



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

UNIVERSITY OF PIRAEUS

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ & ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ
ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

**ΘΕΩΡΙΑ ΑΣΑΦΕΙΑΣ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ
ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑΣ ΚΑΙ ΑΠΟΘΕΜΑΤΟΠΟΙΗΣΗ ΖΗΜΙΩΝ**

Χρήστος Κ. Βαλασίδης

Διπλωματική Εργασία
που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων
για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος στην
Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

**Πειραιάς
Νοέμβριος 2019**



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

UNIVERSITY OF PIRAEUS

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ & ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ
ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

ΘΕΩΡΙΑ ΑΣΑΦΕΙΑΣ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ
ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑΣ ΚΑΙ ΑΠΟΘΕΜΑΤΟΠΟΙΗΣΗ ΖΗΜΙΩΝ

Χρήστος Κ. Βαλασίδης

Διπλωματική Εργασία
που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων
για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος στην
Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Πειραιάς
Νοέμβριος 2019

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμόν συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Πιτσέλης Γεώργιος (Επιβλέπων)
- Μπούτσικας Μιχαήλ
- Ψαρράκος Γεώργιος

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS & INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN
ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

**FUZZY THEORY WITH APPLICATIONS
TO CREDIBILITY AND LOSS RESERVING**

Christos K. Valasidis

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and
Insurance Science of the University of Piraeus in
partial fulfillment of the requirements for the degree of
Master of Science in Actuarial Science and Risk Management

**Piraeus, Greece
November 2019**

This thesis was approved unanimously by the three-member Commission of Inquiry appointed by the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus No. meeting with the by laws of the Postgraduate Program in Actuarial Science and Risk Management

Committee members were:

- Pitselis Georgios (Supervisor)
- Boutsikas Michael
- Psarrakos Georgios

The approval of the thesis by the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus does not imply acceptance of opinions of the author

*Στους γονείς μου,
Μαίρη και Κώστα*

Ευχαριστίες

Εν πρώτοις, οφείλω να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στον επιβλέποντα καθηγητή κο Γεώργιο Πιτσέλη για την ευκαιρία που μου έδωσε να εκπονήσω την παρούσα διπλωματική εργασία και για την εμπιστοσύνη με την οποία με περιέβαλλε. Θα ήθελα επίσης να τον ευχαριστήσω εκ βαθύων για το έμπρακτο ενδιαφέρον και τις πολύτιμες συμβουλές του, όχι μόνο κατά τη συγγραφή του παρόντος πονήματος, αλλά καθόλη τη διάρκεια των μεταπτυχιακών σπουδών μου, την υποστήριξη και καθοδήγησή του όσον αφορά τις ακαδημαϊκές και επαγγελματικές μελλοντικές προκλήσεις.

Θα ήθελα, ακολούθως, να αποδώσω τις ευχαριστίες μου στον Αναπληρωτή Καθηγητή κο Μιχαήλ Μπούτσινα και στον Επίκουρο Καθηγητή κο Γεώργιο Ψαρράκο για την τιμή που μου έκαναν να συμμετάσχουν στην τριμελή συμβουλευτική επιτροπή αξιολόγησης της διπλωματικής εργασίας.

Επίσης, ευχαριστώ τον κο Παντελή Βενάρδο, ο οποίος με ενέπνευσε και με καθοδήγησε στην επιλογή του εν λόγω μεταπτυχιακού προγράμματος σπουδών.

Εν συνεχεία, επιθυμώ να ευχαριστήσω τους φίλους μου για τη στήριξη και την αγάπη τους, όμως οφείλω ένα ιδιαίτερο ευχαριστώ στον αξιέπαινο συνάδελφο και ξεχωριστό φίλο Ιωάννη Κακογεωργίου ο οποίος, ακόμη και υπό τις πιο αντίξοες συνθήκες, παρείχε απλόχερα και ανιδιοτελώς τεράστια υποστήριξη, καίριες συμβουλές και καθοδήγηση κατά τη συγγραφή του παρόντος πονήματος και η συμβολή του ήταν καταλυτική για την περάτωση αυτού.

Τέλος, ένα ξεχωριστό, εκ βάθους καρδιάς, ευχαριστώ στην οικογένειά μου, στον αδερφό μου Ιωάννη και στους γονείς μου Κωνσταντίνο και Μαρία. Δεν υπάρχουν λόγια ώστε να αποδώσουν την απaráμιλλη ευγνωμοσύνη που αισθάνομαι για τους δύο ανθρώπους οι οποίοι, πέραν της άνευ όρων αγάπης τους, στήριξαν υλικά και ηθικά, με υπομονή και κατανόηση, κάθε επιλογή μου και συνεχίζουν να το πράττουν. Δίχως ίχνος υπερβολής, μετατρέπουν κάθε όνειρο μου σε εφικτό στόχο με την υποστήριξη και την πίστη που μου επιδεικνύουν. Ως εκ τούτου, επιθυμώ να αφιερώσω σε αυτούς την παρούσα διπλωματική εργασία, ως ελάχιστο δείγμα ευγνωμοσύνης.

Περίληψη

Η πρόβλεψη επαρκούς αποθέματος απαιτήσεων κρίνεται ζωτικής σημασίας για την οικονομική σταθερότητα των ασφαλιστικών εταιρειών. Μολονότι χρησιμοποιούνται ποικίλες ντετερμινιστικές και στοχαστικές μέθοδοι, θα πρέπει να ληφθεί υπόψιν το ευρύ φάσμα των μη ποσοτικοποιήσιμων παραγόντων που αυξάνουν την αβεβαιότητα, όταν χρησιμοποιείται οποιαδήποτε μέθοδος για την πρόβλεψη των απαιτήσεων βάσει δεδομένων της ιστορικής περιόδου. Επομένως, σε μια κατάσταση αβεβαιότητας η οποία είναι εγγενής πλήθους αναλογιστικών και οικονομικών προβλημάτων, όταν δεν υπάρχουν επαρκή και αξιόπιστα δεδομένα, η ασαφής θεωρία συνόλων καθίσταται ιδιαίτερος ελκυστική λόγω της ανοχής της ανακρίβειας και της αβεβαιότητας δίχως απώλεια στην απόδοση και την αποτελεσματικότητα. Στο παρόν πόνημα, αρχικά επεκτείνουμε την μέθοδο chain ladder αξιοποιώντας ασαφείς μεθόδους. Συνεπώς, εξάγουμε νέες εκτιμήσεις για τους παράγοντες εξέλιξης. Δεύτερον, παρουσιάζεται η επέκταση της μεθόδου London chain ladder κάνοντας χρήση υβριδικής ασαφούς παλινδρόμησης ελαχίστων τετραγώνων, η οποία βρίσκει επίσης εφαρμογή στην ασαφή επέκταση της chain ladder με εκθετικό μοντέλο. Σε ένα επόμενο στάδιο, η υβριδική ασαφής παλινδρόμηση χρησιμοποιείται για την εκτίμηση μελλοντικών απαιτήσεων στα πλαίσια της ασαφούς γεωμετρικής μεθόδου διαχωρισμού. Τέλος, παρουσιάζεται η επέκταση της Bornhuetter-Ferguson μέσω εφαρμογής ασαφών μεθόδων. Η εκ των προτέρων πληροφορία για τις τελικές αξιώσεις προέρχεται από δεδομένα της αγοράς και ενδέχεται να περιέχει ασάφεια. Ομοίως, οι παράμετροι του μοτίβου ανάπτυξης των αξιώσεων μπορεί να είναι ασαφείς ή να προσαρμόζονται, αναδρομικά, λόγω υποκειμενικής κρίσης. Για κάθε μέθοδο που επεκτείνεται χρησιμοποιώντας την ασαφή θεωρία συνόλων, παρέχεται επίσης μία εκτίμηση για τη σταθμισμένη μέση τιμή συναρτήσει μίας παραμέτρου κινδύνου και μία εκτίμηση για την αβεβαιότητα των τελικών απαιτήσεων για κάθε έτος ατυχήματος καθώς επίσης και αθροιστικά. Επιπροσθέτως, τα μοντέλα αξιοπιστίας των Bühlmann και Hachemeister επεκτείνονται αξιοποιώντας τα εργαλεία που η ασαφής θεωρία συνόλων προσφέρει. Πραγματοποιείται εφαρμογή των ασαφών μοντέλων αξιοπιστίας στο χαρτοφυλάκιο ιδιοκτησίας και ατυχημάτων, προκειμένου να εκτιμηθεί το ύψος των απωλειών ανά υποκλάδο του χαρτοφυλακίου.

Abstract

The prediction of an adequate amount of claim reserves is crucial for the financial stability of insurance companies. Although many different deterministic and stochastic methods based on statistical analyses are used, the wide range of unquantifiable factors which increase the uncertainty should be taken under serious consideration when using any, based on statistical concepts, method to estimate claim provisions based on historical data. Therefore, in a state of uncertainty which is intrinsic in the nature of many actuarial and financial problems, when adequate and solvent data is not held, the use of fuzzy set theory becomes very attractive due to the tolerance of imprecision and uncertainty without loss of performance and effectiveness. In this thesis, initially we extend the classical chain ladder method using fuzzy methods. Therefore, we derive new estimators for claim development factors. Secondly, is presented the extension of London chain ladder method using hybrid fuzzy least-squares regression. Thirdly, is proposed the fuzzy extension of chain ladder with exponential model by applying hybrid fuzzy least-squares regression. In a fourth stage, hybrid fuzzy least-squares regression is used to predict future claim costs by utilizing the concept of a geometric separation method. Finally, is shown how Bornhuetter-Ferguson claims reserving method can be extended by applying fuzzy methods. The a priori information for the ultimate claims derives from market statistics and might contain vagueness. Likewise, the parameters of the claims development pattern can be vague or are adapted, retrospectively, due to subjective judgment. For every method we extend using fuzzy set theory we also provide an estimator for the weighted average depending on risk factor and an estimator for the uncertainty of the ultimate claims for single and aggregated accident years. Furthermore the fundamental credibility models of Bühlmann and Hachemeister are extended by utilizing the instruments that fuzzy set theory has to offer. Implementation of these fuzzy credibility models is conducted on property and casualty portfolio, in order to derive predictions for next period's claim amounts, through the extended models, for every section included in portfolio.

Περιεχόμενα

1	Ασαφής Λογική	1
1.1	Εισαγωγή	1
1.2	Ασαφή Σύνολα	6
1.2.1	Βασικές έννοιες και ορισμοί	7
1.2.2	Πράξεις στα ασαφή σύνολα	10
1.3	Ασαφείς Αριθμοί	13
1.3.1	Τριγωνικοί ασαφείς αριθμοί	14
1.3.2	Άλλα είδη ασαφών αριθμών	20
1.4	Σταθμισμένη Ασαφής Αριθμητική	26
1.4.1	Σταθμισμένη ασαφής αριθμητική τριγωνικών αριθμών	26
2	Παλινδρόμηση	31
2.1	Εισαγωγή	31
2.2	Απλή Γραμμική Παλινδρόμηση	32
2.2.1	Εκτίμηση των παραμέτρων β_0 και β_1	32
2.2.2	Εκτίμηση της διασποράς του σφάλματος σ^2	33
2.2.3	Διασπορά των $\hat{\beta}_0$ και $\hat{\beta}_1$	34
2.2.4	Ο συντελεστής προσδιορισμού R^2	34
2.2.5	Διαστήματα εμπιστοσύνης παραμέτρων	35
2.2.6	Διάστημα πρόβλεψης για τη μεταβλητή απόκρισης	37
2.2.7	Διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση πρόβλεψη	39
2.3	Πολλαπλή Γραμμική Παλινδρόμηση	40
2.3.1	Εκτίμηση των παραμέτρων $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{p-1}$	40

2.3.2	Πίνακας διασποράς-συνδιασποράς των Y_i και εκτίμηση του σφάλματος σ^2	41
2.3.3	Πίνακας διασποράς-συνδιασποράς του $\hat{\beta}$	42
2.3.4	Ο συντελεστής προσδιορισμού R^2	43
2.3.5	Διαστήματα εμπιστοσύνης παραμέτρων	43
2.3.6	Διάστημα πρόβλεψης για τη μεταβλητή απόκρισης	44
2.3.7	Διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση πρόβλεψη	46
2.4	Ασαφής Παλινδρόμηση	47
2.4.1	Εισαγωγή	47
2.4.2	Ασαφής παλινδρόμηση με χρήση της αρχής ελάχιστης ασάφειας .	48
2.4.3	Υβριδική ασαφής παλινδρόμηση ελαχίστων τετραγώνων	54
2.4.3.1	Το μοντέλο της απλής υβριδικής παλινδρόμησης	54
2.4.3.2	Το μοντέλο της υβριδικής πολλαπλής παλινδρόμησης .	58
2.4.3.3	Μέτρα αξιοπιστίας για το υβριδικό μοντέλο παλινδρόμησης	60
3	Αποθεματοποίηση Ζημιών	65
3.1	Εισαγωγή	65
3.1.1	Ορισμοί αποθεμάτων ζημιών	66
3.1.2	Στρατηγική εκτίμησης αποθέματος	68
3.2	Μέθοδοι Αποθεματοποίησης	70
3.2.1	Μέθοδος chain ladder ή τριγώνου εξέλιξης ζημιών	70
3.2.2	Μέθοδος London chain ladder	79
3.2.3	Μέθοδος chain ladder με εκθετικό μοντέλο	82
3.2.4	Γεωμετρική μέθοδος διαχωρισμού	88
3.2.5	Μέθοδος Bornhuetter-Ferguson	96
3.3	Ασαφείς Μέθοδοι Αποθεματοποίησης	102
3.3.1	Ασαφής μέθοδος chain ladder ή τριγώνου εξέλιξης ζημιών . . .	103
3.3.2	Ασαφής μέθοδος London chain ladder	110
3.3.3	Ασαφής μέθοδος chain ladder με εκθετικό μοντέλο	117
3.3.4	Ασαφής γεωμετρική μέθοδος διαχωρισμού	125

3.3.5	Ασαφής μέθοδος Bornhuetter-Ferguson	139
4	Αξιοπιστία Χαρτοφυλακίου	147
4.1	Εισαγωγή	147
4.2	Μέθοδοι Αξιοπιστίας	151
4.2.1	Το μοντέλο του Bühlmann	151
4.2.2	Το μοντέλο του Hachemeister	155
4.3	Ασαφείς Μέθοδοι Αξιοπιστίας	159
4.3.1	Το ασαφές μοντέλο του Bühlmann	160
4.3.2	Το ασαφές μοντέλο του Hachemeister	167
5	Συμπεράσματα	177
	Βιβλιογραφία	181
	Παράρτημα Α' Πίνακες	185
	Παράρτημα Β' Σχήματα	191

Κεφάλαιο 1

Ασαφής Λογική

1.1 Εισαγωγή

Η ασάφεια είναι διάχυτη σε κάθε έκφραση της ζωής των ανθρώπων. Η ανθρώπινη γλώσσα είναι ένα ανακριβές εργαλείο, η ανθρώπινη αντίληψη διακατέχεται από ανακρίβειες, οι αναμνήσεις είναι φευγαλέες και εύπλαστες. Ο πραγματικός κόσμος δεν είναι μία αφηρημένη έννοια, εντούτοις δεν γίνεται ξεκάθαρα αντιληπτός, δεν ορίζεται με σαφήνεια και δεν σταθμίζεται επακριβώς από τον ανθρώπινο νου.

Σύμφωνα με τη θεώρηση του Wierman (2010), η έλευση των ηλεκτρονικών υπολογιστών προκάλεσε αμφιλεγόμενα φιλοσοφικά διλήμματα. Οι προγραμματιστές είναι επιφορτισμένοι με τη δημιουργία λογισμικού που λειτουργεί για και με τους ανθρώπους. Η προσπάθεια γεφύρωσης αυτού του χάσματος οδήγησε στην ανάπτυξη και τη χρήση τεχνολογιών αλληλεπίδρασης όπως η τεχνητή νοημοσύνη, η εξόρυξη δεδομένων (data mining), τα έμπειρα συστήματα (expert systems) που πρέπει να αναπαραστήσουν και να χειριστούν τις αβεβαιότητες της πραγματικής ζωής.

Ένα από τα πιο ισχυρά διαθέσιμα εργαλεία, σύμφωνα με τον Wierman (2010), στην προαναφερθείσα προσπάθεια αποτελεί η ασαφής θεωρία συνόλων (fuzzy set theory). Ένα ασαφές σύνολο έχει διαβαθμισμένη συμμετοχή (membership), με αυτόν τον τρόπο έχει σχεδιαστεί ώστε να διαχειρίζεται την ασάφεια. Η ασάφεια είναι ένα είδος αβεβαιότητας οι πηγές της οποίας μπορεί να είναι οι ελλιπείς πληροφορίες ή τα ανεπαρκή δεδομένα. Το ακόλουθο παράδειγμα βοηθάει στην κατανόηση της έννοιας της ασάφειας.

Για πολλά χρόνια, ο Πλούτωνας εθεωρείτο πλανήτης και ξαφνικά το 2006 σταμάτησε να θεωρείται. Αυτό που άλλαξε ήταν η του. Η ανακάλυψη πολλών απομακρυσμένων αντικειμένων στο ηλιακό σύστημα, αρκετά από τα οποία ήταν μεγαλύτερα από τον Πλούτωνα, προκάλεσε στους αστρονόμους αμφιβολίες για την ταξινόμησή του ως πλανήτη. Στην πραγματικότητα, η Διεθνής Αστρονομική Ένωση όρισε για πρώτη φορά τον όρο «πλανήτη» το 2006 και ο Πλούτωνας δεν ενέπιπε στον ορισμό. Πλέον είναι ταξινομημένος ως ελάσσων πλανήτης.

Η ασαφής θεωρία συνόλων, όπως ο Wierman (2010) αναφέρει, υιοθετεί μία διαφορετική προσέγγιση. Οι κατηγορίες «πλανήτης» και «ελάσσων πλανήτης» δεν έχουν διακριτά όρια. Αντ' αυτού, ορισμένα αντικείμενα του ηλιακού συστήματος ενδέχεται να διαθέτουν χαρακτηριστικά τέτοια ώστε να επιτρέπουν τη μερική συμπερίληψή τους και στις δύο κατηγορίες. Επομένως, η ασαφής θεωρία συνόλων θα ενέτασσε τον Πλούτωνα στο σύνολο των πλανητών, όχι όμως στον ίδιο βαθμό με τους υπόλοιπους οκτώ πλανήτες.

Σύμφωνα με τον Zadeh (1965), τον θεμελιωτή της ασαφούς λογικής (fuzzy logic), αυτή έχει τέσσερις βασικές πτυχές:

1. Η λογική της προσεγγιστικής συλλογιστικής, η οποία ενσαρκώνει την ασαφή λογική με τη στενή της έννοια.
2. Η πτυχή της θεωρίας συνόλων, η οποία ασχολείται με κλάσεις που έχουν μη ευκρινή όρια, τέτοιου είδους κλάση είναι τα ασαφή σύνολα.
3. Η σχεσιακή πτυχή που ασχολείται με τις γλωσσικές μεταβλητές, τους ασαφείς κανόνες και τις ασαφείς σχέσεις. Η πτυχή αυτή αποτελεί το θεμέλιο όλων σχεδόν των εφαρμογών της ασαφούς λογικής στον έλεγχο, στην ανάλυση αποφάσεων, στα βιομηχανικά συστήματα και στα καταναλωτικά προϊόντα.
4. Η γνωσιολογική πτυχή που ασχολείται με τη γνώση, τις έννοιες και τη γλωσσολογία.

Στο σημείο αυτό πρέπει να διευκρινιστεί ότι η αβεβαιότητα μπορεί να προσδιοριστεί από την τυχαιότητα και την ασάφεια. Η τυχαιότητα μοντελοποιεί τη στοχαστική με-

ταβλητότητα όλων των πιθανών εκβάσεων μιας κατάστασης και περιγράφει την εγγενή, σχετιζόμενη με το περιβάλλον, διακύμανση. Από την άλλη μεριά, η ασάφεια σχετίζεται με τα μη-ευκρινή όρια των παραμέτρων του μοντέλου και αποτελεί περισσότερο ένα όργανο περιγραφικής ανάλυσης που αντικατοπτρίζει το παρελθόν και τις επιπτώσεις του. Στη συνήθη (κλασική) θεωρία συνόλων, ένα στοιχείο είτε περιέχεται σε ένα δοθέν σύνολο είτε όχι. Η μετάβαση από την ιδιότητα μέλους του συνόλου σε αυτή του μη-μέλους είναι απότομη. Τα ασαφή σύνολα (fuzzy sets), από την άλλη μεριά, περιγράφουν σύνολα στοιχείων ή μεταβλητών που τα όριά τους είναι ακαθόριστα ή ανακριβή, ενώ η μετάβαση από την ιδιότητα μέλους σε μη-μέλος είναι βαθμιαία. Είναι εφικτό για ένα στοιχείο να ανήκει «λίγο-πολύ» σε ένα σύνολο. Ας εξετάσουμε τις γλωσσολογικές μεταβλητές, οι οποίες αποτελούν τα δομικά στοιχεία της ασαφούς λογικής. Σύμφωνα με τον Zadeh (1965) μπορούν να οριστούν ως οι μεταβλητές των οποίων οι τιμές εκφράζονται ως λέξεις ή προτάσεις. Για παράδειγμα, έστω το σύνολο των «νέων οδηγών». Στην κλασική θεωρία συνόλων ένα άτομο είτε ανήκει είτε δεν ανήκει στο σύνολο αυτό, γεγονός που συνεπάγεται ότι το άτομο μετακινείται από το σύνολο των «νέων οδηγών» στο συμπληρωματικό του σύνολο των «μη-νέων οδηγών» ξαφνικά. Η ασαφής θεωρία συνόλων επιτρέπει βαθμούς συμμετοχής (membership degrees). Ο Lemaire (1990) αναφέρει για παράδειγμα, ότι μπορούσε να οριστεί ότι οδηγοί κάτω των είκοσι ετών είναι σίγουρα «νέοι», ότι οδηγοί άνω των τριάντα ετών είναι σίγουρα «μη-νέοι» και ότι ένας οδηγός εικοσιτριών ετών είναι «λίγο-πολύ» νέος με βαθμό συμμετοχής 0.7 σε μία κλίμακα από το 0 («σίγουρα νέος») έως το 1 («σίγουρα μη-νέος»).

Επομένως, η ασαφής θεωρία συνόλων στοχεύει στη μοντελοποίηση ανακριβών, αόριστων, «θολών» και ασαφών πληροφοριών, από τις οποίες βρίθεται ο πραγματικός κόσμος. Μπορεί να διαπιστώσει κανείς, ότι πολλά πρακτικά προβλήματα είναι εξαιρετικά πολύπλοκα και σχεδιασμένα με λάθος τρόπο και ως εκ τούτου δύσκολο να μοντελοποιηθούν με ακρίβεια. Όπως έχει αναφέρει ο Zadeh, «όσο η πολυπλοκότητα ενός συστήματος αυξάνεται, η ικανότητά μας να πραγματοποιούμε ακριβείς και σημαντικές τοποθετήσεις σχετικά με τη συμπεριφορά του μειώνεται μέχρις ότου φτάσουμε ένα όριο πέρα από το οποίο η ακρίβεια και η σημασία γίνονται σχεδόν αποκλειστικά χαρακτηριστικά». Οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές δεν μπορούν να χειριστούν επαρκώς τέτοιου είδους προβλήματα, διότι

η ευφυΐα του μηχανήματος μεταχειρίζεται ακόμη την σειριακή - ακολουθιακή λογική. Η ανωτερότητα του ανθρωπίνου εγκεφάλου, σύμφωνα με τον Lemaire (1990), έγκειται στην ικανότητά του να χειρίζεται ασαφείς δηλώσεις και αποφάσεις, προσθέτοντας στη λογική παράλληλες και ταυτόχρονες πηγές πληροφοριών και διαδικασίες σκέψης, φιλτράροντας και επιλέγοντας αποκλειστικά τις χρήσιμες και τις σχετικές με τους σκοπούς του πληροφορίες. Ο ανθρώπινος εγκέφαλος έχει πολλές περισσότερες διαδικασίες σκέψης διαθέσιμες και έχει αναπτύξει μια πολύ μεγαλύτερη ικανότητα διήθησης από τον ηλεκτρονικό υπολογιστή. Μια ομάδα ανθρώπων είναι ικανή να διευθετήσει την εντολή «τα ψηλά άτομα πίσω, τα κοντά άτομα μπροστά», ενώ ένα μηχάνημα εισάγει ρητά την ασάφεια στη συλλογιστική, προσπαθώντας να παράσχει διαδικασίες λήψης αποφάσεων οι οποίες βρίσκονται όσο το δυνατόν εγγύτερα στο τρόπο που λειτουργεί ο ανθρώπινος εγκέφαλος.

Εδώ, ακολουθώντας τη συλλογιστική του Lemaire (1990), είναι αναγκαίο να γίνει μια σαφής διάκριση μεταξύ της ασαφούς λογικής και της θεωρίας πιθανοτήτων. Η αβεβαιότητα (uncertainty) δεν πρέπει να συγχέεται με την ανακρίβεια (imprecision). Οι πιθανότητες αποσκοπούν πρωτίστως να απεικονίσουν ένα βαθμό γνώσης, ενώ οι βαθμοί συμμετοχής καθορίζουν την ένταση της συμμετοχής σε μία κλάση ή με άλλα λόγια, αναπαριστούν σε ποιο βαθμό μία πρόταση αληθεύει μερικώς. Οι έννοιες των πιθανοτήτων πηγάζουν από σκέψεις σχετικές με την αβεβαιότητα των προτάσεων που αναφέρονται στον πραγματικό κόσμο. Οι έννοιες της ασαφούς λογικής από τη άλλη, συνδέονται στενά με την πολυεπίπεδη λογική αντιμετώπιση ζητημάτων ανακρίβειας που ανακύπτουν κατά τη διάρκεια του ορισμού μίας έννοιας ή οντότητας. Συνεπώς, η ασαφής λογική παρέχει ένα καλύτερο πλαίσιο από τη θεωρία πιθανοτήτων όσον αφορά τη μοντελοποίηση προβλημάτων που παρουσιάζουν κάποια εγγενή ανακρίβεια. Η παραδοσιακή προσέγγιση της ανάλυσης κινδύνου, για παράδειγμα, βασίζεται στην υπόθεση ότι η θεωρία πιθανοτήτων παρέχει τα απαραίτητα και επαρκή εργαλεία για την αντιμετώπιση της αβεβαιότητας και της ανακρίβειας που χαρακτηρίζουν την έννοια του κινδύνου στην ανάλυση αποφάσεων. Η ασαφής λογική θέτει υπό αμφισβήτηση την εγκυρότητα της προαναφερθείσας υπόθεσης. Δεν εξισώνει την ανακρίβεια με την τυχαιότητα, αλλά προτείνει ότι μεγάλο μέρος της αβεβαιότητας, που είναι ενδογενής της ανάλυσης κινδύνου, οφείλεται στην ασάφεια των

πληροφοριών που αντλούνται από τα δεδομένα και στην ανακρίβεια των υποκείμενων πιθανοτήτων. Η κλασική θεωρία πιθανοτήτων έχει περιορισμένη αποτελεσματικότητα όταν αντιμετωπίζει προβλήματα στα οποία κάποιες βασικές πηγές αβεβαιότητας είναι μη-στατιστικής φύσης.

1.2 Ασαφή Σύνολα

Η θεωρία συνόλων είναι το θεμέλιο όλων των κλάδων των σύγχρονων μαθηματικών (Wierman, 2010). Ακόμη και οι αριθμοί και τα γεωμετρικά αντικείμενα σπανίως θεωρούνται πρωταρχικές έννοιες. Στα επίσημα μαθηματικά ορίζονται ως κατασκευές της θεωρίας συνόλων. Η θεωρία συνόλων βασίζεται στην ιδέα μιας κλάσης ή συλλογής αντικειμένων. Ένα σύνολο είναι μια συλλογή αντικειμένων τα οποία καλούνται στοιχεία. Το σύνολο των υποψηφίων μελών του, ονομάζεται υπερσύνολο αναφοράς και συνήθως συμβολίζεται με X ή U . Τυπικά υπερσύνολα αναφοράς είναι οι πραγματικοί ή οι φυσικοί αριθμοί. Η θεμελιακή έννοια της θεωρίας συνόλων είναι: δοθέντος ενός στοιχείου του υπερσυνόλου αναφοράς (universe/domain of discourse), ένα σύνολο είναι καλά ορισμένο όταν κάποιος μπορεί να αποφασίσει αν ένα συγκεκριμένο στοιχείο περιέχεται στο σύνολο ή όχι. Αυτή η απλή ιδέα ήταν μία από τις πιο ισχυρές ιδέες που συνελήφθησαν ποτέ στον τομέα των μαθηματικών.

Ο ορισμός ενός συνόλου πρέπει να αποσαφηνίζει ποια στοιχεία ανήκουν στο σύνολο και ποια όχι. Τα σύνολα ορίζονται με τη χρήση μίας εκ των τριών ακόλουθων μεθόδων:

1. Με αναγραφή των στοιχείων. Για πεπερασμένα σύνολα μπορεί να γίνει με λίστα πλήρους καταγραφής των στοιχείων όπως $A = \{2, 4, 6\}$. Για απείρως αριθμήσιμα σύνολα οι τρεις τελείες "..." υποδηλώνουν τη φράση «και ούτω καθεξής», όπως για παράδειγμα στο σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$.
2. Με περιγραφή μιας ιδιότητας που έχουν όλα τα στοιχεία του συνόλου. Η μέθοδος αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για κάθε τύπο συνόλου. Για παράδειγμα, το σύνολο $A = \{x \mid x \text{ είναι άρτιος φυσικός αριθμός μικρότερος του } 7\}$ το οποίο είναι το ίδιο A με παραπάνω. Ένα ακόμη παράδειγμα είναι το $P = \{x \mid x \text{ πρώτος αριθμός}\}$.
3. Η μέθοδος της χαρακτηριστικής συνάρτησης είναι η σημαντικότερη μέθοδος προσδιορισμού των στοιχείων ενός συνόλου. Η χαρακτηριστική συνάρτηση συνόλου A , η οποία συμβολίζεται με $\chi_A(x)$, είναι 0 αν το x δεν ανήκει στο A και 1 αν το x ανήκει στο A . Στους τομείς των πιθανοτήτων και της στατιστικής, καλείται δείκτης συνάρτηση και συμβολίζεται με $I_A(x)$.

όπου

$$I_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in A \\ 0, & \text{αν } x \notin A \end{cases}$$

Η δείκτρια συνάρτηση της κλασικής θεωρίας συνόλων αντιστοιχίζει τα στοιχεία ενός υπερσυνόλου αναφοράς X στο δίτιμο σύνολο $\mathbb{B} = \{0, 1\}$. Στην ασαφή θεωρία συνόλων η εικόνα της δείκτριας συνάρτησης $I_A(x)$ επεκτείνεται από το σύνολο $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ το οποίο περιέχει μόνο δύο στοιχεία, στο διάστημα $\mathbb{U} = [0, 1]$ που περιέχει άπειρα στοιχεία. Το νέο όνομα της δείκτριας συνάρτησης είναι συνάρτηση συμμετοχής και συμβολίζεται με $\mu_{\tilde{A}}(x)$.

1.2.1 Βασικές έννοιες και ορισμοί

Ορισμός 1.2.1 (Ασαφές σύνολο)

Ένα ασαφές σύνολο \tilde{A} ορίζεται ως υποσύνολο ενός υπερσυνόλου αναφοράς X ως εξής

$$\tilde{A} = \{ (x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in X \}, \quad (1.1)$$

με συνάρτηση συμμετοχής $\mu_{\tilde{A}}$ η οποία δίνεται από

$$\mu_{\tilde{A}} : X \rightarrow [0, 1].$$

Ένα ασαφές σύνολο είναι μία συλλογή στοιχείων με ποικίλους βαθμούς συμμετοχής. Συχνά, είναι χρήσιμο να θεωρήσουμε τα στοιχεία εκείνα που έχουν τουλάχιστον έναν ελάχιστο βαθμό συμμετοχής α . Η διαδικασία αυτή καλείται α -τομή και ορίζεται ως

Ορισμός 1.2.2 (α -τομή ασαφούς συνόλου)

Για κάθε $\alpha \in [0, 1]$, ένα δοθέν ασαφές σύνολο \tilde{A} παράγει ένα συμβατικό σύνολο A_α το οποίο περιέχει όλα τα στοιχεία εκείνα του υπερσυνόλου αναφοράς X που έχουν βαθμό

συμμετοχής τουλάχιστον α στο ασαφές σύνολο \tilde{A}

$$A_\alpha = \{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}. \quad (1.2)$$

Παρατηρήσεις

- Η α -τομή ενός ασαφούς συνόλου, δεν είναι ασαφές σύνολο αλλά ένα συμβατικό σύνολο.
- $\alpha \leq \beta \Rightarrow A_\alpha \supseteq A_\beta$. Άρα το σύνολο όλων των διακριτών α -τομών οποιουδήποτε ασαφούς συνόλου σχηματίζει μια ένθετη (nested) ακολουθία συμβατικών συνόλων.
- Ένα ασαφές σύνολο χαρακτηρίζεται πλήρως από τις α -τομές του.
- Το σύνολο A_α μπορεί να έχει παρόμοια σημασία με ένα διάστημα εμπιστοσύνης, όπου

$$A_\alpha = [{}^\alpha A_L, {}^\alpha A_R]$$

με

$${}^\alpha A_L = \min \{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$$

και

$${}^\alpha A_R = \max \{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}.$$

Ορισμός 1.2.3 (Ισχυρή α -τομή)

Για κάθε $\alpha \in [0, 1]$, ένα δοθέν ασαφές σύνολο \tilde{A} παράγει ένα συμβατικό σύνολο A_α το οποίο περιέχει όλα τα στοιχεία εκείνα του υπερσυνόλου αναφοράς X που έχουν βαθμό συμμετοχής αυστηρά μεγαλύτερο του α στο ασαφές σύνολο \tilde{A}

$$A_{\alpha+} = \{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha\}. \quad (1.3)$$

Ορισμός 1.2.4 (Στήριγμα)

Το στήριγμα ενός ασαφούς συνόλου είναι η ισχυρή α -τομή του στο μηδέν και περιέχει όλα τα στοιχεία με θετικό βαθμό συμμετοχής

$$S(\tilde{A}) = A_{0+} = \{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}. \quad (1.4)$$

Ορισμός 1.2.5 (Πυρήνας)

Ο πυρήνας ή κορυφή ή επικρατούσα τιμή ενός ασαφούς συνόλου είναι η ισχυρή α -τομή του στο ένα και περιέχει όλα τα στοιχεία πλήρους βαθμού συμμετοχής

$$C(\tilde{A}) = A_1 = \{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) \geq 1\} = \{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}. \quad (1.5)$$

Ορισμός 1.2.6 (Εικόνα)

Η εικόνα ενός ασαφούς συνόλου \tilde{A} , $I(\tilde{A})$ είναι η εικόνα της συνάρτησης συμμετοχής $\mu_{\tilde{A}}$. Αποτελείται από όλες τις τιμές του α στο διάστημα $[0, 1]$ έτσι ώστε $\mu_{\tilde{A}}(x) = \alpha$ για $x \in X$

$$I(\tilde{A}) = \{\mu_{\tilde{A}}(x) | x \in X\}. \quad (1.6)$$

Όλες οι διακριτές α -τομές ασαφούς συνόλου \tilde{A} παράγονται από τις τιμές του α της εικόνας του \tilde{A} .

Ορισμός 1.2.7 (Ύψος)

Το ύψος ασαφούς συνόλου \tilde{A} , $h(\tilde{A})$, είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης συμμετοχής $\mu_{\tilde{A}}(x)$ στο υπεрсύνολο αναφοράς X

$$h(\tilde{A}) = \sup \{\mu_{\tilde{A}}(x) | x \in X\}. \quad (1.7)$$

- Αν $h(\tilde{A}) = 1$ τότε το ασαφές σύνολο \tilde{A} καλείται κανονικό.
- Αν $h(\tilde{A}) < 1$ τότε το ασαφές σύνολο \tilde{A} καλείται υποκανονικό.

Ορισμός 1.2.8 (Βάση)

Η βάση ασαφούς συνόλου \tilde{A} , $p(\tilde{A})$, είναι η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης συμμετοχής

$\mu_{\tilde{A}}(x)$ στο υπερσύνολο αναφοράς X

$$p(\tilde{A}) = \inf \{ \mu_{\tilde{A}}(x) \mid x \in X \}. \quad (1.8)$$

Ορισμός 1.2.9 (Κυρτό ασαφές σύνολο)

Ένα ασαφές σύνολο \tilde{A} καλείται κυρτό όταν για τυχόντα x, y με $x \neq y$

$$\forall t \in [0, 1] \Rightarrow \min \{ \mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A}}(y) \} \leq \mu_{\tilde{A}}[(1-t)x + ty]. \quad (1.9)$$

1.2.2 Πράξεις στα ασαφή σύνολα

Όλες οι πράξεις επί των ασαφών συνόλων ανάγονται στις πράξεις μεταξύ των συναρτήσεων συμμετοχής τους. Έστω τα ασαφή σύνολα \tilde{A} και \tilde{B} , με $\tilde{A}, \tilde{B} \subseteq X$ όπου

$$\tilde{A} = \{ (x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in X \},$$

και

$$\tilde{B} = \{ (x, \mu_{\tilde{B}}(x)) \mid x \in X \}.$$

Ορισμός 1.2.10 (Υποσύνολο και ισότητα)

Ένα ασαφές σύνολο \tilde{A} ονομάζεται υποσύνολο του ασαφούς συνόλου \tilde{B} αν η συνάρτηση συμμετοχής του \tilde{A} είναι μικρότερη ή ίση από τη συνάρτηση συμμετοχής του \tilde{B} για κάθε $x \in X$. Στην κλασική θεωρία συνόλων ένα υποσύνολο περιλαμβάνει λιγότερα στοιχεία, ενώ στην ασαφή θεωρία συνόλων ένα υποσύνολο περιλαμβάνει στοιχεία σε μικρότερο βαθμό.

$$\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \iff \forall x \in X \Rightarrow \mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x). \quad (1.10)$$

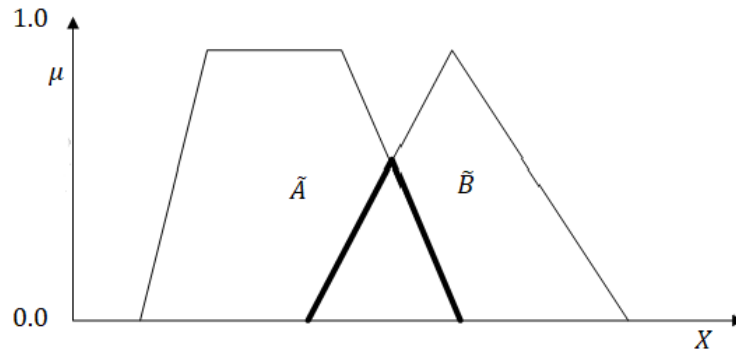
Ενώ λέμε ότι τα ασαφή σύνολα \tilde{A} και \tilde{B} είναι ίσα αν και μόνο αν οι συναρτήσεις συμμετοχής τους είναι ίσες για κάθε $x \in X$.

$$\tilde{A} = \tilde{B} \iff \forall x \in X \Rightarrow \mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x). \quad (1.11)$$

Ορισμός 1.2.11 (Τομή, ένωση και συμπλήρωμα)

Η τομή δύο ασαφών συνόλων \tilde{A} και \tilde{B} (Σχήμα 1.1) είναι επίσης ασαφές σύνολο, συμβολίζεται με $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ και ορίζεται ως το ελάχιστο των συναρτήσεων συμμετοχής τους

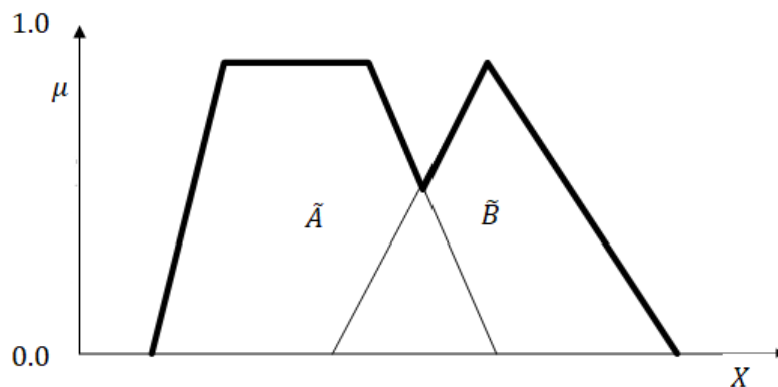
$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \min \{ \mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x) \}. \quad (1.12)$$



Σχήμα 1.1: Τομή ασαφών συνόλων \tilde{A} και \tilde{B}

Η ένωση δύο ασαφών συνόλων \tilde{A} και \tilde{B} (Σχήμα 1.2) είναι επίσης ασαφές σύνολο, συμβολίζεται με $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ και ορίζεται ως το μέγιστο των συναρτήσεων συμμετοχής τους

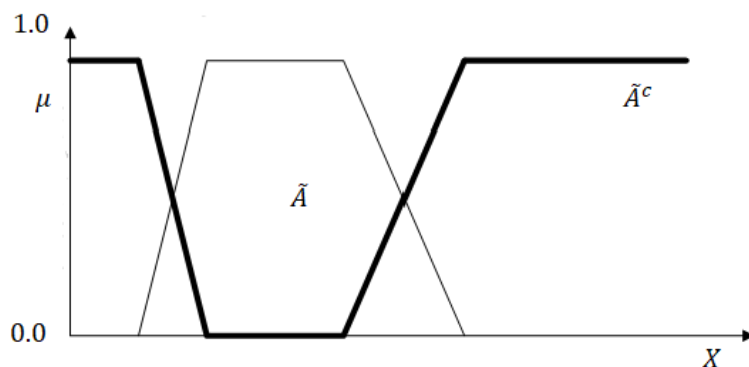
$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \max \{ \mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x) \}. \quad (1.13)$$



Σχήμα 1.2: Ένωση ασαφών συνόλων \tilde{A} και \tilde{B}

Το συμπλήρωμα ενός ασαφούς συνόλου \tilde{A} (Σχήμα 1.3) είναι επίσης ασαφές σύνολο και περιέχει κάθε στοιχείο x του υπερσυνόλου αναφοράς X του συμπληρωματικού, ως προς τη μονάδα, βαθμού συμμετοχής κάθε στοιχείου x του αρχικού συνόλου \tilde{A} . Συμβολίζεται με \tilde{A}^c και ορίζεται ως

$$\mu_{\tilde{A}^c}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x). \quad (1.14)$$



Σχήμα 1.3: Συμπλήρωμα ασαφούς συνόλου \tilde{A}

Η παραπάνω Σχέση (1.14) αναδεικνύει μία από τις σημαντικότερες διαφορές μεταξύ της κλασικής και της ασαφούς θεωρίας συνόλων. Στην κλασική θεωρία συνόλων ισχύει πάντοτε ότι ένα σύνολο με το συμπληρωμά του δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο. Στην ασαφή θεωρία συνόλων όμως είναι δυνατόν τα δύο αυτά σύνολα να ταυτίζονται.

1.3 Ασαφείς Αριθμοί

Τα πραγματικά δομικά στοιχεία της εφαρμοσμένης ασαφούς θεωρίας συνόλων, όπως αναφέρει ο Wierman (2010) είναι οι ασαφείς αριθμοί, οι οποίοι δεν είναι τίποτα άλλο από κανονικά, κυρτά και φραγμένα ασαφή σύνολα ορισμένα στο υπερσύνολο αναφοράς \mathbb{R} , το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Ορισμός 1.3.1 (Ασαφής αριθμός)

Ένας ασαφής αριθμός \tilde{A} ορίζεται ως υποσύνολο του υπερσυνόλου αναφοράς \mathbb{R} των πραγματικών αριθμών ως εξής

$$\tilde{A} = \{ (x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in \mathbb{R} \}, \quad (1.15)$$

με συνάρτηση συμμετοχής $\mu_{\tilde{A}}$ η οποία δίνεται από

$$\mu_{\tilde{A}} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1],$$

έτσι ώστε ο ασαφής αριθμός να είναι

1. Κανονικό ασαφές σύνολο, δηλαδή να υπάρχει τουλάχιστον ένα $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$.
2. Κυρτό ασαφές σύνολο, δηλαδή για κάθε $\alpha \in [0, 1]$, το σύνολο $A_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$ να είναι κυρτό.

Σημειώνεται ότι ένα σύνολο X καλείται κυρτό όταν για οποιαδήποτε δύο σημεία του συνόλου, έστω x, y με $x \neq y$, όλα τα σημεία του ευθύγραμμου τμήματος z που τα ενώνει ανήκουν μέσα στο σύνολο.

Δηλαδή,

για κάθε $x, y \in X$, με $x \neq y$ το ευθύγραμμο τμήμα $z = (1 - t)x + ty \in X$, $\forall t \in [0, 1]$.

Η κυρτότητα ασαφούς συνόλου μπορεί, εναλλακτικά, να διερευνηθεί μέσω του Ορισμού 1.2.9.

1.3.1 Τριγωνικοί ασαφείς αριθμοί

Οι τριγωνικοί ασαφείς αριθμοί χρησιμοποιούνται ευρέως, σε αντίθεση με τους υπόλοιπους ασαφείς αριθμούς, λόγω των γεγονότων ότι είναι εύκολοι στον αριθμητικό χειρισμό και η ερμηνεία τους πραγματοποιείται ενστικτωδώς. Γίνεται ιδιαίτερη μνεία σε ξεχωριστή υποενότητα σε αυτούς διότι κατέχουν σημαίνοντα ρόλο στο παρόν πόνημα.

Ορισμός 1.3.2 (Τριγωνικός ασαφής αριθμός I)

Ένας τριγωνικός ασαφής αριθμός (triangular fuzzy number), Tr , διακρίνεται από τη συνάρτηση συμμετοχής του, η οποία δίνεται από δύο ευθύγραμμα τμήματα. Το πρώτο ανέρχεται από το σημείο $(a, 0)$ στο σημείο $(m, 1)$ και το δεύτερο κατέρχεται από το σημείο $(m, 1)$ στο σημείο $(b, 0)$. Το πεδίο ορισμού του είναι το κλειστό διάστημα $[a, b]$. Ένας τριγωνικός ασαφής αριθμός χαρακτηρίζεται από τη διατεταγμένη τριάδα (a, m, b) με $a \leq m \leq b$ και η συνάρτηση συμμετοχής του είναι

$$\mu_{Tr[a,m,b]}(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{m-a}, & a \leq x \leq m \\ \frac{x-b}{m-b}, & m < x \leq b \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases} \quad (1.16)$$

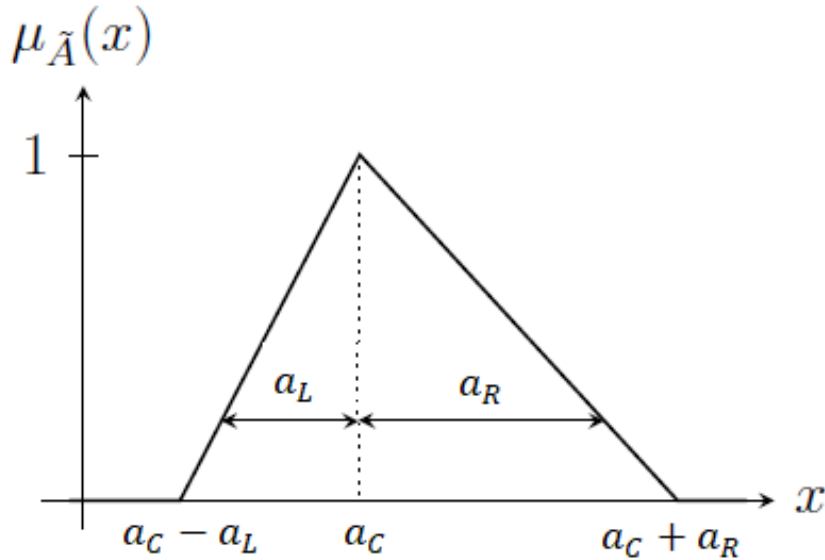
Ακολουθεί ένας δεύτερος ορισμός του τριγωνικού ασαφούς αριθμού, ο οποίος είναι περισσότερο εύχρηστος στον ορισμό των πράξεων μεταξύ τριγωνικών ασαφών αριθμών καθώς επίσης και στις μεθόδους που θα οριστούν και θα χρησιμοποιηθούν στα επόμενα κεφάλαια.

Ορισμός 1.3.3 (Τριγωνικός ασαφής αριθμός II)

Ένας τριγωνικός ασαφής αριθμός χαρακτηρίζεται από τη συνάρτηση συμμετοχής του $\mu_{\tilde{A}}$ η οποία δίνεται ως

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x-(a_C-a_L)}{a_L}, & a_C - a_L \leq x \leq a_C \\ \frac{(a_C+a_R)-x}{a_R}, & a_C < x \leq a_C + a_R \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (1.17)$$

για κάθε $a_C, x, \in \mathbb{R}$ και $a_L, a_R > 0$, όπου a_C είναι το κέντρο, a_L, a_R η αριστερή και αντίστοιχα η δεξιά απόκλιση (spread) του τριγωνικού ασαφούς αριθμού.



Σχήμα 1.4: Τριγωνικός ασαφής αριθμός $\tilde{A} = (a_C, a_L, a_R)$

Παρατηρήσεις

- Εφόσον ο ασαφής αριθμός είναι ένα ασαφές υποσύνολο \tilde{A} επί των πραγματικών αριθμών, ένας τριγωνικός ασαφής αριθμός μπορεί να γραφεί ως $\tilde{A} = (a_C, a_L, a_R)$ με $a_C \in \mathbb{R}$ και $a_L, a_R > 0$.
- Στην περίπτωση που $a_L = a_R = 0$ ο τριγωνικός ασαφής αριθμός $\tilde{A} = (a_C, 0, 0)$ είναι απλά ένας συμβατικός/κλασικός (crisp) αριθμός.
- Αν $a_L = 0$ (αντίστοιχα $a_R = 0$) ενώ $a_R > 0$ ($a_L > 0$) ο τριγωνικός ασαφής αριθμός \tilde{A} καλείται από την αριστερή μεριά (δεξιά μεριά) εκφυλισμένος.
- Ένας τριγωνικός ασαφής αριθμός $\tilde{A} = (a_C, a_L, a_R)$ ονομάζεται μη-αρνητικός αν και μόνο αν $a_C \geq a_L$ και θετικός αν και μόνο αν $a_C > a_L$.
- Από στατιστικής οπτικής, η συνάρτηση συμμετοχής $\mu_{\tilde{X}}$ διαδραματίζει παρόμοιο ρόλο με τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μιας τυχαίας μεταβλητής X .

- Συγκρίνοντας τους δύο ορισμούς, εύκολα διαπιστώνει κανείς την ισοδυναμία τους. Αν θέσουμε στον Ορισμό 1.3.2 όπου $m = a_C$, $a = a_C - a_L$, $b = a_C + a_R$, αναγόμεστε στον Ορισμό 1.3.3.

- Εκτός από τη συνάρτηση συμμετοχής, ένας (τριγωνικός) ασαφής αριθμός μπορεί εναλλακτικά να χαρακτηριστεί και από τις α -τομές του οι οποίες, υπό μορφή διαστημάτων, υπολογίζονται ως

$$[{}^\alpha A_L, {}^\alpha A_R] = [a_C - a_L(1 - \alpha), a_C + a_R(1 - \alpha)].$$

- Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση f είναι αύξουσα τότε

$$f([{}^\alpha A_L, {}^\alpha A_R]) = [f({}^\alpha A_L), f({}^\alpha A_R)],$$

ενώ αν είναι φθίνουσα

$$f([{}^\alpha A_L, {}^\alpha A_R]) = [f({}^\alpha A_R), f({}^\alpha A_L)].$$

Ακολούθως ορίζονται οι αλγεβρικές πράξεις μεταξύ των τριγωνικών ασαφών αριθμών.

Ορισμός 1.3.4 (Ασαφής αριθμητική τριγωνικών αριθμών)

Έστω $\tilde{A} = (a_C, a_L, a_R)$ και $\tilde{B} = (b_C, b_L, b_R)$ δύο τριγωνικοί ασαφείς αριθμοί. Το (αλγεβρικό) άθροισμα, διαφορά, γινόμενο και αντίστροφος επί του \mathbb{R} ορίζονται ως

$$\begin{aligned} \tilde{A} \oplus \tilde{B} &= (a_C, a_L, a_R) \oplus (b_C, b_L, b_R) \\ &= (a_C + b_C, a_L + b_L, a_R + b_R), \end{aligned} \tag{1.18}$$

$$\begin{aligned} \tilde{A} \ominus \tilde{B} &= (a_C, a_L, a_R) \ominus (b_C, b_L, b_R) \\ &= (a_C - b_C, a_L + b_R, a_R + b_L), \end{aligned} \tag{1.19}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{A} \otimes \tilde{B} &= (a_C, a_L, a_R) \otimes (b_C, b_L, b_R) \\
&\approx (a_C \cdot b_C, \\
&\quad a_C \cdot b_L + b_C \cdot a_L - a_L \cdot b_L, \\
&\quad a_C \cdot b_R + b_C \cdot a_R + a_R \cdot b_R),
\end{aligned} \tag{1.20}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{A}^{-1} &= \frac{1}{\tilde{A}} = \frac{1}{(a_C, a_L, a_R)} \\
&= \left(\frac{1}{a_C}, \frac{a_R}{a_C(a_C + a_R)}, \frac{a_L}{a_C(a_C - a_L)} \right).
\end{aligned} \tag{1.21}$$

Παρατηρήσεις

- Ο Ορισμός 1.3.4 ισχύει μόνο για θετικούς τριγωνικούς ασαφείς αριθμούς ($a_C > a_L$).
- Ο πολλαπλασιασμός δεν είναι μία κλειστή πράξη, όπως ορίστηκε και πιο πάνω. Έχοντας γνώση του γεγονότος εντούτοις, από εδώ και πέρα θα γράφουμε ίσον " = " αντί της προσέγγισης " \approx ".
- Με τη βοήθεια των Σχέσεων (1.20) και (1.21) υπολογίζεται και το ηλίκο $\tilde{A} \otimes \tilde{B} = \tilde{A} \otimes \tilde{B}^{-1}$ δύο δοθέντων τριγωνικών ασαφών αριθμών \tilde{A} και \tilde{B} .

Οι προαναφερθείσες αλγεβρικές πράξεις του Ορισμού 1.3.4 γίνονται περισσότερο κατανοητές με το ακόλουθο παράδειγμα.

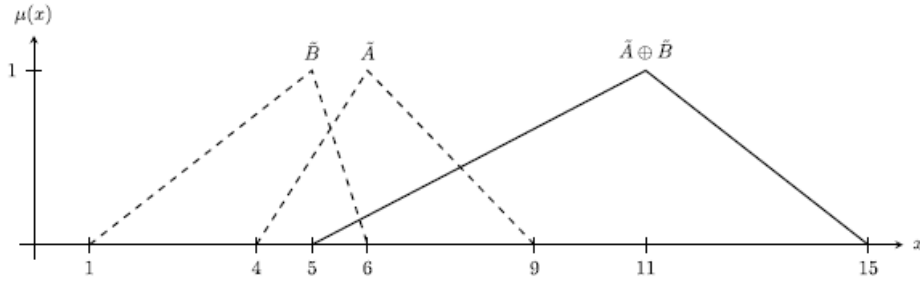
Παράδειγμα 1

Εστω \tilde{A} και \tilde{B} δύο θετικοί τριγωνικοί ασαφείς αριθμοί, με $\tilde{A} = (6, 2, 3)$ και $\tilde{B} = (5, 4, 1)$

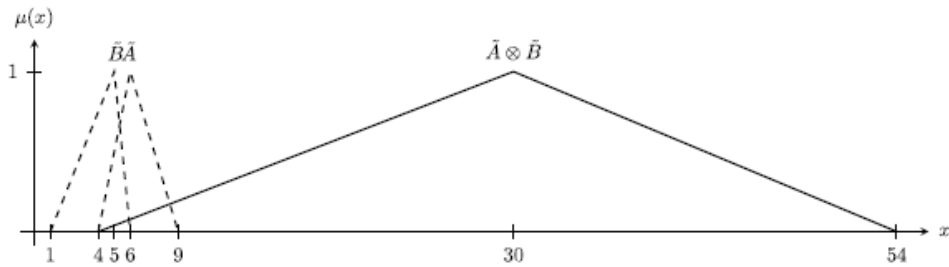
$$\tilde{A} \oplus \tilde{B} = (6, 2, 3) \oplus (5, 4, 1) = (11, 6, 4),$$

$$\tilde{A} \otimes \tilde{B} = (6, 2, 3) \otimes (5, 4, 1) = (30, 26, 24),$$

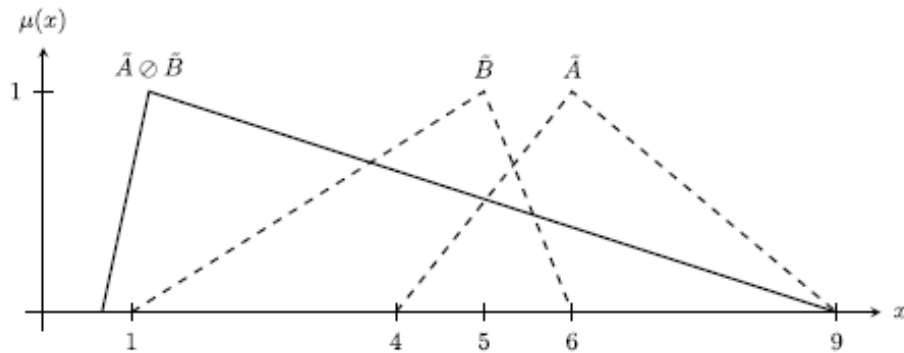
$$\tilde{A} \otimes \tilde{B}^{-1} = (6, 2, 3) \otimes (5, 4, 1) = (6, 2, 3) \otimes \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{30}, \frac{4}{5} \right) = (1.2, 0.5\bar{3}, 7.8).$$



Σχήμα 1.5: Ασαφές άθροισμα των τριγωνικών αριθμών $\tilde{A} = (6, 2, 3)$ και $\tilde{B} = (5, 4, 1)$



Σχήμα 1.6: Ασαφές γινόμενο των τριγωνικών αριθμών $\tilde{A} = (6, 2, 3)$ και $\tilde{B} = (5, 4, 1)$



Σχήμα 1.7: Ασαφές πηλίκο των τριγωνικών αριθμών $\tilde{A} = (6, 2, 3)$ και $\tilde{B} = (5, 4, 1)$

Ορισμός 1.3.5 (Μέση τιμή ασαφούς τριγωνικού αριθμού)

Έστω $\tilde{A} = (a_C, a_L, a_R)$ ασαφής τριγωνικός αριθμός και $0 \leq r_f \leq 1$. Η μέση τιμή του \tilde{A} συμβολίζεται με $E_{r_f}(\tilde{A})$ και δίνεται από τον τύπο

$$E_{r_f}(\tilde{A}) = a_C - \frac{1 - r_f}{2} a_L + \frac{r_f}{2} a_R. \tag{1.22}$$

Ο συμβολισμός $E_{r_f}(\tilde{A}|\cdot)$ δηλώνει τη δεσμευμένη μέση τιμή, δοθείσης εκ προτέρων πληροφορίας. Αν η πληροφορία δίνεται ως ένα σύνολο ασαφών τριγωνικών αριθμών $\{\tilde{B}, \tilde{C}, \dots\}$, οι ασαφείς αριθμοί θα θεωρούνται συμβατικοί, δηλαδή $\{(b_C, 0, 0), (c_C, 0, 0), \dots\}$.

Παρατηρήσεις

- Η r_f καλείται «παράμετρος κινδύνου λήψης απόφασης».
- Στη δεσμευμένη μέση τιμή, υποθέτουμε ότι δεν υφίσταται περαιτέρω αβεβαιότητα, με την έννοια της ασάφειας σχετικά με τη δοθείσα πληροφορία.
- Η επιλογή ενός $r_f \geq 0.5$ σημαίνει αποστροφή του κινδύνου.
- Αν το \tilde{A} είναι συμβατικός αριθμός τότε η μέση τιμή του δίνεται ως $E_{r_f}(\tilde{A}) = a_C$, η οποία είναι ισοδύναμη με τη στοχαστική εκδοχή της και είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του r_f .
- Η μέση τιμή, με τη βοήθεια των διαστημάτων των α -τομών, εναλλακτικά μπορεί να γραφεί ως $E_{r_f}(\tilde{A}) = (1 - r_f) \int_0^1 \alpha A_L d\alpha + r_f \int_0^1 \alpha A_R d\alpha$.

Ορισμός 1.3.6 (Αβεβαιότητα ασαφούς τριγωνικού αριθμού)

Έστω $\tilde{A} = (a_C, a_L, a_R)$ ασαφής τριγωνικός αριθμός και $K \in \mathbb{R}^+$. Η αβεβαιότητα του \tilde{A} συμβολίζεται με $Unc_K(\tilde{A})$ και δίνεται από τον τύπο

$$Unc_K(\tilde{A}) = \frac{1}{2}K (a_L + a_R). \quad (1.23)$$

Ο συμβολισμός $Unc_K(\tilde{A}|\cdot)$ δηλώνει την αβεβαιότητα, δοθείσης εκ προτέρων πληροφορίας. Αν η πληροφορία δίνεται ως ένα σύνολο ασαφών τριγωνικών αριθμών $\{\tilde{B}, \tilde{C}, \dots\}$, οι ασαφείς αριθμοί θα θεωρούνται συμβατικοί, δηλαδή $\{(b_C, 0, 0), (c_C, 0, 0), \dots\}$.

Παρατηρήσεις

- Η αβεβαιότητα είναι, όπως αναμενόταν, ανεξάρτητη από το κέντρο a_C του ασαφούς αριθμού και εξαρτάται μόνο από το στήριγμα του \tilde{A} , $S(\tilde{A})$.

- Η αβεβαιότητα ενός τριγωνικού ασαφούς αριθμού \tilde{A} μπορεί να ερμηνευθεί ως η (σταθμισμένη) περιοχή μεταξύ του άξονα των x και της συνάρτησης συμμετοχής $\mu_{\tilde{A}}$. Μεγαλύτερες τιμές της αβεβαιότητας $Unc_K(\tilde{A})$ προέρχονται από μεγαλύτερες περιοχές μεταξύ του άξονα των x και της συνάρτησης συμμετοχής. Αναλόγως, όσο μικρότερη η περιοχή τόσο λιγότερο αβέβαιος είναι ο τριγωνικός ασαφής αριθμός.
- Η δεσμευμένη αβεβαιότητα είναι ανάλογη με τη δεσμευμένη μέση τιμή όπου δεν υπάρχει περισσότερη αβεβαιότητα για τη δοθείσα πληροφορία με την έννοια της ασάφειας.

1.3.2 Άλλα είδη ασαφών αριθμών

Ορισμός 1.3.7 (Τραπεζοειδής ασαφής αριθμός)

Ένας τραπεζοειδής ασαφής αριθμός (trapezoid fuzzy number), Tp , μπορεί να χαρακτηριστεί από μία διατεταγμένη τετράδα (a, l, r, b) με $a \leq l \leq r \leq b$ και η συνάρτηση συμμετοχής συνίσταται από τρία ευθύγραμμο τμήματα. Το πρώτο ανέρχεται από το σημείο $(a, 0)$ στο σημείο $(l, 1)$, το δεύτερο είναι μία οριζόντια γραμμή εκτεινόμενη από το σημείο $(l, 1)$ μέχρι το σημείο $(r, 1)$ και το τρίτο ευθύγραμμο τμήμα κατέρχεται από το σημείο $(r, 1)$ στο σημείο $(b, 0)$. Η συνάρτηση συμμετοχής τραπεζοειδούς ασαφούς αριθμού ορίζεται ως

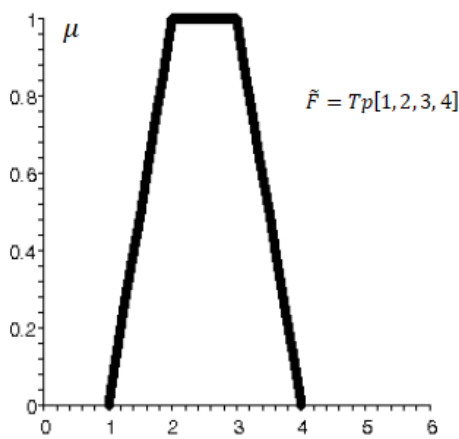
$$\mu_{Tp[a,l,r,b]}(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{l-a}, & a \leq x \leq l \\ 1, & l < x < r \\ \frac{x-b}{r-b}, & r \leq x \leq b \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases} \quad (1.24)$$

Ορισμός 1.3.8 (Μερικώς τετραγωνικός ασαφής αριθμός)

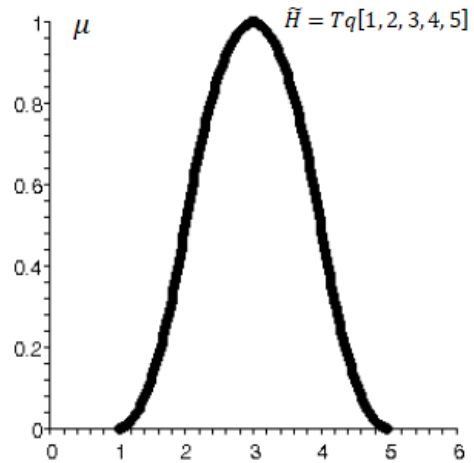
Ένας μερικώς τετραγωνικός ασαφής αριθμός (piecewise quadratic fuzzy number), Tq , συνίσταται από τέσσερα τετραγωνικά μέρη και παραμετροποιείται από πέντε τιμές a, l, m, b, r . Οι τιμές a και b είναι το αριστερό και το δεξιό όριο του στηρίγματος αντίστοιχα. Το m είναι ο μέσος, ο πυρήνας όπου η συνάρτηση συμμετοχής του ασαφούς αριθμού λαμβάνει

την τιμή ένα. Τέλος, οι τιμές l και r είναι το αριστερό και δεξιό σημείο καμπής αντίστοιχα. Αν ο $Tq[a, l, m, r, b]$ είναι ένας συνεχής μερικώς τετραγωνικός ασαφής αριθμός, τότε η συνάρτηση συμμετοχής του ορίζεται ως

$$\mu_{Tq[a,l,m,r,b]}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{x-a}{l-a} \right)^2, & a \leq x \leq l \\ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x-m}{l-m} \right)^2, & l < x \leq m \\ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x-m}{r-m} \right)^2, & m < x \leq r \\ \frac{1}{2} \left(\frac{x-b}{r-b} \right)^2, & r < x \leq b \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases} \quad (1.25)$$



Σχήμα 1.8: Τραπεζοειδής ασαφής αριθμός \tilde{F}



Σχήμα 1.9: Μερικώς τετραγωνικός ασαφής αριθμός \tilde{H}

Ορισμός 1.3.9 (Γκαουσιανός ασαφής αριθμός)

Ένας γκαουσιανός (Gaussian) ή αλλιώς ένας καμπανοειδής (bell shaped) ασαφής αριθμός, Tb , έχει ως παραμέτρους τον μέσο m , την απόκλιση (spread) s , και την παράμετρο κλίμακας γ η οποία προσαρμόζει το ύψος. Η συνάρτηση συμμετοχής του ορίζεται ως

$$\mu_{Tb[m,s,\gamma]}(x) = \gamma e^{-(x-m)^2/s^2}. \quad (1.26)$$

Ορισμός 1.3.10 (Παλμοειδής ασαφής αριθμός)

Ένας παλμοειδής (impulse) ή αλλιώς σημειακός (point) ασαφής αριθμός, Ti , μπορεί να θεωρηθεί ως εκφυλισμένη περίπτωση ενός τριγωνικού (ή οποιουδήποτε άλλου είδους) ασαφούς αριθμού, εφόσον $Ti [m] = Tr [m, m, m]$. Η συνάρτηση συμμετοχής του ορίζεται ως

$$\mu_{Ti[m]}(x) = \begin{cases} 1, & x = m \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases} \quad (1.27)$$

Ορισμός 1.3.11 (L-R ασαφής αριθμός)

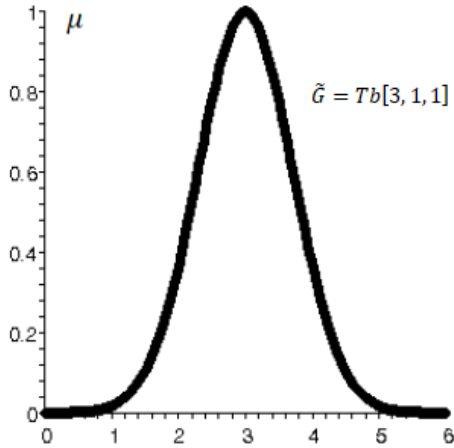
Ένας L-R ασαφής αριθμός, Tlr , έχει μοναδική κορυφή στο σημείο m του υπερσυνόλου αναφοράς \mathbb{R} , γεγονός που εξασφαλίζει ότι αν $\mu_{Tlr}(x) = 1$ τότε $x = m$. Μπορεί να περιγραφεί από δύο συναρτήσεις αναφοράς. Την αριστερή συνάρτηση αναφοράς, ${}^L F$ και την αντίστοιχη δεξιά, ${}^R F$. Μία συνάρτηση αναφοράς (είτε η ${}^L F$ είτε η ${}^R F$) είναι αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0)$ και φθίνουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$ έτσι ώστε ${}^L F(0) = {}^R F(0) = 1$. Σύμφωνα με τις αναφερθείσες παραδοχές, ένας L-R ασαφής αριθμός μπορεί να περιγραφεί με όρους διατεταγμένης τριάδας

$$Tlr = [(m, u, v), \quad {}^L F, \quad {}^R F],$$

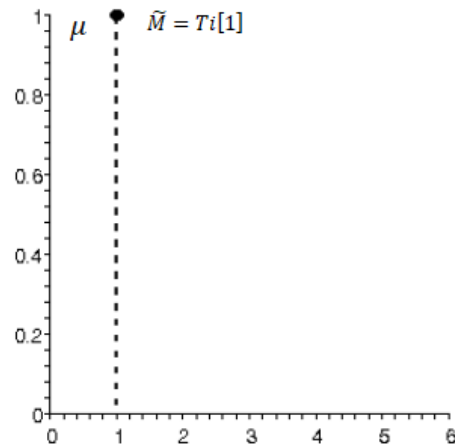
όπου ${}^L F$ και ${}^R F$ είναι οι συναρτήσεις αναφοράς, m το κέντρο του ασαφούς αριθμού και u, v είναι η απόκλιση (spread) της αριστερής και της δεξιάς συνάρτησης αναφοράς αντίστοιχα. Η συνάρτηση συμμετοχής του L-R ασαφούς αριθμού ορίζεται ως

$$\mu_{Tlr}(x) = \begin{cases} {}^L F\left(\frac{m-x}{u}\right), & x < m \\ {}^R F\left(\frac{x-m}{v}\right), & m \leq x. \end{cases} \quad (1.28)$$

Σχεδόν όλοι οι ασαφείς αριθμοί μπορούν να εκφραστούν ως L-R ασαφείς αριθμοί με κατάλληλη επιλογή των συναρτήσεων αναφοράς ${}^L F$ και ${}^R F$ καθώς επίσης και των παραμέτρων: της κορυφής m , της αριστερής απόκλισης u και της δεξιάς απόκλισης v .



Σχήμα 1.10: Γκαουσιανός
ασαφής αριθμός \tilde{G}



Σχήμα 1.11: Παλμοειδής
ασαφής αριθμός \tilde{M}

Παρατήρηση

Κλείνοντας την ενότητα των ασαφών αριθμών, αξίζει να σημειωθεί ότι μπορούν να τελεστούν αλγεβρικές πράξεις μεταξύ οποιωνδήποτε ασαφών αριθμών του ίδιου είδους με τη βοήθεια της αριθμητικής διαστημάτων.

Η μεθοδολογία είναι η εξής:

1. Αναγνώριση των αντίστοιχων διαστημάτων.
2. Εκτέλεση των πράξεων σύμφωνα με τον ορισμό που ακολουθεί.
3. Εξαγωγή του τμήματος της συνάρτησης συμμετοχής του νέου ασαφούς αριθμού από το αντίστοιχο διάστημα.

Ορισμός 1.3.12 (Αριθμητική διαστημάτων)

Έστω δύο διαστήματα, $[a_L, a_U]$ και $[b_L, b_U]$, με $a_L, a_U, b_L, b_U \in \mathbb{R}$. Το άθροισμα και το γινόμενο δύο διαστημάτων, καθώς και το αντίθετο και το αντίστροφο ενός διαστήματος ορίζονται ως

$$[a_L, a_U] \oplus [b_L, b_U] = [a_L + b_L, a_U + b_U],$$

$$[a_L, a_U] \otimes [b_L, b_U] = [a_L \cdot b_L, a_U \cdot b_U],$$

$$\ominus [a_L, a_U] = [-a_U, -a_L],$$

$$[a_L, a_U]^{-1} = [a_U^{-1}, a_L^{-1}].$$

Με τη βοήθεια των δύο τελευταίων, (του αντίθετου και του αντίστροφου) ορίζονται επίσης η διαφορά και το πηλίκο δύο διαστημάτων. Στην περίπτωση του πηλίκου, όταν υπάρχουν δύο ή περισσότερα διαστήματα πριν τον πολλαπλασιασμό με το αντίστοιχο αντίστροφο διάστημα, αναδιατάσσουμε τα διαστήματα σε αύξουσα σειρά.

Τα παραπάνω γίνονται περισσότερο κατανοητά με τη βοήθεια ενός παραδείγματος. Θα χρησιμοποιηθούν οι ασαφείς αριθμοί του Παραδείγματος 1 για ευκολότερη σύγκριση των αποτελεσμάτων.

Παράδειγμα 2

Έστω \tilde{A} και \tilde{B} δύο θετικοί τριγωνικοί ασαφείς αριθμοί, με $\tilde{A} = (6, 2, 3)$ και $\tilde{B} = (5, 4, 1)$.

Με τη μορφή συναρτήσεων συμμετοχής ο \tilde{A} μπορεί να γραφεί ως

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x-4}{2}, & 4 \leq x \leq 6 \\ \frac{9-x}{3}, & 6 < x \leq 9 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

και αντίστοιχα ο \tilde{B} μπορεί να γραφεί ως

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{4}, & 1 \leq x \leq 5 \\ 6-x, & 5 < x \leq 6 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Άρα

$$\tilde{F} = \tilde{A} \oplus \tilde{B} \Rightarrow \begin{cases} [4, 6] \oplus [1, 5] \\ [6, 9] \oplus [5, 6] \end{cases} = \begin{cases} [5, 11] \\ [11, 15] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5 = f_C - f_L \\ 11 = f_C \\ 15 = f_C + f_R \end{cases} \Rightarrow \tilde{F} = (f_C, f_L, f_R) = (11, 6, 4),$$

$$\tilde{G} = \tilde{A} \otimes \tilde{B} \Rightarrow \begin{cases} [4, 6] \otimes [1, 5] \\ [6, 9] \otimes [5, 6] \end{cases} = \begin{cases} [4, 30] \\ [30, 54] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4 = g_C - g_L \\ 30 = g_C \\ 54 = g_C + g_R \end{cases} \Rightarrow \tilde{G} = (g_C, g_L, g_R) = (30, 26, 24),$$

$$\tilde{H} = \tilde{A} \odot \tilde{B} \Rightarrow \begin{cases} [4, 6] \otimes [\frac{1}{6}, \frac{1}{5}] \\ [6, 9] \otimes [\frac{1}{5}, 1] \end{cases} = \begin{cases} [\frac{4}{6}, \frac{6}{5}] \\ [\frac{6}{5}, 9] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{4}{6} = h_C - h_L \\ \frac{6}{5} = h_C \\ 9 = h_C + h_R \end{cases} \Rightarrow \tilde{H} = (h_C, h_L, h_R) = (1.2, 0.5\bar{3}, 7.8).$$

1.4 Σταθμισμένη Ασαφής Αριθμητική

Ποικίλες μέθοδοι και εφαρμογές που χρησιμοποιούν ασαφείς αριθμούς, όπως για παράδειγμα η ασαφής παλινδρόμηση, χειρίζονται ταυτόχρονα μεγάλο όγκο δεδομένων, για τον οποίο απαιτείται σημαντικό πλήθος αριθμητικών πράξεων. Όταν γίνεται χρήση συμβατικής ασαφούς αριθμητικής που εμπεριέχει μεγάλη ασάφεια και πλήθος αριθμητικών πράξεων, οι προστιθέμενες αποκλίσεις (spreads) των ασαφών αριθμών θα μπορούσαν να οδηγήσουν σε έναν μη-ρεαλιστικά μεγάλο αριθμό. Προβλήματα επίσης παρουσιάζονται και στη συμβατική ασαφή αφαίρεση και διαίρεση στην περίπτωση του μεγάλου όγκου δεδομένων. Για να ξεπεραστούν τα προβλήματα που ανακύπτουν από τη συμβατική ασαφή αριθμητική, ορίζεται η σταθμισμένη ασαφής αριθμητική (weighted fuzzy arithmetic).

Η σταθμισμένη ασαφής αριθμητική, σύμφωνα με τον Chang (1998), ορίζει την αριθμητική πράξη μεταξύ δύο ασαφών αριθμών ως πράξη δύο αντίστοιχων τιμών σε κάθε ασαφές σύνολο στο ίδιο επίπεδο συμμετοχής, ολοκληρώνοντας την πράξη για κάθε επίπεδο συμμετοχής του ασαφούς αριθμού, σταθμίζοντας ταυτόχρονα με αυτό και διαιρώντας με το ολοκλήρωμα της συνάρτησης συμμετοχής. Η σταθμισμένη ασαφής αριθμητική κάνει χρήση της έννοιας της απο-ασαφοποίησης για να μετατρέψει την πράξη ασαφών αριθμών σε συμβατικό αριθμό, ο οποίος μπορεί να ερμηνευθεί ως η μέση τιμή μιας ασαφούς αριθμητικής πράξης. Αντιθέτως, η συμβατική ασαφής αριθμητική μετασχηματίζει όλες τις πιθανές τιμές μιας ασαφούς αριθμητικής πράξης σε ένα ασαφές σύνολο (ασαφή αριθμό).

1.4.1 Σταθμισμένη ασαφής αριθμητική τριγωνικών αριθμών

Στην παρούσα υποενότητα θα οριστούν οι πράξεις μεταξύ μη-συμμετρικών τριγωνικών ασαφών αριθμών σύμφωνα με τις αρχές της σταθμισμένης ασαφούς αριθμητικής.

Έστω $\tilde{A} = (a_C, a_L, a_R)$ και $\tilde{B} = (b_C, b_L, b_R)$ δύο μη-συμμετρικοί τριγωνικοί ασαφείς αριθμοί. Όπου a_C είναι το κέντρο, a_L η αριστερή απόκλιση και a_R η δεξιά απόκλιση του \tilde{A} . Ομοίως για τον ασαφή αριθμό \tilde{B} .

Σε επίπεδο συμμετοχής μ , τα διαστήματα των \tilde{A} και \tilde{B} εκφράζονται ως

$${}^{\mu}\tilde{A} = [{}^{\mu}A_L, {}^{\mu}A_R] = [a_C - (1 - \mu)a_L, a_C + (1 - \mu)a_R] \quad (1.29)$$

και

$${}^{\mu}\tilde{B} = [{}^{\mu}B_L, {}^{\mu}B_R] = [b_C - (1 - \mu)b_L, b_C + (1 - \mu)b_R]. \quad (1.30)$$

Τα παραπάνω διαστήματα δεν είναι τίποτα άλλο από τις α -τομές υπό μορφή διαστημάτων.

Ορισμός 1.4.1 (Σταθμισμένο ασαφές άθροισμα)

Το σταθμισμένο ασαφές άθροισμα των \tilde{A} και \tilde{B} ορίζεται ως

$$\tilde{A} \oplus \tilde{B} = \frac{\left[\int_{\mu} ({}^{\mu}A_L + {}^{\mu}B_L) \mu d\mu \right]_L + \left[\int_{\mu} ({}^{\mu}A_R + {}^{\mu}B_R) \mu d\mu \right]_R}{\int \mu d\mu}, \quad (1.31)$$

όπου ο παρονομαστής υπολογίζεται ως

$$\int \mu d\mu = 2 \int_0^1 \mu d\mu = 2 \left[\frac{1}{2} \mu^2 \right]_0^1 = 1. \quad (1.32)$$

Αντικαθιστώντας τα ${}^{\mu}A_L, {}^{\mu}A_R, {}^{\mu}B_L$, και ${}^{\mu}B_R$ των Σχέσεων (1.29), (1.30) στη Σχέση (1.31) τα δύο ολοκληρώματα του αριθμητή υπολογίζονται ως εξής

$$\begin{aligned} \left[\int_{\mu} ({}^{\mu}A_L + {}^{\mu}B_L) \mu d\mu \right]_L &= \int_0^1 \left\{ [a_C - (1 - \mu)a_L] + [b_C - (1 - \mu)b_L] \right\} \mu d\mu \\ &= \int_0^1 \left[(a_C + b_C) - (1 - \mu)(a_L + b_L) \right] \mu d\mu \\ &= \frac{1}{2} (a_C + b_C) - \frac{1}{6} (a_L + b_L), \end{aligned} \quad (1.33)$$

$$\begin{aligned}
\left[\int_{\mu} ({}^{\mu}A_R + {}^{\mu}B_R) \mu d\mu \right]_R &= \int_0^1 \left\{ [a_C + (1 - \mu) a_R] + [b_C + (1 - \mu) b_R] \right\} \mu d\mu \\
&= \int_0^1 \left[(a_C + b_C) + (1 - \mu) (a_L + a_R) \right] \mu d\mu \\
&= \frac{1}{2} (a_C + b_C) + \frac{1}{6} (a_L + b_L).
\end{aligned} \tag{1.34}$$

Το άθροισμα των Σχέσεων (1.33) και (1.34) δίνει ως αποτέλεσμα

$$\tilde{A} \oplus \tilde{B} = (a_C + b_C) + \frac{1}{6} [(a_R + b_R) - (a_L + b_L)]. \tag{1.35}$$

Για συμμετρικούς τριγωνικούς ασαφείς αριθμούς (όπου $a_L = a_R = a_S$ και $b_L = b_R = b_S$)

$$\tilde{A} \oplus \tilde{B} = (a_C + b_C).$$

Ορισμός 1.4.2 (Σταθμισμένη ασαφής αφαίρεση)

Η σταθμισμένη ασαφής αφαίρεση των \tilde{A} και \tilde{B} ορίζεται ως

$$\tilde{A} \ominus \tilde{B} = \frac{\left[\int_{\mu} ({}^{\mu}A_L - {}^{\mu}B_L) \mu d\mu \right]_L + \left[\int_{\mu} ({}^{\mu}A_R - {}^{\mu}B_R) \mu d\mu \right]_R}{\int \mu d\mu}. \tag{1.36}$$

Με όμοιο τρόπο απόδειξης, όπως στην περίπτωση του σταθμισμένου ασαφούς αθροίσματος καταλήγουμε στη Σχέση

$$\tilde{A} \ominus \tilde{B} = (a_C - b_C) + \frac{1}{6} [(a_R - b_R) - (a_L - b_L)]. \tag{1.37}$$

Για συμμετρικούς τριγωνικούς ασαφείς αριθμούς (όπου $a_L = a_R = a_S$ και $b_L = b_R = b_S$)

$$\tilde{A} \ominus \tilde{B} = (a_C - b_C).$$

Ορισμός 1.4.3 (Σταθμισμένο ασαφές γινόμενο)

Το σταθμισμένο ασαφές γινόμενο των \tilde{A} και \tilde{B} ορίζεται ως

$$\tilde{A} \otimes \tilde{B} = \frac{\left[\int_{\mu} ({}^{\mu}A_L \cdot {}^{\mu}B_L) \mu d\mu \right]_L + \left[\int_{\mu} ({}^{\mu}A_R \cdot {}^{\mu}B_R) \mu d\mu \right]_R}{\int \mu d\mu}. \quad (1.38)$$

Με όμοια αποδεικτική διεργασία, όπως στις περιπτώσεις του σταθμισμένου ασαφούς αθροίσματος και της σταθμισμένης ασαφούς αφαίρεσης καταλήγουμε στη Σχέση

$$\begin{aligned} \tilde{A} \otimes \tilde{B} &= (a_C \cdot b_C) \\ &+ \frac{1}{6} [(b_C \cdot a_R - a_C \cdot b_R) - (b_C \cdot a_L - a_C \cdot b_L)] \\ &+ \frac{1}{12} (a_L \cdot b_L + a_R \cdot b_R). \end{aligned} \quad (1.39)$$

Για συμμετρικούς τριγωνικούς ασαφείς αριθμούς (όπου $a_L = a_R = a_S$ και $b_L = b_R = b_S$)

$$\tilde{A} \otimes \tilde{B} = (a_C \cdot b_C) + \frac{1}{6} (a_S^2 + b_S^2).$$

Ορισμός 1.4.4 (Σταθμισμένο ασαφές πηλίκο)

Το σταθμισμένο ασαφές πηλίκο των \tilde{A} και \tilde{B} ορίζεται ως

$$\begin{aligned} \tilde{A} \oslash \tilde{B} &= \int_{\mu} \frac{{}^{\mu}A_L}{{}^{\mu}B_L} \mu d\mu + \int_{\mu} \frac{{}^{\mu}A_R}{{}^{\mu}B_R} \mu d\mu \\ &= \int_0^1 \frac{[a_C - (1 - \mu) a_L]}{[b_C - (1 - \mu) b_L]} \mu d\mu + \int_0^1 \frac{[a_C + (1 - \mu) a_R]}{[b_C + (1 - \mu) b_R]} \mu d\mu, \end{aligned} \quad (1.40)$$

όπου $0 \notin \tilde{B}$.

Παρατήρηση

Σε όλους του παραπάνω ορισμούς, αν και οι δύο ασαφείς αριθμοί αντικατασταθούν από συμβατικούς αριθμούς, τα αποτελέσματα της σταθμισμένης ασαφούς αριθμητικής είναι ακριβώς ίδια με αυτά της συνήθους αριθμητικής. Αυτή η ιδιότητα ονομάζεται περιοριστική συμπεριφορά της σταθμισμένης ασαφούς αριθμητικής.

Κεφάλαιο 2

Παλινδρόμηση

2.1 Εισαγωγή

Στη στατιστική μοντελοποίηση η ανάλυση παλινδρόμησης περιλαμβάνει ένα σύνολο στατιστικών διαδικασιών για την εκτίμηση σχέσεων μεταξύ μεταβλητών. Περιλαμβάνει πολλές τεχνικές για τη μοντελοποίηση και την ανάλυση αρκετών μεταβλητών, ενώ στον πυρήνα της επικεντρώνεται στη σχέση μεταξύ μίας εξαρτημένης μεταβλητής (μεταβλητή εξόδου, απόκρισης ή κριτηρίου) και μίας ή περισσότερων ανεξάρτητων μεταβλητών (μεταβλητές εισόδου ή πρόβλεψης). Πιο συγκεκριμένα, η ανάλυση παλινδρόμησης παρέχει βοήθεια στην κατανόηση του τρόπου μεταβολής της τιμής της εξαρτημένης μεταβλητής όταν μεταβληθεί οποιαδήποτε από τις ανεξάρτητες μεταβλητές, ενώ οι υπόλοιπες διατηρούνται σταθερές.

Συνήθως, η ανάλυση παλινδρόμησης, υπολογίζει τη μέση τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής όταν οι ανεξάρτητες παραμένουν σταθερές. Σε κάθε περίπτωση, πρέπει να εκτιμηθεί μία συνάρτηση των ανεξάρτητων μεταβλητών, οποία ονομάζεται συνάρτηση παλινδρόμησης. Η ανάλυση παλινδρόμησης χρησιμοποιείται ευρέως για εκτίμηση και πρόβλεψη, για να γίνει αντιληπτό ποιες από τις ανεξάρτητες μεταβλητές σχετίζονται με την εξαρτημένη και να διερευνηθεί τη μορφή των σχέσεων αυτών. Σε ορισμένες περιπτώσεις είναι δυνατόν να αξιοποιηθεί για να εξαχθούν αιτιώδεις σχέσεις μεταξύ των προαναφερόμενων μεταβλητών, ωστόσο αυτές μπορεί να είναι παραπλανητικές, οπότε συνιστάται ιδιαίτερη προσοχή.

2.2 Απλή Γραμμική Παλινδρόμηση

Το υπόδειγμα της απλής γραμμικής παλινδρόμησης επιδιώκει τον εντοπισμό κατάλληλης γραμμικής σχέσης εξάρτησης μεταξύ δύο τυχαίων μεταβλητών (X, Y) , εκ των οποίων η μία καλείται εξαρτημένη και η άλλη ανεξάρτητη.

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.1)$$

- Y_i είναι η τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής για την δοκιμή i .
- X_i είναι η τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής για την δοκιμή i .
- β_0 και β_1 είναι άγνωστες παράμετροι.
- Η παράμετρος β_0 εκφράζει τη μεταβολή στη μέση τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής Y , διορθωμένη ως προς τη μέση τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής X .
- Η παράμετρος β_1 εκφράζει τη μεταβολή της εξαρτημένης μεταβλητής για κάθε μονάδα αύξησης της ανεξάρτητης μεταβλητής X .
- ε_i είναι το τυχαίο σφάλμα ($\varepsilon_i = Y_i - \hat{Y}_i$) με $E(\varepsilon_i) = 0, Var(\varepsilon_i) = \sigma^2$ και $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ για κάθε i, j με $i \neq j$.

Ιδιότητες

$$E(Y_i) = E(\beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i) = \beta_0 + \beta_1 X_i,$$

$$Var(Y_i) = Var(\beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i) = Var(\varepsilon_i) = \sigma^2.$$

2.2.1 Εκτίμηση των παραμέτρων β_0 και β_1

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}, \quad \hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} \quad (2.2)$$

και εκτιμούμε τη συνάρτηση παλινδρόμησης ως

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i. \quad (2.3)$$

2.2.2 Εκτίμηση της διασποράς του σφάλματος σ^2

Η διασπορά κάθε παρατήρησης Y_i είναι σ^2 . Επίσης, η δειγματική διασπορά n το πλήθος παρατηρήσεων δίνεται από τη Σχέση

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2. \quad (2.4)$$

Η απόκλιση κάθε παρατήρησης από την εκτιμώμενη μέση τιμή \bar{Y} υψώνεται στο τετράγωνο, εν συνεχεία τα τετράγωνα των αποκλίσεων αθροίζονται και τέλος το άθροισμα διαιρείται με τους αντίστοιχους βαθμούς ελευθερίας, οι οποίοι εν προκειμένω είναι $(n-1)$ διότι χάνεται ένας βαθμός ελευθερίας λόγω της χρήσης της εκτίμησης \bar{Y} στη θέση της μέσης τιμής μ του πληθυσμού και ισχύει ότι

$$E(s^2) = \sigma^2.$$

Η ίδια μεθοδολογία χρησιμοποιείται για την εύρεση της εκτιμήτριας s^2 , της σ^2 στην περίπτωση της παλινδρόμησης. Άρα η απόκλιση μια παρατήρησης Y_i πρέπει να υπολογιστεί γύρω από τη μέση τιμή της \hat{Y}_i , δηλαδή $Y_i - \hat{Y}_i = \varepsilon_i$ και το αντίστοιχο άθροισμα τετραγώνων ορίζεται ως

$$S.S.E. = \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n [Y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i)]^2 = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2. \quad (2.5)$$

Η εκτιμήτρια s^2 δίνεται από τη Σχέση

$$M.S.E. = s^2 = \frac{S.S.E.}{n-2} \quad (2.6)$$

και έχει $(n-2)$ βαθμούς ελευθερίας, διότι 2 βαθμοί ελευθερίας έχουν χαθεί για την εκτίμηση των $\hat{\beta}_0$ και $\hat{\beta}_1$ που πραγματοποιήθηκε για να λάβουμε την εκτιμώμενη τιμή \hat{Y}_i . Επίσης ισχύει ότι

$$E(M.S.E.) = E(s^2).$$

* $S.S.E$ = Sum of Squares Error, $M.S.E.$ = Mean Squares Error

2.2.3 Διασπορά των $\hat{\beta}_0$ και $\hat{\beta}_1$

Η διασπορά του $\hat{\beta}_0$ δίνεται από τη Σχέση

$$\sigma^2(\hat{\beta}_0) = \text{Var}(\hat{\beta}_0) = \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right] \quad (2.7)$$

με εκτιμήτρια της διασποράς την

$$s^2(\hat{\beta}_0) = \widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_0) = s^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right] \quad (2.8)$$

και η διασπορά του $\hat{\beta}_1$ δίνεται από τη Σχέση

$$\sigma^2(\hat{\beta}_1) = \text{Var}(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \quad (2.9)$$

με εκτιμήτρια αντίστοιχα την

$$s^2(\hat{\beta}_1) = \widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_1) = \frac{s^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}. \quad (2.10)$$

2.2.4 Ο συντελεστής προσδιορισμού R^2

Ο συντελεστής R^2 εκφράζει το ποσοστό της συνολικής διασποράς των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής Y η οποία εξηγείται από τη μεταβλητή X μέσω της ευθείας παλινδρόμησης. Όσο μεγαλύτερος είναι ο συντελεστής προσδιορισμού R^2 τόσο καλύτερα η ευθεία της παλινδρόμησης εξηγεί τα δεδομένα. Ισχύει ότι $0 \leq R^2 \leq 1$.

Ορίζουμε τις ακόλουθες σχέσεις

$$S.S.R. = \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2, \quad (2.11)$$

$$S.S.T.O. = \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2. \quad (2.12)$$

Όπου $S.S.R.$ = Regression Sum of Squares, $S.S.T.O.$ = Total Sum of Squares.

Επίσης αποδεικνύεται ότι ισχύει $S.S.T.O. = S.S.E. + S.S.R.$

Ο συντελεστής προσδιορισμού R^2 δίνεται από τη Σχέση

$$R^2 = \frac{S.S.R.}{S.S.T.O.} = \frac{S.S.T.O. - S.S.E.}{S.S.T.O.} = 1 - \frac{S.S.E.}{S.S.T.O.}. \quad (2.13)$$

2.2.5 Διαστήματα εμπιστοσύνης παραμέτρων

Οι εκτιμήτριες ελαχίστων τετραγώνων $\hat{\beta}_0$ και $\hat{\beta}_1$ είναι γραμμικοί συνδυασμοί τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν κανονική κατανομή, επομένως εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$Z_0 = \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\sigma(\hat{\beta}_0)} \sim N(0, 1) \quad \text{και} \quad Z_1 = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sigma(\hat{\beta}_1)} \sim N(0, 1).$$

Επίσης ισχύει ότι

$$U = \frac{(n-2)s^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-2}^2.$$

Άρα

$$\frac{Z_i}{\frac{U}{\sqrt{n-2}}} = \frac{(\hat{\beta}_i - \beta_i)/\sigma(\hat{\beta}_i)}{\sqrt{s^2/\sigma^2}} = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\sigma(\hat{\beta}_i) \frac{s}{\sigma}} \sim t_{n-2}.$$

Συνδυάζοντας είτε τις σχέσεις (2.7) και (2.8) για $i = 0$ είτε τις (2.9) και (2.10) για $i = 1$ συνεπάγεται ότι

$$\frac{\sigma^2(\hat{\beta}_i)}{s^2(\hat{\beta}_i)} = \frac{\sigma^2}{s^2} \iff \sigma(\hat{\beta}_i) \frac{\sigma}{s} = s(\hat{\beta}_i).$$

Οπότε

$$\frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{s(\hat{\beta}_i)} \sim t_{n-2}. \quad (2.14)$$

Κατασκευή του Διαστήματος Εμπιστοσύνης

Έστω $0 < a < 1$ το επίπεδο εμπιστοσύνης του διαστήματος. Λόγω του αποτελέσματος της Σχέσης (2.14) θα γίνει χρήση της κατανομής t-student. Με $t_{n-2, \frac{a}{2}}$ θα συμβολίζεται το άνω $\frac{a}{2}$ ποσοστιαίο σημείο της κατανομής t με $n - 2$ βαθμούς ελευθερίας.

Λόγω της συμμετρίας που εμφανίζει η συνάρτηση πυκνότητας της κατανομής t ως προς τον κατακόρυφο άξονα συνεπάγεται ότι

$$P \left[\frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{s(\hat{\beta}_i)} > t_{n-2, \frac{a}{2}} \right] = P \left[\frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{s(\hat{\beta}_i)} < -t_{n-2, \frac{a}{2}} \right] = \frac{a}{2}.$$

Οπότε

$$\begin{aligned} P \left[-t_{n-2, \frac{a}{2}} \leq \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{s(\hat{\beta}_i)} \leq t_{n-2, \frac{a}{2}} \right] &= 1 - P \left[\frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{s(\hat{\beta}_i)} > t_{n-2, \frac{a}{2}} \right] \\ &\quad - P \left[\frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{s(\hat{\beta}_i)} < -t_{n-2, \frac{a}{2}} \right] = 1 - \frac{a}{2} - \frac{a}{2} \\ &= 1 - a. \end{aligned}$$

Συνεπώς ισχύει η ισότητα

$$P \left[-t_{n-2, \frac{a}{2}} \leq \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{s(\hat{\beta}_i)} \leq t_{n-2, \frac{a}{2}} \right] = 1 - a.$$

Από την οποία προκύπτει

$$P \left[\hat{\beta}_i - s(\hat{\beta}_i) t_{n-2, \frac{a}{2}} \leq \beta_i \leq \hat{\beta}_i + s(\hat{\beta}_i) t_{n-2, \frac{a}{2}} \right] = 1 - a.$$

Τελικά το διάστημα

$$\left[\hat{\beta}_i - s(\hat{\beta}_i) t_{n-2, \frac{a}{2}} \leq \beta_i \leq \hat{\beta}_i + s(\hat{\beta}_i) t_{n-2, \frac{a}{2}} \right] \quad (2.15)$$

αποτελεί ένα διάστημα εμπιστοσύνης για την παράμετρο β_i , $i = 0, 1$ με συντελεστή εμπιστοσύνης $1 - a$.

2.2.6 Διάστημα πρόβλεψης για τη μεταβλητή απόκρισης

Ένα διάστημα πρόβλεψης αφορά μια τυχαία μεταβλητή και τα όριά του καθορίζονται έτσι ώστε η τυχαία μεταβλητή να περιέχεται σε αυτό με συγκεκριμένη πιθανότητα. Στο σημείο αυτό εξετάζεται η δημιουργία ενός διαστήματος πρόβλεψης για την εξαρτημένη μεταβλητή Y , όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή X λάβει συγκεκριμένη τιμή X_0 .

Σύμφωνα με τη Σχέση (2.1) η τιμή Y_0 της εξαρτημένης μεταβλητής στο X_0 είναι η τυχαία μεταβλητή

$$Y_0 = \beta_0 + \beta_1 X_0 + \varepsilon_0,$$

όπου $\varepsilon_0 \sim N(0, \sigma^2)$.

Σύμφωνα με τη Σχέση (2.3) η «νέα» (δείκτης ν) τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής Y θα προκύψει ως το άθροισμα

$$Y_0^{(\nu)} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_0 + \varepsilon_0 = \hat{Y}_0 + \varepsilon_0. \quad (2.16)$$

Προκειμένου να διαμορφώσουμε τα όρια ανάμεσα στα οποία θα κινηθεί η τυχαία μεταβλητή $Y_0^{(\nu)}$ αρκεί να παρατηρηθεί ότι

$$E(Y_0^{(\nu)}) = E(\hat{Y}_0) + E(\varepsilon_0) = E(\hat{Y}_0) + 0 = E(\hat{Y}_0)$$

και

$$Var(Y_0^{(\nu)}) = Var(\hat{Y}_0) + Var(\varepsilon_0) = \sigma^2(\hat{Y}_0) + \sigma^2.$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι τόσο η \hat{Y}_0 όσο και η τυχαία μεταβλητή ε_0 ακολουθούν την κανονική κατανομή, ενώ παράλληλα είναι και ανεξάρτητες, συνεπάγεται ότι η τυχαία μεταβλητή $Y_0^{(\nu)}$ που ορίστηκε παραπάνω (2.16) ακολουθεί την κανονική κατανομή με παραμέτρους

$$E(Y_0^{(\nu)}) = \beta_0 + \beta_1 x_0,$$

$$\sigma^2(Y_0^{(\nu)}) = Var(Y_0^{(\nu)}) = \sigma^2(\hat{Y}_0) + \sigma^2 = \sigma^2 \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right].$$

Η εκτιμήτρια της $\sigma^2 (Y_0^{(\nu)})$ είναι η

$$s^2 (Y_0^{(\nu)}) = s^2 \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right]. \quad (2.17)$$

Κατασκευή του Διαστήματος Πρόβλεψης

Ισχύει ότι

$$Z = \frac{Y_0^{(\nu)} - E(Y_0^{(\nu)})}{\sigma(Y_0^{(\nu)})} \sim N(0, 1) \quad \text{και} \quad U = \frac{(n-2)s^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-2}^2.$$

Άρα

$$\frac{Z}{\frac{U}{\sqrt{n-2}}} = \frac{(Y_0^{(\nu)} - (\beta_0 + \beta_1 X_0)) / \sigma(Y_0^{(\nu)})}{\sqrt{s^2 / \sigma^2}} = \frac{Y_0^{(\nu)} - (\beta_0 + \beta_1 X_0)}{\sigma(Y_0^{(\nu)}) \frac{s}{\sigma}} \sim t_{n-2}.$$

Συνδυάζοντας τις Σχέσεις (2.14) και (2.15) παρατηρούμε ότι

$$\frac{\sigma^2 (Y_0^{(\nu)})}{s^2 (Y_0^{(\nu)})} = \frac{\sigma^2}{s^2} \iff \sigma(Y_0^{(\nu)}) \frac{s}{\sigma} = s(Y_0^{(\nu)}).$$

Οπότε τελικά

$$\frac{Y_0^{(\nu)} - (\beta_0 + \beta_1 X_0)}{s(Y_0^{(\nu)})} \sim t_{n-2}. \quad (2.18)$$

Σε αναλογία με τη δημιουργία ενός διαστήματος εμπιστοσύνης, μπορούμε να σχηματίσουμε ένα διάστημα πρόβλεψης το οποίο θα περιέχει, με πιθανότητα $1 - a$ ($0 < a < 1$) την τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής Y , όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή X λάβει συγκεκριμένη τιμή X_0 . Επομένως ένα διάστημα πρόβλεψης με συντελεστή εμπιστοσύνης $1 - a$ ($0 < a < 1$) για την τιμή της Y , όταν $X = X_0$ δίνεται από

$$\left[\hat{Y}_0 - s(Y_0^{(\nu)}) t_{n-2, \frac{a}{2}}, \hat{Y}_0 + s(Y_0^{(\nu)}) t_{n-2, \frac{a}{2}} \right], \quad (2.19)$$

όπου $s(Y_0^{(\nu)})$ είναι η τετραγωνική ρίζα της Σχέσης (2.17).

2.2.7 Διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση πρόβλεψη

Προκειμένου να δημιουργήσουμε το διάστημα εμπιστοσύνης για τη μεταβλητή απόκρισης θα γίνει χρήση της εκτιμήτριας

$$\hat{Y}_0 = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_0. \quad (2.20)$$

Για την οποία ισχύουν

$$E(\hat{Y}_0) = E(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_0) = \beta_0 + \beta_1 X_0$$

και

$$\text{Var}(\hat{Y}_0) = \sigma^2(\hat{Y}_0) = \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right].$$

Η εκτιμήτρια της $\sigma^2(\hat{Y}_0)$ είναι η

$$s^2(\hat{Y}_0) = s^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right]. \quad (2.21)$$

Οπότε με όμοιο τρόπο εργασίας όπως στην κατασκευή του διαστήματος πρόβλεψης καταλήγουμε στο διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση πρόβλεψη $E(\hat{Y}_0)$ με συντελεστή εμπιστοσύνης $1 - a$ ($0 < a < 1$) για την τιμή $X = X_0$ της ανεξάρτητης μεταβλητής το οποίο δίνεται ως

$$\left[\hat{Y}_0 - s(\hat{Y}_0) t_{n-2, \frac{a}{2}}, \hat{Y}_0 + s(\hat{Y}_0) t_{n-2, \frac{a}{2}} \right], \quad (2.22)$$

όπου $s(\hat{Y}_0)$ είναι η τετραγωνική ρίζα της Σχέσης (2.21).

2.3 Πολλαπλή Γραμμική Παλινδρόμηση

Το υπόδειγμα της πολλαπλής γραμμικής παλινδρόμησης επιδιώκει τον εντοπισμό κατάλληλης γραμμικής σχέσης εξάρτησης μεταξύ p το πλήθος τυχαίων μεταβλητών

$$(X_1, X_2, \dots, X_{p-1}, Y).$$

Εκ των οποίων η Y καλείται εξαρτημένη και οι υπόλοιπες ανεξάρτητες.

Θεωρούμε το μοντέλο της πολλαπλής παλινδρόμησης

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \dots + \beta_{p-1} X_{i,p-1} + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.23)$$

ή υπό μορφή πινάκων

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (2.24)$$

- \mathbf{Y} είναι ένα $n \times 1$ διάνυσμα παρατηρήσεων.
- \mathbf{X} είναι ένας $n \times p$ πίνακας ανεξάρτητων μεταβλητών .
- $\boldsymbol{\beta}$ είναι ένα $p \times 1$ διάνυσμα άγνωστων παραμέτρων το οποίο πρέπει να εκτιμηθεί.
- $\boldsymbol{\varepsilon}$ είναι ένα $n \times 1$ διάνυσμα ανεξάρτητων τυχαίων κανονικών μεταβλητών με μέση τιμή. $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0$, $Var(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2 \mathbf{I}_{n \times n}$ και $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ για κάθε i, j με $i \neq j$.

Ιδιότητες

$$E(\mathbf{Y}) = E(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta},$$

$$Var(\mathbf{Y}) = Var(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}) = Var(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2 \mathbf{I}_{n \times n},$$

$$Cov(Y_i, Y_j) = Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \text{ για κάθε } i, j \text{ με } i \neq j.$$

2.3.1 Εκτίμηση των παραμέτρων $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{p-1}$

Το $p \times 1$ διάνυσμα $\boldsymbol{\beta}$ των άγνωστων παραμέτρων εκτιμάται ως εξής

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{Y}, \quad (2.25)$$

όπου $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\widehat{\beta}_0, \widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2, \dots, \widehat{\beta}_{p-1})^t$.

Και εκτιμούμε το μοντέλο της πολλαπλής παλινδρόμησης υπό μορφή πινάκων ως

$$\widehat{\mathbf{Y}} = \mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}. \quad (2.26)$$

2.3.2 Πίνακας διασποράς-συνδιασποράς των Y_i και εκτίμηση του σφάλματος σ^2

Ο πίνακας διασποράς-συνδιασποράς των Y_i είναι ένας $n \times n$ διαγώνιος πίνακας που έχει στη διαγώνιό του τις διασπορές των Y_i (όπως αναφέρθηκε παραπάνω $Var(\mathbf{Y}) = \sigma^2 \mathbf{I}_{n \times n}$, άρα $Var(Y_i) = \sigma^2$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$) και στις υπόλοιπες θέσεις του πίνακα τις συνδιασπορές $Cov(Y_i, Y_j)$ οι οποίες είναι ίσες με μηδέν για κάθε i, j με $i \neq j$.

$$\begin{aligned} Cov(\widehat{\mathbf{Y}}) &= Cov(\widehat{\mathbf{Y}}, \widehat{\mathbf{Y}}^t) \\ &= \begin{bmatrix} Var(\widehat{Y}_1) & Cov(\widehat{Y}_1, \widehat{Y}_2) & \cdots & Cov(\widehat{Y}_1, \widehat{Y}_n) \\ Cov(\widehat{Y}_2, \widehat{Y}_1) & Var(\widehat{Y}_2) & \cdots & Cov(\widehat{Y}_2, \widehat{Y}_n) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ Cov(\widehat{Y}_n, \widehat{Y}_1) & Cov(\widehat{Y}_n, \widehat{Y}_2) & \cdots & Var(\widehat{Y}_n) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

με $Cov(Y_i, Y_j) = 0$ αν $i \neq j$.

Για την εύρεση της εκτιμήτριας s^2 , της σ^2 , στην περίπτωση της πολλαπλής παλινδρόμησης, η απόκλιση μια παρατήρησης Y_i πρέπει να υπολογιστεί γύρω από τη μέση τιμή της \widehat{Y}_i , δηλαδή $Y_i - \widehat{Y}_i = \varepsilon_i$ και το αντίστοιχο άθροισμα τετραγώνων ορίζεται ως

$$\begin{aligned} S.S.E. &= \sum_{i=1}^n (Y_i - \widehat{Y}_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \left[Y_i - (\widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 X_{i1} + \widehat{\beta}_2 X_{i2} + \dots + \widehat{\beta}_{p-1} X_{i,p-1}) \right]^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \end{aligned} \quad (2.28)$$

ή πιο εύκολα με χρήση πινάκων

$$\begin{aligned}
 S.S.E. &= (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})^t (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) \\
 &= \mathbf{Y}^t \mathbf{Y} - \mathbf{Y}^t \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} - (\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})^t \mathbf{Y} + (\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})^t (\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) \\
 &= \mathbf{Y}^t \mathbf{Y} - \mathbf{Y}^t \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^t \mathbf{X}^t \mathbf{Y} + (\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})^t (\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) \\
 &= \mathbf{Y}^t \mathbf{Y} - 2\hat{\boldsymbol{\beta}}^t \mathbf{X}^t \mathbf{Y} + \hat{\boldsymbol{\beta}}^t \mathbf{X}^t \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} \\
 &= \mathbf{Y}^t \mathbf{Y} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^t \mathbf{X}^t \mathbf{Y}.
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

Η εκτιμήτρια s^2 δίνεται από τη Σχέση

$$M.S.E. = s^2 = \frac{S.S.E.}{n - p} \tag{2.30}$$

και έχει $(n - p)$ βαθμούς ελευθερίας, διότι p βαθμοί ελευθερίας έχουν χαθεί για την εκτίμηση των $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_{p-1}$ που πραγματοποιήθηκε για να λάβουμε την εκτιμώμενη τιμή \hat{Y}_i , ενώ ισχύει ότι

$$E(M.S.E.) = E(s^2).$$

2.3.3 Πίνακας διασποράς-συνδιασποράς του $\hat{\boldsymbol{\beta}}$

Ο πίνακας διασποράς-συνδιασποράς του συντελεστή παλινδρόμησης είναι

$$\begin{aligned}
 Cov(\hat{\boldsymbol{\beta}}) &= Cov\left[(\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{Y}\right] \\
 &= (\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \sigma^2 \mathbf{I}_{n \times n} \left[(\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t\right]^t \\
 &= \sigma^2 (\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{X} \left[(\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1}\right]^t \\
 &= \sigma^2 (\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1}.
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

Στην κύρια διαγώνιο του πίνακα βρίσκονται οι διασπορές των εκτιμηθέντων παραμέτρων και στις υπόλοιπες θέσεις του οι συνδιασπορές τους.

Δηλαδή,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) &= \text{Cov}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}, \widehat{\boldsymbol{\beta}}^t) \\ &= \begin{bmatrix} \text{Var}(\widehat{\beta}_0) & \text{Cov}(\widehat{\beta}_0, \widehat{\beta}_1) & \cdots & \text{Cov}(\widehat{\beta}_0, \widehat{\beta}_{p-1}) \\ \text{Cov}(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_0) & \text{Var}(\widehat{\beta}_1) & \cdots & \text{Cov}(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_{p-1}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \text{Cov}(\widehat{\beta}_{p-1}, \widehat{\beta}_0) & \text{Cov}(\widehat{\beta}_{p-1}, \widehat{\beta}_1) & \cdots & \text{Var}(\widehat{\beta}_{p-1}) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Ο εκτιμώμενος πίνακας διασποράς-συνδιασποράς του εκτιμηθέντος διανύσματος παραμέτρων $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ είναι

$$\widehat{\text{Cov}}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \frac{S.S.E.}{n-p} (\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1} = M.S.E. (\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1} = s^2 (\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1}. \quad (2.33)$$

2.3.4 Ο συντελεστής προσδιορισμού R^2

Ο υπολογισμός είναι όμοιος με το συντελεστή προσδιορισμού της απλής γραμμικής παλινδρόμησης (βλέπε 2.2.4). Οι Σχέσεις (2.11) και (2.12) με χρήση πινάκων γράφονται αντίστοιχα

$$S.S.R. = \widehat{\boldsymbol{\beta}}^t \mathbf{X}^t \mathbf{Y} - \frac{1}{n} \mathbf{Y}^t \mathbf{I}_{n \times n} \mathbf{Y}, \quad (2.34)$$

$$S.S.TO. = \mathbf{Y}^t \mathbf{Y} - \frac{1}{n} \mathbf{Y}^t \mathbf{I}_{n \times n} \mathbf{Y}. \quad (2.35)$$

Όπου $\mathbf{I}_{n \times n}$ είναι ο ταυτοτικός πίνακας εύρους n .

2.3.5 Διαστήματα εμπιστοσύνης παραμέτρων

Οι εκτιμήτριες ελαχίστων τετραγώνων $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{p-1}$ είναι γραμμικοί συνδυασμοί τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν κανονική κατανομή, επομένως εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$Z_i = \frac{\widehat{\beta}_i - \beta_i}{\sigma(\widehat{\beta}_i)} \sim N(0, 1), \quad i = 0, 1, \dots, p-1.$$

Επίσης ισχύει ότι

$$U = \frac{(n-p)s^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-p}^2.$$

Άρα

$$\frac{Z_i}{\frac{U}{\sqrt{n-p}}} = \frac{(\hat{\beta}_i - \beta_i)/\sigma(\hat{\beta}_i)}{\sqrt{s^2/\sigma^2}} = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\sigma(\hat{\beta}_i) \frac{s}{\sigma}} \sim t_{n-p}.$$

Ο λόγος της κύριας διαγωνίου του πίνακα διασποράς-συνδιασποράς του $\hat{\beta}$ με την αντίστοιχη του εκτιμώμενου πίνακα συνεπάγεται ότι

$$\frac{\sigma^2(\hat{\beta}_i)}{s^2(\hat{\beta}_i)} = \frac{\sigma^2}{s^2} \iff \sigma(\hat{\beta}_i) \frac{\sigma}{s} = s(\hat{\beta}_i).$$

Οπότε

$$\frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{s(\hat{\beta}_i)} \sim t_{n-p}, \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, p-1\}. \quad (2.36)$$

Η κατασκευή του διαστήματος εμπιστοσύνης πραγματοποιείται με ανάλογο τρόπο όπως στην Υποενότητα 2.2.5, συνεπώς το διάστημα

$$\left[\hat{\beta}_i - s(\hat{\beta}_i) t_{n-p, \frac{a}{2}} \leq \beta_i \leq \hat{\beta}_i + s(\hat{\beta}_i) t_{n-p, \frac{a}{2}} \right] \quad (2.37)$$

αποτελεί ένα διάστημα εμπιστοσύνης για την παράμετρο β_i , $i = 0, 1, \dots, p-1$ με συντελεστή εμπιστοσύνης $1 - a$.

2.3.6 Διάστημα πρόβλεψης για τη μεταβλητή απόκρισης

Όταν οι ανεξάρτητες μεταβλητές X_1, X_2, \dots, X_{p-1} λάβουν τις τιμές $X_{01}, X_{02}, \dots, X_{0,p-1}$ η «νέα» τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής Y θα προκύψει ως

$$Y_0^{(\nu)} = \mathbf{X}_0^t \hat{\beta} + \varepsilon_0 = \hat{Y}_0 + \varepsilon_0, \quad (2.38)$$

όπου

$$\begin{aligned} \hat{Y}_0 &= \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{01} + \hat{\beta}_2 X_{02} + \dots + \hat{\beta}_{p-1} X_{0,p-1} \\ &= \mathbf{X}_0^t \hat{\beta}, \quad \mathbf{X}_0 = (1, X_{01}, X_{02}, \dots, X_{0,p-1})^t. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι

$$E\left(Y_0^{(\nu)}\right) = E\left(\widehat{Y}_0\right) + E\left(\varepsilon_0\right) = E\left(\widehat{Y}_0\right) + 0 = \mathbf{X}_0^t \boldsymbol{\beta}$$

και

$$\begin{aligned} \text{Var}\left(Y_0^{(\nu)}\right) &= \text{Var}\left(\widehat{Y}_0\right) + \text{Var}\left(\varepsilon_0\right) \\ &= \sigma^2 \mathbf{X}_0^t \left(\mathbf{X}^t \mathbf{X}\right)^{-1} \mathbf{X}_0 + \sigma^2 \\ &= \sigma^2 \left[\mathbf{X}_0^t \left(\mathbf{X}^t \mathbf{X}\right)^{-1} \mathbf{X}_0 + 1\right] \\ &= \sigma^2 \left(\widehat{Y}_0\right) + \sigma^2 = \sigma^2 \left(Y_0^{(\nu)}\right). \end{aligned}$$

Με εκτιμητήρια της $\sigma^2 \left(Y_0^{(\nu)}\right)$ την

$$s^2 \left(Y_0^{(\nu)}\right) = s^2 \left[\mathbf{X}_0^t \left(\mathbf{X}^t \mathbf{X}\right)^{-1} \mathbf{X}_0 + 1\right]. \quad (2.39)$$

Αφού η \widehat{Y}_0 και η ε_0 ακολουθούν την κανονική κατανομή ενώ επιπλέον είναι και ανεξάρτητες, συνεπάγεται ότι η τυχαία μεταβλητή

$$Y_0^{(\nu)} \sim N \left[\mathbf{X}_0^t \boldsymbol{\beta}, \sigma^2 \left(Y_0^{(\nu)}\right)\right].$$

Άρα ισχύει ότι

$$Z = \frac{Y_0^{(\nu)} - E\left(Y_0^{(\nu)}\right)}{\sigma \left(Y_0^{(\nu)}\right)} \sim N(0, 1)$$

και η τυχαία μεταβλητή

$$U = \frac{(n-p)s^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-p}^2$$

είναι ανεξάρτητη από την Z .

Με όμοια αποδεικτική διεργασία των διαστημάτων εμπιστοσύνης για τις παραμέτρους προκύπτει το διάστημα πρόβλεψης, με συντελεστή εμπιστοσύνης $1 - a$, για την $Y_0^{(\nu)}$ δίνεται ως

$$\left[\widehat{Y}_0 - s \left(Y_0^{(\nu)}\right) t_{n-p, \frac{a}{2}}, \widehat{Y}_0 + s \left(Y_0^{(\nu)}\right) t_{n-p, \frac{a}{2}}\right], \quad (2.40)$$

όπου $s(Y_0^{(\nu)})$ είναι η τετραγωνική ρίζα της Σχέσης (2.39).

2.3.7 Διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση πρόβλεψη

Σε πλήρη αντιστοιχία με την Υποενοότητα 2.2.7 της απλής γραμμικής παλινδρόμησης, το διάστημα εμπιστοσύνης για την τιμή \hat{Y}_0 της εξαρτημένης μεταβλητής όταν οι ανεξάρτητες μεταβλητές X_1, X_2, \dots, X_{p-1} λάβουν τις τιμές $X_{01}, X_{02}, \dots, X_{0,p-1}$ αντίστοιχα, προκύπτει αν αντικατασταθεί η Σχέση (2.39) με την

$$s^2(\hat{Y}_0) = s^2 [\mathbf{X}_0^t (\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}_0]. \quad (2.41)$$

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, ένα διάστημα εμπιστοσύνης με συντελεστή εμπιστοσύνης $1 - a$ ($0 < a < 1$) για την τιμή της Y όταν οι ανεξάρτητες μεταβλητές X_1, X_2, \dots, X_{p-1} λάβουν τις τιμές $X_{01}, X_{02}, \dots, X_{0,p-1}$ αντίστοιχα, δίνεται από

$$\left[\hat{Y}_0 - s(Y_0) t_{n-p, \frac{a}{2}}, \hat{Y}_0 + s(Y_0) t_{n-p, \frac{a}{2}} \right], \quad (2.42)$$

όπου $s(Y_0^{(\nu)})$ είναι η τετραγωνική ρίζα της Σχέσης (2.41).

2.4 Ασαφής Παλινδρόμηση

2.4.1 Εισαγωγή

Σε πλείστες περιπτώσεις σε πραγματικά προβλήματα τα διαθέσιμα στοιχεία είναι είτε πολύ περιορισμένα είτε και ανακριβή και οι μεταβλητές αλληλεπιδρούν με έναν αβέβαιο και ασαφή τρόπο. Εν αντιθέσει με την παραδοσιακή παλινδρόμηση, η ασαφής παλινδρόμηση μπορεί να ανεχθεί την ανακρίβεια και την αβεβαιότητα των στοιχείων ώστε να επιτευχθεί ευκολία στο χειρισμό και στιβαρότητα (robustness). Μία θεμελιώδης διαφορά μεταξύ της συνήθους και της ασαφούς παλινδρόμησης είναι (βλέπε Chang & Ayyub 2001) ότι η πρώτη αντιμετωπίζει τα σφάλματα ως τυχαία υπόλοιπα ενώ η δεύτερη ως ασαφείς μεταβλητές. Επίσης, οι αποκλίσεις των τιμών παρατηρούμενης και εκτιμώμενης μεταβλητής στη συνήθη παλινδρόμηση αντιπροσωπεύουν σφάλματα μέτρησης, ενώ στην ασαφή παλινδρόμηση αντανακλούν την ασάφεια της δομής του συστήματος που εκφράζεται από τις ασαφείς παραμέτρους του μοντέλου παλινδρόμησης.

Παρατίθενται ακολούθως ορισμένα πλεονεκτήματα της ασαφούς έναντι της συνήθους παλινδρόμησης (Shapiro, 2004; Kahraman et al., 2006; de Andrés-Sánchez & Terceño Gómez, 2003).

1. Οι εκτιμήσεις που προκύπτουν μετά την εκτίμηση των συντελεστών δεν είναι τυχαίες μεταβλητές (υπόλοιπα), οι οποίες είναι δύσκολες στο χειρισμό και ιδιαίτερος σε μαθηματικές πράξεις, αλλά ασαφείς αριθμοί οι οποίοι είναι ευκολότερα διαχειρίσιμοι μέσω των α -τομών. Έτσι όταν υπάρχουν μεγέθη εκτιμώμενα από τυχαίες μεταβλητές, αυτές συχνά αντικαθίστανται από τη μέση τιμή τους ώστε να είναι ευκολότερες στο χειρισμό. Με την αντικατάσταση αυτή ωστόσο χάνεται πληροφορία από την τυχαία μεταβλητή, γεγονός το οποίο αποφεύγεται με τη χρήση ασαφών αριθμών.
2. Κατά τη διερεύνηση οικονομικών ή κοινωνικών φαινομένων, οι παρατηρήσεις αποτελούν συνέπεια της αλληλεπίδρασης μεταξύ των πεποιθήσεων και των προσδοκιών των διεξαγόντων την έρευνα, οι οποίες είναι συχνά εξαιρετικά υποκειμενικές και

ασαφείς. Μία κατάλληλη μέθοδος αντιμετώπισης αυτού του είδους των πληροφοριών είναι επομένως η ασαφής θεωρία συνόλων. Με αυτόν τον τρόπο ενσωματώνεται η υποκειμενικότητα στην ανάλυση των φαινομένων αυτών.

3. Οι παρατηρήσεις συχνά δεν είναι συμβατικοί (crisp) αριθμοί αλλά διαστήματα εμπιστοσύνης. Οι παραδοσιακές τεχνικές παλινδρόμησης προϋποθέτουν τη χρήση συμβατικών αριθμών τόσο για τις ανεξάρτητες όσο και για την εξαρτημένη μεταβλητή. Επομένως η περίπτωση των διαστημάτων εμπιστοσύνης, στη συνήθη παλινδρόμηση, συνεπάγεται αυτόματα την απώλεια μεγάλου μέρους της πληροφορίας. Εντούτοις, η ασαφής παλινδρόμηση δεν απαιτεί την αντικατάσταση των διαστημάτων εμπιστοσύνης από συμβατικούς αριθμούς και άρα όλες οι παρατηρούμενες τιμές δύνανται να τροφοδοτήσουν το μοντέλο.

2.4.2 Ασαφής παλινδρόμηση με χρήση της αρχής ελάχιστης ασάφειας

Το πρώτο μοντέλο ασαφούς παλινδρόμησης βασίζεται στην αρχή ελάχιστης ασάφειας και ανεπτύχθη από τους Tanaka, Uejima & Asai (1982) σύμφωνα με τους οποίους ένα πρόβλημα παλινδρόμησης έχει δύο βασικές πτυχές: 1) ποιο είναι το καταλληλότερο μαθηματικό μοντέλο και 2) με ποιο τρόπο δύναται να επιτευχθεί ο καθορισμός του καλύτερα προσαρμοζόμενου στα δεδομένα μοντέλου. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, οι συντελεστές της παλινδρόμησης είναι ασαφείς αριθμοί άρα και η εκτιμώμενη εξαρτημένη μεταβλητή είναι και αυτή ασαφής αριθμός (συμβολισμός \widehat{Y}). Το αρχικό μοντέλο των Tanaka, Uejima & Asai χρησιμοποιούσε ως συντελεστές συμμετρικούς τριγωνικούς ασαφείς αριθμούς. Αργότερα, οι Ishibuchi και Nii (2001) γενίκευσαν το μοντέλο επεκτείνοντάς το και σε μη-συμμετρικούς τριγωνικούς ασαφείς αριθμούς. Το μοντέλο της ασαφούς παλινδρόμησης ορίζεται ως

$$\widetilde{Y}_i := \widetilde{A}_0 \oplus \widetilde{A}_1 X_{i1} \oplus \widetilde{A}_2 X_{i2} \oplus \dots \oplus \widetilde{A}_p X_{ip}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.43)$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_i := & (a_{0C}, a_{0L}, a_{0R}) \oplus (a_{1C}, a_{1L}, a_{1R}) X_{i1} \oplus (a_{2C}, a_{2L}, a_{2R}) X_{i2} \oplus \dots \oplus \\ & \oplus (a_{pC}, a_{pL}, a_{pR}) X_{ip}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Όπου p είναι το πλήθος των ανεξάρτητων μεταβλητών, a_{jC} είναι το κέντρο, a_{jL} η αριστερή απόκλιση και a_{jR} η δεξιά απόκλιση του ασαφούς αριθμού με $j = 1, 2, \dots, p$.

Παρόμοια, κάθε εκτιμώμενη τιμή \hat{Y}_i μπορεί να εκφραστεί ως

$$\hat{Y}_i = (\hat{Y}_{iC}, \hat{Y}_{iL}, \hat{Y}_{iR}), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.45)$$

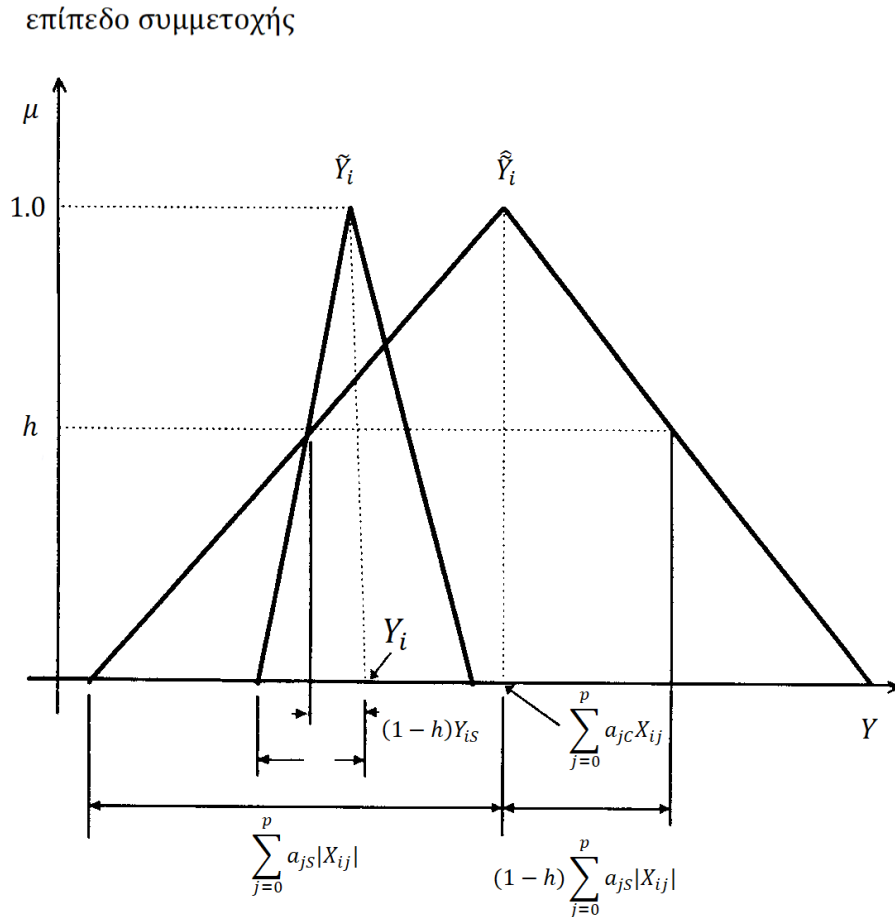
Όπου, σύμφωνα με τις Σχέσεις (2.43) και (2.44)

$$\hat{Y}_{iC} = (\hat{a}_{0C} + \hat{a}_{1C}X_{i1} + \hat{a}_{2C}X_{i2} + \dots + \hat{a}_{pC}X_{ip}), \quad (2.46)$$

$$\hat{Y}_{iL} = (\hat{a}_{0L} + \hat{a}_{1L}X_{i1} + \hat{a}_{2L}X_{i2} + \dots + \hat{a}_{pL}X_{ip}), \quad (2.47)$$

$$\hat{Y}_{iR} = (\hat{a}_{0R} + \hat{a}_{1R}X_{i1} + \hat{a}_{2R}X_{i2} + \dots + \hat{a}_{pR}X_{ip}). \quad (2.48)$$

Σύμφωνα με αυτή την προσέγγιση, οι ασαφείς συντελεστές \tilde{A}_j , $j = 0, 1, 2, \dots, p$ καθορίζονται κατά τέτοιο τρόπο ώστε το εκτιμώμενο ασαφές αποτέλεσμα \hat{Y}_i να έχει τις ελάχιστες δυνατές αποκλίσεις (αριστερή και δεξιά) ενώ ταυτόχρονα να ικανοποιεί έναν συγκεκριμένο βαθμό εμπιστοσύνης h . Ο όρος h αναφέρεται ως ένα μέτρο καλής προσαρμογής ή ένα μέτρο συμβατότητας μεταξύ των δεδομένων και του μοντέλου της παλινδρόμησης. Κάθε παρατήρηση Y_i , είτε είναι ασαφής είτε συμβατικός αριθμός, πρέπει να είναι μέσα στα όρια του εκτιμώμενου \hat{Y}_i σε βαθμό εμπιστοσύνης h όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.1.



Σχήμα 2.1: Βαθμός προσαρμογής του \hat{Y}_i σε μια δοθείσα ασαφή παρατήρηση \tilde{Y}_i

Για τον προσδιορισμό των ασαφών συντελεστών $\hat{A}_j = (\hat{a}_{jC}, \hat{a}_{jL}, \hat{a}_{jR})$ ο στόχος της ασαφούς παλινδρόμησης μεταφράζεται στο ακόλουθο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.

Ελαχιστοποίηση του

$$\begin{aligned}
 z = & n (\hat{a}_{0L} + \hat{a}_{0R}) + \left(\sum_{i=1}^n |X_{i1}| \right) (\hat{a}_{1L} + \hat{a}_{1R}) \\
 & + \left(\sum_{i=1}^n |X_{i2}| \right) (\hat{a}_{2L} + \hat{a}_{2R}) + \dots + \left(\sum_{i=1}^n |X_{ip}| \right) (\hat{a}_{pL} + \hat{a}_{pR}).
 \end{aligned}
 \tag{2.49}$$

Υπό τους περιορισμούς

$$\sum_{j=0}^p \hat{a}_{jC} X_{1j} - (1-h) \sum_{j=0}^p \hat{a}_{jL} |X_{1j}| \leq Y_1 \leq \sum_{j=0}^p \hat{a}_{jC} X_{1j} + (1-h) \sum_{j=0}^p \hat{a}_{jR} |X_{1j}| \quad (2.50)$$

$$\sum_{j=0}^p \hat{a}_{jC} X_{2j} - (1-h) \sum_{j=0}^p \hat{a}_{jL} |X_{2j}| \leq Y_2 \leq \sum_{j=0}^p \hat{a}_{jC} X_{2j} + (1-h) \sum_{j=0}^p \hat{a}_{jR} |X_{2j}| \quad (2.51)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

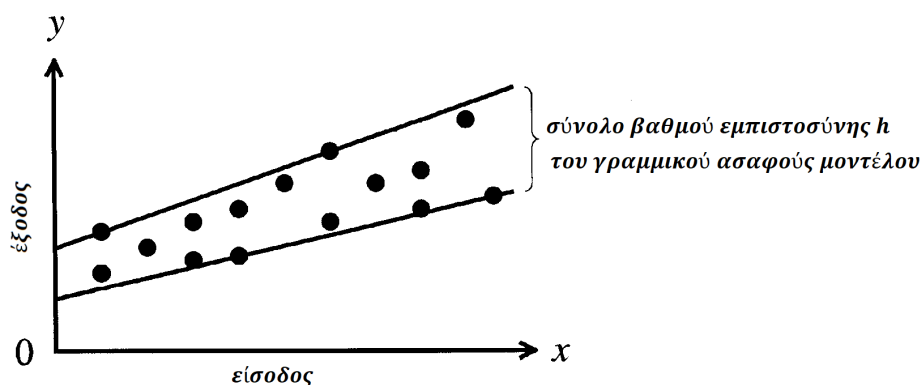
$$\sum_{j=0}^p \hat{a}_{jC} X_{nj} - (1-h) \sum_{j=0}^p \hat{a}_{jL} |X_{nj}| \leq Y_n \leq \sum_{j=0}^p \hat{a}_{jC} X_{nj} + (1-h) \sum_{j=0}^p \hat{a}_{jR} |X_{nj}| \quad (2.52)$$

με

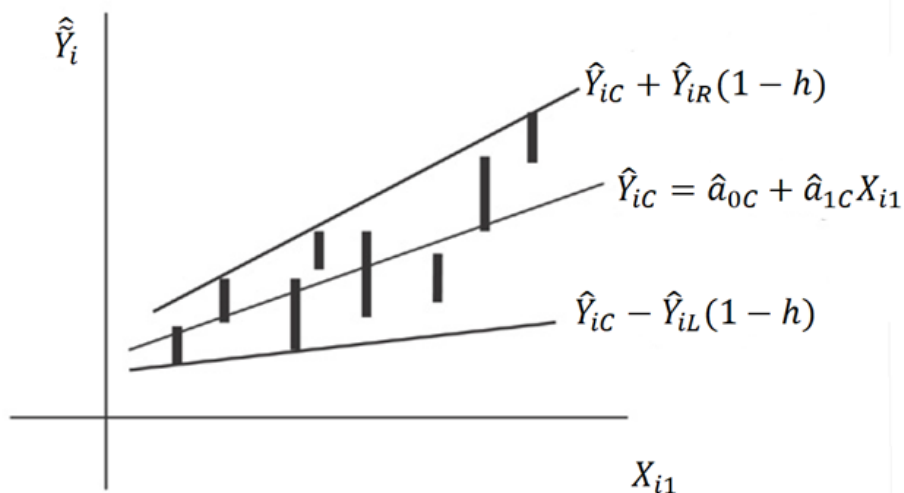
$$\hat{a}_{0L}, \hat{a}_{1L}, \hat{a}_{2L}, \dots, \hat{a}_{pL} \geq 0, \quad \hat{a}_{0R}, \hat{a}_{1R}, \hat{a}_{2R}, \dots, \hat{a}_{pR} \geq 0 \quad \text{και} \quad X_{i0} = 1 \quad \forall \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

1. Όπου z είναι η συνολική ασάφεια του μοντέλου παλινδρόμησης.
2. Το ανωτέρω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού μπορεί να λειτουργήσει είτε με ασαφή δεδομένα παρατηρήσεων της μορφής $\tilde{Y}_i = (Y_{iC}, Y_{iL}, Y_{iR})$ είτε με συμβατικά, στην περίπτωση των οποίων $Y_{iL} = Y_{iR} = 0$. (Αφού ένας συμβατικός αριθμός είναι ειδική περίπτωση ενός ασαφούς αριθμού).
3. Γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι το παραπάνω μοντέλο λειτουργεί και για συμμετρικούς τριγωνικούς ασαφείς αριθμούς ($Y_{iL} = Y_{iR}$).
4. Για $p = 1$ το μοντέλο ανάγεται σε αυτό της απλής ασαφούς παλινδρόμησης.
5. Το πλεονέκτημα του εν λόγω μοντέλου είναι η απλότητά του στον προγραμματισμό και στους υπολογισμούς καθώς και ότι αρκετές από τις αυστηρές στατιστικές υποθέσεις χαλαρώνουν σε σημαντικό βαθμό.
6. Κατόπιν της επίλυσης του ανωτέρω προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού, στο Σχήμα 2.2 που ακολουθεί αποτυπώνεται το σύνολο βαθμού εμπιστοσύνης h του γραμμικού ασαφούς μοντέλου για ζεύγη εισόδου-εξόδου (ανεξάρτητων-εξαρτημένων μεταβλητών) που απεικονίζονται από μαύρους κύκλους.

7. Από το Σχήμα 2.2 που ακολουθεί, γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι όλα τα δοθέντα ζεύγη εισόδου-εξόδου περιλαμβάνονται στο σύνολο βαθμού εμπιστοσύνης h .
8. Το Σχήμα 2.3, αποτυπώνει γραφικά το τρόπο με τον οποίο δουλεύει η μέθοδος παλινδρόμησης των Ishibuchi και Nii (2001) (χάριν απλότητας απεικονίζεται απλή παλινδρόμηση). Οι εξαρτημένες μεταβλητές παριστάνονται με παχιές μαύρες γραμμές διότι είναι διαστήματα εμπιστοσύνης και όχι συμβατικοί αριθμοί.



Σχήμα 2.2: Το σύνολο βαθμού εμπιστοσύνης h



Σχήμα 2.3: Γραφική αναπαράσταση του μοντέλου των Ishibuchi και Nii

Η κριτική του μοντέλου

Η παράγραφος κλείνει με την επισήμανση των μειονεκτημάτων του μοντέλου σύμφωνα με τον de Andrés-Sánchez (2016).

1. Το μοντέλο είναι εξαιρετικά ευαίσθητο σε ακραίες τιμές, καθώς όλες οι παρατηρήσεις της εξαρτημένης μεταβλητής πρέπει να περιλαμβάνονται στην εκτιμώμενη τιμή τους. Ως εκ τούτου, θα παρατηρείται αξιοσημείωτη αύξηση στις αποκλίσεις (spreads) των εκτιμήσεων αν υπάρχουν ακραίες τιμές στο δείγμα, άρα οι προβλέψεις του μοντέλου θα είναι υπερβολικά αβέβαιες για να αξιοποιηθούν.
2. Η απόκλιση της εκτιμώμενης μεταβλητής μεγαλώνει όσο το μέγεθος της ανεξάρτητης μεταβλητής αυξάνει.
3. Η πολυπλοκότητα του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού προς επίλυση αυξάνεται ιδιαίτερα, αφού για κάθε νέα παρατήρηση απαιτείται να προστεθούν δύο νέοι περιορισμοί και επομένως το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης πρέπει να επαναδιατυπωθεί.
4. Τα κριτήρια επιλογής του βαθμού εμπιστοσύνης h είναι αυθαίρετα. Σύνηθες είναι να αποδίδεται στο βαθμό εμπιστοσύνης η τιμή 0,5 όμως δεν είναι απαραίτητα η καλύτερη επιλογή και δεν έχει θεμελιωθεί λόγος επιλογής της συγκεκριμένης τιμής. Καθώς όμως η τιμή του h έχει υψίστης σημασίας επίδραση στις αποκλίσεις των εκτιμώμενων παραμέτρων, η επιλογή κατάλληλης τιμής διαδραματίζει ιδιαίτερος ζωτικό ρόλο ώστε να επαφίεται στην ανθρώπινη κρίση με δυσδιάκριτα, θολά και δύσκολα στην εφαρμογή όρια.
5. Το εν λόγω μοντέλο στερείται σύνδεσης με την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων και κατ' επέκταση με την αντίστοιχη μέθοδο παλινδρόμησης. Συνεπώς, φυσικό επακόλουθο θα ήταν η ενσωμάτωση του κριτηρίου των ελαχίστων τετραγώνων στην ασαφή παλινδρόμηση, όπως περιγράφεται στην ενότητα που έπεται.

2.4.3 Υβριδική ασαφής παλινδρόμηση ελαχίστων τετραγώνων

Για την ενσωμάτωση τόσο της ασάφειας όσο και της τυχαιότητας σε ένα μοντέλο παλινδρόμησης, το οποίο επιπροσθέτως μετέρχεται την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων, εισήχθη (Chang 2001) η έννοια της υβριδικής παλινδρόμησης. Η μέθοδος αυτή επιτρέπει σε ένα μοντέλο να προσαρμόζεται τόσο σε ασαφή (fuzzy) δεδομένα όσο και σε συμβατικά (crisp) καθώς και στη μίξη αυτών, αντιμετωπίζοντας αποτελεσματικά ταυτοχρόνως τα μειονεκτήματα της προαναφερθείσας τεχνικής ασαφούς παλινδρόμησης.

2.4.3.1 Το μοντέλο της απλής υβριδικής παλινδρόμησης

Οι ασαφείς αριθμοί που θα χρησιμοποιηθούν είναι μη-συμμετρικοί τριγωνικοί ασαφείς αριθμοί. Το μοντέλο της απλής υβριδικής παλινδρόμησης δύναται να εκφραστεί ως (βλέπε Chang 2001).

$$\tilde{Y}_i = \tilde{A}_0 \oplus \tilde{A}_1 X_i = (a_{0C}, a_{0L}, a_{0R}) \oplus (a_{1C}, a_{1L}, a_{1R}) X_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.53)$$

ή ισοδύναμα ως

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_i &= (Y_{iC}, Y_{iL}, Y_{iR}) \\ &= (a_{0C} + a_{1C}X_i, a_{0L} + a_{1L}X_i, a_{0R} + a_{1R}X_i). \end{aligned} \quad (2.54)$$

Όπου a_{jC} είναι το κέντρο, a_{jL} η αριστερή απόκλιση και a_{jR} η δεξιά απόκλιση του ασαφούς αριθμού με $j \in \{0, 1\}$.

Παρόμοια, κάθε εκτιμώμενη τιμή \tilde{Y}_i μπορεί να εκφραστεί ως

$$\begin{aligned} \hat{\tilde{Y}}_i &= (\hat{Y}_{iC}, \hat{Y}_{iL}, \hat{Y}_{iR}) \\ &= (\hat{a}_{0C} + \hat{a}_{1C}X_i, \hat{a}_{0L} + \hat{a}_{1L}X_i, \hat{a}_{0R} + \hat{a}_{1R}X_i). \end{aligned} \quad (2.55)$$

Ορίζονται

$${}^\mu Y_{i,L} = Y_{iC} - (1 - \mu) Y_{iL}, \quad (2.56)$$

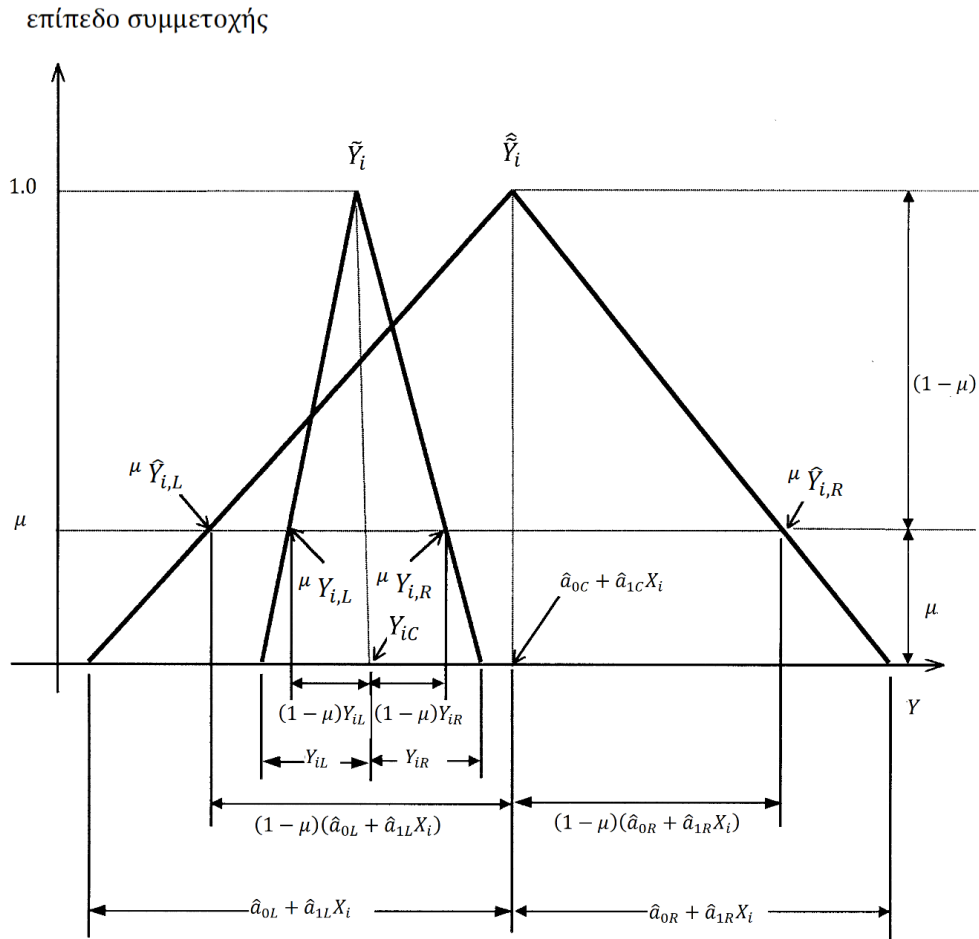
$${}^{\mu}Y_{i,R} = Y_{iC} - (1 - \mu) Y_{iR}, \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned} {}^{\mu}\widehat{Y}_{i,L} &= [\widehat{a}_{0C} - (1 - \mu)\widehat{a}_{0L}] + [\widehat{a}_{1C} - (1 - \mu)\widehat{a}_{1L}] X_i \\ &= (\widehat{a}_{0C} + \widehat{a}_{1C}X_i) - (1 - \mu)(\widehat{a}_{0L} + \widehat{a}_{1L}X_i), \end{aligned} \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned} {}^{\mu}\widehat{Y}_{i,R} &= [\widehat{a}_{0C} - (1 - \mu)\widehat{a}_{0R}] + [\widehat{a}_{1C} - (1 - \mu)\widehat{a}_{1R}] X_i \\ &= (\widehat{a}_{0C} + \widehat{a}_{1C}X_i) - (1 - \mu)(\widehat{a}_{0R} + \widehat{a}_{1R}X_i). \end{aligned} \quad (2.59)$$

Όπου ${}^{\mu}Y_{i,L}$, ${}^{\mu}Y_{i,R}$ είναι το αριστερό και το δεξιό σύνορο αντίστοιχα της παρατηρούμενης \widetilde{Y}_i σε επίπεδο συμμετοχής μ (Σχήμα 2.4).

Ενώ ${}^{\mu}\widehat{Y}_{i,L}$, ${}^{\mu}\widehat{Y}_{i,R}$ είναι το αριστερό και το δεξιό σύνορο αντίστοιχα της εκτιμώμενης \widehat{Y}_i σε επίπεδο συμμετοχής μ (Σχήμα 2.4).



Σχήμα 2.4: Τυχαιο σφάλμα μεταξύ εκτιμώμενου \widehat{Y}_i και παρατηρούμενου \widetilde{Y}_i

Κάνοντας χρήση σταθμισμένης ασαφούς αριθμητικής, το άθροισμα των τυχαίων σφαλμάτων μεταξύ της εκτιμώμενης \widehat{Y}_i και της παρατηρούμενης \widetilde{Y}_i διατυπώνεται ως

$$\begin{aligned} \sum (\widetilde{\varepsilon}_i)^2 &= \sum_{i=1}^n \left(\widehat{Y}_i - \widetilde{Y}_i \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\left\{ \int_0^1 \left[\left({}^\mu \widehat{Y}_{i,L} - {}^\mu Y_{i,L} \right)^2 \mu d\mu \right]_L + \int_0^1 \left[\left({}^\mu \widehat{Y}_{i,R} - {}^\mu Y_{i,R} \right)^2 \mu d\mu \right]_R \right\}}{\int \mu d\mu}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Ο παρονομαστής είναι το ολοκλήρωμα της συνάρτησης συμμετοχής, το οποίο ισούται με τη μονάδα για κανονικοποιημένες τριγωνικές συναρτήσεις συμμετοχής. Έτσι, αντικαθιστώντας στη Σχέση (2.60) τις Σχέσεις (2.56)-(2.59) και επιλύοντας τα ολοκληρώματα του αριθμητή καταλήγουμε στη Σχέση

$$\begin{aligned} F &= \sum (\widetilde{\varepsilon}_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ (\widehat{a}_{0C} + \widehat{a}_{1C} X_i - Y_{iC})^2 + \frac{1}{3} (\widehat{a}_{0C} + \widehat{a}_{1C} X_i - Y_{iC}) \right. \\ &\quad \cdot \left[(\widehat{a}_{0R} + \widehat{a}_{1R} X_i - Y_{iR}) - (\widehat{a}_{0L} + \widehat{a}_{1L} X_i - Y_{iL}) \right] \\ &\quad \left. + \frac{1}{12} \left[(\widehat{a}_{0L} + \widehat{a}_{1L} X_i - Y_{iL})^2 + (\widehat{a}_{0R} + \widehat{a}_{1R} X_i - Y_{iR})^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Η Σχέση (2.61) περιέχει έξι αγνώστους ($\widehat{a}_{0C}, \widehat{a}_{1C}, \widehat{a}_{0L}, \widehat{a}_{1L}, \widehat{a}_{0R}, \widehat{a}_{1R}$). Προκειμένου να εξαχθεί μία φόρμουλα υπολογισμού των αγνώστων συντελεστών της παλινδρόμησης με βάση την ελαχιστοποίηση της ποσότητας F πρέπει να υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι της F ως προς κάθε άγνωστο, στη συνέχεια να τεθεί ίση με μηδέν η καθεμία και να επιλυθεί το σύστημα που θα προκύψει.

Πιο συγκεκριμένα,

$$\frac{\partial F}{\partial \hat{a}_{0C}} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \hat{a}_{1C}} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \hat{a}_{0L}} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \hat{a}_{1L}} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \hat{a}_{0R}} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \hat{a}_{1R}} = 0.$$

Το ανωτέρω 6×6 σύστημα εξισώσεων μπορεί να απλοποιηθεί χρησιμοποιώντας μετασχηματισμούς γραμμών για πίνακες λαμβάνοντας ένα γραμμικά ισοδύναμο σύστημα το οποίο έχει το ίδιο σύνολο λύσεων με το αρχικό. Συνεπώς, το σύστημα απλοποιείται στα ακόλουθα τρία, 2×2 , συστήματα εξισώσεων

$$n\hat{a}_{0C} + \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) \hat{a}_{1C} = \sum_{i=1}^n Y_i \quad (2.62)$$

$$\left(\sum_{i=1}^n X_i \right) \hat{a}_{0C} + \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 \right) \hat{a}_{1C} = \sum_{i=1}^n (X_i Y_i) \quad (2.63)$$

$$n\hat{a}_{0L} + \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) \hat{a}_{1L} = \sum_{i=1}^n Y_{iL} \quad (2.64)$$

$$\left(\sum_{i=1}^n X_i \right) \hat{a}_{0L} + \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 \right) \hat{a}_{1L} = \sum_{i=1}^n (X_i Y_{iL}) \quad (2.65)$$

$$n\hat{a}_{0R} + \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) \hat{a}_{1R} = \sum_{i=1}^n Y_{iR} \quad (2.66)$$

$$\left(\sum_{i=1}^n X_i \right) \hat{a}_{0R} + \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 \right) \hat{a}_{1R} = \sum_{i=1}^n (X_i Y_{iR}). \quad (2.67)$$

- Από τις (2.62) και (2.63) μπορούμε να επιλύσουμε ως προς \hat{a}_{0C} και \hat{a}_{1C} .
- Από τις (2.64) και (2.65) μπορούμε να επιλύσουμε ως προς \hat{a}_{0L} και \hat{a}_{1L} .
- Από τις (2.66) και (2.67) μπορούμε να επιλύσουμε ως προς \hat{a}_{0R} και \hat{a}_{1R} .

Στην περίπτωση που χρησιμοποιούνται συμμετρικοί τριγωνικοί ασαφείς αριθμοί αντί των μη-συμμετρικών, το αρχικό σύστημα απλοποιείται περαιτέρω σε 2 συστήματα 2×2 αντί των τριών, πιο συγκεκριμένα το σύστημα για την εύρεση των κέντρων των ασαφών αριθμών παραμένει ως έχει, ενώ στην περίπτωση των συμμετρικών αριθμών η αριστερή απόκλιση είναι ίση με τη δεξιά, οπότε απαιτούνται άλλες δύο εξισώσεις αντί των τεσσάρων.

Παρατήρηση

Από τη Σχέση (2.54)

$$\begin{aligned}\tilde{Y}_i &= (Y_{iC}, Y_{iL}, Y_{iR}) \\ &= (a_{0C} + a_{1C}X_i, a_{0L} + a_{1L}X_i, a_{0R} + a_{1R}X_i) \\ &\Rightarrow \begin{cases} Y_{iC} = a_{0C} + a_{1C}X_i \\ Y_{iL} = a_{0L} + a_{1L}X_i, & (i = 1, 2, \dots, n). \\ Y_{iR} = a_{0R} + a_{1R}X_i \end{cases} \quad (2.68)\end{aligned}$$

Οπότε, ένας εναλλακτικός τρόπος εκτίμησης των συντελεστών είναι η διενέργεια μιας παλινδρόμησης σε καθεμία από τις παραπάνω εξισώσεις, δηλαδή τρεις στο σύνολο. Η πρώτη εκτιμά τους συντελεστές a_{0C} , a_{1C} , η δεύτερη τους συντελεστές a_{0L} , a_{1L} και η τρίτη εκτιμά τέλος τους a_{0R} , a_{1R} .

2.4.3.2 Το μοντέλο της υβριδικής πολλαπλής παλινδρόμησης

Το μοντέλο της απλής υβριδικής παλινδρόμησης μπορεί να επεκταθεί σε μοντέλο πολλαπλής παλινδρόμησης. Το γραμμικό υβριδικό πολυμεταβλητό μοντέλο συνδέει μια εξαρτημένη μεταβλητή \tilde{Y}_i με δύο ή περισσότερες ανεξάρτητες μεταβλητές όπως ακριβώς στην Υποενότητα 2.4.2 της ασαφούς παλινδρόμησης με χρήση της αρχής ελάχιστης ασάφειας

(Σχέση 2.43)

$$\tilde{Y}_i := \tilde{A}_0 \oplus \tilde{A}_1 X_{i1} \oplus \tilde{A}_2 X_{i2} \oplus \dots \oplus \tilde{A}_p X_{ip}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Με όμοιο ακριβώς τρόπο αποδεικτικής διεργασίας όπως στο μοντέλο της απλής υβριδικής παλινδρόμησης καταλήγουμε σε τρία συστήματα $p + 1$ εξισώσεων με $p + 1$ αγνώστους το καθένα.

Πιο συγκεκριμένα, για το σετ δεδομένων $(X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ip}), (Y_{iC}, Y_{iL}, Y_{iR}), i = 1, 2, \dots, n$ έχουμε τα εξής τρία συστήματα:

1. Σύστημα για την εύρεση των $\hat{a}_{0C}, \hat{a}_{1C}, \hat{a}_{2C}, \dots, \hat{a}_{pC}$ εκτιμήσεων των κέντρων των ασαφών συντελεστών της παλινδρόμησης (2.69) - (2.71).
2. Σύστημα για την εύρεση των $\hat{a}_{0L}, \hat{a}_{1L}, \hat{a}_{2L}, \dots, \hat{a}_{pL}$ εκτιμήσεων των αριστερών αποκλίσεων των ασαφών συντελεστών της παλινδρόμησης (2.72) - (2.74).
3. Σύστημα για την εύρεση των $\hat{a}_{0R}, \hat{a}_{1R}, \hat{a}_{2R}, \dots, \hat{a}_{pR}$ εκτιμήσεων των δεξιών αποκλίσεων των ασαφών συντελεστών της παλινδρόμησης (2.75) - (2.77).

$$n\hat{a}_{0C} + \left(\sum_{i=1}^n X_{i1} \right) \hat{a}_{1C} + \dots + \left(\sum_{i=1}^n X_{ip} \right) \hat{a}_{pC} = \sum_{i=1}^n Y_{iC} \quad (2.69)$$

$$\left(\sum_{i=1}^n X_{i1} \right) \hat{a}_{0C} + \left(\sum_{i=1}^n X_{i2}^2 \right) \hat{a}_{1C} + \dots + \left(\sum_{i=1}^n X_{ip} \right) \hat{a}_{pC} = \sum_{i=1}^n X_{i1} Y_{iC} \quad (2.70)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\left(\sum_{i=1}^n X_{ip} \right) \hat{a}_{0C} + \left(\sum_{i=1}^n X_{ip} \right) \hat{a}_{1C} + \dots + \left(\sum_{i=1}^n X_{ip}^2 \right) \hat{a}_{pC} = \sum_{i=1}^n X_{ip} Y_{iC} \quad (2.71)$$

$$n\hat{a}_{0L} + \left(\sum_{i=1}^n X_{i1} \right) \hat{a}_{1L} + \dots + \left(\sum_{i=1}^n X_{ip} \right) \hat{a}_{pL} = \sum_{i=1}^n Y_{iL} \quad (2.72)$$

$$\left(\sum_{i=1}^n X_{i1} \right) \hat{a}_{0L} + \left(\sum_{i=1}^n X_{i2}^2 \right) \hat{a}_{1L} + \dots + \left(\sum_{i=1}^n X_{ip} \right) \hat{a}_{pL} = \sum_{i=1}^n X_{i1} Y_{iL} \quad (2.73)$$

$$\begin{array}{cccc} \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \left(\sum_{i=1}^n X_{ip}\right) \hat{a}_{0L} + \left(\sum_{i=1}^n X_{ip}\right) \hat{a}_{1L} + \dots + \left(\sum_{i=1}^n X_{ip}^2\right) \hat{a}_{pL} & = & \sum_{i=1}^n X_{ip} Y_{iL} & (2.74) \end{array}$$

$$n\hat{a}_{0R} + \left(\sum_{i=1}^n X_{i1}\right) \hat{a}_{1R} + \dots + \left(\sum_{i=1}^n X_{ip}\right) \hat{a}_{pR} = \sum_{i=1}^n Y_{iR} \quad (2.75)$$

$$\left(\sum_{i=1}^n X_{i1}\right) \hat{a}_{0R} + \left(\sum_{i=1}^n X_{i2}^2\right) \hat{a}_{1R} + \dots + \left(\sum_{i=1}^n X_{ip}\right) \hat{a}_{pR} = \sum_{i=1}^n X_{i1} Y_{iR} \quad (2.76)$$

$$\begin{array}{cccc} \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \left(\sum_{i=1}^n X_{ip}\right) \hat{a}_{0R} + \left(\sum_{i=1}^n X_{ip}\right) \hat{a}_{1R} + \dots + \left(\sum_{i=1}^n X_{ip}^2\right) \hat{a}_{pR} & = & \sum_{i=1}^n X_{ip} Y_{iR}. & (2.77) \end{array}$$

Παρατήρηση

Καθένα εκ των ανωτέρω τριών συστημάτων εξισώσεων είναι όμοιο με τη συνήθη πολλαπλή παλινδρόμηση ελαχίστων τετραγώνων. Συνεπώς, επιτρέπουν τη χρήση των γνωστών μεθόδων της συνήθους πολλαπλής παλινδρόμησης στο αντίστοιχο υβριδικό μοντέλο. Τα εκτιμώμενα κέντρα (και αντίστοιχα οι αριστερές και δεξιές αποκλίσεις) των ασαφών συντελεστών της παλινδρόμησης δύναται να υπολογισθούν με τη χρήση συνήθους πολλαπλής παλινδρόμησης θέτοντας ως εξαρτημένη μεταβλητή την Y_{iC} (Y_{iL} και Y_{iR} αντίστοιχα) και ως ανεξάρτητη το διάνυσμα $(X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ip})$ με $i = 1, 2, \dots, n$.

2.4.3.3 Μέτρα αξιοπιστίας για το υβριδικό μοντέλο παλινδρόμησης

Κατόπιν της εκτίμησης των συντελεστών της παλινδρόμησης, παρουσιάζει ενδιαφέρον η αξιολόγηση της αξιοπιστίας του υβριδικού μοντέλου.

- Όλοι οι υπολογισμοί της παραγράφου πραγματοποιούνται με τη χρήση σταθμισμένης ασαφούς αριθμητικής.
- Γίνεται χρήση μη-συμμετρικών τριγωνικών ασαφών αριθμών (Y_{iC}, Y_{iL}, Y_{iR}) οι οποίοι αποτελούν γενίκευση των συμμετρικών (Y_{iC}, Y_{iS}) με $Y_{iS} = Y_{iL} = Y_{iR}$.

1. Αριθμητικός Μέσος \tilde{Y}

$$\tilde{Y} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{Y}_i = \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n Y_{iC} + \frac{1}{6} \left(\sum_{i=1}^n Y_{iR} - \sum_{i=1}^n Y_{iL} \right) \right]. \quad (2.78)$$

2. Τυπική Απόκλιση $S_{\tilde{y}}$

$$S_{\tilde{y}} := \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\tilde{Y}_i - \tilde{Y})^2}, \quad (2.79)$$

όπου

$$\sum_{i=1}^n (\tilde{Y}_i - \tilde{Y})^2 = \sum_{i=1}^n \left\{ (Y_{iC} - \tilde{Y})^2 + \frac{1}{6} \tilde{Y} (Y_{iR} - Y_{iL}) + \frac{1}{12} [(Y_{iR})^2 - (Y_{iL})^2] \right\}.$$

3. Υβριδικός Συντελεστής Συσχέτισης $(HR)^2$

$$(HR)^2 := \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \tilde{Y})^2}{\sum_{i=1}^n (\tilde{Y}_i - \tilde{Y})^2}, \quad (2.80)$$

όπου ο αριθμητής του κλάσματος (2.80) ισούται με

$$\sum_{i=1}^n \left\{ (\hat{Y}_{iC} - \tilde{Y})^2 + \frac{1}{3} \tilde{Y} (\hat{Y}_{iR} - \hat{Y}_{iL}) + \frac{1}{12} [(\hat{Y}_{iL})^2 + (\hat{Y}_{iR})^2] \right\},$$

ενώ ο παρονομαστής είναι ίσος με

$$\sum_{i=1}^n \left\{ (Y_{iC} - \tilde{Y})^2 + \frac{1}{3} \tilde{Y} (Y_{iR} - Y_{iL}) + \frac{1}{12} [(Y_{iL})^2 + (Y_{iR})^2] \right\}.$$

4. Υβριδική Τυπική Απόκλιση των Εκτιμήσεων HS_e

$$HS_e := \sqrt{\frac{1}{n - (p + 1)} \sum_{i=1}^n \left(\widehat{Y}_i - \widetilde{Y}_i \right)^2}, \quad (2.81)$$

όπου

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left(\widehat{Y}_i - \widetilde{Y}_i \right)^2 &= \sum_{i=1}^n \left(\widehat{Y}_{iC} - Y_{iC} \right)^2 \\ &+ \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n \left(\widehat{Y}_i - \widetilde{Y}_i \right) \left[\left(\widehat{Y}_{iR} - Y_{iR} \right) - \left(\widehat{Y}_{iL} - Y_{iL} \right) \right] \\ &+ \frac{1}{12} \sum_{i=1}^n \left[\left(\widehat{Y}_{iR} - Y_{iR} \right)^2 + \left(\widehat{Y}_{iL} - Y_{iL} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Παρατηρήσεις

- Ο υβριδικός συντελεστής συσχέτισης $(HR)^2$ χρησιμοποιείται για την αξιολόγηση της υπόθεσης γραμμικότητας του υβριδικού γραμμικού μοντέλου παλινδρόμησης.
- Η υβριδική τυπική απόκλιση των εκτιμήσεων HS_e χρησιμοποιείται για να μετρήσει την καλή προσαρμογή του υβριδικού μοντέλου παλινδρόμησης στα παρατηρηθέντα ασαφή δεδομένα. Όπου $[n - (p + 1)]$ είναι οι βαθμοί ελευθερίας, διότι $p + 1$ βαθμοί ελευθερίας έχουν χαθεί για την εκτίμηση των $\widehat{A}_0, \widehat{A}_1, \widehat{A}_2, \dots, \widehat{A}_p$ που πραγματοποιήθηκε για να λάβουμε την εκτιμώμενη τιμή \widehat{Y}_i . Επίσης, θα μπορούσε να ειπωθεί ότι είναι ανάλογη με το συντελεστή προσδιορισμού R^2 της συνήθους παλινδρόμησης.
- Για το μοντέλο των δύο μεταβλητών ισχύει $p = 1$.
- Όσο μικρότερη είναι η τιμή της υβριδικής τυπικής απόκλισης των εκτιμήσεων HS_e , τόσο καλύτερη είναι η προσαρμογή του μοντέλου στα δεδομένα και τόσο ακριβέστερες οι εκτιμήσεις.
- $0 \leq HS_e \leq S_{\widetilde{y}}$.

- Αν η τιμή της υβριδικής τυπικής απόκλισης των εκτιμήσεων HS_e είναι κοντά ή μεγαλύτερη από την τυπική απόκλιση $S_{\tilde{y}}$, η υβριδική ανάλυση παλινδρόμησης θεωρείται ανεπιτυχής και κρίνεται αναγκαία η εφαρμογή εναλλακτικών μεθόδων παλινδρόμησης.
- Εφόσον η τυπική απόκλιση $S_{\tilde{y}}$ είναι σταθερή και ανεξάρτητη από τη μέθοδο παλινδρόμησης που εφαρμόστηκε, ο λόγος $\frac{(HS_e)}{S_{\tilde{y}}}$ είναι ένα κανονικοποιημένο μέτρο ελέγχου καλής προσαρμογής. Επομένως, οι τιμές των HS_e και $\frac{(HS_e)}{S_{\tilde{y}}}$ δύνανται να χρησιμοποιηθούν προς αξιολόγηση της αποτελεσματικότητας των διαφόρων μεθόδων παλινδρόμησης.

Για τα μοντέλα πολλαπλής παλινδρόμησης, η λογική των συντελεστών παλινδρόμησης και η σχετική σημαντικότητα των ανεξάρτητων μεταβλητών χρειάζεται να αξιολογηθεί. Για το σκοπό αυτό, ορίζεται ένας μερικώς τυποποιημένος συντελεστής παλινδρόμησης

$$t_j := \tilde{A}_j \frac{S_x}{S_{\tilde{y}}}, \quad -1 \leq t_j \leq 1, \quad (2.82)$$

όπου \tilde{A}_j είναι ο συντελεστής της j -οστής ανεξάρτητης μεταβλητής προς αξιολόγηση και $S_x, S_{\tilde{y}}$ είναι οι τυπικές αποκλίσεις των ανεξάρτητων και εξαρτημένων μεταβλητών αντίστοιχα. Όσο μεγαλύτερη είναι η απόλυτη τιμή της t_j , τόσο σημαντικότερη είναι η αντίστοιχη ανεξάρτητη μεταβλητή.

Σημείωση

Προς αποφυγή σύγχυσης του συμβολισμού σημειώνουμε ότι, όπως πιθανώς να έχει γίνει ήδη αντιληπτό, η τίλντα ή αγγλιστί tilde (\sim) χρησιμοποιείται για να παραστήσει έναν ασαφή αριθμό και όχι κάποια εκτίμηση, η οποία ειρήσθω εν παρόδω συμβολίζεται με το γνωστό καπέλο $\hat{}$ (hat). Κατά συνέπεια όλα τα γνωστά στατιστικά σύμβολα διατηρούν την λειτουργία τους και σε συνδυασμό με τους ασαφείς αριθμούς.

Κεφάλαιο 3

Αποθεματοποίηση Ζημιών

3.1 Εισαγωγή

Η αποθεματοποίηση ζημιών συνιστά μία εκ των πιο καίριας σημασίας συντελούμενων σε μία ασφαλιστική εταιρεία διεργασιών (de Andrés Sánchez, 2006). Ο υπολογισμός των αποθεμάτων είναι η αναλογιστική διαδικασία εκτίμησης του ποσού που απαιτείται να διαθέτει η εταιρεία για την αποπληρωμή μελλοντικών ζημιών, που απορρέουν από τα υφιστάμενα εν ισχύ συμβόλαιά της όπως και από συμβόλαια που ενεγράφησαν κατά τη διάρκεια παρελθουσών ετών, καθώς και των εξόδων διακανονισμού αυτών. Προφανώς, έως την οριστική διευθέτηση των ζημιών δεν είναι γνωστό το τελικό ύψος του ποσού πληρωμής από την εταιρεία. Η πρόβλεψη επαρκούς ποσού αποθέματος είναι υψίστης σημασίας για την κάλυψη των αναληφθέντων από την εταιρεία κινδύνων και υποχρεώσεων και κατ' επέκταση την εύρυθμη και απρόσκοπτη λειτουργία της. Μολονότι υπάρχουν ουκ ολίγες παραλλαγές στον τρόπο καταβολής των ασφαλίσεων, συνήθως αυτή περατώνεται νωρίτερα από κάποια ενδεχόμενη καταβολή αποζημίωσης. Ως εκ τούτου, η εταιρεία πρέπει να εκτιμήσει όσο ορθότερα δύναται, στο μέτρο του εφικτού, τις ενδεχόμενες επικείμενες απαιτήσεις με τον καταρτισμό προβλέψεων στο πλαίσιο του ισολογισμού της ώστε να αντικατοπτρίζεται, όσο το δυνατόν ακριβέστερα, το κόστος των ενδεχόμενων απαιτήσεων. Ο προσδιορισμός της αξίας των μελλοντικών απαιτήσεων χρήζει ιδιαίτερης προσοχής κυρίως κατά την επιλογή της καταλληλότερης, ανά την περίπτωση, αναλογιστικής μεθόδου καθώς ενέχει ο κίνδυνος είτε της υπο-αποθεματοποίησης είτε της υπερ-

αποθεματοποίησης (de Andrés Sánchez, 2007), καμία εκ των οποίων δεν συνιστάται για διαφορετικούς, αλλά εξίσου σημαντικούς λόγους.

Το απόθεμα ζημιών, ή με άλλα λόγια η τεχνική πρόβλεψη, περιλαμβάνει εκτιμώμενα ποσά που προορίζονται για την πληρωμή των τελικών απαιτήσεων. Οι τελικές απαιτήσεις αποτελούν άθροισμα τριών συνισταμένων:

1. Των πληρωθεισών αθροιστικών ζημιών (cumulative paid claims).
2. Των εκκρεμών ζημιών (outstanding claims).
3. Των ζημιών που έχουν συμβεί χωρίς να έχουν αναφερθεί (Incurred But Not Reported ή IBNR).

Οι σχέσεις μεταξύ των τριών παραπάνω συνισταμένων ποικίλλουν σημαντικά ανάλογα με τον ασφαλιστικό τομέα (line of business), τη νομολογία και την υπό εξέταση χρονική περίοδο (πρόσφατα με παλαιότερα έτη ατυχημάτων για παράδειγμα). Διαφορές στις σχέσεις παρουσιάζονται επίσης ανάμεσα στις εταιρείες του κλάδου, ανάλογα με τη φιλοσοφία και τις διαδικασίες διαχείρισης των απαιτήσεων της εκάστοτε εταιρείας.

Οι πληρωθείσες και οι εκκρεμείς απαιτήσεις αντιπροσωπεύουν συνήθως ένα υψηλό ποσοστό των τελικών απαιτήσεων για ασφαλιστικούς τομείς των υλικών ζημιών προκληθέντων σε αυτοκινητιστικά ατυχήματα και της ιδιοκτησίας. Οι προαναφερθέντες τομείς ασφάλισης χαρακτηρίζονται ως τομείς βραχείας διάρκειας λόγω της σύντομης χρονικής διάρκειας που σχετίζεται με τις διαδικασίες αναφοράς και διακανονισμού των απαιτήσεων. Από την άλλη μεριά, περιστατικά ιατρικής αμέλειας, εργατικές αποζημιώσεις και γενικές ασφαλίσες αστικής ευθύνης είναι παράδειγμα ασφαλιστικών τομέων ταξινομηθέντων ως μακροπρόθεσμων, λόγω της μακράς διάρκειας που σχετίζεται με τις διαδικασίες αναφοράς και διακανονισμού των απαιτήσεων.

3.1.1 Ορισμοί αποθεμάτων ζημιών

Οι διαδικασίες εκτίμησης του αποθέματος ζημιών εφαρμόζονται μόνο σε ομαδοποιημένα δεδομένα. Η απογραφή των ζημιών πρέπει να κατανέμεται σε αρχεία απαιτήσεων προερχόμενα από μία χρονική περίοδο με ακριβή ημερομηνία έναρξης και λήξης. Οι τελευταίες

πρέπει να σχετίζονται με τις χαρακτηριστικές ημερομηνίες στη διάρκεια ενός αρχείου απαιτήσεων. Σύμφωνα με τον Πιτσέλη (2017), χαρακτηριστικές ονομάζονται οι ημερομηνίες έκδοσης, απώλειας, έναρξης συμβολαίου και λοιπά, δηλαδή αυτές στις οποίες συνέβη ένα σημαντικό γεγονός κατά τη διάρκεια της απαίτησης. Επίσης, η απογραφή πρέπει να καθορίζεται στους όρους των απαιτήσεων από συγκεκριμένη γεωγραφική τοποθεσία και πολιτική κάλυψης ασφαλιστικού συμβολαίου για λόγους ομοιογένειας και αξιοπιστίας.

Τα συνολικά αποθέματα ζημιών συνίστανται από πέντε επιμέρους στοιχεία:

1. Αποθέματα που προορίζονται για την αποπληρωμή συγκεκριμένων απαιτήσεων.
2. Πρόβλεψη για τη μελλοντική εξέλιξη γνωστών απαιτήσεων.
3. Πρόβλεψη απαιτήσεων που επανενεργοποιούνται μετά το κλείσιμό τους.
4. Πρόβλεψη απαιτήσεων που έχουν ήδη συμβεί όμως δεν έχουν ακόμη αναγγελθεί στην εταιρεία (IBNR).
5. Πρόβλεψη απαιτήσεων που έχουν αναγγελθεί στην εταιρεία αλλά δεν έχουν ακόμη καταγραφεί ή υπολογιστεί.

Τα αποθέματα ζημιών επιμερίζονται σε δύο κατηγορίες:

- Αποθέματα γνωστών απαιτήσεων: αντιπροσωπεύουν το ποσό που απαιτείται για μελλοντικές πληρωμές ζημιών που έχουν ήδη αναγγελθεί στην εταιρεία (στοιχεία 1, 2 και 3).
- Αποθέματα άγνωστων απαιτήσεων: αντιπροσωπεύουν το ποσό που απαιτείται για ζημιές που έχουν συμβεί και δεν έχουν ακόμη αναγγελθεί (IBNR) και για ζημιές που έχουν αναγγελθεί στην εταιρεία αλλά δεν έχουν υπολογιστεί (στοιχεία 4 και 5).

3.1.2 Στρατηγική εκτίμησης αποθέματος

Η συνολική προσέγγιση ενός προβλήματος εκτίμησης αποθέματος χωρίζεται σε τέσσερις φάσεις (Πιτσέλης 2017).

1. Απαιτείται η διενέργεια επανεξέτασης των δεδομένων ούτως ώστε να εντοπιστούν τυχόν ανωμαλίες (αν υπάρχουν) και να αναγνωριστούν τα βασικά χαρακτηριστικά τους. Επίσης, μείζονος σημασίας είναι η πραγματοποίηση συγκρίσεων των δεδομένων με έτερες, διαπιστωμένα έγκυρες πηγές.
2. Κατόπιν τίθεται σε εφαρμογή η κατάλληλη τεχνική εκτίμησης αποθέματος.
3. Έπειτα από τη χρήση των διαφόρων μεθόδων εκτίμησης αποθέματος, πραγματοποιείται η καταγραφή των αποτελεσμάτων που δεν συμφωνούν και είναι αναγκαίο να εξηγηθούν ή να εναρμονιστούν.
4. Τέλος, πρέπει να παρουσιαστεί και να προετοιμαστεί η εξέλιξη του αποθέματος όπως αυτή διαγράφεται στα μεταγενέστερα ημερολογιακά έτη.

Παρατηρήσεις

- Η κατανόηση των τάσεων και των αλλαγών που επηρεάζουν τη βάση δεδομένων θεωρείται ζωτικής σημασίας. Πριν την εφαρμογή κάποιας μεθόδου εκτίμησης αποθέματος πρέπει να διεξαχθεί έλεγχος στα διαθέσιμα δεδομένα και να εντοπισθούν οι τάσεις, ει δυνατόν από τα ίδια τα δεδομένα, τα οποία πρέπει να υποδιαιρευθούν ή να συνδυαστούν με σκοπό την επίτευξη της μέγιστης δυνατής ομοιογένειας.
- Η πλήρης γνώση των κύριων πτυχών των συμβολαίων της βάσης εξέτασης, καθώς και διάφορες μεταβολές στα ασφαλιστήρια συμβόλαια κρίνεται αναγκαία για την εξέλιξη και τη μελλοντική διαφοροποίηση μιας ζημιάς.
- Πρωτεύουσας σημασίας είναι η ομοιογένεια της συμπεριφοράς των στοιχείων σε σχέση με την εξέλιξη της ζημιάς, παρόλο που μέρος των δεδομένων δύναται να θεωρηθεί ετερογενές ως προς ορισμένους παράγοντες. Το πλήθος των δεδομένων θα πρέπει να καθιστά εφικτό τον καθορισμό προτύπων.

- Προαπαιτούμενη θεωρείται η βαθιά γνώση του προτύπου της επιχείρησης, καθώς η ανάπτυξή του επηρεάζεται από την ομοιογένεια και την αξιοπιστία των στοιχείων.
- Στο σημείο αυτό έρχεται να προστεθεί και η ομαδοποίηση εξωτερικών δεδομένων άλλων επιχειρήσεων με παρόμοια χαρακτηριστικά συχνότητας και σφοδρότητας (frequency and severity) απωλειών, με ταυτόχρονο διαχωρισμό των απωλειών αυτών που εμφανίζουν διαφορετική συχνότητα.
- Δεδομένα απαιτήσεων που επανενεργοποιούνται, απομονώνονται και εκτιμώνται ξεχωριστά. Οι συχνότητες των απαιτήσεων που επαναδραστηριοποιούνται και επαναδιαπραγματεύονται ποικίλλουν αναλόγως τον ασφαλιστικό τομέα.
- Κατά την ανάλυση πρέπει να λαμβάνονται σοβαρά υπόψιν τυχόν αλλαγές στη λειτουργία της επιχείρησης καθώς και να καταγράφονται προηγούμενες δραστηριότητες αυτής.
- Αλλαγές στη νομοθεσία ή παρελθούσες δικαστικές αποφάσεις έχουν βαρύνουσα σημασία για τον αναλογιστή στην τελική αξιολόγηση της ευθύνης των απωλειών των αποθεμάτων.

3.2 Μέθοδοι Αποθεματοποίησης

Στην παρούσα ενότητα ορίζονται, παρουσιάζονται και αναλύονται στη συμβατική/κλασική τους μορφή οι ακόλουθες μέθοδοι αποθεματοποίησης:

1. Chain ladder ή τριγώνου εξέλιξης ζημιών.
2. London chain ladder.
3. Chain ladder με εκθετικό μοντέλο.
4. Γεωμετρική μέθοδος διαχωρισμού.
5. Bornhuetter-Ferguson.

Πραγματοποιείται επίσης εφαρμογή τους σε ομαδοποιημένα ευρωπαϊκά δεδομένα ζημιών δέκα ετών (2009-2018) του υποκλάδου αυτοκινήτου, ο οποίος εμπίπτει στον κλάδο ιδιοκτησίας και ατυχημάτων (property and casualty ή p&c), της ασφαλιστικής εταιρείας Zurich Insurance Group Ltd που αντλήθησαν από τη δήλωση γνωστοποίησης αποθέματος (p&c reserve disclosure) της ίδιας της εταιρείας για το 2018. Όλα τα ποσά είναι σε Ευρώ.

3.2.1 Μέθοδος chain ladder ή τριγώνου εξέλιξης ζημιών

Η μέθοδος chain ladder ή τριγώνου εξέλιξης ζημιών είναι μία από τις ευρύτερα χρησιμοποιούμενες μεθόδους αποθεματοποίησης ζημιών στην αναλογιστική πρακτική, διότι παρόλη την απλότητά της παράγει εξαιρετικά αποτελέσματα. Σύμφωνα με τον Friedland (2010), βρίσκει εφαρμογή τόσο στον τομέα ιδιοκτησίας και ατυχημάτων (property and casualty), όσο και στο πεδίο των ασφαλίσεων υγείας (health insurance). Στόχος της μεθόδου είναι η εκτίμηση των IBNR απαιτήσεων και η προβολή του τελικού ποσού απώλειας. Σύμφωνα με τους Heberle & Thomas (2014), πρωταρχική υποκείμενη παραδοχή της μεθόδου συνιστά η ιδέα ότι το μοτίβο εξέλιξης ζημιών του παρελθόντος είναι ενδεικτικό του τρόπου εξέλιξης των ζημιών στο μέλλον. Ο αναλογιστής κάνει χρήση τριγώνων εξέλιξης ζημιών για την παρακολούθηση του ιστορικού εξέλιξης μίας

συγκεκριμένης ομάδας αξιώσεων. Δηλαδή, το μοντέλο εξέλιξης υποθέτει ότι η σχετική μεταβολή των απαιτήσεων δοθέντος έτους από ένα σημείο αναφοράς στο επόμενο, είναι παρόμοια με τη σχετική μεταβολή των απαιτήσεων προηγούμενων ετών σε παρόμοια σημεία αναφοράς (Heberle & Thomas, 2014). Μία εγγενής παραδοχή του μοντέλου εξέλιξης αποτελεί το γεγονός ότι για ένα «ανώριμο» έτος ατυχήματος οι ζημιές που έχουν μέχρι στιγμής παρατηρηθεί σε αυτό, παρέχουν ενδείξεις για τις ζημιές που αναμένεται παρατηρηθούν.

Άλλες σημαντικές παραδοχές της μεθόδου, όπως αναφέρει ο Friedland (2010), περιλαμβάνουν:

1. Συνεχή επεξεργασία των απαιτήσεων.
2. Σταθερό μείγμα τύπων απαιτήσεων.
3. Σταθερό όριο υπερβάλλουσας ζημιάς.
4. Σταθερό όριο ίδιας κράτησης σε περίπτωση αντασφάλισης.

Καθόλη τη διάρκεια της υπό εξέταση ιστορικής περιόδου.

Παρατίθενται ακολούθως οι βασικοί ορισμοί και συμβολισμοί που χρησιμοποιούνται κατά την περιγραφή της μεθοδολογίας και την εφαρμογή της μεθόδου.

Ορισμοί 3.2.0

- Ημερολογιακό έτος: Μία περίοδος δώδεκα μηνών που ξεκινά την πρώτη ημέρα του Ιανουαρίου του έτους X (01/01/ X) και ολοκληρώνεται την τριακοστή πρώτη ημέρα του Δεκεμβρίου του ίδιου έτους (31/12/ X).
- Έτος ατυχήματος: Κάθε δωδεκάμηνη περίοδος για την οποία παρακολουθούνται ζημιές από γεγονότα που λαμβάνουν χώρα κατά τη διάρκεια της συγκεκριμένης περιόδου. Το έτος ατυχήματος ιστορικής περιόδου υπολογίζεται προσθέτοντας τις συνολικές απώλειες των σημειωθέντων, κατά την εν λόγω περίοδο, συμβάντων.
- Έτος εξέλιξης: Κάθε έτος το οποίο έπεται του έτους ατυχήματος μίας απαίτησης.

- Επαυξητικές απαιτήσεις $X_{i,j}$: οι απαιτήσεις που εγείρονται στο έτος εξέλιξης j από συμβάντα του έτους ατυχήματος i .
- Αθροιστικές απαιτήσεις $C_{i,j}$: Το άθροισμα όλων των επαυξητικών απαιτήσεων, στο έτος εξέλιξης j , συμβάντων του έτους ατυχήματος i , από το έτος εξέλιξης 0 έως και το έτος εξέλιξης j .
- Παράγων εξέλιξης ζημιάς: Ο παράγοντας με τον οποίο όταν πολλαπλασιαστεί η τελευταία καταγεγραμμένη ζημιά, δίνεται η εκτίμηση της εξέλιξής της. Δηλαδή, $E[C_{i,j+1} | C_{i,j}] = f_j \cdot C_{i,j}$. Υπολογίζεται με διάφορους τρόπους που όλοι βασίζονται στις ζημιές της ιστορικής περιόδου. Συνήθως οι παράγοντες εξέλιξης δεν είναι παρατηρήσιμοι στην πράξη και πρέπει να εκτιμηθούν.

Πίνακας 3.1: Επαυξητικές απαιτήσεις $X_{i,j}$

Έτος Ατυχήματος (i)	Έτος Εξέλιξης (j)								
	0	1	2	...	λ	...	$n-2$	$n-1$	n
0	$X_{0,0}$	$X_{0,1}$	$X_{0,2}$...	$X_{0,\lambda}$...	$X_{0,n-2}$	$X_{0,n-1}$	$X_{0,n}$
1	$X_{1,0}$	$X_{1,1}$	$X_{1,2}$...	$X_{1,\lambda}$...	$X_{1,n-2}$	$X_{1,n-1}$	
2	$X_{2,0}$	$X_{2,1}$	$X_{2,2}$...	$X_{2,\lambda}$...	$X_{2,n-2}$		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮			
κ	$X_{\kappa,0}$	$X_{\kappa,1}$	$X_{\kappa,2}$...	$X_{\kappa,n-\kappa}$				
⋮	⋮	⋮	⋮	...					
$n-2$	$X_{n-2,0}$	$X_{n-2,1}$	$X_{n-2,2}$						
$n-1$	$X_{n-1,0}$	$X_{n-1,1}$							
n	$X_{n,0}$								

Ορισμός 3.2.1 (Μεθοδολογία chain ladder)

- **Βήμα 0** Δημιουργία του Πίνακα (3.1) από «ωμά» στοιχεία (raw data). Στο παρόν πόνημα θεωρείται δεδομένος, καθώς ο τρόπος καταρτισμού του προϋποθέτει τη χρήση τεχνικών και μεθόδων που εμπίπτουν στους τομείς εξόρυξης και ανάλυσης δεδομένων (data mining and analysis), η περιγραφή των οποίων δεν συμπεριλαμβάνεται στους στόχους της παρούσης εργασίας.

- **Βήμα 1** Δημιουργία του αθροιστικού πίνακα απαιτήσεων προσθέτοντας σε κάθε έτος εξέλιξης απαιτήσεων τις απαιτήσεις των προηγούμενων ετών (Πίνακας 3.2), δηλαδή για κάθε $i = 0, 1, 2, \dots, n$:

$$C_{i,j} = \sum_{t=0}^{i+t \leq j} X_{i,t}, \quad \forall j = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (3.1)$$

- **Βήμα 2** Υπολογισμός των εκτιμήσεων των παραγόντων εξέλιξης, $\hat{f}_j \in \mathbb{R}^+$, $\forall j \in 0, 1, 2, \dots, n-1$:

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=0}^{n-(j+1)} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-(j+1)} C_{i,j}}, \quad \forall j = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (3.2)$$

Ο παράγοντας \hat{f}_λ εκτιμά την εξέλιξη ζημιάς από το έτος εξέλιξης λ στο έτος εξέλιξης $\lambda+1$.

- **Βήμα 3** Εκτίμηση της εξέλιξης των απαιτήσεων και προβολή των τελικών ζημιών. Για κάθε στοιχείο κάτω από τη δευτερεύουσα διαγώνιο του αθροιστικού πίνακα ($i+j > n$) εκτελείται ο πολλαπλασιασμός του με τον αντίστοιχο παράγοντα εξέλιξης \hat{f}_j .

Η εναλλακτικά η εκτίμηση της απαίτησης του κ -οστού έτους ατυχήματος στο λ -οστό έτος εξέλιξης είναι ίση με την τελευταία πληρωθείσα ζημιά πολλαπλασιασμένη με το γινόμενο των παραγόντων εξέλιξης από $f_{n-\kappa}$ έως $f_{\lambda-1}$:

$$\hat{C}_{\kappa,\lambda} = C_{\kappa,n-\kappa} \cdot \prod_{j=n-\kappa}^{\lambda-1} \hat{f}_j, \quad (3.3)$$

όπου $\kappa \in \{0, 1, \dots, n\}$ και $\lambda \in \{1, 2, \dots, n\}$ τέτοια ώστε $\kappa + \lambda > n$.

Οι εκτιμηθείσες απαιτήσεις της n -οστής στήλης αποτελούν την προβολή της τελικής ζημιάς.

- **Βήμα 4** Εκτίμηση του αποθέματος.

Το εκτιμώμενο απόθεμα (συμβολισμός \widehat{R}_i) για κάθε έτος ατυχήματος i που θα πρέπει να δημιουργήσει η εταιρεία, προκύπτει από τη διαφορά της n -οστής στήλης και της δευτερεύουσας διαγωνίου ($i + j = n$) του αθροιστικού πίνακα:

$$\widehat{R}_i = \widehat{C}_{i,n} - C_{i,n-i}, \quad \forall i = 0, 1, \dots, n. \quad (3.4)$$

Επομένως το συνολικό απόθεμα \widehat{R} είναι το άθροισμα όλων των επιμέρους αποθεμάτων:

$$\widehat{R} = \sum_{i=0}^n \widehat{R}_i. \quad (3.5)$$

Πίνακας 3.2: Αθροιστικές απαιτήσεις $C_{i,j}$

Έτος Ατυχήματος (i)	Έτος Εξέλιξης (j)								
	0	1	2	...	λ	...	$n-2$	$n-1$	n
0	$C_{0,0}$	$C_{0,1}$	$C_{0,2}$...	$C_{0,\lambda}$...	$C_{0,n-2}$	$C_{0,n-1}$	$C_{0,n}$
1	$C_{1,0}$	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$...	$C_{1,\lambda}$...	$C_{1,n-2}$	$C_{1,n-1}$	
2	$C_{2,0}$	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$...	$C_{2,\lambda}$...	$C_{2,n-2}$		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮			
κ	$C_{\kappa,0}$	$C_{\kappa,1}$	$C_{\kappa,2}$...	$C_{\kappa,n-\kappa}$				
⋮	⋮	⋮	⋮	...					
$n-2$	$C_{n-2,0}$	$C_{n-2,1}$	$C_{n-2,2}$						
$n-1$	$C_{n-1,0}$	$C_{n-1,1}$							
n	$C_{n,0}$								

Παρατηρήσεις

- Κατά κανόνα το έτος ατυχήματος αναγράφεται ως το πραγματικό έτος κατά το οποίο συνέβη το ατύχημα. Οπότε δίπλα στην πρώτη στήλη με τον αύξοντα αριθμό του έτους ατυχήματος προστίθεται μία ακόμα με το πραγματικό έτος. Αν δεν δημιουργείται σύγχυση, η στήλη των αυξόντων αριθμών των ετών ατυχημάτων δύναται να παραληφθεί.

- Το στοιχείο $C_{Y,\lambda}$ αναπαριστά το ποσό στο οποίο έχει ανέλθει μία ζημιά του έτους Y μετά από λ έτη, δηλαδή το έτος $Y + \lambda$.
- Ο εκτιμώμενος παράγοντας εξέλιξης ζημιών δύναται να υπολογιστεί με ποικίλους τρόπους. Ενδεικτικά αναφέρονται ο αριθμητικός μέσος μεμονωμένων παραγόντων εξέλιξης ανά στήλη και ο αντίστοιχος γεωμετρικός μέσος, όπου κάθε μεμονωμένος παράγοντας εξέλιξης υπολογίζεται για κάθε $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ ως:

$$\hat{r}_{i,j} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} \quad \forall j : i + j < n, j \in \{0, 1, \dots, n - 1\}. \quad (3.6)$$

Η επιλογή του τρόπου εκτίμησης του παράγοντα εξέλιξης έγκειται στην κρίση του αναλογιστή.

Πίνακας 3.3: Επαυξητικές απαιτήσεις $X_{i,j}$

Έτος Ατυχήματος (i)	Έτος Εξέλιξης (j)									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2009	1.774.450	920.209	242.903	144.890	101.290	60.439	31.553	22.020	13.583	15.663
2010	1.679.010	812.948	215.635	126.743	89.017	57.913	26.361	16.164	13.000	
2011	1.588.040	704.276	178.361	93.553	64.648	41.784	24.823	28.665		
2012	1.456.934	622.445	141.726	85.050	47.607	46.100	30.596			
2013	1.438.800	629.185	134.988	91.860	56.046	41.187				
2014	1.317.025	562.531	133.294	77.336	60.800					
2015	1.427.681	580.399	146.681	75.005						
2016	1.358.294	547.999	120.248							
2017	1.334.432	514.034								
2018	1.276.303									

Όλα τα παραπάνω γίνονται περισσότερο κατανοητά και αποσαφηνίζονται στο παράδειγμα που έπεται.

Παράδειγμα 3.1(α) (Chain ladder)

- **Βήμα 0** Ως δεδομένο υπάρχει ο ανωτέρω Πίνακας (3.3) επαυξητικών πληρωθεισών απαιτήσεων του υποκλάδου αυτοκινήτου στην Ευρώπη, της ασφαλιστικής εταιρείας Zurich Insurance Group Ltd.
- **Βήμα 1** Εκτελώντας απλούς υπολογισμούς σύμφωνα με τη Σχέση (3.1), παραδείγματος χάριν

$$2.694.659 = 1.774.450 + 920.209, \quad 2.937.562 = 1.774.450 + 920.209 + 242.903$$

και ούτω καθεξής, καταλήγουμε στον Πίνακα (3.4) που περιέχει τις αθροιστικές πληρωθείσες απαιτήσεις.

Πίνακας 3.4: Αθροιστικές απαιτήσεις $C_{i,j}$

Έτος Ατυχήματος (i)	Έτος Εξέλιξης (j)									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2009	1.774.450	2.694.659	2.937.562	3.082.452	3.183.742	3.244.182	3.275.734	3.297.754	3.311.337	3.327.000
2010	1.679.010	2.491.957	2.707.592	2.834.335	2.923.352	2.981.265	3.007.626	3.023.790	3.036.790	
2011	1.588.040	2.292.316	2.470.677	2.564.230	2.628.878	2.670.662	2.695.485	2.724.151		
2012	1.456.934	2.079.379	2.221.105	2.306.156	2.353.763	2.399.863	2.430.459			
2013	1.438.800	2.067.985	2.202.973	2.294.832	2.350.878	2.392.065				
2014	1.317.025	1.879.556	2.012.850	2.090.186	2.150.986					
2015	1.427.681	2.008.079	2.154.760	2.229.765						
2016	1.358.294	1.906.292	2.026.540							
2017	1.334.432	1.848.466								
2018	1.276.303									

- **Βήμα 2** Υπολογισμός των εκτιμήσεων των παραγόντων εξέλιξης των απαιτήσεων σύμφωνα με τη Σχέση (3.2). Για παράδειγμα, ο πρώτος παράγοντας εξέλιξης:

$$\hat{f}_0 = \frac{19.268.690}{13.374.665} = 1,4407,$$

όπου

$$19.268.690 = 2.694.659 + 2.491.957 + \dots + 1.848.466.$$

Οι υπόλοιποι παράγοντες εξέλιξης υπολογίζονται ομοίως

$$\begin{aligned} \hat{f}_0 &= 1,4407, & \hat{f}_1 &= 1,0754, & \hat{f}_2 &= 1,0416, \\ \hat{f}_3 &= 1,0276, & \hat{f}_4 &= 1,0184, & \hat{f}_5 &= 1,0100, \\ \hat{f}_6 &= 1,0074, & \hat{f}_7 &= 1,0042, & \hat{f}_8 &= 1,0047. \end{aligned}$$

Πίνακας 3.5: Εκτιμηθείσες απαιτήσεις (με έντονο μπλε)

Έτος Ατυχήματος (<i>i</i>)	Έτος Εξέλιξης (<i>j</i>)									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2009	1.774.450	2.694.659	2.937.562	3.082.452	3.183.742	3.244.182	3.275.734	3.297.754	3.311.337	3.327.000
2010	1.679.010	2.491.957	2.707.592	2.834.335	2.923.352	2.981.265	3.007.626	3.023.790	3.036.790	3.051.154
2011	1.588.040	2.292.316	2.470.677	2.564.230	2.628.878	2.670.662	2.695.485	2.724.151	2.735.606	2.748.546
2012	1.456.934	2.079.379	2.221.105	2.306.156	2.353.763	2.399.863	2.430.459	2.448.554	2.458.851	2.470.482
2013	1.438.800	2.067.985	2.202.973	2.294.832	2.350.878	2.392.065	2.416.065	2.434.053	2.444.289	2.455.851
2014	1.317.025	1.879.556	2.012.850	2.090.186	2.150.986	2.190.583	2.212.561	2.229.034	2.238.407	2.248.995
2015	1.427.681	2.008.079	2.154.760	2.229.765	2.291.403	2.333.585	2.356.998	2.374.546	2.384.531	2.395.811
2016	1.358.294	1.906.292	2.026.540	2.110.772	2.169.120	2.209.051	2.231.214	2.247.826	2.257.279	2.267.956
2017	1.334.432	1.848.466	1.987.877	2.070.502	2.127.737	2.166.906	2.188.647	2.204.942	2.214.214	2.224.687
2018	1.276.303	1.838.752	1.977.431	2.059.622	2.116.556	2.155.519	2.177.146	2.193.355	2.202.578	2.212.997

- **Βήμα 3** Με τη βοήθεια των παραγόντων εξέλιξης πραγματοποιείται εκτίμηση της απαίτησης σε κάθε έτος εξέλιξης και προβολή της τελικής εκτιμηθείσας απαίτησης (Πίνακας 3.5). Για παράδειγμα,

$$1.276.303 \cdot \hat{f}_0 = 1.838.752,$$

$$1.838.752 \cdot \hat{f}_1 = 1.977.431,$$

$$1.977.431 \cdot \hat{f}_2 = 2.059.622$$

και ούτω καθεξής.

Εναλλακτικά, η εκτίμηση για παράδειγμα της ζημιάς με έτος ατυχήματος 2015 και έτος εξέλιξης 7, δηλαδή σε ποιο ποσό θα ανέλθει η ζημιά το έτος 2022:

$$\widehat{C}_{6,7} = C_{6,9-6} \cdot \prod_{j=9-6}^6 \widehat{f}_j.$$

- **Βήμα 4** Αφαιρώντας τις πραγματικές έως τώρα πληρωθείσες ζημιές (στοιχεία της δευτερεύουσας διαγωνίου) από την τελική εκτίμηση της αντίστοιχης απαίτησης (τελευταία στήλη του Πίνακα 3.5) προκύπτει το απόθεμα \widehat{R}_i για κάθε απαίτηση. Το άθροισμα των οποίων δίνει το συνολικό απόθεμα \widehat{R} για τον υποκλάδο αυτοκινήτου, το οποίο ισούται με 1.960.954.

Πίνακας 3.6: Εκτιμηθέν απόθεμα για κάθε έτος

Έτος Ατυχήματος (i)	Πληρωθείσες Απαιτήσεις	Τελικές Εκτιμηθείσες Απαιτήσεις	Απόθεμα Έτους Ατυχήματος (\widehat{R}_i)
2009	3.327.000	3.327.000	0
2010	3.036.790	3.051.154	14.365
2011	2.724.151	2.748.546	24.395
2012	2.430.459	2.470.482	40.023
2013	2.392.065	2.455.851	63.785
2014	2.150.986	2.248.995	98.009
2015	2.229.765	2.395.811	166.045
2016	2.026.540	2.267.956	241.416
2017	1.848.466	2.224.687	376.222
2018	1.276.303	2.212.997	936.693

3.2.2 Μέθοδος London chain ladder

Η κλασική μέθοδος chain ladder είναι μία καθαρά πολλαπλασιαστική μέθοδος και η εκτίμηση κάθε απαίτησης σχηματίζεται μόνο από τις τιμές των παραγόντων εξέλιξης f_j . Για τους ανωτέρω λόγους προτάθηκε από τους Benjamin & Eagles (1986) μία ελαφριά γενίκευση της μεθόδου chain ladder, η οποία βασίζεται στην εφαρμογή της συνήθους παλινδρόμησης ελαχίστων τετραγώνων στις πληρωθείσες αθροιστικές απαιτήσεις. Στόχος της μεθόδου είναι η εκτίμηση των IBNR απαιτήσεων και η προβολή του τελικού ποσού απώλειας, μέσω n το πλήθος μοντέλων απλής γραμμικής παλινδρόμησης με διαφορετικούς συντελεστές παλινδρόμησης α_j και β_j για κάθε έτος εξέλιξης $j \in 0, 1, 2, \dots, n - 1$. Οι παραδοχές και οι βασικοί ορισμοί της μεθόδου London chain ladder δεν διαφέρουν από τους αντίστοιχους της κλασικής μεθόδου που αναφέρονται στην Υποενότητα 3.2.1. Επομένως, παρατίθεται απευθείας η μεθοδολογία της.

Ορισμός 3.2.2 (Μεθοδολογία London chain ladder)

- **Βήμα 0** Ομοίως με chain ladder.
- **Βήμα 1** Ομοίως με chain ladder.
- **Βήμα 2** Διενεργούνται n το πλήθος διαδοχικές, απλές παλινδρομήσεις στις στήλες του Πίνακα (3.2) των αθροιστικών απαιτήσεων ανά δύο και τοιουτοτρόπως προκύπτουν οι εκτιμήσεις των συντελεστών α_j και β_j , $\forall j \in 0, 1, 2, \dots, n - 1$.
- **Βήμα 3** Εκτίμηση της εξέλιξης των απαιτήσεων και προβολή των τελικών ζημιών. Για κάθε στοιχείο κάτω από τη δευτερεύουσα διαγώνιο του αθροιστικού πίνακα ($i + j > n$) γίνεται εκτίμηση μέσω του μοντέλου παλινδρόμησης που αντιστοιχεί στο έτος εξέλιξης j .
- **Βήμα 4** Η εκτίμηση του αποθέματος πραγματοποιείται όπως ακριβώς στην κλασική μέθοδο chain ladder.

Παρατήρηση

Η n -οστή παλινδρόμηση είναι μόνο τύποις παλινδρόμηση, καθώς υπάρχουν μόνο δύο απαιτήσεις και όπως είναι γνωστό, υπάρχει μοναδική ευθεία η οποία ενώνει δύο σημεία, ο προσδιορισμός της οποίας θεωρείται τετριμμένος.

Στο παράδειγμα που ακολουθεί γίνεται αντιληπτός στην πράξη ο τρόπος εργασίας της μεθόδου

Παράδειγμα 3.2(α) (London chain ladder)

Τα βήματα 0 και 1 παραλείπονται, καθώς είναι όμοια με αυτά της μεθόδου chain ladder, οπότε εδώ υπάρχει ως δεδομένο ο Πίνακας (3.4) των αθροιστικών απαιτήσεων.

Πίνακας 3.7: Παλινδρομήσεις

i	Έτος Ατυχήματος (i)	Παλινδρόμηση 0		Παλινδρόμηση 1		Παλινδρόμηση 2	
		X_i	Y_i	X_i	Y_i	X_i	Y_i
0	2009	1.774.450	2.694.659	2.694.659	2.937.562	2.937.562	3.082.452
1	2010	1.679.010	2.491.957	2.491.957	2.707.592	2.707.592	2.834.335
2	2011	1.588.040	2.292.316	2.292.316	2.470.677	2.470.677	2.564.230
3	2012	1.456.934	2.079.379	2.079.379	2.221.105	2.221.105	2.306.156
4	2013	1.438.800	2.067.985	2.067.985	2.202.973	2.202.973	2.294.832
5	2014	1.317.025	1.879.556	1.879.556	2.012.850	2.012.850	2.090.186
6	2015	1.427.681	2.008.079	2.008.079	2.154.760	2.154.760	2.229.765
7	2016	1.358.294	1.906.292	1.906.292	2.026.540		
8	2017	1.334.432	1.848.466				

- **Βήμα 2** Οι παλινδρομήσεις εκτελούνται όπως φαίνεται παραπάνω και συνεχίζονται στο ίδιο μοτίβο έως τη n -οστή, εν προκειμένω την Παλινδρόμηση 8. Κατ' αυτόν τον τρόπο προκύπτει ο Πίνακας (3.8) των συντελεστών ανά έτος εξέλιξης.

Πίνακας 3.8: Συντελεστές παλινδρόμησης ανά έτος εξέλιξης

Συντελεστές Παλινδρόμησης ανά Έτος Εξέλιξης																	
0-1		1-2		2-3		3-4		4-5		5-6		6-7		7-8		8-9	
$\hat{\alpha}_0$	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\beta}_4$	$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\beta}_5$	$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\beta}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\beta}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\beta}_8$
-570.493	1,8246	-159.375	1,1486	-83.000	1,0763	-57.761	1,0505	-10.353	1,0223	24.000	1,0015	58.887	0,9878	6.564	1,0021	0	1,0047

- **Βήμα 3** Αξιοποιώντας τους συντελεστές ανά έτος εξέλιξης του βήματος 2 πραγματοποιείται εκτίμηση της απαίτησης σε κάθε έτος εξέλιξης και προβολή της τελικής εκτιμηθείσας απαίτησης (Πίνακας 3.9). Παραδείγματος χάριν,

$$1.276.303 \cdot \hat{\beta}_0 + \hat{\alpha}_0 = 1.758.223,$$

$$1.758.223 \cdot \hat{\beta}_1 + \hat{\alpha}_1 = 1.860.139,$$

$$1.860.139 \cdot \hat{\beta}_2 + \hat{\alpha}_2 = 1.919.140$$

και ούτω καθεξής.

Πίνακας 3.9: Εκτιμηθείσες απαιτήσεις (με έντονο μπλε)

Έτος Ατυχήματος (<i>i</i>)	Έτος Εξέλιξης (<i>j</i>)									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2009	1.774.450	2.694.659	2.937.562	3.082.452	3.183.742	3.244.182	3.275.734	3.297.754	3.311.337	3.327.000
2010	1.679.010	2.491.957	2.707.592	2.834.335	2.923.352	2.981.265	3.007.626	3.023.790	3.036.790	3.051.154
2011	1.588.040	2.292.316	2.470.677	2.564.230	2.628.878	2.670.662	2.695.485	2.724.151	2.736.513	2.749.457
2012	1.456.934	2.079.379	2.221.105	2.306.156	2.353.763	2.399.863	2.430.459	2.459.621	2.471.421	2.483.111
2013	1.438.800	2.067.985	2.202.973	2.294.832	2.350.878	2.392.065	2.419.736	2.449.029	2.460.806	2.472.446
2014	1.317.025	1.879.556	2.012.850	2.090.186	2.150.986	2.188.514	2.215.872	2.247.659	2.259.007	2.269.693
2015	1.427.681	2.008.079	2.154.760	2.229.765	2.284.575	2.325.076	2.352.644	2.382.758	2.394.394	2.405.720
2016	1.358.294	1.906.292	2.026.540	2.098.244	2.146.414	2.183.840	2.211.191	2.243.035	2.254.374	2.265.037
2017	1.334.432	1.848.466	1.963.793	2.030.707	2.075.467	2.111.314	2.138.554	2.171.286	2.182.472	2.192.795
2018	1.276.303	1.758.223	1.860.139	1.919.140	1.958.268	1.991.506	2.018.562	2.052.762	2.063.695	2.073.457

- **Βήμα 4** Αφαιρώντας τις πραγματικές έως τώρα πληρωθείσες ζημιές (στοιχεία της δευτερεύουσας διαγωνίου) από την τελική εκτίμηση της αντίστοιχης απαίτησης

(τελευταία στήλη του Πίνακα 3.9) προκύπτει το απόθεμα \widehat{R}_i για κάθε απαίτηση (τελευταία στήλη του Πίνακα 3.9 που ακολουθεί). Το άθροισμα των οποίων δίνει το συνολικό απόθεμα \widehat{R} για τον υποκλάδο αυτοκινήτου, το οποίο ισούται με 1.847.346.

Πίνακας 3.10: Εκτιμηθέν απόθεμα για κάθε έτος

Έτος Ατυχήματος (i)	Πληρωθείσες Απαιτήσεις	Τελικές Εκτιμηθείσες Απαιτήσεις	Απόθεμα Έτους Ατυχήματος (\widehat{R}_i)
2009	3.327.000	3.327.000	0
2010	3.036.790	3.051.154	14.365
2011	2.724.151	2.749.547	24.307
2012	2.430.459	2.483.111	52.652
2013	2.392.065	2.472.446	80.381
2014	2.150.986	2.269.693	118.707
2015	2.229.765	2.405.720	175.955
2016	2.026.540	2.265.037	238.497
2017	1.848.466	2.192.795	344.330
2018	1.276.303	2.073.457	797.153

3.2.3 Μέθοδος chain ladder με εκθετικό μοντέλο

Όπως έχει αναφερθεί και παραπάνω, στην Υποενότητα 3.2.1, ο εκτιμώμενος παράγοντας εξέλιξης ζημιών δύναται να υπολογιστεί με ποικίλους τρόπους. Η μέθοδος London chain ladder έχει επικριθεί ελαφρώς για υπερβολική χρήση εκτιμηθέντων παραμέτρων. Οπότε, η δυνατότητα γενίκευσης των δεδομένων της ιστορικής περιόδου είναι πιθανό να μην είναι απολύτως εφικτή κατά τη διαδικασία. Για την επίλυση αυτού του μειονεκτήματος, προτάθηκε από τον Sherman (1984) η «ομαλοποίηση» (smoothing) των παραγόντων εξέλιξης f_j , $j \in \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$ μέσω του εκθετικού μοντέλου:

$$f_j = 1 + e^\alpha \cdot (j + 1)^\beta, \quad (3.7)$$

όπου οι μόνες παράμετροι προς εκτίμηση είναι οι α και β .

Στόχος της μεθόδου είναι η εκτίμηση των IBNR απαιτήσεων και η προβολή του τελικού ποσού απώλειας. Οι παραδοχές και οι βασικοί ορισμοί της μεθόδου είναι όμοιες με τους αντίστοιχους της κλασικής μεθόδου chain ladder που αναφέρονται στην Υποεξήγηση 3.2.1.

Ορισμός 3.2.3 (Μεθοδολογία chain ladder με εκθετικό μοντέλο)

- **Βήμα 0** Ομοίως με chain ladder.
- **Βήμα 1** Ομοίως με chain ladder.
- **Βήμα 2** Υπολογισμός των μεμονωμένων παραγόντων εξέλιξης $r_{i,j}$ όπου ο καθένας υπολογίζεται για κάθε $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ ως:

$$r_{i,j} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} \quad \forall j : i + j < n, \quad j \in \{0, 1, \dots, n - 1\}. \quad (3.8)$$

- **Βήμα 3** Μετασχηματισμός του εκθετικού μοντέλου σε γραμμικό ως εξής:

$$\begin{aligned} f_j &= 1 + e^\alpha \cdot (j + 1)^\beta \iff \\ f_j - 1 &= e^\alpha \cdot (j + 1)^\beta \iff \\ \ln(f_j - 1) &= \ln[e^\alpha \cdot (j + 1)^\beta] \iff \\ \ln(f_j - 1) &= \alpha + \beta \ln(j + 1). \end{aligned}$$

Καταλήγοντας στο γραμμικό μοντέλο

$$F_j = \alpha + \beta \ln(j + 1), \quad j \in \{0, 1, \dots, n - 1\}, \quad (3.9)$$

όπου $F_j = \ln(f_j - 1)$.

- **Βήμα 4** Υπολογισμός των F_j , $\forall j = 0, 1, \dots, n-1$ με τη βοήθεια της Σχέσης:

$$F_j = \frac{\sum_{i=0}^{n-(j+1)} \ln(r_{i,j} - 1)}{n-j}, \quad i \in \{0, 1, \dots, n-1\}. \quad (3.10)$$

- **Βήμα 5** Διενέργεια μίας απλής γραμμικής παλινδρόμησης όπου το ρόλο της εξαρτημένης μεταβλητής έχει το διάνυσμα:

$$\mathbf{F} = (F_0, F_2, \dots, F_{n-1})^t$$

και της ανεξάρτητης μεταβλητής το διάνυσμα:

$$\mathbf{X} = [\ln(1+0), \ln(1+1), \dots, \ln(1+n-1)]^t$$

ώστε να εκτιμηθούν οι παράμετροι α και β .

- **Βήμα 6** Εκτίμηση των παραγόντων εξέλιξης για κάθε έτος εξέλιξης j .

$$\hat{f}_j = 1 + e^{\hat{\alpha}} \cdot (j+1)^{\hat{\beta}}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1. \quad (3.11)$$

- **Βήμα 7** Εκτίμηση της εξέλιξης των απαιτήσεων και προβολή των τελικών ζημιών. Για κάθε στοιχείο κάτω από τη δευτερεύουσα διαγώνιο του αθροιστικού πίνακα εκτελείται ο πολλαπλασιασμός με τον αντίστοιχο παράγοντα εξέλιξης \hat{f}_j .
- **Βήμα 8** Εκτίμηση του αποθέματος.

Το εκτιμώμενο απόθεμα \hat{R}_i για κάθε έτος ατυχήματος i , προκύπτει από τη διαφορά της n -οστής στήλης και της δευτερεύουσας διαγωνίου του αθροιστικού πίνακα και το συνολικό απόθεμα \hat{R} είναι το άθροισμα όλων των επιμέρους αποθεμάτων όπως ακριβώς στο βήμα 4 της μεθόδου chain ladder (Σχέσεις 3.4 και 3.5).

Στο παρακάτω παράδειγμα γίνεται ορατή στην πράξη η διαδικασία που ακολουθείται κατά τη μέθοδο. Ως δεδομένο λαμβάνεται ο Πίνακας (3.4) των αθροιστικών πληρωθεισών απαιτήσεων, τα βήματα 0 και 1 παραλείπονται και το παράδειγμα ξεκινά κατευθείαν από το βήμα 2.

Παράδειγμα 3.3(α) (Chain ladder με εκθετικό μοντέλο)

- **Βήμα 2** Ο υπολογισμός των μεμονωμένων παραγόντων εξέλιξης σύμφωνα με τη Σχέση (3.8) έχει ως αποτέλεσμα τον Πίνακα (3.11).

Πίνακας 3.11: Παράγοντες εξέλιξης $r_{i,j}$

Έτος Ατυχήματος (i)	Παράγων Εξέλιξης ($r_{i,j}$)								
	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9
2009	1,5186	1,0901	1,0493	1,0329	1,0190	1,0097	1,0067	1,0041	1,0047
2010	1,4842	1,0865	1,0468	1,0314	1,0198	1,0088	1,0054	1,0043	
2011	1,4435	1,0778	1,0379	1,0252	1,0159	1,0093	1,0106		
2012	1,4272	1,0682	1,0383	1,0206	1,0196	1,0127			
2013	1,4373	1,0653	1,0417	1,0244	1,0175				
2014	1,4271	1,0709	1,0384	1,0291					
2015	1,4065	1,0730	1,0348						
2016	1,4034	1,0631							
2017	1,3852								

Παρουσιάζονται ενδεικτικά ορισμένοι υπολογισμοί.

$$r_{4,1} = \frac{2.202.973}{2.067.985} = 1,0653, \quad r_{6,3} = \frac{2.229.765}{2.154.760} = 1,0348,$$

$$r_{2,6} = \frac{2.724.151}{2.695.485} = 1,0106, \quad r_{5,0} = \frac{1.879.556}{1.317.025} = 1,4271.$$

Οι υπόλοιποι παράγοντες εξέλιξης υπολογίζονται ομοίως.

- **Βήμα 3** Μετασχηματισμός του εκθετικού μοντέλου σε γραμμικό.
- **Βήμα 4** Τα αποτελέσματα του υπολογισμού των F_j , $\forall j = 0, 1, \dots, 8$ κάνοντας

χρήση της Σχέσης (3.10) αποτυπώνονται ακολούθως.

$$\begin{aligned} F_0 &= -0,8317, & F_1 &= -2,6061, & F_2 &= -3,2002, \\ F_3 &= -3,6145, & F_4 &= -4,0010, & F_5 &= -4,6004, \\ F_6 &= -4,9240, & F_7 &= -5,4707, & F_8 &= -5,3538. \end{aligned}$$

- **Βήμα 5** Η διενέργεια απλής γραμμικής παλινδρόμησης με εξαρτημένη μεταβλητή το διάνυσμα:

$$\mathbf{F} = (F_0, F_1, \dots, F_8)^t$$

και ανεξάρτητη το διάνυσμα:

$$\mathbf{X} = [\ln(0+1), \ln(1+1), \dots, \ln(8+1)]^t$$

παρέχει μία εκτίμηση των παραμέτρων α και β , όπου $\hat{\alpha} = -0,917$ και $\hat{\beta} = -2,058$.

- **Βήμα 6** Επομένως, μέσω της Σχέσης (3.11), λαμβάνεται εκτίμηση των παραγόντων εξέλιξης f_j για κάθε έτος εξέλιξης j .

$$\begin{aligned} \hat{f}_0 &= 1,3995, & \hat{f}_1 &= 1,0960, & \hat{f}_2 &= 1,0417, \\ \hat{f}_3 &= 1,0230, & \hat{f}_4 &= 1,0146, & \hat{f}_5 &= 1,0100, \\ \hat{f}_6 &= 1,0073, & \hat{f}_7 &= 1,0055, & \hat{f}_8 &= 1,0043. \end{aligned}$$

- **Βήμα 7** Εκτίμηση της εξέλιξης των απαιτήσεων και προβολή των τελικών ζημιών με τη βοήθεια των παραγόντων εξέλιξης (Πίνακας 3.12). Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned} 1.276.303 \cdot \hat{f}_0 &= 1.786.212, \\ 1.786.212 \cdot \hat{f}_1 &= 1.957.600, \\ 1.957.600 \cdot \hat{f}_2 &= 2.039.144 \end{aligned}$$

και ούτω καθεξής.

Πίνακας 3.12: Εκτιμηθείσες απαιτήσεις (με έντονο μπλε)

Έτος Ατυχήματος (<i>i</i>)	Έτος Εξέλιξης (<i>j</i>)									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2009	1.774.450	2.694.659	2.937.562	3.082.452	3.183.742	3.244.182	3.275.734	3.297.754	3.311.337	3.327.000
2010	1.679.010	2.491.957	2.707.592	2.834.335	2.923.352	2.981.265	3.007.626	3.023.790	3.036.790	3.049.979
2011	1.588.040	2.292.316	2.470.677	2.564.230	2.628.878	2.670.662	2.695.485	2.724.151	2.739.227	2.751.124
2012	1.456.934	2.079.379	2.221.105	2.306.156	2.353.763	2.399.863	2.430.459	2.448.164	2.461.713	2.472.404
2013	1.438.800	2.067.985	2.202.973	2.294.832	2.350.878	2.392.065	2.415.996	2.433.595	2.447.063	2.457.691
2014	1.317.025	1.879.556	2.012.850	2.090.186	2.150.986	2.182.302	2.204.133	2.220.190	2.232.477	2.242.173
2015	1.427.681	2.008.079	2.154.760	2.229.765	2.281.148	2.314.358	2.337.511	2.354.539	2.367.570	2.377.852
2016	1.358.294	1.906.292	2.026.540	2.110.956	2.159.600	2.191.041	2.212.960	2.229.081	2.241.417	2.251.152
2017	1.334.432	1.848.466	2.025.827	2.110.213	2.158.840	2.190.270	2.212.181	2.228.296	2.240.628	2.250.360
2018	1.276.303	1.786.213	1.957.601	2.039.145	2.086.135	2.116.506	2.137.680	2.153.252	2.165.168	2.174.572

Πίνακας 3.13: Εκτιμηθέν απόθεμα για κάθε έτος

Έτος Ατυχήματος (<i>i</i>)	Πληρωθείσες Απαιτήσεις	Τελικές Εκτιμηθείσες Απαιτήσεις	Απόθεμα Έτους Ατυχήματος (\hat{R}_i)
2009	3.327.000	3.327.000	0
2010	3.036.790	3.049.979	13.189
2011	2.724.151	2.751.124	26.973
2012	2.430.459	2.472.404	41.945
2013	2.392.065	2.457.691	65.626
2014	2.150.986	2.242.173	91.187
2015	2.229.765	2.377.852	148.087
2016	2.026.540	2.251.152	224.612
2017	1.848.466	2.250.360	401.894
2018	1.276.303	2.174.572	898.268

- **Βήμα 8** Αφαιρώντας τις πραγματικές έως τώρα πληρωθείσες ζημιές (στοιχεία της δευτερεύουσας διαγωνίου) από την τελική εκτίμηση της αντίστοιχης απαίτησης (τελευταία στήλη του Πίνακα 3.12) προκύπτει το απόθεμα \hat{R}_i για κάθε απαίτηση, το

άθροισμα των οποίων δίνει το συνολικό απόθεμα \widehat{R} για τον υποκλάδο αυτοκινήτου, το οποίο ισούται με 1.911.780.

3.2.4 Γεωμετρική μέθοδος διαχωρισμού

Η πρόβλεψη των απαιτήσεων προσδιορίζεται, όπως έχει ήδη επισημανθεί, με τη βοήθεια των προβολών και των εκτιμήσεων που προέρχονται από τα δεδομένα της ιστορικής περιόδου. Ορισμένες απαιτήσεις αναγγέλλονται αρκετά χρόνια αφότου συνέβησαν, γεγονός το οποίο δύναται να προκαλέσει σημαντικά προβλήματα φερεγγυότητας.

Όλα τα μοντέλα που περιγράφησαν έως τώρα βασίζονται στην υποκείμενη παραδοχή ότι οι εξωγενείς επιδράσεις, όπως ο πληθωρισμός, η μεταβολή του ρυθμού ανάπτυξης και επιχειρηματικής πολιτικής της εταιρείας, από τη στιγμή που ηγέρθη μία απαίτηση έως την πληρωμή της θεωρούνται σχετικά σταθερές και ελάχιστον σημασίας.

Η γεωμετρική μέθοδος διαχωρισμού, η οποία προτάθηκε από τον Taylor (1977), βασίζεται στο διαχωρισμό των εξωγενών επιδράσεων, όπως του πληθωρισμού, στο κόστος των απαιτήσεων. Η μέθοδος αυτή υπολογίζει τις εκτιμήσεις των εξωγενών παραγόντων από τα δεδομένα της ιστορικής περιόδου και έπειτα προβλέπει το κόστος των μελλοντικών απαιτήσεων προσαρμόζοντας την πληθωριστική τάση του κόστους των απαιτήσεων προϊόντος του χρόνου.

Συμβολισμοί

- $X_{i,j}$: Επαυξητική ζημιά του έτους ατυχήματος i στο έτος εξέλιξης j .
- N_i : Πλήθος απαιτήσεων του έτους ατυχήματος i .
- $S_{i,j}$: Μέσο κόστος ανά απαίτηση του i -οστού έτους ατυχήματος στο j -οστό έτος εξέλιξης.

- Ισχύει ότι

$$S_{i,j} = \frac{X_{i,j}}{N_i}. \quad (3.12)$$

- r_j : Αναμενόμενο ποσοστό ζημιών στο έτος εξέλιξης j .

- Ισχύει ότι

$$\prod_{j=0}^n r_j = 1. \quad (3.13)$$

- λ_{i+j} : Επίδραση του πληθωρισμού του ημερολογιακού έτους.

Η μέθοδος διαχωρισμού υποθέτει ότι το μέσο κόστος ανά απαίτηση $S_{i,j}$ συνίσταται από δύο παράγοντες. Ο πρώτος, r_j , ποσοτικοποιεί τη σημασία των απαιτήσεων του j -οστού έτος εξέλιξης επί των συνολικών απαιτήσεων ενός δοθέντος έτους ατυχήματος. Ο δεύτερος παράγοντας, λ_{i+j} , περιέχει την επίδραση του πληθωρισμού στις απαιτήσεις του $(i+j)$ -οστού ημερολογιακού έτους.

Τα παραπάνω, συμπυκνώνονται στη εξίσωση που ακολουθεί.

$$S_{i,j} = r_j \cdot \lambda_{i+j}. \quad (3.14)$$

Ορισμός 3.2.4 (Μεθοδολογία γεωμετρικής μεθόδου διαχωρισμού)

Δεδομένος θεωρείται ο Πίνακας (3.1) των επαυξητικών απαιτήσεων $X_{i,j}$.

- **Βήμα 1** Δημιουργία του πίνακα μέσου κόστους ανά απαίτηση για κάθε έτος ατυχήματος i σε κάθε έτος εξέλιξης j , τα στοιχεία του οποίου προκύπτουν από τα ηλίκα των επαυξητικών ζημιών έτους ατυχήματος ανά έτος εξέλιξης με το αντίστοιχο πλήθος απαιτήσεων του έτους ατυχήματος i (Πίνακας 3.14), σύμφωνα με την Εξίσωση (3.12).
- **Βήμα 2** Υπολογισμός των συνισταμένων του $S_{i,j}$, r_j και λ_{i+j} για κάθε $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ και για κάθε $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ τέτοια ώστε $i+j \leq n$ ως εξής:

$$\lambda_n = \left(\prod_{i,j}^{i+j=n} S_{i,j} \right)^{\left(\frac{1}{n+1}\right)} \quad r_n = \frac{S_{0,n}}{\lambda_n} \quad (3.15)$$

$$\lambda_{n-1} = \left(r_n \prod_{i,j}^{i+j=n-1} S_{i,j} \right)^{\left(\frac{1}{n}\right)} \quad r_{n-1} = \left(\frac{S_{0,n-1} \cdot S_{1,n-1}}{\lambda_n \cdot \lambda_{n-1}} \right)^{\left(\frac{1}{2}\right)} \quad (3.16)$$

$$\lambda_{n-2} = \left(r_n \cdot r_{n-1} \prod_{i,j}^{i+j=n-2} S_{i,j} \right)^{\binom{1}{n-1}} \quad r_{n-2} = \left(\frac{\prod_{\kappa=0}^2 S_{\kappa,n-2}}{\prod_{\kappa=n-2}^n \lambda_{\kappa}} \right)^{\binom{1}{3}} \quad (3.17)$$

...

$$\lambda_2 = \left(\prod_{\kappa=3}^n r_{\kappa} \prod_{i,j}^{i+j=2} S_{i,j} \right)^{\binom{1}{3}} \quad r_2 = \left(\frac{\prod_{\kappa=0}^{n-2} S_{\kappa,2}}{\prod_{\kappa=2}^n \lambda_{\kappa}} \right)^{\binom{1}{n-1}} \quad (3.18)$$

$$\lambda_1 = \left(\prod_{\kappa=2}^n r_{\kappa} \prod_{i,j}^{i+j=1} S_{i,j} \right)^{\binom{1}{2}} \quad r_1 = \left(\frac{\prod_{\kappa=0}^{n-1} S_{\kappa,1}}{\prod_{\kappa=1}^n \lambda_{\kappa}} \right)^{\binom{1}{n}} \quad (3.19)$$

$$\lambda_0 = \left(\prod_{\kappa=1}^n r_{\kappa} S_{0,0} \right) \quad r_0 = \left(\frac{\prod_{\kappa=0}^n S_{\kappa,0}}{\prod_{\kappa=0}^n \lambda_{\kappa}} \right)^{\binom{1}{n+1}} \quad (3.20)$$

Πίνακας 3.14: Μέσο κόστος ανά απαίτηση $S_{i,j}$

Έτος Ατυχήματος (i)	Έτος Εξέλιξης (j)								
	0	1	2	...	λ	...	$n-2$	$n-1$	n
0	$S_{0,0}$	$S_{0,1}$	$S_{0,2}$...	$S_{0,\lambda}$...	$S_{0,n-2}$	$S_{0,n-1}$	$S_{0,n}$
1	$S_{1,0}$	$S_{1,1}$	$S_{1,2}$...	$S_{1,\lambda}$...	$S_{1,n-2}$	$S_{1,n-1}$	
2	$S_{2,0}$	$S_{2,1}$	$S_{2,2}$...	$S_{2,\lambda}$...	$S_{2,n-2}$		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮			
κ	$S_{\kappa,0}$	$S_{\kappa,1}$	$S_{\kappa,2}$...	$S_{\kappa,n-\kappa}$				
⋮	⋮	...	⋮	...					
$n-2$	$S_{n-2,0}$	$S_{n-2,1}$	$S_{n-2,2}$						
$n-1$	$S_{n-1,0}$	$S_{n-1,1}$							
n	$S_{n,0}$								

- **Βήμα 3** Εκτίμηση των παραγόντων επίδρασης του πληθωρισμού λ_{i+j} για $i+j \in \{n+1, n+2, \dots, 2n\}$ μέσω του γραμμικού μοντέλου παλινδρόμησης:

$$\lambda_{i+j} = \alpha + \beta(i+j). \quad (3.21)$$

Οπότε απαιτείται η διενέργεια μίας απλής γραμμικής παλινδρόμησης για την εκτίμηση των παραμέτρων α και β , όπου η εξαρτημένη μεταβλητή περιλαμβάνει τους παράγοντες $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ και η ανεξάρτητη μεταβλητή τους αντίστοιχους δείκτες $i+j$, δηλαδή $0, 1, \dots, n$.

- **Βήμα 4** Υπολογισμός των εκτιμήσεων του μέσου κόστους ανά απαίτηση $\widehat{S}_{i,j}$ για κάθε i, j τέτοια ώστε $i+j > n$, δηλαδή των στοιχείων που βρίσκονται κάτω από τη δευτερεύουσα διαγώνιο του Πίνακα (3.14) με τη βοήθεια της Σχέσης (3.14).

$$\widehat{S}_{i,j} = r_j \cdot \widehat{\lambda}_{i+j}.$$

- **Βήμα 5** Για κάθε έτος ατυχήματος i πολλαπλασιάζοντας το άθροισμα των εκτιμήσεων του μέσου κόστους ανά απαίτηση $\widehat{S}_{i,j}$ με το αντίστοιχο πλήθος απαιτήσεων λαμβάνουμε την εκτίμηση του αποθέματος \widehat{R}_i για κάθε έτος ατυχήματος i .

$$\widehat{R}_i = \left(\sum_j^{i+j>n} \widehat{S}_{i,j} \right) N_i, \quad \forall i = 0, 1, \dots, n. \quad (3.22)$$

Ενώ το τελικό εκτιμηθέν απόθεμα \widehat{R} δίνεται, κατά τα γνωστά, από την Εξίσωση:

$$\widehat{R} = \sum_{i=0}^n \widehat{R}_i. \quad (3.23)$$

Παράδειγμα 3.4(α) (Γεωμετρική μέθοδος διαχωρισμού)

Έχοντας ως δεδομένο τον παρακάτω Πίνακα (3.15) θα εκτιμηθεί το απόθεμα με τη γεωμετρική μέθοδο διαχωρισμού.

Πίνακας 3.15: Επαυξητικές απαιτήσεις $X_{i,j}$ και πλήθος απαιτήσεων N_i

Έτος Ατυχήματος (i)	Έτος Εξέλιξης (j)										Πλήθος Απαιτήσεων (N_i)
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
2009	1.774.450	920.209	242.903	144.890	101.290	60.439	31.553	22.020	13.583	15.663	5531
2010	1.679.010	812.948	215.635	126.743	89.017	57.913	26.361	16.164	13.000		5194
2011	1.588.040	704.276	178.361	93.553	64.648	41.784	24.823	28.665			5170
2012	1.456.934	622.445	141.726	85.050	47.607	46.100	30.596				4970
2013	1.438.800	629.185	134.988	91.860	56.046	41.187					4846
2014	1.317.025	562.531	133.294	77.336	60.800						4959
2015	1.427.681	580.399	146.681	75.005							4994
2016	1.358.294	547.999	120.248								5024
2017	1.334.432	514.034									5084
2018	1.276.303										5208

- **Βήμα 1** Δημιουργία του πίνακα μέσου κόστους ανά απαίτηση για κάθε έτος ατυχήματος i σε κάθε έτος εξέλιξης j .

Πίνακας 3.16: Μέσο κόστος ανά απαίτηση $S_{i,j}$

Έτος Ατυχήματος (i)	Έτος Εξέλιξης (j)									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2009	320,82	166,37	43,92	26,20	18,31	10,93	5,70	3,98	2,46	2,83
2010	323,26	156,52	41,52	24,40	17,14	11,15	5,08	3,11	2,50	
2011	307,16	136,22	34,50	18,10	12,50	8,08	4,80	5,54		
2012	293,15	125,24	28,52	17,11	9,58	9,28	6,16			
2013	296,90	129,84	27,86	18,96	11,57	8,50				
2014	265,58	113,44	26,88	15,60	12,26					
2015	285,88	116,22	29,37	15,02						
2016	270,36	109,08	23,93							
2017	262,48	101,11								
2018	245,07									

Όπου

$$S_{0,0} = 320,82 = \frac{1.774.450}{5531}, \quad S_{0,1} = 166,37 = \frac{920.209}{5531},$$

$$S_{4,2} = 27,86 = \frac{134.998}{4846}, \quad S_{5,3} = 15,60 = \frac{77.336}{4959}$$

και ούτω καθεξής.

- **Βήμα 2** Υπολογισμός των συνισταμένων του $S_{i,j}$, r_j και λ_{i+j} για κάθε $i \in \{0, 1, \dots, 9\}$ και για κάθε $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ τέτοια ώστε $i + j \leq 9$. Κάνοντας χρήση των Εξισώσεων (3.15) έως (3.20) για $n = 9$ παράγονται τα ακόλουθα αποτελέσματα:

$$\begin{array}{llll} \lambda_9 = 13,65, & r_9 = 0,21, & \lambda_8 = 13,01, & r_8 = 0,19, \\ \lambda_7 = 13,28, & r_7 = 0,31, & \lambda_6 = 14,67, & r_6 = 0,40, \\ \lambda_5 = 15,82, & r_5 = 0,68, & \lambda_4 = 17,88, & r_4 = 0,90, \\ \lambda_3 = 18,80, & r_3 = 1,25, & \lambda_2 = 19,66, & r_2 = 2,00, \\ \lambda_1 = 19,70, & r_1 = 7,88, & \lambda_0 = 18,25, & r_0 = 17,58. \end{array}$$

Προς επαλήθευση, εύκολα ελέγχεται ότι το γινόμενο των αναμενόμενων ποσοστών ζημιών στο έτος εξέλιξης j , r_j , είναι ίσο με τη μονάδα.

- **Βήμα 3** Εκτελώντας απλή γραμμική παλινδρόμηση με εξαρτημένη μεταβλητή τους παράγοντες λ_{i+j} του βήματος 2 και ανεξάρτητη τα αντίστοιχα $i + j$ (δηλαδή $i + j = 0, 1, \dots, 9$) εκτιμώνται οι παράμετροι α και β του μοντέλου (3.21). Συνεπώς το εκτιμηθέν γραμμικό μοντέλο είναι:

$$\widehat{\lambda}_{i+j} = 20,14 - 0,82(i + j),$$

όπου $\widehat{\alpha} = 20,14$ και $\widehat{\beta} = -0,82$.

Κατόπιν, μέσω του εκτιμηθέντος γραμμικού μοντέλου, υπολογίζονται οι εκτιμήσεις των παραγόντων επίδρασης του πληθωρισμού $\hat{\lambda}_{i+j}$ για $i + j = 10, 11, \dots, 18$.

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_{10} &= 11,99, & \hat{\lambda}_{11} &= 11,17, & \hat{\lambda}_{12} &= 10,35, \\ \hat{\lambda}_{13} &= 9,54, & \hat{\lambda}_{14} &= 8,72, & \hat{\lambda}_{15} &= 7,91, \\ \hat{\lambda}_{16} &= 7,09, & \hat{\lambda}_{17} &= 6,27, & \hat{\lambda}_{18} &= 5,46. \end{aligned}$$

- **Βήμα 4** Υπολογισμός των εκτιμήσεων του μέσου κόστους ανά απαίτηση $\hat{S}_{i,j}$ για κάθε i, j τέτοια ώστε $i + j > n$, δηλαδή των στοιχείων που βρίσκονται κάτω από τη δευτερεύουσα διαγώνιο του Πίνακα (3.16) με τη βοήθεια της Σχέσης (3.14):

$$\hat{S}_{i,j} = r_j \cdot \hat{\lambda}_{i+j}.$$

Πίνακας 3.17: Εκτιμηθέν μέσο κόστος ανά απαίτηση \hat{S}_{i+j} (με έντονο μπλε)

Έτος Ατυχήματος (i)	Έτος Εξέλιξης (j)									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2009	320,82	166,37	43,92	26,20	18,31	10,93	5,70	3,98	2,46	2,83
2010	323,26	156,52	41,52	24,40	17,14	11,15	5,08	3,11	2,50	2,49
2011	307,16	136,22	34,50	18,10	12,50	8,08	4,80	5,54	2,23	2,32
2012	293,15	125,24	28,52	17,11	9,58	9,28	6,16	3,69	2,08	2,15
2013	296,90	129,84	27,86	18,96	11,57	8,50	4,75	3,44	1,93	1,98
2014	265,58	113,44	26,88	15,60	12,26	8,11	4,43	3,19	1,77	1,81
2015	285,88	116,22	29,37	15,02	10,83	7,56	4,11	2,93	1,62	1,64
2016	270,36	109,08	23,93	14,99	10,09	7,01	3,78	2,68	1,47	1,47
2017	262,48	101,11	24,03	13,97	9,36	6,45	3,46	2,43	1,32	1,30
2018	245,07	94,49	22,39	12,95	8,62	5,90	3,14	2,18	1,17	1,13

Όπου παραδείγματος χάριν,

$$\begin{aligned}\widehat{S}_{6,4} &= r_4 \cdot \widehat{\lambda}_{10} = 10,83, & \widehat{S}_{6,7} &= r_7 \cdot \widehat{\lambda}_{13} = 2,93, \\ \widehat{S}_{5,8} &= r_8 \cdot \widehat{\lambda}_{13} = 1,77, & \widehat{S}_{9,9} &= r_9 \cdot \widehat{\lambda}_{18} = 1,13\end{aligned}$$

και ούτω καθεξής.

- **Βήμα 5** Για κάθε έτος ατυχήματος i πολλαπλασιάζοντας το άθροισμα των εκτιμήσεων του μέσου κόστους ανά απαίτηση $\widehat{S}_{i,j}$ με το αντίστοιχο πλήθος απαιτήσεων λαμβάνουμε την εκτίμηση του αποθέματος \widehat{R}_i για κάθε έτος ατυχήματος i , όπου το άθροισμα των ετησίων αποθεμάτων δίνει το συνολικό απόθεμα, το οποίο ανέρχεται στο ύψος του 1.667.159.

Πίνακας 3.18: Εκτιμηθέν απόθεμα για κάθε έτος

Έτος Ατυχήματος (i)	Άθροισμα Μέσου Κόστους ανά Απαίτηση	Πλήθος Απαιτήσεων (N_i)	Απόθεμα Έτους Ατυχήματος (\widehat{R}_i)
2009	0,00	5.531	0
2010	2,49	5.194	13.754
2011	4,55	5.170	23.616
2012	7,91	4.970	40.912
2013	12,09	4.846	60.111
2014	19,31	4.959	93.571
2015	28,69	4.994	142.288
2016	41,49	5.024	207.217
2017	62,32	5.084	313.081
2018	151,97	5.208	772.610

3.2.5 Μέθοδος Bornhuetter-Ferguson

Η μέθοδος Bornhuetter-Ferguson (1972), η οποία έχει λάβει το όνομά της από τους δημιουργούς της, είναι σχεδόν τόσο δημοφιλής στους αναλογιστές όσο και η μέθοδος chain ladder. Είναι ουσιαστικά μία μίξη της μεθόδου chain ladder με μία εκ των προτέρων (a priori) πληροφορία για την εκτίμηση του τελικού ύψους των απαιτήσεων. Η προαναφερθείσα πληροφορία είναι πιθανό να προέρχεται από στατιστικά της αγοράς, στοιχεία της εταιρείας, γνώση ειδικών και λοιπά. Η προβολή της τελικής απαίτησης στη μέθοδο chain ladder προκύπτει ως αποτέλεσμα του γινομένου της τελευταίας γνωστής πληρωθείσας απαίτησης για κάθε έτος ατυχήματος με έναν σωρευτικό παράγοντα εξέλιξης. Το μειονέκτημα της chain ladder είναι ότι μπορεί να οδηγήσει σε ανακόλουθες και αναξιόπιστες προβολές των τελικών απαιτήσεων όταν ο σωρευτικός παράγοντας εξέλιξης είναι είτε πολύ μικρός, λόγω μίας σχετικά μικρής μεταβολής στις απαιτήσεις από ένα έτος εξέλιξης στο επόμενο, είτε εξαιρετικά μεγάλος, εξαιτίας κάποιας ασυνήθιστα υψηλής απαίτησης.

Η μέθοδος Bornhuetter-Ferguson συνδυάζει τη μέθοδο chain ladder με την εκ των προτέρων πληροφορία για την τελική εκτίμηση του ύψους της απαίτησης, διαχωρίζοντας τις τελικές απαιτήσεις σε δύο συνιστώσες: τις αναγγελθείσες (ή πληρωθείσες) απαιτήσεις και τις αναμενόμενες μη-αναγγελθείσες (ή μη-πληρωθείσες) απαιτήσεις. Καθώς η εμπειρία ωριμάζει, δίνεται περισσότερη βαρύτητα στις πραγματικές απαιτήσεις, ενώ οι αναμενόμενες τείνουν να γίνονται σταδιακά όλο και λιγότερο σημαντικές.

Όπως αναμενόταν, ο στόχος και αυτής της μεθόδου είναι η εκτίμηση των IBNR απαιτήσεων και η προβολή του τελικού ποσού απώλειας. Η μέθοδος Bornhuetter-Ferguson μπορεί να αποδειχτεί ιδιαίτερα χρήσιμη σε περιπτώσεις όπου οι πραγματικές απώλειες δεν παρέχουν ικανοποιητικά αποτελέσματα για την εκτίμηση των IBNR απαιτήσεων. Ζήτημα το οποίο ανακύπτει συνήθως όταν οι απαιτήσεις προέρχονται από γεγονότα χαμηλής συχνότητας και υψηλής σφοδρότητας (low frequency and high severity), συνδυασμός που καθιστά δυσκολότερη την παροχή ακριβών εκτιμήσεων.

Η βασική υπόθεση της μεθόδου Bornhuetter-Ferguson είναι ότι οι μη-αναγγελθείσες (μη-πληρωθείσες) απαιτήσεις εξελίσσονται με βάση τις αναμενόμενες αξιώσεις. Με άλλα

λόγια, οι απαιτήσεις που αναγγέλθηκαν έως σήμερα δεν περιέχουν καμία πληροφορία σχετικά με το ύψος του ποσού των απαιτήσεων που πρόκειται να αναγγελθούν. Στο σημείο αυτό εντοπίζεται η βασική διαφορά με τη μέθοδο chain ladder όπου πρωταρχική υπόθεση είναι ότι οι μη-αναγγελθείσες (μη-πληρωθείσες) απαιτήσεις θα αναπτυχθούν με βάση τις αναγγελθείσες (πληρωθείσες) απαιτήσεις έως και σήμερα.

Πίνακας 3.19: Αθροιστικές απαιτήσεις $C_{i,j}$ και εκ των προτέρων πληροφορία v_i

Έτος Ατυχήματος (i)	Έτος Εξέλιξης (j)									εκ των Προτέρων Πληροφορία (v_i)
	0	1	2	...	λ	...	$n-2$	$n-1$	n	
0	$C_{0,0}$	$C_{0,1}$	$C_{0,2}$...	$C_{0,\lambda}$...	$C_{0,n-2}$	$C_{0,n-1}$	$C_{0,n}$	v_0
1	$C_{1,0}$	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$...	$C_{1,\lambda}$...	$C_{1,n-2}$	$C_{1,n-1}$		v_1
2	$C_{2,0}$	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$...	$C_{2,\lambda}$...	$C_{2,n-2}$			v_2
⋮	⋮	⋮	⋮				⋮
κ	$C_{\kappa,0}$	$C_{\kappa,1}$	$C_{\kappa,2}$...	$C_{\kappa,n-\kappa}$					v_κ
⋮	⋮	...	⋮	...						⋮
$n-2$	$C_{n-2,0}$	$C_{n-2,1}$	$C_{n-2,2}$							v_{n-2}
$n-1$	$C_{n-1,0}$	$C_{n-1,1}$								v_{n-1}
n	$C_{n,0}$									v_n

Ορισμός 3.2.5 (Παραδοχές της μεθόδου)

- Οι αθροιστικές απαιτήσεις $C_{i,j}$ διαφορετικών ετών ατυχήματος i είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους
- Υπάρχουν οι παράμετροι $v_0, v_1, \dots, v_n > 0$ της εκ των προτέρων πληροφορίας και ένα μοτίβο $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n > 0$ με $\gamma_n = 1$ έτσι ώστε για κάθε $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, $\kappa \in \{1, 2, \dots, n-j\}$ να ισχύει

$$E[C_{i,0}] = \gamma_0 \cdot v_i, \quad (3.24)$$

$$E[C_{i,j+k} | C_{i,0}, \dots, C_{i,j}] = C_{i,j} + (\gamma_{j+k} - \gamma_j) \cdot v_i. \quad (3.25)$$

Η ακολουθία $\langle \gamma_j \rangle_{j \in \{0,1,\dots,n\}}$ περιγράφει το μοτίβο εξέλιξης των απαιτήσεων.

- Από τη δεύτερη παραδοχή (Σχέση 3.24) συνεπάγεται ότι

$$E[C_{i,j}] = \gamma_j \cdot v_i \quad \text{και} \quad E[C_{i,n}] = v_i. \quad (3.26)$$

Ορισμός 3.2.6 (Μεθοδολογία Bornhuetter-Ferguson)

- **Βήμα 1** Υπολογισμός των εκτιμήσεων των παραγόντων εξέλιξης της μεθόδου chain ladder, $\hat{f}_j \in \mathbb{R}^+$, $\forall j \in 0, 1, 2, \dots, n-1$.

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=0}^{n-(j+1)} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-(j+1)} C_{i,j}}, \quad \forall j = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (3.27)$$

- **Βήμα 2** Υπολογισμός των εκτιμήσεων των παραγόντων $\hat{\gamma}_j$, $j \in \{0, 1, \dots, n\}$.

$$\hat{\gamma}_j = \prod_{\kappa=j}^{n-1} \hat{f}_\kappa^{-1} \quad \text{και} \quad \hat{\gamma}_n = 1. \quad (3.28)$$

- **Βήμα 3** Εκτίμηση της εξέλιξης των απαιτήσεων και προβολή των τελικών ζημιών.

$$\hat{C}_{i,j} = C_{i,n-i} + (\hat{\gamma}_j - \hat{\gamma}_{n-i}) \cdot \hat{v}_i, \quad (3.29)$$

για κάθε $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ τέτοια ώστε $i+j > n$. Όπου $\hat{\gamma}_j$ είναι η εκτίμηση του γ_j και \hat{v}_i μία εκ των προτέρων εκτίμηση της τελικής αναμενόμενης απαίτησης $E[C_{i,n}]$, η οποία στην πράξη προέρχεται από έξωθεν πληροφορίες.

- **Βήμα 4** Εκτίμηση του αποθέματος.

Το εκτιμώμενο απόθεμα \hat{R}_i για κάθε έτος ατυχήματος i προκύπτει, ως γνωστόν, από τη διαφορά της n -οστής στήλης και της δευτερεύουσας διαγωνίου ($i+j=n$) του αθροιστικού Πίνακα (3.19)

ή εναλλακτικά από τη Σχέση:

$$\widehat{R}_i = (1 - \widehat{\gamma}_{n-i}) \cdot \widehat{v}_i, \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, n\}. \quad (3.30)$$

Τέλος, το συνολικό εκτιμώμενο απόθεμα είναι το άθροισμα όλων των επιμέρους αποθεμάτων.

Πίνακας 3.20: Αθροιστικές απαιτήσεις $C_{i,j}$ και εκ των προτέρων πληροφορία \widehat{v}_i

Έτος Ατυχήματος (i)	Έτος Εξέλιξης (j)										εκ των Προτέρων
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Πληροφορία (\widehat{v}_i)
2009	1.774.450	2.694.659	2.937.562	3.082.452	3.183.742	3.244.182	3.275.734	3.297.754	3.311.337	3.327.000	3.444.211
2010	1.679.010	2.491.957	2.707.592	2.834.335	2.923.352	2.981.265	3.007.626	3.023.790	3.036.790		3.142.312
2011	1.588.040	2.292.316	2.470.677	2.564.230	2.628.878	2.670.662	2.695.485	2.724.151			2.882.618
2012	1.456.934	2.079.379	2.221.105	2.306.156	2.353.763	2.399.863	2.430.459				2.634.648
2013	1.438.800	2.067.985	2.202.973	2.294.832	2.350.878	2.392.065					2.630.360
2014	1.317.025	1.879.556	2.012.850	2.090.186	2.150.986						2.416.939
2015	1.427.681	2.008.079	2.154.760	2.229.765							2.603.244
2016	1.358.294	1.906.292	2.026.540								2.501.947
2017	1.334.432	1.848.466									2.408.659
2018	1.276.303										2.251.788

Παράδειγμα 3.5(α) (Bornhuetter-Ferguson)

Ως δεδομένο υπάρχει ο ανωτέρω Πίνακας (3.20) των αθροιστικών πληρωθεισών απαιτήσεων του υποκλάδου αυτοκινήτου στην Ευρώπη, της ασφαλιστικής εταιρείας Zurich Insurance Group Ltd, όπου στην τελευταία στήλη του βρίσκεται η εκ των προτέρων εκτίμηση της τελικής αναμενόμενης απαίτησης, \widehat{v}_i .

- **Βήμα 1** Υπολογισμός των εκτιμήσεων των παραγόντων εξέλιξης της μεθόδου chain ladder, \widehat{f}_j με τη βοήθεια της Σχέσης (3.27).

$$\begin{aligned} \widehat{f}_0 &= 1,4407, & \widehat{f}_1 &= 1,0754, & \widehat{f}_2 &= 1,0416, \\ \widehat{f}_3 &= 1,0276, & \widehat{f}_4 &= 1,0184, & \widehat{f}_5 &= 1,0100, \\ \widehat{f}_6 &= 1,0074, & \widehat{f}_7 &= 1,0042, & \widehat{f}_8 &= 1,0047. \end{aligned}$$

Για περισσότερες λεπτομέρειες βλέπε Υποενότητα 3.2.1 chain ladder.

- **Βήμα 2** Υπολογισμός των εκτιμήσεων των παραγόντων $\hat{\gamma}_j$ κάνοντας χρήση της Σχέσης (3.28).

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}_0 &= 0,5767, & \hat{\gamma}_1 &= 0,8309, & \hat{\gamma}_2 &= 0,8936, & \hat{\gamma}_3 &= 0,9307, \\ \hat{\gamma}_4 &= 0,9564, & \hat{\gamma}_5 &= 0,9740, & \hat{\gamma}_6 &= 0,9838, & \hat{\gamma}_7 &= 0,9911, \\ \hat{\gamma}_8 &= 0,9953, & \hat{\gamma}_9 &= 1.\end{aligned}$$

Παραδείγματος χάριν,

$$\hat{\gamma}_3 = \prod_{\kappa=3}^8 \hat{f}_{\kappa}^{-1} = \frac{1}{\hat{f}_3 \cdot \hat{f}_4 \cdots \hat{f}_8}, \quad \hat{\gamma}_7 = \prod_{\kappa=7}^8 \hat{f}_{\kappa}^{-1} = \frac{1}{\hat{f}_7 \cdot \hat{f}_8}.$$

- **Βήμα 3** Εκτίμηση της εξέλιξης των απαιτήσεων και προβολή των τελικών ζημιών αξιοποιώντας την Εξίσωση (3.29) όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 3.21: Εκτιμηθείσες απαιτήσεις (με έντονο μπλε) και εκ των προτέρων πληροφορία

Έτος Ατυχήματος (<i>i</i>)	Έτος Εξέλιξης (<i>j</i>)										εκ των Προτέρων Πληροφορία (\hat{v}_i)
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
2009	1.774.450	2.694.659	2.937.562	3.082.452	3.183.742	3.244.182	3.275.734	3.297.754	3.311.337	3.327.000	3.444.211
2010	1.679.010	2.491.957	2.707.592	2.834.335	2.923.352	2.981.265	3.007.626	3.023.790	3.036.790	3.051.583	3.142.312
2011	1.588.040	2.292.316	2.470.677	2.564.230	2.628.878	2.670.662	2.695.485	2.724.151	2.736.165	2.749.736	2.882.618
2012	1.456.934	2.079.379	2.221.105	2.306.156	2.353.763	2.399.863	2.430.459	2.449.757	2.460.737	2.473.141	2.634.648
2013	1.438.800	2.067.985	2.202.973	2.294.832	2.350.878	2.392.065	2.417.770	2.437.037	2.448.000	2.460.383	2.630.360
2014	1.317.025	1.879.556	2.012.850	2.090.186	2.150.986	2.193.540	2.217.159	2.234.862	2.244.935	2.256.314	2.416.939
2015	1.427.681	2.008.079	2.154.760	2.229.765	2.296.740	2.342.574	2.368.014	2.387.081	2.397.931	2.410.187	2.603.244
2016	1.358.294	1.906.292	2.026.540	2.119.462	2.183.831	2.227.881	2.252.331	2.270.657	2.281.085	2.292.864	2.501.947
2017	1.334.432	1.848.466	1.999.406	2.088.863	2.150.832	2.193.240	2.216.778	2.234.420	2.244.459	2.255.799	2.408.659
2018	1.276.303	1.848.611	1.989.721	2.073.352	2.131.285	2.170.931	2.192.936	2.209.430	2.218.815	2.229.416	2.251.788

Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned}\hat{C}_{7,5} &= C_{7,9-7} + (\hat{\gamma}_5 - \hat{\gamma}_{9-7}) \cdot \hat{v}_7 = C_{7,2} + (\hat{\gamma}_5 - \hat{\gamma}_2) \cdot \hat{v}_7 \\ &= 2.026.540 + (0,9740 - 0,8936) \cdot 2.501.947 = 2.227.881,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{C}_{3,8} &= C_{3,9-3} + (\widehat{\gamma}_8 - \widehat{\gamma}_{9-3}) \cdot \widehat{v}_3 = C_{3,8} + (\widehat{\gamma}_8 - \widehat{\gamma}_6) \cdot \widehat{v}_3 \\ &= 2.430.459 + (0,9953 - 0,9838) \cdot 2.634.648 = 2.460.737.\end{aligned}$$

- **Βήμα 4** Εκτίμηση του αποθέματος.

1ος Τρόπος

Αφαιρώντας τις πραγματικές έως τώρα πληρωθείσες ζημιές (στοιχεία της δευτερεύουσας διαγωνίου) από την τελική εκτίμηση της αντίστοιχης απαίτησης (τελευταία στήλη του Πίνακα 3.21) προκύπτει το απόθεμα \widehat{R}_i για κάθε έτος ατυχήματος i . Το άθροισμα των οποίων δίνει το συνολικό απόθεμα \widehat{R} , το οποίο ισούται με 2.063.899.

Πίνακας 3.22: Εκτιμηθέν απόθεμα για κάθε έτος

Έτος Ατυχήματος (i)	Πληρωθείσες Απαιτήσεις	Τελικές Εκτιμηθείσες Απαιτήσεις	Απόθεμα Έτους Ατυχήματος (\widehat{R}_i)
2009	3.036.790	3.327.000	0
2010	2.724.151	3.051.583	14.794
2011	2.430.459	2.749.736	25.585
2012	2.392.065	2.473.141	42.682
2013	2.150.986	2.460.383	68.318
2014	2.229.765	2.256.314	105.328
2015	2.026.540	2.410.187	180.422
2016	1.848.466	2.292.864	266.323
2017	1.276.303	2.255.799	407.334
2018	3.327.000	2.229.416	953.113

2ος Τρόπος

Με τη βοήθεια της Σχέσης (3.30).

$$\widehat{R}_i = (1 - \widehat{\gamma}_{n-i}) \cdot \widehat{v}_i.$$

Για παράδειγμα,

$$\widehat{R}_5 = (1 - \widehat{\gamma}_{9-5}) \cdot \widehat{v}_5 = (1 - \widehat{\gamma}_5) \cdot \widehat{v}_5 = (1 - 0,9740) \cdot 2.416.939 = 105.328,$$

$$\widehat{R}_8 = (1 - \widehat{\gamma}_{9-8}) \cdot \widehat{v}_8 = (1 - \widehat{\gamma}_1) \cdot \widehat{v}_8 = (1 - 0,8309) \cdot 2.408.659 = 407.334.$$

3.3 Ασαφείς Μέθοδοι Αποθεματοποίησης

Στην παρούσα ενότητα, οι συμβατικές μέθοδοι αποθεματοποίησης ζημιών επεκτείνονται με την εισαγωγή της ασαφούς λογικής σε αυτές. Ακόμη κι αν γίνεται χρήση ποικίλων μεθόδων βασισμένων σε στατιστικές αναλύσεις για τον προσδιορισμό των αποθεμάτων, η παρουσία πραγματικών παραγόντων, που αυξάνουν την αβεβαιότητα κατά το στάδιο του υπολογισμού, μπορεί να οδηγήσει σε σημαντική μείωση της αξιοπιστίας των στατιστικών μεθόδων. Ενίοτε, η εκτίμηση των τελικών αξιώσεων εμπεριέχει παραδοχές που έχουν γίνει από τον εκάστοτε αναλογιστή (Heberle & Thomas, 2014). Συνεπώς, τέθηκε υπό θεώρηση η εκτίμηση των τελικών απαιτήσεων από ένα διάστημα στα πλαίσια του οποίου μπορούν να κυμαίνονται. Με τον τρόπο αυτό, προστίθεται ασάφεια στο μοντέλο. Το πλεονέκτημα στη χρήση ασαφών αριθμών έγκειται στο γεγονός ότι η αβεβαιότητα κάθε μεθόδου συμπεριλαμβάνεται απευθείας μέσα στο μοντέλο εκτίμησης των απαιτήσεων και του αποθέματος. Σε αντίθεση με τις παραδοσιακές μεθόδους αποθεματοποίησης, η προσέγγιση μέσω της ασαφούς λογικής μπορεί να καταστήσει ανεκτές την ανακρίβεια και την αβεβαιότητα, δίχως απώλειες στην αποτελεσματικότητα των μεθόδων (Apaydin & Baser, 2010). Η επέκταση των μεθόδων μέσω της ασαφούς λογικής θα μπορούσε κάλλιστα να χαρακτηριστεί ως μία βελτιωμένη εκδοχή αυτών.

Σημειώσεις

- Οι παραδοχές, οι υποθέσεις καθώς και οι βασικοί ορισμοί κάθε μεθόδου παραμένουν αναλλοίωτοι.
- Κάθε εκτίμηση η οποία πραγματοποιείται είναι ασαφής αριθμός.
- Όλοι οι ασαφείς αριθμοί των οποίων γίνεται χρήση είναι τριγωνικοί ασαφείς αριθμοί.
- Στα παραδείγματα χρησιμοποιούνται ακριβώς τα ίδια δεδομένα ζημιών του υποκλάδου αυτοκινήτου της ασφαλιστικής εταιρείας Zurich Insurance Group των οποίων έγινε χρήση και προηγουμένως.

- Για κάθε συμβατική μέθοδο αποθεματοποίησης που επεκτείνεται, παρουσιάζεται η μεθοδολογία της και η εφαρμογή αυτής.
- Παραλείπεται από την παρούσα ενότητα η μεθοδολογία που αφορά τον υπολογισμό των κέντρων των ασαφών αριθμών, καθώς είναι απολύτως όμοια με αυτή των συμβατικών μεθόδων αποθεματοποίησης. Ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στην Ενότητα 3.2.
- Παρουσιάζεται το δεύτερο μέρος των παραδειγμάτων της Ενότητας 3.2, όπου υπολογίζονται οι αποκλίσεις (spreads) των εκτιμηθέντων απαιτήσεων και της εκτίμησης του αποθέματος, καθώς και εκτιμήσεις του αποθέματος ανά έτος ατυχήματος συναρτήσει της παραμέτρου κινδύνου r_f και του παράγοντα αβεβαιότητας K για ορισμένες ενδεικτικές τιμές που λαμβάνουν.
- Στο πρώτο μέρος των παραδειγμάτων (Ενότητα 3.2) περιέχονται οι υπολογισμοί των κέντρων των ασαφών αριθμών, οπότε όλοι οι υπολογισμοί των παραδειγμάτων της Ενότητας 3.2 θεωρούνται δεδομένοι.

3.3.1 Ασαφής μέθοδος chain ladder ή τριγώνου εξέλιξης ζημιών

Στην κλασική μέθοδο chain ladder οι παράγοντες εξέλιξης ζημιών, f_j , είναι συμβατικοί αριθμοί. Παρόλα αυτά, οι αναλογιστές συχνά τείνουν να τους αναπροσαρμόζουν, αφότου έχουν ήδη υπολογιστεί, βάσει υποκειμενικών κρίσεων και υποθέσεων.

Με την εισαγωγή της ασαφούς λογικής, δεν απαιτείται η εκ των υστέρων αναπροσαρμογή των παραγόντων εξέλιξης, ενώ ταυτόχρονα διακρίνονται από ευελιξία και συμπεριλαμβάνουν την αβεβαιότητα. Για τους προαναφερθέντες λόγους οι Heberle & Thomas (2014) εισήγαγαν την ασαφή μέθοδο chain ladder.

Ορισμός 3.3.1 (Μεθοδολογία ασαφούς chain ladder)

- **Βήμα 1** Ασαφοποίηση των εκτιμήσεων των παραγόντων εξέλιξης $\hat{f}_j \in \mathbb{R}^+$, $\forall j \in 0, 1, 2, \dots, n - 1$.

Οι εκτιμήσεις των παραγόντων εξέλιξης γίνονται ασαφείς αριθμοί μέσω του υπολογισμού των αποκλίσεων \widehat{f}_{jS} με $\widehat{f}_{jS} = \widehat{f}_{jL} = \widehat{f}_{jR}$.

$$\widehat{f}_{jS} = \frac{\sum_{i=0}^{n-(j+1)} X_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-(j+1)} C_{i,j}}, \quad \forall j = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (3.31)$$

Όπου η απόκλιση $\widehat{f}_{\lambda S}$ αντιστοιχεί στον παράγοντα που εκτιμά την εξέλιξη ζημιάς από το έτος εξέλιξης λ στο έτος εξέλιξης $\lambda + 1$.

- **Βήμα 2** Υπολογισμός των αποκλίσεων των εκτιμήσεων της εξέλιξης των απαιτήσεων $\forall i \in \{0, 1, \dots, n\}$ και $\forall j \in \{0, 1, \dots, n\}$ τέτοια ώστε $i + j > n$.

1ος Τρόπος

$$\begin{aligned} \widehat{C}_{i,j+1} &= \widehat{C}_{i,j} \otimes \widehat{f}_j \stackrel{1.20}{=} \left(\widehat{C}_{(i,j)C}, \widehat{C}_{(i,j)L}, \widehat{C}_{(i,j)R} \right) \otimes \left(\widehat{f}_{jC}, \widehat{f}_{jL}, \widehat{f}_{jR} \right) \\ &= \left(\widehat{C}_{(i,j)C} \cdot \widehat{f}_{jC}, \right. \\ &\quad \widehat{C}_{(i,j)C} \cdot \widehat{f}_{jL} + \widehat{f}_{jC} \cdot \widehat{C}_{(i,j)L} - \widehat{C}_{(i,j)L} \cdot \widehat{f}_{jL}, \\ &\quad \left. \widehat{C}_{(i,j)C} \cdot \widehat{f}_{jR} + \widehat{f}_{jC} \cdot \widehat{C}_{(i,j)R} + \widehat{C}_{(i,j)R} \cdot \widehat{f}_{jR} \right). \end{aligned} \quad (3.32)$$

2ος Τρόπος

$$\widehat{C}_{\kappa,\lambda} = \widetilde{C}_{\kappa,n-\kappa} \otimes \prod_{j=n-\kappa}^{\lambda-1} \widehat{f}_j. \quad (3.33)$$

Όπου $\widetilde{C}_{\kappa,n-\kappa}$ είναι η τελευταία γνωστή ανθροιστική πληρωθείσα απαίτηση και ως εκ τούτου $\widetilde{C}_{\kappa,n-\kappa} = (C_{(\kappa,n-\kappa)C}, 0, 0)$.

- **Βήμα 3** Υπολογισμός της εξ' αριστερών και εκ δεξιών απόκλισης (spread) της εκτίμησης του αποθέματος \widehat{R} .

Η απόκλιση της εκτίμησης του αποθέματος \widehat{R}_i για κάθε έτος ατυχήματος i είναι ίσο με την εκτίμηση της απόκλισης της προβολής της τελικής απαίτησης $\widehat{C}_{(i,n)S}$ για $S = L, R$.

Δηλαδή,

$$\widehat{R}_{iS} = \widehat{C}_{(i,n)S}, \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, n\}, \quad S = L, R. \quad (3.34)$$

Συνεπώς, η συνολική αριστερή (δεξιά) απόκλιση του αποθέματος ισούται με το άθροισμα των αριστερών (δεξιών) αποκλίσεων για κάθε έτος ατυχήματος i .

$$\widehat{R}_S = \sum_{i=0}^n \widehat{R}_{iS}, \quad S = L, R. \quad (3.35)$$

- **Βήμα 4** Υπολογισμός της μέσης τιμής της εκτίμησης του αποθέματος για κάθε έτος ατυχήματος i και συνολικά, συναρτήσει της παραμέτρου κινδύνου r_f με τη βοήθεια της Σχέσης (1.22).

$$E_{r_f} \left(\widehat{R} \right) = \widehat{R}_C - \frac{1 - r_f}{2} \cdot \widehat{R}_L + \frac{r_f}{2} \cdot \widehat{R}_R.$$

- **Βήμα 5** Υπολογισμός της αβεβαιότητας εκτίμησης του αποθέματος για κάθε έτος ατυχήματος i και συνολικά, συναρτήσει του παράγοντα αβεβαιότητας K με τη βοήθεια της Σχέσης (1.23).

$$Unc_K \left(\widehat{R} \right) = \frac{1}{2} K \left(\widehat{R}_L + \widehat{R}_R \right).$$

Παρατήρηση

Τα βήματα 4 και 5 δεν αποτελούν ζωτικό μέρος της μεθοδολογίας της ασαφούς μεθόδου chain ladder. Παρόλα αυτά, παρέχουν λίαν σημαντικές πληροφορίες για τη διακύμανση της εκτίμησης του αποθέματος με βάση τον κίνδυνο που επιθυμεί να αναλάβει μία ασφαλιστική εταιρεία και την αβεβαιότητα που εκτιμά ότι υπάρχει στο περιβάλλον στο οποίο επιχειρεί. Για τους προαναφερθέντες λόγους, στις επόμενες μεθόδους θα παραληφθούν κατά τον ορισμό των αντίστοιχων μεθοδολογιών καθώς δεν υπάρχει κάτι νέο προς αποσαφήνιση ως προς τον τρόπο λειτουργίας τους, όμως θα υπολογιστούν στο δεύτερο μέρος των παραδειγμάτων που παρατίθενται στην εν λόγω ενότητα.

Παράδειγμα 3.1(β) (Ασαφής chain ladder)

- **Βήμα 1** Από τα δεδομένα των Πινάκων των επαυξητικών απαιτήσεων (3.3) και των αθροιστικών απαιτήσεων (3.4) και αξιοποιώντας την Εξίσωση (3.33), εξαγωγή οι εκτιμήσεις των αποκλίσεων των παραγόντων εξέλιξης.

$$\begin{aligned} \hat{f}_{0S} &= 0,4407, & \hat{f}_{1S} &= 0,0754, & \hat{f}_{2S} &= 0,0416, \\ \hat{f}_{3S} &= 0,0276, & \hat{f}_{4S} &= 0,0184, & \hat{f}_{5S} &= 0,0100, \\ \hat{f}_{6S} &= 1,0074, & \hat{f}_{7S} &= 0,0042, & \hat{f}_{8S} &= 0,0047. \end{aligned}$$

Όπου για παράδειγμα,

$$\hat{f}_{0S} = \frac{5.894.025}{13.374.665} = 0,4407,$$

με

$$5.894.025 = 920.209 + 812.948 + \dots + 514.034$$

και

$$13.374.665 = 1.774.450 + 1.679.010 + \dots + 1.334.432$$

και ούτω καθεξής.

Πίνακας 3.23: Εκτίμηση αριστερών αποκλίσεων (με έντονο μπλε) των απαιτήσεων

Έτος Ατυχήματος (<i>i</i>)	Έτος Εξέλιξης (<i>j</i>)									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2009	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2010	0	0	0	0	0	0	0	0	0	14.365
2011	0	0	0	0	0	0	0	0	11.456	24.395
2012	0	0	0	0	0	0	0	18.095	28.392	40.023
2013	0	0	0	0	0	0	24.000	41.988	52.223	63.785
2014	0	0	0	0	0	39.597	61.575	78.048	87.421	98.009
2015	0	0	0	0	61.638	103.819	127.232	144.781	154.766	166.045
2016	0	0	0	84.232	142.580	182.511	204.674	221.286	230.739	241.416
2017	0	0	139.412	222.036	279.272	318.440	340.181	356.476	365.748	376.222
2018	0	562.449	701.128	783.318	840.253	879.216	900.842	917.051	926.275	936.693

- **Βήμα 2** Υπολογισμός των αριστερών και δεξιών αποκλίσεων των εκτιμήσεων της εξέλιξης των απαιτήσεων $\forall i \in \{0, 1, \dots, n\}$ και $\forall j \in \{0, 1, \dots, n\}$ τέτοια ώστε $i + j > n$, χρησιμοποιώντας είτε την Εξίσωση (3.32) είτε την (3.33). Τα αποτελέσματα παρατίθενται στους Πίνακες (3.23) και (3.24).

Πίνακας 3.24: Εκτίμηση δεξιών αποκλίσεων (με έντονο μπλε) των απαιτήσεων

Έτος Ατυχήματος (<i>i</i>)	Έτος Εξέλιξης (<i>j</i>)									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2009	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2010	0	0	0	0	0	0	0	0	0	14.365
2011	0	0	0	0	0	0	0	0	11.456	24.504
2012	0	0	0	0	0	0	0	18.095	28.544	40.445
2013	0	0	0	0	0	0	24.000	42.345	52.937	65.000
2014	0	0	0	0	0	39.597	62.369	79.771	89.815	101.253
2015	0	0	0	0	61.638	106.089	131.630	151.139	162.395	175.211
2016	0	0	0	84.232	147.237	192.589	218.617	238.484	249.942	262.984
2017	0	0	139.412	233.625	303.777	354.130	382.977	404.974	417.652	432.077
2018	0	562.449	785.968	933.495	1.042.039	1.119.367	1.163.454	1.196.988	1.216.278	1.238.204

- **Βήμα 3** Υπολογισμός της εξ αριστερών και εκ δεξιών απόκλισης (spread) της εκτίμησης του αποθέματος \widehat{R} .

Από την Εξίσωση (3.34) λαμβάνουμε τις αποκλίσεις της εκτίμησης του αποθέματος οι οποίες παρουσιάζονται, μαζί με την εκτίμηση του αποθέματος κάθε έτους ατυχήματος, στον παρακάτω πίνακα. Όπου το άθροισμα κάθε στήλης δίνει το συνολικό εκτιμηθέν απόθεμα καθώς και τη συνολική αριστερή και δεξιά απόκλιση αντίστοιχα, δηλαδή:

$$\widehat{R} = (\widehat{R}_C, \widehat{R}_L, \widehat{R}_R) = (1.960.953, 1.960.953, 2.354.041).$$

Πίνακας 3.25: Απόθεμα \hat{R}_{iC} και απόκλιση εκτίμησης αποθέματος \hat{R}_{iS}

Έτος Ατυχήματος (i)	Απόθεμα Έτους Ατυχήματος (\hat{R}_{iC})	Αριστερή Απόκλιση Έτους Ατυχήματος (\hat{R}_{iL})	Δεξιά Απόκλιση Έτους Ατυχήματος (\hat{R}_{iR})
2009	0	0	0
2010	14.365	14.365	14.365
2011	24.395	24.395	24.504
2012	40.023	40.023	40.445
2013	63.785	63.785	65.000
2014	98.009	98.009	101.253
2015	166.045	166.045	175.211
2016	241.416	241.416	262.984
2017	376.222	376.222	432.077
2018	936.693	936.693	1.238.204
Σύνολο	1.960.954	1.960.954	2.354.042

- **Βήμα 4** Υπολογισμός της μέσης τιμής της εκτίμησης του αποθέματος για κάθε έτος ατυχήματος i και συνολικά, για ενδεικτικές τιμές της παραμέτρου κινδύνου r_f όπως φαίνεται στον Πίνακα (3.26).

Για παράδειγμα,

$$E_{0,75}(\hat{R}_7) = 241.416 - \frac{1 - 0,75}{2} \cdot 241.416 + \frac{0,75}{2} \cdot 262.984 = 309.858,$$

$$E_{0,99}(\hat{R}_9) = 936.693 - \frac{1 - 0,99}{2} \cdot 936.693 + \frac{0,99}{2} \cdot 1.238.204 = 1.544.921,$$

$$E_{0,25}(\hat{R}_2) = 24.395 - \frac{1 - 0,25}{2} \cdot 24.395 + \frac{0,25}{2} \cdot 24.504 = 18.310.$$

Υπενθυμίζεται ότι τιμές της παραμέτρου κινδύνου r_f μεγαλύτερες ή ίσες του 0,5 υποδεικνύουν κινδυνοφοβική αποθεματοποίηση.

Πίνακας 3.26: Μέση τιμή αποθέματος συναρτήσει της παραμέτρου κινδύνου r_f

Έτος Ατυχήματος (i)	Παράμετρος Κινδύνου (r_f)					
	0,1	0,25	0,5	0,75	0,9	0,99
2009	0	0	0	0	0	0
2010	8.619	10.773	14.365	17.956	20.110	21.403
2011	14.643	18.310	24.423	30.535	34.202	36.403
2012	24.035	30.070	40.128	50.187	56.222	59.843
2013	38.332	47.991	64.089	80.187	89.846	95.641
2014	58.968	73.913	98.820	123.728	138.673	147.640
2015	100.085	125.680	168.337	210.994	236.588	251.945
2016	145.928	183.758	246.808	309.858	347.688	370.386
2017	228.526	289.148	390.186	491.223	551.845	588.219
2018	577.092	740.209	1.012.071	1.283.933	1.447.050	1.544.921
Σύνολο	1.196.227	1.519.851	2.059.226	2.598.600	2.922.225	3.116.400

- **Βήμα 5** Υπολογισμός της αβεβαιότητας εκτίμησης του αποθέματος για κάθε έτος ατυχήματος i και συνολικά, συναρτήσει του παράγοντα αβεβαιότητας K .

Πίνακας 3.27: Ύψος αποθέματος συναρτήσει του παράγοντα αβεβαιότητας K

Έτος Ατυχήματος (i)	Παράγων Αβεβαιότητας (K)				
	0,5	1	2	5	10
2009	0	0	0	0	0
2010	7.182	14.365	28.729	71.823	143.646
2011	12.225	24.450	48.899	122.248	244.497
2012	20.117	40.234	80.468	201.169	402.338
2013	32.196	64.392	128.785	321.962	643.924
2014	49.816	99.631	199.263	498.156	996.313
2015	85.314	170.628	341.256	853.141	1.706.281
2016	126.100	252.200	504.400	1.260.999	2.521.999
2017	202.075	404.149	808.299	2.020.747	4.041.494
2018	543.724	1.087.448	2.174.897	5.437.242	10.874.485
Σύνολο	1.078.749	2.157.498	4.314.995	10.787.489	21.574.977

Παραδείγματος χάριν,

$$Unc_5(\widehat{R}_4) = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot (63.785 + 65.000) = 321.962,$$

$$Unc_{10}(\widehat{R}_8) = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (376.222 + 432.077) = 4.041.494.$$

3.3.2 Ασαφής μέθοδος London chain ladder

Η μέθοδος London chain ladder επεκτείνεται με την εφαρμογή της υβριδικής ασαφούς παλινδρόμησης ελάχιστων τετραγώνων (βλέπε 2.4.3) στις αθροιστικές πληρωθείσες απαιτήσεις. Πιο συγκεκριμένα, οι Baser & Araydin (2010) πρότειναν την αξιοποίηση του μοντέλου της απλής υβριδικής παλινδρόμησης (Σχέση 2.53) με στόχο την εκτίμηση των μελλοντικών απαιτήσεων καθώς και των αποκλίσεων (spread) που τις συνοδεύουν.

Η υβριδική ασαφής παλινδρόμηση (Chang 2001) προϋποθέτει ότι η εξαρτημένη μεταβλητή λαμβάνει μέρος στο μοντέλο ως ασαφής αριθμός και ως εκ τούτου θα πρέπει να μετατραπεί σε τέτοιο. Έχει αποδειχτεί (2.4.3.1 Παρατήρηση 1, Σχέση 2.68) ότι η απλή υβριδική παλινδρόμηση είναι ισοδύναμη με τρεις απλές, διαδοχικές παλινδρομήσεις για την εκτίμηση των κέντρων των συντελεστών του μοντέλου καθώς και των αριστερών και δεξιών αποκλίσεων αντιστοίχως.

Συνεπώς, μετά τη διενέργεια του πρώτου κύκλου (n το πλήθος) διαδοχικών, απλών παλινδρομήσεων, με τις οποίες εκτιμώνται τα κέντρα (α_{jC} και β_{jC}) των ασαφών συντελεστών των μοντέλων παλινδρόμησης για κάθε $j \in 0, 1, 2, \dots, n - 1$, εκκινεί η διαδικασία της μετατροπής των στοιχείων του πίνακα των αθροιστικών απαιτήσεων σε ασαφείς αριθμούς. Για την ασαφοποίηση των παρατηρήσεων κάθε στήλης του πίνακα που συμμετέχει στην παλινδρόμηση ως εξαρτημένη μεταβλητή, αξιοποιείται το διάστημα πρόβλεψης που αφορά την εξαρτημένη μεταβλητή (βλέπε 2.2.7) διότι αποτελεί ένα μαθηματικά αποδεκτό διάστημα στα πλαίσια του οποίου μπορεί να κυμαίνεται η τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής (Buckley 2006).

Κάθε γνωστή πληρωθείσα αθροιστική απαίτηση μετατρέπεται σε ασαφή αριθμό και πιο συγκεκριμένα σε συμμετρικό τριγωνικό ασαφή αριθμό σύμφωνα με τον τρόπο εργασίας

που έχει αναφερθεί στο χωρίο «Κατασκευή του Διαστήματος Πρόβλεψης» της Παραγράφου 2.2.6.

Επομένως, η απόκλιση κάθε τιμής που λαμβάνει η εξαρτημένη μεταβλητή ισούται με

$$s_{\kappa} \left(Y_{f_{\kappa}}^{(\nu)} \right) t_{m_{\kappa}-2, \frac{a}{2}} = s_{\kappa} \cdot t_{m_{\kappa}-2, \frac{a}{2}} \cdot \sqrt{\left[1 + \frac{1}{m_{\kappa}} + \frac{(X_f - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^{m_{\kappa}} (X_i - \bar{X})^2} \right]}. \quad (3.36)$$

όπου

- $f_{\kappa} \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ ο δείκτης της συγκεκριμένης παρατήρησης της κ -οστής παλινδρόμησης.
- m_{κ} το πλήθος των παρατηρήσεων της κ -οστής παλινδρόμησης.
- a με $0 < a < 1$ το επίπεδο σημαντικότητας του διαστήματος πρόβλεψης.
- s_{κ} η τετραγωνική ρίζα του μέσου τετραγωνικού σφάλματος (Σχέση 2.6) της κ -οστής παλινδρόμησης, των m_{κ} το πλήθος παρατηρήσεων, των κέντρων των τριγωνικών ασαφών αριθμών, $\kappa \in \{0, 1, n-1\}$.

Ορισμός 3.3.2 (Μεθοδολογία ασαφούς London chain ladder)

Δεδομένος θεωρείται ο Πίνακας (3.2) των αθροιστικών πληρωθεισών απαιτήσεων $C_{i,j}$, όπως πραγματοποιηθείσες θεωρούνται και οι n το πλήθος παλινδρομήσεις που αφορούν την εκτίμηση των κέντρων των ασαφών συντελεστών των μοντέλων παλινδρόμησης για κάθε έτος εξέλιξης $j \in 0, 1, 2, \dots, n-1$ (βλέπε 3.2.2). Κατ' επέκταση γνωστό επίσης θεωρείται το μέσο τετραγωνικό σφάλμα κάθε παλινδρόμησης.

- **Βήμα 1** Υπολογισμός της απόκλισης κάθε απαίτησης του αθροιστικού πίνακα πληρωμών σύμφωνα με την Εξίσωση (3.36) ξεκινώντας από τη δεύτερη στήλη του πίνακα.
- **Βήμα 2** Διενέργεια n το πλήθος διαδοχικών, απλών παλινδρομήσεων, όπου σε καθεμία από αυτές η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι στήλη του Πίνακα (3.2) των αθροιστικών απαιτήσεων, ενώ η εξαρτημένη μεταβλητή περιέχει τις αποκλίσεις

της επόμενης στήλης του Πίνακα (3.2), ώστε να προκύψουν οι εκτιμήσεις των αποκλίσεων των συντελεστών $\tilde{\alpha}_j$ και $\tilde{\beta}_j$, $\forall j \in 0, 1, 2, \dots, n-1$.

- **Βήμα 3** Εκτίμηση των αποκλίσεων της εξέλιξης των απαιτήσεων για κάθε έτος ατυχήματος i και έτος εξέλιξης j .

Για κάθε στοιχείο κάτω από τη δευτερεύουσα διαγώνιο του αθροιστικού πίνακα ($i + j > n$) γίνεται εκτίμηση των αποκλίσεων μέσω του μοντέλου παλινδρόμησης που αντιστοιχεί στο έτος εξέλιξης j .

$$\begin{aligned}
 \widehat{\tilde{C}}_{i,j+1} &= \widehat{\tilde{C}}_{i,j} \otimes \widehat{\tilde{\beta}}_j \oplus \widehat{\tilde{\alpha}}_j \\
 &= \left(\widehat{C}_{(i,j)C}, \widehat{C}_{(i,j)L}, \widehat{C}_{(i,j)R} \right) \otimes \left(\widehat{\beta}_{jC}, \widehat{\beta}_{jL}, \widehat{\beta}_{jR} \right) \oplus \left(\widehat{\alpha}_{jC}, \widehat{\alpha}_{jL}, \widehat{\alpha}_{jR} \right) \\
 &= \left(\widehat{C}_{(i,j)C} \cdot \widehat{\beta}_{jC} + \widehat{\alpha}_{jC}, \right. \\
 &\quad \widehat{C}_{(i,j)C} \cdot \widehat{\beta}_{jL} + \widehat{\beta}_{jC} \cdot \widehat{C}_{(i,j)L} - \widehat{C}_{(i,j)L} \cdot \widehat{\beta}_{jL} + \widehat{\alpha}_{jL}, \\
 &\quad \left. \widehat{C}_{(i,j)C} \cdot \widehat{\beta}_{jR} + \widehat{\beta}_{jC} \cdot \widehat{C}_{(i,j)R} + \widehat{C}_{(i,j)R} \cdot \widehat{\beta}_{jR} + \widehat{\alpha}_{jR} \right). \tag{3.37}
 \end{aligned}$$

- **Βήμα 4** Υπολογισμός της εξ' αριστερών και εκ δεξιών απόκλισης της εκτίμησης του αποθέματος $\widehat{\tilde{R}}$. Η απόκλιση της εκτίμησης του αποθέματος $\widehat{\tilde{R}}_i$ για κάθε έτος ατυχήματος i είναι ίσο με την εκτίμηση της απόκλισης της προβολής της τελικής απαίτησης $\widehat{C}_{(i,n)S}$, για $S = L, R$ (ομοίως με την ασαφή μέθοδο chain ladder).

Παρατήρηση

Όπως ανεφέρθη προηγουμένως (βλέπε 3.2.2), η n -οστή παλινδρόμηση είναι μόνο κατ' όνομα παλινδρόμηση, καθώς υπάρχουν μόνο δύο απαιτήσεις και συνεπώς μοναδική ευθεία η οποία ενώνει τα δύο σημεία, ο προσδιορισμός της οποίας θεωρείται τετριμμένος. Συνεπώς, δεν υπάρχει απόκλιση όσον αφορά τους συντελεστές της ευθείας.

Παράδειγμα 3.2(β) (Ασαφής London chain ladder)

Από το πρώτο μέρος του παραδείγματος λαμβάνουμε το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα s_κ , $\kappa = 0, 1, \dots, 8$ για κάθε παλινδρόμηση.

Το παράδειγμα πραγματοποιείται για επίπεδο σημαντικότητας $a = 5\%$.

- **Βήμα 1** Υπολογισμός της απόκλισης κάθε απαίτησης του Πίνακα (3.4), ξεκινώντας από τη δεύτερη στήλη του, σύμφωνα με την Εξίσωση (3.36).

Πίνακας 3.28: Παλινδρομήσεις αποκλίσεων

i	Έτος Ατυχήματος (i)	Παλινδρόμηση 0		Παλινδρόμηση 1		Παλινδρόμηση 2	
		X_i	Y_i	X_i	Y_i	X_i	Y_i
0	2009	1.774.450	80.638	2.694.659	28.447	2.937.562	39.255
1	2010	1.679.010	74.448	2.491.957	25.751	2.707.592	28.700
2	2011	1.588.040	70.582	2.292.316	24.266	2.470.677	21.923
3	2012	1.456.934	69.154	2.079.379	24.203	2.221.105	23.530
4	2013	1.438.800	69.363	2.067.985	24.245	2.202.973	24.007
5	2014	1.317.025	73.224	1.879.556	25.581	2.012.850	30.916
6	2015	1.427.681	69.540	2.008.079	24.542	2.154.760	25.458
7	2016	1.358.294	71.455	1.906.292	25.322		
8	2017	1.334.432	72.423				

- **Βήμα 2** Οι παλινδρομήσεις εκτελούνται όπως φαίνεται παραπάνω και συνεχίζονται στο ίδιο μοτίβο έως τη n -οστή, εν προκειμένω την Παλινδρόμηση 8. Κατ' αυτόν τον τρόπο προκύπτει ο Πίνακας (3.29) των αποκλίσεων των συντελεστών ανά έτος εξέλιξης.

Πίνακας 3.29: Αποκλίσεις συντελεστών παλινδρόμησης ανά έτος εξέλιξης

Αποκλίσεις Συντελεστών Παλινδρόμησης ανά Έτος Εξέλιξης																	
0-1		1-2		2-3		3-4		4-5		5-6		6-7		7-8		8-9	
$\hat{\alpha}_{0S}$	$\hat{\beta}_{0S}$	$\hat{\alpha}_{1S}$	$\hat{\beta}_{1S}$	$\hat{\alpha}_{2S}$	$\hat{\beta}_{2S}$	$\hat{\alpha}_{3S}$	$\hat{\beta}_{3S}$	$\hat{\alpha}_{4S}$	$\hat{\beta}_{4S}$	$\hat{\alpha}_{5S}$	$\hat{\beta}_{5S}$	$\hat{\alpha}_{6S}$	$\hat{\beta}_{6S}$	$\hat{\alpha}_{7S}$	$\hat{\beta}_{7S}$	$\hat{\alpha}_{8S}$	$\hat{\beta}_{8S}$
50813	0,0145	18262	0,0032	3082	0,0103	25654	0,0021	14481	0,0013	20825	-0,0001	132790	-0,0046	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

- **Βήμα 3** Αξιοποιώντας τους συντελεστές ανά έτος εξέλιξης του βήματος 2 πραγματοποιείται εκτίμηση των αριστερών και δεξιών αποκλίσεων των απαιτήσεων $\forall i \in \{0, 1, \dots, n\}$ και $\forall j \in \{0, 1, \dots, n\}$ τέτοια ώστε $i + j > n$, χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (3.37). Τα αποτελέσματα έπονται στους ακόλουθους Πίνακες (3.30 και 3.31).

Πίνακας 3.30: Εκτίμηση αριστερών αποκλίσεων (με έντονο μπλε) των απαιτήσεων

Έτος Ατυχήματος (<i>i</i>)	Έτος Εξέλιξης (<i>j</i>)									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2009	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2010	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2011	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2012	0	0	0	0	0	0	0	121.693	121.952	122.529
2013	0	0	0	0	0	0	20.651	142.234	142.537	143.211
2014	0	0	0	0	0	17.220	37.914	160.296	160.637	161.397
2015	0	0	0	0	30.236	48.261	68.994	190.513	190.919	191.822
2016	0	0	0	23.971	55.097	73.468	94.252	216.224	216.684	217.709
2017	0	0	24.232	49.156	81.363	100.195	121.027	243.125	243.643	244.795
2018	0	69.279	103.291	132.367	168.376	188.884	209.868	331.833	332.539	334.112

Πίνακας 3.31: Εκτίμηση δεξιών αποκλίσεων (με έντονο μπλε) των απαιτήσεων

Έτος Ατυχήματος (<i>i</i>)	Έτος Εξέλιξης (<i>j</i>)									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2009	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2010	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2011	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2012	0	0	0	0	0	0	0	121.693	121.952	122.529
2013	0	0	0	0	0	0	20.651	142.046	142.348	143.021
2014	0	0	0	0	0	17.220	37.911	159.947	160.287	161.046
2015	0	0	0	0	30.236	48.338	69.064	189.952	190.357	191.257
2016	0	0	0	23.971	55.196	73.710	94.483	215.590	216.049	217.071
2017	0	0	24.232	49.655	82.091	101.147	121.966	242.943	243.460	244.612
2018	0	69.279	103.739	134.983	171.673	192.688	213.649	333.634	334.344	335.926

- **Βήμα 4** Υπολογισμός της εξ αριστερών και εκ δεξιών απόκλισης της εκτίμησης του αποθέματος \widehat{R} .

Από την Εξίσωση (3.34) λαμβάνουμε τις αποκλίσεις της εκτίμησης του αποθέματος οι οποίες παρουσιάζονται, μαζί την εκτίμηση του αποθέματος κάθε έτους ατυχήματος, στον πίνακα που ακολουθεί.

Πίνακας 3.32: Απόκλιση εκτίμησης αποθέματος \widehat{R}_{iS}

Έτος Ατυχήματος (i)	Απόθεμα Έτους Ατυχήματος (\widehat{R}_{iC})	Αριστερή Απόκλιση Έτους Ατυχήματος (\widehat{R}_{iL})	Δεξιά Απόκλιση Έτους Ατυχήματος (\widehat{R}_{iR})
2009	0	0	0
2010	14.365	0	0
2011	25.307	0	0
2012	52.652	122.529	122.529
2013	80.381	143.211	143.021
2014	118.707	161.397	161.046
2015	175.955	191.822	191.257
2016	238.497	217.709	217.071
2017	344.330	244.795	244.612
2018	797.153	334.112	335.926
Σύνολο	1.847.346	1.415.575	1.415.461

Το άθροισμα κάθε στήλης δίνει το συνολικό εκτιμηθέν απόθεμα καθώς και τη συνολική αριστερή και δεξιά απόκλιση αντίστοιχα, δηλαδή

$$\widehat{\widetilde{R}} = (\widehat{R}_C, \widehat{R}_L, \widehat{R}_R) = (1.847.346, 1.415.575, 1.415.461).$$

- **Βήμα 5** Υπολογισμός της μέσης τιμής της εκτίμησης του αποθέματος για κάθε έτος ατυχήματος i και συνολικά για ενδεικτικές τιμές της παραμέτρου κινδύνου r_f όπως φαίνεται στον Πίνακα (3.33).

Πίνακας 3.33: Μέση τιμή αποθέματος συναρτήσει της παραμέτρου κινδύνου r_f

Έτος Ατυχήματος (i)	Παράμετρος Κινδύνου (r_f)					
	0,1	0,25	0,5	0,75	0,9	0,99
2009	0	0	0	0	0	0
2010	14.365	14.365	14.365	14.365	14.365	14.365
2011	25.307	25.307	25.307	25.307	25.307	25.307
2012	3.641	22.020	52.652	83.284	101.664	112.691
2013	23.087	44.554	80.333	116.112	137.580	150.460
2014	54.131	78.314	118.619	158.924	183.107	197.617
2015	99.198	127.929	175.813	223.698	252.429	269.668
2016	151.382	183.990	238.338	292.685	325.294	344.859
2017	246.402	283.108	344.284	405.460	442.165	464.189
2018	663.599	713.852	797.607	881.362	931.614	961.766
Σύνολο	1.281.110	1.493.438	1.847.318	2.201.197	2.413.525	2.540.921

- **Βήμα 6** Υπολογισμός της αβεβαιότητας εκτίμησης του αποθέματος για κάθε έτος ατυχήματος i και συνολικά συναρτήσει του παράγοντα αβεβαιότητας K (Πίνακας 3.34).

Πίνακας 3.34: Ύψος αποθέματος συναρτήσει του παράγοντα αβεβαιότητας K

Έτος Ατυχήματος (i)	Παράγων Αβεβαιότητας (K)				
	0,5	1	2	5	10
2009	0	0	0	0	0
2010	0	0	0	0	0
2011	0	0	0	0	0
2012	61.264	122.529	245.057	612.644	1.225.287
2013	71.558	143.116	286.232	715.581	1.431.162
2014	80.611	161.221	322.442	806.106	1.612.211
2015	95.770	191.539	383.079	957.697	1.915.395
2016	108.695	217.390	434.780	1.086.950	2.173.899
2017	122.352	244.704	489.407	1.223.518	2.447.036
2018	167.509	335.019	670.038	1.675.094	3.350.189
Σύνολο	707.759	1.415.518	2.831.036	7.077.590	14.155.179

3.3.3 Ασαφής μέθοδος chain ladder με εκθετικό μοντέλο

Κατά την παρουσίαση της ασαφούς μεθόδου chain ladder εισήχθη η έννοια του ασαφούς παράγοντα εξέλιξης ζημιών. Στην ασαφή μέθοδο chain ladder με εκθετικό μοντέλο, όπως αυτή διατυπώθηκε από τον de Andrés-Sánchez (2016) πραγματοποιείται εκτίμηση των παραγόντων εξέλιξης μέσω του εκθετικού μοντέλου με ασαφείς συντελεστές.

$$\tilde{f}_j = 1 + e^{\tilde{\alpha}} \cdot (j + 1)^{\tilde{\beta}}, \quad j \in \{0, 1, 2, \dots, n - 1\} \quad (3.38)$$

Στην Ενότητα 3.2.3 αναλύθηκε ο τρόπος με τον οποίο πραγματοποιείται η εκτίμηση των κέντρων των ασαφών συντελεστών μέσω της μετατροπής του συμβατικού εκθετικού μοντέλου (3.7) σε γραμμικό. Στην παρούσα ενότητα, θα μελετηθεί η διαδικασία ασαφοποίησης του εκθετικού μοντέλου και η εκτίμηση, μέσω αυτού, των αποκλίσεων των αθροιστικών απαιτήσεων.

Η υπόθεση εργασίας περιλαμβάνει τον Πίνακα (3.2) των αθροιστικών απαιτήσεων $C_{i,j}$ και το συμβατικό εκθετικό μοντέλο (3.7)

Ορισμός 3.3.3 (Μεθοδολογία ασαφούς chain ladder με εκθετικό μοντέλο)

- **Βήμα 1** Υπολογισμός των μεμονωμένων παραγόντων εξέλιξης $r_{i,j}$ όπου ο καθένας υπολογίζεται για κάθε $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ σύμφωνα με την Εξίσωση (3.8).

$$r_{i,j} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} \quad \forall j : i + j < n, \quad j \in \{0, 1, \dots, n - 1\}.$$

- **Βήμα 2** Μετασχηματισμός του συμβατικού εκθετικού μοντέλου σε γραμμικό (βλέπε βήμα 3 ορισμού 3.2.3) καταλήγοντας στο κάτωθι γραμμικό μοντέλο (3.9):

$$F_{jC} = \alpha_C + \beta_C \cdot \ln(j + 1), \quad j \in \{0, 1, \dots, n - 1\},$$

όπου $F_{jC} = \ln(f_{jC} - 1)$.

- **Βήμα 3** Αφού υπολογιστούν τα F_{jC} , $\forall j = 0, 1, \dots, n - 1$ κάνοντας χρήση της

Εξίσωσης (3.10), υπολογίζονται οι αποκλίσεις του ασαφούς αριθμού \tilde{F} ως εξής:

$$F_{jL} = F_{jC} - \ln(\min\{r_{0,j}, r_{1,j}, \dots, r_{n-j-1,j}\} - 1), \quad (3.39)$$

$$F_{jR} = \ln(\max\{r_{0,j}, r_{1,j}, \dots, r_{n-j-1,j}\} - 1) - F_{jC}. \quad (3.40)$$

- **Βήμα 4** Διενέργεια τριών απλών διαδοχικών γραμμικών παλινδρομήσεων όπου το ρόλο της ανεξάρτητης μεταβλητής, σε κάθε παλινδρόμηση, έχει το διάνυσμα:

$$\mathbf{X} = [\ln(1 + 0), \ln(1 + 1), \dots, \ln(1 + n - 1)]^t$$

και της εξαρτημένης μεταβλητής έχουν διαδοχικά τα διανύσματα:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_C &= (F_{0C}, F_{1C}, \dots, F_{n-1,C})^t, & \mathbf{F}_L &= (F_{0L}, F_{1L}, \dots, F_{n-1,L})^t, \\ \mathbf{F}_R &= (F_{0R}, F_{1R}, \dots, F_{n-1,R})^t, \end{aligned}$$

ώστε να εκτιμηθούν οι παράμετροι $\tilde{\alpha} = (\alpha_C, \alpha_L, \alpha_R)$ και $\tilde{\beta} = (\beta_C, \beta_L, \beta_R)$, μέσω των οποίων προκύπτει το ασαφές εκθετικό μοντέλο

$$\hat{f}_j = 1 + e^{\tilde{\alpha}} \cdot (j + 1)^{\tilde{\beta}}, \quad j = 0, 1, \dots, n - 1. \quad (3.41)$$

- **Βήμα 5** Εκτίμηση των ασαφών παραγόντων εξέλιξης \hat{f}_j και των αποκλίσεών τους μέσω του ασαφούς εκθετικού μοντέλου για κάθε $j \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$.

Λόγω της φύσης του ασαφούς εκθετικού μοντέλου, η οποία καθιστά εξαιρετικά δυσχερή τη χρήση της ασαφούς αριθμητικής, θα αξιοποιηθεί το γεγονός ότι ένα ασαφές σύνολο χαρακτηρίζεται πλήρως από τις α -τομές του (παρατήρηση Ορισμού 1.2.2). Προς αποφυγή σύγχυσης των συμβολισμών η α -τομή θα παρασταθεί ως μ -τομή στην παρούσα ενότητα (και οπουδήποτε αλλού καταστεί αναγκαίο).

Οι παράγοντες εξέλιξης των απαιτήσεων είναι, όπως έχει αναφερθεί, τριγωνικοί ασαφείς αριθμοί, των οποίων η μ -τομή υπό μορφή διαστημάτων έχει οριστεί στις παρατηρήσεις του Ορισμού 1.3.3. Συνεπώς, το διάστημα στα πλαίσια του οποίου

κυμαίνεται η τιμή του εκάστοτε παράγοντα εξέλιξης δίνεται μέσω της μ -τομής του και του γεγονότος ότι η συνάρτηση από την οποία ορίζεται το εκθετικό μοντέλο είναι αύξουσα, ως

$$\begin{aligned} {}^\mu \hat{f}_j &= \left[{}^\mu \hat{f}_{j(LB)}, {}^\mu \hat{f}_{j(UB)} \right] \\ &= \left[1 + e^{\hat{\alpha}_C - \hat{\alpha}_L(1-\mu)} \cdot (j+1)^{\hat{\beta}_C - \hat{\beta}_L(1-\mu)}, \right. \\ &\quad \left. 1 + e^{\hat{\alpha}_C + \hat{\alpha}_R(1-\mu)} \cdot (j+1)^{\hat{\beta}_C + \hat{\beta}_R(1-\mu)} \right], \end{aligned} \quad (3.42)$$

όπου $LB = \text{Lower Bound}$ (Κάτω Όριο) και $UB = \text{Upper Bound}$ (Άνω Όριο). Πλέον, είναι ιδιαίτερα εύκολο να υπολογιστούν τόσο τα κέντρα των ασαφών συντελεστών εξέλιξης, όσο και οι αποκλίσεις για οποιοδήποτε επίπεδο συμμετοχής. Όταν το μ λάβει την τιμή ένα, το διάστημα είναι συμβατικός αριθμός καθώς τα άκρα του ταυτίζονται. Ως εκ τούτου, παράγεται από το διάστημα το κέντρο του ασαφούς παράγοντα εξέλιξης αφού, όπως γίνεται εύκολα αντιληπτό, οι αποκλίσεις μηδενίζονται.

Από την άλλη μεριά, είναι προφανές ότι το διάστημα αποκτά το μέγιστο μήκος του όταν το μ λάβει την τιμή μηδέν. Επομένως, η αριστερή (δεξιά) απόκλιση είναι η απόσταση του κέντρου του ασαφούς αριθμού από το κάτω όριο (άνω όριο) του διαστήματος.

$$\begin{aligned} \hat{f}_{jC} &= {}^0 \hat{f}_{j(LB)} = {}^0 \hat{f}_{j(UB)}, \\ \hat{f}_{jL} &= \hat{f}_{jC} - {}^1 \hat{f}_{j(LB)}, \\ \hat{f}_{jR} &= {}^1 \hat{f}_{j(UB)} - \hat{f}_{jC}, \end{aligned} \quad (3.43)$$

για κάθε $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

- **Βήμα 6** Εκτίμηση της εξέλιξης των απαιτήσεων και προβολή των τελικών ζημιών όπως και των αποκλίσεων αυτών.

Για κάθε στοιχείο κάτω από τη δευτερεύουσα διαγώνιο του αθροιστικού πίνακα ($i+j > n$) εκτελείται ο ασαφής πολλαπλασιασμός με τον αντίστοιχο ασαφή παράγοντα

εξέλιξης \widehat{f}_j , όπως ακριβώς αναφέρεται στην Εξίσωση (3.32).

$$\widehat{C}_{i,j+1} = \widehat{C}_{i,j} \otimes \widehat{f}_j = \left(\widehat{C}_{(i,j)C}, \widehat{C}_{(i,j)L}, \widehat{C}_{(i,j)R} \right) \otimes \left(\widehat{f}_{jC}, \widehat{f}_{jL}, \widehat{f}_{jR} \right).$$

Η εναλλακτικά η εκτίμηση πραγματοποιείται μέσω της Εξίσωσης (3.33).

$$\widehat{C}_{\kappa,\lambda} = \widetilde{C}_{\kappa,n-\kappa} \otimes \prod_{j=n-\kappa}^{\lambda-1} \widehat{f}_j.$$

Όπου $\widetilde{C}_{\kappa,n-\kappa}$ είναι η τελευταία γνωστή αθροιστική πληρωθείσα απαίτηση και ως εκ τούτου $\widetilde{C}_{\kappa,n-\kappa} = (C_{(\kappa,n-\kappa)C}, 0, 0)$.

- **Βήμα 7** Υπολογισμός της εξ' αριστερών και εκ δεξιών απόκλισης της εκτίμησης του αποθέματος \widehat{R} . Η απόκλιση της εκτίμησης του αποθέματος \widehat{R}_i για κάθε έτος ατυχήματος i είναι ίσο με την εκτίμηση της απόκλισης της προβολής της τελικής απαίτησης $\widehat{C}_{(i,n)S}$, για $S = L, R$ (ομοίως με τις δύο προηγούμενες ασαφείς μεθόδους αποθεματοποίησης).

Παράδειγμα 3.3(β) (Ασαφής chain ladder με εκθετικό μοντέλο)

- **Βήμα 1** Από το πρώτο μέρος του παραδείγματος (Παράδειγμα 3.3(α) σελίδα 85) λαμβάνουμε τον Πίνακα (3.12) των μεμονωμένων παραγόντων εξέλιξης $r_{i,j}$.
- **Βήμα 2** Μετασχηματισμός του συμβατικού εκθετικού μοντέλου σε γραμμικό.
- **Βήμα 3** Τα αποτελέσματα του υπολογισμού των αποκλίσεων \widetilde{F}_j , $\forall j = 0, 1, \dots, 8$ κάνοντας χρήση των Σχέσεων (3.39), (3.40) αποτυπώνονται ακολούθως, ενώ τα κέντρα των ασαφών αριθμών υπολογίσθηκαν σύμφωνα με την Εξίσωση (3.10) και

βρίσκονται στο Παράδειγμα 3.3(α), βήμα 4.

$$\begin{aligned}
 F_{0L} &= 0,1223, & F_{0R} &= 0,1750, & F_{1L} &= 0,1573, & F_{1R} &= 0,1997, \\
 F_{2L} &= 0,1577, & F_{2R} &= 0,1909, & F_{3L} &= 0,2659, & F_{3R} &= 0,1990, \\
 F_{4L} &= 0,1408, & F_{4R} &= 0,0794, & F_{5L} &= 0,1278, & F_{5R} &= 0,2382, \\
 F_{6L} &= 0,3021, & F_{6R} &= 0,3804, & F_{7L} &= 0,0214, & F_{7R} &= 0,0214, \\
 F_{8L} &= 0,0000, & F_{8R} &= 0,0000.
 \end{aligned}$$

- **Βήμα 4** Η εκτέλεση των τριών απλών διαδοχικών παλινδρομήσεων με ανεξάρτητη μεταβλητή το διάνυσμα:

$$\mathbf{X} = [\ln(0+1), \ln(1+1), \dots, \ln(8+1)]^t$$

και εξαρτημένα αντίστοιχα τα διανύσματα:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_C &= (F_{0C}, F_{1C}, \dots, F_{8C})^t, \\
 \mathbf{F}_L &= (F_{0L}, F_{1L}, \dots, F_{8L})^t, \\
 \mathbf{F}_R &= (F_{0R}, F_{1R}, \dots, F_{8R})^t,
 \end{aligned}$$

δίνει την ακόλουθη εκτίμηση των ασαφών συντελεστών:

$$\widehat{\alpha} = (\widehat{\alpha}_C, \widehat{\alpha}_L, \widehat{\alpha}_R) = (-0,9175, 0,1795, 0,2156),$$

$$\widehat{\beta} = (\widehat{\beta}_C, \widehat{\beta}_L, \widehat{\beta}_R) = (-2,0579, -0,0250, -0,0357).$$

- **Βήμα 5** Εκτίμηση των ασαφών παραγόντων εξέλιξης \widehat{f}_j και των αποκλίσεων τους μέσω του ασαφούς εκθετικού μοντέλου $\forall j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ κάνοντας χρήση των Σχέσεων (3.42) και (3.43) (η εκτίμηση για τα κέντρα των παραγόντων εξέλιξης \widehat{f}_{jC} υπάρχει στο Παράδειγμα 3.3(α), βήμα 6).

$$\begin{aligned}
 \hat{f}_{0L} &= 0,0657, & \hat{f}_{0R} &= 0,0961, & \hat{f}_{1L} &= 0,0144, & \hat{f}_{1R} &= 0,0202, \\
 \hat{f}_{2L} &= 0,0059, & \hat{f}_{2R} &= 0,0080, & \hat{f}_{3L} &= 0,0031, & \hat{f}_{3R} &= 0,0042, \\
 \hat{f}_{4L} &= 0,0019, & \hat{f}_{4R} &= 0,0025, & \hat{f}_{5L} &= 0,00113, & \hat{f}_{5R} &= 0,0016, \\
 \hat{f}_{6L} &= 0,0009, & \hat{f}_{6R} &= 0,0011, & \hat{f}_{7L} &= 0,0007, & \hat{f}_{7R} &= 0,0008, \\
 \hat{f}_{8L} &= 0,0005, & \hat{f}_{8R} &= 0,0006.
 \end{aligned}$$

- Βήμα 6** Στο πρώτο μέρος του παραδείγματος υπάρχει η εκτίμηση της εξέλιξης των απαιτήσεων καθώς και η προβολή των τελικών ζημιών. Στο σημείο αυτό, αξιοποιώντας την Εξίσωση (3.32) θα υπολογιστούν οι αριστερές και δεξιές αποκλίσεις των εκτιμήσεων της εξέλιξης των απαιτήσεων $\forall i \in \{0, 1, \dots, n\}$ και $\forall j \in \{0, 1, \dots, n\}$ τέτοια ώστε $i + j > n$. Τα αποτελέσματα έπονται στους ακόλουθους πίνακες.

Πίνακας 3.35: Εκτίμηση αριστερών αποκλίσεων (με έντονο μπλε) των απαιτήσεων

Έτος Ατυχήματος (<i>i</i>)	Έτος Εξέλιξης (<i>j</i>)									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2009	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2010	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.544
2011	0	0	0	0	0	0	0	0	1.804	3.204
2012	0	0	0	0	0	0	0	2.171	3.803	5.070
2013	0	0	0	0	0	0	3.015	5.193	6.830	8.100
2014	0	0	0	0	0	4.070	6.857	8.869	10.383	11.558
2015	0	0	0	0	6.928	11.332	14.348	16.528	18.168	19.442
2016	0	0	0	11.905	18.701	23.025	25.988	28.131	29.744	30.998
2017	0	0	26.552	39.403	46.745	51.423	54.633	56.958	58.712	60.076
2018	0	83.795	116.289	131.950	140.917	146.649	150.599	153.471	155.645	157.343

Πίνακας 3.36: Εκτίμηση δεξιών αποκλίσεων (με έντονο μπλε) των απαιτήσεων

Έτος Ατυχήματος (<i>i</i>)	Έτος Εξέλιξης (<i>j</i>)									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2009	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2010	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.940
2011	0	0	0	0	0	0	0	0	2.291	4.053
2012	0	0	0	0	0	0	0	2.788	4.864	6.461
2013	0	0	0	0	0	0	3.921	6.725	8.814	10.422
2014	0	0	0	0	0	5.368	9.007	11.611	13.553	15.047
2015	0	0	0	0	9.289	15.140	19.110	21.952	24.072	25.705
2016	0	0	0	16.288	25.525	31.350	35.306	38.142	40.260	41.893
2017	0	0	37.303	55.439	65.738	72.247	76.678	79.862	82.245	84.087
2018	0	122.688	172.982	197.312	211.176	219.983	226.013	230.371	233.650	236.198

- **Βήμα 7** Υπολογισμός της εξ αριστερών και εκ δεξιών απόκλισης της εκτίμησης του αποθέματος \widehat{R} . Από την Εξίσωση (3.34) λαμβάνουμε τις αποκλίσεις της εκτίμησης του αποθέματος οι οποίες παρουσιάζονται, μαζί την εκτίμηση του αποθέματος κάθε έτους ατυχήματος, στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 3.37: Απόκλιση εκτίμησης αποθέματος \widehat{R}_{iS}

Έτος Ατυχήματος (<i>i</i>)	Απόθεμα Έτους Ατυχήματος (\widehat{R}_{iC})	Αριστερή Απόκλιση Έτους Ατυχήματος (\widehat{R}_{iL})	Δεξιά Απόκλιση Έτους Ατυχήματος (\widehat{R}_{iR})
2009	0	0	0
2010	13.189	1.544	1.940
2011	26.973	3.204	4.053
2012	41.945	5.070	6.461
2013	65.626	8.100	10.422
2014	91.187	11.558	15.047
2015	148.087	19.442	25.705
2016	224.612	30.998	41.893
2017	401.894	60.076	84.087
2018	898.268	157.343	236.198
Σύνολο	1.911.780	297.336	425.805

Το άθροισμα κάθε στήλης δίνει το συνολικό εκτιμηθέν απόθεμα καθώς και τη συνολική αριστερή και δεξιά απόκλιση αντίστοιχα, δηλαδή

$$\widehat{R} = (\widehat{R}_C, \widehat{R}_L, \widehat{R}_R) = (1.911.780, 297.336, 425.805).$$

- **Βήμα 8** Υπολογισμός της μέσης τιμής της εκτίμησης του αποθέματος για κάθε έτος ατυχήματος i και συνολικά, για ενδεικτικές τιμές της παραμέτρου κινδύνου r_f όπως φαίνεται στον Πίνακα (3.38).

Πίνακας 3.38: Μέση τιμή αποθέματος συναρτήσει της παραμέτρου κινδύνου r_f

Έτος Ατυχήματος (i)	Παράμετρος Κινδύνου (r_f)					
	0, 1	0, 25	0, 5	0, 75	0, 9	0, 99
2009	0	0	0	0	0	0
2010	12.591	12.852	13.288	13.724	13.985	14.142
2011	25.734	26.278	27.185	28.092	28.636	28.963
2012	39.987	40.852	42.293	43.734	44.599	45.118
2013	62.502	63.891	66.206	68.521	69.911	70.744
2014	86.738	88.733	92.059	95.384	97.380	98.577
2015	140.623	144.009	149.653	155.296	158.682	160.713
2016	212.757	218.224	227.335	236.447	241.914	245.194
2017	379.064	389.876	407.896	425.917	436.729	443.216
2018	839.274	868.790	917.982	967.175	996.690	1.014.400
Σύνολο	1.799.269	1.853.505	1.943.897	2.034.290	2.088.525	2.121.067

- **Βήμα 9** Υπολογισμός της αβεβαιότητας εκτίμησης του αποθέματος για κάθε έτος ατυχήματος i και συνολικά, συναρτήσει του παράγοντα αβεβαιότητας K (Πίνακας 3.39).

Πίνακας 3.39: Ύψος αποθέματος συναρτήσει του παράγοντα αβεβαιότητας K

Έτος Ατυχήματος (i)	Παράγων Αβεβαιότητας (K)				
	0,5	1	2	5	10
2009	0	0	0	0	0
2010	871	1.742	3.485	8.712	17.423
2011	1.814	3.628	7.257	18.142	36.284
2012	2.883	5.766	11.531	28.828	57.655
2013	4.630	9.261	18.522	46.305	92.610
2014	6.651	13.302	26.605	66.512	133.024
2015	11.287	22.573	45.146	112.866	225.732
2016	18.223	36.445	72.891	182.227	364.454
2017	36.041	72.081	144.163	360.407	720.814
2018	98.385	196.771	393.541	983.853	1.967.705
Σύνολο	180.785	361.570	723.141	1.807.851	3.615.703

3.3.4 Ασαφής γεωμετρική μέθοδος διαχωρισμού

Η ασαφής γεωμετρική μέθοδος διαχωρισμού διέπεται από τις ίδιες υποθέσεις και παραδοχές με τη συμβατική μορφή της, όμως ακολουθεί μία εν γένει διαφορετική προσέγγιση η οποία περιλαμβάνει, μεταξύ άλλων, έναν εναλλακτικό τρόπο υπολογισμού του αποθέματος. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η ασαφής επέκτασή της, η οποία θεμελιώθηκε από τον de Andrés-Sánchez (2007) και βελτιώθηκε από τους Araydin & Baser (2010), καθώς είναι η πρώτη φορά που συναντάται, στα πλαίσια τουλάχιστον του παρόντος πονήματος, ένας συνολικός μετασχηματισμός της μεθόδου κατά την επέκτασή της.

Οι εκφάνσεις της εναλλακτικής προσέγγισης αποτυπώνονται με σαφήνεια στη μεθοδολογία της επέκτασης της μεθόδου, κατά την οποία δεδομένος θεωρείται ο Πίνακας (3.1) των επαυξητικών απαιτήσεων $X_{i,j}$.

Στο σημείο αυτό κρίνεται αναγκαία η υπενθύμιση ότι όπως η συμβατική, έτσι και η ασαφής μέθοδος διαχωρισμού υποθέτει ότι το μέσο κόστος ανά απαίτηση $S_{(i,j)C}$ συνίσταται

από δύο παράγοντες. Ο πρώτος, r_{jC} , ποσοτικοποιεί τη σημασία των απαιτήσεων του j -οστού έτος εξέλιξης επί των συνολικών απαιτήσεων ενός δοθέντος έτους ατυχήματος. Ο δεύτερος παράγοντας, $\lambda_{(i+j)C}$, περιέχει την επίδραση του πληθωρισμού στις απαιτήσεις του $(i + j)$ -οστού ημερολογιακού έτους, όπως φαίνεται και από την Εξίσωση (3.14)

$$S_{(i,j)C} = r_{jC} \cdot \lambda_{(i+j)C}.$$

Ορισμός 3.3.4 (Μεθοδολογία ασαφούς γεωμετρικής μεθόδου διαχωρισμού)

- **Βήμα 1** Δημιουργία του πίνακα μέσου κόστους ανά απαίτηση για κάθε έτος ατυχήματος i σε κάθε έτος εξέλιξης j , τα στοιχεία του οποίου προκύπτουν από τα ηλίκα των επαυξητικών ζημιών έτους ατυχήματος ανά έτος εξέλιξης με το αντίστοιχο πλήθος απαιτήσεων του έτους ατυχήματος i όπως φαίνεται στον Πίνακα (3.14) της σελίδας 90, σύμφωνα με την Εξίσωση (3.12):

$$S_{(i,j)C} = \frac{X_{i,j}}{N_i}.$$

- **Βήμα 2** Μετατροπή του μοντέλου της Εξίσωσης (3.14) σε γραμμικό αξιοποιώντας τις ιδιότητες των λογαρίθμων.

$$S_{(i,j)C} = r_{jC} \cdot \lambda_{(i+j)C} \Rightarrow \ln(S_{(i,j)C}) = \ln(r_{jC}) + \ln(\lambda_{(i+j)C}). \quad (3.44)$$

- **Βήμα 3** Θεωρούμε το γραμμικό μοντέλο:

$$Y_{iC} = \ln(r_{1C}) \cdot X_{i1} + \ln(r_{2C}) \cdot X_{i2} + \dots + \ln(r_{nC}) \cdot X_{in} \\ + \ln(\lambda_{0C}) \cdot X_{i,n+1} + \ln(\lambda_{1C}) \cdot X_{i,n+2} + \dots + \ln(\lambda_{nC}) \cdot X_{i,2n+1} + \varepsilon_i, \quad (3.45)$$

με $i = 1, 2, \dots, \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

ή υπό μορφή πινάκων

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (3.46)$$

Όπου

- * $\mathbf{Y} = [\ln(S_{(0,0)C}), \dots, \ln(S_{(0,n)C}), \ln(S_{(1,0)C}), \dots, \ln(S_{(1,n-1)C}), \dots, \ln(S_{(n,0)C})]^t$
είναι το διάνυσμα των παρατηρήσεων, μήκους $\frac{(n+1)(n+2)}{2} \times 1$.
- * \mathbf{X} είναι ένας $\frac{(n+1)(n+2)}{2} \times (2n+1)$ πίνακας ανεξάρτητων μεταβλητών (πίνακας σχεδιασμού).
- * $\boldsymbol{\beta} = [\ln(r_{1C}), \dots, \ln(r_{nC}), \ln(\lambda_{0C}), \dots, \ln(\lambda_{nC})]^t$
είναι το διάνυσμα άγνωστων παραμέτρων το οποίο πρέπει να εκτιμηθεί, μήκους $(2n+1) \times 1$.
- * $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{0,0}, \dots, \varepsilon_{0,n}, \varepsilon_{1,0}, \dots, \varepsilon_{1,n-1}, \dots, \varepsilon_{n,0})^t$
είναι το διάνυσμα των ανεξάρτητων, τυχαίων, κανονικών σφαλμάτων, μήκους $\frac{(n+1)(n+2)}{2} \times 1$.

Παρατήρηση

Έχει θεωρηθεί ότι $\ln(\tilde{r}_0) = (0, 0, 0)$, διότι διαφορετικά ο πίνακας σχεδιασμού δεν θα είχε αντίστροφο. Συνεπώς, στην ασαφή γεωμετρική μέθοδο διαχωρισμού δεν ισχύει ότι $\prod_{j=0}^n r_j = 1$.

- **Βήμα 4** Κατασκευή του πίνακα σχεδιασμού \mathbf{X} .

Για την ευκολότερη κατασκευή του πίνακα σχεδιασμού θεωρούμε ότι συνίσταται από $n+1$ επιμέρους πίνακες, A_0, A_1, \dots, A_n , όπου n το πλήθος των περιόδων. Είναι δηλαδή της μορφής

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_n \end{bmatrix}^t,$$

με

$$A_i = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0_{1 \times n} & & & \\ \hline I_{(n-i) \times (n-i)} & 0_{(n-i) \times i} & 0_{(n+1-i) \times i} & I_{(n+1-i) \times (n+1-i)} \end{array} \right],$$

όπου ως $0_{a \times b}$ συμβολίζεται ένας πίνακας με a γραμμές και b στήλες που περιέχει ως στοιχεία μόνο μηδενικά, ενώ ο πίνακας $I_{a \times a}$ είναι ο γνωστός ταυτοτικός πίνακας εύρους a .

- **Βήμα 5** Διενέργεια πολλαπλής γραμμικής παλινδρόμησης στο ανωτέρω ορισθέν

μοντέλο (3.46) για την εκτίμηση των συντελεστών του γραμμικού μοντέλου, $\ln(r_{jC})$ και $\ln(\lambda_{(i+j)C})$, για $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ και $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ τέτοια ώστε $i + j \leq n$ κάνοντας χρήση της Σχέσης (2.25).

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{Y},$$

$$\text{όπου } \hat{\beta} = \left[\ln(\hat{r}_{1C}), \dots, \ln(\hat{r}_{nC}), \ln(\hat{\lambda}_{0C}), \dots, \ln(\hat{\lambda}_{nC}) \right]^t.$$

- **Βήμα 6** Ο εκτιμώμενος πίνακας διασποράς-συνδιασποράς του εκτιμηθέντος διανύσματος παραμέτρων $\hat{\beta}$, είναι η εκτίμηση του Πίνακα (2.32) και δίνεται από τη Σχέση (2.33).

$$\begin{aligned} \widehat{Cov}(\hat{\beta}) &= s^2 (\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} \widehat{Var}(\ln(\hat{r}_{1C})) & \widehat{Cov}(\ln(\hat{r}_{1C}), \ln(\hat{r}_{2C})) & \dots & \widehat{Cov}(\ln(\hat{r}_{1C}), \ln(\hat{\lambda}_{nC})) \\ \widehat{Cov}(\ln(\hat{r}_{2C}), \ln(\hat{r}_{1C})) & \widehat{Var}(\ln(\hat{r}_{2C})) & \dots & \widehat{Cov}(\ln(\hat{r}_{2C}), \ln(\hat{\lambda}_{nC})) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \widehat{Cov}(\ln(\hat{\lambda}_{nC}), \ln(\hat{r}_{1C})) & \widehat{Cov}(\ln(\hat{\lambda}_{nC}), \ln(\hat{r}_{2C})) & \dots & \widehat{Var}(\ln(\hat{\lambda}_{nC})) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

όπου

$$s^2 = M.S.E. = \frac{S.S.E.}{m - p}, \quad m = \frac{(n+1)(n+2)}{2}, \quad p = (2n+1).$$

- **Βήμα 7** Ασαφοποίηση των στοιχείων του εκτιμηθέντος διανύσματος $\hat{\beta}$ με χρήση του διαστήματος εμπιστοσύνης που αφορά τις παραμέτρους

$$\ln(r_{1C}), \dots, \ln(r_{nC}), \ln(\lambda_{0C}), \dots, \ln(\lambda_{nC})$$

(βλέπε 2.3.5), διότι αποτελεί ένα μαθηματικά αποδεκτό διάστημα στα πλαίσια του οποίου μπορεί να κυμαίνεται η τιμή των παραμέτρων.

Συνεπώς, η απόκλιση κάθε παραμέτρου ισούται με $s(\hat{\beta}_i) t_{m-p, \frac{\alpha}{2}}$, όπου η ποσότητα $s(\hat{\beta}_i)$ είναι η τυπική απόκλιση κάθε εκτιμώμενης παραμέτρου, η οποία δίνεται από την τετραγωνική ρίζα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου του παραπάνω πίνακα.

- **Βήμα 8** Εκτίμηση των λογαρίθμων των ασαφών παραγόντων επίδρασης του πληθωρισμού, $\ln(\tilde{\lambda}_{i+j})$, για $i+j \in \{n+1, n+2, \dots, 2n\}$ μέσω του μοντέλου της υβριδικής ασαφούς παλινδρόμησης ελαχίστων τετραγώνων

$$\ln(\tilde{\lambda}_{i+j}) = \tilde{\alpha} \oplus \tilde{\beta}(i+j). \quad (3.47)$$

Οπότε απαιτείται η διενέργεια μίας απλής υβριδικής παλινδρόμησης για την εκτίμηση των ασαφών παραμέτρων $\tilde{\alpha}$ και $\tilde{\beta}$, όπου η εξαρτημένη μεταβλητή περιλαμβάνει τους παράγοντες $\ln(\tilde{\lambda}_0), \dots, \ln(\tilde{\lambda}_n)$ και η ανεξάρτητη μεταβλητή τους αντίστοιχους δείκτες $i+j$, δηλαδή $0, 1, \dots, n$.

- **Βήμα 9** Εκτίμηση του ασαφούς μέσου κόστους ανά απαίτηση

$$\widehat{S}_{i,j} = (\widehat{S}_{(i,j)C}, \widehat{S}_{(i,j)L}, \widehat{S}_{(i,j)R}),$$

για κάθε $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$ τέτοια ώστε $i+j > n$.

Το ζήτημα που δημιουργείται, έγκειται στο γεγονός ότι έχουν εκτιμηθεί οι λογάριθμοι των συνισταμένων των μέσων κοστών ανά απαίτηση, συνεπώς πρέπει το γραμμικό μοντέλο να μετατραπεί σε εκθετικό. Αυτό θα γίνει κάνοντας χρήση της μ -τομής όπως ακριβώς στην προηγούμενη Ενότητα (3.3.3).

Τα μέσα κόστη ανά απαίτηση είναι, όπως έχει αναφερθεί, τριγωνικοί ασαφείς αριθμοί, των οποίων η μ -τομή υπό μορφή διαστημάτων έχει οριστεί στις παρατηρήσεις του ορισμού 1.3.3.

Συνεπώς, το διάστημα στα πλαίσια του οποίου κυμαίνεται η τιμή τους προκύπτει μέσω της μ -τομής τους και του γεγονότος ότι η συνάρτηση από την οποία ορίζεται το εκθετικό μοντέλο είναι αύξουσα, ως

$$\begin{aligned} {}^\mu \widehat{S}_{i,j} &= [{}^\mu \widehat{S}_{(i,j)(LB)}, {}^\mu \widehat{S}_{(i,j)(UB)}] \\ &= [e^{\ln(\widehat{S}_{(i,j)C}) - \ln(\widehat{S}_{(i,j)S})(1-\mu)}, \\ &\quad e^{\ln(\widehat{S}_{(i,j)C}) + \ln(\widehat{S}_{(i,j)S})(1-\mu)}], \end{aligned} \quad (3.48)$$

όπου $LB = \text{Lower Bound}$ (Κάτω Όριο) και $UB = \text{Upper Bound}$ (Άνω Όριο).

Επομένως, όπως έχει ήδη αναφερθεί στην προηγούμενη ενότητα, όταν $\mu = 1$ λαμβάνουμε το κέντρο του ασαφούς αριθμού και όταν $\mu = 0$ λαμβάνουμε το ελάχιστο και το μέγιστο άκρο του διαστήματος.

$$\begin{aligned}\widehat{S}_{(i,j)C} &= {}^0\widehat{S}_{i,j(LB)} = {}^0\widehat{S}_{i,j(UB)} \\ \widehat{S}_{(i,j)L} &= \widehat{S}_{(i,j)C} - {}^1\widehat{S}_{i,j(LB)} \\ \widehat{S}_{(i,j)R} &= {}^1\widehat{S}_{i,j(UB)} - \widehat{S}_{(i,j)C},\end{aligned}\tag{3.49}$$

για κάθε $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$ τέτοια ώστε $i + j > n$.

- **Βήμα 10** Υπολογισμός της εκτίμησης του αποθέματος \widehat{R}_{iC} και των αποκλίσεων του \widehat{R}_{iL} και \widehat{R}_{iR} . Για κάθε έτος ατυχήματος i πολλαπλασιάζοντας το άθροισμα των εκτιμήσεων του μέσου κόστους ανά απαίτηση $\widehat{S}_{(i,j)C}$ με το αντίστοιχο πλήθος απαιτήσεων λαμβάνουμε την εκτίμηση του αποθέματος \widehat{R}_{iC} .

$$\widehat{R}_{iC} = \left(\sum_j^{i+j>n} \widehat{S}_{(i,j)C} \right) N_i, \quad \forall i = 0, 1, \dots, n.\tag{3.50}$$

Με όμοιο τρόπο υπολογίζονται και οι αποκλίσεις του αποθέματος

$$\widehat{R}_{iS} = \left(\sum_j^{i+j>n} \widehat{S}_{(i,j)S} \right) N_i, \quad \forall i = 0, 1, \dots, n,\tag{3.51}$$

για $S = L$ και $S = R$.

Ενώ το τελικό εκτιμηθέν απόθεμα \widehat{R}_C καθώς επίσης και οι αποκλίσεις του, προκύπτουν από τις εξισώσεις:

$$\widehat{R}_C = \sum_{i=0}^n \widehat{R}_{iC}\tag{3.52}$$

και

$$\widehat{R}_S = \sum_{i=0}^n \widehat{R}_{iS},\tag{3.53}$$

με $S = L$ και $S = R$.

Παράδειγμα 3.4(β) (Ασαφής γεωμετρική μέθοδος διαχωρισμού)

Έχοντας ως δεδομένο τον Πίνακα (3.15), ο οποίος περιέχει τις επαυξητικές απαιτήσεις $X_{i,j}$ και το πλήθος τους N_i ανά έτος ατυχήματος i , θα εκτιμηθεί το απόθεμα και απόκλιση του με την ασαφή γεωμετρική μέθοδο διαχωρισμού.

Το παράδειγμα πραγματοποιείται για επίπεδο σημαντικότητας $a = 5\%$.

- **Βήματα 1 & 2** Δημιουργία του πίνακα των λογαρίθμων του μέσου κόστους ανά απαίτηση για κάθε έτος ατυχήματος i σε κάθε έτος εξέλιξης j , συνδυάζοντας τις Σχέσεις (3.12) και (3.44) ως εξής:

$$\ln (S_{(i,j)C}) = \ln \left(\frac{X_{i,j}}{N_i} \right). \quad (3.54)$$

Πίνακας 3.40: Λογάριθμοι μέσου κόστους ανά απαίτηση $\ln (S_{(i,j)C})$

Έτος Ατυχήματος (i)	Έτος Εξέλιξης (j)									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2009	5,77	5,11	3,78	3,27	2,91	2,39	1,74	1,38	0,90	1,04
2010	5,78	5,05	3,73	3,19	2,84	2,41	1,62	1,14	0,92	
2011	5,73	4,91	3,54	2,90	2,53	2,09	1,57	1,71		
2012	5,68	4,83	3,35	2,84	2,26	2,23	1,82			
2013	5,69	4,87	3,33	2,94	2,45	2,14				
2014	5,58	4,73	3,29	2,75	2,51					
2015	5,66	4,76	3,38	2,71						
2016	5,60	4,69	3,18							
2017	5,57	4,62								
2018	5,50									

- **Βήμα 3** Θεωρούμε το γραμμικό μοντέλο:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon},$$

όπου

- * $\mathbf{Y} = (5,77, \dots, 1,04, 5,78, \dots, 0,92, \dots, 5,50)^t$ είναι το διάνυσμα των παρατηρήσεων, μήκους $\frac{(9+1)(9+2)}{2} \times 1 = 55 \times 1$.
- * \mathbf{X} είναι ο πίνακας σχεδιασμού διάστασης $\frac{(9+1)(9+2)}{2} \times (2 \cdot 9 + 1) = 55 \times 19$.
- * $\boldsymbol{\beta} = [\ln(r_{1C}), \dots, \ln(r_{nC}), \ln(\lambda_{0C}), \dots, \ln(\lambda_{nC})]^t$ είναι το διάνυσμα άγνωστων παραμέτρων το οποίο πρέπει να εκτιμηθεί, μήκους $(2 \cdot 9 + 1) \times 1 = 19 \times 1$.
- * $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{0,0}, \dots, \varepsilon_{0,n}, \varepsilon_{1,0}, \dots, \varepsilon_{1,n-1}, \dots, \varepsilon_{n,0})^t$ είναι το διάνυσμα των ανεξάρτητων, τυχαίων, κανονικών σφαλμάτων, μήκους $\frac{(9+1)(9+2)}{2} \times 1 = 55 \times 1$.

- **Βήμα 4** Κατασκευή του πίνακα σχεδιασμού \mathbf{X} ο οποίος συνίσταται από 10 επιμέρους πίνακες, A_0, A_1, \dots, A_9 , όπου 9 είναι το πλήθος των περιόδων, είναι δηλαδή της μορφής

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & \dots & A_9 \end{bmatrix}^t,$$

με

$$A_i = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0_{1 \times 9} & & & \\ \hline I_{(9-i) \times (9-i)} & 0_{(9-i) \times i} & 0_{(9+1-i) \times i} & I_{(9+1-i) \times (9+1-i)} \end{array} \right].$$

- **Βήμα 5** Η πολλαπλή γραμμική παλινδρόμηση για την εκτίμηση των συντελεστών του γραμμικού μοντέλου $\ln(r_{jC})$ και $\ln(\lambda_{(i+j)C})$ για $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ και $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ τέτοια ώστε $i + j \leq n$, έχει ως αποτέλεσμα το διάνυσμα:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \left[\ln(\hat{r}_{1C}), \dots, \ln(\hat{r}_{9C}), \ln(\hat{\lambda}_{0C}), \dots, \ln(\hat{\lambda}_{9C}) \right]^t,$$

τα στοιχεία του οποίου αποτυπώνονται λεπτομερώς στον Πίνακα (3.41) που ακολουθεί.

Πίνακας 3.41: Διάνυσμα παραμέτρων $\hat{\beta}^t$

Διάνυσμα Παραμέτρων $\hat{\beta}^t$									
$\ln(\hat{r}_{1C})$	$\ln(\hat{r}_{2C})$	$\ln(\hat{r}_{3C})$	$\ln(\hat{r}_{4C})$	$\ln(\hat{r}_{5C})$	$\ln(\hat{r}_{6C})$	$\ln(\hat{r}_{7C})$	$\ln(\hat{r}_{8C})$	$\ln(\hat{r}_{9C})$	
-0,8017	-2,1710	-2,6432	-2,9678	-3,2572	-3,7914	-4,0453	-4,5485	-4,4393	
$\ln(\hat{\lambda}_{0C})$	$\ln(\hat{\lambda}_{1C})$	$\ln(\hat{\lambda}_{2C})$	$\ln(\hat{\lambda}_{3C})$	$\ln(\hat{\lambda}_{4C})$	$\ln(\hat{\lambda}_{5C})$	$\ln(\hat{\lambda}_{6C})$	$\ln(\hat{\lambda}_{7C})$	$\ln(\hat{\lambda}_{8C})$	$\ln(\hat{\lambda}_{9C})$
5,7709	5,8472	5,8452	5,8007	5,7501	5,6280	5,5521	5,4527	5,4326	5,4803

- **Βήμα 6** Εκτίμηση του πίνακα διασποράς-συνδιασποράς του εκτιμηθέντος διάνυσματος παραμέτρων $\hat{\beta}$ σύμφωνα με τη Σχέση (2.33).

$$\widehat{Cov}(\hat{\beta}) = s^2 (\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1},$$

όπου

$$s^2 = M.S.E. = \frac{S.S.E.}{m - p} = \frac{0,5762}{55 - 19} = 0,0160.$$

Για πρακτικούς λόγους (το μέγεθος του πίνακα διασποράς-συνδιασποράς είναι 19×19), θα παρατεθούν μόνο οι εκτιμήσεις των διασπορών των παραμέτρων, οι οποίες βρίσκονται στην κύρια διαγώνιο του πίνακα.

Πίνακας 3.42: Εκτιμηθείσες διασπορές παραμέτρων $\widehat{Var}(\hat{\beta})$

Εκτιμηθείσες Διασπορές Παραμέτρων $\widehat{Var}(\hat{\beta})$									
$s^2(\hat{\beta}_1)$	$s^2(\hat{\beta}_2)$	$s^2(\hat{\beta}_3)$	$s^2(\hat{\beta}_4)$	$s^2(\hat{\beta}_5)$	$s^2(\hat{\beta}_6)$	$s^2(\hat{\beta}_7)$	$s^2(\hat{\beta}_8)$	$s^2(\hat{\beta}_9)$	
0,0036	0,0039	0,0043	0,0047	0,0054	0,0063	0,0078	0,0108	0,0197	
$s^2(\hat{\beta}_{10})$	$s^2(\hat{\beta}_{11})$	$s^2(\hat{\beta}_{12})$	$s^2(\hat{\beta}_{13})$	$s^2(\hat{\beta}_{14})$	$s^2(\hat{\beta}_{15})$	$s^2(\hat{\beta}_{16})$	$s^2(\hat{\beta}_{17})$	$s^2(\hat{\beta}_{18})$	$s^2(\hat{\beta}_{19})$
0,0160	0,0089	0,0066	0,0054	0,0047	0,0043	0,0040	0,0038	0,0037	0,0037

- **Βήμα 7** Ασαφοποίηση των στοιχείων του εκτιμηθέντος διανύσματος $\widehat{\beta}$, όπου η απόκλιση κάθε παραμέτρου ισούται με $s(\widehat{\beta}_i) t_{55-19, \frac{0,05}{2}}$, όπου $s(\widehat{\beta}_i)$ είναι η τυπική απόκλιση κάθε εκτιμώμενης παραμέτρου, η οποία δίνεται από την τετραγωνική ρίζα των στοιχείων του παραπάνω Πίνακα (3.42).

Πίνακας 3.43: Απόκλιση διανύσματος παραμέτρων $\widehat{\beta}^t$

Απόκλιση Διανύσματος Παραμέτρων $\widehat{\beta}^t$									
$ln(\widehat{r}_{1S})$	$ln(\widehat{r}_{2S})$	$ln(\widehat{r}_{3S})$	$ln(\widehat{r}_{4S})$	$ln(\widehat{r}_{5S})$	$ln(\widehat{r}_{6S})$	$ln(\widehat{r}_{7S})$	$ln(\widehat{r}_{8S})$	$ln(\widehat{r}_{9S})$	
0,1210	0,1265	0,1325	0,1397	0,1489	0,1613	0,1796	0,2112	0,2849	
$ln(\widehat{\lambda}_{0S})$	$ln(\widehat{\lambda}_{1S})$	$ln(\widehat{\lambda}_{2S})$	$ln(\widehat{\lambda}_{3S})$	$ln(\widehat{\lambda}_{4S})$	$ln(\widehat{\lambda}_{5S})$	$ln(\widehat{\lambda}_{6S})$	$ln(\widehat{\lambda}_{7S})$	$ln(\widehat{\lambda}_{8S})$	$ln(\widehat{\lambda}_{9S})$
0,2566	0,1912	0,1642	0,1492	0,1397	0,1333	0,1288	0,1258	0,1239	0,1239

- **Βήμα 8** Διενέργεια απλής υβριδικής παλινδρόμησης για την εκτίμηση των ασαφών παραμέτρων $\widetilde{\alpha}$ και $\widetilde{\beta}$, όπου η εξαρτημένη μεταβλητή περιλαμβάνει τους παράγοντες $ln(\widetilde{\lambda}_0), \dots, ln(\widetilde{\lambda}_9)$ και η ανεξάρτητη μεταβλητή τους αντίστοιχους δείκτες $i+j$, δηλαδή $0, 1, \dots, 9$.

Το εκτιμηθέν ασαφές γραμμικό μοντέλο είναι:

$$\begin{aligned} \left(ln(\widehat{\lambda}_{(i+j)C}), ln(\widehat{\lambda}_{(i+j)S}) \right) &= (\widehat{\alpha}_C, \widehat{\alpha}_S) + (\widehat{\beta}_C, \widehat{\beta}_S)(i+j) \\ &= (5,8836, 0,2062) + (-0,0506, -0,0117)(i+j), \end{aligned}$$

με $10 \leq i+j \leq 18$.

Με τη βοήθεια του ασαφούς μοντέλου, υπολογίζονται οι εκτιμήσεις των ασαφών παραγόντων $ln(\widehat{\lambda}_{i+j})$ για $i+j = 10, 11, \dots, 18$, οι τιμές των οποίων παρατίθενται στον Πίνακα (3.44) που ακολουθεί.

Πίνακας 3.44: Εκτιμηθέντες ασαφείς παράγοντες $\ln(\widehat{\lambda}_{i+j})$

Εκτιμηθέντες Ασαφείς Παράγοντες $\ln(\widehat{\lambda}_{i+j})$									
$\ln(\widehat{\lambda}_{10C})$	$\ln(\widehat{\lambda}_{10S})$	$\ln(\widehat{\lambda}_{11C})$	$\ln(\widehat{\lambda}_{11S})$	$\ln(\widehat{\lambda}_{12C})$	$\ln(\widehat{\lambda}_{12S})$	$\ln(\widehat{\lambda}_{13C})$	$\ln(\widehat{\lambda}_{13S})$	$\ln(\widehat{\lambda}_{14C})$	$\ln(\widehat{\lambda}_{14S})$
5,3777	0,0895	5,3271	0,0778	5,2765	0,0662	5,2259	0,0545	5,1753	0,0428
$\ln(\widehat{\lambda}_{15C})$	$\ln(\widehat{\lambda}_{15S})$	$\ln(\widehat{\lambda}_{16C})$	$\ln(\widehat{\lambda}_{16S})$	$\ln(\widehat{\lambda}_{17C})$	$\ln(\widehat{\lambda}_{17S})$	$\ln(\widehat{\lambda}_{18C})$	$\ln(\widehat{\lambda}_{18S})$		
5,1247	0,0312	5,0741	0,0195	5,0236	0,0078	4,9730	-0,0038		

Πίνακας 3.45: Εκτιμηθέν μέσο κόστος ανά απαίτηση $\widehat{S}_{(i+j)C}$ (με έντονο μπλε)

Έτος Ατυχήματος (i)	Έτος Εξέλιξης (j)									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2009	320,81	166,37	43,92	26,20	18,31	10,93	5,70	3,98	2,46	2,83
2010	323,26	156,52	41,52	24,40	17,14	11,15	5,08	3,11	2,50	2,56
2011	307,16	136,22	34,50	18,10	12,50	8,08	4,80	5,54	2,29	2,43
2012	293,15	125,24	28,52	17,11	9,58	9,28	6,16	3,79	2,18	2,31
2013	296,90	129,84	27,86	18,96	11,57	8,50	4,89	3,60	2,07	2,20
2014	265,58	113,44	26,88	15,60	12,26	8,34	4,64	3,43	1,97	2,09
2015	285,88	116,22	29,37	15,02	11,13	7,92	4,42	3,26	1,87	1,98
2016	270,36	109,08	23,93	15,40	10,58	7,53	4,20	3,10	1,78	1,89
2017	262,48	101,11	24,70	14,64	10,06	7,16	3,99	2,94	1,69	1,79
2018	245,07	97,12	23,48	13,92	9,57	6,81	3,79	2,80	1,61	1,71

- **Βήμα 9** Εκτίμηση του ασαφούς μέσου κόστους ανά απαίτηση $\widehat{S}_{i,j}$ για κάθε $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$ τέτοια ώστε $i + j > n$ αξιοποιώντας τις Εξισώσεις (3.48)

$$\begin{aligned} \mu \widehat{S}_{i,j} &= \left[\mu \widehat{S}_{i,j(LB)}, \mu \widehat{S}_{i,j(UB)} \right] \\ &= \left[e^{\ln(\widehat{S}_{(i,j)C}) - \ln(\widehat{S}_{(i,j)S})(1-\mu)}, \right. \\ &\quad \left. e^{\ln(\widehat{S}_{(i,j)C}) + \ln(\widehat{S}_{(i,j)S})(1-\mu)} \right] \end{aligned}$$

και (3.49)

$$\begin{aligned} \widehat{S}_{(i,j)C} &= {}^0\widehat{S}_{i,j(LB)} = {}^0\widehat{S}_{i,j(UB)} \\ \widehat{S}_{(i,j)L} &= \widehat{S}_{(i,j)C} - {}^1\widehat{S}_{i,j(LB)} \\ \widehat{S}_{(i,j)R} &= {}^1\widehat{S}_{i,j(UB)} - \widehat{S}_{(i,j)C}, \end{aligned}$$

με τα αποτελέσματα των εκτιμήσεων να αποτυπώνονται στους Πίνακες (3.45), (3.46) και (3.47).

Πίνακας 3.46: Εκτιμηθείσα αριστερή απόκλιση μέσου κόστους ανά απαίτηση $\widehat{S}_{(i+j)L}$ (με έντονο μπλε)

Έτος Ατυχήματος (<i>i</i>)	Έτος Εξέλιξης (<i>j</i>)									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2009	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2010	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,80
2011	0	0	0	0	0	0	0	0	0,60	0,74
2012	0	0	0	0	0	0	0	0,89	0,55	0,68
2013	0	0	0	0	0	0	1,08	0,82	0,50	0,63
2014	0	0	0	0	0	1,77	0,99	0,75	0,46	0,58
2015	0	0	0	0	2,28	1,61	0,90	0,68	0,42	0,54
2016	0	0	0	3,07	2,07	1,46	0,81	0,62	0,38	0,50
2017	0	0	4,80	2,78	1,87	1,32	0,74	0,56	0,35	0,46
2018	0	18,43	4,34	2,51	1,69	1,19	0,66	0,51	0,32	0,42

Πίνακας 3.47: Εκτιμηθείσα δεξιά απόκλιση μέσου κόστους ανά απαίτηση $\widehat{S}_{(i+j)R}$ (με έντονο μπλε)

Έτος Ατυχήματος (<i>i</i>)	Έτος Εξέλιξης (<i>j</i>)									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2009	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2010	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1,16
2011	0	0	0	0	0	0	0	0	0,80	1,06
2012	0	0	0	0	0	0	0	1,17	0,73	0,97
2013	0	0	0	0	0	0	1,39	1,06	0,66	0,89
2014	0	0	0	0	0	2,24	1,25	0,95	0,60	0,81
2015	0	0	0	0	2,87	2,02	1,13	0,86	0,54	0,74
2016	0	0	0	3,83	2,57	1,81	1,01	0,77	0,49	0,67
2017	0	0	5,95	3,43	2,30	1,62	0,90	0,69	0,44	0,61
2018	0	22,75	5,32	3,06	2,05	1,44	0,80	0,62	0,39	0,55

- **Βήμα 10** Υπολογισμός της εκτίμησης του αποθέματος \widehat{R}_i .

Για κάθε έτος ατυχήματος *i* πολλαπλασιάζοντας το άθροισμα των εκτιμήσεων των κέντρων του μέσου κόστους ανά απαίτηση $\widehat{S}_{(i,j)C}$ με το αντίστοιχο πλήθος απαιτήσεων λαμβάνουμε την εκτίμηση του αποθέματος \widehat{R}_{iC} για κάθε έτος ατυχήματος. Αφού επαναλάβουμε την ίδια ακριβώς διεργασία για κάθε απόκλιση (αριστερή και δεξιά), συνοψίζουμε τα αποτελέσματα στον ακόλουθο Πίνακα (3.48).

Αθροίζοντας τα ετήσια αποθέματα σύμφωνα με τη Σχέση (3.50) όπως και τις αποκλίσεις τους ακολουθώντας τη Σχέση (3.51), το τελικό συνολικό εκτιμηθέν απόθεμα ισούται με

$$\widehat{R} = (\widehat{R}_C, \widehat{R}_L, \widehat{R}_R) = (1.796.292, 357.626, 448.820).$$

Πίνακας 3.48: Εκτιμηθέν απόθεμα και απόκλιση αυτού για κάθε έτος

Έτος Ατυχήματος (i)	Πλήθος Απαιτήσεων (N_i)	Απόθεμα Έτους Ατυχήματος (\hat{R}_{iC})	Αριστερή Απόκλιση Έτους Ατυχήματος (\hat{R}_{iL})	Δεξιά Απόκλιση Έτους Ατυχήματος (\hat{R}_{iR})
2009	5.531	0	0	0
2010	5.194	13.275	4.146	6.029
2011	5.170	24.409	6.899	9.650
2012	4.970	41.144	10.562	14.275
2013	4.846	61.814	14.708	19.384
2014	4.959	101.470	22.538	29.067
2015	4.994	152.743	32.080	40.703
2016	5.024	223.461	44.735	56.021
2017	5.084	340.535	65.409	81.047
2018	5.208	837.441	156.549	192.644

- **Βήμα 11** Υπολογισμός της μέσης τιμής της εκτίμησης του αποθέματος για κάθε έτος ατυχήματος i και συνολικά, για ενδεικτικές τιμές της παραμέτρου κινδύνου r_f όπως φαίνεται στον Πίνακα (3.49).

Πίνακας 3.49: Μέση τιμή αποθέματος συναρτήσει της παραμέτρου κινδύνου r_f

Έτος Ατυχήματος (i)	Παράμετρος Κινδύνου (r_f)					
	0, 1	0, 25	0, 5	0, 75	0, 9	0, 99
2009	0	0	0	0	0	0
2010	11.711	12.474	13.746	15.018	15.781	16.239
2011	21.787	23.028	25.097	27.165	28.406	29.151
2012	37.105	38.968	42.073	45.177	47.040	48.158
2013	56.164	58.721	62.983	67.244	69.801	71.335
2014	92.782	96.652	103.103	109.553	113.424	115.746
2015	140.342	145.801	154.899	163.997	169.455	172.731
2016	206.132	213.688	226.283	238.877	246.434	250.968
2017	315.153	326.137	344.444	362.751	373.736	380.326
2018	776.626	802.816	846.465	890.114	916.303	932.017
Σύνολο	1.657.802	1.718.285	1.819.091	1.919.897	1.980.380	2.016.670

- **Βήμα 12** Υπολογισμός της αβεβαιότητας εκτίμησης του αποθέματος για κάθε έτος ατυχήματος i και συνολικά, συναρτήσει του παράγοντα αβεβαιότητας K (Πίνακας 3.50).

Πίνακας 3.50: Ύψος αποθέματος συναρτήσει του παράγοντα αβεβαιότητας K

Έτος Ατυχήματος (i)	Παράγων Αβεβαιότητας (K)				
	0,5	1	2	5	10
2009	0	0	0	0	0
2010	2.544	5.088	10.175	25.438	50.876
2011	4.137	8.274	16.549	41.371	82.743
2012	6.209	12.419	24.837	62.093	124.186
2013	8.523	17.046	34.092	85.231	170.462
2014	12.901	25.803	51.605	129.013	258.026
2015	18.196	36.392	72.783	181.959	363.917
2016	25.189	50.378	100.755	251.889	503.777
2017	36.614	73.228	146.456	366.140	732.279
2018	87.298	174.596	349.193	872.982	1.745.964
Σύνολο	201.612	403.223	806.446	2.016.115	4.032.231

3.3.5 Ασαφής μέθοδος Bornhuetter-Ferguson

Η επέκταση της μεθόδου Bornhuetter-Ferguson, η οποία παρουσιάστηκε από τους Heberle & Thomas (2016), χρησιμοποιεί ασαφείς αριθμούς για να περιγράψει τους παράγοντες εξέλιξης των απαιτήσεων και την εκ των προτέρων (a priori) πληροφορία, διότι συχνά πραγματοποιείται εκ των υστέρων αναπροσαρμογή τους. Η ασαφής λογική επιτρέπει την εγγενή ύπαρξη της αβεβαιότητας σε παράγοντες και πληροφορία.

Ακολουθεί η επέκταση των παραδοχών της συμβατικής μεθόδου (Ορισμός 3.2.5) με τη χρήση τριγωνικών ασαφών αριθμών.

Ορισμός 3.3.5 (Παραδοχές της ασαφούς μεθόδου)

- Οι αθροιστικές απαιτήσεις $C_{i,j}$ διαφορετικών ετών ατυχήματος i είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.
- Υπάρχουν οι θετικοί τριγωνικοί ασαφείς αριθμοί $\tilde{v}_0, \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n$ οι οποίοι παριστούν την εκ των προτέρων πληροφορία και ένα μοτίβο, επίσης θετικών τριγωνικών ασαφών αριθμών, $\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_n$ με $\tilde{\gamma}_n = (1, 0, 0)$ έτσι ώστε για κάθε $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, $\kappa \in \{1, 2, \dots, n-j\}$ να ισχύει:

$$\tilde{C}_{i,0} = \tilde{\gamma}_0 \otimes \tilde{v}_i, \quad (3.55)$$

$$\tilde{C}_{i,j+k} = \tilde{C}_{i,j} \oplus (\tilde{\gamma}_{j+k} \ominus \tilde{\gamma}_j) \otimes \tilde{v}_i. \quad (3.56)$$

- Τα ασαφή αθροίσματα των επαυξητικών απαιτήσεων

$$\sum_{i=0}^{n-(j+1)} \tilde{X}_{i,j+1}, \quad \forall j \in \{0, 1, \dots, n-1\},$$

με

$$\tilde{X}_{i,j+1} = \tilde{C}_{i,j+1} \ominus \tilde{C}_{i,j},$$

είναι μη-αρνητικοί τριγωνικοί ασαφείς αριθμοί για κάθε $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Ορισμός 3.3.6 (Μεθοδολογία ασαφούς Bornhuetter-Ferguson)

- **Βήμα 1** Ασαφοποίηση των εκτιμήσεων των παραγόντων εξέλιξης της μεθόδου chain ladder, $\hat{f}_j \in \mathbb{R}^+$, $\forall j \in 0, 1, 2, \dots, n-1$. Οι εκτιμήσεις των παραγόντων εξέλιξης γίνονται ασαφείς αριθμοί μέσω του υπολογισμού των αποκλίσεων \hat{f}_{jS} με $\hat{f}_{jS} = \hat{f}_{jL} = \hat{f}_{jR}$

$$\hat{f}_{jS} = \frac{\sum_{i=0}^{n-(j+1)} X_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-(j+1)} C_{i,j}}, \quad \forall j = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad (3.57)$$

όπου η απόκλιση $\widehat{f}_{\lambda S}$ αντιστοιχεί στον παράγοντα που εκτιμά την εξέλιξη ζημιάς από το έτος εξέλιξης λ στο έτος εξέλιξης $\lambda + 1$.

Υπενθυμίζεται ότι, σύμφωνα με την Εξίσωση (3.2), το κέντρο του παράγοντα εξέλιξης εκτιμάται ως:

$$\widehat{f}_{jC} = \frac{\sum_{i=0}^{n-(j+1)} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-(j+1)} C_{i,j}}, \quad \forall j = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

- **Βήμα 2** Υπολογισμός των εκτιμήσεων των ασαφών παραγόντων $\widetilde{\gamma}_j$, $\forall j \in \{0, 1, \dots, n\}$.

$$\begin{aligned} \widehat{\gamma}_j &= \prod_{\kappa=j}^{n-1} \left(\widehat{f}_{\kappa} \right)^{-1} \xrightarrow{1.21} (\widehat{\gamma}_{jC}, \widehat{\gamma}_{jL}, \widehat{\gamma}_{jR}) = \\ &= \prod_{\kappa=j}^{n-1} \left(\frac{1}{\widehat{f}_{jC}}, \frac{\widehat{f}_{jR}}{\widehat{f}_{jC} \cdot (\widehat{f}_{jC} + \widehat{f}_{jR})}, \frac{\widehat{f}_{jL}}{\widehat{f}_{jC} \cdot (\widehat{f}_{jC} - \widehat{f}_{jL})} \right), \end{aligned} \quad (3.58)$$

με $\widehat{\gamma}_n = (\widehat{\gamma}_{nC}, \widehat{\gamma}_{nL}, \widehat{\gamma}_{nR}) = (1, 0, 0)$.

- **Βήμα 3** Υπολογισμός των εκτιμήσεων της εξέλιξης των απαιτήσεων και των αποκλίσεων τους $\forall i \in \{0, 1, \dots, n\}$ και $\forall j \in \{0, 1, \dots, n\}$ τέτοια ώστε $i + j > n$.

$$\begin{aligned} \widehat{C}_{i,j} &= C_{i,n-i} \oplus \left(\widehat{\gamma}_j \ominus \widehat{\gamma}_{n-i} \right) \otimes \widehat{v}_i \\ &= (C_{i,n-i}, 0, 0) \oplus \left[(\widehat{\gamma}_{jC}, \widehat{\gamma}_{jL}, \widehat{\gamma}_{jR}) \right. \\ &\quad \left. \ominus (\widehat{\gamma}_{(n-i)C}, \widehat{\gamma}_{(n-i)L}, \widehat{\gamma}_{(n-i)R}) \right] \otimes (\widehat{v}_{iC}, \widehat{v}_{iL}, \widehat{v}_{iR}), \end{aligned} \quad (3.59)$$

όπου οι αποκλίσεις της εκ των προτέρων πληροφορίας \widehat{v}_i υπολογίζονται ως:

$$\widehat{v}_{iS} = \widehat{v}_{iL} = \widehat{v}_{iR} = 100.000 \cdot i, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (3.60)$$

- **Βήμα 4** Το ετήσιο εκτιμώμενο απόθεμα \widehat{R}_i για κάθε έτος ατυχήματος i υπολογίζεται με δύο τρόπους.

1ος Τρόπος

$$\begin{aligned}
 \widehat{R}_i &= \left(1 \ominus \widehat{\gamma}_{n-i}\right) \otimes \widehat{v}_i \\
 &= \left[(1, 0, 0) \ominus (\widehat{\gamma}_{(n-i)C}, \widehat{\gamma}_{(n-i)L}, \widehat{\gamma}_{(n-i)R}) \right] \otimes (\widehat{v}_{iC}, \widehat{v}_{iL}, \widehat{v}_{iR}) \\
 &= \left[(1 - \widehat{\gamma}_{(n-i)C}) \cdot \widehat{v}_{iC}, (1 - \widehat{\gamma}_{(n-i)C}) \cdot \widehat{v}_{iL} + \widehat{\gamma}_{(n-i)R} \cdot \widehat{v}_{iC} - \widehat{\gamma}_{(n-i)R} \cdot \widehat{v}_{iL}, \right. \\
 &\quad \left. (1 - \widehat{\gamma}_{(n-i)C}) \cdot \widehat{v}_{iR} + \widehat{\gamma}_{(n-i)L} \cdot \widehat{v}_{iC} + \widehat{\gamma}_{(n-i)L} \cdot \widehat{v}_{iR} \right].
 \end{aligned} \tag{3.61}$$

2ος Τρόπος

Για κάθε έτος ατυχήματος i η διαφορά της n -οστής στήλης και της δευτερεύουσας διαγωνίου ($i + j = n$) του αθροιστικού Πίνακα (3.19) έχει ως αποτέλεσμα το κέντρο του αποθέματος \widehat{R}_{iC} , ενώ η απόκλιση της εκτίμησης του αποθέματος \widehat{R}_i για κάθε έτος ατυχήματος i είναι ίσο με την εκτίμηση της απόκλισης της προβολής της τελικής απαίτησης $\widehat{C}_{(i,n)S}$, για $S = L, R$.

Δηλαδή,

$$\widehat{R}_{iS} = \widehat{C}_{(i,n)S}, \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, n\}, \quad S = L, R. \tag{3.62}$$

Το συνολικό εκτιμηθέν απόθεμα ισούται με το άθροισμα όλων των επιμέρους αποθεμάτων. Ομοίως, η συνολική αριστερή (δεξιά) απόκλιση είναι ίση με το άθροισμα όλων των επιμέρους αριστερών (δεξιών) αποκλίσεων.

$$\widehat{R} = \sum_{i=0}^n \widehat{R}_i = \sum_{i=0}^n \left(1 \ominus \widehat{\gamma}_{n-i}\right) \otimes \widehat{v}_i. \tag{3.63}$$

Παράδειγμα 3.5(β) (Ασαφής μέθοδος Bornhuetter-Ferguson)

Ως δεδομένα υπάρχουν ο Πίνακας (3.3) των επαυξητικών απαιτήσεων $X_{i,j}$ και ο Πίνακας (3.20) των αθροιστικών πληρωθεισών απαιτήσεων του υποκλάδου αυτοκινήτου στην Ευρώπη, της ασφαλιστικής εταιρείας Zurich Insurance Group Ltd, όπου στην τελευταία στήλη του βρίσκεται η εκ των προτέρων εκτίμηση της τελικής αναμενόμενης απαίτησης \widehat{v}_i .

- **Βήμα 1** Οι εκτιμήσεις των αποκλίσεων των παραγόντων εξέλιξης υπολογίζονται σύμφωνα με την Εξίσωση (3.57) αξιοποιώντας τα δεδομένα των Πινάκων (3.3) των επαυξητικών απαιτήσεων $X_{i,j}$ και (3.20) των αθροιστικών πληρωθεισών απαιτήσεων $C_{i,j}$.

$$\begin{aligned} \hat{f}_{0S} &= 0,4407, & \hat{f}_{1S} &= 0,0754, & \hat{f}_{2S} &= 0,0416, \\ \hat{f}_{3S} &= 0,0276, & \hat{f}_{4S} &= 0,0184, & \hat{f}_{5S} &= 0,0100, \\ \hat{f}_{6S} &= 0,0074, & \hat{f}_{7S} &= 0,0042, & \hat{f}_{8S} &= 0,0047. \end{aligned}$$

- **Βήμα 2** Υπολογισμός των εκτιμήσεων των ασαφών παραγόντων $\tilde{\gamma}_j$, $\forall j \in \{0, 1, \dots, n\}$, κάνοντας χρήση της Εξίσωσης (3.58) και των υπολογισθέντων κέντρων των παραγόντων εξέλιξης (Παράδειγμα 3.5(α), βήμα 1).

Η εκτίμηση των κέντρων $\hat{\gamma}_{jC}$ των ασαφών παραγόντων έχει υπολογιστεί στο πρώτο μέρος του παραδείγματος

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_{0L} &= 0,2069, & \hat{\gamma}_{0R} &= 0,4233, & \hat{\gamma}_{1L} &= 0,1351, & \hat{\gamma}_{1R} &= 0,1691, \\ \hat{\gamma}_{2L} &= 0,0928, & \hat{\gamma}_{2R} &= 0,1064, & \hat{\gamma}_{3L} &= 0,0634, & \hat{\gamma}_{3R} &= 0,0693, \\ \hat{\gamma}_{4L} &= 0,0412, & \hat{\gamma}_{4R} &= 0,0436, & \hat{\gamma}_{5L} &= 0,0158, & \hat{\gamma}_{5R} &= 0,0162, \\ \hat{\gamma}_{6L} &= 0,0158, & \hat{\gamma}_{6R} &= 0,0162, & \hat{\gamma}_{7L} &= 0,0088, & \hat{\gamma}_{7R} &= 0,0089, \\ \hat{\gamma}_{8L} &= 0,0047, & \hat{\gamma}_{8R} &= 0,0047, & \hat{\gamma}_{9L} &= 0, & \hat{\gamma}_{9R} &= 0. \end{aligned}$$

- **Βήμα 3** Ασαφοποίηση της εκ των προτέρων πληροφορίας \hat{v}_i σύμφωνα με τη Σχέση (3.60) και υπολογισμός των αριστερών και δεξιών αποκλίσεων των εκτιμήσεων της εξέλιξης των απαιτήσεων $\forall i \in \{0, 1, \dots, n\}$ και $\forall j \in \{0, 1, \dots, n\}$ τέτοια ώστε $i + j > n$, χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (3.59). Τα αποτελέσματα έπονται στους ακόλουθους πίνακες.

Πίνακας 3.51: Εκτίμηση αριστερών αποκλίσεων (με έντονο μπλε) των απαιτήσεων

Έτος Ατυχήματος (<i>i</i>)	Έτος Εξέλιξης (<i>j</i>)									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2009	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2010	0	0	0	0	0	0	0	0	0	14.794
2011	0	0	0	0	0	0	0	0	37.155	25.585
2012	0	0	0	0	0	0	0	60.466	52.158	42.682
2013	0	0	0	0	0	0	97.181	84.301	76.837	68.318
2014	0	0	0	0	0	140.486	127.605	117.679	111.914	105.328
2015	0	0	0	0	236.817	215.150	202.446	192.641	186.940	180.422
2016	0	0	0	332.098	310.066	293.399	283.538	275.892	271.432	266.323
2017	0	0	471.535	453.918	438.754	426.957	419.865	414.322	411.070	407.334
2018	0	983.578	982.820	976.474	969.591	963.687	959.954	956.963	955.180	953.113

Πίνακας 3.52: Εκτίμηση δεξιών αποκλίσεων (με έντονο μπλε) των απαιτήσεων

Έτος Ατυχήματος (<i>i</i>)	Έτος Εξέλιξης (<i>j</i>)									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2009	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2010	0	0	0	0	0	0	0	0	0	15.592
2011	0	0	0	0	0	0	0	0	42.344	28.773
2012	0	0	0	0	0	0	0	74.749	63.768	51.364
2013	0	0	0	0	0	0	129.110	109.843	98.880	86.497
2014	0	0	0	0	0	204.755	181.136	163.433	153.359	141.980
2015	0	0	0	0	358.198	312.364	286.924	267.856	257.006	244.750
2016	0	0	0	545.205	480.836	436.786	412.336	394.010	383.583	371.804
2017	0	0	825.268	735.810	673.842	631.434	607.896	590.253	580.214	568.875
2018	0	1.413.904	1.272.794	1.189.163	1.131.230	1.091.584	1.069.579	1.053.085	1.043.700	1.033.099

- **Βήμα 4** εκτίμηση του ετησίου αποθέματος \widehat{R}_i για κάθε έτος ατυχήματος *i* είτε με τον 1ο τρόπο αξιοποιώντας την Εξίσωση (3.61) είτε με τον 2ο τρόπο και τη βοήθεια των Πινάκων (3.51), (3.52) και της Εξίσωσης (3.62)

Πίνακας 3.53: Απόθεμα \widehat{R}_{iC} και απόκλιση εκτίμησης αποθέματος \widehat{R}_{iS}

Έτος Ατυχήματος (i)	Απόθεμα Έτους Ατυχήματος (\widehat{R}_{iC})	Αριστερή Απόκλιση Έτους Ατυχήματος (\widehat{R}_{iL})	Δεξιά Απόκλιση Έτους Ατυχήματος (\widehat{R}_{iR})
2009	0	0	0
2010	14.794	14.794	15.592
2011	25.585	25.585	28.773
2012	42.682	42.682	51.364
2013	68.318	68.318	86.497
2014	105.328	105.328	141.980
2015	180.422	180.422	244.750
2016	266.323	266.323	371.804
2017	407.334	407.334	568.875
2018	953.113	953.113	1.033.099
Σύνολο	2.063.899	2.063.899	2.542.734

Το άθροισμα κάθε στήλης δίνει το συνολικό εκτιμηθέν απόθεμα καθώς και τη συνολική αριστερή και δεξιά απόκλιση αντίστοιχα, δηλαδή:

$$\widehat{R} = (\widehat{R}_C, \widehat{R}_L, \widehat{R}_R) = (2.063.899, 2.063.899, 2.542.734).$$

- **Βήμα 5** Υπολογισμός της μέσης τιμής της εκτίμησης του αποθέματος για κάθε έτος ατυχήματος i και συνολικά, για ενδεικτικές τιμές της παραμέτρου κινδύνου r_f όπως φαίνεται στον Πίνακα (3.54).
- **Βήμα 6** Υπολογισμός της αβεβαιότητας εκτίμησης του αποθέματος για κάθε έτος ατυχήματος i και συνολικά, συναρτήσει του παράγοντα αβεβαιότητας K (Πίνακας 3.55).

Πίνακας 3.54: Μέση τιμή αποθέματος συναρτήσει της παραμέτρου κινδύνου r_f

Έτος Ατυχήματος (i)	Παράμετρος Κινδύνου (r_f)					
	0,1	0,25	0,5	0,75	0,9	0,99
2009	0	0	0	0	0	0
2010	8.916	11.195	14.993	18.792	21.071	22.438
2011	15.511	19.588	26.382	33.177	37.254	39.700
2012	26.043	33.097	44.853	56.609	63.662	67.894
2013	41.900	53.511	72.863	92.214	103.825	110.792
2014	65.030	83.578	114.491	145.405	163.953	175.082
2015	111.470	143.357	196.504	249.650	281.538	300.671
2016	165.068	212.928	292.694	372.459	420.319	449.035
2017	252.477	325.693	447.719	569.745	642.960	686.890
2018	575.867	724.833	973.109	1.221.386	1.370.352	1.459.731
Σύνολο	1.262.281	1.607.779	2.183.608	2.759.437	3.104.934	3.312.233

Πίνακας 3.55: Ύψος αποθέματος συναρτήσει του παράγοντα αβεβαιότητας K

Έτος Ατυχήματος (i)	Παράγων Αβεβαιότητας (K)				
	0,5	1	2	5	10
2009	0	0	0	0	0
2010	7.597	15.193	30.386	75.965	151.931
2011	13.590	27.179	54.358	135.896	271.791
2012	23.512	47.023	94.047	235.116	470.233
2013	38.704	77.407	154.815	387.037	774.073
2014	61.827	123.654	247.309	618.272	1.236.543
2015	106.293	212.586	425.172	1.062.931	2.125.861
2016	159.532	319.064	638.127	1.595.318	3.190.635
2017	244.052	488.104	976.208	2.440.520	4.881.041
2018	496.553	993.106	1.986.212	4.965.530	9.931.059
Σύνολο	1.151.658	2.303.317	4.606.633	11.516.583	23.033.167

Κεφάλαιο 4

Αξιοπιστία Χαρτοφυλακίου

4.1 Εισαγωγή

Η θεωρία αξιοπιστίας συνιστά έναν εκ των ακρογωνιαίων λίθων της αναλογιστικής επιστήμης (Longley-Cook, 1962). Αναφέρεται στα εργαλεία, στις τακτικές και στις διαδικασίες που χρησιμοποιούνται από τους αναλογιστές κατά την εξέταση δεδομένων με σκοπό την εκτίμηση του κινδύνου. Αξιοποιεί μαθηματικά μοντέλα και μεθόδους έχοντας ως στόχο την πραγματοποίηση εκτιμήσεων βασισμένων σε ιστορικά δεδομένα.

Η θεωρία αξιοπιστίας, σύμφωνα με τους Bühlmann & Gisler (2006), βοηθά στην καλύτερη κατανόηση των σχετιζόμενων με τις ασφαλιστικές καλύψεις κινδύνων, ενώ ταυτόχρονα επιτρέπει στις ασφαλιστικές εταιρείες να περιορίσουν την έκθεσή τους σε αυτούς και κατ' επέκταση τις απώλειές τους. Κατά την αναλογιστική πρακτική αναπτύσσονται μοντέλα βασισμένα σε απώλειες μιας ιστορικής περιόδου. Για παράδειγμα, μία ασφαλιστική εταιρεία θα προβεί στην εξέταση παρελθουσών απωλειών, προκληθέντων από συγκεκριμένη ομάδα ασφαλισμένων, προκειμένου να εκτιμήσει το ύψος του κόστους ασφάλισης παρόμοιας ομάδας στο μέλλον. Για την εκπόνηση οποιασδήποτε εκτίμησης κρίνεται αναγκαίος πρωτίστως ο καταρτισμός μίας βάσης εκτίμησης. Στην πράξη χρησιμοποιείται μία ποικιλία βάσεων εκτίμησης για την κάλυψη των διαφόρων πτυχών των ασφαλιστικών πολιτικών.

Όταν μία ασφαλιστική εταιρεία υπολογίζει το ύψος του ασφαλίστρου που θα χρεώσει, κατανέμει τους κατόχους ασφαλιστηρίων συμβολαίων σε ομάδες. Για παράδειγμα, η κα-

τανομή των οδηγών δύναται να πραγματοποιηθεί με βάση την ηλικία, το φύλο και τον τύπο αυτοκινήτου. Ένας νεαρός άνδρας που οδηγεί ένα γρήγορο αυτοκίνητο θεωρείται υψηλού κινδύνου, ενώ αντιθέτως μία ηλικιωμένη γυναίκα που οδηγεί ένα μικρό αυτοκίνητο θεωρείται χαμηλού κινδύνου. Η κατανομή εξισορροπεί δύο προϋποθέσεις. Πρώτον, οι κίνδυνοι σε κάθε ομάδα είναι αρκετά όμοιοι και δεύτερον, το μέγεθος κάθε ομάδας είναι επαρκές για τη διενέργεια στατιστικής ανάλυσης των απαιτήσεων της ιστορικής περιόδου ώστε να τιμολογηθεί το ασφαλιστρο. Ο συμβιβασμός αυτός σημαίνει ότι καμία από τις ομάδες δεν περιέχει πανομοιότυπους κινδύνους. Ως εκ τούτου, το πρόβλημα έγκειται στην αναζήτηση ενός τρόπου συνδυασμού της ομαδικής εμπειρίας με την αντίστοιχη του ατομικού κινδύνου έχοντας ως στόχο τη βέλτιστη τιμολόγηση, όπως οι Bühlmann & Gisler (2006) χαρακτηριστικά αναφέρουν.

Η θεωρία αξιοπιστίας έρχεται να προσφέρει τη λύση στο παραπάνω πρόβλημα μέσω του συνδυασμού των δύο προαναφερθέντων συνισταμένων ως βάση εκτίμησης για την ανάπτυξη προτύπων. Εν τοις πράγμασι, χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό ενός ασφαλιστρού για ένα χαρτοφυλάκιο ασφαλιστικών συμβάσεων. Ο σκοπός είναι ο καταρτισμός ενός συστήματος αξιολόγησης της ιστορικής περιόδου για τον προσδιορισμό του ασφαλιστρού του επόμενου έτους, λαμβάνοντας υπόψιν όχι μόνο την ατομική εμπειρία κάθε συνισταμένης του χαρτοφυλακίου αλλά και τη συλλογική εμπειρία του συνόλου του χαρτοφυλακίου.

Υπάρχουν δύο μέθοδοι. Η μία είναι η επιβολή κοινού ασφαλιστρού, υπολογισμένου από το συνολικό αριθμητικό μέσο των απαιτήσεων του χαρτοφυλακίου, σε κάθε ομάδα του. Αυτό θα είχε νόημα μόνο στην περίπτωση που το χαρτοφυλάκιο είναι ομογενές, το οποίο σημαίνει ότι κάθε συνισταμένη ομάδα του χαρτοφυλακίου διέπεται από συναφή χαρακτηριστικά κινδύνου και οι μέσες παρατηρούμενες αξιώσεις τους δεν παρουσιάζουν ιδιαίτερη διακύμανση. Εντούτοις, αν το χαρτοφυλάκιο είναι ετερογενές δεν θεωρείται συνετή η χρέωση του ασφαλιστρού κατ' αυτόν τον τρόπο. Λαμβάνοντας υπόψιν την ετερογένεια του χαρτοφυλακίου, η δεύτερη μέθοδος είναι κάθε ομάδα να επιβαρυνθεί με διαφορετικό ασφαλιστρο, υπολογισμένο αποκλειστικά από την μέση τιμή των αξιώσεων που εγείρει. Ωστόσο, η προκειμένη περίπτωση του ετερογενούς χαρτοφυλακίου, προϋποθέτει μία εξαιρετικά μεγάλη ιστορική εμπειρία απαιτήσεων για κάθε ομάδα.

Η θεωρία αξιοπιστίας συμβιβάζει τις δύο αυτές μεθόδους και τιμολογεί το ασφάλιστρο κάνοντας χρήση του σταθμισμένου μέσου τους, δηλαδή της εξέλιξης των ζημιών μίας συγκεκριμένης ομάδας και της συνολικής εξέλιξης ζημιών του χαρτοφυλακίου

$$C = ZA + (1 - Z)B, \quad 0 < Z < 1,$$

όπου

- C η αξιοπιστία.
- A η μέση τιμή των αξιώσεων της ομάδας ή το ποσοστό ασφάλιστρο που αντιστοιχεί στην εξέλιξη ζημιών συγκεκριμένης ομάδας.
- B η μέση τιμή των αξιώσεων του χαρτοφυλακίου ή το ποσοστό ασφάλιστρο που αντιστοιχεί στη συνολική εξέλιξη ζημιών του χαρτοφυλακίου.
- Z ο συντελεστής αξιοπιστίας, ο οποίος εκφράζει πόσο αξιόπιστη είναι η μέση τιμή της εξέλιξης των αξιώσεων της συγκεκριμένης ομάδας A .

Όπως αναφέρει ο Bühlmann (1967), αν ένα χαρτοφυλάκιο είναι απολύτως ομογενές τότε $Z = 0$. Δηλαδή, το ασφάλιστρο συγκεκριμένης ομάδας ισούται με το ολικό ασφάλιστρο του χαρτοφυλακίου. Ενώ αν εν αντιθέσει το χαρτοφυλάκιο είναι απόλυτα ετερογενές τότε $Z = 1$. Συνεπώς, το ασφάλιστρο συγκεκριμένης ομάδας τιμολογείται αποκλειστικά με βάση τη δική της εμπειρία εξέλιξης ζημιών. Η χρήση των ενδιάμεσων τιμών του συντελεστή αξιοπιστίας είναι η συνηθέστερη περίπτωση, καθώς τόσο το ιστορικό της εκάστοτε ομάδας όσο και αυτό του συνόλου του χαρτοφυλακίου διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στη συναγωγή συμπερασμάτων που αφορούν την εξέλιξη και τη συμπεριφορά των αξιώσεων μιας ομάδας.

Στο σημείο αυτό, ας θεωρήσουμε ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο το οποίο συνίσταται από ομάδες ομογενών κινδύνων. Κάθε ομάδα ομογενούς κινδύνου για την οποία υπάρχει εμπειρία εξέλιξης για μία χρονική περίοδο $i = 1, 2, \dots, n$ αναφέρεται ως ασφαλιστήριο συμβόλαιο. Κάθε ασφαλιστήριο συμβόλαιο j χαρακτηρίζεται από μία παράμετρο κινδύνου Θ_j . Η παράμετρος $\Theta_{i,j}$ περιγράφει τα χαρακτηριστικά κινδύνου του ασφαλιστηρίου συμβολαίου j , με $j = 0, 1, \dots, M$ σε μία χρονική περίοδο i , όπου $i = 1, 2, \dots, n$.

Η υπόθεση δηλαδή είναι ότι οι διάφορες εμπειρίες εξέλιξης ζημιών μεταξύ των ασφαλιστηρίων συμβολαίων j και των χρονικών περιόδων i περιγράφονται από τις παραμέτρους κινδύνου

$$\Theta_{1,1}, \Theta_{2,1}, \dots, \Theta_{n,1}, \dots, \Theta_{1,M}, \Theta_{2,M}, \dots, \Theta_{n,M}.$$

Αν όλες οι παράμετροι κινδύνου είναι ίσες, τότε δε συντρέχει ανάγκη εφαρμογής μεθόδων αξιοπιστίας. Ως επί το πλείστον, στα μοντέλα αξιοπιστίας, κυριαρχεί η υπόθεση της χρονικής ομογένειας των παραμέτρων κινδύνου $\Theta_{i,j}$, δοθέντος δηλαδή του ασφαλιστηρίου συμβολαίου η παράμετρος κινδύνου δεν μεταβάλλεται προϊόντος του χρόνου. Οπότε, ο δείκτης i δύναται να παραληφθεί κάτω από αυτή την υπόθεση.

Σύμφωνα με τον Bühlmann (1967), συνήθως οι παράμετροι κινδύνου είναι άγνωστες ή δεν υπάρχει δυνατότητα να παρατηρηθούν και στο εξής θα θεωρούνται ως τυχαίες μεταβλητές. Ως συνάρτηση κατανομής αυτών ορίζεται η $U(\theta)$, η οποία καλείται συνάρτηση δόμησης. Οι τιμές θ_j των παραμέτρων κινδύνου Θ_j , αν και μη-παρατηρούμενες, διαφέρουν σε κάθε ασφαλιστήριο συμβόλαιο. Η αδυναμία προσδιορισμού της συνάρτησης δόμησης $U(\theta)$ και των παραμέτρων κινδύνου Θ_j συνιστά μειονέκτημα για την πλειοψηφία των στατιστικών μεθόδων, όχι όμως για τις τεχνικές αξιοπιστίας, καθώς εμπίπτουν στις διαδικασίες απαλλαγμένες κατανομών (distribution free).

4.2 Μέθοδοι Αξιοπιστίας

4.2.1 Το μοντέλο του Bühlmann

Το μοντέλο του Bühlmann (1967) με M το πλήθος ασφαλιστηρίων συμβολαίων (ή ομάδων ομογενών κινδύνων) ορίζεται σύμφωνα με τον ακόλουθο πίνακα τυχαίων μεταβλητών

Πίνακας 4.1: Χαρτοφυλάκιο M ασφαλιστηρίων συμβολαίων

Θ_1	Θ_2	Θ_3	\dots	Θ_M
Y_{11}	Y_{12}	Y_{13}	\dots	Y_{1M}
Y_{21}	Y_{22}	Y_{23}	\dots	$Y_{2,M}$
Y_{31}	Y_{32}	Y_{33}	\dots	Y_{32}
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
Y_{n1}	Y_{n2}	Y_{n3}	\dots	Y_{nM}

του οποίου οι στήλες είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες, έτσι ώστε σε κάθε στήλη

$$(\Theta_j, Y_{1j}, Y_{2j}, \dots, Y_{nj})^t$$

δοθέντος Θ_j , οι παρατηρούμενες τυχαίες μεταβλητές

$$Y_{1j}, Y_{2j}, \dots, Y_{nj}$$

να είναι υπό δέσμευση ανεξάρτητες και ισόνομες. Κατά συνέπεια, τα ασφαλιστήρια συμβόλαια θα είναι ανεξάρτητα και ισόνομα.

Έστω τυχαίο $j \in \{1, 2, \dots, M\}$. Η τυχαία μεταβλητή Y_{ij} , $i = 0, 1, \dots, n$ παριστά είτε ύψος απωλειών είτε πλήθος απαιτήσεων και υποθέτουμε ότι η κατανομή του διανύσματος $(Y_{1j}, Y_{2j}, \dots, Y_{nj})^t$ εξαρτάται από μία παράμετρο Θ_j , η οποία είναι ένας άγνωστος σταθερός πραγματικός αριθμός.

Έστω ότι θ είναι η πραγματική τιμή της τυχαίας μεταβλητής Θ_j λαμβάνουμε το τυχαίο διάνυσμα

$$(\Theta_j, Y_{1j}, Y_{2j}, \dots, Y_{nj})^t$$

και το υπό δέσμευση διάνυσμα

$$(Y_{1j}, Y_{2j}, \dots, Y_{nj} | \Theta_j = \theta)^t.$$

Θεωρώντας τις τιμές $\theta_1, \theta_2, \dots \neq \theta$ της τυχαίας μεταβλητής Θ_j λαμβάνουμε τα αντίστοιχα υπό δέσμευση διανύσματα

$$(Y_{1j}, Y_{2j}, \dots, Y_{nj} | \Theta_j = \theta_1), (Y_{1j}, Y_{2j}, \dots, Y_{nj} | \Theta_j = \theta_2), \dots$$

Επαγωγικά, συμπεραίνουμε ότι το ασφαλιστήριο συμβόλαιο Θ_j εμπεριέχεται σε ένα θεωρητικό χαρτοφυλάκιο υποθετικών ασφαλιστηρίων συμβολαίων.

Συνεχίζοντας την επαγωγική συλλογιστική, συνάγεται το συμπέρασμα ότι το θεωρητικό χαρτοφυλάκιο «περίπου συμπίπτει» με το πραγματικό, εκ του οποίου έχει ληφθεί το υπό εξέταση ασφαλιστήριο συμβόλαιο Θ_j . Οι τιμές $\theta_1, \theta_2, \dots \neq \theta$ αντιστοιχούν σε ασφαλιστήρια συμβόλαια διαφορετικά του υπό εξέταση συμβολαίου.

Οι υπό δέσμευση αναμενόμενες τιμές

$$E(Y_{ij} | \Theta_j = \theta_1), E(Y_{ij} | \Theta_j = \theta_2), \dots$$

είναι συναφείς των υποθετικών ασφαλιστηρίων συμβολαίων και η

$$E(Y_{ij}) = E[E(Y_{ij} | \Theta_j)]$$

είναι η μέση τιμή των αναμενόμενων τιμών των υποθετικών ασφαλιστηρίων συμβολαίων.

Ορισμός 4.2.0 (Συμβολισμοί)

- $\mu(\Theta_j) = E(Y_{i,j}|\Theta_j)$,
- $\mu = E[\mu(\Theta_j)]$,
- $\sigma^2(\Theta_j) = Var(Y_{i,j}|\Theta_j)$,
- $s^2 = E[\sigma^2(\Theta_j)]$,
- $a = Var[\mu(\Theta_j)]$,
- $Z = \frac{na}{na+s^2} = \frac{n}{n+k}$, $k = \frac{s^2}{a}$.

Όπου οι αριθμοί μ , s^2 και a καλούνται παράμετροι δόμησης (structural parameters) του μοντέλου, ενώ η σταθερά Z ονομάζεται συντελεστής αξιοπιστίας και παριστά το βάρος αξιοπιστίας του υπό θεώρηση ασφαλιστηρίου συμβολαίου.

Ορισμός 4.2.1 (Υποθέσεις του μοντέλου του Bühlmann)

1. Τα ασφαλιστήρια συμβόλαια $(\Theta_j, Y_{1j}, Y_{2j}, \dots, Y_{nj})^t$ είναι ανεξάρτητα και ισόνομα όπως επίσης και οι τυχαίες μεταβλητές $(\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_M)$ είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες και ισόνομα κατανομημένες.
2. Δοθέντος Θ_j , $j \in \{1, 2, \dots, M\}$ οι τυχαίες μεταβλητές $Y_{1j}, Y_{2j}, \dots, Y_{nj}$ είναι υπό δέσμευση ανεξάρτητες και ισόνομες.
3. $\mu(\Theta_j) = E(Y_{ij}|\Theta_j)$ για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ και $j \in \{1, 2, \dots, M\}$.
4. $Cov(Y_{ij}, Y_{rj}) = \delta_{ir}\sigma^2(\Theta_j)$ με $i, r \in \{1, 2, \dots, n\}$ και

$$\delta_{ir} = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = r \\ 0, & \text{αν } i \neq r \end{cases}$$

το σύμβολο του Kronecker.

Ορισμός 4.2.2 (Σχέσεις συνδιασπορών και μέσες τιμές)

- $E(Y_{ij}) = E(\bar{Y}_{.j}) = E(\bar{Y}_{..}) = E[\mu(\Theta_j)] = \mu,$
- $Cov(Y_{ij}, Y_{rj}) = \delta_{ir}s^2 + a,$
- $Cov(Y_{ij}, \bar{Y}_{.j}) = Cov(\bar{Y}_{.j}, \bar{Y}_{.j}) = \frac{s^2}{n} + a = \frac{a}{Z},$
- $Cov(Y_{ij}, \bar{Y}_{..}) = Cov(\bar{Y}_{.j}, \bar{Y}_{..}) = Cov(\bar{Y}_{..}, \bar{Y}_{..}) = (\frac{s^2}{n} + a)/M,$
- $Cov(Y_{ij}, \mu(\Theta_j)) = Cov(\bar{Y}_{.j}, \mu(\Theta_j)) = a,$
- $Cov(\bar{Y}_{..}, \mu(\Theta_j)) = \frac{a}{M}.$

Όπου

$$\bar{Y}_{.j} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{ij} \quad (4.1)$$

η εκτιμήτρια της $\mu(\Theta_j)$

και

$$\bar{Y}_{..} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \bar{Y}_{.j} \quad (4.2)$$

είναι η εκτιμήτρια της μέσης τιμής των αναμενόμενων τιμών μ .

Θεώρημα 4.2.1

Έστω ότι στο χαρτοφυλάκιο ισχύουν οι υποθέσεις 3 και 4 του μοντέλου του Bühlmann. Τότε οι βέλτιστες μη-ομογενείς εκτιμήτριες αξιοπιστίας $\mu(\Theta_j)^{Cred}$ της $\mu(\Theta_j)$, $j \in \{1, 2, \dots, M\}$, σύμφωνα με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων, είναι

$$\mu(\Theta_j)^{Cred} = Y_{.j}^{Cred} = Z\bar{Y}_{.j} + (1 - Z)\bar{Y}_{..} \quad (4.3)$$

Θεώρημα 4.2.2

 (Αμερόληπτες εκτιμήτριες των μ , s^2 και a)

Οι αμερόληπτες εκτιμήτριες των μ , s^2 και a είναι αντίστοιχα οι ακόλουθες

$$\hat{\mu} = \bar{Y}_{..} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \bar{Y}_{.j} = \frac{1}{M} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{ij} \quad (4.4)$$

$$\widehat{s}^2 = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \widehat{s}_j^2. \quad (4.5)$$

Όπου

$$\widehat{s}_j^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_{ij} - \bar{Y}_{.j})^2 \quad (4.6)$$

και

$$\widehat{a} = \frac{1}{M-1} \sum_{j=1}^M (\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..})^2 - \frac{1}{n} \widehat{s}^2. \quad (4.7)$$

4.2.2 Το μοντέλο του Hachemeister

Στο μοντέλο του Bühlmann (1967) ισχύει για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ η υπόθεση ότι $E(Y_{ij}|\Theta_j) = \mu(\Theta_j)$ ανεξαρτήτως της περιόδου ασφάλισης i . Στην πραγματικότητα εν αντιθέσει, δεν υφίσταται το γεγονός ότι δοθέντος ασφαλιστηρίου συμβολαίου Θ_j τα ύψη των απωλειών Y_{ij} είναι ανεξάρτητα και ισόνομα κατανομημένα. Για την αντιμετώπιση του προαναφερθέντος περιορισμού, το 1975 ο Hachemeister επέκτεινε το μοντέλο του Bühlmann παρουσιάζοντας το μοντέλο αξιοπιστίας μέσω παλινδρόμησης.

Ορισμός 4.2.3 (Υποθέσεις του μοντέλου του Hachemeister)

1. Τα ασφαλιστήρια συμβόλαια (Θ_j, \mathbf{Y}_j) , $j \in \{1, 2, \dots, M\}$ είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα και οι τυχαίες μεταβλητές $(\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_M)$ είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες και ισόνομα κατανομημένες.
2. $\mu(\Theta_j) = E(\mathbf{Y}_j|\Theta_j) = \mathbf{X}_j\boldsymbol{\beta}(\Theta_j)$.

Όπου

- * $\mathbf{Y}_j = (Y_{1j}, Y_{2j}, \dots, Y_{nj})^t$ είναι το διάνυσμα των παρατηρήσεων (ποσά απαιτήσεων, πλήθη ατυχημάτων κ.α.), μήκους $n \times 1$.
- * \mathbf{X}_j είναι ένας $n \times p$ πίνακας ανεξάρτητων μεταβλητών (πίνακας σχεδιασμού).
- * $\boldsymbol{\beta}(\Theta_j)$ είναι το διάνυσμα άγνωστων παραμέτρων της παλινδρόμησης, μήκους $p \times 1$, το οποίο πρέπει να εκτιμηθεί.

3. $Cov(\mathbf{Y}_j|\Theta_j) = \sigma^2(\Theta_j) \mathbf{I}_{n \times n}$, όπου $\mathbf{I}_{n \times n}$ είναι ο ταυτοτικός πίνακας εύρους n .

Γενικά, ο πίνακας σχεδιασμού \mathbf{X}_j δύναται να συνίσταται από διάφορες ανεξάρτητες μεταβλητές που επηρεάζουν το ύψος της απώλειας. Στην ασφάλιση αυτοκινήτου για παράδειγμα τέτοιες είναι η παλαιότητα ή τα κυβικά του αυτοκινήτου, η ηλικία και η εμπειρία του οδηγού και λοιπά. Στο μοντέλο του Hachemeister (1975), ο πίνακας σχεδιασμού \mathbf{X}_j είναι ο ίδιος για κάθε ασφαλιστήριο συμβόλαιο Θ_j , διότι η μόνη ανεξάρτητη μεταβλητή είναι η περίοδος ασφάλισης. Για αυτόν τον λόγο θέτουμε \mathbf{X} στη θέση του \mathbf{X}_j .

Παρατήρηση

Το μοντέλο του Bühlmann (1967) αποτελεί ειδική περίπτωση του μοντέλου παλινδρόμησης, όταν ο πίνακας σχεδιασμού \mathbf{X} είναι ο μοναδιαίος πίνακας, δηλαδή $\mathbf{X} = (1, 1, \dots, 1)_n^t$, εκ του οποίου συνεπάγεται ότι $\mu_i(\Theta_j) = \beta_1(\Theta_j)$ για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Ορισμός 4.2.4 (Παράμετροι δόμησης)

Οι παράμετροι δόμησης του μοντέλου του Hachemeister (1975) είναι οι κάτωθι

- $\mathbf{b} = E[\boldsymbol{\beta}(\Theta_j)]$,
- $s^2 = E[\sigma^2(\Theta_j)]$,
- $\mathbf{A} = Cov[\boldsymbol{\beta}(\Theta_j)]$.

Ορισμός 4.2.5 (Σχέσεις συνδιασπορών και μέσες τιμές)

- $E(\mathbf{Y}_j) = \mathbf{X}\mathbf{b}$,
- $E(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_j | \Theta_j) = \boldsymbol{\beta}(\Theta_j)$,
- $E(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_j) = \mathbf{b}$,
- $Cov(\mathbf{Y}_j) = s^2 + \mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{X}^t$,
- $Cov(\mathbf{Y}_j, \boldsymbol{\beta}(\Theta_j)) = \mathbf{A}\mathbf{X}^t$,
- $Cov(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_j, \boldsymbol{\beta}(\Theta_j)) = \mathbf{A}$,
- $Cov(\mathbf{Y}_j, \widehat{\boldsymbol{\beta}}_j) = [\mathbf{A} + s^2(\mathbf{X}^t\mathbf{X})^{-1}]\mathbf{X}^t$,
- $Cov(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_j) = \mathbf{A} + s^2(\mathbf{X}^t\mathbf{X})^{-1}$.

Θεώρημα 4.2.3

Η βέλτιστη γραμμική εκτιμήτρια αξιοπιστίας \mathbf{B}_j^{Cred} της $E[\boldsymbol{\beta}(\Theta_j) | \mathbf{X}]$, $j \in \{1, 2, \dots, M\}$ υπολογίζεται από τη Σχέση

$$\mathbf{B}_j^{Cred} = \mathbf{Z}\hat{\boldsymbol{\beta}}_j + (\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{Z})\mathbf{b}. \quad (4.8)$$

Όπου $\hat{\boldsymbol{\beta}}_j$ είναι η εκτιμήτρια ελαχίστων τετραγώνων του $\boldsymbol{\beta}(\Theta_j)$, με

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_j = (\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{Y}_j \quad (4.9)$$

και

$$\mathbf{Z} = \mathbf{A} \left[Cov(\hat{\boldsymbol{\beta}}_j) \right]^{-1}. \quad (4.10)$$

Θεώρημα 4.2.4 (Αμερόληπτες εκτιμήτριες των \mathbf{b} , s^2 και \mathbf{A})

Οι αμερόληπτες εκτιμήτριες των \mathbf{b} , s^2 και \mathbf{A} είναι αντίστοιχα οι ακόλουθες

$$\hat{\mathbf{b}} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \hat{\boldsymbol{\beta}}_j, \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \hat{s}^2 &= \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \hat{s}_j^2 = \frac{1}{M(n-p)} \sum_{j=1}^M (\mathbf{Y}_j - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_j)^t (\mathbf{Y}_j - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_j) \\ &= \frac{1}{M(n-p)} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^n (Y_{ij} - \hat{\beta}_{0j} - \hat{\beta}_{1j}X_{ij})^2 \end{aligned} \quad (4.12)$$

και

$$\hat{\mathbf{A}} = \widehat{Cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_j) - \hat{s}^2 (\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1}. \quad (4.13)$$

Όπου

$$\widehat{Cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_j) = \frac{1}{M-1} \sum_{j=1}^M (\hat{\boldsymbol{\beta}}_j - \hat{\mathbf{b}}) (\hat{\boldsymbol{\beta}}_j - \hat{\mathbf{b}})^t \quad (4.14)$$

η εκτιμήτρια της $Cov(\hat{\boldsymbol{\beta}}_j)$.

Πόρισμα

Συνδυάζοντας τα δύο παραπάνω θεωρήματα προκύπτει η εκτίμηση της \mathbf{B}_j^{Cred} ως

$$\widehat{\mathbf{B}}_j^{Cred} = \widehat{\mathbf{Z}}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_j + (\mathbf{I}_{n \times n} - \widehat{\mathbf{Z}})\widehat{\mathbf{b}}. \quad (4.15)$$

Όπου ο εκτιμώμενος συντελεστής αξιοπιστίας $\widehat{\mathbf{Z}}$ δίνεται από τη Σχέση

$$\widehat{\mathbf{Z}} = \widehat{\mathbf{A}} \left[\widehat{Cov}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_j) \right]^{-1}. \quad (4.16)$$

Το εκτιμώμενο ύψος των απαιτήσεων της επόμενης περιόδου για κάθε ασφαλιστήριο συμβόλαιο ισούται με την τεταγμένη του αντίστοιχου συντελεστή παλινδρόμησης της βέλτιστης γραμμικής εκτιμήτριας αξιοπιστίας \mathbf{B}_j^{Cred} .

Παρατήρηση

Σε κάθε ασφαλιστήριο συμβόλαιο στο μοντέλο του Hachemeister (1975) εφαρμόζεται απλή γραμμική παλινδρόμηση με στόχο την εύρεση γραμμικής σχέσης μεταξύ της εμπειρίας ζημιών και του χρόνου εμφάνισής τους. Ο συντελεστής παλινδρόμησης ορίζεται ως

$$\boldsymbol{\beta}(\Theta_j) = [\beta_0(\Theta_j), \beta_1(\Theta_j)]^t.$$

4.3 Ασαφείς Μέθοδοι Αξιοπιστίας

Σε αντιστοιχία με τις ασαφείς μεθόδους αποθεματοποίησης ζημιών, στην παρούσα ενότητα θα αναπτυχθούν οι ασαφείς μέθοδοι αξιοπιστίας των Bühlmann και Hachemeister (1967, 1975). Για την ανάγκη επέκτασης των συμβατικών μεθόδων μέσω της ασαφούς λογικής γίνεται ιδιαίτερη μνεία σε πλείστα όσα σημεία του παρόντος πονήματος. Ως εκ τούτου θα αναφερθούμε κυρίως σε τεχνικά ζητήματα που αφορούν την ασαφή επέκταση των προαναφερθεισών μεθόδων. Αξίζει, παρόλα ταύτα, να σημειωθεί ότι η εκτίμηση είτε του ύψους είτε του πλήθους των απαιτήσεων επόμενων περιόδων διέπεται από επιπρόσθετη φερεγγυότητα καθώς προστίθενται, με τη χρήση της ασαφούς λογικής, οι αποκλίσεις αυτής όπως επίσης η σταθμισμένη μέση τιμή της με βάση την παράμετρο κινδύνου r_f και η εκτίμηση συναρτήσει του παράγοντα αβεβαιότητας K για ορισμένες ενδεικτικές τιμές που λαμβάνουν.

Παρατηρήσεις

- Οι παραδοχές, οι υποθέσεις καθώς και οι ορισμοί κάθε μεθόδου παραμένουν αναλλοίωτοι.
- Κάθε εκτίμηση η οποία πραγματοποιείται είναι ασαφής αριθμός.
- Όλοι οι ασαφείς αριθμοί των οποίων γίνεται χρήση είναι τριγωνικοί ασαφείς αριθμοί.
- Ως χαρτοφυλάκιο κατά τις εφαρμογές χρησιμοποιείται αυτό του κλάδου ιδιοκτησίας και ατυχημάτων (property & casualty) της ασφαλιστικής εταιρείας Zurich Insurance Group, το οποίο περιέχει ευρωπαϊκά δεδομένα ύψους απαιτήσεων (σε Ευρώ), ενώ τη θέση των ασφαλιστηρίων συμβολαίων λαμβάνουν οι υποκλάδοι αυτοκινήτου (auto), αστικής ευθύνης (liability), ιδιοκτησίας (property), ειδικών ασφαλίσεων (specialty) και εργατικών αποζημιώσεων (worker's compensation).
- Κάθε παράδειγμα ασαφούς μεθόδου εμπεριέχει και τις εκτιμήσεις των συμβατικών μεθόδων καθώς, όπως αναφέρθηκε, συνιστούν επεκτάσεις αυτών.

4.3.1 Το ασαφές μοντέλο του Bühlmann

Η ασαφής επέκταση του μοντέλου του Bühlmann έχει ως στόχο την παροχή αποκλίσεων για τις βέλτιστες μη-ομογενείς εκτιμήτριες αξιοπιστίας $\mu(\Theta_j)^{Cred}$ της $\mu(\Theta_j)$, για κάθε $j \in \{1, 2, \dots, M\}$. Τη δημιουργία, με άλλα λόγια, ενός διαστήματος στο οποίο θα κυμαίνεται κάθε εκτιμήτρια, προσδίδοντας περισσότερη φερεγγυότητα στην εκτίμηση. Όπως έχει ήδη αναφερθεί στις παρατηρήσεις της εισαγωγής, οι ορισμοί της μεθόδου δεν παρουσιάζουν ουδεμία διαφοροποίηση. Συνεπώς, εστιάζοντας αποκλειστικά στο τεχνικό κομμάτι της μεθόδου, παρατίθεται ακολούθως η συνολική μεθοδολογία για το ασαφές μοντέλο του Bühlmann η οποία, όπως είναι προφανές, εμπεριέχει και τη μεθοδολογία του συμβατικού μοντέλου.

Ορισμός 4.3.1 (Μεθοδολογία ασαφούς μοντέλου Bühlmann)

- **Βήμα 1** Εκτίμηση των κέντρων της μέσης τιμής κάθε ασφαλιστηρίου συμβολαίου \bar{Y}_{jC} από την Εξίσωση (4.1) και της συνολικής μέσης τιμής του χαρτοφυλακίου $\bar{Y}_{..C}$ από την 4.2.
- **Βήμα 2** Εκτίμηση των κέντρων των παραμέτρων δόμησης μέσω των αμερόληπτων εκτιμητριών τους (Θεώρημα 4.2.2).
- **Βήμα 3** Εκτίμηση του κέντρου του συντελεστή αξιοπιστίας $Z_C = \frac{n\hat{a}_C}{n\hat{a}_C + \hat{s}_C^2}$.
- **Βήμα 4** Υπολογισμός των κέντρων των μη-ομογενών εκτιμητριών αξιοπιστίας Y_{jC}^{Cred} της Εξίσωσης (4.3).

$$Y_{jC}^{Cred} = Z_C \bar{Y}_{jC} + (1 - Z_C) \bar{Y}_{..C}.$$

- **Βήμα 5** Ασαφοποίηση των μέσων κάθε ασφαλιστηρίου συμβολαίου με εκτίμηση των αποκλίσεών τους, κάθε ένα από τα οποία εκτιμάται ως

$$\bar{Y}_{jS} = t_{n-1, \frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{s_j^2}{n}}. \quad (4.17)$$

- **Βήμα 6** Εκτίμηση των αποκλίσεων των παραμέτρων δόμησης.

Η απόκλιση της συνολικής μέσης τιμής $\hat{\mu}_S$ του χαρτοφυλακίου υπολογίζεται ως ο αριθμητικός μέσος των αποκλίσεων των μέσων κάθε ασφαλιστηρίου συμβολαίου ως

$$\hat{\mu}_S = \bar{Y}_{..S} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \bar{Y}_{.jS}. \quad (4.18)$$

Η αντίστοιχη απόκλιση της διασποράς των μέσων \hat{a}_S εκτιμάται ως

$$\hat{a}_S = \frac{1}{M-1} \sum_{j=1}^M (\bar{Y}_{.jS} - \bar{Y}_{..S})^2 - \frac{1}{n} \hat{s}_S^2. \quad (4.19)$$

Ενώ τέλος, η απόκλιση της εκτίμησης του μέσου της διασποράς \hat{s}_S^2 ισούται με μηδέν.

- **Βήμα 7** Εκτίμηση των αποκλίσεων \hat{Z}_L και \hat{Z}_R του συντελεστή αξιοπιστίας.

Ο ασαφής συντελεστής αξιοπιστίας \tilde{Z} εκτιμάται ως

$$\hat{\tilde{Z}} = \frac{n\hat{a}}{(n\hat{a} \oplus \hat{s}^2)} = n\hat{a} \otimes (n\hat{a} \oplus \hat{s}^2)^{-1}. \quad (4.20)$$

Όπου οι ασαφείς πράξεις επιτελούνται σύμφωνα με τον Ορισμό 1.3.4 (Ασαφής αριθμητική τριγωνικών αριθμών) και τοιουτοτρόπως λαμβάνουμε την εκτίμηση της αριστερής και δεξιάς απόκλισης του ασαφούς συντελεστή αξιοπιστίας \tilde{Z} .

- **Βήμα 8** Υπολογισμός των αποκλίσεων των μη-ομογενών εκτιμητριών αξιοπιστίας Y_{jL}^{Cred} και Y_{jR}^{Cred} .

Η ασαφής μη-ομογενής εκτιμήτρια αξιοπιστίας υπολογίζεται σύμφωνα με την Εξίσωση

$$\tilde{Y}_j^{Cred} = \hat{\tilde{Z}} \otimes \tilde{Y}_{.j} \oplus (\tilde{1} \ominus \hat{\tilde{Z}}) \otimes \tilde{Y}_{..M} \quad (4.21)$$

όπου $\tilde{1} = (1, 0, 0)$.

Από την οποία εύκολα υπολογίζονται οι αποκλίσεις κάνοντας χρήση ασαφούς αριθμητικής τριγωνικών αριθμών.

Παρατήρηση

Εφόσον το μοντέλο του Bühlmann (1967) συνιστά ειδική περίπτωση του μοντέλου παλινδρόμησης του Hachemeister (1975) για μοναδιαίο πίνακα σχεδιασμού, αν διενεργηθεί η εν λόγω παλινδρόμηση λαμβάνουμε την ευθεία $\hat{Y}_j = \bar{Y}_{\cdot j} = \hat{\beta}_{0j}$.

Ουσιαστικά, ο προσδιορισμός της μέσης τιμής κάθε ασφαλιστηρίου συμβολαίου και της απόκλισής της είναι αποτέλεσμα υβριδικής ασαφούς παλινδρόμησης. Οπότε στην προκειμένη περίπτωση είναι αναγκαία η ασαφοποίηση των παρατηρήσεων Y_{ij} δοθέντος j και πραγματοποιείται σύμφωνα με τρόπο εργασίας που έχει αναφερθεί στην Ενότητα 2.2.7 «Διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση πρόβλεψη». Γίνεται χρήση του εν λόγω διαστήματος διότι η εκτιμηθείσα ευθεία της απλής παλινδρόμησης το υποδεικνύει.

Επομένως, η απόκλιση κάθε τιμής που λαμβάνει η εξαρτημένη μεταβλητή ισούται με

$$Y_{ijS} = t_{n-1, \frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{s_j^2}{n}}.$$

Εστιάζοντας στις διαφορές που παρατηρούνται με το σύνηθες μήκος του διαστήματος διαπιστώνει κανείς ότι:

- Η κατανομή t-student έχει $n - 1$ βαθμούς ελευθερίας, καθώς χάνεται μόνο ένας βαθμός για την εκτίμηση του $\hat{\beta}_{0j}$.
- Η διασπορά της εκτίμησης \hat{Y}_j προκύπτει ως εξής

$$Var(\hat{Y}_j) = Var(\bar{Y}_{\cdot j}) = Var\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{ij}\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n Var(Y_{ij}) = \frac{\sigma_j^2}{n}.$$

$$\text{Άρα η εκτίμηση της τυπικής απόκλισης είναι } \sqrt{\widehat{Var}(\hat{Y}_j)} = \sqrt{\frac{\hat{s}_j^2}{n}}.$$

Κατά συνέπεια, η απόκλιση κάθε τιμής της εξαρτημένης μεταβλητής εξαρτάται μόνο από το ασφαλιστήριο συμβόλαιο και ως εκ τούτου η εκτίμηση της διασποράς αυτών, \hat{s}_{jS}^2 , είναι ίση με μηδέν για κάθε $j = 0, 1, \dots, M$. Κατ' επέκταση, η απόκλιση της εκτίμησης του μέσου της διασποράς \hat{s}_S^2 ισούται και αυτή με μηδέν.

Πίνακας 4.2: Ύψος απωλειών ανά έτος του χαρτοφυλακίου ιδιοκτησίας και ατυχημάτων

Έτος Ασφάλισης	Ασφάλιση Αυτοκινήτου	Αστική Ευθύνη	Ασφάλιση Ιδιοκτησίας	Ειδικές Ασφαλίσεις	Εργατικές Αποζημιώσεις
2008	3.473.146	1.552.519	2.373.943	874.170	252.043
2009	3.444.211	1.654.771	2.093.320	867.869	202.081
2010	3.142.312	1.417.274	3.010.068	886.464	204.836
2011	2.882.618	1.261.283	2.839.632	861.055	196.213
2012	2.634.648	1.400.218	2.207.826	933.131	195.772
2013	2.630.360	1.582.728	2.398.840	1.015.315	194.166
2014	2.416.939	1.497.471	2.211.993	1.008.218	215.618
2015	2.603.244	1.825.091	2.730.873	1.116.665	230.572
2016	2.501.947	1.615.511	2.165.262	979.699	201.826
2017	2.408.659	1.657.133	2.703.280	995.319	211.331

Παράδειγμα 4.1 (Ασαφές μοντέλο Bühlmann)

Στα δεδομένα του Πίνακα 4.2 θα εφαρμοστεί το ασαφές μοντέλο του Bühlmann ώστε να δοθεί μία εκτίμηση του ύψους και των αποκλίσεων κάθε απαιτήσης για την επόμενη περίοδο, δηλαδή για το έτος 2018 για κάθε υποκλάδο του χαρτοφυλακίου.

- **Βήμα 1** Η μέση τιμή του ύψους των απαιτήσεων κάθε υποκλάδου δίνεται με τη βοήθεια της Εξίσωσης (4.1) και η συνολική μέση τιμή του χαρτοφυλακίου σύμφωνα με τη Σχέση (4.2) ως

$$\begin{aligned} \bar{Y}_{.1C} &= 2.813.808, & \bar{Y}_{.2C} &= 1.546.400, \\ \bar{Y}_{.3C} &= 2.473.504, & \bar{Y}_{.4C} &= 953.771, \\ \bar{Y}_{.5C} &= 210.446, & \bar{Y}_{.C} &= 1.599.590. \end{aligned}$$

- **Βήμα 2** Εκτίμηση των κέντρων των παραμέτρων δόμησης μέσω των αμερόληπτων εκτιμητριών τους

$$\hat{\mu}_C = \bar{Y}_{..C} = 1.599.590,$$

$$\hat{s}_C^2 = 6,01 \cdot 10^{10},$$

$$\hat{a}_C = 1,14 \cdot 10^{12}.$$

- **Βήμα 3** Το κέντρο του συντελεστή αξιοπιστίας εκτιμάται ως

$$Z_C = \frac{10\hat{a}_C}{10\hat{a}_C + \hat{s}_C^2} = 0,9948.$$

- **Βήμα 4** Και σύμφωνα με τα παραπάνω και την Εξίσωση (4.3) η εκτίμηση του ύψους της απώλειας δίνεται μέσω των μη-ομογενών εκτιμητριών αξιοπιστίας

$$Y_{1C}^{Cred} = 2.807.446, \quad Y_{2C}^{Cred} = 1.546.679,$$

$$Y_{3C}^{Cred} = 2.468.925, \quad Y_{4C}^{Cred} = 957.174,$$

$$Y_{5C}^{Cred} = 217.725.$$

- **Βήμα 5** Ασαφοποίηση του μέσου κάθε υποκλάδου με εκτίμηση της απόκλισής του κάνοντας χρήση της Εξίσωσης (4.17)

$$\bar{Y}_{.1S} = t_{10-1, \frac{5\%}{2}} \cdot \sqrt{\frac{s_1^2}{10}} = 289.480,$$

$$\bar{Y}_{.2S} = 114.242,$$

$$\bar{Y}_{.3S} = 230.572,$$

$$\bar{Y}_{.4S} = 59.829,$$

$$\bar{Y}_{.5S} = 13.107.$$

- **Βήμα 6** Εκτίμηση των αποκλίσεων των παραμέτρων δόμησης.

Από την Εξίσωση (4.18) λαμβάνουμε

$$\hat{\mu}_S = \bar{Y}_{..S} = \frac{1}{5} \sum_{j=1}^5 \bar{Y}_{.jS} = 141.446$$

και από την Εξίσωση (4.19)

$$\begin{aligned}\hat{a}_S &= \frac{1}{5-1} \sum_{j=1}^5 (\bar{Y}_{.jS} - \bar{Y}_{..S})^2 - \frac{1}{n} \hat{s}_S^2 \\ &= \frac{1}{4} \sum_{j=1}^5 (\bar{Y}_{.jS} - \bar{Y}_{..S})^2 = 1,34 \cdot 10^{10}.\end{aligned}$$

Αφού, σύμφωνα με την παρατήρηση, $\hat{s}_S^2 = 0$.

- **Βήμα 7** Εκτίμηση των αποκλίσεων \hat{Z}_L και \hat{Z}_R του συντελεστή αξιοπιστίας αξιωματώντας την Εξίσωση (4.20)

$$\hat{Z}_L = 0,0231 \quad \text{και} \quad \hat{Z}_R = 0,0236.$$

- **Βήμα 8** Οι αποκλίσεις των εκτιμήσεων προκύπτουν εύκολα από τη Σχέση (4.21)

$$Y_{1L}^{Cred} = 381.464, \quad Y_{1R}^{Cred} = 382.048,$$

$$Y_{2L}^{Cred} = 181.925, \quad Y_{2R}^{Cred} = 181.911,$$

$$Y_{3L}^{Cred} = 316.368, \quad Y_{3R}^{Cred} = 316.797,$$

$$Y_{4L}^{Cred} = 115.369, \quad Y_{4R}^{Cred} = 115.060,$$

$$Y_{5L}^{Cred} = 52.806, \quad Y_{5R}^{Cred} = 52.116.$$

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, ο ακόλουθος Πίνακας (4.3) περιέχει την εκτίμηση του ύψους της απώλειας, των αποκλίσεών της και του διαστήματος στα πλαίσια του οποίου αναμένεται να κυμανθεί το επόμενο έτος.

Πίνακας 4.3: Εκτίμηση ύψους απώλειας, αποκλίσεων αυτής και διαστήματος κύμανσης

Τομέας Ασφάλισης	Y_{jC}^{Cred}	Y_{jL}^{Cred}	Y_{jR}^{Cred}	Διάστημα Κύμανσης	
Ασφάλιση Αυτοκινήτου	2.807.446	381.464	382.048	2.425.982	3.189.494
Αστική Ευθύνη	1.546.679	181.925	181.911	1.364.754	1.728.590
Ασφάλιση Ιδιοκτησίας	2.468.925	316.368	316.797	2.152.557	2.785.722
Ειδικές Ασφαλίσεις	957.174	115.369	115.060	841.806	1.072.234
Εργατικές Αποζημιώσεις	217.725	52.806	52.116	164.919	269.841

Όπου προφανώς το κάτω άκρο του διαστήματος κύμανσης προκύπτει ως η διαφορά $Y_{jC}^{Cred} - Y_{jL}^{Cred}$, ενώ το άνω άκρο ως το άθροισμα $Y_{jC}^{Cred} + Y_{jR}^{Cred}$.

- **Βήμα 9** Εκτίμηση ύψους απώλειας με βάση την παράμετρο κινδύνου r_f και συναρτήση του παράγοντα αβεβαιότητας K .

Πίνακας 4.4: Εκτίμηση ύψους απώλειας με βάση την παράμετρο κινδύνου r_f

Τομέας Ασφάλισης	Παράμετρος Κινδύνου (r_f)					
	0,1	0,25	0,5	0,75	0,9	0,99
Ασφάλιση Αυτοκινήτου	2.654.890	2.712.153	2.807.592	2.903.031	2.960.294	2.994.652
Αστική Ευθύνη	1.473.908	1.501.196	1.546.675	1.592.155	1.619.442	1.635.815
Ασφάλιση Ιδιοκτησίας	2.342.399	2.389.886	2.469.032	2.548.178	2.595.665	2.624.157
Ειδικές Ασφαλίσεις	911.011	928.294	957.097	985.901	1.003.183	1.013.552
Εργατικές Αποζημιώσεις	196.568	204.437	217.552	230.667	238.536	243.258

Πίνακας 4.5: Εκτίμηση ύψους απώλειας συναρτήσει του παράγοντα αβεβαιότητας K

Τομέας Ασφάλισης	Παράγων Αβεβαιότητας (K)					
	0,5	1	2	5	7,5	10
Ασφάλιση Αυτοκινήτου	190.878	381.756	763.512	1.908.781	2.863.171	3.817.561
Αστική Ευθύνη	90.959	181.918	363.836	909.590	1.364.385	1.819.180
Ασφάλιση Ιδιοκτησίας	158.291	316.582	633.165	1.582.912	2.374.368	3.165.824
Ειδικές Ασφαλίσεις	57.607	115.214	230.429	576.071	864.107	1.152.143
Εργατικές Αποζημιώσεις	26.230	52.461	104.922	262.305	393.457	524.609

4.3.2 Το ασαφές μοντέλο του Hachemeister

Το μοντέλο του Hachemeister επεκτείνεται στο αντίστοιχο ασαφές μοντέλο αξιοπιστίας με την εισαγωγή της υβριδικής ασαφούς παλινδρόμησης ελαχίστων τετραγώνων. Σκοπός της επέκτασης της μεθόδου αποτελεί κατά κύριο λόγο η εύρεση των βέλτιστων γραμμικών εκτιμητριών B_j^{Cred} κάθε ασφαλιστηρίου συμβολαίου και κατά δεύτερον ο προσδιορισμός των αποκλίσεών τους, διαμέσου των οποίων προστίθεται ασάφεια στο μοντέλο. Ομοίως με το ασαφές μοντέλο του Bühlmann, οι υποθέσεις και οι ορισμοί του συμβατικού μοντέλου του Hachemeister διατηρούνται αναλλοίωτοι και στο ασαφές, επομένως εξετάζεται άμεσα η μεθοδολογία της επέκτασης του μοντέλου.

Ορισμός 4.3.2 (Μεθοδολογία ασαφούς μοντέλου Hachemeister)

- **Βήμα 1** Διενέργεια M το πλήθος απλών υβριδικών παλινδρομήσεων όπου το ρόλο της ανεξάρτητης μεταβλητής, σε κάθε παλινδρόμηση, έχει το διάνυσμα των περιόδων ασφάλισης

$$\mathbf{X} = (n, n - 1, n - 2, \dots, 3, 2, 1)^t$$

και της εξαρτημένης μεταβλητής έχουν διαδοχικά τα διανύσματα

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_1 &= (Y_{11}, Y_{21}, \dots, Y_{n1})^t, \\ \mathbf{Y}_2 &= (Y_{12}, Y_{22}, \dots, Y_{n2})^t, \\ &\dots \\ \mathbf{Y}_M &= (Y_{1M}, Y_{2M}, \dots, Y_{nM})^t, \end{aligned}$$

από τις οποίες προκύπτουν οι εκτιμήσεις των $\hat{\beta}_j = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_{0j} \\ \hat{\beta}_{1j} \end{pmatrix}$ και \tilde{s}_j^2 για κάθε $j \in \{1, 2, \dots, M\}$.

- **Βήμα 2** Υπολογισμός της μέσης τιμής $\tilde{\mathbf{b}}$ των εκτιμήσεων $\hat{\beta}_j$,

$$\tilde{\mathbf{b}} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \hat{\beta}_j \quad (4.22)$$

και του μέσου \tilde{s}^2 των εκτιμήσεων \tilde{s}_j^2

$$\tilde{s}^2 = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \tilde{s}_j^2. \quad (4.23)$$

- **Βήμα 3** Εκτίμηση της συνδιακύμανσης των $\hat{\beta}_j$,

$$\widehat{Cov}(\hat{\beta}_j) = \frac{1}{M-1} \sum_{j=1}^M (\hat{\beta}_j - \tilde{\mathbf{b}}) (\hat{\beta}_j - \tilde{\mathbf{b}})^t \quad (4.24)$$

και της αμερόληπτης εκτιμήτριάς της

$$\hat{\mathbf{A}} = \widehat{Cov}(\hat{\beta}_j) - \tilde{s}^2 (\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1}, \quad (4.25)$$

$$\text{όπου } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}^t.$$

- **Βήμα 4** Εκτίμηση του ασαφούς συντελεστή αξιοπιστίας $\widehat{\mathbf{Z}}$,

$$\widehat{\mathbf{Z}} = \widehat{\mathbf{A}} \otimes \left[\widehat{Cov} \left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_j \right) \right]^{-1}. \quad (4.26)$$

- **Βήμα 5** Υπολογισμός των εκτιμήσεων των ασαφών βέλτιστων γραμμικών εκτιμητριών αξιοπιστίας $\widehat{\mathbf{B}}_j^{Cred} = \left(\widehat{\beta}_{0j}^{Cred} \quad \widehat{\beta}_{1j}^{Cred} \right)^t$ για κάθε $j \in \{1, 2, \dots, M\}$,

$$\widehat{\mathbf{B}}_j^{Cred} = \widehat{\mathbf{Z}} \otimes \widehat{\boldsymbol{\beta}}_j \oplus \left(\widetilde{\mathbf{I}}_{n \times n} \ominus \widehat{\mathbf{Z}} \right) \otimes \widetilde{\mathbf{b}}, \quad (4.27)$$

όπου $\widetilde{\mathbf{I}}_{n \times n}$ ο ασαφοποιημένος ταυτοτικός πίνακας με $\widetilde{\mathbf{I}} = (1, 0, 0)$ και $\widetilde{\mathbf{0}} = (0, 0, 0)$.

Το εκτιμώμενο ύψος και οι αποκλίσεις των απαιτήσεων της επόμενης περιόδου για κάθε ασφαλιστήριο συμβόλαιο είναι ίσες με την τεταγμένη του αντίστοιχου ασαφούς συντελεστή παλινδρόμησης της ασαφούς βέλτιστης γραμμικής εκτιμήτριας αξιοπιστίας $\widehat{\mathbf{B}}_j^{Cred}$.

Παρατήρηση

Στη μεθοδολογία του ασαφούς μοντέλου του Hachemeister συναντώνται για πρώτη φορά το γινόμενο ασαφών πινάκων και ο αντίστροφος ενός ασαφούς πίνακα. Όσον αφορά το πρώτο, υπολογίζεται εύκολα συνδυάζοντας τον γνωστό αλγεβρικό πολλαπλασιασμό πινάκων με το ασαφές γινόμενο.

Για παράδειγμα, έστω οι 2×2 ασαφείς πίνακες

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{12} \\ \widetilde{a}_{21} & \widetilde{a}_{22} \end{pmatrix} \text{ και } \widetilde{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \widetilde{b}_{11} & \widetilde{b}_{12} \\ \widetilde{b}_{21} & \widetilde{b}_{22} \end{pmatrix}.$$

Το ασαφές γινόμενο των πινάκων $\widetilde{\mathbf{A}} \otimes \widetilde{\mathbf{B}} = \widetilde{\mathbf{C}}$ υπολογίζεται ως

$$\begin{pmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{12} \\ \widetilde{a}_{21} & \widetilde{a}_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \widetilde{b}_{11} & \widetilde{b}_{12} \\ \widetilde{b}_{21} & \widetilde{b}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{c}_{11} & \widetilde{c}_{12} \\ \widetilde{c}_{21} & \widetilde{c}_{22} \end{pmatrix},$$

όπου

$$\begin{aligned} \widetilde{c}_{11} &= \widetilde{a}_{11} \otimes \widetilde{b}_{11} \oplus \widetilde{a}_{12} \otimes \widetilde{b}_{21}, & \widetilde{c}_{12} &= \widetilde{a}_{11} \otimes \widetilde{b}_{12} \oplus \widetilde{a}_{12} \otimes \widetilde{b}_{22}, \\ \widetilde{c}_{21} &= \widetilde{a}_{21} \otimes \widetilde{b}_{11} \oplus \widetilde{a}_{22} \otimes \widetilde{b}_{21}, & \widetilde{c}_{22} &= \widetilde{a}_{21} \otimes \widetilde{b}_{12} \oplus \widetilde{a}_{22} \otimes \widetilde{b}_{22}. \end{aligned}$$

Ο ασαφής αντίστροφος \tilde{A}^{-1} του ασαφούς πίνακα \tilde{A} υπολογίζεται μέσω της επίλυσης του ανωτέρω αλγεβρικού συστήματος εξισώσεων αν θέσουμε $\tilde{C} = \tilde{I}$ και επιλύσουμε το σύστημα έχοντας ως αγνώστους τα στοιχεία του πίνακα \tilde{B} . Αν δηλαδή ισχύει

$$\tilde{A} \otimes \tilde{B} = \tilde{I}$$

τότε

$$\tilde{B} = \tilde{A}^{-1},$$

όπου \tilde{I} είναι ο ασαφοποιημένος ταυτοτικός πίνακας με $\tilde{1} = (1, 0, 0)$ και $\tilde{0} = (0, 0, 0)$

Παράδειγμα 4.2 (Ασαφές μοντέλο Hachemeister)

Δεδομένου του Πίνακα 4.2, ο οποίος περιέχει ποσά απωλειών του κλάδου ιδιοκτησίας και ατυχημάτων (property & casualty) για την ιστορική περίοδο 2008 έως 2017, θα πραγματοποιηθεί εκτίμηση του ύψους της απώλειας όπως και των αποκλίσεων αυτής για το έτος 2018 για κάθε ασφαλιστήριο συμβόλαιο του εν λόγω χαρτοφυλακίου εφαρμόζοντας το ασαφές μοντέλο του Hachemeister.

- **Βήμα 1** Διενέργεια 5 απλών υβριδικών παλινδρομήσεων όπου το ρόλο της ανεξάρτητης μεταβλητής, σε κάθε παλινδρόμηση, έχει το διάνυσμα

$$\mathbf{X} = (10, 9, 8, \dots, 3, 2, 1)^t$$

και της εξαρτημένης μεταβλητής έχουν διαδοχικά τα διανύσματα

$$\mathbf{Y}_1 = (Y_{1,1}, Y_{2,1}, \dots, Y_{10,1})^t,$$

$$\mathbf{Y}_2 = (Y_{1,2}, Y_{2,2}, \dots, Y_{10,2})^t,$$

...

$$\mathbf{Y}_5 = (Y_{1,5}, Y_{2,5}, \dots, Y_{10,5})^t,$$

από τις οποίες προκύπτουν οι εκτιμήσεις των $\hat{\tilde{\beta}}_j = \begin{pmatrix} \hat{\tilde{\beta}}_{0j} \\ \hat{\tilde{\beta}}_{1j} \end{pmatrix}$ και $\tilde{s}_j^2, \forall j = 1, 2, \dots, 5$.

$$\widehat{\beta}_1 = \begin{pmatrix} \widehat{\beta}_{01} \\ \widehat{\beta}_{11} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (\widehat{\beta}_{01C}, \widehat{\beta}_{01S}) \\ (\widehat{\beta}_{11C}, \widehat{\beta}_{11S}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2,14 \cdot 10^6, 4,27 \cdot 10^5) \\ (1,23 \cdot 10^5, 1,00 \cdot 10^{-13}) \end{bmatrix},$$

$$\widehat{\beta}_2 = \begin{pmatrix} \widehat{\beta}_{02} \\ \widehat{\beta}_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (\widehat{\beta}_{02C}, \widehat{\beta}_{02S}) \\ (\widehat{\beta}_{12C}, \widehat{\beta}_{12S}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1,67 \cdot 10^6, 3,89 \cdot 10^5) \\ (-2,18 \cdot 10^4, -3,50 \cdot 10^{-13}) \end{bmatrix},$$

$$\widehat{\beta}_3 = \begin{pmatrix} \widehat{\beta}_{03} \\ \widehat{\beta}_{13} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (\widehat{\beta}_{03C}, \widehat{\beta}_{03S}) \\ (\widehat{\beta}_{13C}, \widehat{\beta}_{13S}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2,49 \cdot 10^6, 8,63 \cdot 10^5) \\ (-2,30 \cdot 10^3, 6,01 \cdot 10^{-13}) \end{bmatrix},$$

$$\widehat{\beta}_4 = \begin{pmatrix} \widehat{\beta}_{04} \\ \widehat{\beta}_{14} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (\widehat{\beta}_{04C}, \widehat{\beta}_{04S}) \\ (\widehat{\beta}_{14C}, \widehat{\beta}_{14S}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1,07 \cdot 10^6, 1,41 \cdot 10^5) \\ (-2,15 \cdot 10^4, 2,50 \cdot 10^{-14}) \end{bmatrix},$$

$$\widehat{\beta}_5 = \begin{pmatrix} \widehat{\beta}_{05} \\ \widehat{\beta}_{15} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (\widehat{\beta}_{05C}, \widehat{\beta}_{05S}) \\ (\widehat{\beta}_{15C}, \widehat{\beta}_{15S}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2,04 \cdot 10^5, 4,82 \cdot 10^4) \\ (1,11 \cdot 10^3, 0) \end{bmatrix}$$

και

$$\widetilde{s}_j^2 = (s_{jC}, s_{jS}), \quad j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Με

$$\begin{aligned} \widetilde{s}_1^2 &= (2,85 \cdot 10^{10}, 3,01 \cdot 10^8), & \widetilde{s}_2^2 &= (2,38 \cdot 10^{10}, 2,51 \cdot 10^8), \\ \widetilde{s}_3^2 &= (1,17 \cdot 10^{11}, 1,23 \cdot 10^9), & \widetilde{s}_4^2 &= (3,10 \cdot 10^9, 3,27 \cdot 10^7), \\ \widetilde{s}_5^2 &= (3,65 \cdot 10^8, 3,85 \cdot 10^6). \end{aligned}$$

- **Βήμα 2** Η μέση τιμή $\widetilde{\mathbf{b}}$ των εκτιμήσεων $\widehat{\beta}_j$ ισούται με

$$\widetilde{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \widetilde{b}_0 \\ \widetilde{b}_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (b_{0C}, b_{0S}) \\ (b_{1C}, b_{1S}) \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \sum_{j=1}^5 \widehat{\beta}_j = \begin{bmatrix} (1,51 \cdot 10^6, 3,74 \cdot 10^5) \\ (1,57 \cdot 10^4, 7,51 \cdot 10^{-14}) \end{bmatrix}$$

και ο μέσος \widetilde{s}^2 των εκτιμήσεων \widetilde{s}_j^2

$$\widetilde{s}^2 = (s_C^2, s_S^2) \frac{1}{5} \sum_{j=1}^5 \widetilde{s}_j^2 = (3,45 \cdot 10^{10}, 3,64 \cdot 10^8).$$

- **Βήμα 3** Η συνδιακύμανση $\widehat{Cov}(\widehat{\beta}_j)$ των εκτιμήσεων $\widehat{\beta}_j$ υπολογίζεται σύμφωνα με την Εξίσωση (4.24)

$$\widehat{Cov}_C(\widehat{\beta}_j) = \begin{pmatrix} 8,17 \cdot 10^{11} & 1,98 \cdot 10^{10} \\ 1,98 \cdot 10^{10} & 3,70 \cdot 10^9 \end{pmatrix}, \quad \widehat{Cov}_S(\widehat{\beta}_j) = \begin{pmatrix} 1,01 \cdot 10^{11} & 0 \\ 0 & 1,74 \cdot 10^{11} \end{pmatrix}$$

και η αμερόληπτη εκτιμήτριά της, $\widehat{\mathbf{A}}$, υπολογίζεται από τη Σχέση (4.25)

$$\widehat{\mathbf{A}}_C = \begin{pmatrix} 8,01 \cdot 10^{11} & 2,21 \cdot 10^{10} \\ 2,21 \cdot 10^{10} & 3,28 \cdot 10^9 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{A}}_S = \begin{pmatrix} 1,00 \cdot 10^{11} & 2,43 \cdot 10^7 \\ 2,43 \cdot 10^7 & 1,74 \cdot 10^{11} \end{pmatrix}.$$

- **Βήμα 4** Εκτίμηση του ασαφούς συντελεστή αξιοπιστίας $\widehat{\mathbf{Z}}$ από την Εξίσωση (4.26)

$$\widehat{\mathbf{Z}}_C = \begin{pmatrix} 0,960 & 0,835 \\ 0,006 & 0,853 \end{pmatrix},$$

$$\widehat{\mathbf{Z}}_L = \begin{pmatrix} -0,018 & 0,851 \\ 0,003 & -0,150 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{Z}}_R = \begin{pmatrix} 0,022 & -0,820 \\ -0,004 & 0,144 \end{pmatrix}.$$

- **Βήμα 5** Υπολογισμός των εκτιμήσεων των ασαφών βέλτιστων γραμμικών εκτιμητριών αξιοπιστίας αξιοποιώντας τα ανωτέρω αποτελέσματα και την Εξίσωση (4.27)

$$\widehat{\mathbf{B}}_{1C}^{Cred} = \begin{pmatrix} 2,20 \cdot 10^6 \\ 1,11 \cdot 10^5 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{B}}_{1L}^{Cred} = \begin{pmatrix} 4,91 \cdot 10^5 \\ -1,11 \cdot 10^4 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{B}}_{1R}^{Cred} = \begin{pmatrix} 4,08 \cdot 10^5 \\ 3,48 \cdot 10^3 \end{pmatrix},$$

$$\widehat{\mathbf{B}}_{2C}^{Cred} = \begin{pmatrix} 1,63 \cdot 10^6 \\ -1,53 \cdot 10^4 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{B}}_{2L}^{Cred} = \begin{pmatrix} 3,40 \cdot 10^5 \\ 8,95 \cdot 10^3 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{B}}_{2R}^{Cred} = \begin{pmatrix} 4,80 \cdot 10^5 \\ -1,57 \cdot 10^4 \end{pmatrix},$$

$$\widehat{\mathbf{B}}_{3C}^{Cred} = \begin{pmatrix} 2,43 \cdot 10^6 \\ 6,55 \cdot 10^3 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{B}}_{3L}^{Cred} = \begin{pmatrix} 8,04 \cdot 10^5 \\ 1,02 \cdot 10^4 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{B}}_{3R}^{Cred} = \begin{pmatrix} 9,47 \cdot 10^5 \\ -1,48 \cdot 10^4 \end{pmatrix},$$

$$\widehat{\mathbf{B}}_{4C}^{Cred} = \begin{pmatrix} 1,06 \cdot 10^6 \\ -1,88 \cdot 10^4 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{B}}_{4L}^{Cred} = \begin{pmatrix} 1,07 \cdot 10^5 \\ 6,18 \cdot 10^3 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{B}}_{4R}^{Cred} = \begin{pmatrix} 2,23 \cdot 10^5 \\ -1,41 \cdot 10^4 \end{pmatrix},$$

$$\widehat{\mathbf{B}}_{5C}^{Cred} = \begin{pmatrix} 2,44 \cdot 10^5 \\ -5,10 \cdot 10^3 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{B}}_{5L}^{Cred} = \begin{pmatrix} 1,09 \cdot 10^4 \\ -3,39 \cdot 10^2 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{B}}_{5R}^{Cred} = \begin{pmatrix} 5,48 \cdot 10^4 \\ -7,76 \cdot 10^3 \end{pmatrix}.$$

Στον επόμενο πίνακα αποτυπώνεται το εκτιμώμενο ύψος και οι αποκλίσεις για το έτος 2018 σε κάθε τομέα του χαρτοφυλακίου ιδιοκτησίας και ατυχημάτων καθώς επίσης η ελάχιστη και μέγιστη εκτιμώμενη τιμή της απώλειας για κάθε τομέα.

Πίνακας 4.6: Εκτίμηση ύψους απώλειας, αποκλίσεων αυτής και διαστήματος κύμανσης

Τομέας Ασφάλισης	$\widehat{\beta}_{0jC}^{Cred}$	$\widehat{\beta}_{0jL}^{Cred}$	$\widehat{\beta}_{0jR}^{Cred}$	Διάστημα Κύμανσης	
Ασφάλιση Αυτοκινήτου	2.202.619	490.550	408.230	1.712.069	2.610.848
Αστική Ευθύνη	1.628.882	339.661	480.106	1.289.221	2.108.988
Ασφάλιση Ιδιοκτησίας	2.432.269	804.491	946.957	1.627.778	3.379.226
Ειδικές Ασφαλίσεις	1.058.635	107.331	222.547	951.304	1.281.183
Εργατικές Αποζημιώσεις	244.498	10.936	54.754	233.562	299.252

Όπου όπως φαίνεται παραπάνω, το κάτω άκρο κάθε διαστήματος κύμανσης προκύπτει ως η διαφορά $\widehat{\beta}_{0jC}^{Cred} - \widehat{\beta}_{0jL}^{Cred}$, ενώ το άνω άκρο ως το άθροισμα $\widehat{\beta}_{0jC}^{Cred} + \widehat{\beta}_{0jR}^{Cred}$.

- **Βήμα 6** Εκτίμηση ύψους απώλειας με βάση την παράμετρο κινδύνου r_f και συναρτήσει του παράγοντα αβεβαιότητας K .

Πίνακας 4.7: Εκτίμηση ύψους απώλειας με βάση την παράμετρο κινδύνου r_f

Τομέας	Παράμετρος Κινδύνου r_f					
	0,1	0,25	0,5	0,75	0,9	0,99
Ασφάλιση Αυτοκινήτου	2.002.283	2.069.691	2.182.039	2.294.386	2.361.795	2.402.240
Αστική Ευθύνη	1.500.040	1.561.522	1.663.993	1.766.464	1.827.946	1.864.836
Ασφάλιση Ιδιοκτησίας	2.117.596	2.248.954	2.467.885	2.686.816	2.818.175	2.896.990
Ειδικές Ασφαλίσεις	1.021.464	1.046.205	1.087.439	1.128.674	1.153.415	1.168.260
Εργατικές Αποζημιώσεις	242.314	247.241	255.452	263.664	268.591	271.547

Πίνακας 4.8: Εκτίμηση ύψους απώλειας συναρτήσει του παράγοντα αβεβαιότητας K

Τομέας	Παράγων Αβεβαιότητας K					
	0,5	1	2	5	7,5	10
Ασφάλιση Αυτοκινήτου	224.695	449.390	898.779	2.246.949	3.370.423	4.493.897
Αστική Ευθύνη	204.942	409.883	819.767	2.049.417	3.074.126	4.098.834
Ασφάλιση Ιδιοκτησίας	437.862	875.724	1.751.448	4.378.620	6.567.930	8.757.241
Ειδικές Ασφαλίσεις	82.470	164.939	329.879	824.696	1.237.045	1.649.393
Εργατικές Αποζημιώσεις	16.423	32.845	65.691	164.227	246.341	328.455

Στον πίνακα που παρατίθεται ακολούθως πραγματοποιείται σύγκριση του εκτιμηθέντος ύψους απώλειας για το έτος 2018 με το αντίστοιχο πραγματικό που αντλήθηκε από τη δήλωση γνωστοποίησης της εταιρείας.

Πίνακας 4.9: Σύγκριση εκτιμηθέντος και πραγματικού ύψους απώλειας 2018

Τομέας Ασφάλισης	Διάστημα Κύμανσης				Πραγματικό Ύψος Απώλειας 2018
	Bühlmann		Hachemeister		
Ασφάλιση Αυτοκινήτου	2.425.982	3.189.494	1.712.069	2.610.848	2.251.788
Αστική Ευθύνη	1.364.754	1.728.590	1.289.221	2.108.988	1.424.050
Ασφάλιση Ιδιοκτησίας	2.152.557	2.785.722	1.627.778	3.379.226	2.755.612
Ειδικές Ασφαλίσεις	841.806	1.072.234	951.304	1.281.183	1.084.515
Εργατικές Αποζημιώσεις	164.919	269.841	233.562	299.252	188.476

Κεφάλαιο 5

Συμπεράσματα

Στην αναλογιστική βιβλιογραφία απαντώνται ποικίλες στατιστικές μέθοδοι, δυνητικά εφαρμόσιμες στην αποθεματοποίηση των απαιτήσεων ή στην αξιοπιστία χαρτοφυλακίου. Ωστόσο, όταν τα συμβατικά μοντέλα εφαρμόζονται σε ελλιπή ή διεπόμενα από αβεβαιότητα δεδομένα οι υπολογισθείσες εκτιμήσεις στερούνται φερεγγυότητας. Ως εκ τούτου, η ασαφής θεωρία συνόλων καθίσταται ιδιαίτερος ελκυστική και αρμόζουσα για τη μοντελοποίηση ζητημάτων τα οποία απαιτούν υποκειμενική κρίση καθώς επίσης και στην περίπτωση παρατήρησης ακατάλληλων και αμφίβολων πληροφοριών.

Στο Κεφάλαιο 1 βρίσκονται τα θεμελιώδη στοιχεία της ασαφούς λογικής και το θεωρητικό υπόβαθρο των ασαφών αριθμών και συνόλων, καθώς επίσης και των επιτελούμενων μεταξύ τους πράξεων. Έμφαση δίνεται κυρίως στους τριγωνικούς ασαφείς αριθμούς καθώς η μοντελοποίηση της αβεβαιότητας διαμέσου αυτών χρήζει μικρότερης υπολογιστικής προσπάθειας και ενδείκνυται στις εξεταζόμενες από την παρούσα εργασία εφαρμογές. Ωστόσο, η επιλογή του είδους των ασαφών αριθμών που χρησιμοποιούνται ανά την περίπτωση, δεν περιορίζεται αποκλειστικά στους τριγωνικούς. Θα μπορούσε μελλοντικά να διερευνηθεί η χρήση και έτερων ειδών ασαφών αριθμών.

Στο Κεφάλαιο 2 παρατίθενται δύο διαφορετικοί τρόποι ασαφούς παλινδρόμησης. Αρχικά η παλινδρόμηση με χρήση της αρχής ελάχιστης ασάφειας, που ήταν και το πρώτο ιστορικά μοντέλο που αναπτύχθηκε και ακολούθως η υβριδική ασαφής παλινδρόμηση ελαχίστων

τετραγώνων, η οποία είναι αυτή που εφαρμόζεται ευρύτερα καθώς και στα πλαίσια της παρούσης διπλωματικής εργασίας. Το μοντέλο της υβριδικής παλινδρόμησης επελέγη διότι ενσωματώνει και τους δύο τύπους αβεβαιότητας, την τυχαιότητα ή στοχαστικότητα και την ασάφεια, στο μοντέλο παλινδρόμησης. Μείζονος σημασίας πλεονέκτημα της μεθόδου συνιστά το γεγονός ότι κατά την εκτίμηση των ασαφών συντελεστών παρέχει μία θεωρητική βάση ώστε οι εκτιμήτριες να είναι αμερόληπτες και να έχουν την ελάχιστη διακύμανση. Το σημαντικότερο και πιο ιδιαίτερο χαρακτηριστικό του μοντέλου της υβριδικής παλινδρόμησης αποτελεί το γεγονός ότι η χρήση συμβατικών (crisp) αριθμών την ανάγει στο συμβατικό μοντέλο της παλινδρόμησης ελαχίστων τετραγώνων. Το χαρακτηριστικό αυτό που τη διέπει, επιτρέπει την επέκταση της μεθόδου και σε μη-γραμμικά μοντέλα. Φυσικά, θα ήταν δυνατό να εφαρμοστεί στο μέλλον μία μέθοδος παλινδρόμησης η οποία θα συνδυάζει τα θετικά και των δύο ανεπτυχθέντων στο παρόν κεφάλαιο μεθόδων.

Το παρόν πόνημα δύναται να χωριστεί νοητά σε τέσσερα επιμέρους τμήματα, δύο κύρια και δύο υποστηρικτικά (Κεφάλαια 1 και 2). Το πρώτο κυρίως τμήμα πραγματεύεται μία εκ των πιο καίριας σημασίας συντελούμενων σε μία ασφαλιστική εταιρεία διεργασιών, την αποθεματοποίηση ζημιών (Κεφάλαιο 3). Αρχικά παρουσιάζονται συμβατικές μέθοδοι αποθεματοποίησης όπως, λόγου χάριν, η μέθοδος chain ladder και παραλλαγές αυτής (London chain ladder και η chain ladder με εκθετικό μοντέλο), η γεωμετρική μέθοδος διαχωρισμού και η μέθοδος Bornhuetter-Ferguson. Ακολούθως αξιοποιούνται τα προσφερόμενα από την ασαφή θεωρία συνόλων εργαλεία για την μοντελοποίηση της αβεβαιότητας, ώστε οι προαναφερθείσες μέθοδοι αποθεματοποίησης ζημιών να επεκταθούν σε ασαφείς.

Αφού εφαρμοστούν τόσο οι συμβατικές όσο και οι ασαφείς μέθοδοι αποθεματοποίησης σε ευρωπαϊκά δεδομένα απαιτήσεων του υποκλάδου αυτοκινήτου δέκα ετών (2009-2018) της ασφαλιστικής εταιρείας Zurich Insurance Group Ltd, γίνεται ευδιάκριτη η υπεροχή των ασαφών έναντι των συμβατικών μεθόδων, καθώς εκτός από την εκτίμηση του ύψους του αποθέματος δίνονται και οι αντίστοιχες εκτιμήσεις των αποκλίσεων αυτού. Επιπροσθέτως, ζωτικής σημασίας πληροφορίες προσφέρει η εκτίμηση του αποθέματος

σε συνάρτηση με την παράμετρο κινδύνου και τον παράγοντα αβεβαιότητας, επιτρέποντας στην εκάστοτε εταιρεία να καθορίσει αποτελεσματικότερα τις πολιτικές της, βάσει από τη μία μεριά του κινδύνου που επιθυμεί να αναλάβει και από την άλλη μεριά, της θέωρησής της για το αβέβαιο των συνθηκών υπό τις οποίες επιχειρεί.

Στις ασαφείς μεθόδους chain ladder και Bornhuetter-Ferguson δεν εισέρχονται επ' ουδενί στοιχεία της θεωρίας πιθανοτήτων, συνεπώς θα μπορούσε να τους αποδοθεί ο τίτλος των «αποκλειστικά» ασαφών μεθόδων. Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο οι αποκλίσεις παρουσιάζουν απότομη αύξηση καθώς η διαθέσιμη πληροφορία λιγοστεύει, γεγονός το οποίο συνάδει απόλυτα με τις αρχές της ασαφούς λογικής.

Στις υπόλοιπες ασαφείς επεκτάσεις των συμβατικών μεθόδων, οι εκτιμήσεις του αποθέματος και των αποκλίσεων αυτού πραγματοποιούνται με τη χρήση του μοντέλου της υβριδικής ασαφούς παλινδρόμησης ελαχίστων τετραγώνων. Επιπλέον, υπεισέρχεται η στοχαστικότητα σε ένα βαθμό, καθώς κατά τη διαδικασία της ασαφοποίησης χρησιμοποιούνται πιθανοτικά διαστήματα εμπιστοσύνης για το σχεδιασμό των τριγωνικών ασαφών αριθμών. Με αυτόν τον τρόπο αντικατοπτρίζεται το μέτρο στοχαστικής μεταβλητότητας που περιλαμβάνεται στο σύνολο των δεδομένων.

Το δεύτερο κυρίως τμήμα εξετάζει τη θεωρία αξιοπιστίας χαρτοφυλακίου, η οποία συνιστά έναν εκ των ακρογωνιαίων λίθων της αναλογιστικής επιστήμης, υπό το πρίσμα της ασαφούς λογικής. Εν πρώτοις, παρουσιάζονται τα μοντέλα των Bühlmann (1967) και Hachemeister (1975) συνοδευόμενα από τις υποθέσεις που τα διέπουν. Εν συνεχεία επεκτείνονται με την εισαγωγή της ασαφούς λογικής, ώστε πέραν της εκτίμησης του ύψους της απώλειας να προσδιοριστούν και οι αποκλίσεις αυτού. Τοιουτοτρόπως, κάθε πρόβλεψη διακατέχεται από επιπλέον φερεγγυότητα και δίδεται η δυνατότητα ασφαλέστερων εκτιμήσεων διαμέσου των διαστημάτων κύμανσης.

Πραγματοποιήθηκε εφαρμογή των ασαφών μεθόδων αξιοπιστίας στο χαρτοφυλάκιο ιδιοκτησίας και ατυχημάτων της ασφαλιστικής εταιρείας Zurich Insurance Group Ltd το οποίο περιέχει ευρωπαϊκά δεδομένα ύψους απαιτήσεων, με στόχο την εκτίμηση του ύψους της απώλειας για το έτος 2018 για κάθε έναν από τους υποκλάδους του χαρτοφυλακίου. Εκ των αποτελεσμάτων, τα οποία συγκρίνονται με το πραγματικό ύψος της απώλειας της

εταιρείας για κάθε υποκλάδο, συνάγεται το συμπέρασμα της ακρίβειας των εκτιμήσεων καθώς διαπιστώνεται πως σε κάθε υποκλάδο η πραγματική τιμή της απώλειας περιέχεται στο οριζόμενο από τις ασαφείς αποκλίσεις διάστημα τουλάχιστον σε ένα από τα δύο ασαφή μοντέλα.

Τέλος, συγκρίνοντας τις δύο ασαφείς μεθόδους μεταξύ τους, επαληθεύεται το γεγονός ότι οι εν ισχύ υποθέσεις και ορισμοί των συμβατικών μεθόδων παραμένουν αναλλοίωτοι και στις ασαφείς, καθώς στο ασαφές μοντέλο του Hachemeister το ύψος των αποκλίσεων επηρεάζεται από την περίοδο ασφάλισης, σε αντίθεση με το ασαφές μοντέλο του Bühlmann στο οποίο είναι προφανές ότι δεν συμβαίνει κάτι ανάλογο.

Η επεξεργασία των δεδομένων και η υλοποίηση των εφαρμογών του παρόντος πονήματος πραγματοποιήθηκε με χρήση του πακέτου Microsoft Excel του Microsoft Office. Πιο συγκεκριμένα, δημιουργήθηκαν μοντέλα στο Microsoft Excel για κάθε μέθοδο στο πλαίσιο της παρούσης εργασίας με ταυτόχρονη αξιοποίηση των προσφερόμενων πρόσθετων του πακέτου (Add-Ins). Επί παραδείγματι, του Solver και του Data Analysis Pack.

Βιβλιογραφία

Ξένη Βιβλιογραφία

- [1] Apaydin, A., & Baser, F. (2010). Hybrid fuzzy least-squares regression analysis in claims reserving with geometric separation method. *Insurance: Mathematics and Economics*, 47(2), 113-122.
- [2] Basaran, M. A. (2012). Calculating fuzzy inverse matrix using fuzzy linear equation system. *Applied soft computing*, 12(6), 1810-1813.
- [3] Baser, F., & Apaydin, A. (2010). Calculating insurance claim reserves with hybrid fuzzy least squares regression analysis. *Gazi University Journal of Science*, 23(2), 163-170.
- [4] Benjamin, S., & Eagles, L. M. (1986). Reserves in Lloyd's and the London market. *Journal of the Institute of Actuaries*, 113(2), 197-256.
- [5] Bornhuetter, R. L., & Ferguson, R. E. (1972, November). The actuary and IBNR. In *Proceedings of the casualty actuarial society* (Vol. 59, No. 112, pp. 181-195).
- [6] Buckley, J. J. (2006). *Fuzzy probability and statistics*. Heidelberg: Springer.
- [7] Bühlmann, H. (1967). Experience rating and credibility. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 4(3), 199-207.
- [8] Bühlmann, H., & Gisler, A. (2006). *A course in credibility theory and its applications*. Springer Science & Business Media.
- [9] Chang, Y. H. O. (2001). Hybrid fuzzy least-squares regression analysis and its reliability measures. *Fuzzy Sets and Systems*, 119(2), 225-246.
- [10] Chang, Y. H. O., & Ayyub, B. M. (1996, June). Hybrid regression analysis for uncertainty modeling. *Proceedings of North American Fuzzy Information Processing* (ππ. 92-96). IEEE.
- [11] Chang, Y. H. O., & Ayyub, B. M. (2001). Fuzzy regression methods—a comparative assessment. *Fuzzy sets and systems*, 119(2), 187-203.

- [12] de Andrés Sánchez, J. (2006). Calculating insurance claim reserves with fuzzy regression. *Fuzzy sets and systems*, 157(23), 3091-3108.
- [13] de Andrés-Sánchez, J. (2007). Claim reserving with fuzzy regression and Taylor's geometric separation method. *Insurance: Mathematics and Economics*, 40(1), 145-163.
- [14] de Andrés-Sánchez, J. (2014). Fuzzy claim reserving in non-life insurance. *Computer Science and Information System*, 11(2), 825-838.
- [15] de Andrés-Sánchez, J. (2016). Fuzzy Regression Analysis: An Actuarial Perspective. In *Fuzzy Statistical Decision-Making* (pp. 175-201). Springer, Cham.
- [16] de Andrés-Sánchez, J., & Terceño Gómez, A. (2003). Applications of fuzzy regression in actuarial analysis. *Journal of Risk and Insurance*, 70(4), 665-699.
- [17] Friedland, J. (2010, July). Estimating unpaid claims using basic techniques. In *Casualty Actuarial Society* (Vol. 201, No. 0).
- [18] Hachemeister, C. (1975). Credibility for Regression Models with Application to Trend (Reprint). *Credibility: Theory and Applications*. Edited by P. Kahn. *New York: Academic Press, Inc*, 307-348.
- [19] Heberle, J., & Thomas, A. (2014). Combining chain-ladder claims reserving with fuzzy numbers. *Insurance: Mathematics and Economics*, 55, 96-104.
- [20] Heberle, J., & Thomas, A. (2016). The fuzzy Bornhuetter-Ferguson method: an approach with fuzzy numbers. *Annals of Actuarial Science*, 10(2), 303-321.
- [21] Ishibuchi, H., & Nii, M. (2001). Fuzzy regression using asymmetric fuzzy coefficients and fuzzified neural networks. *Fuzzy Sets and Systems*, 119(2), 273-290.
- [22] Kahraman, C., Beşkese, A., & Bozbura, F. T. (2006). Fuzzy regression approaches and applications. In *Fuzzy applications in industrial engineering* (ππ. 589-615). Springer, Berlin, Heidelberg.
- [23] Kim, K. J., Moskowitz, H., & Koksalan, M. (1996). Fuzzy versus statistical linear regression. *European Journal of Operational Research*, 92(2), 417-434
- [24] Lemaire, J. (1990). Fuzzy insurance. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 20(1), 33-55.
- [25] Longley-Cook, L. H. (1962). An introduction to credibility theory. *Casualty Actuarial Society*
- [26] Savic, D. A., & Pedrycz, W. (1991). Evaluation of fuzzy linear regression models. *Fuzzy sets and systems*, 39(1), 51-63.
- [27] Shapiro, A. F. (2004). Fuzzy logic in insurance. *Insurance: Mathematics and Economics*, 35(2), 399-424.

- [28] Sherman, R. E. (1984). Extrapolating, smoothing and interpolating development factors. In *Proceedings of the Casualty Actuarial Society* (Vol. 71, pp. 122-155).
- [29] Tanaka, H. Uejima, S., & Asai, K. (1982). Linear regression analysis with fuzzy model. *IEEE Trans. Systems Man Cybern*, 12, 903-907.
- [30] Taylor, G. C. (1977). Separation of inflation and other effects from the distribution of non-life insurance claim delays. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 9(1-2), 219-230.
- [31] Wierman, M. J. (2010). An introduction to the mathematics of uncertainty. Creighton University.

Ελληνική Βιβλιογραφία

- [1] Κούτρας, Μ., & Ευαγγελάρας, Χ. (2016) Ανάλυση Παλινδρόμησης: Θεωρία και Εφαρμογές, Εκδόσεις Σταμούλη.
- [2] Πιτσέλης, Γ. (2017) Αποθεματοποίηση Ζημιών Σημειώσεις, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.
- [3] Πιτσέλης, Γ. (2018) Θεωρία Αξιοπιστίας Χαρτοφυλακίου Σημειώσεις, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

Πηγές Σχημάτων

- [1] Σχήμα 1.1: Wierman, M. J. (2010). An introduction to the mathematics of uncertainty. Creighton University.
- [2] Σχήμα 1.2: Wierman, M. J. (2010). An introduction to the mathematics of uncertainty. Creighton University.
- [3] Σχήμα 1.3: Wierman, M. J. (2010). An introduction to the mathematics of uncertainty. Creighton University.
- [4] Σχήμα 1.4: Heberle, J., & Thomas, A. (2016). The fuzzy Bornhuetter–Ferguson method: an approach with fuzzy numbers. *Annals of Actuarial Science*, 10(2), 303-321.
- [5] Σχήμα 1.5: Heberle, J., & Thomas, A. (2014). Combining chain-ladder claims reserving with fuzzy numbers. *Insurance: Mathematics and Economics*, 55, 96-104.
- [6] Σχήμα 1.6: Heberle, J., & Thomas, A. (2014). Combining chain-ladder claims reserving with fuzzy numbers. *Insurance: Mathematics and Economics*, 55, 96-104.

- [7] Σχήμα 1.7: Heberle, J., & Thomas, A. (2014). Combining chain-ladder claims reserving with fuzzy numbers. *Insurance: Mathematics and Economics*, 55, 96-104.
- [8] Σχήμα 1.8: Wierman, M. J. (2010). An introduction to the mathematics of uncertainty. Creighton University.
- [9] Σχήμα 1.9: Wierman, M. J. (2010). An introduction to the mathematics of uncertainty. Creighton University.
- [10] Σχήμα 1.10: Wierman, M. J. (2010). An introduction to the mathematics of uncertainty. Creighton University.
- [11] Σχήμα 1.11: Wierman, M. J. (2010). An introduction to the mathematics of uncertainty. Creighton University.
- [12] Σχήμα 2.1: Chang, Y. H. O., & Ayyub, B. M. (2001). Fuzzy regression methods—a comparative assessment. *Fuzzy sets and systems*, 119(2), 187-203.
- [13] Σχήμα 2.2: Ishibuchi, H., & Nii, M. (2001). Fuzzy regression using asymmetric fuzzy coefficients and fuzzified neural networks. *Fuzzy Sets and Systems*, 119(2), 273-290.
- [14] Σχήμα 2.3: de Andrés Sánchez, J. (2006). Calculating insurance claim reserves with fuzzy regression. *Fuzzy sets and systems*, 157(23), 3091-3108.
- [15] Σχήμα 2.4: Chang, Y. H. O. (2001). Hybrid fuzzy least-squares regression analysis and its reliability measures. *Fuzzy Sets and Systems*, 119(2), 225-246.

Πηγή Δεδομένων

Τα δεδομένα των απαιτήσεων των τριγώνων απώλειας (loss triangles) καθώς επίσης και του ύψους των απωλειών του χαρτοφυλακίου ιδιοκτησίας και ατυχημάτων, αντλήθηκαν από τη δήλωση γνωστοποίησης αποθέματος (property & casualty reserve disclosure) της εταιρείας Zurich Insurance Group για το 2018.

Παράρτημα Α΄

Πίνακες

Κατάλογος Πινάκων

3.1	Επαυξητικές απαιτήσεις $X_{i,j}$	72
3.2	Αθροιστικές απαιτήσεις $C_{i,j}$	74
3.3	Επαυξητικές απαιτήσεις $X_{i,j}$	75
3.4	Αθροιστικές απαιτήσεις $C_{i,j}$	76
3.5	Εκτιμηθείσες απαιτήσεις (με έντονο μπλε)	77
3.6	Εκτιμηθέν απόθεμα για κάθε έτος	78
3.7	Παλινδρομήσεις	80
3.8	Συντελεστές παλινδρόμησης ανά έτος εξέλιξης	81
3.9	Εκτιμηθείσες απαιτήσεις (με έντονο μπλε)	81
3.10	Εκτιμηθέν απόθεμα για κάθε έτος	82
3.11	Παράγοντες εξέλιξης $r_{i,j}$	85
3.12	Εκτιμηθείσες απαιτήσεις (με έντονο μπλε)	87
3.13	Εκτιμηθέν απόθεμα για κάθε έτος	87
3.14	Μέσο κόστος ανά απαίτηση $S_{i,j}$	90
3.15	Επαυξητικές απαιτήσεις $X_{i,j}$ και πλήθος απαιτήσεων N_i	92
3.16	Μέσο κόστος ανά απαίτηση $S_{i,j}$	92
3.17	Εκτιμηθέν μέσο κόστος ανά απαίτηση \hat{S}_{i+j} (με έντονο μπλε)	94
3.18	Εκτιμηθέν απόθεμα για κάθε έτος	95
3.19	Αθροιστικές απαιτήσεις $C_{i,j}$ και εκ των προτέρων πληροφορία v_i	97
3.20	Αθροιστικές απαιτήσεις $C_{i,j}$ και εκ των προτέρων πληροφορία \hat{v}_i	99
3.21	Εκτιμηθείσες απαιτήσεις (με έντονο μπλε) και εκ των προτέρων πληροφορία	100
3.22	Εκτιμηθέν απόθεμα για κάθε έτος	101
3.23	Εκτίμηση αριστερών αποκλίσεων (με έντονο μπλε) των απαιτήσεων	106

3.24	Εκτίμηση δεξιών αποκλίσεων (με έντονο μπλε) των απαιτήσεων	107
3.25	Απόθεμα \widehat{R}_{iC} και απόκλιση εκτίμησης αποθέματος \widehat{R}_{iS}	108
3.26	Μέση τιμή αποθέματος συναρτήσει της παραμέτρου κινδύνου r_f	109
3.27	Ύψος αποθέματος συναρτήσει του παράγοντα αβεβαιότητας K	109
3.28	Παλινδρομήσεις αποκλίσεων	113
3.29	Αποκλίσεις συντελεστών παλινδρόμησης ανά έτος εξέλιξης	113
3.30	Εκτίμηση αριστερών αποκλίσεων (με έντονο μπλε) των απαιτήσεων	114
3.31	Εκτίμηση δεξιών αποκλίσεων (με έντονο μπλε) των απαιτήσεων	114
3.32	Απόκλιση εκτίμησης αποθέματος \widehat{R}_{iS}	115
3.33	Μέση τιμή αποθέματος συναρτήσει της παραμέτρου κινδύνου r_f	116
3.34	Ύψος αποθέματος συναρτήσει του παράγοντα αβεβαιότητας K	116
3.35	Εκτίμηση αριστερών αποκλίσεων (με έντονο μπλε) των απαιτήσεων	122
3.36	Εκτίμηση δεξιών αποκλίσεων (με έντονο μπλε) των απαιτήσεων	123
3.37	Απόκλιση εκτίμησης αποθέματος \widehat{R}_{iS}	123
3.38	Μέση τιμή αποθέματος συναρτήσει της παραμέτρου κινδύνου r_f	124
3.39	Ύψος αποθέματος συναρτήσει του παράγοντα αβεβαιότητας K	125
3.40	Λογάριθμοι μέσου κόστους ανά απαίτηση $\ln(S_{(i,j)C})$	131
3.41	Διάνυσμα παραμέτρων $\widehat{\beta}^t$	133
3.42	Εκτιμηθείσες διασπορές παραμέτρων $\widehat{Var}(\widehat{\beta})$	133
3.43	Απόκλιση διανύσματος παραμέτρων $\widehat{\beta}^t$	134
3.44	Εκτιμηθέντες ασαφείς παράγοντες $\ln(\widehat{\lambda}_{i+j})$	135
3.45	Εκτιμηθέν μέσο κόστος ανά απαίτηση $\widehat{S}_{(i+j)C}$ (με έντονο μπλε)	135
3.46	Εκτιμηθείσα αριστερή απόκλιση μέσου κόστους ανά απαίτηση $\widehat{S}_{(i+j)L}$ (με έντονο μπλε)	136
3.47	Εκτιμηθείσα δεξιά απόκλιση μέσου κόστους ανά απαίτηση $\widehat{S}_{(i+j)R}$ (με έντονο μπλε)	137
3.48	Εκτιμηθέν απόθεμα και απόκλιση αυτού για κάθε έτος	138
3.49	Μέση τιμή αποθέματος συναρτήσει της παραμέτρου κινδύνου r_f	138
3.50	Ύψος αποθέματος συναρτήσει του παράγοντα αβεβαιότητας K	139
3.51	Εκτίμηση αριστερών αποκλίσεων (με έντονο μπλε) των απαιτήσεων	144

3.52	Εκτίμηση δεξιών αποκλίσεων (με έντονο μπλε) των απαιτήσεων	144
3.53	Απόθεμα \widehat{R}_{iC} και απόκλιση εκτίμησης αποθέματος \widehat{R}_{iS}	145
3.54	Μέση τιμή αποθέματος συναρτήσει της παραμέτρου κινδύνου r_f	146
3.55	Ύψος αποθέματος συναρτήσει του παράγοντα αβεβαιότητας K	146
4.1	Χαρτοφυλάκιο M ασφαλιστηρίων συμβολαίων	151
4.2	Ύψος απωλειών ανά έτος του χαρτοφυλακίου ιδιοκτησίας και ατυχημάτων	163
4.3	Εκτίμηση ύψους απώλειας, αποκλίσεων αυτής και διαστήματος κύμανσης	166
4.4	Εκτίμηση ύψους απώλειας με βάση την παράμετρο κινδύνου r_f	166
4.5	Εκτίμηση ύψους απώλειας συναρτήσει του παράγοντα αβεβαιότητας K .	167
4.6	Εκτίμηση ύψους απώλειας, αποκλίσεων αυτής και διαστήματος κύμανσης	173
4.7	Εκτίμηση ύψους απώλειας με βάση την παράμετρο κινδύνου r_f	174
4.8	Εκτίμηση ύψους απώλειας συναρτήσει του παράγοντα αβεβαιότητας K .	174
4.9	Σύγκριση εκτιμηθέντος και πραγματικού ύψους απώλειας 2018	175

Παράρτημα Β΄

Σχήματα

Κατάλογος Σχημάτων

1.1	Τομή ασαφών συνόλων \tilde{A} και \tilde{B}	11
1.2	Ένωση ασαφών συνόλων \tilde{A} και \tilde{B}	11
1.3	Συμπλήρωμα ασαφούς συνόλου \tilde{A}	12
1.4	Τριγωνικός ασαφής αριθμός $\tilde{A} = (a_C, a_L, a_R)$	15
1.5	Ασαφές άθροισμα των τριγωνικών αριθμών $\tilde{A} = (6, 2, 3)$ και $\tilde{B} = (5, 4, 1)$	18
1.6	Ασαφές γινόμενο των τριγωνικών αριθμών $\tilde{A} = (6, 2, 3)$ και $\tilde{B} = (5, 4, 1)$	18
1.7	Ασαφές πηλίκο των τριγωνικών αριθμών $\tilde{A} = (6, 2, 3)$ και $\tilde{B} = (5, 4, 1)$	18
1.8	Τραπεζοειδής ασαφής αριθμός \tilde{F}	21
1.9	Μερικώς τετραγωνικός ασαφής αριθμός \tilde{H}	21
1.10	Γκαουσιανός ασαφής αριθμός \tilde{G}	23
1.11	Παλμοειδής ασαφής αριθμός \tilde{M}	23
2.1	Βαθμός προσαρμογής του \hat{Y}_i σε μια δοθείσα ασαφή παρατήρηση \tilde{Y}_i	50
2.2	Το σύνολο βαθμού εμπιστοσύνης h	52
2.3	Γραφική αναπαράσταση του μοντέλου των Ishibuchi και Nii	52
2.4	Τυχαίο σφάλμα μεταξύ εκτιμώμενου \hat{Y}_i και παρατηρούμενου \tilde{Y}_i	55