θα βρούμε ένα άνω φράγμα για το συντελεστή προσαρμογής  $R$ .

#### Λύση

Η κατανομή είναι εκθετική με παράμετρο 4. Μέση τιμή  $\mu_1$  της κατανομής είναι η εξής:

$$\mu_1 = \int_0^{\infty} xf(x) dx = 8 \int_0^{\infty} xe^{-4x} dx = \frac{1}{4}$$

Το περιθώριο ασφαλείας  $\theta$  δίνεται από της σχέση (3.6)

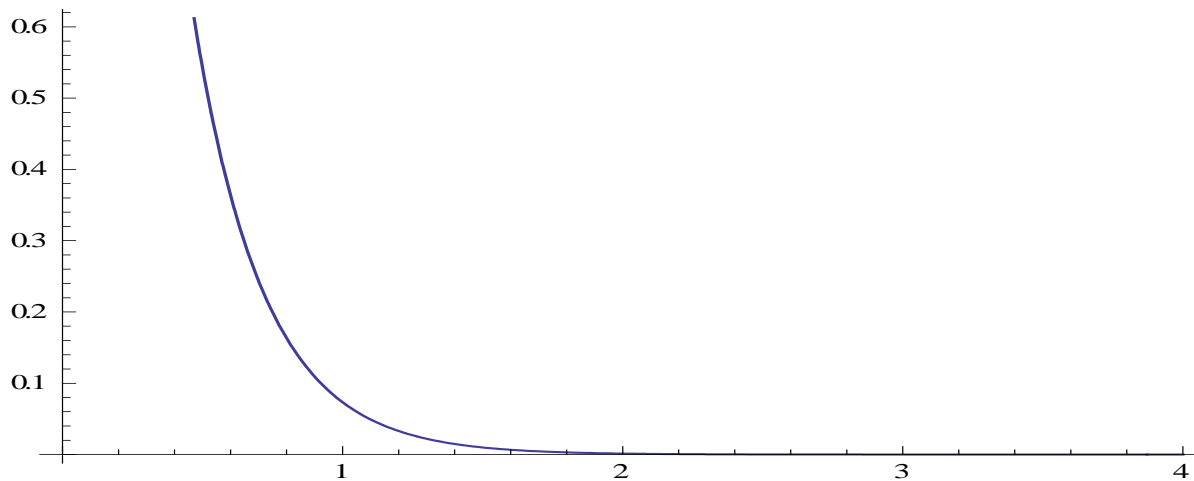
$$\theta = \frac{c}{\lambda\mu_1} - 1 = \frac{1}{2}.$$

Η δεύτερη ροπή  $\mu_2$  είναι

$$\mu_2 = \int_0^{\infty} x^2 f(x) dx = 8 \int_0^{\infty} x^2 e^{-4x} dx = \frac{1}{8}$$

Ένα άνω φράγμα για το συντελεστή προσαρμογής είναι

$$R < \frac{2\theta\mu_1}{\mu_2} = 2$$



**Σχήμα 3.4** Γραφική παράσταση της  $f(x)$ .

(Παράρτημα 2<sup>ο</sup>)

**Παράδειγμα 3.4.2.** Σε ένα κλασικό μοντέλο η κατανομή των αποζημιώσεων έχει πυκνότητα

$$g(x) = \frac{9}{2}xe^{-3x} + 2xe^{-2x}, \quad x \geq 0.$$

Δίνεται ότι  $\lambda = 5$  και  $c = 8$

**Λύση** Η κατανομή αυτή είναι μια μείξη Erlang κατανομών με παραμέτρους (3,2) και (2,2)

Η μέση της τιμή  $\mu_1$  ισούται

$$\mu_1 = \int_0^{\infty} xf(x)dx = \frac{9}{2} \int_0^{\infty} xe^{-3x} dx + 2 \int_0^{\infty} xe^{-2x} dx = \frac{5}{6}$$

Η δεύτερη ροπή της κατανομής των αποζημιώσεων είναι

$$\mu_2 = \int_0^{\infty} x^2 f(x)dx = \frac{9}{2} \int_0^{\infty} x^2 e^{-3x} dx + 2 \int_0^{\infty} x^2 e^{-2x} dx = \frac{13}{12}$$

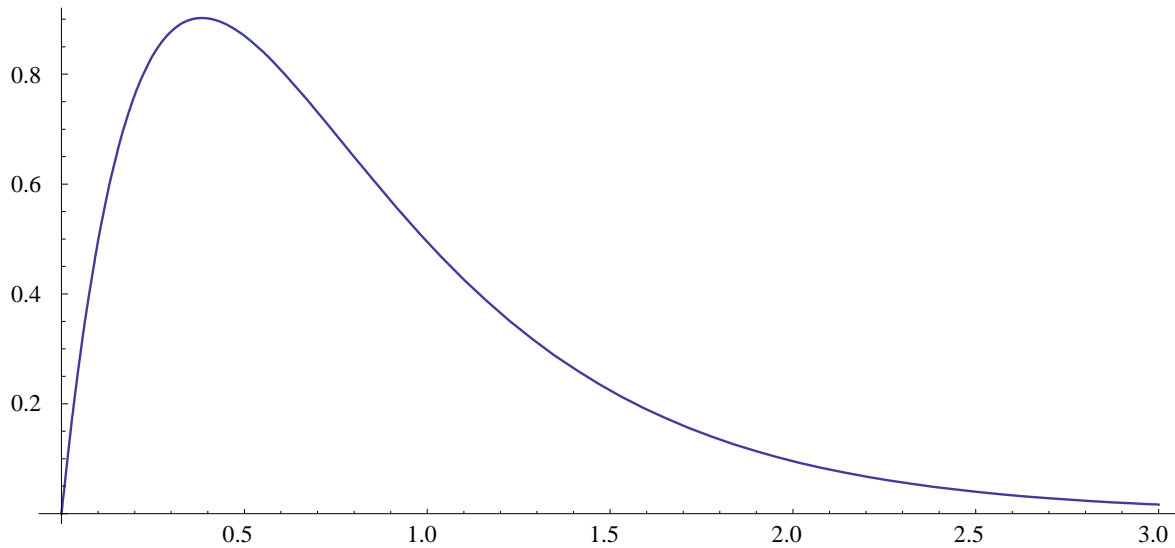
Για το περιθώριο ασφαλείας έχουμε

$$\theta = \frac{c}{\lambda\mu_1} - 1 = \frac{23}{25} = 0.92$$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό μηδέν είναι

$$\psi(0) = \frac{1}{1 + \theta} = \frac{25}{48}$$





Σχήμα 3.5. Γραφική παράσταση της  $g(x)$ .

(Παράρτημα 3<sup>ο</sup>)

**Παράδειγμα 3.4.3** Σε ένα κλασικό μοντέλο θεωρούμε ότι η κατανομή των αποζημιώσεων έχει πυκνότητα

$$f(x) = \frac{27}{2} e^{-3x} x^2, \quad x \geq 0.$$

Δίνεται ότι η ένταση της ανέλιξης Poisson για την άφιξη των απαιτήσεων είναι  $\lambda = 0.4$  και η ένταση του ασφαλιστρού  $c = 0.7$

**Λύση** Η πυκνότητα αντιστοιχεί σε μια Γάμμα κατανομή  $G(3,3)$ . Η μέση τιμή των αποζημιώσεων είναι

$$\mu_1 = \int_0^{\infty} x f(x) dx = 1.$$

Η ροπογεννήτρια μιας Γάμμα κατανομής είναι

$$\begin{aligned} M(t) &= E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x(\beta-t)} dx \\ &= \left( \frac{\beta}{\beta-t} \right)^\alpha, \quad t < \beta. \end{aligned}$$

Άρα η ροπογεννήτρια για  $G(3,3)$  γίνεται

$$M(t) = \frac{27}{(-3+t)^3}, \quad t < 3$$

Το περιθώριο ασφαλείας είναι

$$\theta = \frac{c}{\lambda \mu_1} - 1 = 0.75.$$

Συνεπώς η εξίσωση Lundberg για το συντελεστή προσαρμογής

$$M_X(r) = 1 + (1 + \theta)\mu_1 r$$

έχει ως ρίζες της εξίσωσης  $r_1 = 0.705083$ ,  $r_2 = 3.86174$ .

Η μικρότερη ρίζα ( $r_1 = 0.607719$ ) είναι αποδεκτή σε διάστημα  $(0,3)$  επομένως ο συντελεστής προσαρμογής είναι

$$R = 0.705083.$$

Βρίσκουμε τη σταθερά  $C$  του τύπου (3.7). Αρχικά βρίσκουμε την ουρά της κατανομής των αποζημιώσεων

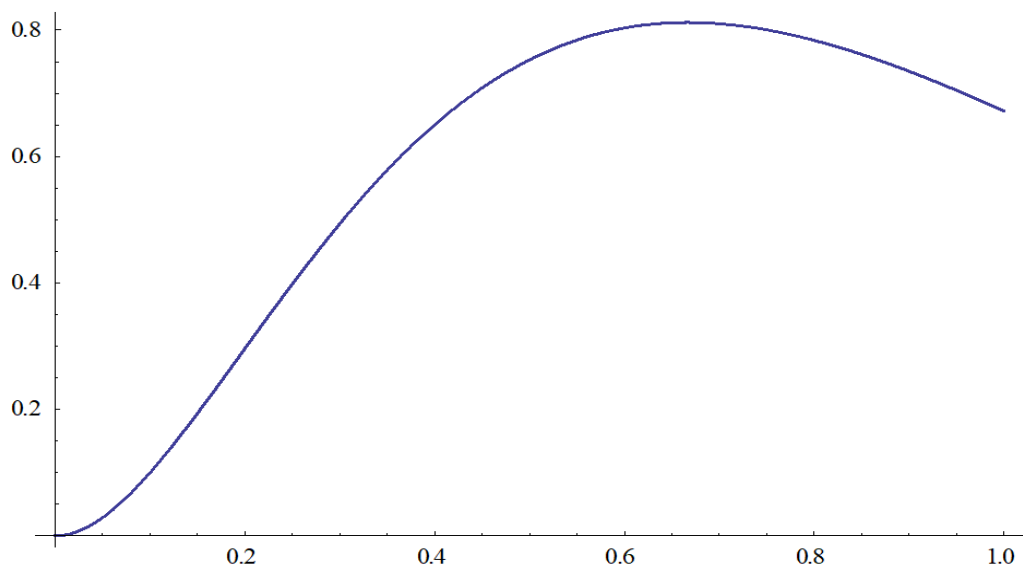
$$\bar{F}(x) = \int_x^\infty f(y)dy = 1 + \frac{1}{2}(-2 + e^{-3x}(2 + 6x + 9x^2))$$

Η σταθερά  $C$  ισούται με

$$C = 14.7372$$

Έτσι ο ασυμπτωτικός τύπος Cramer- Lundberg

$$\psi(u) \cong \psi_{CL}(u) = 14.7372e^{-0.705083u}.$$



**Σχήμα 3.6.** Γραφική παράσταση της  $f(x)$

(Παράρτημα 4<sup>ο</sup>)

## Κεφάλαιο 4

### Υπολογισμός πιθανότητας χρεοκοπίας

#### 4.1 Εισαγωγή

Στη θεωρία χρεοκοπίας το βασικό πρόβλημα είναι ο ακριβής υπολογισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας. Για το λόγο αυτό στο συγκεκριμένο κεφάλαιο θα μελετήσουμε τις περιπτώσεις των κατανομών όπου η πιθανότητα χρεοκοπίας μπορεί να υπολογισθεί με ακρίβεια όπως στην Εκθετική κατανομή. Θα δούμε κάποια φράγματα και κάποιες προσεγγίσεις για την πιθανότητα της χρεοκοπίας.

#### 4.2 Κλιμακωτά ύψη

Το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό είναι μια σημαντική μεταβλητή, η οποία συμβολίζεται ως  $L_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) και παίρνει θετικές τιμές. Όταν δεν υπάρχει πτώση του πλεονάσματος κάτω του αρχικού αποθέματος τότε έχουμε  $L_1 = 0$ . Τα  $L_i$  ονομάζονται **κλιμακωτά ύψη** (ladder heights) όπου παρουσιάζουν τη σταδιακή πτώση του πλεονάσματος από τη αρχική τιμή  $u$  ως τη στιγμή της χρεοκοπίας ή ως το ελάχιστο της ανέλιξης πλεονάσματος όταν δεν συμβαίνει χρεοκοπία. Το πλήθος των κλιμακωτών υψών είναι πεπερασμένο και τη συμβολίζουμε με τη τ.μ.  $D$  η οποία είναι διακριτή και ακολουθεί γεωμετρική κατανομή. Κάθε φορά που υπάρχει καινούργιο  $L_i$  η πιθανότητα να υπάρχει νέα πτώση ισούται με  $\psi(0)$ . Η μεταβλητή  $D$  μετράει τον αριθμό των αποτυχιών μέχρι την 1<sup>η</sup> επιτυχία.

Είναι εύκολο να δούμε ότι

$$P(D = 0) = \delta(0) = \frac{\theta}{1+\theta}$$
$$P(D = 1) = \psi(0)\delta(0) = \frac{1}{1+\theta} * \frac{\theta}{1+\theta}$$

Γενικά η κατανομή της  $D$  δίνεται από τη σχέση

$$P(D = k) = [\psi(0)]^k \delta(0) = \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^k * \frac{\theta}{1+\theta}$$

Στο κλασικό πρότυπο οι μεταβλητές  $L_i$  είναι ανεξάρτητες και ισόνομες έτσι ορίζουμε τη  $L$  ως τη συνολική πτώση του πλεονάσματος κάτω του  $u$ , η οποία λέγεται **μέγιστη σωρευτική απώλεια**. Η τ.μ.  $L$  είναι σύνθετη τυχαία μεταβλητή και ορίζεται ως εξής :

$$L = \begin{cases} L_1 + L_2 + \dots + L_D = \sum_{i=1}^D L_i, & \text{αν } D \geq 1 \\ 0, & \text{αν } D = 0 \end{cases}$$

Εφόσον η μεταβλητή  $D$  ακολουθεί γεωμετρική κατανομή και η τ.μ.  $L$  θα ακολουθεί σύνθετη γεωμετρική.

Η πιθανότητα η  $L$  να πάρει τη τιμή μηδέν είναι

$$P(L = 0) = P(D = 0) = \delta(0).$$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας όταν το αρχικό αποθεματικό είναι  $u$  δίνεται από τη σχέση

$$P(L > u) = \psi(u),$$

οπότε ισχύει ότι

$$P(L \leq u) = \delta(u).$$

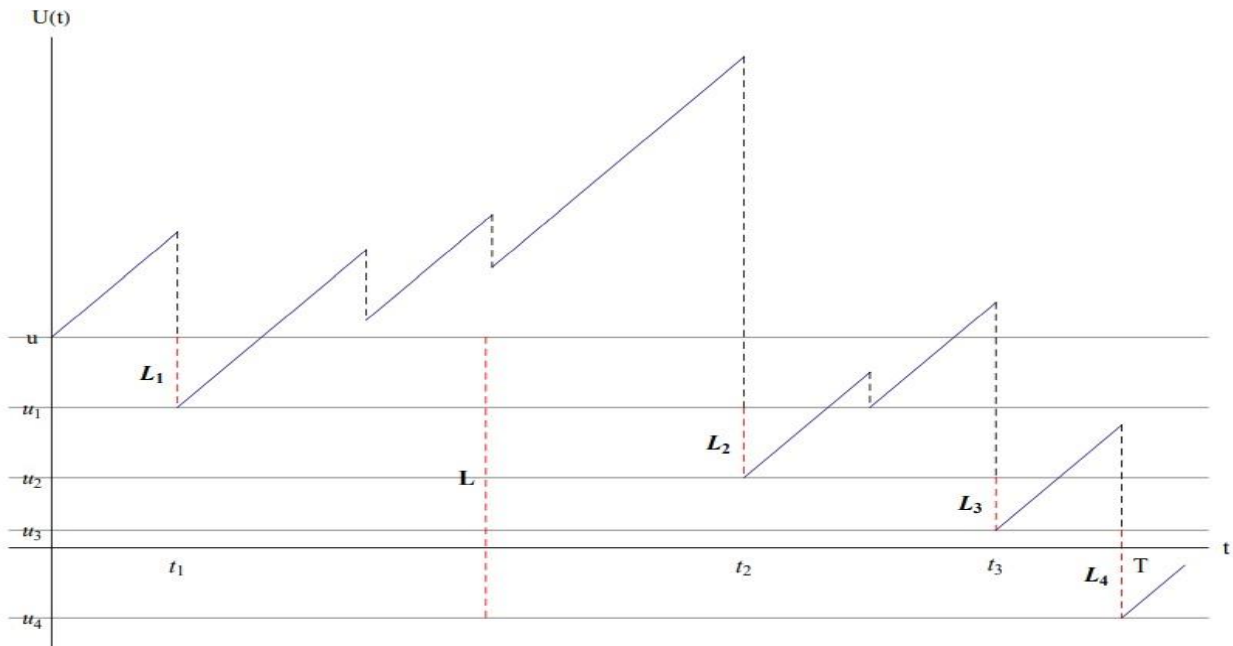
Έστω  $p_k$  η στιγμή που γίνεται η είσπραξη του ασφαλιστρού από τον ασφαλιστή

Μπορούμε να αποδείξουμε για τις ροπές της μέγιστης σωρευτικής απώλειας τα εξής (Gerber 1979)

$$E[L] = \int_0^\infty \psi(x) dx = \left( \frac{\mu_2}{2\theta\mu_1} \right),$$

$$E[L^2] = 2 \int_0^\infty x\psi(x) dx = \frac{\mu_3}{3\theta\mu_1} + \frac{1}{2} \left( \frac{\mu_2}{\theta\mu_1} \right)^2,$$

$$E[L^3] = 3 \int_0^\infty x^2\psi(x) dx = \frac{\mu_4}{4\theta\mu_1} + \frac{3}{4} \left( \frac{\mu_2}{\theta\mu_1} \right)^3 + \frac{\mu_2\mu_3}{(\theta\mu_1)^2}.$$



**Σχήμα 4.1 :** Κλιμακωτά ύψη και Σωρευτική απώλεια. (Πολίτης 2021)

Μπορεί να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των  $L_i$  είναι

$$f_{L_i}(x) = \frac{1}{\mu_1} (1 - F(x)).$$

**Πρόταση 4.2.1.** Η συνάρτηση κατανομής των κλιματικών υψών είναι

$$F_{L_i}(x) = P(L_1 \leq x) = \int_0^x \frac{1}{\mu_1} (1 - F(y)) dy, \quad x \geq 0. \quad (4.1)$$

Απόδειξη : Παραλείπεται (Πολίτης 2017)

Στο κλασσικό πρότυπο το περιθώριο ασφαλείας είναι  $\theta > 0$ .

Έτσι οι ροπογεννήτριες των κλιματικών υψών και μέγιστης σωρευτικής απώλειας που είναι  $M_D(r)$  και  $M_L(r)$  αντίστοιχα συνδέονται με την παρακάτω σχέση

$$M_L(r) = M_D(\ln M_{L_1}(r))$$

Ισοδύναμα και εφόσον η κατανομή της  $D$  είναι γεωμετρική, προκύπτει ότι

$$M_L(r) = \frac{\theta}{1 + \theta - M_{L_1}(r)} \quad (4.2)$$

Για τη ροπογεννήτρια των αποζημιώσεων  $M_X(r)$  ισχύει

$$M_{L_1}(r) = \frac{1}{\mu_1 r} (M_X(r) - 1)$$

Με βάση τις δύο τελευταίες σχέσεις προκύπτει ότι η ροπογεννήτρια της μέγιστης σωρευτικής απώλειας είναι

$$M_L(r) = \frac{\theta \mu_1 r}{(1 + \theta) \mu_1 r - M_X(r) + 1}.$$

(Πολίτης 2017)

Στη συνέχεια δίνουμε ένα γενικό κάτω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας.

**Πρόταση 4.2.2.** Έστω  $H$  η συνάρτηση κατανομής των κλιμακωτών υψών στο κλασσικό πρότυπο και  $\theta$  το περιθώριο ασφαλείας. Τότε για την πιθανότητα χρεοκοπίας ένα κάτω φράγμα δίνεται από τη σχέση:

$$\psi(u) \geq \frac{\bar{H}(u)}{\theta + \bar{H}(u)}, \quad u \geq 0$$

όπου  $\bar{H}(u) = 1 - H(u)$ .

**Απόδειξη** Έχουμε δείξει ότι η χρεοκοπία χρεοκοπίας ικανοποιεί την ανανεωτική ανέλιξη

$$\psi(u) = \frac{1}{1 + \theta} \bar{H}(u) + \frac{1}{(1 + \theta)} \int_0^u \psi(u - t) dH(t).$$

Η  $\psi(u)$  είναι φθίνουσα συνάρτηση έτσι για  $0 \leq t \leq u \leftrightarrow 0 \leq u - t \leq u$ , ισχύει ότι  $\psi(u - t) \geq \psi(u)$ .

Αντικαθιστώντας το φράγμα αυτό στην πάνω εξίσωση έχουμε ότι

$$\psi(u) \geq \frac{1}{1 + \theta} \bar{H}(u) + \frac{1}{(1 + \theta)} \psi(u) \int_0^u dH(t).$$

Λύνοντας ως προς  $\psi(u)$  προκύπτει η σχέση

$$\psi(u) \geq \frac{\frac{1}{1+\theta} \bar{H}(u)}{1 - \frac{1}{1+\theta} H(u)} = \frac{\bar{H}(u)}{1 + \theta - H(u)}.$$

**Πρόταση 4.2.3.** Έστω ο συντελεστής προσαρμογής  $R$ , ο χρόνος χρεοκοπίας  $T$  και το έλλειμα τη στιγμή της χρεοκοπίας  $U(T)$ . Για κάθε  $u \geq 0$  ισχύει (Πολίτης 2017)

$$\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E[e^{-RU(T)} | T < \infty]}.$$

**Πόρισμα 4.2.1.** Όταν η κατανομή αποζημιώσεων είναι η  $Exp(\varphi)$ , τότε η μεταβλητή  $L_1$  θα ακολουθεί και αυτή την εκθετική κατανομή με την ίδια παράμετρο.

**Απόδειξη** Παίρνοντας τη σχέση (4.1) έχουμε ότι

$$P(L_1 \leq x) = \int_0^x \frac{1}{\mu_1} [(1 - F(y))] dy = \varphi \int_0^x e^{-\varphi y} dy = \varphi \left[ \frac{1}{\varphi} - \frac{1}{\varphi} * e^{-\varphi x} \right]$$

Άρα

$$P(L_1 \leq x) = 1 - e^{-\varphi x}, \quad x \geq 0$$

### 4.3 Εκθετικές αποζημιώσεις

Η εκθετική κατανομή μπορεί να μας δώσει ακριβή πιθανότητα χρεοκοπίας. Ισχύει ότι  $\psi(u) = P(L > u)$  έτσι το πρόβλημα της πιθανότητας χρεοκοπίας ανάγεται στην εύρεση της κατανομής που ακολουθεί η μέγιστη σωρευτική απώλεια.

Όταν στο κλασσικό μοντέλο έχουμε εκθετική κατανομή με παράμετρο  $\varphi$  η πιθανότητα χρεοκοπίας όταν το αρχικό αποθεματικό  $u$  ισούται με :

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\theta} e^{-Ru} = \psi(0) e^{-Ru}, \quad u \geq 0.$$

Για την απόδειξη αυτού του αποτελέσματος, αναφέρουμε αρχικά ότι, η ροπογεννήτρια των αποζημιώσεων είναι

$$M_X(r) = \frac{\varphi}{\varphi - r}, \quad r < \varphi$$

Σύμφωνα με τη σχέση (4.2) και από το πόρισμα 4.2.1. παίρνουμε

$$M_L(r) = \frac{\theta}{1 + \theta - \left( \frac{\varphi}{\varphi - r} \right)} \quad r < \varphi$$

Η κατανομή της  $L$  έχει μάζα στο σημείο μηδέν,  $\delta(0) = \frac{\theta}{1+\theta}$ , ενώ είναι συνεχής στο διάστημα  $(0, \infty)$  έτσι έχουμε τη ροπογεννήτρια

$$M_L(r) = \frac{\theta}{1+\theta} + \frac{1}{1+\theta} * \frac{\theta\varphi}{\theta\varphi - r(1+\theta)}.$$

Ο συντελεστής προσαρμογής  $R$  για τις εκθετικές αποζημιώσεις αποδεικνύεται ως εξής : η εκθετική κατανομή  $\text{Exp}\left(\frac{\theta\varphi}{1+\theta}\right)$  πολλαπλασιάζεται με τον όρο  $\frac{1}{1+\theta}$ , στο δεξιό μέλος της τελευταίας σχέσης .

Συνεπώς

$$R = \frac{\theta\varphi}{1+\theta}. \quad (4.3)$$

Η κατανομή της τ.μ.  $L$  έχει πυκνότητα στο  $(0, \infty)$  και είναι

$$f_L(x) = \frac{1}{1+\theta} R e^{-Rx},$$

και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας χρεοκοπίας της είναι

$$\psi(u) = P(L > u) = \int_u^{\infty} f_L(x) dx = \frac{1}{1+\theta} e^{-Ru}.$$

### Παρατηρήσεις

- Η ανισότητα του Lundberg δίνει  $\psi(u) \leq e^{-Ru}$  ενώ για εκθετικές αποζημιώσεις ο τύπος είναι  $\psi(u) = \psi(0)e^{-Ru}$ . Η προσέγγιση είναι καλύτερη όταν το  $\theta$  παίρνει μικρές τιμές .
- Στις κατανομές όπου υπάρχει το  $R$  ισχύει ο ασυμπτωτικός τύπος  $\psi(u) \sim C e^{-Ru}$ , είναι ακριβής για εκθετικές κατανομές , δηλαδή  $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{e^{-Ru}}$ , όπου η σταθερά υπολογίζεται ως :

$$C = \frac{1}{1+\theta} .$$

### Παράδειγμα 4.3.1 Για μια εκθετική κατανομή

$$f(x) = 24e^{-24x}, \quad x \geq 0.$$

Δίνεται ότι  $\lambda = 0.8$ ,  $\theta = \frac{1}{6}$ . Ζητείται η πιθανότητα χρεοκοπίας  $\psi(u)$ .

### Λύση

Βρίσκουμε τη μέση τιμή

$$\mu_1 = \frac{1}{24}$$

Η δεύτερη ροπή ισούται με

$$\mu_2 = 0.00347222$$

Η ροπογεννήτρια της εκθετικής ισούται με

$$M_x(r) = \frac{24}{24 - r}, \quad r > 0$$

Ο συντελεστής προσαρμογής από τη σχέση (4.3) προκύπτει ότι

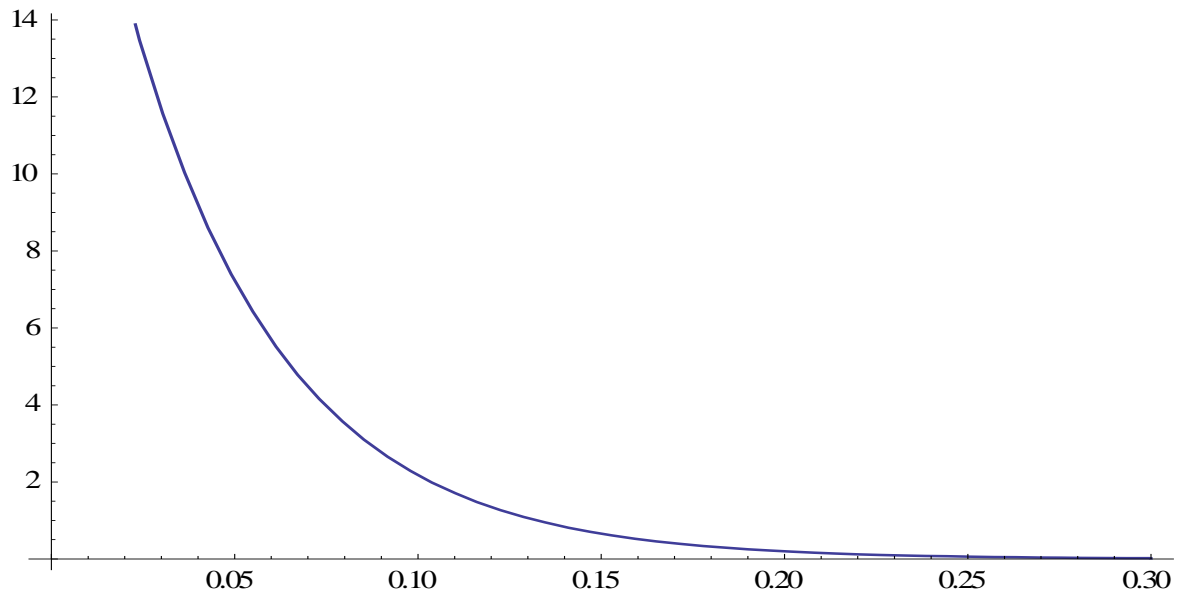
$$R = 3.42857$$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας  $\psi(u)$  ισούται με

$$\psi(u) = \frac{1}{1 + \theta} e^{-Ru} = \frac{6e^{-3.42857u}}{7}$$

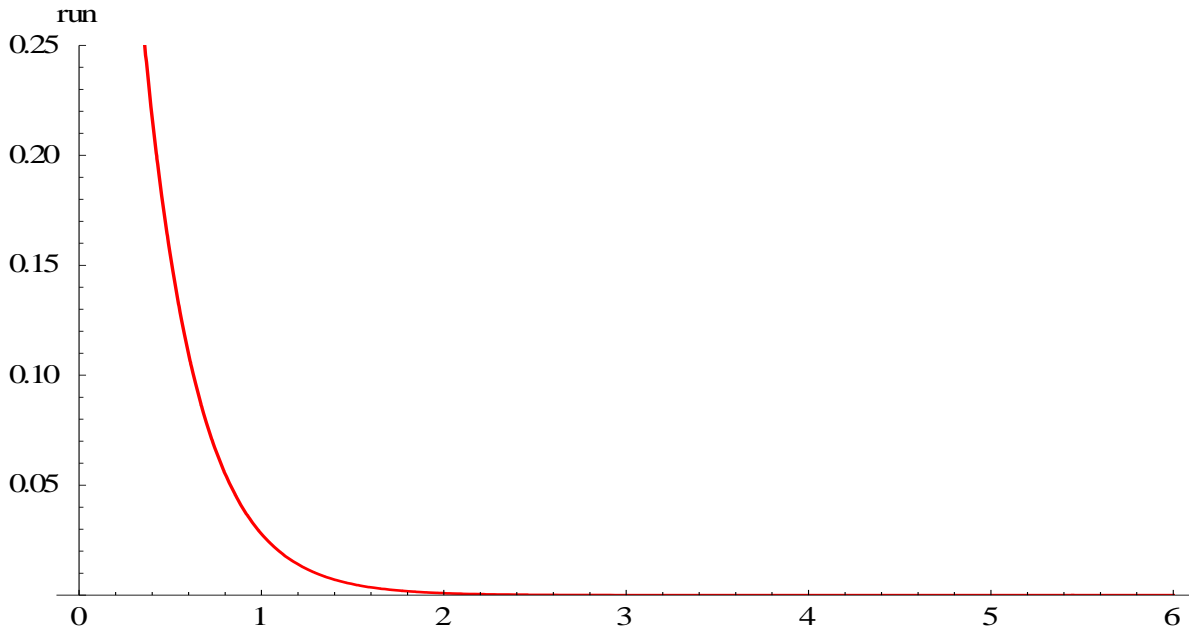
Για αρχικό αποθεματικό μηδέν  $\psi(0)$  έχουμε

$$\psi(0) = \frac{1}{1 + \theta} = \frac{6}{7}$$



**Σχήμα 4.3.1.** Η εκθετική κατανομή  $f(x)$





**Σχήμα 4.3.2.** Η πιθανότητα χρεοκοπίας  $\psi(u)$

(Παράρτημα 5<sup>ο</sup>)

#### 4.4 Μείξη εκθετικών κατανομών

Στο κλασικό πρότυπο υποθέτουμε πως οι αποζημιώσεις ακολουθούν μια κατανομή με πυκνότητα

$$f(x) = z_1 v_1 e^{-v_1 x} + z_2 v_2 e^{-v_2 x} + \dots + z_k v_k e^{-v_k x} = \sum_{i=1}^k z_i v_i e^{-v_i x},$$

με  $z_1 + z_2 + \dots + z_k = 1$ , η πυκνότητα αυτή αντιστοιχεί σε μια μείξη  $k$  εκθετικών κατανομών με παραμέτρους  $v_1, v_2, \dots, v_k$  και βάρη  $z_1, z_2, \dots, z_k$ .

**Πρόταση 4.4.1.** Όταν η κατανομή των αποζημιώσεων είναι μείξη εκθετικών κατανομών τότε η συνάρτηση της πιθανότητας χρεοκοπίας δίνεται από τη σχέση:

$$\psi(u) = C_1 e^{-r_1 u} + C_2 e^{-r_2 u} + \dots + C_k e^{-r_k u}, \quad u \geq 0$$

όπου  $r_1, \dots, r_k$  είναι οι λύσεις της εξίσωσης για τον συντελεστή προσαρμογής και  $C_1, \dots, C_k$  και είναι θετικές σταθερές.

Για τις παραμέτρους  $v_1, v_2, \dots, v_k$  της κατανομής των αποζημιώσεων και τις ρίζες των  $r_1, r_2, \dots, r_k$  της εξίσωσης Lundberg ισχύει ότι

$$0 < r_1 < v_{i_1} < r_2 < v_{i_2} < \dots < r_k < v_{i_k},$$

εδώ τα στοιχεία του συνόλου  $\{v_1, \dots, v_k\}$  είναι σε αύξουσα σειρά.

Όταν έχουμε συνδυασμό εκθετικών κατανομών θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας. Έτσι θα δούμε την επόμενη εφαρμογή για να δούμε μεθοδολογία υπολογισμού της  $\psi(u)$ . :

**Εφαρμογή 4.4.1.** Έστω η σ.π.π. μιας μείξης τριών εκθετικών κατανομών με πυκνότητα

$$f(x) = a_1 b_1 e^{-b_1 x} + a_2 b_2 e^{-b_2 x} + a_3 b_3 e^{-b_3 x}.$$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας ισούται με

$$\psi(u) = C_1 e^{-r_1 u} + C_2 e^{-r_2 u} + C_3 e^{-r_3 u}.$$

Υπολογίζουμε τις σταθερές  $C_1, \dots, C_k$ .

Αρχικά για  $u = 0$ ,

$$\psi(0) = \frac{1}{1+\theta}.$$

Έτσι και τα  $C_i$  ικανοποιούν τη σχέση

$$C_1 + C_2 + C_3 = \frac{1}{1+\theta} \quad (4.3)$$

Για 2<sup>η</sup> σχέση παίρνουμε την πρώτη παράγωγο του  $\delta(u)$ :

$$\delta'(u) = \frac{1}{(1+\theta)\mu_1} \delta(u) - \frac{1}{(1+\theta)\mu_1} \int_0^u \delta(u-x) f(x) dx.$$

Εάν θέσουμε  $u = 0$  τότε παίρνουμε

$$\delta'(0) = \frac{1}{(1+\theta)\mu_1} \delta(0) = \frac{1}{(1+\theta)\mu_1} (1 - C_1 - C_2 - C_3) \quad (4.4)$$

Και την εξισώνουμε με τη γενική λύση της συνάρτησης  $\delta'$

$$\delta'(u) = C_1 r_1 e^{-r_1 u} + C_2 r_2 e^{-r_2 u} + C_3 r_3 e^{-r_3 u}$$

Για  $u = 0$

$$\delta'(0) = C_1 r_1 + C_2 r_2 + C_3 r_3. \quad (4.5)$$

Για να βρούμε μια 3<sup>η</sup> σχέση απλά παραγωγίζουμε ξανά την  $\delta'(u)$ . Έτσι, βρίσκουμε την 2<sup>η</sup> παράγωγο στο σημείο 0.

$$\delta''(u) = \frac{\delta'(u)}{(1+\theta)\mu_1} - \frac{\delta(0) - f(u) \big|_{u=0}}{(1+\theta)\mu_1} \xrightarrow{u=0} \delta''(0) = \frac{\theta}{(1+\theta)^3 \mu_1^2} - \delta'(0) f(0), \quad (4.6)$$

την οποία την εξισώνουμε με την 2<sup>η</sup> παράγωγο της παρακάτω εξίσωσης στο σημείο 0, δηλαδή με την

$$\delta''(0) = -C_1 r_1^2 - C_2 r_2^2 - C_3 r_3^2. \quad (4.7)$$

Επομένως λύνουμε το σύστημα των (4.3), (4.4) με την (4.7) και βρίσκουμε τα  $C_i$ .

**Παράδειγμα 4.4.1** Έχουμε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \frac{3e^{-6x}}{2} + \frac{e^{-2x}}{2} + \frac{e^{-x}}{2}, \quad x \geq 0.$$

Έχουμε μια μείξη εκθετικών κατανομών με βάρη  $a_1 = \frac{1}{4}$ ,  $a_2 = \frac{1}{4}$ ,  $a_3 = \frac{1}{2}$  και παραμέτρους  $\beta_1 = 6$ ,  $\beta_2 = 2$ ,  $\beta_3 = 1$ .

Δίνεται ότι  $\theta = 0.2$ . Ζητείται η πιθανότητα χρεοκοπίας  $\psi(u)$ .

Λύση Η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι της μορφής

$$\psi(u) = C_1 e^{-r_1 u} + C_2 e^{-r_2 u} + C_3 e^{-r_3 u}$$

Η μέση τιμή των αποζημιώσεων είναι

$$\mu_1 = \int_0^{\infty} x f(x) dx = \frac{2}{3}$$

Η ροπογεννήτρια της κατανομής των αποζημιώσεων είναι

$$M_\chi(r) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-r} + \frac{1}{2-r} - \frac{3}{-6-r} \right) \quad r < 1.$$

Από την εξίσωση Lundberg

$$1 + (1 + \theta)\mu_1 = M_\chi(r)$$

βρίσκουμε τις λύσεις

$$r_1 = 0.0191847, \quad r_2 = 1.8153, \quad r_3 = 5.74286$$

Ενώ για να βρούμε τις λύσεις των  $C_1, C_2, C_3$  λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (4.3) ως (4.7) και βρίσκουμε ότι

$$C_1 = 0,034997, \quad C_2 = 0.459814, \quad C_3 = 0.0235418$$

Επομένως η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι

$$\psi_L(u) = 0.0235418 e^{-5.74285u} + 0.459814 e^{-1.8153u} + 0.349977 e^{-0.191847u}$$

Η ανισότητα Lundberg μας δίνει ότι

$$\psi(u) \leq e^{-0.191847u},$$

το οποίο είναι άνω φράγμα.

Από την πρόταση 4.4.2. μπορούμε να υπολογίσουμε το κάτω φράγμα της πιθανότητας χρεοκοπίας

$$\psi(u) \geq \frac{1 + \frac{1}{16}(-16 + e^{-6u} + 3e^{-2u} + 12e^{-u})}{1.2 + \frac{1}{16}(-16 + e^{-6u} + 3e^{-2u} + 12e^{-u})}$$

Η σταθερά  $C$  στην προσέγγιση Cramer ισούται από τη (3.7) με

$$C = 0.818181$$

και η πιθανότητα είναι

$$\psi_{CL}(u) = 0.818181 e^{-0.191847u}.$$

(Παράρτημα 6° (a))

## 4.5 Προσέγγιση De Vylder

Στην προσέγγιση De Vylder (1978) θέλουμε να αντικαταστήσουμε την κλασσική ανέλιξη κινδύνου  $\{U(t): t \geq 0\}$  με μια άλλη ανέλιξη  $\{\bar{U}(t): t \geq 0\}$  για να υπολογίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας. Η ανέλιξη αυτή έχει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά :

- Περιθώριο ασφαλείας  $\tilde{\theta}$ ,
- Poisson με παράμετρο  $\tilde{\lambda}$ ,
- Εκθετική κατανομή αποζημιώσεων.

Η πιθανότητα χρεοκοπίας για τη προσέγγιση αυτή συμβολίζεται ως  $\psi_{DV}(u)$  ενώ η συνάρτησή της δίνεται από τη σχέση:

$$\psi_{DV}(u) = \frac{1}{1 + \tilde{\theta}} e^{-R_{DV}u}$$

όπου

$$R_{DV} = \frac{\tilde{\theta}}{(1 + \tilde{\theta}) * \tilde{\mu}_1},$$

$\tilde{\mu}_1$  η μέση τιμή της εκθετικής κατανομής.

Η συνθήκη του De Vylder προϋποθέτει οι τρεις πρώτες ροπές του πλεονάσματος να είναι ίσες για τις ανεξίξεις  $U(t)$  και  $\bar{U}(t)$  ώστε να υπολογισθούν τα , δηλαδή θα πρέπει να ισχύει ότι:

$$E[U(t)^k] = E[\bar{U}(t)^k] \quad \text{για } k = 1, 2, 3, \dots$$

Για  $k = 1$  παίρνουμε

$$E[U(t)] = E[\bar{U}(t)]$$

Έστω η δεύτερη ροπή  $\tilde{\mu}_2$  και η τρίτη ροπή  $\tilde{\mu}_3$  για την εκθετική που χρησιμοποιούμε. Έτσι θέτουμε  $t = 1$  και παίρνουμε παρακάτω σύστημα:

$$\begin{aligned} \tilde{\theta} * \tilde{\lambda} * \tilde{\mu}_1 &= \theta \lambda \mu_1 \\ \tilde{\lambda} * \tilde{\mu}_2 &= \lambda \mu_2 \\ \tilde{\lambda} * \tilde{\mu}_3 &= \lambda \mu_3. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε τις τιμές των  $\tilde{\lambda}$ ,  $\tilde{\mu}_1$  και  $\theta$ .

Οι ροπές της εκθετικής συνδέονται μεταξύ τους ως εξής

$$\tilde{\mu}_2 = 2\tilde{\mu}_1^2 \text{ και } \tilde{\mu}_3 = 6\tilde{\mu}_1^3.$$

Κάνοντας αντικατάσταση στο σύστημα (4.8) και λύνοντας το βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \tilde{\theta} * \tilde{\lambda} * \tilde{\mu}_1 &= \theta \lambda \mu_1 \\ 2\tilde{\lambda}\tilde{\mu}_1^2 &= \lambda \mu_2 \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$6\tilde{\lambda}\tilde{\mu}_1^3 = \lambda\mu_3 \quad (4.10)$$

Βρίσκουμε  $\tilde{\mu}_1 = \frac{\mu_3}{2\mu_1}$  το οποίο σημαίνει ότι η παράμετρος της εκθετικής είναι  $3^{\mu_2/\mu_3}$ .

Με αντικατάσταση της (4.10) παίρνουμε :

$$\tilde{\lambda} = \frac{9\lambda\mu_2^3}{2\mu_3^2} \quad (4.11)$$

Και με αντικατάσταση της (4.10) έχουμε ότι:

$$\tilde{\theta} = \frac{2\mu_1\mu_3\theta}{3\mu_2^2}. \quad (4.12)$$

**Παράδειγμα 4.5.1.** Έστω η συνάρτηση  $f(x) = 9xe^{-3x}$ ,  $x > 0$  και  $\theta = 0.4$ ,  $\lambda = 0.8$ . Ζητείται να υπολογιστεί η  $\psi(u)$ .

**Λύση** Η κατανομή είναι Erlang (3,3)

Βρίσκουμε τη μέση τιμή της κατανομής

$$\mu_1 = \frac{2}{3}$$

Τη δεύτερη ροπή

$$\mu_2 = \frac{2}{3}$$

Και την τρίτη ροπή

$$\mu_3 = \frac{8}{9}$$

Η μέση τιμή της εκθετικής κατανομής στην προσέγγιση De Vylder ισούται με

$$\tilde{\mu}_1 = \left(\frac{\mu_3}{3\mu_2}\right) = \frac{4}{9}$$

Από τη σχέση (4.10) παίρνουμε ότι

$$\tilde{\lambda} = \frac{9\lambda\mu_2^3}{2\mu_3^2} = 1.35$$

Αντικαθιστώντας στην (4.12) βρίσκουμε ότι :

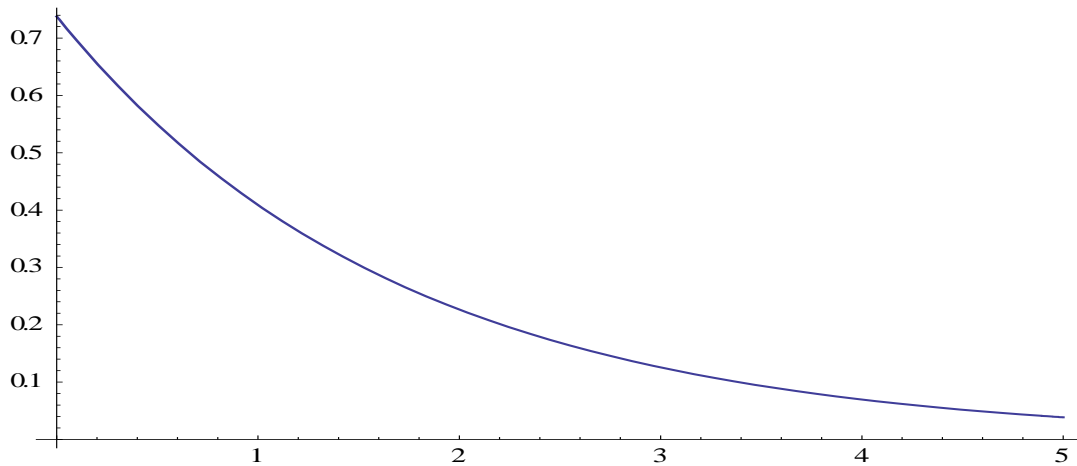
$$\tilde{\theta} = \frac{2\mu_1\mu_3\theta}{3\mu_2^2} = 0.355556$$

Ο συντελεστής προσαρμογής είναι

$$R_{DV} = 0.590164$$

Άρα η πιθανότητα χρεοκοπίας με την προσέγγιση De Vylder είναι

$$\psi_{DV}(u) = \frac{1}{1 + \tilde{\theta}} e^{-R_{DV}u} = 0.737705e^{-0.590164u}.$$



**Σχήμα 4.5.1** Η πιθανότητα χρεοκοπίας  $\psi(u)$ .

$u$	$\psi_{DV}$
0	0.737705
10	0.00201759
20	0.000005518
50	$1.12884 \times 10^{-13}$
80	$2.30934 \times 10^{-21}$
100	$1.727383 \times 10^{-26}$
200	$4.044777 \times 10^{-52}$
300	$9.471104 \times 10^{-78}$
500	$5.192931 \times 10^{-129}$
1000	$3.655464 \times 10^{-257}$

**Πίνακας 4.5.1** Πιθανότητα χρεοκοπίας με προσέγγιση De Vylder για διαφορετικά αποθεματικά.

Όπως φαίνεται από τον παραπάνω πίνακα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι όσο αυξάνεται το  $u$  τόσο μειώνεται η πιθανότητα χρεοκοπίας, με πολύ γρήγορο ρυθμό,

(Παράρτημα 7°)

## 4.6 Προσέγγιση Tijms

Το 1986 ο Tijms πρότεινε το εξής: αν η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι δύσκολη στην επίλυσή της να υπολογίζεται προσεγγιστικά από μείξη εκθετικών κατανομών. Στις παραμέτρους που έχουμε επιλέξει θα πρέπει η μάζα πιθανότητας στο 0 και η μέση τιμή των κατανομών να είναι ίσες.

Η προσέγγιση αυτή έχει τη μορφή

$$\psi_T(u) = \left(\frac{1}{1+\theta} - C\right) e^{-\pi u} + C e^{-Ru} \quad (4.13)$$

ισοδύναμα

$$\psi_T(u) = (\psi(0) - C) e^{-\pi u} + C e^{-Ru}$$

Ο συντελεστής προσαρμογής  $R > 0$  ικανοποιεί τη εξίσωση Lundberg

$$\int_0^{\infty} e^{Ry} f(y) dy = \frac{1}{\psi(0)}.$$

Το  $\pi$  υπολογίζεται ως εξής

$$\pi = \left(\frac{1}{1+\theta} - C\right) \left(\frac{1}{\theta\mu_1} \int_0^{\infty} x \bar{F}(x) dx - \frac{C}{R}\right)^{-1}, \quad (4.14)$$

ενώ το  $C$

$$C = \frac{1 - \psi(0)}{\psi(0)R \int_0^{\infty} y e^{Ry} f(y) dy}.$$

Δηλαδή  $C$  είναι η σταθερά του ασυμπτωτικού τύπου των Cramer –Lundberg .

Για το συντελεστή προσαρμογής αποδεικνύεται ότι ισχύει  $R < \pi$  , έτσι ο δεύτερος όρος θα συγκλίνει πιο αργά στο μηδέν σε σχέση με τον πρώτο όρο, δηλαδή

$$\psi_T(u) \sim C e^{-Ru},$$

συνεπώς η προσέγγιση  $\psi_T(u)$  έχει πάντα τη σωστή ασυμπτωματική συμπεριφορά.

Η προσέγγιση είναι ακριβής για όλες τις τιμές του  $u$  όταν η κατανομή των αποζημιώσεων  $F$  να ακολουθεί μια από τις επόμενες τρεις οικογένειες κατανομές

- Εκθετική κατανομή,
- Μείξη 2 Εκθετικών Κατανομών
- Συνέλιξη 2 Εκθετικών Κατανομών με την ίδια παράμετρο όταν η  $F$  είναι Γάμμα  $(2, \beta)$  με  $\beta > 0$ .

Η προσέγγιση του Tijms, δίνει καλά αποτελέσματα για  $\theta < 4$ , ενώ για  $\theta < 1$  η προσέγγιση μπορεί να προσεγγίσει κατανομές με βαριά ουρά. (Πηγή: Willmot, 2002)

#### **Παράδειγμα 4.6.1.** (συνέχεια Παράδειγμα

4.4.1.)

Η σταθερά  $\pi$  από (4.14) ισούται με:

$$\pi = \left(\frac{1}{1+\theta} - C\right) \left(\frac{1}{\theta\mu_1} \int_0^{\infty} x \bar{F}(x) dx - \frac{C}{R}\right)^{-1} = 2.49372$$

Όπου

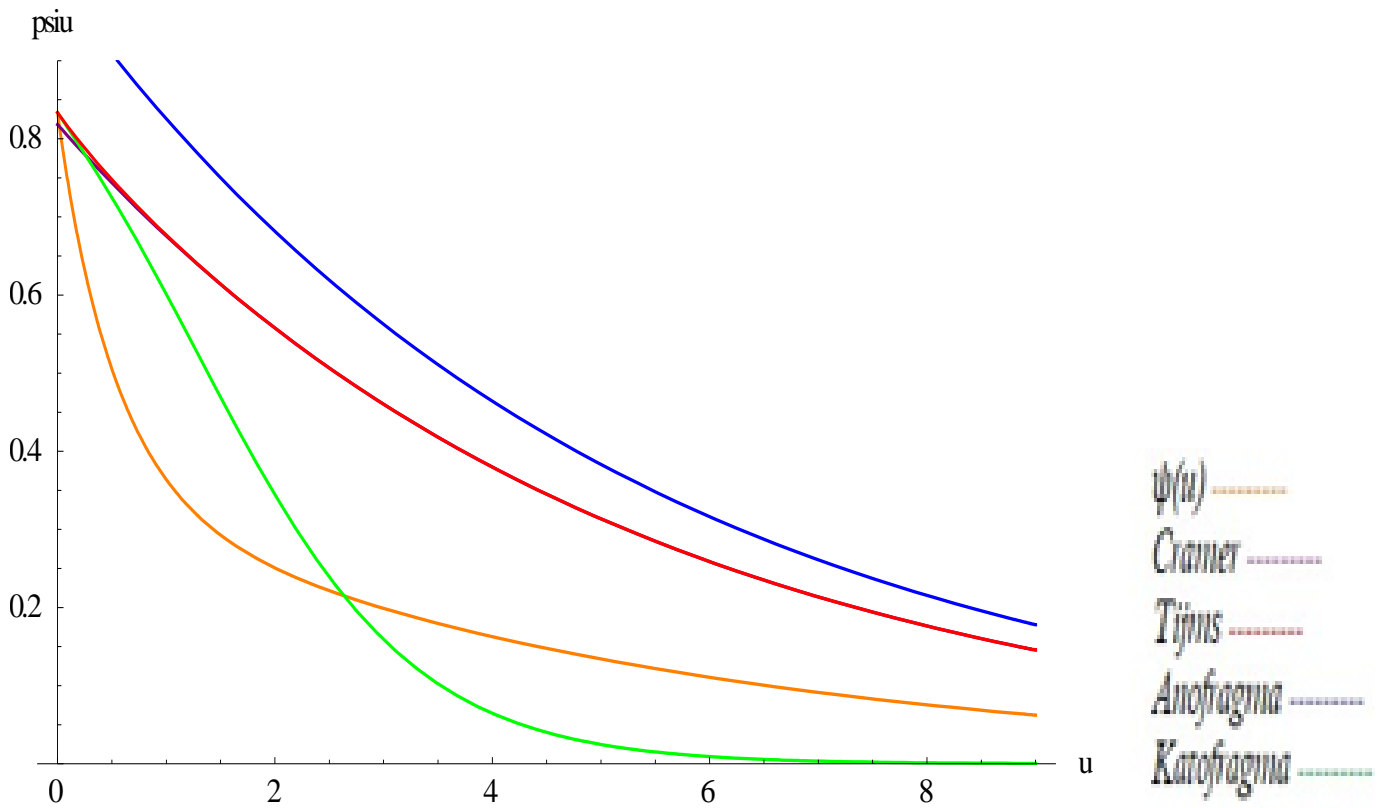
$$\bar{F}(x) = 1 + \frac{1}{4}(-4 + e^{-6x} + e^{-2x} + 2e^{-x}).$$

Η προσέγγιση από τη σχέση (4.13) έχει τη μορφή

$$\psi_T(u) = 0.0151525e^{-2.49372u} + 0.818181e^{-0.191847u}$$

Έτσι η ισχύει ότι

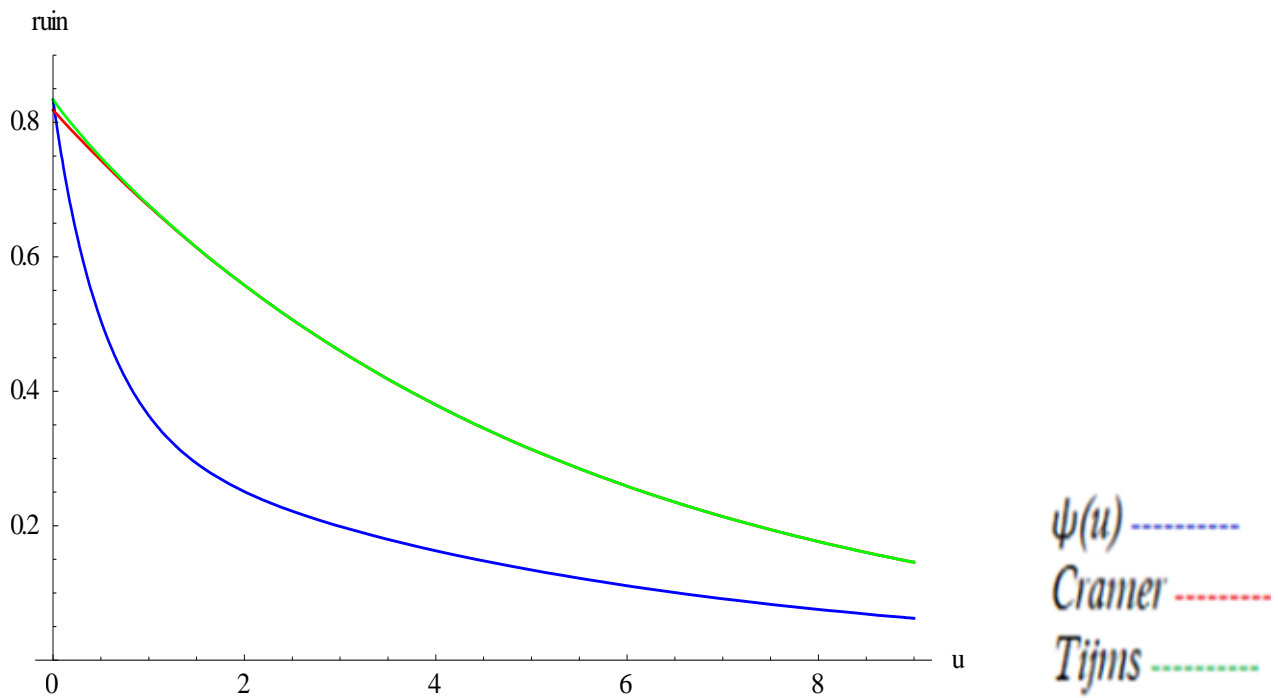
$$\psi_T(u) \sim 0.8181801e^{-0.191847u}$$



**Σχήμα 4.6.1.** Γραφική παράσταση των  $\psi(u), \psi_C(u), \psi_T(u), e^{-R_1 * u}, \frac{\bar{H}(u)}{\theta + \bar{H}(u)}$ .

Παρατηρούμε ότι για κάθε τιμή του  $u$  και για κάθε δεδομένο  $\theta$ , η προσέγγιση Cramer είναι μια καλή προσαρμογή.





**Σχήμα 4.6.2.** Γραφική παράσταση προσεγγίσεων πιθανότητας χρεοκοπίας.

Από το παραπάνω σχήμα παρατηρούμε την καλή προσαρμογή της προσέγγισης Cramer για μείξη 3 εκθετικών κατανομών με δεδομένες παραμέτρους και βάρη μείξης, και η προσέγγιση του Tijms έχει πάρα πολύ ικανοποιητικά αποτελέσματα για την ακριβή πιθανότητα χρεοκοπίας.

(Παράρτημα 6° (b)).

## 5 ΚΕΦΑΛΑΙΟ

### Ροπές του χρόνου χρεοκοπίας

#### 5.1 Εισαγωγή

Σε αυτή την ενότητα θα εξεταστούν οι ροπές του χρόνου χρεοκοπίας που αποτελούν ειδική περίπτωση της προεξοφλημένης ποινής (discounted penalty function) που ορίστηκε από τους Gerber & Shiu (1998). Όπως γνωρίζουμε από τη Στατιστική οι ροπές μιας τυχαίας μεταβλητής προκύπτουν αν παραγωγίσουμε το μετασχηματισμό Laplace. Οι Lin & Willmot (1999) απέδειξαν ότι μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας μπορεί να εκφραστεί ως η ουρά μιας γεωμετρικής κατανομής.

Στο κλασικό μοντέλο τη θεωρίας κινδύνων, θεωρούμε ότι οι αφίξεις των απαιτήσεων γίνονται σύμφωνα με μια ανέλιξη Poisson  $\{N(t)\}_{t \geq 0}$  με ρυθμό  $\lambda$ , ενώ τα μεγέθη των απαιτήσεων είναι θετικές, ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με συνάρτηση κατανομής:

$$P(x) = 1 - \bar{P}(x) = P(X \leq x), \text{ όπου } P(0) = 0.$$

Έστω  $w(x_1, x_2), 0 \leq x_1, x_2 < \infty$  για μια αρνητική συνάρτηση με  $\delta \geq 0$ .

Η συνάρτηση Gerber-Shiu δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi(u) = \varphi_\delta(u) = E\{e^{-\delta t} w(U(T-), |U(T)|) I(T < \infty)\}, \quad \forall u \geq 0 \quad (5.1)$$

Παρατηρούμε ότι για  $\delta = 0$  και  $w(x_1, x_2) = 1$  προκύπτει η πιθανότητα χρεοκοπίας, ενώ αν ισχύει μόνο  $w(x_1, x_2) = 1$  έχουμε το μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας

$$\varphi_0(u) = E[e^{-\delta T} I(T < \infty)]$$

Ισχύει ότι

$$\psi(u) = E\{I(T < \infty)\}$$

όπου το  $I(\cdot)$  είναι η δείκτρια συνάρτηση ενός ενδεχομένου

$$I = \begin{cases} 1, & T < \infty \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Η συνάρτηση  $\varphi$  είναι χρήσιμη για τη γενίκευση των  $T, U(T-)$  και  $|U(T)|$ . (Gerber and Shiu 1998). Επιπλέον η (5.1) μπορεί να θεωρηθεί ως μετασχηματισμός Laplace. Οι Gerber and Shiu (1998) μας δείχνουν ότι η  $\varphi(u)$  ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

$$\varphi(u) = \frac{\lambda}{c} \int_0^u \varphi(u-x) \int_x^\infty e^{-\rho(y-x)} dP(y) dx + \frac{\lambda}{c} e^{\rho u} \int_u^\infty e^{-\rho u} \int_x^\infty w(x, yx) dP(y) dx, \quad (5.2).$$

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση  $w(x_1, x_2)$  είναι τέτοια ώστε ο δεύτερος όρος της (5.2) να είναι πεπερασμένος. Η εξίσωση (5.2) έχει μια μοναδική λύση και μπορεί να βρεθεί χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό Laplace.

Για το λόγο αυτό η εξίσωση (5.2) γράφεται ως εξής (Lin and Willmot, 1999):

$$\varphi(u) = \frac{1}{1+\beta} \int_0^u \varphi(u-x) dG(x) + \frac{1}{1+\beta} H(u), \quad u \geq 0, \quad (5.3)$$

όπου  $G(x) = 1 - \bar{G}(x)$  δίνεται από

$$\bar{G}(x) = \frac{\bar{P}(x) - e^{-\rho x} \int_x^\infty e^{-\rho y} dP(y)}{\rho \int_0^\infty e^{-\rho y} \bar{P}(y) dy}, \quad (5.4)$$

ενώ για τις σταθερές  $\beta$  και τη συνάρτηση  $H$  έχουμε

$$\beta = \frac{(1+\theta)\mu_1}{\int_0^\infty e^{-\rho y} \bar{P}(y) dy} - 1, \quad (5.5)$$

$$H(u) = \frac{e^{\rho u} \int_u^\infty e^{-\rho x} \int_x^\infty w(x, y-x) dP(y) dx}{\int_0^\infty e^{-\rho y} \bar{P}(y) dy}, \quad (5.6).$$

Όταν η κατανομή είναι σύνθετη γεωμετρική τότε ορίζουμε ως εξής  $K(u) = 1 - \bar{K}(u)$ , ενώ έχουμε

$$\bar{K}(u) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\beta}{1+\beta} * \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^n \bar{G}^{*n}(u), \quad u \geq 0, \quad (5.7)$$

όπου  $\bar{G}^{*n}(u)$  η  $n$ -οστή συνέλιξη του  $G(u)$ . Είναι εύκολο να δούμε πως η  $\bar{K}(u)$  ικανοποιεί μια ανανεωτική εξίσωση της μορφής

$$\bar{K}(u) = \frac{1}{1+\beta} \int_0^u \bar{K}(u-x) dG(x) + \frac{1}{1+\beta} \bar{G}(u), \quad u \geq 0, \quad (5.8)$$

μπορεί να θεωρηθεί και ως μετασχηματισμός Laplace τη στιγμή  $T$  της χρεοκοπίας.

Υποθέτουμε ότι  $w(x_1, x_2) = 1$  τότε από τις σχέσεις (5.5) και (5.6) προκύπτει ότι  $H(u) = \bar{G}(u)$ . Έτσι  $\varphi(u)$  είναι μετασχηματισμός Laplace για χρόνο  $T$  και  $\bar{K}(u) = \varphi(u)$ .

Ειδική περίπτωση όταν  $\delta = 0$

$$G(x) = \frac{1}{\mu_1} \int_0^x \bar{P}(y) dy, \quad (5.9)$$

σε αυτήν την περίπτωση

$$\bar{K}(u) = \psi(u). \quad (5.10)$$

## 5.2 Ο χρόνος έως στιγμή της χρεοκοπίας

Στην ενότητα αυτή θα χρησιμοποιήσουμε την ερμηνεία του  $\varphi(u)$  στη σχέση (5.1) ως μετασχηματισμό Laplace για ορισμένο  $\delta$  ώστε να βρούμε τις ροπές του  $T$ . Στη προσέγγιση μας ενδιαφέρει να διαφορήσουμε την (5.3) ως προς το  $\delta$  για να δείξουμε ότι η αντίστοιχη ροπή ικανοποιεί ακόμα μια ελλειμματική εξίσωση. Έτσι για να επεξεργαστούμε την (5.3) θα χρειαστούμε το επόμενο λήμμα:

**Λήμμα 5.2.1.** Έστω ότι  $\varphi(u, \delta)$  είναι η λύση της ακόλουθης εξίσωσης:

$$\frac{c}{\lambda} \varphi(u, \delta) = \int_0^u \varphi(u-x, \delta) m(x, \rho) dx + M(u, \delta), \quad (5.11)$$

όπου  $\rho = \rho(\delta)$  και

$$m(x, \rho) = \int_x^\infty e^{-\rho(y-x)} dP(y), \quad x \geq 0. \quad (5.12)$$

Αν η δεύτερη ροπή  $\mu_2$  για  $P(x)$ , είναι πεπερασμένη, η  $M(u, \delta)$  είναι μια διαφορήσιμη συνάρτηση ως προς  $\delta$  στο  $[0, \delta_0)$  για κάποια  $\delta_0 > 0$  και  $M_1(u, \delta) = \frac{\partial M(u, \delta)}{\partial \delta}$  είναι συνεχής στο  $u$ , τότε το  $\varphi(u, \delta)$  είναι διαφορήσιμο ως προς  $\delta$  στο  $[0, \delta_0)$  και  $\varphi_1(u, \delta) = \frac{\partial \varphi(u, \delta)}{\partial \delta}$  είναι η λύση της ακόλουθης εξίσωσης :

$$\frac{c}{\lambda} \varphi_1(u, \delta) = \int_0^u \varphi_1(u-x, \delta) m(x, \rho) dx + \int_0^u \varphi(u-x, \delta) m(x, \rho) dx + M(u, \delta), \quad (5.13)$$

όπου  $m_1(x, \rho) = \frac{\partial m(x, \rho)}{\partial \delta}$ .

**Απόδειξη** ( Willmot & Lin, 2000)

Θέλουμε να εξετάσουμε τη ροπή της χρεοκοπίας. Από τις σχέσεις (5.12) και (5.3) μπορούμε να πάρουμε ότι:

$$\frac{c}{\lambda} \varphi(u) = \int_0^u \varphi(u-x) m(x, \rho) dx + \int_u^\infty \exp[-\rho(\delta)(x-u)] \int_x^\infty w(x, y-x) dP(y) dx. \quad (5.14)$$

Έτσι από το Λήμμα 5.2.1 παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \frac{c}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \delta} \varphi(u) &= \int_0^u \left\{ \frac{\partial}{\partial \delta} \varphi(u-x) \right\} m(x, \rho) dx \\ &\quad + \rho'(\delta) \int_0^u \varphi(u-x) \frac{\partial}{\partial \delta} m(x, \rho) dx \\ &\quad - \rho'(\delta) \int_u^\infty (x-u) \exp[-\rho(\delta)(x-u)] \int_x^\infty w(x, y-x) dP(y) dx. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Ορίζουμε τις ακόλουθες συναρτήσεις

$$H(u, 0) = \frac{1}{\mu_1} \int_u^\infty \int_x^\infty w(x, y-x) dP(y) dx, \quad (5.16)$$

$$\varphi_1(u) = E\{T w(U(-T), |U(T)|) I(T < \infty)\}. \quad (5.17)$$

**Θεώρημα 5.2.1.** Η συνάρτηση  $\varphi_1(u)$  ικανοποιεί την ελλειμματική εξίσωση ανανέωσης :

$$\varphi_1(u) = \frac{1}{1+\theta} \int_0^u \varphi_1(u-x) dP_1(x) + \frac{1}{1+\theta} H_1(u), \quad (5.18)$$

όπου

$$H_1(u) = \frac{1}{\lambda \mu_1 \theta} \int_0^u \psi(u-x) H(x, 0) dx + \frac{1}{\lambda \mu_1^2 \theta} \int_u^\infty (x-u) \int_x^\infty w(x, y-x) dP(y) dx. \quad (5.19)$$

**Απόδειξη** (Lin & Willmot, 2000)

**Θεώρημα 5.2.2.** Για  $k = 0, 1, 2, \dots$ , η συνάρτηση  $\varphi_{1,k}(u)$  ικανοποιεί την ελλειμματική εξίσωση ανανέωσης :

$$\varphi_{1,k}(u) = \frac{1}{1+\theta} \int_0^u \varphi_{1,k}(u-x) dP_1(x) + \frac{\mu_{1,k}}{(k+1)c\mu_1\theta} \tau_{k+1}(u), \quad (5.20)$$

όπου η συνάρτηση  $\varphi_{1,k}$  δίνεται από:

$$\varphi_{1,k}(u) = \frac{\mu_1}{\lambda\mu_1^2\theta^2} \int_0^u \psi(u-x)\tau_k(x)dx + \frac{\mu_{k+1}}{(k+1)\lambda\mu_1^2\theta^2} \{\tau_{k+1}(u)\} - \int_0^u \psi(u-x)\psi(x)dx - \frac{\mu_{k+1}}{(k+1)(k+2)\lambda\mu_1^2\theta^2} \psi(u), \quad (5.21)$$

με  $\tau_0(u) = \mu_1(1+\theta)\psi(u)$ , και το  $\tau_1$  δίνεται από τον τύπο

$$\tau_1(u) = \theta \int_u^\infty \psi(x)dx, \quad (5.22)$$

Γενικά η συνάρτηση  $\tau_k(u)$  για  $k = 2, 3, 4, \dots$  δίνεται από :

$$\tau_k(u) = \frac{k\mu_1}{\mu_k} \int_u^\infty (x-u)^{k-1} \psi(x)dx - \sum_{j=0}^{k-2} \binom{k}{j} \frac{\mu_{k-j}}{\mu_k} \int_u^\infty (x-u)^j \psi(x)dx. \quad (5.23)$$

**Απόδειξη** (Willmot & Lin, 2000).

Ειδική περίπτωση  $w(x_1, x_2) = x_2^k$  όπου  $k > 0$ . Για αυτό θα δούμε το επόμενο θεώρημα.

**Θεώρημα 5.2.3** Για  $k = 1, 2, \dots$  ισχύει η σχέση

$$E\{e^{-\delta T} |U(T)|^k | T < \infty\} = \frac{1}{\beta\psi(u)} [kp_{k-1}(\rho)a_{k-1}(u, \rho) - p_k(\rho)\bar{K}(u)], \quad (5.24)$$

όπου  $p_n(\rho) = \int_0^\infty x^n dG(x)$  και

$$a_n(u, \rho) = \beta \int_u^\infty \bar{K}(x)dx.$$

**Απόδειξη** ( Dickson, 1995)

**Πρόταση 5.2.1.** Ο μέσος χρόνος χρεοκοπίας, δεδομένου πως έχει συμβεί χρεοκοπία, δίνεται από τον τύπο :

$$E(T_c) = E(T|T < \infty) = \frac{\psi_1(u)}{\psi(u)}, \quad (5.25)$$

όπου η  $\psi_1$  ικανοποιεί την εξίσωση

$$\psi_1(u) = \frac{1}{1+\theta} \int_0^u \psi_1(u-x)dP_1(x) + \frac{1}{c} \int_u^\infty \psi(x)dx, \quad (5.26)$$

Και η λύση της εξίσωσης δίνεται από

$$\psi_1(u) = \frac{1}{\lambda\mu_1\theta} \left\{ \int_0^u \psi(u-x)\psi(x)dx + \int_u^\infty \psi(x)dx - \frac{\mu_2}{2\mu_1\theta} \psi(u) \right\}, \quad (5.27)$$

(Schmidli 1994).

**Πρόταση 5.2.2.**

Έχουμε την ακόλουθη σχέση

$$E\{T|U(T)||T < \infty\} = \frac{\varphi_{1,1}(u)}{\psi(u)}, \quad (5.28)$$

όπου η  $\varphi_{1,1}(u)$  ικανοποιεί την εξίσωση :

$$\varphi_{1,1}(u) = \frac{1}{1+\theta} \int_0^u \varphi_{1,1}(u-x) dP_1(x) + \frac{1}{c} \int_u^\infty (x-u)\psi(u)dx - \frac{\mu_2}{2c\mu_1\theta} \int_u^\infty \psi(x)dx, \quad (5.29)$$

ενώ δίνεται από :

$$\begin{aligned} \varphi_{1,1}(u) = & \frac{1}{\lambda\mu_1\theta} \int_0^u \psi(u-x) \int_x^\infty \psi(t)dt dx - \frac{\mu_2}{2\lambda\mu_1^2\theta^2} \int_0^u \psi(u-x)\psi(x)dx + \frac{1}{\lambda\mu_1\theta} \int_u^\infty (x-u)\psi(u)dx \\ & - \frac{\mu_2}{2\lambda\mu_1^2\theta^2} \int_u^\infty \psi(u)dx - \frac{\mu_3}{6\lambda\mu_1^2\theta^2} \psi(u). \end{aligned}$$

### Απόδειξη

Όταν έχουμε  $k = 1$  χρησιμοποιούμε την παρακάτω σχέση με τη βοήθεια της απόδειξης του Θεωρήματος 5.2.2.

$$H_1(u) = \frac{\mu_{k+1}}{(k+1)\lambda\mu_1^2\theta} \tau_{k+1}(u),$$

επίσης, έχουμε ότι

$$H_1(u) = \frac{1}{\lambda\mu_1} \int_u^\infty (x-u)\psi(x)dx - \frac{\mu_2}{2\lambda\mu_1^2\theta^2} \int_u^\infty \psi(u)dx.$$

Με τη βοήθεια της

$$\tau_k(u) = \frac{k\mu_1\theta}{\mu_1} \int_u^\infty (x-u)^{k-1}\psi(u)dx \sum_{j=0}^{k-2} \binom{k}{j} \frac{\mu_{k-j}}{\mu_1} \int_u^\infty (x-u)^j\psi(x)dx.$$

Η (5.25) δίνει τη σχέση (5.29).

Ομοίως όταν  $k = 1$ , (5.26) γίνεται (5.29) με τη βοήθεια των (5.27) και (5.28).

Η συνδιακύμανση των  $T$  και  $|U(T)|$  προκύπτει από τις προτάσεις 5.2.1 και 5.2.2. Γενικά ισχύει η παρακάτω εξίσωση από την απόδειξη του θεωρήματος 5.2.1. με  $w(x_1, x_2)$  αυθαίρετο :

$$\varphi(u, 0) = E\{w(U(T-), |U(T)|)I(T < \infty)\},$$

η οποία μας δίνει τον μέσο όρο του  $w$ .

**Θεώρημα 5.2.4.** Η  $k$ -οστή ροπή της χρεοκοπίας στο κλασικό μοντέλο, ισούται με:

$$E\{T_c^k\} = E(T^k | T < \infty) = \frac{\psi_k(u)}{\psi(u)}, \quad (5.31)$$

όπου  $\psi_k(u)$  ικανοποιεί την ακόλουθη ελλειμματική εξίσωση

$$\psi_k(u) = \frac{1}{1+\theta} \int_0^u \psi_k(u-x) dP_1(x) + \frac{k}{c} \int_u^\infty \psi_{k-1}(x)dx, \quad (5.32)$$

για  $k = 1, 2, 3, \dots$ , με  $\psi_0(u) = \psi(u)$ , αρχική συνθήκη.

Επιπρόσθετα, κάθε  $\psi_k(u)$  δίνεται **αναδρομικά** από τη σχέση

$$\psi_k(u) = \frac{k}{\lambda\mu_1\theta} \left[ \int_0^u \psi(u-x)\psi_{k-1}(x)dx + \int_u^\infty \psi_{k-1}(x)dx - \psi(u) \int_0^\infty \psi_{k-1}(x)dx \right], \quad (5.33)$$

χρησιμοποιώντας την  $\psi_{k-1}(u)$ .

**Απόδειξη** (Lin & Willmot, 2000).

### 5.3 Υπολογισμός της συνάρτησης $\psi_k(u)$ .

Θέλουμε να εστιάσουμε στη στιγμή της χρεοκοπίας και πώς μπορούμε να υπολογίσουμε τις ροπές του  $T_c$ , έτσι η  $k$ -οστή ροπή τη στιγμή της χρεοκοπίας ισούται με

$$\psi_k(u) = E\{T^k I(T < \infty)\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Αρχικά, παρατηρούμε ότι

$$\int_u^\infty \psi_{k-1}(x)dx = \int_0^\infty \psi_{k-1}(x)dx - \int_0^u \psi_{k-1}(x)dx, \quad (5.34)$$

Κάνοντας αντικατάσταση στις σχέσεις (5.33) και (5.34) προκύπτει το εξής :

$$\psi_k(u) = \frac{1+\theta}{\theta} \psi_k(0)\bar{\psi}(u) - \frac{k}{\lambda\mu_1\theta} \int_0^u \bar{\psi}(u-x)\psi_{k-1}(x)dx, \quad (5.35)$$

η οποία είναι αναδρομική σχέση.

Εδώ η συνάρτηση  $\bar{\psi}(u)$  ορίζεται από τη σχέση

$$\bar{\psi}(u) = \int_0^\infty e^{-sy} \psi(y)dy.$$

Από (5.32) για  $u = 0$  έχουμε ότι

$$\psi_k(0) = \frac{k}{c} \int_0^\infty \psi_{k-1}(x)dx, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (5.36)$$

Τη στιγμή της χρεοκοπίας το αρχικό πλεόνασμα παύει να υπάρχει πέφτει κάτω από το μηδέν, γι' αυτό το λόγο είναι σημαντική η αξιολόγηση του  $\psi_k(0)$  την  $k$ -οστη ροπή. Έτσι μπορούμε να ορίσουμε την παρακάτω ποσότητα

$$m_k(n) = \int_0^\infty x^n \psi_k(x)dx, \quad k, n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.37)$$

και έχουμε ότι

$$\psi_{k+1}(0) = \frac{(k+1)m_k(0)}{c}. \quad (5.38)$$

Μπορούμε να δούμε τον αναδρομικό τύπο για το  $m_k(n)$ .

Για  $n = 0, 1, 2, \dots$

$$m_k(n) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} E\{L^{n+1}\}, & k = 0 \\ \frac{k}{(n+1)\lambda\mu_1\theta} \sum_{j=0}^n \binom{n+1}{j+1} m_{k-1}(j+1) E\{L^{n-j}\}, & k = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (5.39)$$

(Panjer and Willmot, 1992).

Παρατηρούμε πως

$$\psi_{k+1}(0) = \frac{(k+1)m_k(0)}{c} = \frac{(k+1)km_{k+1}(1)}{c\lambda\mu_1\theta}$$

και χρησιμοποιώντας την (5.39) μπορεί η  $\psi_k(0), k = 2, 3, 4, \dots$ , να εκφραστεί με όρους  $\{m_0(1), m_0(2), \dots, m_0(k-1)\}$ .

Επιπλέον σημαντικά είναι και τα επόμενα περιγραφικά μέτρα:

**Συντελεστής μεταβλητότητας** (coefficient of variation (CV))

$$cv\{T_c\} = \frac{E\{[T_c - E\{T_c\}]^2\}^{\frac{1}{2}}}{E\{T_c\}}, \quad (5.40)$$

**Συντελεστής λοξότητας** (coefficient of skewness)

$$skew\{T_c\} = \frac{E\{[T_c - E\{T_c\}]^3\}}{E\{[T_c - E\{T_c\}]^2\}^{\frac{3}{2}}}, \quad (5.41)$$

**Συντελεστής κυρτότητας** (coefficient of kurtosis)

$$kurt\{T_c\} = \frac{E\{[T_c - E\{T_c\}]^4\}}{E\{[T_c - E\{T_c\}]^2\}^2}, \quad (5.42)$$

Να σημειωθεί ότι οι κεντρικές ροπές  $E\{[T_c - E\{T_c\}]^r\}$  και οι απλές ροπές  $E\{T_c^r\}$  σχετίζονται με το αποτέλεσμα (Johnson, 1992)

$$E\{[T_c - E\{T_c\}]^r\} = \sum_{j=0}^r (-1)^j \binom{r}{j} E\{T_c^{r-j}\} E\{T_c\}^j.$$

## 5.4 Μελέτη ροπών για διάφορες κατανομές

Οι Lin και Willmot (2000) υπολόγισαν τις ροπές του χρόνου χρεοκοπίας για διάφορες κατανομές

1. Για την εκθετική κατανομή με παράμετρο  $\mu$  και συντελεστή προσαρμογής  $R = \frac{\theta\mu}{1+\theta}$ , οι ροπές του χρόνου χρεοκοπίας ισούνται με:

$$\psi_k(u) = e^{-Ru} \sum_{j=0}^k \bar{C}_{j,k} \frac{(Ru)^j}{j!}, \quad u \geq 0$$

όπου



$$\bar{C}_{0,k} = \frac{k(1+\theta)}{c\mu\theta} \sum_{i=0}^{k-1} \bar{C}_{i,k-1}$$

$$\bar{C}_{j,k} = \frac{k(1+\theta)^2}{c\mu\theta} \left[ \frac{1}{1+\theta} \bar{C}_{j-1,k-1} \sum_{i=0}^{k-1} \bar{C}_{i,k-1} \right], j = 1, 2, \dots, k.$$

και

$$C_{0,0} = \psi(0) = \frac{1}{1+\theta}.$$

2. Μείξη δύο εκθετικών κατανομών όπου η πιθανότητα χρεοκοπίας έχει γενικό τύπο

$$\psi(u) = C_1 e^{-R_1 u} + C_2 e^{-R_2 u}.$$

Οι ροπές του χρόνου για αυτή την περίπτωση δίνονται από

$$\psi_k(u) = \sum_{j=0}^k [A_{j,k} e^{-R_1 u} + B_{j,k} e^{-R_2 u}] \frac{u^j}{j!}, k = 1, 2, \dots, u \geq 0.$$

Οι σταθερές  $A_{j,k}$  και  $B_{j,k}$  υπολογίζονται αναδρομικά (Lin and Willmot, 2000)

3. Μείξη δύο Erlang με γενικό τύπο για την πιθανότητα χρεοκοπία

$$\psi(u) = e^{-\mu u} \sum_{j=0}^{\infty} \bar{C}_j \frac{(\mu u)^j}{j!}.$$

Η  $k$ -οστή ροπή του χρόνου χρεοκοπίας υπολογίζεται από

$$\psi_k(u) = e^{\mu u} \sum_{j=0}^{\infty} \bar{C}_{j,k} \frac{(\mu u)^j}{j!}, k = 1, 2, \dots, u \geq 0$$

με  $\bar{C}_{j,0} = \bar{C}_j$ .

## 5.5 Αναδρομική σχέση με την προσέγγιση De Vylder

Όταν η κατανομή ατομικών ζημιών είναι  $P(x) = 1 - \exp\{-ax\}$ ,  $x \geq 0$ , είναι γνωστό ότι:

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{ac} \exp\left\{-\left(a - \frac{\lambda}{c}\right)u\right\}.$$

Οι Dreikic και Willmot (2003) δίνουν αποτελέσματα για τις ροπές του  $T_c$  όπου  $T_c = T|T < \infty$ , δίνοντας λύση για τη μέση τιμή, τη διασπορά και το συντελεστή λοξότητας του  $T_c$  τα οποία υπολογίζονται εύκολα. Συγκεκριμένα μας δίνεται η πυκνότητα του  $T_c$

$$g(x) = ace^{-\lambda u/c - (\lambda + ca)t} \left\{ I_0\left(\sqrt{4a\lambda t(ct - u)}\right) - \frac{ct}{ct + u} I_2\left(\sqrt{4a\lambda t(ct - u)}\right) \right\},$$

όπου

$$I_\nu(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{2n+\nu}}{n!(n+\nu)!}$$

η οποία είναι η τροποποιημένη συνάρτηση Bessel για την τάξη  $\nu$ .

Υπάρχουν κάποιες κατανομές στις οποίες ο ακριβής υπολογισμός των ροπών και της πυκνότητας του  $T_c$  είναι αδύνατος. Έτσι οι Lin και Willmot (2000) παρουσίασαν έναν αναδρομικό τύπο ο οποίος μπορεί να υπολογίσει τις ροπές του  $T_c$  ώστε να υπάρχει λύση για το  $\psi$ , και ο Drekić (2004) έχει έναν αποτελεσματικό τύπο ο οποίος υπολογίζεται εύκολα μέσω Mathematica.

Το 1978 ο De Vylder πρότεινε την προσέγγιση του πλεονάσματος το οποίο δίνεται από

$$\tilde{U}(t) = u + \tilde{\theta}t - \tilde{S}(t),$$

όπου  $\tilde{S}(t)$  είναι μια σύνθετη διαδικασία Poisson με παράμετρο  $\tilde{\lambda}$  και ατομικό ποσό αποζημίωσης  $\tilde{P}(x) = 1 - \exp\{-\tilde{\mu}_1 x\}$ ,  $x \geq 0$ . Όπου οι παράμετροι της προσέγγισης αντιστοιχούν στις τρεις πρώτες ροπές των  $U(t)$  και  $\tilde{U}(t)$ .

Έτσι η προσέγγιση γίνεται

$$\psi_{DV}(u) = \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\theta}\tilde{\mu}_1} \exp\left\{-\left(\tilde{\mu}_1 - \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\theta}}\right)u\right\}.$$

Για την αναδρομική σχέση χρησιμοποιώντας την προσέγγιση του De Vylder ο τύπος (5.25) γίνεται:

$$E(T_c) = \frac{\psi_k(u)}{\psi_{DV}(u)}. \quad (5.43)$$

Από αυτή τη σχέση θα υπολογίσουμε τις προσεγγιστικές ροπές για το χρόνο χρεοκοπίας.

Οι εφαρμογές που παρουσιάζονται στη συνέχεια χρησιμοποιούν  $\lambda = 1$  και  $c = (1 + \theta) \cdot \lambda \cdot \mu_1$ .

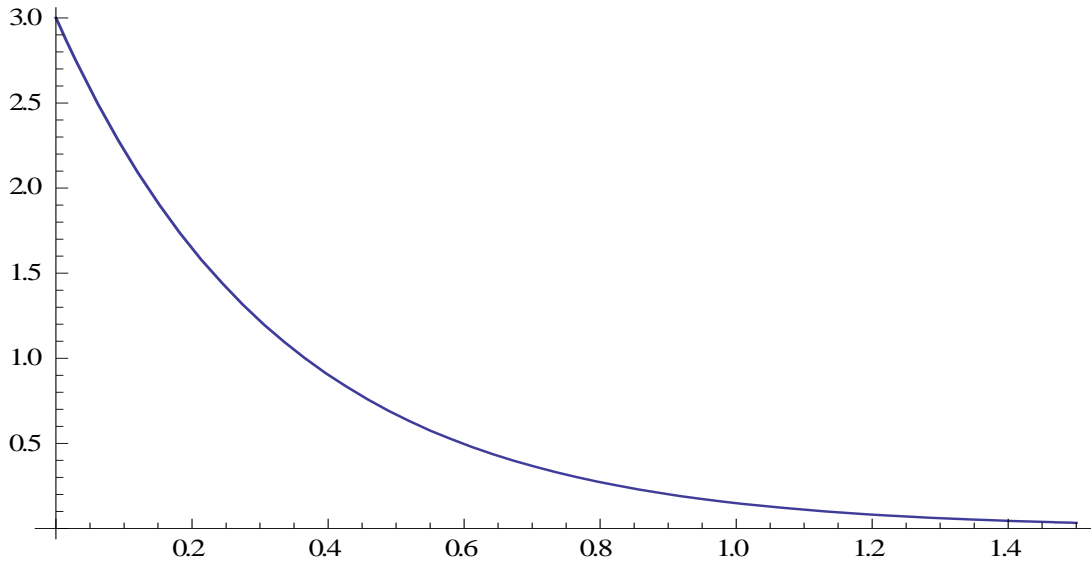
## 5.6 Εφαρμογές

### Εφαρμογή 5.6.1.

Έχουμε μια εκθετική κατανομή με  $b = 3$ , όπου η συνάρτηση πυκνότητας ισούται με:

$$f(x) = 3e^{-3x}, \quad x \geq 0.$$

Θεωρούμε ότι  $c = \frac{2}{5}$  και  $\lambda = 1$ .



Σχήμα 5.1.1. Εκθετική κατανομή  $f(x)$ .

Η μέση της τιμή ισούται με

$$\mu_1 = \int_0^{\infty} xf(x)dx = \frac{1}{3},$$

η δεύτερη ροπή ισούται με  $\mu_2 = \frac{2}{9}$  και η τρίτη με  $\mu_3 = \frac{2}{9}$ .

Η διακύμανση της είναι

$$V(x) = \frac{1}{b^2} = \frac{1}{9},$$

και ο συντελεστής μεταβλητότητας

$$CV = \frac{V(x)}{\mu_1^2} = 1$$

Το περιθώριο ασφαλείας είναι ίσο με

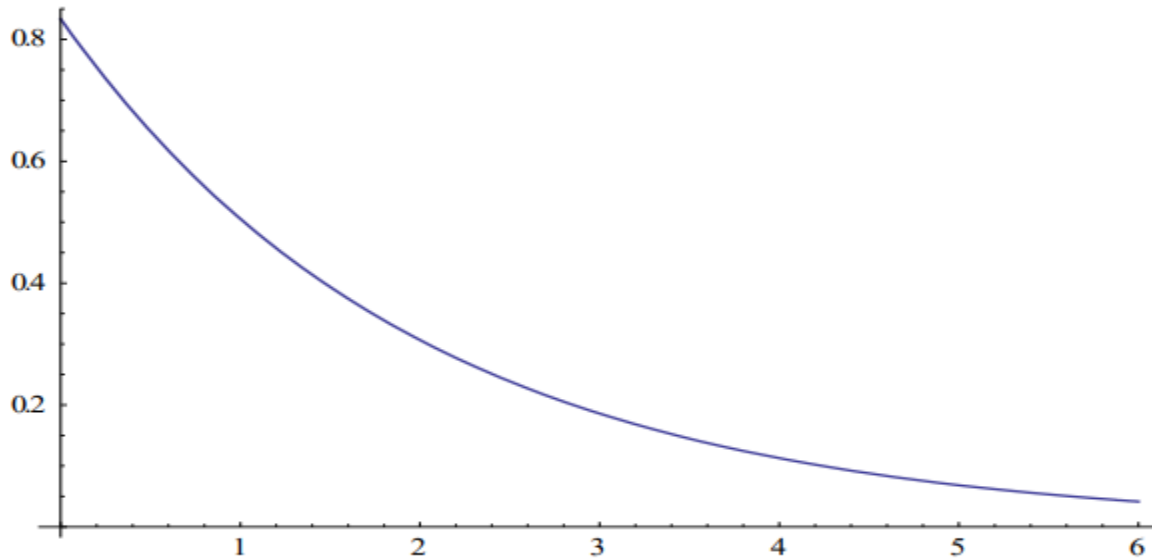
$$\theta = \frac{1}{5}.$$

Συντελεστής προσαρμογής

$$R = \frac{\beta * \theta}{1 + \beta} = \frac{1}{2}.$$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι η εξής:

$$\psi(u) = \frac{5}{6} * e^{\frac{u}{2}}, \quad u \geq 0$$



**Σχήμα 5.1.2.** Πιθανότητα χρεοκοπίας  $\psi(u)$ .

Θέλουμε να εκτιμήσουμε τον ακριβή χρόνο τη στιγμή της χρεοκοπίας

$$E\{T_c^k\} = E(T^k | T < \infty) = \frac{\psi_k(u)}{\psi(u)}.$$

Αρχικά, υπολογίζουμε τις συναρτήσεις  $\psi_1(u)$ ,  $\psi_2(u)$ ,  $\psi_3(u)$ .

Για την  $\psi_1(u)$  παίρνουμε τη σχέση (5.27)

$$\psi_1(u) = 15 \left( \frac{5}{18} e^{-\frac{u}{2}} + \frac{25}{36} e^{-\frac{u}{2}u} \right)$$

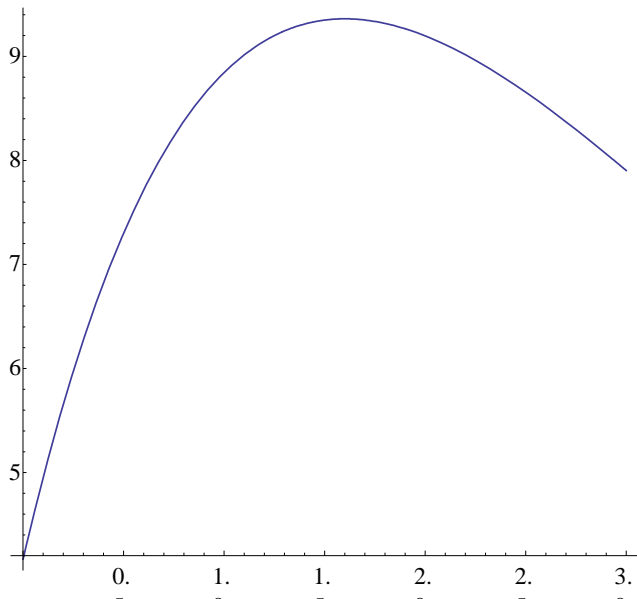
Για τις συναρτήσεις  $\psi_2(u)$  και  $\psi_3(u)$  χρησιμοποιούμε τη σχέση (5.33)

$$\psi_2(u) = 30 \left( -\frac{125}{3} e^{-u/2} + \frac{125}{36} e^{-u/2}u + \frac{625}{144} e^{-u/2}u^2 + \frac{25}{6} e^{-u/2}(12 + 5u) \right)$$

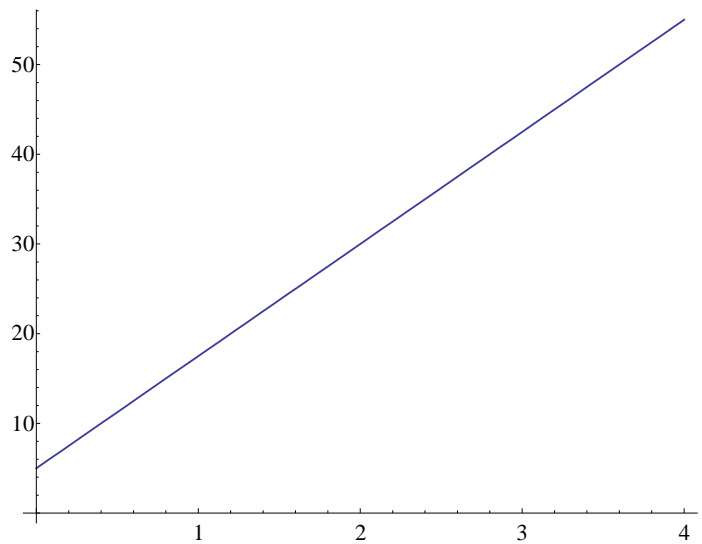
$$\psi_3(u) = 45 \left( -\frac{13750}{3} e^{-u/2} + \frac{625}{3} e^{-z/2}u + \frac{21875}{72} e^{-z/2}u^2 + \frac{15625}{432} e^{-z/2}u^3 + \frac{125}{12} e^{-u/2}(528 + 240u + 25u^2) \right)$$

$u$	$\frac{\psi_1(u)}{\psi(u)}$	$\frac{\psi_2(u)}{\psi(u)}$	$\frac{\psi_3(u)}{\psi(u)}$
0	5	300	49500
10	130	24675	$6.512 \times 10^6$
30	380	167175	$8.45933 \times 10^7$
50	630	434675	$3.27675 \times 10^8$
70	880	827175	$8.29506 \times 10^8$
100	1255	$1.6503 \times 10^6$	$2.27249 \times 10^9$
150	1880	$3.64718 \times 10^6$	$7.29933 \times 10^9$
200	2505	$6.4253 \times 10^6$	$1.6873 \times 10^9$
500	6255	$3.95003 \times 10^7$	$2.51831 \times 10^{11}$
700	8755	$7.71753 \times 10^7$	$6.84954 \times 10^{11}$
1000	12505	$1.57125 \times 10^8$	$1.98375 \times 10^{12}$

**Πίνακας 5.1.1** Υπολογισμός με την ακριβή μέθοδο για τις τρεις πρώτες ροπές του χρόνου χρεοκοπίας.



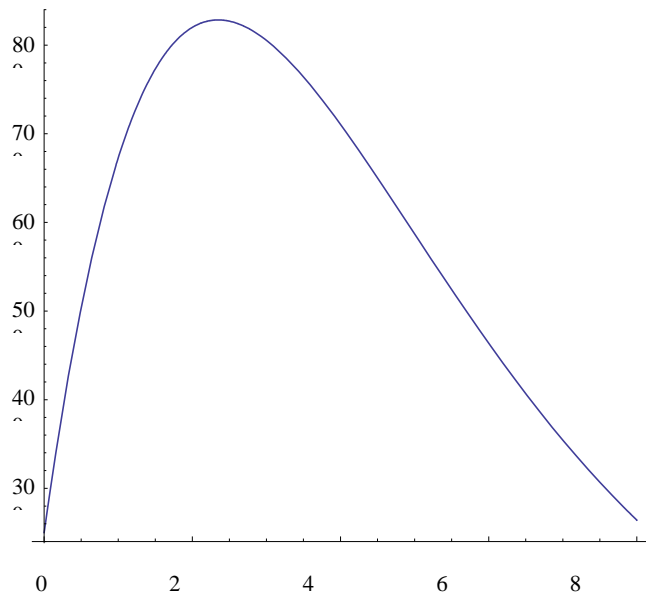
**Σχήμα 5.1.3** Συνάρτηση  $\psi_1(u)$  για την πρώτη ροπή του χρόνου



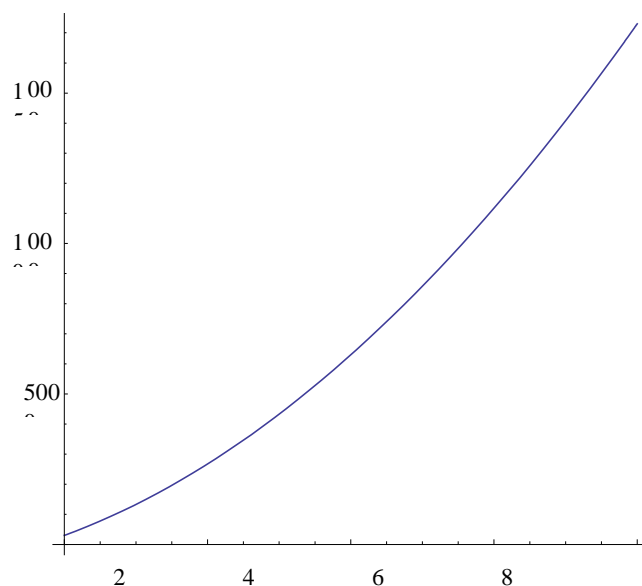
**Σχήμα 5.1.4** Δεσμευμένη πρώτη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας

Το σχήμα 5.1.3 μας δείχνει την  $\psi_1(u)$  που είναι η πρώτη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας η οποία έχει αρχικά ανοδική πορεία, στη συνέχεια καθοδική πορεία ενώ το Σχήμα 5.1.4 μας δίνει τη δεσμευμένη

πρώτη ροπή,  $\frac{\psi_1(u)}{\psi(u)}$ , του χρόνου χρεοκοπίας η οποία είναι αύξουσα και σχεδόν γραμμική συνάρτηση του  $u$ .



**Σχήμα 5.1.5** Δεύτερη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας



**Σχήμα 5.1.6** Δεσμευμένη δεύτερη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας

Το σχήμα 5.1.5 μας δείχνει την  $\psi_2(u)$  που είναι η δεύτερη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας η οποία έχει αρχικά ανοδική ενώ μετά έχει καθοδική πορεία ενώ το Σχήμα 5.1.6 μας δίνει τη δεσμευμένη δεύτερη ροπή,  $\frac{\psi_2(u)}{\psi(u)}$ , του χρόνου χρεοκοπίας.

Για τον επόμενο πίνακα η μέση τιμή ισούται με τη δεσμευμένη πρώτη ροπή, το συντελεστή μεταβλητότητας από τη σχέση (5.41) και το συντελεστή λοξότητας από τη σχέση (5.42)

<b>u</b>	<b>Μέση Τιμή</b>	<b>Συντελεστής μεταβλητότητας</b>	<b>Συντελεστής λοξότητας</b>
0	5	8702.5	$2.6588 \times 10^{10}$
10	130	$2.31714 \times 10^6$	$4.02779 \times 10^{14}$
30	380	$3.6606 \times 10^7$	$1.76122 \times 10^{17}$
50	630	$1.4952 \times 10^8$	$4.79202 \times 10^{18}$
70	880	$3.87934 \times 10^8$	$4.70776 \times 10^{19}$
100	1255	$1.08374 \times 10^9$	$5.682341 \times 10^{20}$
150	1880	$3.53409 \times 10^9$	$1.0269 \times 10^{22}$
200	2505	$8.23399 \times 10^9$	$8.24614 \times 10^{22}$
500	6255	$1.24683 \times 10^{11}$	$6.94709 \times 10^{25}$
700	8755	$3.40073 \times 10^{11}$	$8.4412 \times 10^{26}$
1000	12505	$9.86982 \times 10^{11}$	$1.20122 \times 10^{28}$

**Πίνακας 5.1.2** Μέση τιμή, Συντελεστής μεταβλητότητας και συντελεστής λοξότητας για τον ακριβή υπολογισμό του χρόνου χρεοκοπίας.

(Παράρτημα 8°)

## Εφαρμογή 5.6.2.

Έχουμε την μείξη δύο εκθετικών κατανομών με συνάρτηση κατανομής

$$F(x) = 1 - ae^{-a_1x} - (1 - a)e^{-a_2x}, \quad x \geq 0.$$

$$\text{όπου } a_1 = \frac{a}{1-a}, a_2 = \frac{1}{a_1}, a = \frac{1}{2} + \left[ \frac{1}{4} - \frac{2}{7+s^2} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Δεδομένου ότι  $\lambda = \mu_1 = 1, \mu_2 = 1 + s^2$  και  $\mu_3 = 1.5s^4 + 6s^2 - 1.5$ , και  $c = 1 + \theta$ .

Αυτή η κατανομή μελετήθηκε από τον Bohman (1977) και είναι γνωστή ως κατανομή Bohman. Θέλουμε να μελετήσουμε τις ροπές του  $T_c$  χρησιμοποιώντας τους αλγορίθμους του Drekic (2004). Υπάρχει παρόμοιο παράδειγμα από τους Dickson, Wong, Swan το 2004.

Στους πίνακες που ακολουθούν χρησιμοποιούμε διαφορετικές τιμές της διακύμανσης,  $s$ , και του  $\theta$  όπου μελετάμε την επίδραση της αύξησης της διακύμανσης, καθώς και του περιθωρίου ασφαλείας.

**Περίπτωση 1<sup>η</sup>** Για  $\theta = 10\%$ ,  $s = 3$ ,  $c = 1.1$ ,  $\mu_2 = 10$  και  $\mu_3 = 174$ .

Αρχικά για την ακριβή υπολογίζουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας

$$\psi(u) = 0.0131261e^{-5.07299u} + 0.895965e^{-0.0179202u}.$$

Επειτα, βρίσκουμε τις συναρτήσεις  $\psi_1(u), \psi_2(u)$ .

Την συνάρτηση  $\psi_1(u)$  τη βρίσκουμε από την σχέση (5.27), χρησιμοποιώντας το Mathematica,

$$\begin{aligned} \psi_1(u) = & 10. (0.00257e^{\{-5.0729u\}} + 49.9974e^{\{-0.01792u\}} - 50. (0.01312e^{\{-5.0729u\}} \\ & + 0.89596e^{-0.01792u}) + e^{-5.0909u}(e^{0.01792u}(-0.00465 + 0.00017u) \\ & + e^{5.0729u}(0.00465 + 0.8027u))) \end{aligned}$$

Ενώ για την συνάρτηση  $\psi_2(u)$  χρησιμοποιούμε τη σχέση (5.33)

$$\begin{aligned} \psi_2(u) = & 20. \left( -27899.99(0.01312e^{-5.0729u} + 0.8959e^{-0.01792u}) + e^{-5.0729u}(-1.297 + 0.00033u) \right. \\ & + e^{-0.01792u}(27901.29 + 447.959u) \\ & + e^{-5.0909u}(e^{0.01792u}(1.035 - 0.0867u + 0.000011u^2) \\ & \left. + e^{5.0729u}(-1.03584 + 46.645u + 3.5961u^2)) \right). \end{aligned}$$

Στη συνέχεια, πρέπει να υπολογίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας με την προσέγγιση De Vylder.

Υπολογίζουμε την μέση τιμή της εκθετικής κατανομής στην προσέγγιση αυτή, η οποία ισούται με

$$\bar{\mu}_1 = \frac{3\mu_2}{\mu_3} = 0.172414$$

Με τη βοήθεια των σχέσεων (4.12), (4.8) υπολογίζουμε αντίστοιχα  $\tilde{\lambda} = 0.14863$  και  $\tilde{\theta} = 0.602867$ .

Ο συντελεστής προσαρμογής είναι  $R_{DV} = 0.0179211$ .



Επομένως η πιθανότητα χρεοκοπίας με την προσέγγιση De Vylder γίνεται:

$$\psi_{DV}(u) = 0.896057e^{-0.0179211u}.$$

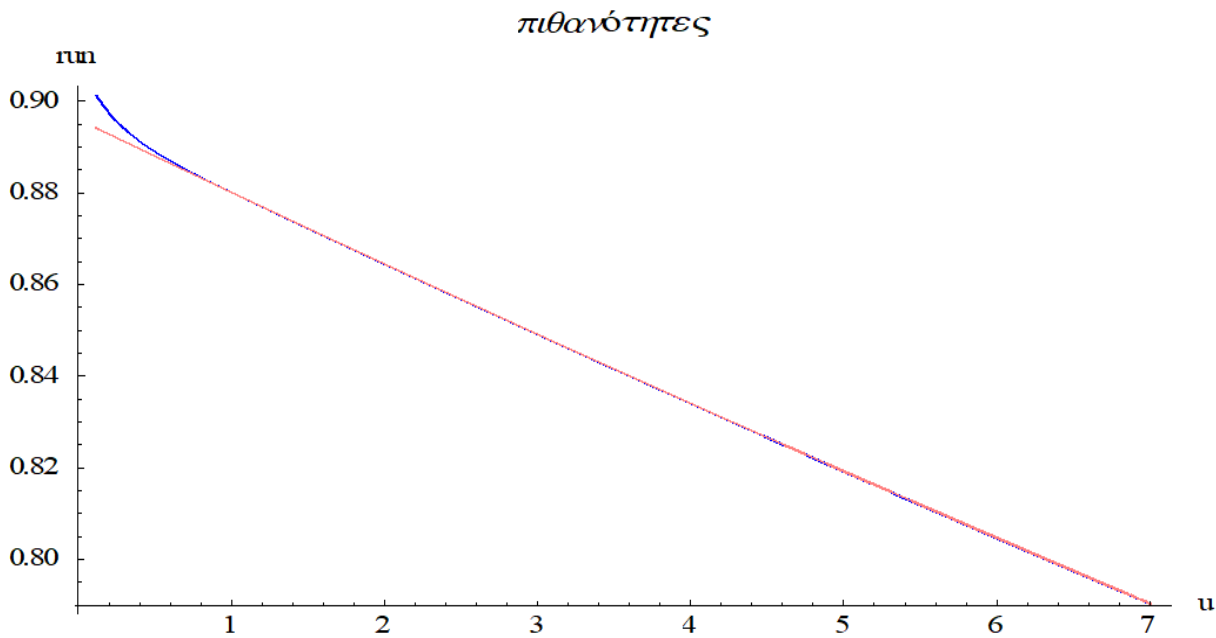
Και σε αυτήν την περίπτωση θα πρέπει να υπολογίσουμε τις συναρτήσεις  $\psi_1(u)$ ,  $\psi_2(u)$ .

Τη συνάρτηση  $\psi_1(u)$  τη βρίσκουμε από την σχέση (5.27)

$$\psi_1(u) = 10. (5.19713e^{-0.0179211u} + 0.802919e^{-0.0179211u}u)$$

Ενώ για την  $\psi_{2DV}(u)$  χρησιμοποιούμε τη σχέση (5.33)

$$\psi_2(u) = 20. (-24999.999e^{-0.0179211u} + 5.70508 \times 10^{-14}u + 46.56928e^{-0.0179211u}u + 3.5973e^{-0.0179211u}u^2 + e^{-0.0179211u}(27899.999 + 448.029u)).$$



**Σχήμα 5.2.1.** Πιθανότητες  $\psi(u)$  και  $\psi_{dv}(u)$  για  $s = 3$ .

Από το Σχήμα (5.2.1) παρατηρείται ότι και οι δύο πιθανότητες  $\psi(u)$  και  $\psi_{DV}(u)$  ταυτίζονται από κάποιο σημείο και έπειτα.

Για να υπολογίσουμε το Mean θα χρησιμοποιήσουμε για τη στήλη του Exact (ακριβή) τη σχέση  $\frac{\psi_k(u)}{\psi(u)}$

ενώ για την Approximation (προσεγγιστική) τη σχέση  $\frac{\psi_{kDV}(u)}{\psi_{DV}(u)}$ .

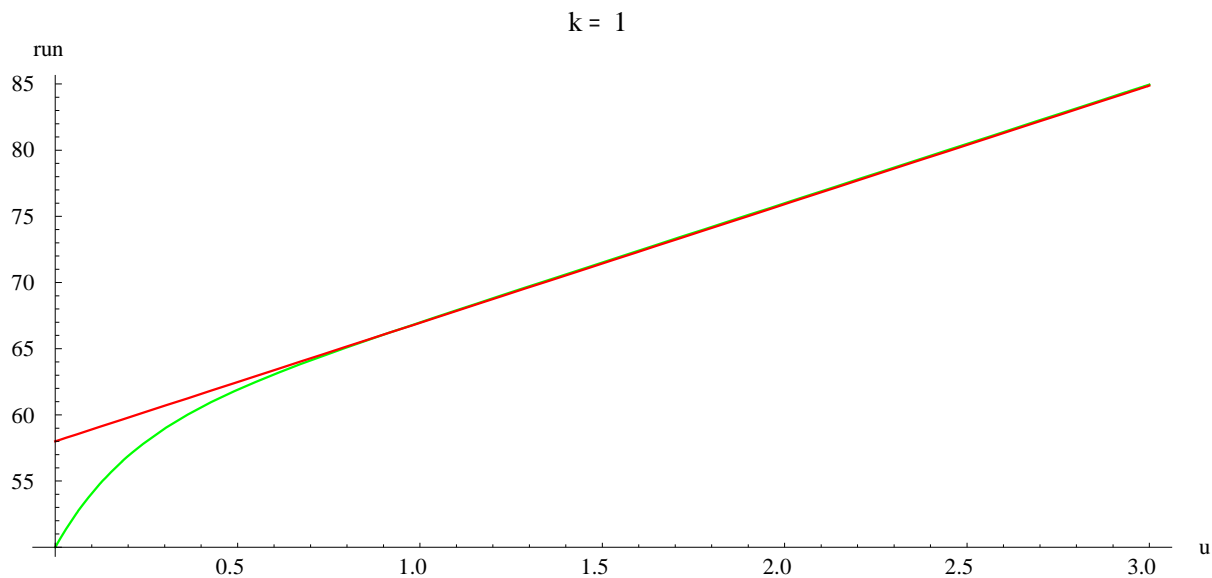
Για το Standard Deviation του Exact παίρνουμε τον τύπο  $s = \sqrt{\frac{\psi_2(u)}{\psi(u)} - \left(\frac{\psi_1(u)}{\psi(u)}\right)^2}$  ενώ για Approximation

αντίστοιχα τον τύπο  $s = \sqrt{\frac{\psi_2(u)}{\psi_{DV}(u)} - \left(\frac{\psi_1(u)}{\psi_{DV}(u)}\right)^2}$ .

Το ποσοστό λάθους της προσέγγισης υπολογίζεται ως εξής  $\frac{Exact - Approximation}{Exact} \times 100\%$

<i>u</i>	<i>Mean</i>		<i>St. Dev.</i>		<i>Ποσοστό Λάθους</i>	
	<i>Exact</i>	<i>Approx.</i>	<i>Exact</i>	<i>Approx.</i>	<i>Mean</i>	<i>St. Dev.</i>
0	50	58	230.868	247.718	-16	-7.29854
10	147.677	147.606	401.776	401.701	0.048383	0.0186758
20	273.274	237.211	511.296	511.238	0.026116	0.0113437
30	326.87	326.817	601.185	601.136	0.0161948	0.00819764
40	416.467	416.423	679.281	697.238	0.104878	0.00636443
50	506.063	506.029	749.281	749.242	0.00680172	0.00518429
60	595.66	595.634	813.278	813.243	0.00422449	0.00436101
70	658.256	658.24	872.595	872.562	0.0023212	0.00375398
80	774.853	774.846	928.127	928.097	0.000858064	0.00328789
90	864.449	864.452	980.52	980.492	-0.000301775	0.0025563
100	954.045	954.057	1030.25	1030.23	-0.00124377	0.00261918

Πίνακας 5.2.1 Για  $s = 3$  και  $\theta = 10\%$ . έχουμε ότι  $\mu_2 = 10$  και  $\mu_3 = 174$ .



Σχήμα 5.2.2. Ακριβής και αναδρομική σχέση για την πρώτη ροπή χρεοκοπίας.

Το παραπάνω Σχήμα 5.2 μας δείχνει ότι και οι δύο δεσμευμένες μέσες τιμές  $\frac{\psi_1(u)}{\psi(u)}$  και  $\frac{\psi_1(u)}{\psi_{av}(u)}$  ταυτίζονται μετά από κάποιο σημείο, άρα η ακριβής τιμή και η προσεγγιστική για την  $k = 1$  είναι περίπου ίσες από κάποια τιμή και μετά όπως φαίνεται και από τον πίνακα 5.2.1. όταν το αρχικό αποθεματικό είναι  $u = 20$ .

**Περίπτωση 2<sup>η</sup>** Για  $\theta = 25\%$ ,  $s = 3$ ,  $c = 1.25$ .

Όπως και στην 1<sup>η</sup> περίπτωση υπολογίζουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας. Με τη χρήση του Mathematica βρίσκουμε ότι:

$$\psi(u) = 0.025183e^{-5.16125u} + 0.774817e^{-0.0387503u}.$$

Τις συναρτήσεις  $\psi_1(u)$  και  $\psi_2(u)$  τις υπολογίζουμε από τις σχέσεις (5.27) και (5.33) αντίστοιχα.

Και για την προσεγγιστική μέθοδο του De Vylder η πιθανότητα ισούται με

$$\psi_{DV}(u) = 0.775194e^{-0.038759u}.$$

Υπολογίζουμε και τις αντίστοιχες συναρτήσεις  $\psi_1(u)$ ,  $\psi_2(u)$ .

Μετά από πράξεις καταλήγουμε στον παρακάτω πίνακα.

<i>u</i>	<i>Mean</i>		<i>St. Dev.</i>		<i>Ποσοστό Λάθους</i>	
	<i>Exact</i>	<i>Approx.</i>	<i>Exact</i>	<i>Approx.</i>	<i>Mean</i>	<i>St. Dev..</i>
0	20	23.2	61.0574	65.1939	-16	-6.7748
10	54.257	54.2078	103.243	103.2	0.0907759	0.0413176
20	85.2497	85.2155	130.609	130.577	0.0400957	0.0248111
30	116.242	116.223	153.161	153.135	0.164404	0.0173118
40	147.235	147.231	172.795	172.772	0.00274385	0.0130275
50	178.228	178.239	190.414	190.395	-0.00618921	0.0102557
60	209.22	209.247	206.537	206.519	-0.0124757	0.00871515
70	240.213	240.254	221.488	221.473	-0.01714	0.00688168
80	271.206	271.262	235.492	235.479	-0.0207382	0.00577876
90	302.198	302.27	248.709	248.697	-0.235984	0.00490405
100	333.191	333.278	261.258	261.247	-0.0259265	0.00419338

**Πίνακας 5.2.2** Για  $s = 3$  και  $\theta = 25\%$ . έχουμε ότι  $\mu_2 = 10$  και  $\mu_3 = 174$ .

**Περίπτωση 3<sup>η</sup>**  $s = 7.23$  και  $\theta = 10\%$ , έχουμε ότι  $\mu_2 = 53.2729$  και  $\mu_3 = 4410.82$ .

Παρόμοια διαδικασία όπως στην Περίπτωση 1.

Βρίσκουμε την ακριβή πιθανότητα χρεοκοπίας

$$\psi(u) = 0.00297719e^{-26.724u} + 0.906114e^{-0.00340178u}$$

Και τις αντίστοιχες συναρτήσεις  $\psi_1(u)$ ,  $\psi_2(u)$ .

Στη συνέχεια υπολογίζουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας με τη μέθοδο του De Vylder.

$$\psi_{dv}(u) = 0.9061149e^{-0.00340178u}$$

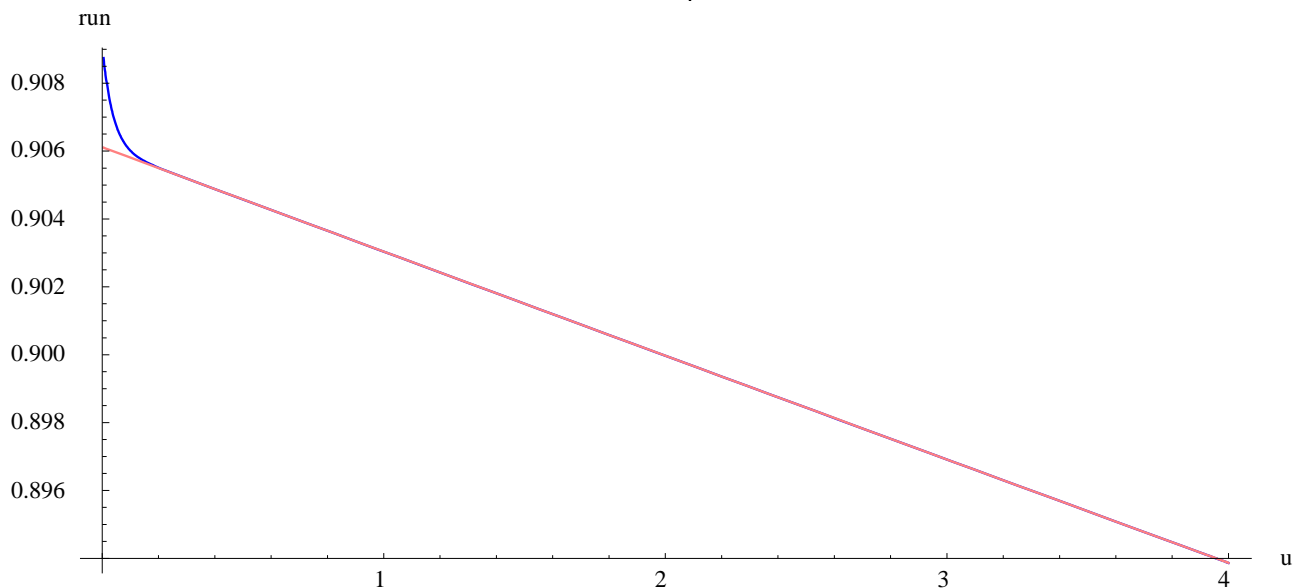
Από αυτήν προκύπτουν αντίστοιχα οι συναρτήσεις  $\psi_1(u)$ ,  $\psi_2(u)$ .

Καταλήγουμε στον παρακάτω πίνακα

$u$	<i>Mean</i>		<i>St. Dev.</i>		<i>Ποσοστό Λάθους</i>	
	<i>Exact</i>	<i>Approx.</i>	<i>Exact</i>	<i>Approx.</i>	<i>Mean</i>	<i>St. Dev.</i>
0	266.364	275.989	1222.73	1243.56	-3.61331	-1.70356
10	366.604	366.601	1441.94	1441.93	0.000922501	0.00033078
20	457.215	457.212	1616.14	1616.14	0.000723102	0.000262913
30	547.827	547.823	1773.31	1773.31	0.000589665	0.000218041
40	638.438	638.435	1917.65	1917.64	0.000494105	0.00018617
50	729.049	729.046	2051.85	2051.85	0.000422298	0.000162365
60	819.661	819.658	2177.8	2177.8	0.000366368	0.000143907
70	910.272	910.269	2296.86	2296.86	0.000321572	0.000129178
80	1000.88	1000.88	2410.04	2410.04	0.000284887	0.00011715
90	1091.49	1091.49	2518.14	2518.14	0.00254293	0.000107142
100	1182.11	1182.1	2621.78	2621.78	0.00022839	0.0000986871

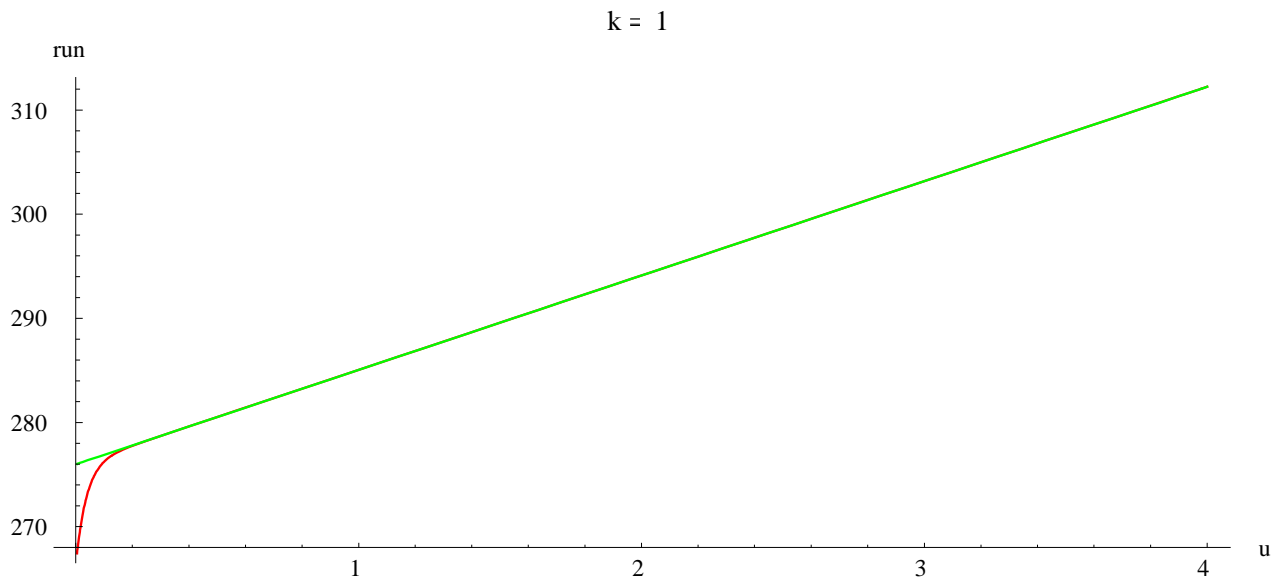
Πίνακας 5.2.3 για  $s = 7.23$  και  $\theta = 10\%$ . έχουμε ότι  $\mu_2 = 53.2729$  και  $\mu_3 = 4410.82$ .

πιθανότητες



Σχήμα 5.2.3. Πιθανότητες  $\psi(u)$  και  $\psi_{dv}(u)$  για το  $s = 7.23$

Το Σχήμα 5.2.3 μας δείχνει ότι και οι δύο πιθανότητες  $\psi(u)$  και  $\psi_{dv}(u)$  ταυτίζονται σχεδόν από την αρχή.



**Σχήμα 5.2.4.** Η πρώτη ροπή για ακριβή και αναδρομική σχέση.

Για το παραπάνω Σχήμα 5.2.4 παίρνουμε ότι και οι δύο δεσμευμένες μέσες τιμές  $\frac{\psi_1(u)}{\psi(u)}$  και  $\frac{\psi_1(u)}{\psi_{av}(u)}$  ταυτίζονται μετά από κάποιο σημείο, άρα η ακριβής τιμή και η προσεγγιστική για την πρώτη ροπή είναι περίπου ίσες από κάποια τιμή και μετά όπως φαίνεται από τον πίνακα 5.2.3 όταν το αρχικό αποθεματικό είναι  $u = 80$ .

**Περίπτωση 4<sup>η</sup>** Για  $s = 7.23$ ,  $\theta = 25\%$  και  $c = 1.25$ .

Λύση όπως στις προηγούμενες περιπτώσεις .

<i>u</i>	<i>Mean</i>		<i>St. Dev.</i>		<i>Ποσοστό Λάθους</i>	
	<i>Exact</i>	<i>Approx.</i>	<i>Exact</i>	<i>Approx.</i>	<i>Mean</i>	<i>St. Dev.</i>
0	106.546	110.396	320.918	326.013	-3.61331	-1.58763
10	142.169	142.166	374.675	374.672	0.00187316	0.000734086
20	173.939	173.936	417.703	417.701	0.00145764	0.000586602
30	205.709	205.707	456.695	456.693	0.00117047	0.000487336
40	237.48	237.477	492.611	492.609	0.000960135	0.000415964
50	269.25	669.248	526.08	526.078	0.000799437	0.00062177
60	301.02	301.018	557.543	557.542	0.00067266	0.000320189
70	332.79	332.788	587.324	587.322	0.000570089	0.000286501
80	346.561	364.559	615.665	615.664	0.000485395	0.000258874
90	396.331	369.329	642.759	642.757	0.00041428	0.000235806
100	428.101	428.1	668.755	668.754	0.00035372	0.000216255

Πίνακας 5.2.1. Για  $s = 7.23$  και  $\theta = 25\%$ . έχουμε ότι  $\mu_2 = 53.2729$  και  $\mu_3 = 4410.82$

(Παράρτημα 9<sup>ο</sup>)

### Εφαρμογή 5.6.3.

Έχουμε μια Γάμμα κατανομή με παραμέτρους  $a = 2$ ,  $b = 3$

$$g(x) = 9e^{-3x}x.$$

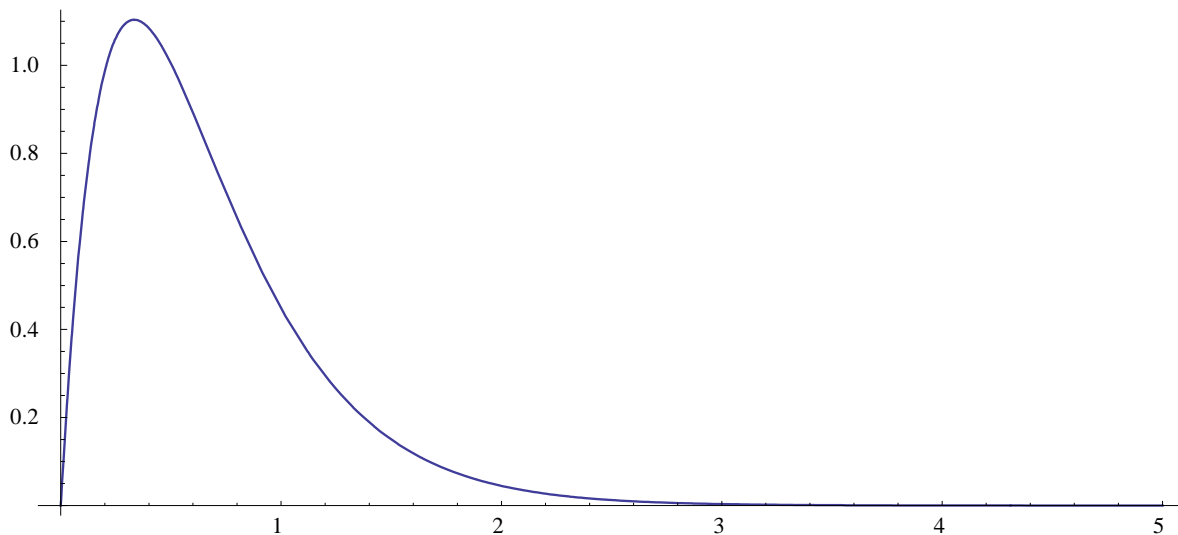
Δίνεται  $\lambda = 1$ ,  $c = 1.2$ ,  $\theta = 0.8$ .

Όπου η μέση τιμή της ισούται με

$$\mu_1 = \int_0^{\infty} xg(x)dx = \frac{2}{3},$$

Ενώ η δεύτερη ροπή είναι ίση με  $\mu_2 = \frac{2}{3}$ ,

και η τρίτη ροπή είναι  $\mu_3 = \frac{8}{9}$ ,



Σχήμα 5.3.1. Γάμμα κατανομή  $g(x)$ .

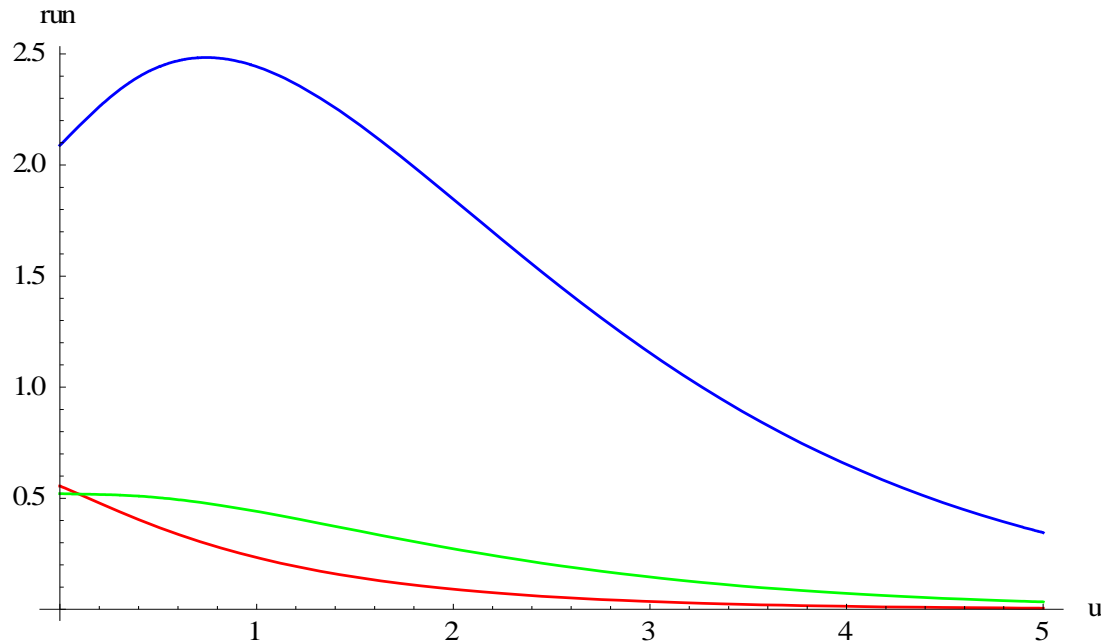
Η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι

$$\psi(u) = 0.603386e^{-0.948215u} - 0.0478302e^{-4.21845u}.$$

Βρίσκουμε τις συναρτήσεις  $\psi_1(u)$ ,  $\psi_2(u)$ .

$$\begin{aligned} \psi_1(u) = & 1.875(-0.0113383e^{-4.21845u} + 0.636338e^{-0.948215u} - 0.625(-0.0478302e^{-4.21845u} \\ & + 0.6033857e^{-0.948215u}) + e^{-5.166667u}(e^{0.948215u}(0.017650 + 0.002287u) \\ & + e^{4.21845u}(-0.0176501 + 0.364074u))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_2(u) = & 3.75(-1.253326(-0.0478302e^{-4.21845u} + 0.6033856e^{-0.948215u}) \\ & + e^{-4.21845u}(0.0163336 + 0.0010168u) + e^{-0.948215u}(1.23692 \\ & + 0.71992021u) + 7.578819 \times 10^{-17}u^2 + e^{-5.16667u}(e^{0.9482152u}(-0.00919 \\ & - 0.0040384u - 0.00010258u^2) + e^{4.218451u}(0.00919 + 0.2633179u \\ & + 0.20594740u^2))) \end{aligned}$$



**Σχήμα 5.3.2.** Η πιθανότητα  $\psi(u)$ , και οι συναρτήσεις  $\psi_1(u)$ ,  $\psi_2(u)$ . (κόκκινη, πράσινο και μπλε, αντίστοιχα)

Στη συνέχεια θέλουμε να υπολογίσουμε τις νέες παραμέτρους για την προσέγγιση De Vylder.

$$\tilde{\lambda} = \frac{9 * \lambda * \mu_2^3}{3\mu_2^2} = \frac{27}{16}$$

$$\tilde{\theta} = \frac{2 * \mu_1 * \mu_3 * \theta}{3 * \mu_2^2} = \frac{32}{45}$$

$$\psi_{dv}(0) = \frac{1}{1 + \tilde{\theta}} = 0.584416$$

$$\tilde{\mu}_1 = \frac{3\mu_2}{\mu_3} = \frac{9}{4}$$

$$R_{dv} = 0.935065$$

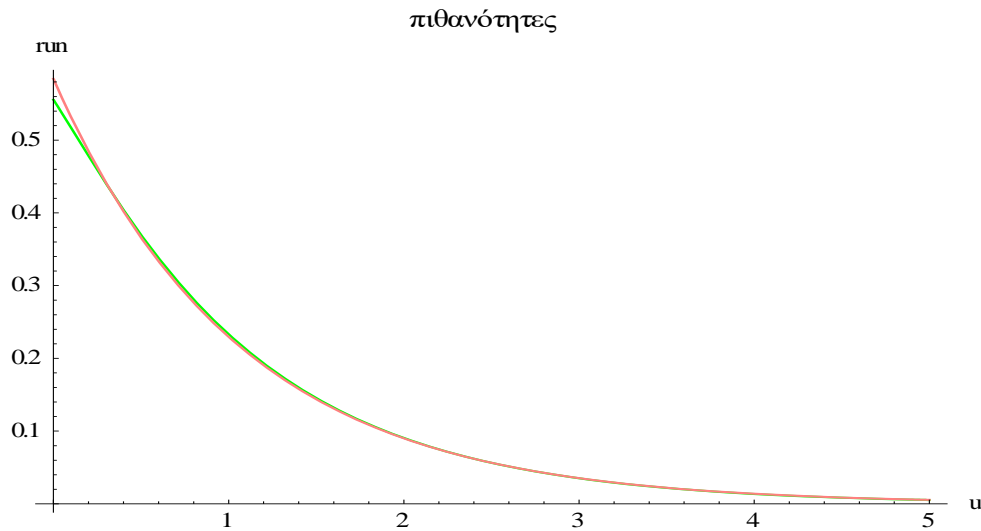
Η πιθανότητα χρεοκοπίας με την προσέγγιση De Vylder ισούται με:

$$\psi_{Dv}(u) = 0.584416e^{-0.935065u}$$

Οι συναρτήσεις  $\psi_1(u), \psi_2(u)$  ισούνται με

$$\psi_1(u) = 1.1111(2.7988e^{-0.184704u} + 0.341542e^{-0.184704u}u)$$

$$\psi_2(u) = 3.75(-27.57442e^{-0.184704u} + 3.06687e^{-0.184704u}u + 0.187127e^{-0.184704u}u^2 + e^{-0.184704u}(47.1828 + 3.46711u))$$



**Σχήμα 5.3.3.** . Πιθανότητες  $\psi(u)$  και  $\psi_{dv}(u)$  . (πράσινο και ροζ αντίστοιχα)

Υπολογίζουμε και τις συναρτήσεις  $\psi_1(u)$  και  $\psi_2(u)$ .

$$\psi_1(u) = 1.875(3.4981e^{-0.162754u} + 0.401706e^{-0.162754u}u)$$

και

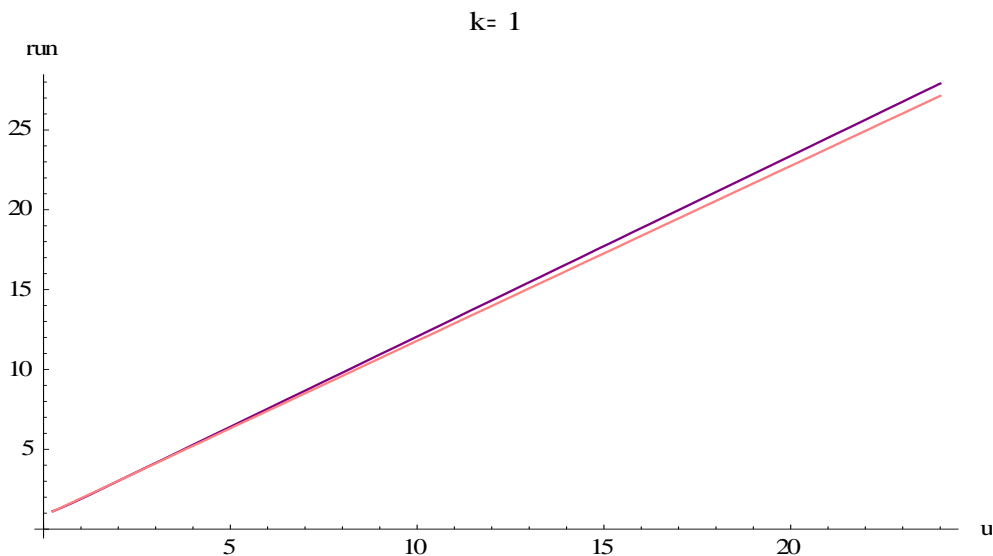
$$\psi_2(u) = 2.222(-16.34045e^{-0.184704u} + 1.8174e^{-0.184704u}u + 0.110895e^{-0.184704u}u^2 + e^{-0.184704u}(27.9602 + 2.05459u))$$



Μετά από τις απαραίτητες πράξεις (βλ. Παράρτημα 10) καταλήγουμε στους επόμενους πίνακες.

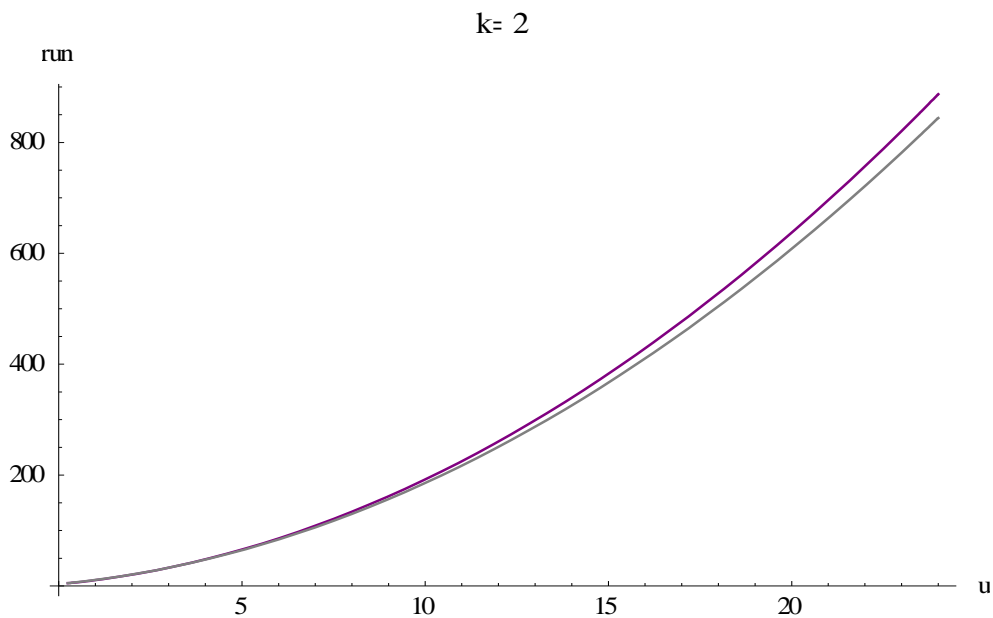
u	Πρώτη ροπή		Δεύτερη Ροπή		Ποσοστό λάθους	
	Exact	Approx.	Exact	Approx.	Πρώτη ροπή	Δεύτερη ροπή
0	0.9375	0.83333	3.75977	3.34201	11.111	11.111
5	6.40742	6.31223	65.5976	64.4645	1.48560	1.72699
10	12.0642	11.7911	192.147	185.624	2.26318	3.39518
20	23.3776	22.7489	637.239	608.051	2.68942	4.58039
30	34.6907	33.7069	1339.28	1270.63	2.83587	5.12617
50	55.340	53.6171	$4.583 \times 10^8$	3316.21	3.11453	99.993
70	77.9677	75.5327	$1.54 \times 10^{17}$	6322.39	3.12307	100
100	111.908	108.406	$7.13 \times 10^{29}$	12632.7	3.1294	100

Πίνακας 5.3.1. Ακριβής και προσεγγιστική χρεοκοπία για την πρώτη και δεύτερη ροπή και ποσοστό λάθους



Σχήμα 5.3.4. Πρώτη ροπή για τον ακριβή και προσεγγιστικό τρόπο. (μωβ και ροζ αντίστοιχα)

Η δεσμευμένη πρώτη ροπή και στον ακριβή και στον προσεγγιστικό υπολογισμό είναι αύξουσα και σχεδόν γραμμική συνάρτηση του  $u$ , ταυτίζονται.



Σχήμα 5.3.5 Δεύτερη ροπή για τον ακριβή και προσεγγιστικό τρόπο. (μωβ και γκρι αντίστοιχα)

u	St. Deav		CV		Ποσοστό λάθους	
	Exact	Approx	Exact	Approx	St. Dev	CV
0	1.69731	1.62714	1.81046	1.95256	4.13443	-7.84876
5	4.95402	4.96188	0.77317	0.186074	-0.158587	-1.66898
10	6.8266	6.8259	0.565863	0.578901	0.0112162	-2.30411
20	9.52499	9.51516	0.40744	0.418269	0.103222	-2.65768
30	11.6547	11.596	0.335961	0.344025	0.530767	-2.40017
50	21409.44	21.01	386.866	0.391853	99.9019	99.8987
70	$3.933506 \times 10^8$	24.8436	5045049.354	0.328912	100	100
100	$8.44795 \times 10^{14}$	29.6795	$7.5490 \times 10^{12}$	0.273781	100	100

Πίνακας 5.3.2. Τυπική απόκλιση και συντελεστής μεταβλητότητας.

(Παράρτημα 10°)

### Εφαρμογή 5.6.4.

Έχουμε την μείξη εκθετικών κατανομών ως συνάρτηση κατανομής των αποζημιώσεων

$$F(x) = 1 - 0.003970e^{-0.14631x} - 0.888182e^{-5.51459x} - 0.107839e^{-0.190206x}, \quad x \geq 0$$

Όπου  $\mu_1 = 1$ ,  $\mu_2 = 43.1982$ ,  $\mu_3 = 7717.23$ . Η κατανομή αυτή μελετήθηκε από τον Wikstad (1971) για αυτό το λόγο αναφερόμαστε στην κατανομή Wikstad.. Δίνεται ότι  $\lambda = 1$ .

#### Περίπτωση 1<sup>η</sup> Για $\theta = 2\%$

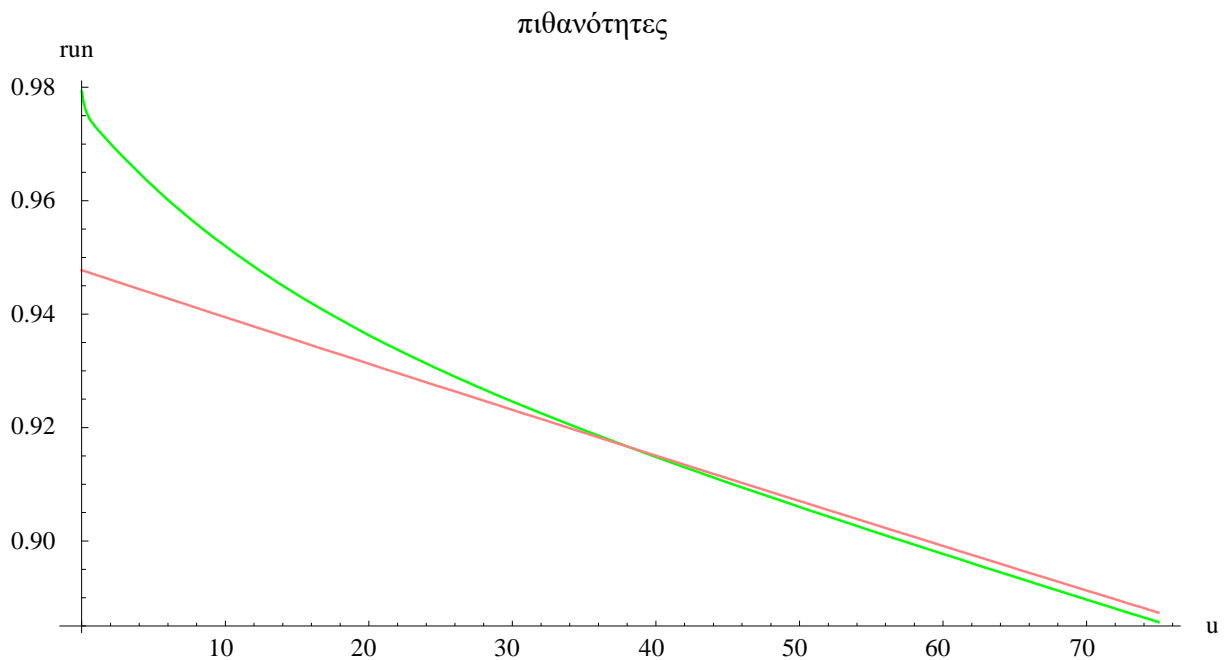
<i>u</i>	<i>Mean</i>		<i>Δεύτερη Ροπή</i>		<i>Ποσοστό Λάθους</i>	
	<i>Exact</i>	<i>Approx</i>	<i>Exact</i>	<i>Approx</i>	<i>Mean</i>	<i>Δεύτερη ροπή</i>
0	1014.87	2977.45	$1.2946 \times 10^8$	$3.3928 \times 10^8$	-193.3	-162.05
30	4183.75	4399.06	$4.97942 \times 10^8$	$5.117614 \times 10^8$	-5.146	-2.7752
50	5289.6	5346.8	$6.3273 \times 10^8$	$6.2899 \times 10^8$	-1.0815	0.5914
80	6752.64	6768.42	$8.16248 \times 10^8$	$8.0820 \times 10^8$	-0.2336	0.9848
100	7702.94	7716.16	$9.3799 \times 10^8$	$9.2993 \times 10^8$	-0.1715	0.8591
150	10069	10085.5	$1.24904 \times 10^9$	$1.24211 \times 10^9$	-0.1639	0.5557
300	17163.2	17193.2	$2.2484 \times 10^9$	$2.24596 \times 10^9$	-0.1767	0.1119
400	21892.7	21932.3	$2.97034 \times 10^9$	$2.9713 \times 10^9$	-0.1808	-0.0039

Πίνακας 5.4.1 Για  $\theta = 2\%$ , οι δύο πρώτες ροπές (ακριβείς και προσεγγιστικές) και το ποσοστό λάθους.

Στον παρακάτω πίνακα θα υπολογίσουμε τον συντελεστή μεταβλητότητας  $CV = \frac{St.Dev}{Mean}$  και το συντελεστή λοξότητας (Coefficient of skewness) από τον τύπο (5.41).

$u$	St.Dev		Coef. Var. (CV)		Ποσοστό λάθους	
	Exact	Approx	Exact	Approx	St.Dev	CV
0	11339.7	18177.4	11.1736	6.10501	-60.298	45.362
30	21932.9	22190.3	21.6116	7.45279	-1.1736	65.5148
50	24608	24503.2	24.2474	8.2295	0.42582	66.06
80	27779.6	27611.6	27.3726	9.27356	0.60482	66.121
100	29662.9	29502.4	29.2284	9.90862	0.54105	66.0993
150	33902.4	33769.6	33.4057	11.3418	0.391874	66.0484
300	44242.9	44162.8	43.5947	14.8324	0.18113	65.9766
400	49961.4	492294	49.2294	16.7604	0.11645	65.9546

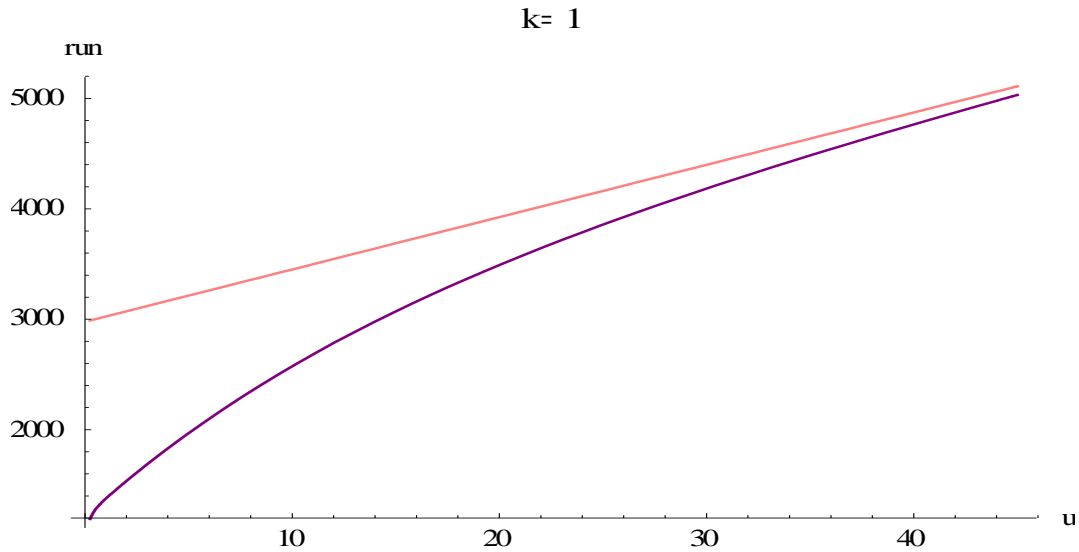
Πίνακας 5.4.2. Τυπική απόκλιση, Συντελεστής μεταβλητότητας και Συντελεστής Λοξότηας.



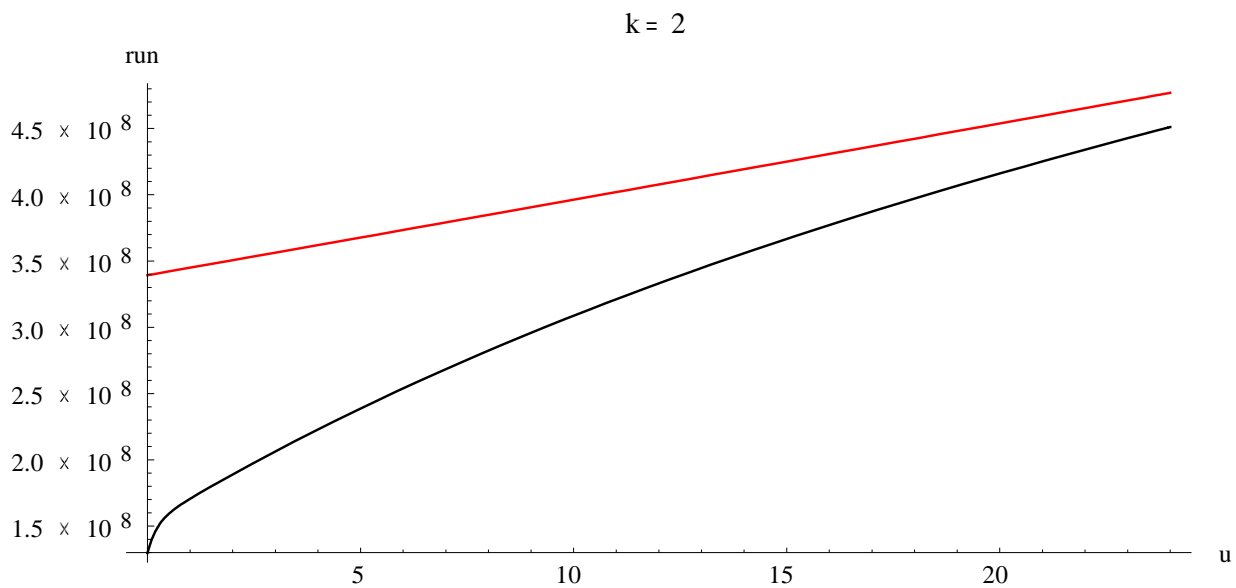
Σχήμα 5.4.1. Πιθανότητες  $\psi(u)$  και  $\psi_{av}(u)$ . (πράσινο και ροζ αντίστοιχα)

Από το Σχήμα 5.4.1. μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι οι πιθανότητες  $\psi(u)$  και  $\psi_{av}(u)$  τείνουν να γίνουν μία.

**Σχόλιο:** Οι προσεγγίσεις είναι καλές όμως δεν είναι τόσο ακριβείς όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, κάτι που πιθανόν να οφείλεται στο ότι το περιθώριο ασφαλείας είναι μικρότερο του  $\theta = 10\%$ . Όσο μεγαλύτερο το  $\theta$  τόσο καλύτερη η προσέγγιση.



**Σχήμα 5.4.2.** Ακριβής και αναδρομική σχέση για τη πρώτη ροπή. (μωβ και ροζ αντίστοιχα)



**Σχήμα 5.4.3.** Ακριβής και αναδρομική σχέση για τη δεύτερη ροπή. (μαύρο και κόκκινο αντίστοιχα)

Περίπτωση 2<sup>η</sup> για  $\theta = 4\%$ .

<i>u</i>	<i>Mean</i>		<i>Δεύτερη Ροπή</i>		<i>Ποσοστό Λάθους</i>	
	<i>Exact</i>	<i>Approx</i>	<i>Exact</i>	<i>Approx</i>	<i>Mean</i>	<i>Δεύτερη ροπή</i>
0	531.378	1488.73	$1.63891 \times 10^7$	$4.46265 \times 10^7$	-180.163	-172.294
30	2103.64	2164.23	$6.56289 \times 10^7$	$6.73433 \times 10^7$	-2.88012	-2.61205
50	2635.46	2614.57	$8.37646 \times 10^7$	$8.29948 \times 10^7$	0.792927	0.91899
80	3331.27	3290.07	$1.0870 \times 10^8$	$1.07232 \times 10^8$	1.23666	1.35009
100	3782.29	3740.41	$1.25443 \times 10^8$	$1.23898 \times 10^8$	1.10718	1.2314
150	4904.97	4866.25	$1.68915 \times 10^8$	$1.67336 \times 10^8$	0.789489	0.934578
300	8271.1	8243.77	$3.1438 \times 10^8$	$3.12861 \times 10^8$	0.330407	0.182988
400	10515.2	10495.5	$4.2394 \times 10^8$	$4.22554 \times 10^8$	0.187532	0.328433

Πίνακας 5.4.3. Για  $\theta = 4\%$ , οι δύο πρώτες ροπές (ακριβείς και προσεγγιστικές)

<i>u</i>	<i>St. Sev</i>		<i>CV</i>		<i>Ποσοστό Λάθους</i>	
	<i>Exact</i>	<i>Approx</i>	<i>Exact</i>	<i>Approx</i>	<i>St. Dev</i>	<i>CV</i>
0	4013.32	6512.31	7.55266	4.37442	-62.2675	42.0811
30	7823.28	7915.77	3.71892	3.65754	-1.18222	1.65037
50	8764.64	8726.9	3.32565	3.3378	0.430559	-0.365265
80	9879.41	9818.76	2.96566	2.98436	0.613942	-0.63052
100	10542.2	10483.7	2.78725	2.80282	0.554766	-0.558604
150	12035.6	11985.7	2.45376	2.46302	0.415155	-0.377313
300	15683.4	15649.3	1.89617	1.89832	0.217152	-0.11363
400	17702.5	17647.8	1.68351	1.65404	0.156174	-0.031416

Πίνακας 5.4.4. Τυπική απόκλιση, Συντελεστής μεταβλητότητας.

Περίπτωση 3<sup>η</sup> Για  $\theta = 15\%$

<i>u</i>	<i>Mean</i>		<i>Δεύτερη Ροπή</i>		<i>Ποσοστό Λάθους</i>	
	<i>Exact</i>	<i>Approx</i>	<i>Exact</i>	<i>Approx</i>	<i>Mean</i>	<i>Δεύτερη ροπή</i>
0	143.779	396.993	391002	1077403.06	-176.113	-175.549
30	547.384	538.481	$1.62611 \times 10^6$	$1.59375 \times 10^6$	1.62652	1.99011
50	663.143	632.806	$2.06386 \times 10^6$	$1.9602 \times 10^6$	4.57471	5.02198
80	806.294	774.294	$2.66702 \times 10^6$	$2.54329 \times 10^6$	4.02124	4.6392
100	899.16	868.619	$3.08043 \times 10^6$	$2.95424 \times 10^6$	3.39671	4.09634
150	1129.2	1104.43	$4.18474 \times 10^6$	$4.05949 \times 10^6$	2.19375	2.99316
300	1818.99	1811.97	$8.13097 \times 10^6$	$8.04251 \times 10^6$	0.391643	1.08799
400	2278.85	2283.49	$1.2905 \times 10^7$	$1.12539 \times 10^7$	-0.203732	0.32354

Πίνακας 5.4.5 Οι δύο πρώτες ροπές (ακριβείς και προσεγγιστικές)

<i>u</i>	<i>St. Sev</i>		<i>CV</i>		<i>Ποσοστό Λάθους</i>	
	<i>Exact</i>	<i>Approx</i>	<i>Exact</i>	<i>Approx</i>	<i>St. Dev</i>	<i>CV</i>
0	608.547	959.062	4.23252	2.41581	-57.5985	42.9225
30	157.73	1141.83	2.10406	2.12047	0.859095	-0.780114
50	1274.4	1248.91	1.92176	1.9736	2.00054	-2.69757
80	1419.93	1394.19	1.46009	1.80059	1.81285	-2.30092
100	1507.3	1483.15	1.67634	1.70749	1.60163	-1.85819
150	1705.77	1685.15	1.51059	1.52581	1.20891	-1.00693
300	2195.96	2181.66	1.20724	1.20409	0.651173	0.26055
400	2469.27	2457.56	1.08356	1.07623	0.474376	0.67673

Πίνακας 5.4.6. Τυπική απόκλιση, Συντελεστής μεταβλητότητας.  
(Παράρτημα 11°)

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Παράρτημα 1<sup>ο</sup> (Εφαρμογή 2.4.1., 2.5.1., 2.6.1)

«Γλώσσα προγραμματισμού R»

(a) *library(actuarial)*

$$a < -0$$

$$rate = \frac{1}{3};$$

$$b < -8$$

$$h < -\frac{1}{4};$$

$$fr < -discretize\left(pexp\left(x, rate = \frac{1}{3}\right), from = a, to = b, step = h, method = rounding\right)$$

$$fr$$

$$length(fr)$$

$$n < -18$$

$$p < -0.4$$

$$fN < -dbinom(seq(0, n, 1), size = n, prob = p)$$

$$fN$$

$$meanN < -n * p$$

$$meanN$$

$$varN < -n * p * (1 - p)$$

$$varN$$

$$meanX < -\frac{1}{rate}$$

$$meanX$$

$$varX < -\left(\frac{1}{rate}\right)^2$$

$$varX$$

$$meanS < -meanN * meanX$$

$$varS < -meanN * varX + varN * meanX^2$$

(b) *Gs.rec < -aggregateDist("recursive", model.freq = "binomial", model.sev = fN, size = n, prob = p)*

$$summary(Gs.rec)$$

$$knots(Gs.rec)$$

$$gs.rec < -diff(Gs.rec)$$



*gs.rec*

*c* < - 2

*x* < - seq(0, *c*, *h*)

*d* < - ( $\frac{c}{h}$ ) + 1

*d* = 4

*mat* < - cbind(*x*, *gs.rec*[1: *d*], *Gs.rec*(*x*))

rownames(*mat*) < - rep(, nrow(*mat*))

colnames(*mat*) < - c(x,g(x),G(x))

round(*mat*, digits = 5)

Για τα σχήματα 2.5.1. και 2.5.2. ο κώδικας είναι

plot(*Gs.rec*, col = blue)

plot(*gs.rec*, col = red)

(c)

*c* < - 10

*x* < - seq(0, *c*)

*d* < - (*c*) + 1

*d* = 18

*mat* < - cbind(*x*, *gs.rec*[1: *d*], *Gs.rec*(*x*))

rownames(*mat*) < - rep(, nrow(*mat*))

colnames(*mat*) < - c(x,g(x)Panjer.Poisson,g(x): aggregateDist)

round(*mat*, digits = 5)

Οι υπόλοιπες ασκήσεις έχουν υπολογιστεί στο Mathematica

Παράρτημα 2<sup>ο</sup> (Παράδειγμα 3.4.1.)

*f*[*x* ] := 4Exp[-4*x*]

*f*[*x*]

*c* = 3

*lambda* = 8

Integrate[*f*[*x*], {*x*, 0, Infinity}]

*m* = Integrate[*x* \* *f*[*x*], {*x*, 0, Infinity}]

*m2* = Integrate[(*x*<sup>2</sup>) \* *f*[*x*], {*x*, 0, Infinity}]

*theta* = (*c*/(*lambda* \* *m*)) - 1

*R* = (2 \* *theta* \* *m*)/*m2*

Plot[*f*[*x*], {*x*, 0, 4}]

Παράρτημα 3<sup>ο</sup> (Παράδειγμα 3.4.2.)

$$f[x] := 2 * x * \text{Exp}[-2x] + \left(\frac{9}{2}\right) * x * \text{Exp}[-3x]$$

$f[x]$

$\text{Integrate}[f[x], \{x, 0, \text{Infinity}\}]$

$\text{lambda} = 5$

$c = 8$

$m = \text{Integrate}[x * f[x], \{x, 0, \text{Infinity}\}]$

$m2 = \text{Integrate}[(x^2) * f[x], \{x, 0, \text{Infinity}\}]$

$\text{theta} = (c / (\text{lambda} * m)) - 1$

$R = (2 * \text{theta} * m) / m2$

$\text{psi0} = 1 / (1 + \text{theta})$

$\text{Plot}[f[x], \{x, 0, 3\}]$

Παράρτημα 4<sup>ο</sup> (Παράδειγμα 3.4.3)

$a = 3$

$b = 3$

$c = 0.7$

$l = 0.4$

$$f1[x] := \frac{(b^a) * x^{(a-1)\text{Exp}[-(b*x)]}}{(a-1)!}$$

$f1[x]$

$\text{Integrate}[f1[x], \{x, 0, \text{Infinity}\}]$

$m = \text{Integrate}[x * f1[x], \{x, 0, \text{Infinity}\}]$

$\text{theta} = (c / (l * m)) - 1$

$m2 = \text{Integrate}[(x^2) * f1[x], \{x, 0, \text{Infinity}\}]$

$m3 = \text{Integrate}[(x^3) * f1[x], \{x, 0, \text{Infinity}\}]$

$M[t] = \text{Integrate}[\text{Exp}[y * t] * f1[y], \{y, 0, \text{Infinity}\}, \text{Assumptions} \rightarrow t < 3]$

$$\text{Solve}\left[-\frac{27}{(-3+t)^3} == 1 + (1 + \text{theta}) * m * t, t\right]$$

$R1 = 0.0705083$

$R2 = 2.82085$

$F1[x] := \text{Integrate}[f1[y], \{y, 0, x\}]$

$F1[x]$

$\text{TailofF1}[x] := 1 - F1[x]$

$\text{TailofF1}[x]$

[82]

$$Fe[x] := \frac{\text{Integrate}[\text{TailofF1}[y], \{y, 0, x\}]}{m}$$

$$fe[x] := \frac{D[Fe[x], x]}{fe[x]}$$

$$\text{TailofFe}[x] := \frac{1 - Fe[x]}{\text{TailofFe}[x]}$$

$$\text{Cramer} = \frac{\text{theta} * m}{R1 * \text{Integrate}[x * \text{Exp}[R1 * x] * \text{TailofF1}[x], \{x, 0, \text{Infinity}\}]}$$

$$psi[u] := \frac{\text{Cramer} * \text{Exp}[-R1 * u]}{psi[u]}$$

$$\text{Plot}[f1[x], \{x, 0, 1\}]$$

Παράρτημα 5° (Παράδειγμα 4.3.1.)

$$f[x] = \frac{24 \text{Exp}[-24 * x]}{f[x]}$$

$$\text{lambda} = 0.8$$

$$\text{theta} = \frac{1}{6}$$

$$m = \text{Integrate}[x * f[x], \{x, 0, \text{Infinity}\}]$$

$$m2 = \text{Integrate}[x^2 * f[x], \{x, 0, \text{Infinity}\}]$$

$$\text{Mx}[r] := \text{Integrate}[\text{Exp}[t * x] * f[x], \{x, 0, \text{Infinity}\}, \text{Assumptions} \rightarrow r < 24]$$

$$\text{Mx}[r]$$

$$\text{FullSimplify}[\text{NSolve}[\text{Mx}[t] == 1 + (1 + \text{theta}) * m * t]]$$

$$R1 = (24 * \text{theta}) / (1 + \text{theta})$$

$$psi[u] := \frac{1}{1 + \text{theta}} * \text{Exp}[-R1 * u]$$

$$psi[u]$$

$$psi1[0] = 1 / (1 + \text{theta})$$

$$\text{Plot}[f[x], \{x, 0, 0.3\}]$$

Παράρτημα 6° (Παράδειγμα 4.4.1. Και Παράδειγμα 4.6.1.)

(a) Παράδειγμα 4.4.1.

$$f[x] := \left(\frac{1}{2}\right) * (3 * \text{Exp}[-6 * x]) + \left(\frac{1}{2}\right) * \text{Exp}[-2 * x] + \left(\frac{1}{2}\right) * \text{Exp}[-x]$$

$$f[x]$$

$$\text{Integrate}[f[x], \{x, 0, \text{Infinity}\}]$$

$$\text{theta} = 0.2$$

$$m = \text{Integrate}[x * f[x], \{x, 0, \text{Infinity}\}]$$

$$m2 = \text{Integrate}[x^2 * f[x], \{x, 0, \text{Infinity}\}]$$

$$m3 = \text{Integrate}[x^3 * f[x], \{x, 0, \text{Infinity}\}]$$

$$M[t] := \text{Integrate}[\text{Exp}[y * t] * f[y], \{y, 0, \text{Infinity}\}, \text{Assumptions} \rightarrow t < 1]$$

$$M[t]$$

$$\text{Solve}[M[t] == 1 + (1 + \text{theta}) * m * t, t]$$

$$R1 = 0.191847$$

$$R2 = 1.8153$$

$$R3 = 5.74285$$

$$\text{Anofragma}[u] := \text{Exp}[-R1 * u]$$

$$\text{Anofragma}[u]$$

$$\text{psi}[0] = 1/(1 + \text{theta})$$

$$F[x] := \text{Integrate}[f[y], \{y, 0, x\}]$$

$$F[x]$$

$$\text{Tailof}F[x] := 1 - F[x]$$

$$\text{Tailof}F[x]$$

$$Fe[x] := \frac{\text{Integrate}[\text{Tailof}F[y], \{y, 0, x\}, \text{Assumptions} \rightarrow x > 0]}{m}$$

$$Fe[x]$$

$$fe[x] := D[Fe[x], x]$$

$$fe[x]$$

$$\text{Tailof}Fe[x] := 1 - Fe[x]$$

$$\text{Tailof}Fe[x]$$

$$\text{Laplace}H1[s] := \text{LaplaceTransform}[1 - Fe[t], t, s]$$

$$\text{Laplace}H1[s]$$

$$\text{Laplace}fe[s] := \text{LaplaceTransform}[fe[t], t, s]$$

$$\text{Laplace}fe[s]$$

$$\text{LaplaceTransformPsi}[s] = \text{Laplace}H1[s]/(1 + \text{theta} - \text{Laplace}fe[s])$$

$$\text{Katofragma}[u] := \frac{\text{Tailof}Fe[u]}{\text{theta} + \text{Tailof}Fe[u]}$$

$$\text{Katofragma}[u]$$

$$\text{Delta}[u] = 1 - C1 * \text{Exp}[-R1 * u] - C2 * \text{Exp}[-R2 * u] - C3 * \text{Exp}[-R3 * u]$$

$$\text{Delta}[u]$$

$$\text{Delta}0 = 1 - \text{psi}[0]$$

$$\text{Delta}0$$

$$\text{FirstDerivofDelta}[u] := \text{Derivative}[1][\text{Delta}][u]$$

$$\text{FirstDerivofDelta}[u]$$

$$\text{FirstDerivofDelta}[0]$$

$$\text{SecondDerivOfDelta}[u] := \text{Derivative}[2][\text{Delta}][u]$$

$$\text{SecondDerivOfDelta}[u]$$

$$\text{SecondDerivOfDelta}[0]$$

$$\text{protiparagogsdelta}0 = \text{theta}/(((1 + \text{theta})^2) * m)$$

$$\text{deyteriparagogsdelta}0 = \text{protiparagogsdelta}0/((1 + \text{theta}) * m) - (\text{Delta}0 * f[0])/((1 + \text{theta}) * m)$$

$$\text{Solve}\{C1 + C2 + C3 == \text{psi}[0], \text{FirstDerivofDelta}[0] == 1.03704, \text{SecondDerivOfDelta}[0] = -2.30453\}$$

$$C1 = 0.349977$$

$$C2 = 0.459814$$

$$C3 = 0.0235418$$

$$psi[u] := C1 * Exp[-R1 * u] + C2 * Exp[-R2 * u] + C3 * Exp[-R3 * u]$$

→ Cramer

$$Cramer = \frac{theta * m}{R1 * Integrate[x * Exp[R1 * x] * TailofF[x], \{x, 0, Infinity\}]}$$

$$psiCram[u] := Cramer * (Exp[-R1 * u])$$

b) Παράδειγμα 4.6.1

→ Tijms

$$g = (1/(1 + theta) - Cramer) / ((1/theta * m) * (Integrate[y * TailofF[y], \{y, 0, Infinity\}]) - Cramer/R1)$$

$$psiTijms[u] := \left( \frac{1}{1 + theta} - Cramer \right) * Exp[-(g * u)] + (Cramer * Exp[-(R1 * u)])$$

$$psiT[u] = Cramer * Exp[-R1 * u]$$

□

□

→ Σχήματα

Plot[{psi[u], psiCram[u], psiTijms[u]}, {u, 0, 9}, PlotRange → {0, 0.9}, AxesLabel → {u, ruin}, PlotStyle → {RGBColor[0, 0, 6], RGBColor[4, 0, 0], RGBColor[0, 1, 0]}]

Plot[{psi[u], psiCram[u], Anofragma[u], Katofragma[u], psiTijms[u]}, {u, 0, 9}, PlotRange → {0, 0.9}, AxesLabel → {u, psiu}, PlotStyle → {Orange, Purple, Blue, Green, Red}]

Παράρτημα 7° (Παράδειγμα 4.5.1.)

$$f[x] := 9 * x * Exp[-3 * x]$$

$$f[x]$$

$$theta = 0.4$$

$$Integrate[f[x], \{x, 0, Infinity\}]$$

$$m1 = Integrate[x * f[x], \{x, 0, Infinity\}]$$

$$m2 = Integrate[(x^2) * f[x], \{x, 0, Infinity\}]$$

$$m3 = Integrate[(x^3) * f[x], \{x, 0, Infinity\}]$$

$$la = (9l * (m2^3)) / (2 * (m3^2))$$

$$a = (3 * m2) / (m3)$$

$$c1 = \frac{2 * m1 * m2 * theta}{3(m2)^2}$$

$$Rdv = (c1 * a) / ((1 + c1))$$

$$psi[u] := (1/(1 + c1)) * Exp[-Rdv * u]$$

$$psi[u]$$

Παράρτημα 8° (Εφαρμογή 5.6.1)

$$beta := 3$$

$$density[x] := beta * Exp[-beta * x]$$

$$P[x] = 1 - Exp[-beta * x]$$

$$\begin{aligned}
 f[x] &:= 3 * \text{Exp}[-3 * x] \\
 p1 &:= \text{Integrate}[x * f[x], \{x, 0, \text{Infinity}\}] \\
 p2 &:= \text{Integrate}[x^2 * f[x], \{x, 0, \text{Infinity}\}] \\
 p3 &:= \text{Integrate}[x^3 * f[x], \{x, 0, \text{Infinity}\}] \\
 \text{var} &= \frac{1}{\text{beta}^2} \\
 \text{cv} &= \frac{p1^2}{2} \\
 c &:= \frac{1}{5} \\
 \text{lambda} &:= 1 \\
 \text{theta} &:= \frac{c}{\text{lambda} * p1} - 1
 \end{aligned}$$

→ Για την ακριβή πιθανότητα

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{\text{beta} * \text{theta}}{1 + \text{theta}} \\
 \text{psi}[x] &:= \left( \frac{1}{1 + \text{theta}} \right) * \text{Exp}[-R * x] \\
 \text{psi1}[s] &:= \frac{1}{\text{lambda} * p1 * \text{theta}} * \\
 &\left( \text{Integrate}[\text{psi}[s - x] * \text{psi}[x], \{x, 0, s\}] + \text{Integrate}[\text{psi}[x], \{x, s, \text{Infinity}\}] - p2 * \frac{\text{psi}[s]}{2 * p1 * \text{theta}} \right) \\
 &\frac{\text{psi1}[s]}{\text{psi1}[u]} \\
 &\frac{\text{psi}[u]}{\text{psi}[u]}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{psi2}[y] &:= \left( \frac{2}{\text{lambda} * p1 * \text{theta}} \right) \\
 &* (\text{Integrate}[\text{psi}[y - w] * \text{psi1}[w], \{w, 0, y\}] + \text{Integrate}[\text{psi1}[w], \{w, y, \text{Infinity}\}] - \text{psi}[y] \\
 &* \text{Integrate}[\text{psi1}[w], \{w, 0, \text{Infinity}\}]) \\
 &\text{psi2}[y]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{psi3}[z] &:= \left( \frac{3}{\text{lambda} * p1 * \text{theta}} \right) \\
 &* (\text{Integrate}[\text{psi}[z - y] * \text{psi2}[y], \{y, 0, z\}] + \text{Integrate}[\text{psi2}[y], \{y, z, \text{Infinity}\}] - \text{psi}[z] \\
 &* \text{Integrate}[\text{psi2}[y], \{y, 0, \text{Infinity}\}]) \\
 &\frac{\text{psi3}[z]}{u = 100} \\
 &\frac{\text{psi1}[u]}{\text{psi}[u]} \\
 &\frac{\text{psi2}[u]}{\text{psi}[u]} \\
 &\frac{\text{psi3}[u]}{\text{psi}[u]} \\
 &\frac{u}{\text{psi11}[u]} \\
 &\frac{\text{psid}[u]}{\text{psi22}[u]} \\
 &\frac{\text{psid}[u]}{\text{psi}[u]}
 \end{aligned}$$

→ Για το συντελεστή διακύμανσης

$$\frac{\text{psi33}[u]}{\text{psid}[u]}$$

$$u$$

$$gh = \frac{\left( \left( \left( \frac{\text{psi2}[u]}{\text{psi}[u]} \right) - \left( \frac{\text{psi1}[u]}{\text{psi}[u]} \right) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{\text{psi1}[u]}{\text{psi}[u]}}$$

→ Για το συντελεστή λοξότητας

$$g = u$$

$$g_{exact} = \frac{\left( \left( \frac{\text{psi3}[g]}{\text{psi}[g]} \right) - \left( \frac{\text{psi1}[g]}{\text{psi}[g]} \right) \right)^3}{\left( \left( \frac{\text{psi2}[g]}{\text{psi}[g]} \right) - \left( \frac{\text{psi1}[g]}{\text{psi}[g]} \right) \right)^{\frac{3}{2}}}$$

→ Για τα σχήματα

Plot[f[k], {k, 0, 1.4}]

Plot[psi[w], {w, 0, 5}]

Παράρτημα 9<sup>ο</sup> (Εφαρμογή 5.6.2)  
Περίπτωση 1<sup>η</sup>

$$s = 3$$

$$a = \left( \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{4} - \left( \frac{2}{7 + s^2} \right) \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$P[x] := 1 - a * \text{Exp}[-a1 * x] - (1 - a) * \text{Exp}[-a2 * x]$$

$$\text{tailP}[x] := 1 - P[x]$$

$$\text{density}[x] := D[P[x], x]$$

$$\text{density}[x]$$

$$a1 = \frac{a}{1 - a}$$

$$a2 = \frac{1}{a1}$$

$$p1 := \text{Integrate}[\text{tailP}[x], \{x, 0, \text{Infinity}\}]$$

$$p1$$

$$p2 := \text{Integrate}[x^2 * \text{density}[x], \{x, 0, \text{Infinity}\}]$$

$$p2$$

$$p3 := \text{Integrate}[x^3 * \text{density}[x], \{x, 0, \text{Infinity}\}]$$

$$p3$$

$$p2 = 1 + s^2$$

$$p3 = 1.5(s^4) + 6(s^2) - 1.5$$

$$\text{theta} = 0.1$$

$$c = 1 + \text{theta}$$

$$\text{lamda} = 1$$

→ Για την ακριβή πιθανότητα χρεοκοπίας

$$Pe[x] := \frac{\text{Integrate}[\text{tailP}[y], \{y, 0, x\}, \text{Assumptions} \rightarrow x > 0]}{p1}$$

$$Pe[x]$$

$$\text{LaplaceH1}[z] := \text{LaplaceTransform}[1 - \text{Pe}[t], t, z]$$

$$\text{LaplaceH1}[z]$$

$$\text{fe}[x] := \text{D}[\text{Pe}[x], x]$$

$$\text{fe}[x]$$

$$\text{Laplacefe}[z] := \text{LaplaceTransform}[\text{fe}[t], t, z]$$

$$\text{Laplacefe}[z]$$

$$\text{LaplaceTransformPsi}[z] = \frac{\text{LaplaceH1}[z]}{1 + \text{theta} - \text{Laplacefe}[z]}$$

$$\text{FullSimplify}[\text{LaplaceTransformPsi}[z]]$$

$$\text{psi}[u] := \text{InverseLaplaceTransform}[\text{LaplaceTransformPsi}[z], z, u]$$

$$\text{psi}[u]$$

$$\text{psi1}[p] := \frac{1}{\text{lamda} * \text{p1} * \text{theta}}$$

$$* \left( \text{Integrate}[\text{psi}[p - x] * \text{psi}[x], \{x, 0, p\}] + \text{Integrate}[\text{psi}[x], \{x, p, \text{Infinity}\}] - p^2 \right)$$

$$* \frac{\text{psi}[p]}{2 * \text{p1} * \text{theta}}$$

$$\text{psi1}[p]$$

$$\text{psi2}[y] := \left( \frac{2}{\text{lamda} * \text{p1} * \text{theta}} \right)$$

$$* (\text{Integrate}[\text{psi}[y - w] * \text{psi1}[w], \{w, 0, y\}] + \text{Integrate}[\text{psi1}[w], \{w, y, \text{Infinity}\}] - \text{psi}[y]$$

$$* \text{Integrate}[\text{psi1}[w], \{w, 0, \text{Infinity}\}])$$

$$\text{psi2}[y]$$

→ Για την προσεγγιστική μέθοδο του De Vylder

$$\text{lam} = \frac{9 * \text{lamda} * (\text{p2}^3)}{2 * \text{p3}^2}$$

$$\text{b1} = \frac{3 * \text{p2}}{\text{p3}}$$

$$\text{c2} = (2 * \text{p1} * \text{p3} * \text{theta}) / (3 * (\text{p2}^2))$$

$$\text{R}_{dv} = \frac{\text{c2} * \text{b1}}{(1 + \text{c2})}$$

$$\text{psidv}[u] := \left( \frac{1}{1 + \text{c2}} \right) * \text{Exp}[-\text{R}_{dv} * u]$$

$$\text{psidv}[u]$$

$$\text{psi11}[g] := \frac{1}{\text{lamda} * \text{p1} * \text{theta}}$$

$$* \left( \text{Integrate}[\text{psidv}[g - x] * \text{psidv}[x], \{x, 0, g\}] + \text{Integrate}[\text{psidv}[x], \{x, g, \text{Infinity}\}] - p^2 \right)$$

$$* \frac{\text{psidv}[g]}{2 * \text{p1} * \text{theta}}$$

$$\text{psi11}[g]$$

$$\text{psi2}[u]$$

$$\text{psi}[u]$$

$$\text{psi22}[y] := \left( \frac{2}{\text{lamda} * \text{p1} * \text{theta}} \right)$$

$$* (\text{Integrate}[\text{psidv}[y - w] * \text{psi11}[w], \{w, 0, y\}] + \text{Integrate}[\text{psi11}[w], \{w, y, \text{Infinity}\}] - \text{psidv}[y] * \text{Integrate}[\text{psi11}[w], \{w, 0, \text{Infinity}\}])$$

$$\text{psi22}[y]$$

→ Για το Mean

$$u$$

$$\text{psi1}[u]$$

$$\text{psi}[u]$$



$$\frac{\psi_{11}[u]}{\psi_{dv}[u]}$$

→ Για το Standard Deviation

$$sdj = \left( \frac{\psi_{2}[u]}{\psi[u]} \right) - \left( \frac{\psi_{11}[u]}{\psi[u]} \right)^2$$

$$sdj = \text{Sqrt}[ad]$$

$$sdhg = \left( \frac{\psi_{22}[u]}{\psi_{dv}[u]} \right) - \left( \frac{\psi_{11}[u]}{\psi_{dv}[u]} \right)^2$$

$$sdhg = \text{Sqrt}[b3]$$

→ Για το Ποσοστό Λάθους

$$\frac{\left( \frac{\psi_{1}[j]}{\psi[j]} \right) - \left( \frac{\psi_{11}[j]}{\psi_{dv}[j]} \right)}{\frac{\psi_{11}[j]}{\psi[j]}} * 100\%$$

$$\frac{sdj - sdhg}{sdj} * 100\%$$

→ Για τα Σχήματα

*Plot*[{*psi*[*d*], *psidv*[*d*]}, {*d*, 0, 12, 7}, *AxesLabel* → {*u*, *run*}, *PlotStyle* → {*Blue*, *Pink*}, *PlotLabel* → πιθανότητες, *PlotTheme* → Detailed]

*Plot*[(*psi*[*t*]/*psi*[*t*]), (*psi*<sub>11</sub>[*t*]/*psidv*[*t*])], {*t*, 0, 3}, *AxesLabel* → {*u*, *run*}, *PlotStyle* → {*Green*, *Red*}, *PlotLabel* → *k*=1, *PlotTheme* → Detailed]

*Plot*[(*psi*<sub>2</sub>[*t*]/*psi*[*t*]), (*psi*<sub>22</sub>[*t*]/*psidv*[*t*])], {*t*, 0, 3}, *AxesLabel* → {*u*, *run*}, *PlotStyle* → {*Green*, *Pink*}, *PlotLabel* → *k*=2, *PlotTheme* → Detailed]

Οι υπόλοιπες περιπτώσεις λύνονται με τον ίδιο τρόπο.

Παράρτημα 10<sup>ο</sup> (Εφαρμογή 5.6.3)  
Για την κατανομή Γάμμα

$$a = 2$$

$$b = 3$$

$$f1[x] := (x^{a-1}) * (b^a) * \frac{\text{Exp}[-b * x]}{\text{Gamma}[a]}$$

$$F1[x] := \text{Integrate}[f1[y], \{y, 0, x\}]$$

$$\text{TailF1}[x] := 1 - F1[x]$$

$$m1 = \text{Integrate}[x * f1[x], \{x, 0, \text{Infinity}\}]$$

$$m2 = \text{Integrate}[x^2 * f1[x], \{x, 0, \text{Infinity}\}]$$

$$m3 = \text{Integrate}[x^3 * f1[x], \{x, 0, \text{Infinity}\}]$$

$$\text{theta} = 0.8$$

$$l = 1$$

$$c = (1 + \text{theta}a) * l * m1$$

→ Για την ακριβή πιθανότητα

$$Pe[x] := \frac{\text{Integrate}[\text{TailF1}[y], \{y, 0, x\}, \text{Assumptions} \rightarrow x > 0]}{m1}$$

$$\text{LaplaceH1}[s] := \text{LaplaceTransform}[1 - Pe[t], t, s]$$

$$fe[x] := D[Pe[x], x]$$

$$\begin{aligned}
& fe[x] \\
Laplacefe[z] & := LaplaceTransform[fe[t], t, z] \\
& Laplacefe[z] \\
LaplaceTransformPsi[z] & = \frac{LaplaceH1[z]}{1 + thetaa - Laplacefe[z]} \\
& FullSimplify[LaplaceTransformPsi[z]] \\
psi[u] & := InverseLaplaceTransform[LaplaceTransformPsi[z], z, u] \\
& psi[u] \\
psi1[s] & := \frac{1}{l * m1 * thetaa} \\
& * \left( Integrate[psi[s - x] * psi[x], \{x, 0, s\}] + Integrate[psi[x], \{x, s, Infinity\}] - m2 \right. \\
& \left. * \frac{psi[s]}{2 * m1 * thetaa} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
psi2[y] & := \left( \frac{2}{l * m1 * thetaa} \right) \\
& * (Integrate[psi[y - w] * psi1[w], \{w, 0, y\}] + Integrate[psi1[w], \{w, y, Infinity\}]) - psi[y] \\
& * Integrate[psi1[w], \{w, 0, Infinity\}] \\
& psi2[y]
\end{aligned}$$

→ Για την προσεγγιστική πιθανότητα

$$\begin{aligned}
la & = \frac{9l * (m2^3)}{2 * (m3^2)} \\
a1 & = \frac{3 * m2}{m3} \\
c1 & = \frac{2 * m1 * m3 * thetaa}{3 * m2^2} \\
Rdv & = \frac{c1 * a1}{(1 + c1)}
\end{aligned}$$

$$psi[u] := \left( \frac{1}{1 + c1} \right) * Exp[-Rdv * u]$$

$$\begin{aligned}
psi11[g_] & := 1/(la * m1 * thetaa) * (Integrate[psid[g - x] * psid[x], \{x, 0, g\}] \\
& + Integrate[psid[x], \{x, g, Infinity\}] - \\
& m2 * psid[g]/(2 * m1 * thetaa))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
psi11[g]psi22[y] & := \left( \frac{2}{la * m1 * thetaa} \right) \\
& * (Integrate[psid[y - w] * psi11[w], \{w, 0, y\}] + Integrate[psi11[w], \{w, y, Infinity\}]) \\
& - psid[y] * Integrate[psi11[w], \{w, 0, Infinity\}]) \\
& psi22[y]
\end{aligned}$$

→ Πίνακας 5.3.1.

$$\begin{aligned}
& u \\
dd & = \frac{psi1[u]}{psi[u]} \\
cc & = \frac{psi11[u]}{psi[u]} \\
ff & = \frac{psi2[u]}{psi[u]} \\
kk & = \frac{psi22[u]}{psi[u]} \\
\frac{dd - cc}{ff - kk} & * 100 \\
& * 100
\end{aligned}$$

→ Πίνακας 5.3.2.

$$a5 = \left( \frac{psi2[u]}{psi[u]} \right) - \left( \frac{psi1[u]}{psi[u]} \right)^2$$

$$sd = Sqrt[a5]$$

$$b3 = \left( \frac{psi22[u]}{psid[u]} \right) - \left( \frac{psi11[u]}{psid[u]} \right)^2$$

$$sdhg = Sqrt[b3]$$

$$gg = \frac{\left( \left( \frac{psi2[u]}{psi[u]} \right) - \left( \frac{psi1[u]}{psi[u]} \right) \right)^2}{\frac{psi1[u]}{psi[u]}}$$

$$hh = \frac{\left( \left( \frac{psi22[u]}{psid[u]} \right) - \left( \frac{psi11[u]}{psid[u]} \right) \right)^2}{\frac{psi11[u]}{psid[u]}}$$

$$\frac{sd - sdhg}{sd} * 100\%$$

$$\frac{gg - hh}{gg} * 100\%$$

→ Σχήματα

```

Plot[f1[x], {x, 0, 5}]
Plot[psi[k], {k, 0, 5.9}]
Plot[{psi[g], psi1[g], psi2[g]}, {g, 0, 5}, AxesLabel → {"u", "run"}, " " PlotStyle
→ {Red, Green, Blue}, " " PlotLabel → "πιθανότητες", PlotTheme → "Detailed"]

Plot[{psi[d], psid[d]}, {d, 0, 5}, AxesLabel → {"u", "run"}, " " PlotStyle → {Green, Pink}, " " PlotLabel
→ "πιθανότητες", PlotTheme → "Detailed"]

Plot[{(psi1[f]) / (psi[f]), (psi11[f]) / (psid[f])}, {f, 0.25, 24}, AxesLabel → {"u", "run"}, " " PlotStyle
→ {Purple, Pink}, " " PlotLabel → "k = 1", PlotTheme → "Detailed"]

Plot[{(psi2[f]) / (psi[f]), (psi22[f]) / (psid[f])}, {f, 0.25, 24}, AxesLabel → {"u", "run"}, " " PlotStyle
→ {Purple, Gray}, " " PlotLabel → "k = 2", PlotTheme → "Detailed"]

```

Παράρτημα 11° (Εφαρμογή 5.6.4)

$$P[x] := 1 - 0.0039790 * Exp[-0.014631 * x] - 0.1078392 * Exp[-0.190206 * x] - 0.8881815 * Exp[-5.514588 * x]$$

$$P[x]$$

$$tailP[x] := 1 - P[x]$$

$$p[x] := D[P[x], x]$$

$$p[x]$$

$$p1 = 1$$

$$p2 = 43.1982$$

$$p3 = 7717.23$$

$$theta = 0.02$$

$$c = 1 + theta$$

$$lamda = 1$$

$$Pe[x] := \frac{Integrate[tailP[y], {y, 0, x}, Assumptions \to x > 0]}{p1}$$

$$\text{LaplaceH1}[s] := \frac{\text{LaplaceTransform}[1 - \text{Pe}[t], t, s]}{\text{LaplaceH1}[s]}$$

$$\text{fe}[x] := \text{D}[\text{Pe}[x], x]$$

$$\text{Laplacefe}[z] := \frac{\text{LaplaceTransform}[\text{fe}[t], t, z]}{\text{Laplacefe}[z]}$$

$$\text{LaplaceTransformPsi}[z] = \frac{\text{LaplaceH1}[z]}{1 + \text{theta} - \text{Laplacefe}[z]}$$

$$\text{Phi}[o] := 1 - \frac{\text{FullSimplify}[\text{LaplaceTransformPsi}[z]] \cdot \text{Exp}[k * o] * \text{Integrate}[\text{Exp}[-k * t] * \text{tailP}[t], \{t, 0, \text{Infinity}\}]}{\text{Integrate}[\text{Exp}[-k * t] * \text{tailP}[t], \{t, 0, \text{Infinity}\}]}$$

$$\text{FirstDerivativeOfPhi}[x] := \text{FullSimplify}[\text{Derivative}[1][\text{Phi}][x]]$$

$$\text{psi}[u] := \text{InverseLaplaceTransform}[\text{LaplaceTransformPsi}[z], z, u]$$

$$\theta \acute{\epsilon} \tau \omega \text{ psi}[u] = 0.0034718e^{-4.66462u} + 0.029889913e^{-0.073536345u} + 0.945891e^{-0.00087825u}$$

$$\text{psi1}[g] := \frac{1}{\text{lamda} * \text{p1} * \text{theta}}$$

$$* \left( \text{Integrate}[\text{psii}[g - x] * \text{psii}[x], \{x, 0, g\}] + \text{Integrate}[\text{psii}[x], \{x, g, \text{Infinity}\}] - \text{p2} * \frac{\text{psii}[g]}{2 * \text{p1} * \text{theta}} \right)$$

$$\frac{\text{psi1}[g]}{\text{psi1}[0]}$$

$$\frac{\text{psii}[0]}{\text{psii}[0]}$$

$$\text{psi2}[y] := \left( \frac{2}{\text{lamda} * \text{p1} * \text{theta}} \right)$$

$$* \left( \text{Integrate}[\text{psii}[y - w] * \text{psi1}[w], \{w, 0, y\}] + \text{Integrate}[\text{psi1}[w], \{w, y, \text{Infinity}\}] - \text{psii}[y] * \text{Integrate}[\text{psi1}[w], \{w, 0, \text{Infinity}\}] \right)$$

$$\frac{\text{psi2}[y]}{\text{psi2}[u]}$$

$$\frac{\text{psii}[u]}{\text{psii}[u]}$$

$$\text{psi3}[z] := \left( \frac{3}{\text{lamda} * \text{p1} * \text{theta}} \right) * \left( \text{Integrate}[\text{psii}[z - y] * \text{psi2}[y], \{y, 0, z\}] + \text{Integrate}[\text{psi2}[y], \{y, z, \text{Infinity}\}] - \text{psii}[z] * \text{Integrate}[\text{psi2}[y], \{y, 0, \text{Infinity}\}] \right)$$

$$\frac{\text{psi3}[z]}{\text{psi3}[u]}$$

$$\frac{\text{psii}[u]}{\text{psii}[u]}$$

→ Προσεγγιστική μέθοδος

$$\text{lam} = \frac{9 * \text{lamda} * (\text{p2}^3)}{2 * \text{p3}^2}$$

$$\text{b1} = \frac{3 * \text{p2}}{\text{p3}}$$

$$\text{c2} = \frac{2 * \text{p1} * \text{p3} * \text{theta}}{3 * \text{p2}^2}$$

$$\text{Rd} = \frac{\text{c2}}{(1 + \text{c2}) * \text{b1}}$$

$$\text{RDv} = \text{b1} - \left( \frac{\text{lam}}{\text{c2}} \right)$$

$$\text{psidv}[u] := \left( \frac{1}{1 + \text{c2}} \right) * \text{Exp}[-\text{RDv} * u]$$

$$\frac{\text{psidv}[u]}{\text{psidv}[u]}$$

$$psi11[g] := \frac{1}{lamda * p1 * theta} * \left( \frac{psidv[g]}{2 * p1 * theta} + \left( \text{Integrate}[psidv[g - x] * psidv[x], \{x, 0, g\}] + \text{Integrate}[psidv[x], \{x, g, Infinity\}] - p2 \right) \right)$$

$$\frac{psi11[g]}{psi11[0]} \frac{psidv[0]}{psidv[0]}$$

$$psi22[y] := \left( \frac{2}{lamda * p1 * theta} \right) * \left( \text{Integrate}[psidv[y - w] * psi11[w], \{w, 0, y\}] + \text{Integrate}[psi11[w], \{w, y, Infinity\}] - psidv[y] * \text{Integrate}[psi11[w], \{w, 0, Infinity\}] \right)$$

$$psi22[y]$$

$$psi33[z] := \left( \frac{3}{lamda * p1 * theta} \right) * \left( \text{Integrate}[psidv[z - w] * psi22[w], \{w, 0, z\}] + \text{Integrate}[psi22[w], \{w, z, Infinity\}] - psidv[z] * \text{Integrate}[psi22[w], \{w, 0, Infinity\}] \right)$$

$$psi33[z]$$

$$u = 0$$

$$\frac{psi1[u]}{psii[u]}$$

$$\frac{psi11[u]}{psidv[u]}$$

$$\frac{psi2[u]}{psidv[u]}$$

$$\frac{psi[u]}{psidv[u]}$$

$$\frac{psi22[u]}{psidv[u]}$$

$$\frac{psi33[u]}{psidv[u]}$$

→ Για τη Τυπική Απόκλιση

$$a5 = \left( \frac{psi2[u]}{psii[u]} \right) - \left( \frac{psi1[u]}{psii[u]} \right)^2$$

$$sd = Sqrt[a5]$$

$$b3 = \left( \frac{psi22[u]}{psidv[u]} \right) - \left( \frac{psi11[u]}{psidv[u]} \right)^2$$

$$sdhg = Sqrt[b3]$$

$$\frac{\left( \frac{psi1[u]}{psii[u]} \right) - \left( \frac{psi11[u]}{psidv[u]} \right)}{\frac{psi1[u]}{psii[u]} - \frac{psi11[u]}{psidv[u]}} * 100\%$$

$$\frac{sd - sdhg}{sd} * 100\%$$

→ Για το Συντελεστή Διακύμανσης

$$gg = \frac{\left( \left( \frac{psi2[u]}{psii[u]} \right) - \left( \frac{psi1[u]}{psii[u]} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{psi1[u]}{psii[u]}}$$

$$hh = \frac{\left( \left( \frac{psi22[u]}{psidv[u]} \right) - \left( \frac{psi11[u]}{psidv[u]} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{psi11[u]}{psii[u]}}$$

$$\frac{gg - hh}{gg} * 100\%$$

→ Για το συντελεστή λοξότητας

$$gh = (\psi3[g]/\psi2[g] - \psi1[g]/\psi2[g])^3 / ((\psi2[g]/\psi2[g] - (\psi1[g]/\psi2[g])^2)^{3/2})$$

$$gha = (\psi33[g]/\psi2dv[g] - \psi11[g]/\psi2dv[g])^3 / ((\psi22[g]/\psi2dv[g] - (\psi11[g]/\psi2dv[g])^2)^{3/2})$$

$$(gh - gha)/gh * 100$$

→ Σχήματα

▮

▮

`Plot[{psi[d], psidv[d]}, {d, 0, 75}, AxesLabel → {u, run}, PlotStyle → {Green, Pink}, PlotLabel → πιθανότητες, PlotTheme → Detailed]`

`Plot[{psi1[f]/psi[f], psi11[f]/psidv[f]}, {f, 0.25, 24}, AxesLabel → {u, run}, PlotStyle → {Purple, Pink}, PlotLabel → k=1, PlotTheme → Detailed]`

`Plot[{psi2[f]/psi[f], psi22[f]/psidv[f]}, {f, 0.27, 24}, AxesLabel → {u, run}, PlotStyle → {Black, Red}, PlotLabel → k=2, PlotTheme → Detailed]`

Αντίστοιχα και οι υπόλοιπες περιπτώσεις

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

### Ελληνική βιβλιογραφία

- Αντζουλάκος Δ. Πανεπιστημιακές σημειώσεις «Γλώσσα Προγραμματισμού R», ΠΜΣ Αναλογιστικής επιστήμης και Διαχείριση κινδύνων, Παν. Πειραιώς, 2020
- Δερμιτζάκης Β. Διδακτορική Διατριβή «Μελέτη ανανεωτικών εξισώσεων με εφαρμογές στη Θεωρία Χρεοκοπίας». 2011
- Δουλγεράκης Σ. Διπλωματική Εργασία «Προσεγγίσεις Τύπου Tijms στο Συλλογικό Πρότυπο της Θεωρίας Κινδύνων», ΠΜΣ Αναλογιστικής επιστήμης και Διαχείρισης Κινδύνων 2020
- Κούτρας Μ. Εισαγωγή στη θεωρία Πιθανοτήτων και Εφαρμογές, Εκδόσεις Σταμούλη, 2012
- Μαρμαρίδης Μ. Διπλωματική Εργασία «Μελέτη των ροπών του χρόνου χρεοκοπίας στο κλασσικό πρότυπο της Θεωρίας Κινδύνων», ΠΜΣ Αναλογιστικής επιστήμης και Διαχείρισης Κινδύνων 2020
- Πολίτης Κ. Εισαγωγή στην θεωρία συλλογικού κινδύνου. Εκδόσεις Σταμούλη, 2017
- Πολίτης Κ. Πανεπιστημιακές σημειώσεις στο μάθημα «Θεωρία Κινδύνου II» του ΠΜΣ Αναλογιστικής επιστήμης και Διαχείρισης Κινδύνων, 2021
- Χατζηκωνσταντινίδης Ε., Πανεπιστημιακές σημειώσεις μαθήματος Κατανομές Απώλειας, Παν. Πειραιώς, 2020.
- Χατζηκωνσταντινίδης Ε., Πανεπιστημιακές σημειώσεις μαθήματος Θεωρία Κινδύνου I, Παν. Πειραιώς, 2021

### Ξένη Βιβλιογραφία

- Dickson D, Astin Bulletin «The Distribution of the Time to Ruin in the Classical Risk Model», 2002
- Steve Drekić , James E. Stafford , Gordon E. Willmot, «Symbolic calculation of the moments of the time of ruin», University of Waterloo, 2003
- Drekić S , Gordon E. Willmot, «On the density and moments of the time of ruin with exponential claims», University of Waterloo, 2003
- Lin, X., Willmot, G., «The moments of the time of ruin, the surplus before ruin, and the deficit at ruin». Insurance: Mathematics and Economics 2, 19–44, 2000
- David C M Dickson and Kwok Swan Wong ,«De Vylder Approximations to the Moments and Distribution of the time to Ruin>>
- De Vylder, F. «A practical solution to the problem of ultimate ruin probability». Scandinavian Actuarial Journal, 114-119., 1978
- Dickson, D.C.M. and Waters, H.R. «The distribution of the time to ruin in the classical risk model». ASTIN Bulletin 32, 299-313, 2002
- Dickson, DCM and Willmot, GE, H (2005) The density of the time to ruin in the classical Poisson risk model. ASTIN Bulletin, 35, 45—60.
- Dufresne, F., Gerber , H.U., (1988). The probability and severity of ruin for combinations of exponential claim amount distributions and their translations, Insurance :Mathematics & Economics 7,75-80
- Gerber, H., Goovaerts, MJ, Kaas, R. (1987). On the probability and severity of ruin, Astin Bulletin 17, 151-163

### Ηλεκτρονικές πηγές

- <https://www.morgan.edu/actuarial-science/prospective-students/what-is-actuarial-science> (25/3/2023)
- <https://www.oreilly.com/library/view/loss-models-from/9781118411650/OEBPS/c06-s5.htm> (25/3/2023)
- [https://en.wikipedia.org/wiki/Ruin\\_theory](https://en.wikipedia.org/wiki/Ruin_theory) (25/3/2023)
- [https://en.wikipedia.org/wiki/Panjer\\_recursion](https://en.wikipedia.org/wiki/Panjer_recursion) (25/3/2023)
- [Schmidli 1994 | PDF | Mean | Temperature \(scribd.com\)](#) (25/3/2023)