ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Εκτίμηση Monte Carlo των Παραμέτρων Ευαισθησίας Δικαιωμάτων για την Αντιστάθμιση Κινδύνων Χαρτοφυλακίων.

Αντωνίνης Δ. Ματθαίος

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και ασφαλιστικής
Επιστήμης του Πανεπιστήμιου Πειραιώς ως μέρος των
Απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού
Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική.

Πειραιάς,
Οκτώβριος του 2017

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN APPLIED STATISTICS

Monte Carlo estimation of option sensitivity parameters for the construction of portfolio hedging strategies.

BY
MATTHAIOS ANTONINIS

Msc Dissertation

Submitted to the Department of Statistics and Insurance science of the University of Piraeus in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Applied Statistics.

Piraeus, Greece
October 2017

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ'αριθμ. …….. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- ………………………………… (Επιβλέπων)
- …………………………………
- …………………………………

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ την οικογένεια μου για την υποστήριξη και τον κύριο Μ. Μπούτσικα για την πολύτιμη καθοδήγησή του καθ’όλη τη διάρκεια της εκπόνησης της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα παρουσιαστούν διάφοροι μέθοδοι εκτίμησης των παραμέτρων ευαισθησίας ενός χαρτοφυλακίου μέσω Monte-Carlo προσομοίωσης όταν δεν υπάρχουν διαθέσιμοι αναλυτικοί τύποι (π.χ. δικαίωμα Ασιατικού τύπου). Αρχικά θα πραγματοποιηθεί μια εισαγωγή στα παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα και στην μέθοδο προσομοίωσης Monte-Carlo. Επίσης, θα πραγματοποιηθεί μια εισαγωγή στην κίνηση Brown και στην Γεωμετρική κίνηση Brown όπου θα περιγραφούν οι κινήσεις των χρηματοοικονομικών τίτλων καθώς και το μαθηματικό μοντέλο των Black and Scholes. Το κύριο μέρος της εργασίας αποτελείται από την περιγραφή διαφόρων μεθόδων εκτίμησης των παραμέτρων ευαισθησίας μέσω Monte-Carlo προσομοίωσης. Οι παράμετροι ευαισθησίας ενός χαρτοφυλακίου είναι ποσότητες που εκφράζουν την μεταβολή της δίκαιης τιμής ενός παράγωγου χρηματοοικονομικού προϊόντος ως προς την μεταβολή διαφόρων παραμέτρων του μοντέλου. Ο υπολογισμός αυτών των ποσοτήτων σε κάθε χρονική στιγμή είναι αναγκαίος για την αντιστάθμιση του κινδύνου ενός χαρτοφυλακίου. Στα πλαίσια της εργασίας θα υλοποιηθούν οι υπολογιστικοί αλγόριθμοι χρησιμοποιώντας κατάλληλο λογισμικό (Wolfram Mathematica).

Abstract

The main aim of this thesis is to present various methods for estimating portfolio sensitivity parameters using Monte-Carlo simulation, especially when there are no analytical formulas available, e.g. as in the case of Asian options. Initially, an introduction to financial derivatives and the Monte-Carlo simulation method will be given. The mathematical framework of Brownian motion and Geometric Brownian motion as well as the mathematical model of Black and Scholes will also be briefly presented. The main part of this thesis consists of the description of various methods for estimating the sensitivity parameters through Monte-Carlo simulation. Portfolio sensitivity parameters are quantities that reflect the change in the fair value of a derivative product with respect to the value change of several model parameters (e.g. price of underlying asset, market volatility, interest rate, time etc.). The computation of these quantities at any time is necessary in order to hedge the risk of a given portfolio. Finally, we include several applications of option pricing using appropriate computer software (Wolfram Mathematica).

Πίνακας περιεχομένων

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στην χρηματοοικονομική ανάλυση οι παράμετροι ευαισθησίας είναι ποσότητες που εκφράζουν την μεταβολή της δίκαιης τιμής ενός παραγώγου χρηματοοικονομικού προϊόντος (π.χ. δικαιώματος αγοράς) ως προς την μεταβολή διαφόρων παραμέτρων του μοντέλου όπως αξία του υποκείμενου αγαθού, μεταβλητότητα, χρόνος κ.τ.λ.. Οι παράμετροι αυτοί είναι γνωστές ως "the Greeks". Ο υπολογισμός αυτών των ποσοτήτων είναι απαραίτητος για την αντιστάθμιση του κινδύνου ενός χαρτοφυλακίου με την κατασκευή δυναμικών Delta-Gamma neutral χαρτοφυλακίων.

Στο 1^0 Κεφάλαιο στο οποίο παρουσιάζεται μία εισαγωγή στα παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα και τις αγορές αυτών, θα αναφερθούμε στα Προθεσμιακά Συμβόλαια (Forward Contracts), Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης (Future Contracts) και τα Δικαιώματα Προαίρεσης (options).

Στο 2^0 κεφάλαιο παρουσιάζεται μία εισαγωγή στην εκτίμηση Monte-Carlo και στην κατασκευή αλγορίθμων προσομοίωσης. Στην συνέχεια εκτιμούμε την μέση τιμή μιας οποιασδήποτε μετρίσιμης συνάρτησης σύμφωνα με την μέθοδο προσομοίωσης Monte-Carlo.

Στο 3^0 κεφάλαιο θα εισάγουμε την έννοια της προσομοίωσης τιμών χρηματοοικονομικών προϊόντων μέσω της κίνησης Brown και της γεωμετρικής κίνησης Brown με χρήση της παραγωγής τυχαίων αριθμών από κανονική κατανομή. Τέλος, θα παρουσιάσουμε μία από τις πιο βασικές τεχνικές τιμολόγησης των δικαιωμάτων προαίρεσης, που είναι η Monte-Carlo προσομοίωση μέσω του μοντέλου των Black & Scholes.

Στο 4^0 κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με τις παραμέτρους ευαισθησίας του χαρτοφυλακίου. Ο υπολογισμός αυτών των παραμέτρων είναι σημαντικός για την αντιστάθμιση του κινδύνου ενός χαρτοφυλακίου που επιτυγχάνεται μέσω συγκεκριμένων μεθόδων προσομοίωσης όπως π.χ. η μέθοδος των προς τα εμπρός διαφορών, η μέθοδος παραγώγισης κατά διαδρομή (pathwise derivative), η μέθοδος της Score Function και η μέθοδος του λόγου πιθανοφανειών που εφαρμόζονται με σκοπό την εκτίμηση των παραμέτρων ευαισθησίας των δικαιωμάτων αγοράς ή πώλησης Ευρωπαϊκού ή Ασιατικού τύπου. Στην τελευταία ενότητα του κεφαλαίου θα κατασκευάσουμε ένα χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης για ένα call option επί της μετοχής και ένα χαρτοφυλάκιο αναπαραγωγής ενός Ασιατικού Δικαιώματος. Οι υπολογιστικοί αλγόριθμοι προσομοίωσης θα υλοποιηθούν χρησιμοποιώντας το λογισμικό Wolfram Mathematica.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{0}- Εισαγωγή στα Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα

1.1 Προθεσμιακά συμβόλαια (forward contracts)

Τα προθεσμιακά συμβόλαια αποτελούν μία συμφωνία μεταξύ δύο αντισυμβαλλομένων έτσι ώστε ο ένας έχει την υποχρέωση να αγοράσει (λαμβάνει long position) από τον πωλητή (λαμβάνει short position) ένα περιουσιακό στοιχείο, σε μία καθορισμένη ποσότητα, σε μία καθορισμένη ημερομηνία στο μέλλον (T), με μία προκαθορισμένη τιμή συναλλαγής (K). Επίσης, τα προθεσμιακά συμβόλαια είναι η πιο απλή μορφή παραγώγου. Τέτοια συμβόλαια πραγματοποιούνται μεταξύ δύο αντισυμβαλλόμενων όπως για παράδειγμα μεταξύ δύο χρηματοοικονομικών ιδρυμάτων ή χρηματοοικονομικού ιδρύματος και πελάτη του. Θα πρέπει να αναφέρουμε ότι η λήψη μιας τοποθέτησης δεν κοστίζει απολύτως τίποτα για κανέναν από τους δύο αντισυμβαλλόμενους[1].

Για παράδειγμα, τον μήνα Δεκέμβριο, η επιχείρηση A συμφωνεί να πουλήσει στην επιχείρηση B 100000 λίτρα πετρελαίου σε 1 έτος από σήμερα προς $0{,}80$\$ το λίτρο. Γνωρίζουμε ότι η σημερινή τιμή ενός λίτρου πετρελαίου είναι $0{,}75$\$ το λίτρο. Η τιμή $0{,}80$\$ ανά λίτρο είναι η προκαθορισμένη τιμή συναλλαγής του πετρελαίου σε ένα έτος από σήμερα. Δηλαδή σε ένα έτος από σήμερα ο αγοραστής θα πληρώσει 8.000\$ στον πωλητή και θα παραλάβει 10000 λίτρα πετρελαίου. Σε περίπτωση που ανέβει η τιμή του πετρελαίου από σήμερα σε ένα έτος και φτάσει την τιμή τον $1{,}50$\$ ανά λίτρο, ο αγοραστής θα είναι κερδισμένος κατά $15.000 - 8.000 = 7.000$\$. Σε αντίθετη περίπτωση που σε ένα έτος η τιμή του πετρελαίου σημείωση μείωση με τιμή $0{,}40$\$ τότε ο αγοραστής θα είναι ζημιωμένος κατά 4.000\$ $(4.000 - 8.000 = -4.000)$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι την επόμενη μέρα της σύναψης της συμφωνίας η τιμή του πετρελαίου ανέβηκε από $0{,}775$ το λίτρο στα $0{,}90$\$ το λίτρο. Σε περίπτωση που οι δύο αντισυμβαλλόμενοι είχαν κάνει συμφωνία την επόμενη μέρα τότε η τιμή του πετρελαίου δεν θα είναι $0{,}80$\$ το λίτρο αλλά για παράδειγμα θα είχε άλλη τιμή $1{,}30$\$ ανά λίτρο. Άρα συμπεραίνουμε για το προθεσμιακό συμβόλαιο στην περίπτωση αυτή κερδισμένος θα βγει ο αγοραστής και ζημιωμένος ο πωλητής.

Δηλαδή την επόμενη μέρα η προθεσμιακή τιμή του συμβολαίου είναι $1{,}30$\$ ανά λίτρο, επειδή τα προθεσμιακά συμβόλαια που συμφωνούνται αυτή την ημέρα έχουν τιμή παράδοσης $1{,}30$\$ ανά λίτρο.

Σύμφωνα με τα παραπάνω ο αγοραστής θα έχει κέρδος από ένα προθεσμιακό συμβόλαιο στο χρόνο T

$$S_T - K$$

[1] Μπούτσικας Μ. (2005-2007) *Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα*

Συμβολίζουμε με S_T την τιμή του υποκείμενου αγαθού τον χρόνο της λήξης του συμβολαίου και με K την προκαθορισμένη τιμή συναλλαγής. Αντίθετα, το κέρδος του πωλητή από ένα προθεσμιακό συμβόλαιο είναι

$$K - S_T$$

Όπως είδαμε και παραπάνω η τιμή K καθορίζεται την ημέρα σύναψης του προθεσμιακού συμβολαίου ενώ η αξία του συμβολαίου S_T δεν είναι γνωστή την συγκεκριμένη ημέρα (θεωρείται τυχαία μεταβλητή).

1.2 Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης (Future Contracts)

Τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης όπως και τα προθεσμιακά συμβόλαια ανήκουν στην οικογένεια των παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων. Λειτουργούν όπως τα προθεσμιακά συμβόλαια δηλαδή είναι μία απρόσωπη συμφωνία μεταξύ δύο συμβαλλομένων για την αγορά ή πώληση ενός υποκείμενου τίτλου, σε μία καθορισμένη ποσότητα, με μία καθορισμένη ημερομηνία στο μέλλον (T), και με προκαθορισμένη τιμή συναλλαγής (K). Ο αγοραστής του υποκείμενου τίτλου λαμβάνει τη θέση long position και προσδοκά αύξηση της τιμής του υποκείμενου τίτλου ενώ ο πωλητής λαμβάνει θέση short position και προσδοκά μείωση της τιμής του υποκείμενου τίτλου.

Η διαφορά ανάμεσα στα δύο συμβόλαια είναι ότι τα ΣΜΕ είναι τυποποιημένα υποκείμενα διαπραγμάτευσης και συναλλάσσονται καθημερινά εντός οργανωμένου χρηματιστηρίου γι' αυτό το λόγο υπάρχει εγγύηση του χρηματιστηρίου για την εκπλήρωση τους. Από την άλλη πλευρά η διαπραγμάτευση των προθεσμιακών συμβολαίων γίνεται εξωχρηματιστηριακά δηλαδή πραγματοποιούνται μεταξύ δύο αντισυμβαλλομένων όπως μεταξύ δύο χρηματοοικονομικών ιδρυμάτων ή μεταξύ δύο μεγάλων εταιρειών.

Για παράδειγμα υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα ΣΜΕ με υποκείμενο τίτλο 1000 μετοχές του ΟΤΕ, τιμή συναλλαγής $K = 40€$ και ημερομηνία λήξης $T = 4\ \mu\acute{\eta}\nu\varepsilon\varsigma = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ οι επενδυτές όμως έχουν λάβει ήδη long και short position επί του συμβολαίου αυτού. Σε αυτή την χρονική στιγμή που βρισκόμαστε οι επενδυτές ανοίγουν ένα λογαριασμό περιθωρίου καταθέτοντας εγγύηση ένα ποσοστό επί της αξίας του συμβολαίου, έστω 20%. Στην επόμενη συνεδρίαση η τιμή του συμβολαίου έχει αλλάξει και έστω για παράδειγμα ότι έχει αυξηθεί και έχει πάρει την τιμή $K = 42€$. Αν ο αγοραστής (long position) αποφάσισε να κλείσει την ανοιχτή του θέση λαμβάνοντας short position επί του συμβολαίου αυτού τότε θα έχει κέρδος $(42 - 40)\ 1000 = 2000€$. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα από την πλευρά του αγοραστή να μην χρειάζεται να κάνει την κίνηση αυτή, πιστώνεται μέσω του λογαριασμού περιθωρίου του το ποσό των $2000€$ που αντίστοιχα χρεώνεται στον λογαριασμό περιθωρίου του πωλητή. Τέλος οι επενδυτές θα πρέπει να καταθέσουν το ελάχιστο 20% στο λογαριασμό περιθωρίου τους. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται γι' αυτό και καλείται ημερήσιος διακανονισμός. Έτσι κάθε επενδυτής δεν χρειάζεται να περιμένει μέχρι την ημερομηνία λήξης του συμβολαίου αλλά λαμβάνει τμηματικά το κέρδος ή την ζημία του.

1.3 Δικαιώματα Προαίρεσης (options)

Τα δικαιώματα προαίρεσης είναι πιο σύνθετη μορφή παραγώγου από τα ΣΜΕ και τα ΠΣ. Διακρίνονται σε δύο είδη τα δικαιώματα αγοράς (call options) και τα δικαιώματα πώλησης (put options). Ο κάτοχος ενός δικαιώματος αγοράς έχει το δικαίωμα αλλά όχι την υποχρέωση να αγοράσει το συγκεκριμένο αγαθό σε μία προκαθορισμένη τιμή εξάσκησης (K) και σε μία ημερομηνία εξάσκησης (T) . Αντίστοιχα ο κάτοχος ενός δικαιώματος πώλησης έχει το δικαίωμα αλλά όχι την υποχρέωση να πωλήσει το συγκεκριμένο αγαθό με προκαθορισμένη τιμή εξάσκησης (K) και σε προκαθορισμένη ημερομηνία εξάσκησης (T) .

Χαρακτηριστικά Δικαιωμάτων Προαίρεσης

- Το είδος του δικαιώματος (call ή put option). Το call option δίνει το δικαίωμα αλλά όχι την υποχρέωση στον κάτοχο του δικαιώματος (holder) να αγοράσει τον υποκείμενο τίτλο ενώ το put option δίνει το δικαίωμα αλλά όχι στον κάτοχο του δικαιώματος (holder) να πουλήσει τον υποκείμενο τίτλο.
- Ο υποκείμενος τίτλος μπορεί να είναι ένας χρηματοοικονομικός δείκτης μία μετοχή μιας εταιρίας ή ένα αγαθό επί του οποίου συνάπτεται το δικαίωμα.
- Η ημερομηνία λήξης (exercise date) είναι το χρονικό διάστημα στο οποίο θα εξασκηθεί το δικαίωμα. Τα Αμερικάνικα συμβόλαια προαίρεσης μπορούν να εξασκηθούν σε οποιοδήποτε χρονικό σημείο μέσα στο διάστημα $[0, T]$ μέχρι την λήξη τους, ενώ τα Ευρωπαϊκά δικαιώματα προαίρεσης μπορούν να εξασκηθούν μόνο στην ημερομηνία λήξης τους.
- Η τιμή εξάσκησης K (strike price) στην οποία ο κάτοχος του δικαιώματος (holder) αγοράς ή πώλησης θα αποφασίσει αν θα αγοράσει ή θα πωλήσει τον υποκείμενο τίτλο.
- Το ασφάλιστρο C (option price) είναι η χρηματική αξία που θα δοθεί από τον αγοραστή στον πωλητή ανεξάρτητα αν θα εξασκηθεί ή όχι το δικαίωμα.

Παρακάτω θα αναλύσουμε τους βασικούς τύπους δικαιωμάτων προαίρεσης.

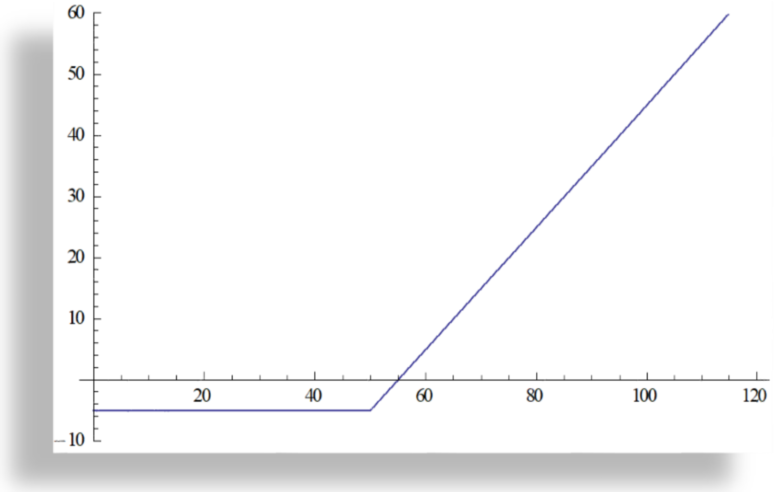
Αγορά δικαιώματος αγοράς – Long Call

Ο επενδυτής προβλέπει άνοδο της τιμής μιας μετοχής τους επόμενους μήνες αλλά δεν επιθυμεί την αγορά της μετοχής αλλά την αγορά ενός δικαιώματος επί 100 τεμαχίων της μετοχής αυτής καταβάλλοντας ασφάλιστρο C. Αν την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος η τιμή της μετοχής είναι πάνω από την τιμή εξάσκησης, ο επενδυτής προφανώς θα εξασκήσει το δικαίωμα και θα αγοράσει τη μετοχή αποκομίζοντας κέρδος (μείον το ασφάλιστρο) αφού θεωρητικά μπορεί να την πουλήσει αμέσως. Αν την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος η τιμή της μετοχής είναι κάτω από την τιμή εξάσκησης ο επενδυτής δεν θα εξασκήσει το δικαίωμα αφού μπορεί εάν θέλει να αγοράσει φθηνότερα από την αγορά[2]. Στην περίπτωση αυτή, ο επενδυτής θα έχει ζημία ίση με το ασφάλιστρο C που πλήρωσε για να αποκτήσει το δικαίωμα.

Γενικά, αν S_T είναι η τιμή της μετοχής στο χρόνο εξάσκησης T το κέρδος από τη χρήση του long call συνοψίζεται στον παρακάτω τύπο:

[2] Μπούτσικας Μ. (2005-2007) *Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα*

```
K=50;C0=5;
Plot[Max[ST-K,0]-C0,{ST,0,120},PlotRange→{-10,60}]
```



$$(S_T-K)_+ - C = \max\{S_T-K,0\} - C = \begin{cases} S_T-K-C, & S_T > K \\ -C, & S_T \le K \end{cases}$$

Όταν $S_T > K$ τότε ο επενδυτής θα εξασκήσει το δικαίωμα με κέρδος $S_T - K - C$.

Αγορά δικαιώματος πώλησης – Long Put

Ο επενδυτής κατέχει μετοχή μιας εταιρίας για την οποία προβλέπει πτώση της τιμής τους επόμενους μήνες αλλά δεν επιθυμεί την πώληση της και προτιμά την αγορά ενός δικαιώματος πώλησης της μετοχής αυτής καταβάλλοντας ασφάλιστρο C. Αντίστροφα με το long call, το τελικό κέρδος από τη χρήση του long put, συναρτήσει της τιμής της μετοχής στο χρόνο T είναι

$$(K-S_T)_+ - C = max\{K-S_T,0\} - C = \begin{cases} K-S_T-C, & K > S_T \\ -C & K \le S_T \end{cases}$$

Όταν $K > S_T$ τότε ο επενδυτής θα εξασκήσει το δικαίωμα με κέρδος $K - S_T - C$.

Πώληση δικαιώματος αγοράς – Short Call

Ο επενδυτής κατέχει μετοχή μιας εταιρίας για την οποία προβλέπει στάσιμη ή καθοδική τάση της τιμής για τους επόμενους μήνες αλλά δεν επιθυμεί την πώληση της. Προκειμένου να αυξήσει την απόδοση του χαρτοφυλακίου του σε περίοδο στασιμότητας προβαίνει στην πώληση ενός δικαιώματος αγοράς της μετοχής αυτής εισπράττοντας ασφάλιστρο C, παραχωρώντας το δικαίωμα στον αγοραστή να αγοράσει τη μετοχή σε χρόνο T, εφόσον τον συμφέρει. Το τελικό κέρδος από τη χρήση του short call, συναρτήσει της τιμής της μετοχής στο χρόνο T είναι

$$C - (S_T-K)_+ = C - \max\{S_T-K,0\} = C + \max\{K-S_T,0\} = \begin{cases} C+K-S_T & S_T > K \\ C & S_T \le K \end{cases}$$

Όταν $S_T > K$ τότε ο επενδυτής θα εξασκήσει το δικαίωμα με κέρδος $C + K - S_T$.

Πώληση δικαιώματος πώλησης – Short Put

Ο επενδυτής προβλέπει στάσιμη ή ανοδική την τιμή μιας μετοχής τους επόμενους μήνες αλλά δεν επιθυμεί την αγορά της αλλά την πώληση ενός δικαιώματος πώλησης της μετοχής αυτής εισπράττοντας ασφάλιστρο C. Άρα ο αγοραστής του δικαιώματος έχει αποκτήσει το δικαίωμα να πουλήσει στο χρόνο T τη μετοχή αυτή, εφόσον τον συμφέρει .Το τελικό κέρδος από τη χρήση του short put, συναρτήσει της τιμής της μετοχής στο χρόνο T είναι

$$C-(K-S_T)_+ = C-\max\{K-S_T,0\} = C+\max\{S_T-K,0\} = \begin{cases} S_T-K+C, & K>S_T \\ C, & K\leq S_T \end{cases}$$

Όταν $S_T < K$ τότε ο επενδυτής θα εξασκήσει το δικαίωμα με κέρδος S_T-K+C.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^0- Μέθοδοι Προσομοίωσης (Εκτίμηση Monte – Carlo)

2.1 Εισαγωγή

Τα τελευταία χρόνια λόγω της ραγδαίας εξέλιξης της υπολογιστικής ισχύς των Η/Υ έχει αναπτυχθεί μία μέθοδος μελέτης των στοχαστικών φαινομένων η οποία έχει την δυνατότητα να παρακολουθεί εικονικά την πραγματοποίηση του φαινομένου στο χρόνο και να καταγράφει τα διάφορα μεγέθη του φαινομένου που μας απασχολούν για την εξαγωγή συμπερασμάτων.

Για παράδειγμα, όταν θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα ενός ενδεχομένου Α μπορούμε να καταγράψουμε το πλήθος πραγματοποιήσεων εμφάνισης του Α. Από τον νόμο τον μεγάλων αριθμών η πιθανότητα είναι ίση με την οριακή σχετική συχνότητα εμφάνισης του Α.

Συμπερασματικά, η μελέτη των στοχαστικών φαινομένων είναι καλύτερη όσο μεγαλύτερο είναι το πλήθος των πραγματοποιήσεων της. Όμως η παρακολούθηση των πραγματοποιήσεων του φαινομένου είναι πολυέξοδη γι' αυτό τον λόγο έρχεται να μας βοηθήσει η υπολογιστική ισχύς των Η/Υ. Δηλαδή αντί να παρατηρούμε τις πραγματοποιήσεις του φαινομένου μπορούμε να προσομοιώσουμε το φαινόμενο μέσω κατάλληλης εικονικής πραγματικότητας ενός Η/Υ. Έτσι μπορούμε να το πραγματοποιήσουμε χιλιάδες ή εκατομμύρια φορές και να καταγράψουμε τα αντίστοιχα χαρακτηριστικά που μας αφορούν. Για τους αναγνώστες που επιθυμούν περισσότερες πληροφορίες παραπέμπουμε στις εργασίες των Arsham, (1989), Boyle, P. (1977), Blattberg, R. C., and Gonedes, N. J. (1974), Cox, J. C. (1996), D. Duffie and P. Glynn, D.P. Kroese, T. Taimre, and Z.I. Botev (2011)

Παρακάτω αναφέρουμε ορισμένα παραδείγματα που μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος της προσομοίωσης:

- Συστήματα ουρών αναμονής σε τράπεζες, νοσοκομεία, δίκτυα υπολογιστών.
- Έλεγχος αποθεμάτων αποθηκών
- Αξιοπιστία πολύπλοκων συστημάτων
- Κίνηση μετοχών στο χρηματιστήριο

2.2 Παραγωγή Ψευδοτυχαίων Αριθμών

Με τον όρο τυχαίοι αριθμοί εννοούμε το αποτέλεσμα μιας πραγματοποίησης μιας (πεπερασμένης) ακολουθίας $X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών η κάθε μία εκ των οποίων κατανέμεται ομοιόμορφα στο $(0,1)$. Δηλαδή,

$$F_{X_i}(x) = P(X_i \leq x) = x, x \in (0,1)$$

Μία από τις απλούστερες μεθόδους παραγωγής ψευδοτυχαίων αριθμών είναι η πολλαπλασιαστική μέθοδος (multiplicative congruential method). Εδώ ξεκινάμε με μία αρχική τιμή x_0 και στην συνέχεια εκτελούμε τους εξής υπολογισμούς:

$$x_{i+1} = a\, x_i \bmod m$$
$$u_{i+1} = \frac{x_{i+1}}{m}$$

όπου το $x\, modm$ συμβολίζει το υπόλοιπο της διαίρεσης του x με το m, ενώ το $a\ mod\ m$ και η αρχική τιμή x_0 ανήκουν στο σύνολο των φυσικών αριθμών. Επομένως κάθε x_i ανήκει στο $\{0,1,\dots,m-1\}$ ενώ ο αριθμός

$$\frac{x_i}{m} \in \left\{0, \frac{1}{m}, \dots, \frac{m-1}{m}\right\} \subseteqq [0,1)$$

Συνοψίζοντας η κατασκευή του αλγορίθμου δίνεται παρακάτω:

ΒΗΜΑ 1. Θέτουμε $x_0 = seed$. ΒΗΜΑ 2. Υπολογίζουμε το $x_i = ax_{i-1} modm$ και θέτουμε $U_i = \frac{x_i}{m}, \qquad i = 1,2,\dots,n$

Οι παραπάνω αριθμοί U_i που παράγονται από τον αλγόριθμο δεν είναι καθόλου τυχαίοι δηλαδή μετά από ένα πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων θα εμφανιστεί ένας αριθμός x_k που έχει ήδη εμφανιστεί σε προηγούμενες επαναλήψεις

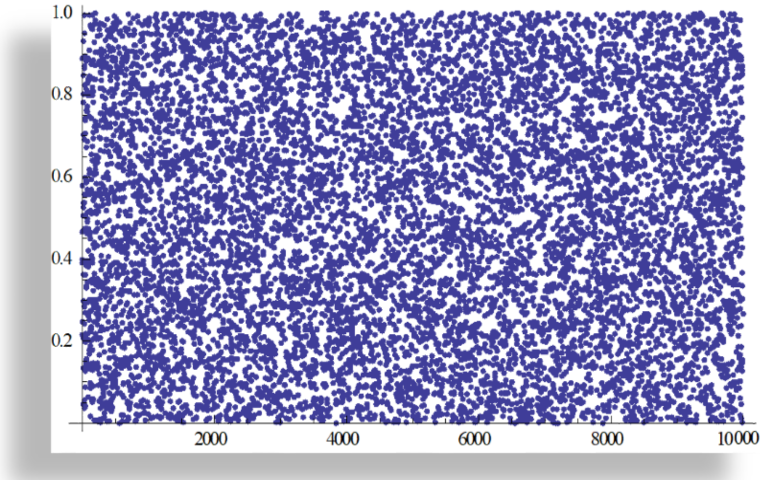
Μία εφαρμογή του παραπάνω αλγορίθμου μέσω Mathematica είναι η ακόλουθη:

```
m=2^32;a=7^5;x=10^5;
Do[x=Mod[a*x,m];
 Print[N[x/m]]
 ,{i,1,10}]
```

```
0.3913184627890587
0.8894040957093239
0.21463658660650253
0.39711109548807144
0.24618186801671982
0.5786557570099831
0.46730806678533554
0.046678461134433746
0.5248962864279747
0.9318859949707985
```

Επίσης μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα γράφημα που να δείχνει τους αριθμούς U_i που παράγονται σε σχέση με το $i = 1,2, \dots, n$ όπου $n = 10000$:

```
m=2^32;a=7^5;x=10^5;n=10000;U=Table[0,{n}];
Do[x=Mod[a*x,m];
 U[[i]]=N[x/m]
 ,{i,1,n}]
ListPlot[U]
```



2.3. Υπολογισμός μέσης τιμής – ολοκληρώματος μέσω προσομοίωσης.

Η μέθοδος προσομοίωσης Monte-Carlo μπορεί να εφαρμοστεί και στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων. Για παράδειγμα, θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\mu = \int_0^1 g(x)dx = E(g(U))$$

για μία μετρήσιμη συνάρτηση g, όπου η μεταβλητή U ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο $(0,1)$. Ας, θεωρήσουμε μία τυχαία πειραματική διαδικασία η οποία να παράγει την τ.μ. $Y = g(U)$ και να υπολογίζει την αναμενόμενη τιμή της. Σύμφωνα με τον νόμο των μεγάλων αριθμών αν εκτελέσουμε το πείραμα αρκετές φορές τότε η αναμενόμενη τιμή της $Y = g(U)$ θα είναι ίση με το μέσο όρο των αποτελεσμάτων των πειραμάτων αυτών[3]. Αυτό μαθηματικά εκφράζεται ως εξής: Έστω $U_1, U_2, \dots, U_n \sim U(0,1)$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές και από τον νόμο τον μεγάλων αριθμών ισχύει ότι:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(U_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \longrightarrow E(Y) = E(g(U))$$

Η παραπάνω διαδικασία συνοψίζεται στον επόμενο αλγόριθμο:

[3] Μπούτσικας Μ. (2004) *Μέθοδοι Προσομοίωσης & Υπολογιστικές Στατιστικές Τεχνικές*

ΒΗΜΑ1. Παράγουμε n τυχαίους αριθμούς $U_1, U_2, \dots, U_n \sim U(0,1)$ ΒΗΜΑ2. Εκτιμούμε την μέση τιμή $E(g(U))$ από τον μέσο όρο $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(U_i)$

Η υλοποίηση του παραπάνω αλγορίθμου θα εφαρμοστεί στο παρακάτω παράδειγμα:

Παράδειγμα: Αν $g(x) = x^2$:

$$\mu = E(U^2) = \int_0^1 x^2 dx$$

```
n=10000;Y=Table[0,{n}];
Do[U=RandomReal[];Y[[i]]=U^2
  ,{i,1,n}];
Mean[Y]
```

0.331518

Το παραπάνω ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

$$\mu = \int_0^1 x^2 dx = [\frac{x^3}{3}]_0^1 = \frac{1}{3} = 0{,}333$$

Γενικότερα μπορούμε να υπολογίσουμε μέσες τιμές της μορφής

$$E\big(g(X_1, X_2, \dots, X_k)\big)$$

όπου η $g: R^k \longrightarrow R$ και οι $X_1, X_2, \dots, X_k$ είναι τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν κάποια δεδομένη κατανομή.

Η μέθοδος Monte – Carlo είναι αυτή που θα μας δώσει την εκτίμηση της μέσης τιμής της παραπάνω ποσότητας σύμφωνα με τα παρακάτω βήματα:

ΒΗΜΑ 1. Παράγουμε τις τ.μ. $X_1, X_2, \dots, X_k$ και υπολογίζουμε την ποσότητα $g(X_1, X_2, \dots, X_k)$ θέτοντας $Y_1 = g(X_1, X_2, \dots, X_k)$.
ΒΗΜΑ 2. Παράγουμε πάλι ανεξάρτητα αντίγραφα των $X_1, X_2, \dots, X_k$ και τα συμβολίζουμε $X_1^{(2)}, X_2^{(2)}, \dots, X_k^{(2)}$ υπολογίζοντας την ποσότητα $g(X_1^{(2)}, X_2^{(2)}, \dots, X_k^{(2)})$ θέτοντας $Y_2 = g(X_1^{(2)}, X_2^{(2)}, \dots, X_k^{(2)})$.
ΒΗΜΑ 3. Τέλος συνεχίζουμε έτσι και υπολογίζουμε τα $Y_3, Y_4, \dots, Y_n$ για κάποιο αρκετά μεγάλο n.

Με τα παραπάνω βήματα υπολογίζουμε την Monte – Carlo εκτίμηση της μέσης τιμής η οποία δίνεται από τον τύπο:

$$\hat{E}\big(g(X_1, X_2, \dots, X_k)\big) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_1^{(i)}, X_2^{(i)}, \dots, X_k^{(i)})$$ [4]

[4] Μπούτσικας Μ. (2004) *Μέθοδοι Προσομοίωσης & Υπολογιστικές Στατιστικές Τεχνικές*

Εκτός της σημειακής εκτίμησης $\hat{\mu} = \bar{Y}$, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα διάστημα εμπιστοσύνης συνετελεστού $1 - a$ για το μ ως εξής:

Γνωρίζουμε από το κεντρικό οριακό θεώρημα ότι ισχύει

$$\sqrt{n}\frac{\bar{Y}-\mu}{S_Y} = \frac{\sigma_Y}{S_Y}\sqrt{n}\frac{\bar{Y}-\mu}{\sigma_Y} \longrightarrow N(0,1)\ \kappa\alpha\theta\acute{\omega}\varsigma\ \tau o\ n \to \infty \text{ αφού } \frac{\sigma_Y}{S_Y} \longrightarrow 1,$$

όπου $S_Y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2$. Επομένως, αν $z_{a/2}$ είναι το άνω $a/2$ σημείο της $N(0,1)$ τότε

$$P\left(\bar{Y} - \frac{S_Y}{\sqrt{n}} z_{a/2} \leq \mu \leq \bar{Y} + \frac{S_Y}{\sqrt{n}} z_{a/2}\right) \approx 1 - a$$

Συνεπώς, συμπεραίνουμε ότι το $(\bar{Y} - \frac{S_Y}{\sqrt{n}} z_{a/2}, \bar{Y} + \frac{S_Y}{\sqrt{n}} z_{a/2})$ είναι ένα διάστημα εμπιστοσύνης για το μ με συντελεστή εμπιστοσύνης $1 - a$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^0 - Προσομοίωση Στοχαστικών Ανελίξεων – Το Μοντέλο των Black and Scholes

3.1 Κίνηση Brown

Πρώτος ο βοτανολόγος και φυσιοδίφης Robert Brown παρατήρησε και ανακάλυψε την παλμική κίνηση των σωματιδίων μέσα σε υγρό και αέριο τα οποία κινούνται ακανόνιστα και με τυχαίο τρόπο στον χώρο. Ύστερα από αρκετές δεκαετίες ο Albert Einstein το 1905 δημοσίευσε την δική του θεωρία ερμηνεύοντας ότι αυτή η ακανόνιστη κίνηση των σωματιδίων οφείλεται στις συγκρούσεις που έχουν με τα μόρια του υγρού ή του αερίου. Για τους αναγνώστες που επιθυμούν περισσότερες πληροφορίες παραπέμπουμε στις εργασίες των Boyle, P. (1977), Boyle, P., Broadie, M. and Glasserman, P. (1997), Cao, X. (1987), Chambers, J. M., Mallows, C. L., and Stuck, B. W. (1976) και στην μονογραφία του E. Greenberg (2012).

Κύριο χαρακτηριστικό μιας κίνησης Brown, $X = \{X(t), t \geq 0\}$, είναι ότι έχει ανεξάρτητες και κανονικές προσαυξήσεις $X(t+y) - X(y)$. Δηλαδή σε κάθε απειροστό χρονικό διάστημα, η αύξηση ή μείωση της $X(t)$ είναι ανεξάρτητη από το παρελθόν, άρα η τ.μ. $X(t+y) - X(y), t > 0$ είναι ανεξάρτητη από την $X(u), 0 \leq u \leq y$. Επίσης η τ.μ. $X(t+y) - X(y) \sim N(t\mu, t\sigma^2)$ για κάθε $y \geq 0$.

Ορισμός 3.1. Μία στοχαστική ανέλιξη $X(t), t \geq 0$ (με τιμές στο R) καλείται **κίνηση Brown** με παραμέτρους $\mu \in R$ (τάση – drift parameter) και $\sigma > 0$ (μεταβλητότητα – volatility) αν ισχύει ότι, για κάθε $y \geq 0, t > 0$,

1) Η τ.μ. $X(t+y) - X(y) \sim N(t\mu, t\sigma^2)$.

2) Η τ.μ.$X(t+y) - X(y)$, είναι ανεξάρτητη από τις $X(u), 0 \leq u \leq y$.

Μονοδιάστατη κίνηση Brown με τάση μ και μεταβλητότητα σ^2 στο χρονικό διάστημα $[0, T]$ με σταθερές παραμέτρους μ και $\sigma > 0$ καλείται η διαδικασία $X(t), t \geq 0$ εάν ο λόγος

$$\frac{X(t) - \mu t}{\sigma}, 0 \leq t \leq T$$

είναι μία τυπική μονοδιάστατη κίνηση Brown. Άρα θέτοντας $W(t) = \frac{X(t) - \mu t}{\sigma} \sim BM(0,1)$ μπορούμε να κατασκευάσουμε μια κίνηση Brown $BM(\mu, \sigma^2)$,

$$X(t) = \mu t + \sigma W(t)$$

Επίσης, η παραπάνω στοχαστική διαδικασία $X = \{X(t), t \geq 0\}$ ικανοποιεί την παρακάτω στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dX(t) = \mu dt + \sigma W(t)$$

Η αρχική υπόθεση τις περισσότερες είναι $X(0) = 0$ για λόγους ευκολίας, αλλά μπορούμε να κατασκευάσουμε μια κίνηση Brown με $X(0) = C$ προσθέτοντας σε κάθε X_t το C.

3.2 Προσομοίωση της κίνησης Brown

Η θεωρητική προσέγγιση στην περίπτωση που η στοχαστική διαδικασία $\{X(t), t \geq 0\} \sim BM$, μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η τιμή της $X(t)$ αλλάζει απειροστά κάθε απειροστό χρονικό διάστημα και συνεπώς παρουσιάζει ιδιάζουσες διαδρομές. Μία πραγματοποίηση της στοχαστικής διαδικασίας $\{X(t), t \geq 0\}$ δηλαδή η $\{X_t(\omega), t \geq 0\}$ είναι μία συνεχής συνάρτηση του t αλλά πουθενά παραγωγίσιμη σχεδόν για κάθε $\omega \in \Omega$.

Για να μπορέσουμε να προσομοιώσουμε την παραπάνω διαδικασία σε συγκεκριμένους χρόνους $t_0 = 0, t_1, t_2, \dots, t_n$ θα πρέπει να παράγουμε την τιμή της $X(t)$ τους χρόνους αυτούς. Στην περίπτωση αυτή παράγουμε τις εξής τιμές $X(t_0), X(t_1), \dots, X(t_n)$ γνωρίζοντας ότι

$X(t_0) \sim N(t_0\mu, t_0\sigma^2)$ αν $t_0 = 0$ τότε $X(0) = 0$,

$X(t_1) = X(t_0) + (X(t_1) - X(t_0))$, όπου η τ.μ. $X(t_1) - X(t_0) \sim N((t_1 - t_0)\mu, (t_1 - t_0)\sigma^2)$

$X(t_2) = X(t_1) + (X(t_2) - X(t_1))$, όπου η τ.μ. $X(t_2) - X(t_1) \sim N((t_2 - t_1)\mu, (t_2 - t_1)\sigma^2)$[5]

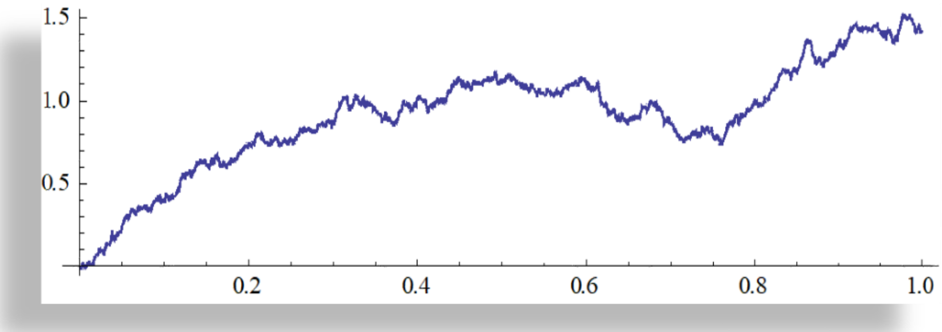
Ο αλγόριθμος που παράγει την διαδικασία $X_0, X_1, \dots, X_n$ δίνεται παρακάτω:

Βήμα 1. Θέτουμε $i = 1$ και $X_0 = 0$.
Βήμα 2. Παράγουμε $Z \sim N(0,1)$.
Βήμα 3. Θέτουμε $X_i = X_{i-1} + \mu(t_i - t_{i-1}) + \sigma\sqrt{t_i - t_{i-1}}Z$.
Βήμα 4. Θέτουμε $i = i + 1$ και αν $i \leq n$ επιστρέφουμε στο βήμα 2.

Ο παραπάνω αλγόριθμος υλοποιείται μέσω Mathematica για

$$n = 10000, \mu = 1, \sigma = 0.5, \Delta = \frac{t}{n}$$

```
μ=1;σ=0.5;t=1;n=10000;Δ=t/n;
X=0;XL=Table[0,{n}];
Do[X=X+μ*Δ+σ*Δ^0.5*RandomReal[NormalDistribution[0,1]];
  XL[[i]]={i*Δ,X};,{i,1,n}];
ListPlot[XL,Joined→True,AspectRatio→0.3]
```

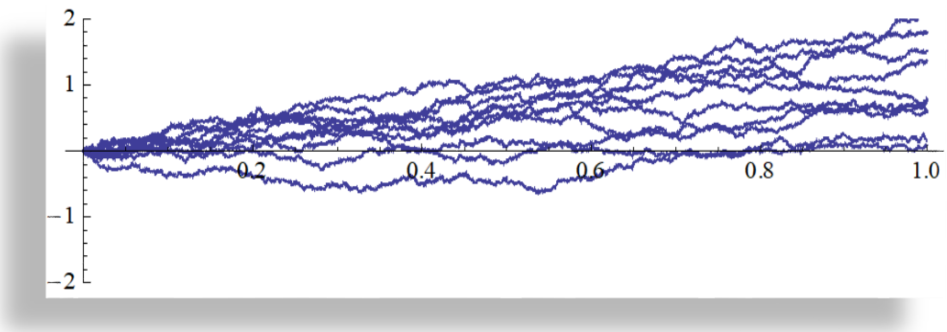


Γράφημα 3.1 Προσομοίωση κίνησης Brown

Η παραπάνω διαδιακασία μπορεί να επαναληφθεί 10 φορές με αποτέλεσμα να δούμε τις 10 διαφορετικές πραγματοποιήσεις της παραπάνω διαδικασίας:

[5] Μπούτσικας Μ. (2004) *Μέθοδοι Προσομοίωσης & Υπολογιστικές Στατιστικές Τεχνικές*

```
μ=1;σ=0.5;t=1;n=10000;Δ=t/n;
Do[X=0;XL=Table[0,{n}];
 Do[X=X+μ*Δ+σ*Δ^0.5*RandomReal[NormalDistribution[0,1]];
   XL[[i]]={i*Δ,X};
   ,{i,1,n}]
  PrependTo[XL,{0,0}];
 pl[j]=ListLinePlot[XL,PlotRange→{-2,2}];
 ,{j,1,10}]
Show[Table[pl[i],{i,1,10}],AspectRatio→0.3]
```



Γράφημα 3.2 Προσομοίωση κίνησης Brown για 10 διαφορετικές παραγματοποιήσεις

3.3 Γεωμετρική κίνηση Brown

Μία στοχαστική ανέλιξη S ονομάζεται Γεωμετρική κίνηση Brown (GBM) εάν η log$S$ ακολουθεί την κίνηση Brown. Πρώτος ο Αμερικάνος Οικονομολόγος Paul Samuelson χρησιμοποίησε την GBM για να εκφράσει την κίνηση των τιμών χρηματοοικονομικών προϊόντων. Γνωρίζουμε ότι αν $X(t) = \log S(t) \sim N(\mu, \sigma^2)$ τότε η στοχαστική ανέλιξη $\{X(t), t \geq 0\} = \{\log S(t), t \geq 0\} \sim BM(\mu, \sigma^2)$. Επομένως, η τ.μ. $X(t+y) - X(y) = \log S(t+y) - \log S(y) = \log \frac{S(t+y)}{S(y)} \sim N(t\mu, t\sigma^2)$ [6]

Ορισμός. Μία στοχαστική διαδικασία $\{S(t), t \geq 0\}$ καλείται γεωμετρική κίνηση Brown με παραμέτρους μ και σ^2 και συμβολίζεται $GBM(\mu, \sigma^2)$ αν ισχύει ότι:

1) Η τυχαία μεταβλητή $\log \frac{S(t+y)}{S(y)} \sim N(t\mu, t\sigma^2),\ y > 0$

2) Η τ.μ. $\frac{S(t+y)}{S(y)}$ είναι ανεξάρτητη από τις $S(u), 0 \leq u < y$.

Λογαριθμοκανονική Κατανομή

Παρατηρούμε όταν η στοχαστική ανέλιξη $S = \{S(t), t \geq 0\} \sim GBM(\mu, \sigma^2)$ τότε η $S(t)/S(0)$ ακολουθεί την λογαριθμοκανονική κατανομή, δηλαδή αν

$$\frac{S(t)}{S(0)} = e^{X(t)-X(0)} \sim LN(\mu, \sigma^2)\ \tau ό\tau\varepsilon\ \ \eta\ X = X(t) - X(0) = \log \frac{S(t)}{S(0)} \sim N(t\mu, t\sigma^2)\,.$$

[6] Μπούτσικας Μ. (2004) *Μέθοδοι Προσομοίωσης & Υπολογιστικές Στατιστικές Τεχνικές*

Παρακάτω δίνονται η σ.π.π. και η σ.κ. της λογαριθμοκανονικής κατανομής αντίστοιχα:

- Η τ.μ. $S(t)/S(0)$ θα έχει σ.κ.

$$F(s) = P\left(\frac{S(t)}{S(0)} \leq s\right) = P(e^X \leq s) = P(X \leq \log s) = P\left(\frac{X - t\mu}{\sigma\sqrt{t}} \leq \frac{\log s - t\mu}{\sigma\sqrt{t}}\right)$$
$$= \Phi\left(\frac{\log s - t\mu}{\sigma\sqrt{t}}\right), s \geq 0$$

- Και σ.π.π.

$$f(s) = \frac{d}{dt}\Phi\left(\frac{\log s - t\mu}{\sigma\sqrt{t}}\right) = \Phi'\left(\frac{\log s - t\mu}{\sigma\sqrt{t}}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\log s - t\mu}{\sigma\sqrt{t}}\right)$$
$$= \frac{1}{s\sqrt{2\pi(t\sigma)^2}} e^{-\frac{(\log s - t\mu)^2}{2(t\sigma)^2}}, s \geq 0$$

Με μέση τιμή: $E(S(t)^n) = S(0)^n e^{nt\mu + \frac{1}{2}tn^2\sigma^2}$ για $n = 1$ προκύπτει ότι:

$$E(S(t)) = e^{t\mu + \frac{1}{2}t\sigma^2}, \quad V(S(t)) = e^{2t\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)}(e^{t\sigma^2} - 1)\,.$$

3.4 Προσομοίωση Γεωμετρικής Κίνησης Brown

Όπως αναφερθήκαμε παραπάνω για την κίνηση Brown έτσι και η γεωμετρική κίνηση Brown αλλάζει απειροστά τιμή κάθε απειροστό χρονικό διάστημα και παρουσιάζει ιδιάζουσες διαδρομές. Η προσομοίωση της στοχαστικής διαδικασίας $\{S(t), t \geq 0\}$ πραγματοποιείται στα χρονικά σημεία $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$.[7] Από αυτά τα σημεία έχουμε την δυνατότητα να παράγουμε τις τιμές $S_0 = S(t_0), S_1 = S(t_1), \dots, S_n = S(t_n)$ για τις οποίες ισχύει:

$$\log\frac{S_i}{S_{i-1}} \sim N\big((t_i - t_{i-1})\mu, (t_i - t_{i-1})\sigma^2\big), \qquad i = 1,2, \dots, n$$

Θεωρούμε τις ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές $Z_i, i = 1,2, \dots, n$ $με$ $Z_i \sim N(0,1)$ τότε

$$S_i = S_{i-1}e^{(t_i - t_{i-1})\mu + \sigma\sqrt{t_i - t_{i-1}}Z_\iota}, i = 1,2, \dots, n$$

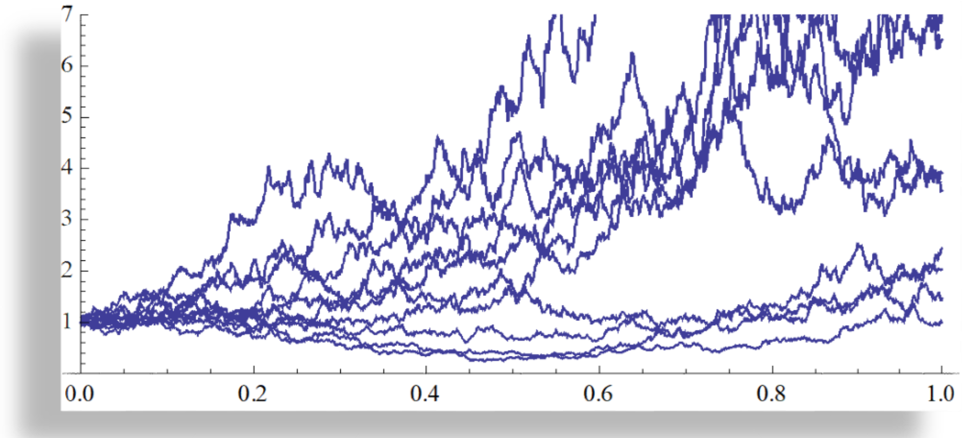
Περιγραφή αλγορίθμου γεωμετρικής κίνησης Brown:

Βήμα 1. Ορίζουμε τον αριθμό των χρονικών διαστημάτων n και θέτουμε την αρχική τιμή $S(0) = 1$
Βήμα 2. Παράγουμε την τυχαία μεταβλητή Z να ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή $Z \sim N(0,1)$
Βήμα 3. Θέτουμε $S_i = S_{i-1}e^{(t_i - t_{i-1})\mu + \sigma\sqrt{t_i - t_{i-1}}Z_\iota}, i = 1,2, \dots, n$
Βήμα 4. Θέτουμε $i = i + 1$ και εάν $i \leq n$, επιστρέφουμε στο βήμα 2.

Η υλοποίηση του παραπάνω αλγορίθμου μπορεί να γίνει μέσω ενός απλού παραδείγματος έτσι ώστε να δούμε τις 10 διαδρομές της διαδικασίας σε ένα γράφημα:

[7] Μπούτσικας Μ. (2004) *Μέθοδοι Προσομοίωσης & Υπολογιστικές Στατιστικές Τεχνικές*

```
μ=1;σ=1;t=1;n=1000;delta=t/n;
Do[
S=1;SL=Table[0,{n}];
Do[S=S*Exp[μ*delta+σ*delta^0.5*RandomReal[NormalDistribution[0
,1]]];
SL[[i]]={i*delta,S};,{i,1,n}]
PrependTo[SL,{0,1}];
pl[j]=ListLinePlot[SL,PlotRange→{0,7}];,{j,1,10}]
Show[Table[pl[i],{i,1,10}],AspectRatio→0.4]
```



Γράφημα 3.3 Προσομοίωση Γεωμετρικής κίνησης Brown για 10 διαφορετικές παραγματοποιήσεις

3.5 Το Μοντέλο των Black and Scholes

Θεωρούμε μία χρηματοοικονομική αγορά στο χρονικό διάστημα $[0, T]$. Συμβολίζουμε με Ω: *το σύνολο των δυνατών καταστάσεων της αγοράς* στο παραπάνω χρονικό διάστημα με F: *Το χώρο των ενδεχομένων του* και με P: *το μέτρο πιθανότητας* στον χώρο (Ω, F) έτσι στην αγορά θεωρούμε τους παρακάτω τίτλους:

Τίτλος 1 (riskless asset). Ένα ομόλογο επί μίας χρηματικής μονάδας με σταθερό επιτόκιο το οποίο στον χρόνο t έχει αξία e^{rt}.

Τίτλος 2 (risky asset). Μία μετοχή η οποία στον χρόνο t έχει αξία S_t. Θεωρούμε ότι η S_t, $t \in [0, T]$ ακολουθεί την γεωμετρική κίνηση Brown ($GBM(\mu, \sigma^2)$) και αρχική τιμή S_0. (Σημείωση: Συμβολίζουμε ως $S_t = S(t)$ την αξία της υποκείμενης μετοχής στον χρόνο t)

Τίτλος 3 (derivative). Ένα παράγωγο χρηματοοικονομικό προιόν Ευρωπαϊκού τύπου με χρόνο λήξης T και τελική αξία D_T. Η τελική του αξία δίνεται συναρτήσει της S_T ή της διαδρομής $\{S_t, t \in [0, T]\}$.

Αποδεικνύεται ότι ισχύει το παρακάτω θεώρημα (Risk neutral pricing formula)

Αν ένα παράγωγο χρηματοοικονομικό προϊόν Ευρωπαϊκού τύπου με χρόνο λήξης T έχει τελική αξία D_T τότε στον χρόνο t θα έχει no-arbitrage αξία

$$D_t = e^{-rT} E_Q(D_T)$$

Όπου υπό το μέτρο πιθανότητας Q η $\{S_t\ ,\ t \geq 0\} \sim GBM(\mu^* = r - \frac{\sigma^2}{2}, \sigma^2)$

Γνωρίζουμε ότι υπό το μέτρο πιθανότητας Q, η τυχαία μεταβλητη

$$\log\frac{S_t}{S_0}\sim N(r-\frac{\sigma^2}{2},\sigma^2)$$

και η αναμενόμενη απόδοση της μετοχής δίνεται από τον τύπο

$$E_Q(S_t)=S_0e^{t\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)+\frac{1}{2}t\sigma^2}=S_0e^{rt}$$

Δηλαδή η αξία της μετοχής είναι ίση με την απόδοση του ομολόγου στον χρόνο t.

Το μέτρο P είναι το μέτρο πιθανότητας στον πραγματικό κόσμο ενώ το μέτρο Q είναι το μέτρο σε ένα κόσμο ουδέτερου ρίσκου (risk neutral probability measure).

Στην συνέχεια θα κατασκευάσουμε ένα αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο με τελική αξία ίση με την αξία του παραγώγου D_T στον χρόνο λήξης T. Θεωρούμε λοιπόν ένα αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο το οποίο αποτελείται από y_t ομόλογα και Δ_t μετοχές με σύνθεση που δίνεται από το διάνυσμα $\boldsymbol{x_t}=(y_t,\Delta_t)$.[8] Άρα η αξία του χαρτοφυλακίου στον χρόνο $t\in[0,T]$ δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$V_t=e^{rt}y_t+\Delta_tS_t$$

επειδή το χαρτοφυλάκιο είναι αυτοχρηματοδοτούμενο ισχύει η παρακάτω στοχαστική διαφορική εξίσωση,

$$dV_t=y_tde^{rt}+\Delta_tdS_t$$

η οποία μας οδηγεί στο συμπέρασμα, η απειροστή μεταβολή στην αξία του χαρτοφυλακίου στο χρονικό διάστημα $[t,t+dt]$ εξαρτάται μόνο από την μεταβολή της αξίας του ομολόγου (de^{rt}) και την μεταβολή της αξίας της μετοχής (dS_t).

Ο ΤΥΠΟΣ ΤΩΝ BLACK AND SCHOLES

Ας υποθέσουμε ένα δικαίωμα αγοράς του οποίου η δίκαιη αξία δίνεται από τον τύπο,

$$C=e^{-rT}E_Q((S_T-K)_+)$$

με $S=\{S_t,t\geq 0\}\sim GBM(\mu=r-\frac{\sigma^2}{2},\sigma^2)$, μπορεί να πάρει την παρακάτω μορφή.

Θεώρημα (ο τύπος των Black and Scholes για δικαίωμα αγοράς)

[8] Μπούτσικας Μ. (2005-2007) *Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα*

Στο μοντέλο Black and Scholes (-Merton), η no-arbitrage τιμή ενός δικαιώματος αγοράς (call option) Ευρωπαϊκού τύπου με ημερομηνία λήξης T και τιμή εξάσκησης K στο χρόνο t είναι ίση με

$$c(t,S_t) = S_t\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$$

όπου $d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$, $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$ και

Φ είναι η συνάρτηση κατανομής της $N(0,1)$
σ η μεταβλητότητα (volatility) της τιμής της υποκείμενης μετοχής
r το επιτόκιο των ομολόγων της αγοράς.

3.6 Αποτίμηση αξίας δικαιωμάτων προαίρεσης, Call-Put Options

Στο μοντέλο των Black and Scholes, αποδεικνύεται ότι η no-arbitrage αξία ενός δικαιώματος αγοράς Ευρωπαικού τύπου στον χρόνο 0 είναι:

$$C = e^{-rT}E_Q[(S_T - K)_+]$$

δεδομένου ότι η παραπάνω μέση τιμή λαμβάνεται υπό το μέτρο πιθανότητας Q ουδέτερου ρίσκου. Υπό το μέτρο αυτό η στοχαστική διαδικασία $S = \{S_t, t \geq 0\}$ περιγράφει την κίνηση της τιμής της μετοχής η οποία ακολουθεί την γεωμετρική κίνηση Brown (GBM) με παραμέτρους $\mu = r - \frac{\sigma^2}{2}$ (τάση-drift) και μεταβλητότητα (volatility) σ^2, ο λογάριθμος της οποίας ακολουθεί την κίνηση Brown με τις ίδιες παραμέτρους[9] .

Αποδεικνύεται επίσης ότι η no-arbitrage αξία ενός δικαιώματος πώλησης (put option) δίνεται από τον τύπο (put-call parity)

$$c_{call} = S_0\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2)$$

Άρα η αξία ενός δικαιώματος πώλησης (put option) δίνεται από τον τύπο (put-call parity)

$$c_{put} = c_{call} - S_0 + Ke^{-rT}$$

Παράδειγμα. Η αξία ενός Call και ενός Put με $r = 0.1, \sigma = sigma = 0.2, K = 90, S0 = 100, T = t = 0.25$ είναι:

```
S0=100;K=90;T=0.25;r=0.1;sigma=0.2;omega=(r*T+sigma^2*T/2
-Log[K/S0])/(sigma*T^0.5);
C0=S0*CDF[NormalDistribution[0,1],omega]-K*Exp[-
r*T]*CDF[NormalDistribution[0,1],omega-sigma*T^0.5]

12.64503360966846
```

[9] Μπούτσικας Μ. (2004) *Μέθοδοι Προσομοίωσης & Υπολογιστικές Στατιστικές Τεχνικές*

Εκτός του τύπου των Black and Scholes που δόθηκε παραπάνω, η no-arbitrage αξία ενός δικαιώματος αγοράς μπορεί να υπολογιστεί και μέσω προσομοίωσης. Παρακάτω θα αναλύσουμε τα βήματα του αλγορίθμου προσομοίωσης για ένα Call option Ευρωπαικού τύπου για δεδομένες παραμέτρους $\mu = r - \frac{\sigma^2}{2}$ (drift) και σ^2(volatility), είναι:

Βήμα 1. Δίνουμε τιμές στα $n, T, r, \sigma, K, S(0)$ και θέτουμε $\mu = r - \frac{\sigma^2}{2}$
Βήμα 2. Παράγουμε $Z \sim N(0,1)$
Βήμα 3. Θέτουμε $S_T = S_0 e^{T\mu + \sigma\sqrt{T}Z}$, $D = max[S_T - K, 0]$
Βήμα 4. Θέτουμε $sum = sum + \sum_{i=1}^{n} Max[S_T - K, 0]$ και αυτό επαναλαμβάνεται n φορές.
Βήμα 5. Θέτουμε $c_{call} = \frac{sum}{n} e^{-rT}$

Η υλοποίηση του παραπάνω αλγορίθμου μέσω του Mathematica δίνεται παρακάτω:

```
S0=100;K=90;T=0.25;r=0.1;sigma=0.2;
n=100000;sum=0;
Do[
 Z=RandomReal[NormalDistribution[0,1]];
 ST=S0*Exp[(r-sigma^2/2)*T+sigma*T^0.5*Z];
 DT=Max[ST-K,0];
 sum=sum+DT
 ,{i,1,n}];Print[Exp[-r*T]*sum/n];Print[Exp[-r*T]*sum/n-
S0+K*Exp[-r*T]]
```

```
12.62632386394029
0.4042159464902255
```

Από τα παραπάνω αποτελέσματα παρατηρούμε ότι η εκτίμηση της αξίας ενός call και put option είναι αντίστοιχα $c_{call} = 12.6263$, $c_{put} = 0.4042$.

3.7 Ανάλυση ευαισθησίας της τιμής ενός Δικαιώματος από τον τύπο των Black and Scholes

Όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο η αξία ενός δικαιώματος αγοράς σύμφωνα με το μοντέλο των Black and Scholes είναι:

$$c(t, S_t) = S\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$$

όπου $d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$ και $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$.

Η παράγωγος της αξίας ενός δικαιώματος αγοράς ως προς S μας δίνει την παράμετρο Δέλτα του δικαιώματος ως εξής:

$$Delta = \frac{d}{dS} c(t, S_t) = \Phi(d_1) = \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right).$$

Όταν αυξάνεται η τιμή S του δικαιώματος αγοράς τότε αυξάνεται και η αξία του $c(t,S_t)$. Στην συνέχεια θα δούμε ότι η παράγωγος του Δέλτα ως προς S μας δίνει την παράμετρο Γάμμα ως εξής:

$$Gamma = \frac{d^2}{dS^2}c(t,s) = \frac{d\Delta}{dS} = \frac{1}{\sigma S\sqrt{T-t}}\varphi(d_1), \qquad \varphi = \Phi'$$

όπου φ είναι η σ.π.π. της τυπικής κανονικής κατανομής $N(0,1)$.

Τέλος, θα υπολογίζουμε και τις υπόλοιπες τρεις παραμέτρους ευαισθησίας ενός δικαιώματος αγοράς. Η παράγωγος της αξίας του δικαιώματος ως προς τον χρόνο t είναι ίση με

$$Theta = \frac{d}{dt}c(t,S_t) = -rKe^{-r(T-t)}\Phi\left(d_1 - \sigma\sqrt{T-t}\right) - \frac{\sigma S}{2\sqrt{T-t}}\varphi(d_1)$$

Όταν το t αυξάνεται η αξία του δικαιώματος αγοράς $c(t,S_t)$ μειώνεται.

Η παράγωγος της αξίας του δικαιώματος ως προς το επιτόκιο r είναι ίση με

$$Rho = \frac{d}{dr}c(t,S_t) = K(T-t)e^{-r(T-t)}\Phi\left(d_1 - \sigma\sqrt{T-t}\right),$$

Όταν το επιτόκιο της αγοράς αυξάνεται τότε αυξάνεται και η αξία του δικαιώματος.

Τέλος, η παράγωγος της αξίας του δικαιώματος αγοράς ως προς την μεταβλητότητα σ είναι ίση με

$$Vega = \frac{d}{d\sigma}c(t,S_t) = S\sqrt{T-t}\,\varphi(d_1),$$

Αποτελεί ένα μέτρο ευαισθησίας της αξίας του δικαιώματος δηλαδή όταν η μεταβλητότητα αυξάνεται τότε και η αξία του δικαιώματος αυξάνεται.

Παρακάτω δίνεται ένας συγκεντρωτικός πίνακας με τα παραπάνω αποτελέσματα των παραμέτρων ευαισθησίας του δικαιώματος γνωστές με την ονομασία “the Greeks”.

Όνομα	**Σύμβολο**	**Παράγωγος**	**Τιμή στο μοντέλο B-S**
Delta	Δ	$\frac{dc(t,S_t)}{dS}$	$\Phi(d_1)$
Gamma	Γ	$\frac{d^2c(t,S_t)}{dS^2}$	$\frac{\varphi(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}}$
Theta	θ	$\frac{dc(t,S_t)}{dt}$	$-rKe^{-r(T-t)}\Phi(d_2) - \frac{\sigma S\varphi(d_1)}{2\sqrt{T-t}}$
Rho	ρ	$\frac{dc(t,S_t)}{dr}$	$K(T-t)e^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$
Vega	V	$\frac{dc(t,S_t)}{d\sigma}$	$S\sqrt{T-t}\varphi(d_1)$

Όταν υπάρχει αλλαγή σε μία από τις παραπάνω παραμέτρους τότε επηρεάζεται άμεσα η αξία του χαρτοφυλακίου για το οποίο γνωρίζουμε ότι είναι μία σύνθεση από μετοχές, ομόλογα, αξιόγραφα, δικαιώματα προαίρεσης κ.λ.π. Γι'αυτό το λόγο παρακάτω θα αναλύσουμε κάποια παραδείγματα για να κατανοήσουμε περισσότερο την μεταβολή στην τιμή παραμέτρων η οποία επηρεάζει την αξία του χαρτοφυλακίου.

Παράδειγμα 1.[10] Θεωρούμε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο περιέχει ένα δικαίωμα αγοράς με αξία $C = c(t, S_t)$ και x_S μονάδες της υποκείμενης μετοχής. Η συνολική αξία του χαρτοφυλακίου είναι:

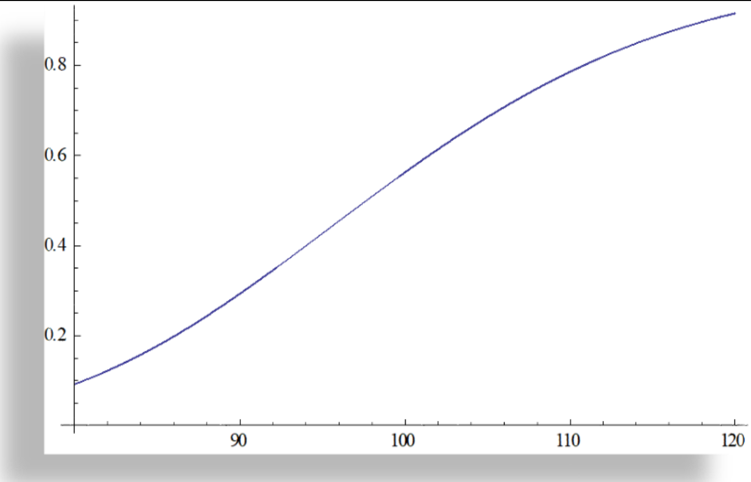
$$C + x_S S$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση ως προς S έχουμε

$$\Delta_0 + x_S = 0 \Leftrightarrow x_S = -\Delta_0$$

Όπου Δ_0 είναι το Δέλτα του δικαιώματος αγοράς. Το Δέλτα του δικαιώματος είναι το ποσό των αποθεμάτων που θα πωληθούν βραχυπρόθεσμα για να αντισταθμιστεί μία μονάδα του δικαιώματος. Παρακάτω δίνεται το Δέλτα του δικαιώματος σε σχέση με την αξία της μετοχής, με τιμή εξάσκησης $K = 100, r = 0.05, T - t = 0.25$ έτη.

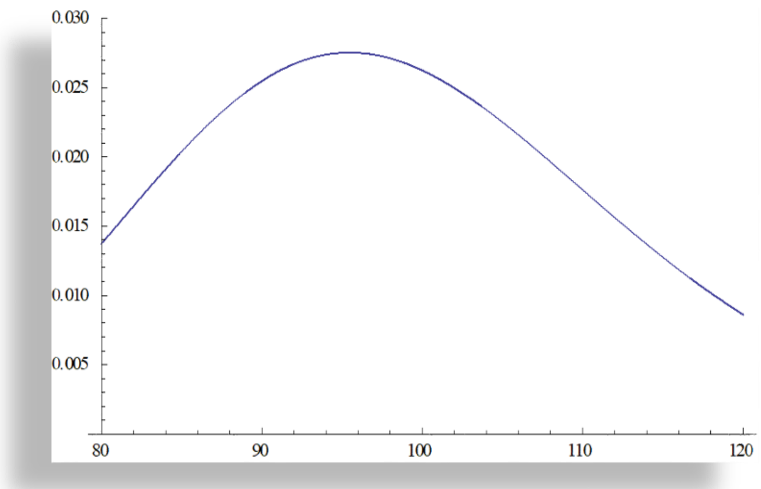
```
K=100;T=0.25;r=0.05;sigma=0.3;
d1=(Log[ST/K]+(r+sigma^2/2)*T)/(sigma*Sqrt[T]);
Φ[t_]:=CDF[NormalDistribution[],t];
Delta=Φ[d1];
Plot[Delta,{ST,80,120}]
```



Το Γάμμα του δικαιώματος αγοράς είναι $\frac{\varphi(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}}$. Παρακάτω δίνεται το διάγραμμα για την παράμετρο Γάμμα του δικαιώματος σε σχέση με την αξία της μετοχής με $K = 100, r = 0.05, \sigma = 0.3\ T - t = 0.25$ έτη.

[10] Don L. McLeinh (2005). Monte Carlo Simulation and Finance

```
K=100;T=0.25;r=0.05;sigma=0.3;d1=(Log[ST/K]+(r+sigma^2/2)*T)/(
sigma*Sqrt[T]);
φ[t_]:=PDF[NormalDistribution[],t];
g=φ[d1]/(ST*sigma*Sqrt[T]);
Plot[g,{ST,80,120},PlotRange→{0,0.03}]
```



Παράδειγμα 2.[11] Θεωρούμε ένα χαρτοφυλάκιο αξίας $P = P(S_t, t, r, \sigma)$ όπου S είναι η αξία της μετοχής και $C = c(S_t, t, r, \sigma)$ είναι η αξία του δικαιώματος αγοράς το οποίο υπάρχει ήδη στο χαρτοφυλάκιο. Στην συνέχεια στο χαρτοφυλάκιο προσθέτουμε επιπλέον x_S μονάδες της μετοχής και x_0 μονάδες του δικαιώματος αγοράς οπότε η αξία του νέου χαρτοφυλακίου είναι:

$$P + x_S S + x_0 C$$

Από την παραπάνω σχέση υπολογίζω την πρώτη και δεύτερη παράγωγο ως προς S αντίστοιχα,

$$\Delta_p + x_S + x_0 \Delta_0 = 0$$

$$\Gamma_p + x_0 \Gamma_0 = 0$$

Από το παραπάνω σύστημα υπολογίζουμε του συντελεστές x_S, x_0 ως εξής:

$$x_0 = -\frac{\Gamma_p}{\Gamma_0} \quad \kappa\alpha\iota \quad x_S = \Delta_0 \frac{\Gamma_p}{\Gamma_0} - \Delta_p$$

Άρα το νέο αντισταθμισμένο χαρτοφυλάκιο έχει αξία ίση με:

$$P + \left(\Delta_0 \frac{\Gamma_p}{\Gamma_0} - \Delta_p\right) S - \frac{\Gamma_p}{\Gamma_0} C.$$

[11] Don L. McLeinh (2005). Monte Carlo Simulation and Finance

Παράδειγμα 3.[12] Ας θεωρήσουμε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο περιέχει ένα digital option με κόστος 1\$ και χρόνο λήξης $T = 1$ χρόνο γνωρίζοντας ότι η αξία της μετοχής υπερβαίνει κάποιο όριο K_D κάτω από το μέτρο ουδέτερου ρίσκου Q έχουμε:

$$P = e^{-r(T-t)}Q[S(1) > K_D] = e^{-r}Q[S(1) > K_D] = e^{-r}\Phi(d_2)$$

όπου $d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K_D}\right)+r-\frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}$. Επομένως μπορούμε να υπολογίσουμε το Δέλτα και το Γάμμα του χαρτοφυλακίου,

$$\Delta_p = \frac{dP}{dS} = \frac{d}{dS}e^{-r}\Phi(d_2) = e^{-r}\varphi(d_2)\frac{dd_2}{dS} = e^{-r}\varphi(d_2)\frac{1}{S\sigma} = S\varphi(d_1)\frac{1}{S\sigma K_D} = \frac{\varphi(d_1)}{\sigma K_D},$$

$$\Gamma_p = \frac{d^2}{dS^2}e^{-r}\Phi(d_2) = -\frac{\varphi(d_1)}{S\sigma^2 K_D}d_1.$$

Για να αντισταθμίσουμε το χαρτοφυλάκιο θα χρησιμοποιήσουμε την επένδυση ενός call option Ευρωπαϊκού τύπου με τιμή εξάσκησης K_0 και χρόνο λήξης $T_0 = \frac{1}{4}$ τότε από το μοντέλο των Black and Scholes έχουμε τις εξής τιμές:

$$d_1' = \frac{\ln\left(\frac{S}{K_0}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T_0}{\sigma\sqrt{T_0}} = \frac{2\ln\left(\frac{S}{K_0}\right) + 0{,}5(r+\sigma^2)T_0}{\sigma}$$

και,

$$d_2' = d_1' - \sigma\sqrt{T_0}$$

Οπότε οι συντελεστές του αντισταθμισμένου χαρτοφυλακίου είναι

$$x_0 = -\frac{\Gamma_p}{\Gamma_0} = \frac{d_1\varphi(d_1)}{2K_D\sigma\varphi(d_1')}$$

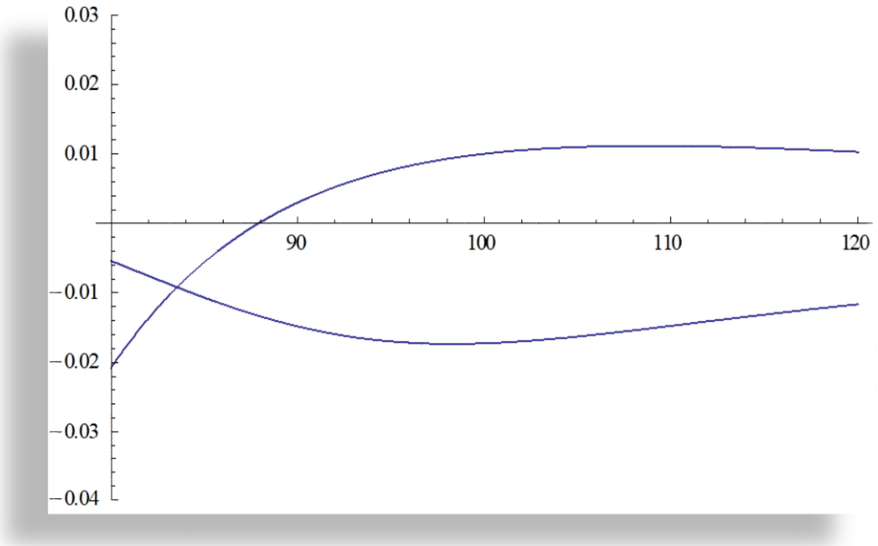
$$x_S = \Delta_0\frac{\Gamma_p}{\Gamma_0} - \Delta_p = -(x_0\Delta_0 + \Delta_p).$$

Στην συνέχεια θα σχεδιάσουμε το διάγραμμα των δύο συντελεστών x_0 και x_S του αντισταθμισμένου χαρτοφυλακίου. Από το παρακάτω διάγραμμα παρατηρούμε ότι οι τιμές των συντελεστών εμφανίζουν αρνητική τιμή όταν $S < 86$ δηλαδή είναι out of the money.

```
K=90;K0=100;T=0.25;r=0.05;sigma=0.3;KD=100;
d1=(Log[ST/K]+(r+sigma^2/2)*T)/(sigma*Sqrt[T]);
d2=(Log[ST/K0]+(r+sigma^2/2)*T)/(sigma*Sqrt[T]);
φ[t_]:=PDF[NormalDistribution[],t];
Φ[t_]:=CDF[NormalDistribution[],t];
Delta=φ[d1]/(sigma*KD);
xs=-(x0*Φ[d1]+Delta);
x0=(d1*φ[d1])/(2*KD*sigma*φ[d2]);
```

[12] Don L. McLeinh (2005). Monte Carlo Simulation and Finance

```
fig1=Plot[x0,{ST,80,120},PlotRange→{-0.04,0.03}];
fig2=Plot[xs,{ST,80,120},PlotRange→{-0.04,0.03}];
Show[fig1,fig2]
```



3.8 Στρατηγική Εξασφάλισης Δέλτα (Delta Hedging)

Στην προηγούμενη ενότητα υπολογίσαμε την no-arbitrage τιμή ενός δικαιώματος αγοράς το οποίο έχει την ίδια αξία με ένα αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από Δ_t μετοχές και y_t ομόλογα στο χρόνο $t \in [0, T]$ δηλαδή,

$$c(t, S_t) = V_t = e^{rt} y_t + \Delta_t S_t,$$ [13]

όπου e^{rt} είναι η απόδοση των ομολόγων και S_t είναι η αξία της μετοχής στον χρόνο t. Το Δ_t των μετοχών είναι ίσο με από το Delta του χαρτοφυλακίου κάθε χρονική στιγμή t,

$$\Delta_t = \frac{d}{dS} c(t, S_t) = \Phi\left(\frac{r(T-t) + \frac{\sigma^2(T-t)}{2} ln\left(\frac{K}{S}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right),$$

τα y_t ομόλογα μπορούν να υπολογιστούν από την no-arbitrage αξία του παραγώγου,

$$c(t, S_t) = e^{rt} y_t + \Delta_t S_t$$

Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε τις παραμέτρους ευαισθησίας του χαρτοφυλακίου το οποίο αποτελείται από παράγωγα επί ενός συγκεκριμένου υποκείμενου αγαθού όπου

x_i: το πλήθος των παραγώγων που περιέχει το χαρτοφυλάκιο.

[13] Μπούτσικας Μ. (2005-2007) *Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα*

S_i: η αξία των παραγώγων αυτών.

Δ_i: Το Δέλτα του τίτλου i.

Γ_i: Το Γάμμα του τίτλου i.

$Vega_i$: Το Vega του τίτλου i.

Για τις παραμέτρους αυτές του χαρτοφυλακίου ισχύει ότι

$$\Delta = \frac{dV}{dS} = \frac{d}{dS}\sum_{i=1}^{k} x_i S_i = \sum_{i=1}^{k} x_i \frac{dS_i}{dS} = \sum_{i=1}^{k} x_i \Delta_i$$

$$\Gamma = \frac{d^2V}{dS^2} = \frac{d\Delta}{dS} = \frac{d^2}{dS^2}\sum_{i=1}^{k} x_i S_i = \sum_{i=1}^{k} x_i \frac{d^2S_i}{dS^2} = \sum_{i=1}^{k} x_i \,\Gamma_i$$

$$Vega = \frac{dV}{d\sigma} = \frac{d}{d\sigma}\sum_{i=1}^{k} x_i \,S_i = \sum_{i=1}^{k} x_i \frac{dS_i}{d\sigma} = \sum_{i=1}^{k} x_i \,Vega_i$$

Θα χρησιμοποιήσουμε ένα απλό παράδειγμα για να κατανοήσουμε την εφαρμογή των παραπάνω τύπων.

Παράδειγμα. [14] Θεωρούμε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο αποτελείται από:

1) $20000 \;\; long\ call\ options\ \mu\varepsilon\ K = 110, T = \frac{3}{12}\ \kappa\alpha\iota\ \Delta_1 = 0{,}1$

2) $10000\ short\ call\ options\ \mu\varepsilon\ K = 100, T = \frac{5}{12}\ \kappa\alpha\iota\ \Delta_2 = 0{,}2$

3) $6000\ short\ put\ options\ \mu\varepsilon\ K = 100, T = \frac{3}{12}\ \kappa\alpha\iota\ \Delta_3 = -0{,}2$

Χρησιμοποιώντας τους παραπάνω τύπους θα βρούμε το συνολικό $\Delta\acute{\varepsilon}\lambda\tau\alpha$ του χαρτοφυλακίου ως εξής.

$$\Delta = \sum_{i=1}^{3} x_i \Delta_\iota = 20000\ 0{,}1 - 10000\ 0{,}2 - 6000\ (-0{,}2) = -800$$

Από το παραπάνω αποτέλεσμα καταλαβαίνουμε ότι η αύξηση μιας χρηματικής μονάδας στην αξία του υποκείμενου αγαθού θα επιφέρει μείωση 800 χρηματικών μονάδων στην αξία του χαρτοφυλακίου. Το χαρτοφυλάκιο θα γίνει Δέλτα ουδέτερο (Delta neutral) έτσι ώστε οι μεταβολές στην αξία του υποκείμενου αγαθού να μην επηρεάζουν την αξία του χαρτοφυλακίου, αν εισάγουμε στο χαρτοφυλάκιο 800 τεμάχια του υποκείμενου αγαθού. Με το ίδιο σκεπτικό μπορούμε να υπολογίσουμε το $\Gamma\acute{\alpha}\mu\mu\alpha$ του χαρτοφυλακίου στην

[14] Μπούτσικας Μ. (2005-2007) *Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα*

περίπτωση που ξέρουμε τα Γ_i των τριών options που δίνονται παραπάνω. Το Γ εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του $\Delta\acute{\varepsilon}\lambda\tau\alpha$ ως προς την αξία του υποκείμενου αγαθού, όταν το Γ του χαρτοφυλακίου έχει μικρή τιμή τότε το χαρτοφυλάκιο παραμένει ουδέτερο για μεγάλο χρονικό διάστημα. Σε αντίθετη περίπτωση όταν το Γ του χαρτοφυλακίου παίρνει μεγάλη τιμή τότε το χαρτοφυλάκιο παραμένει ουδέτερο για μικρό χρονικό διάστημα. Επομένως, για μεγάλες μεταβολές στην αξία του υποκείμενου αγαθού το χαρτοφυλάκιο θα παραμείνει ουδέτερο όταν το κάνουμε $Delta\ neutral$ και $Gamma\ neutral$ ταυτόχρονα. Το $Delta\ neutral$ θα επιτευχθεί όταν αγοράσουμε στην συγκεκριμένη περίπτωση 800 τεμάχια του υποκείμενου αγαθού ενώ για το $Gamma\ neutral$ θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε κάποιο άλλο παράγωγο. Το $Vega$ του χαρτοφυλακίου εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της αξίας του χαρτοφυλακίου ως προς την μεταβλητότητα (volatility) σ. Το σ έχουμε υποθέσει ότι παραμένει σταθερό όμως στις περισσότερες περιπτώσεις μεταβάλλεται. Έτσι, για να παραμείνει το χαρτοφυλάκιο ουδέτερο σε μεταβολές του σ χρησιμοποιούμε ένα παράγωγο που είναι διαθέσιμο στην αγορά. Τέλος, αν κατασκευάσουμε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο είναι $Delta, Gamma\ \kappa\alpha\iota\ Vega\ neutral$ ταυτόχρονα τότε θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε δύο διαφορετικά options που υπάρχουν ήδη στην αγορά.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο- Ανάλυση Ευαισθησίας των παραμέτρων ("the Greeks")

4.1 - Εισαγωγή

Η μέθοδος Monte-Carlo μας δίνει την δυνατότητα να εκτιμήσουμε την αναμενόμενη τιμή μίας συνάρτησης f η οποία μπορεί να εξαρτάται από πολλές τυχαίες μεταβλητές. Σε αρκετές περιπτώσεις η συνάρτηση αυτή εξαρτάται από μια διαδρομή μιας στοχαστικής διαδικασίας την οποία θα την συμβολίσουμε με ω. Άρα το ω μπορεί να θεωρηθεί ως μία ακολουθία (ψευδό)τυχαίων αριθμών. Για λόγους απλότητας στο συγκεκριμένο κεφάλαιο θα επικεντρωθούμε σε μία μόνο παράμετρο και θα την ονομάσουμε θ, οπότε η συνάρτηση που θα μελετήσουμε είναι η $f(\theta,\omega)$. Για τους αναγνώστες που επιθυμούν περισσότερες πληροφορίες παραπέμπουμε στις εργασίες των F. Black and R. Litterman (1992), F. Black and M. Scholes (1973), καθώς και στην μονογραφία του Fishman, G. S. (1996).

Κατά τον υπολογισμό της αναμενόμενης τιμής της παραπάνω συνάρτησης παίρνουμε

$$m(\theta) = E\big(f(\theta,\omega)\big) \qquad (4.1)$$

η οποία εξαρτάται μόνο από την παράμετρο θ. Με την μέθοδο Monte-Carlo μπορούμε να βρούμε την εκτίμηση της $m(\theta)$ αλλά στο παρόν κεφάλαιο μας ενδιαφέρει η ευαισθησία της συνάρτησης m σε σχέση με την παράμετρο θ , δηλαδή μας ενδιαφέρει η παράγωγος,

$$\frac{dm}{d\theta} = \frac{dE(f(\theta,\omega))}{d\theta} \qquad (4.2)$$

Αν δεν γνωρίζουμε το $m(\theta)$ θα παράγουμε ένα δείγμα τυχαίων μεταβλητών $Y(\theta) = f(\theta,\omega)$ και θα υπολογίσουμε το όριο των πεπερασμένων διαφορών:

$$\lim_{h\to 0}\frac{Y(\theta+h)-Y(\theta)}{h} \qquad (4.3)$$

υπολογίζοντας στην συνέχεια και την αναμενόμενη τιμή του παραπάνω ορίου,

$$E\left(\lim_{h\to 0}\frac{Y(\theta+h)-Y(\theta)}{h}\right) \qquad (4.4)$$

από το δειγματικό μέσο των προσομοιωμένων τιμών της (4.3).

Για να αποκτήσουμε μία βαθύτερη κατανόηση του προβλήματος πρέπει πρώτα να εξετάσουμε μία απλή προσέγγιση η οποία βασίζεται στην μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών της $m(\theta) = E(f(\theta,\omega))$. Στην συνέχεια θα μελετήσουμε τις προσεγγίσεις που αποσκοπούν στην εκτίμηση της ευαισθησίας χρησιμοποιώντας πάντα το ίδιο δείγμα καθώς και την αναμενόμενη τιμή της συνάρτησης που μας υπολογίζει την αξία του δικαιώματος .[15] Γνωρίζουμε ότι η αξία ενός δικαιώματος Vanilla Ευρωπαϊκού τύπου είναι μία συνάρτηση με την παρακάτω μορφή:

$$m(S_0, K, T, r, \sigma) \quad (4.5)$$

[15] P.Brandimarte (2014) . Handbook in Monte Carlo Simulation

Όπου S_0 είναι η αξία του δικαιώματος σήμερα, K είναι η τιμή εξάσκησης, T ο χρόνος λήξης του, σ η μεταβλητότητα και r το επιτόκιο. Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, στο παρόν κεφάλαιο θα εστιάσουμε την προσοχή μας στις παραμέτρους που εκφράζουν την ευαισθησία της τιμής ενός δικαιώματος, τα ονομαζόμενα “the Greeks”.

4.2-Εκτίμηση των παραμέτρων ευαισθησίας με την μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών

Το μοντέλο των Black and Scholes μας δίνει την δυνατότητα να αποδείξουμε ότι για ένα απλό (Vanilla) δικαίωμα αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου η παράμετρος $Delta$ δίνεται:

$$\Delta = \frac{dm}{dS_0} = \Phi(d_1)\,, \qquad d_1 = \frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (4.6)$$

Όπου Φ είναι η συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής κατανομής. Σε αυτό το σημείο θα εκτιμήσουμε την παράμετρο $Delta$ με την μέθοδο Monte-Carlo για να την συγκρίνουμε με την ακριβή παραπάνω τιμή της. Άρα, η παράγωγος της αξίας του Vanilla δικαιώματος ως προς την αρχική του αξία S_0 είναι το όριο του λόγου μιας προσαύξησης για κατάλληλα μικρό h:

$$\Delta \cong \frac{m(S_0+h) - m(S_0-h)}{2h}$$

όπου εδώ

$$m(S_0) = e^{-rT}E((S_T - K)_+ | S_0) = E(f(S_0,\omega))$$

με

$$f(S_0,\omega) = e^{-rT}(S_0 e^X - K)_+\,, \omega = X \sim N\left(T\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right), T\sigma^2\right)$$

Επομένως,

$$\Delta \cong \frac{e^{-rT}}{2h}\left(E[((S_0+h)e^X - K)_+] - E[((S_0-h)e^X - K)_+]\right)$$

και μπορούμε να εκτιμήσουμε τώρα το Δ μέσω της Monte Carlo εκτίμησης των παραπάνω δύο μέσων τιμών. Η υλοποίηση του παραπάνω τύπου δίνεται με ένα παράδειγμα μέσω του Mathematica:

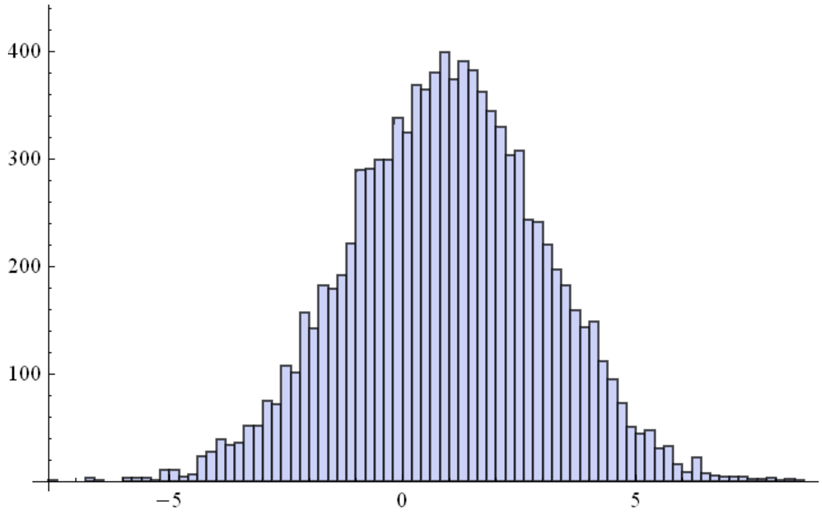
```
S0=100;K=90;T=0.25;r=0.1;sigma=0.2;n=10^5;sum1=0;h=0.1;
Do[Z=RandomReal[NormalDistribution[0,1]];
  ST=(S0-h)*Exp[(r-sigma^2/2)*T+sigma*T^0.5*Z];
  DT=Max[ST-K,0];sum1=sum1+DT,{i,1,n}];
C1=Exp[-r*T]*sum1/n;Print[C1];
sum2=0;
Do[Z=RandomReal[NormalDistribution[0,1]];
  ST=(S0+h)*Exp[(r-sigma^2/2)*T+sigma*T^0.5*Z];
  DT=Max[ST-K,0];sum2=sum2+DT,{i,1,n}];
C2=Exp[-r*T]*sum2/n;Print[C2];
Print["estimated Delta = ",(C2-C1)/(2*h)]
```

$$estimated\ Delta\ = 0.983644$$

```
d1=(r*T+sigma^2*T/2-Log[K/S0])/(sigma*T^0.5);
exactD=CDF[NormalDistribution[0,1],d1];
Print["exact Delta = ",exactD]
```

$$exact\ Delta\ = 0.912069$$

Παρατηρούμε ότι η εκτίμηση της παραμέτρου Δέλτα, αν και βασίζεται σε $n = 10^5$ επαναλήψεις, δεν είναι καθόλου ικανοποιητική διότι η ακριβής τιμή είναι 0.912069. Για να δούμε καλύτερα την κατανομή της εκτίμησης επαναλαμβάνουμε το παραπάνω $m = 10000$ φορές με μέγεθος δείγματος $n = 1000$ και κατασκευάζουμε ένα ιστόγραμμα που μας δείχνει την μορφή της κατανομής της εκτίμησης του Δ.



Μέσος δείγματος: 0.933898

Τυπική απόκλιση δείγματος: 2.09253

Μέσο Τετραγωνικό σφάλμα: 4.37916

Επιβεβαιώνεται από τα παραπάνω αποτελέσματα ότι η συγκεκριμένη μέθοδος εκτίμησης δεν είναι ικανοποιητική διότι η εκτίμηση έχει μεγάλη διασπορά και μέσο τετραγωνικό σφάλμα. Αυτό συμβαίνει διότι σε αυτή την περίπτωση έχουμε ουσιαστικά χρησιμοποιήσει την εκτίμηση

$$\Delta \cong E\left[\frac{f(S_0+h,\omega_1)-f(S_0-h,\omega_2)}{2h}\right] = \frac{1}{2h}(E[f(S_0+h,\omega_1)]-E[f(S_0-h,\omega_2)]),$$

χρησιμοποιώντας ανεξάρτητες εκτιμήσεις για τις παραπάνω δύο μέσες τιμές. Από θεωρητικής άποψης αυτό δεν φαίνεται αρκετά σωστό όταν συγκρίνεται με τις σχέσεις που μας δίνουν το όριο και την αναμενόμενη τιμή του ορίου των πεπερασμένων διαφορών που αναπτύξαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Εκεί, έχουμε μία συνάρτηση f η οποία εξαρτάται από το θ και το ω. Όταν λάβουμε υπόψη τις διαφορές των τυχαίων μεταβλητών η διακύμανση θα μειωθεί. Πράγματι, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την ίδια ακολουθία τυχαίων αριθμών ω, στους δύο όρους της διαφοράς διαφορετικά η διακύμανση θα αυξηθεί όταν το h είναι μικρό.[16] Η παραπάνω ονομάζεται κεντρική διαφορά ενώ η επόμενη ονομάζεται προς τα εμπρός διαφορά:

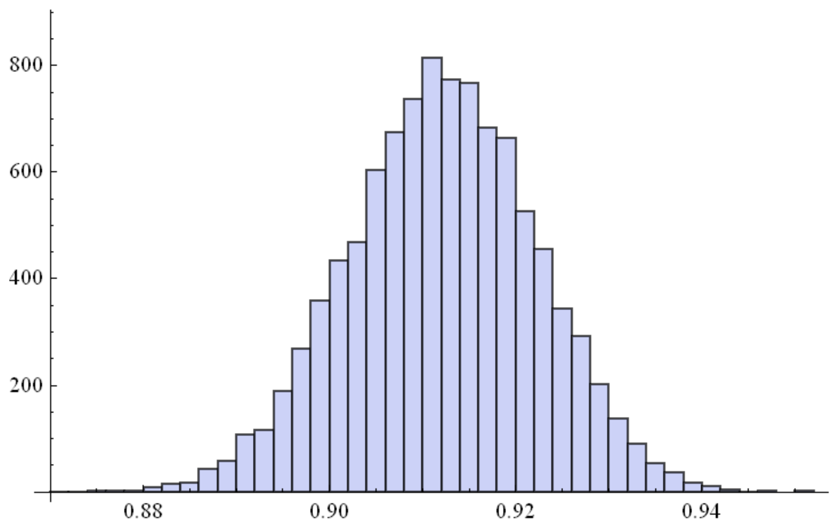
$$\Delta = E\left[\frac{f(S_0+h)-f(S_0)}{h}\right],$$

Η υλοποίηση της μεθόδου των κεντρικών διαφορών δίνεται με ένα παράδειγμα μέσω του Mathematica. Ο κώδικας είναι ίδιος με τον προηγούμενο, αυτή τη φορά όμως χρησιμοποιούμε την ίδια ακολουθία τυχαίων αριθμών για τις εκτιμήσεις των δύο μέσων τιμών.

```
S0=100;K=90;T=0.25;r=0.1;sigma=0.2;n=10^5;h=0.1;
sum1=0;sum2=0;
Do[Z=RandomReal[NormalDistribution[0,1]];
  ST1=(S0-h)*Exp[(r-sigma^2/2)*T+sigma*T^0.5*Z];
  ST2=(S0+h)*Exp[(r-sigma^2/2)*T+sigma*T^0.5*Z];
  DT1=Max[ST1-K,0];sum1=sum1+DT1;
  DT2=Max[ST2-K,0];sum2=sum2+DT2,{i,1,n}];
C1=Exp[-r*T]*sum1/n;C2=Exp[-r*T]*sum2/n;
Print["estimated Delta = ",(C2-C1)/(2*h)]
```

$$estimated\ Delta\ = 0.912879$$

Παρατηρούμε τώρα ότι η εκτίμηση της παραμέτρου Δέλτα είναι πολύ ικανοποιητική επειδή προσεγγίζει το ακριβές Δέλτα. Μπορούμε πάλι να δούμε την κατανομή της εκτίμησης επαναλαμβάνοντας το παραπάνω $m = 10000$ φορές με μέγεθος του δείγματος $n = 1000$ και κατασκευάζοντας το αντίστοιχο ιστόγραμμα. Αυτή την φορά η εκτίμηση έχει πολύ μικρότερη διασπορά καθώς και μέσο τετραγωνικό σφάλμα όπου σε αυτή την περίπτωση χρησιμοποιήσαμε την ίδια διαδρομή του δείγματος (ω) σε σχέση με την προηγούμενη μέθοδο που είχαμε χρησιμοποιήσει διαφορετικές διαδρομές του δείγματος (ω_i). Τα αποτελέσματα δίνονται παρακάτω:



[16] P.Brandimarte (2014) . Handbook in Monte Carlo Simulation

Μέσος δείγματος:0.9121

Τυπική απόκλιση δείγματος: 0.010113

Μέσο Τετραγωνικό σφάλμα: 0.000102273

Παρακάτω έχουμε ένα πίνακα όπου υπάρχουν όλα τα αποτελέσματα των παραπάνω δύο μεθόδων για την κατανομή της εκτιμήτριας της παραμέτρου Δ.

	Κεντρικές Διαφορές με ω_1,ω_2	Κεντρικές Διαφορές με την ίδια διαδρομή (ω)	Σχόλια
Τυπική απόκλιση	2.09253	0.010113	Μικρότερη τυπική απόκλιση οι κεντρικές διαφορές με ίδιο ω
Μ.Τ.Σ.	4.37916	0.000102273	Μικρότερο Μ.Τ.Σ οι κεντρικές διαφορές με ίδιο ω

Στην συνέχεια θα εμβαθύνουμε περισσότερο έτσι ώστε να κατανοήσουμε καλύτερα την χρήση των πεπερασμένων διαφορών με την χρήση του εκτιμητή των προς τα εμπρός διαφορών,

$$\widehat{\Delta_f} = \frac{f(S_0 + h, \omega) - f(S_0, \omega)}{h} \quad (4.7)$$

και τον εκτιμητή των κεντρικών διαφορών,

$$\widehat{\Delta_c} = \frac{f(S_0 + h, \omega) - f(S_0 - h, \omega)}{2h} \quad (4.8)$$

Σε αυτό το σημείο θα υπολογίσουμε την αναμενόμενη τιμή του εκτιμητή των προς τα εμπρός διαφορών και των κεντρικών διαφορών ως εξής:

$$E\left(\widehat{\Delta_f}\right) = \frac{m(S_0 + h) - m(S_0)}{h} \quad (4.9)$$

$$E\left(\widehat{\Delta_c}\right) = \frac{m(S_0 + h) - m(S_0 - h)}{2h} \quad (4.10)$$

Υποθέτοντας ότι η m είναι κατάλληλα διαφορίσιμη συνάρτηση μπορούμε να γράψουμε το ανάπτυγμα Taylor ως εξής:

$$m(S_0 + h) = m(S_0) + hm'(S_0) + \frac{1}{2}h^2 m''(S_0) + O(h^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{m(S_0 + h) - m(S_0)}{h} = m'(S_0) + \frac{1}{2}hm''(S_0) + O(h) \quad (4.11)$$

Όμως από την αναμενόμενη τιμή του εκτιμητή τον προς τα εμπρός διαφορών έχουμε το εξής:

$$E\left(\widehat{\Delta_f} - m'(S_0)\right) = \frac{1}{2}hm''(S_0) + O(h) \quad (4.12)$$

η παραπάνω σχέση μας δίνει την μεροληψία του εκτιμητή τον προς τα εμπρός διαφορών. Τώρα θα υπολογίσουμε τον εκτιμητή των κεντρικών διαφορών πάλι χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor:

$$m(S_0 - h) = m(S_0) - hm'(S_0) + \frac{1}{2}h^2m''(S_0) + O(h^2) \quad (4.13)$$

$$m(S_0 + h) - m(S_0 - h) = 2hm'(S_0) + O(h)$$

$$\Leftrightarrow E\left(\widehat{\Delta_c}\right) = m'(S_0) + O(h)$$

άρα η μεροληψία του εκτιμητή των κεντρικών διαφορών δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$E\left(\widehat{\Delta_c} - m'(S_0)\right) = O(h) \quad (4.14)$$

Από τα παραπάνω παρατηρούμε ότι η μεροληψία του εκτιμητή των κεντρικών διαφορών είναι μικρότερης τάξης από την μεροληψία του εκτιμητή των προς τα εμπρός διαφορών.

4.3. Παραγώγιση κατά διαδρομή

Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(\theta,\omega)$ για δεδομένη διαδρομή ω. Έχοντας καθορίσει την διαδρομή του δείγματος και εξασφαλίζοντας ότι η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη ως προς θ μπορούμε να υπολογίζουμε την παρακάτω παράγωγο:

$$\frac{df}{d\theta} = \lim_{h\to 0}\frac{f(\theta+h,\omega) - f(\theta,\omega)}{h}$$

το $f(\theta,\omega)$ είναι μία τυχαία μεταβλητή η οποία εξαρτάται από το ω έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε την αναμενόμενη τιμή της παραπάνω παραγώγου ως εξής:[17]

$$E\left[\frac{df}{d\theta}\right] = \frac{d}{d\theta}E[f(\theta,\omega)] \quad (4.16)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις παρατηρούμε ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την $\frac{df}{d\theta}$ η οποία είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της $m'(\theta)$ αν μπορεί να εναλλαχθεί η παραγώγιση με τη μέση τιμή. Σε γενικές γραμμές αυτό όμως δεν θεωρείται δεδομένο. Η παραπάνω προσέγγιση ονομάζεται παραγώγιση κατά διαδρομή (pathwise differentiation).

[17] P.Brandimarte (2014) . Handbook in Monte Carlo Simulation

4.3.1. Black & Scholes Delta

Ας θεωρήσουμε ένα Vanilla δικαίωμα αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου με προεξοφλημένο κέρδος από την χρήση του παραπάνω δικαιώματος, που δίνεται από την παρακάτω συνάρτηση: [18]

$$f(S_0, \omega) = e^{-rT}[S_T - K]_+ = e^{-rT}\max\{S_T - K, 0\} \quad (4.18)$$

όπου

$$S_T = S_0 e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma\sqrt{T}Z}, \qquad Z \sim N(0,1), \quad (4.19)$$

λαμβάνοντας το θ να είναι το S_0, με $r, \sigma, T \; και \; K$ θετικές σταθερές χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε:

$$\frac{df}{dS_0} = \frac{df}{dS_T}\frac{dS_T}{dS_0}.$$

Η δεύτερη παράγωγος μπορεί να βρεθεί από την σχέση (4.19) για σταθερό Z:

$$\frac{dS_T}{dS_0} = e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma\sqrt{T}Z} = \frac{S_T}{S_0}$$

Η πρώτη παράγωγος είναι πιο προβληματική επειδή η αξία του δικαιώματος δεν είναι συνεχής στην τιμή εξάσκησης K. Δεν υπάρχει όμως πρόβλημα διότι το σημείο αυτό έχει πιθανότητα 0. Για τα άλλα σημεία βλέπουμε ότι :

$$\frac{d}{dx}\max(0, x - K) = \begin{cases} 0, & x < K \\ 1, & x > K \end{cases}$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι το $f(S_0, \omega)$ είναι διαφορίσιμο ως προς το S_T με παράγωγο (εκτός του σημείου $S_T = K$):

$$\frac{df}{dS_T} = e^{-rT} I\{S_T > K\},$$

όπου $I\{.\}$ είναι η δείκτρια συνάρτηση για ένα δεδομένο γεγονός. Έτσι έχουμε τον ακόλουθο εκτιμητή:

$$\frac{df}{dS_0} = e^{-rT}\frac{S_T}{S_0} I\{S_T > K\},$$

Η αναμενόμενη τιμή του εκτιμητή είναι η παράμετρος Δ από το μοντέλο των Black & Scholes, οπότε ο εκτιμητής είναι αμερόληπτος δηλαδή

$$\Delta = E\left(\frac{df}{dS_0}\right) = E\left(e^{-rT}\frac{S_T}{S_0} I\{S_T > K\}\right).$$

[18] P.Brandimarte (2014) . Handbook in Monte Carlo Simulation

Περιγραφή αλγορίθμου:

Βήμα 1. Για το Vanilla δικαίωμα αγοράς θέτουμε $D_{sim} = 0$.
Βήμα 2. Προσομοιώνουμε την τελική αξία του υποκείμενου αγαθού S_T.
Βήμα 3. Εάν $S_T > K$, τότε θέτω $D_{sim} = D_{sim} + e^{-rT}\frac{S_T}{S_0}$ και επιστρέφουμε στο βήμα 2 n φορές.
Βήμα 4. Υπολογίζουμε το $\frac{1}{n}D_{sim}$.

Και η υλοποίηση του παραπάνω αλγορίθμου μέσω του Mathematica είναι η εξής:

```
S0=40;n=10^5;K=50;r=0.2;
s=0.1;T=0.8;w=(r*T+s^2*T/2-Log[K/S0])/s/T^0.5;
Delta=CDF[NormalDistribution[],w];
SimDelta=0;
Do[ST=0;
  Z=RandomReal[NormalDistribution[]];
  ST=S0*Exp[(r-0.5*s^2)*T+T^0.5*s*Z];
  If[ST>K,SimDelta=SimDelta+Exp[-r*T]*ST/S0],{i,1,n}];
Print["estimated Delta = ",SimDelta/n]
Print["Delta = ",Delta]
```

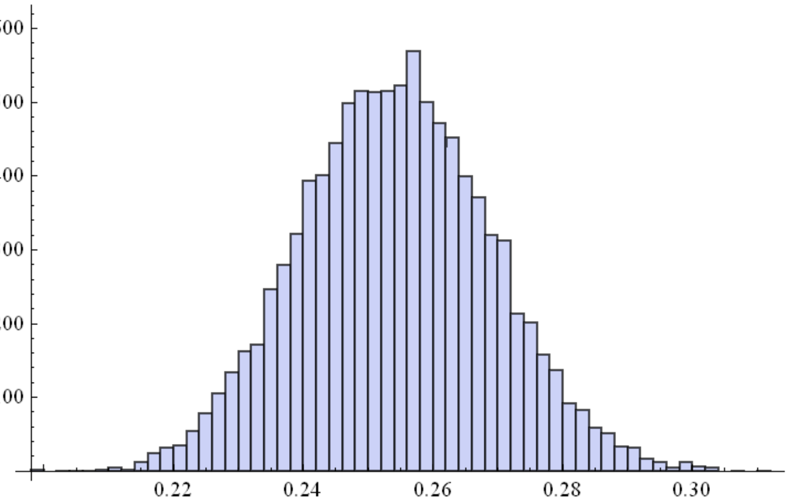
$$estimated\ Delta\ = 0.254259$$
$$Delta\ = 0.254228$$

Παρατηρούμε ότι το *estimated Delta* προσεγγίζει αρκετά το *exact Delta*. Επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία $m = 10000$ φορές με μέγεθος του δείγματος $n = 1000$,προκειμένου να συγκρίνουμε την εκτίμηση αυτή με την εκτίμηση της προηγούμενης παραγράφου.

```
S0=40;n=1000;K=50;r=0.2;
s=0.1;T=0.8;w=(r*T+s^2*T/2-Log[K/S0])/s/T^0.5;
Delta=CDF[NormalDistribution[],w];m=10000;eD=Table[0,{m}];
Do[SimDelta=0;
 Do[ST=0;
  Z=RandomReal[NormalDistribution[]];
  ST=S0*Exp[(r-0.5*s^2)*T+T^0.5*s*Z];
  If[ST>K,SimDelta=SimDelta+Exp[-r*T]*ST/S0],{i,1,n}];
 eD[[j]]=SimDelta/n,{j,1,m}]
Print["Delta = ",Delta];
n=1000;h=0.1;sigma=s;m=10000;eD2=Table[0,{m}];
Do[sum1=0;sum2=0;
 Do[Z=RandomReal[NormalDistribution[0,1]];
  ST1=(S0-h)*Exp[(r-sigma^2/2)*T+sigma*T^0.5*Z];
  ST2=(S0+h)*Exp[(r-sigma^2/2)*T+sigma*T^0.5*Z];
  DT1=Max[ST1-K,0];sum1=sum1+DT1;
  DT2=Max[ST2-K,0];sum2=sum2+DT2,{i,1,n}];
 C1=Exp[-r*T]*sum1/n;C2=Exp[-r*T]*sum2/n;
 eD2[[j]]=(C2-C1)/(2*h),{j,1,m}]
Histogram[eD]
Histogram[eD2]
Print[{Mean[eD],Variance[eD]^0.5,(Mean[eD]-
Delta)^2+Variance[eD]}]
```

```
Print[{Mean[eD2],Variance[eD2]^0.5,(Mean[eD2]-
Delta)^2+Variance[eD2]}]
```

Μορφή της κατανομής της εκτιμήτριας του *Δ* μέσω της μεθόδου παραγώγισης κατά διαδρομή βασισμένη σε 10000 επαναλήψεις της μεθόδου .

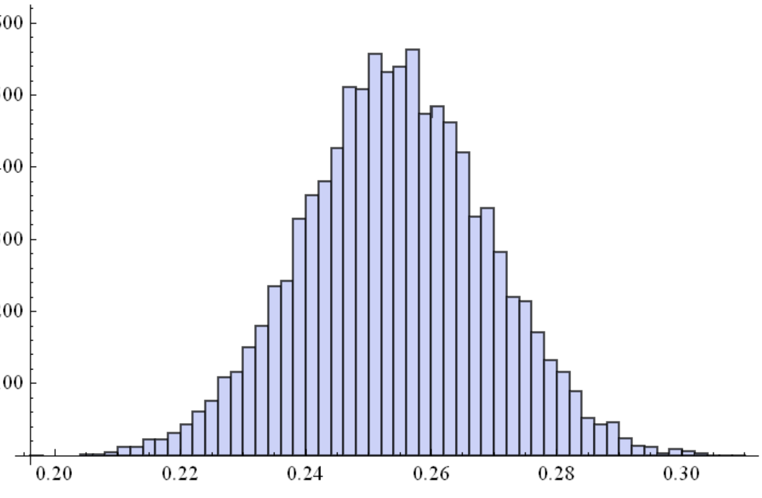


Μέσος δείγματος:0.254227

Τυπική απόκλιση δείγματος: 0.0147263

Μέσο Τετραγωνικό σφάλμα: 0.000216863

Μορφή της κατανομής της εκτιμήτριας του *Δ* μέσω της μεθόδου των κεντρικών διαφορών βασισμένη σε 10000 επαναλήψεις της μεθόδου.



Μέσος δείγματος:0.254292

Τυπική απόκλιση δείγματος: 0.0148336

Μέσο Τετραγωνικό σφάλμα: 0.000220041

Από τα παραπάνω αποτελέσματα παρατηρούμε ότι η μέθοδος pathwise derivative για την εκτίμηση της παραμέτρου *Δ* έχει ελάχιστα μικρότερη τυπική απόκλιση και μέσο τετραγωνικό σφάλμα από την μέθοδο των κεντρικών διαφορών. Άρα η παραγώγιση κατά διαδρομή (pathwise derivative) είναι σε αυτή την περίπτωση ελάχιστα καλύτερη μέθοδος από αυτή των κεντρικών διαφορών. Παρακάτω έχουμε κατασκευάσει ένα πίνακα όπου υπάρχουν όλα τα αποτελέσματα των παραπάνω δύο μεθόδων για την κατανομή της εκτιμήτριας της παραμέτρου Δ:

	Παραγώγιση κατά διαδρομή (pathwise derivative)	**Κεντρικές Διαφορές με ίδια την διαδρομή(ω)**	**Σχόλια**
Τυπική απόκλιση	0.0147263	0.0148336	Ελάχιστα μικρότερη τυπική απόκλιση η μέθοδος της παραγώγισης κατά διαδρομή
Μ.Τ.Σ.	0.000216863	0.000220041	Ελάχιστα μικρότερο Μ.Τ.Σ η μέθοδος της παραγώγισης κατά διαδρομή

4.3.2. Black and Scholes Vega.

Στην προηγούμενη παράγραφο υπολογίσαμε τον εκτιμητή Black and Scholes $Delta$ τώρα θα κάνουμε μία μετατροπή ως προς την παράμετρο που θέλουμε να παραγωγίσουμε. Στην συγκεκριμένη περίπτωση θα υπολογίσουμε τον εκτιμητή Black and Scholes $Vega$ ως εξής:[19]

$$\frac{df}{d\sigma} = \frac{df}{dS_T}\frac{dS_T}{d\sigma}.$$

Ο πρώτος παράγοντας είναι ο $\frac{df}{dS_T} = e^{-rT} I\{S_T > K\}$, ενώ ο δεύτερος $\frac{df}{d\sigma} = (-\sigma T + \sqrt{T}Z)S_T$ και ο συνδυασμός αυτών των δύο δίνει τον παρακάτω εκτιμητή:

$$\frac{df}{d\sigma} = e^{-rT}\left(-\sigma T + \sqrt{T}Z\right)S_T\, I\{S_T > K\} \quad (4.20)$$

Η αναμενόμενη τιμή του εκτιμητή είναι το Black and Scholes Vega οπότε ο εκτιμητής είναι αμερόληπτος,

$$Vega = E\left(\frac{df}{d\sigma}\right) = E\left(e^{-rT}\left(-\sigma T + \sqrt{T}Z\right)S_T\, I\{S_T > K\}\right)$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση $S_T = S_0 e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma\sqrt{T}Z}$ μπορούμε να απαλείψουμε το Z και να γράψουμε τον $Vega$ εκτιμητή ως εξής:

$$\frac{df}{d\sigma} = e^{-rT}\left(\frac{\log\left(\frac{S_T}{S_0}\right) - \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma}\right)S_T\, I\{S_T > K\}.$$

[19] P.Brandimarte (2014) . Handbook in Monte Carlo Simulation

Περιγραφή αλγορίθμου:

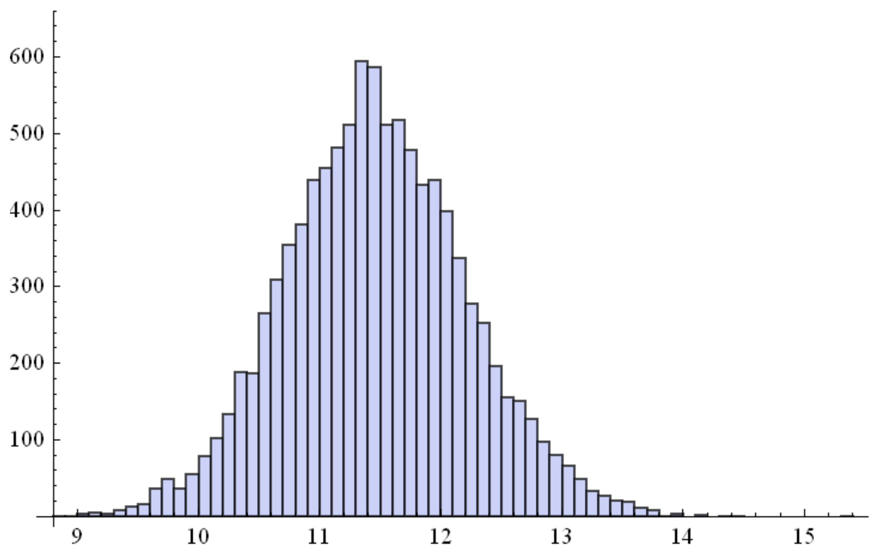
Βήμα 1. Για το Vanilla δικαίωμα αγοράς θέτουμε $Vega_{sim} = 0$.
Βήμα 2. Προσομοιώνουμε την τελική αξία του υποκείμενου αγαθού S_T.
Βήμα 3. Εάν $S_T > K$, τότε θέτω $Vega_{sim} = Vega_{sim} + e^{-rT}\left(\frac{\log\left(\frac{S_T}{S_0}\right)-\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma}\right)S_T$ και επιστρέφουμε στο βήμα 2 n φορές.
Βήμα 4. Υπολογίζουμε το $\frac{1}{n}Vega_{sim}$.

Και η υλοποίηση του παραπάνω αλγορίθμου μέσω του Mathematica είναι η εξής:

```
S0=40;n=10000;K=50;r=0.2;s=0.1;T=0.8;w=(r*(T)+s^2*(T)/2-
Log[K/S0])/s/(T)^0.5;
Φ[t_]:=CDF[NormalDistribution[],t];
Vega=S0*Sqrt[T]*Φ'[w];
SimVega=0;
Do[ST=0;
   Z=RandomReal[NormalDistribution[]];
   ST=S0*Exp[(r-s^2/2)*T+T^0.5*s*Z];
   If[ST>K,SimVega=SimVega+Exp[-r*T]*ST/s*(Log[ST/S0]-
(r+0.5*s^2)*T)]
   ,{i,1,n}];
Print["estimated Vega = ",SimVega/n]
Print["Vega = ",Vega]
```

$estimated\ Vega = 11.4977$
$Vega\ = 11.4701$

Παρατηρούμε ότι το $estimated\ Vega$ προσεγγίζει το ακριβές $Vega$. Η μορφή της κατανομής της εκτιμήτριας του $Vega$ μέσω της μεθόδου παραγώγισης κατά διαδρομή (βασισμένη σε 10000 επαναλήψεις της μεθόδου)



Μέσος δείγματος: 11.4678

Τυπική απόκλιση δείγματος: 0.748614

Μέσο Τετραγωνικό σφάλμα: 0.560529

Σε αυτή την περίπτωση θα υπολογίσουμε το $Vega$ του δικαιώματος με την μέθοδο των κεντρικών διαφορών έτσι ώστε να μπορέσουμε να συγκρίνουμε τις δύο μεθόδους. Η παράγωγος της αξίας του Vanilla δικαιώματος ως προς την μεταβλητότητα σ είναι το όριο του λόγου μιας προσαύξησης για κατάλληλα μικρό h:

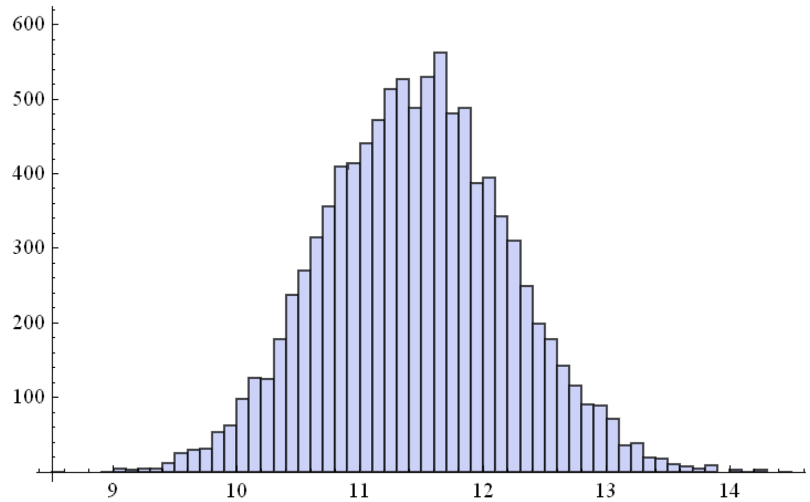
$$Vega \cong \frac{m(\sigma + h) - m(\sigma - h)}{2h}$$

Ο κώδικας δίνεται παρακάτω:

```
S0=40;K=50;T=0.8;r=0.2;sigma=0.1;n=10000;h=0.01;
sum1=0;sum2=0;
Do[Z=RandomReal[NormalDistribution[0,1]];
  ST1=S0*Exp[(r-(sigma-h)^2/2)*T+(sigma-h)*T^0.5*Z];
  ST2=S0*Exp[(r-(sigma+h)^2/2)*T+(sigma+h)*T^0.5*Z];
  DT1=Max[ST1-K,0];sum1=sum1+DT1;
  DT2=Max[ST2-K,0];sum2=sum2+DT2,{i,1,n}];
C1=Exp[-r*T]*sum1/n;C2=Exp[-r*T]*sum2/n;
Print["estimated Vega = ",(C2-C1)/(2*h)]
```

$estimated\ Vega\ = 11.4995$

Μορφή της κατανομής της εκτιμήτριας του $Vega$ μέσω της μεθόδου των κεντρικών διαφορών βασισμένη σε $m = 10000$ επαναλήψεις της μεθόδου με μέγεθος δείγματος $n = 1000$.



Μέσος δείγματος: 11.4579

Τυπική απόκλιση δείγματος: 0.752358

Μέσο Τετραγωνικό σφάλμα: 0.566191

Από τα παραπάνω αποτελέσματα παρατηρούμε ότι η μέθοδος των κεντρικών διαφορών για την εκτίμηση της παραμέτρου $Vega$ έχει ελάχιστα μικρότερη τυπική απόκλιση και μέσο τετραγωνικό σφάλμα από την μέθοδο pathwise derivative. Άρα η μέθοδος των κεντρικών διαφορών είναι σε αυτή την περίπτωση ελάχιστα καλύτερη μέθοδος από αυτή της παραγώγισης κατά διαδρομή (pathwise derivative) . Παρακάτω έχουμε κατασκευάσει ένα πίνακα όπου υπάρχουν όλα τα αποτελέσματα των παραπάνω δύο μεθόδων για την κατανομή της εκτιμήτριας της παραμέτρου $Vega$:

	Παραγώγιση κατά διαδρομή (pathwise derivative)	Κεντρικές Διαφορές με ίδια την διαδρομή(ω)	Σχόλια
Τυπική απόκλιση	0.748614	0.752358	Ελάχιστα μικρότερη τυπική απόκλιση η μέθοδος της παραγώγισης κατά διαδρομή
Μ.Τ.Σ.	0.560529	0.566191	Ελάχιστα μικρότερο Μ.Τ.Σ η μέθοδος της παραγώγισης κατά διαδρομή.

4.3.3. Delta παραγώγου που εξαρτάται από την διαδρομή.

Υποθέτουμε ένα δικαίωμα αγοράς Ασιατικού τύπου όπου η τιμή του υποκείμενου αγαθού ακολουθεί την γεωμετρική κίνηση Brown, αλλά το τελικό κέρδος σε αυτή την περίπτωση εξαρτάται από την συνολική διαδρομή του δείγματος. Το προεξοφλημένο κέρδος του δικαιώματος δίνεται από τον παρακάτω τύπο:[20]

$$f(S_0, \omega) = e^{-rT} \max\{\bar{S} - K, 0\}, \quad \bar{S} = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} S_i \qquad (4.20)$$

Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα ακολουθούμε τον ίδιο δρόμο:

$$\frac{df}{dS_0} = \frac{df}{d\bar{S}}\frac{d\bar{S}}{dS_0} = e^{-rT} I\{\bar{S} > K\}\frac{d\bar{S}}{dS_0}.$$

Επίσης,

$$\frac{d\bar{S}}{dS_0} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\frac{dS_t}{dS_0} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\frac{S_t}{S_0} = \frac{\bar{S}}{S_0}.$$

Άρα ο εκτιμητής για την παράμετρο Δ ενός Ασιατικού δικαιώματος είναι:

$$\frac{df}{dS_0} = e^{-rT} I\{\bar{S} > K\}\frac{\bar{S}}{S_0}.$$

[20] P.Brandimarte (2014) . Handbook in Monte Carlo Simulation

Η αναμενόμενη τιμή του εκτιμητή είναι το Δ από το μοντέλο των Black & Scholes, οπότε ο εκτιμητής είναι αμερόληπτος δηλαδή,

$$\Delta = E\left(\frac{df}{dS_0}\right) = E\left(e^{-rT} I\{\bar{S} > K\} \frac{\bar{S}}{S_0}\right).$$

Περιγραφή αλγορίθμου:

Βήμα 1. Για το δικαίωμα αγοράς Ασιατικού τύπου θέτουμε $D_{sim} = 0$ και προσομοιώνουμε την διαδρομή του υποκείμενου αγαθού S. **Βήμα 2.** Εάν $\bar{S} > K$, θέτουμε $D_{sim} = D_{sim} + e^{-rT}\frac{\bar{S}}{S_0}$ και επιστρέφουμε στο βήμα 1 n φορές. **Βήμα 3.** Υπολογίζουμε το $\frac{1}{n} D_{sim}$.

Μία υλοποίηση του παραπάνω αλγορίθμου μέσω του Mathematica είναι η εξής:

```
k=10^4;n=12;T=1;S0=90;list=Table[0,{k}];
d=T/n;K=90;r=0.05;sigma=0.4;
sdelta=0;
Do[S=Table[S0,{n}];
  Do[Z=RandomReal[NormalDistribution[]];
   S[[i]]=S[[i-1]]*Exp[(r-
0.5*sigma^2)*d+sigma*(d)^0.5*Z];,{i,2,n}];
  If[Mean[S]>K,sdelta=sdelta+Exp[-r*T]*Mean[S]/S0];
  list[[j]]=sdelta/j;,{j,1,k}];
Print["estimated Delta =",list[[k]]]
```

$$estimated\ Delta\ = 0.559409$$

Ο παραπάνω κώδικας μας δίνει την εκτίμηση της παραμέτρου Δ ($estimated\ Delta = 0.559409$) μέσω της μεθόδου pathwise derivative δεδομένου ότι η παράγωγος της παραμέτρου Δ εξαρτάται από την διαδρομή του δείγματος. Σε επόμενη παράγραφο θα χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω μέθοδο εκτίμησης του Δ (εφόσον δεν υπάρχει κλειστός τύπος για το Δ) προκειμένου να κατασκευάσουμε ένα χαρτοφυλάκιο αναπαραγωγής του δικαιώματος Ασιατικού τύπου.

4.4 – Μέθοδος εκτίμησης μέσω της Score function

Ας θεωρήσουμε ένα τυχαίο διάνυσμα $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ και την στατιστική συνάρτηση $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ όπου κάθε X_i έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $g_\theta(x)$, η αναμενόμενη τιμή της f υπολογίζεται ως εξής,

$$m(\theta) = E_\theta\big(f(X_1, X_2, \dots, X_n)\big) = \int f(\boldsymbol{x}) g_\theta(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \quad (4.21)$$

όπου $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Υπολογίζοντας την παράγωγο ως προς την παράμετρο θ της παραπάνω παράστασης έχουμε:

$$m'(\theta) = \int f(\boldsymbol{x}) \frac{d g_\theta(\boldsymbol{x})}{d\theta} d\boldsymbol{x} = \int f(\boldsymbol{x}) \frac{d \ln g_\theta(\boldsymbol{x})}{d\theta} g_\theta(\boldsymbol{x})\, dx = E_\theta\big(f(\boldsymbol{X}) S(\theta)\big)$$

όπου $S(\theta)$ είναι η στατιστική συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι,

$$S(\theta) = S_n(\theta, \boldsymbol{X}) = \frac{d\ln\big(g_\theta(\boldsymbol{X})\big)}{d\theta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\ln(g_\theta(X_i))}{d\theta} = \sum_{i=1}^{n} S_1(\theta, X_i) \qquad (4.22)$$

Η αναμενόμενη τιμή της στατιστικής συνάρτησης $S(\theta)$ είναι μηδέν ($E\big(S(\theta)\big) = 0$), οπότε η ποσότητα $E_\theta\big(f(\boldsymbol{X})S(\theta)\big)$ ουσιαστικά δηλώνει την συνδιακύμανση μεταξύ της $f(\boldsymbol{X})$ και της $S(\theta)$. Επομένως, η $m'(\theta)$ μπορεί να εκτιμηθεί από την διακύμανση μεταξύ των

$$f(\boldsymbol{X}) = f(X_1, X_2, \dots, X_n), \quad S(\theta) = S(\theta, X_1, X_2, \dots, X_n).$$

Η συνάρτηση $f(\boldsymbol{X})$ προκύπτει από τις n ανεξάρτητες τ.μ. του διανύσματος $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ όπου κάθε μεταβλητή X_i έχει σ.π.π. $g_\theta(x)$. Η score function των $X_1, X_2, \dots, X_n$ είναι η $S_n(\theta, \boldsymbol{X})$

Στην συνέχεια θα εκτιμήσουμε την συνδιακύμανση μεταξύ της $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ και της $S_n(\theta, \boldsymbol{X})$. Πιο συγκεκριμένα θεωρούμε με m τις ανεξάρτητες επαναλήψεις της f με $f_j = f(X_{j1}, X_{j2}, \dots, X_{jn})$ με $j = 1,2, \dots, m$ και τις ανεξάρτητες παρατηρήσεις που προέρχονται από την σ.π.π. g_θ με $\{X_{ji}, i = 1,2, \dots, n \; \kappa\alpha\iota \; j = 1,2, \dots, m\}$[21] Don L. McLeinh (2005). Monte Carlo Simulation and Finance. Συμβολίζοντας με $S_j = \sum_{i=1}^{n} S_1\big(\theta, X_{ji}\big)$ την στατιστική συνάρτηση για το διάνυσμα των παρατηρήσεων $X_j = (X_{j1}, X_{j2}, \dots, X_{jn})$ τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τον εκτιμητή της συνδιακύμανσης του δείγματος ως εξής:

$$SF_1 = \widehat{Cov}\big(S_j, f_j\big) = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^{m} S_j\big(f_j - \bar{f}\big) \;\; \acute{o}\pi o\upsilon \; \bar{f} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} f_j$$ [22] $$(4.23)$$

Παρόλα αυτά, υπάρχει καλύτερη εκτίμηση του $m'(\theta)$ χρησιμοποιώντας κατάλληλες ρυθμιστικές μεταβλητές (control variates). Συγκεκριμένα, οι τυχαίες μεταβλητές S_j , f_j συνδέονται μέσω ενός μοντέλου απλής γραμμικής παλινδρόμησης που δίνεται παρακάτω, όπου η εξαρτημένη μεταβλητή είναι η f_j ενώ η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι η μεταβλητή S_j.

$$f_j = a + bS_j + e_j \,,$$

Παρατηρούμε από το παραπάνω μοντέλο ότι ο συντελεστής b που ελαχιστοποιεί την διασπορά των σφαλμάτων e_j δίνεται από την παρακάτω σχέση,

$$b = \frac{cov(f_j, S_j)}{Var(S_j)} \qquad (4.23)$$

ενώ η εκτίμηση του είναι,

$$\hat{b} = \frac{\sum_{j=1}^{m} S_j\big(f_j - \bar{f}\big)}{\sum_{j=1}^{m}\big(S_j - \bar{S}\big)^2} = \frac{SF_1}{\widehat{\sigma_j^2}} \quad (4.24)$$

[22] Don L. McLeinh (2005). Monte Carlo Simulation and Finance

από τις σχέσεις (4.23) και (4.24) παρατηρούμε ότι ο $\hat{b}$ είναι αμερόληπτος εκτιμητής του b δηλαδή,

$$E\left(\hat{b}|\boldsymbol{S}\right) = b \quad (4.25).$$

όπου $\boldsymbol{S} = (S_1, \dots, S_m)$. Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε την διακύμανση του $\hat{b}$ όπως υπολογίζεται από την θεωρία της απλής γραμμικής παλινδρόμησης,

$$Var\left(\hat{b}|\boldsymbol{S}\right) = \frac{\sigma_f^2\left(1-\rho_{Sf}^2\right)}{(m-1)\sigma_S^2} \quad όπου\ \rho_{fs} = \frac{Cov(f_i, S_i)}{\sigma_f \sigma_S}\ με\ \sigma_f^2 = Var\left(f_j\right)\ και\ \sigma_S^2 = Var\left(S_j\right)$$

Γνωρίζουμε από την σχέση (4.25) ότι ο εκτιμητής $\hat{b}$ είναι αμερόληπτος εκτιμητής της συνδιακύμανσης του δείγματος και έχει την ίδια αναμενόμενη τιμή με την:

$$SF_2 = \hat{b}\,\sigma_S^2$$

αν συγκρίνουμε τους δύο εκτιμητές θα παρατηρήσουμε ότι πιο αποδοτικός είναι ο SF_2 για την εκτίμηση του $m'(\theta)$ και αυτό φαίνεται από την παρακάτω σχέση,

$$SF_1 = \hat{b}\,\hat{\sigma}_S^2 = SF_2 \frac{\hat{\sigma}_S^2}{\sigma_S^2}$$

Στην συνέχεια θα συγκρίνουμε τις διακυμάνσεις των δύο παραπάνω εκτιμητών μέσω των παρακάτω σχέσεων,

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}(SF_1) &= \mathrm{var}\big(E(SF_1|\boldsymbol{S})\big) + E\big(\mathrm{var}(SF_1|\boldsymbol{S})\big) = \mathrm{var}(b\hat{\sigma}_S^2) + E\left[\frac{\sigma_f^2\hat{\sigma}_S^2\left(1-\rho_{fs}^2\right)}{m-1}\right] \\
&= b^2\mathrm{var}(\hat{\sigma}_S^2) + \frac{\sigma_f^2\ \sigma_S^2\left(1-\rho_{fs}^2\right)}{m-1} \\
&= \frac{\rho_{fs}^2\sigma_f^2}{\sigma_S^4} var(\ \sigma_S^2) + \frac{\sigma_f^2\ \sigma_S^2\left(1-\rho_{fs}^2\right)}{m-1} \qquad (4.25)
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}(SF_2) &= \mathrm{var}\big(E(SF_2|\boldsymbol{S})\big) + E\big(\mathrm{var}(SF_2|\boldsymbol{S})\big) = \mathrm{var}(b\ \sigma_S^2) +\ \sigma_S^4 E\left(\mathrm{var}\left(\hat{b}|\boldsymbol{S}\right)\right) \\
&= 0 +\ \sigma_S^4 \frac{\sigma_f^2\ \sigma_S^4\left(1-\rho_{fs}^2\right)}{(m-1)\hat{\sigma}_S^2} \qquad (4.26)
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι αν στην σχέση (4.26) αντικαταστήσουμε τον εκτιμητή $\hat{\sigma}_S^2$ με την πραγματική του τιμή σ_S^2 τότε μπορώ να την συγκρίνω με την σχέση (4.25) και ισχύει ότι:

$$var(SF_1) > var(SF_2)$$

Ο τελευταίος όρος της σχέσης (4.25) μπορεί να εκφραστεί μέσω της στατιστικής συνάρτησης $S_j = \sum_{i=1}^{n} S_1\left(\theta, X_{ji}\right)$ ως εξής:

$$\frac{\sigma_f^2\ \sigma_S^2(1-\rho_{fs}^2)}{m-1} = \frac{n\sigma_f^2 \mathrm{var}\left(S_1(\theta, X_{ji})\right)(1-\rho_{fs}^2)}{(m-1)} \quad (4.27)$$ [23]

Από την σχέση (4.27) παρατηρούμε ότι οι εκτιμητές SF_1 και SF_2 έχουν μεγάλη διασπορά όταν το n είναι μεγάλο εκτός εάν ο συντελεστής συσχέτισης είναι κοντά στο 1 ή στο -1.

Παράδειγμα. ([24] Don L. McLeinh (2005)). Εκτιμητής Monte-Carlo για την παράμετρο Rho. Θεωρούμε ένα δικαίωμα Ευρωπαϊκού τύπου και μας ενδιαφέρει η εκτίμηση της παραμέτρου Rho του δικαιώματος. Η αξία του δικαιώματος στη λήξη του δίνεται από τον τύπο $c(T, S_T)$ όπου S_T είναι η αξία της μετοχής στον χρόνο λήξης T. Η εκτίμηση της παραμέτρου Rho θα γίνει μέσω της στοχαστικής διαδικασίας $S = \{S_T,\ t \geq 0\} \sim GBM(r - \sigma^2/2, \sigma^2)$ όπου προκύπτει ότι η αξία της μετοχής, S_T ακολουθεί την λογαριθμοκανονική κατανομή με μέση τιμή $\eta = S_0 \exp\{rT\}$ και μεταβλητότητα $\sigma\sqrt{T}$ οπότε αν $S_T = e^Y$ με $Y \sim N\left(\log(\eta) - \sigma^2 \frac{T}{2}, \sigma^2 T\right)$. Υποθέτουμε ότι g είναι η σ.π.π. της λογαριθμοκανονικής κατανομής οπότε βρίσκουμε τις μερικές παραγώγους ως προς η και r του $\log(g)$ όπως δίνονται παρακάτω:

$$\frac{\partial \log(g)}{\partial \eta} = \frac{Y - \log(\eta) + \sigma^2 \frac{T}{2}}{\eta \sigma^2 T}$$

$$\frac{\partial \log(g)}{\partial r} = \frac{Y - \log(\eta) + \sigma^2 \frac{T}{2}}{\eta \sigma^2 T} \frac{\partial \eta}{\partial r} =$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right) - rT + \sigma^2 \frac{T}{2}}{\sigma^2}$$

Μια εκτιμήτρια του Rho είναι η συνδιακύμανση του δείγματος μεταξύ του $c(T, S_T)$ και $\frac{\partial \log(g)}{\partial r}$ ή ισοδύναμα,

$$\sigma^{-2} \widehat{\mathrm{cov}} \left(c(T, S_T), \ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right)$$

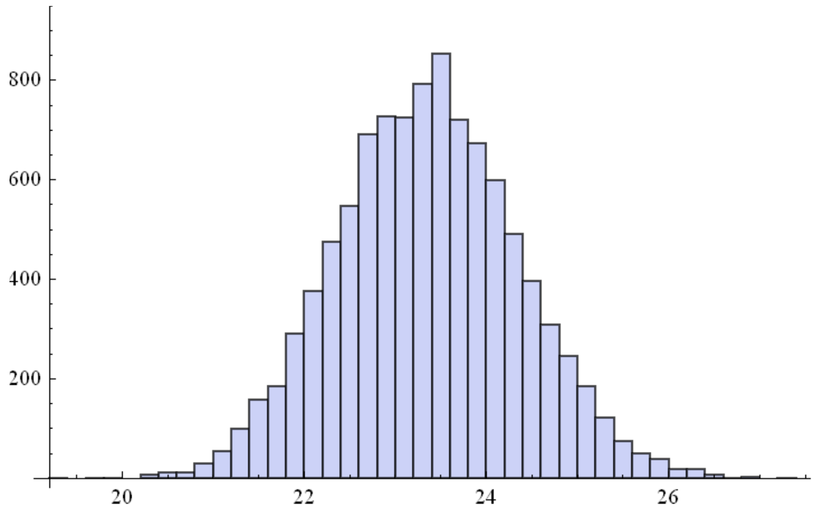
Το παραπάνω είναι εύκολο να το εφαρμόσουμε π.χ. στην περίπτωση ενός call option όπου υπάρχει και γνωστός κλειστός τύπος για το Rho και έτσι μπορούμε να δούμε την αποτελεσματικότητα της εκτιμήτριας. Έτσι, αν πάρουμε $c(T, S_T) = (S_T - K)_+$ θα έχουμε τον παρακάτω κώδικα.

```
S0=100;K=90;T=0.25;r=0.1;sigma=0.2;n=10^5;DT=Table[0,{n}];L=DT
;
Do[Z=RandomReal[NormalDistribution[0,1]];
  ST=S0*Exp[(r-sigma^2/2)*T+sigma*T^0.5*Z];
  DT[[i]]=Max[ST-K,0];L[[i]]=Log[ST/S0];
  ,{i,1,n}];
Print["estimated Rho = ",Covariance[DT,L]/(sigma^2)]
```

$estimated\ Rho\ = 23.3913$

[23] Don L. McLeinh (2005). Monte Carlo Simulation and Finance

Από το παραπάνω αποτέλεσμα παρατηρούμε ότι το $estimated\ Rho$ δεν προσεγγίζει ικανοποιητικά το $exact\ Rho.$ Στον παρακάτω κώδικα υπολογίζουμε $m = 10000$ φορές το $\widehat{Rho}$ (κάθε φορά βασιζόμενοι σε τ.δ. μεγέθους $n = 1000$) ώστε από το παραγόμενο ιστόγραμμα να πάρουμε μια εικόνα για την κατανομή της εκτιμήτριας $\widehat{Rho}$ και να δούμε την σχέση της με την ακριβής τιμή



Μέσος δείγματος: 23.3561

Τυπική απόκλιση δείγματος: 0.996609

Από τα παραπάνω αποτελέσματα παρατηρούμε ότι εμφανίζονται μεγάλες τιμές στην τυπική απόκλιση. Η παραπάνω ουσιαστικά είναι η εκτιμήτρια της παραγώγου $\frac{\partial}{\partial r} E_Q((S_T - K)_+)$ αφού θεωρήσαμε ότι $c(T, S_T) = (S_T - K)_+$. Το ορθό όμως είναι να συμπεριλάβουμε και τον συντελεστή προεξόφλησης, δηλαδή $Rho = \frac{\partial}{\partial r} e^{-rT} E_Q((S_T - K)_+),$ οπότε είναι αναγκαία μια μικρή τροποποίηση της παραπάνω διαδικασίας. Είναι άμεσο ότι

$$Rho = -Te^{-rT} E_Q((S_T - K)_+) + e^{-rT} \frac{\partial}{\partial r} E_Q((S_T - K)_+)$$

και άρα τελικά θα εκτιμούμε το Rho (θεωρώντας και τον συντελεστή προεξόφλησης) από την

$$\widehat{Rho} = -Te^{-rT} \hat{E}_Q((S_T - K)_+) + e^{-rT} \sigma^{-2} \widehat{\mathrm{cov}} \left(c(T, S_T), \ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right) \right)$$

Η ακριβής τιμή του Rho στην περίπτωση αυτή είναι πολύ γνωστή στην βιβλιογραφία, και είναι ίση με

$$Rho = KTe^{-rT} \Phi\left(\frac{\ln\frac{S}{K} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \right)$$

Η υλοποίηση του παραπάνω τύπου που υπολογίζει την εκτίμηση του Rho δίνεται με ένα παράδειγμα μέσω του Mathematica

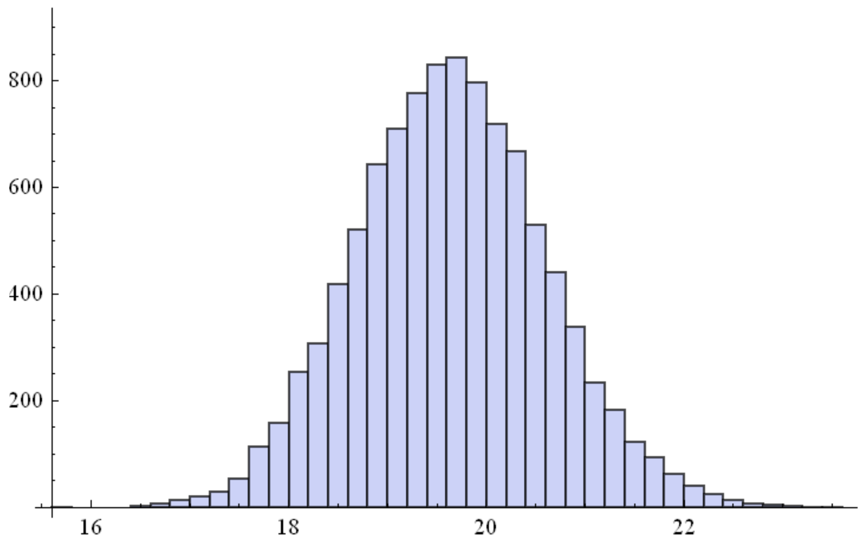
```
S0=100;K=90;T=0.25;r=0.1;sigma=0.2;n=10^5;DT=Table[0,{n}];L=DT
;
Do[Z=RandomReal[NormalDistribution[0,1]];
  ST=S0*Exp[(r-sigma^2/2)*T+sigma*T^0.5*Z];
  DT[[i]]=Max[ST-K,0];L[[i]]=Log[ST/S0];,{i,1,n}];
Print["estimated  Rho  =  ",Exp[-r*T]Covariance[DT,L]/(sigma^2)-
T*Exp[-r*T]*Mean[DT]]
Print["Exact            Rho            =            ",K*T*Exp[-
r*T]*CDF[NormalDistribution[0,1],((Log[S0/K]+(r+sigma^2/2)*T))
/((sigma*T^0.5))]]
```

$estimated\ Rho\ = 19.7371$

Exact Rho $= 20.0149$

Παρατηρούμε ότι ότι το $estimated\ Rho$ προσεγγίζει ικανοποιητικά το $exact\ Rho$. Στον παρακάτω κώδικα υπολογίζουμε $m = 10000$ φορές το $\widehat{Rho}$ (κάθε φορά βασιζόμενοι σε τ.δ. μεγέθους $n = 1000$) ώστε από το παραγόμενο ιστόγραμμα να πάρουμε μια εικόνα για την κατανομή της εκτιμήτριας $\widehat{Rho}$ και να δούμε την σχέση της με την ακριβής τιμή.

```
S0=100;K=90;T=0.25;r=0.1;sigma=0.2;n=1000;DT=Table[0,{n}];L=DT
;m=10000;estRho=Table[0,{m}];
Do[
 Do[Z=RandomReal[NormalDistribution[0,1]];
  ST=S0*Exp[(r-sigma^2/2)*T+sigma*T^0.5*Z];
  DT[[i]]=Max[ST-K,0];L[[i]]=Log[ST/S0];
  ,{i,1,n}];
 estRho[[j]]=Exp[-r*T]Covariance[DT,L]/(sigma^2)-T*Exp[-
r*T]*Mean[DT],{j,1,m}]
Histogram[estRho,{15,25,0.2}]
```



Μέσος δείγματος: 19.6449

Τυπική απόκλιση δείγματος: 0.963263

Παρατηρούμε ότι η εκτίμηση της παραμέτρου Rho προσεγγίζει πιο ικανοποιητικά το ακριβές Rho από το μοντέλο των Black and Scholes όταν συμπεριλάβουμε τον συντελεστή προεξόφλησης στον υπολογισμό της.

4.5 – Εκτίμηση των Παραμέτρων Ευαισθησίας των Δικαιωμάτων με την Μέθοδο του Λόγου των Πιθανοφανειών

Όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο αν

$$m(\theta) = E_\theta[f(X_1, X_2, \dots, X_n)] = \int f(\boldsymbol{x})\, g_\theta(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \quad (4.28)$$

τότε,

$$m'(\theta) = \int f(\boldsymbol{x})\, g'_\theta(\boldsymbol{x}) dx = \int f(\boldsymbol{x}) \frac{g'_\theta(\boldsymbol{x})}{g_\theta(\boldsymbol{x})} g_\theta(\boldsymbol{x})\, dx = E\left[f(\boldsymbol{X}) \frac{g'_\theta(\boldsymbol{X})}{g_\theta(\boldsymbol{X})}\right] \quad (4.30)$$

και ο λόγος $\frac{g'_\theta(x)}{g_\theta(x)}$ καλείται λόγος πιθανοφανειών.

Την παραπάνω μέθοδο θα την αναπτύξουμε στα παρακάτω παραδείγματα για ένα Vanilla δικαίωμα αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου και ένα Ασιατικό δικαίωμα αγοράς εκτιμώντας το Δέλτα των δύο δικαιωμάτων. Θεωρώντας ότι η αξία της μετοχής ακολουθεί την γεωμετρική κίνηση Brown (GBM) γνωρίζουμε ότι,

$$\log\left[\frac{S_T}{S_0}\right] \sim N\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma^2 T\right)$$

Αυτό σημαίνει ότι η S_T ακολουθεί την λογαριθμοκανονική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας,[25]

$$g_{S_0}(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{T}} \varphi\big(\xi(x, S_0)\big) \;\; \text{όπου}\; \varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}},$$

είναι η σ.π.π της τυπικής κανονικής κατανομής$\big(N(0,1)\big)$ και

$$\xi(x, S_0) = \frac{\log\left(\frac{x}{S_0}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα της αλυσίδας για την $g'_{S_0}(x)$,

$$\begin{aligned} g'_{S_0}(x) &= \frac{dg_{S_0}(x)}{dS_0} = \frac{dg_{S_0}(x)}{d\xi(x, S_0)} \frac{d\xi(x, S_0)}{dS_0} = \frac{1}{x\sigma\sqrt{T}} \frac{d\varphi(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi(x, S_0)}{dS_0} \\ &= \frac{1}{x\sigma\sqrt{T}} [-\xi(x, S_0)\varphi(\xi(x, S_0))] \frac{d\xi(x, S_0)}{dS_0} \end{aligned}$$

[25] P.Brandimarte (2014) . Handbook in Monte Carlo Simulation

άρα ο λόγος πιθανοφανειών είναι:

$$\frac{g'_{S_0}(x)}{g_{S_0}(x)} = -\xi(x, S_0)\frac{d\xi(x, S_0)}{dS_0} = \frac{\log\left(\frac{x}{S_0}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{S_0\sigma^2 T}$$

Οπότε η εκτίμηση της παραμέτρου Δ υπολογίζεται πολλαπλασιάζοντας το προεξοφλημένο κέρδος με τον λόγο πιθανοφανειών και θέτοντας $x = S_T$.

$$e^{-rT}\max\{S_T - K, 0\}\left[\frac{\log\left(\frac{S_T}{S_0}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{S_0\sigma^2 T}\right] \qquad (4.31)$$

Από την εξίσωση $S_T = S_0 e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma\sqrt{T}Z}$ όπου $Z = \frac{\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$ ο τύπος (4.31) παίρνει την παρακάτω μορφή,

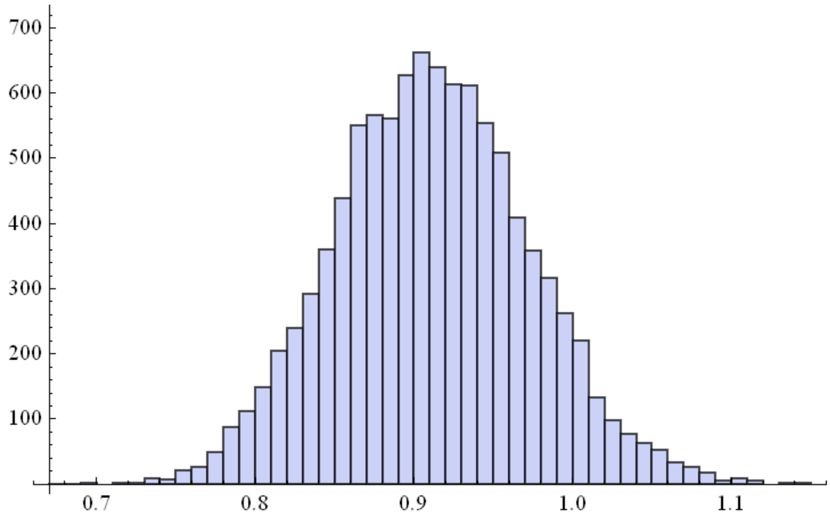
$$e^{-rT}\max\{S_T - K, 0\}\left[\frac{Z}{S_0\sigma\sqrt{T}}\right]$$

Επομένως παράγουμε την παραπάνω τιμή n φορές και εκτιμούμε το Δ από τον μέσο όρο των n αυτών τιμών. Η υλοποίηση του παραπάνω αλγορίθμου για ένα Vanilla δικαίωμα αγοράς μέσω του Mathematica δίνεται παρακάτω:

```
S0=100;K=90;T=0.25;r=0.1;sigma=0.2;n=10^5;sum1=0;
Delta=CDF[NormalDistribution[0,1],(Log[S0/K]+(r+sigma^2/2)*T)/
(sigma*T^0.5)];
Do[Z=RandomReal[NormalDistribution[0,1]];
  ST=S0*Exp[(r-sigma^2/2)*T+sigma*T^0.5*Z];
  DT=Max[ST-K,0]*Z/(S0*sigma*T^0.5);
  sum1=sum1+DT,{i,1,n}];
estDelta=Exp[-r*T]*sum1/n;
Print["estimated Delta = ",estDelta]
Print["exact Delta = ",Delta]
```

$$estimated\ Delta\ =\ 0.912277$$
$$exact\ Delta\ =\ 0.912069$$

Από τα παραπάνω αποτελέσματα παρατηρούμε ότι η μέθοδος είναι αρκετά ικανοποιητική καθώς το εκτιμώμενο Δ προσεγγίζει το ακριβές Δ. Στην συνέχεια επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία $m = 10000$ φορές προκειμένου να συγκρίνουμε την εκτίμηση αυτή με την εκτίμηση του Δ από τη μέθοδο των κεντρικών διαφορών και από τη μέθοδο της παραγώγισης κατά διαδρομή. Η μορφή της κατανομής της εκτιμήτριας του Δ μέσω της μεθόδου του λόγου πιθανοφανειών (βασισμένη σε 10000 επαναλήψεις της μεθόδου)

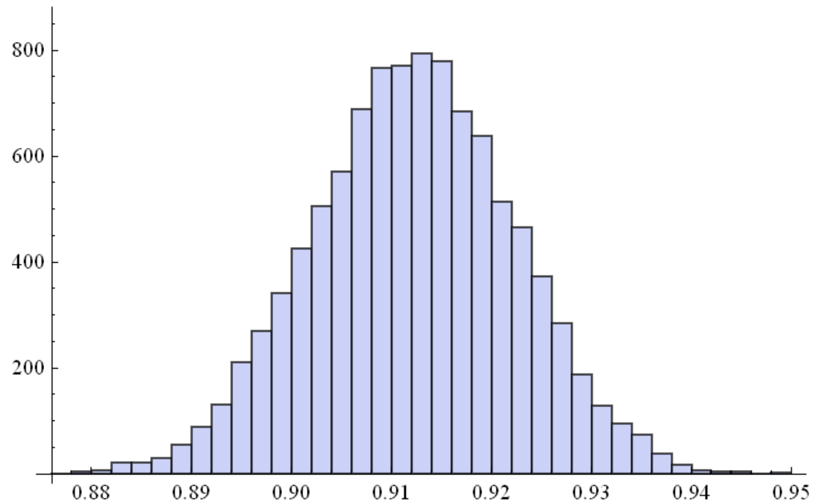


Μέσος δείγματος: 0.913123

Τυπική απόκλιση δείγματος: 0.0622879

Μέσο Τετραγωνικό σφάλμα: 0.00388089

Μορφή της κατανομής της εκτιμήτριας του *Δ* μέσω της μεθόδου των κεντρικών διαφορών (βασισμένη σε 10000 επαναλήψεις της μεθόδου

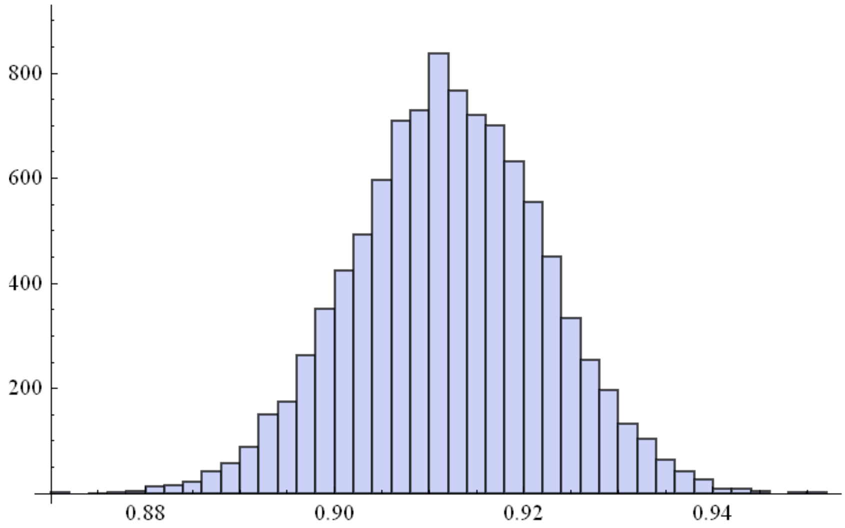


Μέσος δείγματος:0.9121

Τυπική απόκλιση δείγματος: 0.010113

Μέσο Τετραγωνικό σφάλμα: 0.000102273

Μορφή της κατανομής της εκτιμήτριας του *Δ* με τη μεθόδου της παραγώγισης κατά διαδρομή (βασισμένη σε 10000 επαναλήψεις της μεθόδου).



Μέσος δείγματος: 0.912011

Τυπική απόκλιση δείγματος: 0.0101226

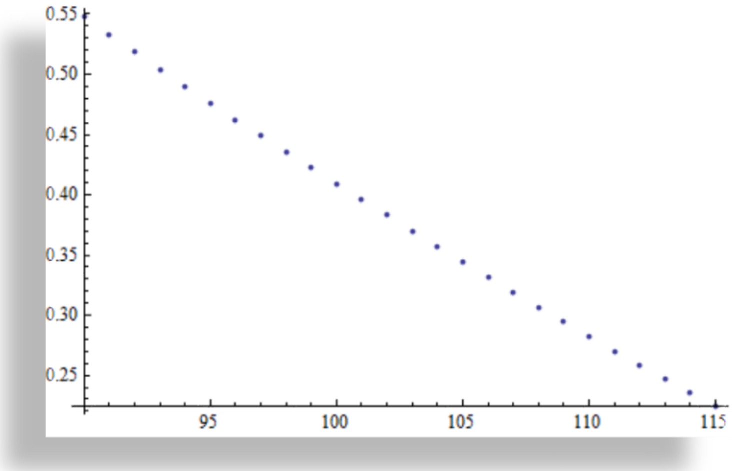
Μέσο Τετραγωνικό σφάλμα: 0.00010247

Από τα αποτελέσματα των επαναλήψεων παρατηρούμε ότι η μέθοδος του λόγου πιθανοφανειών είναι καλύτερη μέθοδος από της δύο άλλες μεθόδους καθώς εμφανίζει μικρότερη τιμή στην διασπορά και στο μέσο τετραγωνικό σφάλμα. Παρακάτω έχουμε κατασκευάσει ένα πίνακα όπου υπάρχουν όλα τα αποτελέσματα των παραπάνω τριών μεθόδων για την κατανομή της εκτιμήτριας της παραμέτρου Δ:

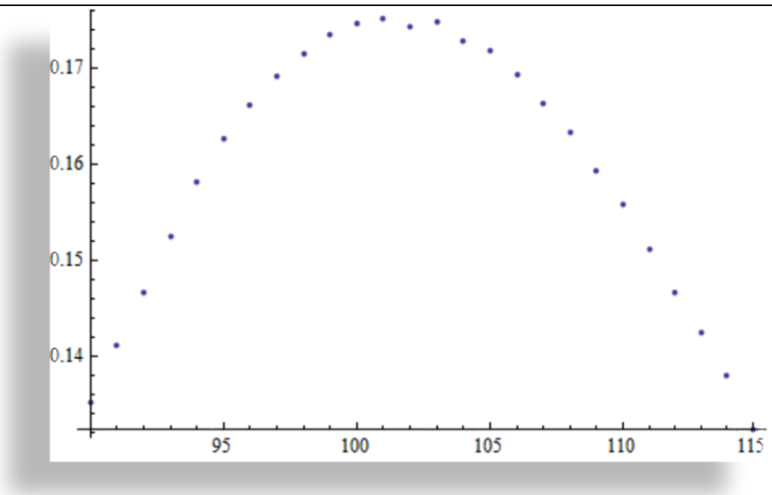
	Λόγος πιθανοφανειών	**Παραγώγιση κατά διαδρομή (pathwise derivative)**	**Κεντρικές Διαφορές με την ίδια διαδρομή (ω)**
Τυπική απόκλιση	0.0622879	0.0101226	0.010113
Μ.Τ.Σ.	0.00388089	0.00010247	0.000102273

Προκειμένου να συγκρίνουμε την απόδοση των εκτιμητριών του Δέλτα μέσω των δύο παραπάνω μεθόδων για διάφορες τιμές του K, καταγράφουμε $m = 10^4$ εκτιμήσεις από δείγμα μεγέθους $n = 10$. Αλλάζοντας τιμές στο K λαμβάνουμε τα παρακάτω γραφήματα που αφορούν την ρίζα της μέσης τετραγωνικής απόκλισης για κάθε μια από τις δύο παραπάνω μεθόδους.

```
S0=100;T=0.1;r=0.1;sigma=0.4;n=10;m=10^4;srmse1={};
Do[estDelta=Table[0,{m}];SeedRandom[100];
Delta=CDF[NormalDistribution[0,1],(Log[S0/K]+(r+sigma^2/2)*T)/
(sigma*T^0.5)];
  Do[sum1=0;
   Do[Z=RandomReal[NormalDistribution[0,1]];
    ST=S0*Exp[(r-sigma^2/2)*T+sigma*T^0.5*Z];
    DT=Max[ST-K,0]*Z/(S0*sigma*T^0.5);
    sum1=sum1+DT,{i,1,n}];
   estDelta[[j]]=Exp[-r*T]*sum1/n;
   ,{j,1,m}];
  x={K,((Mean[estDelta]-Delta)^2+Variance[estDelta])^0.5};
  AppendTo[srmse1,x];Print[x];
  ,{K,90,115,1}];
fig1=ListPlot[srmse1]
```

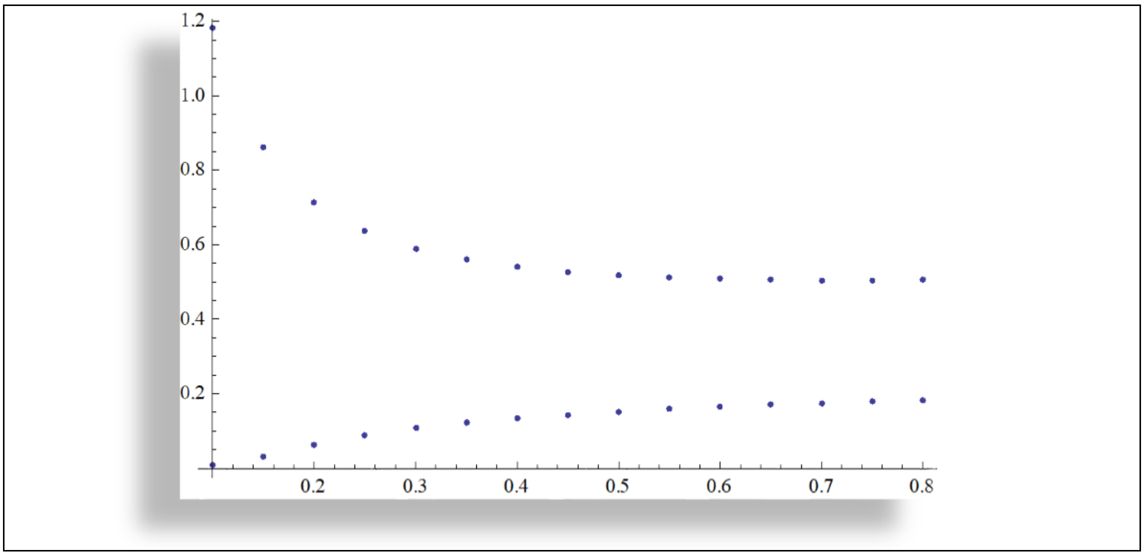


Παρακάτω δίνεται το γράφημα που αφορά την ρίζα της μέσης τετραγωνικής απόκλισης για την μέθοδο των κεντρικών διαφορών.



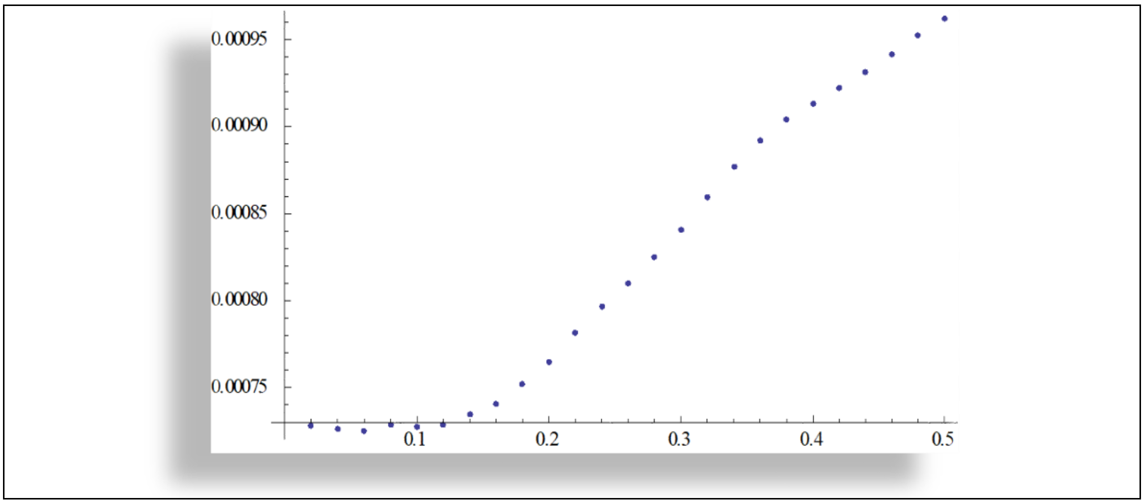
Από τα δύο παραπάνω γραφήματα παρατηρούμε ότι όσο μεγαλώνει το K η εκτιμήτρια λόγου πιθανοφανειών βελτιώνεται, ενώ η εκτιμήτρια κεντρικών διαφορών αρχικά χειροτερεύει μέχρι το $S_0 = 100$ και στην συνέχεια βελτιώνεται.

Παρακάτω θα συγκρίνουμε την απόδοση των εκτιμητριών του Δ μέσω των δύο παραπάνω μεθόδων για διάφορες τιμές του σ, καταγράφουμε $m = 10^4$ εκτιμήσεις από δείγμα μεγέθους $n = 10$. Αλλάζοντας τιμές στο σ λαμβάνουμε τα παρακάτω γραφήματα που αφορούν την ρίζα της μέσης τετραγωνικής απόκλισης για κάθε μια από τις δύο παραπάνω μεθόδους.

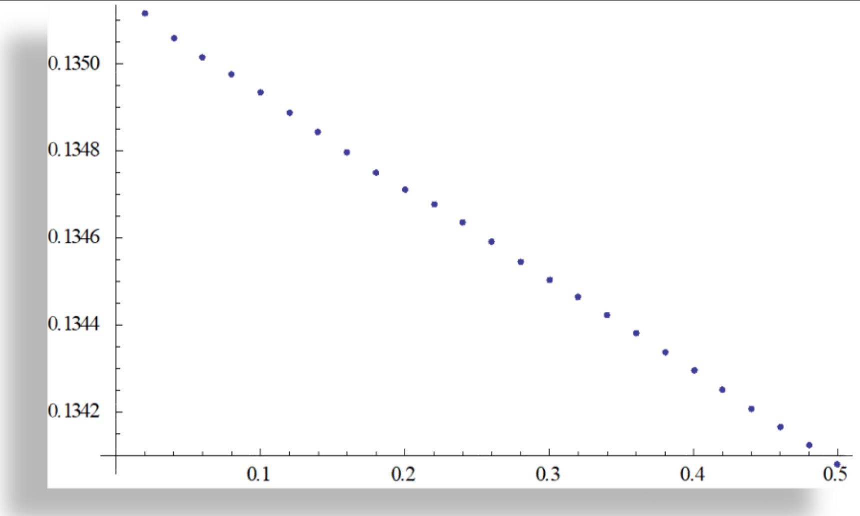


Για το πρώτο γράφημα παρατηρούμε ότι καθώς αυξάνεται το σ η εκτιμήτρια του λόγου πιθανοφανειών βελτιώνεται ενώ η εκτιμήτρια των κεντρικών διαφορών χειροτερεύει.

Τέλος θα συγκρίνουμε την απόδοση των εκτιμητριών του Δέλτα μέσω των κεντρικών διαφορών για διάφορες τιμές του h, καταγράφουμε $m = 10^4$ εκτιμήσεις από δείγμα μεγέθους $n = 10$. Αλλάζοντας τιμές στο h λαμβάνουμε τα παρακάτω γραφήματα που αφορούν την μεροληψία και την τυπική απόκλιση του δείγματος.



Από το παραπάνω γράφημα που αφορά την μεροληψία του δείγματος παρατηρούμε ότι η εκτιμήτρια του Δ μέσω των κεντρικών διαφορών αρχικά είναι περίπου σταθερή ενώ στην συνέχεια μετά από το $h = 0.1$ αυξάνεται η μεροληψία. Παρακάτω θα αναλύσουμε το γράφημα που δίνει την διασπορά της εκτιμήτρια του Δ.



Σύμφωνα με το παραπάνω γράφημα παρατηρούμε ότι η διασπορά της εκτιμήτριας του Δ μέσω των κεντρικών διαφορών βελτιώνεται γιατί καθώς αυξάνεται το h η τυπική απόκλιση του δείγματος μειώνεται. Συνολικά όμως η απόδοση της εκτιμήτριας δεν βελτιώνεται διότι όπως είδαμε στο προηγούμενο γράφημα, η μεροληψία της αυξάνεται.

Για την περίπτωση δικαιώματος Ασιατικού τύπου εργαζόμαστε ανάλογα, όπως αναλύεται παρακάτω.

Στην συνέχεια μπορούμε να γράψουμε την σ.π.π. ως το γινόμενο,

$$g_{S_0}(S_1, S_2, \dots, S_T) = g_1(S_1|S_0)g_2(S_2|S_1) \dots g_T(S_T|S_{T-1})$$

και για κάθε όρο ισχύει το ίδιο όπως σε ένα δικαίωμα Vanilla,[26]

$$g_t(S_t|S_{t-1}) = \frac{1}{x_t \sigma \sqrt{\delta t}} \varphi\big(\xi(x_t|x_{t-1})\big)$$

όπου δt είναι ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ δύο παρατηρήσεων και

$$\xi(x_t|x_{t-1}) = \frac{\log\left(\frac{x_t}{x_{t-1}}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\delta t}{\sigma\sqrt{\delta t}}$$

Υπολογίζοντας τον λογάριθμο της παραπάνω στατιστικής συνάρτησης και παραγωγίζοντάς τον ως προς S_0 βρίσκουμε το πηλίκο,

[26] P.Brandimarte (2014) . Handbook in Monte Carlo Simulation

$$\frac{d\log(g_{S_0}(S_1, S_2, \dots, S_n))}{dS_0} = \frac{d\log(g_1(S_1|S_0))}{dS_0} = \frac{\xi(S_1|S_0)}{S_0\sigma\sqrt{\delta t}} = \frac{Z_1}{S_0\sigma\sqrt{\delta t}} \quad \acute{o}\pi o\upsilon \;\; Z_1 \sim N(0,1)$$

όπου Z_1 είναι ο τυχαίος αριθμός από την κανονική κατανομή που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του S_1. Άρα ο εκτιμητής της παραμέτρου Δέλτα με την μέθοδο του λόγου των πιθανοφανειών προκύπτει πολλαπλασιάζοντας το προεξοφλημένο κέρδος του Ασιατικού δικαιώματος αγοράς με το λόγο πιθανοφανειών,

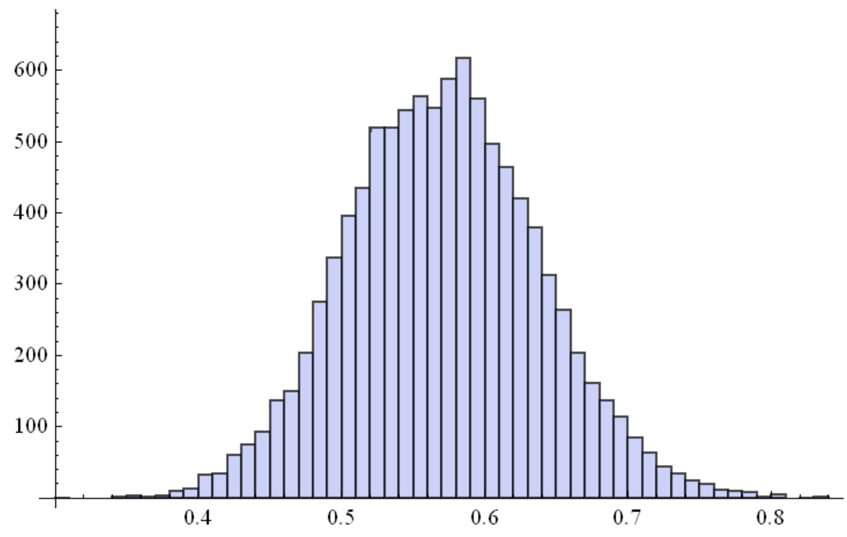
$$e^{-rT}\max\{\bar{S} - K, 0\}\frac{Z_1}{S_0\sigma\sqrt{\delta t}}$$

Η υλοποίηση του παραπάνω αλγορίθμου για ένα Ασιατικό δικαίωμα αγοράς μέσω του Mathematica δίνεται παρακάτω:

```
k=10^4;n=12;T=1;S0=90;
d=T/n;K=90;r=0.05;sigma=0.4;sdelta=0;
Do[S=Table[1,{n}];
  Z1=RandomReal[NormalDistribution[]];
  S[[1]]=S0*Exp[(r-sigma^2/2)*d+sigma*d^0.5*Z1];
  Do[Z=RandomReal[NormalDistribution[]];
   S[[i]]=S[[i-1]]*Exp[(r-
sigma^2/2)*d+sigma*d^0.5*Z];,{i,2,n}];
  sdelta=sdelta+Max[Mean[S]-K,0]*Z1;,{j,1,k}];
C1=Exp[-r*T]*(sdelta/k)/(sigma*S0*d^0.5);
Print["estimated Delta = ",C1]
```

$\textit{estimated Delta} = 0.554723$

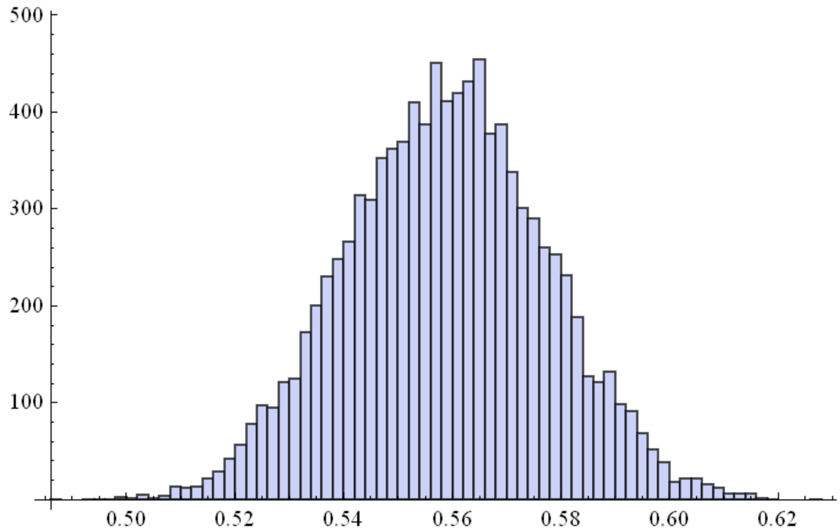
Ο παραπάνω κώδικας μας δίνει την εκτίμηση της παραμέτρου Δ ($\textit{estimated Delta} = 0.554723$) μέσω της μεθόδου του λόγου πιθανοφανειών δεδομένου ότι η παράγωγος της παραμέτρου Δ εξαρτάται από την διαδρομή του δείγματος. Στην συνέχεια επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία $m = 10000$ φορές προκειμένου να συγκρίνουμε την εκτίμηση αυτή με την εκτίμηση του Δ από τη μέθοδο της παραγώγισης κατά διαδρομή ενός Ασιατικού δικαιώματος αγοράς. Η μορφή της κατανομής της εκτιμήτριας του Δ μέσω της μεθόδου του λόγου πιθανοφανειών .



Μέσος δείγματος: 0.571073

Τυπική απόκλιση δείγματος: 0.067435

Η μορφή της κατανομής της εκτιμήτριας του Δ μέσω της μεθόδου της παραγώγισης κατά διαδρομή (pathwise derivative) βασισμένη σε $m = 10000$ επαναλήψεις της μεθόδου.



Μέσος δείγματος: 0.55882

Τυπική απόκλιση δείγματος: 0.0184346

Από τα παραπάνω αποτελέσματα παρατηρούμε ότι η μέθοδος pathwise derivative για την εκτίμηση της παραμέτρου Δ για ένα Ασιατικό δικαίωμα αγοράς έχει μικρότερη τυπική απόκλιση και μέσο τετραγωνικό σφάλμα από την μέθοδο του λόγου πιθανοφανειών. Άρα η παραγώγιση κατά διαδρομή (pathwise derivative) είναι σε αυτή την περίπτωση καλύτερη μέθοδος από αυτή του λόγου πιθανοφανειών. Παρακάτω έχουμε κατασκευάσει ένα πίνακα όπου υπάρχουν όλα τα αποτελέσματα των παραπάνω δύο μεθόδων για την κατανομή της εκτιμήτριας της παραμέτρου Δ:

	Παραγώγιση κατά διαδρομή (pathwise derivative)	**Λόγος πιθανοφανειών**	**Σχόλια**
Τυπική απόκλιση	0.0184346	0.067435	Μικρότερη τυπική απόκλιση η μέθοδος της παραγώγισης κατά διαδρομή

Και εδώ, προκειμένου να συγκρίνουμε την απόδοση των εκτιμητριών του Δ δικαιώματος Ασιατικού τύπου για διάφορες τιμές του K, καταγράφουμε $m = 10^4$ εκτιμήσεις από δείγμα μεγέθους $n = 10$. Αλλάζοντας τιμές στο K λαμβάνουμε τους παρακάτω πίνακες που αφορούν την εκτίμηση του Δ και τη τυπική της απόκλιση για κάθε μια από τις δύο παραπάνω μεθόδους.

K	Μέση εκτίμηση (PD)	Τυπική απόκλιση (PD)	Μέση εκτίμηση (LR)	Τυπική απόκλιση (LR)
70	0.894951	0.116996	0.869737	0.952893
75	0.831905	0.140566	0.823629	0.873024
80	0.752058	0.162211	0.727782	0.775004
85	0.658853	0.17391	0.661371	0.699817
90	0.55598	0.18337	0.568139	0.635003
95	0.458791	0.182236	0.49461	0.574545
100	0.372258	0.182105	0.414785	0.525004
105	0.293797	0.170924	0.342314	0.462024
110	0.228206	0.160206	0.272187	0.405081
115	0.17377	0.145742	0.223638	0.366987

Παρατηρούμε ότι οι δύο εκτιμήτριες έχουν περίπου την ίδια μέση τιμή (σημειώνεται ότι για την ακριβής τιμή του Δ δικαιώματος Ασιατικού τύπου, δεν υπάρχει κλειστός τύπος). Παρατηρούμε επίσης ότι και σε αυτή την περίπτωση όσο μεγαλώνει το K η εκτιμήτρια του λόγου πιθανοφανειών βελτιώνεται ενώ η εκτιμήτρια της παραγώγισης κατά διαδρομή αρχικά χειροτερεύει ελάχιστα μέχρι το S_0 περίπου και στην συνέχεια βελτιώνεται.

Τέλος, θα συγκρίνουμε την απόδοση των εκτιμητριών του Δ δικαιώματος Ασιατικού τύπου για διάφορες τιμές του σ, καταγράφουμε $m = 10^4$ εκτιμήσεις από δείγμα μεγέθους $n = 10$. Αλλάζοντας τιμές στο σ λαμβάνουμε τους παρακάτω πίνακες που αφορούν την εκτίμηση του Δ και τη τυπική της απόκλιση για κάθε μια από τις δύο παραπάνω μεθόδους.

σ	Μέση εκτίμηση (PD)	Τυπική απόκλιση (PD)	Μέση εκτίμηση (LR)	Τυπική απόκλιση (LR)
0.35	0.348473	0.174458	0.385858	0.485087
0.40	0.373189	0.181076	0.4106	0.519798
0.45	0.391051	0.186604	0.434731	0.546735
0.50	0.409077	0.194008	0.444892	0.562811
0.55	0.420782	0.199384	0.455186	0.578699
0.60	0.434434	0.202161	0.477297	0.603298
0.65	0.448909	0.209253	0.480702	0.618047
0.70	0.454983	0.216214	0.498477	0.663616
0.75	0.471208	0.227931	0.50663	0.670862
0.80	0.472531	0.231571	0.507754	0.687145

Παρατηρούμε επίσης ότι σε αυτή την περίπτωση όσο μεγαλώνει το σ η εκτιμήτρια του λόγου πιθανοφανειών καθώς και η εκτιμήτρια της παραγώγισης κατά διαδρομή δεν βελτιώνεται αλλά χειροτερεύει δηλαδή καθώς αυξάνεται το σ αυξάνεται και η τυπική απόκλιση του δείγματος.

4.6 Παραδείγματα Εφαρμογών

Στην ενότητα αυτή, ως εφαρμογή του υπολογισμού της παραμέτρου Δ μιας μετοχής, θα κατασκευάσουμε ένα χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης (ή αναπαραγωγής) για ένα call option επί της μετοχής θεωρώντας ότι η αξία της κινείται τυχαία σύμφωνα με την γεωμετρική κίνηση Brown $(S_t\,, t \in [0,T] \sim GBM(\mu, \sigma^2))$, και θα διερευνήσουμε την αποτελεσματικότητα της αντιστάθμισης (αναπαραγωγής του δικαιώματος). Συγκεκριμένα, παράγουμε τυχαίες διαδρομές της S και κατασκευάζουμε για κάθε μία από αυτές ένα χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης και συγκρίνουμε την τελική αξία του χαρτοφυλακίου με την τελική αξία του call option. Αν η διαφορά είναι μικρή τότε έχουμε καλή αντιστάθμιση. Τέλεια αντιστάθμιση θα έχουμε όταν το χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης αναπροσαρμόζεται συνεχώς, το οποίο είναι πρακτικά αδύνατο.

Παράδειγμα 1ο – Delta Hedging τυπικού call option

Έστω ότι στην αγορά διατίθεται ένα call option επί μιας μετοχής με χρόνο εξάσκησης T και τιμή εξάσκησης K. Θεωρούμε ότι η τιμή της μετοχής $S = \{S_t\,, t \geq 0\} \sim GBM(\mu, \sigma^2)$. Επίσης στην αγορά υπάρχει η δυνατότητα ο καθένας να δανείσει ή να δανειστεί με επιτόκιο r.

Το δυναμικό χαρτοφυλάκιο που κατασκευάζουμε θα πρέπει, σύμφωνα με γνωστό αποτέλεσμα, να περιέχει κάθε χρονική στιγμή $t \in [0,T]$, Δ_t το πλήθος μετοχές, όπου

$$\Delta_t = \Phi\left(\frac{r(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) - \log\frac{K}{S_t}}{\sigma\sqrt{T-t}}\right).$$

Επειδή δεν είναι εφικτή η συνεχής αναπροσαρμογή του χαρτοφυλακίου, στην πράξη πραγματοποιείται σε διακριτά χρονικά σημεία.

Αρχικά δανειζόμαστε ένα ποσό για να αγοράσουμε Δ_0 μετοχές και σε κάθε ένα από τα χρονικά σημεία $0, h, 2h, 3h, \dots, t = nh$ αγοράζουμε ή πωλούμε μετοχές έτσι ώστε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t να κατέχουμε Δ_t μετοχές. Δηλαδή:

- Στο χρόνο $t = 0$ αγοράζουμε Δ_0 μετοχές έχοντας δανεισθεί ποσό $\alpha 0 = -\Delta_0 S_0$ με επιτόκιο r.
- Στο χρόνο $t = h$ αγοράζουμε (ή πωλούμε αν είναι αρνητικό) $\Delta_h - \Delta_0$ μετοχές έχοντας δανεισθεί ποσό $a_h = a_0 e^{rh} - (\Delta_h - \Delta_0) S_h$.
- Στο χρόνο $t = 2h$ αγοράζουμε (ή πωλούμε αν είναι αρνητικό) $\Delta_{2h} - \Delta_h$ μετοχές έχοντας δανεισθεί ποσό $a_{2h} = a_h e^{rh} - (\Delta_{2h} - \Delta_h) S_{2h}$.
- Στο χρόνο $t = nh$ αγοράζουμε (ή πωλούμε αν είναι αρνητικό) $\Delta_{nh} - \Delta_{(n-1)h}$ μετοχές έχοντας δανεισθεί ποσό $a_{nh} = a_{(n-1)h} e^{rh} - \left(\Delta_{nh} - \Delta_{(n-1)h}\right) S_{nh}$.

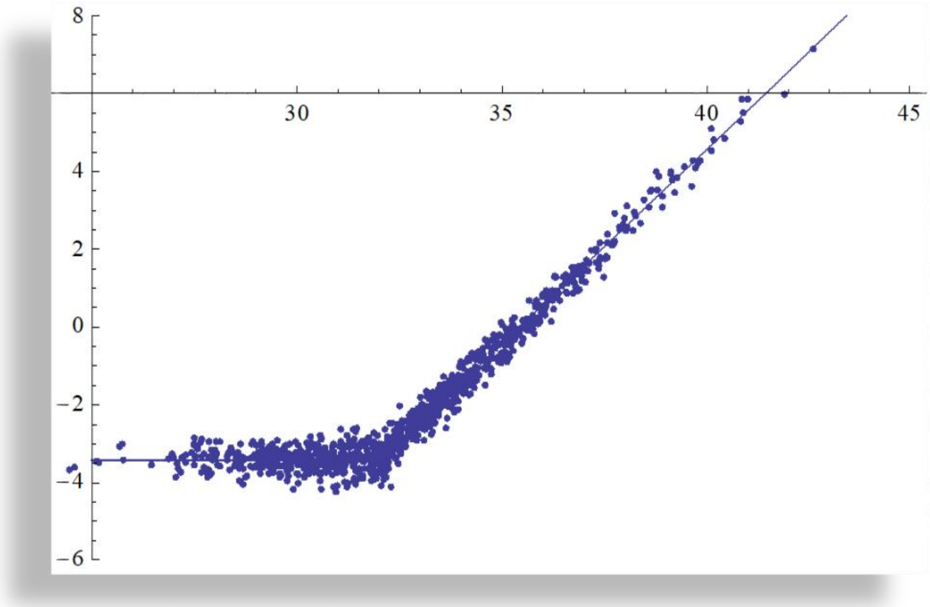
Περιγραφή αλγορίθμου:

I.	Για ένα long call Ευρωπαϊκού τύπου με χρόνο εξάσκησης T και τιμή εξάσκησης K επί μίας μετοχής το τελικό κέρδος από την χρήση του στο χρόνο T είναι: $(S_t - K)_+ - Ce^{rT}$.
II.	Σε καθένα από τους χρόνους $t_i = ih$ υπολογίζουμε τον αριθμό των μετοχών που

	πρέπει να κατέχουμε Δ_{t_i} και αν είναι μεγαλύτερος ή μικρότερος δανειζόμαστε ή επενδύουμε αντίστοιχα σε ομόλογα με επιτόκιο r.
III.	Τέλος συγκρίνουμε το τελικό κέρδος των δύο στρατηγικών.

Η υλοποίηση του παραπάνω αλγορίθμου μέσω του Mathematica είναι η εξής:

```
S0=30;r=0.2;s=0.1;t=0.8;m=0.1;n=100;K=32;
S=Table[0,{n+1}];
d=Table[0,{n+1}];
h=t/n;b={};
Do[S[[1]]=S0;d[[1]]=0;a=0;
  Do[x=(i-1)*h;
   Z=Random[NormalDistribution[0,1]];
   S[[i]]=S[[i-1]]*Exp[h*m+s*h^0.5*Z];
   d[[i]]=CDF[NormalDistribution[0,1],(r (t-x)+1/2*s^2(t-x)-
Log[K/S[[i]]])/(s*(t-x)^0.5)];
   a=a*Exp[r*h]-(d[[i]]-d[[i-1]])*S[[i]];,{i,2,n}];
  Z=Random[NormalDistribution[0,1]];
  S[[n+1]]=S[[n]]*Exp[h*m+s*h^0.5*Z];
  If[-Log[K/S[[n+1]]]>=0,d[[n+1]]=1,d[[n+1]]=0];
  a=a*Exp[r*h]-(d[[n+1]]-d[[n]])*S[[n+1]];
  a=a+d[[n+1]]*S[[n+1]];
  AppendTo[b,{S[[n+1]],a}],{1000}];
p1=ListPlot[b,PlotRange ->{6,8}];
S0=30;sigma=s;omega=(r*t+sigma^2*t/2-Log[K/S0])/(sigma*t^0.5);
C0=S0*CDF[NormalDistribution[0,1],omega]-K*Exp[-
r*t]*CDF[NormalDistribution[0,1],omega-sigma*t^0.5]
p2=Plot[Max[(s-K),0]-C0*Exp[r*t],{s,25,45}];
Show[p1,p2,PlotRange->{-6,8}]
```



Γράφημα σύγκρισης τελικού κέρδους από την χρήση ενός call option μεταξύ Black & Scholes και στρατηγικής Delta Hedging.

Παράδειγμα 2ο – Κατασκευή χαρτοφυλακίου αναπαραγωγής ενός Ασιατικού δικαιώματος.

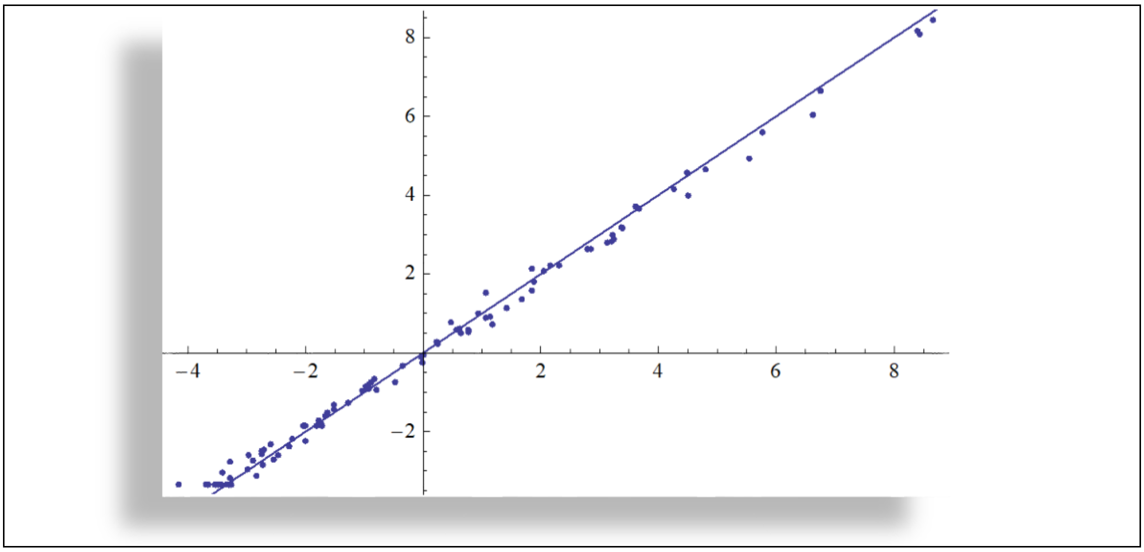
Μπορούμε τώρα μέσω της παραπάνω εκτίμησης του Δ της παραγράφου 4.3.3 να κατασκευάσουμε ένα χαρτοφυλάκιο αναπαραγωγής και ενός δικαιώματος Ασιατικού τύπου και να συγκρίνουμε την τελική αξία αυτού του χαρτοφυλακίου με το τελικό κέρδος από ένα δικαίωμα Ασιατικού τύπου (πάνω στην ίδια διαδρομή της S) προκειμένου να εξετάσουμε την απόδοση της αντιστάθμισης Δέλτα. Παρακάτω θα δώσουμε μία υλοποίηση του τελικού κέρδους ενός ασιατικού δικαιώματος μέσω του Mathematica:

```
k=10000;n=30;T=0.5;S0=42;
d=T/n;K=40;r=0.1;σ=0.2;
sdelta=0;mu=r-0.5*σ^2;c=0;
Do[S=Table[S0,{n}];
  Do[Z=RandomReal[NormalDistribution[]];
   S[[i]]=S[[i-1]]*Exp[mu*d+σ*d^0.5*Z];,{i,2,n}];
  c=c+Max[Mean[S]-K,0];,{j,1,k}];
estC=Exp[-r*T]c/k;
Print["Estimated c =",estC]
```

$$Estimated\ c\ = 3.19026$$

Παρατηρούμε ότι το εκτιμώμενο τελικό κέρδος του Ασιατικού δικαιώματος πάνω στην διαδρομή της S είναι $c = 3.19026$. Παρακάτω θα κατασκευάσουμε ένα χαρτοφυλάκιο αναπαραγωγής χρησιμοποιώντας την αξία του Ασιατικού δικαιώματος που υπολογίσαμε παραπάνω. Η υλοποίηση του δίνεται στον επόμενο πίνακα:

```
k=300;n0=30;T0=0.5;
d=T0/n0;K=40;r=0.1;σ=0.2;mu=r-0.5*σ^2;L=Table[0,{100}];
Do[S0=42;a=0;prevDelta=0;sumS0=S0;
 Do[T=d*n;sdelta=0;
  Do[S=Table[S0,{n}];
   Do[Z=RandomReal[NormalDistribution[]];
    S[[i]]=S[[i-1]]*Exp[mu*d+σ*(d)^0.5*Z];,{i,2,n}];
   m=(Total[S]+sumS0-S0)/n0;
   If[m>K,sdelta=sdelta+Exp[-r*T]*(Total[S]/n0)/S0];,{j,1,k}];
  Delta=sdelta/k;a=a*Exp[r*d]-(Delta-prevDelta)*S0;
  prevDelta=Delta;
S0=S0*Exp[mu*d+σ*(d)^0.5*RandomReal[NormalDistribution[]]];sum
S0=sumS0+S0;,{n,n0,2,-1}];
 a=a+Delta*S0;
 b=Max[sumS0/n0-K,0]-Exp[r*T0]estC;
 L[[ii]]={a,b};Print[{ii,a,b}];,{ii,1,100}]
fig1=ListPlot[L];
fig2=Plot[x,{x,-5,10}];
Show[fig1,fig2]
```



Ο ένας άξονας έχει τιμές του χαρτοφυλακίου και ο άλλος το τελικό κέρδος για το Asian option. Παρατηρούμε ότι η ευθεία προσεγγίζει ικανοποιητικά τα περισσότερα σημεία του μοντέλου καθώς δεν εμφανίζουν σημαντικές αποστάσεις από αυτήν. Άρα έχουμε αρκετά ικανοποιητική αντιστάθμιση του παραγώγου μέσω του συγκεκριμένου χαρτοφυλακίου.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Μπούτσικας Μ. (2005-2007) *Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα.* Πανεπιστημιακές Σημειώσεις Πανεπιστημίου Πειραιώς.
Μπούτσικας Μ. (2004) *Μέθοδοι Προσομοίωσης & Υπολογιστικές Στατιστικές Τεχνικές.* Πανεπιστημιακές Σημειώσεις Πανεπιστημίου Πειραιώς.

ΞΕΝΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1 Arsham, H., Feuerverger, A., McLeish, D. L., Rubinstein, R., and Kreimer, J. (1989). Sensitivity analysis and the “what if” problem in simulation analysis. *Math.Comput. Modeling 12,* 193–219.

2 Boyle, P. (1977). Options: A Monte Carlo approach *J. Financ. Econ. 4,*323–338.

3 Boyle, P., Broadie, M., and Glasserman, P. (1997). Monte Carlo methods for security pricing. *J. Econ. Dyn. Control 21*, 1267–1321.

4 Blattberg, R. C., and Gonedes, N. J. (1974). A comparison of stable and Student distributions as statistical models for stock prices. *J. Bus.*, *47*(2), 244–280.

5 Cao, X. (1987), Sensitivity estimates based on one realization of a stochastic system. *J. Stat. Comput. and Simulation 27*, 211–232.

6 Chambers, J. M., Mallows, C. L., and Stuck, B. W. (1976). A method for simulating stable random variables. *J. Am. Stat. Assoc. 71*, 340–344.

7 Cox, J. C. (1996). The constant elasticity of variance option pricing model. *J. Portfolio Manage. 22*, 15–17.

8 D.P. Kroese, T. Taimre, and Z.I. Botev. *Handbook of Monte Carlo Methods.* Wiley, Hoboken, NJ, 2011

9 D. Duffie and P. Glynn. Efficient Monte Carlo simulation for security prices. Annals of Applied Probability 5:897–905, 1995.

10 Don L. McLeinh (2005). *Monte Carlo Simulation and Finance*. John Wiley & Sons, Inc.

11 E. Greenberg. *Introduction to Bayesian Econometrics* (2nd ed.). Cambridge University Press, Cambridge, 2012.

12 F. Black and R. Litterman. Global portfolio optimization. *Financial Analysts Journal* 48:28-43, 1992.

13 F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy* 81:637–654, 1973.

14 Fishman, G. S. (1996). *Monte Carlo: Concepts, Algorithms and Applications.* Springer, New York.

15 Hui Wang (2012) *Monte Carlo Simulation with Applications to Finance*. Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series.

16 P.Brandimarte (2014) . *Handbook in Monte Carlo Simulation*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey