ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
ΤΜΗΜΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ
& ΤΡΑΠΕΖΙΚΗΣ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ

Μεταπτυχιακή Διατριβή

Δυνητικά Παίγνια

Ανδρεόλα Γ. Νικολέττα

Επιβλέπων

Δημήτριος Βολιώτης, Επίκουρος Καθηγητής

Μέλη της Επιτροπής

Δημήτριος Βολιώτης, Επίκουρος Καθηγητής

Άγγελος Αντζουλάτος, Καθηγητής

Νικόλαος Εγγλέζος, Επίκουρος Καθηγητής

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε με σκοπό την εκπλήρωση των υποχρεώσεων για την απόκτηση του μεταπτυχιακού διπλώματος ειδίκευσης στη Χρηματοοικονομική και Τραπεζική Διοικητική του Πανεπιστημίου Πειραιώς.

Με τη παρούσα παράγραφο θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου Επικ. Καθηγητή κ. Δ. Βολιώτη, για την πολύτιμη βοήθεια ,την άψογη συνεργασία και την διαρκή στήριξη του καθ’ όλη τη διάρκεια εκπόνησης της παρούσας εργασίας.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου για την συνεχής συμπαράσταση τους, τις συμβουλές τους και φυσικά για όλα όσα μου έχουν προσφέρει στη ζωή μου αλλά και στο κύκλο σπουδών μου.

Σύνοψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία αναφέρεται σε μια κατηγορία παιγνίων που ονομάζονται ***<u>Δυνητικά Παίγνια</u>***. Θα αναφερθεί εν συντομία η Θεωρία των Παιγνίων, το ολιγοπώλιο Cournot ,πως βρίσκουμε την ισορροπία κατά Nash και βασιζόμενοι στο άρθρο των Monderer, D.,and L. S. Shapley, θα αναλύσουμε την μεγιστοποίηση μιας δυνητικής συνάρτησης η οποία θα περιέχει όλα τα βέλτιστα q (βάση Cournot).Συμπερασματικά, αυτή η διαδικασία είναι χρήσιμη διότι ,αντί να μεγιστοποιούμε κάθε συνάρτηση ξεχωριστά μπορούμε να μεγιστοποιήσουμε μια μόνο συνάρτηση η οποία συμπεριλαμβάνει όλες τις βέλτιστες αντιδράσεις.

<u>Λέξεις κλειδιά:</u>

Παίγνια

Παίκτες

Στρατηγικές

Ισορροπία κατά Nash

Υπόδειγμα Cournot

Δυνητικά Παίγνια

Εφαρμογές δυνητικών παιγνίων

Abstract

This thesis deals with a category of games called Potential Games. We will briefly mention Game Theory, the Cournot oligopoly, how to find Nash equilibrium and we mainly based on the article by Monderer, D., and LS Shapley, we will analyze the maximization of a potential function containing all optimal q (according to Cournot model). In conclusion, this procedure is useful because, instead of maximizing each function separately, we can maximize a single function that includes all optimal reactions.

Keywords:

Games

Players

Strategies

Nash equilibrium

Cournot model

Potential games

Applications on potential games

Περιεχόμενα

1.Εισαγωγή στη Θεωρία Παιγνίων

1.1 Τι είναι η θεωρία παιγνίων

Όπως παρατηρούμε σε πολλά φαινόμενα της καθημερινής μας ζωής καλούμαστε να πάρουμε κάποιες αποφάσεις. Οντότητες όπως επιχειρήσεις, κυβερνήσεις κλπ συχνά καλούνται να επιλέξουν μια συγκεκριμένη ενέργεια που έχει ως κριτήριο την μεγιστοποίηση του ατομικού οφέλους τους, και μάλιστα σε συνθήκες όπου το όφελος τους δεν εξαρτάται μόνο από την δική τους ενέργεια αλλά και από τις ενέργειες άλλων. Συνεπώς, η διαδικασία λήψης αποφάσεων λαμβάνει χώρα σε ένα περιβάλλον αλληλεπίδρασης όπου κάθε άτομο επηρεάζει και επηρεάζεται από άλλα άτομα.

Έτσι λοιπόν κάθε άτομο καλείται να επιλέξει μια ενέργεια και να λάβει υπόψιν του αυτές τις αλληλεπιδράσεις. Το γεγονός αυτό καθιστά τη λήψη αποφάσεων ένα πολύπλοκο αλλά και ταυτόχρονα ενδιαφέρον πρόβλημα. Η θεωρία παιγνίων είναι ένας κλάδος που ασχολείται με τέτοιου είδους προβλήματα.

Τα τελευταία 30 χρόνια, η θεωρία παιγνίων έχει βρει ευρύτατη εφαρμογή στα οικονομικά, όπου ολόκληροι κλάδοι στηρίζονται στις μεθόδους της, όπως π.χ. η βιομηχανική οργάνωση (industrial organisation), ο σχεδιασμός μηχανισμών (mechanism design) με σπουδαιότερο υποκλάδο τον σχεδιασμό δημοπρασιών (auctions) κ.α. Επίσης, η θεωρία παιγνίων χρησιμοποιείται και στην Πολιτική Οικονομία και ειδικά στη θεωρία της συλλογικής δράσης, όπου εξηγεί ενδεχόμενα συνεργασίας μεταξύ των παικτών. Στη συγκεκριμένη εκδοχή, μιλάμε για παίγνια συνεργασίας (Cooperative Game Theory). Αυτό βρίσκεται σε άμεση συσχέτιση με τον ρόλο του κράτους και των θεσμών σε θέματα συνεργασίας. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η παροχή δημόσιων αγαθών και η φορολογία. Επιπρόσθετα χρησιμοποιείται ευρέως και σε άλλες επιστήμες με τις οποίες παράλληλα αλληλεπιδρά, όπως η εξελικτική βιολογία, η ψυχολογία, η κοινωνιολογία κλπ. Ένα γνωστό παράδειγμα στη θεωρία των παιγνίων είναι το δίλημμα του φυλακισμένου. Το παιχνίδι αυτό έχει χρησιμοποιηθεί ευρέως για την ανάλυση καταστάσεων κοινωνικών διλημμάτων (social dilemmas). (wikipedia, n.d.)

Ένα άλλο χαρακτηριστικό παράδειγμα όπως προαναφέρθηκε εφαρμογής της Θεωρίας των παιγνίων είναι μια διαδικασία δημοπρασίας. Αναλυτικότερα, κάθε υποψήφιος αγοραστής υποβάλλει την προσφορά του (τιμή αγοράς). Νικητής είναι εκείνος με την μεγαλύτερη προσφορά ο οποίος θα αποκτήσει το αντικείμενο της δημοπρασίας στη τιμή που έχει προτείνει. Η τιμή την οποία έχει υποβάλλει ο υποψήφιος αγοραστής (η οποία αποτελεί και στρατηγική του) σχετίζεται με το πόσο ο ίδιος αποτιμά το συγκεκριμένο αγαθό αλλά και εκτιμήσεις σχετικά με το πώς αποτιμούν άλλοι υποψήφιοι το αγαθό αυτό οι οπαίοι συμμετέχουν στην δημοπρασία. Το πρόβλημα επιλογής τιμών γίνεται πιο ενδιαφέρον όταν οι αγοραστές δεν γνωρίζουν πως αποτιμούν οι άλλοι συμμετέχοντες το αγαθό αγοραπωλησίας (Σταματόπουλος, 2015).

Το παραπάνω λοιπόν είναι ένα παράδειγμα που μελετά η θεωρία των παιγνίων. Η μελέτη αυτή βασίζεται στην κατασκευή ενός παιγνίου με βασικά χαρακτηριστικά του παίκτες ή αλλιώς τους λήπτες αποφάσεων, τις στρατηγικές τους,την πληροφόρηση που διαθέτουν οι παίκτες καθώς και τις αποδόσεις που αποκομίζουν ως συνάρτηση των στρατηγικών που επιλέγουν τόσο οι ίδιοι όσο και οι άλλοι παίκτες.

Υπάρχουν διάφορες κατηγορίες παιγνίων, όπου η κατηγοριοποίηση τους εξαρτάται από διάφορα χαρακτηριστικά όπως ο χρόνος, η πληροφόρηση των παικτών, το περιβάλλον στο οποίο καλούνται οι παίκτες να πάρουν αποφάσεις και άλλα. Οι σημαντικότερες και πιο διαδεδομένες κατηγορίες παιγνίων είναι τα Στατικά ή Δυναμικά παίγνια, τα παίγνια με Ελλιπή ή Πλήρη πληροφόρηση, παίγνια με τέλεια ή ατελή πληροφόρηση, συνεργατικά και μη συνεργατικά παίγνια και παίγνια σταθερού ή μη σταθερού αθροίσματος.

Αναλυτικότερα,

- Στατικά ή δυναμικά παίγνια
  Ένα παίγνιο καλείται στατικό όταν δεν επηρεάζεται από τον παράγοντα του χρόνου. Δηλαδή όλοι οι παίκτες καλούνται να επιλέξουν μια στρατηγική μια φορά και στο ίδιο χρονικό σημείο.Αντίθετα, δυναμικό ονομάζεται ένα παίγνιο όπου οι επιλογές των παικτών γίνονται σε διαφορετικά χρονικά σημεία.

- Παίγνια με πλήρη ή ελλιπή πληροφόρηση

Όταν σε ένα παίγνιο οι παίκτες που συμμετέχουν γνωρίζουν όλα τα χαρακτηριστικά του παιγνίου τότε έχουμε ένα παίγνιο με πλήρη πληροφόρηση. Αντιθέτως όταν ένα τουλάχιστον παίκτης δεν γνωρίζει επαρκώς τα χαρακτηριστικά του παιγνίου τότε έχουμε παίγνιο με ελλιπή πληροφόρηση.

- Παίγνια με τέλεια η ατελή πληροφόρηση

  Μια σημαντική κατηγορία παιγνίων είναι τα παίγνια με τέλεια πληροφόρηση. Ένα παίγνιο είναι παίγνιο τέλειας πληροφόρησης, όταν όλοι οι παίκτες γνωρίζουν τις κινήσεις που έχουν ήδη πραγματοποιήσει όλοι οι άλλοι παίκτες. Έτσι, μόνο τα ακολουθιακά παιχνίδια θεωρούνται παιχνίδια τέλειας πληροφόρησης επειδή οι παίκτες στα ταυτόχρονα παιχνίδια δεν γνωρίζουν τις ενέργειες των άλλων παικτών.

- Συνεργατικά και μη συνεργατικά παίγνια

  Ένα παιχνίδι είναι συνεργατικό όταν οι παίκτες είναι σε θέση να επιλέξουν εκείνες τις στρατηγικές οι οποίες μεγιστοποιούν τα οφέλη μια ομάδας ατόμων. Η συνεργατική αυτή συμπεριφορά είναι δεσμευτική για όλους τους παίκτες. Σε μη συνεργατικά παίγνια, αυτό δεν είναι δυνατό. Συχνά γίνεται η υπόθεση ότι η επικοινωνία μεταξύ των παικτών επιτρέπεται σε συνεργατικά παίγνια αλλά όχι σε μη συνεργατικά.

- Παίγνια μηδενικού η μη σταθερού αθροίσματος

  Ένα παίγνιο μηδενικού αθροίσματος είναι μια κατηγόρια παιγνίων σταθερού αθροίσματος όπου το συνολικό πλεονέκτημα για όλους τους παίκτες, για κάθε συνδυασμό στρατηγικών, πάντα προστίθεται στο μηδέν. Σε ένα παίγνιο μη σταθερού αθροίσματος η παραπάνω ιδιότητα δεν υφίσταται. Σε παίγνια μηδενικού αθροίσματος με δυο παίκτες το κέρδος του ενός είναι ζημία του άλλου.

Μια βασική προϋπόθεση στην οποία βασίζεται η θεωρία των παιγνίων είναι ότι οι παίκτες είναι ορθολογικά άτομα. Δηλαδή κάθε παίκτης γνωρίζει τις εναλλακτικές επιλογές του, έχει ξεκάθαρες προτιμήσεις σχετικά με αυτές, σχηματίζει προσδοκίες για όσα στοιχεία του είναι άγνωστα και επιλέγει εκείνες τις ενέργειες οι οποίες μεγιστοποιούν τη χρησιμότητα του (Σταματόπουλος, 2015).

1.2 Ιστορική αναδρομή

Η πρώτη γνωστή αναφορά της θεωρίας παιγνίων παρουσιάστηκε σε μια επιστολή που γράφτηκε από τον James Waldegrave το 1713 (Bellhouse, 2007).Στην επιστολή αυτή, ο Waldegrave παρέχει μια λύση σε μια έκδοση δύο παικτών του παιχνιδιού καρτών le Her, η οποία ήταν βασισμένη σε μια minimax μικτή στρατηγική. Το 1838, ο Antoine Augustin Cournot στο βιβλίο του Recherches sur les principes mathématiques de la Théorie des Richesses, μελέτησε την λειτουργία μιας αγοράς στην οποία δρούν δυο επιχειρήσεις.

Το 1913 ο Ernst Zermelo στη δημοσίευση του Über eine Anwendung der auf die Mengenlehre Theorie des Schachspiels απέδειξε ότι η βέλτιστη στρατηγική στο σκάκι είναι αυστηρά προσδιορισμένη. Αυτό άνοιξε το δρόμο για πιο γενικά θεωρήματα. (Screpanti, Ernesto, Zamagni, & Stefano, 2005)

Οι πρώτες αναλύσεις μηδενικού αθροίσματος έγιναν από τον Borel (1921) και τον von Neumann (1928). Το 1938 ο Émile Borel στο βιβλίο του Applications aux Jeux de Hasard , απέδειξε ένα θεώρημα για παίγνια δύο παικτών και μηδενικού αθροίσματος στην ειδική περίπτωση που ο πίνακας κέρδους ήταν συμμετρικός.

Η θεωρία παιγνίων δεν υπάρχει στην πραγματικότητα ως ένα ξεχωριστό επιστημονικό πεδίο μέχρι το 1928 και την δημοσίευση του Zur Theorie der Gesellschaftsspiele από τον John von Neumann, ο οποίος χρησιμοποίησε το θεώρημα σταθερού σημείου του Brouwer για συνεχείς αντιστοιχίσεις σε συμπαγή κυρτά σύνολα όπου η μέθοδος αυτή καθιερώθηκε στην θεωρία παιγνίων και τα Οικονομικά Μαθηματικά. Το 1944 οι von Neumann και Morgestern εξέδωσαν το βιβλίο τους Theory of Games and Economic Behavior,το οποίο είχε επίδραση σε αρκετούς τομείς της θεωρίας των παιγνίων (παίγνια μηδενικού αθροίσματος, συνεργατικά παίγνια κλπ) (Σταματόπουλος, 2015). Η δεύτερη έκδοση αυτού του βιβλίου περιέχει μια αξιωματική θεωρία της χρησιμότητας. Το έργο του von Neumann στη θεωρία παιγνίων κορυφώθηκε σε αυτό το βιβλίο το 1944. Αυτό το θεμελιώδες έργο περιέχει τη μέθοδο για την εύρεση αμοιβαία σταθερών λύσεων σε παίγνια δύο παικτών και μηδενικού αθροίσματος. Κατά την επόμενη περίοδο, οι εργασίες στη θεωρία παιγνίων εστιάζονται κυρίως σε συνεργατικά παίγνια. Οι εργασίες αυτές αναλύουν βέλτιστες στρατηγικές για ομάδες παικτών, με την προϋπόθεση ότι μπορούν να υπάρξουν συμφωνίες μεταξύ των παικτών σχετικές με τη κατάλληλη στρατηγική. (Leonard, 2010)

Το 1950, εμφανίστηκε η πρώτη συζήτηση στους μαθηματικούς κύκλους σχετικά με το δίλημμα του φυλακισμένου, όταν έγινε και ένα πείραμα από τους αξιοσημείωτους μαθηματικούς Merrill M. Flood και Melvin Dresher, ως μέρος της έρευνας της RAND Corporation στη θεωρία παιγνίων (wikipedia, n.d.). Στα επόμενα χρόνια ο John Nash παίζει καθοριστικό ρόλο στην ανάπτυξη της θεωρίας των παιγνίων. Ο Nash διαμόρφωσε την έννοια της ισορροπίας παιγνίων μη μηδενικού αθροίσματος , γνωστή ως ισορροπία Nash , η οποία εφαρμόζεται σε μια ευρύτερη ποικιλία παιγνίων σε σχέση με αυτά που προτείνονται από τους von Neumann και Morgenstern.

Η παραπάνω χρονική περίοδος αποδείχτηκε ιδιαίτερα σημαντική για το κλάδο της θεωρίας των παιγνίων καθώς εκείνη την περίοδο αναπτυχθηκαν πολύ σημαντικές έννοιες όπως core, the extensive form game, fictitious play, repeated games, αξία Shapley. Επιπλέον, οι πρώτες εφαρμογές της θεωρίας παιγνίων στη φιλοσοφία και την πολιτική επιστήμη εμφανίστηκαν κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου. (wikipedia, n.d.)

Το 1913 ο Zermelo ασχολήθηκε με μια συγκεκριμένη κατηγορία παιγνίων, όπου οι παίκτες επιλέγουν να παίξουν διαδοχικά, γνωρίζοντας σε κάθε χρονική στιγμή ο ένας τις ενέργειες του άλλου. Το 1965, ο Reinhard Selten εισήγαγε για αυτά τα παίγνια την τέλεια κατά υποπαίγνιο ισορροπία (subgame perfect equilibria), στην οποία επεξεργάστηκε περαιτέρω την ισορροπία Nash.

Το 1967, ο John Harsanyi ανέπτυξε τις έννοιες complete information και Bayesian games. Στους Nash, Selten και Harsanyi απονεμήθηκε το βραβείο Νόμπελ Οικονομικών Επιστημών το 1994 για τη συμβολή τους στην οικονομική θεωρία παιγνίων (wikipedia, n.d.).

Στα μέσα της δεκαετίας του 1970 ξεκίνησε μια βιβλιογραφία με σκοπό την μελέτη παιγνίων που διαθέτουν παραπάνω από μια ισορροπίες. Στα πλαίσια αυτής της έρευνας, ο Selten συζήτησε το κριτήριο της τελειότητας. Το κριτήριο αυτό επεξεργάστηκε περισσότερο από τον Myerson (1978) ο οποίος εισήγαγε την έννοια της καταλληλόλητας.

Το 1974 ο Aumann πρότεινε μια γενίκευση της ισορροπίας Nash,την λεγόμενη συσχετιζόμενη ισορροπία. Η ισορροπία κατά Nash στηρίζεται στην υπόθεση ότι οι παίκτες επιλέγουν στρατηγικές ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον .Ο Aumann τροποποίησε την υπόθεση αυτή ,επιτρέποντας ένα είδος συσχέτισης μεταξύ των επιλογών των παικτών. Για παράδειγμα, οι παίκτες παρατηρούν διαφορετικές εκφάνσεις του ίδιου φαινομένου, και κατόπιν επιλέγουν τις στρατηγικές τους βάσει των παρατηρήσεων τους (Σταματόπουλος, 2015).

Το 2005, οι θεωρητικοί των παιγνίων Thomas Schelling και Robert Aumann τιμήθηκαν με το βραβείο Νόμπελ Οικονομικών Επιστημών. Η εργασία του Schelling ήταν σχετική με δυναμικά μοντέλα, ενώ ο Aumann συνέβαλε περισσότερο προς την κατεύθυνση της έννοιας της ισορροπίας.

Το 2007, ο Leonid Hurwicz, μαζί με τον Eric Maskin και τον Roger Myerson, τιμήθηκαν με το βραβείο Νόμπελ Οικονομικών Επιστημών. Η συνεισφορά του Myerson περιλαμβάνει την έννοια της καταλληλόλητας (proper equilibrium) καθώς και μια σημαντική πτυχιακή διατριβή: Game Theory, Analysis of Conflict (Myerson, 1991). Ο Hurwicz εισήγαγε και τυποποίησε την έννοια της incentive compatibility.

Το 2012, βραβείο Νόμπελ Οικονομικών Επιστημών απονεμήθηκε στους Alvin E. Roth και Lloyd S. Shapley για την εργασία τους “for the theory of stable allocations and the practice of market design”. (wikipedia, n.d.)

1.3 Άλλες εξελίξεις

Η θεωρία των παιγνίων παραδοσιακά στηρίχθηκε στην ιδέα ότι τα άτομα είναι πλήρως ορθολογικά υπό την έννοια ότι μπορούν πάντοτε να επιτύχουν το στόχο της μεγιστοποίησης της απόδοσης τους. Από παλιά, και συγκεκριμένα από τη δεκαετία του 1950,υπηρχε η άποψη ότι η υπόθεση του πλήρους ορθολογισμού είναι μη ρεαλιστική, και ότι θα πρέπει να αντικατασταθεί από αυτή του φραγμένου ορθολογισμού, η οποία θέτει όρια στο ότι μπορούν να πέτυχουν οι παίκτες .Κύριος εκπρόσωπος αυτής της τάσης υπήρξε ο Simon (1995).

Μια μεγάλη βιβλιογραφία αναπτύχθηκε, η οποία είχε να ενσωματώσει με τον ένα ή τον άλλον τρόπο την υπόθεση του φραγμένου ορθολογισμού στα παίγνια. Ένα κομμάτι της βιβλιογραφίας αυτής υιοθέτησε την υπόθεση ότι τα άτομα ακολουθούν απλούς κανόνες επιλογής στρατηγικών, ένα άλλο υπέθεσε ότι τα άτομα τείνουν να επιλέγουν τις καλές στρατηγικές πιο συχνά από τις λιγότερο καλές (χωρίς αναγκαστικά να επιτυγχάνεται η μεγιστοποίηση χρησιμότητας) ή ότι επιλέγουν τις στρατηγικές τους περιοριζόμενοι σε ένα υποσύνολο αυτών. Γενικά, δεν υπάρχει ένα κοινό υπόδειγμα φραγμένου ορθολογισμού στα παίγνια, και κατά τον Aumann (1997) δεν θα υπάρξει ποτέ.

Παράλληλα με την ανάπτυξη της θεωρίας των παιγνίων, οι οικονομολόγοι έχουν ασχοληθεί με τον σχεδιασμό πειραματικών παιγνίων για να ελέγξουν τις προβλέψεις της θεωρίας. Τέτοια πειράματα πραγματοποιούνται εδώ και αρκετές δεκαετίες. Μια επισκόπηση των πρώτων, χρονικά, πειραμάτων δημοσιεύτηκε από τους Raport και Orwant (1962). Συχνά, τα αποτελέσματα τέτοιων πειραμάτων δείχνουν ότι οι επιλογές των ατόμων επηρεάζονται από στοιχεία όπως η δικαιοσύνη, ο αλτρουισμός, το πλαίσιο αναφοράς (παίγνια με ίδιες επιλογές/αποδόσεις οδηγούν τους παίκτες σε διαφορετική συμπεριφορά αν παρουσιαστούν με διαφορετικό τρόπο το ένα από τα άλλα).Τα ευρήματα αυτά οδήγησαν στην ανάπτυξη των συμπεριφοριακών παιγνίων, δηλαδή παιγνίων τα οποία ενσωματώνουν στην ανάλυση τους στοιχεία όπως τα παραπάνω.

Κάποιες άλλες σημαντικές εξελίξεις που έλαβαν χώρα κατά τις τελευταίες δεκαετίες έχουν να κάνουν με την σύνδεση της ισορροπίας Nash με έννοιες της εξελικτικής βιολογίας, την ανάπτυξη των εξελικτικών παιγνίων, την ανάλυση των παιγνίων από γνωσιολογική πλευρά (ποιά και πόση γνώση απαιτείται εκ μέρους των παικτών για να φτάσουμε σε μια ισορροπία),την ανάπτυξη υποδειγμάτων μάθησης, δηλαδή υποδειγμάτων στα ο ποια ένα παίγνιο επαναλαμβάνεται στο χρόνο, με συνέπεια οι παίκτες να μαθαίνουν για τη συμπεριφορά των άλλων παικτών, και να καταλήγουν έτσι μακροχρόνια σε επιλογές ισορροπίας, κλπ.

Τέλος, όσον αφορά τη συσχέτιση με άλλα επιστημονικά πεδία, οι τομείς στους οποίους η θεωρία των παιγνίων έχει βρει εφαρμογή είναι πολλοί (με διάφορους βαθμούς επιτυχίας).Οι τομείς αυτοί περιλαμβάνουν τα οικονομικά (π.χ. βιομηχανική οργάνωση, θεωρία διεθνούς εμπορίου, μακροοικονομική πολίτικη, ανάλυση αγορών με ασύμμετρη πληροφόρηση, πολίτικη οικονομία, κλπ.) τις κοινωνικές επιστήμες (πολιτική επιστήμη, ψυχολογία),τη βιολογία, την επιστήμη των υπολογιστών, την επιχειρησιακή έρευνα, και άλλους. (Σταματόπουλος, 2015)

1.4 Επισκόπηση βιβλιογραφίας

Οι θεμελιωτές του ορισμού Δυνητικά Παίγνια αποτέλεσαν οι Monderer και Shapley το 1996 οι οποίοι παρουσίασαν για πρώτη φορά μια συστημική έρευνα και θεμελιώδη αποτελέσματα για ένα συγκεκριμένο είδος παιγνίων τα λεγόμενα Δυνητικά Παίγνια (potential games) στα οποία παρουσιάζονται κάποιες πιθανές επιλογές (potential functions). Ωστόσο έρευνες και σχετικές μελέτες αναφορικά με τα Δυνητικά Παίγνια είχαν πραγματοποιηθεί και το 1973 από τον Rosenthal ο οποίος παρουσίασε παίγνια με πιθανές στρατηγικές. Στις μέρες μας η θεωρία των Δυνητικών παιγνίων έχει αναπτυχθεί περαιτέρω από πολλούς συγγραφείς. Έχει αναπτυχθεί επίσης αρκετά στο τομέα των μαθηματικών με πολλές εφαρμογές στην επίλυση διαφόρων προβλημάτων.

Μαθηματικά μπορεί να υπάρχουν διάφοροι τύποι Δυνητικών Παιγνίων. Παρ' όλα αυτά, σε όλους αυτούς τους τύπους παιγνίων υπάρχει ένα κοινό σημείο το οποίο είναι οι στρατηγικές (S) των παικτών σε ένα σύνολο πραγματικών αριθμών R.

Οι Monderer και Shapley εισήγαγαν τέσσερις σημαντικούς ορισμούς Δυνητικών παιγνίων όπως διατακτικό δυνητικό παίγνιο (ordinal potential game), σταθμισμένο δυνητικό παίγνιο (wighted potential game), ακριβές διατακτικό παίγνιο και γενικευμένα διατακτικά παίγνια (generalized ordinal potential games) για τα οποία θα γίνει εκτενή αναφορά στο κεφάλαιο.

Άλλες προεκτάσεις στη βιβλιογραφία σχετικά με το συγκεκριμένο θέμα αποτέλεσε το άρθρο του Voorneveld με θέμα βέλτιστα δυνητικά παίγνια (best response potential games) το 2000 καθώς και του Dubey et al. το 2006 με θέμα Ψευδο-δυνητικά (pseudo-potential games).

2. Παίγνια και Ισορροπία

2.1 Λίγα λόγια για τη ζωή του John Nash

Στους βασικούς θεμελιωτές της θεωρίας παιγνίων ανήκει ο John Nash ο οποίος εισήγαγε στα παίγνια την ιδέα της ισορροπίας η οποία χρησιμοποιείται πλέον ευρέως σε όλους τους κλάδους της σύγχρονης επιστήμης. Ο Nash γεννήθηκε στη Δυτική Βιρτζίνια το 1928. Αν και ενδιαφερόταν για τα μαθηματικά, αποφάσισε να γίνει ηλεκτρολόγος μηχανικός όπως και ο πατέρας του. Όταν το 1945 γράφτηκε στο “Carnegie Institute of Technology” στο Pittsburgh αποφάσισε να γίνει χημικός μηχανικός, κάτι που στην πορεία δεν του άρεσε και έτσι επέστρεψε στα μαθηματικά με τα οποία ασχολήθηκε.

Όταν πήγε το 1948 στο “Princeton” ήταν ήδη ένας από τους κορυφαίους στην θεωρία παιγνίων και είχε ήδη ασχοληθεί με “προβλήματα συμφωνιών”, δηλαδή προβλήματα στα οποία οι παίκτες μοιράζονται κάποια κοινά συμφέροντα. Με τη φράση “αυτός ο άντρας είναι ιδιοφυία” περιέγραψε τον John Nash στους υπόλοιπους καθηγητές του Princeton University, ο καθηγητής R. L. Duffin. Η σημαντικότερη του εργασία όμως ήταν αυτή που ασχολήθηκε με την ισορροπία στη θεωρία παιγνίων και χάρη στην πολύτιμη συμβολή του πήρε το όνομα “Nash ισορροπία”. Ο Nash δημοσίευσε την ιδέα του για την ισορροπία αμέσως σε ηλικία 21 ετών! Μια δισέλιδη αναφορά έγινε το 1950 στο “Proceedings of the National Academy of Sciences”. Με τίτλο “Equilibrium Points in n-Person Games”, το άρθρο δημοσίευσε περιληπτικά την ύπαρξη λύσεων για παίγνια με ν παίκτες.

Επέκτεινε την έρευνα του και μια μεγαλύτερη έκδοση δημοσιεύτηκε το 1951 στο “Annals of Mathematics” με τίτλο “Non-cooperative Games”.Αν και δεν έτυχε ευρείας υποδοχής στην αρχή, η προσέγγιση του Nash για την θεωρία παιγνίων, τον οδήγησε στην απόκτηση του βραβείου Νόμπελ στα οικονομικά το 1994. 2εν υπάρχει όμως καμιά αμφιβολία ότι η ανάπτυξη της θεωρίας παιγνίων σε όλους τους τομείς έγινε εφικτή χάρη στην ανακάλυψη του Ο Nash σκαρφίστηκε μια γενική “λύση” για όλα τα (πεπερασμένα) παίγνια και απέδειξε ότι κάθε τέτοιο παίγνιο διαθέτει τουλάχιστον μια τέτοια λύση. Έτσι κατάφερε ένα μεγάλο χτύπημα στην απροσδιοριστία. (Βλαχοπούλου, 2010)

2.2 Ορισμός ενός παιγνίου (Ισορροπία Nash)

Η θεωρία των παιγνίων είναι κλάδος της μικροοικονομικής που ασχολείται με την ανάλυση της άριστης λήψης αποφάσεων σε ανταγωνιστικές καταστάσεις, στις οποίες οι ενέργειες αυτού που λαμβάνει τις αποφάσεις έχουν σημαντικό αντίκτυπο στη λήψη αποφάσεων των άλλων παικτών που λαμβάνουν μέρος σε ένα παίγνιο.

Ένα πεπερασμένο παίγνιο σε κανονική μορφή είναι ένας συνδυασμός G={N, $(X_i)_{i \in N}$, $(u_i)_{i \in N}$ }, όπου N={1,……, n }, $n \in N$ είναι ο αριθμός των παικτών ,X_i οι στρατηγικές του παίκτη i για κάθε i∈N, u_i : $\prod_{i \in N} X_i \rightarrow \mathrm{R}$ είναι μια πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $X_1 \times X_2 \times \ldots X_n$ που αποτιμά την απόδοση για κάθε συνδυασμό στρατηγικών (payoff function).

Εν συντομία, θεωρούμε ότι X=$\prod_{i \in N} X_i$ και για i∈N:X_{-i}=$\prod_{j \in N \setminus \{i\}} X_j$. Ως x=$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ορίζουμε ένα συνδυασμό στρατηγικών όλων των παικτών. Κάποιες φορές χρησιμοποιείτε η συντομογραφία x=(x_i, x_{-i}) όπου x_i είναι ένας συνδυασμός στρατηγικών του εκάστοτε παίκτη i όπου i∈N και x_{-i} ο συνδυασμός στρατηγικών όλων των άλλων παικτών πλην του παίκτη i.Δηλαδή x_{-i} είναι ένα διάνυσμα $(x_1, \ldots x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ όπου $x_{-i} \in X_{-i}$ και X_{-i} είναι το καρτεσιανό γινόμενο των στρατηγικών όλων των παικτών πλην του παίκτη i (Voorneveld, 2000).

Μια περίπτωση παιγνίου σε κανονική μορφή είναι με δυο παίκτες ,όπου ο καθένας έχει δυο στρατηγικές. Στο παρακάτω πίνακα απεικονίζεται ένα τέτοιο παίγνιο 2×2.

Πίνακας 2×2		ΠΑΙΚΤΗΣ 2	
		ΑΡΙΣΤΕΡΑ(Α)	ΔΕΞΙΑ(Δ)
ΠΑΙΚΤΗΣ1	ΠΑΝΩ(Π)	$(1,1)^{+,-}$	$(9,0)^{+}$
	ΚΑΤΩ(Κ)	$(0,9)^{-}$	(6,6)

Στο παραπάνω πίνακα αποδόσεων (2×2) απεικονίζονται οι αποδόσεις των παικτών. Συγκεκριμένα έστω ότι το σύνολο των παικτών είναι N={1,2}.Ο παίκτης 1 είναι ο παίκτης γραμμής (επιλεγεί δηλαδή κάθε φορά μια γραμμή του πίνακα) ενώ ο παίκτης 2 θα είναι ο παίκτης στήλης. Ο συνδυασμός των στρατηγικών των παικτών θα οδηγήσει σε μια ισορροπία. Μια τέτοια ισορροπία ονομάζεται *Ισορροπία Nash*, στην οποία ο κάθε παίκτης που συμμετέχει στο παίγνιο επιλεγεί τη στρατηγική που επιτυγχάνει την υψηλότερη απόδοση, με δεδομένες τις στρατηγικές που επέλεξαν οι άλλοι παίκτες. Αναλυτικότερα, σε κάθε συνδυασμό ο πρώτος αριθμός αντικατοπτρίζει την απόδοση του παίκτη 1 και αντίστοιχα ο δεύτερος αριθμός εκφράζει την απόδοση του παίκτη 2.Ετσι,το σύνολο των στρατηγικών του παίκτη 1 είναι το $X_1 = \{\Pi, K\}$ και το σύνολο των στρατηγικών του παίκτη 2 είναι το $X_2 = \{A, \Delta\}$. Εάν οι παίκτες επιλέξουν την στρατηγική Πάνω και Αριστερά αντίστοιχα τότε η απόδοση και των δύο παικτών είναι 1.Παρομοιως εάν οι παίκτες επιλέξουν τις στρατηγικές Πάνω και Δεξιά αντιστοίχως τότε ο παίκτης 1 έχει απόδοση 9 και ο παίκτης 2 έχει απόδοση 0 κ.ο.κ. Άρα ο συνδυασμός πάνω(Π) και αριστερά(Α) αποτελεί την ισορροπία Nash στο συγκεκριμένο παράδειγμα. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η απόδοση του κάθε παίκτη εξαρτάται όχι μόνο από τη δική του επιλογή αλλά και του αντιπάλου του.

2.3 Κυρίαρχες και κυριαρχούμενες στρατηγικές

2.3.1 Κυρίαρχες στρατηγικές

Έστω ότι έχουμε το παρακάτω παίγνιο με δυο εταιρίες αυτοκινήτων N={Honda,Toyota} και τις στρατηγικές Να κατασκευάσει ένα καινούριο εργοστάσιο και να μην κατασκευάσει ένα καινούριο εργοστάσιο.

Πίνακας 2×2		**Toyota**	
		Να κατασκευάσει ένα καινούριο εργοστάσιο	Να μην κατασκευάσει ένα καινούριο εργοστάσιο
Honda	Να κατασκευάσει ένα καινούριο εργοστάσιο	$(16{,}16)^{+,-}$	$(20{,}15)^{+}$
	Να μην κατασκευάσει ένα καινούριο εργοστάσιο	$(15{,}20)^{-}$	$(18{,}18)$

Στο παραπάνω παίγνιο (2×2) ήταν εύκολο να βρούμε την ισορροπία κατά Nash για κάθε παίκτη, αφού η στρατηγική «Να κατασκευάσει ένα καινούριο εργοστάσιο» ήταν η καλύτερη από κάθε άλλη στρατηγική που θα μπορούσαν να επιλέξουν οι παίκτες. Σε αυτή την περίπτωση, λέμε ότι η στρατηγική «Να κατασκευάσει ένα καινούριο εργοστάσιο» είναι μια κυρίαρχη στρατηγική. Μια κυρίαρχη στρατηγική είναι η στρατηγική που είναι η καλύτερη από κάθε άλλη στρατηγική που θα μπορούσε να επιλέξει ένα παίκτης ανεξάρτητα από το ποια στρατηγική θα ακολουθήσει ο άλλος παίκτης. Όταν κάποιος παίκτης έχει μια κυρίαρχη στρατηγική, η στρατηγική αυτή θα είναι η στρατηγική ισορροπίας κατά Nash.

Οι κυρίαρχες στρατηγικές δεν είναι αναπόφευκτες. Σε μερικά παίγνια μερικοί ή όλοι οι παίκτες δεν έχουν κυρίαρχες στρατηγικές. Ένα τέτοιο παράδειγμα περιγράφεται στον παρακάτω πίνακα ανάμεσα σε δυο εταιρίες αυτοκινήτων .

Πίνακας 2×2		**Toyota**	
		Να κατασκευάσει ένα καινούριο εργοστάσιο	Να μην κατασκευάσει ένα καινούριο εργοστάσιο
Honda	Να κατασκευάσει ένα καινούριο εργοστάσιο	$(12{,}4)^{-}$	$(20{,}3)^{+}$
	Να μην κατασκευάσει ένα καινούριο εργοστάσιο	$(15{,}6)^{-,+}$	$(18{,}5)$

Στην περίπτωση αυτή η Honda είναι πολύ μεγαλύτερη από την Toyota και κατασκευάζει μεγαλύτερα αυτοκίνητα. Συνεπώς αποκομίζει πολύ μεγαλύτερο κέρδος απ' ότι η Toyota,ανεξάρτητα από το ποιο σενάριο δυναμικότητας θα λειτουργήσει.

Σε αυτό το παίγνιο η Honda δεν έχει κυρίαρχη στρατηγική. Είναι σε καλύτερη θέση εάν δεν κατασκευάσει ένα καινούριο εργοστάσιο, εάν η Toyota κατασκευάσει, αλλά προτιμάει να κατασκευάσει ένα καινούριο εργοστάσιο εάν δεν κατασκευάσει η Toyota.Ενώ δεν υπάρχει μια κυρίαρχη στρατηγική για την Honda,συνεχίζει να υπάρχει ισορροπία κατά Nash.Η Toyota κατασκευάζει ένα καινούριο εργοστάσιο ενώ η Honda δεν κατασκευάζει. (D.Besanko-R.R.Braeutigam, 2009)

2.3.2 Κυριαρχούμενες στρατηγικές

Το αντίθετο μιας κυρίαρχης στρατηγικής είναι η κυριαρχούμενη στρατηγική. Μια στρατηγική είναι κυριαρχούμενη όταν ο παίκτης διαθέτει μια άλλη στρατηγική που έχει υψηλότερη απόδοση, ανεξάρτητα από το τι κάνει άλλος παίκτης. Στον προηγούμενο πίνακα με τις δυο εταιρίες αυτοκίνητων υπάρχουν δυο μόνο στρατηγικές για κάθε παίκτη, αν μια στρατηγική είναι κυρίαρχη τότε η άλλη θα είναι κυριαρχούμενη. Όμως όταν κάθε παίκτης έχει στα διάθεση του παραπάνω από δυο στρατηγικές, ένας παίκτης μπορεί να έχει κυριαρχούμενες στρατηγικές αλλά μόνο μια κυρίαρχη στρατηγική.

Ο εντοπισμός των κυριαρχούμενων στρατηγικών μερικές φορές βοηθάει στην εύρεση ισορροπίας κατά Nash σε ένα παίγνιο όπου κανένας παίκτης δεν έχει κυρίαρχη στρατηγική. Αναλυτικότερα, έστω ότι έχουμε το προηγούμενο παράδειγμα με τις δυο εταιρίες αυτοκίνητων, με τρεις στρατηγικές «να κατασκευαστεί ένα μεγάλο εργοστάσιο», «να κατασκευαστεί ένα μικρό εργοστάσιο» και «να μην κατασκευαστεί εργοστάσιο». Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τις αποδόσεις για κάθε μια από τις παραπάνω στρατηγικές.

Πίνακας 3×3		**Toyota**		
		Να κατασκευαστεί ένα μεγάλο εργοστάσιο	Να κατασκευαστεί ένα μικρό εργοστάσιο	Να μην κατασκευαστεί ένα εργοστάσιο
Honda	Να κατασκευαστεί ένα μεγάλο εργοστάσιο	$(0,0)$	$(12,8)$	$(18,9)^{+}$
	Να κατασκευαστεί ένα μικρό εργοστάσιο	$(8,12)$	$(16,16)^{+,-}$	$(20,15)^{-}$
	Να μην κατασκευαστεί ένα εργοστάσιο	$(9,18)^{-}$	$(15,20)^{+}$	$(18,18)$

Σε αυτό το παίγνιο κανένας παίκτης δεν διαθέτει κυρίαρχη στρατηγική και λόγω του οτι υπάρχουν τρεις αντί για δύο στρατηγικές ,οι προσπάθειες να βρεθεί μια ισορροπία κατά Nash είναι αρκετά δύσκολη. Ωστόσο μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η στρατηγική «να κατασκευαστεί ένα μεγάλο εργοστάσιο » είναι μια κυριαρχούμενη στρατηγική αφού σε κάθε περίπτωση υπάρχει πάντα καλύτερη στρατηγική για κάθε παίκτη από αυτή. Ανεξάρτητα από το πώς θα πράξει η Honda η Toyota θα είναι πάντα σε καλύτερη θέση εάν επιλέξει τη στρατηγική να κατασκευάσει ένα μικρό εργοστάσιο. Ομοίως ανεξάρτητα το τι θα επιλέξει σαν στρατηγική η Honda ,η Toyota θα είναι πάντα σε καλύτερη θέση εάν επιλέξει «Να κατασκευάσει ένα μικρό εργοστάσιο». Ακόμα και αν ο κάθε παίκτης σκεφτεί για τις αντιδράσεις του αντιπάλου του μπορεί να συμπεράνει ότι η στρατηγική «να κατασκευαστεί ένα μεγάλο εργοστάσιο » δεν θα επιλεγεί από κανέναν παίκτη. Εάν λοιπόν ο κάθε παίκτης υποθέσει ότι δεν θα επιλέξει την στρατηγική αυτή τότε ο πίνακας 3×3 θα γίνει 2×2 απαλείφοντας τη συγκεκριμένη στρατηγική. Έτσι δημιουργείται ένα παίγνιο 2×2 που η κυρίαρχη στρατηγική και ισορροπία κατά Nash είναι και για τους δυο παίκτες να κατασκευαστεί ένα μικρό εργοστάσιο. (D.Besanko-R.R.Braeutigam, 2009)

Πίνακας 2×2		**Toyota**	
		Να κατασκευάσει ένα μικρό εργοστάσιο	Να μην κατασκευάσει εργοστάσιο
Honda	Να κατασκευάσει ένα μικρό εργοστάσιο	$(16,16)^{+,-}$	$(20,15)^{-}$
	Να μην κατασκευάσει εργοστάσιο	$(15,20)^{+}$	$(18,18)$

2.4 Μεικτές στρατηγικές

Όπως μπορούμε να συμπεράνουμε από το παρακάτω πίνακα δεν υπάρχει μια ισορροπία κατά Nash στο παραπάνω παίγνιο. Εάν ο τερματοφύλακας πιστεύει ότι η Αμερικανίδα παίκτρια θα στοχεύσει προς τα δεξιά θα επιλέξει και εκείνος να κινηθεί προς τα δεξιά .Εάν όμως η Αμερικανίδα παίκτρια πιστεύει ότι ο τερματοφύλακας θα κινηθεί προς τα δεξιά η καλύτερη στρατηγική είναι να στοχεύσει αριστερά καθώς η συγκεκριμένη στρατηγική της δίνει μεγαλύτερη απόδοση.

Πίνακας 2×2		**Αμερικανίδα παίκτρια**	
		Στόχευση στα δεξιά	Στόχευση στα αριστερά
Τερματοφύλακας	Κίνηση προς τα δεξιά	$(0,0)^{+}$	$(-10,10)^{-}$
	Κίνηση προς τα αριστερά	$(-10,10)^{-}$	$(0,0)^{+}$

Το παίγνιο αυτό εξηγεί την αντίθεση ανάμεσα στην αμιγή στρατηγική και στη μεικτή στρατηγική. Μια αμιγής στρατηγική είναι μια επιλογή ανάμεσα σε δυο πιθανές κινήσεις σε ένα παίγνιο. Η Αμερικανίδα παίκτρια μπορεί να επιλέξει ανάμεσα σε δυο αμιγής στρατηγικές «Στόχευση στα δεξιά» ή «Στόχευση στα αριστερά». Αντιθέτως σε μια μεικτή στρατηγική ένας παίκτης επιλέγει ανάμεσα σε δυο η περισσότερες στρατηγικές με βάση προκαθορισμένες πιθανότητες.

Έτσι λοιπόν στο συγκεκριμένο παίγνιο που δεν υπάρχει ισορροπία κατά Nash με αμιγείς στρατηγικές αλλά υπάρχει ισορροπία με μεικτές στρατηγικές. Συνεπώς η Αμερικανίδα παίκτρια έχει την επιλογή είτε να στοχεύσει δεξιά με πιθανότητα ½ είτε αριστερά με πιθανότητα πάλι ½.Ο τερματοφύλακας θα πρέπει να εκτιμήσει τις κινήσεις της Αμερικανίδας παίκτριας με πιθανότητα ½ να στοχεύσει αριστερά και πιθανότητα ½ να στοχεύσει δεξιά. Συμπερασματικά, όταν οι παίκτες επιλέγουν αυτές στις μεικτές στρατηγικές κάθε ένας κάνει ότι καλύτερο μπορεί με δεδομένες τις ενέργειες του άλλου παίκτη.

2.5 Το δίλλημα των κρατουμένων (Prisoner's Dilemma)

Ένα από τα πιο γνωστά στρατηγικά παίγνια είναι το δίλλημα του φυλακισμένου. Η ονομασία προήλθε από μια υπόθεση υπόπτων σε ένα έγκλημα. Συγκεκριμένα δυο ύποπτοι ανακρίνονται σε ξεχωριστά κελιά για ένα σοβαρό έγκλημα αφού δεν υπάρχουν επαρκείς ενδείξεις για να καταδικαστεί κάποιος από τους δυο ένοχος. Όπως φαίνεται και στο παρακάτω πίνακα αν και οι δύο δεν ομολογήσουν θα καταδικαστούν σε έξι χρόνια φυλάκισης. Εάν ένας από τους δυο ομολογήσει και ο άλλος παραμείνει σιωπηρός τότε αυτός που θα ομολογήσει θα αφεθεί ελεύθερος. Αν και οι δυο ομολογήσουν θα καταδικαστούν σε πέντε χρόνια φυλάκισης έκαστος.

Η περίσταση αυτή θα μπορούσε να μοντελοποιηθεί ως εξής: u_1(Να ομολογήσει, Να ομολογήσει)=-5, u_1(Να ομολογήσει, Να μην ομολογήσει)=0, u_1(Να μην ομολογήσει, Να ομολογήσει)=-10, u_1(Να μην ομολογήσει, Να μην ομολογήσει)=-1, u_2(Να ομολογήσει, Να ομολογήσει)=-5, u_2(Να ομολογήσει, Να μην ομολογήσει)=-10, u_2(Να μην ομολογήσει, Να ομολογήσει)=0, u_2(Να μην ομολογήσει, Να μην ομολογήσει)=-1.

Παρατηρούμε ότι u_1(Να μην ομολογήσει, Να ομολογήσει)< u_1(Να ομολογήσει, Να ομολογήσει)< u_1(Να μην ομολογήσει, Να μην ομολογήσει)< u_1(Να ομολογήσει, Να μην ομολογήσει).Ομοίως για τον παίκτη 2 u_2(Να ομολογήσει, Να μην ομολογήσει)< u_2(Να ομολογήσει, Να ομολογήσει)< u_2(Να μην ομολογήσει, Να μην ομολογήσει)> u_2(Να μην ομολογήσει, Να ομολογήσει).

		ΠΑΙΚΤΗΣ 2	
		Να ομολογήσει	Να μην ομολογήσει
ΠΑΙΚΤΗΣ 1	Να ομολογήσει	$(-5,-5)^{+,-}$	$(0,-10)^{+}$
	Να μην ομολογήσει	$(-10,0)^{-}$	(-1,-1)

Το δίλλημα του φυλακισμένου περιγράφει περιπτώσεις όπου ενώ υπάρχουν κέρδη από την συνεργασία των παικτών τελικά ο κάθε παίκτης δρά με προσωπικό κίνητρο ανεξάρτητα με το τι θα επιλέξει ο άλλος παίκτης. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα ότι ,ενώ υπάρχει μεγαλύτερο κέρδος σε μια ισορροπία η οποία προκύπτει από συνεργασία των παικτών, το προσωπικό κίνητρο οδηγεί σε μια ισορροπία Nash με μικρότερες αποδόσεις. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα ενώ συμφέρει και τους δυο παίκτες να συνεργαστούν και να μην ομολογήσουν ούτως ώστε να καταδικαστούν ένα χρόνο ο καθένας, το προσωπικό όφελος τους οδηγεί να ομολογήσουν και να καταδικαστούν σε πέντε χρόνια φυλάκισης.

2.6 Η μάχη των φύλων “Battle of the Sexes”

Το παίγνιο “battle of the sexes” (η μάχη των φύλων) αποτελεί ένα από τα κλασσικά παιχνίδια στη θεωρία παιγνίων. Στην παραδοσιακή ανάλυση του παιχνιδιού, το οποίο χρονολογείται από τη δεκαετία του `50, ένας άντρα και μια γυναίκα προσπαθούν να αποφασίσουν πως θα περάσουν το απόγευμα τους. Ο άντρας προτιμά να μείνουν σπίτι και να δούνε τον αγώνα που έχει στην τηλεόραση, ενώ η γυναίκα προτιμά να πάνε στην όπερα. Και οι δύο όμως θέλουν να κάνουν κάτι μαζί και όχι να μείνουν χώρια.

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι επιλογές τους ως στρατηγικές, οπού οι γραμμές αντιστοιχούν στις επιλογές του άντρα και οι στήλες στις επιλογές της γυναίκας.

		B: Γυναίκα	
		B1: Αθλήματα	B2: Όπερα
A: Άντρας	A1: Αθλήματα	$(2,1)^{+,-}$	$(0,0)$
	A2: Όπερα	$(0,0)$	$(1,2)^{+,-}$

Η μάχη των φύλων παρουσιάζει μια κατάσταση κατά την οποία το ζευγάρι πρέπει να συνεργαστεί, αν και έχουν διαφορετικές προτιμήσεις, αφού σε καμία περίπτωση δεν θέλουν να μείνουν χώρια. Πρόκειται για συνεργατικό και όχι ανταγωνιστικό παίγνιο. Εδώ μας ενδιαφέρει ο αντίπαλος να μάθει τη στρατηγική που πρόκειται να εφαρμόσουμε, γιατί μπορεί να τη χρησιμοποιήσει για κοινό μας όφελος.

Αν και το παιχνίδι ανήκει στην κατηγορία των παιχνιδιών που παίζονται ταυτόχρονα, δεν είναι αναγκαίο για τους παίκτες να δράσουν έτσι. Το μόνο που απαιτείται είναι ο καθένας να δράσει χωρίς γνώση για το πώς θα πράξει ο άλλος. Αυτό επιτυγχάνεται αν οι παίκτες πάρουν την απόφαση τους χωρίς προηγουμένως να έχουν μιλήσει. Είναι μη ρεαλιστικό να υποθέσουμε πως το ζευγάρι δεν θα το συζητήσει και δεν θα παιχτεί το ίδιο «έργο» πολλές φορές . Αν κάθε μέρα έχουν να πάρουν μια τέτοια απόφαση (επαναλαμβανόμενο παίγνιο) τότε σίγουρα ο ένας θα μπορεί να μαντέψει τις κινήσεις του άλλου.

Σημαντικό ρόλο σε αυτό το παιχνίδι έχει το ποιος θα παίξει πρώτος και θα ανακοινώσει την απόφαση του στο ταίρι του. Αν για παράδειγμα η γυναίκα έχει αγοράσει από πριν τα εισιτήρια για την όπερα, είναι πολύ πιθανό ο άντρας να πεισθεί και να επιλέξει από την αρχή να πάνε στην όπερα παρόλο που θα προτιμούσε τον αγώνα. Σε πάρα πολλά παιχνίδια (όχι σε όλα) αυτός που κινείται πρώτος έχει και το μεγαλύτερο πλεονέκτημα.

Εύκολα φαίνεται πως δεν υπάρχει κάποια κυρίαρχη στρατηγική για κανέναν από τους δύο παίκτες. Βρίσκουμε όμως πως υπάρχουν δύο σημεία ισορροπίας Nash στο συγκεκριμένο παίγνιο, η λύση (A1,B1)=(2,1) και η λύση (A2,B2)=(1,2). Αν και οι δύο επιλέξουν να δούνε αγώνα ο άντρας έχει όφελος 2 μονάδες και η γυναίκα 1 μονάδα, ενώ αν πάνε στην όπερα η γυναίκα έχει όφελος 2 μονάδες και ο άντρας 1.Σε αυτές τις δύο στρατηγικές κανένας δεν έχει κίνητρο να αποκλίνει και να επιλέξει κάτι άλλο. (Βλαχοπούλου, 2010)

2.7 Το παίγνιο “Chicken Game”

Ένα από τα πιο γνωστά παίγνια είναι το Chicken Game. Το παιγνίδι αυτό είναι γνωστό σε όλους τους νεαρούς ,από τη δεκαετία του `50 και μετά στην Αμερική και έχει μείνει στην ιστορία από την ταινία «Επαναστάτης χωρίς αιτία» (Rebel without a cause,1955) με τον James Dean. Σε αυτό το παιχνίδι δύο οδηγοί κατευθύνονται με μεγάλη ταχύτητα προς έναν γκρεμό. Αυτός που θα αλλάξει πρώτος την πορεία του αυτοκινήτου του για να μην πέσει από τον γκρεμό είναι το «κοτόπουλο» (chicken) και χάνει. Αν κανένας παίκτης δεν αλλάξει πορεία, τότε και τα δύο αυτοκίνητα θα πέσουν από τον γκρεμό και οι δύο οδηγοί θα πεθάνουν.

Η παραπάνω κατάσταση μπορεί να περιγραφεί με τον ακόλουθο πίνακα:

		Παίκτης Β	
		B1:Να συνεχίσει να οδηγεί	B2: Να αποκλίνει από τη πορεία του
Παίκτης Α	A1: Να συνεχίσει να οδηγεί	$(2,2)^{+,-}$	$(0,0)$
	A2: Να αποκλίνει από τη πορεία του	$(0,0)$	$(1,1)^{+,-}$

Κάθε παίκτης έχει δύο στρατηγικές επιλογές: είτε να αποκλίνει από την πορεία του(δεύτερη στρατηγική), είτε να συνεχίσει να οδηγεί (πρώτη στρατηγική). Αν και οι δύο αποκλίνουν παραμένουν στη ζωή. Το πώς θα παίξουν εξαρτάται από το τι πιστεύει ο ένας πως θα πράξει ο άλλος. Αν ο παίκτης Α πιστεύει πως ο παίκτης Β είναι πιο γενναίος από αυτόν, τότε θα προτιμήσει να αλλάξει πορεία. Αντίθετα αν νομίζει πως ο ίδιος είναι πιο γενναίος, τότε θα συνεχίσει να οδηγεί. Σε περίπτωση όμως που κάποιος από τους δύο κρίνει λάθος τον αντίπαλο του θα πεθάνουν και οι δύο.

Αυτό το μοντέλο υποθέτει πως ο κάθε παίκτης διαλέγει από πριν την στρατηγική που θα ακολουθήσει και δεν την αλλάζει(πρόκειται για μη ρεαλιστικό σενάριο, αφού αν κάποιος παίκτης δει τον άλλον να στρίβει ότι και να είχε σχεδιάσει, θα συνεχίσει για να κερδίσει) . Επίσης το μοντέλο υποθέτει πως αν και οι δύο οδηγοί στρίψουν, δεν θα είναι προς την ίδια κατεύθυνση.

Αυτό το μοντέλο δεν έχει κυρίαρχη στρατηγική για κανέναν παίκτη. Υπάρχουν δύο ισορροπίες Nash σε αμιγείς στρατηγικές όπως φαίνεται στον πίνακα: η λύση (Α1Β2)=(2,2) και η λύση (Α2Β1)=(1,1). Άρα το καλύτερο που έχει να κάνει ο κάθε παίκτης είναι το αντίθετο του αντιπάλου του. Αν ο Α πεισθεί πως ο Β θα συνεχίσει να οδηγεί, η καλύτερη λύση είναι να αλλάξει πορεία και το ανάποδο.

Φυσικά αν και οι δύο δεν αλλάξουν πορεία και συνεχίσουν θα πεθάνουν.

Το chicken game μοιάζει λίγο με το battle of the sexes, αν και εδώ υπάρχει το χειρότερο σενάριο, αυτό όπου αν και οι δύο παίκτες συνεχίσουν θα πεθάνουν. Και στα δύο παίγνια που είδαμε ο παίκτης πρέπει να αποφασίσει για μία από δύο σχετικά λογικές στρατηγικές που αποτελούν ισορροπία Nash. Μια διαφορά που μπορούμε να σχολιάσουμε ανάμεσα στα δύο παίγνια είναι ότι οι δύο ισορροπίες Nash βρίσκονται για τη μάχη των φύλων διαγώνια από την κορυφή αριστερά στην άκρη δεξιά, ενώ για το chicken game ανάποδα(από κάτω αριστερά στην κορυφή δεξιά). Παρόλα αυτά όμως φαίνεται πως οι δύο ισορροπίες σε κάθε παιχνίδι ανταποκρίνονται σε ίδιες και όχι σε αντικρουόμενες επιλογές(κάθε παίκτης επιλέγει μία στρατηγική από την δική του οπτική γωνία). (Βλαχοπούλου, 2010)

2.8 Υπόδειγμα Cournot

Θεωρούμε πως n επιχειρήσεις παράγουν ένα μοναδικό προϊόν. Το κόστος που έχει κάθε επιχείρηση i για την παράγωγη q_i μονάδων του προϊόντος αυτού είναι$c_i\, q_i$,όπου c είναι μια αύξουσα συνάρτηση. Όλη η παραγωγή πωλείται σε μια τιμή, που προσδιορίζεται από τη ζήτηση του προϊόντος και την συνολική παραγωγή των επιχειρήσεων . Αναλυτικότερα, εάν η συνολική παραγωγή όλων των επιχειρήσεων είναι Q τότε η τιμή του προϊόντος στην αγορά είναι F(Q).Το F είναι μια αντίστροφη συνάρτηση ζήτησης(inverse demand function) (Osborne, 2010).

Υποθέτουμε λοιπόν ότι έχουμε συμμετρικό ολιγοπωλιακό ανταγωνισμό βάση Cournot με γραμμικές συναρτήσεις κόστους $c_i\, q_i$=$c\, q_i$,1≤ i≤ n.Η αντίστροφη συνάρτηση ζήτησης F(Q), Q>0, είναι μια θετική συνάρτηση. Η συνάρτηση κερδών μιας επιχείρησης i είναι ορισμένη στο R^n_{++} ως

$$\Pi_i(q_1, q_2,\ldots,q_n)= \mathrm{F}(Q)\, q_i - c\, q_i = q_i(\mathrm{F}(Q)- c) \text{ όπου } Q=q_1 + q_2 +\ldots+q_n=\sum_{j=1}^{n} q_i.$$

Ορίζουμε μια συνάρτηση P : $R^n_{++} \rightarrow$R όπου

$$\mathrm{P}(q_1, q_2,\ldots,q_n)= q_1 q_2 \ldots q_n(\mathrm{F}(Q)- c).$$

Για κάθε επιχείρηση i και για κάθε $q_{-i} \in R_{++}^{n-1}$ ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\Pi_\iota(q_i, q_{-i}) - \Pi_i(x_i, q_{-i}) > 0 \text{ , εάν } P(q_i, q_{-i}) - P(x_i, q_{-i}) > 0 \ \forall \ q_i, x_i \ \in R_{++} \ (1.1)$$

όπου (x_i, q_{-i}) ένας άλλος συνδυασμός εκτός ισορροπίας με χαμηλότερη απόδοση από το σημείο βέλτιστης απόδοσης που αποτελεί και το σημείο ισορροπίας Nash (q_i, q_{-i}).

Εάν η συνάρτηση P ικανοποιείται τότε ονομάζεται *διατακτική δυνητική συνάρτηση (ordinal potential function)* και το αντίστοιχο παίγνιο το οποίο εφαρμόζεται σε με μια τέτοια συνάρτηση ονομάζεται *διατακτικό δυνητικό παίγνιο (ordinal potential game).* Αναλυτικότερα η στρατηγική ισορροπίας βάση Cournot ταυτίζεται με τη στρατηγική ισορροπίας ενός οποιουδήποτε παιγνίου του οποίου τα κέρδη της κάθε επιχείρησης δίνονται από την συνάρτηση P.Σε παίγνια με μεικτές στρατηγικές απαιτείται μια πιο ισχυρή συνθήκη από αυτή (1.1).

Έστω ότι έχουμε έναν ολιγωπολιακό ανταγωνισμό με υπόδειγμα οιονεί-Cournot με αντίστροφη γραμμική συνάρτηση ζήτησης F(Q)=a-bQ ,a,b>0 ,και διαφοροποιημένες συναρτήσεις κόστους $c_i \, q_i$, 1≤ i≤ n. Ορίζουμε μια συνάρτηση $P^*((q_1, q_2, \ldots, q_n))$ ως:

$$P^*((q_1, q_2, \ldots, q_n)) = a\sum_{j=1}^{n} q_j - b\sum_{j=1}^{n} q_j^2 - b\sum_{1 \le i < j \le n} q_i q_j - \sum_{j=1}^{n} c_j(q_j) \ (1.2)$$

Αυτό ισχύει για κάθε επιχείρηση i,και για κάθε $q_{-i} \in R_{+}^{n-1}$ όπου

$$\Pi_\iota(q_i, q_{-i}) - \Pi_\iota(x_i, q_{-i}) = P^*(q_\iota, q_{-i}) - P^*(x_\iota, q_{-i}) \ \forall q_i, x_i \in R_+ \ (1.3)$$

Η συνάρτηση P^* εάν ικανοποιείται ονομάζεται *δυνητική συνάρτηση.* Οι ισότητες υποδηλώνουν ότι η ισορροπία σε ένα παίγνιο με μεικτές στρατηγικές ορισμένο σε οιονεί-Cournot υπόδειγμα θα συμπίπτει με την ισορροπία σε ένα παίγνιο με μεικτές στρατηγικές και συνθήκες ενός κανονικού παιγνίου αντικαθιστώντας κάθε συνάρτηση απόδοσης με τη συνάρτηση P^*. Συγκεκριμένα, επιχειρήσεις οι οποίες προσπαθούν να μεγιστοποιήσουν την δυνητική συνάρτηση P^* (είτε την ακριβή δυνητική συνάρτηση P) καταλήγουν σε μια ισορροπία (Monderer & Shapley, 1996).

2.9 Δυοπώλιο Cournot

Εάν έχουμε n επιχειρήσεις όπου i=1,…, n ,TR= F(Q) q_i ,TC=$c\,q_i$.Έτσι η συνάρτηση κερδών για n επιχειρήσεις διαμορφώνεται ως εξής $\Pi_i(q_1, q_2,…,q_n)$=F(Q) q_i-$c\,q_i$=q_i(F(Q)- c) όπου F(Q) και c σταθερά.Προκύπτει λοιπόν ότι για την επιχείρηση 1 η συνάρτηση κερδών θα είναι $\prod_1$=q_1(F(Q)- c) και για τις επιχειρήσεις n $\prod_n$=q_n(F(Q)- c).

Σε ένα δυοπώλιο όπου i=1,2 και Q=$q_1 + q_2$ έχουμε για την επιχείρηση 1 την συνάρτηση κερδών $\prod_1$=q_1(F(Q)- c) και για την επιχείρηση 2 $\prod_2$=q_2(F(Q)- c).

Χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις κερδών της κάθε επιχείρησης μεγιστοποιούμε την συνάρτηση και λύνουμε ως προς την βέλτιστη ποσότητα για κάθε επιχείρηση ξεχωριστά.

Για την επιχείρηση 1 ισχύει ότι :

$$\prod_1 = q_1(\mathrm{F}(Q) - c) = q_1(\mathrm{a} - bq_1 - bq_2 - c) = \mathrm{a}q_1 - bq_1^2 - bq_1\,q_2 - cq_1 \ .$$

Μεγιστοποιώντας την συνάρτηση και λύνοντας ως προς την βέλτιστη ποσότητα q_1^* προκύπτει:

$$\max\Pi_1 = 0 \Rightarrow \mathrm{a} - 2bq_1 - bq_2 - c = 0 \Rightarrow \mathrm{a} - bq_2 - c = 2bq_1 \Rightarrow q_1^* = \frac{a - bq_2 - c}{2b} \ (1)$$

Για την επιχείρηση 2 έχουμε:

$$\prod_2 = q_2(\mathrm{F}(Q) - c) = q_2(\mathrm{a} - bq_2 - bq_1 - c) = \mathrm{a}q_2 - bq_2^2 - bq_1\,q_2 - cq_2$$

Μεγιστοποιώντας την συνάρτηση και λύνοντας ως προς την βέλτιστη ποσότητα q_2^* προκύπτει:

$$\max\Pi_2 = 0 \Rightarrow \mathrm{a} - 2bq_2 - bq_1 - c = 0 \Rightarrow \mathrm{a} - bq_1 - c = 2bq_2 \Rightarrow q_2^* = \frac{a - bq_1 - c}{2b} \ (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει

$$q_1^* = \frac{a - b\left(\frac{a - bq_1 - c}{2b}\right) - c}{2b}\ , q_2^* = \frac{a - b\left(\frac{a - bq_2 - c}{2b}\right) - c}{2b} \Rightarrow q_1^* = q_2^* = \frac{1}{3}(a - c)$$

όπου για αυτές τις ποσότητες οι επιχειρήσεις μεγιστοποιούν τα κέρδη τους.

Συνοψίζοντας, όταν υπάρχουν δύο επιχειρήσεις, η συνάρτηση αντίστροφης ζήτησης δίνεται από τη σχέση F(Q)=a-bQ όπου $Q \leq \alpha$, και η συνάρτηση κόστους για την κάθε εταιρεία $c_i\, q_i$=$c\, q_i$,το παίγνιο του ολιγοπωλίου Cournot έχει μια και μόνο ισορροπία Nash $(q_1^*, q_2^*) = \frac{1}{3}(a-c), \frac{1}{3}(a-c)$.Η συνολική παραγωγή σε αυτή την ισορροπία θα είναι Q=q_1^*+$q_2^* = \frac{2}{3}(a-c)$ και η τιμή στην οποία τελικά θα πουληθεί η παραγωγή F($\frac{2}{3}(a-c)$)= a-b($\frac{2}{3}(a-c)$) .Όταν αυξάνεται το a αυξάνεται και η τιμή του προϊόντος στην ισορροπία καθώς και η παραγωγή της κάθε εταιρείας. Ενώ όταν αυξάνεται το c, μειώνεται η παραγωγή της κάθε εταιρείας και αυξάνεται η τιμή του προϊόντος. Κάθε μονάδα αύξησης στο c προκαλεί αύξηση κατά δυο τρίτα της μονάδας στη τιμή του προϊόντος. (Osborne, 2010)

Για κάθε επιχείρηση i και για κάθε $q_{-i} \in R_{++}^{n-1}$,όπου q_{-i} η βέλτιστη ποσότητα παραγωγής όλων των άλλων επιχειρήσεων πλην της επιχείρησης i, έχουμε ότι $\Pi_\iota(q_i, q_{-i})$–$\Pi_\iota(x_i, q_{-i})>0$ αν $\mathrm{P}(q_\iota, q_{-i}) - \mathrm{P}(x_\iota, q_{-i}) > 0 \quad \forall q_i, x_i \quad \in R_{++}$ (1.1) (Monderer & Shapley, 1996). Συνοπτικά η παραπάνω σχέση περιγράφει ότι η συνάρτηση κερδών ($\Pi_\iota(q_i, q_{-i})$)που εμπεριέχει όλες τις βέλτιστες ποσότητες q_i των επιχειρήσεων θα αποφέρει πάντα μεγαλύτερο κέρδος από μια συνάρτηση κερδών ($\Pi_\iota(x_i, q_{-i})$) με ποσότητες x_i που δεν είναι οι άριστες. Δηλαδή, η συνάρτηση κερδών με τις άριστες ποσότητες αποτελεί και την ισορροπία Nash.

3.1 Εισαγωγή στα Δυνητικά παίγνια (Potential Games)

Έστω ένα παίγνιο G($u^1, u^2 \ldots, u^n$) σε στρατηγική μορφή με πεπερασμένο αριθμό παικτών. Το σύνολο των παικτών το ορίζουμε ως $\mathrm{N}=\{1,2,\ldots,\mathrm{n}\}$,το σύνολο των στρατηγικών των παικτών Y^i και η συνάρτηση απόδοσης των παικτών i είναι u^i:$\mathrm{Y} \rightarrow R$, όπου $\mathrm{Y}=Y^1 \times Y^2 \times \ldots Y^n$ είναι το σύνολο των στρατηγικών, και R ένα σύνολο πραγματικών αριθμών. Για S$\subseteq N, -S$ υποδηλώνει το συμπληρωματικό του S και Y^S ένα καρτεσιανό γινόμενο $X_{i \in S} Y^i$.Μια συνάρτηση P όπου $\mathrm{Y} \rightarrow R$ καλείται *διατακτική δυνητική* ,εάν $i \in N$και για κάθε $y^{-i} \in Y^{-i}$ και ισχύει ότι $u^i(y^{-i}, x) - u^i(y^{-i}, z) > 0$ αν $\mathrm{P}(y^{-i}, x) - \mathrm{P}(y^{-i}, z) > 0$ $\forall$ $x, z \in Y^i$. Ενα παίγνιο G με μια τέτοια συνάρτηση ονομάζεται διατακτικό δυνητικό παίγνιο. (Monderer & Shapley, 1996)

3.2 Σταθμισμένη Διατακτική Δυνητική Συνάρτηση (weight ordinal potential)

Έστω $w = (w^i)_{i \in N}$ ένα διάνυσμα θετικών αριθμών το οποίο καλείται σταθμισμένο. Μια συνάρτηση P όπου $\mathrm{Y} \rightarrow R$ σταθμισμένη δυνητική συνάρτηση εάν $\forall i \in N$ και $\forall\, y^{-i} \in Y^{-i}$ αν $u^i(y^{-i}, x) - u^i(y^{-i}, z) = w^i(\mathrm{P}(y^{-i}, x) - \mathrm{P}(y^{-i}, z))$ $\forall$ $x, z \in Y^i$.Υπάρχει δηλαδή, μια σχέση αναλογίας μεταξύ συνάρτησης απόδοσης και κερδών. Ένα τέτοιο παίγνιο καλείται σταθμισμένο δυνητικό παίγνιο. Εάν δεν μας ενδιαφέρει κάποια συγκεκριμένη σχέση αναλογίας και συγκεκριμένα σταθμά τότε έχουμε απλά ένα σταθμισμένο δυνητικό παίγνιο (Monderer & Shapley, 1996).

Μια συνάρτηση P όπου $\mathrm{Y} \rightarrow R$ είναι ακριβής δυνητική συνάρτηση(ή εν συντομία δυνητική) εάν σε ένα παίγνιο Γ υπάρχουν σταθμά με w^i=1 για κάθε $i \in N$.Ένα τέτοιο παίγνιο ονομάζεται ακριβές δυνητικό παίγνιο (ή εν συντομία δυνητικό παίγνιο).

3.3 Εφαρμογές δυνητικών παίγνιών

3.3.1 Το δίλλημα των κρατουμένων (Prisoner's Dilemma)

		ΠΑΙΚΤΗΣ 2	
		Να ομολογήσει	Να μην ομολογήσει
ΠΑΙΚΤΗΣ 1	Να ομολογήσει	$(1,1)^{+,-}$	$(9,0)^{+}$
	Να μην ομολογήσει	$(0,9)^{-}$	(6,6)

Έχουμε N(1,2) παίκτες, Υ(Να ομολογήσει, Να μην ομολογήσει) οι στρατηγικές των παικτών, Y^1(Να ομολογήσει, Να μην ομολογήσει) οι στρατηγικές του παίκτη 1, Y^2(Να ομολογήσει, Να μην ομολογήσει) οι στρατηγικές του παίκτη 2 και u((Να ομολογήσει, Να ομολογήσει),(Να ομολογήσει, Να μην ομολογήσει),(Να μην ομολογήσει, Να ομολογήσει),(Να μην ομολογήσει, Να μην ομολογήσει)) οι αποδόσεις των παικτών που προκύπτουν από τους συνδυασμούς των στρατηγικών τους.

Για τον παίκτη 1 έχουμε u^1(Να ομολογήσει, Να ομολογήσει)=1, u^1(Να μην ομολογήσει, Να ομολογήσει)=0, u^1(Να ομολογήσει, Να μην ομολογήσει)=9, u^1(Να μην ομολογήσει, Να μην ομολογήσει)=6.

Για τον παίκτη 2 έχουμε u^2(Να ομολογήσει, Να ομολογήσει)=1, u^2(Να μην ομολογήσει, Να ομολογήσει)=0, u^2(Να ομολογήσει, Να μην ομολογήσει)=9, u^2 (Να μην ομολογήσει, Να μην ομολογήσει)=6.

Η συνάρτηση P ισούται με $P = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

Παίρνουμε τις συναρτήσεις $u^i(y^{-i},x) - u^i(y^{-i},z)$ και $\mathrm{P}(y^{-i},x) - \mathrm{P}(y^{-i},z)$

Για τον παίκτη 1 έχουμε:

u^1(Να ομολογήσει, Να ομολογήσει)-u^1(Να μην ομολογήσει, Να ομολογήσει)=1>0

$\mathrm{P}(\text{Να ομολογήσει, Να ομολογήσει}) - \mathrm{P}(\text{Να μην ομολογήσει, Να ομολογήσει}) = 1 > 0$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ισχύει

$$u^i(y^{-i},x) - u^i(y^{-i},z) = \mathrm{P}(y^{-i},x) - \mathrm{P}(y^{-i},z) = 1$$

άρα έχουμε μια διατακτική δυνητική συνάρτηση.

Για τον παίκτη 2 έχουμε:

u^2(Να ομολογήσει, Να ομολογήσει)-u^2(Να μην ομολογήσει, Να ομολογήσει)=1>0

$\mathrm{P}(\text{Να ομολογήσει, Να ομολογήσει}) - \mathrm{P}(\text{Να μην ομολογήσει, Να ομολογήσει}) = 1$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ισχύει

$$u^i(y^{-i},x) - u^i(y^{-i},z) = \mathrm{P}(y^{-i},x) - \mathrm{P}(y^{-i},z) = 1$$

άρα έχουμε μια διατακτική δυνητική συνάρτηση.

Όπως συμπεραίνουμε στο σημείο ισορροπίας Nash σύμφωνα με το παίγνιο συμπίπτει με το σημείο με τη μεγαλύτερη απόδοση στον πίνακα της συνάρτησης P.

3.3.2 Η μάχη των φύλων (Battle of the sexes)

		B: Γυναίκα	
		B1: Αθλήματα	B2: Όπερα
A: Άντρας	A1: Αθλήματα	$(2,1)^{+,-}$	$(0,0)$
	A2: Όπερα	$(0,0)$	$(1,2)^{+,-}$

Έχουμε N(Άνδρας, Γυναίκα) παίκτες, Y(Αθλήματα, Όπερα) οι στρατηγικές των παικτών, Y^1(Αθλήματα, Όπερα) οι στρατηγικές του παίκτη 1, Y^2 (Αθλήματα, Όπερα) οι στρατηγικές του παίκτη 2 και u((Αθλήματα, Αθλήματα),(Αθλήματα, Όπερα), (Όπερα, Αθλήματα), (Όπερα, Όπερα) οι αποδόσεις των παικτών που προκύπτουν από τους συνδυασμούς των στρατηγικών τους.

Για τον παίκτη Άνδρα έχουμε u^1(Αθλήματα, Αθλήματα)=2, u^1(Όπερα, Αθλήματα)=0, u^1(Αθλήματα, Όπερα)=0, u^1(Όπερα, Όπερα)=1.

Για τον παίκτη Γυναίκα έχουμε u^2(Αθλήματα, Αθλήματα)=1, u^2(Όπερα, Αθλήματα)=0, u^2(Αθλήματα, Όπερα)=0, u^2 (Όπερα, Όπερα)=2.

Η συνάρτηση P ισούται με $P = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Παίρνουμε τις συναρτήσεις $u^i(y^{-i}, x) - u^i(y^{-i}, z)$ και $\mathrm{P}(y^{-i}, x) - \mathrm{P}(y^{-i}, z)$

Για τον παίκτη Άνδρα έχουμε:

u^1(Αθλήματα, Αθλήματα)-u^1(Όπερα, Αθλήματα)=2>0 και

$\mathrm{P}(\text{Αθλήματα}, \text{Αθλήματα}) - \mathrm{P}(\text{Όπερα}, \text{Αθλήματα})$=2>0.

Επιπλέον για τον παίκτη Άνδρα έχουμε:

u^1(Αθλήματα, Όπερα)-u^1(Όπερα, Όπερα)=-1

$\mathrm{P}(\text{Αθλήματα}, \text{Όπερα}) - \mathrm{P}(\text{Όπερα}, \text{Όπερα})$=-1.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ισχύει:

$$u^i(y^{-i}, x) - u^i(y^{-i}, z) = \mathrm{P}(y^{-i}, x) - \mathrm{P}(y^{-i}, z) = -1$$

άρα έχουμε μια διατακτική δυνητική συνάρτηση.

Για τον παίκτη Γυναίκα έχουμε:

u^2(Αθλήματα, Αθλήματα)-u^2(Όπερα, Αθλήματα)= 1>0

$\mathrm{P}(\text{Αθλήματα}, \text{Αθλήματα}) - \mathrm{P}(\text{Όπερα}, \text{Αθλήματα})$=1>0.

Επιπλέον για τον παίκτη Γυναίκα έχουμε:

u^2(Αθλήματα, Όπερα) - u^2(Όπερα, Όπερα)=-2

$\mathrm{P}(\text{Αθλήματα}, \text{Όπερα}) - \mathrm{P}(\text{Όπερα}, \text{Όπερα})$=-2

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ισχύει

$$u^i(y^{-i}, x) - u^i(y^{-i}, z) = \mathrm{P}(y^{-i}, x) - \mathrm{P}(y^{-i}, z) = -2$$

άρα έχουμε μια διατακτική δυνητική συνάρτηση.

Όπως συμπεραίνουμε στο σημείο ισορροπίας Nash σύμφωνα με το παίγνιο συμπίπτει με το σημείο με τη μεγαλύτερη απόδοση στον πίνακα της συνάρτησης P.

3.3.3 Το παίγνιο "Chicken Game"

		Παίκτης B	
Παίκτης A		B1:Να συνεχίσει να οδηγεί	B2: Να αποκλίνει από τη πορεία του
	A1: Να συνεχίσει να οδηγεί	$(2,2)^{+,-}$	$(0,0)$
	A2: Να αποκλίνει από τη πορεία του	$(0,0)$	$(1,1)^{+,-}$

Έχουμε N(A,B) παίκτες, Υ(Να συνεχίσει να οδηγεί , Να αποκλίνει από τη πορεία του) οι στρατηγικές των παικτών, Y^1(Να συνεχίσει να οδηγεί, Να αποκλίνει από τη πορεία του) οι στρατηγικές του παίκτη A, Y^2(Να συνεχίσει να οδηγεί, Να αποκλίνει από τη πορεία του) οι στρατηγικές του παίκτη B και u((Να συνεχίσει να οδηγεί, Να συνεχίσει να οδηγεί),(Να συνεχίσει να οδηγεί, Να αποκλίνει από τη πορεία του),(Να αποκλίνει από τη πορεία του, Να συνεχίσει να οδηγεί),(Να αποκλίνει από τη πορεία του, Να αποκλίνει από τη πορεία του)) οι αποδόσεις των παικτών που προκύπτουν από τους συνδυασμούς των στρατηγικών τους.

Για τον παίκτη Α έχουμε:

u^1(Να συνεχίσει να οδηγεί, Να συνεχίσει να οδηγεί)$=2$, u^1(Να αποκλίνει από τη πορεία του, Να συνεχίσει να οδηγεί)$=0$, u^1(Να συνεχίσει να οδηγεί, Να αποκλίνει από τη πορεία του)$=0$, u^1(Να αποκλίνει από τη πορεία του, Να αποκλίνει από τη πορεία του)$=1$.

Για τον παίκτη Β έχουμε:

u^2(Να συνεχίσει να οδηγεί, Να συνεχίσει να οδηγεί)$=2$, u^2(Να συνεχίσει να οδηγεί, Να αποκλίνει από τη πορεία του)$=0$, u^2(Να αποκλίνει από τη πορεία του, Να συνεχίσει να οδηγεί)$=0$, u^2 (Να αποκλίνει από τη πορεία του, Να αποκλίνει από τη πορεία του)$=1$.

Η συνάρτηση P ισούται με $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Παίρνουμε τις συναρτήσεις $u^i(y^{-i}, x) - u^i(y^{-i}, z)$ και $\mathrm{P}(y^{-i}, x) - \mathrm{P}(y^{-i}, z)$

Για τον παίκτη Α έχουμε :

$u^1(\text{Να συνεχίσει να οδηγεί, Να συνεχίσει να οδηγεί}) -$
$u^1(\text{Να συνεχίσει να οδηγεί, Να αποκλίνει από τη πορεία του}) = 2 > 0$
$\mathrm{P}(\text{Να συνεχίσει να οδηγεί, Να συνεχίσει να οδηγεί}) -$
$\mathrm{P}(\text{Να συνεχίσει να οδηγεί, Να αποκλίνει από τη πορεία του}) = 2 > 0.$

Επιπλέον για τον παίκτη Α έχουμε:

$u^1(\text{Να αποκλίνει από τη πορεία του, Να συνεχίσει να οδηγεί}) -$
$u^1(\text{Να αποκλίνει από τη πορεία του, Να αποκλίνει από τη πορεία του}) = -1$
$\mathrm{P}(\text{Να αποκλίνει από τη πορεία του, Να συνεχίσει να οδηγεί}) -$
$\mathrm{P}(\text{Να αποκλίνει από τη πορεία του, Να αποκλίνει από τη πορεία του}) = -1.$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ισχύει:

$$u^i(y^{-i}, x) - u^i(y^{-i}, z) = \mathrm{P}(y^{-i}, x) - \mathrm{P}(y^{-i}, z) = -1$$

άρα έχουμε μια διατακτική δυνητική συνάρτηση.

Για τον παίκτη Β έχουμε:

$u^2(N\alpha$ συνεχίσει να οδηγεί, Να συνεχίσει να οδηγεί)-
u^2(Να συνεχίσει να οδηγεί, Να αποκλίνει από τη πορεία του)=2>0
P(Nα συνεχίσει να οδηγεί, Να συνεχίσει να οδηγεί) −
P(Να συνεχίσει να οδηγεί, Να αποκλίνει από τη πορεία του) = 2 > 0.

Επιπλέον Για τον παίκτη Β έχουμε:

u^2(Να αποκλίνει από τη πορεία του, Να συνεχίσει να οδηγεί) -
u^2(Να αποκλίνει από τη πορεία του, Να αποκλίνει από τη πορεία του)=-1

P(Να αποκλίνει από τη πορεία του, Να συνεχίσει να οδηγεί) −
P(Να αποκλίνει από τη πορεία του, Να αποκλίνει από τη πορεία του)=-1

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ισχύει

$$u^i(y^{-i}, x) - u^i(y^{-i}, z) = \mathrm{P}(y^{-i}, x) - \mathrm{P}(y^{-i}, z) = -1$$

άρα ικανοποιείται η παραπάνω σχέση η οποία αποκαλείται διατακτική δυνητική συνάρτηση.

Όπως συμπεραίνουμε στο σημείο ισορροπίας Nash σύμφωνα με το παίγνιο συμπίπτει με το σημείο με τη μεγαλύτερη απόδοση στον πίνακα της συνάρτησης P.

3.4 Πεπερασμένη Ιδιότητα Βελτίωσης (Finite Improvement Path (FIP))

Ένα μονοπάτι στο Υ είναι μια ακολουθία $\gamma = (y_0, y_1, \dots)$όπου γοα κάθε $\mathrm{k}\geq 1$ υπάρχει ένας μοναδικός παίκτης i,έστω ο παίκτης όπου για κάθε $y_k = (y_{k-1}^{-i}, x)$ για κάποια $x \neq y_{k-1}^{-i}$ στο Υ^{ι}. y_0 ονομάζεται το αρχικό σημείο (initial point) του γ, και αν το γ είναι πεπερασμένο, τότε το τελευταίο στοιχείο ονομάζεται τερματικό σημείο (terminal point) του γ. $\gamma = (y_0, y_1, \dots)$ είναι ένα μονοπάτι που παρουσιάζει βελτίωση σε σχέση με το παίγνιο Γ αν για όλα τα $\mathrm{k}\geq 1$ $u^i y_k > u^i(y_{k-1})$, όπου i είναι ο μοναδικός αποκλείνων τη χρονική στιγμή k.Έτσι, ένα μονοπάτι βελτίωσης είναι ένα μονοπάτι που αποτελείται από μυωπικούς παίκτες (παίκτες που δεν έχουν βέλτιστη συμπεριφορά).Το παίγνιο Γ παρουσιάζει την πεπερασμένη ιδιότητα βελτίωσης αν κάθε μονοπάτι βελτίωσης είναι πεπερασμένο.

Για κάθε μονοπάτι βελτίωσης $\gamma = (y_0, y_1, \dots)$ έχουμε :

$$P(y_0) < P(y_1) < P(y_2) < \cdots$$

Εφόσον το Υ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο, έτσι και το γ θα πρέπει να είναι πεπερασμένο (Monderer & Shapley, 1996).Συμπερασματικά, με βάση αυτό το θεώρημα όσο ένας παίκτης αλλάζει συμπεριφορά τόσο μεγαλύτερη απόδοση θα έχει.

Είναι λοιπόν προφανές ότι για τα πεπερασμένα παίγνια με την ιδιότητα FIP, και συγκεκριμένα για διατακτικά δυνητικά παίγνια, κάθε μέγιστο μονοπάτι βελτίωσης(maximal improvement path) πρέπει να τερματίζει σε ένα σημείο ισορροπία.

4.Εφαρμογές Παιγνίων

4.1 “The Non-Linear Cournot Model as a Best Response Potential Game”

4.1.1 Εισαγωγή στο μη γραμμικό υπόδειγμα Cournot

Έστω οτι έχουμε ένα παίγνιο $\Gamma \triangleq < N, (S_i)_{i\in N}, (\pi_i(s))_{i\in N} >$,όπου $\mathrm{N} \triangleq (1,2,3,\ldots n)$ είναι ο αριθμός των παικτών, S_i είναι η στρατηγική του παίκτη i και $\pi_i\,(s)$ είναι η συνάρτηση απόδοσης η οποία χαρακτηρίζει την απόδοση του παίκτη i για κάθε δεδομένη στρατηγική s που μπορεί να ακολουθήσει.Σε διαφορίσιμα παίγνια,όπου S_i είνα ένα διάστημα πραγματικών αριθμών για όλα τα $i \in N$,η συνάρτηση $\mathrm{P(s)}$ είναι ακριβής δυνητική συνάρτηση(exact potential function) για το παίγνιο Γ εάν $\mathrm{P(s)}$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη και $\frac{\partial \pi_i(s)}{\partial s_i} = \frac{\partial \mathrm{P(s)}}{\partial s_i}$ για ολα τα $i \in N$.Επιπλέον,εαν η συνάρτηση απόδοσης ειναι δύο φορές παραγωγίσιμη τότε το παίγνιο Γ είναι ένα δυνητικό παίγνιο εάν $\frac{\partial^2 \pi_i(s)}{\partial s_i s_j} = \frac{\partial^2 \pi_j(s)}{\partial s_i s_j}$ για όλα τα $i, j \in N$.

Σε ένα ολιγοπώλιο Cournot ένα παίγνιο με γραμμική συνάρτηση ζήτησης είναι ένα ακριβές δυνητικό παίγνιο, το οποίο δεν συναντάμε σε ένα ολιγοπώλιο Cournot με μη γραμμική συνάρτηση ζήτησης. Παρ’όλ’ αυτά, ακόμα και αν ισχύει $\frac{\partial^2 \pi_i(s)}{\partial s_i s_j} \neq \frac{\partial^2 \pi_j(s)}{\partial s_i s_j}$,μπορούμε να αποδείξουμε οτι το παίγνιο αυτό έχει μια βέλτιστη δυνητική συνάρτηση $\hat{P}(s)$ (best response potential function) υπό τον εξής περιορισμό:

$$\arg\max_{\mathrm{s_i \in S_i}} \pi_i(s) = \arg\max_{\mathrm{s_i \in S_i}} \hat{P}\,(s),$$

για όλα τα $i \in N$ και για κάθε δεδομένη στρατηγική s.Εαν η συνάρτηση $\hat{P}(s)$ μεγιστοποιείται στο $\mathrm{s} \triangleq S_1 \times S_2 \times \ldots S_n$ σε αντιστοιχία με $s^* \triangleq (s_1^*, s_2^*, \ldots s_n^*)$,τότε το παίγνιο Γ έχει ισορροπία κατά Nash στο s^*.

4.1.2 Εφαρμογή με μη γραμμικό υπόδειγμα Cournot

Έστω ότι έχουμε ένα ολιγοπώλιο Cournot όπου n επιχειρήσεις πωλούν ένα ομοιογενές προϊόν και η συνάρτηση ζήτησης είναι:

$$Q = 1 - p^{a}, a > 0. \qquad (2)$$

Η παραπάνω συνάρτηση έχει πάντα αρνητική κλίση, και μπορεί να είναι είτε κυρτή ($\alpha \in (0,1)$) είτε κοίλη ($\alpha>1$).Επομένως, η αντίστροφη συνάρτηση ζήτησης είναι:

$$p = (1 - Q)^{1/a} \quad , \qquad (3)$$

όπου $Q = \sum_{i=1}^{n} q_i$ και q_i είναι η ατομίκη ποσότητα που παράγει η επιχείρηση i.<u>Η συνάρτηση κόστους είναι μηδέν</u>. Η ατομική συνάρτηση κέρδους είναι ίση με $\pi_i = pq_i$.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι για όλα τα $j \neq i$ ισχύει:

$$\frac{\partial^2 \pi_i(s)}{\partial s_i s_j} \neq \frac{\partial^2 \pi_j(s)}{\partial s_i s_j} \; \forall \; \alpha \neq 1. \qquad (4)$$

Συνεπώς, για όλα τα $\alpha \neq 1$,ένα παίγνιο Cournot με μη γραμμική συνάρτηση ζήτησης δεν είναι δυνητικό παίγνιο. Παρ' ολ' αυτά, μπορούμε να αποδείξουμε το εξής:

<u>Υπόθεση 1:</u> για όλα τα $\alpha \neq 1$,ένα παίγνιο Cournot με μη γραμμική συνάρτηση ζήτησης είναι βέλτιστο δυνητικό παίγνιο (best response potential game) με γραμμική βέλτιστη δυνητική συνάρτηση (best response potential function):

$$\hat{P} = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{2} \left[2a \left(1 - \sum_{i \neq j} q_j \right) - q_i(1 + a) \right] + \sum_{i \neq j} a q_i q_j$$

<u>Απόδειξη:</u>

$Q = \sum_{i=1}^{n} q_i = q_1 + q_2 + \ldots q_n = q_i + \sum_{i \neq j} q_j$.Άρα η συνάρτηση κερδών ύστερα από προσαρμογές διαμορφώνεται ώς εξής*:*

$$\pi_i = (1 - q_i - \textstyle\sum_{i \neq j} q_j)^{\frac{1}{\alpha}} \times q_i.$$

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = \left(\left(1 - q_i - \sum_{i\neq j} q_j\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right)' \times q_i + \left(1 - q_i - \sum_{i\neq j} q_j\right)^{\frac{1}{\alpha}} \times (q_i)' \rightarrow$$

$$-\frac{1}{\alpha} q_i (1 - q_{i-} \sum_{i\neq j} q_j)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} + \left(1 - q_i - \sum_{i\neq j} q_j\right)^{\frac{1}{\alpha}} \rightarrow$$

$$-\frac{1}{\alpha} q_i (1-Q)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} + (1-Q)^{\frac{1}{\alpha}} \rightarrow$$

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = \frac{(1-Q)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\left(\alpha\left(1 - q_i - \sum_{i\neq j} q_j\right) - q_i\right)}{\alpha} = 0 \qquad (5)$$

Όταν $\alpha\left(1 - q_i - \sum_{i\neq j} q_j\right) - q_i = 0$,σε ισορροπία προκύπτει $q^N = {}^{a}/_{(1 + aN)}$.

Κατά συνέπεια ορίζουμε

$$\frac{\partial \widehat{\pi_i}}{\partial q_i} \triangleq \alpha\left(1 - q_i - \sum_{i\neq j} q_j\right) - q_i \qquad (6)$$

ώς συνθήκη πρώτης τάξης για την επιχείρηση i.

Έστω οτι προκύπτει από την σχέση (6) το εξής

$$\alpha - \alpha q_i - \alpha \sum_{i\neq j} q_j - q_i = -q_i(1+\alpha) + \alpha(1 - \sum_{i\neq j} q_j).$$

$$\hat{\pi}_i(q_i, Q_{-i}) \triangleq \int \frac{\partial \hat{\pi}_i}{\partial q_i} dq_i = \int (-q_i)(1+\alpha) dq_i + \int \alpha\left(1 - \sum_{i\neq j} q_j\right) dq_i = \frac{q_i}{2}\left[2\alpha\left(1 - \sum_{i\neq j} q_j\right) - q_i(1+a)\right] \qquad (7),$$

η οποία είναι η συνάρτηση κερδών της επιχείρησης i.

Εάν πάρουμε το άθροισμα

$$\widehat{\Pi} = \sum_{i=1}^{n} \hat{\pi}_i\,(q_i, Q_{-i)} = \hat{\pi}_i(q_i, Q_{-i)} + \sum_{i\neq j} \pi_j\,(q_j, Q_{-j})$$

και αφού πρώτα προκύψει από το $\sum_{i\neq j} \pi_j\,(q_j, Q_{-j})$ οτι

$$\sum_{i\neq j} \pi_j\left(\mathrm{q_j}, \mathrm{Q_{-j}}\right) = \sum_{i\neq j} \frac{\mathrm{q_j}}{2}\left[2\alpha\left(1-\sum_{w\neq j} q_w\right)-\mathrm{q_j}(1+\alpha)\right]$$

$$= \sum_{i\neq j} \frac{\mathrm{q_j}}{2}\left[2\alpha\left(1-q_i-\sum_{w\neq j} q_w\right)-\mathrm{q_j}(1+\alpha)\right]$$

παραγωγίζουμε ως πρός ως προς $\mathrm{q_i}$ την συναρτηση $\widehat{\Pi}$ και προκύπτει:

$$\frac{\partial\widehat{\Pi}}{\partial \mathrm{q_i}} = \frac{\partial\widehat{\pi}_i}{\partial \mathrm{q_i}} + \frac{\partial\sum_{i\neq j}\pi_j}{\partial \mathrm{q_i}} = \frac{\partial\widehat{\pi}_i}{\partial \mathrm{q_i}} - \sum_{i\neq j} aq_j \qquad (8)$$

Επομένως, η συνάρτηση $\hat{P}$ είναι ίση με

$$\widehat{\Pi} + \sum_{i\neq j} aq_\iota q_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{2}\left[2a\left(1-\sum_{i\neq j} q_j\right)-q_i(1+a)\right] + \sum_{i\neq j} aq_i q_j \quad (9)$$

και εάν τη παραγωγίσουμε ως πρός q_i προκύπτει:

$$\frac{\partial\hat{P}}{\partial q_i} =: \frac{\partial\widehat{\Pi}}{\partial \mathrm{q_i}} + \frac{\partial\sum_{i\neq j} aq_\iota q_j}{\partial \mathrm{q_i}} = \frac{\partial\widehat{\pi}_i}{\partial \mathrm{q_i}} - \sum_{i\neq j} aq_j + \sum_{i\neq j} aq_j$$

Άρα $\frac{\partial\hat{P}}{\partial q_i} = \frac{\partial\widehat{\pi}_i}{\partial \mathrm{q_i}}$ (10) η βέλτιστη δυνητική συνάρτηση η οποία σε ολιγοπώλια Cournot έχει συνάρτηση ζήτησης (2) και προκύπτει από την μεγιστοποίηση της συνάρτησης (9).

4.2 Ρίσκο και Μπεϋζιανές αποφάσεις

4.2.1 Εισαγωγή στα Μπεϋζιανά παίγνια

Η ισορροπία Nash αποτελεί, όπως είδαμε, το θεμελιώδες εργαλείο για να μπορέσουμε να προβλέψουμε τις στρατηγικές αποφάσεις των παικτών στο πλαίσιο ενός παιγνίου σε κανονική μορφή. Οι παθογενείς περιπτώσεις ορισμένων παιγνίων, που δεν οδηγούσαν σε κάποιο εύλογο αποτέλεσμα, «διορθώθηκαν» με μικρές βελτιώσεις στην έννοια της ισορροπίας, χωρίς ουσιαστικές μεταβολές στον τρόπο αντιμετώπισής τους. Ωστόσο το γνωσιακό πλαίσιο για την επίτευξη της ισορροπίας Nash παραμένει σε κάθε περίπτωση αρκετά απαιτητικό, ώστε να μας κάνει να διατηρούμε την επιφυλακτικότητά μας έναντι της μεθόδου.

Η ισορροπία Nash προϋποθέτει ότι οι παίκτες έχουν κοινή γνώση της περιγραφής του παιγνίου. Οι παίκτες δηλαδή γνωρίζουν όχι μόνο ποιοι παίκτες συμμετέχουν, αλλά και ποιες είναι οι διαθέσιμες επιλογές που έχει ο καθένας, καθώς επίσης την ωφέλεια που απολαμβάνει ο κάθε παίκτης από τα διαφορετικά αποτελέσματα τα οποία προκύπτουν στο παίγνιο. Σε ένα απλό παίγνιο με δύο παίκτες και δύο στρατηγικές είναι πιο εύκολο να αποδεχτούμε ότι οι παίκτες διαθέτουν όλη την απαραίτητη πληροφορία. Καθώς όμως τα παίγνια γίνονται πιο σύνθετα, με περισσότερους παίκτες ή περισσότερες διαθέσιμες στρατηγικές, οι επιφυλάξεις μας ότι οι στρατηγικές αποφάσεις λαμβάνονται σε ένα πλαίσιο πλήρους πληροφόρησης (complete information) αυξάνονται περισσότερο. (Βολιώτης, 2015)

4.2.2 Τα Μπεϋζιανά παίγνια

Ένα Μπεϋζιανό παίγνιο σε κανονική μορφή θα περιγράφει, εκτός των χαρακτηριστικών του κανονικού παιγνίου που περιγράφονται στο Γ, και τον χώρο των πιθανών συνδυασμών των τύπων των παικτών. Υπενθυμίζουμε ότι ο τύπος ενός δρώντος περιγράφει όλη εκείνη τη σχετική πληροφορία με το παίγνιο η οποία δεν αποτελεί κοινή γνώση. Επί παραδείγματι, θα μπορούσε να περιλαμβάνει τις προτιμήσεις του ατόμου ή ακόμη και τις πεποιθήσεις που το άτομο διατηρεί για τα χαρακτηριστικά των άλλων παικτών τα οποία δεν συνιστούν κοινή γνώση. Είναι αντιληπτό ότι ο χώρος των τύπων ενός παίκτη μπορεί να είναι πολύ μεγάλος, ακόμη και με άπειρο πλήθος στοιχείων, σε κάθε περίπτωση ωστόσο θα υποθέτουμε ότι είναι ένας συμπαγής χώρος. Επομένως υποθέτουμε ότι συστατικό του παιγνίου πρέπει να είναι ο παράγωγος χώρος $\Theta = \Theta_1 \times \Theta_2 \times \ldots \times \Theta_n$ όπου Θ_i ορίζεται ο χώρος τύπων του τυχαίου παίκτη i.

Ένα σχήμα που θα χρησιμοποιήσουμε στα παίγνια με Μπεϋζιανούς παίκτες (ή Μπεϋζιανά παίγνια) είναι ότι πριν ξεκινήσει το παίγνιο υπάρχει ένα βήμα κατά το οποίο αποκαλύπτεται σε κάθε παίκτη ο τύπος του. Άρα υποθέτουμε ότι ο κάθε παίκτης έχει όλη τη σχετική πληροφορία για τον εαυτό του. Θα θεωρήσουμε ότι υπάρχει ένας ψευδοπαίκτης (υπό την έννοια ότι δεν συμμετέχει ενεργά στο παίγνιο, ούτε λαμβάνει απόδοση), τον οποίο αποκαλούμε «Φύση». Η «Φύση» λοιπόν αποφασίζει για τον τύπο των παικτών κατόπιν κλήρωσης. Συνεπώς, το ποιος τύπος προκύπτει για κάθε παίκτη προσδιορίζεται μέσα από κλήρωση, για την οποία οι πιθανότητες εμφάνισης των διαφορετικών τύπων είναι καθορισμένες και αποτελούν κοινή γνώση σε όλους τους παίκτες. Άρα, με την αυστηρή έννοια του όρου, το παίγνιο θα ξεκινάμε μια κλήρωση που θα πραγματοποιεί η «Φύση» με βάση κάποια a priori κατανομή.

Παράδειγμα:

Υποθέστε την περίπτωση όπου η «Φύση» αποκαλύπτει στον παίκτη 1 όχι μόνο τον δικό του τύπο (απόδοση x) αλλά και τον τύπο του παίκτη 2 (απόδοση y). Αντίθετα, στον παίκτη 2 αποκαλύπτει μόνο τον δικό του τύπο (απόδοση y). Υποθέτουμε ότι η *a priori* κατανομή είναι ομοιόμορφη, δηλαδή κάθε τύπος εμφανίζεται ίση πιθανότητα. Συγκεκριμένα υποθέτουμε ότι και στους δύο παίκτες αποκαλύπτεται ότι y = 2, ενώ με ίση πιθανότητα το x λαμβάνει τιμές 0 ή 2. Το παίγνιο επομένως παίρνει μία από τις δύο ακόλουθες μορφές:

		ΠΑΙΚΤΗΣ 2	
		Αριστερά	Δεξιά
ΠΑΙΚΤΗΣ 1	Πάνω	(0,2)	(0,1)
	Κάτω	(1,0)	(1,1)

	ΠΑΙΚΤΗΣ 2		
		Αριστερά	Δεξιά
ΠΑΙΚΤΗΣ 1	Πάνω	(2,2)	(0,1)
	Κάτω	(1,0)	(1,1)

Μια πρώτη μέριμνα για να μπορέσουμε να προσεγγίσουμε το παίγνιο στην Μπεϋζιανή μορφή του είναι να επαναπροσδιορίσουμε τη στρατηγική συμπεριφορά του μπορεί να συμπεριφερθεί διαφορετικά αν βρίσκεται στο πρώτο παίγνιο από ό,τι αν βρίσκεται στο δεύτερο παίγνιο. Επομένως επαναπροσδιορίζουμε τη στρατηγική του παίκτη ώστε να περιγράφει ένα πλήρες πλάνο για τη συμπεριφορά του σε κάθε περίπτωση. Έτσι, για παράδειγμα, μια πιθανή στρατηγική του παίκτη 1 είναι να «επιλέξει την πάνω γραμμή (Π) αν βρίσκεται στο πρώτο παίγνιο και την κάτω γραμμή (Κ) αν βρίσκεται στο δεύτερο παίγνιο». Πόσες είναι οι διαθέσιμες στρατηγικές του; Όλοι οι πιθανοί συνδυασμοί, δηλαδή τέσσερις, {ΠΠ, ΠΚ, ΚΠ, ΚΚ}. Αντίθετα, για τον παίκτη 1, το y είναι παρατηρήσιμο και ξέρει ότι υπάρχουν μόνο δύο στρατηγικές για τον παίκτη 2. Το διευρυμένο Μπεϋζιανό παίγνιο θα αποδίδεται από έναν 4 Χ 2 πίνακα. Ποιες είναι οι αποδόσεις σε κάθε συνδυασμό στρατηγικών; Οι αποδόσεις δίνονται στο διευρυμένο παίγνιο.

	ΠΑΙΚΤΗΣ 2		
		Αριστερά	Δεξιά
	ΠΠ	(1,2)	(0,1)
ΠΑΙΚΤΗΣ 1	ΠΚ	(1/2,1)	(1/2,1)
	ΚΠ	(1/2,1)	(1/2,1)
	ΚΚ	(1,0)	(1,1)

Για την αριστερή στήλη για τον παίκτη 1:

$1/2 \cdot 0 + 1/2 \cdot 2 = 1$

$1/2 \cdot 0 + 1/2 \cdot 1 = 1/2$

$1/2 \cdot 0 + 1/2 \cdot 1 = 1/2$

$1/2 \cdot 1 + 1/2 \cdot 1 = 1$

Και για την αριστερή στήλη για τον παίκτη 2:

$1/2 \cdot 2 + 1/2 \cdot 2 = 2$

$1/2 \cdot 2 + 1/2 \cdot 0 = 1$

$1/2 \cdot 0 + 1/2 \cdot 2 = 1$

$1/2 \cdot 0 + 1/2 \cdot 0 = 0$

Για τη δεξιά στήλη του πίνακα για τον παίκτη 1:

$1/2 \cdot 0 + 1/2 \cdot 2 = 1$

$1/2 \cdot 0 + 1/2 \cdot 1 = 1/2$

$1/2 \cdot 1 + 1/2 \cdot 0 = 1/2$

$1/2 \cdot 1 + 1/2 \cdot 1 = 1$

Και για τη δεξιά στήλη του πίνακα για τον παίκτη 2:

$1/2 \cdot 1 + 1/2 \cdot 1 = 1$

$1/2 \cdot 1 + 1/2 \cdot 1 = 1$

$1/2 \cdot 1 + 1/2 \cdot 1 = 1$

$1/2 \cdot 1 + 1/2 \cdot 1 = 1$

Εύκολα μπορεί να βρει κανείς ότι οι Bayes-Nash ισορροπίες θα είναι (ΠΠ,Α) και (ΚΚ,Δ). Ενδιαφέρον επίσης παρουσιάζει η παράθεση του υποδείγματος δυοπωλίου Cournot ως Μπεϋζιανό παίγνιο, όταν οι παίκτες δεν γνωρίζουν μια παράμετρο του παιγνίου όπως το οριακό κόστος, και συνεπώς αγνοούν την πραγματική συνάρτηση κερδών. (Βολιώτης, 2015)

4.2.3 Δυοπώλιο Cournot με αβεβαιότητα

Όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα, θεωρούμε πως υπάρχουν δύο επιχειρήσεις, οι οποίες παράγουν σταθερό οριακό κόστος. Η αντίστροφη συνάρτηση ζήτησης θα είναι γραμμική και θα δίνεται από την συνάρτηση $p(q^d) = A - q^d$.Επιπλέον υποθέτουμε ότι η επιχείρηση 1 έχει οριακό κόστος c_1 και αποτελεί γνωστό και για τους δυο παίκτες. Αντίθετα, το οριακό κόστος της επιχείρησης 2 είναι γνωστό μόνο στην ίδια την επιχείρηση και μπορεί να πάρει δυο τιμές ,είτε υψηλό οριακό κόστος c_H είτε χαμηλό οριακό κόστος c_L,όπου $c_L < c_H$.Η *a priori* κατανομή εμφάνισης των δυο τύπων οριακού κόστους θα είναι k για τον τύπο οριακού κόστους c_L και $(1-k)$ για τον τύπο c_H.Σύμφωνα με τη κατασκευή Μπεϋζιανών παιγνίων, η «Φύση» θα αποφασίσει για τον τύπο της επιχείρησης 2 και θα την αποκαλύψει μόνο σε αυτήν.

Σύμφωνα με το Μπεϋζιανό υπόδειγμα, ένας στρατηγικός συνδυασμός θα αποδίδεται από ένα διάνυσμα (q_1, q_L, q_H),όπου q_Lείναι η ποσότητα που θα επιλέξει να παράγει η επιχείρηση 2 με οριακό κόστος c_L ,και q_H η ποσότητα που θα παράγει με οριακό κόστος c_H.

Εφόσον η **επιχείρηση 1** δεν γνωρίζει το οριακό κόστος της επιχείρησης 2, θα επιδιώξει να μεγιστοποιήσει τη συνάρτηση αναμενομένων οριακών κερδών ως εξής:

$$\pi_1(q_1, q_L, q_H) = k[(A - q_1 - q_L)q_1 - c_1 q_1] + (1-k)[(A - q_1 - q_H)q_1 - c_1 q_1]$$

Αντίθετα η **επιχείρηση 2,** γνωρίζει τόσο τον δικό της τύπο οριακού κόστους όσο και της επιχείρησης 1.Επομενως εάν αποκαλυφθεί ότι είναι τύπος c_L, η συνάρτηση κερδών θα μεγιστοποιηθεί ως εξής:

$$\pi_2(q_1, q_L) = (A - q_1 - q_L) - c_L q_L$$

Εάν είναι τύπος οριακού κόστους c_L αντίστοιχα η συνάρτηση κερδών θα μεγιστοποιηθεί ως εξής:

$$\pi_2(q_1, q_H) = (A - q_1 - q_H) - c_H q_H$$

Από τη λύση των τριών πιο πάνω προβλημάτων θα προκόψουν οι παρακάτω συναρτήσεις βέλτιστης αντίδρασης, η λύση των οποίων θα δώσει την Bayes-Nash ισορροπία:

$$\pi_1'(q_1, q_L, q_H) = \big[k[(A - q_1 - q_L)q_1 - c_1 q_1] + (1-k)[(A - q_1 - q_H)q_1 - c_1 q_1]\big]'$$

Για λόγους ευκολίας αρχικά παραγωγίζουμε πρώτα ως προς το μέρος της συνάρτησης,:

$$\big[k[(A - q_1 - q_L)q_1 - c_1 q_1]\big]' = k(A - 2q_1 - q_L - c_1) \qquad (1)$$

και στη συνέχεια ως προς το δεύτερο:

$$\big[(1-k)[(A - q_1 - q_H)q_1 - c_1 q_1]\big]' = (1-k)(A - 2q_1 - q_H - c_1) \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$\pi_1'(q_1, q_L, q_H) = k(A - 2q_1 - q_L - c_1) + (1-k)(A - 2q_1 - q_H - c_1) \qquad (3)$$

Στη συνέχεια παραγωγίζουμε τη συνάρτηση κερδών τη επιχείρησης 2 πρώτα ως προς q_L:

$$[(A - q_1 - q_L) - c_L q_L]' = A - q_1 - 2q_L - c_L$$

και μετά ως προς q_H:

$$[(A - q_1 - q_H) - c_H q_H]' = A - q_1 - 2q_H - c_H$$

Λύνοντας τις παραπάνω συναρτήσεις ς; προς q_L και q_H αντίστοιχα προκύπτει:

$$q_L = \frac{A-q_1-c_L}{2}\ (4)\ ,\ q_H = \frac{A-q_1-c_H}{2}\ (5)$$

Αντικαθιστώντας στην συνάρτηση (3) τις συναρτήσεις (4) και (5) έχουμε:

$$\pi_1'(q_1, q_L, q_H) = 0$$

$$k\left[A - 2q_1 - \left(\frac{A-q_1-c_L}{2}\right) - c_1\right] + (1-k)\left[A - 2q_1 - \left(\frac{A-q_1-c_H}{2}\right) - c_1\right] = 0$$

Ύστερα από πράξεις καταλήγουμε στη βέλτιστη αντίδραση q_1^*:

$$q_1^* = \frac{1}{3}[(A - 2c_1 + kc_L + (1-k)c_H]\ (6)$$

Έπειτα αντικαθιστώντας τη σχέση (6) στην (4) προκύπτει:

$$q_L = \frac{A - \left[\frac{1}{3}(A - 2c_1 + kc_L + (1-k)c_H)\right] - c_L}{2}$$

όπου μετά από πράξεις καταλήγουμε στην βέλτιστη αντίδραση q_L^*

$$q_L^* = \frac{1}{3}(A + c_1 - 2c_L) - \frac{1}{6}(1-k)(c_H - c_L)$$

Τέλος αντικαθιστώντας στην σχέση (6) στην (5) προκύπτει:

$$q_H = \frac{A - \left[\frac{1}{3}(A - 2c_1 + kc_L + (1-k)c_H)\right] - c_H}{2}$$

όπου μετά από πράξεις καταλήγουμε στην βέλτιστη αντίδραση q_H^*

$$q_H^* = \frac{1}{3}(A + c_1 - 2c_H) + \frac{1}{6}k(c_H - c_L)$$

Από τη λύση των τριών προβλημάτων προέκυψαν οι τρεις συναρτήσεις βέλτιστης αντίδρασης, η λύση των οποίων θα δώσει την Bayes-Nash ισορροπία.

$$q_1^* = \frac{1}{3}[(A - 2c_1 + kc_L + (1-k)c_H]$$

$$q_L^* = \frac{1}{3}(A + c_1 - 2c_L) - \frac{1}{6}(1-k)(c_H - c_L)$$

$$q_H^* = \frac{1}{3}(A + c_1 - 2c_H) + \frac{1}{6}k(c_H - c_L)$$

Όταν αποκαλυφθεί στην επιχείρηση 2 ότι είναι τύπος χαμηλού κόστους c_L, τότε αυτή θα παράγει περισσότερο από ό,τι στην περίπτωση που το κόστος της είναι υψηλό c_H. Πιο ενδιαφέρον έχει η περίπτωση που θα αποκαλυφθεί στην επιχείρηση 2 ότι είναι τύπος υψηλού κόστους. Γνωρίζουμε ότι σε περιβάλλον πλήρους πληροφόρησης το επίπεδο παραγωγής της θα ήταν

$$q_H^* = \frac{1}{3}(A + c_1 - 2c_H)$$

ενώ με τη μη πλήρη πληροφόρηση η παραγωγή προσαυξάνεται κατά $\frac{1}{6}k(c_H - c_L)$. Αυτό συμβαίνει γιατί η επιχείρηση 1, αγνοώντας το πραγματικό οριακό κόστος της επιχείρησης 2, λογίζει ως σωστό τον μέσο όρο των δύο τιμών, οδηγώντας την σε χαμηλότερο επίπεδο παραγωγής q_1. Εύκολα μπορεί να διαπιστώσει κανείς ότι η ποσότητα παραγωγής στο Μπεϋζιανό παίγνιο θα υπολείπεται της ποσότητας στην περίπτωση της πλήρους πληροφόρησης (Βολιώτης, 2015)

$$\frac{1}{3}[(A - 2c_1 + kc_L + (1-k)c_H] < \frac{1}{3}(A + c_1 - 2c_H).$$

5. Συμπεράσματα

Συμπερασματικά η θεωρία παιγνίων βρίσκεται ακόμα σε στάδιο εξέλιξης. Πολλά σημαντικά αναδύονται ακόμα και σήμερα και δεν έχουν βρεθεί οι απαιτούμενες απαντήσεις σε πολλά ερωτήματα. Στην πραγματικότητα αν κάποιος μελετήσει διάφορα άρθρα και μελέτες στη θεωρία παιγνίων, είναι πολύ πιθανόν να μην βρει την απάντηση που επιθυμεί. Αυτό ωφελείται στο γεγονός οτι οι επιστήμονες που ασχολούνται με αυτά τα θέματα πολλές φορές δεν συμφωνούν για το πώς θα ερμηνευτεί ένα πρόβλημα.

Κάποιες παρουσιάσεις φαίνεται να προτείνουν ότι η θεωρία παιγνίων προβλέπει την ανθρώπινη συμπεριφορά (τι επιλογές θα κάνουν οι άνθρωποι στην καθημερινή τους ζωής). Άλλοι ισχυρίζονται ότι η θεωρία παιγνίων δεν προβλέπει κάποια συμπεριφορά αλλά υποκινεί τον παίκτη σχετικά με το πώς θα πράξει (υποδεικνύει δηλαδή στον παίκτη τι πρέπει να κάνει αν θέλει να αποκομίσει μεγαλύτερο όφελος).Ενώ υπάρχουν και άλλοι που ισχυρίζονται ότι κάθε παίκτης είναι ένα “ορθολογικό” άτομο που προσπαθεί να μεγιστοποιήσει το δικό του όφελος αναγνωρίζοντας ότι δεν μπορεί να προβλέψει τη συμπροφορά των αντιπάλων του.

Όπως είδαμε η θεωρία παιγνίων έχει μεγάλη ποικιλία εφαρμογών και μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως εργαλείο σε πολλούς επιστημονικούς τομείς. Θα λέγαμε πως όλα έχουν κάποια σχέση με την θεωρία παιγνίων αφού έχει εφαρμογές στην οικονομία, στις επιχειρήσεις, στην πληροφορική, στις τηλεπικοινωνίες, στην πολιτική, στην κοινωνιολογία, στη βιολογία και φυσικά στην καθημερινότητα. Μια σύγχρονη μαθηματική θεωρία μπορεί να αναλύσει ,από παρτίδα το σκάκι μέχρι τον τζόγο ή έναν πυρηνικό πόλεμο, και να προβλέψει τον νικητή.

Οι οικονομολόγοι εδώ και πολύ καιρό χρησιμοποιούν τη θεωρία παιγνίων (έχοντας ως υλικά υποστήριξης τα πέντε βραβεία Νόμπελ στα οικονομικά) για να αναλύσουν διάφορους κλάδους όπως για παράδειγμα η βιομηχανική οργάνωση, ο σχεδιασμός μηχανισμών (mechanism design) με υποκλάδο τις δημοπρασίες, τις συμφωνίες, τα ολιγοπώλια, τα μονοπώλια, (ο Γάλλος μαθηματικός Cournot το 1838 έγραψε το πρώτο μοντέλο δυοπωλίου) τα συστήματα για να μπορεί κάποιος να ψηφίσει και πολλά άλλα.

Επιπρόσθετα η θεωρία των παιγνίων παίζει σημαντικό ρόλο στην παγκόσμια διπλωματία και στις πολεμικές στρατηγικές, επηρεάζοντας τη μοίρα των διαφόρων χωρών ακόμη και αν δεν είναι άμεσα ορατό. Ακόμα και τέτοιου είδους ζητήματα περιέχουν στρατηγικές και οφέλη, ακριβώς ότι αναλύει η θεωρία των παιγνίων.

Χρησιμοποιείται όμως και στην Πολιτική Οικονομία και ειδικά στη θεωρία της συλλογικής δράσης (Collective action), όπου αναλύει ενδεχόμενα συνεργασίας μεταξύ των παικτών. Αυτό βρίσκεται σε άμεση συσχέτιση με τον ρόλο του κράτους και των θεσμών σε θέματα συνεργασίας. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η παροχή δημόσιων αγαθών και η φορολογία όπως αναφέραμε και στο εισαγωγικό κεφάλαιο.

Είναι ξεκάθαρο ότι η θεωρία των παιγνίων διαθέτει άπειρες εφαρμογές σε διάφορους τομείς ακόμη και στην καθημερινότητα μας, από τα πιο πολύπλοκα θέματα ου αντιμετωπίζει κάποιος έως τα πιο απλά, όπως για παράδειγμα πιο αγαθό θέλουμε να αγοράσουμε, που θα πάμε εκδρομή ή τι θα φορέσουμε. Σε όλες μας τις καθημερινές αποφάσεις σκεφτόμαστε τις δεδομένες επιλογές που διαθέτουμε, τις εναλλακτικές επιλογές και ποια από αυτές τις επιλογές θα μας ικανοποιήσει περισσότερο. (Βλαχοπούλου, 2010)

6. Έρευνα βιβλιογραφίας

Άρθρα:

- Bellhouse David, (2007), "The Problem of Waldegrave" (PDF), Journal Électronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique 3 (2)
- Bergstrom Theodore C. and Varian Hal R., ‘Two Remarks on Cournot Equilibria’, Economic Letters 19, 5-8.
- Carbonell-Nicolau Oriol & McLean Richard (2014),’Refinements of Nash Equilibrium in Potential Games’, Theoretical Economics 9, 555–582.
- Caruso Francesco & Ceparano Maria Carmela & Morgan Jacqueline (2017), ‘Uniqueness of Nash Equilibrium in Continuous Weighted Potential Games’ , Centre for Studies in Economics and Finance, Working Paper No. 471.
- Conway. John H. Regular Algebra and Finite Machines. Chapman & Hall,London, 1972.
- Dragone Davide & Lambertini Luca (2008), ‘The Non-Linear Cournot Model as a Best-Response Potential Game, Working Paper 10-08, The Rimini Center for Economic Analysis.
- Dragone Davide & Lambertini Luca (2008), ‘The Non-Linear Cournot Model as a Best-Response Potential Game, Working Paper 10-08, The Rimini Center for Economic Analysis.
- Farrell J. and Rabin.M. Cheap talk. The Journal of Economic Perspectives, 10 (3):103–118, 1996.
- Friedman James. A noncooperative equilibrium for supergames. Review of Economic Studies, 38:1–12, 1971.
- Fudenberg D and Tirole J. Perfect Bayesian equilibrium and sequential equilibrium. Journal of Economic Theory, 2366260:236–260, 1991.
- Fudenberg Drew and Maskin Eric. The folk theorem in repeated games with discounting or with incomplete information. Econometrica, 54(3):533–554,1986

- Hargreaves S -Heap and Varoufakis Y. Game Theory. A critical text. Routledge,2004.
- Kukushkin, Nikolai S., (2008), 'Potential games with NM utilities', Economics Bulletin, Vol. 3, No. 17 pp. 1-7.
- Leonard, Robert (2010), Von Neumann, Morgenstern, and the Creation of Game Theory, New York: Cambridge University Press,ISBN 9780521562669
- Mallozzi L., Tus S., Voorneveld M. (2000), 'Infinite Hierarchical Potential Games', Journal of Optimization Theory and Applications: Vol. 107, No. 2, pp. 287–296.
- Monderer D. and Shapley L. S. (1996), 'Potential games', Games and Economic Behavior, 14, 124-143.
- Myerson, Roger B. (1991). Game Theory: Analysis of Conflict, Harvard University Press, p. 1. Chapter-preview links, pp. vii–xi.
- Nash John. The bargaining problem. Econometrica, 18:155–162, 1950.
- Neggers J. and H.S. Kim. Basic Posets. World Scientific, 1998. ISBN 9789810235895
- Nisan N., Roughgarden T., Tardos E., and Vazirani V.V.. Algorithmic Game Theory. Cambridge University Press, 2007. ISBN 9781139466547.
- Norde, H.W. & Tijs, S.H. (1998), 'Determinateness of strategic games with a potential', Volume 48, Issue 3, pp 377–385.
- Pussillo Lucia (2017), 'Vector Games with Potential Function',Vol.8,Issue 4.
- Roughgarden Tim. Potential functions and the inefficiency of equilibria.Proceedings on the International Congress of Mathematicians, 2006.
- Rubinstein Ariel. Equilibrium in supergames with the overtaking criterion.Journal of Economic Theory, 21:1–9, 1979.
- Rubinstein A. Modeling Bounded Rationality. MIT Press, Cambridge,Massachusetts, London, 1998.
- Savage L. The Foundations of Statistics. Dover Publications Inc.; New edition, 2003.

- Screpanti Ernesto; Zamagni Stefano; (2005). An Outline of the History of Economic Thought' (2nd ed.). Oxford University Press
- Selten.R Reexamination of the perfectness concept for equilibrium points inextensive games. International journal of game theory, 4(1), 1975.
- Shoham Y. and K. Leyton-Brown. Multiagent Systems: Algorithmic, Game-Theoretic, and Logical Foundations. IT Pro. Cambridge University Press, 2009 ISBN 9781139475242.
- Topkis D. Supermodularity and Complementarity. Princeton University Press,1998.
- Uno, Hiroshi, (2007), 'Nested Potential Games', Economics Bulletin, Vol. 3, No. 17 pp. 1-8.
- Von Neumann J. and Morgenstern O. Theory of games and economic behavior Princeton university press, 1944.
- Voorneveld M., & H. W. Norde (1996). 'A Characterization of Ordinal Potential Games', FEW Research Memorandum, Vol. 734
- Voorneveld M., (1996), 'Equilibria and Approximate Equilibria in Infinite Potential Games', CentER Discussion Paper, Vol. 1996-94.
- Voorneveld M. and H. Norde (1997), 'A characterization of ordinal potential Games', Games and Economic Behavior, 19, 235-242.
- Voorneveld M., Borm, P.E.M.,van Megen, F.J.C., Tijs, S.H.,& Facchini, G. (1999) , 'Congestion Games and Potentials Reconcidered', CentER Discussion Paper , Vol. 1999-98.
- Voorneveld Mark (2000), 'Best-Response Potential Games', Economics Letters 66, 289-295.

Βιβλία

- Αλιπράντης Δ. Χ. & Chakrabarti K. S. (2004), 'Παίγνια και Λήψη Αποφάσεων', Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία
- Βλαχοπούλου Αθανασία (2010) "Εμπειρική Προσέγγιση της Nash ισορροπίας"
- Βολιώτης Δημήτριος (2015),' ' Διαλέξεις στη Θεωρία Παιγνίων Πληροφορία και Λήψη Αποφάσεων', Εκδόσεις Πεδίο.
- Μηλολιδάκης Α.Κωνσταντίνος (2009), 'Θεωρία Παιγνίων'.
- Σταματόπουλος Γεώργιος (2015) "Θεωρία παιγνίων"
- Besanko D. & Braeutigam R.R. (2009) "Μικροοινομικη"
- Osborne J.Martin,(2010) "Εισαγωγή στη Θεωρία Παιγνίων"
- Voorneveld M., (1999). 'Potential games and interactive decisions with multiple criteria'.
- Quang Duy La-Yong Huat Chew Boon Hee Soong "Potential Game Theory-Application in Radio Resource Allocation"

Internet:

https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%98%CE%B5%CF%89%CF%81%CE%AF%CE%B1_%CF%80%CE%B1%CE%B9%CE%B3%CE%BD%CE%AF%CF%89%CE%BD