ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ

ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

«ΜΟΝΤΕΛΑ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΩΝ ΚΙΝΔΥΝΩΝ ΜΕ ΚΙΝΗΣΗ BROWN ΚΑΙ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΜΕΡΙΣΜΑΤΩΝ»

Κωνσταντίνα Μωρακέα

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Πειραιάς

Μάρτιος 2017

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Ε. Χατζηκωνσταντινίδης (Επιβλέπων)

- Ν. Μαχαιράς

- Γ. Ψαρράκος

Η έγκριση της Διπλωματική Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIREAUS

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

MSC IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

INSURANCE RISK MODELS PERTURBED BY BROWNIAN MOTION UNDER DIVIDEND STRATEGIES

By

Konstantina Morakea

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfillment of the requirements for the degree of MSc in Actuarial Science and Risk management

Piraeus, Greece

March 2017

Στην οικογένειά μου

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαιτέρως τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Ε. Χατζηκωνσταντινίδη, Αναπληρωτή Καθηγητή στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς, για την πολύτιμη καθοδήγησή του, την υπομονή που επέδειξε και την ουσιαστική βοήθεια του καθ' όλη τη διάρκεια της συνεργασίας μας.

Τέλος, θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στους γονείς μου που μου συμπαραστέκονται και στηρίζουν ηθικά και οικονομικά κάθε προσπάθεια και επιλογή μου και σε όλους τους πολύ κοντινούς μου ανθρώπους για την υπομονή και την υποστήριξη τους.

Κωνσταντίνα Μωρακέα

Μάρτιος 2017

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η εξέλιξη των τιμών των συνολικών αποζημιώσεων, η διαδικασία πλεονάσματος και η πιθανότητα χρεοκοπίας κατά τη διάρκεια του χρόνου είναι βασικά αντικείμενα μελέτης της Θεωρίας Κινδύνου. Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η μελέτη διαφόρων μοντέλων κινδύνου.

Στο Κεφάλαιο 1 θα μελετήσουμε το κλασικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου και θα δώσουμε βασικά αποτελέσματα χρησιμοποιώντας την θεμελιώδη εξίσωση των Gerber και Shiu.

Στο Κεφάλαιο 2 γίνεται γενίκευση του κλασικού μοντέλου και της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης για την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής θεωρώντας την προσθήκη ενός παράγοντα διάχυσης (διαδικασία Wiener). Δίνονται αναλυτικές εκφράσεις των από κοινού και οριακών συναρτήσεων κατανομών του πλεονάσματος πριν τη στιγμή της χρεοκοπίας και του ελλείμματός ακριβώς μετά τη στιγμή της χρεοκοπίας.

Στο Κεφάλαιο 3 θα μελετήσουμε ένα ανανεωτικό μοντέλο, το μοντέλο Sparre Andersen, το οποίο διαταράσσεται από έναν όρο διάχυσης, με την υπόθεση ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ των αφίξεων των απαιτήσεων ακολουθούν μια γενικευμένη Erlang κατανομή. Αυτό οδηγεί σε μια γενίκευση της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης για την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής στο χρόνο χρεοκοπίας όπως δίνεται από τους Tsai και Willmot (2002a, 2002b) και Gerber και Shiu (2003a, 2003b).

Στο Κεφάλαιο 4 θα μελετηθεί η στρατηγική πολλαπλών μερισμάτων του κλασικού μοντέλου, επηρεασμένο από έναν όρο διάχυσης και η συμπεριφορά της προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής των Gerber και Shiu.

ABSTRACT

The purpose of this thesis is the study of various risk models and the expected discounted dividend payments before ruin for stochastic surplus process.

In Chapter 1 we give a detailed introduction of the classical risk model and we present known results for the Gerber-Shiu function in this model. We studies in detail the solution of a defective renewal equation which involves the time of ruin, the surplus immediately before ruin, and the deficit at the time of ruin. The analysis is simplified by introduction and analysis of a related compound geometric distribution, which is studied in detail.

In Chapter 2 we derive explicit expressions for the discounted joint and marginal distribution functions of the surplus immediately prior to the time of ruin and the deficit at the time of ruin, and for the discounted distribution function of the amount of the claim causing ruin, based on the surplus process of ruin theory with an independent diffusion process. Furthermore, we show that these distribution functions satisfy defective renewal equations.

In Chapter 3 we consider a Sparre Andersen risk process that is perturbed by an independent diffusion process, in which claim inter-arrival times have a generalized Erlang(n) distribution (i.e. as the sum of n independent exponentials, with possibly different means). This leads to a generalization of the defective renewal equations for the expected discounted penalty function at the time of ruin given by Tsai and Willmot (2002a, 2002b) and Gerber and Shiu (2003a, 2003b). The limiting behavior of the expected discounted penalty function is studied, when the dispersion coefficient goes to zero.

In Chapter 4 we consider a multi-layer compound Poisson surplus process perturbed by diffusion and examine the behavior of the Gerber–Shiu discounted penalty function. We derive the general solution to a certain second order integro-differential equation. This permits us to provide explicit expressions for the Gerber–Shiu function depending on the current surplus level.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΩΝ.....15

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ 15

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΤΟ ΚΛΑΣΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ.....17

Εισαγωγή.....17

1.1. Η στοχαστική διαδικασία του πλεονάσματος.....17

Η απαριθμήτρια ανέλιξη Poisson.....18

Η στοχαστική διαδικασία του πλεονάσματος.....19

Ο χρόνος χρεοκοπίας.....20

Η πιθανότητα χρεοκοπίας.....21

1.2. Η συνάρτηση των Gerber - Shiu.....29

Η προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής.....29

Η γενικευμένη εξίσωση του Lundberg.....34

Ο τελεστής Dickson – Hipp.....35

Η συνάρτηση κατανομής των κλιμακωτών υψών.....39

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΤΟ ΚΛΑΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΜΕ ΕΝΑΝ ΟΡΟ ΔΙΑΧΥΣΗΣ.....41

2.1. Η κίνηση Brown.....41

2.2. Η στοχαστική διαδικασία του πλεονάσματος.....41

2.3. Ασυμπτωτικός τύπος για την $\phi(u)$ και η αντίστοιχη κατανομή του ύψους απαιτήσεων.....48

2.4. Από κοινού προεξοφλημένες συναρτήσεις κατανομής και πυκνότητας πιθανότητας των $U(T-)$ και $|U(T)|$ 56

2.5. Προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής και πυκνότητας πιθανότητας του $|U(T)|$ 63

2.6. Προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής και πυκνότητας πιθανότητας του $U(T-)$ 68

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΤΟ ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΜΕ ΕΝΑΝ ΟΡΟ ΔΙΑΧΥΣΗΣ.....77

Η Sparre Andersen διαδικασία πλεονάσματος.....77

3.1. Ολοκληροδιαφορικές εξισώσει για τα $\phi_d(u)$, $\phi_s(u)$.....79

3.2. Μία γενικευμένη εξίσωση του Lundberg.....81

3.3. Κύρια αποτελέσματα.....83

3.4. Καθορισμός αρχικών συνθηκών.....91

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΤΟ ΚΛΑΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΜΕ ΕΝΑΝ ΟΡΟ ΔΙΑΧΥΣΗΣ ΚΑΙ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΜΕΡΙΣΜΑΤΩΝ.....95

4.1. Καθορισμός αρχικών συνθηκών.....97

4.2. Αναλυτικές εκφράσεις για την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής.....103

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....111

ΕΠΕΞΗΓΗΣΕΙΣ ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΩΝ

$\mathbb{N}$	σύνολο των φυσικών αριθμών
$\mathbb{R}$	σύνολο των πραγματικών αριθμών
$\mathcal{R}$	πραγματικό μέρος του μιγαδικού αριθμού χ
$*$	τελεστής συνέλιξης μεταξύ πραγματικών συναρτήσεων
$I(A)$	δείκτρια συνάρτηση του συνόλου A
$f^{(k)}(x)$	παράγωγος k-τάξης της πραγματικής συνάρτησης $f(x)$
$\frac{\partial}{\partial u}$	τελεστής παραγώγισης ως προς u
$\mathbb{C}$	σύνολο των μιγαδικών αριθμών

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Σχήμα 1.1. 19

Σχήμα 1.2. 21

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

ΤΟ ΚΛΑΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Εισαγωγή

Η θεωρητική θεμελίωση του κλασικού μοντέλου της θεωρίας χρεωκοπίας γνωστή και ως μοντέλο Cramer-Lundberg εισήχθη αρχικά το 1903 από τον Σουηδό αναλογιστή Filip Lundberg στη διδακτορική διατριβή του "Approximerad fremstallnig au sannolikheets funktionen". Βασιζόμενος στη διατριβή του Lundberg, ο Harald Cramer το 1930 δημοσίευσε μια σειρά από εργασίες πάνω στη θεωρία κινδύνου στις οποίες εισήγαγε τη θεωρία των στοχαστικών διαδικασιών. Η βασική παραδοχή στο κλασικό μοντέλο κινδύνου είναι ότι το πλήθος των κινδύνων (ζημιών) σε ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο περιγράφεται από τη στοχαστική διαδικασία Poisson. Δηλαδή, οι ενδιάμεσοι χρόνοι αφίξεων των κινδύνων είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την εκθετική κατανομή.

Το 1957 ο Νορβηγός Sparre Andersen γενίκευσε το κλασικό μοντέλο όταν παρουσίασε στο 15ο Αναλογιστικό συνέδριο στη Νέα Υόρκη, την Εργασία του με τίτλο "On the collective theory of risk in case of contagion between the claims" στην οποία υπέθεσε ότι το πλήθος των κινδύνων σε ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο περιγράφεται από μία ανανεωτική στοχαστική διαδικασία. Δηλαδή, οι ενδιάμεσοι χρόνοι αφίξεων των κινδύνων είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που δεν ακολουθούν κατ' ανάγκη την εκθετική κατανομή. Στη συνέχεια ακολούθησαν αρκετές γενικεύσεις του κλασικού μοντέλου, χρησιμοποιώντας διάφορες κατανομές για την περιγραφή των ενδιάμεσων χρόνων αφίξεων των κινδύνων. Ενδιαφέρον μεγάλο παρουσιάζουν οι μελέτες του μοντέλου μέσω της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής που εισήγαγαν για πρώτη φορά οι Gerber-Shiu το 1998.

1.1. Η στοχαστική διαδικασία του πλεονάσματος

Ένα βασικό πρόβλημα της κλασικής θεωρίας κινδύνου είναι ο υπολογισμός της πιθανότητας χρεωκοπίας, δηλαδή της πιθανότητας να μην επαρκούν τα αποθεματικά για την κάλυψη των συνολικών αποζημιώσεων. Τα αποθεματικά ορίζονται ως η διαφορά ανάμεσα στο ενεργητικό της ασφαλιστικής επιχείρησης και στη βέλτιστη αναλογιστική εκτίμηση των συνολικών υποχρεώσεων. Στην ασφαλιστική ορολογία, τα αποθεματικά χαρακτηρίζονται με τον όρο πλεόνασμα.

Ο προσδιορισμός του πλήθους των κινδύνων, στους οποίους εκτίθεται η ασφαλιστική, είναι το πιο σημαντικό βήμα για τη μοντελοποίηση της στοχαστικής διαδικασίας του πλεονάσματος.

Έστω $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$ μία στοχαστική διαδικασία η οποία παριστά τον αριθμό των κινδύνων (απαιτήσεων) στο χρονικό διάστημα $[0,t]$. Η $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$ ονομάζεται απαριθμήτρια διαδικασία.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1. *Μία απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη* $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$ *καλείται ανέλιξη Poisson αν ισχύουν τα εξής,*

- $N(0)=0$
- *Σε ένα πολύ μικρό διάστημα* h *μπορεί να συμβεί το πολύ ένα γεγονός και η πιθανότητα να συμβεί αυτό το γεγονός είναι ανάλογη του διαστήματος:*

$$P[N(t+h)=n+\kappa \mid N(t)=n]=\begin{cases} \lambda h+o(h) \ , \ \text{αν } \kappa=1 \\ 1-\lambda h+o(h) \ , \ \text{αν } \kappa=0 \\ o(h) \ , \ \text{αν } \kappa\neq 0,1 \end{cases} .$$

Εδώ το σύμβολο $o(h)$ *καλείται παράγοντας διόρθωσης και δηλώνει μια ποσότητα που συγκλίνει στο ο πιο γρήγορα από το* h *καθώς* $h\to 0^{+}$ *και άρα μπορεί να θεωρηθεί κάτι το αμελητέο αν συγκριθεί με αυτό.*

- *Για κάθε* $t<s$, *η τυχαία μεταβλητή* $N(s)-N(t)$ *είναι ανεξάρτητη της μεταβλητής* $N(t)$. *Γενικά για δύο διαστήματα ξένα μεταξύ τους, οι τυχαίες μεταβλητές, που παραστούν τον αριθμό των γεγονότων σε καθένα από αυτά, είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.*

Μια ανέλιξη Poisson, όπως και κάθε απαριθμήτρια ανέλιξη, ορίζει μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $T_1,T_2,T_3,\ldots$ που λέγεται ακολουθία των χρόνων άφιξης (κάποιου γεγονότος) με τον ακόλουθο τρόπο,

$$T_1=\min\{t:N(t)=1\}$$

$$T_2=\min\{t:N(t)=2\}$$

$$T_3=\min\{t:N(t)=3\}$$

$$\ldots$$

$$T_\kappa=\min\{t:N(t)=\kappa\} .$$

Έτσι η τυχαία μεταβλητή T_κ παριστάνει το χρόνο άφιξης του κ-γεγονότος.

Με βάση αυτή την ακολουθία, μπορούμε να ορίσουμε την ακολουθία $\{W_\kappa : \kappa=1,2,\ldots\}$ ως εξής,

$$W_1=T_1$$

$$W_2=T_2-T_1$$

$$W_3=T_3-T_2$$

$$\ldots$$

$$W_\kappa=T_\kappa-T_{\kappa-1} .$$

Οι μεταβλητές W_κ ονομάζονται ενδιάμεσοι χρόνοι ή χρόνοι αναμονής.

Δύο βασικές ιδιότητες μιας ανέλιξης Poisson είναι οι ακόλουθες:

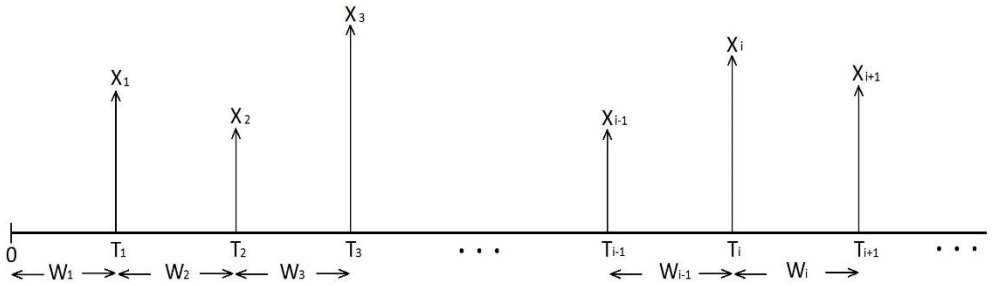
- Για κάθε (σταθερό) t, η τυχαία μεταβλητή $N(t)$ ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λt. Συμβολικά $N(t) \sim P(\lambda t)$.

Δηλαδή $P[N(t) = \kappa] = e^{-\lambda t} \dfrac{(\lambda t)^{\kappa}}{\kappa!}, \quad \kappa = 0, 1, 2, \ldots$

- Οι ενδιάμεσοι χρόνοι αφίξεων $W_1, W_2, W_3, \ldots$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές και καθεμιά ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ.

Στην περίπτωση αυτή, η στοχαστική διαδικασία των χρόνων άφιξης $\{T_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ ονομάζεται ανανεωτική διαδικασία, διότι με κάθε άφιξη μπορεί να θεωρηθεί πως ξεκινά πάλι από την αρχή όσον αφορά τις μελλοντικές αφίξεις.

Σχηματικά έχουμε,



ΣΧΗΜΑ 1.1. *X_i τα μεγέθη των απαιτήσεων, W_i οι ενδιάμεσοι χρόνοι, T_i οι χρόνοι αφίξεων.*

Παρακολουθώντας τα έξοδα μιας εταιρείας (αποζημιώσεις), καθώς αυτά εξελίσσονται διαρκώς, το κύριο ενδιαφέρον είναι να δούμε αν το πλεόνασμα (έσοδα - έξοδα) γίνει σε κάποια χρονική στιγμή αρνητικό.

Έστω $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$ μια ανέλιξη Poisson που απαριθμεί το πλήθος των κινδύνων στο $[0, t]$ και X_i, $i \geq 1$ το μέγεθος της i-οστής ζημιάς. Τότε οι συνολικές απαιτήσεις στο $[0, t]$ παριστάνονται από τη σύνθετη στοχαστική διαδικασία $\{S(t), t \geq 0\}$, όπου:

$$S(t) = \begin{cases} 0 \quad , \quad \text{αν } N(t) = 0 \\ \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \quad , \quad \text{αν } \mathrm{N}(t) > 0 \end{cases} .$$

Οι X_i θεωρούνται ανεξάρτητες και ισόνομες και είναι επίσης ανεξάρτητες από τον αριθμό των αποζημιώσεων $N(t)$, σε ένα διάστημα.

Έστω $P(t)$ μια συνάρτηση που εκφράζει τα συνολικά έσοδα μιας εταιρείας στο χρονικό διάστημα $[0, t]$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2. *Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος* $\{U(t), t \geq 0\}$ *ορίζεται ως εξής,*

$$U(t) = u + P(t) - S(t), \quad t \geq 0,$$

όπου $u = U(0) \geq 0$ *είναι το αρχικό απόθεμα.*

Η $P(t)$ *είναι μια γραμμική συνάρτηση της μορφής* $P(t) = ct$ *για κάποιο* $c > 0$*, όπου* c *είναι ο ρυθμός είσπραξης ασφαλίστρου στη μονάδα του χρόνου.*

Οπότε,

$$U(t) = u + ct - \sum_{i-1}^{N(t)} X_i \ .$$

Μια βασική υπόθεση που κάνουμε πάντοτε στο κλασικό μοντέλο είναι ότι:

$$ct > E[S(t)] \ .$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.1. *Η σχέση* $ct > E[S(t)]$ *ονομάζεται συνθήκη καθαρού κέρδους και εξασφαλίζει ότι τα έσοδα της εταιρίας είναι περισσότερα από τα αναμενόμενα έξοδα.*

Ισχύει,

$$ct > E[S(t)]$$

$$ct > E(X)E[N(t)]$$

$$ct > \lambda t E(X)$$

$$c > \lambda E(X)$$

$$c > \lambda \mu_1 ,$$

όπου το λ *εκφράζει το αναμενόμενο πλήθος των αποζημιώσεων στη μονάδα του χρόνου και το* μ_1 *τη μέση αποζημίωση.*

Θεωρούμε $c = (1+\theta)\lambda\mu_1$ το επιβαρυμένο ασφάλιστρο, όπου το θ ονομάζεται περιθώριο ασφαλείας και ορίζεται από τη σχέση:

$$\theta = \frac{c}{\lambda \mu_1} - 1 \ .$$

Είναι προφανές από τη συνθήκη του καθαρού κέρδους ότι το θ παίρνει πάντα θετικές τιμές και όσο μεγαλώνει τόσο μικραίνει η πιθανότητα χρεοκοπίας (βλέπε ΟΡΙΣΜΟΣ 1.6.). Έτσι, το θ μπορεί να θεωρηθεί ότι εκφράζει το αναμενόμενο ποσοστό κέρδους για τον ασφαλιστή.

Από τον ορισμό της συνάρτησης πλεονάσματος, είναι προφανές ότι αυτή μπορεί να πάρει και αρνητικές τιμές κατά τις χρονικές στιγμές T_i εμφάνισης των κινδύνων. Όταν η διαδικασία πλεονάσματος γίνει για πρώτη φορά αρνητική τότε έχουμε χρεοκοπία.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.3. *Η χρονική στιγμή* T *κατά την οποία η διαδικασία πλεονάσματος γίνεται για πρώτη φορά αρνητική, καλείται χρόνος χρεοκοπίας και ορίζεται από τη σχέση*

$$T \begin{cases} \inf\{t : U(t) < 0\} \\ 0 \ , \ \text{αν}\, U(t) > 0 \ \textit{για καθε}\ t \geq 0 \end{cases} .$$

Με βάση τον ορισμό, βλέπουμε ότι ο χρόνος χρεοκοπίας είναι μια ελλειμματική τυχαία μεταβλητή. Με τον όρο ελλειμματική τυχαία μεταβλητή χαρακτηρίζουμε μία τυχαία μεταβλητή όταν μπορεί με θετική πιθανότητα να πάρει την τιμή άπειρο, δηλαδή

$$P(T < \infty) < 1 \quad \text{ή} \quad P(T = \infty) > 0 \ .$$

Δύο τυχαίες μεταβλητές που είναι συναφείς με τη στιγμή της χρεοκοπίας είναι το έλλειμα τη στιγμή της χρεοκοπίας και το πλεόνασμα ακριβώς πριν τη στιγμή της χρεοκοπίας.

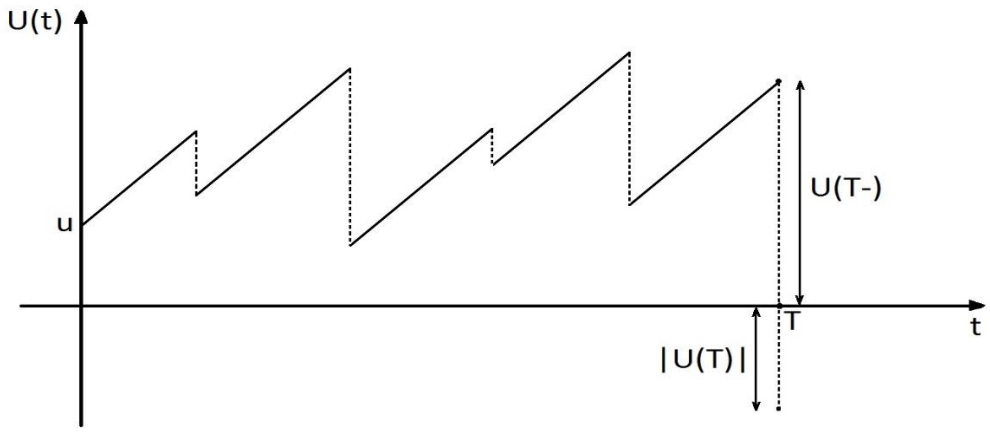
ΟΡΙΣΜΟΣ 1.4. *Η τυχαία μεταβλητή η οποία εκφράζει το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος, κάτω από το μηδέν, τη χρονική στιγμή* $t = T$ *ονομάζεται έλλειμα (deficit) τη στιγμή της χρεοκοπίας και συμβολίζεται με* $U(T)$.

Επειδή το $U(T)$ αναγκαστικά θα παίρνει αρνητική τιμή, συνήθως, το εξετάζουμε κατ' απόλυτη τιμή: $|U(T)| = -U(T)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.5. *Η τυχαία μεταβλητή η οποία εκφράζει το μέγεθος του πλεονάσματος πριν τη χρονική στιγμή* $t = T$ *ονομάζεται πλεόνασμα (surplus) πριν τη στιγμή της χρεοκοπίας και συμβολίζεται με* $U(T-)$.

$$U(T-) = \lim_{t \to T^-} U(T) \, .$$

Σχηματικά έχουμε,



ΣΧΗΜΑ 1.2. *u το αρχικό απόθεμα, το* $U(T-)$ *το πλεόνασμα πριν τη στιγμή της χρεοκοπίας,* $|U(T)|$ *το έλλειμα τη στιγμή της χρεοκοπίας.*

Με βάση τους παραπάνω ορισμούς, η πιθανότητα χρεοκοπίας ορίζεται ως εξής.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.6. *Η πιθανότητα χρεοκοπίας (probability of ruin) για αρχικό απόθεμα* $u \geq 0$ *ορίζεται από τη σχέση*

$$\psi(u) = P[T < \infty \,|\, U(0) = u] \, .$$

Η πιθανότητα να μην εμφανίζεται χρεοκοπία, ονομάζεται πιθανότητα μη-χρεοκοπίας, συμβολίζεται με $\delta(u)$ *και δίνεται από τη σχέση:* $\delta(u) = 1 - \psi(u)$.

Η $\delta(u)$ είναι μια μεικτή κατανομή, αφού $\delta(0) > 0$, δηλαδή η πιθανότητα μη χρεοκοπίας με μηδέν αρχικό αποθεματικό είναι θετική, ενώ η $\delta(u)$ είναι συνεχής στο $(0, \infty)$. Ένα πρώτο αποτέλεσμα για τη συνάρτηση μη χρεοκοπίας είναι το παρακάτω.

Στο κλασικό μοντέλο, η συνάρτηση $\delta(u)$ ικανοποιεί την ανανεωτική εξίσωση

$$\delta'(u) = \frac{\lambda}{c}\delta(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \delta(u-x) f(x)dx$$

η οποία είναι μία ολοκληροδιαφορική εξίσωση για το $\delta(u)$, όπου η $f(x)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $F(x)$ που ορίζεται στο ακόλουθο θεώρημα.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.7. *Κάθε εξίσωση της μορφής*

$$Z(t) = g(t) + \phi\int_0^t Z(t-x)dF(x),$$

όπου ϕ μια σταθερά έτσι ώστε $0 < \phi \le 1$, g μία φραγμένη συνάρτηση, F μία αθροιστική συνάρτηση κατανομής και Z μια άγνωστη συνάρτηση, λέγεται εξίσωση ανανεωτικού τύπου ή αλλιώς ανανεωτική εξίσωση.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.8. *Οι εξισώσεις ανανεωτικού τύπου για τις οποίες ισχύει $0 < \phi < 1$ ονομάζονται ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις (defective renewal equation).*

Στο κλασικό μοντέλο η $\delta(u)$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$\delta(u) = \delta(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \delta(u-x)\overline{F}(x)dx, \tag{1.1}$$

με $u \ge 0$ και $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$ η ουρά της κατανομής των αποζημιώσεων και $f(x)$ η συνάρτηση πυκνότητας - πιθανότητας των αποζημιώσεων.

Με βάση το παραπάνω μπορούμε να υπολογίσουμε τη πιθανότητα μη χρεοκοπίας όταν το αρχικό αποθεματικό είναι μηδέν, δηλαδή το $\delta(0)$.

Παίρνοντας όρια, για $u \to \infty$, στα δύο μέλη της (1.1), έχουμε,

$$1 = \lim_{u\to\infty}\delta(u) = \delta(0) + \frac{\lambda}{c}\lim_{u\to\infty}\int_0^u \delta(u-x)\overline{F}(x)dx. \tag{1.2}$$

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{u\to\infty}\delta(u-x) = 1$$

και

$$\lim_{u\to\infty}\int_0^u \overline{F}(x)dx = \int_0^\infty \overline{F}(x)dx = \mu_1.$$

Αλλάζοντας τη σειρά ολοκληρώματος και ορίου στην (1.2), παίρνουμε,

$$1 = \delta(0) + \frac{\lambda\mu_1}{c}$$

$$\delta(0) = 1 - \frac{\lambda\mu_1}{c}$$

$$\delta(0) = \frac{\theta}{1+\theta}.$$

Κατά συνέπεια, η πιθανότητα χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό μηδέν δίνεται από τη σχέση,

$$\psi(0) = \frac{1}{1+\theta}$$

Αντικαθιστώντας στην (1.1) τα παραπάνω προκύπτει,

$$\delta(u) = \frac{\theta}{1+\theta} + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \delta(u-x)\overline{F}(x)dx$$

$$\delta(u) = 1 - \frac{\lambda\mu_1}{c} + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \delta(u-x)\overline{F}(x)dx, \qquad (1.3)$$

η οποία είναι μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1.1. *Έστω ότι οι αποζημιώσεις ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο* $\mu > 0$. *Τότε*

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\theta} e^{-\frac{\theta\mu}{1+\theta}u} \quad , \quad u \geq 0 .$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Όπως είδαμε προηγούμενα, η $\delta(u)$ ικανοποιεί την ολοκληροδιαφορική εξίσωση

$$\delta'(u) = \frac{\lambda}{c}\delta(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \delta(u-x) f(x)dx$$

$$= \frac{\lambda}{c}\delta(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \delta(u-x)\mu e^{-\mu x}dx .$$

Θέτοντας $u - x = y$, παίρνουμε

$$\delta'(u) = \frac{\lambda}{c}\delta(u) - \frac{\lambda\mu}{c}\int_0^u \delta(y)e^{-\mu(u-y)}dy$$

$$= \frac{\lambda}{c}\delta(u) - \frac{\lambda\mu}{c}e^{-\mu u}\int_0^u \delta(y)e^{\mu y}dy ,$$

$$\delta''(u) = \frac{\lambda}{c}\delta'(u) - \frac{\lambda\mu^2}{c}e^{-\mu u}\int_0^u \delta(y)e^{\mu y}dy - \frac{\lambda\mu}{c}e^{-\mu u}\delta(u)e^{\mu u}$$

$$= \frac{\lambda}{c}\delta'(u) + \mu\left(\frac{\lambda}{c}\delta(u) - \delta'(u)\right) - \frac{\lambda\mu}{c}\delta(u)$$

$$= \frac{\lambda}{c}\delta'(u) - \mu\delta'(u)$$

$$= \left(\frac{\lambda}{c} - \mu\right)\delta'(u) .$$

Επίσης, ισχύει

$$c = (1+\theta)\lambda \mathrm{E}(\mathrm{X})$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{\lambda}{c}=\frac{1}{(1+\theta)E(X)}=\frac{\mu}{1+\theta},$$

άρα,

$$\frac{\lambda}{c}-\mu=\frac{\mu}{1+\theta}-\mu=-\frac{\theta\mu}{1+\theta}.$$

Οπότε,

$$\delta''(u)=-\frac{\theta\mu}{1+\theta}\delta'(u)$$

$$\frac{\delta''(u)}{\delta'(u)}=-\frac{\theta\mu}{1+\theta}$$

$$\int_0^u\frac{\delta''(s)}{\delta'(s)}ds=-\frac{\theta\mu}{1+\theta}\int_0^u ds$$

$$\ln\delta'(s)\,|_{s=0}^{u}=-\frac{\theta\mu}{1+\theta}u$$

$$\ln\delta'(u)-\ln\delta'(0)=-\frac{\theta\mu}{1+\theta}u$$

$$\ln\delta'(u)=-\frac{\theta\mu}{1+\theta}u+\ln\delta'(0).$$

Από την $\delta'(u)$, για $u=0$, παίρνουμε

$$\delta'(0)=\frac{\lambda}{c}\delta(0)=\frac{\lambda}{c}\cdot\frac{\theta}{1+\theta}=\frac{\mu}{1+\theta}\cdot\frac{\theta}{1+\theta}=\frac{\theta\mu}{(1+\theta)^2},$$

άρα,

$$\ln\delta'(u)=-\frac{\theta\mu}{1+\theta}u+\ln\frac{\theta\mu}{(1+\theta)^2}$$

$$\delta'(u)=e^{-\frac{\theta\mu}{1+\theta}u+\ln\frac{\theta\mu}{(1+\theta)^2}}=\frac{\theta\mu}{(1+\theta)^2}e^{-\frac{\theta\mu}{1+\theta}u}$$

$$\int_0^u\delta'(s)ds=\frac{\theta\mu}{(1+\theta)^2}\int_0^u e^{-\frac{\theta\mu}{1+\theta}s}ds$$

$$\delta(u)-\delta(0)=\frac{\theta\mu}{(1+\theta)^2}\int_0^u e^{-\frac{\theta\mu}{1+\theta}s}ds=\frac{1}{1+\theta}\int_0^u\frac{\theta\mu}{1+\theta}e^{-\frac{\theta\mu}{1+\theta}s}ds$$

$$\delta(u)=\frac{\theta}{1+\theta}+\frac{1}{1+\theta}\left[1-e^{-\frac{\theta\mu}{1+\theta}u}\right]$$

$$\delta(u) = 1 - \frac{1}{1+\theta} e^{-\frac{\theta\mu}{1+\theta}u}$$

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\theta} e^{-\frac{\theta\mu}{1+\theta}u} \quad , \quad u \geq 0 .$$

□

Στη συνέχεια θα ορίσουμε μια ειδική ποσότητα στο κλασικό μοντέλο της θεωρία κινδύνου, τον συντελεστή προσαρμογής R, ο οποίος θα μας βοηθήσει να βρούμε μια εκτίμηση της πιθανότητας χρεοκοπίας $\psi(u)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.9. *Έστω R η μοναδική θετική λύση της εξίσωσης*

$$1 + (1+\theta)\mu_1 r = M_x(r) \ , \tag{1.4}$$

όπου $M_x(r) = E(e^{rx})$ η ροπογεννήτρια των αποζημιώσεων. Αν υπάρχει μία τέτοια λύση, τότε αυτή καλείται συντελεστής προσαρμογής (Adjustment Coefficient).

Επειδή, όπως είδαμε, ισχύει

$$c = (1+\theta)\lambda\mu_1$$

$$(1+\theta)\mu_1 = \frac{c}{\lambda} ,$$

η εξίσωση (1.4) γίνεται, ισοδύναμα,

$$\lambda + cr = \lambda M_x(r) .$$

Στην περίπτωση που η ροπογεννήτρια των αποζημιώσεων δεν υπάρχει (περίπτωση της Pareto) τότε χρησιμοποιούνται ασυμπτωτικές προσεγγίσεις για την εκτίμηση της πιθανότητας χρεοκοπίας.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ 1.1. Ο συντελεστής προσαρμογής R είναι ανεξάρτητος της παραμέτρου λ (συχνότητα του κινδύνου) και εξαρτάται μόνο από το περιθώριο ασφαλείας θ και από τα χαρακτηριστικά του ύψους της αποζημίωσης, δηλαδή από τη ροπογεννήτρια των αποζημιώσεων και από τη μέση τιμή. Επίσης, η (1.4) έχει την τετριμμένη λύση $r = 0$. Αν όμως $\theta > 0$, τότε μπορεί να υπάρχει και θετική λύση, που είναι η τιμή R.

Μία πολύ σημαντική ανισότητα στο κλασικό μοντέλο είναι η ανισότητα του Lundberg, η οποία συνδέει την πιθανότητα χρεοκοπίας με τον συντελεστή προσαρμογής δίνοντας ένα άνω φράγμα για τη συνάρτηση χρεοκοπίας. Η ανισότητα του Lundberg είναι σημαντική γιατί μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εξετασθεί η αλληλεπίδραση μεταξύ του αρχικού αποθεματικού u και του περιθωρίου ασφαλείας θ, που είναι δύο παράμετροι κάτω υπό τον έλεγχο της ασφαλιστικής εταιρείας.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.10. *Όταν γνωρίζουμε την ύπαρξη του συντελεστή προσαρμογής R, ένα άνω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας είναι,*

$$\psi(u) \leq e^{-Ru} \quad , \quad u \geq 0 .$$

Η σχέση αυτή είναι γνωστή ως ανισότητα του Lundberg.

Παρατηρούμε ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο συντελεστής προσαρμογής, τόσο μικρότερη είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας για δεδομένο αρχικό αποθεματικό. Επίσης για δεδομένο R, όσο μεγαλύτερο αρχικό αποθεματικό έχουμε, τόσο μικρότερη είναι και πάλι η πιθανότητα χρεοκοπίας.

Ένα ακόμα θεμελιώδες αποτέλεσμα στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου αποτελεί ο ασυμπτωτικός τύπος Cramer – Lundberg.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.2. *Με την προϋπόθεση ότι* $\int_0^\infty xe^{Rx}\overline{F}(x)dx < \infty$, *η πιθανότητα χρεοκοπίας* $\psi(u)$, *ικανοποιεί τη σχέση*

$$\psi(u) \approx Ce^{-Ru} \quad \text{καθώς } u \to \infty,$$

επομένως

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\psi(u)}{e^{-Ru}} = C,$$

όπου η σταθερά $C > 0$ *υπολογίζεται από τον τύπο*

$$C = \frac{\theta\mu_1}{R\int_0^\infty xe^{Rx}\overline{F}(x)dx}.$$

Η συνάρτηση Ce^{-Ru} *αποτελεί την ασυμπτωτική προσέγγιση της πιθανότητας χρεοκοπίας.*

Μια άλλη μεταβλητή με ενδιαφέρων για τη θεωρία κινδύνου είναι το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό u.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.11. *Το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό* u *συμβολίζεται με* L_i, *για* $i = 1, 2, ..., K$.

Αν το αρχικό αποθεματικό είναι u, τότε η πιθανότητα το πλεόνασμα να πέσει κάποια στιγμή κάτω από το u ισούται με $\psi(0)$ (η πιθανότητα χρεοκοπίας όταν ξεκινάω με αρχικό απόθεμα μηδέν).

Η πρώτη πτώση του πλεονάσματος κάτω από την τιμή u συμβαίνει την χρονική στιγμή t_1 και το πλεόνασμα τη στιγμή αυτή είναι $u_1 = U(t_1)$.

Οπότε,

$$L_1 = u - u_1 .$$

Μια άλλη ονομασία που χρησιμοποιείται για τις τυχαίες μεταβλητές L_i είναι τα κλιμακωτά ύψη.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.12. *Η τυχαία μεταβλητή που δηλώνει το πλήθος των κλιμακωτών υψών ορίζεται ως* K.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.3. *Η τυχαία μεταβλητή* K *,που δηλώνει το πλήθος των κλιμακωτών υψών, ακολουθεί γεωμετρική κατανομή.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$P(K=0)=\delta(0)=\frac{\theta}{1+\theta},$$

$$P(K=1)=\psi(0)\delta(0)=\frac{1}{1+\theta}\cdot\frac{\theta}{1+\theta},$$

$$P(K=2)=[\psi(0)]^2\delta(0)=\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^2\frac{\theta}{1+\theta}.$$

Και γενικά,

$$P(K=k)=[\psi(0)]^k\delta(0)=\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^k\frac{\theta}{1+\theta},$$

για $k=0,1,2,\ldots$ δηλαδή η K ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή.

□

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.13. *Στο κλασικό μοντέλο, αν θεωρήσουμε τη σύνθετη τυχαία μεταβλητή*

$$L=L_1+L_2+\ldots+L_K=\sum_{i=1}^{K}L_i\ ,$$

τότε βλέπουμε ότι η L παριστάνει τη συνολική πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό u. Η L ονομάζεται μέγιστη σωρευτική απώλεια και η κατανομή της συνδέεται με την πιθανότητα χρεοκοπίας.

Παρατηρούμε ότι τα $L_1,L_2,L_3,\ldots$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές και η κατανομή της L είναι μεικτή, αφού η L μπορεί να πάρει την τιμή μηδέν με θετική πιθανότητα, ενώ η κατανομή της στο $(0,\infty)$ είναι συνεχής. Εφόσον η μεταβλητή K ακολουθεί γεωμετρική κατανομή, η κατανομή της L θα είναι σύνθετη γεωμετρική.

Η πιθανότητα η L να πάρει την τιμή μηδέν είναι $P(L=0)=P(K=0)=\delta(0)$ και η πιθανότητα η L να υπερβεί μία σταθερή τιμή u ισούται με την πιθανότητα χρεοκοπίας όταν το αρχικό αποθεματικό είναι u, δηλαδή ισχύει

$$P(L>u)=\psi(u)$$

οπότε και

$$P(L\le u)=\delta(u)\ .$$

Επίσης αποδεικνύεται ότι για την ροπογεννήτρια της μέγιστης σωρευτικής απώλειας ισχύει

$$M_L(r)=\frac{\dfrac{\theta}{1+\theta}}{1-\dfrac{1}{1+\theta}M_{L_1}(r)}=\frac{\theta}{(1+\theta)-M_{L_1}(r)},$$

όπου $M_{L_1}(r)$ η ροπογεννήτρια του κλιμακωτού ύψους και θ το περιθώριο ασφαλείας.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.14. *Στο κλασικό μοντέλο, όταν υπάρχει πτώση του πλεονάσματος, η τυχαία μεταβλητή* L_1 *ακολουθεί μια συνεχή κατανομή με πυκνότητα* $\frac{1}{\mu_1}[1-F(x)]$, *δηλαδή*

$$P(L_1 \le x) = \int_0^x [1-F(t)]dt = F_e .$$

Η F_e *ονομάζεται συνάρτηση ισορροπίας και ορίζεται ως μία κατανομή για την ουρά των αποζημιώσεων με πυκνότητα* $f_e(y) = \frac{\overline{F}(y)}{\mu_1}$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω και θεωρώντας f_{L_1} την πυκνότητα της L_1, παίρνουμε

$$M_{L_1}(r) = \int_0^\infty e^{rx} f_{L_1}(x)dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{rx}}{\mu_1}[1-F(x)]dx$$

$$= -\frac{1}{r\mu_1} + \frac{1}{r\mu_1} M_x(r),$$

όπου $M_x(r)$ η ροπογεννήτρια των αποζημιώσεων.

Επιστρέφοντας στην πιθανότητα χρεοκοπίας, αλλάζοντας τα πρόσημα στην (1.3) και προσθέτοντας τη μονάδα παίρνουμε,

$$1-\delta(u) = \frac{\lambda\mu_1}{c} - \frac{\lambda\mu_1}{c}\int_0^u \delta(u-x) f_e(x)dx . \tag{1.5}$$

Συνεπώς, ισχύει

$$\psi(u) = \frac{\lambda\mu_1}{c} - \frac{\lambda\mu_1}{c}\int_0^u [1-\psi(u-x)] f_e(x)dx \quad , \quad u \ge 0$$

$$= \frac{\lambda\mu_1}{c}\overline{F}_e(u) + \frac{\lambda\mu_1}{c}\int_0^u \psi(u-x) f_e(x)dx \quad , \quad u \ge 0$$

$$= \frac{1}{1+\theta}\overline{F}_e(u) + \frac{1}{1+\theta}\int_0^u \psi(u-x) f_e(x)dx \quad , \quad u \ge 0 . \tag{1.6}$$

Παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace στα δύο μέλη της (1.6), προκύπτει

$$\hat{\psi}(s) = \frac{1}{1+\theta}\hat{\overline{F}}_e(s) + \frac{1}{1+\theta}\hat{\psi}(s)\hat{f}_e(s)$$

ή ισοδύναμα

$$\hat{\psi}(s) = \frac{\frac{1}{1+\theta}\hat{\overline{F}}_e(s)}{1-\frac{1}{1+\theta}\hat{f}_e(s)} \quad , \quad s \ge 0 ,$$

όπου $\hat{\psi}(s)=\int_0^\infty e^{-su}\psi(u)du$, $\hat{f}_e(s)=\int_0^\infty e^{-su}f_e(u)du$ και

$$\hat{\overline{F}}_e(s)=\int_0^\infty e^{-su}\overline{F}_e(u)du=\frac{1-\hat{f}_e(u)}{s}.$$

Τέλος, βρίσκουμε την κατανομή της μέγιστης σωρευτικής απώλειας L ,ως συνάρτηση της κατανομής ισορροπίας,

$$\psi(u)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\theta}{(1+\theta)^{k+1}}\overline{F}_e^{*k}(s).$$

1.2. Η συνάρτηση των Gerber – Shiu

Η συνάρτηση των Gerber – Shiu εισήχθη το 1998 και αποτελεί μία σημαντική γενίκευση της πιθανότητας χρεοκοπίας. Βοηθά στην από κοινού μελέτη τριών ποσοτήτων που συνδέονται με τη χρεοκοπία στο κλασικό μοντέλο. Οι ποσότητες αυτές είναι ο χρόνος χρεοκοπίας T , το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας $|U(T)|$ και το πλεόνασμα ακριβώς πριν τη στιγμή της χρεοκοπίας $U(-T)$. Λόγω της φύσης της ονομάζεται και αναμενόμενη συνάρτηση προεξοφλημένης ποινής (expected discounted penalty function).

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.15. *Ορίζουμε ως αναμενόμενη συνάρτηση προεξοφλημένης ποινής ή συνάρτηση των Gerber – Shiu την*

$$\phi_\delta(u)=E[w(U(T-),|U(T)|)e^{-\delta T}I(T<\infty)|U(0)=u]$$

όπου $\delta\geq 0$ *ο συντελεστής προεξόφλησης (ένταση επιτοκίου) ή μεταβλητή του μετασχηματισμού Laplace,* $w(x,y)$ *μία μη αρνητική διδιάστατη συνάρτηση που ονομάζεται συνάρτηση ποινής και δηλώνει το χρηματικό πρόστιμο (ποινή) που θα πληρώσει ο ασφαλιστής τη στιγμή της χρεοκοπίας, αν αυτή συμβεί σε κάποια χρονική στιγμή* T *και* $I(T<\infty)$ *η δείκτρια συνάρτηση η οποία μας πληροφορεί για το εάν έχει επέλθει χρεοκοπία, παίρνοντας την τιμή* 1 *ή* 0 *αν έχει συμβεί χρεοκοπία ή όχι αντίστοιχα.*

Για διάφορες τιμές της συνάρτησης ποινής και από τον ορισμό της $\phi_\delta(u)$ προκύπτουν κάποια μέτρα κινδύνου. Ενδεικτικά αναφέρονται οι παρακάτω ειδικές περιπτώσεις,

- Για $\delta=0$ και $w(x,y)=1$, προκύπτει η πιθανότητα χρεοκοπίας,

$$\phi_0(u)=E[I(T<\infty)|U(0)=u]=P[T<\infty|U(0)=u]=\psi(u).$$

- Για $\delta=0$ και $w(x,y)=y$, προκύπτει η μέση τιμή του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας.
- Για $\delta=0$ και $w(x,y)=x$, προκύπτει η μέση τιμή του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη στιγμή της χρεοκοπίας.
- Για $\delta>0$ και $w(x,y)=1$, προκύπτει ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας,

$$\phi_\delta(u)=E[e^{-\delta T}I(T<\infty)|U(0)=u].$$

- Για $\delta>0$ και $w(x,y)=I(x\leq x_1)I(y\leq y_1)$, προκύπτει η από κοινού προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής των $U(T-),|U(T)|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας,

$$\phi_\delta(u) = E[e^{-\delta T} I(U(T-) \le x_1) I(|U(T) \le y_1) I(T < \infty | U(0) = u)] = F_\delta(x_1, y_1 | u).$$

Η $F_\delta(x_1, y_1 | u)$ εκφράζει την πιθανότητα να επέλθει χρεοκοπία, με αρχικό αποθεματικό u, ενώ το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία να είναι το πολύ x_1 και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας να είναι το πολύ y_1.

- Για $\delta = 0$ και $w(x, y) = I(x \le x_1) I(y \le y_1)$ προκύπτει η από κοινού συνάρτηση κατανομής των $U(T-), |U(T)|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας,
$$\phi_0(u) = E[I(U(T-) \le x_1) I(|U(T) \le y_1) I(T < \infty | U(0) = u)] = F_0(x_1, y_1 | u).$$
- Για $\delta > 0$ και $w(x, y) = I(x = x_1) I(y = y_1)$, προκύπτει η από κοινού προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας των $U(T-), |U(T)|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας,
$$\phi_\delta(u) = E[e^{-\delta T} I(U(T-) = x_1) I(|U(T) = y_1) I(T < \infty | U(0) = u)] = f_\delta(x_1, y_1 | u).$$
- Για $\delta = 0$ και $w(x, y) = I(x = x_1) I(y = y_1)$, προκύπτει η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των $U(T-), |U(T)|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας,
$$\phi_0(u) = E[I(U(T-) = x_1) I(|U(T) = y_1) I(T < \infty | U(0) = u)] = f_0(x_1, y_1 | u).$$
- Για $\delta > 0$ και $w(x, y) = I(x \le x_1)$, προκύπτει η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής της $U(T-)$,τη στιγμή της χρεοκοπίας,
$$\phi_\delta(u) = E[e^{-\delta T} I(U(T-) \le x_1) I(T < \infty | U(0) = u)] = F_\delta(x_1 | u).$$

Η $F_\delta(x_1, | u)$ εκφράζει την πιθανότητα να επέλθει χρεοκοπία, με αρχικό αποθεματικό u, ενώ το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία να είναι το πολύ x_1.

- Για $\delta = 0$ και $w(x, y) = I(x \le x_1)$, προκύπτει η περιθώρια συνάρτηση κατανομής της $U(T-)$, τη στιγμή της χρεοκοπίας,
$$\phi_0(u) = E[I(U(T-) \le x_1) I(T < \infty | U(0) = u)] = F_0(x_1 | u).$$
- Για $\delta > 0$ και $w(x, y) = I(x = x_1)$, προκύπτει η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας της $U(T-)$, τη στιγμή της χρεοκοπίας,
$$\phi_\delta(u) = E[e^{-\delta T} I(U(T-) = x_1) I(T < \infty | U(0) = u)] = f_\delta(x_1 | u).$$
- Για $\delta = 0$ και $w(x, y) = I(x = x_1)$, προκύπτει η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας της $U(T-)$, τη στιγμή της χρεοκοπίας,
$$\phi_0(u) = E[I(U(T-) = x_1) I(T < \infty | U(0) = u)] = f_0(x_1 | u).$$
- Για $\delta > 0$ και $w(x, y) = I(y \le y_1)$, προκύπτει η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής της $|U(T)|$,τη στιγμή της χρεοκοπίας,
$$\phi_\delta(u) = E[e^{-\delta T} I(|U(T) \le y_1) I(T < \infty | U(0) = u)] = F_\delta(y_1 | u).$$

Η $F_\delta(y_1, | u)$ εκφράζει την πιθανότητα να επέλθει χρεοκοπία, με αρχικό αποθεματικό u, ενώ το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας να είναι το πολύ y_1.

- Για $\delta = 0$ και $w(x, y) = I(y \le y_1)$, προκύπτει η περιθώρια συνάρτηση κατανομής της $|U(T)|$, τη στιγμή της χρεοκοπίας,

$$\phi_0(u) = E[I(|U(T) \le y_1)I(T < \infty | U(0) = u)] = F_0(y_1 | u).$$

- Για $\delta > 0$ και $w(x, y) = I(y = y_1)$, προκύπτει η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας της $|U(T)|$, τη στιγμή της χρεοκοπίας,

$$\phi_\delta(u) = E[e^{-\delta T} I(|U(T) = y_1)I(T < \infty | U(0) = u)] = f_\delta(y_1 | u).$$

- Για $\delta = 0$ και $w(x, y) = I(y = y_1)$, προκύπτει η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας της $|U(T)|$, τη στιγμή της χρεοκοπίας,

$$\phi_0(u) = E[I(|U(T) = y_1)I(T < \infty | U(0) = u)] = f_0(y_1 | u).$$

- Για $\delta > 0$ και $w(x, y) = x^k$ ή $w(x, y) = y^k$, προκύπτει η προεξοφλημένη ροπή k – τάξης του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία ή του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας αντίστοιχα, δηλαδή

$$\phi_\delta(u) = E[e^{-\delta T} U(T-)^k I(T < \infty | U(0) = u)]$$

ή

$$\phi_\delta(u) = E[e^{-\delta T} \, |U(T)|^k \, I(T < \infty | U(0) = u)].$$

- Για $\delta = 0$ και $w(x, y) = x^k$ ή $w(x, y) = y^k$, προκύπτει η ροπή k – τάξης του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία ή του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας αντίστοιχα, δηλαδή

$$\phi_0(u) = E[U(T-)^k I(T < \infty | U(0) = u)]$$

ή

$$\phi_0(u) = E[|U(T)|^k \, I(T < \infty | U(0) = u)].$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.4. *Για* $u > 0$, *η* $\phi_\delta(u)$ *ικανοποιεί την ολοκληροδιαφορική εξίσωση*

$$c\phi'(u) = (\lambda + \delta)\phi_\delta(u) - \lambda \int_0^u \phi_\delta(u - x) f(x) dx - \lambda \gamma(u). \tag{1.7}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Δεσμεύοντας ως προς το χρόνο t και το μέγεθος x της πρώτης απαίτησης και δεδομένου ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο λ, από το νόμο ολικής πιθανότητας, έχουμε

$$\phi_\delta(u) = \int_0^\infty \int_0^\infty \phi_\delta(u | t, x) f_{x_1}(x) f_{T_1}(t) dx dt$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \phi_\delta(u | t, x) f_{x_1}(x) dx dt$$

$$= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \left\{ \int_0^\infty \phi_\delta(u | t, x) f_{x_1}(x) dx \right\} dt. \tag{1.8}$$

Για τη χρονική στιγμή t, εμφάνισης της πρώτης απαίτησης έχουμε $U(t) = u + ct - x$

και επομένως αν $\begin{cases} 0 \le x \le u + ct, & \text{δεν εμφανίζεται χρεοκοπία} \\ x > u + ct, & \text{εμφανίζεται χρεοκοπία} \end{cases}$.

Έτσι, αν $0 \le x \le u+ct$, επειδή δεν εμφανίζεται χρεοκοπία τη χρονική στιγμή t, η διαδικασία ανανεώνεται ξεκινώντας με αρχικό κεφάλαιο $u+ct-x$. Αν $x > u+ct$, τότε $I(T<\infty)=1$ γιατί εμφανίζεται σίγουρα χρεοκοπία και ισχύει ότι $U(T-)=u+ct$, $|U(T)|= x-u-ct$, οπότε, από την (1.8) παίρνουμε

$$\phi_\delta(u) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\left\{\int_0^{u+ct} e^{-\delta t}\phi_\delta(u+ct-x) f_{x_1}(x)dx + \int_{u+ct}^\infty e^{-\delta t} w(u+ct, x-u-ct) f_{x_1}(x)dx\right\}dt$$

$$= \int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+\delta)t}\left\{\int_0^{u+ct} \phi_\delta(u+ct-x) f_{x_1}(x)dx + \int_{u+ct}^\infty w(u+ct, x-u-ct) f_{x_1}(x)dx\right\}dt.$$

Θέτουμε $s = u+ct \Rightarrow t = \dfrac{s-u}{c}$ και $d(t) = \dfrac{1}{c}ds$, και για $0 \le t < \infty \Rightarrow u \le s < \infty$, οπότε, από την (1.8) παίρνουμε

$$\phi_\delta(u) = \lambda\int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \int_0^s \phi_\delta(s-x) f(x)dx\frac{1}{c}ds +$$

$$+\lambda\int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \int_s^\infty w(s, x-s) f(x)dx\frac{1}{c}ds.$$

Θέτοντας, $\gamma(x) = \int_x^\infty w(x, y-x) f(y)dy$, η προηγούμενη σχέση γράφεται

$$c\phi_\delta(u) = \lambda\int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \int_0^s \phi_\delta(s-x) f(x)dxds + \lambda\int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \gamma(s)ds. \qquad (1.9)$$

Στη συνέχεια, θα παραγωγίσουμε την (1.9) ως προς u.

(i) Έστω $g(u,s) = e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \int_0^s \phi_\delta(s-x) f(x)dx$.

Τότε,

$$\frac{d}{du}\int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \int_0^s \phi_\delta(s-x) f(x)dxds = \frac{d}{du}\int_u^\infty g(u,s)ds = -g(u,u) + \int_u^\infty \frac{dg(u,s)}{du}ds$$

$$= -\int_0^u \phi_\delta(u-x) f(x)dx + \frac{(\lambda+\delta)}{c}\int_u^\infty g(u,s)ds.$$

(ii) Έστω $g(u,s) = e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \gamma(s)$.

Τότε,

$$\frac{d}{du}\int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \gamma(s)ds = \frac{d}{du}\int_u^\infty g(u,s)ds = -g(u,u) + \int_u^\infty \frac{dg(u,s)}{du}ds$$

$$= -\gamma(u) + \frac{\lambda+\delta}{c}\int_u^\infty g(u,s)ds.$$

Οπότε η (1.9) γίνεται,

$$c\phi_\delta'(u) = \lambda\left\{-\int_0^u \phi_\delta(u-x)f(x)dx + \frac{\lambda+\delta}{c}\int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}}\int_0^s \phi_\delta(s-x)f(x)dx\right\}$$

$$+\lambda\left\{-\gamma(u) + \frac{\lambda+\delta}{c}\int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}}\gamma(s)ds\right\}$$

$$\overset{(1.9)}{\Rightarrow} c\phi_\delta'(u) = -\lambda\left\{\int_0^u \phi_\delta(u-x)f(x)dx + \gamma(u)\right\} + \frac{\lambda+\delta}{c}c\phi_\delta(u)$$

$$c\phi_\delta'(u) = (\lambda+\delta)\phi_\delta(u) - \lambda\int_0^u \phi_\delta(u-x)f(x)dx - \lambda\gamma(u).$$

(1.7) είναι η ολοκληροδιαφορική εξίσωση που ήδη είδαμε για την $\psi(u)$.

□

Στη συνέχεια, θα εφαρμόσουμε μετασχηματισμό Laplace στην σχέση (1.7), ώστε να βρούμε τον μετασχηματισμό Laplace της πιθανότητας χρεοκοπίας και έπειτα την συνάρτηση των Gerber-Shiu $\phi_\delta(u)$.

Έστω,

$$\hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx \quad , \quad \hat{\gamma}(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\gamma(x)dx.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.5. *Ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης των Gerber-Shiu δίνεται από τον τύπο*

$$\hat{\phi}_\delta(s) = \frac{\lambda\hat{\gamma}(s) - c\phi_\delta(0)}{\lambda+\delta-cs-\lambda\hat{f}(s)}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\int_0^\infty e^{-sx}\phi_\delta'(x)\,dx = e^{-sx}\phi_\delta(x)\big|_{x=0}^\infty - \int_0^\infty (e^{-sx})'\phi_\delta(x)dx$$

$$= -\phi_\delta(0) + \int_0^\infty se^{-sx}\phi_\delta(x)dx$$

$$= s\hat{\phi}_\delta(s) - \phi_\delta(0).$$

Άρα, εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace στην (1.7),

$$c[s\hat{\phi}_\delta(s) - \phi_\delta(0)] = (\lambda+\delta)\hat{\phi}_\delta(s) - \lambda\hat{\phi}_\delta(s)\hat{f}(s) - \lambda\hat{\gamma}(s)$$

$$\left\{cs - (\lambda+\delta) + \lambda\hat{f}(s)\right\}\hat{\phi}_\delta(s) = c\phi_\delta(0) - \lambda\hat{\gamma}(s)$$

$$\hat{\phi}_\delta(s) = \frac{c\phi_\delta(0) - \lambda\hat{\gamma}(s)}{cs - (\lambda+\delta) + \lambda\hat{f}(s)} \tag{1.10}$$

ή

$$\hat{\phi}_\delta(s) = \frac{\lambda\hat{\gamma}(s) - c\phi_\delta(0)}{\lambda + \delta - cs - \lambda\hat{f}(s)} \ . \tag{1.11}$$

□

Έπειτα, θα εξετάσουμε τον παρονομαστή της (1.11).

Όπως αναφέραμε παραπάνω, ο συντελεστής προσαρμογής R είναι η θετική λύση της εξίσωσης

$$1 + (1+\theta)\mu_1 r = M_X(r)$$

και από τη συνθήκη καθαρού κέρδους γνωρίζουμε ότι ισχύει,

$$c = (1+\theta)\lambda\mu_1$$

ή ισοδύναμα

$$\lambda + cr = \lambda M_X(r) \, .$$

Για $r = -s$, όπου $s > 0$, η παραπάνω εξίσωση γράφεται,

$$\lambda - cs = M_X(-s)$$

ή ισοδύναμα

$$\lambda - cs = \lambda\hat{f}(s) \, .$$

Άρα, βλέπουμε ότι για $\delta = 0$, ο παρονομαστής της (1.11) είναι η εξίσωση του Lundberg.

Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι έχει μοναδική θετική ρίζα.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.16. *Για $\delta > 0$, ορίζουμε ως γενικευμένη εξίσωση του Lundberg την εξίσωση*

$$\lambda + \delta - cs - \lambda\hat{f}(s) = 0 \tag{1.12}$$

ή ισοδύναμα

$$l(s) = \lambda\hat{f}(s) \, ,$$

όπου, $l(s) = \lambda + \delta - cs$.

Τότε, $l(0) = \lambda + \delta$ και $\lambda\hat{f}(0) = \lambda$, οπότε ισχύει $l(0) \geq \lambda\hat{f}(0)$ και επίσης η κλίση της $l(s)$ είναι αρνητική. Η συνάρτηση $\lambda\hat{f}(s)$ είναι φθίνουσα ως προς s και ισχύει $\lim_{\delta\to 0}\rho(\delta) = 0$, όπου $\rho(\delta)$ μία ρίζα της (1.12).

Οπότε, η γενικευμένη εξίσωση του Lundberg έχει μοναδική θετική ρίζα $\rho > 0$.

Η σχέση (1.10) μπορεί να γραφεί ως,

$$\hat{\phi}_\delta(s) = \frac{A(s)}{B(s)} \, .$$

Επειδή $\hat{\phi}_\delta(s) < \infty$ και $B(\rho) = 0$ έπεται ότι και $A(\rho) = 0$. Διαφορετικά, αν ίσχυε $A(\rho) \neq 0$ τότε θα ίσχυε ότι $\hat{\phi}_\delta(s) = \infty$ το οποίο είναι άτοπο.

$$B(s) = B(s) - B(\rho)$$

$$= cs - (\lambda + \delta) + \lambda \hat{f}(s) - [c\rho - (\lambda + \delta) + \lambda \hat{f}(\rho)]$$

$$= c(s - \rho) - \lambda[\hat{f}(\rho) - \hat{f}(s)]$$

$$= (s - \rho)\left[c - \lambda \frac{\hat{f}(\rho) - \hat{f}(s)}{s - \rho}\right]$$

και

$$A(\rho) = 0$$

$$c\phi_\delta(0) = \lambda \hat{\gamma}(\rho).$$

Άρα,

$$c\phi_\delta(0) - \lambda\hat{\gamma}(s) = \lambda\hat{\gamma}(\rho) - \lambda\hat{\gamma}(s) = \lambda(s - \rho)\frac{\hat{\gamma}(\rho) - \hat{\gamma}(s)}{s - \rho}.$$

Με αντικατάσταση στην (1.10),

$$\hat{\phi}_\delta(s) = \frac{\lambda(s - \rho)\dfrac{\hat{\gamma}(\rho) - \hat{\gamma}(s)}{s - \rho}}{(s - \rho)\left[c - \lambda \dfrac{\hat{f}(\rho) - \hat{f}(s)}{s - \rho}\right]}$$

$$\hat{\phi}_\delta(s) = \frac{\lambda \dfrac{\hat{\gamma}(\rho) - \hat{\gamma}(s)}{s - \rho}}{c - \lambda \dfrac{\hat{f}(\rho) - \hat{f}(s)}{s - \rho}}. \tag{1.13}$$

Στη συνέχεια δίνεται ο ορισμός του τελεστή Dickson – Hipp, ο οποίος θα μας βοηθήσει να προσδιορίσουμε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης των Gerber-Shiu.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.17. *Για μια δοθείσα ολοκληρώσιμη συνάρτηση* f *και* $r \in R$*, ορίζουμε τον τελεστή Dickson – Hipp, που συμβολίζεται* $T_r f$ *, ως*

$$T_r f(x) = \int_x^\infty e^{-r(y-x)} f(y)dy.$$

Ιδιότητες

- $T_r f(0) = \hat{f}(r)$.
- $T_0 f(x) = \overline{F}(x)$.

- $T_0 T_r f(x) = T_r \overline{F}(x)$.
- $\int_0^u T_r f(x+y)dx = T_r \overline{F}(y) - T_r \overline{F}(y+u)$.
- $T_{r_1} T_{r_2} f(x) = T_{r_2} T_{r_1} f(x) = \dfrac{T_{r_1} f(x) - T_{r_2} f(x)}{r_2 - r_1}$, $r_1 \neq r_2 \in C$.
- $\dfrac{d}{dx} T_r f = r T_r f(x) - f(x)$,

  $\dfrac{d}{dx} T_{r_1} T_{r_2} f(x) = -\sum_{k=1}^{2} \dfrac{r_k T_{r_k} f(x)}{r_2'(r_k)}$, $r_2(s) = (s - r_1)(s - r_2)$.
- $T_r \hat{f}(s) = T_s T_r f(0)$.
- $s\hat{f}(s) - r\hat{f}(r) = (s-r)\left[-sT_r \hat{f}(s) - \hat{f}(r)\right]$.
- $\hat{f}_1(s)\hat{f}_2(s) - \hat{f}_1(r)\hat{f}_2(r) = -(s-r)\left[\hat{f}_1(s) T_{r_2} f_2(s) + T_{r_1} \hat{f}_1(r)\hat{f}_2(s)\right]$,

  για $s \neq r$ και f_1, f_2 ολοκληρώσιμες συναρτήσεις.
- $\int_0^\infty T_{r_1} T_{r_2} f(x)dx = \dfrac{1}{r_2 - r_1}\left(\dfrac{1 - \hat{f}(r_1)}{r_1} - \dfrac{1 - \hat{f}(r_2)}{r_2}\right)$.
- $\int_0^\infty \left(T_{r_1} f * T_{r_2} f\right)(x)dx = \dfrac{\left(1 - \hat{f}(r_1)\right)\left(1 - \hat{f}(r_2)\right)}{r_1 r_2}$.
- $T_r^{\wedge} f(s) = \int_0^\infty e^{-sx} T_r f(x)dx = \int_0^\infty e^{-sx} \int_x^\infty e^{-r(y-x)} f(y)dydx$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ (βλέπε Lin και Willmot (1999), Dickson και Hipp (2001), Li και Carrido (2004a).

□

Για $0 \leq x < \infty$, $x \leq y < \infty$, ισχύει $0 \leq y < \infty$, $0 \leq x \leq y$ οπότε, με αλλαγή των ορίων,

$$T_r^{\wedge} f(s) = \int_0^\infty \left(\int_0^y e^{-sx} e^{-r(y-x)} f(y)dx\right)dy$$

$$= \int_0^\infty e^{-ry} f(y)\left(\int_0^y e^{(r-s)x} dx\right)dy$$

$$= \int_0^\infty e^{-ry} f(y) \frac{e^{(r-s)y} - 1}{r-s} dy$$

$$= \frac{1}{r-s}\left\{\int_0^\infty e^{-sy} f(y)dy - \int_0^\infty e^{-ry} f(y)dy\right\}$$

$$= \frac{\hat{f}(s) - \hat{f}(r)}{r-s}.$$

Σύμφωνα με το παραπάνω αποτέλεσμα, η (1.13) δίνει

$$\hat{\phi}_\delta(s) = \frac{\lambda T_\rho^{\wedge} \gamma(s)}{c - \lambda T_\rho^{\wedge} f(s)}, \tag{1.14}$$

η ισοδύναμα

$$c\hat{\phi}_\delta(s) = \lambda\hat{\phi}_\delta(s)T_\rho^{\wedge} f(s) + \lambda T_\rho^{\wedge}\gamma(s).$$

Εφαρμόζοντας στη συνέχεια αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace,

$$\phi_\delta(u) = \frac{\lambda}{c}\int_0^u \phi_\delta(u-x)T_\rho f(X)dx + \frac{\lambda}{c}T_\rho\gamma(u) \quad , \quad u \geq 0 \tag{1.15}$$

Αν θέσουμε $\frac{\lambda}{c}T_\rho f(x) = z(x)$ έχουμε

$$\int_0^\infty z(x)dz = \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty T_\rho f(x)dx = \frac{\lambda}{c}T_\rho^{\wedge} f(0) = \frac{\lambda}{c}\frac{\hat{f}(0)-\hat{f}(\rho)}{\rho-0} = \frac{\lambda}{c}\frac{1-\hat{f}(\rho)}{\rho}.$$

Όμως από την εξίσωση του Lundberg παίρνουμε

$$\lambda + \delta - cp = \lambda\hat{f}(\rho) \Rightarrow \lambda\left(1-\hat{f}(\rho)\right) = c\rho - \delta,$$

άρα,

$$\int_0^\infty z(x)dx = \frac{c\rho-\delta}{c\rho} = 1 - \frac{\delta}{c\rho} < 1.$$

Θέτοντας τώρα $\int_0^\infty z(x)dx = \frac{1}{1+\xi_\delta}$, όπου ξ_δ το αντίστοιχο περιθώριο ασφαλείας και έστω $G_\delta(u)$ η συνάρτηση κατανομής, τέτοια ώστε

$$G_\delta(u) = \frac{\int_0^u z(x)dx}{\int_0^\infty z(x)dx} = (1+\xi_\delta)\int_0^u z(x)dx,$$

με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$g_\delta(u) = G_\delta'(u) = \frac{z(u)}{\int_0^\infty z(x)dx} = (1+\xi_\delta)z(u).$$

Αν θέσουμε $H_\delta(u) = (1+\xi_\delta)T_\rho\gamma(u)$, αντικαθιστώντας στην (1.15) παίρνουμε

$$\phi_\delta(u) = \frac{1}{1+\xi_\delta}\int_0^u \phi_\delta(u-x)g_\delta(x)dx + \frac{1}{1+\xi_\delta}H_\delta(u) \quad , \quad u \geq 0 \tag{1.16}$$

η οποία είναι μία ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση (defective renewal equation), όπου

- $\frac{1}{1+\xi_\delta} = \frac{\lambda}{c}\frac{1-\hat{f}(\rho)}{\rho} = 1 - \frac{\delta}{c\rho}$ με $\xi_0 = \theta$.
- $\rho = \rho(\delta)$ η θετική ρίζα της εξίσωσης του Lundberg.
- $g_\delta(x) = \frac{\lambda}{c(1+\xi_\delta)^{-1}}T_\rho f(x)$.

- $H_\delta(u) = \dfrac{\lambda}{c(1+\xi_\delta)} T_\rho \gamma(u)$.

Όμως, επειδή για τον μετασχηματισμό Laplace, της συνάρτησης δεξιάς ουράς, της F , ισχύει

$$\hat{\overline{F}}(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\overline{F}(x)dx = -\frac{1}{s}\int_0^\infty \left(e^{-sx}\right)'\overline{F}(x)dx$$

$$= -\frac{1}{s}\left\{\left[e^{-sx}\overline{F}(x)\right]_{x=0}^\infty - \int_0^\infty e^{-sx}\overline{F}'(x)dx\right\}$$

$$= -\frac{1}{s}\left\{0 - 1 + \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx\right\}$$

$$= \frac{1-\hat{f}(s)}{s},$$

έπεται ότι,

$$\frac{1}{1+\xi_\delta} = \frac{\lambda}{c}\hat{\overline{F}}(\rho).$$

και από τη συνθήκη καθαρού κέρδους παίρνουμε

$$c = (1+\theta)\lambda E(x)$$

η ισοδύναμα

$$\frac{\lambda}{c} = \frac{1}{(1+\theta)E(x)},$$

οπότε,

$$\frac{1}{1+\xi_\delta} = \frac{1}{1+\theta}\cdot\frac{\hat{\overline{F}}(\rho)}{E(x)}. \tag{1.17}$$

Όμως $f_e(x) = \dfrac{\overline{F}(x)}{E(x)}$, άρα χρησιμοποιώντας μετασχηματισμό Laplace,

$$\hat{f}_e(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f_e(x)dx = \int_0^\infty e^{-sx}\frac{\overline{F}(x)}{E(x)}dx = \frac{\hat{\overline{F}}(s)}{E(x)}.$$

Με αντικατάσταση στην (1.17) παίρνουμε

$$\frac{1}{1+\xi_\delta} = \frac{1}{1+\theta}\hat{f}_e(\rho).$$

Στη συνέχεια, επειδή $g_\delta(x) = \dfrac{\lambda}{c(1+\xi_\delta)^{-1}} T_\rho f(x)$ και $\dfrac{1}{1+\xi_\delta} = \dfrac{\lambda}{c}\hat{\overline{F}}(\rho)$, παίρνουμε

$$g_\delta(x) = \frac{T_\rho f(x)}{\hat{\overline{F}}(\rho)} = \frac{\int_x^\infty e^{-\rho(y-x)} f(y)dy}{\int_0^\infty e^{-\rho y}\overline{F}(y)dy}$$

$$g_\delta(x) = \frac{e^{\rho x}\int_x^\infty e^{-\rho y} f(y)dy}{\int_0^\infty e^{-\rho y}\overline{F}(y)dy} \quad , \quad x \geq 0 .$$

και για την ουρά της G ,

$$\overline{G}_\delta(x) = \int_0^\infty g_\delta(t)dt = \frac{\int_x^\infty e^{\rho t}\int_t^\infty e^{-\rho y} f(y)dydt}{\int_0^\infty e^{-\rho y}\overline{F}(y)dy}$$

$$\frac{\overline{F}(x) - \int_x^\infty e^{-\rho(y-x)} f(y)dy}{\rho\int_0^\infty e^{-\rho y}\overline{F}(y)dy}$$

$$= \frac{\overline{F}(x) - T_\rho f(x)}{\rho\hat{\overline{F}}(\rho)} = \frac{T_\rho \overline{F}(x)}{\hat{\overline{F}}(\rho)} .$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.18. *Ορίζουμε τη συνάρτηση δεξιάς ουράς* $\overline{K}_\delta(u) = 1 - K_\delta(u)$ *της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής για τα κλιμακωτά ύψη, ως*

$$\overline{K}_\delta(u) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\xi_\delta}{1+\xi_\delta}\left(\frac{1}{1+\xi_\delta}\right)\overline{G}_\delta^{*n}(x) .$$

Τότε, η $\phi_\delta(u)$ δίνεται από τη σχέση

$$\phi_\delta(u) = \frac{1}{\xi_\delta}\int_0^u H_\delta(u-x)dK_\delta(x) + \frac{1}{1+\xi_\delta} H_\delta(u) .$$

Επομένως η δεξιά ουρά $\overline{K}_\delta(u)$ της σύνθετης γεωμετρικής είναι ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας.

Οπότε ο υπολογισμός της συνάρτησης των Gerber – Shiu ανάγεται στον υπολογισμό της $\overline{K}_\delta(u)$ που εξαρτάται κυρίως από τον υπολογισμό της συνάρτησης κατανομής $G_\delta(u)$.

Για $\delta = 0$ παίρνουμε $\overline{K}_0(u) = \psi(u)$, που είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1.2.

Έστω ότι οι αποζημιώσεις ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο β . Αν θέσουμε $w(x, y) = 1$ και $\delta = 0$ παίρνουμε

$$\psi(u) = \phi_0(u) = K_0(u) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\xi_0}{1+\xi_0}\left(\frac{1}{1+\xi_0}\right)^n \overline{G}_0^{*n}(u) .$$

Όμως, για $\delta = 0$ ισχύει ότι $\xi_\delta = \xi_0 = \theta$ οπότε,

$$\psi(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta}{1+\theta} \left(\frac{1}{1+\theta} \right)^n \overline{G}_0^{*n}(u) .$$

Γνωρίζουμε ότι,

$$f(x) = \beta e^{-\beta x}, \beta, x > 0 \text{ και } \overline{F}(x) = e^{-\beta x},$$

άρα,

$$T_\rho \overline{F}(x) = \int_x^\infty e^{-\rho(y-x)} \overline{F}(y) dy = e^{\rho x} \int_x^\infty e^{-\rho y} e^{-\beta y} dy =$$

$$= e^{\rho x} \int_x^\infty e^{-(\beta+\rho)y} dy = e^{\rho x} \frac{1}{\beta+\rho} e^{-(\beta+\rho)x} = \frac{e^{-\beta x}}{\beta+\rho},$$

και

$$\hat{\overline{F}}(\rho) = \int_0^\infty e^{-\rho y} \overline{F}(y) dy = \int_0^\infty e^{-\rho y} e^{-\beta y} dy = \frac{1}{\beta+\rho}.$$

Επομένως,

$$\overline{G}_\delta(u) = \frac{T_\rho \overline{F}(x)}{\hat{\overline{F}}(\rho)} = \frac{\frac{e^{-\beta x}}{\beta+\rho}}{\frac{1}{\beta+\rho}} = e^{-\beta x}.$$

□

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΤΟ ΚΛΑΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΜΕ ΕΝΑΝ ΟΡΟ ΔΙΑΧΥΣΗΣ

Η επέκταση του κλασικού μοντέλου της θεωρίας κινδύνου, που έγινε με την εισαγωγή ενός όρου διάχυσης στη στοχαστική διαδικασία του πλεονάσματος, έγινε από τον Gerber και Landry το 1999. Οι συγγραφείς μελέτησαν την πιθανότητα χρεοκοπίας και έκτοτε, η μελέτη διαφόρων μέτρων κινδύνου ή ακόμη και η μελέτη της συνάρτησης των Gerber-Shiu τόσο για το κλασικό, όσο και για το ανανεωτικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου με έναν όρο διάχυσης αποτελούν ένα δημοφιλές αντικείμενο έρευνας. Αυτό οδήγησε σε μια γενίκευση των ελλειμματικών ανανεωτικών εξισώσεων, για την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής, τη στιγμή της χρεοκοπίας.

2.1 Η Κίνηση Brown

Στα μαθηματικά, η κίνηση Brown περιγράφεται από μία διαδικασία Wiener, η οποία είναι μία συνεχούς χρόνου στοχαστική διαδικασία που πήρε το όνομά τη προς τιμήν του Norbert Wiener. Είναι μία από τις πιο γνωστές διαδικασίες Levy και εμφανίζεται συχνά στα εφαρμοσμένα και μη μαθηματικά, στην οικονομία και στη φυσική.

Η διαδικασία Wiener χαρακτηρίζεται από τέσσερεις βασικές ιδιότητες.

- $B_0 = 0$ σχεδόν παντού.
- Η B_t είναι σχεδόν παντού συνεχής.
- Η B_t έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις.
- Η $B_t - B_s$ ακολουθεί κανονική κατανομή, με μέσο μηδέν και διακύμανση $t-s$ για $0 \le s \le t$.

Ότι η B_t έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις σημαίνει ότι εάν $0 \le s_1 < t_1 \le s_2 < t_2$ τότε οι $B_{t_1} - B_{s_1}$ και $B_{t_2} - B_{s_2}$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

Η κίνηση Brown μπορεί να θεωρηθεί ως ένας τυχαίος περίπατος ή ως άλλες διακριτού χρόνου στοχαστικές διαδικασίες με σταθερές ανεξάρτητες προσαυξήσεις.

2.2 Η Στοχαστική Διαδικασία Πλεονάσματος

Στη συνέχεια δίνεται ο ορισμός της διαδικασίας του πλεονάσματος, που συναντήσαμε στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου, συμπεριλαμβάνοντας τώρα τη διαδικασία Wiener που αποτελεί τον παράγοντα τυχαιότητας στη διαμόρφωση του πλεονάσματος στην πορεία του χρόνου.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1. *Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος* $\{U(t), t \ge 0\}$ *ορίζεται τώρα ως εξής,*

$$U(t) = u + ct - S(t) + \sigma B(t) \quad , \quad t \geq 0 \tag{2.1}$$

όπου $\sigma > 0$ *και* $\{B(t) : t \geq 0\}$ *είναι μία διαδικασία Wiener ανεξάρτητη από τη σύνθετη Poisson διαδικασία* $\{S(t) : t \geq 0\}$.

Στην περίπτωση αυτή ο χρόνος χρεοκοπίας ορίζεται ως $T = \inf\{t : U(t) \leq 0\}$ λόγω του όρου διάχυσης της διαδικασίας Wiener που προστέθηκε. Με βάση την (2.1), οι Dufresne και Gerber το 1991 μελέτησαν την $\psi_d(u)$, την πιθανότητα χρεοκοπίας που προκαλείται λόγω του όρου διάχυσης, την $\psi_s(u)$, την πιθανότητα χρεοκοπίας που προκαλείται από την εμφάνιση απαίτησης και την $\psi(u)$, την πιθανότητα χρεοκοπίας που προκαλείται είτε από τον όρο διάχυσης είτε από την εμφάνιση απαίτησης και παρουσίασαν τις αντίστοιχες ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις.

Ο Wang το 2001 απέδειξε ότι οι $\psi_d(u)$ και $\psi_s(u)$ είναι δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμες εάν η $F'(X)$ είναι συνεχής και έδωσε αναλυτικές εκφράσεις για τις $\psi_d(u)$ και $\psi_s(u)$ όταν τα ύψη των απαιτήσεων είναι εκθετικά κατανεμημένα.

Οι Gerber και Landry το 1997 γενίκευσαν τα αποτελέσματα των Dufresne και Gerber (1991) βάση της (2.1) θεωρώντας ένα σύστημα επιβολής ποινής, το οποίο καθορίζεται από ένα σταθερό w_0 και από μία μη αρνητική συνάρτηση $w(-y)$, $y > 0$. Η ποινή στην περίπτωση που η χρεοκοπία οφείλεται σε ταλάντωση συμβολίζεται w_0 και η ποινή στην περίπτωση που η χρεοκοπία οφείλεται στην εμφάνιση κάποιας απαίτησης συμβολίζεται $w(U(T))$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.2. *Η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής* $\phi(u)$ *δίνεται από τη σχέση*

$$\phi(u) = w_0\phi_d(u) + \phi_w(u), \tag{2.2}$$

όπου

$$\phi_d(u) = E\left[e^{-\delta T} I(T < \infty, U(T) = 0 \mid U(0) = u\right] \tag{2.3}$$

είναι ο μετασχηματισμός Laplace ή η αναμενόμενη παρούσα αξία του χρόνου χρεοκοπίας T, *λόγω του όρου διάχυσης και*

$$\phi_w(u) = E\left[e^{-\delta T} w(U(T-), |U(T)|) I(T < \infty, U(T) < 0 \mid U(0) = u\right]. \tag{2.4}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.1.

Αν $\delta = 0$ *τότε* $\phi_d(u) = E[\, I(T < \infty, U(T) = 0 \mid U(0) = u] = \psi_d(u)$.

□

Στη συνέχεια μπορεί να αποδειχτεί ότι η $\phi_d(u)$ ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση (βλέπε Gerber και Landry 1998)

$$\phi_d(u) = \int_0^u \phi_d(u-y) g(y) dy + e^{-bu} \quad , \quad \mathrm{u} \geq 0, \tag{2.5}$$

όπου,

$$g(y) = \frac{\lambda}{D}\int_0^y e^{-b(y-s)}\int_s^\infty e^{-\rho(x-s)}dF(x)ds\,, \tag{2.6}$$

$b = \frac{c}{d} + \rho, D = \frac{1}{2}\sigma^2$ και $\rho = \rho(\delta, D)$ είναι η μοναδική, μη αρνητική ρίζα της γενικευμένης εξίσωσης του Lundberg $\lambda\hat{f}(\xi) = \lambda + \delta - c\xi - D\xi^2$ με $\rho(0, D) = 0$.

Η $g(y)$ είναι η προεξοφλημένη πιθανότητα η πρώτη καταγεγραμμένη πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό u, που οφείλεται στην εμφάνιση κάποιας απαίτησης, να βρίσκεται μεταξύ $u - y$ και $u - y - dy$.

Επίσης αποδεικνύεται ότι η $\phi(u)$ στην (2.2) ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

$$\phi(u) = \int_0^u \phi(u-y)g(y)dy + w_0 e^{-bu} + \int_0^\infty w(u-y)g(y)dy - e^{-bu}\int_0^\infty w(-y)g(y)dy\,. \tag{2.7}$$

Ο πρώτος όρος στην δεξιά πλευρά της εξίσωσης είναι για την περίπτωση όπου το πλεόνασμα μετά την πρώτη πτώση, που οφείλεται σε άλμα, κάτω από το αρχικό αποθεματικό u, είναι θετικό. Ο δεύτερος όρος είναι για την περίπτωση που συμβαίνει χρεοκοπία πριν από την πρώτη πτώση του πλεονάσματος που οφείλεται σε άλμα. Ο τρίτος και ο τέταρτος όρος είναι για την περίπτωση που συμβαίνει χρεοκοπία με την πρώτη πτώση του πλεονάσματος. Σημειώνεται ότι στον τρίτο όρο συμπεριλαμβάνεται και η περίπτωση όπου συμβαίνει χρεοκοπία από ταλάντωση πριν την πρώτη πτώση του πλεονάσματος και ο τέταρτος όρος είναι η αντίστοιχη αποζημίωση.

Παρατηρείται, ότι η $g(y)$ μπορεί να γραφεί ως

$$g(y) = \int_0^y h(y-s)\gamma(s)ds = h * \gamma(y)\,,$$

που είναι η συνέλιξη των συναρτήσεων h και γ, με

$$h(y) = \frac{c}{D}e^{-by}$$

και

$$\gamma(y) = \frac{\lambda}{c}\int_y^\infty e^{-\rho(x-y)}dF(x)\,.$$

Στη συνέχεια θα προχωρήσουμε σε περαιτέρω γενίκευση της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής (2.2) που βασίζεται στο μοντέλο της (2.1) συμπεριλαμβάνοντας τις τυχαίες μεταβλητές $|U(T)|, U(T-)$, που είναι το έλλειμα τη στιγμή της χρεοκοπίας και το πλεόνασμα ακριβώς πριν τη χρεοκοπία και θα υπολογιστεί η αντίστοιχη ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση.

Αρχικά θα ασχοληθούμε με την απλούστερη περίπτωση $\phi_w(u)$ όπου η ποινή στη χρεοκοπία είναι $w(U(T-), |U(T)|)$ εάν η χρεοκοπία προκληθεί από άλμα.

Για να προκύψει η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση για την $\phi_w(u)$ της (2.4), θεωρούμε το απειροελάχιστο χρονικό διάστημα μεταξύ 0 και Δt. Ο παράγοντας προεξόφλησης για το διάστημα $[0, \Delta t]$ είναι $e^{-\delta\Delta t} = 1 - \delta\Delta t + o(\Delta t)$, με $\lim_{\Delta\to 0}\frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$. Η διαδικασία

$0\{S(t): t \geq 0\}$ θα έχει μία απαίτηση με πιθανότητα $\lambda\Delta t$, καμία απαίτηση με πιθανότητα $1-\lambda\Delta t$ και περισσότερες από μία απαιτήσεις με πιθανότητα $o(\Delta t)$.

Συμπεριλαμβάνοντας και το ποσό της απαίτησης (αν υπάρξει) και την αξία της $W(\Delta t)$, παίρνουμε

$$\phi_w(u) = (1-\lambda\Delta t)(1-\delta\Delta t + o(\Delta t))E\left[\phi_w(u + c\Delta t + \sigma B(\Delta t))\right]$$

$$+ \lambda\Delta t(1-\delta\Delta t + o(\Delta t))\left[\int_0^{u+c\Delta t+\sigma B(\Delta t)} \phi_w(u + c\Delta t + \sigma B(\Delta t) - x)dF(x)\right.$$

$$\left. + \int_{u+c\Delta t+\sigma B(\Delta t)}^{\infty} w(u + c\Delta t + \sigma B(\Delta t), x - u - c\Delta t - \sigma B(\Delta t)dF(x)\right] + o(\Delta t) \qquad (2.8)$$

Αντίστοιχα η $\phi_d(u)$ ικανοποιεί την ολοκληροδιαφορική εξίσωση

$$\phi_d(u) = (1-\lambda\Delta t)(1-\delta\Delta t + o(\Delta t))E\left[\phi_d(u + c\Delta t + \sigma B(\Delta t))\right]$$

$$+ \lambda\Delta t(1-\delta\Delta t + o(\Delta t))\int_0^{u+c\Delta t+\sigma B(\Delta t)} \phi_d(u + c\Delta t + \sigma B(\Delta t) - x)dF(x) + o(\Delta t).$$

Αναλύοντας τώρα, την $\phi_w(u + c\Delta t + \sigma B(\Delta t))$ σε σειρά Taylor για u, σε όρους της $\phi_w''(u)$ προκύπτει,

$$\phi_w(u + c\Delta t + \sigma B(\Delta t)) = \sum_{k=0}^{2} \frac{1}{k!}\phi_w^{(k)}(u)\left[c\Delta t + \sigma B(\Delta t)\right]^k + \frac{1}{3!}\phi_w^{(3)}(u^*)\left[c\Delta t + \sigma B(\Delta t)\right]^3$$

όπου, $\phi_w^{(k)}(u)$ είναι η k-οστή παράγωγος της $\phi_w(u)$ και το u^* είναι μεταξύ του u και του $u + c\Delta t + \sigma B(\Delta t)$. Επειδή ισχύει $D = \frac{1}{2}\sigma^2$, $\mathrm{E}\left[B(\Delta t)\right] = E\left[B^3(\Delta t)\right] = 0$ και $E\left[B^2(\Delta t)\right] = Var\left[B(\Delta t)\right] = \Delta t$, παίρνουμε

$$E\left[\phi_w(u + c\Delta t + \sigma B(\Delta t))\right] = \phi_w(u) + \left[c\phi_w'(u) + D\phi_w''(u)\right]\Delta t + o(\Delta t).$$

Αντικαθιστώντας το στην (2.8), διαιρώντας με Δt και αφήνοντας το $\Delta t \to 0$ παίρνουμε

$$D\phi_w''(u) + c\phi_w'(u) + \lambda\left[\int_0^u \phi_w(u-x)dF(x) + \int_u^{\infty} w(u, x-u)dF(x)\right] = (\lambda+\delta)\phi_w(u). \quad (2.9)$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2.1. *Η πιθανότητα χρεοκοπίας που οφείλεται σε ταλάντωση $\psi_d(u)$ ικανοποιεί την ολοκληροδιαφορική εξίσωση*

$$D\psi_d''(u) + c\psi_d'(u) = \lambda\psi_d(u) - \lambda\int_0^u \psi_d(u-x)dF(x) \quad , \quad u \geq 0.$$

ΛΥΣΗ

Για την $\phi_d(u)$ είδαμε ότι ισχύει

$$\phi_d(u) = (1-\lambda\Delta t)(1-\delta\Delta t + o(\Delta t))E\left[\phi_d(u + c\Delta t + \sigma W(\Delta t))\right]$$

$$+ \lambda\Delta t(1-\delta\Delta t + o(\Delta t))\int_0^{u+c\Delta t+\sigma W(\Delta t)} \phi_d(u + c\Delta t + \sigma W(\Delta t) - x)dF(x) + o(\Delta t)$$

ή ισοδύναμα

$$D\phi_d''(u) + c\phi_d'(u) = (\lambda+\delta)\phi_d(u) - \lambda\int_0^u \phi_d(u-x)dF(x) \quad , \quad u \geq 0 .$$

Όμως για $\delta = 0$ και $w = 1$ ισχύει ότι $\phi_d(u) = \psi_d(u)$. Οπότε έχουμε το ζητούμενο.

□

Εφαρμόζοντας, στη συνέχεια, μετασχηματισμούς Laplace και στις δύο πλευρές της εξίσωση (2.9),

$$D\int_0^\infty e^{-\xi u}\phi_w''(u)du + c\int_0^\infty e^{-\xi u}\phi_w'(u)du + \lambda\tilde{\phi}_w(\xi)\hat{f}(\xi) + \lambda\tilde{\omega}(\xi) = (\lambda+\delta)\tilde{\phi}_w(\xi), \quad (2.10)$$

όπου, $\tilde{\phi}_w(\xi) = \int_0^\infty e^{-\xi u}\phi_w(u)du,\ \tilde{\omega}(\xi) = \int_0^\infty e^{-\xi u}\omega(u)du$ και

$\omega(x) = \int_x^\infty w(x, y-x)dF(y) = \int_0^\infty w(x,y)dF(x+y)$ με $\omega(x) = \overline{F}(x)$ εάν $w(x,y) = 1$.

Ωστόσο, ισχύει $\lim_{u\to\infty} e^{-\xi u}\phi_w(u) = 0,\ \lim_{u\to\infty} e^{-\xi u}\phi_w'(u) = 0$ και $\phi_w(0) = 0$, οπότε η (2.10) γίνεται

$$D\left(\left[e^{-\xi u}\phi_w'(u)\right]_0^\infty + \xi\int_0^\infty e^{-\xi u}\phi_w'(u)du\right) + c\left(\left[e^{-\xi u}\phi_w(u)\right]_0^\infty + \xi\tilde{\phi}_w(\xi)\right)$$

$$+ \lambda\tilde{\phi}_w(\xi)\hat{f}(\xi) + \lambda\tilde{\omega}(\xi) = (\lambda+\delta)\tilde{\phi}_w(\xi)$$

ή ισοδύναμα

$$D\left(-\phi_w'(0) + \xi^2\tilde{\phi}_w(\xi)\right) + c\left(\xi\tilde{\phi}_w(\xi)\right) + \lambda\tilde{\phi}_w(\xi)\hat{f}(\xi) + \lambda\tilde{\omega}(\xi) = (\lambda+\delta)\tilde{\phi}_w(\xi)$$

$$\left[D\xi^2 + c\xi + \lambda\hat{f}(\xi) - (\lambda+\delta)\right]\tilde{\phi}_w(\xi) = D\phi_w'(0) - \lambda\tilde{\omega}(\xi). \quad (2.11)$$

Επειδή το ρ ικανοποιεί την γενικευμένη εξίσωση του Lundberg, θέτοντας $\xi = \rho$ στην (2.11) έχουμε ότι $D\phi_w'(0) = \lambda\tilde{\omega}(\rho)$. Αντικαθιστώντας τώρα το $\lambda+\delta$ με $D\rho^2 + c\rho + \lambda\hat{f}(\rho)$, η (2.11) γράφεται,

$$\left[D\xi^2 + c\xi + \lambda\hat{f}(\xi) - D\rho^2 - c\rho - \lambda\hat{f}(\rho)\right]\tilde{\phi}_w(\xi) = \lambda\left[\tilde{\omega}(\rho) - \tilde{\omega}(\xi)\right].$$

Δεδομένου ότι $D\xi^2 + c\xi - D\rho^2 - c\rho = D(\xi+b)(\xi-\rho)$, παίρνουμε

$$\left[1 - \frac{\lambda\left[\hat{f}(\xi) - \hat{f}(\rho)\right]}{D(b+\xi)(\rho-\xi)}\right]\tilde{\phi}_w(\xi) = \frac{\lambda\left[\tilde{\omega}(\xi) - \tilde{\omega}(\rho)\right]}{D(b+\xi)(\rho-\xi)}.$$

Η προηγούμενη εξίσωση μας δίνει έμμεσα τον μετασχηματισμό Laplace της $\phi_w(u) = \int_0^u \phi_w(u-y)g(y)dy + g_\omega(u)$, όπου,

$$g_\omega(u) = h * \gamma_\omega(u) = \frac{\lambda}{D}\int_0^u e^{-b(u-s)}\int_s^\infty e^{-\rho(x-s)}\omega(x)dxds \tag{2.12}$$

και

$$\gamma_\omega(u) = \frac{\lambda}{c}\int_s^\infty e^{-\rho(x-s)}\omega(x)dx. \tag{2.13}$$

Η μοναδικότητα του μετασχηματισμού Laplace μας οδηγεί στο επόμενο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.1. *Για* $D > 0$, $\lim_{u\to\infty} e^{-\rho u}\phi_w(u) = 0$ *και* $\lim_{u\to\infty} e^{-\rho u}\phi'_w(u) = 0$, *ισχύει ότι η συνάρτηση* $\phi_w(u)$ *ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση*

$$\phi_w(u) = \int_0^u \phi_w(u-y)g(y)dy + g_\omega(u) = \phi_w * h * \gamma(u) + h * \gamma_\omega(u) \quad , \quad u \ge 0. \tag{2.14}$$

Να σημειώσουμε ότι χρησιμοποιούμε την προσέγγιση του μετασχηματισμού Laplace με την υπόθεση ότι $\lim_{u\to\infty} e^{-\rho u}\phi_w(u) = 0$ και $\lim_{u\to\infty} e^{-\rho u}\phi'_w(u) = 0$ για κάθε $\xi > 0$ για να αποδείξουμε το θεώρημα (2.1). Ωστόσο, το θεώρημα (2.1) μπορεί επίσης να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας μια εναλλακτική προσέγγιση (βλέπε Gerber και Landry 1998 ή Gerber και Shiu 1998) με την ελάχιστη υπόθεση ότι $\lim_{u\to\infty} e^{-\rho u}\phi_w(u) = 0$ και $\lim_{u\to\infty} e^{-\rho u}\phi'_w(u) = 0$. Στην πραγματικότητα, η $w(x,y)$ είναι ανεξάρτητη από το αρχικό απόθεμα u στις περισσότερες εφαρμογές, από το οποίο συνεπάγεται ότι και $\lim_{u\to\infty} e^{-\rho u}\phi'_w(u) = 0$.

Τώρα συνδυάζοντας την (2.14) με την (2.5) οδηγούμαστε στη ακόλουθη ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση για την (2.2), η οποία αποτελεί γενίκευση της (2.7).

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.2. *Για* $D > 0$, $\lim_{u\to\infty} e^{-\rho u}\phi_w(u) = 0$ *και* $\lim_{u\to\infty} e^{-\rho u}\phi'_w(u) = 0$, *ισχύει ότι η συνάρτηση* $\phi(u)$ *ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση*

$$\phi(u) = \int_0^u \phi_w(u-y)g(y)dy + w_0 e^{-bu} + g_\omega(u) \quad , \quad u \ge 0. \tag{2.15}$$

Επιπλέον οι $g(y)$ και $g_\omega(u)$ μπορούν να πάρουν την μορφή που ακολουθεί, για περαιτέρω εφαρμογές, συγκεκριμένα αν περιορίζαμε την $\phi(u)$ της (2.15) για $D \to 0$.

ΛΗΜΜΑ 2.1. *Για* $D > 0$, *η συνάρτηση* $g(y)$ *μπορεί να εκφραστεί ως*

$$g(y) = \frac{\lambda}{c + 2\rho D}\left[\int_0^y e^{-b(y-x)}dF(x) + \int_y^\infty e^{-\rho(x-y)}dF(x) - e^{-by}\int_0^\infty e^{-\rho x}dF(x)\right] \tag{2.16}$$

και ο μετασχηματισμός Laplace της,

$$\tilde{g}(\xi,\delta) = \int_0^\infty e^{-\xi y}g(y)dy = \frac{\lambda\left[\hat{f}(\xi) - \hat{f}(\rho)\right]}{(b+\xi)(\rho-\xi)D} = \frac{\lambda\left[\hat{f}(\xi) - 1\right] + D\rho^2 + c\rho - \delta}{(b+\xi)(\rho-\xi)D}. \tag{2.17}$$

Οπότε για $y > 0$, *όταν* $D \to 0$,

$$g(y) = h * \gamma(y) \to \gamma_0(y) = \frac{\lambda}{c}\int_y^\infty e^{-\rho_0(x-y)} dF(x), \tag{2.18}$$

όπου $\gamma_0(y) = \gamma(y)|_{\rho=\rho_0}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης και για $b = \frac{c}{D} + \rho$ παίρνουμε,

$$g(y) = \frac{\lambda}{D} e^{-by}\left[\int_0^y e^{-\rho x}\int_0^x e^{(b+\rho)s} ds dF(x) + \int_y^\infty e^{-\rho x}\int_0^y e^{(b+\rho)s} ds dF(x)\right]$$

$$= \frac{\lambda}{c+2\rho D}\left[\int_0^y e^{-b(y-x)} dF(x) + \int_y^\infty e^{-\rho(x-y)} dF(x) - e^{-by}\int_0^\infty e^{-\rho x} dF(x)\right].$$

Όταν $D \to 0$, τότε $\rho \to \rho_0$ από την γενικευμένη εξίσωση του Lundberg, όπου $\rho_0 = \rho(\delta,0)$ η μοναδική μη αρνητική ρίζα της εξίσωσης του Lundberg, $c + 2\rho D \to c$, $b = \frac{c}{D} + \rho \to \infty$ και ο πρώτος και τρίτος όρος της αγκύλης εξαφανίζονται για $y > 0$. Ως εκ τούτου, για $y > 0$ έχουμε $g(y) \to \frac{\lambda}{c}\int_y^\infty e^{-\rho_0(x-y)} dF(x) = \gamma_0(y)$ όταν $D \to 0$.

Ομοίως, αντιστρέφοντας τη σειρά ολοκλήρωσης παίρνουμε,

$$\tilde{g}(\xi,\delta) = \frac{\lambda}{(b+\rho)D}\left[\int_0^\infty e^{bx}\int_x^\infty e^{-(b+\xi)y} dy dF(x) + \int_0^\infty e^{-\rho x}\int_0^x e^{(\rho-\xi)y} dy dF(x) - \frac{\hat{f}(\rho)}{b+\xi}\right]$$

$$= \frac{\lambda\left[\hat{f}(\xi) - \hat{f}(\rho)\right]}{(b+\xi)(\rho-\xi)D}.$$

Και επειδή το ρ ικανοποιεί την γενικευμένη εξίσωση του Lundberg, ο αριθμητής μπορεί να εκφραστεί ως $\lambda\left[\hat{f}(\xi) - 1\right] + D\rho^2 + c\rho - \delta$.

□

Συγκρίνοντας την (2.12) με την (2.6) παρατηρούμε ότι η $g_\omega(u)$ έχει την ίδια μορφή με την $g(y)$ με τη διαφορά ότι τα εσωτερικά τους ολοκληρώματα ολοκληρώνουν για $\omega(x)dx$ και $dF(x)$ αντίστοιχα. Οπότε έχουμε το ακόλουθο πόρισμα.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.1 *Για* $D > 0$, *η συνάρτηση* $g_\omega(u)$ *από την (2.12) μπορεί να εκφραστεί ως*

$$g_\omega(u) = \frac{\lambda}{c+2\rho D}\left[\int_0^u e^{-b(u-x)}\omega(x)dx + \int_u^\infty e^{-\rho(x-u)}\omega(x)dx - e^{-bu}\int_0^\infty e^{-\rho x}\omega(x)dx\right] \tag{2.19}$$

και ο μετασχηματισμός Laplace της,

$$\tilde{g}_\omega(\xi,\delta) = \int_0^\infty e^{-\xi u} g_\omega(u)du = \frac{\lambda\left[\tilde{\omega}(\xi) - \tilde{\omega}(\rho)\right]}{(b+\xi)(\rho-\xi)D}, \tag{2.20}$$

όπου $\tilde{\omega}(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\omega(x)dx$ *με το* $\omega(x)=\int_x^\infty w(x,y-x)dF(y)=\int_0^\infty w(x,y)dF(x+y)$.

Οπότε για $u>0$, όταν $D\to 0$ παίρνουμε,

$$g_\omega(u)=h*\gamma_\omega(u)\to\gamma_{\omega,0}(u)=\frac{\lambda}{c}\int_u^\infty e^{-\rho_0(x-u)}\omega(x)dx, \tag{2.21}$$

όπου $\gamma_{\omega,0}(u)=\gamma_\omega(u)|_{\rho=\rho_0}$.

Διαισθητικά, μπορεί κανείς να αντιληφθεί ότι όταν $D\to 0$, τότε η $\sigma W(t)$ τείνει σε μία εκφυλισμένη τυχαία μεταβλητή με μηδενική τιμή, δεδομένου ότι $\sigma W(t)\sim N(0,\sigma^2)=N(0,2Dt)$. Έτσι η διαδικασία του πλεονάσματος (2.1) που εμπεριέχει έναν παράγοντα διάχυσης (ή διαδικασία Wiener) προσεγγίζει την κλασική διαδικασία πλεονάσματος και ικανοποιεί την αντίστοιχη ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.3. *Για* $u>0$, *όταν* $D\to 0$ *ισχύει,*

- *για σταθερό* t, *η* $\sigma B(t)\sim N(0,2Dt)$ *τείνει σε μία εκφυλισμένη τυχαία μεταβλητή με μηδενική τιμή.*
- $U(t)=u+ct-S(t)+\sigma B(t)\to U(t)=u+ct-S(t)$.
- $\lambda\hat{f}(\xi)=\lambda+\delta-c\xi-D\xi^2\to\lambda\hat{f}(\xi)=\lambda+\delta-c\xi$, *η εξίσωση του Lundberg.*
- $\rho=\rho_0$.
- $\phi_w(u)=\phi_w*(h*\gamma)(u)+h*\gamma_\omega(u)\to\phi_0(u)=\phi_0*\gamma_0(u)+\gamma_{\omega,0}(u)$.
- $\phi(u)=w_0\phi_d(u)+\phi_w(u)\to\phi_0(u)$, *ανεξάρτητη από το* w_0.

2.3 Ασυμπτωτικός τύπος για την $\phi(u)$ και η αντίστοιχη κατανομή του ύψους απαιτήσεων

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε τον συντελεστή προσαρμογής και τον ασυμπτωτικό τύπο που ικανοποιεί η $\phi(u)$ της (2.15). Θυμίζουμε ότι η $\rho\geq 0$ ικανοποιεί την γενικευμένη εξίσωση του Lundberg $\lambda\hat{f}(\xi)=\lambda+\delta-c\xi-D\xi^2$. Εάν ορίσουμε,

$$\tau(\xi)=\lambda+\delta-c\xi-D\xi^2=-D\left(\xi+\frac{c}{2D}\right)^2+\frac{c^2}{4D}+\lambda+\delta,$$

τότε ισχύει

$$\lambda\hat{f}(\xi)=\tau(\xi). \tag{2.22}$$

Επειδή $\lambda\hat{f}'(\xi)=-\lambda\int_0^\infty xe^{-\xi x}dF(x)<0$ και $\lambda\hat{f}''(\xi)=-\lambda\int_0^\infty x^2e^{-\xi x}dF(x)>0$, έχουμε ότι η $\lambda\hat{f}(\xi)$ είναι φθίνουσα, κυρτή συνάρτηση με $\lambda\hat{f}(0)=\lambda$, ενώ λόγω του αρνητικού συντελεστή $(-D)$ του όρου ξ^2 της $\tau(\xi)$, η $\tau(\xi)$ είναι κοίλη παραβολή με $\tau(0)=\lambda+\delta$ και μέγιστη τιμή $\frac{c^2}{4D}+\lambda+\delta$ για $\xi=-\frac{c}{2D}$. Ως εκ τούτο, η (2.22) έχει ακριβώς δύο ρίζες, μία μη

αρνητική, συμβολίζεται ξ_1, που είναι η $\rho(\delta, D)$ και μία αρνητική (αν υπάρχει), συμβολίζεται $\xi_2 = -\kappa(\delta, D)$ όπου $\kappa(\delta, D) > 0$.

Διαφορίζοντας την (2.22) ως προς D παίρνουμε,

$$\lambda \hat{f}'(\xi)\frac{d\xi}{dD} = -c\frac{d\xi}{dD} - 2\xi D\frac{d\xi}{dD} - \xi^2$$

Αφού και τα δύο $\rho(\delta, D)$ και $-\kappa(\delta, D)$ ικανοποιούν την (2.22), παίρνουμε

$$\frac{d\rho}{dD} = -\frac{\rho^2}{\lambda \hat{f}'(\rho) + c + 2\rho D}$$

και

$$\frac{d\kappa}{dD} = \frac{\kappa^2}{\lambda \hat{f}'(-\kappa) + c - 2\rho D}.$$

Επιπλέον, όταν η κοίλη παραβολή $\tau(\xi)$ βρίσκεται κάτω από την φθίνουσα ευθεία $\lambda + \delta - c\xi$, παίρνουμε ότι: $-\kappa(\delta,0) \le -\kappa(\delta, D) < 0 \le \rho(\delta, D) \le \rho(\delta,0)$. Παρατηρούμε ότι $b > \kappa(\delta, D)$ όταν $\tau(-b) = \tau(\rho(\delta, D)) < \tau(-\kappa(\delta, D))$.

Όταν $\delta \to 0$, το $\xi_1 = \rho(\delta, D)$ τείνει στο μηδέν και το $\kappa(\delta, D)$ επίσης. Επιπλέον, εάν $\delta \to 0$, το οποίο σημαίνει ότι το $\rho = \rho(\delta, D) \to 0$, τότε από την γενικευμένη εξίσωση του Lundberg έχουμε

$$\frac{\delta}{\rho} = \rho D + c - \frac{\lambda}{\rho}\left[1 - \hat{f}(\rho)\right] = \rho D + c - \lambda\int_0^\infty e^{-\rho x}\overline{F}(x)dx \to c - \lambda\mu_1. \qquad (2.23)$$

Γνωρίζοντας ότι $\tilde{\phi}_w(\xi, \delta) = \int_0^\infty e^{-\xi u}\phi_w(u)du$, αν πολλαπλασιάσουμε την (2.14) με $e^{-\xi u}$ και στη συνέχεια ολοκληρώσουμε από $u = 0$ έως ∞, θα πάρουμε

$$\tilde{\phi}_w(\xi, \delta) = \tilde{\phi}(\xi, \delta)g(\xi, \delta) + g_\omega(\xi, \delta)$$

η ισοδύναμα

$$\tilde{\phi}_w(\xi, \delta) = \frac{g_\omega(\xi, \delta)}{1 - \tilde{g}(\xi, \delta)}. \qquad (2.24)$$

Από την (2.17) παίρνουμε,

$$\tilde{g}'(\xi, \delta) = \frac{\lambda \hat{f}'(\xi)(b + \xi)(\rho - \xi)D - \left[\lambda\left(\hat{f}(\xi) - 1\right) + D\rho^2 + c\rho - \delta\right](\rho D - bD - 2\xi D)}{\left[(b + \xi)(\rho - \xi)D\right]^2}$$

$$= \frac{\lambda \hat{f}'(\xi) + \left[-\rho D + \left(\frac{c}{D} + \rho\right)D + 2D\xi\right]\tilde{g}(\xi, \delta)}{(b + \xi)(\rho - \xi)D}$$

$$= \frac{\lambda \hat{f}'(\xi) + [c + 2D\xi]\tilde{g}(\xi, \delta)}{(b + \xi)(\rho - \xi)D} \qquad (2.25)$$

και

$$\tilde{g}(\xi,\delta)-1=\frac{\lambda\left[\hat{f}(\xi)-1\right]+D\rho^2+c\rho-\delta}{(b+\xi)(\rho-\xi)D}-1$$

$$=\frac{\lambda\left[\hat{f}(\xi)-1\right]+D\rho^2+c\rho-\delta-(b+\xi)(\rho-\xi)D}{(b+\xi)(\rho-\xi)D}$$

$$=\frac{\lambda\hat{f}(\xi)-\lambda+D\rho^2+c\rho-\delta-b\rho D+b\xi D-\xi\rho D+\xi^2 D}{(b+\xi)(\rho-\xi)D}$$

$$=\frac{\lambda\hat{f}(\xi)-\lambda+D\rho^2+c\rho-\delta-\left(\frac{c}{D}+\rho\right)\rho D+\left(\frac{c}{D}+\rho\right)\xi D-\xi\rho D+\xi^2 D}{(b+\xi)(\rho-\xi)D}$$

$$=\frac{\lambda\hat{f}(\xi)+D\xi^2+c\xi-\delta-\lambda}{(b+\xi)(\rho-\xi)D}=\frac{\lambda\hat{f}(\xi)-\tau(\xi)}{(b+\xi)(\rho-\xi)D} \qquad (2.26)$$

Συνδυάζοντας αυτό με την (2.20), η (2.24) γίνεται

$$\tilde{\phi}_w(\xi,\delta)=\frac{g_\omega(\xi,\delta)}{1-\tilde{g}(\xi,\delta)}=\frac{\dfrac{\lambda[\tilde{\omega}(\xi)-\tilde{\omega}(\rho)]}{(b+\xi)(\rho-\xi)D}}{\dfrac{\tau(\xi)-\lambda\hat{f}(\xi)}{(b+\xi)(\rho-\xi)D}}$$

$$=\frac{\lambda[\tilde{\omega}(\xi)-\tilde{\omega}(\rho)]}{\tau(\xi)-\lambda\hat{f}(\xi)}.$$

Για τον ασυμπτωτικό τύπο της $\phi(u)$ η οποία ικανοποιεί την (2.15) ζητάμε $\kappa>0$, το οποίο θα καλείται συντελεστής προσαρμογής, τέτοιο ώστε $\int_0^\infty e^{\kappa x}g(x)dx=\tilde{g}(-\kappa,\delta)=1$, ή ισοδύναμα $\lambda\hat{f}(-\kappa)=\tau(-\kappa)$ από την (2.26). Έτσι, $-\kappa=-\kappa(\delta,D)$ είναι ακριβώς η ξ_2, η μοναδική αρνητική ρίζα της (2.22), η οποία αναφέρεται και στους Gerber και Landry (1998).

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.4. *Για $D>0$, ο ασυμπτωτικός τύπος που ικανοποιεί η $\phi(u)$ είναι*

$$\phi(u)\approx\frac{\lambda\int_0^\infty\left(e^{\kappa x}-e^{-\rho x}\right)\int_x^\infty w(x,y-x)dF(y)dx+w_0(\rho+\kappa)D}{-\lambda\hat{f}'(-\kappa)-c+2\kappa D}e^{-\kappa u}\quad,\quad u\to\infty, \qquad (2.27)$$

όπου $-\hat{f}'(-\kappa)=\int_0^\infty xe^{\kappa x}dF(x)$ και $-\kappa$ η μοναδική αρνητική ρίζα της (2.22).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Όταν η $\phi(u)$ ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση (2.15), τότε από το ανανεωτικό θεώρημα (βλέπε Feller 1971, σελ. 362) συνεπάγεται ότι

$$\phi(u) \approx \frac{\int_0^\infty e^{\kappa x}\left[g_\omega(x) + w_0 e^{-bx}\right]dx}{\int_0^\infty x e^{\kappa x} g(x)dx} e^{-\kappa u} = \frac{\tilde{g}_\omega(-\kappa,\delta) + \frac{w_0}{b-\kappa}}{-\tilde{g}'(-\kappa,\delta)} e^{-\kappa u} \quad , \quad u \to \infty .$$

Στη συνέχεια, αντικαθιστώντας το $\tilde{g}_\omega(-\kappa,\delta)$ από την (2.20) και το $\tilde{g}'(-\kappa,\delta)$ από την (2.25) με $\tilde{g}(-\kappa,\delta) = 1$ παίρνουμε,

$$\phi(u) \approx \frac{\lambda\left[\tilde{\omega}(-\kappa) - \tilde{\omega}(\rho)\right] + w_0(\rho+\kappa)D}{-\lambda \hat{f}'(-\kappa) - c + 2\kappa D} e^{-\kappa u},$$

το οποίο μας δίνει την (2.27).

□

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.2. *Για* $D > 0$, *αν* $w(x,y) = 1$, *τότε ο ασυμπτωτικός τύπος που ικανοποιεί η* $\phi(u)$ *είναι*

$$\phi(u) \approx \frac{\left[\delta + (w_0 - 1)\rho\kappa D\right](\rho+\kappa)}{\rho\kappa\left[-\lambda \hat{f}'(-\kappa) - c + 2\kappa D\right]} e^{\kappa u} \quad , \quad \mathrm{u} \to \infty , \tag{2.28}$$

όπου $-\hat{f}'(-\kappa) = \int_0^\infty x e^{\kappa x} dF(x)$ *και* $-\kappa$ *η μοναδική αρνητική ρίζα της (2.22).*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν $w(x,y) = 1$, ο πρώτος όρος του αριθμητή της (2.27) γίνεται

$$\lambda \int_0^\infty \left(e^{\kappa x} - e^{-\rho x}\right)\overline{F}(x)dx = \frac{\lambda\left[\hat{f}(-\kappa) - 1\right]}{\kappa} + \frac{\lambda\left[\hat{f}(\rho) - 1\right]}{\rho} =$$

$$= \frac{\delta + c\kappa - D\kappa^2}{\kappa} + \frac{\delta - c\rho - D\rho^2}{\rho},$$

για ρ και $-\kappa$ να ικανοποιούν την (2.22). Μετά από μικρή αναδιάταξη λαμβάνουμε την (2.28).

□

Από τη λύση της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης προκύπτουν ιδιότητες, οι οποίες εξαρτώνται σε μεγάλο βαθμό από τις ιδιότητες της αντίστοιχης κατανομής του ύψους των απαιτήσεων.

Υπενθυμίζουμε ότι η $g(y)$ των σχέσεων (2.3), (2.14) και (2.15) είναι η προεξοφλημένη πιθανότητα, η πρώτη πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό, που οφείλεται στην εμφάνιση κάποιας απαίτησης, να βρίσκεται μεταξύ $u - y$ και $u - y - dy$.

Θέτοντας $\xi = 0$ στην (2.17) παίρνουμε,

$$\int_0^\infty g(y)dy = \frac{D\rho^2 + c\rho - \delta}{b\rho D} = \frac{D\rho^2 + c\rho - \delta}{D\rho^2 + c\rho} < 1.$$

Οπότε αν θέσουμε $\int_0^\infty g(y)dy = \frac{1}{1+\beta}$, $\beta > 0$, αφού η ρ ικανοποιεί την γενικευμένη εξίσωση του Lundberg,προκύπτει ότι,

$$\frac{1}{1+\beta} = \int_0^\infty g(y)dy = \frac{D\rho^2 + c\rho - \delta}{D\rho^2 + c\rho} = \frac{\lambda\left[1-\hat{f}(\rho)\right]}{(c+\rho D)\rho} = \frac{\lambda}{c+\rho D}\int_0^\infty e^{-\rho y}\overline{F}(y)dy, \quad (2.29)$$

ή ισοδύναμα

$$\beta = \frac{\delta}{D\rho^2 + c\rho - \delta} = \frac{c+\rho D}{\lambda\int_0^\infty e^{-\rho y}\overline{F}(y)dy} - 1$$

με $\beta = \frac{c}{\lambda\mu_1} - 1 = \theta$ όταν $\delta = 0$. Επιπλέον για την περίπτωση όπου $D = 0$ συμβολίζουμε με β_0 το

$$\beta_0 = \frac{\delta}{c\rho_0 - \delta} = \frac{c}{\lambda\int_0^\infty e^{-\rho_0 y}\overline{F}(y)dy} - 1,$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{1}{1+\beta_0} = \int_0^\infty \gamma_0(y)dy = \frac{c\rho_0 - \delta}{c\rho_0} = \frac{\lambda\left[1-\hat{f}(\rho_0)\right]}{c\rho_0} = \frac{\lambda}{c}.$$

Από αυτό και την (2.29), παίρνουμε

$$1+\beta = \frac{c+\rho D}{c}\cdot\frac{\int_0^\infty e^{-\rho_0 y}\overline{F}(y)dy}{\int_0^\infty e^{-\rho y}\overline{F}(y)dy}(1+\beta_0).$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.3. *Ορίσουμε $G(x)$ να είναι η συνάρτηση κατανομής του ύψους των απαιτήσεων με*

$$G(x) = \frac{\int_0^x g(y)dy}{\int_0^\infty g(y)dy}.$$

Αφού $g(x) = h * \gamma(x)$, η $G(x)$ γίνεται

$$G(x) = \int_0^x H(x-y)d\Gamma(y) = H * \Gamma(x), \quad (2.30)$$

όπου $H(x) = 1 - \overline{H}(x)$ είναι μία εκθετική συνάρτηση κατανομής με

$$\overline{H}(x) = \frac{\int_x^\infty h(s)ds}{\int_0^\infty h(s)ds} = e^{-bx} = \frac{H'(x)}{b}, \quad (2.31)$$

όπου $H'(x)=be^{-bx}$ η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και $\Gamma(x)=1-\overline{\Gamma}(x)$ επίσης μία συνάρτηση κατανομής με

$$\overline{\Gamma}(x)=1-\Gamma(x)=\frac{\int_x^\infty \gamma(s)ds}{\int_0^\infty \gamma(s)ds}=\frac{\int_x^\infty e^{\rho s}\int_s^\infty e^{-\rho y}dF(y)ds}{\int_0^\infty e^{\rho s}\int_s^\infty e^{-\rho y}dF(y)ds}=\frac{\int_x^\infty e^{-\rho(y-s)}\overline{F}(y)dy}{\int_0^\infty e^{-\rho y}\overline{F}(y)dy}.$$

Από την (2.6) και (2.29) παίρνουμε

$$G'(x)=\frac{g(x)}{\int_0^\infty g(y)dy}=\frac{\int_0^x e^{-b(x-s)}\int_s^\infty e^{-\rho(y-s)}dF(y)ds}{\frac{1}{b}\int_0^\infty e^{=\rho y}\overline{F}(y)dy}.$$

Οι Lin και Willmot (1999) χρησιμοποίησαν την παρακάτω σχέση,

$$\int_0^\infty e^{\rho_0 s}\int_s^\infty e^{-\rho_0 y}dF(y)ds=\frac{1-\hat{f}(\rho_0)}{\rho_0}=\int_0^\infty e^{-\rho_0 y}\overline{F}(y)dy, \tag{2.32}$$

για να δείξουν ότι

$$\overline{\Gamma}_0(x)=\overline{\Gamma}_0(x)|_{\rho=\rho_0}=\frac{e^{\rho_0 x}\int_x^\infty e^{-\rho_0 y}\overline{F}(y)dy}{\int_0^\infty e^{-\rho_0 y}\overline{F}(y)dy}=\frac{\int_0^\infty e^{-\rho_0 y}\overline{F}(x-y)dy}{\int_0^\infty e^{-\rho_0 y}\overline{F}(y)dy} \tag{2.33}$$

Και

$$\Gamma'_0(x)=\frac{e^{\rho_0 x}\int_x^\infty e^{-\rho_0 y}dF(y)}{\int_0^\infty e^{-\rho_0 y}\overline{F}(y)dy}. \tag{2.34}$$

Προφανώς, όταν $\delta=0$ τότε $\rho=\rho_0=0$, το οποίο μας δίνει ότι $\Gamma'(x)=\Gamma'_0(x)=\frac{\overline{F}(x)}{\mu_1}=f_e(x)$ και $\Gamma(x)=\Gamma_0(x)=F_e(x)$. Ως εκ τούτου, η Γ (ή η Γ_0) μπορεί να θεωρηθεί ως μία γενίκευση της κατανομής ισορροπίας.

Ο μετασχηματισμός Laplace της $\Gamma'(x)$ είναι (βλέπε Lin και Willmot 1999, σχέση (3.1)),

$$\int_0^\infty e^{-sx}d\Gamma(x)=\frac{\int_0^\infty e^{-(s-\rho)x}\int_x^\infty e^{-\rho y}dF(y)dx}{\int_0^\infty e^{-\rho y}\overline{F}(y)dy}=\frac{\rho}{\rho-s}\cdot\left[\frac{\hat{f}(s)-\hat{f}(\rho)}{1-\hat{f}(\rho)}\right].$$

Από την (2.30) παίρνουμε ότι $\int_0^\infty e^{-sx}dG(x)=\frac{b}{b+s}\int_0^\infty e^{-sx}d\Gamma(x)$.

Επιπλέον, αν διαφορίσουμε την (2.30) παίρνουμε, $G'(x)=H'*\Gamma(x)=b\overline{H}*\Gamma(x)$ από την (2.31).

Εφόσον, $G(x)=H*\Gamma(x)=\Gamma(x)-\overline{H}*\Gamma(x)$ παίρνουμε

$$\overline{G}(x)=1-G(x)=\overline{\Gamma}(x)+\overline{H}*\Gamma(x)=\overline{\Gamma}(x)+\frac{G'(x)}{b}. \tag{2.35}$$

Ομοίως, $G(x)=(1-\overline{\Gamma})*H(x)=H(x)-\overline{\Gamma}*H(x)$ από την (2.30) και την αντιμεταθετική ιδιότητα της συνέλιξης. Μια εναλλακτική μορφή για την $\overline{G}(x)$ είναι

$$\overline{G}(x)=\overline{H}(x)+\overline{\Gamma}*H(x)=e^{-bx}+b\int_0^x e^{-b(x-y)}\overline{\Gamma}(y)dy.$$

Παρατηρούμε ότι όταν $D\to 0$ τότε $g(y)\to\gamma_0(y)$ από την (2.18), έτσι παίρνουμε

$$G(x)=\frac{\int_0^x g(y)dy}{\int_0^\infty g(y)dy}\to\frac{\int_0^x \gamma_0(y)dy}{\int_0^\infty \gamma_0(y)dy}=\Gamma_0(x)\quad,\quad x\ge 0.$$

Με τον ορισμό της $G(y)$ η (2.14) γίνεται

$$\phi_w(u)=\frac{1}{1+\beta}\int_0^u \phi_w(u-y)dG(y)+\frac{1}{1+\beta}\mathrm{B}(u), \tag{2.36}$$

όπου

$$\mathrm{B}(u)=\frac{\lambda}{D}(1+\beta)\int_0^u e^{-b(u-s)}\int_s^\infty e^{-\rho(x-s)}\int_x^\infty w(x,y-x)dF(y)dxds. \tag{2.37}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2.2. (Μείξη εκθετικών κατανομών) Υποθέτουμε ότι $F'(x)=\sum_{k=1}^r q_k\mu_k e^{-\mu_k x}\quad,\quad x\ge 0$, όπου $q_1+q_2+\cdots+q_r=1$. Εάν $q_k>0$ για κάθε k τότε η $F'(x)$ είναι μία μείξη εκθετικών κατανομών. Είναι εύκολο να δείξουμε ότι ισχύει

$$\overline{F}(x)=\sum_{k=1}^r q_k e^{-\mu_k x}\ \text{και}\ \int_x^\infty e^{-\rho y}\overline{F}(y)dy=\sum_{k=1}^r\frac{q_k}{\rho+\mu_k}e^{-(\rho+\mu_k)x}\quad,\quad x\ge 0.$$

Όπως αποδεικνύεται από τους Lin και Willmot (1999),

$$\overline{\Gamma}_0(x)=\sum_{k=1}^r q_{k,0}^* e^{-\mu_k x}\quad,\quad x\ge 0,$$

όπου $q_{k,0}^*=q_k^*|_{\rho=\rho_0}$ και

$$q_k^*=\frac{\dfrac{q_k}{\rho+\mu_k}}{\sum_{j=1}^r\dfrac{q_j}{\rho+\mu_j}}\quad,\quad k=1,2,\ldots,r.$$

Προφανώς, η $\overline{\Gamma}_0(x)$ είναι επίσης η ουρά μίας μείξης εκθετικών κατανομών με νέα βάρη $\{q_{k,0}^*\}_{k=1}^r$. Επιπλέον,

$$\overline{G}(x)=\overline{H}(x)+\overline{\Gamma}*H(x)=\sum_{k=1}^{r}q_k^*e^{-bx}+b\sum_{k=1}^{r}q_k^*\int_0^x e^{-\mu_k(x-y)}e^{-by}dy=$$

$$=\sum_{k=1}^{r}\left[\frac{q_k^*\mu_k}{\mu_k-b}\right]e^{-bx}+b\sum_{k=1}^{r}\left[\frac{q_k^*}{b-\mu_k}\right]e^{-\mu_k x}=\left(1-bq^*\right)e^{-bx}+bq^*\sum_{k=1}^{r}q_k^{**}e^{-\mu_k x}$$

είναι επίσης η ουρά μίας μείξης εκθετικών κατανομών (υποθέτουμε ότι $b\neq\mu_k$, $k=1,2,...,r$) όπου $q^*=\sum_{j=1}^{r}\left[\frac{q_j^*}{b-\mu_j}\right]$ και $q_k^{**}=\frac{q_k^*}{q^*(b-\mu_k)}$, $k=1,2,...,r$.

Στην περίπτωση όπου $r=1$, τότε η $F(x)$ είναι μία εκθετική συνάρτηση κατανομής με παράμετρο μ και $\overline{\Gamma}(x)=\overline{F}(x)$. Εάν $b\neq\mu$, τότε η $\overline{G}(x)=\frac{\mu e^{-bx}-be^{-\mu x}}{\mu-b}$ είναι συνδυασμός δύο εκθετικών.

□

Οι Lin και Willmot (1999) απέδειξαν ότι οποιαδήποτε συνάρτηση $\phi_w(u)$ ικανοποιεί την (2.36) με αυθαίρετη $B(u)$ και συνάρτηση κατανομής $G(u)$ μπορεί να εκφραστεί ως,

$$\phi_w(u)=-\frac{1}{\beta}\int_0^u\overline{K}(u-x)dB(x)+\frac{1}{\beta}B(u)-\frac{1}{\beta}B(0)\overline{K}(u). \qquad (2.38)$$

Εδώ η $\overline{K}(u)=1-K(u)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta}{1+\beta}\cdot\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^n\overline{G}^{*n}(u)$, $u\geq 0$, είναι μία σύνθετη γεωμετρική συνάρτηση κατανομής, με $\overline{K}(0)=\frac{1}{1+\beta}$, η οποία ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

$$\overline{K}(u)=\frac{1}{1+\beta}\int_0^u\overline{K}(u-x)dG(x)+\frac{1}{1+\beta}\overline{G}(u) \ , \ u\geq 0. \qquad (2.39)$$

Για $D=0$, οι Tsai και Willmot (2001) έδειξαν ότι $\rho=\rho_0$, $\overline{G}(u)=\overline{\Gamma}_0(u)$, $\beta=\beta_0$ και

$$\overline{K}(u)=\overline{K}_0(u)\equiv E\left[e^{-\delta t}I(T<\infty\,|\,U(o)=u)\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_0}{1+\beta_0}\left(\frac{1}{1+\beta_0}\right)^n\overline{\Gamma}^{*n}(u),$$

η οποία ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

$$\overline{K}_0(u)=\frac{1}{1+\beta_0}\int_0^u\overline{K}_0(u-x)d\Gamma_0(x)+\frac{1}{1+\beta_0}\overline{\Gamma}_0(u) \ , \ u\geq 0 \qquad (2.40)$$

με $\overline{K}_0(0)=\frac{1}{1+\beta_0}$, όπου $\overline{\Gamma}_0(u)=\overline{\Gamma}(u)|_{\rho=\rho_0}$ και $\rho_0=\rho(\delta,0)$ η μοναδική, μη αρνητική ρίζα της εξίσωσης του Lundberg $\lambda\hat{f}(s)=\lambda\int_0^\infty e^{-sx}dF(x)=\lambda+\delta-cs$ με $\rho_0=0$ όταν $\delta=0$.

2.4 Από κοινού, προεξοφλημένες συναρτήσεις κατανομής και πυκνότητας πιθανότητας των $U(T-)$ και $|U(\mathrm{T})|$

Μελετώντας την προεξοφλημένη ελλειμματική από κοινού συνάρτηση κατανομής των $U(T-)$ και $|U(\mathrm{T})|$ μπορούμε να οδηγηθούμε στις οριακές προεξοφλημένες ελλειμματικές συναρτήσεις κατανομής των $U(T-)$ και $|U(\mathrm{T})|$. Πρώτα απ' όλα, με κατάλληλη επιλογή της συνάρτησης ποινής $w(x,y)$, παίρνουμε ότι η προεξοφλημένη ελλειμματική από κοινού συνάρτηση κατανομής των $U(T-)$ και $|U(\mathrm{T})|$ είναι η $\phi_w(u)$. Έπειτα, από τις (2.36) και (2.38) μπορούμε να πάρουμε μια αναλυτική έκφραση των προεξοφλημένων ελλειμματικών από κοινού συναρτήσεων κατανομών των $U(T-)$ και $|U(\mathrm{T})|$.

Όταν η χρεοκοπία οφείλεται στην εμφάνιση κάποιας απαίτησης, θεωρούμε $f(x,y,t;D\,|\,u)$ (όπου $D=\frac{1}{2}\sigma^2$) την από κοινού ελλειμματική συνάρτηση πυκνότητας, πιθανότητας των $U(T-),|U(T)|$ και T. Ορίζουμε επίσης, τις από κοινού, προεξοφλημένες, περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας, πιθανότητας των $U(T-)$, $|U(T)|$, βασισμένες στην (2.1), με συντελεστή προεξόφλησης $\delta \geq 0$ ως ακολούθως,

$$f(x,y;\delta,D\,|\,u)=\int_0^\infty e^{-\delta t} f(x,y,t;D\,|\,u)dt\,,$$

$$f_1(x;\delta,D\,|\,u)=\int_0^\infty f(x,y,;\delta,D\,|\,u)dy=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\delta t} f(x,y,t;D\,|\,u)dtdy\,,$$

και

$$f_2(y;\delta,D\,|\,u)=\int_0^\infty f(x,y;\delta,D\,|\,u)dx=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\delta t} f(x,y,t;D\,|\,u)dtdx\,.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.4. *Για κάθε σταθερό x, y ορίζουμε τη συνάρτηση ποινής $w(x_1,x_2)$ να δίνεται από τον τύπο*

$$w(x_1,x_2)=\begin{cases}1\ , & \text{εάν } x_1\leq x,\ x_2\leq y,\\ 0\ , & \text{αλλιώς}.\end{cases}$$

Από την $f(x,y;\delta,D\,|\,u)=\int_0^\infty e^{-\delta t} f(x,y,t;D\,|\,u)dt$, η $\phi_w(u)$ της (2.4) γίνεται,

$$\phi_w(u)=\int_0^x\int_0^y\int_0^\infty e^{-\delta t} f(x_1,x_2,t;D\,|\,u)dtdx_1dx_2=F(x,y'\delta,D\,|\,u),$$

που είναι η προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση κατανομής των $U(T-)$ και $|U(\mathrm{T})|$. Η συνάρτηση $B(u)$ της (2.37) μπορεί να γραφεί χρησιμοποιώντας την (2.29) και τη σχέση $\overline{\Gamma}(x)=\dfrac{\int_x^\infty e^{-\rho(y-s)}\overline{F}(y)dy}{\int_0^\infty e^{-\rho y}\overline{F}(y)dy}$ ως ακολούθως.

Εάν $0 \le u < x$,

$$B(u) = \frac{\lambda}{D}(1+\beta)\int_0^u e^{-b(u-s)}\int_s^x e^{-\rho(x_1-s)}\int_{x_1}^{x_1+y} f(x_2)dx_2dx_1ds$$

$$= \overline{G}(u) - \overline{G}(u+y) - \overline{H}(u)G(y) - \frac{b}{a}e^{-\rho x}\left(e^{\rho u} - e^{-bu}\right)\left[\overline{\Gamma}(x) - \overline{\Gamma}(x+y)\right]. \qquad (2.41)$$

Και για $u > 0$,

$$dB(u) = dG(x+y) - dG(u) + G(y)dH(u) -$$

$$-\frac{b}{a}e^{-\rho x}\left(\rho e^{\rho u} + be^{-bu}\right)\left[\overline{\Gamma}(x) - \overline{\Gamma}(x+y)\right]du\,, \qquad (2.42)$$

όπου $a = b + \rho = \frac{c}{D} + 2\rho$.

Εάν $0 < x \le u$,

$$B(u) = \frac{\lambda}{D}(1+\beta)\int_0^x e^{-b(u-s)}\int_s^x e^{-\rho(x_1-s)}\int_{x_1}^{x_1+y} f(x_2)dx_2dx_1ds +$$

$$+\frac{\lambda}{D}(1+\beta)\int_x^u e^{-b(u-s)}\int_s^x e^{-\rho(x_1-s)}\int_{x_1}^{x_1+y} f(x_2)dx_2dx_1ds$$

$$= \overline{H}(u-x)\left[\overline{G}(x) - \overline{G}(x+y)\right] - \overline{H}(u)G(y) - \frac{b}{a}e^{-bu}\left(e^{bx} - e^{-\rho x}\right)\left[\overline{\Gamma}(x) - \overline{\Gamma}(x+y)\right]. \qquad (2.43)$$

Και

$$dB(u) = -\left[\overline{G}(x) - \overline{G}(x+y)\right]dH(u-x) + G(y)dH(u) +$$

$$+\frac{d}{a}\left(e^{bx} - e^{-\rho x}\right)\left[\overline{\Gamma}(x) - \overline{\Gamma}(x+y)\right]dH(u)\,. \qquad (2.44)$$

Όταν $D = 0$, τότε $\frac{b}{a} = 1$, $\rho = \rho_0$, $G(x) = \Gamma_0(x)$ και $\overline{H}(u) = e^{-bu} = 0$ για $u > 0$.

Οπότε το $B(u)$ γίνεται

$$B_0(u) = \begin{cases} \left[\overline{\Gamma}_0(u) - \overline{\Gamma}_0(u+y)\right] - e^{-\rho_0(x-u)}\left[\overline{\Gamma}_0(x) - \overline{\Gamma}_0(x+y)\right] & , \text{ αν } 0 \le u < x, \\ 0 & , \text{ αν } 0 < x \le u. \end{cases} \qquad (2.45)$$

Παρατηρούμε ότι η παραπάνω έκφραση για το $B_0(u)$, $0 \le u < x$, μπορεί να ληφθεί και για $u = 0$, όμως όχι για $D = 0$, αλλά από παράγωγες εκφράσεις όμοιες με την συνάρτηση (2.41), όπου

$$B_0(u) = \frac{\lambda}{c}(1+\beta_0)\int_u^\infty e^{-\rho_0(x_1-u)}\int_{x_1}^\infty w(x_1, x_2 - x_1)f(x_2)dx_2dx_1\,. \qquad (2.46)$$

Στη συνέχεια, οδηγούμαστε στα ακόλουθα αποτελέσματα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.5. (Tsai C. C. L., 2001, Θεώρημα 1) *Για* $D > 0$*, η προεξοφλημένη ελλειμματική από κοινού συνάρτηση κατανομής των* $U(T-)$ *και* $|U(T)|$ *δίνεται από τον τύπο*

$$F(x,y;\delta,D\,|\,u)=\begin{cases}\frac{1+\beta}{\beta}\left[\overline{K}(u)-\overline{K}(u+y)\right]-\frac{1}{\beta}G(y)\left[1-K*H(u)\right]+\\ +\frac{1}{\beta}\int_0^y\overline{K}(u+y-t)dG(t)+\frac{1}{\beta}\cdot\frac{b}{a}e^{-\rho x}\left[\overline{\Gamma}(x)-\overline{\Gamma}(x+y)\right]\times\\ \times\left[\rho\int_0^u e^{\rho t}\overline{K}(u-t)dt+\left[1-K*H(u)\right]-e^{\rho u}\right]\ , & \text{αν } 0\le u<x,\\ \frac{1}{\beta}\int_0^x\overline{K}(u-t)\left[dG(t)-dG(y+t)\right]-\frac{1}{\beta}G(y)\times\\ \times\left[1-K*H(u)\right]+\frac{1}{\beta}\cdot\frac{b}{a}e^{-\rho x}\left[\overline{\Gamma}(x)-\overline{\Gamma}(x+y)\right]\times\\ \times\left[\rho\int_0^x e^{\rho t}\overline{K}(u-t)dt+\left[1-K*H(u)\right]\right]+\frac{1}{\beta}\left[\left(\overline{G}(x)-\right.\right.\\ \left.\left.-\overline{G}(x+y)\right)-\frac{b}{a}\left(\overline{\Gamma}(x)-\overline{\Gamma}(x+y)\right)\right]\left[1-K*H(u-x)\right]\ , & \text{αν } 0<x\le u,\end{cases}$$

(2.47)

με $F(x,y;\delta,D\,|\,0)=0$, *όπου*

$$1-K*H(u)=\overline{H}(u)+\overline{K}*H(u). \tag{2.48}$$

Για $D=0$,

$$F(x,y;\delta,0\,|\,u)=\begin{cases}\frac{1+\beta_0}{\beta_0}\left[\overline{K}_0(u)-\overline{K}_0(u+y)\right]-\frac{1}{\beta_0}\Gamma(y)\overline{K}_0(u)+\\ +\frac{1}{\beta_0}\int_0^y\overline{K}_0(u+y-t)d\Gamma(t)+\frac{1}{\beta_0}e^{-\rho_0 x}\left[\overline{\Gamma}(x)-\right.\\ \left.-\overline{\Gamma}(x+y)\right]\left[\rho_0\int_0^u e^{\rho_0 t}\overline{K}_0(u-t)dt+\overline{K}_0(u)-e^{\rho_0 u}\right]\ , & \text{αν } 0\le u<x,\\ \frac{1}{\beta_0}\int_0^x\overline{K}_0(u-t)\left[d\Gamma(t)-d\Gamma(y+t)\right]-\\ -\frac{1}{\beta_0}\Gamma(y)\overline{K}_0(u)+\frac{1}{\beta_0}e^{-\rho x}\left[\overline{\Gamma}(x)-\overline{\Gamma}(x+y)\right]\times\\ \times\left[\rho_0\int_0^x e^{\rho_0 t}\overline{K}_0(u-t)dt+\overline{K}_0(u)\right]\ , & \text{αν } 0<x\le u,\end{cases}$$

(2.49)

με $F(x,y;\delta,0\,|\,0)=\dfrac{1}{(1+\beta_0)\left[e^{-\rho_0 x}\Gamma(x)+\Gamma(y)-e^{-\rho_0 x}\Gamma(x+y)\right]}$.

Για $D=0$ *και* $\delta=0$,

$$F(x,y;0,0\,|\,u)=\begin{cases}\frac{1}{1+\theta}\left[\psi_0(u)-\psi_0(u+y)\right]+\frac{1}{\theta}\left[F_1(x+y)-\right.\\ \left.-F_1(x)-F_1(y)\right]\psi_0(u)-\frac{1}{\theta}\left[F_1(x+y)-F_1(x)\right]+\\ +\frac{1}{\theta\mu_1}\int_0^y\psi_0(u+y-t)\overline{F}(t)dt\ , & \text{αν } 0\le u<x,\\ \frac{1}{\theta\mu_1}\int_0^x\psi_0(u-t)\left[\overline{F}(t)-\overline{F}(y+t)\right]dt+\\ +\frac{1}{\theta}\left[F_1(x+y)-F_1(x)-F_1(y)\right]\psi_0(u)\ , & \text{αν } 0<x\le u,\end{cases}\qquad(2.50)$$

με $F(x,y;0,0\,|\,0)=\dfrac{1}{(1+\theta)\left[F_1(x)+F_1(y)-F_1(x+y)\right]}$, *όπου* $F_1(x)=\int_0^x\dfrac{\left[1-F(y)\right]dy}{\mu_1}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν $0\le u<x$, αποδεικνύεται ότι η (2.38) είναι η

$$F(x,y;\delta,D\,|\,u)=-\frac{1}{\beta}\int_0^u\overline{K}(u-t)dB(t)+\frac{1}{\beta}B(u)$$

όταν $B(0)=0$.

Στη συνέχεια αντικαθιστώντας τις $B(u)$ και $B'(t)$ των (2.41) και (2.42), αντίστοιχα, παίρνουμε την (2.47) μέσω της (2.39) για την περίπτωση που $0\le u<x$. Για $u=0$, από την (2.39), παίρνουμε

$$F(x,y;\delta,D\,|\,0)=\frac{1+\beta}{\beta}\left[\overline{K}(0)-\overline{K}(y)\right]-\frac{1}{\beta}G(y)+\frac{1}{\beta}\int_0^y\overline{K}(y-t)dG(t)=0$$

και $\overline{K}(0)=\dfrac{1}{1+\beta}$.

Ομοίως, αν $0<x\le u$, η (2.38) γίνεται

$$F(x,y;\delta,D\,|\,u)=-\frac{1}{\beta}\int_0^x\overline{K}(u-t)dB(t)-\frac{1}{\beta}\int_x^u\overline{K}(u-t)dB(t)+\frac{1}{\beta}B(u).$$

Αντικαθιστώντας τις $B(u)$ και $dB(t)$ των (2.41) και (2.42), αντίστοιχα, με τη βοήθεια της (2.39) οδηγούμαστε στην (2.47), για την περίπτωση όπου $0<x\le u$.

Όταν $D=0$, τότε $\beta=\beta_0$, $\dfrac{b}{a}=1$, $\rho=\rho_0$, $G(y)=\Gamma_0(y)$, $\overline{K}(u)=\overline{K}_0(u)$ και για $u>0$, $(1-K*H(u))=\overline{K}_0(u)$. Ως εκ τούτου, όταν $D=0$, η (2.47) απλοποιείται στην (2.49) για $u>0$. Για $u=0$ το αποτέλεσμα μπορεί να προκύψει μέσω παράγωγων συναρτήσεων, παρόμοιων της (2.47) από την

$$F(x,y;\delta,0\,|\,u)=-\frac{1}{\beta_0}\int_0^u \overline{K}_0(u-t)dB_0(t)+\frac{1}{\beta_0}B_0(u)-\frac{1}{\beta_0}B_0(u)\overline{K}_0(u),$$

Με το $B_0(u)$ να δίνεται στην (2.45). Εάν $u=0$, η (2.49) γίνεται

$$F(x,y;\delta,0\,|\,0)=\frac{1}{1+\beta_0}\left[e^{-\rho x}\Gamma(x)+\Gamma(y)-e^{-\rho x}\Gamma(x+y)\right],$$

από την (2.40) και $\overline{K}_0(0)=\dfrac{1}{1+\beta_0}$.

Εάν $\delta=0$, τότε $\beta_0=\theta$, $\rho=\rho_0$, $\overline{\mathrm{K}}_0(u)|_{\delta=0}=\psi_0(u)$, $\Gamma_0(x)=F_1(x)$ και $d\Gamma(x)=\dfrac{\overline{F}(x)dx}{\mu_1}$. Στην περίπτωση αυτή, η (2.50) προκύπτει εύκολα μέσω της (2.49).

□

Ο Tsai (2001) έδειξε ότι η $(1-K*H(u))$ είναι ίση με

$$\phi_t(u)=E\left[e^{-\delta T}I(T<\infty,U(T)=0)\,|\,U(0)=u\right]+E\left[e^{-\delta T}I(T<\infty,U(T)<0)\,|\,U(0)=u\right],$$

το άθροισμα δύο αναμενόμενων παρουσών αξιών του χρόνου χρεοκοπίας T, όταν η χρεοκοπία οφείλεται στην εμφάνιση κάποιας απαίτησης και σε ταλάντωση. Για $\delta=0$, η $\phi_t(u)$ γίνεται $\psi_t(u)=\Pr(T<\infty,U(T)=0\,|\,U(0)=u)+\Pr(T<\infty,U(T)<0\,|\,U(0)=u)$ που είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.3. *Για $D>0$, η προεξοφλημένη ελλειμματική από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των $U(T-)$ και $|U(T)|$ δίνεται από τον τύπο*

$$f(x,y;\delta,D\,|\,u)=\begin{cases}\dfrac{\lambda e^{-\rho x}f(x+y)}{c+2\rho D}\cdot\left[\dfrac{e^{\rho u}}{1-\overline{K}(0)}-\right.\\ \left.-\dfrac{(1-K*H(u))+\rho\int_0^u e^{\rho t}\overline{K}(u-t)dt}{1-\overline{K}(0)}\right], & \text{αν } 0\le u<x,\\ \dfrac{\lambda e^{-\rho x}f(x+y)}{c+2\rho D}\cdot\left[\dfrac{e^{\rho x}(1-K*H(u-x))}{1-\overline{K}(0)}-\right.\\ \left.-\dfrac{(1-K*H(u))+\rho\int_0^x e^{\rho t}\overline{K}(u-t)dt}{1-\overline{K}(0)}\right], & \text{αν } 0<x<u,\end{cases}\tag{2.51}$$

με $f(x,y;\delta,D\,|\,0)=0$.

Για $D=0$,

$$f(x,y;\delta,0\,|\,u)=\begin{cases}\dfrac{\lambda e^{-\rho_0 x}f(x+y)}{c}\cdot\left[\dfrac{e^{\rho_0 u}}{1-\overline{K}_0(0)}-\right.\\ \left.-\dfrac{\overline{K}_0(u)+\rho_0\int_0^u e^{\rho_0 t}\overline{K}_0(u-t)dt}{1-\overline{K}_0(0)}\right] & ,\ \text{αν } 0\le u<x,\\ \dfrac{\lambda e^{-\rho_0 x}f(x+y)}{c}\cdot\left[\dfrac{e^{\rho_0 x}\overline{K}_0(u-x)}{1-\overline{K}(0)}-\right.\\ \left.-\dfrac{\overline{K}_0(u)+\rho_0\int_0^x e^{\rho_0 t}\overline{K}_0(u-t)dt}{1-\overline{K}_0(0)}\right] & ,\ \text{αν } 0<x<u,\end{cases} \tag{2.52}$$

με $f(x,y;\delta,0\,|\,0)=\dfrac{\lambda}{c}e^{-\rho_0 x}f(x+y)$.

Για $D=0$ *και* $\delta=0$,

$$f(x,y;0,0\,|\,u)=\begin{cases}\dfrac{\lambda}{c}f(x+y)\dfrac{1-\psi_0(u)}{1-\psi_0(0)} & ,\quad \text{αν } 0\le u<x,\\ \dfrac{\lambda}{c}f(x+y)\dfrac{\psi_0(u-x)-\psi_0(u)}{1-\psi_0(0)} & ,\quad \text{αν } 0<\mathrm{x}\le \mathrm{u},\end{cases} \tag{2.53}$$

με $f(x,y;0,0\,|\,u)=\dfrac{\lambda}{c}f(x+y)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Δεδομένου ότι $f(x,y;\delta,D\,|\,u)=\dfrac{\partial^2 F(x,y;\delta,D\,|\,u)}{\partial x\partial y}$, αν $0\le u<x$, από την (2.47) παίρνουμε

$$\frac{\partial F(x,c;\delta,D\,|\,u)}{\partial y}=-\frac{1+\beta}{\beta}\overline{K}'(u+y)-\frac{1}{\beta}G'(y)(1-K*H(u))+$$

$$+\frac{1}{\beta}G'(y)\overline{K}(u)++\frac{1}{\beta}\int_0^y\overline{K}'(u+y-t)dG(t)-$$

$$-\frac{1}{\beta}\frac{b}{a}e^{-\rho x}\overline{\Gamma}'(x+y)\left[\rho\int_0^u e^{\rho t}\overline{K}(u+t)dt+(1-K*H(u))-e^{\rho u}\right].$$

Από την (2.29) και τη σχέση $\overline{\Gamma}(x)=\dfrac{\int_x^\infty e^{-\rho(y-s)}\overline{F}(y)dy}{\int_0^\infty e^{-\rho y}\overline{F}(y)dy}$, παίρνουμε

$$\rho\overline{\Gamma}(x)+\Gamma'(x)=-e^{\rho x}\left[e^{-\rho x}\overline{\Gamma}(x)\right]'=\frac{\overline{F}(x)}{\int_0^\infty e^{-\rho y}\overline{F}(y)dy}=\frac{\lambda}{bD}(1+\beta)\overline{F}(x). \tag{2.54}$$

Οπότε,

$$-\frac{\partial e^{-\rho x}\overline{\Gamma}'(x+y)}{\partial x}=\rho e^{-\rho x}\overline{\Gamma}'(x+y)+e^{-\rho x}\overline{\Gamma}''(x+y)=e^{-\rho x}\frac{\partial\left[\rho\overline{\Gamma}(x+y)+\Gamma'(x+y)\right]}{\partial x}=$$

$$=-e^{-\rho x}\frac{\lambda}{bD}(1+\beta)f(x+y),$$

το οποίο αποδεικνύει την (2.51) για $0\le u<x$.

Εάν $0<x\le u$, από την (2.47) παίρνουμε

$$\frac{\partial F(x,y;\delta,D\,|\,u)}{\partial y}=-\frac{1}{\beta}\int_0^x\overline{K}(u-t)G''(y+t)dt-\frac{1}{\beta}G'(y)(1-K*H(u))-$$

$$-\frac{1}{\beta}\cdot\frac{d}{a}e^{-\rho x}\overline{\Gamma}'(x+y)\left[\rho\int_0^x e^{\rho t}\overline{K}(u-t)dt+(1-K*H(u)\right]-$$

$$-\frac{1}{\beta}\left[\overline{G}'(x+y)-\frac{b}{a}\overline{\Gamma}'(\chi x+y)\right](1-K*H(u-x)).$$

Όταν $K*H(u)=\int_0^u K(x)H'(u-x)dx=b\int_0^u e^{-b(u-x)}K(x)dx$, ισχύει ότι

$$[K*H(u)]'=b[K(u)-K*H(u)]=b[1-K*H(u)-\overline{K}(u)].$$

Τότε,

$$\frac{\partial^2 F(x,y;\delta,D\,|\,u)}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{\beta}G''(x+y)\overline{K}(u-x)-\frac{1}{\beta}\frac{b}{a}e^{-\rho x}\overline{\Gamma}'(x+y)\rho e^{\rho x}\overline{K}(u-x)+$$

$$+\frac{1}{\beta}\frac{b}{a}\left[\rho e^{-\rho x}\overline{\Gamma}'(x+y)+e^{-\rho x}\Gamma''(x+y)\right]\left[\rho\int_0^x e^{\rho t}\overline{K}(u-t)dt+(1-K*H(u))\right]-$$

$$-\frac{1}{\beta}\left[\overline{G}''(x+y)-\frac{b}{a}\overline{\Gamma}''(x+y)\right](1-K*H(u-x))-$$

$$-\frac{b}{\beta}\left[\overline{G}'(x+y)-\frac{b}{a}\overline{\Gamma}'(x+y)\right]\left[(1-K*H(u-x))-\overline{K}(u-x)\right]$$

$$=-\frac{1}{\beta}\left[G''(x+y)+\frac{bp}{a}\overline{\Gamma}'(x+y)-b\overline{G}'(x+y)-\frac{b^2}{a}\overline{\Gamma}'(x+y)\right]\overline{K}(u-x)-$$

$$-\frac{1}{\beta}\left[\overline{G}''(x+y)-\frac{b}{a}\overline{\Gamma}''(x+y)+b\overline{G}'(x+y)-\frac{b^2}{a}\overline{\Gamma}'(x+y)\right](1-K*H(u-x))-$$

$$-\frac{\lambda}{c+2\rho D}e^{-\rho x}f(x+y)\frac{(1-K*H(u))+\rho\int_0^x e^{\rho t}\overline{K}(u-t)dt}{1-\overline{K}(0)}.$$

Δεδομένου ότι $\overline{G}(x)=\overline{\Gamma}(x)+\dfrac{G'(x)}{b}$ και $a=b+\rho$, ο πρώτος όρος της δεξιάς μεριάς εξαφανίζεται και ο δεύτερος όρος αποδεικνύεται, μέσω της (2.54), ότι είναι

$$-\frac{1}{\beta}\cdot\frac{b}{a}\left[\rho\overline{\Gamma}'(x+y)+\Gamma''(x+y)\right](1-K*H(u-x))=\frac{\lambda(1+\beta)}{\beta aD}f(x+y)(1-K*H(u-x)).$$

Συνδυάζοντάς το με το τρίτο όρο παίρνουμε την (2.51) για $0<x\le u$.

Ομοίως, αποδεικνύεται μέσω της (2.49) η (2.52). Εάν $\delta=0$, τότε $\rho_0=0$, $\overline{K}_0(u)|_{\delta=0}=\psi_0(u)$, και η (2.52) ανάγεται στην (2.53).

□

2.5 Προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής και πυκνότητας πιθανότητας του $|U(\mathrm{T})|$

Όταν προκαλείται χρεοκοπία εξαιτίας της εμφάνισης κάποιας απαίτησης, ενδιαφέρον έχει η μελέτη του ελλείματος, $|U(\mathrm{T})|$, τη στιγμή της χρεοκοπίας και της συνάρτησης κατανομής του. Γνωρίζοντας την συνάρτηση κατανομής του $|U(\mathrm{T})|$ μπορούμε να αξιολογήσουμε το μέγεθος της καταστροφής που προκλήθηκε από μία απαίτηση. Με την από κοινού προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής των $U(\mathrm{T}-)$ και $|U(\mathrm{T})|$, η προεξοφλημένη οριακή συνάρτηση κατανομής του $|U(\mathrm{T})|$, $F_2(y;\delta,D\,|\,u)$, μπορεί τώρα να προκύψει μέσω της $F(x,y;\delta,D\,|\,u)$ αφήνοντας το $x\to\infty$.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.4. *Για $D>0$, η προεξοφλημένη ελλειμματική οριακή συνάρτηση κατανομής του $|U(\mathrm{T})|$ δίνεται από τον τύπο*

$$F_2(y;\delta,D\,|\,u)=\frac{1+\beta}{\beta}\left[\overline{K}(u)-\overline{K}(u+y)\right]-\frac{1}{\beta}G(y)(1-K*H(u))+$$

$$+\frac{1}{\beta}\int_0^y\overline{K}(u+y-t)dG(t), \tag{2.55}$$

με $F_2(y;\delta,D\,|\,0)=0$ και

$$F_2(\infty;\delta,D\,|\,u)=\lim_{y\to\infty}F_2(y;\delta,D\,|\,u)=\frac{1}{1+\beta}\overline{K}(u)-\frac{1}{\beta}(1-K*H(u)).$$

Για $D=0$,

$$F_2(y;\delta,0\,|\,u)=\frac{1+\beta_0}{\beta_0}\left[\overline{K}_0-\overline{K}_0(u+y)\right]-\frac{1}{\beta_0}\Gamma_0(y)\overline{K}_0(u)+$$

$$+\frac{1}{\beta_0}\int_0^y\overline{K}_0(u+y-t)d\Gamma_0(t), \tag{2.56}$$

με $F_2(y;\delta,0\,|\,0)=\dfrac{1}{1+\beta_0}\Gamma_0(y)$ και $F_2(\infty;\delta,0\,|\,u)=\lim\limits_{y\to\infty}F_2(y;\delta,0\,|\,u)=\overline{K}_0(u)$.

Για $D=0$ *και* $\delta=0$,

$$F_2(y;0,0\mid u)=\frac{1+\theta}{\theta}[\psi_0(u)-\psi_0(u+y)]-\frac{1}{\theta}F_1(y)\psi_0(u)+$$

$$+\frac{1}{\theta\mu_1}\int_0^y \psi_0(u+y-t)\overline{F}(t)dt\,, \qquad (2.57)$$

με $F_2(y;0,0\mid 0)=\frac{1}{1+\theta}F_1(y)=\frac{\lambda}{c}\int_0^y \overline{F}(t)dt$ *και* $F_2(\infty;0,0\mid u)=\lim_{y\to\infty}F_2(y;0,0\mid u)=\psi_0(u)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αφήνοντας το $x\to\infty$ στην περίπτωση που $0\le u<x$ (όταν το u είναι σταθερό), με την υπόθεση ότι $\overline{\Gamma}(x)\to 0$ και $\overline{\Gamma}(x+y)\to 0$, από την (2.47) προκύπτει η (2.55). Ομοίως από τις (2.49) και (2.50) προκύπτουν οι (2.56) και (2.57).

Όταν το $y\to\infty$, τότε $\overline{K}(u+y)\to 0$ και

$$\int_0^y \overline{K}(u+y-t)dG(t)\le\int_0^\infty \overline{K}(u+y-t)dG(t)\to 0\,,$$

από το οποίο προκύπτει ότι $\lim_{y\to\infty}F_2(y;\delta,D\mid u)=\frac{1+\beta}{\beta}\overline{K}(u)-\frac{1}{1+\beta}(1-K*H(u))$.

□

Ο Tsai (2001) έδειξε ότι το $\lim_{y\to\infty}F_2(y;\delta,D\mid u)=\frac{1+\beta}{\beta}\overline{K}(u)-\frac{1}{1+\beta}(1-K*H(u))$ είναι ίσο με $\phi_s(u)=E\left[e^{-\delta T}I(T<\infty,U(T)<0)\mid U(0)=u\right]$, δηλαδή ίσο με την αναμενόμενη παρούσα αξία του χρόνου χρεοκοπίας T, όταν η χρεοκοπία οφείλεται στην εμφάνιση κάποιας απαίτησης.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.4. *Για* $D>0$, *η προεξοφλημένη ελλειμματική συνάρτηση πιθανότητας πυκνότητας του* $|U(T)|$ *δίνεται από τον τύπο*

$$f_2(y;\delta,D\mid u)=-\frac{1+\beta}{\beta}\overline{K}'(u+y)-\frac{1}{\beta}G'(y)\overline{H}*K(u)+$$

$$+\frac{1}{\beta}\int_0^y \overline{K}'(u+y-t)dG(t)\,, \qquad (2.58)$$

με $f_2(y;\delta,D\mid 0)=0$.

Για $D=0$,

$$f_2(y;\delta,0\mid u)=-\frac{1+\beta_0}{\beta_0}\overline{K}_0'(u+y)+\frac{1}{\beta_0}\int_0^y \overline{K}_0'(u+y-t)d\Gamma_0(t)\,, \qquad (2.59)$$

με $f_2(y;\delta,0\,|\,0)=\dfrac{1}{1+\beta_0}\Gamma'_0(y)$.

Για $D=0$ *και* $\delta=0$,

$$f_2(y;0,0\,|\,u)=-\frac{1+\theta}{\theta}\psi'(u+y)+\frac{1}{\theta\mu_1}\int_0^y\psi'(u+y-t)\overline{F}(t)dt, \qquad (2.60)$$

με $f_2(y;0,0\,|\,0)=\dfrac{1}{1+\theta}F_1'(y)=\dfrac{\lambda}{c}\overline{F}(y)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Παραγωγίζοντας την (2.55), ως προς y, παίρνουμε

$$f_2(y;\delta,D\,|\,u)=-\frac{1+\beta}{\beta}\overline{K}'(u+y)-\frac{1}{\beta}G'(y)\left[(1-K*H(u))\overline{K}(u)\right]+$$
$$+\frac{1}{\beta}\int_0^y\overline{K}'(u+y-t)dG(t)$$

και ισχύει ότι $(1-K*H(u))-\overline{K}(u)=\overline{H}*K(u)$. Συνδυάζοντας τις δύο σχέσεις παίρνουμε την (2.58).

Ομοίως, παραγωγίζοντας τις (2.56) και (2.57) προκύπτουν οι (2.59) και (2.60), αντίστοιχα.

□

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.6. (Tsai C. C. L., 2001, Θεώρημα 2) *Για* $D>0$, *η προεξοφλημένη ελλειμματική συνάρτηση κατανομής του* $|U(T)|$ *ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση*

$$F_2(y;\delta,D\,|\,u)=\frac{1}{1+\beta}\int_0^u F_2(y;\delta,D\,|\,u-x)dG(x)+$$
$$+\frac{1}{1+\beta}\left[\overline{G}(u)-\overline{G}(u+y)-G(y)\overline{H}(u)\right]. \qquad (2.61)$$

Για $D=0$

$$F_2(y;\delta,0\,|\,u)=\frac{1}{1+\beta_0}\int_0^u F_2(y;\delta,0\,|\,u-x)\Gamma_0(x)+\frac{1}{1+\beta_0}\left[\overline{\Gamma}_0(u)-\overline{\Gamma}_0(u+y)\right]. \qquad (2.62)$$

Για $D=0$ *και* $\delta=0$,

$$F_2(y;0,0\,|\,u)=\frac{1}{1+\theta}\int_0^u F_2(y;0,0\,|\,u-x)F_1(x)+\frac{1}{1+\theta}\left[\overline{F}_1(u)-\overline{F}_1(u+y)\right]. \qquad (2.63)$$

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.5. *Για* $D>0$, *η προεξοφλημένη ελλειμματική συνάρτηση πιθανότητας πυκνότητας του* $|U(T)|$ *ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση*

$$f_2(y;\delta,D\mid u)=\frac{1}{1+\beta}\int_0^u f_2(y;\delta,D\mid u-x)dG(x)+$$

$$+\frac{1}{1+\beta}\left[G'(u+y)-G'(y)\overline{H}(u)\right]. \qquad (2.64)$$

Για $D=0$,

$$f_2(y;\delta,0\mid u)=\frac{1}{1+\beta_0}\int_0^u f_2(y;\delta,0\mid u-x)d\Gamma_0(x)+\frac{1}{1+\beta_0}\Gamma'_0(u+y). \qquad (2.65)$$

Για $D=0$ *και* $\delta=0$,

$$f_2(y;0,0\mid u)=\frac{1}{1+\theta}\int_0^u f_2(y;0,0\mid u-x)dF_1(x)+\frac{1}{1+\theta}\frac{\overline{F}(u+y)}{\mu_1}. \qquad (2.66)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Παραγωγίζοντας τις σχέσεις (2.61), (2.62) και (2.63) προκύπτουν οι σχέσεις (2.64), (2.65) και (2.66), αντίστοιχα.

□

Στη συνέχεια είναι χρήσιμο να ορίσουμε την προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής $F_{2,u}(y;\delta,D)$, ως ακολούθως.

$$F_{2,u}(y;\delta,D)=1-\overline{F}_{2,u}(y;\delta,D)=\frac{F_2(y;\delta,D\mid u)}{\phi_s(u)},$$

όπου $\phi_s(u)=F_2(\infty;\delta,D\mid u)=\lim_{y\to\infty}F_2(y;\delta,D\mid u)$.

Τότε, παίρνουμε

$$F_{2,\infty}(y;\delta,D)=1-\overline{F}_{2,\infty}(y;\delta,D)=\lim_{u\to\infty}F_{2,u}(y;\delta,D).$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.7. (Tsai C. C. L., 2001, Θεώρημα 3) *Η* $F_{2,\infty}(y;\delta,D)=\lim_{u\to\infty}F_{2,u}(y;\delta,D)$ *ικανοποιεί τη σχέση*

$$F_{2,\infty}(y;\delta,D)=\frac{\int_0^\infty e^{\kappa x}\left[\overline{G}(x)-\overline{G}(x+y)-G(y)\overline{H}(x)\right]dx}{\int_0^\infty e^{\kappa x}\left[\overline{G}(x)-\overline{H}(x)\right]dx}\quad,\quad y\geq 0,$$

όπου το κ *είναι θετικό και ικανοποιεί τη σχέση*

$$\int_0^\infty e^{\kappa x}dG(x)=1+\beta.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ο Tsai (2001) απέδειξε ότι η $\phi_s(u)$ ικανοποιεί τη σχέση

$$\phi_s(u)=\frac{1}{1+\beta}\int_0^u \phi_s(u-x)dG(x)+\frac{1}{1+\beta}\overline{\Gamma}*H(u)$$

και από την (2.61) η $F_2(y;\delta,D\,|\,u)$ ικανοποιεί τη σχέση

$$F_2(y;\delta,D\,|\,u)=\frac{1}{1+\beta}\int_0^u F_2(y;\delta,D\,|\,u-x)dG(x)+\frac{1}{1+\beta}\left[\overline{G}(u)-\overline{G}(u+y)-G(y)\overline{H}(u)\right].$$

Από το ανανεωτικό θεώρημα, που δόθηκε από τον Feller το 1971, ισχύει,

$$\phi_s(u)\approx\frac{\int_0^\infty e^{\kappa x}\overline{\Gamma}*H(x)dx}{\int_0^\infty xe^{\kappa x}dG(x)}e^{-\kappa u}=\frac{\int_0^\infty e^{\kappa x}\left[\overline{G}(x)-\overline{H}(x)\right]dx}{\int_0^\infty xe^{\kappa x}dG(x)}e^{-\kappa u}\quad,\ \text{για } u\to\infty$$

και

$$F_2(y;\delta,D\,|\,u)\approx\frac{\int_0^\infty e^{\kappa x}\left[\overline{G}(x)-\overline{G}(x+y)-G(y)\overline{H}(x)\right]dx}{\int_0^\infty xe^{\kappa x}dG(x)}e^{-\kappa u}\quad,\ \text{για } u\to\infty$$

όπου το κ είναι θετικό και ικανοποιεί τη σχέση $\int_0^\infty e^{\kappa x}dG(x)=1+\beta$.

Οπότε,

$$F_{2,\infty}(y;\delta,D)=\frac{\lim_{u\to\infty}e^{\kappa u}F_2(y;\delta,D\,|\,u)}{e^{\kappa u}\phi_s(u)}=\frac{\int_0^\infty e^{\kappa x}\left[\overline{G}(x)-\overline{G}(x+y)-G(y)\overline{H}(x)\right]dx}{\int_0^\infty e^{\kappa x}\left[\overline{G}(x)-\overline{H}(x)\right]dx}.$$

Σημειώνεται επίσης, ότι όταν $\int_0^\infty e^{\kappa x}G(x+y)dx=e^{-\kappa y}\int_y^\infty e^{\kappa t}\overline{G}(t)dt$, $\int_0^\infty e^{\kappa x}H(x)dx=\frac{1}{b-\kappa}$, για $b>\kappa$ και $\int_0^\infty e^{\kappa x}\overline{G}(x)dx=\frac{\beta}{\kappa}$ παίρνουμε

$$F_{2,\infty}(y;\delta,D)=\frac{\frac{\beta}{\kappa}-\frac{1}{b-\kappa}\overline{G}(y)-e^{\kappa u}\int_0^\infty e^{\kappa t}\overline{G}(t)dt}{\frac{\beta}{\kappa}-\frac{1}{b-\kappa}}.$$

□

2.6 Προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής και πυκνότητας πιθανότητας του $U(T-)$

Όταν προκαλείται χρεοκοπία εξαιτίας της εμφάνισης κάποιας απαίτησης μία σημαντική ποσότητα για μελέτη είναι το πλεόνασμα ακριβώς πριν την στιγμή της χρεοκοπίας, $U(T-)$. Γνωρίζοντας την προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση κατανομής των $U(T-)$ και $|U(T)|$, η προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής του $U(T-)$, $F_1(x;\delta,D\,|\,u)$, προκύπτει μέσω της

$F(x,y;\delta,D\,|\,u)$ αν αφήσουμε το $y\to\infty$. Επιπλέον, υπάρχει μία σχέση που συνδέει τις $F_1(x;\delta,D\,|\,u)$ και $F_2(x;\delta,D\,|\,u)$.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.6. *Για $D>0$, η προεξοφλημένη ελλειμματική οριακή συνάρτηση κατανομής του $U(T-)$ δίνεται από τον τύπο*

$$F_1(x;\delta,D\,|\,u)=\begin{cases}\dfrac{1+\beta}{\beta}\overline{K}(u)-\dfrac{1}{\beta}(1-K*H(u))+ \\ +\dfrac{1}{\beta}\dfrac{b}{a}e^{-\rho x}\overline{\Gamma}(x)\Big[\rho\displaystyle\int_0^u e^{\rho t}\overline{K}(u-t)dt+ \\ +(1-K*H(u))-e^{\rho u}\Big]\ , & \text{αν } 0\le u<x, \\ \dfrac{1}{\beta}\displaystyle\int_0^x \overline{K}(u-t)G'(t)dt-\dfrac{1}{\beta}(1-K*H(u))+ \\ +\dfrac{1}{\beta}\dfrac{b}{a}e^{-\rho x}\overline{\Gamma}(x)\Big[\rho\displaystyle\int_0^x e^{\rho t}\overline{K}(u-t)dt+ \\ +(1-K*H(u))\Big]+ \\ +\dfrac{1}{\beta}\Big[\overline{G}(x)-\dfrac{b}{a}\overline{\Gamma}(x)\Big](1-K*H(u-x))\ , & \text{αν } 0<x\le u,\end{cases} \tag{2.67}$$

με $F_1(x;\delta,D\,|\,0)=0$ και

$$F_1(\infty;\delta,D\,|\,u)=\lim_{x\to\infty}F_1(x;\delta,D\,|\,u)=\frac{1+\beta}{\beta}\overline{K}(u)-\frac{1}{\beta}(1-K*H(u)).$$

Για $D=0$,

$$F_1(x;\delta,0\,|\,u)=\begin{cases}\overline{K}_0(u)+\dfrac{1}{\beta_0}e^{-\rho_0 x}\overline{\Gamma}_0(x)\Big[\rho_0\displaystyle\int_0^u e^{\rho_0 t}\overline{K}_0(u-t)dt+ \\ +\overline{K}_0(u)-e^{\rho_0 u}\Big]\ , & \text{αν } 0\le u<x, \\ \dfrac{1}{\beta_0}\displaystyle\int_0^x \overline{K}_0(u-t)\Gamma'_0(t)dt-\dfrac{1}{\beta_0}\overline{K}_0(u)+ \\ +\dfrac{1}{\beta_0}e^{-\rho_0 x}\overline{\Gamma}_0(x)\Big[\rho_0\displaystyle\int_0^x e^{\rho_0 t}\overline{K}_0(u-t)dt+\overline{K}_0(u)\Big]\ , & \text{αν } 0<x\le u,\end{cases} \tag{2.68}$$

με $F_1(x;\delta,0\,|\,0)=\dfrac{1}{1+\beta_0}\Big[1-e^{-\rho_0 x}\overline{\Gamma}_0(x)\Big]$ και $F_1(\infty;\delta,0\,|\,u)=\lim\limits_{x\to\infty}F_1(x;\delta,0\,|\,u)=\overline{K}_0(u)$

.

Για $D=0$ και $\delta=0$,

$$F_1(x;0,0\mid u)=\begin{cases}\left[1+\dfrac{\overline{F}_1(x)}{\theta}\right]\psi_0(u)-\dfrac{\overline{F}_1(x)}{\theta}\ , & \text{αν } 0\le u<x,\\ \dfrac{1}{\theta\mu_1}\displaystyle\int_0^x\psi_0(u-t)\overline{F}(t)dt-\dfrac{1}{\theta}F_1(x)\psi_0(u)\ , & \text{αν } 0<x\le u,\end{cases}\tag{2.69}$$

με $F_1(x;0,0\mid 0)=\dfrac{1}{1+\theta}F_1(x)$ *και* $F_1(\infty;0,0\mid u)=\lim\limits_{x\to\infty}F_1(x;0,0\mid u)=\psi_0(u)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αφήνοντας στην(2.47) το $y\to\infty$, παίρνουμε ότι

$\overline{K}(u+y)\to 0$, $\overline{\Gamma}(x+y)\to 0$, $\overline{G}(x+y)\to 0$ και $dG(y+t)\to 0$, $G(y)\to 0$ και

$\int_0^y\overline{K}(u+y-t)dG(t)\le\int_0^\infty\overline{K}(u+y-t)dG(t)\to 0$, από τα οποία προκύπτει η (2.67). όταν $x\to\infty$, τότε $F_1(x;\delta,D\mid u)\to\dfrac{1}{1+\beta}\overline{K}(u)-\dfrac{1}{\beta}(1-K*H(u))$. Ομοίως, μέσω των (2.49) και (2.50) αποδεικνύονται οι σχέσεις (2.68) και (2.69).

□

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.7. *Για* $D>0$, *η προεξοφλημένη ελλειμματική συνάρτηση πιθανότητας πυκνότητας του* $U(T-)$ *δίνεται από τον τύπο*

$$f_1(x;\delta,D\mid u)=\begin{cases}\dfrac{\lambda e^{-\rho x}\overline{F}(x)}{c+2\rho D}\cdot\left[\dfrac{e^{\rho u}-(1-K*H(u))}{1-\overline{K}(0)}-\right.\\ \left.-\dfrac{\rho\int_0^u e^{\rho t}\overline{K}(u-t)dt}{1-\overline{K}(0)}\right]\ , & \text{αν } 0\le u<x,\\ \dfrac{\lambda e^{-\rho x}\overline{F}(x)}{c+2\rho D}\cdot\left[\dfrac{e^{\rho x}(1-K*H(u-x))}{1-\overline{K}(0)}-\right.\\ \left.-\dfrac{(1-K*H(u))+\rho\int_0^x e^{\rho t}\overline{K}(u-t)dt}{1-\overline{K}(0)}\right]\ , & \text{αν } 0<x\le u,\end{cases}\tag{2.70}$$

με $f_1(x;\delta,D\mid 0)=0$.

Για $D=0$,

$$f_1(x;\delta,D\,|\,u)=\begin{cases}\dfrac{\lambda e^{-\rho_0 x}\overline{F}(x)}{c}\cdot\left[\dfrac{e^{\rho_0 u}-\overline{K}_0(u)}{1-\overline{K}_0(0)}-\right.\\ \left.-\dfrac{\rho_0\int_0^u e^{\rho_0 t}\overline{K}_0(u-t)dt}{1-\overline{K}_0(0)}\right], & \text{αν } 0\le u<x,\\ \dfrac{\lambda e^{-\rho_0 x}\overline{F}(x)}{c}\cdot\left[\dfrac{e^{\rho_0 x}\overline{K}_0(u-x)}{1-\overline{K}_0(0)}-\right.\\ \left.-\dfrac{\overline{K}_0(u)+\rho_0\int_0^x e^{\rho_0 t}\overline{K}_0(u-t)dt}{1-\overline{K}_0(0)}\right], & \text{αν } 0<x\le u,\end{cases}\tag{2.71}$$

με $f_1(x;\delta,0\,|\,0)=\dfrac{\lambda}{c}e^{-\rho_0 x}\overline{F}(x)$.

Για $D=0$ *και* $\delta=0$,

$$f_1(x;0,0\,|\,u)=\begin{cases}\dfrac{\lambda\overline{F}(x)}{c}\cdot\dfrac{1-\psi_0(u)}{1-\psi_0(0)}, & \text{αν } 0\le u<x,\\ \dfrac{\lambda\overline{F}(x)}{c}\cdot\dfrac{\psi_0(u-x)-\psi_0(u)}{1-\psi_0(0)}, & \text{αν } 0<x\le u.\end{cases}\tag{2.72}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Από την (2.54) και το $\overline{K}(0)=\dfrac{1}{1+\beta}$, αν παραγωγίσουμε την (2.67) ως προς x προκύπτει η (2.70) για $0\le u<x$.

Αν $0<x\le u$, τότε από την (2.54) και το $[1-K*H(u)]'=b[(1-K*H(u))-\overline{K}(u)]$, παίρνουμε

$$f_1(x;\delta,D\,|\,u)=\frac{1}{\beta}\left[G'(x)+\frac{b\rho}{a}\overline{\Gamma}(x)\right]\overline{K}(u-x)+\frac{1}{\beta}\left[\overline{G}'(x)-\frac{b}{a}\overline{\Gamma}'(x)\right](1-K*H(u-x))+$$
$$+\frac{b}{a}\left[\overline{G}(x)-\frac{b}{a}\overline{\Gamma}(x)\right]\left[(1-K*H(u-x))-\overline{K}(u-x)\right]-$$

$$-\frac{\lambda}{c+2\rho D}e^{-\rho x}\overline{F}(x)\frac{1-K*H(u)+\rho\int_0^x e^{\rho t}\overline{K}(u-t)dt}{1-\overline{K}(0)}=$$

$$=\frac{1}{\beta}\left[G'(x)+\frac{b\rho}{a}\overline{\Gamma}(x)-b\overline{G}(x)+\frac{b^2}{a}\overline{\Gamma}(x)\right]\overline{K}(u-x)-$$

$$-\frac{1}{\beta}\left[G'(x)-\frac{b}{a}\Gamma'(x)-b\overline{G}(x)+\frac{b^2}{a}\overline{\Gamma}(x)\right](1-K*H(u-x))-$$

$$-\frac{\lambda}{c+2\rho D}e^{\rho x}\overline{F}(x)\frac{1-K*H(u)+\rho\int_0^x e^{\rho t}\overline{K}(u-t)dt}{1-\overline{K}(0)}.$$

Επειδή $\overline{G}(x)=\overline{\Gamma}(x)+\frac{G'(x)}{b}$ και $a=b+\rho$, ο πρώτος όρος στην δεξιά πλευρά εξαφανίζεται και ο δεύτερος όρος γίνεται, μέσω της (2.54),

$$\frac{1}{\beta}\cdot\frac{b}{a}\left[\rho\overline{\Gamma}(x)+\Gamma'(x)\right](1-K*H(u-x))=\frac{\lambda}{c+2\rho D}\cdot\frac{1+\beta}{\beta}\overline{F}(x)(1-K*H(u-x)).$$

Συνδυάζοντας αυτά με τον τρίτο όρο προκύπτει η (2.70) για $0<x\le u$.

Ομοίως, προκύπτει και η (2.71) μέσω της (2.68).

Για $\delta=0$, $\overline{K}_0(u)|_{\delta=0}=\psi_0(u)$ οπότε από την (2.71) παίρνουμε την (2.72).

□

Σημειώνεται επίσης, αν εξισώσουμε τις σχέσεις (6.5) και (6.6) των Gerber και Shiu (1998) και την (2.71), παίρνουμε

$$\overline{K}_{\rho_0}(u)=e^{\rho_0 u}-\frac{1-\overline{K}_{\rho_0}(0)}{1-\overline{K}_0(0)}\left[e^{\rho_0 u}-\overline{K}_0(u)-\rho_0\int_0^u e^{\rho_0 t}\overline{K}_0(u-t)dt\right],$$

όπου το $\overline{K}_{\rho_0}(u)$ ορίζεται από τη σχέση

$$\overline{K}_{\rho_0}(u)=E\left[e^{-\delta T-\rho_0|U(T)|}I(T<\infty)\,|\,U(0)=u\right]\ ,\ \text{όταν}\ u\ge 0,$$

με $\overline{K}_{\rho_0}(u)|_{\delta=0}=\overline{K}_0(u)|_{\delta=0}=\psi_0(u)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.8. (Tsai C. C. L., 2001, Θεώρημα 4) *Η προεξοφλημένη ελλειμματική συνάρτηση κατανομής του $U(T-)$, για την περίπτωση που $D>0$ και $0\le u<x$, ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση*

$$F_1(x;\delta,D\,|\,u)=\frac{1}{1+\beta}\int_0^u F_1(x;\delta,D\,|\,u-y)dG(y)+$$

$$+\frac{1}{1+\beta}\left[\overline{\Gamma}*H(u)-\frac{b}{a}e^{-\rho u}\overline{\Gamma}(x)\left[e^{\rho u}-e^{-bu}\right]\right]. \qquad (2.73)$$

Για $D=0$,

$$F_1(x;\delta,0\,|\,u)=\frac{1}{1+\beta_0}\int_0^u F_1(x;\delta,0\,|\,u-y)d\Gamma_0(y)+\frac{1}{1+\beta_0}\left[\overline{\Gamma}_0(u)-e^{-\rho_0(x-u)}\overline{\Gamma}_0(u)\right]. \quad (2.74)$$

Για $D=0$ *και* $\delta=0$,

$$F_1(x;0,0\,|\,u)=\frac{1}{1+\theta}\int_0^u F_1(x;0,0\,|\,u-y)dF_1(y)+\frac{1}{1+\theta}\left[\overline{F}_1(u)-\overline{F}_1(x)\right]. \quad (2.75)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για κάθε χ σταθερό, θεωρούμε τη συνάρτηση ποινής $w(z,y)$ να δίνεται από τον τύπο

$$w(z,y)=\begin{cases}1 \ , & \text{αν } z\le x\\ 0 \ , & \text{αλλιώς}.\end{cases}$$

Επίσης, ισχύει

$$\phi_w(u)=\int_0^x\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\delta t}f(z,y,t;D\,|\,u)dtdydz=F_1(x;\delta,D\,|\,u),$$

η οποία είναι η προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής του $U(T-)$.

Οι Tsai και Willmot (2001), έδειξαν ότι η $F_1(x;\delta,D\,|\,u)$ ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

$$F_1(x;\delta,D\,|\,u)=\int_0^u F_1(x;\delta,D\,|\,u-y)g(y)dy+\frac{c}{D}\int_0^u e^{-b(u-s)}\gamma_\omega(s)ds, \quad (2.76)$$

όπου $\gamma_\omega(s)=\frac{\lambda}{c}\int_s^\infty e^{-\rho(z-s)}\int_0^\infty w(z,y)f(z+y)dydz$.

Οπότε, από τον ορισμό του $w(z,y)$ παίρνουμε

$$\gamma_\omega(s)=\frac{\lambda}{c}\int_s^\chi e^{-\rho(z-s)}\overline{F}(z)dz=\frac{\lambda}{c}\left[\int_s^\infty e^{-\rho(z-s)}\overline{F}(z)dz-e^{-\rho(x-s)}\int_x^\infty e^{-\rho(z-x)}\overline{F}(z)dz\right].$$

Από τη (2.29), $\dfrac{\gamma_\omega(s)}{\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{-y}\overline{F}(y)dy}=\overline{\Gamma}(s)-e^{-\rho(x-s)}\overline{\Gamma}(x)$.

Συνδυάζοντας αυτό με τη σχέση $\overline{\Gamma}(x)=\dfrac{\int_x^\infty e^{-\rho(y-s)}\overline{F}(y)dy}{\int_0^\infty e^{-\rho y}\overline{F}(y)dy}$ παίρνουμε

$$\frac{\frac{c}{D}\int_0^u e^{-b(u-s)}\gamma_\omega(s)ds}{\int_0^\infty g(z)dz}=\int_0^u H'(u-s)\left[\overline{\Gamma}(s)-e^{-\rho(x-s)}\overline{\Gamma}(x)\right]ds=$$

$$= \overline{\Gamma} * H(u) - \frac{b}{a} e^{-\rho x} \overline{\Gamma}(x) \left[e^{\rho u} - e^{-bu} \right].$$

Για $\int_0^\infty g(z)dz = \frac{1}{1+\beta}$ και $G'(x) = \frac{g(x)}{\int_0^\infty g(zdz)}$, πολλαπλασιάζοντας τη δεξιά πλευρά της (2.76) με $\frac{\frac{1}{1+\beta}}{\int_0^\infty g(z)dz}$ προκύπτει η (2.73).

Ομοίως προκύπτουν και οι εξισώσεις (2.74) και (2,75) . Διαφορετικά, όταν $D = 0$, τότε $\beta = \beta_0$, $\rho = \rho_0$, $\frac{b}{a} = 1$, $\overline{\Gamma} * H(u) = \overline{\Gamma}_0(u)$ και $\overline{H}(u) = e^{-bu} = 0$ για $u > 0$, οπότε η (2.73) μετατρέπεται στην (2.74), για $u > 0$. Όταν $\delta = 0$, τότε $\beta_0 = \theta$, $\rho_0 = 0$ και $\Gamma_0(x) = F_1(x)$, οπότε η (2.74) μετατρέπεται στην (2.75).

□

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.8. *Η προεξοφλημένη ελλειμματική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του* $U(T-)$ *για* $D > 0$*, στην περίπτωση που* $0 \le u < x$*, ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση*

$$f_1(x;\delta, D \mid u) = \frac{1}{1+\beta} \int_0^u f_1(x;\delta, D \mid u-y) dG(y) +$$

$$+ \frac{\lambda}{c + 2\rho D} e^{-\rho x} \overline{F}(x) \left[e^{\rho u} - e^{-bu} \right]. \tag{2.77}$$

Για $D = 0$,

$$f_1(x;\delta, 0 \mid u) = \frac{1}{1+\beta_0} \int_0^u f_1(x;\delta, 0 \mid u-y) d\Gamma_0(y) + \frac{\lambda}{c} e^{-\rho_0 (x-u)} \overline{F}(x). \tag{2.78}$$

Για $D = 0$ *και* $\delta = 0$,

$$f_1(x;0,0 \mid u) = \frac{1}{1+\theta} \int_0^u f_1(x;0,0 \mid u-y) dF_1(y) + \frac{\lambda}{c} \overline{F}(x). \tag{2.79}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Παραγωγίζοντας τις σχέσεις (2.73), (2.74) και (2.75) ως προς x προκύπτουν αντίστοιχα οι (2.77), (2.78) και (2.79), με χρήση της (2.54).

□

Ο Dickson το 1992 πρότεινε μια σχέση μεταξύ του $F_1(x;0,0 \mid u)$, που είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό u και πλεόνασμα, ακριβώς πριν την απαίτηση που προκάλεσε την χρεοκοπία, να είναι το πολύ x και του $F_2(y;0,0 \mid u)$, που είναι η πιθανότητα

χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό u και έλλειμα ακριβώς μετά την απαίτηση που προκάλεσε την χρεοκοπία, να είναι το πολύ y , ως ακολούθως.

$$F_1(x;0,0\,|\,u) = F_2(x;0,0\,|\,u-x) - \left[\frac{1+\overline{F}_1(x)}{\theta}\right]\left[\psi_0(u-x)-\psi_0(u)\right] \;,\quad 0 < x \le u\,. \qquad (2.80)$$

Στη συνέχεια, παρουσιάζονται αντίστοιχες σχέσεις μεταξύ του $F_1(x;\delta,D\,|\,u)$ και του $F_2(y;\delta,D\,|\,u)$ και μεταξύ του $F_1(x;\delta,0\,|\,u)$ και του $F_2(y;\delta,0\,|\,u)$.

ΛΗΜΜΑ 2.2. *Όταν* $0 < x \le u$, *για* $D > 0$,

$$F_1(x;\delta,D\,|\,u) = F_2(x;\delta,D\,|\,u-x) - \left[\overline{K}(u-x)-\overline{K}(u)\right] -$$

$$-\frac{1}{\beta}\cdot\frac{b}{a}e^{-\rho x}\overline{\Gamma}(x)\int_0^x e^{\rho t}d\overline{K}(u-t) - \frac{1}{\beta}\left[1-\frac{b}{a}\overline{\Gamma}(x)\right]\left[\overline{K}(u-x)-(1-K*H(u-x))\right] +$$

$$+\frac{1}{\beta}\left[1-\frac{b}{a}e^{-\rho x}\overline{\Gamma}(x)\right]\left[\overline{K}(u)-(1-K*H(u))\right]. \qquad (2.81)$$

Για $D = 0$,

$$F_1(x;\delta,0\,|\,u) = F_2(x;\delta,0\,|\,u-x) - \left[\overline{K}_0(u-x)-\overline{K}_0(u)\right] -$$

$$-\frac{1}{\beta_0}e^{-\rho_0 x}\overline{\Gamma}_0(x)\int_0^x e^{\rho_0 t}d\overline{K}_0(u-t). \qquad (2.82)$$

Για $D = 0$ *και* $\delta = 0$ *προκύπτει η (2.80).*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Από την (2.55), παίρνουμε

$$F_2(y;\delta,D\,|\,u-x) = \frac{1+\beta}{\beta}\left[\overline{K}(u-x)-\overline{K}(u)\right] - \frac{1}{\beta}G(y)(1-K*H(u-x)) +$$

$$+\frac{1}{\beta}\int_0^x \overline{K}(u-t)dG(t).$$

Αφαιρώντας αυτό από την (2.67), για $0 < x \le u$, παίρνουμε

$$F_1(x;\delta,D\,|\,u) = F_2(x;\delta,D\,|\,u-x) - \frac{1+\beta}{\beta}\left[\overline{K}(u-x)-\overline{K}(u)\right] +$$

$$+\frac{1}{\beta}\left[(1-K*H(u-x))-(1-K*H(u))\right] - \frac{1}{\beta}\cdot\frac{b}{a}\overline{\Gamma}(x)(1-K*H(u-x)) +$$

$$+\frac{1}{\beta}\cdot\frac{b}{a}e^{-\rho x}\overline{\Gamma}(x)\left[\rho\int_0^x e^{\rho t}\overline{K}(u-t)dt + (1-K*H(u))\right].$$

Με ολοκλήρωση κατά μέρη, ο τελευταίος όρος της δεξιάς πλευράς γίνεται

$$+\frac{1}{\beta}\cdot\frac{b}{a}e^{-\rho x}\overline{\Gamma}(x)\left[e^{\rho x}\overline{K}(u-x)-\overline{K}(u)-\int_0^x e^{\rho t}d\overline{K}(u-t)+(1-K*H(u))\right].$$

Με αντικατάσταση προκύπτει η (2.81).

Όταν $D=0$, τότε $\frac{b}{a}=1$, $\beta=\beta_0$, $\rho=\rho_0$, $\overline{K}(u)=\overline{K}_0(u)$ και $1-K*H(u)=\overline{K}_0(u)$, οπότε η (2.81) μετατρέπετε στην (2.82).

Εάν $\delta=0$, τότε $\beta_0=\theta$, $\rho_0=0$, $\overline{\Gamma}_0(x)=\overline{F}_1(x)$ και $\overline{K}_0(u)|_{\delta=0}=\psi_0(u)$, οπότε από την (2.82) προκύπτει η (2.80).

□

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

ΤΟ ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΜΕ ΕΝΑΝ ΟΡΟ ΔΙΑΧΥΣΗΣ

Στο κεφάλαιο αυτό, εξετάζουμε την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής για το μοντέλο κινδύνου του Sparre Andersen, το οποίο διαταράσσεται από έναν παράγοντα διάχυσης. Όπως και στους Gerber και Shiu, 2003a και 2003b, υποθέτουμε ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ των αφίξεων των απαιτήσεων ακολουθούν μία γενικευμένη Erlang(n) κατανομή.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.1. *Η τυχαία μεταβλητή* X *ακολουθεί την γενικευμένη Erlang κατανομή με παραμέτρους* $n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, *αν* $X \overset{d}{=} X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, *όπου οι τυχαίες μεταβλητές* $X_1, X_2, \cdots, X_n$ *είναι αμοιβαία ανεξάρτητες με κάθε* X_i *να ακολουθεί* $Exp(\lambda_i)$, *για* $i = 1, 2, \ldots, n$.

Συμβολικά γράφουμε $X \sim Gerl(n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

Αν $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \lambda$, τότε προφανώς η τυχαία μεταβλητή $X \sim Erl(n, \lambda)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.2. *Η συνεχούς χρόνου, Sparre Andersen διαδικασία πλεονάσματος, επηρεασμένη από έναν παράγοντα διάχυσης, δίνεται από τον τύπο*

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i + \sigma B(t) \ , \quad t \geq 0,$$

όπου $u \geq 0$ *το αρχικό αποθεματικό. Τα* X_i *είναι ανεξάρτητες, ομοιόμορφα κατανεμημένες, τυχαίες μεταβλητές με κοινή συνάρτηση κατανομής* F *και συνάρτηση πυκνότητας* f *και το καθένα από αυτά αντιπροσωπεύει το ύψος της* i *-οστής απαίτησης. Με* $\mu_k = E\left[X^k\right]$ *συμβολίζουμε την* k*-οστή ροπή και με* $\hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx$ *το μετασχηματισμό Laplace της* f .

Η συνήθης ανανεωτική διαδικασία $\{N(t), t \geq 0\}$ απαριθμεί τον αριθμό των απαιτήσεων σε χρόνο t, με $N(t) = \max\{k \geq 1 : W_1 + \cdots + W_k\}$, όπου οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ των αφίξεων των απαιτήσεων W_i έχουν κοινή γενικευμένη Erlang(n) κατανομή, δηλαδή τα W_i αποτελούν το άθροισμα n ανεξάρτητων και εκθετικά κατανεμημένων τυχαίων μεταβλητών,

$$S_n := V_1 + V_2 + \cdots + V_n, \tag{3.1}$$

όπου τα V_i μπορεί να έχουν διαφορετικούς παραμέτρους εκθετικής $\lambda_i > 0$.

Επίσης, η $\{B(t): t \geq 0\}$ είναι μία διαδικασία Wiener, ανεξάρτητη από την σύνθετη ανανεωτική διαδικασία $S(t) := \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ και $\sigma > 0$ είναι η παράμετρος διασποράς.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.3. *Η συνθήκη καθαρού κέρδους, αν υποθέσουμε ότι τα* $\{W_i\}_{i\geq 1}$ *και* $\{X_i\}_{i\geq 1}$ *είναι ανεξάρτητα, δίνεται από τον τύπο*

$$cE(W_i) > E(X_i)$$

ή ισοδύναμα

$$c\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} > \mu_1 \tag{3.2}$$

και ο χρόνος χρεοκοπίας ορίζεται να είναι

$$T = \begin{cases} \inf\{t \geq 0 : U(t) \leq 0\} \\ \infty \quad , \quad \text{αλλιώς.} \end{cases} \tag{3.3}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.4. *Η πιθανότητα απόλυτης χρεοκοπίας* $\psi(u)$ *ορίζεται ως,*

$$\psi(u) = P(T < \infty \mid U(0) = u) \quad , \quad u \geq 0.$$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας που προκαλείται από ταλάντωση στο $U(t)$*, λόγω της διαδικασίας Wiener* $B(t)$*, δίνεται από τον τύπο*

$$\psi_d(u) = P(T < \infty, U(T) = 0 \mid U(0) = u).$$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας που προκαλείται από την εμφάνιση κάποιας απαίτησης δίνεται από τον τύπο

$$\psi_s(u) = P(T < \infty, U(T) < 0 \mid U(0) = u).$$

Ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας T *, λόγω του όρου διάχυσης ορίζεται ως,*

$$\phi_d(u) = E\left[e^{-\delta T} I(T < \infty, U(T) = 0) \mid U(0) = u\right] \quad , \quad \text{με } \phi_d(0) = 1. \tag{3.4}$$

Η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής, όταν η χρεοκοπία οφείλεται στην εμφάνιση κάποιας απαίτησης, ορίζεται ως,

$$\phi_s(u) = E\left[e^{-\delta T} w(U(T-), |U(T)|) I(T < \infty, U(T) < 0) \mid U(0) = u\right], \tag{3.5}$$

με $w(x, y)$ *, για* $x, y \geq 0$ *, να είναι η συνάρτηση ποινής για μη αρνητικές τιμές.*

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.5. *Η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu είναι η*

$$\phi(u) = \phi_d(u) + \phi_s(u). \tag{3.6}$$

Στη συνέχεια, θα δούμε ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις που ικανοποιούν οι $\phi_d(u)$ και $\phi_s(u)$.

3.1 Ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις για τα $\phi_d(u)$, $\phi_s(u)$

Αρχικά, θεωρούμε ότι κάθε ξεχωριστή Gerber-Shiu συνάρτηση λαμβάνεται από διαφορετικές γενικευμένες Erlang κατανομές.

Στη συνέχεια σταθεροποιούμε το $j = 0,\ldots,n$, των εκθετικών τυχαίων μεταβλητών του αθροίσματος $S_j := V_1 + V_2 + \cdots + V_j$ από την (3.1), με $S_0 = 0$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.6. *Ορίζουμε τη συνάρτηση $\phi_{s,j}(u)$ να δίνεται από τον τύπο*

$$\phi_{s,j}(u) = E\left[e^{-\delta(T-t)} w(U(T-), |U(T)|) I(T < \infty, U(T) < 0) \mid S_j = t, U(t) = u\right], \quad (3.7)$$

με $\phi_{s,0}(u) = \phi_{s,n}(u) = \phi_s(u)$ και $\phi_{s,j}(0) = 0$, για $j = 0,\ldots,n$.

Ομοίως, ορίζουμε, για $j = 0,\ldots,n$, την συνάρτηση $\phi_{d,j}(u)$ να δίνεται από τον τύπο

$$\phi_{d,j}(u) = E\left[e^{-\delta(T-t)} I(T < \infty, U(T) = 0) \mid S_j = t, U(t) = u\right], \quad (3.8)$$

με $\phi_{d,0}(u) = \phi_{s,n}(u) = \phi_d(u)$ και $\phi_{d,j}(0) = 1$.

Υπό ορισμένες συνθήκες κανονικότητας της συνάρτησης πυκνότητας f των απαιτήσεων και του ολοκληρώματος της συνάρτησης ποινής ω, μπορούμε να δείξουμε ότι οι συναρτήσεις $\phi_{s,j}(u)$ και $\phi_{d,j}(u)$ είναι και οι δύο, δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμες για όλα τα $j = 0,1,\ldots,n-1$.

ΘΕΩΡΙΜΑ 3.1. (Li, S. Και Garrido, J., 2005, Θεώρημα 1) *Εάν τα f και ω είναι δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμα, τότε η $\phi_s(u)$ είναι $2n$ φορές συνεχώς διαφορίσιμη και ικανοποιεί την ακόλουθη εξίσωση, για $u \geq 0$,*

$$\left\{\prod_{j=1}^{n}\left[\left(1+\frac{\delta}{\lambda_j}\right)I - \frac{c}{\lambda_j}D - \frac{\sigma^2}{2\lambda_j}D^2\right]\right\}\phi_s(u) = \int_0^u \phi_s(u-x) f(x)dx + \omega(u), \quad (3.9)$$

όπου $\omega(u) = \int_u^\infty w(u, x-u) f(x)dx$, $\phi_s(0) = 0$ και I, D ο ταυτοτικός και ο διαφορικός τελεστής, αντίστοιχα.

Αν η f είναι δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμη στο $[0,\infty)$, τότε η $\phi_d(u)$ είναι $2n$ φορές συνεχώς διαφορίσιμη και ικανοποιεί την ακόλουθη, όμοια με την προηγούμενη, εξίσωση, για $u \geq 0$,

$$\left\{\prod_{j=1}^{n}\left[\left(1+\frac{\delta}{\lambda_j}\right)I - \frac{c}{\lambda_j}D - \frac{\sigma^2}{2\lambda_j}D^2\right]\right\}\phi_d(u) = \int_0^u \phi_d(u-x) f(x)dx, \quad (3.10)$$

με $\phi_d(0)=1$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρούμε το απειροελάχιστο διάστημα από το S_j στο S_j+dt. Για $j=0,1,\ldots,n-2$, παίρνουμε

$$\phi_{s,j}=e^{-\delta dt}\{P(V_{j+1}>dt)E[\phi_{s,j}(u+cdt+\sigma B(dt))]+$$
$$+P(V_{j+1}\le dt)E[\phi_{s,j+1}(u+cdt+\sigma B(dt))]\}. \tag{3.11}$$

Επίσης, ισχύει ότι $e^{-\delta dt}=1-\delta dt+o(dt)$, ενώ

$$P(V_{j+1}>dt)-1-\lambda_{j+1}dt+o(dt),\ \mathrm{P}(\mathrm{V}_{\mathrm{j+1}}\le dt)=\lambda_{j+1}dt+o(dt).$$

Οπότε, από την επέκταση του Taylor, παίρνουμε

$$E[\phi_{s,j}(u+cdt+\sigma B(dt))]=\phi_{s,j}(u)+\left[c\phi'_{s,j}(u)+\frac{\sigma^2}{2}\phi''_{s,j}(u)\right]dt+o(dt).$$

Με αντικατάσταση στην (3.11), αφαιρώντας το $\phi_{s,j}(u)$ και από τις δύο πλευρές, για $dt\to 0$ και $j=0,1,\ldots,n-2$, παίρνουμε

$$\lambda_{j+1}\phi_{s,j+1}(u)=(\lambda_{j+1}+\delta)\phi_{s,j}(u)-c\phi'_{s,j}(u)-\frac{\sigma^2}{2}\phi''_{s,j}(u)=$$
$$=\left[(\lambda_{j+1}+\delta)\mathrm{I}-cD-\frac{\sigma^2}{2}D^2\right]\phi_{s,j}(u), \tag{3.12}$$

Ομοίως, για $j=n-1$, παίρνουμε

$$\left[(\lambda_n+\delta)\mathrm{I}-cD-\frac{\sigma^2}{2}D^2\right]\phi_{s,n-1}(u)=\lambda_n\left[\int_0^u\phi_{s,0}(u-x)f(x)dx+\omega(u)\right]. \tag{3.13}$$

Μετά από κατάλληλες αντικαταστάσεις προκύπτει ότι η $\phi_{s,0}(u)$ είναι $2m$ φορές συνεχώς διαφορίσιμη για $1\le m\le n-1$ και ότι

$$\phi_{s,m}(u)=\left\{\prod_{j=1}^{m}\left[\left(1+\frac{\delta}{\lambda_j}\right)I-\frac{c}{\lambda_j}D-\frac{\sigma^2}{2\lambda_j}D^2\right]\right\}\phi_{s,0}(u). \tag{3.14}$$

Στη συνέχεια, αν θέσουμε $m=n-1$ στην (3.14), παρατηρώντας ότι η $\phi_{s,n-1}(u)$ είναι δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμη, είναι εύκολο να δείξουμε ότι η $\phi_{s,0}(u)$ είναι $2n$ φορές συνεχώς διαφορίσιμη. Επιπλέον, χρησιμοποιώντας την (3.13) και παρατηρώντας ότι $\phi_{s,0}(u)=\phi_s(u)$, παίρνουμε

$$\left\{\prod_{j=1}^{n}\left[\left(1+\frac{\delta}{\lambda_j}\right)I-\frac{c}{\lambda_j}D-\frac{\sigma^2}{2\lambda_j}D^2\right]\right\}\phi_s(u)=\int_0^u\phi_s(u-x)f(x)dx+\omega(u).$$

Τέλος, παρατηρείται ότι $\phi_s(0)=0$, όταν $P(T<\infty,U(T)<0\,|\,U(0)=0)=0$.

Για την επαλήθευση της ομογενούς εξίσωσης για το $\phi_d(u)$, χρησιμοποιώντας παρόμοιους ισχυρισμούς με αυτούς που χρησιμοποιήσαμε για την σχέση (3.12) και (3.13), για $j=0,1,\ldots,n-2$, παίρνουμε

$$\lambda_{j+1}\phi_{d,j+1}(u)=\left[(\lambda_{j+1}+\delta)I-cD-\frac{\sigma^2}{2}D^2\right]\phi_{d,j}(u) \tag{3.15}$$

και

$$\left[(\lambda_n+\delta)I-cD-\frac{\sigma^2}{2}D^2\right]\phi_{d,n-1}(u)=\lambda_n\int_0^u\phi_{d,0}(u-x)f(x)dx. \tag{3.16}$$

Οπότε, έχουμε ότι η $\phi_d(u)$ είναι $2n$ φορές συνεχώς διαφορίσιμη και ικανοποιεί την εξίσωση

$$\left\{\prod_{j=1}^{n}\left[\left(1+\frac{\delta}{\lambda_j}\right)I-\frac{c}{\lambda_j}D-\frac{\sigma^2}{2\lambda_j}D^2\right]\right\}\phi_d(u)=\int_0^u\phi_d(u-x)f(x)dx.$$

Επίσης, όταν $P(T<\infty,U(T)=0\,|\,U(0)=0)=1$ τότε $\phi_d(0)=1$.

(βλέπε και Cai 2004, για ένα διαφορετικό μοντέλο κινδύνου που επίσης επηρεάζεται από έναν όρο διάχυσης)

□

3.2 Μία γενικευμένη εξίσωση του Lundberg

Θεωρούμε το χρόνο άφιξης την k-οστής απαίτησης να είναι $\tau_k=\sum_{j=1}^{k}W_j$ και το πλεόνασμα ακριβώς μετά την έλευση της k-οστής απαίτησης να είναι $U_k=U(\tau_k)$. Θεωρούμε, επίσης, ότι για $\tau_0=0$ παίρνουμε $U_0=u$ και για $k=1,2,\ldots$, παίρνουμε

$$U_k=U(\tau_k)=u+c\tau_k-\sum_{j=1}^{k}X_j+\sigma B(\tau_k)=$$

$$=u+\sum_{j=1}^{k}\left[cW_j-X_j+\sigma\left(B(\tau_j)-B(\tau_{j-1})\right)\right].$$

Ψάχνουμε έναν αριθμό s τέτοιο ώστε η διαδικασία $\left\{e^{-\delta\tau_k+sU_k};k=0,1,2,\ldots\right\}$ να σχηματίζει ένα martingale. Εδώ, αυτό είναι ισοδύναμο με

$$E\left[e^{-\delta W_1+csW_1+s\sigma B(W_1)-sX_1}\right]=E\left[e^{-(\delta-cs)W_1+s\sigma B(W_1)}\right]E\left[e^{-sX_1}\right]=1. \tag{3.17}$$

Όταν

$$E\left[e^{-(\delta-cs)W_1+s\sigma B(W_1)}\right]=E\left[E\left[e^{-(\delta-cs)W_1+s\sigma B(W_1)}\mid W_1\right]\right]=E\left[e^{-(\delta-cs)W_1+\frac{s^2\sigma^2}{2}W_1}\right]$$

και το W_1 ακολουθεί γενικευμένη Erlang(n) κατανομή, τότε η (3.17) ικανοποιεί την εξίσωση

$$E\left[e^{-\left(\delta-cs-\frac{\sigma^2}{2}s^2\right)W_1}\right]\hat{f}(s)=\prod_{j=1}^{n}E\left[e^{-\left(\delta-cs-\frac{\sigma^2}{2}s^2\right)V_j}\right]\hat{f}(s)=1\quad,\quad s\in\mathbb{C}. \tag{3.18}$$

Αν θέσουμε

$$\gamma(s):=\prod_{j=1}^{n}\left[\left(1+\frac{\delta}{\lambda_j}\right)-\frac{c}{\lambda_j}s-\frac{\sigma^2}{2\lambda_j}s^2\right],$$

τότε η (3.18) είναι ισοδύναμη με

$$\gamma(s)=\hat{f}(s), \tag{3.19}$$

για $\delta\geq 0$, $n\in\mathbb{N}$ και $s\in\mathbb{C}$, η οποία είναι μία γενικευμένη θεμελιώδης εξίσωση Lundberg.

ΘΕΩΡΙΜΑ 3.2. (Li, S. Και Garrido, J., 2005, Θεώρημα 2) *Για $\delta>0$ και $\sigma\in\mathbb{N}^+$, η εξίσωση του Lundberg (3.19) έχει ακριβώς n ρίζες, $\rho_1(\delta,\sigma),\rho_2(\delta,\sigma),\ldots,\rho_n(\delta,\sigma)$, με ένα θετικό πραγματικό μέρος $\mathcal{R}(\rho_j)>0$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Δεδομένου ότι το $\left(1+\frac{\delta}{\lambda_j}\right)-\frac{c}{\lambda_j}s-\frac{\sigma^2}{2\lambda_j}s^2=0$ έχει δύο ακριβώς λύσεις, $s_1=-\frac{c}{\sigma^2}-\sqrt{\frac{c^2}{\sigma^4}+\frac{(\lambda_j+\delta)^2}{\sigma^2}}<0$ και $s_2=-\frac{c}{\sigma^2}-\sqrt{\frac{c^2}{\sigma^4}+\frac{(\lambda_j+\delta)^2}{\sigma^2}}>0$, προκύπτει ότι το $\gamma(s)=\prod_{j=1}^{n}\left[\left(1+\frac{\delta}{\lambda_j}\right)-\frac{c}{\lambda_j}s-\frac{\sigma^2}{2\lambda_j}s^2\right]$ έχει ακριβώς n θετικές ρίζες.

Από το ημικύκλιο των μιγαδικών αριθμών έχουμε $|z|=r$ (για $r>0$ σταθερό) και $\mathcal{R}(z)\geq 0$, από το οποίο προκύπτει ότι $|\gamma(s)|>1$, εάν το r είναι αρκετά μεγάλο. Ενώ, για το s στον φανταστικό άξονα $\mathcal{R}(s)=0$, οπότε $|\gamma(s)|\geq\prod_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j+\delta}{\lambda_j}>1$. Στη συνέχεια, από το θεώρημα του Rouche, παίρνουμε ότι στο δεξιό ημιεπίπεδο ο αριθμός των ριζών της εξίσωσης του Lundberg ισούται με τον αριθμό των ριζών της $\gamma(s)=0$. Δεδομένου ότι η τελευταία έχει ακριβώς n ρίζες, μπορούμε να πούμε ότι οι $\rho_1(\delta,\sigma),\rho_2(\delta,\sigma),\ldots,\rho_n(\delta,\sigma)$ είναι οι μοναδικές

ρίζες της εξίσωσης του Lundberg που έχουν ένα θετικό πραγματικό μέρος, μπορεί να υπάρχουν και από τις άλλες.

□

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Ορίζουμε $l(s) := \hat{f}(s) - \gamma(s)$. Όταν $l(0) < 0$ και $\lim_{s \to -\infty} l(s) = +\infty$, τότε υπάρχει μία αρνητική ρίζα, $-R(\delta,\sigma)$, του $l(s) = 0$. Η $R(\delta,\sigma)$ καλείται γενικευμένος συντελεστής προσαρμογής.
2. Όταν $\delta \to 0^+$ τότε $-R(\delta,\sigma) \to -R(0,\sigma)$ και $\rho_j(\delta,\sigma) \to \rho_j(0,\sigma)$, για $1 \le j \le n$, όπου τα $-R(0,\sigma)$ και $\rho_j(0,\sigma)$ είναι ρίζες της εξίσωσης
$$\gamma_{0,\sigma}(s) := \prod_{j=1}^{n} \left[1 - \frac{c}{\lambda_j} s - \frac{\sigma^2}{2\lambda_j} s^2 \right] = \hat{f}(s) \quad , \quad s \in \mathbb{C}. \tag{3.20}$$
3. Όταν $\sigma^2 \to 0$ τότε $-R(\delta,\sigma) \to -R(\delta,0)$ και $\rho_j(\delta,\sigma) \to \rho_j(\delta,0)$, για $1 \le j \le n$, όπου τα $-R(\delta,0)$ και $\rho_j(\delta,0)$ είναι ρίζες της εξίσωσης
$$\gamma_{\delta,0}(s) := \prod_{j=1}^{n} \left[\left(1 + \frac{\delta}{\lambda_j} \right) - \frac{c}{\lambda_j} s \right] = \hat{f}(s) \quad , \quad s \in \mathbb{C}. \tag{3.21}$$
4. Για λόγους ευκολίας γράφουμε $-R$ και ρ_j αντί για $-R(\delta,\sigma)$ και $\rho_j(\delta,\sigma)$, για $1 \le j \le n$, όταν $\delta > 0$ και $\sigma > 0$.

3.3 Κύρια αποτελέσματα

Μπορούμε τώρα να λύσουμε τις ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις (3.9) και (3.10).

Πρώτα, θα χρησιμοποιήσουμε την έννοια των διαιρούμενων διαφορών.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.7. *Για διακριτούς αριθμούς* $r_1, r_2, \ldots, r_k$, *η διαιρετή διαφορά* $h[r_1, r_2, \ldots, r_k, s]$ *μιας συνάρτησης* h *δίνεται από τον ακόλουθο αναδρομικό τύπο,*

$$h(s) = h(r_1) + (s - r_1) h[r_1, s],$$
$$h[r_1, s] = h[r_1, r_2] + (s - r_2) h[r_1, r_2, s],$$
$$h[r_1, r_2, \ldots, r_{k-1}, s] = h[r_1, r_2, \ldots, r_k] + (s - r_k) h[r_1, r_2, \ldots, r_k, s].$$

Σημειώνεται ότι αν η $h(s)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $\mathbb{N}$, τότε η $h[r_1, r_2, \ldots, r_k, s]$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $n-k$, ενώ η $h[r_1, r_2, \ldots, r_n, s]$ είναι ο συντελεστής του s^n της $h(s)$.

Επίσης ισχύει ότι,

$$h[r_1, r_2, \ldots, r_k] = \sum_{j=1}^{k} \frac{h(r_j)}{\pi'_k(r_j; r_1, r_2, \ldots, r_k)}, \tag{3.22}$$

όπου $\pi_k(s; r_1, r_2, \ldots, r_k) = \prod_{i=1}^{k}(s - r_i)$ είναι ένα πολυώνυμο.

Αν δύο συναρτήσεις έχουν τις ίδιες τιμές στα σημεία $r_1, r_2, \ldots, r_k$, τότε πρέπει να έχουν και τις ίδιες m-οστές διαιρετές διαφορές για $m \le k$.

Παρατηρείτε ότι υπάρχει μια στενή σύνδεση μεταξύ των διαιρετών διαφορών και του τελεστή Dickson – Hipp, T_r, που ορίσαμε στο πρώτο κεφάλαιο (ΟΡΙΣΜΟΣ 1.17) . Συγκεκριμένα, αν $r_1, r_2, \ldots, r_k$ είναι διακριτοί μιγαδικοί αριθμοί, τότε παίρνουμε

$$T_{r_k} \cdots T_{r_1} f(0) = (-1)^{k-1} \sum_{i=1}^{k} \frac{T_{r_i} f(0)}{\pi'_k(r_i; r_1, \ldots, r_k)} =$$

$$= (-1)^{k-1} \sum_{i=1}^{k} \frac{\hat{f}(r_i)}{\pi'_k(r_i; r_1, \ldots, r_k)} = (-1)^{k-1} \hat{f}[r_1, \ldots, r_k]. \tag{3.23}$$

Χρησιμοποιώντας τον τελεστή T_r και τις διαιρετές διαφορές, προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις για τις ρίζες της εξίσωσης Lundberg.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.3. *Για $u \ge 0$ υπάρχει ένα πολυώνυμο γ, τέτοιο ώστε*

$$(-1)^n \gamma[\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, D]\phi_s(u) = \int_0^u \phi_s(u-y)\eta(y)dy + G(u) \tag{3.24}$$

και

$$(-1)^n \gamma[\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, D]\phi_d(u) = \int_0^u \phi_d(u-y)\eta(y)dy \quad , \quad u \ge 0, \tag{3.25}$$

όπου $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ είναι οι n ρίζες της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg (3.19) με θετικά πραγματικά μέρη, $\eta(y) = T_{\rho_n} T_{\rho_{n-1}} \cdots T_{\rho_1} f(y)$ και $G(u) = T_{\rho_n} \cdots T_{\rho_1} \omega(u)$, όπου το ω είναι το ίδιο της (3.9).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Οι εξισώσεις (3.24) και (3.25) είναι ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις τάξης n των ϕ_s και ϕ_d, αντίστοιχα, δεδομένου ότι από την (3.22) το

$$\gamma[\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, s] = \sum_{j=1}^{n} \frac{\gamma(\rho_j)}{\pi'_n(\rho_j; \rho_1, \rho_2, \ldots \rho_n)(\rho_j - s)} + \frac{\gamma(s)}{\pi_n(s; \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n)}$$

είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ (βλέπε Gerber και Shiu, 2003b, ενότητα 10)

□

Για να λύσουμε τις εξισώσεις (3.24) και (3.25) εφαρμόζουμε μετασχηματισμούς Laplace και στις δύο πλευρές της (3.24) και προκύπτει

$$\left[(-1)^n \gamma[\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n; s] - \hat{\eta}(s)\right]\hat{\phi}_s(s) = \hat{G}(s) + q_{n-1}(s) \quad , \quad s \in \mathbb{C}, \tag{3.26}$$

όπου $\hat{\eta}(s) = T_s \eta(0) = T_s T_{\rho_n} \cdots T_{\rho_1} f(0)$ και $\hat{G}(s) = T_s G(0) = T_s T_{\rho_n} \cdots T_{\rho_1} \omega(0)$ είναι μετασχηματισμοί Laplace του η και του G, αντίστοιχα και $q_{n-1}(s)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $n-1$ ή μικρότερου, με συντελεστές των όρων τα $\delta, c, \lambda_i, \rho_i$ για $i = 1,2,\ldots,n$ και παράγωγα της ϕ_s στο 0 τα $\phi_s^{(k)}(0)$, για $k = 0,1,2,\ldots,n-1$.

Δεδομένου ότι $\gamma[\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, s]$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n και ο συντελεστής του s^n είναι ίσος με τον συντελεστή του s^{2n} στην $\gamma(s)$, ο οποίος είναι ο $(-1)^n \dfrac{\sigma^{2n}}{2^n \lambda^{[n]}}$, με $\lambda^{[n]} = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$, μπορούμε να υπολογίσουμε την $\gamma[\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, s]$ ως

$$\gamma[\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, s] = (-1)^n \frac{\sigma^{2n}(s+a_1)(s+a_2)\cdots(s+a_n)}{2^n \lambda^{[n]}} \quad , \quad s \in \mathbb{C}, \tag{3.27}$$

όπου τα $a_1, a_2, \cdots, a_n$ έρχονται σε ζεύγη συζυγών μιγαδικών αριθμών.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η εξίσωση (3.26) μπορεί να γραφεί

$$\hat{\phi}_s(s)\left[1 - \frac{2^n \lambda^{[n]} \hat{\eta}(s)}{\sigma^{2n}(s+a_1)(s+a_2)\cdots(s+a_n)}\right] =$$

$$= \frac{2^n \lambda^{[n]}}{\sigma^{2n}}\left[\frac{\hat{G}(s)}{(s+a_1)\cdots(s+a_n)} + \frac{q_{n-1}(s)}{(s+a_1)\cdots(s+a_n)}\right] =$$

$$= \frac{2^n \lambda^{[n]} \hat{G}(s)}{\sigma^{2n}(s+a_1)(s+a_2)\cdots(s+a_n)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{(s+a_i)} \quad , \quad s \in \mathbb{C}, \tag{3.28}$$

όπου οι συντελεστές b_i δίνονται από τον τύπο

$$b_i = \frac{2^n \lambda^{[n]} q_{n-1}(-a_i)}{\sigma^{2n} \prod_{j=1, j \neq i}^{n} (a_j - a_i)},$$

για $i = 1,2,\ldots,n$.

Ομοίως, εφαρμόζοντας μετασχηματισμούς Laplace και στις δύο πλευρές της (3.25), παίρνουμε

$$\left[(-1)^n \gamma[\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n; s] - \hat{\eta}(s)\right]\hat{\phi}_d(s) = Q_{n-1}(s) \quad , \quad s \in \mathbb{C}, \tag{3.29}$$

όπου $Q_{n-1}(s)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $\leq n-1$, με συντελεστές των όρων τα $\delta, c, \lambda_i, \rho_i$ για $i = 1,2,\ldots,n$ και παράγωγα της ϕ_d στο 0 τα $\phi_d^{(k)}(0)$, για $k = 0,1,2,\ldots,n-1$.

Οπότε,

$$\hat{\phi}_d(s)\left[1-\frac{2^n\lambda^{[n]}\hat{\eta}(s)}{\sigma^{2n}(s+a_1)(s+a_2)\cdots(s+a_n)}\right]=$$

$$=\frac{2^n\lambda^{[n]}Q_{n-1}(s)}{\sigma^{2n}(s+a_1)(s+a_2)\cdots(s+a_n)}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{(s+a_i)} \quad , \quad s\in\mathbb{C}, \tag{3.30}$$

όπου οι συντελεστές c_i δίνονται από τον τύπο

$$c_i=\frac{2^n\lambda^{[n]}Q_{n-1}(-a_i)}{\sigma^{2n}\prod_{j=1,j\neq i}^{n}(a_j-a_i)},$$

για $i = 1,2,\ldots,n$.

Τα ϕ_s και ϕ_d προκύπτουν εφαρμόζοντας αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.4. (Li, S. Και Garrido, J., 2005, Θεώρημα 4) *Τα ϕ_s, ϕ_d και ϕ ικανοποιούν τις ακόλουθες ανανεωτικές εξισώσεις,*

$$\phi_s(u)=\int_0^u\phi_s(u-y)g(y)dy+H(u)+\sum_{i=1}^{n}b_ie^{-a_iu} \quad , \ u\geq 0, \tag{3.31}$$

$$\phi_d(u)=\int_0^u\phi_d(u-y)g(y)dy+\sum_{i=1}^{n}c_ie^{-a_iu} \quad , \ u\geq 0, \tag{3.32}$$

$$\phi(u)=\int_0^u\phi(u-y)g(y)dy+H(u)+\sum_{i=1}^{n}(c_i+b_i)e^{-a_iu} \quad , \ u\geq 0, \tag{3.33}$$

όπου $g(y):=h*\eta(y):=h_1*\cdots*h_n*\eta(y)$, $H(u):=h*G(u)=h_1*\cdots*h_n*G(u)$, με $h_i(y)=\frac{\lambda_i}{\frac{\sigma^2}{2}}e^{-a_iy}$, για $i = 1,2,\ldots,n$ και a_i, b_i, c_i, η και G είναι αυτά που είδαμε παραπάνω.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Εφαρμόζοντας αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace στις σχέσεις (3.28) και (3.30) προκύπτουν οι σχέσεις (3.31) και (3.32). Εφόσον ισχύει ότι $\phi(u)=\phi_s(u)+\phi_d(u)$, προσθέτοντας την 3.31) με την (3.32) προκύπτει η (3.33).

□

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Όταν $\phi_s(u) \to 0$ και $\phi_d(u) \to 0$ ενώ $u \to \infty$, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\mathcal{R}(a_i) > 0$, για $i = 1,2,\ldots,n$.

Επιπλέον, το επόμενο λήμμα μας δίνει εκφράσεις των g και H, οι οποίες είναι χρήσιμες σε εφαρμογές, όπως είναι η μελέτη της οριακής συμπεριφοράς των ϕ_s και ϕ_d, όταν $\sigma^2 \to 0$.

ΛΗΜΜΑ 3.1. *Για $\sigma^2 > 0$, η συνάρτηση g μπορεί να εκφραστεί ως*

$$g(y) = \frac{\lambda^{[n]}}{\frac{\sigma^{2n}}{2^n}} \sum_{i=1}^{n} \frac{e^{-a_i y} T_{-a_i} T_{\rho_n} \cdots T_{\rho_1} f(0) - T_{-a_i} T_{\rho_n} \cdots T_{\rho_1} f(y)}{(-1)^{n-1} \pi'_n(a_i; a_1, a_2, \ldots, a_n)}, \tag{3.34}$$

ενώ ο μετασχηματισμός Laplace δίνεται από τον τύπο

$$\hat{g}(s) = 1 - (-1)^n \frac{\left[\gamma(s) - \hat{f}(s)\right]}{\left[\prod_{i=1}^{n}(\rho_i - s)\right]\gamma[\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, s]} = \tag{3.35}$$

$$= 1 - \frac{\gamma^{[n]}}{\frac{\sigma^{2n}}{2^n}} \cdot \frac{\left[\gamma(s) - \hat{f}(s)\right]}{\left[\prod_{i=1}^{n}(\rho_i - s)\right]\left[\prod_{i=1}^{n}(s + a_i)\right]} \quad , \quad s \in \mathbb{C}. \tag{3.36}$$

Οπότε, για $y \geq 0$

$$g(y) = h * \eta(y) \to g_0(y) := \frac{\left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right)}{c^n} T_{\rho_n(\delta,0)} \mathrm{T}_{\rho_{n-1}(\delta,0)} \cdots \mathrm{T}_{\rho_1(\delta,0)} f(y),$$

όταν $\sigma^2 \to 0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ισχύει,

$$\hat{h}(s) = \prod_{i=1}^{n} \hat{h}_i(s) = \prod_{i=1}^{n} \frac{2\lambda_i}{\sigma^2(s + a_i)} =$$

$$= \frac{\lambda^{[n]}}{\frac{\sigma^{2n}}{2^n}} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(-1)^{n-1} \pi'_n(a_i; a_1, a_2, \ldots, a_n)(s + a_i)} \quad , \quad s \in \mathbb{C},$$

οπότε,

$$h(y) = \frac{\lambda^{[n]}}{\frac{\sigma^{2n}}{2^n}} \sum_{i=1}^{n} \frac{e^{-a_i y}}{(-1)^{n-1} \pi'_n(a_i; a_1, a_2, \ldots, a_n)} \quad , \quad y \geq 0. \tag{3.37}$$

Επίσης,

$$\int_0^y e^{-a_i(y-x)}\eta(x)dx = \int_0^\infty e^{-a_i(y-x)}\eta(x)dx - \int_y^\infty e^{-a_i(y-x)}\eta(x)dx =$$

$$= e^{-a_i y}\int_0^\infty e^{a_i x}\eta(x)dx - \int_y^\infty e^{a_i(x-y)}\eta(x)dx =$$

$$= e^{-a_i y}T_{-a_i}\eta(0) - T_{-a_i}\eta(y) \quad , \quad y \geq 0, \tag{3.38}$$

οπότε,

$$g(y) = h * \eta(y) = \frac{\lambda^{[n]}}{\frac{\sigma^{2n}}{2^n}} \sum_{i=1}^{n} \frac{e^{-a_i y}T_{-a_i}\eta(0) - T_{-a_i}\eta(y)}{(-1)^{n-1}\pi'_n(a_i; a_1, a_2, \ldots, a_n)} \overset{y\geq 0}{=}$$

$$= \frac{\lambda^{[n]}}{\frac{\sigma^{2n}}{2^n}} \sum_{i=1}^{n} \frac{e^{-a_i y}T_{-a_i}T_{\rho_n}\cdots T_{\rho_1}f(0) - T_{-a_i}T_{\rho_n}\cdots T_{\rho_1}f(y)}{(-1)^{n-1}\pi'_n(a_i; a_1, a_2, \ldots, a_n)} .$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της g δίνεται από τον τύπο

$$\hat{g}(s) = \hat{h}(s)\hat{\eta}(s) = \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{2\lambda_i}{\sigma^2(s+a_i)}\right) T_s T_{\rho_n}\cdots T_{\rho_1} f(0) \overset{(3.23)}{=}$$

$$= (-1)^n \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{2\lambda_i}{\sigma^2(s+a_i)}\right) \hat{f}[\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, s] =$$

$$= (-1)^n \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{2\lambda_i}{\sigma^2(s+a_i)}\right) \left[\gamma[\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, s] + \left(\hat{f} - \gamma\right)[\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, s]\right] =$$

$$= \frac{\gamma[\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, s] + \frac{\left[\hat{f}(s) - \gamma(s)\right]}{\prod_{i=1}^{n}(s-\rho_i)}}{\gamma[\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, s]} = 1 - \frac{(-1)^n\left[\gamma(s) - \hat{f}(s)\right]}{\prod_{i=1}^{n}(\rho_i - s)\gamma[\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, s]} \quad , \quad s \in \mathbb{C},$$

που αποδεικνύει την (3.35). Ομοίως με χρήση της (2.27) αποδεικνύεται η (3.36).

Τέλος, για $\sigma^2 \to 0$,

$$\gamma(s) \to \gamma_{\delta,0}(s) = \prod_{j=1}^{n}\left[\left(1 + \frac{\delta}{\lambda_j}\right) - \frac{c}{\lambda_j}s\right] \quad , \quad s \in \mathbb{C},$$

$$\rho_i(\delta, \sigma) \to \rho_i(\delta, 0), \text{ για } i = 1, 2, \ldots, n \text{ και}$$

$$\gamma[\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, s] \to \gamma_{\delta,0}[\rho_1(\delta,0), \rho_2(\delta,0), \ldots, \rho_n(\delta,0), s] = \frac{(-c)^n}{\lambda^{[n]}} .$$

Τα δύο πρώτα όρια προκύπτουν από τη σχέση (3.21).

Αναλόγως, ισχύει

$$\hat{g}(s) \to 1 - \frac{\lambda^{[n]}}{c^n} \cdot \frac{\left[\gamma_{\delta,0}(s) - \hat{f}(s)\right]}{\prod_{i=1}^{n}\left[\rho_i(\delta,0) - s\right]} =$$

$$= (-1)^n \frac{\lambda^{[n]}}{c^n}\left[\frac{(-c)^n}{\lambda^{[n]}} - \frac{\left[\gamma_{\delta,0}(s) - \hat{f}(s)\right]}{\prod_{i=1}^{n}\left[s - \rho_i(\delta,0)\right]}\right] =$$

$$= (-1)^n \frac{\lambda^{[n]}}{c^n}\left[\gamma_{\delta,0}\left[\rho_1(\delta,0), \rho_2(\delta,0), \ldots, \rho_n(\delta,0), s\right] - \right.$$

$$\left. - \left(\gamma_{\delta,0} - \hat{f}\right)\left[\rho_1(\delta,0), \rho_2(\delta,0), \ldots, \rho_n(\delta,0), s\right]\right] =$$

$$= (-1)^n \frac{\lambda^{[n]}}{c^n} \hat{f}\left[\rho_1(\delta,0), \rho_2(\delta,0), \ldots, \rho_n(\delta,0), s\right] =$$

$$(-1)^{2n} \frac{\lambda^{[n]}}{c^n} T_s T_{\rho_n(\delta,0)} \cdots T_{\rho(\delta,0)_1} f(0),$$

οπότε, παίρνουμε

$$g(y) \to g_0(y) := \frac{\lambda^{[n]}}{c^n} T_{\rho_n(\delta,0)} \cdots T_{\rho(\delta,0)_1} f(y),$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη.

□

ΛΗΜΜΑ 3.2. *Για* $\sigma^2 > 0$*, η συνάρτηση* H *μπορεί να εκφραστεί ως*

$$H(y) = \frac{\lambda^{[n]}}{\frac{\sigma^{2n}}{2^n}} \sum_{i=1}^{n} \frac{e^{-a_i y} T_{-a_i} T_{\rho_n} \cdots T_{\rho_1} \omega(0) - T_{-a_i} T_{\rho_n} \cdots T_{\rho_1} \omega(y)}{(-1)^{n-1} \pi'_n(a_i; a_1, a_2, \ldots, a_n)}, \tag{3.39}$$

ενώ ο μετασχηματισμός Laplace δίνεται από τον τύπο

$$\hat{H}(s) = \hat{h}(s)\hat{G}(s) \frac{T_s T_{\rho_n} \cdots T_{\rho_1} \omega(0)}{(-1)^n \gamma\left[\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, s\right]} \quad , \quad s \in \mathbb{C}. \tag{3.40}$$

Οπότε, για $u \geq 0$

$$H(u) = h * G(u) \to H_0(u) := \frac{\lambda^{[n]}}{c^n} T_{\rho_n(\delta,0)} \mathrm{T}_{\rho_{n-1}(\delta,0)} \cdots \mathrm{T}_{\rho_1(\delta,0)} \omega(y), \tag{3.41}$$

όταν $\sigma^2 \to 0$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Εφόσον

$$\int_0^\infty g(y)dy = \hat{g}(0) = \lim_{s\to 0} g(s) =$$

$$= \lim_{s\to 0}\left[1 - \frac{\lambda^{[n]}}{\frac{\sigma^{2n}}{2^n}} \cdot \frac{\left[\gamma(s) - \hat{f}(s)\right]}{\left[\prod_{i=1}^{n}(\rho_i - s)\right]\left[\prod_{i=1}^{n}(s + a_i)\right]}\right] =$$

$$1 - \frac{\lambda^{[n]}}{\frac{\sigma^{2n}}{2^n}} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{\delta}{\lambda_i}\right) - 1}{\left(\prod_{i=1}^{n}\rho_i\right)\left(\prod_{=1}^{n}a_i\right)} < 1,$$

οι εξισώσεις (3.31), (3.32) και (3.33) είναι ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις.

2. Όταν $\sigma^2 \to 0$, τότε $\gamma[\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, s] \to \prod_{i=1}^{n} \frac{-c}{\lambda_i}$ οπότε $q_{n-1}(s) \to 0$ και $Q_{n-1}(s) \to 0$.

   Αυτό σημαίνει ότι $b_i \to 0$ και $c_i \to 0$, για $i = 1,2,\ldots,n$, οπότε $\phi_s(u) \to \phi_0(u)$, όπου η ϕ_0 ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

$$\phi_0(u) = \int_0^u \phi_0(u-y)g_0(y)dy + H_0(u) \quad , \quad u \geq 0,$$

   ενώ

$$\phi_d(u) = \int_0^u \phi_d(u-y)g(y)dy + \sum_{i=1}^{n} c_i e^{-a_i u} \to 0.$$

   Επομένως, παίρνουμε

$$\phi(u) = \phi_d(u) + \phi_s(u) \to \phi_0(u),$$

   όταν $\sigma^2 \to 0$, όπου $\phi_0(u)$ είναι η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής μιας Sparre Andersen διαδικασίας κινδύνου με ενδιάμεσους χρόνους μεταξύ των αφίξεων των απαιτήσεων να ακολουθούν Erlang(n), δηλαδή το άθροισμα από n ανεξάρτητες εκθετικές με παραμέτρους $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

3.4 Καθορισμός αρχικών συνθηκών

Τα $\phi_s(u)$ και $\phi_d(u)$ έχουν οριστεί με μοναδικό τρόπο από τις n-οστής τάξης ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις (3.9) και (3.10), εάν οι αρχικές συνθήκες για τα $\phi_s^{(k)}(0)$ και $\phi_d^{(k)}(0)$

δίνονται για $k = 0,1,2,\ldots,2n-1$. Ουσιαστικά, χρειάζεται να γνωρίζουμε τις αρχικές συνθήκες για $k = 0,1,2,\ldots,n-1$ ώστε να λύσουμε τις εξισώσεις (3.24) και (3.25).

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμούς Laplace και στις δύο πλευρές την ολοκληροδιαφορικής εξίσωσης (3.9) παίρνουμε

$$\hat{\phi}_s(u) = \frac{\hat{\omega}(s) + q(s)}{\gamma(s) - \hat{f}(s)} \quad , \quad s \in \mathbb{C},$$

όπου

$$\gamma(s) = \prod_{j=1}^{n}\left[\left(1+\frac{\delta}{\lambda_j}\right) - \frac{c}{\lambda_j}s - \frac{\sigma^2}{2\lambda_j}s^2\right] = \sum_{k=0}^{2n} e_k s^k$$

και

$$q(s) = \sum_{j=0}^{2n-1} s^j \sum_{k=j+1}^{2n} e_k \phi_s^{(k-1-j)}(0) \quad , \quad s \in \mathbb{C},$$

είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $2n-1$.

Εφόσον το $\hat{\phi}_s(s)$ είναι πεπερασμένο για κάθε s μιγαδικό τέτοιο ώστε $\mathcal{R}(s) > 0$, παίρνουμε

$$\hat{\omega}(\rho_i) = -q(\rho_i) \quad , \quad i-1,2,\ldots,n. \tag{3.42}$$

Στην συνέχεια, με αλλαγή στα όρια του αθροίσματος, παίρνουμε

$$\sum_{m=0}^{2n-1} \phi_s^{(m)}(0) \sum_{k=m+1}^{2n} e_k \rho_i^{k-m-1} = -\hat{\omega}(\rho_i) \quad , \quad i = 1,2,\ldots,n. \tag{3.43}$$

Για τον προσδιορισμό των τιμών της $\phi_s^{(k)}(0)$ για $k = 0,1,2,\ldots,2n-1$, χρειάζονται, επιπλέον, ακόμα n συνθήκες.

Θέτοντας $u = 0$ στην (3.14) παίρνουμε

$$\left[\prod_{j=1}^{m}\left[\left(1+\frac{\delta}{\lambda_j}\right)I - \frac{c}{\lambda_j}D - \frac{\sigma^2}{2\lambda_j}D^2\right]\right]\phi_s(u)|_{u=0} = 0 \quad , \quad m = 1,2,\ldots,n-1. \tag{3.44}$$

Η (3.43) και η (3.44) μαζί με την $\phi_s(0) = 0$ οδηγούν σε ένα $2n \times 2n$ σύστημα γραμμικών εξισώσεων που μπορεί να λυθεί για να βρεθούν οι άγνωστοι $\phi_s^{(k)}(0)$, για $k = 0,1,\ldots,2n-1$.

Ομοίως, οι τιμές των $\phi_d^{(k)}(0)$, για $k = 0,1,\ldots,2n-1$ και $\phi_d(0) = 1$, ικανοποιούν το γραμμικό σύστημα

$$\sum_{m=0}^{2n-1} \phi_d^{(m)}(0) \sum_{k=m+1}^{2n} e_k \rho_i^{k-m-1} = 0 \quad , \quad i = 1,2,\ldots,n \tag{3.45}$$

και

$$\left[\prod_{j=1}^{m}\left[\left(1+\frac{\delta}{\lambda_j}\right)I-\frac{c}{\lambda_j}D-\frac{\sigma^2}{2\lambda_j}D^2\right]\right]\phi_d(u)|_{u=0}=1 \quad , \quad m=1,2,\ldots,n-1. \qquad (3.46)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.1. *Τα παραπάνω αποτελέσματα στην ειδική περίπτωση που* $n=2$.

Όταν

$$\gamma(s)=\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}\left[(\lambda_1+\delta)-cs-\frac{\sigma^2}{2}s^2\right]\left[(\lambda_2+\delta)-cs-\frac{\sigma^2}{2}s^2\right]=\sum_{k=0}^{4}e_k s^k ,$$

όπου

$$e_0=\frac{(\lambda_1+\delta)(\lambda_2+\delta)}{\lambda_1\lambda_2}, e_1=-\frac{c(\lambda_1+\lambda_2+2\delta)}{\lambda_1\lambda_2}, e_2=\frac{c^2-\sigma^2\frac{\lambda_1+\lambda_2+2\delta}{2}}{\lambda_1\lambda_2},$$

$$e_3=\frac{c\sigma^2}{\lambda_1\lambda_2} \text{ και } e_4=\frac{\sigma^4}{4\lambda_1\lambda_2},$$

τότε το $\gamma[\rho_1,\rho_2,s]$ μπορεί να απλοποιηθεί σε

$$\gamma[\rho_1,\rho_2,s]=e_4s^2+[e_3+e_4(\rho_2+\rho_1)]s+e_2+e_3(\rho_1+\rho_2)+e_4(\rho_1^2+\rho_1\rho_2+\rho_2^2)=$$
$$e_4(s+a_1)(s+a_2),$$

όπου ρ_1 και ρ_2 οι μοναδικές θετικές ρίζες της εξίσωσης $\gamma(s)-\hat{f}(s)=0$, ενώ a_1 και a_2 είναι οι ρίζες όπως ορίστηκαν στην (3.27).

Από την (3.43) και την (3.44), η $\phi_s^{(k)}(0)$, για $k=0,1,2,3$, ικανοποιεί το ακόλουθο σύστημα γραμμικών εξισώσεων.

$$0=\phi_s(0),$$

$$-\hat{\omega}(\rho_1)=\phi_s'(0)(e^2+e_3\rho_1+e_4\rho_1^2)+\phi_s''(0)(e_3+e_4\rho_1)+\phi_s^{(3)}(0)e^4,$$

$$-\hat{\omega}(\rho_2)=\phi_s'(0)(e^2+e_3\rho_2+e_4\rho_2^2)+\phi_s''(0)(e_3+e_4\rho_2)+\phi_s^{(3)}(0)e^4,$$

$$0=c\phi_s'(0)+\frac{\sigma^2}{2}\phi_s''(0).$$

Από τη λύση του συστήματος προκύπτει ότι $\phi_s(0)=0$ και

$$\phi_s'(0)=\frac{T_{\rho_2}T_{\rho_1}\omega(0)}{e_3+e_4\left(\rho_1+\rho_2-\frac{2c}{\sigma^2}\right)}=\frac{4\lambda_1\lambda_2T_{\rho_2}T_{\rho_1}\omega(0)}{2c\sigma^2+\sigma^4(\rho_1+\rho_2)}.$$

Ως εκ τούτου,

$$q_1(s) = e_4\phi'_s(0) = \frac{T_{\rho_2}T_{\rho_1}\omega(0)}{\frac{2c}{\sigma^2} + \rho_1 + \rho_2},$$

ενώ

$$b_1 = \frac{4\lambda_1\lambda_2 T_{\rho_2}T_{\rho_1}\omega(0)}{\left[2c\sigma^2 + \sigma^4(\rho_1+\rho_2)\right](\alpha_2-\alpha_1)}$$

και

$$b_2 = b_1\frac{a_2-a_1}{a_1-a_2}.$$

Οπότε, η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση (3.31) απλοποιείται σε

$$\phi_s(u) = \int_0^u \phi_s(u-y)g(y)dy + H(u) + \frac{4\lambda_1\lambda_2 T_{\rho_2}T_{\rho_1}\omega(0)\left(e^{-a_1u} - e^{-a_2u}\right)}{\left[2c\sigma^2 + \sigma^4(\rho_1+\rho_2)\right](\alpha_2-\alpha_1)}.$$

Ομοίως, η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση για το ϕ_d προκύπτει ως λύση του ακόλουθου γραμμικού συστήματος.

$$1 = \phi_d(0),$$

$$-\left(e_1 + e_2\rho_1 + e_3\rho_1^2 + e_4\rho_1^3\right) = \phi'_d(0)\left(e^2 + e_3\rho_1 + e_4\rho_1^2\right) + \phi''_d(0)\left(e_3 + e_4\rho_1\right) + \phi_d^{(3)}(0)e^4,$$

$$-\left(e_1 + e_2\rho_2 + e_3\rho_2^2 + e_4\rho_2^3\right) = \phi'_d(0)\left(e^2 + e_3\rho_2 + e_4\rho_2^2\right) + \phi''_d(0)\left(e_3 + e_4\rho_2\right) + \phi_d^{(3)}(0)e^4,$$

$$\delta = c\phi'_d(0) + \frac{\sigma^2}{2}\phi''_d(0).$$

Από τη λύση του συστήματος προκύπτει ότι $\phi_d(0) = 1$ και

$$\phi'_d(0) = \frac{2\sigma^2(\lambda_1+\lambda_2+\delta) - 4c^2 - 4c\sigma^2(\rho_2+\rho_1) - \sigma^4\left(\rho_1^2 + \rho_1\rho_2 + \rho_2^2\right)}{2c\sigma^2 + \sigma^4(\rho_1+\rho_2)}.$$

Ως εκ τούτου,

$$Q_1(s) = \frac{\sigma^4}{4\lambda_1\lambda_2}s + \frac{4c^2 + 2c\sigma^2(\rho_1+\rho_2) + 2\sigma^2(\lambda_1+\lambda_2+\delta) + \sigma^4\rho_1\rho_2}{4\lambda_1\lambda_2\left(\frac{2c}{\sigma^2} + \rho_1 + \rho_2\right)},$$

ενώ

$$c_1 = \frac{1}{a_2-a_1}\left[-a_1 + \frac{4c^2 + 2c\sigma^2(\rho_1+\rho_2) + 2\sigma^2(\lambda_1+\lambda_2+\delta) + \sigma^4\rho_1\rho_2}{2c\sigma^2 + \sigma^4(\rho_1+\rho_2)}\right]$$

και

$$c_2 = \frac{(a_2 - a_1)c_1 + a_1 - a_2}{a_1 - a_2}.$$

Οπότε, η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση (3.32) απλοποιείται σε

$$\phi_d(u) = \int_0^u \phi_d(u-y)g(y)dy + \frac{a_2 e^{-a_2 u} - a_1 e^{-a_1 u}}{a_2 - a_1} +$$

$$+ \frac{\left[4c^2 + 2c\sigma^2(\rho_1 + \rho_2) + 2\sigma^2(\lambda_1 + \lambda_2 + \delta) + \sigma^4 \rho_1 \rho_2\right]\left(e^{-a_1 u} - e^{-a_2 u}\right)}{\left[2c\sigma^2 + \sigma^4(\rho_1 + \rho_2)\right](a_2 - a_1)}.$$

□

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

ΤΟ ΚΛΑΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΜΕ ΕΝΑΝ ΟΡΟ ΔΙΑΧΥΣΗΣ ΚΑΙ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΜΕΡΙΣΜΑΤΩΝ

Στο κεφάλαιο αυτό, θεωρούμε ότι η διαδικασία του πλεονάσματος ακολουθεί μία σύνθετη Poisson κατανομή, πολλών στρωμάτων που αποδίδει μερίσματα και επηρεάζεται από έναν όρο διάχυσης. Αποδεικνύεται ότι η $\phi(u)$ ικανοποιεί μια ολοκληροδιαφορική εξίσωση τύπου Voltera. Η λύση της συγκεκριμένης ολοκληροδιαφορικής εξίσωσης γίνεται με τη βοήθεια των μετασχηματισμών Laplace, αποδεικνύοντας ότι η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση. Γίνεται μελέτη της προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής των Gerber-Shiu και δίνονται αναλυτικές εκφράσεις της συνάρτησης ανάλογα, με το τρέχων επίπεδο του πλεονάσματος. Ένα πολυστρωματικό μοντέλο παρέχει τη δυνατότητα στον ασφαλιστή να δίνει μερίσματα αλλά και να μεταβάλει το ποσοστό του μερίσματος, ανάλογα με την ποσότητα του τρέχοντος πλεονάσματος που έχει την κάθε χρονική στιγμή η εταιρία. Οι πιο πρόσφατες εξελίξεις σχετικά με την στρατηγική πολλαπλών μερισμάτων δίνονται από τους Albrecher και Hartinger (2007), Yang και Zhang (2008) και Yang et al. (2008).

Υποθέτουμε ότι τα ύψη των απαιτήσεων $\{Y_1, Y_2, \ldots\}$ είναι ανεξάρτητες και ομοιόμορφα κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές με κοινή αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F(y) = 1 - \overline{F}(y),\ y \geq 0$, με $F(0) = 0$ και μετασχηματισμό Laplace $\hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-sy} dF(y)$.

Θεωρούμε την απαριθμήτρια διαδικασία $\{N(t) \mid t \geq 0\}$ να είναι μία διαδικασία Poisson με παράμετρο λ. Οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ των αφίξεων $\{V_1, V_2, \ldots\}$ είναι ανεξάρτητες, ομοιόμορφα κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν εκθετική κατανομή με μέσο $\frac{1}{\lambda}$. Επίσης υποθέτουμε ότι είναι και ανεξάρτητοι από τα Y_i.

Στη συνέχεια ορίζουμε τη διαδικασία των συνολικών απαιτήσεων $\left\{ S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \mid t \geq 0 \right\}$ να είναι το άθροισμα όλων των απαιτήσεων που εμφανίζονται μέχρι τη χρονική στιγμή t, με $S(t) = 0$ αν $N(t) = 0$. Θεωρούμε την διαδικασία $\{W(t) \mid t \geq 0\}$, ανεξάρτητη από την $\{S(t) \mid t \geq 0\}$, να είναι μία κλασική Wiener διαδικασία, με συντελεστή ολίσθησης 0 και παράμετρο διακύμανσης 1. Η $W(t)$ είναι κανονικά κατανεμημένη με μέσο 0 και διακύμανση t για κάθε σταθερό $t > 0$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.1. *Η σύνθετη διαδικασία κινδύνου Poisson πολλαπλών μερισμάτων που επηρεάζεται από ένα όρο διάχυσης δίνεται από τον τύπο*

$$dU_\beta(t) = c_i dt + \sigma_i dW(t) - dS(t),\ \beta_{i-1} \leq U_\beta(t) < \beta_i,\ i = 1, \ldots, n+1, \tag{4.1}$$

όπου $\sigma_i \geq 0$, με τον διανυσματικό παράγοντα $\beta = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n+1})$ να δηλώνει το φράγμα σε κάθε επίπεδο και ισχύει $0 = \beta_0 < \beta_1 < \cdots < \beta_{n+1} = \infty$.

Όταν το τρέχων πλεόνασμα βρίσκεται στο διάστημα $[\beta_{i-1}, \beta_i)$, $i = 1, \ldots, n+1$, η ασφαλιστική εταιρία χρεώνει ασφάλιστρα με ρυθμό c_i. Επίσης, ισχύει η αρχική συνθήκη $U_\beta(0) = u$ για $u \geq 0$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.2. Η προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu δίνεται από τον τύπο

$$m(u;\beta) = E\left[e^{-\delta T_\beta} w\left(U_\beta(T_\beta -), |U_\beta(T_\beta)|\right) I(T_\beta < \infty) \,|\, U_\beta(0) = u\right] \ , \quad u \geq 0 \qquad (4.2)$$

όπου $\delta \geq 0$ είναι ο παράγοντας προεξόφλησης, $T_\beta = \inf\{t \in [0,\infty) \,|\, U_\beta(t) \leq 0\}$ είναι ο χρόνος χρεοκοπίας, $U_\beta(T_\beta -)$ είναι το πλεόνασμα ακριβώς πριν τη στιγμή της χρεοκοπίας και $|U_\beta(T_\beta)|$ είναι το έλλειμα τη στιγμή της χρεοκοπίας.

Για ευκολία θα συμβολίζουμε με $\zeta(u)$ τη συνάρτηση

$$\zeta(u) = \int_u^\infty w(u, y-u) dF(y) \ , \quad u \geq 0 . \qquad (4.3)$$

Γνωρίζουμε ότι για τον τελεστή $T_s f(x) = \int_x^\infty e^{-s(y-x)} f(y) dy$ ισχύει,

$$T_s T_r f(x) = T_r T_s f(x) = \frac{T_s f(x) - T_r f(x)}{r - s} \ , \quad s \neq r . \qquad (4.4)$$

Όταν $x = 0$, τότε ο $T_s f(0) = \int_0^\infty e^{-sy} f(y) dy = \hat{f}(s)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης f.

Θεωρούμε ότι για $i = 1,2,\ldots,n+1$ ισχύει $D_i = \dfrac{\sigma_i^2}{2}$ και $a_i = \dfrac{c_i}{D_i} - \rho_i$ όπου ρ_i είναι η μη αρνητική ρίζα της θεμελιώδους εξίσωσης του Lundberg

$$\lambda + \delta - c_i s - D_i s^2 = \lambda \hat{f}(s). \qquad (4.5)$$

Για μία επαρκώς κανονική κατανομή του ύψους των απαιτήσεων, η (4.5) έχει όχι μόνο μία αλλά δύο ρίζες, τις οποίες συμβολίζουμε με $\rho_i \geq 0$ και $-R_i < 0$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.3. *Ορίζουμε την συνάρτηση δεξιάς ουράς,* $\overline{A}_i(x)$, *να δίνεται από τον τύπο*

$$\overline{A}_i(x) = 1 - A_i(x) = \frac{\int_x^\infty T_{\rho_i} f(y) dy}{\int_0^\infty T_{\rho_i} f(y) dy} = \frac{T_{\rho_i} \overline{F}(x)}{T_{\rho_i} \overline{F}(0)} \ , \quad x \geq 0 , \qquad (4.6)$$

η οποία είναι ουρά πιθανότητας.

Επίσης, ορίζουμε ,

$$g_i(x) = \frac{\lambda}{D_i} \int_0^x e^{-a_i(x-y)} T_{\rho_i} f(y) dy = \frac{\lambda}{c_i + D_i \rho_i} \int_0^x a_i e^{-a_i(x-y)} T_{\rho_i} f(y) dy , \qquad (4.7)$$

$$\pi_i = \int_0^\infty g_i(x)dx$$

και

$$\overline{G}_i(x) = 1 - G_i(x) = \frac{\int_x^\infty g_i(y)dy}{\pi_i},$$

όπου $G_i(x)$ *η αντίστοιχη συνάρτηση κατανομής.*

Αλλάζοντας τα όρια της ολοκλήρωσης, παίρνουμε

$$\pi_i = \frac{\lambda}{D_i}\int_0^\infty \int_0^x e^{-a_i y} T\rho_i f(y)dydx = \frac{\lambda}{D_i}\int_0^\infty e^{a_i y} T_{\rho_i} f(y)\int_y^\infty e^{-a_i x}dxdy =$$

$$= \frac{\lambda}{D_i a_i}\int_0^\infty T_{\rho_i} f(y)dy = \frac{\lambda T_{\rho_i}\overline{F}(0)}{D_i a_i} \tag{4.8}$$

(βλέπε Tsai και Willmot, 2002, εξίσωση (4.1)) και

$$G_i'(x) = \frac{g_i(x)}{\pi_i} = \frac{\int_0^x a_i e^{-a_i(x-y)} T_{\rho_i} f(y)dy}{T_{\rho_i}\overline{F}(0)} = \int_0^x a_i e^{-a_i(x-y)} dA_i(y). \tag{4.9}$$

Σημειώνεται ότι το $\pi_i \in (0,1)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.4. *Ορίζουμε τη συνάρτηση δεξιάς ουράς* $\overline{K}_i(x)$ να δίνεται από τον τύπο

$$\overline{K}_i(x) = 1 - K_i(x) = \sum_{j=1}^\infty (1-\pi_i)\pi_i^j \overline{G}_i^{*j}(x) \quad , \quad x \geq 0, \tag{4.10}$$

όπου $\overline{G}_i^{*j}(x) = 1 - G_i^{*j}(x)$ *είναι η ουρά της κατανομής της j-οστής συνέλιξης του* G_i *με τον εαυτό του.*

Τέλος συμβολίζουμε με r_i την μη αρνητική ρίζα της θεμελιώδους εξίσωσης του Lundberg, για το κλασικό μοντέλο της σύνθετης Poisson,

$$\lambda + \delta - c_i s = \lambda \hat{f}(s). \tag{4.11}$$

4.1 Καθορισμός αρχικών συνθηκών

Αρχικά, θα αποδείξουμε δύο απλά αποτελέσματα που θα είναι χρήσιμα στην αντιστροφή των μετασχηματισμών παρακάτω. Στη συνέχεια θα δείξουμε κάποια γενικά αποτελέσματα που σχετίζονται με μία δεύτερης τάξης ολοκληροδιαφορική εξίσωση, η οποία συνδέεται άμεσα με αυτά που θα μελετήσουμε σε αυτό το κεφάλαιο.

Θεωρούμε τα $\beta \geq 0$, $\rho \geq 0$ και $\alpha > 0$ ως παραμέτρους.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.5. *Ορίζουμε τη συνάρτηση* $\Phi:[\beta;\infty)\to\mathbb{R}$ *να είναι μία συνάρτηση δύο φορές διαφορίσιμη, συνεχής στο* (β,∞) *και δεξιά συνεχής στο* β .

ΛΗΜΜΑ 4.1. *Για* $x>0$*, εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace στο*

$$\int_0^x l(t)\int_0^{x-t} e^{-\alpha(x-t-y)}T_\rho f(y)dydt,$$

παίρνουμε

$$\frac{1}{\alpha+s}\left[T_s T_\rho f(0)\right]\tilde{l}(s)\ ,\quad s\geq 0,$$

όπου το $l(s)$ *ορίζεται παρακάτω (θεώρημα 4.1.).*

Επίσης ο μετασχηματισμός Laplace του $\frac{1}{\rho+\alpha}\left(\rho e^{\rho t}+\alpha e^{-\alpha t}\right)$ *είναι*

$$\frac{s}{(s-\rho)(s+\alpha)}, \tag{4.12}$$

και ο μετασχηματισμός Laplace του $\frac{1}{\rho+\alpha}\left(e^{\rho t}-e^{-\alpha t}\right)$ *είναι*

$$\frac{1}{(s-\rho)(s+\alpha)}. \tag{4.13}$$

□

Στη συνέχεια αυτής της ενότητας, υποθέτουμε ότι όπου υπήρχε προηγούμενα ο δείκτης i, παραλείπεται. Για παράδειγμα, υποθέτουμε ότι η ρ ικανοποιεί την εξίσωση (4.5) όπου τα c_i και D_i αντικαθίστανται από τα c και D, αντίστοιχα. Επίσης θεωρούμε ότι η Φ ικανοποιεί και ακολουθεί την δεύτερης τάξης, μη ομογενή, ολοκληροδιαφορική εξίσωση (βλέπε Lin και Sendova, 2008, για την περίπτωση που $D=0$)

$$(\lambda+\delta)\Phi(u)-c\Phi'(u)-D\Phi''(u)=\lambda\left[\int_0^{u-\beta}\Phi(u-y)dF(y)+\zeta(u)\right]\ ,\quad u\geq\beta. \tag{4.14}$$

Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $u-\beta=x$ και $\Lambda(x)=\Phi(u)$, η εξίσωση (4.14) γίνεται

$$(\lambda+\delta)\Lambda(x)-c\Lambda'(x)-D\Lambda''(x)=\lambda\left[\int_0^x\Lambda(x-y)dF(y)+\zeta_\beta(x)\right]\ ,\quad x\geq 0, \tag{4.15}$$

όπου $\zeta_\beta(x)=\zeta(x+\beta)$.

Μπορούμε τώρα να μετασχηματίσουμε την εξίσωση (4.15) σε μία ολοκληρωτική εξίσωση, τύπου Volterra και να λύσουμε την τελευταία με χρήση μετασχηματισμών Laplace.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.1. (Mitric I.-R., Sendova K. P., Tsai C. C. L., 2010, Θεώρημα 3.1.) *Η λύση της εξίσωσης (4.15) μπορεί να γραφεί στη μορφή*

$$\Lambda(x)=\Lambda(0)+\Lambda'(0)x+\int_0^x (x-t)l(t)dt\,, \tag{4.16}$$

όπου

$$l(x)=\frac{1}{1+\pi}\int_0^x u(x-t)dK(t)+\upsilon(x)\,, \tag{4.17}$$

με την π *και την* $K(t)$ *όπως ορίστηκαν στις (4.8) και (4.10), αντίστοιχα, με τον δείκτη* i *να παραλείπεται και*

$$\upsilon(x)=\frac{c}{D(\rho+\alpha)}\left[\Lambda(0)r\rho-\Lambda'(0)(\rho-r)\right]e^{\rho x}\frac{c}{D(\rho+\alpha)}\left[\Lambda(0)r\alpha-\Lambda'(0)(\alpha+r)\right]e^{-\alpha x}+$$

$$+\frac{\lambda}{D(\rho+\alpha)}\int_0^x\left[(\rho-r)\left[\Lambda(0)\rho+\Lambda'(0)\right]e^{\rho(x-y)}+(\alpha+r)\left[-\Lambda(0)\alpha+\Lambda'(0)\right]e^{-\alpha(x-y)}\right]T_r f(y)dy+$$

$$+\Lambda(0)\frac{\lambda}{D}T_r f(x)-\frac{\lambda}{D}\zeta_\beta(x)+\frac{\lambda}{D(\rho+\alpha)}\int_0^x\left[-\rho^2e^{\rho(x-y)}+\alpha^2e^{-\alpha(x-y)}\right]\zeta_\beta(y)dy\,. \tag{4.18}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θέτουμε $l(x)=\Lambda''(x)$. Ολοκληρώνοντας κατά μέρη, παίρνουμε

$$\Lambda(x)=\Lambda(0)+\int_0^x\Lambda'(t)dt=\Lambda(0)+\Lambda'(0)x+\int_0^x\int_0^t l(s)dsdt=$$

$$=\Lambda(0)+\Lambda'(0)x+\int_0^x(x-t)l(t)dt\,.$$

Στη συνέχεια, με αντικατάσταση στην (4.15), παίρνουμε

$$(\lambda+\delta)\Lambda(0)+\left[(\lambda+\delta)x-c\right]\Lambda'(0)-Dl(x)+\int_0^x\left[(\lambda+\delta)(x-t)-c\right]l(t)dt=$$

$$=\lambda\int_0^x\left[\Lambda(0)+\Lambda'(0)(x-y)\right]dF(y)+\lambda\int_0^x\int_0^{x-y}(x-y-t)l(t)dtdF(y)+\lambda\zeta_\beta(x).$$

Αλλάζοντας τα όρια της ολοκλήρωσης προκύπτει ότι

$$\int_0^x\int_0^{x-y}(x-y-t)l(t)dtdF(y)=\int_0^x\int_0^{x-t}(x-y-t)dF(y)l(t)dt\,,$$

το οποίο επιβεβαιώνει ότι με τη βοήθεια της ταυτότητας (4.16), η (4.15) μπορεί να γραφεί ισοδύναμα στη μορφή της ακόλουθης ολοκληρωτικής εξίσωσης, τύπου Volterra,

$$l(x)-\int_0^x\kappa(x-t)l(t)dt=p(x), \tag{4.19}$$

όπου

$$\kappa(x)=\frac{(\lambda+\delta)x-c}{D}-\frac{\lambda}{D}\int_0^x(x-y)dF(y) \tag{4.20}$$

και

$$p(x)=\frac{\lambda+\delta}{D}\Lambda(0)+\frac{(\lambda+\delta)x-c}{D}\Lambda'(0)-$$

$$-\frac{\lambda}{D}\int_0^x[\Lambda(0)+\Lambda'(0)(x-y)]dF(y)-\frac{\lambda}{D}\zeta_\beta(x). \tag{4.21}$$

Στη συνέχεια, πρέπει να αποδείξουμε ότι η εξίσωση τύπου Volterra (4.19) έχει λύση της μορφής της (4.17). Εφαρμόζοντας μετασχηματισμούς Laplace στην (4.19), με χρήση των (4.20) και (4.21), προκύπτει

$$\tilde{l}(s)=\frac{\tilde{p}(s)}{1-\tilde{\kappa}(s)}=\frac{\Lambda(0)s\left[\lambda+\delta-\lambda\hat{f}(s)\right]-\Lambda'(0)\left[cs-(\lambda+\delta)+\lambda\hat{f}(s)\right]-\lambda s^2\tilde{\zeta}_\beta(s)}{Ds^2+cs-(\lambda+\delta)+\lambda\hat{f}(s)} \tag{4.22}$$

Με αντικατάσταση του $\lambda+\delta$ από τις (4.5) και (4.11) με $D\rho^2+c\rho+\lambda\hat{f}(\rho)$ στον παρονομαστή και με $cr+\lambda\hat{f}(r)$ στον αριθμητή, αντίστοιχα, παίρνουμε

$$\tilde{l}(s)=\frac{\Lambda(0)s\left[cr-\lambda\left[\hat{f}(s)-\hat{f}(r)\right]\right]-\Lambda'(0)\left[c(s-r)+\lambda\left[\hat{f}(s)-\hat{f}(r)\right]\right]-\lambda s^2\tilde{\zeta}_\beta(s)}{D(s-\rho)(s+\alpha)+\lambda\left[\hat{f}(s)-\hat{f}(\rho)\right]}$$

αφού, εξ ορισμού ισχύει ότι $\alpha=\frac{c}{D}+\rho$ άρα $Ds^2+cs-D\rho^2-c\rho=D(s-\rho)(s+\alpha)$.

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας την ταυτότητα (4.4) προκύπτει

$$\tilde{l}(s)=\frac{\Lambda(0)s(s-r)\left[\frac{cr}{s-r}+\lambda T_sT_r f(0)\right]-\Lambda'(0)(s-r)[c-\lambda T_sT_r f(0)]-\lambda s^2\tilde{\zeta}_\beta(s)}{D(s-\rho)(s+\alpha)\left[1-\frac{\lambda}{D(s+\alpha)}T_sT_\rho f(0)\right]},$$

ή ισοδύναμα

$$\tilde{l}(s)\left[1-\frac{\lambda}{D(s+\alpha)}T_sT_\rho f(0)\right]=\Lambda(0)\frac{cr}{D}\cdot\frac{s}{(s-\rho)(s+\alpha)}+\Lambda(0)\frac{\lambda}{D}\cdot\frac{s(s-r)}{(s-\rho)(s+\alpha)}T_sT_r f(0)-$$

$$-\Lambda'(0)\frac{c}{D}\cdot\frac{s-r}{(s-\rho)(s+\alpha)}+\Lambda'(0)\frac{\lambda}{D}\cdot\frac{s-r}{(s-\rho)(s+\alpha)}T_sT_r f(0)-$$

$$-\frac{\lambda}{D}\cdot\frac{s^2}{(s-\rho)(s+\alpha)}\tilde{\zeta}_\beta(s).$$

Δεδομένου ότι

$$\frac{s(s-r)}{(s-\rho)(s+\alpha)}=1-\frac{s(\alpha-\rho+r)-\alpha\rho}{(s-\rho)(s+\alpha)}$$

και

$$\frac{s^2}{(s-\rho)(s+\alpha)}=1-\frac{s(\alpha-\rho)-\alpha\rho}{(s-\rho)(s+\alpha)},$$

μπορούμε να εφαρμόσουμε αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace με τη βοήθεια του Λήμματος 4.1. και των σχέσεων (4.12), (4.13) και να πάρουμε

$$l(x)=\frac{\lambda}{D}\int_0^x\left[\int_0^{x-t}e^{-\alpha(x-t-y)}T_\rho f(y)dy\right]l(t)dt+\upsilon(x)=$$

$$\pi\int_0^x l(x-t)dG(t)+\upsilon(x),$$

με το $G(t)$ να ορίζεται στην (4.9), χωρίς τον δείκτη i. Η τελευταία ταυτότητα είναι μία ανανεωτική εξίσωση της οποίας η λύση (4.17) παρουσιάζεται στο θεώρημα 2.1 των Lin και Willmot (1999).

□

Η εξίσωση (4.14) είναι στενά συνδεδεμένη με μία εξίσωση που ικανοποιεί η συνάρτηση των Gerber και Shiu, κάτω υπό το (4.1) μοντέλο διάχυσης. Όταν η παράμετρος της διάχυσης σ τείνει στο μηδέν, το μοντέλο αυτό θα μπορούσε να αναχθεί σε ένα μοντέλο σύνθετης Poisson πολλαπλών μερισμάτων (βλέπε Lin και Sendova 2008), αν ισχύουν οι ίδιες αρχικές συνθήκες. Στην πραγματικότητα αυτό δεν ισχύει. Ωστόσο από μαθηματικής απόψεως είναι χρήσιμο να μελετήσουμε τη σύγκλυση, έχοντας ότι $\Phi(0)=\Phi_*(0)$. Η εξίσωση που ικανοποιείται από την συνάρτηση των Gerber και Shiu γίνεται, για $D\to 0$,

$$(\lambda+\delta)\Phi_*(u)-c\Phi'_*(u)=\lambda\left[\int_0^{u-\beta}\Phi_*(u-y)dF(y)+\zeta(u)\right]\ ,\ \ u\geq\beta. \tag{4.23}$$

Θέτοντας $u-\beta=x$, $\Phi_*(u)=\Lambda_*(x)$ και $\zeta(x+\beta)=\zeta_\beta(x)$, παίρνουμε

$$(\lambda+\delta)\Lambda_*(x)-c\Lambda'_*(x)=\lambda\left[\int_0^x\Lambda_*(x-y)dF(y)+\zeta_\beta(x)\right]\ ,\ \ x\geq 0. \tag{4.24}$$

Θα δείξουμε ότι η λύση ικανοποιεί, επίσης, το $\lim_{D\to 0}\Lambda(x)=\Lambda_*(x)$.

Θέτουμε $l_*(x)=\Lambda'_*(x)$. Τότε,

$$\Lambda_*(x)=\Lambda_*(0)+\int_0^x l_*(t)dt. \tag{4.25}$$

Όταν $\int_0^x\int_0^{x-y}l_*(t)dtdF(y)=\int_0^x\left[\int_0^{x-t}dF(y)\right]l_*(t)dt$, η εξίσωση (3.24) μπορεί να γραφεί ως εξίσωση τύπου Volterra στη μορφή

$$l_*(x)-\int_0^x\kappa_*(x-t)l_*(t)dt=p_*(x), \tag{4.26}$$

όπου

$$\kappa_*(z)=\frac{\lambda+\delta}{c}-\frac{\lambda}{c}F(z)$$

και

$$p_*(z)=\Lambda_*(0)\kappa_*(z)-\frac{\lambda}{c}\zeta_\beta(z).$$

Όπως και στη απόδειξη του θεωρήματος 4.1. προκύπτει

$$\tilde{l}_*(s)=\frac{\tilde{p}_*(s)}{1-\kappa_*(s)}=\frac{\Lambda_*(0)\left[\lambda+\delta-\lambda\hat{f}(s)\right]-\lambda s\tilde{\zeta}_\beta(s)}{cs-(\lambda+\delta)+\lambda\hat{f}(s)}=$$

$$=\frac{\Lambda_*(0)\left[cr+\lambda\hat{f}(r)-\lambda\hat{f}(s)\right]-\lambda s\tilde{\zeta}_\beta(s)}{c(s-r)\left[1-\frac{\lambda}{c}T_sT_r f(0)\right]}, \tag{4.27}$$

από το οποίο παίρνουμε

$$\tilde{l}_*(s)=\frac{\lambda}{c}T_sT_r f(0)\tilde{l}_*(s)+\Lambda_*(0)\frac{r}{s-r}+\Lambda_*(0)\frac{\lambda}{c}T_sT_r f(0)-\frac{\lambda}{c}\left(1+\frac{r}{s-r}\right)\tilde{\zeta}_\beta(s).$$

Εφαρμόζοντας αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace, προκύπτει

$$l_*(x)=\frac{\lambda}{c}\int_0^x l_*(x-y)T_r f(y)dy+\Lambda_*(0)re^{rx}+$$

$$+\Lambda_*(0)\frac{\lambda}{c}T_r f(x)-\frac{\lambda}{c}\zeta_\beta(x)-\frac{\lambda r}{c}\int_0^x e^{r(x-y)}\zeta_\beta(y)dy.$$

Δεδομένου ότι, ολοκληρώνοντας κατά μέρη, μπορούμε να δείξουμε ότι $T_r f(y)dy=T_r\overline{F}(0)dG_*(y)$, η τελευταία εξίσωση μπορεί να γραφεί στην παρακάτω μορφή ανανεωτικής εξίσωσης.

$$l_*(x)=\pi_*\int_0^x l_*(x-y)dG_*(y)+\upsilon_*(y), \tag{4.28}$$

όπου

$$\pi_*=\frac{\lambda T_r\overline{F}(0)}{c}\in(0,1),$$

$$\overline{G}_*(x)=1-G_*(x)=\frac{T_r\overline{F}(x)}{T_r\overline{F}(0)}$$

και

$$\upsilon_*(x)=\Lambda_*(0)re^{rx}+\Lambda_*(0)\frac{\lambda}{c}T_r f(x)-\frac{\lambda}{c}\zeta_\beta(x)-\frac{\lambda r}{c}\int_0^x e^{r(x-y)}\zeta_\beta(y)dy.$$

Από το θεώρημα 2.1 των Lin και Willmot (1999) η εξίσωση (4.28) έχει λύση

$$l_*(x)=\frac{1}{1-\pi_*}\int_0^x \upsilon_*(x-y)dK_*(y)+\upsilon_*(x), \tag{4.29}$$

όπου

$$\overline{K}_*(y)=1-K_*(y)=\sum_{j=1}^{\infty}(1-\pi_*)\pi_*^j\overline{G}_*^{*j}(y).$$

Υποθέτουμε ότι τα δύο μοντέλα ικανοποιούν τις ίδιες αρχικές συνθήκες. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση των Gerber και Shiu υπό του επηρεασμένου μοντέλου συγκλίνει στη συνάρτηση των Gerber και Shiu κάτω υπό το σύνηθες μοντέλο σύνθετης Poisson, για $D \to 0$. Παρατηρούμε ότι η σύγκλιση $\Phi(u) = \Phi_*(u)$ όταν $D \to 0$ είναι ισοδύναμη με

$$\Lambda(x) = \Lambda(0) + \Lambda'(0)x + \int_0^x (x-t)l(t)dt \to \Lambda_*(0) + \int_0^x l_*(t)dt = \Lambda_*(x), \text{ όταν } D \to 0.$$

Όταν $\Lambda(0) = \Phi(\beta) \to \Lambda_*(0)$ και $\Lambda'(0) = \Phi'(\beta) \to \Lambda'_*(0)$, για $D \to 0$, μένει να δείξουμε ότι

$$\Lambda'(0)x + \int_0^x (x-t)l(t)dt \to \int_0^x l_*(t)dt, \text{ όταν } D \to 0.$$

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμούς Laplace και στις δύο πλευρές της τελευταίας εξίσωσης, το πρόβλημα ανάγεται στο να αποδείξουμε

$$\frac{\Lambda'(0)}{s^2} + \frac{1}{s^2}\tilde{l}(s) \to \frac{1}{s}\tilde{l}_*(s), \text{ για } D \to 0.$$

Αν αντικαταστήσουμε το $\tilde{l}(s)$ από την (4.22) και το $\tilde{l}_*(s)$ από την (4.27), παίρνουμε ισοδύναμα

$$\Lambda'(0) + \frac{\Lambda(0)s\left[\lambda + \delta = \lambda\hat{f}(s)\right] - \Lambda'(0)\left[cs - (\lambda+\delta) + \lambda\hat{f}(s)\right] - \lambda s^2\tilde{\zeta}_\beta(s)}{Ds^2 + cs - (\lambda+\delta) + \lambda\hat{f}(s)} \to$$

$$\to s\left[\frac{\Lambda_*(0)\left[\lambda + \delta - \lambda\hat{f}(s)\right] - \lambda s\tilde{\zeta}_\beta(s)}{cs - (\lambda+\delta) + \lambda\hat{f}(s)}\right], \text{ για } D \to 0,$$

το οποίο είναι τετριμμένο για $\Lambda(0) = \Phi(\beta) \to \Lambda_*(0)$.

4.2 Αναλυτικές εκφράσεις για την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής

Στην ενότητα αυτή γίνεται μελέτη της προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής των Gerber και Shiu και γίνεται λεπτομερής περιγραφή της αναζήτησης της λύσης της.

Το πρώτο αποτέλεσμα που αναφέρεται συμπίπτει με το θεώρημα 1 των Yang και Zhang (2009).

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.2. *Η προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής m των Gerber και Shiu, κάτω υπό το μοντέλο που επηρεάζεται από έναν όρο διάχυσης με στρατηγική πολλαπλών μερισμάτων, ικανοποιεί την εξίσωση*

$$(\lambda+\delta)m(u;\beta) - c_i m'(u;\beta) - D_i m''(u;\beta) =$$

$$= \lambda\left[\int_0^u m(u-y;\beta)dF(y) + \zeta(u)\right], \quad \beta_{i-1} < u < \beta_i, \tag{4.30}$$

όπου το i παίρνει τιμές $1,2,\ldots,n+1$, ανάλογα με το σε πιο διάστημα (β_{i-1},β_i) ανήκει το αρχικό πλεόνασμα.

Παρατηρούμε ότι όταν $\sigma_i \to 0$, $i = 1,2,\ldots,n+1$ το μοντέλο (4.1) ανάγεται στο αντίστοιχο μοντέλο πολλαπλών κατωφλίων που μελετήθηκε από τους Lin και Sendova (2008). Επιπλέον, η δεύτερης τάξης ολοκληροδιαφορική εξίσωση (4.30) για $\sigma_i = 0$ συμπίπτει με την πρώτης τάξης ολοκληροδιαφορική εξίσωση (3.2) των Lin και Sendova (2008).

Η εξίσωση (4.30) μπορεί να μετατραπεί σε μία εξίσωση του τύπου της (4.14) και να λυθεί για κάθε επίπεδο με αναδρομικό τρόπο. Συμβολίζουμε με $m_i(u)$ τη συνάρτηση των Gerber και Shiu $m(u;\beta)$ περιορισμένη στο διάστημα $\beta_{i-1} < u < \beta_i$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.3. (Mitric I.-R., Sendova K. P., Tsai C. C. L., 2010, Θεώρημα 4.2.)

(i) *Η συνάρτηση των Gerber και Shiu* $m(u;\beta)$, $\beta_{i-1} < u < \beta_i$, $i = 1,2,\ldots,n+1$ *μπορεί να ληφθεί αναδρομικά, ως ακολούθως,*

$$m_i(u) = \Phi_i(u) = \Lambda_i(u - \beta_{i-1}), \tag{4.31}$$

όπου το $\Lambda_i(u)$ *ορίζεται στην (4.16) με τη βοήθεια των (4.8), (4.10), (4.17) και (4.18), με την προσθήκη του δείκτη* i*, όταν ενδείκνυται. Ειδικότερα, το* β *αντικαθίσταται από το* β_{i-1} *και το* $\zeta_\beta(u)$ *στην (4.18) από το* $\sum_{r=1}^{i-1}\int_{u+\beta_{i-1}-\beta_r}^{u+\beta_{i-1}-\beta_{r-1}} m_r(u+\beta_{i-1}-y)dF(y) + \zeta_{\beta_{i-1}}(u)$, $i = 1,2,\ldots,n+1$.

(ii) *Τα* $\Lambda_i(0)$ *και* $\Lambda_i'(0)$ *καθορίζονται με μοναδικό τρόπο από τις αρχικές και οριακές συνθήκες*

$$m(0;\beta) = m_1(0) = 1,$$

$$m_{i-1}(\beta_{i-1}-) = m_i(\beta_{i-1}+) \ , \ i = 2,3,\ldots,n+1,$$

$$c_{i-1}m'_{i-1}(\beta_{i-1}-) + D_{i-1}m''_{i-1}(\beta_{i-1}-) =$$

$$= c_i m'_i(\beta_{i-1}+) + D_i m''_i(\beta_{i-1}+) \ , \ i = 2,3,\ldots,n+1,$$

$$\lim_{u\to+\infty} m(u;\beta) = \lim_{u\to+\infty} m_{n+1}(u) = 0.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

(i) Για $0 = \beta_0 \le u < \beta_1$ η εξίσωση (4.30) είναι του τύπου της (4.14), όπου $\beta = \beta_0 = 0$. Σύμφωνα με το θεώρημα 4.1., η γενική της λύση έχει τη μορφή της (4.31), ορισμένη για $u \ge 0$. Περιορίζοντας αυτή τη λύση στο διάστημα $[0,\beta_1)$ παίρνουμε την $m_1(u)$. Υποθέτουμε ότι έχουμε βρει τις $m_1(u),\ldots,m_{i-1}(u)$. Για $\beta_{i-1} \le u < \beta_i$, $i = 2,3,\ldots n$, η εξίσωση (4.30) μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$(\lambda+\delta)m(u;\beta)-c_i m'(u;\beta)-D_i m''(u;\beta)=$$

$$=\lambda\int_0^{u-\beta_{i-1}} m(u-y;\beta)dF(y)+\lambda\sum_{r=1}^{i-1}\int_{u-\beta_r}^{u-\beta_{r-1}} m_r(u-y)dF(y)+\lambda\zeta(u). \qquad (4.32)$$

Αυτό δείχνει ότι η λύση m ανάμεσα σε δύο φράγματα β_{i-1} και β_i εξαρτάται από τις εκφράσεις για το m, που προκύπτουν για όλα τα επίπεδα ανάμεσα σε κάθε ζεύγος δύο διαδοχικών φραγμάτων κάτω από το β_{i-1}. Η εξίσωση (4.32) είναι της μορφής της (4.14) , όπου $\beta=\beta_{i-1}$ και το $\zeta(u)$ αντικαθίστανται από το $\sum_{r=1}^{i-1}\int_{u-\beta_r}^{u-\beta_{r-1}} m_r(u-y)dF(y)+\zeta(u)$ όπως ορίζεται στο μέρος (i) του θεωρήματος. Το θεώρημα 4.1. δείχνει ότι η λύση είναι της μορφής (4.31) , ορισμένη για $u\geq\beta_{i-1}$. Περιορίζουμε αυτή τη λύση στο διάστημα $[\beta_{i-1}\beta_i)$ και παίρνουμε την $m_i(u)$.

(ii) Όπως παρατηρείται και στους Yang και Zhang (2009, p. 2), $m(0;\beta)=1$. Αυτή είναι η πρώτη αρχική συνθήκη που πρέπει το m να ικανοποιεί. Επομένως, πρέπει να επεκτείνουμε συνεχώς το m, για $u=0$.

Στη συνέχεια, ένα επιχείρημα παρόμοιο με αυτό που ακολουθεί την εξίσωση (2.6) του Wan (2006) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποδείξουμε ότι ισχύει η ακόλουθη αρχική συνθήκη.

$$\lim_{u\to\beta_i-} m(u;\beta)=\lim_{u\to\beta_i+} m(u;\beta) \quad , \quad \iota=1,2,\ldots,n. \qquad (4.33)$$

Αυτή η δεύτερη αρχική συνθήκη δίνει την συνεχή επέκταση του m για $u=\beta_i$, $i=1,2,\ldots,n$, δηλαδή πράγματι έχουμε ότι $m_{i-1}(\beta_{i-1}-)=m_i(\beta_{i-1}+)$. Θέτοντας u όπου β_{i-1}, $i=2,3,\ldots,n+1$, στην (4.30) παίρνουμε

$$c_{i-1}m'_{i-1}(\beta_{i-1}-)+D_{i-1}m''_{i-1}(\beta_{i-1}-)=$$

$$=c_i m'_i(\beta_{i-1}+)+D_i m''_i(\beta_{i-1}+)$$

από τη συνέχεια του m στο β_{i-1}. Εξ ορισμού, η συνάρτηση των Gerber και Shiu στο άπειρο πρέπει να κάνει μηδέν, το οποίο αποδεικνύει την τελευταία αρχική συνθήκη του θεωρήματος. Ως εκ τούτου, έχουμε $2n+2$ εξισώσεις για να προσδιορίσουμε με μοναδικό τρόπο τα $\Lambda_i(0)$ και $\Lambda'_i(0)$, $i=1,2,\ldots,n+1$ και η συνάρτηση των Gerber και Shiu είναι πλήρως καθορισμένη.

□

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.1. (Πιθανότητα χρεοκοπίας όταν τα ύψη των απαιτήσεων ακολουθούν εκθετική κατανομή)

Η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u;\beta)$ είναι μια ιδική περίπτωση της συνάρτησης των Gerber και Shiu, στην οποία η συνάρτηση ποινής είναι $w(x_1,x_2)=1$, $x_1 \geq 0$, $x_2 > 0$ και ο παράγοντας προεξόφλησης $\delta = 0$. Επομένως $r_i = \delta_i = 0$, $i = 1,2,\ldots,n+1$. Επίσης, $\pi_{*i} = \dfrac{1}{1+\theta_i}$. Κάτω υπό το μοντέλο που δεν υπάρχει όρος διάχυσης το G_i ανάγεται στην πρώτης τάξης συνάρτηση ισορροπίας $F_e(x) = \int_0^x \dfrac{\overline{F}(t)}{E(Y_1)}dt$, $y \geq 0$, της $F(x)$. Επιπλέον, όπως έχουν δείξει οι Lin και Sendova (2008, p.622) η $K_i(u)$ συμπίπτει με την πιθανότητα χρεοκοπίας του κλασικού μοντέλου σύνθετης Poisson.

Όταν οι απαιτήσεις ακολουθούν εκθετική κατανομή, $F(x) = 1 - e^{-\mu x}$, τότε ισχύει

$$K_i(x) = \frac{1}{1+\theta_i} e^{-\frac{\mu\theta_i}{1+\theta_i}x} \quad , \quad x \geq 0 . \tag{4.34}$$

Υποθέτουμε, ότι έχουμε ένα μοντέλο με εκθετικά κατανεμημένα ύψη απαιτήσεων, με μέσο $\dfrac{1}{\mu} = 100$ και δύο φράγματα τέτοια ώστε $e^{-0.01\beta_1} = 0.20$ και $e^{-0.01\beta_2} = 0.05$, με $\beta_1 = 160.9437912$ και $\beta_2 = 299.5732274$. Υποθέτουμε ότι $\theta_1 = 0.5$, $\theta_2 = 0.4$ και $\theta_3 = 0.3$. Το παράδειγμα αυτό υπάρχει στην ενότητα 5 των Lin και Sendova (2008) για το μοντέλο χωρίς διάχυση. Χρησιμοποιούμε τις ίδιες τιμές παραμέτρων, όπως σε εκείνο το παράδειγμα, για να επαληθεύσουμε τη μέθοδό μας για το κλασικό μοντέλο.

Πράγματι για $r_i = 0$, $i = 1,2,3$, η u_{*i} απλοποιείται σε

$$u_{*i}(x) = \frac{\mu}{1+\theta_i}\left[\Lambda_i(0)e^{-\mu x} - \zeta_{*i}(x)\right],$$

όπου $\zeta_{*1}(x) = \zeta_{\beta_0}(x)$ και $\zeta_{*i}(x) = \sum_{r=1}^{i-1}\int_{u+\beta_{i-1}-\beta_r}^{x+\beta_{i-1}-\beta_{r-1}} m_r(x+\beta_{i-1}-y)dF(y) + \zeta(x+\beta_{i-1})$, $i = 2,3$. Με χρήση τη σχέσης (4.26), (4.29) και (4.34) για $\beta_{i-1} \leq u < \beta_i$, η πιθανότητα χρεοκοπίας γίνεται

$$\psi_{*i}(u) = \Lambda_{*i}(u-\beta_i) = c_1^{\psi_{*i}} + c_2^{\psi_{*i}} e^{-\mu\frac{\theta_i}{1+\theta_i}u},$$

όπου

$$c_1^{\psi_{*i}} = \frac{(1+\theta_i)\psi_{*i}(\beta_{i-1}) - c_{\zeta_{*i}}}{\theta_i},$$

$$c_2^{\psi_{*i}} = \frac{c_{\zeta_{*i}} - \psi_{*i}(\beta_{i-1})}{\theta_i} e^{\mu\frac{\theta_i}{1+\theta_i}\beta_{i-1}},$$

$$c_{\zeta_{*1}} = 1,$$

$$c_{\zeta_{*2}} = e^{-\mu\beta_1} + c_1^{\psi_{*1}}\left(1-e^{-\mu\beta_1}\right) + c_2^{\psi_{*1}}\left(1+\theta_1\right)\left(e^{-\mu\frac{\theta_1}{1+\theta_1}\beta_1} - e^{-\mu\beta_1}\right),$$

$$c_{\zeta_{*3}} = e^{-\mu\beta_2} + c_1^{\psi_{*1}} e^{-\mu\beta_2}\left(e^{-\mu\beta_1} - 1\right) + c_2^{\psi_{*1}}\left(1+\theta_1\right)e^{-\mu\beta_2}\left(e^{\mu\frac{1}{1+\theta_1}\beta_1} - 1\right) +$$

$$+ c_1^{\psi_{*2}}\left(1-e^{-\mu(\beta_2-\beta_1)}\right) + c_2^{\psi_{*2}}\left(1+\theta_2\right)\left(e^{-\mu\frac{\theta_2}{1+\theta_2}\beta_2} - e^{-\mu\beta_2}e^{\mu\frac{1}{1+\theta_2}\beta_1}\right).$$

Με αντικατάσταση των τιμών των μ, θ_i και β_i, $i = 1,2,3$ με την προϋπόθεση ότι $\psi_{*i-1}\left(\beta_{i-1}\right) = \psi_i\left(\beta_{i-1}\right)$, $i = 2,3$ και με οριακή συνθήκη $\lim_{u\to\infty}\psi_{*3}(u) = 0$, παίρνουμε $\psi_*(0) = 0.723783977$ και στη συνέχεια

$$\psi_*(u) = \begin{cases} 0.17135193 + 0.552432046e^{-0.0033333u} & , \ 0 \le u < \beta_1, \\ 0.090585873 + 0.639594312e^{-0.002857143u} & , \ \beta_1 \le u < \beta_2, \\ 0.723366124e^{0.002307692u} & , \ \beta_2 \le u \end{cases}$$

όπως παρατηρείται και στους Lin και Sendova (2008).

Ομοίως, εργαζόμαστε και στο μοντέλο με διάχυση. Για $r_i = \rho_i = 0$, $i = 1,2,3$ παίρνουμε

$$u_i(x) = a_{\upsilon_i} e^{-\alpha_i x} + b_{\upsilon_i} e^{-\mu x},$$

όπου

$$a_{\upsilon_i} = \frac{\alpha_i}{\left(1+\theta_i\right)\left(\alpha_i - \mu\right)}\left[\psi_i'\left(\beta_{i-1}\right)\left(-\alpha_i - \alpha_i\theta_i + \mu\theta_i\right) + \mu\alpha_i\left[\psi_i\left(\beta_{i-1}\right) - c_{\zeta_i}\right]\right],$$

$$b_{\upsilon_i} = \frac{\mu\alpha_i}{\left(1+\theta_i\right)\left(\alpha_i - \mu\right)}\left[\psi_i'\left(\beta_{i-1}\right) - \mu\psi_i\left(\beta_{i-1}\right) + \mu c_{\zeta_i}\right]e^{-\mu x},$$

$c_{\zeta_1} = 1$ και c_{ζ_i} τέτοιο ώστε

$$c_{\zeta_i} e^{\mu x} = \zeta_i(x) = \sum_{r=1}^{i-1}\int_{u+\beta_{i-1}-\beta_r}^{x+\beta_{i-1}-\beta_{r-1}} m_r\left(x+\beta_{i-1}-y\right)dF(y) + \zeta\left(x+\beta_{i-1}\right), i = 2,3.$$

Επίσης,

$$G_i(x) = G_i^{*j}(x) = 1 - \frac{\alpha_i}{\alpha_i - \mu}e^{-\mu x} + \frac{\mu}{\alpha_i - \mu}e^{-\alpha_i x} \quad , \quad j = 1,2,\ldots .$$

Οπότε, το $\overline{G}_i(x)$ είναι ο συνδυασμός δύο εκθετικών και η αντίστοιχη $K_i(x)$ έχει τη μορφή (βλέπε παράδειγμα 4.1 των Lin και Willmot, 1999)

$$K_i(x) = C_{1i}e^{-R_{1i}x} + C_{2i}e^{-R_{2i}x} \quad , \quad x \geq 0 ,$$

όπου

$$R_{1i} = \frac{1}{2}\left[\alpha_i + \mu - \sqrt{(\alpha_i + \mu)^2 - \frac{4\alpha_i \mu \theta_i}{1+\theta_i}}\right],$$

$$R_{2i} = \frac{1}{2}\left[\alpha_i + \mu + \sqrt{(\alpha_i + \mu)^2 - \frac{4\alpha_i \mu \theta_i}{1+\theta_i}}\right],$$

$$C_{1i} = \frac{1}{2(1+\theta_i)} - \frac{\alpha_i + \mu}{2(1+\theta_i)\sqrt{(\alpha_i + \mu)^2 - \frac{4\alpha_i \mu \theta_i}{1+\theta_i}}} ,$$

$$C_{2i} = \frac{1}{2(1+\theta_i)} + \frac{\alpha_i + \mu}{2(1+\theta_i)\sqrt{(\alpha_i + \mu)^2 - \frac{4\alpha_i \mu \theta_i}{1+\theta_i}}} .$$

Περαιτέρω υπολογισμοί δείχνουν ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας παίρνει τη μορφή

$$\psi_i(u) = a_{\psi_i} + b_{\psi_i} e^{-R_{1i}u} + c_{\psi_i} e^{-R_{2i}u} ,$$

όπου

$$a_{\psi_i} = \psi_i(\beta_{i-1}) - \frac{a_{l_i}}{R_{1i}^2} - \frac{b_{l_i}}{R_{2i}^2} ,$$

$$b_{\psi_i} = \frac{a_{l_i}}{R_{1i}^2} ,$$

$$c_{\psi_i} = \frac{b_{l_i}}{R_{2i}^2} ,$$

$$a_{l_i} = \frac{\alpha_i \mu}{(1+\theta_i)\sqrt{(\alpha_i + \mu)^2 - \frac{4\alpha_i \mu \theta_i}{1+\theta_i}}}\left(\frac{a_{\upsilon_i}}{\alpha_i - R_{1i}} + \frac{b_{\upsilon_i}}{\mu - R_{1i}}\right),$$

$$b_{l_i} = -\frac{\alpha_i \mu}{(1+\theta_i)\sqrt{(\alpha_i + \mu)^2 - \frac{4\alpha_i \mu \theta_i}{1+\theta_i}}}\left(\frac{a_{\upsilon_i}}{\alpha_i - R_{2i}} + \frac{b_{\upsilon_i}}{\mu - R_{2i}}\right),$$

$$c_{\zeta_2} = e^{-\mu\beta_1} + a_{\psi_1}\left(1-e^{-\mu\beta_1}\right) + b_{\psi_1}\frac{\mu}{R_{11}-\mu}\left(e^{-\mu\beta_1} - e^{-R_{11}\beta_1}\right) + c_{\psi_1}\frac{\mu}{R_{21}-\mu}\left(e^{-\mu\beta_1} - e^{-R_{21}\beta_1}\right),$$

$$c_{\zeta_3} = e^{-\mu\beta_2} + a_{\psi_1}e^{-\mu\beta_2}\left(e^{\mu\beta_1}-1\right) + b_{\psi_1}\frac{\mu}{R_{11}-\mu}e^{-\mu\beta_2}\left(1-e^{-(R_{11}-\mu)\beta_1}\right) +$$

$$+ c_{\psi_1}\frac{\mu}{R_{21}-\mu}e^{-\mu\beta_2}\left[1-e^{-(R_{21}-\mu)\beta_1}\right] + a_{\psi_2}\left[1-e^{-\mu(\beta_2-\beta_1)}\right] +$$

$$+ b_{\psi_2}\frac{\mu}{R_{12}-\mu}e^{-R_{12}\beta_2}\left[e^{(R_{12}-\mu)(\beta_2-\beta_1)}-1\right] + c_{\psi_2}e^{-R_{22}\beta_2}\frac{\mu}{R_{22}-\mu}\left[e^{(R_{22}-\mu)(\beta_2-\beta_1)}-1\right].$$

Μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι όταν το $D_i \to 0$, η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(x)$ συγκλίνει στην πιθανότητα χρεοκοπίας που έχουμε για το μοντέλο χωρίς διάχυση $\psi_*(x)$, εάν ικανοποιούν τις ίδιες αρχικές συνθήκες.

Θεωρούμε ξανά, ένα μοντέλο με δύο φράγματα και εκθετική κατανομή αποζημιώσεων. Θέτουμε τα μ, β_1, β_2 και θ_i, $i = 1,2,3$ να είναι τα ίδια με πριν και επιπλέον $\lambda = 0.3$, $D_1 = 1.5$, $D_2 = 1.2$ και $D_3 = 1$. Χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες και τις συνθήκες συνέχειας από το θεώρημα 4.3., παίρνουμε

$$\psi(u) = \begin{cases} 0.909363014 + 0.060237494e^{-0.00333260u} + \\ + 0.030399491e^{-30.0066674u} & , 0 \le u < \beta_1, \\ 0.141959811 + 0.928000819e^{-0.00285656u} + \\ + 0.216653665e^{-35.0071434(u-\beta_1)} & , \beta_1 \le u < \beta_2, \\ 1.065710893e^{0.002307240u} + \\ + 0.002426722e^{-39.00769276(u-\beta_2)} & , \beta_2 \le u. \end{cases}$$

Υποθέτουμε τώρα ότι η αρχική συνθήκη είναι $\psi(0) = 0.723783977$ και θέτουμε $D_1 = 0.0015$, $D_2 = 0.0012$ και $D_3 = 0.001$, των οποίων οι τιμές έχουν σκόπιμα επιλεγεί να είναι μικρές. Οπότε η πιθανότητα χρεοκοπίας γίνεται

$$\psi_0(u) = \begin{cases} 0.171560727 + 0.552223330e^{-0.00334u} - \\ - 0.805\times10^{-7}\, e^{-30000.00666u} & , 0 \le u < \beta_1, \\ 0.090508993 + 0.639599021e^{-0.00286u} - \\ - 0.0.164\times10^{-7}\, e^{-35000.00714(u-\beta_1)} & , \beta_1 \le u < \beta_2, \\ 0.723252314 5e^{-0.00231u} - \\ - 0.088\times10^{-7}\, e^{-39000.00769(u-\beta_2)} & , \beta_2 \le u. \end{cases}$$

η οποία είναι κοντά στη $\psi_*(u)$.

□

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική

- Πολίτης, Κ. (2012). Εισαγωγή στη Θεωρία Συλλογικού Κινδύνου. Εκδόσεις Αθ. Σταμούλης.

- Πολίτης, Κ. (2015). Θεωρία Χρεοκοπίας, Πανεπιστημιακές Σημειώσεις, Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

- Χατζηκωνσταντινίδης Ε. (2015). Θεωρία Κινδύνου, Πανεπιστημιακές Σημειώσεις, Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

- Απόστολος Δ, Παπαϊωάννου (2011). Μελέτη μη ανανεωτικών στοχαστικών μοντέλων στη θεωρία κινδύνου. Διδακτορική Διατριβή. Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

Ξένη

- Albrecher, H., Hartinger, J., 2007. A risk model with multi-layer dividend strategy. North American Actuarial Journal 11(2), 43–64.

- Cai, J., 2004, Ruin probabilities and penalty functions with stochastic rates of interest. Stochastic Processes and their Applications, 112, 53/78.

- Dickson, D.C.M., 1992. On the distribution of the surplus prior to ruin. Insurance: Mathematics and Economics 11, 191–207.

- Dickson, D.C.M., Hipp, C., (2001). On the time to ruin for Erlang(2) risk processes. Insurance: Mathematics and Economics 29, 333-344.

- Dufresne, F., Gerber, H.U., 1991. Risk theory for the compound Poisson process that is perturbed by diffusion. Insurance: Mathematics and Economics 10, 51–59.

- Feller, W., 1971. An Introduction to Probability Theory and its Applications, Vol. 2, 2nd Edition. Wiley, New York.

- Gerber, H.U., Landry, B., 1998. On the discounted penalty at ruin in a jump-diffusion and the perpetual put option. Insurance: Mathematics and Economics 22, 263–276.

- Gerber, H.U., Shiu, E.S.W., 1998. On the time value of ruin. North American Actuarial Journal 2 (1), 48–78.

- Gerber, H.U. and Shiu, E.S.W., 2003a, Discussion of Yebin Cheng and Qihe Tang's "Moments of the surplus before ruin and the deficit at ruin". North American Actuarial Journal, 7 (3), 117/119.

- Gerber, H.U. and Shiu, E.S.W., 2003b, Discussion of Yebin Cheng and Qihe Tang's "Moments of the surplus before ruin and the deficit at ruin". North American Actuarial Journal, 7 (4), 96/101.

- Li, S., Garrido, J., (2004a). On the ruin for the Erlang(n) risk process. Insurance Mathematics and Economics, 34, 193-225.

- Li, S. and Garrido, J. (2005). On the Gerber-Shiu function for a Sparre Andersen risk process perturbed by diffusion. Scandinavian Actuarial Journal (3), 161-186.

- Lin, X., Willmot, G.E., 1999. The moments of the time of ruin, the surplus before ruin and the deficit at ruin, in preparation.

- Lin, X., Willmot, G.E., 1999. Analysis of a defective renewal equation arising in ruin theory. Insurance: Mathematics and Economics 25, 63–84.

- Lin, X.S., Sendova, K.P., 2008. The compound Poisson risk model with multiple thresholds. Insurance: Mathematics and Economics 42, 617–627.

- Mitric, I.-R., Sendova, K.P., Tsai, C.C.-L, 2010. On a multi-threshold compound Poisson process perturbed dy diffusion. Statistics and Probability Letters 80, 366-375.

- Tsai, C.C.L., 2001. On the expectation of the present value of the time of ruin perturbed by diffusion, submitted for publication.

- Tsai, C.C.L., Willmot, G.E., 2001. A generalized defective renewal equation for the surplus process perturbed by diffusion, submitted for publication.

- Tsai, C.C.L., 2001, On the discounted distribution functions of the surplus process perturbed by diffusion. Insurance: Mathematics and Economics, 28, 401/419.

- Tsai, C.C.-L., Willmot, G.E., 2002. A generalized defective renewal equation for the surplus process perturbed by diffusion. Insurance: Mathematics and Economics30,51–66.

- Wang, G., 2001. A decomposition of the ruin probability for the risk process perturbed by diffusion. Insurance: Mathematics and Economics 28, 49–59.

- Wan, N., 2006. Dividend payments with a threshold strategy in the compound poisson risk model perturbed by diffusion. Insurance: Mathematics and Economics40,509–523.

- Yang, H., Zhang, Z., 2008. Gerber–Shiu discounted penalty function in a Sparre Andersen model with multi-layer dividend strategy. Insurance: Mathematics and Economics 42, 984–991.