ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Η ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΤΩΝ GERBER SHIU ΓΙΑ ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΕΣ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΠΛΕΟΝΑΣΜΑΤΟΣ ΜΕ ΕΞΑΡΤΗΣΗ

Μελίνα Σταματέλου

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Αναλογιστικής Επιστήμης και Διοικητικής Κινδύνου

Πειραιάς

Σεπτέμβριος 2020

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Η ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΤΩΝ GERBER SHIU ΓΙΑ ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΕΣ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΠΛΕΟΝΑΣΜΑΤΟΣ ΜΕ ΕΞΑΡΤΗΣΗ

Μελίνα Σταματέλου

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Αναλογιστικής Επιστήμης και Διοικητικής Κινδύνου

Πειραιάς

Σεπτέμβριος 2020

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. 6/11-6-2018 συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου. Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Χατζηκωνσταντινίδης Ευστάθιος (Επιβλέπων)
- Αντζουλάκος Δημήτριος
- Μπούτσικας Μιχαήλ

Η έγκριση της Διπλωματική Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

U N I V E R S I T Y O F P I R A E U S

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

The generalized Gerber-Shiu function for discrete renewal stochastic surplus processes with dependence.

Melina Stamatelou

MSc Dissertation submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Actuarial Science and Risk Management

Piraeus, Greece
September 2020

Περίληψη

Στο πρώτο κεφάλαιο εισάγονται οι έννοιες των στοχαστικών ανελίξεων καθώς και οι ορισμοί των κύριων μεταβλητών που απασχολούν αυτή την εργασία. Γίνεται μια πρώτη εισαγωγή στο μοντέλο του Sparre Andersen, το οποίο μελετά το απόθεμα της εταιρίας, όπως επίσης και του κύριου μοντέλου που αναλύεται, το γενικευμένο μοντέλο Gerber Shiu. Από αυτή βρίσκονται και αναλύονται τα ύψη των ζημιών που συμβαίνουν οποιεσδήποτε χρονικές στιγμές και η πιθανότητα χρεοκοπίας που υπεισέρχεται αυτών. Έπειτα στο δεύτερο κεφάλαιο δημιουργούνται διαφορετικές μορφές της προεξοφλημένης συνάρτησης Gerber-Shiu βάσει των ειδικών περιπτώσεων της συνάρτησης ποινής και των ζημιών που ακολουθούν γεωμετρική κατανομή. Σημειώνεται ότι όλα τα σύνολα των μεταβλητών είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Παίρνοντας αναδρομικές σχέσεις και ρητές εκφράσεις της συνάρτησης Gerber-Shiu, καταλήγουμε σε γεννήτριες συναρτήσεις. Η αντίστοιχη μελέτη γίνεται για ύψη ζημιών που ακολουθούν μικτή γεωμετρική κατανομή και όταν αυτά είναι φραγμένα. Σε συνέχεια στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται ανάλυση της γενικευμένης συνάρτησης με βάση τους ενδιάμεσους χρόνους και τα ύψη ζημιών χρησιμοποιώντας αναδρομικές σχέσεις , εξασφαλίζοντας έτσι θετικό απόθεμα. Στο τέταρτο κεφάλαιο επεξηγούνται τα ύψη ζημιών και οι ενδιάμεσοι χρόνοι, τα οποία είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, ακολουθώντας γεωμετρική κατανομή και συνδυασμό γεωμετρικών κατανομών. Επίσης γίνεται ανάλυση των ίδιων υποθέσεων με ειδικές περιπτώσεις της συνάρτησης ποινής. Στο πέμπτο κεφάλαιο γίνεται η ίδια ανάλυση με το τέταρτο, όμως με εξάρτηση ανάμεσα στα ύψη ζημιών και στους ενδιάμεσους χρόνους. Στο προτελευταίο κεφάλαιο γίνεται η μελέτη του προηγούμενου κεφαλαίου με υστέρηση πρώτης ζημιάς και εισάγουμε μια νέα παράμετρο που να διαχωρίζει τα δύο μοντέλα. Τέλος γίνεται μια γραφική απεικόνιση όλων των παραπάνω και παρίστανται σε διαγράμματα ώστε να είναι πιο αντιληπτές οι διαφορές μεταξύ των περιπτώσεων.

Summary

The first chapter introduces the concepts of stochastic processes as well as the definitions of the main variables employed in this report. At first we introduce the Sparre Andersen model, which studies the company's stock, as well as the main model being analyzed, the generalized model Gerber Shiu. We find and analyze the heights of the damage that occurs at any time and the probability of default. In the second chapter, different forms of the discounted Gerber-Shiu function are created based on the specific cases of the penalty function and the damages following the geometric distribution. Note that all sets of variables are independent and have the iid property. Assuming retrospective relationships and explicit expressions of the Gerber-Shiu function, we end up with generating functions. The corresponding study is done for claim heights that follow a mixed geometric distribution and when they happen. The third chapter analyzes the generalized function based on the interclaim time and the heights of losses using retrospective equations, thus ensuring a positive reserve. The fourth chapter analyzes the claim heights and the interclaim time, which are independent of each other, following a geometrical and a combination of geometric distributions. In the fifth chapter the same analysis is done as in the fourth chapter, but depending on the amount of claims being caused and the interclaim time. In the final chapter, the analysis of the previous chapter is followed by the delayed dependant Sparre Andersen model and we introduce a new dependence parameter that separates the two models. Finally, a graphical representation of all of the above is presented and plotted to illustrate the differences between the cases.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Στόχος μιας ασφαλιστικής εταιρείας είναι να καλύψει τους κινδύνους των ασφαλιζομένων έναντι ενός χρηματικού ποσού, το ασφάλιστρο. Η ασφαλιστική εταιρεία εισπράττει τα ασφάλιστρα, τα οποία αποτελούν τα έσοδά της και καταβάλλει τις αποζημιώσεις οι οποίες προέρχονται από κάποιο ζημιογόνο ενδεχόμενο. Αυτά τα ενδεχόμενα είναι τα έξοδά της. Η θεωρία χρεοκοπίας εξετάζει το απόθεμα του χαρτοφυλακίου της ασφαλιστικής εταιρίας, δηλαδή τα έσοδα μείον τα έξοδα. Κανονικά θα πρέπει η διαφορά αυτή να είναι θετική ώστε να υπάρχει πλεόνασμα και η εταιρία να εμφανίζει κέρδη.

Το απόθεμα αυτό μειώνεται κάθε φορά που συμβαίνει κάποια ζημιά και σε ακραίες περιπτώσεις θα μειωθεί κάτω από το μηδέν, όπου ονομάζεται γεγονός χρεοκοπίας χαρτοφυλακίου. Ο όρος της χρεοκοπίας δεν ισοδυναμεί με την παύση λειτουργίας της εταιρείας, αλλά με μια προσωρινή αύξηση των εξόδων έναντι των εσόδων. Για την καλύτερη μελέτη λοιπόν του γεγονότος της χρεοκοπίας, μας ενδιαφέρει ο χρόνος της χρεοκοπίας, το απόθεμα ακριβώς πριν την χρεοκοπία και το έλλειμμα κατά την χρεοκοπία.

Σε αυτή την εργασία θα μελετήσουμε την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu, στην οποία περιλαμβάνονται οι παραπάνω μεταβλητές. Θα ασχοληθούμε με την διακριτή μορφή της καθώς και με την κατανομή του αποθέματος τη στιγμή της χρεοκοπίας.

Κεφάλαιο 1

Στοχαστικές ανελίξεις

Για τα μοντέλα που θέλουμε να αναλύσουμε, είναι σημαντικό να παρουσιάσουμε την έννοια των στοχαστικών ανελίξεων. Μελετούν πιθανοθεωρητικά μοντέλα που περιγράφουν φαινόμενα τα οποία εξαρτώνται χρονικά μεταξύ τους και υπόκεινται σε τυχαιότητα ενδεχομένων.

Στη δική μας ανάλυση, μας ενδιαφέρει η στιγμή της χρεοκοπίας, το απόθεμα ακριβώς πριν την χρεοκοπία, το έλλειμμα κατά τη διάρκεια της χρεοκοπίας, το απόθεμα αμέσως μετά την προτελευταία ζημιά πριν την χρεοκοπία, το ύψος των αποζημιώσεων, ο ενδιάμεσος χρόνος εμφάνισης ζημιογόνων γεγονότων, καθώς και ο αριθμός των κινδύνων κάθε χρονική στιγμή t. Ξεκινάμε την έκφραση των παραπάνω μεγεθών μέσω μιας στοχαστικής ανέλιξης $\{X(t) : t \epsilon T\}$.

Ισχύουν τα εξής:

- Τα ύψη των αποζημιώσεων θεωρούνται ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές ως προς τα μεγέθη τους.
- Ο αριθμός των ζημιών είναι μια διακριτή μεταβλητή και θεωρείται ανεξάρτητος ως προς τα ύψη των αποζημιώσεων.
- Τα ύψη των αποζημιώσεων έχουν ίδια συνεχή και μη αρνητική κατανομή πυκνότητας πιθανότητας.

Ορισμός 1

Στη θεωρία των πιθανοτήτων, μια στοχαστική διαδικασία, ή μερικές φορές μια τυχαία διαδικασία είναι μια συλλογή τυχαίων μεταβλητών, που αντιπροσωπεύουν την εξέλιξη κάποιου συστήματος με τυχαίες τιμές κατά τη πάροδο του χρόνου.

Αυτή είναι μια πιθανολογική ομόλογος σε μια ντετερμινιστική διαδικασία . Αντί να περιγράφει μια διαδικασία η οποία μπορεί να εξελιχθεί σε ένα μόνο τρόπο (όπως στην περίπτωση, για παράδειγμα , λύσεων συνηθισμένων διαφορικών εξισώσεων), σε μια στοχαστική ή τυχαία διαδικασία υπάρχει κάποια απροσδιοριστία : ακόμη και αν η αρχική κατάσταση (ή το σημείο εκκίνησης) είναι γνωστό, υπάρχουν πολλές (συχνά απείρως πολλές) κατευθύνσεις προς τις οποίες η διαδικασία μπορεί να εξελιχθεί .

Στην απλή περίπτωση του διακριτού χρόνου , σε αντίθεση με τη συνεχή φορά , μια στοχαστική διαδικασία περιλαμβάνει μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών και τις ακολουθίες των χρόνων που σχετίζονται με αυτές τις τυχαίες μεταβλητές.

Ορισμός 2

Στοχαστική ανέλιξη είναι μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\{X(t) : t \in T\}$. Το σύνολο T καλείται σύνολο δεικτών της ανέλιξης και το σύνολο τιμών I των τ.μ $X(t)$ καλείται χώρος καταστάσεων της στοχαστικής ανέλιξης.

- Αν ο χρόνος T παίρνει διακριτές τιμές, τότε είναι μια στοχαστική ανέλιξη με διακριτό χώρο καταστάσεων.
- Αν ο χρόνος T παίρνει συνεχείς τιμές, τότε είναι μια στοχαστική ανέλιξη με συνεχή χώρο καταστάσεων.
- Αν το πλήθος των I τιμών είναι αριθμήσιμο, τότε αναφερόμαστε σε μια στοχαστική ανέλιξη με διακριτές τιμές.
- Αν το πλήθος των I τιμών είναι άπειρο, τότε αναφερόμαστε σε μια στοχαστική ανέλιξη με συνεχείς τιμές.

Ορισμός 3

Απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη { $\{X(t) : t \in T\}$ ονομάζεται μια στοχαστική ανέλιξη η οποία έχει τα παρακάτω χαρακτηριστικά :

- $X(0) = 0$
- $T_t = min\{t: X(t) = i\}$, όπου Tt εκφράζει τη χρονική στιγμή εμφάνισης του ι κινδύνου.
- Οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης των ενδεχομένων συμβολίζονται με W_t και ορίζονται ως

$W_i = T_i - T_{i-1}$, $i \geq 1$ με $T_0 = 0$.

Το πλήθος των κινδύνων ενός χαρτοφυλακίου εκφράζεται από μια απαριθμήτρια στοχαστική διαδικασία και συμβολίζεται με $N(t)$ $t \geq 1$.

Ορισμός 4

Η στοχαστική ανέλιξη $\{X(t): t \in T\}$ είναι στοχαστική ανέλιξη Poisson εάν

- $X(0) = 0$
- Σε ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα h μπορεί να συμβεί το πολύ ένα γεγονός και η πιθανότητα να συμβεί είναι ανάλογη του μήκους του διαστήματος.
- Έχει ανεξάρτητες και ομογενείς προσαυξήσεις, δηλαδή

$$P(N(t+k), N(t) = k) = e^{(-\lambda h)} \frac{h\lambda^k}{k!}, k = 0,1,2,\dots,$$

Όπου λ η ένταση της κατανομής Poisson.

Ισοδύναμα μπορούμε να ορίσουμε την ανέλιξη Poisson ως μια απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη, η οποία έχει ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις.

Οι ανανεωτικές ανελίξεις αποτελούν γενίκευση της ανέλιξης Poisson.

Ορισμός 5

Μια ανανεωτική ανέλιξη $\{X(t): t \in T\}$ είναι μια απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη στην οποία οι ενδιάμεσοι χρόνοι W_t είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, που όμως δεν ακολουθούν απαραίτητα την εκθετική κατανομή.

Για τη μελέτη των ανανεωτικών ανελίξεων αναγκαία είναι η ανανεωτική συνάρτηση α(t) η οποία δίνεται από τη σχέση

$$\alpha(t) = E[X(t)]$$

και δηλώνει το αναμενόμενο αριθμό των γεγονότων στο διάστημα $[0, t]$

1.1 Κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου

Ως δεδομένα για το κλασσικό μοντέλο τα θεωρίας κινδύνου παίρνουμε τα παρακάτω

- Η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το πλήθος των κινδύνων $N(t)$ στο χρονικό διάστημα $[0, \tau]$ ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λt, όπου λ = η ένταση της ανέλιξης Poisson.
- Οι ενδιάμεσοι χρόνοι W_i, W_j είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές μεταξύ τους και η καθεμία ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο λ.

1.1.1 Το μοντέλο κινδύνου Sparre Andersen

Θεωρούμε το απόθεμα της ασφαλιστικής εταιρείας $\{U(t), t >= 0\}$ την χρονική στιγμή t, με αρχικό απόθεμα $u = 0,1,2, \dots, U_t$.

Και το οποίο ορίζεται ως

$$U(t) = u + t - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \quad , \quad t = 0,1,2, \dots$$

Όπου

- u : το αποθεματικό που υποχρεούται να διαθέτει η εταιρεία ώστε να θεωρείται φερέγγυα(σύμφωνα με το Solvency II).

$u + t$

$\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$

$\{N(t), t >= 0\}$

- : ασφάλιστρα, έσοδα της εταιρίας τα οποία εισπράττονται στο χρόνο t.
- $\sum$: έξοδα, στοχαστική ανέλιξη των συνολικών απαιτήσεων στο διάστημα $[0, t]$

και είναι μια στοχαστική διαδικασία η οποία απαριθμεί το πλήθος των απαιτήσεων της εταιρίας με $U(0) = u$.

Επίσης, ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή $\{Wi\}, i = 1,2,3, \ldots$ ως τον ενδιάμεσο χρόνο εμφάνισης ζημιών.

Οι τυχαίες μεταβλητές Wi είναι ανεξάρτητες και ισόνομες μεταξύ τους. (iid ιδιότητα των

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των W είναι $K(t)$ και η συνάρτηση κατανομής είναι

$$k(t) = K(t) - K(t-1), t >= 0.$$

Αντίστοιχα, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των Y είναι $P(y)$ και η συνάρτηση

$$p(y) = P(y) - P(y-1), y = 0,1,2, \ldots$$

Yi ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές.
τυχαίων μεταβλητών) κατανομής

Όταν το ύψος της ζημιάς είναι ανεξάρτητο από τον ενδιάμεσο χρόνο, τότε το μοντέλο $\{U(t)\}$ είναι το μοντέλο Sparre Andersen. Στην δική μας ανάλυση θα δουλέψουμε με Y, W εξαρτημένες τυχαίες μεταβλητές.

Δηλαδή, όταν το Yi εξαρτάται από τον χρόνο Wi και την ζημιά Y_{i-1}. Πάραυτα το ζευγάρι $\{Wi, Yi\}$ έχει ακόμα την ιδιότητα iid, όπως και το σύνολο $\{Y_{i-1}, W_{i-1}\}, i = 0,1,2, \ldots$
Για τον λόγο αυτό υπάρχει η έννοια της τυχαιότητας στο απόθεμα.

Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή $Y|W$ η οποία ισούται με την εμφάνιση ζημιάς δοθέντος του ενδιάμεσου χρόνου.

Η από κοινού πιθανότητα ορίζεται ως

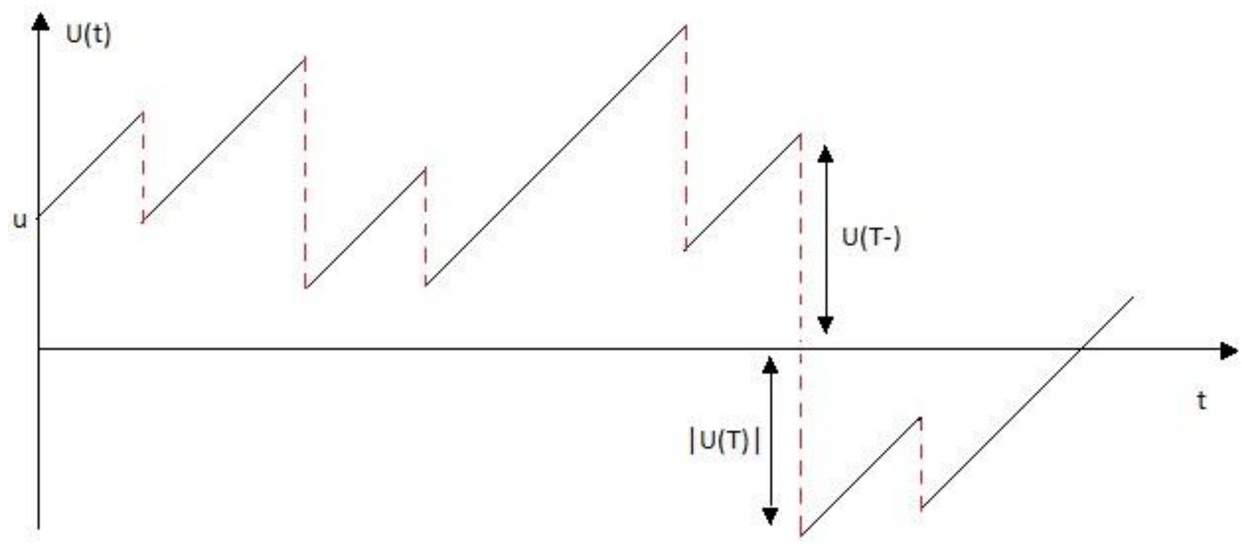
$$pt(t) = P(Y = y \mid W = t),$$

και η από κοινού συνάρτηση κατανομής ως

$$p(t, y) = pt(y) * k(t)$$

$$p(t, y)$$

Το γενικευμένο μοντέλο Sparre Andersen είναι το στο οποίο μπορούν να εκτιμηθούν τα ύψη ζημιών.



Ο χρόνος της χρεοκοπίας δίνεται από τους παρακάτω ορισμούς,

<u>Ορισμός 1.2</u>

Έστω T ο χρόνος χρεοκοπίας για $t \geq 0$ ορίζεται από την σχέση: $T = \inf\{t : U(t) < 0\}$ δηλαδή, το T παίρνει την τιμή που για πρώτη φορά το πλεόνασμα γίνεται αρνητικό.

<u>Ορισμός 1.3</u>

Ένα ακόμα σημαντικό μέτρο χρεοκοπίας είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας με αρχικό απόθεμα μεγαλύτερο ή ίσο του μηδενός, η οποία ορίζεται από τη σχέση

$$\psi(u) = P(T < \infty | U(0) = u) = P(U(T) < 0 | U(0) = u)$$

1.2.2 Η γενικευμένη συνάρτηση Gerber Shiu

Οι Gerber και Shiu δημοσίευσαν το 1998 την προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής (expected discounted penalty function), στην οποία έχουν μοντελοποιήσει μεταβλητές όπου, συναρτήσει του χρόνου χρεοκοπίας, έως τότε προσεγγίζονταν μεμονωμένα.

Ορισμός 1.7

Η συνάρτηση των Gerber-Shiu ορίζεται από την σχέση:

$$\varphi_{u}(u) = E[v^T w_{12}(U(T-1), |U(T)|) I(T < \infty) | U(0) = u], u \geq 0$$

(1.1)

Όπου

- T είναι ο χρόνος χρεοκοπίας
- $U(T-1)$ είναι η τιμή του αποθεματικού ακριβώς πριν την χρεοκοπία
- $|U(T)|$ είναι η απόλυτη τιμή του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας
- $w(x, y)$ μία μη-αρνητική δισδιάστατη συνάρτηση στο $\mathbb{R}^2$, η οποία ονομάζεται συνάρτηση ποινής
- $I(T < \infty)$ είναι μια δείκτρια συνάρτηση η οποία μας δείχνει τη βεβαιότητα εμφάνισης ενός ενδεχομένου. Στην περίπτωσή μας δηλαδή την πιθανότητα ο χρόνος της χρεοκοπίας να είναι πεπερασμένος, διότι σε αντίθετη περίπτωση δεν έχει νόημα αυτό το μοντέλο.

Στην ανάλυσή μας, στο μοντέλο αυτό μας ενδιαφέρουν οι εξής μεταβλητές :

- Η στιγμή της χρεοκοπίας
- Το απόθεμα πριν την χρεοκοπία
- Το έλλειμμα κατά την χρεοκοπία
- Το απόθεμα αμέσως μετά την προτελευταία ζημιά πριν την χρεοκοπία
- Η πιθανότητα χρεοκοπίας

Όλη μας η μελέτη θα γίνει πάνω σε διακριτές χρονικές τιμές.

Στο διακριτό μοντέλο θεωρούμε τον χρόνο T ως:

$$T = min\{t \in N^+ : U(t) < 0\}, \text{ όπου } N^+ : N - \{0\}.$$

Δηλαδή πότε το απόθεμα γίνεται αρνητικό.
Στην περίπτωση που $U(t) >= 0$ για κάθε $t > 0$, τότε $T = \infty$.
Συνεπώς, $U(T-1)$ είναι το απόθεμα ακριβώς πριν την χρεοκοπία και $|U(T)|$ το έλλειμμα.

Θεωρούμε

$$X_t = min\{U(s)\}, \ 0 \leq s \leq t$$

ως το ελάχιστο απόθεμα τη χρονική στιγμή t.

Άρα, X είναι το ελάχιστο απόθεμα πριν την χρεοκοπία

Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή R_n ως το απόθεμα ακριβώς μετά την $u-th$ ζημιά, με $R_n = u$ και συμβολίζουμε

$$R_n = u + \sum(W_i - Y_i), \text{ για } i = 1,2,3,\dots,n \text{ και } n = 1,2,3,$$

Για παράδειγμα εάν συμβεί η χρεοκοπία στην πρώτη ζημιά τότε, R_0 = u και $R_{N(T)-1}$ είναι το απόθεμα αμέσως μετά την προτελευταία ζημιά πριν την χρεοκοπία.

Χρησιμοποιώντας αυτές τις μεταβλητές στο γενικευμένο μοντέλο Gerber-Shiu σε διακριτό χρόνο έχουμε,

$$\varphi_u(u) = E[u^T w(U(T-1)\ |U(T)|, X_T, R_{N(T)-1}) I(T<\infty) | U(0) = 0] \qquad u = 0,1,2,$$

(1.2)

Από την τελευταία σχέση μπορούμε να βρούμε και το τελευταίο ύψος απαίτησης πριν την χρεοκοπία :

$$X_T + |U(T)|$$

Και τον τελευταίο ενδιάμεσο χρόνο πριν την χρεοκοπία :

$$W_{N(T)} = U(T-1) + R_{N(T)-1} + 1$$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας ορίζεται ως $\psi(u)$

$$\psi(u) = P(T<\infty | U(0) = u) = P(U(T) < 0 | U(0) = u)$$

Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς το αρχικό αποθεματικό.

Η πιθανότητα χρεοκοπίας, αν και είναι πολύ σημαντικό μέτρο κινδύνου, δεν είναι το μοναδικό. Υπάρχουν και δύο άλλες τυχαίες μεταβλητές εξίσου σημαντικές, που σχετίζονται με αυτή την πιθανότητα. Η πρώτη συμβολίζει το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας και δηλώνει το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το μηδέν τη χρονική στιγμή t που συμβαίνει η χρεοκοπία . Η δεύτερη συμβολίζει το πλεόνασμα λίγο πριν τη χρεοκοπία και εκφράζει το μέγεθος του πλεονάσματος αμέσως πριν τη χρονική στιγμή όπου πραγματοποιείται η καταβολή της ασφαλιστικής αποζημίωσης, η οποία οδηγεί σε αρνητικό πλεόνασμα.

Μπορούμε να πάρουμε ειδικές περιπτώσεις της γενικευμένης συνάρτησης Gerber-Shiu εάν γράψουμε τη συνάρτηση ποινής με τις παρακάτω μορφές:

$$w(x,y,z,r) = w_{123}(x,y,z)$$
$$w(x,y,z,r) = w_{124}(x,y,r)$$
$$w(x,y,z,r) = w_{12}(x,y)$$
$$w(x,y,z,r) = w_{14}(x,r)$$
$$w(x,y,z,r) = w_{23}(y,z)$$
$$w(x,y,z,r) = \mathbf{1}$$

Τότε έχουμε τις ειδικές περιπτώσεις της γενικευμένης συνάρτησης

$$\varphi_{u,123}\ (u) = E[(v^T) w_{123}(U(T-), |U(T)|, XT) I(T < \infty) | U(\mathbf{0}) = u]$$

$$\varphi_{u,124}(u) = E[(v^T) w_{124}(U(T-), |U(T)|, RN(T) - \mathbf{1}) I(T < \infty) | U(\mathbf{0}) = u]$$

$$\varphi_{u,12}(u) = E[(v^T) w_{12}(U(T-), |U(T)|) I(T < \infty) | U(\mathbf{0}) = u]$$

$$\varphi_{u,14}(u) = E[(v^T) w_{14}(U(T-), RN(T) - \mathbf{1}) I(T < \infty) | U(\mathbf{0}) = u]$$

$$\varphi_{u,23}\ (u) = E[(v^T) w_{23}(U(T-)\ XT) I(T < \infty) | U(\mathbf{0}) = u]$$

Για όλα ισχύει $u \geq \mathbf{0}$.

Επιπλέον ορίζουμε την συνάρτηση κατανομής δεξιάς ουράς της στιγμής χρεοκοπίας

$$G_u(u) = E[u^T I(T < \infty) | U(\mathbf{0}) = u],\ \ u \in N$$

Για $u = \mathbf{1}$ έχουμε την ολική πιθανότητα χρεοκοπίας

$$\psi(u) = G_1(u) = P\{T < \infty \mid U(\mathbf{0}) = u\}$$

Κεφάλαιο 2

Σε αυτή την εργασία συζητείται ένα μοντέλο ανανεωτικού κινδύνου διακριτού χρόνου με αυθαίρετους ενδιάμεσους χρόνους. Δείχνουμε ότι η αναμενόμενη προεξοφλητική συνάρτηση ποινής ικανοποιεί έναν αναδρομικό τύπο. Ειδικότερα, η πιθανογεννήτρια συνάρτηση τη στιγμή της χρεοκοπίας, ως συνάρτηση του αρχικού πλεονάσματος, έχει μια γεωμετρική ουρά. Όταν τα ποσά των απαιτήσεων ακολουθούν μια γεωμετρική κατανομή, μπορεί να ληφθούν συγκεκριμένες εκφράσεις για την γενικευμένη συνάρτηση Gerber-Shiu για ειδικές εκφράσεις της συνάρτησης ποινής. Εξετάζονται επίσης η σταθερή απαίτηση για τις ποσότητες και τα μικτά γεωμετρικά ποσά απαιτήσεων.

Θεωρούμε λοιπόν το μοντέλο διακριτού χρόνου Sparre Andersen

$$U(n) = u + n - \sum_{i=1}^{N(n)} X_i \quad , n = 1,2,\ldots \qquad (2.1)$$

Όπου το u είναι το αρχικό απόθεμα της εταιρίας, τα X_i είναι θετικές ακέραιες ανεξάρτητες μεταξύ τους μεταβλητές με κοινή συνάρτηση πιθανότητας $p(x) = P\{X_i = x\}, x = 1,2,\ldots$ η οποία δηλώνει ατομικά ύψη ζημιών. Έστω ότι $\bar{P}(x) = 1 - P(x)$ είναι η συνάρτηση κατανομής του X_i, με μ τον μέσο όρο της και $\hat{p}(z) = \sum_{x=1}^{\infty} z^x p(x), z = 1,2,\ldots$ τη γεννήτρια συνάρτηση πιθανότητας.

Η ανανεωτική διαδικασία $\{N(n), n \in \mathbb{N}\}$ δηλώνει τον αριθμό των ζημιών έως τη χρονική στιγμή n και ορίζεται ως $N(n) = \max\{k : W_1 + W_2 + \ldots + W_n \le n\}$, όπου οι ενδιάμεσοι χρόνοι W_i θετικές ακέραιες ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με από κοινού συνάρτηση πιθανότητας $k(t) = P(W_1 = t), t = 1,2,\ldots$, με συνάρτηση κατανομής $K(t)$, μέσο όρο $E[W_1] < \infty$ και συνάρτηση διασποράς $\hat{k}(z) = \sum_{t=1}^{\infty} z^t k(t), t \in C$.

Επιπλέον θεωρούμε ότι τα σύνολα $\{W_i, i \in \mathbb{N}\}$ είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους και $E[W_1] = (1+\theta)E[X_1] = (1+\theta)\mu \ , \theta > 0$ ώστε η μέση τιμή να βγαίνει πάντα θετικός αριθμός μεγαλύτερος του μηδενός.

Για το μοντέλο κινδύνου (1.1) ορίζουμε τον χρόνο της χρεοκοπίας ως $T = \min\{n \in \mathbb{N} : U(n) < 0\} \ , u \in N$

Τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο είναι

$$\psi(u) = P\{T < \infty | U(0) = u\} \ , \ u \in N$$

Έστω τώρα ότι $w(x,y) \ , x,y = 0,1,2,\ldots$ είναι η θετική συνάρτηση ποινής. Για τιμές μεταξύ $0 < u < 1$ θεωρούμε την συνάρτηση

$$\varphi_{u}(u) = E[u^T w(U(T-1) \ |U(T)|) I(T < \infty) | U(0) = u], \ u \in N \qquad (2.2)$$

Η ποσότητα $w(U(T-1), |U(T)|)$ μπορεί να χαρακτηριστεί ως η ποινή τη στιγμή της χρεοκοπίας για το πλεόνασμα $U(T-1)$ και το έλλειμμα $|U(T)|$. Συνεπώς η συνάρτηση (2.2) ονομάζεται αναμενόμενη ελλειμματική συνάρτηση ποινής Gerber-Shiu με προεξοφλητικό παράγοντα u.

Όταν η συνάρτηση ποινής εξαρτάται μόνο από το έλλειμμα, δηλαδή $w(x,y) = w_1(y)$, τότε η (1.2) μετατρέπεται ως εξής

$$\varphi_{r,1}(u) = E[u^T w_1(|U(T)|I(T < \infty)|U(\mathbf{0}) = u] \qquad ,u\epsilon N \qquad (2.3)$$

Επιπλέον, μπορούμε να θεωρήσουμε και μια γενίκευση του $w(x,y) = s^x w_1(y)$ (2.3) με , η οποία εκφράζει μια πιο γενική μορφή της (2.1) ως εξής

$$\varphi_{u,s}(u) = E[u^T s^{U(T-1)} w_1(|U(T)|) I(T < \infty)|U(\mathbf{0}) = u] \qquad ,u\epsilon N \qquad (2.4)$$

Τα τελευταία χρόνια έχουν γίνει αρκετές μελέτες ώστε να αναλυθεί το μοντέλο Gerber-Shiu κάτω από την επήρεια του ανανεωτικού μοντέλου χρόνου Sparre Andersen. Για τα περισσότερα αποτελέσματα, οι κύριες υποθέσεις έγιναν βάση της κατανομής των ενδιάμεσων χρόνων εμφάνισης ζημιών. Αναφορές γίνονται από τους See Li και Garido.

Όσο αφορά το διακριτό μοντέλο του χρόνου, ο Cheng (2000) έχει μελετήσει την αναμενόμενη ελλειμματική συνάρτηση ποινής και ποσότητες, οι οποίες συνδέονται με τον χρόνο της χρεοκοπίας που ακολουθεί το μοντέλο κινδύνου και είναι μια διωνυμική κατανομή. Για το διακριτό μοντέλο των Sparre Andersen δίνονται διάφορες εκφράσεις από τους Pavlova & Willmot (2004) και από τον Li (2005). Οι Pavlova & Willmot εκφράζουν την αναμενόμενη ελλειμματική συνάρτηση ποινής στο διακριτό μοντέλο ανανέωσης χρόνου με σταθερό ρίσκο, με βάση το αντίστοιχο μοντέλο κινδύνου ανανέωσης. Ο Li μελετάει την συνάρτηση Gerber Shiu με βάση το ανανεωτικό μοντέλο των Sparre Andersen με διακριτούς ενδιάμεσους χρόνους K_n.

Έστω ότι θεωρούμε μια τυχαία κατανομή για τους ενδιάμεσους χρόνους, ο Willmot (2005) και οι Landriault & Willmot (2008) αποδίδουν την ελλειμματική εξίσωση ανανέωσης , η οποία ικανοποιείται από την ελλειμματική συνάρτηση ποινής Gerber Shiu σε ένα συνεχόμενο ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου. Ο Malinovskii (1998) και οι Wang & Li (2002) έχουν μελετήσει, κάτω από τις ίδιες υποθέσεις, τον μετασχηματισμό Laplace της χρονικής πιθανότητας χρεοκοπίας.

Όταν τα ατομικά ύψη ζημιών ακολουθούν συγκεκριμένες κατανομές, μαζί με την γεωμετρική, η εκφυλισμένη κατανομή είναι μια μίξη από γεωμετρικές κατανομές από την οποία παίρνουμε συγκεκριμένα αποτελέσματα για την συνάρτηση Gerber Shiu θέτοντας την κατάλληλη συνάρτηση ποινής $w(x,y)$.

2.1 Αναδρομική σχέση για την συνάρτηση $\varphi_u(u)$.

Θεωρούμε $x \in N$ την εξής σχέση για κάθε

$$f_3(x,y,t|u) = P\{U(T-1) = x, |U(T)| = y, T = t | U(0) = u\},$$

η οποία είναι η από κοινού συνάρτηση του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία, του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία και την χρονικής στιγμής που υπεισέρχεται της χρεοκοπίας. Επιπλέον θεωρούμε

$$f_2(x,t|u) = \sum_{y=1}^{\infty} f_3(x,y,t|u)$$

την από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των $U(T-1$ T) και . Όταν ο ελλειμματικός κάθε ένα χρονικό διάστημα είναι $u \in (0,1)$ παράγοντας για $U(T-1)$ $f_1(x|u) = \sum_{t=1}^{\infty} u^t f_2(x,t|u)$. Επιπλέον ορίζουμε , τότε έχουμε ότι η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των

$$p_x(y) = \frac{p(x+y+1)}{P(x+1)}$$ είναι

y

να είναι η εξαρτημένη συνάρτηση πιθανότητας του ελλείμματος , δοθέντος το πλεόνασμα πριν την χρεοκοπία και την στιγμή που συμβαίνει. Συνεπώς έχουμε το εξής

$$f_3(x,y,t|u) = p_x(y) f_2(x,t|u) \quad x \in N, \quad y \in N \qquad (2.1.1)$$

Παρόμοια παίρνοντας υπόψη τη χρονική στιγμή όπου το πλεόνασμα γίνεται αρνητικό, έχουμε την ακόλουθη σχέση

$$\varphi_u(u) = \sum_{y=1}^{u} \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} u^t \varphi_u(u-t) f_3(x,y,t|0)$$
$$+ \sum_{y=u+1}^{\infty} \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} u^t w(x+u, y-u) f_3(x,y,t|0), \quad u \in N. \qquad (2.1.2)$$

Σε περίπτωση που $u = 0$ έχουμε $\varphi_u(0) = 0, \ y = 1, .., u$.

Από την (21.1) σύμφωνα με την $f_1(x|u)$, έχουμε τα εξής

$$\sum_{t=1}^{\infty} u^t f_3(x,y,t|0) = p_x(y) f_1(x|0) \qquad (2.1.3)$$

Αν αντικαταστήσουμε την (2.3) στην (2.2) παίρνουμε

$$\varphi_u(u) = \sum_{y=1}^{u} \sum_{x=0}^{\infty} \varphi_u(u-y) p_x(y) f_1(x|\mathbf{0}) + \sum_{y=u+1}^{\infty} \sum_{x=0}^{\infty} w(x+u, y-u) p_x(y) f_1(x|\mathbf{0}), \quad u \epsilon N \qquad (\mathbf{2.1.4})$$

$$\xi_u = \textstyle\sum_{x=0}^{\infty} f_1(x|\mathbf{0}) \quad \text{και} \quad g_1(y) = \frac{\sum_{x=0}^{\infty} p_x(y) f_1(x|0)}{\xi_u}, \quad y \epsilon N \qquad (\mathbf{2.1.5})$$

Από τους ορισμούς των $p_x(y)$ και ξ_u έχουμε ότι η $g_1(y)$ είναι συνάρτηση πιθανότητας. Συνεπώς καταλήγουμε στην εξής εξίσωση

$$\varphi_u(u) = \xi_u \sum_{y=1}^{u} \varphi_u(u-y) g_1(y) + \sum_{y=u+1}^{\infty} \sum_{x=0}^{\infty} w(x+u, y-u) p_x(y) f_1(x|\mathbf{0}), u \epsilon N \qquad (\mathbf{2.1.6})$$

$$\varphi_u(\mathbf{0}) = \textstyle\sum_{y=1}^{\infty} \sum_{x=0}^{\infty} w(x,y) p_x(y) f_1(x|\mathbf{0})$$

$w(x,y) = w_1(y)$, τότε από τις σχέσεις (2.1.2),

Θέτουμε

και

Αν η συνάρτηση ποινής περιλαμβάνει το έλλειμμα ώστε
(2.1.3) έχουμε το παρακάτω

$$\varphi_{v,1}(u) = \xi_v \sum_{y=1}^{v} \varphi_{v,1}(u-y) g_1(y) + \xi_v \sum_{y=v+1}^{\infty} w_1(y-u) g_1(y) \quad , u \epsilon N \qquad (2.1.7)$$

$$\varphi_{v,1}(0) = \xi_v \sum_{y=1}^{\infty} w_1(y) g_1(y) . \qquad (2.1.8)$$

Επιπλέον, αν $w_1(y) = 1$, τότε θεωρούμε $\overline{D}_v(u) = \varphi_{v,1}(u)$ με
$\overline{D}_v(u) = E[u^T I(T < \infty) | U(0) = u]$, η οποία ικανοποιεί την

$$\overline{D}_v(u) = \xi_v \sum_{y=1}^{v} \overline{D}_v(u-y) g_1(y) + \xi_v \overline{D}(u) \qquad u \epsilon N \qquad (2.1.9)$$

με $\bar{G}(u) = 1 - G(u) = \sum_{y=v+1}^{\infty} g_1(y)$. Όταν η μεταβλητή u γίνει 1, η συνάρτηση δεξιάς ουράς $\overline{D}_v(u)$

$$\overline{D}_v(u) = (1 - \xi_v) \sum_{n=1}^{\infty} \xi_v^n G^{*n}(u) \ , \quad u \epsilon N \qquad (2.1.10)$$

όπου $G^{*n}(u) = 1 - G^{*n}(u)$ είναι η συνάρτηση συνέλιξης των $G(u)$
Όταν $u = 0$, τότε με $n > u$ έχουμε τα εξής πορίσματα

$\overline{D}_v(u) = \xi_v$, $G^{*n}(u) = 0$.Συνεπώς η (2.1.10) μπορεί ν γραφτεί με τον ακόλουθο τρόπο

$$\overline{D}_v(u) = 1 - (1 - \xi_v) \sum_{n=0}^{v} \xi_v^n G^{*n}(u) \ , \quad u \epsilon N \qquad (2.1.11)$$

γίνεται η πιθανότητα χρεοκοπίας ψ_v. Συνεπώς η σχέση (2.1.9) μετατρέπεται με τον ακόλουθο τρόπο

2.2 Ρητή έκφραση της συνάρτησης $\varphi_v(u)$.

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε την ρητή έκφραση της συνάρτησης $\varphi_v(u)$ όταν αυτή ανήκει σε μια γεωμετρική οικογένεια κατανομών. Η συνάρτηση της γεωμετρικής κατανομής ορίζεται ως

$$\alpha(u) = (1 - \xi_v)\sum_{n=0}^{\infty} \xi_v^n g_1^{*n}(u), \quad u\epsilon N$$

όπου $g_1^{*n}(u)$ είναι η n-συνέλιξη όλων των συναρτήσεων κατανομής $g_1(u)$ α $\mathbf{0}$ $= 1 - \xi_v$
Με παρόμοιο τρόπο όπως και στην προηγούμενη παράγραφο μπορούμε να εκφράσουμε τη συνάρτηση $\alpha(u)$ ώστε
, καθώς και ( ) .

$$\alpha(u) = (1 - \xi_v)\sum_{n=0}^{u} \xi_v^n g_1^{*n}(u), \quad u\epsilon N$$

Το συμπέρασμα που μπορούμε να βγάλουμε είναι ότι για οποιαδήποτε συνάρτηση ποινής $w(x,y)$, μπορούμε να εκφράσουμε την συνάρτηση Gerber-Shiu σύμφωνα με μια γεωμετρική συνάρτηση κατανομής $\alpha(u)$.

<u>Θεώρημα</u>

$$\varphi_v(u) = \frac{1}{1-\xi_v}\sum_{y=0}^{u} H(u-y)\alpha(y), \quad u\epsilon N \qquad (2.2.1)$$

όπου $H(u) = \sum_{y=u+1}^{\infty}\sum_{x=0}^{\infty} w(x+y, y-u)p_x(y)f_1(x|0)$.
<u>Απόδειξη</u>

Η (1.6) με βάση την $H(u)$ μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\varphi_v(u) = \xi_v \sum_{y=1}^{u} \varphi_u(u-y)g_1(y) + H(u) \quad u\epsilon N \qquad (2.2.2)$$

όπου έχουμε τις γεννήτριες συναρτήσεις $\hat{\varphi}_u(z) = \sum_{u=0}^{\infty}\varphi_\tau(u)z^\tau$, $\hat{g}_1(z) = \sum_{y=1}^{\infty} g_1(y)\, z^y$, $\hat{\alpha}(z) = \sum_{y=0}^{\infty}\alpha(y)z^y$, $\widehat{H}(z) = \sum_{u=0}^{\infty} H(u)z^u$ από τις $g_1(y)$ $\varphi_v(u)$ $\alpha(y), H(z)$ αντίστοιχα. Εάν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέρη της (2.2.2) έχουμε

$$\varphi_v(z) = \frac{H(z)}{1-\xi_v g_1(u)}, \quad |R(z)| < 1. \qquad (2.2.3)$$

Συνεπώς προκύπτει ότι $\alpha(z) = \frac{1-\xi_v}{1-\xi_v g_1(z)}$ και $\varphi_v(z) = \frac{(\ )H(z)}{1-\xi_v}$.

2.3 Σταθερή κατανομή ύψους ζημιών

Σε αυτό το κομμάτι θα μελετήσουμε συγκεκριμένες κατανομές για ανεξάρτητα ύψη ζημιών X_i , $i = 1,2, \dots$ Αυτά τα ύψη ζημιών ακολουθούν κατανομές οι οποίες περιέχονται σε εκφυλισμένες γεωμετρικές και άλλες στην οικογένεια της γεωμετρικής.

2.3.1 Σταθερά ύψη απαιτήσεων

Εδώ υποθέτουμε ότι τα ποσά των απαιτήσεων αποτελούνται από συνεχή μεγέθη από δύο τυχαίες και ανεξάρτητες $p\ 2\ = 1$. Τότε μεταβλητές, με ( )

$$p_x(y) = \frac{p(x+y+1)}{P(x+1)} = \begin{cases} 0 & , x = 0 , y = 1 \\ 1 & , διαφορετικά \end{cases}$$

$$g_1(y) = 1 \, , αν\ y = 1\ \ και\ g_1(y) = 0 \, , αν\ y = 2,3, ..$$

Από την σχέση (2.5) προκύπτει ότι Από την εξίσωση (2.9) έχουμε τις παρακάτω αναδρομικές σχέσεις

$$D_v(0) = \xi_v\ \ και\ \ \ D_v(u) = \xi_v D_v(u-1)$$

Λύνοντας τις παραπάνω αναδρομικές εξισώσεις,

$$D_v(u) = \xi_v^{u+1}\ \ , \quad u \epsilon N$$

Για να καθορίσουμε το ξ_v, χρειαζόμαστε την χρονική στιγμή της χρεοκοπίας καθώς και το ύψος της πρώτης απαίτησης. Για $u\epsilon N$,

$$\overline{D}_v(u) = E[u^{W_1}\overline{D}_v(u+W_1-2)] = \sum_{t=1}^{\infty} u^t k(t)\overline{D}_v(u+t-2) = \sum_{t=1}^{\infty} u^t k(t)\xi_v^{u+t-1}$$
$$= \frac{\overline{D}_v(u)}{\xi_v^2}\hat{k}(u\xi_v) \qquad (2.3.1)$$

Η παραπάνω εξίσωση δηλώνει ότι ξ_v είναι η λύση της ακόλουθης εξίσωσης

$$\xi_v^2 = \hat{k}(u\xi_v) \qquad (2.3.2)$$

Πιο συγκεκριμένα,

$$\psi(u) = \lim_{u\to 1} E[u^T I(T<\infty)|U(0)=u] = \lim_{u\to 1}\xi_v^{u+1} = \xi_1^{u+1}\ , \quad u\epsilon N$$

όπου η λύση της εξίσωσης $\xi_1^2 = \hat{k}(\xi_1)$ είναι η $\xi_1 = \psi(0)$.
Ορίζουμε $M(u) = E[u^T I(T<\infty)|U(0)=u]$. Τότε

$$M(u) = \frac{\partial\overline{D}_v(u)}{\partial v} = (u+1)\xi_1^u\frac{d\xi_v}{dv} = (u+1)\xi_1^u M(0) \qquad (2.3.3)$$

Εάν θέσουμε στην (4.2) $v = 1$ τότε μπορούμε να καθορίσουμε την $M(0)$ με τον ακόλουθο τρόπο,

$$2\xi_1 M(0) = \hat{k}'(\xi_1)[\xi_1 + M(0)] \Rightarrow M(0) = \frac{\xi_1\widehat{k'}(\xi_1)}{2\xi_1 - \hat{k}'(\xi_1)} \qquad (2.3.4)$$

Αντικαθιστώντας τις δύο παραπάνω σχέσεις συμπεραίνουμε

$$M(u) = (u+1)\xi_1^{u+1}\frac{\hat{k}'(\xi_1)}{2\xi_1 - \hat{k}(\xi_1)} = \frac{(u+1)\hat{k}'(\xi_1)}{2\xi_1 - \hat{k}(\xi_1)}\psi(u)$$

Συνεπώς για κάθε $u\epsilon N$

$$E[T|T<\infty, U(0)=u] = \frac{E[u^T I(T<\infty)|U(0)=u]}{E[I(T<\infty)|U(0)=u]} = \frac{(u+1)\hat{k}'(\xi_1)}{2\xi_1 - \hat{k}(\xi_1)}$$

$$p(x) = (1-q)q^{x-1}\ , x\epsilon\aleph\ , \qquad 0 < q < 1$$

$$p_x(y) = (1-q)q^{y-1} = p(y)\ ,\ \ y\epsilon N$$

Τότε $g_1(y) = \sum_{x=0}^{\infty} p_x(y) f_1(x|0) / \xi_v = p(y)\ ,\ \ y\epsilon\aleph\ ,\ \ \mu\varepsilon\ \xi_v = \sum_{x=0}^{\infty} f_1(x|0)$

Η εξίσωση (1.9) μας αποδεικνύει ότι $\overline{D}_u(u) = E[u^T I(T < \infty)|U(0) = u]$. Εάν θέσουμε ότι $\overline{D}_u(u) = \xi_v$

2.3.2 Απαιτήσεις που ακολουθούν γεωμετρική κατανομή

Σε αυτή την παράγραφο θεωρούμε ότι τα ύψη των απαιτήσεων ακολουθούν γεωμετρική κατανομή με τα εξής χαρακτηριστικά

, έχουμε την κάτωθι σχέση

$$\overline{D}_u(u) = \xi_v \sum_{y=1}^{u} \overline{D}_v(u-y)p(y) + \xi_v \bar{P}(u) = \xi_v \sum_{y=1}^{u} \overline{D}_v(u-y)(1-q)q^{y-1} + \xi_v q^u \qquad (2.3.5)$$

Η λύση της παραπάνω σχέσης είναι

$$D_u(u) = \xi_v[q + \xi_v(1-q)]^u\ ,\ \ u\epsilon N \qquad (2.3.6)$$

Στην υπόλοιπη ροή της παραγράφου ας θεωρήσουμε για συντομία ότι η συνάρτηση Gerber-Shiu συμβολίζεται ως $\varphi_{v,s}(u)$. Για μια γεωμετρική συνάρτηση πιθανότητας $p(x)$, έχουμε

$\alpha(u) = (\mathbf{1} - \xi_v) \sum_{n=0}^{u} \xi_v^n g_1^{*n}(u) = (\mathbf{1} - \xi_v) \sum_{n=0}^{u} \xi_v^n p^{*n}(u)$, $u \epsilon \aleph$ και

$$H(u) = \sum_{y=u+1}^{\infty} \sum_{x=0}^{\infty} s^{x+u} w_1(y-u) p(y) f_1(x|\mathbf{0}) = s^x \sum_{y=1}^{\infty} w_1(y) p(y+u) \sum_{x=0}^{\infty} s^x f_1(x|\mathbf{0})$$
$$= s^u q^u \eta_u(s) \qquad (2.3.7)$$

με $\eta_u(s) = \sum_{y=1}^{\infty} w_1(y) p(y) \sum_{x=0}^{\infty} s^x f_1(x|\mathbf{0}) = E[w_1 X_1] \sum_{x=0}^{\infty} s^x f_1(x|\mathbf{0})$.

Άρα η γεννήτρια συνάρτηση της $H(u)$ είναι

$$\widehat{H}(z) = \sum_{u=0}^{\infty} H(u) z^u = \eta_u(s) \sum_{u=0}^{\infty} (qs)^u z^u = \frac{\eta_u(s)}{\mathbf{1} - qsz}$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στην (3.3) με $\hat{g}_1(z) = \hat{p}(z)$, μας δίνει

$$\hat{\varphi}_{v,s}(z) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} - \xi_v \frac{(\mathbf{1}-q)z}{\mathbf{1}-qz}} \frac{\eta_u(s)}{\mathbf{1} - qsz} = \eta_u(s) \frac{\mathbf{1} - qz}{\left[\mathbf{1} - \left(q + \xi_v(\mathbf{1}-q)\right)z\right](\mathbf{1} - qsz)}$$
$$= \eta_u(s) \left[\frac{a}{\mathbf{1} - qsz} + \frac{\mathbf{1} - a}{\mathbf{1} - \left(q + \xi_v(\mathbf{1}-q)\right)z}\right]$$

, όπου $a = \frac{q(1-s)}{q(1-s)+\xi_v(1-q)}$.

Επιπλέον αντιστρέφοντας την $\hat{\varphi}_{v,s}(z)$ παίρνουμε την παρακάτω σχέση

$$\varphi_{v,s}(z) = \eta_u(s)\{a(qs)^u + (\mathbf{1} - a)[q + \xi_v(\mathbf{1} - q)]^u\} , \quad u \epsilon N \qquad (2.3.8)$$

Τώρα θα καθορίσουμε την $\eta_u(s)$ και την ξ_v στην (2.3.8). Παίρνοντας υπόψη τον χρόνο και το ύψος της πρώτης απαίτησης, έχουμε ότι για $u \epsilon \aleph$ ισχύει

$$\varphi_{v,s}(u) = E\left[u^{W_1} \varphi_{v,s}(u + W_1 - X_1)\right] = \sum_{x=u+t+1}^{\infty} u^t k(t) E[\varphi_{v,s}(u + t - X_1)]$$
$$= \sum_{t=1}^{\infty} u^t k(t) \left[\sum_{x=1}^{u+t} \varphi_{v,s}(u + t - x) p(x) + s^{u+t-1} \sum_{x=u+t+1}^{\infty} w_1(x - u - t) p(x)\right] \qquad (2.3.9)$$

Θέτουμε $\tau_{v,s}(t) = \sum_{x=1}^{t} \varphi_{v,s}(t - x) p(x)$, $t \epsilon \aleph$. Η γεννήτρια συνάρτηση της $\tau_{v,s}(t)$ μας αποδεικνύει το παρακάτω

$$\tau_{v,s}(t) = \hat{\varphi}_{v,s}(z)\hat{p}(z) = \eta_u(s)\frac{(\mathbf{1}-q)z}{[\mathbf{1}-\big(q+\xi_v(\mathbf{1}-q)\big)z](\mathbf{1}-qsz)}$$
$$= \eta_u(s)\frac{\mathbf{1}-a}{\xi_v}\left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}-\big(q+\xi_v(\mathbf{1}-q)\big)z}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}-qsz}\right]$$

Και συνεπώς

$$\tau_{v,s}(t) = \eta_u(s)\frac{\mathbf{1}-a}{\xi_v}\left[\big(q+\xi_v(\mathbf{1}-q)\big)' - (qs)'\right] \qquad , t\in\aleph \qquad (\mathbf{2.3.10})$$

Αντικαθιστώντας την τελευταία σχέση στην (1.3.9) έχουμε

$$\varphi_{v,s}(u) = \sum_{t=1}^{\infty} u^t k(t)\left[\tau_{v,s}(t+u) + q^{u+t}s^{u+t-1}\sum_{x=1}^{\infty} w_1(x)p(x)\right]$$
$$= \frac{\eta_u(s)\frac{\mathbf{1}-a}{\xi_v}\left\{[q+\xi_v(\mathbf{1}-q)]^u\hat{k}(u[q+\xi_v(\mathbf{1}-q)]) - (qs)^u\hat{k}(qsu)\right\} + (qs)^u E[w_1(X_1)]\hat{k}(qsu)}{s}$$

(2.3.11)

Συγκρίνοντας τις (2.3.11) και (2.3.8) συμπεραίνουμε το εξής ξ_v και η_u s για τις ( )

$$\xi_v = k\{u[q+\xi_v(\mathbf{1}-q)]\}, \qquad (2.3.12)$$

$$\eta_u(s) = \frac{\xi_v E[w_1(X_1)]k(uqs)s^{-1}}{a\xi_v + (\mathbf{1}-a)k(uqs)}, \qquad (2.3.13)$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω μπορούμε να αποδείξουμε ότι η σχέση (1.3.12) έχει μοναδική λύση μεταξύ

0 και 1. Θέτοντας $h(x) = \hat{k}\{u[q+\xi_v(\mathbf{1}-q)]\} - x$, προκύπτει ότι $h(\mathbf{0}) = \hat{k}(uq) > \mathbf{0}$, $h(\mathbf{1}) = \hat{k}(u) - \mathbf{1} < \mathbf{0}$ και η συνάρτηση $h(x)$ είναι κυρτή. Άρα από θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας $h(x) = \mathbf{0}$, η οποία είναι και η μοναδική λύση στο διάστημα $(\mathbf{0},\mathbf{1})$.

Τώρα, από τις σχέσεις (2.3.8) και (2.3.13) απορρέει ότι

$$\varphi_{v,s}(u) = \frac{\xi_v E[w_1(X_1)]\hat{k}(uqs)s^{-1}}{\alpha\xi_v + (1-\alpha)\hat{k}(uqs)}\{\alpha(qs)^u + (1-\alpha)[q+\xi_v(1-q)]^u\}$$
$$= \frac{\xi_v E[w_1(X_1)]\hat{k}(uqs)s^{-1}}{\alpha\xi_v + (1-\alpha)\hat{k}(uqs)}[\xi_v(qs)^u + (1-\alpha)\bar{D}_v(u)] \quad u\epsilon N$$

Πιο συγκεκριμένα, με $v = 1$,$w_1(y) = 1$, τότε,

$$\varphi_{1,s}(u) = E\left[s^{U(T-1)}I(T<\infty)\middle|U(0)=u\right]$$
$$= \frac{\hat{k}(qs)s^{-1}}{\alpha\psi(0) + (1-\alpha)\hat{k}(qs)}[\psi(0)\alpha(qs)^u + (1-\alpha)\psi(u)] \quad u\epsilon N$$

όπου $\psi(u) = \bar{D}_1(u) = \xi_1[q+\xi_1(1-q)]^u$, $\xi_1 = \psi(0)$ είναι η λύσεις της εξίσωσης $\xi_1 = \hat{k}\{q + \xi_1(1-q)\}$. Επιπλέον, η μερική παράγωγος $\frac{d\alpha}{ds} = -q/[\xi_1(1-q)]$. Συνεπώς προκύπτει

$$E[T(U-1)I(T<\infty)|U(0)=u] = \lim_{s\to 1}\frac{\partial\varphi_{1,s}(u)}{\partial s} = \frac{q}{1-q}\left[\frac{\psi(u)}{\hat{k}(q)} - q^u\right] - \psi(u) \ , u\epsilon N. \quad (2.3.14$$

Για να υπολογίσουμε την $M(u) = E[TI(T<\infty)|U(0)=u]$, θέτουμε στην (1.3.6) $v = 1$ και έχουμε

$$M(u) = M(0)[q+\xi_1(1-q)(1+u)][q+\xi_1(1-q)]^{u-1}. \qquad (2.3.15)$$

Αντίστοιχα εάν θέσουμε $v = 1$ στην (1.3.12) παίρνουμε

$$M(0) = \hat{k}'\{q+\xi_1(1-q)\}[q+\xi_1(1-q)+(1-q)M(0)]$$
η οποία μετά από πράξεις καταλήγει ως εξής

)

$$M(0) = \frac{[q+\xi_1(1-q)]k'\{q+\xi_1(1-q)\}}{1-(1-q)k'\{q+\xi_1(1-q)\}}$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στην (1.3.15), μας δίνει
$$M(u) = \frac{\hat{k}'\{q+\xi_1(1-q)\}\left[\frac{q}{\xi_1} + (1-q)(1+u)\right]}{1-(1-q)\hat{k}'\{q+\xi_1(1-q)\}}\psi(u)$$

Άρα προφανώς συμπεραίνουμε $E[TI(T<\infty)|U(0)=u] = \frac{\hat{k}'\{q+\xi_1(1-q)\}\left[\frac{q}{\xi_1}+(1-q)(1+u)\right]}{1-(1-q)\hat{k}'\{q+\xi_1(1-q)\}}$

2.3.3 Απαιτήσεις που ακολουθούν μικτή γεωμετρική κατανομή

Θεωρούμε ότι τα ύψη των ζημιών ακολουθούν μικτή γεωμετρική κατανομή με συντελεστές $0 < \alpha_j < 1$, $\sum_{j=1}^{n}\alpha_j = 1$,

$$p(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j p_j(x) \ , \ x \epsilon N \qquad (2.3.16)$$

με $p_j(x) = (1 - q_j) q_j^{x-1}, \ j = 1,2,..,n$ ακολουθεί γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $0 < q_j < 1$. Επίσης θέτουμε την τυχαία μεταβλητή Y_j η οποία ακολουθεί την κατανομή $p_j(x)$. Η συνάρτηση επιβίωσης για αυτή την κατανομή είναι $\bar{P}(x) = \sum_{i=x+1}^{\infty} p(i) = \sum_{j=1}^{n} a_j q_j^x$, και η πιθανογεννήτρια συνάρτηση είναι $\hat{p}(z) = \sum_{x=1}^{\infty} p(x) z^x = \sum_{j=1}^{n} a_j \hat{p}_j(z)$, όπου $\hat{p}_j(z) = \sum_{x=1}^{\infty} p_j(x) z^x = (1 - q_j)z/(1 - q_j z)$. Θα δείξουμε ότι η $p(x)$ ικανοποιεί την παρακάτω ιδιότητα

$$p(x+y) = \sum_{j=1}^{n} \zeta_j(x) p_j(y), \ \ x \epsilon N \ , y \epsilon N$$

όπου $\zeta_j(x) = a_j q_j^x \ , j = 1,2,..,n$.

Έχουμε ότι $\sum_{j=1}^{n} \zeta_j(x) = \bar{P}(y)$. Άρα για κάθε $x \epsilon \aleph \ , y \epsilon \aleph$ ισχύει

$$p_x(y) = \frac{\sum_{j=1}^{n} \zeta_j(x+1) p_j(y)}{\bar{P}(x+1)} = \sum_{j=1}^{n} \zeta_j^*(x+1) p_j(y)$$

$$p(y+u) = \sum_{j=1}^{n} \zeta_j^*(x+1) p_j(y+u), \ \ u > 1 \qquad (2.3.17)$$

με $\zeta_j^*(x+1) = \zeta_j(x+1)/\bar{P}(x+1)$. Προφανώς η $p_x(y)$ είναι μια μίξη των $p_1(y), \dots, p_n(y)$ με βάρη $\zeta_j^*(x+1) \ , \xi = 1,2,..,n$ αντίστοιχα.

<u>Γενικευμένη συνάρτηση Lundberg</u>

$$k\binom{v}{z} p(z) = 1 \qquad (2.3.18)$$

Η παραπάνω σχέση αποδεικνύεται ότι έχει ίδιες ρίζες με την εξίσωση

$$\sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=1}^{\infty} z^y f_1(x|0) p_x(y) = 1 \qquad (2.3.19)$$

Για να πάρουμε μια πιο απλή έκφραση της $\varphi_{v,s}(u)$, θα αντικαταστήσουμε στην σχέση (1.2.6) την $\varphi_v(u)$ με $\varphi_{v,s}(u)$ και $w(x,y) = s^x w_1(y)$.

$$\varphi_{v,s}(u) = \xi_v \sum_{y=1}^{u} \varphi_{v,s}(u-y) g_1(y) + \xi_v \sum_{y=u+1}^{\infty} s^u w_1(y-u) \sum_{x=0}^{\infty} s^x p_x(y) \frac{f_1(x|0)}{\xi_v} \ , \ u \epsilon N \qquad (2.3.20)$$

Θέτουμε $g_s(y) = \sum_{x=0}^{\infty} s^x p_x(y) \frac{f_1(x|0)}{\xi_v}$ και η σχέση (2.3.20) γίνεται

$$\varphi_{v,s}(u) = \xi_v \sum_{y=1}^{u} \varphi_{v,s}(u-y) g_1(y) + \xi_v \sum_{y=u+1}^{\infty} s^u w_1(y-u)\, g_s(y+u) \qquad (2.3.21)$$

Με βάση την (1.3.17) καθώς και τον ορισμό της $g_s(y)$ τότε παίρνουμε

$$g_s(y+u) = \sum_{x=0}^{\infty} s^x p_x(y+u) \frac{f_1(x|0)}{\xi_v} = \sum_{j=1}^{n} \delta_j(s) \rho_j(y+u), \qquad (2.3.22)$$

όπου $\delta_j(s) = \sum_{x=0}^{\infty} s^x \zeta_j^*(x+1) \frac{f_1(x|0)}{\xi_v}$.

Μια ειδική περίπτωση της (2.3.22) είναι η ακόλουθη

$$g_1(y) = \sum_{x=0}^{\infty} s^x p_x(y) \frac{f_1(x|0)}{\xi_v} = \sum_{j=1}^{n} \delta_j(1) \rho_j(y), \qquad (2.3.23)$$

η οποία αποτελείται από γεωμετρικές κατανομές $p_x(y)$ με βάρη $\delta_j(1), j = 1,2,\ldots,n$. Άρα μπορούμε να εκφράσουμε την (1.3.21) με βάση τις (1.3.22) και (1.3.23) με τον ακόλουθο τρόπο

$$\varphi_{v,s}(u) = \xi_v \sum_{j=1}^{n} \delta_j(1) \sum_{y=1}^{u} \varphi_{v,s}(u-y) \rho_j(y) + \xi_v \sum_{j=1}^{n} \delta_j(s) \sum_{y=u+1}^{\infty} s^u w_1(y)\, \rho_j(y+u) \qquad (2.3.24)$$

Συνεπώς η γεννήτρια συνάρτηση της $\varphi_{v,s}(u)$ ισούται με

$$\varphi_{v,s}(u) = \xi_v \sum_{j=1}^{n} \delta_j(1)\, \varphi_{v,s}(z) \rho_j(z) + \xi_v \sum_{j=1}^{n} \delta_j(s) E[w_1(Y_j)] \frac{1}{1 - q_j s z} \qquad (2.3.25)$$

Συμπερασματικά,

$$\varphi_{v,s}(u) = \frac{\xi_v \sum_{j=1}^{n} \delta_j(s) E[w_1(Y_j)] \frac{1}{1 - q_j s z}}{1 - \xi_v \sum_{j=1}^{n} \delta_j(1) \rho_j(z)} \qquad (2.3.26)$$

Στην εργασία αυτή θα θεωρήσουμε το ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου Sparre-Andersen με τους ενδιάμεσους χρόνους εμφάνισης των απαιτήσεων να ακολουθούν μια διακριτή κατανομή $K_m, m \in \aleph$, η οποία είναι ένας λόγος από δύο πολυωνυμικές κατανομές. Το κλασικό μοντέλο διωνυμικής κατανομής είναι μια ειδική περίπτωση αυτής, με $m = 1$. Μπορούμε να αντλήσουμε μια αναδρομική σχέση από την συνάρτηση ποινής (Gerber-Shiu), η οποία μας βοηθάει να αναλύσουμε πολλές ποσότητες, όπως τη χρονική στιγμή της χρεοκοπίας, το απόθεμα/έλλειμμα κατά αυτή τη χρονική στιγμή και το ύψος της απαίτησης που έχει ως αποτέλεσμα τη χρεοκοπία.

Το μοντέλο που θα μελετήσουμε εισήχθη αρχικά από τον Gerber και μεταγενέστερα από τους Yuen, Guo και Cossette. Το μοντέλο κινδύνου ακολουθεί μια σύνθετη διωνυμική κατανομή, ή αλλιώς μια διακριτή κατανομή του κλασσικού σύνθετου μοντέλου κινδύνου Poisson. Θα αναλύσουμε σε βάθος αυτό το σύνθετο διωνυμικό μοντέλο κινδύνου σε διακριτό χρόνο που συναντάμε στο μοντέλο SparreAndersen. Μπορούμε να βρούμε μια αναδρομική σχέση για την συνάρτηση Gerber-Shiu χρησιμοποιώντας γεννήτριες συναρτήσεις και όχι μετασχηματισμό Laplace, ο οποίος χρησιμοποιείται πιο συχνά για αυτό το μοντέλο, επειδή θεωρείται πιο εύχρηστος.

2.4 Γενικευμένη εξίσωση Lundberg

$U_k = U(\tau_k)$ είναι το απόθεμα αμέσως μετά την k-ζημιά. Για $\tau_0 = \mathbf{0}$ έχουμε $U_0 = u,\ \ k = \mathbf{0{,}1{,}}2,$ k

$$U_k = U(\tau_k) = u + \tau_k - \sum_{j=1}^{k} X_j = u + \sum_{j=1}^{k} [W_j - X_j]$$

Ας υποθέσουμε ότι $\tau_k = \sum_{j=1}^{k} W_j$ είναι ο χρόνος στον οποίο συμβαίνει η -ζημιά και

Ψάχνουμε μια τιμή $c\epsilon C$ ώστε η στοχαστική διαδικασία

$$[u^{\tau_k} s^{-U}\,; k\epsilon N] \qquad (2.4.1)$$

να είναι martingale. Η συνθήκη martingale είναι η παρακάτω

$$E[v^{W_1} s^{X_1 - W_1}] = E\,[(\frac{v}{s})^{W_1} s^{X_1}] = E\,[(\frac{v}{s})^{W_1}]\,E[s^{X_1}] = \mathbf{1}$$

η οποία σχέση είναι ισοδύναμη με

$$k\,(\frac{v}{s})\,p(s) = \mathbf{1} \qquad (2.4.2)$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι μια γενικευμένη εκδοχή της εξίσωσης Lundberg.

Θεωρούμε ότι ο ενδιάμεσος χρόνος εμφάνισης ζημιών ακολουθεί διακριτή κατανομή K_m με συνάρτηση πιθανότητας $k(x)$ $x \in \aleph$, μπορεί να εκφραστεί ως

$$k(s) = \frac{s[\prod_{i=1}^{m}(\mathbf{1} - q_i) + \sum_{j=1}^{m-1}\beta_j(s - \mathbf{1})^j}{\prod_{i=1}^{m}(\mathbf{1} - sq_i)} , \qquad (\mathbf{2.4.3})$$

όπου $\mathbf{0} < q_i < \mathbf{1}$, $i = \mathbf{1,2}, ..$ $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_m$ k και οι συνάρτηση πιθανότητας. Η μέση τιμή ισούται με την πρώτη παράγωγο της $k(s)$ $s = \mathbf{1}$ συντελεστές από την σχέση είναι τέτοιες ώστε η να είναι μια

με και δίνεται

$$E(W) = \widehat{k}\,(\mathbf{1}) = \mathbf{1} + \sum_{i=1}^{m} \frac{q_i}{\mathbf{1} - q_i} + \frac{\beta_1}{\prod_{i=1}^{m}(\mathbf{1} - q_i)} \qquad (\mathbf{2.4.4})$$

$$E\left[W^{(2)}\right] = \widehat{k^{\frown}}\,(\mathbf{1}) = \frac{2\beta_2 + \beta_1 \sum_{i=1}^{m} \frac{q_i}{\mathbf{1} - q_i}}{\prod_{i=1}^{m}(\mathbf{1} - q_i)} + E[W] \sum_{i=1}^{m} \frac{q_i}{\mathbf{1} - q_i} + \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{q_i}{\mathbf{1} - q_i}\right)^2 \qquad (\mathbf{2.4.5})$$

με $x^{(2)} = x(x - \mathbf{1})$ η δεύτερη παράγωγος του x.

Εδώ παρατηρούμε και ειδικές περιπτώσεις αυτών των κατανομών όπως η μετατοπισμένη γεωμετρική, η αρνητική διωνυμική, μετατοπισμένη αρνητική διωνυμική και συνδυασμό αυτών ως ακολούθως

- Εάν $\hat{k}(s) = \frac{s(1-q)}{1-sq}$, $\mathbf{0} < q < \mathbf{1}$, τότε η $k(x) = (\mathbf{1} - q_1)q_1^{x-1}$, $x = \mathbf{1,2}$, είναι μια μετατοπισμένη γεωμετρική κατανομή.
- Εάν $\hat{k}(s) = s\prod_{i=1}^{m}(\mathbf{1} - q_i) / \prod_{i=1}^{m}(\mathbf{1} - sq_i)$ τότε η k είναι μια μετατοπισμένη κατανομή που προέρχεται από m γεωμετρικές κατανομές $k_i(x) = (\mathbf{1} - q_1)q_1^x$, $x = \mathbf{0,1}, ..$
- Εάν $\hat{k}(s) = \prod_{i=1}^{m} s(\mathbf{1} - q_i) / \prod_{i=1}^{m}(\mathbf{1} - sq_i)$ τότε $k(x) = k_1 * k_2 * \dots * k_m(x)$ με η $k(x) = \mathbf{1} - q_1)q_1^{x-1}$, $x = \mathbf{1,2}$,
- Εάν $k(x) = [(\mathbf{1} - q)^m/(\mathbf{1} - (\mathbf{1} - q)^m)]\binom{m + x - \mathbf{1}}{x}q^x$, $\mathbf{0} < q < \mathbf{1}$, $x = \mathbf{1,2}, ..$ όπου η k είναι μια αρνητική διωνυμική κατανομή με (

$$\hat{k}(s) = \frac{(\mathbf{1} - q)^m}{\mathbf{1} - (\mathbf{1} - q)^m} \frac{\mathbf{1} - (\mathbf{1} - qs)^m}{(\mathbf{1} - qs)^m} = \frac{s[(\mathbf{1} - q)^m + \sum_{j=1}^{m}\beta_j(s - \mathbf{1})^j}{(\mathbf{1} - sq)^m}$$

όπου $\beta_j = [(\mathbf{1} - q)^m/(\mathbf{1} - (\mathbf{1} - q)^m)\sum_{j=1}^{m-1}(-q)^{\,k+1}\binom{m}{k + \mathbf{1}}\binom{k}{j}$, $j = \mathbf{1,2}, .., m$

Εάν οι $q_1, q_2, \dots, q_m$ ήταν σταθερές, τότε με τη μέθοδο των μερικών κλασμάτων θα είχαμε ότι η k είναι ένας γραμμικός συνδυασμός από m γεωμετρικές κατανομές με παράμετρο q_i και η έκφρασή της θα ήταν η ακόλουθη

$$k(x) = \sum_{i=1}^{m} \theta_i (1 - q_i) q_i^{x-1} \;, \;\; x = 1,2,.. \qquad (2.4.6)$$

με $\theta_1, \theta_2, .., \theta_m$ τέτοιες ώστε $\sum_{i=1}^{m} \theta_i = 1$ και δίνονται από τη σχέση

$$\theta_i = \frac{\sum_{k=1}^{m-1} \beta_k \left({}^{1}\!/_{q_i} - 1 \right)^k + \prod_{j=1}^{m} (1 - q_j)}{(1 - q_j) [\prod_{j=1}^{m} (1 - q_j)/q_j]} \quad , \;\; i = 1,2, \dots, m. \qquad (2.4.7)$$

Θεωρούμε ότι η $k(s)$ δίνεται από τη σχέση (3). Μπορούμε να μετασχηματίσουμε τη γενικευμένη εξίσωση Lundberg στην μορφή

$$\gamma(s) = \frac{1}{k\left(\frac{v}{s}\right)} = \frac{\prod_{i=1}^{m} (s - v q_i)}{v [s^{m-1} \prod_{i=1}^{m} (1 - q_i) + \sum_{j=1}^{m-1} \beta_j s^{m-1} (v - s)^j} = p(s) \,, \;\; s \epsilon C \qquad (2.4.8)$$

Οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης αναλύονται στην παρακάτω πρόταση

Πρόταση 2.4.1

Για κάθε $0 < v < 1 \,, m \epsilon \mathbb{N}$, η εξίσωση (8) έχει ακριβώς m ρίζες, έστω $p_i(v)$ $i = 1,2,..,m$, $0 < |p_i| < 1$

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε το ακέραιο σύνολο $\Gamma = \{ s: |s| = 1 \}$. Μέσα στο σύνολο αυτό ισχύει ότι $|\hat{k}\left(\frac{v}{s}\right)| < \hat{k}(|v|) < 1$, άρα $\frac{1}{|\hat{k}\left(\frac{v}{s}\right)|} > 1 = \hat{p}(1) = \hat{p}(|s|) > |\hat{p}(s)|$. Από το θεώρημα του Rouche, έχουμε ότι οι εξισώσεις $\frac{1}{\hat{k}\left(\frac{v}{s}\right)} = 0$, $\frac{1}{\hat{k}\left(\frac{v}{s}\right)} = \hat{p}(s)$ έχουν τις ίδιες ρίζες μέσα στο πεδίο ορισμού τους.

Άρα αφού η εξίσωση (8) έχει m ρίζες στο πεδίο ορισμού της, συνεπώς και η εξίσωση του Lundberg έχει m ρίζες στο πεδίο ορισμού της, έστω τις $p_1(v), p_2(v), \dots . p_m(v)$. Προφανώς το 0 δεν είναι ρίζα $0 < |\rho_i| < 1$, $i = 1,2,..,m$

αφού | |

2.4.2. Γεννήτρια συνάρτηση της φ

Λαμβάνοντας υπόψη τον χρόνο και το ύψος της πρώτης απαίτησης, παίρνουμε την εξής σχέση

$$\varphi(u) = E[v^{W_1}\varphi(U_1)] = E[v^{W_1}\varphi(u + W_1 - X_1)] = \sum_{t=1}^{\infty} v^t k(t) E[\varphi(u + t - X_1)]$$

Από τον ορισμό της γεννήτριας συνάρτησης της φ , θεωρούμε $\varphi(s) = \sum_{u=0}^{\infty} s^u \varphi(u)$ τέτοια ώστε

$$\hat{\varphi}(s)=\sum_{u=0}^{\infty}s^u\varphi(u)=\sum_{u=0}^{\infty}s^u\sum_{t=1}^{\infty}v^t k(t)E[\varphi(u+t-X_1)]=\sum_{u=0}^{\infty}s^u\sum_{y=u+1}^{\infty}v^{y-u}k(y-u)E[\varphi(y-X_1)]$$
$$=\sum_{y=1}^{\infty}v^y E[\varphi(y-X_1)]\sum_{u=0}^{y-1}\binom{s}{v}^u k(y-u)$$
$$=\sum_{y=1}^{\infty}s^y E[\varphi(y-X_1)]\sum_{t=1}^{y}\binom{v}{s}^t k(t). \qquad (\mathbf{2.4.9})$$

Εάν οι παράμετροι $q_1, q_2, \dots, q_m$ είναι σταθεροί, τότε η μορφή της $k(t)$ παίρνει αυτή της σχέσης (2.4.6), δηλαδή $k(x)=\sum_{i=1}^{m}\theta_i(1-q_i)q_i^{x-1}$. Αντικαθιστώντας την στην σχέση (2.4.9), μας δίνει

$$\hat{\varphi}(s)=\sum_{i=1}^{m}\theta_i(1-q_i)/q_i\sum_{y=1}^{\infty}s^y E[\varphi(y-X_1)]\sum_{t=1}^{y}\binom{v}{s}^t {q_i}^t$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\theta_i(1-q_i)(\frac{v}{s})/(1-q_i(\frac{v}{s}))\left\{\sum_{y=1}^{\infty}s^y E[\varphi(y-X_1)]-\sum_{y=1}^{\infty}(vq_i)^y E[\varphi(y-X_1)]\right\}$$
$$=\hat{k}\binom{v}{s}\sum_{y=1}^{\infty}s^y E[\varphi(y-X_1)]-\sum_{t=1}^{m}\frac{\theta_i(1-q_i)vb_i}{(s-vq_i)}\ , \qquad (\mathbf{2.4.10})$$

όπου $b_i=\sum_{y=1}^{\infty}(vq_i)^y E[\varphi(y-X_1)]$. Από τον ορισμό της $\varphi(u)$,

$$E[\varphi(y-X_1)]=\sum_{x=1}^{y}\varphi(y-x)p(x)+\omega(y), \qquad (\mathbf{2.4.11})$$

με $\omega(y)=\sum_{x=y+1}^{\infty}w(y-1,x-y)p(x)$. Η σχέση (2.4.10) με βάση την (2.4.11) γίνεται

$$\hat{\varphi}(s)=\frac{\hat{k}\binom{v}{s}\hat{\omega}(s)-\sum_{t=1}^{m}\frac{\theta_i(1-q_i)vb_i}{(s-vq_i)}}{1-\hat{k}\binom{v}{s}\hat{p}(s)} \qquad (\mathbf{2.4.12})$$

Πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή της τελευταίας σχέσης με $\gamma(s)$ προκύπτει

$$\hat{\varphi}(s)=\frac{\hat{\omega}(s)-\dfrac{Q_{m-1}(s)}{v[s^{m-1}\prod_{i=1}^{m}(1-q_i)+\sum_{j=1}^{m-1}\beta_j s^{m-1-j}(v-s)^j}}{[\gamma(s)-\hat{p}(s)]} \qquad \mathbf{2.4.13}$$

$Q_{m-1}(s)=\left[\sum_{t=1}^{m}\frac{\theta_i(1-q_i)vb_i}{(s-vq_i)}\right][\prod_{i=1}^{m}(s-vq_i)]$ είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση με βαθμό $m-1$. Αφού η $\hat{\varphi}(s)$ είναι πεπερασμένη συνάρτηση, θα μηδενίζεται όταν ο ( )

, όπου μικρότερο ή

ίσο του

αριθμητής γίνεται μηδέν. Συνεπώς μπορούμε να ορίσουμε την ακόλουθη γραμμική σχέση για κάθε $j = 1,2,\ldots,m$

$$Q_{m-1}(\rho_j) = \omega(\rho_j)\{v[\rho_j{}^{m-1}\prod_{i=1}^{m}(1-q_i) + \sum_{j=1}^{m-1}\beta_j\rho_j{}^{m-1-j}(v-\rho_j)^j$$

2.4.3. Ανάλυση για μηδενικό αρχικό απόθεμα

Θα βρούμε ποσότητες οι οποίες προκύπτουν για $u = 0$. Για λόγους ευκολίας θα θεωρήσουμε για την υπόλοιπη παράγραφο ότι οι μεταβλητές $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$ είναι σταθερές.

$$\varphi(0) = \lim_{s\to 0}\hat{\varphi}(s) = \lim_{s\to 0}\frac{\widehat{\omega}(s) - \dfrac{Q_{m-1}(s)}{v[s^{m-1}\prod_{i=1}^{m}(1-q_i) + \sum_{j=1}^{m-1}\beta_j s^{m-1-j}(v-s)^j}}{[\gamma(s)-\hat{p}(s)]}$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{m} c_j\widehat{\omega}(\rho_j)\,[\prod_{k=1}^{m}\frac{\rho_\kappa}{\rho_j-\rho_\kappa}]}{v^m\prod_{k=1}^{m}q_i} = \left[\prod_{i=1}^{m}\frac{\rho_i}{vq_i}\right]\sum_{j=1}^{m}\frac{c_j\widehat{\omega}(\rho_j)}{\rho_j\prod_{k=1}^{m}(\rho_j-\rho_\kappa)}. \qquad (2.4.14)$$

όπου $\omega(y) = \sum_{x=y+1}^{\infty} w(y-1, x-y)p(x)$ και $\widehat{\omega}(s) = \sum_{y=1}^{\infty} s^y\omega(y) = \sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=1}^{\infty} s^{x+1}w(x,y)p(x+y+1)$. Τότε μπορούμε να μετασχηματίσουμε την τελευταία σχέση ως

$$\varphi(0) = \left[\prod_{i=1}^{m}\frac{\rho_i}{vq_i}\right]\sum_{j=1}^{m}\frac{c_j\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=1}^{\infty}\rho_j{}^{x+1}w(x,y)p(x+y+1)}{\rho_j\prod_{k=1}^{m}(\rho_j-\rho_\kappa)}$$

$$= \left[\prod_{i=1}^{m}\frac{\rho_i}{vq_i}\right]\sum_{j=1}^{m}b_j\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=1}^{\infty}\rho_j{}^{x+1}w(x,y)p(x+y+1) \qquad (2.4.15)$$

με $b_j = \frac{c_j}{\prod_{k=1}^{m}(\rho_j - \rho_\kappa)}$. Επιπλέον έχουμε ότι

$$\varphi(\mathbf{0}) = E[v^T w(U(T-\mathbf{1}), |U(T)|) I(T < \infty) | U(\mathbf{0}) = \mathbf{0}] = \sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=1}^{\infty} w(x,y) f_2(x,y|\mathbf{0}). \qquad (2.4.16)$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (1.4.15), (1.4.16) συμπεραίνουμε ότι για κάθε $x\epsilon\aleph$, $y\epsilon\aleph$,

$$f_2(x,y|\mathbf{0}) = \left[\prod_{i=1}^{m} \frac{\rho_i}{v q_i}\right] \sum_{j=1}^{m} b_j {\rho_j}^x\, p(x+y+\mathbf{1}) \qquad (2.4.17)$$

$$f_1(x|\mathbf{0}) = \sum_{y=1}^{\infty} f_2(x,y|\mathbf{0}) = \left[\prod_{i=1}^{m} \frac{\rho_i}{v q_i}\right] \sum_{j=1}^{m} b_j {\rho_j}^x\, \bar{P}(x+\mathbf{1}) \qquad (2.4.18)$$

στην τελευταία σχέση $\bar{P}(x+\mathbf{1}) = \sum_{y=x+2}^{\infty} p(y)$ και

$$g(y) = g(y|\mathbf{0}) = \sum_{x=0}^{\infty} f_2(x,y|\mathbf{0}) = \left[\prod_{i=1}^{m} \frac{\rho_i}{v q_i}\right] \sum_{j=1}^{m} b_j \sum_{j=1}^{m} {\rho_j}^x\, p(x+y+\mathbf{1})$$
$$= \left[\prod_{i=1}^{m} \frac{\rho_i}{v q_i}\right] \sum_{j=1}^{m} b_j\, T_{\rho_j} p(y+\mathbf{1}) \qquad (2.4.19)$$

Η συνάρτηση g είναι η ελλειμματική συνάρτηση πιθανότητας. Ορίζουμε την γεννήτρια συνάρτησή της $\hat{g}(s) = \sum_{y=1}^{\infty} s^y g(s)$, και έχουμε την ακόλουθη πρόταση

<u>Πρόταση 2.4.2</u>

Η γεννήτρια συνάρτηση της g δίνεται από την σχέση

$$\hat{g}(s) = \mathbf{1} - \frac{\prod_{i=1}^{m}(s - v q_i) - v\hat{p}(s)[s^{m-1}\prod_{i=1}^{m}(\mathbf{1} - q_i) + \sum_{j=1}^{m-1}\beta_j s^{m-1-j}(v-s)^j]}{(\prod_{i=1}^{m}\frac{v q_i}{\rho_i})\prod_{i=1}^{m}(s-\rho_i)}. \qquad (2.4.20)$$

<u>Απόδειξη</u>

Ισχύει ότι $\hat{g}(s) = sT_s g(\mathbf{1})$. *Τότε*

$$\hat{g}(s) = \left[\prod_{i=1}^{m} \frac{\rho_i}{vq_i}\right] \sum_{j=1}^{m} b_j s\, T_s T_{\rho_j} p(2) = \left[\prod_{i=1}^{m} \frac{\rho_i}{vq_i}\right] \sum_{j=1}^{m} b_j s \left[\frac{sT_s p(2) - \rho_j T_{\rho_j} p(2)}{s-\rho_j}\right]$$

$$= \left[\prod_{i=1}^{m} \frac{\rho_i}{vq_i}\right] \sum_{j=1}^{m} \frac{c_j \left[\dfrac{\hat{p}(s) - \binom{s}{\rho_i} \hat{p}(\rho_i)}{s-\rho_i}\right]}{\prod_{k=1}^{m}(\rho_j - \rho_k)}$$

$$= \left[\prod_{i=1}^{m} \frac{\rho_i}{vq_i}\right] \left\{\sum_{j=1}^{m} \frac{c_j \hat{p}(\rho_j)}{(s-\rho_j)\prod_{k=1}^{m}(\rho_j - \rho_k)} - \sum_{j=1}^{m} \frac{c_j s \hat{p}(\rho_j)}{(s-\rho_j)\prod_{k=1}^{m}(\rho_j - \rho_k)}\right\}$$

$$= \left[\prod_{i=1}^{m} \frac{\rho_i}{vq_i}\right] \left\{\sum_{j=1}^{m} \frac{v\hat{p}(s)\,[\rho_j{}^{m-1}\prod_{i=1}^{m}(\mathbf{1}-q_i) + \sum_{t=1}^{m-1}\beta_j \rho_j{}^{m-1-t}(v-\rho_j)^t}{(s-\rho_j)\prod_{k=1}^{m}(\rho_j - \rho_k)} - \sum_{j=1}^{m} \frac{s\prod_{i=1}^{m}(\rho_j - vq_i)}{\rho_j(s-\rho_j)\prod_{k=1}^{m}(\rho_j - \rho_k)}\right\}. \qquad (\mathbf{2.4.21})$$

Από γνωστή σχέση

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{(\rho_j - s)^n}{\prod_{k=1}^{m}(\rho_j - \rho_k)} = \begin{cases} \mathbf{1}, & n = m - \mathbf{1} \\ \mathbf{0}, & n = \mathbf{0},\mathbf{1},..,m-2 \\ -\dfrac{\mathbf{1}}{\prod_{k=1}^{m}(\rho_j - \rho_k)}, & n = -\mathbf{1} \end{cases} \qquad (\mathbf{2.4.22})$$

προκύπτει ότι

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{v\rho_j{}^{m-1}\prod_{i=1}^{m}(\mathbf{1}-q_i)}{(s-\rho_j)\prod_{k=1}^{m}(\rho_j - \rho_k)} = -vs^{m-1}\left[\frac{\prod_{i=1}^{m}(\mathbf{1}-q_i)}{\prod_{i=1}^{m}(s-\rho_i)}\right]. \qquad (\mathbf{2.4.23})$$

Παρόμοια μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{v[\sum_{t=1}^{m-1}\beta_j \rho_j{}^{m-1-t}(v-\rho_j)^t]}{(s-\rho_j)\prod_{k=1}^{m}(\rho_j - \rho_k)} = v\sum_{t=1}^{m-1}\beta_t \sum_{j=1}^{m} \frac{[(\rho_j - s)+s]^{m-1-t}[(v-s)+(s-\rho_j)]^t]}{(s-\rho_j)\prod_{k=1}^{m}(\rho_j - \rho_k)} = \frac{v\sum_{t=1}^{m-1}\beta_t (v-s)^t s^{m-t-1}}{\prod_{i=1}^{m}(s-\rho_i)} \qquad (\mathbf{2.4.24})$$

και

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{-\prod_{i=1}^{m}(\rho_j-vq_j)}{\rho_j(s-\rho_j)\prod_{k=1}^{m}(\rho_j-\rho_k)}$$
$$=\sum_{j=1}^{m}\frac{\sigma_m}{\rho_j(s-\rho_j)\prod_{k=1}^{m}(\rho_j-\rho_k)}+\sum_{j=1}^{m}\frac{\sum_{t=1}^{m}\rho_j^{t-1}\sigma_{m-t}}{\rho_j(s-\rho_j)\prod_{k=1}^{m}(\rho_j-\rho_k)} \qquad (\mathbf{2.4.25})$$

με $\sigma_0=\mathbf{1}$ *,* $\sigma_2=\sum_{i=1}^{m}(-vq_i)$ *,* $\sigma_3=\sum v^2q_iq_j \dots \sigma_m=\prod_{i=1}^{m}(-vq_i)$*. Από τις σχέσεις (2.4.22), (2.4.25)έχουμε*

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{-\prod_{i=1}^{m}(\rho_j-vq_j)}{\rho_j(s-\rho_j)\prod_{k=1}^{m}(\rho_j-\rho_k)}=\frac{\mathbf{1}}{s}\left[\frac{\prod_{i=1}^{m}(vq_i)}{\prod_{i=1}^{m}\rho_i}-\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-vq_i)}{\prod_{i=1}^{m}(s-\rho_i)}\right] \qquad (\mathbf{2.4.26})$$

Αντικαθιστώντας την (2.4.23) στην (2.4.24) και την (2.4.26) στην (2.4.21), προκύπτει το ζητούμενο.

Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη πρόταση, συμπεραίνουμε το εξής

$$\varphi_T(\mathbf{0})=E[v^T I(T<\infty)|U(\mathbf{0})=\mathbf{0}]=\sum_{y=1}^{\infty}g(y)=\lim_{s\to 1}\hat{g}(s)$$
$$=\mathbf{1}-\left[\prod_{i=1}^{m}\frac{\rho_i}{vq_i}\right]\left[\frac{\prod_{i=1}^{m}(\mathbf{1}-vq_i)-v[\prod_{i=1}^{m}(\mathbf{1}-q_i)+\sum_{t=1}^{m-1}\beta_t(v-\mathbf{1})^t]}{\prod_{i=1}^{m}(\mathbf{1}-\rho_i)}\right]$$
$$=\mathbf{1}-\left[\mathbf{1}-\hat{k}(v)\right]\left[\prod_{i=1}^{m}\frac{\rho_i}{vq_i}\right]\left[\frac{\prod_{i=1}^{m}(\mathbf{1}-vq_i)}{\prod_{i=1}^{m}(\mathbf{1}-\rho_i)}\right]<\mathbf{1} \qquad (\mathbf{2.4.27})$$

Τελικά, έχουμε

$$
\begin{aligned}
\Psi(\mathbf{0}) = \lim_{v\to 1} E[v^T I(T<\infty)|\boldsymbol{U}(\mathbf{0})=\mathbf{0}] &= \mathbf{1}-\lim_{v\to 1}\left[\prod_{i=1}^{m}\frac{\rho_i}{v q_i}\right]\left[\frac{\prod_{i=1}^{m}(\mathbf{1}-v q_i)\left[\mathbf{1}-\hat{k}(v)\right]}{\prod_{i=1}^{m}(\mathbf{1}-\rho_i)}\right] \\
&= \mathbf{1}-\left(\prod_{i=1}^{m}\frac{\mathbf{1}-q_i}{q_i}\right)\left[\prod_{t=1}^{m-1}\frac{\rho_1(t)}{\mathbf{1}-\rho_1(t)}\right]\lim_{v\to 1}\frac{\left[\dfrac{\mathbf{1}-\hat{k}(v)}{\mathbf{1}-v}\right]}{\left[\dfrac{\mathbf{1}-\rho_m(v)}{\mathbf{1}-v}\right]} \\
&= \mathbf{1}-\left(\prod_{i=1}^{m}\frac{\mathbf{1}-q_i}{q_i}\right)\left[\prod_{t=1}^{m-1}\frac{\rho_1(t)}{\mathbf{1}-\rho_1(t)}\right]\left[\frac{\hat{k}'(\mathbf{1})}{\rho'_m(\mathbf{1})}\right] \\
&= \mathbf{1}-\left(\prod_{i=1}^{m}\frac{\mathbf{1}-q_i}{q_i}\right)\left[\prod_{t=1}^{m-1}\frac{\rho_1(t)}{\mathbf{1}-\rho_1(t)}\right][E(W)-E(X)]. \qquad (2.4.28)
\end{aligned}
$$

2.4.4. Ειδικές κατανομές χρόνων αναμονής

Θα αναλύσουμε κάποιες ειδικές περιπτώσεις κατανομών των χρόνων αναμονής (ενδιάμεσων χρόνων), δηλαδή του χρόνου που μεσολαβεί ανάμεσα από κάθε ζημιά, χρησιμοποιώντας την συνάρτηση $\hat{k}(s)$. Να σημειώσουμε ότι οι παρακάτω κατηγορίες είναι οι διακριτές περιπτώσεις για το γενικευμένο μοντέλο συνεχούς χρόνου του Erlang.

- $\hat{k}(s) = s(\mathbf{1}-q)/(\mathbf{1}-sq)$ τότε η εξίσωση (2) έχει μόνο μια ρίζα στο διάστημα (0,1), έστω την ρ. Η αναδρομική σχέση

$$\varphi(u) = \sum_{y=1}^{u} \varphi(u-y)g(y) + H(u)$$

  έχει ένα σημείο αναφοράς το οποίο δίνεται από την σχέση (15)

$$\varphi(0) = H(0) = \frac{\rho(1-q)}{q}\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=1}^{\infty}\rho_j{}^x w(x,y)p(x+y+1)$$

Πιο συγκεκριμένα, έχουμε

$$\varphi_T(0) = 1-\rho(1-v)/[vq(1-\rho)]$$

και

$$\Psi(0) = 1-\theta/[q(1+\theta)]$$

Επίσης,

$$g(y) = \frac{\rho(1-q)}{q}T_p p(y+1) = \frac{(1-q)}{q}\sum_{x=1}^{\infty}\rho^x p(x+y) \qquad (2.4.29)$$

$$H(u) = \frac{\rho(1-q)}{q}T_p \omega(y+1) = \frac{(1-q)}{q}\sum_{x=1+u}^{\infty}\rho^{x-u}\omega(u) \qquad (2.4.30)$$

$\hat{k}(s) = s\frac{[(1-q_1)(1-q_2)+\beta(s-1)]}{[(1-sq_1)(1-sq_2)]}, 0 < q_1, q_2 < 1$ τότε

$$g(y) = \frac{\rho_1\rho_2[(1-q_1)(1-q_2)-\beta]}{vq_1q_2(\rho_1-\rho_2)}T_{p_1}T_{p_2}p(y+1) + \left[\frac{\rho_1\rho_2\beta}{q_1q_2}\right]\frac{T_{p_1}p(y+1)-T_{p_2}p(y+1)}{\rho_1-\rho_2} \qquad (2.4.31)$$

$$H(u) = \frac{\rho_1\rho_2[(1-q_1)(1-q_2)-\beta]}{vq_1q_2(\rho_1-\rho_2)}T_{p_1}T_{p_2}\omega(u+1) + \left[\frac{\rho_1\rho_2\beta}{q_1q_2}\right]\frac{T_{p_1}\omega(u+1)-T_{p_2}\omega(u+1)}{\rho_1-\rho_2} \qquad (2.4.32)$$

□

Το σημείο αναφοράς της εξίσωσης είναι

$$\varphi(0) = H(0) =$$

$$= \frac{\rho_1\rho_2[(1-q_1)(1-q_2)-\beta]+\beta v\rho_2}{vq_1q_2(\rho_1-\rho_2)}\widehat{\omega}(\rho_1) + \frac{\rho_1\rho_2[(1-q_1)(1-q_2)-\beta]+\beta v\rho_1}{vq_1q_2(\rho_1-\rho_2)}\widehat{\omega}(\rho_2) \qquad (2.4.33)$$

Εάν $w(x,y) = 1$ τότε

$$\varphi_T(0) = 1 - \frac{\rho_1\rho_2[(1-v)][1-v(q_1q_2+\beta)]}{v^2q_1q_2(1-\rho_1)(1-\rho_2)} \qquad (2.4.34)$$

$$\Psi(0) = 1 - \left[\frac{(1-q_1)(1-q_2)}{q_1q_2}\right]\left[\frac{\rho_1(1)}{1-\rho_1(1)}\right][E(W)-E(X)]$$

Όταν $m = 0$ τότε έχουμε δύο σημαντικές περιπτώσεις

1. Εάν $\beta = -[\alpha q_2(1-q_1)+(1-\alpha)q_1(1-q_2)]$ $0 < \alpha, q_1, q_2 < 1$ τότε η k είναι μια μίξη μετατοπισμένων γεωμετρικών κατανομών με συνάρτηση
$k(x) = \alpha(1-q_1){q_1}^{x-1} + (1-\alpha)(1-q_2){q_2}^{x-1}, x = 1,2,\dots$

τότε 2. Εάν $q_1 = q_2 = q$ και $\beta = -(1-q)^2q/(2-q)$ k η είναι μια αρνητική κατανομή με συνάρτηση διωνυμική
$k(x) = \{(1-q)^2/[1-(1-q)^2]\}(x+1)q^x$, $x = 1,2,\dots$

Εάν $\hat{k}(s) = s\prod_{i=1}^{m}(1-q_i)/[\prod_{i=1}^{m}(1-sq_i$]

-) τότε η κατανομή της k είναι η συνέλιξη από m γεωμετρικές κατανομές, όμως μετατοπισμένες κατά μια μονάδα προς τα δεξιά. Για αυτό το λόγο έχουμε

$$g(s) = \left[\prod_{i=1}^{m}\frac{\rho_i(1-q_i)}{vq_i}\right]\sum_{j=1}^{m}\frac{\rho_j^{m-1}T_{\rho_j}p(y+1)}{\prod_{k=1}^{m}(\rho_j-\rho_k)}$$

$$= \left[\prod_{i=1}^{m}\frac{\rho_i(1-q_i)}{vq_i}\right]T_{\rho_m}\dots T_{\rho_1}p(y+1) \qquad (2.4.35)$$

Παρόμοια,

$$H(u) = v\left[\prod_{i=1}^{m}\frac{\rho_i(1-q_i)}{vq_i}\right]T_{\rho_m}\dots T_{\rho_1}\omega(u+1) \qquad (2.4.36)$$

Το σημείο αναφοράς της εξίσωσης φ είναι

$$\varphi(0) = H(0) = v\left[\prod_{i=1}^{m}\frac{\rho_i(1-q_i)}{vq_i}\right]\sum_{j=1}^{m}\frac{\rho_j^{m-1}T_{p_j}\omega(1)}{\prod_{k=1}^{m}(\rho_j-\rho_k)}$$
$$= v\left[\prod_{i=1}^{m}\frac{\rho_i(1-q_i)}{vq_i}\right]\sum_{j=1}^{m}\frac{\rho_j^{m-2}T_{p_j}\widehat{\omega}(\rho_j)}{\prod_{k=1}^{m}(\rho_j-\rho_k)} \qquad (2.4.37)$$

Από τις σχέσεις (2.4.27), (2.4.28) έχουμε ότι

$$\varphi_T(0) = 1 - \left[\prod_{i=1}^{m}\frac{\rho_i}{1-\rho_i}\right]\frac{\prod_{i=1}^{m}(1-vq_i) - v\prod_{i=1}^{m}(1-q_i)}{\prod_{i=1}^{m}(vq_i)} \qquad (2.4.38)$$

$$\Psi(0) = 1 - \left(\prod_{i=1}^{m}\frac{1-q_i}{q_i}\right)\left[\prod_{i=1}^{m-1}\frac{\rho_i(1)}{1-\rho_i(1)}\right][E(W)-E(X)] \qquad (2.4.39)$$

2.4.5 Δύο περιπτώσεις κατανομών για τα ύψη ζημιών

Η γενικευμένη συνάρτηση Gerber-Shiu $\varphi(u)$ μπορεί να εκφραστεί με βάση την σύνθετη γεωμετρική $\alpha(u)$ κατανομή $\alpha(u)$, ώστε εάν η μπορεί να θεωρηθεί ρητή, αντίστοιχα μπορεί και η $\varphi(u)$. $\alpha(u)$

Αυτό συμβαίνει όταν η έχει την μορφή μιας ρητής συνάρτησης πιθανότητας. Έτσι προκύπτει ότι η γεννήτρια συνάρτηση $\alpha(s)$ είναι ρητή όταν και μόνο όταν η $g(s)$ είναι ρητή συνάρτηση, καθώς και ότι η $g(s)$ είναι ρητή όταν και μόνο όταν η $p(s)$ είναι ρητή ή πολυωνυμική συνάρτηση (αλλιώς όταν η $p(x)$ είναι φραγμένη).

2.4.5a Κατανομές των υψών ζημιών K_n

Από γνωστό θεώρημα έχουμε ως δεδομένο ότι η πιθανογεννήτρια της g δίνεται από τον τύπο

$$\hat{g}(s) = 1 - \frac{\prod_{i=1}^{m}(s - vq_i) - v\hat{p}(s)[s^{m-1}\prod_{i=1}^{m}(1 - q_i) + \sum_{j=1}^{m-1}\beta_j s^{m-1-j}(v - s)^j]}{(\prod_{i=1}^{m}\frac{vq_i}{\rho_i})\prod_{i=1}^{m}(s - \rho_i)}$$

Θυμίζουμε την σύνθετη γεωμετρική κατανομή

$$\alpha(u) = (\frac{\xi_v}{1 - \xi_v})\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{1 + \xi_v})\, l^{*n}(u), \quad u\epsilon N \qquad (2.4.40)$$

Παίρνοντας τις γεννήτριες συναρτήσεις και από τα δύο σκέλη της (2.4.40) έχουμε

$$\hat{\alpha}(s) = \frac{1 - \varphi_T(0)}{1 - \hat{g}(s)} = \frac{\left[\left(\prod_{i=1}^{m}\frac{vq_i}{\rho_i}\right)\right][1 - \varphi_T(0)]\prod_{i=1}^{m}(s - \rho_i)}{\prod_{i=1}^{m}(s - vq_i) - \hat{p}(s)B_{m-1}(s)} \qquad (2.4.41)$$

με $B_{m-1}(s) = v[s^{m-1}\prod_{i=1}^{m}(1 - q_i) + \sum_{j=1}^{m-1}\beta_j s^{m-1-j}(v - s)^j]$, το οποίο είναι ένα πολυώνυμο $m - 1$ βαθμού, με αρχικό συντελεστή $B_{m-1} = v[\prod_{i=1}^{m}(1 - q_i) + \sum_{j=1}^{m-1}\beta_j(-1)^j$

Σε αυτή την παράγραφο θα θεωρήσουμε ότι η $p(x)$ έχει κατανομή K_n για κάθε $n\epsilon N$ με συνάρτηση πιθανότητας

s

$$p(s) = \frac{E_n(s)}{\prod_{i=1}^{\cdot}(1 - s\alpha_i)} \qquad (2.4.43)$$

Με το πεδίο τιμών του να είναι μικρότερο από το $\min\{(\frac{1}{\alpha_1}), (\frac{1}{\alpha_2}), \dots, (\frac{1}{\alpha_n})\}$.
Θεωρούμε ως $E_n(s)$ να είναι ένα πολυώνυμο n βαθμού με $E_n(0) = 0$, $E_n(1) = \prod_{i=1}^{\cdot}(1 - \alpha_i)$, $0 < \alpha_i < 1$, $i = 0,1, \dots$ Σε αυτή την περίπτωση $\hat{}(s)$ μπορεί να γραφτεί σαν μια ρητή συνάρτηση, η οποία δίνεται από το ακόλουθο θεώρημα

<u>Θεώρημα 2.4.5</u>

Για $p(s) = \frac{E_n(s)}{\prod_{i=1}^{n}(1 - s\alpha_i)}$ *, η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της* $\alpha(u)$ *δίνεται από τον τύπο*

$$\alpha(s) = \frac{\prod_{i=1}^{\cdot}(R_i - 1)\prod_{i=1}^{\cdot}(\frac{1}{\alpha_i} - s)}{\prod_{i=1}^{\cdot}(R_i - s)\prod_{i=1}^{\cdot}(\frac{1}{\alpha_i} - 1)} \qquad (2.4.44)$$

Επιπλέον αν οι ρίζες R_i είναι διακεκριμένες, τότε από ιδιότητες ρητών κλασμάτων έχουμε

$$\alpha(s) = \frac{\prod_{i=1}(1 - 1/R_i)}{\prod_{i=1}(1 - a_i)} + \sum_{\iota=1}^{n} \frac{r_i s}{R_i - s} \qquad (2.4.45)$$

με

$$a(0) = \frac{\prod_{i=1} (1 - \frac{1}{R_i})}{\prod_{i=1}(1 - a_i)} \qquad (2.4.46)$$

και

$$a(u) = \sum_{i=1}^{n} r_i R_i^{-u} \ , \ \ u \epsilon N \qquad (2.4.47)$$

, όπου $r_i = \left(\prod_{j=1}^{n} \frac{1-R_j a_j}{1-a_j}\right)\left(\prod_{j=1}^{n} \frac{R_j-1}{R_j-R_i}\right)\left(\frac{R_i-1}{R_j}\right)$ $, i = 1,2, \dots, n$

<u>*Απόδειξη*</u>

Αντικαθιστώντας την (3) στην (2) και πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή με την ποσότητα $\prod_{i=1}(1 - s a_i)$ *παίρνουμε,*

$$\alpha(s) = \frac{[(\prod_{i=1}^{z} \frac{v q_i}{\rho_i})]\,[1 - \varphi_T(0)] \prod_{i=1}^{z}(s - \rho_i) \prod_{i=1}(1 - s a_i)}{E_{m,n}(s)} \qquad (2.4.48)$$

Προφανώς $E_{m,n}(s) = \prod_{i=1}^{m}(s - \rho_i)\,(\prod_{\iota=1}^{n} a_i)(\prod_{i=1}^{n}(R_i - s))$*. Χρησιμοποιώντας την στην προηγούμενη σχέση έχουμε*

$$\alpha(s) = \frac{[(\prod_{i=1}^{m} \frac{v q_i}{\rho_i})]\,[1 - \varphi_T(0)] \prod_{i=1}^{n} (\frac{1}{a_i} - s)}{\prod_{i=1}^{n}(R_i - s)} \qquad (2.4.49)$$

Επιπλέον ισχύει η σχέση

$$[\prod_{\iota=1}^{m} \rho_i]\,[\prod_{\iota=1}^{m} R_i] = \prod_{i=1}^{m} \frac{v q_i}{a_i} \qquad (2.4.50)$$

Με βάση την (2.4.49) και (2.4.50) έχουμε το ζητούμενο.

Επίσης η σχέση (2.4.44) μπορεί να γραφεί και ως

$$\hat{\alpha}(s) = \frac{\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{R_i}\right)}{\prod_{i=1}^{n}(1-\alpha_i)} + \prod_{\iota=1}^{n}\frac{R_\iota - 1}{1-\alpha_\iota}\left[\frac{\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\alpha_i}-s\right)-\left[\frac{\prod_{i=1}^{n}(R_i-s)}{\prod_{\iota=1}^{n}(\alpha_i R_i)}\right]}{\prod_{i=1}^{n}(R_i-s)}\right]$$

Εάν οι ρίζες $R_1, R_2, \dots, R_n$ είναι διακεκριμένες, τότε με τη μέθοδο των μερικών κλασμάτων παίρνουμε την σχέση (2.4.47).

<u>Παράδειγμα 2.4.5</u>

Υποθέτουμε ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης ζημιών ακολουθούν μια K_m κατανομή, με συνάρτηση πιθανότητας την σχέση

$$\hat{\alpha}(s) = \frac{1-\varphi_T(0)}{1-\hat{g}(s)} = \frac{\left[\left(\prod_{i=1}^{m}\frac{vq_i}{p_i}\right)\right][1-\varphi_T(0)]\prod_{i=1}^{m}(s-p_i)}{\prod_{\iota=1}^{m}(s-vq_i)-\hat{p}(s)B_{m-1}(s)}$$

Οι απαιτήσεις ακολουθούν γεωμετρική κατανομή με $p(x) = (1-\alpha)\alpha^{x-1}$, $\hat{p}(s) = s(1-\alpha)(1-s\alpha)$.

Τότε, η εξίσωση

$$E_{m,1}(s) = [\prod_{i=1}^{m}(s-vq_i)]\,(1-s\alpha) - s(1-\alpha)B_{m-1}(s) = 0$$

έχει ακριβώς m ρίζες, τις $p_1, p_2, \dots, p_m$, $|p_i| < 1$, και μια ρίζα $R > 1$.

Εύκολα δείχνουμε ότι ισχύει η σχέση $\prod_{i=1}^{m}\frac{vq_i}{p_i} = \alpha R$.

Το πρώτο Θεώρημα μας δίνει

$$\alpha(0) - \frac{R-1}{R(1-\alpha)}$$

$$\alpha(u) = \frac{(1-\alpha R)(R-1)}{R(1-\alpha)}R^{-u} \quad , u \in N$$

Τότε

$$\varphi_T(u) = \sum_{y=u+1}^{\infty} a(y) = \frac{1 - aR}{R(1-a)} R^{-u} \ , \ \ u \epsilon N$$

Η από κοινού συνάρτηση κατανομής των $U(T-1)$ $|U(T)|$ δίνεται από τις σχέσεις

$$f_2(x,y|u) = \frac{1-aR}{R^2 a} p(x+y+1) \sum_{j=1}^{m} \frac{b_j \rho_j{}^x \left(R\rho_j^{-u} - \rho_j R^{-u}\right)}{\left(R - \rho_j\right)} \qquad , 0 \le u \le x$$

$$f_2(x,y|u) = \frac{1-aR}{R^2 a} p(x+y+1) \sum_{j=1}^{m} \frac{b_j R^{-u} \left(R^{x+1} - \rho_j{}^{x+1}\right)}{\left(R - \rho_j\right)} \qquad , u > x$$

Η από κοινού εκφυλισμένη συνάρτηση κατανομής της $U(T-1)$ μπορεί να εκφραστεί μέσω της σχέσης

$$f_2(x,y|u) = f_1(x|u) \frac{p(x+y+1)}{\bar{P}(x+1)}$$

Η από κοινού εκφυλισμένη συνάρτηση κατανομής της $|U(T)|$ μπορεί να εκφραστεί μέσω της σχέσης

$$g(y|u) = \sum_{x=0}^{\infty} f_2(x,y|u) = \sum_{x=0}^{\infty} f_1(x|u) p(y) = \varphi_T(u) p(y)$$

2.4.5b Κατανομές για φραγμένα ύψη ζημιών

Ας θεωρήσουμε ότι τα ύψη ζημιών ακολουθούν κατανομές οι οποίες είναι φραγμένες. Για $N = 2,3, \dots$

$$p(n) = P(X = n) = p_n \, , \qquad n = 1,2, \dots, N \qquad (2.4.51)$$

Τότε

$$\hat{p}(s) = D_N(s) = p_1 s + p_2 s^2 + \dots + p_N s^N \qquad (2.4.52)$$

είναι ένα πολυώνυμο N-βαθμού. Φραγμένες κατανομές είναι η διωνυμική, η ρητή ομοιόμορφη και η υπεργεωμετρική. Έστω ότι $V(s) = D_N(s) B_{m-1}(s) - \prod_{i=1}^{m}(s - vq_i)$ είναι ένα πολυώνυμο $N+m-1$ βαθμού, με αρχική τιμή $V_{N+m-1} = p_N B_{m-1}$ και $B_{m-1} = v[\prod_{i=1}^{m}(1-q_i) + \sum_{j=1}^{m-1}(-1)^j \beta_j]$ είναι η αρχική τιμή της $B_{m-1}(s)$. Η εξίσωση $V(s) = 0$ έχει $N+m-1$ ρίζες, τις $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$, $|\rho_i| < 1$ και $R_1, R_2, \dots, R_N$ είναι οι υπόλοιπες $N-1$ ρίζες.

Συνεπώς μπορούμε να γράψουμε

$$V(s) = V_{N+m-1}\left[\prod_{i=1}^{m}(\mathbf{1}-\rho_i)\right]\left[\prod_{\iota=1}^{N-1}(s-R_i)\right]$$

Θέτοντας στην παραπάνω σχέση $s = \mathbf{0}$, έχουμε

$$(-\mathbf{1})^N V_{N+m-1}\left[\prod_{i=1}^{m}(\rho_i)\right]\left[\prod_{\iota=1}^{N-1}(R_i)\right] = \prod_{i=1}^{m} v q_i \qquad (\mathbf{2.4.53})$$

Τότε η (1.4.52) μπορεί να εκφραστεί

$$\hat{\alpha}(s) = \frac{[\mathbf{1}-\varphi_T(\mathbf{0})]\prod_{i=1}^{N-1} R_i}{\prod_{\iota=1}^{N-1}(R_i - s)} \qquad (\mathbf{2.4.54})$$

$= \mathbf{1}$, και $\mathbf{1}-\varphi_T(\mathbf{0}) = \prod_{i=1}^{N-1}[(R_i - \mathbf{1})/R_i]$, η παραπάνω σχέση μετασχηματίζεται σε

$$\hat{\alpha}(s) = \frac{\prod_{i=1}^{N-1}[(R_i - \mathbf{1})]}{\prod_{\iota=1}^{N-1}(R_i - s)} \qquad (\mathbf{2.4.55})$$

Εάν τώρα οι μεταβλητές $R_1, R_2, \dots, R_N$ είναι διακεκριμένες, με τη μέθοδο των μερικώνκλασμάτων
Επίσης αφού $\hat{\alpha}(\mathbf{1})$ έχουμε ότι

$$\alpha(s) = \sum_{i=1}^{N-i}\frac{r_i}{R_i - s} = \sum_{i=1}^{N-1}\frac{r_i}{R_i}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}-\frac{s}{R_i}}\right) \qquad (\mathbf{2.4.56})$$

Συνεπώς

$$\alpha(u) = \sum_{i=1}^{N-1}\frac{r_i}{R_i}R^{-u} \qquad (\mathbf{2.4.57})$$

<u>Παράδειγμα</u>

Ας υποθέσουμε ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης ζημιών ακολουθούν αρνητική διωνυμικη κατανομή

$(2, q)$ με συνάρτηση $k(x) = x(\mathbf{1} - q)^2 q^{x-1}$ και γεννήτρια συνάρτηση $\hat{k}(s) = s(\mathbf{1} - q)^2/(\mathbf{1} - sq)^2$. Οι ζημιές κατανέμονται ομοιόμορφα με $P(X = \mathbf{1}) = P(X = 2) = P(X = \mathbf{3}) = \frac{1}{3}$, $\hat{p}(s) = (s + s^2 + s^3)/\mathbf{3}$. Άρα προκύπτει ένα πολυώνυμο 4 βαθμού

$V(s) = \hat{p}(s)B_1(s) - (s - vq)^2 = \frac{v(1-q)^2(s+s^2+s^3)}{3} - (s - vq)^2$ με αρχική τιμή $v(\mathbf{1} - q)^2/\mathbf{3}$. Έστω ρ_1, ρ_2 και R_1, R_2 οι ρίζες της εξίσωσης $V(s) = \mathbf{0}$. Αν θέσουμε $s = \mathbf{0}$ στην $V(s) = \mathbf{0}$, τότε ισχύει η σχέση $\rho_1 \rho_2 R_1 R_2 = -\mathbf{3} v q^2/(\mathbf{1} - q)^2$.

Η σχέση (2.4.57) μας δίνει

$$a(u) = \frac{(R_1 - \mathbf{1})(R_2 - \mathbf{1})}{R_2 - R_1}[R_1^{-(u+1)} - R_2^{-(u+1})]$$

Τότε

$$\varphi_T(u) = \sum_{y=u+1}^{\infty} a(y) = \frac{(R_2 - \mathbf{1})}{R_2 - R_1}\left[R_1^{-(u+1)}\right] + \frac{(R_1 - \mathbf{1})}{R_2 - R_1} R_2^{-(u+1)}$$

Συνεπώς παίρνουμε την ελλειμματική κατανομή της μεταβλητής $U(T - \mathbf{1})$

$$f_1(x|u) = \frac{3\bar{P}(x)}{(R_1 - R_2)(\rho_1 - \rho_2)} \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} (-\mathbf{1})^{i+j} \frac{\rho_i^{x+2}\left(\rho_i^{-(u+1)} - R_j^{-(u+1)}\right)}{R_j - \rho_i} \quad , \mathbf{0} \leq u \leq x$$

$$f_1(x|u) = \frac{3\bar{P}(x)}{(R_1 - R_2)(\rho_1 - \rho_2)} \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} (-\mathbf{1})^{i+j} \frac{\left(\rho_i R_j^{-(u-x)} - \rho_i^{x+2} R_j^{-(u+1)}\right)}{R_j - \rho_i} \quad , u > x$$

Τώρα, για την ελλειμματική συνάρτηση κατανομής των απαιτήσεων έστω $Z = U(T - \mathbf{1}) + |U(T)| + \mathbf{1}$ έχουμε τα εξής αποτελέσματα

$$h(2|u) = \frac{\mathbf{1}}{R_2 - R_1}\left[R_1^{-(u+1)} - R_2^{-(u+1)}\right]$$

$$h(\mathbf{3}|u) = \frac{\mathbf{1} + \rho_1 + \rho_2}{R_2 - R_1}\left[R_1^{-(u+1)} - R_2^{-(u+1)}\right] + \frac{\mathbf{1}}{R_2 - R_1}[R_1^{-u} - R_2^{-u}]$$

$$h(z|u) = \mathbf{0} \ , z = \mathbf{1} \ , z \geq \mathbf{4}$$

■

Κεφάλαιο 3

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε την συνάρτηση G-S χωρίς αριθμητικά αποτελέσματα με βάση τους ενδιάμεσους χρόνους ζημιών και τα ύψη των ζημιών.

3.1 Ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις

Εισάγουμε τις από κοινού συναρτήσεις πυκνότητας της χρονικής στιγμής χρεοκοπίας, του πλεονάσματος πριν από την ζημιά $U(T-1)$, το έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία $|U(T)|$ και το απόθεμα αμέσως μετά την προτελευταία ζημιά $R_{N(T)-1}$ () για τις μεταβλητές (t,x,y,r)

Σε περίπτωση που η χρεοκοπία συμβεί κατά την πρώτη ζημιά, έχουμε σαν χρόνο χρεοκοπίας $t = x - u + 1$ και το απόθεμα πριν την προτελευταία ζημιά

$$R_{N(T)-1} = u \; .$$

Για να εξασφαλιστεί το έλλειμμα y, όταν το ύψος της ζημιάς είναι $x + y + 1$, το απόθεμα πριν την χρεοκοπία είναι

$$U(T-1) = x$$

Σε συνέχεια αυτού, έχουμε την πιθανότητα αυτού του γεγονότος που εκφράζεται μέσω της σχέσης

$$p_t(x+y+1)k(t)$$

Εάν θέσουμε $t = x - u + 1$, τότε έχουμε την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του αποθέματος πριν τη στιγμή της χρεοκοπίας και του ελλείμματος κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας που δίνεται από τη σχέση

$$h_1(x,y|u) = k(x-u+1)p_{x-u+1}(x+y+1) \qquad (3.1)$$

Σε περίπτωση που η χρεοκοπία συμβεί κατά τις επόμενες από την πρώτη ζημιές, τότε ο χρόνος T και το προτελευταίο ύψος ζημιάς $R_{N(T)-1}$ δεν είναι τόσο απλές συναρτήσεις των $U(T-1)$ και $|U(T)|$ όσο στην πρώτη ζημιά. Για αυτό το λόγο θεωρούμε την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας T του χρόνου , μαζί με το πλεόνασμα πριν την χρεοκοπία $U(T-1)$, το έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία $|U(T)|$ και του αποθέματος αμέσως μετά της προτελευταίας ζημιάς R, η οποία εκφράζεται ως

$$h_2(t,x,y,r|u)$$

Μπορούμε να συνδυάσουμε τις συναρτήσεις h_1 και h_2 με τον εξής τρόπο

$$h_{1,u}(x,y|u) = v^{x-u+1}h_1(x,y|u) \;\; , \quad x = u, u+1, u+2, \ldots \quad y \in N \qquad (3.2)$$

Και

$$h_{2,u}(x,y,r|u)=\sum_{t=2}^{\infty} u^t h_2(t,x,y,r|u) \qquad ,x\in \aleph,\ \ y\in N \tag{3.3}$$

Για να είμαστε σίγουροι ότι το απόθεμα δεν θα πέσει κάτω από το αρχικό κεφάλαιο u, θα χρησιμοποιήσουμε μια αναδρομική εξίσωση της συνάρτησης Gerber-Shiu με περιορισμό στο πρώτο ύψος ζημιάς. Συνεπώς ορίζουμε $h_1(x,y\,\mathbf{0}|\ )$ που είναι η πιθανότητα της πρώτης ζημιάς και $x+u$ είναι το ύψος του αποθέματος πριν την πρώτη $u-y$ ζημιά και το έλλειμμα μετά την πρώτη ζημιά. Ο χρόνος κατά τον οποίο συμβαίνει η πρώτη πτώση $x+1$ είναι . Υπάρχουν δύο πιθανά σενάρια, τα οποία αναλύονται ως εξής:

- Εάν $y>u$ τότε η χρεοκοπία συμβαίνει στην πρώτη πτώση (δηλαδή από την πρώτη ζημιά). Άρα έχουμε $U(T-\mathbf{1})=x+u$, $|U(T)|=y-u$, $XT=u$, $RN(T)-\mathbf{1}=u$
- Εάν $y\leq u$ τότε το απόθεμα δεν γίνεται αρνητικό και η διαδικασία συνεχίζεται με νέο αρχικό απόθεμα u-y.

Σε συνέχεια, σε περίπτωση που η πρώτη πτώση προκλήθηκε από μεταγενέστερη ζημιά $h_2(i,x,y,r|\mathbf{0})$ με , έχουμε τα ακόλουθα πιθανά σενάρια που αναλύονται ως εξής:

- Εάν $y>u$ τότε η χρεοκοπία συμβαίνει στην πρώτη πτώση. Άρα έχουμε $U(T-\mathbf{1})=y-u$, $|U(T)|=y-u$, $XT=u$, $RN(T)-\mathbf{1}=u+r$
- Εάν $y<u$ τότε το απόθεμα δεν γίνεται αρνητικό και η διαδικασία συνεχίζεται με νέο αρχικό απόθεμα $u-y$.

<u>Πρόταση 3.1</u>

Η γενικευμένη συνάρτηση G-S ικανοποιεί την εξής ανανεωτική εξίσωση

$$\varphi_v(u)=\sum_{y=1}^{u}\varphi_v(u-y)\{\sum_{x=0}^{\infty}h_{1,u}(x,y|\mathbf{0})+\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{x}h_{2,u}(x,y,r|\mathbf{0})\}+l_u(u)$$

, όπου τα h_1,h_2 δίνονται από τις (3.2) και (3.3).

Στην τελευταία σχέση (2.4), το δεξί μέλος ορίζεται ως η συνεισφορά (του μετόχου) λόγω χρεοκοπίας στην πρώτη πτώση και δίνεται από τη σχέση

$$l_u(u)=\sum_{y=u+1}^{\infty}\sum_{x=0}^{\infty}\{w(x+u,y-u,u,u)h_{1,u}(x,y|\mathbf{0}) + \sum_{r=0}^{\infty}w(x+u,y-u,u,r)h_{2,u}(x,y,r|\mathbf{0})\} \tag{3.4}$$

Αν αλλάξουμε τις μεταβλητές βάσει των σχέσεων (2.1) και (2.2), έχουμε

$$l_u(u) = \sum_{y=1}^{\infty}\sum_{t=1}^{\infty} u^t w(t+u-\mathbf{1}, y, u, u)k(t) * p_t(y+u+t)$$
$$+\sum_{y=1}^{\infty}\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{x} w(x+u, y, u, r+u)h_{2,u}(x, y, r|\mathbf{0}) \qquad (3.5)$$

Μπορούμε να γράψουμε την από κοινού προεξοφλημένη συνάρτηση πιθανότητας του πλεονάσματος
(x) και του ελλείμματος (y) με τον ακόλουθο τρόπο

$$h_u(x, y|u) = h_{1,u}(x, y|u) + \sum_{r=0}^{x} h_{2,u}(x, y, r|u)\ , \qquad x, u \epsilon N,\ \ y \epsilon N \qquad (3.6)$$

, όπου οι όροι της συνάρτησης δίνονται από τις σχέσεις (2.2) και (2.3) αντίστοιχα.

Εάν θέσουμε $u = \mathbf{0}$ στην τελευταία σχέση, μπορούμε να γράψουμε την (2.4) ως

$$\varphi(u) = \sum_{y=1}^{\infty} \varphi(u-y)\,\{\sum_{x=0}^{\infty} h_u(x, y|\mathbf{0})\} + l_u(u) \qquad (3.7)$$

Εισάγουμε ένα νέο μέγεθος στην παραπάνω ισοδυναμία,

$$\varphi_u = \sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=1}^{\infty} h_u(x, y|\mathbf{0}) \qquad (3.8)$$

Τα ύψη των διακυμάνσεων ανάμεσα στα ύψη ζημιών δίνεται από την συνάρτηση πιθανότητας

$$f_u(y) = \frac{\mathbf{1}}{\varphi_u}\sum_{x=0}^{\infty} h_u(x, y|\mathbf{0}) \qquad y \epsilon N \qquad (3.9)$$

Έτσι έχουμε την έκφραση της συνάρτησης G-S όπως δίνεται στην (1.2).

Θεώρημα 3.1

Όπως προκύπτει από τις παραπάνω σχέσεις (3.8) (3.9) και (3.5), έχουμε ότι η γενικευμένη συνάρτηση G-S μπορεί να δοθεί και από την εξίσωση

$$\varphi_v(u) = \varphi_u \sum_{y=1}^{u} \varphi(u-y) f_u(y) + l_u(u) \qquad (3.10)$$

Διαλέγουμε την συνάρτηση ποινής $w(x,y,z,r) = w_{23}(y,z)$ οπότε η σχέση (3.5) παίρνει τη μορφή

$$l_{v,23}(u) = \sum_{y=u+1}^{\infty} \sum_{x=0}^{\infty} \{ w_{23}(y-u,u) h_{1,u}(x,y|\mathbf{0}) + \sum_{r=0}^{x} w_{23}(y-u,u)\, h_{2,u}(x,y,r|\mathbf{0}) \}$$
$$= \varphi_u \sum_{y=u+1}^{\infty} w_{23}(y-u,u)\, f_u(y) \qquad (3.11)$$

Έτσι μπορούμε να γράψουμε την γενικευμένη συνάρτηση G-S με τον κάτωθι τρόπο

$$\varphi_{v,23}(u) = \varphi_u \sum_{y=1}^{u} m_{u,23}(u-y)\, f_u(y) + l_{u,23}(u)$$
$$= \varphi_u \sum_{y=1}^{u} m_{u,23}(u-y,u)\, f_u(y) + \varphi_u \sum_{y=u+1}^{\infty} w_{23}(y-u,u) f_u(y) \qquad (3.12)$$

όπου εξαρτάται μόνο από το φ_u και το $f_u(y)$.

Παρόμοια, όταν η συνάρτηση ποινής γράφεται $w(x,y,z,r) = \mathbf{1}$, ικανοποιεί την ανανεωτική εξίσωση

$$\bar{G}_u(u) = \varphi_u \sum_{y=1}^{u} \bar{G}_u(u-y) f_u(y) + \varphi_u \bar{F}_u(u) \qquad (3.13)$$

με $\bar{F}_u(u) = \mathbf{1} - F_u(u) = \sum_{y=u+1}^{\infty} f_u(y)$.

- Όταν $u = \mathbf{0}$ έχουμε προφανώς $G_u(\mathbf{0}) = \varphi_u$.
- Όταν $u = \mathbf{1}$ τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας εκφράζεται $\psi(u) = \bar{G}_1(u)$. –

Εδώ θα ορίσουμε τη σύνθετη γεωμετρική συνάρτηση πιθανότητας $g_u(u) = G_u(u-\mathbf{1}) - G_u(u)$ – – για κάθε $u \in \aleph$, με $g_u(\mathbf{0}) = \mathbf{1} - \varphi_u$.

Με αυτούς τους τύπους καταλήγουμε στην γενική λύση

$$\varphi_v(u) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}-\varphi_u} \sum_{y=0}^{u} g_u(u-y) l_u(y) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}-\varphi_u} \sum_{y=0}^{u-1} g_u(u-y) l_u(y) + l_u(u) \qquad (3.14)$$

Σημείωση : η σύνθετη γεωμετρική συνάρτηση πιθανότητας χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της από κοινού συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας διαφόρων μεταβλητών χρεοκοπίας.

3.2 Από κοινού προεξοφλημένες συναρτήσεις πιθανότητας

Θα αντλήσουμε την από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των $((U)T|-(1)|\ U\ T\ X\ R)$ συνάρτηση της προεξοφλημένης συνάρτησης πιθανότητας και $h_1(x,y|u)$ $h_2(x,y,r|u)$ που οι ορισμοί τους έχουν δοθεί στην (3.1)

Εάν αλλάξουμε κάποιες μεταβλητές άθροισης στην (3.5) παίρνουμε το εξής

$$l_u(u) = \sum_{y=1}^{\infty}\sum_{x=u}^{\infty}\{w(x,y,u,u)h_1(x-u,y+u|\mathbf{0}) + \sum_{r=u}^{x} w(x,y,u,r)h_2(x-u,y+u,r-u|\mathbf{0}) \qquad (3.15)$$

Θεωρούμε την συνάρτηση ποινής με τον ακόλουθο τρόπο $w(x,y,z,r) = s_1^x s_2^y s_3^z s_4^r$. Συνεπώς η (3.15) μετασχηματίζεται και γίνεται

$$\begin{aligned}
l_u(u) &= \sum_{y=1}^{\infty}\sum_{x=u}^{\infty}\{s_1^x s_2^y s_3^u s_4^u h_{1,u}(x-u,y+u|\mathbf{0}) + \sum_{r=u}^{x} s_1^x s_2^y s_3^u s_4^r h_{2,u}(x-u,y+u,r-u|\mathbf{0})\} \\
&= \sum_{y=1}^{\infty}\sum_{x=u}^{\infty} s_1^x s_2^y s_3^u \{s_4^u h_{1,u}(x-u,y+u|\mathbf{0}) \\
&\quad + \sum_{r=u}^{\infty} s_4^r h_{2,u}(x-u,y+u,r-u|\mathbf{0})\} \\
&= s_3^u \sum_{y=1}^{\infty}\sum_{x=u}^{\infty}\{s_1^x s_2^y s_4^u h_{1,u}(x-u,y+u|\mathbf{0}) \\
&\quad + \sum_{r=u}^{x} s_1^x s_2^y s_4^r h_{2,u}(x-u,y+u,r-u|\mathbf{0})\} = s_3^u l_{124,u}(u)
\end{aligned}$$

Όπου $l_{124,u}(u) = \sum_{y=1}^{\infty}\sum_{x=u}^{\infty}\{s_1^x s_2^y s_4^u h_{1,u}(x-u,y+u|\mathbf{0}) + \sum_{r=u}^{x} s_1^x s_2^y s_4^r h_{2,u}(x-u,y+u,r-u|\mathbf{0})\}$

Συνεπώς από την (3.14) έχουμε ως ακόλουθο

$$\varphi_v(u) = \frac{1}{1-\varphi_u}\sum_{y=0}^{u} g_u(u-y)\, l_u(y) = \frac{1}{1-\varphi_u}\sum_{y=0}^{u-1} g_u(u-y)\, s_3^z\, l_{124,u}(z) + s_3^u\, l_{124,u}(u)$$

$$= \sum_{z=0}^{u-1}\sum_{y=1}^{\infty}\sum_{x=u}^{\infty} s_1^x s_2^y s_3^z s_4^z \left\{\frac{g_u(u-z)}{1-\varphi_u}\, h_{1,u}(x,y|z)\right\}$$

$$+ \sum_{r=u}^{\infty}\sum_{z=0}^{u-1}\sum_{y=1}^{\infty}\sum_{x=r}^{\infty} s_1^x s_2^y s_3^z s_4^r \left\{\frac{g_u(u-z)}{1-\varphi_u}\, h_{2,u}(x-z, y+z, r-z|\mathbf{0})\right\}$$

$$+ \sum_{y=1}^{\infty}\sum_{x=u}^{\infty} s_1^x s_2^y s_3^u s_4^u h_{1,u}(x,y|u) + \sum_{x=u}^{\infty}\sum_{y=1}^{\infty}\sum_{r=u}^{x} s_1^x s_2^y s_3^u s_4^r h_{2,u}(x-u, y+u, r-u|\mathbf{0})$$

Άρα οδηγούμαστε στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 3.2.1

Η ελλειμματική από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των $(U(T-\mathbf{1})\ |U(T)|, X_T, R_{N(T)-1})$ στις τυχαίες μεταβλητές (x,y,z,r) ορίζεται ως

1. $h_{12,u}(x,y|u) = h_{1,u}(x,y|u)$ *για* $\{(x,y,z,r)|x \geq u, y > \mathbf{0}, z = u, r = u\}$ *το οποίο εξηγεί την περίπτωση χρεοκοπίας στην πρώτη ζημιά.*

2. $h_{124,u}(x,y,r|u) = h_{2,u}(x-u, y+u, r-u\ \mathbf{0}|)$ *για* $\{(x,y,z,r)|x \geq u, y > \mathbf{1}, z = u, u \leq r \leq x\}$ *όπου εξηγεί την περίπτωση της χρεοκοπίας που συμβαίνει στην πρώτη πτώση κάτω από το αρχικό απόθεμα σε μεταγενέστερη ζημιά από την πρώτη.*

3. $h_{123,u}(x,y,z|u) = h_{1,u}\frac{g_u(u-z)}{1-\varphi_u}$ *για* $\{(x,y,z,r)|x \geq u, y > \mathbf{1}, \mathbf{0} \leq z \leq u-\mathbf{1}, r = z\}$ *που εξηγεί την πρώτη πτώση του πλεονάσματος και η χρεοκοπία συμβαίνει στην επόμενη ζημιά.*

4. $h_{1234,u}(x,y,z,r|u) = h_{2,u}(x-z, y+z, r-z|\mathbf{0})\frac{g_u(u-z)}{1-\varphi_u}$ *για* $\{(x,y,z,r)|x \geq r, y > \mathbf{1}, \mathbf{0} \leq z \leq u, u \geq r\}$ *όπου εξηγεί την πρώτη πτώση κάτω από το αρχικό απόθεμα και η χρεοκοπία συμβαίνει σε μεταγενέστερες ζημιές από την πρώτη ζημιά μετά την πτώση.*

Επιπλέον, εάν θέσουμε την συνάρτηση ποινής $w(x,y,z,r) = w_{23}(y,z) = s^{y+z}$ παίρνουμε την προεξοφλημένη συνάρτηση πιθανότητας των $(|U(T)| + X_T)$, η οποία είναι το τελευταίο ύψος πριν την χρεοκοπία. Έτσι θέτοντας $l_{u,23}(u) = \varphi_u \sum_{y=u+1}^{\infty} s^y f_u(y)$, μέσω της (3.16) παίρνουμε

$$\varphi_{v,23}(u) = E\left[u^T s^{|U(T)|+X_T} I(T<\infty) \middle| U(0)=u\right]$$
$$= \frac{1}{1-\varphi_u}\sum_{z=0}^{u} g_u(u-z)\, l_{u,23}(z) = \sum_{z=0}^{u}\sum_{y=z+1}^{\infty} s^y \left\{\frac{\varphi_u g_u(u-z)}{1-\varphi_u} f_u(u)\right\} \qquad \mathbf{(3.16)}$$

Πρόταση 3.2.2

Το τελευταίο ύψος $|U(T)| + X_T$ έχει την εξής ελλειμματική συνάρτηση πιθανότητας

$$f_{1,u}(u,y) = \begin{cases} \dfrac{\varphi_u}{1-\varphi_u}\{\displaystyle\sum_{z=0}^{y-1} g_u(u-z)\} f_u(y), & y = 1,2,\dots,u \\ \dfrac{\varphi_u}{1-\varphi_u}\{\displaystyle\sum_{z=0}^{u} g_u(u-z)\} f_u(y), & y = u+1, u+2,\dots \end{cases} \qquad (3.17)$$

Παρομοίως, θέτουμε την συνάρτηση ποινής ως $w(x, y, z, r) = w_{123}(x,y,z) = s_1^x s_2^y s_3$, τότε η (3.5) μετασχηματίζεται ως εξής

$$l_{u,123}(u) = \sum_{y=1}^{\infty}\sum_{x=u}^{\infty} s_1^x s_2^y s_3^u h_u(x-u, y+u|0) \qquad (3.18)$$

Συνεπώς από τις σχέσεις (3.5) και (3.18) φθάνουμε στο κάτωθι συμπέρασμα

$$\varphi_{v,123}(u) = E\left[u^T s_1^{U(T-1)} s_2^{|U(T)|} s_3^{X_T} I(T<\infty) \middle| U(0)=0\right] = \frac{1}{1-\varphi_u}\sum_{z=0}^{u} g_u(u-z)\, l_{u,23}(z)$$
$$= \sum_{z=0}^{u}\sum_{y=1}^{\infty}\sum_{x=z}^{\infty} s_1^x s_2^y s_3^z \{\frac{g_u(u-z)}{1-\varphi_u} h_u(x-z, y+z|0)\}$$

Πρόταση 3.2.3

Ορίζουμε μια συνάρτηση, η οποία αποτελείται από την προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση πιθανότητας του αποθέματος πριν την χρεοκοπία $U(T-1)$, του ελλείμματος κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας $|U(T)|$ και του ελάχιστου αποθέματος πριν την χρεοκοπία X_t στο σημείο (x,y,z), και δίνεται από τη σχέση

$$h_{3,u}(x,y,z|u) = \frac{g_u(u-z)}{1-\varphi_u} h_u(x-z, y+z \quad |0) \qquad (3.19)$$

$y \epsilon \aleph$, $z = 0,1,2,..,u$ και $x = z, z+1,$

Όπου

Με αυτή τη λογική μπορούμε να αντλήσουμε διάφορες από κοινού συναρτήσεις πιθανότητας ανάλογα κάθε φορά ποιες μας ενδιαφέρουν.

Πρόταση 3.2.4

Έχουμε την από κοινού προεξοφλημένη συνάρτηση πιθανότητας των τ.μ. $Y_{N(T)}$ και $W_{N(T)}$, οι οποίες είναι η ζημιά που προκαλεί χρεοκοπία και ο τελευταίος ενδιάμεσος χρόνος αντίστοιχα. Η συνάρτηση αυτή δίνεται από τον τύπο

$$h_{4,u}(t,y|u) = v^t k(t) p_t(y)\{ I(y > u+t+1) + I(y > t+1) \sum_{r=0}^{y-t-1} \tau_v(u,r) \qquad (3.20)$$

, όπου

$$\tau_v(u,r) = \begin{cases} \frac{1}{1-\varphi_u}\{g_u(u-r) + \sum_{y=0}^{r} \xi_u(r-y) g_u(u-y) \ , & r = 0,1,..,u-1 \\ \frac{1}{1-\varphi_u} \sum_{y=0}^{u} \xi_u(r-y) g_u(u-y) \ , & r = u, u+1, \dots \end{cases} \qquad (3.21)$$

με $\tau_v(0,r) = \xi_u(r)$.

Πρόταση 3.2.5

Η προεξοφλημένη συνάρτηση πιθανότητας του τελευταίου ενδιάμεσου χρόνου $W_{N(T)}$ δίνεται από

$$h_{5,v}(t|u) = v^t k(t)\{P_t(u+t) + \sum_{r=0}^{\infty} P_t(r+t) \tau_v(u,r)$$

, όπου το $\tau_v(u,r)$ δίνεται από την προηγούμενη σχέση.

<u>Πρόταση 3.2.6</u>

Η προεξοφλημένη συνάρτηση πιθανότητας της απαίτησης που δημιουργεί την χρεοκοπία $Y_{N(T)}$ δίνεται από

$$h_{6,v}(t|u) = \sum_{t=0}^{y-u} p_t(y)k(t) + \sum_{z=0}^{y}\sum_{t=0}^{y-z} \tau_v(u,z)\, p_t(y)k(t)$$

Επίσης ισχύει η σχέση

$$h_{2,v}(x,y,r|\mathbf{0}) = h_{1,v}(x,y|r)\xi_v$$

$$h_{2,v}(x,y,r|\mathbf{0}) = h_{1,v}(x,y|r)\tau_v(u,r)$$

Ένας άλλος τρόπος για να εκφράσουμε την προεξοφλημένη συνάρτηση πιθανότητας της ζημιάς που προκαλεί χρεοκοπία, είναι να διαλέξουμε την συνάρτηση ποινής $w(x,y,z,r) = w_{12}(x,y) = I(x+y+\mathbf{1}=z)$. Τότε η συνάρτηση $\varphi_{v,12}(u)$ γίνεται η από κοινού προεξοφλημένη συνάρτηση πιθανότητας της απαίτησης που προκαλεί χρεοκοπία, δηλαδή της $Y_{N(T)} = |\boldsymbol{U}(T)| + \boldsymbol{U}(T-\mathbf{1}) + \mathbf{1}$, και την χαρακτηρίζουμε ως $h(z|u)$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} l_{v,12}(u,k) &= \sum_{y=u+1}^{\infty}\sum_{x=0}^{\infty}\left\{w(x+u,y-u)h_{1,v}(x,y|r) + \sum_{r=0}^{\infty} w(x+u,y-u)h_{2,v}(x,y,r|\mathbf{0})\right\} \\ &= \sum_{y=u+1}^{\infty}\sum_{x=0}^{\infty} w(x+u,y-u)h_v(x,y|\mathbf{0}) + \sum_{y=u+1}^{\infty}\sum_{x=0}^{\infty} I(x+y+\mathbf{1}-k)h_v(x,y|\mathbf{0}) \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την γενικευμένη μορφή της συνάρτησης Gerber-Shiu, η σχέση (3.11) $l_{v,23}(u)$ μπορεί να εκφράσει την προεξοφλημένη συνάρτηση πιθανότητας της ζημιάς που προκαλεί χρεοκοπία με τον εξής τρόπο

$$h(z|u) = \varphi_v \sum_{y=1}^{u} h(z|u-y) f_v(y) + l_{v,12}(u,z) \qquad (3.22)$$

με αρχική τιμή $h(z|\mathbf{0}) = l_{v,12}(\mathbf{0},z)$.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την (3.15) για να υπολογίσουμε την $h(z|u)$. Ισχύει ότι $h(z|u) = \varphi_{v,12}(u)$ το οποίο μας οδηγεί στο συμπέρασμα

$$h(z|u) = \frac{1}{1-\varphi_v}\sum_{y=0}^{u-1} g_v(u-y)\, l_{v,12}(y) + l_{v,12}(u,z) \qquad (3.23)$$

με αρχική τιμή $h(z|0) = l_{v,12}(0,z)$, όπως και προηγουμένως.
Βρίσκουμε αναδρομικά την $h_{2,v}(x,y,r|0)$ ώστε να μελετήσουμε την $\varphi_v(u)$, αφού η $h_{1,v}(x,y|0)$ είναι γνωστή από τις σχέσεις $h_1(x,y|u) = k(x-u+1)p_{x-u+1}(x+y+1)$,
$h_{1,v}(x,y|u) = v^{x-u+1}h_1(x,y|u)$, δηλαδή (3.1) και (3.2) αντίστοιχα.

Κεφάλαιο 4

Χρονικά ανεξάρτητα ύψη ζημιών

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναλύσουμε την ανεξαρτησία ανάμεσα στα ύψη ζημιών και στον ενδιάμεσο χρόνο εμφάνισης ζημιών. Οι συνθήκες που ισχύουν για το έλλειμμα (y) δοθέντος το απόθεμα (x) πριν την χρεοκοπία είναι $p_t(y) = p(y)$, $p_x(y) = \frac{p(x+y+1)}{P(x+1)}$. Εδώ χρησιμοποιούμε δύο κατανομές για τα ύψη ζημιών, σε κάθε μια από τις οποίες χρησιμοποιούμε την γενικευμένη συνάρτηση Gerber-Shiu και τις ελλειμματικές συναρτήσεις πιθανότητας αντίστοιχα για τη μελέτη τους.

4.1 Γεωμετρική κατανομή

4.1.1 Γενικευμένη συνάρτηση Gerber-Shiu

Στην παράγραφο αυτή, τα ύψη ζημιών ακολουθούν γεωμετρική κατανομή με $p(y) = (1-q)q^{y-1}$ και ως συνάρτηση ποινής έχουμε $w(x,y,z,r) = s_1^x s_2^y s_3^z s_4^r$.

Τότε έχουμε από την (3.5)

$$
\begin{aligned}
l_v(u) &= \sum_{t=1}^{\infty} v^t s_1^{t+u-1} s_3^u s_4^u \left\{ \sum_{y=1}^{\infty} s_2^y (1-q) q^{y+u+t-1} \right\} k(t) \\
&\quad + \sum_{x=0}^{\infty} \left\{ \sum_{y=1}^{\infty} s_2^y (1-q) q^{y+u-1} \right\} \sum_{r=0}^{x} s_1^{x+u} s_3^u s_4^{r+u} h_v^{(2)}(x,r|\mathbf{0}) \\
&= s_1^u s_3^u s_4^u q^{u-1} \sum_{t=1}^{\infty} v^t s_1^{t-1} q^t \{ \sum_{y=1}^{\infty} (1-q) q^y s_2^y \} k(t) \\
&\quad + s_1^u s_3^u s_4^u q^{u-1} \left\{ \sum_{y=1}^{\infty} (1-q) q^y s_2^y \right\} \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{x} s_1^x s_4^r h_v^{(2)}(x,r|\mathbf{0}) \\
&= s_1^u s_3^u s_4^u q^u \frac{(1-q)s_2}{1-qs_2} \left\{ \sum_{t=1}^{\infty} v^t s_1^{t-1} q^t k(t) + \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{x} s_1^x s_4^r h_v^{(2)}(x,r|\mathbf{0})\, k(t) \right\} \\
&= s_1^u s_3^u s_4^u q^u \frac{(1-q)s_2}{1-qs_2} \left\{ \frac{\hat{k}(vqs_1)}{s_1} + \hat{h}_v^{(2)}(x,r|\mathbf{0}) \right\} \qquad (\mathbf{4.1})
\end{aligned}
$$

, όπου $\hat{h}_v^{(2)}(x,r|\mathbf{0}) = \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{x} s_1^x s_4^r h_v^{(2)}(x,r|\mathbf{0})$.

Θέτουμε $\gamma_v(s_1,s_4) = \frac{\hat{k}(vqs_1)}{s_1} + \hat{h}_v^{(2)}(x,r|\mathbf{0})$

Συνεπώς η (3.10) μπορεί να εκφραστεί ως εξής

$$
\varphi_v(u) = \varphi_v \sum_{y=1}^{u} \varphi(u-y) f_v(y) + l_v(u) = \varphi_v \sum_{y=1}^{u} \varphi(u-y)(1-q)q^{y-1} + l_v(u) \qquad (\mathbf{4.2})
$$

με $l_v(u)$ που δίνεται από την προηγούμενη σχέση.

Παίρνοντας γεννήτριες συναρτήσεις και στα 2 μέλη της (4.2) έχουμε

$$
\begin{aligned}
\hat{\varphi}_v(z) &= \varphi_v \hat{\varphi}_v(z) \frac{1-q}{q} \frac{zq}{1-zq} + \frac{1}{1-s_1 s_2 s_4 q z} \frac{(1-q)s_2}{1-qs_2} \gamma_v(s_1,s_4) \\
&= \varphi_v \hat{\varphi}_v(z) \frac{z(1-q)}{1-qz} + \frac{s_2(1-q)}{(1-s_1 s_2 s_4 q z)(1-qs_2)} \gamma_v(s_1,s_4) \qquad (\mathbf{4.3})
\end{aligned}
$$

Λύνοντας ως προς $\hat{\varphi}_v(z)$ έχουμε

$$\hat{\varphi}_v(z) = \frac{(1-q)s_2\gamma_v(s_1,s_4)}{(1-s_1s_2s_4qz)(1-qs_2)\left[1-\frac{z(1-q)}{1-qz}\varphi_v\right]}$$
$$= \frac{(1-q)s_2\gamma_v(s_1,s_4)}{1-qs_2} \times \frac{1}{1-s_1s_2s_4qz} \times \frac{1-zq}{1-z[q+\varphi_v(1-q)]}$$
$$= \frac{(1-q)s_2\gamma_v(s_1,s_4)}{(1-qs_2)[q(1-s_1s_2s_4)+\varphi_v(1-q)]}$$
$$\times \left\{\frac{q(1-s_1s_2s_4)}{1-z(s_1s_2s_4q)} + \frac{\varphi_v(1-q)}{1-z[q+\varphi_v(1-q)]}\right\} \qquad (4.4)$$

Άρα,

$$\varphi_v(u) = \frac{(1-q)s_2\gamma_v(s_1,s_4)}{(1-qs_2)[q(1-s_1s_2s_4)+\varphi_v(1-q)]} \times \{q(1-s_1s_2s_4)(s_1s_2s_4q)^u$$
$$+ \varphi_v(1-q)[q+\varphi_v(1-q)]^u$$
$$= \frac{(1-q)s_2\gamma_v(s_1,s_4)}{(1-qs_2)[q(1-s_1s_2s_4)+\varphi_v(1-q)]}$$
$$\times \{q(1-s_1s_2s_4)(s_1s_2s_4q)^u + (1-q)\bar{G}_v(u)\} \qquad (4.5)$$

Στην επόμενη πρόταση θα βρούμε την άγνωστη ποσότητα $\gamma_v(s_1,s_4)$.

<u>*Πρόταση 4.1*</u>

Σε ένα μοντέλο Sparre Andersen διακριτού χρόνου, όπου τα ύψη ζημιών ακολουθούν γεωμετρική κατανομή με $p(y)$
δίνεται από τον τύπο $= (1-q)q^{y-1}$*, η δεξιά ουρά ακολουθεί μια μικτή ρητή συνάρτηση και*

$$G_v(u) = \varphi_v[q+\varphi_v(1-q)]^u$$

με $\varphi_v = k\{v[q+\varphi_v(1-q)]\}$

Απόδειξη

Όταν τα ύψη ζημιών ακολουθούν γεωμετρική κατανομή με $p(y) = (1-q)q^{y-1}$, τότε η πιθανογεννήτρια συνάρτηση δίνεται από τον τύπο

$$\hat{p}(z) = \sum_{y=1}^{\infty} z^{y} p(y) = \frac{z(1-q)}{1-zq}$$

Η δεξιά ουρά της έχει τύπο $\bar{P}(u) = \sum_{x=u+1}^{\infty} p(x) = q^{u}$ με πιθανογεννήτρια συνάρτηση

$$\hat{\bar{P}}(z) = \sum_{u=0}^{\infty} z^{u} \bar{P}(u) = \frac{1-\hat{p}(z)}{1-z} = \frac{1}{1-qz} \qquad (4.6)$$

$f_v(y) = p(y)$ και Λόγω

$$\hat{\bar{F}}_v(z) = \sum_{u=0}^{\infty} z^{u} \bar{F}(u) = \frac{1-\hat{f}_v(z)}{1-z} = \frac{1}{1-qz}$$

Από την σχέση (2.14) έχουμε ότι η συνάρτηση ποινής είναι $w(x,y,z,r) = 1$, για $\varphi_v(u) = \bar{G}_v(u)$,

$$G_v(u) = \frac{1}{1-\varphi_v} \sum_{y=0}^{u} g_v(u-y) l_v(y) = \frac{\varphi_v}{1-\varphi_v} \sum_{y=0}^{u} g_v(u-y) \bar{F}_v(y)$$

ανεξαρτησίας των μεταβλητών W και Y, έχουμε

–

Παίρνοντας πιθανογεννήτριες στην παραπάνω εξίσωση, έχουμε

$$G_{,}(z) = \frac{\varphi_v}{1-\varphi_v} g_v(z) F_{,}(z)$$ –

Χρησιμοποιούμε την (4.6) για να $\frac{1-g_v(z)}{1-z} = \frac{\varphi_v}{1-\varphi_v} g_{,}(z) F_{,}\ z$ δείξουμε

ότι ισχύει η $g_v\ z$ σχέση ( ). Λύνοντας ως προς ̂ ( )

έχουμε $$g_v(z) = \frac{(1-\varphi_v)(1-zq)}{\varphi_v(1-z) + (1-\varphi_v)(1-zq)}$$

(4.7)

Από τις σχέσεις (4.6) και (4.7) προκύπτει

$$G_v(z) = \frac{1-g_v(z)}{1-z} = \frac{1-\dfrac{(1-\varphi_v)(1-zq)}{\varphi_v(1-z)+(1-\varphi_v)(1-zq)}}{1-z} = \frac{\varphi_v}{1-z[q+\varphi_v(1-q)]}$$

Συνεπώς

$$G_v(u) = \varphi_v[q+\varphi_v(1-q)]^u \qquad (4.8)$$

Για να βρούμε μια έκφραση της την $\gamma_v(s_1,s_4)$, θέτουμε στην (4.5) $s_2 = s_3 = 1$. Άρα προκύπτει

$$\begin{aligned}\varphi_{v,14}(u) &= \frac{(1-q)\gamma_v(s_1,s_4)}{(1-q)[q(1-s_1s_4)+\varphi_v(1-q)]} \times \{q(1-s_1s_4)(s_1s_4q)^u + (1-q)G_v\;\; u \\ &= \frac{\gamma_v(s_1,s_4)}{[q(1-s_1s_4)+\varphi_v(1-q)]} \\ &\quad \times \{q(1-s_1s_4)(s_1s_4q)^u + (1-q)G_v(u)\} \qquad (4.9)\end{aligned}$$

η οποία είναι ουσιαστικά η σχέση (2.5) αν θέσουμε συνάρτηση ποινής $w(x,y,z,r) = w_{14}(x,r) = s_1^x s_4^r$.

( )}

Η γενικευμένη συνάρτηση Gerber-Shiu μπορεί να γραφεί με τον ακόλουθο τρόπο, αν δεσμεύσουμε ως προς τον χρόνο και το ύψος της πρώτης απαίτησης

$$\varphi_v(u) = \beta_v(u) + \sum_{t=1}^{\infty} v^t \sigma_v(u+t)k(t) \qquad \textbf{(4.10)}$$

όπου $\beta_v(u) = \sum_{t=1}^{\infty}\sum_{y=u+t+1}^{\infty} v^t w(u+t-\mathbf{1}, y-u-t, u)p(y)k(t)$ και
$\sigma_v(x) = \sum_{y=1}^{x} \varphi_v(x-y)p(y)$.

Θέτοντας $w_{14}(x,r) = s_1^x s_4^r$ και $p(y) = (\mathbf{1}-q)q^{y-1}$, η τελευταία σχέση (4.10) μπορεί να εκφραστεί

$$\begin{aligned}
\varphi_v(u) &= \beta_v(u) + \sum_{t=1}^{\infty} v^t \sigma_v(u+t)k(t) \\
&= \sum_{t=1}^{\infty}\sum_{y=u+t+1}^{\infty} v^t s_1^{u+t-1} s_4^u q^{y-1} k(t) + \sum_{t=1}^{\infty} v^t \sum_{y=1}^{u+t} \varphi_{v,14}(u+t-y)(\mathbf{1}-q)q^{y-1}k(t) \\
&= \sum_{t=1}^{\infty} v^t \tau_v(u+t,u)k(t) \qquad \textbf{(4.11)}
\end{aligned}$$

, με $\tau_v(t,u) = \sum_{y=t+1}^{\infty} s_1^{u+t-1} s_4^u q^{y-1} + \sum_{y=1}^{t} \varphi_{v,14}(t-y)(\mathbf{1}-q)q^{y-1}$ $\qquad \textbf{(4.12)}$

Όμως ισχύει

$$\sum_{y=t+1}^{\infty} s_1^{u+t-1} s_4^u q^{y-1} = \frac{(s_1 q)^t}{s_1} s_4^u \qquad \textbf{(4.13)}$$

Και από την σχέση (4.9) έχουμε

$$\begin{aligned}
&\sum_{y=1}^{t} \varphi_{v,14}(t-y)(\mathbf{1}-q)q^{y-1} \\
&\quad = \frac{\gamma_v(s_1,s_4)}{[q(\mathbf{1}-s_1s_4) + \varphi_v(\mathbf{1}-q)]} \\
&\quad \times \sum_{y=1}^{t} \{q(\mathbf{1}-s_1s_4)(s_1s_4q)^{t-y} + (\mathbf{1}-q)q^{y-1} + (\mathbf{1}-q)G_v(t-y)(t-y)(\mathbf{1}-q)q^{y-1}\} \\
&\quad = \frac{\gamma_v(s_1,s_4)}{[q(\mathbf{1}-s_1s_4) + \varphi_v(\mathbf{1}-q)]} \left\{(q-\mathbf{1})(s_1s_4q)^t + (\mathbf{1}-q)\frac{G_v(u)}{\varphi_v}\right\} \\
&\quad = \frac{(\mathbf{1}-q)\gamma_v(s_1,s_4)}{[q(\mathbf{1}-s_1s_4) + \varphi_v(\mathbf{1}-q)]} \left\{(\mathbf{1}-q)\frac{G_v(u)}{\varphi_v} - (s_1s_4q)^t\right\} \qquad \textbf{(4.14)}
\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\tau_v(t,u) = \frac{(1-q)\gamma_v(s_1,s_4)}{[q(1-s_1s_4)+\varphi_v(1-q)]}\{(1-q)\frac{G_v(u)}{\varphi_v} - (s_1s_4q)^t\} + \frac{s_1q}{s_1}s_4^u \qquad (4.15)$$

<u>*Πρόταση 4.2.*</u>

Σε ένα μοντέλο Sparre Andersen διακριτού χρόνου όπου τα ύψη ζημιών ακολουθούν γεωμετρική κατανομή με ( ) $p\ y\ = (1-q)q^{y-1}$, *η* φ_v *ικανοποιεί την έκφραση*

$$\varphi_v = k\{u[q + \varphi_v(1-q \qquad)]\}$$

<u>*Απόδειξη*</u>

Θέτουμε την συνάρτηση ποινής $w(x,y,z,r) = 1$ *και η (4.10) γράφεται*

$$G_v(u) = \sum_{t=1}^{\infty} v^t\{\sum_{y=1}^{x} G_v(u+t-y)p(y) + \sum_{y=u+t+1}^{\infty} p(y)\}k(t)$$

$$= \sum_{t=1}^{\infty} v^t\left\{\sum_{y=1}^{x} \bar{G}_v(u+t-y)f_v(y) + q^{u+t}\right\}k(t) \qquad (4.16)$$

Από τη σχέση (3.13) $f_v(y) = p(y)$ *έχουμε*
με

$$\frac{G_v(u)}{\varphi_v} = \sum_{y=1}^{u} G_v(u-y)f_v(y) + q^u \qquad (4.17)$$

Αντικαθιστώντας την (4.17) στην (4.16) έχουμε

$$G_v(u) = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \frac{G_v(u+t)}{\varphi_v} k(t) \qquad (4.18)$$

Δηλαδή

$$\varphi_v G_v(u) = \sum_{t=1}^{\infty} v^t G_v(u+t)k(t) \qquad (4.19)$$

Συνεπώς χρησιμοποιώντας και την (4.8), η παραπάνω σχέση μας δίνει

$$\varphi_v \bar{G}_v(u) = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \varphi_v [q + \varphi_v(1-q)]^{u+t} k(t) = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \bar{G}_v(u) [q + \varphi_v(1-q)]^t k(t) \qquad \mathbf{(4.20)}$$

Απλοποιώντας το $G_v(u)$ και από τις δύο πλευρές της εξίσωσης, έχουμε το ζητούμενο

$$\varphi_v = \sum_{t=1}^{\infty} v^t [q + \varphi_v(1-q)]^t k(t) = \hat{k}\{u[q + \varphi_v(1-q)]\}.$$

■

Με τα αποτελέσματα λοιπόν που λάβαμε για τις $\bar{G}_v(u)$ και, αντικαθιστώντας την (4.15) στην (4.11) έχουμε

$$\begin{aligned}
\varphi_{v,14}(u) &= \sum_{t=1}^{\infty} v^t \tau_v(u+t,u) k(t) \\
&= \frac{(1-q)\gamma_v(s_1,s_4)}{[q(1-s_1 s_4) + \varphi_v(1-q)]} \sum_{t=1}^{\infty} v^t \left\{ \frac{G_v(u+t)}{\varphi_v} - (s_1 s_4 q)^{t+u} \right\} k(t) \\
&+ \sum_{t=1}^{\infty} v^t \frac{(s_1 q)^{t+u}}{s_1} s_4^u k(t) \\
&= \frac{(1-q)\gamma_v(s_1,s_4)}{[q(1-s_1 s_4) + \varphi_v(1-q)]} \left\{ G_v(u) - (s_1 s_4 q)^u \hat{k}(vq s_1 s_4) \right\} \\
&+ \frac{(q s_1 s_4)^u}{s_1} \hat{k}(vq s_1) \qquad \mathbf{(4.21)}
\end{aligned}$$

Εδώ μπορούμε να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα των σχέσεων (4.9) και (4.21)

$$\gamma_v(s_1,s_4) \frac{q(1-s_1 s_4)}{q(1-s_1 s_4) + \varphi_v(1-q)} = \frac{k(vq s_1)}{s_1} - \gamma_v(s_1,s_4) \frac{(1-q)k(vq s_1 s_4)}{q(1-s_1 s_4) + \varphi_v(1-q)}$$

το οποίο συνεπάγεται στο εξής

$$\gamma_v(s_1,s_4) = \frac{k(vq s_1)[q(1-s_1 s_4) + \varphi_v(1-q)]}{s_1[q(1-s_1 s_4) + (1-q)k(vq s_1 s_4)]} \qquad \mathbf{(4.22)}$$

<u>*Πρόταση 4.3.*</u>

Σε ένα μοντέλο Sparre Andersen διακριτού χρόνου όπου τα ύψη ζημιών ακολουθούν γεωμετρική κατανομή με $p(y) = (1-q)q^{y-1}$, η γενικευμένη συνάρτηση Gerber-Shiu ικανοποιεί την παρακάτω έκφραση

$$\varphi_v(u) = C_v(s_1,s_2,s_3,s_4)\{q(1-s_1s_3s_4)(s_1s_3s_4q)^u + \varphi_v(1-q)[q+\varphi_v(1-q)]^u\} \qquad (4.23)$$

, όπου

$$C_v(s_1,s_2,s_3,s_4) = \frac{s_2(1-q)\hat{k}(vqs_1)[q(1-s_1s_4)+\varphi_v(1-q)]}{s_1(1-qs_2)[q(1-s_1s_3s_4)+\varphi_v(1-q)][q(1-s_1s_4)+(1-q)\hat{k}(vqs_1s_4q)]} \qquad (4.24)$$

Αν θέσουμε $v=1$, $w(x,y,z,r)=s_1^x$, $s_2=s_3=s_4=1$ *τότε*

$$\begin{aligned}\varphi_{1,1}(u) &= \frac{(1-q)\hat{k}(qs_1)[q(1-s_1)+\varphi_1(1-q)]}{s_1(1-q)[q(1-s_1)+\varphi_1(1-q)][q(1-s_1)+\hat{k}(s_1,q)(1-q)]} \\ &\times \{q(1-s_1)(s_1q)^u + \varphi_1(1-q)[q+\varphi_1(1-q)]^u\} \\ &= \frac{\hat{k}(qs_1)s_1^{-1}}{q(1-s_1)+\hat{k}(s_1,q)(1-q)} \times \{q(1-s_1)(s_1q)^u + \varphi_1(1-q)[q+\varphi_1(1-q)]^u\} \\ &= \frac{\hat{k}(qs_1)s_1^{-1}\dfrac{\varphi_1}{q(1-s_1)+\varphi_1(1-q)}q(1-s_1)(s_1q)^u + \dfrac{\varphi_1(1-q)}{q(1-s_1)+\varphi_1(1-q)}\varphi_1[q+\varphi_1(1-q)]^u}{\dfrac{\varphi_1}{q(1-s_1)+\varphi_1(1-q)}\{q(1-s_1)+(1-q)\hat{k}(qs_1)\}}\end{aligned}$$

$$(4.25)$$

Άρα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$ *για* $v=1$ *γίνεται*

$$\psi(u) = \bar{G}_1(u) = \varphi_1[q+\varphi_1(1-q)]^u$$

Και

$$\psi(0) = \varphi_1$$

Επίσης για $\alpha = \frac{\varphi_1(1-s_1)}{q(1-s_1)+\varphi_1(1-q)}$*, η σχέση (4.25) μετατρέπεται σε*

$$\varphi_{1,1}(u) = k(qs_1)s_1^{-1}\frac{\psi(0)\alpha(s_1q)^u + (1-\alpha)\psi(u)}{\psi(0)\alpha + (1-\alpha)k(qs_1)}$$

4.1.2 Τελευταίος ενδιάμεσος χρόνος αναμονής πριν την χρεοκοπία

Σε αυτή την παράγραφο θα αναλύσουμε τον τελευταίο χρόνο αναμονής πριν την χρεοκοπία,

δηλαδή $W_{N(T)} = U(T-1) - R_{N(T)-1} + 1$, αντλώντας πληροφορία βάση των σχέσεων (4.23), (4.24).
Αν θέσουμε στην (4.24) $v = 1, s_1 = s, s_2 = s_3 = 1, s_4 = \frac{1}{s}$, μας δίνεται

$$C_1(s,1,1,1/s) = \frac{(1-q)\hat{k}(sq)\varphi_1(1-q)}{s(1-q)\varphi_1(1-q)(1-q)\hat{k}(q)} = \frac{\hat{k}(sq)}{s(1-q)\hat{k}(q)}$$

και

$$E[s^{W_{N(T)-1}} I(T<\infty) | U(0) = u] = C_1\left(s, \frac{1,1,1}{s}\right) \varphi_1(1-q)[q + \varphi_1(1-q)]^u = \frac{k(sq)}{sk(q)}\psi(u)$$

Στο μοντέλο αυτό του διακριτού χρόνου, δοθέντος ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι $\psi(u) = P(T < \infty | U(0) = u)$, μπορούμε να βρούμε την κατανομή του συνόλου $\{W_{N(T)} | T < \infty\}$, το οποίο είναι ανεξάρτητο από το αρχικό u πλεόνασμα , με την εξής σχέση

$$E[s^{W_{N(T)-1}} | T < \infty] = \frac{k(sq)}{sk(q)}$$

4.2 Συνδυασμοί Γεωμετρικών Κατανομών

4.2.1 Γενικευμένη συνάρτηση Gerber-Shiu

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε τα ύψη ζημιών τα οποία ακολουθούν μικτή γεωμετρική κατανομή, της οποίας η έκφραση

$$p(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j p_j(x), \qquad x \epsilon N \qquad (4.26)$$

με $\sum_{j=1}^{n} a_j = 1$ και

είναι μια $p_j(x) = (1-q_j)q_j^{x-1}, \quad j = 1,2,\dots,n$

$0 < q_j < 1$.

γεωμετρική

συνάρτηση , η συνάρτηση $p(x)$ ικανοποιεί την ακόλουθη σχέση

με Τότε για $x, y \epsilon \aleph$

$$p(x+y)=\sum_{j=1}^{n}\zeta_j(x)\rho_j(y)$$

στην οποία το $\zeta_j(x)=\alpha_j q_j^x\ ,\ j=1,2,\dots,n$

με
Επιπλέον

$$p_x(y)=\frac{p(x+y+1)}{P(x+1)}=\frac{\sum_{j=1}^{n}\zeta_j(x+1)\rho_j(y)}{P(x+1)}=\sum_{j=1}^{n}\zeta_j{}^*(x+1)\rho_j(y) \qquad (4.27)$$

$\zeta_j{}^*(x+1)=\frac{\zeta_j(x+1)}{P(x+1)}.$

Συνεπώς η συνάρτηση $p_x(y)$ είναι μια μίξη των $\rho_1(y),\rho_2(y),\dots,\rho_n(y)$, με αντίστοιχα βάρη $\zeta_j{}^*(x+1)$.

Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση ποινής έχει τη μορφή $w(x,y,z,r)=s_1^x s_2^y s_3^z s_4^r$. Άρα η σχέση (4.26) με τη βοήθεια της σχέσης (4.27) και της (3.4) γίνεται

$$\begin{aligned}
l_v(u)=&\sum_{y=1}^{\infty}\sum_{t=1}^{\infty}v^t w(t+u-1,y,u,u)k(t)p_t(y+u+t)\\
&+\sum_{y=1}^{\infty}\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}w(x+u,y,u,r+u)\frac{p(x+y+u+1)}{\bar{P}(x+1)}h_v^{(2)}(x,r|0)\\
&=\sum_{y=1}^{\infty}\sum_{x=0}^{\infty}v^t s_1^{t+u-1}s_2^y s_3^u s_4^u k(t)\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(1-q_j)q_j^{y+u+t-1}\\
&+\sum_{y=1}^{\infty}\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{x}s_1^{x+u}s_2^y s_3^u s_4^{r+u}\sum_{j=1}^{n}\zeta_j^*(x+1)\big(1-q_j\big)q_j^{y+u-1}h_v^{(2)}(x,r|0)\\
&=s_1^u s_3^u s_4^u\sum_{j=1}^{n}\frac{q_j^u\alpha_j(1-q_j)s_2}{1-q_j s_2}\frac{\hat{k}(vs_1q_j)}{s_1}\\
&+s_1^u s_3^u s_4^u\sum_{j=1}^{n}\frac{q_j^u(1-q_j)s_2}{1-q_j s_2}\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{x}\zeta_j^*(x+1)s_1^x s_4^r h_v^{(2)}(x,r|0)\\
&=s_1^u s_3^u s_4^u\sum_{j=1}^{n}\frac{q_j^u(1-q_j)s_2}{1-q_j s_2}\\
&\times\left\{\frac{\hat{k}\big(vs_1q_j\big)\alpha_j}{s_1}+\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{x}\zeta_j^*(x+1)s_1^x s_4^r h_v^{(2)}(x,r|0)\right\} \qquad (4.28)
\end{aligned}$$

Και εάν θέσουμε

$$\gamma_{v,j}(s_1,s_4)=\frac{k(vs_1q_j)\alpha_j}{s_1}+\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{x}\zeta_j^*(x+1)s_1^x s_4^r h_v^{(2)}(x,r|0)$$

, τότε η τελευταία σχέση εκφράζεται ως εξής

$$l_v(u) = s_1^u s_3^u s_4^u \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j^u (1 - q_j) s_2}{1 - q_j s_2} \gamma_{v,j}(s_1, s_4) \qquad (4.29)$$

Συνεπώς η γενικευμένη συνάρτηση Gerber-Shiu εκφράζεται

$$\begin{aligned} \varphi_v(u) &= \varphi_v \sum_{y=1}^{u} \varphi_v(u-y) f_v(y) + l_v(u) = \varphi_v \sum_{y=1}^{u} \varphi_v(u-y) \frac{1}{\varphi_v} \sum_{x=0}^{\infty} h_v(x, y|0) + l_v(u) \\ &= \sum_{y=1}^{u} \varphi_v(u-y) \sum_{x=0}^{\infty} h_v(x, y|0) + l_v(u) \\ &= \sum_{y=1}^{u} \varphi_v(u-y) \sum_{x=0}^{\infty} \frac{p(x+y+1)}{\bar{P}(x+1)} h_v(x|0) + l_v(u) \\ &= \sum_{y=1}^{u} \varphi_v(u-y) \left\{ \sum_{j=1}^{n} q_j^{y-1}(1-q_j) \right\} \left\{ \sum_{x=0}^{\infty} \zeta_j^*(x+1) h_v(x|0) \right\} + l_v(u) \qquad (4.30) \end{aligned}$$

,όπου $l_v(u) = s_1^u s_3^u s_4^u \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j^u (1-q_j) s_2}{1 - q_j s_2} \gamma_{v,j}(s_1, s_4)$.

Παίρνοντας γεννήτριες συναρτήσεις και στα δύο μέρη της σχέσης (4.30), έχουμε

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_v(u) &= \sum_{u=0}^{\infty} \varphi_v(u) z^u \\ &= \hat{\varphi}_v(u) \sum_{j=1}^{n} \frac{(1-q_j) z}{1 - q_j z} \sum_{x=0}^{\infty} \zeta_j^*(x+1) h_v(x|0) \\ &+ \sum_{j=1}^{n} \frac{(1-q_j) s_2}{(1 - q_j s_1 s_3 s_4)(1 - q_j s_2)} \gamma_{v,j}(s_1, s_4) \qquad (4.31) \end{aligned}$$

Λύνοντας ως προς την πιθανογεννήτρια $\hat{\varphi}_v(u)$ της γενικευμένης συνάρτησης G-S έχουμε

$$\hat{\varphi}_v(u) = \frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{(1-q_j) s_2}{(1 - q_j s_1 s_3 s_4)(1 - q_j s_2)} \gamma_{v,j}(s_1, s_4)}{1 - \sum_{j=1}^{n} \frac{(1-q_j) z}{1 - q_j z} \sum_{x=0}^{\infty} \zeta_j^*(x+1) h_v(x|0)} \qquad (4.32)$$

Μπορούμε τώρα να δείξουμε ότι η γενικευμένη εξίσωση Lundberg έχει τις ίδιες ρίζες με την ακόλουθη

$$\sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=1}^{\infty} z^y h_v(x|0) p_x(y) = 1 \qquad (4.33)$$

Το δεύτερο μέρος της εξίσωσης (4.32) μπορεί να εκφραστεί ως εξής, χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση,

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{(1-q_j)z}{1-q_jz}\sum_{x=0}^{\infty}\zeta_j^*(x+1)h_v(x|0)=\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=1}^{\infty}z^y h_v(x|0)p_x(y)$$

Άρα, ο αριθμητής της σχέσης (4.32) έχει ίδιες ρίζες $R_1, R_2, \dots R_n$ όπως και η γενικευμένη εξίσωση Lundberg $\frac{\hat{k}(v,s)}{\hat{p}(s)}=1$. Συνεπώς η σχέση (4.32) μπορεί να γραφεί με τον ακόλουθο τρόπο

$$\hat{\varphi}_v(z)=\frac{\sum_{j=1}^{n}\frac{(1-q_j)s_2}{(1-q_js_1s_3s_4)(1-q_js_2)}\gamma_{v,j}(s_1,s_4)}{1-\sum_{j=1}^{n}\frac{(1-q_j)z}{1-q_jz}\sum_{x=0}^{\infty}\zeta_j^*(x+1)h_v(x|0)}=\frac{\hat{\alpha}_v^*(z)}{\hat{\alpha}_v(z)}\prod_{j=1}^{n}\frac{1-q_jz}{1-q_js_1s_3s_4} \qquad (4.34)$$

με

$$\alpha_v^*(z)=\sum_{j=1}^{n}\gamma_{v,j}(s_1,s_4)\frac{(1-q_j)s_2}{1-q_js_2}A_{-j}(s_1s_3s_4z) \qquad (4.35)$$

και

$$\alpha_v(z)=\prod_{j=1}^{n}(1-q_jz)-\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=1}^{\infty}\zeta_j^*(x+1)h_v(x|0)(1-q_j)zA_{-j}(z) \qquad (4.36)$$

$$A_{-j}(z)=\prod_{i=1,i\neq j}^{n}1-q_jz$$

Έστω ότι οι ρίζες $R_1, R_2, \dots, R_n$ είναι διακεκριμένες. Τότε χρησιμοποιώντας την πολυωνυμική εξίσωση Lagrange, οι δύο τελευταίες σχέσεις μεταφράζονται ως εξής

$$\alpha_v(z)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_v(R_j)\prod_{i=1}^{n}\frac{R_i-z}{R_i-R_j} \qquad (4.37)$$

και αντίστοιχα

$$\alpha_v(z)=\prod_{j=1}^{n}\frac{R_j-z}{R_j} \qquad (4.38)$$

Παίρνοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις και αντικαθιστώντας τες στην γενικευμένη συνάρτηση $\hat{\varphi}(z)$ όπως εκφράζεται στην σχέση (4.34), έχουμε

$$\varphi_v(z) = \frac{\eta_v(z)\prod_{i=1}^{n} R_i}{\prod_{j=1}^{n}(R_j - z)\prod_{i=1}^{n}(1 - q_j s_1 s_3 s_4 z)} \qquad (4.39)$$

όπου

$$\eta_v(z) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_v(R_j) \prod_{i=1}^{n} \frac{R_i - z}{R_i - R_j} \prod_{i=1}^{n} (1 - q_i z)$$

Με την μέθοδο των μερικών κλασμάτων, η σχέση (4.39) μετασχηματίζεται

$$\varphi_v(z) = \sum_{j=1}^{n} \xi_v(j) \frac{R_j}{R_j - z} + \sum_{j=1}^{n} \kappa_v(j) \frac{1}{1 - q_j s_1 s_3 s_4 z} \qquad (4.40)$$

με

$$\xi_v(j) = \frac{\eta_v(R_j)\prod_{i=1}^{n} R_i}{\prod_{i=1}^{n}(R_i - R_j)\prod_{k=1}^{n}(1 - q_j s_1 s_3 s_4 R_j)} \qquad (4.41)$$

και

$$\kappa_v(j) = \frac{\eta_v\left(\frac{1}{q_j s_1 s_3 s_4}\right)\prod_{i=1}^{n} R_i}{\prod_{j=1}^{n}\left(R_j - \frac{1}{q_j s_1 s_3 s_4}\right)\prod_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{q_i}{q_j}\right)} \qquad (3.42)$$

Συνεπώς προκύπτει η ακόλουθη πρόταση από τις παραπάνω σχέσεις

<u>*Πρόταση 4.4*</u>

Σε ένα μοντέλο Sparre Andersen διακριτού χρόνου όπου τα ύψη ζημιών ακολουθούν γεωμετρική κατανομή με $p(y) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j p_j$, η γενικευμένη συνάρτηση Gerber-Shiu ικανοποιεί την παρακάτω έκφραση

$$\varphi_v(u) = \sum_{j=1}^{n} \xi_v(j) R_j^{-u} + \sum_{j=1}^{n} (q_j s_1 s_3 s_4)^{u} \qquad 4.43$$

με τις μεταβλητές $\xi_v(j)$ και $\kappa_v(j)$ να δίνονται στις σχέσεις (4.41) και (4.42) αντίστοιχα. ( )

4.2.2. Ειδικές περιπτώσεις

Θεωρούμε ότι η συνάρτηση ποινής παίρνει την μορφή $w(x,y,z,r) = w_{14}(x,r)$. Τότε η (4.43) γίνεται σχέση

$$\varphi_{v,14}(u) = \sum_{j=1}^{n} \xi_{v,14}(j) R_j^{-u} + \sum_{j=1}^{n} \kappa_{v,14}(j)(q_j s_1 s_4)^{u} \qquad (4.44)$$

, όπου

$$\xi_{v,14}(j) = \frac{\eta_v(R_j)\prod_{i=1} R_i}{\prod_{i=1}(R_i - R_j)\prod_{k=1}(1 - q_j s_1 s_4 R_j)}$$

και

$$\kappa_{v,14}(j) = \frac{\eta_v\left(\frac{1}{q_j s_1 s_4}\right)\prod_{i=1} R_i}{\prod_{j=1}\left(R_j - \frac{1}{q_j s_1 s_4}\right)\prod_{i=1}\left(1 - \frac{q_i}{q_j}\right)}$$

Χρησιμοποιώντας τις ίδιες μεθόδους με αυτές που αναλύσαμε το γεωμετρικό μοντέλο, παίρνουμε τον χρόνο κατά τον οποίο συμβαίνει η πρώτη ζημιά καθώς και το ύψος της. Θέτουμε συνάρτηση ποινής $w(x,y,z,r) = w_{14}(x,r) = s_1^x s_4^r$

$$\begin{aligned}
\varphi_{v,14}(u) &= \sum_{t=1}^{\infty}\sum_{y=u+t+1}^{\infty} v^t s_1^{u+t-1} s_4^{u} \sum_{j=1}^{m} a_j(1-q_j)q_j^{y-1}k(t) \\
&+ \sum_{t=1}^{\infty}\sum_{y=1}^{u+t} v^t \varphi_{v,14}(u+t-y)\sum_{j=1}^{m} a_j(1-q_j)q_j^{y-1}k(t) \\
&= \sum_{t=1}^{\infty} v^t k(t) \times \left\{\sum_{y=u+t+1}^{\infty} s_1^{u+t-1} s_4^{u} p(y) + \sum_{y=1}^{u+t} \varphi_{v,14}(u+t-y)p(y)\right\} \qquad 4.45
\end{aligned}$$

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι $\tau_v(u) = \sum_{y=1}^{u} \varphi_{v,14}(u-y)\, p(y)$, τότε η σχέση (4.45) μετατρέπεται την , και από τις σχέσεις (4.10) και (4.26) έχουμε

( )

σε

$$\varphi_{v,14}(u) = \sum_{t=1}^{\infty} v^t k(t) \{ \sum_{y=u+t+1}^{\infty} s_1^{u+t-1} s_4^u p(y) + \tau_v(u+\tau)\} \qquad \mathbf{(4.46)}$$

Από την σχέση (4.13) προκύπτει

$$\sum_{y=t+1}^{\infty} s_1^{t-1} s_4^u \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (\mathbf{1} - q_j) q_j^{y-1} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j s_4^u \frac{(s_1 q_j)^t}{s_1}$$

Και από την (4.44) με βάση την προηγούμενη εξίσωση

$$\begin{aligned}
\hat{\tau}(z) &= \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{y=1}^{u} \varphi_{v,14}(u-y) p(y) z^u = \hat{\varphi}_{v,14}(z) \hat{p}(z) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \xi_{v,14}(j) \frac{R_j}{R_j - z} \hat{p}(z) + \sum_{j=1}^{n} \kappa_{v,14}(j) \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} - q_j s_1 s_3 s_4 z} \hat{p}(z) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \xi_{v,14}(j) \frac{R_j}{R_j - z} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{(\mathbf{1} - q_i) z}{\mathbf{1} - z q_i} + \sum_{j=1}^{n} \kappa_{v,14}(j) \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} - q_j s_1 s_4 z} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{(\mathbf{1} - q_i) z}{\mathbf{1} - z q_i} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \xi_{v,14}(j) \left[\hat{p}(R_j) \frac{R_j}{R_j - z} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} - z q_i} \hat{p}_i(R_j) \right] \\
&+ \sum_{j=1}^{n} \kappa_{v,14}(j) \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\mathbf{1} - q_i}{q_j s_1 s_4 - q_i} \left\{ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} - q_j s_1 s_4 z} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} - z q_i} \right\} \qquad \mathbf{(4.47)}
\end{aligned}$$

Αντιστρέφοντας την τελευταία σχέση

$$\begin{aligned}
\tau(t) = \sum_{j=1}^{n} \xi_{v,14}(j) &\left[\hat{p}(R_j) R_j^{-1} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i q_i^t \hat{p}_i(R_j) \right] \\
&+ \sum_{j=1}^{n} \kappa_{v,14}(j) \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{(\mathbf{1} - q_i) z}{q_j s_1 s_4 - q_i} \left\{ (q_j s_1 s_4)^t - q_i^t \right\} \qquad \mathbf{(4.48)}
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας την (4.48) στην (4.46) έχουμε

$$\varphi_{v,14}(u) = \sum_{t=1}^{\infty} v^t k(t) \left\{ \sum_{j=1}^{n} \xi_{v,14}(j) \left[\hat{p}(R_j) R_j^{-1} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i q_i^t \hat{p}_i(R_j) \right] \right.$$
$$\left. + \sum_{j=1}^{n} \kappa_{v,14}(j) \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{(\mathbf{1}-q_i)z}{q_j s_1 s_4 - q_i} \left\{ (q_j s_1 s_4)^t - q_i^t \right\} \right\} + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \hat{k}(v s_1 q_j) s_1^{u-1} s_4^u q_j^u$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \xi_{v,14}(j)\, \hat{p}(R_j) R_j^{-1} \hat{k}\left(\frac{v}{R_j}\right) - \sum_{j=1}^{n} \xi_{v,14}(j) \sum_{i=1}^{n} \alpha_i q_i^t \hat{p}_i(R_j)\, \hat{k}(v q_i)$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} \kappa_{v,14}(j) \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{(\mathbf{1}-q_i)}{q_j s_1 s_4 - q_i} (q_j s_1 s_4)^u \hat{k}(v q_j s_1 s_4)$$
$$- \sum_{j=1}^{n} \kappa_{v,14}(j) \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{(\mathbf{1}-q_i)}{q_j s_1 s_4 - q_i} q_i^u\, \hat{k}(v q_i) + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \hat{k}(v s_1 q_j) s_1^{u-1} s_4^u q_j^u \qquad (\mathbf{4.49})$$

Όμως έχουμε θεωρήσει ότι R_j είναι οι ρίζες της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg, άρα $\hat{k}\left(\frac{v}{R_j}\right)\hat{p}(R_j) = \mathbf{1}$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (4.44) και (4.49) έχουμε

$$\kappa_{v,14}(j) - \kappa_{v,14}(j) \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{(\mathbf{1}-q_i)}{q_j s_1 s_4 - q_i} k(v q_j s_1 s_4) - \alpha_j k(v s_1 q_j) s_1^{-1} = \mathbf{0}$$

και

$$\sum_{j=1}^{n} \xi_{v,14}(j) p_i(R_j) + \sum_{j=1}^{n} \kappa_{v,14}(j) \frac{(\mathbf{1}-q_i)}{q_j s_1 s_4 - q_i} = \mathbf{0}$$

Συνεπώς

$$\kappa_{v,14}(j) = \frac{\alpha_j k(v s_1 q_j) s_1^{-1}}{\mathbf{1} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{(\mathbf{1}-q_i)}{q_j s_1 s_4 - q_i} k(v q_j s_1 s_4)}$$

Μπορούμε να αντλήσουμε αντίστοιχη σχέση λύνοντας ως προς $\xi_{v,14}(j)$ στις παραπάνω σχέσεις με την ανάλογη διαδικασία.

Κεφάλαιο 5

Χρονικά εξαρτημένα ύψη ζημιών

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με την χρονική εξάρτηση ανάμεσα στις μεταβλητές W_i, Y_i, όπου είναι οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης ζημιών και τα ύψη ζημιών αντίστοιχα. Όμως το ζευγάρι $\{W_i, Y_i\}$ διατηρεί την ιδιότητα ανεξαρτησίας του και άρα το απόθεμα διατηρεί την δομή του μοντέλου Sparre-Andersen όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο. Στην πραγματικότητα, η συνθήκη της εξάρτησης είναι περισσότερο ρεαλιστική από την προηγούμενη της ανεξαρτησίας, αφού οι ζημιές ενός χαρτοφυλακίου είναι άμεσα συνδεδεμένες με τον χρόνο που συμβαίνει η τελευταία ζημιά. Επιπλέον κάθε οριακή ή από κοινού συνάρτηση πιθανότητας που θα μελετήσουμε σε αυτό το κεφάλαιο μπορεί να εκφραστεί και να υπολογιστεί σύμφωνα με τις αντίστοιχες συναρτήσεις πιθανότητας για τυχαία μεταβλητή u, όπως και στο Θεώρημα 3.1.

5.1 Εισαγωγή του μοντέλου

Έχουν μελετηθεί αρκετά μοντέλα με βάση την εξάρτηση των μεταβλητών W_i, Y. Εδώ παραθέτουμε μερικά άρθρα που αναφέρονται σε αυτά, καταλήγοντας σε αυτό που θα χρησιμοποιήσουμε στην συγκεκριμένη εργασία.

- 2014 - Cheung and Woo, στο οποίο αναλύεται μια μορφή εξάρτησης ανάμεσα στον αριθμό ζημιών και τον ενδιάμεσο χρόνο εμφάνισής τους.
- 2012 - Willmot and Woo, αντίστοιχα με το παραπάνω
- 2009 - Badescu, στο οποίο αναλύεται η μορφή εξάρτησης από μια διμερή κατανομή Phase-type
- 2006 – Boudreault, στην οποία έχει επιλεγεί μια μορφή της εκφυλισμένης κατανομής Poisson, με συγκεκριμένη από κοινού κατανομή του ύψους ζημιάς και του ενδιάμεσου χρόνου
- 2006 – Albrecher and Teugels, οι οποίοι χρησιμοποίησαν την εκθετική κατανομή για το ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο
- 2004 – Albrecher and Boxma, οι οποίοι χρησιμοποίησαν μια τυχαία εξάρτηση ανάμεσα στα ύψη ζημιών και τα διαστήματα ανάμεσά τους.

Σε αυτό το σημείο θα θεωρήσουμε ότι ο ενδιάμεσος χρόνος εμφάνισης ζημιών ακολουθεί ένα συνδιασμό από γεωμετρικές κατανομές, που είναι μια ειδική περίπτωση της διακριτής κατανομής του Coxian. Όπως και ο Woo (2012), θεωρούμε ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν μια διακριτή κατανομή K_n με την πιθανογεννήτρια της συνάρτησης κατανομής $k(x)$ να δίνεται από τον τύπο

$$k(s) = \frac{s\tau(s)}{\prod_{i=1}^{m}(1 - sq_i)^{n_i}} \qquad (5.1)$$

με $0 < q_i < 1$, $i = 1,2,3, \dots, m$. Άρα το $\tau(s)$ είναι ένα πολυώνυμο μικρότερο ή ίσο του $n - 1$ βαθμού, όπου $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_m$.

Γνωρίζουμε ότι η οικογένεια κατανομών K_n περιέχει πολλές κατανομές ως ειδικές περιπτώσεις της, όπως την μετατοπισμένη αρνητική διωνυμική κατανομή και γραμμικούς συνδυασμούς από n γεωμετρικές κατανομές(καθώς και μίξη αυτών). Άλλα πιο απλοποιημένα μοντέλα για την οικογένεια κατανομών K_n περιέχουν το κλασικό μοντέλο Poisson με την εκφυλισμένη κατανομή, μια ειδική περίπτωση αυτής, την ανανεωτική διαδικασία Erlang, το μοντέλο του Erlang, μικτή κατανομή Erlang στην οποία οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν γεωμετρική κατανομή και το γενικευμένο μοντέλο κινδύνου του Erlang, που περιγράφεται από τους Gerber-Shiu. Όλες οι παραπάνω περιπτώσεις αναλύονται στα άρθρα που αναφέραμε στην αρχή της παραγράφου.

Στο μοντέλο που θα περιγράψουμε εμείς παίρνουμε ως παραδοχή $n_i = 1$ στην σχέση (5.1). Άρα η $k(t)$ εκφράζεται σαν ένας συνδυασμός γεωμετρικών κατανομών, με συνάρτηση πιθανότητας

$$k(t) = \sum_{i=1}^{m} p_i(1 - q_i)q_i^{t-1} \ , \ t \in \aleph \qquad (5.2)$$

,

με $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$, $0 < p_i < 1$, $i = 1,2, \dots, m$. Η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της $k(t)$ δίνεται από

$$\hat{k}(s) = \sum_{i=1}^{m} p_i^* \frac{s q_i}{1 - s q_i}$$

όπου η σταθερά $p_i^* = \frac{p_i(1-q_i)}{q_i}$.

Επίσης, θεωρούμε ότι η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των ενδιάμεσων χρόνων και των υψών ζημιών, (W) (Y) αντίστοιχα, έχει την ακόλουθη δεσμευμένη μορφή

$$p(y,t) = p(y|t)k(t) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i(y) n_{q_i}(t) \qquad (5.3)$$

με

$$n_{q_i}(t) = \frac{(1 - q_i)q_i^t}{1 - (1 - q_i)} = (1 - q_i)q_i^{t-1} \qquad (5.4)$$

είναι η συνάρτηση μιας μετατοπισμένης γεωμετρικής κατανομής. Τότε η οριακή συνάρτηση πιθανότητας των ενδιάμεσων χρόνων ζημιών δίνεται από

$k(t) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i(s) n_{q_i}(t)$, και $\hat{\gamma}_i(s) = \sum_{y=1}^{\infty} s^y \gamma_i(y)$.

5.2. Κλασσική συνάρτηση Gerber-Shiu

Με βάση τις συνθήκες του χρόνου και του ύψους της πρώτης ζημιάς, η σχέση (5.1) ικανοποιεί την

$$\varphi_{v,12}(u) = \beta_v(u) + \sum_{t=1}^{\infty} v^t \tau_v(u + t) \qquad (5.5)$$

, όπου

- $\beta_v(u) = \sum_{t=1}^{\infty}\sum_{y=u+t+1}^{\infty} v^t w_{12}(u+t-1, y+u+t)p(y,t)$
- $\tau_v(x) = \sum_{y=1}^{x} \varphi_{v,12}(x-y)p(y,t)$

Αντικαθιστώντας την (5.3) στην (5.5) έχουμε

$$\varphi_{v,12}(u) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{\infty} v^t \lambda_{i,v}(u+t) n_{q_i}(t) \qquad (5.6)$$

με

$$\lambda_{i,v}(x) = a_i(x) + \sum_{y=1}^{x} \varphi_{v,12}(x-y)\gamma_i(y) \qquad (5.7)$$

και

$$a_i(x) = \sum_{y=x+1}^{\infty} \varphi_{12}(x-1, y-x)\gamma_i(y) \qquad (5.8)$$

Στη συνέχεια, θα θεωρήσουμε μια συνάρτηση $f_t(x)$ με πιθανογεννήτρια συνάρτηση $\hat{f}_t(s) = \sum_{u=0}^{\infty} s^u f_t(u)$, και επίσης θεωρούμε την γεννήτρια συνάρτηση $\sum_{t=1}^{\infty} f_t(u+t)h(t)$, $u\epsilon\aleph$. Άρα προκύπτει

$$\sum_{u=0}^{\infty} s^u \sum_{t=1}^{\infty} u^t f_t(u+t)h(t) = \sum_{t=1}^{\infty} (\frac{v}{s})^t h(t)\left\{\sum_{u=0}^{\infty} s^{u+t} f_t(u+t)\right\} = \sum_{t=1}^{\infty} (\frac{v}{s})^t h(t)\left\{\hat{f}_t(s) - \sum_{u=0}^{t-1} s^t f_t(u)\right\}$$
$$= \sum_{t=1}^{\infty} (\frac{v}{s})^t h(t)\hat{f}_t(s) - f_v(s) \qquad (5.9)$$

, όπου $\sum$

$$f_v(s) = \sum_{t=1}^{\infty}\sum_{u=0}^{t-1} s^{u-t} v^t f_t(u)h(t)$$

Τότε βάση της (5.9) οδηγούμαστε στην σχέση

$$\sum_{u=0}^{\infty} s^u \sum_{t=1}^{\infty} u^t \lambda_{i,v}(u+t) n_{q_i}(t) = \lambda_{i,v}(s) n_{q_i}(\frac{u}{s}) - \lambda_{i,v}^*(s) \qquad (5.10)$$

Αν αντικαταστήσουμε από την σχέση (5.7)

$$\lambda_{i,v}(s) = \sum_{u=0}^{\infty} s^u \lambda_{i,v}(x) = a_i(s) + \varphi_{v,12}(s)\gamma_i(s)$$

Στην οποία ισχύουν οι εξής σχέσεις από ορισμό

$$\hat{a}_i(s) = \sum_{u=1}^{\infty} s^u a_i(u)$$

$$\hat{n}_{q_i}(s) = \sum_{u=1}^{\infty} s^u n_{q_i}(u) \qquad \textbf{(5.11)}$$

$$\lambda_{i,v}^*(s) = \sum_{t=1}^{\infty}\sum_{u=0}^{t-1} s^{u-t} v^t \lambda_{i,v}(u+t) n_{q_i}(t) \qquad \textbf{(5.12)}$$

Η τελευταία σχέση μπορεί να γραφεί ως εξής με τη βοήθεια της (5.4)

$$\lambda_{i,v}^*(s) = \sum_{t=1}^{\infty}\sum_{u=0}^{t-1} s^{u-t} v^t \lambda_{i,v}(u)\{(1-q_i)q_i^{t-1}\} = \frac{1-q_i}{q_i}\sum_{u=0}^{\infty} s^u \lambda_{i,v}(u)\left\{\sum_{t=u+1}^{\infty}(\frac{vq_i}{s})^t\right\}$$
$$= \frac{1-q_i}{q_i}\sum_{u=0}^{\infty} s^u \lambda_{i,v}(u)\frac{(\frac{vq_i}{s})^{u+1}}{1-\frac{vq_i}{s}} = \frac{1-q_i}{q_i}\sum_{u=0}^{\infty} \lambda_{i,v}(u)\frac{(vq_i)^{u+1}}{s-vq_i} \qquad \textbf{(5.13)}$$

Δηλαδή έχουμε

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_{i,v}^*(s) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\theta_i}{s-vq_i} \qquad \textbf{(5.14)}$$

, όπου

$$\theta_i = \frac{1-q_i}{q_i}\sum_{u=0}^{\infty} (vq_i)^{u+1}\lambda_{i,v}(u)$$

Συνεπώς, από τις σχέσεις (5.10) και (5.14), η γεννήτρια συνάρτηση της (5.6) δίνεται από τον τύπο

$$\hat{\varphi}_{v,12}(s) = \sum_{i=1}^{m}\{\hat{a}_i(s) + \hat{\varphi}_{v,12}(s)\hat{\gamma}_i(s)\}\hat{n}_{q_i}\binom{v}{s} - \sum_{i=1}^{m}\frac{\theta_i}{s-vq_i}$$
$$= \sum_{i=1}^{m}\{\hat{a}_i(s) + \hat{\varphi}_{v,12}(s)\hat{\gamma}_i(s)\}\hat{n}_{q_i}\binom{v}{s} - \frac{Q_v(s)}{\prod_{i=1}^{m}(s-vq_i)} \qquad \textbf{(5.15)}$$

με

$$Q_v(s) = \{\prod_{i=1}^{m}(s-vq_i)\}\sum_{i=1}^{m}\frac{\theta_i}{s-vq_i}$$

, το οποίο είναι ένα πολυώνυμο με βαθμό μικρότερο ή ίσο του $m-1$. Λύνοντας ως προς την γεννήτρια συνάρτηση της γενικευμένης Gerber-Shiu $\hat{\varphi}_{v,12}(s)$ έχουμε

$$\hat{\varphi}_{v,12}(s)(\mathbf{1}-E[v^{W}s^{Y-W}]) = \sum_{i=1}^{m}\{\hat{\alpha}_i(s)\}\hat{n}_{q_i}\binom{v}{s} - \frac{Q_v(s)}{\prod_{i=1}^{m}(s-vq_i)}$$
$$= \sum_{i=1}^{m}\{\hat{\alpha}_i(s)\}\frac{v(\mathbf{1}-q_i)}{s-vq_i} - \frac{Q_v(s)}{\prod_{i=1}^{m}(s-vq_i)} \qquad (\mathbf{5.16})$$

με

$$E[v^{W}s^{Y-W}] = \sum_{i=1}^{m}\{\hat{\gamma}_i(s)\}\hat{n}_{q_i}\binom{v}{s} \qquad (\mathbf{5.17})$$

Θεωρούμε ότι η σχέση (5.17) έχει m ρίζες, τις $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$, όπως αποδεικνύεται προηγουμένως στην εξίσωση του Lundberg. Ισχύει ότι $|\hat{\varphi}_v(\rho_k)| < \infty$, $k = \mathbf{1},\mathbf{2}, \dots, m$.

$$Q_v(\rho_k) = \left\{\prod_{\iota=1}^{m}(\rho_k - vq_i)\right\}\sum_{i=1}^{m}\{\hat{\alpha}_i(\rho_k)\}\frac{v(\mathbf{1}-q_i)}{s-vq_i}$$
$$= \left\{\prod_{\iota=1}^{m}(\rho_k - vq_i)\right\}\sum_{i=1}^{m}\left\{\hat{\alpha}_i(\rho_k)\hat{n}_{q_i}\binom{v}{\rho_k}\right\} \qquad (\mathbf{5.18}$$

Δείξαμε ότι το $Q_v(s)$ είναι ένα πολυώνυμο με βαθμό μικρότερο ή ίσο του $m-\mathbf{1}$. Τότε έχουμε

)

$$Q_v(s) = \sum_{k=0}^{m-1} q_v(k)s^k = \sum_{k=1}^{m} Q_v(\rho_k)\prod_{i=1}^{m}\frac{s-\rho_i}{\rho_k-\rho_i} \qquad (\mathbf{5.19})$$

Άρα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$\varphi_{v,12}(s) = \frac{\sum_{i=1}^{m}\{\alpha_i(\rho_k)n_{q_i}\binom{v}{\rho_k}\} - \frac{Q_v(s)}{\prod_{i=1}^{m}(s-vq_i)}}{\mathbf{1}-\sum_{i=1}^{m}\{\gamma_i(s)\}n_{q_i}\binom{v}{s}} \qquad (\mathbf{5.20})$$

, όπου η $Q_v(s)$ δόθηκε παραπάνω από την σχέση (5.19).

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι $\varphi_{v,12}(s^{-1}) = \sum_{u=0}^{\infty} s^{-u}\varphi_{v,12}(u)$. Τότε χρησιμοποιώντας το $\varphi_{v,12}(s^{-1})$ στην σχέση (4.20) , προκύπτει ότι

$$\varphi_{v,12}(\mathbf{0}) = \lim_{s\to\infty} \hat{\varphi}_{v,12}(s^{-1}) = \frac{\lim_{s\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\left\{\hat{\alpha}_i(s^{-1})\hat{n}_{q_i}(vs)\right\} - \lim_{s\to\infty} \frac{Q_v(s^{-1})}{\prod_{i=1}^{m}(s^{-1}-vq_i)}}{\mathbf{1} - \lim_{s\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\{\hat{\gamma}_i(s^{-1})\}\hat{n}_{q_i}(vs)}$$

αφού

$$\lim_{s\to\infty} \alpha_i(s^{-1}) = \lim_{s\to\infty} \sum_{u=0}^{\infty} s^{-u}\alpha_i(u) = \mathbf{0}$$

Τότε έχουμε

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \{\alpha_i(s^{-1})n_{q_i}(vs)\} = \mathbf{0}$$

Αντίστοιχα το παραπάνω επιχείρημα ισχύει και για το $\gamma_i(s^{-1})$ του παρονομαστή, δηλαδή

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \{\gamma_i(s^{-1})\}n_{q_i}(vs) = \mathbf{0}$$

Άρα από την (5.19) λέμε ότι

$$\varphi_{v,12}(\mathbf{0}) = -\lim_{s\to\infty} \frac{Q_v(s^{-1})}{\prod_{i=1}^{m}(s^{-1}-vq_i)} = -\lim_{s\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{m-1} s^{-k}q_v(k)}{\prod_{i=1}^{m}(s^{-1}-vq_i)} = -\frac{q_v(\mathbf{0})}{\prod_{i=1}^{m}(-vq_i)}$$
$$= \frac{\mathbf{1}}{\prod_{i=1}^{m}(vq_i)} \sum_{k=1}^{m} Q_v(\rho_k) \prod_{i=1}^{m} \frac{\rho_i}{\rho_k - \rho_i} \qquad (5.21)$$

Όπως στη σχέση (5.18), αντικαθιστώ το $Q_v(\rho_k)$ στην (5.21) και προκύπτει

$$\varphi_{v,12}(\mathbf{0}) = \frac{\prod_{i=1}^{m}\rho_i}{\prod_{i=1}^{m} vq_i} \sum_{k=1}^{m} \frac{\{\prod_{i=1}^{m}(\rho_k - vq_i)\}\sum_{i=1}^{m}\left\{\hat{\alpha}_i(\rho_k)\hat{n}_{q_i}(vs)\right\}}{\rho_k \prod_{i=1, i\neq k}^{m}(\rho_k - \rho_i)}$$

Δηλαδή,

$$\varphi_{v,12}(\mathbf{0}) = \frac{\prod_{i=1}^{m}\rho_i}{\prod_{i=1}^{m} vq_i} \sum_{k=1}^{m} \xi_k \rho_k^{-1} \sum_{i=1}^{m} \{\alpha_i(\rho_k)n_{q_i}(\frac{v}{\rho_k})\} \qquad (5.22)$$

με

$$\xi_k = \frac{\prod_{i=1}^{m}(\rho_k - vq_i)}{\prod_{i=1, i\neq k}^{m}(\rho_k - \rho_i)}$$

Επιπλέον μπορούμε να εκφράσουμε την (5.8) ως εξής

$$\hat{a}_i(s) = \sum_{x=1}^{\infty} s^x a_i(x) = \sum_{x=1}^{\infty} s^x \sum_{y=1}^{\infty} w_{12}(x-\mathbf{1},y)\gamma_i(x+y)$$
$$= \sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=1}^{\infty} s^{x+1} w_{12}(x,y)\gamma_i(x+y+\mathbf{1}) \qquad (5.23)$$

Εάν αντικαταστήσουμε την σχέση (5.23) στην (5.22) τότε προκύπτει

$$\varphi_{v,12}(\mathbf{0}) = \frac{\prod_{i=1}^{m}\rho_i}{\prod_{i=1}^{m} v q_i} \sum_{k=1}^{m} \xi_k \sum_{i=1}^{m} \left\{ \hat{n}_{q_i} \binom{v}{\rho_k} \right\} \left\{ \sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=1}^{\infty} {\rho_k}^x w_{12}(x,y)\gamma_i(x+y+\mathbf{1})\right\} \qquad (5.24)$$

Όμως όπως έχουμε δείξει στο δεύτερο κεφάλαιο, ισχύει

$$\varphi_{v,12}(u) = \sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=1}^{\infty} w_{12}(x,y) h_v(x,y|u)$$

Συγκρίνοντας την τελευταία σχέση με την (5.24) καταλήγουμε στα ακόλουθα συμπεράσματα.

Πρόταση 5.1

Σε ένα μοντέλο διακριτού χρόνου Sparre Andersen όπου οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης ζημιών ακολουθούν ένα συνδυασμό από γεωμετρικές κατανομές με συνάρτηση κατανομής $p(y) = (\mathbf{1}-q)q^{y-1}$,*η ελλειμματική από κοινού συνάρτηση πιθανότητας του πλεονάσματος πριν από την χρεοκοπία και το έλλειμμα κατά τη διάρκεια αυτής (με μηδενικό αρχικό απόθεμα), δίνεται από*

$$h_v(x,y|\mathbf{0}) = \frac{\prod_{i=1}^{3}\rho_i}{\prod_{i=1}^{3} v q_i} \sum_{k=1}^{m} \xi_k \sum_{i=1}^{m} \{n_{q_i}\binom{v}{\rho_k}\}\gamma_i(x+y+\mathbf{1})\rho_k^x \quad , \qquad x\epsilon N \,, y\epsilon N.$$

Πρόταση 5.2

Σε ένα μοντέλο διακριτού χρόνου Sparre Andersen όπου οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης ζημιών ακολουθούν ένα συνδυασμό από γεωμετρικές κατανομές με συνάρτηση κατανομής $p(y) = (\mathbf{1}-q)q^{y-1}$, *η οριακή συνάρτηση πιθανότητας του αποθέματος με μηδενικό αρχικό κεφάλαιο δίνεται από*

$$h_v(x|\mathbf{0}) = \frac{\prod_{i=1}^{3}\rho_i}{\prod_{i=1}^{3} v q_i} \sum_{k=1}^{m} \xi_k \sum_{i=1}^{m} \{n_{q_i}\binom{v}{\rho_k}\}\rho_k^x \sum_{y=1}^{\infty} \gamma_i(x+y+\mathbf{1}) \quad , \quad x \in N$$

Σε αυτό το σημείο θα ορίσουμε μια νέα τυχαία μεταβλητή, την οποία εισήγαγαν πρώτοι οι Dickson – Hipp το 2001 και μεταγενέστερα ανέφερε ο Li το 2005. Η μεταβλητή αυτή ονομάζεται Dickson

T_r, συμβολίζεται με T_r

$$T_r h(y) = \sum_{x=y}^{\infty} r^{x-y} h(x) = \sum_{x=0}^{\infty} r^{x} h(x+y) \quad , y \epsilon N \qquad \textbf{(5.25)}$$

Τότε η μεταβλητή της σχέσης (3.8), $\varphi_v = \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=1}^{\infty} h(x, y|\mathbf{0})$, με τη βοήθεια της παραπάνω σχέσης,

$$\varphi_v = \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=1}^{\infty} h(x, y|\mathbf{0}) = \frac{\prod_{i=1}^{m} \rho_i}{\prod_{i=1}^{m} v q_i} \sum_{k=1}^{m} \xi_k \sum_{i=1}^{m} \left\{ \hat{n}_{q_i} \binom{v}{\rho_k} \right\} \sum_{y=1}^{\infty} T_{p_k} \gamma_i (y + \mathbf{1})$$

and Hipp και η συνάρτησή της εκφράζεται μέσα από τη σχέση

μετατρέπεται σε

Συνεπώς βρίσκουμε ότι η συνάρτηση πιθανότητας των υψών στο συγκεκριμένο μοντέλο, δίνεται από την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 5.3

Σε ένα μοντέλο διακριτού χρόνου Sparre Andersen όπου οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης ζημιών ακολουθούν ένα συνδυασμό από γεωμετρικές κατανομές με συνάρτηση κατανομής

$p(y) = (\mathbf{1} - q) q^{y-1}$, *η*

$$f_v(y) = \frac{\mathbf{1}}{\varphi_v} \sum_{x=0}^{\infty} h_v(x, y|\mathbf{0}) = \frac{\prod_{i=1}^{m} \rho_i}{\prod_{i=1}^{m} v q_i} \sum_{k=1}^{m} \xi_k \sum_{i=1}^{m} \left\{ \hat{n}_{q_i} \binom{v}{\rho_k} \right\} T_{p_k} \gamma_i (y + \mathbf{1}) \quad , \qquad y \epsilon N$$

συνάρτηση πιθανότητας των υψών δίνεται από

Κεφάλαιο 6

6.1 Χρονικά εξαρτημένο γενικευμένο μοντέλο Sparre Andersen με υστέρηση πρώτης ζημιάς

Μέχρι στιγμής όλες οι περιπτώσεις που αναλύσαμε είχαν ως κοινό χαρακτηριστικό ότι η πρώτη ζημιά συμβαίνει τη χρονική στιγμή $t = 0$, άρα και οι κατανομές όλων των ενδιάμεσων χρόνων είναι ίδιες. Πάραυτα οι απαιτήσεις μιας επιχείρησης προϋπάρχουν πριν ξεκινήσουμε εμείς τις δικές μας παρατηρήσεις στο $t = 0$ και έτσι η χρονική στιγμή που συμβαίνει η πρώτη ζημιά μπορεί να μην ακολουθεί την κατανομή που ακολουθούν οι μελλοντικοί χρόνοι ζημιών. Τότε ένα καταλληλότερο μοντέλο του πλεονάσματος είναι το ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου με υστέρηση.

Η πρώτη εισαγωγή για την ανανεωτική διαδικασία με υστέρηση μαζί με την σταθερή ανανεωτική διαδικασία (δηλαδή η αρχική ζημιά για $t = 0$) έγινε από τον Cox το 1962. Σε επίπεδο θεωρίας κινδύνου, οι Willmot και Dickson το 2003 θεώρησαν το σταθερό μοντέλο κινδύνου, στο οποίο η κατανομή του πρώτου ενδιάμεσου χρόνου ήταν ίση με την κατανομή των υπολοίπων που ακολουθούν. Οι Willmot και Lin το 2001 και ο Willmot το 2002 μελέτησαν εις βάθος μια κατανομή του πρώτου ενδιάμεσου χρόνου. Έπειτα ο Willmot το 2002, ο Kim το 2007 και οι Kim και Willmot το 2011 ανέλυσαν κάποιες ποσότητες άμεσα συνδεδεμένες με τη χρεοκοπία στο ανανεωτικό μοντέλο με υστέρηση βάση της γενικευμένης συνάρτησης Gerber-Shiu. Επιπλέον ο Willmot το 2004 συζήτησε για ένα συνδυασμό από ίσες γενικευμένες κατανομές, όπου ο χρόνος μέχρι να συμβεί η πρώτη απαίτηση να ακολουθεί εκθετική κατανομή. Στην ίδια εργασία του ανέλυσε και το έλλειμμα κατά την χρεοκοπία. Τέλος ο Woo το 2010 ανέλυσαν κάποιες περιπτώσεις αυτού του μοντέλου με δέσμευση στην γενικευμένη συνάρτηση Gerber-Shiu.

Στην ανάλυση αυτού του μοντέλου, η μεταβλητή που θα χρησιμοποιήσουμε για το ασφαλιστικό πλεόνασμα (το αρχικό κεφάλαιο) είναι ίδια με αυτή του Κεφαλαίου 2. Η διαφορά εδώ είναι ότι ο χρόνος μέχρι την εμφάνιση της πρώτης ζημιάς W_1 έχει συνάρτηση κατανομής με υστέρηση $K_1(t)$ και συνάρτηση πιθανότητας με υστέρηση $k_1(t)$. Ο ενδιάμεσος χρόνος ανάμεσα στην $i-1$ και i απαίτηση έχει συνάρτηση κατανομής με υστέρηση $K(t)$ και συνάρτηση πιθανότητας με υστέρηση $k(t)$

. Αυτό που διαχωρίζει την κανονική ανανεωτική διαδικασία από αυτήν με υστέρηση είναι η διαφορά ανάμεσα στις συναρτήσεις πιθανότητας και .

Επίσης παίρνουμε σαν αξίωμα ότι εξακολουθεί να υφίσταται η εξάρτηση ανάμεσα στους ενδιάμεσους χρόνους εμφάνισης ζημιών και στα ύψη ζημιών. Έχουμε λοιπόν ότι το πρώτο ζευγάρι (W_1, Y_1) διατηρεί την από κοινού συνάρτηση πιθανότητας που συμβολίζεται ως $p_1(t, y)$, με τύπο
$p_1(t, y) = p_{1,t}(y)\, k_1(t)$, με $p_{1,t}(y)$ η συνάρτηση πιθανότητας για $Y_1 = y$ δοσμένου ότι $W_1 = t$.
Αντίστοιχα, τα υπόλοιπα ζευγάρια $\{(W_i, Y_i)\}_{i=2}^{\infty}$ έχουν από κοινού συνάρτηση κατανομής ίση με ( ) ( ) , $p(t, y) = p_t(y)\, k(t)$ η οποία είναι διαφορετική από αυτή του πρώτου ζεύγους.

Εκτός από την δομή της συνάρτησης με την εξάρτηση ως προς τον χρόνο, όλα τα ζευγάρια $\{(W_i, Y_i)\}_{i=2}^{\infty}$ διατηρούν την τυχαιότητά τους ως ζεύγη από ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές.

Θέτουμε τώρα την στιγμή της χρεοκοπίας στο ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου με υστέρηση, έστω $T_d = \min\{t \epsilon \aleph : U(t) < \infty\}$, όπου $U(t) \geq \mathbf{0}$, $\forall t \geq \mathbf{1}$. Άρα $T_d = \infty$. Τότε η γενικευμένη συνάρτηση Gerber-Shiu μετατρέπεται

$$\varphi_{v,d}(u) = E[v^{T_d} w(U(T_d - \mathbf{1})\ |U(T_d)|, X_{T_d}, R_{N(T_d)-1}) I(T < \infty) | U(\mathbf{0}) = u], \qquad u \epsilon N \qquad (\mathbf{6.1})$$

Χρησιμοποιούμε την παράμετρο d για να διαχωρίζουμε το μοντέλο με υστέρηση από το αντίστοιχο κανονικό μοντέλο.

Μπορούμε να λάβουμε κάποιες ειδικές περιπτώσεις της γενικευμένης συνάρτησης GerberShiu, χρησιμοποιώντας συγκεκριμένη έκφραση της συνάρτησης ποινής, ειδικότερα αν έχουμε πληροφορία για την κατανομή του ύψους ζημιάς. Αυτές οι ειδικές περιπτώσεις μας διευκολύνουν στην επίλυση της γενικευμένης συνάρτησης Gerber-Shiu από τη στιγμή που έχουν απλουστευθεί οι μεταβλητές που χρησιμοποιούνται. Αν θέσουμε την συνάρτηση ποινής $w(x, y, z, r) = w_{124}(x, y, r)$, τότε η συνάρτηση Gerber-Shiu γίνεται

$$\varphi_{v,124}^{d}(u) = [v^{T_d} w_{124}(U(T - \mathbf{1})\ |U(T)|, R_{N(T)-1}) I(T < \infty) | U(\mathbf{0}) = u] \qquad (\mathbf{6.2})$$

Για τις υπόλοιπες εκφράσεις της συνάρτησης ποινής έχουμε,

$$\varphi_{v,123}^{d}(u) = [v^{T_d} w_{123}(U(T - \mathbf{1})\ |U(T)|, R_{N(T)-1}) I(T < \infty) | U(\mathbf{0}) = u]$$

Όπως και στο σταθερό ανανεωτικό μοντέλο, μπορούμε να βρούμε διαφορετικές εκφράσεις από ποσότητες που συνδέονται με την χρεοκοπία αν θέτουμε κάθε φορά διαφορετική συνάρτηση ποινής. Εάν θέσουμε $w(x,y,z,r) = 1$ και $v = 1$, τότε η γενικευμένη συνάρτηση Gerber-Shiu μετατρέπεται αυτόματα στην πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi_d(u) = G_1(u) = P\{T < \infty | U(0) = u\}$ στο συγκεκριμένο μοντέλο (οριακή πιθανότητα).

6.2 Ιδιότητες

Για να προχωρήσουμε στις ιδιότητες του μοντέλου με υστέρηση, εισάγουμε κάποιες ποσότητες άμεσα συνδεδεμένες με τη χρεοκοπία. Εάν για παράδειγμα, η χρεοκοπία συμβεί ακριβώς στην πρώτη απαίτηση, δηλαδή $N(T_d) = 1$, τότε ο χρόνος χρεοκοπίας είναι $t = x - u + 1$. Έτσι μπορούμε να εκφράσουμε το απόθεμα πριν την χρεοκοπία x και το έλλειμμα μετά τη χρεοκοπία y ως εξής

$$h_1^d(x,y|u) = p_{1,x-u+1}(x+y+1)k_1(x-u+1), \quad x\epsilon N, y\epsilon N$$

Εάν η χρεοκοπία συμβεί μετά από την πρώτη ζημιά, τότε η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας T_d, $U(T_d - 1)$, $|U(T_d)|$, $R_{N(T_d)-1}$ στο σημείο (t,x,y,r) είναι η $h_2^d(t,x,y,r|u)$, που εκφράζεται από το σταθερό ανανεωτικό μοντέλο. Άρα η από κοινού προεξοφλημένη συνάρτηση πιθανότητας είναι η

$$h_{1,v}^d(x,y|u) = v^{x-u+1} h_1^d(x,y|u) \quad x = u, u+1, \dots, y\epsilon N \tag{6.3}$$

και

$$h_{2,v}^d(x,y,r|u) = \sum_{t=2}^{\infty} v^t h_2^d(t,x,y,r|u), \quad x\epsilon N, y\epsilon N, \quad r = 0,1,2,\dots,x \tag{6.4}$$

αντίστοιχα.

Τώρα έχουμε ότι η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας στο μοντέλο με υστέρηση, δίνεται από τις σχέσεις

$$h_v^d(x,y|u) = h_{1,v}^d(x,y|u) + \sum_{t=2}^{\infty} v^t h_2^d(t,x,y,r|u) \quad (6.5)$$

Μπορούμε να πάρουμε μια αναδρομική σχέση για την (6.1) αν θέσουμε ότι το απόθεμα πέφτει κάτω από u μετά την πρώτη απαίτηση

$$\varphi_{v,d}(u) = \sum_{y=1}^{u} \varphi_v(u-y) \sum_{x=0}^{\infty} h_v^d(x,y|u) + l_{v,d}(u) \quad (6.6)$$

, όπου

$$l_{v,d}(u) = \sum_{y=u+1}^{\infty} \sum_{x=0}^{\infty} \{w(x+u, y-u, u, u)\, h_{1,v}^d(x,y|u) + \sum_{r=0}^{x} w(x+u, y-u, u, r + u) h_2^d(t,x,y,r|u)\} \quad (6.7)$$

είναι το υπόλοιπο του αρχικού αποθέματος από την χρεοκοπία μετά από την πρώτη ζημιά.
Συνεπώς οδηγούμαστε στην παρακάτω έκφραση της σχέσης (6.6) από τον Woo όπως έγραψε στο άρθρο του το 2012.

<u>*Πρόταση 6.1*</u>

Στο ανανεωτικό μοντέλο με υστέρηση, *η γενικευμένη συνάρτηση Gerber-Shiu που δίνεται από την έκφραση της σχέσης (6.1), ικανοποιεί το εξής*

$$\varphi_{v,d}(u) = \varphi_v^d \sum_{y=1}^{u} \varphi_v(u-y)\, f_v^d(y) + l_{v,d}(u) \quad (6.8)$$

με ι φ_v^d , $f_v^d(y)$ να δίνονται από

$$\varphi_v^d = \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=1}^{\infty} h_v^d(x,y|u)$$

και

$$f_v^d(y) = \frac{1}{\varphi_v^d} \sum_{x=0}^{\infty} h_v^d(x,y|u)$$

αντίστοιχα. Επίσης η $l_{v,d}(u)$ δόθηκε παραπάνω από την σχέση (6.7).

Για να βρούμε σχέσεις για το τελευταίο ύψος ζημιάς πριν την χρεοκοπία, επιλέγουμε σαν συνάρτηση ποινής $w(x,y,z,r) = w_{23}(y,z)$. Άρα η σχέση (6.8) θα εξαρτάται από την συνάρτηση πιθανότητας $f_v^d(y)$ ως το τελευταίο ύψος ζημιάς επειδή,

$$\varphi_{v,23}^d(u) = \varphi_v^d \sum_{y=1}^{u} \varphi_{v,23}(u-y)\, f_v^d(y) + \varphi_v^d \sum_{y=u+1}^{\infty} w_{23}(u-y)\, f_v^d(y) \qquad (6.9)$$

Αφού ισχύει ότι

$$l_{v,d}(u) = \varphi_v^d \sum_{y=u+1}^{\infty} w_{23}(u-y)\, f_v^d(y) \qquad (6.10)$$

Επιπλέον η συνάρτηση κατανομής δεξιάς ουράς με υστέρηση $\bar{G}_v^d$ μπορεί να δημιουργηθεί αν θέσουμε την συνάρτηση ποινής ίση με τη μονάδα. Τότε η (6.8) γράφεται

$$\bar{G}_v^d(u) = \varphi_v^d \sum_{y=1}^{u} \bar{G}_v(u-y)\, f_v^d(y) + \varphi_v^d \bar{F}_v^d(y) \qquad (6.11)$$

Επειδή από ορισμό η συνάρτηση κατανομής δεξιάς ουράς είναι το άθροισμα της συνάρτηση πιθανότητας για τις οριακές τιμές της συνάρτησης, δηλαδή $\bar{F}_v^d(y) = \sum_{y=u+1}^{\infty} f_v^d$

Αν πάρουμε όμως την συνάρτηση ποινής $w(x,y,z,r) = w_{124}(x,y,r)$, δεδομένου του χρόνου και του ύψους της πρώτης ζημιάς, η σχέση (6.2) μετατρέπεται σε

$$\varphi_v^d(u) = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \sigma_{v,t}^d(u+t)\, k_1(t) + \beta_v^d(u) \qquad (6.12)$$

με

$$\sigma_{v,t}^d(x) = \sum_{y=0}^{x} \varphi_v(x-y)\, p_{1,t}(y) \qquad (6.13)$$

και

$$\beta_v^d(u) = \sum_{y=u+t+1}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} v^t w(u+t-\mathbf{1}, y+u+t, u) p_{1,t}(y) k_1(t) \qquad \mathbf{6.14}$$

( )

Μπορούμε να πάρουμε την συνάρτηση πιθανότητας του τελευταίου ύψ ους ζημιάς υστέρηση $|U(T_d)| + X_{T_d}$, αντίστοιχη με το κανονικό μοντέλο, εάν διαλέξουμε συνάρτηση ποινής $w(x,y,z,r) = w_{23}(y,z) = s^{y+}$ και την αντικαταστήσουμε στην σχέση (3.14). Τότε η (6.10) με

μετατρέπεται

$$l_{v,23}^d(u) = \varphi_v \sum_{y=u+1}^{\infty} s^y f_v^d(y) \qquad (\mathbf{6.15})$$

Άρα παίρνουμε από τη σχέση (6.9) το συμπέρασμα

$$\varphi_{v,23}^d(u) = \varphi_v^d \left\{ \sum_{y=1}^{u} \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}-\varphi_v} \sum_{x=0}^{u+y+1} g_v(u-y-x) l_{v,23}(x) + l_{v,23}(u+y) \right) f_v^d(y) \right\} + l_{v,23}^d(u) \qquad (\mathbf{6.16})$$

με

$$l_{v,23}(u) = \varphi_v \sum_{y=u+1}^{\infty} s^y f_v(y)$$

Συγκρίνοντας με την <u>*Πρόταση 3.2.2*</u> , το κανονικό μοντέλο μας δίνει την προεξοφλημένη συνάρτηση πιθανότητας του τελευταίου ύψους ζημιάς, το μοντέλο με υστέρηση μας οδηγεί στην ακόλουθη πρόταση.

<u>*Πρόταση 6.2*</u>

Για το ανανεωτικό μοντέλο με υστέρηση έχουμε ότι το τελευταίο ύψος ζημιάς $|\boldsymbol{U}(T)| + X_T$ *έχει συνάρτηση πιθανότητας*

$$f_v^d(u,y) = \varphi_v^d \sum_{z=1}^{u} f_{1,v}(u-z,y) f_v^d(z) + \varphi_v^d I(y \geq u+\mathbf{1}) f_v^d(y) \qquad (\mathbf{6.17})$$

Επίσης, αν η συνάρτηση ποινής εξαρτάται μόνο από το έλλειμμα, δηλαδή $w(x,y,z,r) = w_2(y)$, τότε η σχέση (5.8) γίνεται

$$\begin{aligned}\varphi_{v,2}^d(u) &= \varphi_v^d \sum_{y=1}^{u} \varphi_{v,2}(u-y)\, f_v^d(y) + \sum_{y=u+1}^{\infty} \sum_{x=0}^{\infty} w_2(y-u) h_v^d(x,y|\mathbf{0}) \\ &= \varphi_v^d \sum_{y=1}^{u} \varphi_{v,2}(u-y)\, f_v^d(y) + \varphi_v^d \sum_{y=u+1}^{\infty} w_2(u-y)\, f_v^d(y) \qquad \mathbf{(6.18)}\end{aligned}$$

Όταν ισχύει $w_2(y) = I(x>y)$, τότε η $\varphi_{v,2}^d(u)$ γίνεται η προεξοφλημένη ελλειμματική συνάρτηση πιθανότητας του ελλείμματος κατά την χρεοκοπία και δίνεται από

$$\begin{aligned}\varphi_{v,2}^d(u) = \bar{G}_v^d(u,y) &= E[v^{T_d} I(|U(T_d)|>y) I(T_d<\infty)|U(\mathbf{0})=u] \\ &= \varphi_v^d \sum_{t=1}^{u} G_v(u-t)\, f_v^d(t) + \varphi_v^d \sum_{t=y+u+1}^{\infty} f_v^d(t) \\ &= \varphi_v^d \sum_{t=1}^{u} \bar{G}_v(u-t)\, f_v^d(t) + \varphi_v^d \bar{F}_v^d(u+y+\mathbf{1}) \qquad \mathbf{(6.19)}\end{aligned}$$

Αν $v = \mathbf{1}$, η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$\begin{aligned}\varphi_{1,2}^d(u) = \bar{G}_1^d(u,y) &= E[I(|U(T_d)|>y) I(T_d<\infty)|U(\mathbf{0})=u] \\ &= \varphi_1^d \sum_{t=1}^{u} \bar{G}_1(u-t)\, f_v^d(t) + \varphi_1^d \bar{F}_1^d(u+y+\mathbf{1}) \qquad \mathbf{(6.20)}\end{aligned}$$

Το φ_1^d είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας με αρχικό πλεόνασμα ίσο με το 0.

Η ποσότητα $\varphi_1^d \bar{F}_1^d(u+y+\mathbf{1})$ στην σχέση (6.20) εξηγεί την περίπτωση που η πρώτη ζημιά που προκαλεί χρεοκοπία στο κανονικό μοντέλο έχει ύψος μεγαλύτερο από $u+y+\mathbf{1}$. Τότε η ποσότητα $\varphi_1^d \sum_{t=1}^{u} \bar{G}_1(u-t) f_1^d(t)$ αντικατοπτρίζει την πιθανότητα να μην συμβεί χρεοκοπία στην πρώτη ζημιά, με αποτέλεσμα το πλεόνασμα που απομένει να ισούται με το αρχικό μείον αυτό που δαπανήθηκε, δηλαδή $u-t$.

Κεφάλαιο 7

Γραφική απεικόνιση

Στο τελευταίο κεφάλαιο της εργασίας μας θα παραθέσουμε γραφικά τις απεικονίσεις σχετικά με τις πιθανότητες χρεοκοπίας και τις από κοινού προεξοφλημένες συναρτήσεις πιθανότητας που αναλύσαμε στα προηγούμενα κεφάλαια. Θα χρησιμοποιηθούν και παραδείγματα ώστε να αντιληφθούμε τις διαφορές των παραμέτρων και της εξάρτησης.

7.1 Το ανανεωτικό μοντέλο με εξάρτηση μέσω σύζευξης FGM

Όπως αναφέρει ο Katsuhiro Honda, σε πολλές περιπτώσεις γνωρίζουμε τις κατανομές για κάθε μια από τις μεταβλητές και X και Y θέλουμε να βρούμε την από κοινού κατανομή τους.

Αυτή η συνάρτηση είναιγνωστή και ως σύζευξημια συνάρτηση από το $[0,1] \times [0,1]$ στο $[0,1]$, όπου για κάθε πραγματικό αριθμό x, y έχουμε

$$F_{XY}(x,y) = C(F_X(x)\ F_Y\ (y))$$

Η σύζευξη είναι μια αθροιστική κατανομή πιθανότητας, στην οποία κάθε οριακή κατανομή πιθανότητας των μεταβλητών που την απαρτίζουν είναι ομοιόμορφη. Είναι γνωστό ότι η σύζευξη FGM είναι από τις πιο εύχρηστες και ευκολότερες στην κατανόηση και υπολογισμό, αυτός είναι και ο λόγος που είναι τόσο διαδεδομένη. Αυτός ο δεσμός εμφανίζεται κυρίως όταν δεν υπάρχει στέρεα λογική του πώς να περιγράψουμε την εξάρτηση ανάμεσα σε δύο ή περισσότερες τυχαίες μεταβλητές.

Αρχικά μελετήθηκε από τον Ubeda-Flores το 2004 μια διμερή σύζευξη η οποία αποδόθηκε πληρέστερα από τον Nelsen το 2013. Πολλοί ερευνητές έχουν χρησιμοποιήσει τέτοιες σχέσεις για να αποδείξουν ιδιότητες που συνδέονται άμεσα με την χρεοκοπία καθώς και παραπλήσιες ποσότητες που συνδέονται με αυτές. Για μορφές εξάρτησης που συνδέονται με τη θεωρία κινδύνου, έχουμε αναφορές από τον Cossette (2008, 2010), τους Zang και Yang (2011), τους Χατζηκωνσταντινίδη και Βρόντο (2014) και τους Cheung και Woo (2014).

Ισχύει ότι κάθε συνάρτηση μπορεί να θεωρηθεί σαν μια σύζευξη για παραπάνω από δυο μεταβλητές. Για να μπορεί να μια συνάρτηση να είναι FGM σύζευξη, πρέπει να την χαρακτηρίζουν κάποιες ιδιότητες. Στην παράγραφο αυτή θα χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες που αναλύονται παρακάτω

Μια σύζευξη FGM δίνεται από τον τύπο

$$C_\theta(u,v) = uv + \theta uv(1-u)(1-v), \quad \theta \epsilon [0,1] \qquad (7.1)$$

Χρησιμοποιούμε την παραπάνω σύζευξη και παίρνουμε ότι η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των X,Y δίνεται από τον τύπο μεταβλητών

$$)) \quad p(t,y) = C_\theta(K(t)\ P(y)) - C_\theta(K(t),P(y-1)) + C_\theta(K(t-1),P(y-1) - C_\theta(K(t-1)\ P(y)) \qquad (7.2)$$

, όπου

$$k(t) = (1-q)q^{t-1}, \qquad t\epsilon N$$

και

$$p(y) = (1-\beta)\beta^{y-1}, \qquad t\epsilon N$$

είναι συναρτήσεις πιθανότητας που ακολουθούν γεωμετρική κατανομή.

Τότε με τη βοήθεια των δύο τελευταίων σχέσεων, η (7.2) μπορεί να γραφτεί ως

$$p(t,y) = \sum_{i=1}^{2} k_i(t) b_i(y) \qquad (7.3)$$

Εδώ έχουμε ότι

$$k_1(t) = k(t), \qquad k_2(t) = (1-q^2)(q^2)^{t-1}$$

και

$$b_1(y) = p(y) - \theta f(y), \qquad b_2(y) = \theta f(y)$$

με

$$f(y) = (1-\beta^2)(\beta^2)^{y-1} - (1-\beta)\beta^{y-1}$$

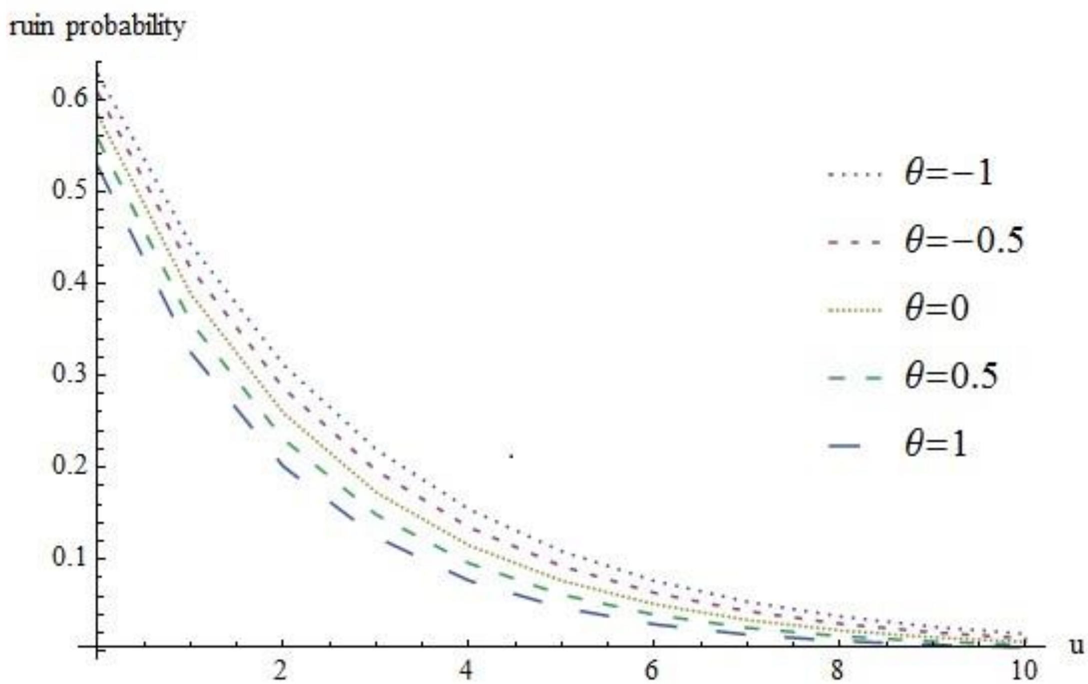
Το ζεύγος (W,Y) έχει διαφορετικό είδος εξάρτησης για κάθε θ που επιλέγουμε στη σύζευξη FGM. Εδώ δουλεύουμε με τις τιμές για $\theta = -1, -0.5, 0.5, 1$ αντίστοιχα. Πιο συγκεκριμένα, όταν

$\theta = 0$

οι μεταβλητές για τα ύψη ζημιών Y και οι αντίστοιχες για τους ενδιάμεσους χρόνους W, είναι ανεξάρτητες. Θέτουμε τις παραμέτρους της γεωμετρικής κατανομής να είναι $a = 0.3$, $\beta = 0.2$. Με αυτά σαν δεδομένα, απεικονίζουμε παρακάτω την καμπύλη $\psi(u)$ της πιθανότητας χρεοκοπίας, όταν η οριακή συνάρτηση πιθανότητα του τελευταίου ύψους ζημιάς δεδομένης της χρεοκοπίας $\bar{F}_v(u, u)$ είναι

και η συνάρτηση πιθανότητας των υπόλοιπων υψών είναι $\bar{F}_v(u)$, με βαθμό ελευθερίας 10% και 1% αντίστοιχα.

7.2 Πιθανότητες χρεοκοπίας



Σχήμα 7.1 : Πιθανότητα χρεοκοπίας για διαφορετικές τιμές του θ

Το σχήμα 7.1 μας δείχνει την πιθανότητα χρεοκοπίας για διαφορετικές τιμές του θ που διαλέξαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Παρατηρούμε ότι

- Προφανώς η πιθανότητα χρεοκοπίας μειώνεται καθώς το αρχικό πλεόνασμα u αυξάνει για σταθερό θ, και
- Η πιθανότητα χρεοκοπίας αυξάνεται καθώς το θ μειώνεται για αρχικό πλεόνασμα με σταθερή τιμή.

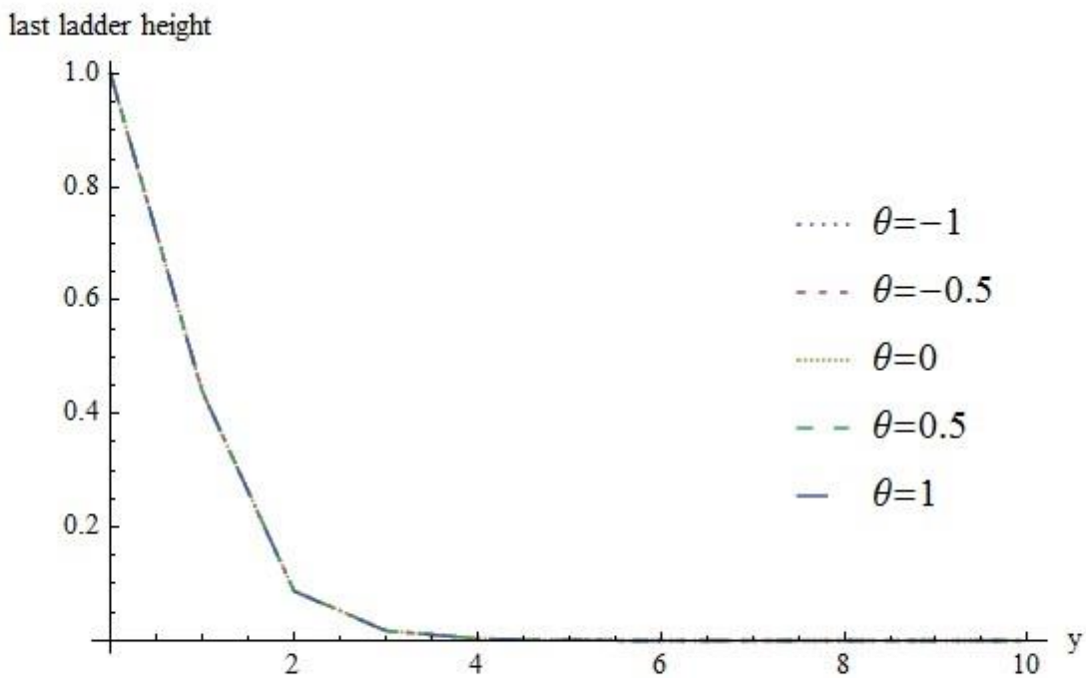
Όταν το θ παίρνει μικρές τιμές, για παράδειγμα $\boldsymbol{\theta = -1}$ που αποδεικνύει την αρνητική συσχέτιση μεταξύ του ύψους και του ενδιάμεσου χρόνου ζημιών, όταν η τιμή του ενδιάμεσου χρόνου είναι μικρή τότε το πιο πιθανό είναι να ακολουθεί μεγάλο ύψος ζημιάς. Άρα και πιο πιθανή η χρεοκοπία, με αποτέλεσμα μεγαλύτερη πιθανότητα χρεοκοπίας.

7.3 Ύψη ζημιών και τελευταίο ύψος ζημιάς

7.3.1 Ύψος ζημιάς με διαφορετικές τιμές του $\boldsymbol{\theta}$

$y\backslash\theta$	$\theta = -1$	$\theta = -0.5$	$\theta = 0$	$\theta = 0.5$	$\theta = 1$
0	1	1	1	1	1
1	$4{,}3891 * 10^{-1}$	$4{,}3950 * 10^{-1}$	$4{,}4000 * 10^{-1}$	$4{,}4032 * 10^{-1}$	$4{,}4026 * 10^{-1}$
2	$8{,}8331 * 10^{-2}$	$8{,}8203 * 10^{-2}$	$8{,}8000 * 10^{-2}$	$8{,}7679 * 10^{-2}$	$8{,}7167 * 10^{-2}$
3	$1{,}7688 * 10^{-2}$	$1{,}7653 * 10^{-2}$	$1{,}7600 * 10^{-2}$	$1{,}7520 * 10^{-2}$	$1{,}7398 * 10^{-2}$
4	$3{,}5385 * 10^{-3}$	$3{,}5310 * 10^{-3}$	$3{,}5200 * 10^{-3}$	$3{,}5035 * 10^{-3}$	$3{,}4782 * 10^{-3}$
5	$7{,}077 * 10^{-4}$	$7{,}0623 * 10^{-4}$	$7{,}0400 * 10^{-4}$	$7{,}0067 * 10^{-4}$	$6{,}9558 * 10^{-4}$
6	$1{,}4155 * 10^{-4}$	$1{,}4125 * 10^{-4}$	$1{,}4080 * 10^{-4}$	$1{,}4013 * 10^{-4}$	$1{,}3911 * 10^{-4}$
7	$2{,}8310 * 10^{-5}$	$2{,}8249 * 10^{-5}$	$2{,}8160 * 10^{-5}$	$2{,}8027 * 10^{-5}$	$2{,}7823 * 10^{-5}$
8	$5{,}6620 * 10^{-6}$	$5{,}6499 * 10^{-6}$	$5{,}6320 * 10^{-6}$	$5{,}6053 * 10^{-6}$	$5{,}5645 * 10^{-6}$
9	$1{,}1324 * 10^{-6}$	$1{,}1300 * 10^{-6}$	$1{,}1264 * 10^{-6}$	$1{,}1211 * 10^{-6}$	$1{,}1129 * 10^{-6}$
10	$2{,}2648 * 10^{-7}$	$2{,}2599 * 10^{-7}$	$2{,}2528 * 10^{-7}$	$2{,}2421 * 10^{-7}$	$2{,}2258 * 10^{-7}$

Πίνακας 7.1 Τελευταία ύψη ζημιών με διαφορετικές τιμές του θ



Σχήμα 7.2 Τελευταίο ύψος ζημιάς με διαφορετικές τιμές του θ

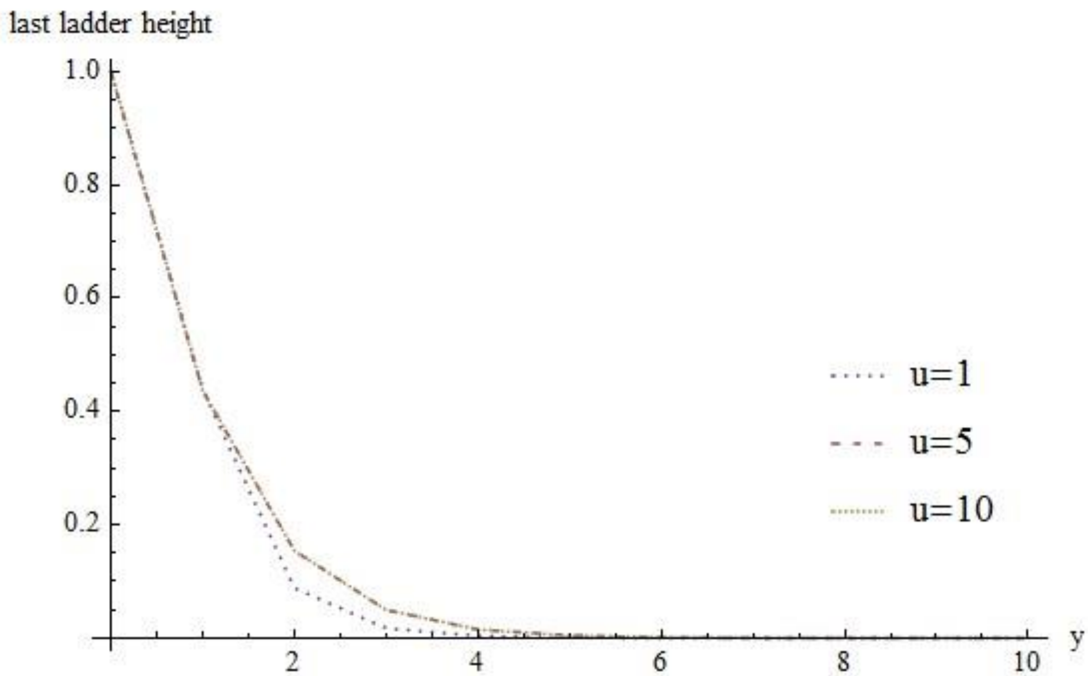
Από τον πίνακα 7.1 παίρνουμε πληροφορία για τις τιμές της συνάρτησης πιθανότητας του τελευταίου ύψους ζημιάς πριν την χρεοκοπία $X_T + |U(T)|$ για $\theta = -1, -0.5, 0, 0.5, 1$ αντίστοιχα. Στο σχήμα 7.2 απεικονίζονται σε συνέχεια οι τιμές του πίνακα 7.1 για πιο εύκολη σύγκριση.

- Σε κάθε περίπτωση, η συνάρτηση πιθανότητας ξεκινάει από το 1 και ύστερα μειώνεται καθώς το έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία $|U(T)|$ αυξάνεται και
- Υπάρχουν λίγες διαφορές ανάμεσα στην συνάρτηση πιθανότητας του τελευταίου ύψους ζημιάς για διαφορετικά θ. Το πιο λογικό είναι οι μικροί ενδιάμεσοι χρόνοι να ακολουθούνται από μεγάλα ύψη ζημιών ειδικά στην περίπτωση της αρνητικής συσχέτισης, δηλαδή $\theta = -1$. Άρα αναμένουμε μεγαλύτερα ύψη ζημιών για μικρότερες τιμές του θ, εκτός από όταν $y = 0$ και $y = 1$.

7.3.2 Τελευταίο ύψος ζημιάς με διαφορετικές τιμές του u

$y \backslash u$	$u = 1$	$u = 5$	$u = 10$
0	1	1	1
1	$4{,}3891 * 10^{-1}$	$4{,}3731 * 10^{-1}$	$4{,}3731 * 10^{-1}$
2	$8{,}8331 * 10^{-2}$	$1{,}5432 * 10^{-1}$	$1{,}5432 * 10^{-1}$
3	$1{,}7688 * 10^{-2}$	$4{,}9777 * 10^{-2}$	$4{,}9777 * 10^{-2}$
4	$3{,}5385 * 10^{-3}$	$1{,}5323 * 10^{-2}$	$1{,}5323 * 10^{-2}$
5	$7{,}077 * 10^{-4}$	$4{,}6016 * 10^{-3}$	$4{,}5877 * 10^{-3}$
6	$1{,}4155 * 10^{-4}$	$9{,}2033 * 10^{-4}$	$1{,}3502 * 10^{-3}$
7	$2{,}8310 * 10^{-5}$	$1{,}8407 * 10^{-4}$	$3{,}9294 * 10^{-4}$
8	$5{,}6620 * 10^{-6}$	$3{,}6814 * 10^{-5}$	$1{,}1349 * 10^{-4}$
9	$1{,}1324 * 10^{-6}$	$7{,}3627 * 10^{-6}$	$3{,}2616 * 10^{-5}$
10	$2{,}2648 * 10^{-7}$	$1{,}4725 * 10^{-6}$	$9{,}36371 * 10^{-6}$

Πίνακας 7.2 Τελευταίο ύψος ζημιάς με διαφορετικές τιμές αρχικού αποθέματος



Σχήμα 7.3 Τελευταίο ύψος ζημιάς με διαφορετικό αρχικό απόθεμα

Ο πίνακας 7.2 μας δείχνει τις ακριβείς τιμές που παίρνει η συνάρτηση πιθανότητας του τελευταίου ύψους ζημιάς πριν την χρεοκοπία $(X_{T-} + |U)^{T}$, όταν το αρχικό απόθεμα $u = \mathbf{1, 5, 10}$ αντίστοιχα. Επιπλέον, το σχήμα 7.3 μας παρουσιάζει τις τιμές σε μια συνεχόμενη γραμμή για πιο εύκολη σύγκριση των αποτελεσμάτων. Με βάση τα παραπάνω εκφράζουμε τις εξής παρατηρήσεις

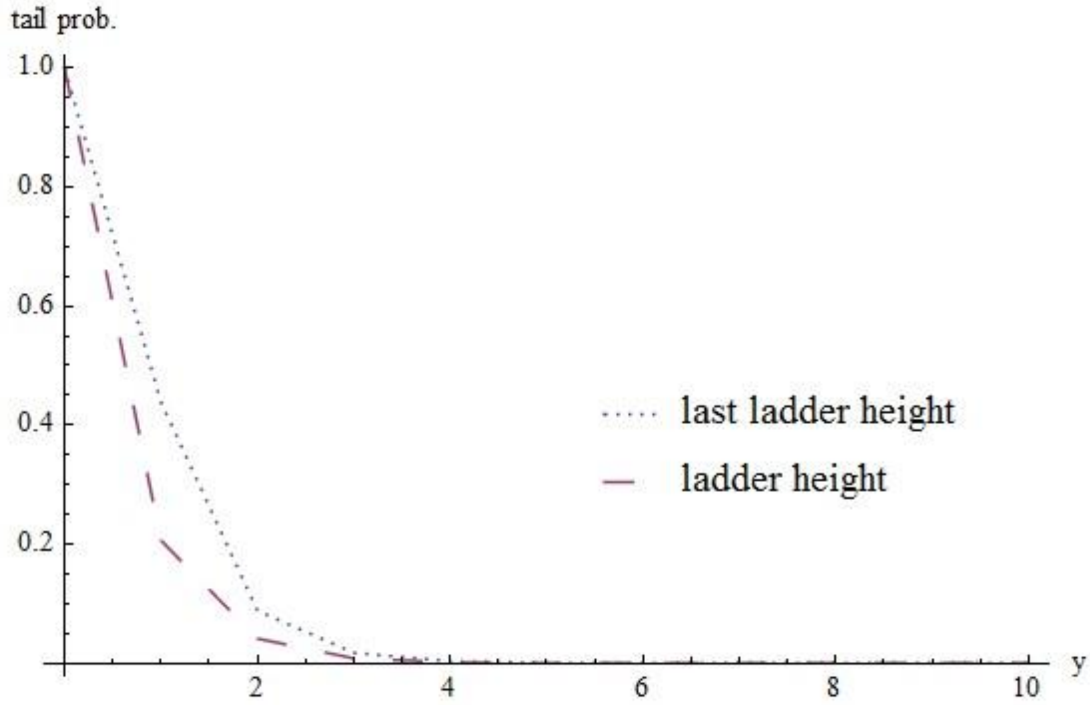
- Αρχικά, παρόμοια με τα προηγούμενα παραδείγματα, καθώς η συνάρτηση πιθανότητας ξεκινάει από την μονάδα και ύστερα μειώνονται οι τιμές της, το έλλειμμα $|U\ T|$ αυξάνεται σε κάθε περίπτωση
- Δεύτερον, δεν υπάρχουν εμφανείς διαφορές ανάμεσα στα ύψη ζημιών με διαφορετικές τιμές του αρχικού αποθέματος u, άρα έχουμε ότι το μικρότερο ύψος ζημιάς αντιστοιχεί στο μικρότερο αρχικό απόθεμα u.

Τελικά, ο πίνακας 7.2 και το σχήμα 7.3 μας δείχνουν τα αποτελέσματα όταν υπάρχει αρνητική συσχέτιση $\boldsymbol{\theta = -1}$.

7.3.3 Ύψη ζημιών και τελευταίο ύψος ζημιάς

$y\backslash$	$Τελευταίο\ ύψος\ ζημιάς$	$Ενδιάμεσα\ ύψη\ ζημιών$
0	**1**	**1**
1	$4.3891 * 10^{-1}$	$2.0645 * 10^{-1}$
2	$8.8331 * 10^{-2}$	$4.1549 * 10^{-2}$
3	$1.7688 * 10^{-2}$	$8.3201 * 10^{-3}$
4	$3.5385 * 10^{-3}$	$1.6644 * 10^{-3}$
5	$7.0774 * 10^{-4}$	$3.3290 * 10^{-4}$
6	$1.4155 * 10^{-4}$	$6.6581 * 10^{-5}$
7	$2.8310 * 10^{-5}$	$1.3316 * 10^{-5}$
8	$5.6620 * 10^{-6}$	$2.6632 * 10^{-6}$
9	$1.1324 * 10^{-6}$	$5.3265 * 10^{-7}$
10	$2.2648 * 10^{-7}$	$1.0653 * 10^{-7}$

Πίνακας 7.3 Τελευταίο ύψος ζημιάς σε αντίθεση με ενδιάμεσα ύψη ζημιών



Σχήμα 7.4 Τελευταίο ύψος ζημιάς σε αντίθεση με ενδιάμεσα ύψη ζημιών

Στον πίνακα 7.3 συγκρίνουμε την δεξιά ουρά της συνάρτησης πιθανότητας του τελευταίου ύψους ζημιάς και όλων των ενδιάμεσων υψών ζημιών. Επίσης, στο σχήμα 7.4 απεικονίζουμε τις τιμές της συνάρτησης σε μια συνεχόμενη γραμμή για πιο εύκολη σύγκριση. Άρα από τον τελευταίο πίνακα και σχήμα συμπεραίνουμε

- Αρχικά, όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις, η συνάρτηση πιθανότητας από τα ύψη ζημιάς ξεκινάει από τη μονάδα και μετά μειώνεται καθώς το έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία αυξάνεται
- Επίσης, προφανώς παρατηρούμε ότι $F_{1,v}(y) \geq F_v(y)$. Ο λόγος για τον οποίο συμβαίνει αυτό είναι πως η συνάρτηση πιθανότητας των ενδιάμεσων υψών των απαιτήσεων είναι πάντα μικρότερη από αυτή του τελευταίου ύψους ζημιάς. Αυτό αποδεικνύεται από μια στοχαστική διαδικασία για το μοντέλο κινδύνου συνεχούς χρόνου, που έχει αναλυθεί από τον Cheung στην δεύτερη εργασία του το 2010.
- Οι παραπάνω παρατηρήσεις ισχύουν για κάθε τιμή του θ, όμως στο παράδειγμά μας έχουμε πάρει αρνητική συσχέτιση, $\boldsymbol{\theta = -1}$.

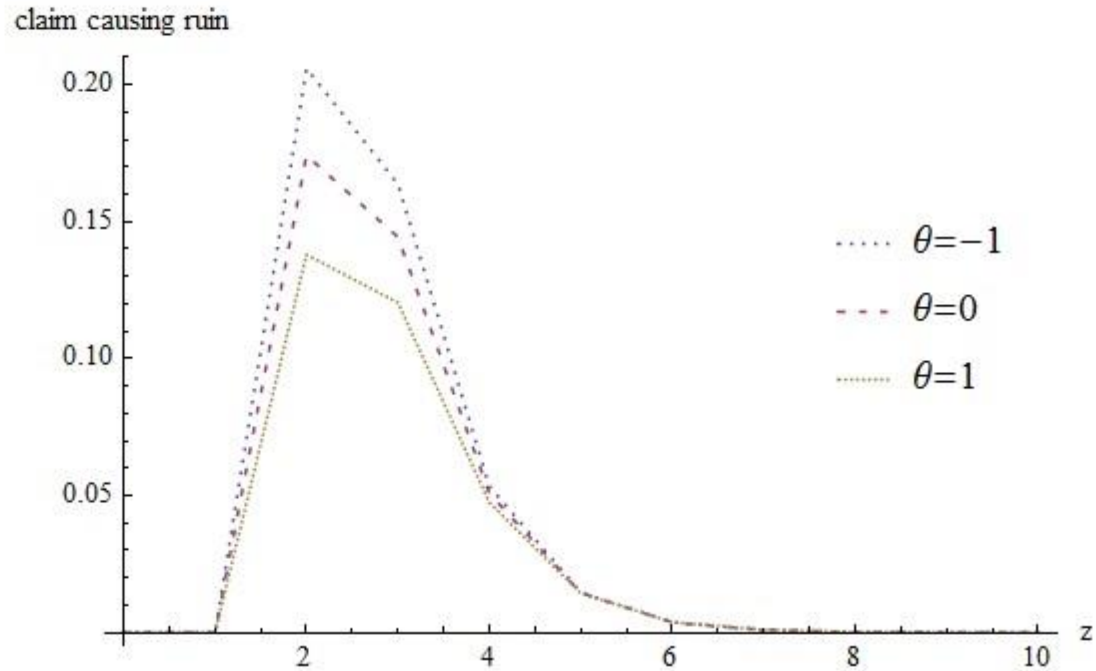
7.4 Ζημιά που επιφέρει την χρεοκοπία

Όπως έχουμε δείξει στο τρίτο κεφάλαιο, υπάρχουν δύο μέθοδοι που υπολογίζουμε την απαίτηση εκείνη που μας επιφέρει χρεοκοπία $|U(T)| + U(T-1) + 1$. Μας ενδιαφέρει λοιπόν το πόσο επηρεάζουν οι παράμετροι θ και u αυτή τη ζημιά.

7.4.1 Ζημιά που προκαλεί χρεοκοπία με διαφορετικές τιμές του θ

$z\backslash\theta$	-1	0	1
0	0	0	0
1	0	0	0
2	$2.0597 * 10^{-1}$	$1.7422 * 10^{-1}$	$1.3791 * 10^{-1}$
3	$1.6370 * 10^{-1}$	$1.4436 * 10^{-1}$	$1.2044 * 10^{-1}$
4	$5.3305 * 10^{-2}$	$5.0773 * 10^{-2}$	$4.7445 * 10^{-2}$
5	$1.4673 * 10^{-2}$	$1.4535 * 10^{-2}$	$1.4303 * 10^{-2}$
6	$3.7341 * 10^{-3}$	$3.7831 * 10^{-3}$	$3.8272 * 10^{-3}$
7	$9.0667 * 10^{-4}$	$9.3184 * 10^{-4}$	$9.5891 * 10^{-4}$
8	$2.1330 * 10^{-4}$	$2.2141 * 10^{-4}$	$2.3048 * 10^{-4}$
9	$4.9053 * 10^{-5}$	$5.1291 * 10^{-5}$	$2.3835 * 10^{-5}$
10	$1.1089 * 10^{-5}$	$1.1660 * 10^{-5}$	$1.2315 * 10^{-5}$

Πίνακας 7.4 Ζημιά που προκαλεί χρεοκοπία με διαφορετικές τιμές του θ



Σχήμα 7.5 Ζημιά που προκαλεί χρεοκοπία με διαφορετικές τιμές του $\boldsymbol{\theta}$

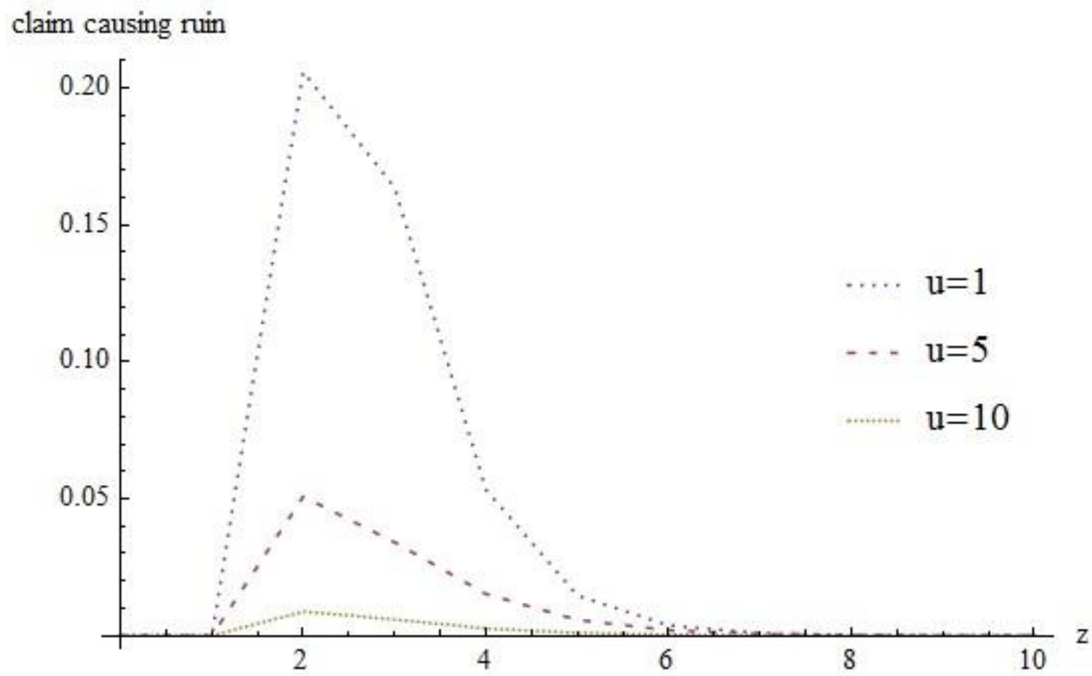
Ο πίνακας 7.4 μας παρουσιάζει τις τιμές της προεξοφλημένης συνάρτησης πιθανότητας της ζημιάς που προκαλεί χρεοκοπία $|U(T)| + U(T-\mathbf{1}) + \mathbf{1}$ με $\boldsymbol{\theta = -1, 0, 1}$ αντίστοιχα. Το σχήμα 7.5 μας παραθέτει τις τιμές αυτές σε συνεχόμενη γραμμή για πιο εύκολη σύγκριση. Παρατηρούμε τα εξής

- Η προεξοφλημένη συνάρτηση πιθανότητας της ζημιάς που προκαλεί χρεοκοπία $|U(T)| + U(T-\mathbf{1}) + \mathbf{1}$, ξεκινάει από το μηδέν και η μέγιστη τιμή που παίρνει είναι $|U(T)| + U(T-\mathbf{1}) + \mathbf{1} = 2$. Μετά το μέγιστο σημείο, η τιμή αυτή μειώνεται σε κάθε περίπτωση
- Δεν υπάρχουν μεγάλες διαφορές ανάμεσα στις τιμές που παίρνει η συνάρτηση πιθανότητας της ζημιάς που προκαλεί χρεοκοπία με διαφορετικές τιμές του $\boldsymbol{\theta}$. Αναμένουμε μεγαλύτερη τιμή της προεξοφλημένης συνάρτησης της ζημιάς με μικρότερες τιμές του $\boldsymbol{\theta}$.

7.4.2 Ζημιά που προκαλεί χρεοκοπία με διαφορετικές τιμές του u

$z\backslash\theta$	1	5	10
0	0	0	0
1	0	0	0
2	$2.0597 * 10^{-1}$		
3	$1.6370 * 10^{-1}$		
4	$5.3305 * 10^{-2}$		
5	$1.4673 * 10^{-2}$		
6	$3.7341 * 10^{-3}$		
7	$9.0667 * 10^{-4}$		
8	$2.1330 * 10^{-4}$		
9	$4.9053 * 10^{-5}$		
10	$1.1089 * 10^{-5}$		

Πίνακας 7.5 Ζημιά που προκαλεί χρεοκοπία με διαφορετικό αρχικό απόθεμα



Σχήμα 7.6 Ζημιά που προκαλεί χρεοκοπία με διαφορετικό αρχικό απόθεμα

Ο πίνακας 7.5 μας παρουσιάζει τις τιμές της προεξοφλημένης συνάρτησης πιθανότητας της ζημιάς που προκαλεί χρεοκοπία $|U(T)| + U(T-1) + 1$ με αρχικό απόθεμα $u = 1, 5, 10$ αντίστοιχα. Το σχήμα 7.6 μας παραθέτει τις τιμές αυτές σε συνεχόμενη γραμμή για πιο εύκολη σύγκριση. Παρατηρούμε τα εξής

- Η προεξοφλημένη συνάρτηση πιθανότητας της ζημιάς που προκαλεί χρεοκοπία $|U(T)| + U(T-1) + 1$, ξεκινάει από το μηδέν και η μέγιστη τιμή που παίρνει είναι $|U(T)| + U(T-1) + 1 = 2$. Μετά το μέγιστο σημείο, η τιμή αυτή μειώνεται σε κάθε περίπτωση

- Υπάρχουν μεγάλες διαφορές ανάμεσα στις τιμές που παίρνει η συνάρτηση πιθανότητας της ζημιάς που προκαλεί χρεοκοπία με διαφορετικές τιμές του αποθέματος u. Αναμένουμε μεγαλύτερη τιμή της προεξοφλημένης συνάρτησης της ζημιάς με μικρότερο αρχικό κεφάλαιο.

- Οι παραπάνω παρατηρήσεις ισχύουν για κάθε τιμή του θ, όμως στο παράδειγμά μας έχουμε πάρει αρνητική συσχέτιση, $\theta = -1$.

7.5 Σύγκριση με το μοντέλο με υστέρηση

Εδώ, ως το τελικό κεφάλαιο, θα αναλύσουμε ποιες μεθόδους χρησιμοποίησε ο Woo σε εργασία του το 2010 για να συγκρίνει το κανονικό ανανεωτικό μοντέλο με το μοντέλο με υστέρηση. Στην εργασία μας έχουμε εμβαθύνει κυρίως στις πιθανότητες χρεοκοπίας. Έχουμε θεωρήσει ότι το ανανεωτικό μοντέλο με υστέρηση έχει την εξής κατανομή

$$k_1(t) = (\mathbf{1} - q_d)q_d^{t-1} \qquad (\mathbf{7.4})$$

η οποία είναι η αρχική συνάρτηση πιθανότητας του χρόνου μέχρι την εμφάνιση της πρώτης ζημιάς,

και

$$k(t) = (\mathbf{1} - q)q^{t-1} \qquad (\mathbf{7.5})$$

η οποία είναι η αρχική συνάρτηση πιθανότητας του χρόνου εμφάνισης οποιασδήποτε ζημιάς εκτός της πρώτης. Ας σημειωθεί εδώ ότι οι μεταβλητές q_d και q δηλώνονται ώστε να ξεχωρίζουμε τα δύο μοντέλα.

Θεωρούμε για όλη την διαδικασία της χρεοκοπίας την μεταβλητή $P(y)$ με τύπο $p(y) = (\mathbf{1} - \beta)\beta^{y-1}$. Τότε η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των (W, Y) δίνεται από την FGM σύζευξη όπου για το πρώτο ζευγάρι (W_1, Y_1) ισχύει

$$\begin{aligned} p_1(t,y) = {} & C_\theta\big(K_1(t), P(y)\big) - C_\theta\big(K_1(t)\ P(y - \mathbf{1})\big) + C_\theta\big(K_1(t - \mathbf{1})\ P(y - \mathbf{1} \\ & - C_\theta\big(K_1(t - \mathbf{1}), P(y)\big) \qquad (\mathbf{7.6}) \end{aligned}$$

Για τα ζευγάρια (W, Y) που ακολουθούν, η από κοινού συνάρτηση ικανοποιείται από τη σχέση

$$\begin{aligned} p(t,y) = {} & C_\theta\big(K(t)\ P(y)\big) - C_\theta\big(K(t), P(y - \mathbf{1})\big) + C_\theta\big(K(t - \mathbf{1}), P(y - \mathbf{1})\big) \\ & - C_\theta\big(K(t - \mathbf{1})\ P(y)\big) \qquad (\mathbf{7.7}) \end{aligned}$$

όπου

))

$$K_1(t) = \sum_{y=1}^{t} k_1(t)$$

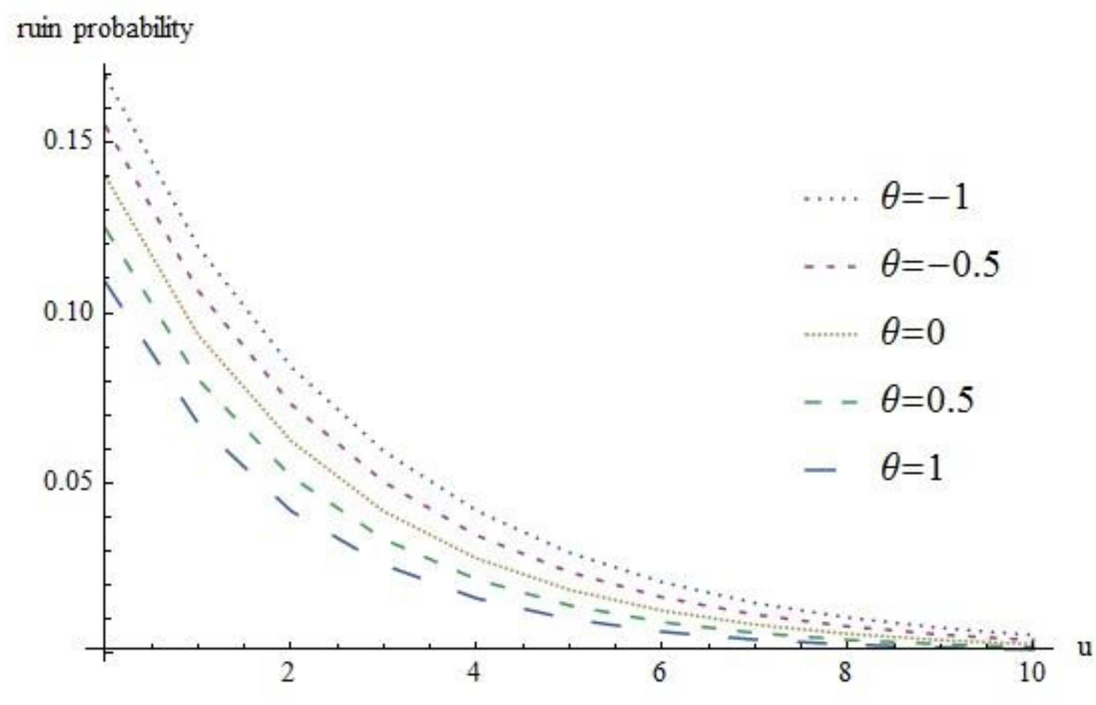
$$K(t) = \sum_{y=1}^{t} k(t)$$

με τις μεταβλητές $k_1(t)$ και $k(t)$ να δίνονται από τις σχέσεις (7.4) και (7.5) αντίστοιχα.

Παρόμοια με το προηγούμενο παράδειγμα θεωρούμε την ίδια μορφή εξαρτημένης δομής για το ζευγάρι (W, Y) με διαφορετικές τιμές του θ. Όπως και στο κανονικό μοντέλο διαλέγουμε $\theta = -1, -0.5, 0, 0.5, 1$
αντίστοιχα για το μοντέλο με υστέρηση.

Οι παράμετροι της γεωμετρικής κατανομής δηλώνονται ως $q_d = 0.5$, $q = 0.3$, $\beta = 0.2$. όλες οι υπόλοιπες παράμετροι είναι ίδιες με το κανονικό μοντέλο.

7.5.1 Πιθανότητες χρεοκοπίας για το μοντέλο με υστέρηση

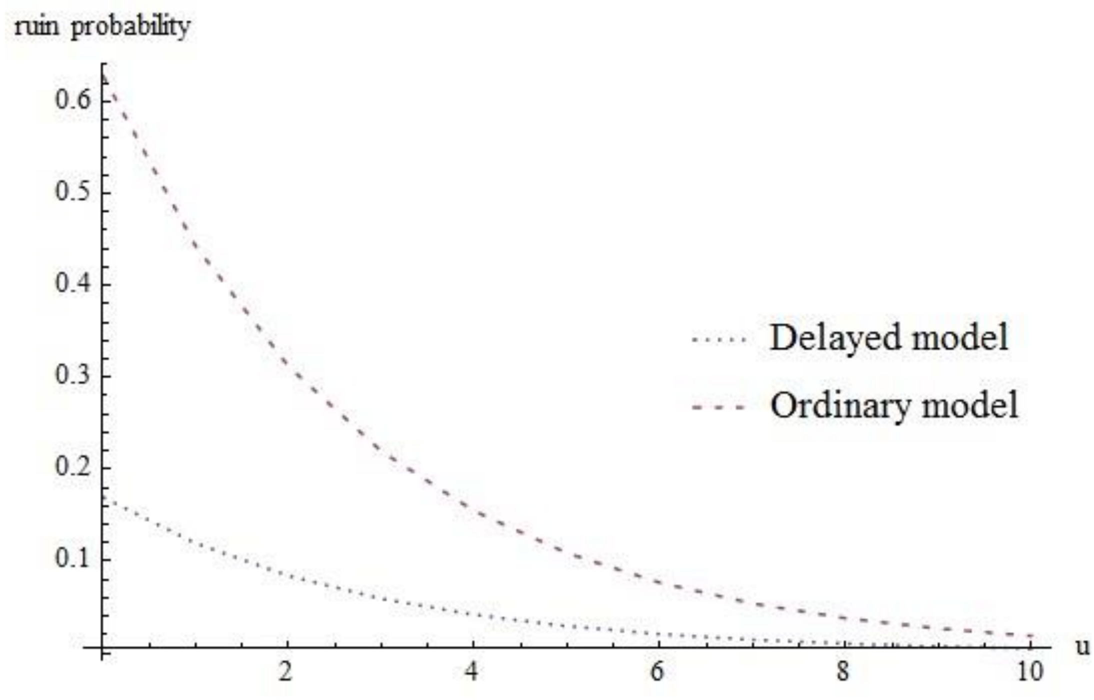


Σχήμα 7.7 Πιθανότητες χρεοκοπίας για το ετεροχρονισμένο μοντέλο

Το παραπάνω σχήμα μας δείχνει την καμπύλη της πιθανότητας χρεοκοπίας $\psi_d(u)$ για διαφορετικές τιμές του θ. Όπως παρατηρούμε

- Ανάλογα με τις υπόλοιπες περιπτώσεις, η πιθανότητα χρεοκοπίας του ετεροχρονισμένου μοντέλου μειώνεται καθώς το αρχικό απόθεμα αυξάνεται με σταθερή τιμή του θ
- Η πιθανότητα χρεοκοπίας επίσης μειώνεται καθώς οι τιμές του θ αυξάνουν με σταθερό αρχικό κεφάλαιο. Αυτό μας αποδεικνύει ένας μικρός ενδιάμεσος χρόνος είναι πολύ πιθανό να ακολουθείται από ένα μεγάλο ύψος ζημιάς , με αρνητική συσχέτιση, το οποίο θα οδηγεί σε μεγάλη πιθανότητα χρεοκοπίας.

7.5.2 Πιθανότητες χρεοκοπίας για το κανονικό και το μοντέλο με υστέρηση



Σχήμα 7.8 Πιθανότητες χρεοκοπίας για το κανονικό ανάλογα με το μοντέλο με υστέρηση

Το σχήμα 7.8 μας παρουσιάζει τις πιθανότητες χρεοκοπίας του κανονικού και του ανανεωτικού μοντέλου με υστέρηση. Μπορούμε να διακρίνουμε μεγάλη διαφορά ανάμεσα στις δύο καμπύλες. Επιπλέον βλέπουμε ότι $\psi(u) \geq \psi_d(u)$ σε κάθε σημείο του γραφήματος. Αυτό συμβαίνει επειδή είναι πιο δύσκολο να υπάρξει χρεοκοπία στο μοντέλο με υστέρηση από ότι στο κανονικό. Με $\boldsymbol{\theta = -1}$, έχουμε $E[W_1] > E[W]$, το οποίο περιμέναμε να συμβεί επειδή όταν ο πρώτος ενδιάμεσος χρόνος είναι μικρός, με αρνητική συσχέτιση, τότε στο κανονικό μοντέλο έχουμε μεγαλύτερο ύψος ζημιάς.

Συνεπώς, η μεγαλύτερη πιθανότητα χρεοκοπίας βρίσκεται στο κανονικό μοντέλο.

Βιβλιογραφία

Albrecher, H., Boxma, O. J., 2004. A ruin model with dependence between claim sizes and claim intervals. Insurance: Mathematics and Economics 35 (2), 245_ 254.

Albrecher, H., Teugels, J. L., 2006. Exponential behavior in the presence of dependence in risk theory. Journal of Applied Probability, 257_273.

Badescu, A. L., Cheung, E. C. K., Landriault, D., 2009. Dependent risk models with bivariate phase-type distributions. Journal of Applied Probability, 113_ 131.

Boudreault, M., Cossette, H., Landriault, D., Marceau, E., 2006. On a risk model with dependence between interclaim arrivals and claim sizes. Scandinavian Actuarial Journal 2006 (5), 265_285.

Chadjiconstantinidis, S., Vrontos, S., 2014. On a renewal risk process with dependence under a Farlie_Gumbel_Morgenstern copula. Scandinavian Actuarial Journal 2014 (2), 125_158.

Cheung, E. C. K., Landriault, D., Willmot, G. E., Woo, J.-K., 2010a. Gerber_ Shiu analysis with a generalized penalty function. Scandinavian Actuarial Journal 2010 (3), 185_199.

Cheung, E. C. K., Landriault, D., Willmot, G. E., Woo, J.-K., 2010b. Structural properties of Gerber_Shiu functions in dependent Sparre Andersen models. Insurance: Mathematics and Economics 46 (1), 117_126.

Cheung, E. C. K., Landriault, D., Willmot, G. E., Woo, J.-K., 2011. On orderings and bounds in a generalized Sparre Andersen risk model. Applied Stochastic Models in Business and Industry 27 (1), 51_60.

Cheung, E. C. K., Woo, J.-K., 2014. On the discounted aggregate claim costs until ruin in dependent Sparre Andersen risk processes. Scandinavian Actuarial Journal (ahead-of-print), 1_29.

Cossette, H., Marceau, E., Marri, F., 2008. On the compound poisson risk model with dependence based on a generalized Farlie_Gumbel_Morgenstern copula. Insurance: Mathematics and Economics 43 (3), 444_455.

Cossette, H., Marceau, E., Marri, F., 2010. Analysis of ruin measures for the classical compound Poisson risk model with dependence. Scandinavian Actuarial Journal 2010 (3), 221_245.

Cox, D. R., 1962. Renewal theory. Vol. 4. Methuen London.

Dickson, D. C. M., Hipp, C., 2001. On the time to ruin for Erlang (2) risk processes. Insurance: Mathematics and Economics 29 (3), 333_344.

Gerber, H. U., Shiu, E. S. W., 1998. On the time value of ruin. North American Actuarial Journal 2 (1), 48_72.

Gerber, H. U., Shiu, E. S. W., 2005. The time value of ruin in a Sparre Andersen model. North American Actuarial Journal 9 (2), 49_69.
74

Kim, S.-Y., 2007. Topics in delayed renewal risk models. Ph.D. thesis, University of Waterloo.

Kim, S.-Y., Willmot, G. E., 2011. The proper distribution function of the de_cit in the delayed renewal risk model. Scandinavian Actuarial Journal 2011 (2), 118_137.

Landriault, D., Willmot, G. E., 2008. On the Gerber_Shiu discounted penalty function in the Sparre Andersen model with an arbitrary interclaim time distribution. Insurance: Mathematics and Economics 42 (2), 600_608.

Landriault, D., Willmot, G. E., 2009. On the joint distributions of the time to ruin, the surplus prior to ruin, and the de_cit at ruin in the classical risk model. North American Actuarial Journal 13 (2), 252_270.

Li, S., 2005a. Distributions of the surplus before ruin, the de_cit at ruin and the claim causing ruin in a class of discrete time risk models. Scandinavian Actuarial Journal 2005 (4), 271_284.

Li, S., 2005b. On a class of discrete time renewal risk models. Scandinavian Actuarial Journal 2005 (4), 241_260.

Li, S., Garrido, J., 2004. On ruin for the Erlang (n) risk process. Insurance: Mathematics and Economics 34 (3), 391_408.

Li, S., Garrido, J., 2005. On a general class of renewal risk process: analysis of the Gerber-Shiu function. Advances in Applied Probability 37 (3), 836_856.

Li, S., Lu, Y., 2005. On the expected discounted penalty functions for two classes of risk processes. Insurance: Mathematics and Economics 36 (2), 179_193.

Lundberg, F., 1932. Some supplementary researches on the collective risk theory. Scandinavian Actuarial Journal 1932 (3), 137_158.

Nelsen, R. B., 2013. An introduction to copulas. Vol. 139. Springer Science & Business Media.

Pavlova, K. P., Willmot, G. E., 2004. The discrete stationary renewal risk model and the Gerber_Shiu discounted penalty function. Insurance: Mathematics and Economics 35 (2), 267_277.

Úbeda-Flores, M., 2004. A new class of bivariate copulas. Statistics & probability letters 66 (3), 315_325.

Willmot, G. E., 2002. Compound geometric residual lifetime distributions and the de_cit at ruin. Insurance: Mathematics and Economics 30 (3), 421_438.

Willmot, G. E., 2004. A note on a class of delayed renewal risk processes. Insurance: Mathematics and Economics 34 (2), 251_257.

Willmot, G. E., 2007. On the discounted penalty function in the renewal risk model with general interclaim times. Insurance: Mathematics and Economics 41 (1), 17_31.

Willmot, G. E., Dickson, D. C. M., 2003. The Gerber_Shiu discounted penalty function in the stationary renewal risk model. Insurance: Mathematics and Economics 32 (3), 403_411.

Willmot, G. E., Dickson, D. C. M., Drekic, S., Stanford, D. A., 2002. The de_cit at ruin in the stationary renewal risk model.

Willmot, G. E., Lin, X. S., 2001. Lundberg approximations for compound distributions with insurance applications. Vol. 156. Springer Science & Business Media.

Willmot, G. E., Woo, J.-K., 2010. Surplus analysis for a class of Coxian interclaim time distributions with applications to mixed Erlang claim amounts. Insurance: Mathematics and Economics 46 (1), 32_41.

Willmot, G. E.,Woo, J.-K., 2012. On the analysis of a general class of dependent risk processes. Insurance: Mathematics and Economics 51 (1), 134_141. Woo, J.-K., 2010. Some remarks on delayed renewal risk models. Astin Bulletin 40 (01), 199_219.

Woo, J.-K., 2012. A generalized penalty function for a class of discrete renewal processes. Scandinavian Actuarial Journal 2012 (2), 130_152.

Wu, X., Li, S., 2009. On the discounted penalty function in a discrete time renewal risk model with general interclaim times. Scandinavian Actuarial Journal 2009 (4), 281_294.

Zhang, Z., Yang, H., 2011. Gerber_Shiu analysis in a perturbed risk model with dependence between claim sizes and interclaim times. Journal of Computational and Applied Mathematics 235 (5), 1189_1204.